

Πολυτεχνείο Κρήτης
Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών
Τομέας Τηλεπικοινωνιών



**Μελέτη της κατανομής καθυστερήσεων των πακέτων σε πρωτόκολλα
πολλαπλής τυχαίας προσπέλασης καναλιού**

**Evaluation of packet delay distribution in random multiple channel access
protocols**

Διπλωματική Εργασία
Παντελεήμων Νικολακάκης
Χανιά, Δεκέμβριος 2021

Εξεταστική επιτροπή:

1. Καθ. Μ. Πατεράκης (επιβλέπων)
2. Καθ. Α. Λιάβας
3. Καθ. Α. Μπλέτσας

Περίληψη

Στόχος της διπλωματικής εργασίας είναι η μελέτη αντιπροσωπευτικών πρωτοκόλλων τυχαίας πολλαπλής πρόσβασης με ελεύθερη ή μη πρώτη μετάδοση νέου πακέτου από τους χρήστες και η σύγκρισή τους προκειμένου να προκύψουν χρήσιμα συμπεράσματα σχετικά με την αποδοτικότητα της λειτουργίας τους. Η σύγκριση αυτή αφορά στο μέγιστο throughput κάθε πρωτοκόλλου και στην συμπεριφορά τόσο της μέσης τιμής, όσο και της αθροιστικής συνάρτησης κατανομής της καθυστέρησης πακέτου. Τα πρωτόκολλα που μελετήθηκαν και προσομοιώθηκαν περιλαμβάνουν το ασταθές, το ιδανικό ευσταθές και το υλοποιήσιμο ευσταθές Aloha, καθώς και τους ευσταθείς αλγορίθμους στοίβας, τον m-ary και τον Two-cell.

Abstract

The goal of the Thesis is the study of various random multiple access protocols with free or blocked first transmission by the users and their comparison in order to draw useful conclusions about the efficiency of their operation. This comparison concerns the maximum throughput of each protocol and the behavior of both the mean packet delay and the cumulative distribution function of the packet delay. The protocols studied via simulation include the unstable, ideal stable and implementable stable Aloha and the stable algorithms m-ary stack and Two-cell stack.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Εισαγωγή	6
Κεφάλαιο 1. Στοχαστικές διαδικασίες αφίξεων	7
Κεφάλαιο 2. Στοχαστική διαδικασία(σ.δ.) αφίξεων Poisson	9
2.1 1ος ορισμός της σ.δ. Poisson	9
2.2 Στασιμότητα και ανεξαρτησία των αφίξεων	9
2.3 Κατανομή του αριθμού αφίξεων μιας διαδικασίας Poisson, μέση τιμή και διασπορά	10
2.4 Ανεξάρτητες και στάσιμες αυξήσεις	11
2.5 2ος ισοδύναμος ορισμός της σ.δ. Poisson	11
2.5.1 Ομοιόμορφη κατανομή των χρόνων των αφίξεων	12
2.6 Χρόνοι αφίξεων	12
2.6.1 Αθροιστική κατανομή χρόνου διαδοχικών αφίξεων και ανεξαρτησία από προϊστορία	12
2.6.2 Κατανομή του χρόνου μεταξύ διαδοχικών αφίξεων, μέση τιμή και διασπορά	12
2.6.3 Έλλειψη μνήμης εκθετικής κατανομής	13
2.6.4 Σχέση μεταξύ αριθμού αφίξεων και χρόνου αφίξεων:	13
2.6.5 3ος ισοδύναμος ορισμός της σ.δ. Poisson	14
2.6.6 Μέση τιμή και διασπορά του χρόνου της n-οστής άφιξης	14
2.6.7 Σκοπιμότητα χρήσης της Poisson σ.δ. αφίξεων στην μοντελοποίηση της διαδικασίας αφίξεων σε δίκτυα πολλαπλής πρόσβασης	14
Κεφάλαιο 3. Το slotted Aloha πρωτόκολλο	16
3.1 Τρόπος λειτουργίας του πρωτόκολλου πολλαπλής πρόσβασης slotted Aloha του δικτύου	16
3.2 Κατανομή αφίξεων και αναχωρήσεων πακέτων	17
3.3 Χρονικές στιγμές αφίξεων πακέτων από Poisson στοχαστική διαδικασία	17
3.4 Ανάλυση throughput του πρωτόκολλου	17
3.5 Προσέγγιση της λειτουργίας του πρωτοκόλλου του Aloha μέσω αλυσίδας Markov	19
3.6 Αστάθεια του πρωτοκόλλου slotted Aloha	21
3.7 Σταθεροποιώντας το πρωτόκολλο slotted Aloha	23
3.7.1 Pseudo-Bayesian αλγόριθμος για σταθεροποίηση(stabilization) του πρωτοκόλλου slotted Aloha	23
3.8 Προσομοίωση πρωτοκόλλου πολλαπλής πρόσβασης slotted Aloha	25

3.8.1 Προσομοίωση ιδανικού ελεγχόμενου slotted Aloha.....	26
3.8.1.1 Επιλογή της βέλτιστης πιθανότητας q , επαναμετάδοσης των μπλοκαρισμένων πακέτων	26
3.8.1.2 Σενάρια επιτυχημένων μεταδόσεων.....	26
3.8.1.3 Σενάρια συγκρούσεων	27
3.8.1.4 Πίνακας αποτελεσμάτων προσομοίωσης	27
3.8.1.5 Σχολιασμός αποτελεσμάτων προσομοίωσης	28
3.8.1.6 Γραφικές παραστάσεις αθροιστικής συνάρτησης κατανομής της καθυστέρησης πακέτου.....	29
3.8.1.7 Γραφική παράσταση των μέσων καθυστερήσεων πακέτων για διαφορετικές τιμές του λ	30
3.8.2 Προσομοίωση του υλοποιήσιμου ελεγχόμενου slotted Aloha πρωτοκόλλου	30
3.8.2.1 Αποτελέσματα προσομοίωσης	31
3.8.2.2 Σχολιασμός αποτελεσμάτων	31
3.8.2.3 Γραφικές παραστάσεις αθροιστικής συνάρτησης κατανομής της καθυστέρησης πακέτου.....	32
3.8.2.4 Γραφική μέσων καθυστερήσεων πακέτων για κάθε λ	32
3.9 Σύγκριση ιδανικού με υλοποιήσιμο ελεγχόμενο slotted Aloha.....	33
3.9.1 Συγκρίσεις αθροιστικών συναρτήσεων πυκνότητας πιθανότητας τυχαίας μεταβλητής D	33
3.9.2 Συγκρίσεις γραφικών παραστάσεων μέσων καθυστερήσεων πακέτων	37
3.9.3 Σχολιασμός συγκρίσεων και συμπεράσματα	37
Κεφάλαιο 4. Ο m-ary αλγόριθμος στοίβας για επίλυση συγκρούσεων	39
4.1 Ομοιότητες με το Aloha πρωτόκολλο και ρυθμός αφίξεων πακέτων στο σύστημα.....	39
4.2 Περιγραφή αλγορίθμου	39
4.3 Κανόνες μεταβολής της στοίβας στον χρόνο.....	40
4.4 Πίνακες αποτελεσμάτων για διάφορες τιμές του m	42
4.5 Σχολιασμός αποτελεσμάτων και εκτίμηση μέγιστου throughput	43
4.6 Αθροιστική συνάρτηση κατανομής της καθυστέρησης πακέτου για πακτωμένα m και μεταβαλλόμενα λ	44
4.7 Σύγκριση $m=2$, $m=3$, $m=5$	46
4.7.1 Σύγκριση αθροιστικής συνάρτησης κατανομής της καθυστέρησης πακέτων για πακτωμένες τιμές του λ και μεταβαλλόμενο m	46
4.7.2 Σύγκριση μέσων καθυστερήσεων πακέτων για $m=2, m=3, m=5$	52
4.8 Συμπεράσματα και κατάλληλη τιμή της παραμέτρου m	52
Κεφάλαιο 5. Ομοιότητες και διαφορές ανάμεσα σε m-ary αλγόριθμο στοίβας και ευσταθές slotted Aloha πρωτόκολλο, ποιο είναι το επικρατέστερο	53

5.1 Σύγκριση αθροιστικής συνάρτησης κατανομής της καθυστέρησης πακέτων ανάμεσα σε m -ary($m=3$) αλγόριθμο στοίβας και slotted Aloha	55
5.2 Σύγκριση μέσων καθυστερήσεων πακέτων ανάμεσα σε m -ary($m=3$) αλγόριθμο στοίβας και slotted Aloha	59
Κεφάλαιο 6. Two-cell stack algorithm	60
6.1 Αφίξεις πακέτων στο σύστημα.....	60
6.2 Περιγραφή αλγορίθμου	60
6.3 Κανόνες ανανέωσης τιμών counter.....	62
6.4 Μελέτη CRI και σηματοδότηση του τέλους του.....	62
6.5 Ανάλυση του throughput, κατάλληλο μήκος παραθύρου και κατάλληλη επιλογή πιθανότητας επαναμετάδοσης στο επόμενο slot	63
6.6 Παρουσίαση και σχολιασμός αποτελεσμάτων προσομοίωσης αλγορίθμου	65
6.7 Αθροιστικές συναρτήσεις κατανομής καθυστέρησης πακέτων για κάθε λ	66
6.8 Καμπύλη μέσης καθυστέρησης πακέτου για κάθε λ	67
Συμπεράσματα	68
Βιβλιογραφία	69

Στόχος της διπλωματικής εργασίας είναι η μελέτη αντιπροσωπευτικών πρωτοκόλλων τυχαίας πολλαπλής πρόσβασης με ελεύθερη ή μη πρώτη μετάδοση νέου πακέτου από τους χρήστες και η σύγκρισή τους προκειμένου να προκύψουν χρήσιμα συμπεράσματα σχετικά με την αποδοτικότητα της λειτουργίας τους. Η σύγκριση αυτή αφορά στο μέγιστο throughput κάθε πρωτοκόλλου και στην συμπεριφορά τόσο της μέσης τιμής, όσο και της αθροιστικής συνάρτησης κατανομής της καθυστέρησης πακέτου.

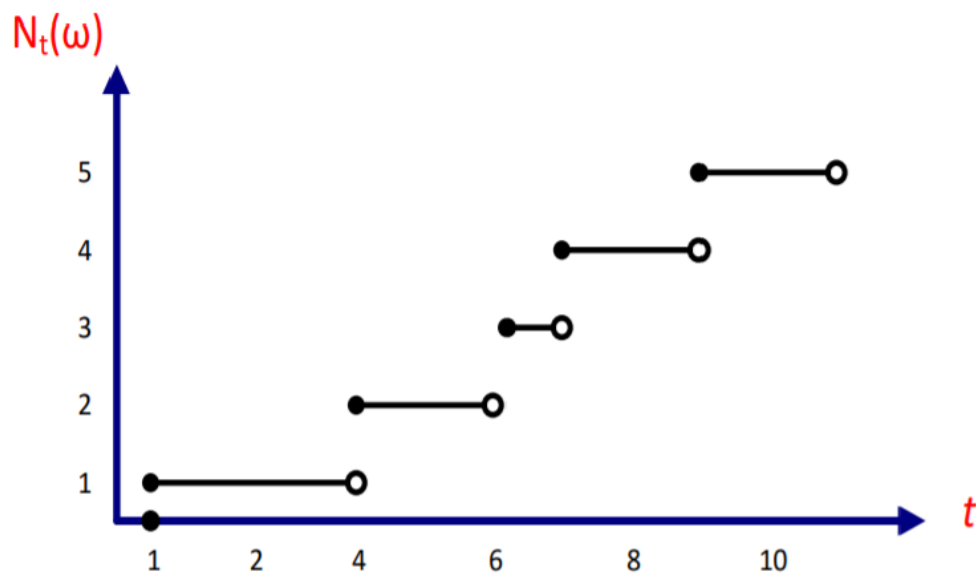
Στο κεφάλαιο 1 παρουσιάζονται βασικά χαρακτηριστικά των στοχαστικών διαδικασιών αφίξεων, ώστε στην συνέχεια στο κεφάλαιο 2 να δοθεί έμφαση στην συγκεκριμένη στοχαστική διαδικασία αφίξεων που θα μας απασχολήσει στην διπλωματική, την Poisson σ.δ. Έπειτα, στο κεφάλαιο 3 παρουσιάζεται το πρώτο πρωτόκολλο πολλαπλής πρόσβασης με το οποίο ασχοληθήκαμε, με ελεύθερη άμεση πρόσβαση για τα νέα πακέτα, το slotted Aloha, και οι διάφορες εκδοχές του(ασταθές, ιδανικό ευσταθές και υλοποιήσιμο ευσταθές), καθώς και οι συγκρίσεις των εκδοχών αυτών βάσει της μελέτης των μετρικών απόδοσης(throughput, μέση τιμή και αθροιστική συνάρτηση κατανομής της καθυστέρησης πακέτου). Στο κεφάλαιο 4 παρουσιάζεται ένας ακόμη αλγόριθμος πολλαπλής πρόσβασης με ελεύθερη άμεση πρόσβαση για τα νέα πακέτα, ο m-ary αλγόριθμος στοίβας. Μέσω προσομοίωσης της λειτουργίας του m-ary αλγορίθμου στοίβας, εξάγονται συμπεράσματα για την πιο αποδοτική εκδοχή του(κατάλληλη τιμή του m). Στο κεφάλαιο 5 συγκρίνουμε τις ομοιότητες και τις διαφορές του m-ary αλγορίθμου στοίβας με το ήδη μελετημένο στο κεφάλαιο 3 πρωτόκολλο slotted Aloha, προκειμένου μέσω των συγκρίσεων των μετρικών απόδοσης να καταλήξουμε στο επικρατέστερο πρωτόκολλο πολλαπλής πρόσβασης με ελεύθερη άμεση πρόσβαση για τα νέα πακέτα. Τέλος, στο κεφάλαιο 6 παρουσιάζεται και μελετάται ένας blocked-access αλγόριθμος, ο Two-cell stack. Στόχος είναι η μελέτη της απόδοσης ενός τέτοιου αλγορίθμου, του οποίου η λειτουργία διαφέρει σημαντικά από τους free-access αλγορίθμους που παρουσιάστηκαν και μελετήθηκαν νωρίτερα. Η εργασία κλείνει με μια σύντομη παράγραφο με τα συμπεράσματα

Κεφάλαιο 1. Στοχαστικές διαδικασίες αφίξεων

Ξεκινάμε ορίζοντας την στοχαστική διαδικασία αφίξεων. Θεωρούμε έναν δειγματικό χώρο Ω , πάνω στον οποίο είναι ορισμένη μια συνάρτηση μέτρου πιθανότητας. Ως διαδικασία αφίξεων, ορίζουμε μια στοχαστική διαδικασία $N=\{N_t; t \geq 0\}$ συνεχούς χρόνου, τέτοια ώστε για κάθε $\omega \in \Omega$, η συνάρτηση $N_t(\omega)$, η οποία για δεδομένο ω είναι συνάρτηση του χρόνου, να παρουσιάζει τα ακόλουθα χαρακτηριστικά:

- α) Είναι μη φθίνουσα
- β) Αυξάνει μόνο με άλματα
- γ) Είναι συνεχής από τα δεξιά
- δ) Για κάθε $\omega \in \Omega$, $N_0(\omega) = 0$.

Για δεδομένη τιμή του χρόνου t , το N_t είναι μια τυχαία μεταβλητή, η οποία αντιστοιχεί στον αριθμό των αφίξεων στο κλειστό διάστημα $[0, t]$.



Εικόνα 1: Η συνάρτηση $N_t(\omega)$ για την συγκεκριμένη υλοποίηση της διαδικασίας ω , για την οποία οι χρονικές στιγμές των αφίξεων είναι $T_1=1, T_2=4, T_3=6, T_4=7, T_5=9$

Στο συγκεκριμένο παράδειγμα (βλέπε Εικόνα 1), παρατηρούνται τα χαρακτηριστικά της στοχαστικής διαδικασίας αφίξεων που παρουσιάστηκαν παραπάνω. Είναι μία κλιμακωτή, μη φθίνουσα συνάρτηση, συνεχής από τα δεξιά, αλλά όχι από τα αριστερά. Παρατηρείστε ότι για κάθε t στο διάστημα $[1,4)$, το N_t ισούται με 1. Την χρονική στιγμή 4 έρχεται η 2η άφιξη και συνεπώς για κάθε t στο $[4,6)$, το N_t ισούται με 2, κ.ο.κ.

2.1 1ος ορισμός της σ.δ. Poisson

Μία διαδικασία αφίξεων $N=\{N_t; t \geq 0\}$ ονομάζεται διαδικασία Poisson, όταν ισχύουν τα παρακάτω αξιώματα:

- Για όλα τα ω , κάθε άλμα $t \rightarrow N_t(\omega)$ έχει μοναδιαίο μέγεθος. Αυτό υποδηλώνει ότι οι αφίξεις συμβαίνουν μία-μία.
- Για κάθε $t, s \geq 0$, η $N_{t+s}-N_t$ είναι ανεξάρτητη της συλλογής $\{N_u; u \leq t\}$. Για σταθεροποιημένα t και s , οι N_t και N_{t+s} είναι τυχαίες μεταβλητές που συμβολίζουν τον αριθμό αφίξεων στα διαστήματα $[0, t]$ και $[0, t+s]$ αντίστοιχα. Συνεπώς, και η $N_{t+s}-N_t$ είναι τυχαία μεταβλητή που συμβολίζει τον αριθμό αφίξεων στο $(t, t+s]$, διάστημα μήκους s . Ο αριθμός αφίξεων στο διάστημα αυτό είναι ανεξάρτητος από όλες τις τυχαίες μεταβλητές $\{N_u; u \leq t\}$, δηλαδή από όλες τις αφίξεις που συνέβησαν αριστερά και πάνω στο t . Ουσιαστικά, η τυχαία μεταβλητή $N_{t+s}-N_t$ που παρέχει πληροφορία σχετικά με τον αριθμό των αφίξεων στο μέλλον μετά την χρονική στιγμή t , δηλαδή στο επόμενο χρονικό διάστημα μήκους s που ξεκινάει δεξιά του t , είναι ανεξάρτητη του αριθμού αφίξεων στο $[0, t]$. Η προϊστορία της διαδικασίας δεν επηρεάζει το μέλλον της.
- Για κάθε $t, s \geq 0$, η κατανομή της $N_{t+s}-N_t$ είναι ανεξάρτητη του t και εξαρτάται μόνο από το s . Συνεπώς, η πιθανότητα σε ένα διάστημα μήκους s να έχουμε k αφίξεις, είναι η ίδια για οποιοδήποτε διάστημα μήκους s πάνω στον θετικό ημιάξονα των χρόνων. Επομένως, οι αφίξεις χαρακτηρίζονται από στασιμότητα.

2.2 Στασιμότητα και ανεξαρτησία των αφίξεων

Από το β του αξιωματικού ορισμού της στοχαστικής διαδικασίας Poisson, προκύπτει ότι η τ.μ $N_{t+s}-N_t$ είναι ανεξάρτητη των $N_{t_1}, N_{t_2}, \dots, N_{t_n}$ για $t_1, t_2, \dots, t_n \leq t$. Η γνώση των $N_{t_1}, N_{t_2}, \dots, N_{t_n}$ ισοδυναμεί με την γνώση των $N_{t_1}, N_{t_2}-N_{t_1}, \dots, N_{t_n}-N_{t_{n-1}}$ για $t_1, t_2, \dots, t_n \leq t$. Συνεπώς, η τ.μ $N_{t+s}-N_t$ είναι ανεξάρτητη των $N_{t_1}, N_{t_2}-N_{t_1}, \dots, N_{t_n}-N_{t_{n-1}}$ για $t_1, t_2, \dots, t_n \leq t$. Επιλέγοντας $t_1 < t_2 < \dots < t_n$ και επαναλαμβάνοντας, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι οι τ.μ $N_{t_1}, N_{t_2}-$

$N_{t1}, \dots, N_{tn} - N_{tn-1}$ είναι ανεξάρτητες. Συνεπώς, σε μια διαδικασία Poisson οι αριθμοί των αφίξεων σε ξένα μεταξύ τους χρονικά διαστήματα είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές.

Το αξίωμα γ του ορισμού της Poisson δίνει την ιδιότητα της στασιμότητας.

2.3 Κατανομή του αριθμού αφίξεων μιας διαδικασίας Poisson, μέση τιμή και διασπορά

Αν η $\{N_t; t \geq 0\}$ είναι διαδικασία Poisson, τότε για κάθε $t \geq 0$:

$$P\{N_t = k\} = e^{-\lambda t} \cdot \frac{(\lambda t)^k}{k!}, k = 0, 1, 2, \dots \text{για κάποια σταθερά } \lambda$$

Όπου k , ο αριθμός αφίξεων στο $[0, t]$

$$\begin{aligned} E[N_t] &= \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot P\{N_t = k\} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot e^{-\lambda t} \cdot \frac{(\lambda t)^k}{k!} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot e^{-\lambda t} \cdot \frac{(\lambda t)^k}{k(k-1)!} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\lambda t} \cdot \frac{(\lambda t)^k}{(k-1)!} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} e^{-\lambda t} \cdot \frac{(\lambda t)^{j+1}}{j!} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} e^{-\lambda t} \cdot \frac{(\lambda t)^j \cdot (\lambda t)}{j!} = \lambda t \cdot \sum_{j=0}^{\infty} e^{-\lambda t} \cdot \frac{(\lambda t)^j}{j!} = \lambda \cdot t \cdot 1 = \lambda \cdot t \end{aligned}$$

Επομένως, $E[N_t] = \lambda t$, όπου λ ο ρυθμός αφίξεων και t το μήκος διαστήματος πάνω στο οποίο υπολογίσαμε τον αναμενόμενο αριθμό αφίξεων. Για $t=1$, δηλαδή για διάστημα μοναδιαίου μήκους (στο $[0, 1]$), ο μέσος αριθμός αφίξεων σε αυτό το διάστημα ισούται με $\lambda \cdot 1 = \lambda$. Επομένως, λ είναι ο αναμενόμενος αριθμός αφίξεων σε διάστημα μοναδιαίου μεγέθους, δηλαδή ο ρυθμός αφίξεων της στοχαστικής διαδικασίας Poisson. Συνεπώς, η

κατανομή της τ.μ. N_t , δηλαδή η κατανομή του αριθμού αφίξεων της διαδικασίας Poisson στο $[0,t]$, είναι Poisson με παράμετρο λt , για την οποία γνωρίζουμε ότι η διασπορά της ισούται με την μέση τιμή της. Επομένως, $E[N_t] = \text{Var}(N_t) = \lambda t$.

2.4 Ανεξάρτητες και στάσιμες αυξήσεις

Από τα αξιώματα β και γ, εξάγεται το συμπέρασμα ότι οι αυξήσεις (increments) της στοχαστικής διαδικασίας είναι ανεξάρτητες και στάσιμες.

Συνεπώς,

$$\begin{aligned} P\{N_{t+s} - N_t = k | N_u; u \leq t\} &= P\{N_{t+s} - N_t = k\} = P\{N_s - N_0 = k\} \\ &= P\{N_s = k\} = e^{-\lambda s} \cdot \frac{(\lambda s)^k}{k!}, k = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Η κατανομή του αριθμού αφίξεων στο $(t, t+s]$ δεδομένης της προϋστορίας της διαδικασίας, είναι ίδια με την αδέσμευτη κατανομή του αριθμού αφίξεων στο διάστημα αυτό μήκους s , δηλαδή ισούται με την πιθανότητα να έχουμε k αφίξεις σε ένα οποιοδήποτε διάστημα μήκους s . Το αποτέλεσμα είναι ανεξάρτητο της χρονικής στιγμής t και δίνεται από την κατανομή Poisson με παράμετρο λ επί το μήκος του διαστήματος.

2.5 2ος ισοδύναμος ορισμός της σ.δ. Poisson

Η N είναι μια στοχαστική διαδικασία Poisson με ρυθμό λ , αν και μόνο αν:

$P\{N_B = k\} = e^{-\lambda b} \cdot \frac{(\lambda b)^k}{k!}, k = 0, 1, 2, \dots$, για κάθε υποσύνολο B του R^+ το οποίο είναι ένωση ενός πεπερασμένου αριθμού ξένων διαστημάτων των οποίων το μήκος αθροίζει σε b .

Ως $N_B(\omega)$ συμβολίζεται εδώ ο αριθμός των αφίξεων που συμβαίνουν στο B για την υλοποίηση ω . Η γνώση του (άπειρης διάστασης διανύσματος) ω συνεπάγεται την γνώση των $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots$ κλπ, δηλαδή των χρονικών αποστάσεων μεταξύ των χρονικών στιγμών των διαδοχικών αφίξεων. Η πρώτη άφιξη έρχεται την χρονική στιγμή ω_1 , η δεύτερη την $\omega_1 + \omega_2$, κ.ο.κ. Συνεπώς, γνωρίζοντας το ω , έχουμε την υλοποίηση της διαδικασίας αφίξεων. Άρα, σε κάθε υποσύνολο B του μη αρνητικού ημιάξονα, το οποίο είναι ένωση ενός πεπερασμένου αριθμού ξένων διαστημάτων, μπορούμε να δούμε πόσες αφίξεις έχουμε σε κάθε ένα από αυτά τα διαστήματα και έτσι να βρούμε τον αριθμό αφίξεων στο υποσύνολο B .

2.5.1 Ομοιόμορφη κατανομή των χρόνων των αφίξεων

Κάτω από την υπόθεση ότι ο αριθμός αφίξεων σε ένα διάστημα $B=(t,t+b]$ είναι γνωστός και ίσος με k (δηλαδή $N_{t+b}-N_t=N_B=k$), αλλά οι χρόνοι των k αυτών αφίξεων είναι άγνωστοι, αποδεικνύεται ότι κάθε ένας από τους χρόνους των k αφίξεων έχει ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα B ανεξάρτητα από τις υπόλοιπες $k-1$ αφίξεις.

Το παραπάνω διευκολύνει την προσομοίωση των χρόνων των αφίξεων μιας στοχαστικής διαδικασίας Poisson πάνω σε ένα διάστημα $B=(t,t+b]$ του άξονα των χρόνων. Εάν η κατανομή Poisson μας δώσει k αφίξεις στο διάστημα B , απλά "τραβάμε" με ανεξάρτητο και ομοιόμορφο τρόπο k τυχαίους αριθμούς στο διάστημα $(t,t+b]$ και θεωρούμε ότι αυτοί οι αριθμοί αντιστοιχούν στους χρόνους άφιξης καθεμιάς εκ των k αφίξεων.

2.6 Χρόνοι αφίξεων

Έστω ότι η N είναι μία διαδικασία Poisson με ρυθμό λ . Με T_n , συμβολίζουμε την χρονική στιγμή της n -οστής άφιξης. Από σύμβαση, θέτουμε $T_0=0$.

2.6.1 Αθροιστική κατανομή χρόνου διαδοχικών αφίξεων και ανεξαρτησία από προϊστορία

Ισχύει για κάθε $n \geq 0$:

$$P\{T_{n+1}-T_n \leq t \mid T_0, T_1, \dots, T_n\} = 1 - e^{-\lambda t}, \quad t \geq 0$$

Συνεπώς, η τυχαία μεταβλητή $T_{n+1}-T_n$ είναι εκθετικά κατανεμημένη και ανεξάρτητη της προϊστορίας των χρονικών στιγμών των πρώτων n αφίξεων που συμβαίνουν στις χρονικές στιγμές $T_0, T_1, T_2, \dots, T_n$ (από σύμβαση $T_0 = 0$). Επίσης, η κατανομή της τυχαίας μεταβλητής $T_{n+1}-T_n$ είναι ανεξάρτητη του n , κάτι που υποδεικνύει ότι η τυχαία μεταβλητή κατανέμεται με τον ακριβώς ίδιο τρόπο όπως οποιαδήποτε άλλη διαφορά μεταξύ των χρονικών στιγμών δύο διαδοχικών αφίξεων (T_1, T_2-T_1, T_3-T_2 , κ.ο.κ.).

2.6.2 Κατανομή του χρόνου μεταξύ διαδοχικών αφίξεων, μέση τιμή και διασπορά

Οι χρόνοι $T_1, T_2-T_1, T_3-T_2, \dots, T_{n+1}-T_n$, δηλαδή οι χρόνοι μεταξύ δύο διαδοχικών αφίξεων, είναι ανεξάρτητες και πανομοιότυπα κατανεμημένες τυχαίες μεταβλητές με αθροιστική συνάρτηση κατανομής:

$$P\{T_1 \leq t\} = P\{T_2 - T_1 \leq t\} = \dots = P\{T_{n+1} - T_n \leq t\} = 1 - e^{-\lambda t}, \quad t \geq 0$$

Συνεπώς, οι παραπάνω τ.μ. είναι εκθετικά κατανεμημένες με παράμετρο λ και έχουν συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας:

$$f_{T_1}(t)=f_{T_2-T_1}(t)=\dots=f_{T_{n+1}-T_n}(t)=\lambda \cdot e^{-\lambda t}, t \geq 0$$

και επομένως:

$$E[T_1] = E[T_2 - T_1] = \dots = E[T_{n+1} - T_n] = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} dt = \frac{1}{\lambda}$$

και

$$\text{Var}(T_1)=\text{Var}(T_2-T_1)=\dots=\text{Var}(T_{n+1}-T_n)=1/\lambda^2$$

Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής $T_{n+1} - T_n$, είναι μονότονα φθίνουσα. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα ένας χρόνος μεταξύ διαδοχικών αφίξεων να είναι πιθανότερο να έχει διάρκεια στο διάστημα $[0,s]$ απ' ό,τι στο διάστημα $[t,t+s]$ για κάθε $t,s \geq 0$.

Συνεπώς, μία διαδικασία Poisson εμφανίζει συχνότερα σύντομα διαστήματα μεταξύ των διαδοχικών αφίξεων παρά διαστήματα μεγάλης διάρκειας. Αυτό θα μπορούσε να μας οδηγήσει στο συμπέρασμα ότι οι αφίξεις συμβαίνουν κοντά χρονικά η μία με την άλλη, δηλαδή οι αφίξεις έρχονται σε σμήνη(bursts). Αυτό, όμως, δεν ισχύει δεδομένου ότι οι αριθμοί των αφίξεων σε ξένα μεταξύ τους διαστήματα είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές.

2.6.3 Έλλειψη μνήμης εκθετικής κατανομής

Η ιδιότητα "έλλειψης μνήμης" που διακρίνει την εκθετική κατανομή, παίζει καθοριστικό ρόλο στις ιδιότητες της ανεξαρτησίας που απολαμβάνει η Poisson στοχαστική διαδικασία.

Για μια τυχαία μεταβλητή X που ακολουθεί εκθετική, ισχύει ότι:

$$P\{X > t+s | X > t\} = P\{X > s\}, \text{ με } t, s \geq 0$$

2.6.4 Σχέση μεταξύ αριθμού αφίξεων και χρόνου αφίξεων:

Τα γεγονότα $\{T_n \leq t\}$ και $\{N_t \geq n\}$ είναι ισοδύναμα και συνεπώς:

$$P\{T_n \leq t\} = P\{N_t \geq n\} \text{ για κάθε } n \in N \text{ και } t \geq 0.$$

Η πιθανότητα η n -οστή άφιξη να συμβεί πριν ή πάνω στην χρονική στιγμή t , ισούται με την πιθανότητα στο διάστημα $[0,t]$ να συμβούν τουλάχιστον n αφίξεις.

2.6.5 3ος ισοδύναμος ορισμός της σ.δ. Poisson

Έστω T_1, T_2, \dots , οι διαδοχικοί χρόνοι των αφίξεων από μια διαδικασία αφίξεων $N=\{N_t; t \geq 0\}$. Τότε η N είναι διαδικασία Poisson με ρυθμό λ , αν και μόνο αν οι χρόνοι μεταξύ των διαδοχικών αφίξεων $T_1, T_2-T_1, \dots, T_{n+1}-T_n, \dots$, είναι ανεξάρτητες, πανομοιότυπα κατανομημένες εκθετικές τυχαίες μεταβλητές με παράμετρο λ .

2.6.6 Μέση τιμή και διασπορά του χρόνου της n-οστής άφιξης

Εύκολα αποδεικνύεται ότι:

$$E(T_n) = E(T_1 + (T_2 - T_1) + \dots + (T_n - T_{n-1}))$$

$$= E(T_1) + E(T_2 - T_1) + \dots + E(T_n - T_{n-1})$$

$$= E(T_1) + E(T_1) + \dots + E(T_1)$$

$$= n \cdot E(T_1)$$

$$= n \cdot (1/\lambda)$$

Αντίστοιχα,

$$\text{Var}(T_n) = \text{Var}(T_1 + (T_2 - T_1) + \dots + (T_n - T_{n-1}))$$

και επειδή οι τυχαίες μεταβλητές $T_1, T_2 - T_1, \dots, T_n - T_{n-1}$ είναι ανεξάρτητες, η διασπορά του αθροίσματός τους είναι ίση με το άθροισμα των διασπορών τους.

Συνεπώς,

$$\text{Var}(T_n) = \text{Var}(T_1) + \text{Var}(T_2 - T_1) + \dots + \text{Var}(T_n - T_{n-1})$$

$$= \text{Var}(T_1) + \text{Var}(T_1) + \dots + \text{Var}(T_1)$$

$$= n \cdot \text{Var}(T_1)$$

$$= n \cdot (1/\lambda^2)$$

2.6.7 Σκοπιμότητα χρήσης της Poisson σ.δ. αφίξεων στην μοντελοποίηση της διαδικασίας αφίξεων σε δίκτυα πολλαπλής πρόσβασης

Δεδομένου ότι στην συνέχεια της διπλωματικής θα παρουσιαστεί και μελετηθεί η λειτουργία αλγορίθμων πολλαπλής πρόσβασης (multiple access), είναι απαραίτητο να εξηγηθεί ο λόγος για τον οποίο η Poisson στοχαστική διαδικασία αφίξεων χρησιμοποιείται για την μοντελοποίηση αφίξεων πακέτων σε συστήματα πολλαπλής πρόσβασης. Ο λόγος εντοπίζεται στο γνωστό Poisson Θεώρημα (Poisson Theorem). Σύμφωνα με αυτό, αν

υποθέσουμε ότι έχουμε έναν πολύ μεγάλο αριθμό από πανομοιότυπους χρήστες στο σύστημα, κάθε ένας εκ των οποίων μπορεί να δημιουργήσει ένα νέο πακέτο στη διάρκεια μιας χρονοθυρίδας(timeslot) του καναλιού με την ίδια μικρή πιθανότητα(η οποία φθίνει με τον συνολικό αριθμό των χρηστών), τέτοια ώστε το γινόμενο του αριθμού των χρηστών επί την πιθανότητα δημιουργίας πακέτου στην διάρκεια μιας χρονοθυρίδας από κάθε ένα από αυτούς να συγκλίνει σε μια θετική σταθερά λ καθώς ο αριθμός χρηστών τείνει στο άπειρο, τότε η κατανομή του συνολικού αριθμού των πακέτων που δημιουργούνται στην διάρκεια της χρονοθυρίδας (ο οποίος περιγράφεται από την διωνυμική κατανομή), στο όριο συγκλίνει στην κατανομή Poisson με παράμετρο λ .

Ως πρώτο και απλούστερο πρωτόκολλο πολλαπλής προσπέλασης με χαρακτηριστικά ελεύθερης πρόσβασης από τους χρήστες του κοινού καναλιού (free access-multiple access protocol), το οποίο είναι όμως εγγενώς ασταθές, μελετάμε το πρωτόκολλο slotted Aloha.

Το δίκτυο Aloha με πρωτόκολλο πολλαπλής πρόσβασης, αρχικά σε ασύγχρονη εκδοχή (unslotted Aloha), αναπτύχθηκε την δεκαετία του '70 με σκοπό την παροχή ραδιο-επικοινωνίας μεταξύ του κεντρικού υπολογιστή και τερματικών σταθμών (data terminals) στις διάφορες πανεπιστημιούπολεις (campuses) του Πανεπιστημίου της Χαβάης, που βρίσκονταν σε διαφορετικά νησιά του νησιωτικού συμπλέγματος. Με την πάροδο των χρόνων, μια βελτιωμένη σύγχρονη εκδοχή του πρωτόκολλου πολλαπλής πρόσβασης του δικτύου αυτού (slotted Aloha), εμφανίστηκε στο προσκήνιο.

3.1 Τρόπος λειτουργίας του πρωτόκολλου πολλαπλής πρόσβασης slotted Aloha του δικτύου

Ως backlogged, ορίζουμε κάθε χρήστη (ή εφεξής κόμβο) του δικτύου με πακέτο που χρειάζεται επαναμετάδοση. Η βασική ιδέα του αλγορίθμου έγκειται στο γεγονός ότι κάθε unbacklogged κόμβος (κόμβος χωρίς πακέτο για μετάδοση) μεταδίδει ένα νεοαφιχθέν σε αυτόν πακέτο στην πρώτη χρονοθυρίδα (στο πρώτο slot) αμέσως μετά την "γέννηση" του πακέτου αυτού. Με αυτόν τον τρόπο, υπάρχει το ρίσκο να συμβαίνουν περιστασιακά συγκρούσεις πακέτων στο κοινό κανάλι (πράγμα που απαιτεί επαναμεταδόσεις των συγκρουόμενων πακέτων στο μέλλον), αλλά το κέρδος εντοπίζεται στην επίτευξη πολύ μικρών καθυστερήσεων στις μεταδόσεις των νεοαφιχθέντων πακέτων στην περίπτωση που η πιθανότητα της γέννησης περισσότερων του ενός πακέτου από τους unbacklogged κόμβους του δικτύου στην διάρκεια ενός slot είναι μικρή (σε αυτή την περίπτωση, η συχνότητα των συγκρούσεων είναι επίσης μικρή). Σε περίπτωση σύγκρουσης, κάθε κόμβος που συμμετέχει έχοντας στείλει ένα από τα συγκρουόμενα πακέτα, ανακαλύπτει το γεγονός της σύγκρουσης στο τέλος του slot και οι unbacklogged κόμβοι μετατρέπονται σε backlogged. Αν επιλεγόταν η επαναμετάδοση των πακέτων καθενός από τους backlogged κόμβους στο αμέσως επόμενο slot μετά την εμπλοκή τους στην σύγκρουση, τότε μια νέα

σύγκρουση θα συνέβαινε με βεβαιότητα. Αντ' αυτού, κάθε ένας από τους κόμβους περιμένει για έναν τυχαίο αριθμό από slots προτού επιχειρήσει επαναμετάδοση.

3.2 Κατανομή αφίξεων και αναχωρήσεων πακέτων

Κάτω από την υπόθεση ενός συστήματος με άπειρους πανομοιότυπους κόμβους, ο αριθμός των νεοαφιχθέντων πακέτων που φτάνουν στο σύστημα, μοντελοποιείται με μία Poisson στοχαστική διαδικασία αφίξεων $N=\{N_t; t \geq 0\}$, με ρυθμό λ πακέτα/slot. Αυτό σημαίνει τόσο ότι ο αριθμός αφίξεων σε οποιοδήποτε χρονικό διάστημα είναι Poisson κατανομημένος, όσο και ότι οι αριθμοί αφίξεων σε ξένα μεταξύ τους χρονικά διαστήματα είναι αναξάρτητες Poisson τ.μ. Για παράδειγμα, έστω ότι βρισκόμαστε στο slot k , με $k \geq 1$. Ο αριθμός νεοαφιχθέντων πακέτων που έφτασαν στο slot $k-1$, δηλαδή στο χρονικό διάστημα $(k-1, k]$, είναι Poisson κατανομημένη τ.μ. με παράμετρο λ . Κατά συνέπεια, για τον αριθμό των νέων αφίξεων πακέτων στην διάρκεια ενός slot, ισχύουν όλες οι ιδιότητες που παρουσιάστηκαν στο προηγούμενο κεφάλαιο για την Poisson στοχαστική διαδικασία αφίξεων.

3.3 Χρονικές στιγμές αφίξεων πακέτων από Poisson στοχαστική διαδικασία

Όπως προαναφέρθηκε στην ανάλυση της Poisson στοχαστικής διαδικασίας, δεδομένου ότι $N_B=n$, καθένας από τους χρόνους των n αφίξεων στο διάστημα B (από t έως $t+b$) έχει ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα B ανεξάρτητα από τους χρόνους των υπολοίπων $n-1$ αφίξεων. Συνεπώς, "τραβάμε" με ανεξάρτητο τρόπο n τυχαίους αριθμούς στο διάστημα ενός slot (μήκους 1) και θεωρούμε ότι αυτοί οι τυχαίοι αριθμοί αντιστοιχούν στις χρονικές στιγμές καθεμιάς εκ των n αφίξεων στην διάρκεια του slot.

3.4 Ανάλυση throughput του πρωτόκολλου

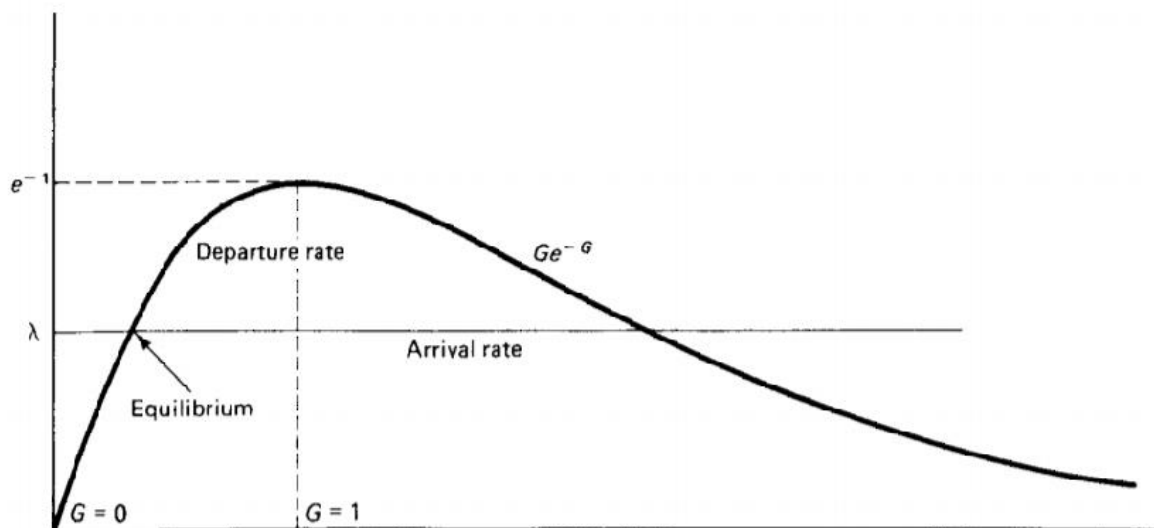
Η ανάλυση που ακολουθεί στις παραγράφους 3.4-3.7 βασίζεται σε σημαντικό βαθμό στο Κεφ. 4 του βιβλίου Data Networks, 2nd edition, των D. Bertsekas and R. Gallager.

Αν οι επαναμεταδόσεις των backlogged κόμβων τυχαιοποιηθούν επαρκώς, είναι εύλογο να προσεγγίσουμε τον συνολικό αριθμό επαναμεταδόσεων από backlogged κόμβους και μεταδόσεων νεοαφιχθέντων πακέτων από unbacklogged κόμβους στην διάρκεια ενός δοθέντος slot ως μία Poisson τυχαία μεταβλητή με παράμετρο $G > \lambda$. Κάτω από αυτήν την προσέγγιση, η πιθανότητα μίας επιτυχημένης μετάδοσης σε ένα slot είναι:

$P\{X = 1\} = \frac{(G^1 \cdot e^{-G})}{1!} = G \cdot e^{-G}$, όπου X η Poisson κατανεμημένη τυχαία μεταβλητή που συμβολίζει τον συνολικό αριθμό των μεταδόσεων πακέτων σε μια χρονοθυρίδα.

Σε κατάσταση ισορροπίας, ο ρυθμός αφίξεων, λ , πρέπει να είναι ο ίδιος με τον ρυθμό αναχωρήσεων (ή ρυθμό επιτυχημένων μεταδόσεων) πακέτων από το σύστημα, $G \cdot e^{-G}$. Παρατηρούμε ότι η μέγιστη δυνατή τιμή του ρυθμού αυτού επιτυγχάνεται για $G=1$, δηλαδή όταν ο μέσος αριθμός συνολικά μεταδιδόμενων πακέτων σε ένα slot είναι ίσος με 1.

Ο μέγιστος ρυθμός επιτυχημένων μεταδόσεων πακέτων ισούται με $1 \cdot e^{-1} = e^{-1} = 1/e$ και άρα $P(\text{επιτυχημένης μετάδοσης πακέτου σε ένα slot}) = 1/e = 0.36$



Εικόνα 2: Ρυθμός επιτυχημένων μεταδόσεων πακέτων σε ένα slot συναρτήσει του συνολικού ρυθμού μετάδοσης πακέτων σε ένα slot, G

Το σχήμα στην Εικόνα 2 (έχει ληφθεί από το [3]) απεικονίζει τον ρυθμό επιτυχημένων μεταδόσεων πακέτων (αποχωρήσεων πακέτων από το σύστημα) σαν συνάρτηση του συνολικού ρυθμού μετάδοσης πακέτων σε ένα slot, G . Παρατηρούμε ότι το μέγιστο throughput του πρωτοκόλλου είναι ίσο με $1/e$, το οποίο επιτυγχάνεται όταν το $G=1$. Για τιμές του G μικρότερες τις μονάδας, παράγονται πολλά κενά slots, ενώ για $G>1$, δημιουργούνται πολλές συγκρούσεις σε slots. Παρατηρούμε, επίσης, ότι για τιμές του ρυθμού αφίξεων νέων πακέτων, λ , μικρότερες του $1/e$, υπάρχουν δύο τιμές του G για τις οποίες ο ρυθμός αφίξεων ισούται με τον ρυθμό επιτυχημένων μεταδόσεων (αναχωρήσεων) πακέτων.

3.5 Προσέγγιση της λειτουργίας του πρωτοκόλλου του Aloha μέσω αλυσίδας Markov

Για την δημιουργία ενός ακριβέστερου μοντέλου, υποθέτουμε ότι κάθε backlogged κόμβος επαναμεταδίδει το πακέτο του με κάποια σταθερή πιθανότητα q_r σε κάθε επόμενο slot μέχρι αυτό να μεταδοθεί επιτυχώς. Συνεπώς, ο αριθμός των slots από την στιγμή μιας σύγκρουσης μέχρι ένας δεδομένος κόμβος που εμπλέκεται στην σύγκρουση να επαναμεταδώσει για πρώτη φορά το πακέτο του, είναι τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί γεωμετρική κατανομή με συνάρτηση μάζας πιθανότητας:

$P\{i \text{ slots μέχρι την πρώτη επαναμετάδοση πακέτου που υπέστη σύγκρουση σε ένα slot}\} = q_r \cdot (1 - q_r)^{i-1}, i \geq 1$

Η συμπεριφορά του slotted Aloha μπορεί τώρα να μοντελοποιηθεί ως μια αλυσίδα Markov διακριτού χρόνου με κατάσταση(state) τον αριθμό των backlogged κόμβων στην αρχή κάθε slot. Έστω σύστημα πολλαπλής προσπέλασης που χρησιμοποιεί το πρωτόκολλο slotted Aloha και περιλαμβάνει m κόμβους. Έστω n ο αριθμός των backlogged κόμβων στο ξεκίνημα ενός δεδομένου slot. Καθένας από τους κόμβους αυτούς θα επαναμεταδώσει ανεξάρτητα το πακέτο του στο συγκεκριμένο slot με πιθανότητα q_r . Θα υπάρξουν μεταδόσεις πακέτων από τους $m-n$ unbacklogged κόμβους στο δεδομένο slot αν(τουλάχιστον ένα) νέο πακέτο αφιχθεί κατά την διάρκεια του προηγούμενου slot. Δεδομένου ότι οι αφίξεις νέων πακέτων σε έναν unbacklogged κόμβο ακολουθούν κατανομή Poisson με παράμετρο λ/m , η πιθανότητα να υπάρξουν 0 αφίξεις νέων πακέτων σε έναν unbacklogged κόμβο στο προηγούμενο slot είναι:

$$P\{Arr = 0\} = \frac{\left(\frac{\lambda}{m}\right)^0 \cdot e^{-\frac{\lambda}{m}}}{0!} = e^{-\frac{\lambda}{m}}$$

Συνεπώς, η πιθανότητα κάποιος unbacklogged κόμβος να μεταδώσει πακέτο στο συγκεκριμένο slot είναι:

$$q_a = P\{Arr \geq 1\} = 1 - P\{Arr < 1\} = 1 - P\{Arr = 0\} = 1 - e^{-\frac{\lambda}{m}}$$

Έστω $Q_a(i, n)$ η πιθανότητα i unbacklogged κόμβοι να μεταδώσουν νεοαφιχθέντα πακέτα σε ένα συγκεκριμένο slot και έστω $Q_r(i, n)$ η πιθανότητα i backlogged κόμβοι να μεταδώσουν πακέτο.

Τότε:

$$Q_a(i, n) = \frac{(m-n)!}{i!(m-n-i)!} \cdot (1-q_a)^{m-n-i} \cdot q_a^i$$

και

$$Q_r(i, n) = \frac{n!}{i!(n-i)!} \cdot (1-q_r)^{n-i} \cdot q_r^i$$

Ως state της αλυσίδας Markov, συμβολίζουμε τον αριθμό μπλοκαρισμένων(backlogged) πακέτων στο σύστημα. Οι πιθανότητες μετάβασης(state transition probabilities) να μεταβεί η αλυσίδα Markov από την κατάσταση n στην κατάσταση $n+i$ σε ένα slot, δίνεται από:

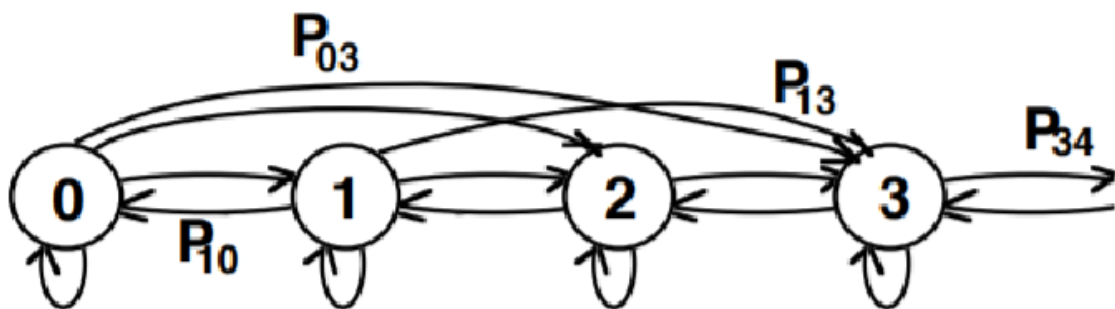
$$P_{n,n+i} = \begin{cases} Q_a(i, n) & , 2 \leq i \leq (m-n) \\ Q_a(i, n) \cdot [1 - Q_r(0, n)] & , i = 1 \\ Q_a(1, n) \cdot Q_r(i, n) + Q_a(i, n) \cdot [1 - Q_r(1, n)] & , i = 0 \\ Q_a(0, n) \cdot Q_r(1, n) & , i = -1 \end{cases}$$

- I. Η πιθανότητα, δηλαδή, να αυξηθούν τα μπλοκαρισμένα πακέτα στην διάρκεια ενός slot κατά έναν αριθμό i που κυμαίνεται από 2 έως και $m-n$ είναι ίση με την πιθανότητα να μεταδώσει ένας ίδιος αριθμός i από τους unbacklogged κόμβους.
- II. Η πιθανότητα να αυξηθούν κατά 1 τα μπλοκαρισμένα πακέτα στην διάρκεια ενός slot είναι να έχει να μεταδώσει πακέτο ακριβώς ένας από τους unbacklogged κόμβους ΚΑΙ στο ίδιο slot να μεταδώσει τουλάχιστον ένας από τους backlogged κόμβους(ώστε να δημιουργηθεί σύγκρουση στο κανάλι στο δεδομένο slot).
- III. Η πιθανότητα ο αριθμός των μπλοκαρισμένων πακέτων στην διάρκεια ενός slot να μην μεταβληθεί, είναι ίση με την πιθανότητα της ένωσης των ακόλουθων γεγονότων:
 - $A = \{\text{μεταδίδει ακριβώς ένας από τους unbacklogged κόμβους το νεοαφικθέν πακέτο του στην διάρκεια του slot ΚΑΙ κανένας από τους backlogged κόμβους}\}$, σε αυτή την περίπτωση έχουμε επιτυχημένη μετάδοση του νεοαφικθέντος πακέτου στον unbacklogged κόμβο και ο αριθμός των unbacklogged κόμβων δεν μεταβάλλεται ,

• $B=\{\text{δεν μεταδίδει κανέναν από τους unbacklogged κόμβους δεδομένου ότι κανείς δεν απέκτησε νέο πακέτο στην διάρκεια του προηγούμενου slot, ΚΑΙ μεταδίδουν 0 ή τουλάχιστον 2 από τους backlogged κόμβους}\}$, σε αυτή την περίπτωση έχουμε κενό(άδειο) slot ή slot με σύγκρουση πακέτων backlogged χρηστών.

- IV. Η πιθανότητα να μειωθεί κατά 1 ο αριθμός των μπλοκαρισμένων πακέτων στην διάρκεια ενός slot, είναι ίση με την πιθανότητα να μη μεταδώσει πακέτο κανείς από τους unbacklogged κόμβους(δηλαδή να μην αποκτήσει νέο πακέτο κανείς από τους unbacklogged κόμβους στην διάρκεια του προηγούμενου slot) ΚΑΙ να μεταδώσει πακέτο ακριβώς ένας από τους backlogged κόμβους.

Το διάγραμμα αλλαγής κατάστασης για την παραπάνω αλυσίδα Markov για το πρωτόκολλο slotted Aloha φαίνεται στην Εικόνα 3:



Εικόνα 3: Διάγραμμα αλλαγής κατάστασης της αλυσίδας Markov

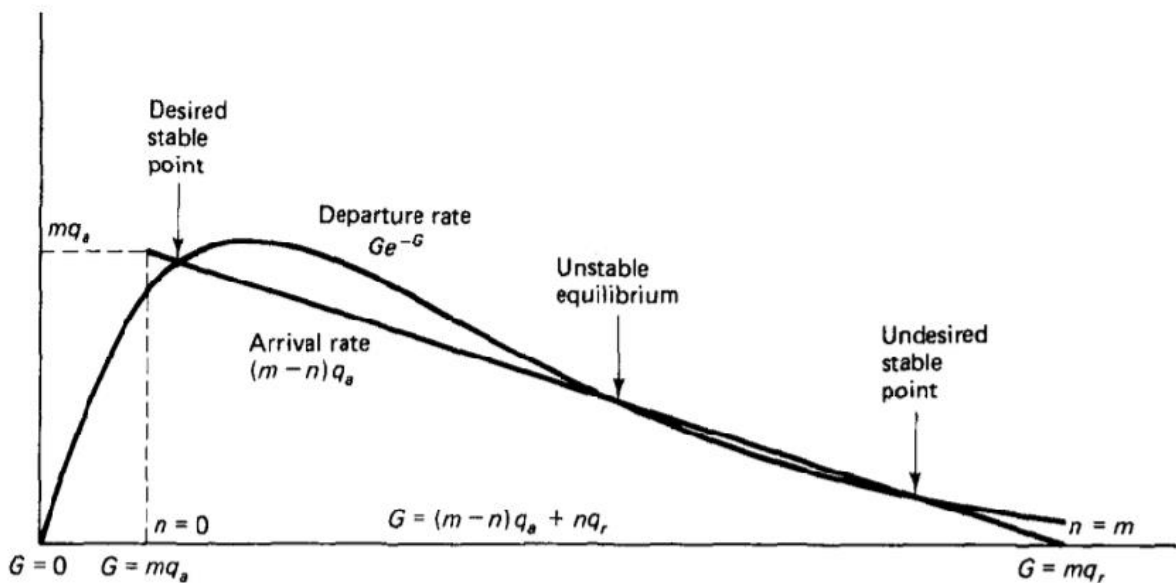
3.6 Αστάθεια του πρωτοκόλλου slotted Aloha

Από την ανάλυση της αλυσίδας Markov στην Εικόνα 3, για m τείνει στο άπειρο, προκύπτει ότι δεν υπάρχει κατανομή πιθανοτήτων στην μόνιμη κατάσταση. Σε βάθος χρόνου, ο αριθμός των backlogged κόμβων τείνει στο άπειρο, το σύστημα χαρακτηρίζεται από αστάθεια και ο ρυθμός αναχωρήσεων πακέτων(ρυθμός επιτυχημένων μεταδόσεων) τείνει στο 0. Επιλέγοντας την πιθανότητα επαναμετάδοσης, q , κάθε backlogged κόμβου αρκετά μεγάλη, καταφέρνουμε να αποφύγουμε μεγάλες καθυστερήσεις στην μετάδοση ενός νέου πακέτου που υπέστη σύγκρουση στην πρώτη μετάδοσή του, στην περίπτωση που ο ρυθμός αφίξεων νέων πακέτων, λ , είναι μικρός και η πολλαπλότητα των συγκρούσεων, όταν συμβαίνουν, είναι ίση με την χαμηλότερη δυνατή, δηλαδή ίση με δύο. Από την άλλη, αν το σύστημα πάσχει από κακή τύχη και ο αριθμός των backlogged πακέτων

n γίνει αρκετά μεγάλος ώστε από κάποια χρονική στιγμή και μετά να ικανοποιείται η σχέση $q_r \cdot n \gg 1$, τότε συγκρούσεις συμβαίνουν σχεδόν σε κάθε επόμενο slot και το σύστημα παραμένει μπλοκαρισμένο για μεγάλο διάστημα.

Ορίζουμε ως Drift(μεταβολή) στην κατάσταση n , το οποίο συμβολίζουμε με $D(n)$, την αναμενόμενη μεταβολή του αριθμού των backlogged κόμβων με την πάροδο μίας χρονοθυρίδας. Έτσι, το $D(n)$ είναι ο αναμενόμενος αριθμός νέων αφίξεων στο σύστημα μείον τον αναμενόμενο αριθμό επιτυχημένων μεταδόσεων στην διάρκεια ενός slot. Ο αριθμός αφίξεων, όπως προείπαμε, είναι Poisson με ρυθμό λ . Ο αναμενόμενος αριθμός επιτυχημένων μεταδόσεων σε ένα slot είναι η πιθανότητα μίας επιτυχημένης μετάδοσης που δείξαμε παραπάνω ότι ισούται με $G(n) \cdot e^{-G(n)}$ και είναι συνάρτηση του αριθμού των backlogged κόμβων, n . Συνεπώς,

$$D(n) = \lambda - G(n) \cdot e^{-G(n)} = (m-n) \cdot q_a - G(n) \cdot e^{-G(n)}$$



Εικόνα 4: $D(n)$ σαν συνάρτηση του $G(n)$, $D(n) = \lambda - G(n) \cdot e^{-G(n)} = (m-n) \cdot q_a - G(n) \cdot e^{-G(n)}$

Στην εικόνα 4 (έχει ληφθεί από το [3]) παραπάνω, το drift είναι η διαφορά ανάμεσα στην καμπύλη και στην ευθεία. Για τιμές του n αριστερά του ασταθούς σημείου ισορροπίας (unstable equilibrium), το $D(n)$ είναι αρνητικό και το n οδηγείται προς το επιθυμητό σταθερό σημείο (desired stable point). Για τιμές του n δεξιά του ασταθούς σημείου, το $D(n)$ είναι θετικό και το n οδηγείται προς το ανεπιθύμητο σταθερό

σημείο(undesired stable point). Συνεπώς, άπαξ και το n λάβει τιμή μεγαλύτερη αυτής που αντιστοιχεί στο ασταθές σημείο ισορροπίας, το σύστημα έχει την τάση να μεταβεί στο ανεπιθύμητο σταθερό σημείο λειτουργίας(στο οποίο ο ρυθμός επιτυχημένων μεταδόσεων πακέτων είναι πολύ χαμηλός) και να παραμείνει εκεί.

3.7 Σταθεροποιώντας το πρωτόκολλο slotted Aloha

Η επιλογή μικρής πιθανότητας επαναμετάδοσης των μπλοκαρισμένων πακέτων, q_r , αυξάνει όχι μόνο τον αριθμό των backlogged κόμβων, αλλά και την καθυστέρηση των μεταδόσεων των πακέτων δεδομένου ότι ο μέσος χρόνος για επαναμετάδοση του πακέτου ενός backlogged κόμβου είναι ίσος με $1/q_r$. Η λύση για την σταθεροποίηση της λειτουργίας του πρωτοκόλλου(ισοδύναμα, για την επίτευξη κατανομής μόνιμης κατάστασης στην αλυσίδα Markov) είναι να εκτιμάται ο αριθμός των backlogged κόμβων, n (εφεξής backlog), με βάση το σήμα ανάδρασης του καναλιού(channel feedback) από την αρχή της λειτουργίας του συστήματος. Συγκεκριμένα, βάσει του εκτιμητή του backlog, επιλέγεται δυναμικά η πιθανότητα επαναμετάδοσης q_r με σκοπό να διατηρηθεί το $G(n)$ γύρω στην μονάδα, πράγμα που οδηγεί στην μεγιστοποίηση του ρυθμού επιτυχημένων μεταδόσεων πακέτων(throughput του συστήματος).

3.7.1 Pseudo-Bayesian αλγόριθμος για σταθεροποίηση(stabilization) του πρωτοκόλλου slotted Aloha

Ο αλγόριθμος αυτός παρέχει έναν αποτελεσματικό τρόπο σταθεροποίησης του Aloha. Η διαφορά του από το slotted Aloha έγκειται στο γεγονός ότι οι νέες αφίξεις πακέτων θεωρούνται ως backlogged αμέσως μετά την εμφάνισή τους στο σύστημα. Αντί οι νέες αφίξεις πακέτων να μεταδίδονται με βεβαιότητα στο επόμενο slot, μεταδίδονται ανεξάρτητα με πιθανότητα q_r , με τον ίδιο ακριβώς τρόπο που μεταδίδονται στο επόμενο slot πακέτα που έχουν εμπλακεί σε συγκρούσεις στο παρελθόν και δεν έχουν ακόμα μεταδοθεί επιτυχώς. Επομένως, αν υπάρχουν n backlogged πακέτα(συμπεριλαμβανομένων των νέων αφίξεων) στο ξεκίνημα ενός slot, το attempt rate είναι:

$$G(n)=n \cdot q_r$$

Η πιθανότητα μίας επιτυχημένης μετάδοσης είναι:

$$P\{Q_r(n) = 1\} = \frac{n!}{1!(n-1)!} \cdot q_r^1 \cdot (1 - q_r)^{n-1} = n \cdot q_r \cdot (1 - q_r)^{n-1}$$

Το q_r μπορεί να φτάσει ακόμα και στο 1 όταν το εκτιμώμενο backlog είναι αμελητέο, ούτως ώστε οι νέες αφίξεις πακέτων να καθυστερούν μόνο όταν το σύστημα είναι ήδη αναμενόμενο να συνωστιστεί.

Ο αλγόριθμος λειτουργεί διατηρώντας μία εκτίμηση n_{est} του backlog n στο ξεκίνημα κάθε slot. Κάθε backlogged κόμβος μεταδίδει ανεξάρτητα το πακέτο του με πιθανότητα $q_r(n_{est}) = \min\{1, 1/n_{est}\}$, επειδή για επίτευξη μέγιστου throughput πρέπει $G(n)=1$. Συνεπώς:

$$G(n)=1 \Leftrightarrow n \cdot q_r=1 \Rightarrow q_r=\min\{1, 1/n_{est}\}$$

Ο τελεστής minimum φράσσει την πιθανότητα q_r από πάνω στην μονάδα και προσπαθεί να επιτύχει συνολικό αριθμό μεταδόσεων πακέτων $G=n \cdot q_r$ ίσο με 1. Για κάθε slot k , το εκτιμώμενο backlog στο ξεκίνημα του slot $k+1$ ανανεώνεται συναρτήσει του estimated backlog και του feedback για το slot k , σύμφωνα με τον παρακάτω κανόνα:

$$n_{est,k+1} = \begin{cases} \max\{\lambda, n_{est,k} + \lambda - 1\} & , for \text{ idle or success} \\ n_{est,k} + \lambda + (e - 2)^{-1} & , for \text{ collision} \end{cases}$$

Προσθέτοντας το λ στην εκτίμηση του backlog στην αρχή του προηγούμενου slot, λαμβάνονται υπόψιν οι νέες αφίξεις πακέτων, ενώ ο τελεστής maximum εξασφαλίζει ότι η εκτίμηση του backlog δεν υπολείπεται ποτέ της συνεισφοράς των νέων αφίξεων πακέτων (θυμηθείτε ότι εδώ οι unbacklogged κόμβοι με νεοαφιχθέντα πακέτα μετατρέπονται σε backlogged αμέσως μετά την άφιξη των πακέτων τους).

Σε περίπτωση επιτυχημένης μετάδοσης πακέτου, το 1 αφαιρείται από την προϋπάρχουσα εκτίμηση του backlog για να ληφθεί υπόψη η επιτυχής αναχώρηση.

Η αφαίρεση του 1 στην περίπτωση ενός κενού slot (slot στο οποίο δεν έχει γεννηθεί κανένα νέο πακέτο στην αμέσως προηγούμενη χρονοθυρίδα και ταυτόχρονα δεν μεταδίδεται κανένα πακέτο από τα backlogged στην τρέχουσα χρονοθυρίδα), γίνεται για να μειώνεται η εκτίμηση n_{est} όταν παρατηρούνται πολλά κενά slot στο κανάλι.

Για μεγάλες τιμές του backlog, αν $n_{est}=n$, καθένα εκ των n backlogged πακέτων μεταδίδεται ανεξάρτητα σε ένα slot με πιθανότητα $q_r=1/n$. Έτσι, $G(n)=n \cdot q_r=n \cdot (1/n)=1$.

Επειδή οι αφίξεις συμβαίνουν σύμφωνα με την σ.δ. Poisson, η πιθανότητα να μην έρθει κανένα νέο πακέτο στο προηγούμενο slot είναι:

$$P\{Arr = 0\} = \frac{\lambda^0 \cdot e^{-\lambda}}{0!} = e^{-\lambda}$$

και για $\lambda=G(n)=1$ έχουμε:

$$P\{Arr = 0\} = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

Η πιθανότητα σύγκρουσης, δηλαδή η πιθανότητα να μεταδοθούν τουλάχιστον 2 εκ των backlogged πακέτων, είναι:

$$\begin{aligned} P\{B \geq 2\} &= 1 - P\{B < 2\} = 1 - (P\{B = 0\} + P\{B = 1\}) \\ &= 1 - \left(\frac{\lambda^0 \cdot e^{-\lambda}}{0!} + \frac{\lambda^1 \cdot e^{-\lambda}}{1!} \right) = 1 - \left(\frac{1^0 \cdot e^{-1}}{0!} + \frac{1^1 \cdot e^{-1}}{1!} \right) \\ &= \frac{(e - 2)}{e} \end{aligned}$$

επειδή τα πακέτα επιχειρούν μετάδοση σύμφωνα με Poisson κατανομή, όπως προείπαμε.

Μειώνοντας, λοιπόν, το n_{est} κατά 1 όταν παρατηρούνται άδεια (κενά) slots, και αυξάνοντας το n_{est} κατά

$$\frac{\frac{1}{e}}{\frac{(e-2)}{e}} = \frac{e}{e \cdot (e - 2)} = \frac{1}{(e - 2)} = (e - 2)^{-1}$$

όταν παρατηρούνται slots με συγκρούσεις, διατηρείται η ισορροπία ανάμεσα σε n και n_{est} , κατά μέσο όρο.

3.8 Προσομοίωση πρωτοκόλλου πολλαπλής πρόσβασης slotted Aloha

Θεωρούμε ένα σύγχρονο κανάλι πολλαπλής προσπέλασης, στο οποίο ένας μεγάλος αριθμός χρηστών(πομπών ή κόμβων) χρησιμοποιεί το πρωτόκολλο slotted Aloha για να προσπελάσει το κανάλι και να επικοινωνήσει με έναν κεντρικό σταθμό(δέκτη). Η συνολική ροή άφιξης νέων πακέτων στο σύστημα, μοντελοποιείται από μια Poisson στοχαστική διαδικασία $N=\{N_t; t \geq 0\}$ με ρυθμό λ πακέτα/slot και η πιθανότητα επαναμετάδοσης πακέτου που χρησιμοποιείται από το πρωτόκολλο σε περιπτώσεις σύγκρουσης συμβολίζεται με q_r .

3.8.1 Προσομοίωση ιδανικού ελεγχόμενου slotted Aloha

Αρχικά, προσομοιώνουμε την λειτουργία του ιδανικού ελεγχόμενου slotted Aloha πρωτοκόλλου, με δυναμικά μεταβαλλόμενη πιθανότητα επαναμετάδοσης των μπλοκαρισμένων πακέτων, q_r . Υποθέτουμε ότι κάθε πομπός έχει γνώση του ακριβούς αριθμού των μπλοκαρισμένων χρηστών, n , στην αρχή κάθε slot. Προφανώς, κάτι τέτοιο είναι αδύνατο να επιτευχθεί στην πράξη και αυτός είναι ο λόγος που στην εκδοχή αυτή του ελεγχόμενου(controlled) πρωτοκόλλου αποδίδεται ο χαρακτηρισμός "ιδανικό". Παρόλο που το πρωτόκολλο δεν είναι υλοποιήσιμο, η υλοποίηση της προσομοίωσής του απλοποιείται σημαντικά από το γεγονός ότι το πρόγραμμα προσομοίωσης γνωρίζει στην αρχή κάθε χρονοθυρίδας την ακριβή τιμή του n .

3.8.1.1 Επιλογή της βέλτιστης πιθανότητας q_r επαναμετάδοσης των μπλοκαρισμένων πακέτων

Όπως προείπαμε, το $G(n)$ είναι ο αναμενόμενος αριθμός πακέτων που μεταδίδονται στην διάρκεια μιας χρονοθυρίδας, όταν η κατάσταση της αλυσίδας Markov είναι n , δηλαδή στην περίπτωση n μπλοκαρισμένων πακέτων. Αυτός δίνεται από την σχέση:

$$G(n) = \lambda + n \cdot q_r$$

Προκειμένου αυτός να ισούται με την επιθυμητή τιμή που μεγιστοποιεί το throughput, δηλαδή ίσος με 1, το q_r πρέπει να είναι:

$$q_r = (1 - \lambda) / n$$

Προσομοιώσαμε το ιδανικό αυτό πρωτόκολλο για διάφορες τιμές του λ που συμβολίζει τον ρυθμό αφίξεων πακέτων ανά slot. Το οδηγήσαμε μέχρι μια τιμή για την οποία το σύστημα προσεγγίζει πολύ το μέγιστο throughput, $1/e$, του δικτύου.

3.8.1.2 Σενάρια επιτυχημένων μεταδόσεων

Θυμίζουμε ότι $Q_a(i, n)$ είναι η πιθανότητα i unbacklogged κόμβοι να μεταδώσουν τα νέα πακέτα τους σε ένα συγκεκριμένο slot και $Q_r(i, n)$ η πιθανότητα i backlogged κόμβοι να μεταδώσουν τα πακέτα τους, όπως τις παρουσιάσαμε αναλυτικά στην παράγραφο 3.5, διωνυμικά κατανεμημένες με παραμέτρους $q_a = 1 - e^{-\lambda/n}$ και q_r αντίστοιχα. Επιτυχημένη μετάδοση λαμβάνει χώρα στις εξής περιπτώσεις:

- "Γεννιέται" ένα φρέσκο πακέτο κατά τη διάρκεια του προηγούμενου slot, και μεταδίδεται στην διάρκεια του τρέχοντος slot, υπό την προϋπόθεση ότι είτε δεν υπάρχει προς μετάδοση κανένα μπλοκαρισμένο πακέτο στο σύστημα, είτε ότι από

τα μπλοκαρισμένα πακέτα δεν μεταδίδει κανένα. Η πιθανότητα του παραπάνω σύνθετου γεγονότος είναι:

$$Q_a(1,n) \cdot Q_r(0,n)$$

- b. Δεν "γεννιέται" κανένα φρέσκο πακέτο κατά τη διάρκεια του προηγούμενου slot και από τα μπλοκαρισμένα πακέτα επαναδίδει μόνο 1. Η πιθανότητα αυτού του γεγονότος είναι:

$$Q_a(0,n) \cdot Q_r(1,n)$$

3.8.1.3 Σενάρια συγκρούσεων

Συγκρούσεις συμβαίνουν στις εξής περιπτώσεις:

- a. Η Poisson στοχαστική διαδικασία αφίξεων "φέρει" παραπάνω από 1 νέα πακέτα στο σύστημα στην διάρκεια του προηγούμενου slot και συνεπώς έχουμε αυτομάτως σύγκρουση, επειδή εξ ορισμού οι κόμβοι με αυτά τα πακέτα επιχειρούν μετάδοση στο επόμενο slot. Τότε, ο αριθμός των μπλοκαρισμένων πακέτων αυξάνεται κατά τον αριθμό νέων αφίξεων πακέτων στο προηγούμενο slot. Η πιθανότητα ο αριθμός των μπλοκαρισμένων πακέτων να αυξηθεί κατά $i, 2 \leq i \leq (m-n)$, δίδεται από:

$$Q_a(i,n), 2 \leq i \leq (m-n), \text{ όπου } m-n \text{ ο αριθμός των unbacklogged χρηστών}$$

- b. Παρότι "γεννήθηκε" μονάχα 1 φρέσκο πακέτο στο προηγούμενο slot, αποφάσισαν επαναμετάδοση τουλάχιστον 1 μπλοκαρισμένα πακέτα στην τρέχουσα χρονοθυρίδα. Σε αυτή την περίπτωση, στο backlog προστίθεται το νεοαφιχθέν πακέτο του προηγούμενου slot. Η πιθανότητα αυτού του σύνθετου γεγονότος είναι:

$$Q_a(1,n) \cdot [1 - Q_r(0,n)]$$

- c. Παρότι δεν γεννήθηκε κανένα φρέσκο πακέτο στο προηγούμενο slot, αποφάσισαν επαναμετάδοση τουλάχιστον 2 εκ των μπλοκαρισμένων στην τρέχουσα χρονοθυρίδα. Σε αυτή την περίπτωση, ο αριθμός των μπλοκαρισμένων παραμένει ως είχε. Η πιθανότητα αυτού του σύνθετου γεγονότος είναι:

$$Q_a(0,n) \cdot [1 - Q_r(0,n) - Q_r(1,n)]$$

3.8.1.4 Πίνακας αποτελεσμάτων προσομοίωσης

Παρακάτω παρατίθενται τα αποτελέσματα που προέκυψαν από τον μέσο όρο πέντε (5) προσομοιώσεων του προγράμματος (Monte Carlo simulation):

λ (Poisson arrival rate)	T (simulation time in slots) $\times 10^3$	Sent Packets	Collided packets	Successful transm. rate	Mean packet delay (in slots)	P{D≤2}	P{D≤3}	P{D≤4}	P{D≤5}	P{D≤6}
0.01	200	2,073	0	0.0104	1.5206	0.9937	0.9952	0.9976	0.9990	0.9995
0.1	200	19,964	0	0.099	1.8824	0.8921	0.9143	0.9430	0.9606	0.9719
0.15	200	30,176	0	0.1509	2.2590	0.8284	0.8619	0.9019	0.9285	0.9458
0.2	200	40,161	0	0.2008	2.8875	0.7579	0.7980	0.8451	0.8787	0.9034
0.25	200	49,932	0	0.2497	4.1076	0.6763	0.7208	0.7687	0.8078	0.8372
0.3	200	59,897	0	0.2995	7.4247	0.5816	0.6251	0.6703	0.7089	0.7393
0.35	800	279,610	6	0.3495	30.377	0.4475	0.4751	0.5031	0.5280	0.5497
0.36	800	286,780	13	0.3585	66.813	0.4141	0.4338	0.4535	0.4711	0.4869

3.8.1.5 Σχολιασμός αποτελεσμάτων προσομοίωσης

Η καθυστέρηση πακέτων, D , ορίζεται σαν το χρονικό διάστημα από τη στιγμή που το πακέτο “φτάνει” στο σύστημα μέχρι το τέλος της χρονοθυρίδας που περιέχει την επιτυχημένη μετάδοση του πακέτου. Παρατηρούμε ότι για πολύ μικρές τιμές του λ (της τάξης του $1/100$), ο μικρός ρυθμός αφίξεων πακέτων στο σύστημα έχει ως αποτέλεσμα να συμβαίνουν μηδαμινές συγκρούσεις και συνεπώς η μέση καθυστέρηση των πακέτων να είναι επίσης πολύ μικρή. Κατά μέσο όρο, τα πακέτα αποχωρούν από το σύστημα σχεδόν άμεσα μετά την γέννησή τους. Όπως είπαμε, στην Poisson διαδικασία αφίξεων καθένας από τους χρόνους των αφίξεων στην διάρκεια ενός slot έχει ομοιόμορφη κατανομή πάνω στο διάστημα $[0,1]$. Επομένως, αν βρισκόμαστε στο slot k , ένα πακέτο που αφίχθη στο slot $k-1$ “γεννήθηκε” κατά μέσο όρο στο μέσο του χρονικού διαστήματος $[k-1,k]$ και αποχωρεί από το σύστημα, λόγω της πολύ μικρής πιθανότητας συγκρούσεων, στο τέλος της τρέχουσας χρονοθυρίδας, δηλαδή την χρονική στιγμή $k+1$.

Έτσι, η μέση καθυστέρηση πακέτου, για ρυθμό αφίξεων λ πολύ κοντά στο 0, είναι κατά μέσο όρο:

$$(k+1) - \frac{[(k-1) + k]}{2} = \frac{3}{2} = 1.5 \text{ slots}$$

Όσο το λ αυξάνεται, περισσότερα πακέτα φτάνουν στο σύστημα και συνεπώς η πιθανότητα συγκρούσεων αυξάνεται. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα να καθυστερεί η αναχώρησή τους και η μέση καθυστέρηση πακέτου να αυξάνεται αντίστοιχα.

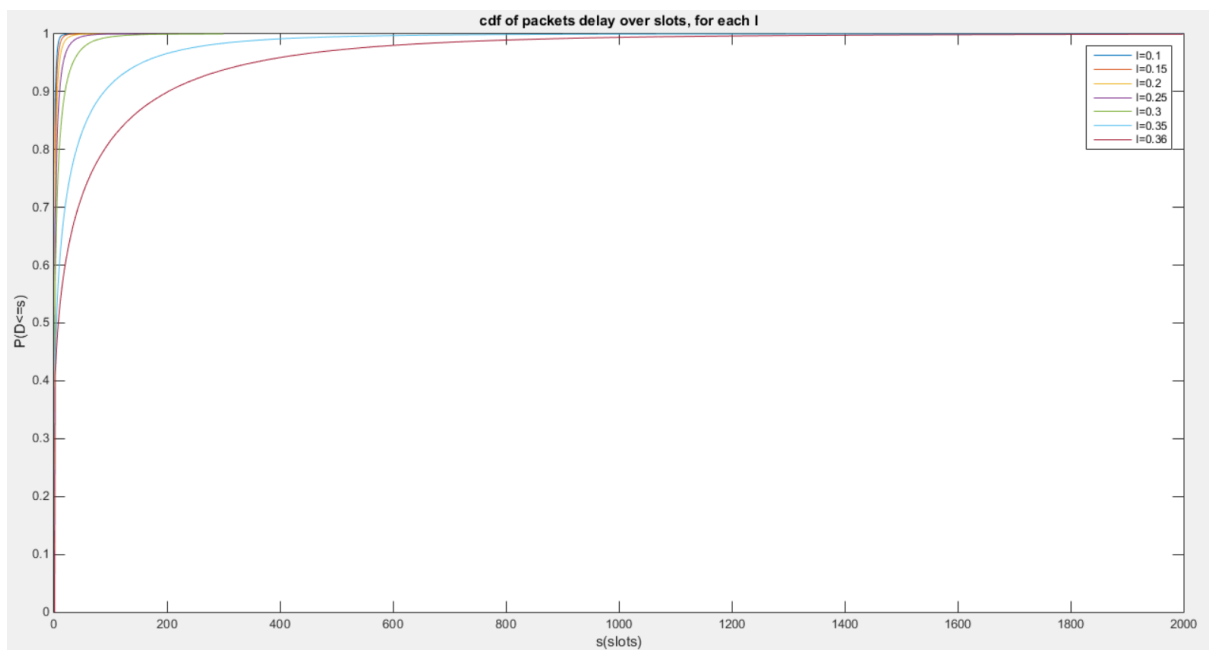
Ο ρυθμός επιτυχημένων μεταδόσεων πλησιάζει σε κάθε περίπτωση τον ρυθμό λ της στοχαστικής διαδικασίας αφίξεων πακέτων.

Στο τέλος της προσομοίωσης, τα μεταδοθέντα επιτυχώς πακέτα είναι περίπου ίσα με το γινόμενο του ρυθμού αφίξεων επί τον χρόνο προσομοίωσης σε slots ($\lambda \cdot T$).

Όσον αφορά τον αριθμό μπλοκαρισμένων πακέτων στο τέλος της προσομοίωσης, για μικρά λ είναι αμελητέος, ενώ όσο ο ρυθμός αφίξεων αυξάνεται, η πιθανότητα σύγκρουσης αυξάνεται αντίστοιχα και στο τέλος της προσομοίωσης παρατηρούνται πακέτα που δεν πρόλαβαν να σταλούν λόγω των συγκρούσεων που έχουν υποστεί.

3.8.1.6 Γραφικές παραστάσεις αθροιστικής συνάρτησης κατανομής της καθυστέρησης πακέτου

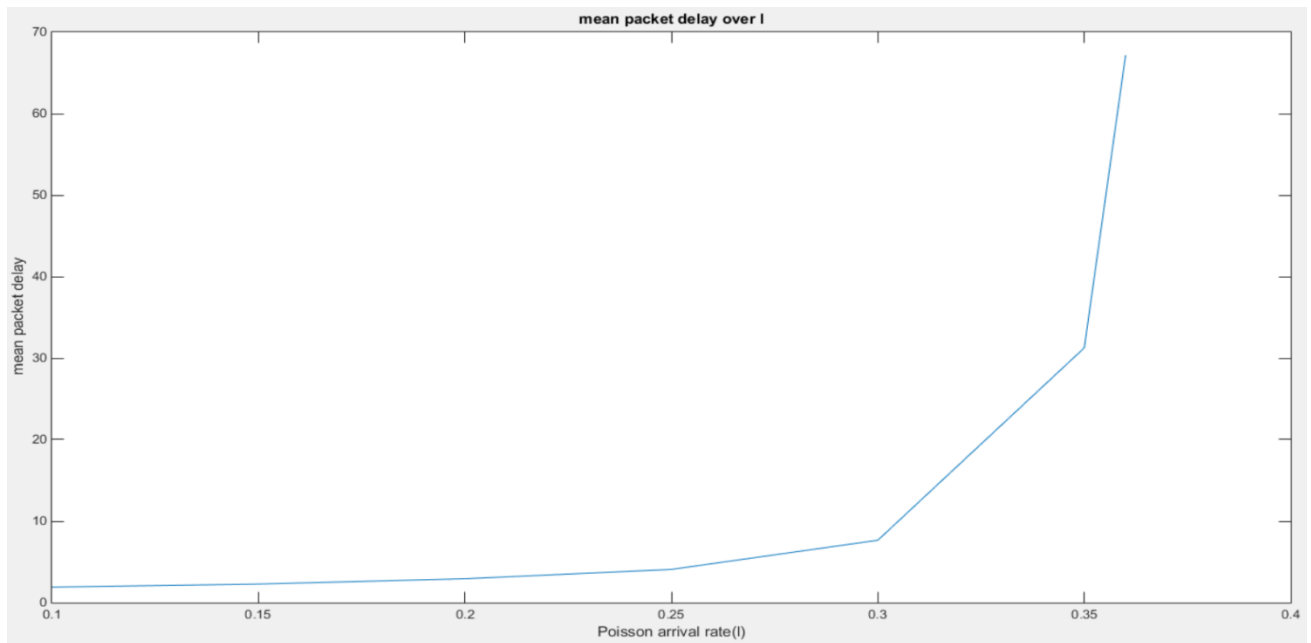
Έστω D η τυχαία μεταβλητή που συμβολίζει την καθυστέρηση πακέτου σε slots. Παρακάτω παρατίθενται οι γραφικές παραστάσεις που παρουσιάζουν την αθροιστική συνάρτηση κατανομής της D , δηλαδή την πιθανότητα $P\{D \leq s\}$ για τις διάφορες τιμές του s (σε slots) και του λ .



Από τα αποτελέσματα στην παραπάνω γραφική παράσταση, παρατηρούμε ότι όσο αυξάνεται το λ και μαζί με αυτό οι μέσες καθυστερήσεις πακέτων, η καμπύλη της αθροιστικής συνάρτησης κατανομής αργεί περισσότερο να φτάσει στην μονάδα. Για ίδιες τιμές του s και διαφορετικά λ , η $P\{D \leq s\}$ επιτυγχάνει μεγαλύτερη τιμή στην περίπτωση μικρότερου ρυθμού αφίξεων λ .

3.8.1.7 Γραφική παράσταση των μέσων καθυστερήσεων πακέτων για διαφορετικές τιμές του λ

Παρακάτω παρατίθεται η γραφική παράσταση για την μέση καθυστέρηση πακέτων, για διάφορες τιμές του λ :



Όπως είναι αναμενόμενο, όσο αυξάνεται το λ , τόσο πιο πολύ επιβαρύνεται το σύστημα με συγκρούσεις που καθυστερούν τις αναχωρήσεις πακέτων και ως εκ τούτου, μεγαλώνει η μέση καθυστέρηση πακέτου.

Όταν το λ οδηγείται κοντά στο μέγιστο throughput ($1/e=0.36$), οι μέσες καθυστερήσεις πακέτων μεγαλώνουν αισθητά συγκριτικά με τις αντίστοιχες μέσες καθυστερήσεις για μικρότερες τιμές του λ .

3.8.2 Προσομοίωση του υλοποιήσιμου ελεγχόμενου slotted Aloha πρωτοκόλλου

Στην συνέχεια, μελετήθηκε και προσομοιώθηκε η λειτουργία του υλοποιήσιμου ελεγχόμενου slotted Aloha πρωτοκόλλου. Κάθε πομπός εκτιμά τον αριθμό των μπλοκαρισμένων χρηστών n_k στην αρχή του slot k , με χρήση της αναδρομικής μεθόδου που εξηγήθηκε και αναλύθηκε στον Pseudo-Bayesian αλγόριθμο που σταθεροποιεί το Aloha, στην παράγραφο 3.7.1. Η εκτιμήτρια συμβολίζεται με $n_{est,k}$ και είναι η ίδια για κάθε πομπό, μιας και προκύπτει με βάση παρατήρηση από κάθε πομπό του σήματος ανάδρασης του καναλιού. Με βάση την εκτίμηση $n_{est,k}$, η πιθανότητα επαναμετάδοσης στο slot k τίθεται

ίση με $q_{r,k}(n_{est}) = \min\{1, 1/n_{est}\}$. Για κάθε slot $k+1$, η εκτίμηση του backlog size στην αρχή του slot γίνεται βάσει του ακόλουθου αναδρομικού κανόνα:

$$n_{est,k+1} = \begin{cases} \max\{\lambda, n_{est,k} + \lambda - 1\} & , \text{for idle or success} \\ n_{est,k} + \lambda + (e - 2)^{-1} & , \text{for collision} \end{cases}$$

Προσομοιώθηκε η λειτουργία του για τις ίδιες τιμές του λ που χρησιμοποιήθηκαν στην περίπτωση της προσομοίωσης του ιδανικού ελεγχόμενου slotted Aloha πρωτοκόλλου.

3.8.2.1 Αποτελέσματα προσομοίωσης

Παρακάτω παρατίθενται τα αποτελέσματα για τον μέσο όρο πέντε (5) προσομοιώσεων του προγράμματος:

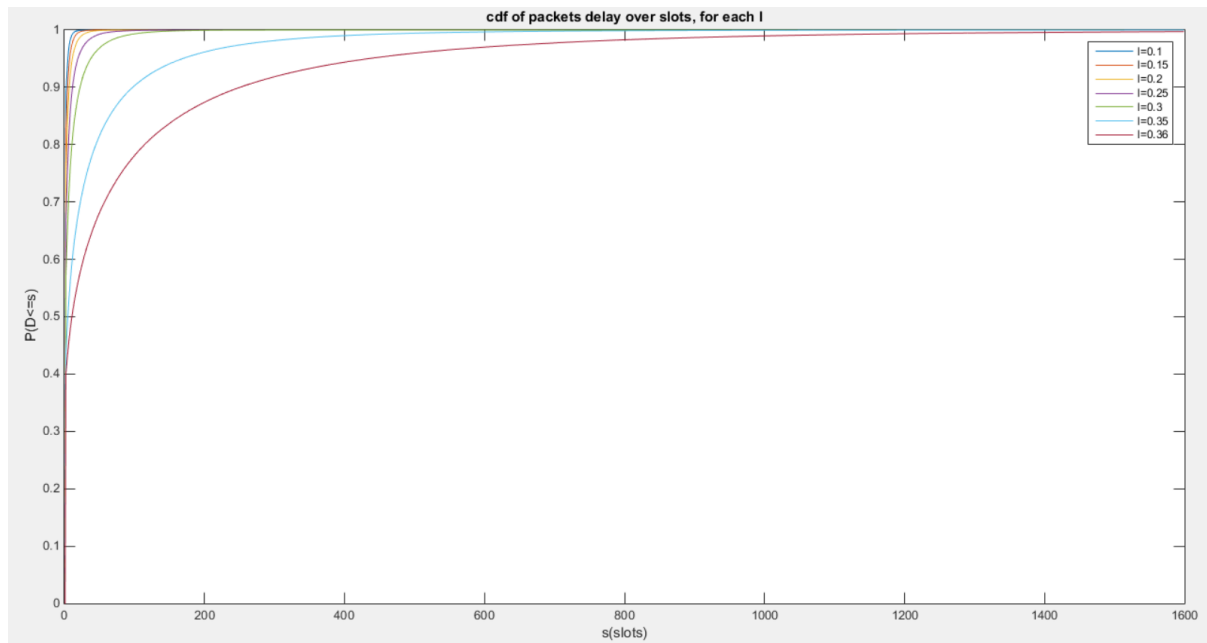
λ (Poisson arrival rate)	T (simulation time in slots) $\times 10^3$	Sent Packets	Collided packets	Successful transm. rate	Mean packet delay (in slots)	P{D≤2}	P{D≤3}	P{D≤4}	P{D≤5}	P{D≤6}
0.01	200	2,041	0	0.0102	1.5272	0.9941	0.9956	0.9971	0.9976	0.9985
0.1	200	20,279	0	0.1014	1.9610	0.8911	0.9123	0.9335	0.9534	0.9653
0.15	200	29,932	0	0.1497	2.3039	0.8287	0.8578	0.8896	0.9197	0.9395
0.2	200	40,331	0	0.2017	3.2420	0.7487	0.7834	0.8188	0.8524	0.8783
0.25	200	49,985	0	0.2499	4.6493	0.6672	0.7063	0.7450	0.7820	0.8113
0.3	800	239,958	0	0.2999	8.6432	0.5701	0.6078	0.6438	0.6775	0.7080
0.35	800	278,861	6	0.3486	33.004	0.4404	0.4643	0.4873	0.5092	0.5290
0.36	800	287,473	13	0.3593	84.201	0.4032	0.4182	0.4327	0.4462	0.4587

3.8.2.2 Σχολιασμός αποτελεσμάτων

Οι παρατηρήσεις όσον αφορά στις μέσες καθυστερήσεις πακέτων, τις αθροιστικές κατανομές των καθυστερήσεων, τον ρυθμό επιτυχημένων μεταδόσεων και τον αριθμό μπλοκαρισμένων πακέτων στο τέλος της προσομοίωσης, είναι παρόμοιες με την περίπτωση του ιδανικού slotted Aloha.

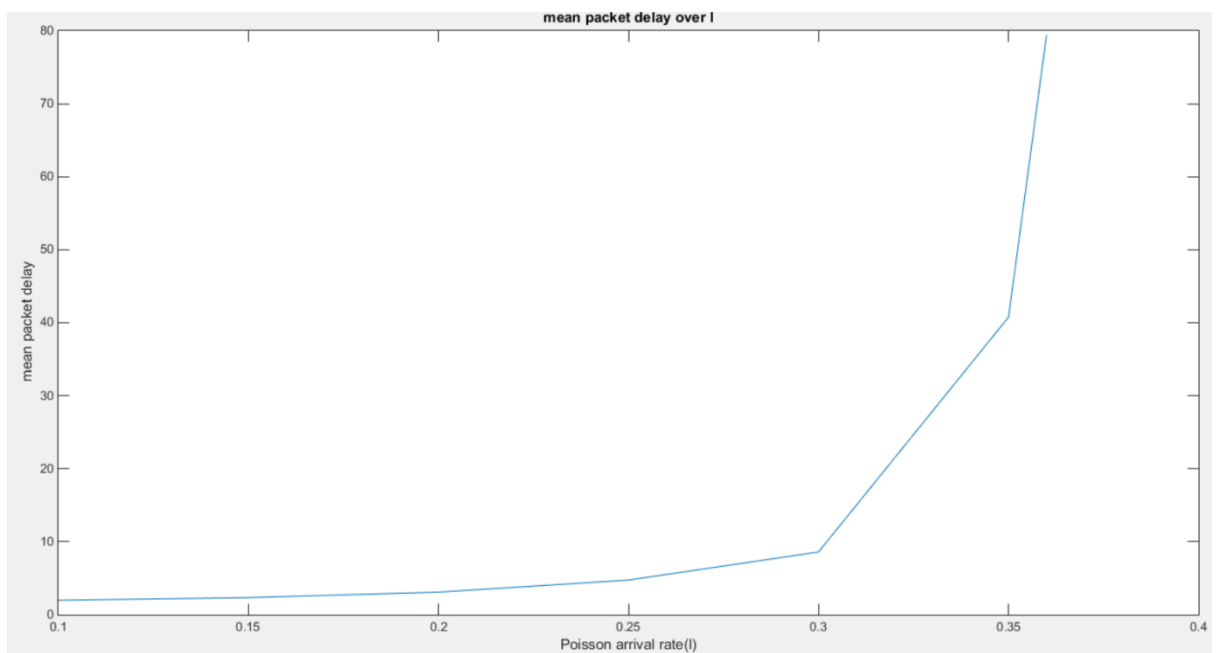
3.8.2.3 Γραφικές παραστάσεις αθροιστικής συνάρτησης κατανομής της καθυστέρησης πακέτου

Η γραφική παράσταση για την αθροιστική συνάρτηση κατανομής της καθυστέρησης D για διαφορετικές τιμές του λ , παρουσιάζεται παρακάτω:



3.8.2.4 Γραφική μέσων καθυστερήσεων πακέτων για κάθε λ

Η γραφική παράσταση των μέσων καθυστερήσεων πακέτων για διαφορετικές τιμές του λ παρουσιάζεται στην συνέχεια:



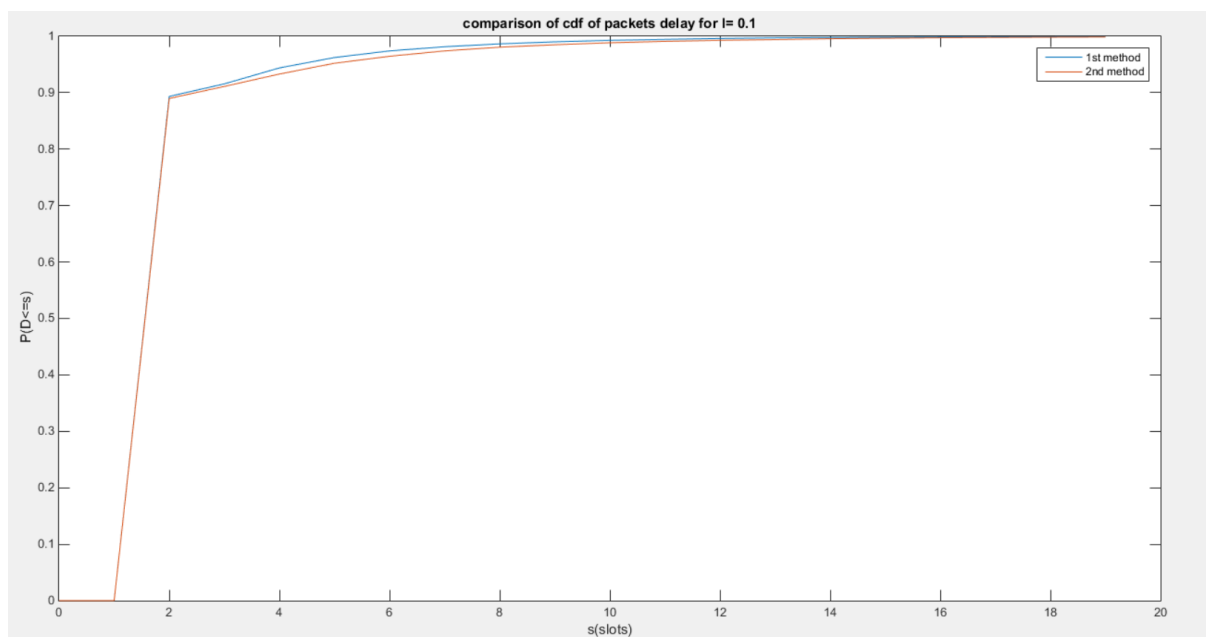
Οι παρατηρήσεις για τα αποτελέσματα στις δύο παραπάνω γραφικές παραστάσεις είναι παρόμοιες με αυτές του ιδανικού slotted Aloha πρωτοκόλλου.

3.9 Σύγκριση ιδανικού με υλοποιήσιμο ελεγχόμενο slotted Aloha

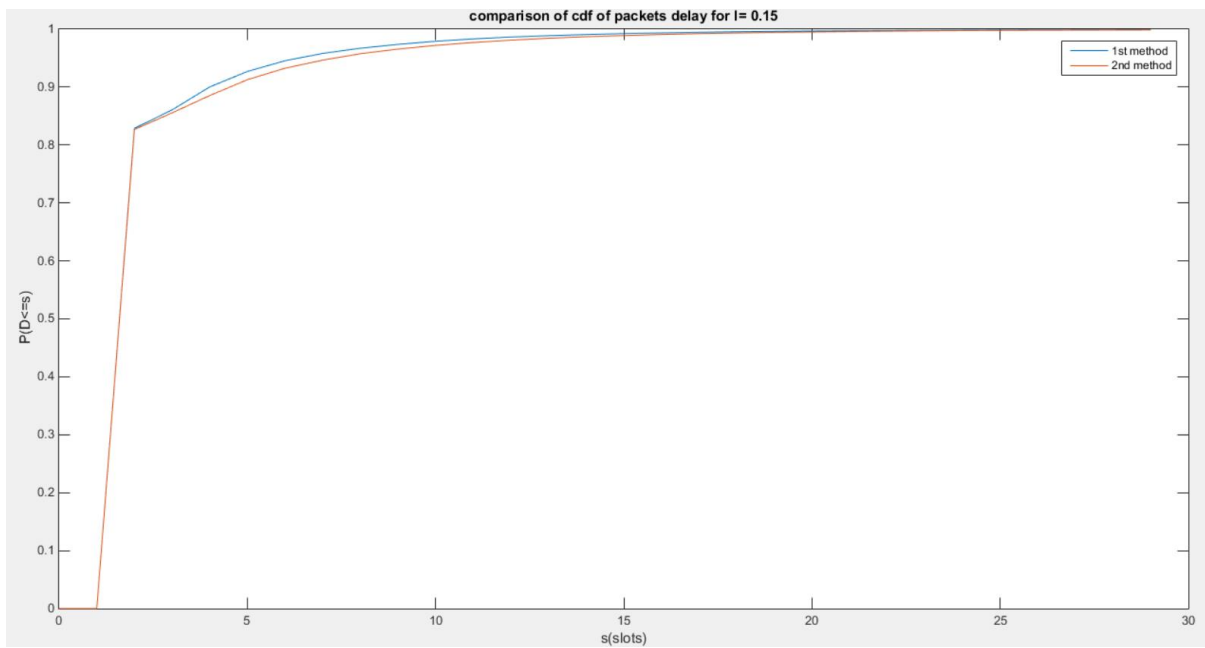
3.9.1 Συγκρίσεις αθροιστικών συναρτήσεων πυκνότητας πιθανότητας τυχαίας μεταβλητής D

Παρακάτω παρατίθενται οι συγκρίσεις των αθροιστικών κατανομών για τα δύο πρωτόκολλα, για σταθερές τιμές του λ . Ως 1st method(με μπλε χρώμα) αναφερόμαστε στο ιδανικό ελεγχόμενο slotted Aloha πρωτόκολλο, ενώ ως 2nd method(με κόκκινο χρώμα), στο υλοποιήσιμο ελεγχόμενο slotted Aloha πρωτόκολλο.

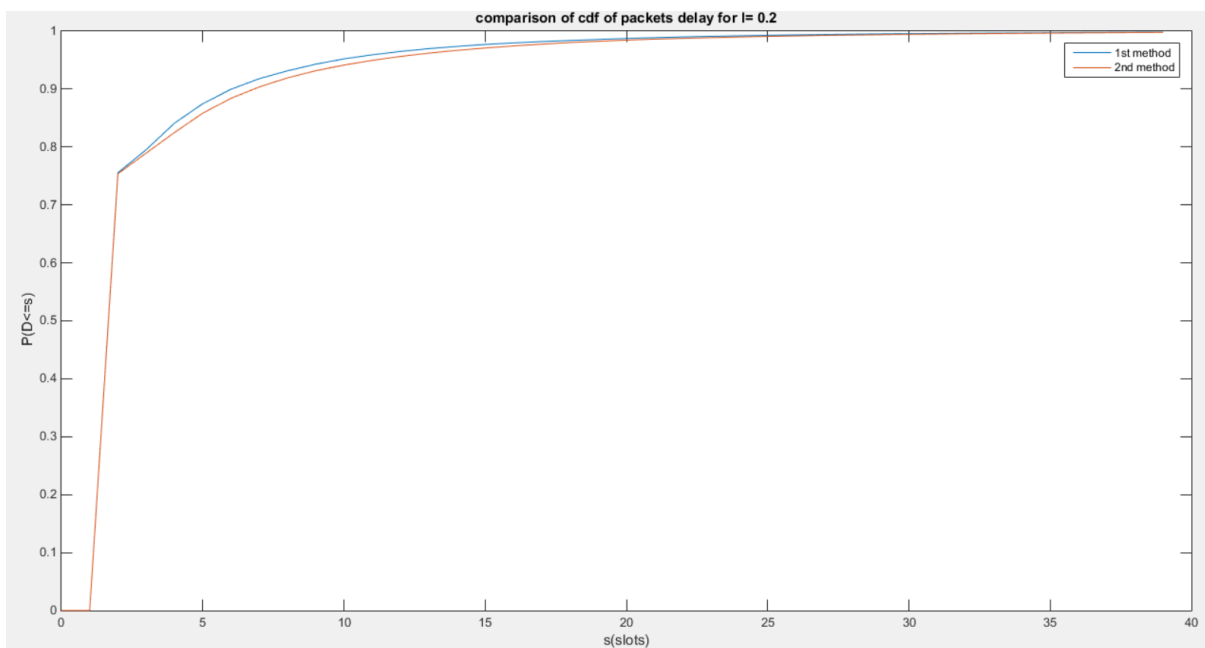
Για $\lambda=0.1$, τα αποτελέσματα παρουσιάζονται στην παρακάτω γραφική:



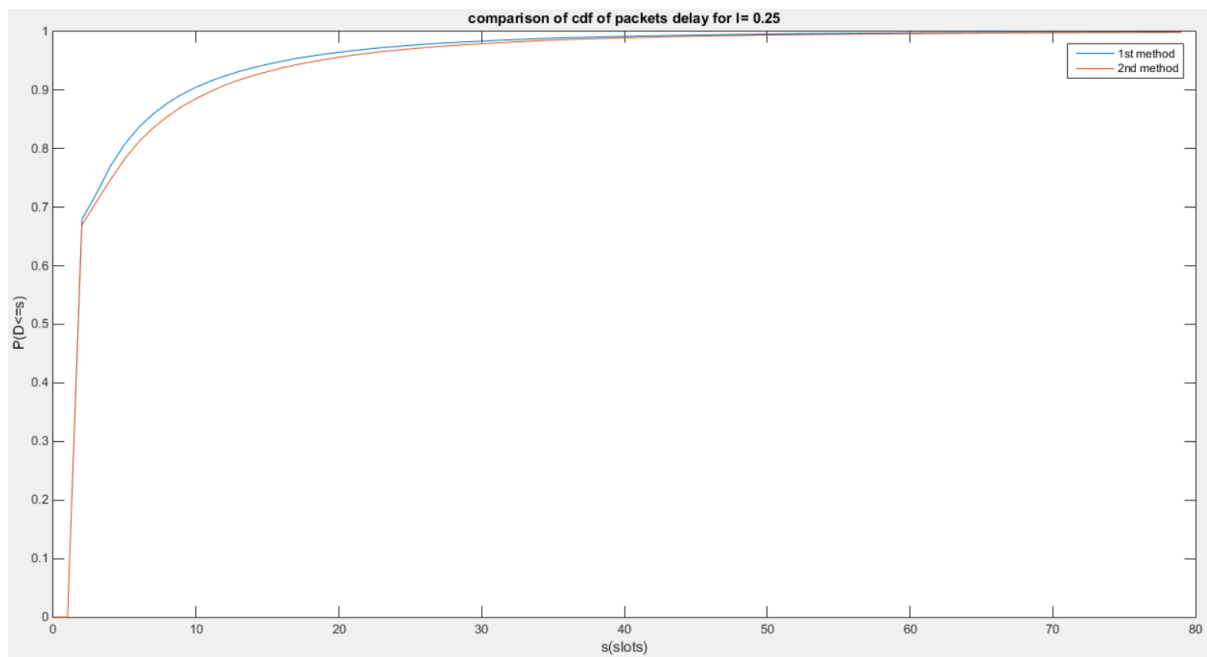
Για $\lambda=0.15$, τα αποτελέσματα παρουσιάζονται στην παρακάτω γραφική:



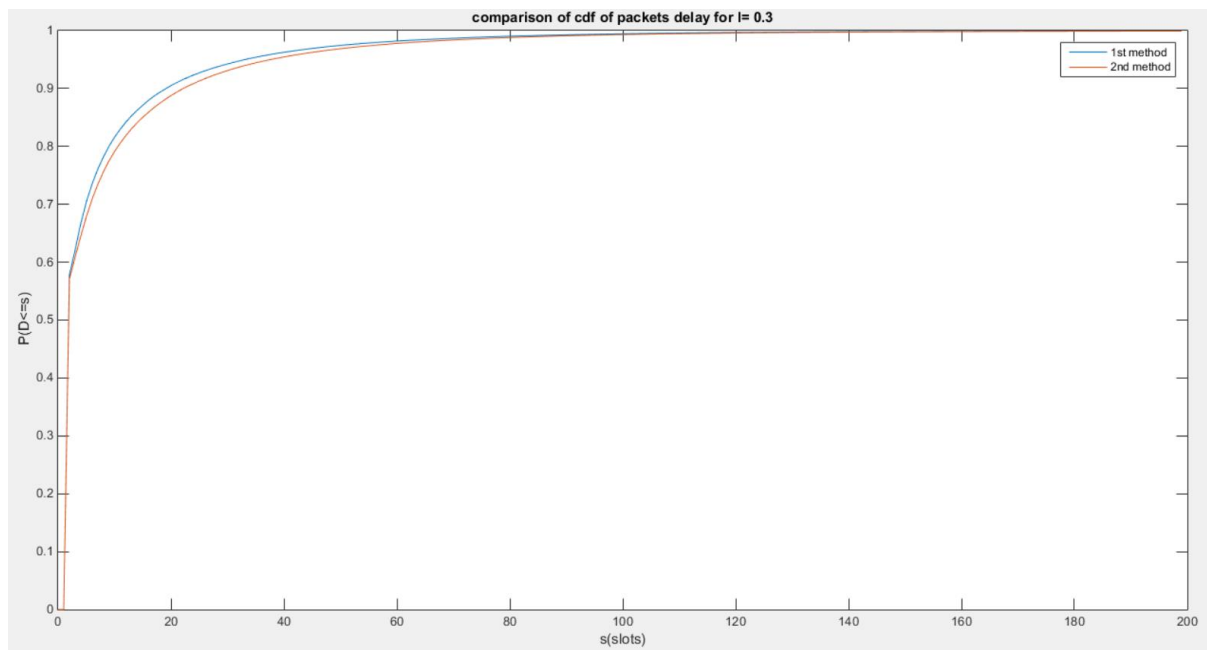
Για $\lambda=0.2$: , τα αποτελέσματα παρουσιάζονται στην παρακάτω γραφική:



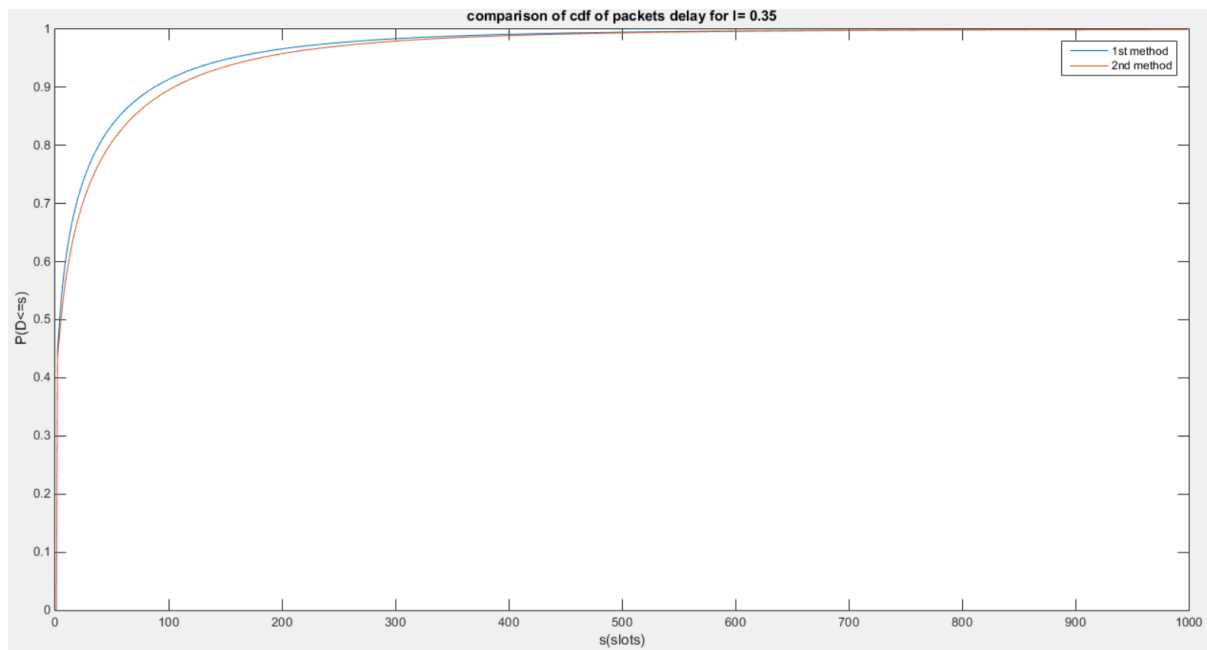
Για $\lambda=0.25$, τα αποτελέσματα παρουσιάζονται στην παρακάτω γραφική:



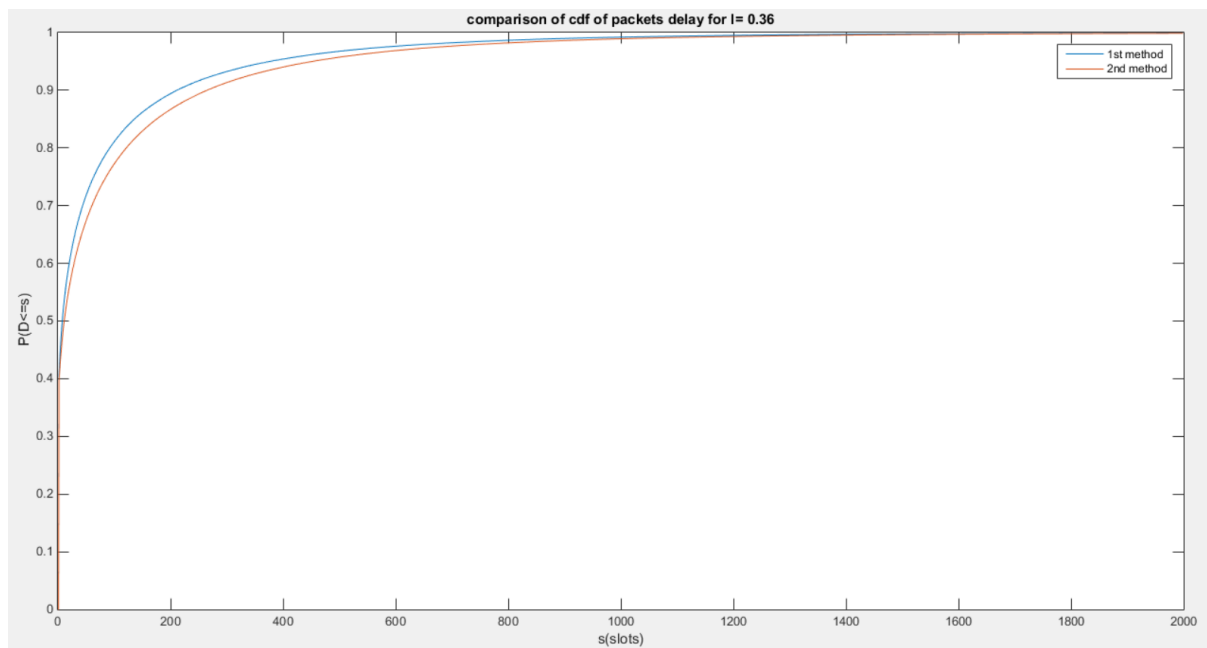
Για $\lambda=0.3$, τα αποτελέσματα παρουσιάζονται στην παρακάτω γραφική:



Για $\lambda=0.35$, τα αποτελέσματα παρουσιάζονται στην παρακάτω γραφική:

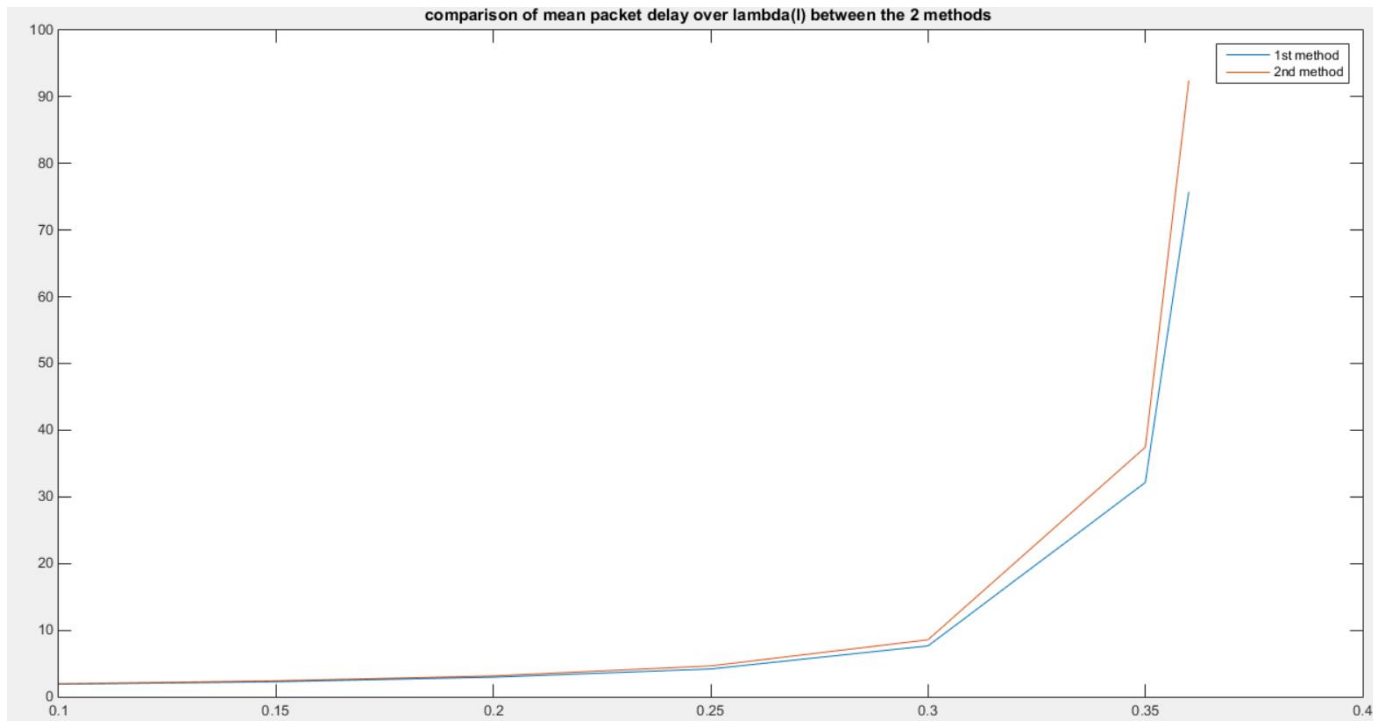


Για $\lambda=0.36$, τα αποτελέσματα παρουσιάζονται στην παρακάτω γραφική:



3.9.2 Συγκρίσεις γραφικών παραστάσεων μέσων καθυστερήσεων πακέτων

Η σύγκριση των γραφικών παραστάσεων των μέσων καθυστερήσεων πακέτων για τις δύο μεθόδους, παρουσιάζεται στην παρακάτω γραφική παράσταση:



3.9.3 Σχολιασμός συγκρίσεων και συμπεράσματα

Όπως παρατηρείται, η λειτουργία του ιδανικού ελεγχόμενου slotted Aloha πρωτοκόλλου υπερτερεί του υλοποιήσιμου πρωτοκόλλου. Για ίδιες τιμές του λ , η αθροιστική κατανομή της τυχαίας μεταβλητής D (που συμβολίζει την καθυστέρηση πακέτου) τείνει "γρηγορότερα" προς την μονάδα στην περίπτωση του ιδανικού πρωτοκόλλου. Η πιθανότητα η D να είναι μικρότερη μιας τιμής s (slots) είναι μεγαλύτερη στην περίπτωση του ιδανικού πρωτοκόλλου.

Όσον αφορά στις μέσες καθυστερήσεις πακέτων, και εκεί στην περίπτωση του ιδανικού ελεγχόμενου πρωτοκόλλου είναι χαμηλότερες των αντίστοιχων μέσων καθυστερήσεων του υλοποιήσιμου, καθώς για ίδιες τιμές του λ , οι μέσες καθυστερήσεις του ιδανικού πρωτοκόλλου είναι μικρότερες από αυτές του υλοποιήσιμου.

Οι παραπάνω διαφορές στις αθροιστικές κατανομές και στις μέσες καθυστερήσεις πακέτων είναι μικρότερες για μικρά λ , ενώ γίνονται πιο ευδιάκριτες όσο το λ μεγαλώνει και τείνει προς το μέγιστο throughput του δικτύου. Παρόλα αυτά, παρατηρούμε ότι οι τιμές του υλοποιήσιμου ελεγχόμενου πρωτοκόλλου προσεγγίζουν σε ικανοποιητικό βαθμό τις

αντίστοιχες του ιδανικού, κάτι που καταδεικνύει την αποδοτική λειτουργία του αναδρομικού κανόνα εκτίμησης του backlog, μέσω του οποίου καθορίζεται η δυναμική μεταβολή της πιθανότητας επαναμετάδοσης q_r .

Τα παραπάνω αποτελέσματα μπορούν να εξηγηθούν, καθώς στην περίπτωση του ιδανικού πρωτοκόλλου, η (ουτοπική) γνώση του μεγέθους του backlog στην αρχή κάθε slot, παρέχει την δυνατότητα να επιλέγεται το q_r με ακριβή (ιδανικό) τρόπο ως $q_r = (1-\lambda)/n$ ώστε να διατηρούμε τον μέσο αριθμό των συνολικά μεταδιδόμενων πακέτων στην διάρκεια ενός slot ίσο με 1. Αντιθέτως, στην περίπτωση του εκτιμητή του μεγέθους του backlog, όσο καλός και αν είναι αυτός, είναι αδύνατο να προσεγγίσουμε με τελειότητα την ιδανική λειτουργία του πρωτοκόλλου.

Κεφάλαιο 4. Ο m -ary αλγόριθμος στοίβας για επίλυση συγκρούσεων

Στο κεφάλαιο αυτό, μελετάμε μέσω προσομοίωσης την λειτουργία του επονομαζόμενου m -ary αλγορίθμου στοίβας (m -ary stack-algorithm). Καθώς το Aloha πρωτόκολλο είναι ασταθές για σταθερή πιθανότητα επαναμετάδοσης των μπλοκαρισμένων πακέτων και η μετάβαση σε ευσταθή λειτουργία επιβάλλει στους χρήστες να παρακολουθούν το feedback του καναλιού σε κάθε slot ώστε να μπορούν να εκτιμήσουν αναδρομικά τον αριθμό των μπλοκαρισμένων πακέτων στην αρχή κάθε χρονοθυρίδας, πολλαπλοί αλγόριθμοι πολλαπλής πρόσβασης με επίλυση συγκρούσεων έχουν προταθεί στην βιβλιογραφία. Ένας από αυτούς, είναι ο m -ary αλγόριθμος στοίβας (m -ary stack-algorithm). Αναπτύχθηκε από τον Boris Tsybakov και την ερευνητική του ομάδα. Είναι ένα εγγενώς ευσταθές, με ελεύθερη άμεση πρόσβαση για νέα πακέτα (free access) πρωτόκολλο, το οποίο για Poisson αφίξεις νέων πακέτων επιτυγχάνει μέγιστο throughput υψηλότερο του $1/e$ (throughput το οποίο επιτυγχάνεται από το ευσταθές slotted Aloha πρωτόκολλο). Όλα τα παραπάνω επιτυγχάνονται με μειωμένη απαίτηση παρακολούθησης του feedback του καναλιού από τους χρήστες σε σχέση με αυτή του ευσταθούς ελεγχόμενου slotted Aloha πρωτοκόλλου.

4.1 Ομοιότητες με το Aloha πρωτόκολλο και ρυθμός αφίξεων πακέτων στο σύστημα

Οι αλγόριθμοι στοίβας χρησιμοποιούν, όπως και το Aloha, "slotted" κανάλι, κάτι που σημαίνει ότι ο άξονας του χρόνου χωρίζεται σε slots και κάθε μετάδοση πακέτου ξεκινάει στην αρχή ενός slot και περατώνεται στο τέλος του. Ομοίως με το Aloha, ένα τερματικό που παράγει ένα φρέσκο πακέτο κατά την διάρκεια μιας χρονοθυρίδας, το μεταδίδει στην διάρκεια της αμέσως επόμενης χρονοθυρίδας. Ένα πακέτο που μεταδίδεται μόνο του στη διάρκεια του slot j , φεύγει από το σύστημα στο τέλος του slot $j+1$. Ο αριθμός αφίξεων πακέτων σε ένα slot, μοντελοποιείται όπως προηγουμένως μέσω στοχαστικής διαδικασίας Poisson με παράμετρο λ .

4.2 Περιγραφή αλγορίθμου

Όλα οι κόμβοι με πακέτα που αποτυγχάνουν να μεταδώσουν επιτυχώς, χρησιμοποιούν τον αλγόριθμο στοίβας. Για τον σκοπό αυτό, κάθε κόμβος με backlogged πακέτο προς μετάδοση, παρακολουθεί την ανάδραση του καναλιού στο τέλος κάποιου slot, για να αποφασίσει τι θα κάνει στο επόμενο slot.

Κάθε πακέτο που μεταδίδεται ανεπιτυχώς σε ένα slot, παραμένει στον buffer του αντίστοιχου κόμβου με πιθανότητα r , ή επαναμεταδίδεται στο επόμενο slot, με πιθανότητα

$1-r$ (στην περίπτωση που $m=2$). Η παράμετρος r είναι η ίδια για όλους τους κόμβους (τερματικά). Εν γένει, ο stack counter αυξάνεται όταν συμβεί σύγκρουση σε κάποιο slot, και μειώνεται σε περίπτωση κενού slot ή slot με επιτυχημένη μετάδοση. Κάθε πακέτο που μεταδίδεται επιτυχώς, αποχωρεί από το σύστημα.

Ο αλγόριθμος αποκαλείται αλγόριθμος στοίβας, επειδή προκειμένου οι backlogged κόμβοι, δηλαδή τα τερματικά με stack counter μεγαλύτερο ή ίσο του 1, να επαναμεταδώσουν το πακέτο τους, χρειάζεται να περιμένουν μέχρι να επιλυθούν όλες οι τρέχουσες συγκρούσεις. Τα πακέτα που γεννήθηκαν στο αμέσως προηγούμενο slot έχουν πλεονέκτημα στην μετάδοση έναντι των backlogged πακέτων που περιμένουν από προηγούμενα slots. Με αυτή την έννοια, ο αλγόριθμος έχει last in-first out (LIFO) χαρακτηριστικά. Η LIFO αυτή ιδιότητα είναι αναγκαία για να διασφαλιστεί ότι τα τερματικά θα απέχουν από πολύ γρήγορες επαναμεταδόσεις όταν το μέγεθος του backlog είναι πολύ μεγάλο.

Σημειώνεται ότι η στοίβα είναι εικονική και κατανεμημένη. Καμία οντότητα στο δίκτυο δεν έχει πλήρη γνώση των περιεχομένων της στοίβας. Τα τερματικά γνωρίζουν την δική τους θέση (stack counter), αλλά δεν έχουν γνώση για το μέγεθος (βάθος) της στοίβας. Ο δέκτης δεν γνωρίζει ποια επίπεδα της στοίβας είναι κατειλημμένα.

Επίσης, το βάθος της στοίβας είναι δυναμικά μεταβαλλόμενο, μεταβάλλεται με την πάροδο του χρόνου ανάλογα με την συχνότητα με την οποία συμβαίνουν συγκρούσεις στο κανάλι.

Η στοίβα προσομοιώνεται με ένα διάνυσμα τιμών, που αντιπροσωπεύει το επίπεδο που κάθε πακέτο καταλαμβάνει στη στοίβα, σε ένα δεδομένο slot k .

4.3 Κανόνες μεταβολής της στοίβας στον χρόνο

Οι κανόνες σύμφωνα με τους οποίους ανανεώνεται η στοίβα ανάλογα με τις δράσεις των τερματικών, είναι οι ακόλουθοι:

- i. Ένα πακέτο που μεταδίδεται στο slot n (δηλαδή που γεννήθηκε στο slot $n-1$), έχει $\ell_n=0$.
- ii. Όταν $\ell_n=0$, το πακέτο αυτό θα μεταδοθεί στο slot n . Όταν $\ell_n>0$, το πακέτο δεν θα μεταδοθεί στο slot n .

- iii. Όταν $\ell_n=0$ και συμβεί σύγκρουση στο slot n , τότε κάθε πακέτο που συμμετέχει στην σύγκρουση(δηλαδή που έχει stack counter ίσο με 0), "ρίχνει ζάρι" με $m(0 \text{ έως } m-1)$ όψεις. Η τιμή που θα έχει ο stack counter καθενός εξ αυτών των πακέτων στο επόμενο slot, εξαρτάται από το αποτέλεσμα της ρίψης του ζαριού σύμφωνα με την εξής σχέση:

$$\ell_{(n+1)} = \text{coin_toss_result} : \{0 \dots m-1\}.$$

Για παράδειγμα, στην περίπτωση της δυαδικής εκδοχής του αλγορίθμου($m=2$), $\ell_{(n+1)}=1$ με πιθανότητα $r=0.5$ και $\ell_{(n+1)}=0$ με πιθανότητα $1-r=0.5$. Γίνεται κατανοητό ότι πλεονέκτημα στην μετάδοση έχουν τα πακέτα για τα οποία η ρίψη του ζαριού τα οδήγησε να μείνουν στον πάτο της στοίβας και δευτερευόντως αυτά τα οποία οδήγησε να ανέβουν λίγα επίπεδα στην στοίβα(ανάλογα με την τιμή του m). Τα πακέτα για τα οποία αποφασίστηκε μέσω της ρίψης να ανέβουν επίπεδο/επίπεδα στη στοίβα, θα πρέπει να περιμένουν μέχρι να ξανακατέβουν επίπεδο/επίπεδα στην στοίβα, προκειμένου να επαναμεταδώσουν. Αυτό σημαίνει ότι ένα φρέσκο πακέτο στο σύστημα μπορεί να είναι τυχερό και να μεταδοθεί πριν από τα ήδη μπλοκαρισμένα. Συνεπώς, ο αλγόριθμος, όπως προείπαμε, έχει χαρακτηριστικά LIFO.

- iv. Όταν $\ell_n > 0$ και συμβεί σύγκρουση στο slot n , τότε: $\ell_{(n+1)} = \ell_n + (m-1)$. Δηλαδή, κάθε πακέτο με τιμή stack counter μεγαλύτερη ή ίση του 1, που δεν μετέχει δηλαδή στην εν εξελίξει σύγκρουση, ανεβαίνει κατά $m-1$ επίπεδα στη στοίβα. Υπεθυμίζεται ότι τα πακέτα που μετέχουν στην σύγκρουση "χωρίζονται" στα m κελιά της στοίβας, ανάλογα με το αποτέλεσμα της ρίψης του m -αρυ ζαριού. Ο λόγος που μετακινούνται προς τα πάνω στην στοίβα τα πακέτα που δεν μετέχουν στην σύγκρουση, όταν αυτή συμβεί, είναι για να δημιουργηθεί ο χώρος ώστε να "διαιρεθούν" τα πακέτα που ήταν στο κελί 0 της στοίβας και δημιούργησαν την σύγκρουση. Για να αποφευχθεί η "ανάμειξη" των διαφορετικών ειδών πακέτων σε ίδια κελιά της στοίβας, ολόκληρο το περιεχόμενο της στοίβας πάνω από το κελί 0, ανεβαίνει $m-1$ θέσεις προς τα πάνω, ώστε να αφήσει m ελεύθερα κελιά για να διαιρεθούν πιθανοτικά πακέτα που βρίσκονται στο κελί 0 και δημιουργούν σύγκρουση.

- v. Όταν $\ell_n > 0$ και συμβαίνει επιτυχημένη μετάδοση στο slot n , τότε $\ell_{(n+1)} = \ell_n - 1$. Δηλαδή, κατεβαίνουν επίπεδο κατά 1 κελί όλα τα πακέτα με τιμή stack counter μεγαλύτερη ή ίση του 1, για να "ανέβουν" σε προτεραιότητα μετάδοσης στα επόμενα slots.
- vi. Όταν $\ell_n > 0$ και το slot n είναι κενό, τότε επίσης $\ell_{(n+1)} = \ell_n - 1$.

4.4 Πίνακες αποτελεσμάτων για διάφορες τιμές του m

Ο αλγόριθμος λειτουργεί με παράμετρο το m . Στον πίνακα και τις γραφικές που παρουσιάζονται παρακάτω, δοκιμάστηκαν ενδεικτικά οι τιμές $m=2, m=3$ και $m=5$, προκειμένου να συγκριθούν μεταξύ τους και να βγάλουμε συμπέρασμα για την κατάλληλη τιμή του m .

m=2:

λ (Poisson arrival rate)	T (simulation time in slots) $\times 10^3$	Sent Packets	Packets in the stack	Successful transmission rate	Mean packet delay (in slots)	P{D≤2}	P{D≤3}	P{D≤4}	P{D≤5}	P{D≤6}
0.1	250	25,132	0	0.1005	1.9734	0.8825	0.9086	0.9360	0.9505	0.9634
0.15	250	37,668	0	0.1507	2.4685	0.8125	0.8492	0.8899	0.9118	0.9325
0.2	250	49,895	0	0.1996	3.3311	0.7311	0.7778	0.8264	0.8552	0.8829
0.25	250	62,299	0	0.2492	5.2371	0.6147	0.6762	0.7354	0.7733	0.8086
0.3	300	90,553	0	0.3018	10.8595	0.4711	0.5453	0.6148	0.6628	0.7057
0.35	1000	350,190	7	0.3502	97.6615	0.2063	0.2991	0.3818	0.4445	0.5013
0.36	2000	720,086	306	0.3600	997.7314	0.1417	0.2396	0.3251	0.3908	0.4508

m=3:

λ (Poisson arrival rate)	T (simulation time in slots) $\times 10^3$	Sent Packets	Packets in the stack	Successful transmission rate	Mean packets delay (in slots)	P{D≤2}	P{D≤3}	P{D≤4}	P{D≤5}	P{D≤6}
0.1	250	24,915	0	0.0997	1.9182	0.8944	0.9147	0.9359	0.9589	0.9687
0.15	250	37,400	0	0.1496	2.2919	0.8330	0.8632	0.8945	0.9288	0.9421
0.2	250	50,042	0	0.2002	2.8720	0.7562	0.7972	0.8413	0.8853	0.9039
0.25	250	62,397	0	0.2496	4.0466	0.6750	0.7259	0.7763	0.8290	0.8540
0.3	300	89,907	0	0.2997	6.3504	0.5704	0.6339	0.6960	0.7553	0.7855
0.35	1000	350,185	0	0.3502	13.6389	0.4375	0.5121	0.5846	0.6535	0.6909
0.37	1000	370,483	12	0.3705	24.3832	0.3765	0.4566	0.5327	0.6049	0.6445
0.38	1000	379,351	21	0.3794	35.7124	0.3490	0.4309	0.5092	0.5825	0.6240
0.39	1000	389,255	25	0.3893	64.5074	0.3106	0.3960	0.4764	0.5519	0.5946
0.395	1000	395,572	53	0.3956	123.8963	0.2931	0.3798	0.4613	0.5377	0.5808
0.4	2500	998,958	98	0.3996	513.8227	0.2720	0.3604	0.4434	0.5200	0.5645

m=5:

λ (Poisson arrival rate)	T (simulation time in slots) $\times 10^3$	Sent Packets	Packets in the stack	Successful transmission rate	Mean packets delay (in slots)	$P\{D \leq 2\}$	$P\{D \leq 3\}$	$P\{D \leq 4\}$	$P\{D \leq 5\}$	$P\{D \leq 6\}$
0.1	250	25,077	0	0.1003	1.9894	0.8942	0.9090	0.9251	0.9411	0.9584
0.15	250	37,391	0	0.1496	2.4424	0.8353	0.8582	0.8821	0.9049	0.9282
0.2	250	50,163	0	0.2007	3.2139	0.7607	0.7905	0.8208	0.8518	0.8825
0.25	250	62,254	0	0.2490	4.4953	0.6877	0.7252	0.7606	0.7962	0.8335
0.3	300	89,969	0	0.2999	7.2719	0.6015	0.6461	0.6886	0.7314	0.7728
0.35	1000	349,757	5	0.3498	18.8813	0.5000	0.5522	0.6020	0.6503	0.6963
0.37	1000	369,915	14	0.3699	42.3986	0.4537	0.5089	0.5621	0.6123	0.6605
0.38	1000	378,922	85	0.3789	77.4640	0.4339	0.4904	0.5445	0.5965	0.6449
0.39	2500	968,619	6152	0.3874	257.9049	0.4136	0.4728	0.5285	0.5811	0.6305

4.5 Σχολιασμός αποτελεσμάτων και εκτίμηση μέγιστου throughput

Ο αριθμός απεσταλμένων πακέτων στο τέλος της προσομοίωσης είναι περίπου ίσος με το γινόμενο λT , ρυθμού αφίξεων πακέτων της στοχαστικής διαδικασίας Poisson επί τον χρόνο προσομοίωσης σε χρονοθυρίδες.

Τα μη απεσταλμένα πακέτα, αυτά δηλαδή που στο τέλος της προσομοίωσης βρίσκονται ακόμα στη στοίβα, για μικρά λ είναι μηδαμινά, ανεξαρτήτως της τιμής της παραμέτρου m . Όσο όμως αυξάνεται ο ρυθμός αφίξεων πακέτων στο σύστημα, αυξάνεται και το μέγεθος της στοίβας με αποτέλεσμα στο τέλος της προσομοίωσης και, ιδιαίτερα, για μεγάλα λ (κοντά στο εκάστοτε μέγιστο throughput), κάποια κελιά της στοίβας να καταλαμβάνονται ακόμα από πακέτα που δεν πρόλαβαν να μεταδοθούν επιτυχώς.

Ο ρυθμός επιτυχημένων μεταδόσεων προσεγγίζει τον ρυθμό αφίξεων πακέτων.

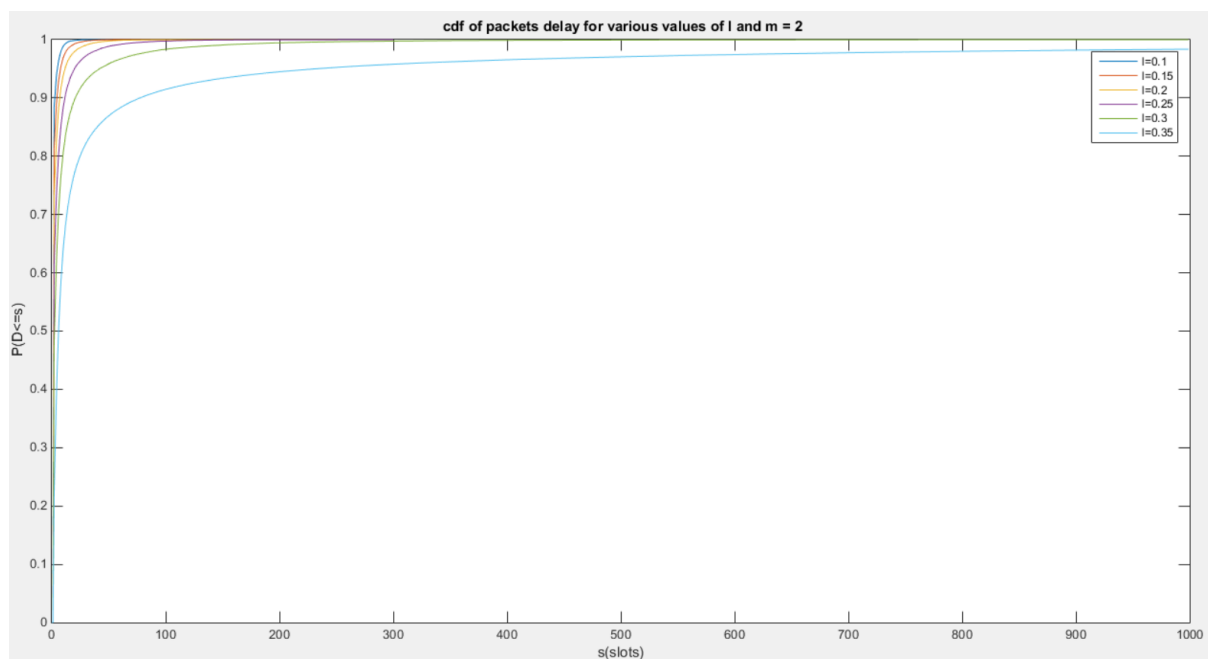
Η μέση καθυστέρηση πακέτου, ανεξαρτήτως της τιμής της παραμέτρου m , αυξάνεται με την αύξηση του λ . Αυτό είναι λογικό λαμβάνοντας υπόψιν ότι η αύξηση του λ επιβαρύνει το σύστημα με περισσότερα πακέτα και συνεπώς η μετάδοσή τους καθυστερεί περισσότερα slots. Όσο περισσότερα πακέτα εισέρχονται στο σύστημα, τόσο περισσότερο αυξάνεται η πιθανότητα σε κάποιο slot να υπάρξει σύγκρουση και συνεπώς να ανέβουν επίπεδο στη στοίβα τόσο οι χρήστες που συμμετέχουν στη σύγκρουση, όσο και αυτοί που δεν συμμετέχουν αλλά βρίσκονταν σε υψηλότερα κελιά της στοίβας. Συνέπεια αυτού, είναι να καθυστερεί η μετάδοση πακέτων από αυτούς τους χρήστες, καθώς θα πρέπει να περιμένουν μέχρι να ξανακατέβουν στο κελί 0 της στοίβας προτού μπορέσουν να μεταδώσουν ξανά το πακέτο τους, ώστε τελικά να το μεταδώσουν επιτυχώς. Αυτό

ενδέχεται να διαρκέσει πολλά slots και συνεπώς η καθυστέρηση πακέτου αυξάνεται κατακόρυφα.

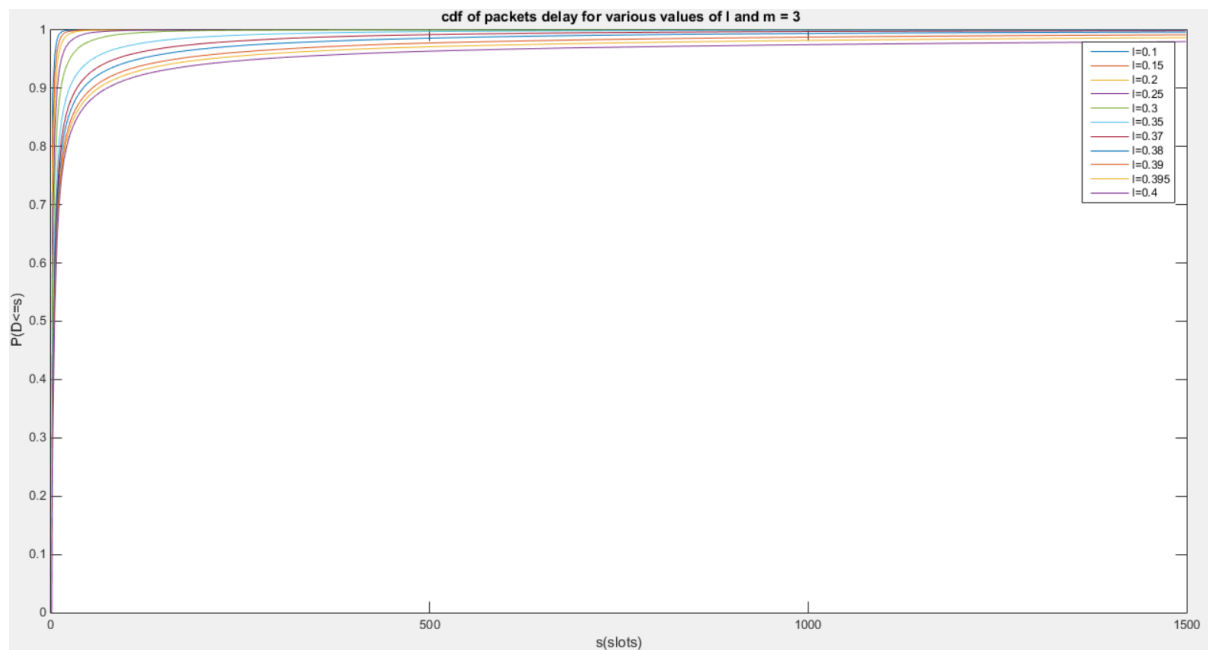
Το αξιοσημείωτο στα παραπάνω αποτελέσματα είναι το γεγονός ότι ανάλογα με την τιμή του m , το εύρος των τιμών για το λ διαφέρει. Συγκεκριμένα, παρατηρούμε ότι για $m=3$ το λ μπορεί να οδηγηθεί σε μεγαλύτερες τιμές από ό,τι για $m=5$ και ειδικότερα από ό,τι για $m=2$. Το γεγονός αυτό παρέχει ισχυρή ένδειξη τόσο για το με ποια τιμή του m ο αλγόριθμος επιτυγχάνει καλύτερες επιδόσεις, όσο και για το μέγιστο throughput του αλγορίθμου. Συγκεκριμένα, παρατηρούμε ότι το μέγιστο throughput διαφέρει ανάλογα με το m . Για $m=2$, επιτυγχάνεται μικρότερο throughput απ' ό,τι για $m=5$, ενώ ειδικότερα για $m=3$ επιτυγχάνεται το μεγαλύτερο throughput, κοντά στο 0.4. Για $m=2$, το throughput βρίσκεται κοντά στο 0.36 (μέγιστο throughput του πρωτοκόλλου slotted Aloha), ενώ για $m=5$, στο 0.39. Το μέγιστο throughput εκτιμάται πειραματικά ως εκείνη η τιμή του ρυθμού αφίξεων λ πάνω από την οποία καθώς αυξάνουμε τον χρόνο προσομοίωσης, η παρατηρούμενη μέση καθυστέρηση πακέτου αυξάνεται θεαματικά και ο ρυθμός επιτυχημένων μεταδόσεων πακέτων υπολείπεται αισθητά της τιμής του ρυθμού αφίξεων, λ .

4.6 Αθροιστική συνάρτηση κατανομής της καθυστέρησης πακέτου για πακτωμένα m και μεταβαλλόμενα λ

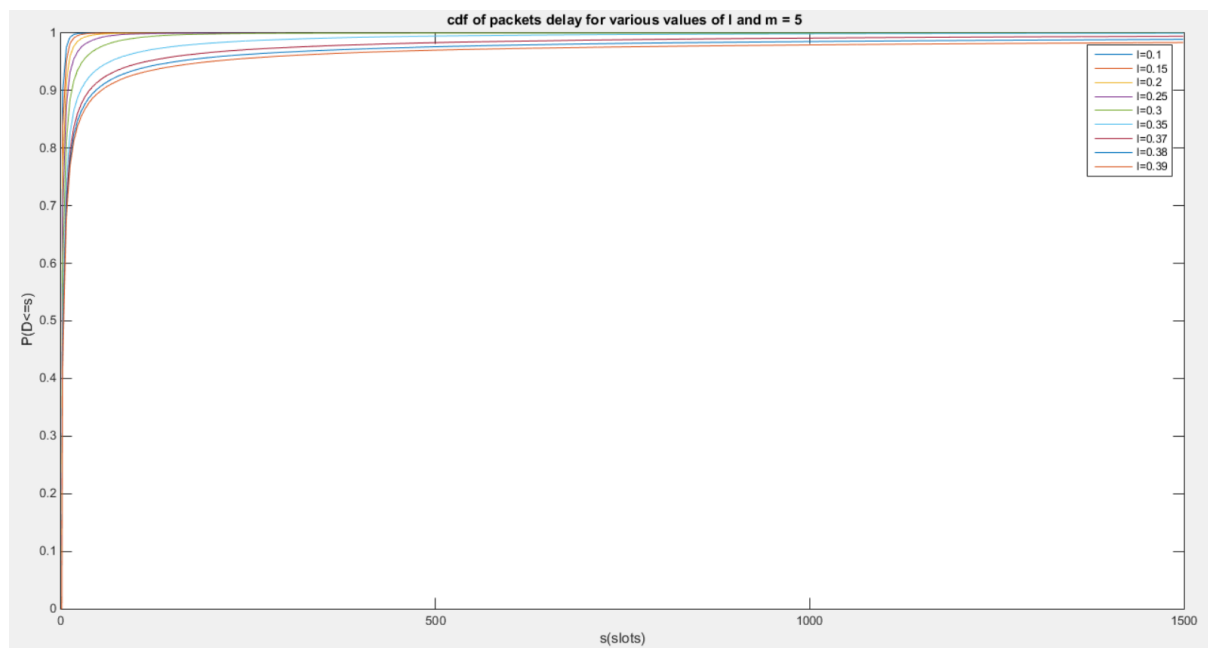
$m=2$:



$m=3$:



$m=5$:



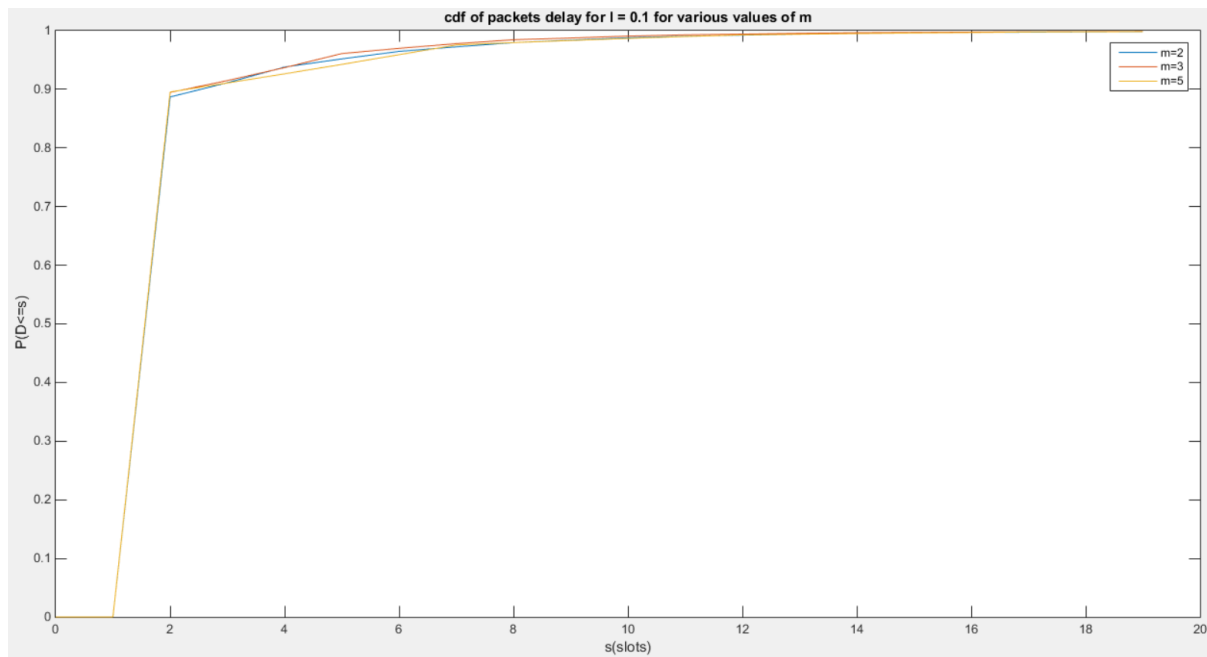
Όπως είναι αναμενόμενο, και στις 3 περιπτώσεις, όσο αυξάνεται ο ρυθμός αφίξεων πακέτων(λ), τόσο πιο αργά τείνει προς την μονάδα η αντίστοιχη αθροιστική συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας.

4.7 Σύγκριση $m=2$, $m=3$, $m=5$

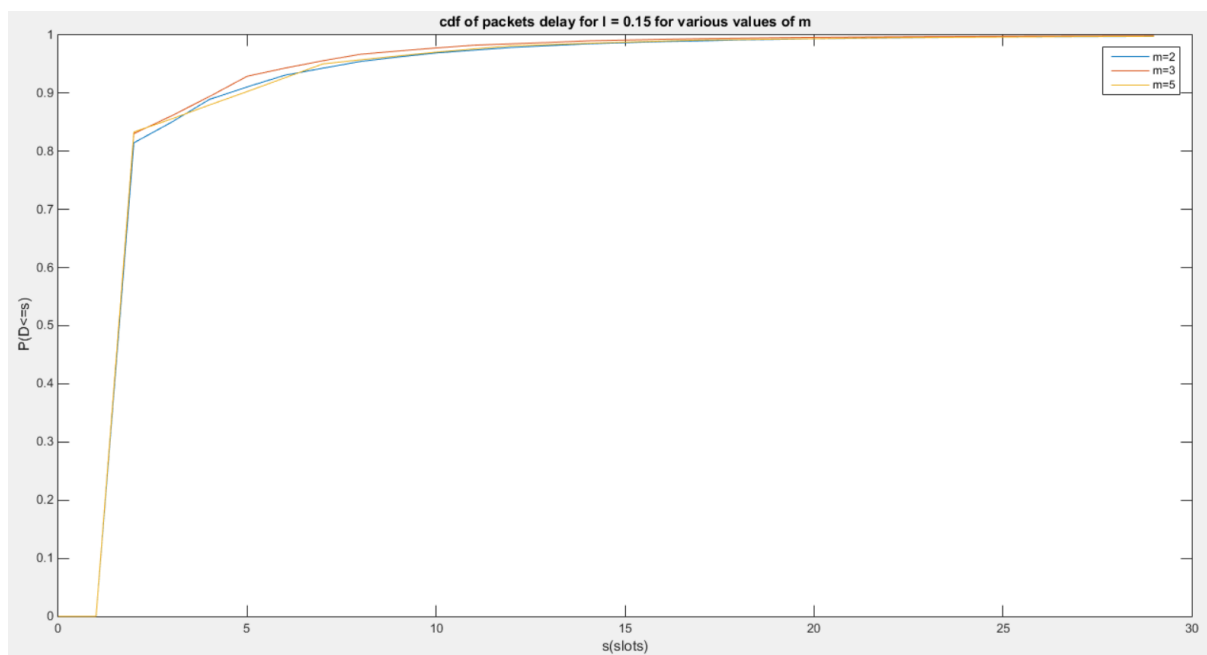
4.7.1 Σύγκριση αθροιστικής συνάρτησης κατανομής της καθυστέρησης πακέτων για πακτωμένες τιμές του λ και μεταβαλλόμενο m

Γραφικές αθροιστικών συναρτήσεων κατανομής $P\{D \leq s\}$ για

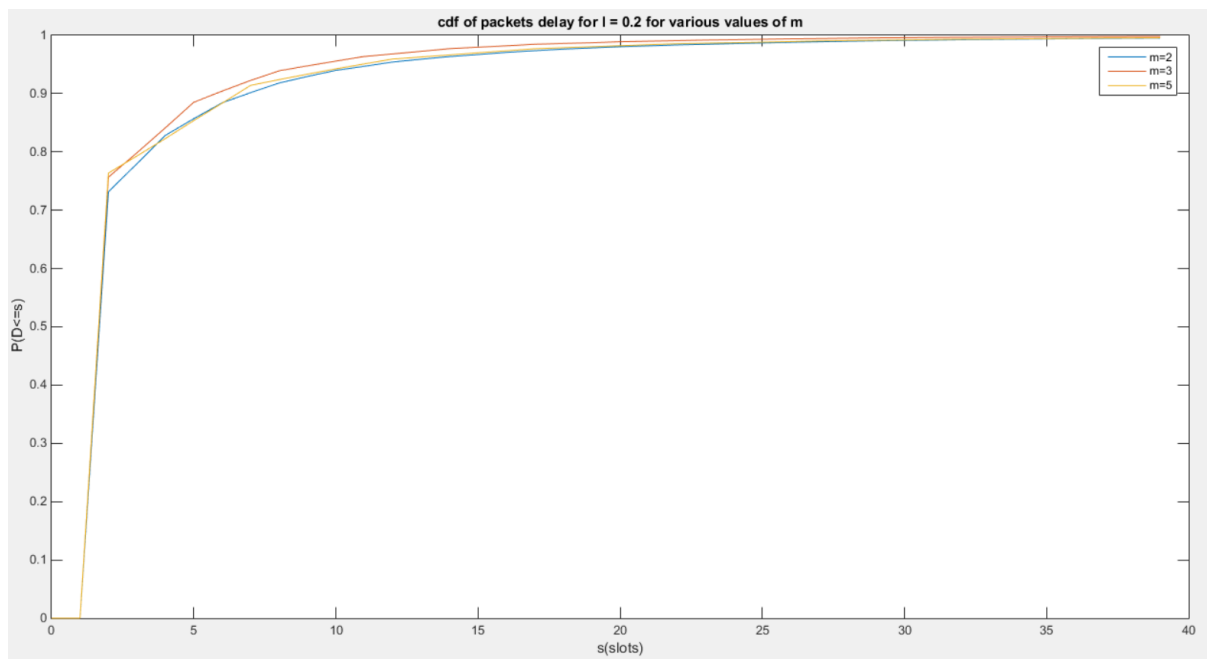
$\lambda=0.1$:



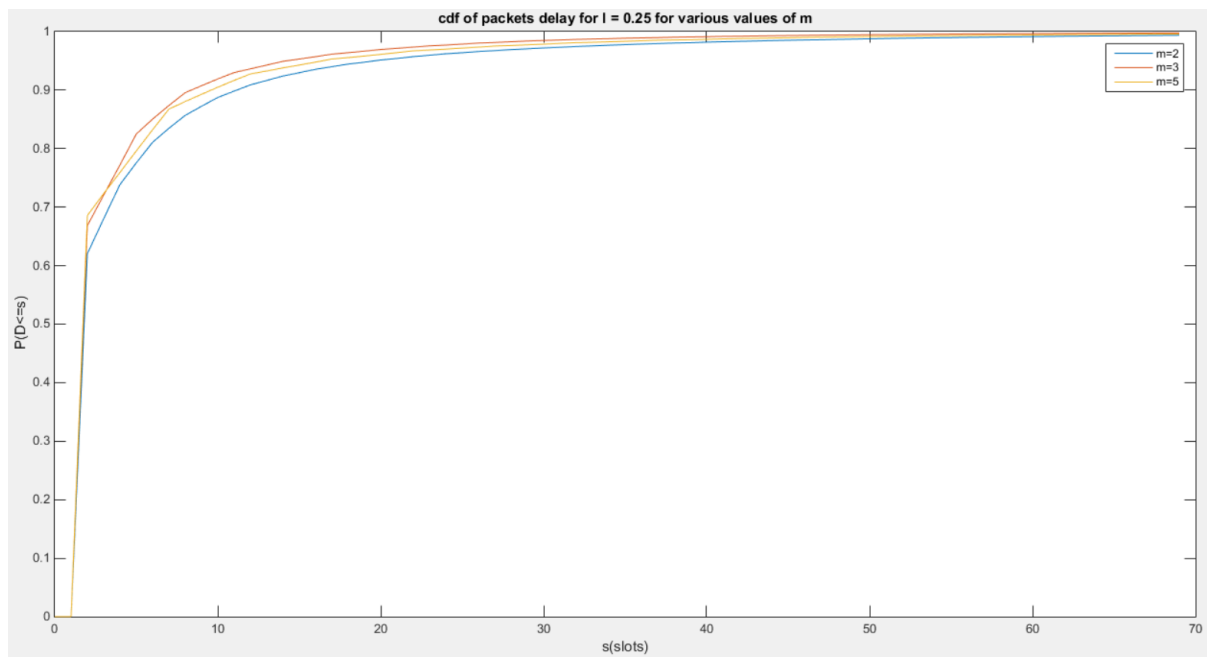
$\lambda=0.15$:



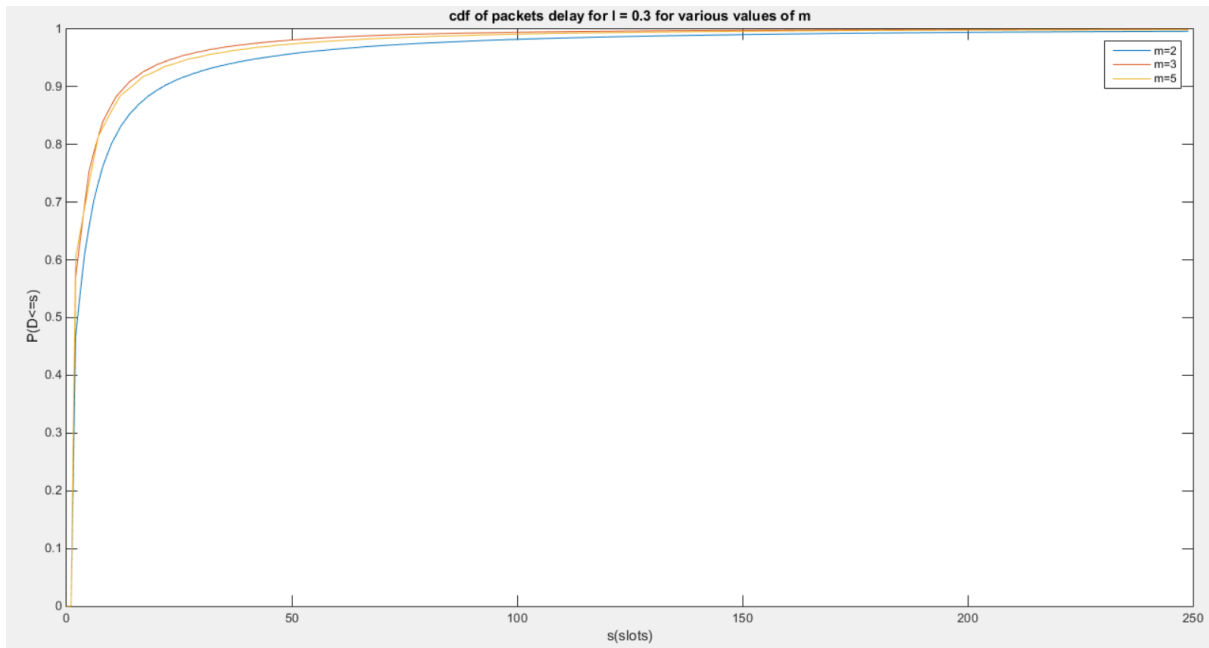
$\lambda=0.2$:



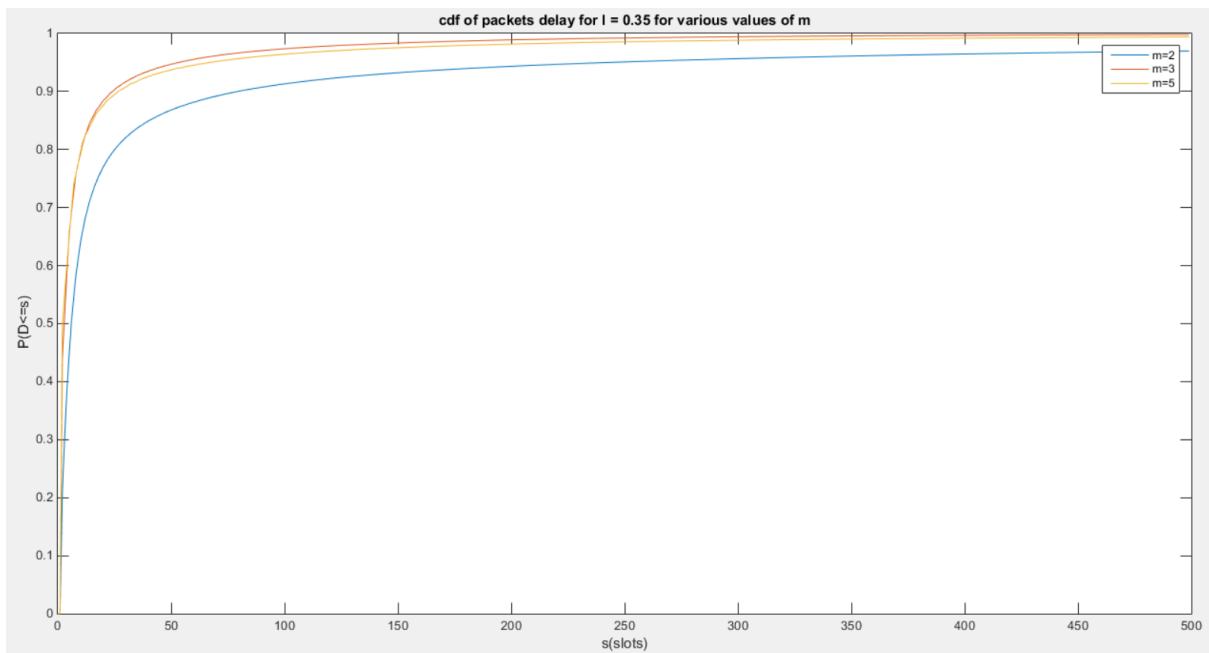
$\lambda=0.25$:



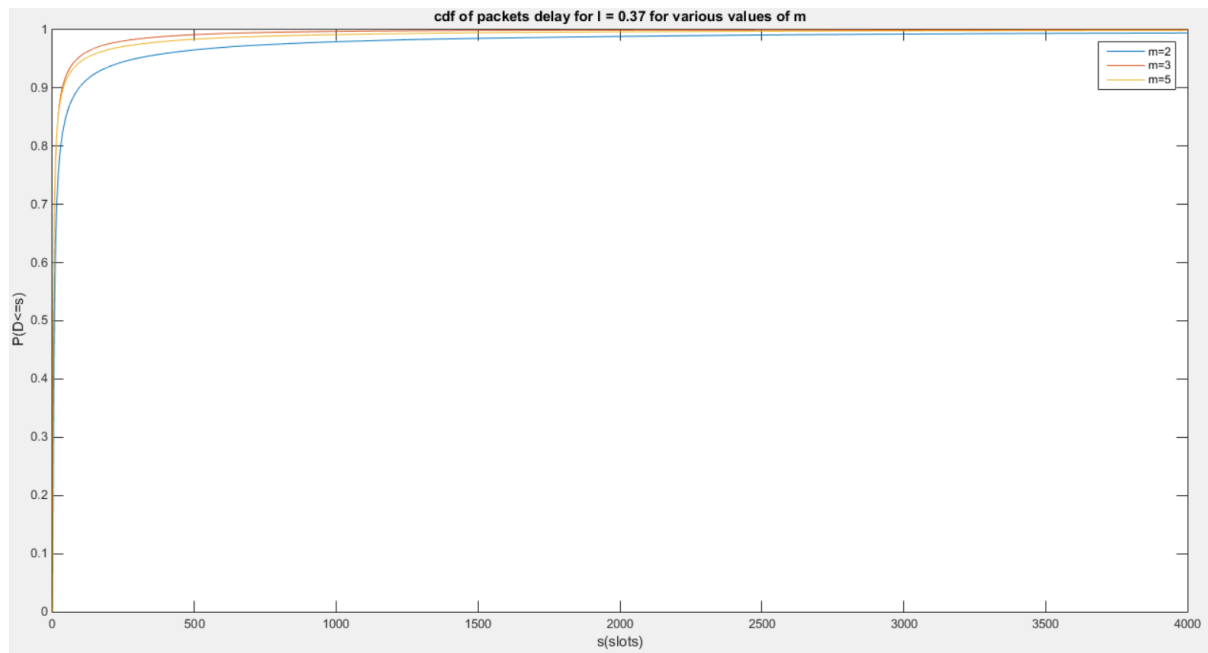
$\lambda=0.3$:



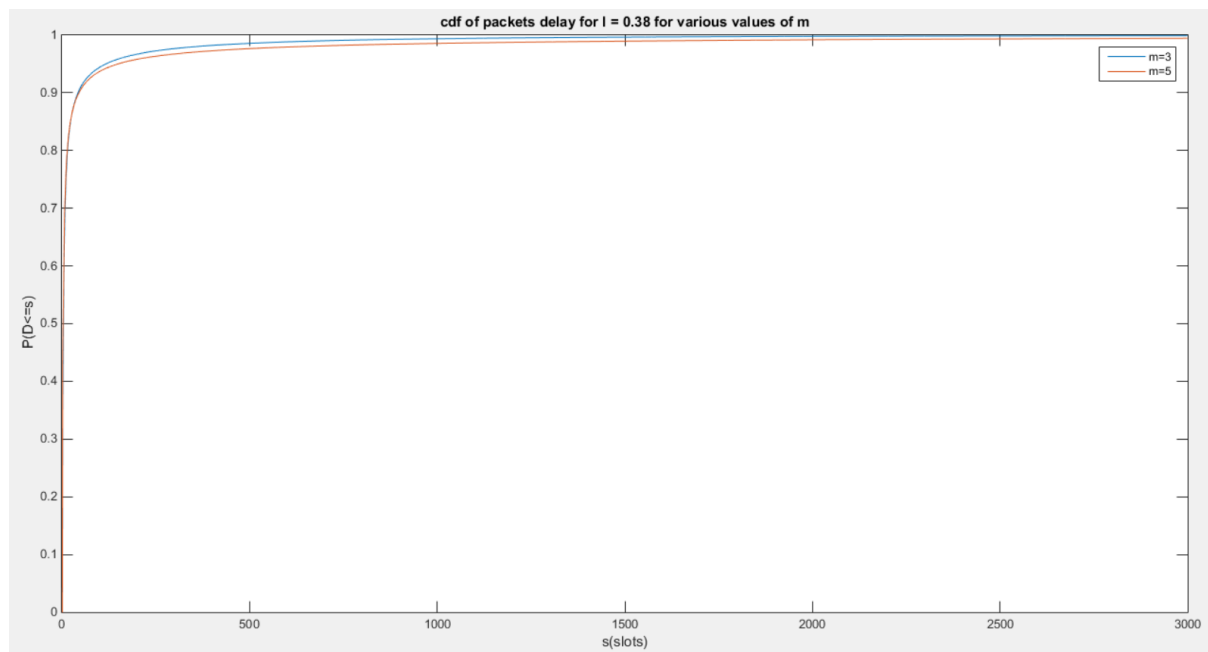
$\lambda=0.35$:



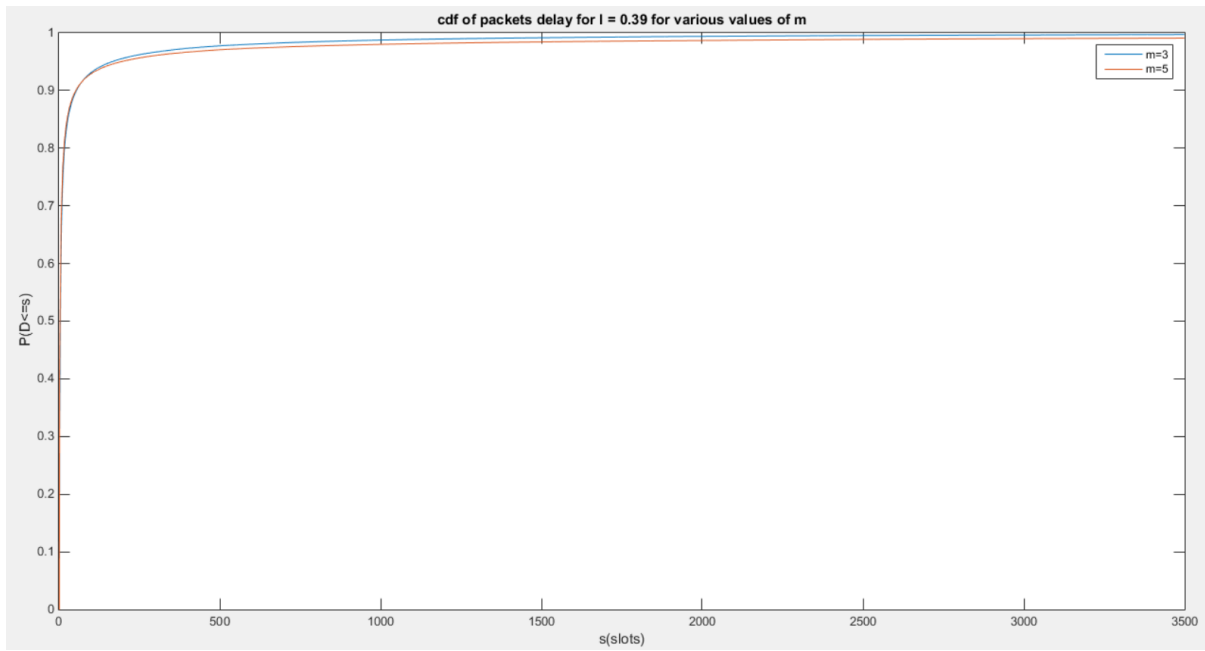
$\lambda=0.37$:



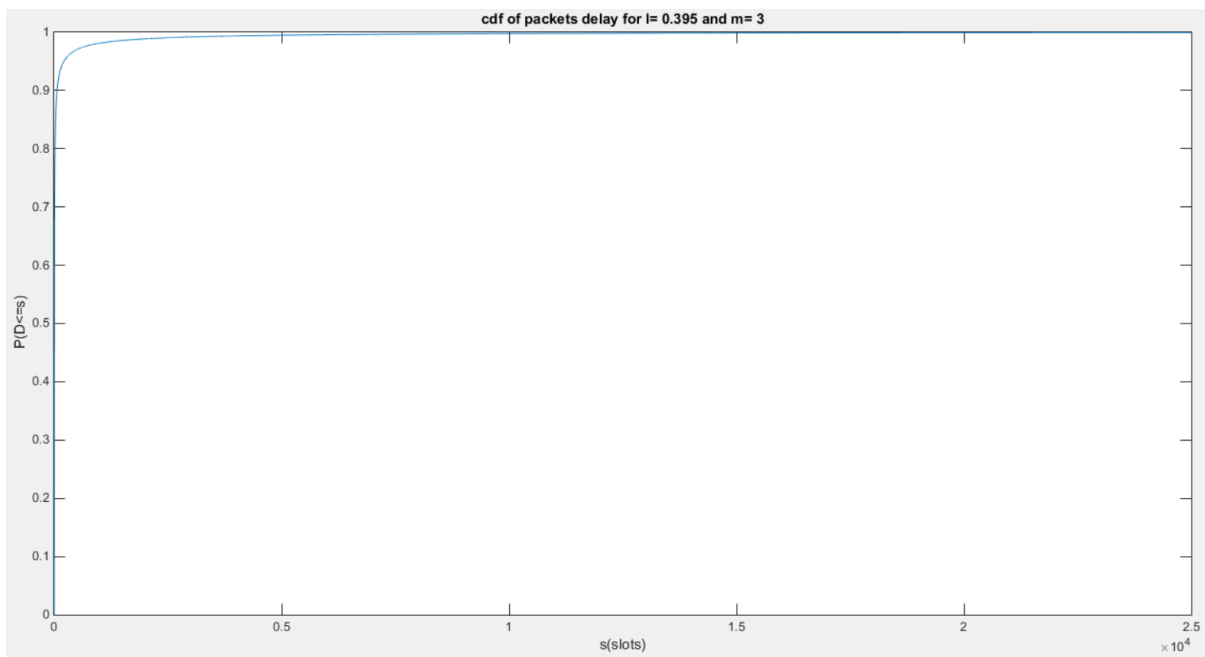
$\lambda=0.38$:



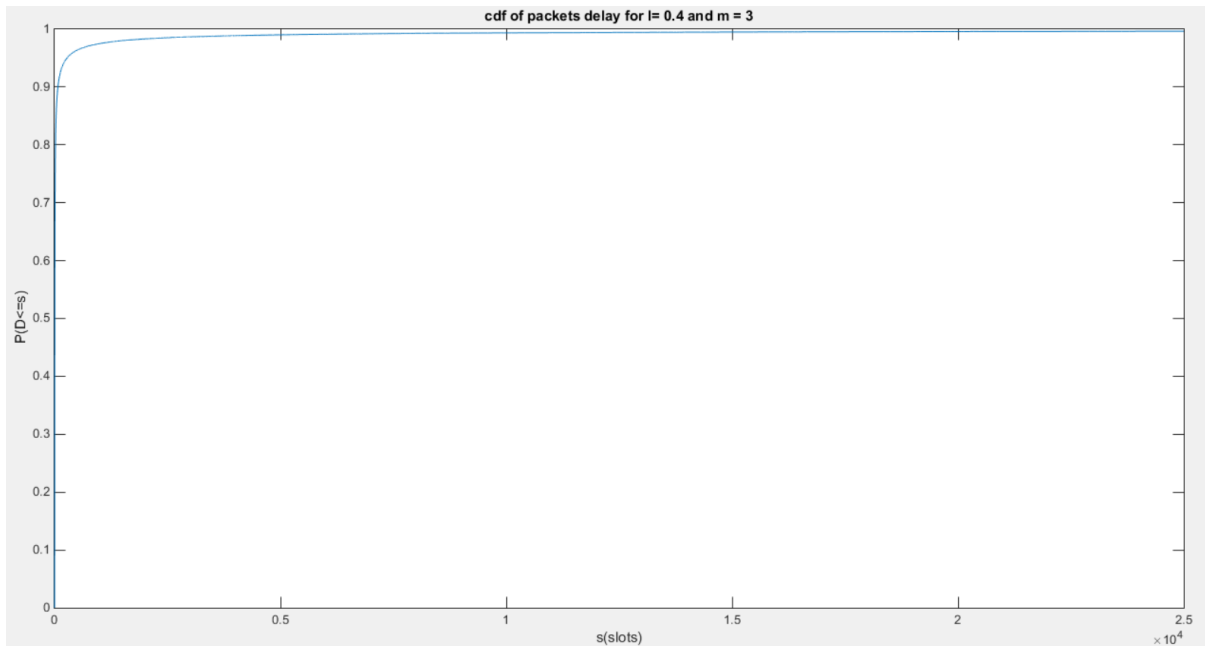
$\lambda=0.39$:



$\lambda=0.395$:



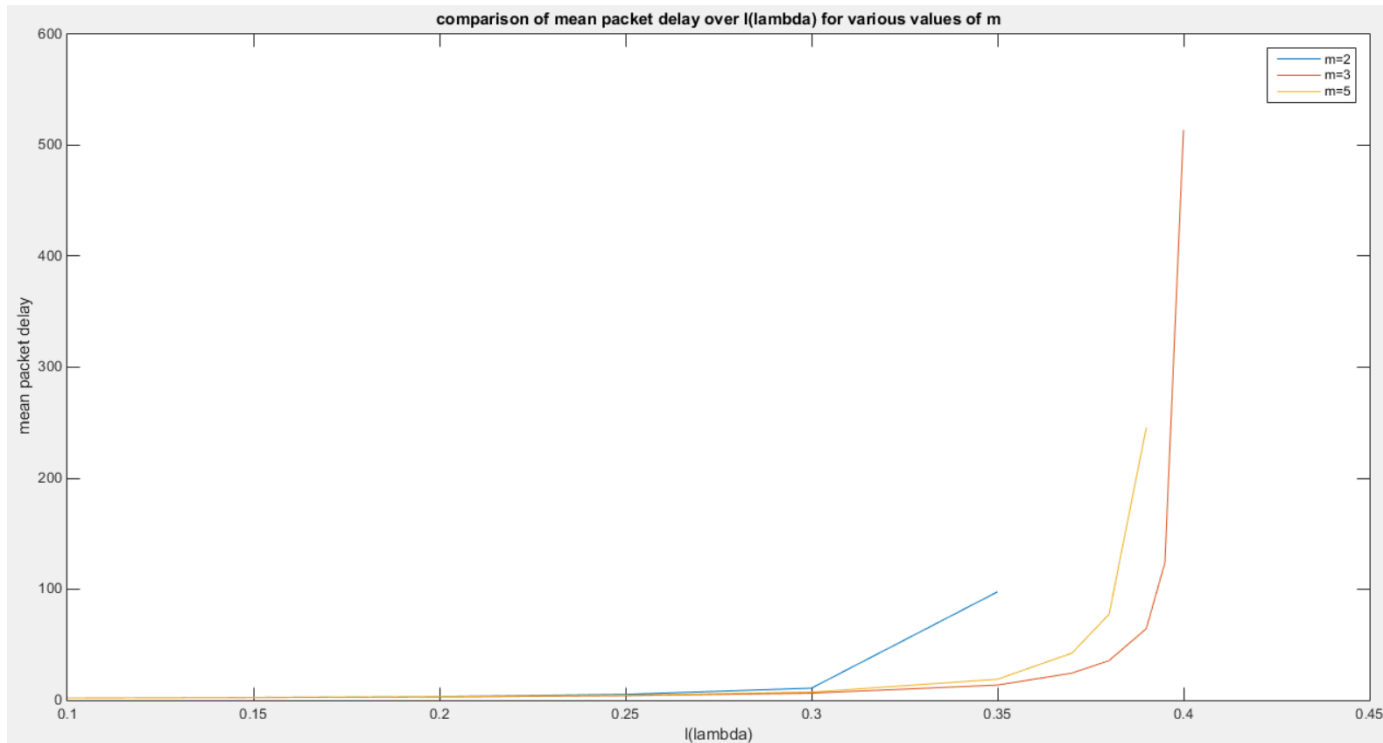
$\lambda=0.4$:



Παραπάνω παρατηρήσαμε ότι για $m=3$ ο αλγόριθμος επιτυγχάνει το μέγιστο throughput του. Αυτό καταδεικνύει ότι η εκδοχή αυτή είναι πλέον κατάλληλη. Ο ισχυρισμός αυτός ενισχύεται και από τις συγκρίσεις των αθροιστικών συναρτήσεων κατανομής για τις διαφορετικές τιμές της παραμέτρου m και για σταθερές τιμές λ . Συγκεκριμένα, για $m=3$ η αθροιστική κατανομή της καθυστέρησης τείνει γρηγορότερα στην μονάδα απ' ό,τι για $m=2$ και $m=5$, για οποιαδήποτε τιμή του λ . Η πιθανότητα η τυχαία μεταβλητή D , που συμβολίζει την καθυστέρηση πακέτου, να είναι μικρότερη από κάποια τιμή s ($P\{D \leq s\}$) είναι μεγαλύτερη συγκριτικά με τις αντίστοιχες πιθανότητες για $m=3$ και $m=5$ (για οποιαδήποτε τιμή του s και οποιαδήποτε τιμή του λ).

4.7.2 Σύγκριση μέσων καθυστερήσεων πακέτων για $m=2, m=3, m=5$

Τέλος, παρατίθενται σε κοινό γράφημα οι καμπύλες των μέσων καθυστερήσεων πακέτων για τις διαφορετικές τιμές του m και τις διαφορετικές τιμές του λ (μέχρι το αντίστοιχο, σε κάθε περίπτωση, μέγιστο throughput).



Παρατηρείται ότι για ίδιες τιμές του λ , η εκδοχή του αλγορίθμου για $m=3$ παρουσιάζει τις μικρότερες μέσες καθυστερήσεις πακέτων συγκριτικά με τις εκδοχές για $m=2$ και $m=5$.

4.8 Συμπεράσματα και κατάλληλη τιμή της παραμέτρου m

Όπως φαίνεται λοιπόν από τα αποτελέσματα που παρουσιάστηκαν παραπάνω, τόσο για τις αθροιστικές συναρτήσεις κατανομής της καθυστέρησης, όσο και για τις μέσες καθυστερήσεις πακέτων, για $m=3$ ο αλγόριθμος επιτυγχάνει το μέγιστο throughput του και συμπεριφέρεται αποδοτικότερα έναντι των εκδοχών $m=2, m=5$. Όσο το ρυθμός άφιξης πακέτων λ είναι μικρός, οι διαφορές είναι λιγότερο αισθητές ανάμεσα στις τρεις εκδοχές του αλγορίθμου, αλλά για μεγαλύτερες τιμές του λ οι διαφορές είναι σημαντικές.

Τα δύο πρωτόκολλα είναι «συγγενικά» ως προς το ότι αμφότερα είναι free access, δηλαδή κάθε καινούριο πακέτο μεταδίδεται στην επόμενη χρονοθυρίδα από την οποία "γεννήθηκε".

Στο ευσταθές πρωτόκολλο slotted Aloha, παρακολουθείται ο συνολικός αριθμός των μπλοκαρισμένων με χρήση μιας μόνο μεταβλητής που μετράει τον συνολικό τους αριθμό και ανανεώνεται σε κάθε slot ώστε στην συνέχεια να υπολογιστεί η πιθανότητα q_i επαναμετάδοσης των μπλοκαρισμένων πακέτων. Στον m-ary αλγόριθμο στοίβας, αντιθέτως, δεν γίνεται χρήση μιας μεταβλητής για το backlog, αλλά ενός διανύσματος μεταβλητών που παρέχει πληροφορία για το επίπεδο της στοίβας που καταλαμβάνει κάθε πακέτο σε κάθε slot.

Στον m-ary αλγόριθμο στοίβας, εάν η προηγούμενη χρονοθυρίδα περιείχε επιτυχημένη μετάδοση ή ήταν άδεια, τότε στην τρέχουσα χρονοθυρίδα μεταδίδονται όσα φρέσκα πακέτα γεννήθηκαν στο προηγούμενο slot, συν όσα πακέτα είχαν τιμή 1 στην στοίβα την προηγούμενη χρονοθυρίδα (επειδή σύμφωνα με τον move-down κανόνα, στην τρέχουσα "έπεσαν" στο 0). Με αυτή την έννοια, στην παρεμβολή στην μετάδοση ενός φρέσκου πακέτου σε ένα slot δεν μετέχουν δυνητικά όλα τα μπλοκαρισμένα πακέτα, αλλά μόνο όσα στο προηγούμενο slot βρίσκονταν στο κελί 1 της στοίβας, δηλαδή ένα κελί πάνω από το transmission cell(0). Με αυτή την λογική, η παρεμβολή των μπλοκαρισμένων πακέτων είναι μικρότερη στον m-ary αλγόριθμο στοίβας έναντι αυτής στο ευσταθές slotted Aloha, στο οποίο χρειάζεται να ελεγχθούν για επαναμετάδοση (μέσω της πιθανότητας επαναμετάδοσης q_i) ένα προς ένα όλα τα μπλοκαρισμένα πακέτα.

Ένα άλλο σημαντικό πλεονέκτημα του m-ary αλγορίθμου στοίβας έναντι του ευσταθούς slotted Aloha, που προκύπτει από την παραπάνω παρατήρηση, είναι ότι στην περίπτωση του πρώτου δεν χρειάζεται η γνώση του πλήθους των μπλοκαρισμένων πακέτων και συνεπώς δεν χρειάζεται ούτε η εκτίμησή του μέσω κάποιου αναδρομικού κανόνα. Αυτό σημαίνει ότι ένα νέο πακέτο που αφίχθη στο σύστημα δεν χρειάζεται να έχει καμία πληροφορία για την κατάσταση (state) του συστήματος. Απλά το νέο πακέτο μεταδίδεται για πρώτη φορά στην επόμενη χρονοθυρίδα, αν υποστεί σύγκρουση «ρίχνει» το m-ary ζάρι

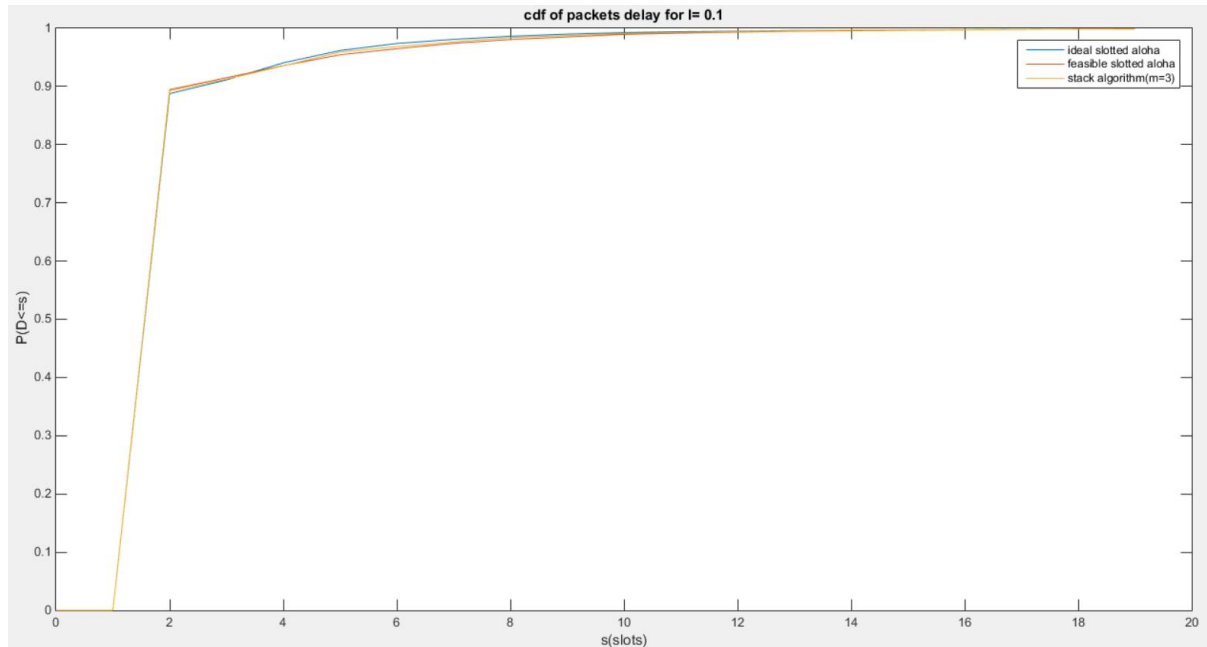
και αποφασίζει την τιμή του μετρητή του ($\{0 \dots m\}$) στο επόμενο slot και από εκεί και πέρα ακολουθεί τον αλγόριθμο. Με αυτή την λογική, ο m -ary αλγόριθμος στοίβας απαιτεί από τον χρήστη να παρακολουθεί τι συμβαίνει στο κανάλι μόνο από την στιγμή που αποκτά ένα πακέτο προς μετάδοση, μέχρι την στιγμή που το μεταδίδει επιτυχώς. Αντιθέτως, το ευσταθές Aloha με την χρήση του αναδρομικού εκτιμητή για τον αριθμό των μπλοκαρισμένων πακέτων, απαιτεί να παρακολουθείται το τι συμβαίνει στο κανάλι από την αρχή των χρόνων, προκειμένου να υπάρχει συγχρονισμός και γνώση του $n_{est,k}$ στην αρχή του slot k . Δηλαδή, απαιτείται συνεχής παρακολούθηση του feedback του καναλιού από όλους τους χρήστες. Αυτό σημαίνει ότι ο m -ary αλγόριθμος στοίβας έχει λιγότερες απαιτήσεις ως προς το πόσο συχνά χρειάζεται να παρακολουθείται το κανάλι έναντι αυτών του ευσταθούς Aloha.

Συνεπώς, ο m -ary αλγόριθμος στοίβας είναι αποδοτικότερος του Aloha επιτυγχάνοντας υψηλότερο throughput και μικρότερες καθυστερήσεις και έχει σημαντικά πλεονεκτήματα υλοποίησης και εφαρμογής στην πράξη έναντι του ευσταθούς Aloha.

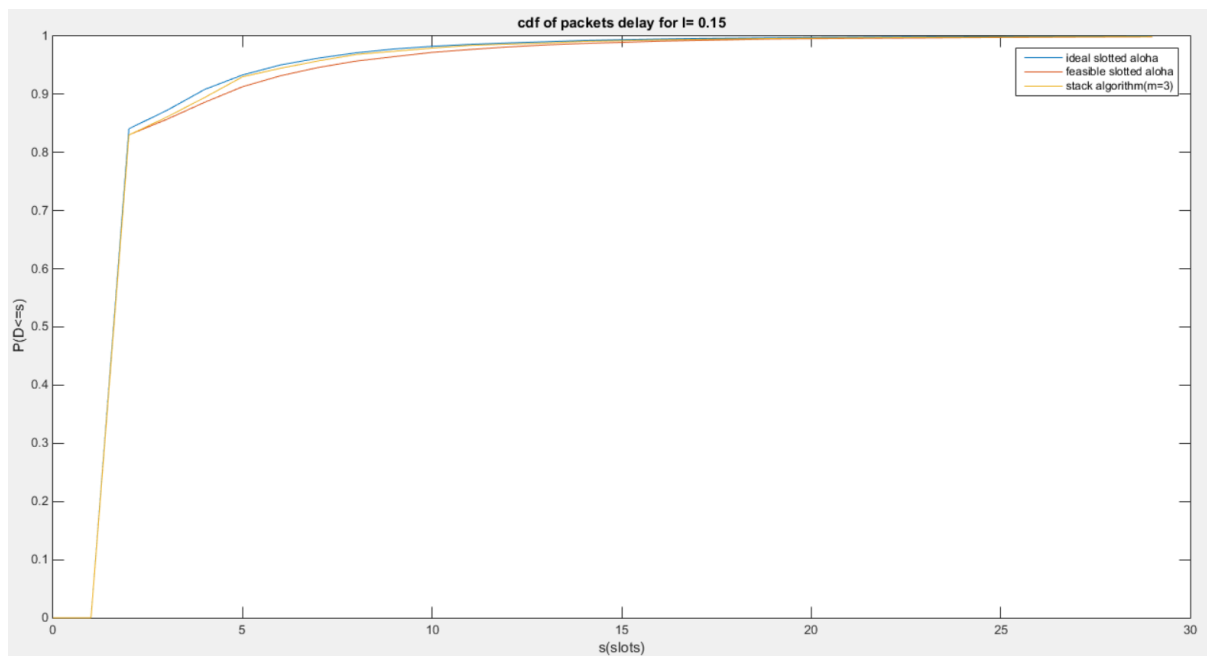
Η υπεροχή του m -ary αλγορίθμου στοίβας (για $m=3$) έναντι του slotted Aloha, επιβεβαιώνεται και από την σύγκριση των εκάστοτε μεγίστων throughput, των αθροιστικών συναρτήσεων κατανομής των καθυστερήσεων των πακέτων, καθώς και των μέσων καθυστερήσεων πακέτων για τα δύο πρωτόκολλα.

5.1 Σύγκριση αθροιστικής συνάρτησης κατανομής της καθυστέρησης πακέτων ανάμεσα σε m-ary(m=3) αλγορίθμο στοίβας και slotted Aloha

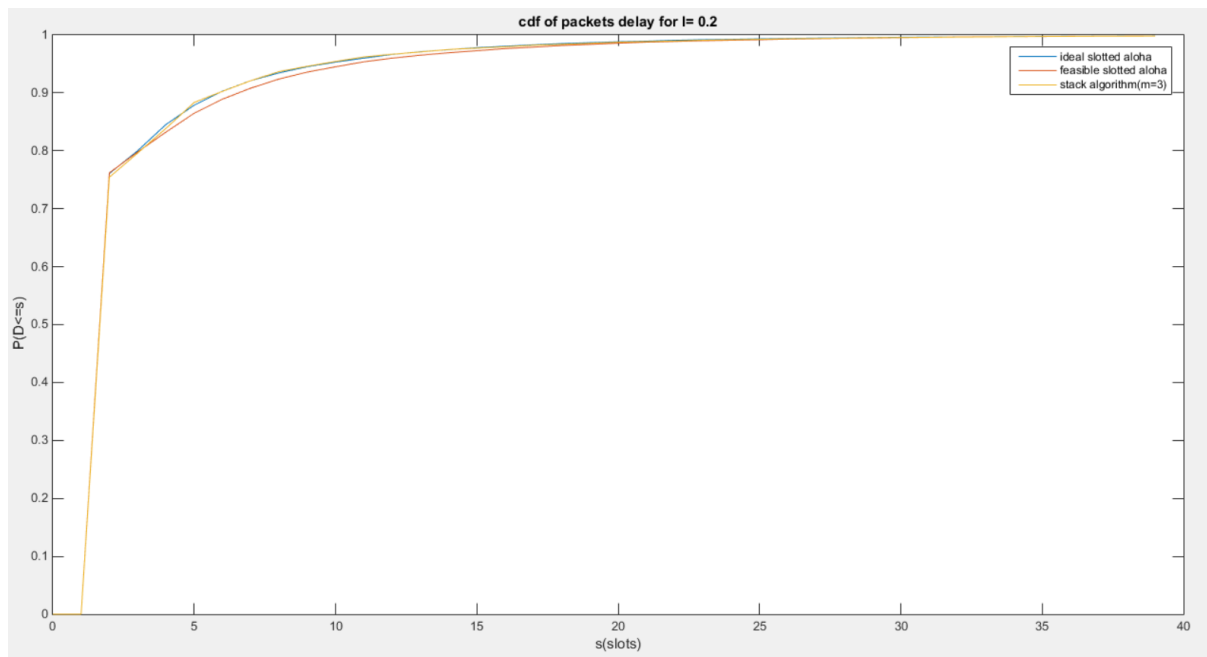
$\lambda=0.1$:



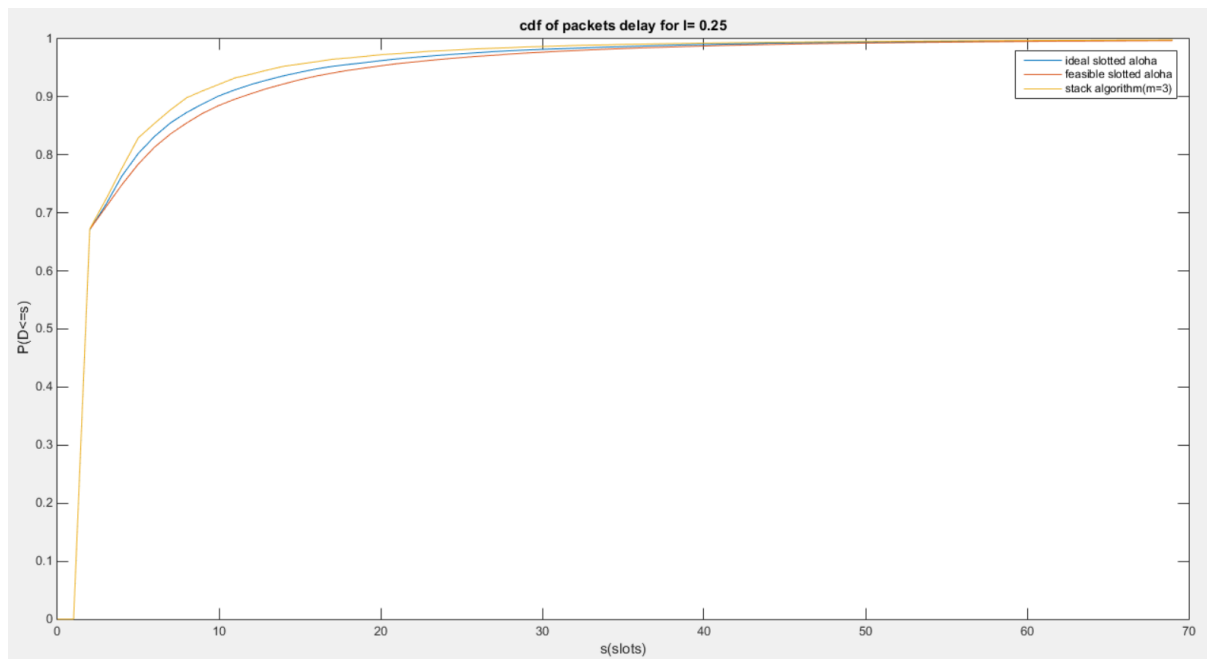
$\lambda=0.15$:



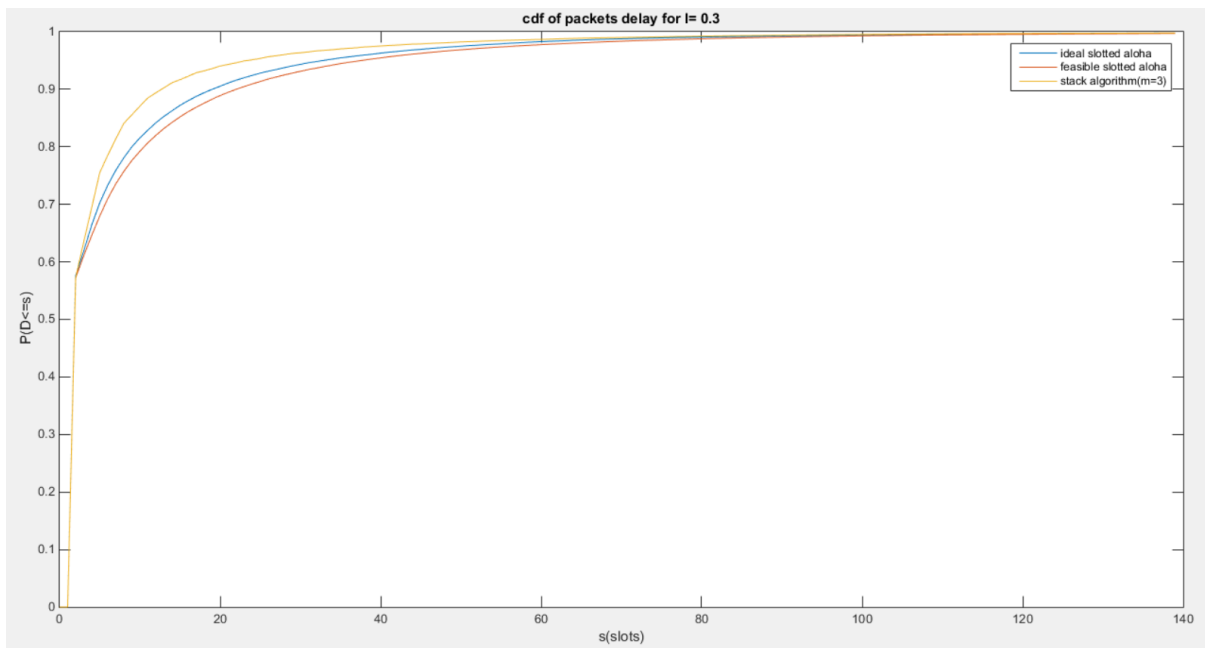
$\lambda=0.2$:



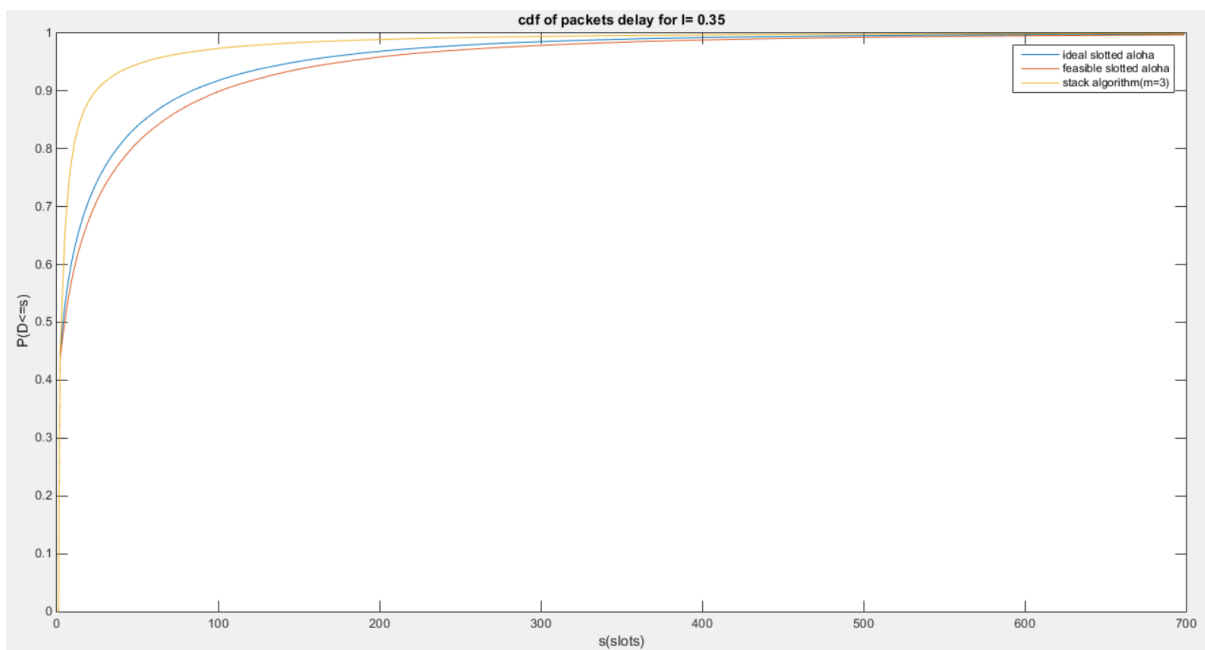
$\lambda=0.25$:



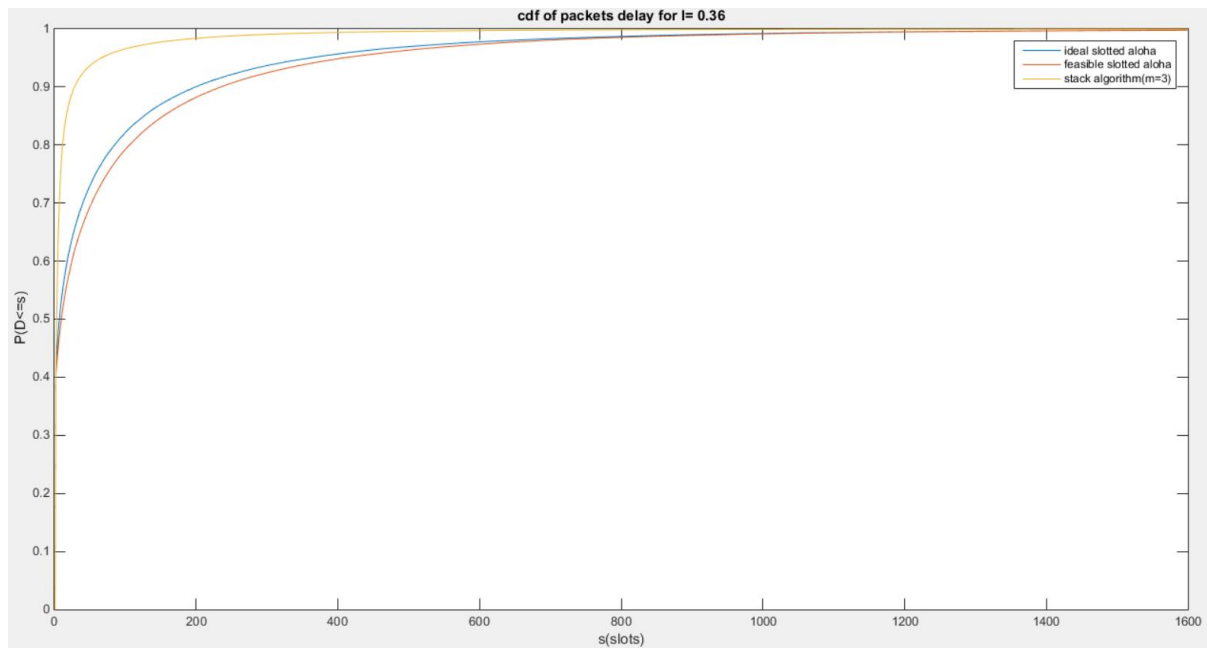
$\lambda=0.3$:



$\lambda=0.35$:

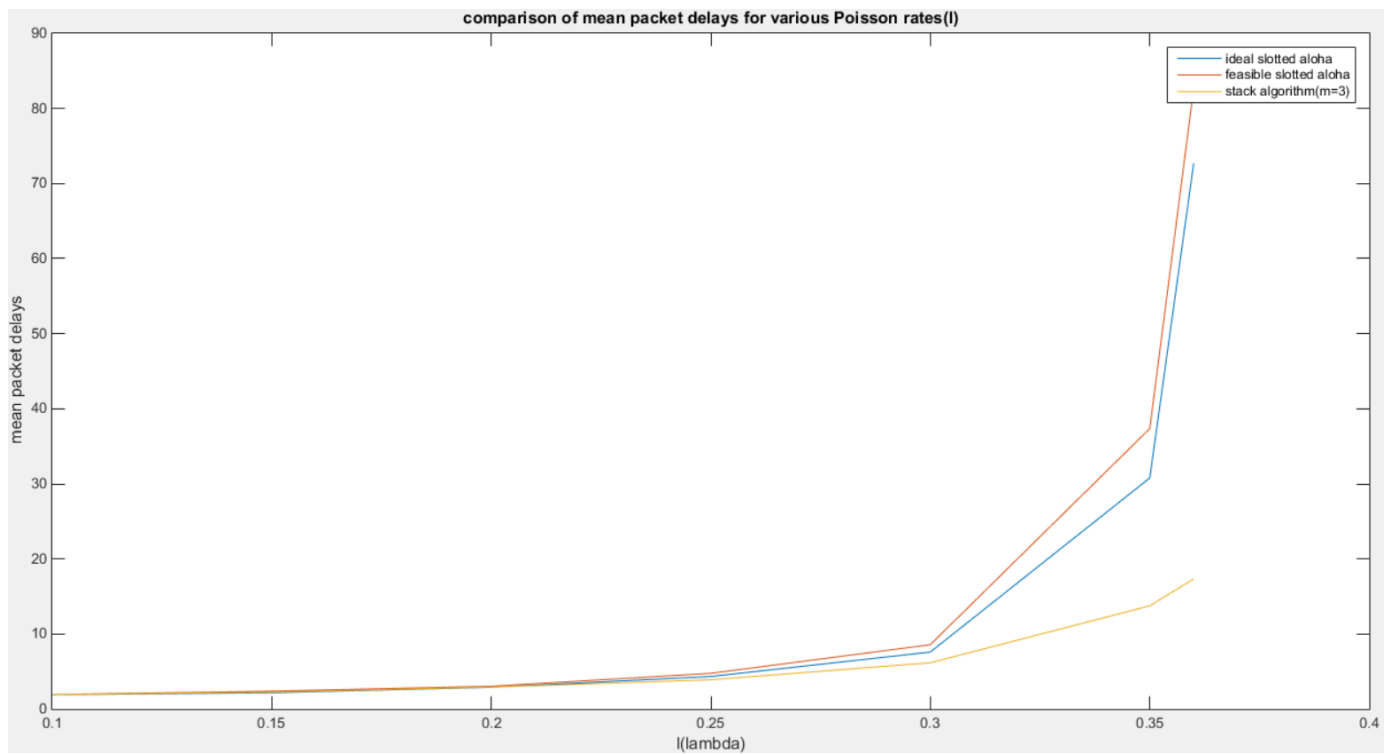


$\lambda=0.36$:



Παρατηρούμε ότι στην περίπτωση του m -ary αλγορίθμου στοίβας, για ίδιες τιμές του λ , η αθροιστική συνάρτηση κατανομής της καθυστέρησης πακέτου τείνει με μεγαλύτερη ταχύτητα προς την μονάδα. Για ίδιες τιμές του s στον οριζόντιο άξονα, η αθροιστική συνάρτηση κατανομής της καθυστέρησης παίρνει μεγαλύτερες τιμές στην περίπτωση του αλγορίθμου στοίβας. Αυτό το φαινόμενο είναι λιγότερο έκδηλο όταν το λ παίρνει μικρές σχετικά τιμές, ενώ με την αύξηση του λ σε τιμές που πλησιάζουν το μέγιστο throughput του Aloha, γίνεται όλο και πιο εμφανές.

5.2 Σύγκριση μέσων καθυστερήσεων πακέτων ανάμεσα σε m-ary(m=3) αλγόριθμο στοίβας και slotted Aloha



Παρατηρούμε ότι για σταθερές τιμές του λ , οι μέσες καθυστερήσεις πακέτων έχουν μικρότερες τιμές στην περίπτωση του αλγορίθμου στοίβας.

Κεφάλαιο 6. Two-cell stack algorithm

Στο σημείο αυτό, αφού μελετήσαμε και συγκρίναμε την λειτουργία ορισμένων free access αλγορίθμων, περνάμε στην μελέτη και προσομοίωση ενός blocked access αλγορίθμου. Το κύριο χαρακτηριστικό των blocked access αλγορίθμων και η κύρια διαφορά τους από τους free access, είναι ότι, σε αντίθεση με το γεγονός ότι στους free access ένα πακέτο μεταδίδεται στο αμέσως επόμενο slot μετά την γέννησή του, στους blocked access τα καινούρια πακέτα περιμένουν να μεταδώσουν αφότου επιλυθούν οι συγκρούσεις που τυχόν βρίσκονται σε διαδικασία επίλυσης. Συγκεκριμένα, μελετάμε την λειτουργία του πρωτοκόλλου Two-cell stack algorithm. Αυτός είναι ένας stack algorithm στον οποίο όμως δεν επιτρέπεται σε καινούρια πακέτα να παρεμβαίνουν στο σύστημα ενόσω βρίσκεται σε εξέλιξη η διαδικασία επίλυσης μιας σύγκρουσης. Ο Two-cell stack algorithm είναι ένας απλός blocked access αλγόριθμος με το πλεονέκτημα επίτευξης υψηλού throughput.

6.1 Αφίξεις πακέτων στο σύστημα

Οι αφίξεις πακέτων στο σύστημα συμβαίνουν σύμφωνα με μία στοχαστική διαδικασία Poisson με παράμετρο λ .

6.2 Περιγραφή αλγορίθμου

Ο χρόνος, όπως και στα πρωτόκολλα που μελετήσαμε προηγούμενα, μετريέται σε slot units. Αυτό σημαίνει ότι το slot t καταλαμβάνει το χρονικό διάστημα $[t, t+1)$ και το x_t συμβολίζει το feedback που αντιστοιχεί στο slot t , $x_t=C$ για collision και $x_t=NC$ για noncollision.

Όσο δεν συμβαίνουν συγκρούσεις(δηλαδή όσο η στοχαστική διαδικασία Poisson φέρνει είτε 0 είτε 1 αφίξεις πακέτων σε κάποιο slot), ο αλγόριθμος έχει χαρακτηριστικά free access αλγορίθμου, κάτι που σημαίνει ότι όσα πακέτα γεννήθηκαν(0 ή 1) σε ένα slot(έστω στο $k-1$), μεταδίδονται στο επόμενο slot(k).

Μόλις συμβεί η πρώτη σύγκρουση, τα πακέτα που συμμετείχαν σε αυτήν αποκτούν προτεραιότητα. Αυτό σημαίνει ότι το σύστημα ασχολείται με την επίλυση της σύγκρουσης και την μετάδοση των συγκρουόμενων πακέτων και, ως συνέπεια αυτού, καινούρια πακέτα που καταφτάνουν στο σύστημα σε μεταγενέστερα slots και μέχρι και το slot στο οποίο επιλύεται οριστικά η τρέχουσα σύγκρουση, περιμένουν. Δημιουργείται λοιπόν μια χρονοκαθυστέρηση μεταξύ του άξονα των αφίξεων και του άξονα των χρόνων στον οποίο συμβαίνουν οι μεταδόσεις των πακέτων και επιλύονται οι συγκρούσεις.

Για παράδειγμα, έστω ότι βρισκόμαστε στην αρχή του slot 3 και η Poisson στοχαστική διαδικασία αφίξεων μας έδωσε 2 νέα πακέτα που γεννήθηκαν στην διάρκεια του slot 2. Αυτά μεταδίδονται για πρώτη φορά στο slot 3 και δημιουργούν σύγκρουση. Το σύστημα ασχολείται στην συνέχεια με την επίλυση αυτής της σύγκρουσης. Έστω ότι τα πακέτα αυτά διαιρούνται με τρόπο ώστε το ένα εξ αυτών να μεταδοθεί επιτυχώς στο slot 4 και το άλλο στο slot 5. Τότε, στο τέλος του slot 5 τελειώσει η επίλυση της σύγκρουσης. Στο slot 6, θα μπορούσαμε να ασχοληθούμε με όλα τα πακέτα που έφτασαν στο σύστημα στην διάρκεια των slots κατά τα οποία το σύστημα ήταν απασχολημένο με την επίλυση της προηγούμενης σύγκρουσης(δηλαδή στα slots 3,4 και 5). Επειδή όμως ενδέχεται η επίλυση μιας σύγκρουσης να διαρκέσει πολλές χρονοθυρίδες, θα ήταν καλύτερη προσέγγιση αν δεν επιτρέπαμε σε όλα τα πακέτα τα οποία δημιουργήθηκαν κατά την διάρκεια αυτών των χρονοθυρίδων να μεταδώσουν στο πρώτο εμφανιζόμενο ελεύθερο slot, διότι θα παρουσιαστεί με αρκετά μεγάλη πιθανότητα μια νέα σύγκρουση και μάλιστα πιθανά μεγάλης πολλαπλότητας. Αντ' αυτού, επιλέγουμε στο πρώτο ελεύθερο slot (slot 6 στο παράδειγμα μας), μετά την επίλυση κάποιας σύγκρουσης, την μετάδοση των πακέτων που γεννήθηκαν από την πρώτη χρονική στιγμή αριστερά του σημείου στο οποίο ξεκίνησε η σύγκρουση μέχρι $+\Delta$ χρονικές μονάδες προς τα δεξιά στον άξονα των αφίξεων πακέτων. Χρησιμοποιείται δηλαδή ένα κινητό παράθυρο μέγιστου σταθερού μεγέθους Δ , το οποίο κινείται προς τα δεξιά στον άξονα των χρόνων και καλύπτει τα πακέτα που γεννήθηκαν κατά την διάρκεια χρονοθυρίδων στις οποίες το σύστημα επίλυε κάποια σύγκρουση.

Όπως και στο Aloha, και σε αντιδιαστολή με τον m-ary stack algorithm, έτσι και στον Two-cell stack algorithm, απαιτείται από τον χρήστη η παρακολούθηση του feedback από την αρχή των χρόνων, είτε έχει είτε δεν έχει πακέτο.

Ο αλγόριθμος, όπως προείπαμε, χρησιμοποιεί ένα παράθυρο μήκους Δ . Έστω t η χρονική στιγμή που αντιστοιχεί στο ξεκίνημα ενός slot, τέτοια ώστε για κάποιο $t_1 < t$, όλες οι αφίξεις πακέτων στο $(0, t_1]$ έχουν μεταδοθεί επιτυχώς από τον αλγόριθμο και καμία πληροφορία αναφορικά με το διάστημα $(t_1, t]$ δεν είναι διαθέσιμη. Η χρονική στιγμή t καλείται τότε collision resolution point(CRP), το διάστημα αφίξεων $(0, t_1]$ καλείται “resolved interval” και το διάστημα $(t_1, t]$ καλείται “the lag at t ”.

Στο slot t , οι αφίξεις πακέτων στο διάστημα $(t_1, t_2 = \min(t_1 + \Delta, t)]$ επιχειρούν μετάδοση και το διάστημα $(t_1, t_2]$ καλείται τότε “examined interval”. Αν το $(t_1, t_2]$ περιέχει το πολύ 1 πακέτα, τότε η επίλυση περατώνεται στο slot t . Αν το $(t_1, t_2]$ περιέχει τουλάχιστον 2 πακέτα, τότε $x_t = C$, συμβαίνει δηλαδή σύγκρουση στο t και η επίλυσή της ξεκινάει στο slot $t+1$. Μέχρι η σύγκρουση αυτή να επιλυθεί, δεν επιτρέπεται σε κανένα πακέτο που φτάνει στο σύστημα μετά την χρονική στιγμή t_2 να μεταδώσει. Η χρονική περίοδος που απαιτείται για την επίλυση οποιασδήποτε σύγκρουσης καλείται collision resolution interval (CRI). Αν το υπό εξέταση διάστημα περιέχει το πολύ 1 πακέτο, τότε το CRI διαρκεί 1 slot. Κατά τη διάρκεια ενός CRI που ξεκινάει με collision slot, κάθε χρήστης δρα ανεξάρτητα μέσω της χρήσης ενός counter που παίρνει δύο δυνατές τιμές, 1 ή 2, και του οποίου η τιμή την χρονική στιγμή t συμβολίζεται ως r_t . Όταν κάποιος χρήστης μεταδίδει για πρώτη φορά, θέτει $r_t = 1$. Οι τιμές του counter ανανεώνονται και χρησιμοποιούνται σύμφωνα με τους παρακάτω κανόνες.

6.3 Κανόνες ανανέωσης τιμών counter

1. Ένας χρήστης μεταδίδει στο slot t αν και μόνο αν $r_t = 1$. Ένα πακέτο μεταδίδεται επιτυχώς στο slot t αν και μόνο αν $r_t = 1$ και $x_t = NC$.
2. Η μεταβολή τιμών ενός counter στον χρόνο είναι η ακόλουθη:
 - i. αν $x_{t-1} = NC$ και $r_{t-1} = 2$, τότε $r_t = 1$.
 - ii. αν $x_{t-1} = C$ και $r_{t-1} = 2$, τότε $r_t = 2$.
 - iii. αν $x_{t-1} = C$ και $r_{t-1} = 1$, τότε:

$$r_t = \begin{cases} 1 & , \text{ με πιθανότητα } 0.5 \\ 2 & , \text{ με πιθανότητα } 0.5 \end{cases}$$

6.4 Μελέτη CRI και σηματοδότηση του τέλους του

Από τους παραπάνω κανόνες, παρατηρούμε ότι ένα CRI που ξεκινάει με collision slot τελειώνει υποχρεωτικά με δύο συνεχόμενα noncollision slots. Επίσης, δύο συνεχόμενα noncollision slots δεν μπορούν να συμβούν κάποια άλλη στιγμή στην διάρκεια ενός CRI. Συνεπώς, η παρατήρηση δύο συνεχόμενων NC slots σηματοδοτεί το τέλος ενός CRI σε όλους τους χρήστες του συστήματος.

Παρακάτω παρουσιάζεται ο λόγος για τον οποίο δεν είναι εφικτή η εμφάνιση δύο συνεχόμενων noncollision slots σε κάποια ενδιάμεση στιγμή της διάρκειας ενός CRI.

Οι πιθανοί συνδυασμοί δύο συνεχόμενων noncollision slots είναι E-E, E-S, S-E και S-S, όπου E=empty slot και S=succesful slot. Σε περίπτωση που το πρώτο(slot t) εκ των δύο συνεχόμενων NC slots είναι empty, αυτό σημαίνει ότι κανένας χρήστης δεν έχει τιμή counter $r_t=1$ στο slot αυτό. Επομένως, όλοι οι χρήστες στο slot αυτό έχουν τιμή counter $r_t=2$, επειδή το 2 είναι η μοναδική εναλλακτική τιμή εκτός του 1 που μπορεί να πάρει ένας counter. Επειδή το slot t ήταν empty, $x_t=NC$ και σύμφωνα με τους κανόνες που παρουσιάστηκαν παραπάνω για τον Two-cell stack algorithm, $r_{t+1}=1$ για όσους είχαν $r_t=2$ προηγουμένως. Στο επόμενο slot(t+1), δηλαδή, όλοι οι counters των χρηστών πέφτουν κατά 1 κελί στην στοίβα(γίνονται 1 από 2). Αυτό σημαίνει ότι στο slot t+1 επιχειρούν όλοι επαναμετάδοση, κάτι που συνεπάγεται σύγκρουση στο slot αυτό.

Σε περίπτωση που το πρώτο(slot t) εκ των δύο συνεχόμενων NC slots είναι succesful, αυτό σημαίνει ότι μόνο ένας χρήστης έχει τιμή counter $r_t=1$ στο slot αυτό. Αυτό με τη σειρά του συνεπάγεται ότι όλοι οι υπόλοιποι χρήστες(τουλάχιστον 2) βρίσκονται στο έτερο διαθέσιμο κελί της στοίβας, το $2^o(r_t=2)$. Επειδή στο slot t υπήρξε success, $x_t=NC$ και σύμφωνα με τους κανόνες που παρουσιάστηκαν παραπάνω για τον Two-cell stack algorithm, $r_{t+1}=1$ για όσους είχαν τιμή $r_t=2$ προηγουμένως. Στο επόμενο slot(t+1), δηλαδή, όλοι οι counters των χρηστών που βρίσκονταν στο withholding κελί της στοίβας πέφτουν κατά 1 κελί σε αυτήν(γίνονται 1 από 2). Αυτό σημαίνει ότι στο επόμενο slot, t+1, οι, τουλάχιστον 2, χρήστες με τιμή counter $r_t=2$ στο slot t, θα έχουν $r_{t+1}=1$ και επομένως θα δημιουργηθεί σύγκρουση.

Από τα παραπάνω, γίνεται κατανοητό ότι ο αλγόριθμος παίρνει το όνομά του(Two-cell stack algorithm) από το γεγονός ότι σε κάθε χρονική στιγμή t, το κελί 1 της στοίβας περιέχει τους transmitting χρήστες(αυτούς με τιμή counter $r_t=1$), ενώ το κελί 2 περιέχει τους withholding χρήστες(αυτούς με τιμή counter $r_t=2$).

6.5 Ανάλυση του throughput, κατάλληλο μήκος παραθύρου και κατάλληλη επιλογή πιθανότητας επαναμετάδοσης στο επόμενο slot

Συμβολίζουμε με $E[\ell|\Delta]$ το αναμενόμενο μήκος ενός CRI δεδομένου ότι ξεκινάει με υπό εξέταση διάστημα μήκους Δ . Έχει αποδειχθεί ότι προκειμένου το σύστημα να είναι ευσταθές, πρέπει: $E[\ell|\Delta] < \Delta$. (1)

Με L_k συμβολίζουμε το αναμενόμενο (μέσο) μήκος ενός CRI δεδομένου ότι ξεκινάει με σύγκρουση πολλαπλότητας k . Με βάση αυτό, μπορούμε να υπολογίσουμε το $E[\ell|\Delta]$ ως:

$$E[\ell|\Delta] = \sum_{k=0}^{\infty} E[l|\Delta, k] \cdot P\{k|\Delta\} = \sum_{k=0}^{\infty} L_k \cdot e^{-\lambda\Delta} \cdot \frac{(\lambda\Delta)^k}{k!} \quad (2)$$

Σημείωση: Η διαδικασία αφίξεων των πακέτων είναι Poisson με ρυθμό λ , άρα η τυχαία μεταβλητή που αναπαριστά τον αριθμό αφίξεων πακέτων σε ένα οποιοδήποτε διάστημα μήκους Δ είναι Poisson κατανομημένη με παράμετρο $\lambda \cdot \Delta$.

Ο συνδυασμός των σχέσεων (1) και (2) οδηγεί στον υπολογισμό του throughput του δικτύου.

Το μήκος παραθύρου Δ υπόκειται σε βελτιστοποίηση για την μεγιστοποίηση του throughput. Έχει βρεθεί ότι το κατάλληλο μήκος είναι $\Delta=2.33$, καθώς, για αυτή την τιμή, η πιθανότητα κάποιας σύγκρουσης με πολλαπλότητα μεγαλύτερη από δύο, είναι πολύ μικρή. Η επιλογή της πιθανότητας p με την οποία κάθε πακέτο που συμμετέχει σε κάποια σύγκρουση (δεν είναι δηλαδή το μοναδικό με τιμή counter $r_i=1$) παραμένει στο κελί 1 κατόπιν της σύγκρουσης, έχει επίσης μελετηθεί και για την μεγιστοποίηση του throughput έχει βρεθεί πως $p=0.544$. Το μέγιστο throughput που επιτυγχάνει ο αλγόριθμος κάτω από αυτές τις υποθέσεις, είναι 0.4295.

6.6 Παρουσίαση και σχολιασμός αποτελεσμάτων προσομοίωσης αλγορίθμου

Στην συνέχεια, παρατίθεται ο συγκεντρωτικός πίνακας με τα αποτελέσματα της προσομοίωσης για τις διάφορες τιμές του ρυθμού αφίξεων πακέτων της Poisson στοχαστικής διαδικασίας λ , μέχρι το μέγιστο throughput.

λ (Poisson arrival rate)	T (simulation time in slots) $\times 10^3$	Sent Packets	Collided packets	Successful transmission rate	Mean packet delay (in slots)	$P\{D \leq 2\}$	$P\{D \leq 3\}$	$P\{D \leq 4\}$	$P\{D \leq 5\}$	$P\{D \leq 6\}$
0.02	250	4,967	0	0.0199	1.5782	0.9788	0.9793	0.9840	0.9887	0.9909
0.06	250	14,766	0	0.0591	1.7456	0.9392	0.9407	0.9561	0.9738	0.9817
0.1	250	24,906	0	0.0996	1.9820	0.8834	0.8878	0.9144	0.9144	0.9622
0.16	250	40,236	0	0.1609	2.3978	0.8002	0.8114	0.8515	0.9011	0.9258
0.2	250	49,932	0	0.1997	2.7835	0.7368	0.7518	0.8022	0.8619	0.8947
0.24	250	59,656	0	0.2386	3.2981	0.6504	0.6726	0.7314	0.8023	0.8426
0.3	250	75,174	0	0.3007	4.8130	0.5248	0.5504	0.6141	0.6914	0.7396
0.32	500	159,951	0	0.3199	5.5782	0.4778	0.5060	0.5707	0.6476	0.6968
0.36	500	180,134	0	0.3603	9.6185	0.3489	0.3745	0.4294	0.4955	0.5399
0.38	500	190,783	0	0.3816	14.2292	0.2678	0.2911	0.3373	0.3944	0.4332
0.4	500	200,266	0	0.4005	24.9785	0.1783	0.1949	0.2272	0.2663	0.2945
0.42	500	209,953	33	0.4199	88.7088	0.0615	0.0680	0.0803	0.0950	0.1056

Παρατηρούμε ότι με την αύξηση του ρυθμού αφίξεων πακέτων της Poisson στοχαστικής διαδικασίας, αυξάνεται αντίστοιχα η μέση καθυστέρηση πακέτου, η οποία ανεβαίνει σημαντικά όσο πιο κοντά πλησιάζουμε στο throughput του συστήματος. Η αύξηση στις καθυστερήσεις, αναλογικά με το λ , οφείλεται στο ότι όσο μεγαλύτερος είναι ο ρυθμός αφίξεων νέων πακέτων στο σύστημα, τόσο μεγαλύτερη είναι η πιθανότητα συγκρούσεων και η καθυστέρηση επίλυσής τους από τον αλγόριθμο. Τα CRI αυξάνονται σε μέγεθος και η καθυστέρηση των πακέτων μεγαλώνει με το λ .

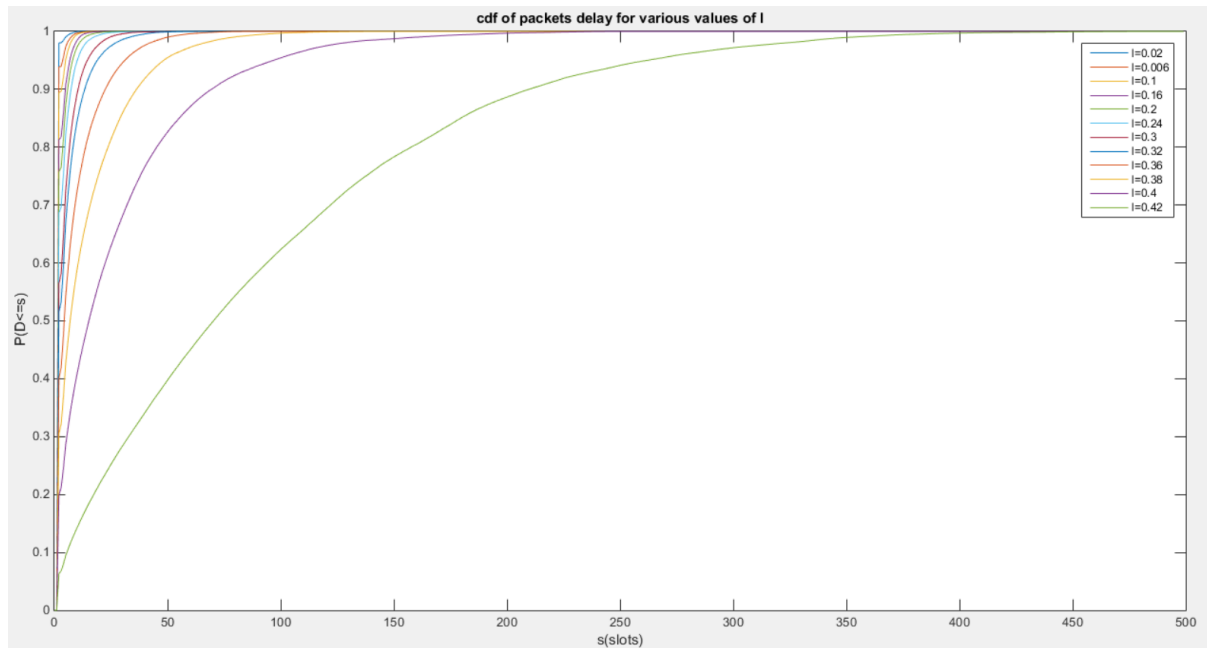
Ο ρυθμός επιτυχημένων μεταδόσεων πλησιάζει σε κάθε περίπτωση αρκετά τον ρυθμό λ της στοχαστικής διαδικασίας αφίξεων πακέτων.

Τα πακέτα που έχουν μεταδοθεί επιτυχώς στο τέλος της προσομοίωσης είναι περίπου ίσα με το γινόμενο του ρυθμού αφίξεων επί τον χρόνο προσομοίωσης σε slots ($\lambda \cdot T$).

Όσον αφορά στον αριθμό πακέτων που στο τέλος της προσομοίωσης δεν έχουν μεταδοθεί, αυτός είναι αμελητέος για σχεδόν όλες τις τιμές του λ , ενώ όσο ο ρυθμός αφίξεων προσεγγίζει το μέγιστο throughput, η συχνότητα των συγκρούσεων αυξάνεται και

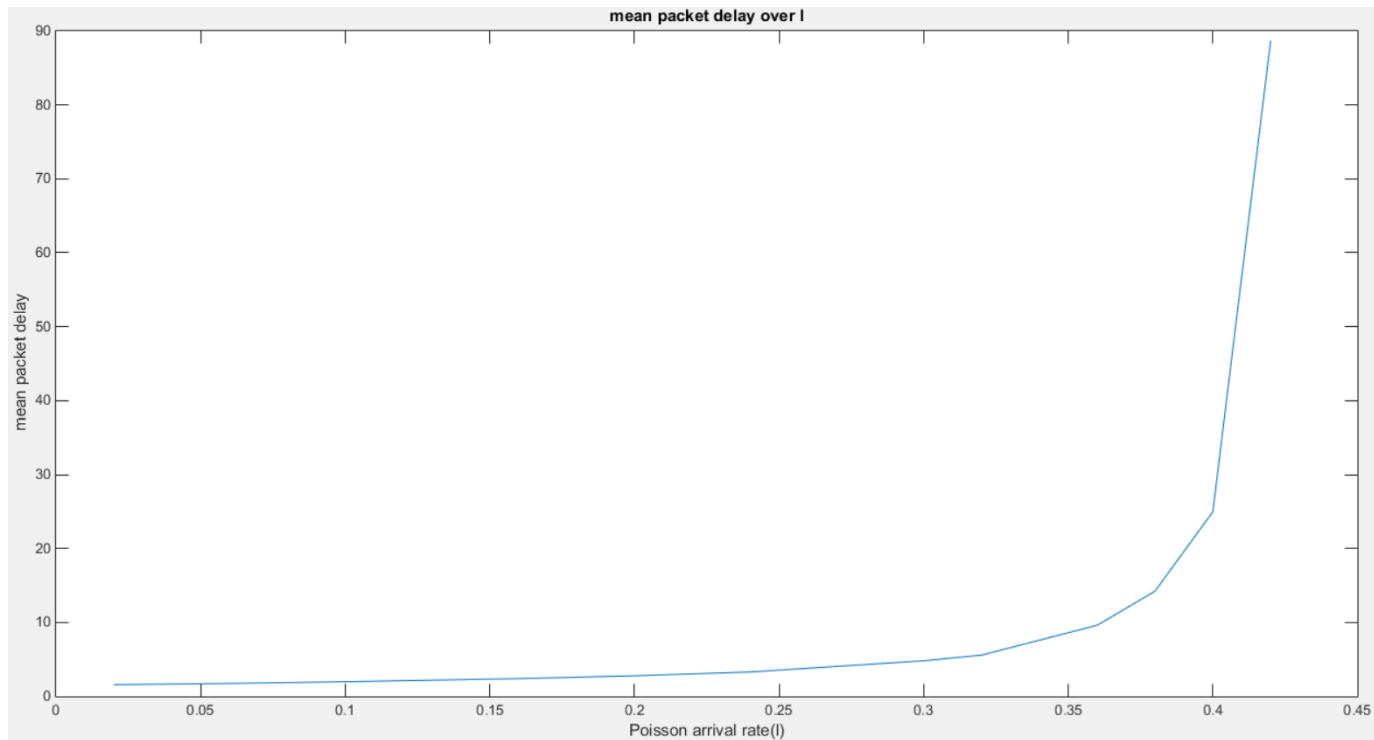
στο τέλος της προσομοίωσης παρατηρούμε πακέτα που δεν πρόλαβαν να σταλούν επιτυχώς.

6.7 Αθροιστικές συναρτήσεις κατανομής καθυστέρησης πακέτων για κάθε λ



Παρατηρούμε ότι όσο μεγαλώνει το λ και πλησιάζει το 0.42, η καμπύλη της αθροιστικής συνάρτησης κατανομής της καθυστέρησης πακέτου κινείται πιο αργά προς την μονάδα.

6.8 Καμπύλη μέσης καθυστέρησης πακέτου για κάθε λ



Όπως είναι αναμενόμενο, όσο αυξάνεται το λ αυξάνεται αντίστοιχα και η μέση καθυστέρηση πακέτου.

Από την ανάλυση των πρωτοκόλλων που μελετήθηκαν στα πλαίσια της διπλωματικής εργασίας προκύπτουν οι ομοιότητες και διαφορές τους, καθώς και συμπεράσματα σχετικά με την αποδοτικότητα τους. Η αξιολόγηση της αποδοτικότητας των πρωτοκόλλων βασίστηκε στην μελέτη των μετρικών απόδοσης: throughput, μέση τιμή και αθροιστική συνάρτηση κατανομής της καθυστέρησης πακέτου. Από τα πρωτόκολλα που αξιολογήθηκαν, συνιστάται η χρήση του εύκολου στην υλοποίηση, εγγενώς ευσταθούς, υψηλού throughput πρωτοκόλλου ελεύθερης πρόσβασης m-ary stack.

- [1] Erhan Cinlar, «Introduction to Stochastic Processes», Englewood Cliffs, N. J.: Prentice-Hall, 1975.
- [2] Δημήτρης Π. Μπερτσεκάς, Γιάννης Ν. Τσιτσικλής, «Εισαγωγή στις Πιθανότητες με Στοιχεία Στατιστικής», Μεταφρασμένο στα Ελληνικά από την Α. Χούστη, Εκδόσεις Τζιόλα, 2013.
- [3] Dimitri Bertsekas and Robert Gallager, «Data Networks, 2nd Edition», Prentice-Hall, 1992.
- [4] Peter Mathys, Philippe Flajolet, «Q-ary collision resolution algorithms in random-access systems with free or blocked channel access», IEEE Transactions on Information Theory, Vol. 31, No. 2, January 1985, pp. 217-243.
- [5] Michael Paterakis, P. Papantoni-Kazakos, «A simple window random access algorithm with advantageous properties», IEEE Transactions on Information Theory, Vol. 35, No.5, September 1989, pp. 1124-1130.