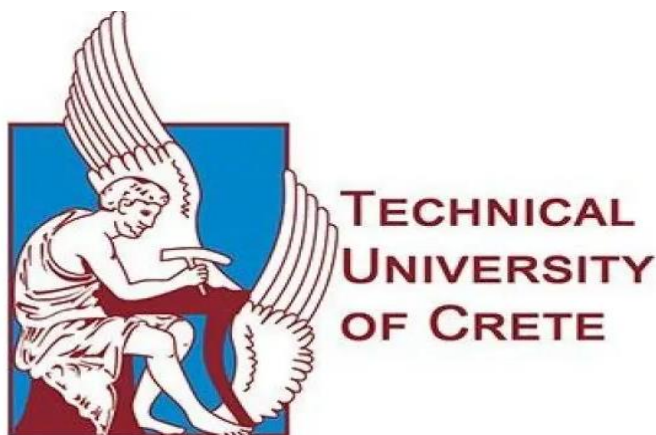


Πολυτεχνείο Κρήτης
Τμήμα Μηχανικών Παραγωγής και Διοίκησης



ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

**ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ ΜΟΡΦΟΠΟΙΗΣΗΣ ΣΩΛΗΝΩΝ ΑΠΟ
ΡΑΒΔΟΥΣ ΜΕΤΑΛΛΕΥΜΑΤΟΣ ΜΕ ΤΗ ΧΡΗΣΗ
ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ**

Βασίλειος Κανδύλας

Επιβλέπων Καθηγητής: Δρ. Γεώργιος Σταυρουλάκης

Κρήτη
Οκτώβριος 2023

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Περίληψη	6
ΠΗΓΕΣ ΜΗ-ΓΡΑΜΜΙΚΟΤΗΤΑΣ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ	7
Εισαγωγή	7
Γεωμετρική Μη Γραμμικότητα	7
Μη γραμμικότητα Υλικού	8
Κινηματική Μη-Γραμμικότητα	8
Μη- γραμμικότητα της φόρτισης	9
ΜΕΘΟΔΟΙ ΕΠΙΛΥΣΗ ΜΗ-ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΑΛΓΕΒΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ	9
Μέθοδος Newton- Raphson	10
Τροποποιημένη μέθοδος Newton- Raphson	11
Βηματική μέθοδος επιβολής δυνάμεων	11
Βήμα Επαύξησης φόρτισης	14
ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗ ΜΗ-ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΜΕ Π.Σ.	15
Το βασικό πρόβλημα	15
Περιγραφή Lagrange της κίνησης του σώματος	17
Ολική περιγραφή Lagrange	20
Μόρφωση των μητρώων της ΜΠΣ	22
ΑΝΑΛΥΣΗ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ ΕΠΑΦΗΣ	26
Εισαγωγή	26
Διατύπωση του προβλήματος επαφής	26
Συνθήκη επαφής σώματος με άκαμπτη επιφάνεια	26
Διατύπωση του προβλήματος συνοριακών συνθηκών με επαφή	29

Διαδικασία ανάλυσης επαφής	29
Καθορισμός των ζευγών και του τύπου της επαφής	30
Αναζήτηση της επαφής	32
Επιλογή αλγόριθμου επαφής	33
Μέθοδος ποινής	34
Επαυξημένη μέθοδος Lagrange	35
Μέθοδος Lagrange	36
Μέθοδος πολλαπλασιαστών Lagrange	36
Στοιχεία επιλογής των αλγόριθμων επαφής στο ANSYS	36
ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΜΟΝΤΕΛΟΥ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ	41
Εισαγωγή	41
Περιγραφή του μοντέλου	41
Μηχανικές ιδιότητες των υλικών	42
Διακριτοποίηση του χωρίου	42
ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΑΝΑΛΥΣΕΩΝ	46
ΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ	53
Εισαγωγή	53
Παρουσίαση αποτελεσμάτων αναλύσεων	53
Δυναμικές αναλύσεις μοντέλου	53
Στατικές αναλύσεις μοντέλου	56
Στοιχεία αναλύσεων	57
Αυτόματη επιλογή χρονικού βήματος	57
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ	61

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΗ ΑΝΑΣΚΟΠΙΣΗ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ

Η μέθοδος των Πεπερασμένων Στοιχείων τις τελευταίες πέντε δεκαετίες έχει εφαρμοστεί με επιτυχία στην ανάλυση πολλών ελαστοπλαστικών, γεωμετρικά μη- γραμμικών προβλημάτων μεγάλων παραμορφώσεων. Από την αρχική διατύπωση της μεθόδου των Π.Σ σε προβλήματα γραμμικής ελαστικότητας, μεγάλος αριθμός ερευνητών, όπως οι Argyris [1], Pope [2], Marcal and King [3], Yamada et al. [4], ασχολήθηκαν με την επίλυση μη- γραμμικών ελαστοπλαστικών προβλημάτων με ανάπτυξη μικρών τροπών και διατύπωση των καταστατικών σχέσεων υπό την επαυξητική τους μορφή. Μεγάλη πρόοδος σημειώθηκε επίσης στην ανάπτυξη μεθόδων παρακολούθησης της εξέλιξης της πλαστικής ροής στη περιοχή μετάβασης από την ελαστική στη πλαστική περιοχή κατά την αύξηση του πλαστικού φορτίου.

Από τους Zienkiewicz et al. [5] προτάθηκε εναλλακτική προσέγγιση της επίλυσης μη- γραμμικών προβλημάτων με τη χρήση της μεθόδου της αρχικής τάσης.

Εκτεταμένη βιβλιογραφία σε προβλήματα πεπερασμένων παραμορφώσεων μπορεί να βρεθεί στις εργασίες των Turner et al. [6] και Oden and Key [7]. Η πλήρης διατύπωση της μορφής των επαυξητικών σχέσεων σε μη- γραμμικά προβλήματα της μηχανικής του συνεχούς μέσου στην οποία λαμβάνονται υπόψη οι μεταβολές της φόρτισης και η ανάπτυξη πεπερασμένων στροφών των στοιχείων δόθηκε από τον Oden [8]. Οι Hibbit, Marcal και Rice [9] διατύπωσαν πρώτοι τις εκφράσεις του ελαστοπλαστικού προβλήματος με χρήση βηματικής επαυξητικής προσέγγισης κατά Lagrange και θεώρηση πεπερασμένων μετατοπίσεων και τροπών.

Η μέθοδος δοκιμής και σφάλματος (trial and error) κατεργασίας σωλήνων στις βιομηχανικές μονάδες έχει αντικατασταθεί λόγω του αυξημένου κόστους και χρόνου εκτέλεσης με αριθμητικές μεθόδους προσομοίωσης της κατεργασίας με H/Y και αποτελεί πλέον το βασικό εργαλείο πρόβλεψης των μηχανικών ιδιοτήτων και της βελτιστοποίησης του σχεδιασμού των τελικών προϊόντων (Brethenoux et al.[10].

Στην εργασία του Pospiech[11] περιγράφεται μαθηματικό προσομοίωμα της κατεργασίας διαμόρφωσης σωλήνων με σταθερό δρομέα. Οι Karnezis and Forrugia [12] προσομοίωσαν τη κατεργασία με Π.Σ για την εξέταση της δυνατότητας μείωσης του αριθμού διελεύσεων.

Στις εργασίες των Jallon and Hergesheimer [13], Joun and Hwang [14], Chin and Steif[15], Dixit and Dixit[16], El- Domiant and Kassab[17] μελετάται η συσχέτιση της απομείωσης της δύναμης ολκής (drawn force) και του κόστους της κατεργασίας με τις παραμέτρους κατεργασίας και τη σχεδίαση της

διάταξης (tool design). Οι Neves et al. [18] παρουσιάζουν στην εργασία τους ειδικά σχεδιασμένη διάταξη με σκοπό τη μείωση της δύναμης ολκής.

Οι Sawamiphakdi et al.[19] εκτέλεσαν σειρά αριθμητικών προσομοιώσεων με Π.Σ για τον προσδιορισμό των αρχικών γεωμετρικών διαστάσεων σωλήνων ώστε να αποκτούν επιλεγμένες μηχανικές ιδιότητες μετά τη κατεργασία.

Οι Linardon et al.[20] προσομοίωσαν με Π.Σ διάταξη κωνικής γεωμετρίας δρομέα για τη διατύπωση κριτηρίου αστοχίας.

Οι Yoshida et al. [21] εξέτασαν τη παραγωγή υψηλής ποιότητας λεπτότοιχων σωλήνων από κράματα μνήμης σχήματος(shape memory alloy).

Η σημασία των ιδιοτήτων της διεπιφάνειας επαφής στη ποιότητα του σωλήνα επισημαίνεται στην εργασία των Palengat et al.[22].

Σημαντικός αριθμός δημοσιευμένων εργασιών ασχολείται με την επιλογή των βέλτιστων γεωμετρικών χαρακτηριστικών της διάταξης κατεργασίας εκ των οποίων οι εργασίες των Sheu et al[23], Lee et al.[24], Beland et al.[25] επικεντρώνονται στη γεωμετρία της μήτρας και των Kimt et al.[26] στη γεωμετρία του δρομέα.

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η διαδικασία μορφοποίησης μετάλλων έχει εδραιωθεί ως μια από τις βασικότερες διαδικασίες τόσο στη

βιομηχανία για την παραγωγή και τη χρήση εξαρτημάτων βαρέων μηχανημάτων όσο και στην παραγωγή

μικρών εξαρτημάτων και συσκευών καθημερινής χρήσης. Ο λόγος ο οποίος την καθιστά τόσο βασική διαδικασία είναι ότι η ποικιλία των προϊόντων της έχουν χρήσεις που εκτείνονται από τη λειτουργία και την αναβάθμιση μηχανημάτων μίας παραγωγής έως και στους επεξεργαστές που χρησιμοποιούνται εντός των ηλεκτρονικών υπολογιστών. Η διαδικασία αυτή έχει πολλές υποκατηγορίες που οι διαφορές τους κυμαίνονται από τον τρόπο που γίνεται η μορφοποίηση του μετάλλου έως και τη θερμοκρασία που λαμβάνει μέρος κατά τη μορφοποίηση ή και την έκταση της πραγματοποιούμενης παραμόρφωσης. Κύριος στόχος αυτής της διπλωματικής εργασίας είναι η προσομοίωση της διαδικασίας μορφοποίησης σωλήνων από ράβδους μεταλλεύματος, η οποία είναι μία διαδικασία ψυχρής έλασης. Η συγκεκριμένη διαδικασία δημιουργεί σωλήνες με τη μείωση της διατομής μίας ράβδου μεταλλεύματος μέσω μίας μήτρας χωρίς την αύξηση της θερμοκρασίας του. Η μελέτη της διαδικασίας αυτής σε περιβάλλον προσομοίωσης θα γίνει με τη χρήση πεπερασμένων στοιχείων και της θεωρίας της πλαστικότητας και θα μελετηθεί σε δύο στάδια, αρχικά σε περιβάλλον στατικής φορτίσεως και στη συνέχεια σε περιβάλλον ημι-στατικής φορτίσεως.

Τα αποτελέσματα της μελέτης αυτής θα χρησιμοποιηθούν για τη βελτιστοποίηση του τελικού προϊόντος της διαδικασίας και ταυτόχρονα για τη μείωση του ενεργειακού κόστους. Επίσης θα είναι δυνατή η πρόβλεψη τυχόν αστοχιών που οφείλονται σε ρηγματώσεις, πτυχώσεις και λοιπές ατέλειες.

1.ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗ ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ

1.1. Εισαγωγή

Κατά την εξέταση και ανάλυση των μεθόδων βιομηχανικής παραγωγής και κατεργασίας μετάλλων, η μαθηματική μοντελοποίηση των φυσικών συστημάτων λόγω των εμφανιζομένων μεγάλων παραμορφώσεων, των συνθηκών επαφής των εμπλεκόμενων στοιχείων και της πλαστικής συμπεριφοράς των υλικών καταλήγει στη διατύπωση μη- γραμμικών προβλημάτων τα οποία επιλύονται με την εφαρμογή αριθμητικών μεθόδων.

Στις ακόλουθες παραγράφους αναλύονται οι κύριες πηγές μη- γραμμικότητας της μηχανικής του συνεχούς μέσου.

1.2. Πηγές μη-γραμμικότητας συστημάτων

1.2.1. Γεωμετρική μη- γραμμικότητα

Η γεωμετρική μη- γραμμικότητα ή μη- γραμμικότητα γεωμετρίας (Geometric nonlinearity) περιγράφει τη συμπεριφορά συστημάτων που αναπτύσσονται μεγάλες παραμορφώσεις οπότε οι μαθηματικές σχέσεις μεταξύ των κινηματικών ποσοτήτων (μετακινήσεις, στροφές και τροπές) είναι μη- γραμμικές ([27],[28]).

Κατά τη μαθηματική διατύπωση των προβλημάτων συνοριακών τιμών και την επίλυση τους με αριθμητικές μεθόδους, οι εξισώσεις ισορροπίας γράφονται συνήθως υπό την ολοκληρωτική τους μορφή με την ολοκλήρωση να εκτελείται στην παραμορφωμένη τελική κατάσταση ισορροπίας του συστήματος [28]. Στα γραμμικά συστήματα, λόγω ανάπτυξης στοιχειωδών παραμορφώσεων δεν είναι διακριτή η διαφορά μεταξύ της παραμορφωμένης και της απαραμόρφωτης γεωμετρίας οπότε δεν εισάγεται σημαντικό σφάλμα όταν η ολοκλήρωση εκτελείται στην αρχική γεωμετρία. Αυτό δεν συμβαίνει στα προβλήματα με μεγάλες παραμορφώσεις όπου η κατάσταση ισορροπίας είναι η παραμορφωμένη γεωμετρία και δεν είναι δυνατή η αναγωγή της ολοκλήρωσης στην αρχική κατάσταση χωρίς την εμφάνιση σημαντικού υπολογιστικού σφάλματος. Έτσι, η ολοκλήρωση εκτελείται επί της άγνωστης παραμορφωμένης κατάστασης και αποτελεί τμήμα της λύσης του προβλήματος που καθορίζεται από τις εξαγόμενες της λύσης μετακινήσεις [27].

1.2.2. Μη- γραμμικότητα υλικού

Τα προβλήματα στα οποία η συμπεριφορά του υλικού περιγράφεται από μη-γραμμική σχέση μεταξύ τάσεων και παραμορφώσεων αναφέρονται ως προβλήματα μη- γραμμικότητας υλικού (material nonlinearity problems) [27]. Στα γραμμικά προβλήματα, δηλαδή στα προβλήματα με γραμμικό καταστατικό νόμο, η σχέση τάσεων- παραμορφώσεων είναι της μορφής

$$\underline{\sigma} = \underline{D}\underline{\varepsilon} \quad (0.1)$$

όπου \underline{D} είναι το μητρώο ελαστικότητας του υλικού. Επειδή οι συνιστώσες του μητρώου προκύπτουν από τις σταθερές του υλικού, η σχέση τάσεων- παραμορφώσεων είναι γραμμική και παριστάνει τη συμπεριφορά ελαστικών υλικών υπό στοιχειώδεις παραμορφώσεις. Αντίθετα, όταν το \underline{D} εξαρτάται από την εξεταζόμενη κατάσταση παραμόρφωσης του υλικού, ή σε κάποιες περιπτώσεις από ολόκληρη την ιστορία παραμόρφωσης του έως την εξεταζόμενη κατάσταση, το υλικό λέμε ότι συμπεριφέρεται μη- γραμμικά.

Ένα σημαντικό είδος μη-γραμμικότητας υλικού είναι η **πλαστική συμπεριφορά** τους κατά την οποία τα υλικά έως κάποιο όριο παραμορφώνονται ελαστικά και κατόπιν εμφανίζουν μόνιμες παραμορφώσεις οι οποίες παραμένουν με την αφαίρεση του φορτίου. Στη περίπτωση αυτή η σχέση τάσεων- παραμορφώσεων εξαρτάται σε κάθε στιγμή παραμόρφωσης από ολόκληρη την ιστορία της παραμόρφωσης και δεν μπορεί να διατυπωθεί υπό απλή μορφή. Γενικά, η καταστατική αυτή σχέση διατυπώνεται σαν συνάρτηση του ρυθμού μεταβολής των τάσεων συναρτήσει του ρυθμού μεταβολής των παραμορφώσεων [29].

1.2.3. Κινηματική μη- γραμμικότητα

Στα προβλήματα κινηματικής μη- γραμμικότητας ή αλλιώς μη- γραμμικών συνοριακών συνθηκών (kinematic nonlinearity, boundary nonlinearity), οι συνοριακές συνθήκες μετακίνησης εξαρτώνται από τη παραμόρφωση τους. Γενικά, τα προβλήματα συνοριακών τιμών επιλύονται με μεταβλητές τις άγνωστες μετακινήσεις στο εσωτερικό του χωρίου υπό την επιβολή γνωστών εξωτερικών φορτίων και δεδομένων μετακινήσεων σε κάποιο τμήμα του συνόρου. Όταν οι συνοριακές συνθήκες είναι συνάρτηση της παραμόρφωσης τόσο οι μετακινήσεις όσο και οι συνοριακές συνθήκες είναι άγνωστες. Στη περίπτωση αυτή, είναι δύσκολη η επίλυση του συστήματος των εξισώσεων $\underline{K}\underline{U} = \underline{F}_{\alpha}$ λόγω ύπαρξης αγνώστων και στα δυο μέλη.

Η επαφή μεταξύ σωμάτων είναι ένα από τα πλέον γνωστά προβλήματα ανάπτυξης κινηματικής μη- γραμμικότητας. Καθώς τα σώματα έρχονται σε επαφή, η μετακίνηση τους περιορίζεται ώστε να μην εμφανίζεται αλληλοδιείσδυση, ενώ δεν είναι αρχικά γνωστό το τμήμα της επιφανείας τους που έρχεται

σε επαφή και εξαρτάται από το μέγεθος και το είδος της φόρτισης, τη κινηματική των σωμάτων, το είδος της επαφής, τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά και τις ιδιότητες των υλικών των σωμάτων [27].

1.2.4. Μη- γραμμικότητα της φόρτισης

Το φαινόμενο της μη- γραμμικότητας της φόρτισης συνοδεύεται συνήθως με την ανάπτυξη μεγάλων παραμορφώσεων και αναπτύσσεται όταν οι επιβαλλόμενες φορτίσεις εξαρτώνται σε μέγεθος ή/και διεύθυνση από τη παραμόρφωση του σώματος. Στο χαρακτηριστικό παράδειγμα της επαφής σωμάτων, η αναπτυσσόμενη πίεση στη διεπιφάνεια εξαρτάται σε μέγεθος και διεύθυνση από το σχήμα και το μέγεθος της διεπιφάνειας. Έτσι, αποτελεί πρόβλημα τόσο κινηματικής μη- γραμμικότητας όσο και μη- γραμμικότητας φόρτισης [27].

1.3. Μέθοδοι επίλυση μη-γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων

Στη βιβλιογραφία παρουσιάζονται πολλοί αλγόριθμοι της αριθμητικής ανάλυσης για την επίλυση μη- γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων που προκύπτουν κατά την εφαρμογή της Μεθόδου των Πεπερασμένων Στοιχείων σε προβλήματα της μηχανικής του συνεχούς μέσου με τους οποίους προσεγγίζονται, με κάποιο εύρος σφάλματος, οι άγνωστες τιμές του προβλήματος. Η επιλογή του αλγορίθμου επηρεάζει τόσο τη σύγκλιση όσο και την ακρίβεια της λύσης ([27],[29]).

Έστω σύστημα μη- γραμμικών εξισώσεων που προκύπτει από την ισορροπία εσωτερικών και εξωτερικών δυνάμεων συστήματος με n - βαθμούς ελευθερίας, της μορφής

$$\mathbf{\tilde{P}}(\mathbf{u}) = \mathbf{\tilde{f}} \quad (0.2)$$

όπου $\mathbf{u} = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}^T$ το διάνυσμα των αγνώστων μετακινήσεων, $\mathbf{\tilde{f}} = \{f_1, f_2, \dots, f_n\}^T$ το διάνυσμα των γνωστών επικόμβιων δυνάμεων και $\mathbf{\tilde{P}}(\mathbf{u}) = \{P(u_1), P(u_2), \dots, P(u_n)\}^T$ το διάνυσμα των μη- γραμμικών συναρτήσεων του \mathbf{u} . Οι αλγόριθμοι των μεθόδων για την επίλυση μη- γραμμικών συστημάτων της μορφής αυτής είναι όλοι επαναληπτικοί. Εκκινώντας από μια αρχική εκτίμηση, \mathbf{u}^0 , η επαύξηση, $\Delta \mathbf{u}$, της λύσης προκύπτει από την επίλυση του γραμμικοποιημένου μη-γραμμικού συστήματος, κατόπιν η λύση επικαιροποιείται και οι επαναλήψεις συνεχίζονται έως την ικανοποίηση κάποιου επιλεγμένου κριτηρίου σύγκλισης.

Στις ακόλουθες παραγράφους περιγράφονται οι πιο γνωστοί αλγόριθμοι επίλυσης.

1.3.1. Μέθοδος Newton- Raphson

Η μέθοδος είναι ευρέως διαδεδομένη για την εύρεση των ριζών μη- γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων. Όπως στις περισσότερες των αριθμητικών μεθόδων επίλυσης μη- γραμμικών εξισώσεων επιλέγεται μια αρχική εκτίμηση της λύσης, $\underline{\mathbf{u}}^0$, υπολογίζεται κατόπιν η επαύξηση, $\Delta \underline{\mathbf{u}}$, με επίλυση του συστήματος που προκύπτει από τη τοπική προσέγγιση των μη- γραμμικών με γραμμικές εξισώσεις και νέα εκτίμηση της λύσης $\underline{\mathbf{u}}^1 = \underline{\mathbf{u}}^0 + \Delta \underline{\mathbf{u}}$ η οποία αποτελεί μια καλύτερη προσέγγιση της πραγματικής λύσης. Η διαδικασία επαναλαμβάνεται έως την ικανοποίηση των αρχικών εξισώσεων ([27],[28],[29]).

Έστω ότι από προηγούμενες επαναλήψεις έχει βρεθεί η $\underline{\mathbf{u}}^i$ προσεγγιστική λύση της i - επανάληψης. Η λύση στην $i+1$ - επανάληψη προσεγγίζεται με γραμμικοποίηση των μη- γραμμικών εξισώσεων από σειρά Taylor με απαλοιφή των μεγαλύτερων της $1^{η}$ τάξης όρων

$$\underline{\mathbf{P}}(\underline{\mathbf{u}}^{i+1}) \approx \underline{\mathbf{P}}(\underline{\mathbf{u}}^i) + \underline{\mathbf{K}}_T^i(\underline{\mathbf{u}}^i) \cdot \Delta \underline{\mathbf{u}}^i = \underline{\mathbf{f}} \quad (0.3)$$

όπου $\underline{\mathbf{K}}_T^i(\underline{\mathbf{u}}^i) = (\partial \underline{\mathbf{P}} / \partial \underline{\mathbf{u}})_{\underline{\mathbf{u}}=\underline{\mathbf{u}}^i}$ είναι η Ιακωβιανή, ή αλλιώς εφαπτομενικό μητρώο στιβαρότητας και $\Delta \underline{\mathbf{u}}^i$ η επαύξηση της λύσης στην i - επανάληψη. Με αναδιάταξη των μελών της Σχέσης (1.3) καταλήγουμε στο γραμμικοποιημένο ως προς τις επαυξήσεις $\Delta \underline{\mathbf{u}}^i$ των μετακινήσεων σύστημα εξισώσεων

$$\underline{\mathbf{K}}_T^i(\underline{\mathbf{u}}^i) \Delta \underline{\mathbf{u}}^i = \underline{\mathbf{f}} - \underline{\mathbf{P}}(\underline{\mathbf{u}}^i) \quad (0.4)$$

Το παραπάνω σύστημα εξισώσεων μοιάζει με το σύστημα των εξισώσεων των γραμμικών συστημάτων με τη διαφορά ότι

- Το μητρώο συντελεστών των αγνώστων δεν είναι σταθερό αλλά συνάρτηση των μεταβλητών της προηγούμενης επανάληψης
- Υπολογίζεται η επαύξηση $\Delta \underline{\mathbf{u}}^i$ και όχι η συνολική λύση και
- Το δεξιό μέλος δεν περιέχει τις επιβαλλόμενες δυνάμεις αλλά τη διαφορά μεταξύ των επιβαλλόμενων και των εσωτερικών δυνάμεων του προηγούμενου βήματος η οποία ονομάζεται και υπόλοιπο (residual forces)

Με την επίλυση του προκύπτει η νέα προσέγγιση της λύσης του προβλήματος

$$\underline{\mathbf{u}}^{i+1} = \underline{\mathbf{u}}^i + \Delta \underline{\mathbf{u}}^i \quad (0.5)$$

Γενικά, η λύση που προκύπτει δεν ικανοποιεί επακριβώς το σύστημα των μη- γραμμικών εξισώσεων με συνέπεια να εμφανίζεται υπόλοιπο ή αστάθμητες δυνάμεις

$$\mathbf{\tilde{R}}^{i+1} = \mathbf{\tilde{f}} - \mathbf{\tilde{P}}(\mathbf{\tilde{u}}^{i+1}) \quad (0.6)$$

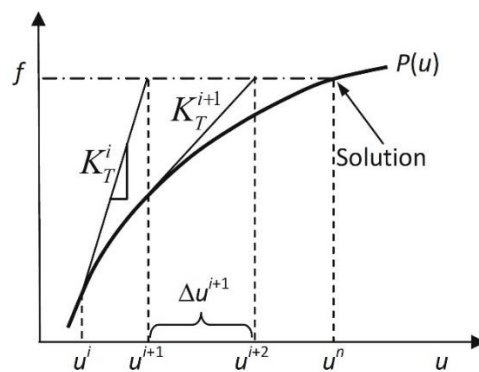
Εάν οι αστάθμητες δυνάμεις είναι μικρότερες από επιλεγμένη ανοχή, η λύση, $\mathbf{\tilde{u}}^{i+1}$, μπορεί να γίνει αποδεκτή ως ακριβής λύση και ο αλγόριθμος να τερματίσει. Διαφορετικά, η διαδικασία επαναλαμβάνεται έως οι αστάθμητες δυνάμεις λάβουν πολύ μικρές τιμές. Το κριτήριο τερματισμού διατυπώνεται υπό κανονικοποιημένη μορφή ως

$$conv = \frac{\sum_{j=1}^n (R_j^{i+1})^2}{1 + \sum_{j=1}^n (f_j)^2} \quad (0.7)$$

Εκτός του κριτηρίου τερματισμού που βασίζεται στις αστάθμητες δυνάμεις, ένα κριτήριο που ελέγχει τη σύγκλιση είναι το ακόλουθο

$$conv = \frac{\sum_{j=1}^n (\Delta u_j^{i+1})^2}{1 + \sum_{j=1}^n (\Delta u_j^o)^2} \quad (0.8)$$

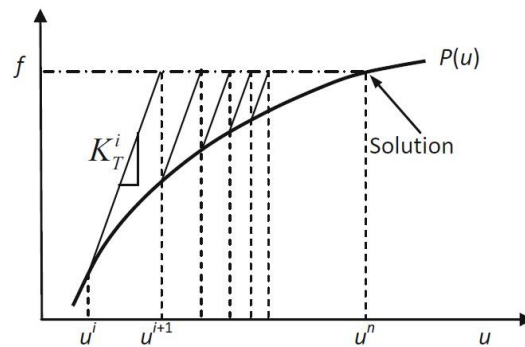
Η μεθοδολογία που ακολουθεί ο αλγόριθμος της Newton- Raphson γίνεται κατανοητός στη περίπτωση επίλυσης ενός μονοβάθμιου μη- γραμμικού συστήματος $P(u) = f$. Όπως φαίνεται εκ του Σχήματος (1.1) στην $i+1$ - επανάληψη το εφαπτομενικό μητρώο στιβαρότητας είναι η εφαπτομένη της καμπύλης της $P(u)$ στην i - επανάληψη και η αστάθμητη δύναμη η κατακόρυφη διαφορά μεταξύ της εξωτερικής δύναμης και της τιμής $P(u^{i+1})$. ([27],[28],[29])



Σχήμα 1.1 Γραφική παράσταση μεθόδου Newton- Raphson

1.3.2. Τροποποιημένη μέθοδος Newton- Raphson

Κατά την επαναληπτική διαδικασία που ακολουθείται από τον αλγόριθμο της μεθόδου Newton- Raphson επικαιροποιεί σε κάθε επανάληψη το εφαπτομενικό μέτρο στιβαρότητας και επιλύει το γραμμικοποιημένο σύστημα εξισώσεων για την εύρεση της επαύξης του διανύσματος μετακινήσεων. Λόγω της μόρφωσης του $\mathbf{K}_T^i(\mathbf{u}^i)$ σε κάθε επανάληψη απαιτούνται αυξημένοι υπολογιστικοί πόροι. Η τροποποιημένη Newton- Raphson μειώνει τον απαιτούμενο υπολογιστικό φόρτο με χρησιμοποίηση του αρχικού εφαπτομενικού μέτρου στιβαρότητας σε κάθε επανάληψη. Συγχρόνως, μειώνεται σημαντικά ο χρόνος επίλυσης του συστήματος σε κάθε επανάληψη.



Σχήμα 1.2 Γραφική παράσταση τροποποιημένης μεθόδου Newton- Raphson

Η μέθοδος εμφανίζει βελτιωμένη ευστάθεια έναντι της πρωτότυπης μεθόδου ενώ η εφαρμογή ενός υβριδικού σχήματος κατά το οποίο εκτελείται επιλεγμένος αριθμός επαναλήψεων με την αρχική στιβαρότητα και κατόπιν επικαιροποίησης της, βελτιώνει τη σύγκλιση έναντι της τροποποιημένης η οποία δεν διαθέτει τετραγωνική σύγκλιση.

Στο Σχήμα (1.2) παρουσιάζεται η τροποποιημένη μέθοδος Newton- Raphson για τη επίλυση μονοβάθμιου μη- γραμμικού συστήματος $P(u) = f$ ([28],[29],[30])

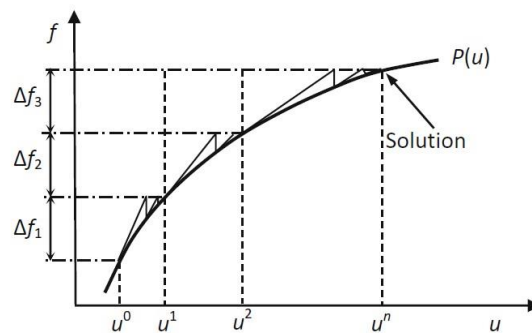
1.3.3. Βηματική μέθοδος επιβολής δυνάμεων

Εξ όλων των διαθέσιμων μεθόδων επίλυσης μη- γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων, η μέθοδος Newton- Raphson κατατάσσεται στις ταχύτερες μεθόδους, με τετραγωνική σύγκλιση υπό τη προϋπόθεση ότι η αρχική εκτίμηση είναι κοντά στη λύση. Παρόμοιες ιδιότητες εμφανίζουν και άλλες μέθοδοι με συνέπεια η επιλογή στρατηγικής της αρχικής εκτίμησης να είναι πολύ σημαντική για τη ταχύτερη σύγκλιση.

Στην επίλυση μη- γραμμικών προβλημάτων του συνεχούς μέσου με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων, ως αρχική εκτίμηση της λύσης λαμβάνεται το μηδενικό διάνυσμα των μετακινήσεων της

αρχικής απαραμόρφωτης κατάστασης η οποία υπό συνθήκες μεγάλου φορτίου είναι μακριά της πραγματικής λύσης. Στη περίπτωση αυτή, εκτός της πιθανής αδυναμίας σύγκλισης της μεθόδου Newton- Raphson, σε προβλήματα που η παραμόρφωση σε κάποια φόρτιση εξαρτάται από τη προγενέστερη ιστορία φόρτισης (μη-μονοσήμαντη αντιστοίχιση τάσεων- παραμορφώσεων), οδηγούμαστε στην επιβολή του φορτίου κατά βήματα. Στη μέθοδο, το φορτίο του επόμενου βήματος επιβάλλεται μόλις συγκλίνει η λύση για το φορτίο του προηγούμενου βήματος και χρησιμοποιηθεί ως αρχική εκτίμηση.

Η μεθοδολογία της βηματικής μεθόδου επιβολής της φόρτισης παρουσιάζεται στο Σχήμα (1.3) σε μονοβάθμιο μη- γραμμικό σύστημα υπό συνολικό f . Το συνολικό φορτίο διαμερίζεται σε όχι αναγκαία ίσα επί μέρους τμήματα $\Delta f_1, \Delta f_2, \Delta f_3$ κατά τρόπο ώστε να εξασφαλίζεται σε κάθε βήμα γρήγορη σύγκλιση. Έτσι, στο πρώτο βήμα επιβάλλεται η επαύξηση Δf_1 του φορτίου με αρχική εκτίμηση, $u^0 = 0$ και μετά τη σύγκλιση της μεθόδου προκύπτει η λύση u^1 . Στο επόμενο βήμα η επιβαλλόμενη φόρτιση αυξάνει σε $\Delta f_1 + \Delta f_2$ και ως αρχική εκτίμηση επιλέγεται η λύση u^1 του προηγούμενου βήματος. Μετά τη σύγκλιση του αλγορίθμου προκύπτει η λύση u^2 . Η διαδικασία επαναλαμβάνεται έως το πλήρες μέγεθος του φορτίου ([28],[29]).



Σχήμα 1.3 Βηματική μέθοδος επιβολής δυνάμεων

Όπως ειπώθηκε παραπάνω, ο διαμερισμός της φόρτισης σε ίσα βήματα δεν είναι απαραίτητος ιδιαίτερα όταν η μη- γραμμικότητα του συστήματος δεν είναι ομοιόμορφη σε όλη τη διαδρομή της φόρτισης. Για παράδειγμα, στα προβλήματα απόκρισης ελαστοπλαστικών υλικών, η συμπεριφορά στην ελαστική και πλαστική περιοχή είναι ελαφρώς μη- γραμμική και δεν είναι απαραίτητη η επιλογή μικρού βήματος, σε αντίθεση με τη περιοχή μετάβασης από ελαστική στη πλαστική περιοχή που είναι ισχυρώς μη- γραμμική και απαιτεί την επιλογή πολύ μικρού βήματος επαύξησης της φόρτισης για εξασφάλιση της σύγκλισης. Ένας πρόσθετος λόγος σωστής επιλογής μεγέθους βήματος φόρτισης είναι ότι στα εξαρτημένα της διαδρομής προβλήματα όπως της πλαστικότητας η επιλογή του βήματος επηρεάζει σημαντικά την ακρίβεια των αποτελεσμάτων. Η επιλογή μεγάλων βημάτων μπορεί να

οδηγεί σε εκτός του χώρου της επιφάνειας διαρροής μη αποδεκτή εντατική κατάσταση ή/και να μην αποτυπώνεται στη λύση η μετάβαση του υλικού από την ελαστική στη πλαστική περιοχή ([28],[29]).

1.3.3.1. Βήμα Επαύξεσης φόρτισης

Στα εμπορικά προγράμματα Π.Σ., όπως το ANSYS [31], τα βήματα επαύξεσης της φόρτισης αναφέρονται ως χρονικά βήματα (time steps), όρος που προέρχεται από την εκτέλεση δυναμικών αναλύσεων στα οποία η παράμετρος του χρόνου αποτελεί φυσική μεταβλητή και επεκτάθηκε στις στατικές αναλύσεις ως ψευδό-χρόνος. Για την επίλυση μη- γραμμικών προβλημάτων με τη Μ.Π.Σ., καθορίζεται από τον χρήστη ο χρόνος εκκίνησης (starting time), ο χρόνος περάτωσης (ending time) και το χρονικό βήμα (time increment) με το οποίο ελέγχεται στις στατικές αναλύσεις το μέγεθος της επαύξεσης της φόρτισης. Έτσι, για τελική τιμή φορτίου F και N χρονικά βήματα, η τιμή του επιβαλλόμενου φορτίου στο n - βήμα, στον αντίστοιχο χρόνο $T^n = n\Delta T$ όπου $\Delta T = (T_{end} - T_{start}) / N$ το μέγεθος του χρονικού βήματος, δίνεται από τη γραμμική σχέση

$$F^n = \frac{T^n - T_{start}}{T_{end} - T_{start}} F \quad n = 1, 2, \dots, N \quad (0.9)$$

2. ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗ ΜΗ-ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΜΕ Π.Σ.

2.1. Το βασικό πρόβλημα

Το βασικό πρόβλημα μιας μη- γραμμικής ανάλυσης είναι ο υπολογισμός της κατάστασης ισορροπίας σώματος υπό δεδομένη φόρτιση που δίνεται ως συνάρτηση του χρόνου. Οι εξισώσεις ισορροπίας δικτύου πεπερασμένων στοιχείων με το οποίο προσομοιώνεται το φυσικό πρόβλημα με δυνατότητα μοντελοποίησης όλων των ειδών μη- γραμμικότητας, διατυπώνονται από τη

$${}^t\mathbf{R} - {}^t\mathbf{F} = \mathbf{0} \quad (2.1)$$

με ${}^t\mathbf{R}$ το διάνυσμα των επιβαλλόμενων επικόμβιων δυνάμεων στο χρόνο t , συμπεριλαμβανομένων των αδρανειακών και των δυνάμεων απόσβεσης των δυναμικών προβλημάτων και ${}^t\mathbf{F}$ των εσωτερικών επικόμβιων δυνάμεων που προκύπτουν από την εντατική κατάσταση στον ίδιο χρόνο.

Ενώ σε κάποια μη- γραμμικά προβλήματα είναι δυνατή η επίλυση των εξισώσεων ισορροπίας σε επιλεγμένους χρόνους και όχι στο σύνολο του χρονικού διαστήματος, σε προβλήματα που η συμπεριφορά τους εξαρτάται από τη διαδρομή της φόρτισης, περιλαμβάνουν μη- γραμμικές συνοριακές συνθήκες ή/και μη-γραμμική συμπεριφορά του υλικού, η επίλυση πραγματοποιείται αναγκαστικά για όλο το χρονικό διάστημα ενδιαφέροντος. Στη περίπτωση αυτή, η ανάλυση εκτελείται μέσω βηματικών- επαυξητικών μεθόδων([27],[28]).

Η βασική προσέγγιση βηματικής-επαυξητικής επίλυσης (incremental solution) είναι η διακριτοποίηση του χρονικού διαστήματος με κατάλληλα επιλεγμένο χρονικό βήμα Δt . Με τη θεώρηση ότι η κατάσταση του σώματος σε χρόνο t είναι ήδη γνωστή από προηγούμενες επιλύσεις και φόρτιση ανεξάρτητη της παραμόρφωσης, αναζητούμε την εύρεση της κατάστασης σε χρόνο $t + \Delta t$ με επίλυση των εξισώσεων ισορροπίας

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{R} - {}^{t+\Delta t}\mathbf{F} = \mathbf{0} \quad (2.2)$$

Συμβολίζουμε με \mathbf{F} το διάνυσμα των άγνωστων επικόμβιων επαυξήσεων των εσωτερικών δυνάμεων που οφείλονται στις αναπτυσσόμενες πρόσθετες τάσεις λόγω επαύξησης της εξωτερικής φόρτισης κατά τη μετάβαση του σώματος από τη κατάσταση στο χρόνο t στη κατάσταση στο χρόνο $t + \Delta t$. Το διάνυσμα ${}^{t+\Delta t}\mathbf{F}$ τότε γράφεται

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{F} = {}^t\mathbf{F} + \mathbf{F} \quad (2.3)$$

Το διάνυσμα \mathbf{F} των αγνώστων επαυξήσεων προσεγγίζεται από την

$$\underline{\mathbf{F}} \doteq {}^t\mathbf{K}\underline{\mathbf{U}} \quad (2.4)$$

με ${}^t\mathbf{K}$ το εφαπτομενικό μητρώο στιβαρότητας στο χρόνο που δίνεται από την

$${}^t\mathbf{K} = \frac{\partial {}^t\mathbf{F}}{\partial {}^t\mathbf{U}} \quad , \quad {}^tK_{ij} = \frac{\partial {}^tF_{ij}}{\partial {}^tU_{ij}} \quad (2.5)$$

και $\underline{\mathbf{U}}$ το διάνυσμα των επαυξήσεων των επικόμβιων μετακινήσεων από τη κατάσταση στο χρόνο t στη κατάσταση στο χρόνο $t + \Delta t$.

Με αντικατάσταση των Σχέσεων (2.3), (2.4) στη Σχέση (2.2), προκύπτει το σύστημα εξισώσεων

$${}^t\mathbf{K}\underline{\mathbf{U}} = {}^{t+\Delta t}\mathbf{R} - {}^t\mathbf{F} \quad (2.6)$$

από την επίλυση του οποίου λαμβάνεται το διάνυσμα των επαυξήσεων των επικόμβιων μετακινήσεων $\underline{\mathbf{U}}$ και η προσέγγιση της λύσης στο χρόνο $t + \Delta t$

$${}^{t+\Delta t}\underline{\mathbf{U}} = {}^t\underline{\mathbf{U}} + \underline{\mathbf{U}} \quad (2.7)$$

Η παραπάνω επίλυση εμφανίζει σημαντικό σφάλμα λόγω της μη- εξισορρόπησης των ${}^{t+\Delta t}\mathbf{R}$, ${}^t\mathbf{F}$ (out-of- balance) και είναι αναγκαία η εφαρμογή επαναληπτικής μεθόδου, όπως της Newton- Raphson εντός κάθε χρονικού διαστήματος Δt με τη σύγκλιση της οποίας επιτυγχάνεται η επιθυμητή ακρίβεια. Εάν $\Delta \underline{\mathbf{U}}^{(i)}$ είναι η μεταβολή στην επαύξηση του πεδίου μετακινήσεων στην i - επανάληψη, σύμφωνα με τον αλγόριθμο Newton- Raphson, έχουμε

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{K}^{(i-1)}\Delta \underline{\mathbf{U}}^{(i)} = {}^{t+\Delta t}\mathbf{R} - {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}^{(i-1)} \quad (2.8)$$

με

$${}^{t+\Delta t}\underline{\mathbf{U}}^{(i)} = {}^{t+\Delta t}\underline{\mathbf{U}}^{(i-1)} + \Delta \underline{\mathbf{U}}^{(i)} \quad i = 1, 2, \dots \quad (2.9)$$

και αρχικές συνθήκες

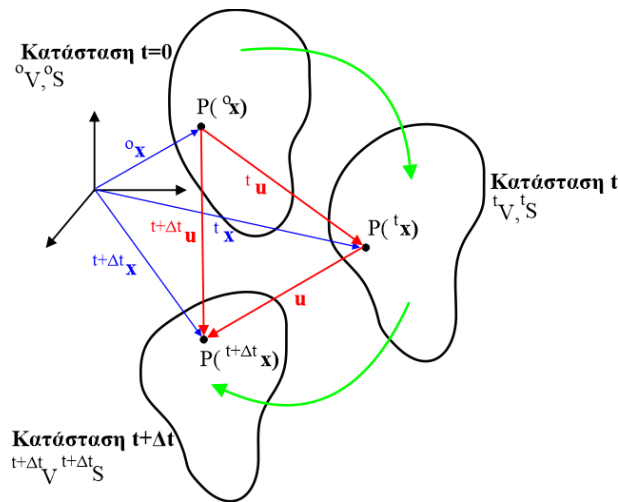
$${}^{t+\Delta t}\underline{\mathbf{U}}^{(0)} = {}^t\underline{\mathbf{U}} \quad {}^{t+\Delta t}\mathbf{K}^{(0)} = {}^t\mathbf{K} \quad {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}^{(0)} = {}^t\mathbf{F} \quad (2.10)$$

Κατά την πρώτη επανάληψη, η Σχέση (2.8) μετατρέπεται στην Σχέση (2.6) ενώ σε κάθε επανάληψη υπολογίζεται το $\Delta \underline{\mathbf{U}}^{(i)}$, το ${}^{t+\Delta t}\underline{\mathbf{U}}^{(i)}$ και εξ αυτού και του καταστατικού νόμου του υλικού το ${}^{t+\Delta t}\mathbf{F}^{(i)}$. Οι επαναλήψεις συνεχίζονται έως η μεταβολή της επαύξησης του πεδίου μετακινήσεων γίνει μικρότερη της επιλεγμένης ανοχής ([27],[28]).

2.2. Περιγραφή Lagrange της κίνησης του σώματος

Στο Σχήμα (2.1) σχεδιάζεται η θέση σώματος που υποβάλλεται σε μεγάλες μετακινήσεις, στροφές και τροπές στους χρόνους $t=0$, t και $t + \Delta t$. Αναζητούμε τη κατάσταση στο χρόνο $t + \Delta t$ όταν η κατάσταση στο χρόνο t είναι γνωστή. Με ${}^0\mathbf{x}$, ${}^t\mathbf{x}$, ${}^{t+\Delta t}\mathbf{x}$ σημειώνονται τα διανύσματα θέσης υλικού σημείου P και $({}^0V, {}^0S)$, $({}^tV, {}^tS)$, $({}^{t+\Delta t}V, {}^{t+\Delta t}S)$ τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά των σωμάτων στους εξεταζόμενους χρόνους. Εάν ${}^t\mathbf{u}$, ${}^{t+\Delta t}\mathbf{u}$ είναι τα διανύσματα των μετακινήσεων του σημείου από την αρχική απαραμόρφωτη κατάσταση στις καταστάσεις στους χρόνους t και $t + \Delta t$ τότε

$$\begin{aligned} {}^t x_i &= {}^0 x_i + {}^t u_i \\ {}^{t+\Delta t} x_i &= {}^0 x_i + {}^{t+\Delta t} u_i \\ u_i &= {}^{t+\Delta t} u_i - {}^t u_i \end{aligned} \quad (2.11)$$



Σχήμα 2.1 Περιγραφή της κίνησης σώματος

Σύμφωνα με τη περιγραφή κατά Lagrange κατά την οποία παρακολουθείται η κίνηση των υλικών σημείων σώματος από την αρχική απαραμόρφωτη στη τελική παραμορφωμένη κατάσταση, η Αρχή των Δυνατών Έργων στο χρόνο $t + \Delta t$ διατυπώνεται ως ακολούθως

$$\int_{{}^{t+\Delta t}V} \tau_{ij} \delta_{{}^{t+\Delta t}} e_{ij} dV = {}^{t+\Delta t}R \quad (2.12)$$

με

τ_{ij} Οι καρτεσιανές συνιστώσες του τανυστή τάσεων Cauchy (δύναμη ανά μονάδα επιφανείας παραμορφωμένης γεωμετρίας)

$\delta_{t+\Delta t} e_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \delta u_i}{\partial t+\Delta t} x_j + \frac{\partial \delta u_j}{\partial t+\Delta t} x_i \right)$ Οι δυνατές μεταβολές των συνιστωσών του τανυστή τροπών που οφείλονται στις δυνατές μετακινήσεις

δu_i Οι επιβαλλόμενες συνιστώσες του διανύσματος δυνατών μετακινήσεων στη κατάσταση στο χρόνο $t + \Delta t$

${}^{t+\Delta t} x_i$ Οι συντεταγμένες του υλικού σημείου στη κατάσταση στο χρόνο $t + \Delta t$

${}^{t+\Delta t} V$ Ο όγκος του παραμορφωμένου σώματος στη κατάσταση στο χρόνο $t + \Delta t$

και

$${}^{t+\Delta t} R = \int_{{}^{t+\Delta t} V} {}^{t+\Delta t} f_i^B \delta u_i d {}^{t+\Delta t} V + \int_{{}^{t+\Delta t} S_f} {}^{t+\Delta t} f_i^S \delta u_i^S d {}^{t+\Delta t} S_f \quad (2.13)$$

όπου

${}^{t+\Delta t} f_i^B$ Οι συνιστώσες των εξωτερικά επιβαλλομένων μαζικών δυνάμεων ανά μονάδα όγκου στο χρόνο $t + \Delta t$

${}^{t+\Delta t} f_i^S$ Οι συνιστώσες των εξωτερικά επιβαλλομένων επιφανειακών τάσεων ανά μονάδα επιφανείας στο χρόνο $t + \Delta t$

${}^{t+\Delta t} S_f$ Η επιφάνεια στο χρόνο $t + \Delta t$ που επιβάλλονται επιφανειακές τάσεις

δu_i^S Οι συνιστώσες των δυνατών μετακινήσεων στην επιφάνεια ${}^{t+\Delta t} S_f$ στο χρόνο $t + \Delta t$

Η Σχέση (2.12) δηλώνει την ισότητα μεταξύ του έργου των εσωτερικών και των εξωτερικά επιβαλλόμενων δυνάμεων για κάθε τυχαία μικρή μεταβολή του πεδίου μετακινήσεων που ικανοποιεί τις γεωμετρικές συνθήκες του προβλήματος (δυνατή μεταβολή) στη κατάσταση στο χρόνο $t + \Delta t$.

Η Α.Δ.Ε όπως διατυπώθηκε δεν διαφέρει εκείνης των στοιχειωδών μετατοπίσεων παρά μόνο ότι οι ολοκληρώσεις εκτελούνται αντί της απαραμόρφωτης στη παραμορφωμένη κατάσταση στο χρόνο $t + \Delta t$. Επειδή η παραμορφωμένη γεωμετρία δεν είναι εκ των προτέρων γνωστή και οι συνιστώσες του τανυστή Cauchy αναφέρονται σε άγνωστη επιφάνεια, η Α.Δ.Ε επαναδιατυπώνεται με την εισαγωγή κατάλληλων μετρητών τάσης και τροπών. Με t_s ορίζεται ο 2^{ος} τανυστής τάσεων Piola- Kirchhoff και ο ενεργειακά συζυγής του τανυστής τροπών Green-Lagrange ${}^t_\epsilon$. Ο άνω δείκτης αναφέρεται στο χρόνο που αναπτύσσεται η ποσότητα και ο κάτω δείκτης στη κατάσταση που μετριέται η ποσότητα.

Εάν επιλεγεί η κατάσταση στο χρόνο μηδέν ή η γνωστή κατάσταση σε κάποιο χρόνο t ως κατάσταση αναφοράς προκύπτουν η **ολική περιγραφή κατά Lagrange** (Total Lagrangian description, TL) και η **βηματική περιγραφή κατά Lagrange** (Updated Lagrangian description, UL), αντίστοιχα. Η Σχέση (1.12) για κάποιο χρόνο t , με αντικατάσταση των ${}^t\tau$, te εκ των ${}^t\mathbf{s}$, ${}^t\mathbf{e}$ από τις

$$\begin{aligned} {}^t s_{ij} &= \frac{{}^o\rho}{{}^t\rho} {}^o x_{i,m} {}^t \tau_{mn} {}^o x_{j,n} & {}^t \tau_{kl} &= \frac{{}^t\rho}{{}^o\rho} {}^t s_{ij} {}^o x_{k,i} {}^o x_{l,j} \\ {}^t e_{kl} &= {}^o x_{m,k} {}^o x_{n,l} {}^o \varepsilon_{kl} \end{aligned} \quad (2.14)$$

και της διατήρησης της μάζας, ${}^t\rho d^tV = {}^o\rho d^oV$, γράφεται

$$\begin{aligned} \int_{{}^tV} {}^t \tau_{kl} \delta {}^t e_{kl} d^tV &= \int_{{}^tV} \left(\frac{{}^t\rho}{{}^o\rho} {}^t s_{ij} {}^o x_{k,i} {}^o x_{l,j} \right) ({}^o x_{m,k} {}^o x_{n,l} \delta {}^o \varepsilon_{mn}) d^tV \\ \int_{{}^tV} \frac{{}^t\rho}{{}^o\rho} {}^t s_{ij} \delta {}^o \varepsilon_{mn} d^tV &= \int_{{}^oV} {}^t s_{ij} \delta {}^o \varepsilon_{ij} d^oV \end{aligned} \quad (2.15)$$

και καταλήγει στη

$$\int_{{}^oV} {}^t s_{ij} \delta {}^o \varepsilon_{ij} d^oV = {}^tR \quad (2.16)$$

Η Εξίσωση (2.16) αποτελεί τη βασική έκφραση των περιγραφών TL και UL που εφαρμόζονται στη βηματική-επαυξητική ανάλυση του συνεχούς μέσου. Σημαντικό στοιχείο της περιγραφής είναι η εκτέλεση της ολοκλήρωσης στον αρχικό όγκο του σώματος και μπορεί να εφαρμοσθεί σε οποιαδήποτε ήδη υπολογισμένη κατάσταση σε χρόνο τ όγκο αναφοράς. Έτσι, η ΑΔΕ για την εύρεση της κατάστασης σε χρόνο t ως προς τη γνωστή κατάσταση σε χρόνο τ , γράφεται

$$\int_{{}^tV} {}^t \tau_{ij} \delta {}^t e_{ij} d^tV = \int_{{}^\tau V} {}^t s_{ij} \delta {}^\tau \varepsilon_{ij} d^\tau V = {}^tR \quad (2.17)$$

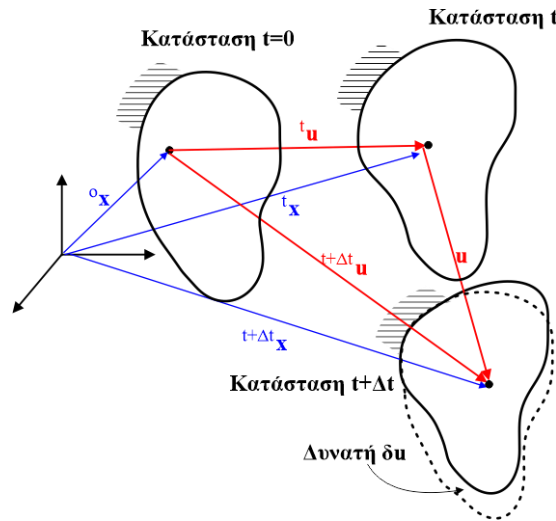
όπου οι τανυστές τάσεων και τροπών ορίζονται όπως προηγουμένως με αντικατάσταση των συντεταγμένων ${}^o x_i$ από τις ${}^\tau x_i$ της κατάστασης αναφοράς στο χρόνο τ . ([27],[29])

Η βασική εξίσωση (2.12) εκφράζει την ισορροπία και τις απαιτήσεις συμβιβασμού εξεταζόμενου σώματος υπό μεγάλες μετατοπίσεις και τροπές καθώς και μη- γραμμικό καταστατικό νόμο τάσεων- παραμορφώσεων στη κατάσταση στο χρόνο $t + \Delta t$, η οποία δεν μπορεί να επιλυθεί απ' ευθείας. Είναι όμως δυνατή η εύρεση μιας προσεγγιστικής λύσης με αναφορά των αγνώστων ποσοτήτων σε κάποια

προηγούμενως υπολογισμένη κατάσταση ισορροπίας και με γραμμικοποίηση των τελικών εξισώσεων η οποία μπορεί να βελτιωθεί με επαναλήψεις.

2.2.1. Ολική περιγραφή Lagrange

Κατά τη διατύπωση της μη- γραμμικής βηματικής-επαυξητικής ανάλυσης με την ολική περιγραφή Lagrange, θεωρούμε ότι όλες οι λύσεις στους χρόνους $0, \Delta t, 2\Delta t, \dots, t$ έχουν ήδη υπολογιστεί και αναζητείται η λύση στο χρόνο $t + \Delta t$. Στη TL μέθοδο, ως κατάσταση αναφοράς όλων των στατικών και κινηματικών μεταβλητών λαμβάνεται η αρχική απαραμόρφωτη κατάσταση του σώματος στο χρόνο $t = 0$. [28]



Σχήμα 2.2 Περιγραφή μεθόδου TL

Συμβολίζουμε με ${}^t \underline{u}$, ${}^{t+\Delta t} \underline{u}$ τα διανύσματα μετακινήσεων από τη κατάσταση στο χρόνο μηδέν στις καταστάσεις στους χρόνους t και $t + \Delta t$, αντίστοιχα (Σχήμα 2.2). Εάν \underline{u} η επαύξηση από το χρόνο t στο χρόνο $t + \Delta t$, η ΑΔΕ στη κατάσταση $t + \Delta t$ για κάθε δυνατή μετακίνηση $\delta \underline{u}$ γράφεται

$$\int_{\mathcal{V}} {}^{t+\Delta t} {}_o s_{ij} \delta {}^{t+\Delta t} {}_o \varepsilon_{ij} dV = {}^{t+\Delta t} R \quad (2.18)$$

Επειδή όλες οι ποσότητες αναφέρονται στην ίδια αρχική κατάσταση επιτρέπεται η ανάλυση τους στα παρακάτω αθροίσματα

$${}^{t+\Delta t} {}_o s_{ij} = {}^t {}_o s_{ij} + {}_o s_{ij} \quad (2.19)$$

$${}^{t+\Delta t} {}_o \varepsilon_{ij} = {}^t {}_o \varepsilon_{ij} + {}_o \varepsilon_{ij} \quad (2.20)$$

με ${}^t\mathbf{s}$, ${}^t\boldsymbol{\varepsilon}$, τις γνωστές ποσότητες στο χρόνο t και ${}_o\mathbf{s}$, ${}_o\boldsymbol{\varepsilon}$, τις επαυξημένες τάσεων και τροπών κατά τη μετάβαση από το χρόνο t στο χρόνο $t + \Delta t$.

Επιπρόσθετα, οι επαυξησεις ${}_o\varepsilon_{ij}$ γράφονται ως άθροισμα ενός γραμμικού και ενός μη- γραμμικού όρου

$${}_o\varepsilon_{ij} = {}_o e_{ij} + {}_o \eta_{ij} \quad (2.21)$$

με

$$\begin{aligned} {}_o e_{ij} &= \frac{1}{2} ({}_o u_{i,j} + {}_o u_{j,i} + {}^t u_{k,i} {}_o u_{k,j} + {}_o u_{k,i} {}^t u_{k,j}) \\ {}_o \eta_{ij} &= \frac{1}{2} {}_o u_{k,i} {}_o u_{k,j} \end{aligned} \quad (2.22)$$

όπου το άθροισμα των γινομένων στην έκφραση των ${}_o e_{ij}$ είναι η επιρροή της αρχικής μετακίνησης (initial displacement effect) [28]

Κατά τη διατύπωση της ΑΔΕ κάθε δυνατή μεταβολή του πεδίου μετακινήσεων $\delta \mathbf{u}$ στη κατάσταση $t + \Delta t$ δεν εξαρτάται των ήδη γνωστών ποσοτήτων στη κατάσταση t , οπότε

$$\delta {}^{t+\Delta t}{}_o \varepsilon_{ij} = \delta {}_o \varepsilon_{ij} \quad (2.23)$$

και

$$\delta {}^{t+\Delta t}{}_o \varepsilon_{ij} = \delta {}_o e_{ij} + \delta {}_o \eta_{ij} \quad (2.24)$$

με

$$\begin{aligned} \delta {}_o e_{ij} &= \frac{1}{2} (\delta {}_o u_{i,j} + \delta {}_o u_{j,i} + \delta {}^t u_{k,i} {}_o u_{k,j} + {}_o u_{k,i} \delta {}^t u_{k,j}) \\ \delta {}_o \eta_{ij} &= \frac{1}{2} \delta {}_o u_{k,i} {}_o u_{k,j} + \frac{1}{2} {}_o u_{k,i} \delta {}_o u_{k,j} \end{aligned} \quad (2.25)$$

Σύμφωνα με τις παραπάνω σχέσεις, και με αναδιάταξη ώστε ο γνωστοί όροι να μεταβούν στο δεξιό μέλος, η ΑΔΕ γράφεται

$$\int_{{}_o V} {}_o s_{ij} \delta {}_o \varepsilon_{ij} d {}^o V + \int_{{}_o V} {}^t s_{ij} \delta {}_o \eta_{ij} d {}^o V = {}^{t+\Delta t} R - \int_{{}_o V} {}^t s_{ij} \delta {}_o e_{ij} d {}^o V \quad (2.26)$$

η οποία, λόγω του πρώτου όρου του δεξιού μέλους, είναι μη- γραμμική συνάρτηση της επαύξησης των συνιστωσών των μετακινήσεων και γραμμικοποιείται με ανάπτυξη του ${}_o s_{ij}$ σε σειρά Taylor. Έτσι, το πρώτο ολοκλήρωμα της Σχέσης (2.26), γίνεται

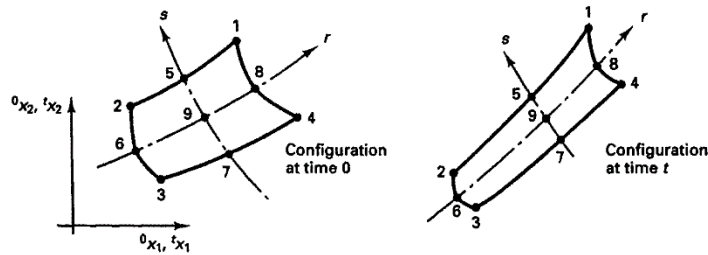
$$\begin{aligned}
 \int_{^oV} {}^o s_{ij} \delta {}^o \varepsilon_{ij} d {}^o V &= \int_{^oV} \left[\left(\frac{\partial {}^t s_{ij}}{\partial {}^t \varepsilon_{rs}} \right)_t {}^o \varepsilon_{rs} + \text{όροι υψηλότερης τάξης} \right] \delta ({}^o \varepsilon_{ij} + {}^o \eta_{ij}) d {}^o V \\
 &= \int_{^oV} \left[\left(\frac{\partial {}^t s_{ij}}{\partial {}^t \varepsilon_{rs}} \right)_t ({}^o e_{rs} + {}^o \eta_{rs}) \right] \delta ({}^o \varepsilon_{ij} + {}^o \eta_{ij}) d {}^o V \\
 &\doteq \int_{^oV} {}^o C_{ijrs} {}^o e_{rs} \delta {}^o \varepsilon_{ij} d {}^o V
 \end{aligned} \tag{2.27}$$

και η ΑΔΕ λαμβάνει τη τελική μορφή

$$\int_{^oV} {}^o C_{ijrs} {}^o e_{rs} \delta {}^o \varepsilon_{ij} d {}^o V + \int_{^oV} {}^t s_{ij} \delta {}^o \eta_{ij} d {}^o V = {}^{t+\Delta t} R - \int_{^oV} {}^t s_{ij} \delta {}^o e_{ij} d {}^o V \tag{2.28}$$

2.3. Μόρφωση των μητρώων της ΜΠΣ

Στη παρούσα παράγραφο διατυπώνονται τα απαραίτητα μητρώα και διανύσματα για τυπικό δισ-διάστατο ισοπαραμετρικό επίπεδο στοιχείο με το οποίο μοντελοποιούνται αξονοσυμμετρικά προβλήματα, προβλήματα επίπεδης έντασης και παραμόρφωσης κατά τη μετάβαση του από την απαραμόρφωτη στη παραμορφωμένη κατάσταση στο χρόνο t [28].



Σχήμα 2.3 Επίπεδο στοιχείο στο καθολικό σύστημα συντεταγμένων

Έστω ισοπαραμετρικό επίπεδο στοιχείο με εννιά κόμβους και καθολικές συντεταγμένες ${}^o x_1^k, {}^o x_2^k$ στο χρόνο $t=0$ και ${}^t x_1^k, {}^t x_2^k$ στο χρόνο t (Σχήμα 2.3). Εάν h_k είναι οι γεωμετρικές συναρτήσεις παρεμβολής, οι συντεταγμένες κάθε σημείου στο εσωτερικό του στοιχείου στους χρόνους $t=0$ και t , δίνονται από τις σχέσεις

$$\begin{aligned}
 {}^o x_1 &= \sum_{k=1}^N h_k {}^o x_1^k & {}^o x_2 &= \sum_{k=1}^N h_k {}^o x_2^k \\
 {}^t x_1 &= \sum_{k=1}^N h_k {}^t x_1^k & {}^t x_2 &= \sum_{k=1}^N h_k {}^t x_2^k
 \end{aligned} \tag{2.29}$$

Επειδή η διακριτοποίηση πραγματοποιείται με ισοπαραμετρικά στοιχεία, οι συνιστώσες του πεδίου μετακινήσεων σε κάθε σημείο του στοιχείου γράφονται με τις ίδιες συναρτήσεις παρεμβολής και στις δυο καταστάσεις και είναι

$$\begin{aligned} u_1 &= \sum_{k=1}^N h_k u_1^k & u_2 &= \sum_{k=1}^N h_k u_2^k \\ {}^t u_1 &= \sum_{k=1}^N h_k {}^t u_1^k & {}^t u_2 &= \sum_{k=1}^N h_k {}^t u_2^k \end{aligned} \quad (2.30)$$

Ο υπολογισμός των συνιστωσών των τροπών απαιτεί τις εκφράσεις των ακόλουθων παραγώγων

$$\begin{aligned} \frac{\partial^t u_i}{\partial^o x_j} &= \sum_{k=1}^N \frac{\partial h_k}{\partial^o x_j} {}^t u_i^k \\ \frac{\partial u_i}{\partial^o x_j} &= \sum_{k=1}^N \frac{\partial h_k}{\partial^o x_j} u_i^k \\ \frac{\partial u_i}{\partial^t x_j} &= \sum_{k=1}^N \frac{\partial h_k}{\partial^t x_j} u_i^k \quad (i, j = 1, 2) \end{aligned} \quad (2.31)$$

Επειδή οι συναρτήσεις παρεμβολής δίνονται στο (r, s) σύστημα συντεταγμένων, οι παράγωγοι υπολογίζονται μέσω Ιακωβιανού μετασχηματισμού [28]. Για παράδειγμα, με μετασχηματισμό από το (r, s) στο $({}^t x_1, {}^t x_2)$ σύστημα συντεταγμένων η παράγωγος $\partial u_i / \partial^t x_j$ υπολογίζεται από την

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{\partial}{\partial s} \end{bmatrix} = {}^t \underline{\mathbf{J}} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial^t x_1} \\ \frac{\partial}{\partial^t x_2} \end{bmatrix} \quad (2.32)$$

όπου με ${}^t \underline{\mathbf{J}}$ συμβολίζεται η Ιακωβιανή στο χρόνο t που δίνεται από την

$${}^t \underline{\mathbf{J}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^t x_1}{\partial r} & \frac{\partial^t x_2}{\partial r} \\ \frac{\partial^t x_1}{\partial s} & \frac{\partial^t x_2}{\partial s} \end{bmatrix} \quad (2.33)$$

Με αντιστροφή του μητρώου της Ιακωβιανής, λαμβάνουμε

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial^t x_1} \\ \frac{\partial}{\partial^t x_2} \end{bmatrix} = \frac{1}{\det {}^t \underline{\mathbf{J}}} \begin{bmatrix} \frac{\partial^t x_2}{\partial s} & -\frac{\partial^t x_2}{\partial r} \\ -\frac{\partial^t x_1}{\partial s} & \frac{\partial^t x_1}{\partial r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{\partial}{\partial s} \end{bmatrix} \quad (2.34)$$

Οι συνιστώσες των επαυξήσεων των τροπών των Σχέσεων (2.21) και (2.22) για το εξεταζόμενο διάστατο στοιχείο, γράφονται

$$\begin{aligned} {}_o\varepsilon_{11} &= {}_ou_{1,1} + {}^t u_{1,1} {}_ou_{1,1} + {}^t u_{2,1} {}_ou_{2,1} + \frac{1}{2} \left[({}_ou_{1,1})^2 + ({}_ou_{2,1})^2 \right] \\ {}_o\varepsilon_{22} &= {}_ou_{2,2} + {}^t u_{1,2} {}_ou_{1,2} + {}^t u_{2,2} {}_ou_{2,2} + \frac{1}{2} \left[({}_ou_{1,2})^2 + ({}_ou_{2,2})^2 \right] \\ {}_o\varepsilon_{12} &= \frac{1}{2} ({}_ou_{1,2} + {}_ou_{2,1}) + \frac{1}{2} ({}^t u_{1,1} {}_ou_{1,2} + {}^t u_{2,1} {}_ou_{2,2} + {}^t u_{1,2} {}_ou_{1,1} + {}^t u_{2,2} {}_ou_{2,1}) \\ &\quad + \frac{1}{2} ({}_ou_{1,1} {}_ou_{1,2} + {}_ou_{2,1} {}_ou_{2,2}) \end{aligned} \quad (2.35)$$

ενώ για τα αξονοσυμμετρικά προβλήματα, ${}_o\varepsilon_{33} = \frac{u_1}{{}_ox_1} + \frac{{}^t u_1 u_1}{({}_ox_1)^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{u_1}{{}_ox_1} \right)^2$

Εάν $\hat{\mathbf{u}} = [u_1^1 \quad u_1^2 \quad u_1^3 \quad u_1^4 \quad \dots \quad u_1^N \quad u_2^N]^T$ είναι το διάνυσμα των επαυξήσεων των επικόμβιων μετακινήσεων, οι επαυξήσεις των μετακινήσεων και οι δυνατές επαυξήσεις τους σε εσωτερικό σημείο του στοιχείου δίνονται από τις

$$\mathbf{\underline{u}} = \mathbf{\underline{H}} \hat{\mathbf{u}} \quad \delta \mathbf{\underline{u}} = \mathbf{\underline{H}} \delta \hat{\mathbf{u}} \quad (2.36)$$

με $\mathbf{\underline{H}}$ το μητρώο παρεμβολής των μετακινήσεων που ισχύει και για τις επαυξήσεις [28].

Στη περίπτωση επίλυσης δυναμικών προβλημάτων, η αρχή των δυνατών έργων συμπληρώνεται με το δυνατό έργο των αδρανειακών δυνάμεων

$$\int_{{}_oV} {}_o\rho {}^{t+\Delta t} \ddot{u}_i \delta u_i d {}^oV \quad (2.37)$$

και με αντικατάσταση των Σχέσεων (2.36) προκύπτει

$$\begin{aligned} \int_{{}_oV} {}_o\rho {}^{t+\Delta t} \ddot{u}_i \delta u_i d {}^oV &= \int_{{}_oV} {}_o\rho {}^{t+\Delta t} \hat{\mathbf{\underline{u}}}^T \delta \mathbf{\underline{u}} d {}^oV \\ &= \delta \hat{\mathbf{\underline{u}}}^T ({}_o\rho \int_{{}_oV} \mathbf{\underline{H}}^T \mathbf{\underline{H}} d {}^oV) {}^{t+\Delta t} \hat{\mathbf{\underline{u}}} \end{aligned} \quad (2.38)$$

με τον όρο εντός της παρένθεσης να αντιστοιχεί στο μητρώο μάζας του προβλήματος

Αντίστοιχα, το δυνατό έργο των εξωτερικά επιβαλλομένων δυνάμεων

$${}^{t+\Delta t} R = \int_{{}^{t+\Delta t} V} f_i^B \delta u_i d {}^{t+\Delta t} V + \int_{{}^{t+\Delta t} S_f} f_i^S \delta u_i^S d {}^{t+\Delta t} V \quad (2.39)$$

γράφεται

$${}^{t+\Delta t}R = \delta \hat{\mathbf{u}}^T \left(\int_{{}^oV} \mathbf{H}^T {}^{t+\Delta t} \mathbf{f}^B d {}^oV + \int_{{}^oS} \mathbf{H}^{sT} {}^{t+\Delta t} f^s d {}^oS \right) \quad (2.40)$$

όπου \mathbf{H}^s το μητρώο παρεμβολής στο τμήμα του συνόρου που επιβάλλονται εξωτερικά φορτία.

Με εκτέλεση των παραγωγίσεων των Σχέσεων (2.22) οι επαυξήσεις των γραμμικών και μη-γραμμικών τροπών συναρτήσει των επαυξήσεων των επικόμβιων μετακινήσεων γράφονται υπό τη μητρική μορφή $\mathbf{e} = \mathbf{B}_L \hat{\mathbf{u}}, \mathbf{\eta} = \mathbf{B}_{NL} \hat{\mathbf{u}}$ [28]

$$\mathbf{e} = \mathbf{B}_L \hat{\mathbf{u}}, \mathbf{\eta} = \mathbf{B}_{NL} \hat{\mathbf{u}} \quad (2.41)$$

όπου $\mathbf{B}_L, \mathbf{B}_{NL}$ τα μητρώα γραμμικών και μη- γραμμικών σχέσεων τροπών- μετακινήσεων, αντίστοιχα.

Τα ολοκληρώματα $\int_{{}^oV} {}_oC_{ijrs} {}_oe_{rs} \delta {}_o\varepsilon_{ij} d {}^oV, \int_{{}^oV} {}_os_{ij} \delta {}_o\eta_{ij} d {}^oV$ της ΑΔΕ με αντικατάσταση των Σχέσεων

(1.41) λαμβάνουν την ακόλουθη μορφή

$$\begin{aligned} \int_{{}^oV} {}_oC_{ijrs} {}_oe_{rs} \delta {}_o\varepsilon_{ij} d {}^oV &= \delta \hat{\mathbf{u}}^T \left(\int_{{}^oV} {}^t\mathbf{B}_L^T {}^t\mathbf{C} {}^t\mathbf{B}_L d {}^oV \right) \hat{\mathbf{u}} \\ &= \delta \hat{\mathbf{u}}^T {}^t\mathbf{K}_L \hat{\mathbf{u}} \end{aligned} \quad (2.42)$$

$$\begin{aligned} \int_{{}^oV} {}_os_{ij} \delta {}_o\eta_{ij} d {}^oV &= \delta \hat{\mathbf{u}}^T \left(\int_{{}^oV} {}^t\mathbf{B}_{NL}^T {}^t\mathbf{S} {}^t\mathbf{B}_{NL} d {}^oV \right) \hat{\mathbf{u}} \\ &= \delta \hat{\mathbf{u}}^T {}^t\mathbf{K}_{NL} \hat{\mathbf{u}} \end{aligned} \quad (2.43)$$

Επίσης, ο όρος του δεξιού μέλους $\int_{{}^oV} {}_os_{ij} \delta {}_oe_{ij} d {}^oV$ της ΑΔΕ γίνεται

$$\begin{aligned} \int_{{}^oV} {}_os_{ij} \delta {}_oe_{ij} d {}^oV &= \delta \hat{\mathbf{u}}^T \int_{{}^oV} {}^t\mathbf{B}_L^T {}^t\hat{\mathbf{S}} d {}^oV \\ &= \delta \hat{\mathbf{u}}^T {}^t\mathbf{F} \end{aligned} \quad (2.44)$$

με ${}^t\hat{\mathbf{S}}$ το διάνυσμα με συνιστώσες ${}^tS_{ij}$.

3. ΑΝΑΛΥΣΗ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ ΕΠΑΦΗΣ

3.1. Εισαγωγή

Δυο ή περισσότερα σώματα έρχονται σε επαφή όταν κατά τη σύγκρουση τους δημιουργείται κοινή διεπιφάνεια χωρίς να επιτρέπεται μεταξύ τους διείσδυση. Το αντικείμενο της ανάλυσης επαφής είναι ο εντοπισμός της θέσης ή της επιφάνειας επαφής, το μέγεθος της αναπτυσσόμενης πίεσης στη διεπιφάνεια και εάν εμφανίζεται και πόση σχετική κίνηση των σωμάτων μετά την επαφή στη διεπιφάνεια τους [27].

Το φαινόμενο της επαφής ανήκει στη κατηγορία των προβλημάτων μη γραμμικών συνοριακών συνθηκών λόγω της μη γραμμικής συνάρτησης της δύναμης επαφής κατά τη κάθετη και εφαπτομενική διεύθυνση οι οποίες μεταβάλλονται απότομα από μηδενική τιμή πριν την επαφή σε κάποια άγνωστη τιμή στην επαφή και επανέρχονται σε μηδενική τιμή εάν εμφανιστεί αποκόλληση. Πρόσθετη πηγή μη γραμμικότητας αποτελεί η άγνωστη εκ των προτέρων διεπιφάνεια των σωμάτων η οποία εντοπίζεται κατά την επίλυση και αποτελεί μεταβλητή του προβλήματος. Έτσι, κατά την ανάλυση εξετάζεται εάν συγκεκριμένο υλικό σημείο του συνόρου του σώματος είναι σε επαφή με άλλο σώμα και εάν επιβεβαιωθεί, υπολογίζεται η δύναμη επαφής. Επειδή η δύναμη αυτή επηρεάζει τη παραμόρφωση γειτονικών σημείων, η διαδικασία εντοπισμού επαναλαμβάνεται διαδοχικά για την εύρεση της ορθής κατάστασης όλων των σημείων που είναι πιθανά για επαφή.

Ανεξάρτητα της συμπεριφοράς του υλικού των σωμάτων (ελαστική ή ελαστοπλαστική), η εύρεση της κατάστασης ισορροπίας σωμάτων σε επαφή επιτυγχάνεται με την ελαχιστοποίηση της δυναμικής ενέργειας του συστήματος με τις συνθήκες επαφής (μη αλληλοδιείσδυσης) ως περιορισμούς του προβλήματος βελτιστοποίησης. Το πρόβλημα βελτιστοποίησης υπό περιορισμούς μετασχηματίζεται σε πρόβλημα χωρίς περιορισμούς με μια των μεθόδων κανονικοποιημένης ποινής (penalty regularization methods) ή των μεθόδων πολλαπλασιαστών Lagrange (Lagrange multiplier methods) [27].

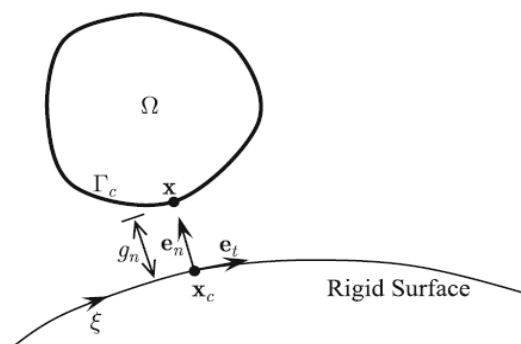
Στα προβλήματα επαφής οι εξεταζόμενες επιφάνειες κατηγοριοποιούνται σε επαφής (slave, contact surfaces) και στόχου (master, target surface) με συνθήκη συμβιβαστού της επαφής (contact compatibility) η επιφάνεια επαφής να μην διεισδύει της επιφάνειας στόχου.

3.2 Διατύπωση του προβλήματος επαφής

3.2.1 Συνθήκη επαφής σώματος με άκαμπτη επιφάνεια

Κατά τον εντοπισμό επαφής θεωρείται ότι τα σώματα έχουν επαρκείς στηρίξεις, ακόμη και στη περίπτωση μη επαφής ώστε να μην είναι εφικτές κινήσεις στερεού σώματος. Στη περίπτωση επαφής σώματος με άκαμπτη επιφάνεια, η επιφάνεια του εύκαμπτου σώματος ορίζεται ως επιφάνεια επαφής.

Οι συνθήκες επαφής υποδιαιρούνται στη συνθήκη μη κάθετης διείσδυσης και στη συνθήκη εφαπτομενικής ολίσθησης. Η πρώτη αποτρέπει τη διείσδυση της επιφάνειας επαφής στην επιφάνεια στόχου ενώ η δεύτερη περιγράφει τη συμπεριφορά της επιφάνειας επαφής λόγω τριβής [27].



Σχήμα 3.1 Συνθήκη επαφής σε δυο διαστάσεις

Στο Σχήμα (2.1) παρουσιάζεται η γενική συνθήκη επαφής σώματος με άκαμπτη επιφάνεια στις δυο διαστάσεις με Γ_c το τμήμα της επιφάνειας επαφής που ελέγχεται σε επαφή. Επειδή η πραγματική επιφάνεια επαφής δεν είναι εκ των προτέρων γνωστή, ο χρήστης επιλέγει κατάλληλα το σύνορο επαφής ώστε όλες οι πιθανές επαφές που μπορούν να συμβούν να ανήκουν στο επιλεγμένο σύνορο.

Επειδή η κίνηση της επιφάνειας στόχου είναι γνωστή κατά την ανάλυση, η θέση κάθε υλικού σημείου της επιφάνειας καθορίζεται στο δισδιάστατο χώρο από τη τιμή μιας φυσικής συντεταγμένης ξ . Έτσι, οι αρχικά άγνωστες συντεταγμένες θέσης κάθε master σημείου \mathbf{x}_c της επιφάνειας στόχου δίδονται από τη

$$\mathbf{x}_c = \mathbf{x}_c(\xi_c) \quad (3.1)$$

Στην ανάλυση επαφής το ζητούμενο είναι η εύρεση της θέσης επαφής, της αναπτυσσόμενης πίεσης επαφής καθώς και της δύναμης τριβής. Σε αντίθεση με τα κλασσικά προβλήματα της μηχανικής του συνεχούς μέσου όπου ως συνοριακή συνθήκη εισάγεται είτε δεδομένη μετακίνηση ή δεδομένη δύναμη και η άγνωστη ποσότητα υπολογίζεται από την επίλυση του συστήματος, στα προβλήματα επαφής

τόσο το master σημείο \mathbf{x}_c όσο και η δύναμη επαφής αποτελούν άγνωστες ποσότητες [27]. Για τον εντοπισμό του σημείου επαφής από τη γεωμετρία συνήθως επιλέγεται μέθοδος δοκιμής- σφάλματος (trial and error) με την οποία ελέγχονται τα πιθανά σημεία επαφής και εντοπίζεται το σημείο \mathbf{x}_c και εν συνεχεία επιβάλλεται η συνθήκη συμβιβασμού επαφής [27].

Το πρώτο βήμα της μεθόδου είναι η εύρεση του “πλησιέστερου” master σημείου \mathbf{x}_c επί της επιφανείας στόχου σε εξεταζόμενο slave σημείο \mathbf{x} της επιφάνειας επαφής. Ο εντοπισμός του σημείου είναι απαραίτητος για την αποδοχή ύπαρξης ή όχι επαφής και ονομάζεται μέθοδος ορθογωνικής προβολής (orthogonal projection method), ή του πλησιέστερου σημείου στο slave σημείο \mathbf{x} . Στη περίπτωση ευθύγραμμου συνόρου της επιφάνειας στόχου, η εύρεση του σημείου επιτυγχάνεται άμεσα σε αντίθεση με τη γενική περίπτωση μη γραμμικής καμπύλης στην οποία η εύρεση του σημείου προκύπτει από την επίλυση της μη γραμμικής εξίσωσης [27]

$$\varphi(\xi_c) = (\mathbf{x} - \mathbf{x}_c(\xi_c)) \cdot \mathbf{e}_t(\xi_c) = (\mathbf{x} - \mathbf{x}_c(\xi_c))^T \mathbf{e}_t(\xi_c) = 0 \quad (3.2)$$

σύμφωνα με την οποία η προβολή του διανύσματος της απόστασης των δυο σημείων στην εφαπτόμενη διεύθυνση της επιφάνειας στόχου στο σημείο \mathbf{x}_c είναι μηδέν. Στη παραπάνω εξίσωση με \mathbf{e}_t συμβολίζεται το μοναδιαίο διάνυσμα κατά την εφαπτόμενη διεύθυνση το οποίο υπολογίζεται από τη σχέση

$$\mathbf{e}_t(\xi_c) = \frac{\partial \mathbf{x}_c}{\partial \xi} / \left\| \frac{\partial \mathbf{x}_c}{\partial \xi} \right\| \quad (3.3)$$

Η Εξίσωση (3.2) ονομάζεται συνθήκη συνέπειας επαφής (contact consistency condition) και το σημείο $\mathbf{x}_c(\xi_c)$ που την ικανοποιεί είναι το πλησιέστερο στη προβολή του σημείου $\mathbf{x} \in \Gamma_c$ στην άκαμπτη επιφάνεια.

Με την εύρεση του σημείου επαφής, είναι αναγκαίο να βρεθεί εάν πράγματι επιτυγχάνεται επαφή, με μέτρηση της απόστασης μεταξύ των σημείων. Συγχρόνως, επιβάλλεται η συνθήκη αποφυγής αλληλοδιείσδυσης με χρήση της ίδιας απόστασης, όπως παρουσιάζεται στο Σχήμα (3.1) και διατυπώνεται από την ανισότητα [27]

$$g_n = (\mathbf{x} - \mathbf{x}_c(\xi_c)) \cdot \mathbf{e}_n(\xi_c) = (\mathbf{x} - \mathbf{x}_c(\xi_c))^T \mathbf{e}_n(\xi_c) \geq 0 \quad \mathbf{x} \in \Gamma_c \quad (3.4)$$

όπου g_n είναι η συνάρτηση κάθετου διάκενου (normal gap function) και $\mathbf{e}_n(\xi_c)$ το μοναδιαίο διάνυσμα της εξωτερικής καθέτου της επιφάνειας στόχου στο σημείο επαφής.

Καθώς το σημείο επαφής κινείται κατά μήκος του συνόρου της επιφάνειας στόχου αναπτύσσεται δύναμη τριβής κατά την εφαπτομενική διεύθυνση του συνόρου στόχου που αντιστέκεται στην εφαπτομενική σχετική κίνηση. Η εφαπτομενική συνάρτηση ολίσθησης g_t είναι το μέτρο της σχετικής μετακίνησης του σημείου επαφής κατά μήκος της άκαμπτης επιφάνειας και ορίζεται ως

$$g_t = \| \dot{\mathbf{x}}^0 \| (\xi_c - \xi_c^0) \quad (3.5)$$

όπου $\dot{\mathbf{x}}^0, \xi_c^0$ είναι το εφαπτομενικό διάνυσμα και η φυσική συντεταγμένη στο προηγούμενο χρονικό βήμα ή βήμα φόρτισης, αντίστοιχα [27].

3.2.2 Διατύπωση του προβλήματος συνοριακών συνθηκών με επαφή

Η μαθηματική διατύπωση του γενικού προβλήματος επαφής για τη περίπτωση γραμμικού ελαστικού υλικού γράφεται ως ακολούθως [27]

- Διαφορική εξίσωση ισορροπίας

$$\sigma_{ij,j} + f_i^B = 0 \quad \mathbf{x} \in \Omega \quad (3.6)$$

- Συνοριακές συνθήκες

$$\begin{aligned} u_i(\mathbf{x}) &= 0 & \mathbf{x} \in \Gamma^g \\ \sigma_{ij} n_j &= f_i^S & \mathbf{x} \in \Gamma^S \end{aligned} \quad (3.7)$$

- Συνθήκες επαφής

Οι συνθήκες επαφής αποτελούνται από τη συνθήκη μη αλληλοδιείσδυσης (no penetration), την συνθήκη μηδενισμού της κάθετης δύναμης επαφής στη περίπτωση αποκόλλησης (zero positive contact force) και τη συνθήκη συνέπειας της επαφής (consistency condition) οι οποίες διατυπώνονται από τις [27]

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^T \mathbf{e}_n + g_n &\geq 0 \\ \sigma_n &\geq 0 & \mathbf{x} \in \Gamma_c \\ \sigma_n (\mathbf{u}^T \mathbf{e}_n + g_n) &= 0 \end{aligned} \quad (3.8)$$

Για την επίλυση του προβλήματος χρησιμοποιείται είτε η μέθοδος πολλαπλασιαστών Lagrange ή η μέθοδος ποινής (penalty method). Ο ανισοτικός περιορισμός επαφής (inequality contact constraint) της Σχέσης 2.8 μπορεί να θεωρηθεί με τη μόνωση ενός κλειστού κυρτού συνόλου που ορίζεται από [27]

$$K = \left\{ \mathbf{w} \in [H^1(\Omega)]^N \mid w|_{\Gamma_c} = 0 \text{ και } \mathbf{w}^T \mathbf{e}_n + g_n \geq 0 \text{ στο } \Gamma_c \right\} \quad (3.9)$$

Τα στοιχεία του κυρτού συνόλου K ικανοποιούν όλους τους κινηματικούς περιορισμούς (displacement conditions). Εάν \mathbf{u} είναι η λύση των Εξισώσεων (3.6)- (3.8) τότε $\mathbf{u} \in K$.

3.3 Διαδικασία ανάλυσης επαφής

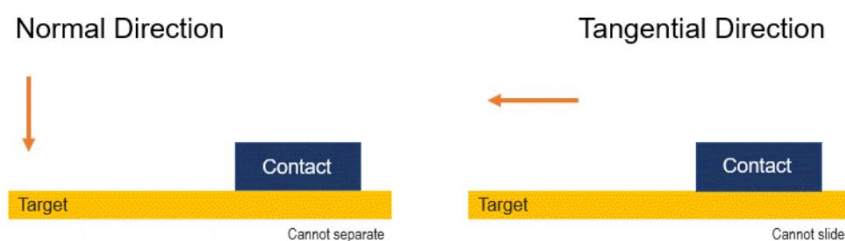
Τα απαραίτητα βήματα της ανάλυσης επαφής μεταξύ σωμάτων είναι [27]

- Ο καθορισμός του είδους επαφής των ζευγών των επιφανειών που βρίσκονται σε επαφή ή λόγω της κινηματικής τους είναι δυνατή η επαφή τους.
- Ο εντοπισμός του πρώτου σημείου επαφής
- Ο υπολογισμός της δύναμης επαφής και η στιβαρότητα της επαφής κατά τη κάθετη στη διεπιφάνεια διεύθυνση.

3.2.3 Καθορισμός των ζευγών και του τύπου της επαφής

Επειδή η θέση του συνόρου επαφής δεν είναι γνωστή εκ των προτέρων, είναι αναγκαίος ο καθορισμός ζευγών επιφανειών που βρίσκονται σε επαφή ή είναι πιθανόν να έρθουν σε επαφή ιδιαίτερα στη περίπτωση προβλημάτων ανάπτυξης μεγάλων παραμορφώσεων στα οποία η γεωμετρία των συνόρων μεταβάλλεται σημαντικά κατά την ανάλυση. Είναι επίσης απαραίτητος ο χαρακτηρισμός της διεπιφάνειας επαφής σε επαφή συγκόλλησης (weld contact, bonded contact), σε επαφή μη διαχωρισμού (no separation), σε επαφή άνευ τριβής (frictionless contact), σε επαφή με τριβή (frictional contact), σε τραχεία επαφή (rough contact) [27].

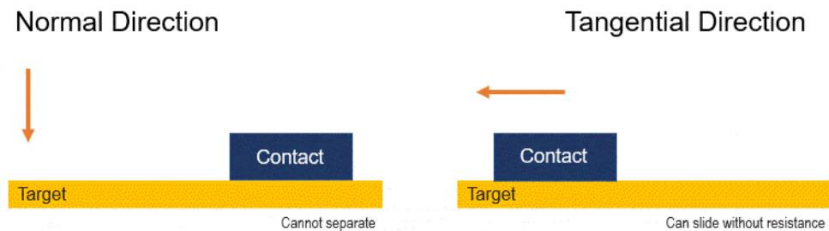
Στην επαφή συγκόλλησης (bonded contact) δεσμεύονται πλήρως η διείδυση, η αποκόλληση και η σχετική ολίσθηση των σωμάτων και ο κόμβος επαφής (slave node) συνδέεται άκαμπτα με το στοιχείο στόχος (master element) αποτρέποντας κάθε σχετική κίνηση στη διεπιφάνεια ([32],[33],[34]).



Σχήμα 3.2 Επαφή συγκόλλησης

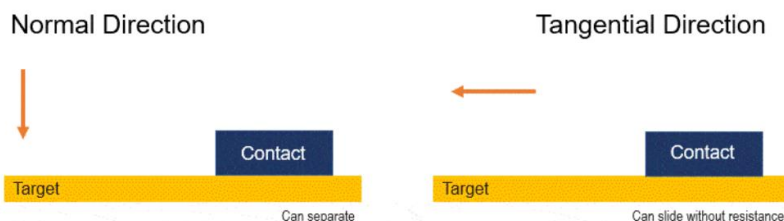
Επειδή οι επιφάνειες επαφής όλων των επιλεγμένων ζευγών θεωρούνται ήδη σε επαφή χωρίς να επιτρέπεται ολίσθηση και αποχωρισμός, δεν απαιτείται αλγόριθμος αναζήτησης. Ο τύπος της επαφής συγκόλλησης είναι ισοδύναμος με τη τοποθέτηση στοιχείου άκαμπτου συνδέσμου (rigid link element) τόσο κατά τη κάθετη όσο και κατά τις εφαπτομενικές διευθύνσεις στη διεπιφάνεια. Κάθε γεωμετρικό διάκενο μεταξύ των επιφανειών κλείνει αυτόματα και κάθε αρχική διεξόδυση αμελείται. Επειδή η επιφάνεια επαφής δεν μεταβάλλεται κατά την εφαρμογή της φόρτισης επιτρέπει γραμμική επίλυση του προβλήματος επαφής([32],[33],[34]).

Κατά την επαφή μη διαχωρισμού (no separation contact), με τον εντοπισμό της επαφής οι επιφάνειες επαφής και στόχου δεσμεύονται κατά τη κάθετη διεύθυνση για το υπόλοιπο της ανάλυσης με δυνατότητα ολίσθησης.



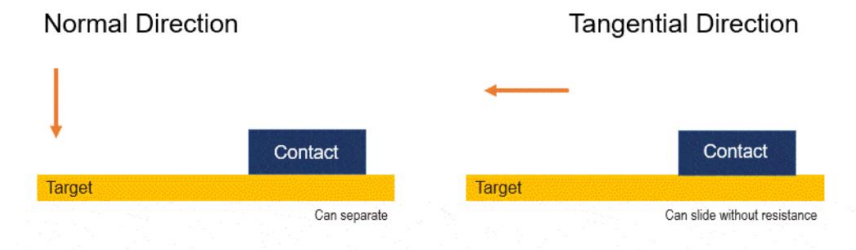
Σχήμα 3.2 Επαφή μη διαχωρισμού

Ο τύπος της επαφής άνευ τριβής (frictionless contact) είναι τυπικός για τη μοντελοποίηση μονόπλευρης επαφής (unilateral contact) κατά τον οποίο εάν συμβεί αποκόλληση η κάθετη πίεση στη διεπιφάνεια μηδενίζεται με αποτέλεσμα να δημιουργούνται διάκενα μεταξύ των σωμάτων αναλόγως της φόρτισης. Λόγω της αλλαγής της επιφάνειας επαφής κατά την επιβολή της φόρτισης, η λύση είναι μη γραμμική ενώ η ελεύθερη ολίσθηση των σωμάτων επιτρέπεται θέτοντας μηδενικό συντελεστή τριβής. Το μοντέλο οφείλει να είναι επαρκώς δεσμευμένο για την επιλογή του συγκεκριμένου τύπου επαφής. Για την υποβοήθηση της σταθεροποίησης του μοντέλου και την επίτευξη λογικών λύσεων τοποθετούνται ασθενή ελατήρια([32],[33],[34]).



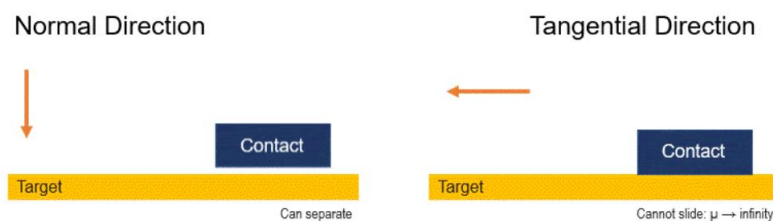
Σχήμα 3.3 Επαφή άνευ τριβής

Στο τύπο επαφής με τριβή, οι δυο γεωμετρίες επαφής μπορούν να φέρουν διατμητικές τάσεις έως κάποιου μεγέθους στη διεπιφάνεια τους πριν εκκινήσει σχετική μετακίνηση. Η κατάσταση αυτή ονομάζεται προσκόλλησης (sticking) στην οποία υπάρχει δυνατότητα αποκόλλησης των επιφανειών. Σχετική ολίσθηση των γεωμετριών εμφανίζεται όταν η αναπτυσσόμενη διατμητική τάση υπερβεί τη τιμή μιας ισοδύναμης διατμητικής τάσης ως ποσοστό της πίεσης επαφής([32],[33],[34]).



Σχήμα 3.4 Επαφή με τριβή

Η τραχεία επαφή, μοντελοποιεί απολύτως τραχείες επιφάνειες στις οποίες δεν εμφανίζεται σχετική ολίσθηση και δεν εκτελείται αυτόματα κλείσιμο των διάκενων. Ουσιαστικά, ο τύπος αυτός επαφής αντιστοιχεί σε άπειρο συντελεστή τριβής μεταξύ των επιφανειών.



Σχήμα 3.5 Τραχεία επαφή

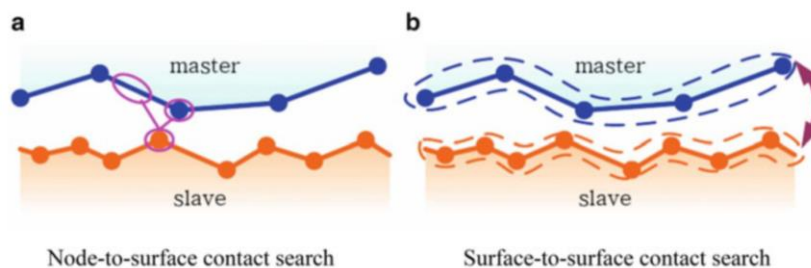
Συνοπτικά, τα είδη επαφής συνοψίζονται στον ακόλουθο Πίνακα (3.1) ([32],[33],[34])

Contact Names and Behavior		
Name	Gap Open/Close ?	Sliding Allowed ?
Bonded	No	No
Rough	Yes	No, infinite μ
No Separation	No	Yes, $\mu = 0$
Frictionless	Yes	Yes, $\mu = 0$
Frictional	Yes	Yes, if $F_{\text{sliding}} > F_{\text{friction}}$

3.2.4 Αναζήτηση της επαφής

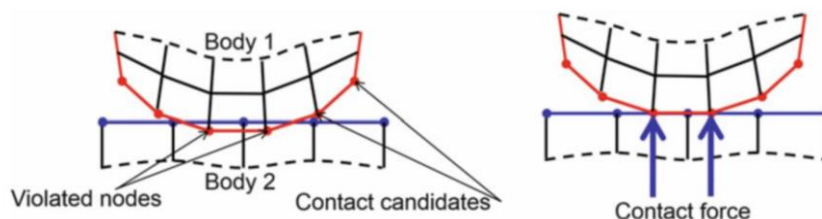
Ο απλούστερος τρόπος εκτέλεσης εντοπισμού της επιφάνειας επαφής είναι να καθοριστεί από το χρήστη το στοιχείο στόχου (master element) στο οποίο ο κόμβος επαφής (slave node) θα έρθει ή βρίσκεται σε επαφή [27]. Η μεθοδολογία αυτή είναι εφικτή μόνο όταν οι παραμορφώσεις είναι στοιχειώδεις και δεν εμφανίζεται σχετική κίνηση στη διεπιφάνεια επαφής. Οι κόμβοι επαφής και στόχου (master and slave nodes) συχνά έχουν ίδιες συντεταγμένες στο χώρο και συνδέονται με ελατήρια μόνο θλίψης (compression- only springs). Απαιτείται δε η μοντελοποίηση από το χρήστη σε στοιχεία επαφής και στόχου που συμπίπτουν στη διεπιφάνεια επαφής και η εκ των προτέρων γνώση της επιφάνειας επαφής [27].

Στη γενική περίπτωση, δεν είναι γνωστά εκ των προτέρων τα ζεύγη των επιφανειών που θα έρθουν σε επαφή και ως εκ τούτου είναι αναγκαία η επιλογή όλων των πιθανών υποψήφιων. Κατά την ανάλυση επαφής, το πρόγραμμα αναζητά σε όλα τα ζεύγη επαφής και εντοπίζει εκείνα πραγματικής επαφής, δηλαδή εκείνα που παραβιάζουν τη συνθήκη αλληλοδιείσδυσης (impenetrability condition). Η αναζήτηση αυτή επαναλαμβάνεται πολλές φορές σε κάθε επανάληψη της μη γραμμικής ανάλυσης [27].



Σχήμα 3.6 Node-to-surface και surface-to-surface

Γενικά, η αναζήτηση επαφής κατηγοριοποιείται σε κόμβο προς επιφάνεια (node-to-surface) και επιφάνεια προς επιφάνεια αναζήτηση (surface-to-surface) (Σχήμα 3.6). Η πρώτη αναζητά εάν ο κόμβος επαφής διεισδύει της επιφάνειας στόχου και συνήθως χρησιμοποιείται όταν η επιφάνεια



Σχήμα 3.7 Αναζήτηση επαφής και δύναμη επαφής

στόχος είναι απολύτως δύσκαμπτη, ενώ η δεύτερη αναζητά τη παραβίαση της συνθήκης αλληλοδιείσδυσης μεταξύ επιφανειών όπου επιβάλλονται δυνάμεις επαναφοράς στους αντίστοιχους

κόμβους και είναι κατάλληλη για επαφή μεταξύ εύκαμπτων σωμάτων υπό μεγάλη ολίσθηση που δεν είναι ξεκάθαρη η διάκριση των επιφανειών επαφής και στόχου [27].

3.3 Επιλογή αλγόριθμου επαφής

Η αριθμητική μοντελοποίηση της επαφής οφείλει να ικανοποιεί τα παρακάτω κριτήρια ([27],[32],[33],[34])

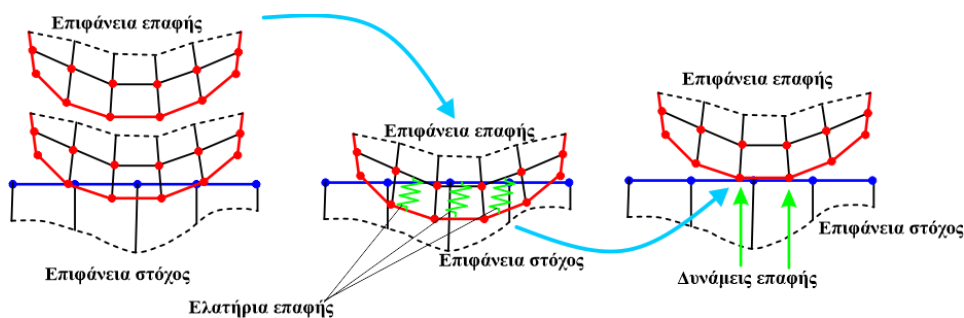
- Περιορισμός της διείσδυσης μεταξύ των σωμάτων (Συνθήκη συμβιβαστού επαφής)
- Στο στατικό πρόβλημα, ικανοποίηση της ισορροπίας των εξωτερικά επιβαλλόμενων δυνάμεων και των δυνάμεων επαφής.
- Ικανοποίηση της αρχής διατήρησης της ορμής στα δυναμικά προβλήματα.

Στην επιλογή επαφής surface-to surface διατίθενται από τα περισσότερα των προγραμμάτων Π.Σ. οι ακόλουθοι αλγόριθμοι([27],[32],[33],[34])

- Μέθοδος ποινής (penalty method),
- Επαυξημένη μέθοδος Lagrange (Augmented Lagrangian method),
- Μέθοδος πολλαπλασιαστών Lagrange κατά τη κάθετη (Normal multiplier formulation) και εφαπτομενική διεύθυνση της επιφάνειας επαφής,
- Μέθοδος δέσμευσης πολλαπλών σημείων (multipoint constraint).

3.3.1 Μέθοδος ποινής

Η μέθοδος ποινής για την επίτευξη σχέσης μεταξύ των δυο επιφανειών χρησιμοποιεί δύσκαμπτα ελατήρια (Σχήμα 3.8) με τα οποία αποφεύγεται ή περιορίζεται σε κάποια επιτρεπτή μικρή τιμή η διείσδυση τους. Με το τρόπο αυτό μοντελοποιείται η δυσκαμψία επαφής κατά τη κάθετη και κατά την εφαπτομενική διεύθυνση (normal and tangential contact stiffness) οι οποίες είναι συνάρτηση των ιδιοτήτων των υλικών, της γεωμετρίας των επιφανειών καθώς και της κινηματικής των σωμάτων([27],[32],[33],[34]).



Σχήμα 3.8 Μέθοδος ποινής

Αρχικά θεωρείται ότι αναπτύσσεται κατά την επαφή μικρή διείσδυση $\Delta \mathbf{u}$ την οποία η μέθοδος προσπαθεί να επαναφέρει με την επιβολή δυνάμεων επαφής αντίθετης κατεύθυνσης ίσες με

$$\mathbf{F} = \mathbf{K} \Delta \mathbf{u} \quad (3.10)$$

Επί της αρχής η μέθοδος ποινής διαχειρίζεται την επαφή ως ένα δύσκαμπτο ελατήριο με κατάλληλη σταθερά ώστε η τελική διείσδυση μεταξύ των σωμάτων να είναι σχεδόν μηδενική.

Εάν συμβολίσουμε με K_n τη δυσκαμψία επαφής κατά τη κάθετη διεύθυνση και Δu_n την αντίστοιχη διείσδυση, η κάθετη δύναμη επαφής δίνεται από την

$$P = \begin{cases} 0 & \Delta u_n \geq 0 \\ K_n \Delta u_n & \Delta u_n < 0 \end{cases} \quad (3.11)$$

Κατ' αντιστοιχία, με K_t συμβολίζουμε τη δυσκαμψία επαφής κατά την εφαπτομενική διεύθυνση και $\Delta u_1, \Delta u_2$ οι ολισθήσεις κατά τις δυο διευθύνσεις. Τότε, οι αναπτυσσόμενες δυνάμεις τριβής δίνονται από τη

$$T_i = \begin{cases} K_t v_i & \|T\| = \sqrt{T_1^2 + T_2^2} - \mu P \leq 0 \\ \mu P \frac{\Delta u_i}{\|\Delta \mathbf{u}\|} & \|T\| = \sqrt{T_1^2 + T_2^2} - \mu P = 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{κατάσταση προσκόλλησης (sticking)} \\ \text{κατάσταση ολίσθησης (slip)} \end{array} \quad (3.12)$$

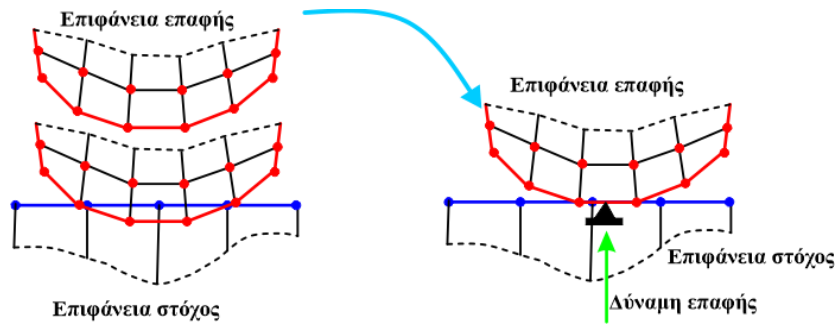
3.3.2 Επαυξημένη μέθοδος Lagrange

Η μέθοδος αποτελείται από σειρά επαναλήψεων της μεθόδου ποινής κατά την οποία η τάση επαφής και οι τάσεις τριβής επαυξάνονται σε κάθε επανάληψη για την ικανοποίηση των εξισώσεων ισορροπίας ώστε η τελική διείσδυση να είναι μικρότερη της επιτρεπόμενης. Έτσι η κάθετη δύναμη επαφής είναι της μορφής

$$F_n = K_n u_n + \lambda \quad (3.13)$$

όπου με λ συμβολίζεται η επαύξηση της δύναμης επαφής ή διαφορετικά ο πολλαπλασιαστής Lagrange([27],[32],[33],[34]).

Σε σύγκριση με τη μέθοδο ποινής, η επαυξημένη μέθοδος παρουσιάζει καλύτερη κατάσταση και είναι λιγότερο ευαίσθητη στο μέγεθος της δυσκαμψίας επαφής. Συνήθως όμως απαιτούνται περισσότερες επαναλήψεις ειδικά σε προβλήματα μεγάλης παραμόρφωσης της επιφάνειας επαφής.



Σχήμα 3.9 Μέθοδος Lagrange

3.3.3 Μέθοδος Lagrange

Η μέθοδος Lagrange αντιμετωπίζει την επαφή ως απόλυτη στήριξη (Σχήμα 3.9) και συνεπώς απαιτεί τη πλήρη ικανοποίηση της συνθήκης μη αλληλοδιείσδυσης στη περίπτωση επαφής και την μηδενική ολίσθηση υπό συνθήκες επαφής προσκόλλησης (sticking contact). Οι τρεις συνιστώσες της δύναμης επαφής επιλέγονται ως επιπλέον βαθμοί ελευθερίας του προβλήματος με αποτέλεσμα την αύξηση του υπολογιστικού κόστους σε σύγκριση με την Επαυξημένη Μέθοδο Lagrange([27],[32],[33],[34]).

3.3.4 Μέθοδος πολλαπλασιαστών Lagrange

Ο αλγόριθμος των πολλαπλασιαστών Lagrange εφαρμόζεται κατά τη κάθετη διεύθυνση και η μέθοδος ποινης στο εφαπτομενικό επίπεδο με τον οποία επιβάλλεται μηδενική ή σχεδόν μηδενική διείσδυση ενώ επιτρέπει μικρή ολίσθηση για τη συνθήκη επαφής προσκόλλησης. Η μέθοδος αντί της ανάλυσης της δύναμης επαφής σύμφωνα με τη δυσκαμψία επαφής και της διείσδυσης προσθέτει για την ικανοποίηση του συμβιβαστού της επαφής (contact compatibility) τη πίεση επαφής ως επιπλέον βαθμό ελευθερίας του προβλήματος. Έτσι, δεν εξαρτάται της επιλογής του K_n αλλά απαιτεί άμεσο επιλύτη (Direct solver) για την επίλυση με αύξηση του υπολογιστικού κόστους([27],[32],[33],[34]).



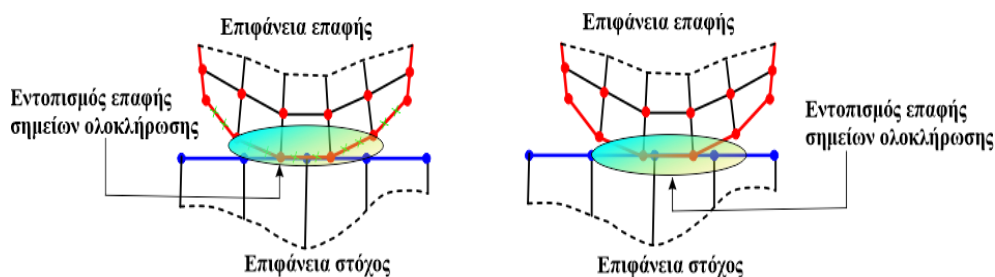
Σχήμα 3.10 Κατάσταση επαφής

Στη μέθοδο εμφανίζεται συχνά το φαινόμενο του κροταλισμού (chattering) κατά το οποίο λόγω της βηματικής συνάρτησης της κατάστασης επαφής όταν μεταβαίνει απότομα από τη κατάσταση

ανοίγματος-απομάκρυνσης (Σχήμα 3.10α) στη κατάσταση επαφής- κλεισίματος δημιουργούνται προβλήματα σύγκλισης. Το φαινόμενο του κροταλισμού αποφεύγεται με χαλάρωση της συνθήκης συμβιβαστού επιτρέποντας μικρή ανοχή διείσδυσης (Σχήμα 3.10β).

3.4 Στοιχεία επιλογής των αλγόριθμων επαφής στο ANSYS

Ανάλογα του αλγόριθμου ικανοποίησης της συνθήκης συμβιβαστού επαφής κατά τη κάθετη διεύθυνση, ο τρόπος εντοπισμού των τμημάτων επιφανείας των ζευγών που έρχονται σε επαφή είναι διαφορετικός (Σχήμα 3.11). Έτσι, η **Μέθοδος Ποινής** και η **Επαυξημένη Μέθοδος Laplace** ελέγχουν την ανάπτυξη επαφής στα **σημεία ολοκλήρωσης** (integration points, Gauss points) των στοιχείων της επιφάνειας επαφής (slave). Αντίθετα στη κάθετη μέθοδο Lagrange, της οποίας η ονομασία προέρχεται από την εφαρμογή της κατά τη κάθετη διεύθυνση και την εφαρμογή μεθόδων ποινής κατά την εφαπτομενική, ο εντοπισμός πραγματοποιείται με εξέταση της απόστασης των **κόμβων των στοιχείων** της επιφάνειας επαφής (slave) από την επιφάνεια στόχου (master). Ο εντοπισμός μέσω των κόμβων των στοιχείων χειρίζεται την επαφή ελαφρώς καλύτερα στη περίπτωση ελέγχου ακμών([32],[33],[34]).



Σχήμα 3.11 Εντοπισμός επαφής

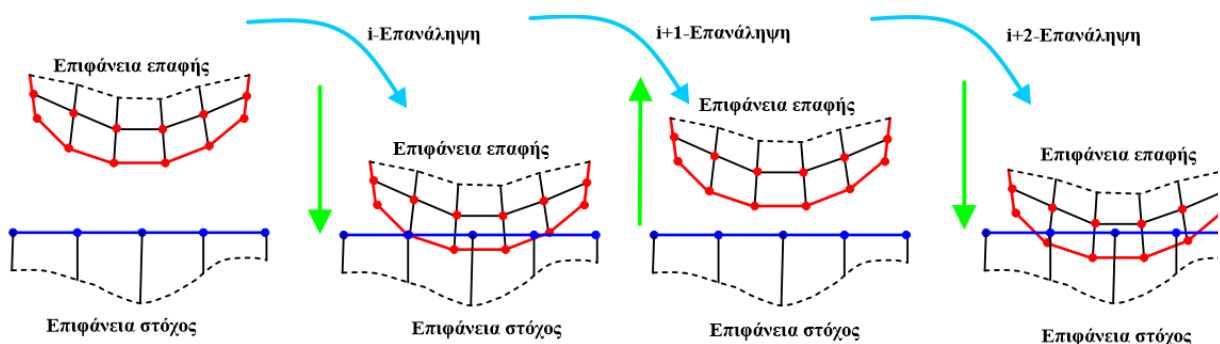
Η **επαυξημένη μέθοδος Lagrange** προτείνεται για προβλήματα επαφής με ή άνευ τριβής στα οποία αναμένεται η ανάπτυξη **μεγάλων παραμορφώσεων**, ενώ εκτελούνται αυτόματα από το πρόγραμμα (program controlled) πρόσθετοι έλεγχοι της κάθετης δυσκαμψίας (normal stiffness) για μείωση της διείσδυσης([32],[33],[34]). Εάν παρουσιαστούν προβλήματα ακρίβειας ή/και σύγκλισης, ο χρήστης μπορεί να επέμβει με την εισαγωγή ενός **πολλαπλασιαστή της κάθετης δυσκαμψίας** η οποία υπολογίζεται αυτόματα από το πρόγραμμα. Όσο μικρότερος είναι ο πολλαπλασιαστής τόσο περισσότερο χαλαρώνει ο περιορισμός μη διείσδυσης των επιφανειών και τόσο ταχύτερη γίνεται η σύγκλιση λόγω του μικρότερου αριθμού επαναλήψεων. Οι προεπιλεγμένες (default) τιμές του προγράμματος για επιφάνειες **χωρίς δυνατότητα αποκόλλησης και ολίσθησης** κατά την επίτευξη επαφής είναι **10** και **1** για **όλες τις υπόλοιπες**. Κάποιες γενικές οδηγίες για την επιλογή του πολλαπλασιαστή από τον χρήστη είναι

- Σε προβλήματα που η διόγκωση του υλικού είναι η κυρίαρχη μορφή παραμόρφωσης **1** και
- Σε προβλήματα όπου κυριαρχεί η καμπτική παραμόρφωση ή/και παρουσιάζονται προβλήματα σύγκλισης, **μεταξύ του 0.01 και του 0.1**

Η κάθετη δυσκαμψία είναι η πιο σημαντική παράμετρος του αλγόριθμου που επηρεάζει τόσο την ακρίβεια όσο και τη συμπεριφορά της σύγκλισης. Η επιλογή μιας μεγάλης τιμής αυξάνει την ακρίβεια των αποτελεσμάτων αλλά συνήθως δυσκολεύει τη σύγκλιση. Εάν επιλεγεί πολύ μεγάλη τιμή είναι πιθανή η εμφάνιση κατά τις επαναλήψεις καταστάσεων διείσδυσης- αποκόλλησης χωρίς να επιτυγχάνεται επαφή (Σχήμα 3.12).

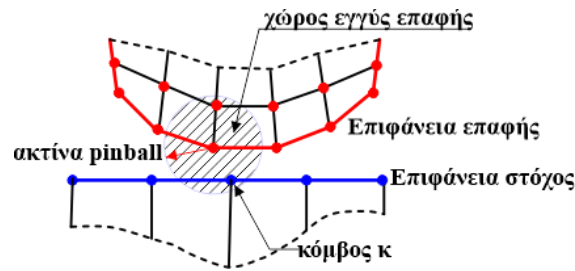
Επειδή ο πολλαπλασιαστής της κάθετης δυσκαμψίας είναι προσωπική επιλογή του χρήστη, είναι πιθανόν να διατηρηθούν τα προβλήματα σύγκλισης ή/και ακρίβειας του αλγορίθμου. Τότε με την επιλογή **επικαιροποίησης της δυσκαμψίας** σε κάθε επανάληψη της ικανοποίησης της ισορροπίας (**update stiffness at each iteration**), το πρόγραμμα προσαρμόζει τη τιμή στο τέλος κάθε επανάληψης του αλγόριθμου. Η επιλογή, **update stiffness at each iteration, aggressive** έχει την ίδια λειτουργία με μόνη διαφορά το ευρύτερο πεδίο των τιμών που λαμβάνει η κάθετη δυσκαμψία([32],[33],[34]).

Σε προβλήματα **με ή άνευ τριβής** επιλέγεται η **Επauξημένη μέθοδος Lagrange** ή **Κάθετη μέθοδος Lagrange**. Η μέθοδος που προτείνεται λόγω των ελκυστικών χαρακτηριστικών, του εύρους των προβλημάτων που αντιμετωπίζει καθώς και της ευελιξίας που διαθέτει είναι η **Επauξημένη μέθοδος Lagrange**. Η κάθετη μέθοδος Lagrange επιλέγεται όταν ο χρήστης δεν επιθυμεί ή δεν διαθέτει επαρκή δεδομένα της τιμής της κάθετης δυσκαμψίας και επιπροσθέτως επιθυμεί τη πλήρη ικανοποίηση της συνθήκης συμβιβαστού επαφής (μηδενική διείσδυση). Απαιτείται όμως επιλογή άμεσου επιλύτη (direct solver) που περιορίζει το μέγεθος των προβλημάτων προς επίλυση([32],[33],[34]).



Σχήμα 3.12 Αδυναμία εντοπισμού διεπιφάνειας

Η επιλογή **pinball region** είναι παράμετρος των στοιχείων της επιφάνειας επαφής (slave) με την οποία ο χώρος εντοπισμού των πιθανών σημείων επαφής της επιφάνειας στόχου (master) κάθε slave κόμβου διαιρείται σε εγγύς (near field) και μακρινού πεδίου (far field) ([32],[33],[34])



Σχήμα 3.13 Pinball region

Εάν ο κόμβος κ της επιφάνειας στόχου βρίσκεται εντός της pinball region του εξεταζόμενου σημείου επαφής θεωρείται σημείο του εγγύς πεδίου επαφής και ελέγχεται πιο προσεκτικά, αντίθετα με τα εκτός της περιοχής σημεία που δεν ελέγχονται με την ίδια ακρίβεια. Επιπρόσθετα, καθορίζεται το επιτρεπτό διάκενο της επαφής που δεν επιτρέπεται αποκόλληση και ολίσθηση καθώς και την επιτρεπόμενη τελική τιμή της διείσδυσης.

Στο πρόγραμμα υπάρχουν τρεις επιλογές της περιοχής pinball

- Της ελεγχόμενης από το πρόγραμμα (**program controlled**) κατά την οποία το μέγεθος της επιφάνειας υπολογίζεται αυτόματα βάσει των διαστάσεων και του είδους των στοιχείων της επιφάνειας στόχου.
- Αυτόματης ανίχνευσης τιμής (**auto detection value**) όπου η περιοχή επιλέγεται με ακτίνα ίση της τιμής ανοχής που έχει δοθεί στις αρχικές ρυθμίσεις των επαφών
- Της ακτίνας (**radius**) της περιοχής η οποία εισάγεται από τον χρήστη([32],[33],[34]).

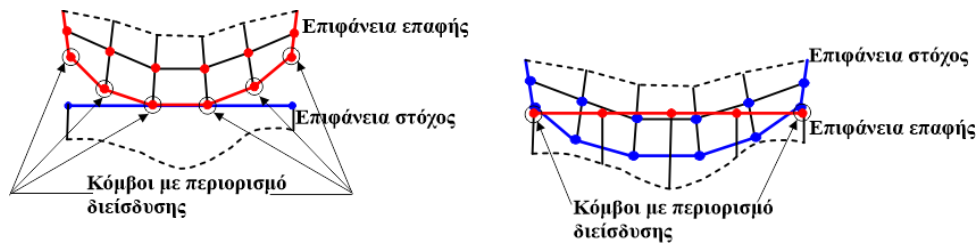
Για τον ορισμό των πιθανών ζευγών επιφανειών που έρχονται σε επαφή, εκτός του ορισμού τους από τον χρήστη σε επιφάνειες επαφής και στόχου υπάρχει η δυνατότητα αυτόματης επιλογής (**automatic selection**) από το πρόγραμμα. Ως προεπιλογή είναι η συμμετρική συμπεριφορά (**symmetric behaviour**) κατά την οποία οι επιφάνειες εναλλάσσονται από επιφάνειες επαφής σε επιφάνειες στόχου και αντίστροφα με συνέπεια να μην απαιτείται χαρακτηρισμός από το χρήστη των επιφανειών ως επαφής και στόχου και να δεσμεύεται τόσο η διείσδυση της επιφάνειας επαφής στην επιφάνεια στόχου όσο και αντίστροφα. Στη συμμετρική συμπεριφορά ο υπολογιστικός φόρτος αυξάνει σημαντικά και υπάρχει δυσκολία στην ερμηνεία των αποτελεσμάτων όπως της πραγματικής πίεσης επαφής. Κατά την επίλυση με τη μέθοδο αυτή εξάγονται αποτελέσματα και στις δυο επιφάνειες([32],[33],[34]).

Εάν ο χρήστης επιλέξει κατά την αυτόματη επιλογή την ασύμμετρη συμπεριφορά (**asymmetric behaviour**) μόνο οι επιφάνειες επαφής όπως ορίζονται από τον χρήστη δεσμεύονται σε διείσδυση στις επιφάνειες στόχου. Λανθασμένος χαρακτηρισμός των επιφανειών μπορεί να αυξήσει σημαντικά την διείσδυση των επιφανειών και να οδηγήσει σε εσφαλμένα αποτελέσματα, όπως παρουσιάζεται στο

Σχήμα (3.14). Η επισκόπηση των εξαγομένων αποτελεσμάτων είναι ξεκάθαρη και αναφέρονται μόνο στην επιφάνεια επαφής.

Το πρόγραμμα διαθέτει επίσης την επιλογή της αυτόματης ασύμμετρης συμπεριφοράς (**auto-asymmetric behaviour**) κατά την οποία η εναλλαγή του χαρακτηρισμού των επιφανειών πραγματοποιείται εσωτερικά του προγράμματος.

Υπενθυμίζεται ότι στις μεθόδους ποινής είναι δυνατή η εμφάνιση μικρής διείσδυσης λόγω χαλάρωσης του περιορισμού.



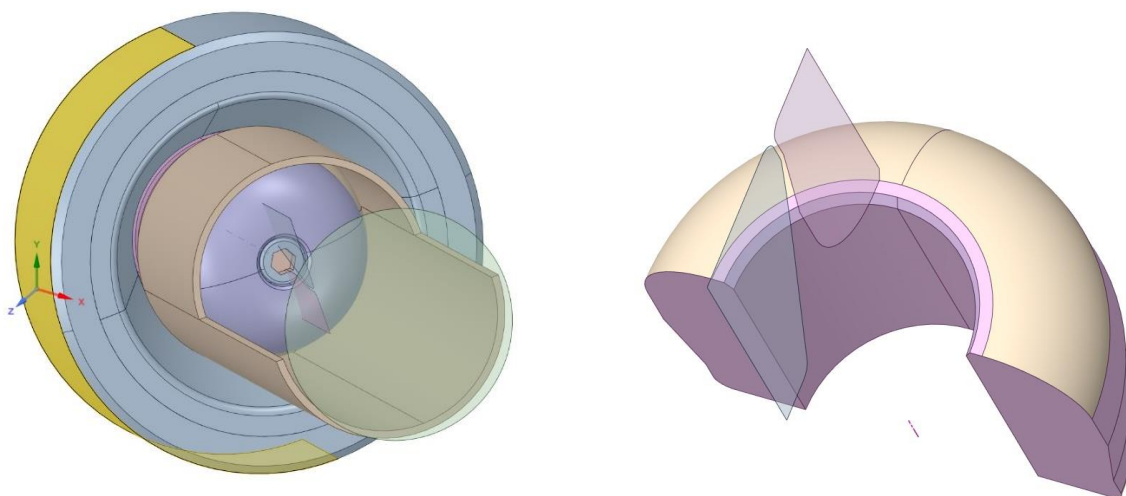
Σχήμα 3.14 Ασύμμετρη συμπεριφορά

Κατά την **ασύμμετρη συμπεριφορά**, ο εντοπισμός της επαφής στα σημεία ολοκλήρωσης έχει ως αποτέλεσμα την εμφάνιση μικρής διείσδυσης της επιφάνειας επαφής στην επιφάνεια στόχου, όπως φαίνεται στο Σχήμα (3.15).

4. ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΜΟΝΤΕΛΟΥ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ

4.1. Εισαγωγή

Στην εργασία εξετάζεται η εντατική και παραμορφωσιακή κατάσταση σωλήνα κατά την κατεργασία σωληνοποίησης με ολκή (tube forming) με σταθερό δρομέα (fixed plug). Κατά τη κατεργασία, ο αρχικών διαστάσεων σωλήνας προωθείται εντός μηχανής διαμόρφωσης (Σχήμα 1) εκ της οποίας εξέρχεται με τις επιθυμητές τελικές διαστάσεις.



Σχήμα 4.1 Γεωμετρία της διάταξης

Η κατεργασία σωλήνων με ολκή εντός σταθερού δρομέα (fixed plug) είναι ευρέως διαδεδομένη μέθοδος βιομηχανικής παραγωγής λόγω του καλού φινιρίσματος των επιφανειών και την υψηλή ποιότητα του τελικού διαμορφωμένου σωλήνα. Αναλόγως της γεωμετρίας της μήτρας και του σταθερού δρομέα είναι δυνατή η διαμόρφωση σωλήνα μειωμένου πάχους τοιχώματος και μείωσης ή αύξησης της τελικής διαμέτρου.

Υπό την επιβολή εφελκυστικού φορτίου, κατά τη διέλευση του ο σωλήνας υφίσταται πλαστική παραμόρφωση με αποτέλεσμα την αύξηση της τάσης διαρροής λόγω κράτυνσης του υλικού. Με το πέρας της κατεργασίας είναι σημαντικός ο έλεγχος των παραμενουσών τάσεων οι οποίες μεταβάλουν τις μηχανικές ιδιότητες και την αντοχή του υλικού σε κόπωση.

4.2. Περιγραφή του μοντέλου

Η προσομοίωση του προβλήματος με Π.Σ πρέπει να περιγράφει με ακρίβεια τη γεωμετρία του συνόρου και του χωρίου και συγχρόνως να εξασφαλίζει τη σύγκλιση, την επιθυμητή ακρίβεια και την ευστάθεια του επιλεγμένου δικτύου πεπερασμένων στοιχείων. Επιπρόσθετα, πρέπει να έχει τη

δυνατότητα ανάλυσης υλικών με ελαστοπλαστική συμπεριφορά σε προβλήματα γεωμετρικής μη-γραμμικότητας, πεπερασμένων μετατοπίσεων καθώς και δυνατότητα εντοπισμού και τροποποίησης των συνοριακών δεσμεύσεων κατά τη πιθανή επαφή του σώματος με άλλα σώματα.

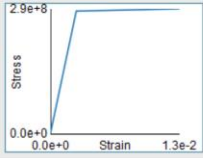
4.2.1. Μηχανικές ιδιότητες των υλικών

Τα υλικά των τμημάτων της διάταξης (σωλήνας, μήτρα) επελέγησαν με τις ακόλουθες μηχανικές ιδιότητες

- Ιδιότητες χάλυβα μήτρας

Structural	
▼ Isotropic Elasticity	
Derive from	Young's Modulus and Poisson's Ratio
Young's Modulus	2e+11 Pa
Poisson's Ratio	0,30000
Bulk Modulus	1,6667e+11 Pa
Shear Modulus	7,6923e+10 Pa
Isotropic Secant Coefficient of Thermal Expansion	1,2e-05 1/°C
Compressive Ultimate Strength	0 Pa
Compressive Yield Strength	2,5e+08 Pa

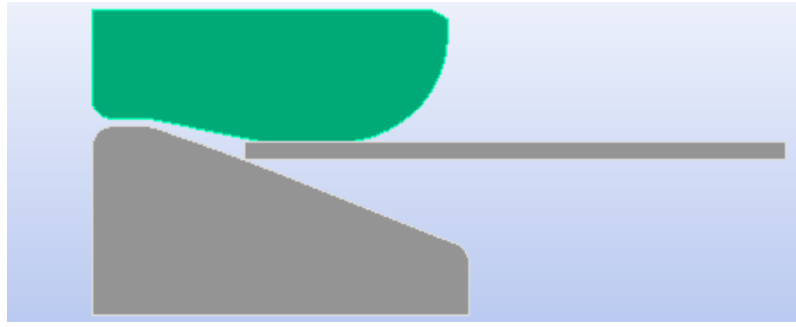
- Ιδιότητες κράματος χαλκού σωλήνα

Copper Alloy	
Structural	
▼ Isotropic Elasticity	
Derive from	Young's Modulus and Poisson's Ratio
Young's Modulus	1,1e+11 Pa
Poisson's Ratio	0,34000
Bulk Modulus	1,1458e+11 Pa
Shear Modulus	4,1045e+10 Pa
Bilinear Isotropic Hardening	
Isotropic Secant Coefficient of Thermal Expansion	1,8e-05 1/°C
Compressive Ultimate Strength	5e+08 Pa
Compressive Yield Strength	2,8e+08 Pa
Tensile Ultimate Strength	4,3e+09 Pa
Tensile Yield Strength	2,8e+08 Pa

και ελαστοπλαστική συμπεριφορά ισότροπα κρατυνόμενου υλικού (isotropic hardening).

4.2.2. Διακριτοποίηση του χωρίου

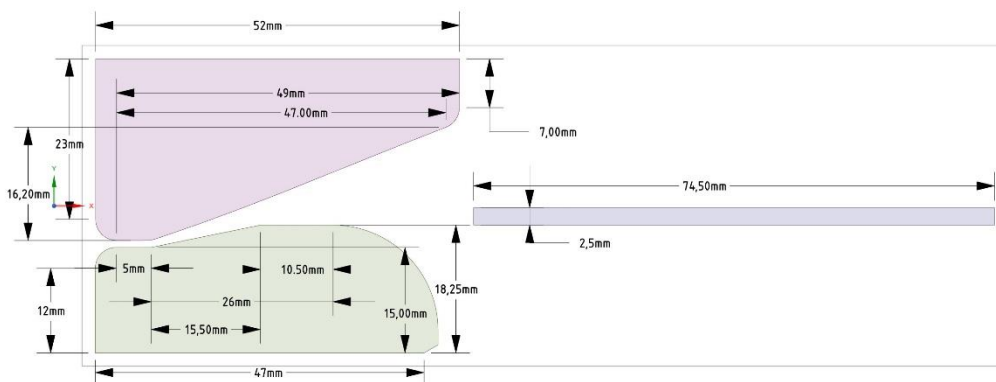
Το χωρίο του φυσικού προβλήματος που επιλύεται προκύπτει από περιστροφή του επιπέδου γεωμετρικού χωρίου του Σχήματος 4.1 κατά 360° ως προς το z- άξονα.



Σχήμα 4.1 Γεωμετρία του χωρίου

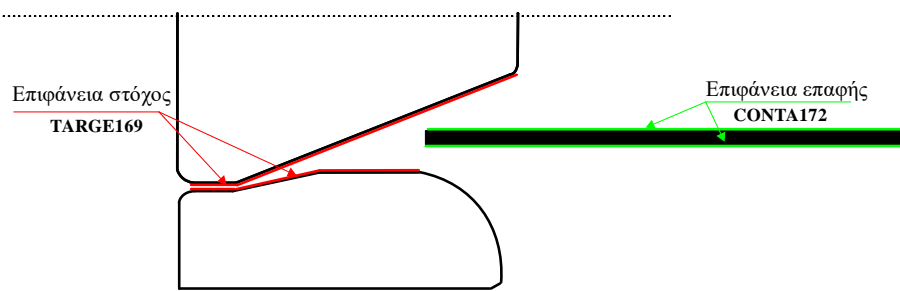
Το πρόβλημα ανήκει στη κατηγορία των τρισδιάστατων προβλημάτων με συμμετρική γεωμετρία, επιβαλλόμενη φόρτιση και συνθήκες στήριξης και επιλύονται με χρήση δισδιάστατων αξονοσυμμετρικών στοιχείων.

Τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά της διάταξης του εξεταζόμενου προβλήματος που επιλύεται παρουσιάζονται στο Σχήμα 4.2, με την οποία σωλήνας αρχικής εσωτερικής διαμέτρου 42mm και πάχους 2.5mm εξέρχεται της διάταξης με τελικό πάχος 1mm, εσωτερική διάμετρο 52mm και μείωση της επιφάνειας της διατομής κατά 52.36%.



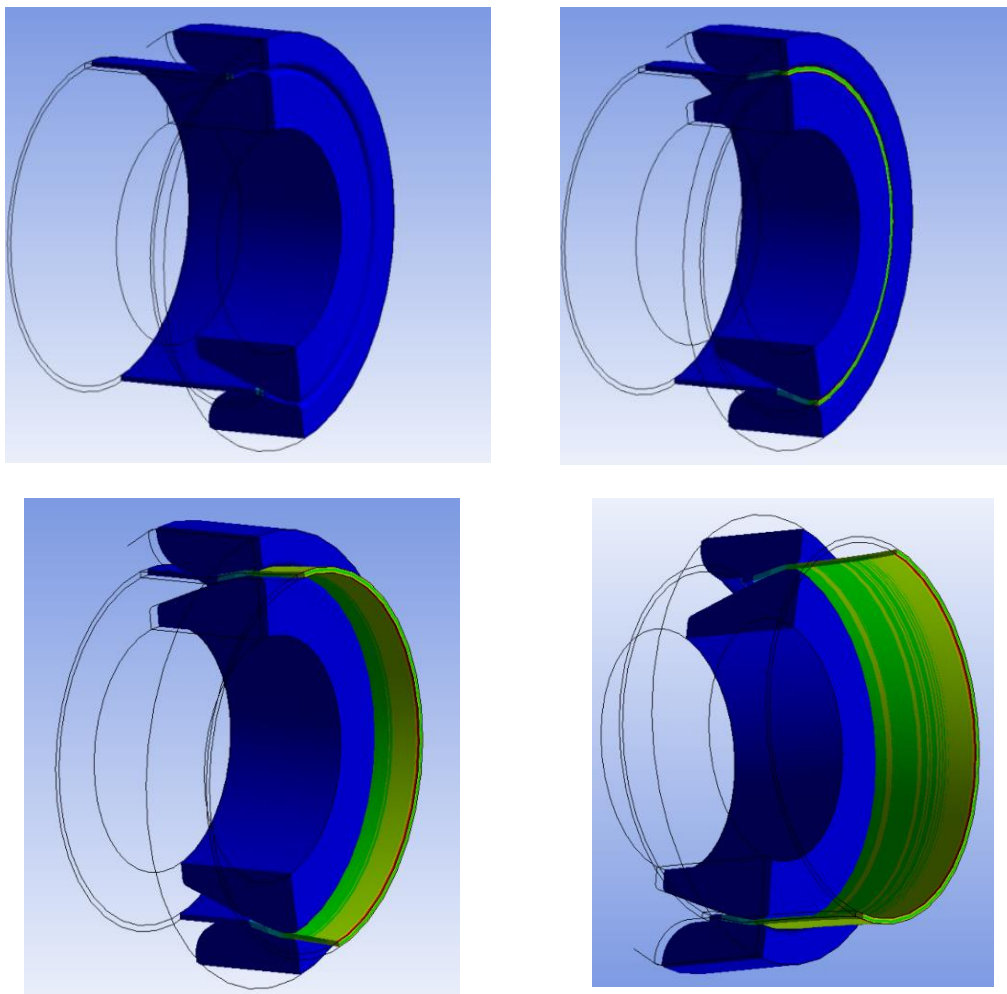
Σχήμα 4.2 Διαστάσεις διάταξης

Η διακριτοποίηση των επιφανειών επαφής και στόχου πραγματοποιείται με αξονοσυμμετρικά στοιχεία PLANE183 τα οποία διαθέτουν δυνατότητα ελαστοπλαστικής συμπεριφοράς υλικού, γεωμετρικής μη-γραμμικότητας και ανάπτυξης πεπερασμένων τροπών. Τα συνοριακά τμήματα των ορισμένων ως επιφάνειες επαφής και στόχου που υπάρχει πιθανότητα επαφής επενδύονται με στοιχεία CONTA172 και TARGE169 (Σχήμα 4.3) με τα ίδια γεωμετρικά χαρακτηριστικά των υποκείμενων στοιχείων που προσαρμόζονται([31],[32],[33],[34]).



Σχήμα 4.3 Στοιχεία επιφάνειας επαφής και στόχου

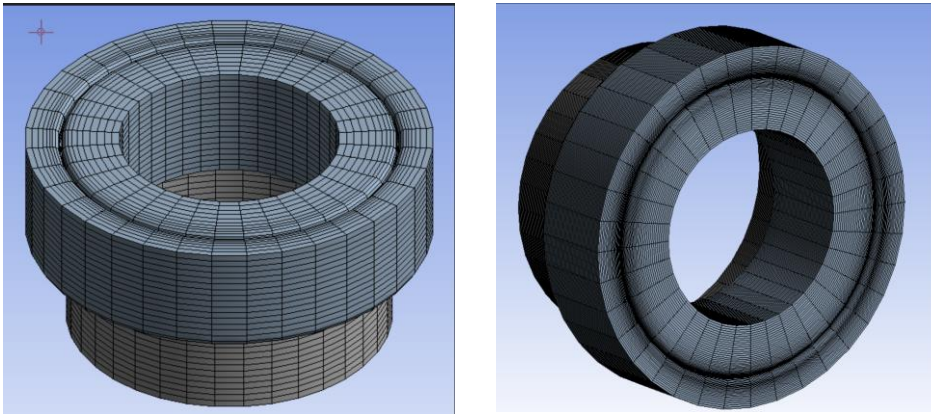
Στο Σχήμα 4.4 παρουσιάζονται στιγμιότυπα σε διαφορετικούς χρόνους της κατεργασίας διαμόρφωσης των επιθυμητών διαστάσεων του σωλήνα κατά τη διέλευση του από τη μήτρα.



Σχήμα 4.4 Στιγμιότυπα διέλευσης σωλήνα από τη μήτρα

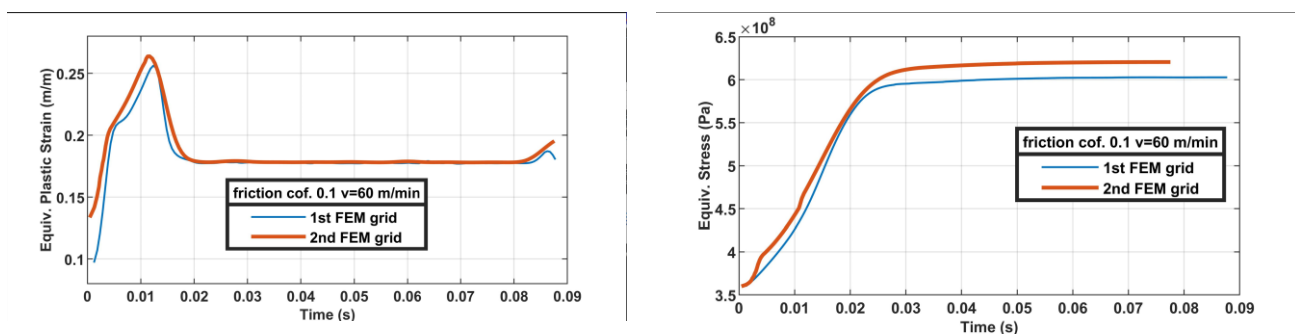
Στο Σχήμα 4.5 παρουσιάζονται τρισδιάστατα πλέγματα διακριτοποίησης Π.Σ που χρησιμοποιήθηκαν στην επίλυση του προβλήματος με διαφορετικές πυκνότητες. Η επιλογή της πυκνότητας του δικτύου είναι καθοριστικής σημασίας στην εύρεση λύσης μη γραμμικών προβλημάτων όπως και στην ακρίβεια των εξαγόμενων αποτελεσμάτων. Στη παρούσα εργασία εξετάζεται κατά πόσο χαρακτηριστικά μεγέθη

όπως η ισοδύναμη πλαστική τροπή και η ισοδύναμη τάση επηρεάζονται από μέγεθος του δικτύου ή συγκλίνουν σε συγκεκριμένη τιμή (mesh convergence).



Σχήμα 4.5 Διακριτοποίηση χωρίου

Για τον έλεγχο της σύγκλισης εκτελείται δυναμική ανάλυση σε ένα αραιότερο δίκτυο με 2547 στοιχεία και ένα πυκνότερο με 7928 Π.Σ για ταχύτητα διέλευσης 60m/min και συντελεστή τριβής διεπιφάνειας μήτρας- σωλήνα $\mu=0.1$.

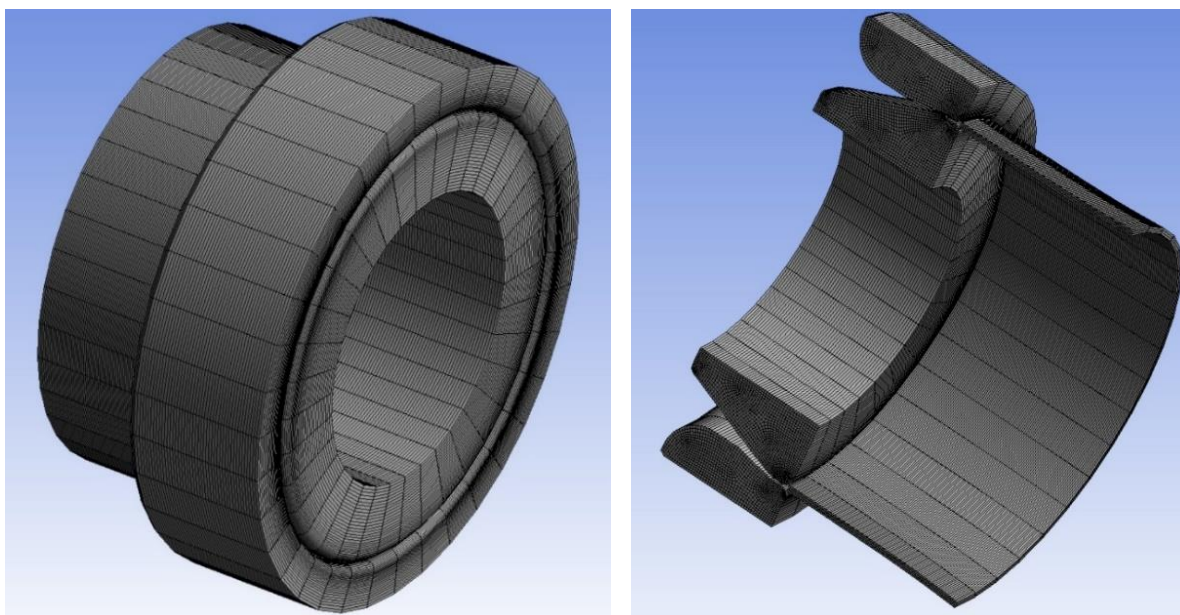


Σχήμα 4.6 Έλεγχος σύγκλισης δικτύου Π.Σ.

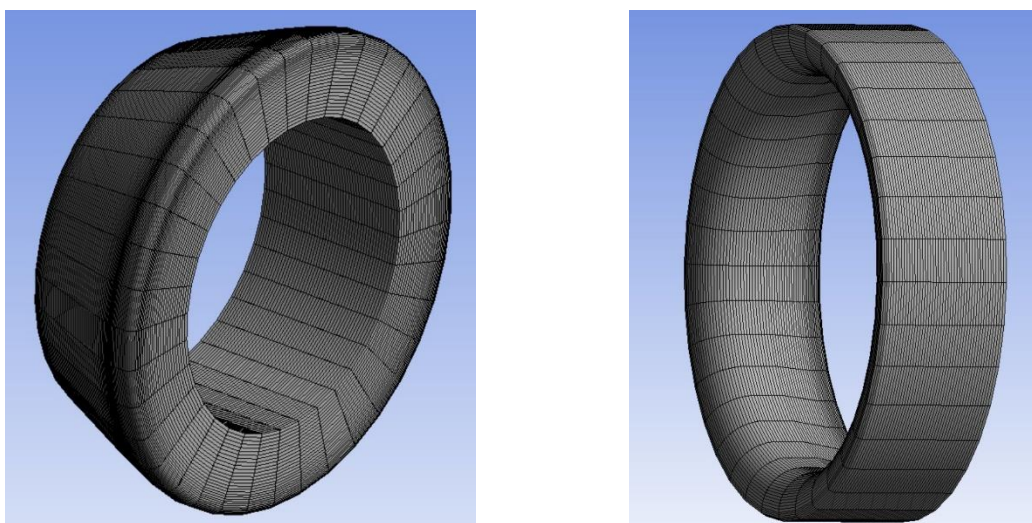
Στα διαγράμματα του Σχήματος 4.6 καταγράφεται η μεταβολή της ισοδύναμης πλαστικής τροπής και της ισοδύναμης τάσης συναρτήσει του χρόνου. Εκ των αποτελεσμάτων διαπιστώνεται μικρή μεταβολή των μεγεθών με την αύξηση της πυκνότητας του δικτύου ΠΣ. Περαιτέρω πύκνωση του δικτύου οδηγεί σε απαγορευτική αύξηση του υπολογιστικού χρόνου και ως εκ τούτου το πυκνότερο δίκτυο θεωρείται επαρκές για την επιθυμητή ακρίβεια των υπολογισμών.

5. ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΑΝΑΛΥΣΕΩΝ

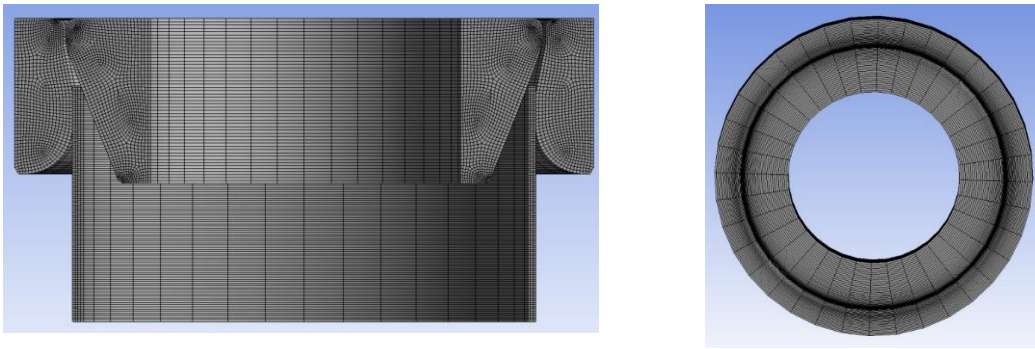
Εξετάζεται η εντατική και παραμορφωσιακή κατάσταση κατά την διαμόρφωση του εξεταζόμενου σωλήνα στις τελικές επιθυμητές διαστάσεις για σταθερή ταχύτητα διέλευσης εισόδου στη μήτρα 90m/min και συντελεστή τριβής διεπιφάνειας επαφής $\mu=0.1$. Τα εξαγόμενα αποτελέσματα έχουν προκύψει από τη δυναμική ανάλυση του μοντέλου για το πυκνότερο επιλεγμένο δίκτυο Π.Σ (Σχήμα 5.1). Στο Σχήμα 5.2 παρουσιάζονται ανεξάρτητα η διακριτοποίηση του κωνικού τμήματος (converging die) και του ευθυγράμμου τμήματος της μήτρας, ενώ στο Σχήμα 5.3 οριζόντια και εγκάρσια τομή της διάταξης.



Σχήμα 5.1 Διακριτοποίηση μοντέλου

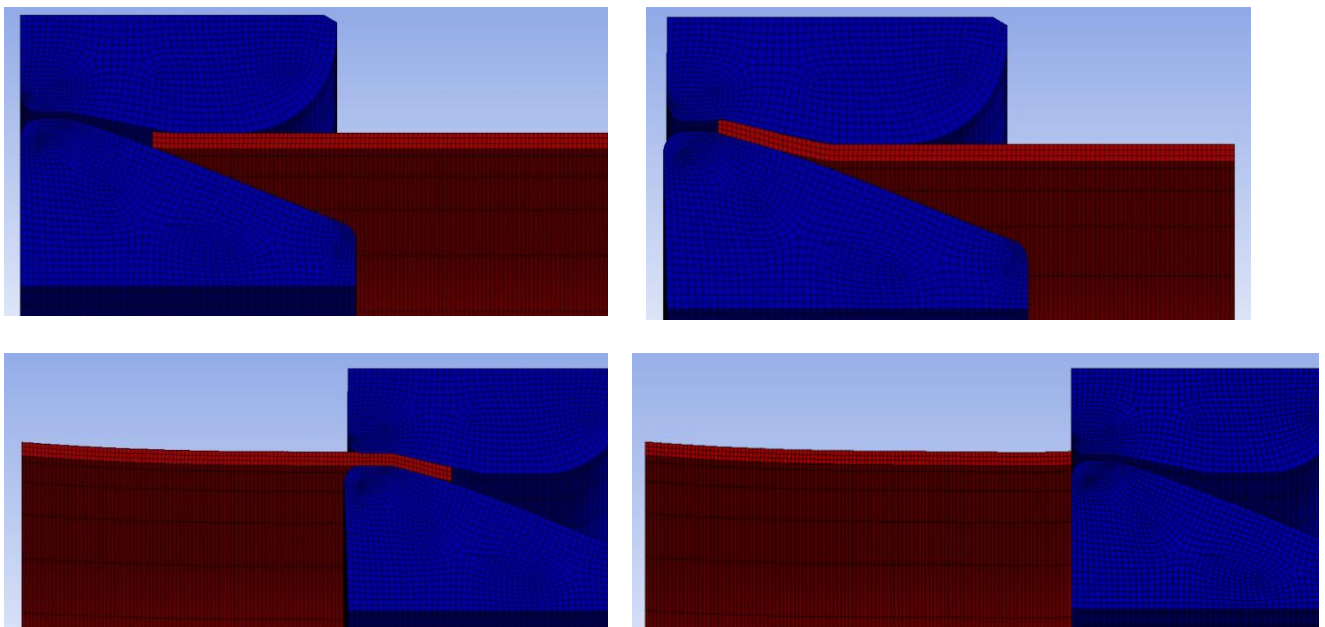


Σχήμα 5.2 Διακριτοποίηση κωνικού και σταθερού τμήματος μήτρας



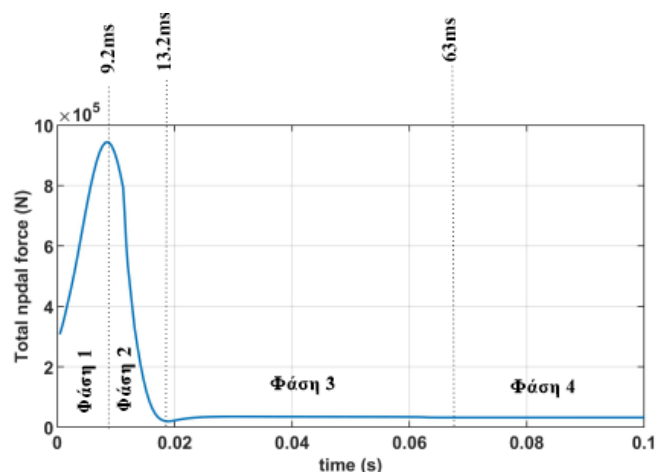
Σχήμα 5.3 Οριζόντια και εγκάρσια τομή του χωρίου

Κατά την εξέλιξη της κατεργασίας διακρίνονται τέσσερις φάσεις. Στη πρώτη φάση $[0, 9.20\text{ms}]$ πραγματοποιείται επαφή και είσοδος του σωλήνα στο κωνικό τμήμα βαθμιαίας μεταβολής του πάχους της διάταξης ενώ στη δεύτερη $[9.20\text{ms}, 13.2\text{ms}]$ ο σωλήνας εισέρχεται στο μορφής κυλινδρικού δακτυλίου τμήμα. Στη τρίτη φάση $[13.20\text{ms}, 66.1\text{ms}]$, ολοκληρώθηκε η κατεργασία τμήματος του σωλήνα και προωθούνται νέα τμήματα. Στη τέταρτη και τελική φάση $[66.1\text{ms}, \infty]$ το σύνολο του μήκους του σωλήνα μόλις έχει εξέλθει της διάταξης. Στο Σχήμα 5.4 παρουσιάζονται οι θέσεις του σωλήνα κατά την εξέλιξη της κατεργασίας.

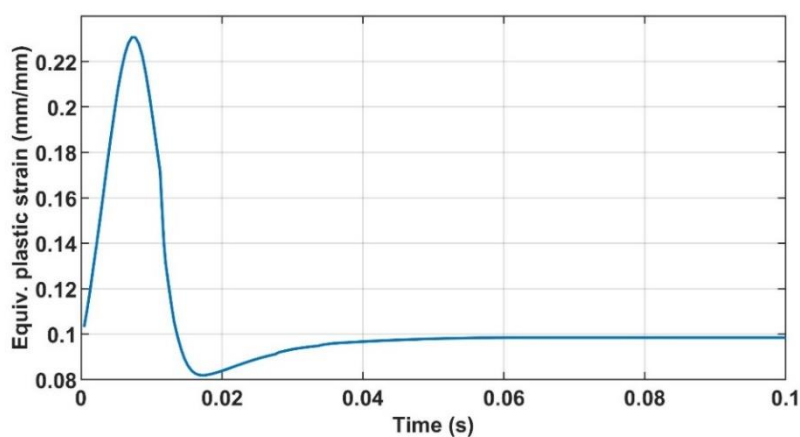


Σχήμα 5.4 Απεικονίσεις κατεργασίας στους χρόνους $t=0, 9.2, 13.2, 50, 63\text{ms}$

Στο Σχήμα 5.5 απεικονίζεται η αναπτυσσόμενη συνολική δύναμη του κόμβου 1^{ης} επαφής του σωλήνα με τη διάταξη (άνω κορυφή σωλήνα κατά την είσοδο- κόμβος ελέγχου) με μέγιστη τιμή 1019kN και παραμένουσα δύναμη 34.5kN.

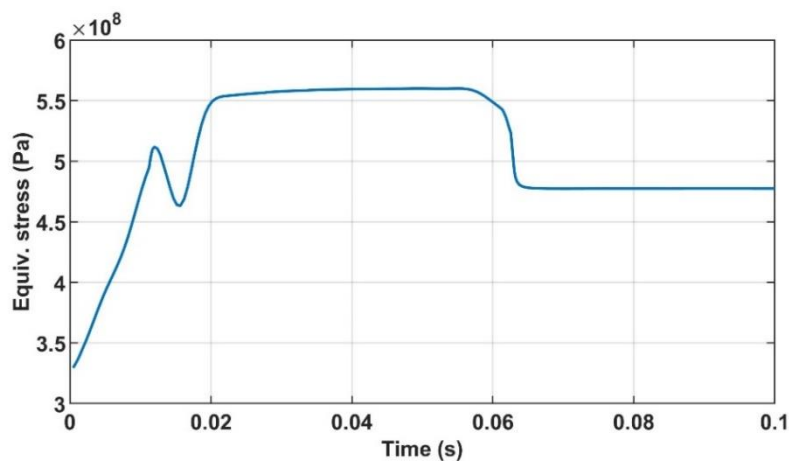


Σχήμα 5.5 Συνολική αναπτυσσόμενη επικόμβια δύναμη



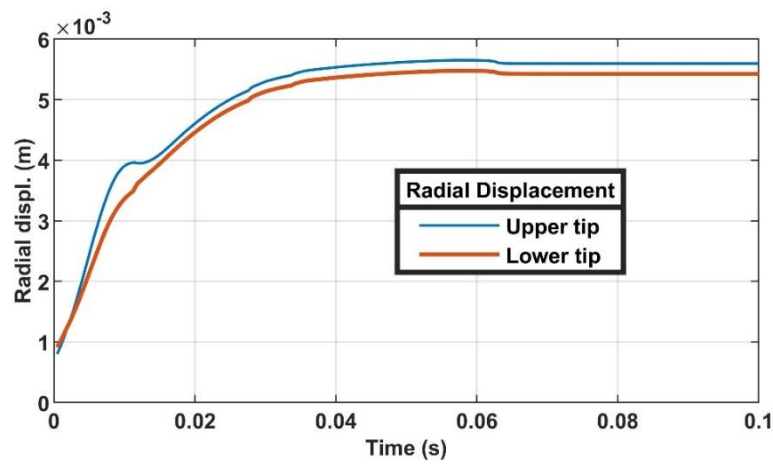
Σχήμα 5.6 Ισοδύναμη ενεργή πλαστική τροπή

Η ισοδύναμη ενεργή πλαστική τροπή και η ισοδύναμη τάση διαρροής στο κόμβο ελέγχου απεικονίζονται στα Σχήματα 5.6 και 5.7, με μέγιστες τιμές 0.26mm/mm και 560.4Mpa κατά την είσοδο του σωλήνα στη περιοχή του κυλινδρικού δακτυλίου, και παραμένουσες τιμές μετά το πέρας της κατεργασίας 0.10mm/mm και 470 Mpa, αντιστοίχως. Παρατηρούμε ότι αναπτύσσεται πλαστική ροή στο υλικό του σωλήνα αμέσως μετά την είσοδο του στη διάταξη.

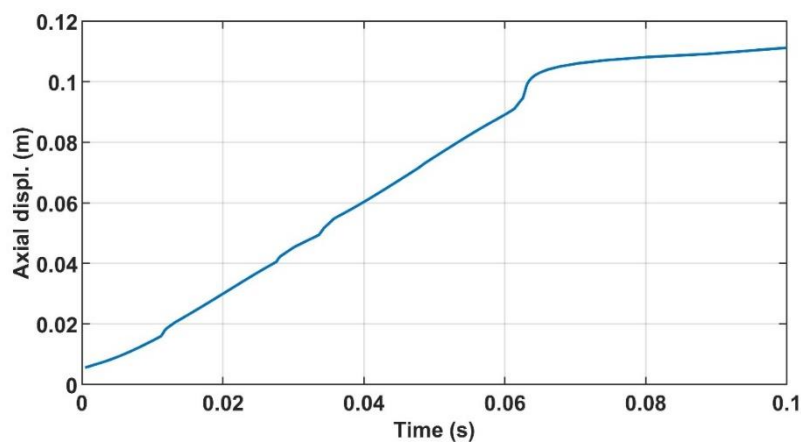


Σχήμα 5.7 Ισοδύναμη τάση διαρροής

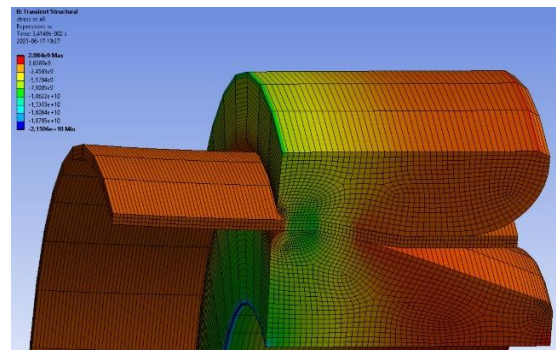
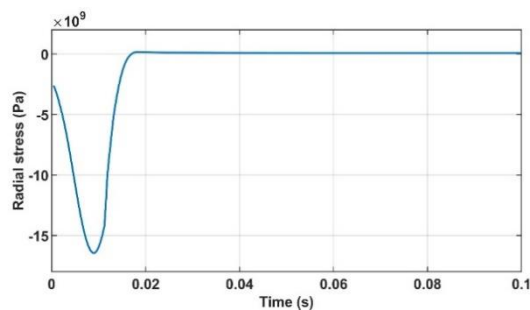
Η ακτινική μετατόπιση του κόμβου ελέγχου και του αντίστοιχου στην εσωτερική επιφάνεια του σωλήνα παρουσιάζονται συναρτήσει του χρόνου στο Σχήμα 5.8, ενώ στο Σχήμα 5.9 η διαμήκης μετατόπιση.



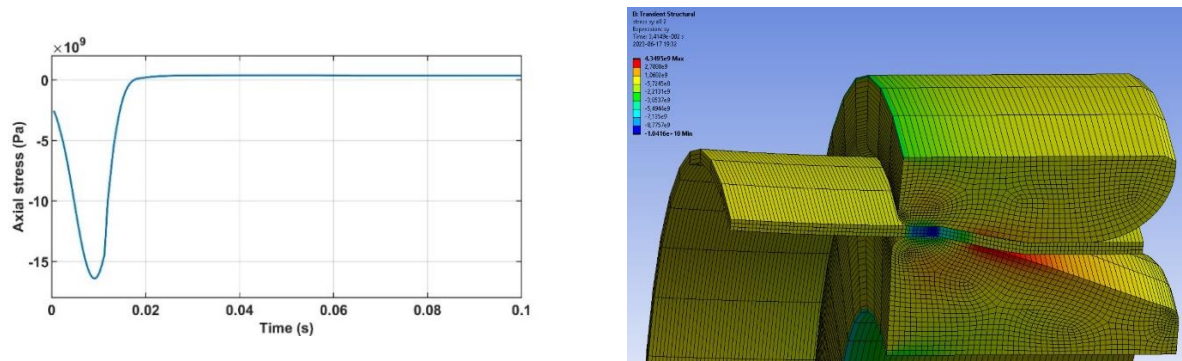
Σχήμα 5.8 Μετατόπιση κατά την ακτινική διεύθυνση



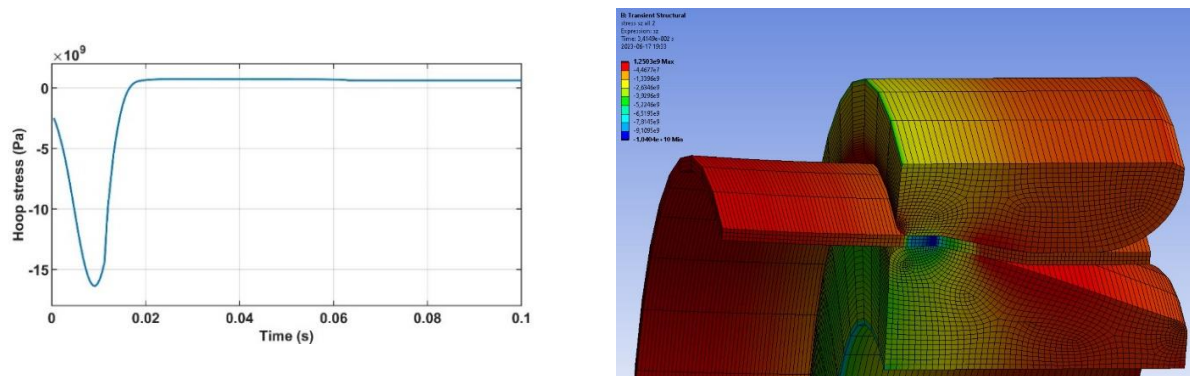
Σχήμα 5.9 Μετατόπιση κατά τη διαμήκη διεύθυνση



Σχήμα 5.10 Ορθές τάσεις κόμβου ελέγχου κατά την ακτινική διεύθυνση και κατανομή τους στο χρόνο $t=34\text{ms}$

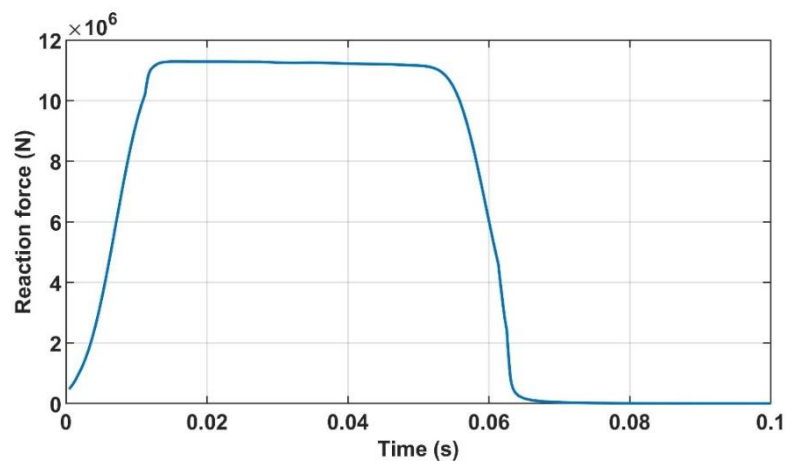


Σχήμα 5.11 Ορθές τάσεις κόμβου ελέγχου κατά την αξονική διεύθυνση και κατανομή τους στο χρόνο $t=34$ ms

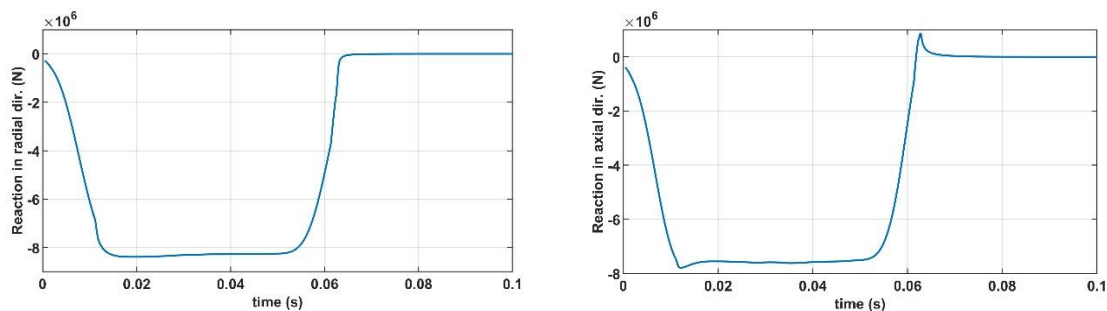


Σχήμα 5.12 Ορθές τάσεις κόμβου ελέγχου κατά την εφαπτομενική διεύθυνση και κατανομή τους στο χρόνο $t=34$ ms

Το μέγεθος της συνολικής αντίδρασης καθώς και των συνιστωσών κατά την ακτινική και αξονική διεύθυνση που αναπτύσσονται στη στήριξη της διάταξης συναρτήσει του χρόνου παρουσιάζονται στο Σχήμα 5.13 και 5.14.

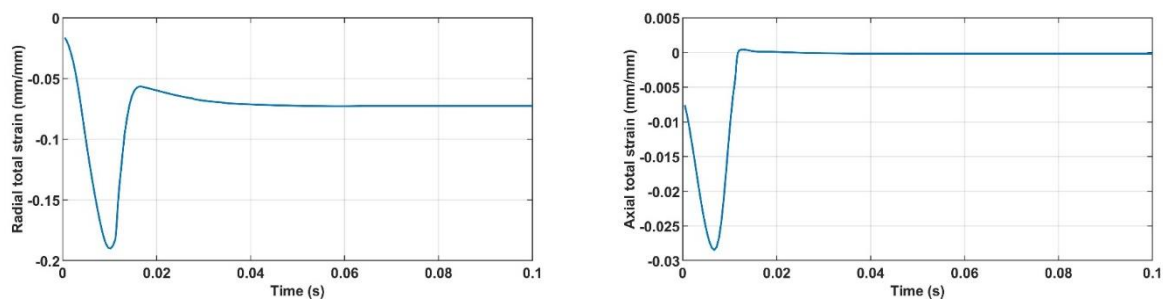


Σχήμα 5.13 Μέγεθος συνολικής αντίδρασης



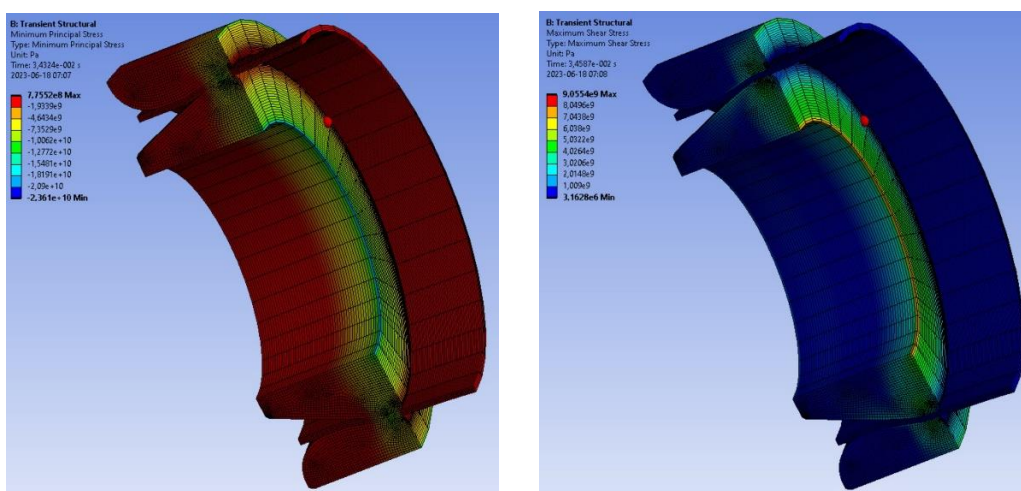
Σχήμα 5.14 Συνιστώσες αντίδρασης κατά την ακτινική και αξονική διεύθυνση

Οι συνιστώσες της συνολικής τροπής (πλαστικό+ελαστικό τμήμα) κατά την ακτινική και αξονική διεύθυνση παρουσιάζονται στο Σχήμα 5.15, όπου διαπιστώνεται, λόγω της διαφοράς τάξης μεγέθους, ότι η πλαστική ροή εξελίσσεται κυρίως κατά την ακτινική διεύθυνση.



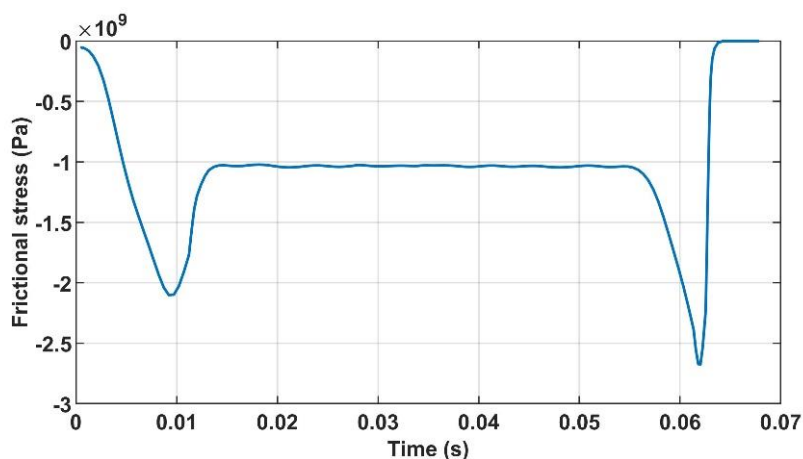
Σχήμα 5.15 Τροπές κατά την ακτινική και αξονική διεύθυνση

Στο Σχήμα 5.16 παρουσιάζονται οι κατανομές της ελάχιστης κύριας τάσης και της μέγιστης διατμητικής τάσης στο χρόνο $t=34\text{ms}$.

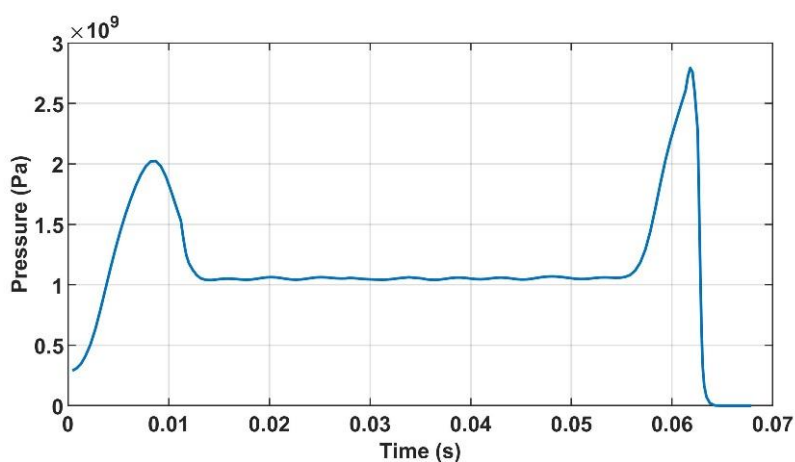


Σχήμα 5.16 Ελάχιστη κύρια τάση και μέγιστη διατμητική τάση

Οι τάσεις τριβής στη διεπιφάνεια των επιφανειών επαφής και στόχου καθώς και η αναπτυσσόμενη πίεση παρουσιάζονται στα Σχήματα 5.17 και 5.18

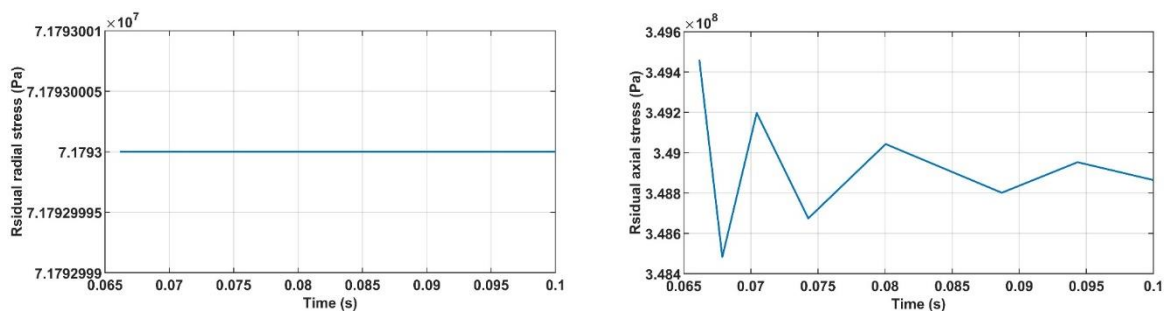


Σχήμα 5.17 Τάσεις τριβής στη διεπιφάνεια



Σχήμα 5.18 Πίεση στη διεπιφάνεια

Οι παραμένουσες τάσεις και τροπές του υλικού του σωλήνα μετά το πέρας της κατεργασίας και την πλήρη αποφόρτιση αποτελούν σημαντικές παραμέτρους της ποιότητας του τελικού προϊόντος. Με την εγκατάσταση του σωλήνα σε ένα σύστημα, η αναπτυσσόμενη εντατική και παραμορφωσιακή κατάσταση προστίθεται στις ήδη υπάρχουσες επηρεάζοντας τη τελική συμπεριφορά. Η παραμένουσα αξονική τάση έχει τιμή 71.8Μpa ενώ η αξονική τάση 349Μpa (Σχήμα 5.19).



Σχήμα 5.19 Παραμένουσες τάσεις κατά την ακτινική και αξονική διεύθυνση

6. ΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

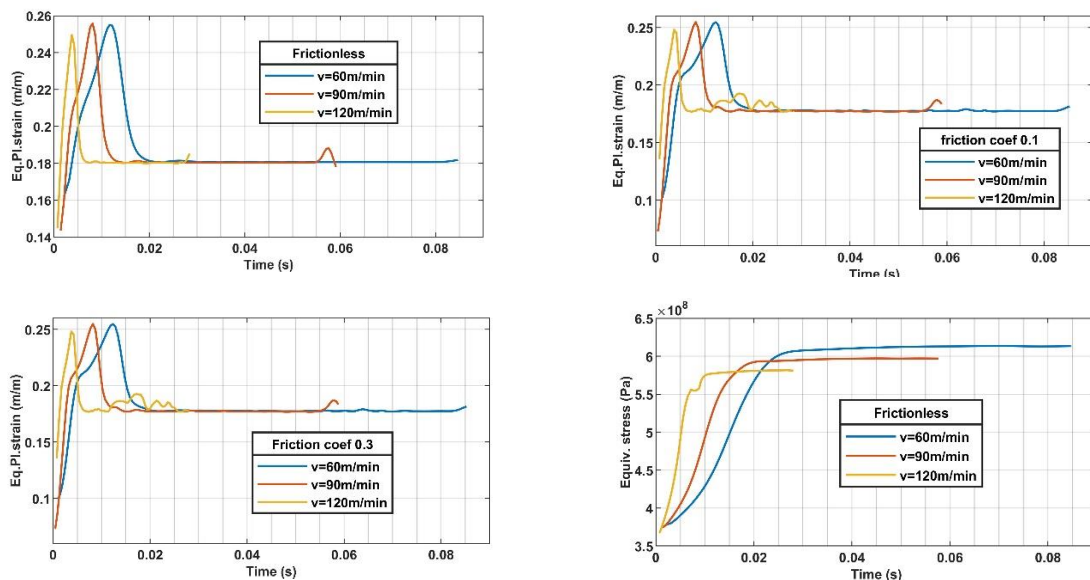
6.1. Εισαγωγή

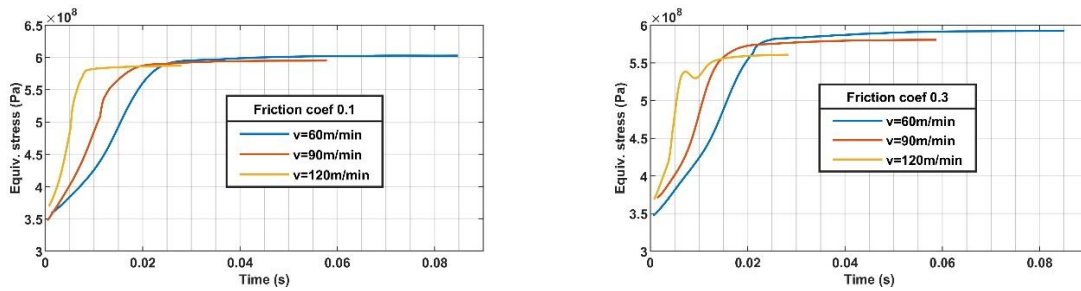
Για την εκτίμηση και αξιολόγηση των αποτελεσμάτων των επιλύσεων εκτελείται παραμετρική ανάλυση στην οποία το μοντέλο του πυκνού δικτύου Π.Σ επιλύεται με στατική, ψευδοστατική και δυναμική ανάλυση σε διάφορες τιμές της ταχύτητας διαμόρφωσης του σωλήνα (60 m/min, 90 m/min, 180m/min) και του συντελεστή τριβής της διεπιφάνειας ($\mu=0$, $\mu=0.1$, $\mu=0.3$) .

6.2. Παρουσίαση αποτελεσμάτων αναλύσεων

6.2.1. Δυναμικές αναλύσεις μοντέλου

Στο Σχήμα 6.1 παρουσιάζεται η χρονοϊστορία της ισοδύναμης πλαστικής τροπής και ισοδύναμης τάσης στο επιλεγμένο πυκνότερο δίκτυο Π.Σ για διάφορες τιμές του συντελεστή τριβής και ταχύτητες διέλευσης 60 m/min, 90 m/min και 180m/min, αντίστοιχα. Εκ των αποτελεσμάτων διαπιστώνεται μικρή επίδραση της ταχύτητας διέλευσης στη μέγιστη συνολική πλαστική παραμόρφωση για διάφορες τιμές του συντελεστή τριβής. Παρατηρείται επίσης μικρή μεταβολή των τιμών της ισοδύναμης τάσης διαρροής με την αύξηση της ταχύτητας διέλευσης στη περίπτωση μηδενικής τριβής και $\mu=0.3$.

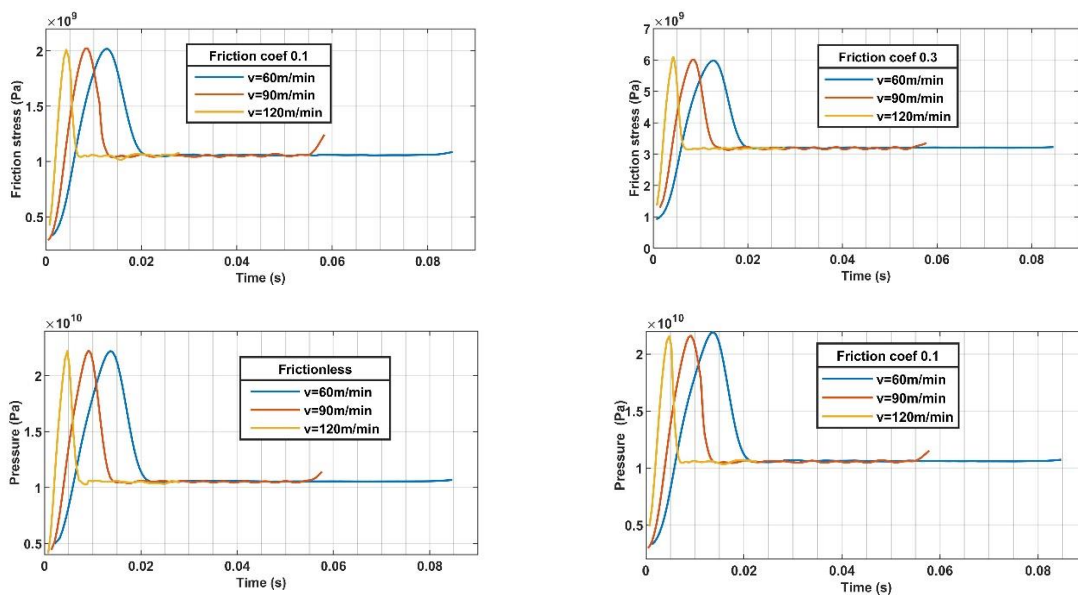




Σχήμα 6.1 Επιρροή της ταχύτητας διέλευσης και τριβής στην ισοδύναμη πλαστική τροπή και ισοδύναμη τάση για διάφορες τιμές του συντελεστή τριβής

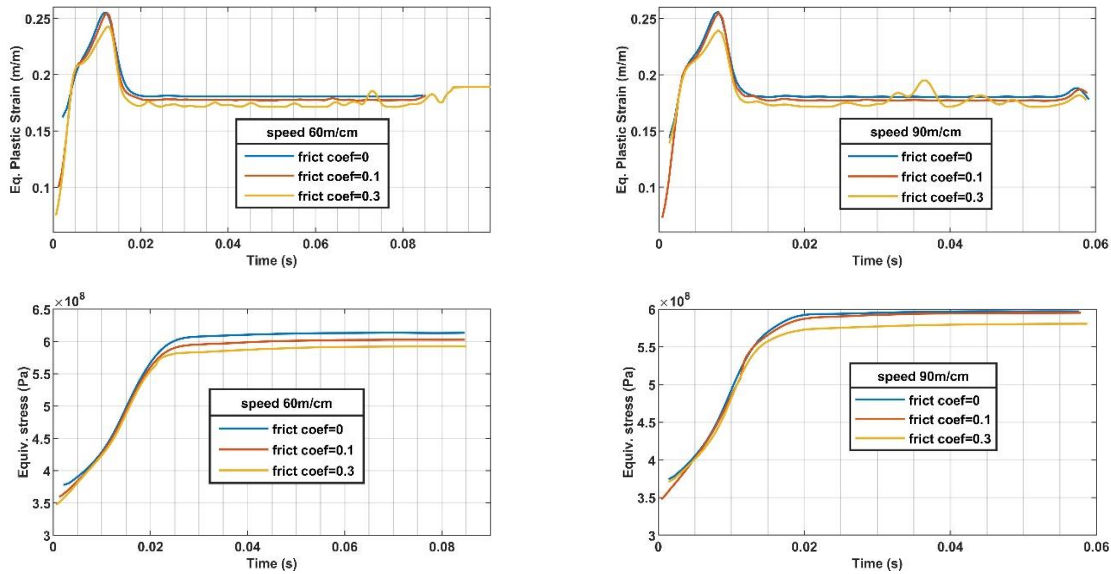
Με την ισοδύναμη πλαστική τροπή ποσοτικοποιείται η ανάπτυξη της συνολικής πλαστικής παραμόρφωσης του τρισδιάστατου μοντέλου (μη ανακτήσιμης κατά την αποφόρτιση), συναρτήσει του χρόνου ενώ με την καμπύλη της ισοδύναμης τάσης η εξέλιξη τη μεταβολής της τάσης διαρροής του ισότροπα κρατυνόμενου υλικού.

Στο Σχήμα 6.2 δίνονται τα αποτελέσματα της μέγιστης αναπτυσσόμενης τάσης τριβής και κάθετης τάσης στη διεπιφάνεια επαφής για επιλεγμένες ταχύτητες διέλευσης και συντελεστές τριβής



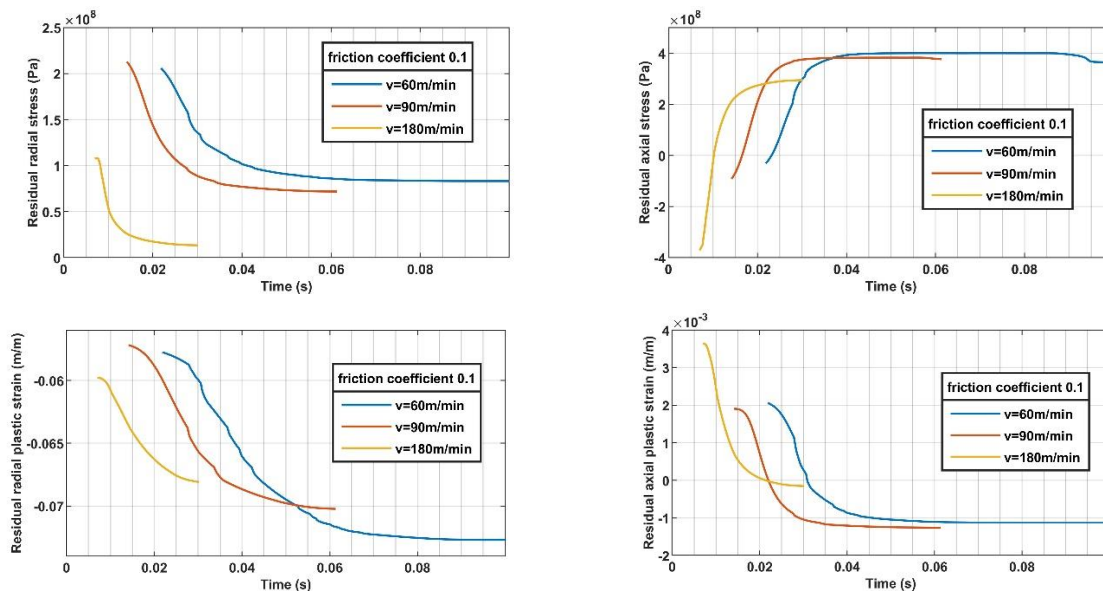
Σχήμα 6.2 Επιρροή της ταχύτητας διέλευσης και τριβής στην αναπτυσσόμενη τάση τριβής και κάθετης τάσης στη διεπιφάνεια για διάφορες τιμές του συντελεστή τριβής

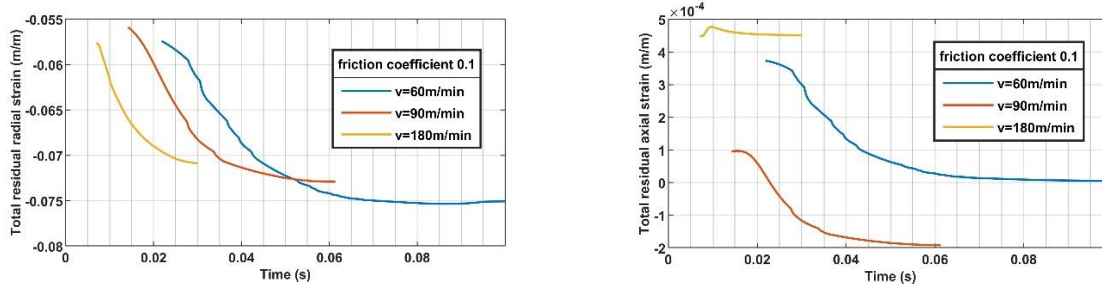
Διατηρώντας σταθερή τη ταχύτητα διέλευσης σχεδιάζονται στο Σχήμα 6.3 τα διαγράμματα της ισοδύναμης πλαστικής τροπής και τάσης διαρροής για συντελεστές τριβής 0, 0.1 και 0.3, αντίστοιχα.



Σχήμα 6.3 Επιρροή της ταχύτητας διέλευσης στην ενεργή πλαστική τροπή και ισοδύναμη τάση για διάφορες τιμές του συντελεστή τριβής

Κατά τη παραγωγή σωλήνων με κατεργασία ολκής (tube drawing) είναι σημαντική η εξέταση των παραμενουσών τάσεων του τελικού προϊόντος. Κατά την έξοδο του σωλήνα από τη μήτρα το υλικό προσπαθεί να ανακτήσει το ελαστικό τμήμα των αναπτυσσόμενων ολικών τροπών. Η πλήρης ανάκτηση του ελαστικού τμήματος περιορίζεται από τα γειτονικά τμήματα του σωλήνα που έχουν υποστεί πλαστική παραμόρφωση. Αποτέλεσμα της κατάστασης αυτής είναι η διατήρηση παραμενουσών τάσεων μετά την αποφόρτιση.



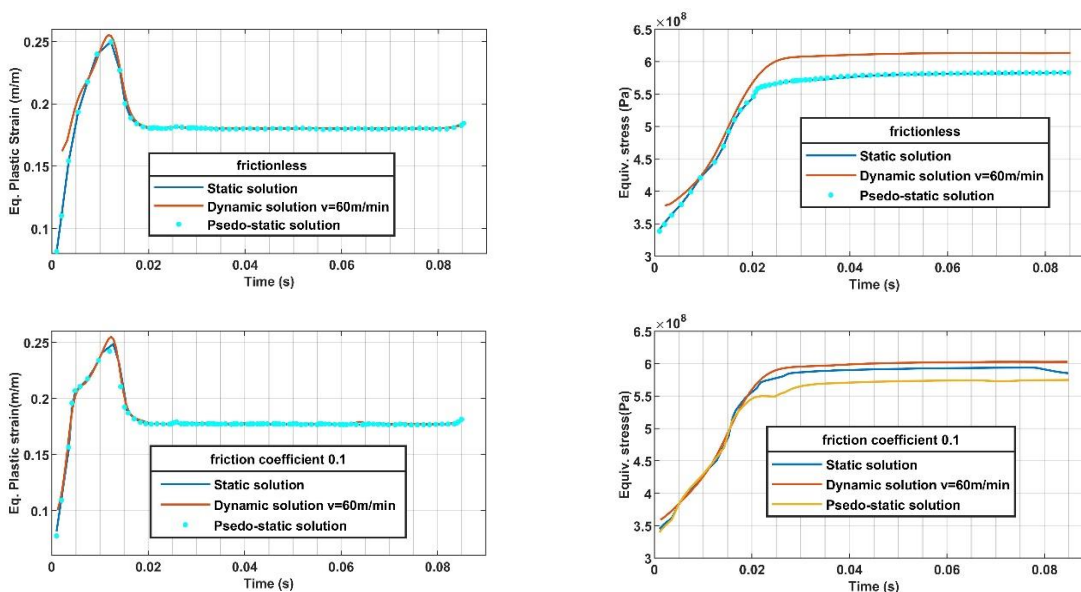


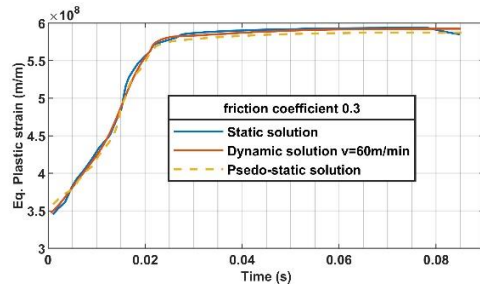
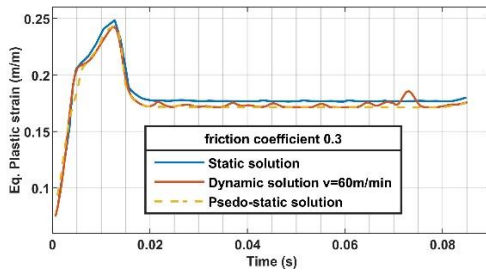
Σχήμα 6.4 Διαγράμματα παραμενουσών τάσεων και πλαστικών τροπών για $\mu=0.1$ και διάφορες ταχύτητες διέλευσης

Στο Σχήμα 6.4 έχουν σχεδιαστεί οι κατανομές των παραμενουσών τάσεων κατά την ακτινική, εφαπτομενική και διαμήκη διεύθυνση καθώς και των πλαστικών και συνολικών τροπών κατά τη διαμήκη και ακτινική διεύθυνση για συντελεστή τριβής της διεπιφάνειας μήτρας- σωλήνα ίσο με 0.1 και για διάφορες τιμές της ταχύτητας διέλευσης.

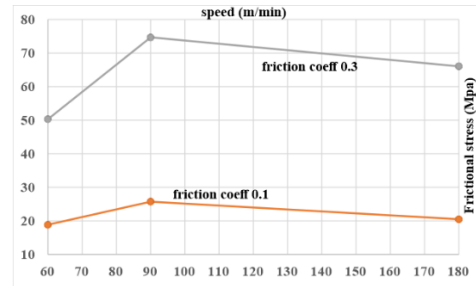
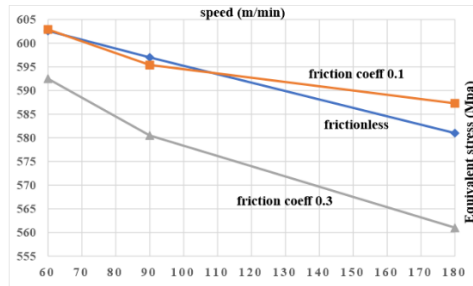
6.2.2. Στατικές αναλύσεις μοντέλου

Εκτελείται σύγκριση των αποτελεσμάτων των δυναμικών αναλύσεων με στατικές και ψευδοστατικές αναλύσεις για ταχύτητα διέλευσης 60m/min και διάφορες τιμές του συντελεστή τριβής. Τα αποτελέσματα των αναλύσεων παρουσιάζονται υπό μορφή διαγραμμάτων στα Σχήματα 4.5. Όπως αναμενόταν οι τιμές της ισοδύναμης πλαστικής τροπής στους αντίστοιχους χρόνους της δυναμικής επίλυσης και στα αντίστοιχα βήματα επαύξησης του πλαστικού φορτίου σχεδόν συμπίπτουν (Εξάρτηση μόνο από τη γεωμετρία της μήτρας).





Σχήμα 6.5 Επιρροή του συντελεστή τριβής στην ενεργή πλαστική τροπή και ισοδύναμη τάση για τα είδη ανάλυσης



Σχήμα 6.6 Διαγράμματα ισοδύναμης τάσης και τάσης τριβής συναρτήσει της ταχύτητας για $\mu=0,0.1, 0.3$.

Στο Σχήμα 6.6 παρουσιάζεται η μεταβολή της ισοδύναμης τάσης και της τάσης τριβής στη διεπιφάνεια της επαφής συναρτήσει της ταχύτητας διέλευσης για τιμές του συντελεστή τριβής 0, 0.1 και 0.3.

6.3. Στοιχεία αναλύσεων

Στην επίλυση μη- γραμμικών προβλημάτων, η επιλογή κατάλληλου χρονικού βήματος αποτελεί τη μια των κρίσιμότερων παραμέτρων για τη σύγκλιση και την ακρίβεια της εξαγόμενης λύσης. Σε προβλήματα, όπως το εξεταζόμενο, που συνυπάρχουν πολλά είδη μη- γραμμικότητας (μη- γραμμικότητα υλικού, γεωμετρική μη- γραμμικότητα, μη- γραμμικές συνοριακές συνθήκες λόγω επαφής σωμάτων) η επιλογή του χρονικού βήματος καθώς και της βηματικής επαύξησης της εξωτερικής φόρτισης, προκύπτει ως το ελάχιστο των απαιτούμενων κάθε είδους μη- γραμμικότητας χρονικών βημάτων καθώς και από την ικανοποίηση των κριτηρίων σύγκλισης.

6.3.1. Αυτόματη επιλογή χρονικού βήματος

Η αυτόματη επιλογή χρονικού βήματος προβλέπει το κατάλληλο μέγεθος του επόμενου χρονικού βήματος Δt_{n+1} της παρούσας χρονικής στιγμής t_n λαμβάνοντας υπόψη το μέγεθος του προηγούμενου χρονικού βήματος Δt_{n-1} καθώς και τη κατάσταση της παρούσας και προηγούμενης ανάλυσης.

Δοθείσης της λύσης στη χρονική στιγμή t_n και του χρονικού βήματος υπολογισμού Δt_n , η πρόβλεψη του μεγέθους του επόμενου χρονικού διαστήματος Δt_{n+1} προκύπτει από τη

$$\Delta t_{n+1} = \min (\Delta t_{eq}, \Delta t_g, \Delta t_p, \Delta t_m) \quad (6.1)$$

όπου

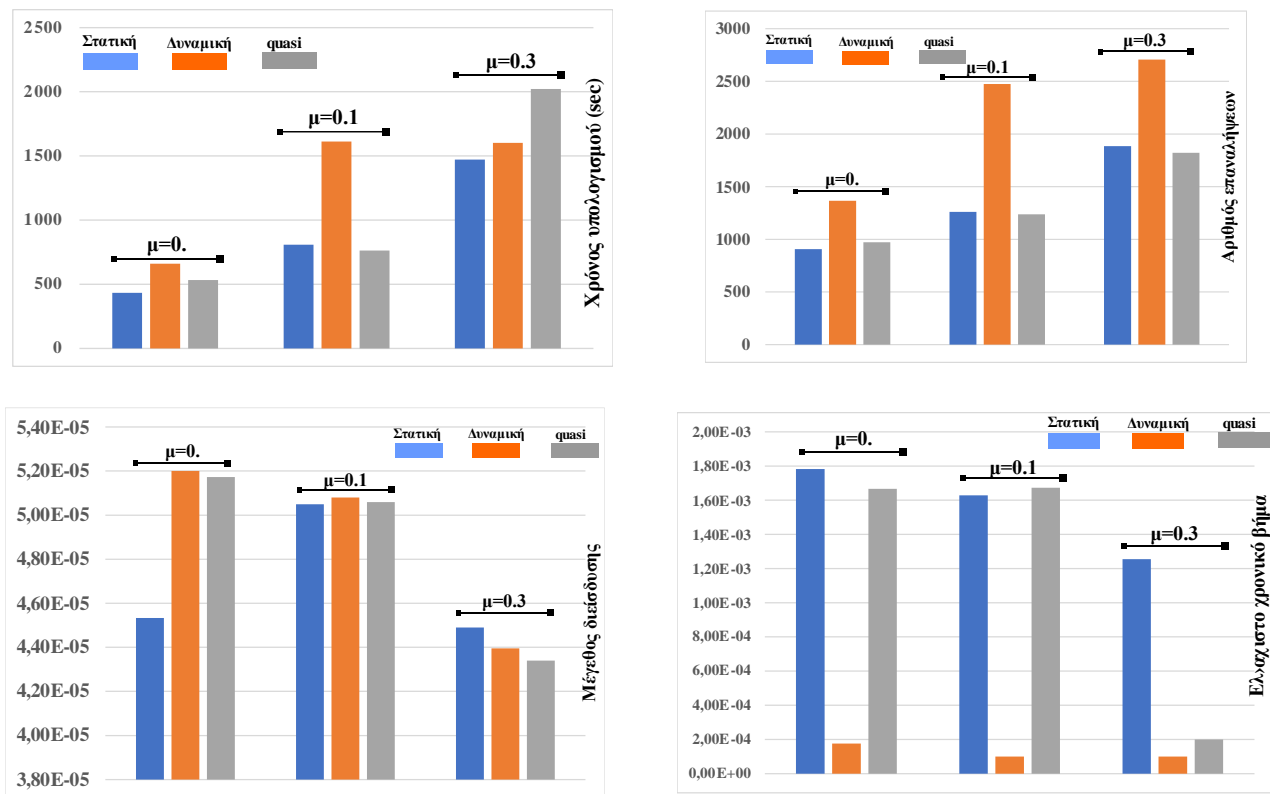
Δt_{eq}	Χρονικό βήμα που περιορίζεται από τον αριθμό των απαιτούμενων για σύγκλιση επαναλήψεων επίλυσης των εξισώσεων ισορροπίας στη τελευταία χρονική στιγμή που επιτεύχθηκε σύγκλιση. Μεγαλύτερος αριθμός επαναλήψεων καταλήγει σε μικρότερο προβλεπόμενο χρονικό βήμα.
Δt_g	Χρονικό βήμα στη χρονική στιγμή εμφάνισης απότομης αλλαγής κατάστασης του συστήματος, όπως εντοπισμός επαφής μεταξύ σωμάτων.
Δt_p	Χρονικό βήμα που βασίζεται στην επιτρεπόμενη επαύξηση της πλαστικής τροπής. Ως όριο λαμβάνεται η 5% αύξηση ανά χρονικό βήμα.
Δt_m	Χρονικό βήμα που περιορίζεται από την ανοχή του υπολοίπου των εντατικών μεγεθών στον ενδιάμεσο χρόνο του βήματος.

Επιπλέον, το μέγεθος του προβλεπόμενου χρονικού βήματος περιορίζεται εντός του διαστήματος που ορίζεται από τις

$$\begin{aligned} \Delta t_{n+1} &\leq \min (F \Delta t_n, \Delta t_{\max}) \\ \Delta t_{n+1} &\geq \max (\Delta t_n / F, \Delta t_{\min}) \end{aligned} \quad (6.2)$$

F	Συντελεστής αύξησης/μείωσης, με προκαθορισμένη τιμή 2 για στατικές αναλύσεις και 3 για δυναμικές αναλύσεις.
Δt_{\max}	Μέγιστο μέγεθος χρονικού βήματος.
Δt_{\min}	Ελάχιστο μέγεθος χρονικού βήματος.

Ο συνολικός χρόνος υπολογισμού, το ελάχιστο μέγεθος του χρονικού βήματος των επιλύσεων, ο συνολικός αριθμός των επαναλήψεων, το μέγεθος της διείσδυσης για συντελεστές τριβής $\mu=0$, $\mu=0.1$, $\mu=0.3$ και ταχύτητα διέλευσης 60m/min, παρουσιάζονται στο Σχήμα 4.6 και συγκεντρωτικά στους Πίνακες 6.1.



Σχήμα 6.7 Χρόνος υπολογισμού, αριθμός επαναλήψεων, διείσδυση, ελάχιστο χρονικό βήμα

Frictionless				
	Comp. Time (sec)	Num of iter.	min Δt	Penetrat.
Static	433.1	907	1.78e-03	4.53e-05
Dynamic	660.2	1367	1.77e-04	5.20e-05
Psedo-static	532.6	972	1.67e-03	5.17e-05

$\mu=0.1$				
	Comp. Time (sec)	Num of iter.	min Δt	Penetrat.
Static	808.4	1261	1.63e-03	5.05e-05
Σ	1612.5	2474	1.00e-04	5.08e-05
Psedo-static	762.5	1238	1.67e-03	5.06e-05

$\mu=0.3$				
	Comp. Time (sec)	Num of iter.	min Δt	Penetrat.
Static	1472.4	1884	1.26e-03	4.49-05
Dynamic	1602.2	2706	1.00e-04	4.40e-05
Pseudo-static	2022.2	1821	2.00-04	4.34e-05

Για την αποφυγή προβλημάτων σύγκλισης στις περιπτώσεις που ο συντελεστής τριβής της διεπιφάνειας είναι μεγαλύτερος του 0.2, είναι απαραίτητη η επιλογή κατάλληλου επιλύτη ο οποίος να διαχειρίζεται τη διαφορά τάξης μεγέθους των όρων του μητρώου συντελεστών του συστήματος προς επίλυση. Το πρόγραμμα ANSYS προειδοποιεί ότι ο συντελεστής τριβής είναι υψηλός και είναι πιθανή η εμφάνιση προβλημάτων σύγκλισης ή και αδυναμία σύγκλισης που μπορεί να διορθωθεί με την επιλογή της ασύμμετρης συμπεριφοράς της επαφής.

Για μικρές τιμές του συντελεστή τριβής, οι μη συμμετρικοί όροι είναι αρκετά μικροί και η επιλογή της συμμετρικής συμπεριφοράς της επαφής με την οποία απαγορεύεται η διείσδυση των κόμβων της επιφάνειας επαφής στην επιφάνεια στόχου λειτουργεί σωστά. Αντίθετα, για μεγάλες τιμές του συντελεστή τριβής οι μη- συμμετρικοί όροι είναι σημαντικοί και είναι πιθανή η σύγκλιση με επιλογή της ασύμμετρης συμπεριφοράς στην οποία μόνο οι κόμβοι της επιφάνειας επαφής απαγορεύεται να διεισδύσουν στην επιφάνεια στόχο. Η ασύμμετρη συμπεριφορά επιλέγεται και στη περίπτωση πεπερασμένης σχετικής ολίσθησης των επιφανειών επαφής ακόμη και για μικρότερες τιμές του 0.2.

7. ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. J.H. Argyris, Continua and discontinua, Proc. First Conf. Matrix Methods in Struct. Mech., AFFDL-TR-66- 80 (1966) 11-190
2. G.G. Pope, A discrete element method for the analysis of plane elasto-plastic stress problems, Aeron. Quart. 17 (1966) 83-104.
3. P.V. Marcal and I.P. King, Elastic-plastic analysis of two-dimensional stress systems by the finite element method, Internat. J. Mech. Sci. 9 (1967) 143-155.
4. Y. Yamada, N. Yoshimura and T. Sakurai, Plastic stress strain matrix and its application for the solution of elastic-plastic problems by the finite element method, Internat. J. Mech. Sci. (1968)343-354
5. O.C. Zienkiewicz, S. Valliappan and I.P. King, Elastoplastic solutions of engineering problems- 'Initial stress', finite element approach, Internat. J. Numer. Meths. Engrg. (1969) 75-100.
6. M.J. Turner, F.H. Dill, H.C. Martin and R.J. Melosh, Large deflections of structures subjected to heating and external loads, J. Aerospace Sci. 27 (1960) 97-102
7. J.T. Oden and J.E. Key, Numerical analysis of finite axisymmetric deformation of incompressible elastic solids of revolution, Internat. J. Solids Struct. 6 (1970) 497-518.
8. J.T. Oden, Finite element applications in nonlinear structural analysis, Proc. Symp. Appl. Finite Element Methods Civil Engrg., Vanderbilt University, Nashville, TN. (1969) 4151-456
9. H.D. Hibbit, P.V. Marcal and J.R. Rice, A Finite element formulation for problems of large strain and large displacement, Internat. J. Solids Struct. (1970) 1069-1086.
10. Brethenoux G at all, 1996, "Cold forming processes: some examples of predictions and design optimization using numerical simulations". J. of Mat. Proc. Tech., vol. 60 (1-4), pp. 555 562
11. Pospiech, J., 1998, "Description of a Mathematical Model of Deformability for the Process of Drawing Tubes on a Fixed mandrel". J. of Mat. Eng. and Performance. v. 21, feb, p. 71- 78.
12. Karnezis, P. E and Farrugia, D. C. J., "Study of cold tube drawing by finite-element modeling", J. Mat. Proc. Tech. v. 80-81, 1998, p. 690-694.
13. Jallon, M. e Hergesheimer, M, 1993, "Prediction of behavior during wire drawing of high-carbon wire", Revue de Metalurgie Cahiers D'informations Techniques, vol. 90, pp. 1303-1309.
14. Joun M.S. and Hwang S.M., 1993, "Pass Schedule Optimal-Design In Multipass Extrusion And Drawing By Finite-Element Method". Int. J. Mach. Tools & Manufacture, vol. 33: (5), pp. 713-724.
15. Chin R.K. and Steif P.S., 1995, "A computational study of strain inhomogeneity in wire drawing", Int. J. of Machine Tools & Manufacture, vol. 35 (8), pp. 1087-1098.

16. Dixit U.S. and Dixit P.M., 1995, "An analysis of the steady-state wire drawing of strain-hardening materials", J. of Mat. Proc. Tech., vol 47 (3-4), pp. 201-229.
17. El-Domiaty, A. and Kassab, S.Z., 1998, "Temperature rises in wire drawing", J. Mat. Proc. Tech., Vol 83, Iss 1-3, pp 72-83.
18. Neves F.O., Numerical and Experimental Analysis of tube Drawing with Fixed Plug, J. of the Braz. Soc. of Mech. Sci. & Eng., Vol XXVII, No. 4, 2005, p.426-431
19. Sawamiphakdi K., Lahoti G.D. and Kropp P.K., Simulation of a tube drawing process by the finite element method, Journal of Materials Processing Technology, 27, 1991, p. 179-190.
20. Camille Linardon. Precision tube drawing for biomedical applications: Theoretical, Numerical and Experimental study. Other. Université de Grenoble, 2013. English
21. E. Shiratori, K. Ikegami and F. Yoshida, Analysis of stress-strain relations by using an anisotropic hardening plastic potential, J. Mech. Phys. Solids 27 (1979) 213-229.
22. Palengat M., Chagnon G., Millet C. and Favier D., Tube Drawing Process Modelling by a Finite Element Analysis, Materials Processing and Design : Modeling, Simulation and Applications, 2007, p.705-710
23. J.J Sheu, Su-Yi Lin, Cheng-Hsien Yu Optimum Die Design for Single Pass Steel Tube Drawing with Large Strain Deformation, Procedia Engineering Volume 81, 2014, Pages 688-693
24. Jungseok Lee, Sung, Jin Kim Effect of channel geometry on the operating limit of micro pulsating heat pipes, International Journal of Heat and Mass Transfer Volume 107, April 2017, Pages 204-212
25. J.-F. Beland, M. Fafard b, A. Rahem a, G. D'Amours a, T. Côté c, Optimization on the cold drawing process of 6063 aluminium tubes, Applied Mathematical Modelling Volume 35, Issue 11, November 2011, Pages 5302-5313
26. S.W.Kim, Y.N. Kwon, Y.S. Lee, J.H. Lee Design of mandrel in tube drawing process for automotive steering input shaft, Journal of Materials Processing Technology Volumes 187–188, 12 June 2007, Pages 182-186
27. Nam-Ho Kim Introduction to Nonlinear Finite Element Analysis, Department of Mechanical and Aerospace Engineering, University of Florida Gainesville, FL, USA, 27 June 1994
28. Klaus-Jurgen Bathe, Finite Element Procedures, Prentice Hall, 2014
29. Dunne F., Petrinich N., Introduction to Computational Plasticity, Oxford University Press, 2005
30. Simo J.C, Hughes T.J.R, Computational Inelasticity, Springer, 1998
31. Ansys Theory Reference Release 20
32. Ansys Innovation Courses, Numerical Modelling of Contact, lesson 3

33. Ansys Innovation Course, Contact Mechanics, 2020
34. Ansys Costumer Training Material, Introduction to Contact, Lecture 3, 2010
35. Spathopoulos, S.C.; Stavroulakis, G.E. Springback Prediction in Sheet Metal Forming, Based on Finite Element Analysis and Artificial Neural Network Approach. *Appl. Mech.* 2020, *1*, 97-110. <https://doi.org/10.3390/applmech1020007>