



ΣΤΡΑΤΙΩΤΙΚΗ ΣΧΟΛΗ ΕΥΕΛΠΙΔΩΝ
Τμήμα Στρατιωτικών Επιστημών

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ

ΔΙΔΡΥΜΑΤΙΚΟ ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ

ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΟΥ ΕΤΟΥΣ 2022-23

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΗ ΕΡΕΥΝΑ ΚΑΙ

ΛΗΨΗ ΑΠΟΦΑΣΕΩΝ -

MASTER OF SCIENCE IN OPERATIONAL
RESEARCH AND DECISION MAKING

(ΠΔ 59 /2021/ΦΕΚ 145Α'/17.08.2021)



ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ ΚΡΗΤΗΣ

Σχολή Μηχανικών Παραγωγής & Διοίκησης

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΣ ΔΙΑΔΡΟΜΩΝ ΕΡΕΥΝΑΣ ΓΙΑ ΤΟΝ
ΕΝΤΟΠΙΣΜΟ ΚΙΝΟΥΜΕΝΩΝ ΣΤΟΧΩΝ ΣΕ ΣΥΝΕΧΗ
ΧΩΡΟ ΚΑΙ ΧΡΟΝΟ

Υπο:

ΠΑΠΑΔΟΠΟΥΛΟ ΙΩΑΝΝΗ – ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟ

ΑΜ: 2021018120

Ιούλιος 2023

Η παρούσα μεταπτυχιακή διατριβή του Παπαδόπουλου Ιωάννη - Κωνσταντίνου (ΑΜ 2021018120) εγκρίνεται από την παρακάτω τριμελή εξεταστική επιτροπή

Καθηγητής Νικόλαος Δάρας

A handwritten signature in blue ink, appearing to be 'N. Daras', written over a light blue grid background.

Αναπληρωτής Καθηγητής Νικόλαος Παπαδάκης

A handwritten signature in blue ink, appearing to be 'Nikolaos Papadakis', written in a cursive style.

Αναπληρωτής Καθηγητής Στέλιος Τσαφάρης

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Η παρούσα πτυχιακή εργασία εκπονήθηκε στο Τμήμα Στρατιωτικών Επιστημών της Στρατιωτικής Σχολής Ευελπίδων σε συνεργασία με τη Σχολή Μηχανικών Παραγωγής και Διοίκησης του Πολυτεχνείου Κρήτης και αφορά τη μελέτη εξεύρεσης κινούμενων στόχων σε συνεχή χώρο και χρόνο

Στο σημείο αυτό θα ήθελα να αναφέρω όλους όσους βοήθησαν στην ολοκλήρωση της εργασίας αυτής, ενώ νιώθω την ανάγκη να ευχαριστήσω και τους ανθρώπους εκείνους που με ενθάρρυναν ψυχολογικά και με υποστήριξαν υλικά και ηθικά κατά τη διεξαγωγή της.

Καταρχήν, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα καθηγητή της παρούσας εργασίας, τον Καθηγητή Δρ. Νικόλαο Δάρα, για την βοήθεια του καθ' όλη τη διάρκεια εκπόνησης της εργασίας αλλά και στην επιμέλεια της συγγραφής.

Ακόμη, ευχαριστώ την σύζυγο μου Ευγενία Μπούτση για την άμετρη συμπαράσταση, βοήθεια και κατανόηση που έδειξε καθόλη τη διάρκεια των μεταπτυχιακών μου σπουδών.

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στην παρούσα πτυχιακή εργασία κύριος στόχος ήταν η μελέτη του προβλήματος εύρεσης καταλλήλων αλγορίθμων για την αναζήτηση κινούμενου στόχου σε συνεχή χώρο και συνεχή χρόνο. Το πρώτο μέρος της εργασίας αναφέρεται στην κατηγοριοποίηση των στόχων, καθώς και στα είδη των σημάτων, ενώ γίνεται και μια βιβλιογραφική επισκόπηση σχετικά με τα διάφορα μοντέλα εντοπισμού στόχων. Σε αυτό το μέρος, παραθέτουμε επίσης ξεχωριστή αναφορά και στον εντοπισμό των στατικών στόχων.

Στο δεύτερο μέρος παρουσιάζεται κύριο θέμα της εργασίας, όπου γίνεται λεπτομερής αναφορά στον εντοπισμό των κινούμενων στόχων σε διακριτό χώρο και έπειτα σε συνεχή χώρο, ενώ και στις δυο περιπτώσεις ο χρόνος παραμένει διακριτός. Στη συνέχεια, γίνεται ειδική μνεία στην εκθετική συνάρτηση εντοπισμού στόχου όταν ο χρόνος είναι διακριτός. Τέλος, προχωράμε στην αναζήτηση στόχου σε συνεχή χώρο και χρόνο και παραθέτουμε ορισμένους περιορισμούς που προκύπτουν κατά την αναζήτηση τους σε πραγματικές συνθήκες.

Τέλος, με βάση τις παραπάνω παρατηρήσεις μας, καταλήγουμε στο πόσο σημαντική είναι στην εποχή μας η αναζήτηση στόχων και η περαιτέρω ανάπτυξη της έρευνας κινούμενου στόχου, όσο η τεχνολογία εξελίσσεται και η ανάγκη εύρεσης καταλλήλων αλγορίθμων για τη σωστή λειτουργία των αυτοματοποιημένων συστημάτων άμυνας, έρευνας και διάσωσης.

Περιεχόμενα

ΠΡΟΛΟΓΟΣ	4
ΠΕΡΙΛΗΨΗ.....	5
ΜΕΡΟΣ 1^ο–ΕΙΣΑΓΩΓΗ.....	7
1. Συνεχής και διακριτός χρόνος – Τα είδη των σημάτων.....	8
2. Κατηγοριοποίηση στόχων.....	9
3. Μοντέλα εντοπισμού στόχων και βέλτιστος εντοπισμός στατικών στόχων	9
ΜΕΡΟΣ 2^ο - ΚΥΡΙΩΣ ΜΕΡΟΣ	14
1. Εντοπισμός κινούμενων στόχων σε διακριτό χώρο και χρόνο.....	14
2. Αναζήτηση κινούμενων στόχων σε συνεχή χώρο και διακριτό χρόνο	14
3. Εκθετική συνάρτηση εντοπισμού για διακριτό χρόνο.....	16
4. Αναζήτηση στόχου σε συνεχή χώρο και χρόνο	28
5. Έρευνα σε συνεχή χώρο και χρόνο υπό περιορισμό.....	29
ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ	30
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ	31

ΜΕΡΟΣ 1^ο—ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Σκοπός της παρούσας εργασίας είναι η μελέτη του ζητήματος της εύρεσης κινούμενου στόχου σε συνεχή χώρο και χρόνο. Αρχικά, γίνεται αναφορά σε κάποιες εισαγωγικές έννοιες όπως τα είδη των σημάτων, στη συνέχεια παρατίθενται τα είδη των στόχων καθώς και κάποιες μέθοδοι εντοπισμού στατικών και κινούμενων στόχων. Στη συνέχεια, θα εστιάσουμε στην έρευνα στόχου σε συνεχή χώρο και σε συνεχή χρόνο με τη χρήση εκθετικών συναρτήσεων εντοπισμού καθώς και με φθίνουσες συναρτήσεις εντοπισμού.

Το ζήτημα της αναζήτησης ενός κινούμενου στόχου ανακύπτει καθημερινά σε διάφορες στρατιωτικές επιχειρήσεις, στην έρευνα και διάσωση ανθρώπων που βρίσκονται σε κίνδυνο αλλά και σε ζητήματα επιβολής του νόμου. Κατά τη διάρκεια αεροπορικών στρατιωτικών επιχειρήσεων επιδιώκεται η αναζήτηση των εχθρικών ιχνών για την έγκαιρη προσβολή τους. Κατά την επιτήρηση των χερσαίων και θαλασσίων συνόρων το αντικείμενο της αναζήτησης ενδέχεται να είναι είτε ύποπτα άτομα/ ομάδες ατόμων που έχουν εισέλθει σε απαγορευμένη περιοχή. Ομάδες έρευνας και διάσωσης αναζητούν καθημερινά άτομα που έχουν χάσει τον προσανατολισμό τους τόσο στη στεριά σε δάση και βουνά όσο και στη θάλασσα. Κοντά στα χερσαία και θαλάσσια σύνορα των κρατών, ίσως γίνεται έλεγχος για αποτροπή εισόδου μεταναστών στη χώρα αλλά και για την καταπολέμηση του λαθρεμπορίου.

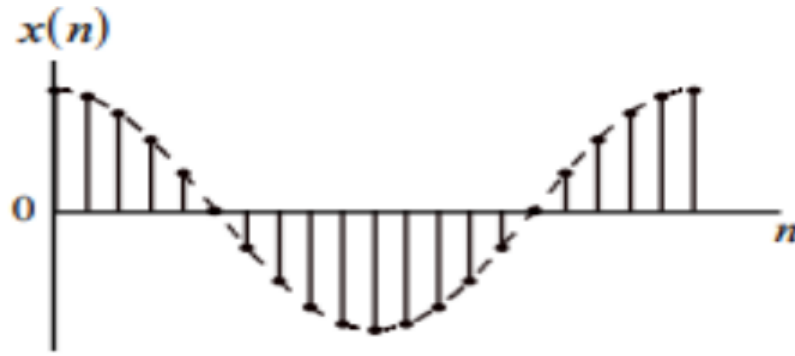
1. Συνεχής και διακριτός χρόνος – Τα είδη των σημάτων

Για να ορισθούν ευκολότερα οι δύο έννοιες του συνεχούς και διακριτού χρόνου, είναι καλύτερο να γίνει μια μικρή αναφορά στην θεωρία των σημάτων (Ασημάκης ,2016).

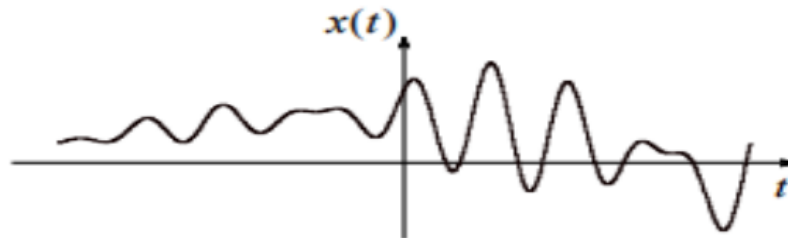
Ένα σήμα αποτελείται από μία ή πολλές συναρτήσεις ή μεταβλητές και σκοπό έχει την μεταφορά της πληροφορίας του συστήματος που μελετάται στην συγκεκριμένη περίπτωση. Η συνήθης κατηγοριοποίηση τους γίνεται σύμφωνα με τον τύπο της ανεξάρτητης μεταβλητής, η οποία μπορεί να είναι κάποιο φυσικό μέγεθος, όπως ο χρόνος ή ο χώρος . Η συνηθέστερη μεταβλητή είναι ο πραγματικός χρόνος (Ασημάκης & Αδαμ, 2016).

Έτσι τα σήματα διακρίνονται σε :

- Σήματα διακριτού χρόνου , τα οποία αποτελούν ακολουθία πραγματικών ή μιγαδικών $x(n)$, όπου η ανεξάρτητη μεταβλητή ορίζεται στο πεδίο των ακέραιων αριθμών. Όπως φαίνεται και στο παρακάτω σχήμα:



- Σήματα συνεχούς χρόνου, τα οποία είναι μια συνάρτηση $x(t)$, όπου η ανεξάρτητη μεταβλητή ορίζεται στο πεδίο των πραγματικών αριθμών. Όπως φαίνεται και στο επόμενο σχήμα:



2. Κατηγοριοποίηση στόχων

Η μελέτη για τον εντοπισμό στόχων άρχισε κατά την περίοδο του δευτέρου Παγκοσμίου Πολέμου από το Αμερικανικό Πολεμικό Ναυτικό Έρευνας και τον Dr.O.B.Koopman και είχε ως στόχο τον εντοπισμό υποβρυχίων. Η έρευνα από την περίοδο του πολέμου μέχρι και τις αρχές του 1970 ήταν επικεντρωμένη σε στατικούς στόχους (Benkoski et. al 1991).

Στις αρχές του 1977 υπήρχαν λίγα ουσιαστικά αποτελέσματα για ανίχνευση κινούμενων στόχων. Στην πρώτη έκδοση του Stones, όπου αναπτύχθηκε καλά μια θεωρία για τον εντοπισμό στατικών στόχων χρησιμοποιήθηκε επιτυχώς και σε λίγα προβλήματα κινούμενων στόχων.

Η βιβλιογραφία για τους κινούμενους στόχους χωρίζεται σε δύο κατηγορίες:

- ❖ Σε άρθρα που αφορούν ειδικούς τύπους κινήσεων στόχων που επιδέχονται ανάλυση .
 - i. Ο πρώτος τύπος είναι κινήσεις, οι οποίες είναι υπό όρους ντετερμινιστικές, δηλαδή η κίνηση του στόχου επηρεάζεται από κάποιες μεταβλητές και ορίζοντας αυτές, η θέση του στόχου θα είναι γνωστή κάθε στιγμή. Έχουν δημοσιευθεί άρθρα με θέμα αυτόν τον τύπο κινήσεων, όπως των Stone and Richardson (1974), Pursiheimo (1976) και Iida (1989). Νεότερες έρευνες για την ανίχνευση τέτοιων στόχων ασχολούνται με την ανάπτυξη ακέραιων και μη γραμμικών προγραμμάτων (MINLP). (Sato and Rousset 2010)
 - ii. Ο δεύτερος τύπος είναι τυχαίες κινήσεις που μπορούν να μοντελοποιηθούν με την διαδικασία Markov. Ο τύπος αυτός έχει ερευνηθεί από πολλούς, με πιο πρόσφατες έρευνες να επικεντρώνονται στην ανάπτυξη ενός ειδικού αλγορίθμου, του «Branch and Bound» που έχει ως στόχο την εύρεση βέλτιστης διαδρομής για έναν ανιχνευτή (Lau,Huang & Dissanayake 2008 , Sato and Rousset 2010).
- ❖ Σε άρθρα που ασχολούνται με την εύρεση ικανών συνθηκών σε στατικούς στόχους για την ανίχνευση σε κινούμενων. Βασικό παράδειγμα αυτής της κατηγορίας είναι η θεωρία του S.Brown για τους στατικούς στόχους που με την ικανοποίηση συνθηκών χρησιμοποιήθηκαν για την βελτιστοποίηση ανίχνευσης κινούμενων στόχων.

3. Μοντέλα εντοπισμού στόχων και βέλτιστος εντοπισμός στατικών στόχων

Οι περισσότεροι αλγόριθμοι που χρησιμοποιούνται για τον εντοπισμό της θέσης ενός κινούμενου στόχου, βασίζονται στην ικανότητά μας να φτιάξουμε βέλτιστα μοντέλα εύρεσης στατικών στόχων. Στην ενότητα αυτή θα κάνουμε μια σύντομη αναφορά στις μεθόδους και τα αποτελέσματα της βέλτιστης αναζήτησης στατικών στόχων. Αρκετές φορές η έρευνα ξεκινά με μια αβέβαιη εκτίμηση της τελευταίας καταγεγραμμένης τοποθεσίας ενός στόχου, πράγμα που βασίζεται στην αναφορά ενός αισθητήρα ραντάρ αλλά και σε οπτικές καταγραφές. Τα σφάλματα που προκύπτουν από τη λειτουργία πολλών αισθητήρων ακολουθούν το μοντέλο κατανομής Gauss (Stone, 2016).

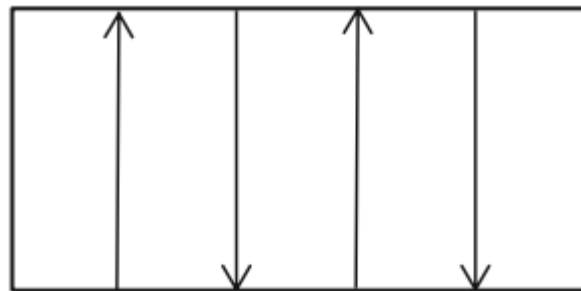
Για να ξεκινήσουμε την απαρίθμηση των διαφόρων μοντέλων εντοπισμού, θα πρέπει να ορίσουμε την περιοχή αναζήτησης A , σχήματος ορθογωνίου παραλληλογράμμου, μέσα στην οποία αναζητούμε τον στόχο μας με έναν αισθητήρα εύρους αναζήτησης R . Επίσης, πρέπει να υποθεθεί ότι ο αισθητήρας έχει τέλεια ικανότητα εντοπισμού στόχων μέσα σε αυτό το εύρος. Αν ο αισθητήρας εντοπίσει μέσα σε αυτό το εύρος κάποιον στόχο, η πιθανότητα εντοπισμού θα είναι ίση με 1. Αυτό αποκαλείται *Νόμος Ορισμένου Εύρους* και το πλάτος σάρωσης του αισθητήρα θα δίνεται από τη σχέση :

$$W = 2R$$

Αν ο αισθητήρας αναζητά σε ένα μονοπάτι μήκους l μέσα στην περιοχή A , τότε η σκαναρισμένη περιοχή θα είναι lW και η πυκνότητα αναζήτησης θα είναι lW/A (Stone, 2016). Οι τρεις τρόποι εντοπισμού βασίζονται στις παρακάτω συναρτήσεις εντοπισμού:

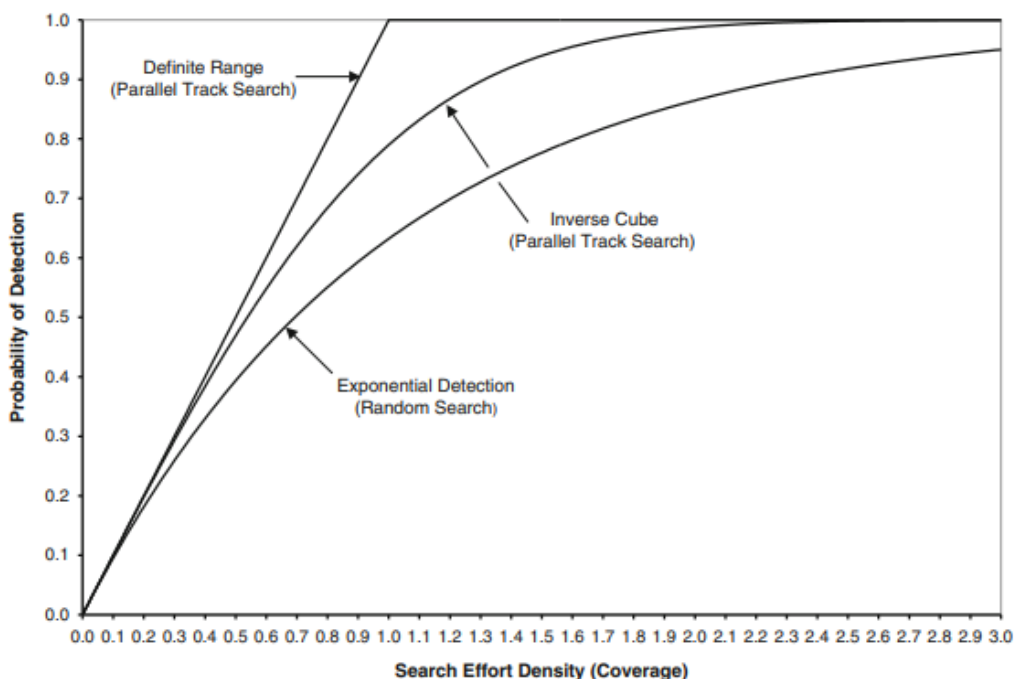
- i. Αναζήτηση παράλληλης τροχιάς καθορισμένου εύρους
- ii. Αναζήτηση παράλληλης τροχιάς ανεστραμμένου κύβου
- iii. Τυχαία αναζήτηση – εκθετικός εντοπισμός

Η περιοχή αναζήτησης είναι σχήματος ορθογωνίου παραλληλογράμμου και η κάθε τροχιά αναζήτησης είναι παράλληλη με την προηγούμενη, ώστε να καλυφθεί όλη η περιοχή. Αυτό παρουσιάζεται στο παρακάτω σχήμα.



Σχήμα 1: Τροχιές αναζήτησης στόχου σε περιοχή σχήματος παραλληλογράμμου (Stone, 2016).

Η σύγκριση των τριών μεθόδων, που θα αναλύσουμε στη συνέχεια, ως προς την πιθανότητα εντοπισμού του στόχου δίνεται και από το παρακάτω διάγραμμα.



Σχήμα 2: Σύγκριση των τριών συναρτήσεων εντοπισμού (Stone, 2016).

Αν υποθέσουμε ότι ο αισθητήρας μας αναζητά τους στόχους σε παράλληλες τροχιές, οι οποίες έχουν μεταξύ τους απόσταση W , τότε η πιθανότητα εντοπισμού ενός στόχου σε συνάρτηση με την πυκνότητα αναζήτησης, αν ο στόχος βρίσκεται μέσα στο συγκεκριμένο ορθογώνιο χωρίο, φαίνεται στην από την ευθεία γραμμή του παραπάνω σχήματος, η οποία αποτελεί απεικόνιση της μεθόδου **αναζήτησης παράλληλης τροχιάς** (καθορισμένου εύρους). Όταν η πυκνότητα αναζήτησης φτάσει το 1, τότε η πιθανότητα εντοπισμού δεν μπορεί να αυξηθεί άλλο.

Τις περισσότερες φορές, όμως, δεν είναι εφικτή η τοποθέτηση των τροχιών αναζήτησης ακριβώς σε απόσταση W ή μια από την άλλη, πράγμα που έχει ως αποτέλεσμα να υπάρχουν σημεία της περιοχής που δεν έχουν ερευνηθεί καθόλου ή κάποια σημεία να έχουν ελεγχθεί παραπάνω από μια φορές. Αυτό μειώνει παραπάνω την πιθανότητα εντοπισμού. Σε αυτή την περίπτωση, δεν είναι πάντα εφικτό το να ερευνηθεί όσο θα θέλαμε η επιθυμητή περιοχή, οπότε κάθε αναζήτηση σε ένα συγκεκριμένο «κελί» της περιοχής είναι πλέον ανεξάρτητη και δεν επηρεάζεται αλλά ούτε επηρεάζει τις υπόλοιπες αναζητήσεις. Παρόλα αυτά, θεωρείται ότι όλη η προσπάθεια εντοπισμού εξαντλείται εντός της ορθογώνιας περιοχής, πράγμα που περιορίζει τη **μέθοδο τυχαίας αναζήτησης** (εκθετικού εντοπισμού) (Stone, ..2016).

Ο σχεδιασμός μιας στρατηγικής για την βελτιστοποιημένη αναζήτηση ενός στατικού στόχου σε συνεχή χώρο S έχει τα ακόλουθα χαρακτηριστικά:

- Μια πρώιμη κατανομή σε έναν διακριτό ή συνεχή χώρο

Αρχικά, ο χώρος έρευνας S είναι συνεχής και αποτελεί υποσύνολο του χώρου δύο ή τριών διαστάσεων. Η πρώτη κατανομή δίνεται από την συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας p που ορίζεται στο S . Η πιθανότητα ο στόχος να είναι σε μια υποπεριοχή R του χώρου S θα είναι:

$$\int_R p(x)dx$$

Και η πιθανότητα ο στόχος να βρίσκεται στην περιοχή S θα είναι ίση με 1.

- Η δημιουργία μιας συνάρτησης που θα συσχετίζει την προσπάθεια αναζήτησης με την πιθανότητα εντοπισμού

Στη συνέχεια, δημιουργείται η συνάρτηση b ως εξής:

Για $x \in S$: η συνάρτηση $b(x,z) = \Pr \{ \text{εντοπισμός στόχου με πυκνότητα αναζήτησης } z | \text{στόχος στο } x \}$ για $z \geq 0$

Αν παραγωγίσουμε τη συνάρτηση $b(x,z)$ ως προς το z και υποθέσουμε ότι η παράγωγος $b'(x,z)$ είναι συνάρτηση θετική και συνεχής, τότε θα είναι φθίνουσα συνάρτηση του z .

Το κόστος είναι μια συνάρτηση της πυκνότητας αναζήτησης και είναι θετικό και διάφορο του μηδενός $c(x) > 0$.

- Η χρήση μιας συνάρτησης που θα καθορίζει την κατανομή της προσπάθειας αναζήτησης

Η στρατηγική αναζήτησης είναι μια συνάρτηση κατανομής $f(x)$ για $x \in S$ όπου η συνάρτηση $f(x)$ είναι η πυκνότητα αναζήτησης στο συγκεκριμένο σημείο x . Είναι απαραίτητο η συνάρτηση να λαμβάνει θετικές τιμές διάφορες του ∞ σε όλα τα σημεία.

Η συγκεντρωτική συνάρτηση F για την οποία θα ισχύει:

$$F_B = \{ f \in F : 0 \leq f(x) \leq B \text{ για κάθε } x \in S \} \quad \text{για } B \quad 0 < B < \infty$$

Για μια κατανομή f , υπολογίζεται η πιθανότητα εντοπισμού και το κόστος αυτής από:

$$P(f) = \int_S b(x, f(x)) p(x) dx$$

$$C(f) = \int_S c(x) f(x) dx.$$

Όλα τα παραπάνω γίνονται με τελικό στόχο την εύρεση μιας κατανομής που θα μεγιστοποιεί την πιθανότητα εντοπισμού παράλληλα με τον ταυτόχρονο περιορισμό του κόστους.

Μια από τις πρώτες έρευνες που έλαβαν χώρα για τον βέλτιστο εντοπισμό στατικού στόχου ήταν αυτή του Koorman το 1946 και το 1957.

ΜΕΡΟΣ 2^ο - ΚΥΡΙΩΣ ΜΕΡΟΣ

1. Εντοπισμός κινούμενων στόχων σε διακριτό χώρο και χρόνο

Όπως αναφέρθηκε και στην προηγούμενη ενότητα, για να δημιουργηθεί ένα ιδανικό, ως προς την παράμετρο του χρόνου, σχέδιο έρευνας για έναν κινούμενο στόχο σε διακριτό χώρο και χρόνο, μπορεί να χρησιμοποιηθεί μια εκθετική συνάρτηση εντοπισμού, με τη βοήθεια της οποίας μελετώντας μια ακολουθία από βέλτιστα πλάνα για στατικούς στόχους καταλήγουμε σε σχεδιασμό πλάνου για κινούμενο στόχο. Ο αλγόριθμος που χρησιμοποιείται, είναι μια πιο ειδική περίπτωση του αλγορίθμου FAB. Η διαδικασία ξεκινά από τη χρονική $t=0$ έως την τελική χρονική στιγμή $t=T$ ώστε να βρεθούν ιδανικές κατανομές για έναν στατικό στόχο σε αυτές τις χρονικές στιγμές. Στη συνέχεια, δημιουργείται μια στρατηγική εντοπισμού κινούμενου στόχου που βασίζεται σε αυτές τις τιμές. Έπειτα, ο αλγόριθμος επιστρέφει στη χρονική στιγμή $t=0$ και επαναλαμβάνει τη διαδικασία. Για αυτό και ο αλγόριθμος αυτός καλείται ως «Forward and Backward algorithm» (αλγόριθμος «Εμπρός-Πίσω»).

Ο αλγόριθμος του Brown όπως ο ίδιος απέδειξε το 1980, παράγει μια ακολουθία από πλάνα με αυξανόμενες πιθανότητες εντοπισμού που μετατρέπονται σε βέλτιστο πλάνο εντοπισμού όσο τα βήματα τείνουν στο άπειρο.

Αρκετές φορές, ειδικά σε προβλήματα που περιλαμβάνουν ανθρώπους που κινδυνεύουν στη θάλασσα ή σε μια ερημική περιοχή, δεν είναι πάντα βασική επιδίωξη η μεγιστοποίηση της πιθανότητας εντοπισμού. Αντιθέτως, εδώ ο στόχος είναι να εντοπιστούν τα άτομα που ζουν, πράγμα που γίνεται προσθέτοντας μια επιπλέον παράμετρο στη συνάρτηση εντοπισμού, ώστε να λάβουμε υπόψιν μας την πιθανότητα κάποιος αγνοούμενος να έχει χάσει τη ζωή του όσο ο χρόνος περνά και όσο αυξάνεται το διάστημα που βρίσκεται εκτεθειμένο στους διαφόρους κινδύνους του περιβάλλοντος. Αυτό επηρεάζει σημαντικά τους ανθρώπους που βρίσκονται στο νερό, καθώς η χαμηλή θερμοκρασία αυτού μπορεί να τους οδηγήσει αρκετά γρήγορα σε υποθερμία και τον θάνατο. Η ακτοφυλακή διαθέτει πίνακες που δίνουν την πιθανότητα να πεθάνει κάποιος αγνοούμενος στο νερό συναρτήσει της θερμοκρασίας αυτού καθώς και του χρόνου.

Ανάλογες τροποποιήσεις στις εξισώσεις εντοπισμού γίνονται και από τις υπηρεσίες άμυνας. Εκεί στην εξιδανικευμένη περίπτωση πρέπει να λάβουμε υπόψιν μας την πιθανότητα εντοπισμού του στόχου-εχθρού πριν πραγματοποιήσει κάποια επίθεση. Επίσης, μοντελοποιείται η κίνηση του στόχου-εχθρού, ώστε να βρούμε πιθανές θέσεις-στόχους παγίδευσής του.

2. Αναζήτηση κινούμενων στόχων σε συνεχή χώρο και διακριτό χρόνο

Η αναζήτηση στόχου σε αυτή την ενότητα λαμβάνει χώρα σε διακριτό χρόνο, ο οποίος θα λαμβάνει τιμές από 0 έως T $[0, T]$. Ο χώρος έρευνας S που ερευνάται είναι μια υποδιαίρεση ενός χώρου δυο ή τριών διαστάσεων.

- Πρώτη κατανομή της κίνησης του στόχου:

Η πρώτη κατανομή των κινήσεων του στόχου μπορεί να χαρακτηριστεί από μια στοχαστική διαδικασία $X = \{X(t), t=0, \dots, T\}$ όπου το $X(t) \in S$ για $t=0, \dots, T$.

- Το σχέδιο εντοπισμού αποτελεί μια κατανομή του χώρου και του χρόνου f που ορίζεται στο $S \times [0, T]$ όπου η συνάρτηση $f(x, t)$ είναι η προσπάθεια εντοπισμού που γίνεται στον χώρο x σε χρόνο t . Αν υποθέσουμε ότι γίνεται προσπάθεια σε χρόνο t , ορίζεται την κλάση $F(m)$ σε συνεχή χώρο και διακριτό χρόνο όπως φαίνεται παρακάτω:

$$f \in F(m) \text{ αν και μόνο αν } \\ 0 \leq f(x, t) < \infty \text{ } x \in S \text{ και για } t=0, \dots, T$$

Αν υπάρχει ανώτατο όριο B της πυκνότητας αναζήτησης, τότε ορίζεται και η κλάση $F_B(m)$ του σχεδίου εντοπισμού όπου ισχύει:

$$f \in F_B(m) \text{ αν και μόνο αν } \\ f \in F(m) \\ f(x, t) \leq B \text{ για } x \in S \text{ και για } t=0, \dots, T$$

Αν το όριο B τείνει στο άπειρο, τότε η $F_B(m) = F(m)$.

- Η συνάρτηση αναζήτησης δείχνει την πιθανότητα εντοπισμού ενός στόχου, αν υποτεθεί ότι ακολουθεί μια διαδρομή ω και είναι μια συνάρτηση της συνολικής πυκνότητας αναζήτησης που συναντά στον στόχο καθώς ακολουθεί την παραπάνω διαδρομή, ως εξής:

$$\zeta(f, \omega, t) = \sum_{s=0}^t W(\omega_s, s) f(\omega_s, s) \text{ για } \omega \in \Omega \text{ και για } t=0, \dots, T$$

- Η πιθανότητα εντοπισμού σε σχέση με τον χρόνο θα δίνεται από τη σχέση :

$$P(f, t) = E [b, (\zeta(f, \omega, t))] \text{ για και για } t=0, \dots, T$$

Όπου το $E[\cdot]$ δείχνει την αναμονή της κατανομής των πιθανοτήτων p στις διαδρομές του X .

- Ένα σχέδιο f^* που ανήκει στο $F_B(m)$ χαρακτηρίζεται ως βέλτιστο σχέδιο T (T-Optimal Plan) αν και μόνο αν:

$$P(f^*, T) \geq P(f, T) \text{ για } f \in F_B(m)$$

Στις περισσότερες περιπτώσεις δεν είναι εφικτό να κατασκευαστεί ένα βέλτιστο σχέδιο για κινούμενους στόχους. Αυτό θα σημαίνει ότι το βέλτιστο πλάνο για $T + \Delta T$ δεν θα είναι μια προέκταση του T-Optimal Plan. Αν κάποιος θέλει να κάνει αυτή την αναζήτηση, θα πρέπει να επιλέξει τη χρονική στιγμή κατά την οποία επιθυμεί να είναι βέλτιστη η έρευνά του.

Για τον καθορισμό του ανώτατου ορίου στην πιθανότητα ανίχνευσης για ένα T-Optimal Plan, υποθέτουμε ότι το b είναι μια φθίνουσα συνάρτηση εντοπισμού. Η E_{x_t} δείχνει την αναμονή στο $X(t) = x$ και η $p_t(x)$ είναι η πυκνότητα πιθανότητας για το $X(t) = x$. Οι f_1, f_2 θα είναι οι δυο συναρτήσεις κατανομής, τότε θα έχουμε:

$$P(f_2, T) - P(f_1, T) = E[b(\zeta(f_2, \omega, T))] - E[b(\zeta(f_1, \omega, T))] \\ \leq E[b'(\zeta(f_1, \omega, T))(\zeta(f_2, \omega, T) - \zeta(f_1, \omega, T))].$$

Και ορίζεται το

$$P(f_2, T) - P(f_1, T) \leq \sum_{t=0}^T \int_S D(f_1, x, t) (f_2(x, t) - f_1(x, t)) dx.$$

$$\bar{\lambda}(t) = \sup_{x \in S} D(f_1, x, t) \text{ and } \underline{\lambda}(t) = \inf_{\{x; f_1(x, t) > 0\}} D(f_1, x, t) \text{ for } t = 0, \dots, T.$$

$$D(f, x, t) = E_{xt} [b'(\zeta(f, \omega, T))] p_t(x) W(x, t) \text{ for } f \in F(m).$$

$$\begin{aligned} E[b'(\zeta(f_1, \omega, T)) (\zeta(f_2, \omega, T) - \zeta(f_1, \omega, T))] \\ = \sum_{t=0}^T \int_S D(f_1, x, t) (f_2(x, t) - f_1(x, t)) dx \end{aligned}$$

Στην περίπτωση αυτή όπου η $f_1(x, t) = 0$ για $x \in S$, θέτουμε $\lambda(t) = 0$

$$\begin{aligned} P(f_2, T) - P(f_1, T) &\leq \sum_{t=0}^T \int_S [\bar{\lambda}(t) f_2(x, t) - \underline{\lambda}(t) f_1(x, t)] dx \\ &= \sum_{t=0}^T (\bar{\lambda}(t) - \underline{\lambda}(t)) m(t) \equiv \Delta(f_1). \end{aligned}$$

Επομένως, αν η $f^* \in F_B(m)$ είναι T -optimal, τότε :

$$P(f^*, T) \leq P(f, T) + \Delta(f) \text{ for any } f \in F_B(m).$$

Θεώρημα ανώτατου ορίου του Washburn:

Αν η b είναι μια φθίνουσα συνάρτηση εντοπισμού και $f^* \in F_B(m)$ είναι T -optimal, τότε:

$$P(f^*, T) \leq P(f, T) + \Delta(f) \text{ for any } f \in F_B(m)$$

Όπου :

$$\Delta(f) = \sum_{t=0}^T (\bar{\lambda}(t) - \underline{\lambda}(t)) m(t).$$

3. Εκθετική συνάρτηση εντοπισμού για διακριτό χρόνο

Οι αναγκαίες συνθήκες ώστε ένα σχέδιο εντοπισμού να είναι T -optimal όταν η συνάρτηση εντοπισμού είναι εκθετική και ο χρόνος είναι διακριτός, προκύπτουν από μια επέκταση της θεωρίας του Brown από την εύρεση ενός T -optimal πλάνου σε διακριτό χώρο και χρόνο σε ένα συνεχούς χώρου και διακριτού χρόνου. Όταν η συνάρτηση εντοπισμού είναι εκθετική, τότε το να βρούμε ένα σχέδιο T -optimal θα ισοδυναμεί με την επίλυση μιας ακολουθίας από προβλήματα που αφορούν στατικούς στόχους. Συνεπώς, αφού ο χώρος είναι συνεχής δεν μπορεί η απόδειξη να βασιστεί στο θεώρημα των Kuhn, Tucker και Karush.

Θεώρημα:

Αν υποθέσουμε ότι η b είναι μια εκθετική συνάρτηση εντοπισμού, τότε η απαραίτητη συνθήκη για την $f^* \in F_B(m)$ για να είναι βέλτιστο το σχέδιο εντοπισμού θα είναι για $t=0, \dots, T$, $f^*(\cdot, t)$ είναι το βέλτιστο σταθερό σχέδιο στόχου με κόστος $m(t)$ για κατανομή $q(\cdot, t, f^*)$, που είναι η μεταγενέστερη κατανομή πιθανοτήτων στην περιοχή του στόχου τη χρονική στιγμή t , δεδομένης της αποτυχίας ανίχνευσης σε κάθε χρονική στιγμή εκτός από t .

$$\begin{aligned} 1 - P(f, T) &= E[\exp(-\zeta(f, \omega, T))] = E\left[\exp\left(-\sum_{s=0}^T W(\omega_s, s) f(\omega_s, s)\right)\right] \\ &= \int_S E_{xt} \left[\exp\left(-\sum_{s=0}^T W(\omega_s, s) f(\omega_s, s)\right) \right] p_t(x) dx \\ &= \int_S e^{-W(x, t) f(x, t)} E_{xt} \left[\exp\left(-\sum_{s \neq t} W(\omega_s, s) f(\omega_s, s)\right) \right] p_t(x) dx \\ &= \int_S e^{-W(x, t) f(x, t)} q(x, t, f) dx \end{aligned}$$

όπου :

$$q(x, t, f) = E_{xt} \left[\exp\left(-\sum_{s \neq t} W(\omega_s, s) f(\omega_s, s)\right) \right] p_t(x).$$

Η $q(x, t, f)$ είναι η πυκνότητα της πιθανότητας ο στόχος να βρίσκεται σε κατάσταση x τη χρονική στιγμή t και να μην έχει ανιχνευθεί σε καμία άλλη χρονική στιγμή εκτός από την t . Έτσι, προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned}
D(f, x, t) &= E_{xt} [b'(\zeta(f, \omega, T))] p_t(x) W(x, t) \\
&= E_{xt} \left[\exp \left(- \sum_{s=0}^T W(\omega_s, s) f(\omega_s, s) \right) \right] p_t(x) W(x, t) \\
&= e^{-W(x,t)f(x,t)} E_{xt} \left[\exp \left(- \sum_{s \neq t} W(\omega_s, s) f(\omega_s, s) \right) \right] p_t(x) W(x, t) \\
&= W(x, t) e^{-W(x,t)f(x,t)} q(x, t, f) \text{ for } f \in F_B.
\end{aligned}$$

Απαραίτητη προϋπόθεση είναι η $f^* \in FB(m)$ είναι ένα βέλτιστο σχέδιο εντοπισμού. Αφού το $q(\cdot, t, f^*)$ είναι ανάλογο με το $q(\cdot, t, f)$ τότε το $f^*(\cdot, t)$ πρέπει να ελαχιστοποιήσει την πιθανότητα αστοχίας για τους στατικούς στόχους με κατανομή $q(\cdot, t, f)$ μεταξύ σχεδίων με κόστος $m(t)$ για $t=0, \dots, T$. Άρα, μεγιστοποιώντας την πιθανότητα ανίχνευσης για το πρόβλημα του σταθερού στόχου που ορίζεται από το $q(\cdot, t, f^*)$ για $t=0, \dots, T$ είναι απαραίτητη προϋπόθεση για να επιτευχθεί το βέλτιστο σχέδιο εντοπισμού στόχου. Για την επάρκεια του παραπάνω υποθέτουμε ότι $f^*(\cdot, t)$ μεγιστοποιεί την πιθανότητα ανίχνευσης στην έρευνα στατικού στόχου, αντίστοιχη με μεταξύ σχεδίων στο F_B με προσπάθεια ανίχνευσης $m(t)$ για $t=0, \dots, T$. Άρα:

$$l(x, z, \lambda) = b(x, z) p(x) - \lambda c(x) z \text{ for } x \in S, 0 \leq z \leq B, \text{ and } \lambda > 0$$

Και παραγωγίζοντας ως προς το z προκύπτει:

$$l'(x, z, \lambda) = b'(x, z) p(x) - \lambda c(x).$$

Δεδομένου ότι

$$c(x) = 1 \text{ and } b(x, z) = 1 - e^{-W(x,t)z} \text{ for } t = 0, \dots, T.$$

Η παράγωγος γίνεται :

$$l'(x, z, \lambda) = W(x, t) e^{-W(x,t)z} p(x) - \lambda.$$

Από το παραπάνω θεώρημα συμπεραίνουμε ποιες είναι οι απαραίτητες συνθήκες για να είναι ένα πλάνο της μορφής $f^*(\cdot, t)$ βέλτιστο με κόστος $m(t)$. Οι συνθήκες για το σχέδιο αυτό θα είναι οι εξής :

$$\begin{aligned}
W(x, t) e^{-W(x, t) f^*(x, t)} q(x, t, f^*) &\geq \lambda_t \text{ for } f^*(x, t) = B \\
&= \lambda_t \text{ for } 0 < f^*(x, t) < B \\
&\leq \lambda_t \text{ for } f^*(x, t) = 0.
\end{aligned}$$

Επίσης, ισχύει ότι:

$$\begin{aligned}
D(f^*, x, t) &\geq \lambda_t \text{ for } f^*(x, t) = B \\
&= \lambda_t \text{ for } 0 < f^*(x, t) < B \\
&\leq \lambda_t \text{ for } f^*(x, t) = 0.
\end{aligned}$$

Αφού η $f^*(\cdot, t)$ είναι T-optimal, θα πρέπει να ικανοποιεί την παραπάνω σχέση για χρόνο $t=0$ έως T και έτσι έχουμε ότι:

$$\begin{aligned}
P(f, T) - P(f^*, T) &\leq \sum_{t=0}^T \int_S D(f^*, x, t) (f(x, t) - f^*(x, t)) dx \\
&\leq \sum_{t=0}^T \lambda_t \int_S (f(x, t) - f^*(x, t)) dx = 0.
\end{aligned}$$

όπου η ανισότητα στην τελευταία γραμμή αναλύεται διαχωρίζοντας το ολοκλήρωμα από S στο άθροισμα των ολοκληρωμάτων S_1, S_2, S_3 όπως παρακάτω:

$$S_1 = \{x : f^*(x, t) = B\}, \quad S_2 = \{x : 0 < f^*(x, t) < B\}, \quad S_3 = \{x : f^*(x, t) = 0\}.$$

Για την S_1 ισχύουν τα παρακάτω:

$$D(f^*, x, t) \geq \lambda_t > 0 \quad \text{Καθώς και} \quad f(x, t) \leq f^*(x, t) = B, \text{ so}$$

Άρα:

$$\int_{S_1} D(f^*, x, t) (f(x, t) - f^*(x, t)) dx \leq \int_{S_1} \lambda_t (f(x, t) - f^*(x, t)) dx.$$

Για την S_2 ισχύει

$$D(f^*, x, t) = \lambda_t$$

Άρα:

$$\int_{S_2} D(f^*, x, t) (f(x, t) - f^*(x, t)) dx = \int_{S_2} \lambda_t (f(x, t) - f^*(x, t)) dx$$

Για την S_3 ισχύουν:

$$0 \leq D(f^*, x, t) \leq \lambda_t \quad f(x, t) \geq f^*(x, t) = 0$$

Άρα:

$$\int_{S_3} D(f^*, x, t) (f(x, t) - f^*(x, t)) dx \leq \int_{S_3} \lambda_t (f(x, t) - f^*(x, t)) dx$$

Το άθροισμα αυτών των τριών ολοκληρωμάτων δίνει την ανισότητα της τελευταίας γραμμής στην αρχική σχέση. Η ισότητα σε αυτή τη γραμμή προκύπτει από το γεγονός ότι $f, f^* \in F_B(m)$.

$$P(f, T) \leq P(f^*, T) \quad \text{for } f \in F_B(m)$$

Αναδρομή για την εύρεση βέλτιστου σχεδίου για μια εκθετική συνάρτηση εντοπισμού:

Σύμφωνα με τους Stone et al. (2016) η αναδρομή για μια εκθετική συνάρτηση εντοπισμού στόχου για την εύρεση του βέλτιστου σχεδίου ακολουθεί την παρακάτω μεθοδολογία:

***T*-Optimal Search Plan Recursion
for a Continuous-Effort, Exponential Detection Function**

1. Let $f_0(x, t) = 0$ for $x \in S$ and $t = 0, \dots, T$.
2. Let $\varepsilon > 0$ be a tolerance.
3. Set $k = 0$.
4. Set $s = k \bmod (T + 1)$, i.e., s is the integer remainder after dividing k by $T + 1$.
5. Compute $\xi(\cdot, s, f_k)$, the optimal plan for $q(\cdot, s, f_k)$ with $m(s)$ effort.
6. Set

$$f_{k+1}(\cdot, t) = \begin{cases} f_k(\cdot, t) & \text{for } t \neq s \\ \xi(\cdot, s, f_k) & \text{for } t = s. \end{cases}$$

7. If $s = T$, compute $\Delta(f_{k+1})$. If this is less than ε stop; $P(f_{k+1})$ is within ε of optimal.
8. Otherwise set $k = k + 1$, and go back to step 4.

Αφού η αναδρομή ξεκινά με την $f_0(\cdot, t) = 0$ για $t=0$ έως $t=T$, το πρώτο πέρασμα μέσω της αναδρομής για $k=0$ έως T παράγει ένα μυωπικό σχέδιο έρευνας, το οποίο μεγιστοποιεί την αύξηση της πιθανότητας εντοπισμού για κάθε αύξηση του χρόνου t . Αφού κάθε κατανομή της f_{k+1} αυξάνει την πιθανότητα εντοπισμού σε σύγκριση την f_k , για $k = 0, 1, \dots$. Τότε η $P(f_k, T)$ προσεγγίζει το όριο του \bar{P} όσο το k τείνει στο άπειρο. Επομένως, μπορούμε να δημιουργήσουμε ένα σχέδιο όσο κοντά στο βέλτιστο επιθυμούμε. Ένα φτάσουμε σε ένα βήμα k στην αναδρομή όπου η f_{k+T+1} είναι ίση με την f_k , τότε η f_k θα παρέχει τις απαραίτητες προϋποθέσεις ώστε το σχέδιο να είναι το βέλτιστο σχέδιο εντοπισμού.

Αναδρομή για την εύρεση βέλτιστου σχεδίου για μια φθίνουσα συνάρτηση εντοπισμού:

Παρακάτω επεκτείνονται περισσότερο οι συνθήκες για την εύρεση ενός βέλτιστου σχεδίου ανίχνευσης για φθίνουσες εκθετικές συναρτήσεις εντοπισμού, όπου και πάλι θα ισχύει ότι ο χρόνος είναι διακριτός. Οι απαραίτητες συνθήκες έχουν ως εξής:

$$\begin{aligned}
 P(f, T) &= E[b(\zeta(f, \omega, T))] \\
 &= E \left[b \left(W(\omega_t, t) f(\omega_t, t) + \sum_{s \neq t} W(\omega_s, s) f(\omega_s, s) \right) \right] \\
 &= \int_S E_{xt} \left[b \left(W(x, t) f(x, t) + \sum_{s \neq t} W(\omega_s, s) f(\omega_s, s) \right) \right] p_t(x) dx
 \end{aligned}$$

Για $t = 0$ έως T

Για $x \in S$ και για $z \geq 0$ ορίζεται ότι:

$$\beta_f(x, t, z) = E_{xt} \left[b \left(W(x, t) z + \sum_{s \neq t} W(\omega_s, s) f(\omega_s, s) \right) \right]$$

Αφού η $\beta_f(x, t, \cdot)$ είναι το άθροισμα των κοίλων συναρτήσεων, θα είναι και αυτή κοίλη συνάρτηση. Επιπλέον, αφού η $b'(0) < \infty$ και η $b'(u)$ είναι μια φθίνουσα συνάρτηση του u , θα έχουμε ότι $(b(u+h) - b(u))/h \leq b'(0)$ για κάθε $u, h > 0$. Άρα, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το κυρίαρχο θεώρημα σύγκλισης ώστε να υπολογίσουμε για $x \in S$:

$$\beta'_f(x, t, z) = E_{xt} \left[b' \left(W(x, t) z + \sum_{s \neq t} W(\omega_s, s) f(\omega_s, s) \right) \right] W(x, t)$$

Η $\beta_f(x, t, \cdot)$ είναι μια φθίνουσα συνάρτηση εντοπισμού. Αν το G_B είναι ένα σύνολο σχεδίων ανίχνευσης στατικών στόχων $g : S \rightarrow [0, B]$. Αν το B είναι ίσο με το άπειρο, τότε η $g : S \rightarrow [0, \infty]$ και ορίζεται ότι:

$$\hat{P}_f(t, g) = \int_S \beta_f(x, t, g(x)) p_t(x) dx$$

Όταν βρεθεί ένα $g \in G_B$ που να μεγιστοποιεί την $\hat{P}_f(t, g)$ με τους αντίστοιχους περιορισμούς και με κατανομή πιθανοτήτων $p_t(x)$ και συνάρτηση εντοπισμού $\beta_f(x, t, \cdot)$ για κάθε $x \in S$, θα έχουμε ότι

$$P(f, T) = \hat{P}_f(t, f(\cdot, t)) \text{ for } t = 0, \dots, T$$

Θεώρημα: Αν η b είναι μια φθίνουσα συνάρτηση εντοπισμού, τότε παρακάτω έχουμε τις απαραίτητες συνθήκες ώστε η $f^* \in F_B(m)$ να είναι βέλτιστη.

$$\hat{P}_f(t, f^*(\cdot, t)) \geq \hat{P}_f(t, g) \text{ for } g \in G_B$$

Ούτως ώστε

$$\int_S g(x) dx = m(t)$$

Για $t=0, \dots, T$.

Επίσης, για $t=0, \dots, T$, υπάρχει κάποιο $\lambda_t \geq 0$ για το οποίο θα ισχύει ότι για $x \in S$:

$$\begin{aligned} D(f^*, x, t) &\geq \lambda_t \text{ for } f^*(x, t) = B \\ &= \lambda_t \text{ for } 0 < f^*(x, t) < B \\ &\leq \lambda_t \text{ for } f^*(x, t) = 0 \end{aligned}$$

Αν υπάρχει κάποια χρονική στιγμή t για την οποία ισχύει ότι υπάρχει ένα $g \in G_B$ τέτοιο ώστε:

$$\int_S g(x) dx = m(t) \quad \hat{P}_f(t, g) > \hat{P}_f(t, f^*(\cdot, t))$$

Τότε, ορίζεται ότι:

$$f(\cdot, s) = \begin{cases} g & \text{for } s = t \\ f^*(\cdot, s) & \text{for } s \neq t \end{cases}$$

Ωστε η $f \in F_B(m)$ και η $P(f, T) > P(f^*, T)$, πράγμα που έρχεται σε αντίθεση με την ιδιότητα της f^* να είναι βέλτιστη. Επομένως, έχουμε ότι η f^* είναι ένα βέλτιστο σχέδιο εντοπισμού σταθερού στόχου με κόστος $m(t)$ για την κατανομή των σταθερών στόχων που

θα δίνεται από την $p_t(x)$ και για την φθίνουσα συνάρτηση εντοπισμού $\beta_t(x,t,\cdot)$ για κάθε $x \in S$. Σύμφωνα με την παρατήρηση του Corollary, οι συνθήκες αυτές θα είναι απαραίτητες συνθήκες για την ιδανικότητα ενός σχεδίου σταθερού στόχου στην G_B . Οι συνθήκες αυτές θα είναι :

$$\begin{aligned}\beta'_{f^*}(x, t, f^*(x, t)) p_t(x) &\geq \lambda_t \text{ for } f^*(x, t) = B \\ &= \lambda_t \text{ for } 0 < f^*(x, t) < B \\ &\leq \lambda_t \text{ for } f^*(x, t) = 0\end{aligned}$$

Αναδρομή για την εύρεση βέλτιστου σχεδίου για μια φθίνουσα συνάρτηση εντοπισμού:

Η αναδρομή για την εύρεση ενός βέλτιστου σχεδίου εντοπισμού για μια φθίνουσα συνάρτηση απαιτεί την επίλυση μιας ακολουθίας προβλημάτων που αφορούν στατικούς στόχους, τα οποία συμπεριλαμβάνουν και την μεγιστοποίηση της $\hat{P}_f(t, g)$ που ορίστηκε παραπάνω

T-Optimal Search Plan Recursion for a Decreasing-Rate Detection Function

1. Let $f_0(x, t) = 0$ for $x \in S$ and $t = 0, \dots, T$.
2. Let $\varepsilon > 0$ be a tolerance.
3. Set $k = 0$.
4. Set $s = k \bmod (T + 1)$, i.e., s is the integer remainder after dividing k by $T + 1$.
5. Compute $\xi(\cdot, s, f_k)$, the allocation that maximizes $\hat{P}_f(s, \cdot)$ in (5.29).
6. Set

$$f_{k+1}(\cdot, t) = \begin{cases} f_k(\cdot, t) & \text{for } t \neq s \\ \xi(\cdot, s, f_k) & \text{for } t = s. \end{cases}$$

7. If $s = T$, compute $\Delta(f_{k+1})$. If this is less than ε stop; $P(f_{k+1})$ is within ε of optimal.
8. Otherwise set $k = k + 1$, and go back to step 4.

Μπορούμε να εφαρμόσουμε την παραπάνω αναδρομή προσεγγίζοντας τη διαδικασία της κίνησης του στόχου. Για να πραγματοποιηθεί αυτό, σχεδιάζουμε ένα μεγάλο αριθμό από N δειγμάτων διαδρομών από την κίνηση του στόχου. Αυτό, συνήθως συμβαίνει με τη βοήθεια μιας προσομοίωσης που παράγει ω πιθανές διαδρομές με πιθανότητα $p(\omega) = 1/N$. Αυτές οι πιθανές διαδρομές αναπτύσσονται σε συνεχή χώρο και σε διακριτό χρόνο.

Παρακάτω ακολουθεί ο σχετικός αλγόριθμος σύμφωνα με τους Stone et al. (2016) για την εύρεση βέλτιστου σχεδίου (T-optimal) γι' αυτή την προσέγγιση.

Implementation of T-Optimal Search Plan Recursion for a Decreasing-Rate Detection Function

1. Set $\zeta(\hat{\omega}) = 0$ for $\hat{\omega} \in \hat{\Omega}$ and $f_0(j, t) = 0$ for $j = 1, \dots, J$ and $t = 0, \dots, T$.
2. Let $\varepsilon > 0$ be a tolerance, and set $k = 0$.
3. Set $s = k \bmod (T + 1)$.
4. Compute

$$\zeta_s(\hat{\omega}) = \zeta(\hat{\omega}) - W(\hat{\omega}_s, s) f_k(\hat{\omega}_s, s) \quad \text{for } \hat{\omega} \in \hat{\Omega},$$

and for $j = 1, \dots, J$, compute

$$r'(j, s, z) = W(j, s) \sum_{\{\hat{\omega}: \hat{\omega}_s = j\}} \Pr\{\hat{\omega}\} b'(W(j, s)z + \zeta_s(\hat{\omega})) \quad \text{for } z \geq 0.$$

5. Find $\xi_k(\cdot, s)$, the plan with $m(s)$ effort that maximizes $\hat{P}_{f_k}(s, \cdot)$, by finding λ_s and $\xi_k(\cdot, s)$, such that

$$\begin{aligned} r'(j, s, \xi_k(j, s)) &\geq \lambda_s \text{ for } \xi_k(j, s) = B \\ &= \lambda_s \text{ for } 0 < \xi_k(j, s) < B \\ &\leq \lambda_s \text{ for } \xi_k(j, s) = 0 \end{aligned} \quad \text{for } j = 1, \dots, J$$

and

$$\sum_{j=1}^J \xi_k(j, s) = m(s).$$

6. Set

$$f_{k+1}(\cdot, t) = \begin{cases} f_k(\cdot, t) & \text{for } t \neq s \\ \xi_k(\cdot, s) & \text{for } t = s. \end{cases}$$

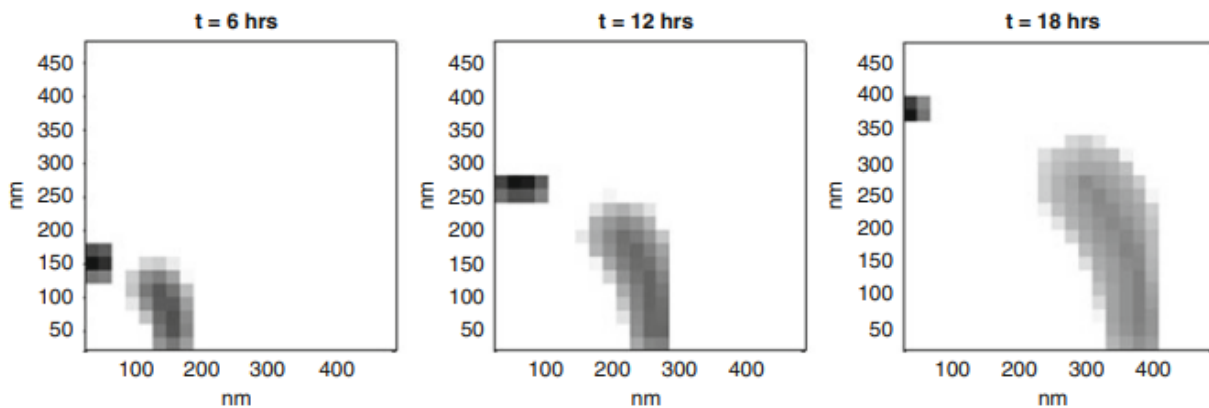
7. Set $\zeta(\hat{\omega}) = \zeta_s(\hat{\omega}) + W(\hat{\omega}_s, s) f_{k+1}(\hat{\omega}_s, s)$ for $\hat{\omega} \in \hat{\Omega}$.
8. If $s = T$, compute $\Delta(f_{k+1})$. If it is less than ε , stop. Otherwise set $k = k + 1$, and return to step 3.

Παράδειγμα εντοπισμού στόχου με χρήση συνάρτησης αντιστρόφου κύβου

Παρακάτω, παρουσιάζεται ένα παράδειγμα σύγκρισης ενός βέλτιστου σχεδίου (T-optimal) με ένα αντίστοιχο μυωπικό σχέδιο αναζήτησης πλοίου. Στα πλαίσια του παραδείγματος, θεωρείται ότι εφαρμόζεται συνάρτηση ανίχνευσης αντιστρόφου κύβου.

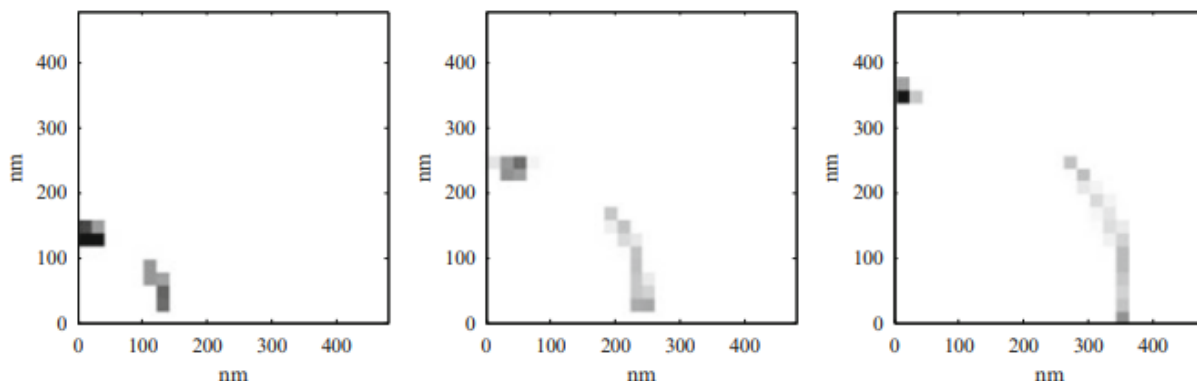
Εδώ, ο στόχος είναι ένα σκάφος που διεξάγει λαθρεμπόριο ναρκωτικών, δεδομένου ότι αναχώρησε από το λιμάνι σημείο (0,0) την χρονική στιγμή $t=0$. Υπάρχουν δύο πιθανά σενάρια για την πορεία του στόχου, το καθένα από τα οποία έχει την ίδια πιθανότητα να συμβεί. Στο πρώτο σενάριο, το σκάφος ταξιδεύει προς ένα λιμάνι (0,480) κινούμενο με περίπου 20kn. Στο δεύτερο σενάριο, το σκάφος κατευθύνεται ανατολικά-βορειοανατολικά με περίπου 20kn.

Στα επόμενα σχήματα απεικονίζεται η κατανομή της κίνησης του σκάφους στα δύο σενάρια σε χρόνο 6, 12 και 18 ωρών. Το μέρος που αντιστοιχεί στο σενάριο 1, δείχνει τον στόχο να κινείται βόρεια στο λιμάνι (0,480). Σε αυτό το σενάριο η κατανομή από το (0,0) και κατευθύνεται βόρεια ενώ το ίχνος απλώνεται ανατολικά και δυτικά μέχρι τις 12 ώρες όπου και αρχίζει να συμπτύσσεται και τελικά να καταλήγει στο (0,480). Το μέρος που αντιστοιχεί στο 2ο σενάριο, εξαπλώνεται προς ανατολικά και βορειοανατολικά. Για να υπολογιστούν οι κατανομές αυτές, προσομοιώθηκαν 50.000 ισοβαρή μονοπάτια στόχου σε συνεχή χώρο και χρόνο, 25.000 για κάθε σενάριο. Για τις χρονικές στιγμές διεξαγωγής της έρευνας στόχου εφαρμόστηκε ένα πλέγμα κελιών 20nm x 20nm, που απεικονίζει την θέση στην οποία κατανέμεται η προσπάθεια αναζήτησης.



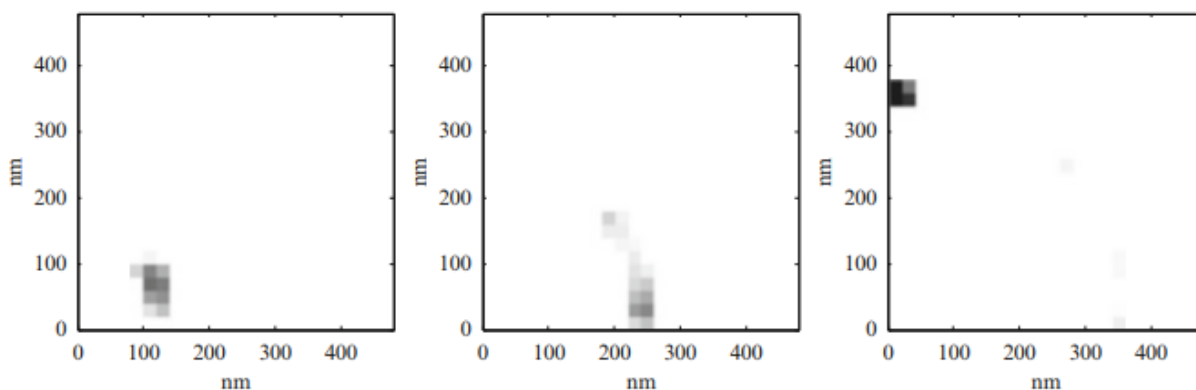
Σχήμα 3: Πιθανές περιοχές κίνησης ενός στόχου στη θάλασσα σε 6, 12 και 18 ώρες (Stone, 2016).

Θεωρείται ότι η προσπάθεια αναζήτησης μπορεί να κατανεμηθεί στιγμιαία στο χώρο τη στιγμή διεξαγωγής της έρευνας. Ο αλγόριθμος συνάρτησης φθίνουσας ανίχνευσης χρησιμοποιείται για να υπολογιστεί το βέλτιστο σχέδιο εντοπισμού στόχου για $T=18$ ώρες. Τα παρακάτω σχέδια δείχνουν την μυωπική και την αναζήτηση βέλτιστου σχεδίου αντίστοιχα στις τρεις προκαθορισμένες χρονικές στιγμές (6, 12, 18 ώρες). Παρατηρώντας το γράφημα της μυωπικής ανίχνευσης, βλέπουμε την ουσιαστική προσπάθεια του 1^{ου} σεναρίου τις χρονικές στιγμές των 6 και 12 ωρών παρατηρώντας ότι η κατανομή του 2^{ου} σεναρίου έχει απλωθεί.



Σχήμα 4: Μυωπικό πλάνο αναζήτησης στόχου στη θάλασσα σε 6,12 και 18 ώρες (Stone, 2016).

Στο διάγραμμα του βέλτιστου σχεδίου ανίχνευσης (T-optimal) λαμβάνεται αυτό υπόψη και εφαρμόζεται το μεγαλύτερο μέρος της προσπάθειάς του σεναρίου 2 στις χρονικές περιόδους των 6 και 12 ωρών ενώ παρατηρείται αναμονή μέχρι τις 18 ώρες για να εφαρμοστεί σημαντική προσπάθεια για το σενάριο 1.



Σχήμα 5: Βέλτιστο πλάνο αναζήτησης στόχου στη θάλασσα σε 6,12 και 18 ώρες (Stone, 2016)

Μια γενική παρατήρηση που προκύπτει σύμφωνα με την έρευνα των Stone et al., (2016), είναι ότι η συνάρτηση αντίστροφου κύβου βρίσκεται πάνω από την εκθετική. Είναι μια πιο αποτελεσματική συνάρτηση ανίχνευσης και η βελτιστοποίηση μπορεί να το εκμεταλλευτεί για να παράγει υψηλότερες πιθανότητες ανίχνευσης με την ίδια προσπάθεια ενώ ποιοτικά τα σχέδια φαίνονται παρόμοια. Επίσης στην έρευνα αυτή διαπιστώθηκε ότι ο υπολογισμός του βέλτιστου σχεδίου (σε MATLAB) για τη συνάρτηση ανίχνευσης αντίστροφου κύβου με αλγόριθμο φθίνουσας ανίχνευσης διαρκεί 100 φορές περισσότερο σε σχέση με τον αλγόριθμο εκθετικής ανίχνευσης.

4. Αναζήτηση στόχου σε συνεχή χώρο και χρόνο

Σύμφωνα με τον Foraker (2011), πολλά προβλήματα συνεχούς αναζήτησης χρόνου και χώρου διατυπώνονται ως γενικευμένα προβλήματα βέλτιστου ελέγχου, όπου πολλοί ερευνητές αναζητούν πολλαπλούς στόχους. Συγκεκριμένα, στην έρευνα που πραγματοποίησε και εστιάζουμε παρακάτω, διατυπώνονται προβλήματα στα οποία ελαχιστοποιείται η πιθανότητα ότι όλοι οι ερευνητές αποτυγχάνουν να εντοπίσουν έστω έναν από τους στόχους κατά τη διάρκεια του σχεδιασμού και προβλήματα στα οποία μεγιστοποιείται ο αναμενόμενος αριθμός στόχων που ανιχνεύονται. Κατασκευάζονται σχήματα διακριτοποίησης για την επίλυση αυτών των συνεχών προβλημάτων χρόνου και χώρου ώστε να αποδειχτεί ότι είναι συνεπείς προσεγγίσεις. Διερευνάται επίσης ο ρυθμός σύγκλισης των αλγορίθμων με βάση τα σχήματα διακριτοποίησης και παρέχονται αριθμητικά αποτελέσματα που δείχνουν ότι τα σχήματα διακριτοποίησης που αναπτύχθηκαν είναι υπολογιστικά εφαρμόσιμα, στη διαδικασία ανίχνευσης στόχων σε συνεχή χρόνο και χώρο.

Όσον αφορά την έννοια του συνεχούς χρόνου, Stone and Richardson (1974) και Stone (1977) εξάγουν τις απαραίτητες και επαρκείς συνθήκες για τη βέλτιστη κατανομή της αναζήτησης της πιθανότητας ανίχνευσης κατά τη διάρκεια ενός δεδομένου ορίζοντα σχεδιασμού. Ο Iida (1989) επεκτείνει το έργο των Stone και Richardson για να συμπεριλάβει το πρόβλημα της εύρεσης της βέλτιστης αναζήτησης σχεδίου που ελαχιστοποιεί τον αναμενόμενο κίνδυνο, ενώ εξάγει επίσης την κλειστή μορφή του βέλτιστου σχεδίου αναζήτησης στόχου που κινείται κατευθείαν από ένα σημείο και επιλέγει την πορεία και την ταχύτητά του τυχαία.

Ο Pursiheimo (1976) εισάγει ως απαραίτητη προϋπόθεση ώστε τα σχέδια αναζήτησης να είναι βέλτιστα, η πιθανότητα ανίχνευσης να μεγιστοποιηθεί και ο αναμενόμενος χρόνος αναζήτησης πρέπει να είναι ελάχιστος σε συνεχή χρόνο. Η προσέγγιση αυτή είναι αξιολογική αφού είναι η πρώτη που διατυπώνει το πρόβλημα αναζήτησης στόχου με υπό όρους ντετερμινιστική κίνηση ως βέλτιστο μοντέλο ελέγχου. Τα αποτελέσματα ωστόσο, έχουν θεωρητικό χαρακτήρα, καθώς δεν δημιουργούνται σχέδια αναζήτησης.

Στην περίπτωση που εξετάζουμε σε αυτό το κεφάλαιο, κατά την έρευνά του ο Joseph Carl Foraker (2011) αναπτύσσει μεθόδους για προβλήματα συνεχούς αναζήτησης χρόνου και χώρου ως γενικευμένα προβλήματα βέλτιστου ελέγχου, όπου οι ερευνητές αναζητούν στόχους που δεν διαφεύγουν και κινούνται σε μια περιοχή ενδιαφέροντος με διάσταση w , όπου w είναι θετικός ακέραιος. Συμπεριλαμβάνει στην έρευνα μια μεγάλη κατηγορία στόχων, όπου υποθέτει ότι οι στόχοι αυτοί ακολουθούν ντετερμινιστικές τροχιές, δεδομένων κάποιων πληροφοριών για τις αρχικές τους καταστάσεις ή άλλες παραμέτρους. Ασχολείται με δύο κατηγορίες στόχων, μία όπου οι στόχοι συντονίζουν τις ενέργειές τους και μία όπου οι στόχοι λειτουργούν ανεξάρτητα

5. Έρευνα σε συνεχή χώρο και χρόνο υπό περιορισμό

Σε αρκετές εφαρμογές της έρευνας, όπως αυτές που περιλαμβάνουν τη χρήση drones για την αναζήτηση κινούμενων στόχων, όπως λαθρεμπόρων που προσπαθούν να διασχίσουν τα σύνορα μιας χώρας ή χρήση μη επανδρωμένων υποβρυχίων σκαφών για τον εντοπισμό υποβρυχίων που προσπαθούν να περάσουν κάποιο φράγμα, είναι φυσικό να θεωρήσουμε ότι το σχέδιο εντοπισμού θα είναι σε συνεχή χώρο και χρόνο. Στις περισσότερες περιπτώσεις, τα σκάφη έρευνας θα έχουν και ορισμένους περιορισμούς τόσο στην ταχύτητά τους, στην ικανότητα τους να στρέφονται γρήγορα αλλά και σε άλλες παραμέτρους. Επομένως, κάποιες φορές είναι αναγκαίο να βρεθούν ιδανικά πλάνα έρευνας σε συνεχή χώρο και χρόνο που υπόκεινται σε κάποιους περιορισμούς. Η αναζήτηση αυτή μπορεί να αφορά την έρευνα ενός ή πολλαπλών στόχων κάθε φορά.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ

Συνοψίζοντας, με την ολοκλήρωση της παρούσας εργασίας επιχειρήθηκε η προσέγγιση της έννοιας της έρευνας κινούμενου στόχου σε συνεχή χώρο και χρόνο. Τα τελευταία χρόνια, καθώς η ανάγκη για την αναζήτηση στατικών και κινούμενων στόχων ολοένα και αυξάνεται παράλληλα η αναζήτησή τους τείνει να γίνει πλέον αυτοματοποιημένη. Διάφοροι τύποι μη επανδρωμένων θαλασσίων και εναέριων οχημάτων αναζητούν καθημερινά στόχους-απειλές για μια χώρα, όπως οι λαθρέμποροι στα σύνορα των κρατών, αλλά και θύματα ατυχημάτων ή ανθρώπων σε κίνδυνο σε στεριά και θάλασσα. Επομένως, πρέπει να μελετηθούν και να βελτιστοποιηθούν οι αλγόριθμοι εντοπισμού στόχου υπό ορισμένες παραμέτρους, ώστε να είναι σε θέση να εντοπιστούν οι στόχοι μιας έρευνας ακόμη και χωρίς την άμεση παρέμβαση του ανθρώπου. Άρα, η ανάπτυξη των μεθόδων έρευνας κινούμενου στόχου σε συνεχή χώρο και χρόνο είναι απαραίτητη στην εποχή μας καθώς η εξέλιξη των μέσων και ο σύγχρονος τρόπος εκτέλεσης των επιχειρήσεων, έχουν διαμορφώσει ένα νέο δόγμα στο σύγχρονο πεδίο της μάχης που απαιτεί υψηλή εξειδίκευση και γνώση των συστημάτων αυτών για την εξασφάλιση της αποτελεσματικότητας.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- Ασημάκης, Ν., & Αδάμ, Μ. (2016). Σήματα και Συστήματα.
- Benkoski, J., & Strojwas, A. J. (1991, June). The role of timing verification in layout synthesis. *In Proceedings of the 28th ACM/IEEE Design Automation Conference* (pp. 612- 619).
- Brown, S. (1980). Optimal search for a moving target in discrete time and space. *Operations Research*, 28, 1275–1289
- Dell, R. F., Eagle, J. N., Alves Martins, G. H., & Santos, A. G. (1996). Using multiple searchers in constrained- path, moving- target search problems. *Naval Research Logistics (NRL)*, 43(4), 463-480.
- Foraker III, J. C. (2011). Optimal search for moving targets in continuous time and space using consistent approximations. *NAVAL POSTGRADUATE SCHOOL MONTEREY CA*.
- Koopman, B. (1946). Search and screening, OEG report no. 56, the Summary Reports Group of the Columbia University Division of War Research 1946. *Technical report. Available from the Center for Naval Analyses*.
- Koopman, B. (1980). Search and screening: General principles with historical applications. New York: Pergamon.
- Lau, H., Huang, S., & Dissanayake, G. (2008). Discounted mean bound for the optimal searcher path problem with non-uniform travel times. *European Journal of Operations Research*, 190, 383–397.
- Iida, K. (1989). Optimal search plan minimizing the expected risk of the search for a target with conditionally deterministic motion. *Naval Research Logistics*, 36, 597–613.
- Pursiheimo, U., & Ruohonen, M. (1976). On the optimal search for a target whose motion is a diffusion process.
- Sato, H., & Royset, J. O. (2010). Path optimization for the resource-constrained searcher. *Naval Research Logistics (NRL)*, 57(5), 422-440.
- Stone, L. D., Royset, J. O., & Washburn, A. R. (2016). Search for moving targets in continuous space. *In Optimal Search for Moving Targets* (pp. 121-153).