



ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ ΚΡΗΤΗΣ

ΔΜΠΣ: ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ ΓΙΑ ΤΙΣ ΜΗ-ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΡΗΧΩΝ ΥΔΑΤΩΝ

Τσιμά Αλεξάνδρα

Τριμελής επιτροπή:

Α. Δελής (επιβλέπων)

Ι. Νικολός

Μ. Πετράκης



Χανιά, Φεβρουάριος, 2023

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον επιβλέποντα Καθηγητή μου, κύριο Ανάργυρο Δελή, για την υποστήριξη, τις υποδείξεις και την πολύτιμη βοήθεια του κατά την εκπόνηση της εργασίας. Τους καθηγητές Ιωάννη Νικολό και Μίνωα Πετράκη για τη συμμετοχή τους στην τριμελή επιτροπή. Επίσης, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον κ. Νίκο Σπανουδάκη για τη βοήθειά του στο προγραμματιστικό κομμάτι της εργασίας.

Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω την οικογένειά μου, για όλη τη στήριξη και τη συμπαράσταση που μου προσέφεραν, κατά τη διάρκεια του μεταπτυχιακού.

ACKNOWLEDGMENTS

I would like to warmly thank my supervisor, Prof. Dr. Anargyro Delis, for his support, his suggestions and the valuable help during the writing of this Thesis. Also, Prof. Ioannis Nikolos and Prof. Minos Petrakis for their participation in the three-member committee. I would also like to thank Mr. Nikos Spanoudakis for his help in the programming part of the Thesis.

Finally, I would like to thank my family for all the support and encouragement they have provided to me throughout my postgraduate studies.

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στην παρούσα μεταπτυχιακή διατριβή μελετάμε τις εξισώσεις ρηχών υδάτων και διάφορες μεθόδους πεπερασμένων όγκων, πρώτης και δεύτερης τάξης, καθώς και κεντρικές μεθόδους, που χρησιμοποιούνται για την επίλυσή τους. Η παραγωγή των εξισώσεων ρηχών υδάτων μιας διάστασης από τους φυσικούς νόμους διατήρησης, η υπερβολική φύση των εξισώσεων και οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματά τους αποτελούν το περιεχόμενο των αρχικών κεφαλαίων της εργασίας. Σημαντική είναι και η κατανόηση των πρωταρχικών και των συντηρητικών μεταβλητών καθώς στις αριθμητικές μεθόδους, η κατάλληλη επιλογή των μεταβλητών είναι ζωτικής σημασίας, όσο αφορά το σωστό υπολογισμό των κυμάτων τύπου shock.

Το δεύτερο κομμάτι της εργασίας αποτελεί μια συγκριτική μελέτη διαφόρων αριθμητικών μεθόδων. Επιλύουμε αναλυτικά κατάλληλα επιλεγμένα προβλήματα, καθένα από τα οποία παρουσιάζει κάποια δυσκολία και βλέπουμε κατά πόσο οι μέθοδοι που χρησιμοποιούμε μπορούν να τα λύσουν με επιτυχία. Στις TVD μεθόδους γίνεται χρήση διαφόρων οριοθετών και παρατηρούμε αν προκύπτουν ή όχι διαφορές στα αριθμητικά αποτελέσματα του κάθε προβλήματος και κατά πόσο είναι σημαντική η επιλογή οριοθέτη. Τέλος, ασχολούμαστε με τις εξισώσεις ρηχών υδάτων στις δύο διαστάσεις που αποτελούν μια επέκταση των εξισώσεων μιας διάστασης. Μελετάμε το φαινόμενο της μετάδοσης κυμάτων που σχετίζονται με την ξαφνική κατάρρευση ενός εξιδανικευμένου δισδιάστατου κυκλικού φράγματος και τις ανακλάσεις μετωπικών κυμάτων που προκύπτουν όταν ένα μετωπικό κύμα ανακλάται από ένα στερεό κάθετο τοίχο στην κατεύθυνση μετάδοσης του κύματος υπό συγκεκριμένη γωνία.

ΛΕΞΕΙΣ ΚΛΕΙΔΙΑ:

Εξισώσεις ρηχών υδάτων, Αναλυτικός επιλυτής Riemann, Κατάρρευση φράγματος, Μέθοδος Godunov, Μέθοδος TVD -WAF, Μέθοδος MUSCL – HANCOCK, Μέθοδος FORCE, Μέθοδος TVD – SLIC, Εξιδανικευμένο κυκλικό φράγμα, Ανακλάσεις μετωπικού κύματος

ABSTRACT

In the present postgraduate thesis we study the shallow water equations and several finite-volume numerical methods, of first and second order, as well as centred methods that are used to solve these equations. In the first chapters of this thesis we consider the derivation of the shallow water equations in one dimension from the conservation laws, the hyperbolic character of the equations as well as their eigenvalues and eigenvectors. Of main interest is the understanding of primitive and conservative variables as in the numerical methods the right choice of the variables is vital, for the right evaluation of the shock waves.

The second part of this thesis is a comparative study of several numerical methods. We solve appropriately chosen problems, each of them has its own difficulty and we study if they can solve the problems sufficiently. In TVD methods we use several limiters and observe if they exist or not differences in the numerical results of each problem and how important is the choice of a limiter. Finally, we consider the shallow water equations in two space dimensions, which are an expansion of the shallow water equations in one-dimension. We study the wave propagation phenomena associated with the sudden collapse of an idealized two dimensional circular dam and the bore reflection patterns that occur when a bore reflects from a solid vertical wall at an angle to the bore propagation direction.

INDEX WORDS:

Shallow water equations, Exact Riemann solver, Dam-break problem, Godunov upwind method, TVD – WAF method, MUSCL – HANCOCK method, FORCE scheme, TVD – SLIC method, Idealized circular dam, Bore reflections

Πίνακας περιεχομένων

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ	2
AKNOWLEDGMENTS	2
ΠΕΡΙΛΗΨΗ.....	3
ABSTRACT	3
ΕΙΣΑΓΩΓΗ.....	8
ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΡΗΧΩΝ ΥΔΑΤΩΝ	11
2.1: Νόμοι Διατήρησης.....	11
2.2: Ροή νερού με ελεύθερη επιφάνεια.....	12
ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΡΗΧΩΝ ΥΔΑΤΩΝ	18
3.1: Ιδιοτιμές και ιδιοδιανύσματα με όρους των συντηρητικών μεταβλητών	18
3.2: Η υπερβολική φύση των εξισώσεων ρηχών υδάτων	20
3.3: Ιδιοτιμές και ιδιοδιανύσματα με όρους πρωταρχικών μεταβλητών	21
ΚΑΤΑΡΡΕΥΣΗ ΦΡΑΓΜΑΤΟΣ	24
4.1: Χαρακτηριστικά πεδία	24
4.2: Το πρόβλημα της κατάρρευσης φράγματος	25
4.3: Το πρόβλημα Riemann	26
4.4: Riemann αναλλοίωτες και συνθήκες Rankine - Hugonot	28
4.5: Κύματα αραίωσης.....	28
4.5.1: Δεξί κύμα αραίωσης.....	29
4.5.2: Αριστερό κύμα αραίωσης	30
4.5.3: Shear κύμα	30
4.6: Κύματα τύπου shock	32
4.6.1: Αριστερό κύμα shock.....	33
4.6.2: Δεξί κύμα shock	35
4.7: Κύματα shock και μη-συντηρητικές μεταβλητές	36
ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΛΥΣΗ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ RIEMANN	39
5.1: Το πρόβλημα Riemann: Υγρός πυθμένας.....	39
5.1.1: Υπολογισμός των h^* και u^*	41
5.1.2: Έλεγχος της λύσης	44
5.2: Στεγανός πυθμένας	46

5.2.1: Αποδεκτά κύματα σε υγρό/στεγανό μέτωπο	46
ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ ΠΡΩΤΗΣ ΤΑΞΗΣ.....	50
6.1.1: Συντηρητικές μέθοδοι	50
6.1.2: Μη-συντηρητικές μέθοδοι	53
6.2: Η upwind μέθοδος του Godunov.....	54
6.2.1: Ευστάθεια της μεθόδου Godunov	57
6.2.2: Συνοριακές συνθήκες.....	58
ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΡΗΧΩΝ ΥΔΑΤΩΝ.....	59
7.1: Πρόβλημα 1: Αριστερό κρίσιμο κύμα αραίωσης και δεξιό shock	59
7.2: Πρόβλημα 2: Δύο κύματα αραίωσης και μια σχεδόν στεγανή περιοχή	60
7.3: Πρόβλημα 3: Στεγανή περιοχή στα δεξιά.....	61
7.4: Πρόβλημα 4: Στεγανή περιοχή στα αριστερά	62
7.5: Πρόβλημα 5: Δημιουργία Στεγανής Περιοχής	62
7.6: Πρόβλημα 6: Αριστερό κύμα αραίωσης και δεξιό shock	63
ΜΕΘΟΔΟΙ TVD	64
8.1: HLL και HLLC επιλύτες Riemann.....	64
8.2.1: Μέθοδος TVD-WAF.....	66
8.2.2: Επίλυση των προβλημάτων με την TVD –WAF	67
8.3.1: Η μέθοδος MUSCL-Hancock.....	76
8.3.2: Μέθοδος TVD MUSCL-Hancock.....	78
8.3.3. Επίλυση προβλημάτων με τη μέθοδο MUSCL- Hancock	79
8.4: Μέθοδος TVD-SLIC	85
ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΣΕ ΔΥΟ ΔΙΑΣΤΑΣΕΙΣ.....	95
9.1: Μέθοδοι διαχωρισμού διαστάσεων	95
9.2: Μη-χωριζομένων πεπερασμένων όγκων μέθοδοι	96
9.3: Εξιδανικευμένο κυκλικό φράγμα	97
9.5: Ανάκλαση μετωπικού κύματος.....	106
ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ.....	114
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ	116

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Οι ροές με ελεύθερη επιφάνεια υπό την επίδραση βαρύτητας αποτελούν μια μεγάλη κλάση προβλημάτων επιστημονικού και πρακτικού ενδιαφέροντος. Κατάλληλα μαθηματικά μοντέλα για την επίλυση αυτών των προβλημάτων αποτελούνται από συστήματα μη-γραμμικών, μερικών διαφορικών εξισώσεων, εξαρτημένων από το χρόνο, εφοδιασμένων με αρχικές και συνοριακές συνθήκες. Οι εξισώσεις αυτές ονομάζονται εξισώσεις ρηχών υδάτων.

Η εύρεση αναλυτικών λύσεων σε προβλήματα που σχετίζονται με τις εξισώσεις ρηχών υδάτων είναι σημαντική για την κατανόησή του, αλλά πολλές φορές είναι δύσκολο να βρεθεί. Ένας άλλος τρόπος επίλυσης τέτοιων προβλημάτων είναι μέσω πειραμάτων, που προφανώς έχει και αυτός ο τρόπος μειονεκτήματα, καθώς κάποια πειράματα είναι κοστοβόρα να εκτελεστούν ή αδύνατο να εφαρμοστούν. Παρόλα αυτά οι πειραματικές μέθοδοι είναι ένα χρήσιμο εργαλείο των επιστημόνων για να κατανοήσουμε βασικές διαδικασίες που μπορούν να οδηγήσουν σε καλύτερα μαθηματικά μοντέλα. Οι αριθμητικές μέθοδοι για την επίλυση των προβλημάτων είναι σημαντικές και όπως και οι αναλυτικές μέθοδοι έχουν αφετηρία ένα μαθηματικό μοντέλο. Στις αριθμητικές μεθόδους τα μοντέλα που χρησιμοποιούμε διατηρούν τις περισσότερες από τις βασικές μαθηματικές ιδιότητες και βασίζονται στον υπολογισμό προσεγγιστικών αριθμητικών λύσεων του συστήματος των μερικών διαφορικών εξισώσεων. Πλέον μπορούμε να ενσωματώσουμε ολοένα και περισσότερο τη φυσική στα μαθηματικά μοντέλα, έτσι ώστε οι λύσεις που θα πάρουμε να είναι σωστή απεικόνιση των φυσικών φαινομένων.

Παρόλο που η αναλυτική θεωρία για τα μη-γραμμικά συστήματα μερικών διαφορικών εξισώσεων δεν είναι πλήρης, είναι απαραίτητη η κατανόηση της βασικής τους θεωρίας ώστε να δημιουργήσουμε κατάλληλες αριθμητικές μεθόδους για την επίλυση τους. Για παράδειγμα, κάποιος πρέπει να είναι ικανός να επιβεβαιώσει αν οι αρχικές συνθήκες που δίνονται στο πρόβλημα είναι καλά ορισμένες ή αν το πρόβλημα δεν ορίζεται σωστά, οπότε σε αυτή την περίπτωση μια μέθοδος όσο καλή και να είναι δεν θα δώσει σωστά αποτελέσματα. Επομένως, η φυσική και μαθηματική ανάλυση των λύσεων που παίρνουμε από τις αριθμητικές μεθόδους είναι ζωτικής σημασίας, για αυτό αναφέρουμε τη δημιουργία και τις ιδιότητες των εξισώσεων ρηχών υδάτων στα κεφάλαια 2 και 3.

Ένα σημαντικό πρακτικής σημασίας πρόβλημα είναι η κατάρρευση φράγματος η οποία σχετίζεται με τη δημιουργία πλημμυρικών κυμάτων. Οι εξισώσεις Navier-Stokes εφοδιασμένες με συνοριακές συνθήκες ελεύθερου συνόρου αποτελούν θεωρητικά το βασικό μαθηματικό μοντέλο για την περιγραφή και την προσομοίωση αυτών των κυμάτων. Αυτό το μαθηματικό μοντέλο είναι ιδιαίτερα πολύπλοκο και απαιτεί μια επίπονη και χρονοβόρα διαδικασία αριθμητικής επίλυσης κυρίως λόγω της ελεύθερης επιφάνειας. Επειδή η ελεύθερη επιφάνεια

αποτελεί μια συνοριακή συνθήκη της οποίας η θέση δεν είναι γνωστή, το πεδίο στο οποίο πρέπει να επιλυθούν οι εξισώσεις δεν είναι γνωστό εκ των προτέρων. Για αυτό θεωρούμε προσεγγιστικές συνθήκες που οδηγούν σε πιο εύκολα προβλήματα. Μια τέτοια υπόθεση είναι ότι το ύψος του νερού από τη θέση ισορροπίας είναι μικρό σε σχέση με το μήκος του. Με αυτή την υπόθεση οδηγούμαστε στις εξισώσεις ρηχών υδάτων, τις οποίες χρησιμοποιούμε στην παρούσα εργασία εφοδιασμένες με κατάλληλες αρχικές και συνοριακές συνθήκες. Στα κεφάλαια 4 και 5 ασχολούμαστε με το πρόβλημα της κατάρρευσης φράγματος από θεωρητικής απόψεως και αναφέρουμε την αναλυτική λύση του προβλήματος, την οποία αργότερα χρησιμοποιούμε για να συγκρίνουμε τα αποτελέσματα που δίνουν διάφορες αριθμητικές μέθοδοι.

Οι εξισώσεις ρηχών υδάτων προκύπτουν από νόμους διατήρησης υπερβολικού τύπου. Οι εξισώσεις αυτές δέχονται ασυνεχείς λύσεις, οι οποίες αποτελούν τη μεγαλύτερη πρόκληση των αριθμητικών μεθόδων. Απλές μέθοδοι δεν δίνουν σωστά αποτελέσματα όταν έχουμε ασυνεχείς λύσεις, τα επονομαζόμενα κύματα τύπου shock, εξαιτίας του λανθασμένου υπολογισμού της ταχύτητας διάδοσης του κύματος και επομένως της λάθος θέσης του μια συγκεκριμένη χρονική στιγμή. Έτσι οι προβλέψεις για τη δύναμη του κύματος ή τη στιγμή άφιξης του είναι αναξιόπιστες. Βασικό λοιπόν στην εξέλιξη των μεθόδων ήταν η ανάγκη εύρεσης αυτών των λύσεων με ακρίβεια. Πλέον είναι γνωστό ότι για να υπολογίσουμε τη σωστή ταχύτητα διάδοσης του κύματος πρέπει να χρησιμοποιήσουμε συντηρητικές αριθμητικές μεθόδους. Επίσης σημαντική είναι και η ύπαρξη ψευδών ταλαντώσεων, οι οποίες σύμφωνα με τον Godunov [9] είναι αναπόφευκτες αν κάποιος χρησιμοποιήσει γραμμικές μεθόδους με τάξη σύγκλισης μεγαλύτερης του ένα. Ένα σύνολο επιτυχημένων, ως προς τη σύλληψη των κυμάτων shock, αριθμητικών μεθόδων είναι οι λεγόμενες υψηλής-ανάλυσης μέθοδοι. Αυτές διατηρούν την υψηλής τάξης ακρίβεια στα ομαλά σημεία της λύσης και αποφεύγουν τις ταλαντώσεις κοντά στις ασυνέχειες. Με μεθόδους δεύτερης τάξης ακρίβειας ασχολούμαστε στο κεφάλαιο 8.

Στις αρχές του προηγούμενου αιώνα, οι πρώτες απόπειρες επίλυσης των εξισώσεων ρηχών υδάτων με αριθμητικές μεθόδους ήταν ανεπιτυχείς, λόγω έλλειψης θεωρημάτων που αφορούσαν την ευστάθεια των μεθόδων και έλλειψης γρήγορων υπολογιστών. Όμως εξελίξεις στη θεωρία των υπερβολικών νόμων διατήρησης και η εξέλιξη της τεχνολογίας βοήθησαν σημαντικά στην ανάπτυξη των αριθμητικών μεθόδων. Πρωτοπόροι σε αυτόν τον τομέα υπήρξαν οι Courant, Friedrichs, Godunov, Lax, Wendroff και άλλοι.

Στην παρούσα εργασία, ασχολούμαστε με μεθόδους πεπερασμένων όγκων, τύπου Godunov, για την επίλυση των εξαρτώμενων από το χρόνο, μη-γραμμικών εξισώσεων ρηχών υδάτων σε μια (Κεφάλαια 7 και 8) και δύο διαστάσεις (Κεφάλαιο 9). Αυτές είναι upwind μέθοδοι εντοπισμού των κυμάτων τύπου shock που πήραν την ονομασία τους από τον Ρώσο μαθηματικό Sergei K. Godunov. Οι upwind μέθοδοι χρησιμοποιούν για την κατασκευή τους την κατεύθυνση της μετάδοσης του κύματος που περιλαμβάνεται στις μερικές διαφορικές εξισώσεις. Είναι αρκετά αποτελεσματικές για την επίλυση προβλημάτων που συνδέονται με τις εξισώσεις ρηχών υδάτων καθώς μπορούν να υπολογίσουν με αρκετή ακρίβεια τα κύματα που δημιουργούνται,

συμπεριλαμβανομένων δινών και shear κυμάτων, με σωστή ταχύτητα μετάδοσης και χωρίς αφύσικες ταλαντώσεις στη γειτνίασή τους.

Η μέθοδος Godunov υπολογίζει τη λύση των εξισώσεων επιλύοντας ένα πρόβλημα Riemann στο μέτωπο δύο υπολογιστικών κελιών, το οποίο είναι ένα πρόβλημα με απλές αρχικές συνθήκες που αποτελούνται από δύο σταθερές καταστάσεις εκατέρωθεν του μετώπου. Αυτές οι σταθερές καταστάσεις είναι οι μέσοι όροι των δεδομένων σε κάθε υπολογιστικό κελί. Αρχικά ο Godunov χρησιμοποίησε την αναλυτική λύση των εξισώσεων για να επιλύσει τα τοπικά προβλήματα Riemann, αλλά η μέθοδος αυτή ήταν ανεπαρκής, οπότε αργότερα πρότεινε ένα ταχύτερο αναλυτικό επιλυτή Riemann και επίσης προσεγγιστικούς επιλύτες Riemann. Η μέθοδος Godunov είναι πρώτης τάξεως ακρίβειας οπότε η λύση δεν προσεγγίζει με μεγάλη ακρίβεια την αναλυτική.

Το θεώρημα Godunov, σύμφωνα με το οποίο όλες οι (γραμμικές) μέθοδοι τάξης ακρίβειας μεγαλύτερης του ένα παράγουν ψευδείς ταλαντώσεις στη γειτνίαση των ασυνεχειών, αποτέλεσε τροχοπέδη για την ανάπτυξη καλών αριθμητικών μεθόδων μεγαλύτερης τάξης ακρίβειας για μεγάλο διάστημα. Στη συνέχεια, όμως, αναπτύχθηκαν μέθοδοι που είναι δεύτερης τάξης ακρίβειας στα ομαλά μέρη της ροής και δεν παρουσιάζουν ταλαντώσεις κοντά στα κύματα τύπου shock. Αυτές ικανοποιούν την ιδιότητα Μείωσης της Ολικής Κύμανσης, γι' αυτό ονομάζονται TVD μέθοδοι. Αρχικά η TVD ιδέα εφαρμόστηκε σε upwind μεθόδους, όπως οι TVD-WAF και MUSCL-Hancock, και στη συνέχεια επεκτάθηκε σε κεντρικές μεθόδους που δεν απαιτούν την πληροφορία της κατεύθυνσης της μετάδοσης του κύματος, όπως η SLIC. Με αυτές τις μεθόδους ασχολούμαστε στο Κεφάλαιο 8.

Τα αποτελέσματα των αριθμητικών μεθόδων πρέπει να ερμηνεύονται, με την έννοια ότι η προσεγγιστική λύση που δίνουν εκφράζεται με διακριτές τιμές σε ένα πλέγμα και πρέπει να γνωρίζουμε τι μας δίνουν αυτές οι τιμές και αν προσεγγίζουν την αναλυτική λύση. Ακόμα και σε απλά παραδείγματα, έχουμε μεγάλο πλήθος αποτελεσμάτων, δηλαδή παίρνουμε μεγάλο πλήθος αριθμών, αφού οι υπολογισμοί γίνονται σε μεγάλο αριθμό κελιών και για πολλά χρονικά βήματα. Για αυτό η ανάπτυξη στον τομέα των γραφικών και των τεχνικών απεικόνισης επιστημονικών δεδομένων είναι αναπόσπαστο κομμάτι των αριθμητικών μεθόδων. Στην παρούσα εργασία χρησιμοποιούμε τη MATLAB για την απεικόνιση των αποτελεσμάτων που δίνουν οι διάφορες αριθμητικές μέθοδοι. Οι γραφικές παραστάσεις μας βοηθούν στην καλύτερη κατανόηση των μεθόδων και των αποτελεσμάτων τους που μας δίνουν στα προβλήματα που ασχολούμαστε.

ΕΙΣΩΣΕΙΣ ΡΗΧΩΝ ΥΔΑΤΩΝ

Μια μεγάλη ποικιλία φυσικών φαινομένων που περιλαμβάνουν ροές νερού με ελεύθερη επιφάνεια υπό την επίδραση της βαρύτητας, όπως πλημμύρες στους ωκεανούς, θραύση των κυμάτων στις ακτές, κατάρρευση φραγμάτων, μπορούν να περιγραφούν με τις εξισώσεις ρηχών υδάτων. Οι εξισώσεις ρηχών υδάτων είναι ένα δισδιάστατο σύστημα, μη-γραμμικών, μερικών διαφορικών εξισώσεων υπερβολικού τύπου, που εξαρτώνται από το χρόνο. Παράγονται από τις εξισώσεις του Navier-Stokes, θεωρώντας ότι η οριζόντια επιφάνεια του νερού είναι πολύ μεγαλύτερη από το βάθος του. Επομένως, η κάθετη ταχύτητα των σωματιδίων του νερού είναι πολύ μικρότερη από την οριζόντια ταχύτητά τους.

Σε αυτό το κεφάλαιο θα ασχοληθούμε με τη δημιουργία των εξισώσεων ρηχών υδάτων. Οι εξισώσεις εκφράζονται με τη μορφή του νόμου διατήρησης, σε διαφορική και σε ολοκληρωτική μορφή. Επιπλέον υλικό σχετικά με τις εξισώσεις ρηχών υδάτων υπάρχει στα βιβλία των Toro [38], Stoker [28], Cunge et al. [3], Lighthill [22].

2.1: Νόμοι Διατήρησης

Οι νόμοι διατήρησης μάζας και ορμής σε διαφορική μορφή για ένα συμπίεστο υλικό είναι:

$$\rho_t + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) = 0 \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \mathbf{V}) + \nabla \cdot [\rho \mathbf{V} \otimes \mathbf{V} + p\mathbf{I} - \Pi] = \rho \mathbf{g} \quad (2.2)$$

όπου ρ είναι η πυκνότητα, p η πίεση, $\mathbf{V} = (u, v, w)$ το διάνυσμα της ταχύτητας ως προς τις κατευθύνσεις x, y και z , αντίστοιχα και $\mathbf{g} = (g_1, g_2, g_3)$ το διάνυσμα των δυνάμεων του σώματος. Επίσης,

$$\mathbf{V} \otimes \mathbf{V} = \begin{pmatrix} u^2 & uv & uw \\ vu & v^2 & vw \\ wu & wv & w^2 \end{pmatrix} : \text{εξωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων } \mathbf{V} \text{ και } \mathbf{V}$$

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : \text{μοναδιαίος πίνακας}$$

$$\Pi = \begin{pmatrix} \tau^{xx} & \tau^{xy} & \tau^{xz} \\ \tau^{yx} & \tau^{yy} & \tau^{yz} \\ \tau^{zx} & \tau^{zy} & \tau^{zz} \end{pmatrix} : \text{τανυστής πίεσης του ιξώδους}$$

Το ∇ ονομάζεται τελεστής απόκλισης, εφαρμόζεται σε διάνυσμα και το αποτέλεσμα είναι μια βαθμωτή ποσότητα, δηλαδή για διάνυσμα $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ ισχύει

$$\nabla \cdot A = \frac{\partial \alpha_1}{\partial x} + \frac{\partial \alpha_2}{\partial y} + \frac{\partial \alpha_3}{\partial z}. \text{ Οι εξισώσεις (2.1) και (2.2) δηλώνουν τη διατήρηση της μάζας } \rho$$

και της ορμής ρV .

Η αντίστοιχη ολοκληρωτική μορφή των νόμων διατήρησης (2.1) και (2.2) δίνονται από τους ακόλουθους τύπους, όπου V είναι ένα αυθαίρετο πεπερασμένο χωρίο στον τρισδιάστατο χώρο και Ω το σύνορό του:

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \rho dV = - \iint_{\Omega} n \cdot (\rho V) d\Omega \quad (2.3)$$

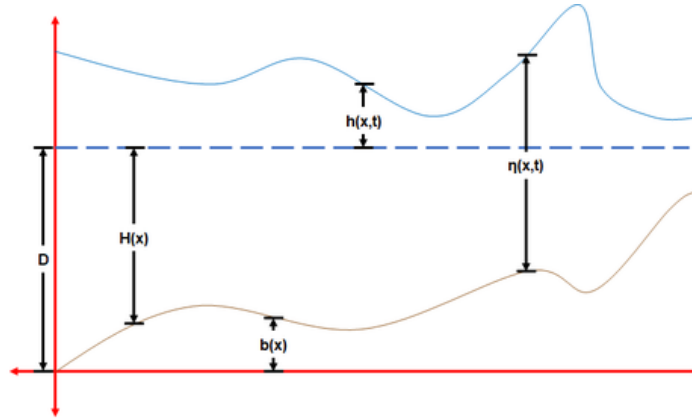
$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V (\rho V) dV = - \iint_{\Omega} [V(n \cdot \rho V) + p n - n \cdot \Pi] d\Omega + \iiint_V \rho g dV \quad (2.4)$$

Αν αγνοήσουμε την επίδραση του ιξώδους, αλλά διατηρήσουμε τις δυνάμεις του σώματος μέσω ενός διανύσματος πηγαιίου όρου S και επιπλέον χρησιμοποιήσουμε τις πρωταρχικές μεταβλητές ρ , u , v , w και p , παίρνουμε τις ακόλουθες εξισώσεις, τις οποίες θα χρησιμοποιήσουμε στη συνέχεια για να ορίσουμε το πρόβλημα των υδάτων με ελεύθερη επιφάνεια:

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_t + u\rho_x + v\rho_y + w\rho_z + \rho(u_x + v_y + w_z) = 0 \\ u_t + uu_x + vu_y + wu_z + \frac{1}{\rho} p_x = g_1 \\ v_t + uv_x + vv_y + wv_z + \frac{1}{\rho} p_y = g_2 \\ w_t + uw_x + vw_y + ww_z + \frac{1}{\rho} p_z = g_3 \end{array} \right. \quad (2.5)$$

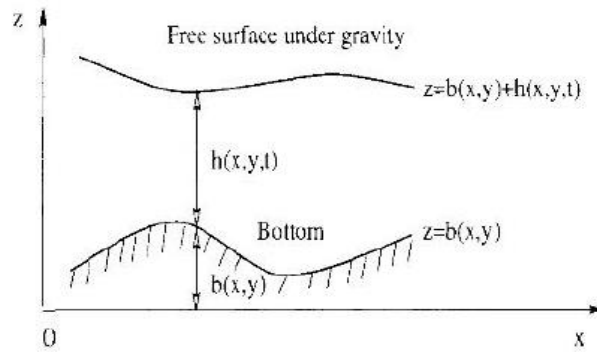
2.2: Ροή νερού με ελεύθερη επιφάνεια

Οι μιας-διάστασης εξισώσεις ρηχών υδάτων αναπαριστούν τη ροή σε κανάλια σταθερής διατομής. Υποθέτουμε ότι η πίεση είναι υδροστατική, ότι η ταχύτητα των μορίων του νερού παραμένει ομοιόμορφη στην κάθετη διάσταση και ότι η πυκνότητα του νερού παραμένει σταθερή. Το Σχήμα 2.1, αναπαριστά το μοντέλο ρηχών υδάτων στη μια διάσταση, όπου $h(x)$ είναι το κάτω σύνορο και ονομάζεται πυθμένας, $\eta(x, t)$ το ύψος του νερού, $H(x)$ το ύψος του νερού από τον πυθμένα μέχρι τη θέση ηρεμίας και $h(x, t) = \eta(x, t) - H(x)$ ([45]).



Σχήμα 2.1: Το μοντέλο ρηχών υδάτων σε μια διάσταση

Για την παραγωγή των εξισώσεων ρηχών υδάτων, θα θεωρήσουμε τη ροή του νερού με ελεύθερη επιφάνεια υπό την επίδραση βαρύτητας σε τρεις διαστάσεις. Το Σχήμα 2.2 αναπαριστά τη γεωμετρία του προβλήματος, όπου $b(x,y)$ είναι ο πυθμένας και η ελεύθερη επιφάνεια ορίζεται από τη σχέση $z = b(x,y) + h(x,y,t)$, με $h(x,y,t)$ το βάθος του νερού, δηλαδή η κάθετη απόσταση μεταξύ του πυθμένα και της ελεύθερης επιφάνειας.



Σχήμα 2.2: Ροή με ελεύθερη επιφάνεια υπό την επίδραση της βαρύτητας

Αν υποθέσουμε ότι η πυκνότητα ρ του νερού είναι σταθερή και ότι οι δυνάμεις του σώματος δίνονται από το διάνυσμα $\mathbf{g} = (0, 0, -g)$, όπου $g = 9.8m/s^2$ είναι η βαρύτητα (σταθερό μέγεθος), τότε οι εξισώσεις (2.5) απλοποιούνται και παίρνουμε τις ακόλουθες σχέσεις:

$$\begin{cases} u_x + v_y + w_z = 0 \end{cases} \quad (2.6)$$

$$\begin{cases} u_t + uu_x + vv_y + ww_z = -\frac{1}{\rho} p_x \end{cases} \quad (2.7)$$

$$\begin{cases} v_t + uv_x + vv_y + ww_z = -\frac{1}{\rho} p_y \end{cases} \quad (2.8)$$

$$\begin{cases} w_t + uw_x + vw_y + ww_z = -\frac{1}{\rho} p_z - g \end{cases} \quad (2.9)$$

Αν δοθούν αρχικές συνθήκες για τη χρονική στιγμή $t = 0$ και συνοριακές συνθήκες για τον πυθμένα και την ελεύθερη επιφάνεια, η λύση του προβλήματος είναι η λύση του συστήματος (2.6) - (2.9) για τους αγνώστους p, u, v, w . Αυτό το πρόβλημα είναι δύσκολο να επιλυθεί, κυρίως λόγω της ελεύθερης επιφάνειας z , που ως συνοριακή συνθήκη πρέπει να ικανοποιείται. Όμως η θέση αυτού του συνόρου είναι άγνωστη, οπότε και το χωρίο στο οποίο πρέπει να λύσουμε το πρόβλημα δεν είναι γνωστό εκ των προτέρων. Θεωρώντας όμως ότι το βάθος του νερού είναι μικρό σε σχέση με το μήκος του κύματος, οδηγούμαστε σε μη-γραμμικά προβλήματα αρχικών τιμών (για λεπτομέρειες βλέπε Cunge [3] και Stoker [28]).

Αρχικά, θα ασχοληθούμε με τις συνοριακές συνθήκες. Υποθέτουμε ότι ένα σύνορο δίνεται από την επιφάνεια:

$$\psi(x, y, z, t) = 0 \quad (2.10)$$

Για την ελεύθερη επιφάνεια έχουμε $\psi(x, y, z, t) = z - s(x, y, t)$ και λόγω της σχέσης (2.10) παίρνουμε $z - s(x, y, t) = 0$. Ομοίως, για τον πυθμένα έχουμε $z - b(x, y) = 0$.

Θέτουμε τις παρακάτω δύο συνοριακές συνθήκες στην ελεύθερη επιφάνεια $s(x, y, t)$

$$\frac{d}{dt}\psi(x, y, z, t) = 0 \Rightarrow \psi_t + u\psi_x + v\psi_y + w\psi_z = 0 \quad (2.11)$$

$$p(x, y, t, z)|_{z=s(x, y)} - p_{atm} = 0 \quad (2.12)$$

την κινηματική και τη δυναμική συνθήκη, αντίστοιχα, όπου $\psi(x, y, z, t) = z - s(x, y, t)$ και p_{atm} είναι η ατμοσφαιρική πίεση, την οποία θέτουμε ίση με 0. Τη συνθήκη (2.11) την εφαρμόζουμε επίσης και στον πυθμένα $b(x, y)$, όπου $\psi(x, y, z, t) = z - b(x, y)$.

Για τον συντελεστή της κάθετης επιτάχυνσης, $\frac{dw}{dt} = w_t + uw_x + vw_y + ww_z$, υποθέτουμε ότι είναι ίσος με μηδέν, $\frac{dw}{dt} = 0$ (2.13).

Εφαρμόζοντας την (2.13) στην (2.9) παίρνουμε:

$$p_z = -\rho g \quad (2.14)$$

Αν θεωρήσουμε στη δυναμική συνθήκη (2.12) ότι η ατμοσφαιρική πίεση p_{atm} είναι ίση με μηδέν στην ελεύθερη επιφάνεια, παίρνουμε:

$$p = \rho g(s - z) \quad (2.15)$$

Παραγωγίζοντας την (2.15) ως προς x και y παίρνουμε:

$$p_x = \rho g s_x \text{ και } p_y = \rho g s_y \quad (2.16)$$

Από τις παραπάνω σχέσεις συμπεραίνουμε ότι η επιτάχυνση των σωματιδίων του νερού $\frac{du}{dt}$ και $\frac{dv}{dt}$, ως προς τις κατευθύνσεις x και y αντίστοιχα, είναι ανεξάρτητες του z . Το ίδιο ισχύει και για τις ταχύτητες u και v , δηλαδή $u_z = v_z = 0$. Αν εφαρμόσουμε τις προηγούμενες συνθήκες, καθώς και τη σχέση (2.16) στις εξισώσεις (2.7) και (2.8) προκύπτουν οι σχέσεις: $u_t + uu_x + vv_y = -gs_x$ και $v_t + uv_x + vv_y = -gs_y$.

Ολοκληρώνοντας την εξίσωση συνέχειας (2.6) ως προς z , με άκρα του ολοκληρώματος $z = b(x, y)$ (πυθμένας) και $z = s(x, y, t)$ (ελεύθερη επιφάνεια) παίρνουμε:

$$\int_b^s (u_x + v_y + w_z) dz = 0 \Leftrightarrow w|_{z=s} - w|_{z=b} + \int_b^s u_x dz + \int_b^s v_y dz = 0 \quad (2.17)$$

Με σκοπό να καθορίσουμε τους δύο πρώτους όρους της σχέσης (2.17) εφαρμόζουμε τη συνοριακή συνθήκη (2.11) στην ελεύθερη επιφάνεια $z = s(x, y, t)$ και στον πυθμένα $z = b(x, y)$:

$$(s_t + us_x + vs_y - w)|_{z=s} = 0 \Leftrightarrow w|_{z=s} = (s_t + us_x + vs_y)|_{z=s} \quad (2.18)$$

$$(ub_x + vb_y - w)|_{z=b} = 0 \Leftrightarrow w|_{z=b} = (ub_x + vb_y)|_{z=b} \quad (2.19)$$

Η αντικατάσταση των (2.18) και (2.19) στην (2.17), δίνει:

$$(s_t + us_x + vs_y)|_{z=s} - (ub_x + vb_y)|_{z=b} + \int_b^s u_x dz + \int_b^s v_y dz = 0 \quad (2.20)$$

Χρησιμοποιώντας τον τύπο του Leibniz στα ολοκληρώματα της εξίσωσης (2.20), αυτά γίνονται:

$$\int_b^s u_x dz = \frac{\partial}{\partial x} \int_b^s u dz - u|_{z=s} \cdot s_x + u|_{z=b} \cdot b_x \quad (2.21)$$

και

$$\int_b^s v_y dz = \frac{\partial}{\partial y} \int_b^s v dz - v|_{z=s} \cdot s_y + v|_{z=b} \cdot b_y \quad (2.22)$$

οπότε, αντικαθιστώντας τις (2.21) και (2.22) στην (2.20), έχουμε:

$$s_t + \frac{\partial}{\partial x} \int_b^s u dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_b^s v dz = 0 \quad (2.23)$$

Επειδή οι μεταβλητές u και v είναι ανεξάρτητες του z , $s = b + h$ και $b_t = 0$, η εξίσωση (2.23) γράφεται ως εξής:

$$h_t + (hu)_x + (hv)_y = 0 \quad (2.24)$$

όπου αποτελεί τη διαφορική μορφή του νόμου διατήρησης της μάζας,

Η διαφορική μορφή της εξίσωσης (2.8) λαμβάνεται ως εξής: πολλαπλασιάζουμε την εξίσωση $h_t + (hu)_x + (hv)_y = 0$ με u , και την $u_t + uu_x + uv_y = -gs_x$ με h και τις προσθέτουμε. Θεωρώντας επίσης ότι το βάθος του νερού h είναι διαφορίσιμη συνάρτηση, δηλαδή ισχύει $h \frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{2} h^2 \right)$, τότε η εξίσωση της ορμής ως προς τη x κατεύθυνση, γίνεται:

$$(hu)_t + (hu^2 + \frac{1}{2} gh^2)_x + (huv)_y = -ghb_x \quad (2.25)$$

Ομοίως, η εξίσωση (2.9), της ορμής ως προς την y κατεύθυνση, γίνεται:

$$(hv)_t + (huv)_x + (hu^2 + \frac{1}{2} gh^2)_y = -ghb_y \quad (2.26)$$

Οι μερικές διαφορικές εξισώσεις (2.24), (2.25) και (2.26) μπορούν να γραφούν με τη διαφορική μορφή του νόμου διατήρησης, ως μια εξίσωση διανυσμάτων:

$$U_t + F(U)_x + G(U)_y = S(U) \quad (2.27)$$

όπου

$$U = \begin{bmatrix} h \\ hu \\ hv \end{bmatrix}, \quad F(U) = \begin{bmatrix} hu \\ hu^2 + \frac{1}{2} gh^2 \\ huv \end{bmatrix}, \quad G(U) = \begin{bmatrix} hv \\ huv \\ hv^2 + \frac{1}{2} gh^2 \end{bmatrix}, \quad S(U) = \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{bmatrix}$$

τα διανύσματα των συντηρητικών μεταβλητών, της ροής ως προς την x κατεύθυνση, της ροής ως προς την y κατεύθυνση και ο πηγαίος όρος, αντίστοιχα. Ο πηγαίος όρος $S(U)$ σχετίζεται με διάφορα φυσικά και γεωμετρικά φαινόμενα. Για παράδειγμα, στην περίπτωση που ο πυθμένας

μεταβάλλεται, ο πηγαίος όρος γίνεται $S(U) = \begin{bmatrix} 0 \\ -ghb_x \\ -ghb_y \end{bmatrix}$. Σε πολλές πρακτικές εφαρμογές

υπάρχουν επιπρόσθετοι όροι στο διάνυσμα $S(U)$ που αφορούν τις δυνάμεις Coriolis, τη δύναμη του αέρα, την τριβή του πυθμένα κ.α.

Στους παραπάνω τύπους, $h(x, y, t)$ είναι το βάθος, που σχετίζεται με την ελεύθερη επιφάνεια $s(x, y, t)$ και τον πυθμένα $b(x, y)$ μέσω της σχέσης $s(x, y, t) = h(x, y, t) + b(x, y)$. Στα περισσότερα προβλήματα που θα ασχοληθούμε ο πυθμένας b δεν εξαρτάται από το χρόνο και είναι γνωστός. Επίσης, $u(x, y, t)$ είναι η ταχύτητα ως προς την x κατεύθυνση, $v(x, y, t)$ η ταχύτητα ως προς την y κατεύθυνση και $g = 9.8m/s^2$ η βαρύτητα. Στη συνέχεια θα ασχοληθούμε με την ομογενή μορφή της εξίσωσης (2.27), δηλαδή θα θεωρήσουμε $S(U) = 0$.

Η (2.27) μπορεί να γραφεί και με τη μορφή ολοκληρωμάτων ως:

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V U dV = - \iint_{\Omega} n \cdot H(U) d\Omega \quad (2.28)$$

όπου $n \cdot H(U)$ είναι η συνιστώσα της κανονικής ροής μέσω της επιφάνειας Ω και $H(U)$ είναι συνάρτηση των ροών F και G . Ενώ η διαφορική μορφή των εξισώσεων ρηχών υδάτων (2.27) δεν επιδέχεται ασυνεχείς λύσεις, όπως για παράδειγμα τα μετωπικά κύματα, αφού για να είναι διαφορίσιμες οι συνιστώσες της εξίσωσης σημαίνει ότι είναι και συνεχείς, η ολοκληρωτική μορφή (2.28) τις δέχεται. Οι LeVeque [21], Toro [30], Godlewski και Raviart [8] αναφέρονται λεπτομερώς στις ομαλές και στις ασυνεχείς (αδύναμες) λύσεις των νόμων διατήρησης υπερβολικού τύπου. Είναι εύκολο να δείξουμε ότι η διαφορική μορφή είναι μια ειδική περίπτωση της ολοκληρωτικής μορφής, υποθέτοντας ότι οι λύσεις είναι ικανοποιητικά ομαλές.

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΡΗΧΩΝ ΥΔΑΤΩΝ

Σε αυτό το κεφάλαιο θα μελετήσουμε κάποιες βασικές ιδιότητες των εξισώσεων ρηχών υδάτων. Θα χρησιμοποιήσουμε κάποιες βασικές μαθηματικές έννοιες που σχετίζονται με τη θεωρία των νόμων διατήρησης, υπερβολικού τύπου. Μια χρήσιμη εισαγωγή για τις μερικές διαφορικές εξισώσεις υπερβολικού τύπου υπάρχει στο βιβλίο των Zachmanoglou και Thoe [44] και περισσότερες λεπτομέρειες βρίσκουμε στα βιβλία των LeVeque [21], Jeffrey [16] και Logan [23]. Θα ασχοληθούμε με τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα με όρους των συντηρητικών και των πρωταρχικών μεταβλητών, με τη βοήθεια των οποίων ορίζουμε την υπερβολική φύση των εξισώσεων.

3.1: Ιδιοτιμές και ιδιοδιανύσματα με όρους των συντηρητικών μεταβλητών

Υπενθυμίζουμε ότι η διαφορική μορφή των εξισώσεων ρηχών υδάτων σε δύο-διαστάσεις είναι

$$U_t + F(U)_x + G(U)_y = S(U) \quad (3.1)$$

Η εξίσωση (3.1) δίνεται με όρους των συντηρητικών μεταβλητών, h , hu και hv . Μπορεί να γραφεί και στην ημι-γραμμική μορφή

$$U_t + A(U)U_x + B(U)U_y = 0 \quad (3.2)$$

όπου $A(U)$ και $B(U)$ είναι οι Ιακωβιανοί πίνακες που αντιστοιχούν στις ροές $F(U)$ και $G(U)$, αντίστοιχα. Τα στοιχεία των πινάκων αυτών είναι οι μερικές παράγωγοι των συνιστωσών f_i του $F(U)$ και g_i του $G(U)$ ως προς τις μεταβλητές u_j του διανύσματος U , και δίνονται από τους παρακάτω τύπους:

$$A(U) = \frac{\partial F}{\partial U} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \frac{\partial f_1}{\partial u_2} & \frac{\partial f_1}{\partial u_3} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u_1} & \frac{\partial f_2}{\partial u_2} & \frac{\partial f_2}{\partial u_3} \\ \frac{\partial f_3}{\partial u_1} & \frac{\partial f_3}{\partial u_2} & \frac{\partial f_3}{\partial u_3} \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad B(U) = \frac{\partial G}{\partial U} = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial u_1} & \frac{\partial g_1}{\partial u_2} & \frac{\partial g_1}{\partial u_3} \\ \frac{\partial g_2}{\partial u_1} & \frac{\partial g_2}{\partial u_2} & \frac{\partial g_2}{\partial u_3} \\ \frac{\partial g_3}{\partial u_1} & \frac{\partial g_3}{\partial u_2} & \frac{\partial g_3}{\partial u_3} \end{bmatrix}$$

όπου

$$U = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h \\ hu \\ hw \end{bmatrix}, \quad F(U) = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} hu \\ hu^2 + \frac{1}{2}gh^2 \\ huw \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_2 \\ \frac{u_2^2}{u_1} + \frac{1}{2}gu_1^2 \\ \frac{u_2u_3}{u_1} \end{bmatrix} \quad \text{και}$$

$$G(U) = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} hw \\ huw \\ hw^2 + \frac{1}{2}gh^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_3 \\ \frac{u_2u_3}{u_1} \\ \frac{u_3^2}{u_1} + \frac{1}{2}gu_1^2 \end{bmatrix}$$

Παρατηρούμε ότι ενώ οι όροι της ημι-γραμμικής μορφής (3.2) είναι συντηρητικές μεταβλητές, οι εξισώσεις που προκύπτουν δεν είναι συντηρητικές.

Πρόταση 3.1.1: Αν χρησιμοποιήσουμε τις μη-συντηρητικές μεταβλητές u , v και α , όπου $\alpha = \sqrt{gh}$ (3.3), οι Ιακωβιανοί πίνακες A και B δίνονται από τους τύπους:

$$A(U) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \alpha^2 - u^2 & 2u & 0 \\ uw & v & u \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad B(U) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -uw & v & u \\ \alpha^2 - v^2 & 0 & 2v \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

Πρόταση 3.1.2: Οι ιδιοτιμές των πινάκων A και B είναι: $\lambda_1 = u - \alpha$, $\lambda_2 = u$, $\lambda_3 = u + \alpha$, και $\lambda_1 = v - \alpha$, $\lambda_2 = v$, $\lambda_3 = v + \alpha$, αντίστοιχα, με $\alpha = \sqrt{gh}$.

Δεξί ιδιοδιάνυσμα ενός πίνακα A , που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ , είναι ένα διάνυσμα στήλη R , για το οποίο ισχύει $AR = \lambda R$. Ομοίως, αριστερό ιδιοδιάνυσμα του A , που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ , είναι ένα διάνυσμα γραμμή L , για το οποίο ισχύει $LA = \lambda L$.

Πρόταση 3.1.3: Τα δεξιά και αριστερά ιδιοδιανύσματα του A δίνονται από τους τύπους:

$$R^{(1)} = \alpha_1 \begin{bmatrix} 1 \\ u - \alpha \\ v \end{bmatrix}, \quad R^{(2)} = \alpha_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad R^{(3)} = \alpha_3 \begin{bmatrix} 1 \\ u + \alpha \\ v \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

και

$$L^{(1)} = \hat{\alpha}_1[u + \alpha, -1, 0], L^{(2)} = \hat{\alpha}_2[-v, 0, 1], L^{(3)} = \hat{\alpha}_3[u - \alpha, -1, 0] \quad (3.6)$$

αντίστοιχα, όπου $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2, \hat{\alpha}_3$ είναι λόγοι ομοιότητας (scaling factor).

Αν θεωρήσουμε $\hat{\alpha}_1 = \frac{1}{2\alpha\alpha_1}, \hat{\alpha}_2 = \frac{1}{\alpha_2}, \hat{\alpha}_3 = -\frac{1}{2\alpha\alpha_3}$, τότε τα αριστερά και δεξιά ιδιοδιανύσματα του A είναι μεταξύ τους ορθοκανονικά, δηλαδή ισχύει:

$$L^{(i)} \cdot R^{(j)} = \begin{cases} 1, & \text{αν } i = j \\ 0, & \text{αν } i \neq j \end{cases}.$$

Πρόταση 3.1.4: Τα δεξιά και αριστερά ιδιοδιανύσματα του B δίνονται από τους τύπους:

$$R^{(1)} = \beta_1 \begin{bmatrix} 1 \\ u \\ v - \alpha \end{bmatrix}, R^{(2)} = \beta_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, R^{(3)} = \beta_3 \begin{bmatrix} 1 \\ u \\ v + \alpha \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

και

$$L^{(1)} = \hat{\beta}_1[v + \alpha, -1, 0], L^{(2)} = \hat{\beta}_2[-u, 1, 0], L^{(3)} = \hat{\beta}_3[v - \alpha, -1, 0] \quad (3.8)$$

αντίστοιχα, όπου $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2, \hat{\beta}_3$ είναι λόγοι ομοιότητας. Με κατάλληλη επιλογή των $\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2, \hat{\beta}_3$ τα δεξιά και αριστερά ιδιοδιανύσματα του B είναι ορθοκανονικά.

3.2: Η υπερβολική φύση των εξισώσεων ρηχών υδάτων

Έστω $A(U)$ και $B(U)$ οι Ιακωβιανοί πίνακες που δίνονται στην (3.4) και C ένας γραμμικός συνδυασμός αυτών, δηλαδή $C = \omega_1 A + \omega_2 B$, όπου ω_1, ω_2 πραγματικοί αριθμοί με $\omega_1 \neq 0$ ή $\omega_2 \neq 0$. Ο πίνακας C είναι:

$$C(U) = \begin{bmatrix} 0 & \omega_1 & \omega_2 \\ (\alpha^2 - u^2)\omega_1 - u\omega_2 & 2u\omega_1 + v\omega_2 & u\omega_2 \\ -u\omega_1 + (\alpha^2 - v^2)\omega_2 & v\omega_1 & u\omega_1 + 2v\omega_2 \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

Πρόταση 3.2.1: Οι ιδιοτιμές λ_i , τα δεξιά $R^{(i)}$ και τα αριστερά $L^{(i)}$ ιδιοδιανύσματα του C δίνονται από τους ακόλουθους τύπους:

$$\lambda_1 = u\omega_1 + v\omega_2 - \alpha|\omega|, \lambda_2 = u\omega_1 + v\omega_2, \lambda_3 = u\omega_1 + v\omega_2 + \alpha|\omega|,$$

$$R^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ u - \frac{\alpha\omega_1}{|\omega|} \\ v - \frac{\alpha\omega_2}{|\omega|} \end{bmatrix}, R^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 \\ \omega_2 \\ -\omega_1 \end{bmatrix}, R^{(3)} = \begin{bmatrix} 1 \\ u + \frac{\alpha\omega_1}{|\omega|} \\ v + \frac{\alpha\omega_2}{|\omega|} \end{bmatrix},$$

$$L^{(1)} = \left[\frac{u\omega_1 + v\omega_2}{2\alpha|\omega|} + \frac{1}{2}, -\frac{\omega_1}{2\alpha|\omega|}, -\frac{\omega_2}{2\alpha|\omega|} \right],$$

$$L^{(2)} = \left[-\frac{u\omega_2 - v\omega_1}{|\omega|^2}, -\frac{\omega_2}{|\omega|^2}, -\frac{\omega_1}{|\omega|^2} \right],$$

$$L^{(3)} = \left[-\frac{u\omega_1 + v\omega_2}{2\alpha|\omega|} + \frac{1}{2}, \frac{\omega_1}{2\alpha|\omega|}, \frac{\omega_2}{2\alpha|\omega|} \right]$$

$$\text{με } |\omega| = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}.$$

Ορισμός 3.2.1: Η εξίσωση $U_t + F(U)_x + G(U)_y = 0$ παριστάνει ένα σύστημα m νόμων διατήρησης, με Ιακωβιανούς πίνακες $A(U)$ και $B(U)$. Το σύστημα θα λέγεται *υπερβολικό* αν ο πίνακας $C = \omega_1 A + \omega_2 B$ έχει m πραγματικές ιδιοτιμές για κάθε διάνυσμα U συντηρητικών μεταβλητών και κάθε διάνυσμα $\omega = [\omega_1, \omega_2]$ με $|\omega| \neq 0$. Το σύστημα θα καλείται *αυστηρά υπερβολικό* αν επιπλέον οι ιδιοτιμές είναι διαφορετικές.

Πόρισμα 3.2.1: Οι εξαρτώμενες από το χρόνο, δύο-διαστάσεων εξισώσεις ρηχών υδάτων (3.1) είναι υπερβολικού τύπου. Στην περίπτωση που ο πυθμένας είναι υγρός, το σύστημα είναι αυστηρά υπερβολικό.

3.3: Ιδιοτιμές και ιδιοδιανύσματα με όρους πρωταρχικών μεταβλητών

Οι πρωταρχικές ή φυσικές μεταβλητές είναι το βάθος h , η ταχύτητα u ως προς την x κατεύθυνση και η ταχύτητα v ως προς την y κατεύθυνση. Οι εξισώσεις συντηρητικών μεταβλητών που ορίζονται από την (3.1), όταν ο πυθμένας b έχει μεταβλητό υψόμετρο, μπορούν να γραφούν ως εξής:

$$h_t + uh_x + hu_x + \nu h_y + hw_y = 0 \quad (3.10)$$

$$u_t + uu_x + gh_x + \nu u_y = -gb_x \quad (3.11)$$

$$\nu_t + w\nu_x + \nu\nu_y + gh_y = -gb_y \quad (3.12)$$

Στη μη-συντηρητική μορφή (3.10) της εξίσωσης μάζας καταλήγουμε από την πρώτη εξίσωση της (3.1), παραγωγίζοντας ως προς x και y . Η μη-συντηρητική μορφή (3.11) που μας δίνει την ορμή ως προς τη x κατεύθυνση προκύπτει παραγωγίζοντας ως προς όλες τις μεταβλητές τη δεύτερη εξίσωση της (3.1) και χρησιμοποιώντας, αφού πρώτα κάνουμε κατάλληλες αλγεβρικές πράξεις, την (3.10). Ανάλογα προκύπτει και η μη-συντηρητική μορφή (3.12) που μας δίνει τη ορμή ως προς την y κατεύθυνση.

Η ημι-γραμμική μορφή των εξισώσεων (3.10) - (3.12) είναι:

$$W_t + A(W)W_x + B(W)W_y = S \quad (3.13)$$

όπου W είναι το διάνυσμα των πρωταρχικών μεταβλητών, $A(W)$ και $B(W)$ πίνακες που οι όροι τους περιλαμβάνουν τις πρωταρχικές μεταβλητές και S ο πηγαίος όρος και δίνονται από τους ακόλουθους τύπους:

$$W = \begin{bmatrix} h \\ u \\ \nu \end{bmatrix}, A(W) = \begin{bmatrix} u & h & 0 \\ g & u & 0 \\ 0 & 0 & u \end{bmatrix}, B(W) = \begin{bmatrix} \nu & 0 & h \\ 0 & \nu & 0 \\ g & 0 & \nu \end{bmatrix}, S = \begin{bmatrix} 0 \\ -gb_x \\ -gb_y \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

Πρόταση 3.3.1: Οι ιδιοτιμές των $A(W)$ και $B(W)$ είναι: $\lambda_1 = u - \alpha$, $\lambda_2 = u$, $\lambda_3 = u + \alpha$ και $\lambda_1 = \nu - \alpha$, $\lambda_2 = \nu$, $\lambda_3 = \nu + \alpha$, αντίστοιχα.

Πρόταση 3.3.2: Τα δεξιά $R^{(i)}$ και αριστερά $L^{(i)}$ ιδιοδιανύσματα του πίνακα A , δίνονται από τις σχέσεις:

$$R^{(1)} = \alpha_1 \begin{bmatrix} h \\ -\alpha \\ 0 \end{bmatrix}, R^{(2)} = \alpha_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, R^{(3)} = \alpha_3 \begin{bmatrix} h \\ \alpha \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

και

$$L^{(1)} = \hat{\alpha}_1 [\alpha, -h, 0], L^{(2)} = \hat{\alpha}_2 [0, 0, 1], L^{(3)} = \hat{\alpha}_3 [\alpha, h, 0] \quad (3.16)$$

όπου $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2, \hat{\alpha}_3$ είναι λόγοι ομοιότητας.

Πρόταση 3.3.3: Τα δεξιά $R^{(i)}$ και αριστερά $L^{(i)}$ ιδιοδιανύσματα του πίνακα B , δίνονται από τις σχέσεις:

$$R^{(1)} = \beta_1 \begin{bmatrix} h \\ 0 \\ -\alpha \end{bmatrix}, R^{(2)} = \beta_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, R^{(3)} = \beta_3 \begin{bmatrix} h \\ 0 \\ \alpha \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

και

$$L^{(1)} = \hat{\beta}_1 [\alpha, 0, -h], L^{(2)} = \hat{\beta}_2 [0, 1, 0], L^{(3)} = \hat{\beta}_3 [\alpha, 0, h] \quad (3.18)$$

όπου $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2, \hat{\beta}_3$ είναι λόγιοι ομοιότητας.

ΚΑΤΑΡΡΕΥΣΗ ΦΡΑΓΜΑΤΟΣ

Ένα πρόβλημα με μεγάλο φυσικό ενδιαφέρον είναι η κατάρρευση φράγματος. Η κατάρρευση φράγματος είναι μια κατασκευαστική αποτυχία, που οδηγεί στην αιφνίδια, απότομη και ανεξέλεγκτη πτώση μεγάλης ποσότητας νερού και έχει καταστροφικές συνέπειες. Οι μεγαλύτερες καταστροφές σχετίζονται με κατάρρευση δεξαμενών που αποθηκεύουν το νερό των ποταμών στα βουνά. Μια άλλη περίπτωση είναι η κατάρρευση αναχωμάτων που προστατεύουν περιοχές που βρίσκονται πιο κάτω από το επίπεδο της θάλασσας, όπως συνέβη στην Ολλανδία, κατά τη διάρκεια μιας καταιγίδας το 1953. Πάνω από εκατό αναχώματα κατάρρευσαν και σχεδόν δύο χιλιάδες άτομα πέθαναν εξαιτίας της πλημμύρας που δημιουργήθηκε (Εικόνα 4.1, [46]).



Εικόνα 4.1: Κατάρρευση αναχωμάτων στην Ολλανδία, 1953

4.1: Χαρακτηριστικά πεδία

Στη συνέχεια, θα ασχοληθούμε με το υπερβολικού τύπου, ομογενές, μιας-διάστασης σύστημα των m νόμων διατήρησης:

$$U_t + F(U)_x = 0$$

όπου $U = \begin{bmatrix} h \\ hu \end{bmatrix}$, $F(U) = \begin{bmatrix} hu \\ hu^2 + \frac{1}{2}gh^2 \end{bmatrix}$, το οποίο έχει πραγματικές ιδιοτιμές $\lambda_i(U)$ και δεξιά

ιδιοδιανύσματα $R^{(i)}(U)$. Η ιδιοτιμή $\lambda_i(U)$, ονομάζεται χαρακτηριστική ταχύτητα και ορίζει ένα χαρακτηριστικό πεδίο, το καλούμενο λ_i ή $R^{(i)}$ ή απλώς i πεδίο.

Η παραπάνω μορφή δεν δέχεται ασυνεχείς λύσεις, ενώ η ολοκληρωτική του μορφή που δίνεται από τη σχέση: $\iint U dx - \iint F(U) dt = 0$, δέχεται.

Ορισμός 4.1.1: Ένα λ_i χαρακτηριστικό πεδίο καλείται γραμμικά εκφυλισμένο, αν $\nabla \lambda_i(U) \cdot R^{(i)}(U) = 0$, για κάθε $U \in \mathfrak{R}^m$, όπου \mathfrak{R}^m το σύνολο των διανυσμάτων με m πραγματικούς όρους το οποίο καλείται χώρος φάσης και $\nabla \lambda_i(U) = \left[\frac{\partial \lambda_i}{\partial u_1}, \frac{\partial \lambda_i}{\partial u_2}, \dots, \frac{\partial \lambda_i}{\partial u_m} \right]^T$.

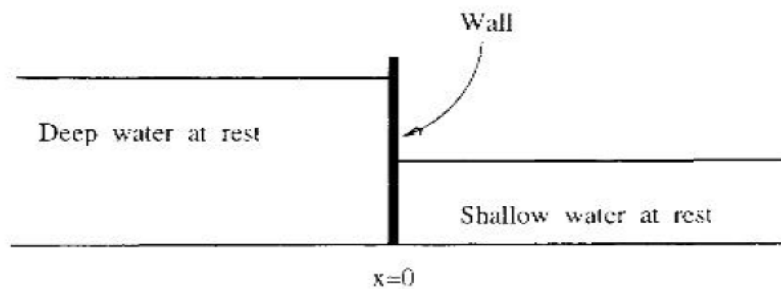
Στην περίπτωση ενός γραμμικού, υπερβολικού τύπου συστήματος με σταθερούς συντελεστές όλα τα χαρακτηριστικά πεδία είναι γραμμικώς εκφυλισμένα, αφού οι ιδιοτιμές λ_i είναι σταθερές επομένως $\nabla \lambda_i(U) = 0$.

Ορισμός 4.1.2: Ένα λ_i χαρακτηριστικό πεδίο καλείται, αυστηρά μη-γραμμικό αν $\nabla \lambda_i(U) \cdot R^{(i)}(U) \neq 0$, για κάθε $U \in \mathfrak{R}^m$.

Πρόταση 4.1.1: Για τις μιας-διάστασης εξισώσεις ρηχών υδάτων, $U_t + F(U)_x = 0$, το χαρακτηριστικό πεδίο $\lambda_2(U)$ είναι γραμμικά εκφυλισμένο, ενώ τα χαρακτηριστικά πεδία $\lambda_1(U)$ και $\lambda_3(U)$ είναι αυστηρά μη-γραμμικά.

4.2: Το πρόβλημα της κατάρρευσης φράγματος

Θεωρούμε ότι έχουμε ένα κανάλι που διαχωρίζεται από ένα φράγμα, στη θέση $x=0$, και ότι εκατέρωθεν του φράγματος υπάρχει νερό το οποίο βρίσκεται σε κατάσταση ηρεμίας, όπως φαίνεται στο Σχήμα 4.1.

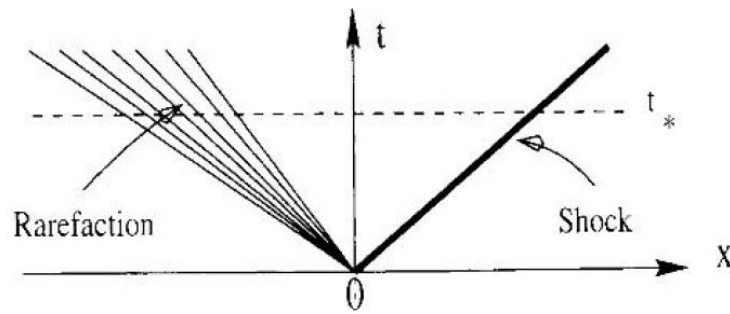


Σχήμα 4.1: Αρχικές συνθήκες στο πρόβλημα κατάρρευσης φράγματος. Ένα φράγμα διαχωρίζει δύο περιοχές που περιέχουν νερό σε κατάσταση ηρεμίας

Στην παραπάνω περίπτωση, όπου το ύψος του νερού στα αριστερά του φράγματος είναι μεγαλύτερο από το ύψος του νερού στα δεξιά, μετά την πτώση του φράγματος ένα προς-τα-δεξιά κινούμενο κύμα αυξάνει απότομα το ύψος του νερού στα δεξιά, ενώ ένα προς-τα-αριστερά

κινούμενο κύμα πηγαίνει στη βαθιά περιοχή που βρίσκεται αριστερά με συνέπεια να μειώνει το ύψος της ελεύθερης επιφάνειάς της. Οι λεπτομέρειες των φυσικών διαδικασιών που συμβαίνουν στη γειτνίαση των δύο περιοχών είναι πολύπλοκες και δεν μοντελοποιούνται σωστά από τις εξισώσεις ρηχών υδάτων.

Όταν το φράγμα καταρρέει σε ένα πολύ μικρό χρονικό διάστημα, τότε προκύπτει ένα σύστημα κυμάτων που αποτελείται από ένα αριστερό κύμα αραιώσης, το οποίο είναι ομαλό, και ένα δεξί κύμα τύπου shock, το οποίο είναι ασυνεχές. Αν υποθέσουμε ότι το φαινόμενο της πτώσης φράγματος μπορεί να προσεγγιστεί ικανοποιητικά από τις εξισώσεις ρηχών υδάτων και το φράγμα καταρρέει απότομα τη χρονική στιγμή $t=0$, τότε στο Σχήμα 3.2, απεικονίζονται τα κύματα που προκύπτουν.



Σχήμα 4.2: Αριστερό κύμα αραιώσης και δεξί shock μετά την πτώση φράγματος

4.3: Το πρόβλημα Riemann

Το πρόβλημα Riemann για τις εξισώσεις ρηχών υδάτων είναι μια γενίκευση του προβλήματος της κατάρρευσης φράγματος. Το πρόβλημα Riemann είναι ένα πρόβλημα αρχικών τιμών, δηλαδή:

$$U_t + F(U)_x = 0 \quad \text{με} \quad U(x, 0) = \begin{cases} U_L, & \text{αν } x < 0 \\ U_R, & \text{αν } x > 0 \end{cases} \quad (4.1)$$

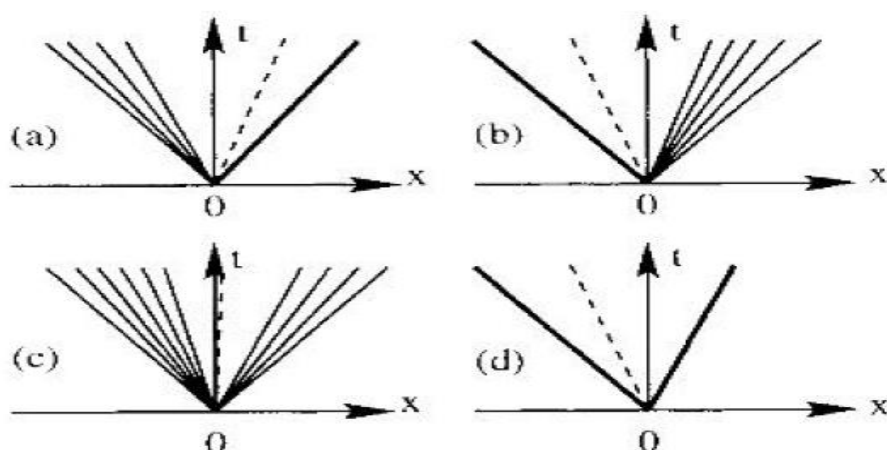
όπου τα σταθερά διανύσματα $U_L = \begin{bmatrix} h_L \\ h_L u_L \\ h_L v_L \end{bmatrix}$, $U_R = \begin{bmatrix} h_R \\ h_R u_R \\ h_R v_R \end{bmatrix}$, δίνονται με όρους των συντηρητικών

μεταβλητών, και αντιπροσωπεύουν τις συνθήκες τη χρονική στιγμή $t=0$, στα αριστερά και δεξιά του σημείου $x=0$.

Στο πρόβλημα Riemann οι ταχύτητες u_L, u_R, v_L, v_R , ως προς την x και y κατεύθυνση, αντίστοιχα, επιτρέπεται να είναι διάφορες του μηδενός, αλλά στο πρόβλημα της κατάρρευσης

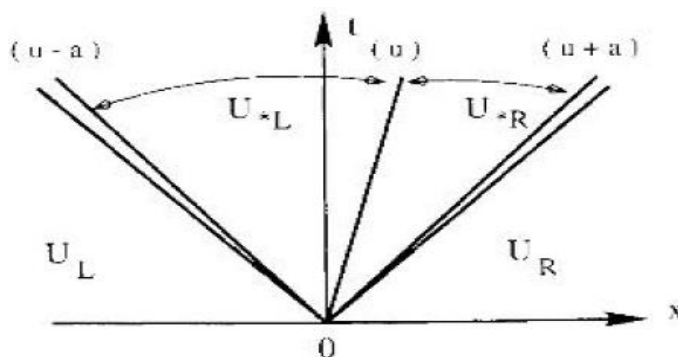
φράγματος έχουμε $u_L = u_R = v_L = v_R = 0$, αφού σε αυτή την περίπτωση θεωρούμε ότι αριστερά και δεξιά του φράγματος το νερό βρίσκεται σε κατάσταση ισορροπίας.

Υπάρχουν τέσσερις δυνατές λύσεις που προκύπτουν κατά την επίλυση προβλήματος Riemann, η καθεμία από τις οποίες αποτελείται από τρία κύματα και απεικονίζονται στο Σχήμα 4.3. Σε όλες τις περιπτώσεις το μεσαίο κύμα είναι πάντα ένα shear κύμα (κύμα διάτμησης), στο οποίο η ταχύτητα v είναι ασυνεχής.



Σχήμα 4.3: Δυνατές λύσεις στο πρόβλημα Riemann για τις μιας-διάστασης εξισώσεις ρηχών υδάτων. (a) το αριστερό κύμα είναι κύμα αραιώσης και το δεξί κύμα είναι shock (b) το αριστερό κύμα είναι shock και το δεξί είναι κύμα αραιώσης, (c) και τα δύο κύματα είναι κύματα αραιώσης (d) και τα δύο κύματα είναι shock

Επομένως, υπάρχουν τρεις οικογένειες κυμάτων που σχετίζονται με τις ιδιοτιμές $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ και δημιουργούν τέσσερις σταθερές καταστάσεις, τις οποίες δηλώνουμε ως U_L, U_{*L}, U_{*R}, U_R , από αριστερά προς τα δεξιά. Η περιοχή μεταξύ του αριστερού και δεξιού κύματος, καλείται star περιοχή. Στο Σχήμα 4.4 φαίνεται η δομή της γενικής λύσης του προβλήματος Riemann.



Σχήμα 4.4: Δομή της γενικής λύσης του προβλήματος Riemann για τις δυο-διαστάσεων εξισώσεις ρηχών υδάτων

4.4: Riemann αναλλοίωτες και συνθήκες Rankine - Hugionot

Riemann αναλλοίωτες: Για ένα ημι-γραμμικό σύστημα υπερβολικού τύπου:

$$W_t + A(W)W_x = 0 \quad (4.2)$$

με $W = [w_1, w_2, \dots, w_m]^T$ το διάνυσμα των m αγνώστων, θεωρούμε το κύμα που σχετίζεται με το $\lambda_i(W)$ χαρακτηριστικό πεδίο, με ιδιοτιμή λ_i και αντίστοιχο δεξί ιδιοδιάνυσμα $R^{(i)} = [r_1^{(i)}, r_2^{(i)}, \dots, r_m^{(i)}]^T$.

Οι γενικευμένες Riemann αναλλοίωτες είναι σχέσεις που ισχύουν κατά μήκος του κύματος (για συγκεκριμένα είδη κύματος) και οδηγούν στις $m-1$ συνθήκες διαφορικές εξισώσεις:

$$\frac{dw_1}{r_1^{(i)}} = \frac{dw_2}{r_2^{(i)}} = \dots = \frac{dw_m}{r_m^{(i)}} \quad (4.3)$$

Η (4.3) σχετίζει τις μεταβολές dw_s μιας ποσότητας w_s , με τους αντίστοιχους συντελεστές $r_s^{(i)}$ του δεξιού ιδιοδιανύσματος $R^{(i)}$, το οποίο αντιστοιχεί στην $\lambda_i(W)$ οικογένεια κυμάτων.

Συνθήκες Rankine-Hugionot: Οι συνθήκες άλματος Rankine-Hugionot ή απλώς συνθήκες Rankine-Hugionot εφαρμόζονται στις ασυνεχείς λύσεις των νόμων διατήρησης υπερβολικού τύπου:

$$U_t + F(U)_x = 0$$

Η σχέση που συνδέει το διάνυσμα συντηρητικών μεταβλητών U , με τις ροές $F(U)$ και την ταχύτητα S με την οποία κινείται το ασυνεχές κύμα είναι:

$$F_{ahead} - F_{behind} = S(U_{ahead} - U_{behind}) \quad (4.4)$$

όπου οι δείκτες *ahead* και *behind*, δηλώνουν την κατάσταση αμέσως μπροστά και πίσω από την ασυνέχεια.

4.5: Κύματα αραιώσης

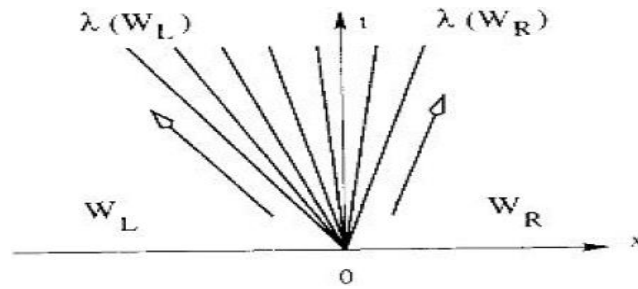
Θα μελετήσουμε το κύμα αραιώσης, που δημιουργείται όταν οι δύο αρχικές συνθήκες συνδέονται μέσω μιας ομαλής μετάβασης σε ένα αυστηρά μη-γραμμικό πεδίο i . Ένα κύμα αραιώσης έχει τη μορφή βεντάλιας, που το κέντρο της είναι η αρχή των αξόνων (Σχήμα 4.5). Είναι ένα ομαλό κύμα, δηλαδή όλες οι ροές μεταβάλλονται ομαλά κατά μήκος του κύματος σε κάθε δεδομένη χρονική στιγμή. Όμως κατά μήκος των χαρακτηριστικών που αντιστοιχούν στην κεφαλή και την ουρά του κύματος, οι ροές έχουν μια ασυνέχεια ως προς την x παράγωγο.

Θεωρούμε το διάνυσμα των πρωταρχικών μεταβλητών $W = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h \\ u \\ v \end{bmatrix}$ και το δεξί ιδιοδιάνυσμα

$R^{(i)} = [r_1^{(i)}, r_2^{(i)}, r_3^{(i)}]^T$ που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ_i . Τα κύματα αραίωσης σχετίζονται με τα αυστηρά μη-γραμμικά πεδία λ_1 και λ_3 , ικανοποιούν τις Riemann αναλλοίωτες κατά μήκος του κύματος, δηλαδή:

$$\frac{dw_1}{r_1^{(i)}} = \frac{dw_2}{r_2^{(i)}} = \frac{dw_3}{r_3^{(i)}} \quad (4.5)$$

και η αντίστοιχη ιδιοτιμή αυξάνεται μονότονα καθώς το κύμα κινείται από αριστερά προς τα δεξιά και αυτό εκφράζεται από τη σχέση: $\lambda_i(W_L) < \lambda_i(W_R)$. Η μονοτονία φαίνεται και στο Σχήμα 4.5, με τη βοήθεια των βελών κατά μήκος των χαρακτηριστικών και στις δύο πλευρές του κύματος.



Σχήμα 4.5: Η λύση του προβλήματος Riemann είναι ένα κύμα αραίωσης

4.5.1: Δεξί κύμα αραίωσης

Θεωρούμε τις συνθήκες $W_* = \begin{bmatrix} h_* \\ u_* \\ v_* \end{bmatrix}$ στα αριστερά και $W_R = \begin{bmatrix} h_R \\ u_R \\ v_R \end{bmatrix}$ στα δεξιά ενός δεξιού κύματος

αραίωσης το οποίο σχετίζεται με το $\lambda_3(W)$ χαρακτηριστικό πεδίο. Η κεφαλή δίνεται από τη χαρακτηριστική καμπύλη $\frac{dx}{dt} = u_R + \alpha_R$ και η ουρά από την $\frac{dx}{dt} = u_* + \alpha_*$. Το δεξί ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ_3 , είναι: $R^{(3)} = [r_1^{(3)}, r_2^{(3)}, r_3^{(3)}]^T = [h, \alpha, 0]^T$.

Εφαρμόζοντας τη σχέση (4.5) κατά μήκος του 3-κύματος και θεωρώντας ότι ο τελεστής μέτρησης α_3 είναι μονάδα παίρνουμε:

$$\frac{dh}{h} = \frac{du}{\alpha} = \frac{dv}{0}$$

Από το τρίτο κλάσμα συμπεραίνουμε ότι $dv=0$, δηλαδή η ταχύτητα v είναι σταθερή κατά μήκος του κύματος. Επίσης:

$$\frac{dh}{h} = \frac{du}{\alpha} \Rightarrow du - \frac{\alpha}{h} dh = 0 \xRightarrow{\alpha^2=gh} du - \sqrt{gh}^{-\frac{1}{2}} dh = 0$$

Αν ολοκληρώσουμε την τελευταία σχέση ως προς το χώρο και το χρόνο προκύπτει ότι και η ποσότητα $u - 2\alpha$ είναι σταθερή. Χρησιμοποιώντας τις τιμές του διανύσματος W_R , παίρνουμε μια σχέση μεταξύ των μεταβλητών πίσω και μπρος από το κύμα, δηλαδή $u_* - 2\alpha_* = u_R - 2\alpha_R$ και $v_* = v_R$.

4.5.2: Αριστερό κύμα αραίωσης

Θεωρούμε τις συνθήκες $W_L = \begin{bmatrix} h_L \\ u_L \\ v_L \end{bmatrix}$ στα αριστερά και $W_* = \begin{bmatrix} h_* \\ u_* \\ v_* \end{bmatrix}$ στα δεξιά ενός αριστερού

κύματος αραίωσης το οποίο σχετίζεται με το $\lambda_1(W)$ χαρακτηριστικό πεδίο. Η κεφαλή δίνεται από τη χαρακτηριστική καμπύλη $\frac{dx}{dt} = u_L - \alpha_L$ και η ουρά από την $\frac{dx}{dt} = u_* - \alpha_*$. Το δεξί ιδιοδιάνυσμα $R^{(1)}$, είναι: $R^{(1)} = [r_1^{(1)}, r_2^{(1)}, r_3^{(1)}]^T = [h, -\alpha, 0]^T$.

Η εφαρμογή των Riemann αναλλοίωτων μας δίνει τη σχέση:

$$\frac{dh}{h} = \frac{du}{-\alpha} = \frac{dv}{0}$$

από την οποία συμπεραίνουμε ότι οι ποσότητες $u + 2\alpha$ και v είναι σταθερές. Αν τις υπολογίσουμε με όρους της αρχικής συνθήκης W_L , έχουμε $u_* + 2\alpha_* = u_L + 2\alpha_L$ και $v_* = v_L$.

4.5.3: Shear κύμα

Τα shear κύματα είναι ασυνεχείς λύσεις κατά μήκος των οποίων η ταχύτητα v μεταβάλλεται με ασυνεχή τρόπο. Οι δύο συνθήκες αριστερά και δεξιά του κύματος, δίνονται από τα διανύσματα

πρωταρχικών μεταβλητών $W_{*L} = \begin{bmatrix} h_{*L} \\ u_{*L} \\ v_{*L} \end{bmatrix}$ και $W_{*R} = \begin{bmatrix} h_{*R} \\ u_{*R} \\ v_{*R} \end{bmatrix}$, αντίστοιχα, και συνδέονται μέσω ενός

απλού ασυνεχούς άλματος ταχύτητας S_i στο γραμμικά εκφυλισμένο πεδίο λ_2 . Για τον υπολογισμό της ταχύτητας S_i , εφαρμόζουμε τις συνθήκες Rankine-Hugoniot:

$$F(U_{*R}) - F(U_{*L}) = S_i(U_{*R} - U_{*L})$$

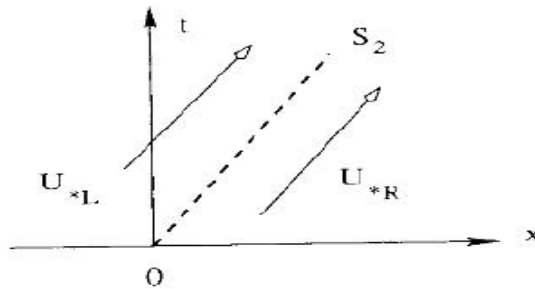
που δίνονται με όρους των συντηρητικών μεταβλητών $U_{*L} = \begin{bmatrix} h_{*L} \\ h_{*L}u_{*L} \\ h_{*L}v_{*L} \end{bmatrix}$ και $U_{*R} = \begin{bmatrix} h_{*R} \\ h_{*R}u_{*R} \\ h_{*R}v_{*R} \end{bmatrix}$.

Ισχύει ότι οι χαρακτηριστικές καμπύλες είναι παράλληλες, δηλαδή $\lambda_i(U_{*L}) = \lambda_i(U_{*R}) = S_i$ (Σχήμα 4.6).

Τέλος, εφαρμόζοντας τις γενικευμένες Riemann αναλλοίωτες κατά μήκος του κύματος,

$$\frac{dh}{0} = \frac{du}{0} = \frac{dv}{1}$$

προκύπτει ότι οι μεταβλητές h και u είναι σταθερές, δηλαδή $h_{*L} = h_{*R}$, $u_{*L} = u_{*R}$ ενώ η μεταβλητή v μεταβάλλεται, δηλαδή $v_{*L} \neq v_{*R}$.

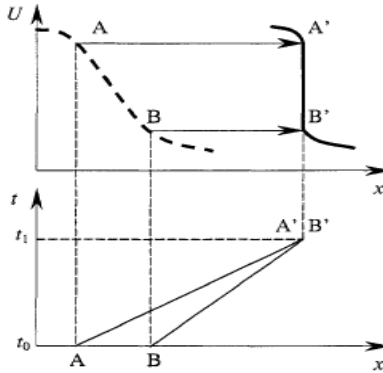


Σχήμα 4.6: Η λύση του προβλήματος Riemann είναι ένα shear κύμα. Οι χαρακτηριστικές καμπύλες και στις δύο πλευρές του κύματος είναι παράλληλες

Τα κύματα επαφής ή οι ασυνέχειες επαφής που προκύπτουν από μοντέλα μεταφοράς ρύπων, έχουν συμπεριφορά ίδια με τα shear κύματα.

4.6: Κύματα τύπου shock

Ένα κύμα shock εμφανίζεται όταν ένα σημείο του κύματος (σημείο A , Σχήμα 4.7) ταξιδεύει πιο γρήγορα από το μπροστινό του (σημείο B , Σχήμα 4.7). Μετά από κάποιο χρονικό διάστημα οι τροχιές αυτών των δύο σημείων τέμνονται, οπότε η μεταβλητή U παίρνει δύο ή περισσότερες τιμές στο ίδιο σημείο και το προφίλ γίνεται ασυνεχές. Η ταχύτητα του κύματος στην ουρά είναι μεγαλύτερη από την ταχύτητα του κύματος στην κεφαλή, (βλέπε Guinot, [10]).



Σχήμα 4.7: Σχηματισμός του κύματος shock σε φυσικό επίπεδο (πάνω σχήμα) και στο χώρο φάσης (κάτω σχήμα). Αρχική μορφή (διακεκομμένη γραμμή) και τελική μορφή (συνεχής γραμμή)

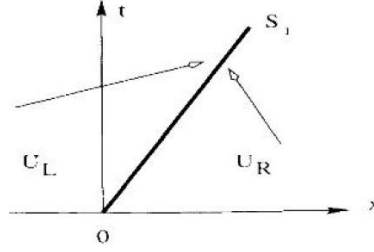
Έστω ότι οι αρχικές τιμές U_L , U_R του προβλήματος Riemann συνδέονται με ένα απλό άλμα ασυνέχειας σε ένα αυστηρά μη-γραμμικό πεδίο i . Τότε η λύση του προβλήματος Riemann αποτελείται από ένα μεμονωμένο κύμα shock που κινείται με ταχύτητα S_i . Εφαρμόζουμε τις συνθήκες Rankine-Hugoniot:

$$F(U_R) - F(U_L) = S_i(U_R - U_L)$$

και τη συνθήκη εντροπίας:

$$\lambda_i(U_L) > S_i > \lambda_i(U_R).$$

Σύμφωνα με τη συνθήκη εντροπίας το κύμα που κινείται προς τα δεξιά έχει μεγαλύτερη ταχύτητα από αυτό που κινείται προς τα αριστερά, οπότε όπως φαίνεται και στο Σχήμα 4.8, οι χαρακτηριστικές καμπύλες πηγαίνουν προς το shock. Επίσης η συνθήκη εντροπίας είναι και ένα κριτήριο για να επιλέξουμε, στην περίπτωση που δεν έχουμε μοναδική λύση, τη λύση που ικανοποιεί τους νόμους της φύσης.

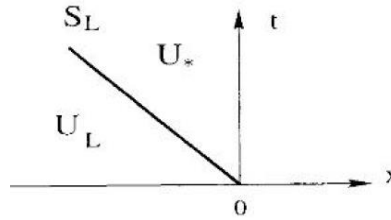


Σχήμα 4.8: Η λύση του προβλήματος Riemann είναι ένα κύμα shock. Οι χαρακτηριστικές καμπύλες πίσω και μπρος από το κύμα κινούνται προς το κύμα shock

4.6.1: Αριστερό κύμα shock

Η μελέτη του αριστερού κύματος shock, όπως φαίνεται στο Σχήμα 4.9, θα γίνει με όρους των συντηρητικών μεταβλητών για να μπορέσουμε να χρησιμοποιήσουμε τις συνθήκες Rankine-Hugoniot,

$$F(U_R) - F(U_L) = S_i(U_R - U_L) \quad (4.6)$$



Σχήμα 4.9: Η λύση του προβλήματος Riemann είναι ένα απομονωμένο αριστερό κύμα shock

Μετατρέπουμε τις εξισώσεις χρησιμοποιώντας ένα πλαίσιο αναφοράς, όπου οι ταχύτητες u και v μεταβάλλονται κατά S_L , δηλαδή:

$$\hat{u}_L = u_L - S_L, \quad \hat{u}_* = u_* - S_L$$

$$\hat{v}_L = v_L - S_L, \quad \hat{v}_* = v_* - S_L$$

Έτσι, τα διανύσματα των συντηρητικών μεταβλητών, γίνονται: $U_L = \begin{bmatrix} h_L \\ h_L \hat{u}_L \\ h_L \hat{v}_L \end{bmatrix}$ και $U_* = \begin{bmatrix} h_* \\ h_* \hat{u}_* \\ h_* \hat{v}_* \end{bmatrix}$.

Η σχέση (4.6) σε αυτό το τροποποιημένο πλαίσιο αναφοράς δίνει τις παρακάτω εξισώσεις:

$$h_* \hat{u}_* = h_L \hat{u}_L \quad (4.7)$$

$$h_* \hat{u}_*^2 + \frac{1}{2} g h_*^2 = h_L \hat{u}_L^2 + \frac{1}{2} g h_L^2 \quad (4.8)$$

$$h_* \hat{u}_* \hat{v}_* = h_L \hat{u}_L \hat{v}_L \quad (4.9)$$

Από τις (4.7) και (4.9) προκύπτει ότι: $v_* = v_L$, δηλαδή η ταχύτητα v ως προς την y κατεύθυνση είναι σταθερή κατά μήκος του κύματος. Επίσης η (4.7) μας δίνει ότι η ροή της μάζας μέσω του κύματος shock, είναι:

$$M_L = h_* \hat{u}_* = h_L \hat{u}_L \quad (4.10)$$

Στην εξίσωση (4.8), αν χρησιμοποιήσουμε την (4.10), παίρνουμε:

$$\begin{aligned} h_* \hat{u}_*^2 + \frac{1}{2} g h_*^2 &= h_L \hat{u}_L^2 + \frac{1}{2} g h_L^2 \Leftrightarrow \\ h_L \hat{u}_L^2 - h_* \hat{u}_*^2 &= \frac{1}{2} g h_*^2 - \frac{1}{2} g h_L^2 \Leftrightarrow \\ (h_L \hat{u}_L) \hat{u}_L - (h_* \hat{u}_*) \hat{u}_* &= \frac{1}{2} g (h_*^2 - h_L^2) \Leftrightarrow \\ M_L \hat{u}_L - M_L \hat{u}_* &= \frac{1}{2} g (h_*^2 - h_L^2) \Leftrightarrow \\ M_L &= -\frac{1}{2} g \frac{h_*^2 - h_L^2}{\hat{u}_* - \hat{u}_L} \end{aligned} \quad (4.11)$$

Αντικαθιστώντας τις σχέσεις $\hat{u}_* = \frac{M_L}{h_*}$, $\hat{u}_L = \frac{M_L}{h_L}$ στην (4.11), παίρνουμε:

$$M_L = \sqrt{\frac{1}{2} g (h_* + h_L) h_* h_L} \quad (4.12)$$

Χρησιμοποιώντας τη σχέση $\hat{u}_* - \hat{u}_L = u_* - u_L$ και με τη βοήθεια της (4.11) που συνδέει την ταχύτητα u_* με την παράμετρο M_L παίρνουμε:

$$u_* = u_L - f_L(h_*, h_L) \quad \text{με} \quad f_L(h_*, h_L) = (h_* - h_L) \sqrt{\frac{1}{2} g \left(\frac{h_* + h_L}{h_* h_L} \right)} \quad (4.13)$$

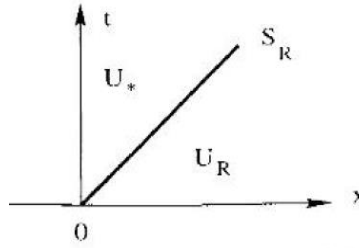
Η ταχύτητα του κύματος δίνεται από τη σχέση :

$$S_L = u_L - \alpha_L q_L \quad (4.14)$$

$$\text{όπου } \alpha_L = \sqrt{gh_L} \text{ και } q_L = \sqrt{\frac{1}{2} g \frac{(h_* + h_L)h_*}{h_L^2}}.$$

4.6.2: Δεξί κύμα shock

Υποθέτουμε ότι η λύση του προβλήματος Riemann αποτελείται από ένα μόνο κύμα shock, όπως φαίνεται στο Σχήμα 4.10, που σχετίζεται με την ιδιοτιμή $\lambda_3 = u + \alpha$.



Σχήμα 4.10: Η λύση του προβλήματος Riemann είναι ένα απομονωμένο δεξί κύμα shock

Μετατρέπουμε, όπως και στην περίπτωση του αριστερού κύματος, τις αρχικές συνθήκες που δίνονται με όρους των πρωταρχικών μεταβλητών σε συντηρητικές μεταβλητές, μέσω ενός πλαισίου αναφοράς το οποίο κινείται με ταχύτητα S_R . Οι αντίστοιχες ταχύτητες είναι:

$$\hat{u}_* = u_* - S_R, \quad \hat{u}_R = u_R - S_R$$

$$\hat{v}_* = v_* - S_R, \quad \hat{v}_R = v_R - S_R$$

$$\text{Έτσι τα διανύσματα των συντηρητικών μεταβλητών είναι: } U_* = \begin{bmatrix} h_* \\ h_* \hat{u}_* \\ h_* \hat{v}_* \end{bmatrix} \text{ και } U_R = \begin{bmatrix} h_R \\ h_R \hat{u}_R \\ h_R \hat{v}_R \end{bmatrix}.$$

Οι συνθήκες Rankine-Hugoniot δίνουν:

$$h_* \hat{u}_* = h_R \hat{u}_R \quad (4.15)$$

$$h_* \hat{u}_*^2 + \frac{1}{2} g h_*^2 = h_R \hat{u}_R^2 + \frac{1}{2} g h_R^2 \quad (4.16)$$

$$h_* \hat{u}_* \hat{v}_* = h_R \hat{u}_R \hat{v}_R \quad (4.17)$$

Από τις (4.15) και (4.17) προκύπτει ότι: $v_* = v_R$, δηλαδή η ταχύτητα v ως προς την y κατεύθυνση είναι σταθερή κατά μήκος του δεξιού κύματος shock.

Για τη ροή της μάζας κατά μήκος του κύματος, ισχύει: $M_R = -h_* \hat{u}_* = -h_R \hat{u}_R$ οπότε με ανάλογες πράξεις όπως στην προηγούμενη παράγραφο, καταλήγουμε ότι:

$$M_R = \sqrt{\frac{1}{2} g (h_* + h_R) h_* h_R} \quad (4.18)$$

και

$$u_* = u_R + f_R(h_*, h_R) \quad \text{με} \quad f_R(h_*, h_R) = (h_* - h_R) \sqrt{\frac{1}{2} g \left(\frac{h_* + h_R}{h_* h_R} \right)} \quad (4.19)$$

Τέλος, η ταχύτητα του κύματος S_R δίνεται από τον τύπο:

$$S_R = u_R + \alpha_R q_R \quad (4.20)$$

$$\text{όπου} \quad \alpha_R = \sqrt{g h_R} \quad \text{και} \quad q_R = \sqrt{\frac{1}{2} g \frac{(h_* + h_R) h_*}{h_R^2}}.$$

4.7: Κύματα shock και μη-συντηρητικές μεταβλητές

Είναι σημαντικό να διατυπώνουμε με τις σωστές μεταβλητές τις εξισώσεις των ρηχών υδάτων, στην περίπτωση που έχουμε κύματα shock. Ας θεωρήσουμε το ομογενές σύστημα ρηχών υδάτων σε μια-διάσταση

$$\begin{bmatrix} h \\ hu \end{bmatrix}_t + \begin{bmatrix} hu \\ hu^2 + \frac{1}{2} g h^2 \end{bmatrix}_x = 0 \quad (4.21)$$

το οποίο εκφράζει τους φυσικούς νόμους της διατήρησης της μάζας και της ορμής. Αν θεωρήσουμε ότι οι λύσεις είναι ομαλές, μπορούμε να παραγωγίσουμε και προκύπτει το παρακάτω σύστημα, με όρους των πρωταρχικών μεταβλητών:

$$h_t + u h_x + h u_x = 0 \quad (4.22)$$

$$u_t + u u_x + g h_x = 0 \quad (4.23)$$

Μπορούμε από τις εξισώσεις (4.22) και (4.23) να δημιουργήσουμε νέους τύπους για τους νόμους διατήρησης, όπως για παράδειγμα να διατηρήσουμε την (4.22) και να γράψουμε την (4.23) ως:

$$u_t + \frac{1}{2} (u^2 + g h)_x = 0$$

Έτσι μια νέα μορφή της (4.21) είναι:

$$\begin{bmatrix} h \\ u \end{bmatrix}_t + \begin{bmatrix} hu \\ \frac{1}{2}u^2 + gh \end{bmatrix}_x = 0 \quad (4.24)$$

που με την μαθηματική έννοια είναι ένα σύστημα νόμων διατήρησης. Εκφράζουν τη διατήρηση της μάζας, που είναι σωστός και με τη φυσική έννοια, και τη διατήρησης της ταχύτητας u των σωματιδίων που όμως δεν έχει φυσική έννοια. Δηλαδή, ενώ το σύστημα (4.24) είναι συντηρητικό με όρους των μαθηματικών, με όρους της φυσικής δεν είναι. Παρόλα αυτά μπορεί να χρησιμοποιηθεί όταν οι λύσεις είναι ομαλές. Αλλά στην παρουσία κυμάτων shock (ασυνεχείς λύσεις) η χρήση των εξισώσεων (4.24) οδηγεί σε λανθασμένα αποτελέσματα και το πρόβλημα δημιουργείται από το νόμο διατήρησης της ταχύτητας. Αριθμητικές μέθοδοι που βασίζονται στην επίλυση της (4.24) μπορεί να υπολογίσουν τα κύματα shock αλλά με λανθασμένη ταχύτητα διάδοσης S_i . Αυτό προκύπτει και από την παρακάτω πρόταση.

Πρόταση 4.7.1: Ένα προς-τα-δεξιά κινούμενο κύμα shock, που υπολογίζεται βάσει του συστήματος (4.21) έχει ταχύτητα διάδοσης

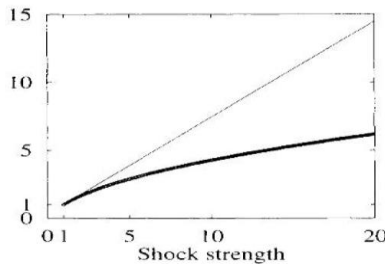
$$S_{cons} = u_R + \sqrt{\frac{1}{2}g \left(\frac{h_* + h_R}{h_* h_R} \right)}$$

ενώ η ταχύτητα διάδοσης του κύματος σύμφωνα με το σύστημα (4.24) είναι:

$$S_{nonc} = u_R + \sqrt{\frac{2gh_*^2}{h_* + h_R}}$$

Για τις ταχύτητες αυτές έχουμε: $S_{nonc} \leq S_{cons}$ και η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν $h_* = h_R$.

Στο Σχήμα 4.11 φαίνεται η σύγκριση μεταξύ των ταχυτήτων S_{cons} , που υπολογίζεται με τη φυσικά συντηρητική μορφή των εξισώσεων και S_{nonc} , που υπολογίζεται με τη φυσικά μη-συντηρητική μορφή.



Σχήμα 4.11: Σύγκριση των ταχυτήτων S_{cons} (αχνή γραμμή) και S_{nonc} (έντονη γραμμή)

Τα κύματα shock τα οποία δημιουργούνται όταν η διαφορά του βάθους αριστερά και δεξιά του κύματος είναι σχετικά μικρή, δηλαδή η δύναμη των κυμάτων είναι: $\frac{h_*}{h_{ahead}} = 1 + \varepsilon$, όπου ε μια μικρή, θετική ποσότητα, ονομάζονται αδύναμα κύματα. Στο Σχήμα 4.11 παρατηρούμε ότι για τιμές του ε μεταξύ 0 και 2, το σφάλμα στην ταχύτητα του κύματος που παίρνουμε από τη μη-συντηρητική μέθοδο είναι σχετικά μικρό. Οπότε σε προβλήματα που περιλαμβάνουν αδύναμα κύματα, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε μεθόδους βασισμένες στη μη-συντηρητική μορφή.

ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΛΥΣΗ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ RIEMANN

Σε αυτό το κεφάλαιο θα ασχοληθούμε με την επίλυση του προβλήματος Riemann για τις εξισώσεις ρηχών υδάτων αρχικά όταν έχουμε υγρό πυθμένα και στη συνέχεια όταν έχουμε στεγανό πυθμένα. Το πρόβλημα Riemann είναι μια γενίκευση του προβλήματος κατάρρευσης φράγματος, η λύση του οποίου δίνεται από τον Stoker [28]. Οι πρώτοι που έδωσαν μια αναλυτική λύση για το πρόβλημα Riemann στην περίπτωση του υγρού πυθμένα είναι οι Marshall και Mendez [24], οι οποίοι εφάρμοσαν τη μεθοδολογία που είχε αναπτύξει ο Godunov [9]. Η προσέγγισή τους όμως δεν ήταν υπολογιστικά ακριβής. Ο Toro [30] παρουσίασε μια αναλυτική λύση του προβλήματος Riemann. Η μεθόδός του αρχικά επιλύει μια απλή-αλγεβρική εξίσωση για το βάθος του νερού χρησιμοποιώντας μια επαναληπτική μέθοδο, όπως είναι η μέθοδος Newton-Raphson, και στη συνέχεια υπολογίζει τις υπόλοιπες μεταβλητές χρησιμοποιώντας την αναλυτική λύση του προβλήματος Riemann.

Ένας σημαντικός λόγος για την εύρεση αναλυτικής λύσης στο πρόβλημα Riemann είναι ότι αποτελεί το απλούστερο αρχικών τιμών πρόβλημα για ένα σύνολο εξαρτώμενων από το χρόνο, μη-γραμμικών, εξισώσεων που μπορεί να περιέχουν ταυτόχρονα συνεχείς και μη-συνεχείς λύσεις. Η πληροφορία που παρέχεται από την αναλυτική λύση είναι σημαντική για την κατανόηση των βασικών χαρακτηριστικών της μετάδοσης των κυμάτων στα μοντέλα ρηχών υδάτων. Μπορεί να χρησιμοποιηθεί τοπικά σε αριθμητικές μεθόδους που επιλύουν το γενικό πρόβλημα αρχικών συνοριακών-τιμών, όπως στη Μέθοδο Τυχαίας Επιλογής του Glimm (RCM) (βλέπε [7],[2]) και στις μεθόδους τύπου Godunov. Επίσης, η εύρεσή της είναι σημαντική για να ελέγξουμε την αποτελεσματικότητα των αριθμητικών μεθόδων.

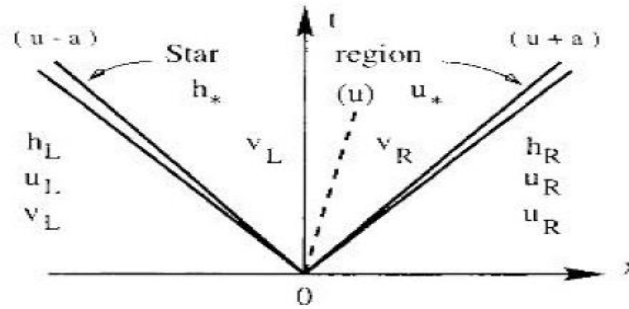
5.1: Το πρόβλημα Riemann: Υγρός πυθμένας

Για τις δύο-διαστάσεις εξισώσεις ρηχών υδάτων, το πρόβλημα Riemann είναι:

$$U_t + F(U)_x = 0 \quad \text{με} \quad U(x, 0) = \begin{cases} U_L, & \alpha\nu \quad x < 0 \\ U_R, & \alpha\nu \quad x > 0 \end{cases} \quad (5.1)$$

$$\text{όπου} \quad U = \begin{bmatrix} h \\ hu \\ hv \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad F(U) = \begin{bmatrix} h \\ hu^2 + \frac{1}{2}gh^2 \\ huw \end{bmatrix}.$$

Η μορφή της γενικής λύσης στην περίπτωση υγρού πυθμένα, με διανύσματα των πρωταρχικών μεταβλητών $W = \begin{bmatrix} h \\ u \\ v \end{bmatrix}$, φαίνεται στο Σχήμα 5.1, όπου τρία κύματα διαχωρίζουν τέσσερις σταθερές καταστάσεις, τις W_L , W_{*L} , W_{*R} , W_R .



Σχήμα 5.1: Δομή της γενικής λύσης του προβλήματος Riemann στην περίπτωση υγρού πυθμένα

Μεταξύ των διανυσμάτων W_{*L} και W_{*R} , τα οποία αποτελούν τις άγνωστες ποσότητες του προβλήματος και προκύπτουν από την αλληλεπίδραση των αρχικών συνθηκών W_L και W_R , περιλαμβάνεται η star περιοχή. Για την εύρεση της αναλυτικής λύσης θεωρούμε ότι τα αριστερά και δεξιά κύματα είναι ή κύματα αραίωσης ή shock, ενώ το μεσαίο κύμα είναι πάντα ένα shear κύμα. Σκοπός μας είναι να καθορίσουμε τα είδη των κυμάτων για δοσμένες αρχικές συνθήκες. Επίσης, κατά μήκος των αριστερών και δεξιών κυμάτων οι μεταβλητές h και u αλλάζουν ενώ η v παραμένει σταθερή, ενώ κατά μήκος του μεσαίου κύματος οι h και u παραμένουν σταθερές και μεταβάλλεται η v .

Οι τύποι των μη-γραμμικών αριστερών και δεξιών κυμάτων καθορίζονται από τις ακόλουθες συνθήκες, όπου h_* είναι το βάθος του νερού στην star περιοχή:

- αν $h_* > h_L$, τότε το αριστερό κύμα είναι shock
- αν $h_* \leq h_L$, τότε το αριστερό κύμα είναι κύμα αραίωσης
- αν $h_* > h_R$, τότε το δεξί κύμα είναι shock
- αν $h_* \leq h_R$, τότε το δεξί κύμα είναι κύμα αραίωσης

Βασικό βήμα είναι να βρούμε μια απλή, αλγεβρική, μη-γραμμική εξίσωση για το βάθος του νερού h_* . Αυτό γίνεται συνδέοντας την ταχύτητα u_* με τα δεδομένα στα αριστερά και τα δεξιά μέσω των συναρτήσεων f_L, f_R , οι οποίες προκύπτουν χρησιμοποιώντας τις αναλλοίωτες Riemann ή τις συνθήκες Rankine – Hugoniot, ανάλογα με την περίπτωση.

5.1.1: Υπολογισμός των h_* και u_*

Πρόταση 5.1: Η λύση h_* για το πρόβλημα Riemann δίνεται από τη ρίζα της συνάρτησης:

$$f(h) = f_L(h, h_L) + f_R(h, h_R) + u_R - u_L \quad (5.2)$$

$$\text{όπου} \quad f_L = \begin{cases} 2(\sqrt{gh} - \sqrt{gh_L}), & \text{αν } h \leq h_L \text{ (αραίωση)} \\ (h - h_L) \sqrt{\frac{1}{2} g \left(\frac{h + h_L}{hh_L} \right)}, & \text{αν } h > h_L \text{ (shock)} \end{cases} \quad (5.3)$$

και

$$f_R = \begin{cases} 2(\sqrt{gh} - \sqrt{gh_R}), & \text{αν } h \leq h_R \text{ (αραίωση)} \\ (h - h_R) \sqrt{\frac{1}{2} g \left(\frac{h + h_R}{hh_R} \right)}, & \text{αν } h > h_R \text{ (shock)} \end{cases} \quad (5.4)$$

Η ταχύτητα u_* των σωματιδίων στην star περιοχή είναι:

$$u_* = \frac{1}{2}(u_L + u_R) + \frac{1}{2}[f_R(h_*, h_R) - f_L(h_*, h_L)] \quad (5.5)$$

Η εξίσωση $f(h) = 0$ δεν μπορεί να λυθεί αναλυτικά, αλλά δεδομένου ότι η συνάρτηση $f(h)$ είναι απλή και παραγωγίζεται, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε μια απλή επαναληπτική μέθοδο. Επίσης, εύκολα αποδεικνύεται ότι η $f(h)$ είναι γνησίως αύξουσα και κοίλη, οπότε για κατάλληλο συνδυασμό των αρχικών δεδομένων, η λύση της είναι μοναδική και εξαρτάται από τη διαφορά των ταχυτήτων $\Delta u = u_R - u_L$. Ορίζουμε την ποσότητα $(\Delta u)_{crit} = 2(\alpha_L + \alpha_R)$. Για επιλογές της διαφοράς $\Delta u = u_R - u_L$ τέτοιες ώστε $\Delta u \geq (\Delta u)_{crit}$, παίρνουμε $h_* \leq 0$, που δεν είναι φυσιολογική τιμή καθώς το βάθος δεν μπορεί να είναι αρνητικό. Επομένως για να υπολογίσουμε σωστά την αναλυτική λύση, θα πρέπει τα δεδομένα να ικανοποιούν την ακόλουθη συνθήκη:

$$(\Delta u)_{crit} > \Delta u \Leftrightarrow 2(\alpha_L + \alpha_R) > u_R - u_L \quad (5.6)$$

η οποία καλείται *συνθήκη θετικότητας του βάθους*.

Αν θεωρήσουμε ότι τα και τα δύο μη-γραμμικά κύματα είναι κύματα αραίωσης, αντικαθιστούμε στην (5.2) τους πρώτους κλάδους των σχέσεων (5.3) και (5.4) και έτσι παίρνουμε:

$$2(\alpha - \alpha_L) + 2(\alpha - \alpha_R) + u_R - u_L = 0 \quad (5.7)$$

όπου $\alpha = \sqrt{gh}$. Αν θέσουμε $\alpha = \alpha_*$, η (5.7) μας δίνει την (5.8), η οποία καλείται προσέγγιση δυο-κυμάτων αραίωσης:

$$\alpha_* = \frac{1}{2}(\alpha_L + \alpha_R) - \frac{1}{4}(u_R - u_L) \quad (5.8)$$

Για επίλυση της (5.2), δηλαδή για την εύρεση του h_* , μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την επαναληπτική μέθοδο Newton-Raphson. Για να ξεκινήσουμε τη διαδικασία, χρησιμοποιώντας την δύο-κυμάτων αραίωσης προσέγγιση, παίρνουμε ως αρχική τιμή για το h την:

$$h^{(0)} = \frac{1}{g} \left[\frac{1}{2}(\alpha_L + \alpha_R) - \frac{1}{4}(u_R - u_L) \right]^2 \quad (5.9)$$

Στη συνέχεια χρησιμοποιούμε τον επαναληπτικό τύπο των Newton-Raphson:

$$h^{(\ell+1)} = h^{(\ell)} - \frac{f(h^{(\ell)})}{f'(h^{(\ell)})} \text{ για } i=0, 1, \dots, L.$$

Οι πρώτες παράγωγοι των f_L, f_R , είναι:

$$f'_K(h, h_K) = \begin{cases} \frac{g}{\alpha_K}, & \text{αν } h \leq h_K \text{ (αραίωση)} \\ g_K(h) - \frac{g(h-h_K)}{4h^2 g_K(h)}, & \text{αν } h > h_K \text{ (shock)} \end{cases}, \text{ όπου } g_K(h) = \sqrt{\frac{1}{2} g \left(\frac{h+h_K}{hh_K} \right)}$$

και $K=L, R$.

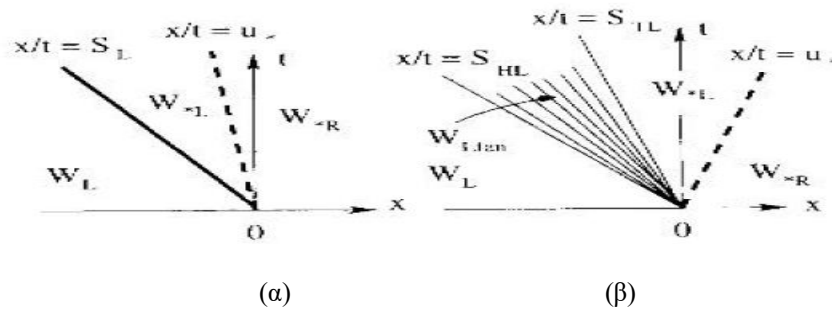
Η επαναληπτική διαδικασία θα σταματήσει όταν: $\Delta h = \frac{2|h^{(\ell+1)} - h^{(\ell)}|}{h^{(\ell+1)} + h^{(\ell)}} < TOL$.

Στη συνέχεια θα δώσουμε την πλήρη λύση του προβλήματος Riemann, στην περίπτωση του υγρού πυθμένα. Συγκρίνοντας το h_* με τα h_L, h_R καθορίζουμε αν τα αριστερά και δεξιά κύματα είναι κύματα αραίωσης ή shock.

Αν $h_* > h_L$, τότε το αριστερό κύμα είναι κύμα shock (Σχήμα 5.2(α)), το οποίο έχει ταχύτητα

$S_L = u_L - \alpha_L q_L$, με $\alpha_L = \sqrt{gh_L}$ και $q_L = \sqrt{\frac{1}{2} g \frac{(h_* + h_L)h_*}{h_L^2}}$. Αν $h_* \leq h_L$, τότε το αριστερό κύμα

είναι κύμα αραίωσης και η ταχύτητα της κεφαλής και της ουράς του είναι: $S_{HL} = u_L - \alpha_L$ και $S_{TL} = u_* - \alpha_*$, αντίστοιχα (Σχήμα 5.2(β)).



Σχήμα 5.2: Δύο δυνατές περιπτώσεις στα αριστερά του shear κύματος: (α) το αριστερό κύμα είναι shock, (β) το αριστερό κύμα είναι κύμα αραίωσης

Οι ταχύτητες α και u μέσα σε ένα αριστερό κύμα αραίωσης είναι:

$$W_{Lfan} = \begin{cases} \alpha = \frac{1}{3} \left(u_L + 2\alpha_L - \frac{\hat{x}}{\hat{t}} \right) \\ u = \frac{1}{3} \left(u_L + 2\alpha_L + 2\frac{\hat{x}}{\hat{t}} \right) \end{cases} \quad (5.10)$$

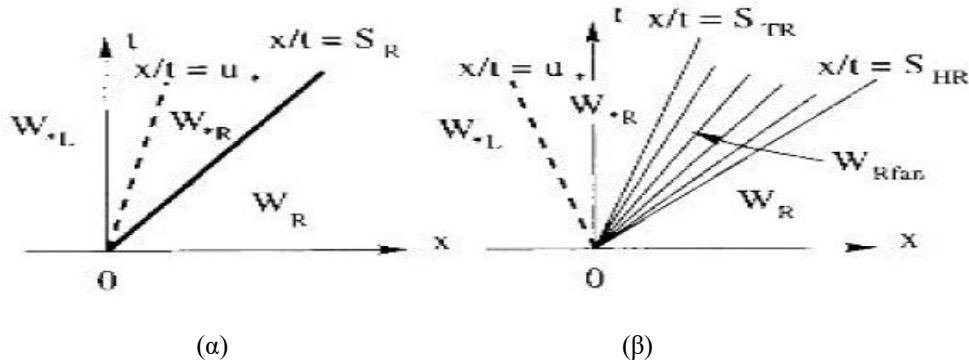
όπου $\frac{\hat{x}}{\hat{t}} = \frac{dx}{dt}$ η χαρακτηριστική καμπύλη που συνδέει την αρχή των αξόνων με ένα τυχαίο

σημείο $P(\hat{x}, \hat{t})$ μέσα στο κύμα. Υπολογίζουμε το βάθος h από τον τύπο: $h = \frac{\alpha^2}{g}$.

Ομοίως, αν $h_* > h_R$ τότε το δεξί κύμα είναι shock (Σχήμα 5.3(α)) με ταχύτητα $S_R = u_R + \alpha_R q_R$,

όπου $\alpha_R = \sqrt{gh_R}$ και $q_R = \sqrt{\frac{1}{2}g \frac{(h_* + h_R)h_*}{h_R^2}}$. Αν $h_* \leq h_R$, τότε το δεξί κύμα είναι κύμα

αραίωσης και η ταχύτητα της ουράς και της κεφαλής του είναι: $S_{TR} = u_* + \alpha_*$ και $S_{HR} = u_R + \alpha_R$ αντίστοιχα (Σχήμα 5.3(β)).



Σχήμα 5.3: Δύο δυνατές περιπτώσεις στα δεξιά του shear κύματος: (α) το δεξί κύμα είναι shock, (β) το δεξί κύμα είναι κύμα αραίωσης

Οι ταχύτητες α και u μέσα σε ένα δεξί κύμα αραίωσης είναι:

$$W_{Rfan} = \begin{cases} \alpha = \frac{1}{3} \left(-u_R + 2\alpha_R + \frac{\hat{x}}{\hat{t}} \right) \\ u = \frac{1}{3} \left(u_R - 2\alpha_R + 2\frac{\hat{x}}{\hat{t}} \right) \end{cases} \quad (5.11)$$

όπου $\frac{\hat{x}}{\hat{t}} = \frac{dx}{dt}$ η χαρακτηριστική καμπύλη που συνδέει την αρχή των αξόνων με ένα τυχαίο σημείο $P(\hat{x}, \hat{t})$ μέσα στο κύμα.

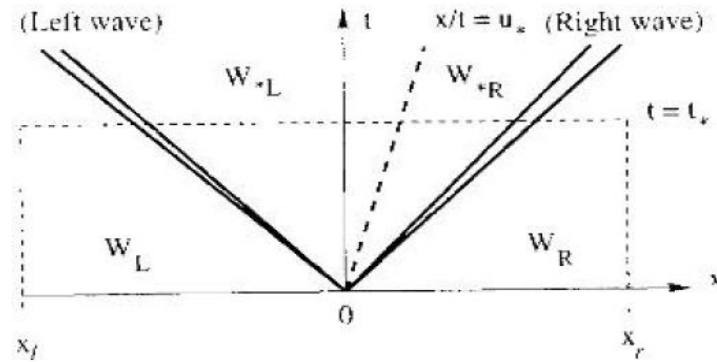
5.1.2: Έλεγχος της λύσης

Για την εύρεση της αναλυτικής λύσης πρέπει να γίνει ένας δειγματοληπτικός έλεγχος. Αυτή η διαδικασία είναι σημαντική και στις αριθμητικές μεθόδους. Το δείγμα είναι η λύση $W(x, t_*)$ μια δεδομένη χρονική στιγμή $t_* > 0$, με $x \in [x_l, x_r]$ όπου $x_l < 0 < x_r$. Εκτελούμε τον έλεγχο χρησιμοποιώντας την ταχύτητα $S = \frac{x}{t_*}$.

Αν θεωρήσουμε το διάνυσμα των πρωταρχικών μεταβλητών $W = [h, u, v]^T$, η πλήρης λύση για $t = t_*$ φαίνεται στο Σχήμα 5.4, όπου ο τύπος των αριστερών και δεξιών κυμάτων καθορίζεται από τους λόγους $\frac{h_*}{h_L}$ και $\frac{h_*}{h_R}$, αντίστοιχα. Η διαδικασία ελέγχου χωρίζει το κύμα σε δύο

υποπεριοχές, μια στα αριστερά του shear κύματος $\frac{dx}{dt} = u_*$ (W_L και W_{*L}) και μια στα δεξιά του

$\frac{dx}{dt} = u_*$ (W_{*R} και W_R).



Σχήμα 5.4: Έλεγχος της λύσης τη χρονική στιγμή t_*

Όταν η λύση βρίσκεται στα αριστερά του shear κύματος, δηλαδή $S = \frac{x}{t_*} \leq u_*$, τότε ορίζεται από τον τύπο του αριστερού κύματος. Έχουμε δύο πιθανές περιπτώσεις, όπως φαίνεται στο Σχήμα 5.2. Αν $h_* > h_L$ τότε το αριστερό κύμα είναι shock και η πλήρης λύση στην αριστερή μεριά του shear κύματος είναι:

$$W(x, t_*) = \begin{cases} W_{*L} = [h_*, u_*, v_L]^T, & \text{αν } S_L \leq \frac{x}{t_*} \leq u_* \\ W_L = [h_L, u_L, v_L]^T, & \text{αν } \frac{x}{t_*} < S_L \end{cases}$$

όπου S_L είναι η ταχύτητα του αριστερού shock.

Αν $h_* \leq h_L$ τότε το αριστερό κύμα είναι κύμα αραίωσης και η λύση στα αριστερά του shear

$$\text{κύματος είναι: } W(x, t_*) = \begin{cases} W_L, & \text{αν } \frac{x}{t_*} \leq S_{HL} \\ W_{Lfan}, & \text{αν } S_{HL} < \frac{x}{t_*} < S_{TL}, \text{ όπου } W_{Lfan} \text{ δίνεται στην (5.10).} \\ W_{*L}, & \text{αν } S_{TL} \leq \frac{x}{t_*} < u_* \end{cases}$$

Στην περίπτωση που το δείγμα βρίσκεται στα δεξιά του shear κύματος, δηλαδή $S = \frac{x}{t_*} > u_*$, τότε

οι δύο περιπτώσεις απεικονίζονται στο Σχήμα 5.3. Αν $h_* > h_R$ τότε το δεξί κύμα είναι shock και η πλήρης λύση είναι:

$$W(x, t_*) = \begin{cases} W_{*R} = [h_*, u_*, v_R]^T, & \text{αν } u_* \leq \frac{x}{t_*} \leq S_R \\ W_R = [h_R, u_R, v_R]^T, & \text{αν } S_R < \frac{x}{t_*} \end{cases}$$

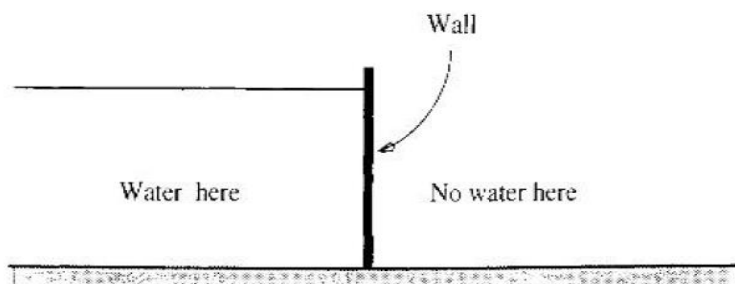
όπου S_R είναι η ταχύτητα του δεξιού shock.

Αν $h_* \leq h_R$ τότε το δεξί κύμα είναι κύμα αραίωσης και η λύση είναι:

$$W(x, t_*) = \begin{cases} W_{*R}, & \text{αν } u_* \leq \frac{x}{t_*} \leq S_{TR} \\ W_{Rfan}, & \text{αν } S_{TR} < \frac{x}{t_*} < S_{HR}, \text{ όπου } W_{Rfan} \text{ δίνεται στην (5.11).} \\ W_R, & \text{αν } S_{HR} \leq \frac{x}{t_*} \end{cases}$$

5.2: Στεγανός πυθμένας

Στις στεγανές περιοχές το βάθος του νερού είναι μηδέν, μια αποδεκτή φυσική κατάσταση, αλλά μη εφαρμόσιμη στις εξισώσεις ρηχών υδάτων. Θα λύσουμε το πρόβλημα Riemann όταν η περιοχή είναι στεγανή την αρχική χρονική στιγμή ή εμφανίζεται σαν αποτέλεσμα αλληλεπίδρασης δύο υγρών πυθμένων. Η απλούστερη περίπτωση είναι ένα φράγμα δίπλα από μια στεγανή περιοχή, Σχήμα 5.5.



Σχήμα 5.5: Το πρόβλημα Riemann όταν η μια περιοχή είναι στεγανή

Η δομή της λύσης στην περίπτωση του στεγανού πυθμένα είναι διαφορετική από αυτή του υγρού, οπότε κάθε προσπάθεια να χρησιμοποιήσουμε τη λύση του δεύτερου προβλήματος στο πρώτο θα αποτύχει. Για παράδειγμα, στο πρόβλημα Riemann με υγρό πυθμένα βρίσκουμε αρχικά το βάθος h_* στην star περιοχή, ενώ στην περίπτωση του στεγανού πυθμένα δεν υπάρχει star περιοχή. Επίσης, η ταχύτητα, u_0 , των σωματιδίων στη στεγανή περιοχή είναι αυθαίρετη. Αν τη θεωρήσουμε μηδενική, γιατί αφού δεν υπάρχουν σωματίδια νερού δεν υπάρχει και ταχύτητα, θα υπάρξει ένα άλμα ασυνέχειας στην ταχύτητα ακριβώς μετά το υγρό/στεγανό μέτωπο, το οποίο μπορεί να οδηγήσει σε δυσκολίες στην υλοποίηση των αριθμητικών μεθόδων.

5.2.1: Αποδεκτά κύματα σε υγρό/στεγανό μέτωπο

Μια σημαντική πρόταση που αφορά τα αποδεκτά κύματα που ενώνουν μια περιοχή που έχει νερό με μια στεγανή περιοχή είναι η ακόλουθη.

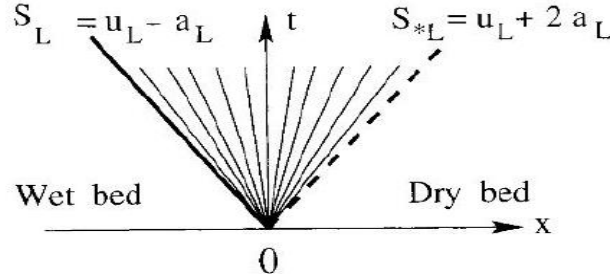
Πρόταση 5.2.1: Δεν μπορεί να δημιουργηθεί κύμα shock όταν έχουμε περιοχή με στεγανό πυθμένα.

Υπάρχουν τρεις πιθανές περιπτώσεις, τις οποίες θα εξετάσουμε στη συνέχεια.

Στην πρώτη περίπτωση, ο στεγανός πυθμένας βρίσκεται στη δεξιά μεριά, οπότε το πρόβλημα Riemann έχει αρχικές συνθήκες:

$$W(x,0) = \begin{cases} W_L \neq W_0, & \text{αν } x < 0 \\ W_0 (=0), & \text{αν } x > 0 \end{cases}$$

Η λύση αποτελείται από ένα μόνο αριστερό κύμα αραιώσης (Σχήμα 5.6), το οποίο σχετίζεται με την αριστερή ιδιοτιμή $\lambda_1 = u - \alpha$ και μια ασυνέχεια επαφής, την οποία καλούμε υγρό/στεγανό μέτωπο, έχει ταχύτητα $S_{*L} = u_L + 2\alpha_L$ και συμπίπτει με την ουρά του κύματος. Η απουσία ενός δεξιού κύματος, που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda_2 = u + \alpha$, είναι φυσικώς αποδεκτή.



Σχήμα 5.6: Ο στεγανός πυθμένας βρίσκεται στα δεξιά

Η πλήρης λύση είναι:

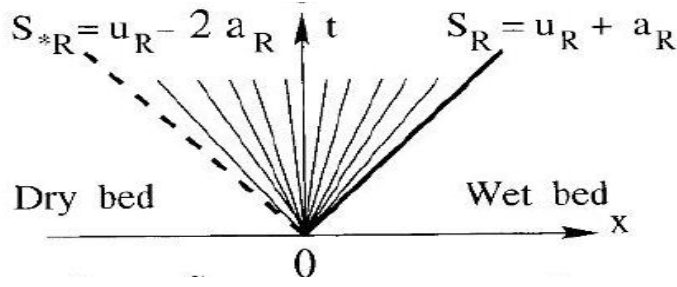
$$W_{L0}(x,t) = \begin{cases} W_L, & \text{αν } \frac{x}{t} \leq u_L - \alpha_L \\ W_{Lfan}, & \text{αν } u_L - \alpha_L < \frac{x}{t} < S_{*L} \\ W_0, & \text{αν } S_{*L} \leq \frac{x}{t} \end{cases}, \text{ όπου } W_{Lfan} = \begin{cases} \alpha = \frac{1}{3} \left(u_L + 2\alpha_L - \frac{x}{t} \right) \\ u = \frac{1}{3} \left(u_L + 2\alpha_L + \frac{2x}{t} \right) \end{cases} \quad (5.12)$$

Σημειώνουμε ότι η λύση για το βάθος είναι συνεχής, με μια ασυνέχεια ως προς την x παράγωγο στα δεξιά του μετώπου εκεί που η ταχύτητα, u , των σωματιδίων κάνει ένα ασυνεχές άλμα από τη μέγιστη τιμή της, στην τιμή 0 στη στεγανή περιοχή. Αριθμητικά είναι πολύ δύσκολο να υπολογίσουμε σωστά τη θέση του υγρού/στεγανού μετώπου.

Στη δεύτερη περίπτωση, ο στεγανός πυθμένας βρίσκεται στην αριστερή μεριά, οπότε το πρόβλημα Riemann έχει αρχικές συνθήκες:

$$W(x,0) = \begin{cases} W_0, & \text{αν } x < 0 \\ W_R \neq W_0, & \text{αν } x > 0 \end{cases}$$

Η λύση αποτελείται από ένα δεξί κύμα αραιώσης (Σχήμα 5.7), το οποίο σχετίζεται με τη δεξιά ιδιοτιμή $\lambda_2 = u + \alpha$ και ένα υγρό/στεγανό μέτωπο, που έχει ταχύτητα $S_{*R} = u_R - 2\alpha_R$ και συμπίπτει με την ουρά του κύματος. Καλούμε την ασυνέχεια επαφής και ως υγρό/στεγανό μέτωπο. Το αριστερό κύμα, που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda_1 = u - \alpha$, λείπει.

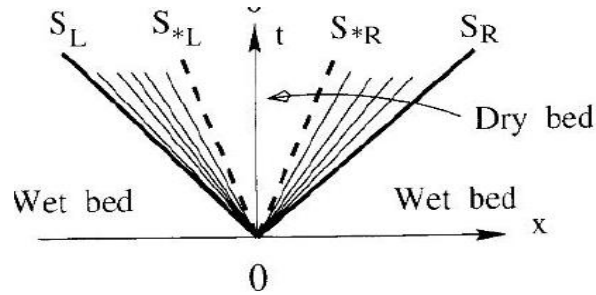


Σχήμα 5.7: Ο στεγανός πυθμένας βρίσκεται στα αριστερά

Η πλήρης λύση είναι:

$$W_{R0}(x,t) = \begin{cases} W_0, & \text{αν} & \frac{x}{t} \leq S_{*R} \\ W_{Rfan}, & \text{αν} & S_{*R} < \frac{x}{t} < u_R + \alpha_R \\ W_R, & \text{αν} & u_R + \alpha_R \leq \frac{x}{t} \end{cases}, \text{ όπου } W_{Rfan} = \begin{cases} \alpha = \frac{1}{3} \left(-u_R + 2\alpha_R + \frac{x}{t} \right) \\ u = \frac{1}{3} \left(u_R - 2\alpha_R + \frac{2x}{t} \right) \end{cases} \quad (5.13)$$

Στην τρίτη περίπτωση έχουμε $W_L, W_R \neq 0$ και υπάρχουν ειδικοί συνδυασμοί των ταχυτήτων, u και a , των σωματιδίων μέσω της συνθήκης θετικότητας του βάθους με αποτέλεσμα να δημιουργείται στεγανός πυθμένας λόγω της αλληλεπίδρασης των δύο αρχικών συνθηκών (Σχήμα 5.8). Απαιτούμε $S_{*L} \leq S_{*R}$, δηλαδή $2(\alpha_L + \alpha_R) \leq u_R - u_L$.



Σχήμα 5.8: Ο στεγανός πυθμένας δημιουργείται λόγω της αλληλεπίδρασης των αρχικών συνθηκών που ικανοποιούν μια ειδική συνθήκη

Υπάρχουν δύο κύματα αραιώσης που σχετίζονται με τις ιδιοτιμές $\lambda_1 = u - \alpha$ και $\lambda_2 = u + \alpha$, και δύο υγρά/στεγανά μέτωπα που βρίσκονται στις ουρές των κυμάτων και δημιουργούν μια νέα περιοχή με στεγανό πυθμένα μεταξύ των δύο κυμάτων. Η πλήρης λύση είναι:

$$W(x,t) = \begin{cases} W_{L0}(x,t), & \text{αν } \frac{x}{t} \leq S_{*L} \\ W_0, & \text{αν } S_{*L} < \frac{x}{t} < S_{*R} \\ W_{R0}(x,t), & \text{αν } S_{*R} \leq \frac{x}{t} \end{cases} \quad \text{όπου τα διανύσματα } W_{L0}, W_{R0} \text{ δίνονται από τις (5.12)}$$

και (5.13).

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ ΠΡΩΤΗΣ ΤΑΞΗΣ

Στο κεφάλαιο αυτό θα μελετήσουμε τη δομή και κάποια θεωρητικά θέματα που αφορούν τις συντηρητικές και μη-συντηρητικές μεθόδους για τους μιας-διάστασης νόμους διατήρησης. Αναφέρουμε μερικές βασικές έννοιες των αριθμητικών μεθόδων για τις μερικές διαφορικές εξισώσεις υπερβολικού τύπου, όπως η ευστάθεια, η συνέπεια, η ακρίβεια και η σύγκλιση. Μεγαλύτερη ανάλυση σε αυτές τις έννοιες γίνεται από τους Hoffman [14], LeVeque [21], Hirsch [13] και Toro [30], [31]. Τέλος, θα μελετήσουμε πρώτης-τάξης αριθμητικές μεθόδους, τις επονομαζόμενες μεθόδους τύπου Godunov [9], για την επίλυση του προβλήματος αρχικών-συννοριακών τιμών για τις εξισώσεις ρηχών υδάτων. Αυτές οι μέθοδοι χρησιμοποιούν μια σημαντική ιδιότητα των υπερβολικών μερικών διαφορικών εξισώσεων, την πληροφορία μετάδοσης του κύματος. Κάποιες λύνουν αναλυτικά σε κάθε κελί το πρόβλημα Riemann, ενώ άλλες χρησιμοποιούν την ελάχιστη πληροφορία στη μετάδοση του κύματος, όπως το πρόσημο ενός μόνου κύματος σε κάθε μέτωπο.

6.1.1: Συντηρητικές μέθοδοι

Η διαφορική μορφή των νόμων διατήρησης στη μια-διάσταση είναι:

$$U_t + F(U)_x = 0$$

η οποία είναι έγκυρη μόνο όταν η λύση είναι ομαλή κάθε χρονική στιγμή. Στην περίπτωση όμως που υπάρχουν ασυνέχειες, πρέπει να χρησιμοποιήσουμε την ολοκληρωτική μορφή:

$$\oint U dx - \oint F(U) dt = 0 \quad (6.1)$$

όπου η ολοκλήρωση γίνεται στο σύνορο της περιοχής με φορά αντίθετη από τους δείκτες του ρολογιού. Αν επιλέξουμε ως χωρίο ολοκλήρωσης ένα ορθογώνιο στο x - t επίπεδο, με διαστάσεις $[x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}] \times [t^n, t^{n+1}]$, τότε έχουμε την παρακάτω ολοκληρωτική μορφή των νόμων διατήρησης:

$$\int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} U(x, t^{n+1}) dx = \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} U(x, t^n) dx - \left[\int_{t^n}^{t^{n+1}} F(U(x_{i+\frac{1}{2}}, t)) dt - \int_{t^n}^{t^{n+1}} F(U(x_{i-\frac{1}{2}}, t)) dt \right] \quad (6.2)$$

από την οποία μπορούμε να πάρουμε ένα τύπο που αποτελεί τη βάση των συντηρητικών αριθμητικών μεθόδων.

Θέτουμε στην (6.2) $\Delta x_i = x_{i+\frac{1}{2}} - x_{i-\frac{1}{2}}$ και $\Delta t = t^{n+1} - t^n$, διαιρούμε όλους τους όρους της εξίσωσης με το Δx_i και τέλος πολλαπλασιάζουμε τους όρους μέσα στην αγκύλη με $\frac{1}{\Delta t}$. Ορίζουμε τους μέσους όρους των ολοκληρωμάτων του $U(x,t)$ τις χρονικές στιγμές t^n και t^{n+1} στο διάστημα Δx_i , ως:

$$U_i^n = \frac{1}{\Delta x_i} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} U(x, t^n) dx, \quad U_i^{n+1} = \frac{1}{\Delta x_i} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} U(x, t^{n+1}) dx \quad (6.3)$$

και τους μέσους όρους των ροών $F(U)$ στις θέσεις $x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}$, ως:

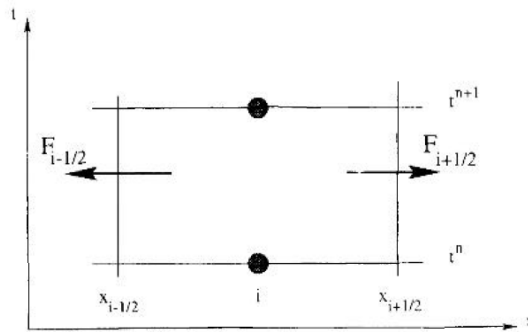
$$F_{i-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\Delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} F(U(x_{i-\frac{1}{2}}, t)) dt, \quad F_{i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{\Delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} F(U(x_{i+\frac{1}{2}}, t)) dt \quad (6.4)$$

Αντικαθιστώντας τις (6.3) και (6.4) στην (6.2) παίρνουμε την ακόλουθη συντηρητική μορφή:

$$U_i^{n+1} = U_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} [F_{i+\frac{1}{2}} - F_{i-\frac{1}{2}}] \quad (6.5)$$

στην οποία βασίζονται οι περισσότερες αριθμητικές μέθοδοι με τις οποίες θα ασχοληθούμε.

Αν διαχωρίσουμε το επίπεδο σε ένα σύνολο πεπερασμένων όγκων $I_i = [x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}]$, που ονομάζονται κελιά, με $i = 1, 2, \dots, m$, τότε το $F_{i+\frac{1}{2}}$ καλείται αριθμητική ροή και αντιστοιχεί στο σύνορο $x_{i+\frac{1}{2}}$ μεταξύ των κελιών i και $i+1$ (Σχήμα 6.1).



Σχήμα 6.1: Κελί I_i στο $x-t$ επίπεδο. Η λύση τη χρονική στιγμή t^{n+1} εξαρτάται από τα αρχικά δεδομένα τη χρονική στιγμή t^n και τις αριθμητικές ροές.

Στα προβλήματα υπερβολικού τύπου η πληροφορία μεταφέρεται με πεπερασμένη ταχύτητα, επομένως υποθέτουμε ότι η ροή $F_{i-\frac{1}{2}}$ βασίζεται μόνο στις τιμές των U_{i-1}^n και U_i^n , δηλαδή τις μέσες τιμές εκατέρωθεν του συνόρου $x_{i-\frac{1}{2}}$. Ομοίως, η $F_{i+\frac{1}{2}}$ βασίζεται στις U_i^n , U_{i+1}^n . Επομένως,

$$F_{i-\frac{1}{2}} = F(U_{i-1}^n, U_i^n) \text{ και } F_{i+\frac{1}{2}} = F(U_i^n, U_{i+1}^n) \quad (6.6)$$

Οι αριθμητικές μέθοδοι της μορφής (6.5) βασίζονται στην επιλογή των ροών F και γενικά είναι τριών-σημείων άμεσες μέθοδοι, δηλαδή για τον υπολογισμό του U_i^{n+1} χρησιμοποιούμε τις τιμές των U_{i-1}^n , U_i^n και U_{i+1}^n ([42]). Στις άμεσες μεθόδους για να υπολογίσουμε τις τιμές των μεταβλητών τη χρονική στιγμή t^{n+1} χρησιμοποιούμε τις τιμές τους την προηγούμενη χρονική στιγμή t^n , ενώ στις έμμεσες χρησιμοποιούμε και τις άγνωστες τιμές τη χρονική στιγμή t^{n+1} .

Οι συντηρητικές μέθοδοι ικανοποιούν την τηλεσκοπική ιδιότητα, δηλαδή η αριθμητική ροή $F_{i+\frac{1}{2}}$ που χρησιμοποιούμε για να υπολογίσουμε τη μέση τιμή του U_i^n , ισούται με τη ροή $F_{i-\frac{1}{2}}$ που χρησιμοποιείται στον υπολογισμό της μέσης τιμής του U_{i+1}^n . Έτσι, αν αθροίσουμε τα U_i^n και U_{i+1}^n , η ροή στο σύνορο μεταξύ των κελιών i και $i+1$ ακυρώνεται. Αν πολλαπλασιάσουμε την (6.5) με Δx_i και στη συνέχεια πάρουμε τα αθροίσματα από $i = i_{Left}$, το αριστερότερο κελί, μέχρι $i = i_{Right}$, το δεξιότερο κελί, τότε παίρνουμε:

$$\sum_{i=i_{Left}}^{i=i_{Right}} \Delta x_i U_i^{n+1} = \sum_{i=i_{Left}}^{i=i_{Right}} \Delta x_i U_i^n - \Delta t [F_{Right} - F_{Left}] \quad (6.7)$$

Δηλαδή, η συνολική ποσότητα της συντηρητικής μεταβλητής U επηρεάζεται μόνο από τις ροές στα σύνορα του χωρίου και όχι από τη ροή σε κάθε κελί.

Μια απαραίτητη προϋπόθεση για να είναι μια αριθμητική μέθοδος αποτελεσματική, είναι η σύγκλιση. Δηλαδή, η αριθμητική λύση πρέπει να συγκλίνει στην αναλυτική λύση της διαφορικής εξίσωσης, όταν $\Delta x, \Delta t \rightarrow 0$. Η σύγκλιση της μεθόδου συνήθως απαιτεί δύο συνθήκες:

- (1) Η μέθοδος να είναι συνεπής με τη διαφορική εξίσωση, δηλαδή η εξίσωση να προσεγγίζεται σωστά τοπικά. Συγκεκριμένα, αν $U(x, t) = \bar{U}$ είναι σταθερή ως προς το x , τότε η μεταβλητή U δεν αλλάζει με το χρόνο και η αριθμητική ροή γίνεται η φυσική (ακριβής) ροή στο \bar{U} , $F_{i+\frac{1}{2}} = F(\bar{U})$.

- (2) Η μέθοδος να είναι ευσταθής, δηλαδή τα σφάλματα που δημιουργούνται σε κάθε χρονικό βήμα να παραμένουν φραγμένα ([42]).

Είναι γνωστό ότι πρέπει να χρησιμοποιούνται συντηρητικές μέθοδοι όταν η λύση των νόμων διατήρησης υπερβολικού τύπου περιλαμβάνει κύματα shock. Σύμφωνα με τους Lax και Wendroff [19] αν μια μέθοδος, που βασίζεται στη συντηρητική μορφή (6.5), συγκλίνει, τότε θα συγκλίνει σε μια ασθενή λύση των νόμων διατήρησης (λύση που δεν είναι διαφορίσιμη συνάρτηση). Το θεώρημα των Lax – Wendroff δεν είναι θεώρημα σύγκλισης. Όμως, οι ασθενείς λύσεις δεν είναι μοναδικές οπότε για να επιλέξουμε τη σωστή, με τη φυσική σημασία, λύση θέτουμε μια συνθήκη εντροπίας. Αυτό σημαίνει ότι και η αριθμητική μέθοδος πρέπει να ικανοποιεί αυτή τη συνθήκη. Ο Harten [11] απέδειξε ότι αν μια συντηρητική μέθοδος ικανοποιεί και μια συνθήκη εντροπίας, τότε αν συγκλίνει, θα συγκλίνει στη σωστή λύση.

6.1.2: Μη-συντηρητικές μέθοδοι

Οι μη-συντηρητικές ή πρωταρχικών μεταβλητών μέθοδοι μπορεί να είναι επαρκείς όταν έχουμε ομαλές ροές, αλλά στην περίπτωση ασυνεχειών, υπολογίζουν λανθασμένη ταχύτητα διάδοσης των κυμάτων shock. Πολλοί έχουν ασχοληθεί με μη-συντηρητικές μεθόδους και το συνδυασμό τους με τεχνικές προσαρμογής κυμάτων shock, όπως ο Moretti [25], [26]. Επίσης, upwind TVD πρωταρχικών μεταβλητών μέθοδοι έχουν κατασκευαστεί από τους Abgrall [1], Karni [17] και Toro [33], [34], [35].

Μια πρωταρχικών μεταβλητών μέθοδος βασίζεται στη μη-συντηρητική μορφή (6.8) των εξισώσεων ρηγών υδάτων:

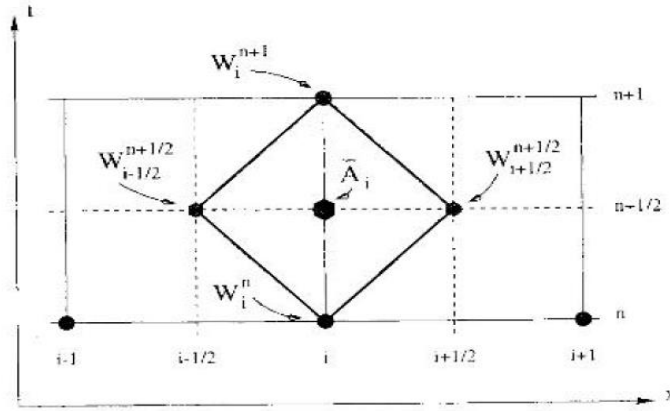
$$W_t + A(W)W_x = 0 \quad (6.8)$$

όπου $W = \begin{bmatrix} h \\ u \\ v \end{bmatrix}$ και $A(W) = \begin{bmatrix} u & h & 0 \\ g & u & 0 \\ 0 & 0 & u \end{bmatrix}$ είναι το διάνυσμα των πρωταρχικών μεταβλητών και ο

Ιακωβιανός πίνακας, αντίστοιχα.

Ένα δυο-βημάτων μη-συντηρητικό σχήμα για να επιλύσουμε την (6.8) δίνεται από την (6.9), και φαίνεται στο Σχήμα 6.2:

$$W_i^{n+1} = W_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \bar{A}_i [W_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - W_{i-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}] \quad (6.9)$$



Σχήμα 6.2: Το πλέγμα για τα μη-συντηρητικών μεταβλητών σχήματα

Την ενδιάμεση χρονική στιγμή $t^{n+\frac{1}{2}}$, ο πίνακας \bar{A}_i , ορίζεται στο σημείο $x = i$ του πλέγματος και τα $W_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}$ στις ενδιάμεσες θέσεις $x = i + \frac{1}{2}$. Το σχήμα είναι πλήρως ορισμένο όταν ορίσουμε τα \bar{A}_i και $W_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}$.

Οι Hou και LeFloch [15] απέδειξαν ότι αν μια μέθοδος που δεν είναι γραμμένη σε συντηρητική μορφή συγκλίνει, τότε στην παρουσία ενός κύματος shock, θα συγκλίνει στη λύση ενός νέου νόμου διατήρησης που περιέχει πηγαίο όρο. Ο πηγαίος όρος εξαφανίζεται όταν δεν υπάρχει κύμα shock. Επίσης απέδειξαν ότι δεν είναι απαραίτητο να χρησιμοποιούμε συντηρητική μέθοδο σε όλο το χωρίο για την εύρεση της λύσης, παρά μόνο όταν εμφανίζονται κύματα shock. Παραδείγματα προσαρμοσμένων μη-συντηρητικών μεθόδων μπορούμε να βρούμε στη βιβλιογραφία των Toro [34], [36], Karni [17] και Abgrall [1].

6.2: Η upwind μέθοδος του Godunov

Η upwind μέθοδος του Godunov (λεπτομερή αναφορά στο [30]) είναι ένα αριθμητικό σχήμα που λύνει το πρόβλημα Riemann τοπικά. Η λύση μπορεί να είναι ακριβής ή προσεγγιστική. Είναι πρώτης-τάξεως ακρίβειας μέθοδος.

Θα θεωρήσουμε το επανζημένο μιας-διάστασης πρόβλημα:

$$U_t + F(U)_x = 0$$

Αυτό είναι ένα μιας-διάστασης πρόβλημα, στο οποίο υπάρχει ένας επιπλέον νόμος διατήρησης για τη συντηρητική μεταβλητή $h\nu$. Η x κατεύθυνση καλείται *κανονική* κατεύθυνση.

Ο τύπος που υπολογίζει την τιμή της συντηρητικής μεταβλητής U_i^{n+1} , στο κελί i , τη χρονική στιγμή t^{n+1} , είναι:

$$U_i^{n+1} = U_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} [F_{i+\frac{1}{2}} - F_{i-\frac{1}{2}}]$$

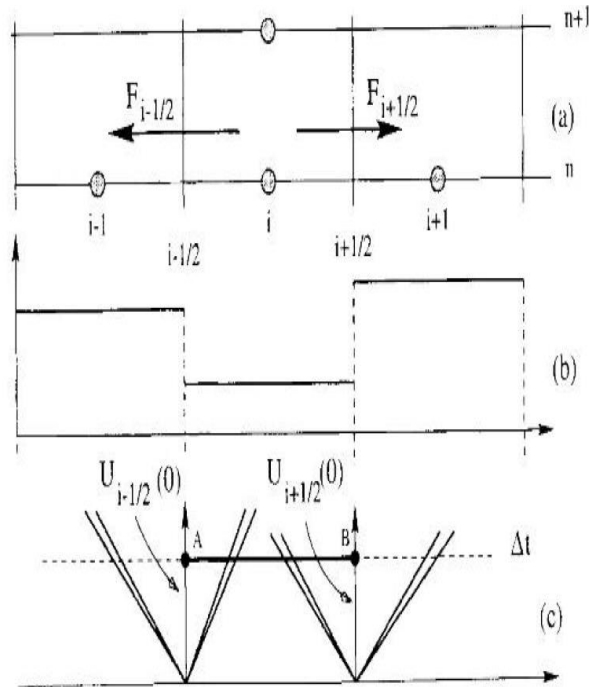
όπου $F_{i+\frac{1}{2}}$ η αριθμητική ροή που αντιστοιχεί στο μέτωπο $x = x_{i+\frac{1}{2}}$, μεταξύ των κελιών i και $i+1$ (Σχήμα 6.3(a)). Η διαφορετική επιλογή των $F_{i+\frac{1}{2}}$ μας δίνει διάφορες συντηρητικές μεθόδους, εμείς όμως θα ασχοληθούμε με τη ροή Godunov.

Έστω ότι τα αρχικά δεδομένα U^n τη χρονική στιγμή t^n , είναι το σύνολο των μέσων όρων των ολοκληρωμάτων U_i^n πάνω στους πεπερασμένους όγκους $I_i = [x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}]$, οπότε έχουμε μια κατά τόπους σταθερή κατανομή των δεδομένων (Σχήμα 6.3.(b)). Αν θεωρήσουμε μια μικρή περιοχή $[x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}]$, τότε τοπικά παίρνουμε ένα αρχικών τιμών πρόβλημα Riemann, στο οποίο οι δύο σταθερές καταστάσεις χωρίζονται από μια ασυνέχεια, δηλαδή:

$$\begin{cases} U_t + F(U)_x = 0 & \text{(Μ.Δ.Ε.)} \\ U(x, t^n) = \begin{cases} U_{i-1}^n, & \text{αν } x < x_{i-\frac{1}{2}} \\ U_i^n, & \text{αν } x > x_{i-\frac{1}{2}} \end{cases} & \text{(αρχικές συνθήκες)} \end{cases} \quad (6.10)$$

$$\begin{cases} U_t + F(U)_x = 0 & \text{(Μ.Δ.Ε.)} \\ U(x, t^n) = \begin{cases} U_i^n, & \text{αν } x < x_{i+\frac{1}{2}} \\ U_{i+1}^n, & \text{αν } x > x_{i+\frac{1}{2}} \end{cases} & \text{(αρχικές συνθήκες)} \end{cases} \quad (6.11)$$

Οι λύσεις των (6.10) και (6.11) ορίζονται ως $U_{i-\frac{1}{2}}(x, t)$ και $U_{i+\frac{1}{2}}(x, t)$, αντίστοιχα, και η δομή τους φαίνεται στο Σχήμα 6.3(c).

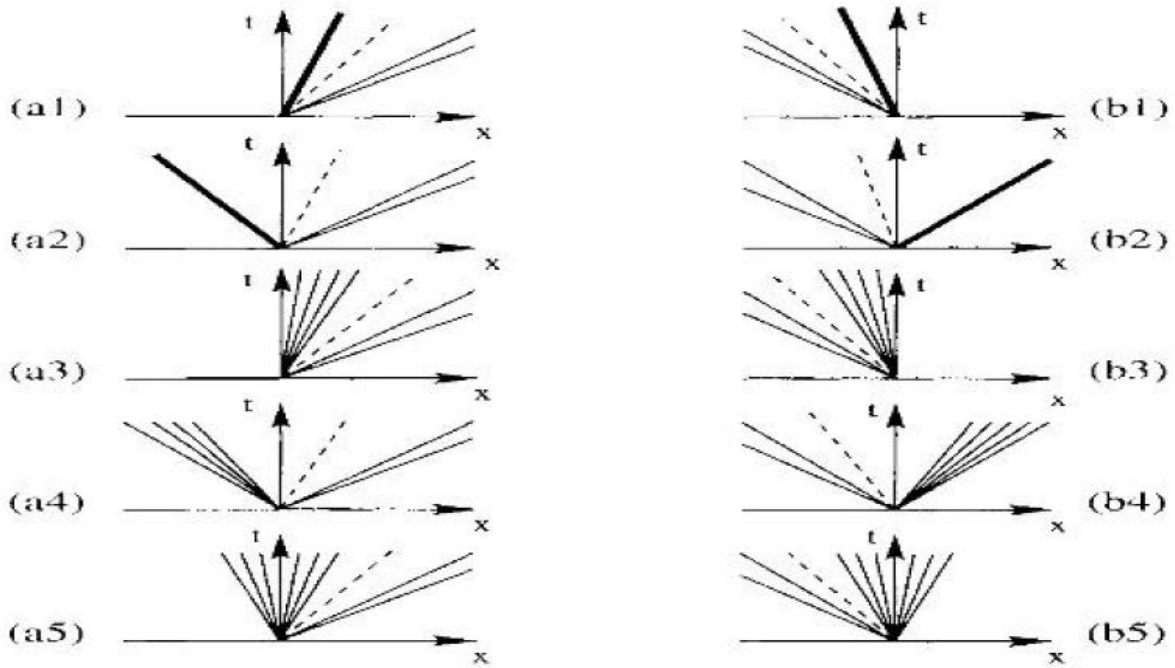


Σχήμα 6.3: (a) Πεπερασμένοι όγκοι στο x - t επίπεδο , (b) σε κάθε κελί η τιμή του U_i^n είναι σταθερή, (c) η δομή των λύσεων των προβλημάτων Riemann στα μέτωπα των κελιών

Η ροή Godunov $F_{i+\frac{1}{2}}$ στο μέτωπο $x_{i+\frac{1}{2}}$ ορίζεται ως η συνάρτηση της φυσικής ροής $F(U)$ υπολογισμένη στη λύση $U_{i+\frac{1}{2}}(x/t)$. Η $U_{i+\frac{1}{2}}(x/t)$ υπολογίζεται κατά μήκος του t -άξονα, δηλαδή για $x/t=0$, άρα $F_{i+\frac{1}{2}} = F(U_{i+\frac{1}{2}}(0))$. Ομοίως, $F_{i-\frac{1}{2}} = F(U_{i-\frac{1}{2}}(0))$.

Επομένως, για να υπολογίσουμε τη ροή Godunov χρειαζόμαστε:

- Τη λύση $U_{i+\frac{1}{2}}(x,t)$ του προβλήματος Riemann με αρχικές συνθήκες $U_L \equiv U_i^n$ και $U_R \equiv U_{i+1}^n$. Η διαδικασία αυτή περιλαμβάνει τον υπολογισμό του βάθους h_* , με τη βοήθεια μιας επαναληπτικής μεθόδου, και της ταχύτητας u_* στην star περιοχή.
- Μια διαδικασία δειγματοληψίας για να υπολογίσουμε την ακριβή τιμή της λύσης κατά μήκος του t -άξονα. Για παράδειγμα, στην περίπτωση του υγρού πυθμένα υπάρχουν 10 πιθανοί συνδυασμοί κυμάτων (Σχήμα 6.4).



Σχήμα 6.4: Δέκα πιθανοί συνδυασμοί κυμάτων για τον υπολογισμό της ροής Godunov, στην περίπτωση υγρού πυθμένα, για το επαυξημένο μιας-διάστασης πρόβλημα.

6.2.1: Ευστάθεια της μεθόδου Godunov

Θα αναφερθούμε μόνο στη συνθήκη ευστάθειας CFL (Courant-Friedrichs-Lewy συντελεστής) ή αριθμό Courant. Ο συντελεστής CFL ορίζεται ως $C_{cfl} = \frac{S_{\max}^n \Delta t}{\Delta x}$, όπου S_{\max}^n είναι η μέγιστη, σε απόλυτη τιμή, ταχύτητα μετάδοσης του κύματος και απαιτούμε $0 < C_{cfl} \leq 1$. Αυτό σημαίνει ότι το σχήμα επιτρέπει χρονικά βήματα Δt τέτοια, ώστε τα ταχύτερα κύματα να μην διασχίζουν πάνω από ένα κελί μήκους Δx σε χρόνο Δt . Για να υπολογίσουμε το S_{\max}^n χρησιμοποιούμε τις λύσεις των τοπικών προβλημάτων Riemann. Μια εκτίμηση για το S_{\max}^n είναι $S_{\max}^n = \max_i \{|u_i^n| + \alpha_i^n\}$, η οποία απαιτεί τιμές την αρχική χρονική στιγμή t^n .

Αναξιόπιστες εκτιμήσεις του S_{\max}^n μπορεί να οδηγήσουν σε λανθασμένα αποτελέσματα, ακόμα και αν η επιλογή της συνάρτησης ροής είναι η βέλτιστη. Σε προβλήματα που περιλαμβάνουν υγρό/στεγανό μέτωπο, η χρησιμοποίηση των ιδιοτιμών του συστήματος για τον υπολογισμό του S_{\max}^n , δεν ενδείκνυται αφού αυτά τα μέτωπα ταξιδεύουν ταχύτερα και έτσι οι μέθοδοι γίνονται ασταθείς.

6.2.2: Συνοριακές συνθήκες

Έστω διάστημα $[0, L]$ το οποίο χωρίζουμε σε m κελιά $I_i, i=1, \dots, m$. Σε κάθε κελί $i, i=2, \dots, m-1$ εφαρμόζουμε τον τύπο:

$$U_i^{n+1} = U_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} [F_{i+\frac{1}{2}} - F_{i-\frac{1}{2}}] \quad (6.12)$$

Για να εφαρμόσουμε τον τύπο (6.12) στα κελιά 1 και m , πρέπει να υπολογίσουμε τις αριθμητικές ροές σε αυτά, οπότε πρέπει εφαρμόσουμε τις συνοριακές συνθήκες στα σημεία $x=0, x=L$. Για να ενημερώσουμε το κελί 1, χρειαζόμαστε την αριθμητική ροή $F_{\frac{1}{2}}$, άρα τις

τιμές $U_L \equiv U_0^n$ (αριστερά) και $U_R \equiv U_1^n$ (δεξιά). Επειδή η τιμή U_0^n δεν ανήκει στο $[0, L]$, δημιουργούμε μια *πλασματική* κατάσταση U_0^n με τέτοιο τρόπο, ώστε η λύση του προβλήματος Riemann με δεδομένα (U_0^n, U_1^n) να δίνει μια λύση $W_{\frac{1}{2}}(x/t)$ που να ικανοποιεί τις φυσικές

συνθήκες στο αριστερό σύνορο $x=0$. Ομοίως, δημιουργούμε και μια πλασματική κατάσταση U_{m+1}^n στο δεξί σύνορο $x=L$. Αναφέρουμε δύο τύπους συνοριακών συνθηκών.

- Για την προσομοίωση συνόρων μεταβίβασης θέτουμε:

$$\left. \begin{aligned} h_0^n &= h_1^n, \quad u_0^n = u_1^n \\ h_{m+1}^n &= h_m^n, \quad u_{m+1}^n = u_m^n \end{aligned} \right\} \quad (6.13)$$

- Για την προσομοίωση ανακλαστικών συνόρων θέτουμε:

$$\left. \begin{aligned} h_0^n &= h_1^n, \quad u_0^n = -u_1^n \\ h_{m+1}^n &= h_m^n, \quad u_{m+1}^n = -u_m^n \end{aligned} \right\} \quad (6.14)$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΡΗΧΩΝ ΥΔΑΤΩΝ

Σε αυτό το κεφάλαιο θα ασχοληθούμε με κατάλληλα επιλεγμένα μιας-διαστάσεως προβλήματα τα οποία μπορούν να λυθούν αναλυτικά χρησιμοποιώντας τη θεωρία του Κεφαλαίου 5. Κάθε πρόβλημα έχει ένα συγκεκριμένο βαθμό δυσκολίας και έχει επιλεγεί για να δοκιμάσει την καταλληλότητα των αριθμητικών μεθόδων που χρησιμοποιούνται για την επίλυση των εξισώσεων ρηχών υδάτων και θα τις δούμε στο επόμενο κεφάλαιο. Στα πέντε προβλήματα έχουμε ένα κανάλι μήκους $50m$ με σταθερή ορθογώνια διατομή και πυθμένα με σταθερό ύψος. Στο τελευταίο πρόβλημα το κανάλι έχει μήκος $20m$. Όλες οι περιπτώσεις αποτελούν γενίκευση του προβλήματος κατάρρευσης φράγματος.

7.1: Πρόβλημα 1: Αριστερό κρίσιμο κύμα αραίωσης και δεξιό shock

Ένα σημαντικό χαρακτηριστικό μιας αριθμητικής μεθόδου είναι η ικανότητά της να υπολογίσει σωστά το shock. Σκοπός της μεθόδου είναι η εύρεση:

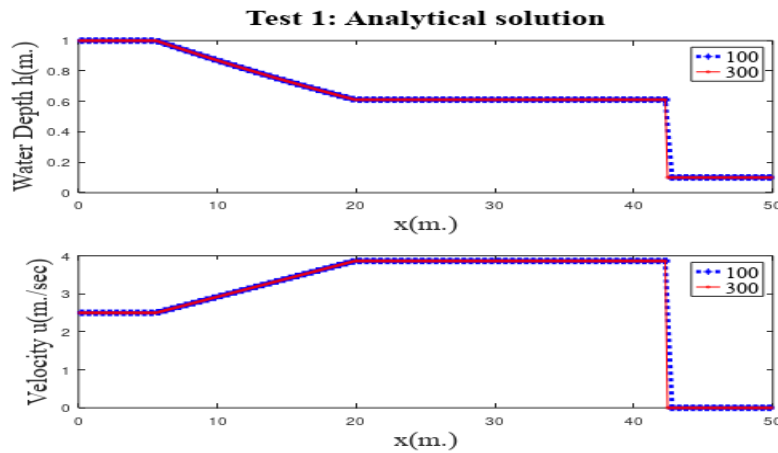
- α) της σωστής ταχύτητας με την οποία μεταδίδεται το κύμα,
- β) της σωστής δύναμης του άλματος,
- γ) του πλάτους του shock,
- δ) της απουσίας (ή όχι) τυχαίων ταλαντώσεων στη γειτνίαση του shock.

Τα αρχικά δεδομένα στο Πρόβλημα 1 (Πίνακας 7.1) παράγουν ένα ισχυρό προς τα δεξιά κινούμενο shock και ένα sonic (κρίσιμο) αριστερό κύμα αραίωσης, δηλαδή η ιδιοτιμή του αριστερού κύματος $\lambda_1 = u - \alpha$ αλλάζει από αρνητική σε θετική, καθώς κινείται προς τα δεξιά, οπότε κάποια στιγμή $u = \alpha$. Οι αριθμητικές μέθοδοι, ακόμα και αυτές που ικανοποιούν τη συνθήκη εντροπίας, αντιμετωπίζουν δυσκολίες στα sonic σημεία. Οι μέθοδοι που παραβιάζουν τη συνθήκη εντροπίας παράγουν ένα αφύσικο άλμα στα sonic σημεία μέσα στο κύμα αραίωσης, το οποίο είναι προφανώς λανθασμένο.

Μήκος καναλιού	Θέση φράγματος	Τελικός χρόνος	Βάθος h_L	Ταχύτητα u_L	Βάθος h_R	Ταχύτητα u_R
50.0	10.0	7.0	1.0	2.5	0.1	0.0

Πίνακας 7.1

Τα γραφήματα του βάθους h και της ταχύτητας u , για πλήθος κελιών 100 (μπλε γραμμή) και 300 (κόκκινη γραμμή), απεικονίζονται στο Σχήμα 7.1. Για την εύρεση του βάθους h_* χρειάστηκαν 3 επαναλήψεις της μεθόδου Newton-Raphson.



Σχήμα 7.1: Αναλυτική λύση για το Πρόβλημα 1 για 100 και 300 κελιά

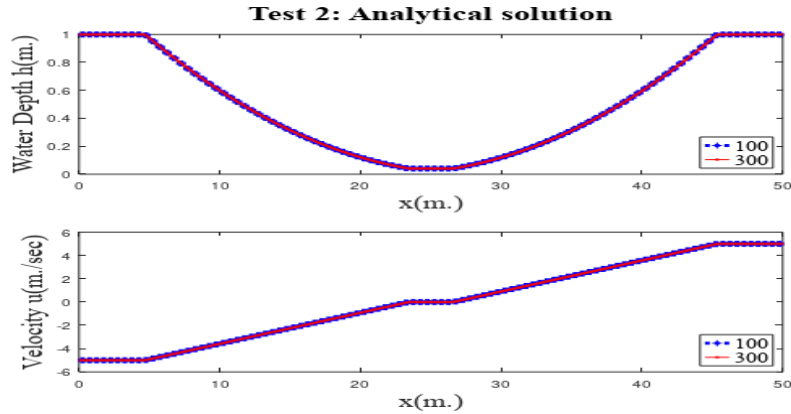
7.2: Πρόβλημα 2: Δύο κύματα αραίωσης και μια σχεδόν στεγανή περιοχή

Το Πρόβλημα 2 αποτελείται από δύο κύματα αραίωσης που κινούνται σε διαφορετικές κατευθύνσεις, με αποτέλεσμα το νερό στην star περιοχή μεταξύ των κυμάτων να είναι πολύ ρηχό (μικρό h). Η δυσκολία σε αυτό το πρόβλημα είναι ότι μια μεγάλη κατηγορία μεθόδων θα υπολογίσει αρνητικό βάθος h στη γειτνίαση του πολύ ρηχού ύδατος που παράγεται από τα κύματα αραίωσης, με αποτέλεσμα ο κώδικας να μην μπορεί να υπολογίσει την ταχύτητα u .

Τα δεδομένα του προβλήματος 2 φαίνονται στον Πίνακα 7.2 και τα γραφήματα για το βάθος h και την ταχύτητα u στο Σχήμα 7.2.

Μήκος καναλιού	Θέση φράγματος	Τελικός χρόνος	Βάθος h_L	Ταχύτητα u_L	Βάθος h_R	Ταχύτητα u_R
50.0	25.0	2.5	1.0	-5.0	1.0	5.0

Πίνακας 7.2



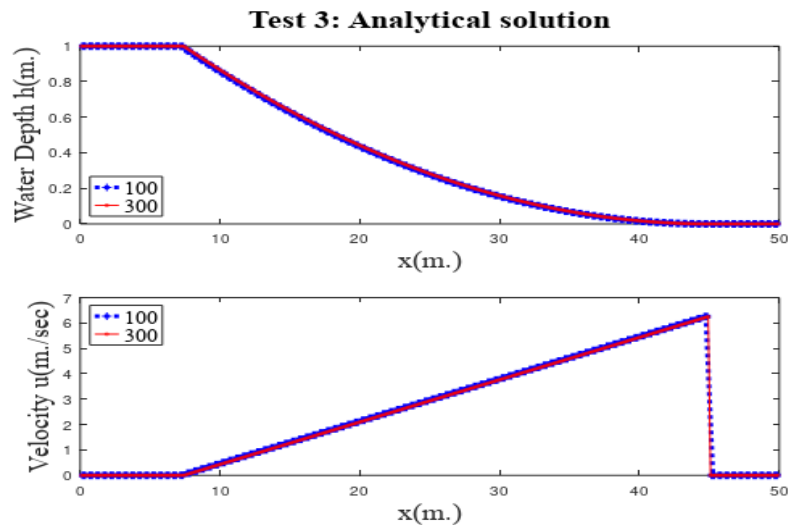
Σχήμα 7.2: Αναλυτική λύση για το Πρόβλημα 2 για 100 και 300 κελιά

7.3: Πρόβλημα 3: Στεγανή περιοχή στα δεξιά

Στο Πρόβλημα 3 υπάρχει μια στεγανή περιοχή στα δεξιά. Η λύση αποτελείται από ένα μόνο αριστερό κύμα αραιώσης, με το υγρό/στεγανό μέτωπο να βρίσκεται στην ουρά του κύματος. Μια μεγάλη δυσκολία των αριθμητικών μεθόδων είναι να βρουν τη σωστή ταχύτητα διάδοσης του μετώπου. Το σφάλμα στην εύρεση θέσεως του μετώπου μεγαλώνει με το χρόνο, κάνοντας τις προβλέψεις αναξιόπιστες ή ακόμα και άχρηστες. Επίσης, μέθοδοι που βασίζονται στην αναλυτική λύση του προβλήματος Riemann χρειάζονται ειδικές προσαρμογές για να υπολογίσουν σωστά τη δομή του κύματος. Τέλος, η υπόθεση ότι υπάρχει παντού νερό δεν είναι σωστή. Τα δεδομένα βρίσκονται στον Πίνακα 7.3 και τα γραφήματα στο Σχήμα 7.3:

Μήκος καναλιού	Θέση φράγματος	Τελικός χρόνος	Βάθος h_L	Ταχύτητα u_L	Βάθος h_R	Ταχύτητα u_R
50.0	20.0	4.0	1.0	0.0	0.0	0.0

Πίνακας 7.3



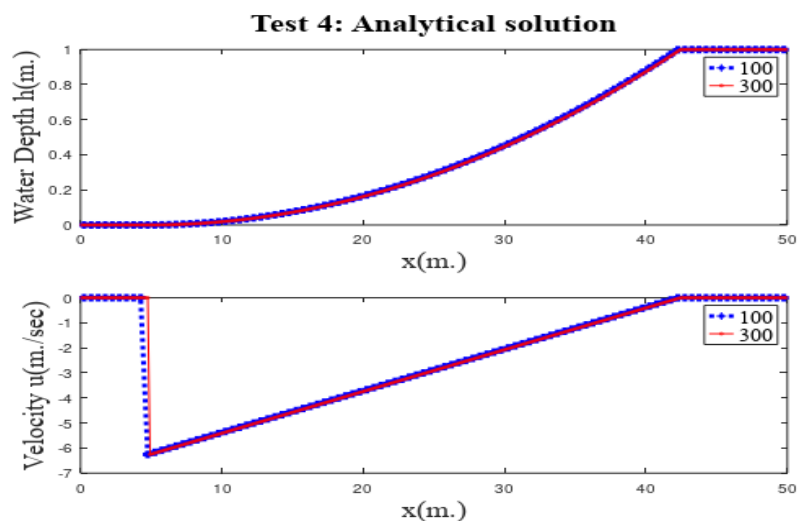
Σχήμα 7.3: Αναλυτική λύση για το Πρόβλημα 3 για 100 και 300 κελιά

7.4: Πρόβλημα 4: Στεγανή περιοχή στα αριστερά

Το Πρόβλημα 4 είναι συμμετρικό του Προβλήματος 3, επομένως η λύση αποτελείται από ένα δεξί κύμα αραιώσης. Τα δεδομένα βρίσκονται στον Πίνακα 7.4 και τα γραφήματα στο Σχήμα 7.4.

Μήκος καναλιού	Θέση φράγματος	Τελικός χρόνος	Βάθος h_L	Ταχύτητα u_L	Βάθος h_R	Ταχύτητα u_R
50.0	30.0	4.0	0.0	0.0	1.0	0.0

Πίνακας 7.4



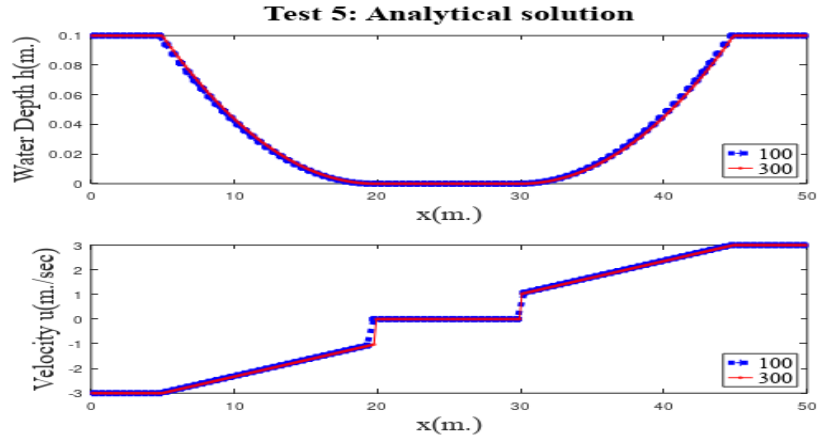
Σχήμα 7.4: Αναλυτική λύση για το Πρόβλημα 4 για 100 και 300 κελιά

7.5: Πρόβλημα 5: Δημιουργία Στεγανής Περιοχής

Οι αρχικές συνθήκες του Προβλήματος 5 (Πίνακας 7.5) είναι τέτοιες, ώστε η λύση να αποτελείται από δύο κύματα αραιώσης με ένα τμήμα στεγανής περιοχής ανάμεσά τους. Τα δεδομένα δεν ικανοποιούν τη συνθήκη θετικότητας του βάθους, οπότε οι αριθμητικές μέθοδοι αντιμετωπίζουν δυσκολίες στην εύρεση της ροής, κυρίως στα δύο υγρά/στεγανά μέτωπα τα οποία κινούνται σε αντίθετες κατευθύνσεις.

Μήκος καναλιού	Θέση φράγματος	Τελικός χρόνος	Βάθος h_L	Ταχύτητα u_L	Βάθος h_R	Ταχύτητα u_R
50.0	25.0	2.5	0.1	-3.0	0.1	3.0

Πίνακας 7.5



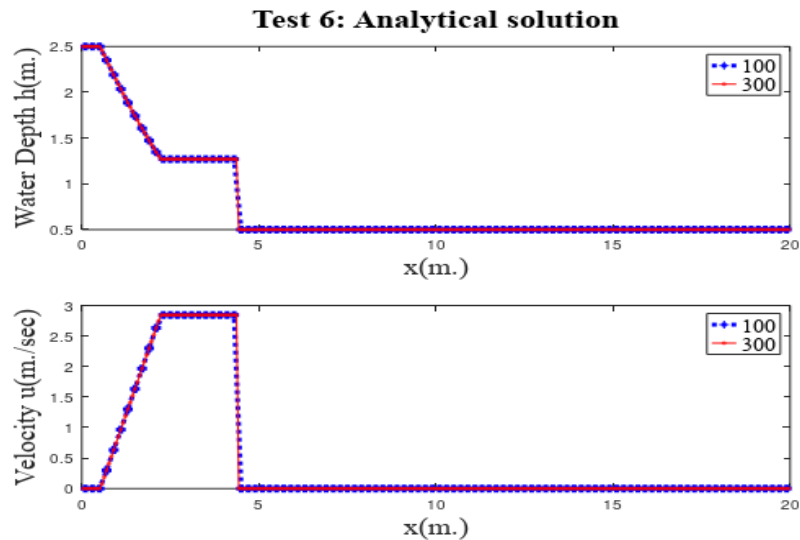
Σχήμα 7.5: Αναλυτική λύση για το Πρόβλημα 5 για 100 και 300 κελιά

7.6: Πρόβλημα 6: Αριστερό κύμα αραιώσης και δεξιό shock

Σε αυτό το πρόβλημα το μήκος του καναλιού είναι $20m$. Το φράγμα διαχωρίζει δύο περιοχές που περιέχουν υγρό σε κατάσταση ισορροπίας και μετά την πτώση του, δημιουργείται ένα αριστερό κύμα αραιώσης και ένα δεξιό κύμα shock. Τα δεδομένα βρίσκονται στον Πίνακα 7.6 και τα γραφήματα για το βάθος h και την ταχύτητα u , βρίσκονται στο Σχήμα 7.6.

Μήκος καναλιού	Θέση φράγματος	Τελικός χρόνος	Βάθος h_L	Ταχύτητα u_L	Βάθος h_R	Ταχύτητα u_R
20.0	2.5	0.4	2.5	0.0	0.5	0.0

Πίνακας 7.6



Σχήμα 7.6: Αναλυτική λύση για το Πρόβλημα 6 για 100 και 300 κελιά

ΜΕΘΟΔΟΙ TVD

Οι αριθμητικές μέθοδοι τύπου Godunov μπορούν να χρησιμοποιήσουν αναλυτικούς ή προσεγγιστικούς επιλυτές Riemann. Η επιλογή μεταξύ τους καθορίζεται από το υπολογιστικό κόστος, την απλότητα και την ακρίβεια των λύσεων. Στην περίπτωση των ρηχών υδάτων το υπολογιστικό κόστος δεν είναι τόσο σημαντικός παράγοντας, αφού η χρήση προσεγγιστικών επιλυτών Riemann εξοικονομεί 20% σε σχέση με τους αναλυτικούς. Θα παρουσιάσουμε δύο προσεγγιστικούς επιλυτές, τον HLL επιλυτή Riemann των Harten, Lax και Van Leer [12] και τον HLLC του Toro [39]. Στη συνέχεια, αναφερόμαστε σε TVD μεθόδους τύπου Godunov, τις WAF, MUSCL-Hancock και επιλύουμε τα προβλήματα που παρουσιάστηκαν στο Κεφάλαιο 7 με τη βοήθεια αυτών των μεθόδων. Τέλος, αναφέρουμε μεθόδους κεντρικών διαφορών, την FORCE [30], [31], [37], και την TVD-SLIC και επιλύουμε τα προβλήματα του Κεφαλαίου 7 με αυτές τις μεθόδους.

8.1: HLL και HLLC επιλυτές Riemann

Οι Harten, Lax και Van Leer πρότειναν μια προσεγγιστική λύση του προβλήματος Riemann βρίσκοντας απευθείας μια προσέγγιση της αριθμητικής ροής $F_{i+\frac{1}{2}}$. Έστω το πρόβλημα Riemann με αρχικές συνθήκες $U_L \equiv U_i^n$, $U_R \equiv U_{i+1}^n$ και αντίστοιχες ροές $F_L \equiv F(U_L)$, $F_R \equiv F(U_R)$. Η HLL προσέγγιση εκτιμάει τις τιμές S_L , S_R . Η καλύτερη επιλογή αυτών των ταχυτήτων, που οδηγεί σε ακριβή και ευσταθή σχήματα είναι:

$$S_L = u_L - \alpha_L q_L, S_R = u_R + \alpha_R q_R \quad (8.1)$$

$$\text{όπου } q_K = \begin{cases} \sqrt{\frac{1}{2} \left[\frac{(h_* + h_K) h_*}{h_K^2} \right]}, & \text{αν } h_* > h_K, \text{ με } K=L \text{ ή } R \text{ και } h_* \text{ μια προσέγγιση της ακριβούς} \\ 1, & \text{αν } h_* \leq h_K \end{cases}$$

λύσης του βάθους h στην star περιοχή. Τύποι υπολογισμού του h_* που οδηγούν σε καλά αποτελέσματα είναι:

$$h_* = \frac{1}{2}(h_L + h_R) - \frac{1}{4} \cdot \frac{(u_R + u_L)(h_L + h_R)}{\alpha_L + \alpha_R} \quad (8.2)$$

$$\dot{\eta} \quad h_* = \frac{1}{g} \left[\frac{1}{2} (\alpha_L + \alpha_R) + \frac{1}{4} (u_L - u_R) \right]^2 \quad (8.3)$$

Εφαρμόζοντας την ολοκληρωτική μορφή των νόμων διατήρησης σε κατάλληλους πεπερασμένους όγκους, παίρνουμε την HLL αριθμητική ροή:

$$F_{i+\frac{1}{2}} = \begin{cases} F_L, & \text{αν } S_L \geq 0 \\ F^{hll} = \frac{S_R F_L - S_L F_R + S_R S_L (U_R - U_L)}{S_R - S_L}, & \text{αν } S_L \leq 0 \leq S_R \\ F_R, & \text{αν } S_R \leq 0 \end{cases} \quad (8.4)$$

Ο HLL επιλυτής είναι κατάλληλος για μιας-διάστασης προβλήματα που δεν έχουν shear κύματα στη λύση τους, αλλά όταν αυτά υπάρχουν είναι ανεπαρκής. Ο HLLC προσεγγιστικός επιλυτής Riemann [30], [31], [39] είναι μια τροποποίηση του HLL με σκοπό να διορθώσει αυτή την αδυναμία. Στον HLLC επιπρόσθετα με τις εκτιμήσεις των ταχυτήτων των κυμάτων S_L , S_R , εκτιμούμε και την ταχύτητα του μεσαίου κύματος, S_* . Υπάρχουν αρκετοί τρόποι να υπολογίσουμε την ταχύτητα S_* . Μια καλή επιλογή για την S_* , που αναφέρθηκε αρχικά από τους Fraccarolo και Toro [5], δίνεται από τον τύπο:

$$S_* = \frac{S_L h_R (u_R - S_R) - S_R h_L (u_L - S_L)}{h_R (u_R - S_R) - h_L (u_L - S_L)} \quad (8.5)$$

η οποία στην περίπτωση στεγανού πυθμένα δίνει την ταχύτητα του στεγανού μετώπου με ακρίβεια.

Ο HLLC επιλυτής είναι:

$$F_{i+\frac{1}{2}}^{HLLC} = \begin{cases} F_L, & \text{αν } 0 \leq S_L \\ F_{*L}, & \text{αν } S_L \leq 0 \leq S_* \\ F_{*R}, & \text{αν } S_* \leq 0 \leq S_R \\ F_R, & \text{αν } S_R \leq 0 \end{cases} \quad (8.6)$$

$$\text{όπου } F_{*L} = F_L + S_L (U_{*L} - U_L), \quad F_{*R} = F_R + S_R (U_{*R} - U_R) \quad \text{και} \quad U_{*K} = h_K \left(\frac{S_K - u_K}{S_K - u_*} \right) \begin{bmatrix} 1 \\ S_* \\ v_K \end{bmatrix}.$$

8.2.1: Μέθοδος TVD-WAF

Η Σταθμισμένων Μέσων όρων των Ροών μέθοδος (Weighted Average Flux, WAF), είναι δεύτερης τάξης ακρίβειας επέκταση της μεθόδου Godunov και εφαρμόστηκε στις δυο-διαστάσεις εξισώσεις ρηχών υδάτων από τους Toro [32] και Fraccarolo και Toro [5]. Επειδή είναι δεύτερης τάξης ακρίβειας μέθοδος σύμφωνα με το θεώρημα του Godunov [30], [31] περιμένουμε μη φυσικές ταλαντώσεις κοντά στις ασυνέχειες. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι τα δεύτερης τάξης αριθμητικά σχήματα δεν ικανοποιούν την ιδιότητα της Μείωσης της Ολικής Κύμανσης (Total Variation Diminishing). Σύμφωνα με τον Harten [11] ένα αριθμητικό σχήμα ικανοποιεί την TVD ιδιότητα αν ισχύει:

$$TV(U^{n+1}) \leq TV(U^n)$$

$$\text{όπου } TV(U^{n+1}) = \sum_i |U_i^{n+1} - U_i^n|.$$

Για αυτό απαιτούμε μια μη-γραμμική τροποποίηση στη WAF ροή για να αποφύγουμε τέτοιες μη φυσικές ταλαντώσεις, που επιτυγχάνεται επιβάλλοντας έναν TVD περιορισμό ([30], [31]). Η TVD-WAF ροή είναι:

$$F_{i+\frac{1}{2}}^{TVD} = \frac{1}{2}(F_i + F_{i+1}) - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \text{sign}(c_k) A_k \Delta F_{i+\frac{1}{2}}^{(k)} \quad (8.7)$$

όπου A_k είναι ένας WAF οριοθέτης. Οι WAF οριοθέτες που θα χρησιμοποιήσουμε στη συνέχεια είναι οι SUPERBEE, Van Leer, Van Albada, MINMOD και MINMAX. Εξαρτώνται από τον αριθμό Courant $c_k = \frac{\Delta t \cdot S_k}{\Delta x}$, όπου S_k είναι η ταχύτητα του k -κύματος, και από το όρισμα

$$r^{(k)} = \begin{cases} \frac{q_i^{(k)} - q_{i-1}^{(k)}}{q_{i+1}^{(k)} - q_i^{(k)}}, \text{ αν } c_k > 0 \\ \frac{q_{i+2}^{(k)} - q_{i+1}^{(k)}}{q_{i+1}^{(k)} - q_i^{(k)}}, \text{ αν } c_k < 0 \end{cases}$$

όπου $q=h$ για τα μη-γραμμικά κύματα και $q=v$ για τα shear κύματα. Οι τύποι των οριοθετών SUPERBEE, Van Leer, Van Albada και MINMOD είναι:

$$A_{sb} = \begin{cases} 1, & \text{αν } r < 0 \\ 1 - 2(1 - |c|)r, & \text{αν } 0 \leq r < \frac{1}{2} \\ |c|, & \text{αν } \frac{1}{2} \leq r < 1 \\ 1 - (1 - |c|)r, & \text{αν } 1 \leq r < 2 \\ 2|c| - 1, & \text{αν } r \geq 2 \end{cases} \quad A_{vl} = \begin{cases} 1, & \text{αν } r < 0 \\ 1 - \frac{(1 - |c|)2r}{1 + r}, & \text{αν } r \geq 0 \end{cases}$$

$$A_{va} = \begin{cases} 1, & \text{αν } r < 0 \\ 1 - \frac{(1 - |c|)r(1 + r)}{1 + r^2}, & \text{αν } r \geq 0 \end{cases} \quad A_{md} = \begin{cases} 1, & \text{αν } r < 0 \\ 1 - (1 - |c|)r, & \text{αν } 0 \leq r \leq 1 \\ |c|, & \text{αν } r > 1 \end{cases}$$

Για τον υπολογισμό της ροής στα παρακάτω προβλήματα χρησιμοποιούμε τον HLL προσεγγιστικό επιλυτή Riemann.

8.2.2: Επίλυση των προβλημάτων με την TVD –WAF

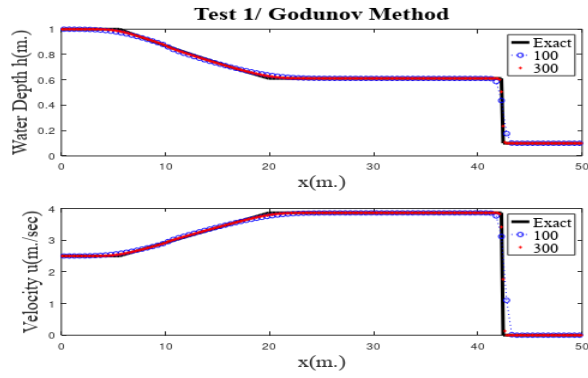
Σε όλα τα προβλήματα, η αναλυτική λύση (μαύρη γραμμή) υπολογίστηκε με πλήθος κελιών 300, και εκτελέσαμε τη μέθοδο με 100 (μπλε γραμμή) και 300 (κόκκινη γραμμή) κελιά, αντίστοιχα. Επιλύουμε τα προβλήματα με την πρώτης τάξεως ακρίβειας μέθοδο του Godunov (Σχήμα 8.1), μια δεύτερης τάξης ακρίβειας, μη-μονότονη, upwind μέθοδο (Σχήμα 8.2) και με τη TVD –WAF με τους οριοθέτες SUPERBEE, Van Leer, Van Albada και MINMOD (Σχήμα 8.3).

➤ ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1

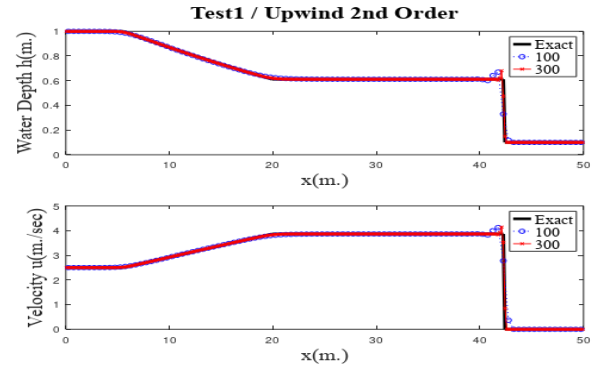
Μήκος καναλιού	Θέση φράγματος	Τελικός χρόνος	Βάθος h_L	Ταχύτητα u_L	Βάθος h_R	Ταχύτητα u_R
50.0	10.0	7.0	1.0	2.5	0.1	0.0

Παρατηρούμε ότι η μέθοδος Godunov για 100 κελιά έχει απόκλιση από την αναλυτική λύση ακόμα και στα σημεία που η λύση είναι συνεχής, αλλά καθώς αυξάνουμε το πλήθος των κελιών δίνει μια καλύτερη αριθμητική προσέγγιση. Η μη-μονότονη δεύτερης τάξης upwind μέθοδος, στο σημείο ασυνέχειας υπολογίζει μεγαλύτερο βάθος, h , και ταχύτητα, u , από την πραγματική λύση και τα αποτελέσματα δεν βελτιώνονται με την αύξηση του αριθμού των κελιών. Η TVD-WAF δίνει καλύτερα αποτελέσματα από τη μέθοδο Godunov, ενώ από τους οριοθέτες SUPERBEE και Van Albada καλύτερη προσέγγιση δίνει ο SUPERBEE, όπως φαίνεται και στο

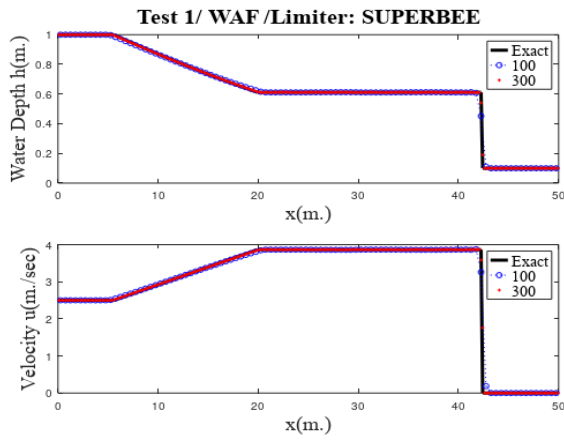
Σχήμα 8.4, όπου συγκρίνουμε τη μέθοδο Godunov και TVD-WAF, με οριοθέτες SUPERBEE και Van Albada, με την αναλυτική λύση.



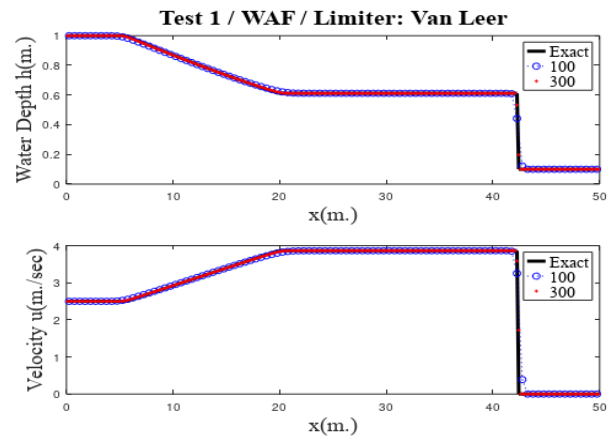
Σχήμα 8.1: Μέθοδος Godunov



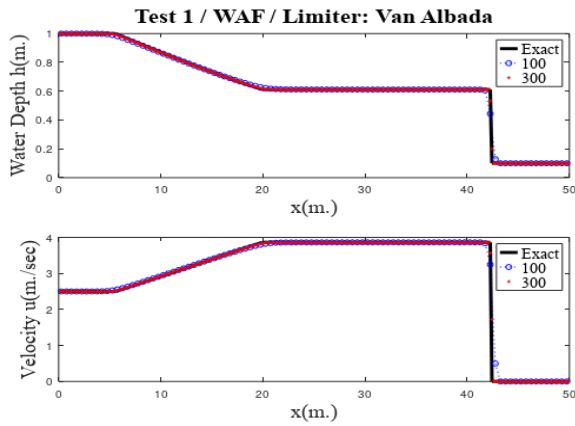
Σχήμα 8.2: Μη-μονότονη upwind μέθοδος



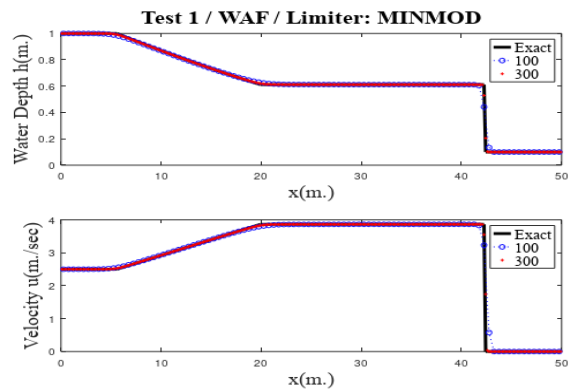
(α)



(β)

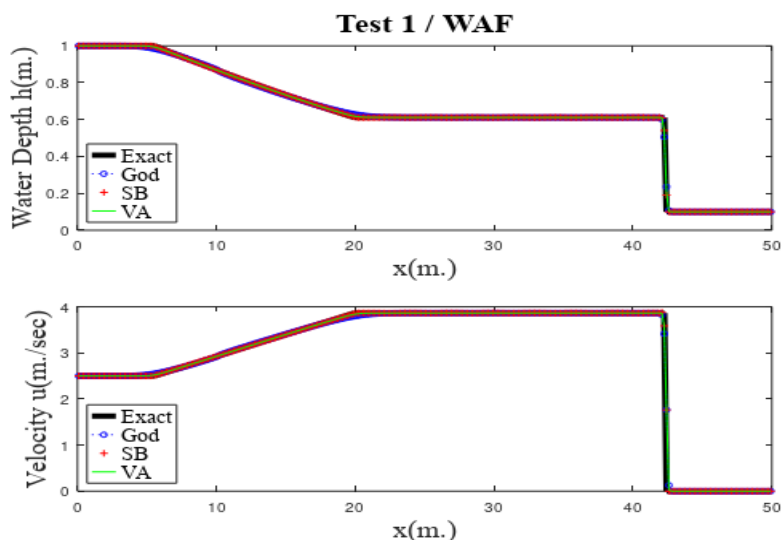


(γ)



(δ)

8.3: Μέθοδος TVD-WAF για το Πρόβλημα 1 με οριοθέτες: SUPERBEE (α), Van Leer (β), Van Albada (γ), MINMOD (δ)

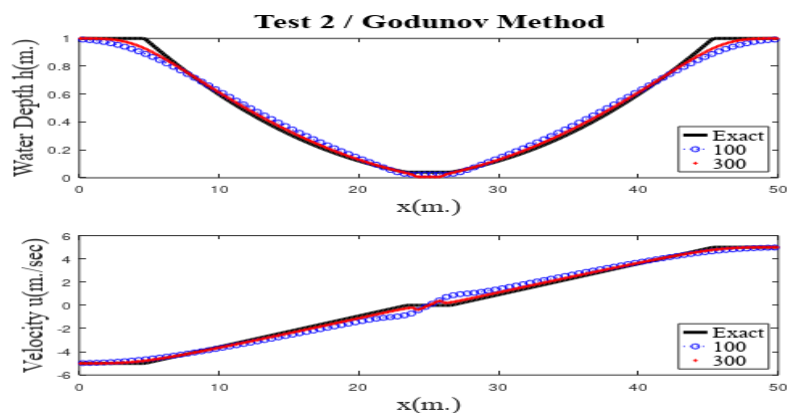


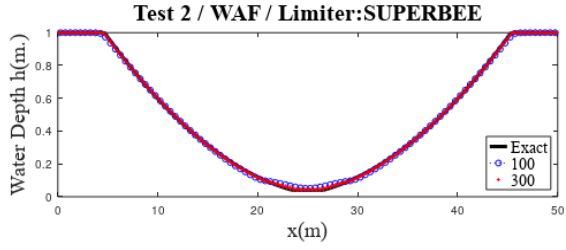
Σχήμα 8.4: Σύγκριση της αναλυτικής λύσης με τις μεθόδους Godunov, TVD-WAF με οριοθέτη SUPERBEE και TVD-WAF με οριοθέτη Van Albada

➤ ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2

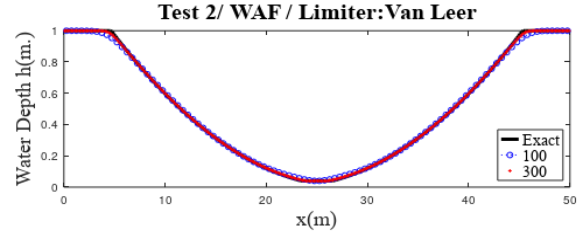
Μήκος καναλιού	Θέση φράγματος	Τελικός χρόνος	Βάθος h_L	Ταχύτητα u_L	Βάθος h_R	Ταχύτητα u_R
50.0	25.0	2.5	1.0	-5.0	1.0	5.0

Η μέθοδος Godunov, για μικρό αριθμό κελιών, δεν υπολογίζει σωστά το αρχικό και τελικό βάθος του νερού (Σχήμα 8.5). Παρατηρούμε ότι για πλήθος κελιών 300, η TVD-WAF για όλους τους οριοθέτες δίνει σχεδόν ίδια αποτελέσματα και προσεγγίζει ικανοποιητικά την αναλυτική λύση (Σχήμα 8.6) , ενώ μια σύγκριση των μεθόδων φαίνεται στο Σχήμα 8.7.

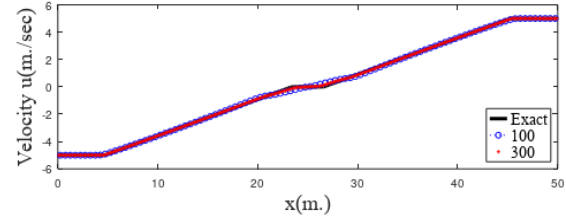




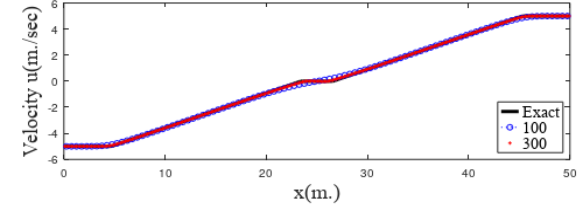
(α)



(β)

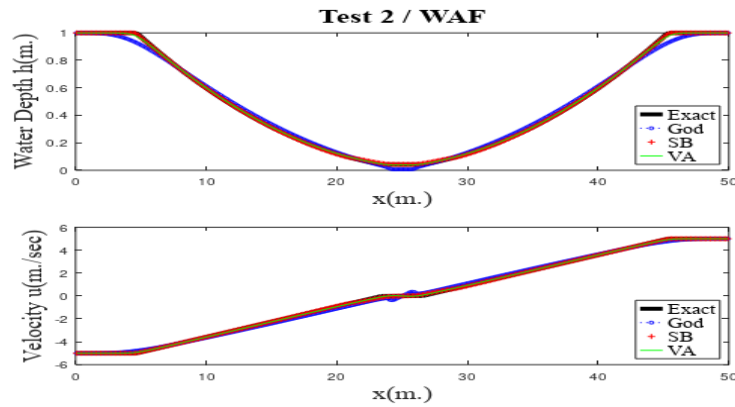


(γ)



(δ)

Σχήμα 8.6: Μέθοδος WAF για το Πρόβλημα 2 με οριοθέτες SUPERBEE (α), Van Leer (β), Van Albada (γ), MINMOD (δ)

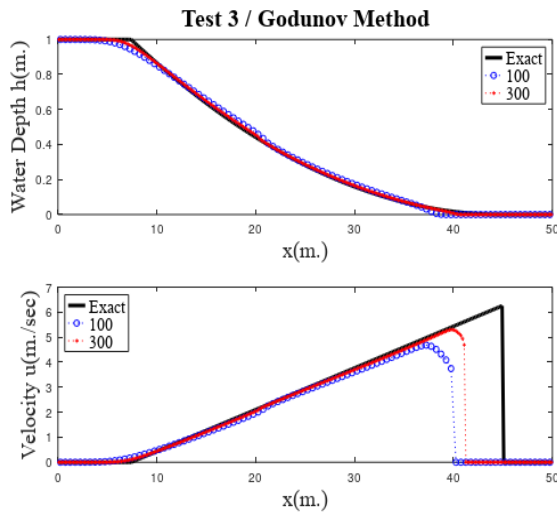


Σχήμα 8.7: Σύγκριση της αναλυτικής λύσης (μαύρη γραμμή) με τις μεθόδους Godunov (μπλε γραμμή), TVD-WAF με οριοθέτη SUPERBEE (κόκκινη γραμμή) και TVD-WAF με οριοθέτη Van Albada (πράσινη γραμμή)

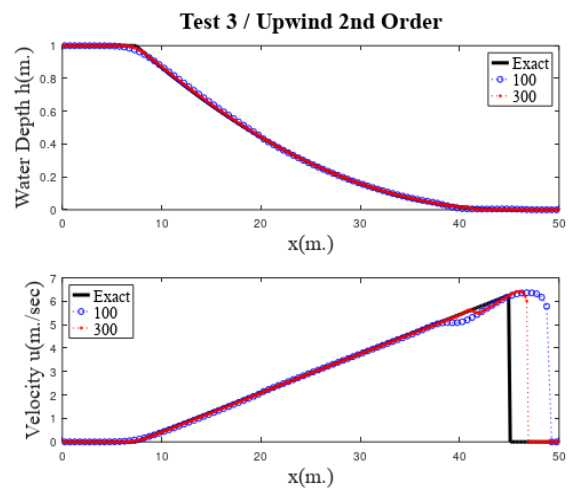
➤ ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3

Μήκος καναλιού	Θέση φράγματος	Τελικός χρόνος	Βάθος h_L	Ταχύτητα u_L	Βάθος h_R	Ταχύτητα u_R
50.0	20.0	4.0	1.0	0.0	0.0	0.0

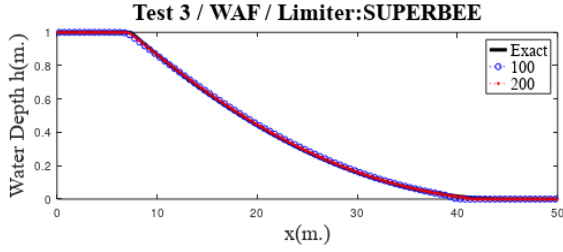
Η μέθοδος Godunov ενώ υπολογίζει με σχετική ακρίβεια το βάθος h , στο σημείο ασυνέχειας υπολογίζει μικρότερη ταχύτητα u , από την πραγματική και παρόλο που όταν αυξάνουμε τον αριθμό των κελιών παίρνουμε καλύτερα αποτελέσματα, το σφάλμα μεταξύ της αναλυτικής και προσεγγιστικής ταχύτητας είναι μεγάλο (Σχήμα 8.8). Η upwind δεύτερης τάξης μέθοδος υπολογίζει μεγαλύτερη ταχύτητα, οπότε πάλι η προσέγγιση δεν είναι ικανοποιητική (Σχήμα 8.9). Ούτε και η μέθοδος TVD-WAF δίνει ακριβέστερα αποτελέσματα (Σχήμα 8.10), αλλά την καλύτερη προσέγγιση δίνει ο οριοθέτης MINMOD, όπως φαίνεται στη σύγκριση των μεθόδων στο Σχήμα 8.11.



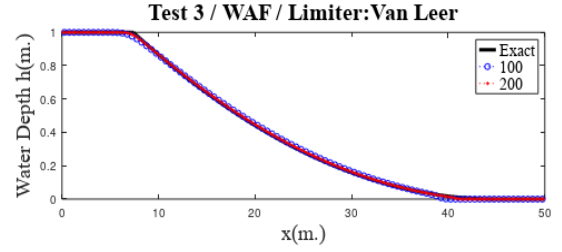
Σχήμα 8.8: Μέθοδος Godunov



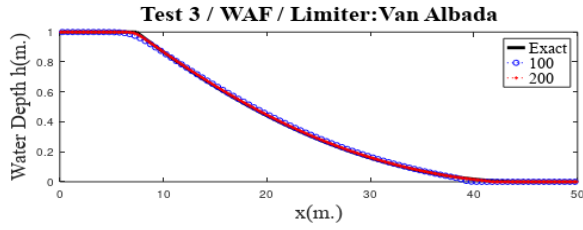
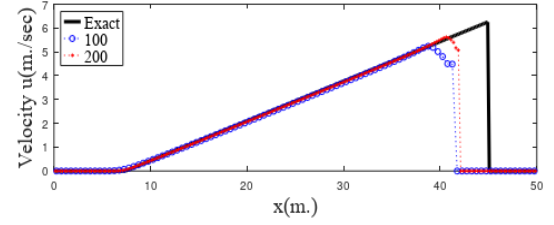
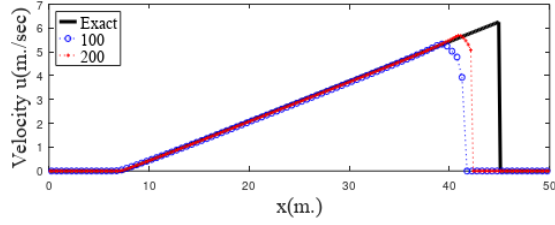
Σχήμα 8.9: Μη-μονότονη upwind μέθοδος



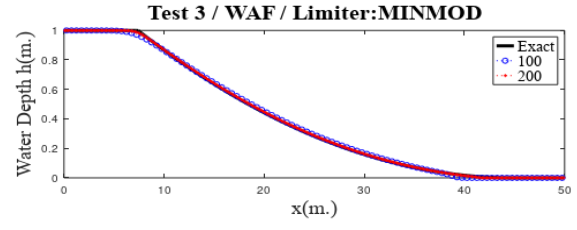
(α)



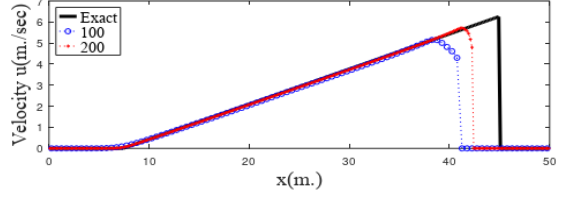
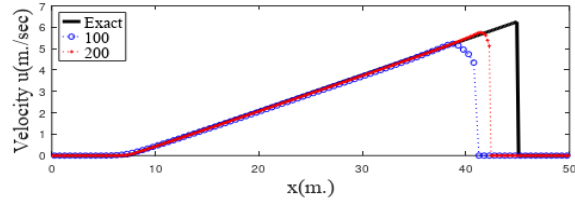
(β)



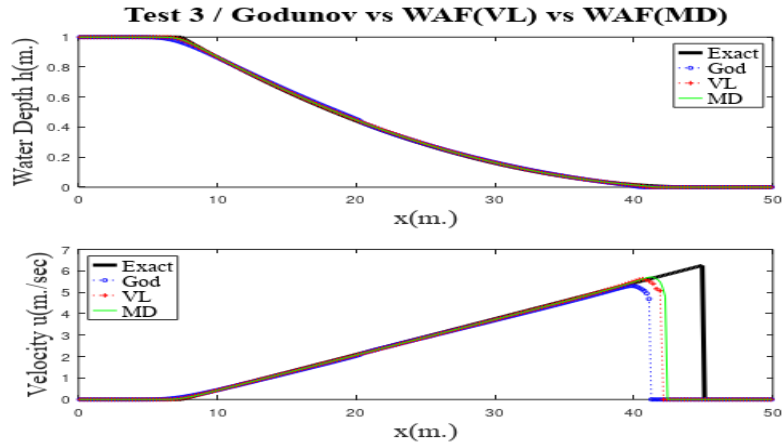
(γ)



(δ)



Σχήμα 8.10: Τα αποτελέσματα της μεθόδου TVD-WAF για το Πρόβλημα 3 με οριοθέτες SUPERBEE (α), Van Leer (β), Van Albada (γ), MINMOD (δ)

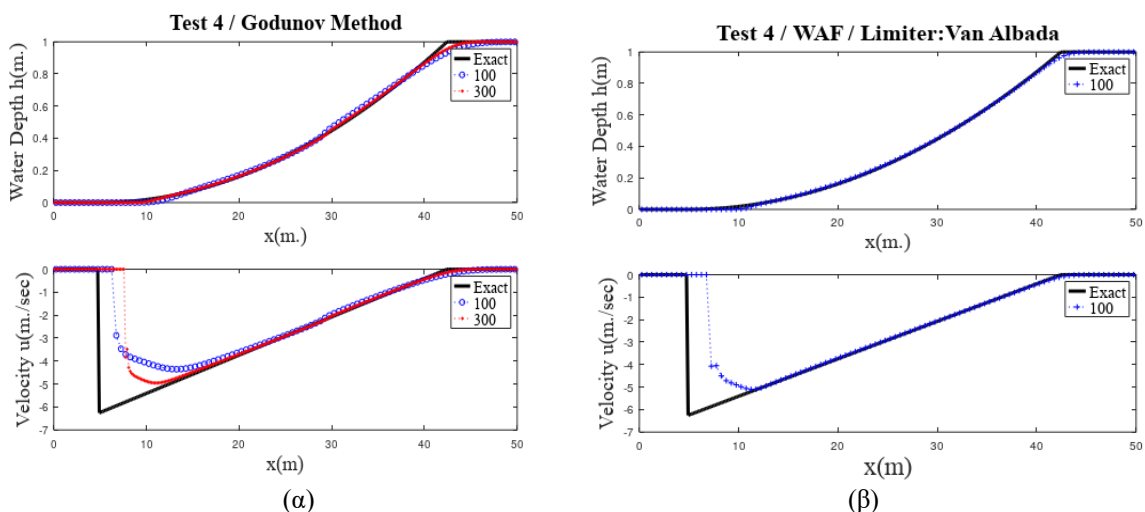


Σχήμα 8.11: Σύγκριση της αναλυτικής λύσης (μαύρη γραμμή) με τις μεθόδους Godunov (μπλε γραμμή), TVD-WAF με οριοθέτη Van Leer (κόκκινη γραμμή) και TVD-WAF με οριοθέτη MINMOD (πράσινη γραμμή)

➤ ΠΡΟΒΛΗΜΑ 4

Μήκος καναλιού	Θέση φράγματος	Τελικός χρόνος	Βάθος h_L	Ταχύτητα u_L	Βάθος h_R	Ταχύτητα u_R
50.0	30.0	4.0	0.0	0.0	1.0	0.0

Η μέθοδος Godunov δίνει αποτελέσματα και για 100 και για 300 κελιά (Σχήμα 8.12(α)), σε αντίθεση με τη μέθοδο TVD-WAF η οποία δίνει αποτελέσματα μόνο με τον οριοθέτη Van Albada και μόνο για πλήθος κελιών 100 (Σχήμα 8.12(β)). Η μέθοδος Godunov βελτιώνει τα αποτελέσματα όσο το πλήθος των κελιών αυξάνεται, αλλά η WAF προσεγγίζει καλύτερα την αναλυτική λύση ακόμα και με μικρότερο αριθμό κελιών.



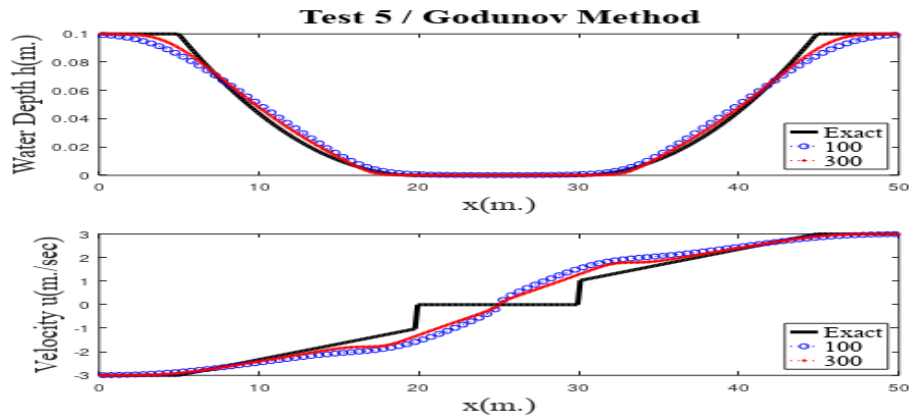
Σχήμα 8.12: Αναλυτική λύση συγκριτικά με τη μέθοδο Godunov για 100 (μπλε γραμμή) και 300 (κόκκινη γραμμή) κελιά (α) και τη μέθοδο TVD-WAF με οριοθέτη Van Albada (β)

➤ ΠΡΟΒΛΗΜΑ 5

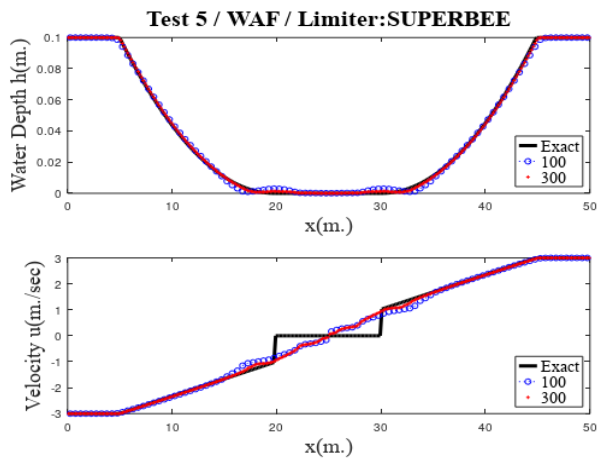
Μήκος καναλιού	Θέση φράγματος	Τελικός χρόνος	Βάθος h_L	Ταχύτητα u_L	Βάθος h_R	Ταχύτητα u_R
50.0	25.0	2.5	0.1	-3.0	0.1	3.0

Οι προσεγγιστικές λύσεις που δίνει η μέθοδος Godunov, αποκλίνουν από τις πραγματικές και το μεγαλύτερο πρόβλημα υπάρχει στον υπολογισμό της ταχύτητας u , όπου στην στεγανή περιοχή η προσεγγιστική ταχύτητα διαφέρει πολύ από την πραγματική (Σχήμα 8.13). Η μη-μονότονη μέθοδος δεν δίνει αποτελέσματα, ενώ η TVD-WAF αντιμετωπίζει παρόμοια προβλήματα κατά

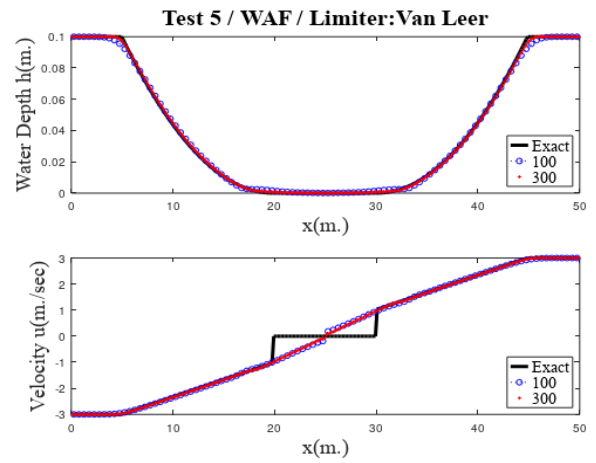
τον υπολογισμό της ταχύτητας (Σχήμα 8.14). Ο οριοθέτης SUPERBEE δίνει τα χειρότερα αποτελέσματα σε σχέση με τους άλλους οριοθέτες και μια σύγκριση των μεθόδων απεικονίζεται στο Σχήμα 8.15.



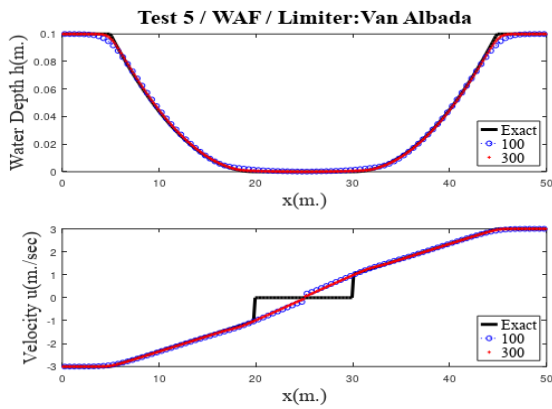
Σχήμα 8.13: Μέθοδος Godunov



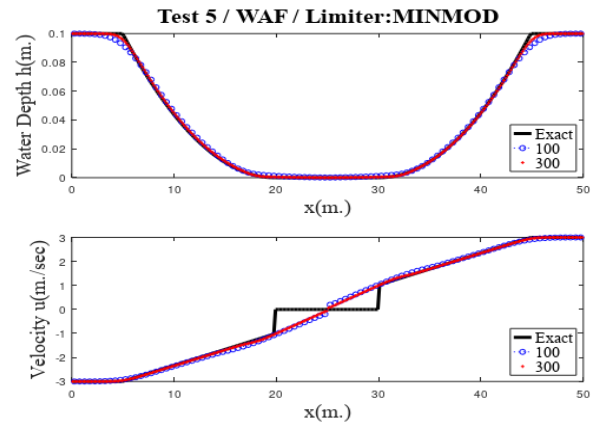
(α)



(β)

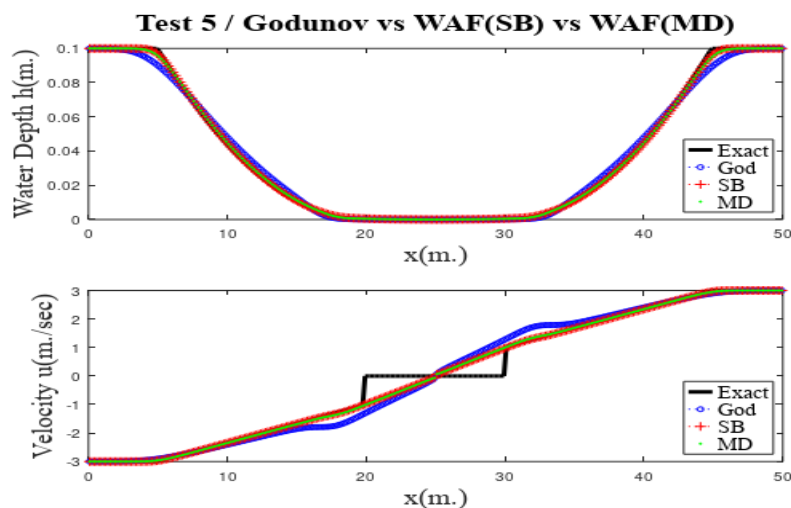


(γ)



(δ)

Σχήμα 8.14: Τα αποτελέσματα της μεθόδου TVD-WAF για το Πρόβλημα 5 με οριοθέτες SUPERBEE (α), Van Leer (β), Van Albada (γ), MINMOD (δ)

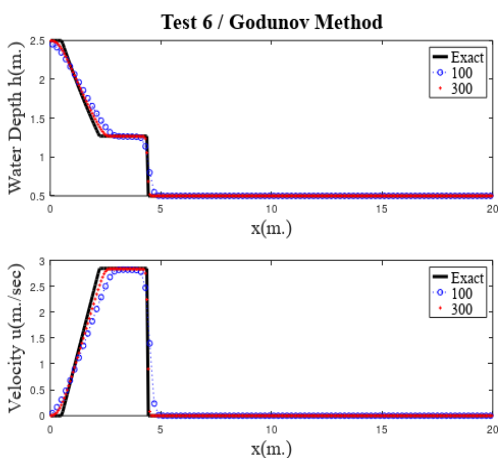


Σχήμα 8.15: Σύγκριση της αναλυτικής λύσης με τη μέθοδο Godunov (μπλε γραμμή), τη μέθοδο TVD-WAF με οριοθέτη SUPERBEE (κόκκινη γραμμή) και τη μέθοδο TVD-WAF με οριοθέτη MINMOD (πράσινη γραμμή)

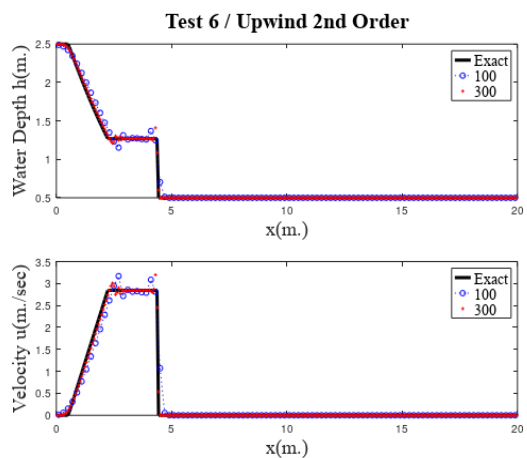
➤ ΠΡΟΒΛΗΜΑ 6

Μήκος καναλιού	Θέση φράγματος	Τελικός χρόνος	Βάθος h_L	Ταχύτητα u_L	Βάθος h_R	Ταχύτητα u_R
20.0	2.5	0.4	2.5	0.0	0.5	0.0

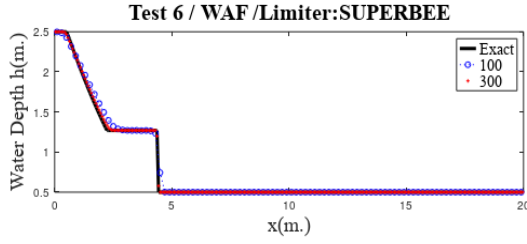
Στα Σχήματα 8.16 και 8.17 απεικονίζονται τα αποτελέσματα των μεθόδων Godunov και της μη-μονότονης μεθόδου. Παρατηρούμε ότι στα σημεία ασυνέχειας τα αποτελέσματα που δίνει η μη-μονότονη μέθοδος παρουσιάζουν μια ταλάντωση στα σημεία ασυνέχειας. Η TVD-WAF δίνει ικανοποιητικά αποτελέσματα, ενώ η επιλογή οριοθέτη δεν είναι σημαντική αφού όλοι δίνουν ίδια αποτελέσματα.



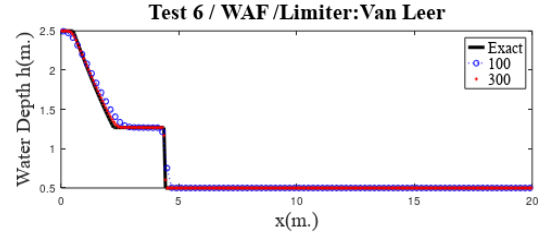
Σχήμα 8.16: Μέθοδος Godunov



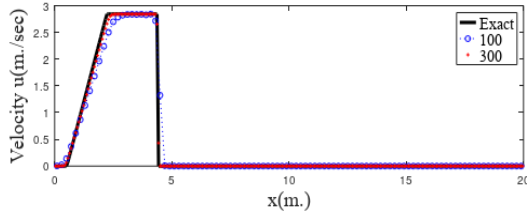
Σχήμα 8.17: Μη-μονότονη upwind μέθοδος



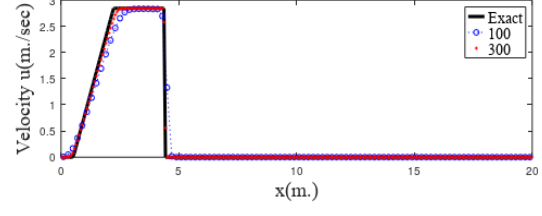
(α)



(β)



(γ)



(δ)

Σχήμα 8.18: Τα αποτελέσματα της μεθόδου TVD-WAF για το Πρόβλημα 6 με οριοθέτες SUPERBEE (α), Van Leer (β), Van Albada (γ), MINMOD (δ)

8.3.1: Η μέθοδος MUSCL-Hancock

Η μέθοδος MUSCL-Hancock είναι επίσης μια δεύτερης τάξης ακρίβειας επέκταση της upwind μεθόδου Godunov. Ο Van Leer αποδίδει τη μέθοδο αυτή στον Hancock [41]. Η μέθοδος υπολογίζει την αριθμητική ροή $F_{i+\frac{1}{2}}$ με τα ακόλουθα τρία βήματα.

Βήμα 1: Ανακατασκευή των δεδομένων

Έστω ότι σε κάθε κελί το διάνυσμα $\{W_i^n\}$ ($W = [h, u, v]^T$) είναι σταθερό, ίσο με τη μέση τιμή κάθε μεταβλητής. Μια κατά τόπους γραμμική ανακατασκευή δίνει:

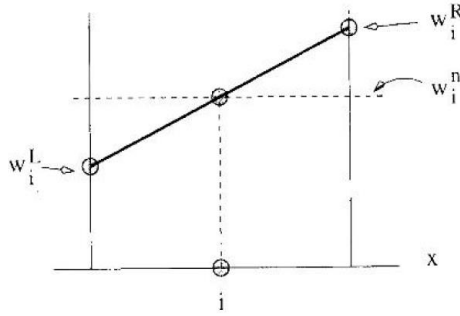
$$W_i(x) = W_i^n + (x - x_i) \frac{\Delta i}{\Delta x}, \quad x \in I_i = \left[x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}} \right] \quad (8.8)$$

όπου $x_i = \left(i - \frac{1}{2}\right) \Delta x$ είναι το κέντρο του κελιού $I_i = \left[x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}} \right]$ και

$\Delta_i = \frac{1}{2}(1 + \omega)W_{i-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}(1 - \omega)W_{i+\frac{1}{2}}$ η κλίση, με $W_{i-\frac{1}{2}} = W_i^n - W_{i-1}^n$, $W_{i+\frac{1}{2}} = W_{i+1}^n - W_i^n$. Η παράμετρος

$\omega \in [-1, 1]$. Από τη γραμμική κατανομή (8.8) του διανύσματος W στο κελί I_i , παίρνουμε τις τιμές των, επονομαζόμενων, συνοριακών επεκτάσεων, που είναι οι τιμές του διανύσματος (8.8)

στο αριστερό και δεξί σύνορο του I_i , δηλαδή $W_i^L = W_i^n - \frac{1}{2}\Delta_i$, $W_i^R = W_i^n + \frac{1}{2}\Delta_i$ (Σχήμα 8.19).



Σχήμα 8.19: Κατά τόπους σταθερή γραμμική κατανομή των διανύσματος W μέσα στο κελί I_i μετά την ανακατασκευή

Βήμα 2: Εξέλιξη των συνοριακών-επεκτάσεων

Σε κάθε κελί I_i , εξελίσσουμε τις συνοριακές επεκτάσεις W_i^L , W_i^R τη χρονική στιγμή $t = \frac{1}{2}\Delta t$ με όρους των αντίστοιχων συντηρητικών μεταβλητών, σύμφωνα με τους ακόλουθους τύπους:

$$\begin{aligned} \bar{U}_i^L &= U_i^L + \frac{1}{2} \frac{\Delta t}{\Delta x} [F(W_i^L) - F(W_i^R)] \\ \bar{U}_i^R &= U_i^R + \frac{1}{2} \frac{\Delta t}{\Delta x} [F(W_i^L) - F(W_i^R)] \end{aligned} \quad (8.9)$$

όπου οι τιμές των συντηρητικών μεταβλητών U_i^L , U_i^R προκύπτουν από τις τιμές των συνοριακών επεκτάσεων W_i^L , W_i^R .

Μια πιο άμεση μέθοδος που αποφεύγει τη μετατροπή των πρωταρχικών μεταβλητών σε συντηρητικές ([30],[31]) χρησιμοποιεί την ημι-γραμμική μορφή των εξισώσεων $W_t + A(W)W_x = 0$. Έτσι οι εξισώσεις (8.9) αντικαθίστανται από τις (8.10):

$$\begin{aligned}\bar{W}_i^L &= W_i^n - \frac{1}{2} \frac{\Delta t}{\Delta x} [I + \frac{\Delta t}{\Delta x} A(W_i^n)] \Delta_i \\ \bar{W}_i^R &= W_i^n + \frac{1}{2} \frac{\Delta t}{\Delta x} [I - \frac{\Delta t}{\Delta x} A(W_i^n)] \Delta_i\end{aligned}\tag{8.10}$$

όπου I ο μοναδιαίος πίνακας.

Βήμα 3: Το πρόβλημα Riemann

Σε κάθε μέτωπο $x_{i+\frac{1}{2}}$ υπάρχει ένα ζεύγος σταθερών καταστάσεων $(\bar{W}_i^R, \bar{W}_{i+1}^L)$. Στη συνέχεια λύνουμε το τυπικό, με κατά τόπους σταθερά δεδομένα, πρόβλημα Riemann με δεδομένα $\bar{W}_i^R, \bar{W}_{i+1}^L$ για να βρούμε τη λύση $W_{i+\frac{1}{2}}(x/t)$. Αν $W_{i+\frac{1}{2}}(0)$ είναι η λύση κατά τον t -άξονα τότε η αριθμητική ροή είναι: $F_{i+\frac{1}{2}} = F(W_{i+\frac{1}{2}}(0))$. Η ροή μπορεί να υπολογιστεί χρησιμοποιώντας ακριβείς επιλυτές Riemann ή προσεγγιστικούς.

8.3.2: Μέθοδος TVD MUSCL-Hancock

Για να αποφύγουμε τις μη-φυσικές ταλαντώσεις οριοθετούμε τις κλίσεις Δ_i . Ορίζουμε $\Delta_{i-\frac{1}{2}} = q_i - q_{i-1}$, $\Delta_{i+\frac{1}{2}} = q_{i+1} - q_i$, όπου q είναι οποιαδήποτε από τις μεταβλητές του ανακατασκευασμένου διανύσματος W . Οι οριοθετημένες κλίσεις είναι:

$$\bar{\Delta}_i = \begin{cases} \max[0, \min(\beta \Delta_{i-\frac{1}{2}}, \Delta_{i+\frac{1}{2}}), \min(\Delta_{i-\frac{1}{2}}, \beta \Delta_{i+\frac{1}{2}})], & \text{όταν } \Delta_{i+\frac{1}{2}} > 0 \\ \min[0, \max(\beta \Delta_{i-\frac{1}{2}}, \Delta_{i+\frac{1}{2}}), \max(\Delta_{i-\frac{1}{2}}, \beta \Delta_{i+\frac{1}{2}})], & \text{όταν } \Delta_{i+\frac{1}{2}} < 0 \end{cases}\tag{8.11}$$

Για $\beta=1$, παίρνουμε τον οριοθέτη MINMOD και για $\beta=2$ τον οριοθέτη SUPERBEE. Οι οριοθέτες Van Leer, Van Albada και MINMAX δίνονται από τους τύπους (8.12), (8.13) και (8.14), αντίστοιχα:

$$\xi_{vl} = \begin{cases} 0, & \text{αν } r \leq 0 \\ \min \left\{ \frac{2r}{1+r}, \xi_R(r) \right\}, & \text{αν } r > 0 \end{cases} \quad (8.12)$$

$$\xi_{va} = \begin{cases} 0, & \text{αν } r \leq 0 \\ \min \left\{ \frac{r(1+r)}{1+r^2}, \xi_R(r) \right\}, & \text{αν } r > 0 \end{cases} \quad (8.13)$$

$$\xi_{md} = \begin{cases} 0, & \text{αν } r \leq 0 \\ r, & \text{αν } 0 < r < 1 \\ \min\{1, \xi_R(r)\}, & \text{αν } r \geq 1 \end{cases} \quad (8.14)$$

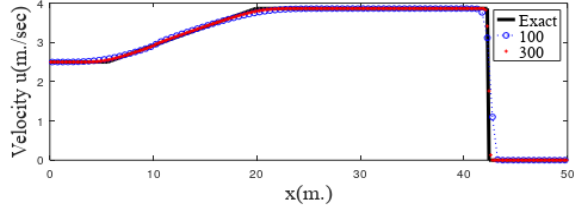
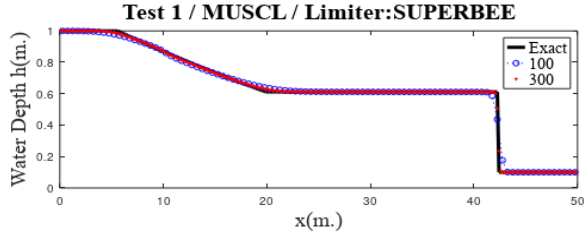
$$\text{όπου } \xi_R(r) = \frac{2\beta_{i+\frac{1}{2}}}{1-\omega+(1+\omega)r}, \text{ με } \beta_{i+\frac{1}{2}} = \frac{2}{1-c} \text{ (} c: \text{αριθμός Courant) και } r = \frac{\Delta_{i-\frac{1}{2}}}{\Delta_{i+\frac{1}{2}}}.$$

8.3.3. Επίλυση προβλημάτων με τη μέθοδο MUSCL- Hancock

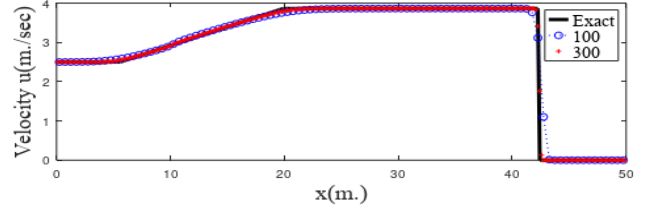
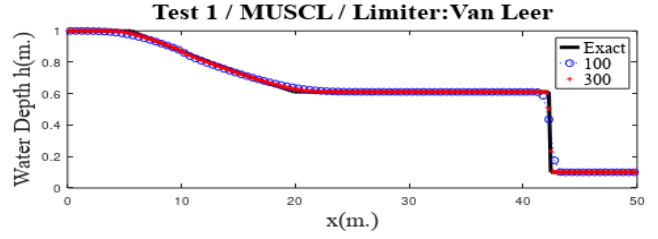
Στη συνέχεια επιλύουμε τα Προβλήματα 1, 2, 5 και 6 με τη μέθοδο MUSCL-Hancock με οριοθέτες SUPERBEE, Van Leer, Van Albada, MINMOD και MINMAX. Για τον υπολογισμό της ροής χρησιμοποιούμε τον HLL προσεγγιστικό επιλυτή Riemann. Για τα Προβλήματα 3 και 4 η μέθοδος δεν δίνει αποτελέσματα.

➤ ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1

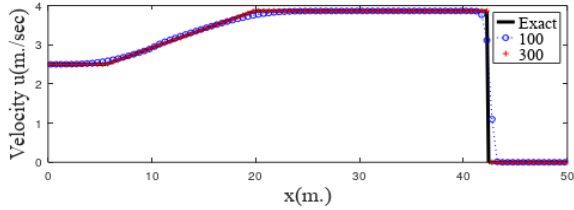
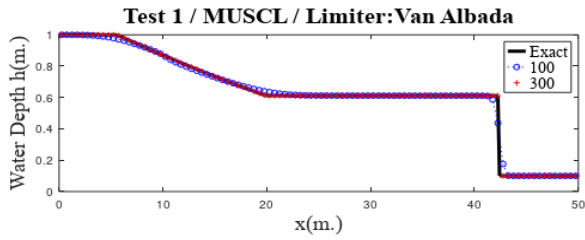
Στο Σχήμα 8.20(α)-(ε) απεικονίζονται τα αποτελέσματα που δίνει η MUSCL για διάφορους οριοθέτες και στο Σχήμα 8.20 (στ) γίνεται σύγκριση των οριοθετών Van Albada και MINMAX, οι οποίοι παρατηρούμε ότι δίνουν παρόμοιες λύσεις.



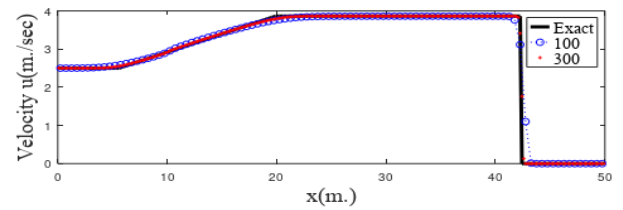
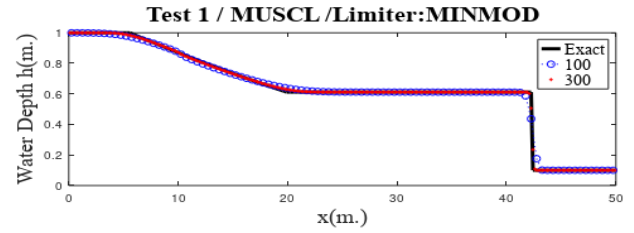
(α)



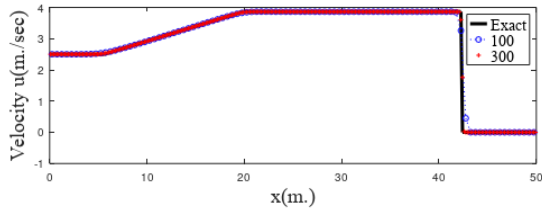
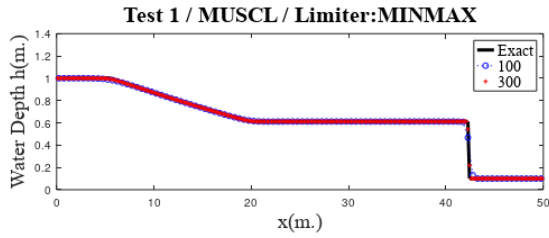
(β)



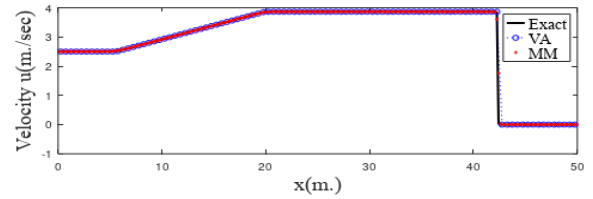
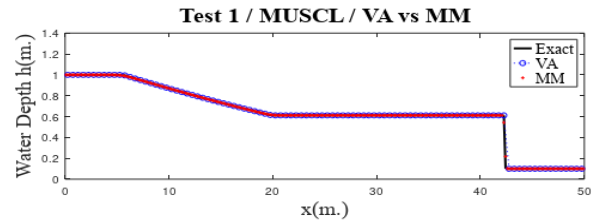
(γ)



(δ)



(ε)

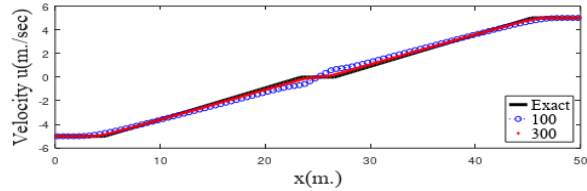
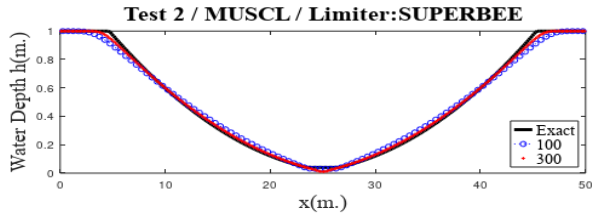


(σ)

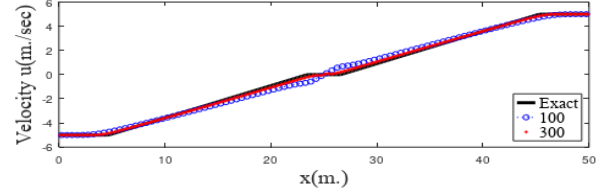
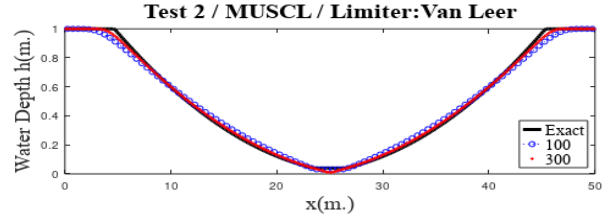
Σχήμα 8.20: Μέθοδος MUSCL - Hancock για το Πρόβλημα 1, με οριοθετές (α) SUPERBEE, (β) Van Leer, (γ) Van Albada, (δ) MINMOD, (ε) MINMAX, (στ) σύγκριση των οριοθετών Van Albada και MINMOD για 100 (μπλε γραμμή) και 300 (κόκκινη γραμμή) κελιά

➤ ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2

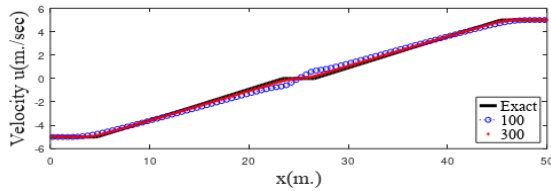
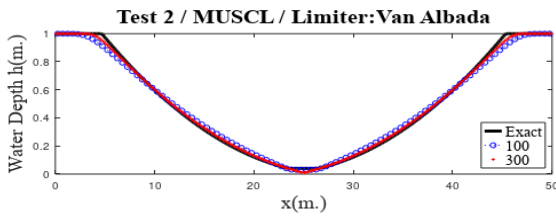
Στο Σχήμα 8.21(α)-(ε) απεικονίζονται τα αποτελέσματα που δίνει η MUSCL για διάφορους οριοθετές και στο Σχήμα 8.21(στ) γίνεται σύγκριση των οριοθετών Van Leer και MINMAX. Παρατηρούμε ότι στα σημεία ασυνέχειας ο Van Leer προσεγγίζει καλύτερα την αναλυτική λύση.



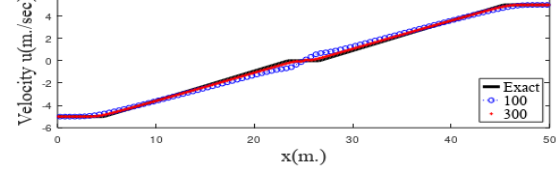
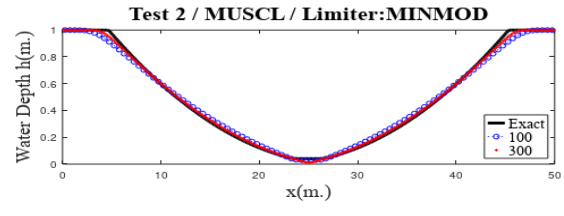
(α)



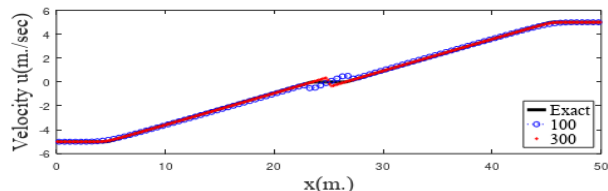
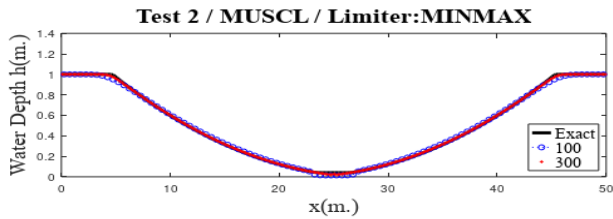
(β)



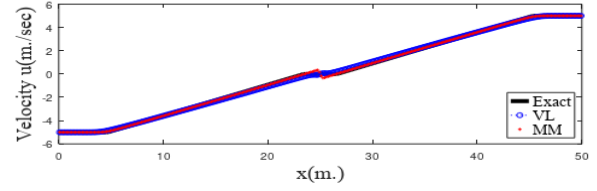
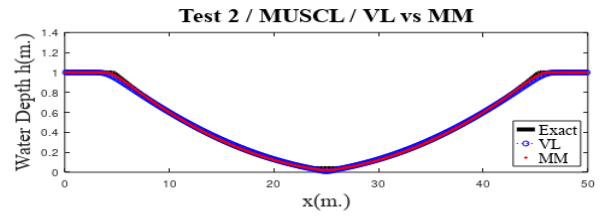
(γ)



(δ)



(ε)

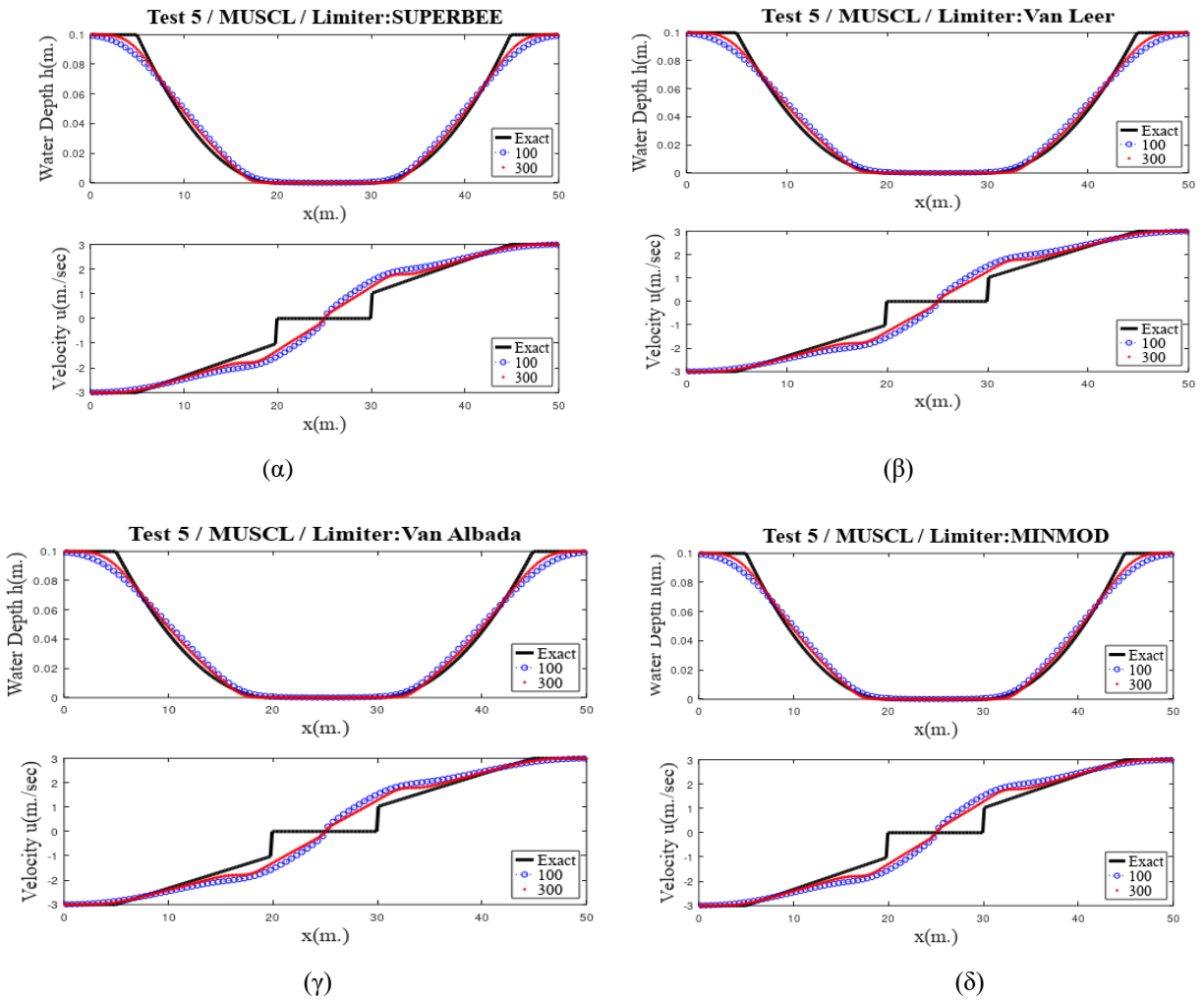


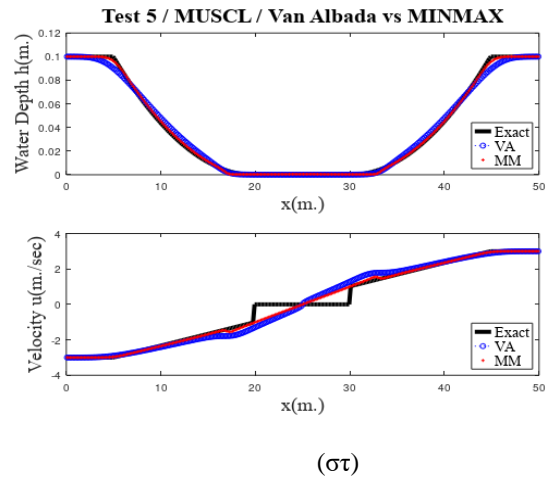
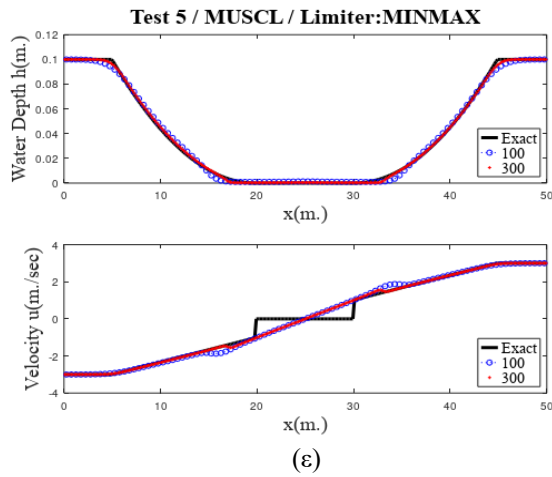
(στ)

Σχήμα 8.22: Μέθοδος MUSCL - Hancock για το Πρόβλημα 2, με οριοθέτες (α) SUPERBEE, (β) Van Leer, (γ) Van Albada, (δ) MINMOD, (ε) MINMAX, (στ) σύγκριση οριοθετών Van Leer (μπλε γραμμή) και MINMAX (κόκκινη γραμμή) για 300 κελιά

➤ ΠΡΟΒΛΗΜΑ 5

Στο Σχήμα 8.23(α)-(ε) απεικονίζονται τα αποτελέσματα της MUSCL για τους διάφορους οριοθέτες, για 100 και 300 κελιά. Η μέθοδος δεν δίνει ικανοποιητικά αποτελέσματα για την ταχύτητα u , στην περιοχή του στεγανού. Όσον αφορά τους οριοθέτες καλύτερη προσέγγιση της u , δίνεται από τον οριοθέτη MINMAX και στο Σχήμα 8.23(στ) γίνεται σύγκριση των οριοθετών Van Albada και MINMAX.

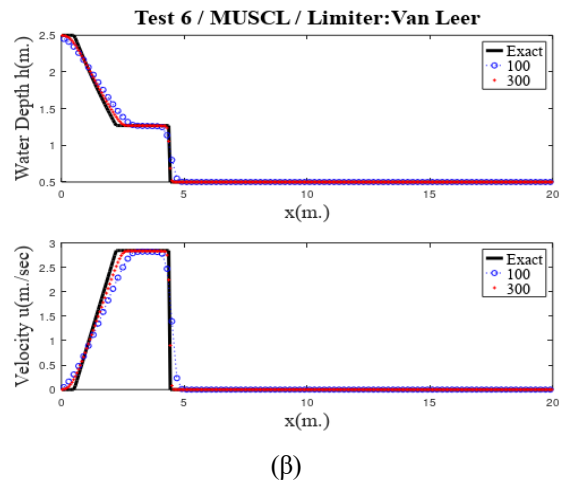
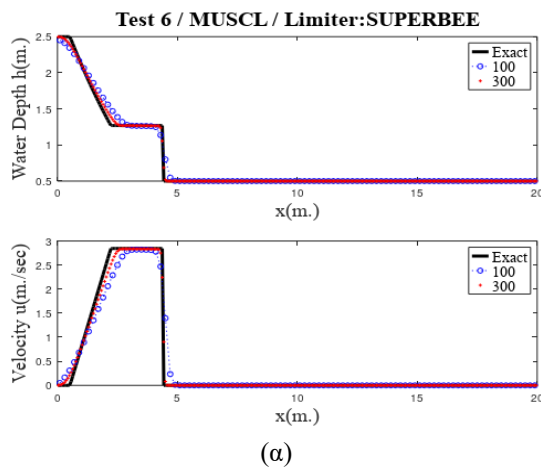


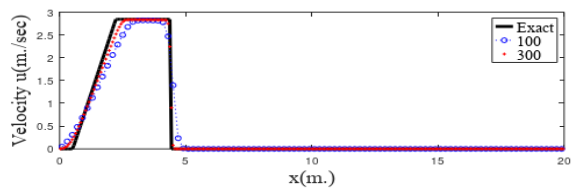
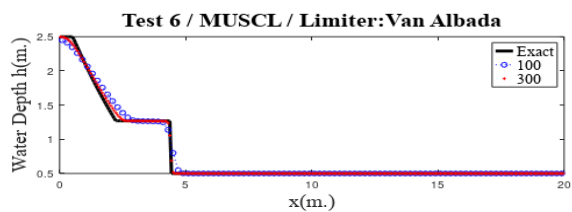


Σχήμα 8.23: Μέθοδος MUSCL - Hancock για το Πρόβλημα 5, με οριοθέτες (α) SUPERBEE, (β) Van Leer, (γ) Van Albada, (δ) MINMOD, (ε) MINMAX, (στ) σύγκριση των οριοθετών Van Albada (μπλε γραμμή) και MINMOD (κόκκινη γραμμή)

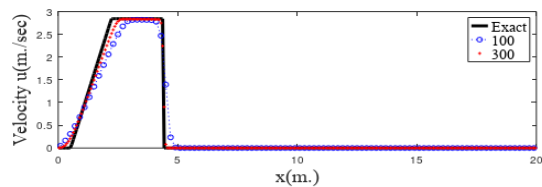
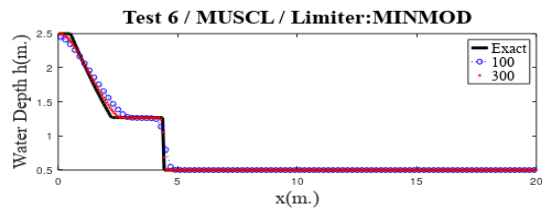
➤ ΠΡΟΒΛΗΜΑ 6

Στο Σχήμα 8.24(α)-(ε) απεικονίζονται τα αποτελέσματα της MUSCL για τους διάφορους οριοθέτες, για 100 και 300 κελιά. Η μέθοδος προσεγγίζει ικανοποιητικά την αναλυτική λύση ενώ η επιλογή οριοθέτη δεν είναι σημαντική αφού οι οριοθέτες που επιλέξαμε δίνουν παρόμοια αποτελέσματα. Στο Σχήμα 8.24(στ) γίνεται σύγκριση των οριοθετών Van Leer και MINMOD.

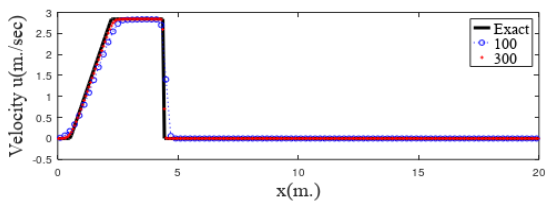
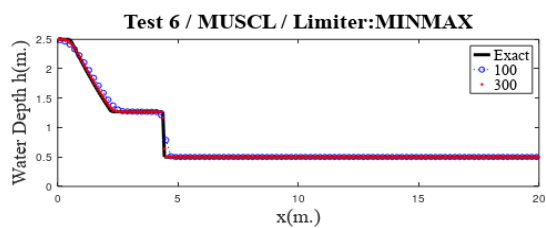




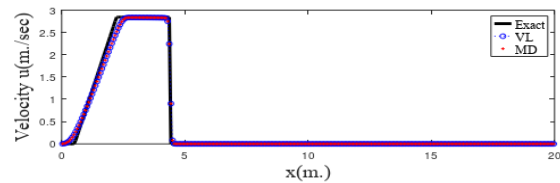
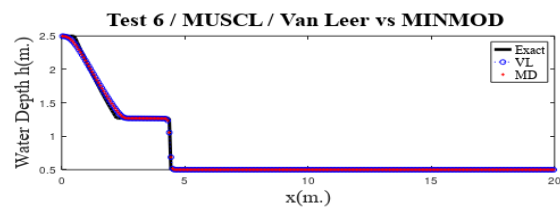
(γ)



(δ)



(ε)



(σ)

Σχήμα 8.24: Μέθοδος MUSCL - Hancock για το Πρόβλημα 5, με οριοθέτες (α) SUPERBEE, (β) Van Leer, (γ) Van Albada, (δ) MINMOD, (ε) MINMAX, (στ) σύγκριση των οριοθετών Van Leer (μπλε γραμμή) και MINMOD (κόκκινη γραμμή) για 300 κελιά

8.4: Μέθοδος TVD-SLIC

Οι μέθοδοι τύπου Godunov έχουν αρκετή πληροφορία που τους παρέχει η επίλυση του τοπικού προβλήματος Riemann και τη χρησιμοποιούν για την κατασκευή των οριοθετών. Όμως αυτή η τοπική πληροφορία μπορεί να είναι κοστοβόρα και πολύπλοκη. Οι κεντρικές μέθοδοι δεν απαιτούν άμεση πληροφορία σχετικά με τη μετάδοση του κύματος, γι' αυτό είναι εύκολες στην κατανόηση και την υλοποίηση τους, κυρίως για πολύπλοκα συστήματα. Βέβαια οι εξισώσεις ρηχών υδάτων είναι αρκετά απλές, οπότε η χρήση κεντρικών μεθόδων δεν είναι αναγκαία.

Η TVD-SLIC [40] είναι μια δεύτερης τάξης ακρίβειας μέθοδος. Είναι επέκταση της πρώτης τάξεως ακρίβειας κεντρικής μεθόδου FORCE και προκύπτει, αντικαθιστώντας τη ροή Godunov στη μέθοδο MUSCL-Hancock με τη ροή FORCE. Η ροή FORCE για ένα σύστημα νόμων διατήρησης υπερβολικού τύπου είναι ο μέσος όρος των Lax – Friedrichs ροών, $F_{i+\frac{1}{2}}^{LF}$, και των

δύο-βημάτων Lax-Wendroff ροών, δηλαδή,

$$F_{i+\frac{1}{2}}^{force} = \frac{1}{2} \left[F_{i+\frac{1}{2}}^{LF}(U_L, U_R) + F_{i+\frac{1}{2}}^{LW2}(U_L, U_R) \right] \quad (8.13)$$

όπου $F_{i+\frac{1}{2}}^{LF} = \frac{1}{2}(F_i^n + F_{i+1}^n) + \frac{1}{2} \frac{\Delta x}{\Delta t} (U_i^n - U_{i+1}^n)$ και $F_{i+\frac{1}{2}}^{LW2} = F(U_{i+\frac{1}{2}}^{LW2})$ με

$$U_{i+\frac{1}{2}}^{LW2} = \frac{1}{2}(U_i^n + U_{i+1}^n) + \frac{1}{2} \frac{\Delta x}{\Delta t} (F_i^n - F_{i+1}^n).$$

Το σχήμα SLIC αποτελείται από τρία στάδια. Το πρώτο και δεύτερο στάδιο είναι ίδια με το Βήμα 1 και Βήμα 2 της μεθόδου MUSCL-Hancock. Αρχικά ανακατασκευάζει τα δεδομένα U_i^L, U_i^R σε κάθε κελί $I_i = [x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}]$ και στη συνέχεια εξελίσσει τις τιμές U_i^L, U_i^R τη χρονική

στιγμή $\frac{1}{2} \Delta t$ σύμφωνα με τον τύπο (8.8). Στο τρίτο στάδιο υπολογίζει τη FORCE ροή σύμφωνα

με τον τύπο $F_{i+\frac{1}{2}}^{force} = F_{i+\frac{1}{2}}^{force}(\bar{U}_i^R, \bar{U}_{i+1}^L)$. Η TVD εκδοχή αυτής της μεθόδου για τις εξισώσεις ρηχών

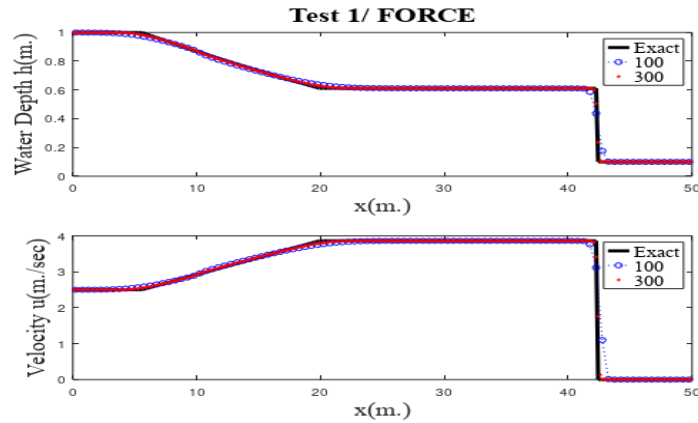
υδάτων, αντικαθιστά τις κλίσεις Δ_i της σχέσης (8.6) με οποιαδήποτε από τις οριοθετημένες κλίσεις $\bar{\Delta}_i$, που δίνονται από τους τύπους (8.10) - (8.12).

Επιλύουμε τα Προβλήματα 1, 2, 5 και 6 με τις μεθόδους FORCE και TVD-SLIC με οριοθέτες SUPERBEE, Van Leer, Van Albada, MINMOD και MINMAX. Το Πρόβλημα 2 και το Πρόβλημα 5 το επιλύουμε και με μια δεύτερης τάξης σύγκλισης, μη-μονότονη, μέθοδο, η οποία όμως δεν δίνει αποτελέσματα για τα υπόλοιπα προβλήματα. Για τα προβλήματα 3 και 4 οι FORCE και SLIC δεν δίνουν αποτελέσματα. Στα γραφήματα υπάρχουν η αναλυτική και η αριθμητική λύση για 100 και 300 κελιά. Σε κάποια προβλήματα γίνεται σύγκριση και των

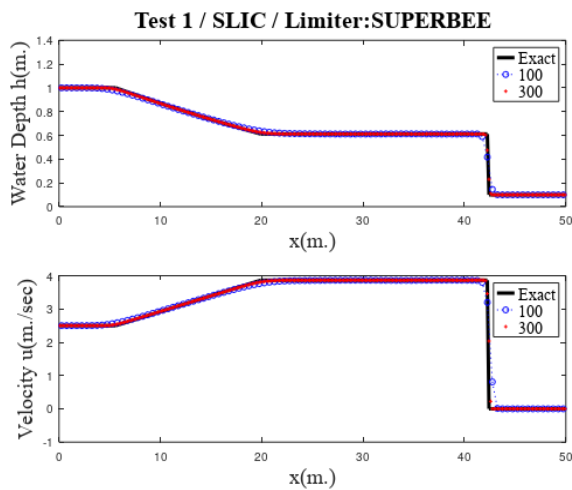
αποτελεσμάτων που δίνει η SLIC για διαφορετικούς οριοθέτες, όπως και σύγκριση της FORCE με τις MUSCL και SLIC.

➤ ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1

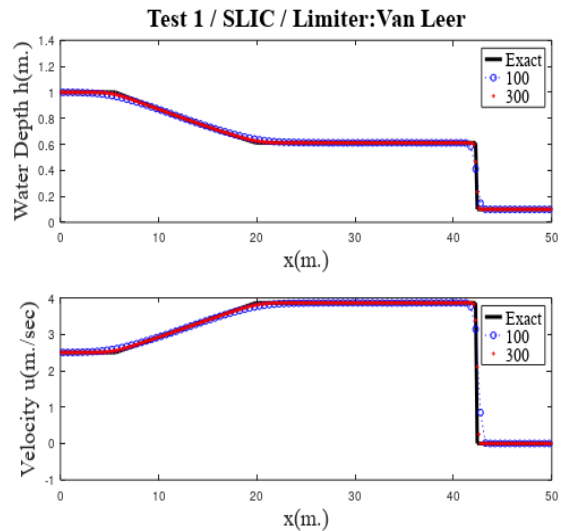
Στο Σχήμα 8.25 απεικονίζονται τα αποτελέσματα της μεθόδου FORCE. Στο Σχήμα 8.26(α)-(ε) τα αποτελέσματα της SLIC για τους διάφορους οριοθέτες και στο Σχήμα 8.26(στ) γίνεται σύγκριση των οριοθετών SUPERBEE και MINMAX, που όμως βλέπουμε δίνουν τις ίδιες προσεγγιστικές τιμές. Τέλος, στο Σχήμα 30 γίνεται σύγκριση της FORCE με την SLIC ενώ στο Σχήμα 8.27 (β) της FORCE με την MUSCL.



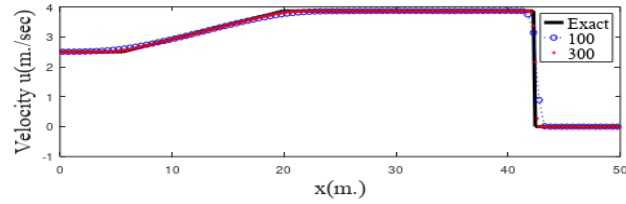
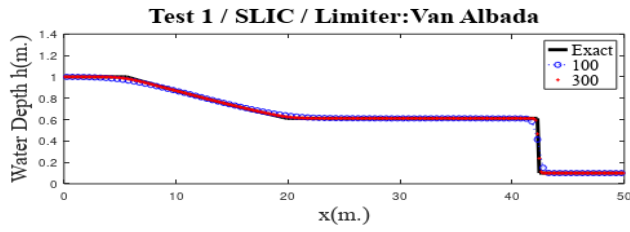
Σχήμα 8.25: Σύγκριση της αναλυτικής λύσης με την FORCE για το Πρόβλημα 1, για 100 (μπλε γραμμή) και 300 (κόκκινη γραμμή) κελιά



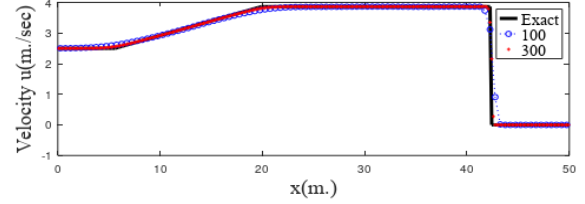
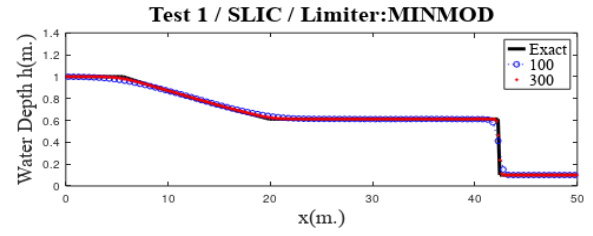
(α)



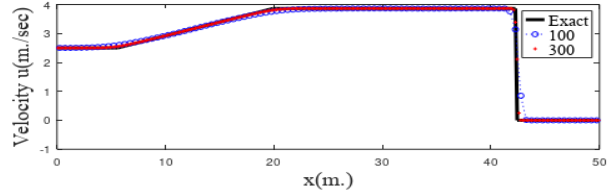
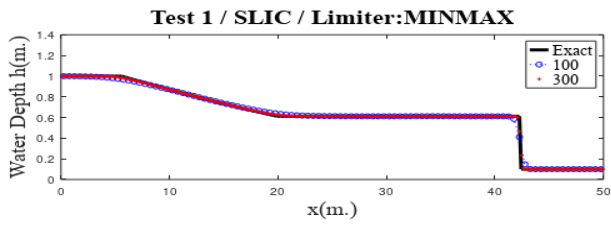
(β)



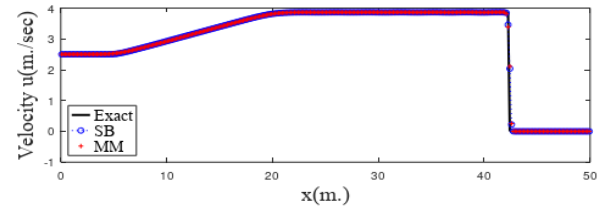
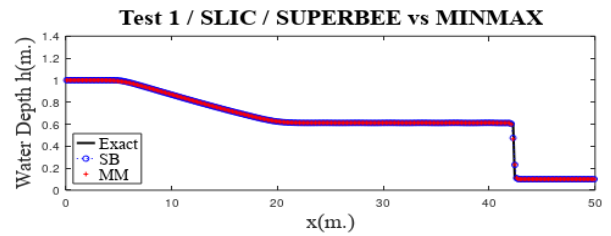
(γ)



(δ)

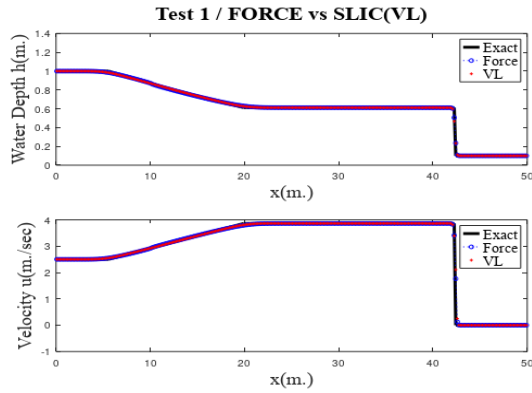


(ε)

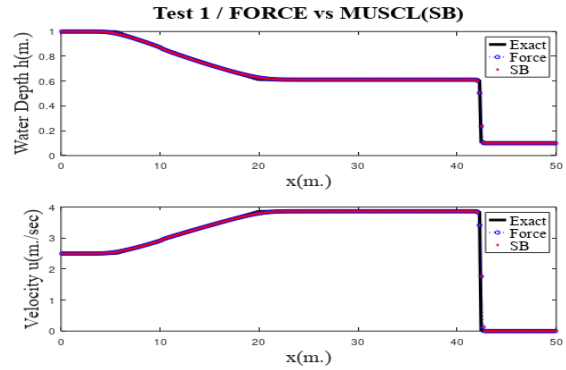


(στ)

Σχήμα 8.26: Μέθοδος TVD-SLIC για το Πρόβλημα 1, με οριοθετές (α) SUPERBEE, (β) Van Leer, (γ) Van Albada, (δ) MINMOD, (ε) MINMAX, (στ) σύγκριση των οριοθετών Van Leer (μπλε γραμμή) και MINMOD (κόκκινη γραμμή) για 300 κελιά



(α)

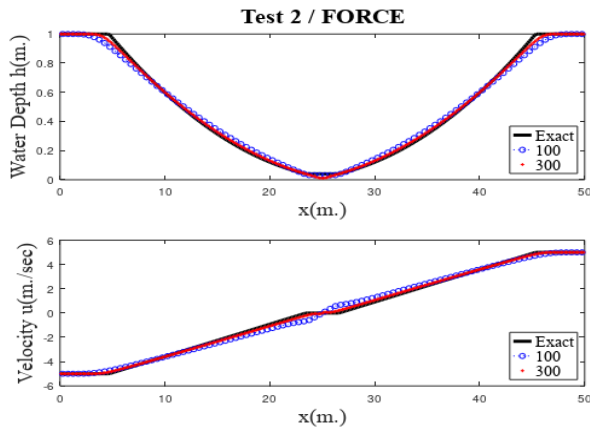


(β)

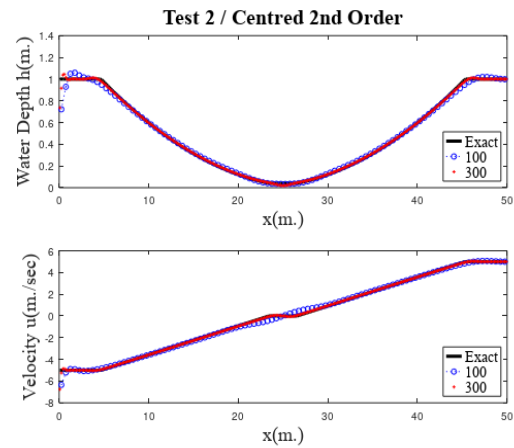
Σχήμα 8.27: (α) Σύγκριση της FORCE με την SLIC με οριοθέτη Van Leer. (β) Σύγκριση της FORCE με την MUSCL με οριοθέτη SUPERBEE.

➤ ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2

Στο Σχήμα 8.28(α) και 8.28(β) απεικονίζονται τα αποτελέσματα της μεθόδου FORCE και της δεύτερης τάξης μεθόδου, αντίστοιχα. Στο Σχήμα 8.29(α)-(ε) τα αποτελέσματα της SLIC για τους διάφορους οριοθέτες. Στο Σχήμα 8.30 γίνεται σύγκριση των μεθόδων FORCE και SLIC.

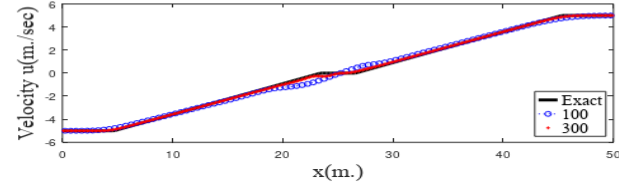
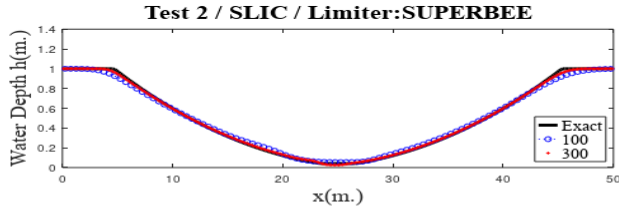


(α)

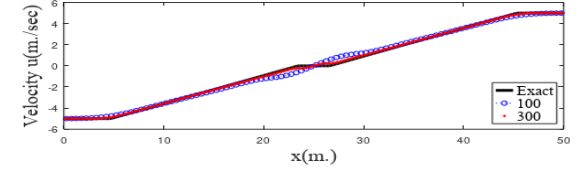
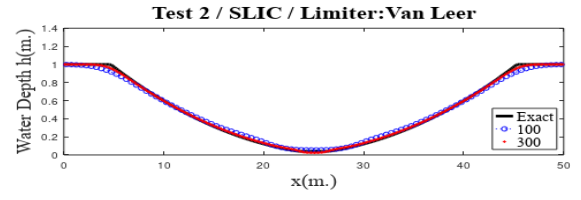


(β)

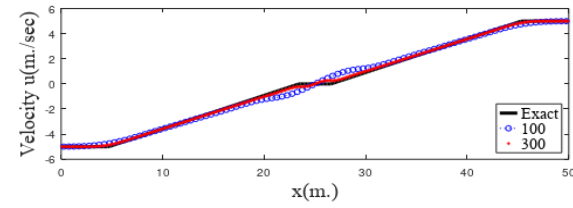
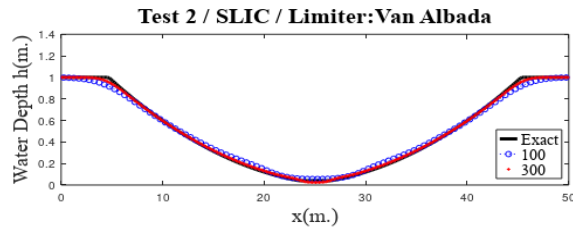
Σχήμα 8.28: (α) Σύγκριση της αναλυτικής λύσης με την FORCE για το Πρόβλημα 2, για 100 (μπλε γραμμή) και 300 (κόκκινη γραμμή) κελιά. (β) Σύγκριση της αναλυτικής λύσης με μια μη-μονότονη μέθοδο για το Πρόβλημα 1, για 100 (μπλε γραμμή) και 300 (κόκκινη γραμμή) κελιά.



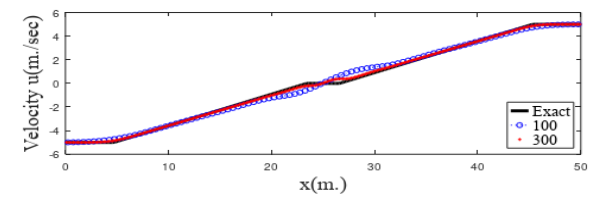
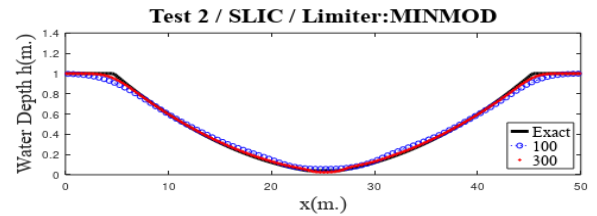
(α)



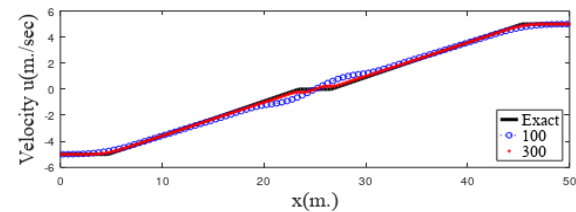
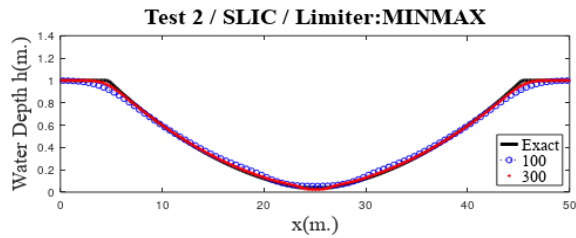
(β)



(γ)

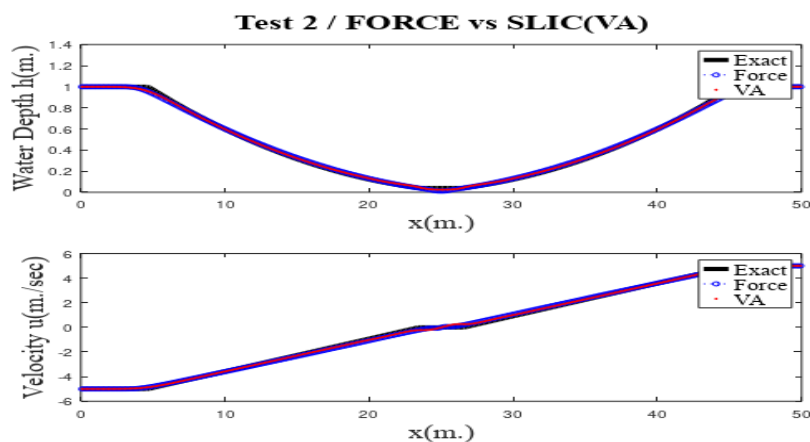


(δ)



(ε)

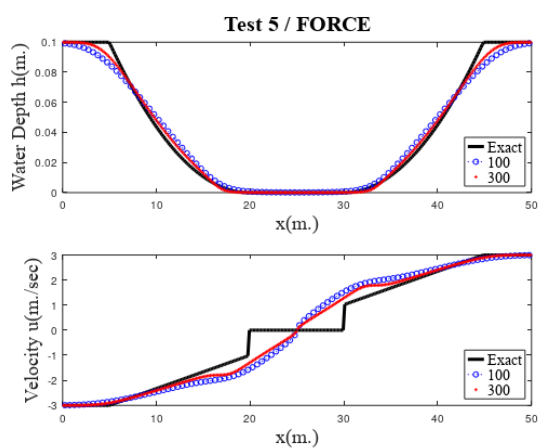
Σχήμα 8.29: Μέθοδος TVD-SLIC για το Πρόβλημα 5, με οριοθέτες (α) SUPERBEE, (β) Van Leer, (γ) Van Albada, (δ) MINMOD, (ε) MINMAX για 100 (μπλε γραμμή) και 300 (κόκκινη γραμμή) κελιά



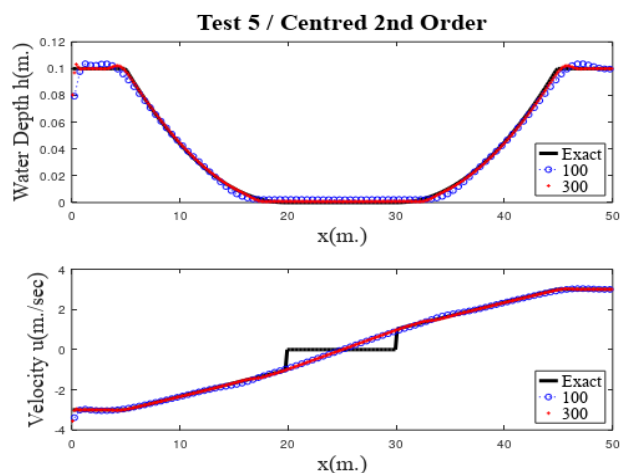
Σχήμα 8.30: Σύγκριση της FORCE με την SLIC με οριοθέτη Van Albada.

➤ ΠΡΟΒΛΗΜΑ 5

Στο Σχήμα 8.31(α) και 8.32(β) απεικονίζονται τα αποτελέσματα της FORCE και της μη-μονότονης δεύτερης τάξης ακρίβειας μεθόδου, αντίστοιχα, για 100 και 300 κελιά. Στο Σχήμα 8.32(α)-(ε) φαίνονται τα αποτελέσματα της μεθόδου SLIC για διάφορους οριοθέτες και στο Σχήμα 8.33(α) γίνεται σύγκριση των μεθόδων SLIC και FORCE, ενώ στο Σχήμα 8.33(β) σύγκριση των MUSCL και FORCE. Όπως και η MUSCL έτσι και οι κεντρικές μέθοδοι δεν δίνουν ικανοποιητικά αποτελέσματα για την ταχύτητα u , στην περιοχή του στεγανού.

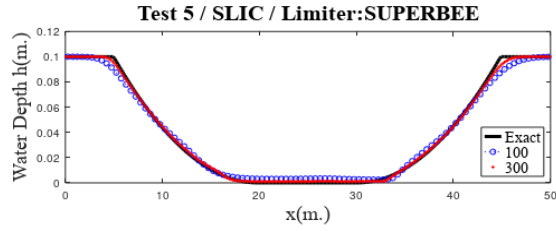


(α)

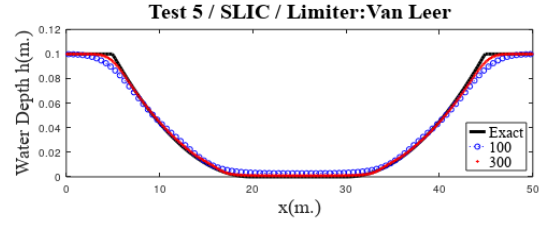


(β)

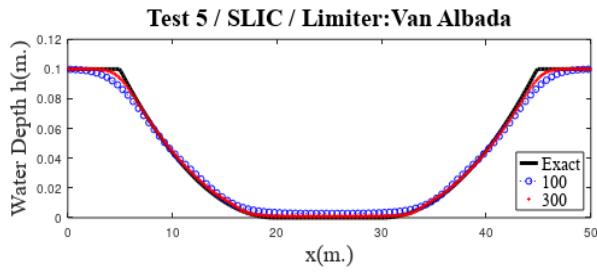
Σχήμα 8.31: (α) Σύγκριση της αναλυτικής λύσης με την FORCE για το Πρόβλημα 1, για 100 (μπλε γραμμή) και 300 (κόκκινη γραμμή) κελιά. (β) Σύγκριση της αναλυτικής λύσης με μια μη-μονότονη μέθοδο για το Πρόβλημα 1, για 100 (μπλε γραμμή) και 300 (κόκκινη γραμμή) κελιά.



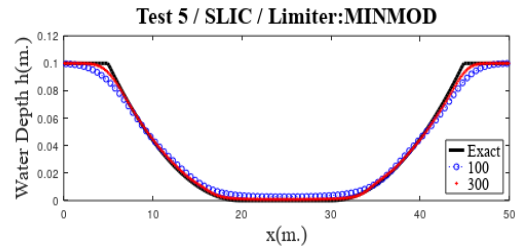
(α)



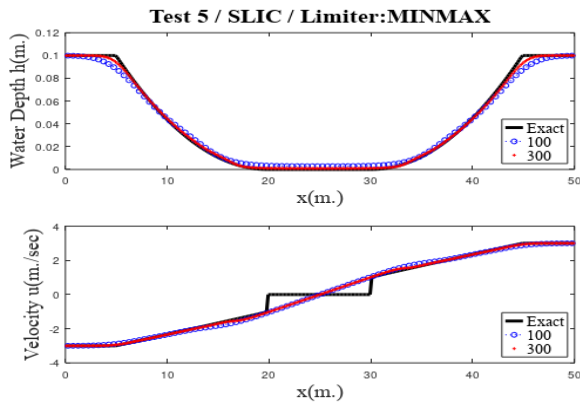
(β)



(γ)

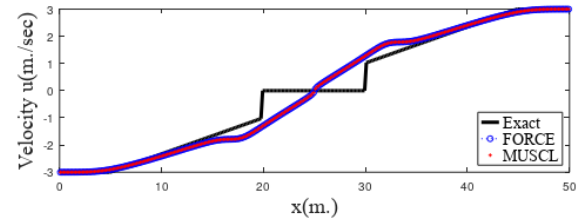
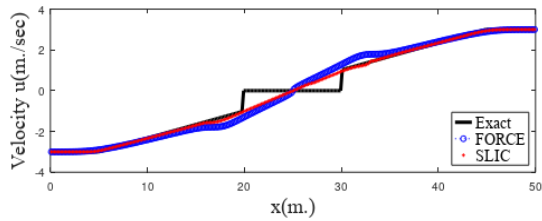
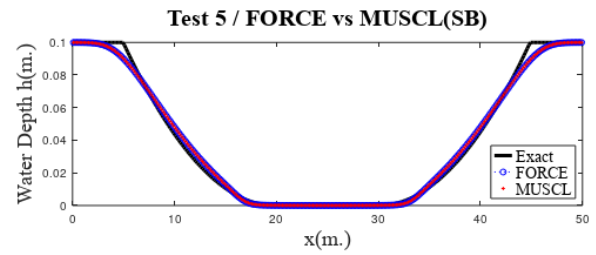
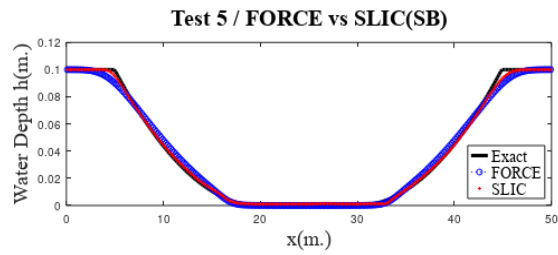


(δ)



(ε)

Σχήμα 8.32: Μέθοδος TVD-SLIC για το Πρόβλημα 5, με οριοθέτες (α) SUPERBEE, (β) Van Leer, (γ) Van Albada, (δ) MINMOD, (ε) MINMAX για 100 (μπλε γραμμή) και 300 (κόκκινη γραμμή) κελιά

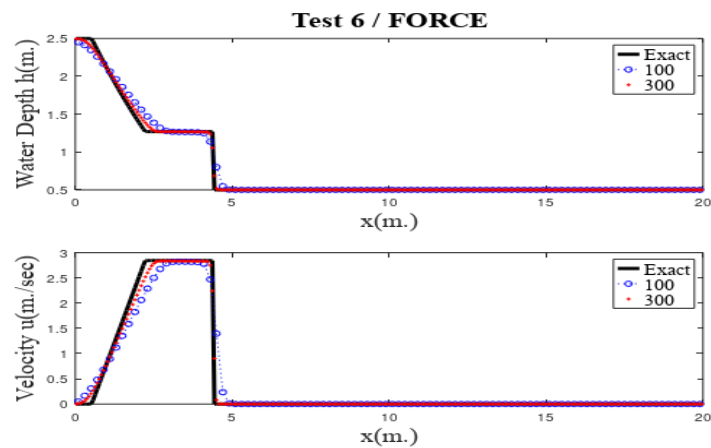


(α)

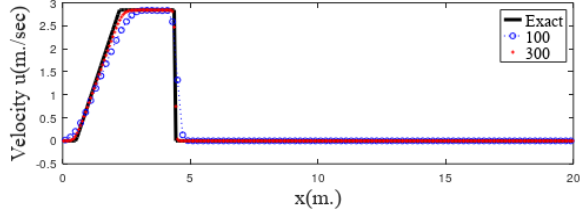
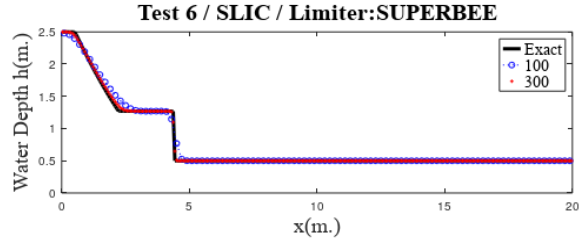
(β)

Σχήμα 8.33: (α) Σύγκριση μεταξύ αναλυτικής λύσης, Force και SLIC με οριοθέτη SUPERBEE για πλήθος κελιών 300. (β) Σύγκριση μεταξύ αναλυτικής λύσης, Force και MUSCL με οριοθέτη SUPERBEE για πλήθος κελιών 300

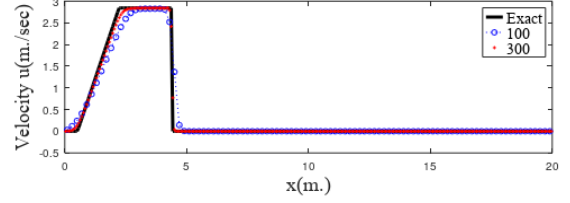
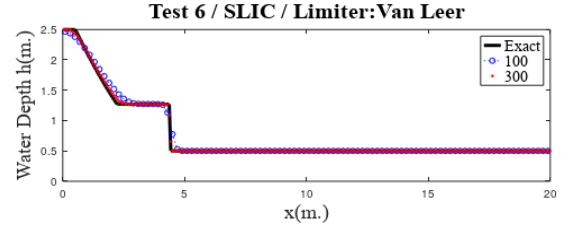
➤ ΠΡΟΒΛΗΜΑ 6



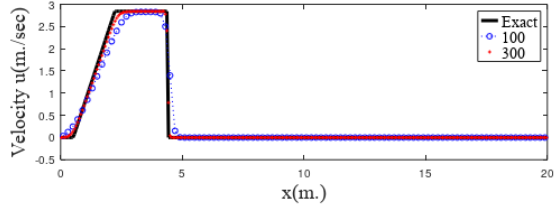
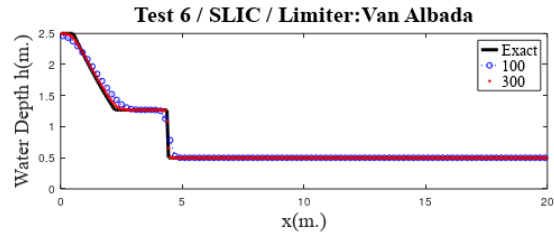
Σχήμα 8.34: Σύγκριση της αναλυτικής λύσης (μαύρη γραμμή) και της μεθόδου FORCE για το Πρόβλημα 6, για 100 (μπλε γραμμή) και 300 (κόκκινη γραμμή) κελιά



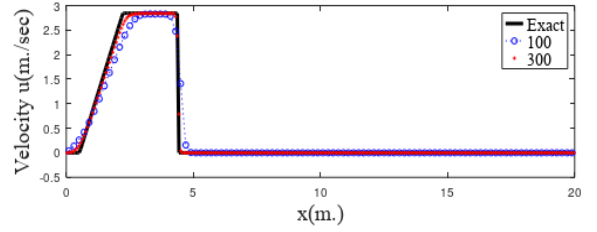
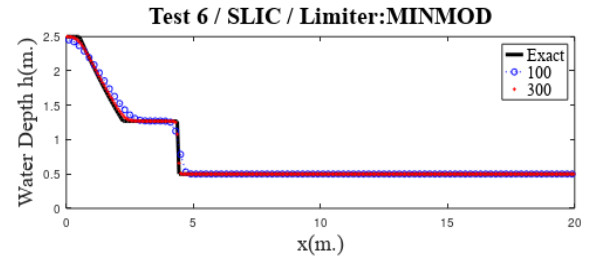
(α)



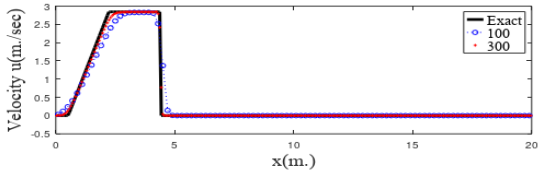
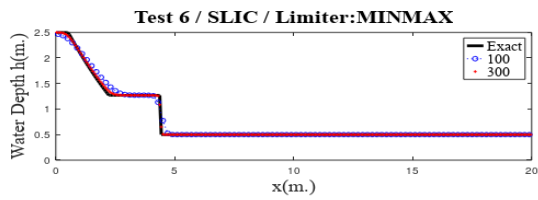
(β)



(γ)

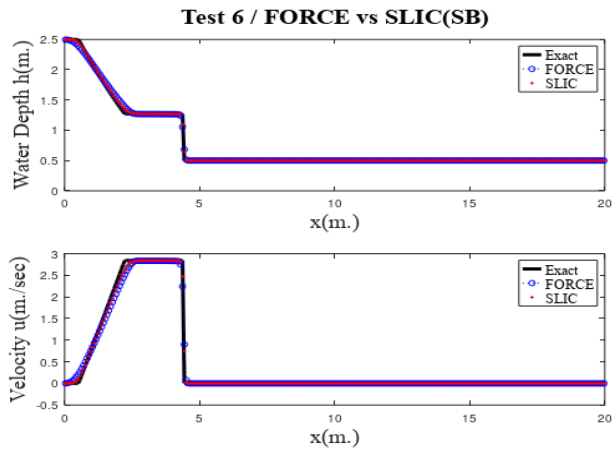


(δ)

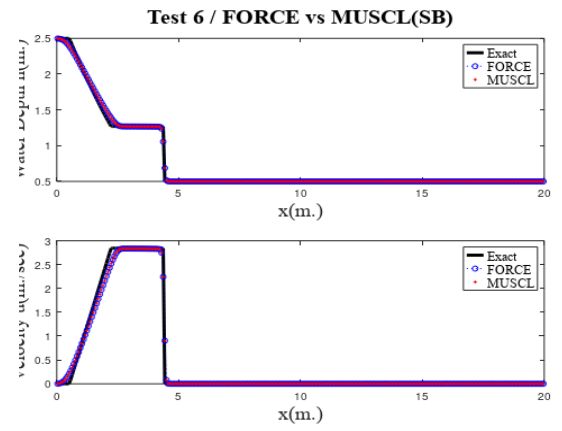


(ε)

Σχήμα 8.35: Μέθοδος TVD-SLIC για το Πρόβλημα 6, με οριοθέτες (α) SUPERBEE, (β) Van Leer, (γ) Van Albada, (δ) MINMOD, (ε) MINMAX για 100 (μπλε γραμμή) και 300 (κόκκινη γραμμή) κελιά



(α)



(β)

Σχήμα 8.36: (α) Σύγκριση μεταξύ αναλυτικής λύσης, Force και SLIC με οριοθέτη SUPERBEE για πλήθος κελιών 300. (β) Σύγκριση μεταξύ αναλυτικής λύσης, Force και MUSCL με οριοθέτη SUPERBEE για πλήθος κελιών 300

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΣΕ ΔΥΟ ΔΙΑΣΤΑΣΕΙΣ

Στο κεφάλαιο αυτό αρχικά θα μελετήσουμε τις εξισώσεις ρηχών υδάτων σε δύο διαστάσεις ([30],[31]). Υπάρχουν μέθοδοι, επεκτάσεις των μιας διάστασης μεθόδων, που λύνουν ικανοποιητικά το δισδιάστατο σύστημα. Αυτές οι μέθοδοι εφαρμόζουν τα (επαυξημένα) μιας-διάστασης σχήματα στην x κατεύθυνση σε κάθε κελί, λαμβάνοντας όμως υπόψη και την ταχύτητα στην y κατεύθυνση, v .

Ασχολούμαστε αρχικά με τη μοντελοποίηση της αιφνίδιας πτώσης ενός κυκλικού φράγματος, μια απλοποιημένη εκδοχή πραγματικών γεγονότων, η οποία όμως περιέχει κάποια βασικά στοιχεία της αριθμητική προσομοίωσης τους. Πρώτα επιλύουμε ένα μιας-διάστασης μη-ομογενές σύστημα που προκύπτει από τη συμμετρία του κυλίνδρου και μετά το πλήρες δύο διαστάσεων πρόβλημα. Με αριθμητικές μεθόδους που ασχολούνται με την προσομοίωση της πτώσης φράγματος ασχολήθηκαν, μεταξύ άλλων, οι Roberson [27], Garcia-Navarro [6], Fracarrolo και Toro [4],[5], αφού η ακρίβεια και η αξιοπιστία τους είναι υψίστης σημασίας, καθώς πολλές ανθρώπινες ζωές μπορεί να κινδυνεύουν εξαιτίας της πτώσης τους φράγματος. Τέλος, θα ασχοληθούμε συνοπτικά με τα μετωπικά κύματα τα οποία δημιουργούνται όταν το νερό πέφτει από έναν κάθετο τοίχο ή όταν ένα κύμα ανακλάται σε έναν κάθετο τοίχο.

9.1: Μέθοδοι διαχωρισμού διαστάσεων

Θεωρούμε το δισδιάστατο, εξαρτώμενο από το χρόνο, πρόβλημα αρχικών τιμών

$$\begin{cases} U_t + F(U)_x + G(U)_y = 0 \\ U(x, y, t^n) = U^n \end{cases} \quad (9.1)$$

Τα αρχικά δεδομένα τη χρονική στιγμή t^n δίνονται από το σύνολο U^n των μέσων όρων των τιμών $U_{i,j}^n$ σε κάθε κελί.

Η μέθοδος διαχωρισμού των διαστάσεων αντικαθιστά την (9.1) με δύο μονοδιάστατα προβλήματα αρχικών τιμών, δηλαδή:

$$\begin{aligned} \text{M.Δ.Ε.: } U_t + F(U)_x = 0 & \Bigg\} \xRightarrow{\Delta t} U^{n+\frac{1}{2}} & (9.2) \quad \text{και} & \text{M.Δ.Ε.: } U_t + G(U)_y = 0 & \Bigg\} \xRightarrow{\Delta t} U^{n+1} & (9.3) \\ \text{ICs: } U^n & & & \text{ICs: } U^{n+\frac{1}{2}} & & \end{aligned}$$

Στην (9.2) επιλύουμε το μονοδιάστατο πρόβλημα στην x κατεύθυνση και δηλώνουμε τη λύση με $U^{n+\frac{1}{2}}$. Αυτή η διαδικασία καλείται x -σάρωση. Στη συνέχεια, λύνουμε την (9.3), που είναι

ένα μονοδιάστατο πρόβλημα στην y κατεύθυνση, και η λύση του είναι U^{n+1} . Η διαδικασία καλείται y -σάρωση. Και οι δύο σαρώσεις γίνονται με χρονικό βήμα Δt .

Αν οι προσεγγιστικές λύσεις των (9.2) και (9.3) είναι $X^{(t)}, Y^{(t)}$, αντίστοιχα, τότε η λύση της (9.1) δίνεται από τον τύπο:

$$U^{n+1} = Y^{(\Delta t)} X^{(\Delta t)} (U^n) \quad (9.4) \quad \text{ή ισοδύναμα} \quad U^{n+1} = X^{(\Delta t)} Y^{(\Delta t)} (U^n) \quad (9.5)$$

Ο Strang [29] έδειξε ότι οι μέθοδοι διαχωρισμού είναι πρώτης τάξης ακρίβειας στο χρόνο αν οι τελεστές X και Y είναι τουλάχιστον πρώτης τάξης ακρίβειας στο χρόνο. Μιας δεύτερης τάξης ακρίβειας στο χρόνο μέθοδος είναι:

$$U^{n+1} = \frac{1}{2} [X^{(\Delta t)} Y^{(\Delta t)} + Y^{(\Delta t)} X^{(\Delta t)}] (U^n) \quad (9.6)$$

δεδομένου ότι οι τελεστές είναι τουλάχιστον δεύτερης τάξης ακρίβειας στο χρόνο. Επειδή όμως η (9.6) απαιτεί τη διπλάσια δουλειά σε σχέση με τις (9.4) και (9.5), πιο ελκυστικές δεύτερης τάξης μέθοδοι είναι:

$$U^{n+1} = X^{(\frac{1}{2}\Delta t)} Y^{(\Delta t)} X^{(\frac{1}{2}\Delta t)} (U^n) \quad (9.7) \quad \text{και} \quad U^{n+1} = Y^{(\frac{1}{2}\Delta t)} X^{(\Delta t)} Y^{(\frac{1}{2}\Delta t)} (U^n) \quad (9.8)$$

οι οποίες απαιτούν περίπου 50% περισσότερη δουλειά από τις πρώτης τάξης ακρίβειας (9.4) και (9.5). Οι Warming και Beam [43] πρότειναν τα εξής δεύτερης τάξης ακρίβειας, σε χρονικό βήμα $2\Delta t$ σχήματα:

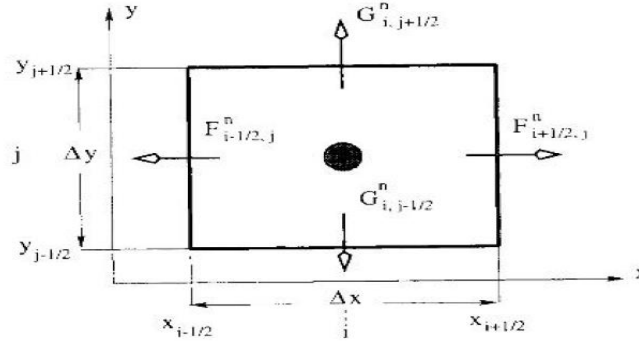
$$U^{n+2} = X^{(\Delta t)} Y^{(\Delta t)} Y^{(\Delta t)} X^{(\Delta t)} (U^n) \quad \text{και} \quad U^{n+2} = Y^{(\Delta t)} X^{(\Delta t)} X^{(\Delta t)} Y^{(\Delta t)} (U^n)$$

9.2: Μη-χωριζομένων πεπερασμένων όγκων μέθοδοι

Έστω το σύστημα των νόμων διατήρησης σε δύο διαστάσεις

$$U_t + F(U)_x + G(U)_y = 0 \quad (9.9)$$

Θεωρούμε ένα υπολογιστικό κελί $I_{i,j}$ με διαστάσεις $\Delta x \times \Delta y$ (Σχήμα 9.1). Η μέση τιμή $U_{i,j}^n$ κάθε κελιού αντιστοιχίζεται στο κέντρο του κελιού. Σε κάθε μέτωπο του κελιού αντιστοιχίζεται μια αριθμητική ροή.



Σχήμα 9.1: Διακριτοποίηση με πεπερασμένους όγκους στο καρτεσιανό επίπεδο

Ένα άμεσο αριθμητικό σχήμα πεπερασμένων όγκων για την επίλυση της (9.9) είναι:

$$U_{i,j}^{n+1} = U_{i,j}^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} [F_{i-\frac{1}{2},j}^n - F_{i+\frac{1}{2},j}^n] + \frac{\Delta t}{\Delta y} [G_{i,j-\frac{1}{2}}^n - G_{i,j+\frac{1}{2}}^n] \quad (9.10)$$

Η μέση τιμή $U_{i,j}^{n+1}$ του κελιού $I_{i,j}$ τη χρονική στιγμή t^{n+1} , προκύπτει με ένα μόνο βήμα από την μέση τιμή $U_{i,j}^n$ τη χρονική στιγμή t^n και τις αριθμητικές ροές από όλα τα μέτωπα του κελιού. Ο τύπος αυτός είναι πλήρως ορισμένος αν καθοριστούν οι αριθμητικές ροές $F_{i+\frac{1}{2},j}^n$, $G_{i,j+\frac{1}{2}}^n$ και ο τύπος του πλέγματος.

Η άμεση εφαρμογή των μιας διάστασης ροών σε κάθε μέτωπο δίνει σχήματα που στην καλύτερη περίπτωση έχουν μειωμένη περιοχή ευστάθειας σε σχέση με τα ανάλογα σχήματα στη μια διάσταση. Στη χειρότερη περίπτωση, είναι ασταθή ακόμα και αν τα αντίστοιχα μιας διάστασης σχήματα είναι ευσταθή.

9.3: Εξιδανικευμένο κυκλικό φράγμα

Θεωρούμε ένα εξιδανικευμένο κυκλικό φράγμα με οριζόντιο πυθμένα και μελετάμε τη μετάδοση του κύματος που σχετίζεται με την ξαφνική και ταυτόχρονη πτώση όλου του φράγματος. Αυτό είναι ένα δυο διαστάσεων πρόβλημα Riemann για το δύο διαστάσεων σύστημα ρηχών υδάτων:

$$U_t + F(U)_x + G(U)_y = 0$$

όπου $U = \begin{bmatrix} h \\ hu \\ hv \end{bmatrix}$ το διάνυσμα των συντηρητικών μεταβλητών, $F(U) = \begin{bmatrix} hu \\ hu^2 + \frac{1}{2}gh^2 \\ huw \end{bmatrix}$ η ροή ως

προς την x -κατεύθυνση και $G(U) = \begin{bmatrix} hw \\ huw \\ hw^2 + \frac{1}{2}gh^2 \end{bmatrix}$ η ροή ως προς την y -κατεύθυνση. Επίσης,

$u(x,y,t)$ και $v(x,y,t)$ είναι οι ταχύτητες ως προς την x και y κατεύθυνση, αντίστοιχα, και $h(x,y,t)$ το βάθος το οποίο σχετίζεται με την ελεύθερη επιφάνεια $s(x,y,t)$ και $b(x,y)$ με τη σχέση $s(x,y,t) = b(x,y) + h(x,y,t)$. Εδώ θεωρούμε ότι $b(x,y) = 0$. Το φράγμα αποτελείται από έναν άπειρα λεπτό τοίχο με ακτίνα $R = 2.5m$ και τα υπολογιστικά κελιά έχουν διάσταση $40m \times 40m$ με κέντρο $(x_c, y_c) = (20m, 20m)$. Οι αρχικές συνθήκες για τις ταχύτητες είναι $u = v = 0$ και για το βάθος του νερού:

$$h(x,y,0) = \begin{cases} h_{ins} = 2.5m, & \text{αν } (x-x_c)^2 + (y-y_c)^2 \leq R^2 \\ h_{out} = 0.5m, & \text{αν } (x-x_c)^2 + (y-y_c)^2 > R^2 \end{cases}$$

Για την επίλυση του προβλήματος, χρησιμοποιούμε τη μέθοδο Godunov και τη μη-χωριζομένων πεπερασμένων όγκων μέθοδο WAF των Billett και Toro, με HLLC επιλυτή και οριοθέτη Van Leer για πλήθος κελιών 300. Στη συνέχεια παρουσιάζονται τα αποτελέσματα των μεθόδων για διάφορες χρονικές στιγμές.

Στο Σχήμα 9.2(α) και (β) απεικονίζονται η στάθμη της ελεύθερης επιφάνειας $h(x,y,0)=0.5m$ και οι ταχύτητες u και v τη χρονική στιγμή $t=0.0 \text{ sec}$, έτσι όπως δίνονται από τις μεθόδους Godunov και WAF, σε τρισδιάστατη μορφή. Στο σχήμα 9.2(γ) συγκρίνουμε τα αποτελέσματα που δίνουν οι δύο μέθοδοι για τις μεταβλητές h , u και v σε μια κάθετη διατομή κατά μήκος του κέντρου, τα οποία προφανώς ταυτίζονται. Θέτοντας τις αρχικές συνθήκες, στα κελιά που κόβονται από τον κύκλο που ορίζει το άπειρο λεπτό κυκλικό φράγμα, δίνονται τιμές που είναι ανάλογες στις περιοχές εντός και εκτός του κύκλου.

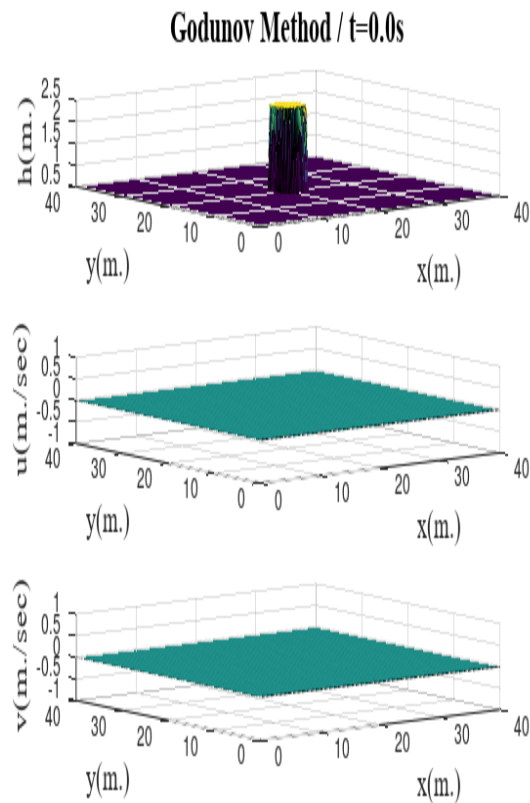
Όταν σπάει το φράγμα δημιουργείται ένα προς-τα-έξω κινούμενο κυκλικό κύμα τύπου shock και ένα προς-τα-μέσα κινούμενο κυκλικό κύμα αραίωσης. Τη χρονική στιγμή $t=0.4 \text{ sec}$ το κύμα αραίωσης τείνει να φτάσει στο κέντρο του κύκλου (Σχήμα 9.3(α) και (β)), τα αποτελέσματα σύμφωνα με τις μεθόδους Godunov και WAF. Στο Σχήμα 9.3(γ) συγκρίνουμε τα αποτελέσματα των μεθόδων για τα h , u και v σε μια κάθετη διατομή και όπως παρατηρούμε τα αποτελέσματα της ταχύτητας v , στο κέντρο, διαφέρουν και στο Σχήμα 9.3(δ) τη διανυσματική κίνηση των κυμάτων.

Τη χρονική στιγμή $t=0.7sec$, το κυκλικό κύμα αραίωσης έχει φτάσει στο κέντρο και έχει διαλυθεί, δημιουργώντας έτσι μια αισθητή πτώση της στάθμης της ελεύθερης επιφάνειας κοντά στο κέντρο (Σχήμα 9.4(α) και (β)), τα αποτελέσματα σύμφωνα με τις μεθόδους Godunov και WAF). Δημιουργείται ένας λάκκος στην ελεύθερη επιφάνεια ακριβώς στο κέντρο, που το βάθος του είναι δύσκολο να υπολογιστεί. Παρατηρούμε ότι σύμφωνα με τη μέθοδο Godunov η στάθμη της ελεύθερης επιφάνειας είναι ομοιόμορφη σε όλα τα σημεία γύρω από τον λάκκο, ενώ σύμφωνα με τη WAF υπάρχουν αναταράξεις στην ελεύθερη επιφάνεια. Στο σχήμα 9.4(γ) συγκρίνουμε τα αποτελέσματα που δίνουν οι δύο μέθοδοι για τις μεταβλητές h , u και v σε μια κάθετη διατομή και στο Σχήμα 9.4(δ) απεικονίζονται τα διανύσματα των u και v .

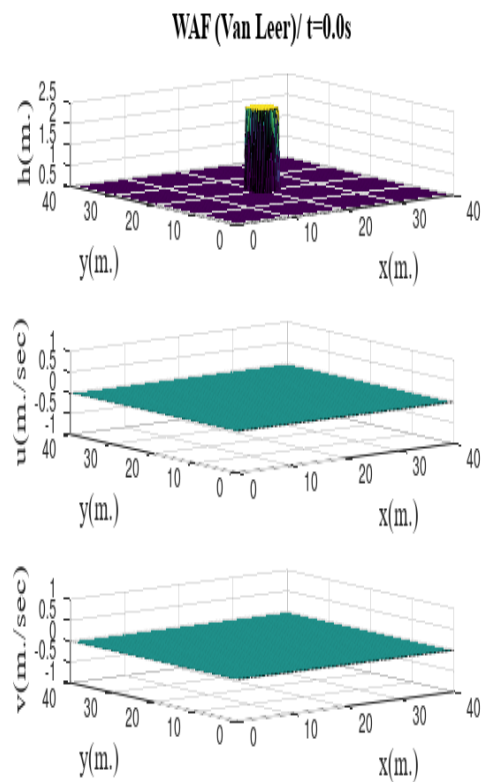
Τη χρονική στιγμή $t=1.4sec$, το κυκλικό shock έχει απομακρυνθεί ακόμα περισσότερο από το κέντρο και το ανακλώμενο εσωτερικό κυκλικό κύμα αραίωσης έχει προκαλέσει μεγάλη πτώση της ελεύθερης επιφάνειας, έτσι ώστε η ελεύθερη επιφάνεια να βρίσκεται πολύ κάτω από το αρχικό βάθος του νερού εκτός του κυκλικού φράγματος. Η ελεύθερη επιφάνεια είναι πολύ κοντά στο μηδέν και δημιουργείται ένα δεύτερο κύμα τύπου shock (Σχήμα 9.5(α) και (β)), τα αποτελέσματα σύμφωνα με τις μεθόδους Godunov και WAF). Όπως παρατηρούμε στο σχήμα 9.5(γ) η TVD-WAF δίνει μικρότερη ταχύτητα v στο κέντρο, συγκριτικά με τη μέθοδο Godunov.

Τη χρονική στιγμή $t=3.5sec$, το αρχικό shock έχει απομακρυνθεί ακόμα περισσότερο από το κέντρο, ενώ το δεύτερο shock κινείται προς το κέντρο (στο Σχήμα 9.6(α) και (β)) τα αποτελέσματα σύμφωνα με τις μεθόδους Godunov και WAF). Στο Σχήμα 9.6(δ) βλέπουμε τη σύγκριση των οριοθετών SUPERBEE και Van Leer, καθώς κατά την εκτέλεση της μεθόδου παρατηρήσαμε ότι η προσεγγιστική λύση που δίνει ο οριοθέτης SUPERBEE για την ταχύτητα v , παρουσιάζει ταλαντώσεις στις περιοχές που έχουμε συνεχείς λύσεις. Τέλος, τη χρονική στιγμή $t=4.7sec$ το δεύτερο shock έχει «εκραγεί» στο κέντρο και αρχίζει να κινείται προς την αντίθετη κατεύθυνση (στο Σχήμα 9.7(α) και (β)), τα αποτελέσματα σύμφωνα με τις μεθόδους Godunov και WAF).

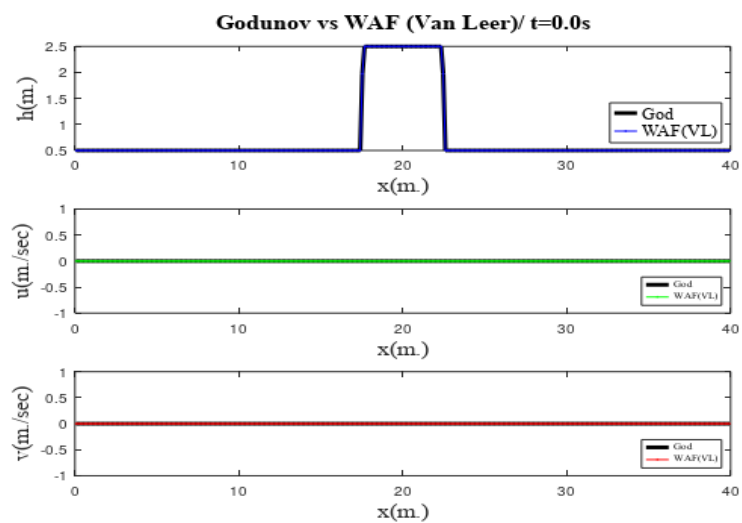
Συνοπτικά, η όλη διαδικασία είναι η εξής: αρχικά δημιουργείται ένα κυκλικό κύμα τύπου shock που μετακινείται προς τα έξω, του οποίου η δύναμη και συνεπώς η ταχύτητα μειώνονται με την πάροδο του χρόνου. Επιπρόσθετα με το αρχικό κύμα shock, από την πτώση του φράγματος δημιουργείται και ένα κυκλικό κύμα αραίωσης το οποίο κινείται προς το κέντρο του φράγματος, προκαλώντας έτσι μια απότομη πτώση της στάθμης της ελεύθερης επιφάνειας κοντά στο κέντρο (το βάθος του νερού τείνει στο μηδέν). Έτσι δημιουργείται ένα δεύτερο κυκλικό shock, το οποίο κινείται προς τα έξω, μετά επιβραδύνει, σταματάει και μετά αρχίζει να μετακινείται προς το κέντρο με αυξανόμενη ταχύτητα. Τελικά, το δεύτερο κύμα shock εκρήγνυται στο κέντρο, μετά ανακλάται και αρχίζει να κινείται πάλι προς τα έξω. Μετά την έκρηξη του δεύτερου κύματος τύπου shock δεν δημιουργούνται άλλα κύματα στο κέντρο του φράγματος.



(α)

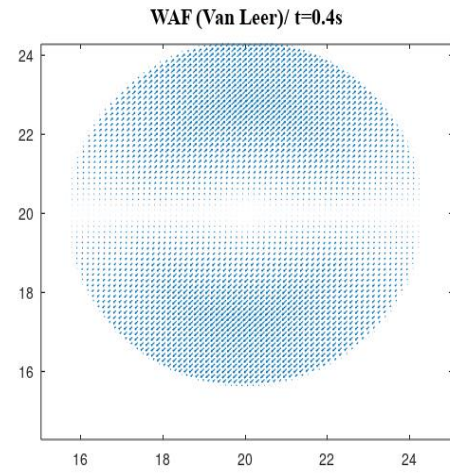
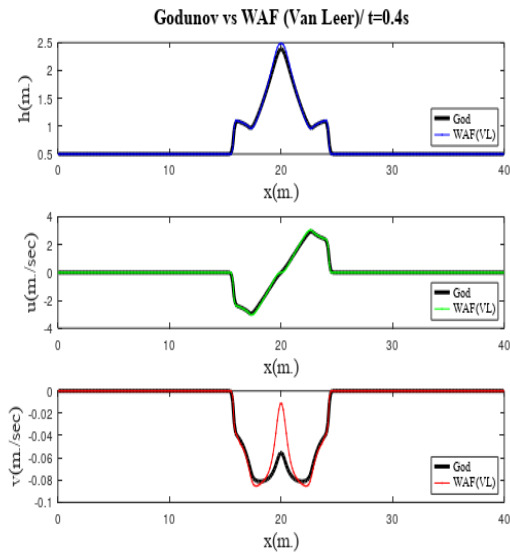
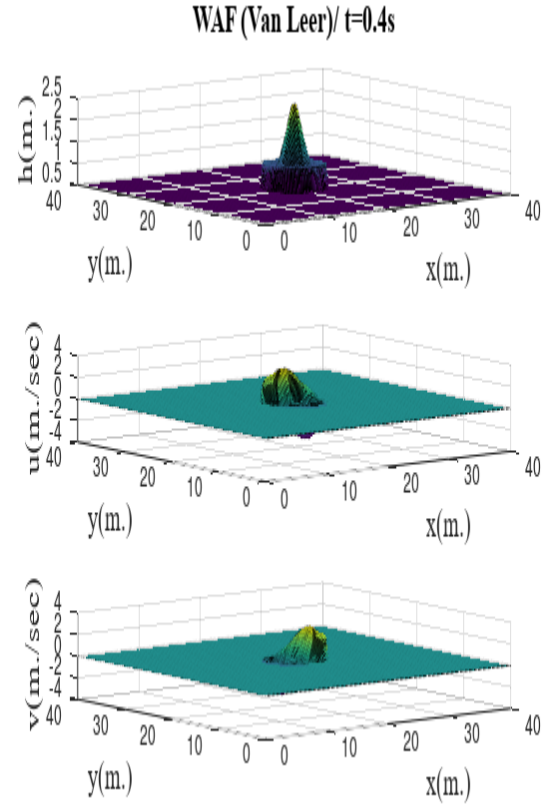
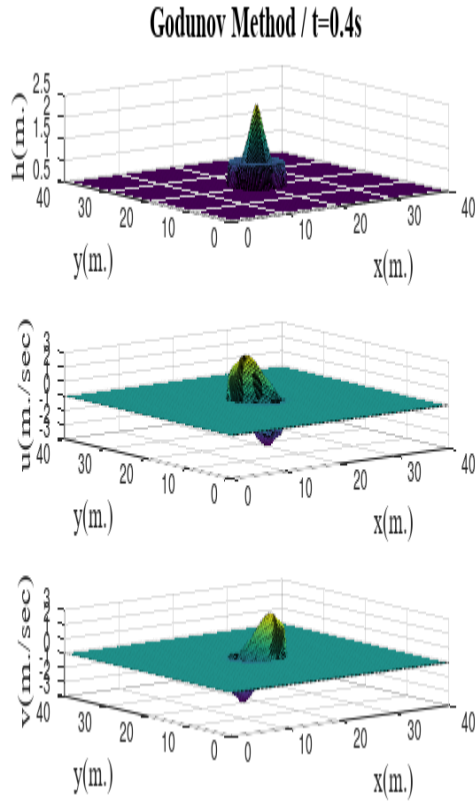


(β)

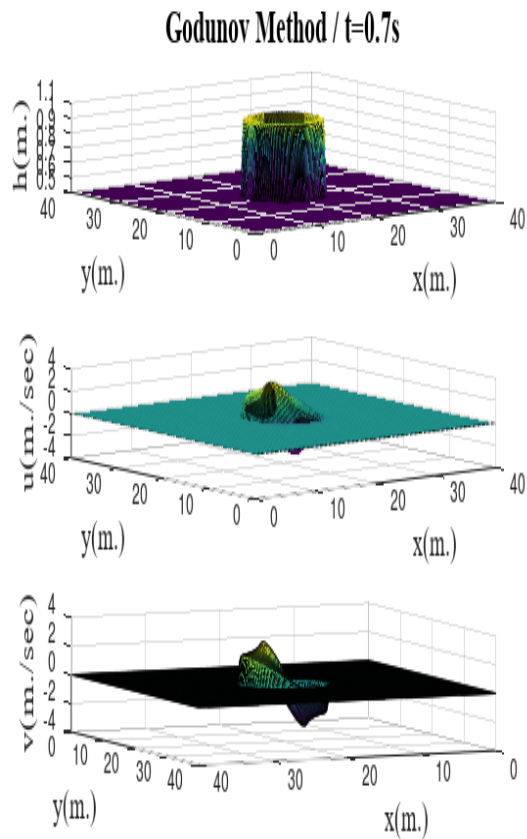


(γ)

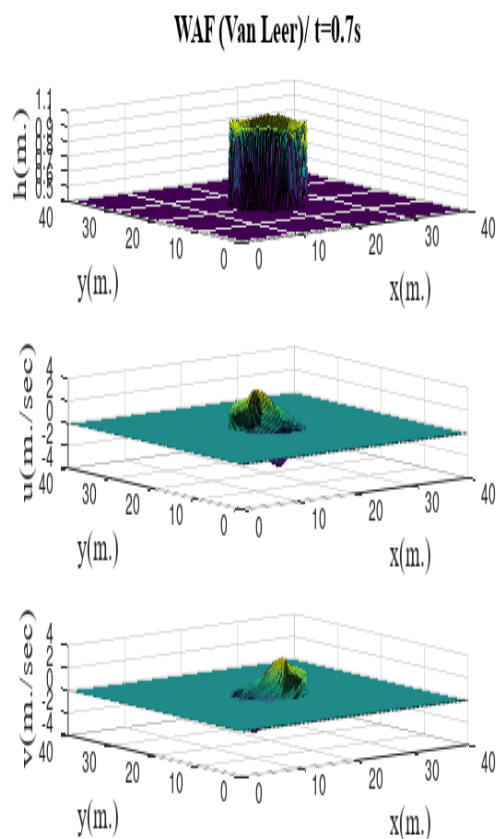
Σχήμα 9.2: Αποτελέσματα για στάθμη της ελεύθερης επιφάνειας h , ταχύτητας u και ταχύτητας v με: (α) μέθοδο Godunov και (β) TVD-WAF για $t=0.0 \text{ sec}$ και πλήθος κελιών 300. (γ) Σύγκριση των μεθόδων Godunov και WAF,



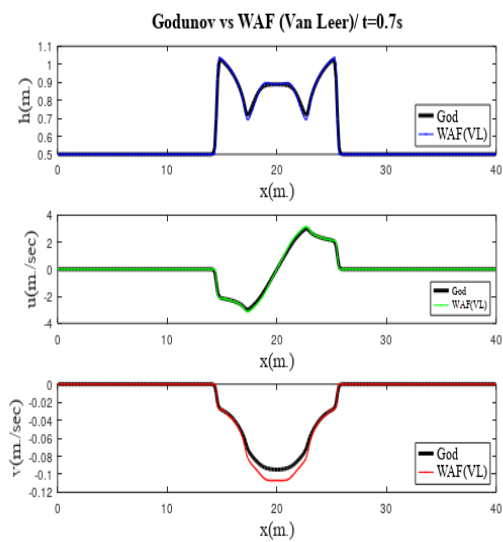
Σχήμα 9.3: Αποτελέσματα για στάθμη της ελεύθερης επιφάνειας h , ταχύτητας u και ταχύτητας v με: (α) μέθοδο Godunov και (β) TVD-WAF για $t = 0.4 \text{ sec}$ και πλήθος κελιών 300. (γ) Σύγκριση των μεθόδων Godunov και WAF. (δ) Διανυσματική απεικόνιση των u και v .



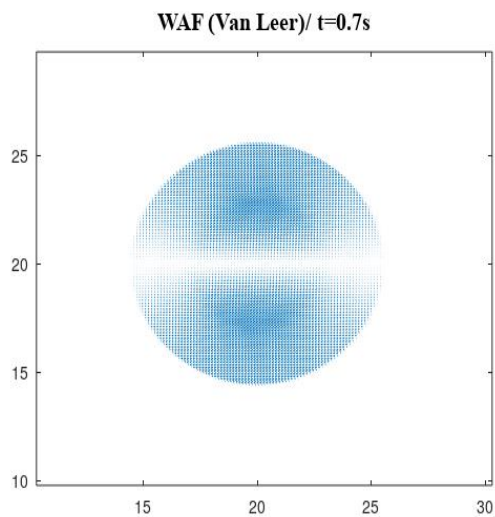
(α)



(β)

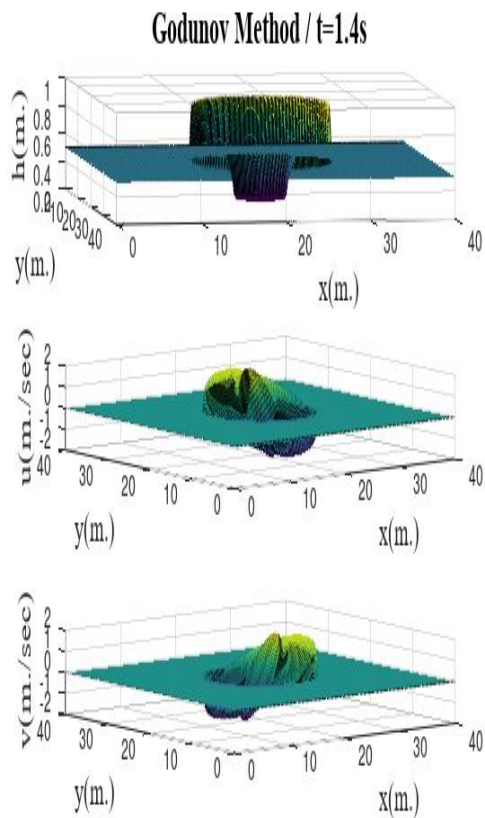


(γ)

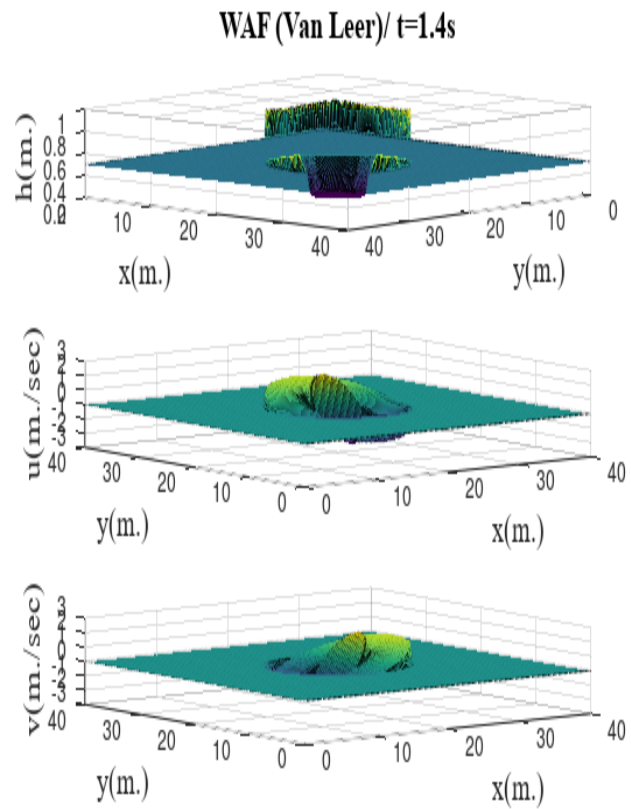


(δ)

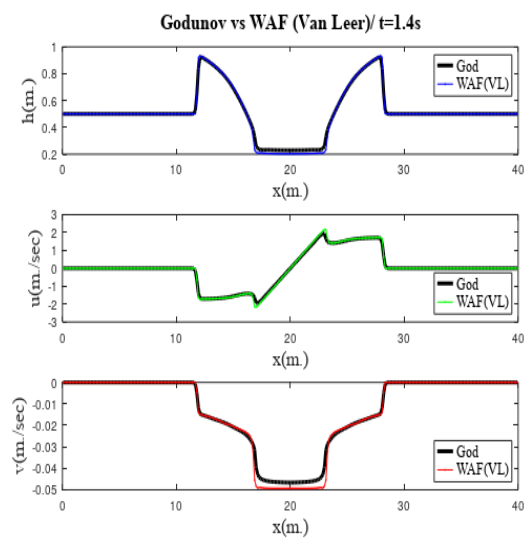
Σχήμα 9.4: Αποτελέσματα για στάθμη της ελεύθερης επιφάνειας h , ταχύτητας u και ταχύτητας v με: (α) μέθοδο Godunov και (β) TVD-WAF για $t=0.7 \text{ sec}$ και πλήθος κελιών 300. (γ) Σύγκριση των μεθόδων Godunov και WAF. (δ) Διανυσματική απεικόνιση των u και v .



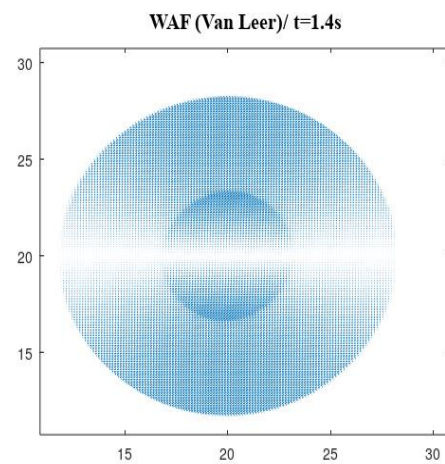
(α)



(β)



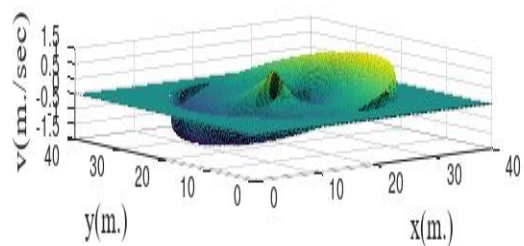
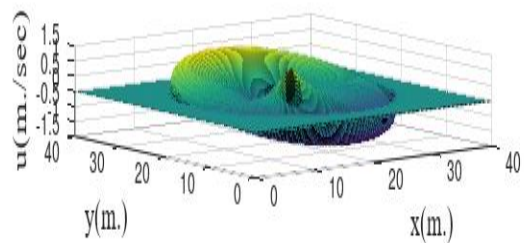
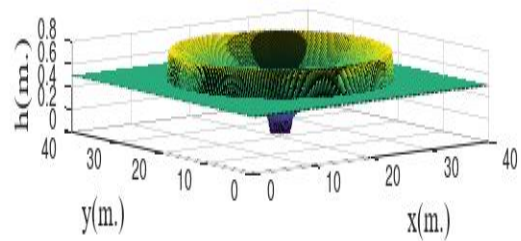
(γ)



(δ)

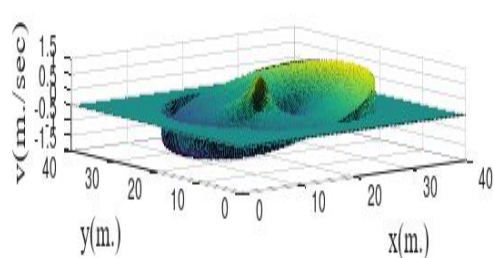
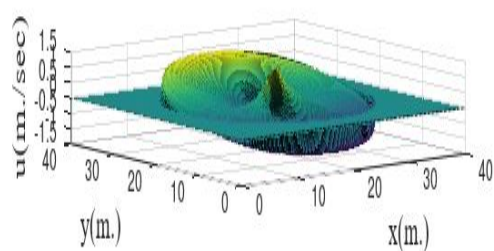
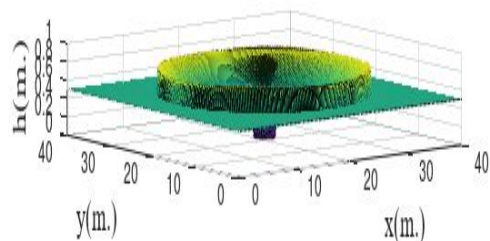
Σχήμα 9.5: Αποτελέσματα για στάθμη της ελεύθερης επιφάνειας h , ταχύτητας u και ταχύτητας v με: (α) μέθοδο Godunov και (β) TVD-WAF για $t = 1.4 \text{ sec}$ και πλήθος κελιών 300. (γ) Σύγκριση των μεθόδων Godunov και WAF. (δ) Διανυσματική απεικόνιση των u και v .

Godunov Method / $t=3.5s$



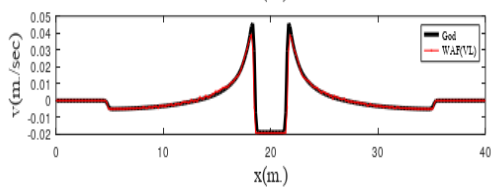
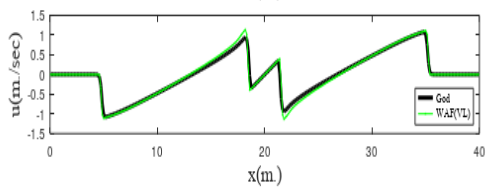
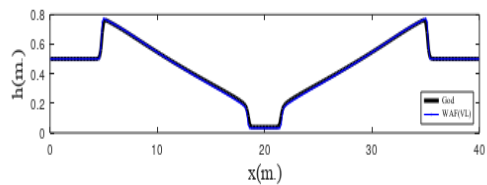
(α)

WAF (Van Leer) / $t=3.5s$



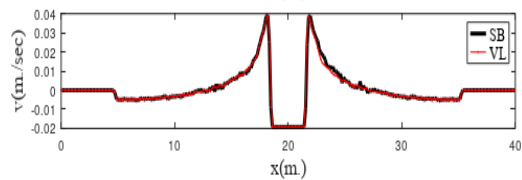
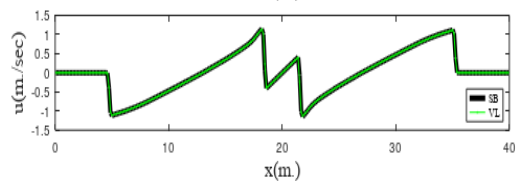
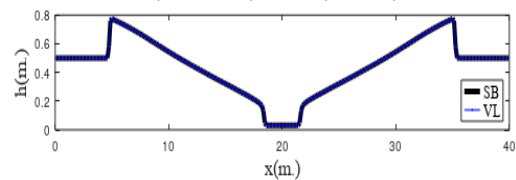
(β)

Godunov vs WAF(Van Leer) / $t=3.5s$

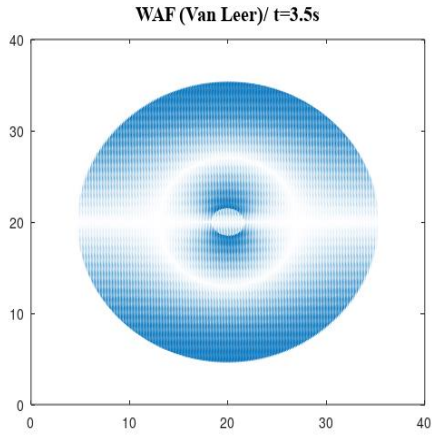


(γ)

WAF(SUPERBEE) vs WAF (Van Leer) / $t=3.5s$

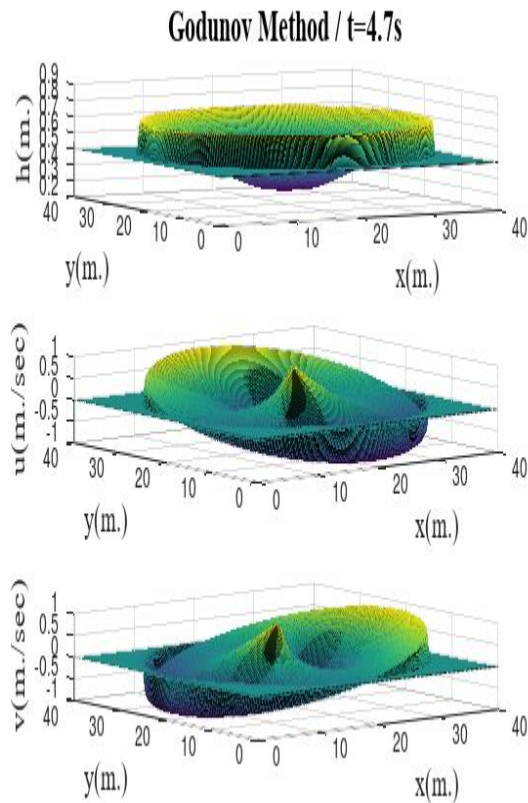


(δ)

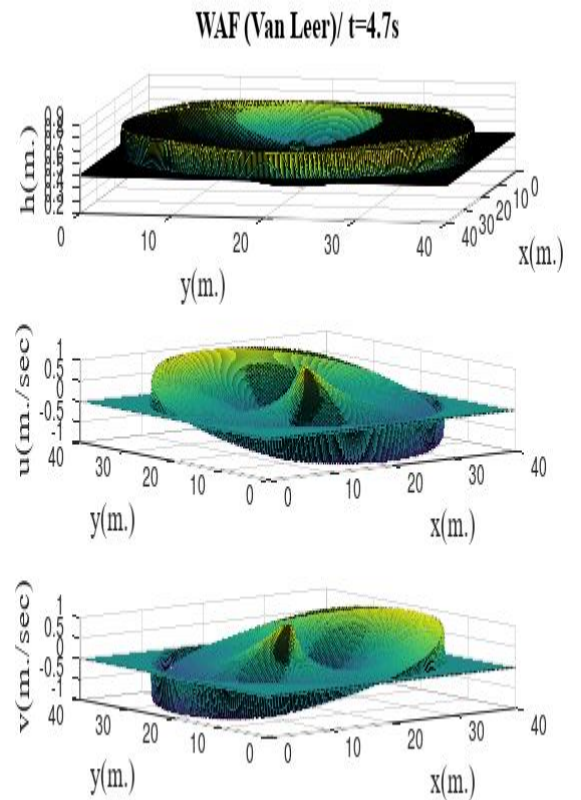


(ε)

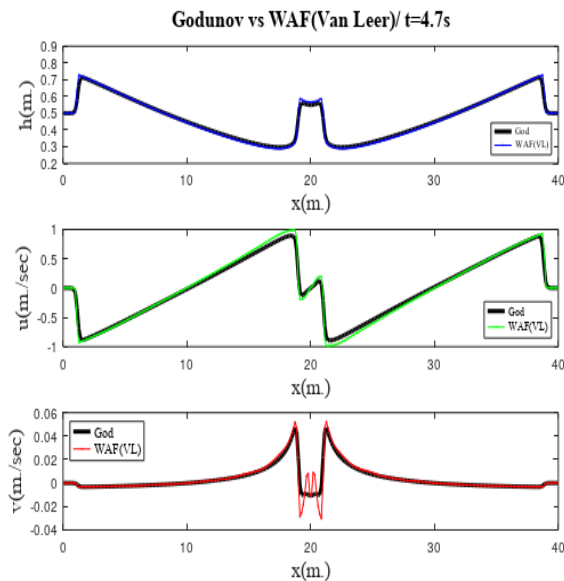
Σχήμα 9.6: Αποτελέσματα για στάθμη της ελεύθερης επιφάνειας h , ταχύτητας u και ταχύτητας v με: (α) μέθοδο Godunov και (β) TVD-WAF για $t = 3.5 \text{ sec}$ και πλήθος κελιών 300. (γ) Σύγκριση των μεθόδων Godunov και WAF με οριοθέτη Van Leer. (δ) Σύγκριση των οριοθετών SUPERBEE και Van Leer. (ε) Διανυσματική απεικόνιση των u και v .



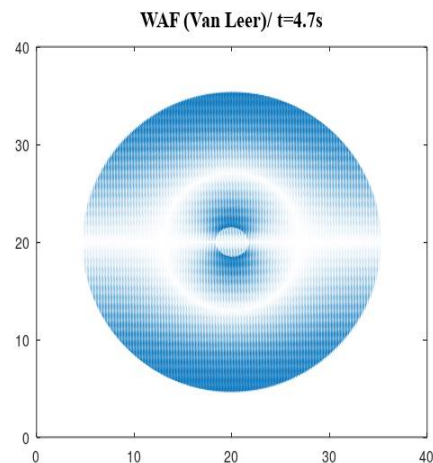
(α)



(β)



(γ)



(δ)

Σχήμα 9.7: Αποτελέσματα για στάθμη της ελεύθερης επιφάνειας h , ταχύτητας u και ταχύτητας v με: (α) μέθοδο Godunov και (β) TVD-WAF για $t = 4.7$ sec και πλήθος κελιών 300. (γ) Σύγκριση των μεθόδων Godunov και WAF. (δ) Διανυσματική απεικόνιση των u και v .

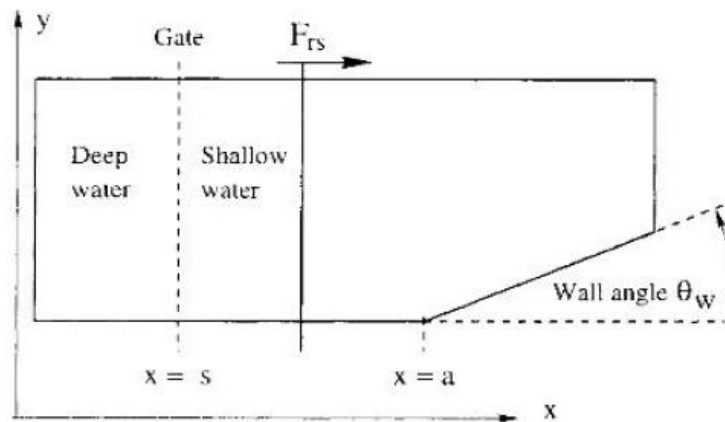
9.5: Ανάκλαση μετωπικού κύματος

Σε αυτή την παράγραφο θα ασχοληθούμε με τη μοντελοποίηση των ανακλάσεων μετωπικών κυμάτων (bore reflections) που προκύπτουν όταν ένα μετωπικό κύμα ανακλάται από ένα στερεό κάθετο τοίχο στην κατεύθυνση μετάδοσης του κύματος υπό συγκεκριμένη γωνία. Αυτά τα κύματα έχουν παρόμοια χαρακτηριστικά με αυτά των κρουστικών (shock) κυμάτων σε συμπίεστα υλικά. Η ύπαρξη ανάκλασης Mach, που είναι η ανάκλαση ενός κύματος shock το οποίο περιλαμβάνει τρία κύματα shock και πήρε την ονομασία του από τον Ernst Mach [47], εξηγεί την ασυνήθιστη αύξηση του πλάτους του κύματος και την μη-αναμενόμενη καταστροφική δύναμη των tsunamis όταν φτάνουν στις ακτές. Τα tsunamis είναι κύματα με ελεύθερη επιφάνεια που παράγονται από υποβρύχιες διαταραχές.

Υπάρχουν τρία είδη κύματος, που καθορίζονται από τη γωνία που σχηματίζεται από την κατεύθυνση μετάδοσης του κύματος και τον κάθετο τοίχο που βρίσκεται στη διαδρομή του κύματος. Για γωνίες μεγαλύτερες από $35^\circ - 45^\circ$ προκύπτουν κανονικά μετωπικά κύματα και για γωνίες μεταξύ 20° και $40^\circ - 45^\circ$ προκύπτουν ανακλάσεις Mach. Το τρίτο είδος κύματος είναι μια ειδική περίπτωση της ανάκλασης Mach, προκύπτει για γωνίες μικρότερες από 20° , και μπορεί να θεωρηθεί σαν ανυπαρξία κύματος ανάκλασης.

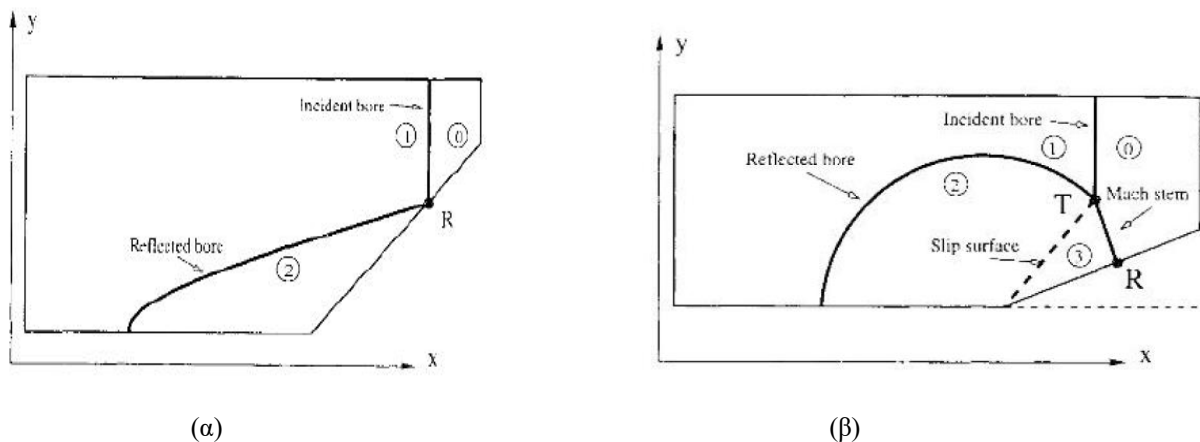
Για να μελετήσουμε το φαινόμενο της ανάκλασης μετωπικού κύματος σε ελεύθερης επιφάνειας κύματα υπό την επίδραση της βαρύτητας, θεωρούμε μια ορθογώνια διατομή ενός οριζόντιου

ανοικτού καναλιού. Το νερό ρέει από τα αριστερά προς τα δεξιά μεταξύ δύο κάθετων τοιχωμάτων, ένα εκ των οποίων στο σημείο $x = a$ σχηματίζει γωνία με το έδαφος θ_w . Έστω ότι στο σημείο $x = s$ είναι τοποθετημένη μια κάθετη πύλη που χωρίζει την περιοχή σε δύο υποπεριοχές, αριστερά και δεξιά, σε κάθε μια από τις οποίες βρίσκεται νερό σε ήρεμη κατάσταση, βάθους h_1 (βαθύ) και h_0 (ρηχό), αντίστοιχα. Το απότομο άνοιγμα της πύλης προς τα πάνω δημιουργεί ένα κύμα depression (ή αραίωσης) που κινείται προς τα αριστερά και ένα κύμα ανάκλασης (ή shock) που κινείται προς τα δεξιά. Στη συνέχεια, το προς τα δεξιά κινούμενο κύμα ανάκλασης προσκρούει σε ένα τμήμα του δεξιού τοίχου και παράγει ένα δεύτερο κύμα ανάκλασης (Σχήμα 9.8).



Σχήμα 9.8: Κάτοψη της ορθογώνιας διατομής ενός ανοικτού οριζόντιου καναλιού που περιλαμβάνεται μεταξύ δύο κάθετων τοιχωμάτων. Μια κάθετη πύλη στη θέση $x = s$ χωρίζει δύο περιοχές που περιέχουν στάσιμο νερό. Το δεξιό τοίχωμα σχηματίζει γωνία με το έδαφος θ_w .

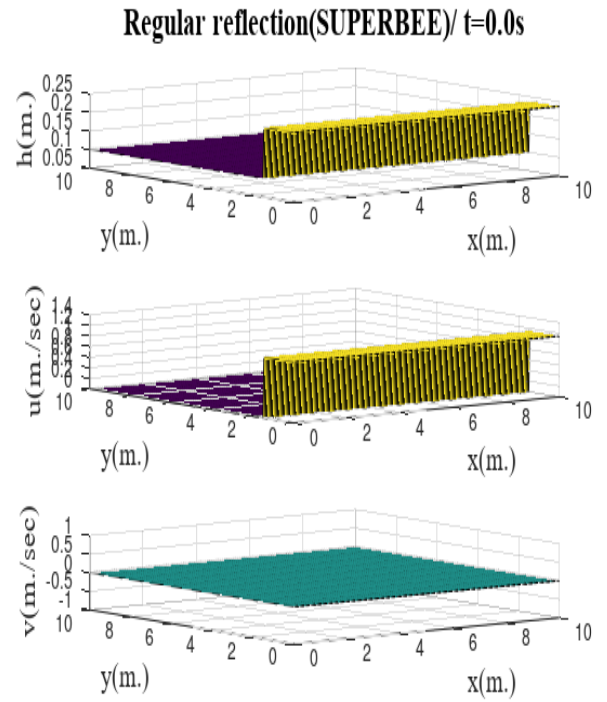
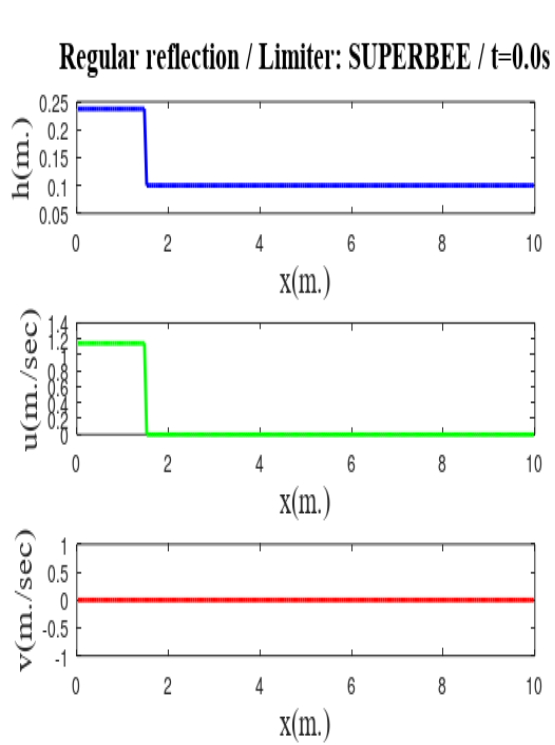
Αν $\theta_w > \theta_{crit}$ τότε δημιουργείται ένα κανονικό κύμα ανάκλασης, το οποίο χαρακτηρίζεται από την ύπαρξη δύο κυμάτων, το κύμα επίπτωσης που είναι παρόν στην αρχή της διαδικασίας και το ανακλώμενο κυρτό κύμα, τα οποία συναντώνται σε ένα σημείο **R** που βρίσκεται πάνω στον τοίχο ανάκλασης (Σχήμα 9.9(α)). Αν $\theta_w < \theta_{crit}$, τότε έχουμε ανάκλαση Mach (Σχήμα 9.9(β)). Σε αυτή την περίπτωση, ένα επιπλέον κύμα το επονομαζόμενο Mach stem, συναντά τα δύο προηγούμενα σε ένα σημείο **T**, το οποίο καλείται *τριπλό σημείο*, και το οποίο βρίσκεται σε πεπερασμένη απόσταση μακριά από τον κάθετο τοίχο ανάκλασης. Από το τριπλό σημείο δημιουργείται ένα νέο κύμα, που ονομάζεται ολισθηρή επιφάνεια, και χωρίζει τα σωματίδια σε δύο ομάδες, αυτά που δημιουργήθηκαν από το Mach stem και αυτά που δημιουργήθηκαν αρχικά από το κύμα επίπτωσης και στη συνέχεια από το ανακλώμενο κύμα.



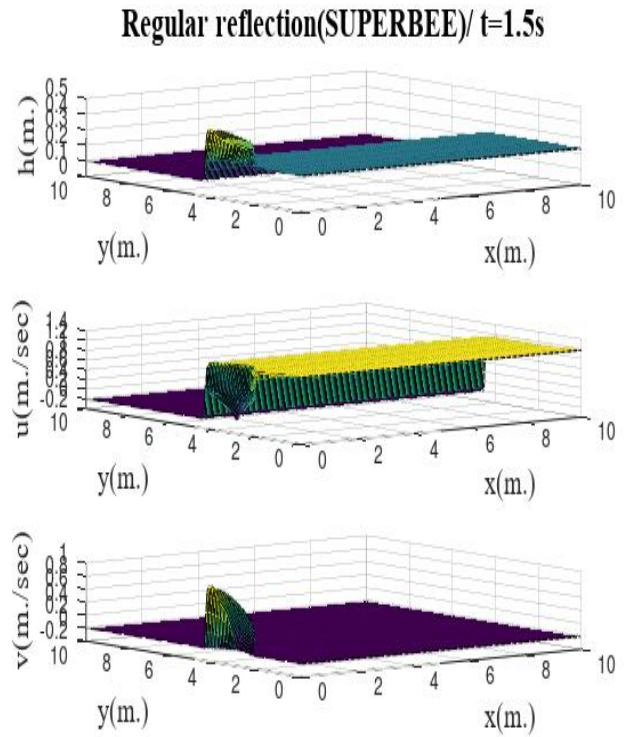
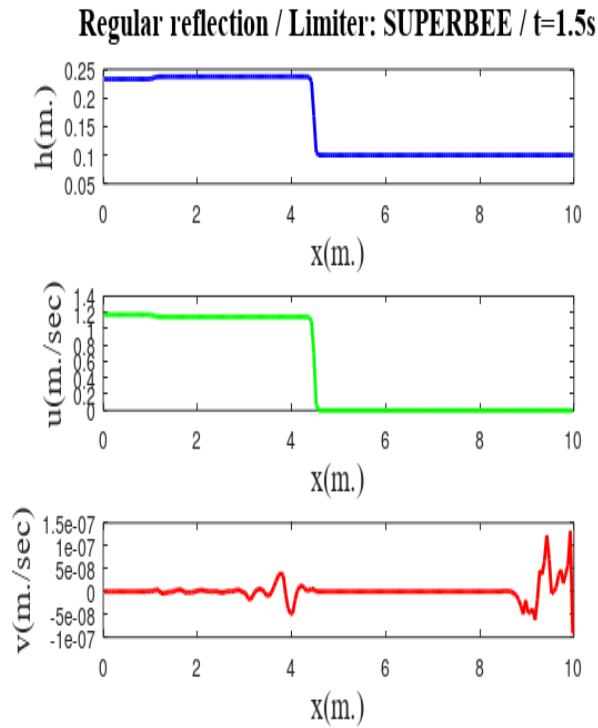
Σχήμα 9.9: (α) Κανονική ανάκλαση: το κύμα επίπτωσης (incident bore) και το ανακλώμενο κύμα (reflected bore) συναντώνται στο σημείο R πάνω στον τοίχο, (β) Ανάκλαση Mach: το κύμα επίπτωσης, το ανακλώμενο κύμα, το στέλεχος Mach (Mach stem) και μια ολισθηρή επιφάνεια συναντώνται στο σημείο T μακριά από τον τοίχο.

Θεωρούμε ένα οριζόντιο κανάλι μήκους $L=10m$ με την κορυφή του ανακλώμενου κάθετου τοίχου να βρίσκεται στα $x=3m$ και την αρχική οπή τοποθετημένη στη θέση $x=1.5m$. Πριν την οπή το βάθος του νερού είναι $h_0=0.1m$ και το διάνυσμα των ταχυτήτων μηδενικό. Επιλύουμε το πρόβλημα με τη μέθοδο WAF συνδυασμένη με ένα δεύτερης τάξης ακρίβειας σχήμα διαχωρισμού, σε ένα πλέγμα διαστάσεων 200×200 στην x και y διάσταση, αντίστοιχα. Η γωνία του τοίχου είναι $\theta_w=60^\circ$. Αυτή η περίπτωση αντιστοιχεί σε μια κανονική ανάκλαση, δηλαδή το τριπλό σημείο βρίσκεται πάνω στον κάθετο τοίχο. Στα Σχήματα 9.10-9.14 βλέπουμε τη μεταβολή του βάθους h και των ταχυτήτων u και v , για διάφορες χρονικές στιγμές.

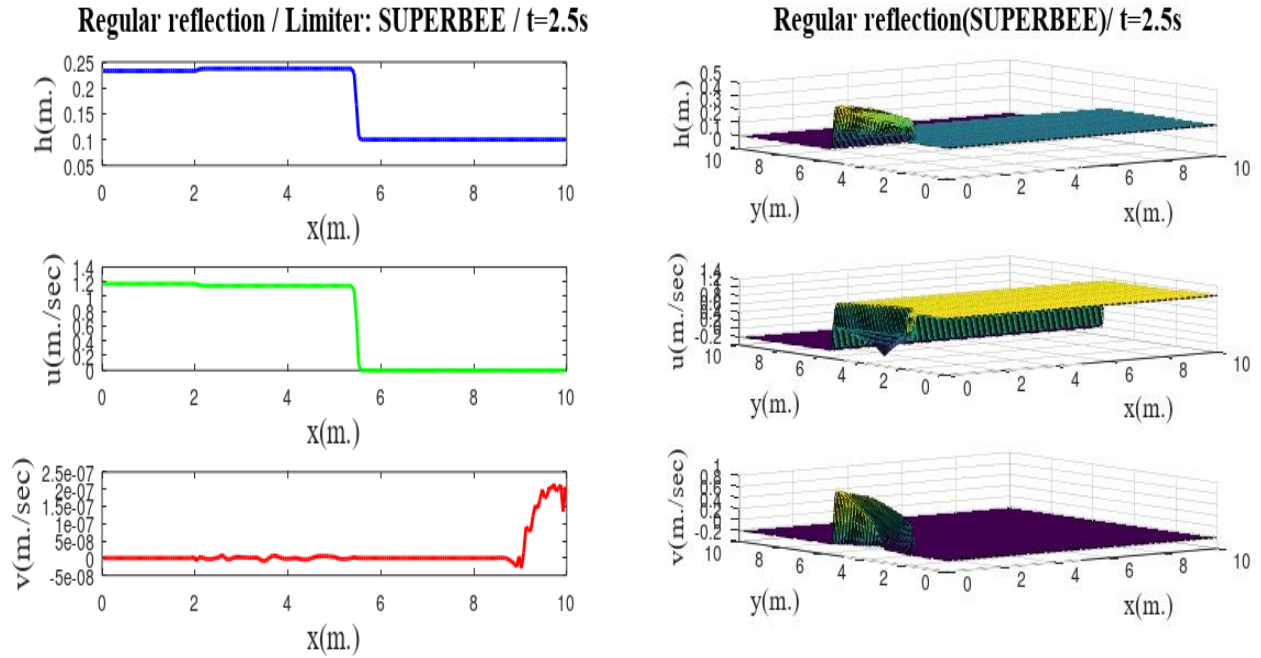
Αν η γωνία του τοίχου είναι $\theta_w=25^\circ$, τότε δημιουργείται ανάκλαση Mach και η εξέλιξη του προβλήματος με την πάροδο του χρόνου απεικονίζεται στα σχήματα 9.15-9.19.



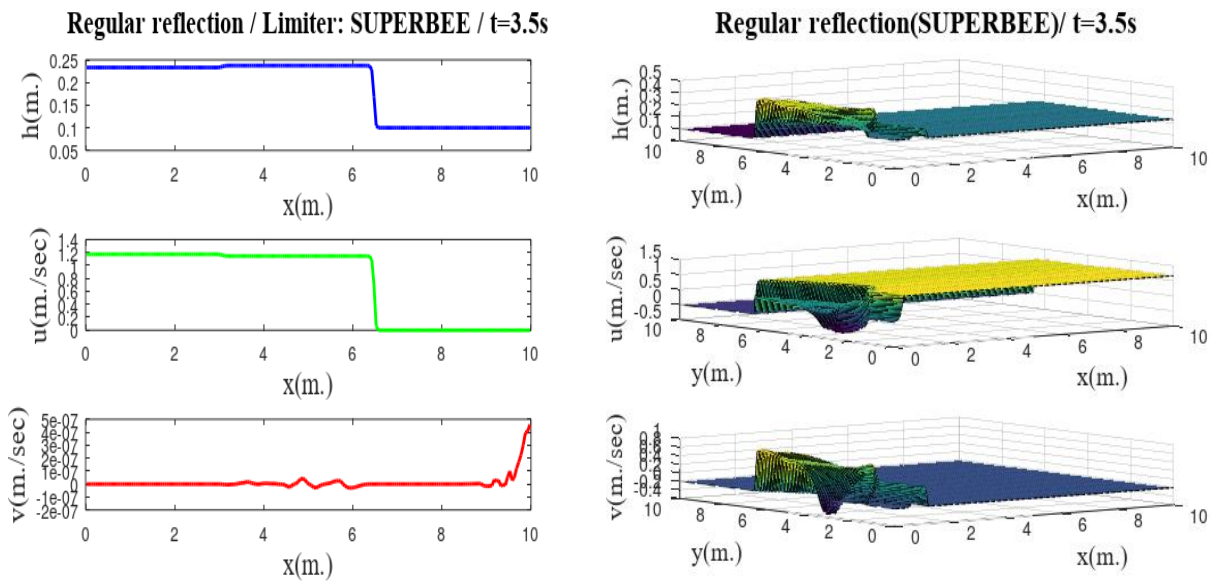
Σχήμα 9.10: Κανονικό κύμα ανάκλασης : βάθος h , ταχύτητα u και ταχύτητα v , τη χρονική στιγμή $t = 0.0$ sec, για γωνία 60°



Σχήμα 9.11: Κανονικό κύμα ανάκλασης: βάθος h , ταχύτητα u και ταχύτητα v , τη χρονική στιγμή $t = 1.5 \text{ sec}$, για γωνία 60°

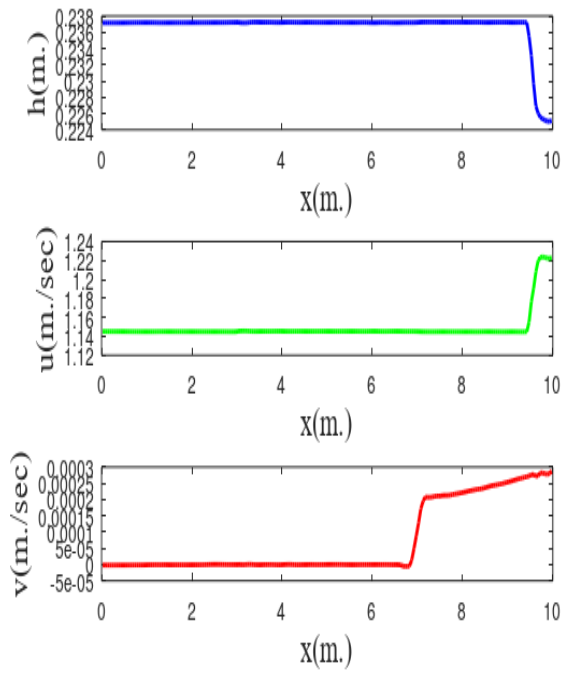


Σχήμα 9.12: Κανονικό κύμα ανάκλασης: βάθος h , ταχύτητα u και ταχύτητα v , τη χρονική στιγμή $t = 2.5 \text{ sec}$, για γωνία 60°

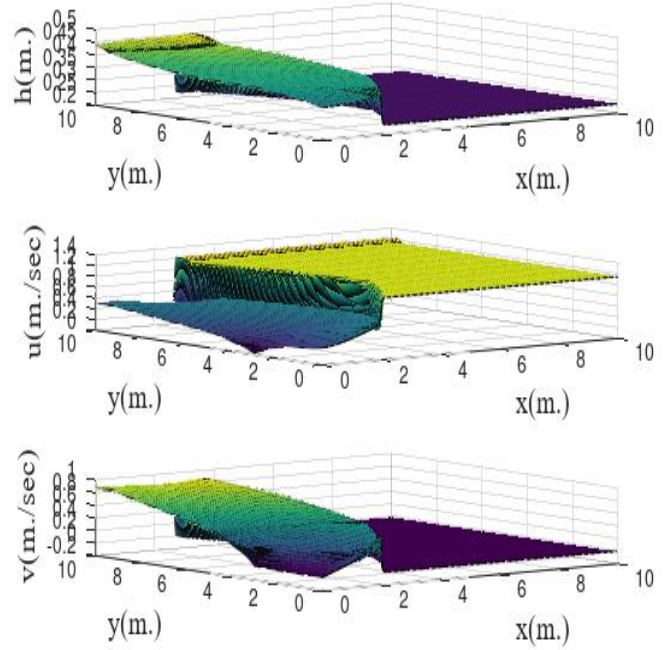


Σχήμα 9.13: Κανονικό κύμα ανάκλασης: βάθος h , ταχύτητα u και ταχύτητα v , τη χρονική στιγμή $t = 3.5 \text{ sec}$, για γωνία 60°

Regular reflection / Limiter: SUPERBEE / $t=5.5s$

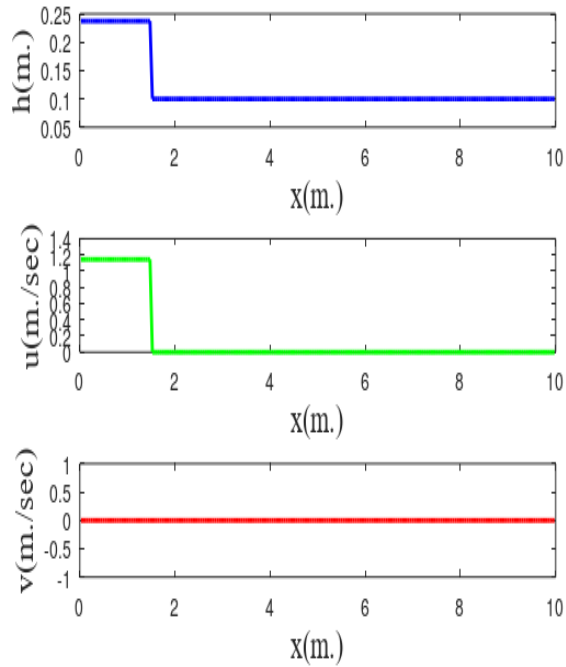


Regular reflection(SUPERBEE)/ $t=5.5s$

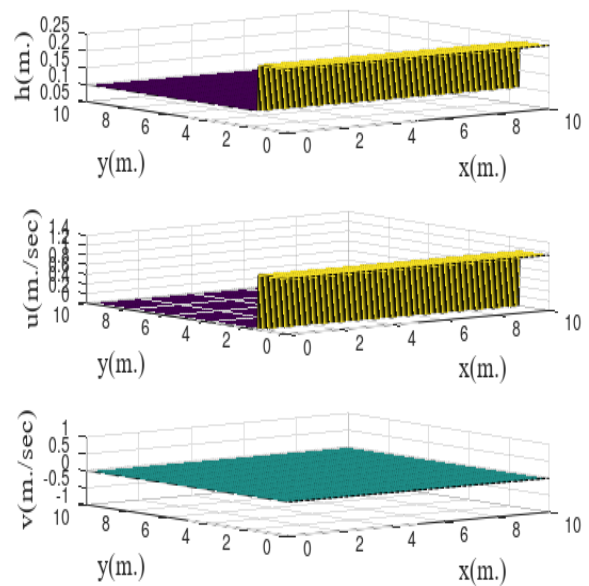


Σχήμα 9.14: Κανονικό κύμα ανάκλασης: βάθος h , ταχύτητα u και ταχύτητα v , τη χρονική στιγμή $t = 5.5 sec$, για γωνία 60°

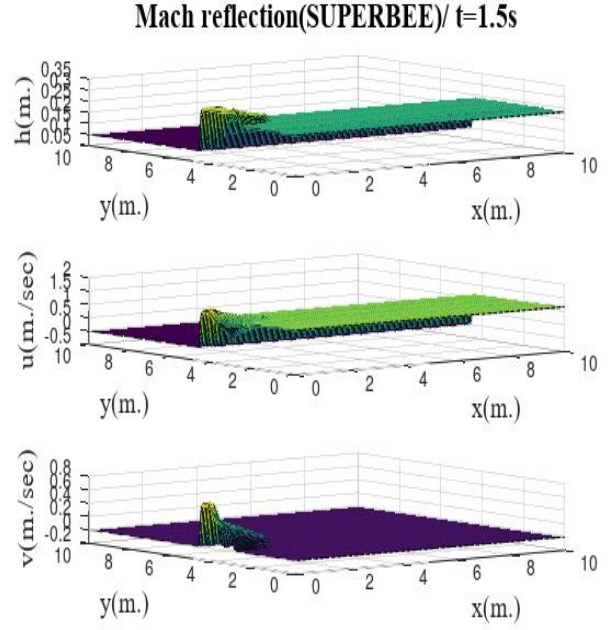
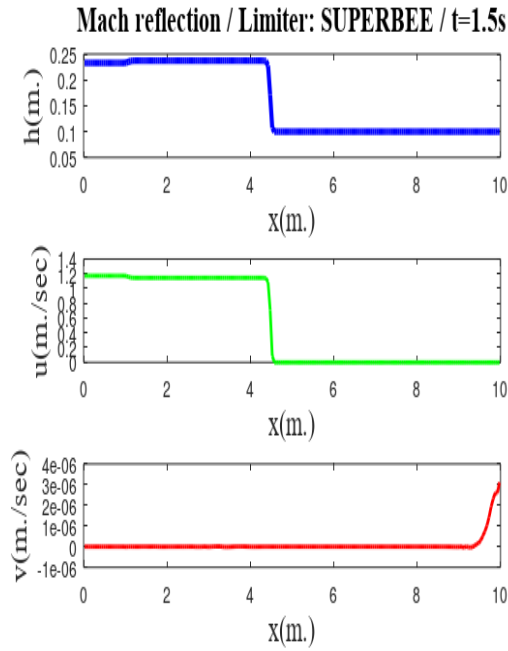
Mach reflection / Limiter: SUPERBEE / $t=0.0s$



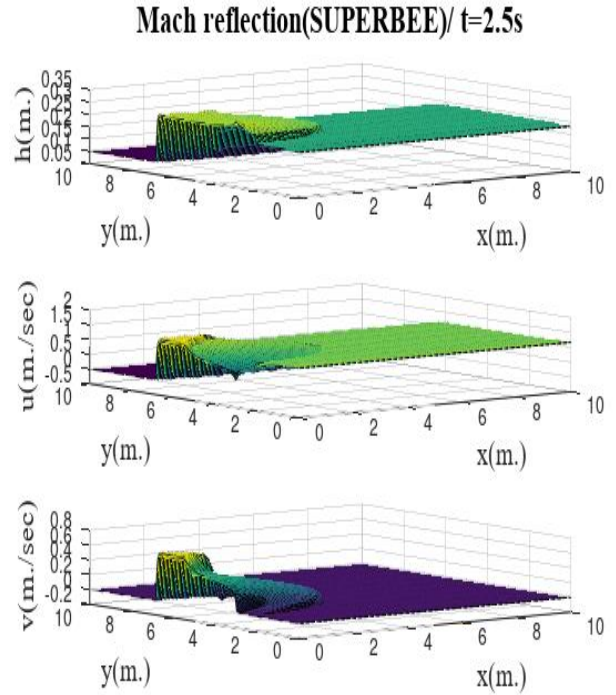
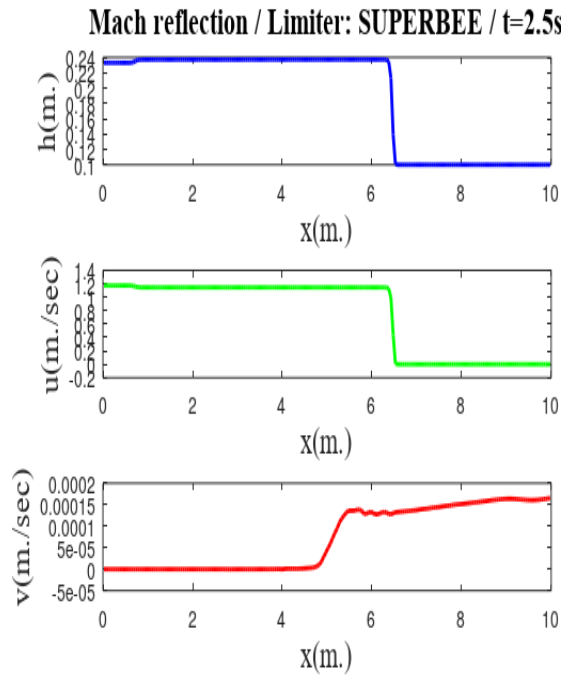
Mach reflection(SUPERBEE)/ $t=0.0s$



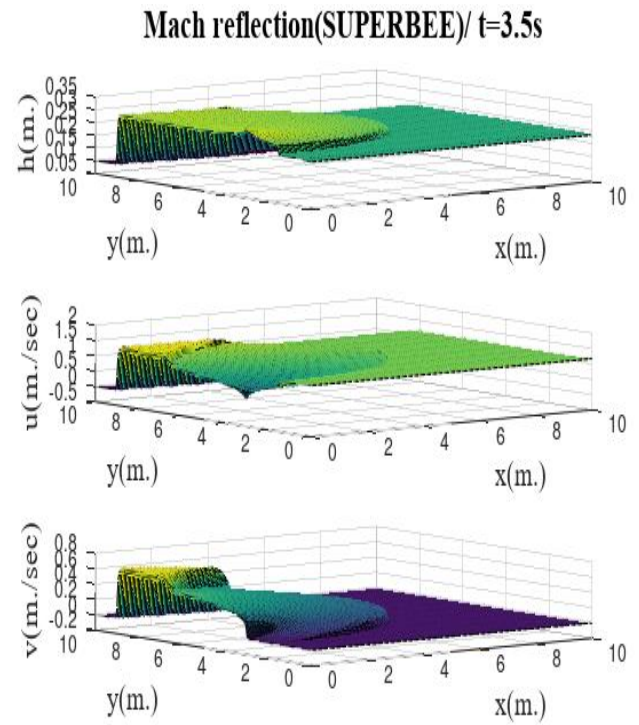
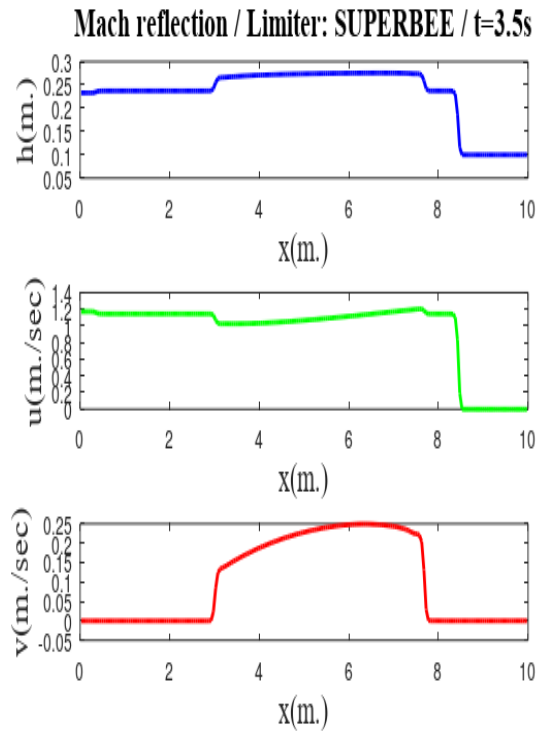
Σχήμα 9.15: Ανάκλαση Mach: βάθος h , ταχύτητα u και ταχύτητα v , τη χρονική στιγμή $t = 0.0 sec$, για γωνία 25°



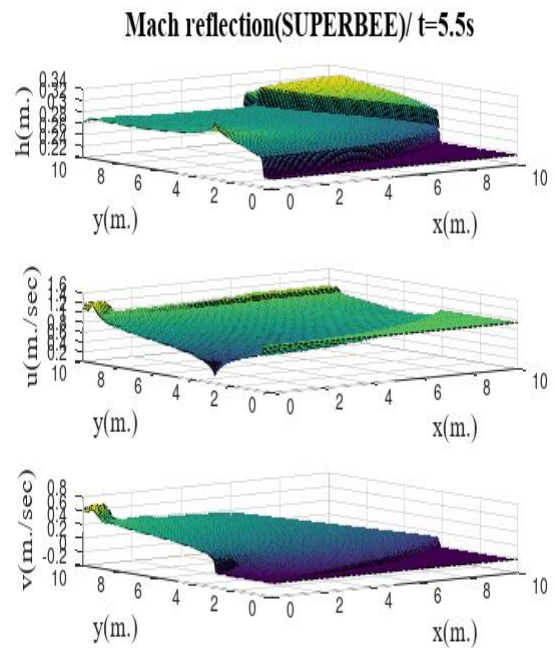
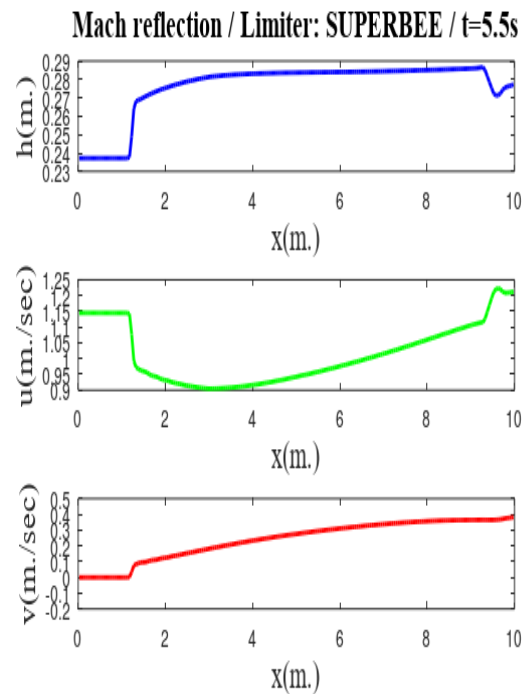
Σχήμα 9.16: Ανάκλαση Mach: βάθος h , ταχύτητα u και ταχύτητα v , τη χρονική στιγμή $t = 1.5 sec$, για γωνία 25°



Σχήμα 9.17 Ανάκλαση Mach: βάθος h , ταχύτητα u και ταχύτητα v , τη χρονική στιγμή $t = 2.5 sec$, για γωνία 25°



Σχήμα 9.18 Ανάκλαση Mach: βάθος h , ταχύτητα u και ταχύτητα v , τη χρονική στιγμή $t = 3.5 \text{ sec}$, για γωνία 25°



Σχήμα 9.19: Ανάκλαση Mach: βάθος h , ταχύτητα u και ταχύτητα v , τη χρονική στιγμή $t = 5.5 \text{ sec}$, για γωνία 25°

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Στην παρούσα εργασία ασχοληθήκαμε με τις εξισώσεις ρηχών υδάτων που είναι ένα σύστημα μη-γραμμικών μερικών διαφορικών εξισώσεων εξαρτώμενων από το χρόνο. Προέρχονται από κατάλληλες πράξεις στους νόμους διατήρησης της μάζας της ορμής, όπως παρουσιάσαμε αναλυτικά στο Κεφάλαιο 2 και μελετήσαμε τις ιδιότητες τους στο Κεφάλαιο 3. Ένα σημαντικό πρόβλημα που σχετίζεται με τις εξισώσεις ρηχών υδάτων είναι η πτώση φράγματος. Σημαντική για την καταλληλότητα των αριθμητικών μεθόδων που επιλύουν αυτό το πρόβλημα και την ακρίβεια των αποτελεσμάτων που μας δίνουν είναι η γνώση της αναλυτικής λύσης των εξισώσεων. Για αυτό γίνεται εκτενή αναφορά στο πρόβλημα κατάρρευσης φράγματος και την αναλυτική λύση του στα Κεφάλαια 4 και 5, αντίστοιχα.

Η χρήση συντηρητικών ή πρωταρχικών μεταβλητών οδηγεί σε συντηρητικές ή μη-συντηρητικές αριθμητικές μεθόδους, αντίστοιχα. Οι μη-συντηρητικές μέθοδοι οδηγούν σε σφάλματα κατά τον υπολογισμό του πλάτους ή της ταχύτητας των κυμάτων τύπου shock, που είναι μη-συνεχείς λύσεις. Αυτό συμβαίνει γιατί διαφορετικές αρχικές συνθήκες μπορεί να οδηγήσουν στην ίδια τελική κατάσταση όταν η ροή είναι ασυνεχής. Οι μέθοδοι που μελετάμε βασίζονται στη μέθοδο Godunov, που είναι μια συντηρητική, πρώτης τάξης ακρίβειας, upwind μέθοδος πεπερασμένων όγκων. Σύμφωνα με τη μέθοδο Godunov χωρίζουμε το χώρο σε πεπερασμένους όγκους, που ονομάζονται κελιά, και σε κάθε μέτωπο μεταξύ των κελιών ορίζουμε ένα πρόβλημα Riemann. Η πραγματική κατανομή των συνιστωσών της μεταβλητής U σε κάθε κελί δεν είναι γνωστή, ούτε είναι απαραίτητο να είναι συνεχής. Θεωρούμε ότι η U , της οποίας οι συνιστώσες είναι συντηρητικές μεταβλητές, έχει σταθερή τιμή σε κάθε κελί. Λύνουμε το πρόβλημα Riemann και υπολογίζουμε τις ροές στα μέτωπα των κελιών. Τέλος, ο υπολογισμός της U το επόμενο χρονικό βήμα γίνεται μέσω των ροών που υπολογίσαμε.

Με τη μέθοδο Godunov ασχοληθήκαμε στο Κεφάλαιο 6. Στο Κεφάλαιο 7 αναφέραμε προβλήματα που σχετίζονται με τις εξισώσεις ρηχών υδάτων, καθένα από αυτά παρουσίαζε κάποια ιδιαιτερότητα, και τα επιλύσαμε αναλυτικά. Οι αναλυτικές λύσεις χρησιμοποιήθηκαν για να μελετήσουμε τα αποτελέσματα που μας δίνουν οι διάφορες αριθμητικές μέθοδοι για τα προβλήματα του Κεφαλαίου 7.

Μεγαλύτερης τάξης ακρίβειας upwind μέθοδοι διαφέρουν από τη μέθοδο Godunov μόνο στην κατανομή που έχει η μεταβλητή U σε κάθε κελί και επομένως στον προσδιορισμό του αντίστοιχου προβλήματος Riemann. Για παράδειγμα, στη μέθοδο MUSCL θεωρούμε ότι η U είναι κατά τόπους γραμμική. Αν θεωρήσουμε ότι η U σε κάθε κελί δεν έχει σταθερή τιμή, αλλά προσεγγίζεται από ένα μεγαλύτερης τάξης πολώνυμο, τότε δημιουργούνται ταλαντώσεις στην αριθμητική λύση, που μπορεί να οδηγήσουν σε αριθμητική αστάθεια.

Επιλύσαμε τα προβλήματα του Κεφαλαίου 7, με upwind αλλά και κεντρικές μεθόδους, πρώτης και δεύτερης τάξης στο Κεφάλαιο 8. Παρατηρήσαμε ότι για κάποια από προβλήματα οι αριθμητικές μέθοδοι δεύτερης τάξης δεν μας δίνουν αποτελέσματα, όπως και ότι δεν παίρνουμε την επιθυμητή σύγκλιση λόγω της ιδιαιτερότητάς τους. Επίσης, είδαμε ότι η εύρεση των ασυνεχειών επαφής είναι πιο δύσκολη από την εύρεση κυμάτων shock, καθώς και ότι οι upwind μέθοδοι δίνουν πιο ακριβή αποτελέσματα σε σχέση με τις κεντρικές μεθόδους και αυτό γίνεται πιο εμφανές όταν οι ασυνέχειες επαφής κινούνται αργά σε σχέση με το πλέγμα. Καθώς η ταχύτητα του κύματος επαφής τείνει στο μηδέν τα αποτελέσματα των κεντρικών μεθόδων χειροτερεύουν, και αυτή είναι η χειρότερη περίπτωση για τις κεντρικές μεθόδους, σε αντίθεση με τις upwind μεθόδους που τα αποτελέσματα σε αυτήν την περίπτωση βελτιώνονται. Τέλος, να σημειώσουμε ότι αν χρησιμοποιήσουμε ένα «ελαττωματικό» επιλυτή Riemann στις upwind μεθόδους, τότε η ιδιότητα που έχουν να αναγνωρίζουν με ακρίβεια τις ασυνέχειες επαφής χάνεται και τα αποτελέσματα είναι παρόμοια με αυτά των κεντρικών μεθόδων. Τέλος, όσο αφορά τις κεντρικές μεθόδους η δεύτερης τάξεως ακρίβειας TVD-SLIC δίνει καλύτερα αποτελέσματα από την πρώτης τάξεως ακρίβειας FORCE.

Επικεντρωθήκαμε στην επίλυση, αναλυτική και αριθμητική, προβλημάτων που χαρακτηρίζονται από ομογενή συστήματα, δηλαδή προβλήματα στα οποία ο πηγαίος όρος ισούται με το μηδέν. Το ομογενές σύστημα των εξισώσεων ρηχών υδάτων μπορεί να επεκταθεί και σε πιο πολύπλοκες εφαρμογές που απαιτούν τη δημιουργία επιπλέον μερικών διαφορικών εξισώσεων ή εξισώσεων όπου ο πηγαίος όρος είναι μη μηδενικός. Για παράδειγμα, όταν μοντελοποιούμε προβλήματα μεταφοράς αποβλήτων ή όταν έχουμε μεταβλητή τοπογραφία του πυθμένα. Πιο εξελιγμένες μέθοδοι, με τις οποίες δεν ασχοληθήκαμε, είναι οι UNO, ENO και WENO, οι οποίες επιτυγχάνουν πολύ μεγάλης τάξης ακρίβεια και αποφεύγουν τις ταλαντώσεις κοντά στα κύματα shock και σε άλλες ασυνέχειες.

Τέλος, στο Κεφάλαιο 9 αναφερθήκαμε στις εξισώσεις ρηχών υδάτων στις δύο διαστάσεις. Ασχοληθήκαμε με το πρόβλημα της πτώσης ενός ιδανικού κυκλικού φράγματος σε δύο διαστάσεις, που ενώ αποτελεί μια απλοποιημένη εκδοχή πραγματικών γεγονότων, περιλαμβάνει τα βασικά στοιχεία της αριθμητικής προσομοίωσης τους. Η κυλινδρική συμμετρία δίνει ένα μη-ομογενές, μονοδιάστατο, σύστημα στην κατεύθυνση της ακτίνας, με πηγαίους όρους που αφορούν τη γεωμετρία του προβλήματος. Μελετήσαμε το πρόβλημα καθώς εξελίσσεται ο χρόνος χρησιμοποιώντας τη μέθοδο WAF με οριοθέτη SUPERBEE. Αυτό το πρόβλημα θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί ως παράδειγμα σύγκρισης για όλες τις αριθμητικές μεθόδους που έχουν σκοπό την επίλυση ρεαλιστικών προβλημάτων κατάρρευσης φράγματος. Το δεύτερο πρόβλημα που αναφέρουμε αφορά τα μετωπικά κύματα τα οποία προκύπτουν όταν ένα κύμα ανακλάται σε ένα στέρεο κάθετο τοίχωμα. Εξετάσαμε την εξέλιξη του προβλήματος στο χρόνο στην περίπτωση που έχουμε ένα κανονικό κύμα ανάκλασης και στην περίπτωση που έχουμε μια ανάκλαση Mach, η οποία επίσης υπάρχει και σε άλλα προβλήματα ρηχών υδάτων, όπως η ροή θραυσμάτων. Η μελέτη των μετωπικών κυμάτων είναι σημαντική στην ακτομηχανική και την υδροτεχνική μηχανική.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- [1] R. Abgrall. How to prevent pressure oscillations in multicomponent flow calculations: A quasiconservative approach. *J. Comput. Phys.*, 125: 150-160, 1996.
- [2] A. J. Chorin. Random choice solutions of hyperbolic systems. *J. Comput. Phys.*, 22: 517-533, 1976
- [3] J.A. Cunge, F.M. Holly and A.Verwey. Practical aspects of computational river hydraulics. Pitman Publishing, Ltd. Reprinted by the University of Iowa, 1994.
- [4] L. Fraccarollo and E.F. Toro. A shock-capturing method for the dimensional dam-break problems. *Proceedings of the Fifth international symposium in computational fluid dynamics*, Sendai, Japan, 1993.
- [5] L. Fraccarollo and E.F. Toro. Experimental and numerical assessment of the shallow water model for two dimensional dam brak type problems. *Journal of Hydraulic Research*, 33: 843 - 846, 1995.
- [6] P.Garcia-Navarro. Dam break flow simulation in numerical modelling of hydrodynamical systems. Garcia-Navarro, P. and Playan, E. (editors), pages 27-56, University of Zaragoza, Spain, 1999.
- [7] J. Glimm. Solution in the large for nonlinear hyperbolic systems of equations. *Comm. Pure. Appl. Math.*, 18: 697-715, 1965.
- [8] E. Godlewski and P.A Raviart. Numerical approximation of hyperbolic systems of conservation laws. Springer, 1996.
- [9] S.K. Godunov. Finite difference methods for the computation of discontinuous solutions of the equations of fluid dynamics. *Mat. SB.*, 47:271-306, 1959.
- [10] V. Guinot. Godunov-type Schemes: An introduction for engineers. Elsevier Science B.V. , 2003
- [11] A. Harten. High resolution schemes for hyperbolic conservation laws. *Journal of Computational Physics*.49: 1, 1983
- [12] A. Harten, P.D. Lax and B. Van Leer. On upstream differencing and Godunov-type schemes for hyperbolic conservation laws. *SIAM Review*, 25(1): 35-61, 1983.
- [13] C. Hirsch. Numerical computation of internal and external flows. Vol. I: Fundamentals of Numerical Discretization. Wiley, 1988.

- [14] K.A. Hoffmann. Computational fluid dynamics for engineers. Engineering Education Systems, Austin, Texas, USA, 1989.
- [15] T.Y. Hou and LeFloch P. Why non-conservative schemes converge to the wrong solutions: Error analysis. Math. Of Comput., 62: 497-530, 1994.
- [16] A. Jeffrey. Quasilinear hyperbolic systems and waves. Pitman, 1976.
- [17] S. Karni. Multicomponent flow calculations using a consistent primitive algorithm. J. Comput. Phys., 112 (1): 31-43, 1994.
- [18] S. Karni. Hybrid multifluid algorithms. Techical Report 95-001, Courant Mathematics and Computing Laboratory, 1995.
- [19] P.D. Lax and B. Wendroff. Systems of conservation laws. Comm. Pure Appl. Math., 13:217-237, 1960.
- [20] R.J. LeVeque. Balancing source terms and flux gradients in high-resolution Godunov methods. J. Comput. Phys. 146:346-365, 1998
- [21] R.J. LeVeque. Numerical methods for conservation laws. Birkhauser - Verlag, 1992.
- [22] J. Lighthil. Waves in Fluids. Cambridge University Press, 1978.
- [23] J.D. Logan. An introduction to nonlinear partial differential equations. John Wiley and Sons, 1994.
- [24] E. Marshall and R. Mendez. Computational aspects of the Random Choice Method for Shallow Water Equations. J. Comput. Phys., 39:1-21, 1981
- [25] G. Moretti and G. Bleich. A time-dependent computational method for blunt-body flows. AIAA J., 4:2136-2141, 1966.
- [26] G. Moretti. Computation of flows with strong shocks. Ann. Rev. Fluid Mech. 19: 3131-337, 1987.
- [27] J.A. Roberson, J.J. Cassidy and M.H. Chaudhry. Hydraulic Engineering. Houghton Mifflin Company, Boston, 1988
- [28] J.J. Stoker. Water waves. The mathematical theory with applications. John Wiley and Sons, 1992
- [29] G. Strang. On the construction and comparison difference schemes. SIAM, J. Numer. Anal., 5(3): 506-517, 1968.

- [30] E.F. Toro. Riemann solvers and numerical methods for fluid dynamics. Springer-Verlag, 1997
- [31] E.F. Toro. Riemann solvers and numerical methods for fluid dynamics, Second Edition, Springer-Verlag, 1999.
- [32] E. F. Toro. Riemann problems and the WAF method for solving two-dimensional shallow water equations. Phil. Trans. Roy. Soc., London, A338: 43-68, 1992
- [33] E.F. Toro. Defects of conservative approaches and adaptive primitive-conservative schemes for computing solutions to hyperbolic conservation laws. Technical Report MMU 9401, Department of Mathematics and Physics. Manchester Metropolitan University, UK, 1994.
- [34] E.F. Toro. On adaptive primitive conservative schemes for conservation laws. In M.M. Hafez, editor, Sixth International Symposium on Computational Fluid Dynamics: A Collection of Technical Papers, volume 3, pages 1288-1293, Lake Tahoe, Nevada, USA, 1995
- [35] E.F. Toro. MUSCL-type primitive variable schemes. Technical Report MMC-9501, Department of Mathematics and Physics, Manchester Metropolitan University, UK, 1995.
- [36] E.F. Toro. Primitive conservative and adaptive schemes for hyperbolic conservation Laws. in numerical methods for wave propagation. Toro, E.F. and Clarke, J.F. (Editors, pages 323-385. Kluwer Academic Publishers, 1998.
- [37] E.F. Toro. On Glimm-related schemes for conservation laws. Technical report MMU 9602, Department of Mathematics and Physics. Manchester Metropolitan University, UK, 1996.
- [38] E.F. Toro. Shock-capturing methods for free-surface shallow flows. John Wiley and Sons, LTD, 2001
- [39] E.F. Toro, M. Spruce and W. Speares. Restoration of the contact surface in the HLL Riemann solver. Shock Waves, 4: 25-34, 1994.
- [40] E.F. Toro and S.J. Billett. Centred TVD schemes for hyperbolic conservation laws. IMA J. Numerical Analysis, 20: 47-79, 2000.
- [41] B. Van Leer. On the relation between the upwind differencing Schemes of Godunov, Eugui Osher and Roe. SIAM J. Sci. Stat. Computa. 5(1): 1-20, 1985.
- [42] M. E. Vasquez-Cendon. Solving hyperbolic equations with finite volume methods. Springer Int. Publ. Switzerland, 2015.
- [43] R.F. Warming and R.W. Beam. Upwind second order difference schemes with applications in aerodynamics flows. AIAA Journal, 21: 1241-1249, 1976.

[44] E.C. Zachmanoglou and D.W. Thoe. Introduction to partial differential equations. Dover Publications. Inc. New York, 1986

[45] Website: https://en.wikipedia.org/wiki/Shallow_water_equations

[46] Website: https://www.coastalwiki.org/wiki/Dam_break_flow

[47] Website: https://en.wikipedia.org/wiki/Mach_reflection