

**Πολυτεχνείο Κρήτης  
Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών  
Χανιά, Κρήτη, Ελλάδα**



---

**Προσέγγιση Καταστατικού Νόμου Υλικού με Χρήση Τεχνικών  
Kriging, Σύγκριση με Νευρωνικά Δίκτυα και Εκτίμηση της  
Απόδοσης σε Αλγορίθμους Αριθμητικής Ομογενοποίησης**

---

**Διπλωματική Εργασία  
Σταύρος Κωνσταντίνος Νίκανδρος**

**Εξεταστική Επιτροπή:**

Καθ. Διονύσιος Χριστόπουλος

Καθ. Μιχαήλ Γ. Λαγουδάκης

Καθ. Γεώργιος Σταυρουλάκης (Σχολή ΜΠΔ)

Χανιά, 2023

# Περίληψη

Ο συνδυασμός της Αριθμητικής Μηχανικής με τον ευρύτερο τομέα των Big Data, διερευνάται όλο και περισσότερο τα τελευταία χρόνια. Σκοπεύει στον προσδιορισμό της μηχανικής απόκρισης μεγάλων κατασκευών για τις οποίες υπάρχουν μεν πολλά πειραματικά ή αριθμητικά δεδομένα, αλλά υπάρχει κάποιο κενό στη θεωρητική κατανόηση. Τέτοιες προσεγγίσεις χρησιμοποιούν πεπερασμένα στοιχεία και λεπτομερή μοντελοποίηση για κάθε δομικό στοιχείο της κατασκευής. Αυτό οδηγεί σε μεγάλα και περίπλοκα μοντέλα, τα οποία είναι δύσκολο να χρησιμοποιηθούν για ανάλυση κατασκευών. Ένας αλγόριθμος αριθμητικής ομογενοποίησης και πολυεπίπεδης ανάλυσης, σε συνδυασμό με πειραματικά δεδομένα υλικού που προέρχονται από μια γνωστή βάση δεδομένων, αποτελεί την λύση του προβλήματος. Αυτή η προσέγγιση περιέχει ένα βήμα, στο οποίο υπολογίζεται ο καταστατικός νόμος των υλικών της κατασκευής, δηλαδή η σχέση της μηχανικής απόκρισης των υλικών. Στην παρούσα διπλωματική εργασία εξετάζεται η εύρεση μιας προσέγγισης των σχέσεων των υλικών και συγκεκριμένα της καμπύλης τάσεων-παραμορφώσεων σε μη γραμμικά τμήματα μιας τοιχοποιίας. Η διερεύνηση εντάσσεται και αποτελεί μέρος της προσπάθειας να χρησιμοποιηθούν πειραματικά δεδομένα μέσα σε έναν αλγόριθμο αριθμητικής ομογενοποίησης και πολυεπίπεδης ανάλυσης στην μηχανική: συγκεκριμένα, την αντικατάσταση του κλασσικού υπολογισμού του καταστατικού νόμου με την χρήση μεταμοντέλων. Τα μεταμοντέλα αποτελούν αριθμητικά εργαλεία τα οποία υπολογίζουν τον καταστατικό νόμο υλικών, χρησιμοποιώντας μια βάση δεδομένων. Τα μεταμοντέλα που χρησιμοποιήσαμε είναι ένα τεχνητό νευρωνικό δίκτυο και η τεχνική γεωχωρικής προσέγγισης γνωστή ως Kriging. Σκοπός είναι η σύγκριση της χρήσης και των αποτελεσμάτων των δύο μεταμοντέλων, τα οποία χρησιμοποιούνται μέσα σε έναν αλγόριθμο αριθμητικής ομογενοποίησης, ώστε να επιλεγεί το καλύτερο μεταμοντέλο όσον αφορά την πολυπλοκότητα και την απόδοση. Τα αποτελέσματα αυτής της έρευνας, δείχνουν ότι το μεταμοντέλο Kriging, για λιγότερα δεδομένα εκπαίδευσης του μοντέλου από αυτό των Νευρωνικών Δικτύων, επιτυγχάνει καλύτερες προσεγγίσεις του καταστατικού νόμου υλικών. Αυτό αποτελεί ένα βήμα προς την περαιτέρω βελτιστοποίηση του αλγορίθμου αριθμητικής ομογενοποίησης.



**Technical University of Crete  
School of Electrical and Computer Engineering  
Chania, Crete, Greece**



---

**Constitutive Material Law Approximation using Kriging,  
Comparison to Neural Networks and Evaluation of  
Performance within Numerical Homogenization**

---

**Diploma Thesis  
Stavros Konstantinos Nikandros**

**Examination Committee:**

Prof. Dionysios Christopoulos

Prof. Michail G. Lagoudakis

Prof. Georgios Stavroulakis (School of PEM)

Chania, 2023

# Abstract

The combination of Computational Mechanics with the broader field of Big Data has been increasingly explored in recent years. Its aim is to determine the mechanical response of large structures for which there is abundant experimental or numerical data, but a gap in theoretical understanding. Such approaches utilize finite elements and detailed modeling for each structural element of the construction. This leads to large and complex models that are difficult to use for structural analysis. An algorithm for computational homogenization and multi-scale analysis, in combination with experimental material data from a known database, presents a solution to this problem. This approach involves a step where the constitutive law of the materials in the construction, i.e., the relationship of mechanical response, is calculated. This thesis examines the development of an approach to characterize material relationships, specifically the stress-strain curves, in nonlinear segments of a masonry wall. This research is part of an effort to incorporate experimental data into a computational homogenization and multi-scale analysis algorithm in engineering, specifically by replacing the classical computation of the constitutive law with the use of metamodels. The metamodels are numerical tools that calculate the constitutive law of materials using a database. The metamodels we employed are an artificial neural network and the geostatistical technique known as Kriging. The objective is to compare the use and results of these two metamodels within a computational homogenization algorithm to select the best metamodel in terms of complexity and performance. The results of this research show that the Kriging metamodel, with fewer training data than that of Neural Networks, achieves better approximations of the material constitutive law. This constitutes a step towards further optimizing the computational homogenization algorithm.

## Περιεχόμενα

1) Εισαγωγή.....	7
1.1) Δεδομένα και η ανάλυση τους .....	9
1.1.1 Μορφή των δεδομένων .....	9
1.1.2 Προέλευση των δεδομένων .....	11
1.1.3 Κατανόηση δεδομένων .....	12
2) Προετοιμασία των δεδομένων.....	14
2.1 Πολλαπλή γραμμική παλινδρόμηση .....	14
2.2 Πολυώνυμο n-τάξης.....	15
3) Kriging .....	16
3.1 Θεωρία Kriging .....	16
3.2 Variograms.....	18
3.2.1 Ανάλυση των variograms.....	20
3.3 Αποτελέσματα Kriging .....	22
3.4 Συμπεράσματα Kriging.....	29
4) Νευρωνικά Δίκτυα .....	30
4.1 Θεωρία Νευρωνικών Δικτύων .....	30
4.2 Το Νευρωνικό Δίκτυο που χρησιμοποιούμε .....	32
4.3 Αποτελέσματα Νευρωνικών Δικτύων.....	33
4.4 Συμπεράσματα Νευρωνικών Δικτύων .....	34
5) Σύγκριση των αποτελεσμάτων.....	35
5.1 Συγκρίσεις διαγραμμάτων .....	35
5.2 Συμπεράσματα με βάση τα διαγράμματα .....	42
5.3 Σύγκριση των Mean Squared Errors (MSE) .....	43
5.3.1 Θεωρία Mean Squared Error (MSE).....	43
5.4 Αποτελέσματα με βάση το MSE .....	44
5.5 Συμπεράσματα με βάση το MSE .....	45
Προγράμματα και κώδικας .....	47
Βιβλιογραφία.....	48

# Κεφάλαιο 1

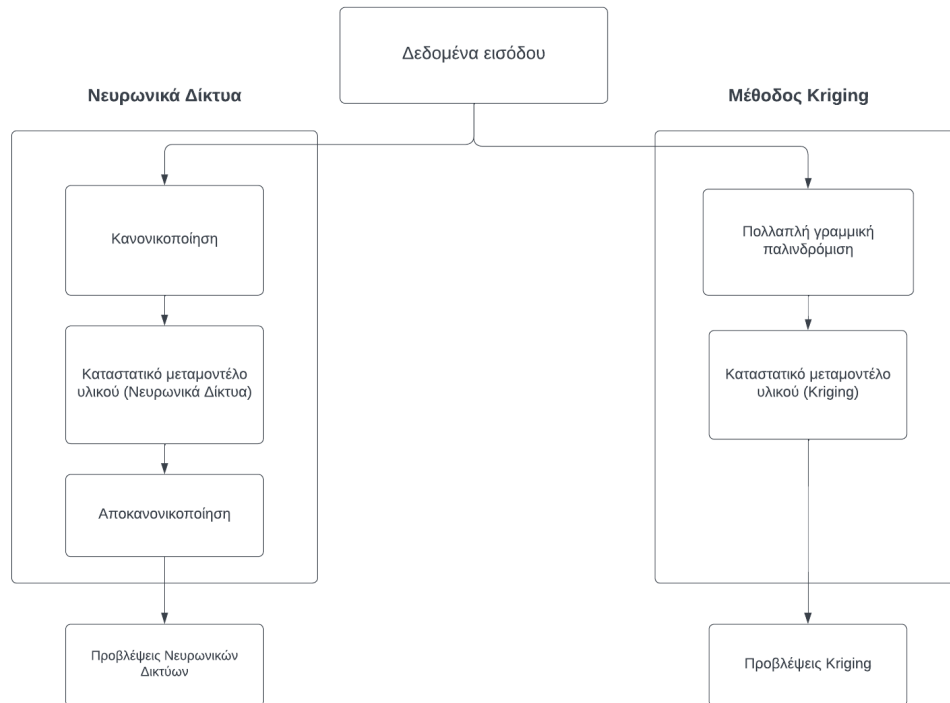
## 1) Εισαγωγή

Η παρούσα διπλωματική εργασία διαπραγματεύεται το να βρεθεί μια προσέγγιση για τις σχέσεις τάσεων-παραμορφώσεων σε μη γραμμικά δοκίμια υλικού. Για τα δοκίμια αυτά, υπάρχουν διακριτές τιμές από πειράματα ή αριθμητικές προσομοιώσεις.

Για τις προσεγγίσεις αυτές, στην έρευνα μας χρησιμοποιούνται δύο μεθοδολογίες ως μεταμοντέλα. Αυτές είναι τα Νευρωνικά Δίκτυα και η μέθοδος Kriging (Εικ1).

Αυτό που μας ενδιαφέρει είναι η σύγκριση των προσεγγίσεων αυτών με τα νευρωνικά δίκτυα και την υλοποίηση Kriging, με σκοπό την προσέγγιση ενός καταστατικού νόμου τάσεων-παραμορφώσεων, ο οποίος χρησιμοποιείται με τον ίδιο τρόπο, μέσα σε ένα σχήμα αριθμητικής ομογενοποίησης.

Το αναμενόμενο αποτέλεσμα είναι ένα μεταμοντέλο του καταστατικού νόμου το οποίο μπορεί να ενσωματωθεί σε επιλύτες πεπερασμένων στοιχείων για την ανάλυση κατασκευών, με την άμεση αξιοποίηση διαθέσιμων αριθμητικών ή πειραματικών δεδομένων, χωρίς την ανάγκη χρήσης συγκεκριμένου μαθηματικού μοντέλου της απόκρισης του υλικού. Χρησιμοποιείται επίσης για υλοποίηση αλγορίθμων αριθμητικής ομογενοποίησης και ανάλυσης πολλών κλιμάκων.



**Εικ1:** Μια σύντομη περιγραφή των βημάτων και της μορφής της υλοποίησης των μεταμοντέλων που χρησιμοποιήσαμε. Στα αριστερά έχουμε την μεθοδολογία με τα Νευρωνικά Δίκτυα και στα δεξιά την μεθοδολογία με Kriging.



## **1.1) Δεδομένα και η ανάλυση τους**

### **1.1.1 Μορφή των δεδομένων**

Τα δεδομένα με τα οποία θα ασχοληθούμε για αυτή την εργασία αποτελούν ένα σύνολο δεδομένων, το οποίο περιέχει διανύσματα τάσεων και παραμορφώσεων και προέρχονται από τους αντίστοιχους τανυστές τάσεων και παραμορφώσεων πάνω σε δομικά υλικά τοιχοποιίας.

Πιο συγκεκριμένα, οι τάσεις και οι παραμορφώσεις έχουν τη μορφή 3x1 διανυσμάτων αντίστοιχα και ο συνολικός αριθμός των δεδομένων είναι 9261.

Όλα αυτά βρίσκονται σε ένα φύλλο εργασίας excel, το οποίο έχει τη μορφή 9261x6, όπου οι πρώτες 3 στήλες αποτελούν τα διανύσματα των παραμορφώσεων και οι υπόλοιπες 3 αποτελούν τα διανύσματα τάσεων.

Παρακάτω φαίνεται ένα μέρος από το σύνολο δεδομένων μας.

## 1. Δεδομένα και η ανάλυση τους

I3						
	A	B	C	D	E	F
1	-0.01000	-0.01000	-0.01000	-43409100.00	-34501600.00	-9707780.00
2	-0.01000	-0.01000	-0.00900	-43288000.00	-34377600.00	-9075440.00
3	-0.01000	-0.01000	-0.00800	-43171900.00	-34298900.00	-8379010.00
4	-0.01000	-0.01000	-0.00700	-43062400.00	-34264700.00	-7608000.00
5	-0.01000	-0.01000	-0.00600	-42961900.00	-34270800.00	-6753120.00
6	-0.01000	-0.01000	-0.00500	-42872600.00	-34309200.00	-5809010.00
7	-0.01000	-0.01000	-0.00400	-42796300.00	-34368200.00	-4776990.00
8	-0.01000	-0.01000	-0.00300	-42735000.00	-34434000.00	-3663880.00
9	-0.01000	-0.01000	-0.00200	-42690200.00	-34493200.00	-2482670.00
10	-0.01000	-0.01000	-0.00100	-42662800.00	-34533700.00	-1254240.00
11	-0.01000	-0.01000	0.00000	-42653500.00	-34548300.00	0.00
12	-0.01000	-0.01000	0.00100	-42662800.00	-34533700.00	1254240.00
13	-0.01000	-0.01000	0.00200	-42690200.00	-34493200.00	2482670.00
14	-0.01000	-0.01000	0.00300	-42735000.00	-34434000.00	3663880.00
15	-0.01000	-0.01000	0.00400	-42796300.00	-34368200.00	4776990.00
16	-0.01000	-0.01000	0.00500	-42872600.00	-34309200.00	5809010.00
17	-0.01000	-0.01000	0.00600	-42961900.00	-34270800.00	6753120.00
18	-0.01000	-0.01000	0.00700	-43062400.00	-34264700.00	7608000.00
19	-0.01000	-0.01000	0.00800	-43171900.00	-34298900.00	8379010.00
20	-0.01000	-0.01000	0.00900	-43288000.00	-34377600.00	9075440.00
21	-0.01000	-0.01000	0.01000	-43409100.00	-34501600.00	9707780.00
22	-0.01000	-0.00900	-0.01000	-42969700.00	-31657800.00	-9542820.00
23	-0.01000	-0.00900	-0.00900	-42846200.00	-31496000.00	-8956260.00
24	-0.01000	-0.00900	-0.00800	-42726500.00	-31383300.00	-8308380.00
25	-0.01000	-0.00900	-0.00700	-42612900.00	-31322100.00	-7584310.00
26	-0.01000	-0.00900	-0.00600	-42507500.00	-31310100.00	-6771250.00
27	-0.01000	-0.00900	-0.00500	-42413100.00	-31340500.00	-5858650.00
28	-0.01000	-0.00900	-0.00400	-42331900.00	-31400500.00	-4844130.00

Μικρό απόσπασμα της βάσης δεδομένων μας

## 1. Δεδομένα και η ανάλυση τους

### 1.1.2 Προέλευση των δεδομένων

Τα προηγούμενα δεδομένα προκύπτουν από την φόρτιση ενός κομματιού τοιχοποιίας, με διαφορετικές επιβεβλημένες παραμορφώσεις και υπολογισμό των αντίστοιχων τάσεων με χρήση της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων (G.Drosopoulos & G.Stavroulakis, 2022).

Το σχήμα της τοιχοποιίας είναι αυτό που φαίνεται στην Εικ.2 παρακάτω:

6:10 • G. A. Drosopoulos and G. E. Stavroulakis

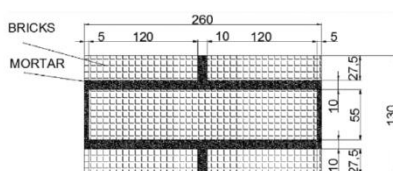


Fig. 4. Dimensions (mm) of the representative volume element adopted for masonry.

Table 1. Material Properties for Bricks and the Mortar Joints of the Mesoscopic Structure (RVE)

	Young's modulus (GPa)	Poisson's ratio	Tensile strength (MPa)	Compressive strength (MPa)
Bricks	4,865	0,09	-	-
Mortar joints	1,180	0,06	0,9	3,2

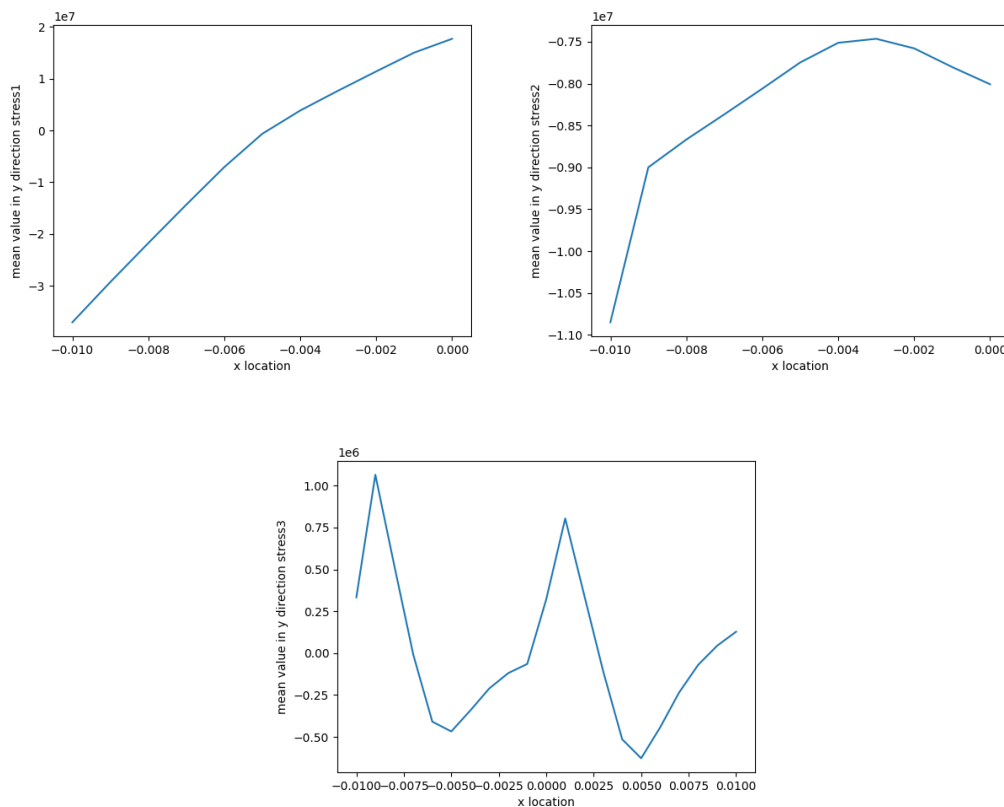
Εικ.2 Σχήμα της τοιχοποιίας που προέρχεται από το άρθρο Data-driven Computational Homogenization Using Neural Networks: FE<sup>2</sup>-NN Application on Damaged Masonry

## 1. Δεδομένα και η ανάλυση τους

### 1.1.3 Κατανόηση δεδομένων

Πριν προχωρήσουμε με την επεξεργασία, έπρεπε να δούμε αν υπάρχει κάποιου είδους τάσης στα δεδομένα μας. Τάση ή αλλιώς trend, ονομάζεται η προδιάθεση των δεδομένων να έχουν μια γενική κατεύθυνση προς τα πάνω, προς τα κάτω, ή ακόμα και να είναι απλά επίπεδη (δηλαδή χωρίς σημαντικές αλλαγές) (Hristopoulos, 2020). **Η τάση αυτή δεν θα πρέπει να συγχέεται με την τάση (Strain), η οποία αποτελεί διάνυσμα των δεδομένων μας.**

Για να απεικονίσουμε τυχόν τάσεις στα δεδομένα μας, δημιουργήσαμε τα εξής διαγράμματα που φαίνονται στην Εικ.3



Εικ3 Το σχήμα αυτό στον κατακόρυφο άξονα δείχνει την μέση τιμή της κάθε συνιστώσας της τάσης στην κάθετη κατεύθυνση και στον οριζόντιο άξονα την τιμή της αντίστοιχης παραμόρφωσης. Σκοπός των διαγραμμάτων είναι η απεικόνιση της τάσης στα δεδομένα, κυρίως στην πρώτη και δεύτερη συνιστώσα τάσης

## 1. Δεδομένα και η ανάλυση τους

Τα διαγράμματα αυτά έχουν στον κατακόρυφο άξονα την μέση τιμή της κάθε συνιστώσας της τάσης στην κάθετη κατεύθυνση ( $y$ ) και στον οριζόντιο άξονα την τοποθεσία της τιμής αυτής, για κάθε μια από τις τρεις συνιστώσες των παραμορφώσεων.

Αυτό που βλέπουμε από τα διαγράμματα, είναι ότι παρουσιάζεται μια τάση προς τα πάνω στην πρώτη και δεύτερη συνιστώσα τάσης, οπότε επόμενο βήμα είναι να αφαιρέσουμε με κάποιο τρόπο αυτή την τάση.

Στο επόμενο κεφάλαιο παρουσιάζονται οι τρόποι με τους οποίους μπορεί να γίνει αυτή η αφαίρεση της τάσης από τα δεδομένα μας.

## Κεφάλαιο 2

### 2) Προετοιμασία των δεδομένων

#### 2.1 Πολλαπλή γραμμική παλινδρόμηση

Η πολλαπλή γραμμική παλινδρόμηση ή αλλιώς Multi-linear regression (Hayes, 2023), είναι μια στατιστική μέθοδος μοντελοποίησης η οποία χρησιμοποιείται για την ανάλυση των σχέσεων μεταξύ πολλαπλών ανεξάρτητων (independent) μεταβλητών και μιας εξαρτημένης (dependent) μεταβλητής. Στην περίπτωση μας, ως εξαρτημένη μεταβλητή, εννοούμε την αντίστοιχη συνιστώσα της τάσης, και ως ανεξάρτητες μεταβλητές, θεωρούμε τις αντίστοιχες μεταβλητές παραμορφώσεων.

Σκοπός της, είναι να βρει την καλύτερη «γραμμή» (αν φανταστούμε ότι τα δεδομένα μας έχουν μια συγκεκριμένη απεικόνιση, σαν «γραμμή» εννοούμε την γραμμή που περνάει καλύτερα ανάμεσα από αυτά), ώστε να ελαχιστοποιούνται οι διαφορές των προβλέψεων της και των πραγματικών εξαρτημένων μεταβλητών.

Η συνάρτηση της έχει την εξής μορφή:

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i_1} + \beta_2 x_{i_2} + \dots + \beta_p x_{i_p} + \varepsilon \quad (1)$$

Όπου

$y_i$  = εξαρτημένη μεταβλητή (στην περίπτωση μας οι συνιστώσες τάσης)

$x_i$  = ανεξάρτητη μεταβλητή (στην περίπτωση μας οι συνιστώσες παραμορφώσεων)

$\beta_0$  = y-intercept

$\beta_p$  = συντελεστές της κλίσης

$\varepsilon$  = υπόλοιπα

$i$  = ο αριθμός των παρατηρήσεων

### 2.2 Πολυώνυμο n-τάξης

Για περαιτέρω αποτελεσματική αφαίρεση των τάσεων από τα δεδομένα μας, σε συνδυασμό με την πολλαπλή γραμμική παλινδρόμηση, χρησιμοποιήσαμε και πολυώνυμα n-τάξης (Khumta, 2018), τα οποία εφαρμόζονται στα δεδομένα μας.

Η γενική εξίσωση των πολυωνύμων έχει την εξής μορφή:

$$f(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + \dots + c_nx^n$$

όπου

$c_n$ : οι συντελεστές

$n$ : ο αριθμός της τάξης

Τα πολυώνυμα n-τάξης βοηθάνε στην εύρεση μη-γραμμικών σχέσεων μεταξύ τάσεων και παραμορφώσεων. Η εφαρμογή των πολυωνύμων στην πολλαπλή γραμμική παλινδρόμηση έχει σκοπό να δημιουργήσει ένα μοντέλο το οποίο βρίσκει μη-γραμμικά μοτίβα, όπως οι τάσεις.

Οι συντελεστές των πολυωνύμων υπολογίζονται μέσω συναρτήσεων από την βιβλιοθήκη PolynomialFeatures της Python. Αναλυτικότερα, θα ασχοληθούμε με τους συντελεστές στην σελίδα 20.

Αυτός ο συνδυασμός των μεθόδων λοιπόν, μπορεί να βοηθήσει στην αφαίρεση των τάσεων από τα δεδομένα μας.

Αν από την εξίσωση (1) αφαιρέσουμε τις πραγματικές τιμές των αντίστοιχων συνιστώσων της τάσης, αυτά που μας μένουν είναι τα υπόλοιπα.

Με αυτά πλέον, θεωρώντας τα ως τα πραγματικά μας δεδομένα μπορούμε να αρχίσουμε να δουλεύουμε και να προχωρήσουμε με την μέθοδο Kriging, αφού πλέον έχουμε αφαιρέσει την τάση από τα δεδομένα.

## Κεφάλαιο 3

### 3) Kriging

#### 3.1 Θεωρία Kriging

Η μέθοδος Kriging (Olea, 2009) είναι μια μορφή γενικευμένης γραμμικής παλινδρόμησης με σκοπό την δημιουργία ενός βέλτιστου χωρικού εκτιμητή.

Αυτό που κάνει είναι να προβλέπει τιμές σε περιοχές που δεν έχουμε δεδομένα (μη δειγματοληπτημένες), χρησιμοποιώντας τα γειτονικά δεδομένα στα οποία έχουμε πληροφορία (δειγματοληπτημένες).

Συγκεκριμένα, χρησιμοποιώντας γειτονικά δεδομένα για τα οποία ξέρουμε την τιμή τους, μπορεί να κάνει προβλέψεις σε περιοχές που δεν έχουν καμία πληροφορία.

Η εξίσωση που ακολουθεί η μέθοδος Kriging είναι η παρακάτω:

$$Z_{OK}^*(s_0) = \sum_{i=1}^k \lambda_i Z(s_i)$$

όπου

$Z_{OK}^*(s_0)$ : η εκτίμηση στο χωρικό σημείο  $s_0$

$s_i$ : η περιοχή του δείκτη  $i$

$k$ : ο αριθμός των παρατηρήσεων που λαμβάνουμε για την εκτίμηση στο σημείο  $s_0$

$\lambda_i$ : ένα γραμμικό βάρος



### 3. Kriging

Η μέθοδος Kriging και τα βήματα που ακολουθήσαμε είναι τα εξής:

- 1) Από τα 9261 δεδομένα, χρησιμοποιήσαμε τα μισά (4630) δεδομένα για να γίνει η εκπαίδευση του μοντέλου Kriging.
- 2) Στην συνέχεια, χρησιμοποιήσαμε τα υπόλοιπα για να ελέγξουμε το πόσο ικανοποιητικές είναι η προβλέψεις σε αυτές τις περιοχές.
- 3) Έπειτα, αρχίζουμε και μειώνουμε τα δεδομένα με τα οποία κάναμε την εκπαίδευση του μοντέλου Kriging για να δούμε πως θα επηρεαστούν οι προβλέψεις.

Αυτό το κάναμε για κάθε συνιστώσα της τάσης, δηλαδή τρεις φορές.

Στην συνέχεια, πέρα από τα δεδομένα εκπαίδευσης που χρησιμοποιούμε ένας άλλος παράγοντας που θα επηρεάσει την ακρίβεια των προβλέψεων μας αποτελεί και η παραμετροποίηση του βαριογράμματος (variogram), του οποίου την σημασία και σκοπό θα τον εξετάσουμε στις επόμενες ενότητες.

**Σημείωση:** Στην περίπτωση εκπαίδευσης του μοντέλου Kriging, όταν εννοούμε ότι πήραμε τα μισά δεδομένα, εννοούμε ότι στο εύρος από το πρώτο δεδομένο μέχρι το 9261, με ένα βήμα ίσο με το 2 πήραμε τα μισά δεδομένα για εκπαίδευση και όσα δεδομένα έμειναν, θεωρούνται μη δειγματοληπτημένα.

Αυτό γίνεται γιατί με βάση την θεωρία Kriging, όπως και με τα Νευρωνικά που θα δούμε και παρακάτω, οι τιμές για την εκπαίδευση του μοντέλου πρέπει να βρίσκονται εντός του εύρους των τιμών με τις οποίες θα ελέγξουμε το μοντέλο, αλλιώς οι προβλέψεις δεν θα είναι ακριβείς. Οπότε, λόγω της φύσης των δεδομένων μας τα οποία είναι σε αύξουσα αριθμητική σειρά κατανεμημένα, δεν μπορούμε να πάρουμε το πρώτο μισό για εκπαίδευση και το δεύτερο μισό για έλεγχο (Cedrez, 2023).

Συνεχίζοντας λοιπόν με την μέθοδο Kriging πριν από όλα αυτά έπρεπε να βρούμε τα variograms.

### 3. Kriging

## 3.2 Variograms

Το πρώτο βήμα στην υλοποίηση της μεθόδου Kriging, είναι η εύρεση ενός κατάλληλου variogram.

Τα variograms (Olea, 2009), είναι διαγράμματα τα οποία δείχνουν την μεταξύ συσχέτιση των δεδομένων μας, σε συνάρτηση με την ευκλείδεια μεταξύ τους απόσταση.

Η εξίσωση των variograms έχουν την εξής μορφή (Olea, 2009):

$$\gamma(h) = \frac{1}{2n(h)} \sum_{i=1}^{n(h)} [z(s_i) - z(s_i + h)]^2$$

όπου

$\gamma(h)$ : η τιμή του variogram

$h$ : το lag, όπου είναι η απόσταση μεταξύ δύο σημείων μετρημένο σε μέτρα

$n(h)$ : ο αριθμός των ζευγαριών με απόσταση  $h$

$z(s_i)$ : δείγμα στο σημείο  $s_i$

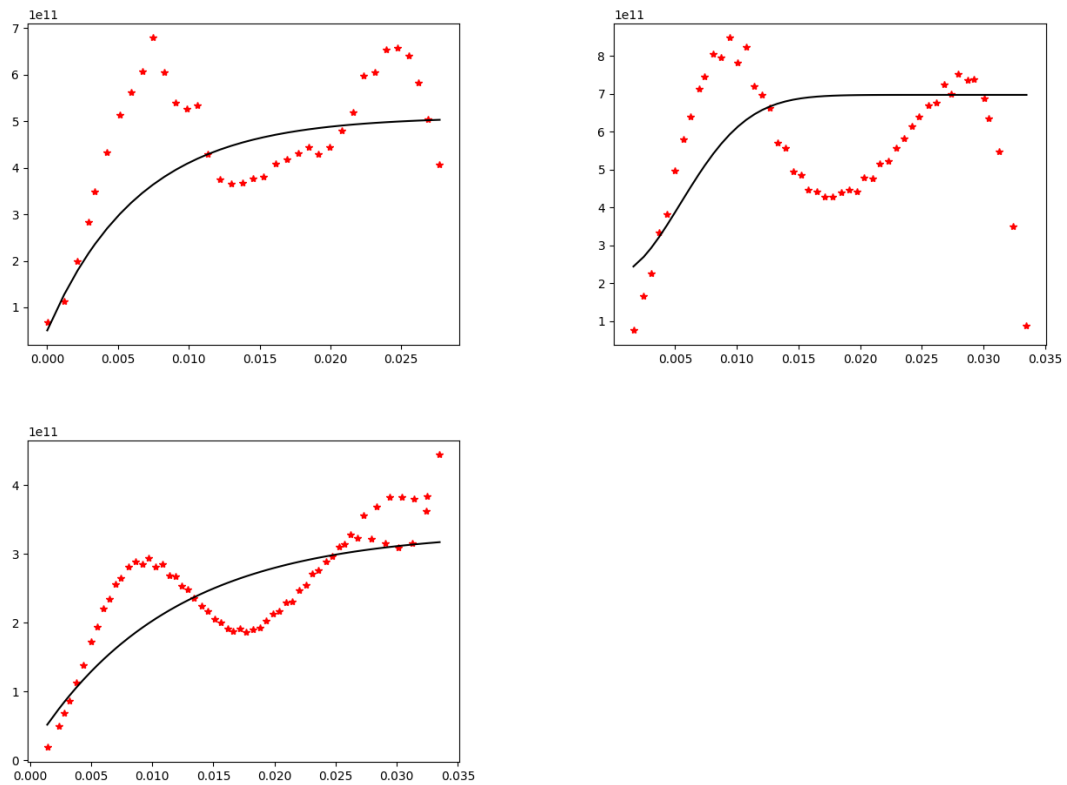
Από την παραπάνω εξίσωση, παρατηρείται ότι όσο δύο σημεία δεδομένων βρίσκονται κοντά μεταξύ τους, η τιμή του variogram  $\gamma$  είναι μικρότερη και επομένως αυτά τα δεδομένα έχουν μεγαλύτερη συσχέτιση μεταξύ τους, ενώ όσο αυξάνεται η απόσταση μεταξύ τους υπάρχει λιγότερη συσχέτιση μεταξύ αυτών.

Στόχος λοιπόν είναι να βρεθεί το κατάλληλο variogram, ώστε έτσι οι προβλέψεις Kriging να είναι βέλτιστες.

Δημιουργήσαμε λοιπόν τρία variograms, ένα για κάθε συνιστώσα των υπολοίπων των τάσεων και σαν χωρικά σημεία των δεδομένων θεωρήσαμε ολόκληρο το διάνυσμα παραμορφώσεων.

### 3. Kriging

Τα variograms κάθε συνιστώσας για όλα τα δεδομένα, είναι με την σειρά τα εξής:



Ο κατακόρυφος άξονας δείχνει την τιμή της  $\gamma(h)$  και ο οριζόντιος άξονας δείχνει τα lags. Οι κόκκινες κουκίδες δείχνουν το  $n(h)$  και η μαύρη γραμμή δείχνει το κατάλληλο variogram.

Οι καμπύλες περνάνε περίπου από την μέση τιμή του variogram.

### 3. Kriging

#### 3.2.1 Ανάλυση των variograms

Για το variogram της πρώτης συνιστώσας τάσης:

Χρησιμοποίησα πολυώνυμο 2<sup>ης</sup> τάξης.

Μοντέλο variogram: εκθετικό

Αριθμός των lags: 36

Η εξίσωση του πολυωνύμου έχει την εξής μορφή (Khurma, 2018):

$$f(x, y, z) = b_0 + b_1x + b_2y + b_3z + b_4x^2 + b_5xy + b_6xz + b_7y^2 + b_8yz + b_9z^2$$

Όπου τα b είναι οι συντελεστές, οι οποίοι είναι οι εξής με την σειρά:

```
Coefficients1: [ 0.00000000e+00 9.91878295e+03 -3.02515348e+02 1.69037294e+01  
-1.29452213e+07 -7.95940382e+06 -2.39064701e+03 -1.35820621e+07  
1.82684825e+02 -1.34813700e+07]
```

Το variogram της δεύτερης συνιστώσας τάσης:

Χρησιμοποίησα πολυώνυμο 2<sup>ης</sup> τάξης.

Μοντέλο variogram: Γκαουσιανό

Αριθμός lags: 50

Η εξίσωση του πολυωνύμου έχει την ίδια μορφή με την πάνω.

Οι συντελεστές είναι οι εξής με την σειρά:

```
Coefficients2: [ 0.00000000e+00 -1.16777611e+03 1.95965793e+03 2.08832852e+01  
-1.84699186e+07 -6.70798846e+06 1.03130849e+03 -1.85467507e+07  
-8.98665466e+02 -1.92217215e+07]
```

Για το variogram της τρίτης συνιστώσας τάσης:

Χρησιμοποίησα πολυώνυμο 4<sup>ης</sup> τάξης, interaction\_only.

Μοντέλο variogram: εκθετικό

Αριθμός lags: 60

Η εξίσωση του πολυωνύμου έχει την εξής μορφή (Khurma, 2018):

$$f(x, y, z) = b_0 + b_1x + b_2y + b_3z + b_4xy + b_5xz + b_6yz + b_7xyz$$

Λόγω της επιλογής interaction\_only στην συνάρτηση, αφαιρούνται οι παράγοντες που είναι υψωμένοι σε δύναμη και αφήνονται μόνο οι αλληλεπιδράσεις των παραγόντων.

### 3. Kriging

Οι συντελεστές είναι οι εξής με την σειρά:

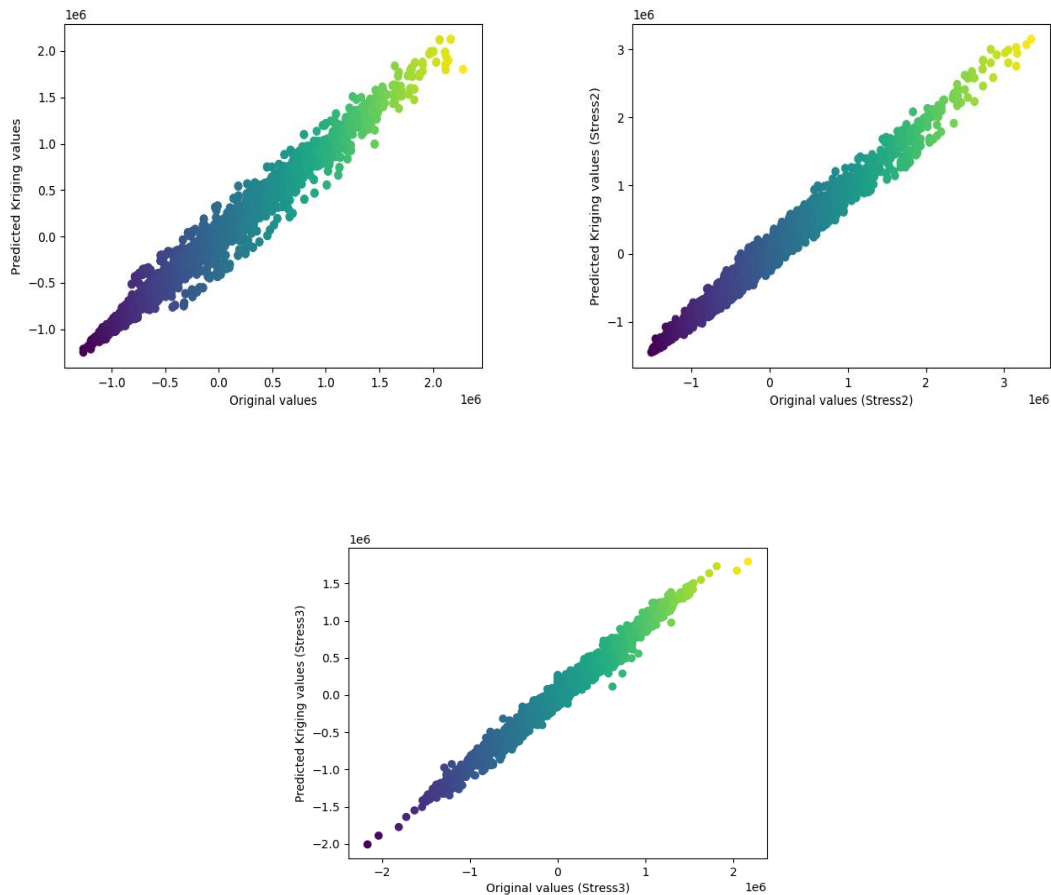
```
Coefficients3: [ 0.00000000e+00 -2.42255935e+01  7.67589703e+00  3.46937459e+03  
 2.72763289e+03 -7.31332255e+06 -1.13513521e+07  1.84624241e+09]
```

Τα variograms που βγάλαμε, είναι τα πιο ικανοποιητικά, για τα εργαλεία που διαθέτουμε.

### 3. Kriging

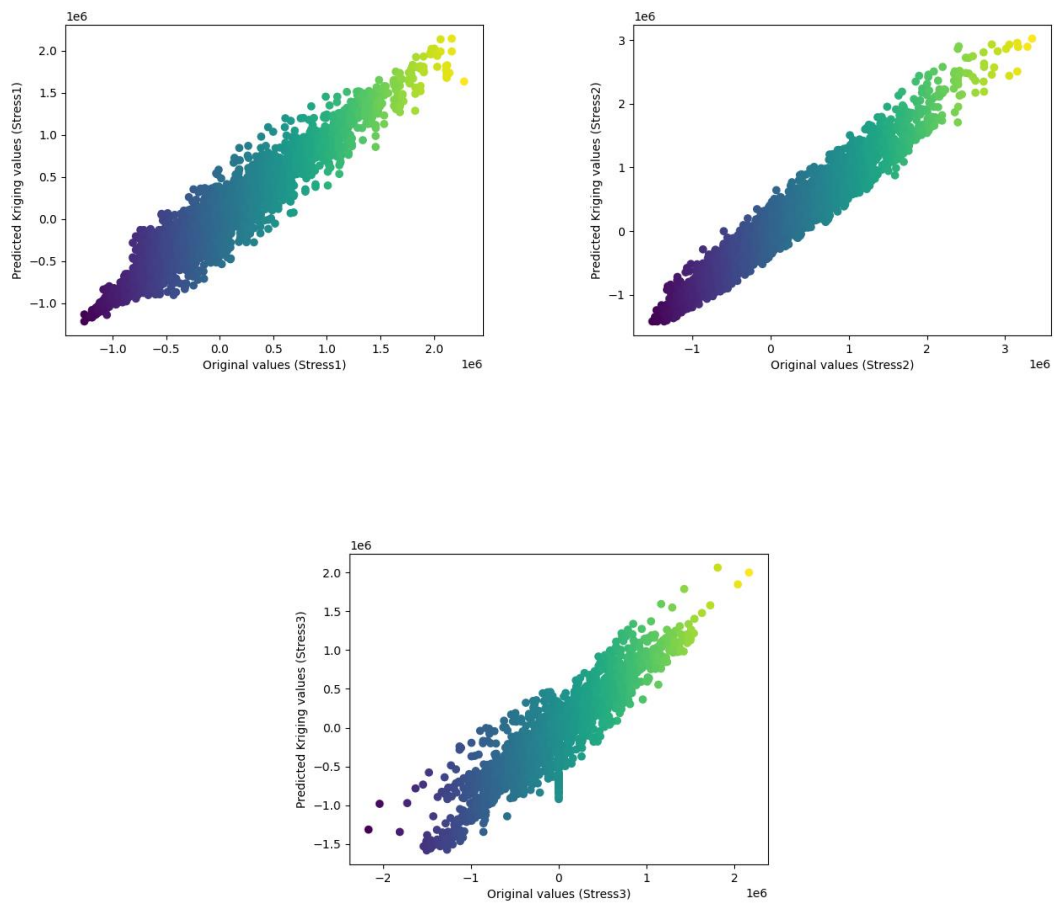
## 3.3 Αποτελέσματα Kriging

Παρακάτω, παρουσιάζονται μερικά διαγράμματα που συγκρίνουν τις προβλέψεις Kriging με τα κανονικά δεδομένα, ώστε να έχουμε και μια πρώτη εικόνα των δεδομένων. Τα διαγράμματα στον οριζόντιο άξονα απεικονίζουν τις πραγματικές τιμές των τάσεων και στον κατακόρυφο άξονα τις προβλέψεις των τάσεων αυτών.



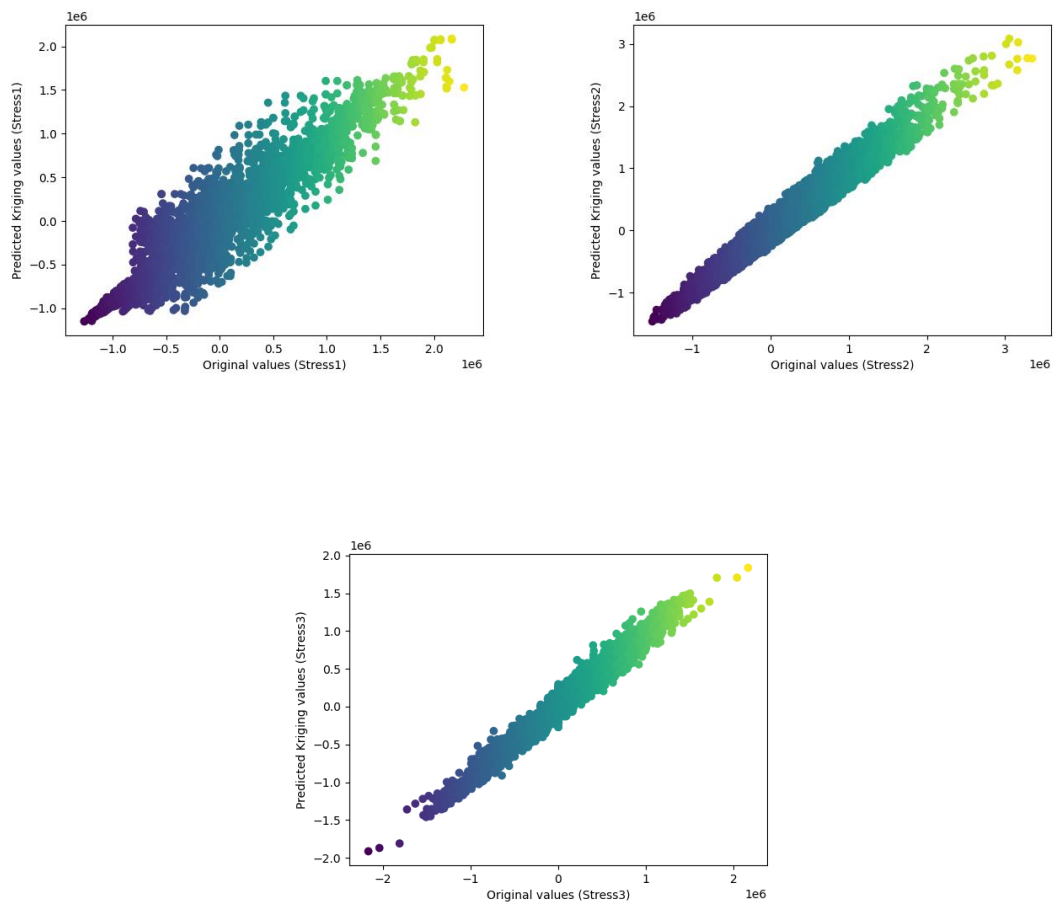
Για 4630 δεδομένα εκπαίδευσης παρατηρείται μικρή απόκλιση των προβλέψεων των τάσεων από τις αυθεντικές τιμές.

### 3. Kriging



Για 3087 δεδομένα εκπαίδευσης παρατηρείται αυξανόμενη αλλά μικρή απόκλιση των προβλέψεων των τάσεων από τις αυθεντικές τιμές

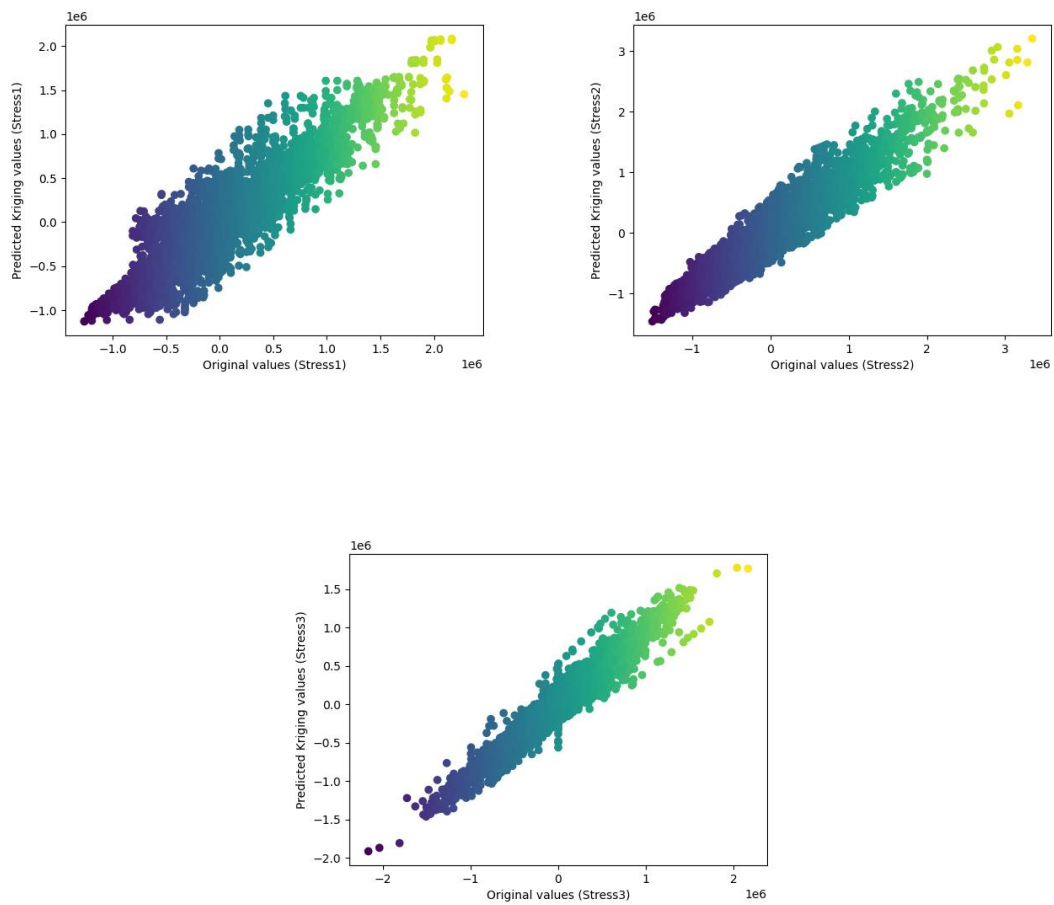
### 3. Kriging



Για 2315 δεδομένα εκπαίδευσης παρατηρείται επιπλέον αυξανόμενη απόκλιση των προβλέψεων των τάσεων από τις αυθεντικές τιμές

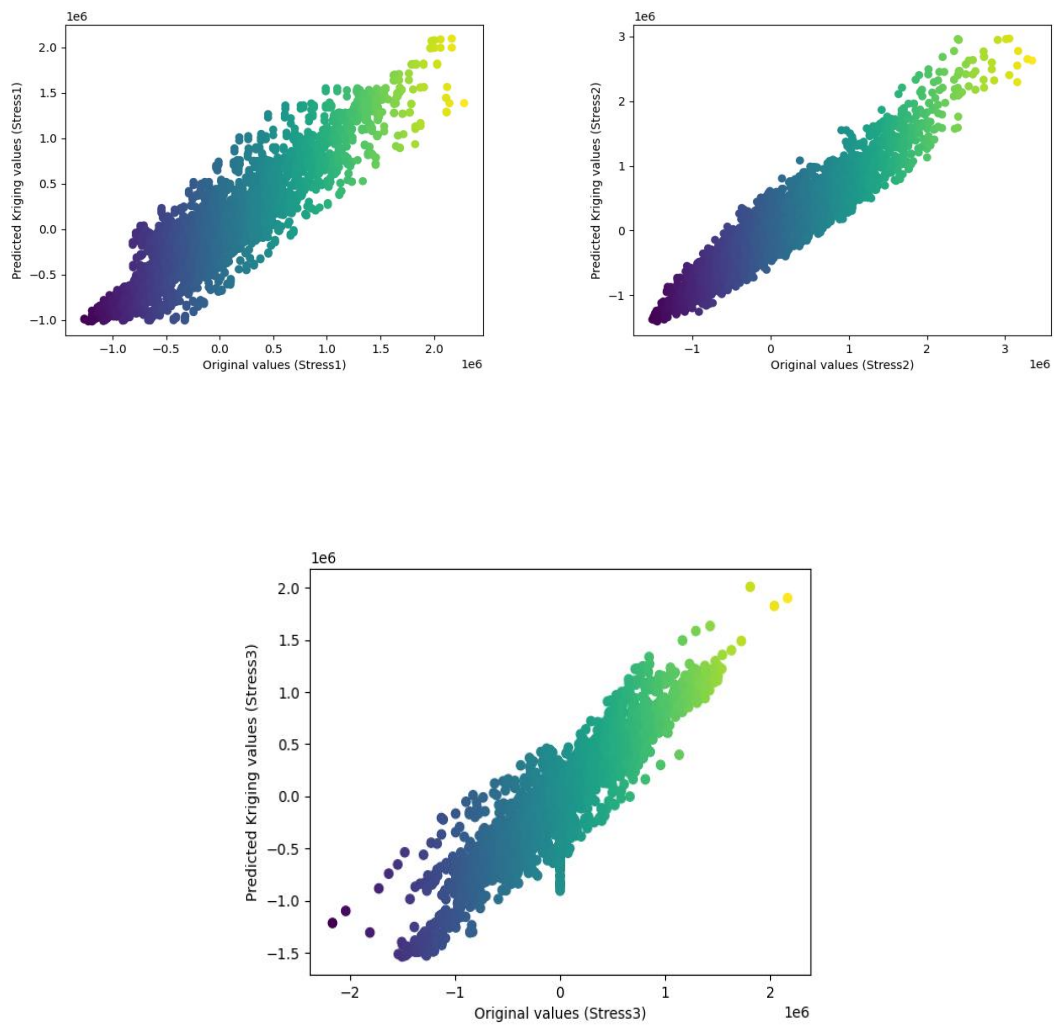


### 3. Kriging



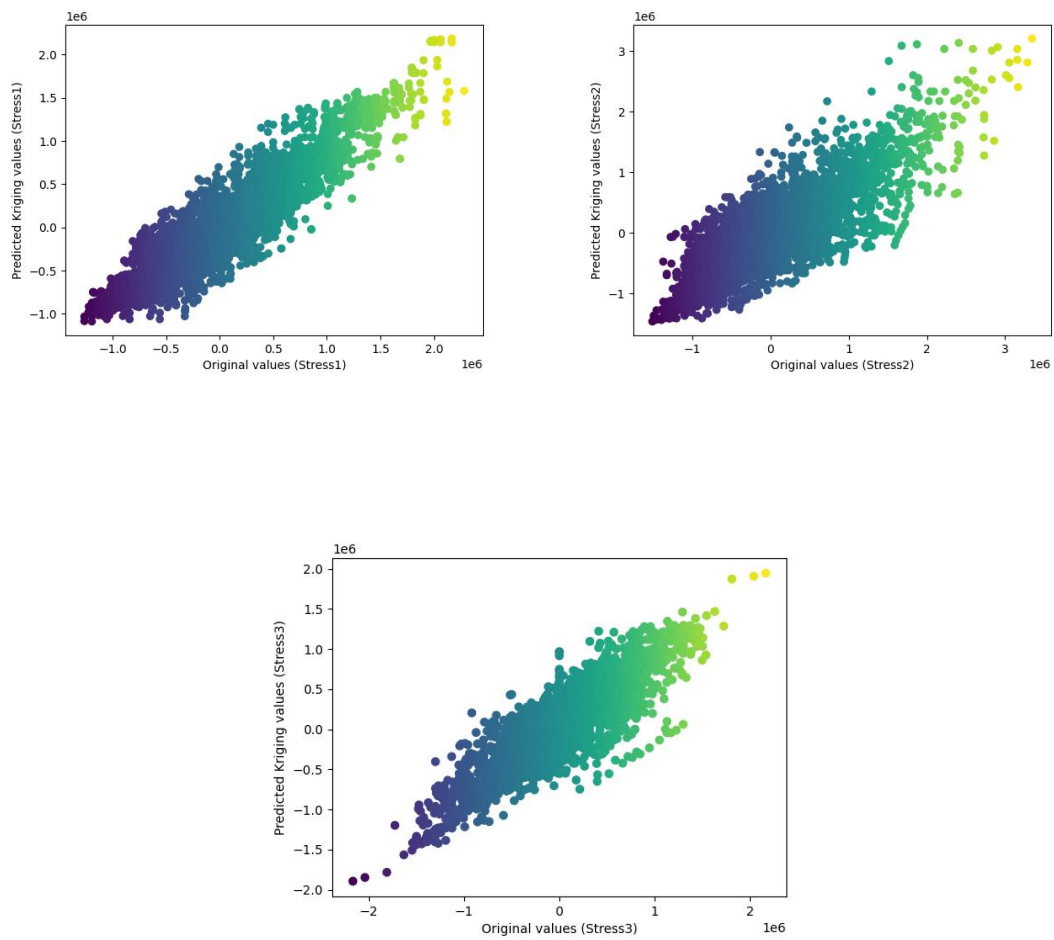
Για 1852 δεδομένα εκπαίδευσης αρχίζει να παρατηρείται μεγαλύτερη απόκλιση των προβλέψεων των τάσεων από τις αυθεντικές τιμές

### 3. Kriging



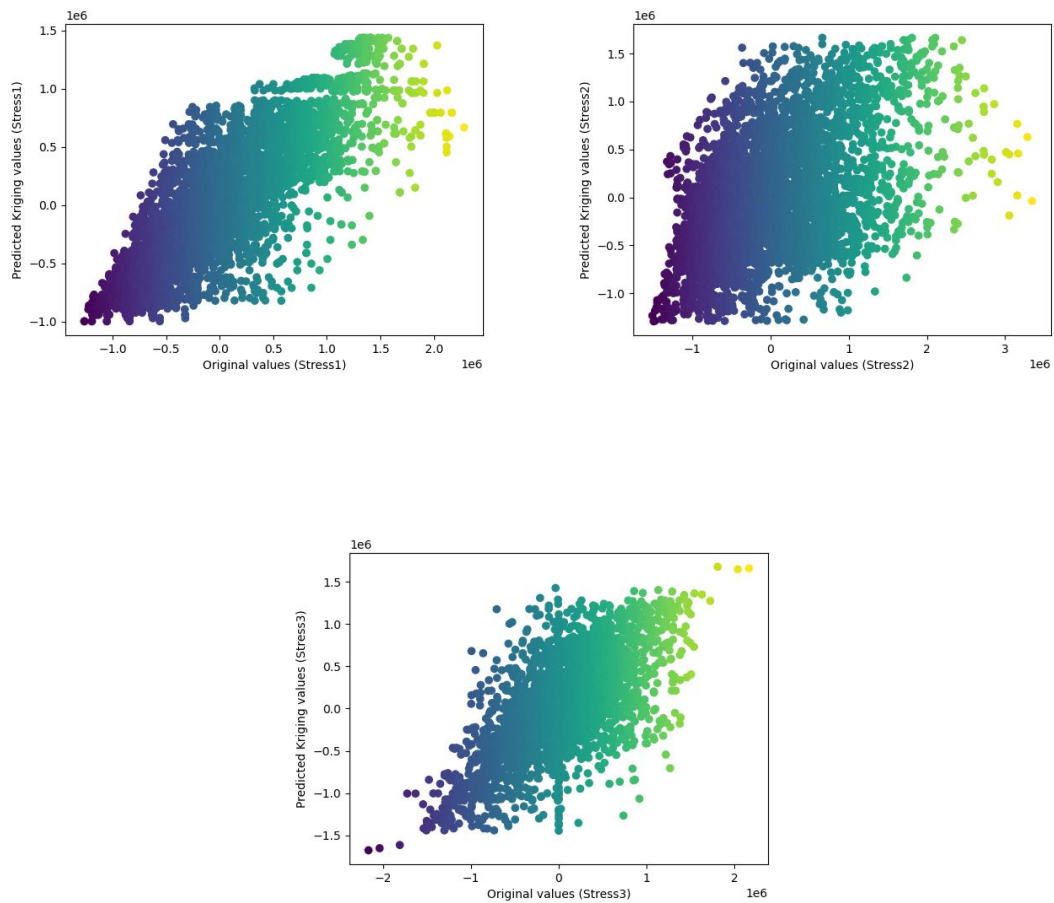
Για 1543 δεδομένα εκπαίδευσης παρατηρείται εξίσου μεγάλη απόκλιση των προβλέψεων των τάσεων από τις αυθεντικές τιμές

### 3. Kriging



Για 926 δεδομένα εκπαίδευσης η απόκλιση των προβλέψεων των τάσεων από τις αυθεντικές τιμές είναι τεράστια

### 3. Kriging



Για 463 δεδομένα εκπαίδευσης παρατηρείται η μεγαλύτερη απόκλιση των προβλέψεων των τάσεων από τις αυθεντικές τιμές

## 3.4 Συμπεράσματα Kriging

Από τα παραπάνω διαγράμματα, αυτό που βλέπουμε είναι το πόσο κοντά βρίσκονται οι προβλέψεις των τιμών των συνιστώσων της τάσης, με τις αντίστοιχες πραγματικές τιμές αυτών των ίδιων συνιστώσων.

Αν υποθέσουμε ότι διαγράφεται μια διαγώνια γραμμή, η οποία περνάει από την αρχή των αξόνων  $x$  και  $y$ , τότε όσο πιο πολύ εφάπτονται οι προβλέψεις πάνω σε αυτή την γραμμή, τόσο πιο κοντά είναι αυτές στις πραγματικές τιμές.

Ένα γενικό συμπέρασμα που μπορεί να βγει από αυτά τα διαγράμματα, είναι ότι όσο μειώνουμε τα δεδομένα που χρησιμοποιούνται για την εκπαίδευση του μοντέλου Kriging, τόσο οι προβλέψεις του αρχίζουν και αποκλίνουν από τις πραγματικές τιμές.

Για να έχουμε μια ακόμα πιο ολοκληρωμένη εικόνα των αποτελεσμάτων, υπολογίσαμε και το Mean Squared Error (MSE) για κάθε περίπτωση.

Επόμενο βήμα είναι να δούμε το αποτέλεσμα των προβλέψεων από τα Νευρωνικά Δίκτυα.

# Κεφάλαιο 4

## 4) Νευρωνικά Δίκτυα

### 4.1 Θεωρία Νευρωνικών Δικτύων

Τα Νευρωνικά Δίκτυα (IBM-Market-Development&Insights, 2021) αποτελούν μια μέθοδο τεχνητής νοημοσύνης (Artificial Intelligence), η οποία εκπαιδεύει υπολογιστές να επεξεργάζονται δεδομένα όπως ένα ανθρώπινο μυαλό, δηλαδή μιμείται το πώς οι νευρώνες στέλνουν σήμα ο ένας στον άλλον (γι' αυτό και λέγονται Νευρωνικά).

Πιο συγκεκριμένα, τα Νευρωνικά Δίκτυα αποτελούνται από πολλά επίπεδα και κόμβους ή αλλιώς νευρώνες.

Ας υποθέσουμε ότι κάθε κόμβος έχει το δικό του μοντέλο (IBM-Market-Development&Insights, 2021) γραμμικής παλινδρόμησης, ο οποίος αποτελείται από δεδομένα εισόδου, βάρη, ένα κατώφλι και δεδομένα εξόδου. Όταν δημιουργηθεί το πρώτο επίπεδο, του ανατίθενται βάρη. Αυτά τα βάρη καθορίζουν το πόσο σημαντικά, δηλαδή το πόσο πολύ θα επηρεάσουν το αποτέλεσμα (δηλαδή την έξοδο) τα δεδομένα εισόδου, σε σχέση με τα υπόλοιπα. Στην συνέχεια, όλα τα δεδομένα εισόδου, πολλαπλασιασμένα με τα αντίστοιχα βάρη τους, αθροίζονται και το αποτέλεσμα περνάει μέσα από μια συνάρτηση ενεργοποίησης, η οποία καθορίζει το τελικό αποτέλεσμα. Αν αυτό το άθροισμα ξεπερνάει το κατώφλι που έχουμε θέσει, τότε ενεργοποιείται ο κόμβος και μεταφέρει τα δεδομένα του στο επόμενο επίπεδο του Νευρωνικού Δικτύου. Το ίδιο συμβαίνει και για επόμενους κόμβους.

#### 4. Νευρωνικά Δίκτυα

Όσον αφορά τις προβλέψεις, η ακρίβεια τους καθορίζεται από μια συνάρτηση κόστους-απώλειας ή αλλιώς MSE (Mean Squared Error), της οποίας η μορφή φαίνεται παρακάτω (Wang, 2018).

$$C(y, o) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (y_i - o_i)^2$$

όπου

$N$  : ο αριθμός των δεδομένων για την εκπαίδευση του Δικτύου

$y_i$  : οι μεταβλητές εισόδου

$o_i$  : οι προβλέψεις του Νευρωνικού Δικτύου

Έτσι πάνω-κάτω λειτουργούν τα Νευρωνικά Δίκτυα.

### **4.2 Το Νευρωνικό Δίκτυο που χρησιμοποιούμε**

Το νευρωνικό δίκτυο, χρησιμοποιεί μια βάση δεδομένων παραμορφώσεων και τάσεων, η οποία υπολογίζεται αριθμητικά ή θα μπορούσε να υπολογιστεί με βάση φυσικά πειράματα. Από αυτήν, η μισή βάση χρησιμοποιείται για την εκπαίδευση του δικτύου και η άλλη μισή χρησιμοποιείται για την επαλήθευση του αποτελέσματος του, δηλαδή της προσέγγισης του νευρωνικού, για το αν αυτή η προσέγγιση είναι αποδεκτά ακριβείς.

Τα δεδομένα που εισάγουμε για την εκπαίδευση των νευρωνικών δικτύων, είναι διανύσματα παραμορφώσεων, τα οποία τα παίρνουμε από την βάση δεδομένων μας και σαν έξοδος, χρησιμοποιούνται τα αντίστοιχα διανύσματα τάσεων.

Το νευρωνικό δίκτυο που προκύπτει στην δικιά μας περίπτωση είναι ένα feed-forward backpropagation Νευρωνικό Δίκτυο, το οποίο έχει δύο κρυφά στρώματα και 50 νευρώνες για κάθε επίπεδο, 3000 επαναλήψεις και τιμή MSE που συγκλίνει στο 0.0016 για τον τερματισμό του υπολογισμού του.

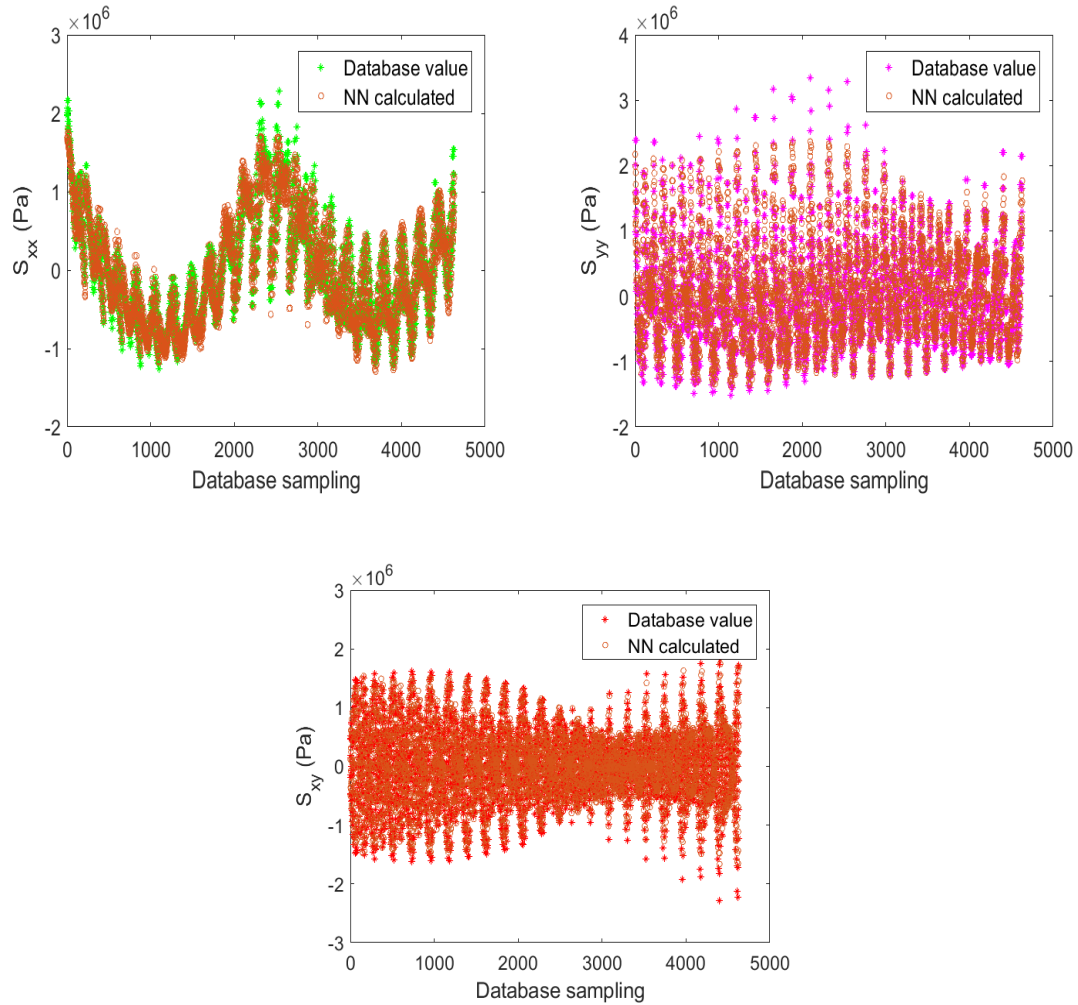
Όσο για την πρακτική εκτέλεση των Νευρωνικών Δικτύου το τμήμα αυτό στηρίζεται σε προηγούμενη δουλειά που περιγράφεται στο βιβλίο των Georgios A.Drosopoulos & Georgios E.Stavroulakis, CRC Press, 2022 και στα προγράμματα που το συνοδεύουν (G.Drosopoulos & G.Stavroulakis, 2022).



## 4. Νευρωνικά Δίκτυα

### 4.3 Αποτελέσματα Νευρωνικών Δικτύων

Τα αποτελέσματα των προβλέψεων των Νευρωνικών Δικτύων για 4630 δεδομένα, για την πρώτη, δεύτερη και τρίτη συνιστώσα της τάσης, στην σειρά, φαίνονται παρακάτω.



Για κάθε συνιστώσα παρατηρείται ελάχιστη απόκλιση των εκτιμήσεων της τάσης από τις αυθεντικές της τιμές

### **4.4 Συμπεράσματα Νευρωνικών Δικτύων**

Οι παραπάνω εικόνες συγκρίνουν τις τιμές των πραγματικών μεταβλητών τάσης, με τις αντίστοιχες προβλέψεις που υπολογίστηκαν από τα Νευρωνικά Δίκτυα.

Το αποτέλεσμα δείχνει ικανοποιητικό, με μικρή απόκλιση, αφού οι προβλέψεις φαίνεται να εφαρμόζονται με σχετική ακρίβεια στα πραγματικά δεδομένα.

Εκεί που παρατηρείται σχετική απόκλιση είναι στις άκρες των τιμών. Ωστόσο αυτές οι αποκλίσεις είναι σχετικά μικρές.

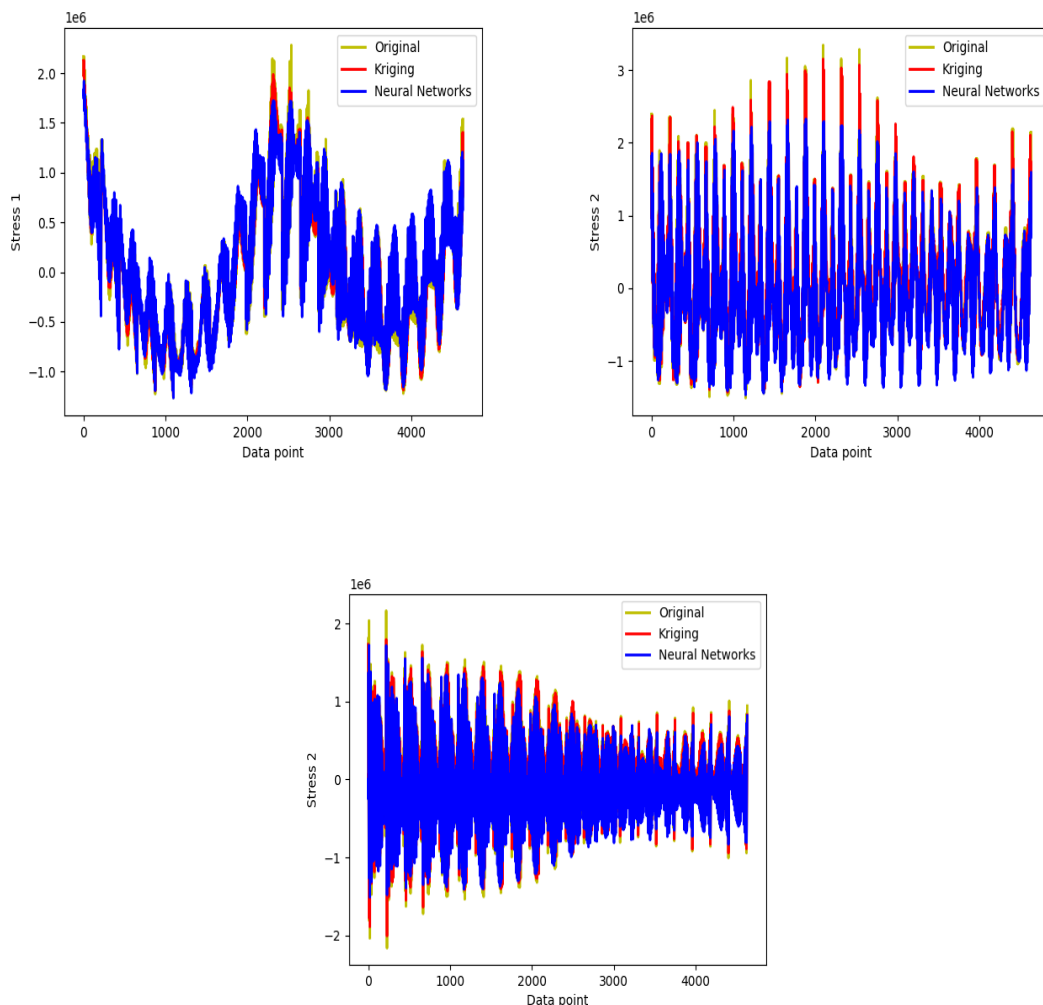
Ωστόσο, στο επόμενο κεφάλαιο θα εξεταστούν τα αποτελέσματα των δύο μεταμοντέλων σε ίδιο διάγραμμα για να έχουμε μια συνολική και καλύτερη απεικόνιση της μεταξύ τους αποδοτικότητας.

## Κεφάλαιο 5

### 5) Σύγκριση των αποτελεσμάτων

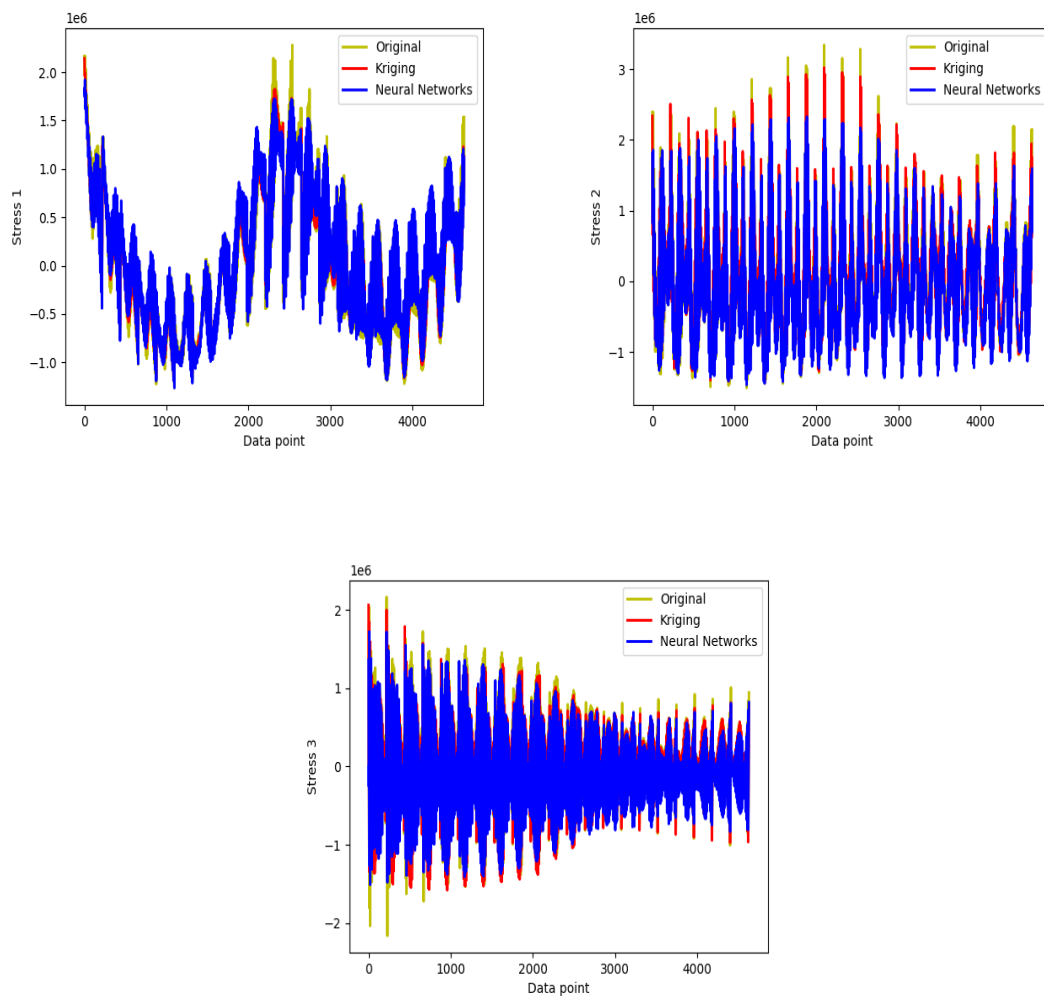
#### 5.1 Συγκρίσεις διαγραμμάτων

Σε αυτό το σημείο θα συγκρίνουμε όλες τις μεθόδους και τις προβλέψεις που κάνουν σε ένα ενιαίο διάγραμμα, για να έχουμε μια τελική και πιο ολοκληρωμένη εικόνα για το ποια μέθοδος είναι καλύτερη τελικά.



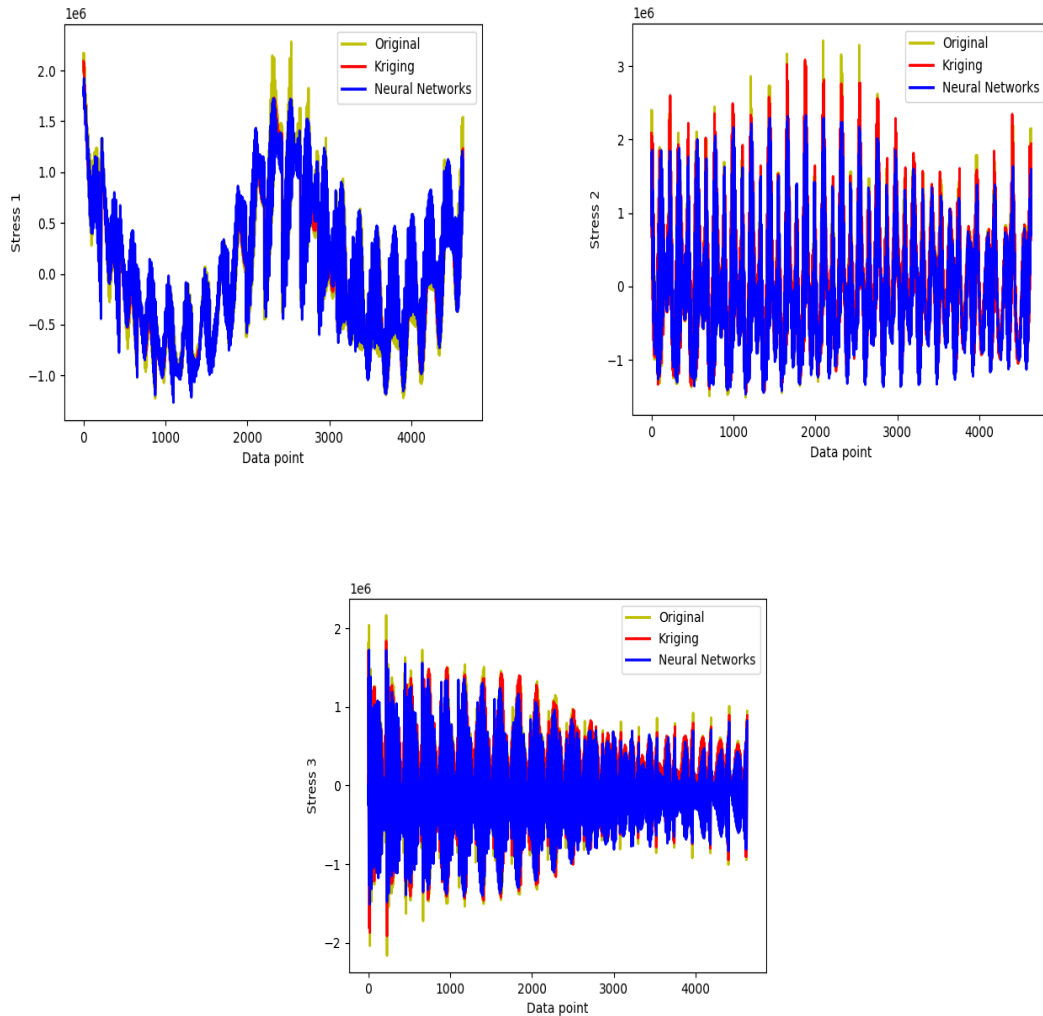
Για 4630 δεδομένα εκπαίδευσης παρατηρείται ότι η μέθοδος Kriging έχει πιο ικανοποιητικά αποτελέσματα από τα Νευρωνικά Δίκτυα για τον λόγο ότι στις άκρες των σχημάτων παράγονται καλύτερες προβλέψεις

## 5. Σύγκριση των αποτελεσμάτων



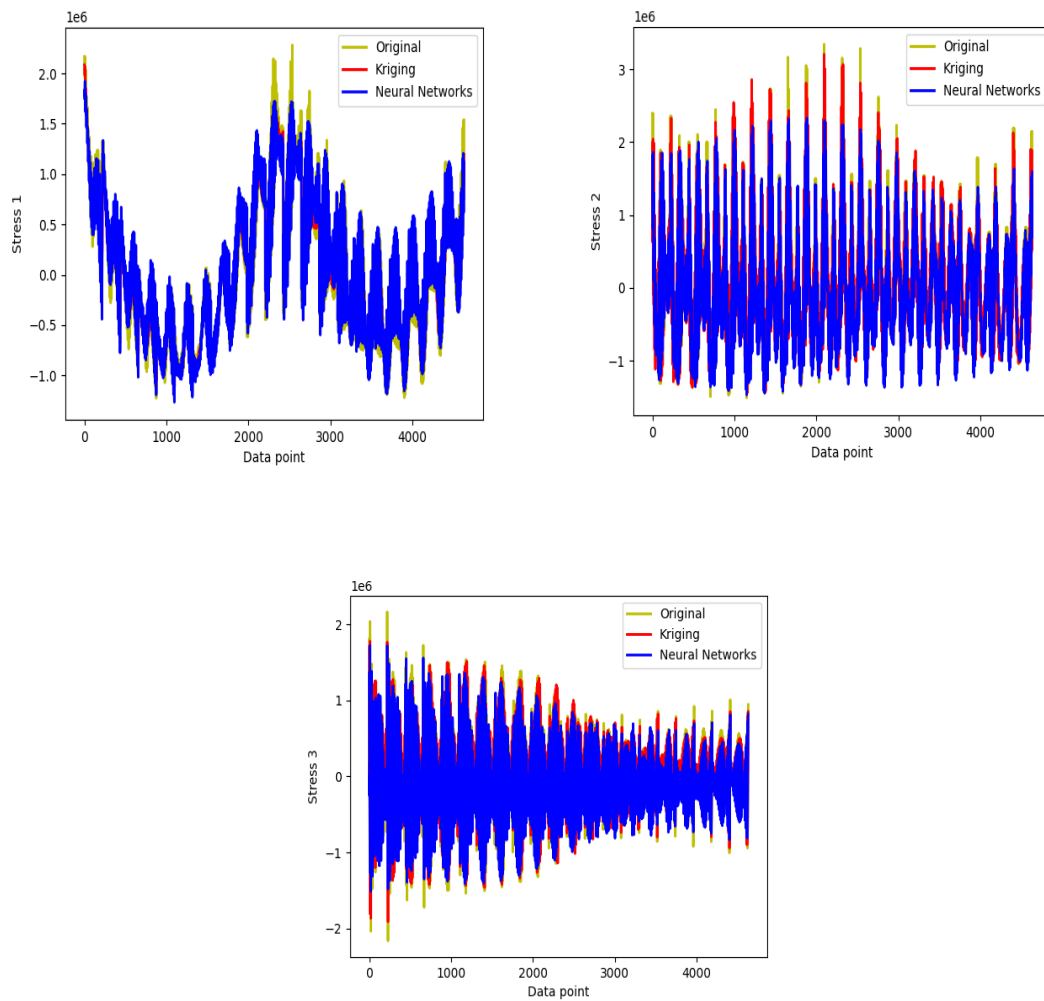
Για 3087 δεδομένα εκπαίδευσης παρατηρείται και πάλι ότι η μέθοδος Kriging πάλι έχει καλύτερα αποτελέσματα από τα Νευρωνικά Δίκτυα για τον ίδιο λόγο, όπως και στο προηγούμενο διάγραμμα

## 5. Σύγκριση των αποτελεσμάτων



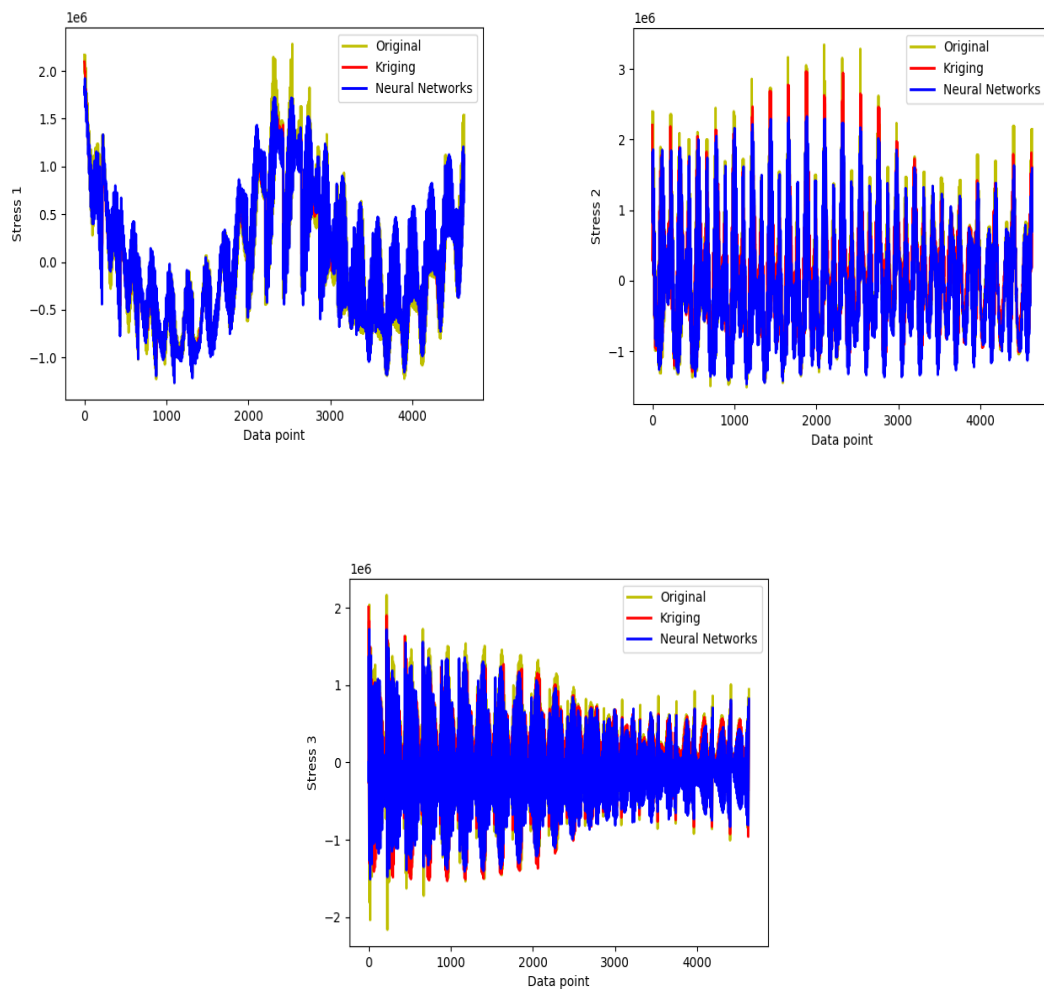
Για 2315 δεδομένα εκπαίδευσης παρατηρείται ότι η μέθοδος Kriging αρχίζει να έχει λιγότερο ικανοποιητικά αποτελέσματα από τα Νευρωνικά Δίκτυα, κυρίως στην 1<sup>η</sup> και 2<sup>η</sup> συνιστώσα της τάσης για τον λόγο ότι πλέον στις περισσότερες άκρες τα Νευρωνικά Δίκτυα παράγουν καλύτερες προβλέψεις.

## 5. Σύγκριση των αποτελεσμάτων



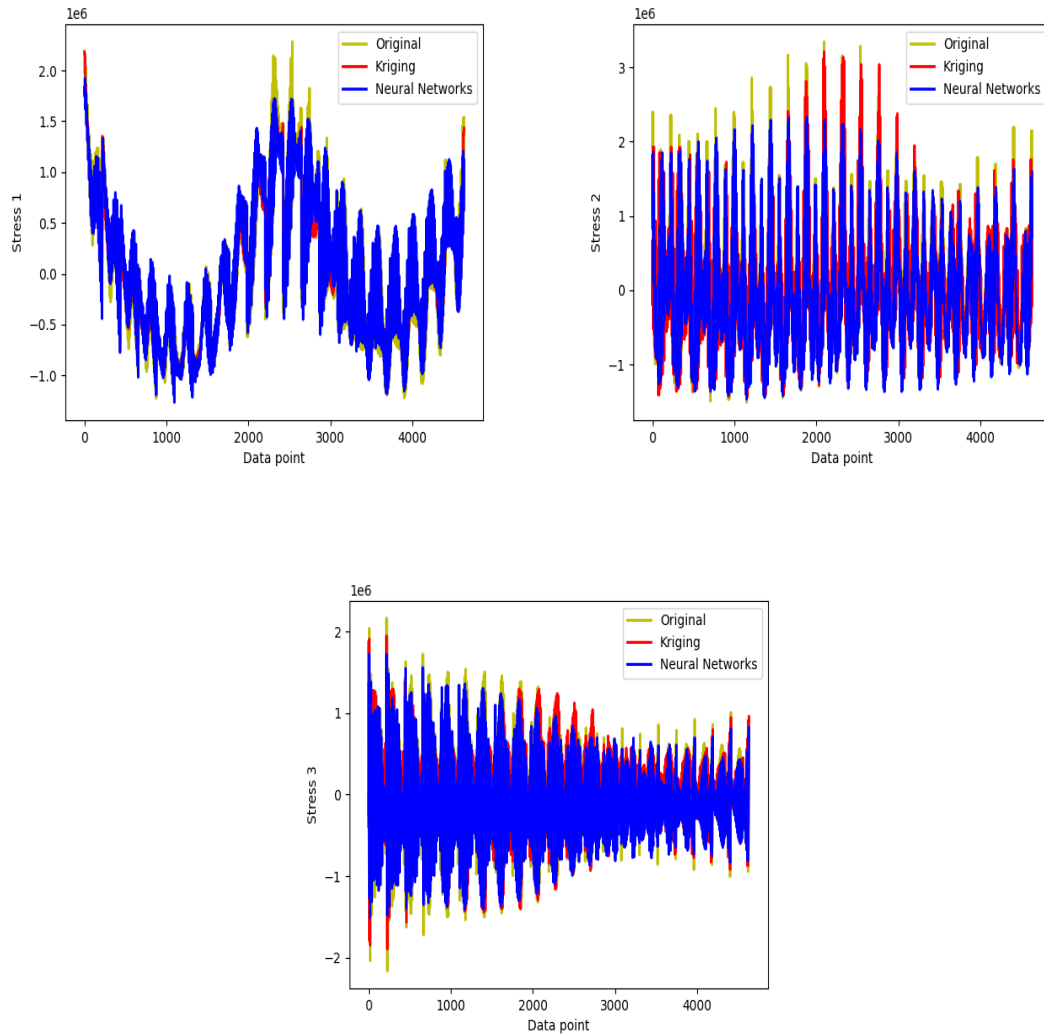
Για 1853 δεδομένα εκπαίδευσης παρατηρείται ότι η μέθοδος Kriging συνεχίζει να έχει λιγότερο ικανοποιητικά αποτελέσματα από τα Νευρωνικά Δίκτυα και για τις τρεις συνιστώσες τάσης

## 5. Σύγκριση των αποτελεσμάτων



Για 1543 δεδομένα εκπαίδευσης παρατηρείται ότι η μέθοδος Kriging αρχίζει να έχει όλο και λιγότερο ικανοποιητικά αποτελέσματα από τα Νευρωνικά Δίκτυα

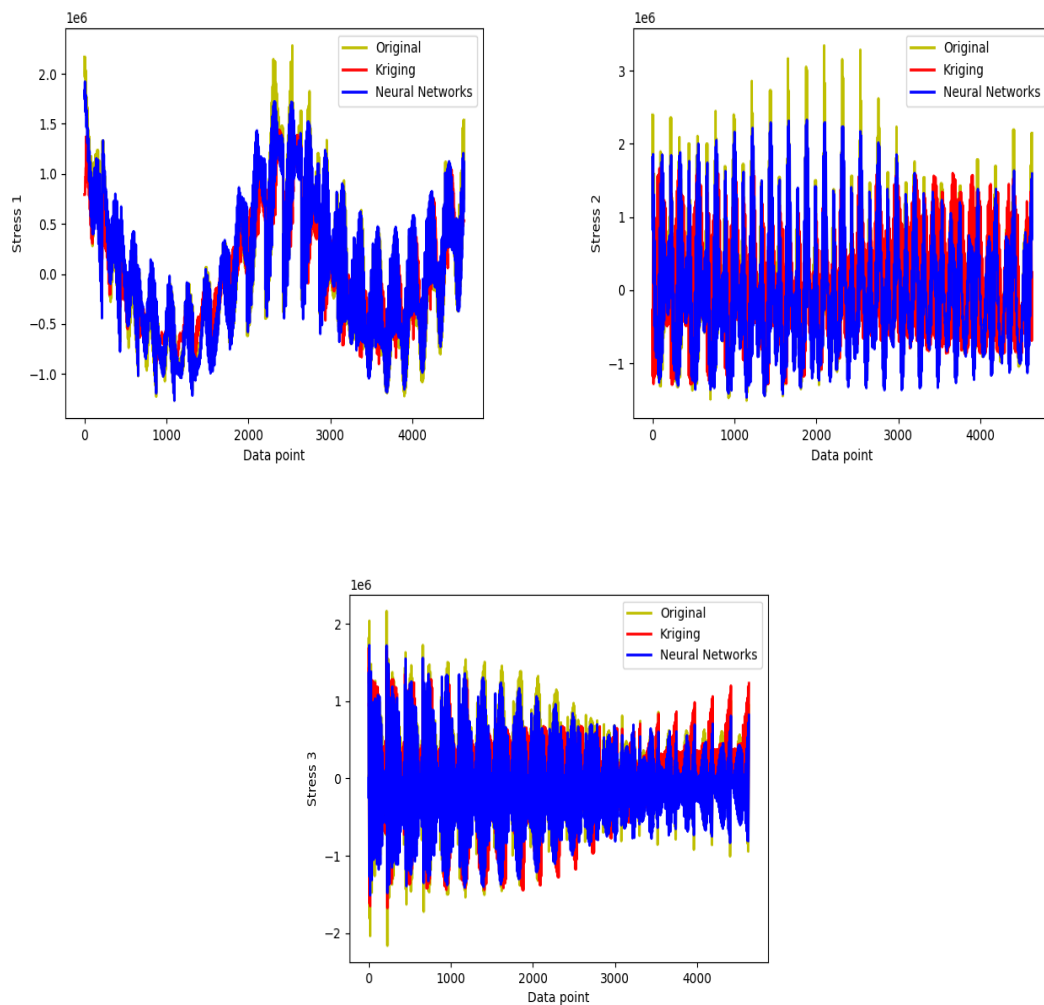
## 5. Σύγκριση των αποτελεσμάτων



Για 926 δεδομένα εκπαίδευσης παρατηρείται ότι η μέθοδος Kriging δεν έχει καθόλου καλά αποτελέσματα σε σχέση με τα Νευρωνικά Δίκτυα



## 5. Σύγκριση των αποτελεσμάτων



Για 463 δεδομένα εκπαίδευσης παρατηρείται ότι η μέθοδος Kriging έχει την χειρότερη απόδοση σε σχέση με τα Νευρωνικά Δίκτυα

### **5.2 Συμπεράσματα με βάση τα διαγράμματα**

Τα αποτελέσματα των συγκρίσεων δείχνουν ότι όσο μικραίνουμε τον αριθμό των δειγμάτων μας οι προβλέψεις που προέρχονται από το μοντέλο Kriging αρχίζουν και αποκλίνουν όλο και περισσότερο από τις αυθεντικές τιμές, με μικρή απόκλιση όμως.

Συγκεκριμένα, για 4630 δεδομένα για την εκπαίδευση του μοντέλου παρουσιάζει τις καλύτερες εκτιμήσεις, οι οποίες φαίνεται να είναι και καλύτερες από αυτές των Νευρωνικών Δικτύων.

Για 3087 μέχρι και 2315 δεδομένα εκπαίδευσης του μοντέλου παρατηρούνται παρόμοια αποτελέσματα, δηλαδή μικρή απόκλιση των εκτιμήσεων από τις αυθεντικές τιμές της τάσης, αλλά καλύτερα αποτελέσματα από τα Νευρωνικά Δίκτυα.

Για 1853 μέχρι και 926 δεδομένα εκπαίδευσης του μοντέλου οι αποκλίσεις είναι μεγάλες και μη επιθυμητές.

Τα 463 δεδομένα για εκπαίδευση αποτελούν ακραία περίπτωση, στην οποία οι προβλέψεις του μοντέλου Kriging δεν είναι καθόλου καλές.

Αυτό που μας ενδιαφέρει λοιπόν είναι να βρούμε ένα μεταμοντέλο το οποίο προβλέπει τον καταστατικό νόμο υλικού με ακρίβεια και με λιγότερα δεδομένα εκπαίδευσης από τα Νευρωνικά Δίκτυα,

Αυτό φαίνεται να επιτυγχάνεται με την χρήση του μεταμοντέλου Kriging και συγκεκριμένα στις περιπτώσεις που έχουμε για δεδομένα εκπαίδευσης του μοντέλου από 4630 μέχρι και 2315 πλήθος δεδομένων.

Μια οπτική παρουσίαση των αποτελεσμάτων δεν αρκεί για να βγάλουμε ακριβή συμπεράσματα, οπότε πρέπει να γίνει και μια ποσοτική παρουσίαση των αποτελεσμάτων.

## 5.3 Σύγκριση των Mean Squared Errors (MSE)

### 5.3.1 Θεωρία Mean Squared Error (MSE)

Το Mean Squared Error (Frost, 2023) υπολογίζει την μέση τιμή των τετραγώνων των σφαλμάτων, δηλαδή, την μέση τετραγωνική διαφορά μεταξύ των προβλέψεων και των πραγματικών τιμών.

Το MSE με άλλα λόγια αποτελεί μια μέτρηση που καθορίζει την ποιότητα και την ακρίβεια ενός εκτιμητή. Στην δικιά μας περίπτωση, οι εκτιμητές μας είναι το μοντέλο Kriging και τα Νευρωνικά Δίκτυα.

Η εξίσωση που ακολουθεί αυτή η συνάρτηση είναι η εξής:

$$MSE = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (Y_i - Y_i^{\wedge})^2$$

όπου

$Y_i$ : η πραγματική τιμή της μεταβλητής στην θέση  $i$

$Y_i^{\wedge}$ : η εκτιμώμενη τιμή της μεταβλητής στην θέση  $i$

$n$ : ο αριθμός των δεδομένων των μεταβλητών

## 5. Σύγκριση των αποτελεσμάτων

### 5.4 Αποτελέσματα με βάση το MSE

Παρακάτω φαίνεται ο πίνακας με τα MSE των μετρήσεων μας, ώστε να έχουμε μια ποσοτική απεικόνιση των αποτελεσμάτων μας. Πιο συγκεκριμένα, ο παρακάτω πίνακας δείχνει το MSE για κάθε συνιστώσα τάσης, ανάλογα με το πόσα δεδομένα χρησιμοποιήθηκαν για την εκπαίδευση του μοντέλου Kriging.

Kriging	MSE1	MSE2	MSE3
Δεδομένα για εκπαίδευση 4630	$1,2 \times 10^{10}$	$1,2 \times 10^{10}$	$0,4 \times 10^{10}$
3087	$1,2 \times 10^{10}$	$1,3 \times 10^{10}$	$0,6 \times 10^{10}$
2315	$2 \times 10^{10}$	$2,1 \times 10^{10}$	$0,8 \times 10^{10}$
1853	$5,2 \times 10^{10}$	$4 \times 10^{10}$	$1,5 \times 10^{10}$
1543	$6,1 \times 10^{10}$	$5,6 \times 10^{10}$	$3,1 \times 10^{10}$
926	$9,1 \times 10^{10}$	$16,3 \times 10^{10}$	$4,9 \times 10^{10}$
463	$14,4 \times 10^{10}$	$50 \times 10^{10}$	$14,5 \times 10^{10}$

**Σημείωση:** Οι τιμές του MSE βγαίνουν της τάξης του  $10^{10}$  διότι οι τιμές των συνιστώσων της τάσης βρίσκονται σε αυτό το εύρος τιμών.

Παρακάτω φαίνεται και ο πίνακας των MSE με βάση τα Νευρωνικά Δίκτυα. Πιο συγκεκριμένα, ο παρακάτω πίνακας δείχνει το MSE για κάθε συνιστώσα τάσης, ανάλογα με το πόσα δεδομένα χρησιμοποιήθηκαν για την εκπαίδευση του Νευρωνικού Δικτύου.

Νευρωνικά Δίκτυα	MSE 1	MSE2	MSE3
Δεδομένα για εκπαίδευση 4630	$1,3 \times 10^{10}$	$1,5 \times 10^{10}$	$1,8 \times 10^{10}$

### **5.5 Συμπεράσματα με βάση το MSE**

Από τους παραπάνω πίνακες μπορούν να βγουν κάποια πολύ καλά συμπεράσματα.

Στον πίνακα των MSE του μοντέλου Kriging, παρατηρείται ότι για την εκπαίδευση του μοντέλου με 4630 δεδομένα, τα MSE για κάθε συνιστώσα τάσης είναι καλύτερα από τα αντίστοιχα MSE που προκύπτουν από τα Νευρωνικά Δίκτυα.

Αυτές που είναι σημαντικότερες όμως είναι οι επόμενες παρατηρήσεις.

Φαίνεται λοιπόν, ότι για την εκπαίδευση μοντέλου Kriging με 3087 δεδομένα, τα MSE είναι χαμηλότερα σε σχέση με τα αντίστοιχα MSE του Νευρωνικού Δικτύου, που όμως χρησιμοποίησε 4630 δεδομένα για την εκπαίδευσή του.

Επίσης, για 2315 δεδομένα, παρατηρείται ότι τα MSE του μοντέλου Kriging ξεπερνάνε για πολύ λίγο τα MSE του Νευρωνικού Δικτύου στην πρώτη και δεύτερη συνιστώσα τάσης, ενώ το MSE του μοντέλου Kriging για την τρίτη συνιστώσα τάσης, είναι χαμηλότερο σε σχέση με αυτό του Νευρωνικού Δικτύου.

Μέσα από αυτά τα αποτελέσματα, βγάζουμε το συμπέρασμα ότι ένα μοντέλο Kriging εκπαιδευμένο με λιγότερα δεδομένα από ότι ένα Νευρωνικό Δίκτυο, μπορεί να κάνει πιο ακριβείς προβλέψεις.

Πιο συγκεκριμένα, στην περίπτωση με 3087 δεδομένα φαίνεται ξεκάθαρα ότι το μοντέλο Kriging είναι πιο αποτελεσματικό από τα Νευρωνικά Δίκτυα.

Ωστόσο στα 2315 δεδομένα, αν και τα MSE της πρώτης και δεύτερης συνιστώσας ξεπερνάνε τα αντίστοιχα MSE του Νευρωνικού Δικτύου για λίγο, η τρίτη συνιστώσα παραμένει χαμηλότερη. Αυτή η περίπτωση θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί, λόγω του ότι χρησιμοποιούνται 50% λιγότερα δεδομένα για εκπαίδευση του μοντέλου, σε σχέση με τα δεδομένα για την εκπαίδευση του Νευρωνικού Δικτύου.

## 5. Σύγκριση των αποτελεσμάτων

Επομένως, σαν γενικό συμπέρασμα μπορούμε να πούμε ότι με την χρήση ενός μεταμοντέλου Kriging, που υπολογίζει τον καταστατικό νόμο υλικού μέσω μιας βάσης δεδομένων απλοποιείται η ανάλυση της κατασκευής και η εύρεση της μηχανικής απόκρισης, δηλαδή της τάσης.

Επίσης για λιγότερα δεδομένα εκπαίδευσης, έχουμε καλύτερα αποτελέσματα προβλέψεων κάτι που με την σειρά του μειώνει τον υπολογιστικό χρόνο που χρειάζεται για να δημιουργηθεί ένα μοντέλο πρόβλεψης.

Τέλος, η βασική διαφορά των δύο μεταμοντέλων Kriging και Νευρωνικών Δικτύων φαίνεται πως είναι στην όγκο των δεδομένων εκπαίδευσης αυτών των μοντέλων, αφού οι εκτιμήσεις και των δύο σε γενικές γραμμές έχουν μικρή απόκλιση μεταξύ τους.

## Προγράμματα και κώδικας

Ο κώδικας που χρησιμοποιήθηκε για τα αποτελέσματα από τα Νευρωνικά Δίκτυα, αποτελεί κώδικα ο οποίος είναι γραμμένος στο MATLAB και βασίζεται στην έρευνα του κ.Σταυρουλάκη και του κ.Δροσόπουλου (G.Drosopoulos & G.Stavroulakis, 2022).

Ο κώδικας που χρησιμοποιήθηκε για τα αποτελέσματα της Kriging μεθόδου, αφορά κώδικα ο οποίος γράφτηκε σε Python, με την βοήθεια της Open-Source βιβλιοθήκης PyKrige (PyKrigeDevelopers, 2022).

## Βιβλιογραφία

- Cedrez, M. (2023). *Ordinary Kriging 5-Step Practical Guide*. Ανάκτηση από linkedin.com: <https://www.linkedin.com/pulse/ordinary-kriging-5-step-practical-guide-marcel-cedrez>
- Frost, J. (2023). *Mean Squared Error*. Ανάκτηση από statisticsbyjim: <https://statisticsbyjim.com/regression/mean-squared-error-mse/>
- G.Drosopoulos, & G.Stavroulakis. (2022). *Data-driven Computational Homogenization Using Neural Networks: FE<sup>2</sup>-NN Application on Damaged Masonry*. Chania, Greece.
- Hayes, A. (2023, 1). *Multi Linear Regression (MLR) Definition, Formula and Examples*. Ανάκτηση από investopedia.com: <https://www.investopedia.com/terms/m/mlr.asp>
- Hristopoulos, D. T. (2020). *Random Fields for Spatial Data Modeling : A primer for Scientists and Engineers*. New York, U.S.A: Springer.
- IBM-Market-Development&Insights. (2021). *What are neural networks?* Ανάκτηση από ibm.com: <https://www.ibm.com/topics/neural-networks>
- Khurma, M. (2018). *Polynomial Equations*. Ανάκτηση από cuemath.com: <https://www.cuemath.com/algebra/polynomial-equations/>
- Olea, R. A. (2009). *A Practical Primer on Geostatistics*. Virginia.
- PyKrigDevelopers. (2022). *PyKrig a Kriging Toolkit for Python*. Ανάκτηση από geostat-framework, readthedocs.io: <https://geostat-framework.readthedocs.io/projects/pykrige/en/stable/index.html>
- Wang, C.-F. (2018). *Finding the Cost Function of Neural Networks*. Ανάκτηση από towardsdatascience.com: <https://towardsdatascience.com/step-by-step-the-math-behind-neural-networks-490dc1f3cfd9>