



Πολυτεχνείο Κρήτης
Σχολή Μηχανικών Παραγωγής και Διοίκησης

**Προσεγγιστική ανάλυση γραμμών παραγωγής με διάσπαση σε
τμήματα τριών μηχανών με εκθετικούς χρόνους παραγωγής**

Αναστασία Παππά

Διπλωματική εργασία που εκπονήθηκε για την απόκτηση του διπλώματος
Μηχανικού Παραγωγής και Διοίκησης

ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΗ ΕΠΙΤΡΟΠΗ
Βασίλειος Κουϊκόγλου
Ευστράτιος Ιωαννίδης
Γεώργιος Τσιναράκης

2023

© από την Αναστασία Παππά, 2023

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Με την ολοκλήρωση της παρούσας διπλωματικής θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα καθηγητή κύριο Βασίλη Κουϊκόγλου για τη διαρκή και άμεση βοήθεια, την υπομονή και την εξαιρετική συνεργασία από την πρώτη στιγμή. Επίσης, θα ήθελα να ευχαριστήσω τη μητέρα μου, η οποία πάντα με στήριζε σε όλες μου τις επιλογές και μόνη της μου παρείχε, με κάθε μέσο που διέθετε, τα εφόδια ώστε να πραγματοποιώ τους στόχους μου. Τέλος, ευχαριστώ τον συμφοιτητή μου Θωμά Θοδωρή, με τον οποίο συνεργαστήκαμε αυτά τα χρόνια σε όλα τα εργαστήρια και τις εργασίες για να ολοκληρώσουμε τις προπτυχιακές μας σπουδές και χάρη στην πρωτοβουλία του οποίου αναθεωρήσαμε τις προσδοκίες μας.

CONTENTS

1	Εισαγωγή.....	4
1.1	Αντικείμενο της διπλωματικής	4
1.2	Προβλημα προς επίλυση.....	4
1.3	Μέθοδοι ανάλυσης.....	5
2	Περιγραφή της γραμμής παραγωγής.....	8
2.1	Συστήματα παραγωγής	8
2.2	Περιγραφή γραμμών παραγωγής.....	8
2.3	Ανοικτά δίκτυα Jackson.....	12
3	Σύνοψη μεθόδων διάσπασης και συνάθροισης.....	15
3.1	Η μέθοδος της διάσπασης σε τμήματα δύο μηχανών	15
3.1.1	Ρυθμός λ_i της $M_{u(i)}$	18
3.1.2	Ρυθμός μ_i της $M_{d(i)}$	19
3.1.3	Ανάλυση του τμήματος $M_{u(i)}-B_i-M_{d(i)}$ με τη θεωρία ουρών $M/M/1/K_i$..	20
3.1.4	Αλγόριθμος διάσπασης.....	21
3.2	Η μέθοδος της συνάθροισης	22
4	Διάσπαση με τρεις μηχανές.....	25
4.1	Περιγραφή της μεθόδου	25
4.2	Ο αλγόριθμος διάσπασης	27
5	Πειραματική σύγκριση προσομοίωσης και αλγορίθμων διάσπασης με δυο και τρεις μηχανές.....	29
5.1	Περιγραφή του μοντέλου προσομοίωσης στη Simio.....	29
5.2	Αριθμητικά πειράματα.....	31
5.2.1	Πρώτο πείραμα.....	31
5.2.2	Δεύτερο πείραμα	34
5.2.3	Τρίτο πείραμα.....	35
5.2.4	Τέταρτο πείραμα	36
5.2.5	Πέμπτο πείραμα	38
6	Συμπεράσματα	39
7	Βιβλιογραφία	40
	Παράρτημα Α: Ο αλγόριθμος διάσπασης.....	41

1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

1.1 ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΟ ΤΗΣ ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗΣ

Σκοπός της παρούσας εργασίας είναι η ανάπτυξη μιας προσεγγιστικής μεθόδου εκτίμησης της παραγωγικότητας και άλλων μέτρων απόδοσης για γραμμές παραγωγής με N μηχανές (servers) και $N-1$ ενδιάμεσες αποθήκες (buffers) με πεπερασμένες χωρητικότητες. Για λόγους αναλυτικής ευκολίας, γίνεται η υπόθεση πως οι χρόνοι παραγωγής σε κάθε μηχανή (server) έχουν εκθετική κατανομή. Η μέθοδος βασίζεται στη διάσπαση (decomposition) της γραμμής παραγωγής σε τμήματα τριών μηχανών (servers) με δύο ενδιάμεσες αποθήκες (buffers). Για μία γραμμή N μηχανών (servers), τα τμήματα αυτά είναι : $1|2|3, 2|3|4, \dots, N-2|N-1|N$. Κάθε τμήμα περιγράφεται ως μια αλυσίδα Markov και αναλύεται ξεχωριστά από τα άλλα. Η “επανασύνδεση” των τμημάτων στην αρχική γραμμή γίνεται με μαθηματικούς τύπους που περιγράφουν την αρχή διατήρησης της ύλης. Η μέθοδος υλοποιείται σε περιβάλλον Matlab. Ακρίβεια και οι υπολογιστικές απαιτήσεις της μεθόδου συγκρίνονται με εκείνες ενός μοντέλου προσομοίωσης το οποίο αναπτύσσεται με το λογισμικό Simio. Η μέθοδος λαμβάνει υπόψη τις πεπερασμένες χωρητικότητες των αποθηκών και τη δυναμική της διαδικασίας παραγωγής, παρέχοντας μια πιο ακριβή αναπαράσταση του πραγματικού συστήματος. Επιπλέον, επιτρέπει την αξιολόγηση σημαντικών μέτρων απόδοσης, όπως μέσες τιμές αποθεμάτων και ρυθμοί παραγωγής. Αυτές οι πληροφορίες είναι κρίσιμες για τη λήψη αποφάσεων και τη βελτιστοποίηση των διεργασιών. Σε πρακτικό επίπεδο η διάσπαση με 3 μηχανές προσφέρει ένα μέσο για την αξιολόγηση και ανάλυση της γραμμής παραγωγής με πεπερασμένη χωρητικότητα και επιτυγχάνει την κατανόηση των μετρητικών αποδόσεων του συστήματος παραγωγής.

1.2 ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΠΡΟΣ ΕΠΙΛΥΣΗ

Τα δίκτυα αναμονής χρησιμοποιούνται για την αναπαράσταση και περιγραφή της λειτουργίας συστημάτων παραγωγής όπως εργοστάσια και συστημάτων εξυπηρέτησης όπως οι δημόσιες υπηρεσίες και το ίντερνετ. Ένα δίκτυο παραγωγής αποτελείται από κόμβους ή σημεία εξυπηρέτησης (μηχανές, υπολογιστές, γκισέ εξυπηρέτησης), οντότητες που διέρχονται από τους κόμβους εξυπηρέτησης (κομμάτια υπό κατεργασία, παραγγελίες, πελάτες, ψηφιακά σήματα πληροφορίας) και χώρους προσωρινής αναμονής των οντοτήτων μπροστά από τα σημεία εξυπηρέτησης (αποθήκες, ουρές αναμονής).

Όταν οι διάρκειες εξυπηρέτησης είναι σταθερές σε κάθε κόμβο τότε έχουμε ένα αιτιοκρατικό σύστημα. Στην εργασία αυτή εξετάζουμε ένα στοχαστικό σύστημα παραγωγής, όπου οι διάρκειες παραγωγής των κομματιών από τις μηχανές είναι τυχαίες.

Τρία είναι τα προβλήματα των συστημάτων παραγωγής που έχουν πρακτικό και θεωρητικό ενδιαφέρον: η ανάλυση συστήματος, η σχεδίαση ενός νέου συστήματος και ο έλεγχος υπάρχοντος συστήματος. Ανάλυση είναι η εκτίμηση μεγεθών που συνδέονται με την απόδοση ενός συστήματος παραγωγής. Τέτοια μεγέθη είναι η μέση παραγωγικότητα, η πιθανότητα έλλειψης πρώτων υλών, καθυστερήσεις διεκπεραίωσης παραγγελιών, το μέσο απόθεμα κάθε αποθήκης.

Η συγκεκριμένη διπλωματική ασχολείται με το πρόβλημα της ανάλυσης γραμμών παραγωγής με αποθήκες πεπερασμένης χωρητικότητας, στις οποίες παρατηρούνται φαινόμενα αποκλεισμού (μπλοκάρισμα) μηχανών όταν κάποιες αποθήκες γεμίσουν. Εκτός από ειδικές περιπτώσεις, η ακριβής εκτίμηση μέτρων απόδοσης σε δίκτυα αναμονής με πεπερασμένες αποθήκες και μπλοκάρισμα δεν μπορεί να γίνει αναλυτικά. Ακριβείς λύσεις μπορούν να προκύψουν με εφαρμογή υπολογιστικά απαιτητικών μαθηματικών μοντέλων όπως οι αλυσίδες Markov ή με την προσομοίωση. Τέτοιες τεχνικές απαιτούν μεγάλους υπολογιστικούς χρόνους με αποτέλεσμα να είναι εφαρμόσιμες είτε μόνο για μικρά δίκτυα είτε για περιορισμένο αριθμό συστημάτων. Αυτό δεν είναι βολικό αφού για το πρόβλημα της σχεδίασης συνήθως απαιτείται να αξιολογηθούν χιλιάδες εναλλακτικών συστημάτων.

Συνεπώς προσανατολιζόμαστε σε προσεγγιστικές λύσεις οι οποίες είναι το ανάλογο της μεθόδου πεπερασμένων στοιχείων για την επίλυση μεγάλων συστημάτων διαφορικών εξισώσεων για προβλήματα δομικής ανάλυσης, μεταφοράς θερμότητας και μάζας, ρευστομηχανικής και ηλεκτρομαγνητισμού. Υπάρχει πληθώρα προσεγγιστικών μεθόδων για την ανάλυση γραμμών παραγωγής. Η κοινή ιδέα όλων είναι η διάσπαση του συστήματος σε μικρότερα υποσυστήματα. Οι μέθοδοι αυτές εκτός από το είδος του μπλοκαρίσματος, διαφέρουν και στον τρόπο με τον οποίο τα υποσυστήματα χαρακτηρίζονται και στον καθορισμό των άγνωστων παραμέτρων.

1.3 ΜΕΘΟΔΟΙ ΑΝΑΛΥΣΗΣ

Οι κυριότερες μέθοδοι ανάλυσης γραμμών παραγωγής είναι η μέθοδος της διάσπασης, η μέθοδος της συνάθροισης και η προσομοίωση.

Η μέθοδος της **διάσπασης** (decomposition) συνίσταται στην αναπαράσταση μίας μεγάλης γραμμής παραγωγής χρησιμοποιώντας μικρότερες γραμμές ή υποσυστήματα που καθένα είναι ισοδύναμο με την αρχική γραμμή. Η μέθοδος βασίζεται σε τρία βήματα:

- Τον προσδιορισμό των υποσυστημάτων που έχουν μικρό αριθμό μηχανών και αποθηκών (συνήθως δύο μηχανές και μία ενδιάμεση αποθήκη) και επιλύονται αναλυτικά με σχετικά απλά και μαθηματικά μοντέλα
- Τη κατάστρωση εξισώσεων ροής που συνδέουν τις άγνωστες παραμέτρους κάθε υποσυστήματος με χαρακτηριστικά μεγέθη της αρχικής γραμμής. Οι εξισώσεις ροής προκύπτουν από τη θεωρία αναμονής (queueing theory).
- Τη ανάπτυξη κατάλληλου επαναληπτικού αλγορίθμου για την εύρεση των άγνωστων παραμέτρων οι οποίες εγγυώνται ότι όλες οι εξισώσεις ροής των υποσυστημάτων συγκλίνουν σε μία ενιαία λύση.

Όταν ο αλγόριθμος συγκλίνει, τα μέτρα απόδοσης των υποσυστημάτων είναι προσεγγίσεις των μέτρων απόδοσης του αρχικού συστήματος. Μία από τις πρώτες μεθόδους διάσπασης για γραμμές παραγωγής με πεπερασμένες αποθήκες και μηχανές που έχουν τυχαίους χρόνους παραγωγής και υπόκεινται σε βλάβες αναπτύχθηκε από τους Choong and Gershwin (1987).

Η μέθοδος της [συνάθροισης](#) (aggregation) αναπαριστά τμήματα του συστήματος με μία προσεγγιστικά ισοδύναμη μηχανή. Ένας τρόπος να γίνει αυτό είναι ο εξής. Έστω μία γραμμή

$$M_1-B_1-M_2-B_2-...-M_i-B_i-M_{i+1}-...-M_{n-1}-B_{n-1}-M_n$$

με n μηχανές M_i και $n-1$ ενδιάμεσες αποθήκες B_i . Το τμήμα $M_{n-1}-B_{n-1}-M_n$ συναθροίζεται προσεγγιστικά σε μία ισοδύναμη μηχανή M_{n-1}^b όπου το b συμβολίζει τη συνάθροιση προς τα πίσω (ανάστροφη, backward) και υπολογίζονται οι παράμετροί της εφαρμόζοντας τη θεωρία αναμονής. Ακολούθως συναθροίζεται το τμήμα $M_{n-2}-B_{n-2}-M_{n-1}^b$ σε ισοδύναμη μηχανή M_{n-2}^b . Η διαδικασία συνεχίζεται μέχρι να συναθροιστούν όλες οι μηχανές πλην της M_1 και από την ανάστροφη διαδικασία συνάθροισης προκύπτει η M_2^b . Με όμοιο τρόπο γίνεται συνάθροιση προς τα εμπρός (ευθεία, forward) αλλά τώρα χρησιμοποιούνται οι ισοδύναμες μηχανές της ανάστροφης επανάληψης. Ξεκινάμε συναθροίζοντας το τμήμα $M_1-B_1-M_2^b$ και συνεχίζουμε με τα υπόλοιπα προς τα εμπρός. Στο βιβλίο Li and Meerkon (2008) παρουσιάζονται εφαρμογές της μεθόδου συνάθροισης για διάφορους τύπους γραμμών παραγωγής και συστημάτων συναρμολόγησης.

Η αξιολόγηση των μέτρων απόδοσης μπορεί να γίνει και μέσω της [προσομοίωσης](#). Η προσομοίωση επιτυγχάνει μεγαλύτερη ακρίβεια από τις άλλες δύο μεθόδους όμως είναι πολύ χρονοβόρα σε περίπτωση που πρέπει να εφαρμοστεί για πολύ μεγάλες γραμμές με αρκετά κομμάτια, επομένως έχει μεγάλο υπολογιστικός κόστος. Σε περιπτώσεις που πρέπει να αναλυθεί πλήθος διαφορετικών σεναρίων η συγκεκριμένη προσέγγιση είναι χρονοβόρα. Η διάσπαση και η συνάθροιση από την άλλη μεριά ενώ είναι πολύ γρηγορότερες δεν αποδίδουν τόσο μεγάλη ακρίβεια.

Στη συγκεκριμένη διπλωματική αναπτύσσεται ένας αλγόριθμος διάσπασης σε υποσυστήματα των τριών μηχανών με στόχο τη βελτίωση της ακρίβειας της κλασικής μεθόδου διάσπασης με δύο μηχανές, χωρίς μεγάλη αύξηση του υπολογιστικού χρόνου.

Οι τρεις μέθοδοι αναλύονται περαιτέρω σε επόμενο κεφάλαιο.

2 ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΤΗΣ ΓΡΑΜΜΗΣ ΠΑΡΑΓΩΓΗΣ

2.1 ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΠΑΡΑΓΩΓΗΣ

Ακολουθούν μερικοί ορισμοί εννοιών και συνιστωσών για τα συστήματα παραγωγής.

Σταθμοί Παραγωγής (Workstations): Σύνολο συνδεδεμένων μηχανών είτε σε σειρά είτε παράλληλα, οι οποίες δέχονται πρώτες ύλες ή ημικατεργασμένα κομμάτια πάνω στα οποία εκτελούν επιπλέον εργασίες.

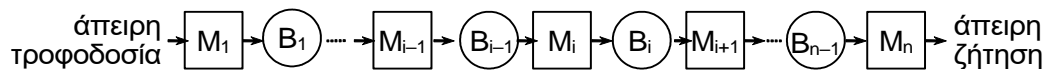
Αποθήκες (Buffers): Οποιοσδήποτε χώρος χρησιμοποιείται για προσωρινή τοποθέτηση ή υπάρχει σε σύστημα μεταφοράς κομματιών μεταξύ μηχανών.

Ορίζουμε ως **Σύστημα Παραγωγής (production system)** το σύνολο όλων των συνιστωσών και διαδικασιών μέσω των οποίων γίνεται η μετατροπή των πρώτων υλών σε έτοιμα προϊόντα. Διακρίνουμε 4 είδη συστημάτων παραγωγής:

- **Συνεχή (continuous production systems):** Πρόκειται για συστήματα τα οποία ασχολούνται με την παραγωγή προϊόντων ίδιου είδους ή προϊόντων στενά σχετιζόμενων.
- **Διακοπτόμενα (intermittent production systems):** Αφορούν προϊόντα τα οποία δεν σχετίζονται στενά μεταξύ τους και απαιτείται προσαρμογή των εγκαταστάσεων ανάλογα με το είδος του κάθε προϊόντος. Αν στην πλειοψηφία τους τα προϊόντα έχουν ίδιες φάσεις παραγωγής ή ίδια δρομολόγηση από μία μηχανή στην επόμενη τότε η διαδικασία ονομάζεται κατάστημα ροής (flow shop) ή γραμμή παραγωγής. Σε περίπτωση που τα στάδια παραγωγής διαφέρουν η οργάνωση των εγκαταστάσεων γίνεται σε καταστήματα εργασιών (job shop).
- **Έργα (projects):** Σχετίζονται με την παραγωγή ενός ή λίγων σε αριθμό προϊόντων.
- **Καθαρά αποθεματικά συστήματα (pure inventory systems):** Τα συστήματα αυτά δεν έχουν παραγωγή αλλά μόνο προμήθεια.

2.2 ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΓΡΑΜΜΩΝ ΠΑΡΑΓΩΓΗΣ

Όπως προαναφέρθηκε, **Γραμμή Παραγωγής** είναι ένα σύνολο μηχανών ή σταθμών παραγωγής που συνδέονται σε σειρά. Ανάμεσα σε διαδοχικούς σταθμούς παραγωγής ή μηχανές τοποθετούνται αποθήκες (buffers). Η γενική μορφή γραμμών παραγωγής με n μηχανές (M_i) και $n-1$ αποθήκες (B_i) είναι η εξής:



Σχήμα 2.1. Γραμμή παραγωγής με αποθήκες πεπερασμένης χωρητικότητας.

Στις αποθήκες διατηρούνται ημικατεργασμένα υλικά ώστε αν συμβεί η μηχανή M_i να διακόψει τη λειτουργία της για κάποιο διάστημα, η επόμενη (κατάντης) μηχανή M_{i+1} να μπορεί προσωρινά να τροφοδοτείται από την B_i και να μην αποστερείται άμεσα. Δυαδικά, μία αποθήκη B_i εκτός από απόθεμα έχει και χώρο ελεύθερο, ώστε αν συμβεί η μηχανή M_{i+1} να διακόψει τη λειτουργία της για κάποιο διάστημα, τότε η προηγούμενη (ανάντης) μηχανή M_i να μπορεί να διοχετεύει την παραγωγή της και να μην μπλοκάρει άμεσα. Συνεπώς οι αποθήκες λειτουργούν ως αποζεύκτες (buffers) των μηχανών και αυξάνουν την παραγωγικότητα της γραμμής.

Αν δεν υπήρχαν οι αποθήκες, τότε η γραμμή θα χωρούσε μόνο ένα κομμάτι. Στην περίπτωση αυτή ο χρόνος ανάμεσα στην παραγωγή δύο διαδοχικών κομματιών θα ισούτο με το άθροισμα των χρόνων παραγωγής σε όλες τις μηχανές. Αντίθετα αν οι αποθήκες μπορούσαν να έχουν άπειρες χωρητικότητες, ο χρόνος παραγωγής θα ήταν ίσος με τον χρόνο της πιο αργής μηχανής. Στην πράξη, οι αποθήκες έχουν πεπερασμένες χωρητικότητες κι έτσι οι χρόνοι παραγωγής έχουν ενδιάμεσες τιμές.

Κάνουμε δύο παραδοχές:

- 1) Η γραμμή έχει άπειρη τροφοδοσία ώστε η πρώτη μηχανή να μην μένει ποτέ αποστερημένη. Αν αυτό δεν ισχύει, τότε η M_1 παίζει τον ρόλο του προμηθευτή πρώτων υλών, B_1 είναι η αποθήκη πρώτων υλών και η πρώτη μηχανή της γραμμής είναι η M_2 .
- 2) Η γραμμή έχει άπειρη ζήτηση προϊόντων ώστε η τελευταία μηχανή να μην μένει ποτέ αποστερημένη. Αν αυτό δεν ισχύει, τότε η M_n παίζει τον ρόλο της πεπερασμένης ζήτησης, B_{n-1} είναι η αποθήκη έτοιμων προϊόντων και τελευταία μηχανή της γραμμής είναι η M_{n-1} .

Συνεχίζουμε ορίζοντας κάποιες έννοιες της παραγωγικής διαδικασίας και κάποιες υποθέσεις.

Ροή Κομματιών: Τα κομμάτια κινούνται από μηχανή σε αποθήκη και πάλι σε μηχανή. Επισκέπτονται κάθε μηχανή και κάθε αποθήκη μόνο μια φορά και πρέπει υποχρεωτικά να περάσουν από όλες τις μηχανές.

Χρόνος κατεργασίας είναι ο χρόνος που απαιτείται ώστε μια μηχανή να επεξεργαστεί ένα κομμάτι. Συχνά οι χρόνοι κατεργασίας είναι τυχαίοι. Η τυχαιότητα αυτή μπορεί να οφείλεται σε φυσικές αυξομειώσεις (μεταβλητότητα) των χρόνων κατεργασίας διαδοχικών κομματιών από την ίδια μηχανή, στην εμφάνιση τυχαίων

βλαβών και που χρειάζονται επίσης τυχαίους χρόνους επισκευής επισκευές ή και σε συνδυασμό των προηγούμενων. Γίνεται η υπόθεση ότι οι χρόνοι κατεργασίας διαφορετικών μηχανών είναι μεταξύ τους ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές.

Υπάρχει μόνο ένας τύπος προϊόντος στο σύστημα. Κάθε κομμάτι προχωρά στο σύστημα με την ίδια αλληλουχία μηχανών και αποθηκών, όμως το καθένα μπορεί να αντιμετωπίσει διαφορετικές καθυστερήσεις σε κάθε σημείο του συστήματος.

Οι μηχανές δεν είναι αδρανείς εφόσον υπάρχουν κομμάτια τα οποία απαιτούν επεξεργασία και υπάρχει χώρος στον οποίο μπορούν να τοποθετήσουν τα κομμάτια τα οποία έχουν κατεργαστεί. Κάθε φορά που μια μηχανή M_i κατεργάζεται ένα κομμάτι, μειώνει το επίπεδο της αποθήκης B_{i-1} και αυξάνει το επίπεδο της B_i κατά 1. Παρόλα αυτά όταν μια μηχανή έχει βλάβη ή κάνει ασυνήθιστα πολύ χρόνο προκειμένου να κατεργαστεί ένα κομμάτι και οι γειτονικές μηχανές (M_{i-1} και M_{i+1}) λειτουργούν κανονικά, τότε το επίπεδο της αποθήκης B_{i-1} τείνει να αυξηθεί και το επίπεδο της B_{i+1} τείνει να μειωθεί. Αν αυτό συνεχιστεί η αποθήκη B_{i-1} θα γεμίσει ή η B_i θα αδειάσει. Στην περίπτωση αυτή μία από τις γειτονικές μηχανές της M_i θα αδυνατεί να λειτουργήσει και συνεπώς είτε η M_{i-1} θα είναι **μπλοκαρισμένη (blocked)** είτε η M_{i+1} θα είναι **αποστερημένη (starved)** είτε μπορεί να συμβαίνουν και τα δύο. Η παραγωγή τότε καθυστερεί καθώς δαπανάται χρόνος άσκοπα και καθυστερούν οι γειτονικές μηχανές. Αν το φαινόμενο του γεμάτου χώρου συνεχιστεί προς τα ανάντη ή το φαινόμενο του άδειου χώρου συνεχιστεί προς τα κατόντη τότε δημιουργείται καθυστέρηση σε όλο το σύστημα.

Μέσο απόθεμα είναι ο μέσος αριθμός κομματιών που υπάρχουν μέσα στη γραμμή παραγωγής ή σε κάποια επί μέρους αποθήκη.

Ο ρυθμός παραγωγής μίας μηχανής είναι ο ρυθμός στον οποίο θα λειτουργούσε αν δεν άνηκε σε ένα σύστημα με άλλες μηχανές και αποθήκες αλλά η μηχανή λειτουργούσε χωρίς να είναι αποκλεισμένη ή αποστερημένη.

Ο μέσος ρυθμός παραγωγής της γραμμής σε κάποια περίοδο T ορίζεται ως ο λόγος

$$\frac{\text{παραγωγή σε χρόνο } T}{T}$$

και υπόκεινται σε δύο περιορισμούς:

- Ο μέσος ρυθμός παραγωγής δε μπορεί να είναι μεγαλύτερος από εκείνον της μηχανής με τον μικρότερο ρυθμό παραγωγής. Όταν οι μηχανές έχουν πολύ διαφορετικούς ρυθμούς παραγωγής μεταξύ τους, η ταχύτητα όλων εκτός από την πιο αργή δεν εκμεταλλεύεται.
- Οι μη συγχρονισμένες διαταραχές που καθιστούν τις αποθήκες άδειες ή γεμάτες επιβαρύνουν επίσης τη δυναμικότητα των μηχανών. Οι αποθήκες είναι άδειες ή γεμάτες επειδή οι μηχανές έχουν βλάβη ή πολύ μεγάλους

χρόνους κατεργασίας υλικών σε διαφορετικές χρονικές στιγμές. Αν όλες οι μηχανές συγχρονίζονταν απόλυτα, όχι μόνο στις λειτουργίες τους, αλλά και στις βλάβες και τις επισκευές, οι αποθήκες δε θα επηρέαζαν τη ροή των κομματιών. Η έλλειψη συγχρονισμού είναι που κάνει τις μηχανές αποστερημένες ή μπλοκαρισμένες και επομένως τις κάνει να μη λειτουργούν.

Όπως είδαμε το πρόβλημα της **ανάλυσης** συστήματος παραγωγής συνίσταται στην εκτίμηση κάποιων μεγεθών που συνδέονται με την κερδοφορία ή το κόστος λειτουργίας του.

Η θεωρία αναμονής (queueing theory) έχει τα μαθηματικά εργαλεία για την περιγραφή της λειτουργίας συστημάτων παραγωγής. Ένα από αυτά είναι οι **αλυσίδες Markov**. Σύμφωνα με αυτές, μία γραμμή παραγωγής όπως αυτή του Σχήματος 2.1 με μηχανές που υφίστανται βλάβες μπορεί να περιγραφεί από τις καταστάσεις των μηχανών και τον αριθμό των κομματιών μεταξύ των διαδοχικών μηχανών. Για την ανάπτυξη ενός μοντέλου Markov βασική προϋπόθεση είναι οι χρόνοι βλάβης και επισκευής των μηχανών και οι χρόνοι κατεργασιών των κομματιών στις μηχανές έχουν εκθετικές κατανομές. Στα μοντέλα Markov οι πιθανότητες καταστάσεων ικανοποιούν τις λεγόμενες **εξισώσεις Kolmogorov** (ή Chapman-Kolmogorov).

Λύσεις κλειστής μορφής των εξισώσεων αυτών υπάρχουν για δύο κατηγορίες συστημάτων αναμονής:

- **Δίκτυα αναμονής Jackson:** Αποτελούνται από M σταθμούς παραγωγής με αυθαίρετες διασυνδέσεις και ενδιάμεσες αποθήκες άπειρων χωρητικοτήτων. Οι σταθμοί δέχονται κομμάτια είτε από εξωτερική πηγή (σε εκθετικούς χρόνους) είτε από άλλους σταθμούς παραγωγής. Κάθε σταθμός έχει όμοιες παράλληλες μηχανές με εκθετικούς χρόνους παραγωγής χωρίς βλάβες. Όταν ένα κομμάτι εισέρχεται σε κάποιο σταθμό περιμένει στην ουρά αναμονής (αποθήκη) και όταν έλθει η σειρά του ξεκινά κατεργασία στην πρώτη διαθέσιμη μηχανή του σταθμού. Στη συνέχεια μεταβαίνει σε άλλο σταθμό με καθορισμένη πιθανότητα ή εξέρχεται από το σύστημα. Κάθε σταθμός έχει άπειρη αποθήκη εισόδου, μηχανές με εκθετικούς χρόνους επεξεργασίας και καθορισμένες πιθανότητες δρομολόγησης παραγόμενων κομματιών προς άλλους σταθμούς ή προς την έξοδο. Μία παραλλαγή των ανωτέρω, ανοικτών δικτύων όπως λέγονται, είναι τα κλειστά δίκτυα όπου δεν η εξωτερική πηγή έχει πεπερασμένο αριθμό κομματιών, όταν ένα κομμάτι εξέρχεται από το σύστημα επιστρέφει στην πηγή, και ο συνολικός αριθμός στο σύστημα και την πηγή είναι σταθερός. Τα δίκτυα Jackson περιγράφονται από αλυσίδες Markov με καταστάσεις (n_1, n_2, \dots, n_M) όπου n_i είναι ο αριθμός κομματιών σε αποθήκη και υπό κατεργασία στον σταθμό i , $i = 1, 2, \dots, M$. Γι' αυτήν την

αλυσίδα υπάρχουν λύσεις κλειστής μορφής των πιθανοτήτων $P(n_1, n_2, \dots, n_M)$. Ωστόσο η υπόθεση άπειρων χωρητικότητας δεν είναι ρεαλιστική για συστήματα παραγωγής.

- **Σύστημα αναμονής M/M/1/K:** Τώρα τα M δηλώνουν την έλλειψη μνήμης (memoryless), μία ιδιότητα που χαρακτηρίζει τις κατανομές Poisson, εκθετική και γεωμετρική και τις αλυσίδες Markov. Το πρώτο M περιγράφει αφίξεις (που γίνονται κατά Poisson ή ισοδύναμα όταν περάσει ένα διάστημα με εκθετική κατανομή) ενώ το δεύτερο πως έχουμε εκθετικούς χρόνους εξυπηρέτησης. Ο αριθμός 1 δείχνει πως υπάρχει μία μόνο μηχανή στην εξυπηρέτηση και η μηχανή μπορεί να κατεργάζεται μόνο ένα κομμάτι κάθε φορά. Το K δηλώνει την χωρητικότητα του συστήματος. Ο μέσος ρυθμός αφίξεων είναι λ και ο μέσος ρυθμός εξυπηρέτησης είναι μ . Αν ένα κομμάτι φτάσει και το σύστημα είναι γεμάτο τότε αυτό δεν μπορεί να μπει στην ουρά, έχουμε δηλαδή μηδενικούς χρόνους αναμονής. Το M/M/1/K είναι ένα σύστημα αναμονής, το οποίο μπορεί να αναπαρασταθεί από μια αλυσίδα Markov συνεχούς χρόνου με καταστάσεις $n = 0, 1, 2, \dots, K$. Γι' αυτήν την αλυσίδα υπάρχουν λύσεις κλειστής μορφής για τις πιθανότητες αποθέματος P_n . Το σύστημα αυτό μπορεί να περιγράψει δύο μηχανές με εκθετικούς χρόνους κατεργασιών και ενδιάμεση αποθήκη με συνολικό χώρο K κομματιών.

Για λόγους πληρότητας παρουσιάζονται στη συνέχεια κάποια γνωστά αποτελέσματα από τα δίκτυα Jackson ενώ τύποι για τα συστήματα M/M/1/K θα παρουσιαστούν αργότερα.

2.3 ΑΝΟΙΚΤΑ ΔΙΚΤΥΑ JACKSON

Τα δίκτυα Jackson χρησιμοποιούνται για την ανάλυση και βελτιστοποίηση της απόδοσης των συστημάτων παραγωγής. Ένα ανοικτό δίκτυο Jackson φαίνεται στο Σχήμα 2.2.

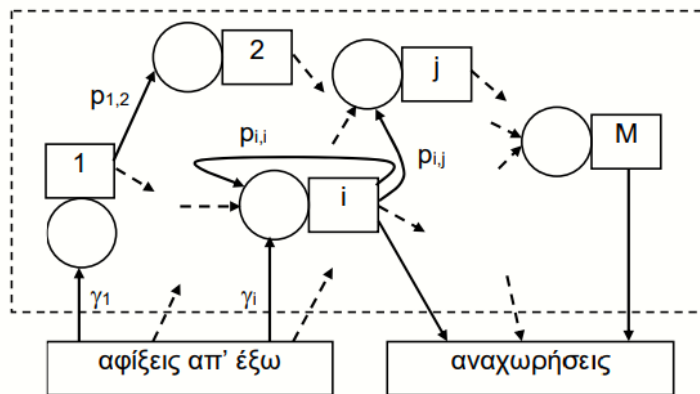
Το δίκτυο αποτελείται από M κόμβους-σταθμούς χωρίς καθορισμένη γεωμετρία. Οι δρομολογήσεις κομματιών μεταξύ των κόμβων γίνονται τυχαία σύμφωνα με γνωστές πιθανότητες p_{ij} .

Η άφιξη των κομματιών από εξωτερική πηγή σε κάθε κόμβο γίνεται κατά Poisson με ρυθμό γ_i ενώ μπορούν να φτάνουν και κομμάτια από άλλους κόμβους. Όταν γίνει η κατεργασία ενός κομματιού από μια μηχανή, αυτό φεύγει και κατευθύνεται προς την επόμενη μηχανή με πιθανότητα p_{ij} ή βγαίνει εντελώς από το δίκτυο με πιθανότητα:

$$1 - P(\text{να μείνει μέσα στο δίκτυο δοθέντος ότι αναχωρεί από τον κόμβο } i) = \sum_{j=1}^M p_{ij}$$

Κάθε κόμβος i είναι ένα σύστημα $/M/m_i$. Η έλλειψη του πρώτου M και η τελεία $./$ στον συμβολισμό δηλώνει ότι η είσοδος στον κόμβο i **δεν** είναι χωρίς μνήμη. Ο κόμβος i αποτελείται από ένα χώρο αναμονής (αποθήκη) με άπειρη χωρητικότητα και m_i παράλληλες και όμοιες μηχανές. Οι μηχανές έχουν εκθετικούς χρόνους κατεργασιών και μέσες τιμές $1/\mu_i$ ή ισοδύναμα μέσους ρυθμούς μ_i .

Τα κομμάτια αφού εισέλθουν στο σύστημα από έξω περνούν από διάφορα στάδια κατεργασίας και τελικά εξέρχονται από το σύστημα.



Σχήμα 2.2. Ανοικτό Δίκτυο Jackson

Ο συνολικός μέσος ρυθμός με τον οποίο φτάνουν τα κομμάτια σε κάθε κόμβο i περιγράφεται από την παρακάτω σχέση:

$$\lambda_i = \gamma_i + \sum_{j=1}^M \lambda_j p_{ji}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.1)$$

Το **θεώρημα του Jackson** είναι ένα αποτέλεσμα της θεωρίας δικτύων αναμονής το οποίο βοηθά στην ανάλυση της συμπεριφοράς του συστήματος. Η εφαρμογή του επιτυγχάνει την καλύτερη κατανόηση της ροής των κομματιών μέσα στο σύστημα στις διάφορες φάσεις τους. Με τη χρήση του θεωρήματος αυτού μπορούν να εκτιμηθούν μέτρα απόδοσης όπως ο μέσος χρόνος κατεργασίας, το μέσο απόθεμα και ο ρυθμός παραγωγής. Η πληροφορία αυτή, μπορεί να αξιοποιηθεί για τη βελτίωση της αποτελεσματικότητας του συστήματος, καθώς αναγνωρίζονται πιθανές αποστερήσεις και αποκλεισμοί.

Θεώρημα Jackson: Για δίκτυα Jackson, η συνολική είσοδος σε έναν κόμβο δεν είναι Poisson και όλοι οι κόμβοι έχουν μεταξύ τους αλληλεπίδραση. Παρόλα αυτά, στη μόνιμη κατάσταση ισχύει ότι:

- Κάθε κόμβος i έχει τη συμπεριφορά ενός συστήματος αναμονής $M/M/m_i$ στον οποίο ο μέσος ρυθμός εισόδου δίνεται από τη σχέση (2.1) και οι πιθανότητες $P_i(n_i)$ προκύπτουν από εξισώσεις ανάλογες των:

$$P_n = \begin{cases} P_0 \frac{m\rho^n}{n!} & n \leq m \\ P_0 \frac{m^n \rho^n}{m!} & n \geq m \end{cases} \quad (2.2)$$

και

$$\begin{aligned} P_0 &= \left[1 + \sum_{k=1}^{m-1} \frac{(m\rho)^k}{k!} + \sum_{k=m}^{\infty} \frac{(m\rho)^k}{m!} \frac{1}{m^{k-m}} \right]^{-1} \\ &= \left[\sum_{k=0}^{m-1} \frac{(m\rho)^k}{k!} + \frac{(m\rho)^m}{m!} \frac{1}{1-\rho} \right]^{-1} \end{aligned} \quad (2.3)$$

κάνοντας αντικατάσταση $n=n_i$, $\lambda=\lambda_i$, $\mu=\mu_i$ και $m=m_i$ σε κάθε κόμβο.

- Η λύση των αλγεβρικών εξισώσεων Kolmogorov είναι γινόμενο

$$P(n_1, \dots, n_M) = \prod_{i=1}^M P_i(n_i) \quad (2.4)$$

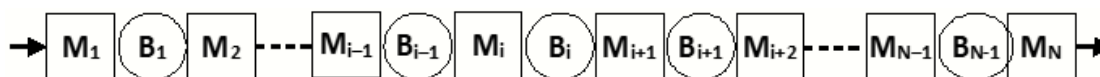
σαν οι ουρές αναμονής να ήταν ανεξάρτητες η μία από την άλλη.

3 ΣΥΝΟΨΗ ΜΕΘΟΔΩΝ ΔΙΑΣΠΑΣΗΣ ΚΑΙ ΣΥΝΑΘΡΟΙΣΗΣ

Αρκετά μέρη από την περιγραφή της μεθόδου διάσπασης με υποσυστήματα δύο μηχανών η οποία παρουσιάζεται στη συνέχεια έχουν αναδιατυπωθεί από σημειώσεις μαθήματος (Κουϊκόγλου, 2021).

3.1 Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΗΣ ΔΙΑΣΠΑΣΗΣ ΣΕ ΤΜΗΜΑΤΑ ΔΥΟ ΜΗΧΑΝΩΝ

Στο Σχήμα 3.1 φαίνεται μία γραμμή με N μηχανές σε σειρά και $N-1$ ενδιάμεσες αποθήκες. Η χωρητικότητα της B_i είναι πεπερασμένη και ίση με C_i και η μηχανή M_i έχει μέσο ρυθμό παραγωγής R_i , ή ισοδύναμα μέσο χρόνο κατεργασίας $1/R_i$.



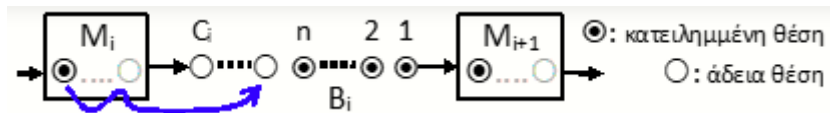
Σχήμα 3.1. Γραμμή παραγωγής με N μηχανές και $N-1$ ενδιάμεσες αποθήκες

Οι μέθοδοι διάσπασης διαιρούν τη γραμμή παραγωγής σε υποσυστήματα με πιο λίγες μηχανές, στα οποία οι δύο μηχανές στην αρχή και στο τέλος είναι εικονικές και περιγράφουν ολόκληρο το τμήμα της γραμμής προς τα πάνω (ανάντη) ή προς τα κάτω (κατάντη). Οι εικονικές μηχανές δεν είναι ακριβείς αλλά αποτελούν προσεγγίσεις. Ωστόσο είναι ευκολότερο να γίνει ανάλυση στα υποσυστήματα απ' ότι σε ολόκληρη τη γραμμή.

Η διάσπαση με 2 μηχανές βασίζεται στην προσέγγιση του συστήματος με τμήματα $M_i-B_i-M_{i+1}$ τα οποία αναλύονται ως συστήματα αναμονής συστήματα αναμονής $M/M/1/K$.

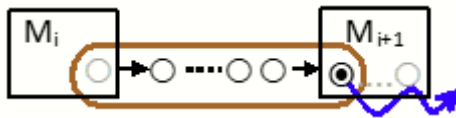
Ας δούμε πώς περνά ένα κομμάτι μέσα από αυτό το τμήμα παρατηρώντας το Σχήμα 3.2. Έστω ότι κάποια στιγμή στην αποθήκη υπάρχουν n κομμάτια με το n να μην υπερβαίνει τη χωρητικότητά της. Με τη βοήθεια του μπλε τόξου φαίνεται η πορεία ενός κομματιού το οποίο ολοκληρώνει την κατεργασία από την πρώτη μηχανή και μεταβαίνει σε μια κενή θέση της αποθήκης. Οι χρόνοι μεταφοράς του κομματιού μέσα από τις αποθήκες θεωρούνται αμελητέοι. Σε κάθε μηχανή υπάρχει μια θέση αποθήκευσης για το κομμάτι που είναι υπό κατεργασία. Παρόλο που διακρίνονται δύο θέσεις πάντα η μία είναι άδεια (γκρι χρώμα). Το τμήμα $M_i-B_i-M_{i+1}$ έχει τρέχον απόθεμα $n_i=n+1$ μαζί με το κομμάτι της μηχανής M_{i+1} , ενώ το κομμάτι που είναι υπο

κατεργασία στην M_i υποθέτουμε ότι ανήκει στο προηγούμενο τμήμα, $M_{i-1}-B_{i-1}-M_i$. Συνολικά το τμήμα έχει χωρητικότητα $K_i=C_i+2$, καθώς συμπεριλαμβάνεται και η δεξιά θέση της M_i που καταλαμβάνεται αφού γεμίσει η B_i και τότε αρχίζει να προσμετράται στο τρέχον τμήμα, ενώ πριν ήταν στο προηγούμενο.



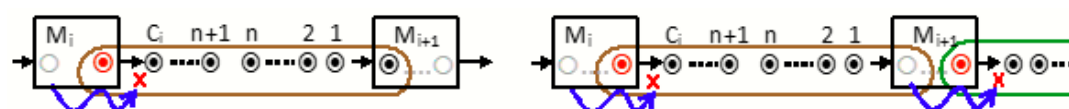
Σχήμα 3.2. Αναπαράσταση κίνησης κομματιού στο τμήμα $M_i-B_i-M_{i+1}$

Το Σχήμα 3.3 δείχνει τι συμβαίνει όταν $n_i=1$ και η M_{i+1} αποδεσμεύει το κομμάτι. Στην περίπτωση αυτή το τμήμα μένει άδειο και η M_{i+1} είναι αποστερημένη περιμένοντας από την προηγούμενή της μηχανή να της στείλει κομμάτι. Η προηγούμενη μηχανή M_i είτε θα κατεργάζεται ένα κομμάτι είτε θα περιμένει και εκείνη να της σταλεί.



Σχήμα 3.3. Μετακίνηση κομματιού στο επόμενο τμήμα

Κατά δυαδικό τρόπο, μια μηχανή μπορεί να είναι αποκλεισμένη. Αυτό φαίνεται στις δύο περιπτώσεις του Σχήματος 3.4. Καθώς η M_i παράγει στέλνει το κομμάτι της στην αποθήκη ή κατευθείαν στην επόμενη μηχανή αν εκείνη περιμένει τροφοδοσία. Σε περίπτωση που η αποθήκη είναι γεμάτη και η επόμενη μηχανή έχει ήδη ένα κομμάτι προς επεξεργασία τότε η M_i θεωρείται αποκλεισμένη. Το κομμάτι που έχει αποκλειστεί φαίνεται με κόκκινο χρώμα. Ο αποκλεισμός μπορεί να συμβεί με 2 τρόπους:



Σχήμα 3.4. Δύο τρόποι αποκλεισμού

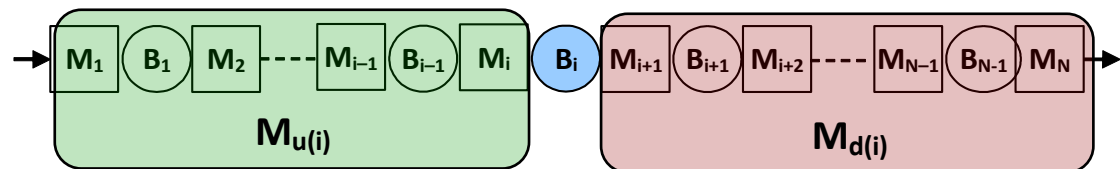
- Στην πρώτη περίπτωση η M_{i+1} λειτουργεί και συνολικά ισχύει ότι $n_i = C_i + 2$ για το τμήμα
- Στη δεύτερη περίπτωση η M_{i+1} έχει αποκλειστεί και το κομμάτι ανήκει στο επόμενο τμήμα. Συνεπώς ο συνολικός αριθμός κομματιών του τμήματος είναι $n_i = C_i + 1$.

Και στις δύο περιπτώσεις η μέθοδος υποθέτει ότι $n_i = C_i + 2$ όμως αυτό στη δεύτερη περίπτωση δεν είναι σωστό αφού το κομμάτι της M_{i+1} ανήκει σε επόμενο τμήμα και θα έπρεπε $n_i = C_i + 1$. Η αποκατάσταση του ισολογισμού κομματιών ώστε να προκύψει το σωστό μέσο απόθεμα του τμήματος γίνεται αφαιρώντας ένα κομμάτι (με την αντίστοιχη πιθανότητα) όταν συμβαίνει η δεύτερη περίπτωση. Επί πλέον η μηχανή M_{i+1} είναι αποκλεισμένη και αδρανής στη δεύτερη περίπτωση ενώ λειτουργεί στην πρώτη και αυτό πρέπει να ληφθεί υπ' όψη στην εκτίμηση της μέσης παραγωγικότητας.

Στο εξής ορίζουμε

$$K_i = \text{χωρητικότητα τμήματος } M_i - B_i - M_{i+1} = C_i + 2.$$

Η μέθοδος διάσπασης, αντί για απλές μηχανές στα τμήματα $M_i - B_i - M_{i+1}$, θεωρεί σύνθετες μηχανές και τμήματα $M_{u(i)} - B_i - M_{d(i)}$ όπως φαίνονται στο Σχήμα 3.5. Η ροή κομματιών από την B_i εξαρτάται από την χωρητικότητα K_i , από τη λειτουργία του τμήματος στα ανάντη και στα κατάντη της αποθήκης.

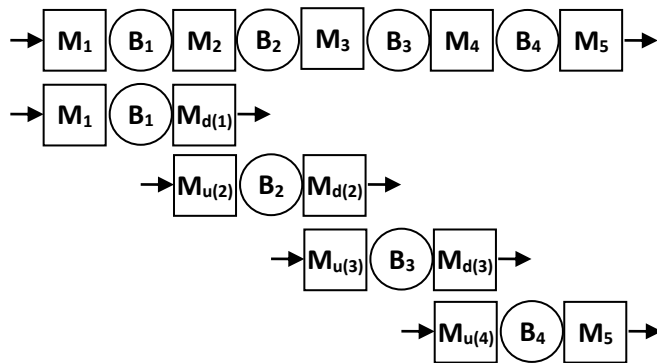


Σχήμα 3.5. Αναπαράσταση τμήματος γύρω από την αποθήκη B_i με μηχανές $M_{u(i)}$ προς τα ανάντη (πράσινο χρώμα) και $M_{d(i)}$ προς τα κατάντη (κόκκινο χρώμα) της B_i

Η μέθοδος διάσπασης βασίζεται στα παρακάτω:

- Κάθε αποθήκη έχει αριστερά και δεξιά της 2 ισοδύναμες μηχανές. Πιο συγκεκριμένα είναι οι:
 - $M_{u(i)} \rightarrow$ Ισοδύναμη με όλο το σύστημα στην ανάντη (πράσινο μέρος)
 - $M_{d(i)} \rightarrow$ Ισοδύναμη με όλο το σύστημα στην κατάντη (κόκκινο μέρος)
- Ολόκληρη η γραμμή είναι ισοδύναμη με οποιοδήποτε από τα συστήματα $M_{u(i)} - B_i - M_{d(i)}$ όπως δείχνει το Σχήμα 3.6.

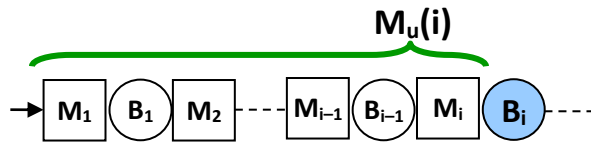
- Το σύστημα $M_{u(i)}-B_i-M_{d(i)}$ αντιπροσωπεύει μια ολόκληρη γραμμή όμως η προσέγγισή του γίνεται με ένα απομονωμένο $M/M/1/K_i$ ($K_i = C_i+2$). Οι ρυθμοί των $M_{d(i)}$ $M_{u(i)}$ είναι μεγέθη που πρέπει να εκτιμηθούν.
- Ο μέσος ρυθμός της $M_{u(i)}$ εξαρτάται από τον πραγματικό ρυθμό R_i της M_i καθώς και από την πιθανότητα ώστε μετά την τελευταία παραγωγή της M_i να έχει αδειάσει η B_{i-1} .
- Ο μέσος ρυθμός της $M_{d(i)}$ εξαρτάται από τον πραγματικό ρυθμό R_{i+1} της M_{i+1} καθώς και από την πιθανότητα ώστε μετά την τελευταία παραγωγή της M_{i+1} να έχει γεμίσει η αποθήκη B_{i+1} .
- Ο ρυθμός παραγωγής για κάθε τμήμα υπολογίζεται με βάση τα προηγούμενα και την ανάλυση τμημάτων $M/M/1/K_i$.
- Από τη στιγμή που κάθε τμήμα είναι ισοδύναμο με ολόκληρη τη γραμμή είναι απαραίτητο όλα τα τμήματα να έχουν την ίδια τιμή μέσου ρυθμού. Πρόκειται για την αναγκαία συνθήκη την οποία με διαδοχικές προσεγγίσεις προσπαθεί να επιτύχει ο επαναληπτικός αλγόριθμος.



Σχήμα 3.6. Αναπαράσταση της μεθόδου διάσπασης με 2 μηχανές

3.1.1 Ρυθμός λ_i της $M_{u(i)}$

Το λ_i ισούται με το αντίστροφο του μέσου χρόνου που μεσολαβεί από την προηγούμενη έως την επόμενη άφιξη στο τμήμα $M_{u(i)}-B_i-M_{d(i)}$. Αυτή η άφιξη πραγματοποιήθηκε όταν το προηγούμενο τμήμα είχε $n_{i-1} > 0$ κομμάτια, ένα από αυτά μεταφέρθηκε στην M_i , η οποία το κατεργάστηκε και το έστειλε στην B_i . Στο τμήμα που έδωσε το κομμάτι, τώρα υπάρχει ένα λιγότερο. Αυτό μπορεί να έχει και άλλα κομμάτια προς επεξεργασία ή να έχει μείνει άδειο αν ήταν το τελευταίο του κομμάτι.



Σχήμα 3.7. Τμήμα στα ανάντη της B_i

Το αντίστροφο του ρυθμού ($1/\lambda_i$) μπορεί να ισούται με:

- $1/R_i$ σε περίπτωση που η αποθήκη B_{i-1} είχε περισσότερα του ενός κομμάτια
- (μέσος χρόνος για καινούρια άφιξη στη B_{i-1}) + $1/R_i$ αν έδωξε το τελευταίο κομμάτι και έχει μείνει το τμήμα άδειο.

Τα παραπάνω ισχύουν δεδομένου ότι πριν υπήρχε έστω και ένα κομμάτι στο τμήμα.

Λαμβάνοντας υπ' όψη όλα τα ενδεχόμενα υπολογίζεται η μέση τιμή της σύνθεσης τυχαίων μεταβλητών:

$$\frac{1}{\lambda_i} = \frac{1}{R_{i-1}} P(n_{i-1} > 1 | n_{i-1} \geq 1) + \left(\frac{1}{\lambda_{i-1}} + \frac{1}{R_{i-1}} \right) P(n_{i-1} = 1 | n_{i-1} \geq 1) = \frac{1}{R_{i-1}} + \frac{1}{\lambda_{i-1}} E_{i-1} \quad (3.1)$$

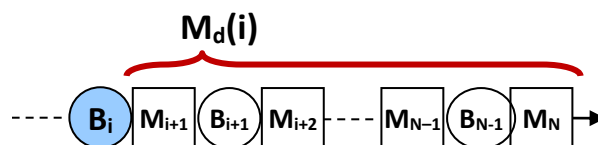
όπου για συντομία έχουν οριστεί

$$E_{i-1} \triangleq P(n_{i-1} = 1 | n_{i-1} \geq 1) \quad (3.2)$$

Τα λ_{i-1} και E_{i-1} προκύπτουν από την ανάλυση του προηγούμενου τμήματος.

3.1.2 Ρυθμός μ_i της $M_{d(i)}$

Το μ_i ισούται με το αντίστροφο του μέσου χρόνου που μεσολαβεί από την προηγούμενη έως την επόμενη αναχώρηση από την B_i . Όταν το τμήμα $M_{u(i+1)} - B_{i+1} - M_{d(i+1)}$ είχε $n_{i+1} < K_{i+1}$ κομμάτια, τη στιγμή δηλαδή που χωράει να μπει στο τμήμα, ένα από αυτά αναχωρεί από την M_i και εισέρχεται στο τμήμα. Αν υπάρχει χώρος για περισσότερα από ένα κομμάτια τότε αυτός ο χώρος συνεχίζει να υπάρχει. Σε περίπτωση όμως που γέμισε την τελευταία θέση η M_{i+1} θα αποκλειστεί.



Σχήμα 3.8. Τμήμα στα κατάντη της B_i

Το αντίστροφο του ρυθμού ($1/\mu_i$) μπορεί να ισούται με:

- $1/R_{i+1}$ σε περίπτωση που τη στιγμή που έγινε η προηγούμενη παραγωγή ίσχυε $n_{i+1} < K_{i+1} - 1$
- (μέσος χρόνος αναχώρησης από την αποθήκη B_{i+1}) $+ 1/R_{i+1}$ αν πριν ίσχυε $n_{i+1} = K_{i+1} - 1$

Τα παραπάνω ισχύουν δεδομένου ότι $n_{i+1} < K_{i+1}$.

Λαμβάνοντας υπ' όψη όλα τα ενδεχόμενα υπολογίζεται η μέση τιμή της σύνθεσης τυχαιών μεταβλητών:

$$\frac{1}{\mu_i} = \frac{1}{R_i} P(n_{i+1} < K_{i+1} - 1 | n_{i+1} \leq K_{i+1} - 1) + \left(\frac{1}{\mu_{i+1}} + \frac{1}{R_i} \right) P(n_{i+1} = K_{i+1} - 1 | n_{i+1} \leq K_{i+1} - 1) = \frac{1}{R_i} + \frac{1}{\mu_{i+1}} F_{i+1} \quad (3.3)$$

όπου

$$F_{i+1} \triangleq P(n_{i+1} = K_{i+1} - 1 | n_{i+1} \leq K_{i+1} - 1) \quad (3.4)$$

Τα τμήματα λειτουργούν σαν μια αλυσίδα και το κάθε ένα ενώνεται αριστερά και δεξιά με κάποιο άλλο γειτονικό.

3.1.3 Ανάλυση του τμήματος $M_{u(i)}-B_i-M_{d(i)}$ με τη θεωρία ουρών $M/M/1/K_i$

Εφόσον έχουν υπολογιστεί τα λ_i και μ_i για το τμήμα $M_{u(i)}-B_i-M_{d(i)}$ η ανάλυση γίνεται προσεγγίζοντάς το ως $M/M/1/K_i$. Τα παρακάτω δεδομένα χρησιμοποιούνται στην ανάλυση:

- $K_i = C_i + 2$: πρόκειται για τη συνολική χωρητικότητα
- $\rho_i = \lambda_i / \mu_i$
- P_n : πρόκειται για την πιθανότητα να υπάρχουν στο σύστημα n προϊόντα
- N_i : Μέσο Απόθεμα, χωρίς το κομμάτι που υπάρχει μέσα στη μηχανή
- NT_i : Μέσο Απόθεμα
- TH_i : Μέσος Ρυθμός Παραγωγής

Για την επίλυση των εξισώσεων που αναπτύχθηκαν νωρίτερα για τους ρυθμούς λ_i και μ_i θα γίνει χρήση των παρακάτω τύπων:

$$P(n_i = n) = \begin{cases} \rho_i^n \frac{1 - \rho_i}{1 - \rho_i^{K_i+1}}, & \rho_i \neq 1 \\ \frac{1}{K_i+1}, & \rho_i = 1 \end{cases} \quad (3.5)$$

$$NT_i = (\text{Μέσο απόθεμα}) = \sum_{n=1}^{K_i} n P(n_i = n) = \begin{cases} \rho_i \frac{1 - (K_i+1)\rho_i^{K_i} + K_i\rho_i^{K_i+1}}{(1 - \rho_i)(1 - \rho_i^{K_i+1})}, & \rho_i \neq 1 \\ \frac{K_i}{2}, & \rho_i = 1 \end{cases} \quad (3.6)$$

$$s_i = P(n_i=0) = P(M_i = \text{αποστερημένη}) \quad (3.7)$$

$$b_i = P(n_i=K_i) = P(M_i-1 = \text{αποκλεισμένη}) \quad (3.8)$$

$$TH_i = \mu_i(1-s_i) \text{ ή } TH_i = \lambda_i(1-b_i) \quad (3.9)$$

$$E_i = P((n_i=1 | n_i \geq 1) = P(n_i=1)/(1-s_i) \quad (3.10)$$

$$F_i = P(n_i=K_i-1 | n_i \leq K_i-1) = P(n_i=K_i-1)/(1-b_i) \quad (3.11)$$

$$N_i = NT_i - b_{i+1} \text{ (το } b_{i+1} \text{ υπολογίζεται από γειτονικό τμήμα)} \quad (3.12)$$

Σε όλους τους τύπους και εξισώσεις γίνεται χρήση των E_{i-1} , F_{i+1} , b_{i+1} από γειτονικά τμήματα. Επαναλαμβάνοντας όλα τα παραπάνω υπολογίζονται μεγέθη για όλο το τμήμα $M_{u(i)}-B_i-M_{d(i)}$.

3.1.4 Αλγόριθμος διάσπασης

Η ιδέα του αλγορίθμου είναι να επιλύονται οι εξισώσεις (3.5)–(3.12) επαναληπτικά για όλα τα τμήματα μέχρις ότου όλα τα TH_i να γίνουν περίπου ίσα.

Διάβασε: όριο σύγκλισης $\epsilon \leq 10^{-6}$, N , R_0

Για $i=1, \dots, N$

Διάβασε : R_i , C_i

$K_i = C_i + 2$ $\lambda_i = R_{i-1}$, $\mu_i = R_i$ ως αρχικές τιμές

Επόμενο i

Δώσε τιμές: $s_0=0$, $b_{N+1}=0$ και Σύγκλιση=0

(While): Όσο Σύγκλιση=0 κάνε:

Για $i=1, \dots, N-1$ (Προς τα δεξιά)

Ανάλυσε το σύστημα $M_{u(i)}-B_i-M_{d(i)}$ και υπολόγισε ρ_i , TH_i , NT_i , s_i , b_i , E_i , F_i

Για χρήση στο $i+1$: ενημέρωσε από Εξ. **(3.1)** το λ_{i+1} χρησιμοποιώντας το E_i

Εκτύπωσε τα ρ_i , TH_i , NT_i , s_i , b_i , E_i , F_i

Επόμενο i

Για $i=N, \dots, 2$ (Προς τα αριστερά)

Ανάλυσε το σύστημα $M_{u(i)}-B_i-M_{d(i)}$ και υπολόγισε ρ_i , TH_i , NT_i , s_i , b_i , E_i , F_i

Για χρήση στο $i-1$: ενημέρωσε από Εξ. **(2)** το μ_{i-1} χρησιμοποιώντας το F_i

Εκτύπωσε τα ρ_i , TH_i , NT_i , s_i , b_i , E_i , F_i

Επόμενο i

Έλεγχος σύγκλισης :

Αρχικά $TH_{\max}=TH_1$, $TH_{\min}=TH_1$

Για $i=2, \dots, N$

Ενημέρωσε: $TH_{\min} = \min(TH_i, TH_{\min})$
και $TH_{\max} = \max(TH_i, TH_{\max})$

Επόμενο i

Αν $TH_{\min}/TH_{\max} \geq 1-\epsilon$ τότε Σύγκλιση =1

(End) Επίστρεψε στο While

Εκτύπωσε τα τελικά TH_i , $N_i = NT_i - b_{i+1}$, s_i , b_i , $i=1, \dots, N$ και περάτωσε τον αλγόριθμο.

Οι Dallery και Frein (1993) απέδειξαν ότι ο ανωτέρω αλγόριθμος συγκλίνει, δηλαδή όταν ο αριθμός επαναλήψεων τείνει στο ∞ τότε $TH_i = TH_1$ για όλα τα $i > 1$ ή αλλιώς $TH_{min} = TH_{max}$.

3.2 Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΗΣ ΣΥΝΑΘΡΟΙΣΗΣ

Θα παρουσιαστεί μία παραλλαγή της μεθόδου που αναπτύχθηκε αρχικά από τους Ancelin και Semery (1987) και αργότερα από τους Li και Meerkon (2008). Βασίζεται στην ιδέα ότι μπορεί να γίνει αντικατάσταση ενός τμήματος της γραμμής με δύο μηχανές και μια αποθήκη από μία προσεγγιστικά ισοδύναμη με το τμήμα μηχανή. Στην πλειοψηφία των περιπτώσεων η μηχανή αυτή είναι ίδιου τύπου με τις μηχανές της αρχικής γραμμής. Λειτουργικό χαρακτηριστικό είναι συνήθως ο χρόνος/μέσος ρυθμός με τον οποίο εκτελούνται οι εργασίες. Όμως στις πρώτες εφαρμογές της μεθόδου έγινε η εξής υπόθεση:

- 1) Η γραμμή έχει N μηχανές M_i . Το σύστημα λειτουργεί σε διακριτό χρόνο (π.χ. λεπτά, δευτερόλεπτα). Η μηχανή M_i παράγει ένα κομμάτι κατά τη διάρκεια ενός κύκλου με πιθανότητα p_i ή δεν παράγει με πιθανότητα $1-p_i$.
- 2) Μεταξύ δύο μηχανών M_i και M_{i+1} υπάρχει συνολικός χώρος αποθήκευσης K_i . Όταν γεμίσει ο χώρος, τότε η M_i μπλοκάρεται για έναν τουλάχιστο κύκλο, έως ότου αδειάσει μία θέση. Όταν ο χώρος αδειάσει, τότε η M_{i+1} αποστερείται για τουλάχιστον έναν κύκλο, μέχρις ότου έλθει νέο κομμάτι στον χώρο αποθήκευσης.

Η μέθοδος υλοποιείται με τον παρακάτω τρόπο.

- Ξεκινώντας από την τελευταία μηχανή M_N γίνεται συνάθροιση αυτής με την προηγούμενή της M_{N-1} και υπολογίζεται ο ρυθμός του τμήματος $M_{N-1}-B_{N-1}-M_N$.
- Στην ισοδύναμη μηχανή του τμήματος $M_{N-1}-B_{N-1}-M_N$ προστίθεται η προηγούμενη μηχανή M_{N-2} και αποθήκη B_{N-2} και υπολογίζεται το $M_{N-2}-B_{N-2}-M_{N-1}-B_{N-1}-M_N$.
- Επαναλαμβάνονται όλα τα παραπάνω μέχρι την αρχή της γραμμής και με αυτόν τον τρόπο ολοκληρώνεται η προς τα πίσω (backward) συνάθροιση.

Η μέθοδος καθώς εφαρμόζεται σαρώνει τη γραμμή παραγωγής, θεωρώντας ότι τα λειτουργικά χαρακτηριστικά της μηχανής που προστίθεται κάθε φορά δεν

επηρεάζονται από το τμήμα της γραμμής προς τα κατάντη. Αυτό αποτελεί το πρώτο σφάλμα της μεθόδου. Το δεύτερο είναι το γεγονός ότι μια ισοδύναμη μηχανή η οποία περιλαμβάνει μια παράμετρο δε μπορεί να περιγράψει τη συμπεριφορά ενός τμήματος.

- Έχοντας τώρα ως αφετηρία την πρώτη μηχανή M_0 προστίθεται η αποθήκη B_1 και η επόμενη της μηχανή M_1 και γίνεται υπολογισμός της παραγωγικότητας του $M_0-B_1-M_1$. Για να πραγματοποιηθεί αυτό χρησιμοποιούνται οι τύποι των στοιχειωδών συστημάτων αναμονής. Η χωρητικότητα του τμήματος αυξάνεται κατά 2 αφού κάθε μηχανή έχει χώρο για ένα κομμάτι.
- Στην ισοδύναμη μηχανή που βρέθηκε παραπάνω προστίθεται μια ακόμα αποθήκη B_2 και η επόμενη πραγματική μηχανή M_2 . Έτσι υπολογίζεται προσεγγιστικά η καινούρια παραγωγικότητα του $M_0-B_1-M_1-B_2-M_2$.
- Επαναλαμβάνεται το παραπάνω μέχρι το τέλος της γραμμής παραγωγής και υπολογίζεται προσεγγιστικά η παραγωγικότητα του συστήματος $M_0-B_1-...-B_N-M_N$ και ολοκληρώνεται η προς τα εμπρός (forward) συνάθροιση

Η κύρια διαφορά μεταξύ αυτής της μεθόδου και της μεθόδου διάσπασης έγκειται στο ότι στη συνάθροιση οι παράμετροι της μηχανής δεν εξαρτώνται από τον αριθμό των μηχανών στα κατάντη της μηχανής που μελετάται, σε αντίθεση με τη διάσπαση. Με άλλα λόγια οι παράμετροι των μηχανών υπολογίζονται όπως θα γινόταν αν το εκάστοτε τμήμα (το οποίο συναθροίζεται σε μία ισοδύναμη μηχανή) δεν ήταν ποτέ αποκλεισμένο ή αποστερημένο αλλά λειτουργούσε σε απομόνωση.

Έστω s ο δείκτης επαναλήψεων όπου $s = 0$ δηλώνει τις αρχικές τιμές και $s = 1, 2, \dots$ τις επαναλήψεις. Ο δείκτης b (backward) αντιστοιχεί στην κατάντη ισοδύναμη μηχανή (στη μέθοδο διάσπασης ήταν d). Ο δείκτης f (forward) αντιστοιχεί στην ανάντη ισοδύναμη μηχανή (στη μέθοδο διάσπασης ήταν u). Οι εξισώσεις που περιγράφουν τη μέθοδο συνάθροισης είναι οι εξής:

$$p_i^b(s+1) = p_i[1 - Q(p_{i+1}^b(s+1), p_i^f(s), K_i)], i = 1, \dots, N-1 \quad (3.13)$$

$$p_i^f(s+1) = p_i[1 - Q(p_{i-1}^f(s+1), p_i^b(s), K_{i-1})], i = 2, \dots, N, s = 0, 1, \dots \quad (3.14)$$

Οι αρχικές συνθήκες που χρησιμοποιούνται είναι οι παρακάτω:

$$p_i^f(0) = p_i, i = 1, \dots, N$$

Ενώ οι ακραίες συνθήκες είναι:

$$p_1^f(s) = p_1, s = 0, 1, 2, \dots$$

$$p_N^b(s) = p_N, s = 0, 1, 2, \dots$$

και

$$Q(x, y, K) = \begin{cases} \frac{(1-x)(1-a)}{1 - \frac{x}{y}a^K} \alpha \nu x \neq y \\ \frac{1-x}{K+1-x} \alpha \nu x = y \end{cases}$$

όπου

$$a = \frac{x(1-y)}{y(1-x)}$$

Οι παραπάνω εξισώσεις λύνονται επαναληπτικά όπως εξηγήθηκε:

Στην πρώτη επανάληψη του αλγορίθμου, αρχικά εφαρμόζεται η Εξ. (3.13) για $i=N-1$ με αρχική συνθήκη $p_{N-1}^f(0)=p_{M-1}$ και ακραία συνθήκη το $p_N^b(s)=p_N$ ώστε να βρεθεί η τιμή του p_{N-1}^b . Στη συνέχεια εφαρμόζεται για $i=M-2$ για να βρεθεί η p_{N-2}^b και ούτω καθεξής μέχρι να βρεθεί το $p_1^b(1)$. Έπειτα εφαρμόζεται η Εξ. (3.14) με $i=2$ για την εύρεση του $p_2^f(1)$ και με ανάλογο τρόπο αναδρομικά καταλήγουμε στο $p_N^f(1)$.

Αντίστοιχα γίνονται και οι επόμενες επαναλήψεις.

4 ΔΙΑΣΠΑΣΗ ΜΕ ΤΡΕΙΣ ΜΗΧΑΝΕΣ

4.1 ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ

Η μέθοδος χρησιμοποιεί ισοδύναμα υποσυστήματα αποτελούμενα από 3 μηχανές και ενδιάμεσες 2 αποθήκες με πεπερασμένη χωρητικότητα. Η αρχική γραμμή παραγωγής έχει N μηχανές και $N-1$ ενδιάμεσες αποθήκες οι οποίες χωρίζονται σε υποσυστήματα 3 μηχανών. Οι ψευδομηχανές προσεγγίζουν τη συνολική συμπεριφορά του συστήματος προς τα ανάντη και προς κατόντη της μεσαίας (κεντρικής) μηχανής. Μέσω αυτής της μοντελοποίησης γίνεται δυνατή η ανάλυση των μέσων τιμών των αποθεμάτων και του ρυθμού παραγωγής. Η διάσπαση με 3 μηχανές βασίζεται στη ίδια ιδέα της διάσπασης σύμφωνα με την οποία η διατήρηση της ροής υλικών μέσα και έξω από την αποθήκη κάθε τμήματος να πρέπει να προσεγγίζει τη ροή την αντίστοιχη αποθήκη του πραγματικού συστήματος. Αυτή η αρχή εξασφαλίζει τη ισότητα στις ροές των υλικών σε όλα τα ισοδύναμα υποσυστήματα.

Ξεκινάμε με το υποσύστημα του Σχήματος 5.1 γύρω από την μηχανή M_i . Ο μέσος ρυθμός της M_i συμβολίζεται με R_i και η αποθήκη B_i έχει πεπερασμένη χωρητικότητα C_i . Κάθε μηχανή διαθέτει χώρο για την αποθήκευση ενός κομματιού. Το τμήμα έχει συνολική χωρητικότητα $K_i = C_i + 2$. Όταν ένα τμήμα αδειάσει η επόμενη μηχανή της i είναι αποστερημένη και περιμένει κομμάτι από την i . Αυτός ο μηχανισμός αντικατοπτρίζει τις εξαρτήσεις και τον συντονισμό που απαιτούνται μεταξύ των μηχανών στη διαδικασία παραγωγής. Η M_i βρίσκεται είτε στη διαδικασία κατεργασίας ενός άλλου κομματιού είτε και αυτή περιμένει τροφοδοσία από την προηγούμενή της. Αντίστοιχα αν η M_i παράγει αλλά η αποθήκη κατόντη της είναι γεμάτη, η μηχανή θα είναι αποκλεισμένη.



Σχήμα 4.1. Αναπαράσταση υποσυστήματος αποτελούμενο από 3 μηχανές και δύο ενδιάμεσες αποθήκες

Στο Εργαστήριο CAM του Πολυτεχνείου Κρήτης έχει αναπτυχθεί μία συνάρτηση Matlab για την ανάλυση τέτοιων συστημάτων χρησιμοποιώντας αλυσίδες Markov. Η

συνάρτηση δέχεται ως εισόδους τους ρυθμούς $m_{u(i)}$, R_i και $m_{d(i)}$ και τις χωρητικότητες μεταξύ των μηχανών $K_{i-1} = C_{i-1}+2$ και $K_i = C_i+2$ και υπολογίζει:

- πιθανότητες αποστέρησης s_i , αποκλεισμού b_i και ταυτόχρονης αποστέρησης και αποκλεισμού sb_i της μεσαίας μηχανής M_i κάθε υποσυστήματος
- υπό συνθήκη πιθανότητες αποστέρησης E_i και αποκλεισμού F_i δοθέντος ότι η M_i ολοκληρώνει μία κατεργασία
- μέσος ρυθμός παραγωγής TH_i όλου του τμήματος
- μέσα αποθέματα στην πρώτη και στη δεύτερη αποθήκη MT_{i-1} και MT_i με τις διορθώσεις στον ισολογισμό κομματιών που έχουν περιγραφεί στη Παράγραφο 3.1.

Η μέθοδος της διάσπασης βασίζεται στα ακόλουθα:

- Για κάθε τμήμα $M_{u(i)}-B_{i-1}-M_i-B_i-M_{d(i)}$ η μηχανή $M_{u(i)}$ είναι ισοδύναμη με όλο το τμήμα της γραμμής στα ανάντη

$$M_1-B_1-...-M_{i-2}-B_{i-2}-M_{i-1}$$

ενώ τη $M_{d(i)}$ με το σύστημα στα κατάντη

$$M_{i+2}-B_{i+2}-...-M_{N-1}-B_{N-1}-M_N$$

- Ο μέσος ρυθμός της $M_{u(i)}$ εξαρτάται από τον πραγματικό ρυθμό της μηχανής M_{i-1} , από την πιθανότητα η μηχανή αυτή να είναι αποστερημένη καθώς και από τον ρυθμό της προηγούμενης ισοδύναμης μηχανής $M_{u(i-1)}$ στα ανάντη.
- Ο μέσος ρυθμός της $M_{d(i)}$ εξαρτάται από τον πραγματικό ρυθμό της μηχανής M_{i+1} , από την πιθανότητα αυτή να είναι αποκλεισμένη καθώς και από τον ρυθμό της επόμενης ισοδύναμης $M_{d(i+1)}$ στα κατάντη.
- Πραγματοποιούνται διαδοχικές αναλύσεις των τμημάτων για $i = 2, 3, ..., N-1$ μέχρις ότου να ικανοποιηθούν κάποιες συνθήκες σύγκλισης.

Για τον υπολογισμό του ρυθμού της $M_{u(i)}$ (ανάντης ισοδύναμη μηχανή) χρησιμοποιείται η Εξ. (3.1)

$$m_{u(i)} = \frac{1}{\frac{1}{R_{i-1}} + \frac{E_{i-1}}{m_{u(i-1)}}} \quad (4.1)$$

όπου η E_{i-1} είναι η υπό συνθήκη πιθανότητα ώστε ένα κομμάτι που παράγεται από τη M_{i-1} να είναι το τελευταίο πριν αδειάσει η αποθήκη B_{i-2} . Οι E_{i-1} και $m_{u(i-1)}$ υπολογίζονται με τη συνάρτηση Matlab από την πιο πρόσφατη ανάλυση του τμήματος $M_{u(i-1)}-B_{i-2}-M_{i-1}-B_{i-1}-M_{d(i-1)}$ προς τα ανάντη. Επίσης λόγω του ότι έχουμε τμήμα με τρεις μηχανές, το αριστερό άκρο του $M_{u(i)}-B_{i-1}-M_i-B_i-M_{d(i)}$ αντιστοιχεί στην

M_{i-1} οπότε ο παρονομαστής έχει τον ρυθμό R_{i-1} αντί του R_i που υπάρχει στην Εξ. (3.1). Με ανάλογο τρόπο ο ρυθμός της $M_{d(i)}$ (κατάντης ισοδύναμη μηχανή) χρησιμοποιείται η Εξ. (3.3):

$$m_{d(i)} = \frac{1}{\frac{1}{R_{i+1}} + \frac{F_{i+1}}{m_{d(i+1)}}} \quad (4.2)$$

και τα $m_{d(i+1)}$ και F_{i+1} είναι επίσης έξοδοι της συνάρτησης Matlab από την πιο πρόσφατη ανάλυση του τμήματος $M_{u(i+1)}-B_i-M_{i+1}-B_{i+1}-M_{d(i-1)}$ προς τα κατάντη.

4.2 Ο ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ ΔΙΑΣΠΑΣΗΣ

Διάβασε: όριο σύγκλισης ε (π.χ. $\varepsilon = 10^{-5}$) και πλήθος μηχανών N

Για $i=1, \dots, N$

Διάβασε : R_i, C_i

$K_i = C_i + 2$, $\lambda_i = R_{i-1}$, $\mu_i = R_i$ ως αρχικές τιμές

Επόμενο i

Αρχικοί ρυθμοί ακραίων μηχανών: $m_u(i), m_d(i)$:

Για $i=2, \dots, N-1$

$m_{u(i)} = R_{i-1}$, $m_{d(i)} = R_{i+1}$

αρχική εκτίμηση ρυθμού για κάθε τμήμα: $TH_{i,0} = 0$ (για έλεγχο σύγκλισης)

Επόμενο i

Η M_N δεν αποκλείεται ποτέ, άρα $b_N = 0$.

Αρχικά **Σύγκλιση=0**

(While): Όσο **Σύγκλιση=0** κάνε:

Για $i=2, \dots, N-2$ (ευθεία επανάληψη)

Ανάλυσε το τμήμα $M_{u(i)}-B_{i-1}-M_i-B_i-M_{d(i)}$ και υπολόγισε TH_i , s_i , b_i , E_i , F_i και μέσα αποθέματα $MT_{i-1,1}$ και $MT_{i,1}$ όπου ο δείκτης 1 δηλώνει ευθεία επανάληψη

Για χρήση στο $i+1$: ενημέρωσε από Εξ. **(4.1)** το $m_{u(i+1)}$ χρησιμοποιώντας το E_i

Επόμενο i

Για $i=N-1, \dots, 3$ (αντίστροφη φορά)

Ανάλυσε το τμήμα $M_{u(i)}-B_{i-1}-M_i-B_i-M_{d(i)}$ και υπολόγισε TH_i , s_i , b_i , E_i , F_i και μέσα αποθέματα $MT_{i-1,2}$ και $MT_{i,2}$ όπου ο δείκτης 2 δηλώνει αντίστροφη φορά

Για χρήση στο $i-1$: ενημέρωσε από Εξ. **(4.2)** το $m_{d(i-1)}$ χρησιμοποιώντας το F_i

Επόμενο i

Έλεγχος σύγκλισης: Ελέγχεται αν κάθε TH_i συγκλίνει τοπικά

Αν ισχύουν οι συνθήκες

$$|TH_{i,0} - TH_i| / TH_i < \varepsilon \text{ για κάθε } i = 2, \dots, N-1$$

τότε **Σύγκλιση = 1**

Αλλιώς αποθηκεύονται οι τρέχουσες εκτιμήσεις για τον επόμενο έλεγχο:

$$TH_{i,0} = TH_i$$

(End) Επίστρεψε στο While

Τα TH_i **δεν συγκλίνουν σχεδόν ποτέ στην ίδια τιμή** ενώ τα μέσα αποθέματα **έχουν δύο εκτιμήσεις** $MT_{i,1}$ και $MT_{i,2}$ αφού κάθε αποθήκη εκτός των B_1 και B_{N-1} ανήκει σε δύο τμήματα. Οι εκτιμήσεις υπολογίζονται παίρνοντας μέσους όρους:

$$TH = (TH_2 + \dots + TH_{N-1}) / (N-2)$$

$$MT_1 = MT_{1,1}, \quad MT_{N-1} = MT_{N-1,2} \quad \text{και} \quad MT_i = (MT_{i,1} + MT_{i,2}) / 2 \quad \text{για } i = 2, \dots, N-2$$

Περάτωσε τον αλγόριθμο.

Ο αλγόριθμος σε περιβάλλον Matlab παρατίθεται στο Παράρτημα Α.

5 ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΗ ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ ΚΑΙ ΑΛΓΟΡΙΘΜΩΝ ΔΙΑΣΠΑΣΗΣ ΜΕ ΔΥΟ ΚΑΙ ΤΡΕΙΣ ΜΗΧΑΝΕΣ

5.1 ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΤΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ ΣΤΗ SIMIO

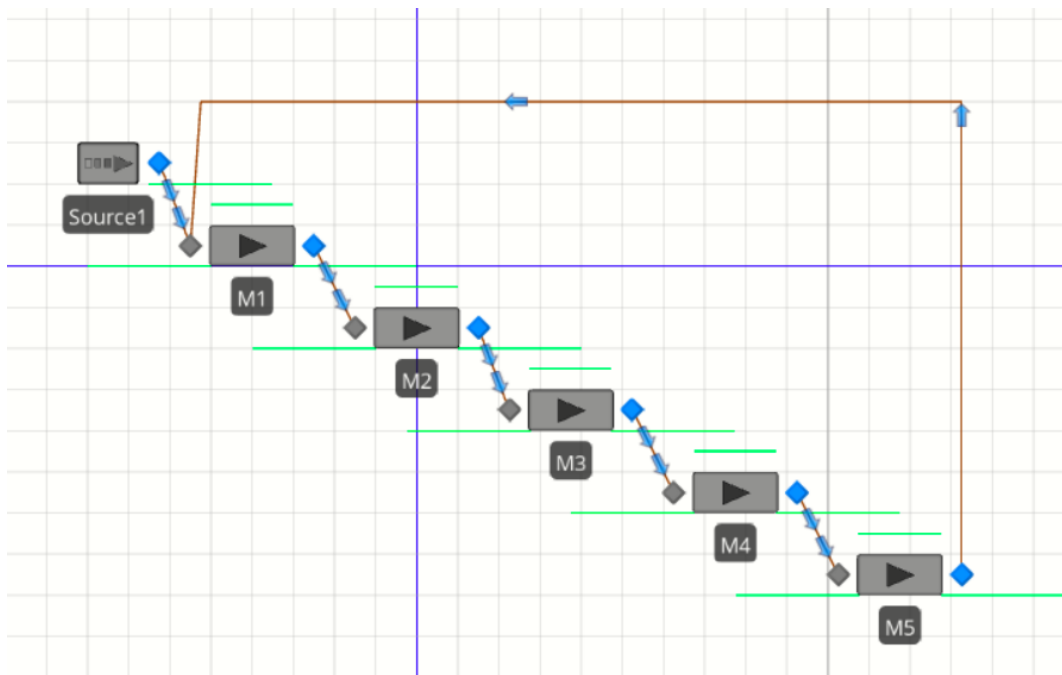
Προσομοίωση ονομάζεται η μίμηση με τη βοήθεια υπολογιστή της λειτουργίας ή εξέλιξης συστήματος, διαδικασίας ή φαινομένου. Ως διαδικασία, σύστημα ή φαινόμενο καλείται ένα σύνολο στοιχείων τα οποία εξελίσσονται και αλληλεπιδρούν σύμφωνα με κάποιους κανόνες (Κουϊκόγλου και Κωνσταντάς 2016). Η προσομοίωση περιλαμβάνει την ανάπτυξη του υπό μελέτη συστήματος στον υπολογιστή και την εκτέλεση του προγράμματος το οποίο περιγράφει ένα σενάριο λειτουργίας του συστήματος. Παράλληλα, γίνεται εκτίμηση της απόδοσης και μπορούν δοκιμαστούν πολλά διαφορετικά σενάρια προσομοίωσης με διαφορετικές παραμέτρους (π.χ. στις γραμμές παραγωγής δοκιμάζονται διαφορετικοί τύποι μηχανών και διαφορετικές χωρητικότητες αποθηκών) με στόχο την εύρεση βέλτιστων παραμέτρων. Χρησιμοποιείται για τον έλεγχο των αποθεμάτων, την ανάλυση και τη σχεδίαση των συστημάτων παραγωγής, τις ουρές αναμονής, τις καθυστερήσεις, την αξιολόγηση επενδυτικών αποφάσεων και τη μελέτη διαφόρων συστημάτων.

Για τη διεξαγωγή των πειραμάτων με προσομοίωση έγινε χρήση του λογισμικού προσομοίωσης Simio. Για τη δημιουργία του μοντέλου χρησιμοποιήθηκαν τα παρακάτω:

- Πηγή Πρώτων Υλών-Source: Πρόκειται για την πηγή που τροφοδοτεί την πρώτη μηχανή. Το αντικείμενο “Source” επιλέχθηκε από τη βιβλιοθήκη “Standard”. Η πηγή έχει τη δυνατότητα να εισάγει απεριόριστες πρώτες ύλες στην πρώτη μηχανή, όμως η δωρεάν έκδοση επιβάλλει περιορισμό στον αριθμό των οντοτήτων. Για τον λόγο αυτό, χρησιμοποιείται το εξής τέχνασμα: Ο μέγιστος αριθμός κομματιών είναι εκείνος που διαθέτει το σύστημα όταν είναι γεμάτο. Αυτός ο αριθμός είναι ίσος με τον αριθμό των μηχανών επαυξημένος με το άθροισμα των χωρητικότητων των αποθηκών. Θα χρησιμοποιήσουμε ως παράδειγμα μία γραμμή με 5 μηχανές με ρυθμούς παραγωγής $R_i = 1, 2, 1, 2, 1$ εναλλάξ και 4 αποθήκες με χωρητικότητα $C_i = 4$ η κάθε μια. Επομένως συνολικά το σύστημα μπορεί να έχει μέχρι 21 κομμάτια και τότε θα είναι γεμάτο. Αν η πηγή εισαγάγει εφ’ άπαξ τόσα κομμάτια και συνδεθεί η τελευταία μηχανή με την είσοδο της πρώτης τότε προκύπτει μία κλειστή αλυσίδα με μόνο 21 οντότητες η οποία συμπεριφέρεται ακριβώς

όπως η αρχική ανοικτή γραμμή. Στο Properties: Source1 γίνεται αλλαγή του Entities Per Arrival=21. Επίσης στο Stopping Conditions->Maximum Arrivals=1.

- Μηχανές-Servers: Κάθε μία από τις 5 μηχανές περιγράφεται από το αντικείμενο "Server", το οποίο υπάρχει όπως και το προηγούμενο στη βιβλιοθήκη "Standard". Κάθε μηχανή διαθέτει αποθήκη εισόδου (Input Buffer), θέση για το κομμάτι που κατεργάζεται και αποθήκη εξόδου (Output Buffer) όπως δείχνει το Σχήμα 5.1. Έγινε αλλαγή δύο παραμέτρων στην πρώτη μηχανή. Πιο συγκεκριμένα, στο Processing Time έγινε εφαρμογή του "Random.Exponential(1)". Το 1 μέσα στην παρένθεση προέκυψε ως ο αντίστροφος του μέσου ονομαστικού ρυθμού παραγωγής της πρώτης μηχανής $1/R_1$ με $R_1=1$. Στη συνέχεια άλλαξε στο Buffer Logic->Output Buffer->Capacity=0. Έτσι από την πρώτη μηχανή το κομμάτι θα πάει στην αποθήκη εισόδου της δεύτερης χωρίς να μπορεί να αποθηκευτεί προσωρινά στην έξοδο της πρώτης. Στις επόμενες 4 μηχανές, γίνεται αλλαγή σε τρεις παραμέτρους.



Σχήμα 5.1. Αναπαράσταση γραμμής παραγωγής με πέντε μηχανές στο περιβάλλον προσομοίωσης Simio

- Connector: Η διασύνδεση των μηχανών για τη μεταφορά κομματιών από τη μία στην άλλη γίνεται αυτόματα στο λογισμικό Simio: κάθε φορά που δημιουργείται ένας Server, η αποθήκη εισόδου του αυτόματα συνδέεται με

την αποθήκη εξόδου του προηγούμενου. Ωστόσο με αυτόν τον τρόπο τα κομμάτια έχουν χρόνους μεταφοράς, γεγονός που δεν είναι επιθυμητό διότι υποθέσαμε αμελητέους χρόνους. Για την παράκαμψη της αυτόματης διασύνδεσης και την επιβολή μηδενικών χρόνων μεταφοράς γίνεται χρήση των “Connectors”. Από την καρτέλα “Standard” επιλέγεται με διπλό κλικ το αντικείμενο “Connector” και ενώνεται το τέλος κάθε μηχανής με την επόμενη της με εξαίρεση την τελευταία, η οποία ενώνεται με την πρώτη. Τέλος την έξοδο του τελευταίου Server (μηχανή M_5) με έναν ακόμη Connector τη συνδέουμε με την αποθήκη εισόδου του πρώτου Server (μηχανή M_1).

Η προσομοίωση είναι ακριβής όταν ο χρονικός ορίζοντας παρατήρησης του συστήματος είναι αρκετά μεγάλος. Η Simio έχει δυνατότητα εκτέλεσης προσομοιώσεων χωρίς γραφικά με την επιλογή “Fast Forward”. Αν και αυτό μειώνει κατά αρκετές χιλιάδες φορές τον υπολογιστικό χρόνο της προσομοίωσης, εν τούτοις είναι συχνά αργή όταν προσομοιώνει μεγάλες γραμμές παραγωγής για μεγάλο χρονικό ορίζοντα. Σε τέτοιες περιπτώσεις αναδεικνύεται η αξία των μεθόδων διάσπασης εφ' όσον βεβαίως δίνουν ακριβείς εκτιμήσεις. Για τον λόγο αυτό, τα αποτελέσματα της Simio θα χρησιμοποιηθούν για τον έλεγχο της ακρίβειας των αλγορίθμων διάσπασης.

5.2 ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΑ ΠΕΙΡΑΜΑΤΑ

Πραγματοποιήθηκαν πέντε πειράματα με στόχο τη μελέτη της επίδρασης διαφορετικών παραμέτρων στα σφάλματα των αλγορίθμων διάσπασης. Η βασική γραμμή παραγωγής που χρησιμοποιήθηκε αποτελείται από 5 μηχανές με εναλασσόμενους μέσους (ονομαστικούς) ρυθμούς παραγωγής $R_1=1$, $R_2=2$, $R_3=1$, $R_4=2$, και $R_5=1$ και ενδιάμεσες αποθήκες με χωρητικότητες $C_1= C_2= C_3= C_4=4$.

5.2.1 Πρώτο πείραμα

Στόχος του πρώτου πειράματος είναι η εύρεση του χρονικού ορίζοντα που πρέπει να έχουν οι προσομοιώσεις στη Simio ώστε να δίνουν ακριβή αποτελέσματα ήτοι με σφάλμα 0.5% ή μικρότερο για τον μέσο ρυθμό παραγωγής. Εκτελέστηκαν προσομοιώσεις με “Fast Forward” για $t=20,000$, $40,000$, $80,000$, $160,000$, $320,000$, διπλασιάζοντας δηλαδή κάθε φορά τον χρόνο. Υπολογίστηκαν τα εξής:

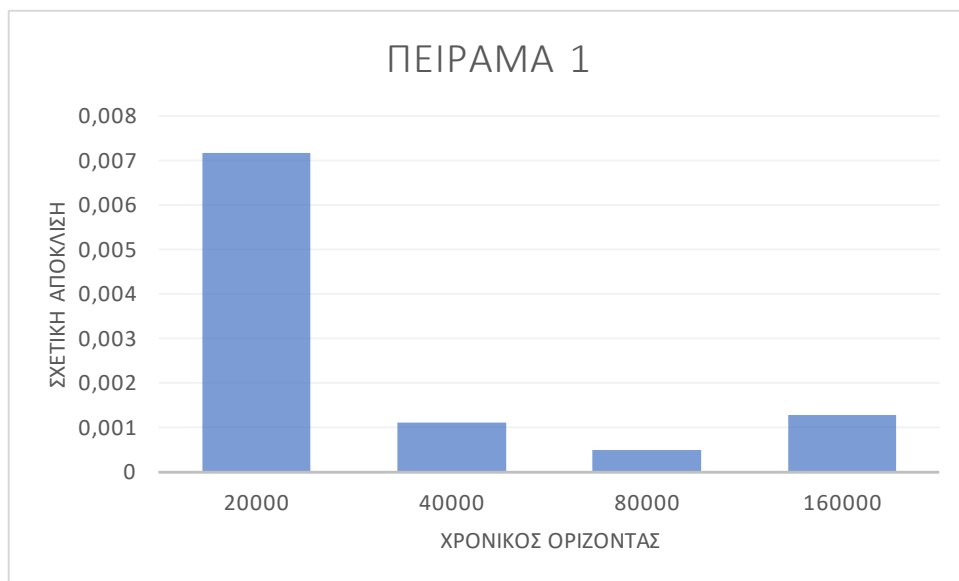
- **Υπολογιστικός Χρόνος:** Πρόκειται για τον χρόνο σε δευτερόλεπτα που ο προσομοιωτής εκτελεί την κάθε προσομοίωση.
- **Μέσος Ρυθμός Παραγωγής (TH):** Η τιμή αυτή λαμβάνεται από τα “Results” της Simio και προκύπτει από τον τύπο:
$$\frac{\text{Παραγωγή Τελευταίας Μηχανής}}{\text{Χρόνος Προσομοίωσης}}$$
- **Μέσο Απόθεμα στο Υποσύστημα MA(i):** Υπολογίζεται ως εξής:

$$\begin{aligned}
MA(i) = & \text{πιθανότητα η } M_i \text{ να είναι μπλοκαρισμένη} \\
& + \text{ μέσο απόθεμα στην αποθήκη εισόδου της } M_{i+1} \\
& + (1 - \text{πιθανότητα η } M_{i+1} \text{ να είναι μπλοκαρισμένη} \\
& - \text{πιθανότητα η } M_{i+1} \text{ να είναι πεινασμένη}).
\end{aligned}$$

Τα $MA(i)$ υπολογίστηκαν και για τα 4 υποσυστήματα $M_i-B_i-M_{i+1}$.

Πίνακας 5.1. Πείραμα 1

Χρονικός Προσομοίωσης (s)	Ορίζοντας Computer Times (s)	TH(mean)	MA(1)	MA(2)	MA(3)	MA(4)	Σύγκλιση
20000	8	0.8751	2.3810	4.1161	1.6447	3.3459	0.0016
40000	14	0.8737	2.3649	4.1046	1.6975	3.4274	0.0011
80000	30	0.8728	2.3656	4.1379	1.6997	3.4168	0.0005
160000	60	0.8732	2.3500	4.1234	1.6813	3.3902	0.0013
320000	125	0.8721	2.3416	4.1270	1.6641	3.3746	



Σχήμα 5.2. Πείραμα 1: Απόκλιση αποτελεσμάτων σύντομων προσομοιώσεων από το αποτέλεσμα προσομοίωσης για χρονικό ορίζοντα 320000 s.

Η σχετική απόκλιση $|TH(2t)-TH(t)|/TH(2t)$ είναι πρώτη φορά <0.005 όταν $t=40000$ και $2t=80000$. Συνεπώς επιλέγεται το 80000. Για $t=320000$ υπάρχει μεγαλύτερη απόκλιση από ότι σε μικρότερα t . Το συγκεκριμένο παράδοξο δικαιολογείται στατιστικά καθώς όσο αυξάνονται τα πειράματα ο μέσος όρος δεν συγκλίνει πάντα σε καλύτερη τιμή από εκείνη που έχει προκύψει με λιγότερα πειράματα.

Πίνακας 5.2. Πείραμα 1 με $t=20000$

2000	1	2	3	4	5
Πιθανότητα (%) να είναι μπλοκαρισμένη	13.2912	35.1669	6.5689	22.5236	0
Πιθανότητα (%) να είναι αποστερημένη	0	21.4572	6.2298	33.7375	13.0045
Μέσος Αριθμός στην αποθήκη εισόδου	8.6453	1.8143	2.8924	1.1416	2.2507
ΤΗ	17502				

Πίνακας 5.3. Πείραμα 1 με $t=40000$

4000	1	2	3	4	5
Πιθανότητα (%) να είναι μπλοκαρισμένη	13.0264	35.0625	6.8487	23.7993	0
Πιθανότητα (%) να είναι αποστερημένη	0	21.4908	6.2987	32.7417	12.4441
Μέσος Αριθμός στην αποθήκη εισόδου	8.5359	1.8002	2.8854	1.1944	2.3138
ΤΗ	34949				

Πίνακας 5.4. Πείραμα 1 με $t=80000$

8000	1	2	3	4	5
Πιθανότητα (%) να είναι μπλοκαρισμένη	13.0491	35.298	6.9189	23.5491	0
Πιθανότητα (%) να είναι αποστερημένη	0	21.295	5.9528	32.8494	12.5682
Μέσος Αριθμός στην αποθήκη εισόδου	8.5106	1.801	2.9136	1.1945	2.307
ΤΗ	69820				

Πίνακας 5.5. Πείραμα 1 με $t=160000$

16000	1	2	3	4	5
Πιθανότητα (%) να είναι μπλοκαρισμένη	12.8691	34.9903	6.7618	23.0826	0
Πιθανότητα (%) να είναι αποστερημένη	0	21.5372	6.1187	33.3238	12.7855
Μέσος Αριθμός στην αποθήκη εισόδου	8.5837	1.7866	2.9023	1.1777	2.2872
ΤΗ	139708				

Πίνακας 5.6. Πείραμα 1 με t=320000

32000	1	2	3	4	5
Πιθανότητα (%) να είναι μπλοκαρισμένη	12.6796	35.0203	6.6061	22.778	0
Πιθανότητα (%) να είναι αποστερημένη	0	21.5167	6.1423	33.6597	12.8149
Μέσος Αριθμός στην αποθήκη εισόδου	8.6194	1.7802	2.9043	1.1624	2.275
ΤΗ	279057				

5.2.2 Δεύτερο πείραμα

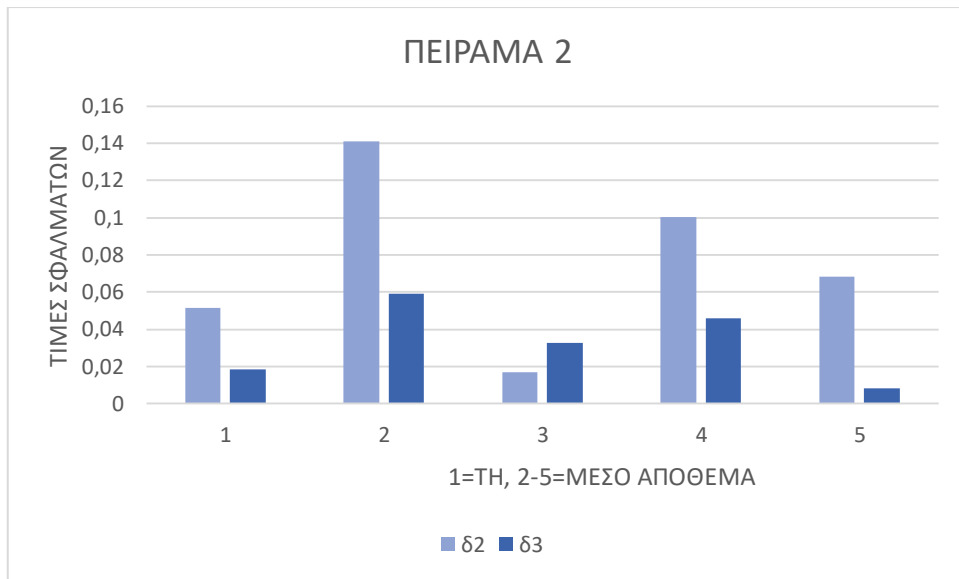
Για τη βασική γραμμή παραγωγής που αναφέρθηκε παραπάνω, εκτελέστηκαν δύο αλγόριθμοι διάσπασης, για διάσπαση σε τμήματα με 2 (**δ2**) και με 3 (**δ3**) μηχανές αντίστοιχα, καθώς και το μοντέλο προσομοίωσης στη Simio (**π**). Ως διάρκεια προσομοίωσης θεωρήθηκε το 2t που βρέθηκε από το πρώτο πείραμα. Έγινε μελέτη 2 μέτρων του συστήματος, ΤΗ και μέσο απόθεμα στις αποθήκες. Από τη στιγμή που ο αλγόριθμος δ2 δε συγκλίνει ως ΤΗ λαμβάνεται ο μέσος όρος, Throughput(average). Για τα δ2,δ3 και π υπολογίστηκαν τα εξής:

- % σφάλμα στην παραγωγικότητα: $100\% * \frac{[TH(\pi) - TH(\delta)]}{TH(\pi)}$
- % σφάλμα στο μέσο απόθεμα για κάθε ένα από τα 4 υποσυστήματα M_i - B_i - M_{i+1} : $100\% * \frac{[Μέσο Απόθεμα(\pi) - Μέσο Απόθεμα(\delta)]}{Μέσο Απόθεμα(\pi)}$

Τα αποτελέσματα που προέκυψαν μετά από τη εκτέλεση της προσομοίωσης φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

Πίνακας 5.7. Πείραμα 2

	Πραγματική Τιμή(π)	Εκτίμηση δ2	Σφάλμα δ2	Εκτίμηση δ3	Σφάλμα δ3
ΤΗ	0.8728	0.9179	0.0517	0.8889	0.0186
Μέσο Απόθεμα 1	2.3656	2.0315	0.1412	2.2252	0.0593
Μέσο Απόθεμα 2	4.1379	4.2074	0.0168	4.0030	0.0326
Μέσο Απόθεμα 3	1.6997	1.5288	0.1005	1.7774	0.0457
Μέσο Απόθεμα 4	3.4168	3.6501	0.0683	3.4460	0.0085



Σχήμα 5.3. Πείραμα 2: Σφάλματα διάσπασης στην εκτίμηση της παραγωγικότητας ΤΗ και των μέσων αποθεμάτων της βασικής γραμμής.

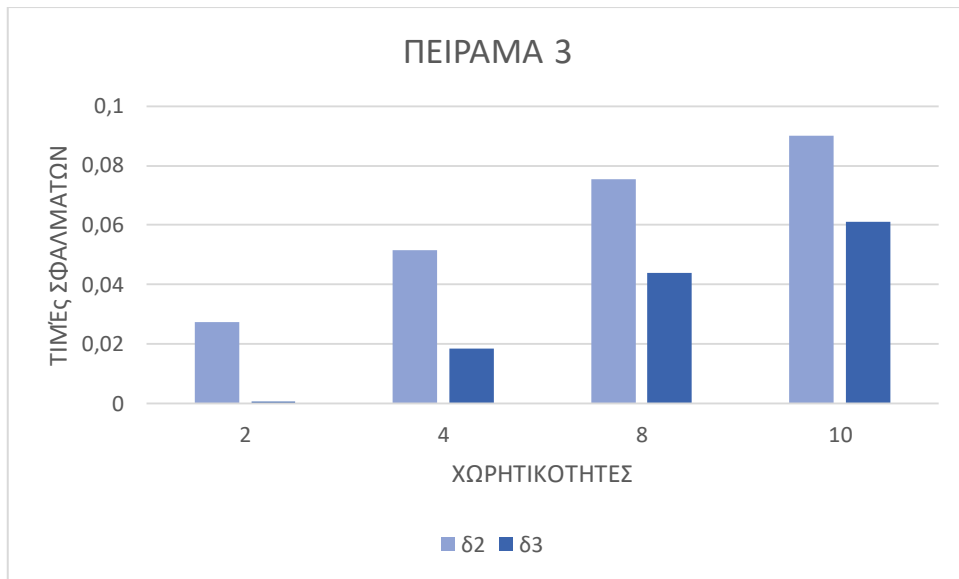
Για τη διάσπαση με 2 μηχανές το σφάλμα που προκύπτει για το μέσο ρυθμό παραγωγής είναι 5% πολύ μεγαλύτερο από αυτό της διάσπασης με 3 μηχανές, 1,8%. Για της αποθήκες που βρίσκονται μετά από τις μηχανές με τους γρηγορότερους ρυθμούς δηλαδή την 2 και την 4 παρατηρείται ότι και οι δύο αλγόριθμοι ,δ2 και δ3, έχουν πολύ μικρότερο σφάλμα σε σχέση με αυτό για τις αποθήκες 1 και 4 όμως και πάλι η δ3 υπερέχει καθώς δίνει μικρότερο σφάλμα από τη δ2 για όλες τις μετρήσεις. Όσο μεγαλύτερος είναι ο ρυθμός παραγωγής τόσο καλύτερη είναι και η ακρίβεια των αλγορίθμων σε σχέση με την προσομοίωση.

5.2.3 Τρίτο πείραμα

Στη βασική γραμμή παραγωγής μεταβάλλονται όλες οι χωρητικότητες αποθηκών θέτοντας $C_i=2, 4, 8$ ή 10 σε όλα τα $i = 1, \dots, 4$. Τα αποτελέσματα που έχουν ληφθεί για τη βασική γραμμή παραγωγής ($C_i = 4$) δεν χρειάζεται να επαναληφθούν. Προκύπτει ο παρακάτω πίνακας:

Πίνακας 5.8. Πείραμα 3

Χωρητικότητες C_i	ΤΗ(π)	ΤΗ(δ2)	Σφάλμα(δ2)	ΤΗ(δ3)	Σφάλμα(δ3)
2	0.8037	0.8258	0.0275	0.8032	0.0006
4	0.8728	0.9179	0.0517	0.8889	0.0186
8	0.9094	0.9780	0.0755	0.9494	0.0440
10	0.9064	0.9881	0.0901	0.9619	0.0612



Σχήμα 5.4. Πείραμα 3: Σφάλματα διάσπασης στην εκτίμηση ΤΗ συναρτήσεων των χωρητικότητων των αποθηκών.

Όταν η χωρητικότητα των αποθηκών είναι μικρή ($C=2$), στον αλγόριθμο διάσπασης με 2 μηχανές τα σφάλματα εκτίμησης του ρυθμού παραγωγής είναι πολύ πιο μεγάλα από αυτά που προκύπτουν από τη διάσπαση με 3 μηχανές. Καθώς αυξάνεται η χωρητικότητα η ακρίβεια του $\delta 2$ αυξάνεται όμως συνεχίζει να έχει μεγαλύτερο σφάλμα από το $\delta 3$. Με μικρές αποθήκες πολλές φορές, οι γρήγορες μηχανές εναλλάσσουν καταστάσεις μεταξύ της αποστέρησης λόγω μειωμένης τροφοδοσίας από την προηγούμενη αργή και του αποκλεισμού λόγω μειωμένης διαθεσιμότητας εξαιτίας του χώρου της αμέσως επόμενης μηχανής αν και αυτή είναι αργή. Το φαινόμενο αυτό συμβαίνει αν ισχύει για παράδειγμα $R_{i-1}=1$, $R_i=2$, $R_{i+1}=1$.

5.2.4 Τέταρτο πείραμα

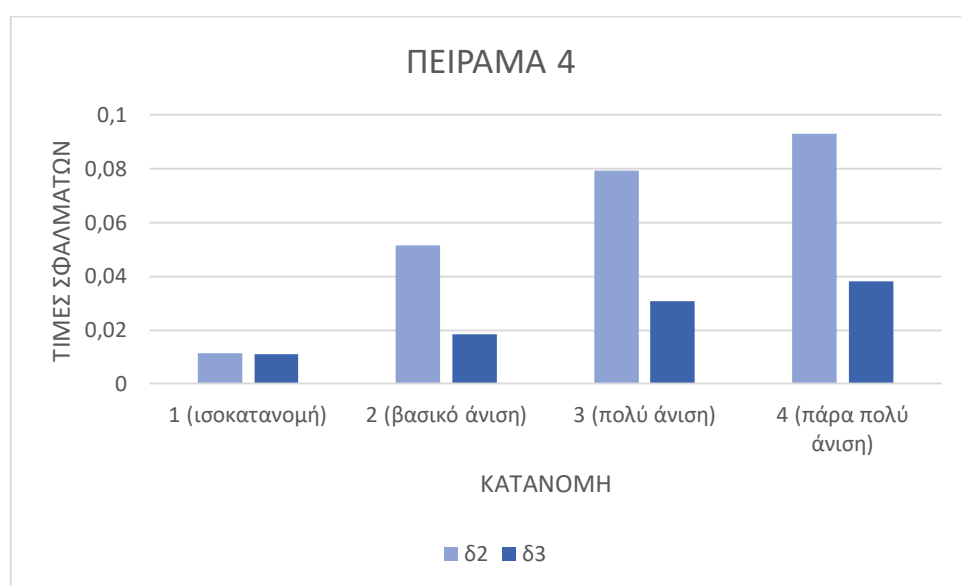
Στη βασική γραμμή παραγωγής αλλάζει σε αυτό το πείραμα η κατανομή των ρυθμών. Πιο συγκεκριμένα, εκτός από 1-2-1-2-1 γίνεται μελέτη των 1- x -1- x -1. Στη θέση του x υπάρχει κάθε φορά ένας από τους αριθμούς 1,2,3 και 4 με τον κάθε ένα να σημαίνει:

- $x = 1 \rightarrow$ Ισοκατανομή
- $x = 2 \rightarrow$ Βασικό, άνιση
- $x = 3 \rightarrow$ Πολύ άνιση
- $x = 4 \rightarrow$ Πάρα πολύ άνιση

Τα αποτελέσματα που προέκυψαν από το παραπάνω πείραμα είναι τα εξής:

Πίνακας 5.9. Πείραμα 4

χ	ΤΗ(π)	ΤΗ(δ2)	Σφάλμα(δ2)	ΤΗ(δ3)	Σφάλμα(δ3)
1(ισοκατανομή)	0.7684	0.7597	0.0114	0.7600	0.0109
2(Βασικό,άνιση)	0.8728	0.9179	0.0517	0.8889	0.0186
3(Πολύ Άνιση)	0.8818	0.9519	0.0795	0.9088	0.0306
4(Πάρα πολύ άνιση)	0.8824	0.9647	0.0933	0.9159	0.0380



Σχήμα 5.5. Πείραμα 4: Σφάλματα διάσπασης στην εκτίμηση ΤΗ αυξάνονται με την ανισοκατανομή των ρυθμών σε γειτονικές μηχανές.

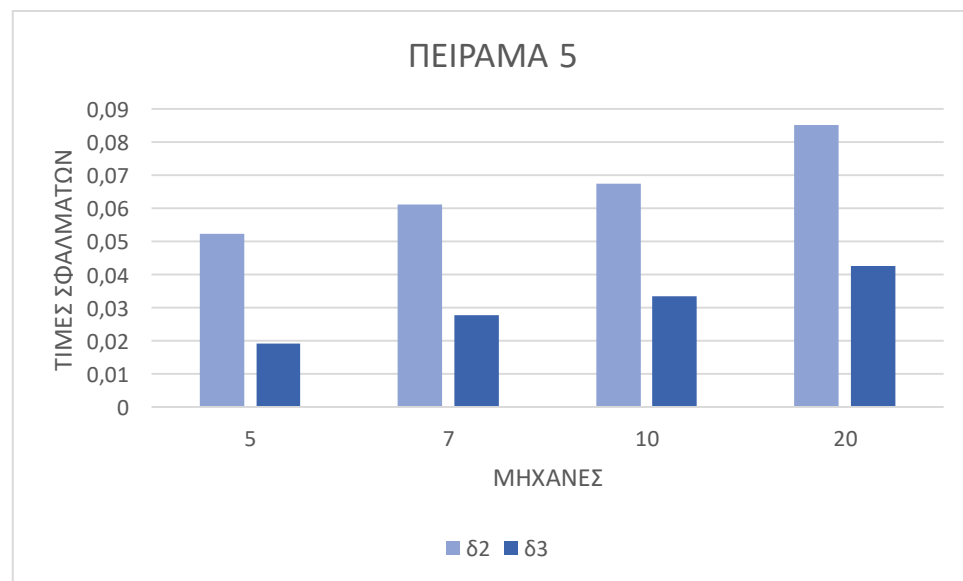
Όπως προαναφέρθηκε, όταν υπάρχουν μικρές αποθήκες οι γρήγορες μηχανές εναλλάσσουν καταστάσεις μεταξύ της αποστέρησης, λόγω μειωμένης τροφοδοσίας από την προηγούμενη αργή και του αποκλεισμού λόγω μειωμένης διαθεσιμότητας εξαιτίας του χώρου της αμέσως επόμενης μηχανής αν και αυτή είναι αργή. Για τον ίδιο λόγο, στο συγκεκριμένο πείραμα τα σφάλματα είναι μικρά για ίσους ρυθμούς κατανομής. Παρόλα αυτά, αυξάνονται σημαντικά εξαιτίας της ανισοκατανομής. Οι χωρητικότητες είναι σταθερές σε αντίθεση με το προηγούμενο πείραμα, όμως αφού αυξάνεται η ανισοκατανομή των ρυθμών των μεσαίων μηχανών, οι οποίες έχουν πολλαπλάσιο ρυθμό από τις ακραίες, υπάρχει και πάλι εναλλαγή των καταστάσεων αποστέρησης και αποκλεισμού.

5.2.5 Πέμπτο πείραμα

Σε αυτή την περίπτωση αλλάζει το μήκος της βασικής γραμμής. Εκτελείται προσομοίωση για 5, 7, 10 και 20 μηχανές. Στις γραμμές με 5,7,10 και 20 μηχανές κυκλοφορούν κάθε στιγμή 19, 31, 46 και 96 κομμάτια αντίστοιχα. Λόγω του περιορισμένου αριθμού κομματιών που μπορούν να χρησιμοποιηθούν στην δωρεάν έκδοση της Simio χρησιμοποιήθηκε έτοιμο πρόγραμμα “Fortran simulation” του εργαστηρίου CAM του Πολυτεχνείου Κρήτης. Τα αποτελέσματα που προέκυψαν ήταν τα παρακάτω:

Πίνακας 5.10. Πείραμα 5

N(μηχανές)	ΤΗ(π)	ΤΗ(δ2)	Σφάλμα(δ2)	ΤΗ(δ3)	Σφάλμα(δ3)
5(βασικό)	0.8722	0.9179	0.0524	0.8889	0.0193
7	0.8553	0.9078	0.0614	0.8789	0.0277
10	0.8447	0.9018	0.0677	0.8729	0.0335
20	0.8229	0.8930	0.0852	0.8580	0.0426



Σχήμα 5.6. Πείραμα 5: Σφάλματα διάσπασης συναρτήσει του μήκους της γραμμής

Και σε αυτή την περίπτωση το σφάλμα για την δ2 είναι μεγαλύτερο από ότι για τη δ3 σε σχέση με την προσομοίωση. Όσο αυξάνεται ο αριθμός των μηχανών, δηλαδή το μήκος της γραμμής παραγωγής, τόσο αυξάνεται και το σφάλμα και για τις δύο περιπτώσεις διάσπασης. Παρόλα αυτά, φαίνεται ότι για σταθερές χωρητικότητες και ρυθμούς παραγωγής το σφάλμα της δ3 είναι το μισό από της δ2, συνεπώς για οποιοδήποτε μήκος γραμμής η δ3 δίνει καλύτερα αποτελέσματα.

6 ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Στην εργασία αυτή αναπτύχθηκε μία επαναληπτική μέθοδος ανάλυσης γραμμών παραγωγής που βασίζεται στην προσεγγιστική διάσπαση σε τμήματα των 3 μηχανών. Η μέθοδος είναι πολύ πιο ακριβής στη εκτίμηση μέτρων απόδοσης σε σχέση με μία συμβατική και ευρέως χρησιμοποιούμενη μέθοδο διάσπασης σε τμήματα με 2 μηχανές ενώ συγχρόνως δίνει αποτελέσματα σε σημαντικά λιγότερο χρόνο από την προσομοίωση. Τα συμπεράσματα αυτά βασίστηκαν μεγάλο αριθμό αριθμητικών πειραμάτων για διάφορους τύπους και μεγέθη γραμμών παραγωγής.

Ένα μειονέκτημα της μεθόδου είναι το ότι δεν συγκλίνει σε σταθερό σημείο αλλά οι επαναλήψεις δίνουν περιοδικές λύσεις και η τελική εκτίμηση κάθε μέτρου απόδοσης προκύπτει ως μέσος όρος των λύσεων. Παρ' όλ' αυτά οι μέσοι όροι ήταν σε όλα τα πειράματα ακριβέστεροι από τις λύσεις που έδωσε η συμβατική (και συγκλίνουσα) μέθοδος διάσπασης. Η βελτίωση ή επίτευξη σύγκλισης της μεθόδου και η επέκτασή της σε μηχανές που υπόκειται σε βλάβες και έχουν τυχαίους χρόνους επισκευής είναι δύο πολύ λογικές κατευθύνσεις μελλοντικής έρευνας.

7 ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Ancelin, B., & Semery, A. (1987). Calcul de la productivité d'une ligne intégrée de fabrication: CALIF, une méthode analytique industrielle. *RAIRO APII*, 21(3), 209-238.

Choong, Y. F., & Gershwin, S. B. (1987). A decomposition method for the approximate evaluation of capacitated transfer lines with unreliable machines and random processing times. *IIE Transactions*, 19(2), 150-159.

Dallery, Y., & Frein, Y. (1993). On decomposition methods for tandem queueing networks with blocking. *Operations Research*, 41(2), 386-399.

Dallery, Y., & Gershwin, S. B. (1992). Manufacturing flow line systems: a review of models and analytical results. *Queueing Systems*, 12, 3-94.

Li, J., & Meerkov, S. M. (2008). *Production Systems Engineering*. Springer Science & Business Media.

Κουϊκόγλου Β. (2021). Ανάλυση Γραμμών Παραγωγής με Προσεγγιστική Διάσπαση. Σημειώσεις μαθήματος «Ανάλυση και Σχεδίαση Γραμμών και Δικτύων Παραγωγής», Πολυτεχνείο Κρήτης.

Κουϊκόγλου Β. και Κωνσταντάς Δ. (2016). *Προσομοίωση Συστημάτων Διακριτών Γεγονότων*. Εκδόσεις Δίσιγμα.

Κουϊκόγλου Β. και Φίλης Α. (2023). Συστήματα Παραγωγής. Σημειώσεις μαθήματος «Συστήματα Παραγωγής», Πολυτεχνείο Κρήτης.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α: Ο ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ ΔΙΑΣΠΑΣΗΣ

Ο αλγόριθμος διάσπασης γραμμών αναπτύχθηκε στο προγραμματιστικό περιβάλλον Matlab. Χρησιμοποιεί τη συνάρτηση **analysis(...)** για την ανάλυση με μοντέλο Markov τμημάτων που αποτελούνται από 3 μηχανές σε σειρά με 2 ενδιάμεσες αποθήκες. Η συνάρτηση είναι διαθέσιμη από το εργαστήριο CAM του Πολυτεχνείου Κρήτης (καθηγητής Βασίλης Κουϊκόγλου, vkouikoglou@tuc.gr). Ο κώδικας διαβάζει από ένα αρχείο txt με όνομα **decomp_3_in.txt** τον αριθμό των μηχανών της γραμμής, το όριο σύγκλισης ϵ , τους ονομαστικούς ρυθμούς παραγωγής R_i των μηχανών και τις χωρητικότητες C_i των αποθηκών.

Παράδειγμα αρχείου **decomp_3_in.txt** για 5 μηχανές με ρυθμούς 1, 2, 1, 2, 1 και χωρητικότητες αποθηκών 4. Η τελευταία αποθήκη δεν λαμβάνεται υπ' όψη. Πριν από κάθε σειρά δεδομένων υπάρχει μία γραμμή που ξεκινά με "-" και εξηγεί στον χρήστη το είδος δεδομένου που πρέπει να δώσει.

```
-A series of exponential machines and finite buffers
-(Enter on next line:) # machines, convergence tolerance
5 0.00001
-(Enter in one line per machine:) nominal mean production
rate, buffer capacity
1 4
2 4
1 4
2 4
1 4
```

Η συνάρτηση **decomp_3()** εκτελεί τον αλγόριθμο διάσπασης:

function [] = decomp_3()

```
clear;
clc;
infile=fopen('decomp_3_in.txt');
outfile=fopen('decomp_3_out.txt','w'); % this to overwrite
nextline=fgetl(infile); nextline=fgetl(infile); % skip 2 lines
nextline=fgetl(infile); A=sscanf(nextline,'%d %f'); N=A(1); convergence_limit=A(2);
nextline=fgetl(infile);
for i=1:N
    nextline=fgetl(infile); A=sscanf(nextline,'%f %d'); R(i)=A(1); K(i)=A(2)+2;
end
for i=2:N-1
    mu(i)=R(i-1); md(i)=R(i+1); oldTH(i)=R(i);
end
converged=0; iter=0;
while converged==0
    iter=iter+1;
```

```

fprintf('----- iteration=%d-----\n',iter);
for i=2:N-2
    [s(i),b(i),sb(i),TH(i),E(i),F(i),MT1(i),MT2(i))]=analysis(mu(i),R(i),md(i),K(i-1),K(i));
    mu(i+1)=1/(1/R(i)+E(i)/mu(i));
    fprintf('i=%d, mu=%f,R=%f,md=%f,TH=%f, E=%f, F=%f, s=%f, b=%f, sb=%f\n',
i,mu(i),R(i),md(i),TH(i),E(i),F(i),s(i),b(i),sb(i));
    fprintf(outfile,'i=%d, mu=%f,R=%f,md=%f,TH=%f, E=%f, F=%f, s=%f, b=%f, sb=%f\n',
i,mu(i),R(i),md(i),TH(i),E(i),F(i),s(i),b(i),sb(i));
end
fprintf(' ----\n');
for i=N-1:-1:3
    [s(i),b(i),sb(i),TH(i),E(i),F(i),MT1(i),MT2(i))]=analysis(mu(i),R(i),md(i),K(i-1),K(i));
    md(i-1)=1/(1/R(i)+F(i)/md(i));
    fprintf('i=%d, mu=%f,R=%f,md=%f,TH=%f, E=%f, F=%f, s=%f, b=%f, sb=%f\n',
i,mu(i),R(i),md(i),TH(i),E(i),F(i),s(i),b(i),sb(i));
    fprintf(outfile,'i=%d, mu=%f,R=%f,md=%f,TH=%f, E=%f, F=%f, s=%f, b=%f, sb=%f\n',
i,mu(i),R(i),md(i),TH(i),E(i),F(i),s(i),b(i),sb(i));
end
THmax=TH(2);
THmin=TH(2);
new_old=abs(TH(2)-oldTH(2))/oldTH(2);
oldTH(2)=TH(2); %for the next iteration
averageTH=TH(2);
for i=3:N-1
    THmin=min(TH(i),THmin);
    THmax=max(TH(i),THmax);
    new_old=max(new_old,abs(TH(i)-oldTH(i))/oldTH(i));
    oldTH(i)=TH(i); %for the next iteration
    averageTH=averageTH+TH(i);
end
averageTH=averageTH/(N-2);
if (THmax-THmin)/THmin < convergence_limit || new_old < convergence_limit
    converged=1;
end
end
% Write results
fprintf(outfile,' A PRODUCTION LINE WITH %d MACHINES AND %d INTERMEDIATE
BUFFERS\n',N,N-1);
fprintf(outfile,'-----\n');
fprintf(outfile,'PARAMETERS\n');
for i=1:N-1
    fprintf(outfile,'machine rate R(%d)=%f, buffer capacity C(%d)=%d\n',i,R(i),i,K(i)-2);
end
fprintf(outfile,'machine rate R(%d)=%f\n\n',N,R(N));
fprintf(outfile,'RESULTS\n');
fprintf(outfile,'Throughput(average)=%f\n',averageTH);
fprintf('\nRESULTS\n');
fprintf('Throughput(average)=%f\n',averageTH);
for i=2:N-1
    if i>2
        MT1(i)=(MT1(i)+MT2(i-1))/2; % average level of subsystem M(i-1)/B(i-1)/M(i)

```

```

end
fprintf('average level of M%d_B%d_M%d=%f, TH(%d)=%f, P(M%d starved AND
blocked)=%f, P(M%d starved)=%f, P(M%d starved BUT NOT blocked)=%f, P(M%d
blocked)=%f\n',i-1,i-1,i,MT1(i),i,TH(i),i,sb(i),i,s(i),i,s(i)-sb(i),i,b(i));
fprintf(outfile,'average level of M%d_B%d_M%d=%f, TH(%d)=%f, P(M%d starved AND
blocked)=%f, P(M%d starved)=%f, P(M%d starved BUT NOT blocked)=%f, P(M%d
blocked)=%f\n',i-1,i-1,i,MT1(i),i,TH(i),i,sb(i),i,s(i),i,s(i)-sb(i),i,b(i));
end
fprintf('average level of M%d_B%d_M%d=%f\n',N-1,N-1,N,MT2(N-1));
fprintf(outfile,'average level of M%d_B%d_M%d=%f\n',N-1,N-1,N,MT2(N-1));
fclose(infile);
fclose(outfile);
disp('Results have been written to file decomp_3_out.txt');
end

```

Τέλος παρατίθεται το περιεχόμενο του αρχείου αποτελεσμάτων **decomp_3_out.txt**:

```

----- iteration=1-----
i=2, mu=1.000000,R=2.000000,md=1.000000,TH=0.904649,
E=0.328845, F=0.308314, s=0.297489, b=0.278916, sb=0.028730
i=3, mu=1.206499,R=1.000000,md=2.000000,TH=0.922334,
E=0.097151, F=0.008761, s=0.074269, b=0.004040, sb=0.000643
i=4, mu=0.925478,R=2.000000,md=1.000000,TH=0.867041,
E=0.396290, F=0.258232, s=0.371267, b=0.223898, sb=0.028686
i=3, mu=1.206499,R=1.000000,md=1.318857,TH=0.901733,
E=0.084636, F=0.055372, s=0.063257, b=0.037859, sb=0.002849
----- iteration=2-----
i=2, mu=1.000000,R=2.000000,md=0.959707,TH=0.885622,
E=0.303855, F=0.344108, s=0.269101, b=0.317545, sb=0.029456
i=3, mu=1.244006,R=1.000000,md=1.318857,TH=0.907890,
E=0.075875, F=0.057304, s=0.055375, b=0.039448, sb=0.002712
i=4, mu=0.942514,R=2.000000,md=1.000000,TH=0.876571,
E=0.380412, F=0.270127, s=0.353797, b=0.236786, sb=0.028868
i=3, mu=1.244006,R=1.000000,md=1.298486,TH=0.905762,
E=0.074967, F=0.060885, s=0.054583, b=0.042470, sb=0.002815
----- iteration=3-----
i=2, mu=1.000000,R=2.000000,md=0.955211,TH=0.883310,
E=0.300950, F=0.348231, s=0.265833, b=0.322019, sb=0.029507
i=3, mu=1.248517,R=1.000000,md=1.298486,TH=0.906425,
E=0.073982, F=0.061113, s=0.053711, b=0.042661, sb=0.002797
i=4, mu=0.944059,R=2.000000,md=1.000000,TH=0.877408,
E=0.378983, F=0.271196, s=0.352226, b=0.237949, sb=0.028879
i=3, mu=1.248517,R=1.000000,md=1.296688,TH=0.906227,
E=0.073900, F=0.061441, s=0.053639, b=0.042940, sb=0.002806
----- iteration=4-----
i=2, mu=1.000000,R=2.000000,md=0.954761,TH=0.883077,
E=0.300658, F=0.348646, s=0.265504, b=0.322469, sb=0.029511
i=3, mu=1.248973,R=1.000000,md=1.296688,TH=0.906293,
E=0.073801, F=0.061464, s=0.053552, b=0.042959, sb=0.002804
i=4, mu=0.944208,R=2.000000,md=1.000000,TH=0.877488,
E=0.378846, F=0.271298, s=0.352076, b=0.238061, sb=0.028880
i=3, mu=1.248973,R=1.000000,md=1.296516,TH=0.906274,
E=0.073793, F=0.061496, s=0.053545, b=0.042986, sb=0.002805

```

```

----- iteration=5-----
i=2, mu=1.000000,R=2.000000,md=0.954716,TH=0.883054,
E=0.300629, F=0.348686, s=0.265472, b=0.322513, sb=0.029512
i=3, mu=1.249017,R=1.000000,md=1.296516,TH=0.906280,
E=0.073783, F=0.061498, s=0.053537, b=0.042988, sb=0.002805
i=4, mu=0.944222,R=2.000000,md=1.000000,TH=0.877496,
E=0.378832, F=0.271308, s=0.352061, b=0.238072, sb=0.028881
i=3, mu=1.249017,R=1.000000,md=1.296499,TH=0.906279,
E=0.073782, F=0.061501, s=0.053536, b=0.042990, sb=0.002805
----- iteration=6-----
i=2, mu=1.000000,R=2.000000,md=0.954712,TH=0.883051,
E=0.300627, F=0.348690, s=0.265469, b=0.322518, sb=0.029512
i=3, mu=1.249022,R=1.000000,md=1.296499,TH=0.906279,
E=0.073782, F=0.061501, s=0.053535, b=0.042991, sb=0.002805
i=4, mu=0.944223,R=2.000000,md=1.000000,TH=0.877497,
E=0.378831, F=0.271309, s=0.352060, b=0.238073, sb=0.028881
i=3, mu=1.249022,R=1.000000,md=1.296497,TH=0.906279,
E=0.073781, F=0.061501, s=0.053535, b=0.042991, sb=0.002805

```

A PRODUCTION LINE WITH 5 MACHINES AND 4 INTERMEDIATE BUFFERS

PARAMETERS

```

machine rate R(1)=1.000000,    buffer capacity C(1)=4
machine rate R(2)=2.000000,    buffer capacity C(2)=4
machine rate R(3)=1.000000,    buffer capacity C(3)=4
machine rate R(4)=2.000000,    buffer capacity C(4)=4
machine rate R(5)=1.000000

```

RESULTS

```

Throughput (average)=0.888942
average level of M1_B1_M2=2.225185, TH(2)=0.883051, P(M2
starved AND blocked)=0.029512, P(M2 starved)=0.265469, P(M2
starved BUT NOT blocked)=0.235957, P(M2 blocked)=0.322518
average level of M2_B2_M3=4.003041, TH(3)=0.906279, P(M3
starved AND blocked)=0.002805, P(M3 starved)=0.053535, P(M3
starved BUT NOT blocked)=0.050730, P(M3 blocked)=0.042991
average level of M3_B3_M4=1.777422, TH(4)=0.877497, P(M4
starved AND blocked)=0.028881, P(M4 starved)=0.352060, P(M4
starved BUT NOT blocked)=0.323179, P(M4 blocked)=0.238073
average level of M4_B4_M5=3.445969

```