



ΣΤΡΑΤΙΩΤΙΚΗ ΣΧΟΛΗ ΕΥΕΛΠΙΔΩΝ
Τμήμα Στρατιωτικών Επιστημών

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
ΔΙΔΡΥΜΑΤΙΚΟ ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ
ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΟΥ ΕΤΟΥΣ 2022-23
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΗ ΕΡΕΥΝΑ ΚΑΙ
ΛΗΨΗ ΑΠΟΦΑΣΕΩΝ –
MASTER OF SCIENCE IN OPERATIONAL
RESEARCH AND DECISION MAKING
(ΠΔ 59 /2021/ΦΕΚ 145Α'/17.08.2021)



ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Σχολή Μηχανικών Παραγωγής & Διοίκησης

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

ΑΝΑΖΗΤΗΣΗ ΣΤΟΧΟΥ ΚΑΤΑ ΜΗΚΟΣ ΔΙΑΔΡΟΜΩΝ ΥΠΟ ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟΥΣ ΣΕ ΔΙΑΚΡΙΤΟ ΧΡΟΝΟ ΚΑΙ ΧΩΡΟ

Διατριβή που υπεβλήθη για την μερική ικανοποίηση των απαιτήσεων για
την απόκτηση Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης

Υπό :

Στέφανου Θ. Αιγινίτη

A.M.: 2021018101

ΜΑΡΤΙΟΣ 2024

ΣΕΛΙΔΑ ΣΚΟΠΙΜΑ ΚΕΝΗ

Η Μεταπτυχιακή Διατριβή του κ. Στέφανου Θ. Αιγινίτη εγκρίνεται:

ΤΡΙΜΕΛΗΣ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΗ ΕΠΙΤΡΟΠΗ

Καθηγητής ΝΙΚΟΛΑΟΣ ΙΩ. ΔΑΡΑΣ (Επιβλέπων)



Αναπληρωτής Καθηγητής ΝΙΚΟΛΑΟΣ ΠΑΠΑΔΑΚΗΣ



Αναπληρωτής Καθηγητής ΣΤΕΛΙΟΣ ΤΣΑΦΑΡΑΚΗΣ

ΣΕΛΙΔΑ ΣΚΟΠΙΜΑ ΚΕΝΗ

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Τίτλος: Αναζήτηση στόχου κατά μήκος διαδρομών υπό περιορισμούς σε διακριτό χρόνο και χώρο

Σε ορισμένες πρακτικές καταστάσεις, ένας ερευνητής μπορεί να έχει δυσκολίες με την εφαρμογή ενός βέλτιστου σχεδίου αναζήτησης. Το σχέδιο μπορεί να απαιτεί μια στιγμιαία μετατόπιση της προσπάθειας αναζήτησης από τη μια χρονική περίοδο στην άλλη. Εάν ο ερευνητής απαιτεί σημαντικό χρόνο για να πραγματοποιήσει αυτή τη μετατόπιση, ένας σχετικά γρήγορα κινούμενος στόχος θα «προλάβει» τον ερευνητή. Αυτή η κατάσταση είναι ιδιαίτερα διαδεδομένη στις ρομποτικές αναζητήσεις κτιρίων, όπου η διέλευση από δωμάτιο σε δωμάτιο αντιπροσωπεύει την πλειονότητα των δαπανών χρόνου και αναζητήσεις με χρήση μη επανδρωμένων εναέριων συστημάτων χαμηλής ταχύτητας, όπου η αναλογία ταχύτητας αναζήτησης προς ταχύτητα στόχου είναι χαμηλή. Σε αυτή την πτυχιακή, περιγράφουμε μεθόδους για τον υπολογισμό των βέλτιστων σχεδίων αναζήτησης, ενώ υπολογίζονται οι πραγματικοί περιορισμοί στην ευελιξία του ερευνητή. Στην πραγματικότητα, θεωρούμε πολλούς ερευνητές, καθένας από τους οποίους παρέχει μια διακριτή προσπάθεια αναζήτησης, καθώς και πολλούς στόχους. Η πτυχιακή ξεκινά, ωστόσο, με την απλούστερη κατάσταση ενός μόνο αναζητητή που αναζητά έναν μόνο στόχο. Διατυπώνουμε το βέλτιστο πρόβλημα αναζήτησης ως αυτό της εύρεσης της βέλτιστης διαδρομής αναζήτησης και περιγράφουμε έναν αλγόριθμο διακλάδωσης και δέσμευσης για τη λύση του. Προχωράμε γενικεύοντας τη διατύπωση για να ληφθεί υπόψη ένας ερευνητής που λειτουργεί σε διαφορετικά «υψόμετρα» με έναν πιο περίπλοκο αισθητήρα. Περιγράφουμε επίσης αλγοριθμικές βελτιώσεις που χειρίζονται τη γενικότερη κατάσταση και παρέχουν υπολογιστικές επιταχύνσεις. Στη συνέχεια, η πτυχιακή εξετάζει την κατάσταση με πολλούς ερευνητές, πρώτον πανομοιότυπων τύπων και δεύτερον διαφορετικών τύπων και επίσης με πολλούς στόχους. Αυτές οι γενικεύσεις αντιμετωπίζονται πιο εύκολα μέσα σε ένα πλαίσιο μαθηματικού προγραμματισμού, το οποίο διευκολύνει την εξέταση πολλών περιορισμών, συμπεριλαμβανομένων εκείνων που σχετίζονται με την αποσύγκρουση του εναέριου χώρου και επίσης επιτρέπει τη μόχλευση καλά ανεπτυγμένων λύσεων βελτιστοποίησης για τον προσδιορισμό των βέλτιστων σχεδίων αναζήτησης. Η πτυχιακή τελειώνει με μια περιγραφή ορισμένων αλγορίθμων πίσω από αυτούς τους λύτες, με έμφαση στις μεθόδους επιπέδου κοπής. Σε όλη την πτυχιακή παραμένουμε στο πλαίσιο της διακριτής αναζήτησης χρόνου και χώρου.

ABSTRACT

Title: Path-Constrained Search in Discrete Time and Space

In some practical situations, a researcher may have difficulty implementing an optimal search plan. The design may require a momentary shift of search effort from one time period to another. If the searcher takes considerable time to make this shift, a fast moving target will "catch up" to the searcher. This situation is particularly prevalent in robotic building searches, where room-to-room traversal accounts for the majority of time spent, and low-speed UAS searches, where the ratio of search speed to target speed is low. In this thesis, we describe methods for computing optimal search plans while accounting for the true constraints on the searcher's flexibility. In fact, we consider multiple searchers, each providing a distinct search effort, as well as multiple targets. The thesis begins, however, with the simplest situation of a single seeker seeking a single goal. We formulate the optimal search problem as that of finding the optimal search path and describe a branch-and-bound algorithm for its solution. We proceed by generalizing the formulation to account for a researcher operating at different "altitudes" with a more complex sensor. We also describe algorithmic improvements that handle the more general situation and provide computational speedups. The thesis then examines the situation with many researchers, firstly of identical types and secondly of different types and also with many goals. These generalizations are most easily addressed within a mathematical programming framework, which facilitates consideration of many constraints, including those related to airspace deconfliction, and also allows leveraging well-developed optimization solutions to determine optimal search plans. The thesis ends with a description of some of the algorithms behind these solvers, with an emphasis on cutting plane methods. Throughout the thesis we remain within the framework of the discrete search for time and space.

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον καθηγητή κ. Νικόλαο Ιω. Δάρα κυρίως για την εμπιστοσύνη που μου έδειξε, και την υπομονή που έκανε κατά τη διάρκεια υλοποίησης της πτυχιακής εργασίας. Όπως επίσης και για την πολύτιμη βοήθεια και καθοδήγηση του, για την επίλυση διάφορων θεμάτων.

ΣΕΛΙΔΑ ΣΚΟΠΙΜΑ ΚΕΝΗ

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Περίληψη	5
Abstract	6
Ευχαριστίες	7
Κατάλογος Πινάκων	10
Κατάλογος Εικόνων	11
Κεφάλαιο 1	13
Διατύπωση βάσει διαδρομής και λύση για έναν απλό ερευνητή	13
1.1 Διατύπωση με επίκεντρο τη διαδρομή	13
1.2 Αλγόριθμος Διακλάδωσης και Δέσμευσης	17
1.2.1 Βασικός Αλγόριθμος	17
1.2.2 Υπολογισμός μέσου ορίου	19
1.3 Βελτιώσεις μοντέλου	22
1.4 Αλγοριθμικές Βελτιώσεις	24
1.4.1 Αλγοριθμικό Πλαίσιο	25
1.4.2 Βελτιωμένοι υπολογισμοί δυναμικών ορίων	26
1.4.3 Υπολογισμοί στατικών ορίων	27
1.4.4 Στατικό όριο κατεύθυνσης	28
Κεφάλαιο 2	33
Διατυπώσεις μαθηματικού προγραμματισμού	33
2.1 Ομογενείς αναζητητές και ενιαίος στόχος	33
2.1.1 Μη γραμμικό μοντέλο βελτιστοποίησης	35
2.1.2 Γραμμικοποίηση για υπό όρους μοντέλο στόχου	37
2.1.3 Γραμμικοποίηση για το Μαρκοβιανό Μοντέλο Στόχου	38
2.2 Ετερογενείς αναζητητές και πολλαπλοί στόχοι	41
Κεφάλαιο 3	47
Αλγόριθμοι μαθηματικού προγραμματισμού για βελτιστοποίηση διαδρομής	47
3.1 Μέθοδοι επιπέδου κοπής	47
3.2 Βελτιστοποίηση επιπέδου κοπής	48
3.3 Υπολογισμοί επιπέδου κοπής για Μαρκοβιανό μοντέλο Στόχου	50
Κεφάλαιο 4	51
Παράδειγμα: Αναζήτηση για τέσσερις στόχους	51
Κεφάλαιο 5	58
Σημειώσεις	58
Βιβλιογραφία / Βιβλιογραφικές Παραπομπές	59

ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΠΙΝΑΚΩΝ

Πίνακας 1:	52
Πίνακας 2:	55
Πίνακας 3:	57

ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΕΙΚΟΝΩΝ

Εικόνα 1:	52
Εικόνα 2:	54
Εικόνα 3:	56

ΣΕΛΙΔΑ ΣΚΟΠΙΜΑ ΚΕΝΗ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Διατύπωση βάσει διαδρομής και λύση για έναν απλό ερευνητή

Αυτή η ενότητα παρέχει μια εισαγωγή στο θέμα της αναζήτησης περιορισμένης διαδρομής. Θεωρούμε την απλούστερη δυνατή κατάσταση: ένας απλός ερευνητής μετακινείται μεταξύ ενός διακριτού συνόλου κελιών. Σε κάθε διακριτή χρονική περίοδο, ο ερευνητής εξετάζει το κελί που καταλαμβάνει με την ελπίδα να βρει έναν στόχο που κινείται παρόμοια μεταξύ των κελιών. Ο ερευνητής δεν μπορεί να μετακινηθεί ελεύθερα μεταξύ κελιών, αλλά πρέπει σε κάθε χρονική περίοδο να επιλέξει ένα επόμενο κελί στο οποίο θα μετακινηθεί από ένα υποσύνολο κελιών. Δεδομένου ότι το υποσύνολο μπορεί να είναι τα κελιά που βρίσκονται φυσικά δίπλα στο τρέχον κελί, η ακολουθία κελιών που επισκέπτεται ο ερευνητής μπορεί να θεωρηθεί ως μια διαδρομή στο διάστημα. Ξεκινάμε με τη διατύπωση του προβλήματος της εύρεσης της διαδρομής που μεγιστοποιεί την πιθανότητα ανίχνευσης του στόχου και στη συνέχεια προχωράμε με αλγόριθμους και βελτιώσεις.

1.1 Διατύπωση με επίκεντρο τη διαδρομή

Αφήνουμε την αναζήτηση να πραγματοποιηθεί σε ένα πεπερασμένο σύνολο κελιών $\mathcal{J} = \{1, \dots, J\}$ και σε ένα πεπερασμένο σύνολο χρονικών περιόδων $\mathcal{T} = \{1, 2, \dots, T\}$. Αφήνουμε $t = 0$ να αντιπροσωπεύει τον χρόνο πριν από την αναζήτηση και ορίζουμε $\mathcal{T}_0 = \{0\} \cup \mathcal{T}$. Υπάρχει ένας στόχος που καταλαμβάνει ένα κελί σε κάθε χρονική περίοδο. Υποθέτουμε ότι ο στόχος κινείται σύμφωνα με μια αλυσίδα Markov με πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης Γ με στοιχεία $\Gamma(j, j')$, $j, j' \in \mathcal{J}$. Συγκεκριμένα, το $\Gamma(j, j')$ είναι η πιθανότητα ότι ένας στόχος που καταλαμβάνει κελί j στη χρονική περίοδο t καταλαμβάνει το κελί j' στη χρονική περίοδο $t + 1$. Αναφερόμαστε σε αυτό ως μοντέλο μαρκοβιανού στόχου. Αν και αυτό το μοντέλο είναι αρκετά ευέλικτο και προσφέρει σημαντικά υπολογιστικά πλεονεκτήματα, όπως θα γίνει σαφές παρακάτω, προϋποθέτει ανεξαρτησία μεταξύ των κινήσεων. Στην ενότητα 4.2, εξετάζουμε ένα πιο γενικό (και επίσης υπολογιστικά πιο δαπανηρό) μοντέλο κίνησης στόχου που χρησιμοποιείται από τη βοήθεια απόφασης SAROPS της Ακτοφυλακής των ΗΠΑ. βλ. Kratzke et al. (2010). Θεωρούμε έναν ερευνητή που κατά τη διάρκεια κάθε φορά που $t \in \mathcal{T}_0$ καταλαμβάνει ένα κελί. Όταν βρίσκεται σε ένα κελί j , ο ερευνητής μπορεί να μετακινηθεί μόνο σε οποιοδήποτε κελί "γειτονικό" στο j όπως ορίζεται από το μπροστινό αστέρι $\mathcal{F}(j) \subset \mathcal{J}$.

Κατά σύμβαση, $j \in \mathcal{F}(j)$ και ο ερευνητής μπορεί επομένως να παραμείνει στο τρέχον κελί του. Υποθέτουμε ότι δεν υπάρχει χρόνος διέλευσης μεταξύ γειτονικών κελιών. Η κατάσταση με μη μηδενικό χρόνο διέλευσης μεταξύ των κυττάρων μπορεί να μοντελοποιηθεί, τουλάχιστον κατά προσέγγιση, με την εισαγωγή τεχνητών κυττάρων, καθώς και με τις γενικότερες συνθέσεις στο Κεφ 2. Συμβολίζουμε το κελί του ερευνητή πριν από τη χρονική περίοδο 1 με $j_0 \in \mathcal{J}$. Ο ερευνητής είναι εξοπλισμένος με έναν ατελή αισθητήρα. Κάθε χρονική περίοδος $t \in \mathcal{T}$, ο αισθητήρας του ερευνητή ρίχνει μια «κοίτα» στο κελί. Η πιθανότητα ότι κάποιος αναζητά τον στόχο στο κελί κατά τη χρονική περίοδο t ανιχνεύει τον στόχο, δεδομένου ότι βρίσκεται στην πραγματικότητα στο κελί, είναι $g(j, t) \in [0, 1)$. Αναφερόμαστε σε αυτή την πιθανότητα ως πιθανότητα ανίχνευσης με ματιά. Ο αισθητήρας δεν επιστρέφει ψευδώς θετικά.

Για κάθε $t \in \mathcal{T}$ και $j_1 \in \mathcal{J}$, $1 = 0, 1, 2, \dots, t$, με $j_1 \in \mathcal{F}(j_{1-1})$ για όλα $1 = 1, 2, \dots, t$, έστω η ακολουθία $\{j_t\}_{t=0}^T$ υποδηλώνει μια κατευθυνόμενη υποδιαδρομή $j_0 - j_1$. Αν $t = T$, τότε η υποδιαδρομή $j_0 - j_1$ είναι μια διαδρομή κατευθυνόμενης $j_0 - j_1$ που εκτείνεται σε όλο τον χρονικό ορίζοντα. Όταν δεν μπορεί να προκύψει παρεξήγηση, αναφερόμαστε σε μια κατευθυνόμενη (υπο)διαδρομή $j_0 - j_1$ ως (υπο)διαδρομή. Αφού $j \in \mathcal{F}(j_{t-1})$, η (υπο)διαδρομή είναι μια ακολουθία γειτονικών κελιών που θεωρείται εφικτή η επίσκεψη του ερευνητή και επομένως είναι ένα υποψήφιο σχέδιο αναζήτησης. Σε αυτήν τη σημειογραφία, ο ερευνητής μετακινείται από j_0 σε j_T κατά μήκος μιας κατευθυνόμενης διαδρομής $j_0 - j_T$. Ο ερευνητής καταλαμβάνει μόνο ένα κελί $j \in \mathcal{J}$ κάθε χρονική περίοδο, και παραμένει στο ίδιο κελί ή μετακινείται σε άλλο κελί στο $\mathcal{F}(j)$ για την επόμενη χρονική περίοδο. Κατά συνέπεια, ο ερευνητής είναι περιορισμένος στη διαδρομή. Για κάθε $t \in \mathcal{T}$, ως $q(\cdot, t) = [q(1, t), q(2, t), \dots, q(J, t)]$ (1.1), όπου $q(j, t)$ είναι η πιθανότητα ότι ο στόχος καταλαμβάνει το κελί $j \in \mathcal{J}$ κατά τη χρονική περίοδο $t \in \mathcal{T}$ και ο στόχος δεν ανιχνεύεται πριν από t . Η αρχική κατανομή στόχου $q(\cdot, 1)$ θεωρείται γνωστή. Για παράδειγμα, $q(j, 1) = 1$ και $q(j', 1) = 0$ για $j' \neq j$, που σημαίνει ότι ο στόχος είναι σίγουρα στο κελί τη στιγμή 1. Ακόμη και σε αυτήν την περίπτωση το σχέδιο αναζήτησης θα μπορούσε να είναι μη τετριμμένο, καθώς ενδέχεται να μην υπάρχει εγγύηση ότι ο ερευνητής θα εντοπίσει τον στόχο την πρώτη χρονική περίοδο και μετά από αυτό η κίνηση του στόχου μπορεί να είναι αβέβαιη.

Αναφερόμαστε στο $q(\cdot, t)$ ως μη ανιχνευμένη κατανομή στόχου, αλλά σημειώστε ότι το $q(\cdot, t)$ δεν είναι συνάρτηση μάζας πιθανότητας και μπορεί να θεωρηθεί "ελαττωματική κατανομή πιθανότητας". Τονίζουμε ότι το $q(j, t)$ διαφέρει από την πιθανότητα ο στόχος να καταλαμβάνει το κελί $j \in \mathcal{J}$ κατά τη χρονική περίοδο $t \in \mathcal{T}$ δεδομένου ότι ο στόχος δεν

ανιχνεύεται πριν από t . Η τελευταία πιθανότητα αντιπροσωπεύει την Bayesian οπίσθια πιθανότητα της θέσης στόχου στην αρχή της χρονικής περιόδου t . Ωστόσο, όπως φαίνεται στις επόμενες παραγράφους, δεν είναι απαραίτητο να ληφθεί υπόψη αυτή η πιθανότητα.

Εκφράζουμε την πιθανότητα ανίχνευσης απευθείας ως $q(\cdot, \cdot)$. Σε αυτή τη σημείωση, η πιθανότητα ανίχνευσης στο κελί j κατά τη χρονική περίοδο t και καμία προηγούμενη ανίχνευση γίνεται $q(j, t)g(j, t)$ (1.2).

Εφόσον το $q(\cdot, t)$ είναι η μη ανιχνεύσιμη κατανομή στόχου στην αρχή της χρονικής περιόδου t , εξαρτάται από αναζητήσεις μέχρι τη χρονική περίοδο $t - 1$. Συγκεκριμένα, εάν το κελί j αναζητηθεί κατά τη χρονική περίοδο t , τότε

$$q(\cdot, t+1) = [q(1, t), \dots, q(j-1, t), q(j, t)(1 - g(j, t)), q(j+1, t), \dots, q(J, t)]\Gamma. \quad (1.3)$$

Με δεδομένη τη διαδρομή $\mathcal{S} = \{j_t\}_{t=0}^T$, τα συμβάντα T "ανίχνευση κατά τη χρονική περίοδο t και ο στόχος δεν ανιχνεύεται πριν από t ," $t = 1, 2, \dots, T$, είναι αμοιβαία αποκλειόμενα. Ως εκ τούτου, σε όψη του (1.2), γίνεται η πιθανότητα ανίχνευσης κατά μήκος του \mathcal{S} , που συμβολίζεται με $P(\mathcal{S})$.

$$P(\mathcal{S}) = \sum_{t=1}^T q(j_t, t)g(j_t, t) \quad (1.4)$$

Η πρόκληση είναι λοιπόν πώς να υπολογίσουμε αποτελεσματικά το $P(\mathcal{S})$ για μεγάλο αριθμό (σχετικών) μονοπατιών και να διασφαλίσουμε ότι οι διαδρομές που δεν εξετάστηκαν είναι αποτελεσματικά κατώτερες. Αυτό είναι το θέμα που εξετάζεται στη συνέχεια, το οποίο στη συνέχεια οδηγεί σε έναν αλγόριθμο για την εύρεση μιας διαδρομής που μεγιστοποιεί αυτή την πιθανότητα.

Παράδειγμα αναζήτησης περιορισμένης διαδρομής

Εξετάζουμε ένα απλό παράδειγμα με μια περιοχή ενδιαφέροντος χωρισμένη σε τέσσερα κελιά με αριθμό 1-4 από πάνω αριστερά προς τα κάτω δεξιά. Είναι γνωστό ότι ο στόχος στη χρονική περίοδο 1 είναι στο κελί 2 με πιθανότητα 0,6 και στο κελί 3 με πιθανότητα 0,4. Συνεπώς, $q(\cdot, 1) = [0 \ 0.6 \ 0.4 \ 0]$.

Ο στόχος κινείται κάθετα με πιθανότητα 0,8 και οριζόντια με πιθανότητα

0.2. Ο στόχος δεν μπορεί να παραμείνει στο ίδιο κελί για δύο διαδοχικές χρονικές περιόδους.

Αυτό δίνει έναν πίνακα μετάβασης Markov

$$\Gamma = \begin{bmatrix} 0 & 0,2 & 0,8 & 0 \\ 0,2 & 0 & 0 & 0,8 \\ 0,8 & 0 & 0 & 0,2 \\ 0 & 0,8 & 0,2 & 0 \end{bmatrix}$$

Συνεπώς,

$$q(\cdot, 1) \Gamma = [0.440 \ 0 \ 0 \ 0.560],$$

το οποίο δίνει την κατανομή πιθανοτήτων του στόχου κατά τη χρονική περίοδο 2 ελλείψει πληροφοριών που συλλέγονται από την αναζήτηση.

Τώρα ας υποθέσουμε ότι έχουμε έναν ερευνητή που καταλαμβάνει το κελί 1 τη χρονική περίοδο 0. Μπορεί να κινηθεί κάθετα ή οριζόντια, αλλά όχι διαγώνια. Έτσι,

$$\mathcal{F}(1) = \{1,2,3\}, \mathcal{F}(2) = \{1,2,4\}, \mathcal{F}(3) = \{1,3,4\}, \mathcal{F}(4) = \{2,3,4\}.$$

Αφήνουμε το χρονικό ορίζοντα $T = 2$. Στη συνέχεια, ο ερευνητής έχει τις ακόλουθες πιθανές διαδρομές για χρονικές περιόδους 0,1,2:

$$\{1,1,1\}, \{1,1,2\}, \{1,1,3\}, \{1,2,1\}, \{1,2,2\}, \{1,2,4\}, \{1,3,1\}, \{1,3,3\}, \{1,3,4\}$$

Έστω η πιθανότητα ανίχνευσης με ματιά $g(j, t) = 0,9$ για όλα τα j και t . Η πιθανότητα $q(\cdot, 2)$ (βλ. (1.3)) εξαρτάται από το κελί στο οποίο πραγματοποιήθηκε η αναζήτηση κατά τη διάρκεια της χρονικής περιόδου μεγάλο. Εξετάζουμε και τα τρία ενδεχόμενα

- κελί αναζήτησης 1 στο $t = 1$: $q(\cdot, 2) = [0 \cdot (1 - 0.9) \ 0.6 \ 0.4 \ 0] \Gamma = [0.440 \ 0 \ 0 \ 0.560],$
- κελί αναζήτησης 2 στο $t = 1$: $q(\cdot, 2) = [0 \ 0.6 \cdot (1 - 0.9) \ 0.4 \ 0] \Gamma = [0.332 \ 0 \ 0 \ 0.128],$
- κελί αναζήτησης 3 στο $t = 1$: $q(\cdot, 2) = [0 \ 0.6 \ 0.4 \cdot (1 - 0.9) \ 0] \Gamma = [0.152 \ 0 \ 0 \ 0.488].$

Επομένως, η πιθανότητα ανίχνευσης κατά μήκος των εννέα μονοπατιών είναι (βλ. (1.4)):

- Μονοπάτι $\{1, 1, 1\}$: $0 \cdot 0,9 + 0,44 \cdot 0,9 = 0,396,$
- Μονοπάτι $\{1, 1, 2\}$: $0 - 0,9 + 0 \cdot 0,9 = 0,$
- Μονοπάτι $\{1, 1, 3\}$: $0 - 0,9 + 0 \cdot 0,9 = 0,$
- Μονοπάτι $\{1, 2, 1\}$: $0.6 \cdot 0,9 + 0,332 \cdot 0,9 = 0,839,$
- Μονοπάτι $\{1, 2, 2\}$: $0,6 \cdot 0,9 + 0 \cdot 0,9 = 0,540,$
- Μονοπάτι $\{1, 2, 4\}$: $0,6 \cdot 0,9 + 0,128 \cdot 0,9 = 0,655,$
- Μονοπάτι $\{1, 3, 1\}$: $0.4 \cdot 0,9 + 0,152 \cdot 0,9 = 0,497,$
- Μονοπάτι $\{1, 3, 3\}$: $0,4 \cdot 0,9 + 0 \cdot 0,9 = 0,360,$
- Μονοπάτι $\{1, 3, 4\}$: $0,4 \cdot 0,9 + 0,488 \cdot 0,9 = 0,799.$

Βλέπουμε ότι η διαδρομή $\{1, 2, 1\}$ είναι βέλτιστη με πιθανότητα ανίχνευσης 0,839. Είναι ενδιαφέρον να σημειωθεί ότι αυτό το σχέδιο αναζήτησης επιχειρεί πρώτα να εντοπίσει τον στόχο στο κελί 2, το οποίο είναι η πιο πιθανή τοποθεσία για τον στόχο εκείνη τη στιγμή. Δεύτερον, το σχέδιο αναζήτησης ορίζει το κελί 1, το οποίο δεν είναι η πιο πιθανή θέση του στόχου στο $t = 2$. Ο στόχος βρίσκεται στο κελί 1 με πιθανότητα 0,44 και στο κελί 4 με

πιθανότητα 0,560. Ωστόσο, δεδομένου ότι ο ερευνητής δεν εντόπισε τον στόχο κατά τη χρονική περίοδο 1 στο κελί 2, θεωρούμε λιγότερο πιθανό ότι ο στόχος ήταν ακόμη και στο κελί 2 εκείνη τη στιγμή. Γίνεται πιο πιθανό ότι ο στόχος ήταν πράγματι στο κελί 3 κατά τη χρονική περίοδο 1. Συγκεκριμένα, η πιθανότητα ο στόχος να βρίσκεται στο κελί 1 κατά τη χρονική περίοδο 2 και ο στόχος να μην ανιχνεύθηκε κατά τη χρονική περίοδο 1 είναι $q(1, 2) = 0,332$. Για το κελί 4 έχουμε ομοίως ότι $q(4, 2) = 0,128$. Λαμβάνοντας υπόψη αυτόν τον υπολογισμό, είναι σαφές ότι η επιστροφή στο κελί 1 για τη χρονική περίοδο 2 είναι καλύτερη από τη μετάβαση στο κελί 4. Στην πραγματικότητα, είναι βέλτιστη.

1.2 Αλγόριθμος Διακλάδωσης και Δέσμευσης

Είναι σαφές ότι ένας αλγόριθμος για τη μεγιστοποίηση του $P(\mathcal{S})$ μπορεί να βασίζεται στην απαρίθμηση των μονοπατιών και στον έλεγχο της σχετικής πιθανότητας ανίχνευσης. Ωστόσο, ο αριθμός των πιθανών μονοπατιών είναι τυπικά αστρονομικός. Ακόμη και στην περιορισμένη περίπτωση της $\mathcal{F}(j)$ που αποτελείται από μόνο πέντε κελιά (ίσως το κελί j καθώς και τα τέσσερα κελιά αμέσως βόρεια, νότια, ανατολικά και δυτικά του j σε ένα κανονικό πλέγμα) και ένα χρονικό ορίζοντα $T = 12$, υπάρχει είναι περισσότερα από 244 εκατομμύρια πιθανά μονοπάτια. Ένας αλγόριθμος διακλάδωσης και δέσμευσης απαριθμεί ένα υποσύνολο αυτών των μονοπατιών και χρησιμοποιεί όρια για να καταλήξει στο συμπέρασμα ότι αυτά που δεν εξετάστηκαν δεν πρέπει να έχουν μεγαλύτερη πιθανότητα ανίχνευσης. βλέπε Rardin (1997) για μια στοιχειώδη εισαγωγή στους αλγόριθμους διακλάδωσης και δέσμευσης. Η απλούστερη έκδοση ενός τέτοιου αλγορίθμου περιγράφεται στη συνέχεια. Η ενότητα 1.4 παρέχει αρκετές βελτιώσεις.

1.2.1 Βασικός Αλγόριθμος

Με δεδομένο ένα υπομονοπάτι $\{j_l\}_{l=0}^t$, $t \in \mathcal{J}$, συμβολίζουμε με $\bar{p}(j_t, t)$ ένα άνω όριο στην πιθανότητα ανίχνευσης κατά μήκος οποιασδήποτε διαδρομής που ξεκινά με την υποδιαδρομή $\{j_l\}_{l=0}^t$. Σημειώνουμε ότι για να απλοποιήσουμε τη σημείωση καθορίζουμε μόνο το τελευταίο κελί j_t στον συμβολισμό $\bar{p}(j_t, t)$ παρόλο που η ποσότητα θα μπορούσε να εξαρτάται από ολόκληρη την υποδιαδρομή $\{j_l\}_{l=0}^t$. Πιθανοί τρόποι υπολογισμού ενός τέτοιου άνω ορίου δίνονται παρακάτω και πράγματι θα γίνει η κεντρική πρόκληση σε έναν αλγόριθμο διακλάδωσης και δέσμευσης. Συμβολίζουμε με $K(t)$ το σύνολο των τριάδων της μορφής

$$(j_t, t, \bar{p}(j_t, t)) \quad (1.5)$$

που αντιπροσωπεύει επεκτάσεις ενός κελιού της διαδρομής $\{j_l\}_{l=0}^{t-1}$ ακόμα να εξερευνηθεί. Το πρώτο στοιχείο j_t αναφέρεται στο επόμενο κελί προς επίσκεψη και το δεύτερο στοιχείο t είναι η χρονική περίοδος που θα επισκεφτώ κύτταρο j_t . Το άνω φράγμα $\bar{p}(j_t, t)$ είναι το άθροισμα τριών μερών. Έστω $d_t(j_t, t)$ ένα άνω φράγμα της πιθανότητας ανίχνευσης κατά τις χρονικές περιόδους $t + 1, t + 2, \dots, T$ και καμία ανίχνευση κατά μήκος της υποδιαδρομής $\{j_l\}_{l=0}^t$ δεδομένου ότι ο ερευνητής είναι στο j_t κατά τη χρονική περίοδο t . Τα δύο άλλα μέρη είναι η πιθανότητα ανίχνευσης κατά μήκος της υποδιαδρομής $\{j_l\}_{l=0}^{t-1}$ και η πιθανότητα ανίχνευσης κατά τη διάρκεια t . Ως εκ τούτου,

$$\bar{p}(j_t, t) = P(\{j_l\}_{l=0}^{t-1}) + q(j_t, t)g(j_t, t) + d_t(j_t, t) \quad (1.6)$$

Αφήνουμε επίσης το p να υποδηλώνει τη μεγαλύτερη πιθανότητα ανίχνευσης όλων των εξεταζόμενων μονοπατιών σε ένα δεδομένο στάδιο του αλγορίθμου. Σε αυτήν τη σημείωση, ένας αλγόριθμος διακλάδωσης και φραγμού έχει την ακόλουθη μορφή όπου οι λεπτομέρειες σχετικά με τους υπολογισμούς φραγμών παρουσιάζονται παρακάτω.

Βασικός αλγόριθμος διακλάδωσης και φραγμού.

Βήμα 0. Θέτουμε

$$t = 0, K(0) = \{j_0, 0, 1\} \text{ και } p = 0.$$

Βήμα 1. Εάν το $K(t)$ είναι κενό, αντικαθιστούμε το t με $t - 1$. Διαφορετικά, μεταβαίνουμε στο Βήμα 3.

Βήμα 2. Εάν $t = 0$, σταματάμε: η τελευταία αποθηκευμένη διαδρομή είναι βέλτιστη και p είναι η πιθανότητα ανίχνευσης. Διαφορετικά, μεταβαίνουμε στο Βήμα 1.

Βήμα 3. Αφαιρούμε από το $K(t)$ την τριάδα $(j_t, t, p(j_t, t))$ με το μεγαλύτερο όριο $p(j_t, t)$.

Βήμα 4. Αν $p(j_t, t) \leq p$, μεταβαίνουμε στο Βήμα 1. (Η τρέχουσα υποδιαδρομή είναι κατανοητή.)

Βήμα 5. Εάν $t < T$, τότε για κάθε κελί $j \in \mathcal{F}(j_t)$, υπολογίζουμε ένα δεσμευμένο

$$d_{t+1}(j, t + 1) \text{ καθώς και } p(j, t + 1), \text{ βλέπε (1.6),}$$

και προσθέτουμε $(j, t + 1, p(j, t + 1))$ στο $K(t + 1)$.

Αντικαθιστούμε το t με $t + 1$ και μεταβαίνουμε στο Βήμα 3. Διαφορετικά, θέτουμε

$$p = p(j_t, t)$$

και αποθηκεύουμε την υπάρχουσα διαδρομή $\{j_l\}_{l=0}^t$ και μεταβαίνουμε στο Βήμα 1.

Ο αλγόριθμος ξεκινά με ένα μεμονωμένο στοιχείο στο $K(0)$, το οποίο αφαιρείται αμέσως στο Βήμα 3. Το βήμα 4 αρχικά δεν καλείται και ο αλγόριθμος μετακινείται στο Βήμα 5. Εδώ, υπολογίζεται ένα όριο για κάθε κελί στο οποίο ο ερευνητής μπορεί να μετακινείται από το αρχικό του κελί j_0 και συμπληρώνεται το σύνολο $K(1)$. Ο χρόνος προχωρά για $t = 1$ και ο αλγόριθμος μετακινείται στο Βήμα 3. Εκεί εξετάζεται πρώτα η πιο υποσχόμενη επέκταση, δηλαδή αυτή με το μεγαλύτερο όριο. Πιθανώς, ένα μεγάλο όριο δείχνει ότι οι πιθανότητες ανίχνευσης κατά μήκος των αντίστοιχων μονοπατιών είναι υψηλές. Φυσικά, δεν υπάρχει καμία εγγύηση ότι αυτό συμβαίνει στην πραγματικότητα, αλλά ο κανόνας είναι λογικός. Το βήμα 4 παραλείπεται ξανά και μεταβαίνουμε στο Βήμα 5. Αυτή η διαδικασία επαναλαμβάνεται έως ότου ο αλγόριθμος κατασκευάσει μια διαδρομή κατά μήκος του χρονικού ορίζοντα και $t = T$ στο Βήμα 5. Αυτή η διαδρομή στη συνέχεια γίνεται η υπάρχουσα διαδρομή της οποίας η πιθανότητα ανίχνευσης είναι η καλύτερα εμφανής μακριά. Στη συνέχεια, ο αλγόριθμος μετακινείται στο Βήμα 1, όπου είτε εξετάζονται πρόσθετα στοιχεία του $K(t)$ είτε μειώνεται ο χρόνος. Εάν δεν υπήρχε το Βήμα 4, αυτή η διαδικασία θα είχε οδηγήσει σε μια πλήρη απαρίθμηση όλων των μονοπατιών. Ωστόσο, το Βήμα 4 εισάγει έναν έλεγχο που αποτρέπει μια επέκταση μιας δευτερεύουσας διαδρομής της οποίας το όριο δεν είναι μεγαλύτερο από την πιθανότητα ανίχνευσης για την υπάρχουσα διαδρομή. Εφόσον το όριο παρέχει μια αισιόδοξη άποψη για το τι μπορεί να επιτευχθεί με την επέκταση της υποδιαδρομής, κάθε επέκταση μιας τέτοιας υποδιαδρομής πρέπει να έχει ως αποτέλεσμα μια πιθανότητα ανίχνευσης που δεν είναι μεγαλύτερη από αυτή του κατεστημένου φορέα. Επομένως, οποιαδήποτε επέκταση μιας τέτοιας υποδιαδρομής μπορεί να αγνοηθεί. Αυτή η "κατανόηση" μιας υποδιαδρομής μπορεί να μειώσει δραματικά τον αριθμό της απαρίθμησης διαδρομής. Σε κάθε περίπτωση, ο αλγόριθμος τελειώνει με μια βέλτιστη διαδρομή. Σαφώς, ένας μικρός φραγμός $d_t(j_t, t)$ αυξάνει τον αριθμό των φορών που καταλαβαίνει ο αλγόριθμος και μειώνει τον υπολογιστικό χρόνο. Εδώ περιγράφουμε μόνο την απλούστερη ιδέα για τον υπολογισμό ενός τέτοιου περιορισμού και αναβολής στο Κεφ. 1.4 για βελτιώσεις.

1.2.2 Υπολογισμός μέσου ορίου

Η μόνη πρόκληση με τον υπολογισμό του δεσμού στο (1.6) σχετίζεται με τον τελευταίο όρο στη δεξιά πλευρά. Οι δύο πρώτοι όροι αυτής της πλευράς είναι φυσικά γνωστοί στο σχετικό

βήμα του αλγορίθμου. Βασιζόμαστε στη σχέση μεταξύ πιθανοτήτων και προσδοκιών όπως περιγράφεται στη συνέχεια. Ένα άνω όριο $d_t(j_t, t)$ σχετικά με την πιθανότητα ανίχνευσης κατά τη διάρκεια χρονικών περιόδων $t + 1, t + 2, \dots, T$ και καμία ανίχνευση κατά μήκος υποδιαδρομής $\{j_l\}_{l=0}^t$ δεδομένου ότι ο ερευνητής είναι στο j_t κατά τη χρονική περίοδο t παρέχεται από τον μεγαλύτερο δυνατό αναμενόμενο αριθμό ανιχνεύσεων κατά τις χρονικές περιόδους $t + 1, t + 2, \dots, T$. Αυτό το γεγονός γίνεται πιο εύκολα αντιληπτό παρατηρώντας ότι ο αναμενόμενος αριθμός ανιχνεύσεων είναι απλώς το άθροισμα των πιθανοτήτων ανίχνευσης σε κάθε χρονική περίοδο. Εάν η διαδρομή είναι γνωστή, κάθε όρος σε αυτό το άθροισμα είναι απλώς ένα γινόμενο της πιθανότητας ανίχνευσης με ματιά και της πιθανότητας ο στόχος να βρίσκεται στο αντίστοιχο κελί. Το τελευταίο δίνεται από τον πίνακα μετάβασης Markov Γ και την αρχική κατανομή πιθανότητας $q(\cdot, 1)$.

Ωστόσο, προκύπτουν δύο επιπλοκές. Πρώτον, το δεσμευμένο $d_t(j_t, t)$ θα πρέπει να λαμβάνει υπόψη το γεγονός ότι δεν έχει πραγματοποιηθεί καμία ανίχνευση κατά μήκος της υποδιαδρομής $\{j_l\}_{l=0}^t$. Αυτό παρέχει, έμμεσα, πρόσθετες πληροφορίες σχετικά με τη θέση του στόχου. Δεύτερον, υπάρχουν συνήθως πολλούς τρόπους επέκτασης της υποδιαδρομής σε ένα μονοπάτι, και πρέπει να εξετάσουμε αυτό με τον μεγαλύτερο αναμενόμενο αριθμό ανιχνεύσεων. Ξεπερνάμε αυτές τις προκλήσεις με τον τρόπο που περιγράφεται στη συνέχεια. Αφήνουμε $q_g(j, t)$ να είναι η πιθανότητα ο στόχος να καταλάβει το κελί j κατά τη χρονική περίοδο t και δεν ανιχνεύεται κατά μήκος της υποδιαδρομής $\{j_l\}_{l=0}^t$, $t \in \mathcal{T}$, δηλ.

$$q_g(\cdot, t) = [q(1, t), \dots, q(j_t - 1, t), q(j_t, t)(1 - g(j_t, t)), q(j_t + 1, t), \dots, q(J, t)] \quad (1.7)$$

Χρησιμοποιούμε δείκτη g για να υποδείξουμε ότι το $q_g(\cdot, t)$ λαμβάνεται από το $q(\cdot, t)$ εφαρμόζοντας την πιθανότητα ανίχνευσης αναλαμπής που αντιστοιχεί στο τελευταίο κελί στο $\{j_l\}_{l=0}^t$. Για τυχόν ακέραιους αριθμούς $s > t$, $s, t \in \mathcal{T}$, ορίζουμε επίσης

$$q_\Gamma(\cdot, s; t) = q_g(\cdot, t) \Gamma^{s-t} \quad (1.8)$$

Όπως φαίνεται, το $q_\Gamma(j, s; t)$ είναι η πιθανότητα ο στόχος να καταλαμβάνει το κελί j κατά τη διάρκεια της χρονικής περιόδου χωρίς ανίχνευση κατά μήκος της υποδιαδρομής $\{j_l\}_{l=0}^t$. Σε αντίθεση με $q(\cdot, s)$, $q_\Gamma(\cdot, s; t)$ αγνοεί την επίδραση της αναζήτησης μετά τη χρονική περίοδο t . Οι πιθανότητες $q_\Gamma(j, s; t)$, $j \in \mathcal{J}$, παρέχει μια αναθεωρημένη εκτίμηση για το πού βρίσκεται ο στόχος τη στιγμή s , χρησιμοποιώντας το (μη ανίχνευση) πληροφορίες που συλλέγονται μέχρι το χρόνο t . Αυτό φροντίζει για το πρώτο ζήτημα που περιγράφεται παραπάνω. Εάν η υποδιαδρομή είναι απλώς $\{j_0\}$, δηλ. $t = 0$, ορίζουμε για συμβολική ευκολία $q_\Gamma(\cdot, s; 0) = q(\cdot, 1)\Gamma^{s-1}$, για οποιαδήποτε $s \in \mathcal{L}$ και $q_\Gamma(j, t; t) = 0$ για όλα τα $j \in \mathcal{J}$ και $t \in \mathcal{T}_0$. Κατά συνέπεια, το $q_\Gamma(\cdot, s; 0)$ καθορίζει τις πιθανότητες για τη θέση-στόχο απουσία πληροφοριών

από την αναζήτηση. Αυτές οι πιθανότητες αντιπροσωπεύουν τις γνώσεις μας σχετικά με χρονικές περιόδους πριν από οποιαδήποτε αναζήτηση. Αντίθετα, το $q_{\Gamma}(\cdot, s; t)$ αντιπροσωπεύει τις ενημερωμένες πληροφορίες μετά την ανεπιτυχή αναζήτηση της υποδιαδρομής $\{j_l\}_{l=0}^t$.

Για να αντιμετωπίσουμε τη δεύτερη πρόκληση του τρόπου προσδιορισμού της επέκτασης της υποδιαδρομής $\{j_l\}_{l=0}^t$ σε μια διαδρομή που έχει τον μεγαλύτερο αναμενόμενο αριθμό ανιχνεύσεων, κατασκευάζουμε ένα δίκτυο με επέκταση του χρόνου. Κάθε κελί $j \in \mathcal{J}$ διπλασιάζεται T φορές για να οριστεί οι κόμβοι (j, t) , $t \in \mathcal{T}$. Έστω N το σύνολο όλων αυτών των κόμβων καθώς και οι κόμβοι $n_0 = (j_0, 0)$ και $n = (j, T + 1)$ που αντιπροσωπεύουν την προηγούμενη θέση και την τελική του ερευνητή θέση, αντίστοιχα. Εδώ, j είναι ένα τεχνητό κελί. Δύο κόμβοι $n = (j, t - 1)$ και $n' = (j', t)$, $j, j' \in \mathcal{J}$ και $t = 2, 3, \dots, T$, συνδέονται με ένα τόξο (n, n') εάν και μόνο εάν $j' \in \mathcal{F}(j)$. Επιπλέον, ο κόμβος $n_0 = (j_0, 0)$ συνδέεται με ένα τόξο με το κόμβο $n' = (j', 1)$, $j' \in \mathcal{J}$, αν και μόνο αν $j' \in \mathcal{F}(j_0)$; και κάθε κόμβο $n = (j, T)$, $j \in \mathcal{J}$ συνδέεται με τόξο στο n . Έστω \mathcal{A} το σύνολο όλων των τόξων. Για κάθε ακέραιο αριθμό $t \leq T + 1$ και κόμβοι $n_l = (j_l, l) \in N$, $l = 0, 1, \dots, t$, έτσι ώστε $(n_{l-1}, n_l) \in \mathcal{A}$ για όλα τα $l = 1, 2, \dots, t$, αφήνουμε την ακολουθία $\{n_l\}_{l=0}^t$ να υποδηλώνει μια υποδιαδρομή στο γράφημα που διευρύνεται χρονικά (N, \mathcal{A}) .

Για μερικά $t \in \{0, 1, \dots, T - 1\}$, ας υποθέσουμε ότι δίνεται μια υποδιαδρομή $\{j_l\}_{l=0}^t$. Στη συνέχεια, δίνουμε σε κάθε τόξο $(n, n') = ((j, s), (j', s + 1)) \in \mathcal{A}$, $s = t, t + 1, \dots, T - 1$, στο χρόνο-διευρυμένο γράφημα (N, \mathcal{A}) με "ανταμοιβή"

$$c_{n,n'} = q_{\Gamma}(j', s + 1; t)g(j', s + 1) \quad (1.9),$$

όπου $\Gamma(j, j')$ είναι το $j - j'$ στοιχείο του πίνακα μετάβασης Markov Γ . Ορίσαμε $c_{n,n'} = 0$ για όλα τα $(n, n') \in \mathcal{A}$. Λαμβάνοντας υπόψη το (1.8), βλέπουμε ότι $c_{n,n'}$, είναι η πιθανότητα ανίχνευσης κατά τη διάρκεια χρονικών περιόδων $s + 1$ και καμία ανίχνευση κατά μήκος της υποδιαδρομής $\{j_l\}_{l=0}^t$. Αναφερόμαστε στο (N, \mathcal{A}) με ανταμοιβές τόξου που δίνονται από το (1.9) ως χρονικά διευρυμένο δίκτυο. Μπορούμε να δείξουμε ότι με δεδομένη την υποδιαδρομή $\{j_l\}_{l=0}^t$ τη βέλτιστη τιμή του προβλήματος της μεγαλύτερης διαδρομής στο χρονικά διευρυμένο δίκτυο από τον κόμβο (j_t, t) στον κόμβο $(j, T + 1)$, χρησιμοποιώντας τις ανταμοιβές στην (1.9) ως "μήκος τόξου", παρέχουν ένα ανώτερο όριο στην πιθανότητα ανίχνευσης κατά τις χρονικές περιόδους $t + 1, t + 2, \dots, T$ και καμία ανίχνευση κατά μήκος της υποδιαδρομής $\{j_l\}_{l=0}^t$ δεδομένου ότι ο ερευνητής βρίσκεται στο j_t κατά τη χρονική περίοδο t . Αντιπροσωπεύει τον αναμενόμενο αριθμό ανιχνεύσεων κατά τη διάρκεια των χρονικών περιόδων $t + 1, t + 2, \dots, T$ χωρίς ανιχνεύσεις κατά μήκος της υποδιαδρομής $\{j_l\}_{l=0}^t$ και ότι ο ερευνητής είναι στο j_t κατά τη διάρκεια της χρονικής περιόδου t .

Συμβολίζουμε αυτό το δεσμευμένο με $d_i(j_i, t)$ και το αναφέρουμε ως το δυναμικό όριο καθώς πρέπει να υπολογίζεται εκ νέου κάθε φορά που η τρέχουσα υποδιαδρομή επεκτείνεται στον βασικό αλγόριθμο. Το δεσμευμένο ονομάζεται μέσος όρος.

Δεδομένου ότι το διευρυμένο κατά το χρόνο δίκτυο είναι άκυκλο, το πρόβλημα της μεγαλύτερης διαδρομής μπορεί να λυθεί σε πολυωνυμικό χρόνο υπολογισμού με έναν τυπικό αλγόριθμο συντομότερης διαδρομής (Ahuja et al. 1993, σελ. 77-79). Παρατηρούμε ότι για τον υπολογισμό του $d_i(j_i, t)$ με δεδομένη την υποδιαδρομή $\{j_l\}_{l=0}^t$ είναι απαραίτητο μόνο να δημιουργηθεί το τμήμα του γραφήματος (N, \mathcal{A}) και οι αντίστοιχες ανταμοιβές τόξου, "μετά" το χρόνο t και σε απόσταση από τον κόμβο (j_i, t) , αφού η μεγαλύτερη διαδρομή ξεκινά από τον κόμβο (j_i, t) .

1.3 Βελτιώσεις μοντέλου

Υπάρχουν πολλές πιθανές επεκτάσεις του μοντέλου της προηγούμενης υποενότητας. Εδώ περιγράφουμε δύο δυνατότητες που είναι πρακτικά χρήσιμες. Το πρώτο επιτρέπει στον ερευνητή να λειτουργήσει σε διαφορετικό χώρο από τον στόχο. Για παράδειγμα, ο στόχος μπορεί να λειτουργεί σε μια περιοχή στο έδαφος, ενώ ο ερευνητής κινείται στον τρισδιάστατο εναέριο χώρο πάνω από την περιοχή. Αυτό παρέχει σημαντική ευελιξία μοντελοποίησης.

Η δεύτερη βελτίωση καθιστά την πιθανότητα ανίχνευσης αναλαμπής να εξαρτάται από το προηγούμενο καθώς και από το τρέχον κελί που καταλαμβάνει ο ερευνητής. Αυτή η εξάρτηση μπορεί να προκύψει εάν η προσαρμογή του μοτίβου αναζήτησης και/ή του υψομέτρου, η επαναστάση ενός αισθητήρα και η εξοικείωση με μια νέα κυψέλη έχουν σημαντική επιζήμια επίδραση στην ικανότητα του ερευνητή να ανιχνεύσει έναν στόχο. Επιπλέον, αυτή η εξάρτηση μας επιτρέπει να υπολογίζουμε έμμεσα τους μικρούς χρόνους μετάβασης (πολύ μικρότεροι από τη διάρκεια μιας χρονικής περιόδου) μεταξύ των κελιών, μειώνοντας την πιθανότητα ανίχνευσης αναλαμπής από την ονομαστική της τιμή, εάν ο ερευνητής μόλις μετακινήθηκε σε ένα κελί. Για παράδειγμα, ας υποθέσουμε ότι ο πραγματικός χρόνος ταξιδιού από το κελί j' στο j είναι 1 λεπτό. Για να μοντελοποιήσουμε αυτήν την κατάσταση (περίπου), θα χρειαζόμασταν κανονικά μια χρονική περίοδο διάρκειας (περίπου) 1 λεπτού. Ωστόσο, αυτό μπορεί να έχει ως αποτέλεσμα μεγάλο αριθμό χρονικών περιόδων και μεγάλους χρόνους υπολογισμού. Εναλλακτικά, μπορούμε να ορίσουμε μια μεγαλύτερη χρονική περίοδο, ας πούμε 10 λεπτά, και να αφήσουμε την πιθανότητα ανίχνευσης αναλαμπής στο κελί j να μειωθεί κάπως εάν το προηγούμενο κελί ενός ερευνητή ήταν j' σε σύγκριση με το εάν ήταν j . Αυτό θα αντικατοπτρίζει το γεγονός ότι ένας ερευνητής

που βγαίνει από το κελί j έχει μόνο 9 λεπτά για αναζήτηση σε σύγκριση με τα 10 λεπτά εάν ο ερευνητής ήταν ήδη παρών στο j . Ως εκ τούτου, αποφεύγουμε την υιοθέτηση μιας ακριβούς χρονικής διακριτοποίησης με αποτέλεσμα υψηλό υπολογιστικό κόστος.

Κάθε κελί $j \in \mathcal{J}$ σχετίζεται με ένα σύνολο $\mathcal{H} = \{1, 2, \dots, H\}$, το οποίο μπορεί να είναι θεωρείται ως υψομετρική διάφορα πάνω από το κελί. Ωστόσο, το νόημα θα διαφέρει ανάλογα με τη ρύθμιση της εφαρμογής. Για απλότητα αφήνουμε το \mathcal{H} να είναι ανεξάρτητο από j , αλλά αυτό είναι μόνο για συμβολική ευκολία. Για οποιαδήποτε $j \in \mathcal{J}$ και $h \in \mathcal{H}$, αναφερόμαστε στο ζεύγος κυψέλης-υψόμετρο (j, h) ως σημείο όπου ο ερευνητής μπορεί να "περιπλανηθεί" και να πραγματοποιήσει αναζήτηση κελιού j . Μοντελοποιούμε την περιοχή λειτουργιών για τον ερευνητή με ένα κατευθυνόμενο δίκτυο $(\mathcal{V}, \mathcal{E})$ με σύνολο κορυφών \mathcal{V} και σύνολο κατευθυνόμενων ακμών \mathcal{E} , στο οποίο οι κορυφές $v = (j, h) \in \mathcal{V}$ αντιπροσωπεύουν σημεία και κατευθυνόμενες ακμές $e = (v, v') \in \mathcal{E}$ αντιπροσωπεύουν μετάβαση μεταξύ σημείων διαδρομής $v, v' \in \mathcal{V}$. Ο ερευνητής μπορεί να μεταβεί μόνο μεταξύ δύο σημείων διαδρομής που είναι "γειτονικά" μεταξύ τους. Έστω $\mathcal{F}(v) \subset \mathcal{V}$ το σύνολο των κορυφών που είναι δίπλα στο $v \in \mathcal{V}$. Αναφερόμαστε στην $\mathcal{F}(v)$ ως το μπροστινό αστέρι της κορυφής v . Υιοθετούμε τη σύμβαση ότι $v \in \mathcal{F}(v)$ για όλα τα $v \in \mathcal{V}$. Στη συνέχεια, το σύνολο των ακμών $\mathcal{E} = \{(v, v') \in \mathcal{V} \times \mathcal{V} \mid v' \in \mathcal{F}(v)\}$.

Κατά τη διάρκεια κάθε χρονικής περιόδου $t \in \mathcal{T}$, ο ερευνητής βρίσκεται σε μια συγκεκριμένη κορυφή (σημείο διαδρομής). Υποθέτουμε ότι δεν υπάρχει χρόνος διέλευσης μεταξύ των σημείων. Ως εκ τούτου, $(v, v') \in \mathcal{E}$ απλώς αντιπροσωπεύει την αναζήτηση στο σημείο διαδρομής v ακολουθούμενη από αναζήτηση στο σημείο διαδρομής v' στην επόμενη χρονική περίοδο. Όπως παραπάνω, η κατάσταση με μη μηδενικό χρόνο διέλευσης μεταξύ σημείων διαδρομής μπορεί να μοντελοποιηθεί, τουλάχιστον κατά προσέγγιση, με εισάγοντας τεχνητές κορυφές.

Έστω $\varphi : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{J}$ η συνάρτηση που καθορίζει το κελί με το οποίο συσχετίζεται μια κορυφή, δηλ., το κελί $\varphi(v)$ αναζητείται από την κορυφή v . Υποδηλώνουμε την κορυφή του ερευνητή πριν από τη χρονική περίοδο 1 με $v_0 \in \mathcal{V}$.

Για κάθε $t \in \mathcal{T}$ και $v_1 \in \mathcal{V}$, $\ell = 0, 1, 2, \dots, t$, έτσι ώστε $(v_{\ell-1}, v_1) \in \mathcal{E}$ για όλα $\ell = 1, 2, \dots, t$, έστω η ακολουθία $\{v_\ell\}_{\ell=0}^t$ υποδηλώνει μια κατευθυνόμενη υποδιαδρομή $v_0 - v_1$. Αν $t = T$, τότε η κατευθυνόμενη υποδιαδρομή $v_0 - v_t$ είναι μια κατευθυνόμενη διαδρομή $v_0 - v_t$ που εκτείνεται σε όλο τον χρονικό ορίζοντα. Όταν δεν μπορεί να προκύψει παρεξήγηση, αναφερόμαστε σε μια κατευθυνόμενη (υπο)διαδρομή $v_0 - v_t$ ως (υπο)μονοπάτι. Σε αυτήν τη σημειογραφία, ο ερευνητής πετάει από το v_0 σε κάποιο v_t κατά μήκος μιας κατευθυνόμενης

διαδρομής $u_0 - u_T$. Ο ερευνητής καταλαμβάνει μόνο μία κορυφή $u \in \mathcal{V}$ κάθε χρονική περίοδο και παραμένει στην ίδια κορυφή ή μετακινείται σε μια άλλη κορυφή στο $\mathcal{F}(u)$ για την επόμενη χρονική περίοδο.

Αφήνουμε $g(u, u', t)$ να είναι η πιθανότητα ο ερευνητής στο σημείο διαδρομής u' να ανιχνεύσει στόχο κατά τη χρονική περίοδο t , δεδομένου ότι ο στόχος καταλαμβάνει το κελί j κατά τη διάρκεια t , με $\phi(u') = j$, και ότι ο ερευνητής βρισκόταν στο σημείο διαδρομής u κατά τη διάρκεια $t - 1$. Και πάλι, καλούμε $g(u, u', t)$ μια πιθανότητα ανίχνευσης αναλαμπής. Δεδομένου ότι πλέον επιτρέπουμε στην πιθανότητα ανίχνευσης με μια ματιά να εξαρτάται από την κορυφή και όχι μόνο από το κελί, μπορούμε να καταγράψουμε καταστάσεις όπου η απόδοση του αισθητήρα εξαρτάται από έναν παράγοντα όπως το υψόμετρο του ερευνητή. Επιπλέον, η πιθανότητα ανίχνευσης αναλαμπής εξαρτάται επίσης από την προηγούμενη κορυφή με πιθανά οφέλη που περιγράφονται παραπάνω.

Σε αυτή τη σημείωση, η πιθανότητα ανίχνευσης στο σημείο διαδρομής u' κατά τη χρονική περίοδο t και δεν γίνεται καμία προηγούμενη ανίχνευση

$$q(\phi(u'), t)g(u, u', t) \quad (1.10)$$

δόθηκε αναζήτηση στο σημείο u κατά τη χρονική περίοδο $t - 1$.

Παρόμοια με το παραπάνω, εάν το κελί j' αναζητηθεί από το σημείο u' κατά τη χρονική περίοδο t , τότε

$$q(\cdot, t + 1) = [q(1, t), \dots, q(j' - 1, t), q(j', t)(1 - g(u, u', t)), q(j' + 1, t), \dots, q(J, t)] \Gamma \quad (1.11),$$

όπου u είναι η κορυφή του ερευνητή κατά τη χρονική περίοδο $t - 1$.

Δίνεται μια διαδρομή $\mathcal{S} = \{u_t\}_{t=0}^T$ τα συμβάντα T "ανίχνευση κατά τη χρονική περίοδο t και ο στόχος δεν ανιχνεύεται πριν από το t ", $t = 1, 2, \dots, T$, είναι αμοιβαία αποκλειόμενα. Ως εκ τούτου, ενόψει της (1.10), η πιθανότητα ανίχνευσης κατά μήκος \mathcal{S} που και πάλι συμβολίζεται $P(\mathcal{S})$, γίνεται

$$P(\mathcal{S}) = \sum_{t=1}^T q(\phi(u_t), t)g(u_{t-1}, u_t, t) \quad (1.12)$$

Όπως και στην απλούστερη περίπτωση παραπάνω, η πρόκληση γίνεται στη συνέχεια πώς να υπολογίσουμε αποτελεσματικά το $P(\mathcal{S})$ για μεγάλο αριθμό (σχετικών) μονοπατιών και να διασφαλίσουμε ότι οι διαδρομές που δεν εξετάστηκαν πρέπει να είναι κατώτερες.

1.4 Αλγοριθμικές Βελτιώσεις

Οι παραπάνω βελτιώσεις μοντέλων απαιτούν σίγουρα αλγοριθμικές προσαρμογές. Επιπλέον, θα θέλαμε επίσης να εξετάσουμε αλγοριθμικές βελτιώσεις που θα μπορούσαν να επιταχύνουν τους υπολογισμούς ανεξάρτητα από αυτές τις αλλαγές μοντελοποίησης. Στη συνέχεια

περιγράφουμε μερικές από τις δυνατότητες. Το υπόλοιπο αυτής της ενότητας μπορεί να παραλειφθεί από έναν αναγνώστη που ενδιαφέρεται λιγότερο για αλγοριθμικές λεπτομέρειες.

1.4.1 Αλγοριθμικό Πλαίσιο

Ξεκινάμε δίνοντας μια επέκταση του βασικού αλγορίθμου που ισχύει για το βελτιωμένο μοντέλο. Στην ουσία, χρειάζεται μόνο να αντικαταστήσουμε τα κελιά από κορυφές. Με δεδομένη μια υποδιαδρομή $\{u_t\}_{t=0}^t$, $t \in \mathcal{T}$, αφήνουμε το $p(u_t, t)$ να υποδηλώνει ένα άνω όριο στην πιθανότητα ανίχνευσης κατά μήκος κάθε διαδρομή που ξεκινά με την υποδιαδρομή $\{u_t\}_{t=0}^t$. Παρόμοια με πριν ορίσουμε ότι το $K(t)$ είναι το σύνολο των τριπλών της μορφής $(u_t, t, p(u_t, t))$ που αντιπροσωπεύουν τις επεκτάσεις του $\{u_t\}_{t=0}^{t-1}$ ακόμα να εξερευνηθεί. Το πρώτο στοιχείο u_t αναφέρεται στην επόμενη κορυφή προς επίσκεψη και το δεύτερο στοιχείο t είναι η χρονική περίοδος επίσκεψης στην κορυφή u_t . Το άνω φράγμα $p(u_t, t)$ αποτελείται από τρία μέρη. Έστω $d_t(u_t, t)$ ένα ανώτερο όριο στην πιθανότητα ανίχνευσης κατά τις χρονικές περιόδους $t + 1, t + 2, \dots, T$ και καμία ανίχνευση κατά μήκος της υποδιαδρομής $\{u_t\}_{t=0}^t$ δεδομένου ότι ο ερευνητής βρίσκεται στο u_t κατά τη χρονική περίοδο t . Τα δύο άλλα μέρη είναι η πιθανότητα ανίχνευσης κατά μήκος της υποδιαδρομής $\{u_t\}_{t=0}^{t-1}$ και η πιθανότητα ανίχνευσης κατά τη διάρκεια t . Ως εκ τούτου,

$$\bar{p}(u_t, t) = P(\{u_l\}_{l=0}^{t-1}) + q(\varphi(u_t), t)g(u_t, t) + d_t(u_t, t) \quad (1.13)$$

Σε αυτή τη σημείωση, ο βελτιωμένος αλγόριθμος διακλάδωσης και δέσμευσης έχει την ακόλουθη μορφή.

Βελτιωμένος αλγόριθμος διακλάδωσης και δέσμευσης.

- Βήμα 0. Θέτουμε
 $t = 0, K(t) = \{(u_0, 0, 1)\}$ και $p = 0$.
- Βήμα 1. Εάν το $K(t)$ είναι κενό, αντικαθιστούμε το t με $t - 1$. Διαφορετικά, μεταβαίνουμε στο Βήμα 3.
- Βήμα 2. Εάν $t = 0$, σταματάμε: η τελευταία αποθηκευμένη διαδρομή είναι βέλτιστη και p είναι η πιθανότητα ανίχνευσης. Διαφορετικά, μεταβαίνουμε στο Βήμα 1.
- Βήμα 3. Αφαιρούμε από το $K(t)$ την τριάδα $(u_t, t, p(u_t, t))$ με τη μεγαλύτερη $p(u_t, t)$.
- Βήμα 4. Εάν $p(u_t, t) \leq p$, μεταβαίνουμε στο Βήμα 1. (Η τρέχουσα υποδιαδρομή είναι κατανοητή.)
- Βήμα 5. Εάν $t < T$, τότε για κάθε $v \in \mathcal{F}(u_t)$, υπολογίζουμε $d_t + 1(v, t + 1)$ και

$p(v, t + 1)$, και προσθέτουμε $(v, t + 1, p(v, t + 1))$ στο $K(t + 1)$. Αντικαθιστούμε t με $t + 1$ και μεταβαίνουμε στο βήμα 3. Διαφορετικά, έστω $p = \bar{p}(v_t, t)$ και αποθηκεύουμε τη διαδρομή $\{v_t\}_{t=0}^t$ και μεταβαίνουμε στο Βήμα 1.

Στη συνέχεια περιγράφουμε διάφορες τεχνικές οριοθέτησης.

1.4.2 Βελτιωμένοι υπολογισμοί δυναμικών ορίων

Μπορούμε εύκολα να επεκτείνουμε το δυναμικό όριο στην παρούσα περίπτωση. Παρόμοια με την παραπάνω εξέλιξη, αφήνουμε $q_g(j, t)$ να είναι η πιθανότητα ο στόχος να καταλαμβάνει το κελί j κατά τη χρονική περίοδο t και να μην ανιχνεύεται κατά μήκος της υποδιαδρομής $\{v_t\}_{t=0}^t$, $t \in \mathcal{T}$, δηλ.

$$q_g(\cdot, t) = [q(1, t), \dots, q(\varphi(v_t) - 1, t), q(\varphi(v_t), t)(1 - g(v_{t-1}, v_t, t)), q(\varphi(v_t) + 1, t), \dots, q(J, t)] \quad (1.14)$$

Για τυχόν ακέραιους $s > t$, $s, t \in \mathcal{T}$, αφήνουμε το $q_f(\cdot, s; t)$ να οριστεί όπως παραπάνω.

Κατασκευάζουμε ένα γράφημα διευρυμένου χρόνου από το δίκτυο $(\mathcal{V}, \mathcal{E})$ ως εξής: Κάθε κορυφή $v \in \mathcal{V}$ διπλασιάζεται T φορές για να οριστούν οι κόμβοι (v, t) , $t \in \mathcal{T}$. Έστω N το σύνολο όλων αυτών των κόμβων καθώς και οι κόμβοι $n_0 = (v_0, 0)$ και $n = (D, T + 1)$ που αντιπροσωπεύουν την προηγούμενη θέση και την τελική θέση του ερευνητή, αντίστοιχα. Εδώ, το D είναι μια τεχνητή τερματική κορυφή. Δύο κόμβοι $n = (v, t - 1)$ και $n' = (v', t)$, $v, v' \in \mathcal{V}$ και $t = 2, 3, \dots, T$, συνδέονται με ένα τόξο (n, n') εάν και μόνο εάν $(v, v') \in \mathcal{E}$. Επιπλέον, ο κόμβος $n_0 = (v_0, 0)$ συνδέεται με ένα τόξο σε έναν κόμβο $n' = (v', 1)$, $v' \in \mathcal{V}$ εάν και μόνο εάν $(v_0, v') \in \mathcal{E}$ και κάθε κόμβος $n = (v, T)$, $v \in \mathcal{V}$ συνδέεται με τόξο στο D . Έστω \mathcal{A} το σύνολο όλων των τόξων. Για κάθε ακέραιο $t \leq T + 1$ και κόμβους $n_l = (v_l, \ell) \in N$, $\ell = 0, 1, \dots, t$, έτσι ώστε $(n_{\ell-1}, n_\ell) \in \mathcal{A}$ για όλα τα $\ell = 1, 2, \dots, t$, αφήνουμε την ακολουθία $\{n_\ell\}_{\ell=0}^t$ που υποδηλώνει μια υποδιαδρομή στο γράφημα με επέκταση του χρόνου (N, \mathcal{A}) .

Για μερικά $t \in \{0, 1, \dots, T - 1\}$, ας υποθέσουμε ότι δίνεται μια υποδιαδρομή $\{v_\ell\}_{\ell=0}^t$ στο αρχικό γράφημα $(\mathcal{V}, \mathcal{E})$. Στη συνέχεια, προσδίδουμε κάθε τόξο $(n, n') = ((v, s), (v', s + 1)) \in \mathcal{A}$, $s = t, t + 1, \dots, T - 1$, στο γράφημα διευρυμένο ως προς το χρόνο (N, \mathcal{A}) με "ανταμοιβή"

$$c_{n,n'} = [q_f(\varphi(v'), s + 1; t) - q_f(\varphi(v), s; t) (\min_{v'' \in \mathcal{R}(v)} g(v'', v, s)) \Gamma(v, v')] g(v, v', s + 1) \quad (1.15),$$

όπου $\Gamma(v, v')$ είναι το στοιχείο $\varphi(v) - \varphi(v')$ του πίνακα μετάβασης Markov Γ και $\mathcal{R}(v) \subset \mathcal{V}$ είναι το αντίστροφο αστέρι του v , δηλ., $\mathcal{R}(v) = \{v'' \in \mathcal{V} \mid (v'', v) \in \mathcal{E}\}$.

Το "min" στον τύπο διασφαλίζει ότι η ανταμοιβή τόξου $c_{n,n'}$ είναι ανεξάρτητη από την προηγούμενη κορυφή v'' , η οποία θα είχε καταστρέψει τη δομή της μεγαλύτερης διαδρομής

του προβλήματος υπολογισμού δεσμευμένου: $c_{n,n'}$, δεν θα εξαρτάται πλέον μόνο από το κεφαλή και ουρά του τόξου (n, n') Ως εκ τούτου, καθίσταται απαραίτητο να χρησιμοποιηθεί αυτή η συντηρητική εκτίμηση.

Θέτουμε επίσης $c_{n,n} = 0$ για όλα τα $(n, n) \in \mathcal{N}$. Ενόψει της παραπάνω εξέλιξης, βλέπουμε ότι $c_{n,n}$, είναι η πιθανότητα ανίχνευσης κατά τη χρονική περίοδο $s + 1$ και καμία ανίχνευση κατά μήκος της υποδιαδρομής $\{v_\ell\}_{\ell=0}^t$ και καμία ανίχνευση κατά τη χρονική περίοδο s . Αναφερόμαστε στο (N, \mathcal{N}) με ανταμοιβές τόξου που δίνονται από το (1.15) ως το δίκτυο με επέκταση του χρόνου.

Με αυτήν την ανταμοιβή, ο υπολογισμός δεσμευμένου παραμένει ένα πρόβλημα της μεγαλύτερης διαδρομής σε ένα άκυκλο γράφημα και μπορεί να παρουσιαστεί χρησιμοποιώντας τα ίδια ορίσματα όπως στο Lau et al. (2008) ότι αυτό το ενισχυμένο δυναμικό όριο $d_i(v_i, t)$ που υπολογίστηκε από το (1.15) είναι πράγματι ένα ανώτερο όριο στην πιθανότητα ανίχνευσης κατά τις χρονικές περιόδους $t + 1, t + 2, \dots, T$ και καμία ανίχνευση κατά τη διάρκεια της υποδιαδρομής $\{v_\ell\}_{\ell=0}^t$ δεδομένου ότι ο ερευνητής βρίσκεται στο v_i κατά τη χρονική περίοδο t .

1.4.3 Υπολογισμοί στατικών ορίων

Σε αυτή την υποενότητα, εξετάζουμε ένα εναλλακτικό και μάλιστα απλούστερο όριο από το (βελτιωμένο) δυναμικό όριο $d_i(v_i, t)$.

Ο (βελτιωμένος) αλγόριθμος διακλάδωσης και δέσμευσης με το δυναμικό όριο απαιτεί έναν υπολογισμό της μεγαλύτερης διαδρομής σε ένα δίκτυο διευρυμένο χρονικά για κάθε κορυφή στο αστέρι για το τμήμα της τρέχουσας κορυφής για τον υπολογισμό των απαιτούμενων ορίων $d_i(v_i, t)$ (βλέπε Βήμα 5). Αυτό ευθυγραμμίζεται με την παραδοσιακή προσέγγιση των αλγορίθμων διακλάδωσης και περιορισμού όπου ένα όριο βελτιστοποιείται εκ νέου πριν από κάθε διακλάδωση. Στην παρούσα περίπτωση, η εκ νέου βελτιστοποίηση αντιστοιχεί στον υπολογισμό της μεγαλύτερης διαδρομής και απαιτεί τον υπολογισμό των ανταμοιβών τόξου $c_{n,n'}$, βλέπε (1.15). Εναλλακτικά, μπορεί κανείς να χρησιμοποιήσει ένα στατικό όριο, υπολογίσιμο πριν από οποιαδήποτε διακλάδωση όπως περιγράφεται στη συνέχεια.

Το δυναμικό όριο $d_i(v_i, t)$ απαιτεί γνώση της τρέχουσας υποδιαδρομής $\{v_\ell\}_{\ell=0}^t$ καθώς η (1.15) εξαρτάται από το $q_F(\cdot, \cdot; t)$. Ας υποθέσουμε ότι αγνοούμε αυτές τις πληροφορίες υποδιαδρομής και υπολογίζουμε τη βέλτιστη τιμή του προβλήματος της μεγαλύτερης διαδρομής όπως στην περίπτωση του $d_i(v_i, t)$, αλλά τώρα με $q_F(\cdot, \cdot; t)$ στο (1.15) να αντικατασταθεί από $q_F(\cdot, \cdot; 0)$. Στη συνέχεια, όπως αποδεικνύουμε στο Θεώρημα 1 παρακάτω,

αυτή η τιμή είναι ένα ανώτερο όριο στην πιθανότητα ανίχνευσης κατά τις χρονικές περιόδους $t + 1, t + 2, \dots, T$, δεδομένου ότι ο ερευνητής βρίσκεται στο v_i κατά τη χρονική περίοδο t . Ως εκ τούτου, αυτή η τιμή είναι επίσης ένα ανώτερο όριο στην πιθανότητα ανίχνευσης κατά τις χρονικές περιόδους $t + 1, t + 2, \dots, T$ και χωρίς ανίχνευση κατά μήκος της υποδιαδρομής $\{v_\ell\}_{\ell=0}^t$, δεδομένου ότι ο ερευνητής βρίσκεται στο v , κατά τη χρονική περίοδο t . Αναφερόμαστε σε αυτήν την τιμή ως στατικό δεσμό και τη συμβολίζουμε με $d_0(v_i, t)$, όπου ο δείκτης 0 υποδηλώνει ότι η τετριμμένη υποδιαδρομή $\{v_0\}$ χρησιμοποιείται στην (1.15) με $t = 0$ αντί για την υποδιαδρομή $\{v_\ell\}_{\ell=0}^t$. Σημειώνουμε ότι το $c_{n,n}$, στο (1.15) με υποδιαδρομή $\{v_0\}$ είναι ουσιαστικά η πιθανότητα ανίχνευσης στο κορυφή v κατά τη χρονική περίοδο $s + 1$ και καμία ανίχνευση στην κορυφή v κατά τη διάρκεια της χρονικής περιόδου μικρό. Εφόσον το $d_0(v_i, t)$ είναι ανεξάρτητο από την τρέχουσα υποδιαδρομή που χρησιμοποιείται για να φτάσει στην κορυφή v_i , μπορεί να υπολογιστεί εκ των προτέρων για όλους τους κόμβους $(v, t) \in N$ και δεν απαιτείται δυναμικός υπολογισμός ορίων. Κατά συνέπεια, οι ανταμοιβές τόξου (1.15) και τα όρια υπολογίζονται μόνο μία φορά. Παρατηρούμε ότι δεν είναι απαραίτητο να πραγματοποιηθεί ένας υπολογισμός της μεγαλύτερης διαδρομής από κάθε κόμβο $(v, t) \in N$ έως $(\bar{u}, T + 1)$ για να ληφθεί $d_0(v, t)$. Είναι πιο αποτελεσματικό να εκτελούνται οι υπολογισμοί της μεγαλύτερης διαδρομής προς τα πίσω από τον κόμβο $(\bar{u}, T + 1)$ σε όλους τους κόμβους. Αυτός ο υπολογισμός απλώς ισοδυναμεί με την εφαρμογή μίας φορές αλγόριθμου συντομότερης διαδρομής στο δίκτυο με επέκταση του χρόνου με μήκη τόξων ίσα με τις αρνητικές ανταμοιβές.

Στο Βήμα 5 του Ενισχυμένου αλγόριθμου διακλάδωσης και δέσμευσης, τώρα χρησιμοποιούμε απλώς $d_0(v_i, t)$ αντί για $d_i(v_i, t)$. Έτσι, ο τροποποιημένος αλγόριθμος δεν απαιτεί υπολογισμό της μεγαλύτερης διαδρομής στο Βήμα 5. Όλοι οι υπολογισμοί δεσμευμένου γίνονται πριν από το Βήμα 0. Σαφώς, η τροποποιημένη προσέγγιση οδηγεί σε ασθενέστερο όριο και συνήθως απαιτούνται περισσότερες προσπάθειες διακλάδωσης. Ωστόσο, οι πρόσθετες προσπάθειες διακλάδωσης μπορεί να αντισταθμιστούν από μικρότερους χρόνους υπολογισμού ανά επανάληψη. Τα εμπειρικά στοιχεία στους Sato and Royset (2010) πράγματι δείχνουν προς αυτή την κατεύθυνση.

1.4.4 Στατικό όριο κατεύθυνσης

Εξάγουμε επίσης ένα ισχυρότερο στατικό όριο που υποκινείται από την κλασική προσέγγιση για τη διαχείριση των περιορισμών ακτίνας στροφής στα προβλήματα δρομολόγησης οχημάτων, όπως πρωτοστάτησε ο Caldwell (1961).

Στους υπολογισμούς της μεγαλύτερης διαδρομής για το στατικό όριο, η ανταμοιβή του τόξου $((u, s), (u', s + 1))$ είναι, ουσιαστικά, η πιθανότητα ανίχνευσης στην κορυφή u' κατά τη διάρκεια χρονικών περιόδων $s + 1$ και χωρίς ανίχνευση στην κορυφή u κατά τις χρονικές περιόδους. Ενισχύουμε το στατικό όριο εάν επαναπροσδιορίσουμε την ανταμοιβή τόξου να είναι, ουσιαστικά, η πιθανότητα ανίχνευσης στην κορυφή u' κατά τη χρονική περίοδο $s + 1$ και καμία ανίχνευση στην κορυφή u κατά τη χρονική περίοδο s και καμία ανίχνευση στην κορυφή που επισκέφθηκε τη χρονική περίοδο $s - 1$. Ωστόσο, ο επαναπροσδιορισμός της ανταμοιβής τόξου ώστε να εξαρτάται όχι μόνο από τους κόμβους της κεφαλής και της ουράς του τόξου, αλλά και από έναν προηγούμενο κόμβο καταστρέφει τη δομή της μεγαλύτερης διαδρομής του προβλήματος υπολογισμού ορίου.

Παρόμοια κατάσταση παρουσιάζεται σε προβλήματα δρομολόγησης οχημάτων για οχήματα με περιορισμούς ή κυρώσεις στην ακτίνα στροφής. Η κλασική προσέγγιση για τον χειρισμό αυτής της κατάστασης είναι να αντιγράψουμε κάθε κόμβο πολλές φορές ίσο με τον αριθμό των κόμβων στο αντίστροφο αστέρι του κόμβου. Ένα τόξο στο προκύπτον δίκτυο "εκτεταμένο σε κόμβο" μεταφέρει στη συνέχεια πληροφορίες για τρεις κόμβους, όχι μόνο δύο, και μπορεί να διατηρηθεί μια επιθυμητή δομή δικτύου του προβλήματος. Ευτυχώς, είναι συχνά πρακτικό να πραγματοποιηθεί μια τέτοια προσέγγιση επέκτασης κόμβου στο παρόν πλαίσιο, επειδή ο αριθμός των κόμβων στο αντίστροφο αστέρι είναι συνήθως αρκετά μέτριος. Ως εκ τούτου, προχωράμε σύμφωνα με τις αναφερόμενες γραμμές και αναπτύσσουμε ένα εκτεταμένο δίκτυο κόμβου και χρόνου, στο οποίο το βελτιωμένο στατικό όριο μπορεί να υπολογιστεί επιλύοντας ένα πρόβλημα με τη μεγαλύτερη διαδρομή. Αναφερόμαστε σε αυτό το βελτιωμένο όριο ως κατευθυντικό στατικό όριο.

Για κάθε $n' \in N$, έστω $: \mathcal{R}(n') \subset N$ το αντίστροφο αστέρι του n' , δηλ., $: \mathcal{R}(n') = \{n \in N \mid (n, n') \in \mathcal{A}\}$. Στη συνέχεια, για οποιαδήποτε $n, n' \in N \setminus \{\check{n}\}$ έτσι ώστε $(n, n') \in \mathcal{A}$, ορίζουμε ένα διευρυμένος κόμβος $\xi = (n, n')$. Δεν επεκτείνουμε τον τερματικό κόμβο, οπότε ορίζουμε $\xi = \check{n}$. Έστω Ξ το σύνολο όλων των διευρυμένων κόμβων. Δύο διευρυμένοι κόμβοι $\xi, \xi' \in \Xi$ συνδέονται με ένα διευρυμένο τόξο (ξ, ξ') αν $\xi = (n, n')$ και $\xi' = (n', n'')$. Έστω ότι το σύνολο όλων διευρύνεται τόξα είναι Ω .

Προικίζουμε σε κάθε διευρυμένο τόξο στο διευρυμένο γράφημα κόμβου και χρόνου (Ξ, Ω) με μια ανταμοιβή παρόμοια με το (1.15). Για να αντλήσουμε την ακριβή μορφή αυτής της ανταμοιβής, χρειαζόμαστε τα ακόλουθα δομικά στοιχεία. Για κάθε $u, u' \in \mathcal{V}$ και $t \in \mathcal{T}$, έστω $M_t(u, u')$ ένας πίνακας ταυτότητας J -by- J με το $\varphi(u')$ - διαγώνιο στοιχείο ίσο με $1 - g(u, u', t)$. Αφήνουμε επίσης το $\Gamma(u')$ να είναι η $\varphi(u')$ - η στήλη του πίνακα μετάβασης Markov Γ .

Από την (1.12) και την αναδρομική εφαρμογή της (1.11), βλέπουμε ότι η πιθανότητα ανίχνευσης κατά μήκος μιας διαδρομής $\{v_\ell\}_{\ell=0}^T$ είναι

$$\begin{aligned} P(\{v_\ell\}_{\ell=0}^T) &= q(\varphi(v_\ell), 1)g(v_0, v_1, 1) + \\ & q(\cdot, 1)M_1(v_0, v_1)\Gamma(v_2)g(v_1, v_2, 2) + \\ & q(\cdot, 1)M_1(v_0, v_1)\Gamma M_2(v_1, v_2)\Gamma(v_3)g(v_2, v_3, 3) + \\ & q(\cdot, 1)M_1(v_0, v_1)\Gamma M_2(v_1, v_2)\Gamma M_3(v_2, v_3)\Gamma(v_4)g(v_3, v_4, 4) + \\ & \vdots \\ & q(\cdot, 1)M_1(v_0, v_1)\Gamma M_2(v_1, v_2)\Gamma M_3(v_2, v_3) \cdots \Gamma M_{T-1}(v_{T-2}, v_{T-1})\Gamma(v_T)g(v_{T-1}, v_T, T) \end{aligned} \quad (1.16)$$

που δίνει εικόνα για μια κατηγορία ορίων σχετικά με την πιθανότητα ανίχνευσης, συμπεριλαμβανομένου του στατικού ορίου $d_0(v_\ell, t)$. Αν αντικαταστήσουμε το $M_\ell(\cdot, \cdot)$ από τον πίνακα ταυτότητας στο (1.16), θα διαπιστώσουμε ότι

$$\begin{aligned} P(\{v_\ell\}_{\ell=0}^T) &\leq q(\varphi(v_\ell), 1)g(v_0, v_1, 1) + \\ & q(\cdot, 1)\Gamma(v_2)g(v_1, v_2, 2) + \\ & q(\cdot, 1)\Gamma \Gamma(v_3)g(v_2, v_3, 3) + \\ & q(\cdot, 1)\Gamma \Gamma \Gamma(v_4)g(v_3, v_4, 4) + \\ & \vdots \\ & q(\cdot, 1)\Gamma^{T-2} \Gamma(v_T)g(v_{T-1}, v_T, T) \end{aligned} \quad (1.17).$$

Στην (1.17), η "ανταμοιβή" που λαμβάνεται κατά τη διάρκεια μιας χρονικής περιόδου είναι απλώς η πιθανότητα ανίχνευσης κατά τη διάρκεια αυτής της χρονικής περιόδου και εξαρτάται μόνο από την τρέχουσα και τις προηγούμενες κορυφές. Ως εκ τούτου, είναι δυνατό να υπολογιστεί ένα ανώτερο όριο στη βέλτιστη πιθανότητα ανίχνευσης με την εύρεση μιας διαδρομής $\{v_\ell\}_{\ell=0}^T$ που μεγιστοποιεί τη δεξιά πλευρά στο (1.17).

Αυτός ο υπολογισμός ισοδυναμεί με πρόβλημα της μεγαλύτερης διαδρομής. Αν αντικαταστήσουμε κάθε $M_1(\cdot, \cdot)$ από τον πίνακα ταυτότητας παντού εκτός από τον τελευταίο πίνακα κάθε γραμμής στο (1.16), λαμβάνουμε

$$\begin{aligned} P(\{v_\ell\}_{\ell=0}^T) &\leq q(\varphi(v_\ell), 1)g(v_0, v_1, 1) + \\ & q(\cdot, 1)M_1(v_0, v_1) \Gamma(v_2)g(v_1, v_2, 2) + \\ & q(\cdot, 1)\Gamma M_2(v_1, v_2) \Gamma(v_3)g(v_2, v_3, 3) + \\ & q(\cdot, 1)\Gamma \Gamma M_3(v_2, v_3) \Gamma(v_4)g(v_3, v_4, 4) + \\ & \vdots \end{aligned}$$

$$q(\cdot, 1) \Gamma^{T-2} M_{T-1}(v_{T-2}, v_{T-1}) \Gamma(v_T) g(v_{T-1}, v_T, T) \quad (1.18).$$

Τώρα, η ανταμοιβή που λαμβάνεται κατά τη διάρκεια κάθε χρονικής περιόδου εξαρτάται επίσης από τη θέση του ερευνητή πριν από δύο χρονικές περιόδους και το πρόβλημα της εύρεσης μιας διαδρομής που μεγιστοποιεί τη δεξιά πλευρά δεν είναι πλέον πρόβλημα της μεγαλύτερης διαδρομής. Ωστόσο, το όριο παραμένει έγκυρο με την ακόλουθη μικρή τροποποίηση, όπου η μεγιστοποίηση ενός πίνακα με ένα μόνο στοιχείο διαφορετικό από το μηδέν ή ένα είναι απλώς η μεγιστοποίηση αυτού του στοιχείου:

$$\begin{aligned} P(\{v_\ell\}_{\ell=0}^T) &\leq q(\varphi(v_\ell), 1) g(v_0, v_1, 1) + \\ & q(\cdot, 1) \left(\max_{v \in \mathcal{R}(v_1)} M_1(v, v_1) \right) \Gamma(v_2) g(v_1, v_2, 2) + \\ & q(\cdot, 1) \Gamma \left(\max_{v \in \mathcal{R}(v_2)} M_2(v, v_2) \right) \Gamma(v_3) g(v_2, v_3, 3) + \\ & q(\cdot, 1) \Gamma \Gamma \left(\max_{v \in \mathcal{R}(v_3)} M_3(v, v_3) \right) \Gamma(v_4) g(v_3, v_4, 4) + \\ & \quad \vdots \\ & q(\cdot, 1) \Gamma^{T-2} \left(\max_{v \in \mathcal{R}(v_{T-1})} M_{T-1}(v, v_{T-1}) \right) \Gamma(v_T) g(v_{T-1}, v_T, T) \quad (1.19). \end{aligned}$$

Μετά από αυτήν την τροποποίηση, βλέπουμε ότι η ανταμοιβή κατά τη διάρκεια κάθε χρονικής περιόδου εξαρτάται μόνο από την τρέχουσα και τις προηγούμενες κορυφές. Ως εκ τούτου, και πάλι, είναι δυνατό να υπολογιστεί ένα ανώτερο όριο στη βέλτιστη πιθανότητα ανίχνευσης επιλύοντας ένα πρόβλημα με τη μεγαλύτερη διαδρομή. Στην πραγματικότητα, αυτή είναι ακριβώς η προσέγγιση στο στατικό όριο και μπορεί να αποδειχθεί ότι η ανταμοιβή στο πρόβλημα της μεγαλύτερης διαδρομής $c_{n,n'}$, βλέπε (1.15), μπορεί να συναχθεί από το (1.19). Συγκεκριμένα, όταν η τρέχουσα υποδιαδρομή στο (1.15) είναι $\{v_0\}$, έχουμε για τόξο $(n, n') = ((v, s), (v', s+1)) \in \mathcal{A}$ τότε,

$$c_{n,n'} = q(\cdot, 1) \Gamma^{s-1} \left(\max_{v'' \in \mathcal{R}(v)} M_s(v'', v) \right) \Gamma(v') g(v, v', s+1)$$

Χρησιμοποιώντας παρόμοια ορίσματα, ορίζουμε το κατευθυντικό στατικό όριο ως εξής.
Σαφώς,

$$\begin{aligned} P(\{v_\ell\}_{\ell=0}^T) &\leq q(\varphi(v_\ell), 1) g(v_0, v_1, 1) + \\ & q(\cdot, 1) M_1(v_0, v_1) \Gamma(v_2) g(v_1, v_2, 2) + \\ & q(\cdot, 1) \left(\max_{v \in \mathcal{R}(v_1)} M_1(v, v_1) \right) \Gamma M_2(v_1, v_2) \Gamma(v_3) g(v_2, v_3, 3) + \\ & q(\cdot, 1) \left(\max_{v \in \mathcal{R}(v_2)} M_2(v, v_2) \right) \Gamma M_3(v_2, v_3) \Gamma(v_4) g(v_3, v_4, 4) + \\ & \quad \vdots \\ & \quad \vdots \end{aligned}$$

$$q(\cdot, 1) \left(\max_{v \in \mathcal{R}(v_{T-2})} M_{T-2}(v, v_{T-2}) \right) \Gamma M_{T-1}(v_{T-2}, v_{T-1}) \Gamma(v_T) g(v_{T-1}, v_T, T) \quad (1.20).$$

Ως εκ τούτου, μπορούμε να υπολογίσουμε ένα άνω όριο στη βέλτιστη πιθανότητα ανίχνευσης βρίσκοντας μια διαδρομή $\{v_\ell\}_{\ell=0}^T$ που μεγιστοποιεί τη δεξιά πλευρά του (1.20). Αυτός ο υπολογισμός ισοδυναμεί με ένα πρόβλημα μεγαλύτερης διαδρομής στο διευρυμένο γράφημα κόμβου και χρόνου (Ξ, Ω) . Η ανταμοιβή τόξου σε αυτό το πρόβλημα της μεγαλύτερης διαδρομής προκύπτει από το (1.20). Συγκεκριμένα, ένα διευρυμένο τόξο $(\xi, \xi') = ((n'', n), (n, n')) \in \Omega$, με $n'' = (v'', s-1)$, $n = (v, s)$ και $n' = (v', s+1)$, είναι προικισμένο με την ανταμοιβή

$$c_{\xi, \xi'} = q(\cdot, 1) \Gamma^{s-2} \left(\max_{v'' \in \mathcal{R}(v'')} M_{s-1}(v'', v') \right) \Gamma M_s(v'', v) \Gamma(v') g(v, v', s+1).$$

Αναφερόμαστε στο διευρυμένο γράφημα κόμβου και χρόνου (Ξ, Ω) με το τόξο ανταμείβει $c_{\xi, \xi'}$, από το (1.21) ως το διευρυμένο δίκτυο κόμβου και χρόνου. Δεδομένου ότι το διευρυμένο γράφημα κόμβου και χρόνου είναι άκυκλο, τα προβλήματα με τη μεγαλύτερη διαδρομή μπορούν να επιλυθούν με τυπικούς αλγόριθμους συντομότερης διαδρομής.

Λαμβάνοντας υπόψη την παραπάνω συζήτηση, έχουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα.

Θεώρημα 1.

Για οποιαδήποτε $v' \in \mathcal{V}$ και $t \in \mathcal{T}$ έστω

- $d_0(v', t)$ είναι η τιμή της μεγαλύτερης διαδρομής από τον κόμβο (v', t) στον κόμβο n στο γράφημα διευρυμένου χρόνου (N, \mathcal{A}) με ανταμοιβές τόξου που δίνονται από το (1.20) και
- $\delta_0(v, v', t)$ είναι η τιμή της μεγαλύτερης διαδρομής από τον διευρυμένο κόμβο $((v, t-1), (v', t))$ στον διευρυμένο κόμβο ξ στο διευρυμένο γράφημα κόμβου και χρόνου (Ξ, Ω) με ανταμοιβές τόξου που δίνονται από το (2.1).

Τότε, και τα δύο $d_0(v', t)$ και $\delta_0(v, v', t)$ είναι ανώτερα όρια στην πιθανότητα ανίχνευσης κατά τις χρονικές περιόδους $t+1, t+2, \dots, T$ για οποιαδήποτε διαδρομή $\{v_\ell\}_{\ell=0}^T$ με $v_{t-1} = v$ και $v_t = v'$. Επιπλέον, $\delta_0(v, v', t) \leq d_0(v', t)$.

Αναφερόμαστε στο $\delta_0(v, v', t)$ ως το κατευθυντικό στατικό όριο και βλέπουμε από πιο πάνω ότι είναι τουλάχιστον τόσο ισχυρό όσο το στατικό όριο. Σαφώς, η δημιουργία του γραφήματος διευρυμένου κόμβου και χρόνου (Ξ, Ω) , ο υπολογισμός των σχετικών ανταμοιβών και ο υπολογισμός των μεγαλύτερων διαδρομών απαιτούν κάποιο υπολογιστικό χρόνο. Ωστόσο, η διαδικασία εκτελείται μόνο μία φορά πριν από την έναρξη του Ενισχυμένου αλγόριθμου διακλάδωσης και δέσμευσης και τα υπολογισμένα όρια αποθηκεύονται για μελλοντική χρήση. Ως εκ τούτου, ο χρόνος για τον υπολογισμό των κατευθυντικών στατικών ορίων

παραμένει μικρός σε σύγκριση με τον συνολικό χρόνο εκτέλεσης. Εμπειρικά στοιχεία στους Sato and Royset (2010) δείχνουν ότι η εφαρμογή του στατικού ορίου κατεύθυνσης είναι επωφελής.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Διατυπώσεις μαθηματικού προγραμματισμού

Αν και μπορεί να είναι εννοιολογικά δυνατό να επεκταθούν οι παραπάνω διατυπώσεις με επίκεντρο τη διαδρομή της προηγούμενης ενότητας σε πολλαπλούς αναζητητές, πολλαπλούς στόχους και πρόσθετους περιορισμούς, είναι συνήθως ευκολότερο να διατυπωθούν τα γενικότερα προβλήματα αναζήτησης περιορισμένης διαδρομής ως μαθηματικά προγράμματα. Ένα σημαντικό πλεονέκτημα αυτής της προσέγγισης είναι ότι ένας μεγάλος αριθμός καλά ανεπτυγμένων (γενικού σκοπού) μαθηματικών αλγορίθμων προγραμματισμού καθίσταται διαθέσιμος. Επομένως, τουλάχιστον σε πολλές περιπτώσεις, αποφεύγει κανείς την ανάγκη ανάπτυξης εξειδικευμένων αλγορίθμων, ένα σημαντικό πρακτικό όφελος. Το κεφάλαιο 3 παρέχει υπόβαθρο για αλγόριθμους μαθηματικού προγραμματισμού. Ξεκινάμε, ωστόσο, με τη διατύπωση προβλημάτων αναζήτησης περιορισμένης διαδρομής ως μαθηματικά προγράμματα. Χωρίζουμε την έκθεση σε δύο μέρη: πρώτον ασχολούμαστε με μια ομάδα πανομοιότυπων ερευνητών και έναν μόνο στόχο και δεύτερον αντιμετωπίζουμε το πλήρες πρόβλημα με διαφορετικούς τύπους ερευνητών, πολλούς στόχους και πρόσθετους περιορισμούς.

2.1 Ομογενείς αναζητητές και ενιαίος στόχος

Όπως παραπάνω, αφήνουμε την αναζήτηση να πραγματοποιηθεί σε ένα πεπερασμένο σύνολο κελιών $\mathcal{J} = \{1, \dots, J\}$ και σε ένα πεπερασμένο σύνολο χρονικών περιόδων $\mathcal{T} = \{1, 2, \dots, T\}$. Αφήνουμε $t = 0$ να αντιπροσωπεύει τον χρόνο πριν από την αναζήτηση και ορίζουμε $\mathcal{T}_0 = \{0\} \cup \mathcal{T}$. Θεωρούμε έναν μόνο στόχο και η ποσότητα $\omega_t \in \mathcal{J}$ δηλώνει το (τυχαίο) κελί που καταλαμβάνει ο στόχος κατά τη διάρκεια του χρόνου $t \in \mathcal{T}$. Το διάνυσμα των κελιών $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_T)$ δίνει μια πιθανή διαδρομή για τον στόχο και το $p(\omega)$ υποδηλώνει τη δεδομένη πιθανότητα ότι ο στόχος ακολουθεί αυτή τη διαδρομή. Το σύνολο Ω υποδηλώνει τη συλλογή όλων των πιθανών μονοπατιών με θετική πιθανότητα $p(\omega)$ και, φυσικά, $\sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) = 1$. Στην πράξη, τα Ω και $p(\omega)$ δημιουργούνται χρησιμοποιώντας δειγματοληψία

Monte Carlo από (σύνθετα) μοντέλα κίνησης στόχου (όπως στην απόφαση της Ακτοφυλακής των ΗΠΑ ενίσχυση SAROPS, βλέπε Kratzke et al. 2010) ή ορίζεται σιωπηρά από πίνακες μετάβασης Markov. Θεωρούμε και τους δύο τρόπους προσδιορισμού της κίνησης του στόχου και αναφερόμαστε στον πρώτο τρόπο ως μοντέλο στόχου υπό όρους και, όπως και πριν, στον δεύτερο τρόπο ως μοντέλο μαρκοβιανού στόχου. Αν και όχι τόσο γενικό, ένα Μαρκοβιανό μοντέλο στόχου προσφέρει υπολογιστικά οφέλη όπως βλέπουμε στα Κεφ. 2.1.3 και 3.3.

Είναι ασήμαντο να επεκτείνουμε το τρέχον πλαίσιο σε καταστάσεις με έναν στόχο που μπορεί να μην υπάρχει και έναν στόχο που εισέρχεται και εξέρχεται από μια περιοχή κατά τη διάρκεια του χρονικού ορίζοντα προσθέτοντας εικονικά κελιά. Ωστόσο, παραλείπουμε λεπτομέρειες για να μην περιπλέκουμε τη σημειογραφία.

Υπάρχουν S πανομοιότυποι ερευνητές με $z(j, 0)$ αναζητητές καταλαμβάνουν το κελί j σε χρονική περίοδο 0. Κατά τη διάρκεια κάθε $t \in \mathcal{T}_0$ κάθε ερευνητής καταλαμβάνει ένα κελί ή βρίσκεται σε διαμετακόμιση μεταξύ κύτταρα. Όταν καταλαμβάνει ένα κελί j , ένας ερευνητής μπορεί να επιλέξει να μετακινηθεί σε οποιοδήποτε κελί "γειτονικό" στο j όπως ορίζεται από το μπροστινό αστέρι $\mathcal{F}(j) \subset \mathcal{J}$. Αφήνουμε επίσης το $\mathcal{R}(j) \subset \mathcal{J}$ να υποδηλώνει το αντίστροφο αστέρι του κελιού j , το οποίο αντιπροσωπεύει το σύνολο των κελιών από τα οποία ένας ερευνητής μπορεί να φτάσει στο κελί j με μία κίνηση. Κατά σύμβαση, $j \in \mathcal{F}(j)$ και $j \in \mathcal{R}(j)$. Ένας ερευνητής απαιτεί $d(j, j')$ χρονικές περιόδους για να μετακινηθεί από το κελί j στο κελί $j' \in \mathcal{F}(j)$ και στο κελί αναζήτησης j' για μία χρονική περίοδο. Δεδομένου ότι ο χρόνος αναζήτησης του κελιού "προορισμού" περιλαμβάνεται στο $d(j, j')$, έχουμε ότι $d(j, j') \geq 1$ για όλα τα j, j' και $d(j, j') = 1$ μόνο εάν ο χρόνος μετάβασης από j στο j' είναι μηδέν. Φυσικά, μια μετακόμιση μπορεί επίσης να διαρκέσει μία ή περισσότερες χρονικές περιόδους, κατά τις οποίες ο ερευνητής δεν μπορεί να πραγματοποιήσει αναζήτηση.

Αφήνουμε το $Z(j, j', t)$ να υποδηλώνει τον αριθμό των ερευνητών που καταλαμβάνουν το κελί j στη χρονική περίοδο $t \in \mathcal{T}$ και που μετακινούνται στο κελί j' στη συνέχεια, και έστω Z να συμβολίζει το διάνυσμα με τα συστατικά $Z(j, j', t)$, $j, j' \in \mathcal{J}$, and $t \in \mathcal{T}$. Αναφερόμαστε στο Z ως σχέδιο αναζήτησης.

Υποθέτουμε ότι κάθε ερευνητής είναι εξοπλισμένος με έναν ατελή αισθητήρα. Κάθε χρονική περίοδος $t \in \mathcal{T}$ κατά την οποία ένας ερευνητής καταλαμβάνει ένα κελί, ο αισθητήρας του ερευνητή κάνει μια "κοίταγμα" στο κελί για τον στόχο. Όταν ένας ερευνητής βρίσκεται σε μεταφορά μεταξύ κελιών, ο αισθητήρας είναι ανενεργός. Εάν ο στόχος και ένας ερευνητής καταλαμβάνουν κελί j στη χρονική περίοδο t και j' είναι το προηγούμενο κελί του ερευνητή, τότε η πιθανότητα ότι η ματιά του ερευνητή κατά τη χρονική περίοδο t ανιχνεύσει τον στόχο

είναι $g(j', j, t) \in [0, 1]$. Όπως και πριν, αναφερόμαστε σε αυτή την πιθανότητα ως πιθανότητα ανίχνευσης με ματιά.

Υποθέτουμε ότι οι πιθανότητες ανίχνευσης αναλαμπής είναι ανεξάρτητες σε όλες τις εμφανίσεις των ερευνητών. Θυμηθείτε ότι το $Z(j', j, t - d(j', j))$ είναι ο αριθμός των ερευνητών που υπάρχουν στο κελί j και που έφτασαν σε αυτό το κελί από το κελί j' . Σαφώς, για να φτάσουν στο κελί j για την ώρα t , αυτοί οι ερευνητές πρέπει να έχουν αναχωρήσει από το κελί j' τη στιγμή $t - d(j', j)$. Ως εκ τούτου, δεδομένου του σχεδίου αναζήτησης Z , η πιθανότητα κανένας ερευνητής να μην εντοπίσει τον στόχο στο κελί j στη χρονική περίοδο t , δεδομένου ότι ο στόχος καταλαμβάνει το κελί j εκείνη τη στιγμή, ισούται

$$\prod_{j' \in \mathcal{R}(j)} [1 - g(j', j, t)]^{Z(j', j, t - d(j', j))} = \exp(-\sum_{j' \in \mathcal{R}(j)} \alpha(j', j, t) Z(j', t - d(j', j))) \quad (2.1)$$

όπου για όλα $j \in \mathcal{J}$, $j' \in \mathcal{R}(j)$, και $t \in \mathcal{T}$,

$$\alpha(j', j, t) = -\ln[1 - g(j', j, t)] \quad (2.2)$$

είναι το ποσοστό ανίχνευσης. Επιδιώκουμε να βρούμε ένα σχέδιο αναζήτησης Z έτσι ώστε η πιθανότητα κανένας ερευνητής να μην ανιχνεύσει τον στόχο να αχιστοποιείται υπό τους περιορισμούς του Z , ειδικά εκείνους που διασφαλίζουν ότι το Z δεν παραβιάζει την απαίτηση ότι κάθε ερευνητής πρέπει να κινείται σύμφωνα με την εκκίνηση προς τα εμπρός και να υπακούει στους δεδομένους χρόνους διαδρομής μεταξύ των κελιών. Οι επόμενες υποενότητες παρέχουν μαθηματικές διατυπώσεις προγραμματισμού αυτού του προβλήματος.

2.1.1 Μη γραμμικό μοντέλο βελτιστοποίησης

Το πρόβλημα της ελαχιστοποίησης του προβλήματος μη ανίχνευσης παίρνει τη μορφή ενός μικτού ακέραιου μη γραμμικού προγράμματος.

Μοντέλο SPI:

Δείκτες

j, j'	κελιά ($j, j' \in \mathcal{J} = \{1, \dots, J\}$).
t	χρονικές περιόδους ($t \in \mathcal{T}_0 = \{0\} \cup \mathcal{T}, \mathcal{T} = \{1, \dots, T\}$).
ω	διαδρομή στόχου ($\omega \in \Omega$).

Σκηνικά

$\mathcal{F}(j) \subseteq \mathcal{J}$	προς τα εμπρός αστέρι του κελιού j για τους ερευνητές.
$\mathcal{R}(j) \subseteq \mathcal{J}$	αντίστροφο αστέρι του κελιού j για τους ερευνητές.

Παράμετροι

$\alpha(j', j, t)$	ρυθμός ανίχνευσης στο κελί σε χρονική περίοδο t έναντι του στόχου για έναν ερευνητή που προηγουμένως απασχολούσε το j' .
$\zeta(j, t, \omega)$	1 εάν το κελί βρίσκεται στη διαδρομή στόχου w στη χρονική περίοδο t , διαφορετικά 0.
$z(j, 0)$	αριθμός ερευνητών που καταλαμβάνουν το κελί στο χρόνο περιόδου 0.
$p(\omega)$	πιθανότητα ο στόχος να πάρει το μονοπάτι ω .
$d(j, j')$	ο αριθμός των χρονικών περιόδων που απαιτούνται για έναν ερευνητή για να μετακινηθεί απευθείας από κελί j σε κελί j' και αναζήτηση j' .

Μεταβλητές Απόφασης

$Z(j, j', t)$	ο αριθμός των ερευνητών που καταλαμβάνουν το κελί j στη χρονική περίοδο t και που μετακινούνται στο κελί j' στη συνέχεια. (Το Z δηλώνει το διάνυσμα με συνιστώσες $Z(j, j', t), j, j' \in \mathcal{J}, t \in \mathcal{T}_0$).
---------------	--

Λειτουργία

$f(Y)$	πιθανότητα μη ανίχνευσης του στόχου δεδομένου Y . $= \sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) \exp(-\sum_{j \in \mathcal{J}, t \in \mathcal{T}} \zeta(j, t, \omega) \alpha(j, t) Y(j, t)) \quad (2.3)$
--------	---

Διατύπωση

- $\min f(Y) \text{ s.t. } \sum_{j' \in \mathcal{R}(j)} Z(j', j, t - d(j', j)) = \sum_{j' \in \mathcal{F}(j)} Z(j, j', t), \forall j \in \mathcal{J}, t \in \mathcal{T} \quad (2.4)$
- $\sum_{j' \in \mathcal{F}(j)} Z(j, j', 0) = z(j, 0), \forall j \in \mathcal{J} \quad (2.5)$
- $\sum_{j' \in \mathcal{R}(j)} Z(j', j, t - d(j', j)) = Y(j, t), \forall j \in \mathcal{J}, t \in \mathcal{T} \quad (2.6)$
- $Z(j, j', t) \geq 0, \forall j, j' \in \mathcal{J}, t \in \mathcal{T}_0 \quad (2.7)$
- $Y(j, t) \in \{0, 1, 2, \dots, S\}, \forall j \in \mathcal{J}, t \in \mathcal{T} \quad (2.8)$

Η αντικειμενική συνάρτηση f στο (2.3) στοχεύει στην ελαχιστοποίηση της πιθανότητας μη ανίχνευσης και είναι κυρτή και συνεχώς διαφοροποιήσιμη. Ωστόσο, ο περιορισμός του $Y(j, t)$ σε ακέραιους αριθμούς κάνει το **SP1** ένα μη γραμμικό πρόγραμμα μικτού ακέραιου με κυρτή χαλάρωση. Οι περιορισμοί (2.4) διασφαλίζουν τη συνέχεια της διαδρομής για κάθε ερευνητή. Συγκεκριμένα, η δεξιά πλευρά του (2.4) δίνει τον συνολικό αριθμό των ερευνητών στο κελί j τη στιγμή t . Το άθροισμα πάνω από το j' αντιστοιχεί σε όλα τα πιθανά κελιά στα οποία θα μπορούσαν να μετακινηθούν αυτοί οι ερευνητές. Η αριστερή πλευρά του (2.4) αντιπροσωπεύει την προέλευση αυτών των ερευνητών. Κάθε ένα από αυτά πρέπει να ήταν στο κελί j' αμέσως πριν φτάσουν στο κελί j . Για να διασφαλιστεί ότι έφτασαν στο κελί j για την ώρα t , αναχώρησαν j' την ώρα $t - d(j', j)$. Οι περιορισμοί (2.5) εφαρμόζουν τις αρχικές συνθήκες για τους ερευνητές.

Εφόσον το **SP1** ανήκει στην κατηγορία των μη γραμμικών προγραμμάτων μεικτού ακέραιου αριθμού, είναι σαφές ότι ισχύουν λύτες γενικού σκοπού όπως το Bonmin (COIN-OR 2009), το DICOPT (Grossmann et al. 2008), ακόμη και το Microsoft Excel Solver. Στο Κεφ. 3, περιγράφουμε τους αλγόριθμους πίσω από τέτοιους λύτες. Στη συνέχεια, συζητάμε δύο αναδιατυπώσεις του **SP1**, που είναι γραμμικά προγράμματα μικτού ακέραιου αριθμού. Αυτό επιτρέπει την εφαρμογή μιας μεγαλύτερης συλλογής λύσεων βελτιστοποίησης και συχνά εξοικονόμηση υπολογιστών. Τονίζουμε ότι δεν υπάρχει προσέγγιση σε αυτές τις αναδιατυπώσεις. Η πρώτη γραμμικοποίηση είναι εφαρμόσιμη στην περίπτωση ενός υπό όρους μοντέλου στόχου με μέτριο αριθμό πιθανών διαδρομών στόχου. Η δεύτερη γραμμικοποίηση περιορίζεται στην κατάσταση με ένα μοντέλο μαρκοβιανού στόχου.

2.1.2 Γραμμικοποίηση για υπό όρους μοντέλο στόχου

Η αντικειμενική συνάρτηση στο **SP1** είναι ένα πεπερασμένο άθροισμα εκθετικών συναρτήσεων σε όλες τις πιθανές διαδρομές στόχου. βλέπε (2.3). Εδώ κάνουμε την πρόσθετη υπόθεση ότι ο ρυθμός ανίχνευσης είναι σταθερός σε όλα τα κελιά και τις χρονικές περιόδους και απλώς γράφουμε α . Στη συνέχεια, κάθε εκθετική συνάρτηση έχει ως όρισμα ένα ακέραιο πολλαπλάσιο του α μεταξύ 0 και ST , όπου S είναι ο αριθμός των ερευνητών. Ως εκ τούτου, η αντικειμενική συνάρτηση στο **SP1** μπορεί αντιπροσωπεύονται ισοδύναμα από τμηματικές γραμμικές συναρτήσεις, με πεπερασμένο αριθμό τεμαχίων. Αυτή η παρατήρηση οδηγεί στην πρώτη γραμμικοποίηση του **SP1**, όπου ορισμένοι δείκτες, σύνολα, παράμετροι και μεταβλητές είναι όπως στο **SP1**.

Μοντέλο SP1-L:

Πρόσθετοι Δείκτες

i αριθμός εμφανίσεων σε μια διαδρομή στόχου ($i = 0, 1, \dots, ST$).

Πρόσθετες μεταβλητές

$U(\omega)$ βοηθητική μεταβλητή που αντιπροσωπεύει την πιθανότητα μη ανίχνευσης δεδομένης διαδρομής στόχου ω .

Διατύπωση

$$\begin{aligned} & \min \sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) U(\omega) \\ & \text{s.t. } e^{-i\alpha}(1 + i - ie^{-\alpha}) + \frac{1}{\alpha} e^{-i\alpha}(e^{-\alpha} - 1) \sum_{j \in J, t \in T} \zeta(j, t, \omega) \alpha Y(j, t) \leq U(\omega) \quad \forall \omega, i \quad (2.9) \\ & \text{και (2.4) – (2.8)} \end{aligned}$$

Το **SP1-L** είναι ένα γραμμικό πρόγραμμα μεικτού ακέραιου αριθμού. Οι περιορισμοί (2.9) διασφαλίζουν ότι η βέλτιστη λύση καταλήγει σε μια τιμή $U(\omega)$ που είναι ακριβώς η υπό όρους πιθανότητα μη ανίχνευσης δεδομένου ότι ο στόχος ακολουθεί τη διαδρομή ω . Ειδικά,

$$\exp \left(\sum_{j \in \mathcal{J}, t \in \mathcal{T}} \zeta(j, t, \omega) \alpha Y(j, t) \right) \quad (2.10)$$

είναι απλώς συνάρτηση της μορφής $\exp(-az)$, με $z = \sum_{j \in \mathcal{J}, t \in \mathcal{T}} \zeta(j, t, \omega) Y(j, t)$.

Εφόσον τα $\zeta(j, t, \omega)$ είναι δυαδικά και το $Y(j, t)$ είναι ένας μη αρνητικός ακέραιος όχι μεγαλύτερος από το S , το z μπορεί να λάβει μόνο έναν πεπερασμένο αριθμό τιμών. Στην πραγματικότητα, αρκεί να θεωρήσουμε το z μεταξύ 0 και ST . Οι μη ακέραιες τιμές του z είναι ασήμαντες. Ως εκ τούτου, μπορούμε να αντικαταστήσουμε το $\exp(-az)$ από την τμηματικά γραμμική συνάρτηση που συμπίπτει με την $\exp(-az)$ για $z = 0, 1, \dots, ST$. Κάθε συγγενικό κομμάτι σε αυτή τη συνάρτηση έχει τη μορφή που δίνεται στην αριστερή πλευρά του (2.9). Η χρήση μιας τυπικής τεχνικής για τη μετατροπή μιας τμηματικής γραμμικής συνάρτησης σε μια συλλογή συγγενικών περιορισμών οδηγεί στο (2.9).

Οι άλλοι περιορισμοί στο **SP1-L** είναι πανομοιότυποι με αυτούς του **SP1**. Ο αριθμός των περιορισμών και των μεταβλητών στο **SP1-L** αυξάνεται γραμμικά ως προς τον αριθμό των πιθανών μονοπατιών στόχου και, ως εκ τούτου, η διατύπωση μπορεί να γίνει δύσκολο να λυθεί για μεγάλους αριθμούς τέτοιων μονοπατιών. Αυτό παρακινεί μια δεύτερη γραμμικοποίηση του **SP1**.

2.1.3 Γραμμικοποίηση για το Μαρκοβιανό Μοντέλο Στόχου

Η δεύτερη γραμμικοποίηση του **SP1**, που συμβολίζεται με **SP1-LM**, προϋποθέτει έναν Μαρκοβιανό στόχο μοντέλο όπου ο στόχος τη στιγμή $t \in \mathcal{T}$ κινείται σύμφωνα με έναν πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης Γ_t με στοιχεία $\Gamma_t(j, j')$, $j, j' \in \mathcal{J}$. Συγκεκριμένα, $\Gamma_t(j, j')$ είναι η πιθανότητα ότι ένας στόχος που καταλαμβάνει κελί j στη χρονική περίοδο t καταλαμβάνει το κελί j' στη χρονική περίοδο $t + 1$. Όπως βλέπουμε παρακάτω, δεν είναι απαραίτητο να απαριθμήσουμε όλες τις πιθανές διαδρομές στόχου στην περίπτωση ενός Μαρκοβιανού μοντέλου στόχου.

Εξάγουμε το **SP1-LM** από το **SP1** εισάγοντας μια "κατάσταση πληροφοριών" $Q(j, t)$ που ισούται με την πιθανότητα ότι ο στόχος καταλαμβάνει κελί j στη χρονική περίοδο t και ότι ο στόχος δεν έχει εντοπιστεί πριν από το t . Δεδομένης αυτής της κατάστασης πληροφοριών και ενός σχεδίου αναζήτησης με s ερευνητές που καταλαμβάνουν το κελί j στη χρονική περίοδο t , η πιθανότητα ανίχνευσης στο κελί j στη χρονική περίοδο t και χωρίς προηγούμενη ανίχνευση,

είναι απλώς $Q(j, t)(1 - \exp[-sa(j, t)])$, όπου $a(j, t)$ είναι ο ρυθμός ανίχνευσης κάθε ερευνητή στο κελί j στη χρονική περίοδο t . Ας υποθέσουμε ότι ένα σχέδιο αναζήτησης περιγράφεται από τις δυαδικές μεταβλητές

$V(j, t, s) = 1$ αν s οι ερευνητές καταλαμβάνουν κελί j σε χρονική περίοδο t , και 0 διαφορετικά. (2.11)

Στη συνέχεια, γίνεται η πιθανότητα ανίχνευσης σε ολόκληρο τον χρονικό ορίζοντα

$$\sum_{t \in T} \sum_{j \in J} Q(j, t) (1 - \exp[-a(j, t) \sum_{s=1}^S sV(j, t, s)]) \quad (2.12).$$

Η κατάσταση πληροφοριών $Q(j, t)$ εξαρτάται από το σχέδιο αναζήτησης ως εξής. Σαφώς, $Q(j, 1) = p(j, 1)$, η δεδομένη πιθανότητα ότι ο στόχος καταλαμβάνει το κελί j αρχικά. Επιπλέον, από τον ορισμό του $Q(j, t)$ και την υπόθεση ενός μαρκοβιανού μοντέλου στόχου προκύπτει ότι

$$Q(j, t+1) = \sum_{j' \in J} \Gamma_t(j', j) Q(j', t) \exp[-a(j', t) \sum_{s=1}^S sV(j', t, s)] \quad (2.13)$$

για όλα τα $j \in J$ και $t = 1, 2, \dots, T-1$. Ενώ οι εκφράσεις (2.12) και (2.13) είναι μη γραμμικές, μπορούν να γραμμικοποιηθούν όπως φαίνεται στην ακόλουθη σύνθεση. δείτε περαιτέρω επεξήγηση κάτω από τη δήλωση μοντέλου.

Μοντέλο SP1-LM:

Πρόσθετοι Δείκτες

s αριθμός των ερευνητών σε ένα κελί ($s \in \mathcal{S} = \{1, \dots, S\}$).

Πρόσθετες Παράμετροι

$a(j, t)$ ρυθμός ανίχνευσης στο κελί j στη χρονική περίοδο t για οποιονδήποτε ερευνητή.

$\Gamma_t(j, j')$ πιθανότητα ένας στόχος που καταλαμβάνει το κελί j στη χρονική περίοδο t καταλαμβάνει το κελί j' στη χρονική περίοδο $t+1$.

$p(j, t)$ πιθανότητα ότι ο στόχος καταλαμβάνει το κελί j στη χρονική περίοδο t , δηλαδή, $p(j, t) = \sum_{j'} p(j', t-1) \Gamma_{t-1}(j', j)$, $t = 2, 3, \dots, T$, $p(j, 1)$ δεδομένο.

Πρόσθετες μεταβλητές

$Q(j, t)$ πιθανότητα ότι ο στόχος καταλαμβάνει το κελί j στη χρονική περίοδο t και στόχος δεν ανιχνεύθηκε πριν από το t .

$R(j, t, s)$ βοηθητική μεταβλητή που ισούται $Q(j, t)(1 - e^{-sa(j, t)})$ εάν $V(j, t, s) = 1$ αλλιώς 0.

$V(j, t, s)$ 1 εάν υπάρχουν s ερευνητές που καταλαμβάνουν το κελί j στη χρονική περίοδο t και αλλιώς 0.

$W(j, t)$ βοηθητική μεταβλητή που ισούται $Q(j, t)e^{-sa(j, t)}$ εάν $V(j, t, s) = 1$ αλλιώς $Q(j, t)$.

Διατύπωση

- $\min 1 - \sum_{t \in T} \sum_{j \in J} \sum_{s \in S} R(j, t, s) \quad (2.14)$
- s.t. $R(j, t, s) \leq p(j, t)(1 - e^{-sa(j, t)})V(j, t, s), \forall j \in J, t \in \mathcal{T}, s \in \mathcal{S} \quad (2.15)$
- $R(j, t, s) \leq (1 - e^{-sa(j, t)})Q(j, t), \forall j \in J, t \in \mathcal{T}, s \in \mathcal{S} \quad (2.16)$
- $Q(j, t+1) = \sum_{j' \in J} \Gamma_t(j', j)W(j', t), \forall j \in J, t = 1, \dots, T-1 \quad (2.17)$
- $W(j, t) \leq Q(j, t), \forall j \in J, t \in \mathcal{T} \quad (2.18)$
- $W(j, t) \leq e^{-sa(j, t)}Q(j, t) + p(j, t)(1 - e^{-sa(j, t)})(1 - V(j, t, s)), \forall j \in J, t \in \mathcal{T}, s \in \mathcal{S} \quad (2.19)$
- $Q(j, 1) = p(j), \forall j \in J \quad (2.20)$
- $Q(j, t) \leq p(j, t), \forall j \in J, t \in \mathcal{T}_0 \quad (2.21)$
- $\sum_{j' \in \mathcal{R}(j)} Z(j', j, t - d(j', j)) = \sum_s sV(j, t, s), \forall j \in J, t \in \mathcal{T} \quad (2.22)$
- $\sum_{s \in S} V(j, t, s) \leq 1, \forall j \in J, t \in \mathcal{T} \quad (2.23)(2.4)(2.5)$
- $Q(j, t), R(j, t, s), W(j, t), Z(j, j', t) \geq 0, \forall j, j' \in J, t \in \mathcal{T}, s \in \mathcal{S} \quad (2.24)$
- $V(j, t, s) \in \{0, 1\}, \forall j \in J, t \in \mathcal{T}, s \in \mathcal{S} \quad (2.25)$

Η αντικειμενική συνάρτηση (2.14) στο **SP1-LM** δίνει την πιθανότητα μη ανίχνευσης. η ορθότητά του προκύπτει από το (2.12). Ωστόσο, επειδή η (2.12) είναι μη γραμμική, τη γραμμικοποιούμε χρησιμοποιώντας τη βοηθητική μεταβλητή $R(j, t, s)$, που ισούται με $Q(j, t)(1 - e^{-sa(j, t)})$ αν $V(j, t, s) = 1$ και ισούται με 0 διαφορετικά. Αυτή η γραμμικοποίηση επιτυγχάνεται χρησιμοποιώντας περιορισμούς (2.15) και (2.16). Αυτός είναι ένας τύπος σχηματισμού "big-M" (βλέπε Rardin 1997, σελ. 642-643) όπου οποιαδήποτε σταθερά τουλάχιστον τόσο μεγάλη όσο το $Q(j, t)$ θα αρκούσε μπροστά από το $(1 - e^{-sa(j, t)})$ στο (2.15). Θυμηθείτε ότι το $Q(j, t)$ είναι η πιθανότητα ο στόχος να καταλαμβάνει το κελί j στη χρονική περίοδο t και ο στόχος να μην έχει εντοπιστεί πριν από το t . Επιπλέον, θυμηθείτε ότι το $p(j, t)$ είναι η πιθανότητα ο στόχος να καταλαμβάνει το κελί j στη χρονική περίοδο t . Ως εκ τούτου, $p(j, t) \geq Q(j, t)$ για όλα τα j, t . Κατά συνέπεια, ορίσαμε το "big-M" στην (2.15) σε $p(j, t)$. Χρησιμοποιούμε επίσης $p(j, t)$ για να δεσμεύσουμε το εύρος του $Q(j, t)$ στο (2.21).

Η εξέλιξη της κατάστασης πληροφοριών είναι επίσης μη γραμμική. βλέπε (2.13). Στο **SP1-LM**, γραμμικοποιούμε αυτήν την έκφραση μέσω της βοηθητικής μεταβλητής $W(j, t)$ και των περιορισμών (2.17) - (2.19). Σημειώστε ότι το $W(j, t)$ ισούται με $Q(j, t)e^{-sa(j, t)}$ εάν $V(j, t, s) = 1$ και ισούται με $Q(j, t)$ διαφορετικά. Η αρχική θέση στόχου υπολογίζεται στο (2.20). Η δυαδική μεταβλητή $V(j, t, s)$ σχετίζεται με το $Z(j, j', t)$ στις (2.22) και (2.23).

2.2 Ετερογενείς αναζητητές και πολλαπλοί στόχοι

Στη συνέχεια επεκτείνουμε την παραπάνω διατύπωση του **SP1** στην περίπτωση πολλαπλών ερευνητών διαφορετικών τύπων, πολλαπλών στόχων, πρόσθετων περιορισμών. Ξεκινάμε με πρόσθετη σημειογραφία.

Υπάρχουν K ανεξάρτητοι στόχοι που υπάρχουν με κάθε στόχο $k \in K = \{1, 2, \dots, K\}$ καταλαμβάνει ένα κελί σε κάθε χρονική περίοδο. Η ποσότητα $\omega_{k,t} \in \mathcal{J}$ υποδηλώνει το (τυχαίο) κελί που ο στόχος k καταλαμβάνει κατά τη διάρκεια του χρόνου $t \in \mathcal{T}$. Το διάνυσμα των κελιών $\omega_k = (\omega_{k,1}, \omega_{k,2}, \dots, \omega_{k,T})$ υποδηλώνει μια πιθανή διαδρομή για τον στόχο k και το $p_k(\omega_k)$ υποδηλώνει η δεδομένη πιθανότητα ο στόχος k να πάρει αυτό το μονοπάτι. Το σύνολο Ω_k υποδηλώνει τη συλλογή όλων των πιθανών μονοπατιών για τον στόχο k με θετική πιθανότητα $p_k(\omega_k)$ και, φυσικά, $\sum_{\omega_k \in \Omega_k} p_k(\omega_k) = 1$ για όλα τα k .

Υπάρχουν L κατηγορίες ερευνητών με κάθε κατηγορία $\ell \in L = \{1, 2, \dots, L\}$ να περιέχει S_ℓ πανομοιότυπους ερευνητές. Κατά τη διάρκεια κάθε χρόνου $t \in \mathcal{T}_0$, κάθε ερευνητής καταλαμβάνει ένα κελί ή βρίσκεται σε διαμετακόμιση μεταξύ των κελιών. Όταν καταλαμβάνει ένα κελί j , ένας ερευνητής της κλάσης ℓ μπορεί να επιλέξει να μετακινηθεί σε οποιοδήποτε κελί "γειτονικό" στο j όπως ορίζεται από το μπροστινό αστέρι $\mathcal{F}_\ell(j) \subset \mathcal{J}$. Αφήνουμε επίσης $\mathcal{R}_\ell(j) \subset \mathcal{J}$ να υποδηλώνει το αντίστροφο αστέρι του κελιού j , το οποίο αντιπροσωπεύει το σύνολο των κελιών από τα οποία ένας ερευνητής της κλάσης ℓ μπορεί να φτάσει στο κελί j με μία κίνηση. Κατά σύμβαση, $j \in \mathcal{F}_\ell(j)$ και $j \in \mathcal{R}_\ell(j)$. Ένας ερευνητής της κλάσης ℓ απαιτεί $d_\ell(j, j')$ χρονικές περιόδους για να μετακινηθεί από κελί j σε κελί $j' \in \mathcal{F}_\ell(j)$ και σε κελί αναζήτησης j' για μία χρονική περίοδο. Δεδομένου ότι ο χρόνος αναζήτησης του κελιού "προορισμού" j' περιλαμβάνεται στο $d_\ell(j, j')$, έχουμε ότι $d_\ell(j, j') \geq 1$ για όλα τα ℓ, j, j' και $d_\ell(j, j') = 1$ μόνο αν ο χρόνος μετάβασης από το j στο j' είναι μηδέν. Φυσικά, μια μετακόμιση μπορεί επίσης να διαρκέσει μία ή περισσότερες χρονικές περιόδους, κατά τις οποίες ο ερευνητής δεν μπορεί να πραγματοποιήσει αναζήτηση.

Αφήνουμε το $Z_\ell(j, j', t)$ να δηλώνει τον αριθμό των ερευνητών της κλάσης ℓ που καταλαμβάνουν το κελί j στη χρονική περίοδο $t \in \mathcal{T}_0$ και που μετακινούνται στο κελί j' στη συνέχεια, και έστω ότι το Z συμβολίζει το διάνυσμα με συνιστώσες $Z_\ell(j, j', t)$, $\ell \in L, j, j' \in \mathcal{J}$ και $t \in \mathcal{T}_0$. Αναφερόμαστε στο Z ως σχέδιο αναζήτησης.

Η πιθανότητα κάποιος που αναζητά έναν στόχο από έναν ερευνητή σε ένα κελί να εντοπίσει τον στόχο, δεδομένου ότι ο στόχος καταλαμβάνει αυτήν τη στιγμή το κελί, μπορεί να εξαρτάται από την κατηγορία του ερευνητή (είναι ερευνητής υψηλής ή χαμηλής ποιότητας;), το χαρακτηριστικό του στόχου (είναι γυαλιστερό ή καμουφλαρισμένο;), το κελί (είναι δασωμένο ή ανοιχτό;) και ώρα της ημέρας (είναι φωτεινό μεσημέρι ή σκοτεινά μεσάνυχτα;). Συγκεκριμένα, εάν ο στόχος k και ένας ερευνητής της κλάσης ℓ καταλαμβάνουν το κελί j στη χρονική περίοδο t και j' είναι το προηγούμενο κελί του ερευνητή, τότε η πιθανότητα η ματιά του ερευνητή κατά τη χρονική περίοδο t να εντοπίσει τον στόχο είναι $g_{\ell,k}(j', j, t) \in [0, 1)$. Όπως παραπάνω, αναφερόμαστε σε αυτή την πιθανότητα ως πιθανότητα ανίχνευσης με ματιά.

Διατηρούμε την υπόθεση ότι οι πιθανότητες ανίχνευσης αναλαμπής είναι ανεξάρτητες σε όλες τις εμφανίσεις των ερευνητών. Ως εκ τούτου, δεδομένου του σχεδίου αναζήτησης Z , η πιθανότητα κανένας ερευνητής να μην ανιχνεύσει στόχο k σε κελί j στη χρονική περίοδο t , δεδομένου ότι ο στόχος k καταλαμβάνει το κελί j εκείνη τη στιγμή, ισούται

$$\prod_{\ell \in L} \prod_{j' \in \mathcal{R}_{\ell}(j)} [1 - g_{\ell,k}(j', j, t)]^{Z_{\ell}(j', j, t - d_{\ell}(j', j))} = \exp(-\sum_{\ell \in L} \sum_{j' \in \mathcal{R}_{\ell}(j)} a_{\ell,k}(j', j, t) Z_{\ell}(j', j, t - d_{\ell}(j', j))) \quad (2.26)$$

όπου για όλα

$$\ell \in L, j \in \mathcal{J}, j' \in \mathcal{R}_{\ell}(j), t \in \mathcal{T}, \text{ και } k \in K, a_{\ell,k}(j', j, t) = -\ln[1 - g_{\ell,k}(j', j, t)] \quad (2.27)$$

είναι το ποσοστό ανίχνευσης.

Επιδιώκουμε να ελαχιστοποιήσουμε, επιλέγοντας ένα σχέδιο αναζήτησης Z , την πιθανότητα να μην εντοπιστεί ο στόχος με τη μεγαλύτερη πιθανότητα μη ανίχνευσης κατά τη διάρκεια του χρονικού ορίζοντα. Μια άλλη δυνατότητα είναι να ελαχιστοποιηθεί το άθροισμα των πιθανοτήτων μη ανίχνευσης μεταξύ των στόχων. Αυτό συνεπάγεται μόνο μικρές αλλαγές στο παρακάτω σκεύασμα. Η τελευταία επιλογή δίνει λιγότερη έμφαση στον "λιγότερο ανιχνεύσιμο" στόχο και συνήθως κατανέμει την προσπάθεια αναζήτησης πιο ομοιόμορφα στους στόχους. Η προηγούμενη επιλογή, ωστόσο, διασφαλίζει ότι κανένας στόχος δεν «αγνοείται» με αντίστοιχη χαμηλή πιθανότητα ανίχνευσης.

Η επιλογή του σχεδίου αναζήτησης εξαρτάται από τους περιορισμούς διαδρομής που προκαλούνται από τα εμπρός και τα πίσω αστέρια $\mathcal{F}_{\ell}(j)$ και $\mathcal{R}_{\ell}(j)$, τη δεδομένη αρχική συνθήκη ότι $z_{\ell}(j, 0)$ αναζητητές της κατηγορίας ℓ καταλαμβάνουν το κελί j σε χρονική περίοδο 0 , και περιορισμούς αποσυναρμολόγησης σχετίζεται με τον μέγιστο αριθμό ερευνητών που μπορούν να καταλάβουν ένα κελί ανά πάσα στιγμή και άλλες επιχειρησιακές απαιτήσεις. Αφήνουμε n_j να είναι ο μέγιστος αριθμός ερευνητών που επιτρέπεται να

καταλαμβάνουν το κελί j κατά τη διάρκεια οποιασδήποτε χρονικής περιόδου $t \in \mathcal{T}$. Επιπλέον, για κάθε πιθανή κίνηση μεταξύ δύο κελιών για έναν ερευνητή, ορίζουμε ένα αντίστοιχο σύνολο ασυμβίβαστων κινήσεων μεταξύ κελιών που θα προκαλούσαν παρεμβολές εάν πραγματοποιούνταν από άλλον ερευνητή. Συγκεκριμένα, εάν ένας ερευνητής της κλάσης ℓ μετακινηθεί από το κελί j στο κελί j' ξεκινώντας από τη χρονική περίοδο t , τότε το σύνολο $D(\ell, j, j', t)$ δίνει όλες τις τετραπλές κλάσεις αναζήτησης, ζεύγη κελιών και χρονικές περιόδους που δεν είναι συμβατές με την κίνηση αυτού του ερευνητή. Μπορεί κανείς εύκολα να ενσωματώσει ουσιαστικά οποιονδήποτε άλλο πιθανό περιορισμό με μικρή δυσκολία. Ωστόσο, αυτές οι προσθήκες ενδέχεται να οδηγήσουν σε επιπλέον χρόνους υπολογισμού. Παραλείπουμε περαιτέρω λεπτομέρειες και απλώς αναφέρουμε τον Rardin (1997) για μια προσιτή εισαγωγή στη διατύπωση μαθηματικών προγραμμάτων και στους Sato και Royset (2010) για πιθανούς τύποι πρόσθετων περιορισμών που σχετίζονται με τον κίνδυνο και την κατανάλωση καυσίμου. Η διατύπωση στη συνέχεια παίρνει τη μορφή ενός μη γραμμικού προγράμματος μικτού ακέραιου αριθμού.

Μοντέλο SPX:

Δείκτες

j, j'	κελιά ($j, j' \in \mathcal{J} = \{1, \dots, J\}$).
t	χρονικές περιόδους ($t \in \mathcal{T} = \{0\} \cup \mathcal{T}, \mathcal{T} = \{1, \dots, T\}$).
ℓ	τάξη ερευνητών ($\ell \in L = \{1, \dots, L\}$).
k	στόχος ($k \in K = \{1, \dots, K\}$).
ω_k	διαδρομή στόχου k ($\omega_k \in \Omega_k$).

Σκηνικά

$\mathcal{F}_\ell(j) \subseteq \mathcal{J}$	εμπρός αστέρι του κελιού j για αναζήτηση της κατηγορίας ℓ .
$\mathcal{R}_\ell(j) \subseteq \mathcal{J}$	αντίστροφο αστέρι του κελιού j για αναζήτηση της κατηγορίας ℓ .
$D(\ell, j, j', t)$	σύνολο τετραπλών (ℓ', j, j'', t') ασύμβατα με έναν ερευνητή της κατηγορίας ℓ που μετακινείται από το j στο j' ξεκινώντας από τη χρονική περίοδο t .

Παράμετροι

$\alpha_{\ell k}(j', j, t)$	ρυθμός ανίχνευσης στο κελί j στη χρονική περίοδο t έναντι του στόχου k για έναν ερευνητή της κατηγορίας ℓ όταν ο ερευνητής απασχολούσε προηγουμένως το j' .
$\zeta(j, t, \omega_k)$	1 εάν το κελί j βρίσκεται στη διαδρομή στόχου ω_k στη χρονική περίοδο t , διαφορετικά 0.

$z_\ell(j, 0)$	αριθμός ερευνητών της κατηγορίας l που καταλαμβάνουν το κελί j στη χρονική περίοδο 0 .
S_ℓ	αριθμός ερευνητών κατηγορίας l .
$p_k(\omega_k)$	πιθανότητα ο στόχος k να πάρει τη διαδρομή ω_k .
$d_\ell(j, j')$	Ο αριθμός των χρονικών περιόδων που απαιτούνται για έναν ερευνητή της κατηγορίας l για να μετακινηθεί απευθείας από το κελί j στο κελί j' και να αναζητήσει j' .
n_j	μέγιστος αριθμός ερευνητών που καταλαμβάνουν το κελί j σε μια χρονική περίοδο.

Μεταβλητές Απόφασης

$Z_\ell(j, j', t)$	αριθμός ερευνητών της κατηγορίας l που καταλαμβάνουν το κελί j στη χρονική περίοδο t και που μετακινούνται στο κελί j' στη συνέχεια. (Το Z δηλώνει το διάνυσμα με συνιστώσες $Z_\ell(j, j', t)$, $\ell \in L$, $j, j' \in \mathcal{J}$, $t \in \mathcal{T}_0$)
$Y_k(j, t)$	βοηθητική μεταβλητή που αντιπροσωπεύει το συνολικό ρυθμό ανίχνευσης που εφαρμόζεται στο κελί j έναντι της χρονικής περιόδου του συγγενικού στόχου t . (Το Y_k δηλώνει το διάνυσμα με συστατικά $Y_k(j, t)$, $j \in \mathcal{J}$, $t \in \mathcal{T}$).

Λειτουργίες

$$f_k(Y_k) \quad \text{πιθανότητα μη ανίχνευσης του στόχου } k$$

$$= \sum_{\omega_k \in \Omega_k} p_k(\omega_k) \exp(- \sum_{j \in \mathcal{J}, t \in \mathcal{T}} \zeta(j, t, \omega_k) Y_k(j, t)) \quad (2.28).$$

Διατύπωση

- $\min \max_{k \in K} f_k(Y_k) \quad (2.29)$
- s.t. $\sum_{j' \in \mathcal{R}_\ell(j)} Z_\ell(j', j, t - d_\ell(j', j)) = \sum_{j' \in \mathcal{F}_\ell(j)} Z_\ell(j, j', t) \quad \forall \ell \in L, j \in \mathcal{J}, t \in \mathcal{T} \quad (2.30)$
- $\sum_{j' \in \mathcal{F}_\ell(j)} Z_\ell(j, j', 0) = z_\ell(j, 0), \forall \ell \in L, j \in \mathcal{J} \quad (2.31)$
- $\sum_{\ell \in L} \sum_{j' \in \mathcal{R}_\ell(j)} a_{\ell, k}(j', j, t) Z_\ell(j', j, t - d_\ell(j', j)) = Y_k(j, t), \forall \ell \in L, j \in \mathcal{J}, k \in K \quad (2.32)$
- $\sum_{\ell \in L} \sum_{j' \in \mathcal{R}_\ell(j)} Z_\ell(j', j, t - d_\ell(j', j)) \leq n_j, \forall j \in \mathcal{J}, t \in \mathcal{T} \quad (2.33)$
- $Z_\ell(j, j', t) + Z_\ell(j'', j''', t') \leq 1, \forall \ell \in L, j, j' \in \mathcal{T}_\ell(j), t \in \mathcal{T}, (\ell', j'', j''', t') \in D(\ell, j, j', t) \quad (2.34)$
- $Z_\ell(j, j', t) \in \{0, 1, 2, \dots, S_\ell\}, \forall \ell \in L, j, j' \in \mathcal{J}, t \in \mathcal{T} \quad (2.35)$

$$\bullet \quad Y_k(j, t) \geq 0, \forall t \in L, j \in \mathcal{J}, k \in K \quad (2.36).$$

Η μεταβλητή απόφασης $Y_k(j, t)$ θα μπορούσε να εξαλειφθεί με αντικατάσταση χρησιμοποιώντας το (2.32), αλλά περιλαμβάνεται για λόγους συμβολικής απλότητας. Λαμβάνουμε την πιθανότητα μη ανίχνευσης για τον στόχο k στο (2.28) από το (2.26) με την εφαρμογή του θεωρήματος της συνολικής πιθανότητας και το γεγονός ότι η ανίχνευση στο κελί j στη χρονική περίοδο t μπορεί να συμβεί μόνο εάν ο στόχος καταλαμβάνει αυτό το κελί εκείνη τη στιγμή. Η αντικειμενική συνάρτηση (2.29) στοχεύει στην ελαχιστοποίηση η μεγαλύτερη πιθανότητα μη ανίχνευσης. Η αντικειμενική συνάρτηση του **SPX** είναι κυρτή και οι πιθανότητες μη ανίχνευσης $f_k(Y_k)$, $k \in K$, είναι κυρτές και συνεχώς διαφοροποιήσιμες.

Οι περιορισμοί (2.30) και (2.31) διασφαλίζουν τη συνέχεια της διαδρομής για κάθε ερευνητή και τις αρχικές συνθήκες όπως στο **SP1**. Οι περιορισμοί αποσύνθεσης (2.33) και (2.34) περιορίζουν τον αριθμό των ερευνητών που μπορούν να καταλάβουν το κελί j σε n_j το πολύ, σε οποιαδήποτε χρονική περίοδο $t \in \mathcal{T}$ και να αποκλείονται οι κινήσεις σε σύγκρουση μεταξύ τους, αντίστοιχα.

Παρατηρούμε ότι το **SPX** ορίζει το "καλύτερο" σχέδιο αναζήτησης πριν από τον εντοπισμό του πρώτου στόχου. Με την παρουσία πολλαπλών στόχων, μπορεί κάποιος να θέλει να λογοδοτήσει ρητά για συμβάντα μετά την πρώτη ανίχνευση και πιθανώς να αποκλίνει από το σχέδιο που ορίζεται από το **SPX**. Ωστόσο, αυτό οδηγεί σε στοχαστικά δυναμικά προγράμματα, τα οποία είναι σύμμοχοι υπολογιστών εξαιρετικά ακριβά στην επίλυσή τους και είναι πέρα από το πεδίο αυτού του κειμένου. Ο τρέχων στόχος της ελαχιστοποίησης της πιθανότητας να μην εντοπιστεί ο στόχος με τη μεγαλύτερη πιθανότητα μη ανίχνευσης κατά τη διάρκεια του χρονικού ορίζοντα είναι ένα εύλογο υποκατάστατο. Ένα άλλο υποκατάστατο υποκατάστατο θα μπορούσε να είναι η ελαχιστοποίηση ενός μη αρνητικά σταθμισμένου αθροίσματος των πιθανοτήτων μη ανίχνευσης. Φυσικά, στην περίπτωση ενός μόνο στόχου αυτή η επιπλοκή εξατμίζεται.

Εφόσον το **SPX** ανήκει στην κατηγορία των μη γραμμικών προγραμμάτων μεικτού ακέραιου αριθμού, είναι σαφές ότι μπορούμε ακόμα να εφαρμόσουμε λύσεις γενικής χρήσης όπως το Bonmin (COIN-OR 2009), το DICOPT (Grossmann et al. 2008) και το Microsoft Excel Solver.

Εννοιολογικά, είναι δυνατό να γραμμικοποιηθεί το **SPX** με παρόμοιο τρόπο όπως περιγράφεται παραπάνω για το **SP1**. Το **SP1-L**, το οποίο γραμμικοποιεί το **SP1** στην περίπτωση ενός υπό όρους μοντέλου στόχου, γενικεύεται εύκολα σε ένα γραμμικό μοντέλο ισοδύναμο με το **SPX** εάν όλοι οι ρυθμοί ανίχνευσης $\alpha_{t,k}(j', j, t)$ στο **SPX** είναι λογικοί

αριθμοί. Σε αυτήν την περίπτωση, όλοι οι ρυθμοί ανίχνευσης **SPX** μπορούν να εκφραστούν ως ακέραιο πολλαπλάσιο ενός αριθμού, ας πούμε, α . Ως εκ τούτου, το $Y_k(j, t)$ θα μπορούσε να εκφραστεί ως φορές μια βοηθητική ακέραια μεταβλητή. Παρόμοια με την προσέγγιση που οδηγεί στο **SP1-L**, οι εκθετικοί όροι σε $f_k(Y_k)$ θα μπορούσαν στη συνέχεια να εκφραστούν με τμηματικές-γραμμικές συναρτήσεις. Οι τυπικές τεχνικές για τη γραμμικοποίηση τμηματικών-γραμμικών συναρτήσεων θα οδηγούσαν στη συνέχεια σε ένα γραμμικό πρόγραμμα μικτού ακέραιου αριθμού. Εάν το $\alpha_{k,k}(j', j, t)$ διαφέρει ουσιαστικά μεταξύ διαφορετικών στοιχείων των $L, \mathcal{J}, \mathcal{T}$ και K , το α θα πρέπει να είναι σχετικά μικρό. Ως εκ τούτου, οι τμηματικές-γραμμικές συναρτήσεις μπορεί να περιλαμβάνουν μεγάλο αριθμό τεμαχίων και το προκύπτον γραμμικό πρόγραμμα μικτού ακέραιου μπορεί να είναι μεγάλο.

Κάτω από την ίδια υπόθεση σχετικά με τους ρυθμούς ανίχνευσης και με δεδομένο ένα Μαρκοβιανό μοντέλο στόχου, το **SP1-LM** γενικεύεται σε ένα γραμμικό μοντέλο ισοδύναμο με το **SPX** μέσω ενός επαναπροσδιορισμού του s . Ενώ το s δίνει τον αριθμό των ερευνητών που καταλαμβάνουν ένα κελί κατά τη διάρκεια μιας χρονικής περιόδου στο **SP1-LM**, το νέο γραμμικό μοντέλο θα απαιτούσε το s να αντιπροσωπεύει $\alpha^{\text{total}}/\alpha$, όπου το α^{total} υποδηλώνει το άθροισμα των ρυθμών ανίχνευσης όλων των ερευνητών που καταλαμβάνουν ένα κελί σε ένα χρόνο περίοδο. Αυτό το άθροισμα μπορεί να είναι μεγαλύτερο από τον αριθμό των ερευνητών που καταλαμβάνουν το κελί, καθώς κάθε ερευνητής θα έχει ρυθμό ανίχνευσης $\xi\alpha$, όπου ξ είναι ένας θετικός ακέραιος αριθμός. Εφόσον αυτή η γραμμικοποίηση εκχωρεί αποτελεσματικά μια δυαδική μεταβλητή σε κάθε πιθανή τιμή του συνολικού ρυθμού ανίχνευσης που εφαρμόζεται σε ένα κελί, το προκύπτον γραμμικό πρόγραμμα μικτού ακέραιου μπορεί να γίνει μεγάλο.

Λαμβάνοντας υπόψη την παραπάνω συζήτηση, βλέπουμε ότι οι γραμμικοποιήσεις του **SPX** τείνουν να έχουν λογικό μέγεθος και πρακτική αξία όταν όλοι οι ρυθμοί ανίχνευσης $\alpha_{k,k}(j', j, t)$ μπορούν να εκφραστούν ως μικρά ακέραια πολλαπλάσια του α . Για παράδειγμα, αυτό συμβαίνει όταν όλοι οι ρυθμοί ανίχνευσης είναι ίσοι με $1 \cdot \alpha$ για κάποιους $\alpha > 0$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Αλγόριθμοι μαθηματικού προγραμματισμού για βελτιστοποίηση διαδρομής

Οι επιλύτες βελτιστοποίησης για (κυρτά) μη γραμμικά προγράμματα μεικτού ακέραιου όπως το **SPX** βασίζονται στην αρχή των επιπέδων διακλάδωσης και δέσμευσης ή/και κοπής. Η πρώτη προσέγγιση βασίζεται στην παρατήρηση ότι εάν οι ακέραιες μεταβλητές επιτρέπεται να λάβουν πραγματικές τιμές ή είναι σταθερές σε συγκεκριμένες τιμές, τότε το μοντέλο βελτιστοποίησης που προκύπτει είναι κυρτό. Δεδομένου ότι τα κυρτά μοντέλα βελτιστοποίησης συνήθως επιλύονται εύκολα από καλά ανεπτυγμένους αλγόριθμους, οι αλγόριθμοι διακλάδωσης και δέσμευσης για μη γραμμικά προγράμματα μεικτού ακέραιου επιλύουν μια ακολουθία τέτοιων κυρτών μοντέλων που χρησιμοποιούν ενδιάμεσα αποτελέσματα για να καθοδηγήσουν την επιλογή ποιες ακέραιες μεταβλητές να διορθωθούν και ποιες να επιτραπούν να εκτιμηθεί πραγματικά. Η προσδοκία είναι ότι δεν χρειάζεται να εξεταστούν όλοι οι συνδυασμοί πιθανών ακεραίων τιμών για τις μεταβλητές πριν βρεθεί μια (σχεδόν) βέλτιστη λύση. Οι επιλύτες που βασίζονται σε επίπεδα κοπής θεωρούν ακολουθίες γραμμικών προγραμμάτων μικτού ακέραιου που λαμβάνονται από το αρχικό μη γραμμικό μοντέλο μέσω γραμμικών προσεγγίσεων, που ονομάζονται επίπεδα κοπής, μη γραμμικών συναρτήσεων. Τα αριθμητικά αποτελέσματα στους Royset και Sato (2010) δείχνουν ότι οι προσεγγίσεις που βασίζονται σε επίπεδα κοπής τείνουν να είναι υπολογιστικά ανώτερες στην περίπτωση δύο ή περισσότερων ερευνητών. Για έναν μόνο ερευνητή, ορισμένοι αλγόριθμοι διακλάδωσης και δέσμευσης είναι συνήθως ταχύτεροι, αλλά μόνο εάν υλοποιούνται με προσοχή όπως περιγράφεται στο Κεφάλαιο 1. Ως εκ τούτου, εστιάζουμε στις μεθόδους κοπής εδώ.

3.1 Μέθοδοι επιπέδου κοπής

Ο τυπικός αλγόριθμος επιπέδου κοπής για προγράμματα κυρτών (μεικτού ακέραιου αριθμού) δημιουργεί και ελαχιστοποιεί διαδοχικά καλύτερες τμηματικά-γραμμικές προσεγγίσεις μιας κυρτής συνάρτησης. Οι γραμμικές προσεγγίσεις κατασκευάζονται χρησιμοποιώντας την επέκταση Taylor πρώτης τάξης των μη γραμμικών συναρτήσεων. Στην περίπτωση του **SPX**, οι πιθανότητες μη ανίχνευσης

$$f_k(Y_k) = \sum_{\omega_k \in \Omega_k} p_k(\omega_k) \zeta(j, t, \omega_k) \exp(-\sum_{j' \in J, t' \in T} \zeta(j', t', \omega_k) Y_k(j', t')) \quad (3.1)$$

είναι οι μόνες μη γραμμικές συναρτήσεις. Χρειαζόμαστε τα μερικά παράγωγα

$$\frac{\partial f_k(Y_k)}{\partial Y_k(j,t)} = - \sum_{\omega_k \in \Omega_k} p_k(\omega_k) \zeta(j, t, \omega_k) \exp(- \sum_{j' \in J, t' \in T} \zeta(j', t', \omega_k) Y_k(j', t')) \quad (3.2).$$

Η συλλογή τέτοιων μερικών παραγώγων περιλαμβάνει την κλίση $\nabla f_k(Y_k)$. Ένας αλγόριθμος επιπέδου κοπής τότε παίρνει την ακόλουθη μορφή.

Αλγόριθμος επιπέδου κοπής (Λήψη σχεδόν βέλτιστων λύσεων του **SPX**)

Δεδομένα.

Σχετικές ανοχές βελτιστοποίησης $\delta, \delta_i \geq 0, i = 0, 1, 2, \dots$

Βήμα 0. Ορίζουμε το κάτω όριο, f , στη βέλτιστη τιμή του **SPX** σε 0, ρυθμίζουμε το άνω φράγμα, ξ , στη βέλτιστη τιμή του **SPX** στο 0, και ορίζουμε $I = 1$ και $Y^I = 0$.

Βήμα 1. Για κάθε k , υπολογίζουμε $f_k(Y_k^I)$ και $\nabla f_k(Y_k^I)$. Αν $\max_k f_k(Y_k^I) < \xi$, τότε ορίζουμε $\xi = \max_k f_k(Y_k^I)$.

Βήμα 2. Εάν $\xi - \xi \leq \delta \xi$, τότε σταματάμε.

Βήμα 3. Λύνουμε.

$P_I: \min \xi \text{ s.t. } f_k(Y_k^I) + \nabla f_k(Y_k^I)^T (Y_k - Y_k^I) \leq \xi \forall k \in K, i = 1, 2, \dots, I$
(3.2), (2.30) - (2.36) σχεδόν στη βέλτιστη. Δηλαδή, προσδιορίζουμε ένα κατώτερο όριο ξ^{I+1} και μια εφικτή λύση $(\xi^{I+1}, Y^{I+1}, Z^{I+1})$ του P_I έτσι ώστε $\xi^{I+1} - \xi^{I+1} \leq \delta_i \xi^{I+1}$.

Βήμα 4. Εάν $\xi^{I+1} > \xi$, τότε ορίζουμε $\xi = \xi^{I+1}$.

Βήμα 5. Εάν $\xi - \xi \leq \delta \xi$, τότε σταματάμε. Διαφορετικά, αντικαταστήσουμε το I με το $I + 1$ και μεταβαίνουμε στο Βήμα 1.

Σημειώνουμε ότι το Βήμα 3 περιλαμβάνει την επίλυση ενός γραμμικού προγράμματος μεικτού ακέραιου αριθμού, για το οποίο υπάρχουν αποτελεσματικοί και ισχυροί λύτες. Ο αλγόριθμος του επιπέδου κοπής είναι εγγυημένος για επίλυση **SPX** στη βελτιστοποίηση εάν $\delta = 0$ και $\delta_i = 0$ για όλα τα i . Καθορισμός $\delta_i > 0$ (δηλαδή, αποδοχή κοντά βέλτιστες λύσεις του P_i) δεν εγγυάται τη σύγκλιση, αλλά συχνά βελτιώνει την υπολογιστική ταχύτητα.

3.2 Βελτιστοποίηση επιπέδου κοπής

Το επίπεδο κοπής (3.3) μπορεί να ενισχυθεί κάθε φορά που το $Y_k(j, t)$ είναι ακέραιο πολλαπλάσιο ενός πραγματικού αριθμού που είναι κοινό σε όλα τα j και t . Περιγράφουμε τη δυνατότητα στο πλαίσιο του **SP1**, με ποσοστά ανίχνευσης που είναι όλα α . Στο **SP1**, η μη

γραμμικότητα είναι σχετίζεται με το $f(Y)$ και επομένως εστιάζουμε σε αυτή τη συνάρτηση. Συγκεκριμένα, εκμεταλλευόμαστε την ειδική δομή του $f(Y)$ και την ακεραιότητα του $Y(j, t)$ για να κατασκευάσουμε μια βελτιωμένη γραμμικοποίηση του $f(Y)$. Το ενισχυμένο "cut" χρησιμοποιεί πεπερασμένες διαφορές της αντικειμενικής συνάρτησης $f(Y)$ θεωρώντας τη διαταραχή από το $Y(j, t)$ στο $Y(j, t) + 1$ διατηρώντας όλες τις άλλες μεταβλητές σταθερές. Το Θεώρημα 2 επισημοποιεί αυτή τη συζήτηση, χρησιμοποιώντας το $\Delta(j, t)$ για να υποδηλώσει ένα δυαδικό διάνυσμα διαστάσεων ST στο οποίο η συνιστώσα (j, t) είναι 1 και τα άλλα συστατικά είναι όλα 0.

Θεώρημα 2.

Για οποιαδήποτε μη αρνητικά ακέραια διανύσματα ST διαστάσεων Y και \hat{Y} ,

$$\sum_{j \in J, t \in T} \left[f(\hat{Y} + \Delta(j, t)) - f(\hat{Y}) \right] [Y(j, t) - \hat{Y}(j, t)] \leq f(Y) \quad (3.4).$$

Απόδειξη: Έστω α^ω ένα διάνυσμα διαστάσεων ST που ορίζεται από τα συστατικά $\zeta(j, t, \omega)$ α και $b^\omega = -\ln p(\omega)$. Τότε, $\alpha^\omega \geq 0$ και $b^\omega \geq 0$. Επομένως, $f(Y) = \sum_{\omega} f_{\omega}(Y)$, όπου $f_{\omega}(Y) = \exp(-\alpha^\omega Y - b^\omega)$, και το αποτέλεσμα ισχύει αν $f_{\omega}(\hat{Y}) + \sum_{j \in J, t \in T} (f_{\omega}(\hat{Y} + \Delta(j, t)) - f_{\omega}(\hat{Y}))(Y(j, t) - \hat{Y}(j, t)) \leq f_{\omega}(Y)$ για όλα τα ω . Κατά συνέπεια, πρέπει να το δείξουμε ότι $f_{\omega}(\hat{Y})[1 + \sum_{j \in J, t \in T} (\exp(-\alpha^\omega(j, t)) - 1)(Y(j, t) - \hat{Y}(j, t)) - \exp(-\alpha^\omega(Y - \hat{Y}))] \leq 0$ για μια αυθαίρετη διαδρομή στόχου $\omega \in \Omega$. Έστω $\beta = \exp(-\alpha)$, και έστω N συμβολίζει το σύνολο των ζευγών κελιού-χρόνου $(j, t) \in \mathcal{J} \times \mathcal{T}$ έτσι ώστε $\zeta(j, t, \omega) = 1$ (δηλαδή, τέτοιο κελί j είναι στο μονοπάτι ω στη χρονική περίοδο t). Τώρα, χρειάζεται μόνο να δείξουμε ότι $\phi(\beta) = (1 - \beta)k + \beta^k \geq 1$, όπου $k = \sum_{(j, t) \in N} (Y(j, t) - \hat{Y}(j, t))$. Βρίσκουμε ότι $d\phi(\beta) / d\beta = 0$ για $\beta = 1$. Επομένως, από την κυρτότητα του $\phi(\cdot)$ στο $(0, \infty)$ προκύπτει ότι το $\phi(\cdot)$ έχει ελάχιστη τιμή 1 για οποιοδήποτε k .

Αναφερόμαστε στο (3.4) ως τέμνουσα τομή, η οποία μπορεί στη συνέχεια να χρησιμοποιηθεί στον Αλγόριθμο Επιπέδου κοπής. Συγκεκριμένα, μία αντικατάσταση (3.3) από

$$f(Y^i) + \sum_{j \in J, t \in T} \left(f(Y^i + \Delta(j, t)) - f(Y^i) \right) (Y(j, t) - Y^i(j, t)) \leq \xi, \forall i = 1, 2, \dots, I \quad (3.5),$$

μαζί με τις άλλες απλουστεύσεις του **SP1** σε σύγκριση με το **SPX**. Αναφερόμαστε στους Roysset και Sato (2010) για περισσότερες λεπτομέρειες, καθώς και εμπειρικά στοιχεία ότι οι διατομές μειώνουν τους χρόνους υπολογισμού με συντελεστή 0,5. Για παράδειγμα, σε φορητό υπολογιστή χαμηλού επιπέδου (2010), ο αλγόριθμος επιπέδου κοπής με διατομές λαμβάνει σχεδόν βέλτιστες λύσεις **SP1**, με 5% σχετικό κενό βελτιστοποίησης, σε λιγότερο από 15 λεπτά υπολογιστικού χρόνου για περιπτώσεις προβλημάτων με τρεις αναζητητές, 81 κελιά και 10 χρονικές περιόδους.

3.3 Υπολογισμοί επιπέδου κοπής για Μαρκοβιανό μοντέλο στόχου

Ένας αλγόριθμος επιπέδου κοπής απαιτεί αποτελεσματικά μέσα για την αξιολόγηση των $f_k(Y_k)$, $\nabla f_k(Y_k)$, καθώς και της πεπερασμένης διαφοράς στο (3.5). Σαφώς, εάν η βασικότητα του Ω_k γίνει υψηλή, για παράδειγμα εκατομμύρια διαδρομές, το υπολογιστικό κόστος που σχετίζεται με την αξιολόγηση αυτές οι εκφράσεις γίνονται σημαντικές και πιθανώς απαγορευτικά υψηλές. Ωστόσο, στην περίπτωση ενός Μαρκοβιανού Μοντέλου Στόχου, οι υπολογισμοί μπορούν να πραγματοποιηθούν αποτελεσματικά όπως περιγράφεται στη συνέχεια. Για να διατηρήσουμε την έκθεση απλή, εστιάζουμε στη ρύθμιση του **SP1**, με κοινό ρυθμό ανίχνευσης α .

Δεδομένου ενός σχεδίου αναζήτησης Y , έστω $\rho_Y(j, t)$ η πιθανότητα ότι ο στόχος καταλαμβάνει το κελί j στη χρονική περίοδο t και ότι δεν ανιχνεύεται στις χρονικές περιόδους $1, 2, \dots, t-1$ και έστω $\sigma_Y(j, t)$ δηλώνουν την πιθανότητα ο στόχος να μην ανιχνεύεται σε χρονικές περιόδους $t+1, t+2, \dots, T$ δεδομένου ότι καταλαμβάνει το κελί j στη χρονική περίοδο t . Έστω $\rho_Y(t) = [\rho_Y(1, t), \rho_Y(2, t), \dots, \rho_Y(J, t)]$, και έστω $\sigma_Y(t) = [\sigma_Y(1, t), \sigma_Y(2, t), \dots, \sigma_Y(J, t)]$. Ορίζουμε $\rho_Y(j, 1) = \rho(j, 1)$, την πιθανότητα ο στόχος να είναι το κελί j τη στιγμή 1 και $\sigma_Y(j, T) = 1$ για οποιοδήποτε κελί $j \in \mathcal{J}$. Έτσι, τα $\rho_Y(t)$ και $\sigma_Y(t)$ μπορούν να υπολογιστούν αναδρομικά από

$$\rho_Y(t) = [\rho_Y(1, t-1) \exp(-\alpha Y(1, t-1)), \dots, \rho_Y(J, t-1) \exp(-\alpha Y(J, t-1))] \Gamma_{t-1} \quad (3.6) \text{ και}$$

$$\sigma_Y(t) = [\sigma_Y(1, t+1) \exp(-\alpha Y(1, t+1)), \dots, \sigma_Y(J, t+1) \exp(-\alpha Y(J, t+1))] \Gamma_1^T \quad (3.7)$$

όπου Γ_t είναι η μήτρα μετάβασης του μοντέλου στόχου Μαρκοβιανού. Σε αυτόν τον συμβολισμό, για οποιοδήποτε $t \in \mathcal{T}$, βρίσκουμε ότι

$$f(Y) = \sum_{j \in \mathcal{J}} \rho_Y(j, t) \exp(-\alpha Y(j, t)) \sigma_Y(j, t) \quad (3.8),$$

και συστατικά του $\nabla f(Y)$ είναι

$$\frac{\partial f(Y)}{\partial Y(j, t)} = \sum_{j' \in \mathcal{J}} \rho_Y(j', t) \exp(-\alpha Y(j', t)) \sigma_Y(j', t) \quad (3.9)$$

Ο υπολογισμός των πεπερασμένων διαφορών $f(Y + \Delta(j, t)) - f(Y)$ ακολουθεί ομοίως:

$$\begin{aligned} f(Y + \Delta(j, t)) - f(Y) &= \sum_{j' \in \mathcal{J}} \rho_Y(j', t) [\exp(-\alpha Y(j', t) - \alpha \Delta(j, t)) - \exp(-\alpha Y(j', t))] \sigma_Y(j', t) \\ &= \rho_Y(j, t) [\exp(-\alpha(Y(j, t) + 1)) - \exp(-\alpha Y(j, t))] \sigma_Y(j, t) \end{aligned} \quad (3.10)$$

Έτσι, το $f(Y)$ και η κλίση και η πεπερασμένη διαφορά του μπορούν να αξιολογηθούν με μέτρια υπολογιστική προσπάθεια.

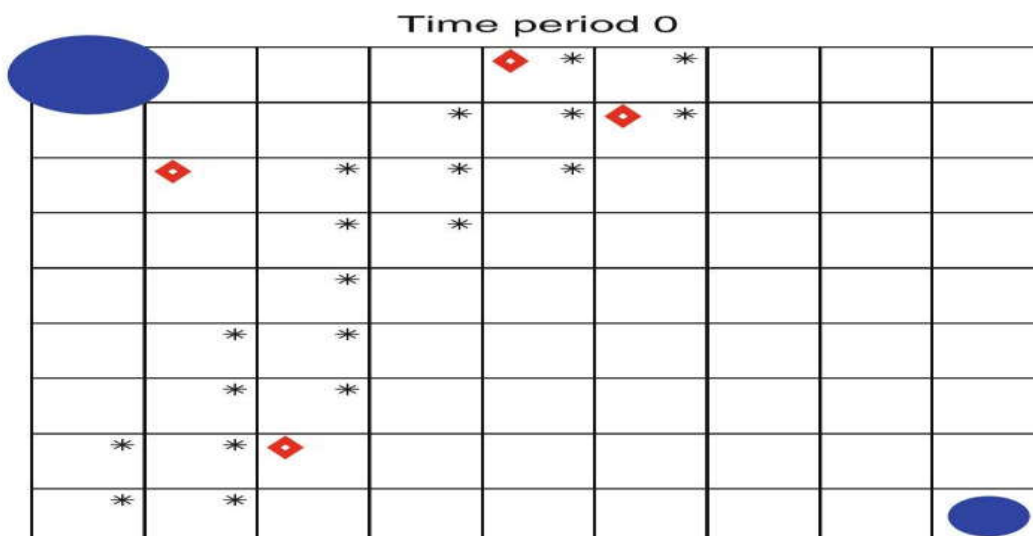
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

Παράδειγμα: Αναζήτηση για τέσσερις στόχους

Εικονίζουμε το **SPX** με ένα πρόβλημα με $J = 81$ κελιά. βλέπε Εικ. 1. Θεωρούμε τέσσερις στόχους που ακολουθούν τα Μαρκοβιανά μοντέλα στόχων. Τη χρονική περίοδο ένα, ένας στόχος καταλαμβάνει καθένα από τα κελιά 5, 15, 20 και 66 (σημειώνονται με διαμάντια στο Σχ. 1. Τα κελιά αριθμούνται από αριστερά προς τα δεξιά και από πάνω προς τα κάτω). Μετά από κάθε χρονική περίοδο, ένας στόχος παραμένει στο τρέχον κελί του ή μετακινείται σε ένα κελί ακριβώς πάνω, κάτω, αριστερά ή δεξιά του τρέχοντος κελιού, εάν υπάρχει τέτοιο κελί. Οι πιθανότητες να παραμείνει ένας στόχος σε ένα κελί από τη μια χρονική περίοδο στην άλλη είναι 0.4, 0.3, 0.2 και 0.1, αντίστοιχα, για τους τέσσερις στόχους. η πιθανότητα μετακίνησης σε οποιοδήποτε από τα άλλα επιτρεπόμενα κελιά είναι ίση. Ως εκ τούτου, ο στόχος που καταλαμβάνει αρχικά το κελί 5 κινείται αργά, ο στόχος που καταλαμβάνει αρχικά το κελί 66 κινείται γρήγορα και οι άλλοι δύο στόχοι κινούνται με ενδιάμεσες ταχύτητες.

Θεωρούμε δύο κατηγορίες αερομεταφερόμενων ερευνητών και ορίζουμε το χρόνο ταξιδιού $d_\ell(j, j') = \max\{1, \text{round}(\delta(j, j')/v_\ell)\}$, όπου ο $\text{round}(a)$ είναι ο πλησιέστερος ακέραιος στο a , $\delta(j, j')$ είναι η απόσταση μεταξύ j και j' που μετριέται ως το Ευκλείδειο κανόνα μεταξύ των κέντρων των κελιών, και v_ℓ είναι η ταχύτητα των ερευνητών της τάξης ℓ , $v_1 = 1$, $v_2 = 2$ κελιά ανά χρονική περίοδο. Επιπλέον, αφήνουμε τα μπροστινά αστέρια $\mathcal{F}_\ell(j) = \mathcal{F}^1(j) \cup \mathcal{F}^2(j)$, $\ell = 1, 2$, όπου $\mathcal{F}^1(j)$ ισούται με το σύνολο που αποτελείται από το j και τα τέσσερα κελιά που μοιράζονται μια πλευρά με j , αν υπάρχουν, και $\mathcal{F}^2(j)$ ισούται με το σύνολο όλων των κελιών j' με $d_\ell(j, j') \in [3, 5)$, αν υπάρχουν. Ως εκ τούτου, ένας ερευνητής μπορεί μετά από μια χρονική περίοδο είτε να προχωρήσει και να πραγματοποιήσει αναζήτηση "τοπικά" (δηλαδή, να επιλέξει ένα κελί στο $\mathcal{F}^1(j)$) είτε να μεταβεί για πολλές χρονικές περιόδους σε ένα απομακρυσμένο κελί (δηλαδή, να επιλέξει ένα κελί στο $\mathcal{F}^2(j)$). Τα αντίστροφα αστέρια $\mathcal{R}_\ell(j)$, $\ell = 1, 2$, ορίζονται παρόμοια.

Εξετάζουμε τρία σενάρια με μεταβλητή πιθανότητα ανίχνευσης αναλαμπής και αριθμό ερευνητών όπως συνοψίζονται στον Πίνακα 1. Στο σενάριο 1, δύο ερευνητές της κλάσης 1 καταλαμβάνουν το κελί 1 στη χρονική περίοδο 0 και ένας ερευνητής της κλάσης 2 καταλαμβάνει αρχικά το κελί 81. Η πιθανότητα ανίχνευσης αναλαμπής ενός ερευνητή της πρώτης κατηγορίας είναι 0.50



Εικ. 1. Περιοχή ενδιαφέροντος με διαμάντια που υποδεικνύουν την αρχική θέση για κινούμενους στόχους, αστερίσκους που υποδεικνύουν δύσκολα στην αναζήτηση κελιά και κύκλοι που υποδεικνύουν τις αρχικές τοποθεσίες των ερευνητών. Ο αριθμός των ερευνητών είναι ανάλογος με την ακτίνα ενός κύκλου.

Πίνακας 1. Σενάρια που ορίζουν περιπτώσεις προβλημάτων του **SPX**. Οι στήλες που σημειώνονται με $j = j'$ ($j \neq j'$) δίνουν πιθανότητα ανίχνευσης αναλαμπής για έναν ερευνητή που καταλαμβάνει (δεν καταλαμβάνει) το τρέχον κελί προηγουμένως. Ένας αστερίσκος υποδεικνύει μια στήλη με πιθανότητα ανίχνευσης αναλαμπής για δύσκολα στην αναζήτηση κελιά. βλέπε Εικ. 2

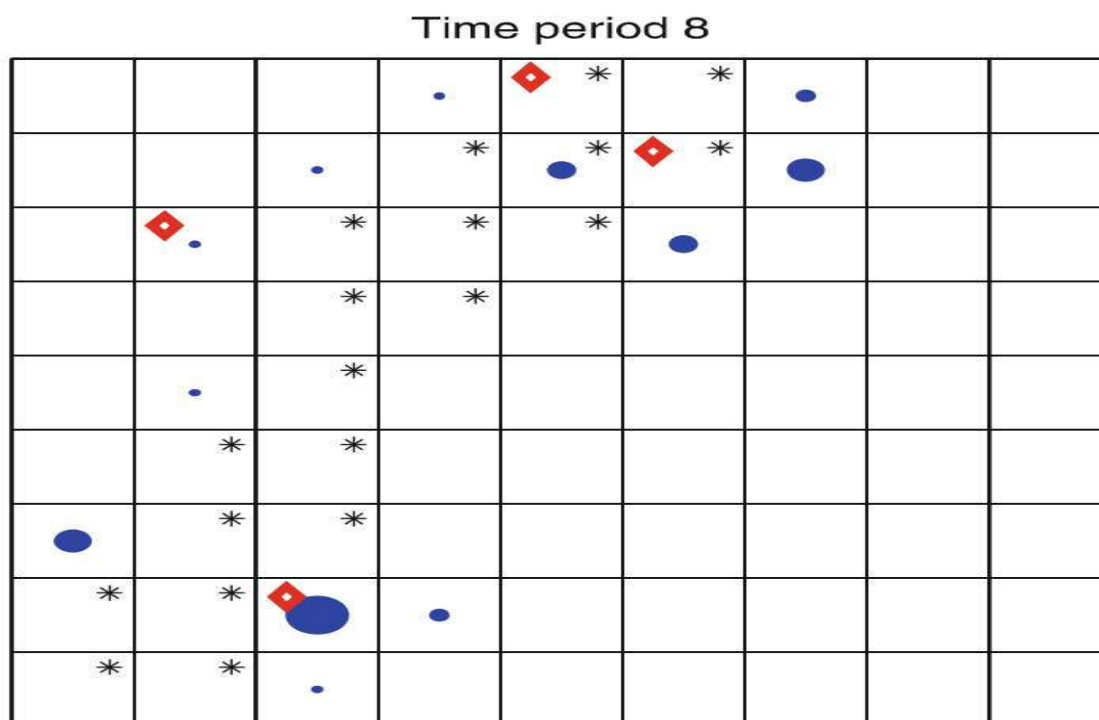
Σενάριο	Ερευνητές		Πιθανότητα Ανίχνευσης Αναλαμπής							
			Κλάση Ερευνητών 1				Κλάση Ερευνητών 2			
	S_1	S_2	$j = j'$	$j \neq j'$	$j = j' *$	$j \neq j' *$	$j = j'$	$j \neq j'$	$j = j' *$	$j \neq j' *$
1	2	1	0,50	0,29	0,29	0,16	0,29	0,16	0,16	0,09
2	4	2	0,50	0,29	0,29	0,16	0,29	0,16	0,16	0,09
3	20	10	0,07	0,03	0,03	0,02	0,03	0,02	0,02	0,01

εάν ο ερευνητής κατέλαβε το τρέχον κελί την τελευταία χρονική περίοδο ($j = j'$), αλλά ο ρυθμός ανίχνευσης του ερευνητή μειώνεται με συντελεστή 0,5 εάν ο ερευνητής μόλις μετακινήθηκε στο κελί ($j \neq j'$). Λαμβάνοντας υπόψη το (1.47), αυτό συνεπάγεται μια πιθανότητα ανίχνευσης με ματιά 0.29, βλέπε Πίνακα 1. Αυτή η μείωση εξηγεί το αποτέλεσμα, το οποίο έχουμε παρατηρήσει σε πειράματα πεδίου με πραγματικά drones (βλ. Kress and Royset 2008· Royset and Reber 2009), ότι ένας ερευνητής συχνά σπαταλά λίγο χρόνο αναζήτησης μεταβαίνοντας από το ένα κελί στο άλλο, ακόμα κι αν τα κελιά είναι γειτονικά. . Χρησιμοποιώντας την ευελιξία μοντέλου του **SPX**, ενσωματώνουμε αυτό το εφέ χωρίς να καταφεύγουμε σε μια λεπτή διακριτοποίηση χρόνου.

Όταν ένας ερευνητής καταλαμβάνει ένα από τα κελιά που σημειώνονται με έναν αστερίσκο στην Εικ. 1, όλα τα ποσοστά ανίχνευσης μειώνονται κατά 0.5. Αυτά τα κελιά αντιπροσωπεύουν περιοχές με κακές συνθήκες αναζήτησης και κατά συνέπεια χαμηλά ποσοστά ανίχνευσης. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα μια ματιά πιθανότητα ανίχνευσης 0,29 όταν $j = j'$ και 0,16 όταν $j \neq j'$. Για την κατηγορία 2 ο ερευνητής, ο ρυθμός ανίχνευσης μειώνεται με συντελεστή 0.5 σε σύγκριση με την κατηγορία 1 σε όλες τις καταστάσεις, με αποτέλεσμα τα ποσοστά ανίχνευσης αναλαμπής που δίνονται στον Πίνακα 1.

Το σενάριο 2 είναι πανομοιότυπο με το σενάριο 1, εκτός από το ότι έχει τέσσερις αναζητητές κατηγορίας 1 και δύο αναζητητές κατηγορίας 2. Το σενάριο 3 είναι πανομοιότυπο με το σενάριο 1, εκτός από το ότι υπάρχουν 20 ερευνητές κατηγορίας 1 και 10 ερευνητές κατηγορίας 2, και το ποσοστό ανίχνευσης μειώνεται με συντελεστή 0,1 σε όλες τις περιπτώσεις. Η τελευταία σειρά του Πίνακα 1 δίνει τις προκύπτουσες πιθανότητες ανίχνευσης αναλαμπής. Σημειώνουμε ότι το συνολικό ποσοστό ανίχνευσης των ερευνητών στο σενάριο 3 είναι πανομοιότυπο με αυτό των ερευνητών στο σενάριο 1. Ωστόσο, το σενάριο 3 επιτρέπει μεγαλύτερη ευελιξία καθώς η προσπάθεια αναζήτησης μπορεί να διαδοθεί ευρύτερα.

Εξετάζουμε και τις καταστάσεις με και χωρίς περιορισμούς αποσύγκρουσης (1.53) και (1.54). Σε αυτά τα σενάρια, η αποσύγκρουση ισοδυναμεί με τη διασφάλιση ότι το πολύ ένας ερευνητής καταλαμβάνει ένα κελί κάθε χρονική περίοδο και ότι δεν επιτρέπεται στον ερευνητή να μετακινηθεί από ένα κελί j σε ένα διπλανό κελί $j' \in \mathcal{J}^1(j)$ όταν ένας άλλος ερευνητής κάνει την αντίθετη κίνηση από το j' στο j . Υποθέτουμε ότι η μετάβαση σε ένα κελί απόστασης (δηλαδή, ένα κελί $j' \in \mathcal{J}^2(j)$) πραγματοποιείται με πτήση σε μεγάλο ύψος, ενώ η έρευνα πραγματοποιείται σε χαμηλό ύψος. Σε **SPX**, ενσωματώνουμε αυτούς τους περιορισμούς ορίζοντας $n_j = 1$ για όλα τα j και $D(\ell, j, j', t) = \{(\ell', j'', j''', t') \mid \ell' \in L = j', j'' = j, t' = t\}$ όποτε $j' \in \mathcal{J}^1(j)$, $j' \neq j$ και διαφορετικά $D(\ell, j, j', t) = \emptyset$. Εφόσον οι ερευνητές που διέρχονται μεταξύ κυψελών απόστασης μπορούν να διαχωριστούν εύκολα με βάση το υψόμετρο, επιτρέπουμε στις διαδρομές τέτοιων ερευνητών να διασχίζουν κάθε άλλα καθώς και να διασχίσουν τους ερευνητές που καταλαμβάνουν κελιά.



Εικ. 2. Βέλτιστη θέση αναζήτησης κατά τη χρονική περίοδο 8 για το σενάριο 3, $T = 8$ και όχι περιορισμοί αποσύγκρουσης. Η ακτίνα ενός κύκλου είναι ανάλογη με τον αριθμό των ερευνητών που καταλαμβάνουν το κελί που απαντά ομοίως κατά τη χρονική περίοδο 8 (κελιά 4, 7, 12, 14, 16, 20, 24, 38, 55, 66, 67, και 75 περιέχουν 1, 2, 1, 3, 4, 1, 3, 1, 4, 7, 2 και 1 ερευνητές, αντίστοιχα). Τα διαμάντια υποδεικνύουν την αρχική θέση για κινούμενους στόχους και οι αστερίσκοι υποδεικνύουν κελιά που είναι δύσκολο να αναζητηθούν.

Ο Πίνακας 2 δείχνει τα κάτω και τα ανώτερα όρια της βέλτιστης τιμής του **SPX** καθώς και τα αντίστοιχα κενά σχετικής βελτιστοποίησης μετά από 15 και 60 λεπτά χρόνου υπολογισμού του Αλγόριθμου Επιπέδου κοπής με $T = 8, 10$ και 12 όπως προκύπτει με ένα χαμηλό άκρο φορητού υπολογιστή (του 2010), δείτε Royset and Sato (2010) για λεπτομέρειες. Οι στήλες 4 και 5 παρουσιάζουν τα αποτελέσματα για την περίπτωση χωρίς περιορισμούς αποσύγκρουσης, ενώ οι στήλες 6 και 7 περιλαμβάνουν περιορισμούς αποσύγκρουσης. Είναι ενδιαφέρον ότι ο αλγόριθμος επιλύει περιπτώσεις προβλημάτων με περισσότερους ερευνητές (σενάριο 3) πιο γρήγορα από εκείνες με λιγότερους ερευνητές (σενάριο 1), καθώς οι γραμμικοποιήσεις των μη γραμμικών συναρτήσεων τείνουν να είναι πιο ακριβείς σε αυτές τις περιπτώσεις. Θεωρούμε επίσης ότι οι μεγαλύτεροι χρονικοί ορίζοντες είναι πιο δύσκολοι, κυρίως λόγω των ασθενέστερων περικοπών στην περίπτωση μικρότερων πιθανοτήτων μη ανίχνευσης.

Οι περιορισμοί αποσύγκρουσης περιορίζουν το **SPX** και οδηγούν σε αύξηση της βέλτιστης τιμής. Στα σενάρια 1 και 2, η αλλαγή είναι μικρή λόγω του σχετικά μικρού αριθμού των ερευνητών. Οι περιορισμοί αποσύγκρουσης αυξάνουν τη βέλτιστη τιμή με περίπου 0,05 στο σενάριο 3 όπου υπάρχουν 30 ερευνητές. Ως εκ τούτου, οι περιορισμοί αποσύγκρουσης

αναγκάζουν αποτελεσματικά τους ερευνητές να εγκαταλείψουν το 0,05 σε πιθανότητα αντίχνευσης.

Η Εικ. 2 απεικονίζει τη βέλτιστη θέση των ερευνητών στη χρονική περίοδο 8 για το σενάριο 3, $T = 8$, και χωρίς περιορισμούς αποσύγκρουσης. Η ακτίνα ενός κύκλου είναι ανάλογη με τον αριθμό των ερευνητών που βρίσκονται στο αντίστοιχο κελί κατά τη χρονική περίοδο 8 (βλ. λεζάντα εικόνας). Παρατηρούμε ότι πολλοί ερευνητές εστιάζουν σε έναν σχετικά μικρό αριθμό κελιών με μεγάλη πιθανότητα να περιέχουν στόχους. Η Εικ. 3 απεικονίζει την ίδια κατάσταση αλλά για την περίπτωση με περιορισμούς αποσύγκρουσης.

Ο Πίνακας 3 εξετάζει περαιτέρω τα ανώτερα όρια στη βέλτιστη τιμή του **SPX** και τα αντίστοιχα κενά σχετικής βελτιστοποίησης στο σενάριο 3 καθώς το T αυξάνεται. Όπως και στον Πίνακα 2, βρίσκουμε επιδείνωση στην ποιότητα του διαλύματος καθώς το T αυξάνεται. Ωστόσο, η αύξηση είναι μέτρια και ουσιαστικά ασήμαντη για την περίπτωση με τους περιορισμούς αποσύγκρουσης. Είναι σε θέση να αποκτήσει σχεδόν βέλτιστες λύσεις ακόμη και για μεγάλους χρονικούς ορίζοντες.

Πίνακας 2. Κάτω και άνω όρια για τη βέλτιστη τιμή του **SPX** καθώς και τα σχετικά κενά βελτιστοποίησης μετά από 15 και 60 λεπτά υπολογισμού των χρόνων του Αλγόριθμου Επιπέδου κοπής για σκηνικά 1-3 με και χωρίς περιορισμούς αποσύγκρουσης. Ο χρόνος σε δευτερόλεπτα για την επίτευξη της βελτιστοποίησης αναφέρεται σε παρενθέσεις όταν επιτυγχάνεται μηδενικό κενό εντός 60 λεπτών

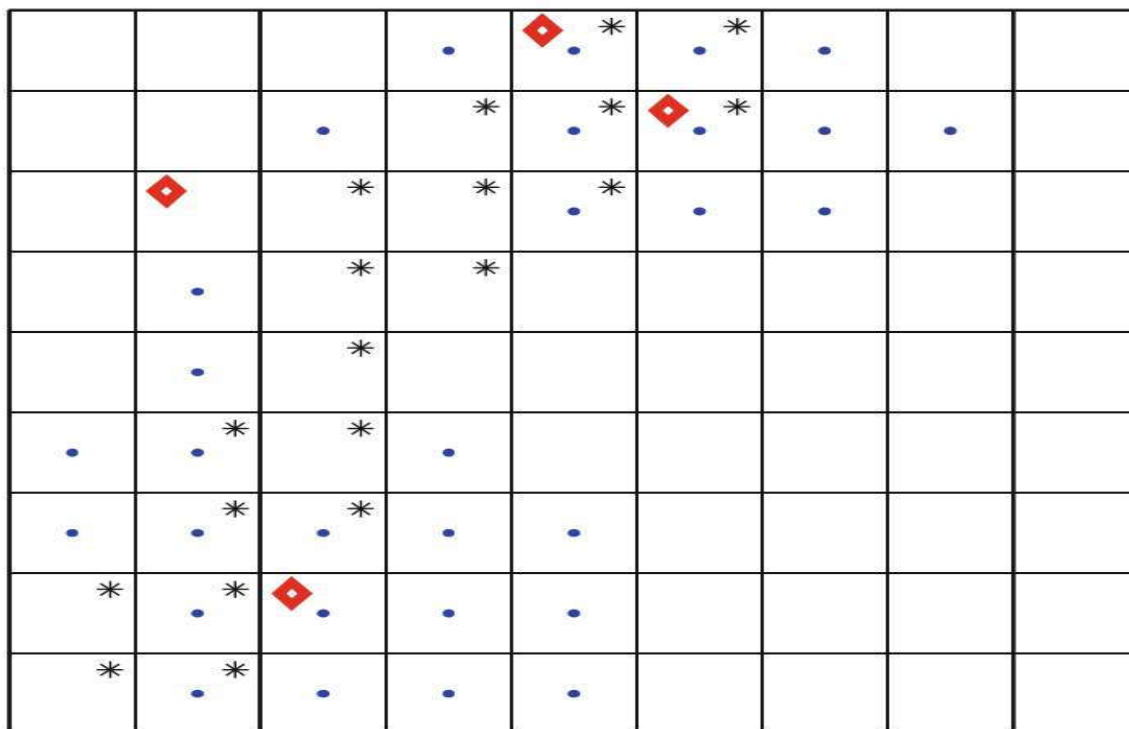
Σενάριο	T	Μέτρο	Μη Αποσύγκρουση		Αποσύγκρουση	
			Μετά από 15 λεπτά	Μετά από 60 λεπτά	Μετά από 15 λεπτά	Μετά από 60 λεπτά
1	8	Κάτω Όριο	0,851	0,858	0,852	0,858
		Άνω Όριο	0,874	0,866	0,873	0,866
		Σχετικό Κενό	0,027	0,010	0,024	0,010
2	8	Κάτω Όριο	0,719	0,727	0,721	0,731
		Άνω Όριο	0,752	0,752	0,774	0,760
		Σχετικό Κενό	0,046	0,035	0,072	0,040
3	8	Κάτω Όριο	0,837	0,837	0,888	-
		Άνω Όριο	0,837	0,837	0,888	-
		Σχετικό Κενό	0,001	0,000	0,390	-
1	10	Κάτω Όριο	0,777	0,796	0,781	0,801
		Άνω Όριο	0,833	0,833	0,842	0,842
		Σχετικό Κενό	0,072	0,047	0,079	0,052
2	10	Κάτω Όριο	0,626	0,635	0,628	0,636
		Άνω Όριο	0,710	0,703	0,711	0,711
		Σχετικό Κενό	0,133	0,108	0,132	0,117

3	10	Κάτω Όριο	0,788	0,788	0,840	0,840
		Άνω Όριο	0,789	0,789	0,841	0,841
		Σχετικό Κενό	0,002	0,002	0,001	0,000
1	12	Κάτω Όριο	0,726	0,742	0,727	0,742
		Άνω Όριο	0,818	0,818	0,815	0,815
		Σχετικό Κενό	0,127	0,103	0,121	0,099
2	12	Κάτω Όριο	0,543	0,554	0,543	0,551
		Άνω Όριο	0,675	0,664	0,654	0,654
		Σχετικό Κενό	0,243	0,199	0,206	0,189
3	12	Κάτω Όριο	0,745	0,745	0,797	0,797
		Άνω Όριο	0,748	0,747	0,799	0,799
		Σχετικό Κενό	0,004	0,003	0,003	0,002

Είναι ενδιαφέρον ότι οι περιορισμοί αποσύγκρουσης μειώνουν τα κενά βελτιστοποίησης σε αυτές τις περιπτώσεις, παρόλο που αυξάνουν το μέγεθος του μοντέλου.

Συνοπτικά, βλέπουμε ότι σε αυτά τα μάλλον ρεαλιστικά σενάρια που αφορούν 30 ερευνητές χωρισμένο σε δύο κατηγορίες με διαφορετική ταχύτητα και ποιότητα αισθητήρα, τέσσερις στόχους μεταβλητών χαρακτηριστικών, περιορισμούς αποσύγκρουσης, 81 ανομοιογενή κύτταρα και μεγάλο χρονικό ορίζοντα έως και 42 περιόδων, μπορεί κανείς να αποκτήσει μια σχεδόν βέλτιστη λύση 6% σε 60 λεπτά σε φορητός υπολογιστή (του 2010).

Time period 8



Εικ. 3. Βέλτιστη θέση αναζήτησης κατά τη χρονική περίοδο 8 για το σενάριο 3, $T = 8$, και περιορισμοί αποσύγκρουσης. Η κουκκίδα υποδεικνύει έναν ερευνητή

Πίνακας 3. Ανώτατα όρια στη βέλτιστη τιμή του SPX καθώς και σχετικά κενά βελτιστοποίησης μετά από 60 λεπτά υπολογισμού των χρόνων του αλγόριθμου επιπέδου κοπής για το σενάριο 3 με μεταβαλλόμενο T και με και χωρίς περιορισμούς αποσύγκρουσης.

T	Μη Αποσύγκρουση		Αποσύγκρουση	
	Ανώτατο Όριο	Σχετικό Κενό	Ανώτατο Όριο	Σχετικό Κενό
10	0,789	0,002	0,841	0,000
14	0,709	0,004	0,760	0,002
18	0,643	0,006	0,691	0,002
22	0,587	0,012	0,629	0,002
26	0,539	0,023	0,576	0,004
30	0,513	0,087	0,527	0,005
34	0,476	0,117	0,483	0,009
38	0,447	0,181	0,445	0,022
42	0,410	0,234	0,411	0,060

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

Σημειώσεις

Ο Stewart (1979, 1980) φαίνεται να είναι οι πρώτες εργασίες που ασχολούνται με την αναζήτηση περιορισμένης διαδρομής σε διακριτό χρόνο και χώρο. Αυτές οι πρώτες μελέτες καθώς και οι Eagle and Yee (1990), Martin (1993), Dell et al. (1996), Washburn (1998) και Lau et al. (2008) επικεντρώνονται στην ανάπτυξη εξειδικευμένων αλγορίθμων διακλάδωσης και δέσμευσης για την εύρεση μιας βέλτιστης διαδρομής για έναν ερευνητή. Τα όρια σε αυτούς τους αλγόριθμους λαμβάνονται με την αντικατάσταση της πιθανότητας ανίχνευσης με, ουσιαστικά, τον αναμενόμενο αριθμό ανιχνεύσεων. βλέπε Dell et al. (1996), Washburn (1998) και Lau et al. (2008). Εναλλακτικά, τα όρια μπορούν να ληφθούν υποθέτοντας ότι ο ερευνητής μπορεί να μοιράσει την προσπάθειά του σε πολλαπλά κελιά κάθε χρονική περίοδο, όπως στους Eagle και Yee (1990). Η παρουσίαση στο Κεφ. 1 βασίζεται στους Sato and Royset (2010). Η διατύπωση **SPX** του προβλήματος βελτιστοποίησης περιορισμένης αναζήτησης καθώς και τα **SP1**, **SP1-L** και **SP1-LM** λαμβάνονται από τους Royset και Sato (2010). Ένας πρόδρομος στο **SPX** με έναν μόνο στόχο, χωρίς περιορισμούς αποσύνθεσης και απλούστερες πιθανότητες ανίχνευσης αναλαμπής βρίσκεται στον Stewart (1979). Αναφέρουμε εναλλακτικά μοντέλα μαθηματικού προγραμματισμού Pietz και Royset (2013) για αναζήτηση που αποφεύγουν τη διακριτοποίηση της περιοχής ενδιαφέροντος σε κελιά.

Ο αλγόριθμος επιπέδου κοπής του Κεφ. 3.3 είναι μια άμεση εφαρμογή γενικών μεθόδων στη βιβλιογραφία βελτιστοποίησης. βλέπε, π.χ., Kelley (1960), Duran and Grossmann (1986), Westerlund and Pettersson (1995) και Bonami et al. (2008). Η αποτελεσματική διαδικασία για τον υπολογισμό $f(Y)$ και η κλίση του στην Ενότητα 3.3 οφείλεται στον Brown (1980).

Υπάρχουν πολυάριθμοι ευρετικοί αλγόριθμοι για την εκτίμηση λύσεων προβλημάτων περιορισμένης αναζήτησης, όπως τοπική αναζήτηση και γενετικοί αλγόριθμοι, βλέπε Dell et al. (1996), μέθοδος διασταυρούμενης εντροπίας, βλέπε Sato (2008), μωοπική βελτιστοποίηση με ορίζοντα υποχώρησης, βλέπε Dell et al. (1996), Grundel (2005), Wong et al. (2005) και Riehl et al. (2007), διαδοχική βελτιστοποίηση κάθε ερευνητή, βλέπε Stewart (1979), Wong et al. (2005) και Hollinger and Singh (2008), και αποκεντρωμένη βελτιστοποίηση από κάθε ερευνητή, βλ. Bourgult et al. (2003), Yang et al. (2004) και Wong et al. (2005).

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ / ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΕΣ ΠΑΡΑΠΟΜΠΕΣ

- Ahuja RK, Magnanti TL, Orlin JB (1993) Ροές δικτύου. Prentice Hall, Upper Saddle River
- Bonami P, Biegler L, Conn A, Cornuejols G, Grossmann I, Laird C, Lee J, Lodi A, Margot F, Sawaya N, Wachter A (2008) Ένα αλγοριθμικό πλαίσιο για κυρτά μη γραμμικά προγράμματα μικτών ακέραιων αριθμών. *Discret Optim* 5:186-204
- Bourgult F, Furukawa T, Durrant-Whyte H (2003) Συντονισμένη αποκεντρωμένη αναζήτηση για έναν χαμένο στόχο σε έναν Bayesian κόσμο. In: *Proceedings of the 2003 IEEE/RSJ International Conference on Intelligence and Systems*, Λας Βέγκας, σελ. 48-53
- Brown S (1980) Βέλτιστη αναζήτηση για έναν κινούμενο στόχο σε διακριτό χρόνο και χώρο. *Opera Res* 28(6):1275-1289
- Caldwell T (1961) Σχετικά με την εύρεση ελάχιστων διαδρομών σε ένα δίκτυο με ποινές στροφής. *Commun ACM* 4:107-108
- COIN-OR (2009) Bonmin. <http://www.coin-or.org/Bonmin/>. Τελευταία πρόσβαση 10 Ιουνίου 2009
- Dell R, Eagle J, Martins G, Santos A (1996) Χρήση πολλαπλών ερευνητών σε περιορισμένη διαδρομή, κίνηση, προβλήματα αναζήτησης στόχου. *Nav Res Logist* 43:463-480
- Duran M, Grossmann I (1986) Ένας αλγόριθμος εξωτερικής προσέγγισης για μια κατηγορία μη γραμμικών προγραμμάτων μικτού ακέραιου αριθμού. *Πρόγραμμα Μαθηματικών* 36:307-339
- Eagle J, Yee J (1990) Μια βέλτιστη διαδικασία διακλάδωσης και δέσμευσης για το πρόβλημα αναζήτησης περιορισμένης διαδρομής, κινούμενου στόχου. *Opera Res* 38:110-114
- Grossmann I, Viswanathan J, Vecchietti A, Raman R, Kalvelagen E (2008) Εγχειρίδιο χρήστη DICOPT. GAMS Development Corporation, Ουάσιγκτον, DC
- Grundel D (2005) Περιορισμένη αναζήτηση για κινούμενο στόχο. In: *Proceedings of the 2005 international symposium on collaborative technology and systems*, St. Louis, σελ. 327-332

- Hollinger G, Singh S (2008) Αποδείξεις και πειράματα σε κλιμακούμενη, σχεδόν βέλτιστη αναζήτηση από πολλαπλά ρομπότ. Στο: Πρακτικά ρομποτικής: συνέδριο επιστήμης και συστημάτων, Ζυρίχη
- Kelley J (1960) Η μέθοδος του επιπέδου κοπής για την επίλυση κυρτών προγραμμάτων. J Soc Ind Appl Math 8:703-712
- Kratzke T, Stone L, Frost J (2010) Σύστημα βέλτιστου σχεδιασμού αναζήτησης και διάσωσης. Στο: Πρακτικά 13ου διεθνούς συνεδρίου για τη συγχώνευση πληροφοριών (FUSION 2010), Εδιμβούργο
- Kress M, Royset JO (2008) Μοντέλο βελτιστοποίησης εναέριας αναζήτησης (ASOM) για UAV σε ειδικές επιχειρήσεις. Mil Opera Res 13(1):23-33
- Lau H, Huang S, Dissanayake G (2008) Ο μειωμένος μέσος όρος για το βέλτιστο πρόβλημα διαδρομής αναζήτησης με μη ομοιόμορφους χρόνους ταξιδιού. Eur J Opera Res 190(2):383-397
- Martin GA (1993) Μια νέα διαδικασία διακλάδωσης και δέσμευσης για τον υπολογισμό της βέλτιστης διαδρομής αναζήτησης. Μεταπτυχιακή εργασία, Ναυτική Μεταπτυχιακή Σχολή, Monterey
- Pietz J, Royset JO (2013) Γενικευμένο πρόβλημα προσανατολισμού με ανταμοιβές που εξαρτώνται από τους πόρους. Nav Res Logist 60(4):294-312
- Rardin RL (1997) Βελτιστοποίηση στην επιχειρησιακή έρευνα. Prentice Hall, Upper Saddle River
- Riehl J, Collins G, Hespanha J (2007) Προγνωστική αναζήτηση μοντέλων βασισμένη σε γραφήματα συνεργασίας. In: Proceedings of 46th IEEE conference on decision and control, New Orleans, pp 2998-3004
- Royset JO, Reber D (2009) Βελτιστοποίηση δρομολόγησης μη επανδρωμένων εναέριων συστημάτων για την αναστολή αυτοσχέδιων εκρηκτικών μηχανισμών. Mil Opera Res 14(4):5-19
- Royset JO, Sato H (2010) Βελτιστοποίηση διαδρομής για πολλούς ερευνητές. Nav Res Logist 57(8): 701-717
- Sato H (2008) Βελτιστοποίηση διαδρομής για μεμονωμένους και πολλαπλούς ερευνητές: μοντέλα και αλγόριθμοι. Διδακτορική διατριβή, Ναυτική Μεταπτυχιακή Σχολή, Monterey
- Sato H, Royset JO (2010) Βελτιστοποίηση διαδρομής για τον ερευνητή με περιορισμένους πόρους. Nav Res Logist 57(5):422-440

- Stewart T (1979) Αναζήτηση για έναν κινούμενο στόχο όταν η κίνηση του ερευνητή είναι περιορισμένη. Comput Opera Res 6(3):129-140
- Stewart T (1980) Εμπειρία με έναν αλγόριθμο διακλάδωσης και περιορισμού περιορισμένης κίνησης αναζήτησης. Στο: Haley K, Stone L (eds) Θεωρία αναζήτησης και εφαρμογές. Plenum Press, New York Washburn A (1998) Μέθοδοι διακλάδωσης και δεσμών για ένα πρόβλημα αναζήτησης. Nav Res Logist 45:243-257
- Westerlund T, Pettersson F (1995) Μια μέθοδος εκτεταμένου επιπέδου κοπής για την επίλυση κυρτών προβλημάτων MINLP. Comput Chem Eng 19:131-136
- Wong E, Bourgault F, Furukawa T (2005) Multi-vehicle Bayesian αναζήτηση για πολλαπλούς χαμένους στόχους. In: Proceedings of the 2005 IEEE international conference on robotics and automation, Barcelona, σελ. 3169-3174
- Yang Y, Minai A, Polycarpou M (2004) Αποκεντρωμένη συνεργατική αναζήτηση από δίκτυα UAVs σε αβέβαιο περιβάλλον. Στο: Proceedings of the 2004 American control conference, Boston, σελ. 5558-5563.