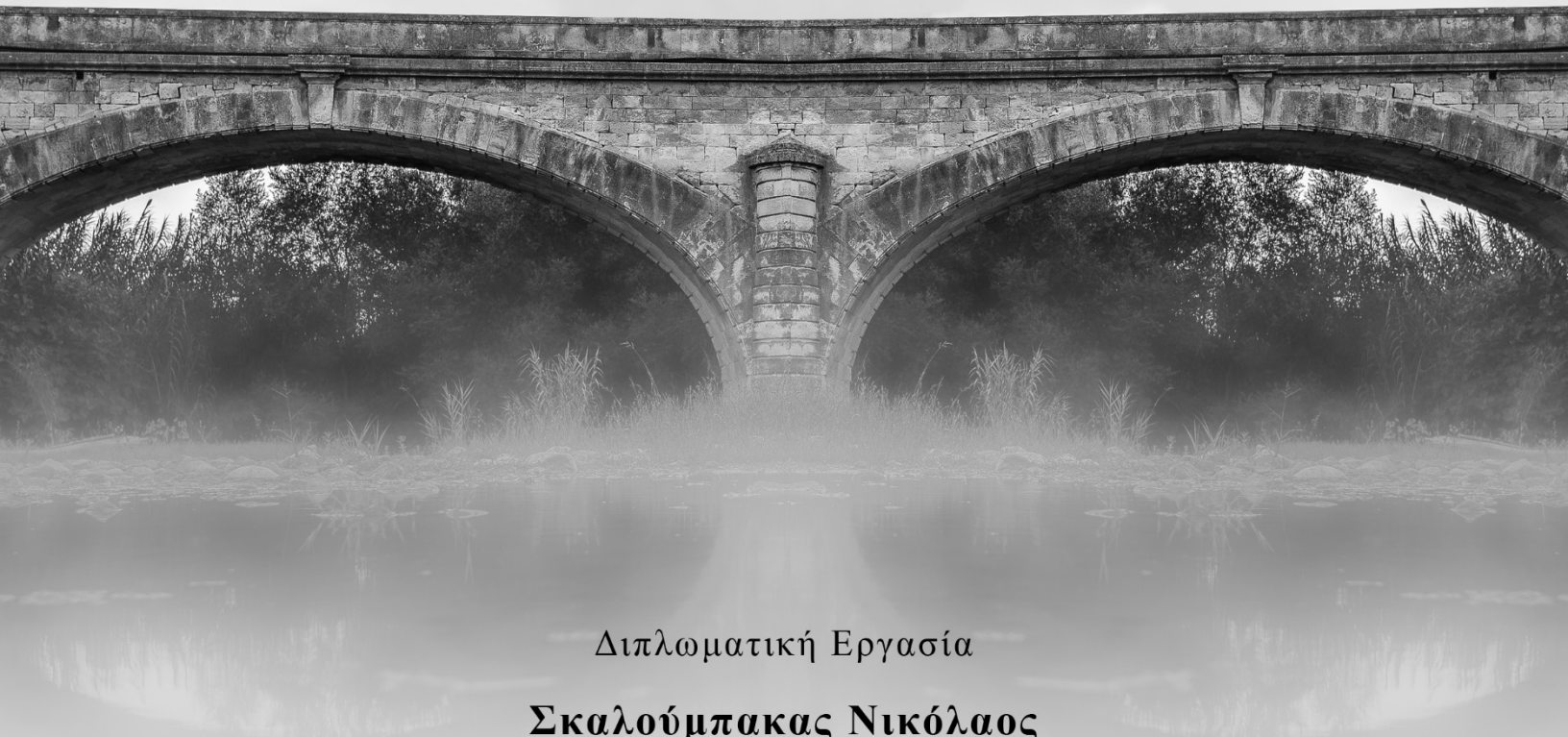




Πολυτεχνείο Κρήτης

Σχολή Μηχανικών Παραγωγής και Διοίκησης

Ανάλυση και Εφαρμογή Κώδικα Γραμμής Πίεσης σε Τοξωτούς Φορείς



Διπλωματική Εργασία

Σκαλούμπακας Νικόλαος

A.M: 2017010118

Επιβλέπων Καθηγητής

Σταυρουλάκης Γεώργιος

Χανιά, 2023

Περίληψη

Η στατική ανάλυση των τοξωτών φορέων αποτελεί ένα κλασικό πρόβλημα στη δομική μηχανική. Η παρούσα διπλωματική εργασία εστιάζει στην ανάλυση της γραμμής πίεσης τόξων και παρουσιάζει μια μέθοδο που χρησιμοποιείται για την αξιολόγηση της ασφάλειας και της σταθερότητας τέτοιων κατασκευών. Στόχος αυτής της έρευνας είναι η εφαρμογή, η επεξεργασία και η επέκταση μιας αποτελεσματικής αριθμητικής διαδικασίας για τον προσδιορισμό των ελάχιστων και μέγιστων λύσεων των τόξων, ενώ υπόκεινται τόσο σε κατακόρυφα όσο και σε οριζόντια φορτία. Ο προτεινόμενος αλγόριθμος χρησιμοποιεί μια προσέγγιση γραμμικού προβλήματος βελτιστοποίησης με περιορισμούς και εκτελείται στο περιβάλλον του Matlab. Ο κώδικας, ο οποίος έχει αρχικά κατασκευαστεί από τον Francesco Marmo, επεκτείνεται έτσι ώστε να μπορεί να αυτοματοποιηθεί όσο το δυνατόν περισσότερο και να μπορεί να ενεργοποιηθεί για τόξα διαφορετικής μορφής. Στην διατριβή πραγματοποιούνται εφαρμογές του κώδικα σε τοξωτές κατασκευές, όπως είναι η γέφυρα του Κερίτη, τα Νεώρια Χανίων, το γεφύρι Κακοδικίου και η γέφυρα Stathmashie. Επίσης, περιλαμβάνεται παραμετρική ανάλυση χρησιμοποιώντας ιδεατά τόξα με μεταβαλλόμενες παραμέτρους. Από τα αποτελέσματα φαίνεται η ακρίβεια και η αποτελεσματικότητα του αλγορίθμου, όσον αφορά τον προσδιορισμό των γραμμών πίεσης και τον υπολογισμό των μέγιστων κατακόρυφων και οριζόντιων φορτίων που μπορούν να ασκηθούν στις κατασκευές μέχρι να θεωρηθούν ασταθείς.

Abstract

Thrust Line Analysis is a classic problem in structural engineering. This thesis focuses on the analysis of the thrust line in arches and presents a method used for evaluating the safety and stability of such structures. The objective of this research is to apply and develop an efficient numerical procedure for determining the minimum and maximum thrust solutions, considering both vertical and horizontal loads. The proposed algorithm simplifies the equilibrium equations of the system and utilizes a linear optimization approach with constraints, implemented in the MATLAB environment. The code, originally constructed by Francesco Marmo, is extended so that it can be automated as much as possible and can be activated for arcs of different shapes. In the thesis, applications of the code to arched structures such as the Keriti Bridge, the Neoria of Chania, the Kakodiki Bridge and the Stathmashie Bridge are carried out. Parametric analysis using ideal arcs with varying parameters is also included. The results show the accuracy and effectiveness of the algorithm in terms of determining the thrust lines and calculating the maximum vertical and horizontal loads that can be applied to the structures until they are considered unstable.

Ευχαριστίες

Η παρούσα έρευνα αποτελεί διπλωματική εργασία στα πλαίσια του προπτυχιακού προγράμματος σπουδών της σχολής Μηχανικών Παραγωγής και Διοίκησης του Πολυτεχνείου Κρήτης. Οφείλω να ευχαριστήσω, ιδιαίτερα, τον επιβλέποντα καθηγητή, κύριο Γεώργιο Σταυρουλάκη για την εμπιστοσύνη, τις πολύτιμες επιστημονικές γνώσεις και τη συνεχή καθοδήγησή του.

Επιπλέον, θα ήθελα να ευχαριστήσω τους κοντινούς μου ανθρώπους και κυρίως την οικογένειά μου για τη συμπαράσταση καθ' όλη τη διάρκεια της εργασίας.

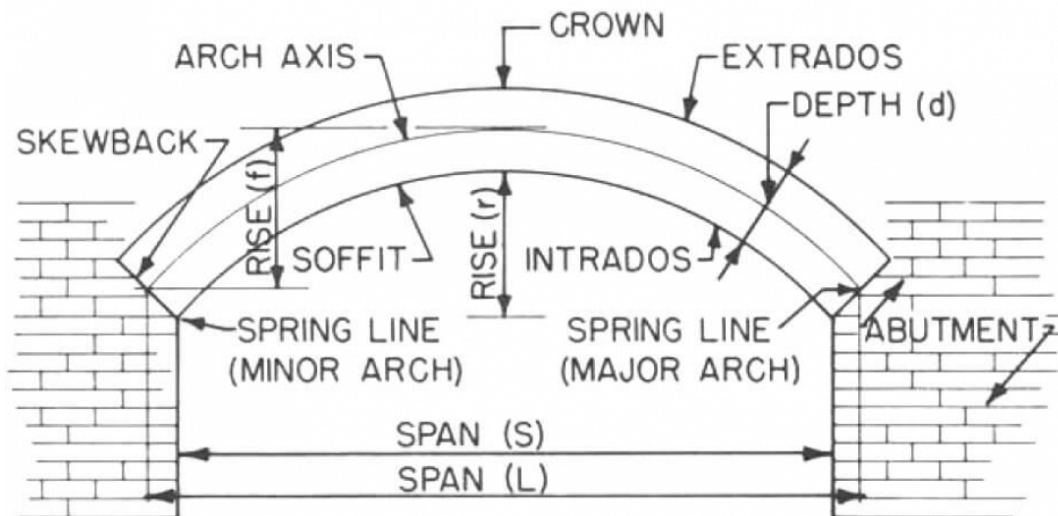
Πίνακας Περιεχομένων

| | |
|---|----|
| | 1 |
| Περίληψη | 2 |
| Abstract | 3 |
| Ευχαριστίες | 4 |
| Πίνακας Περιεχομένων | 5 |
| 1 Εισαγωγή | 6 |
| 1.1 Γενικά..... | 6 |
| 1.2 Τοξωτοί Φορείς από Τοιχοποιία | 7 |
| 1.3 Σημασία Σύγχρονων Μεθόδων Παρακολούθησης Δομικής Υγείας..... | 9 |
| 1.4 Σκοπός της Διπλωματικής | 9 |
| 2 Ανάλυση Γραμμής Πίεσης Τόξων (Thrust Line Analysis of Masonry Arches) | 10 |
| 2.1 Θεώρημα του Heyman (Heyman’s Safe Theorem) | 10 |
| 2.2 Ανάπτυξη Μαθηματικού Μοντέλου | 11 |
| 2.3 Διαδικασία Επίλυσης για Επιδράσεις Μόνο από Κατακόρυφα Φορτία | 14 |
| 2.4 Διαδικασία Επίλυσης για Επιδράσεις από Οριζόντια και Κατακόρυφα Φορτία | 21 |
| 3 Εφαρμογή Κώδικα Γραμμής Πίεσης Τόξων στο περιβάλλον του Matlab | 26 |
| 3.1 Εισαγωγή Τοξωτού Φορέα στο Matlab | 26 |
| 3.2 Εύρεση Μέγιστου Επιτρεπτού Κάθετου Φορτίου σε Σημεία του Τόξου Υποβαλλόμενο από το Ίδιο Βάρος του..... | 30 |
| 3.3 Εύρεση Μέγιστων Επιτρεπτών Οριζόντιων Δυνάμεων σε Τόξο Υποβαλλόμενο από το Ίδιο Βάρος του | 34 |
| 4 Εφαρμογές και Παραμετρικές Διερευνήσεις | 38 |
| 4.1 Ανάλυση Γραμμής Πίεσης στα Νεώρια Χανίων | 38 |
| 4.2 Ανάλυση Γραμμής Πίεσης στο Γεφύρι Κακοδικίου..... | 42 |
| 4.3 Ανάλυση Γραμμής Πίεσης στη γέφυρα Strathmashie | 48 |
| 4.4 Παραμετρική Ανάλυση Γραμμής Πίεσης Τοξωτών Φορέων | 50 |
| 5 Συμπεράσματα και Επόμενα Βήματα | 55 |
| Πηγές | 57 |

1 Εισαγωγή

1.1 Γενικά

Οι τοξωτές κατασκευές από τοιχοποιία αποτελούν μνημειώδεις μαρτυρίες της ανθρώπινης μηχανικής και αρχιτεκτονικής ικανότητας, ενσωματώνοντας μια πλούσια ιστορία σχεδιασμού, καινοτομίας και δεξιοτεχνίας. Η διαχρονική τους σημασία ξεπερνά τα όρια του χρόνου και του χώρου, με παραδείγματα αυτών των τόξων να χρονολογούνται αιώνες πριν και να βρίσκονται διάσπαρτα σε όλο τον κόσμο. Οι κατασκευές αυτές δεν αποτελούν απλώς απομεινάρια του παρελθόντος, αλλά ζωντανές αποδείξεις της εξέλιξης των τεχνικών δόμησης. Οι περίπλοκες μορφές τους και η ανθεκτική κατασκευή τους χρησιμεύουν ως μαρτυρία για τις ικανότητες των αρχαίων οικοδόμων και τα πολιτιστικά πλαίσια στα οποία ευδοκίμησαν. Από τις εμβληματικές γέφυρες έως τα εντυπωσιακά υδραγωγεία, οι τοξοστοιχίες αντιπροσωπεύουν μια διασταύρωση τέχνης και επιστήμης, όπου τα μαθηματικά της στατικής συγχωνεύονται με την τέχνη του σχεδιασμού. Ωστόσο, παράλληλα με την εξέλιξη των πολύπλοκων αρχιτεκτονικών μορφών, έχει συμβεί το ίδιο και με τις μεθόδους ανάλυσης και παρακολούθησης της δομικής τους υγείας. Από την έξυπνη χρήση της κατανομής φορτίου στις καμάρες, έχουμε μεταβεί σε εξελιγμένες αυτοματοποιημένες αριθμητικές προσεγγίσεις που παράγουν σημαντικές πληροφορίες και οπτικοποιημένα αποτελέσματα με πολύ καλή ακρίβεια.



Εικόνα 1.1 Δομή τοξωτής τοιχοποιίας.

1.2 Τοξωτοί Φορείς από Τοιχοποιία

Οι τοξωτές κατασκευές τοιχοποιίας είναι αρχιτεκτονικά θαύματα που χαρακτηρίζονται από την εγγενή αντοχή, την ανθεκτικότητα και την αισθητική τους. Οι κατασκευές αυτές περιλαμβάνουν διάφορες μορφές, από χαμηλές αψίδες έως υψηλές και στενές, με αψίδες που υιοθετούν διαφορετικά προφίλ, όπως κυκλικά, παραβολικά ή ακόμη και γοτθικά σχέδια. Το κλειδί για την κατανόηση της σταθερότητας των τοξωτών φορέων από τοιχοποιία βρίσκεται στις συγκεκριμένες γεωμετρικές παραμέτρους τους. Το άνοιγμα του τόξου, το πάχος, το ύψος και η πυκνότητα των υλικών που χρησιμοποιούνται παίζουν καθοριστικό ρόλο στον καθορισμό της ευστάθειας και της δομικής τους ακεραιότητας. Επιπλέον, η επιλογή των υλικών και η πυκνότητά τους επηρεάζει σε μεγάλο βαθμό την ικανότητα μιας αψίδας να φέρει φορτία. Σύγχρονες υπολογιστικές μέθοδοι επιτρέπουν την ακριβή αξιολόγηση αυτών των παραμέτρων, διασφαλίζοντας την ασφάλεια και τη διατήρηση αυτών των κατασκευών. Κάποιες γενικευμένες κατηγορίες τόξων είναι:

- Κυκλική αψίδα: Κλασικό ημικυκλικό σχήμα.
- Μυτερή αψίδα: Επίσης γνωστή ως γοτθική, χαρακτηρίζεται από μια μυτερή ή γωνιακή κορυφή.
- Αψίδα πετάλου: Στρογγυλεμένο σχήμα.
- Παραβολική αψίδα: Μοιάζει με παραβολική καμπύλη.
- Επίπεδη αψίδα: Σχεδόν επίπεδη, κατάλληλη για μεγάλα ανοίγματα.
- Ελλειπτική αψίδα: Διαθέτει ελλειπτική καμπύλη.



Εικόνα 1.2 Γεφύρι της Ζέρμας(1747).



Εικόνα 1.3 Καλογερίκό γεφύρι (1814).



Εικόνα 1.4 Γεφύρι της Άρτας (1615).

1.3 Σημασία Σύγχρονων Μεθόδων Παρακολούθησης Δομικής Υγείας

Η σημασία των σύγχρονων αυτοματοποιημένων υπολογιστικών μεθόδων για την παρακολούθηση της δομικής κατάστασης δεν μπορεί να υποτιμηθεί. Στο παρελθόν, η αξιολόγηση της κατάστασης και της ευστάθειας τοξωτών κατασκευών από τοιχοποιία συχνά βασιζόταν σε χειροκίνητες, εργαστηριακά εντατικές διαδικασίες, οι οποίες μπορεί να ήταν χρονοβόρες και μερικές φορές λιγότερο ακριβείς. Οι μηχανικοί και οι αρχιτέκτονες έπρεπε να βασίζονται σε απλουστευμένα μοντέλα και στη διαίσθησή τους για να κατανοήσουν πώς θα συμπεριφέρονταν αυτές οι κατασκευές υπό διάφορες φορτίσεις. Ωστόσο, με την έλευση εξελιγμένων υπολογιστικών εργαλείων, όπως η μέθοδος ανάλυσης γραμμής ώθησης στο περιβάλλον του Matlab, αναδύθηκε μια νέα εποχή ακρίβειας και αποτελεσματικότητας. Αυτές οι μέθοδοι παρέχουν λεπτομερείς αναλύσεις της δομικής ευστάθειας λαμβάνοντας υπόψη περίπλοκες γεωμετρικές παραμέτρους και διαφορετικές φορτίσεις, επιτρέποντας στους μηχανικούς να λαμβάνουν αποφάσεις βάσει δεδομένων. Η δυνατότητα αξιολόγησης τόξων με ποικίλες παραμέτρους, από το άνοιγμα έως το πάχος, με ταχύτητα και ακρίβεια, ενισχύει την ικανότητα συντήρησης και διατήρησης των ιστορικών κατασκευών, συμβάλλοντας τελικά στην προστασία της αρχιτεκτονικής κληρονομιάς.

1.4 Σκοπός της Διπλωματικής

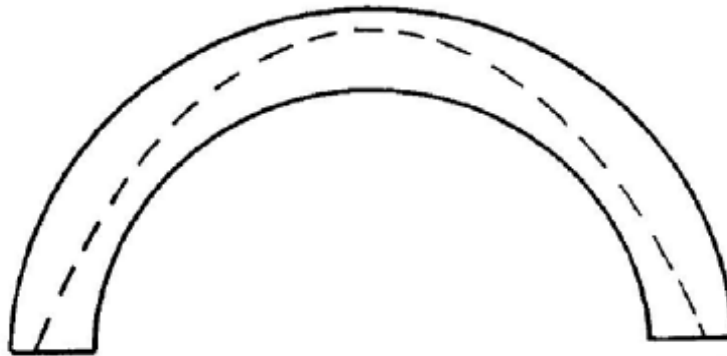
Σκοπός της παρούσας διατριβής είναι να εμβαθύνει στην ποικιλομορφία και τη δομική συμπεριφορά των τοξωτών κατασκευών από τοιχοποιία, διερευνώντας διαφορετικές παραμέτρους, ξεχωριστές συμπεριφορές και προφίλ ευστάθειας. Η εργασία στοχεύει στην ολοκληρωμένη κατανόηση αυτών των διαφορών, ρίχνοντας φως στον τρόπο με τον οποίο συγκεκριμένες γεωμετρικές τόξων και συνθήκες φόρτισης επηρεάζουν τη δομική τους υγεία. Για να επιτευχθεί αυτό, παρουσιάζεται μια σύγχρονη υπολογιστική μέθοδος ανάλυσης γραμμής πίεσης που υλοποιείται στο περιβάλλον του Matlab. Το πακέτο κώδικα (ArchLab) που εφαρμόζεται, έχει κατασκευαστεί, αρχικά, από τον Fransesco Marmo [4], ενώ έχει επεκταθεί στη συγκεκριμένη διπλωματική για πιο αναλυτικές διευρύνσεις. Αυτή η αυτοματοποιημένη προσέγγιση προσφέρει ακριβείς, αποτελεσματικές πληροφορίες σχετικά με την ευστάθεια και την ασφάλεια των τόξων, ξεπερνώντας τους περιορισμούς των παραδοσιακών εκτιμήσεων. Στην παρούσα έρευνα, η μέθοδος θα εφαρμοστεί σε διάφορους τοξωτούς φορείς, ενώ παράλληλα θα γίνουν παραμετρικές διευρύνσεις και οπτικοποιήσεις αποτελεσμάτων.

2 Ανάλυση Γραμμής Πίεσης Τόξων (Thrust Line Analysis of Masonry Arches)

Στο συγκεκριμένο κεφάλαιο παρουσιάζεται η ιδέα της συγκεκριμένης μεθόδου ανάλυσης γραμμής πιέσεων τοξωτών φορέων. Περιγράφεται η διαδικασία επίλυσης για κάθε περίπτωση υποβαλλόμενου φορτίου και αναλύεται το σχετικό κομμάτι του κώδικα (*Archlab1.m*) στο περιβάλλον του Matlab.

2.1 Θεώρημα του Heyman (Heyman's Safe Theorem)

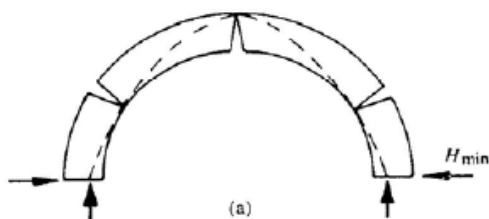
Το Θεώρημα του Heyman είναι μια θεμελιώδης αρχή στην ανάλυση των τόξων. Αποτελεί μια μέθοδο για την επαλήθευση της ασφάλειας και της σταθερότητας των τοξωτών κατασκευών, εξετάζοντας τις εξισώσεις ισορροπίας της γραμμής πίεσης. Σύμφωνα με το θεώρημα, η ασφάλεια τέτοιου τόξου μπορεί να διαπιστωθεί εάν υπάρχει μια γραμμή πίεσης εξ' ολοκλήρου εντός της τοιχοποιίας, ενώ το σύστημα βρίσκεται σε ισορροπία με εξωτερικά φορτία. Πρέπει, δηλαδή, να υπάρχει μια κατανομή δυνάμεων εντός του τόξου που εξισορροπεί τα ασκούμενα φορτία και αποτρέπει την αστοχία. [12]



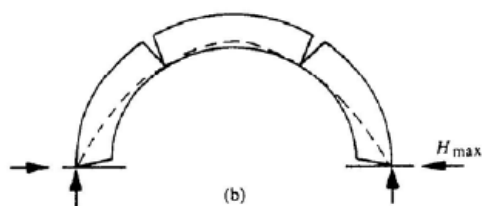
Εικόνα 2.1 Απεικόνιση τυχαίας γραμμής πίεσης τόξου (Thrust Line)

Επιπλέον, αν υπάρχει μια τέτοια λύση, μπορούν να προσδιοριστούν δύο ακραίες διαμορφώσεις της γραμμής ώθησης:

Η μέγιστη και η ελάχιστη λύση ώσης (**Deepest and Shallowest Solutions**) [4]. Αυτές οι λύσεις αντιπροσωπεύουν τα όρια του εύρους των πιθανών γραμμών ώθησης για ένα δεδομένο τόξο.



Εικόνα 2.2 Deepest Solution

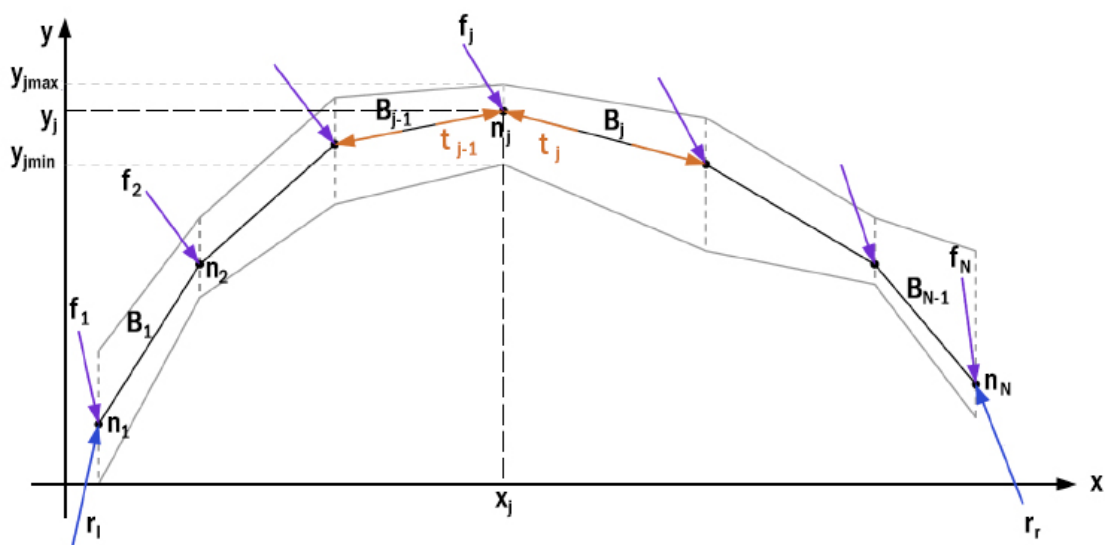


Εικόνα 2.3 Shallowest Solution

Η ανάλυση περιλαμβάνει τον προσδιορισμό της θέσης και της κατανομής των δυνάμεων κατά μήκος της γραμμής πίεσης. Για να εφαρμοστεί το θεώρημα, απαιτείται η επίλυση ενός συστήματος εξισώσεων ισορροπίας, λαμβάνοντας υπόψη τη γεωμετρία του τόξου, τις ιδιότητες του υλικού και τα ασκούμενα φορτία.

2.2 Ανάπτυξη Μαθηματικού Μοντέλου

Η ιδέα θα μετατραπεί σε γραμμικό πρόβλημα βελτιστοποίησης με περιορισμούς, έτσι ώστε να είναι δυνατός ο υπολογισμός εύρους λύσεων [4]. Δεδομένης μιας γραμμής ώθησης που αντιπροσωπεύεται από κλάδους (τμήματα) και κόμβους, το πρώτο βήμα είναι να καθοριστεί η γεωμετρία της γραμμής ώθησης (Εικόνα 2.3). Αυτό γίνεται με τον καθορισμό των συντεταγμένων $X_j = (x_j, y_j)$ των κόμβων, οι οποίες ταξινομούνται από αριστερά προς τα δεξιά. Οι κατακόρυφες συντεταγμένες των κόμβων, y_j , υπόκεινται σε ορισμένες ανισότητες που διασφαλίζουν ότι η γραμμή ώθησης περιέχεται εντός του πάχους του τόξου, δηλαδή $y_{jmin} \leq y_j \leq y_{jmax}$.



Εικόνα 2.3 Γραμμή ώθησης υποβαλλόμενη από εξωτερικά φορτία.

Κάθε κόμβος της γραμμής ώθησης μπορεί να παραλάβει εξωτερικές δυνάμεις $f_j = (f_{jx}, f_{jy})$. Επιπλέον, ο πρώτος και ο τελευταίος κόμβος υποβάλλονται στις αντιδράσεις που προκύπτουν από τα στηρίγματα ή τα θεμέλια του τόξου. Οι εσωτερικοί κόμβοι υπόκεινται επίσης σε δυνάμεις ώθησης που μεταδίδονται από παρακείμενους κλάδους. Η ισορροπία ενός γενικού κόμβου j στη γραμμή ώθησης περιγράφεται από την διανυσματική εξίσωση:

$$t_{j-1} + t_j + f_j = 0 \quad (1)$$

Εδώ, τα t_{j-1} και t_j αντιπροσωπεύουν τις εσωτερικές δυνάμεις ώθησης που μεταδίδονται από τους κλάδους B_{j-1} και B_j στον κόμβο n_j , αντίστοιχα. Αυτές οι δυνάμεις έχουν κατεύθυνση παράλληλη προς τους αντίστοιχους κλάδους και υπολογίζονται από τις εξισώσεις:

$$t_{j-1} = t_{j-1} * \frac{X_j - X_{j-1}}{l_{j-1}} \quad (2)$$

$$t_j = t_j * \frac{X_j - X_{j+1}}{l_j} \quad (3)$$

Όπου $l_j = |X_{j+1} - X_j| = \sqrt{(x_{j+1} - x_j)^2 + (y_{j+1} - y_j)^2}$ είναι το μήκος του κλάδου B_j . Χρησιμοποιείται στις εξισώσεις έτσι ώστε να υποδεικνύεται η κατεύθυνση της δύναμης, δηλαδή εάν δρα προς τον προηγούμενο ή τον επόμενο κόμβο κατά μήκος του τόξου. Αντικαθιστώντας στην (1), η εξίσωση ισορροπίας γίνεται:

$$\frac{t_{j-1}(X_j - X_{j-1})}{l_{j-1}} + \frac{t_j(X_j - X_{j+1})}{l_j} + f_j = 0 \quad (4)$$

Έτσι συσχετίζονται οι εσωτερικές δυνάμεις ώθησης με τις εξωτερικές δυνάμεις και τις θέσεις των κόμβων στη γραμμή πίεσης. Δύο εξαιρέσεις μόνο γίνονται για τον πρώτο και τον τελευταίο κόμβο, οι οποίοι επηρεάζονται και από τις αντιδράσεις των ελατηρίων r_l και r_r . Οι συνθήκες ισορροπίας για τους συγκεκριμένους κλάδους είναι:

$$r_l + \frac{t_1}{l_1} * (x_1 - x_2) + f_1 = 0 \quad (5)$$

$$r_r + \frac{t_N}{l_N} * (x_N - x_{N-1}) + f_N = 0 \quad (6)$$

Οι αντιδράσεις υπολογίζονται εύκολα αφού έχουν καθοριστεί οι τιμές των εσωτερικών δυνάμεων και οι συντεταγμένες των κόμβων.

Προκειμένου να απλοποιηθεί το σύνολο των εξισώσεων που εμπλέκονται στην συγκεκριμένη ανάλυση, είναι ωφέλιμο να

εισαχθούν ωθήσεις αναφοράς t'_j (reference thrusts), οι οποίες σχετίζονται με τις πραγματικές μέσω της αναλογικής σχέσης:

$$t'_j = R * t_j$$

Οι ωθήσεις αναφοράς t'_j είναι ανάλογες με την οριζόντια προβολή των πραγματικών ωθήσεων t_j και επιτρέπουν μια πιο απλή διατύπωση των εξισώσεων ισορροπίας καθιστώντας την ανάλυση πιο διαχειρίσιμη. Βοηθούν στην απομόνωση της επιρροής των οριζόντιων στοιχείων και απλοποιούν τη διαδικασία επίλυσης. Ο παράγοντας αναλογικότητας είναι μια θετική παράμετρος που συμβολίζεται ως $R > 0$. Η προσαρμογή του R επιτρέπει την παραμετρική ανάλυση και την εξερεύνηση διαφόρων διαμορφώσεων γραμμής ώθησης και κατανομής φορτίου.

Χρησιμοποιώντας αυτή τη σχέση η εξίσωση ισορροπίας για τον j εσωτερικό κόμβο τελικά γίνεται:

$$\frac{t'_{j-1}(X_j - X_{j-1})}{h_{j-1}} + \frac{t'_j(X_j - X_{j+1})}{h_j} + Rf_j = 0 \quad (7)$$

Όπου το h_j είναι η οριζόντια απόσταση μεταξύ των κόμβων n_j και n_{j+1} .

Το σύνολο των εξισώσεων που δίνεται από την (7) αντιπροσωπεύει τα θεμελιώδη στοιχεία που χρησιμοποιούνται στην ανάλυση της γραμμής πίεσης. Αποτελείται από $2N - 2$ εξισώσεις όπου N ο αριθμός των εσωτερικών κόμβων του τόξου. Ωστόσο, ο αριθμός των αγνώστων στο σύστημα υπερβαίνει τον αριθμό των εξισώσεων κατά 2. Οι άγνωστοι περιλαμβάνουν τις ωθήσεις αναφοράς t' , τις y συντεταγμένες των κόμβων και την τιμή του R . Βέβαια, οι περιορισμοί ανισότητας που εισήλθαν νωρίτερα, περιορίζουν περαιτέρω τις πιθανές λύσεις. Έτσι η ανάλυση μετατρέπεται σε γραμμικό πρόβλημα βελτιστοποίησης με περιορισμούς:

$$\begin{aligned} t_j &> 0 \\ y_{jmin} &\leq y_j \leq y_{jmax} \\ R &> 0 \end{aligned}$$

Συνεπώς, το σύνολο των εξισώσεων και των περιορισμών μπορεί να δίνει (a) πολλαπλές λύσεις, (b) μια μοναδική ή (c) καμία λύση.

(a) Στην περίπτωση πολλαπλών λύσεων, προσδιορίζονται δύο ακραίες διαμορφώσεις της γραμμής πίεσης που αναφέρθηκαν νωρίτερα: η ελάχιστη και η μέγιστη λύση ώσης. Αυτές οι λύσεις συνδέονται με τις ελάχιστες και μέγιστες τιμές της οριζόντιας

συνιστώσας ώσης*. Η παράμετρος R , η οποία είναι αντιστρόφως ανάλογη με την t_j , ποικίλλει επίσης αντίστοιχα. Αυτές οι λύσεις αντιπροσωπεύουν τα όρια του εύρους των πιθανών γραμμών ώθησης για ένα δεδομένο τόξο. Όσο μεγαλύτερη διαφορά έχουν αυτές οι δύο ακραίες λύσεις μεταξύ τους, τόσο πιο μεγάλο είναι το ενδιαμέσο εύρος πιθανών γραμμών πίεσης και άρα τόσο πιο ασφαλής είναι η κατασκευή. Γι' αυτό η τιμή του λόγου των δύο ακραίων λύσεων έχει μεγάλη σημασία για την αξιολόγηση της ασφάλειας και της σταθερότητας της δομής του τόξου.

(b) Στην περίπτωση μιας μοναδικής λύσης, σημαίνει ότι το τόξο έχει φτάσει σε μια οριακή συνθήκη ισορροπίας. Το διάστημα μεταξύ των ακραίων λύσεων γίνεται πολύ μικρό (κοντά στο 0) υποδεικνύοντας ότι είναι δυνατή μόνο μία ισορροπημένη κατανομή εσωτερικών δυνάμεων. Αυτή η περίπτωση αντιπροσωπεύει μια κρίσιμη κατάσταση για την ισορροπία του τόξου, αφού ακόμα και μια μικρή αλλαγή στη γεωμετρία του τόξου ή στις συνθήκες φόρτισης μπορεί να το καταστήσουν ασταθές.

(c) Εάν δεν υπάρχει λύση, σημαίνει ότι δεν υπάρχει πιθανή κατανομή εσωτερικών δυνάμεων που να μπορούν να επιτύχουν ισορροπία κάτω από τα εφαρμοζόμενα φορτία, ικανοποιώντας παράλληλα και τα ίδια βάρη του υλικού. Σε αυτή την περίπτωση, το τόξο θεωρείται μη ασφαλές.

Η συνολική διαδικασία της ανάλυσης της γραμμής πίεσης περιλαμβάνει την επίλυση του συνόλου των εξισώσεων και των ανισοτήτων για τον προσδιορισμό των διαμορφώσεων της γραμμής πίεσης, τον εντοπισμό ακραίων λύσεων και την αξιολόγηση της ασφάλειας και της σταθερότητας της δομής του τόξου.

2.3 Διαδικασία Επίλυσης για Επιδράσεις Μόνο από Κατακόρυφα Φορτία

Έστω ότι όλοι οι κόμβοι της γραμμής πίεσης υπόκεινται μόνο σε κατακόρυφα εξωτερικά φορτία. Όταν εφαρμόζονται μόνο κατακόρυφα φορτία σε ένα τόξο (π.χ. το ίδιο βάρος του τόξου) τα φορτία εφαρμόζονται συνήθως συμμετρικά. Με άλλα λόγια, το τόξο υφίσταται κάθετες δυνάμεις που κατανέμονται ομοιόμορφα σε όλο το μήκος του τόξου. Ως αποτέλεσμα, οι οριζόντιες εσωτερικές δυνάμεις τείνουν να αλληλοεξουδετερώνονται λόγω της συμμετρικής φύσης της κατακόρυφης φόρτισης, όταν εξετάζεται το τόξο στο σύνολό του. Άρα, ενώ υπάρχουν οριζόντιες εσωτερικές

δυνάμεις, δεν επηρεάζουν την κατακόρυφη ισορροπία του τόξου. Επομένως, όταν αναλύεται η ισορροπία της γραμμής πίεσης του τόξου για επιδράσεις μόνο από κατακόρυφα φορτία, δεν χρειάζεται να εξετάζεται η οριζόντια ισορροπία, αφού ικανοποιείται εγγενώς από τη συμμετρία της φόρτισης. Παράλληλα, λόγω απώλειας οριζόντιων εξωτερικών δυνάμεων, έχουμε $F_{jx} = 0$, οπότε η οριζόντια συνιστώσα της εξίσωσης ισορροπίας (7) γίνεται:

$$t'_{j-1} - t'_j = 0 \quad (8)$$

Για να απλοποιηθεί η ανάλυση, υποθέτουμε ότι οι ωθήσεις αναφοράς είναι ομοιόμορφα κατανεμημένες σε όλους τους κλάδους. Αυτό σημαίνει ότι το μέγεθος της ώθησης αναφοράς σε κάθε κλάδο είναι το ίδιο. Σε πρακτικούς όρους, εκχωρείται μια μικρή θετική τιμή, που συμβολίζεται ως $T0$ στο περιβάλλον του Matlab, σε όλες τις ωθήσεις αναφοράς. Αυτό φαίνεται στο line 44 του script '*Archlab1.m*' στην εικόνα 2.4.

```

38 - T0=0.01;
39
40 - if norm(Fx)==0
41     % --- No horizontal forces ---
42
43     % Initialize reference thrusts of branches
44 - Tref=ones(N-1,1)*T0;
45
46     % Minimum thrust solution (deepest solution)
47 - [Yd,Rd,Td]=VertEq(X,Ymin,Ymax,Tref,Fy,-1);
48
49     % Maximum thrust solution (shallowest solution)
50 - [Ys,Rs,Ts]=VertEq(X,Ymin,Ymax,Tref,Fy,1);

```

Εικόνα 2.4

Αποδίδοντας μια μικρή θετική τιμή σε όλες τις ωθήσεις αναφοράς, διασφαλίζεται ότι κάθε κλάδος συμβάλλει στη συνολική ισορροπία του τόξου. Καθώς η ανάλυση προχωρά και λαμβάνει χώρα η επαναληπτική διαδικασία, οι ωθήσεις αναφοράς θα προσαρμόζονται και θα ενημερώνονται με βάση τις συγκεκριμένες συνθήκες και περιορισμούς του προβλήματος.

Είναι σημαντικό να σημειωθεί ότι το πραγματικό μέγεθος των ωθήσεων αναφοράς θα καθοριστεί από τη διαδικασία βελτιστοποίησης και τους περιορισμούς που επιβάλλονται στο σύστημα. Η αρχική εκχώρηση του $T0$ παρέχει απλώς ένα σημείο εκκίνησης για την ανάλυση, ενώ οι τελικές τιμές των ωθήσεων αναφοράς θα καθοριστούν μέσω των επαναληπτικών υπολογισμών.

Μόλις οι ωθήσεις αναφοράς έχουν αντιστοιχιστεί σε όλους τους κλάδους του τόξου, ο αλγόριθμος προχωρά στην εύρεση των λύσεων για ελάχιστες και μέγιστες ωθήσεις. Αυτό περιλαμβάνει την επίλυση των εξισώσεων κάθετης ισορροπίας για το τόξο που υποβάλλεται σε κατακόρυφα φορτία. Οπότε η κάθετη συνιστώσα της εξίσωσης (7) είναι:

$$\frac{t'_{j-1}(y_j - y_{j-1})}{h_{j-1}} + \frac{t'_j(y_j - y_{j+1})}{h_j} + Rf_j = 0 \quad (9)$$

Τώρα, το πλήρες σύνολο των εξισώσεων κάθετης ισορροπίας N-1 για όλους τους εσωτερικούς κόμβους συνδυάζεται σε μια εξίσωση πίνακα:

$$D * y + R * F_y = 0 \quad (10)$$

όπου το y είναι ένα διάνυσμα που περιέχει τις συντεταγμένες y όλων των κόμβων και το F_y είναι ένα διάνυσμα που συλλέγει τις κατακόρυφες δυνάμεις που ασκούνται στους κόμβους n_2 έως n_{N-1} . Ο πίνακας D , μεγέθους $(N-2) \times N$, κατασκευάζεται ως εξής:

$$D_j = \frac{t'_j}{h_j} * \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (11)$$

Ο στόχος τώρα είναι να βρεθούν οι άγνωστοι y (οι κατακόρυφες συντεταγμένες όλων των κόμβων) και R (η παράμετρος που αντιπροσωπεύει την αναλογικότητα μεταξύ των ωθήσεων αναφοράς και της οριζόντιας προβολής τους). Αυτό γίνεται με την επίλυση της εξίσωσης του πίνακα (10) μαζί με το σύνολο των ανισοτήτων που αντιπροσωπεύουν τους περιορισμούς του συστήματος:

$$\begin{aligned} \min \pm R \text{ έτσι ώστε: } & D * y + R * F_y = 0 \\ & y_{min} \leq y \leq y_{max} \\ & R > 0 \end{aligned} \quad (12)$$

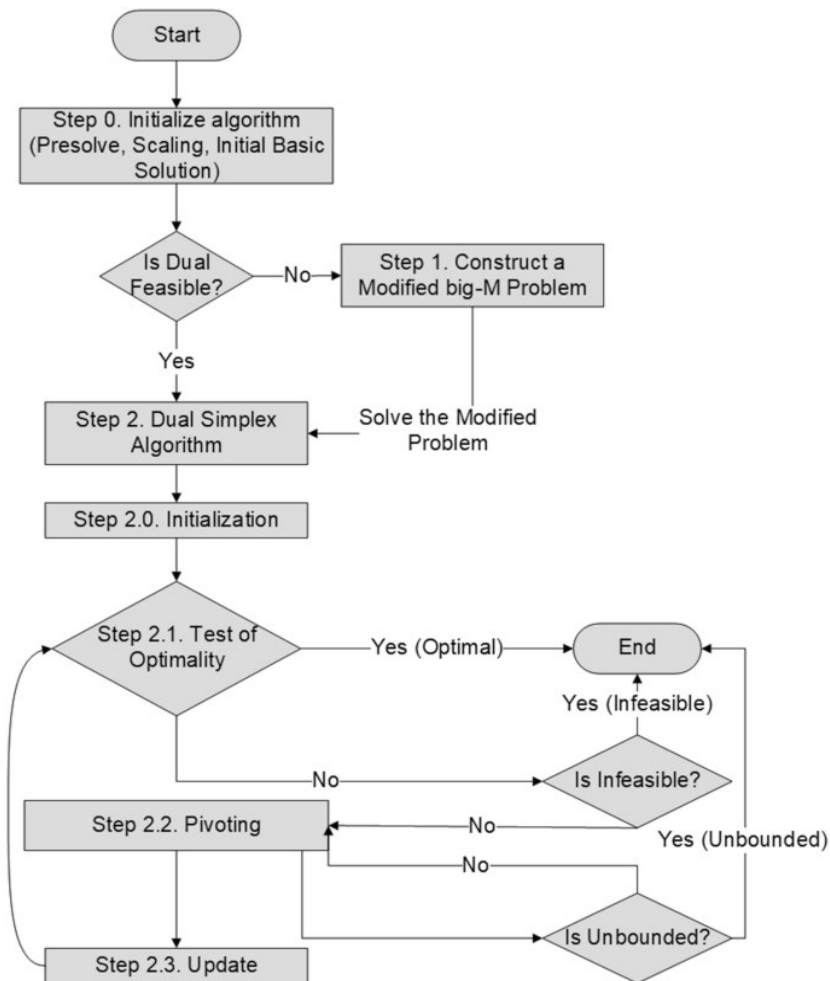
Αυτό μπορεί να διατυπωθεί ως ένα πρόβλημα γραμμικής βελτιστοποίησης με περιορισμούς, όπου επιδιώκουμε να ελαχιστοποιήσουμε την τιμή του R , ικανοποιώντας ταυτόχρονα τις εξισώσεις ισορροπίας και τους περιορισμούς για το y . Η βελτιστοποίηση πραγματοποιείται με τη χρήση του αλγορίθμου **Dual-Simplex**, δηλαδή μια αριθμητική μέθοδο που είναι ήδη διαθέσιμη στο Matlab.

Ο αλγόριθμος **Dual-Simplex** είναι ένας αλγόριθμος βελτιστοποίησης που χρησιμοποιείται κυρίως για την επίλυση

προβλημάτων γραμμικού προγραμματισμού. Ο κύριος στόχος του είναι η εύρεση της βέλτιστης λύσης (μεγιστοποίηση ή ελαχιστοποίηση μιας αντικειμενικής συνάρτησης) εντός των περιορισμών ενός προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού.

Αρχικά ξεκινά με μια αρχική εφικτή λύση, η οποία ενδέχεται να μην είναι βέλτιστη. Εάν είναι, ο αλγόριθμος τερματίζει επειδή έχει βρεθεί η βέλτιστη λύση. Εάν η τρέχουσα λύση δεν είναι βέλτιστη, ελέγχει τη σκοπιμότητα, διασφαλίζοντας ότι ικανοποιούνται όλοι οι περιορισμοί. Εάν τηρούνται οι περιορισμοί, ελέγχει εάν το δεδομένο σημείο είναι βέλτιστο για να καθορίσει ποια μεταβλητή μπορεί να αυξήσει (στην περίπτωση μεγιστοποίησης) ή να μειώσει (στην περίπτωση ελαχιστοποίησης) την τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης πιο αποτελεσματικά. Αφού προσδιοριστούν οι μεταβλητές εισόδου και εξόδου, ο αλγόριθμος εκτελεί μια πράξη περιστροφής, η οποία είναι ουσιαστικά μια ενημέρωση της βασικής εφικτής λύσης. Η λειτουργία αυτή διασφαλίζει ότι η επόμενη λύση είναι πιο κοντά στη βέλτιστη λύση. Τα προηγούμενα βήματα επαναλαμβάνονται για πλήθος επαναλήψεων το οποίο ορίζει ο χρήστης, έως ότου ο αλγόριθμος συγκλίνει στη βέλτιστη λύση. Κατά τη διάρκεια κάθε επανάληψης, ο αλγόριθμος στοχεύει στη βελτίωση της τιμής της αντικειμενικής συνάρτησης, διατηρώντας παράλληλα τις προϋποθέσεις των περιορισμών. Ο αλγόριθμος Dual-Simplex είναι ιδιαίτερα χρήσιμος για την επίλυση προβλημάτων γραμμικού προγραμματισμού σε περιπτώσεις όπου η αρχική λύση μπορεί να μην είναι εφικτή ή βέλτιστη. Λειτουργεί με επαναληπτική βελτίωση της λύσης έως ότου επιτευχθεί η βέλτιστη λύση ή ικανοποιηθεί ένα συγκεκριμένο κριτήριο τερματισμού.

Στο πλαίσιο της ανάλυσης γραμμής ώθησης τοξωτών φορέων, ο αλγόριθμος Dual-Simplex χρησιμοποιείται για την επίλυση του συστήματος εξισώσεων που αναπαριστά την κατακόρυφη ισορροπία των εσωτερικών κόμβων του τόξου. Ο αλγόριθμος αυτός βοηθά στον προσδιορισμό της διαμόρφωσης ισορροπίας του τόξου υποβαλλόμενου από κατακόρυφα φορτία, συμπεριλαμβανομένης της εύρεσης των τιμών των κατακόρυφων συντεταγμένων (y) και του συντελεστή (R) που καθορίζουν τη γραμμή ώθησης του τόξου.



Εικόνα 2.5 Βασικό διάγραμμα ροής αλγόριθμου Dual-Simplex

Συμπεραίνοντας, η αντικειμενική συνάρτηση αντιπροσωπεύεται από την τιμή του R . Το αν επιδιώκουμε να κάνουμε το R όσο το δυνατόν μεγαλύτερο ή όσο το δυνατόν μικρότερο εξαρτάται από τη συγκεκριμένη περίπτωση.

Μεγιστοποίηση του R :

Όταν θέτουμε " $-R$ ", σημαίνει ότι θέλουμε να βρούμε τη μεγαλύτερη δυνατή τιμή για το R .

Στο πλαίσιο της ανάλυσης γραμμής ώθησης, ένα μεγαλύτερο R αντιστοιχεί σε χαμηλότερη τιμή ώθησης στο τόξο. Αυτό σημαίνει ότι αναζητούμε τη διαμόρφωση στην οποία η οριζόντια συνιστώσα της ώθησης βρίσκεται στο ελάχιστο.

Αυτή η διαμόρφωση είναι γνωστή ως "βαθύτερη λύση" (**Deepest Solution**), επειδή αντιπροσωπεύει τη γεωμετρία του τόξου με τη χαμηλότερη δυνατή οριζόντια ώθηση.

Ελαχιστοποίηση R:

Αντίθετα, όταν θέτουμε "+R", στοχεύουμε στην εύρεση της μικρότερης δυνατής τιμής για το R.

Στην περίπτωση αυτή, ένα μικρότερο R αντιστοιχεί σε υψηλότερη τιμή ώθησης στο τόξο. Έτσι, αναζητούμε τη διαμόρφωση όπου η οριζόντια συνιστώσα της ώθησης είναι στο μέγιστο.

Αυτή η διαμόρφωση αναφέρεται ως «ρηχότερη λύση" (**Shallowest Solution**), επειδή αντιπροσωπεύει τη γεωμετρία του τόξου με τη μεγαλύτερη δυνατή οριζόντια ώθηση.

Για να επιλέξουμε μεταξύ αυτών των δύο περιπτώσεων, χρησιμοποιείται μια παράμετρος μέσα στη συνάρτηση **VertEq** που ονομάζεται "rm", όπως φαίνεται στις γραμμές 47 και 50 της εικόνας 2.4. Αν το "rm" έχει τιμή -1, αυτό σημαίνει ότι αναζητούμε τη βαθύτερη λύση (ελάχιστη ώθηση), οπότε μεγιστοποιούμε το R.

Εάν το "rm" έχει τιμή +1, σημαίνει ότι αναζητούμε τη ρηχότερη λύση (μέγιστη ώθηση), οπότε ελαχιστοποιούμε το R.

Συνάρτηση VertEq

Η συνάρτηση VertEq (Vertical Equation) επιλύει τις εξισώσεις κατακόρυφης ισορροπίας για ένα τόξο, όπου οι διαμορφώσεις των γραμμών ώθησης της ελάχιστης και της μέγιστης ώθησης προσδιορίζονται με βάση τις παραμέτρους εισόδου. Η διαδικασία βελτιστοποίησης βρίσκει τις συνθήκες ισορροπίας τηρώντας παράλληλα τους περιορισμούς στις θέσεις των κόμβων και τις τιμές των ωθήσεων. Η συνάρτηση φαίνεται στην εικόνα 2.6 παρακάτω:

```

105 function [y,R,T]=VertEq(X,Ymin,Ymax,Tref,Fy,pm)
106 % Solve vertical equilibrium of the thrust line
107 % pm = -1 -> Minimum thrust solution (deepest solution)
108 % pm = +1 -> Maximum thrust solution (shallowest solution)
109 N=length(X);
110 % Matrix of reference thrust densities
111 D0=zeros(N);
112 Db0=[1,-1;-1,1];
113 for j=1:N-1
114     jj=j:j+1;
115     D0(jj,jj)=D0(jj,jj)+Db0*Tref(j)/(X(j+1)-X(j));
116 end
117 % select internal nodes
118 D=D0(2:N-1,:);
119 fy=Fy(2:N-1);
120
121 % Constrained linear optimization
122 options = optimset('Display','none','Algorithm','dual-simplex');
123 % options = optimset('Display','none');
124 F=[zeros(N,1);pm];
125 Aeq=[D,fy];
126 beq=zeros(N-2,1);
127 lb=[Ymin;0];
128 ub=[Ymax;Inf(1)];
129 [Sol,~,ExitFlag]=linprog(F,[],[],Aeq,beq,lb,ub,[],options);
130
131 if ExitFlag==1
132     % Output solution
133     y=Sol(1:end-1);
134     R=Sol(end);
135 else
136     % No solution found
137     y=-ones(N,1);
138     R=-1;
139 end
140
141 % Evaluate actual thrusts
142 T=Tref;
143 for j=1:N-1
144     Th=Tref(j)/R;
145     Tv=Th*(y(j+1,1)-y(j,1))/(X(j+1,1)-X(j,1));
146     T(j)=norm([Th,Tv]);
147 end

```

Εικόνα 2.6 Συνάρτηση VertEq

Η συγκεκριμένη συνάρτηση δέχεται διάφορα ορίσματα εισόδου και επιστρέφει τρεις εξόδους: y, R και T.

Τα ορίσματα εισόδου είναι τα εξής:

X είναι ένας πίνακας που αναπαριστά τις συντεταγμένες x των κόμβων κατά μήκος του τόξου.

Ymin είναι ένας πίνακας που αναπαριστά τις ελάχιστες επιτρεπόμενες συντεταγμένες y των κόμβων.

Ymax είναι ένας πίνακας που αντιπροσωπεύει τις μέγιστες επιτρεπόμενες συντεταγμένες y των κόμβων.

Tref είναι ένας πίνακας που αντιπροσωπεύει τιμές αναφοράς ώθησης.

Fy είναι ένας πίνακας που αντιπροσωπεύει τις κατακόρυφες δυνάμεις που εφαρμόζονται στους κόμβους και

pm είναι η παράμετρος που καθορίζει αν θα βρεθεί η λύση της ελάχιστης ώθησης (-1) ή της μέγιστης ώθησης (+1).

Επιπλέον:

$N = \text{length}(X)$ υπολογίζει τον αριθμό των κόμβων με βάση το μήκος του πίνακα X . Ο $D0$ αρχικοποιείται ως τετραγωνικός πίνακας μηδενικών με μέγεθος $N \times N$. Ο $Db0$ αρχικοποιείται ως πίνακας 2×2 με συγκεκριμένες τιμές.

Ο βρόχος επαναλαμβάνει κάθε κόμβο (j) από το 1 έως το $N-1$.

Για κάθε κόμβο, υπολογίζει και ενημερώνει συγκεκριμένα στοιχεία του πίνακα $D0$ με βάση τις τιμές στα $Tref$, $Db0$ και την απόσταση μεταξύ των κόμβων ($X(j+1)-X(j)$).

Το D εξάγεται από τον $D0$ για να περιλαμβάνει μόνο τους εσωτερικούς κόμβους.

Το fy εξάγεται από το Fy για να περιλαμβάνει μόνο τις κατακόρυφες δυνάμεις στους εσωτερικούς κόμβους.

Η συνάρτηση, έπειτα, δημιουργεί ένα πρόβλημα περιορισμένης γραμμικής βελτιστοποίησης. Χρησιμοποιεί τη συνάρτηση `linprog` του MATLAB για την επίλυση αυτού του προβλήματος βελτιστοποίησης.

Οι περιορισμοί περιλαμβάνουν γραμμικές ισότητες (Aeq και beq), κατώτερα όρια (lb) και ανώτερα όρια (ub) στις μεταβλητές.

Το `ExitFlag` είναι ένας δείκτης που υποδεικνύει την κατάσταση εξόδου της βελτιστοποίησης. Εάν `ExitFlag=1`, σημαίνει ότι η βελτιστοποίηση ήταν επιτυχής και βρέθηκε λύση. Εάν το `ExitFlag` δεν είναι 1, σημαίνει ότι δεν βρέθηκε λύση.

Εάν βρέθηκε λύση (δηλαδή `ExitFlag=1`), η συνάρτηση αναθέτει τιμές στα y και R με βάση τα αποτελέσματα της βελτιστοποίησης.

Εάν δεν βρέθηκε λύση, αποδίδει τις προεπιλεγμένες τιμές -1 στα y και R . Αφού λάβει τα y και R , η συνάρτηση υπολογίζει τις πραγματικές τιμές ώθησης (T) για κάθε κλάδο του τόξου χρησιμοποιώντας αυτά τα αποτελέσματα και τις γεωμετρικές ιδιότητες.

2.4 Διαδικασία Επίλυσης για Επιδράσεις από Οριζόντια και Κατακόρυφα Φορτία

Όταν οι κόμβοι του τόξου υπόκεινται τόσο σε οριζόντιες όσο και σε κατακόρυφες δυνάμεις, τότε οι εξισώσεις ισορροπίας περιπλέκονται. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι τόσο η οριζόντια όσο και η κατακόρυφη συνιστώσα των εξισώσεων περιλαμβάνουν την άγνωστη τιμή R . Για την επίλυση αυτού του προβλήματος υιοθετείται μια επαναληπτική προσέγγιση, όπου οι εξισώσεις ισορροπίας επιλύονται επανειλημμένα τόσο για την οριζόντια όσο

και για την κατακόρυφη συνιστώσα. Πρώτα όμως θα εξηγηθεί η παρακάτω συνάρτηση RefThr (εικόνα 2.7), η οποία χρησιμοποιείται στη συνέχεια.

Συνάρτηση RefThr

Η συνάρτηση RefThr (Reference Thrusts) είναι υπεύθυνη για την εκχώρηση ωθήσεων αναφοράς στους εσωτερικούς κόμβους του τόξου.

Λαμβάνει 4 εισόδους: f_x , N , T_0 και R . Το f_x αντιπροσωπεύει ένα διάνυσμα οριζόντιων δυνάμεων σε κάθε εσωτερικό κόμβο, το N είναι ο συνολικός αριθμός των κόμβων, το T_0 είναι η αρχική τιμή αναφοράς των ωθήσεων και το R είναι η παράμετρος που χρησιμοποιείται για την προσαρμογή των ωθήσεων. Η συνάρτηση αρχικοποιεί έναν πίνακα T μεγέθους $N-1$, όπου κάθε στοιχείο έχει αρχικά την τιμή T_0 . Αυτός ο πίνακας θα αποθηκεύει τις τιμές ώθησης αναφοράς για τους εσωτερικούς κόμβους. Στη συνέχεια εισέρχεται σε έναν βρόχο που ξεκινά από τον δεύτερο κόμβο ($j=2$) και φτάνει μέχρι τον προτελευταίο κόμβο ($j=N-1$). Σε κάθε επανάληψη του βρόχου, υπολογίζει την ώθηση αναφοράς για τον τρέχοντα κόμβο j με βάση την ώθηση αναφοράς του προηγούμενου κόμβου $j-1$ και την οριζόντια δύναμη στον κόμβο j . Ο υπολογισμός αυτός γίνεται χρησιμοποιώντας την εξίσωση:

$$t'_{j-1} - t'_j + R * f_{jx} = 0 \quad (13)$$

Μετά τον υπολογισμό όλων των ωθήσεων αναφοράς, ελέγχει εάν η ελάχιστη τιμή στον πίνακα T είναι μικρότερη ή ίση με μηδέν. Εάν πληρείται αυτή η συνθήκη, σημαίνει ότι ορισμένες από τις ωθήσεις έχουν γίνει μη θετικές, πράγμα που δεν έχει φυσικό νόημα. Για να το διορθώσει αυτό, μετατοπίζει όλες τις τιμές ώθησης κατά ένα ποσό ίσο με την ελάχιστη τιμή ώθησης συν T_0 . Αυτό εξασφαλίζει ότι όλες οι ωθήσεις αναφοράς είναι θετικές, διατηρώντας παράλληλα τις σχετικές διαφορές τους. Στη συνέχεια, η συνάρτηση επιστρέφει τον πίνακα T , ο οποίος περιέχει τις εκχωρημένες ωθήσεις αναφοράς για όλους τους εσωτερικούς κόμβους του τόξου.

```

149 - function T=RefThr (fx,N,T0,R)
150 -     % Assign reference thrusts
151 -
152 -     T=ones (N-1,1)*T0;
153 -
154 -     for j=2:N-1
155 -         T(j)=T(j-1)+fx(j)*R;
156 -     end
157 -
158 -     if min(T)<=0
159 -         T=T-min(T)+T0;
160 -     end

```

Εικόνα 2.7 Συνάρτηση RefThr

Στην ουσία, η συνάρτηση RefThr υπολογίζει τις ωθήσεις αναφοράς για τους εσωτερικούς κόμβους του τόξου με βάση τις οριζόντιες δυνάμεις (fx), τον συνολικό αριθμό κόμβων (N), μια αρχική τιμή ώθησης (T0) και μια παράμετρο (R) που βοηθά στην προσαρμογή αυτών των ωθήσεων ώστε να ικανοποιούνται οι συνθήκες ισορροπίας. Αυτές οι ωθήσεις αναφοράς χρησιμοποιούνται στην ανάλυση της γραμμής ώθησης του τόξου. Η συγκεκριμένη συνάρτηση χρησιμοποιείται στη διαδικασία επίλυσης της γραμμής πίεσης όταν υπάρχουν και οριζόντια φορτία (Εικόνα 2.8).

```

52 - else
53 -     % --- Horizontal forces ---
54 -     kmax=1000;
55 -
56 -     % ++ Minimum thrust solution (deepest solution) ++
57 -     Rd=1e-8;
58 -     for k=2:kmax
59 -
60 -         % Assign reference thrusts that fulfill horizontal equilibrium
61 -         Tref=RefThr(Fx,N,T0,Rd);
62 -
63 -         % Vertical equilibrium
64 -         Rold=Rd;
65 -         RR(k)=Rd;
66 -         [Yd,Rd,Td]=VertEq(X,Ymin,Ymax,Tref,Fy,-1);
67 -
68 -         % Check convergence
69 -         if (Rd==-1) || (abs(Rd-Rold)<1e-3*Rd)
70 -             break
71 -         end
72 -     end
73 -
74 -     % ++ Maximum thrust solution (shallowest solution) ++
75 -     Rs=1e-8;
76 -     for k=2:kmax
77 -
78 -         % Assign reference thrusts that fulfill horizontal equilibrium
79 -         Tref=RefThr(Fx,N,T0,Rs);
80 -
81 -         % Vertical equilibrium
82 -         Rold=Rs;
83 -         [Ys,Rs,Ts]=VertEq(X,Ymin,Ymax,Tref,Fy,1);
84 -
85 -         % Check convergence
86 -         if (Rs==-1) || (abs(Rs-Rold)<1e-3*Rs)
87 -             break
88 -         end
89 -     end
90 -
91 - end

```

Εικόνα 2.8 Διαδικασία επίλυσης υπό την παρουσία οριζόντιων δυνάμεων

Η διαδικασία, λοιπόν, ξεκινά ορίζοντας το μέγιστο πλήθος των επαναλήψεων (kmax) που επιτρέπονται για τη λύση των εξισώσεων ισορροπίας της γραμμής πίεσης. Παράλληλα, επιλέγεται μια αρχική εκτίμηση για την άγνωστη παράμετρο R όπως φαίνεται στις γραμμές 57 και 75 στην εικόνα 2.8. Αυτή η εκτίμηση μας επιτρέπει να λύσουμε αρχικά την εξίσωση οριζόντιας ισορροπίας (13).

Έτσι, προσδιορίζουμε διαδοχικά την ώθηση για κάθε κλάδο (γραμμές 58 και 76). Ωστόσο, αυτή η αρχική λύση μπορεί να μην πληροί τον περιορισμό ότι οι ωθήσεις πρέπει να είναι μεγαλύτερες από το μηδέν. Έτσι, προσαρμόζουμε την κατανομή των ωθήσεων για

να εξασφαλίσουμε θετικότητα. Η συνάρτηση RefThr (γραμμές 61 και 79) καλείται για τον υπολογισμό των θετικών ωθήσεων αναφοράς που ικανοποιούν τόσο τις εξισώσεις οριζόντιας ισορροπίας όσο και τους περιορισμούς.

Με εκχωρημένες τις θετικές ωθήσεις αναφοράς, μπορούμε να υπολογίσουμε τις κατακόρυφες συντεταγμένες (y) και να λάβουμε μια νέα εκτίμηση για το R επιλύοντας ένα περιορισμένο πρόβλημα γραμμικής βελτιστοποίησης. Η συνάρτηση VertEq, που αναλύθηκε προηγουμένως, χρησιμοποιείται εδώ, δηλαδή στις γραμμές 66 και 83. Αυτή η νέα εκτίμηση R είναι πιο ακριβής και αντανακλά την πραγματική ισορροπία. Στη συνέχεια, η νέα εκτίμηση R χρησιμοποιείται για την ενημέρωση των ωθήσεων αναφοράς και η διαδικασία επαναλαμβάνεται επαναληπτικά. Κάθε επανάληψη βελτιώνει τη λύση, καθιστώντας την πιο ακριβή.

Η διαδικασία συνεχίζεται σε επαναληπτικό βρόχο έως ότου η διαφορά μεταξύ δύο διαδοχικών τιμών του R γίνει αρκετά μικρή σε σύγκριση με την τρέχουσα εκτίμηση του R . Αυτό προσδιορίζεται ελέγχοντας εάν:

$$\frac{(R_{new} - R_{old})}{R_{new}} < R_{tol} \quad (14)$$

Αυτή η συνθήκη διασφαλίζει ότι η διαδικασία επαναλαμβάνεται έως ότου το R σταθεροποιηθεί εντός μιας αποδεκτής ανοχής. Έτσι, ο συγκεκριμένος κώδικας χρησιμοποιεί την τιμή $1e-3$ (10^{-3}) ως το όριο ανοχής R_{tol} για τον έλεγχο της σύγκλισης της επαναληπτικής διαδικασίας, όπως φαίνεται στις γραμμές 69 και 86 της εικόνας 2.8. Το $1e-3$ λειτουργεί ως σύμβολο κράτησης θέσης για την πραγματική τιμή ανοχής και μπορεί να προσαρμοστεί ανάλογα με τα διαφορετικά κριτήρια σύγκλισης κάθε εφαρμογής.

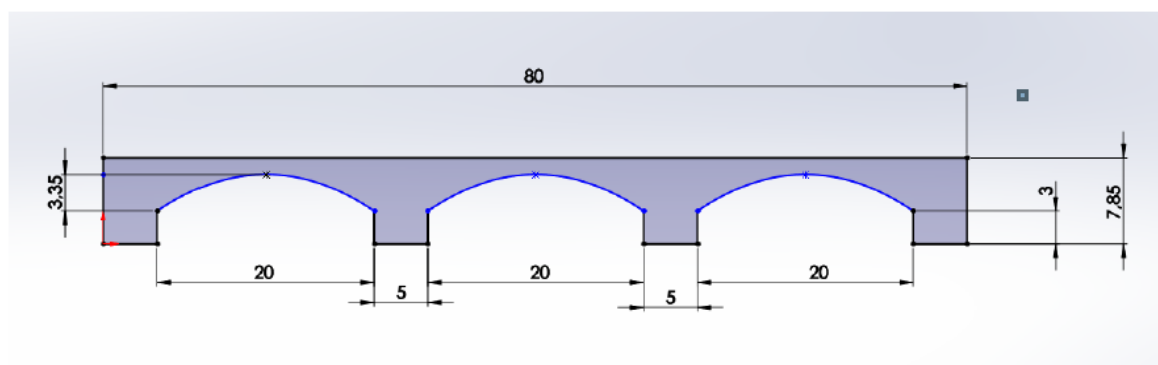
Συνοψίζοντας, όταν εφαρμόζονται τόσο οριζόντιες όσο και κάθετες δυνάμεις στο τόξο, είναι απαραίτητη μια επαναληπτική προσέγγιση. Ξεκινά με μια αρχική εικασία για το R και σταδιακά βελτιώνει τη λύση προσαρμόζοντας τις ωθήσεις αναφοράς και υπολογίζοντας εκ νέου το R μέχρι να επιτευχθεί σύγκλιση. Αυτή η επαναληπτική διαδικασία διασφαλίζει ότι η ισορροπία του τόξου υπό συνδυασμένες δυνάμεις προσδιορίζεται με ακρίβεια.

3 Εφαρμογή Κώδικα Γραμμής Πίεσης Τόξων στο περιβάλλον του Matlab

Στο συγκεκριμένο κεφάλαιο αναλύεται και εφαρμόζεται το συνολικό πακέτο του κώδικα μέσα από τον φάκελο 'keriti_matlab' στο περιβάλλον του Matlab, για την αξιολόγηση της ευστάθειας και της αντοχής τοξωτών κατασκευών. Παρουσιάζονται οι επεκτάσεις και οι βελτιώσεις που πραγματοποιήθηκαν, ενώ οπτικοποιούνται και εξηγούνται όλα τα αποτελέσματα. Η ανάλυση περιλαμβάνει παραμέτρους όπως η γεωμετρία του τόξου, οι διαφορετικές συνθήκες φόρτισης και οι εσωτερικές δυνάμεις που αναπτύσσονται. Ως παράδειγμα χρησιμοποιείται η γέφυρα του Κερίτη, ενώ στο επόμενο κεφάλαιο θα γίνουν περαιτέρω αναλύσεις και συγκρίσεις.

3.1 Εισαγωγή Τοξωτού Φορέα στο Matlab

Για να λειτουργήσει η συνολική διαδικασία που έχει περιγραφεί προηγουμένως, πρέπει να εισαχθούν τα δεδομένα του τόξου που αναλύεται κάθε φορά. Για το λόγο αυτό, κατασκευάστηκε το πρόγραμμα *ArchTLA.m* στο οποίο εισάγονται όλες οι απαραίτητες παράμετροι έτσι ώστε να δημιουργηθεί ο πίνακας δεδομένων εισόδου που θα χρησιμοποιηθεί για την επίλυση της γραμμής πίεσης. Αρχικά ο κώδικας θα εφαρμοστεί για τη γέφυρα Κερίτη, έστω για τη δεύτερη καμάρα, οι διαστάσεις της οποίας φαίνονται στην εικόνα 3.1. Στη συνέχεια θα χρησιμοποιηθεί για άλλους τοξωτούς φορείς. Το πρόγραμμα λειτουργεί με παύσεις (pauses), δηλαδή πατώντας οποιοδήποτε κουμπί μετά από το κάθε τρέξιμο, συνεχίζει με την επόμενη λύση.



Εικόνα 3.1 Γεωμετρία Γέφυρας Κερίτη [11].

Επιπλέον δίνεται και η πυκνότητα των υλικών της γέφυρας [11]:

| Part of the structure | Density (KN/m ³) |
|-----------------------|------------------------------|
| Arch | 19.60 |
| Fill | 19.00 |

Πίνακας 3.1 Πυκνότητα υλικών γέφυρας Κερίτη (ίδιο βάρος).

Εισάγουμε όλες τις απαραίτητες παραμέτρους της συγκεκριμένης γέφυρας στο αρχικό κομμάτι του προγράμματος *ArchTLA.m* όπως φαίνεται στην εικόνα 3.2 παρακάτω.

```

ArchTLA.m
7      % Parameters
8
9      W=20; % Length of Arch (m)
10     T=8; % Width of Arch (m)
11     H=3.35; % Height of Arch (m)
12     Hol=7.85; % Total Height (m)
13     t=0.4; % Thickness of Arch (m)
14     d1= 19.60; % Arch density (kN/m^3)
15     d2= 19.00; % Fill density (kN/m^3)
16
17     X=[-W/2:W/100:W/2];
18     Ymin=-4*H/W.^2 * X.^2 + H; % Ymin
19     Ymax=Ymin+t; %Ymax
20
21     % Vertical Forces (Dead Load)
22     Fy= zeros(size(X));
23     Fy=(-(Hol-3-Ymax)*d2*T*W/size(X,2)-t*d1*T*W/size(X,2));
24
25     Fx= zeros(size(X)); % Horizontal Forces
26
27     % Creating input data of all parameters
28     col_header={'X','Ymin','Ymax','Fx','Fy'};
29     h = findobj(gca,'Type','line');
30     Xl=get(h,'Xdata') ;
31     yl=get(h,'Ydata') ;
32     data = [X(:), Ymin(:), Ymax(:), Fx(:), Fy(:)];
33     dataTable = cell2table(num2cell(data), 'VariableNames', col_header);
34     writetable(dataTable, 'InputArch.csv');
35
36     % Solution of arch when subjected to its own self-weight
37     LArch = readtable('InputArch.csv');
38     LArch=ArchLabl(LArch);
39     writetable(LArch,'OutputArch.csv','Delimiter','')
40     PlotArch(LArch, [-11,11], [-1,6]);

```

Εικόνα 3.2 Εισαγωγή Δεδομένων στο script ArchTLA.m.

Στις γραμμές 9-15 ορίζονται οι παράμετροι που περιγράφουν τις διαστάσεις και τις ιδιότητες της τοξωτής γέφυρας. Περιλαμβάνονται, δηλαδή, το μήκος (W), το πλάτος (T), το ύψος του τόξου (H), το συνολικό ύψος (Hol), το πάχος (t) και οι πυκνότητες (d1 και d2).

Στη συνέχεια δημιουργείται ένα διάνυσμα τιμών X, οι οποίες αντιπροσωπεύουν σημεία κατά μήκος του ανοίγματος της γέφυρας. Αυτές οι τιμές χρησιμοποιούνται για τον υπολογισμό άλλων παραμέτρων κατά μήκος του τόξου. Προκειμένου να αξιολογηθεί η αποτελεσματικότητα του αλγορίθμου δημιουργούνται κόμβοι που απέχουν μεταξύ τους $\frac{1}{100}$ του συνολικού μήκους της γέφυρας. Ουσιαστικά, είναι ένας τρόπος δοκιμής των ορίων του αλγορίθμου και διασφάλισης ότι μπορεί να παρέχει ακριβή αποτελέσματα ακόμα και σε απαιτητικές καταστάσεις.

Επειτα, υπολογίζονται τα Ymin και Ymax, τα οποία αντιπροσωπεύουν τις ελάχιστες και μέγιστες κατακόρυφες θέσεις της τοιχοποιίας, με βάση την εξίσωση παραβολής:

$$y = -4 * \frac{H}{W^2} * x^2 + H \quad (15)$$

Εδώ πρέπει να τονιστεί ότι η μορφή της συγκεκριμένης γέφυρας χαρακτηρίζεται από χαμηλό τόξο (Low-Arched Bridge), οπότε περιγράφεται από την εξίσωση 15. Η εξίσωση αλλάζει για διαφορετικού τύπου τόξων, όπως θα δούμε παρακάτω.

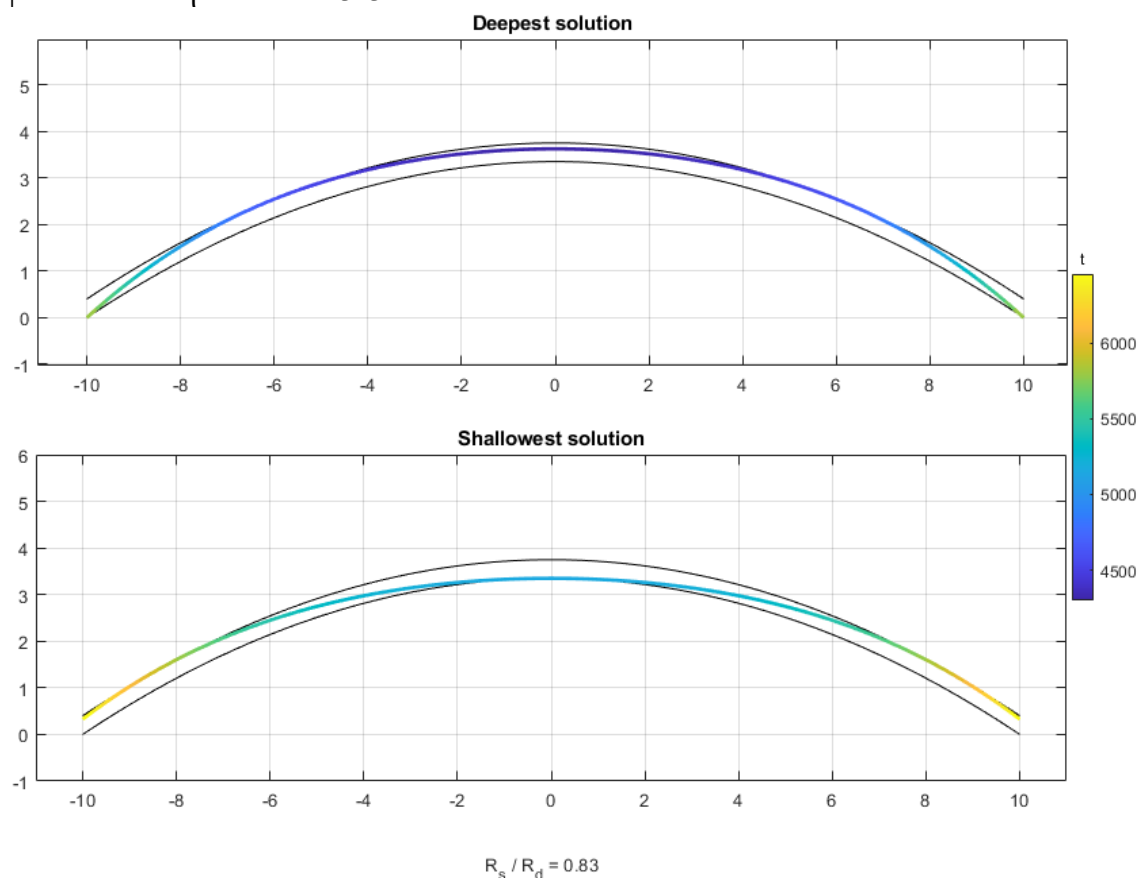
Παράλληλα υπολογίζεται το κατακόρυφο φορτίο (Fy) που ασκείται στο τόξο λόγω του βάρους του γεμίσματος της γέφυρας αλλά και του βάρους της τοιχοποιίας. Αυτός ο υπολογισμός λαμβάνει υπόψη τις πυκνότητες (d1 και d2), τις διαστάσεις του τόξου και το άνοιγμα που αντιπροσωπεύεται από το X. Οι συγκεκριμένες δυνάμεις κατανέμονται άνισα σε όλο το μήκος του τόξου και μεταβάλλονται ανάλογα με το ύψος του. Οπότε, η εξίσωση που χαρακτηρίζει τη συνάρτηση ίδιου βάρους της γέφυρας σαν διάνυσμα είναι η εξής:

$$Fy = \frac{-(Hol - Ymax - 3) * d_2 * T * W}{100} - \frac{t * d_1 * T * W}{100} \quad (16)$$

όπου Ymax είναι η εξίσωση 15 αλλά για την πάνω επιφάνεια του τόξου, δηλαδή $Ymax = y + t$, με πάχος τοιχοποιίας $t = 0.4 \text{ m}$. Ο πρώτος όρος της συνάρτησης αντιπροσωπεύει το γέμισμα της γέφυρας, ενώ ο δεύτερος αντιπροσωπεύει το πάχος της τοιχοποιίας το οποίο είναι 0.4 μέτρα σε όλο το τόξο. Το βάρος διαιρείται με το πλήθος των κόμβων που έχει οριστεί προηγουμένως στο X έτσι ώστε να διασφαλιστεί ότι ταιριάζει με τη μονάδα μήκους που χρησιμοποιείται για το X. Στη συγκεκριμένη περίπτωση έχουμε $\text{size}(X,2) = 100$.

Οριζόντιες δυνάμεις θα εισαχθούν πιο μετά. Για την ώρα αρχικοποιούνται ως μηδενικά, δηλαδή δεν λαμβάνονται υπόψη. Στη συνέχεια δημιουργείται ένας πίνακας δεδομένων (dataTable) που περιέχει τις τιμές X, Ymin, Ymax, Fx και Fy σε δομημένη μορφή. Αυτός ο πίνακας είναι χρήσιμος για την οργάνωση και την οπτικοποίηση των δεδομένων εισόδου σας. Τα δεδομένα συγκεντρώνονται σε ένα αρχείο CSV με το όνομα "InputArch.csv". Αυτό το αρχείο μπορεί να χρησιμοποιηθεί για διατήρηση αρχείων και ως πίνακας εισόδου δεδομένων για περαιτέρω ανάλυση. Τα δεδομένα διαβάζονται από το "InputArch.csv" και εφαρμόζεται η ανάλυση γραμμής ώθησης στο τόξο χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση *ArchLab1.m* που είδαμε προηγουμένως. Τα αποτελέσματα αυτής της ανάλυσης εγγράφονται σε ένα αρχείο CSV εξόδου που ονομάζεται "OutputArch.csv". Το σχήμα του τόξου σχεδιάζεται χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση *PlotArch.m*.

Τρέχοντας, λοιπόν, το πρόγραμμα παίρνουμε ως αποτέλεσμα τις δύο ακραίες διαμορφώσεις της γραμμής πίεσης του τόξου, όπως φαίνεται στην εικόνα 3.3.



Εικόνα 3.3 Ελάχιστη και Μέγιστη λύση γραμμής πίεσης γέφυρας Κερίτη.

Όσο περισσότερο απέχουν οι δύο λύσεις μεταξύ τους τόσο πιο σταθερή είναι η κατασκευή, διότι σημαίνει πως η πραγματική

γραμμή πίεσης, που βρίσκεται ανάμεσα στις δύο λύσεις, έχει πολύ περιθώριο για τυχόν μεταβολές στις δυνάμεις που ασκούνται στο τόξο. Ουσιαστικά θέλουμε $R_s/R_d < 1$.

Εδώ, ο λόγος της βαθύτερης λύσης ως προς τη ρηχότερη είναι $R_s/R_d = 0.83 < 1$, οπότε η γέφυρα παρουσιάζει σταθερότητα.

Επίσης, φαίνονται οι μέγιστες εσωτερικές δυνάμεις θραύσης μεταξύ των κόμβων και στις δύο λύσεις, οι οποίες κυμαίνονται μεταξύ 4500 – 6000 kN, τιμές που είναι λογικές για τις διαστάσεις και το ίδιο βάρος του συγκεκριμένου τόξου. Οι εσωτερικές αυτές δυνάμεις παρουσιάζουν μέγιστες τιμές στα άκρα, ενώ μειώνονται όσο πλησιάζουν στην κορυφή του τόξου.

3.2 Εύρεση Μέγιστου Επιτρεπτού Κάθετου Φορτίου σε Σημεία του Τόξου Υποβαλλόμενο από το Ίδιο Βάρος του

Η εύρεση των μέγιστων κατακόρυφων δυνάμεων σε συγκεκριμένους κόμβους ενός τόξου είναι ζωτικής σημασίας για την κατανόηση της δομικής συμπεριφοράς και τη διασφάλιση της ασφάλειας και της ευστάθειας του τόξου. Αυτές οι μέγιστες κατακόρυφες δυνάμεις αντιπροσωπεύουν τα χειρότερα σενάρια όσον αφορά την κατακόρυφη φόρτιση και παρέχουν πολύτιμες πληροφορίες για την δομική παρακολούθηση της κατασκευής. Ο εντοπισμός αυτών των κρίσιμων σημείων βοηθά στον σχεδιασμό της καμάρας ώστε να αντέχει σε ακραία φορτία, εξασφαλίζοντας τη δομική της ακεραιότητα. Γνωρίζοντας τις θέσεις όπου εμφανίζονται οι υψηλότερες κατακόρυφες δυνάμεις, μπορεί να βελτιστοποιηθεί η κατανομή των υλικών και οι στρατηγικές ενίσχυσης του τόξου, ώστε να αποτραπεί η παραμόρφωση, η ρηγμάτωση και η πιθανή κατάρρευση υπό μεγάλα φορτία. Οι μέγιστες κατακόρυφες δυνάμεις βοηθούν να καθοριστεί εάν το τόξο πληροί τα πρότυπα ασφαλείας και μπορεί να υποστηρίξει με ασφάλεια τη χρήση για την οποία προορίζεται, είτε πρόκειται για γέφυρα, είτε για πύλη, είτε για οποιοδήποτε άλλο αρχιτεκτονικό στοιχείο. Επιπλέον, η ανάλυση αυτή βοηθά στη συντήρηση και τη μακροπρόθεσμη αντοχή. Κατανοώντας τα σημεία όπου το τόξο είναι πιο ευάλωτο σε κατακόρυφες δυνάμεις, μπορούν να εφαρμοστούν στρατηγικές προληπτικής συντήρησης και παρακολούθησης για να διασφαλιστεί η συνεχής σταθερότητα του της κατασκευής κατά τη διάρκεια ζωής της.

```

22 - SF=max([abs(Fx);abs(Fy)]);
23 - Fx=Fx/SF;
24 - %Fy=Fy/SF;
25 - %-----post loop-----
26 - fymax=zeros(9,1);
27 - for i=2:1:10
28 -     Fy=data.Fy;
29 -     Fy(ceil(end/i))=fymax(i-1);
30 -     T0=0.01;
31 -     Rd=1e-8;
32 -     Rs=1e-9;
33 -     while Rs/Rd<0.99
34 -         Fy(ceil(end/i))=Fy(ceil(end/i))-1;
35 -
36 -     if norm(Fx)==0
37 -         % --- No horizontal forces ---

```

Εικόνα 3.4 Κομμάτι επαναληπτικού βρόχου στον κώδικα *ArchLab_Post.m* για εύρεση μέγιστων κάθετων φορτίων σε κόμβους του τόξου.

Για το λόγο αυτό, επεκτάθηκε η συνάρτηση *Archlab* στο περιβάλλον του Matlab και δημιουργήθηκε νέο script *ArchLab_Post.m*. Το κομμάτι που προστέθηκε φαίνεται στις γραμμές 25-34 της εικόνας 3.4, ενώ τελειώνει με εντολή *end* στη γραμμή 101 του κώδικα.

Αυτό το τμήμα του κώδικα αποσκοπεί στον προσδιορισμό των μέγιστων κατακόρυφων δυνάμεων που μπορεί να αντέξει ένα τόξο σε συγκεκριμένες θέσεις κατά μήκος του. Αυτό επιτυγχάνεται με την επαναληπτική αύξηση των κατακόρυφων δυνάμεων σε θέσεις του τόξου, διασφαλίζοντας παράλληλα ότι το τόξο παραμένει σταθερό.

Ξεκινά με την αρχικοποίηση ενός διανύσματος για την αποθήκευση των μέγιστων δυνάμεων και στη συνέχεια εισέρχεται σε έναν βρόχο που βελτιώνει προοδευτικά τις δυνάμεις σε αυτά τα σημεία. Στο συγκεκριμένο παράδειγμα δημιουργείται διάνυσμα 9x1 έτσι ώστε να βρεθούν οι μέγιστες δυνάμεις στα σημεία $\frac{1}{2} \dots \frac{1}{10}$, ωστόσο το μέγεθος του διανύσματος μπορεί να προσαρμοστεί ανάλογα. Για κάθε επανάληψη του βρόχου, αυξάνεται η κατακόρυφη δύναμη σε ένα συγκεκριμένο σημείο και διεξάγεται η ανάλυση γραμμής ώθησης, αντίστοιχα, για να ελεγχθεί αν το τόξο παραμένει σταθερό. Η διαδικασία αυτή επαναλαμβάνεται μέχρι πριν την κατάρρευση, δηλαδή μέχρι πριν $R_s/R_d=1$ αφού αυτό θα σήμαινε ότι η ελάχιστη και η μέγιστη γραμμή πίεσης ταυτίζονται, οπότε με την παραμικρή αύξηση φορτίου το τόξο θα θεωρούνταν ασταθές. Στη γραμμή 33 της εικόνας 3.4 έχει τοποθετηθεί $R_s/R_d<0.99$ αντί για $R_s/R_d<1$, για λόγους αποφυγής σφάλματος. Το αποτέλεσμα είναι ένα διάνυσμα που συγκρατεί τις μέγιστες κατακόρυφες δυνάμεις στα ορισμένα

σημεία, προσφέροντας πληροφορίες για το πώς ανταποκρίνεται το τόξο σε φορτία υποβαλλόμενα σε διάφορες θέσεις.

```
44 - pause
45
46 % Solution of maximum allowed vertical load at certain points
47 % of the arch before collapsing
48
49 Fymax=zeros(9,1);
50 LArch = readtable('InputArch.csv');
51 [LArch,Fymax]=ArchLab_Post(LArch);
52 for i=1:1:9;
53     i2=i+1;
54     fprintf('Maximum Vertical load allowed at 1/%d of the arch = %.3f\n',i2,Fymax(i));
55 end
56
```

Εικόνα 3.5 Κομμάτι του κώδικα ArchTLA.m για τρέξιμο της συνάρτησης ArchLab_Post.m.

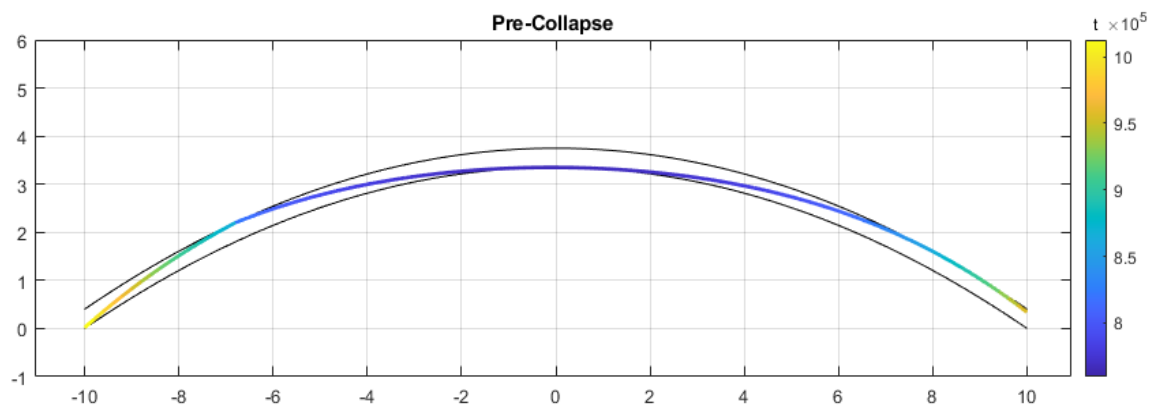
Στις γραμμές 44-55 της εικόνας 3.5 φαίνεται η συνέχεια του κώδικα ArchTLA.m. Το πρόγραμμα, μετά από παύση, τρέχει την συνάρτηση ArchLab_Post.m που αναλύθηκε και τυπώνει τις μέγιστες κάθετες δυνάμεις που αντέχει το τόξο σε συγκεκριμένες θέσεις, ακριβώς πριν την κατάρρευση. Εδώ πρέπει να τονιστεί ότι οι μέγιστες δυνάμεις που υπολογίζονται είναι σημειακές. Σε περίπτωση που τοποθετηθούν φορτία τα οποία απλώνονται σε βάθος και φτάνουν στο τόξο σε μεγαλύτερο μήκος, δηλαδή δεν είναι σημειακά πλέον, τότε τα αποτελέσματα είναι διαφορετικά. Για το συγκεκριμένο παράδειγμα ο κώδικας δίνει τα παρακάτω αποτελέσματα:

```
Maximum Vertical load allowed at 1/2 of the arch = -3891.000
Maximum Vertical load allowed at 1/3 of the arch = -1436.000
Maximum Vertical load allowed at 1/4 of the arch = -942.000
Maximum Vertical load allowed at 1/5 of the arch = -783.000
Maximum Vertical load allowed at 1/6 of the arch = -746.000
Maximum Vertical load allowed at 1/7 of the arch = -766.000
Maximum Vertical load allowed at 1/8 of the arch = -823.000
Maximum Vertical load allowed at 1/9 of the arch = -870.000
Maximum Vertical load allowed at 1/10 of the arch = -935.000
```

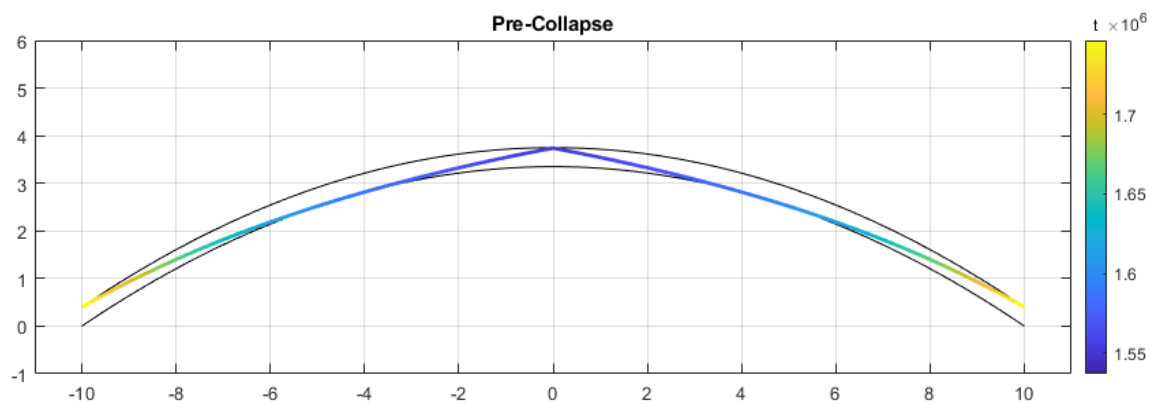
Εικόνα 3.6 Μέγιστα κάθετα σημειακά φορτία σε διάφορα σημεία στην δεύτερη καμάρα της γέφυρας Κερίτη.

Στην εικόνα 3.6 φαίνονται οι μέγιστες κάθετες δυνάμεις στα $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{10}$ σημεία της γέφυρας. Η κρίσιμη θέση είναι κοντά στο $\frac{1}{6}$ του τόξου όπου παρουσιάζεται η μικρότερη μέγιστη επιτρεπτή δύναμη 746 kN, ενώ στο $\frac{1}{2}$ του τόξου παρατηρείται μεγάλη αντοχή με επιτρεπτή δύναμη 3891 kN. Τα αποτελέσματα είναι λογικά αφού στη μέση του τόξου το ίδιο βάρος της γέφυρας είναι πολύ μικρό,

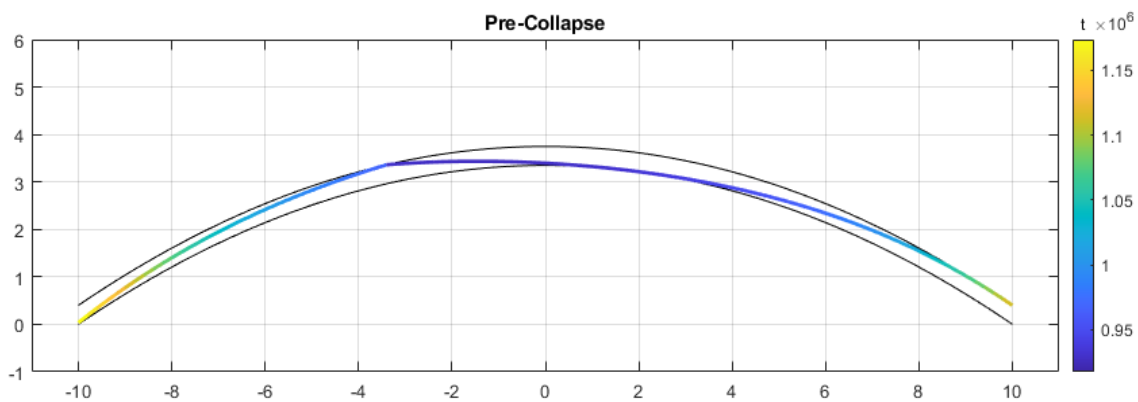
ενώ κοντά στο 1/6 χρησιμοποιείται περισσότερο γέμισμα και υπάρχει σχετική απομάκρυνση από το στήριγμα (άκρο).



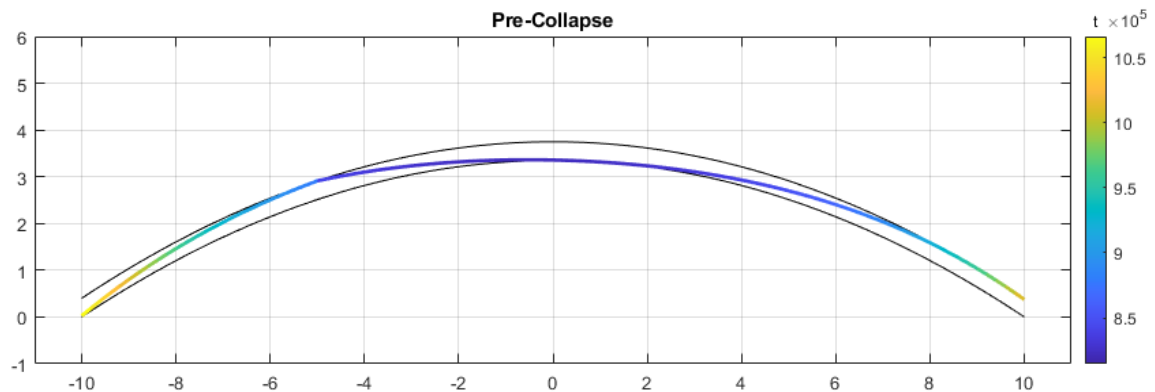
Εικόνα 3.7 Γραμμή πίεσης τόξου υποβαλλόμενου από μέγιστο κάθετο φορτίο στο 1/6 πριν την κατάρρευση (γέφυρα Κερίτη).



Εικόνα 3.8 Γραμμή πίεσης τόξου υποβαλλόμενου από μέγιστο κάθετο φορτίο στο 1/2 πριν την κατάρρευση (γέφυρα Κερίτη).



Εικόνα 3.9 Γραμμή πίεσης τόξου υποβαλλόμενου από μέγιστο κάθετο φορτίο στο 1/3 πριν την κατάρρευση (γέφυρα Κερίτη).



Εικόνα 3.10 Γραμμή πίεσης τόξου υποβαλλόμενου από μέγιστο κάθετο φορτίο στο 1/4 πριν την κατάρρευση (γέφυρα Κερίτη).

Στις εικόνες 3.7 – 3.10 οπτικοποιούνται κάποιες καταστάσεις της γραμμής πίεσης του τόξου πριν την κατάρρευση, όταν αυτό υποβάλλεται από μέγιστο κάθετο φορτίο σε ορισμένα σημεία. Παράλληλα φαίνονται και οι μέγιστες εσωτερικές δυνάμεις θραύσης που αναπτύσσονται μεταξύ των κόμβων. Οι δυνάμεις αυτές είναι πολύ ισχυρές, γεγονός που επιβεβαιώνει την ευστάθεια του τόξου. Όταν οι εσωτερικές δυνάμεις ώθησης σε ένα τόξο τοιχοποιίας είναι πολύ υψηλές, αυτό υποδηλώνει ότι το τόξο είναι πιο σταθερό [10]. Αυτές οι υψηλές δυνάμεις ώθησης είναι αποτέλεσμα της δομικής απόκρισης του τόξου στα φορτία που υποστηρίζει. Ιδίως στα τόξα από τοιχοποιία, οι υψηλές εσωτερικές δυνάμεις ώθησης είναι ένδειξη σωστά κατανεμημένου φορτίου και ισχυρής δομής.

3.3 Εύρεση Μέγιστων Επιτρεπτών Οριζόντιων Δυνάμεων σε Τόξο Υποβαλλόμενο από το Ίδιο Βάρος του

Υπολογίζοντας τις μέγιστες οριζόντιες δυνάμεις που μπορεί να αντέξει ένα τόξο σχετίζεται άμεσα με την ικανότητά της να αντέχει σε εξωτερικά περιβαλλοντικά φορτία όπως είναι οι άνεμοι και οι σεισμοί. Οι σεισμοί υποβάλλουν τις κατασκευές σε οριζόντια εδαφική κίνηση, η οποία μπορεί να ασκήσει σημαντικές πλευρικές καταστροφικές δυνάμεις. Γι' αυτό το λόγο, είναι απαραίτητο να υπολογίζεται το μέγιστο όριο αυτών των δυνάμεων, έτσι ώστε να μπορεί να πραγματοποιηθεί συσχέτιση με σεισμό.

```

21 - T0=0.01;
22 - Rd=1e-08;
23 - Rs=1e-09;
24 - factor=0;
25 - V=0;
26 - while Rs/Rd<0.99
27 -     V=V+0.01;
28 -     Fx= V*Fy;
29 - if norm(Fx)==0
30 -     % --- No horizontal forces ---
31 -
32 -     % Initialize reference thrusts of branches
33 -     Tref=ones(N-1,1)*T0;

```

Εικόνα 3.11 Επαναληπτικό κομμάτι του script *ArchLab_earth.m* για υπολογισμό των μέγιστων οριζόντιων δυνάμεων.

Όπως προηγουμένως, για την λειτουργία της διαδικασίας, επεκτάθηκε ο κώδικας ArchLab και κατασκευάστηκε νέο script *ArchLab.earth.m*. Η επαναληπτική υπολογιστική διαδικασία που προστέθηκε φαίνεται στην εικόνα 3.11.

Ο συγκεκριμένος κώδικας επεξεργάζεται δεδομένα που σχετίζονται με τη γεωμετρία του τόξου και τις εφαρμοζόμενες δυνάμεις και στη συνέχεια υπολογίζει επαναληπτικά τη μέγιστη οριζόντια δύναμη (F_x) που μπορεί να αντέξει το τόξο διατηρώντας τη δομική του σταθερότητα. Ο κώδικας ξεκινά με μια μικρή τιμή αναφοράς για την οριζόντια ώθηση, T_0 , και πολύ χαμηλές τιμές R_d (η ελάχιστη λύση ώθησης) και R_s (η μέγιστη λύση ώθησης) για να εξασφαλίσει μια συντηρητική εκκίνηση. Στη συνέχεια εισέρχεται σε έναν βρόχο που συνεχίζεται μέχρι ο λόγος R_s/R_d να πλησιάσει το 0.99, υποδεικνύοντας σύγκλιση προς τις μέγιστες οριζόντιες δυνάμεις. Εντός του βρόχου, η οριζόντια δύναμη ' F_x ' υπολογίζεται ως πολλαπλάσιο της κατακόρυφης δύναμης ' F_y ' με έναν συντελεστή V ο οποίος αυξάνεται σταδιακά (17).

$$F_x = V * F_y \quad (17)$$

Αυτή η επαναληπτική προσέγγιση αυξάνει συστηματικά τις οριζόντιες δυνάμεις για τον προσδιορισμό των μέγιστων τιμών τους, διασφαλίζοντας παράλληλα τη δομική ευστάθεια του τόξου. Είναι ένα κρίσιμο βήμα για την κατανόηση της ανθεκτικότητας του τόξου έναντι οριζόντιων φορτίων και διαδραματίζει ζωτικό ρόλο στον δομικό σχεδιασμό και την αξιολόγηση της ασφάλειας. Η έξοδος περιλαμβάνει τις υπολογιζόμενες μέγιστες οριζόντιες δυνάμεις και τον μέγιστο συντελεστή V .

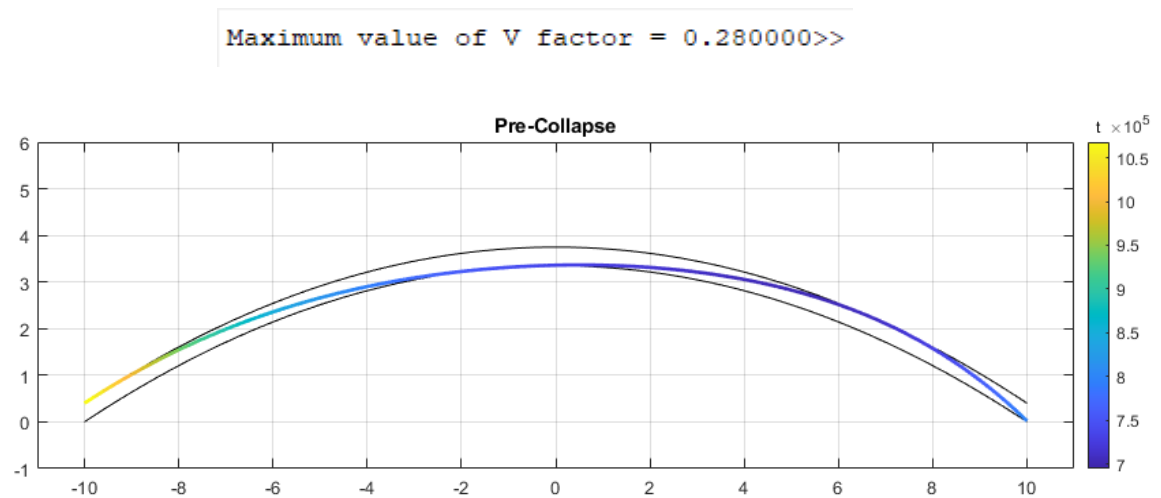
```

57
58 -                                     pause
59
60     % Solution of maximum allowed horizontal forces before collapsing
61     % (Seismic correlation)
62
63
64 -     LArch = readtable('InputArch.csv');
65 -     [LArch, factor, fxmax]=ArchLab_earth(LArch);
66 -     writetable(LArch, 'OutputArch.csv', 'Delimiter', ',');
67 -     PlotArch1(LArch, [-11, 11], [-1, 6]);
68 -     fprintf('Maximum value of V factor = %f', factor);

```

Εικόνα 3.12 Κομμάτι του κώδικα ArchTLA.m για τρέξιμο της συνάρτησης ArchLab_earth.m

Όπως φαίνεται στις γραμμές 58-68 της εικόνας 3.12, το πρόγραμμα ArchTLA.m, μετά από δεύτερη παύση, τρέχει τη συνάρτηση ArchLab_earth.m που αναλύθηκε προηγουμένως:



Εικόνα 3.13 Κατάσταση γραμμής πίεσης τόξου υποβαλλόμενου από μέγιστες οριζόντιες δυνάμεις πριν την κατάρρευση (γέφυρα Κερίτη).

Στην εικόνα 3.13 οπτικοποιείται η γραμμή πίεσης της καμάρας της γέφυρας Κερίτη όταν ασκούνται μέγιστες οριζόντιες δυνάμεις ακριβώς πριν την κατάρρευση. Ο μέγιστος συντελεστής V είναι 0.28 και οι μέγιστες εσωτερικές δυνάμεις θραύσης που αναπτύσσονται μεταξύ των κόμβων παρουσιάζουν μεγάλες τιμές, γεγονός που επιβεβαιώνει την ευστάθεια του τόξου. Επίσης, στην εικόνα 3.14 παρουσιάζονται οι μέγιστες επιτρεπτές οριζόντιες δυνάμεις που μπορούν να ασκηθούν σε κάθε κόμβο του τόξου μέχρι την κατάρρευση.

| | 1 | | | | | | |
|----|----------|----|----------|----|----------|-----|----------|
| | | | | | | 76 | -19.8063 |
| 1 | -40.9809 | 26 | -19.8063 | 51 | -12.7480 | 77 | -20.3822 |
| 2 | -39.8629 | 27 | -19.2529 | 52 | -12.7593 | 78 | -20.9807 |
| 3 | -38.7675 | 28 | -18.7221 | 53 | -12.7932 | 79 | -21.6019 |
| 4 | -37.6946 | 29 | -18.2139 | 54 | -12.8497 | 80 | -22.2456 |
| 5 | -36.6443 | 30 | -17.7283 | 55 | -12.9287 | 81 | -22.9119 |
| 6 | -35.6167 | 31 | -17.2653 | 56 | -13.0304 | 82 | -23.6008 |
| 7 | -34.6116 | 32 | -16.8249 | 57 | -13.1546 | 83 | -24.3122 |
| 8 | -33.6291 | 33 | -16.4070 | 58 | -13.3014 | 84 | -25.0463 |
| 9 | -32.6692 | 34 | -16.0118 | 59 | -13.4708 | 85 | -25.8029 |
| 10 | -31.7318 | 35 | -15.6391 | 60 | -13.6628 | 86 | -26.5821 |
| 11 | -30.8171 | 36 | -15.2890 | 61 | -13.8774 | 87 | -27.3840 |
| 12 | -29.9249 | 37 | -14.9615 | 62 | -14.1145 | 88 | -28.2084 |
| 13 | -29.0553 | 38 | -14.6566 | 63 | -14.3743 | 89 | -29.0553 |
| 14 | -28.2084 | 39 | -14.3743 | 64 | -14.6566 | 90 | -29.9249 |
| 15 | -27.3840 | 40 | -14.1145 | 65 | -14.9615 | 91 | -30.8171 |
| 16 | -26.5821 | 41 | -13.8774 | 66 | -15.2890 | 92 | -31.7318 |
| 17 | -25.8029 | 42 | -13.6628 | 67 | -15.6391 | 93 | -32.6692 |
| 18 | -25.0463 | 43 | -13.4708 | 68 | -16.0118 | 94 | -33.6291 |
| 19 | -24.3122 | 44 | -13.3014 | 69 | -16.4070 | 95 | -34.6116 |
| 20 | -23.6008 | 45 | -13.1546 | 70 | -16.8249 | 96 | -35.6167 |
| 21 | -22.9119 | 46 | -13.0304 | 71 | -17.2653 | 97 | -36.6443 |
| 22 | -22.2456 | 47 | -12.9287 | 72 | -17.7283 | 98 | -37.6946 |
| 23 | -21.6019 | 48 | -12.8497 | 73 | -18.2139 | 99 | -38.7675 |
| 24 | -20.9807 | 49 | -12.7932 | 74 | -18.7221 | 100 | -39.8629 |
| 25 | -20.3822 | 50 | -12.7593 | 75 | -19.2529 | 101 | -40.9809 |

Εικόνα 3.14 Τιμές των μέγιστων επιτρεπτών οριζόντιων δυνάμεων που ασκούνται σε κάθε κόμβο του τόξου πριν την κατάρρευση (γέφυρα Κερίτη).

4 Εφαρμογές και Παραμετρικές Διερευνήσεις

Στο συγκεκριμένο κεφάλαιο θα εφαρμοστεί ο κώδικας σε περαιτέρω τοξωτές κατασκευές, υπάρχουσες και ιδεατές, με διαφορετικές παραμέτρους, ώστε να πραγματοποιηθεί συγκριτική ανάλυση. Έτσι, θα διασφαλιστεί ότι η υπολογιστική μέθοδος παρέχει ακριβείς και ουσιαστικές πληροφορίες για διάφορα σενάρια και θα επιβεβαιωθεί η αξιοπιστία της. Η κατανόηση του τρόπου με τον οποίο οι αλλαγές στις παραμέτρους επηρεάζουν τη σταθερότητα του τόξου, τη γραμμή πίεσης και άλλες βασικές πτυχές διευρύνει τον τομέα της ανάλυσης και συμβάλλει στην ανάπτυξη μιας ολοκληρωμένης βάσης δεδομένων δομικών αποκρίσεων, η οποία μπορεί να χρησιμοποιηθεί σε μελλοντικές αναλύσεις.

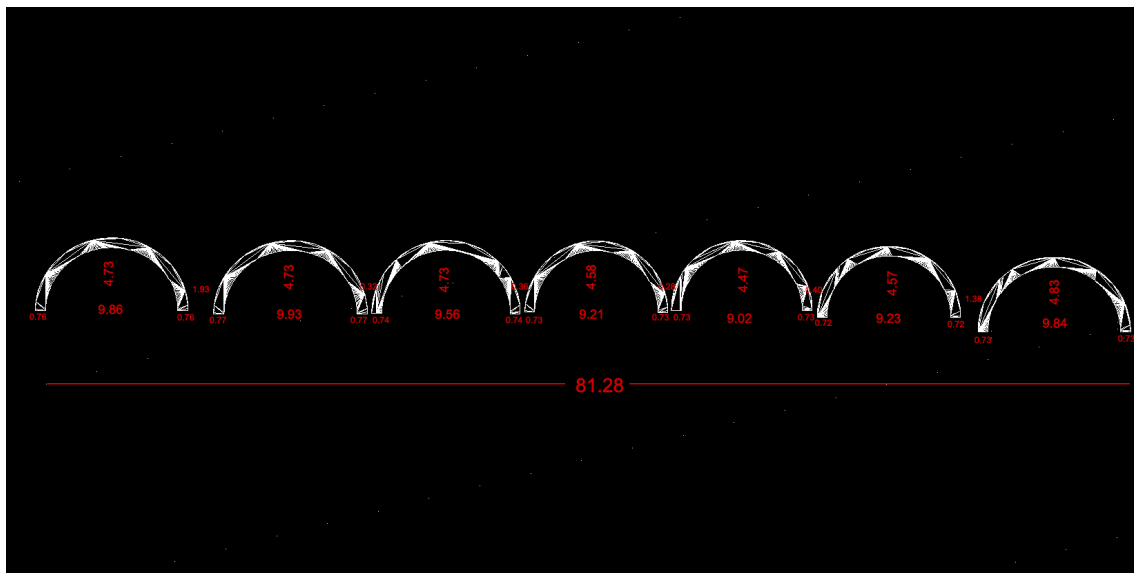
4.1 Ανάλυση Γραμμής Πίεσης στα Νεώρια Χανίων

Τα Ενετικά Νεώρια στο παλιό λιμάνι των Χανίων κατασκευάστηκαν τον 16^ο αιώνα και είναι από τα εντυπωσιακότερα μνημεία της Κρήτης.



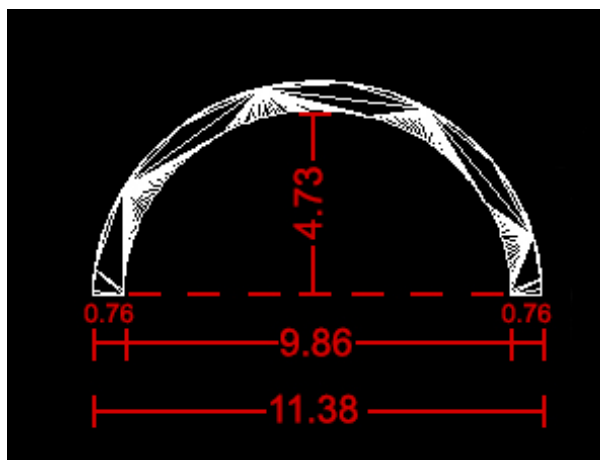
Εικόνα 4.1 Νεώρια Χανίων.

Για την προβολή της γεωμετρίας και των διαστάσεων των Νεωρίων χρησιμοποιήθηκε το πρόγραμμα Autocad (εικόνα 4.2). Το πλάτος του κάθε Νεωρίου είναι 49 μέτρα. Όλες οι υπόλοιπες διαστάσεις μετρούνται σε μέτρα.



Εικόνα 4.2 Γεωμετρία των Νεωρίων στο Autocad.

Η καμάρα που θα εξεταστεί είναι η πρώτη (εικόνα 4.3), ενώ το συνολικό ειδικό βάρος του υλικού είναι 2400 κιλά ανά τετραγωνικό μέτρο ή 23.54 kN/m^3 .



Εικόνα 4.3 Διαστάσεις του πρώτου Νεωρίου.

Στη συγκεκριμένη περίπτωση, τα Νεώρια παρουσιάζουν μορφή κυκλικού τόξου οπότε η εξίσωση καμπύλης διαμορφώνεται ανάλογα. Η εσωτερική καμπύλη του κατώτερου κυκλικού τόξου ορίζεται από έναν μοναδικό κύκλο. Ο κύκλος αυτός διαθέτει ακτίνα

$D/2$, όπου D είναι η διάμετρος του κύκλου. Η τιμή αυτή προσδιορίζεται από τον τύπο: $\frac{D}{2} = \frac{H}{2} + \frac{S^2}{8H} = 4.93 \text{ m}$.

Το κέντρο του κύκλου είναι τοποθετημένο κάτω από τα άκρα του τόξου σε απόσταση $H - \frac{D}{2} = 0.2 \text{ m}$.

Έτσι, η εξίσωση που χαρακτηρίζει γεωμετρικά το χαμηλωμένο κυκλικό τόξο είναι: $y = -(H - \frac{D}{2}) + \sqrt{(\frac{D}{2})^2 - X^2}$ (18)

Ομοίως διαμορφώνεται και η καμπύλη του ανώτερου κυκλικού τόξου, όπως φαίνεται στην εικόνα 4.4, όπου περιγράφονται όλες οι παράμετροι του πρώτου Νεωρίου στο περιβάλλον του Matlab.

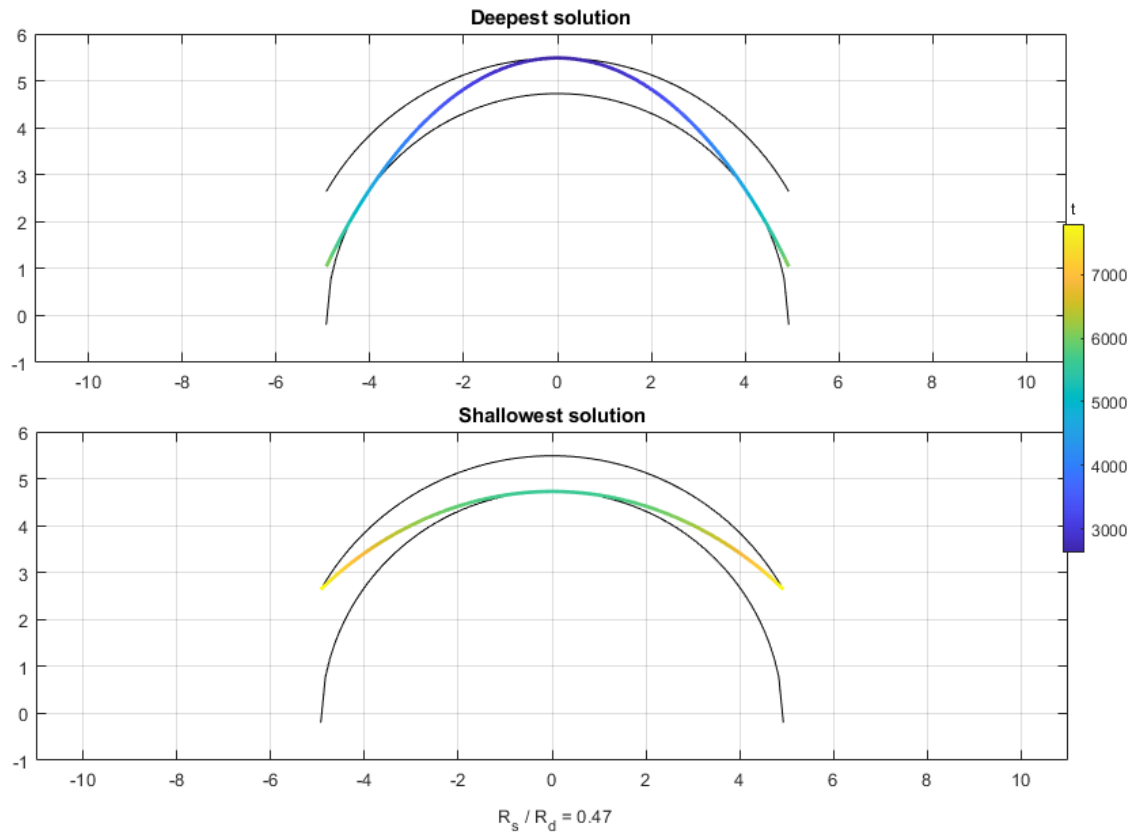
```

7                                     % Parameters
8
9 - W=9.86; % Length of Arch (Intrados) (m)
10 - W2=11.38; % Length of Arch (Extrados) (m)
11 - T=49; % Width of Arch (m)
12 - H=4.73; % Height of Arch (m)
13 %Hol= ; % Total Height (m)
14 - t=0.76; % Thickness of Arch (m)
15 - d=23.54; % Self-Weight Density (kN/m^3)
16
17 - X=[-W/2:W/100:W/2];
18 - X2=[-W2/2:W2/100:W2/2];
19
20 - Ymin2=(W/2).^2-X.^2;
21 - Ymin=-0.2+sqrt(Ymin2);
22
23 - Ymax2=(W2/2).^2-X.^2;
24 - Ymax=-0.2+sqrt(Ymax2);
25
26                                     % Vertical Forces (Dead Load)
27 - Fy= zeros(size(X));
28 - Fy=-(Ymax-Ymin)*d*T*W/size(X,2);
29
30 - Fx= zeros(size(X)); % Horizontal Forces
31 %Fx=0.15*Fy;

```

Εικόνα 4.4 Γεωμετρικές παράμετροι του πρώτου Νεωρίου Χανίων στο περιβάλλον του Matlab.

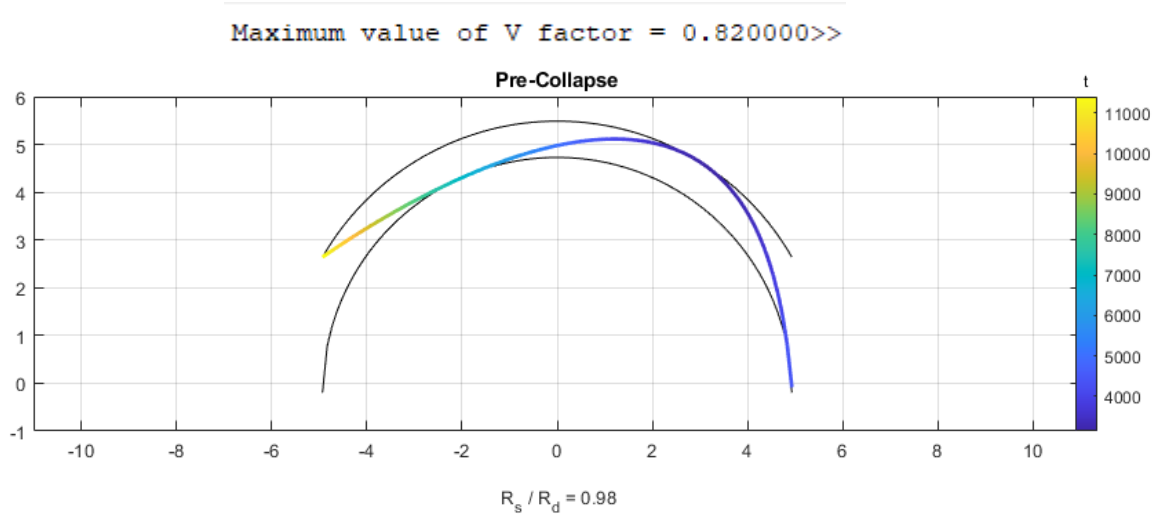
Οι διαμορφώσεις της ελάχιστης και της μέγιστης γραμμής πίεσης του τόξου φαίνονται στην εικόνα 4.5. Η μικρή τιμή του λόγου $R_s/R_d = 0.47$ αποδεικνύει την μεγάλη ευστάθεια του τόξου όταν υποβάλλεται στο ίδιο του βάρος. Σημαντική παράμετρος που συμβάλλει στην καλή αντοχή του τόξου είναι το μεγάλο πάχος της τοιχοποιίας $t=0.76$.



Εικόνα 4.5 Ελάχιστη και Μέγιστη διαμόρφωση γραμμής πίεσης του πρώτου Νεωρίου υποβαλλόμενου από το ίδιο βάρος του.

Το μέγιστο κάθετο φορτίο που μπορεί να τοποθετηθεί σε ορισμένα σημεία του τόξου μπορεί να υπολογιστεί, ωστόσο δεν έχει φυσικό νόημα αφού στη συγκεκριμένη περίπτωση δεν εξετάζεται γέφυρα ή υποδομή μεταφοράς.

Συνεχίζοντας, ο κώδικας τοποθετεί οριζόντιες δυνάμεις σε όλους τους κόμβους, ως μαζικές δυνάμεις κατανεμημένες στη μάζα και τις αυξάνει μέχρι την κατάρρευση. Το ίδιο βάρος παραμένει σταθερό κατά τη διάρκεια της επαναληπτικής διαδικασίας. Ο συντελεστής $V = F_x/F_y$ και η κατάσταση της γραμμής πίεσης του τόξου ακριβώς πριν την κατάρρευση φαίνονται στην εικόνα 4.6.



Εικόνα 4.6 Διαμόρφωση γραμμής πίεσης Νεωρίου υποβαλλόμενου από μέγιστες οριζόντιες δυνάμεις, πριν την κατάρρευση.

Οι υψηλές τιμές του συντελεστή $V = 0.82$ και των εσωτερικών δυνάμεων θραύσης που αναπτύσσονται μεταξύ των κόμβων, υποδεικνύουν την ικανότητα του Νεωρίου και γενικά της συγκεκριμένης μορφής χαμηλωμένων κυκλικών τόξων, να αντέχουν μεγαλύτερες τιμές οριζόντιων δυνάμεων. Το συγκεκριμένο τόξο μπορεί να αντέξει οριζόντιες δυνάμεις παραπάνω από τα $\frac{3}{4}$ του ίδιου βάρους του, γεγονός που είναι θετικό για τη σεισμική επάρκεια της κατασκευής.

Στο συγκεκριμένο παράδειγμα εφαρμόστηκε ο κώδικας 'ArchTLA.m' μέσα από τον φάκελο 'keriti_matlab'.

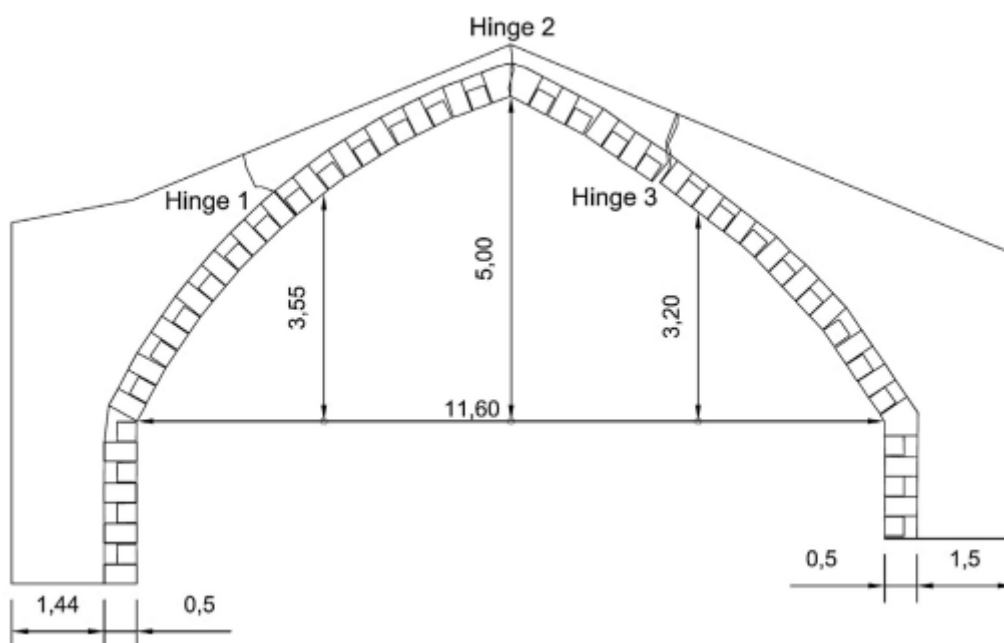
4.2 Ανάλυση Γραμμής Πίεσης στο Γεφύρι Κακοδικίου

Κατασκευασμένο το 1903 από ντόπιους τεχνίτες, το λιτό μονότοξο πέτρινο γεφύρι αποτελεί απόδειξη της ιστορικής υποδομής της περιοχής. Σκοπός του ήταν να διευκολύνει τη διέλευση τόσο των ανθρώπων όσο και των ζώων μέσω του ποταμού Κακοδικίου, λειτουργώντας ως το πρωταρχικό μέσο επικοινωνίας των κατοίκων της περιοχής για πολλά χρόνια. Αυτή η γέφυρα, ένα σπάνιο δείγμα αψιδωτής αρχιτεκτονικής στην Κρήτη, κέρδισε την αναγνώριση για την πολιτιστική και ιστορική της σημασία, ωστόσο κατέρρευσε το 2018.



Εικόνα 4.7 Συνολική εικόνα της γέφυρας Κακοδικίου, από το ποτάμι.

Η γεωμετρία του τόξου φαίνεται στην εικόνα 4.8. Το πλάτος της γέφυρας θεωρήθηκε ότι είναι 3 m και το ειδικό βάρος 2000 kg/m^3 ή 19.61 kN/m^3 . [2]



Εικόνα 4.8 Γεωμετρία γέφυρας Κακοδικίου [2].

Η μορφή της συγκεκριμένης γέφυρας χαρακτηρίζεται από μυτερό τόξο οπότε οι εξισώσεις καμπύλων θα διαμορφωθούν ανάλογα. Η κατώτερη καμπύλη της τοιχοποιίας αποτελείται από τη σύνθεση δύο κύκλων ακτίνας: $D/2 = H^2/S + S/4 = 5.0552 \text{ m}$.

Τα κέντρα των κύκλων τοποθετούνται στο ύψος των άκρων του τόξου ($y_1 = 0 \& y_2 = 0$) και απέχουν απόσταση $x_0 = \left| \frac{D}{2} - \frac{S}{2} \right| = \pm 0.7448 \text{ m}$ εκατέρωθεν του άξονα συμμετρίας.

Οι εξισώσεις που χαρακτηρίζουν το συγκεκριμένο κατώτερο τόξο είναι:

$$y = \begin{cases} y_1 + \sqrt{\left(\frac{D}{2}\right)^2 - (x - x_0)^2} \\ y_2 + \sqrt{\left(\frac{D}{2}\right)^2 - (x + x_0)^2} \end{cases} \quad (19)$$

Ομοίως διαμορφώνονται και οι εξισώσεις του ανώτερου τόξου της τοιχοποιίας. Οι παράμετροι και οι εξισώσεις που καταχωρούνται ως δεδομένα εισόδου στο περιβάλλον της Matlab φαίνονται στην εικόνα 4.9.

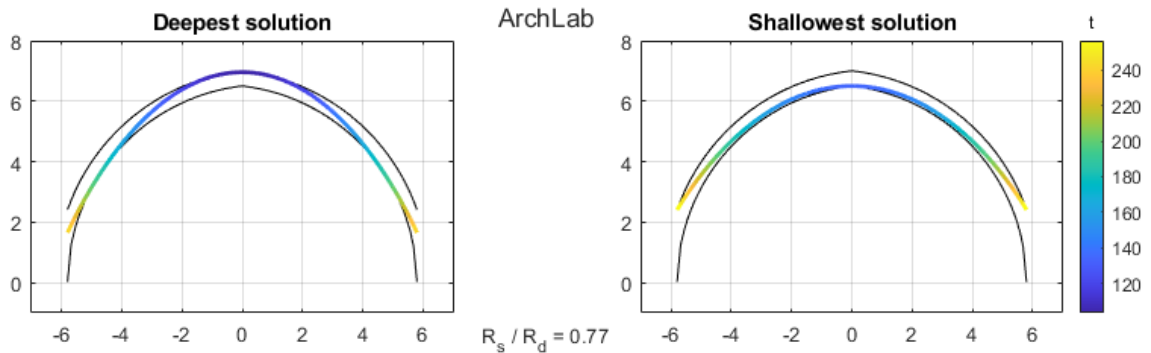
```

7           % Parameters
8
9 -        W=11.6; % Length of Arch (m)
10 -       T=3; % Width of Arch (m)
11 -       H=5; % Height of Arch (m)
12 -       %Hol= ; % Total Height (m)
13 -       t=0.5; % Thickness of Arch (m)
14 -       d=19.61; %Self-Weight Density (kN/m^3)
15 -       c=17.28;
16
17 -       X=[-W/2:W/100:W/2];
18
19           %Ymin
20 -       ymin1=c+5.0552.^2-(X(:, (1:ceil(end/2)))-0.7448).^2;
21 -       Ymin1=sqrt(ymin1);
22 -       ymin2=c+5.0552.^2-(X(:, (ceil((end/2)+1):(ceil(end)))+0.7448).^2;
23 -       Ymin2=sqrt(ymin2);
24 -       Ymin=[Ymin1 Ymin2];
25           %Ymax
26 -       ymax1=c+(5.0552+t).^2-(X(:, (1:ceil(end/2)))-0.7448).^2;
27 -       Ymax1=sqrt(ymax1)+0.1041;
28 -       ymax2=c+(5.0552+t).^2-(X(:, (ceil((end/2)+1):(ceil(end)))+0.7448).^2;
29 -       Ymax2=sqrt(ymax2)+0.1041;
30 -       Ymax=[Ymax1 Ymax2];
31
32           % Vertical Forces (Dead Load)
33 -       Fy= zeros(size(X));
34 -       Fy=-(Ymax-Ymin)*d*T*W/size(X,2);
35

```

Εικόνα 4.9 Δεδομένα Εισόδου της γέφυρας Κακοδικίου στο περιβάλλον του Matlab.

Οι διαμορφώσεις της ελάχιστης και μέγιστης γραμμής πίεσης του τόξου φαίνονται στην εικόνα 4.10. Ο λόγος $R_s/R_d = 0.77$ καθιστά την κατασκευή σταθερή. Ωστόσο, παρατηρείται ότι η αντοχή της είναι χειρότερη από του Νεωρίου που εξετάστηκε προηγουμένως. Το γεγονός αυτό οφείλεται, αρχικά, στην διαφορά της μορφής των δύο τόξων. Τα χαμηλωμένα κυκλικά τόξα (π.χ. Νεώρια) παρουσιάζουν μεγαλύτερη ευστάθεια από γοτθικού τύπου τόξα όπως το συγκεκριμένο. Σημαντικό ρόλο διαδραματίζει και το πάχος της τοιχοποιίας, το οποίο είναι μικρότερο σε σχέση με πριν ($0.50 < 0.76$).



Εικόνα 4.10 Ελάχιστη και Μέγιστη διαμόρφωση γραμμής πίεσης της γέφυρας Κακοδικίου.

Στην εικόνα 4.11 φαίνονται τα μέγιστα κάθετα σημειακά φορτία που μπορούν να ασκηθούν σε ορισμένους κόμβους του τόξου ακριβώς πριν την κατάρρευση. Κρίσιμο σημείο παρουσιάζεται κοντά στο 1/3 του τόξου με μέγιστο φορτίο 83 kN. Οι μέγιστες τιμές είναι πολύ ικανοποιητικές αν ληφθεί υπόψη ότι η γέφυρα χρησιμοποιούνταν μόνο για πέρασμα ανθρώπων και ζώων.

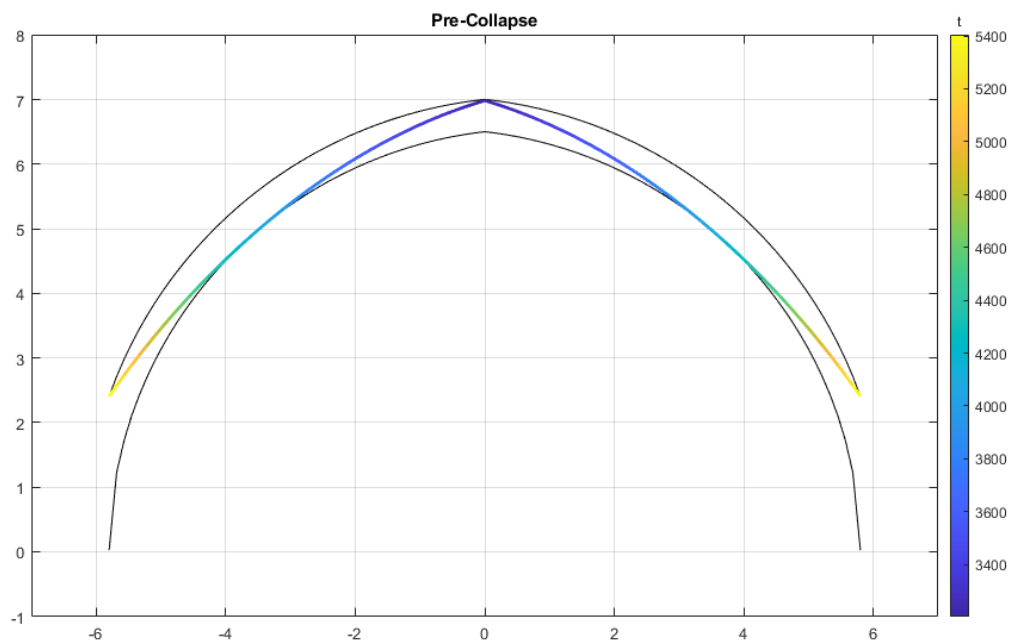
```
Maximum Vertical load allowed at 1/2 of the arch = -117.000
Maximum Vertical load allowed at 1/3 of the arch = -83.000
Maximum Vertical load allowed at 1/4 of the arch = -100.000
Maximum Vertical load allowed at 1/5 of the arch = -124.000
Maximum Vertical load allowed at 1/6 of the arch = -158.000
Maximum Vertical load allowed at 1/7 of the arch = -183.000
Maximum Vertical load allowed at 1/8 of the arch = -216.000
Maximum Vertical load allowed at 1/9 of the arch = -237.000
Maximum Vertical load allowed at 1/10 of the arch = -263.000
```

Εικόνα 4.11 Μέγιστα κάθετα φορτία σε ορισμένα σημεία του τόξου (γέφυρα Κακοδικίου).

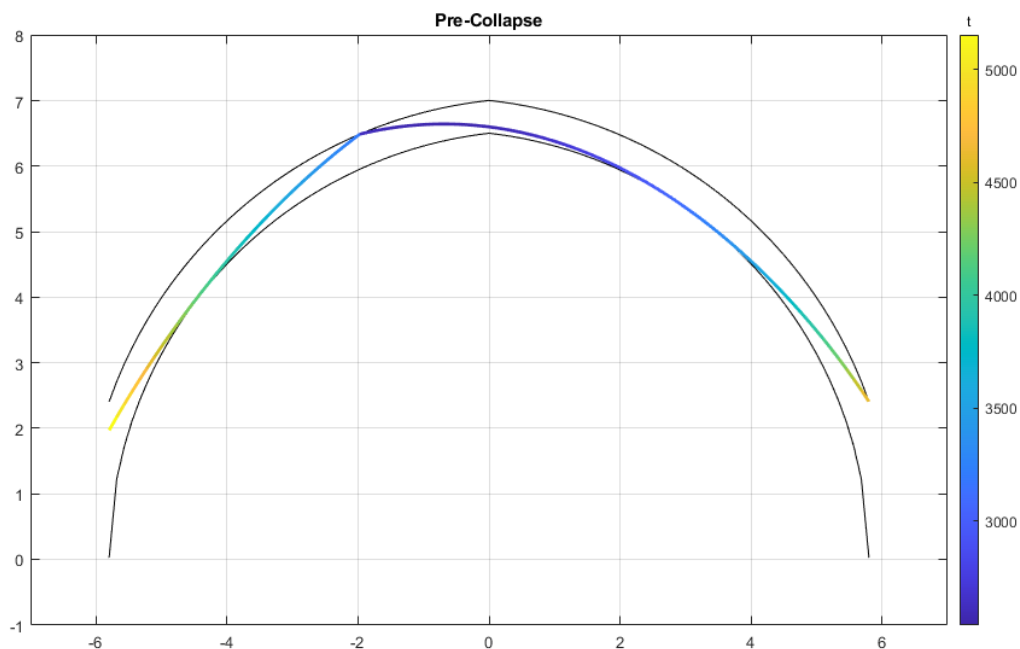
Συγκρίνοντας τα αποτελέσματα με εκείνα της γέφυρας Κερίτη στο κεφάλαιο 3, παρατηρείται διαφορά στη θέση του κρίσιμου σημείου (1/3 έναντι 1/6). Αυτό οφείλεται στη διαφορετική μορφολογία των δύο τόξων, αφού η γέφυρα Κερίτη χαρακτηρίζεται από παραβολική

καμπύλη. Επίσης, μεγάλη επιρροή έχει και το γεγονός ότι στο προηγούμενο κεφάλαιο η γέφυρα είχε γέμισμα, δηλαδή μόνιμο φορτίο άνισα κατανεμημένο κατά μήκος της.

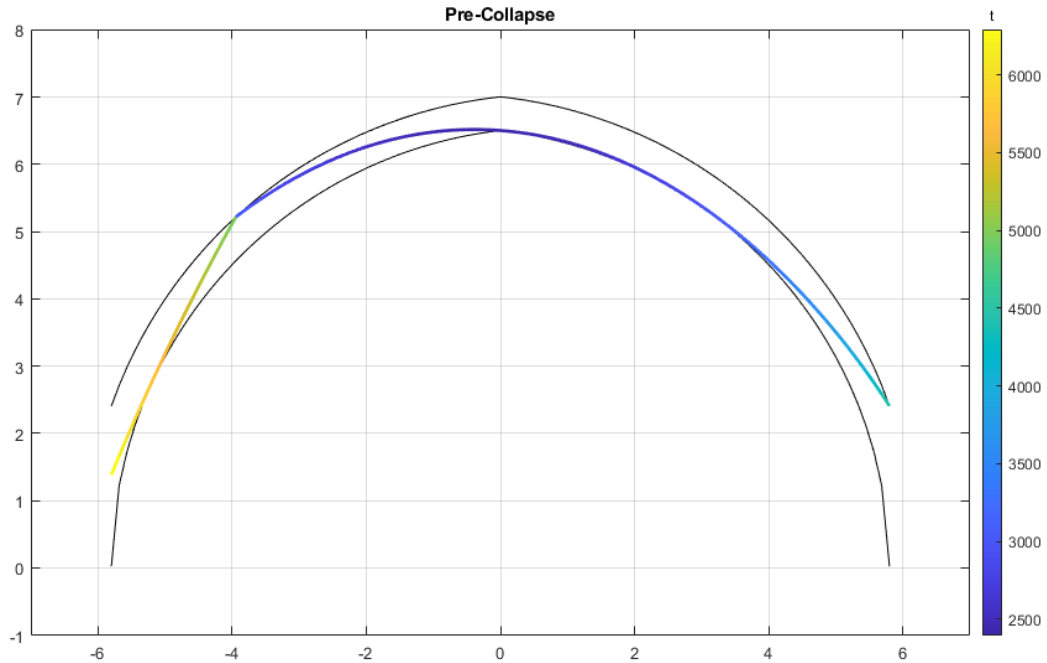
Κάποιες καταστάσεις της γραμμής πίεσης του συγκεκριμένου τόξου πριν την κατάρρευση φαίνονται στις εικόνες 4.12-4.14.



Εικόνα 4.12 Γραμμή πίεσης τόξου, υποβαλλόμενου από μέγιστο κάθετο φορτίο στο $1/2$ πριν την κατάρρευση (γέφυρα Κακοδικίου).



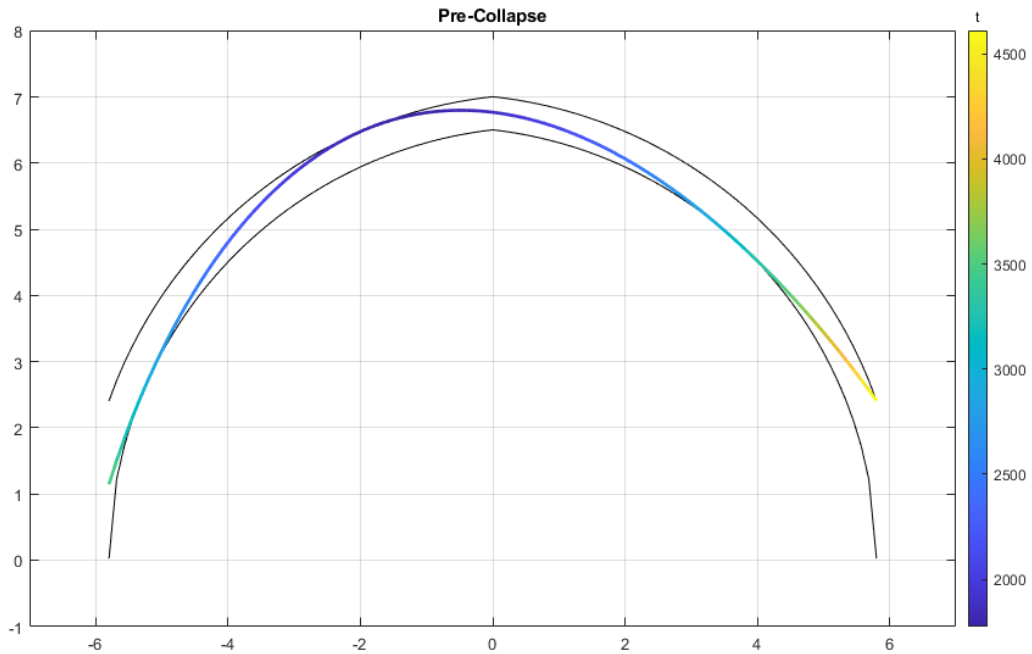
Εικόνα 4.13 Γραμμή πίεσης τόξου, υποβαλλόμενου από μέγιστο κάθετο φορτίο στο $1/3$ πριν την κατάρρευση (γέφυρα Κακοδικίου).



Εικόνα 4.14 Γραμμή πίεσης τόξου, υποβαλλόμενου από μέγιστο κάθετο φορτίο στο 1/6 πριν την κατάρρευση (γέφυρα Κακοδικίου).

Ο συντελεστής $V = Fx/Fy$ και η κατάσταση της γραμμής πίεσης του τόξου, υποβαλλόμενο από μέγιστες οριζόντιες δυνάμεις μέχρι την κατάρρευση, φαίνονται στην εικόνα 4.15.

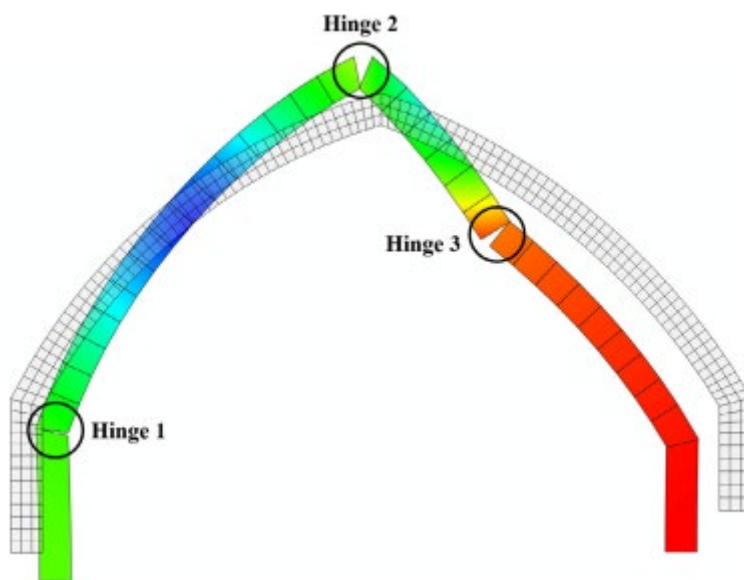
Maximum value of V factor = 0.230000>>



Εικόνα 4.15 Γραμμή πίεσης τόξου, υποβαλλόμενου από μέγιστες οριζόντιες δυνάμεις, πριν την κατάρρευση.

Εδώ μπορεί να συγκριθεί η μορφή της γραμμής πίεσης της εικόνας 4.15 με αποτελέσματα αντίστροφης ανάλυσης από παλαιότερη έρευνα πάνω στη συγκεκριμένη γέφυρα [2] όπως φαίνεται στην εικόνα 4.16.

Παρατηρείται σύγκλιση στα 3 σημεία όπου η γραμμή πίεσης πρόκειται να ξεφύγει από τα όρια της τοιχοποιίας.

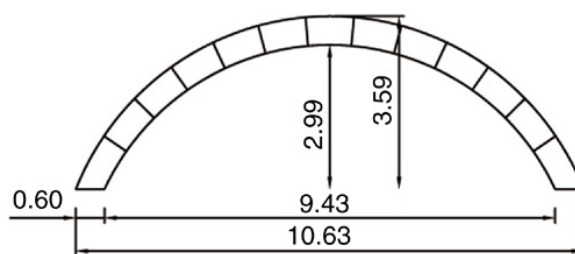


Εικόνα 4.16 Οπτικοποίηση κατεστραμμένου σχήματος της γέφυρας, χρησιμοποιώντας διαδικασίες αντίστροφης ανάλυσης [2].

Στο συγκεκριμένο κεφάλαιο εφαρμόστηκε ο κώδικας ‘ArchTLA.m’ μέσα από τον φάκελο ‘newria_matlab’.

4.3 Ανάλυση Γραμμής Πίεσης στη γέφυρα Strathmashie

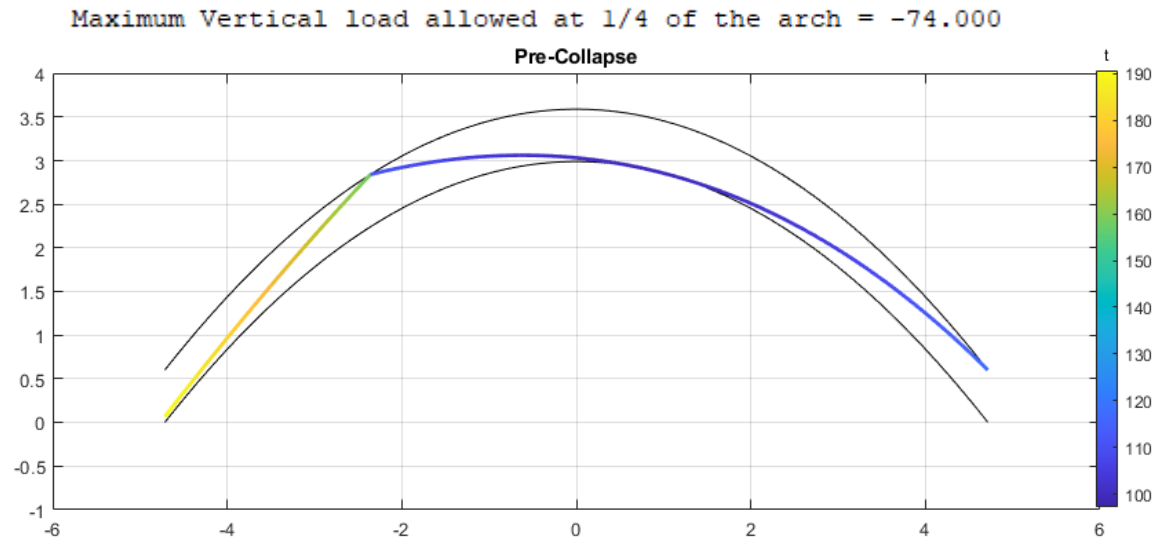
Ο κώδικας θα εφαρμοστεί στα δεδομένα της γέφυρας Strathmashie και θα συγκριθεί με αποτελέσματα παλαιότερης έρευνας όπου είχαν χρησιμοποιηθεί μέθοδοι οριακής ανάλυσης και γραμμικού προγραμματισμού [3]. Η γεωμετρία της γέφυρας φαίνεται στην εικόνα 4.17.



Εικόνα 4.17 Διαστάσεις (m) της γέφυρας Strathmashie. [3]

Το πλάτος της γέφυρας λαμβάνεται ίσο με 1 m και θεωρείται ότι δεν έχει γέμισμα. Η πυκνότητα είναι 2200 kg/m^3 ή 21.57 kN/m^3 .

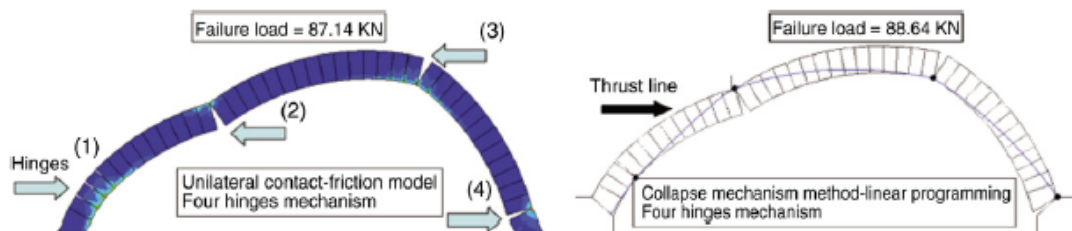
Στην εικόνα 4.18 φαίνεται η κατάσταση της γραμμής πίεσης της γέφυρας πριν την κατάρρευση, όταν υποβάλλεται από μέγιστο σημειακό φορτίο (74 kN) στο $1/4$ του μήκους της.



Εικόνα 4.18 Γραμμή πίεσης τόξου υποβαλλόμενου από μέγιστο κάθετο φορτίο στο $1/4$ πριν την κατάρρευση (Strathmashie).

Στην εικόνα 4.19 φαίνονται αποτελέσματα από μεθόδους προηγούμενης έρευνας στο συγκεκριμένο τόξο [3], όπου ασκείται φορτίο στο $1/4$ του τόξου μέχρι κατάρρευση:

- a) failure load = 87.14 kN.
- b) failure load = 88.64 kN.

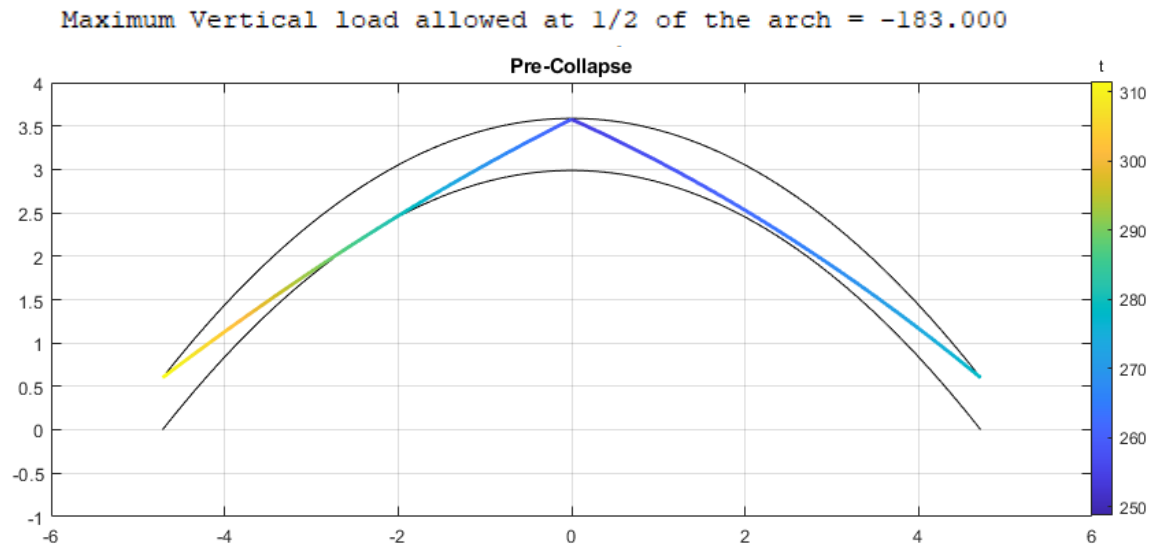


Εικόνα 4.19 Collapse mechanism from (a) unilateral contact-friction model, (b) linear programming formulation—quarter-span loading.[3]

Τα αποτελέσματα της μορφής της γραμμής πίεσης και του μέγιστου φορτίου στο $1/4$ του τόξου των εικόνων 4.18-4.19 είναι αρκετά κοντά μεταξύ τους. Η μικρή διαφορά οφείλεται στο γεγονός ότι στο συγκεκριμένο κώδικα λαμβάνονται υπόψη κάποιες παράμετροι όπως το μέτρο ελαστικότητας και ο συντελεστής τριβής. Επίσης το

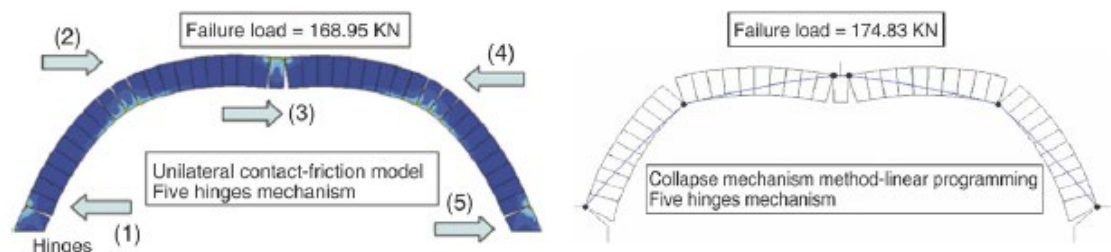
φορτίο στην συγκεκριμένη περίπτωση είναι σημειακό και δεν απλώνεται σε βάθος στην τοιχοποιία.

Στην εικόνα 4.20 φαίνεται η κατάσταση της γραμμής πίεσης του τόξου όταν υποβάλλεται από μέγιστο φορτίο στο $\frac{1}{2}$ του τόξου, το οποίο υπολογίστηκε κοντά στα 183 kN.



Εικόνα 4.20 Γραμμή πίεσης τόξου υποβαλλόμενου από μέγιστο κάθετο φορτίο στο $1/2$ πριν την κατάρρευση (Strathmashie).

Πάλι παρατηρείται σύγκλιση με τα αποτελέσματα της εικόνας 4.21, όσον αφορά την κατάσταση της γραμμής πίεσης και τις τιμές του μέγιστου φορτίου που ασκείται στο $\frac{1}{2}$ του τόξου.



Εικόνα 4.21 Collapse mechanism from (a) unilateral contact-friction model, (b) linear programming formulation—*mid-span loading*. [3]

Στο συγκεκριμένο κεφάλαιο εφαρμόστηκε ο κώδικας ‘ArchTLA.m’ μέσα από τον φάκελο ‘strathmashie_matlab’.

4.4 Παραμετρική Ανάλυση Γραμμής Πίεσης Τοξωτών Φορέων

Για να πραγματοποιηθεί παραμετρική διερεύνηση, ο κώδικας θα εφαρμοστεί σε ιδεατό τόξο στο οποίο θα μεταβάλλεται μια

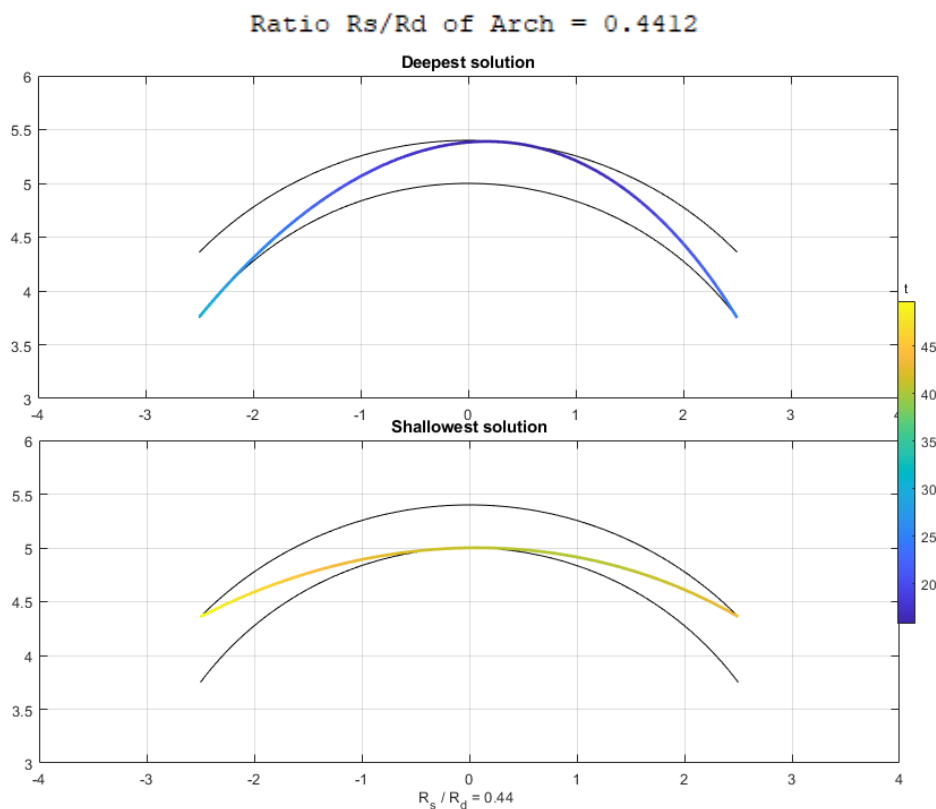
συγκεκριμένη παράμετρος σε κάθε επανάληψη, ενώ παράλληλα, οι υπόλοιπες θα παραμένουν σταθερές. Σε κάθε επανάληψη θα καταγράφεται η τιμή του λόγου R_s/R_d . Όσο περισσότερο απέχει η τιμή του λόγου από την μονάδα, τόσο πιο ευσταθές θα θεωρείται το τόξο [4].

Αρχικά, εισάγεται κυκλικό τόξο με τα δεδομένα που φαίνονται στον πίνακα 4.1, χωρίς επιπλέον γέμισμα. Για να είναι πιο ρεαλιστική η διερεύνηση, το τόξο φορτίζεται και από οριζόντιες δυνάμεις, οι οποίες είναι ανάλογες με τις κατακόρυφες ως $F_x = 0.15 * F_y$.

| | |
|-----------------------|----------------------|
| Μήκος τόξου (W) | 5 m |
| Ύψος τόξου (H) | 5 m |
| Πλάτος τόξου (T) | 1 m |
| Πάχος τοιχοποιίας (t) | 0.4 m |
| Ίδιο-Βάρος τόξου (d) | 20 kN/m ³ |

Πίνακας 4.1 Δεδομένα ιδεατού τόξου.

Οι διαμορφώσεις της ελάχιστης και μέγιστης γραμμής πίεσης του τόξου και ο λόγος R_s/R_d φαίνονται στην εικόνα 4.22.



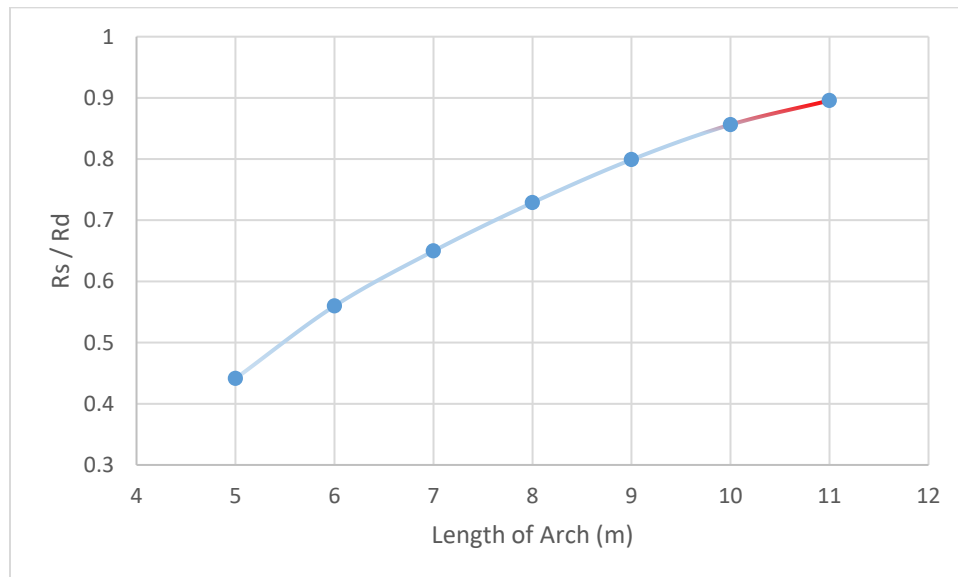
Εικόνα 4.22 Ελάχιστη και μέγιστη διαμόρφωση γραμμής πίεσης τόξου.

Σταδιακή αύξηση μήκους του τόξου:

Αυξάνοντας σταδιακά το μήκος του τόξου, διατηρώντας σταθερές τις υπόλοιπες παραμέτρους του πίνακα 4.1, εξάγονται τα αποτελέσματα που φαίνονται στον πίνακα 4.2. Το γράφημα του λόγου R_s/R_d σε συνάρτηση με το μήκος τόξου φαίνεται στην εικόνα 4.23.

| W(m) | R_s/R_d |
|-------------|-----------------------------|
| 5 | 0.4412 |
| 6 | 0.5598 |
| 7 | 0.6497 |
| 8 | 0.7287 |
| 9 | 0.799 |
| 10 | 0.8562 |
| 11 | 0.8956 |

Πίνακας 4.2 Τιμές του λόγου R_s/R_d με αύξηση μήκους τόξου.



Εικόνα 4.23 Γράφημα λόγου R_s/R_d σε σχέση με μήκος τόξου.

Από τα αποτελέσματα παρατηρείται ότι όσο αυξάνεται το μήκος του τόξου, ο λόγος R_s/R_d πλησιάζει στη μονάδα, άρα μειώνεται η σταθερότητα. Τα μακρύτερα τόξα τείνουν να έχουν διαφορετική κατανομή βάρους, μεταβάλλοντας τη γραμμή ώθησης και την κατανομή των κατακόρυφων και οριζόντιων δυνάμεων. Αυτή η αλλοιωμένη κατανομή βάρους επηρεάζει τις συνθήκες ισορροπίας του τόξου. Επίσης, η αλληλεπίδραση μεταξύ του τόξου και των στηριγμάτων του σχετίζεται με το μήκος του τόξου. Οι

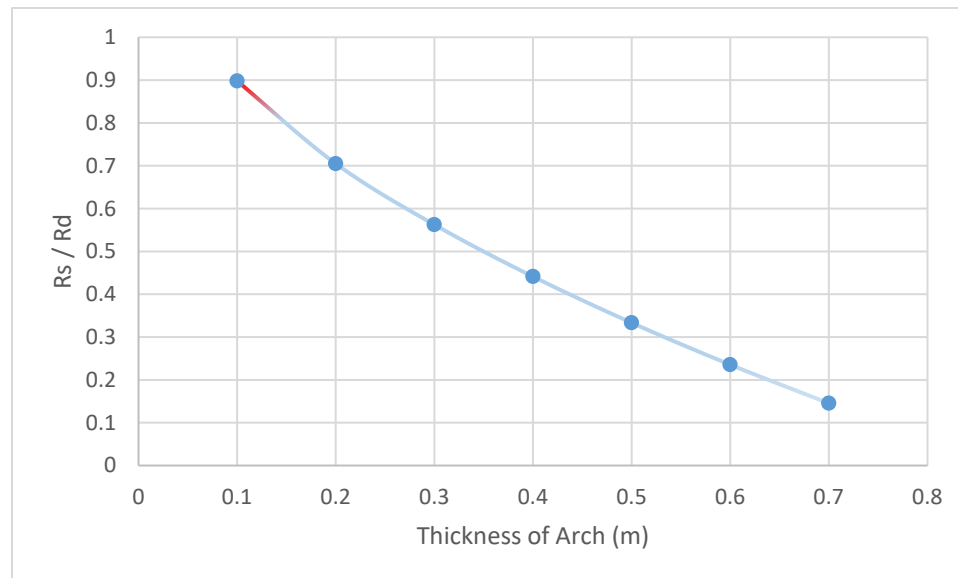
αλλαγές στην αναλογία ανοίγματος προς ανύψωση αλλάζουν τον τρόπο με τον οποίο το τόξο μεταφέρει φορτία στα στηρίγματα του.

Σταδιακή αύξηση πάχους της τοιχοποιίας:

Αυξάνοντας σταδιακά το πάχος της τοιχοποιίας, διατηρώντας σταθερές τις υπόλοιπες παραμέτρους του πίνακα 4.1, εξάγονται τα αποτελέσματα που φαίνονται στον πίνακα 4.3. Το γράφημα του λόγου R_s/R_d σε συνάρτηση με το πάχος της τοιχοποιίας φαίνεται στην εικόνα 4.24.

| t(m) | R_s/R_d |
|-------------|-----------------------------|
| 0.1 | 0.898 |
| 0.2 | 0.7049 |
| 0.3 | 0.5624 |
| 0.4 | 0.4412 |
| 0.5 | 0.3334 |
| 0.6 | 0.2355 |
| 0.7 | 0.1453 |

Πίνακας 4.3 Τιμές του λόγου R_s/R_d με αύξηση πάχους τοιχοποιίας.



Εικόνα 4.24 Γράφημα λόγου R_s/R_d σε σχέση με πάχος τοιχοποιίας.

Τα αποτελέσματα δείχνουν ότι τα τόξα με μεγάλο πάχος έχουν μικρό λόγο R_s/R_d , δηλαδή είναι πιο ευσταθή. Ένα παχύτερο τόξο έχει γενικά μεγαλύτερη φέρουσα ικανότητα και μπορεί να αντέξει μεγαλύτερα κατακόρυφα και οριζόντια φορτία πριν φτάσει σε κρίσιμη κατάσταση αστάθειας ή αστοχίας. Παράλληλα, η αύξηση του πάχους της τοιχοποιίας οδηγεί σε πιο ομοιόμορφη κατανομή δυνάμεων, μειώνοντας την πιθανότητα τοπικής συγκέντρωσης

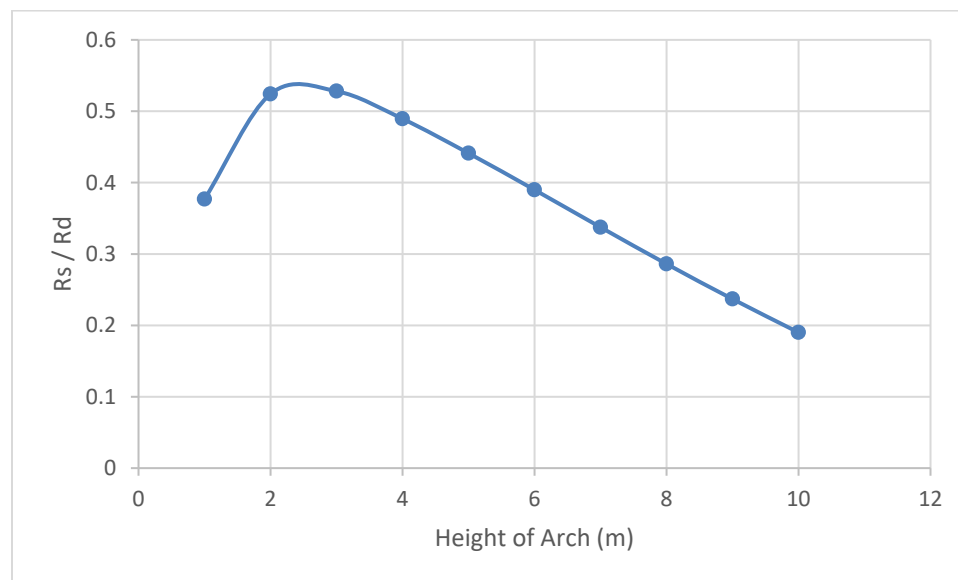
τάσεων. Επίσης, το μεγάλο πάχος προσφέρει περισσότερο χώρο στη γραμμή πίεσης να παραμείνει εντός των ορίων της τοιχοποιίας, διασφαλίζοντας τη σταθερότητα της δομής.

Σταδιακή αύξηση ύψους του τόξου:

Αυξάνοντας σταδιακά το ύψος του τόξου στη μέση του ανοίγματος και διατηρώντας σταθερές τις υπόλοιπες παραμέτρους του πίνακα 4.1, εξάγονται τα αποτελέσματα που φαίνονται στον πίνακα 4.4. Το γράφημα του λόγου R_s/R_d σε συνάρτηση με το μήκος τόξου φαίνεται στην εικόνα 4.25.

| H | R_s/R_d |
|----|-----------|
| 1 | 0.3768 |
| 2 | 0.5241 |
| 3 | 0.5281 |
| 4 | 0.4894 |
| 5 | 0.4412 |
| 6 | 0.3899 |
| 7 | 0.3375 |
| 8 | 0.2861 |
| 9 | 0.2369 |
| 10 | 0.1901 |

Πίνακας 4.4 Τιμές του λόγου R_s/R_d με αύξηση ύψους τόξου.



Εικόνα 4.25 Γράφημα λόγου R_s/R_d σε σχέση με ύψος τόξου.

Από τα αποτελέσματα φαίνεται πως με την αύξηση του ύψους το τόξο αρχικά παρουσιάζει ελαφριά αστάθεια και έπειτα ανακτά τη

σταθερότητά του. Αυτή η συμπεριφορά, βέβαια, αλλάζει ανάλογα με τη μορφή καμπύλης που χαρακτηρίζει ένα τόξο. Σε χαμηλότερα ύψη, πρόσθετο υλικό στο τόξο μπορεί να ενισχύσει την ευστάθεια παρέχοντας περισσότερη στήριξη. Ωστόσο, καθώς αυξάνεται το ύψος υπάρχει ένα κρίσιμο σημείο όπου η κατανομή των δυνάμεων σε συνδυασμό με τη γεωμετρία του τόξου να δημιουργούν μια ελαφριά αστάθεια.

Για την παραμετρική ανάλυση χρησιμοποιήθηκε ο κώδικας ‘ArchTLA.m’ μέσα από τον φάκελο ‘parametric_matlab’ στο περιβάλλον του Matlab και το πρόγραμμα Excel.

5 Συμπεράσματα και Επόμενα Βήματα

Στην παρούσα διατριβή πραγματοποιήθηκε μια ευρεία διερεύνηση τοξωτών φορέων τοιχοποιίας χρησιμοποιώντας μια σύγχρονη υπολογιστική μεθοδολογία. Η μέθοδος ανάλυσης γραμμής πίεσης, η οποία υλοποιήθηκε μέσω του Matlab, κατασκευασμένη αρχικά από τον Francesco Marmo, επεκτάθηκε και έφτασε σε σημείο να μπορεί να παρέχει, αυτοματοποιημένα, πολύτιμες πληροφορίες σχετικά με την ευστάθεια και τη συμπεριφορά των τόξων υπό μεταβαλλόμενες παραμέτρους. Με την προσθήκη επαναληπτικών διαδικασιών έγινε δυνατός ο προσδιορισμός των μέγιστων οριζόντιων και κατακόρυφων δυνάμεων που μπορεί να αντέξει ένα τόξο. Η κατανόηση των ορίων αυτών των δυνάμεων έπαιξε καθοριστικό ρόλο στην αξιολόγηση της δομικής ακεραιότητας της κατασκευής. Επιπλέον, ο κώδικας προσαρμόστηκε και εφαρμόστηκε σε διάφορους αληθινούς και ιδεατούς τοξωτούς φορείς με διαφορετικές γεωμετρίες, επιβεβαιώνοντας την ευελιξία του. Παράλληλα, οπτικοποιήθηκαν όλες οι λύσεις και συγκρίθηκαν με αποτελέσματα παλαιότερων μεθόδων από προηγούμενες έρευνες.

Συμπερασματικά, φαίνεται πως η στατική ανάλυση κατασκευών είναι ένας διαρκώς εξελισσόμενος τομέας και ο σκοπός της συγκεκριμένης διπλωματικής είναι να χρησιμεύσει ως εφαλτήριο για μελλοντικές εξελίξεις. Κάποια επόμενα βήματα για περεταίρω επέκταση και βελτίωση του ζητήματος είναι:

- Χρήση τεχνικών φωτογραμμετρίας για ταχύτερη και πιο αυτοματοποιημένη εισαγωγή γεωμετρικών δεδομένων.
- Ενσωμάτωση ιδιοτήτων υλικών και περιβαλλοντικών παραγόντων για την ενίσχυση της ακρίβειας του μοντέλου.

- Ανάλυση ευαισθησίας των παραμέτρων του κώδικα για τον εντοπισμό κρίσιμων παραγόντων που επηρεάζουν την ευστάθεια των τόξων.
- Επέκταση κώδικα ώστε να ληφθούν υπόψη δυναμικά φορτία, όπως οι σεισμικές δυνάμεις, για αντιμετώπιση ανθεκτικότητας τόξων σε διάφορες συνθήκες.
- Ανάπτυξη μιας, φιλικής προς το χρήστη, διεπαφής για να διευκολύνει την ευρύτερη πρόσβαση και υιοθέτηση του κώδικα στις κοινότητες των μηχανικών, προωθώντας την πρακτική χρησιμότητα στον τομέα.

Πηγές

- [1] Motsa, S. M., Stavroulakis, G. E., & Drosopoulos, G. A. (2023). A data-driven, machine learning scheme used to predict the structural response of masonry arches. *Engineering Structures*, 296, 116912.
- [2] Conde, B., Drosopoulos, G. A., Stavroulakis, G. E., Riveiro, B., & Stavroulaki, M. E. (2016). Inverse analysis of masonry arch bridges for damaged condition investigation: Application on Kakodiki bridge. *Engineering Structures*, 127, 388-401.
- [3] Drosopoulos, G. A., Stavroulakis, G. E., & Massalas, C. V. (2006). Limit analysis of a single span masonry bridge with unilateral frictional contact interfaces. *Engineering Structures*, 28(13), 1864-1873.
- [4] Marmo, F. (2021). ArchLab: a MATLAB tool for the Thrust Line Analysis of masonry arches. *Curved and Layered Structures*, 8(1), 26-35.
- [5] Michiels, T., & Adriaenssens, S. (2018). Form-finding algorithm for masonry arches subjected to in-plane earthquake loading. *Computers & Structures*, 195, 85-98.
- [6] Alexakis, H., & Makris, N. (2014). Limit equilibrium analysis and the minimum thickness of circular masonry arches to withstand lateral inertial loading. *Archive of Applied Mechanics*, 84, 757-772.
- [7] Huerta Fernández, S. (2001). Mechanics of masonry vaults: The equilibrium approach, 47-69.
- [8] Accornero, F., & Lacidogna, G. (2020). Safety assessment of masonry arch bridges considering the fracturing benefit. *Applied Sciences*, 10(10), 3490.
- [9] Bjurström, H., & Lasell, J. (2009). Capacity assessment of a single span arch bridge with backfill: A case study of the Glomman Bridge.
- [10] Zampieri, P. (2014). Simplified seismic vulnerability assessment of masonry arch bridges, 1-128.
- [11] Stavroulakis, G. E., Menemenis, I., Stavroulaki, M. E., & Drosopoulos, G. A. (2020). Collapse prediction and safety of masonry arches. *Natural Risk Management and Engineering: NatRisk Project*, 191-201.
- [12] Heyman, J. (1966). The stone skeleton in *International Journal of Solids and Structures*, vol. 2. to, 279, 249.

[13] Stavroulaki, M. E., Kasampali, A., Charalambidi, B., Motsa, S. M., Drosopoulos, G. A., & Stavroulakis, G. E. (2023). Linear and Nonlinear Earthquake Analysis for Strength Evaluation of Masonry Monument of Neoria. *Buildings*, 13(9), 2204.

<https://doi.org/10.3390/buildings13092204>

[14] B. Charalambidi, P. Koutsianitis, S. M. Motsa, G. Tairidis, A. Kasampali, G. Drosopoulos, M. Stavroulaki, G. Stavroulakis, Modelling, identification and structural damage investigation of the Neoria monument in Chania, *Developments in the Built Environment*, Volume 10, 2022, 100069, ISSN 2666-1659.