

ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΟΡΥΚΤΩΝ ΠΟΡΩΝ



**ΓΕΩΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΡΥΠΑΝΤΩΝ ΣΕ ΥΠΟΓΕΙΑ
ΝΕΡΑ ΣΤΟ ΥΔΑΤΙΚΟ ΔΙΑΜΕΡΙΣΜΑ ΤΗΣ ΔΥΤΙΚΗΣ
ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ ΜΕ ΕΜΦΑΣΗ ΣΤΟΥΣ
ΠΡΟΕΡΧΟΜΕΝΟΥΣ ΑΠΟ ΜΕΤΑΛΛΕΥΤΙΚΕΣ
ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ**

Γαλανάκη Μαριάννα

ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΗ ΕΠΙΤΡΟΠΗ

Επίκουρος Καθηγητής Εμμανουήλ Βαρουχάκης (Επιβλέπων)

Καθηγητής Μιχαήλ Γαλετάκης

Μετά-Διδάκτωρ Ερευνητής Ανδρέας Παυλίδης

ΧΑΝΙΑ

Οκτώβριος, 2023

Περιεχόμενα

1	ΕΙΣΑΓΩΓΗ	12
1.1	Σκοπός Διπλωματικής Εργασίας	12
1.2	Η Έννοια του Καθαρού Νερού	18
1.3	Χαρακτηριστικά Περιοχή Μελέτης	19
1.3.1	Κλιματολογικές Συνθήκες	20
1.3.2	Γεωλογικό Υπόβαθρο	21
1.3.3	Ορυκτός Πλούτος	21
1.3.4	Μεταλλευτική Δραστηριότητα στην Δυτική Μακεδονία	22
2	ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΥΠΟΒΑΘΡΟ	25
2.1	Βασικές Έννοιες Τυχαίων Πεδίων	26
2.1.1	Τυχειότητα	26
2.1.2	Τυχαία Μεταβλήτη	27
2.1.3	Ανάλυση Χωρικών Σχέσεων στα Τυχαία Πεδία	27
2.1.4	Διάγραμμα Voronoi	29
2.2	Παράμετροι Κατανομής Πιθανότητας	30
2.2.1	Παράμετροι Θέσης	31
2.2.2	Παράμετροι Διασποράς	33
2.2.3	Παράμετροι Ασυμμετρίας	35
2.2.4	Παράμετροι Κύρτωσης	35

Περιεχόμενα

2.2.5	Ιστόγραμμα	36
2.3	Συνάρτηση Συνδιασποράς	37
2.3.1	Στατιστική Ομοιογένεια	38
2.3.2	Στατιστική Ισοτροπία	39
2.3.3	Συνθήκες Αποδοχής (Θεώρημα Bochner)	40
2.3.4	Μοντέλα Συνδιασποράς	41
2.4	Χωρική Εξάρτηση	42
2.4.1	Χωρική Παρεμβολή	43
2.4.2	Μοντέλο Χωρικής Εξάρτησης	44
2.4.3	Τάση	44
2.4.4	Διαχύμανση	46
2.4.5	Βαριόγραμμα	47
2.4.6	Ιδιότητες Βαριογράμματος	49
2.4.7	Μοντέλα Βαριογράμματος	54
2.5	Εκτίμηση Τυχαίων Πεδίων	56
2.5.1	Απλό Kriging	59
2.5.2	Κανονικό Kriging	62
2.5.3	Μέτρα Επιβεβαίωσης Χωρικού Μοντέλου	65
3	ΓΕΩΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ	69
3.1	Περιγραφική Αναφορά των Δεδομένων	69
3.2	Στατιστική Ανάλυση	71
3.2.1	Παράμετροι Κατανομής Πιθανότητας	73
3.2.2	Διαγράμματα Voronoi	76
3.2.3	Τάση	78
3.2.4	Βαριογραφία	80
3.2.5	Kriging	82
3.2.6	Ανάλυση Αποτελεσμάτων	91

Περιεχόμενα

4	ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ	94
4.1	Προτάσεις για Μελλοντική Έρευνα	97

Κατάλογος Εικόνων

2.1	Παράδειγμα μορφής διαγράμματος Voronoi [33].	30
2.2	Παράδειγμα μορφής ιστογράμματος.	36
2.3	Παράδειγμα μορφής βαριογράμματος [33].	51
3.1	Θέσεις σταθμών παρακολούθησης των υπόγειων υδάτων (x) και των ορυχείων (+).	70
3.2	Ιστόγραμμα των στοιχείων Mg και Mn χωρίς μετασχηματισμό λογαρίθμου.	72
3.3	Συσχέτιση των στοιχείων Mg-Mn χωρίς μετασχηματισμό λογαρίθμου.	72
3.4	Ιστόγραμμα και Διάγραμμα Κανονικής Πιθανότητας Mg με μετασχηματισμό λογαρίθμου	74
3.5	Ιστόγραμμα και Διάγραμμα Κανονικής Πιθανότητας Mn με μετασχηματισμό λογαρίθμου	75
3.6	Αθροιστική κατανομή λογαρίθμου των στοιχείων Mg και Mn (μαύρη γραμμή) σε σχέση με την κανονική κατανομή (κόκκινη γραμμή).	76
3.7	Διαγράμματα Voronoi χωρίς μετασχηματισμό των στοιχείων Mg και Mn.	77

Κατάλογος Εικόνων

3.8	Διαγράμματα Τάσης με μετασχηματισμό των στοιχείων Mg και Mn.	79
3.9	Βαριόγραμμα των στοιχείων Mg(ppm) και Mn(ppm). Οι κύκλοι (ο) αποδίδουν το Εμπειρικό Βαριόγραμμα ενώ η γραμμή το Σφαιρικό Μοντέλο.	81
3.10	Χάρτης εκτίμησης της συγκέντρωσης του Mg με λογαριθμικό μετασχηματισμό.	84
3.11	Χάρτης εκτίμησης της συγκέντρωσης του Mn με λογαριθμικό μετασχηματισμό.	85
3.12	Χάρτες τυπικής απόκλισης σφάλματος Kriging με μετασχηματισμό λογαρίθμου.	86
3.13	CV errors των στοιχείων Mg και Mg με μετασχηματισμό λογαρίθμου.	87
3.14	Χάρτης εκτίμησης της συγκέντρωσης του Mg με αντιστροφή του λογαριθμικού μετασχηματισμού.	89
3.15	Χάρτης εκτίμησης της συγκέντρωσης του Mn με αντιστροφή του λογαριθμικού μετασχηματισμού.	90
3.16	CV errors των στοιχείων Mg και Mg.	91

Κατάλογος Πινάκων

3.1	Παράμετροι Κατανομής Πιθανότητας των λογαριθμισμένων τιμών του Mg-Mn αντίστοιχα.	73
3.2	Γραμμικοί Συντελεστές Τάσης με μετασχηματισμό λογαρίθμου.	78
3.3	Παράμετροι βαριογράμματος των στοιχείων Mg και Mn.	81
3.4	Τιμές επαλήθευσης στις λογαριθμισμένες τιμές, όπου MAE είναι το Μέσο Απόλυτο Σφάλμα, RMSE η ρίζα του Μέσου Τετραγωνικού Σφάλματος, MaxAE η τιμή του Μέγιστου Απόλυτου Σφάλματος και ρ ο συντελεστής συσχέτισης.	88
3.5	Τιμές επαλήθευσης στην διακύμανση και την τάση	89

Περίληψη

Η επιστήμη της γεωστατιστικής ανάλυσης εφαρμόζεται σε πολλές κλάδους, όπως η περιβαλλοντική μεταλλευτική. Οι περιβαλλοντικές επιπτώσεις σε περιοχές μεταλλευτικής δραστηριότητας μπορούν να επηρεάσουν αρνητικά την ποιότητα του εδάφους και του νερού. Οι γεωστατιστικές μέθοδοι σε τέτοιες περιπτώσεις χρησιμοποιούνται για την παρακολούθηση της ρύπανσης στο περιβάλλον. Συγκεκριμένα, γίνεται εκτίμηση της χωρικής μεταβολής της συγκέντρωσης των ρυπαντικών φορτίων που μπορούν να υποβαθμίσουν τα φυσικά χαρακτηριστικά του εδάφους και των υπόγειων υδάτων, και κατά συνέπεια να περιορίσουν τη χρησιμότητα τους.

Η εκπόνηση της παρούσας διπλωματικής εργασίας βασίζεται στην γεωστατιστική ανάλυση της ποιότητας των υπόγειων υδάτων με έμφαση σε τέσσερα ορυχεία της περιφέρειας της Δυτικής Μακεδονίας. Συγκεκριμένα, πρόκειται για το λιγνιτωρυχείο του Αμυνταίου, το λιγνιτωρυχείο της Πτολεμαΐδας, το ορυχείο των Κομνηνών και το ορυχείο νοτιοανατολικά της λίμνης Έξαρχου. Η μελέτη αυτή στοχεύει στην διερεύνηση πιθανής ρύπανσης των υπόγειων υδάτων λόγω της εξορυκτικής δραστηριότητας αυτών των ορυχείων. Ως αποτέλεσμα, μπορούν να δημιουργηθούν σοβαρά περιβαλλοντικά προβλήματα λόγω της μεταλλευτικής δραστηριότητας, τα οποία χρήζουν λήψη κατάλληλων μέτρων για την διαχείριση και αποκατάσταση αυτών των προβλημάτων.

Στόχος της παρούσας μελέτης είναι η χωρική εκτίμηση της συγκέντρω-

σης των χημικών στοιχείων του Μαγνησίου (Mg) και του Μαγγανίου (Mn) στα υπόγεια ύδατα της περιοχής μελέτης. Η στατιστική ανάλυση που πραγματοποιήθηκε, περιλαμβάνει τον έλεγχο κανονικότητας και τον προσδιορισμό των παραμέτρων κατανομής πιθανότητας. Συμπεριλαμβάνει, επίσης, την προσαρμογή τάσεων στα δεδομένα και ακολούθως την εκτίμηση των τιμών σε άγνωστα σημεία εντός της περιοχής μελέτης, μέσω της μεθόδου Κανονικού Kriging. Τα δεδομένα τα οποία χρησιμοποιήθηκαν, συλλέχθηκαν από την Ελληνική Αρχή Γεωλογικών και Μεταλλευτικών Ερευνών (Ε.Α.Γ.Μ.Ε.). Συγκριμένα, για το Mg και το Mn χρησιμοποιήθηκαν δεδομένα από 113 και 115 σταθμούς παρακολούθησης των υπόγειων υδάτων αντίστοιχα. Επιπροσθέτως, η γεωστατιστική ανάλυση πραγματοποιήθηκε μέσω του προγραμματιστικού περιβάλλοντος MatLab.

Στο πρώτο κεφάλαιο παρατίθενται ο σκοπός της Διπλωματικής εργασίας και τα χαρακτηριστικά της περιοχής μελέτης. Στο δεύτερο κεφάλαιο παρουσιάζονται εκτενώς οι βασικές θεωρητικές έννοιες την γεωστατιστικής που αποτέλεσαν θεμελιώδη βάση για την υλοποίηση της εργασίας. Στο τρίτο κεφάλαιο πραγματοποιείται η γεωστατιστική ανάλυση και παρουσιάζονται λεπτομερώς τα αποτελέσματα που διεξήχθησαν. Τέλος, στο τέταρτο κεφάλαιο αναφέρονται τα συμπεράσματα που προκύπτουν από την γεωστατιστική ανάλυση και παρατίθενται προτάσεις για περαιτέρω έρευνα. Στο πλαίσιο της γεωστατιστικής ανάλυσης, τα δεδομένα συγκέντρωσης των χημικών στοιχείων του Μαγνησίου (Mg) και του Μαγγανίου (Mn) δεν ακολουθούν την κανονική κατανομή. Για τον λόγο αυτό, εφαρμόστηκε λογαριθμικός μετασχηματισμός στα δεδομένα και προσδιορίστηκαν οι παράμετροι κατανομής πιθανότητας. Εν συνεχεία, μέσω του διαγράμματος Voronoi εξετάστηκε η ύπαρξη στασιμότητας ή όχι. Ακολούθως, εφαρμόστηκε 1ου βαθμού τάση με σκοπό να βρεθεί η ύπαρξη ή όχι συσχέτισης με τα δεδομένα, η οποία εν συνεχεία χρειάστηκε να αφαιρεθεί για το στοιχείο

του Mg, με σκοπό να προκύψει το πεδίο της διακύμανσης. Μέσω της βαριογραφίας που ακολουθήθηκε, δημιουργήθηκαν τα εμπειρικά ημιβαριογράμματα με δεδομένα των λογαρίθμων των τιμών. Η επιλογή του θεωρητικού μοντέλου έγινε βάση του ελέγχου του τετραγωνικού σφάλματος προσαρμογής με τα εμπειρικά ημιβαριογράμματα. Συνεπώς, επιλέχθηκε το σφαιρικό μοντέλο για το Mg και το Mn. Η χωρική εκτίμηση της συγκέντρωσης των δύο αυτών στοιχείων έγινε μέσω της μεθόδου Κανονικού Kriging (Ordinary Kriging), ενώ παράλληλα έγινε απολογαρίθμηση των δεδομένων, για να επέλθουν στην αρχική τους κλίμακα. Η εκτίμηση των συγκεντρώσεων απέδωσε καλύτερα και πιο ακριβή αποτελέσματα για το στοιχείο του Mg, όμως η αβεβαιότητα των εκτιμήσεων που προέκυψε, προσδιορίζει περιοχές όπου απαιτείται ενίσχυση της δειγματοληψίας.

Abstract

The science of geostatistical analysis is applied to many disciplines, such as environmental science and mineral engineering. Environmental impacts in areas of mining activity can negatively affect soil and water quality. Geostatistical methods in such cases are used to examine pollution in the environment. The purpose of this thesis is based on the geostatistical analysis of the concentration levels of the chemical elements Mg and Mn within the groundwater. This analysis places a particular emphasis on four mining sites located within the region of Western Macedonia. During the preliminary analysis of the data was analysed the correlation between Mg and Mn. Data normalization was performed by logarithmic transformation, as well as trend approximation in order to amend stationarity to a considerable extent. Consequently, variography was employed to estimate the spatial dependence of Mg and Mn respectively. The spatial variability of pollutant concentrations in groundwater was assessed and represented through the generation of maps. This was accomplished by utilizing the Ordinary Kriging (OK) method while inversing the previously applied transformations to the data.

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να εκφράσω τις θερμές μου ευχαριστίες προς τον κ. Εμμανουήλ Βαρουχάκη, ο οποίος υπήρξε ο επιβλέπων της διπλωματικής μου εργασίας. Η συνεργασία μας ήταν εξαιρετική, και εκτιμώ ιδιαίτερα την ευκαιρία που μου παραχωρήθηκε να αναπτύξω αυτήν την εργασία υπό την καθοδήγηση του.

Επίσης, θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον κ. Ανδρέα Παυλίδη, μέλος του Εργαστηρίου Γεωστατιστικής, για την πολύτιμη συνεισφορά του καθ' όλη την διάρκεια της εκπόνησης της διπλωματικής μου εργασίας.

Τέλος, επιθυμώ να εκφράσω ένα μεγάλο ευχαριστώ προς την οικογένειά μου και τους φίλους μου για την αφοσίωση και τη στήριξη τους καθ' όλη τη διάρκεια των σπουδών μου στο Πολυτεχνείο Κρήτης.

Κεφάλαιο 1

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Το κεφάλαιο αυτό επικεντρώνεται στην Δυτική Μακεδονία και στα επιμέρους χαρακτηριστικά της. Αρχικά, παρατίθενται οι βασικοί στόχοι της διπλωματικής εργασίας. Έπειτα, αναλύεται η έννοια του καθαρού νερού. Περιγράφονται, εν συνεχεία, τα εισαγωγικά στοιχεία της περιοχής μελέτης. Πιο συγκεκριμένα, δίνεται το γεωλογικό υπόβαθρο, από το οποίο απαρτίζεται η Δυτική Μακεδονία και αναλύονται περιγραφικά οι κλιματολογικές συνθήκες της περιοχής. Τέλος, περιγράφεται η ορυκτολογία, αλλά και η μεταλλευτική δραστηριότητα, που λαμβάνει χώρα στην περιοχή μελέτης.

1.1 Σκοπός Διπλωματικής Εργασίας

Στόχος της παρούσας διπλωματικής εργασίας είναι η μελέτη και η γεωστατιστική ανάλυση με σκοπό να προσδιοριστεί η ποιότητα των υπόγειων νερών με έμφαση στους προερχόμενους από μεταλλευτικές δραστηριότητες.

Η ρύπανση των υδάτων δημιουργείται με την απελευθέρωση στο υδάτινο περιβάλλον ουσιών, οι οποίες είτε διαλύονται είτε κατακάθονται στον πυθμένα και οι οποίες επιφέρουν αλλαγή στα φυσικά, χημικά και βιολογικά χαρακτηρι-

Chapter 1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

τικά του νερού. Συνεπώς, η ρύπανση μπορεί να επηρεάσει αρνητικά την ευζωία, την ποιότητα ζωής και την υγεία των ανθρώπων και των υπόλοιπων ειδών που κατοικούν στον πλανήτη [19].

Από την άλλη πλευρά, η μόλυνση αναφέρεται σε μια ειδική υποκατηγορία της ρύπανσης και προκαλείται από μικροοργανισμούς. Χαρακτηριστικό παράδειγμα αυτού του είδους της ρύπανσης είναι όταν καταλήγουν σε ποτάμια, λίμνες ή τη θάλασσα ρυπαντικές ουσίες που περιέχουν μικροοργανισμούς. Αυτοί οι μικροοργανισμοί μπορούν να προκαλέσουν διάφορες μορφές ρύπανσης, συμπεριλαμβανομένης της χημικής ρύπανσης λόγω της παρουσίας βλαβερών ουσιών, καθώς και της μόλυνσης από μικροοργανισμούς και παθογόνους οργανισμούς. Αυτά τα μολυσμένα ύδατα μπορεί να απειλήσουν την υγεία των ανθρώπων και των υπόλοιπων οργανισμών που εξαρτώνται από αυτά για την επιβίωσή τους [19].

Οι εξορυκτικές δραστηριότητες μπορούν να συμβάλουν στη ρύπανση των υδάτων με την απελευθέρωση χημικών ουσιών που μπορούν να υποβαθμίσουν τα φυσικά χαρακτηριστικά του νερού και να περιορίσουν τη χρησιμότητά του. Η αργή κίνηση των υπόγειων υδάτων μέσω του εδάφους σημαίνει ότι οι επιπτώσεις που προκύπτουν από ανθρώπινη δραστηριότητα, μπορούν να επιμείνουν για μεγάλες περιόδους, προκαλώντας δυνητικά συνεχή μόλυνση ακόμη και δεκαετίες μετά την αρχική ρύπανση [48]. Το αποτύπωμα της εξόρυξης στην ποιότητα των υπόγειων υδάτων μπορεί να επηρεαστεί από διάφορους παράγοντες, όπως ο τύπος του σχηματισμού πετρωμάτων που εξορύσσεται, τα χαρακτηριστικά του εδάφους, οι τεχνικές εξόρυξης που χρησιμοποιούνται, οι περιβαλλοντικές πρακτικές και η δέσμευση των εταιρειών εξόρυξης να τηρούν τους κανονισμούς και να εφαρμόζουν προστατευτικά μέτρα. Ο σημαντικός όγκος απορριμμάτων που παράγονται από εξορυκτικές δραστηριότητες, ειδικά σε ανοιχτά ορυχεία όπου εξορύσσονται μεγάλες ποσότητες άγονων υλικών,

Chapter 1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

αποτελεί ιδιαίτερη πρόκληση. Οι αυξημένες εργασίες εξόρυξης έχουν οδηγήσει σε πολλαπλασιασμό των αποβλήτων των ορυχείων, τα οποία μπορεί να αποτελέσουν κίνδυνο ρύπανσης, εάν δεν εφαρμόζονται κατάλληλα μέτρα διαχείρισης. [34].

Οι εξορυκτικές δραστηριότητες μπορούν να έχουν σημαντικές και εκτεταμένες συνέπειες στις πηγές καθαρού νερού, με αποτέλεσμα διάφορες περιβαλλοντικές επιπτώσεις και επιπτώσεις στην ποιότητα των υδάτων. Συγκεκριμένα, οι εργασίες εξόρυξης μπορούν να δημιουργήσουν ρύπους και τοξικές ουσίες, οι οποίες, όταν απελευθερωθούν, έχουν τη δυνατότητα να μολύνουν κοντινά ποτάμια, λίμνες και ρυάκια. Αυτοί οι ρύποι μπορεί να περιλαμβάνουν βαρέα μέταλλα, οξέα και χημικές ουσίες που χρησιμοποιούνται στη διαδικασία εξόρυξης. Κατά την είσοδό τους σε υδάτινα σώματα, αυτές οι ουσίες μπορεί να οδηγήσουν σε υποβάθμιση της ποιότητας του νερού, να διαταράξουν τα υδάτινα οικοσυστήματα και να αποτελέσουν κίνδυνο για την ανθρώπινη υγεία. Μια ιδιαίτερα σοβαρή συνέπεια της εξορυκτικής δραστηριότητας όσον αφορά το καθαρό νερό είναι η εμφάνιση όξινης αποστράγγισης πετρωμάτων (Acid Rock Drainage - AMD) [27]. Σε περιοχές όπου επικρατούν θειούχα ορυκτά, η επαφή με τον αέρα και το νερό προκαλεί μια αντίδραση, όπου μέσω της οποίας παράγεται θειικό οξύ. Το προκύπτον όξινο νερό, γνωστό ως AMD, ενέχει σημαντικό κίνδυνο μόλυνσης των κοντινών υδάτινων σωμάτων μέσω της μείωσης του επιπέδου του pH και της απελευθέρωσης τοξικών μετάλλων. Οι δυσμενείς επιπτώσεις στην υδρόβια ζωή είναι σημαντικές, καθιστώντας το νερό ακατάλληλο για πολλούς οργανισμούς. Επιπλέον, οι εργασίες εξόρυξης συχνά απαιτούν την απομάκρυνση του εδάφους και της βλάστησης, επιδεινώνοντας τη διάβρωση του εδάφους και την καθίζηση σε κοντινά υδάτινα σώματα. Οι διεργασίες διάβρωσης μεταφέρουν ιζήματα, συμπεριλαμβανομένων λεπτών σωματιδίων και ρύπων, σε ρέματα και ποτάμια, οδηγώντας σε αυξημένη θολότητα και μειωμένη

Chapter 1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

διαύγεια του νερού. Η υπερβολική καθίζηση μπορεί να εμποδίσει τις κοίτες των ποταμών και να επηρεάσει αρνητικά την υδρόβια βλάστηση, προκαλώντας περαιτέρω μόλυνση των υδρόβιων οργανισμών και υπονομεύοντας τον βιότοπό τους [24].

Επιπροσθέτως, η ρύπανση των υδάτων από βαρέα μέταλλα αποτελεί σημαντική περιβαλλοντική ανησυχία, που μπορεί να έχει σοβαρές επιπτώσεις στα οικοσυστήματα και την ανθρώπινη υγεία. Τα βαρέα μέταλλα είναι φυσικά στοιχεία με υψηλά ατομικά βάρη και πυκνότητες. Περιλαμβάνουν ουσίες όπως ο μόλυβδος, ο υδράργυρος, το κάδμιο, το αρσενικό, το χρώμιο και το νικέλιο. Οι ουσίες αυτές μπορεί να απελευθερωθούν από εδάφη, ιζήματα και πετρώματα κατά τη διάρκεια των καιρικών συνθηκών και των διαδικασιών αποσύνθεσης. Ενώ μικρές ποσότητες αυτών των μετάλλων είναι απαραίτητες για τον ανθρώπινο μεταβολισμό και τις σωματικές λειτουργίες, τα υπερβολικά επίπεδα μπορεί να προκαλέσουν σοβαρά προβλήματα υγείας [42].

Η απόρριψη βιομηχανικών λυμάτων στα υδατικά συστήματα είναι ένα σημαντικό παγκόσμιο περιβαλλοντικό ζήτημα. Τα βιομηχανικά λύματα συχνά περιέχουν τοξικά βαρέα μέταλλα, καθώς και άλλους οργανικούς και ανόργανους ρύπους. Αυτοί οι ρύποι μπορεί να προέρχονται από βιομηχανικές διεργασίες, εξορυκτικές δραστηριότητες και ακατάλληλη διάθεση απορριμμάτων. Πολλά βαρέα μέταλλα που βρίσκονται στα βιομηχανικά απόβλητα μπορούν να παραμείνουν στο περιβάλλον για μεγάλες περιόδους, προκαλώντας σοβαρά περιβαλλοντικά προβλήματα. Συγκεκριμένα, είναι συχνά διαλυτά στο νερό, καθιστώντας τα άμεσα διαθέσιμα στους ζωντανούς οργανισμούς [43]. Όταν τα βιομηχανικά λύματα που περιέχουν βαρέα μέταλλα απελευθερώνονται σε υδάτινους αποδέκτες όπως ποτάμια, λίμνες ή ωκεανοί, μπορεί να έχουν επιβλαβείς επιπτώσεις στο περιβάλλον και την ανθρώπινη υγεία [3]. Υπάρχουν διάφορες μέθοδοι και τεχνικές για την απομάκρυνση των βαρέων μετάλλων από το νερό, όπως η

Chapter 1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

χημική καταβύθιση, η ιοντοανταλλαγή, η φυτοεκχύλιση, η υπερδιήθηση, η αντίστροφη ώσμωση και η προσρόφηση [3, 12].

Στην παρούσα διπλωματική εργασία μελετάται το μαγνήσιο (Mg) και το μαγγάνιο (Mn). Παρόλο, που τα δύο αυτά στοιχεία δεν ταξινομούνται συνήθως στην κατηγορία των βαρέων μετάλλων, αποτελούν απαραίτητα στοιχεία που μπορεί να γίνουν προβληματικά σε υψηλές συγκεντρώσεις ή υπό συγκεκριμένες συνθήκες.

Η ύπαρξη υψηλών συγκεντρώσεων μαγγανίου (Mn) μπορεί να προκαλέσει αρνητικές επιπτώσεις στο νερό. Το μαγγάνιο στο νερό, κυρίως με τη μορφή δισθενών ιόντων Mn^{2+} , και λόγω των οργανοληπτικών ιδιοτήτων του θεωρείται ρύπος. Μπορεί να δώσει στο νερό ένα καφέ ή κοκκινωπό χρώμα, αλλοιώνοντας την εμφάνισή του. Επιπλέον, τα υψηλά επίπεδα μαγγανίου μπορούν να επηρεάσουν τη γεύση του νερού, που συχνά περιγράφεται ως μεταλλικό ή γήινο. Το συνιστάμενο όριο Μαγγανίου στο πόσιμο νερό σύμφωνα με την Ελληνική Νομοθεσία είναι 50 ppb [44]. Οι μικροοργανισμοί παίζουν σημαντικό ρόλο στην ύπαρξη και την ανακύκλωση του μαγγανίου σε φυσικά περιβάλλοντα. Συμμετέχουν στις βιολογικές διαδικασίες οξείδωσης και αναγωγής που μπορούν να επηρεάσουν τη συγκέντρωση και την κατανομή του μαγγανίου στις πηγές νερού [16]. Παράλληλα, τα υψηλά επίπεδα μαγγανίου στο νερό μπορεί να οδηγήσουν σε εναπόθεση και συσσώρευση ιζημάτων μαγγανίου στους σωλήνες διανομής. Η συσσώρευση ιζημάτων μαγγανίου παρέχει, επίσης, ένα ευνοϊκό περιβάλλον για την ανάπτυξη βακτηρίων, συμβάλλοντας σε δυσάρεστες οσμές και γεύσεις στο νερό. Η χρόνια έκθεση σε υψηλά επίπεδα μαγγανίου στο πόσιμο νερό μπορεί να έχει δυσμενείς επιπτώσεις στην υγεία [17]. Η παρατεταμένη έκθεση σε υψηλές συγκεντρώσεις μαγγανίου έχει συσχετιστεί με νευρολογικές και ψυχολογικές διαταραχές, αναπνευστικά προβλήματα και αυξημένη ευαισθησία σε λοιμώξεις. Ωστόσο, είναι σημαντικό να σημειωθεί ότι οι συγκεκριμένες

Chapter 1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

επιπτώσεις στην υγεία μπορεί να διαφέρουν ανάλογα με τη διάρκεια και την ένταση της έκθεσης. Για την αντιμετώπιση της παρουσίας υψηλών συγκεντρώσεων μαγγανίου στο νερό, μπορούν να χρησιμοποιηθούν διαδικασίες επεξεργασίας νερού. Τεχνικές όπως η οξείδωση, η διήθηση και η ανταλλαγή ιόντων μπορεί να είναι αποτελεσματικές στην απομάκρυνση του μαγγανίου από τις πηγές νερού [42]. Με την εφαρμογή κατάλληλων μεθόδων επεξεργασίας, η συγκέντρωση του μαγγανίου μπορεί να μειωθεί, βελτιώνοντας την ποιότητα του νερού και ελαχιστοποιώντας πιθανά προβλήματα υγείας.

Ενώ το μαγνήσιο (Mg) είναι ένα απαραίτητο μέταλλο για την ανθρώπινη υγεία και γενικά δεν θεωρείται τοξικό, οι υψηλές συγκεντρώσεις μαγνησίου στο νερό μπορεί να προκαλέσουν ανεπιθύμητα αποτελέσματα. Το συνιστάμενο όριο Μαγνησίου στο πόσιμο νερό σύμφωνα με τον Παγκόσμιο Οργανισμό Υγείας είναι 50 ppm [28]. Τα υψηλά επίπεδα μαγνησίου στο νερό συμβάλλουν στη σκληρότητα του νερού. Το σκληρό νερό περιέχει αυξημένες ποσότητες μετάλλων, όπως μαγνήσιο και ασβέστιο. Αν και δεν είναι τόσο επιβλαβές για την ανθρώπινη υγεία, το σκληρό νερό μπορεί να έχει ορισμένες πρακτικές συνέπειες. Μπορεί να οδηγήσει στο σχηματισμό αλάτων ή κοιτασμάτων ορυκτών σε υδραυλικά είδη και συσκευές μειώνοντας την απόδοση και τη διάρκεια ζωής τους. Επίσης, οι υψηλές συγκεντρώσεις μαγνησίου στο νερό μπορούν να συμβάλλουν σε μια ελαφρώς πικρή ή σαν μέταλλο γεύση [12]. Μερικά άτομα μπορεί να αντιληφθούν μια αισθητή διαφορά γεύσης, αν και διαφέρει από άτομο σε άτομο. Ωστόσο, οι γευστικές επιδράσεις γενικά δεν είναι επιβλαβείς ούτε προκαλούν ανησυχία. Σε βιομηχανικές συνθήκες, οι υψηλές συγκεντρώσεις μαγνησίου στο νερό μπορεί να έχουν συγκεκριμένα αποτελέσματα. Για παράδειγμα, σε ορισμένες διαδικασίες παραγωγής, τα αυξημένα επίπεδα μαγνησίου μπορεί να επηρεάσουν την αποτελεσματικότητα των χημικών αντιδράσεων ή να επηρεάσουν την ποιότητα του προϊόντος. Η επεξεργασία του νερού μπορεί να

είναι απαραίτητη για την αντιμετώπιση αυτών των ζητημάτων σε βιομηχανικές εφαρμογές. Ωστόσο, όσον αφορά την υγεία, τα υψηλά επίπεδα μαγνησίου στο πόσιμο νερό γενικά δεν θεωρούνται επιβλαβή. [12].

1.2 Η Έννοια του Καθαρού Νερού

Η ύπαρξη καθαρού νερού είναι καίριος παράγοντας για την δημόσια υγεία και τα οικοσυστήματα. Συγκεκριμένα, το νερό στο ανθρώπινο σώμα χρησιμοποιείται για την εκτέλεση μιας σειράς διάφορων σημαντικών λειτουργιών ζωτικής σημασίας. Ειδικότερα, χρησιμοποιείται ως λιπαντική ουσία στο σώμα, βοηθάει στην ρύθμιση της θερμοκρασίας αυτού, αποβάλλει τις τοξίνες, στέλνει τις θρεπτικές ουσίες στον οργανισμό και συμβάλλει στην πέψη. Ακόμη, η επαρκής ποσότητα υγρών καθίσταται αναγκαία για την διατήρηση της ισορροπίας των ηλεκτολυτών, όπως το ασβέστιο, το μαγνήσιο, το νάτριο και το κάλιο, καθώς ρυθμίζουν τις κυτταρικές διεργασίες, ελέγχουν την επικοινωνία των νευρών, και συμβάλλουν στην καλή λειτουργία της καρδιάς και της σύσπασης των μυών [6].

Το καθαρό νερό έχει τεράστια σημασία όχι μόνο από περιβαλλοντική, αλλά και από οικονομική άποψη, καθώς διαδραματίζει κρίσιμο ρόλο σε πολλούς τομείς της οικονομίας. Τομείς όπως η γεωργία, η αλιεία, ο τουρισμός, η βιομηχανία και η υγειονομική περίθαλψη βασίζονται σε μεγάλο βαθμό στη διαθεσιμότητα και την ποιότητα καθαρού νερού για να εξασφαλίσουν τη βέλτιστη λειτουργία και παραγωγικότητα [6].

Η μείωση των δραστηριοτήτων εξόρυξης σε καθαρούς υδάτινους πόρους απαιτεί συνδυασμό προσπαθειών διατήρησης, βελτιωμένης απόδοσης και πρακτικών βιώσιμης διαχείρισης του νερού. Αυτό μπορεί να επιτευχθεί μέσω πρακτικών εξοικονόμησης για την ελαχιστοποίηση της ζήτησης νερού και τη μείωση της ανάγκης για εξόρυξη [30]. Επίσης, σημαντικός παράγοντας αποτελεί η

πρόληψη στο κομμάτι της ρύπανσης, δηλαδή, η ελαχιστοποίηση των εισροών ρύπανσης σε υδάτινα σώματα για την προστασία της ποιότητας τους και για την μείωση της ανάγκης υπερβολικής εξόρυξης για σκοπούς επεξεργασίας. Με την εφαρμογή αυτών των μέτρων, είναι δυνατό να μειωθούν οι δραστηριότητες εξόρυξης σε καθαρούς υδάτινους πόρους και να προωθηθούν πρακτικές βιώσιμης διαχείρισης, οι οποίες διασφαλίζουν τη μακροπρόθεσμη διαθεσιμότητα και προστασία του καθαρού νερού για τις μελλοντικές γενιές [30].

1.3 Χαρακτηριστικά Περιοχή Μελέτης

Η Περιφέρεια Δυτικής Μακεδονίας αποτελεί μια από τις διοικητικές περιφέρειες της Ελλάδας. Σε μια έκταση 9.451 τ.χλ., φιλοξενεί πληθυσμό 255.056 κατοίκων, όπως τεκμηριώνεται στην πιο πρόσφατη απογραφή τη ΕΛΣΑΤ (2021) [49]. Το κύριο αστικό κέντρο και διοικητική πρωτεύουσα είναι η πόλη της Κοζάνης, η οποία αναλαμβάνει κεντρικό ρόλο στο κοινωνικοοικονομικό τοπίο της περιοχής. Αξιοσημείωτη είναι η αναπόσπαστη συμβολή της Κοζάνης στον ενεργειακό τομέα, καθώς αποτελεί κομβικό κέντρο υπεύθυνο για την παραγωγή των 2/3 της ενέργειας της χώρας (θερμοηλεκτρικοί σταθμοί, που λειτουργούν με λιγνίτη) [35, 53].

Η Περιφέρεια Δυτικής Μακεδονίας περιλαμβάνει τις περιφερειακές ενότητες Γρεβενών, Καστοριάς, Κοζάνης και Φλώρινας. Χαρακτηρίζεται κυρίως από την ορεινή της τοπογραφία, με την πλειοψηφία των κορυφών της να ξεπερνούν σε υψόμετρο τα 2.000 μέτρα, καθιστώντας την τη μοναδική περιοχή στην Ελλάδα που δεν επηρεάζεται από παράκτια ύδατα. Τα νοτιοανατολικά όρια της περιοχής καθορίζονται από το εξέχον ορεινό συγκρότημα της Πίνδου, το οποίο εκτείνεται με νοτιοανατολική κατεύθυνση. Στα νότια, τα βουνά Χάσια και Πιέρια, με νοτιοδυτικό προσανατολισμό, λειτουργούν ως φυσικά εμπόδια μεταξύ της

Δυτικής Μακεδονίας και της Θεσσαλίας [53].

1.3.1 Κλιματολογικές Συνθήκες

Το κλίμα της περιφέρειας της Δυτικής Μακεδονίας χαρακτηρίζεται ως εύκρατο, με βαρύς χειμώνες και ήπια καλοκαίρια, σε αντίθεση με το μεσογειακό κλίμα παραθαλάσσιων περιοχών της χώρας. Το υψόμετρο των βουνών και η μορφολογία του εδάφους προσδίδει ένα διαφορετικό κλιματολογικό ενδιαφέρον σε σχέση με τα υπόλοιπα σημεία της Ελλάδας. Οι βόρειοι άνεμοι που επικρατούν, διατηρούν χαμηλά την θερμοκρασία και δημιουργούν τις κατάλληλες συνθήκες για αρκετές χιονοπτώσεις τους χειμερινούς μήνες [54].

Ωστόσο, το μικρόκlima συγκεκριμένων περιοχών εντός της Δυτικής Μακεδονίας υπόκειται σε σημαντική επίδραση από ανθρωπογενείς παράγοντες. Ειδικότερα, στις περιοχές όπου βρίσκεται η τεκτονική λίμνη Πολυφύτου, αλλά και στις περιοχές της Κοζάνη της Πτολεμαΐδας και του Αμυνταίου, το κλίμα μεταβάλλεται λόγω της παρουσίας και λειτουργίας θερμοηλεκτρικών μονάδων της ΔΕΗ. Οι βιομηχανικές αυτές εγκαταστάσεις ασκούν σημαντικές επιδράσεις στις τοπικές κλιματολογικές συνθήκες. Οι δραστηριότητες των θερμοηλεκτρικών εργοστασίων έχουν ως αποτέλεσμα τη διακριτή κλιμάκωση των επιπέδων υγρασίας. Η απόρριψη θερμού νερού από τις μονάδες αυτές στη λίμνη και τις παρακείμενες περιοχές προκαλεί αύξηση της υγρασίας της ατμόσφαιρας, με συνέπεια την αύξηση των επιπέδων υγρασίας στη γύρω περιοχή. Ως επακόλουθο αυτού του φαινομένου, η συχνότητα των ημερών με ομίχλη παρουσιάζει αξιοσημείωτη αύξηση, καθώς ο συνδυασμός της αυξημένης υγρασίας και των τοπικών τοπογραφικών χαρακτηριστικών ευνοεί τις συνθήκες για σχηματισμό ομίχλης. Επιπλέον, η λειτουργία των θερμοηλεκτρικών σταθμών έχει τη δυνατότητα να επηρεάσει τα πρότυπα χιονόπτωσης στις συγκεκριμένες περιοχές [54].

1.3.2 Γεωλογικό Υπόβαθρο

Η δυτική Μακεδονία, όπως και ολόκληρη η Βαλκανική χερσόνησος, βρισκόταν αρχικά στον βυθό μιας τεράστιας προϊστορικής θάλασσας, η οποία ονομάζεται Τηθύς. Η ανάδειξη της σε ξηρά έλαβε χώρα στην αρχή της γεωλογικής περιόδου, που ονομάζεται Μειόκαινο [53].

Η Περιφέρεια διαιρείται σε δύο τμήματα, λόγω του έντονου αναγλύφου που εμφανίζεται κατά μήκος μιας σχεδόν κεντρικής ζώνης, με κατεύθυνση ΒΔ-ΝΑ. Πιο συγκεκριμένα, υπάρχει το ανατολικό τμήμα, το οποίο χαρακτηρίζεται ως πεδινό από πλευράς αναγλύφου, και το σχετικά ορεινό δυτικό τμήμα. Το ανατολικό τμήμα περιλαμβάνει πλούσιους υδροφορείς και τα λιγνιτοφόρα πεδία.

Γεωτεκτονικά, η Περιφέρεια της Δυτικής Μακεδονίας ανήκει στην Πελαγονική Ζώνη, η οποία καλύπτει το μισό περίπου τμήμα της, και στην Ζώνη της Πίνδου. Συγκεκριμένα, η Πελαγονική Ζώνη ανήκει σε μία ευρύτερη ομάδα ζωνών, που ονομάζονται Εσωτερικές Ελληνίδες και η Ζώνη της Πίνδου στην ομάδα ζωνών γνωστές ως Εξωτερικές Ελληνίδες [53].

1.3.3 Ορυκτός Πλούτος

Οι περιοχές των λιμνών Αμυνταίου και δευτερευόντως των τεχνητών λιμνών Αλιάκμονα σχετίζονται με την τεκτονική τάφρο της Δυτικής Μακεδονίας όπου εντοπίζονται τα μεγαλύτερα λιγνιτικά αποθέματα της Χώρας, η αξιοποίηση των οποίων συμβάλει καθοριστικά στην εθνική παραγωγή ηλεκτρισμού [46].

Στη λεκάνη της Φλώρινας κυριαρχεί ο ξυλιτικός λιγνίτης. Στα ανατολικά περιθώρια της λεκάνης Πτολεμαΐδας – Αμυνταίου υπάρχουν τρία ξυλιτικά κοιτάσματα: των Κομνηνών, του Ανατολικού – Καρυχωρίου και της Βεγόρας. Ο λιγνίτης της μεσαίας σειράς εμφανίζεται κυρίως στη λεκάνη Πτολεμαΐδας – Αμυνταίου. Πρόκειται για στιβάδες, που αποτελούνται από εναλλαγές στρ-

ωμάτων μικρού πάχους λιγνίτη με αργίλους και μάργες. Παρόμοια ποιοτικά χαρακτηριστικά διαθέτει και ο λιγνίτης Αναργύρων – Αμυνταίου με ελαφρά μικρότερη θερμαντική ικανότητα.

Τα συνολικά αποθέματα ανέρχονται σε 3.100 εκ. τόνους, από τα οποία μόνο τα 64% περίπου είναι εκμεταλλεύσιμα [53, 46].

1.3.4 Μεταλλευτική Δραστηριότητα στην Δυτική Μακεδονία

Η Δυτική Μακεδονία είναι γνωστή για τη μεταλλευτική της δραστηριότητα. Η περιοχή είναι πλούσια σε ορυκτές ύλες, ιδιαίτερα σε λιγνίτη και άλλα ορυκτά. Η Δυτική Μακεδονία φιλοξενεί εκτεταμένα κοιτάσματα λιγνίτη (φαιού άνθρακα), τα οποία αποτέλεσαν σημαντική πηγή ενέργειας για την Ελλάδα. Τα λιγνιτωρυχεία της περιοχής προμηθεύουν καύσιμα στα εργοστάσια παραγωγής ενέργειας, συμβάλλοντας στον ενεργειακό τομέα της χώρας. Η βιομηχανία του λιγνίτη έχει διαδραματίσει καθοριστικό ρόλο στην τοπική οικονομία και την απασχόληση. Ο λιγνίτης που εξορύσσεται στη Δυτική Μακεδονία χρησιμοποιείται κυρίως για την παραγωγή ηλεκτρικής ενέργειας. Η περιοχή διαθέτει αρκετά μεγάλα λιγνιτωρυχεία, τα οποία βρίσκονται κυρίως στην Πτολεμαίδα, το Αμύνταιο και τη Μελίτη. Το λιγνιτωρυχείο του Αμυνταίου ήταν προσωρινά κλειστό, αλλά επρόκειτο να ενεργοποιηθεί.

Η εξόρυξη λιγνίτη περιλαμβάνει κυρίως την εφαρμογή τεχνικών επιφανειακής εξόρυξης, όπως η ανοικτή εξόρυξη, η οποία, δυστυχώς, επιφέρει αρκετές δυσμενείς συνέπειες στο φυσικό περιβάλλον [40]. Η διαδικασία εκσκαφής διαταράσσει την ακεραιότητα του εδάφους, οδηγώντας στην διαταραχή αυτού. Εν συνεχεία, ακολουθεί διάβρωση και συνακόλουθη απώλεια του γόνιμου επιφανειακού εδάφους, θέτοντας, κατά συνέπεια, σε κίνδυνο την οικολογική ισορροπία και τη βιοποικιλότητα των επηρεαζόμενων περιοχών. Επιπλέον, η αλλοίωση των φυσικών

Chapter 1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

τοπίων που προκύπτει από τις εξορυκτικές δραστηριότητες επιδεινώνει περαιτέρω το ζήτημα, οδηγώντας στην απώλεια ζωτικών ενδαιτημάτων για διάφορα φυτικά και ζωικά είδη, συμβάλλοντας έτσι στην οικολογική ανισορροπία και τον κατακερματισμό των οικοτόπων [36].

Επιπροσθέτως, η καύση του λιγνίτη στους σταθμούς ηλεκτροπαραγωγής αποτελεί μια πρόσθετη και σημαντική περιβαλλοντική πρόκληση. Κατά συνέπεια, η διαδικασία αυτή συμβάλλει σημαντικά στις εκπομπές αερίων του θερμοκηπίου, ιδίως διοξειδίου του άνθρακα, ενισχύοντας το φαινόμενο αυτό, και συντείνοντας σημαντικά στην παγκόσμια κλιματική αλλαγή και τις εκτεταμένες επιπτώσεις της [26]. Σε συνδυασμό με τις εκπομπές αερίων του θερμοκηπίου, η καύση του λιγνίτη απελευθερώνει επιβλαβείς ρύπους στην ατμόσφαιρα, που περιλαμβάνουν σωματίδια, διοξείδιο του θείου, οξείδια του αζώτου και υδράργυρο, επιδεινώντας έτσι την ατμοσφαιρική ρύπανση και θέτοντας σημαντικούς κινδύνους τόσο για τη δημόσια υγεία όσο και για την ευημερία των οικοσυστημάτων [46]

Οι εξορυκτικές δραστηριότητες στη Δυτική Μακεδονία απαιτούν σημαντική χρήση νερού για βασικούς σκοπούς, όπως η καταστολή σκόνης και η πλύση άνθρακα. Η συνετή εφαρμογή ισχυρών πρακτικών διαχείρισης των υδάτων, που περιλαμβάνουν υπεύθυνη εξόρυξη νερού και αποτελεσματική διαχείριση των λυμάτων, αποκτά ύψιστη σημασία για τον μετριασμό των πιθανών δυσμενών επιπτώσεων στους τοπικούς υδάτινους πόρους και τα ευαίσθητα οικοσυστήματα [18].

Τα τελευταία χρόνια έχει δοθεί συντονισμένη και σκόπιμη έμφαση στην επιτάχυνση της μετάβασης προς τις ανανεώσιμες πηγές ενέργειας και την ταυτόχρονη μείωση της εξάρτησης από τον λιγνίτη στην Ελλάδα. Αυτή η στρατηγική στροφή στην ενεργειακή πολιτική απορρέει από την αυξανόμενη αναγνώριση των περιβαλλοντικών προκλήσεων και των προκλήσεων βιωσιμότητας που συνδέονται με την παραγωγή ενέργειας από λιγνίτη. Η υιοθέτηση εναλλακτικών λύσεων

Chapter 1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

ανανεώσιμων πηγών ενέργειας αποτελεί ένα καίριο βήμα για την προώθηση ενός πιο βιώσιμου και περιβαλλοντικά υπεύθυνου ενεργειακού τοπίου, το οποίο επιδιώκει να περιορίσει τις εκπομπές αερίων του θερμοκηπίου και να υποστηρίξει τη μακροπρόθεσμη διατήρηση του περιβάλλοντος [26].

Κεφάλαιο 2

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΥΠΟΒΑΘΡΟ

Η επιστήμη της γεωστατιστικής έχει ως βάση τη Στατιστική και τη Θεωρία των Πιθανοτήτων. Στηρίζεται στη βασική μαθηματική έννοια του τυχαίου πεδίου και μέσω των γεωστατιστικών μεθόδων διεξάγεται η ανάλυση και πρόβλεψη χωρικών ιδιοτήτων. Οι μέθοδοι γεωστατιστικής ανάλυσης οδηγούν στον προσδιορισμό της χωρικής κατανομής μεταβλητών σε σημεία περιοχής, όπου οι μεταβλητές αυτές δεν είναι γνωστές και οι οποίες χαρακτηρίζουν μεγέθη με οικονομική ή περιβαλλοντική σημασία [9].

Μερικές από τις εφαρμογές στις οποίες χρησιμοποιείται σήμερα η γεωστατιστική περιλαμβάνουν, την έρευνα κοιτασμάτων (εκτίμηση του πάχους και του βάθους των γεωλογικών στρωμάτων, περιεχόμενης ενέργειας, θερμογόνο δύναμη, πορώδες και διαπερατότητα των πετρωμάτων, συγκεντρώσεις ρύπανσης), τον χαρακτηρισμό της ποιότητας βιομηχανικών προϊόντων, την ανάλυση βροχοπτώσεων και την εκτίμηση περιβαλλοντικού κινδύνου [31]. Με την αναγνώριση και την ενσωμάτωση της φυσικής μεταβλητότητας σε στοχαστικά μοντέλα, η γεωστατιστική επιτρέπει την επίλυση συγκεκριμένων χωρικών προβλημάτων και παρέχει πολύτιμες γνώσεις για τη λήψη αποφάσεων και τη διαχείριση των πόρων.

Chapter 2. ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΥΠΟΒΑΘΡΟ

Συνοψίζοντας, ο σκοπός της γεωστατιστικής είναι να παρέχει ένα ισχυρό και ολοκληρωμένο πλαίσιο για κατανόηση των χωρικών προτύπων και σχέσεων, στην πραγματοποίηση προβλέψεων σε περιοχές με περιορισμένα δεδομένα και βοήθεια στην εκτίμηση διαφόρων παραμέτρων σημαντικών για τις βιομηχανίες και την περιβαλλοντική διαχείριση.

2.1 Βασικές Έννοιες Τυχαίων Πεδίων

2.1.1 Τυχαιότητα

Μέσω της τυχαιότητας ή της εγγενούς μεταβλητότητας εξετάζονται φαινόμενα, τα οποία δεν μπορούν να περιγραφούν επακριβώς. Σε πολλές ρεαλιστικές καταστάσεις, η πλήρης και απόλυτη ακρίβεια είναι δύσκολο ή αδύνατο να επιτευχθεί. Ο κλάδος της γεωστατιστικής χρησιμοποιείται σε τέτοιες περιπτώσεις με σκοπό να κατανοήσει και να εξηγήσει την αβεβαιότητα και την μεταβλητότητα, που σχετίζεται με χωρικά και χρονικά δεδομένα.

Οι παράγοντες στους οποίους μπορεί να οφείλεται η τυχαιότητα συνήθως μπορούν να χαρακτηρισθούν ως εγγενείς ή μη εγγενείς. Εγγενείς είναι οι παράγοντες με σημαντική χωρική και χρονική μεταβλητότητα. Για παράδειγμα, μπορούν να αφορούν περιβαλλοντικές διεργασίες, όπως οι ιδιότητες του εδάφους, οι συγκεντρώσεις ρύπων ή γεωλογικές δομές, που συχνά εμφανίζουν φυσική χωρική ετερογένεια. Οι μη εγγενείς παράγοντες σχετίζονται συχνά με σφάλματα μέτρησης ή με περιορισμούς παρατήρησης που προκύπτουν από τη διαδικασία συλλογής δεδομένων. Αυτά μπορεί να περιλαμβάνουν τυχαία σφάλματα, περιορισμένα σημεία δεδομένων ή ανακρίβειες στις μετρήσεις κατά τη δειγματοληψία ή τον πειραματισμό [56].

2.1.2 Τυχαία Μεταβλητή

Τυχαία μεταβλητή X ονομάζεται μία μεταβλητή, η οποία μπορεί να λάβει τιμές από ένα σύνολο πιθανών τιμών. Μια τυχαία μεταβλητή ονομάζεται διακριτή αν λαμβάνει τιμές x_i με $i = 1, \dots, N$. Οι πιθανές τιμές μιας διακριτής τυχαίας μεταβλητής μπορούν να παρατίθενται και κάθε τιμή σχετίζεται με μια συγκεκριμένη πιθανότητα εμφάνισης. Αντίθετα, μια συνεχής τυχαία μεταβλητή μπορεί να λάβει οποιαδήποτε τιμή εντός ενός συγκεκριμένου εύρους [22]. Συγκεκριμένα, μια μεταβλητή X εμπίπτει σε ένα απειροελάχιστο διάστημα γύρω από το x και αναπαρίσταται ακριβώς από την συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας PDF (Probability Density Function), που αξιολογείται στο συγκεκριμένο σημείο.

Η αναμενόμενη τιμή μιας συνεχούς τυχαίας μεταβλητής X συμβολίζεται με $E[X]$, αποτελεί μέτρο της κεντρικής τάσης της κατανομής πιθανοτήτων και αντιπροσωπεύει τη μέση τιμή της μεταβλητής. Στην περίπτωση που η κατανομή πιθανοτήτων των X ακολουθεί μία συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (pdf) $f(x)$, τότε η αναμενόμενη τιμή δίνεται από τον τύπο:

$$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx. \quad (2.1)$$

2.1.3 Ανάλυση Χωρικών Σχέσεων στα Τυχαία Πεδία

Ένα τυχαίο πεδίο θεωρείται μια συλλογή τυχαίων μεταβλητών, που κατανέμονται στο χώρο. Ένα θεμελιώδες χαρακτηριστικό των τυχαίων πεδίων είναι ότι οι επιμέρους τυχαίες μεταβλητές, που τα απαρτίζουν δεν είναι ανεξάρτητες, αλλά σχετίζονται μεταξύ τους.

Σε ένα πραγματικό πεδίο είναι συχνά αδύνατο να υπάρξει συνεχής δειγματοληψία τόσο στον χώρο όσο και στο χρόνο, λόγω διάφορων πρακτικών πε-

Chapter 2. ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΥΠΟΒΑΘΡΟ

ριορισμών και της φύσης του περιβάλλοντος που μελετάται. Συγκεκριμένα, η γεωλογική ετερογένεια και η επιθυμία να αποτυπωθεί αποτελεσματικά η χωρική μεταβλητότητα μπορεί να οδηγήσει στην επιλογή τοποθεσιών σε διαφορετικές αποστάσεις. Επιπλέον, οι υλικοτεχνικοί περιορισμοί και η προσβασιμότητα σε συγκεκριμένες περιοχές μπορεί να οδηγήσουν σε ένα ακανόνιστο καταναμημένο σύνολο σημείων δειγματοληψίας. Για τον λόγο αυτό, τα δεδομένα συλλέγονται συνήθως σε διακριτές θέσεις και η διάταξη αυτών των σημείων δειγματοληψίας μπορεί να μην ακολουθεί ένα κανονικό μοτίβο πλέγματος. Επιλέγοντας με σύ-νεση τις τοποθεσίες γεώτρησης, η δειγματοληψία μπορεί ακόμα να αποτυπώσει αποτελεσματικά τις παραλλαγές στο υπό μελέτη φαινόμενο [57].

Με τη χρήση γεωστατιστικών τεχνικών, είναι δυνατόν να δημιουργηθεί ένα πυκνό, κανονικό πλέγμα εκτιμώμενων τιμών σε όλη την περιοχή ενδιαφέροντος, παρόλο που τα αρχικά σημεία δειγματοληψίας συλλέχθηκαν σε ένα μη κανονικό και τυχαίο πλέγμα. Οι εκτιμήσεις σε θέσεις χωρίς δείγμα επηρεάζονται από τα κοντινά σημεία δειγματοληψίας, με μεγαλύτερη έμφαση σε εκείνα που είναι χωρικά πιο κοντά και μοιράζονται παρόμοιες τιμές. Σε τέτοιες περιπτώσεις, οι γεωστατιστικές μέθοδοι, ιδιαίτερα εκείνες που λαμβάνουν υπόψη τη χωρική συσχέτιση μεταξύ των δειγματοληπτικών σημείων, καθίστανται πολύτιμες για χωρική εκτίμηση και παρεμβολή.

Σε αυτή την εργασία ένα τυχαίο πεδίο συμβολίζεται ως $X(s)$, και κάθε τυχαία τιμή αντιστοιχεί σε μία συγκεκριμένη χωρική θέση, που αντιπροσω-πεύεται από ένα διάνυσμα s . Ένα τυχαίο πεδίο είναι διακριτό, όταν αυτό χαρακτηρίζεται από ένα πεπερασμένο και καλά καθορισμένο σύνολο τυχαίων αριθμών και οι δείκτες αυτών των τυχαίων αριθμών s , οι οποίοι αντιπροσω-πεύουν χωρικές θέσεις, ανήκουν σε έναν χώρο n -διαστάσεων, που μελετάται. Με απλούστερους όρους οι μαθηματικές ιδιότητες των τυχαίων πεδίων είναι δι-αφορετικές από αυτές ενός συνόλου ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών. Στην

Chapter 2. ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΥΠΟΒΑΘΡΟ

περίπτωση ενός συνόλου ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών, η κοινή κατανομή πιθανοτήτων τους είναι απλώς το γινόμενο των μεμονωμένων κατανομών πιθανοτήτων τους. Ωστόσο, στην περίπτωση των τυχαίων πεδίων, η κοινή κατανομή των τυχαίων μεταβλητών πρέπει να λαμβάνει υπόψη τη χωρική δομή συσχέτισης [37].

Στην Γεωστατιστική ένα τυχαίο πεδίο αναλύεται σε δύο συνιστώσες, την αιτιοκρατική και την στοχαστική (τυχαία). Η αιτιοκρατική συνιστώσα αναφέρεται συνήθως ως τάση, η οποία συμβολίζεται με $m_x(s)$ και αντιπροσωπεύει τη χωρική διακύμανση στο πεδίο. Η στοχαστική συνιστώσα αναφέρεται ως διακύμανση (ή υπολειπόμενη) και συμβολίζεται με $X'(s)$. Αυτή η συνιστώσα αποτυπώνει την τυχαία ή χωρικά αδόμητη μεταβλητότητα που δεν μπορεί να ληφθεί υπόψη από το στοιχείο τάσης.

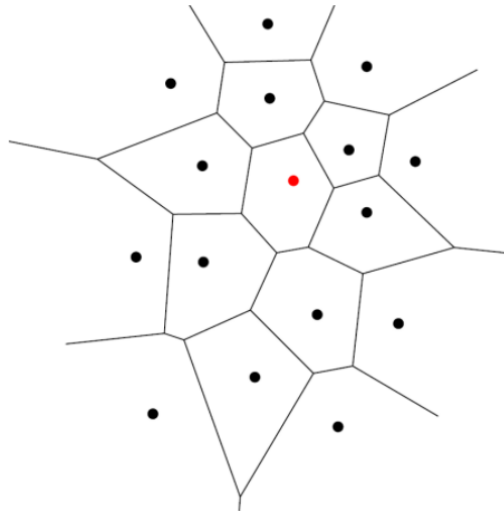
$$X(s) = m_x(s) + X'(s) \quad (2.2)$$

2.1.4 Διάγραμμα Voronoi

Το διάγραμμα Voronoi είναι μια χρήσιμη μέθοδος που χρησιμοποιείται ευρέως για την επίλυση προβλημάτων στον υπολογιστικό χώρο. Αποτελεί μια απεικόνιση ενός χώρου όπου αυτός χωρίζεται σε περιοχές με βάση την απόσταση από ένα σύνολο διακριτών σημείων.

Στην περίπτωση ενός συνόλου γεωτρήσεων $P = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$, το διάγραμμα Voronoi ορίζεται ως ένα επίπεδο που διαιρείται σε περιοχές με τέτοιο τρόπο, ώστε κάθε σημείο u που βρίσκεται πιο κοντά σε μια γεώτρηση p_i με συντεταγμένες s_i , να ανήκει στην περιοχή που αντιστοιχεί στο σημείο p_i και να έχει την τιμή $\hat{X}(u) = X(s_i)$. Οι περιοχές αυτές σχηματίζουν ένα κλειστό πολυγωνικό σχήμα, όπως παρουσιάζεται στο γράφημα 2.1 [4].

Το διάγραμμα Voronoi είναι χρήσιμο γιατί παρέχει σημαντικές πληροφορίες



Εικόνα 2.1: Παράδειγμα μορφής διαγράμματος Voronoi [33].

για μια εκτεταμένη περιοχή μελέτης, και μπορεί να χρησιμοποιηθεί σε πολλούς τομείς, όπως η γεωστατιστική, η γεωφυσική, η υδρολογία, η αστρονομία, η ρομποτική, η ανάλυση δεδομένων κ.α. [13], για να κατανοήσει και να αξιολογήσει τη χωρική σχέση μεταξύ σημείων και τα μοτίβα που ανακύπτουν από αυτήν τη σχέση.

2.2 Παράμετροι Κατανομής Πιθανότητας

Οι παράμετροι κατανομής πιθανότητας αποτελούν σημαντικά στατιστικά χαρακτηριστικά που χρησιμοποιούνται για να περιγράψουν το τυχαίο πεδίο και τις κατανομές πιθανότητας που το χαρακτηρίζουν. Αυτές οι παράμετροι καθορίζονται από τη Συνάρτηση Κατανομής και τη Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας. Αναλύονται συνήθως σε τρεις κύριες κατηγορίες:

1. **Μεγέθη Θέσης (Measures of Location):** Αυτά τα μεγέθη παρέχουν πληροφορίες σχετικά με τη θέση του κέντρου της κατανομής. Συμπεριλαμβάνουν τη μέση τιμή (ή αναμενόμενη τιμή) και την διάμεσο.

Chapter 2. ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΥΠΟΒΑΘΡΟ

2. **Μεγέθη Διασποράς (Measures of Spread):** Αυτά τα μεγέθη δίνουν πληροφορίες σχετικά με το πώς οι τιμές κατανέμονται γύρω από το κέντρο. Συμπεριλαμβάνουν τη διασπορά, το εύρος και την τυπική απόκλιση.
3. **Μεγέθη Μορφής (Measures of Shape):** Αυτά τα μεγέθη περιγράφουν το σχήμα της κατανομής. Συμπεριλαμβάνουν την κυρτότητα, την ασυμμετρία και άλλα χαρακτηριστικά που περιγράφουν το σχήμα της κατανομής [57].

Ελάχιστη και Μέγιστη τιμή

Η ελάχιστη και μέγιστη τιμή αναφέρονται στις ακραίες τιμές ενός συνόλου δεδομένων ή μιας κατανομής, δηλαδή στην πιο μικρή και μεγάλη τιμή αντίστοιχα [47].

Η **ελάχιστη τιμή** x_{min} είναι η πιο χαμηλή τιμή που υπάρχει σε ένα σύνολο δεδομένων ή μια κατανομή. Είναι η τιμή που βρίσκεται στον κάτω άκρο του εύρους των τιμών και αντιπροσωπεύει το ελάχιστο. Αντιθέτως, η **μέγιστη τιμή** x_{max} είναι η πιο υψηλή τιμή σε ένα σύνολο δεδομένων ή μια κατανομή. Είναι η τιμή που βρίσκεται στον πάνω άκρο του εύρους των τιμών και αντιπροσωπεύει το μέγιστο.

Συνήθως, αυτές οι τιμές είναι χρήσιμες για την κατανόηση του εύρους των δεδομένων και τυχόν ακραίων τιμών που μπορεί να υπάρχουν.

2.2.1 Παράμετροι Θέσης

Διάμεσος

Ο **διάμεσος** x_{med} αποτελεί μία από τις μέσες τιμές που χρησιμοποιούνται στη στατιστική για τη χαρακτηριστική περιγραφή της κεντρικής τάσης ενός συνόλου

Chapter 2. ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΥΠΟΒΑΘΡΟ

δεδομένων. Ο διάμεσος είναι η τιμή που χωρίζει ένα σύνολο δεδομένων σε δύο ίσα ή ισοδύναμα μέρη. Ο υπολογισμός του διαμεσου εξαρτάται από τη φύση του συνόλου δεδομένων, δηλαδή αν πρόκειται για ένα σύνολο με περιττό αριθμό δειγμάτων ή ζυγό αριθμό δειγμάτων.

Στην περίπτωση περιττού αριθμού δειγμάτων, ο διάμεσος είναι η τιμή που βρίσκεται στο κέντρο του συνόλου δεδομένων μετά την ταξινόμηση των δειγμάτων σε αύξουσα σειρά, ώστε να ισχύει $x_i \leq x_i + 1$. Αντιθέτως, στην περίπτωση ζυγού αριθμού δειγμάτων, ο διάμεσος υπολογίζεται ως ο μέσος όρος των δύο μεσαίων τιμών, δηλαδή των δύο τιμών που βρίσκονται στη μέση του συνόλου δεδομένων όταν αυτό ταξινομείται [56].

Ο διάμεσος αποτελεί σημαντική μέτρηση της κεντρικής τάσης που δεν επηρεάζεται από ακραίες τιμές και χρησιμοποιείται ευρέως στη στατιστική για να περιγράφει τη μεσαία τιμή ενός συνόλου δεδομένων.

Μέση Τιμή

Σε ένα τυχαίο πεδίο, ο προσδιορισμός της μορφής μιας κατανομής πιθανοτήτων από πειραματικά δεδομένα είναι απαραίτητος για την κατανόηση και τον χαρακτηρισμό της αβεβαιότητας και της μεταβλητότητας του υπό μελέτη φαινομένου. Η διαδικασία αυτή περιλαμβάνει την εκτίμηση των παραμέτρων της [51]. Οι στατιστικές ροπές, οι οποίες συμβολίζονται με μ_k , παίζουν καθοριστικό ρόλο στη σύνοψη αυτών των προσδιορισμών. Οι ροπές ορίζονται γύρω από οποιονδήποτε επιλεγμένο άξονα, πράγμα που υποδηλώνει ότι μπορούν να υπολογιστούν σε σχέση με οποιαδήποτε επιθυμητή τιμή της τυχαίας μεταβλητής, η οποία συχνά συμβολίζεται ως X , ως εξής:

$$\mu_k = E[X^k] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k f(x) dx \quad (2.3)$$

Chapter 2. ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΥΠΟΒΑΘΡΟ

Η μέση τιμή του πεδίου, που συχνά συμβολίζεται ως $m_x(\mathbf{s})$ αντιπροσωπεύει την πρώτη ροπή ($k = 1$) μιας κατανομής τυχαίας μεταβλητής. Αυτό το πεδίο αντιστοιχεί στο κέντρο βάρους ή στη μέση τιμή της κατανομής, και δίνεται από την σχέση

$$m_x(\mathbf{s}) = E[X(s)] \quad (2.4)$$

όπου το $X(\mathbf{s})$ είναι το τυχαίο πεδίο ως προς το διάνυσμα θέσης \mathbf{s} και το S αντιπροσωπεύει την αναμενόμενη τιμή ή τη μέση τιμή σε ένα σύνολο δυνατών καταστάσεων [56].

Η Μέση τιμή και η Διάμεσος ταυτίζονται στην περίπτωση συμμετρικής κατανομής με μία μόνο μέγιστη τιμή (κορυφή της κατανομής). Όταν δεν ταυτίζονται, συνήθως υποδηλώνει ότι η κατανομή είναι ασύμμετρη ή έχει ακραίες τιμές, που επηρεάζουν δυσανάλογα την μέση τιμή. Η διάμεσος είναι λιγότερο ευαίσθητη σε ακραίες τιμές και συχνά προτιμάται σε ασύμμετρες κατανομές [29].

2.2.2 Παράμετροι Διασποράς

Διασπορά

Η διασπορά αποτελεί μία κεντρική παράμετρο, που χρησιμοποιείται για να εκφράσει τη χωρική μεταβλητότητα σε μία περιοχή, που παρουσιάζουν οι τιμές εντός ενός τυχαίου πεδίου ή μιας κατανομής. Συγκεκριμένα, αποτελεί τη δεύτερη ροπή ($k = 2$) σχετικά με τη μέση τιμή και χρησιμεύει ως έκφραση του μέτρου της μέσης απόκλισης των τιμών ενός τυχαίου πεδίου από τη μέση τιμή του.

Η διασπορά ενός τυχαίου πεδίου X_s αποτελεί την μέση τιμή του τετραγώνου των διακυμάνσεων και ορίζεται ως εξής:

$$\sigma_x^2(s) \equiv E[\{X(s) - m_x(s)\}^2] = E[X'^2(s)] \quad (2.5)$$

Chapter 2. ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΥΠΟΒΑΘΡΟ

Κατά συνέπεια, η διασπορά καθορίζεται από τη θέση των τιμών σε σχέση με την μέση τιμή. Συγκεκριμένα, μικρή διασπορά σημαίνει ότι το μεγαλύτερο πλήθος των τιμών βρίσκεται κοντά στην μέση τιμή, υποδηλώνοντας μειωμένη μεταβλητότητα. Αντίθετα, μεγάλη διακύμανση υπάρχει όταν το πλήθος των τιμών έχουν μεγαλύτερη διασπορά, σηματοδοτώντας αυξημένη μεταβλητότητα [33, 23].

Τυπική Απόκλιση

Η τυπική απόκλιση παριστάνεται ως:

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{1}{E} \sum_s X'^2(s)} \quad (2.6)$$

και ορίζεται ως η τετραγωνική ρίζα της διασποράς, χρησιμεύοντας στον ποσοτικό προσδιορισμό της απόκλισης της κατανομής από τον μέσο όρο της. Συγκεκριμένα, η τυπική απόκλιση χρησιμοποιείται για να χαρακτηρίσει τόσο τα πιθανά σφάλματα που υπάρχουν στις πειραματικές μετρήσεις, όσο και τα σφάλματα εκτίμησης που σχετίζονται με τον προσδιορισμό των παραμέτρων της κατανομής πιθανότητας από ένα δείγμα [56].

Εύρος

Το εύρος είναι ένα στατιστικό μέτρο που αναφέρεται στη διαφορά μεταξύ της μεγαλύτερης και της μικρότερης τιμής σε ένα σύνολο δεδομένων. Αντιπροσωπεύει την περιοχή στην οποία κατανέμονται οι τιμές και πόσο διαφορετικές μπορούν να είναι αυτές οι τιμές μεταξύ τους [57]. Αναλυτικά, το εύρος υπολογίζεται ως η απόλυτη διαφορά μεταξύ της μεγαλύτερης \mathbf{x}_{\max} και της μικρότερης τιμής \mathbf{x}_{\min} , δηλαδή:

$$\text{Εύρος} = |\mathbf{x}_{\max} - \mathbf{x}_{\min}| \quad (2.7)$$

2.2.3 Παράμετροι Ασυμμετρίας

Ο συντελεστής ασυμμετρίας \hat{s}_x αποτελεί την τρίτη ροπή γύρω από τον μέσο μίας κατανομής τυχαίας μεταβλητής και ορίζεται ως:

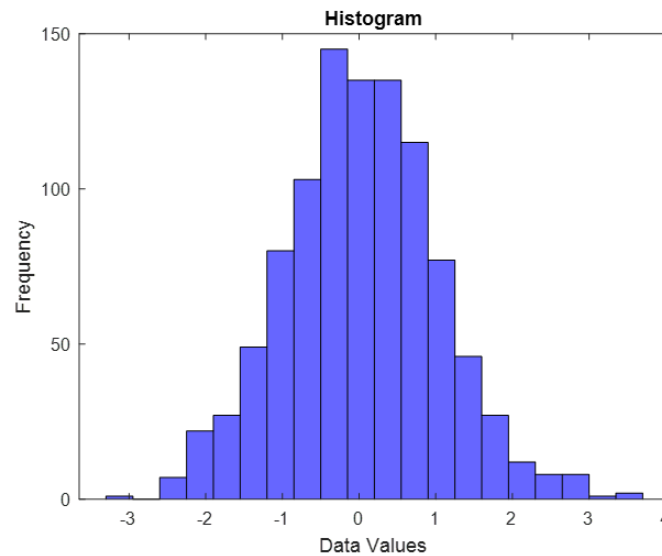
$$\hat{s}_x = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^3}{n \cdot s^3} \quad (2.8)$$

Αυτός ο συντελεστής χρησιμοποιείται για την διάκριση των υψηλών ή χαμηλών τιμών εντός του συνόλου δεδομένων του δείγματος N , επιδεικνύοντας την φύση της ασυμμετρίας, που απεικονίζεται σε ένα ιστόγραμμα. Συγκεκριμένα, ο συντελεστής ασυμμετρίας βοηθάει στον προσδιορισμό θετικής ή αρνητικής ασυμμετρίας στην κατανομή, λόγω της επικράτησης υψηλότερων ή χαμηλότερων τιμών αντίστοιχα. Σε περιπτώσεις συμμετρικών κατανομών, ο συντελεστής παίρνει την τιμή μηδέν, υποδηλώνοντας την απουσία ασυμμετρίας [21].

2.2.4 Παράμετροι Κύρτωσης

Ο συντελεστής κύρτωσης \hat{k}_x αποτελεί την τέταρτη ροπή γύρω από τον μέσο. Για μία κανονική κατανομή, στην περίπτωση που οι τιμές ακολουθούν μία τέλεια κωδωνοειδής καμπύλη, ο συντελεστής κύρτωσης ισούται με τρία. Η τιμή αυτή λειτουργεί ως σημείο αναφοράς, με το οποίο μπορεί να συγκριθεί η κύρτωση άλλων κατανομών.

$$\hat{k}_x = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left(\frac{X_i - \hat{m}_X}{\hat{\sigma}_X} \right)^4 \quad (2.9)$$



Εικόνα 2.2: Παράδειγμα μορφής ιστογράμματος.

2.2.5 Ιστόγραμμα

Το **ιστόγραμμα** είναι ένα γραφικό διάγραμμα που χρησιμοποιείται στη στατιστική και στην ανάλυση δεδομένων για να απεικονίσει την κατανομή των δεδομένων σε διάφορες κατηγορίες ή διαστήματα, γνωστά ως κλάσεις (bins). Κάθε κλάση αναπαριστά ένα διάστημα τιμών, και το ιστόγραμμα δείχνει πόσα δείγματα ανήκουν σε κάθε κλάση. Στο σχήμα 2.2 παρουσιάζεται ένα παράδειγμα μορφής ιστογράμματος.

Το ιστόγραμμα αποτελεί σημαντικό εργαλείο για την εκτίμηση διάφορων σημαντικών παραμέτρων. Στην περίπτωση μιας κανονικής κατανομής, το ιστόγραμμα είναι συμμετρικό και η μέση τιμή είναι παρόμοια με τη διάμεσο. Ωστόσο, σε περιπτώσεις όπου το ιστόγραμμα δεν είναι συμμετρικό και οι τιμές της μέσης τιμής και της διαμέσου διαφέρουν σημαντικά, τα δεδομένα συνήθως δεν ακολουθούν κανονική κατανομή. Επιπλέον, μέσω του ιστογράμματος μπορούν να εντοπιστούν ακραίες τιμές, οι οποίες βρίσκονται μακριά από το κυρίαρχο μέρος της

Chapter 2. ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΥΠΟΒΑΘΡΟ

κατανομής. Ακόμη, μπορούν να παρατηρηθούν τάσεις ή μοτίβα στα δεδομένα, όπου αυξανόμενες ή φθίνουσες τιμές επικρατούν σε συγκεκριμένες περιοχές.

Αν τα δεδομένα ακολουθούν κανονική κατανομή, αυτό μπορεί να διευκολύνει τη στατιστική ανάλυση και τον υπολογισμό των πιθανοτήτων. Αλλά ακόμα και αν τα δεδομένα δεν ακολουθούν ακριβώς την κανονική κατανομή, μπορεί να χρειαστεί να εφαρμοστεί κάποιος μετασχηματισμός στα δεδομένα, όπως η λογαρίθμηση. Αυτό μπορεί να βελτιώσει την απόδοση των στατιστικών μεθόδων που βασίζονται στην υπόθεση κανονικής κατανομής [23].

2.3 Συνάρτηση Συνδιασποράς

Κατά την εξέταση ενός τυχαίου πεδίου X_s που περιλαμβάνει δύο τυχαία σημεία s_1, s_2 , η συνάρτηση συνδιασποράς αποτελεί κρίσιμο εργαλείο για την ποσοτικοποίηση της συσχέτισης που υπάρχει μεταξύ αυτών των σημείων. Συγκεκριμένα, η **Κεντρική Συνάρτηση Συνδιασποράς** μπορεί να αποδοθεί ως εξής:

$$c_X(s_1, s_2) = E[X(s_1)X(s_2)] - E[X(s_1)]E[X(s_2)] \quad (2.10)$$

Σύμφωνα με αυτή τη σχέση, η μέση τιμή του πεδίου συνδιακύμανσης καθορίζεται ως μηδέν [23]. Κατά συνέπεια, θεωρείται ότι η Συνάρτηση Συνδιασποράς είναι ουσιαστικά ισοδύναμη με την ίδια τη Συνδιακύμανση, δηλαδή

$$c_X(s_1, s_2) = E[X'(s_1)]E[X'(s_2)] \quad (2.11)$$

Όταν η διασπορά ενός πεδίου μεταβάλλεται στο χώρο, σημαίνει ότι η ένταση των διακυμάνσεων του πεδίου μετατοπίζεται καθώς υπάρχει μετακίνηση από το ένα σημείο στο άλλο [56].

2.3.1 Στατιστική Ομοιογένεια

Οι περιορισμοί που επιβάλλονται στις ιδιότητες ενός πεδίου, συχνά παρέχουν ένα δομημένο πλαίσιο για την βελτίωση των τεχνικών, την προώθηση της καινοτομίας και την επίτευξη πιο αποτελεσματικών λύσεων στον τομέα του γεωστατιστικού χαρακτηρισμού και της απεικόνισης [22, 10]. Μεταξύ των διαδεδομένων απλουστευτικών παραδοχών στον τομέα αυτό είναι η έννοια της στατιστικής ομοιογένειας, μια επέκταση της κλασικής έννοιας της ομοιογένειας. Στο πλαίσιο της ανάλυσης της χωρικής μεταβλητότητας, μια ιδιότητα ορίζεται ως ομοιογενής, όταν η αντίστοιχη μεταβλητή διατηρεί σταθερή τιμή σε όλο το χωρικό πεδίο. Σε αυτό το πλαίσιο, ένα χωρικό πεδίο X_s χαρακτηρίζεται ως στατιστικά ομοιογενές ή στάσιμο, όταν ισχύουν οι ακόλουθες συνθήκες:

1. Η μέση τιμή $m_x(\mathbf{s})$ παραμένει σταθερή και συμβολίζεται ως m_x .
2. Η συνάρτηση συνδιασποράς ορίζεται και εξαρτάται αποκλειστικά από το διάνυσμα των αποστάσεων $\mathbf{r} = \mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_2$ μεταξύ δύο σημείων. Μαθηματικά η σχέση αυτή διατυπώνεται ως εξής:

$$c_X(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2) = c_X(\mathbf{r}) \quad (2.12)$$

3. Η δεύτερη συνθήκη σημαίνει ότι η διασπορά ενός στατιστικά ομοιογενούς πεδίου είναι ομοιόμορφη

Σύμφωνα με την ισχυρή στατιστική ομοιογένεια, ένα τυχαίο πεδίο χαρακτηρίζεται ως στατιστικά ομοιογενές, όταν η πολυδιάστατη Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας για N σημεία, όπου N είναι ένας θετικός ακέραιος αριθμός, παραμένει αμετάβλητη μέσω μετασχηματισμών, που τροποποιούν τις χωρικές θέσεις των σημείων, διατηρώντας παράλληλα τις μεταξύ τους αποστάσεις [38].

Chapter 2. ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΥΠΟΒΑΘΡΟ

Κατά συνέπεια, η έννοια της στατιστικής ομοιογένειας υποστηρίζει ότι τα στατιστικά χαρακτηριστικά του πεδίου παραμένουν αμετάβλητα από τις μετατοπίσεις των χωρικών συντεταγμένων. Πρακτικά, η υπόθεση αυτή συνεπάγεται την απουσία διακριτών χωρικών τάσεων, επιτρέποντας έτσι να αποδοθεί η μεταβλητότητα των τιμών του πεδίου σε διακυμάνσεις γύρω από ένα σταθερό επίπεδο, που αντιστοιχεί στη μέση τιμή [56].

2.3.2 Στατιστική Ισοτροπία

Η **στατιστική ισοτροπία** είναι μια ιδιότητα που προϋποθέτει εγγενώς στατιστική ομοιογένεια. Ένα πεδίο θεωρείται στατιστικά ισοτροπικό, όταν παρουσιάζει στατιστική ομοιογένεια και, ταυτόχρονα, η συνάρτηση συνδιακύμανσής του εξαρτάται αποκλειστικά από το μέγεθος της απόστασης r , χωρίς να λαμβάνεται υπόψη η κατεύθυνση του διανύσματος της απόστασης \mathbf{r} . Μια συνάρτηση συνδιακύμανσης που είναι στατιστικά ισότροπη συνεπάγεται ότι είναι επίσης στατιστικά ομοιογενής. Ωστόσο, το αντίστροφο δεν ισχύει απαραίτητα, επειδή μια στατιστικά ομοιογενής συνάρτηση συνδιασποράς μπορεί να μην παρουσιάζει στατιστική ισοτροπία, καθώς θα μπορούσε ακόμη να ποικίλλει με βάση την κατεύθυνση του διανύσματος της απόστασης [22].

Στο πλαίσιο των στατιστικά ομοιογενών και ισοτροπικών πεδίων, δύο κομβικές παράμετροι ύψιστης σημασίας είναι η διασπορά $\sigma_X^2 = c_X(0)$ και το μήκος συσχέτισης ξ . Συγκεκριμένα, η διασπορά χρησιμεύει ως μέτρο του βαθμού στον οποίο οι τιμές του πεδίου αποκλίνουν από τη μέση τιμή τους, παρέχοντας πληροφορίες για το εύρος ή την εξάπλωση των μεταβολών του πεδίου. Επιπλέον, το μήκος συσχέτισης είναι μια θεμελιώδης παράμετρος που κανονικοποιεί την απόσταση. Στην ουσία, χαρακτηρίζει τη χωρική έκταση, στην οποία η τιμή του πεδίου σε ένα σημείο επηρεάζει την τιμή σε ένα άλλο σημείο. Ένα μικρότερο μήκος συσχέτισης υποδηλώνει ταχύτερη μείωση της συσχέτισης

με την απόσταση, ενώ ένα μεγαλύτερο μήκος συσχέτισης υποδηλώνει πιο σταδιακή μείωση [33].

2.3.3 Συνθήκες Αποδοχής (Θεώρημα Bochner)

Στο πλαίσιο γεωστατιστικών αναλύσεων, οι συνθήκες αποδοχής για τη συνάρτηση συνδιασποράς αποτελούν κριτήρια που θέτονται για την αξιολόγηση της χωρικής εξάρτησης μεταξύ διαφόρων μεταβλητών. Οι παράμετροι και οι συναρτήσεις που περιγράφουν αυτές τις σχέσεις πρέπει να είναι συμβατές με ένα κατάλληλο θεωρητικό πρότυπο, το οποίο επιλέγεται από ένα σύνολο κατάλληλων θεωρητικών προτύπων. Αυτά τα πρότυπα μπορεί να περιλαμβάνουν διάφορες κατανομές πιθανότητας, όπως η γκαουσιανή κατανομή (κανονική κατανομή) ή άλλες χωρικές συναρτήσεις [33].

Το θεώρημα Bochner είναι ένα βασικό θεώρημα στον τομέα της στατιστικής ανάλυσης, ειδικότερα στον τομέα της γεωστατιστικής, και καθορίζει τις απαραίτητες συνθήκες για την αποδοχή της συνάρτησης συνδιασποράς. Οι συνθήκες αυτές αποτελούν κρίσιμες προδιαγραφές για την εφαρμογή του μετασχηματισμού της συνάρτησης συνδιασποράς, μέσω της **φασματικής πυκνότητας συνδιασποράς** [7]. Ο μετασχηματισμός Fourier μιας συνάρτησης $c_X(\mathbf{k})$ ορίζεται ως εξής:

$$\tilde{c}_X(\mathbf{k}) = \int e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} c_X(\mathbf{r}) d\mathbf{r} \quad (2.13)$$

με \mathbf{r} να αποτελεί το διάνυσμα απόστασης μεταξύ δύο σημείων, $\int d\mathbf{r} = \int d\mathbf{x} d\mathbf{y}$ και \mathbf{k} είναι το διάνυσμα της χωρικής συχνότητας (κυματάνυσμα).

Μία συνάρτηση $c_X(\mathbf{r})$ θεωρείται αποδεκτή υπό τις ακόλουθες προϋποθέσεις:

1. θα πρέπει να διατίθεται η φασματική πυκνότητα ισχύος $\tilde{c}_X(\mathbf{k})$,
2. επιβάλλεται η συνάρτηση $c_X(\mathbf{r})$ να είναι θετική σε όλο το πεδίο συχνοτήτων.
Συνεπώς, $\tilde{c}_X(\mathbf{k}) \geq 0$, και

Chapter 2. ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΥΠΟΒΑΘΡΟ

3. το ολοκλήρωμα της φασματικής πυκνότητας ισχύος $\tilde{c}_X(\mathbf{k})$ πρέπει να είναι πεπερασμένο σε όλο το πεδίο των συχνοτήτων, υποδηλώνοντας την ύπαρξη διασποράς στο πεδίο.

Από πρακτική άποψη, για να ελεγχθεί αν μια συνάρτηση αποτελεί αποδεκτό πρότυπο συνάρτησης συνδιασποράς, απαιτείται ο υπολογισμός του μετασχηματισμού Fourier της συνάρτησης. Αυτός ο υπολογισμός μπορεί να γίνει είτε αναλυτικά (με μαθηματικές τεχνικές) είτε αριθμητικά (με χρήση υπολογιστικών μεθόδων) [56].

2.3.4 Μοντέλα Συνδιασποράς

Σε καταστάσεις που χαρακτηρίζονται τόσο από σταθερότητα όσο και από ισοτροπία, τα μοντέλα συνδιασποράς βασίζονται αποκλειστικά στην απόσταση μεταξύ των σημείων, που εκφράζεται συγκεκριμένα ως η Ευκλείδεια απόσταση \mathbf{r} . Αυτό συνεπάγεται ότι τα μοντέλα συνδιασποράς, τα οποία περιγράφουν τις σχέσεις μεταξύ σημείων, είναι αποκλειστικά συναρτήσεις αυτού του μέτρου απόστασης. Οι εξισώσεις για ορισμένα από τα επικρατούντα μοντέλα συνδιασποράς που χρησιμοποιούνται συχνά σε γεωστατιστικές αναλύσεις είναι οι ακόλουθες, όπου σ_X^2 αντιστοιχεί στην διασπορά, το ξ αντιπροσωπεύει το μήκος συσχέτισης, και το \mathbf{r} δηλώνει την απόσταση [56].

1. Εκθετικό Μοντέλο:

$$c_x(\mathbf{r}) = \sigma_X^2 \exp\left(-\frac{\|\mathbf{r}\|}{\xi}\right) \quad (2.14)$$

2. Γκαουσιανό Μοντέλο:

$$c_x(\mathbf{r}) = \sigma_X^2 \exp\left(-\frac{\mathbf{r}^2}{\xi^2}\right) \quad (2.15)$$

3. Σφαιρικό Μοντέλο:

$$c_x(\mathbf{r}) = \sigma_X^2 \left[1 - 1.5 \left(\frac{\|\mathbf{r}\|}{\xi} \right) + 0.5 \left(\frac{\|\mathbf{r}\|}{\xi} \right)^3 \right] \theta(\xi - \|\mathbf{r}\|) \quad (2.16)$$

4. Γενικευμένο Εκθετικό Μοντέλο:

$$c_x(\mathbf{r}) = \sigma_X^2 \exp \left(-\frac{\|\mathbf{r}\|^\nu}{\xi^\nu} \right), 0 < \nu < 2 \quad (2.17)$$

5. Matérn:

$$c_x(\mathbf{r}) = \frac{\sigma_X^2}{2^{\nu-1}\Gamma(\nu)} \left(\frac{2\sqrt{\nu}}{R} \|\mathbf{r}\| \right)^\nu K_\nu \left(\frac{2\sqrt{\nu}}{R} \|\mathbf{r}\| \right) \quad (2.18)$$

6. Δυναμονομικό - αλγεβρικό:

$$\lim_{\|\mathbf{r}\| \rightarrow \infty} c_x(\mathbf{r}) \approx \|\mathbf{r}\|^{2\alpha}, -1 < \alpha < 0 \quad (2.19)$$

2.4 Χωρική Εξάρτηση

Ένα τυχαίο πεδίο χαρακτηρίζεται τόσο από την τυχειότητα όσο και από την αλληλεξάρτηση μεταξύ διαφορετικών σημείων του χώρου. Η χωρική εξάρτηση περιγράφει το πώς οι τιμές του πεδίου σχετίζονται μεταξύ τους σε διάφορα σημεία του χώρου. Η κατανομή πιθανοτήτων του πεδίου περιέχει συσχετίσεις μεταξύ των τιμών σε διάφορα σημεία, οπότε η πιθανότητα να παρατηρηθεί μια τιμή σε ένα σημείο εξαρτάται από τις τιμές στα γειτονικά σημεία. Αυτό σημαίνει ότι οι τιμές του πεδίου δεν είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους, αλλά υπάρχει κάποιου είδους συσχέτιση που περιγράφει την αλληλεξάρτησή τους στον χώρο.

2.4.1 Χωρική Παρεμβολή

Η Χωρική Παρεμβολή, αναφέρεται σε μια διαδικασία που αξιοποιείται για τον υπολογισμό των τιμών σε σημεία του χώρου, όπου δεν υπάρχουν διαθέσιμα δεδομένα μέτρησης. Αυτό πραγματοποιείται με τη χρήση μετρήσεων που έχουν διεξαχθεί σε προσεγγιστικά ή γειτονικά σημεία εντός του χωρικού πεδίου. Ο σκοπός αυτής της διαδικασίας είναι να δημιουργηθούν συνεχείς επιφάνειες, επιτρέποντας την κατανόηση των χωρικών μοτίβων και την πρόβλεψη των τιμών σε θέσεις όπου δεν έχουν πραγματοποιηθεί μετρήσεις [56].

Υπάρχουν δύο διαφορετικοί τρόποι υπολογισμού της χωρικής παρεμβολής. Η Γενική (Global Interpolation) και η Τοπική Μέθοδος (Local Interpolation). Στη γενική μέθοδο, η πρόβλεψη της τιμής μιας μεταβλητής σε ένα σημείο γίνεται με βάση όλα τα διαθέσιμα δεδομένα στο χώρο δειγματοληψίας. Αυτό σημαίνει ότι κάθε σημείο επηρεάζεται από όλα τα άλλα σημεία, ανεξάρτητα από την απόστασή τους. Ενώ, στην τοπική μέθοδο, η πρόβλεψη της τιμής σε ένα σημείο βασίζεται μόνο στα γειτονικά σημεία που βρίσκονται εντός μιας προκαθορισμένης ακτίνας, της Ακτίνας Συσχέτισης [23]. Συγκεκριμένα, η ακτίνα αυτή ορίζει την απόσταση από το σημείο ενδιαφέροντος μέχρι τα γειτονικά σημεία που θα χρησιμοποιηθούν για τον υπολογισμό της τιμής του. Η επιλογή της κατάλληλης ακτίνας συσχέτισης είναι σημαντική για την επίτευξη ακριβών αποτελεσμάτων στη χωρική παρεμβολή. Εάν η ακτίνα είναι πολύ μικρή, τότε το μοντέλο θα λαμβάνει υπόψη μόνο τα πολύ κοντινά σημεία, ενώ αν είναι πολύ μεγάλη, το μοντέλο θα λαμβάνει υπόψη και σημεία που είναι πολύ μακριά, πράγμα που μπορεί να οδηγήσει σε ανακρίβειες. Συνήθως, η ακτίνα συσχέτισης επιλέγεται με βάση τη φύση των δεδομένων και το επιθυμητό επίπεδο ακρίβειας. Οι πιο διαδεδομένες αιτιοκρατικές μέθοδοι που ανήκουν σε αυτή την κατηγορία είναι οι Nearest Neighbor, πολύγωνα Voronoi, Inverse Distance Weighting,

Splines [52].

2.4.2 Μοντέλο Χωρικής Εξάρτησης

Ένα τυχαίο πεδίο διαμορφώνεται από δύο βασικά στοιχεία, την τυχειότητα και την αλληλεξάρτηση μεταξύ των τιμών του σε διάφορα σημεία του χώρου. Η Χωρική Εξάρτηση αποτυπώνει τον τρόπο με τον οποίο οι τιμές του πεδίου σε διακριτά σημεία του χώρου συνδέονται μεταξύ τους. Κατά συνέπεια, η χωρική εξάρτηση διαμορφώνει την τάση των τιμών του πεδίου να εξαρτώνται από τις τιμές που παρατηρούνται στα παρακείμενα σημεία του χώρου. Ειδικότερα, δηλώνει πώς η παρατήρηση μιας συγκεκριμένης τιμής σε ένα σημείο ενδέχεται να επηρεαστεί από τις τιμές που παρατηρούνται στα γειτονικά σημεία του χώρου.

Στο πλαίσιο της κατανομής πιθανότητας του τυχαίου πεδίου, εμπεριέχονται συσχετίσεις μεταξύ των τιμών που παρατηρούνται σε διάφορα σημεία του χώρου. Αυτό δηλώνει ότι η πιθανότητα να παρατηρηθεί μια συγκεκριμένη τιμή σε ένα σημείο εξαρτάται από τις τιμές που εκδηλώνονται στα γειτονικά σημεία. Η χωρική εξάρτηση αναλύει πλήρως τον τρόπο με τον οποίο οι τιμές του πεδίου αλληλοεπιδρούν μεταξύ τους στον εν λόγω χώρο [38].

Το τυχαίο πεδίο X_s διαχωρίζεται σε δύο κύριες συνιστώσες, την αιτιοκρατική και την στοχαστική. Η αιτιοκρατική συνιστώσα αναφέρεται συνήθως ως τάση, η οποία συμβολίζεται με $m_x(s)$ και αντιπροσωπεύει τη χωρική διακύμανση στο πεδίο. Η στοχαστική συνιστώσα αναφέρεται ως διακύμανση και συμβολίζεται με $X'(s)$.

2.4.3 Τάση

Η τάση, η οποία αποτελεί την αιτιοκρατική συνιστώσα ενός τυχαίου πεδίου $X(s)$, συμβολίζεται με $m_x(s)$ και αντιπροσωπεύει τη χωρική διακύμανση στο

Chapter 2. ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΥΠΟΒΑΘΡΟ

πεδίο.

$$m_x(\mathbf{s}) = X(\mathbf{s}) - X'(\mathbf{s}) \quad (2.20)$$

Η χωρική τάση $m_x(\mathbf{s})$ μπορεί να εξαχθεί μέσω διάφορων μοντέλων γενικής και τοπικής εξάρτησης, περιλαμβανομένων μεθόδων όπως η πολλαπλή γραμμική παλινδρόμηση, τα φίλτρα κινούμενου μέσου, και η μέθοδος της τοπικά ζυγισμένης παλινδρόμησης [56]. Ωστόσο, συνήθως η τάση αυτή προσεγγίζεται με χρήση πολυωνύμων χαμηλής τάξης [33].

Η παρατήρηση ότι οι τιμές των δεδομένων συνήθως εμφανίζουν συσχέτιση με τη θέση τους στον χώρο αποτελεί σημαντικό στοιχείο στη χωρική ανάλυση και στον χωρικό διαχωρισμό των δεδομένων. Αυτή η σχέση μεταξύ των δεδομένων και της θέσης τους στον χώρο συνήθως περιγράφεται με μια μαθηματική συνάρτηση που συνδέει τις τιμές των δεδομένων με τις συντεταγμένες τους στους άξονες x, y . Η επιλογή της κατάλληλης μαθηματικής συνάρτησης εξαρτάται από τα δεδομένα και την κατανόηση της τάσης των δεδομένων στο χώρο. Συνήθως, αυτή η μαθηματική συνάρτηση μπορεί να είναι γραμμική ή πολυωνυμική εξίσωση, ανάλογα με τη φύση της σχέσης. Εντούτοις, υπάρχουν περιπτώσεις όπου κοντινά σημεία έχουν αρκετά διαφορετικές τιμές, προκαλώντας προβλήματα στη χωρική ανάλυση. Σε αυτές τις περιπτώσεις, είναι αναγκαίο να εξεταστεί η μορφή της τάσης και, εάν είναι αναγκαίο, να αφαιρεθεί για να επιτραπεί η συνέχιση της ανάλυσης [1].

Η στασιμότητα είναι μια σημαντική προϋπόθεση στους αλγόριθμους γεωστατιστικής πρόβλεψης Kriging. Η στασιμότητα υποδηλώνει ότι οι χωρικές στατιστικές ιδιότητες της τυχαίας μεταβλητής παραμένουν σταθερές καθ' όλο τον χώρο, δηλαδή δεν αλλάζουν με τη θέση. Ωστόσο, στην περίπτωση που υπάρχουν τάσεις μεγάλης κλίμακας, η στασιμότητα διαταράσσεται. Αυτό σημαίνει ότι ο μέσος όρος της τυχαίας μεταβλητής δεν είναι σταθερός σε όλο τον χώρο, και συνεπώς, οι αλγόριθμοι Kriging δεν μπορούν να χρησιμοποιηθούν ως έχουν.

Chapter 2. ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΥΠΟΒΑΘΡΟ

Για την αντιμετώπιση αυτού του προβλήματος, χρησιμοποιείται μοντελοποίηση με τάση. Ο σκοπός της μοντελοποίησης με τάση είναι να αφαιρεθεί η μεγάλης κλίμακας ντετερμινιστική τάση από τα δεδομένα, ώστε να επιτευχθεί η στασιμότητα που απαιτείται για την εφαρμογή των αλγορίθμων Kriging. Αυτό συνήθως γίνεται με την εκτίμηση και την αφαίρεση της τάσης από τα δεδομένα, αφήνοντας πίσω μια στασιμότητα που μπορεί να χρησιμοποιηθεί από τους αλγορίθμους Kriging. Η ανθρώπινη διαίσθηση αποτελεί καίριο παράγοντα, όταν πρόκειται για την αναγνώριση υπερβολικής ή ελλιπούς μοντελοποίησης της τάσης σε γεωστατιστικές αναλύσεις [5].

Η Γραμμική τάση υποδηλώνει ότι η κλίση της μαθηματικής συνάρτησης παραμένει σταθερή στον χώρο και μπορεί να περιγραφεί με μια γραμμική σχέση μεταξύ των μεταβλητών. Για δύο διαστάσεις, αυτή η σχέση λαμβάνει την μορφή:

$$Mx = a_0 + a_1X + a_2Y \quad (2.21)$$

Η Πολυωνυμική τάση είναι μια μαθηματική συνάρτηση που συνήθως χρησιμοποιείται για να περιγράψει τη χωρική τάση των δεδομένων όταν η σχέση μεταξύ τους δεν είναι γραμμική. Αυτή η συνάρτηση είναι συχνά εξίσωση δεύτερου βαθμού και μπορεί να εκφραστεί με τη μορφή:

$$Mx = a_0 + a_1X + a_2Y + a_3X^2 + a_4Y^2 + a_5XY \quad (2.22)$$

Όταν αφαιρεθεί η χωρική τάση από τα δεδομένα, προκύπτει ένα νέο πεδίο που ονομάζεται Διακύμανση.

2.4.4 Διακύμανση

Η διακύμανση, γνωστή ως στοχαστική συνιστώσα, αποτελεί βασική παράμετρο για την περιγραφή της χωρικής μεταβλητότητας ενός τυχαίου πεδίου σε μια πε-

Chapter 2. ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΥΠΟΒΑΘΡΟ

ριοχή. Συγκεκριμένα, αποτυπώνει την τυχαία ή χωρικά αδόμητη μεταβλητότητα που δεν μπορεί να ληφθεί υπόψη από το στοιχείο τάσης [25].

Συνήθως, η διακύμανση του πεδίου $X(\mathbf{s}_1)$, η οποία συμβολίζεται ως $X'(\mathbf{s}_1)$, υπολογίζεται σε σχέση με τη μέση τιμή στο σημείο \mathbf{s}_1 , λαμβάνοντας υπόψη την κατανομή πιθανοτήτων των τιμών στον χώρο.

$$X'(\mathbf{s}_1) = X(\mathbf{s}_1) - m_x(\mathbf{s}_1) \quad (2.23)$$

Αυτή η παράμετρος παρέχει σημαντικές πληροφορίες σχετικά με τον βαθμό διακύμανσης των τιμών του πεδίου σε διάφορα σημεία του χώρου. Όσο μεγαλύτερη είναι η διακύμανση, τόσο πιο ασταθές είναι το τυχαίο πεδίο σε σχέση με τις διαφορές των τιμών του [57].

2.4.5 Βαριόγραμμα

Δεδομένου ότι οι πληροφορίες που αντλούνται από την περιοχή της έρευνας διασκορπίζονται σε διάφορα σημεία του χώρου, είναι απαραίτητο να χρησιμοποιηθεί ένα μοντέλο που να αποδίδει συμπεράσματα και για τις ανεξερεύνητες περιοχές εντός του πεδίου μελέτης. Σε αυτό το πλαίσιο, το **βαριόγραμμα** αποτελεί ένα απαραίτητο εργαλείο στον τομέα της γεωστατιστικής. Ουσιαστικά, το βαριόγραμμα αποτελεί ένα γράφημα ή ένα μαθηματικό μοντέλο που περιγράφει πώς οι τιμές των δεδομένων μεταβάλλονται όσο αυξάνεται η απόσταση μεταξύ τους [32]. Υπολογίζεται με βάση το τετράγωνο των διαφορών που βρίσκονται σε διάφορες αποστάσεις, όπως περιγράφεται από τον τύπο :

$$\delta X(\mathbf{s}; \mathbf{r}) = X(\mathbf{s} + \mathbf{r}) - X(\mathbf{s}) \quad (2.24)$$

Το ημιβαριόγραμμα ενός τυχαίου πεδίου ορίζεται σύμφωνα με την εξής

Chapter 2. ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΥΠΟΒΑΘΡΟ

συνάρτηση:

$$\gamma(\mathbf{s}, \mathbf{r}) = \frac{1}{2} E[\{X(\mathbf{s} + \mathbf{r}) - X(\mathbf{s})\}^2] \quad (2.25)$$

Πρακτικά, για τον υπολογισμό του πειραματικού ημιβαριογράμματος (Experimental Semivariogram) χρησιμοποιείται η παρακάτω μαθηματική εξίσωση:

$$\gamma(\mathbf{s}, \mathbf{r}) = \frac{1}{2N} \sum_{i=1}^N [\{X(\mathbf{s}_i + \mathbf{r}) - X(\mathbf{s}_i)\}^2] \quad (2.26)$$

όπου

- $\gamma(\mathbf{s}, \mathbf{r})$ είναι η τιμή του ημιβαριογράμματος για μια συγκεκριμένη απόσταση \mathbf{r} και ένα συγκεκριμένο σημείο \mathbf{s} .
- \mathbf{r} είναι η απόσταση μεταξύ δύο σημείων γεωτρήσεων. Αυτή η απόσταση μεταβάλλεται καθώς εξετάζονται διαφορετικές αποστάσεις για τον υπολογισμό του ημιβαριογράμματος.
- N είναι ο αριθμός του ζεύγους σημείων. Πρόκειται για το σύνολο των διαθέσιμων δεδομένων.
- $X(\mathbf{s}_i)$ είναι η τιμή του αρχικού σημείου από το ζεύγος σημείων.
- $X(\mathbf{s}_i + \mathbf{r})$ είναι η τιμή του τελικού σημείου από το ίδιο ζεύγος σημείων, μετά την απόσταση \mathbf{r} .

Ο στόχος του ημιβαριογράμματος είναι να υπολογίσει την ημιδιασπορά, η οποία είναι σημαντική πληροφορία για τις στοχαστικές μεθόδους χωρικής ανάλυσης. Όταν το χωρικό πεδίο $X(\mathbf{s})$ εμφανίζει στατιστική ομοιογένεια, η σχέση μεταξύ του ημιβαριογράμματος και της συνάρτησης συνδιασποράς διαμορφώνεται μέσω της ακόλουθης εξίσωσης:

$$\gamma_X(\mathbf{r}) = \sigma_X^2 - \sigma_X(\mathbf{r}) \quad (2.27)$$

Chapter 2. ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΥΠΟΒΑΘΡΟ

Κατά συνέπεια, βάσει της παραπάνω σχέσης, το ημιβαριόγραμμα συγχλίνει προς την τιμή της διασποράς, φέρει τις ίδιες πληροφορίες με τη συνάρτηση συνδιασποράς και εξαρτάται αποκλειστικά από την απόσταση \mathbf{r} μεταξύ των σημείων [56].

2.4.6 Ιδιότητες Βαριογράμματος

Στην περίπτωση που ένα τυχαίο πεδίο $X(\mathbf{s})$ είναι στατιστικά ομοιογενές, αυτό υποδηλώνει ότι οι διαφορές $\delta X(\mathbf{s}; \mathbf{r})$ μεταξύ των τιμών του πεδίου σε διάφορα σημεία είναι επίσης στατιστικά ομοιογενείς. Συμπερασματικά, το βαριόγραμμα $\gamma(\mathbf{s}, \mathbf{r})$ εξαρτάται μόνο από την απόσταση \mathbf{r} μεταξύ των σημείων και δεν εξαρτάται από τη συγκεκριμένη θέση \mathbf{s} . Αυτό συμβαίνει επειδή οι διαφορές $\delta X(\mathbf{s}; \mathbf{r})$ διατηρούν τις ίδιες στατιστικές ιδιότητες καθ' όλη την απόσταση \mathbf{r} . Ωστόσο, το αντίστροφο δεν ισχύει απαραίτητα. Δηλαδή, αν το πεδίο διαφοράς είναι στατιστικά ομοιογενές, αυτό δεν σημαίνει απαραίτητα ότι το αρχικό πεδίο $X(\mathbf{s})$ είναι στατιστικά ομοιογενές. Μπορεί να υπάρχουν περιπτώσεις όπου οι διαφορές είναι ομοιογενείς, αλλά το αρχικό πεδίο να έχει μη ομοιογενές χαρακτήρα [56].

Το γράφημα του βαριογράμματος $\gamma(\mathbf{s}, \mathbf{r})$ είναι συνήθως μια μη αρνητική συνάρτηση, πράγμα που σημαίνει ότι οι τιμές του βαριογράμματος είναι μη αρνητικές $\gamma(\mathbf{s}, \mathbf{r}) \geq 0$ σε όλες τις αποστάσεις \mathbf{r} .

Ο υπολογισμός του βαριογράμματος εξαρτάται από την ομοιογένεια ή την ανομοιογένεια του πεδίου και από τις μεταβαλλόμενες στατιστικές του ιδιότητες στον χώρο.

Όταν ένα πεδίο είναι στατιστικά ομοιογενές, δηλαδή οι στατιστικές ιδιότητες του παραμένουν σταθερές σε όλο τον χώρο, το βαριόγραμμα υπολογίζεται χρησιμοποιώντας τις παραμέτρους άνω φράγματος (Sill) και μήκους συσχέτισης (Range), όπως προαναφέρθηκε. Αναλυτικότερα, το μήκος συσχέτισης καθορίζει την απόσταση στην οποία οι τιμές του πεδίου εξακολουθούν να έχουν σημαντική συσχέτιση. Δηλαδή, δείχνει πόσο γρήγορα το βαριόγραμμα πλη-

Chapter 2. ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΥΠΟΒΑΘΡΟ

σιάζει το άνω φράγμα. Σε μεγάλες αποστάσεις \mathbf{r} , η τιμή του βαριογράμματος τείνει να προσεγγίσει τη διασπορά του τυχαίου πεδίου σ_X^2 . Σε αυτήν την περίπτωση, το φαινόμενο κόκκου τείνει προς το μηδέν, προσεγγίζοντας την διασπορά του τυχαίου πεδίου, δηλαδή το άνω φράγμα του βαριογράμματος. Αυτή η ιδιότητα αποδίδεται βάση της σχέσης $\gamma_X(\mathbf{r}) = \sigma_X^2 - c_X(\mathbf{r})$, με την τιμή της συνάρτησης συνδιασποράς $c_X(\mathbf{r})$ να προσεγγίζει το μηδέν σε μεγάλες αποστάσεις [56].

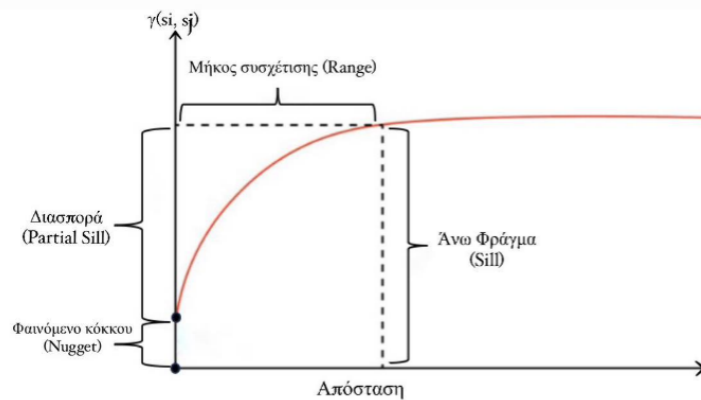
Όταν το βαριόγραμμα παρουσιάζει ανισοτροπία, δηλαδή η χωρική εξάρτηση του πεδίου είναι διαφορετική σε διάφορες κατευθύνσεις, το άνω φράγμα του βαριογράμματος μπορεί να είναι ανεξάρτητο της κατεύθυνσης, ενώ το μήκος συσχέτισης εξαρτάται από τη διεύθυνση. Για να ληφθεί υπόψη αυτή η ανισοτροπία, το βαριόγραμμα παρουσιάζεται ως μια συνάρτηση $\gamma_X\left(\frac{r_1}{\xi_1}, \dots, \frac{r_d}{\xi_d}\right)$, το οποίο εξαρτάται από τις αδιάστατες αποστάσεις $\left(\frac{r_1}{\xi_1}, \dots, \frac{r_d}{\xi_d}\right)$, όπου τα ξ_1, \dots, ξ_d αντιπροσωπεύουν τα μήκη συσχέτισης σε διάφορες κατευθύνσεις.

Σε περιοχές όπου η ανεπαρκής στατιστική ομοιογένεια επηρεάζει την κατεύθυνση της συσχέτισης μεταξύ των τιμών ενός πεδίου, το άνω φράγμα του βαριογράμματος εξαρτάται από τη χωρική κατεύθυνση, και το ίδιο το βαριόγραμμα εκφράζεται με την εξής σχέση:

$$\gamma_X(\mathbf{r}) = \gamma_{X,1}(r) + \gamma_{X,2}(\hat{r}) \quad (2.28)$$

Στο πλαίσιο της χωρικής στατιστικής, η συνάρτηση $\gamma_{X,1}(r)$, όπου $r = \|\mathbf{r}\|$ αποτελεί το μέτρο του διανύσματος απόστασης, αντιστοιχεί στην ισοτροπική εξάρτηση του βαριογράμματος. Αυτό σημαίνει ότι αυτή η συνάρτηση εξαρτάται μόνο από την απόσταση μεταξύ των χωρικών σημείων και δεν εξαρτάται από την κατεύθυνση του διανύσματος \mathbf{r} . Αντιθέτως, η συνάρτηση $\gamma_{X,2}(\hat{r})$ αντιστοιχεί στην ανισοτροπική εξάρτηση του άνω φράγματος από την κατεύθυνση του μοναδιαίου διανύσματος \hat{r} . Αυτό υποδηλώνει ότι η συσχέτιση μεταξύ των

Chapter 2. ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΥΠΟΒΑΘΡΟ



Εικόνα 2.3: Παράδειγμα μορφής βαριογράμματος [33].

τιμών του χωρικού πεδίου εξαρτάται από την κατεύθυνση μεταξύ των χωρικών σημείων και, συνεπώς, μεταβάλλεται ανάλογα με την κατεύθυνση αυτή.

Οι παράμετροι ενός βαριογράμματος ασκούν σημαντική επίδραση στην αναλυτική διερεύνηση της χωρικής εξάρτησης των τιμών ενός πεδίου. Συγκεκριμένα, περιλαμβάνουν:

- **Φαινόμενο Κόκκου ή Φαινόμενο Πυρήνα (Nugget), C_o :** Αντιπροσωπεύει το φαινόμενο όπου δεν υπάρχει χωρική συσχέτιση στα δεδομένα και μπορεί να οφείλεται σε σφάλματα μέτρησης ή χωρικές διακυμάνσεις σε πολύ μικρές αποστάσεις.
- **Διασπορά (Partial Sill), C_1 ή σ^2 :** Αντιπροσωπεύει τη συνολική διακύμανση που οφείλεται στη χωρική συσχέτιση, αποκλείοντας το φαινόμενο Κόκκου. Αυτό το στοιχείο αντιπροσωπεύει το μέρος της διακύμανσης που είναι χωρικά συσχετισμένο και μπορεί να εξηγηθεί από την διάταξη των δεδομένων.
- **Άνω Φράγμα(Sill), $C = C_o + C_1$:** Αυτή η παράμετρος αντιστοιχεί στην μέγιστη τιμή του βαριογράμματος, η οποία δηλώνει το εύρος των

Chapter 2. ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΥΠΟΒΑΘΡΟ

διακυμάνσεων των τιμών του πεδίου. Είναι η συνδυασμένη επίδραση του φαινόμενο κόκκου και της διασποράς.

- **Μήκος ή Ακτίνα Συσχέτισης (Range):** Δείχνει την απόσταση στην οποία το ημιβαριόγραμμα φτάνει στο άνω φράγμα. Πρόκειται για τη χωρική απόσταση εντός της οποίας οι τιμές των δεδομένων διατηρούν σημαντική συσχέτιση. Πέραν αυτής της απόστασης, η συσχέτιση μεταξύ των τιμών μειώνεται σημαντικά.

Το φαινόμενο κόκκου είναι σημαντικό γιατί αντιπροσωπεύει πιθανές παρατηρήσεις που είναι ανεξάρτητες χωρικά και δεν μπορούν να εξηγηθούν από τη χωρική συσχέτιση [15]. Εάν το φαινόμενο κόκκου είναι πολύ μεγάλο σε σχέση με την διασπορά, αυτό μπορεί να υποδεικνύει ότι τα δεδομένα έχουν υψηλές διακυμάνσεις και μπορεί να είναι δύσκολο να εξάγουμε αξιόπιστα συμπεράσματα από τη χωρική ανάλυση.

Οι ιδιότητες του βαριογράμματος σε περιπτώσεις στασιμότητας, είναι οι εξής [22, 23]:

- Η τιμή του βαριογράμματος είναι μηδέν στο σημείο προέλευσης, δηλαδή όταν η απόσταση $\|\mathbf{r}\| = 0$. Αυτό υποδεικνύει ότι τα δεδομένα είναι αυτο-συσχετισμένα στο σημείο προέλευσης.
- Η παρουσία του φαινόμενο κόκκου είναι πάντα κοντά στο μηδέν. Αυτό υποδεικνύει ότι υπάρχει μικρή χωρική συσχέτιση σε πολύ μικρές αποστάσεις.
- Το βαριόγραμμα αυξάνεται καθώς αυξάνεται η απόσταση $\|\mathbf{r}\|$. Αυτή η αύξηση μπορεί να είναι μη μονοτονική για μοντέλα με ταλαντευόμενη εξάρτηση των συσχετίσεων. Αυτό υποδεικνύει την ύπαρξη χωρικής συσχέτισης σε διάφορες αποστάσεις.

Chapter 2. ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΥΠΟΒΑΘΡΟ

- Ο ρυθμός με τον οποίο αυξάνεται το βαριόγραμμα εξαρτάται από ένα χαρακτηριστικό μήκος, το οποίο καθορίζει την ταχύτητα με την οποία η συσχέτιση μειώνεται με την αύξηση της απόστασης.
- Καθώς η απόσταση $\|\mathbf{r}\|$ τείνει προς το άπειρο, το βαριόγραμμα τείνει σε ένα σταθερό άνω φράγμα. Αυτό υποδεικνύει ότι υπάρχει μια μέγιστη χωρική συσχέτιση που μπορεί να παρατηρηθεί στα δεδομένα.
- Εάν υπάρχει ανισοτροπία, το βαριόγραμμα εξαρτάται από τη διεύθυνση του \mathbf{r} . Αυτό υποδεικνύει ότι η χωρική συσχέτιση μπορεί να διαφέρει σε διάφορες κατευθύνσεις.

Η σχέση μεταξύ του βαριογράμματος και της συνάρτησης συνδιακύμανσης αποδίδεται με την εξίσωση:

$$\gamma_X(\mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_2) = \sigma_X^2 - c_X(\mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_2) \quad (2.29)$$

Στην περίπτωση στάσιμων τυχαίων πεδίων, το βαριόγραμμα και η συνάρτηση συνδιασποράς περιέχουν την ίδια βασική χωρική πληροφορία. Και οι δύο συναρτήσεις μετρούν τον βαθμό συσχέτισης μεταξύ διαφορετικών σημείων στο χώρο. Συνεπώς, το βαριόγραμμα μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να εξάγει πληροφορίες σχετικά με την διακύμανση του πεδίου σε διάφορες αποστάσεις.

Ωστόσο, σε μη στάσιμα πεδία, οι δύο συναρτήσεις αντιμετωπίζουν διαφορετικά τις χωρικές εξαρτήσεις. Αυτό συμβαίνει επειδή σε μη στάσιμα πεδία, οι χωρικές συσχετίσεις μπορεί να μην είναι σταθερές σε όλο τον χώρο, δηλαδή ο βαθμός συσχέτισης μπορεί να μεταβάλλεται με την θέση [22]. Συγκεκριμένα:

- Το βαριόγραμμα είναι αμετάβλητο αν είναι αμετάβλητη και η συνδιασπορά μετά από μετασχηματισμό, σύμφωνα με την σχέση 2.29, αλλά το

Chapter 2. ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΥΠΟΒΑΘΡΟ

αντίστροφο δεν ισχύει πάντα. Ουσιαστικά, η αμεταβλητότητα του βαριογράμματος δεν σημαίνει απαραίτητα αμετάβλητη συνδιασπορά.

- Σε μη στάσιμα τυχαία πεδία με στάσιμες προσauξήσεις, το βαριόγραμμα εξαρτάται μόνο από την απόσταση των σημείων του ζεύγους, ενώ η συνάρτηση συνδιασποράς εξαρτάται από τις θέσεις και των δύο σημείων. Αυτό επισημαίνει τον ρόλο της στάσιμης προσauξησης στη συνάρτηση συνδιασποράς.
- Η συνάρτηση του βαριογράμματος μπορεί να είναι καλά ορισμένη για τυχαία πεδία με άπειρη διακύμανση, ενώ η συνδιασπορά μπορεί να αντιμετωπίσει δυσκολίες λόγω αυξημένης διακύμανσης.
- Η εκτίμηση του βαριογράμματος δεν απαιτεί την πλήρη γνώση της μέσης τιμής, ενώ η εκτίμηση της συνδιασποράς μπορεί να απαιτεί τη γνώση της μέσης τιμής για τον υπολογισμό της.

Αυτές οι διαφορές καθιστούν το βαριόγραμμα και τη συνάρτηση συνδιασποράς χρήσιμα εργαλεία για την ανάλυση χωρικών δεδομένων, ανάλογα με τις συγκεκριμένες απαιτήσεις της ανάλυσης και τη φύση των δεδομένων.

2.4.7 Μοντέλα Βαριογράμματος

Παρακάτω παρατίθενται οι εξισώσεις που χρησιμοποιούνται για να περιγράψουν τα μοντέλα βαριογράμματος. Το ξ είναι το μήκος συσχέτισης, το σ_X^2 αντιστοιχεί στην διασπορά και το \mathbf{r} είναι η απόσταση [56].

1. Εκθετικό Μοντέλο:

$$\gamma_X(r) = \sigma_X^2 [1 - \exp(-\|\mathbf{r}\|/\xi)] \quad (2.30)$$

Chapter 2. ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΥΠΟΒΑΘΡΟ

2. Γκαουσσισιανό Μοντέλο:

$$\gamma_X(r) = \sigma_X^2 [1 - \exp(-\|\mathbf{r}\|^2/\xi^2)] \quad (2.31)$$

3. Σφαιρικό Μοντέλο:

$$\gamma_X(r) = \begin{cases} \sigma_X^2 \left[1.5 \left(\frac{\|\mathbf{r}\|}{\xi} \right) - 0.5 \left(\frac{\|\mathbf{r}\|}{\xi} \right)^3 \right], & \|\mathbf{r}\| \leq \xi \\ \sigma_X^2 & \|\mathbf{r}\| \geq \xi \end{cases} \quad (2.32)$$

4. Γενικευμένο Εκθετικό Μοντέλο:

$$\gamma_X(\|\mathbf{r}\|) = \sigma_X^2 [1 - \exp(-\|\mathbf{r}\|^\nu/\xi^\nu)], 0 < \nu < 2 \quad (2.33)$$

5. Δυναμονομικό (αλγεβρικό):

$$\gamma_X(\|\mathbf{r}\|) = \alpha \|\mathbf{r}\|^{2H}, 0 < H < 1, \alpha > 0 \quad (2.34)$$

6. Γραμμικό:

$$\gamma_X(\|\mathbf{r}\|) = \alpha \|\mathbf{r}\|, \alpha > 0 \quad (2.35)$$

7. Φαινόμενο Πυρήνα (nugget effect):

$$\gamma_X(r) = \begin{cases} 0, & r = 0 \\ c_0, & r \neq 0 \end{cases} \quad (2.36)$$

8. Κυματοειδές:

$$\gamma_X(\|\mathbf{r}\|) = \sigma_X^2 [1 - \xi \|\mathbf{r}\|^{-1} \sin(\|\mathbf{r}\|/\xi)] \quad (2.37)$$

9. Βαριόγραμμα Matérn:

$$\gamma_X(\|\mathbf{r}\|) = \sigma_X^2 \left[1 - \frac{1}{2^{\nu-1}\Gamma(\nu)} \left(\frac{2\sqrt{\nu}}{R} \|\mathbf{r}\| \right)^\nu K_\nu \left(\frac{2\sqrt{\nu}}{R} \|\mathbf{r}\| \right) \right] \quad (2.38)$$

2.5 Εκτίμηση Τυχαίων Πεδίων

Οι γραμμικές μέθοδοι εκτίμησης χρησιμοποιούν γραμμικούς συνδυασμούς των γειτονικών τιμών ενός τυχαίου πεδίου για να εκτιμήσουν τις τιμές σε σημεία όπου δεν υπάρχουν μετρήσεις. Η βάση αυτών των μεθόδων είναι ότι τα τυχαία πεδία εκδηλώνουν χωρική εξάρτηση, δηλαδή οι τιμές τους σε ένα σημείο επηρεάζονται από τις τιμές σε γειτονικά σημεία. Για να εφαρμοστεί η εκτίμηση ενός τυχαίου πεδίου, πρέπει πρώτα να οριστεί ένα μοντέλο χωρικής εξάρτησης. Αυτό το μοντέλο περιγράφει πώς οι τιμές του πεδίου συσχετίζονται χωρικά, δηλαδή πώς μια τιμή επηρεάζεται από τις γειτονικές τιμές του. Ένα απλό παράδειγμα είναι τα μοντέλα βαριογράμματος που περιεγράφηκαν προηγουμένως. Οι πιο διαδεδομένες μέθοδοι για την εκτίμηση των τιμών σε σημεία που δεν έχουν μετρήσεις βασίζονται στη γραμμική παρεμβολή και στην ελαχιστοποίηση του τετραγωνικού σφάλματος. Μια από τις πιο γνωστές τέτοιες μεθόδους είναι το Kriging. Στην περίπτωση που γίνει αφαίρεση της τάσης από τις διακυμάνσεις, τότε χρησιμοποιείται η μέθοδος Kriging με παλινδρόμηση. (Regression kriging) [56, 45]. Εάν οι διακυμάνσεις των δεδομένων είναι πολύ περιορισμένες και δεν προσφέρουν αρκετή πληροφορία για το Kriging, το Regression Kriging είναι χρήσιμο για τη βελτίωση της πρόβλεψης. Επίσης, το Regression Kriging είναι καλύτερο, καθώς προσφέρει μια πιο ακριβή μοντελοποίηση της τάσης μέσω της παλινδρόμησης. Η παλινδρόμηση αποτελεί μια στατιστική τεχνική που εφαρμόζεται για τη μοντελοποίηση και την ανάλυση σχέσεων μεταξύ μεταβλητών. Στόχος της παλινδρόμησης είναι να εξετάσει την επίδραση που ασκούν μία ή

Chapter 2. ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΥΠΟΒΑΘΡΟ

περισσότερες ανεξάρτητες μεταβλητές σε μία εξαρτώμενη μεταβλητή [20].

Στο πλαίσιο των μεθόδων Kriging, είναι απαραίτητο να καθοριστεί μια περιοχή που ονομάζεται γειτονιά συσχέτισης $\omega(\mathbf{u})$ γύρω από ένα σημείο εκτίμησης \mathbf{u} . Αυτή η γειτονιά συσχέτισης περιλαμβάνει $n(\mathbf{u}) \leq N$ αναφορές σημείων από το σύνολο των σημείων \mathbf{s}_i (όπου $i = 1, \dots, N$). Το μέγεθος αυτής της περιοχής καθορίζεται από το μήκος (ή τα μήκη) συσχέτισης. Η διακύμανση του πεδίου στο σημείο εκτίμησης εκφράζεται με τον τύπο 2.39, όπου τα λ_α αντιπροσωπεύουν τα γραμμικά βάρη. Ουσιαστικά, αυτή η εξίσωση αναπαριστά τη διακύμανση στο σημείο εκτίμησης ως συνάρτηση της διακύμανσης στα υπόλοιπα σημεία εκτίμησης.

$$\hat{X}(\mathbf{u}) - m_X(\mathbf{u}) = \sum_{\alpha=1}^{n(\mathbf{u})} \lambda_\alpha [X(\mathbf{s}_\alpha) - m_X(\mathbf{s}_\alpha)] \quad (2.39)$$

Παρόλο που η εκτιμώμενη τιμή του πεδίου παρατίθεται μέσω της εξίσωσης.

$$\hat{X}(\mathbf{u}) = m_X(\mathbf{u}) + \sum_{\alpha=1}^{n(\mathbf{u})} \lambda_\alpha [X(\mathbf{s}_\alpha) - m_X(\mathbf{s}_\alpha)] \quad (2.40)$$

Η $\hat{X}(\mathbf{u})$ και το σφάλμα εκτίμησης $\varepsilon(\mathbf{u})$ αποτελούν τυχαίες μεταβλητές, διότι προκύπτουν από τιμές γραμμικών συνδυασμών ενός τυχαίου πεδίου.

Το σφάλμα εκτίμησης $\varepsilon(\mathbf{u})$ αντιπροσωπεύει τη διαφορά μεταξύ της εκτιμώμενης τιμής του τυχαίου πεδίου σε ένα συγκεκριμένο σημείο $\hat{X}(\mathbf{u})$ και της πραγματικής τιμής αυτού του πεδίου στο ίδιο σημείο $X(\mathbf{u})$.

$$\varepsilon(\mathbf{u}) = X(\mathbf{u}) - \hat{X}(\mathbf{u}). \quad (2.41)$$

Στη μέθοδο Kriging, τα βάρη χρησιμοποιούνται για να ελαχιστοποιηθεί η διασπορά του σφάλματος της εκτίμησης. Αυτό σημαίνει ότι υπολογίζεται

Chapter 2. ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΥΠΟΒΑΘΡΟ

μια βέλτιστη τιμή, η οποία συμβολίζεται συνήθως ως $\hat{X}(\mathbf{u})$, και αποτελεί μια εκτίμηση της τιμής του τυχαίου πεδίου στο σημείο \mathbf{u} .

Η επιλογή της κατάλληλης μεθόδου Kriging εξαρτάται από την ακριβή περιγραφή της πραγματικής διακύμανσης και τάσης $m_X(\mathbf{s})$ του πεδίου, καθώς και από τους περιορισμούς των διαθέσιμων δεδομένων.

Βάσει της μέσης τιμής και της χρήσης της τάσης $m_X(\mathbf{s})$ καθώς και της διακύμανσης στην ανάλυση του πεδίου, μπορούν να εφαρμοστούν διάφορα είδη Kriging:

- **To Απλό Kriging (Simple Kriging):** Χρησιμοποιείται όταν η τάση $m_X(\mathbf{s})$ είναι γνωστή, αλλά δεν είναι σταθερή, δηλαδή μεταβάλλεται με τον χρόνο ή τον χώρο. Σε αυτήν την περίπτωση, επιλέγεται η γνωστή τάση, αλλά δίνεται η δυνατότητα στη διακύμανση να μεταβάλλεται ανάλογα με τη θέση.
- **To Κανονικό Kriging (Ordinary Kriging):** Χρησιμοποιείται όταν η μέση τιμή του πεδίου είναι σταθερή μόνο στην γειτονιά συσχέτισης $\omega(\mathbf{u})$ του σημείου εκτίμησης, ενώ μπορεί να αλλάζει από μια περιοχή στην άλλη. Αυτό το είδος Kriging είναι κατάλληλο για περιοχές με μεταβλητή μέση τιμή.
- **To Καθολικό Kriging (Universal Kriging):** Χρησιμοποιείται όταν η μέση τιμή αλλάζει μέσα στη γειτονιά του σημείου εκτίμησης. Σε αυτήν την περίπτωση, η τάση $m_X(\mathbf{s})$ εκτιμάται από τα δεδομένα και μπορεί να αλλάξει σημαντικά από τη μία περιοχή στην άλλη.
- **To Kriging σε πεδίο δεικτών (Indicator Kriging):** Χρησιμοποιείται όταν η συνάρτηση κατανομής των τιμών είναι ασύμμετρη και περιλαμβάνει πολλές υψηλές τιμές. Αυτή η μέθοδος ασχολείται με την αθροιστική

Chapter 2. ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΥΠΟΒΑΘΡΟ

κατανομή πιθανότητας, του πόσο πιθανό είναι να υπερβεί η τιμή του πεδίου ένα καθορισμένο όριο.

- **Το Συνδυαστικό Kriging (Co-Kriging):** Εφαρμόζεται με σκοπό να συμπεριλάβει ιδιότητες στην εκτίμηση που σχετίζονται με ιδιότητες που επιδιώκονται να εκτιμηθούν. Συνήθως χρησιμοποιείται για την εκτίμηση πολλαπλών μεταβλητών που συσχετίζονται [56].
- **Kriging με παλινδρόμηση (Regression Kriging):**

Αυτή η μέθοδος συνδυάζει μια παλινδρόμηση της εξαρτημένης μεταβλητής σε βοηθητικές μεταβλητές, όπως παράμετροι της επιφάνειας του εδάφους, εικόνες τηλεπισκόπησης και θεματικούς χάρτες, με τη χρήση της μεθόδου απλού Kriging. Ο στόχος είναι να προσδιοριστεί η σχέση μεταξύ των μεταβλητών και να δημιουργηθεί ένα μαθηματικό μοντέλο που περιγράφει αυτήν τη σχέση. Επιπλέον, η μέθοδος αυτή θεωρείται μαθηματικά ισοδύναμη με τη μέθοδο παρεμβολής Universal Kriging. Ωστόσο, εάν οι διακυμάνσεις των δεδομένων είναι πολύ περιορισμένες και δεν προσφέρουν αρκετή πληροφορία για το Kriging, το Regression Kriging μπορεί να είναι χρήσιμο για τη βελτίωση της πρόβλεψης. Συνεπώς, αποτελεί καίριο παράγοντα στην χωρική πρόβλεψη και ανάλυση διαφόρων μεταβλητών και παραμέτρων, βοηθώντας στη λήψη αποφάσεων και στην αποτελεσματική διαχείριση των πόρων [20].

2.5.1 Απλό Kriging

Στο Απλό Kriging η μέση τιμή του πεδίου είναι γνωστή και σταθερή [11]. Η εκτίμηση του πεδίου σε ένα σημείο εκτίμησης \mathbf{u} υπολογίζεται χρησιμοποιώντας τους γραμμικούς συντελεστές λ_α , τους οποίους υπολογίζετε μέσω της ελαχιστοποίησης του τετραγωνικού σφάλματος.

Chapter 2. ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΥΠΟΒΑΘΡΟ

Η εκτίμηση του πεδίου $X(\mathbf{u})$ υπολογίζεται ως εξής:

$$\hat{X}(\mathbf{u}) = \sum_{\alpha=1}^{n(\mathbf{u})} \lambda_{\alpha} X(\mathbf{s}_{\alpha}) - m_X \left[\sum_{\alpha=1}^{n(\mathbf{u})} \lambda_{\alpha} - 1 \right] \quad (2.42)$$

Το άθροισμα $\left[\sum_{\alpha=1}^{n(\mathbf{u})} \lambda_{\alpha} - 1 \right]$ δεν είναι απαραίτητα 0 και μπορεί να διαφέρει από τη μονάδα. Η αύξηση της τιμής αυτού του αθροίσματος υπονοεί αυξημένη επίδραση της μέσης τιμής στην εκτίμηση. Ειδικότερα, σε περιοχές όπου η δειγματοληψία είναι περιορισμένη ή ασταθής, αυτή η τιμή μπορεί να αυξηθεί, υποδηλώνοντας ότι η εκτίμηση είναι περισσότερο επηρεασμένη από τη μέση τιμή.

Το απλό Kriging προϋποθέτει στασιμότητα δεύτερου βαθμού, δηλαδή την ύπαρξη σταθερής μέσης τιμής, διακύμανσης και συνδιακύμανσης σε ολόκληρο το γεωγραφικό χώρο ενδιαφέροντος. Ωστόσο, αυτή η πρόταση είναι συχνά περιοριστική και δεν ικανοποιεί τις απαιτήσεις της πραγματικής κατάστασης. Για τον λόγο αυτό, το κανονικό Kriging προσφέρει περισσότερη ευελιξία [11].

Η εξίσωση που περιγράφει τα γραμμικά βάρη μπορεί να αποτυπωθεί με τη μορφή ενός γραμμικού συστήματος πινάκων ως εξής:

$$\mathbf{C}_{\alpha,\beta} \lambda_{\beta} = \mathbf{C}_{\alpha,u} \quad (2.43)$$

Στην περίπτωση αυτή ο πίνακας $\mathbf{C}_{\alpha,\beta}$ αντιπροσωπεύει τον πίνακα συνδιασποράς και έχει τις συνιστώσες $\mathbf{C}_{\alpha,\beta} = c_X(\mathbf{s}_{\alpha} - \mathbf{s}_{\beta})$. Επίσης, το διάνυσμα $\mathbf{C}_{\alpha,u}$ αναπαριστά τις τιμές της συνάρτησης διασποράς μεταξύ των σημείων του δείγματος και του σημείου εκτίμησης, δηλαδή $\mathbf{C}_{\alpha,u} = c_X(\mathbf{s}_{\alpha} - \mathbf{u})$. Στη συνέχεια, η εξίσωση $c_X(0) = \sigma^2 X$ δείχνει τη σχέση της συνάρτησης διασποράς με τη διακύμανση του τυχαίου πεδίου. Αυτή η σχέση είναι σημαντική για την ανάλυση και τον υπολογισμό των βαρών του Kriging. Επιπρόσθετα,

Chapter 2. ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΥΠΟΒΑΘΡΟ

με τη χρήση της εξίσωσης $c_X(0) = \sigma_X^2$, το γραμμικό σύστημα λαμβάνει την ακόλουθη αναλυτική μορφή στον παρακάτω γραμμικό πίνακα:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x^2 & \dots & \dots & c_X(\mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_n) \\ c_X(\mathbf{s}_2 - \mathbf{s}_1) & \dots & \dots & c_X(\mathbf{s}_2 - \mathbf{s}_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_X(\mathbf{s}_n - \mathbf{s}_1) & \dots & \dots & \sigma_X^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_X(\mathbf{s}_1 - \mathbf{u}) \\ c_X(\mathbf{s}_2 - \mathbf{u}) \\ \vdots \\ c_X(\mathbf{s}_n - \mathbf{u}) \end{bmatrix} \quad (2.44)$$

Στη συνέχεια, η λύση του γραμμικού συστήματος εκφράζεται ως $\lambda_\beta = C_{\beta,\alpha}^{-1} C_{\alpha,u}$ για κάθε $\beta = 1, \dots, n(\mathbf{u})$ [57].

Επιπλέον, τα στοιχεία του πίνακα συνδιασποράς υπολογίζονται με βάση την ακόλουθη μαθηματική σχέση:

$$c_X(\mathbf{s}_\alpha, \mathbf{s}_\beta) = \sigma_X^2 - \gamma_X(\mathbf{s}_\alpha, \mathbf{s}_\beta) \quad (2.45)$$

Στην εξίσωση αυτή, το $c_X(\mathbf{s}_\alpha, \mathbf{s}_\beta)$ αναπαριστά το στοιχείο του πίνακα συνδιασποράς μεταξύ των σημείων δειγματοληψίας \mathbf{s}_α και \mathbf{s}_β , ενώ το $\gamma_X(\mathbf{s}_\alpha, \mathbf{s}_\beta)$ αντιπροσωπεύει τη συνδιακύμανση μεταξύ των ίδιων των σημείων δειγματοληψίας. Εδώ, $\sigma^2 X$ αναφέρεται στη διακύμανση του τυχαίου πεδίου

Στις παραπάνω εξισώσεις παρουσιάζονται τα εξής σημαντικά συμπεράσματα:

- Το γραμμικό σύστημα του Kriging θα έχει λύσεις για τα λ_β , μόνο στην περίπτωση που η συνάρτηση συνδιασποράς είναι ημιθετικά ορισμένη και δεν γίνεται χρήση πρόσθετων μετρήσεων στο ίδιο γεωγραφικό σημείο. Αυτό προκύπτει από την αναγκαία αντιστρεψιμότητα του πίνακα συνδιασποράς.
- Τα γραμμικά βάρη που χρησιμοποιούνται στο Kriging είναι ανεξάρτητα από το άνω φράγμα (Sill) του βαριογράμματος, αλλά εξαρτώνται από τον τύπο της συνάρτησης διασποράς. Με άλλα λόγια, το άνω φράγμα

Chapter 2. ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΥΠΟΒΑΘΡΟ

επηρεάζει τη διακύμανση του τυχαίου πεδίου, αλλά όχι τα γραμμικά βάρη.

- Η μέθοδο Kriging παράγει ακριβείς γραμμικές εκτιμήσεις, που σημαίνει ότι σε κάθε γεωγραφικό σημείο όπου υπάρχει μέτρηση, η εκτίμηση είναι ίδια με την τιμή της μέτρησης.

Η αξιολόγηση της εκτίμησης γίνεται μέσω του υπολογισμού της διασποράς του σφάλματος εκτίμησης. Αυτό το σφάλμα εκτίμησης αποτελεί ένα μέτρο για το πόσο διαφέρει η εκτίμηση από την πραγματική τιμή στο σημείο εκτίμησης. Συνήθως, για να προσδιοριστεί η ακρίβεια μιας εκτίμησης, χρησιμοποιείται η τετραγωνική ρίζα της διασποράς του σφάλματος.

$$\sigma_{E,SK}^2(\mathbf{u}) = \sigma_X^2 - \sum_{\alpha=1}^{n(\mathbf{u})} \sum_{\beta=1}^{n(\mathbf{u})} C_{u,\alpha} C_{\alpha,\beta}^{-1} C_{\beta,u} \quad (2.46)$$

Σύμφωνα με την Σχέση 2.46, το σφάλμα εκτίμησης στη μέθοδο Kriging αυξάνεται αναλογικά με την τυπική απόκλιση σ_X . Επιπλέον, η συσχέτιση $\rho_{u,\alpha}$ συγκλίνει προς τη μονάδα όταν τα βάρη λ_α παρουσιάζουν θετικές τιμές. Αυτό σημαίνει ότι το σφάλμα αυξάνεται όσο πιο κοντά βρίσκεται το σημείο εκτίμησης στα σημεία δείγματος $|\mathbf{u} - \mathbf{s}_\alpha|$ [56, 45].

Αυτό το φαινόμενο αντιστοιχεί στην εν γένει αρχή του Kriging, όπου τα σημεία δείγματος που βρίσκονται κοντά στο σημείο εκτίμησης έχουν μεγαλύτερη επίδραση στην εκτίμηση από αυτά που βρίσκονται μακριά. Αυτή η επίδραση καθορίζεται από τα βάρη λ_α που υπολογίζονται στο πλαίσιο της μεθόδου Kriging.

2.5.2 Κανονικό Kriging

Το Κανονικό Kriging (Ordinary Kriging) αποτελεί μια διακεκριμένη μέθοδο στον χώρο της χωρικής στατιστικής και της γεωστατιστικής. Ένα από τα βασικά πλεονεκτήματά του είναι ότι δεν απαιτεί την εκ των προτέρων εκτίμηση

Chapter 2. ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΥΠΟΒΑΘΡΟ

της μέσης τιμής του τυχαίου πεδίου, πράγμα που καθιστά τη μέθοδο ευέλικτη και εφαρμόσιμη σε πολλά είδη χωρικών διακριτικών δεδομένων. Η εκτίμηση της μέσης τιμής είναι απαραίτητη για τον υπολογισμό της συνάρτησης συνδιασποράς. Ωστόσο, αυτό μπορεί να δημιουργήσει αντιφάσεις, διότι για τον υπολογισμό της μέσης τιμής χρειάζεται η συνάρτηση συνδιασποράς, και αντιστρόφως. Αυτό δημιουργεί ένα αμοιβαίο εξάρτημα μεταξύ της μέσης τιμής και της συνάρτησης συνδιασποράς. Η επιλογή, λοιπόν, του κανονικού Kriging είναι πιο ευέλικτη, καθώς δεν απαιτεί την προηγούμενη εκτίμηση της μέσης τιμής. Αυτό επιτρέπει στη μέθοδο να αντιμετωπίσει δεδομένα που μπορεί να έχουν συσχετισμένες τιμές χωρίς την ανάγκη για προκαθορισμένη μέση τιμή [22, 56].

Παρακάτω παρουσιάζονται η βασική εξίσωση του κανονικού Kriging και η εξίσωση που εκφράζει τη συνθήκη αμεροληψίας.

Η βασική εξίσωση του κανονικού Kriging είναι η εξής:

$$\hat{X}(\mathbf{u}) = \sum_{\alpha=1}^{n(\mathbf{u})} \lambda_{\alpha} X(\mathbf{s}_{\alpha}) \quad (2.47)$$

Η εξίσωση που εκφράζει τη συνθήκη αμεροληψίας είναι:

$$\sum_{\alpha=1}^{n(\mathbf{u})} \lambda_{\alpha} = 1 \quad (2.48)$$

Για τον υπολογισμό των βέλτιστων γραμμικών βαρών στον κανονικό Kriging, πρέπει να πραγματοποιηθεί ελαχιστοποίηση του μέσου τετραγωνικού σφάλματος υπό τον περιορισμό της συνθήκης αμεροληψίας 2.48.

Η εξίσωση για τον υπολογισμό των βέλτιστων βαρών είναι:

$$\sum_{\beta=1}^{n(\mathbf{u})} \lambda_{\alpha} c_X(\mathbf{s}_{\alpha} - \mathbf{s}_{\beta}) + \mu = c_X(\mathbf{s}_{\alpha} - \mathbf{u}), \alpha = 1, \dots, n(\mathbf{u}) \quad (2.49)$$

$$\sum_{\alpha=1}^{n(\mathbf{u})} \lambda_{\alpha} = 1 \quad (2.50)$$

Το γραμμικό σύστημα που χρησιμοποιείται παραπάνω για τον υπολογισμό των βέλτιστων γραμμικών βαρών στον κανονικό Kriging, μπορεί να παρουσιαστεί και σε μορφή γραμμικού πίνακα. Συγκεκριμένα, αυτός ο πίνακας μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$\begin{bmatrix} \sigma_X^2 & c_X(\mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_2) & \dots & c_X(\mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_n) & 1 \\ c_X(\mathbf{s}_2 - \mathbf{s}_1) & \sigma_X^2 & \dots & c_X(\mathbf{s}_2 - \mathbf{s}_n) & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_X(\mathbf{s}_n - \mathbf{s}_1) & c_X(\mathbf{s}_n - \mathbf{s}_2) & \dots & \sigma_X^2 & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \\ \mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_X(\mathbf{s}_1 - \mathbf{u}) \\ c_X(\mathbf{s}_2 - \mathbf{u}) \\ \vdots \\ c_X(\mathbf{s}_n - \mathbf{u}) \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.51)$$

Το μέσο τετραγωνικό σφάλμα για το κανονικό Kriging υπολογίζεται ως εξής:

$$\sigma_{E,OK}^2(\mathbf{u}) = \sigma_X^2 - \sum_{\alpha=1}^{n(\mathbf{u})} \lambda_{\alpha} c_X(\mathbf{u}) - \mu \quad (2.52)$$

Η αρνητική τιμή του συντελεστή Lagrange μ διορθώνει το μέσο τετραγωνικό σφάλμα προσαρμόζοντάς το, ώστε να αντισταθμίσει την ανεπιθύμητη μεροληπτικότητα που προκύπτει όταν οι τιμές του δείγματος είναι συσχετισμένες.

Συνοπτικά, στο κανονικό Kriging, όπου δεν συμπεριλαμβάνεται η μέση τιμή του τυχαίου πεδίου στις εκτιμήσεις, η αβεβαιότητα είναι συνήθως μεγαλύτερη σε σύγκριση με το απλό Kriging. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι το κανονικό Kriging υποθέτει μία σταθερή μέση τιμή για το τυχαίο πεδίο, ενώ το απλό Kriging λαμβάνει υπόψη την γνωστή μέση τιμή. Επιπλέον, το φαινόμενο κόκκου (Nugget) επιδρά στο σφάλμα εκτίμησης στο κανονικό Kriging, το οποίο μπορεί

να προκαλέσει αύξηση του σφάλματος εκτίμησης, καθιστώντας τις εκτιμήσεις λιγότερο ακριβείς [56].

2.5.3 Μέτρα Επιβεβαίωσης Χωρικού Μοντέλου

Η μέθοδος διασταύρωμένης επαλήθευσης Leave-One-Out Cross-Validation (LOOCV) είναι μια συνηθισμένη τεχνική που χρησιμοποιείται για την επιβεβαίωση των εκτιμήσεων ενός γεωστατιστικού μοντέλου, ιδίως όσον αφορά τις παραμέτρους του ημιβαριογράμματος και της ακτίνας της γειτονιάς [37]. Στη μέθοδο αυτή, κάθε δείγμα από τα δεδομένα αφαιρείται σειριακά και χρησιμοποιείται ως σημείο ελέγχου, ενώ τα υπόλοιπα δεδομένα χρησιμοποιούνται για να πραγματοποιηθεί μια εκτίμηση στο αφαιρεθέν σημείο, λαμβάνοντας υπόψη τις τιμές των γειτονικών σημείων. Αυτή η διαδικασία επαναλαμβάνεται για κάθε δείγμα, και τα αποτελέσματα συνδυάζονται για την αξιολόγηση του μοντέλου. Εν συνεχεία, αξιολογείται η απόδοση του γεωστατιστικού μοντέλου συγκρίνοντας τις εκτιμήσεις με τις πραγματικές τιμές στα σημεία ελέγχου. Αυτό μπορεί να γίνει χρησιμοποιώντας τα ακόλουθα κύρια μέτρα [41].

Μέσο Σφάλμα

Το μέσο σφάλμα υπολογίζεται μέσω της εξίσωσης:

$$MAE = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N [\hat{x}(s_i) - x(s_i)] \quad (2.53)$$

Το μέσο σφάλμα υπολογίζει τη μεροληψία της εκτίμησης, δηλαδή αντιπροσωπεύει τη διαφορά μεταξύ της αναμενόμενης (ή προβλεπόμενης) τιμής και της πραγματικής τιμής που μετρήθηκε. Εάν η διαφορά είναι μηδέν, αυτό σημαίνει ότι η αναμενόμενη τιμή ταυτίζεται απόλυτα με την πραγματική τιμή, και άρα έχουμε μια τέλεια εκτίμηση [50].

Μέσο Απόλυτο Σφάλμα

Η εξίσωση που παρουσιάζεται παρακάτω υπολογίζει το Μέσο Απόλυτο Σφάλμα (Mean Absolute Error - MAE) μιας εκτίμησης.

$$MAE = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N |\hat{x}(s_i) - x(s_i)| \quad (2.54)$$

Το Μέσο Απόλυτο Σφάλμα υπολογίζεται ως η απόλυτη διαφορά μεταξύ της εκτιμημένης τιμής και της πραγματικής τιμής για κάθε διαθέσιμο σημείο μέτρησης. Συγκεκριμένα, εκφράζει τον μέσο απόλυτο βαθμό σφάλματος των εκτιμήσεων σε σχέση με τις πραγματικές τιμές. Όσο χαμηλότερο είναι το Μέσο Απόλυτο Σφάλμα, τόσο καλύτερη είναι η ακρίβεια του μοντέλου [22].

Μέσο Τετραγωνικό Σφάλμα

Το Μέσο Τετραγωνικό Σφάλμα (Mean Squared Error) αντιπροσωπεύει έναν σημαντικό μετρικό δείκτη της ακρίβειας και της προσαρμοστικότητας ενός γραμμικού μοντέλου στα δεδομένα. Το Μέσο Τετραγωνικό Σφάλμα εκφράζει την διακύμανση των τετραγωνικών αποκλίσεων ανάμεσα στις πραγματικές τιμές και τις προβλεπόμενες τιμές. Όσο χαμηλότερο είναι το Μέσο Τετραγωνικό Σφάλμα, τόσο καλύτερα προσαρμόζεται το μοντέλο στα δεδομένα.

Η ρίζα του Μέσου Τετραγωνικού Σφάλματος (Root Mean Squared Error) αποτελεί μια βελτιωμένη μέθοδο για την αξιολόγηση της ακρίβειας του μοντέλου σε σχέση με το απλό Μέσο Τετραγωνικό Σφάλμα. Πρόκειται συνήθως για μια καλύτερη μέθοδο σύγκρισης από τον συντελεστή συσχέτισης, τουλάχιστον στην περίπτωση αξιολόγησης της ακρίβειας των προβλέψεων σε εφαρμογές που αφορούν σε συνεχείς μεταβλητές. Η ρίζα του Μέσου Τετραγωνικού Σφάλματος

Chapter 2. ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΥΠΟΒΑΘΡΟ

υπολογίζεται μέσω της εξίσωσης:

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N [\hat{x}(s_i) - x(s_i)]^2} \quad (2.55)$$

Η επιλογή μεταξύ της ρίζας του Μέσου Τετραγωνικού Σφάλματος και του Μέσου Απόλυτου Σφάλματος εξαρτάται συχνά από το πλαίσιο της εφαρμογής και τους στόχους αξιολόγησης. Η ρίζα του Μέσου Τετραγωνικού Σφάλματος έχει το πλεονέκτημα ότι δίνει μεγαλύτερη βαρύτητα στα μεγάλα σφάλματα, κάνοντας τα πιο ορατά στην αξιολόγηση του μοντέλου. Από την άλλη πλευρά, το Μέσο Απόλυτο Σφάλμα είναι πιο ανθεκτικό στις ακραίες τιμές και συνήθως πιο εύκολο στον υπολογισμό. Αν τα μεγάλα σφάλματα δεν είναι τόσο σημαντικά, τότε το Μέσο Απόλυτο Σφάλμα μπορεί να αποτελεί μια πρακτική επιλογή [8]. Ουσιαστικά, η ρίζα του Μέσου Τετραγωνικού Σφάλματος είναι πιο ευαίσθητη σε μεγάλα σφάλματα. Αυτό σημαίνει ότι αν υπάρχουν μερικές ακραίες τιμές στα δεδομένα, η ρίζα του Μέσου Τετραγωνικού Σφάλματος θα αυξήσει σημαντικά, ενώ το Μέσο Απόλυτο Σφάλμα θα είναι λιγότερο επηρεασμένο. Αντίθετα, το Μέσο Απόλυτο Σφάλμα δίνει ίση σημασία σε όλα τα σφάλματα, ανεξαρτήτως του μεγέθους τους. Αυτό το καθιστά πιο ανθεκτικό σε ακραίες τιμές και πιο κατάλληλο σε περιπτώσεις όπου απαιτείται αξιολόγηση της γενικής απόδοσης ενός μοντέλου χωρίς να δοθεί υπερβολική έμφαση σε μεγάλα σφάλματα.

Συντελεστής Συσχέτισης Pearson

Ο συντελεστής συσχέτισης, γνωστός και ως συντελεστής Pearson σε πολλές περιπτώσεις, χρησιμοποιείται για να μετρήσει τη δύναμη και τη φύση της

Chapter 2. ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΥΠΟΒΑΘΡΟ

γραμμικής σχέσης μεταξύ δύο μεταβλητών.

$$\rho = \frac{\sum_{n=1}^N (x_n^* - \overline{x_n^*})(\hat{x}_n - \overline{\hat{x}_n})}{\sqrt{\sum_{n=1}^N (x_n^* - \overline{x_n^*})^2} \sqrt{\sum_{n=1}^N (\hat{x}_n - \overline{\hat{x}_n})^2}} \quad (2.56)$$

Η τιμή ρ υπολογίζει τη στατιστική συσχέτιση ανάμεσα στα δεδομένα και τις εκτιμήσεις. Σύμφωνα με την σχέση 2.56 ισχύει ότι $-1 \leq \rho \leq 1$. Ο συντελεστής συσχέτισης είναι χρήσιμος για να αξιολογηθεί η διακύμανση που μοιράζουν δύο μεταβλητές. Ωστόσο, πρέπει να σημειωθεί ότι ο συντελεστής Pearson μετράει μόνο γραμμικές συσχετίσεις και δεν ανιχνεύει μη γραμμικές σχέσεις.

Η εξίσωση του συντελεστή συσχέτισης ρ μπορεί να αναπαρασταθεί γραφικά σε ένα διάγραμμα διασποράς. Σε αυτό το διάγραμμα, το ρ αντιστοιχεί στην κλίση της γραμμής που παριστάνει τη σχέση μεταξύ των δύο μεταβλητών.

- Όταν $\rho = 1$, το διάγραμμα διασποράς θα παρουσιάζει μια τέλεια θετική γραμμική σχέση. Αυτό σημαίνει ότι όταν η μία μεταβλητή αυξάνεται, η άλλη αυξάνεται επίσης με μια σταθερή σχέση. Το διάγραμμα θα παρουσιάζει μια ανοδική ευθεία γραμμή με θετική κλίση.
- Αντίστοιχα, όταν $\rho = -1$, το διάγραμμα διασποράς θα παρουσιάζει μια τέλεια αρνητική γραμμική σχέση. Αυτό σημαίνει ότι όταν η μία μεταβλητή αυξάνεται, η άλλη μειώνεται με μια σταθερή σχέση. Το διάγραμμα θα παρουσιάζει μια φθίνουσα ευθεία γραμμή με αρνητική κλίση.
- Όταν $\rho = 0$, δεν υπάρχει γραμμική σχέση μεταξύ των μεταβλητών, και το διάγραμμα διασποράς θα δείχνει μια διάσπαση των σημείων γύρω από τη μέση τιμή, χωρίς συγκεκριμένη τάση [45].

Κεφάλαιο 3

ΓΕΩΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

Το κεφάλαιο αυτό περιλαμβάνει την γεωστατιστική ανάλυση των δεδομένων. Συγκεκριμένα, τα δεδομένα που αξιολογήθηκαν, αντιστοιχούν σε πραγματικές διερευνητικές γεωτρήσεις της Δυτικής Μακεδονίας, και τα οποία συλλέχθηκαν από την Ελληνική Αρχή Γεωλογικών και Μεταλλευτικών Ερευνών (Ε.Α.Γ.Μ.Ε.). Κατά την εκπόνηση της παρούσας διπλωματικής, η ανάλυση των δεδομένων πραγματοποιήθηκε μέσω του προγράμματος Matlab. Η ανάλυση χωρίστηκε σε τέσσερα βασικά στάδια. Τη στατιστική ανάλυση, την εύρεση της χωρικής τάσης και την αφαίρεση της, την βαριογραφία και τέλος την εφαρμογή της μεθόδου Κανονικού Kriging (Ordinary Kriging). Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζονται αναλυτικά τα επιμέρους στάδια που αναφέρθηκαν.

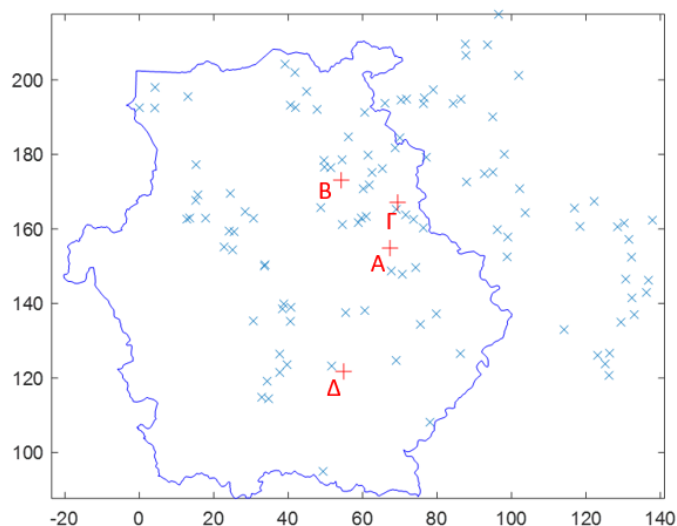
3.1 Περιγραφική Αναφορά των Δεδομένων

Τα δεδομένα τα οποία χρησιμοποιήθηκαν στην συγκεκριμένη εργασία, όπως προαναφέρθηκε, προέρχονται από την περιβαλλοντική παρακολούθηση της Ελληνικής Αρχής Γεωλογικών και Μεταλλευτικών Ερευνών (Ε.Α.Γ.Μ.Ε.). Τα δεδομένα συλλέχθηκαν αρχικά βάσει του Ελληνικού Γεωδαιτικού Συστήματος

Chapter 3. ΓΕΩΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

Αναφοράς 1987 (ΕΓΣΑ'87). Ωστόσο, τα συγκεκριμένα δεδομένα μετατράπηκαν σε ένα τοπικό σύστημα αναφοράς, με σκοπό τη γεωστατιστική ακρίβεια και την σωστή ερμηνεία των αποτελεσμάτων.

Η ανάλυση των δεδομένων επικεντρώνεται σε τέσσερα ορυχεία της Δυτικής Μακεδονίας, τα οποία απεικονίζονται στον χάρτη 3.1, Πρόκειται για το λιγνιτωρυχείο της Πτολεμαΐδας (Α) στο νοτιοανατολικό τμήμα της περιοχής μελέτης, το λιγνιτωρυχείο του Αμυνταίου (Β), το οποίο βρίσκεται βόρεια, το ορυχείο των Κομνηνών (Γ) βορειοανατολικά της περιοχής και το ορυχείο (Δ) που βρίσκεται νοτιοανατολικά από την λίμνη Έζαρχου. Στον χάρτη 3.1 απεικονίζονται επίσης οι σταθμοί παρακολούθησης των υπόγειων υδάτων.



Εικόνα 3.1: Θέσεις σταθμών παρακολούθησης των υπόγειων υδάτων (x) και των ορυχείων (+).

Για την παρούσα εργασία, τα χημικά στοιχεία που αναλύθηκαν είναι το Mg (Μαγνήσιο) και Mn (Μαγγάνιο), και η μονάδα μέτρησης των συγκεντρώσεων τους αποδίδεται σε ppm και ppb αντίστοιχα. Ο λόγος που επιλέχθηκαν αυτά τα στοιχεία, είναι επειδή οι στατιστικές τους ιδιότητες ήταν οι πιο κατάλληλες για την επιθυμητή γεωστατιστική ανάλυση. Συγκεκριμένα, για το Mg και

Chapter 3. ΓΕΩΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

το Mn χρησιμοποιήθηκαν δεδομένα από 113 και 115 σημεία παρακολούθησης αντίστοιχα. Τα δεδομένα αυτά αφορούν μετρήσεις συγκέντρωσης αυτών των χημικών στοιχείων που λήφθηκαν την χρονιά 2021.

Στην Εικόνα 3.1 απεικονίζονται οι θέσεις των υπογείων υδάτων, δηλαδή των γεωτρήσεων που πραγματοποιήθηκαν, από τα δεδομένα που συλλέχθηκαν, αλλά και οι ακριβείς θέσεις των ορυχείων, με σκοπό την περαιτέρω ανάλυση τους. Οι συντεταγμένες των ορυχείων συλλέχθηκαν αρχικά βάσει του Ελληνικού Γεωδαιτικού Συστήματος Αναφοράς 1987 (ΕΓΣΑ'87). Ωστόσο, και σε αυτή την περίπτωση οι συντεταγμένες των συγκεκριμένων ορυχείων μετατράπηκαν σε ένα τοπικό σύστημα αναφοράς, με σκοπό τη γεωστατιστική ακρίβεια και την σωστή ερμηνεία των αποτελεσμάτων.

3.2 Στατιστική Ανάλυση

Η έννοια της στατιστικής ανάλυσης περιλαμβάνει την εξέταση και τον προσδιορισμό των παραμέτρων κατανομής πιθανότητας που χαρακτηρίζουν ένα σύνολο δεδομένων. Παράλληλα, θα πρέπει να ληφθεί υπόψη και ο έλεγχος κανονικότητας.

Λογαριθμικός Μετασχηματισμός

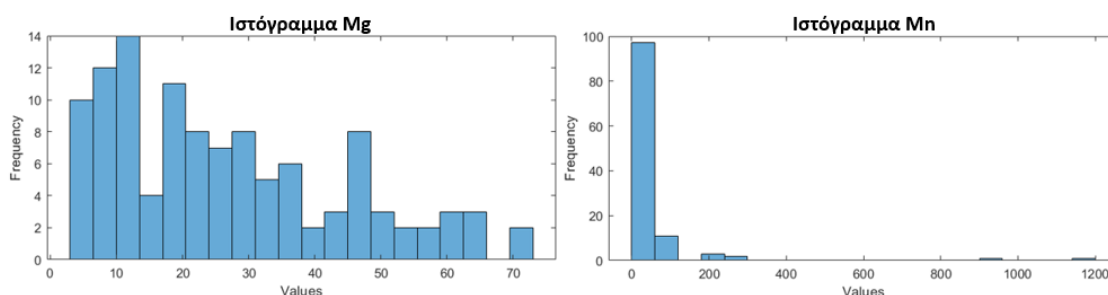
Στα πλαίσια του ελέγχου κανονικότητας, τα δεδομένα των σταθμών δεν ακολουθούν μια κανονική κατανομή 2.2.5. Για τον λόγο αυτό χρειάστηκε να εφαρμοστεί ο λογαριθμικός μετασχηματισμός Φ , βάσει της εξίσωσης:

$$\mathbf{X}^*(\mathbf{s}) \equiv \log(\mathbf{X}(\mathbf{s})) \quad (3.1)$$

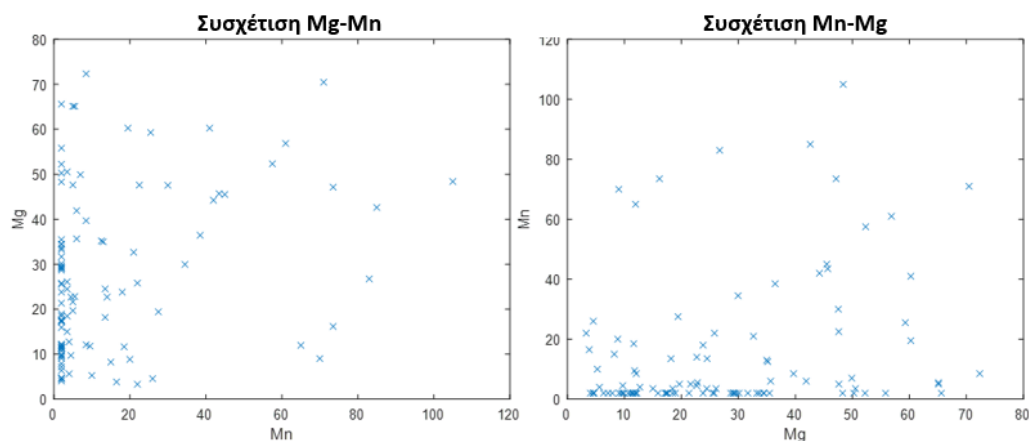
όπου \mathbf{X}^* αναπαριστά το πεδίο των λογαρίθμων της συγκέντρωσης, με σκοπό την καλύτερη προσέγγιση τους.

Chapter 3. ΓΕΩΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

Στην Εικόνα 3.2 παρουσιάζονται τα ιστογράμματα του Mg και του Mn αντίστοιχα. Συγκεκριμένα, στα ιστογράμματα αυτά εντοπίζονται ακραίες τιμές, οι οποίες βρίσκονται μακριά από το κυρίαρχο μέρος της κατανομής. Για τον λόγο αυτό, καθίσταται επιτακτική ανάγκη να σχηματιστούν τα ιστογράμματα μέσω λογαριθμικού σχηματισμού, τα οποία παρατίθενται στις εικόνες 3.4 και 3.5 για τα δύο στοιχεία.



Εικόνα 3.2: Ιστόγραμμα των στοιχείων Mg και Mn χωρίς μετασχηματισμό λογαρίθμου.



Εικόνα 3.3: Συσχέτιση των στοιχείων Mg-Mn χωρίς μετασχηματισμό λογαρίθμου.

Στην Εικόνα 3.3 απεικονίζεται η συσχέτιση των στοιχείων Mg και Mn χωρίς μετασχηματισμό λογαρίθμου. Η συσχέτιση υπολογίστηκε 28.6%, η οποία χαρακτηρίζεται ασθενής.

3.2.1 Παράμετροι Κατανομής Πιθανότητας

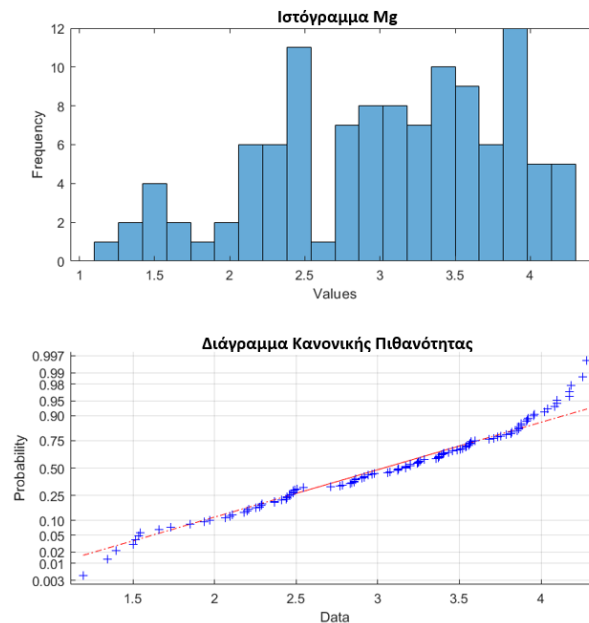
Οι παράμετροι που περιγράφουν την κατανομή πιθανότητας, έχοντας εφαρμοστεί λογαριθμικός μετασχηματισμός παρουσιάζονται στον Πίνακα 3.1. Εν συνεχεία, παρατίθενται τα ιστογράμματα στα σχήματα 3.4 και 3.5.

Πίνακας 3.1: Παράμετροι Κατανομής Πιθανότητας των λογαριθμισμένων τιμών του Mg-Mn αντίστοιχα.

Στατιστική Ανάλυση	Μαγνήσιο (Mg)	Μαγγάνιο (Mn)
Ελάχιστη Τιμή	1.1924	0.6931
Μέγιστη Τιμή	4.2815	7.0778
Μέση Τιμή	3.0333	2.1190
Διάμεσος	3.1697	1.6094
Τυπική Απόκλιση	0.7683	1.6035
Συντελεστής Ασυμμετρίας	-0.4275	0.9333
Κύρτωση	2.3327	3.0043

Στο πλαίσιο της στατιστικής ανάλυσης του Mg και του Mn παρατηρείται μεγάλη διακύμανση στις τιμές τους. Συγκεκριμένα στο στοιχείο Mg, η τιμή της διαμέσου υποδεικνύει πως οι περισσότερες τιμές και το μέσο της κατανομής βρίσκεται περίπου στο 3. Η μέση τιμή και η διάμεσος βρίσκονται αρκετά κοντά, το οποίο υποδηλώνει ότι η κατανομή των δεδομένων είναι σχετικά συμμετρική. Ωστόσο, επειδή ο συντελεστής ασυμμετρίας είναι αρνητικός, γίνεται αντιληπτή αρνητική ασυμμετρία στην κατανομή προς τα δεξιά. Αυτό σημαίνει ότι η ουρά της κατανομής είναι πιο μακριά από τη μέση τιμή προς τα αριστερά, ενώ είναι πιο κοντά προς τα δεξιά, όπως παρατηρείται και στο ιστόγραμμα του σχήματος 3.4. Επιπρόσθετα, ο συντελεστής κύρτωσης είναι μικρότερος από τρία. Ως αποτέλεσμα, η κατανομή έχει μια μέτρια βαθμού κύρτωση (πλατυκυρτική κατανομή), με την πλειονότητα των τιμών να βρίσκονται στο κέντρο της κατανομής και λιγότερες ακραίες τιμές.

Chapter 3. ΓΕΩΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

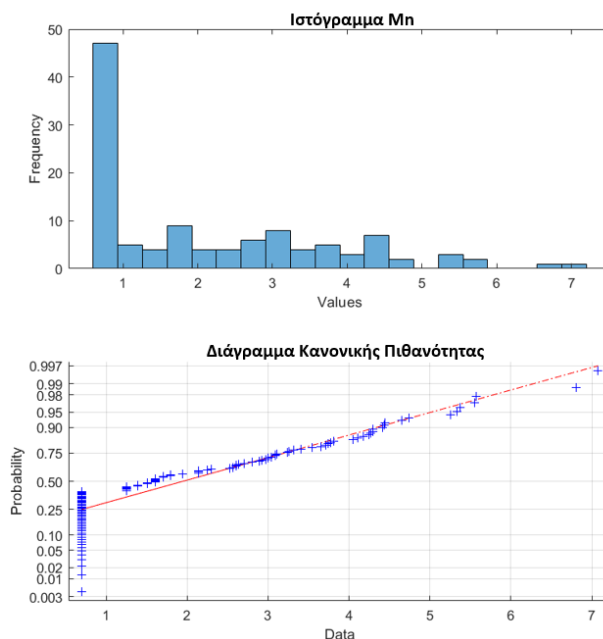


Εικόνα 3.4: Ιστόγραμμα και Διάγραμμα Κανονικής Πιθανότητας Mg με μετασχηματισμό λογαρίθμου

Το διάγραμμα κανονικής πιθανότητας (normal probability plot ή Norm-Plot) αποτελεί σημαντικό εργαλείο σύγκρισης της αθροιστικής κατανομής πιθανότητας των δεδομένων με την αθροιστική κατανομή πιθανότητας της κανονικής κατανομής. Όταν τα δεδομένα ακολουθούν την κανονική κατανομή, τα σημεία των δεδομένων ακολουθούν, κατά κύριο λόγο, μια ευθεία γραμμή που αντιστοιχεί στην αθροιστική κατανομή πιθανότητας της κανονικής κατανομής. Στην πραγματικότητα, αυτή η ευθεία είναι η ίδια γραμμή αναφοράς (κόκκινη γραμμή στο διάγραμμα 3.4) όπως και στο 3.5, που αντιπροσωπεύει την αθροιστική κατανομή πιθανότητας της κανονικής κατανομής. Στην περίπτωση που τα δεδομένα δεν ακολουθούν την κανονική κατανομή, τότε τα σημεία των δεδομένων αποκλίνουν από την ευθεία γραμμή αναφοράς. Χαρακτηριστικό παράδειγμα αποτελεί το γράφημα 3.5).

Για το στοιχείο Mn παρατηρείται ότι η μέση τιμή και η διάμεσος δεν βρίσκον-

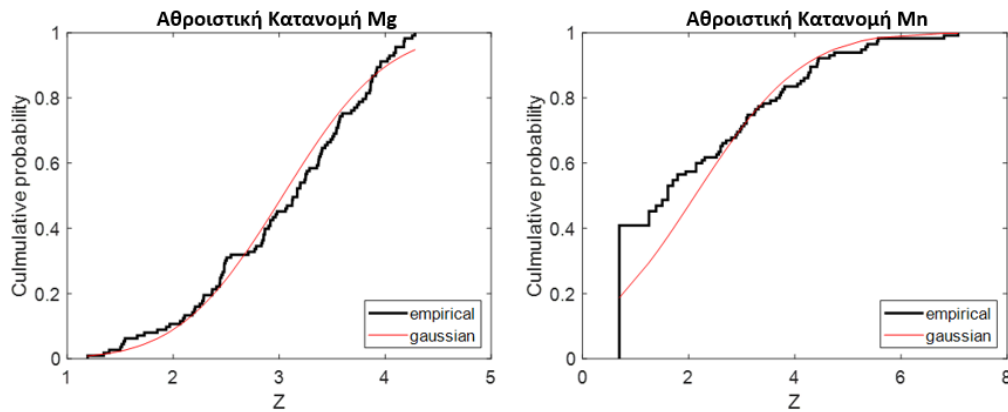
Chapter 3. ΓΕΩΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ



Εικόνα 3.5: Ιστόγραμμα και Διάγραμμα Κανονικής Πιθανότητας Mn με μετασχηματισμό λογαρίθμου

ται κοντά, το οποίο υποδηλώνει ότι η κατανομή των δεδομένων είναι ασύμμετρη, με το πλήθος των ακραίων τιμών να κατανέμεται προς τα αριστερά, όπως φαίνεται και στο σχήμα 3.5. Μέσα από το ιστόγραμμα παρατηρείται ότι οι τιμές στο πέντε και το επτά έχουν μεγάλο βάρος λόγω τετάρτου βαθμού ροπής, με αποτέλεσμα να ανεβάζουν τον συντελεστή κύρτωσης στην τιμή τρία. Ακόμη, ο συντελεστής ασυμμετρίας είναι θετικός, υποδηλώνοντας μεγάλη θετική ασυμμετρία στην κατανομή προς τα δεξιά, δηλαδή υπάρχουν ακραίες τιμές που είναι μεγαλύτερες από την μέση τιμή και η ουρά της κατανομής εκτείνεται προς τα δεξιά.

Τα διαγράμματα της Εικόνας 3.6 απεικονίζουν την αθροιστική κατανομή μετά τον μετασχηματισμό λογαρίθμου των στοιχείων Mg και Mn αντίστοιχα. Μέσω των διαγραμμάτων αυτών παρατηρείται καλύτερη προσαρμογή του Mg στην κανονική κατανομή σε σχέση με το Mn.

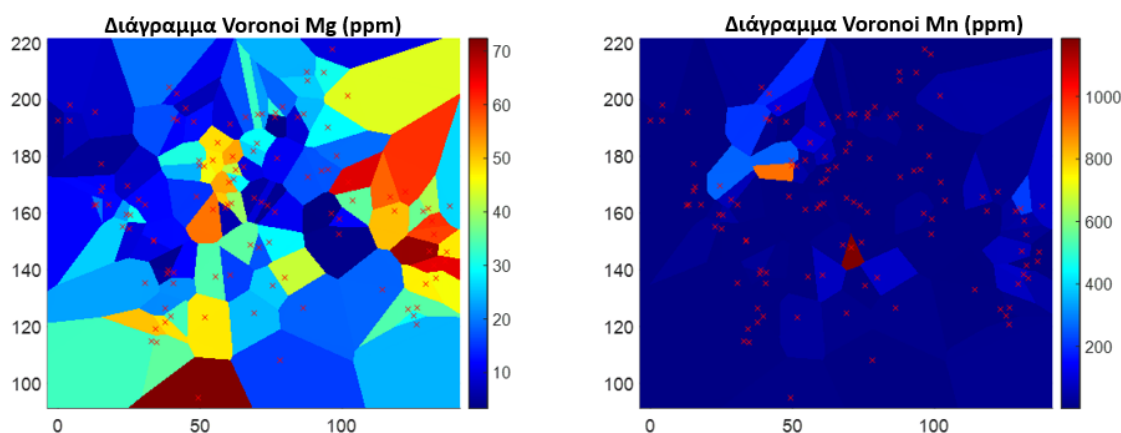


Εικόνα 3.6: Αθροιστική κατανομή λογαρίθμου των στοιχείων Mg και Mn (μαύρη γραμμή) σε σχέση με την κανονική κατανομή (κόκκινη γραμμή).

3.2.2 Διαγράμματα Voronoi

Τα διαγράμματα Voronoi που παρουσιάζονται στη μελέτη αντιπροσωπεύουν τις χωρικές θέσεις των δεδομένων εντός της περιοχής μελέτης. Αυτά τα διαγράμματα δημιουργήθηκαν χωρίς να εφαρμοστεί κανένας μετασχηματισμός στα δεδομένα. Κάθε πολύγωνο Voronoi περιβάλλει μία συγκεκριμένη θέση μέτρησης και αποτυπώνει την περιοχή που ανήκει σε αυτήν τη θέση ως τον πλησιέστερη των γειτονικών δειγμάτων.

Συγκεκριμένα, στην περίπτωση του Mg, όπως παρατηρείται από την Εικόνα 3.7, οι τιμές της συγκέντρωσης στα σημεία μελέτης είναι σχετικά χαμηλές με εξαιρέσεις σε συγκεκριμένες περιοχές. Τα χαμηλά αυτά επίπεδα συγκέντρωσης υποδηλώνουν ότι υπάρχει χαμηλή ποσότητα Mg σε αυτές τις περιοχές. Παράλληλα, η συγκέντρωση Mg παρουσιάζει έντονες αυξομειώσεις σε κοντινές αποστάσεις γύρω από τα σημεία των υψηλών τιμών, υποδηλώνοντας την ύπαρξη μη στασιμότητας. Για τον λόγο αυτό, θα πρέπει να χρησιμοποιηθεί μια εξίσωση τάσης που να περιγράφει ικανοποιητικά αυτές τις υψηλές τιμές και να αφαιρεθεί, όπου εν συνεχεία προκύπτει το πεδίο διακυμάνσεων (βλ. 2.23).



Εικόνα 3.7: Διαγράμματα Voronoi χωρίς μετασχηματισμό των στοιχείων Mg και Mn.

Εν συνεχεία, για το Mn μέσα από το διάγραμμα Voronoi της Εικόνας 3.7 παρατηρείται ότι οι τιμές της συγκέντρωσης στα σημεία μελέτης είναι αρκετά χαμηλές με εξαιρέσεις σε συγκεκριμένες περιοχές. Παράλληλα, η αντίθεση των υψηλών τιμών με τις αρκετά χαμηλές τιμές στα σημεία μελέτης, υποδεικνύουν ότι δεν δύναται να υπάρχει στασιμότητα στα δεδομένα. Αυτή η αστάθεια μπορεί να οφείλεται σε διάφορους παράγοντες, όπως γεωλογικές διαφορές ή υδρολογικές διαδικασίες, που επηρεάζουν την κατανομή του Mn στην περιοχή. Αφαιρώντας και σε αυτή την περίπτωση την τάση, τα δεδομένα γίνονται περισσότερο σταθερά και είναι πιο εύκολο να γίνει γεωστατιστική ανάλυση και εκτίμηση των τιμών του Mn σε άλλες περιοχές της μελέτης. Συνεπώς, υποθέτουμε ότι το πεδίο διακυμάνσεων (βλ. 2.23) έχει μεγαλύτερη στατιστική ομοιογένεια. Μέσω των διαγραμμάτων Voronoi 3.7, στην περίπτωση του Mn, το εύρος των τιμών παρατηρείται μεγαλύτερο από του Mg. Ωστόσο, οι περισσότερες τιμές συγκέντρωσης του Mn είναι χαμηλές, με ορισμένες εξαιρέσεις υψηλότερων τιμών.

3.2.3 Τάση

Η κατάλληλη μαθηματική συνάρτηση που αποτυπώνει με ακρίβεια την τάση στο πεδίο, κατά τη διεξαγωγή της γεωστατιστικής ανάλυσης, είναι μια γραμμική εξίσωση 1ου βαθμού της μορφής:

$$Mx = a_0 + a_1X + a_2Y. \quad (3.2)$$

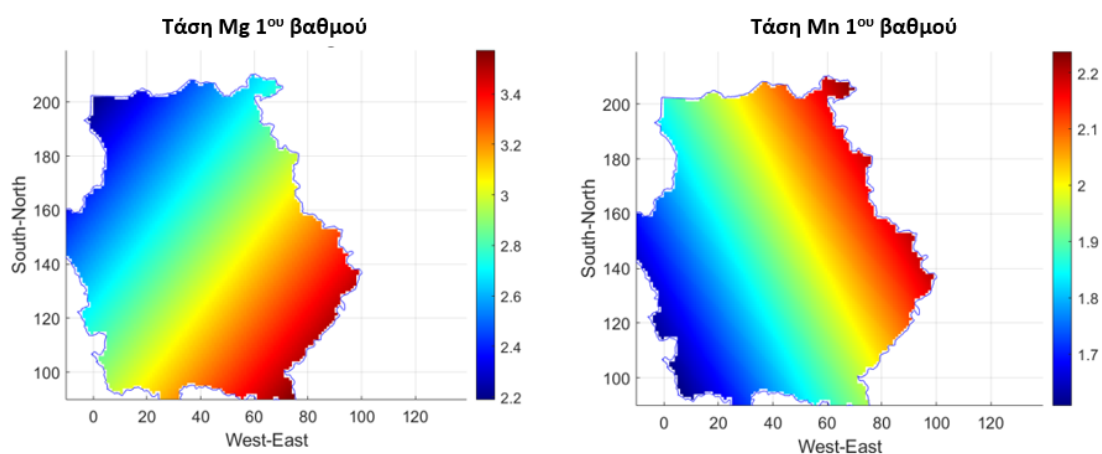
Οι γραμμικοί συντελεστές της εξίσωσης 3.2 παρατίθενται στον Πίνακα 3.2.

Πίνακας 3.2: Γραμμικοί Συντελεστές Τάσης με μετασχηματισμό λογαρίθμου.

coef	Μαγνήσιο (Mg)	Μαγγάνιο (Mn)
α_0	3.5297	1.3261
α_1	0.0085	0.0051
α_2	-0.0066	0.0027

Ο Συντελεστής Συσχέτισης (correlation coefficient) με 1ου βαθμού τάση για το στοιχείο του Mg είναι ίσος με 48.39%, το οποίο υποδεικνύει μια μέτρια θετική γραμμική συσχέτιση με τις χωρικές θέσεις, όπου πραγματοποιήθηκαν οι μετρήσεις του Mg. Ωστόσο, για το στοιχείο Mn υπολογίστηκε 12.09%, πράγμα που υποδηλώνει ότι η γραμμική συσχέτιση μεταξύ της συγκέντρωσης του Mn και των χωρικών θέσεων που έγιναν οι μετρήσεις είναι πολύ ασθενής. Ως αποτέλεσμα, δεν μπορεί να γίνει εκτίμηση του διαγράμματος τάσης για το Mn, το οποίο απεικονίζεται στην Εικόνα 3.8, αφού πρακτικά δεν υπάρχει συσχέτιση.

Στο διάγραμμα τάσης των στοιχείων Mg και Mn, όπως παρουσιάζεται στην Εικόνα 3.8, έχει εφαρμοστεί μάσκα στα δεδομένα με σκοπό την απομόνωση τους εντός της περιοχής μελέτης. Ουσιαστικά, απεικονίζεται η τάση εντός της



Εικόνα 3.8: Διαγράμματα Τάσης με μετασχηματισμό των στοιχείων Mg και Mn.

Δυτικής Μακεδονίας.

Όσον αφορά το στοιχείο Mg, όπως παρουσιάζεται στην Εικόνα 3.8, παρατηρείται ότι οι υψηλές τιμές βρίσκονται στη νότιο-ανατολική περιοχή του χάρτη. Ειδικότερα, η εμφάνιση απότομων καμπυλών από την νότιο-ανατολική μέχρι την βορείο-δυτική περιοχή υποδεικνύει αλλαγή στο ρυθμό μείωσης, δηλαδή οι τιμές αλλάζουν σημαντικά σε μικρές αποστάσεις.

Για το Mg η χωρική τάση είναι μεγάλης κλίμακας, για τον λόγο αυτό γίνεται αφαίρεση αυτής από τα δεδομένα, έτσι ώστε να επιτευχθεί η στασιμότητα που απαιτείται για την εφαρμογή της μεθόδου Kriging. Ουσιαστικά, γίνεται μοντελοποίηση της τάσης μέσω της παλινδρόμησης (βλ. 2.5). Συνεπώς, προκύπτει το πεδίο της Διακύμανσης, το οποίο θεωρείται ότι έχει μεγαλύτερη στατιστική ομοιογένεια, και το οποίο θα χρησιμοποιηθεί εν συνεχεία στην ανάλυση (βλ. 2.4.4).

Η εμφάνιση απότομων αλλαγών στην κατανομή του Mg οφείλεται σε διάφορους παράγοντες. Συγκεκριμένα, οι διαφορετικές γεωλογικές δομές μπορεί να επηρεάσουν τη διασπορά αυτών των στοιχείων στο έδαφος. Περιοχές με

Chapter 3. ΓΕΩΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

διαφορετικά γεωλογικά χαρακτηριστικά μπορεί να έχουν διαφορετικές συγκεντρώσεις. Επίσης η κίνηση των υπόγειων υδάτων μέσα στο έδαφος μπορεί επίσης να επηρεάσει την κατανομή των ορυκτών. Υδρολογικές διαδικασίες, όπως η υδρολογική διάβρωση μπορούν να μεταφέρουν Mg και το Mn από μια περιοχή σε άλλη. Ακόμη, εξορυκτικές δραστηριότητες μπορούν επίσης να επηρεάσουν σημαντικά την κατανομή αυτών των στοιχείων. Κατά τη διάρκεια της εξόρυξης, χημικές ουσίες και μεταλλικά στοιχεία μπορούν να οδηγηθούν στο έδαφος και το περιβάλλον. Κατά συνέπεια, προκαλείται ρύπανση της ποιότητας του εδάφους, δημιουργώντας εν συνεχεία ρύπανση στα υπόγεια ύδατα και τα υδρογεωλογικά συστήματα μέσω διαρροής των στοιχείων αυτών.

3.2.4 Βαριογραφία

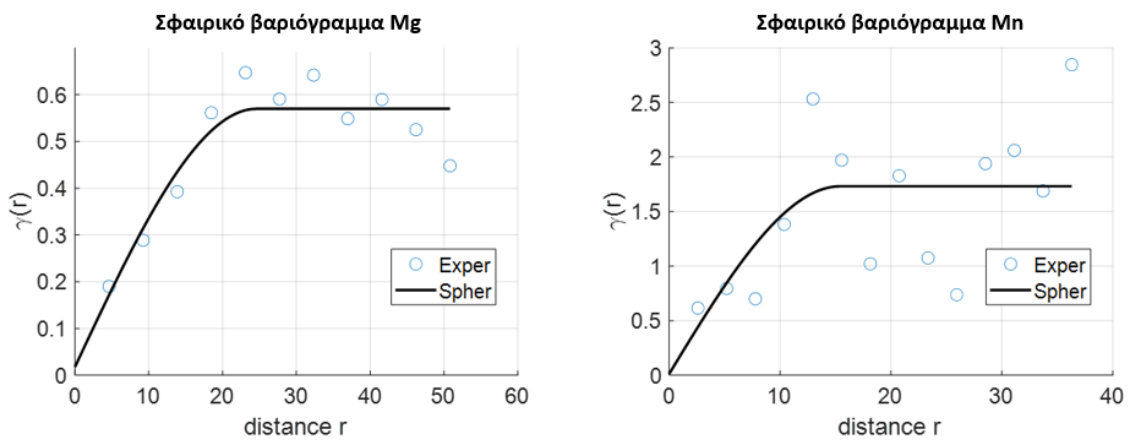
Η χρήση της βαριογραφίας στην έρευνα περί γεωστατιστικής ανάλυσης είναι σημαντική για την κατανόηση της χωρικής εξάρτησης των τιμών σε σχέση με την απόσταση. Σε αυτήν την περίπτωση, χρησιμοποιούνται δεδομένα της διακύμανσης των λογαρίθμων των τιμών για το Mg και τα δεδομένα των λογαριθμισμένων τιμών για το Mn. Αρχικά, δημιουργήθηκαν τα εμπειρικά ημιβαριογράμματα για κάθε στοιχείο, που απεικονίζουν τη σχέση μεταξύ των τιμών και των αποστάσεων. Η επιλογή του καταλληλότερου μοντέλου έγινε μέσω ελέγχου του τετραγωνικού σφάλματος προσαρμογής. Αυτό σημαίνει ότι επιλέγεται το μοντέλο που αποδίδει την μικρότερη τετραγωνική απόκλιση από τα εμπειρικά ημιβαριογράμματα, προσαρμοσμένο στα δεδομένα.

Στον Πίνακα 3.9 παρουσιάζονται οι παράμετροι βαριογράμματος για τα στοιχεία Mg και Mn. Συγκεκριμένα, με σ συμβολίζεται η τυπική απόκλιση (Standard deviation), h είναι η ακτίνα συσχέτισης (Range) και c_0 είναι το φαινόμενο κόκκου (Nugget).

Το αποτέλεσμα της προσαρμογής στο βαριογράμμα για το στοιχείο Mg,

Πίνακας 3.3: Παράμετροι βαριογράμματος των στοιχείων Mg και Mn.

Παράμετροι Βαριογράμματος		
	Μαγνήσιο (Mg)	Μαγγάνιο (Mn)
σ^2	0.5519	1.7194
$h(km)$	24.5865	15.4343
c_0	0.0177	0.0124

Εικόνα 3.9: Βαριογράμματα των στοιχείων $Mg(ppm)$ και $Mn(ppm)$. Οι κύκλοι (ο) αποδίδουν το Εμπειρικό Βαριογράμμα ενώ η γραμμή το Σφαιρικό Μοντέλο.

όπως απεικονίζεται στο σχήμα 3.9, προσεγγίζει αποτελεσματικά τη χωρική συσχέτιση των δεδομένων. Ειδικότερα, παρατηρείται ότι το φαινόμενο κόκκου είναι αρκετά μικρότερο σε σχέση με την διασπορά. Συνεπώς, δεν υπάρχουν μεγάλες αποκλίσεις στις τιμές του Mg στον χώρο. Επιπρόσθετα, η ακτίνα συσχέτισης του σφαιρικού βαριογράμματος είναι στα 24.6 km, το οποίο υποδηλώνει πως οι τιμές των σημείων μέχρι τα 24.6 km είναι χωρικά εξαρτημένες.

Μέσω της ανάλυσης του βαριογράμματος για το στοιχείο Mn παρατηρείται μικρό φαινόμενο κόκκου σε σύγκριση με τη διασπορά. Αποτελεσματικά, οι τιμές του Mn δεν διαφέρουν σημαντικά από μια περιοχή στην άλλη. Η ακτίνα συσχέτισης, ακολούθως, υπολογίζεται 15.4 km, όπου μέχρι αυτή την απόσταση

Chapter 3. ΓΕΩΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

οι τιμές είναι χωρικά συσχετισμένες.

Βάσει των βαριογραμμμάτων των στοιχείων Mg και Mn, όπως παρουσιάζονται στο σχήμα 3.9, παρατηρείται ότι και τα δύο στοιχεία έχουν μικρό φαινόμενο κόκκου σε σχέση με τη διασπορά, πράγμα που υποδηλώνει ότι δεν υπάρχουν μεγάλες και απότομες αυξομειώσεις στις τιμές σε μικρές αποστάσεις. Ωστόσο, η ακτίνα συσχέτισης (Range) του Mg είναι μεγαλύτερη από του Mn, υποδηλώνοντας ότι οι τιμές του Mg εξακολουθούν να επηρεάζονται από τιμές σε μεγαλύτερες αποστάσεις σε σχέσεις με τις τιμές του Mn. Επιπροσθέτως, άλλη μια αξιοσημείωτη παράμετρος αποτελεί το άνω φράγμα (Sill), το οποίο αποτελείται από το φαινόμενο κόκκου και τη διασπορά. Στην περίπτωση αυτή, το άνω φράγμα του Mn είναι μεγαλύτερο από αυτό του Mg, με αποτέλεσμα το Mn να έχει μεγαλύτερο εύρος διακυμάνσεων στις τιμές του.

Επιπροσθέτως, αξιολογώντας την προσαρμογή των βαριογραμμμάτων των δύο στοιχείων στο σφαιρικό μοντέλο από το σχήμα 3.9, γίνεται φανερό ότι Mg προσαρμόζεται καλύτερα στο σφαιρικό μοντέλο σε σχέση με το βαριογράμμα του Mn. Ως αποτέλεσμα, μπορούν να αποδοθούν λάθος εκτιμήσεις λόγω μη καλής προσαρμογής. Ωστόσο, αυτή η εκτίμηση επαληθεύεται πιο αποτελεσματικά μέσω των στατιστικών κριτηρίων επαλήθευσης της μεθόδου Kriging που ακολουθεί.

3.2.5 Kriging

Κατά την εκπόνηση της εργασίας αυτής, η μέθοδο Kriging (βλ. 2.5) βασίζεται στο σφαιρικό μοντέλο του βαριογράμματος. Για την προσαρμογή του μοντέλου στα δεδομένα χρησιμοποιούνται οι τρεις βασικές παράμετροι που προκύπτουν από τα βαριογράμματα. Αυτοί οι παράμετροι είναι η τυπική απόκλιση σ , η ακτίνα συσχέτισης h και το φαινόμενο κόκκου c_0 , όπως αναφέρονται στο Κεφάλαιο 3.3. Η μέθοδος κανονικού Kriging (Ordinary Kriging) πραγματοποιήθηκε σε

Chapter 3. ΓΕΩΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

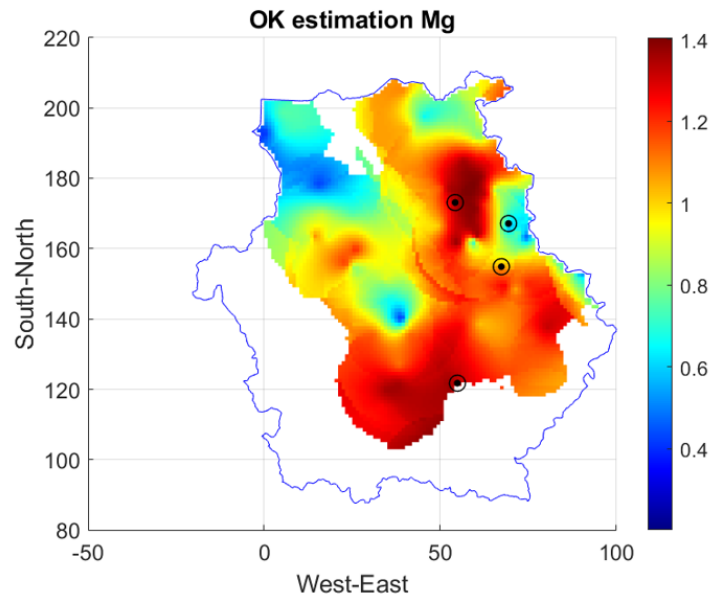
τετραγωνικό κάναβο με 140x130 κελιά, όπου το κάθε κελί είναι 139 μέτρα και για το Mg αλλά και για το Mn.

Οι γειτονιές στους χάρτες Kriging είναι σημαντικό μέρος της μεθόδου και επηρεάζουν την ποιότητα των προβλέψεων. Συνήθως, η ακτίνα συσχέτισης των βαριογραμμάτων χρησιμοποιείται για να καθορίσει το μέγεθος των γειτονιών. Ωστόσο, επειδή η ακτίνα συσχέτισης είναι μικρή και για τα δύο στοιχεία, αυτό δημιουργεί προβλήματα στην εξαγωγή αξιόπιστων χωρικών συσχετίσεων, καθώς οι τιμές τους μεταβάλλονται σημαντικά σε μικρές αποστάσεις μέσα στην περιοχή μελέτης. Συνεπώς, οι χάρτες εκτίμησης, οι οποίοι απεικονίζονται στις εικόνες 3.10 και 3.11, υπολογίστηκαν με ακτίνα συσχέτισης 70% για το Mg και 95% για το Mn. Η θεώρηση αυτή οδηγεί σε υποβάθμιση της ποιότητας της εκτίμησης για ορισμένα σημεία. Στην πραγματικότητα, η μέθοδος κανονικού Kriging μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τιμές που είναι ασυσχέτιστες, παρόλο που μπορεί να οδηγήσει σε μεγάλη αβεβαιότητα στα αποτελέσματα. Αυτή η αβεβαιότητα παρουσιάζεται στους χάρτες 3.12.

Κανονικό Kriging στις λογαριθμισμένες τιμές

Η μέθοδος κανονικού Kriging πραγματοποιήθηκε στα δεδομένα των λογαριθμισμένων τιμών για το Mn $X'(s)$, και στα δεδομένα της διακύμανσης των λογαρίθμων $X^{*'}(s)$ για το Mg, προκειμένου να εκτιμηθεί η χωρική διακύμανση του πεδίου. Στους λογαριθμικούς χάρτες που παρουσιάζονται στις εικόνες 3.10 και 3.11, αποτυπώνονται οι χωρικές εκτιμήσεις των συγκεντρώσεων του Mg και του Mn αντίστοιχα, αλλά και τα ορυχεία που έχουν επιλεγεί για περαιτέρω ανάλυση στην περιοχή μελέτης. Έχει εφαρμοστεί και σε αυτούς τους χάρτες μάσκα στα δεδομένα, με σκοπό τον περιορισμό τους εντός της περιοχής μελέτης.

Συγκεκριμένα, στον χάρτη 3.10, παρατηρούνται υψηλές συγκεντρώσεις Mg σε πολλά σημεία της περιοχής μελέτης. Οι υψηλότερες τιμές παρουσιάζον-

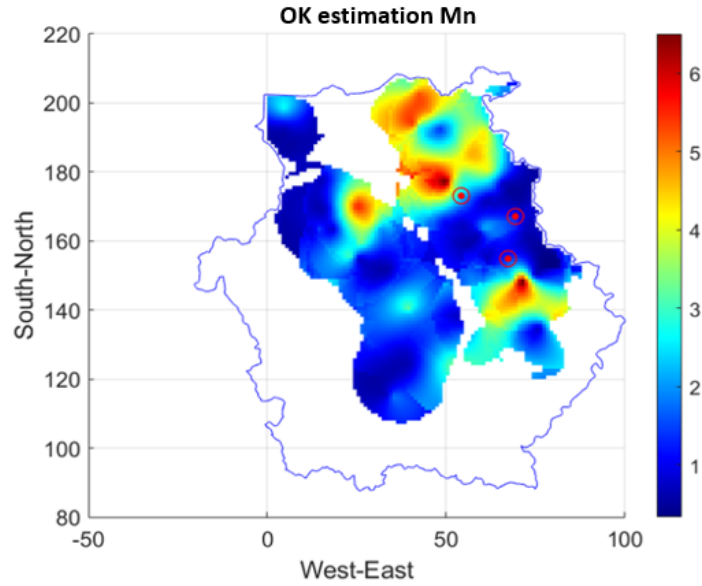


Εικόνα 3.10: Χάρτης εκτίμησης της συγκέντρωσης του Mg με λογαριθμικό μετασχηματισμό.

ται στο βόρειο-ανατολικό τμήμα, όπου και βρίσκεται το λιγνιτωρυχείο του Αμυνταίου (B), αλλά και προς τα νότια της περιοχής μελέτης, όπου συναντάται το νοτιότερο ορυχείο (Δ). Εξίσου, στις περιοχές όπου βρίσκονται τα ορυχεία της Πτολεμαΐδας (Α) και των Κομνηνών (Γ) στο ανατολικό τμήμα του χάρτη, παρατηρούνται απότομες εναλλαγές συγκεντρώσεων Mg. Στην περίπτωση του Mn, σύμφωνα με τον χάρτη 3.11, παρατηρούνται υψηλές συγκεντρώσεις στο βόρειο τμήμα, αλλά και στο νότιο-δυτικό τμήμα της περιοχής μελέτης. Ομοίως, τα τρία ορυχεία που εμφανίζονται στον χάρτη βρίσκονται σε περιοχές με απότομες εναλλαγές συγκεντρώσεων Mn.

Οι χάρτες τυπικής απόκλισης σφάλματος του Kriging, οι οποίοι παρουσιάζονται στην Εικόνα 3.12, παρέχουν πληροφορίες σχετικά με την μεταβολή της αβεβαιότητας της εκτίμησης στον χώρο. Οι χάρτες αυτοί εμφανίζονται μόνο με την λογαριθμική τους μορφή.

Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι κατά την αντιστροφή του λογαριθμικού

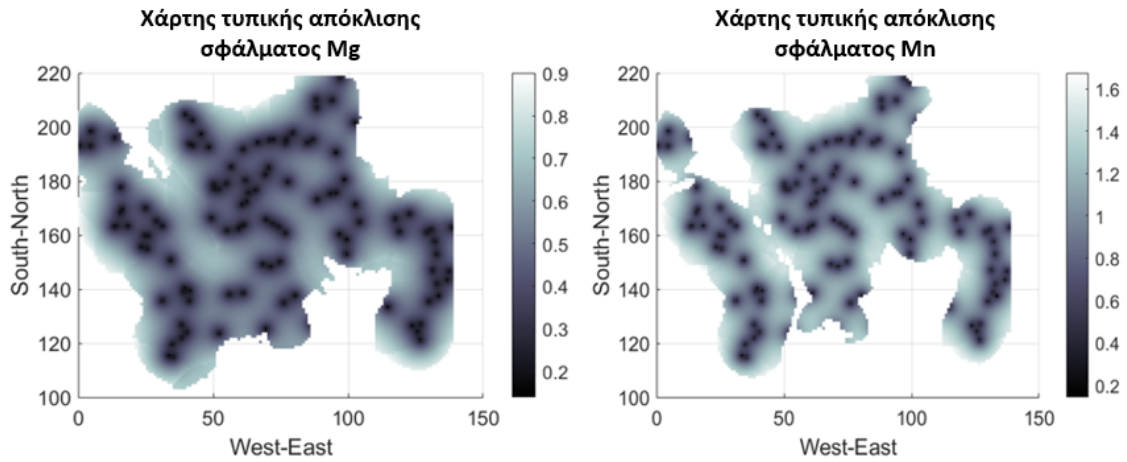


Εικόνα 3.11: Χάρτης εκτίμησης της συγκέντρωσης του Mn με λογαριθμικό μετασχηματισμό.

μετασχηματισμού Φ γίνεται ύψωση (εκθετική συνάρτηση). Συγκεκριμένα,

$$\hat{X}'(\mathbf{u}) = \exp(\hat{X}^*(\mathbf{u})) \quad (3.3)$$

Στην περίπτωση που εκτελείται λογαριθμική μετατροπή στις εκτιμώμενες τιμές η αβεβαιότητα αυξάνεται ή μειώνεται ανάλογα με τον τρόπο που πραγματοποιείται η λογαρίθμηση. Όταν γίνεται πρόσθεση ή αφαίρεση της αβεβαιότητας πριν από τη λογαριθμική μετατροπή, αυτή η αβεβαιότητα θα παραμένει στη λογαριθμική κλίμακα. Αντίθετα, όταν γίνεται πολλαπλασιασμός ή διαίρεση των τιμών στη λογαριθμική κλίμακα, η αβεβαιότητα αυξάνεται ή μειώνεται κατάλληλα. Αυτό συμβαίνει, επειδή ο λογάριθμος μετατρέπει το πολλαπλασιασμό και τη διαίρεση σε πρόσθεση και αφαίρεση αντίστοιχα. Χαρακτηριστικό



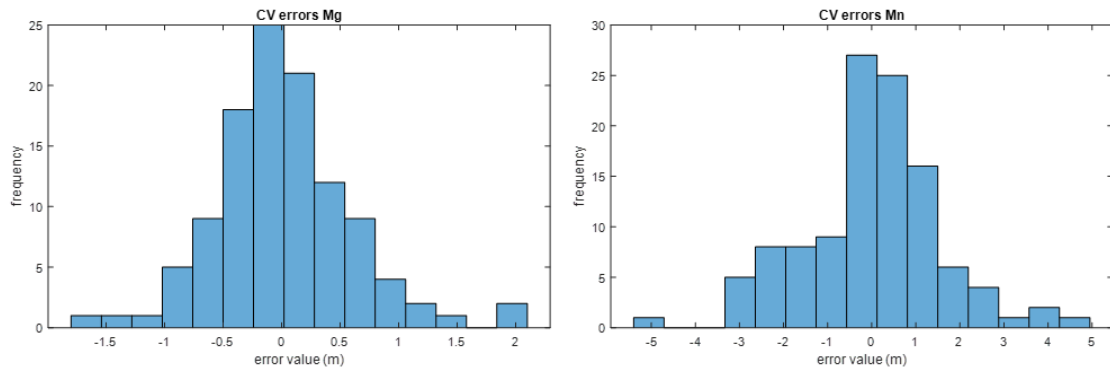
Εικόνα 3.12: Χάρτες τυπικής απόκλισης σφάλματος Kriging με μετασχηματισμό λογαρίθμου.

παράδειγμα αποτελεί η εξίσωση 3.4.

$$\exp \left[\hat{X}^*(\mathbf{u}) + \sigma_{OK}(\mathbf{u}) \right] = \exp \left[\hat{X}^*(\mathbf{u}) \right] \cdot \exp \left[\sigma_{OK}(\mathbf{u}) \right] \quad (3.4)$$

Συμπερασματικά, οι χάρτες της τυπικής απόκλισης σφάλματος του απολογριθμισμένου Kriging δεν μπορούν να αποτυπωθούν. Ωστόσο, η αβεβαιότητα σ_{OK} δίνει τη δυνατότητα να παρατηρηθεί πόσο μεγαλώνει η αβεβαιότητα μακριά από τις θέσεις των γεωτρήσεων. Ειδικότερα, στους χάρτες της Εικόνας 3.12 γίνεται αντιληπτό ότι η αβεβαιότητα αυξάνεται σταδιακά. Για το στοιχείο του Mn παρατηρείται αβεβαιότητα μεγαλύτερου βαθμού σε σχέση με το Mg με μεγαλύτερο εύρος τιμών. Συγκεκριμένα, κοντά στις θέσεις των γεωτρήσεων οι τιμές της αβεβαιότητας για το Mn κυμαίνονται από το 0.4-0.6 ενώ αυξάνονται μέχρι το 1.2-1.4.

Με σκοπό να πραγματοποιηθεί σύγκριση και αξιολόγηση των λογαριθμισμένων τιμών με τις εκτιμώμενες τιμές (βλ.Κεφ. 2.5.3), παρατίθενται οι τιμές επαλήθευσης της διακύμανσης στα ιστογράμματα 3.13 και στον Πίνακα 3.4. Με βάση τα διαγράμματα σφάλματος της διασταυρωμένης επαλήθευσης (CV



Εικόνα 3.13: CV errors των στοιχείων Mg και Mn με μετασχηματισμό λογαρίθμου.

errors), τα περισσότερα σφάλματα για το Mg εμφανίζονται μεταξύ των τιμών -1 έως 1.5, ενώ στο Mn παρατηρούνται από το -3.4 έως το 3.

Εν συνεχεία, παρατίθεται ο Πίνακας 3.4 των στατιστικών τιμών επαλήθευσης των λογαρίθμων. Μπορεί να διαπιστωθεί ότι οι τιμές του RMSE είναι και στα δύο στοιχεία περίπου ίσες με του MAE, το οποίο υποδηλώνει ότι τα δεδομένα έχουν μικρή διασπορά και τα σφάλματα κατανέμονται ομοιόμορφα. Ωστόσο το MaxAE και στις δύο περιπτώσεις είναι περίπου τέσσερις φορές μεγαλύτερο του MAE. Είναι λογικό, διότι οι τιμές του MaxAE να είναι οι μέγιστες, εφόσον αντιπροσωπεύουν τις μεγαλύτερες απόλυτες τιμές του σφάλματος.

Τελική εκτίμηση με επαναφορά στην αρχική κλίμακα

Μετά την πραγματοποίηση κανονικού Kriging, σύμφωνα με τους χάρτες που παρουσιάστηκαν 3.10, 3.11, οι οποίοι αποτελούν χάρτες της διακύμανσης του λογαρίθμου των συγκεντρώσεων του Mg και των λογαριθμισμένων τιμών των συγκεντρώσεων του Mn, γίνεται απολογαρίθμηση. Στην περίπτωση του Mg, για την επαναφορά της εκτίμησης στην αρχική κλίμακα, θα πρέπει να προστεθεί

Πίνακας 3.4: Τιμές επαλήθευσης στις λογαριθμισμένες τιμές, όπου MAE είναι το Μέσο Απόλυτο Σφάλμα, $RMSE$ η ρίζα του Μέσου Τετραγωνικού Σφάλματος, $MaxAE$ η τιμή του Μέγιστου Απόλυτου Σφάλματος και ρ ο συντελεστής συσχέτισης.

	Mg (ppm)	Mn (ppm)
MAE	0.4444	1.1316
RMSE	0.6018	1.5539
MaxAE	1.7747	5.2895
Rho	0.5139	0.4707

στην εκτίμηση της διακύμανσης η πολυωνυμική τάση. Στην περίπτωση αυτή, η απολογαρίθμηση γίνεται ως εξής:

$$\hat{X}(\mathbf{u}) = \exp(X^{*'}(\mathbf{u}) + M(\mathbf{u})) \quad (3.5)$$

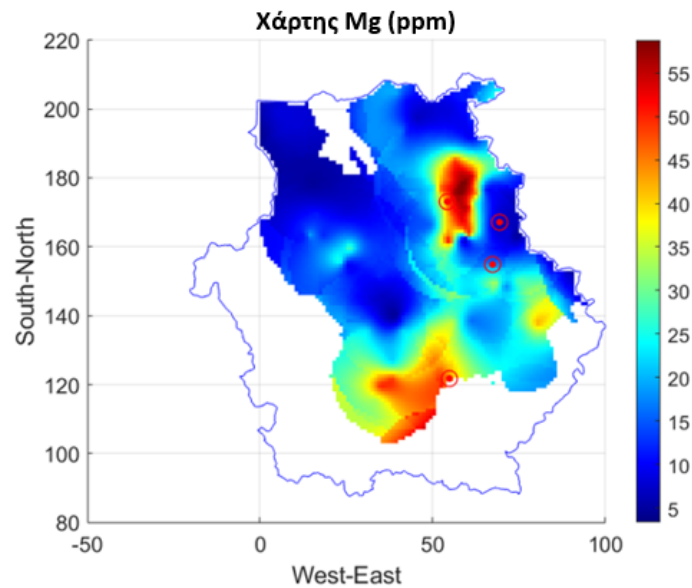
Αντιθέτως, στο Mn γίνεται η απολογαρίθμηση χωρίς την προσθήκη τάσης, σύμφωνα με την σχέση:

$$\hat{X}(\mathbf{u}) = \exp(X^{*'}(\mathbf{u})) \quad (3.6)$$

Οι χάρτες απολογαρίθμησης της εκτίμησης των στοιχείων Mg και Mn παρατίθενται στην Εικόνα 3.14 και 3.15, όπου απεικονίζονται επίσης και τα ορυχεία. Στους χάρτες αυτούς έχει εφαρμοστεί εξίσου μάσκα στα δεδομένα με σκοπό την απομόνωση τους εντός της περιοχής μελέτης.

Μέθοδος διασταυρωμένης επαλήθευσης

Εν συνεχεία, πραγματοποιήθηκε η μέθοδος διασταυρωμένης επαλήθευσης LOOCV με σκοπό την αξιολόγηση της εκτίμησης των εκτιμώμενων συγκεντρώσεων του Mg και του Mn. Τα ιστογράμματα των σφαλμάτων της μεθόδου LOOCV, μετά



Εικόνα 3.14: Χάρτης εκτίμησης της συγκέντρωσης του Mg με αντιστροφή του λογαριθμικού μετασχηματισμού.

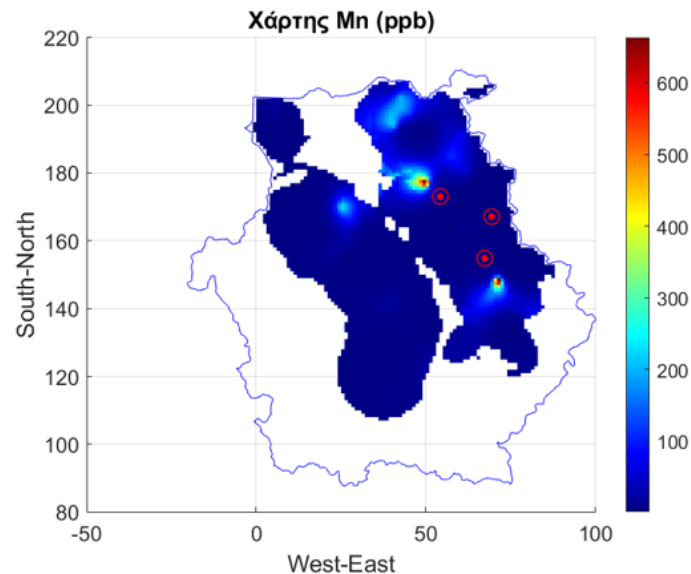
την αντιστροφή του λογαριθμικού μετασχηματισμού (βλ. 3.5 3.6) παρατίθενται στην Εικόνα 3.16.

Η χρήση της μεθόδου LOOCV (βλ. 2.5.3) χρησιμοποιείται ξανά, για την αξιολόγηση των αποτελεσμάτων της εκτίμησης μετά την απολογαρίθμηση.

Παρατηρώντας τα ιστογράμματα της Εικόνας 3.16 διαπιστώνεται πως για το στοιχείο του Mg δεν υπάρχουν ακραίες τιμές, αυτές περιορίζονται σε πολύ μικρό εύρος τιμών, ενώ για το Mn η ύπαρξη ακραίων τιμών έχει μεγαλύτερο

Πίνακας 3.5: Τιμές επαλήθευσης στην διακύμανση και την τάση

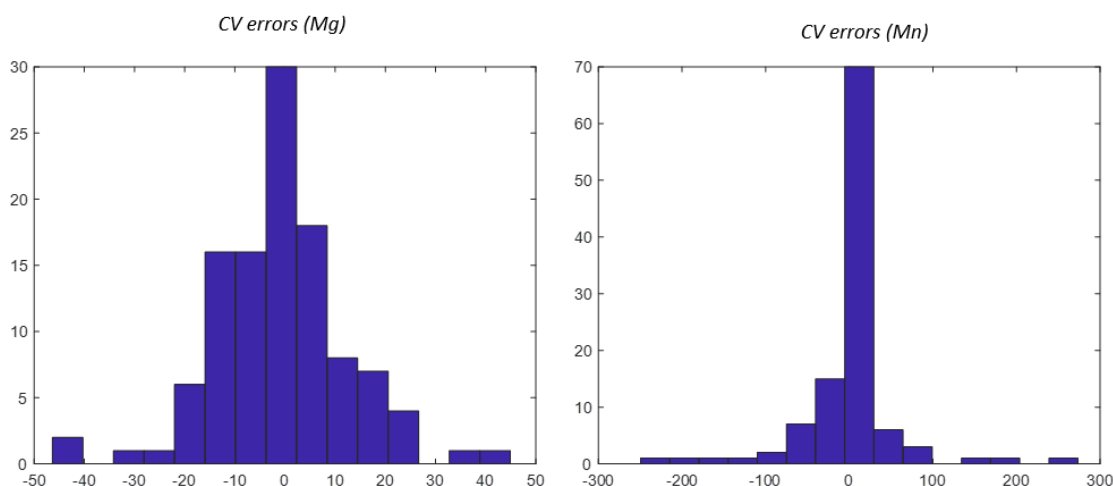
	Mg (ppm)	Mn (ppm)
MAE	9.6159	27.1774
RMSE	13.2686	56.4345
MaxAE	46.3607	273.5973
Rho	0.6695	0.3939



Εικόνα 3.15: Χάρτης εκτίμησης της συγκέντρωσης του Mn με αντιστροφή του λογαριθμικού μετασχηματισμού.

εύρος. Αυτό οφείλεται στο ότι η μέθοδος LOOCV μπορεί να αντιμετωπίσει προβλήματα όταν υπάρχουν δεδομένα τα οποία έχουν πολύ διαφορετικές τιμές από τους γείτονες τους. Αυτό οδηγεί σε ακραίες τιμές. Αυτό το φαινόμενο είναι αρκετά εμφανές, όταν η μέθοδος LOOCV χρησιμοποιείται σε σύνολα δεδομένων που περιέχουν ακραίες τιμές ή ανωμαλίες.

Σύμφωνα με τον Πίνακα 3.5 παρατηρείται ότι η τιμή του RMSE του Mg είναι λίγο υψηλότερη από το MAE του Mg. Η τιμή η τιμή του RMSE του Mn είναι σχεδόν δύο φορές υψηλότερη από το MAE. Το MaxAE όπως είναι λογικό έχει υψηλές τιμές επειδή υπάρχουν ακραίες τιμές στα δεδομένα. Επιπροσθέτως, οι ακραίες τιμές του σύνολο δεδομένων μπορούν να επηρεάσουν σημαντικά τον συντελεστή συσχέτισης. Η ύπαρξη λιγότερων ακραίων τιμών των δεδομένων του Mg αποδίδει συντελεστή συσχέτισης $\rho=0.67$, η οποία είναι μια σχετικά ισχυρή συσχέτιση. Παράλληλα, ο συντελεστής συσχέτισης του Mn είναι $\rho=0.39$, αποδίδει μέτρια προς ασθενή βαθμού συσχέτιση, πράγμα που



Εικόνα 3.16: CV errors των στοιχείων Mg και Mn.

υποδηλώνει ότι επηρεάζεται σημαντικά από τις ακραίες τιμές.

3.2.6 Ανάλυση Αποτελεσμάτων

Η εφαρμογή κανονικού Kriging (Ordinary Kriging) που πραγματοποιήθηκε για την χωρική εκτίμηση των δεδομένων, αποδείχθηκε αποτελεσματική. Σύμφωνα με τα αποτελέσματα της εκτίμησης για τα στοιχεία Mg και Mn, τα οποία απεικονίζονται στους χάρτες 3.14 και 3.15 παρατηρείται ότι στο λιγνιτωρυχείο του Αμυνταίου (B) η συγκέντρωση Mg είναι αρκετά υψηλή, καθώς η περιοχή γύρω από το ορυχείο εμφανίζει πολύ υψηλά επίπεδα συγκέντρωσης αυτού του στοιχείου. Εξίσου, η συγκέντρωση Mn αυξάνεται προς τα βόρειο-δυτικά της περιοχής, όπου βρίσκεται το ορυχείο. Ακολούθως, στο λιγνιτωρυχείο της Πτολεμαΐδας (A) εμφανίζονται χαμηλές συγκεντρώσεις των δύο αυτών στοιχείων, οι οποίες αυξάνονται σε μικρό βαθμό νότιο-ανατολικά του ορυχείου. Όσον αφορά το ορυχείο των Κομνηνών (Γ) επικρατούν αρκετά χαμηλές συγκεντρώσεις Mg και Mn. Επιπροσθέτως, το ορυχείο (Δ), παρουσιάζει αρκετά υψηλές συγκεντρώσεις Mg, οι οποίες επεκτείνονται προς το δυτικό και νότιο τμήμα

Chapter 3. ΓΕΩΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

της περιοχής που βρίσκεται. Τα υψηλά επίπεδα Mg στην συγκεκριμένη περιοχή παρουσιάζονται επίσης και στο διάγραμμα τάσης της Εικόνας 3.8. Το ορυχείο αυτό βρίσκεται εκτός του χάρτη 3.15, οπότε δεν μπορεί να αποδοθεί κάποιο αποτέλεσμα για το Mn.

Συμπερασματικά, οι υψηλές συγκεντρώσεις αυτών των στοιχείων κυρίως στο ορυχείο του Αμυνταίου (B), του ορυχείου δίπλα στην λίμνη Έξαρχου (Δ), και στο ορυχείο της Πτολεμαΐδας (Α) μπορεί να οφείλονται σε παραπροϊόντα που προκύπτουν κατά την διάρκεια της εξορυκτικής δραστηριότητας. Συγκεκριμένα, κατά την εξόρυξη μεταλλευμάτων πραγματοποιείται απομάχρυνση του εδάφους και των άγονων υλικών, δηλαδή των ορυκτών που περιέχουν αυτά τα στοιχεία. Τα άγονα υλικά ενδέχεται να απελευθερωθούν στο περιβάλλον. Στην περίπτωση αυτή, η μη λήψη κατάλληλων μέτρων διαχείρισης, μπορεί να οδηγήσει σε αποθέσεις υψηλών συγκεντρώσεων Mg και Mn στο έδαφος και ακολούθως στα υπόγεια ύδατα, προκαλώντας ρύπανση αυτών. Σύμφωνα με το σχέδιο διαχείρισης των λεκανών απορροής του υδατικού διαμερίσματος της Δυτικής Μακεδονίας [55], στο ορυχείο του Αμυνταίου (B) συναντάται υψηλή συγκέντρωση Mn, η οποία μπορεί να οφείλεται στους λιθολογικούς σχηματισμούς εντός των οποίων κινείται το υπόγειο νερό.

Επιπροσθέτως, χρειάζεται να σημειωθεί ότι στους ατμοηλεκτρικούς σταθμούς παραγωγής ενέργειας της περιοχής, η καύση άνθρακα ή άλλων καυσίμων οδηγεί στην δημιουργία ιπτάμενης τέφρας [2], η οποία, εν συνεχεία, εναποτίθεται στους χώρους εναπόθεσης των ορυχείων. Ουσιαστικά, η ιπτάμενη τέφρα αποτελεί το υπόλειμμα της ανόργανης ύλης και αναγνωρίζεται ως περιβαλλοντικός ρύπος, καθώς συνεισφέρει σε μεγάλο βαθμό στις εκπομπές καυσαερίων (NO_x, SO_2) [46]. Για τον λόγο αυτό, οι υψηλές συγκεντρώσεις Mg που έχουν προκύψει από τις αποθέσεις άγονων υλικών στην περιοχή μελέτης, μπορούν να διατεθούν με σκοπό τον εμπλουτισμό της ιπτάμενης τέφρας. Αυτή η διαδικασία,

Chapter 3. ΓΕΩΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

έχει ως αποτέλεσμα τον περιορισμό της εκπομπής ρυπαντικών ουσιών, αλλά και την αξιοποίηση των ρυπαντικών φορτίων από τις αποθέσεις άγονων υλικών, που προκύπτουν κατά την διάρκεια των εξορύξεων.

Κεφάλαιο 4

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Η παρούσα διπλωματική εργασία εκπονήθηκε με σκοπό την μελέτη και την γεωστατιστική ανάλυση της ποιότητας των υπόγειων υδάτων με έμφαση στους προερχόμενους από μεταλλευτικές δραστηριότητες. Τα στοιχεία που αναλύθηκαν είναι το Μαγνήσιο (Mg) και το Μαγγάνιο (Mn). Η ρύπανση των υπόγειων υδάτων παρουσίας υψηλών συγκεντρώσεων Mg και Mn, μπορεί να προκαλέσει σοβαρά περιβαλλοντικά προβλήματα στην περιοχή της Δυτικής Μακεδονίας.

Η γεωστατιστική ανάλυση πραγματοποιήθηκε μέσω του προγραμματιστικού περιβάλλοντος MatLab, σε δεδομένα συγκεντρώσεων, τα οποία συλλέχθηκαν από την Ελληνική Αρχή Γεωλογικών και Μεταλλευτικών Ερευνών (Ε.Α.Γ.Μ.Ε.). Η μελέτη επικεντρώθηκε σε τέσσερα ορυχεία της περιοχής. Συγκεκριμένα, το λιγνιτωρυχείο του Αμυνταίου (Β), το λιγνιτωρυχείο της Πτολεμαΐδας (Α), το ορυχείο των Κομνηνών (Γ) και το ορυχείο (Δ).

Μέσω της γεωστατιστικής ανάλυσης που πραγματοποιήθηκε εξετάστηκαν και προσδιορίστηκαν οι παράμετροι κατανομής πιθανότητας των χωρικών δεδομένων. Η εφαρμογή λογαριθμικού μετασχηματισμού στα δεδομένα απεδείχθη αποτελεσματική, καθώς οι λογαριθμισμένες τιμές προσέγγισαν περισσότερο την κανονική κατανομή.

Chapter 4. ΣΤΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Εν συνεχεία, μέσω της 1ου βαθμού τάσης που εφαρμόστηκε, υπολογίστηκε ο συντελεστής συσχέτισης μεταξύ της τάσης και των συγκεντρώσεων που έχουν υποβληθεί σε λογαριθμικό μετασχηματισμό. Ως αποτέλεσμα, προέκυψε για το Mg μια μέτρια βαθμού συσχέτιση, ενώ για το Mn διαπιστώθηκε ότι είναι πρακτικά ασυσχέτιστα. Συνεπώς, χρειάστηκε να αφαιρεθεί η τάση από το Mn με σκοπό να αναλυθεί η χωρική εξάρτηση των δεδομένων της διακύμανσης.

Μέσω της βαριογραφίας δημιουργήθηκαν τα εμπειρικά ημιβαριογράμματα. Για κάθε στοιχείο χρησιμοποιήθηκαν δεδομένα της διακύμανσης των λογαρίθμων των τιμών. Η επιλογή του θεωρητικού έγινε βάση του ελέγχου του τετραγωνικού σφάλματος προσαρμογής με τα εμπειρικά ημιβαριογράμματα. Συνεπώς, επιλέχθηκε το σφαιρικό μοντέλο για το Mg και το Mn.

Το επόμενο στάδιο της επεξεργασίας αποτελεί η μέθοδος κανονικού Kriging, η οποία πραγματοποιήθηκε στα δεδομένα των λογαρίθμων. Μέσω της μεθόδου αυτής διαπιστώθηκε η ύπαρξη ακραίων τιμών στα δεδομένα και η αβεβαιότητα της εκτίμησης στον χώρο. Έπειτα, πραγματοποιήθηκε απολογαρίθμηση, ώστε να επανέλθει η εκτίμηση στην αρχική κλίμακα. Η μέθοδος διασταυρωμένης επαλήθευσης, LOOCV εφαρμόστηκε με σκοπό την αξιολόγηση της εκτίμησης των εκτιμώμενων συγκεντρώσεων του Mg και του Mn. Η εκτίμηση των συγκεντρώσεων και των δύο στοιχείων ήταν αποτελεσματική. Ουσιαστικά, απέδωσε καλύτερα και πιο ακριβή αποτελέσματα για το στοιχείο του Mg με εξαίρεση την εμφάνιση κάποιων ακραίων τιμών.

Οι χάρτες χωρικής εκτίμησης με την μέθοδο Kriging παρουσιάζουν την ύπαρξη υψηλών συγκεντρώσεων Mg και Mn σε συγκεκριμένες περιοχές της περιοχής μελέτης. Σύμφωνα με την Ελληνική Νομοθεσία και τον Παγκόσμιο Οργανισμό Υγείας τα επιτρεπτά όρια συγκέντρωσης Mg στο νερό 50 ppm ενώ για το Mn είναι 50 ppb.

Όπως μπορεί να παρατηρηθεί στο λιγνιτωρυχείο του Αμυνταίου (B), η συγ-

Chapter 4. ΣΤΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

κέντρωση Mg είναι αρκετά υψηλή κοντά στα επιτρεπτά όρια, ωστόσο τα υπερβαίνει προς το δυτικό τμήμα του ορυχείου. Παράλληλα, η συγκέντρωση Mn είναι αρκετά χαμηλή κάτω από το επιτρεπτό όριο. Στο λιγνιτωρυχείο Πτολεμαΐδας (Α) παρουσιάζονται χαμηλές συγκεντρώσεις Mg και Mn κάτω από το συνισταμένο όριο. Η συγκέντρωση Mn, όπως παρατηρείται αυξάνεται προς το νότιο-ανατολικό τμήμα της περιοχής του ορυχείου. Επιπροσθέτως, στο ορυχείο των Κομνηνών (Γ) επικρατούν αρκετά χαμηλές συγκεντρώσεις Mg και Mn κάτω από το επιτρεπτό όριο. Ακόμη, στο ορυχείο (Δ) επικρατούν υψηλές συγκεντρώσεις Mg, οι οποίες όπως φαίνεται και στον χάρτη, βρίσκονται στα επιτρεπτά όρια και τα υπερβαίνουν προς το δυτικό και νότιο τμήμα της ευρύτερης περιοχής του ορυχείου. Οι υψηλές συγκεντρώσεις Mg κυρίως στο ορυχείο του Αμυνταίου (Β) και του ορυχείου (Δ), μπορεί να οφείλονται σε παραπροϊόντα, τα οποία προκύπτουν κατά την διάρκεια της εξορυκτικής δραστηριότητας.

Ωστόσο, μέσα στον 21ο αιώνα έχουν πραγματοποιηθεί μελέτες και σχέδια περιβαλλοντικής διαχείρισης για την προστασία των υπόγειων υδάτων από την ρύπανση και την υποβάθμιση τους. Καθίσταται επιτακτική ανάγκη η μέριμνα και προστασία του περιβάλλοντος της περιφερειακής ενότητας της Δυτικής Μακεδονίας με σκοπό να μειωθεί το περιβαλλοντικό αποτύπωμα. Οι μεταλλευτικές επιχειρήσεις της περιοχής είναι σημαντικό να αξιολογήσουν τα υψηλά επίπεδα ρύπανσης που μπορεί να προκληθούν και να εφαρμόσουν τα κατάλληλα μέτρα διαχείρισης για την προστασία του οικοσυστήματος.

Η Ελληνική Αρχή Γεωλογικών και Μεταλλευτικών Ερευνών (Ε.Α.Γ.Μ.Ε) έχει συμβάλει στην διαχείριση της περιβαλλοντικής ρύπανσης. Συγκεκριμένα, έχει αναλάβει το έργο του δικτύου παρακολούθησης των υπόγειων νερών και συμμετέχει στην πραγματοποίηση μελετών περιβαλλοντικής αποκατάστασης χώρων ανεξέλεγκτης διάθεσης αποβλήτων.

4.1 Προτάσεις για Μελλοντική Έρευνα

Η εφαρμογή περισσότερων μεθόδων χωρικής ανάλυσης μπορεί να αποτελέσει μια εξαιρετική επιλογή για την μελλοντική βελτίωση της παρούσας εργασίας. Η χρήση της μεθόδου Indicator Kriging θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί με σκοπό να προσδιοριστεί η πιθανότητα υπέρβασης των επιτρεπτών ορίων συγκέντρωσης των στοιχείων Mg και Mn στις κατοικημένες περιοχές της περιοχής μελέτης. Η μέθοδος αυτή προσφέρει καλύτερη διερεύνηση της αβεβαιότητας της εκτίμησης. Πρόκειται για μια μέθοδο, η οποία ασχολείται με την αθροιστική κατανομή πιθανότητας, πόσο πιθανό είναι να υπερβεί η τιμή του πεδίου ένα καθορισμένο όριο (βλ. 2.5). Ομοίως, θα μπορούσε να εφαρμοστεί και η μέθοδος Universal Kriging. Συγκεκριμένα, στην μέθοδο αυτή γίνεται η εκτίμηση των τιμών της συγκέντρωσης σε άγνωστες θέσεις, λαμβάνοντας υπόψη την αβεβαιότητα που προκύπτει από την τάση και την χωρική συσχέτιση των δεδομένων [39]. Ακόμη, θα μπορούσαν να εφαρμοστούν Δεσμευμένες Προσομοιώσεις (Conditional Simulations), οι οποίες παρέχουν μια εκτεταμένη εικόνα της αβεβαιότητας σχετικά με την κατανομή και τις τιμές των συγκεντρώσεων των στοιχείων [14].

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- [1] Marcel Abel. Kriging interpolation. rstudio, qgis and arcmap geostatistical analysis. groundwater flow. video introduction about the geostatistical analysis course., 2020.
- [2] M. Ahmaruzzaman. A review on the utilization of fly ash. *Progress in Energy and Combustion Science*, 36(3):327–363, 2010.
- [3] Ashraf Ali. Removal of mn(ii) from water using chemically modified banana peels as efficient adsorbent. *Environmental Nanotechnology, Monitoring & Management*, 7:57–63, 2017.
- [4] Franz Aurenhammer. Voronoi diagrams—a survey of a fundamental geometric data structure. *ACM Computing Surveys (CSUR)*, 23(3):345–405, 1991.
- [5] Harding B.E. and Deutsch C.V. Trend modeling and modeling with a trend, 2021. Geostatistics Lessons.
- [6] Satesh Bidaisee. The importance of clean water. *Biomedical Journal of Scientific & Technical Research*, 8, 09 2018.
- [7] Salomon Bochner et al. *Lectures on Fourier Integrals*, volume 42. Princeton University Press, 1959.

BIBΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- [8] Tianfeng Chai and Roland R Draxler. Root mean square error (rmse) or mean absolute error (mae). *Geoscientific Model Development Discussions*, 7(1):1525–1534, 2014.
- [9] J.P. Chiles and P. Delfiner. *Geostatistics: Modeling Spatial Uncertainty*. Wiley, Hoboken, NJ, USA, 2012.
- [10] N. Cressie. The origins of kriging. *Mathematical Geology*, 22(3):239–252, 1990.
- [11] Ali Akbar Daya and Hadi Bejari. A comparative study between simple kriging and ordinary kriging for estimating and modeling the cu concentration in chehlkureh deposit, se iran. *Arabian journal of Geosciences*, 8(8):6003–6020, 2015.
- [12] J. DeZuane. *Handbook of Drinking Water Quality*. Wiley, 1997.
- [13] Pinliang Dong. Generating and updating multiplicatively weighted voronoi diagrams for point, line and polygon features in gis. *Computers & Geosciences*, 23(3):411–421, 2008.
- [14] A. Ersoy and T. Y. Yünsel. Geostatistical conditional simulation for the assessment of the quality characteristics of cayırhan lignite deposits. *Department of Mining Engineering, Engineering Faculty, Cukurova University, Adana, Turkey*, 24(6):391–416, 2006.
- [15] Esri. Understanding a semivariogram: The range, sill, and nugget. *Environmental Systems Research Institute*, 2011.
- [16] Anne-Monique Gounot. Microbial oxidation and reduction of manganese: Consequences in groundwater and applications. *FEMS Microbiology Reviews*, 14(4):339–349, 1994.

BIBΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- [17] A Gouzinis, N Kosmidis, D.V Vayenas, and G Lyberatos. Removal of mn and simultaneous removal of nh₃, fe and mn from potable water using a trickling filter. *Water Research*, 32(8):2442–2450, 1998.
- [18] A.J. Gunson, B. Klein, M. Veiga, and S. Dunbar. Reducing mine water requirements. *Journal of Cleaner Production*, 21(1):71–82, 2012.
- [19] Mehtab Haseena, Muhammad Faheem Malik, Asma Javed, Sidra Arshad, Nayab Asif, Sharon Zulfiqar, and Jaweria Hanif. Water pollution and human health. *Department of Zoology, University of Gujrat, Pakistan*, 2017.
- [20] Tomislav Hengl, Gerard BM Heuvelink, and David G Rossiter. About regression-kriging: From equations to case studies. *Computers & geosciences*, 33(10):1301–1315, 2007.
- [21] Michael Hohn. *Geostatistics and Petroleum Geology*. Springer Science & Business Media, 1998.
- [22] Dionissios T. Hristopulos. *Random Fields for Spatial Data Modeling: A Primer for Scientists and Engineers*. Springer/Nature, Dordrecht, the Netherlands, 2020.
- [23] Edward H. Isaaks and Mohan R. Srivastava. *Applied Geostatistics*. 551.72 ISA. Oxford University Press, Oxford, 1989.
- [24] Wolfgang J Junk, Shuqing An, CM Finlayson, Brij Gopal, Jan Květ, Stephen A Mitchell, William J Mitsch, and Richard D Robarts. Current state of knowledge regarding the world’s wetlands and their future under global climate change: a synthesis. *Aquatic sciences*, 75(1):151–167, 2013.

BIBΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- [25] MFGA Lloret-Cabot, Gordon A Fenton, and Michael A Hicks. On the estimation of scale of fluctuation in geostatistics. *Georisk: Assessment and management of risk for engineered systems and geohazards*, 8(2):129–140, 2014.
- [26] V. Marinakis, G. Stamtis A. Flamos, Y. Maniatis I. Georgizas, and H. Doukas. The efforts towards and challenges of greece’s post-lignite era: The case of megalopolis. *Engineering and Decision Support for Sustainable Development*, 2020.
- [27] Robert McClure and S Andrew. More than a century of mining has left the west deeply scarred. *The Seattle Post Intelligencer Publication*, pages 1–6, 2001.
- [28] Y. Meride and B. Ayenew. Drinking water quality assessment and its effects on residents health in wondo genet campus, ethiopia. *Environmental Systems Research*, 5:1, 2016.
- [29] David S. Moore. *The Basic Practice of Statistics*. W.H. Freeman and Company, New York, 5nd edition, 2010.
- [30] Stephen A. Northey, Gavin M. Mudd, Tim T. Werner, Nawshad Haque, and Mohan Yellishetty. Sustainable water management and improved corporate reporting in mining. *Water Resources and Industry*, 21:100104, 2019.
- [31] Ricardo A Olea. *Geostatistics for engineers and earth scientists*. Springer Science & Business Media, 2012.
- [32] Ricardo A Olea. *Geostatistics for Engineers and Earth Scientists*. Springer Science & Business Media, New York, NY, 2012.

BIBΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- [33] Andrew G. Pavlides. *Development of new geostatistical methods for spatial analysis and applications in reserves estimation and quality characteristics of coal deposits*. PhD thesis, Technical University of Crete, 2016.
- [34] Karlheinz Spitz and John Trudinger. *Mining and the environment: from ore to metal*. CRC Press, 2019.
- [35] The World Bank. A road map for a managed transition of coal-dependent regions in western macedonia, 2020. [Google Scholar].
- [36] P. Poonia V. Sheoran, A. S. Sheoran. Soil reclamation of abandoned mine land by revegetation: A review. *International Journal of Soil, Sediment and Water*, 2010.
- [37] Erik Vanmarcke. *Random fields: analysis and synthesis*. World Scientific, 2010.
- [38] Emmanouil A. Varouchakis. *Geostatistical Analysis and Space-Time Models of Aquifer Levels: Application to Mires Hydrological Basin in the Prefecture of Crete*. PhD thesis, Technical University of Crete, 2012.
- [39] Hans Wackernagel. *Multivariate geostatistics: an introduction with applications*. Springer Science & Business Media, 2003.
- [40] Colin R. Ward and Isabel Suárez-Ruiz. Chapter 1 - introduction to applied coal petrology. In Isabel Suárez-Ruiz and John C. Crelling, editors, *Applied Coal Petrology*, pages 1–18. Elsevier, Burlington, 2008.
- [41] Daniel P. Berrar Werner Dubitzky, Martin Granzow. *Fundamentals of Data Mining in Genomics and Proteomics*. Springer Science + Business Media, LCC, 2007.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- [42] Mario Zarroca, Carles Roqué, Rogelio Linares, José G. Salminci, and Francisco Gutiérrez. Natural acid rock drainage in alpine catchments: A side effect of climate warming. *Science of The Total Environment*, 778:146070, 2021.
- [43] Μαντέλα Αργύρη. Βαρέα Μέταλλα στην Υδρολογική Λεκάνη Του Κερίτη. *Ελληνικο Μεσογειακό Πανεπιστήμιο*, 2007.
- [44] Παπαδάκη Μαρία Βάσση Παρασκευή. Προσδιορισμός βαρέων μετάλλων Μολύβδου (pb), Μαγγανίου (mn), Σιδήρου (fe) και Αρσενικού (as) σε πόσιμο νερό του νομού Τρικάλων. *ΤΕΙ Θεσσαλονίκης*, 2013.
- [45] Παναγιώτα Γκάφα. Γεωστατιστική ανάλυση αποθεμάτων γαιάνθρακα βάσει δεδομένων από την κομητεία campbell των ΗΠΑ. *Τμήμα Μηχανικών Ορυκτών Πόρων, Πολυτεχνείο Κρήτης*, 2017.
- [46] Βάμβουκα Δέσποινα. *BIOMAZA, BIOENERΓΕΙΑ & ΠΕΡΙΒΑΛΛΟΝ*. ΕΚΔΟΣΕΙΣ Α. ΤΖΙΟΛΑ & ΥΙΟΙ Α.Ε., 2009.
- [47] Ευγενία Διαμαντοπούλου. Γεωστατιστική ανάλυση δεδομένων υπόγειων υδάτων σε περιοχή μεταλλευτικής δραστηριότητας. *Τμήμα Μηχανικών Ορυκτών Πόρων, Πολυτεχνείο Κρήτης*, 2023.
- [48] Γενική Διεύθυνση Περιβάλλοντος Ευρωπαϊκή Επιτροπή. *Προστασία των υπόγειων υδάτων στην Ευρώπη*. Εκδόσεις Ευρωπαϊκής Ένωσης, 2008.
- [49] Αθανάσιος Κων. Θανόπουλος. Αποτελέσματα Απογραφής Πληθυσμού - Κατοικιών 2021. *Ελληνική Στατιστική Αρχή*, 2023.
- [50] Χαρίκλεια-Παναγιώτης Θηβαίου. Σύγκριση προϊόντων καταχρήμνισης από γεωστατιστικές και τηλεπισκοπικές μεθόδους για την περιοχή της δυτικής

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- Αυστραλίας. *Τμήμα Μηχανικών Ορυκτών Πόρων, Πολυτεχνείο Κρήτης*, pages 85–87, 2010.
- [51] Ιωάννης Κ. Καπαγερίδης. *Εισαγωγή στη Γεωστατιστική*. ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΙΩΝ, 2015.
- [52] Καθ. Αθανάσιος Λουκάς. Υδρολογική Προσομοίωση και Πρόγνωση - Ενότητα 4: Γεωστατιστική.
- [53] Περιφέρεια Δυτικής Μακεδονίας. Γεωμορφολογικά – γεωλογικά χαρακτηριστικά. <https://www.pdm.gov.gr/enimerosi-ependyton/ydatinoi-poroi/geomorfologika-geologika-charaktiristika/>.
- [54] Περιφέρεια Δυτικής Μακεδονίας. Κλίμα. <https://www.pdm.gov.gr/enimerosi-ependyton/ydatinoi-poroi/klima/>.
- [55] Ειδική Γραμματεία Υδάτων. Σχέδιο Διαχείρισης των λεκανών Απορροής Ποταμών του Υδατικού Διαμερίσματος Δυτικής Μακεδονίας. Υπουργείο Περιβάλλοντος και Ενέργειας της Ελλάδας, 2014.
- [56] Διονύσιος Θ. Χριστόπουλος. *Εφαρμοσμένη Γεωστατιστική*. Τμήμα Μηχανικών Ορυκτών Πόρων, Πολυτεχνείο Κρήτης, 2014.
- [57] Διονύσιος Θ. Χριστόπουλος. *Εισαγωγή στις Πιθανότητες και τη Στατιστική για Μηχανικούς*. Τμήμα Μηχανικών Ορυκτών Πόρων, Πολυτεχνείο Κρήτης, 2016.