



Πολυτεχνείο Κρήτης

Τμήμα μηχανικών παραγωγής και διοίκησης

Διπλωματική Εργασία

Εύρεση ζώνης χασμάτων στη διάδοση
κυμάτων σε τετραχειρόμορφες
μικροδομές αυξητικών υλικών με
χρήση πεπερασμένων στοιχείων

Band gap analysis on tetrachiral auxetic
microstructures using finite elements

Κούγκουλος Αλέξανδρος Α.Μ. 2011010127

Επιβλέπων καθηγητής: Σταυρουλάκης Γεώργιος
Χανιά, 2021

Πίνακας περιεχομένων

Ευχαριστίες.....	4
Περίληψη.....	5
Abstract.....	5
Κεφάλαιο 1 – Γενικά.....	6
Εισαγωγή	6
Σκοπός εργασίας	7
Κεφάλαιο 2 – Αυξητικά υλικά	8
Γενική περιγραφή.....	8
Αρνητικός λόγος Poisson	9
Χαρακτηριστικά και εφαρμογές των αυξητικών υλικών.....	10
Κεφάλαιο 3 – Γεωμετρία της δομής	11
Κεφάλαιο 4 – Χάσματα συχνοτήτων (Band gaps)	13
Κεφάλαιο 5 – Θεωρήματα Floquet, Bloch και εφαρμογή στο μοντέλο	14
Θεώρημα Floquet.....	14
Θεώρημα Bloch	14
IBZ (Irreducible Brillouin Zone) και περιοδικά μοντέλα	15
Εφαρμογή στο μοντέλο	18
Κεφάλαιο 6 – Προσομοίωση δομής με χρήση περιοδικών συνθηκών	20
Προσομοίωση δομής χωρίς και με κυκλικό έγκλεισμα (πυρήνα) ($r_c=r/4$).....	21
Προσομοίωση με παραμετροποίηση ακτίνας σκελετού (r)	24
$r=0.004$ m.....	24
$r=0.0045$ m.....	25
$r=0.0055$ m.....	26
$r=0.006$ m.....	27
Προσομοίωση με παραμετροποίηση μήκους άρθρωσης σκελετού (l)	28
$l=0.01875$ m	28
$l=0.021875$ m.....	29
$l=0.028125$ m.....	30
$l=0.03125$ m	31
Προσομοίωση με παραμετροποίηση πυκνότητας κυκλικού εγκλείσματος (ρ)	32
$\rho=7160$ kg/m ³	32
$\rho= 8060$ kg/m ³	33
$\rho=9860$ kg/m ³	34
$\rho=10760$ kg/m ³	35
Κεφάλαιο 7 – Προσομοίωση φόρτισης δομής 10x10	36

Κεφάλαιο 8 – Συμπεράσματα	49
Παραμετροποίηση ακτίνας σκελετού (r)	49
Παραμετροποίηση μήκους άρθρωσης σκελετού (l)	50
Παραμετροποίηση πυκνότητας κυκλικού εγκλείσματος (ρ)	51
Κεφάλαιο 9 – Προτάσεις για περαιτέρω διερεύνηση.....	52
Αναφορές.....	53

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα καθηγητή κ. Σταυρουλάκη Γεώργιο για την ανάθεση, την βοήθεια και την συνεργασία που είχαμε. Έπειτα, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον Δρ. Κουτσιανίτη Παναγιώτη για την βοήθεια, καθοδήγηση και συμβουλές του και την αμέριστη κατανόηση του αυτή την δύσκολή περίοδο, όπως και τον Δρ. Ταϊρίδη Γεώργιο. Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω την οικογένεια μου για την αμέριστη υποστήριξη τους κατά την διάρκεια των σπουδών μου.

Περίληψη

Κατά την διαδικασία της παραγωγής είναι επιτακτική η ανάγκη ορθής επιλογής υλικού, διότι αυτό καθορίζει την συμπεριφορά της κατασκευής. Έτσι, είναι αναγκαία η εύρεση και η αξιοποίηση νέων υλικών, που έχουν καλύτερες μηχανικές ιδιότητες. Ένα τέτοιο παράδειγμα είναι τα αυξητικά υλικά, που είναι μικροδομές, οι οποίες όταν υπόκεινται σε εφελκυσμό αντί να συρρικνώνονται επιμηκύνονται κάθετα στην κατεύθυνση του εφαρμοζόμενου φορτίου. Λόγω αυτής της ιδιότητας, χρίζουν περαιτέρω έρευνας και αξιοποίηση σε πιο ευρεία κλίμακα. Κατά την παρούσα εργασία θα γίνει μελέτη και εύρεση της ζώνης χάσματος (band gap) στη διάδοση κυμάτων σε τετραχειρόμορφες (tetrachiral) μικροδομές αυξητικών υλικών με χρήση πεπερασμένων στοιχείων. Θα δημιουργηθούν πολλαπλά μοντέλα της δομής αυτής με διαφορετικές γεωμετρικές και δομικές παραμέτρους, θα συγκριθούν οι ζώνες χάσματος μεταξύ τους, όπως και οι μεταβολές που προκαλούν αυτές.

Abstract

During the manufacturing process, the right choice of material is imperative as this determines the behavior of the structure. Therefore, exploring and taking full use of new materials, which possess better mechanical properties is essential. Such an example is auxetic materials, the microstructures which elongate towards the direction of applied load, instead of shrinking. As such, further research and a wider exploitation of these materials is required. This dissertation will be focused on the study and discovery of the band gap of the wave propagation in tetrachiral microstructures of auxetic materials using finite element analysis. Multiple models of this structure with different geometric and structural parameters will be created; there will be a comparison among the band gaps as well as the changes they cause.

Κεφάλαιο 1 – Γενικά

Εισαγωγή

Η ανάγκη της ανθρωπότητας να βρει νέες βέλτιστες τεχνικές μόνωσης οδήγησε στην έρευνα και την δημιουργία των αυξητικών δομών και υλικών. Αυξητικά ονομάζονται τα υλικά που επιμηκύνονται κάθετα στην κατεύθυνσή του εφαρμοζόμενου φορτίου.

Στην παρούσα μελέτη, έγινε έλεγχος της ικανότητας μόνωσης και της ύπαρξης χάσματος συχνότητας μιας αυξητικής μικροδομής που αποτελείται από συγκεκριμένο συνδυασμό υλικών, της ασκήθηκε μια σταθερή δύναμη και ελέγχθηκε ένα τμήμα του φάσματος συχνοτήτων. Ως χάσμα συχνοτήτων, ορίζεται η περιοχή του φάσματος συχνοτήτων, όπου υπάρχει αδυναμία μετάδοσης ενός κύματος.

Σίγουρα, σε επόμενες και πιο εξειδικευμένες μελέτες, με υλικά και δομές βελτιστοποιημένες για αυτόν τον σκοπό, θα επιτευχθούν αποτελέσματα που είναι είτε πιο οικονομικά, είτε με καλύτερη απόδοση προς τον σκοπό μελέτης. Αλλά για τώρα, βλέπουμε πως ακόμα και μια μη βέλτιστη γεωμετρία με μη βέλτιστα υλικά, είναι ικανή να δημιουργεί μια σεβαστή ποσότητα χασμάτων συχνοτήτων.

Τέλος, πρέπει να αναφερθεί ότι όλη η διαδικασία έγινε σε θεωρητικό επίπεδο, για τους υπολογισμούς χρησιμοποιήθηκε ανάλυση πεπερασμένων στοιχείων, μέσω του προγράμματος COMSOL Multiphysics και δεν έγινε μελέτη για ενδεχόμενο κόστος δημιουργίας της κατασκευής.

Σκοπός εργασίας

Ο σκοπός της εργασίας, είναι αρχικά, να δημιουργηθεί μια περιοδική τετραχειρόμορφη δομή (tetrachiral), με συγκεκριμένες γεωμετρικές ιδιότητες, να βρεθούν οι πρώτες είκοσι ιδιοσυχνότητες αυτής, και τα ενδεχόμενα κενά ανάμεσα τους, σε κατάλληλο πρόγραμμα πεπερασμένων στοιχείων. Στη συνέχεια, να δημιουργηθεί ένα πεπερασμένο πλέγμα της ίδιας δομής, να φορτιστεί και να μελετηθεί αν τα αποτελέσματα της περιοδικής δομής επαληθεύονται από την πεπερασμένη.

Στόχος της εργασίας είναι η μελέτη σε θεωρητικό επίπεδο μιας έτοιμης μη βελτιστοποιημένης, γεωμετρικά δομής, ώστε στην συνέχεια να επαναληφθούν τα αποτελέσματα σε πειραματικό επίπεδο και στη συνέχεια να βελτιστοποιηθούν για την χρήση τους στην καθημερινότητα.

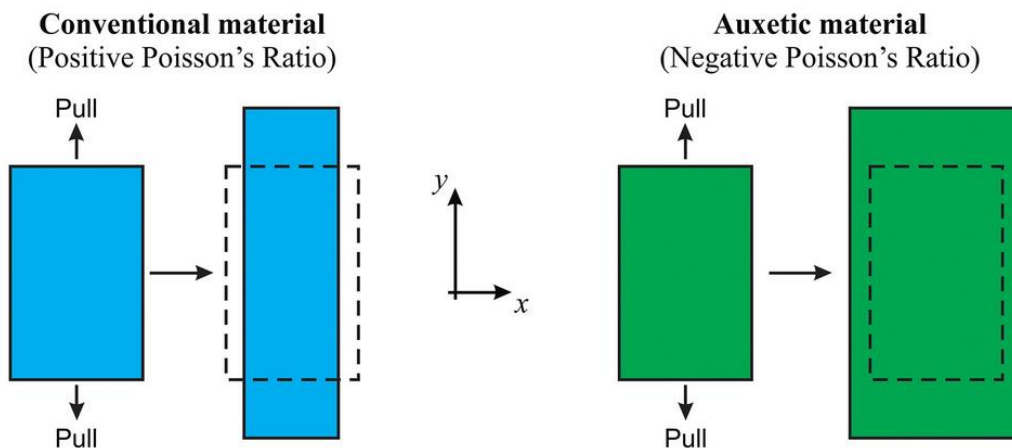
Κεφάλαιο 2 – Αυξητικά υλικά

Γενική περιγραφή

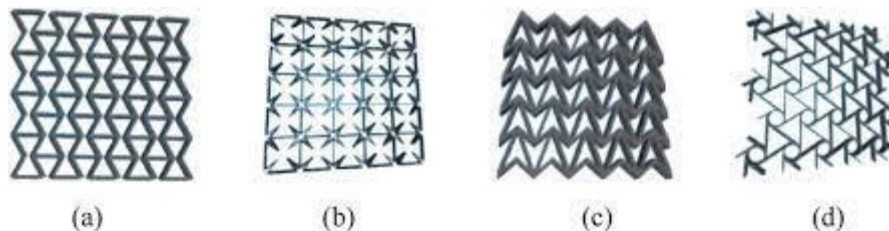
Ο λόγος Poisson χρησιμοποιείται για να μετρηθεί η μεταβολή στο μήκος του κάθετου ως προς τον εφελκυσμό άξονα, είναι συνήθως θετικός αριθμός με τιμές που κυμαίνονται από $0 < \nu < 0.5$ και είναι το αρνητικό κλάσμα της εγκάρσιας τροπής ως προς την αξονική τροπή.

Στα συμβατικά υλικά, όταν ασκηθεί εφελκυστικό φορτίο, παρατηρείται σμίκρυνση στην κάθετη, ως προς της παραμόρφωση, διεύθυνση. Αντίθετα, στα αυξητικά υλικά, όταν ασκηθεί εφελκυστικό φορτίο παρατηρείται επιμήκυνση στην κάθετη ως προς την φόρτιση διεύθυνση, για αυτό το λόγο, έχουν αρνητικό λόγο Poisson.

Τα αυξητικά υλικά είναι γνωστά και ως anti-rubber (αντι-καουτσουκ), διότι σε αντίθεση με το καουτσούκ, που το πάχος του μειώνεται όταν τεντώνεται, σε αυτά αυξάνεται, αλλά και ως dilatational materials (υλικά που διαστέλλονται), διότι εμφανίζουν εύκολη μεταβολή του όγκου τους, σε αντίθεση με τα ελαστικά υλικά, που ενώ είναι ευμετάβλητα υπό φορτίο ο όγκος τους δεν μεταβάλλεται.[2]



Εικόνα 1 Χαρακτηριστικά συμβατικού υλικού (αριστερά) και αυξητικού υλικού (δεξιά).



Εικόνα 2 Αυξητικές δομές (a) re-entrant hexagonal, (b) star, (c) double-arrowed, (d) chiral.

Αρνητικός λόγος Poisson

Ο λόγος Poisson ορίζεται ως «ο λόγος της εγκάρσιας συστολής προς την διαμήκη επέκταση σε μια απλή κατάσταση έντασης» (Fung, 1968). Η μαθηματική του έκφραση είναι ως εξής:

$$\nu = -\frac{\varepsilon_x}{\varepsilon_y} = -\frac{\frac{\Delta y}{ly}}{\frac{\Delta x}{lx}} = -\frac{\Delta y}{\Delta x} \Rightarrow \nu < 0 \text{ με } \Delta x, \Delta y > 0$$

Η γραμμική σχέση μεταξύ τάσεων παραμορφώσεων μέσα σε ένα συνεχές και παραμορφώσιμο σώμα, ονομάζεται γενικευμένος κανόνας Hooke. Για ένα ισотροπικό (ιδιότητες ανεξάρτητες από την κατεύθυνση) υλικό τα μεγέθη που χρειάζονται για να το χαρακτηρίσουν είναι τα εξής: το μέτρο ελαστικότητας (Young's modulus) E , το μέτρο διάτμησης (shear modulus) G , το μέτρο ελαστικότητας του όγκου (bulk modulus) K και ο λόγος Poisson.

Τα παραπάνω συνδυάζονται με τις εξής σχέσεις:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (1)$$

$$K = \frac{E}{3(1-2\nu)} \quad (2)$$

$$E = \frac{9KG}{(3K+G)} \quad (3)$$

$$\nu = \frac{1}{2} \left(\frac{3K-2G}{3K+G} \right) \quad (4)$$

Επειδή τα G , K πρέπει να είναι θετικά, συμπεραίνουμε ότι ο λόγος Poisson θα παίρνει τιμές ανάμεσα σε $-1 < \nu < 0.5$. [3]

Χαρακτηριστικά και εφαρμογές των αυξητικών υλικών

Η ικανότητα των αυξητικών υλικών να επιμηκύνονται, προς όλες τις μεριές κάτω από φόρτιση, του δίνει τα εξής ιδιαίτερα χαρακτηριστικά:

- Αντίσταση στη διείσδυση (Resistance to indentation)
- Αντίσταση στην απόσχιση (Shear resistance)
- Αντίσταση στις ρωγμές (Fracture resistance)
- Απορρόφηση ηχητικών κυμάτων (Acoustic absorption)
- Συγκλαστική συμπεριφορά (Synclastic behavior)
- Μεταβλητή διαπερατότητα (Variable permeability)

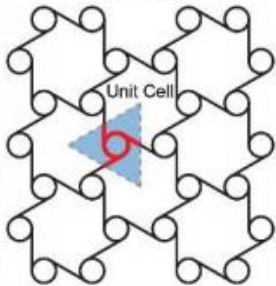
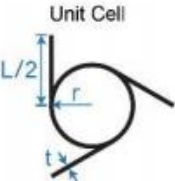
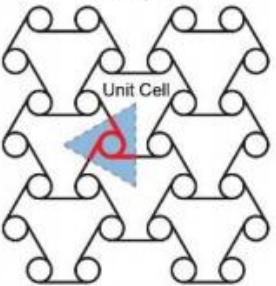
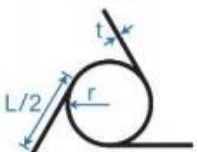
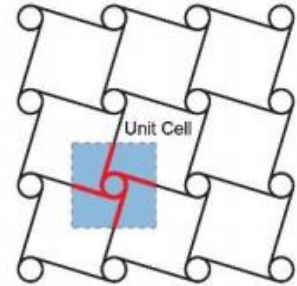
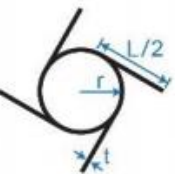
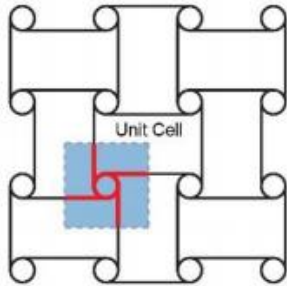
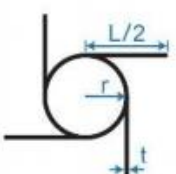
Παίρνοντας υπόψιν τις ιδιότητες που χαρακτηρίζουν αυτά τα υλικά, λόγω του αρνητικού λόγου Poisson, δημιουργούνται συνθήκες για την παραγωγή και χρήση τους σε μέρη όπου τα συμβατικά υλικά είναι λιγότερο αποδοτικά.

Μια εφαρμογή τους είναι στη δημιουργία πιεζοηλεκτρικών αισθητήρων, όπου το χαμηλό μέτρο ελαστικότητας του όγκου τα κάνει πιο συνετή επιλογή στην μεταβλητότητα της πίεσης. Μια άλλη ενδιαφέρουσα εφαρμογή τους είναι στην βιοϊατρική, όπου η εξέλιξη των υλικών θα επιτρέψει την δημιουργία αιμοφόρων αγγείων που θα διευρύνονται όταν το αίμα θα ρέει μέσα τους. Τέλος, η εφαρμογή που αφορά περισσότερο αυτή την εργασία, είναι η χρήση τους ως μονωτικά υλικά σε κατασκευές αλλά και ως αποσβεστήρες ταλαντώσεων.

Κεφάλαιο 3 – Γεωμετρία της δομής

Η ευρύτερη ομάδα γεωμετρίας δομής που χρησιμοποιείται στην παρούσα μελέτη, είναι αυτή των χειρόμορφων (chiral) και των αντιχειρόμορφων (antispiral). Ειδικότερα, οι δομές αυτές αποτελούνται από μια παράταξη κυλίνδρων, που συνδέονται μεταξύ τους με εφαπτόμενους συνδέσμους. Ανάλογα με τον αριθμό των συνδέσμων έχουμε τις τριχειρόμορφες (trichiral), τις τετραχειρόμορφες (tetrachiral) κοκ.

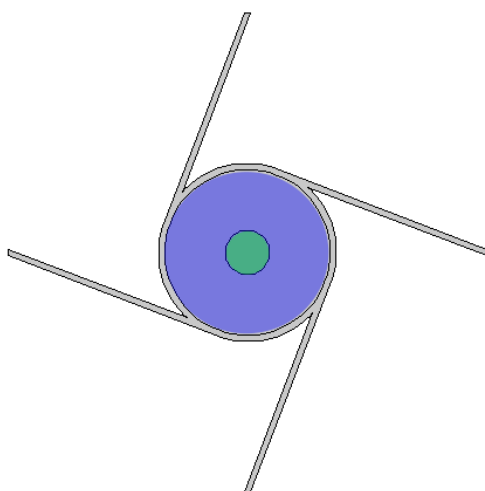
Στις αντιχειρόμορφες δομές, όπως φαίνεται και στην παρακάτω εικόνα, οι σύνδεσμοι εφάπτονται στην ίδια μεριά, σε αντίθεση με τις χειρόμορφες, και οι δομές ονομάζονται ανάλογα με τον αριθμό των συνδέσμων αντιτριχειρομορφες (anti trichiral), αντιτετραχειρομορφες (anti tetrachiral) κοκ.[7],[11]

Chiral		Anti-Chiral	
<p>Tri-Chiral</p>  <p>Unit Cell</p>  <p>Relative Density</p> $\frac{2}{\sqrt{3}} \left(\frac{t}{L} \right) \left(\frac{1 + 4\pi/3 \cdot (r/L)}{1 + 4(r/L)^2} \right)$		<p>Anti-Tri-Chiral</p>  <p>Unit Cell</p>  <p>Relative Density</p> $\frac{2}{\sqrt{3}} \left(\frac{t}{L} \right) \left(1 + \frac{4\pi}{3} \left(\frac{r}{L} \right) \right)$	
<p>Tetra-Chiral</p>  <p>Unit Cell</p>  <p>Relative Density</p> $2 \left(\frac{t}{L} \right) \left(\frac{1 + \pi \cdot (r/L)}{1 + 4(r/L)^2} \right)$		<p>Anti-Tetra-Chiral</p>  <p>Unit Cell</p>  <p>Relative Density</p> $2 \left(\frac{t}{L} \right) \left(1 + \pi \cdot (r/L) \right)$	

Εικόνα 3 Μορφή χειρόμορφων και αντιχειρόμορφων δομών

Υπάρχουν δύο μεγέθη που χρησιμοποιούνται για να χαρακτηρίσουν αυτές τις δομές γεωμετρίας, ο λόγος r/L , με r την ακτίνα κυλίνδρου και L το μήκος του συνδέσμου ανάμεσα σε δυο κυλίνδρους, και η σχετική πυκνότητα, όπως ορίζεται στην παραπάνω εικόνα με t το πάχος του τοιχώματος.

Για την εκπόνηση της ακόλουθης μελέτης έγινε χρήση της τετραχειρόμορφης δομής (tetrachiral), αρχικά δίχως κυκλικό έγκλεισμα (πυρήνα) και στην συνέχεια με κυκλικό έγκλεισμα, διαφορετικού υλικού από τον κύλινδρο, ακτίνας $r_c = r/4$. Σημειώνεται πως και στις δυο περιπτώσεις έγινε χρήση υλικού επένδυσης μέσα στα όρια του κυλίνδρου. Η δομή με το κυκλικό έγκλεισμα παρουσιάζεται στην παρακάτω εικόνα:



Εικόνα 4 Γκρι: Tungsten , Μπλε: Υλικό επένδυσης , Πράσινο: Copper

Κεφάλαιο 4 – Χάσματα συχνοτήτων (Band gaps)

Στην ακουστική χάσμα συχνότητας υπάρχει όταν μέσα σε ένα υλικό υπάρχει αδυναμία μετάδοσης ενός κύματος (ενέργειας), είτε σε συγκεκριμένη συχνότητα είτε σε ευρύτερο φάσμα συχνοτήτων.

Υπάρχουν περιοδικά υλικά που ονομάζονται φωνονικοί κρύσταλλοι και σχεδιάζονται με τέτοιο τρόπο ώστε να παράγονται συγκεκριμένα χάσματα συχνοτήτων για στοχευμένη μόνωση.

Κεφάλαιο 5 – Θεωρήματα Floquet, Bloch και εφαρμογή στο μοντέλο

Θεώρημα Floquet

Το θεώρημα Floquet, είναι μια μεθοδολογία επίλυσης διαφορικών εξισώσεων της μορφής:

$$\frac{dw(x)}{dx} = A(x)w(x), \forall x \in \mathbb{R} \quad (5)$$

Όπου $w(x): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^n$ είναι μια άγνωστη συνάρτηση και $A(x)$ ένας πίνακας περιοδικών συναρτήσεων με περίοδο r_1 (δηλαδή $A(x + r_1) = A(x)$). Βάσει του θεωρήματος, κάθε επίλυση του συστήματος εξισώσεων εκφράζεται ως γραμμικός συνδυασμός των συναρτήσεων $v(x)e^{kx}$, με $v(x)$ περιοδικό και $k \in \mathbb{C}$ βαθμωτό μέγεθος.[8],[13]

Αυτό το θεώρημα βρίσκει ευρεία χρήση σε φυσικά συστήματα με περιοδικές δυνατότητες. Η εφαρμογή του αυτή ονομάζεται θεώρημα Bloch και αναλύεται σε επόμενη παράγραφο.

Θεώρημα Bloch

Αρχικά, το θεώρημα του Bloch χρησιμοποιήθηκε για να μελετήσει την συμπεριφορά των ηλεκτρονίων σε ένα κρύσταλλο. Η συμπεριφορά της συνάρτησης κύματος $\psi_k(r)$ με ενέργεια E_k ακολουθεί την εξίσωση του Schrödinger:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(r) \right] \psi_k(r) = E_k \psi_k(r) \Leftrightarrow H(r) \psi_k(r) = E_k \psi_k(r) \quad (6)$$

Όπου m είναι η μάζα του ηλεκτρονίου και \hbar η σταθερά του Planck.

Για τα ηλεκτρόνια, η πιθανή ενέργεια από τους πυρήνες και τα ηλεκτρόνια είναι περιοδική μέσα στον κρύσταλλο: $V(r) = V(r + p)$, όπου p είναι το διάνυσμα πλέγματος. Στην εξίσωση (1) το $H(r)$ είναι ο τελεστής Hamilton, οπότε αντίστοιχα:

$$H(r) = H(r + p) \quad (7)$$

Είναι γνωστό ότι η λύση του προβλήματος ιδιοτιμών της εξίσωσης (7) παίρνει την μορφή:

$$\psi_k(r + p) = e^{(ik_e, r)} \psi_k(r) \quad (8)$$

Όπου k_e είναι το διάνυσμα κύματος του ηλεκτρονίου.

Συνεχίζοντας, η πιθανότητα να βρεθεί το ηλεκτρόνιο στο r και στο $r+p$ είναι η ίδια, λόγω της περιοδικότητας του κρυστάλλου:

$$|\psi_k(r + p)|^2 = |\psi_k(r)|^2 \quad (9)$$

Κάνοντας αντικατάσταση της (8) στην (9) βρίσκεται $|e^{(ik_e, r)}| = 1$, οπότε (k_e, p) είναι πραγματικός αριθμός.

Κάθε πλεγματική δομή σε τρισδιάστατο χώρο, μπορεί να κατασκευαστεί κάνοντας χρήση μιας επαναλαμβανόμενης μονάδας κελιού κατά μήκος τριών γραμμικά ανεξαρτήτων

διανυσμάτων πλέγματος. Χρησιμοποιώντας Νευτώνια δυναμική, οι εξισώσεις κίνησης της μονάδας κελιού έχουν την ακόλουθη δομή:

$$M\ddot{q} + Kq = F \quad (10)$$

Όπου τα μητρώα M και K παρουσιάζουν την μάζα και την ακαμψία του συστήματος και τα \ddot{q} , \dot{q} , q παρουσιάζουν την εκτόπιση, επιτάχυνση και το F τις δυνάμεις που ασκούνται στη δομή από τα γειτονικά κελιά.

Η ανάλυση Bloch ξεκινάει με αρμονική επίλυση για το q με αποτέλεσμα το \ddot{q} να αντικατασταθεί με $\omega^2 q$ οπότε:

$$(-\omega^2 M + K)q = F \quad (11)$$

Κάνοντας αντικατάσταση, οι εκτοπίσεις του κελιού που βρίσκεται στο $n_1 a_1 + n_2 a_2 + n_3 a_3$ με $q(n_1, n_2, n_3)$. Υπάρχει λύση στο σύστημα και θα έχει την ιδιότητα:

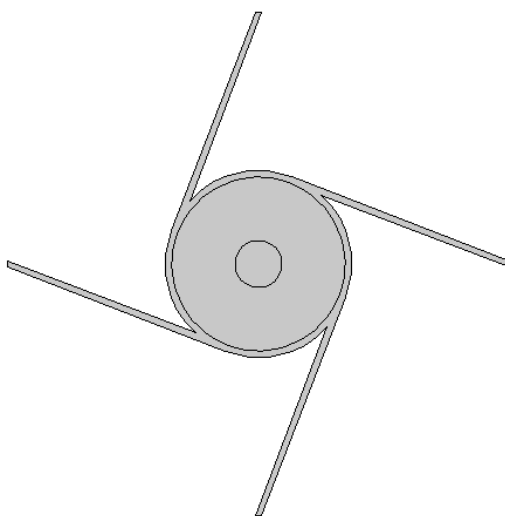
$$q(n_1, n_2, n_3) = e^{<k, n_1 a_1 + n_2 a_2 + n_3 a_3>} q(0,0,0) \quad (12)$$

Όπου $<k, n_1 a_1 + n_2 a_2 + n_3 a_3>$ η γενική μορφή της σταθεράς μετάδοσης. Η ιδιοτιμή ω είναι η συχνότητα μετάδοσης και είναι συνάρτηση των M, K και του διανύσματος κύματος k . [4],[5],[6],[12]

IBZ (Irreducible Brillouin Zone) και περιοδικά μοντέλα

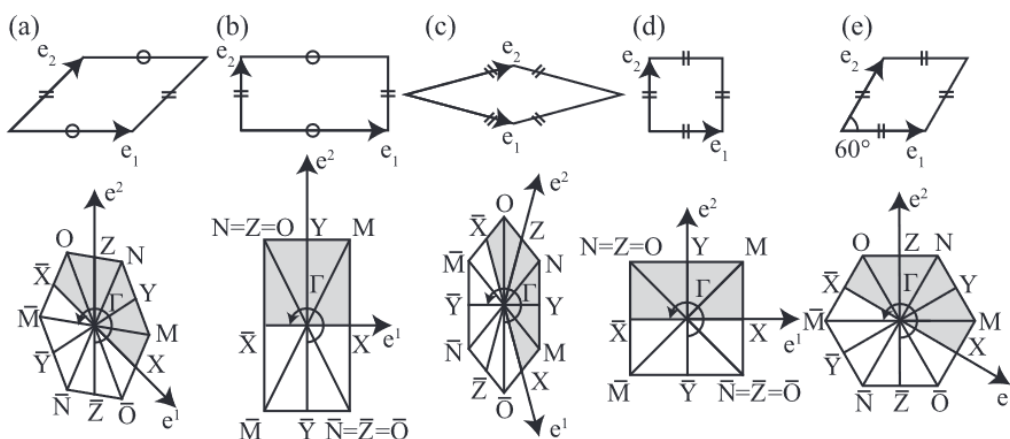
Όταν χρειάζεται να διερευνηθούν υποθέσεις σε περιοδικά πλέγματα, είναι αναγκαίο να απλοποιηθούν οι υπολογισμοί, ούτως ώστε να μην υπάρχει μεγάλη απαίτηση από το σύστημα υπολογισμών που θα χρησιμοποιηθεί.

Έτσι, αντί να γίνει διερεύνηση για όλα τα στοιχεία ενός πλέγματος θα γίνει μόνο για ένα όπως φαίνεται στην παρακάτω εικόνα:



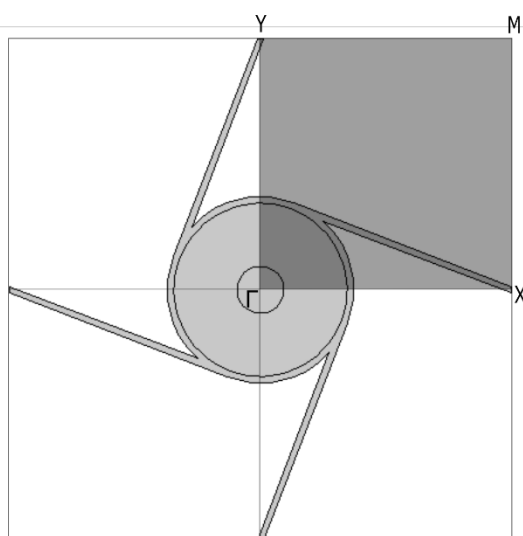
Εικόνα 5 Μεμονωμένη δομή

Αυτό είναι εφικτό να απλοποιηθεί ακόμα περισσότερο βρίσκοντας το μικρότερο τμήμα της δομής, το οποίο όταν καθρεφτιστεί γύρω από έναν άξονα συμμετρίας, είτε μια είτε πολλαπλές φορές και πολλαπλούς άξονες, θα δημιουργήσει την αρχική δομή. Αυτό το τμήμα ονομάζεται IBZ (Irreducible Brillouin Zone) και κάποια παραδείγματα φαίνονται στις επόμενες εικόνες:



Εικόνα 6 (a) πλάγιο, (b) ορθγωνικό, (c) ρομβικό, (d) τετραγωνικό, (e) εξαγωνικό κελί με τις αντίστοιχες Brillouin Zones.

Βάσει των 2 παραπάνω εικόνων γίνεται εμφανές ότι η δομή που μελετάται θα έχει τους εξής άξονες συμμετρίας:



Εικόνα 7 Το σκιαγραφημένο τμήμα αποτελεί την IBZ (Γ -X-M-Y- Γ)

Φαίνεται πως το μικρότερο τμήμα που μπορεί να καθρεφτιστεί είναι το τεταρτημόριο, αυτό ονομάζεται $p4$.

Για να βρεθεί η τελική δομή από την IBZ θα πρέπει να καθρεφτιστεί το σκιαγραφημένο κομμάτι ως προς τον άξονα των y και έπειτα, αυτό που θα δημιουργηθεί, ως προς τον άξονα των x .

Στον επόμενο πίνακα φαίνονται οι συντεταγμένες του κάθε σημείου της παραπάνω εικόνας, υπό την προϋπόθεση ότι το Γ βρίσκεται στο $[0,0]$.

	Καρτεσιανές Συντεταγμένες
Γ	(0,0)
X	($L_1/2, 0$)
M	($L_1/2, L_1/2$)
Y	(0, $L_1/2$)

Λόγω της χρήσεως της IBZ για να διευκολυνθούμε στους υπολογισμούς, πρέπει να αναφερθεί πως στα διαγράμματα συχνοτήτων που ακολουθούν στην εργασία, η μεταβλητή k παίρνει τιμές από 0 μέχρι και 4. Αυτές οι τιμές αντιστοιχούν στα σημεία Γ-X-M-Y-Γ και σε όλα τα σημεία πάνω στις ακμές του τετραγώνου που δημιουργείται. [1],[9],[15]

Εφαρμογή στο μοντέλο

Ειδικότερα, η μετατόπιση $q(r_j)$ των στοιχείων του πλέγματος ορίζεται ως:

$$q(r_j) = q_j e^{(i\omega t - kr_j)} \quad (13)$$

Με q_j το πλάτος, ω την συχνότητα και k το διάνυσμα κύματος.

Βάσει του θεωρήματος Bloch υπάρχουν 2 παράμετροι n_1 και n_2 , που μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την αναγνώριση έκαστου κελιού, ώστε η μετατόπιση ενός σημείου να βρίσκεται από ένα μοναδικό συνδυασμό των n_1 και n_2 όπως:

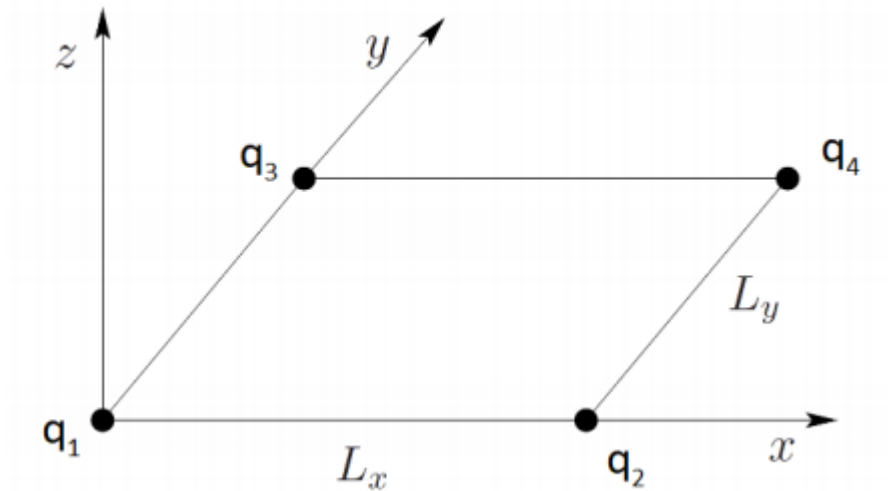
$$q = q(r_j) e^{k(r-r_j)} = q(r_j) e^{(k_1 n_1 + k_2 n_2)} \quad (14)$$

Με $k_1 = k e_1 = \delta_1 + i\varepsilon_1$, $k_2 = k e_2 = \delta_2 + i\varepsilon_2$ όπου δ_1, δ_2 η σταθερά απόσβεσης και $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ η σταθερά φάσης.

Η επόμενη εικόνα παρουσιάζει τους βαθμούς ελευθερίας q ενός ορθογωνίου τμήματος με ακμές L_x, L_y όπου ισχύει:

$$q = [q_1^T q_2^T q_3^T q_4^T] \quad (15)$$

Με q_j τους κομβικούς βαθμούς ελευθερίας.



Εικόνα 8 Ορθογώνιο τμήμα με 4 κόμβους/πεπερασμένα στοιχεία

Η μετάδοση κύματος σε δισδιάστατα στοιχεία μπορεί να θεωρηθεί κύμα Bloch, οπότε η σχέση μεταξύ των περιοδικών μετατοπίσεων q στις ακμές του περιοδικού στοιχείου είναι:

$$q_2 = \lambda_x q_1, \quad q_3 = \lambda_y q_1, \quad q_4 = \lambda_x \lambda_y q_1 \text{ με } \lambda_x = e^{-i\mu_x}, \quad \lambda_y = e^{-i\mu_y} \quad (16)$$

Και οι σταθερές $\mu_x = \kappa_x L_x$, $\mu_y = \kappa_y L_y$ περιγράφουν την μετάδοση του κύματος.

Άρα, οι κομβικοί βαθμοί ελευθερίας έχουν ως εξής:

$$q = \Lambda_R q_1 \text{ με } \Lambda_R = [I \lambda_x I \lambda_y I \lambda_x \lambda_y I] \quad (17)$$

Αντικαθιστώντας το $q = \Lambda_R q_1$ στην εξίσωση κίνησης $(-\omega^2 M + i\omega C + K)q = f$ και πολλαπλασιάζοντας με $\Lambda_L = [I \lambda_x^{-1} I \lambda_x^{-1} I (\lambda_x \lambda_y)^{-1} I]$ έχουμε:

$$\left(-\omega^2 \bar{M}(\mu_x, \mu_y) + i\omega \bar{C}(\mu_x, \mu_y) + \bar{K}(\mu_x, \mu_y) \right) q = f \quad (18)$$

Με $\bar{M} = \Lambda_L M \Lambda_R$, $\bar{C} = \Lambda_L C \Lambda_R$, $\bar{K} = \Lambda_L K \Lambda_R$ οι πίνακες μάζας απόσβεσης και ακαμψίας.

Το πρόβλημα των ιδιοτιμών γίνεται:

$$\bar{D}(\omega, \lambda_x, \lambda_y) = 0$$

Με \bar{D} το απλοποιημένο μητρώο δυναμικής ακαμψίας. [10],[14],[16],[17],[18],[19],[20],[21]

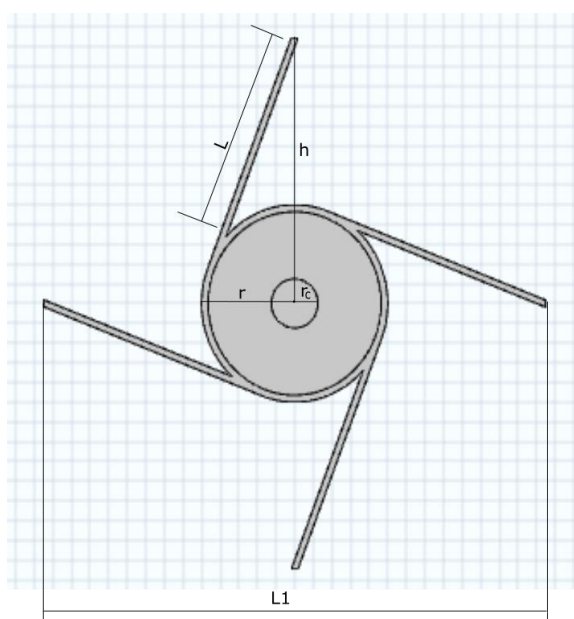
Κεφάλαιο 6 – Προσομοίωση δομής με χρήση περιοδικών συνθηκών

Έπειτα από πολλαπλούς ελέγχους μεταξύ διαφορετικών υλικών αποφασίστηκε πως θα γίνει χρήση του συνδυασμού Tungsten, στον σκελετό της δομής/ πλέγμα, και Copper ως πυρήνα της δομής. Οι ιδιότητες των υλικών που χρησιμοποιήθηκαν παρουσιάζονται στον πίνακα που ακολουθεί:

Υλικά (Material)	Πυκνότητα (density)	Λόγος Poisson (Poisson's ratio)	Μέτρο ελαστικότητας (Young's Modulus)
Copper	8960 kg/m ³	0.35	110 GPa
Tungsten	17800 kg/m ³	0.28	3600 GPa
Υλικό επένδυσης (Material 1)	500 kg/m ³	0.47	5 MPa

Για όλες τις μελέτες, αν δεν αναφέρεται κάτι άλλο, ισχύουν τα εξής:

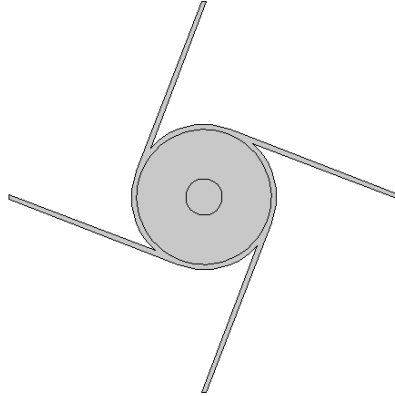
- Ακτίνα σκελετού $r=0.005$ m
- ακτίνα πυρήνα $r_c=r/4$
- πλάτος κελιού $L1=0.02693$ m
- μήκος άρθρωσης σύνδεσης από τον ένα σκελετό στον επόμενο $l=0.025$ m, οπότε μήκος άρθρωσης κάθε κελιού $L=l/2=0.0125$ m
- πάχος άρθρωσης $t=0.00035$ m
- πάχος άρθρωσης στον άξονα z , $b=0.005$ m
- αριθμός ιδιοσυχνοτήτων ελέγχου 20
- εύρος τιμών παραμέτρου περιοδικών συνθηκών k 0-4 με βήμα 0.08.



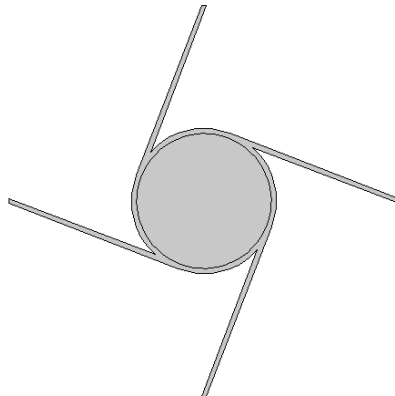
Εικόνα 9 Δομή με κυκλικό έγκλεισμα και διαστάσεις

Προσομοίωση δομής χωρίς και με κυκλικό έγκλεισμα (πυρήνα) ($r_c=r/4$)

Αρχικά, θα γίνει ένας έλεγχος των διαφορών band gap στην δομή με πυρήνα και χωρίς πυρήνα.



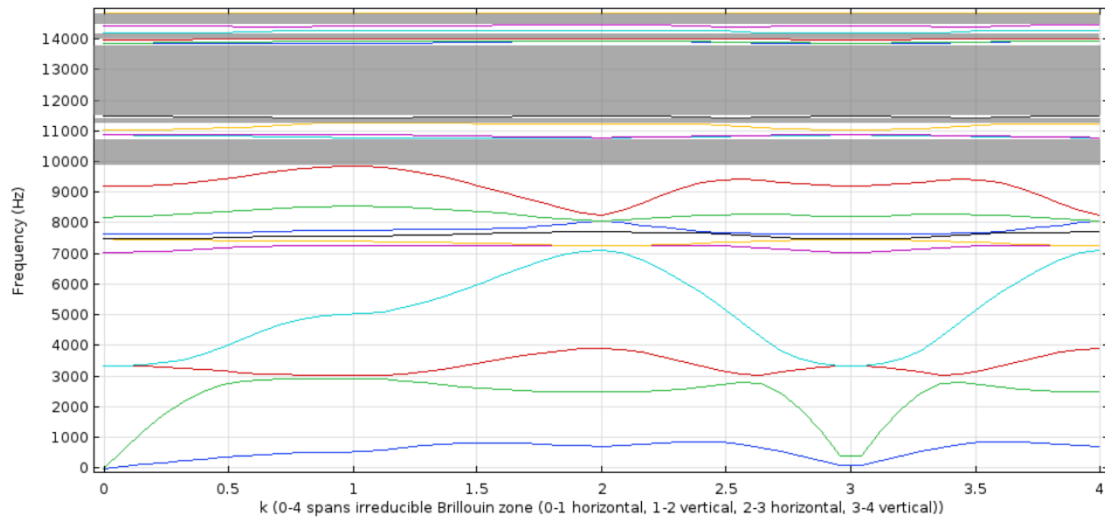
Εικόνα 10 Δομή με κυκλικό έγκλεισμα (πυρήνα)



Εικόνα 11 Δομή δίχως κυκλικό έγκλεισμα

Στα επόμενα διαγράμματα οι περιοχές που βρίσκονται μέσα στο γκρι κουτί είναι κάποια από τα εύρη του band gap, αυτά που είναι αρκετά μεγάλα για να φανούν στο διάγραμμα με γυμνό μάτι.

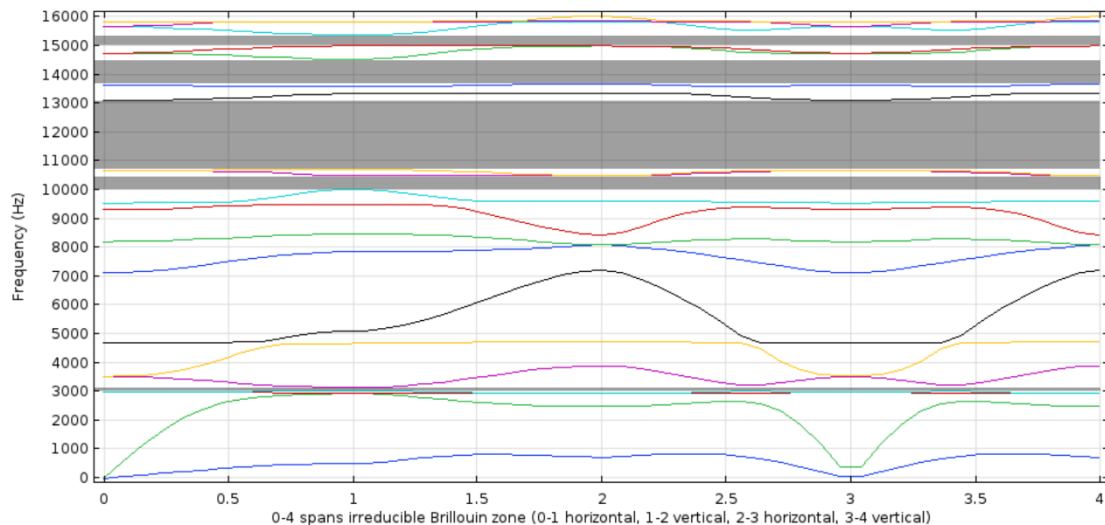
Η δομή δίχως πυρήνα δίνει το εξής διάγραμμα:



Εικόνα 12 Διάγραμμα απόκρισης δομής δίχως κυκλικό έγκλεισμα

Στο διάγραμμα φαίνεται συνολικά 7 ολικά band gaps, ανάμεσα σε 12^η με 13^η ιδιοσυχνότητα (10899- 11051 Hz), σε 13^η και 14^η ιδιοσυχνότητα (11283- 11446 Hz), σε 14^η και 15^η ιδιοσυχνότητα (11520-13863 Hz), σε 16^η και 17^η ιδιοσυχνότητα (13950- 14006 Hz), σε 17^η και 18^η ιδιοσυχνότητα (14013- 14205 Hz), σε 18^η και 19^η ιδιοσυχνότητα (14314- 14421 Hz) και σε 19^η με 20^η ιδιοσυχνότητα (14493-14850 Hz).

Η δομή με πυρήνα δίνει το εξής διάγραμμα:



Εικόνα 13 Διάγραμμα απόκρισης με κυκλικό έγκλεισμα

Στο διάγραμμα φαίνεται συνολικά 7 ολικά band gap, ανάμεσα σε 4^η και 5^η ιδιοσυχνότητα (3030- 3148 Hz), σε 10^η και 11^η ιδιοσυχνότητα (9505- 9550 Hz), σε 11^η και 12^η ιδιοσυχνότητα (10025- 10494 Hz), σε 13^η και 14^η (10690- 13111 Hz), σε 14^η και 15^η (13346- 13576 Hz), σε 15^η και 16^η ιδιοσυχνότητα (13690- 14525 Hz) και σε 17^η και 18^η ιδιοσυχνότητα (15000- 15390 Hz).

Παρατηρείται ότι ενώ ο αριθμός band gap παραμένει ο ίδιος, στη δομή με τον πυρήνα ξεκινάνε από πιο χαμηλές (3030 Hz σε αντίθεση με 10899 Hz) συχνότητες και φτάνουν μέχρι και πιο υψηλές (15000 Hz σε αντίθεση με 14493 Hz). Επίσης, φαίνεται πως τα «μεγάλα»

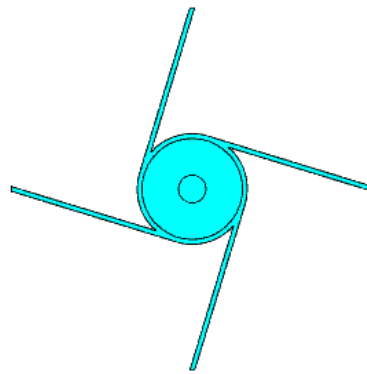
χάσματα (τάξης 2300 Hz στην 1^η περίπτωση και 2500 Hz στην 2^η) βρίσκονται σε πολύ κοντινές τιμές, 11520-13863 Hz στην 1^η περίπτωση και 10690-13111 Hz στη 2^η περίπτωση.

Από εδώ και πέρα όλες οι συγκρίσεις θα γίνονται με το μοντέλο με τον πυρήνα.

Προσομοίωση με παραμετροποίηση ακτίνας σκελετού (r)

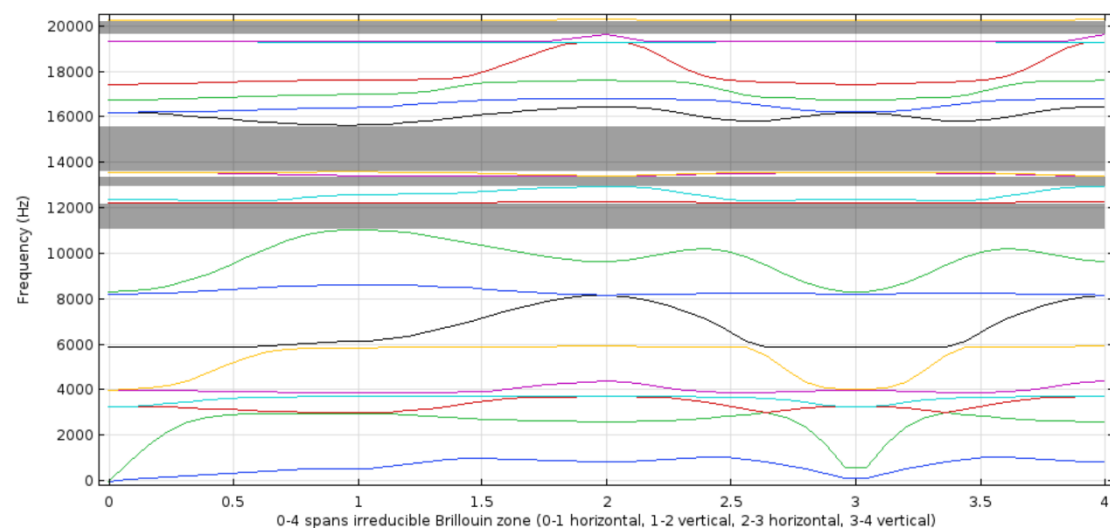
Στις επόμενες 4 μελέτες, η ακτίνα του κελιού (r) θα μεταβάλλεται το αρχικό 0.005 m σε εύρος $\pm 20\%$ (0.004 m μέχρι 0.006 m) με βήμα 10% (0.0005 m). Αντίστοιχα, η τιμή του $r_c=r/4$ θα μεταβάλλεται μαζί με την τιμή του r . Σημειώνεται πως το πάχος της δομής παραμένει σταθερό σε $t=0.00035$ m.

$r=0.004$ m



Εικόνα 14 Δομή με $r=0.004$ m

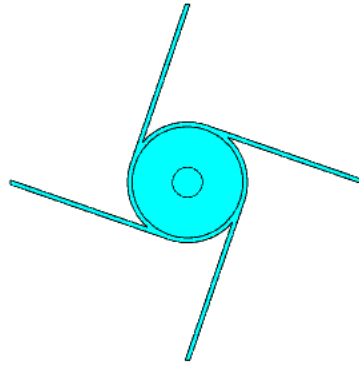
Με διάγραμμα ιδιοσυχνοτήτων:



Εικόνα 15 Διάγραμμα απόκρισης δομής με $r=0.004$ m

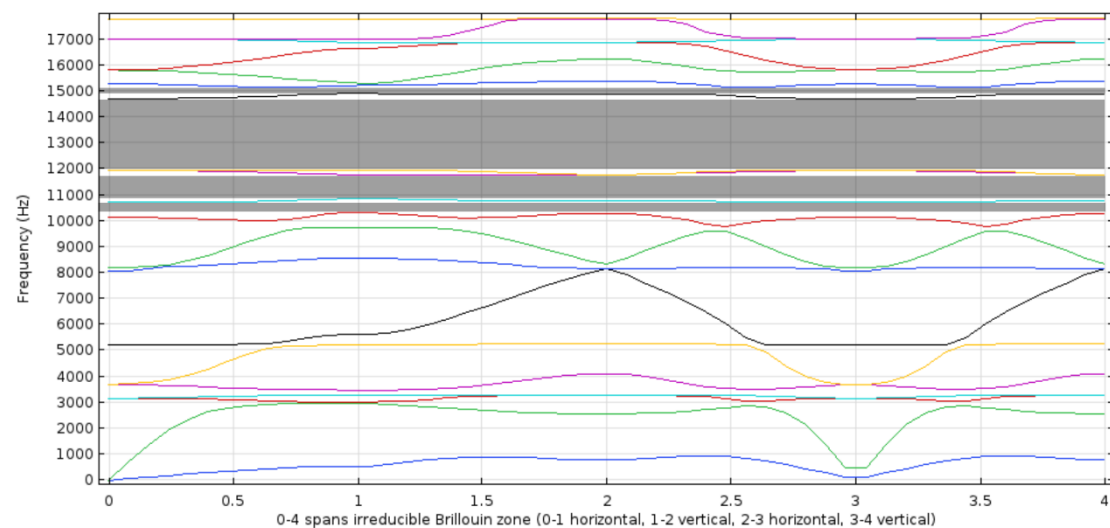
Στο διάγραμμα φαίνονται συνολικά 6 ολικά band gap. Πιο συγκεκριμένα, ανάμεσα σε 4^η και 5^η ιδιοσυχνότητα (3720- 3890 Hz), σε 9^η και 10^η ιδιοσυχνότητα (11065- 12010 Hz), σε 10^η και 11^η (12275- 12326 Hz), σε 11^η και 12^η (12955- 13425 Hz), σε 13^η και 14^η (13600- 15660 Hz) και σε 19^η με 20^η (19630- 20270 Hz).

$r=0.0045\text{ m}$



Εικόνα 16 Δομή με $r=0.0045\text{ m}$

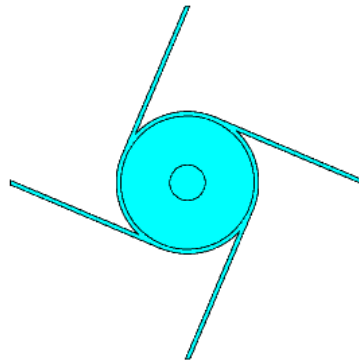
Με διάγραμμα ιδιοσυχνοτήτων:



Εικόνα 17 Διάγραμμα απόκρισης δομής με $r=0.0045\text{ m}$

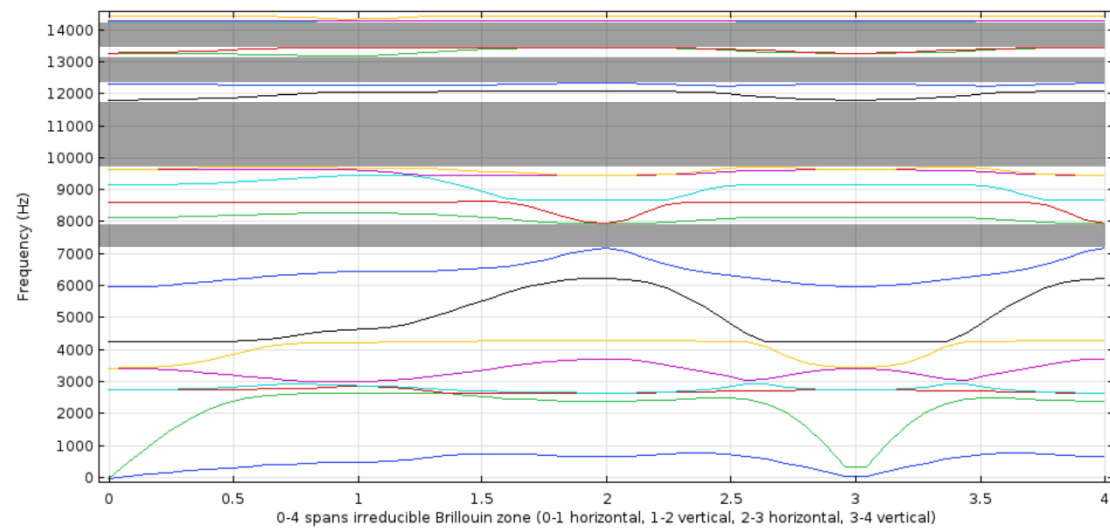
Στο διάγραμμα φαίνονται συνολικά 8 ολικά band gap. Ειδικότερα, σε 2^η και 3^η ιδιοσυχνότητα (2955-3020 Hz), σε 4^η και 5^η ιδιοσυχνότητα (3290- 3478 Hz), σε 9^η και 10^η ιδιοσυχνότητα (9750- 9793 Hz), σε 10^η και 11^η ιδιοσυχνότητα (10320- 10722 Hz), σε 11^η και 12^η ιδιοσυχνότητα (10870- 11780 Hz), σε 13^η και 14^η ιδιοσυχνότητα (11972- 14717 Hz), σε 14^η και 15^η (14914- 15144 Hz) και σε 19^η και 20^η ιδιοσυχνότητα (17775- 17780 Hz).

$r=0.0055\text{ m}$



Εικόνα 18 Δομή με $r=0.0055\text{ m}$

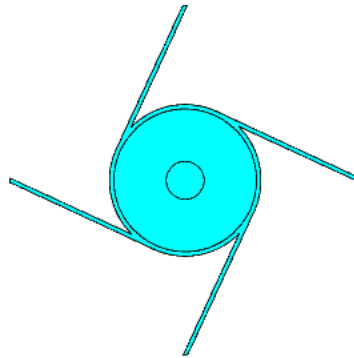
Με διάγραμμα ιδιοσυχνοτήτων:



Εικόνα 19 Διάγραμμα απόκρισης δομής με $r=0.0055\text{ m}$

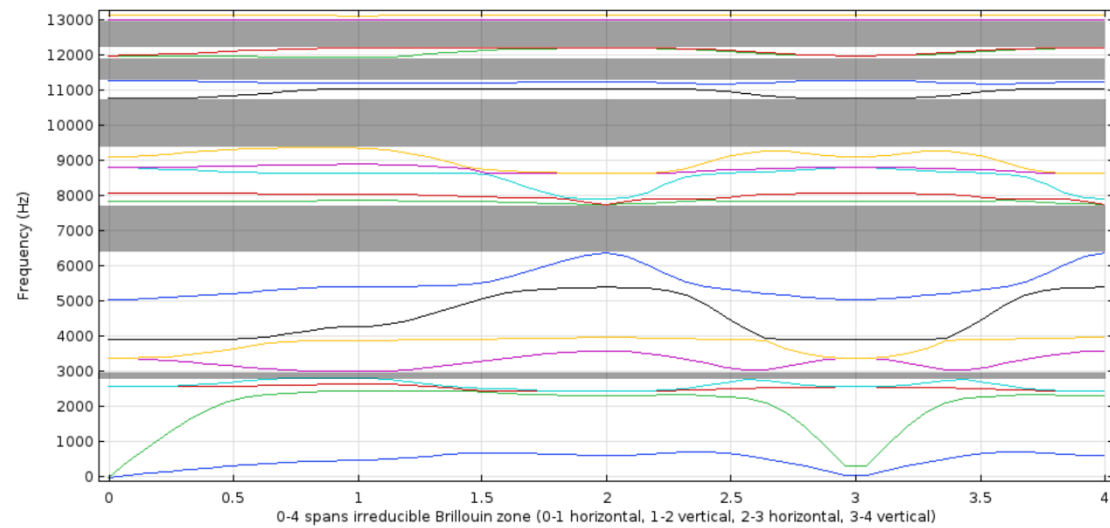
Στο διάγραμμα φαίνονται συνολικά 7 ολικά Band gaps. Ανάμεσα σε 4^η και 5^η ιδιοσυχνότητα (2945- 3020 Hz) σε 8^η και 9^η ιδιοσυχνότητα (7911- 7947 Hz), σε 13^η και 14^η ιδιοσυχνότητα (9740- 11820 Hz), σε 14^η και 15^η ιδιοσυχνότητα (12084- 12275 Hz), σε 15^η και 16^η ιδιοσυχνότητα (12345-13200 Hz), σε 17^η και 18^η ιδιοσυχνότητα (13465-14270 Hz), σε 19^η και 20^η ιδιοσυχνότητα (14293- 14348 Hz)

$r=0.006$ m



Εικόνα 20 Δομή με $r=0.006$ m

Με διάγραμμα ιδιοσυχνοτήτων:



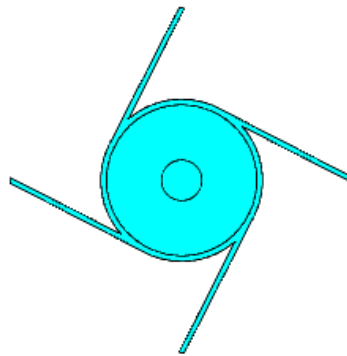
Εικόνα 21 Διάγραμμα απόκρισης δομής με $r=0.006$ m

Στο διάγραμμα φαίνονται συνολικά 7 ολικά Band gaps. Πιο συγκεκριμένα ανάμεσα σε 4^η και 5^η (2827-3010 Hz), σε 8^η και 9^η (6363-7753 Hz), σε 13^η και 14^η (9362-10760 Hz), σε 14^η και 15^η (11055-11182 Hz), σε 15^η και 16^η (11285-11926 Hz), σε 17^η και 18^η (12203-12990 Hz) και σε 19^η και 20^η (13014-13120 Hz).

Προσομοίωση με παραμετροποίηση μήκους άρθρωσης σκελετού (l)

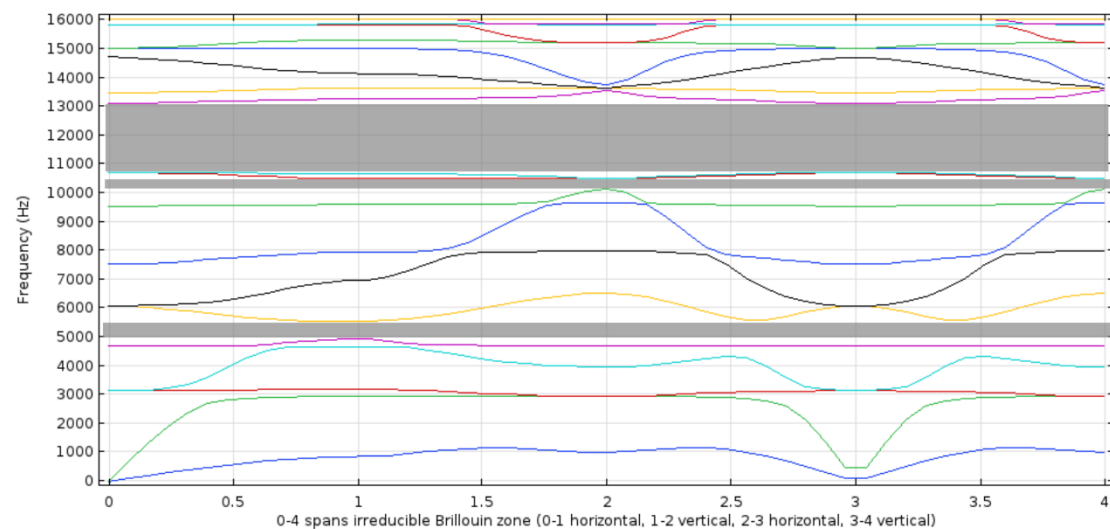
Στις επόμενες 4 μελέτες, το μήκος άρθρωσης κελιού l μεταβάλλεται κατά $\pm 25\%$ με βήμα 12,5% (0,003125 m). Αντίστοιχα, το $L=l/2$ μεταβάλλεται με τον ανάλογο τρόπο. Σημειώνεται ότι το πάχος t παραμένει σταθερό.

$l=0.01875$ m



Εικόνα 22 Δομή με $l=0.01875$ m

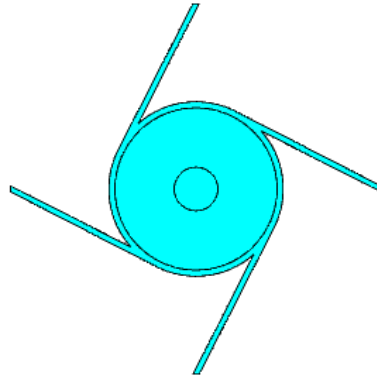
Με διάγραμμα ιδιοσυχνοτήτων:



Εικόνα 23 Διάγραμμα απόκρισης δομής με $l=0.01875$ m

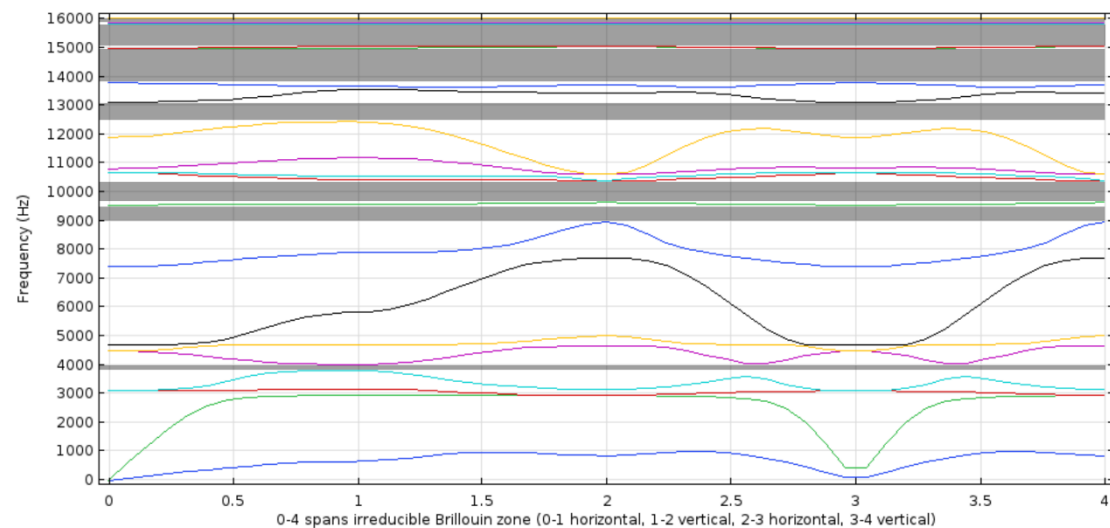
Στο διάγραμμα φαίνονται συνολικά 4 ολικά band gaps. Ειδικότερα, ανάμεσα σε 4^η και 5^η ιδιοσυχνότητα (4675-4701 Hz), σε 5^η και 6^η (4930-5550 Hz), σε 9^η και 10^η (10150-10490 Hz), σε 11^η και 12^η (10714-13115 Hz).

$l=0.021875 \text{ m}$



Εικόνα 24 Δομή με $l=0.021875 \text{ m}$

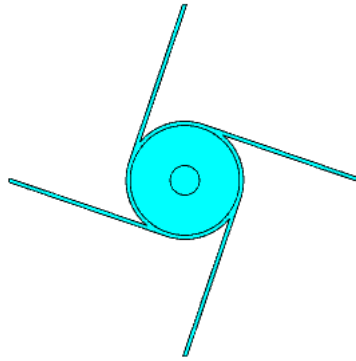
Με διάγραμμα ιδιοσυχνοτήτων:



Εικόνα 25 Διάγραμμα απόκρισης δομής με $l=0.021875 \text{ m}$

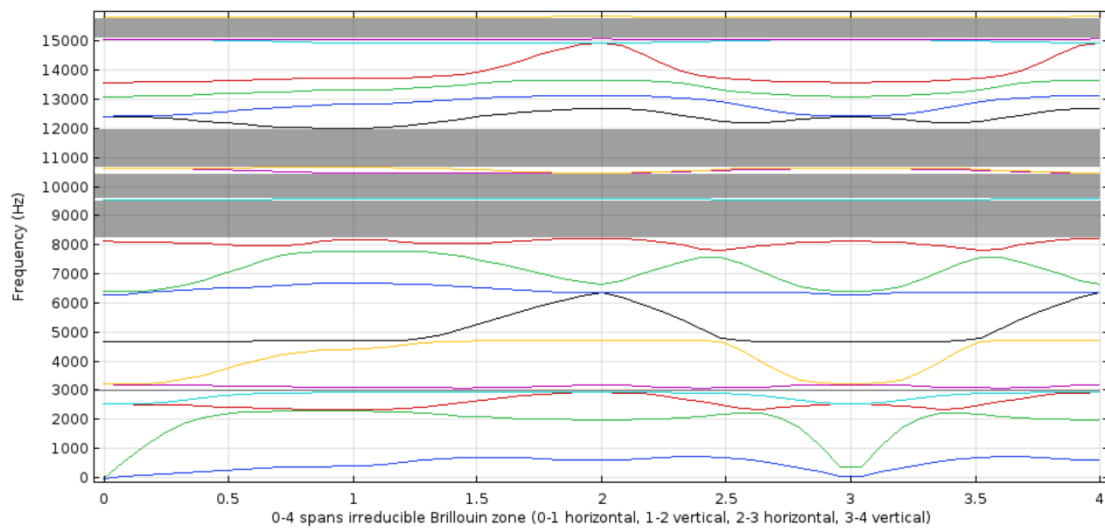
Στο διάγραμμα υπάρχουν συνολικά 8 ολικά band gaps. Πιο συγκεκριμένα, ανάμεσα σε 4^η και 5^η ιδιοσυχνότητα (3805-4018 Hz), σε 8^η και 9^η ιδιοσυχνότητα (8950-9550 Hz), σε 9^η και 10^η ιδιοσυχνότητα (9634-10382 Hz), σε 13^η και 14^η ιδιοσυχνότητα (12443-13120 Hz), σε 14^η και 15^η ιδιοσυχνότητα (13553-13635 Hz), σε 15^η και 16^η ιδιοσυχνότητα (13786-14975 Hz), σε 17^η και 18^η ιδιοσυχνότητα (15046-15835 Hz), σε 19^η και 20^η ιδιοσυχνότητα (15857-16018 Hz).

$l=0.028125 \text{ m}$



Εικόνα 26 Δομή με $l=0.028125 \text{ m}$

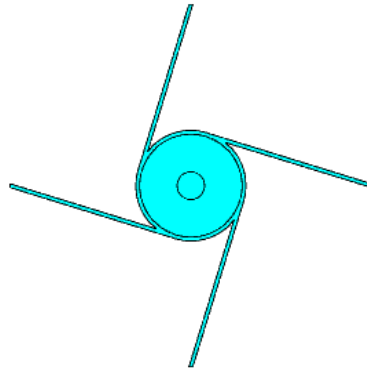
Με διάγραμμα ιδιοσυχνοτήτων:



Εικόνα 27 Διάγραμμα απόκρισης δομής με $l=0.028125 \text{ m}$

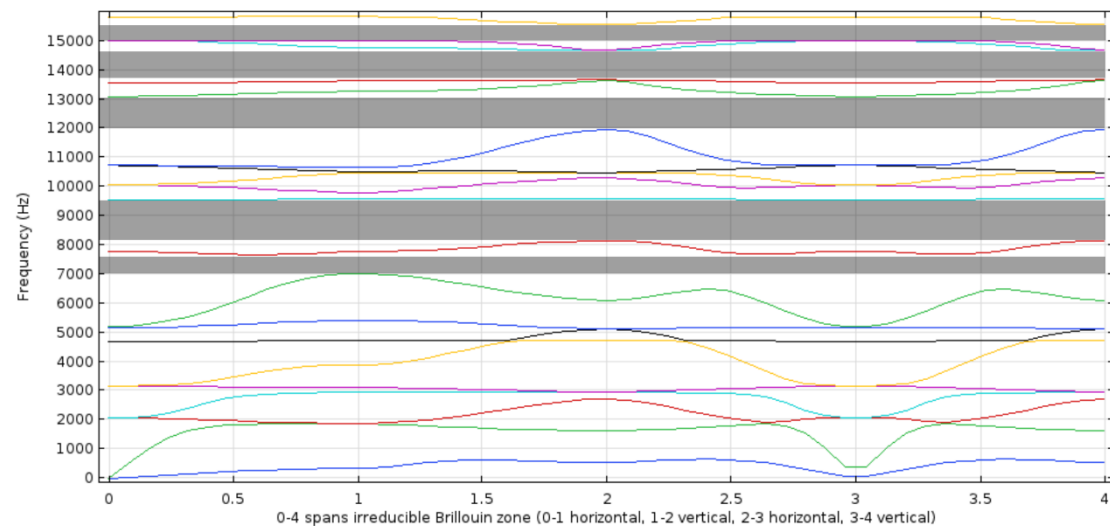
Στο διάγραμμα παρατηρούνται 6 ολικά band gaps. Ειδικότερα, ανάμεσα σε 4^η και 5^η ιδιοσυχνότητα (2947-3099 Hz), σε 9^η και 10^η ιδιοσυχνότητα (7797-7824 Hz), σε 10^η και 11^η ιδιοσυχνότητα (8197-9550 Hz), σε 11^η και 12^η ιδιοσυχνότητα (9615-10488 Hz), σε 13^η και 14^η ιδιοσυχνότητα (10676-12002 Hz), σε 19^η και 20^η ιδιοσυχνότητα (15092-15834 Hz).

$l=0.03125$ m



Εικόνα 28 Δομή με $l=0.03125$ m

Με διάγραμμα ιδιοσυχνοτήτων:



Εικόνα 29 Διάγραμμα απόκρισης δομής με $l=0.03125$ m

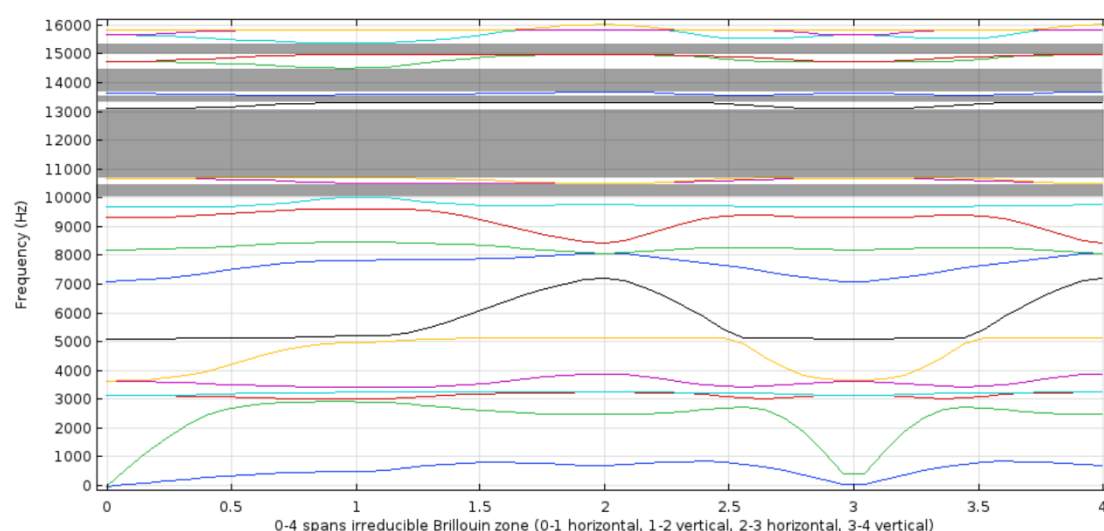
Στο διάγραμμα βρίσκουμε 6 ολικά band gaps. Ανάμεσα σε 9^η και 10^η ιδιοσυχνότητα (7005-7670 Hz), σε 10^η και 11^η ιδιοσυχνότητα (8140-9550 Hz), σε 11^η και 12^η ιδιοσυχνότητα (9593-9805 Hz), σε 15^η και 16^η ιδιοσυχνότητα (11956-13096 Hz), σε 17^η και 18^η ιδιοσυχνότητα (13668-14674 Hz), σε 19^η και 20^η ιδιοσυχνότητα (15028-15576 Hz).

Προσομοίωση με παραμετροποίηση πυκνότητας κυκλικού εγκλείσματος (ρ)

Συνεχίζοντας, θέλουμε να δούμε την επίδραση που θα έχει η μεταβολή της τιμής της πυκνότητας του υλικού του πυρήνα ως προς την δημιουργία band gap. Για αυτό τον λόγο θεωρούμε ένα υλικό με τις ίδιες ιδιότητες με το υλικό του πυρήνα, ίδιο δείκτη Poisson και ίδια τιμή Young's Modulus, αλλά με πυκνότητα που να μεταβάλλεται με εύρος $\pm 20\%$ από την αρχική και με βήμα κοντά στο 10% (900 kg/m^3). Σημειώνεται πως όλα τα υπόλοιπα γεωμετρικά χαρακτηριστικά παραμένουν σταθερά.

$$\rho = 7160 \text{ kg/m}^3$$

Το διάγραμμα που αναλογεί στην συγκεκριμένη επίλυση είναι:

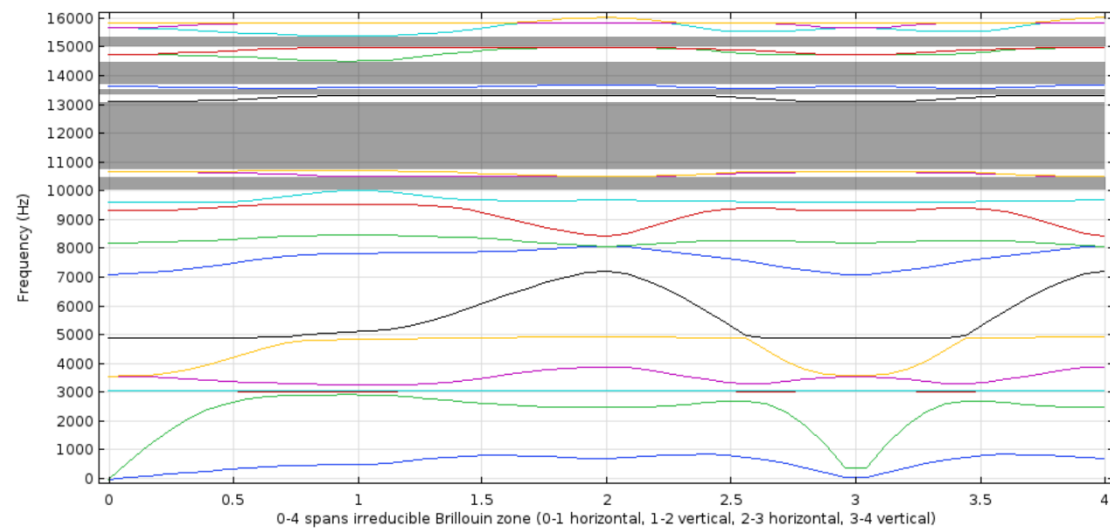


Εικόνα 30 Διάγραμμα απόκρισης δομής με $\rho = 7160 \text{ kg/m}^3$

Στο διάγραμμα παρατηρούνται 8 ολικά band gaps. Ειδικότερα, ανάμεσα σε 2^η και 3^η ιδιοσυχνότητα (2935-3028 Hz), σε 4^η και 5^η ιδιοσυχνότητα (3260-3443 Hz), σε 10^η και 11^η ιδιοσυχνότητα (9630-9700 Hz), σε 11^η και 12^η ιδιοσυχνότητα (10050-10515 Hz), σε 13^η και 14^η ιδιοσυχνότητα (10724-13110 Hz), σε 14^η και 15^η ιδιοσυχνότητα (13340-13575 Hz), σε 15^η και 16^η ιδιοσυχνότητα (13690-14525 Hz) και σε 17^η και 18^η ιδιοσυχνότητα (15000-15390 Hz).

$$\rho = 8060 \text{ kg/m}^3$$

Το διάγραμμα που αναλογεί στην συγκεκριμένη επίλυση είναι:

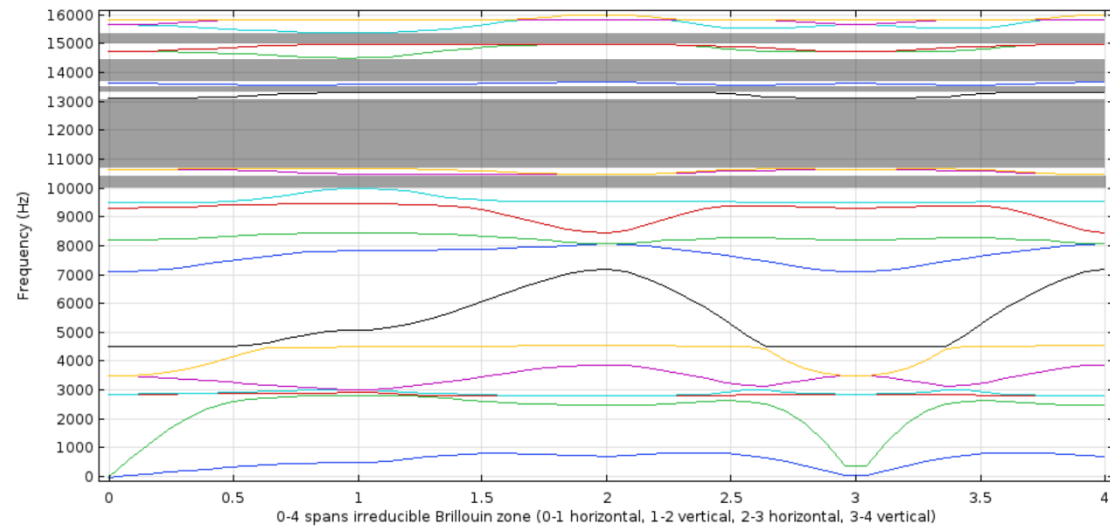


Εικόνα 31 Διάγραμμα απόκρισης δομής με $\rho=8060 \text{ kg/m}^3$

Στο διάγραμμα παρατηρούνται 8 ολικά band gaps. Πιο συγκεκριμένα, σε 2^η και 3^η ιδιοσυχνότητα (2933-3030 Hz) σε 4^η και 5^η ιδιοσυχνότητα (3091-3285 Hz), σε 10^η και 11^η ιδιοσυχνότητα (9562-9617 Hz), σε 11^η και 12^η ιδιοσυχνότητα (10035-10503 Hz), σε 13^η και 14^η ιδιοσυχνότητα (10714-13110 Hz), σε 14^η και 15^η ιδιοσυχνότητα (13340-13575 Hz), σε 15^η και 16^η ιδιοσυχνότητα (13690-14525 Hz) και σε 17^η και 18^η ιδιοσυχνότητα (15000-15390 Hz).

$$\rho=9860\text{kg/m}^3$$

Το διάγραμμα που αναλογεί στην συγκεκριμένη επίλυση είναι:

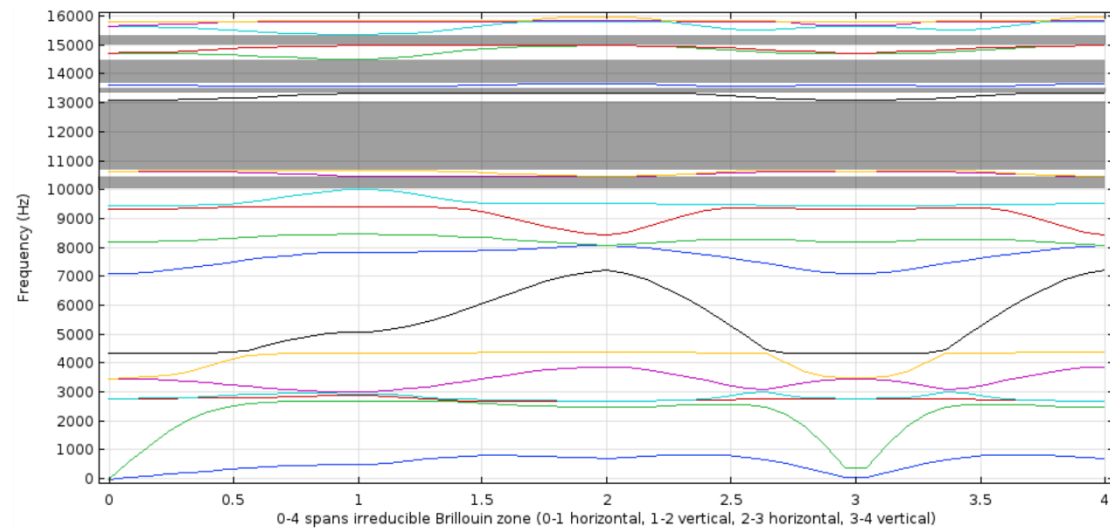


Εικόνα 32 Διάγραμμα απόκρισης δομής με $\rho=9860\text{ kg/m}^3$

Προκύπτουν 6 ολικά band gaps, ανάμεσα στη 10^η και 11^η ιδιοσυχνότητα (9460-9500 Hz), στην 11^η και 12^η ιδιοσυχνότητα (10020-10485 Hz), στη 13^η και 14^η ιδιοσυχνότητα (10700-13110 Hz), στη 14^η και 15^η ιδιοσυχνότητα (13340-13575 Hz), στη 15^η και 16^η ιδιοσυχνότητα (13690-14526 Hz), τέλος, στη 17^η και 18^η ιδιοσυχνότητα (15000-15390 Hz).

$$\rho=10760\text{kg/m}^3$$

Το διάγραμμα που προκύπτει από την συγκεκριμένη επίλυση είναι:



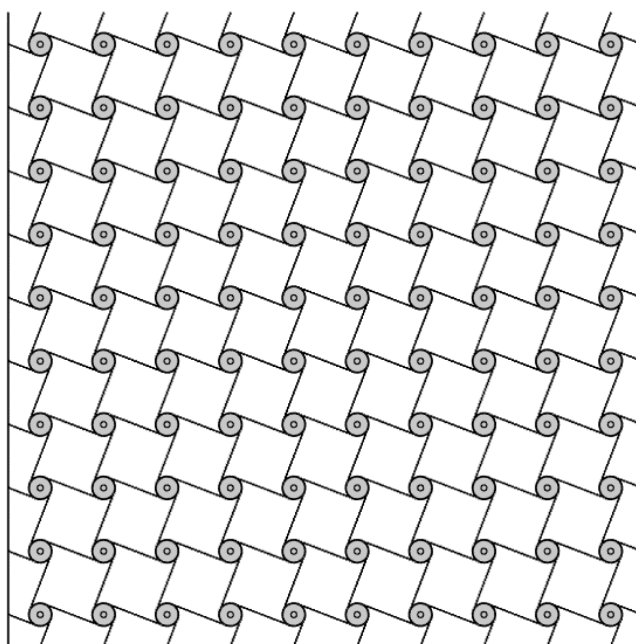
Εικόνα 33 Διάγραμμα απόκρισης δομής με $\rho=10760 \text{ kg/m}^3$

Από το διάγραμμα προκύπτουν 7 ολικά band gaps. Ειδικότερα, ανάμεσα στην 4^η και 5^η ιδιοσυχνότητα (3010-3030 Hz), στη 10^η και 11^η ιδιοσυχνότητα (9420-9456 Hz), στην 11^η και 12^η ιδιοσυχνότητα (10015-10479 Hz), στη 13^η και 14^η ιδιοσυχνότητα (10693-13110 Hz), στη 14^η και 15^η ιδιοσυχνότητα (13340-13575 Hz), στη 15^η και 16^η ιδιοσυχνότητα (13690-14526 Hz), τέλος, στη 17^η και 18^η ιδιοσυχνότητα (15000-15390 Hz).

Κεφάλαιο 7 – Προσομοίωση φόρτισης δομής 10x10

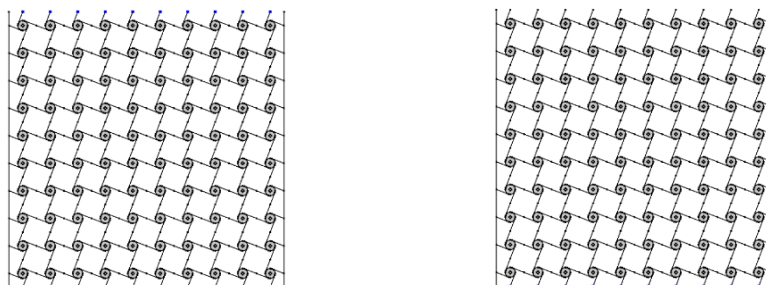
Στην συνέχεια, θα δημιουργηθεί ένα πλέγμα με ύψος 10 δομές και πλάτος 10 δομές, στο οποίο, θα ασκήσουμε μια φόρτιση από το ένα τοίχωμα (αριστερά) και σε κάποια σημεία στο απέναντι τοίχωμα (δεξιά) θα μετράμε το μέγεθος της εκτόπισης, ούτως ώστε να δούμε αν τα θεωρητικά αποτελέσματα που πήραμε για μια περιοδική δομή επαληθεύονται.

Αρχικά, το μοντέλο που χρησιμοποιούμε για τους υπολογισμούς είναι το εξής:



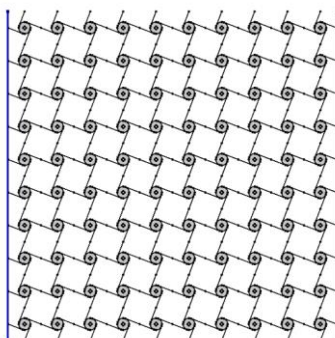
Εικόνα 34 Πλέγμα 10x10

Με συνθήκες κύλισης όπως φαίνεται παρακάτω:



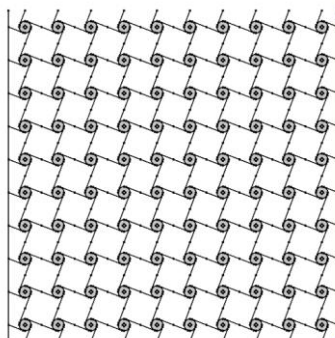
Εικόνα 35 Συνθήκες κύλισης πλέγματος

με οριακό φορτίο τάξης 10MPa με τον προσανατολισμό που φαίνεται στο σχήμα:



Εικόνα 36 Φορά άσκησης πίεσης

Τέλος, ο τοίχος στο παρακάτω σχήμα είναι ο σταθερός περιορισμός, πάνω στον οποίο γίνεται η θλίψη του προηγούμενου:



Εικόνα 37 Σταθερό στοιχείο

Οι 2 τοίχοι στα άκρα είναι από το ίδιο υλικό με τον σκελετό της δομής, οπότε έχουν και τις ίδιες ιδιότητες, όπως φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

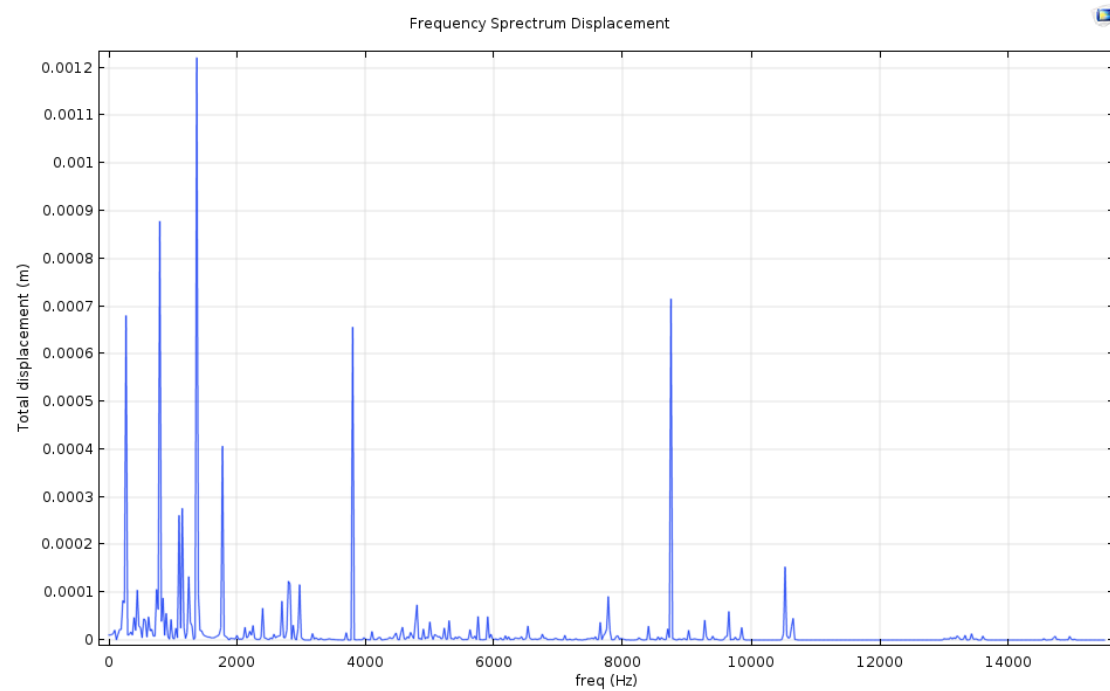
Υλικά	Πυκνότητα (density)	Λόγος Poisson	Μέτρο ελαστικότητας (Young's Modulus)
Copper	8960 kg/m ³	0.35	110 GPa
Tungsten	17800 kg/m ³	0.28	3600 GPa
Υλικό επένδυσης (Material 1)	500 kg/m ³	0.47	5 MPa

Ο έλεγχος θα γίνει στο εύρος των συχνοτήτων 1—16000 Hz με βήμα 25 Hz. Στην συνέχεια οι ιδιότητες της δομής:

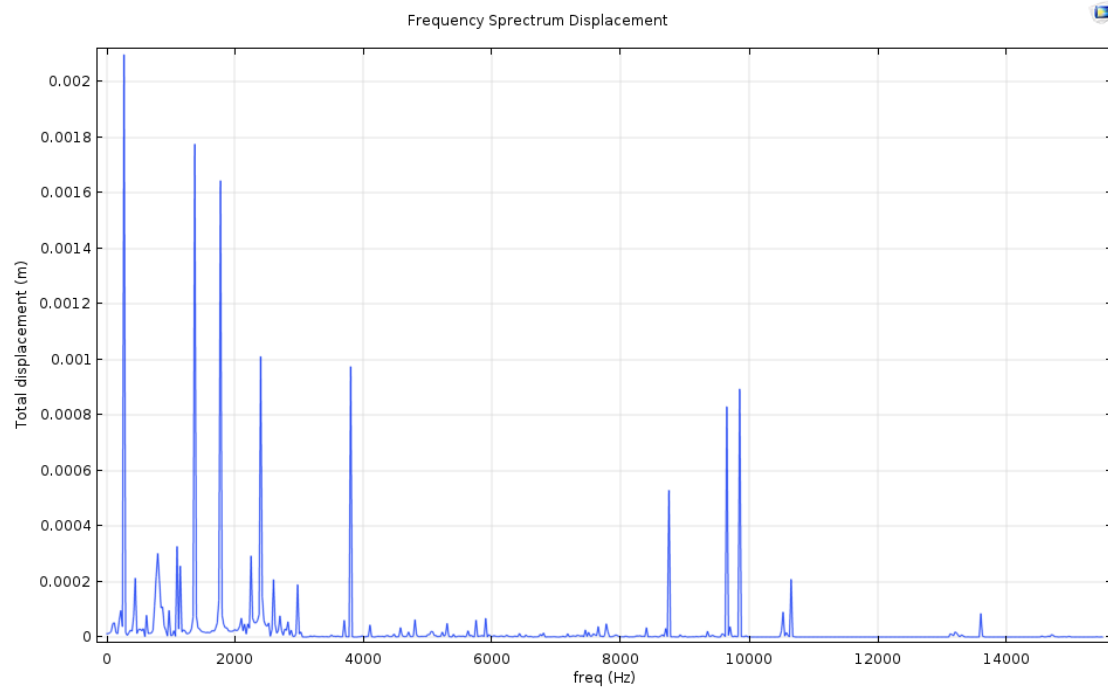
- Ακτίνα σκελετού $r=0.005$ m

- ακτίνα πυρήνα $r_c=r/4$
- πλάτος κελιού $L1=0.02693$ m
- μήκος άρθρωσης σύνδεσης από τον ένα σκελετό στον επόμενο $l=0.025$ m, οπότε μήκος άρθρωσης κάθε κελιού $L=l/2=0.025$ m
- πάχος άρθρωσης $t=0.00035$ m
- πάχος άρθρωσης στον άξονα z $b=0.005$ m

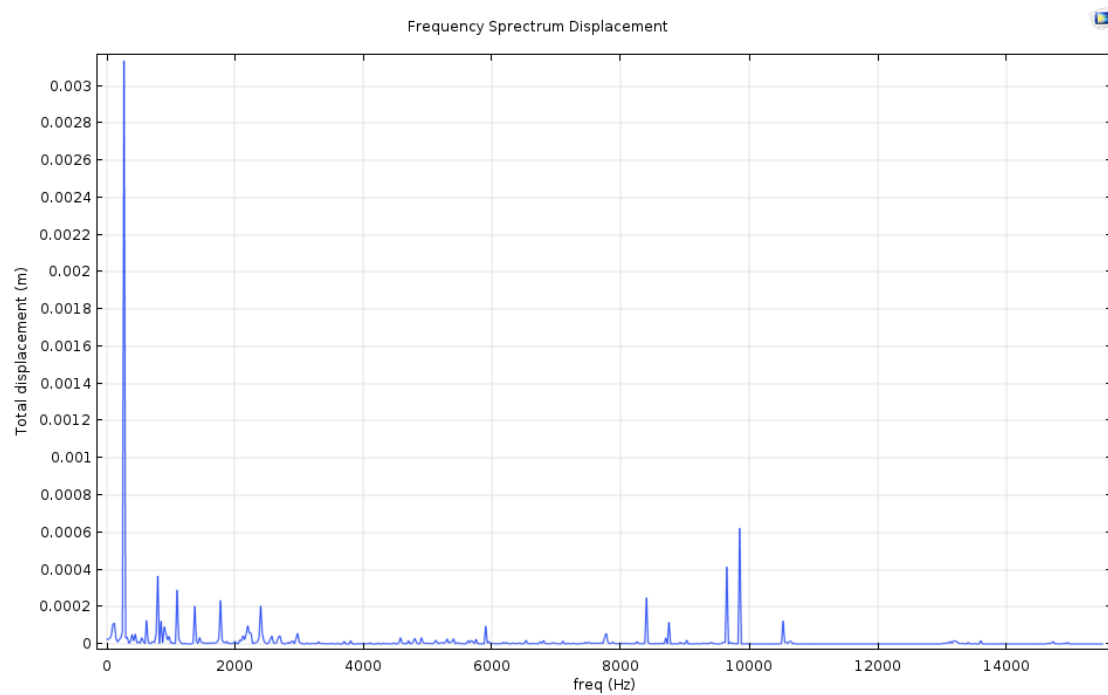
Κατόπιν, έγινε επιλογή 3 στοιχείων στην δεξιά σύνδεση της δομής με τον τοίχο και δημιουργήθηκαν τα εξής διαγράμματα εκτόπισης - συχνότητας:



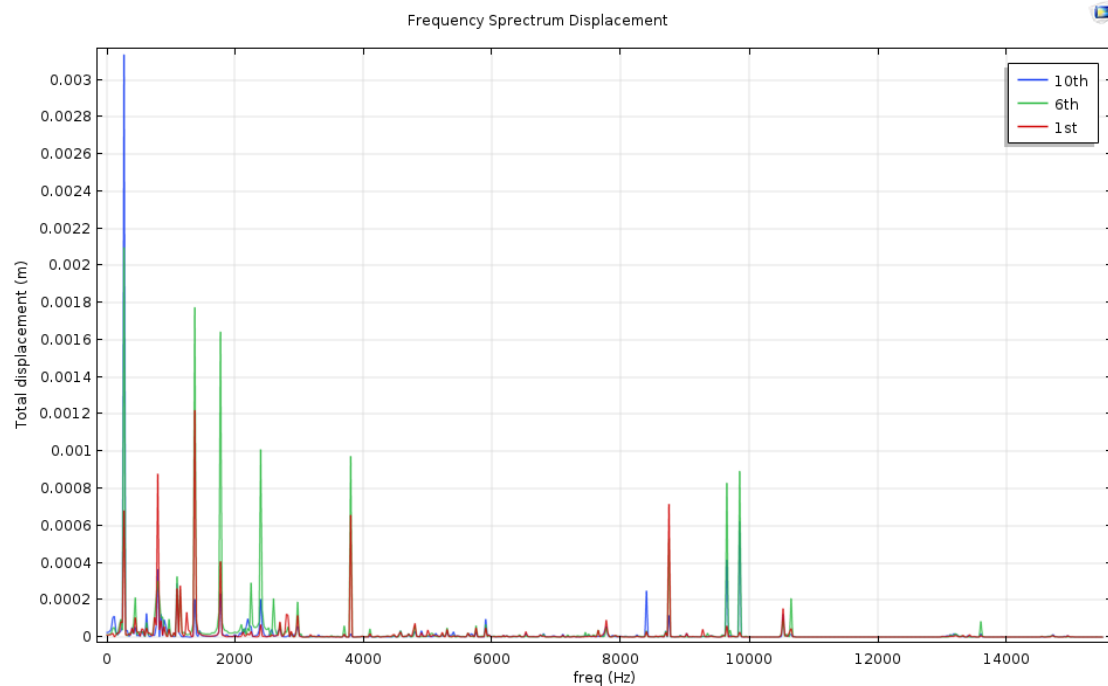
Εικόνα 38. Διάγραμμα εκτόπισης-συχνότητας στοιχείου 1ης σειράς



Εικόνα 39. Διάγραμμα εκτόπισης-συχνότητας στοιχείου 6ης σειράς

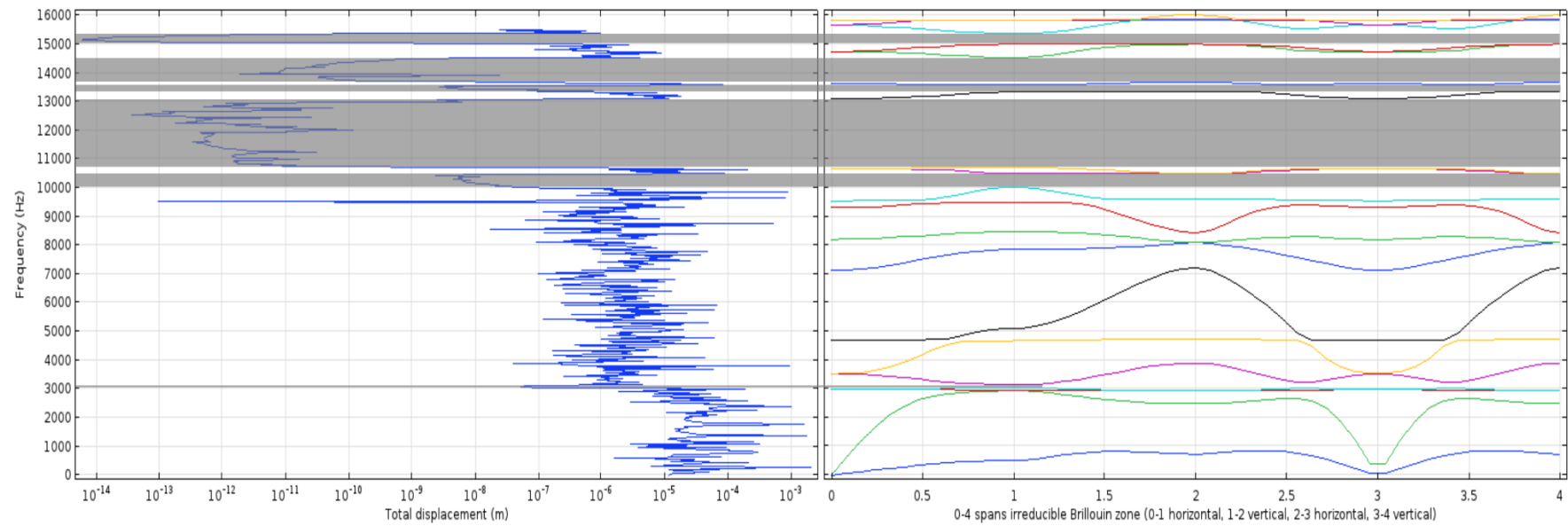


Εικόνα 40. Διάγραμμα εκτόπισης-συχνότητας στοιχείου 10ης σειράς



Εικόνα 41. Συνολικό διάγραμμα εκτόπισης-συχνότητας στοιχείων

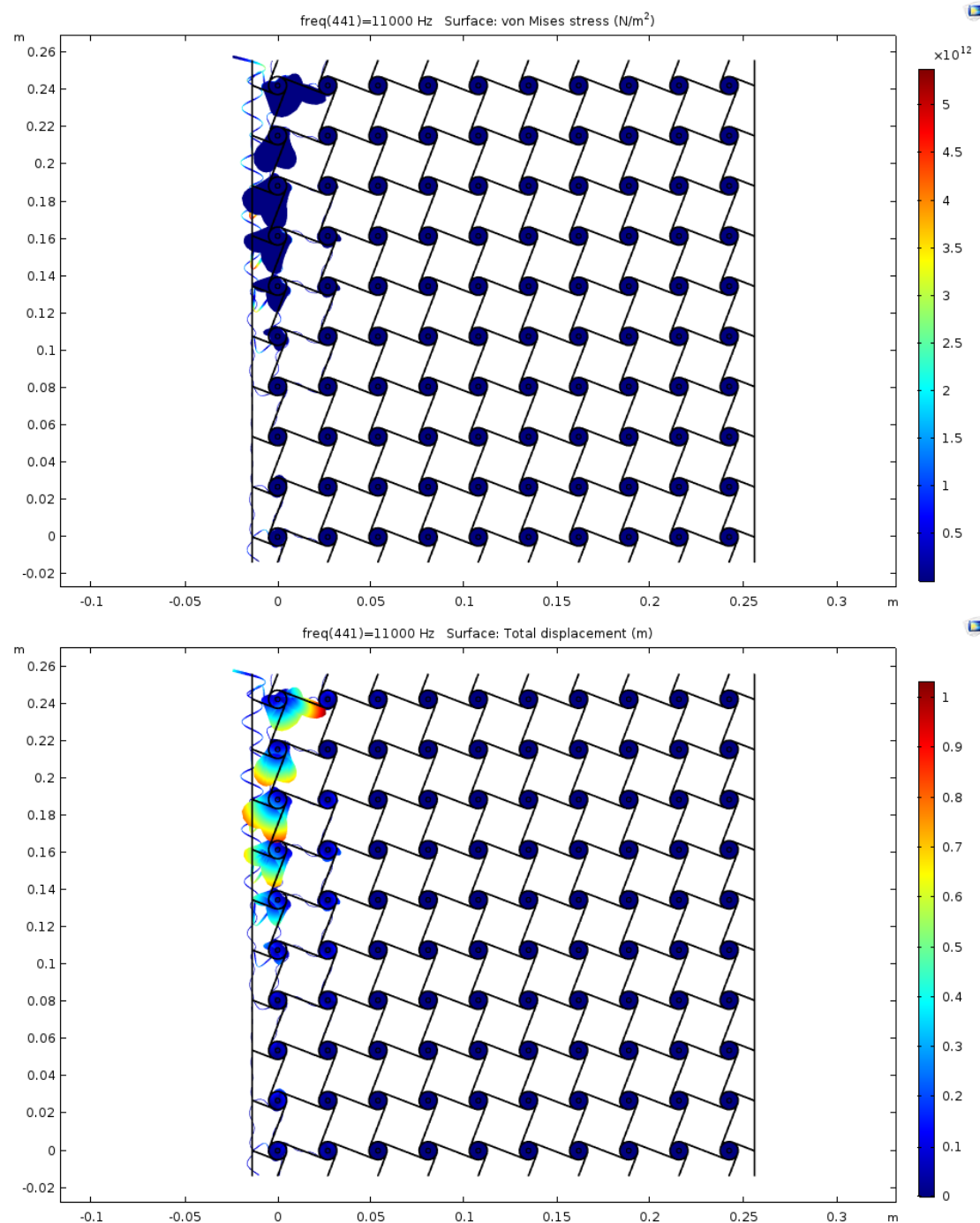
Τέλος, θα γίνει ένας γραφικός έλεγχος μεταξύ του διαγράμματος συχνοτήτων της περιοδικής δομής με τα ίδια γεωμετρικά χαρακτηριστικά και του διαγράμματος εκτόπισης-συχνότητας του κελιού της 6^{ης} σειράς και 10^{ης} στήλης. Σε αυτό το διάγραμμα θέλουμε να δούμε αν οι πειραματικές συχνότητες, όπου παρατηρείται Band gap, αντιστοιχούν στις συχνότητες όπου παρατηρήθηκε αδυναμία μεταφοράς κύματος και στα θεωρητικά αποτελέσματα της περιοδικής δομής και έχουμε εκτόπιση κοντά στο μηδέν.



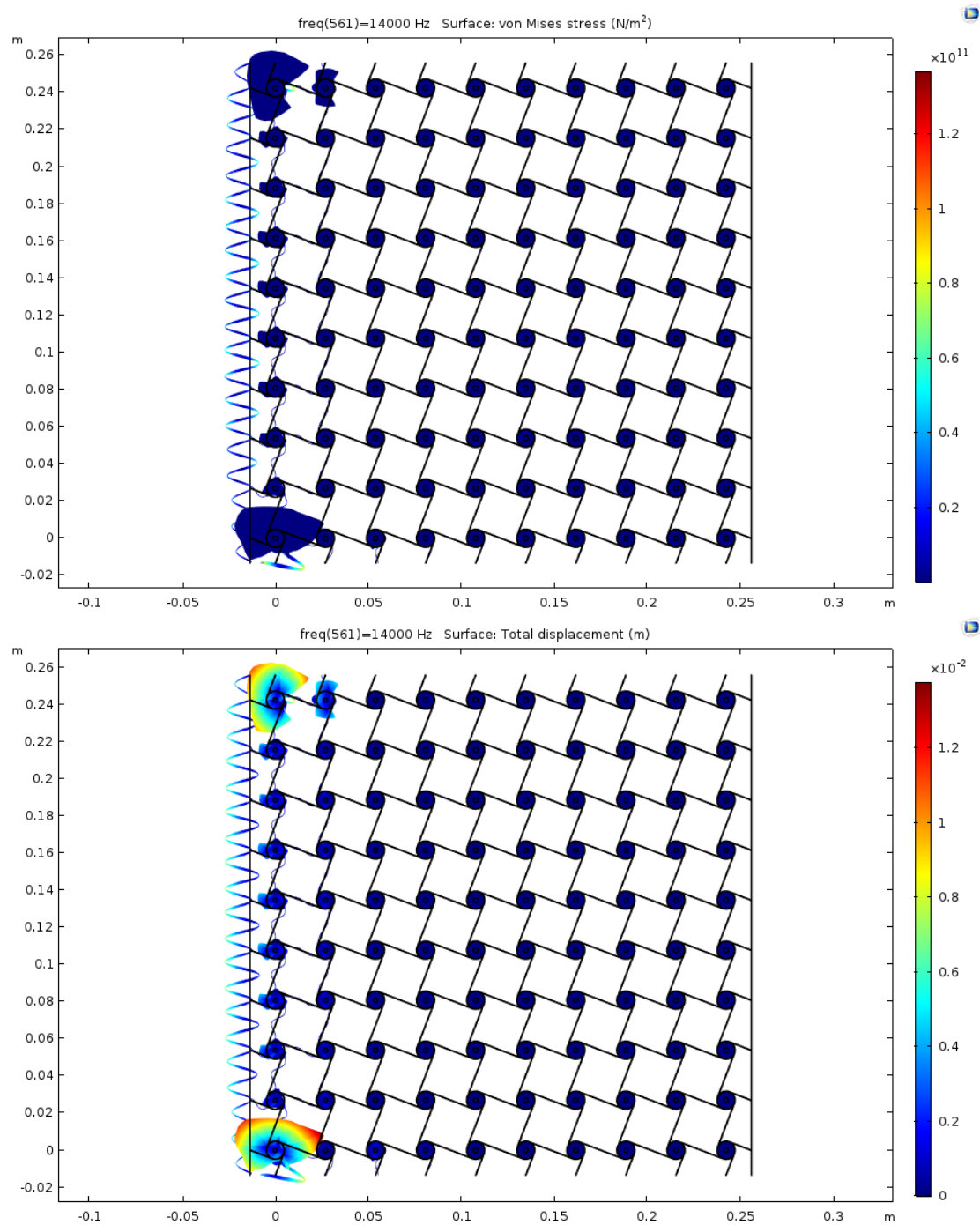
Εικόνα 42 Διάγραμμα μετατόπισης στοιχείου 6ης σειράς, 10ης στήλης και διάγραμμα απόκρισης περιοδικής δομής με κυκλικό έγκλεισμα

Παρατηρείται, από τα παραπάνω διαγράμματα, πως στις συχνότητες που εμφανίζονται τα Band gap στις περιοδικές δομές αντιστοιχούν οι συχνότητες όπου δεν υπάρχει εκτόπιση στην πειραματική δομή. Το οποίο σημαίνει, ότι τα αποτελέσματα επαληθεύονται.

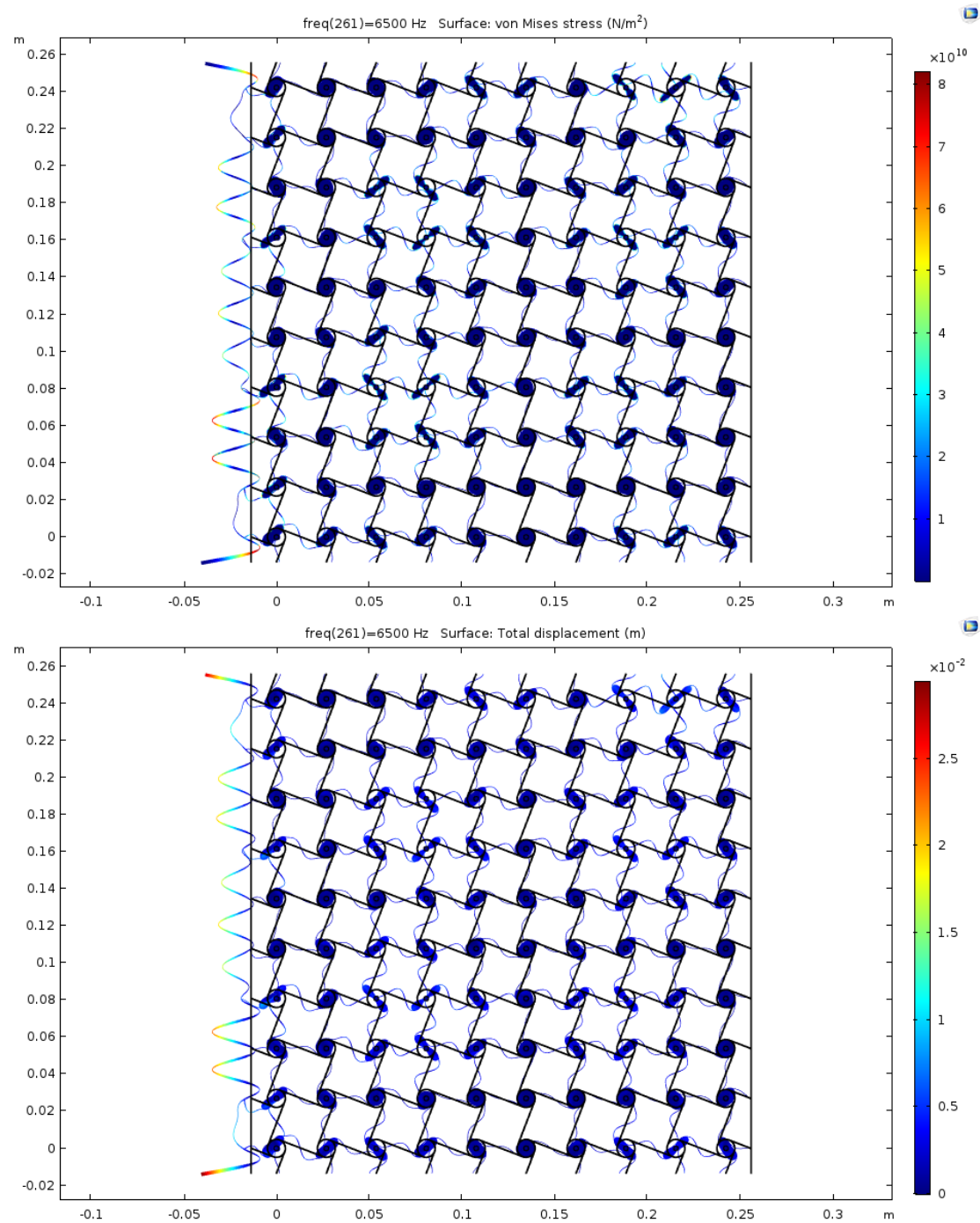
Ακολουθούν εικόνες από το υπό φόρτιση πλέγμα σε συχνότητες εντός (11000 Hz, 14000 Hz) και εκτός (6500 Hz, 14800 Hz) του band gap για να φανεί η ύπαρξη ή μη και ο τρόπος της μετάδοσης.



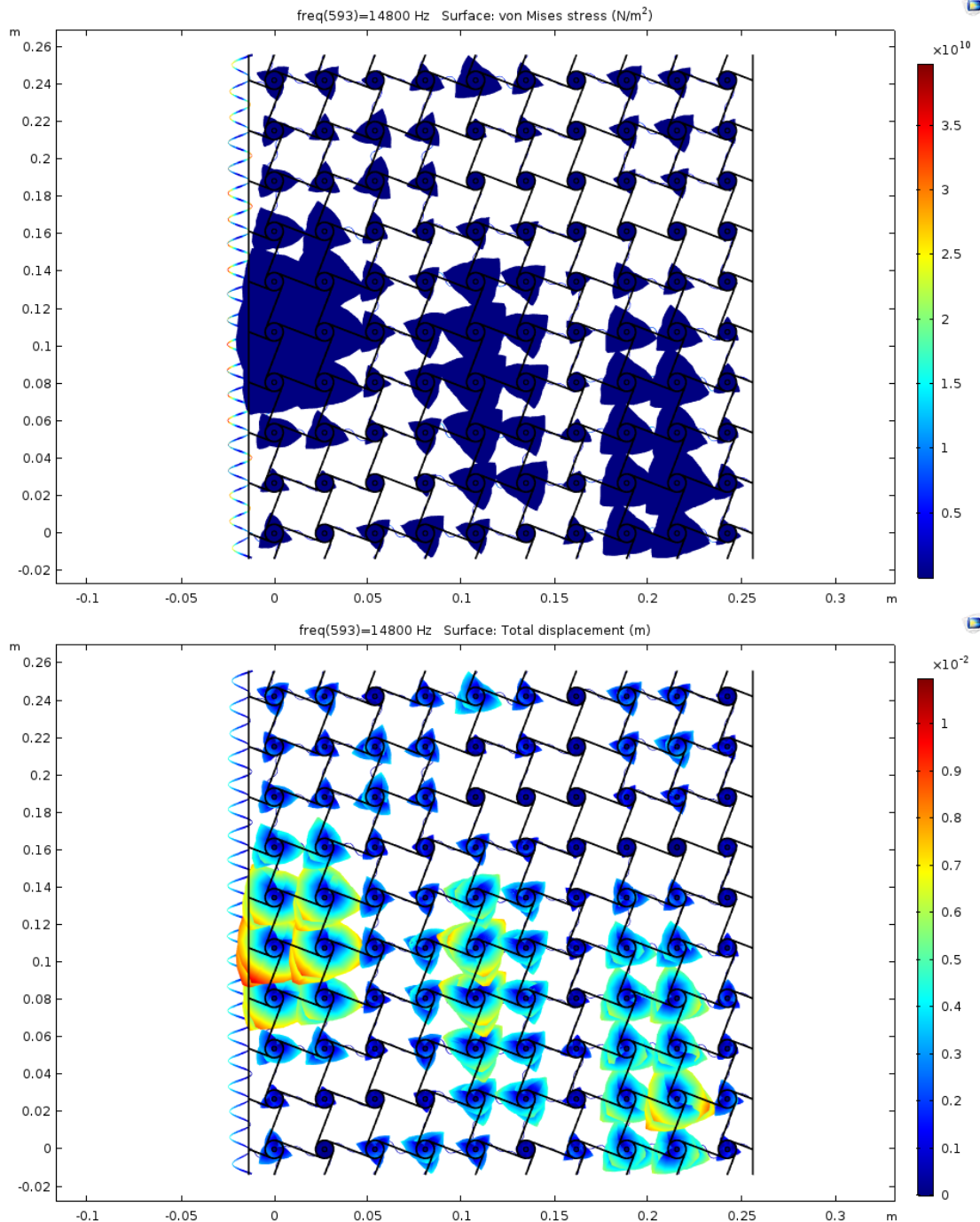
Εικόνα 43. Απόκριση πλέγματος στα 11000 Hz (πάνω φαίνεται η μετάδοση της φόρτιση, κάτω μετάδοση της εκτόπισης)



Εικόνα 44. Απόκριση πλέγματος στα 14000 Hz (πάνω φαίνεται η μετάδοση της φόρτιση, κάτω μετάδοση της εκτόπισης)



Εικόνα 45. Απόκριση πλέγματος στα 6500 Hz (πάνω φαίνεται η μετάδοση της φόρτιση, κάτω μετάδοση της εκτόπισης)

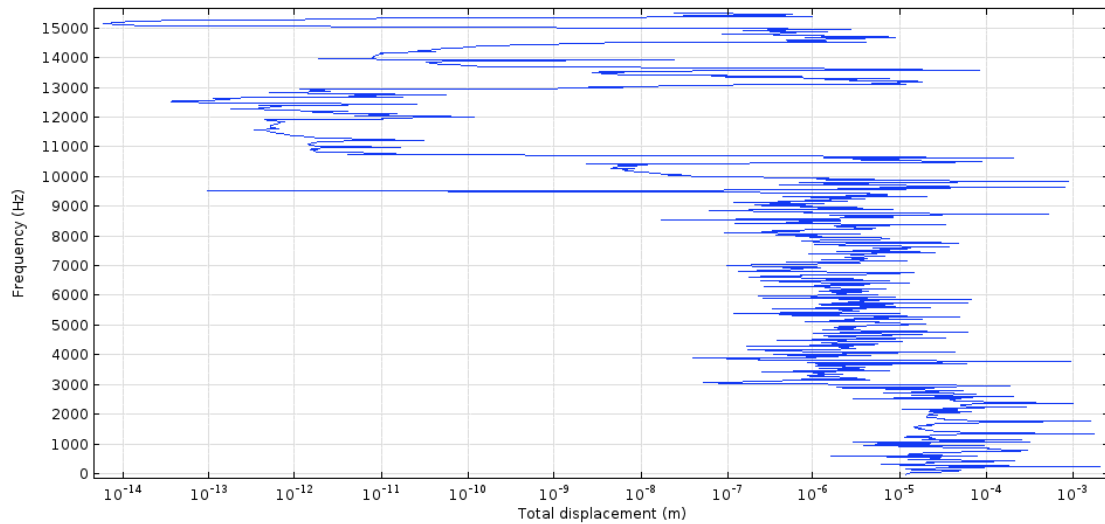


Εικόνα 46. Απόκριση πλέγματος στα 14800 Hz (πάνω φαίνεται η μετάδοση της φόρτιση, κάτω μετάδοση της εκτόπισης)

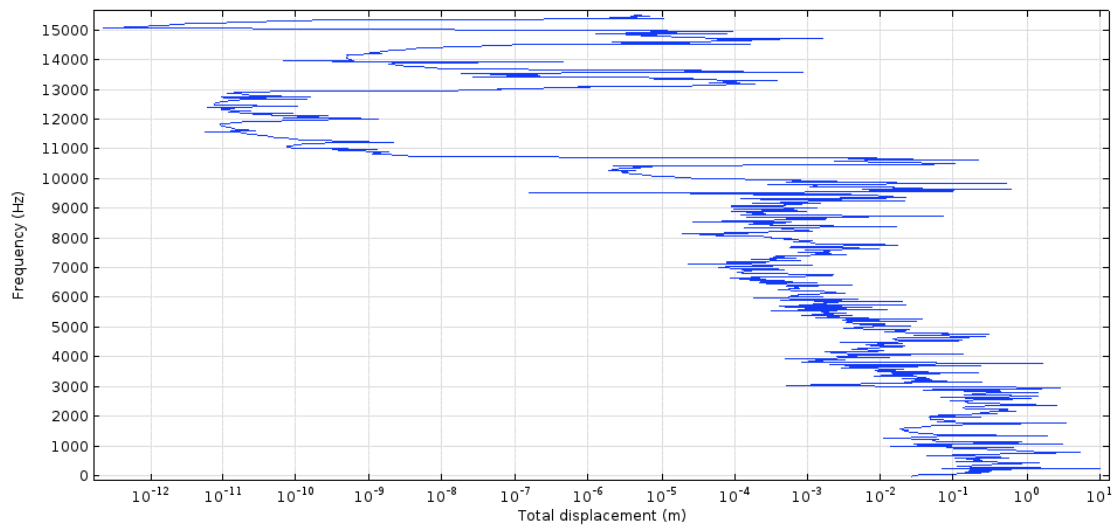
Παρατηρείται και σχηματικά ότι στις συχνότητες 11000 Hz και 14000 Hz, η μετάδοση της φόρτισης δεν φτάνει μέχρι την απέναντι μεριά, σε αντίθεση με τις 6500 Hz και 14800 Hz.

Στην συνέχεια ακολουθούν έξι διαγράμματα εκτόπισης για διαφορετικά σημεία πάνω στο πλέγμα, αλλά και μέσα σε μεμονωμένα κελιά.

Το πρώτο διάγραμμα είναι αυτό που χρησιμοποιήθηκε παραπάνω (κελί της 6^{ης} σειράς και της 10^{ης} στήλης) με το επόμενο να είναι το διάγραμμα στο ίδιο κελί, αλλά στο σημείο επαφής της επένδυσης και του πυρήνα.



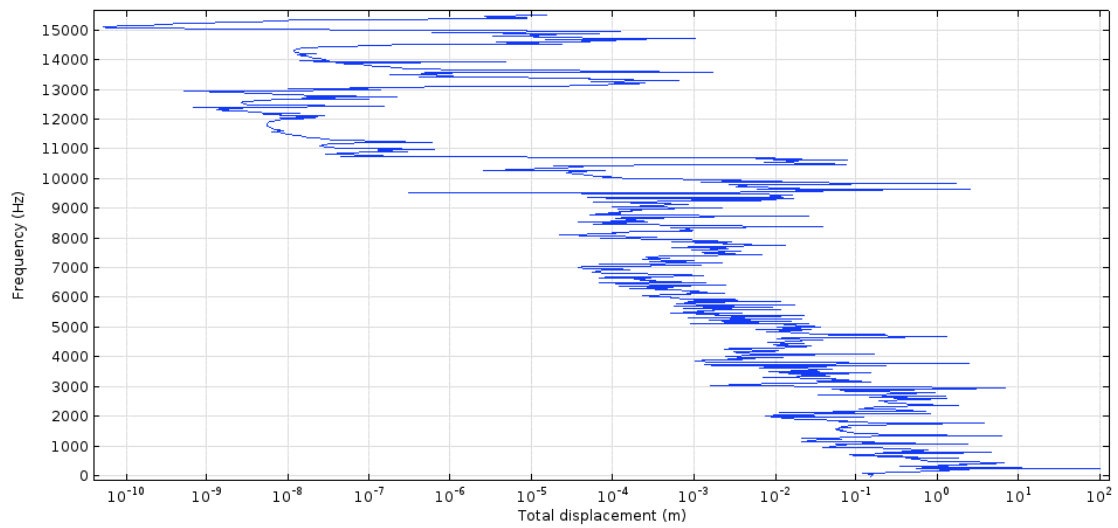
Εικόνα 47 Διάγραμμα μετατόπισης του κελιού 6ης σειράς και 10ης στήλης σε επαφή με το τοίχωμα



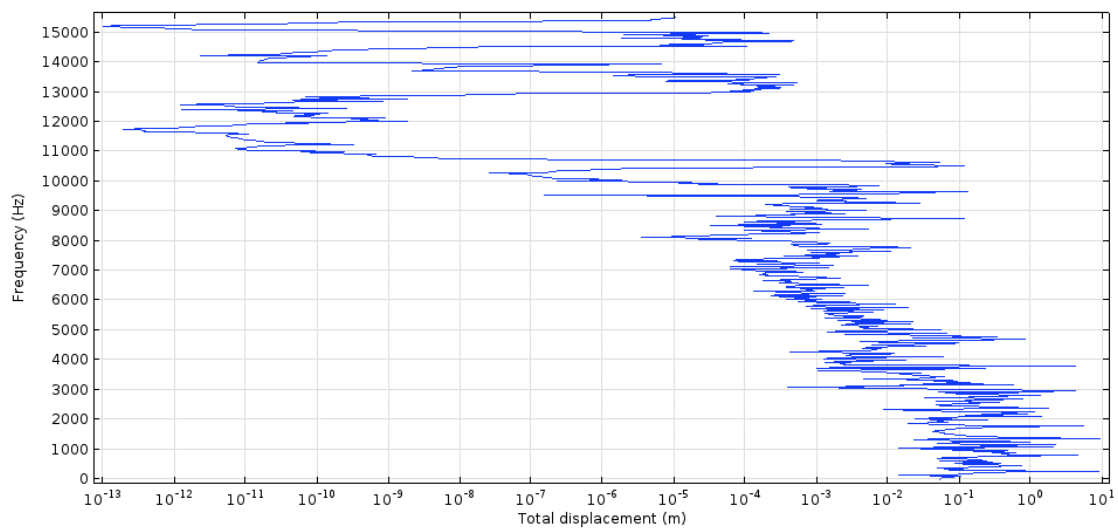
Εικόνα 48 Διάγραμμα μετατόπισης του κελιού 6ης σειράς και 10ης στήλης στο σημείο επαφής της επένδυσης και του πυρήνα

Παρατηρείται ότι, στην περίπτωση της επαφής με το τοίχωμα η μετατόπιση είναι, κατά μέσο όρο, στην τάξη των μm, κάτι που οφείλεται στην απορρόφηση της ενέργειας από το τοίχωμα.

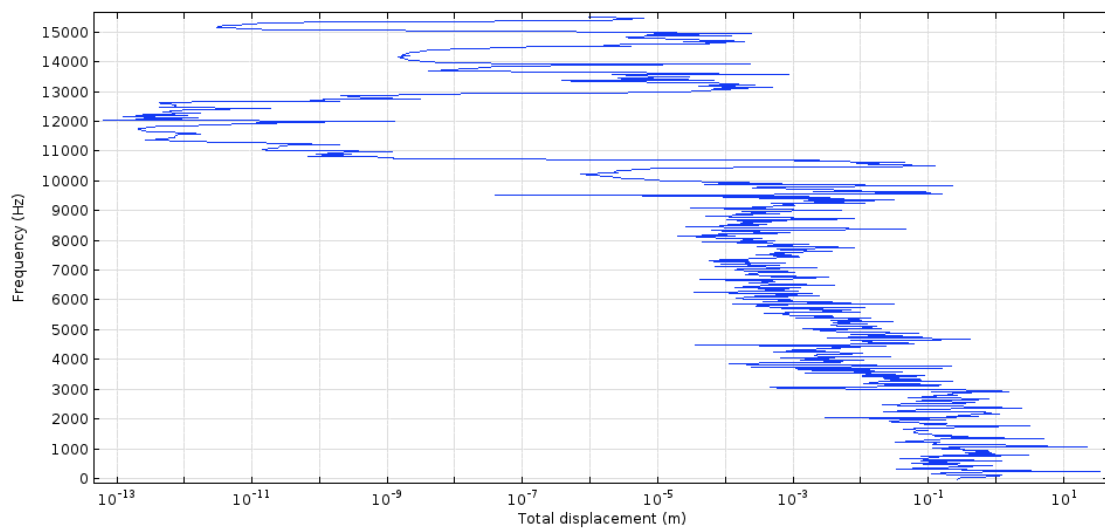
Στην συνέχεια ακολουθούν τρία διαγράμματα μετατόπισης των κελιών 6^{ης} σειράς 6^{ης} στήλης, 1^{ης} σειράς 10^{ης} στήλης και 10^{ης} σειράς 10^{ης} στήλης αντίστοιχα, σε σημείο επαφής του πυρήνα με την επένδυση.



Εικόνα 49 Διάγραμμα μετατόπισης του κελιού 6ης σειράς και 6ης στήλης στο σημείο επαφής της επένδυσης και του πυρήνα



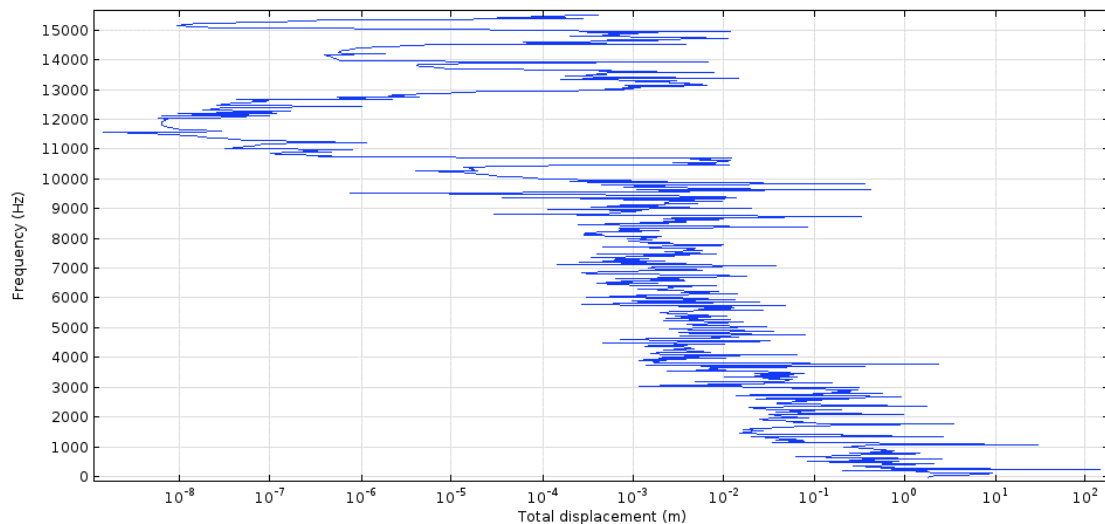
Εικόνα 50 Διάγραμμα μετατόπισης του κελιού 1ης σειράς και 10ης στήλης στο σημείο επαφής της επένδυσης και του πυρήνα



Εικόνα 51 Διάγραμμα μετατόπισης του κελιού 10ης σειράς και 10ης στήλης στο σημείο επαφής της επένδυσης και του πυρήνα

Παρατηρείται ότι, στην περίπτωση του κελιού 6^{ης} σειράς και 6^{ης} στήλης, υπάρχει μια κορυφή (10^2m) σε χαμηλές συχνότητες και φαίνεται ότι το μέσο εύρος έχει αρκετά μεγάλη διακύμανση, συγκριτικά με τα άλλα 2 διαγράμματα.

Τέλος, παρατίθεται το διάγραμμα μετατόπισης στο σημείο σύνδεσης 2 κελιών, μεταξύ του κελιού της 6^{ης} σειράς και 10^{ης} στήλης και του κελιού 7^{ης} σειράς και 10^{ης} στήλης.



Εικόνα 52 Διάγραμμα μετατόπισης στο σημείο επαφής των κελιών 6ης σειράς και 10ης στήλης και 7ης σειράς και 10ης στήλης

Όπου παρατηρείται, το μεγαλύτερο, κατά μέσο όρο, εύρος συγκριτικά με τις προηγούμενες περιπτώσεις.

Κεφάλαιο 8 – Συμπεράσματα

Παραμετροποίηση ακτίνας σκελετού (r)

Αρχικά, συγκεντρώνοντας τα αποτελέσματα, φαίνεται ότι όσο μικρότερη είναι η ακτίνα του σκελετού και κατ' επέκταση του πυρήνα τόσο αυξάνεται το εύρος των 20 πρώτων ιδιοσυχνοτήτων, στην δοκιμή με ακτίνα 0.004 έχουμε [0-20270 Hz] ενώ σε αυτήν με ακτίνα 0.006 [0-13120 Hz].

Στον παρακάτω πίνακα συνοψίζονται τα στοιχεία, για ευκολία:

	$r=0.004$ m	$r=0.0045$ m	$r=0.005$ m	$r=0.0055$ m	$r=0.006$ m
1 ^ο band gap	4 ^η -5 ^η [3720- 3890 Hz]	2 ^η -3 ^η [2955-3020 Hz]	4 ^η -5 ^η [3030- 3148 Hz]	4 ^η -5 ^η [2945- 3020 Hz]	4 ^η -5 ^η [2945-3020 Hz]
2 ^ο band gap	9 ^η -10 ^η [11065- 12010 Hz]	4 ^η -5 ^η [3290- 3478 Hz]	10 ^η -11 ^η [9505- 9550 Hz]	8 ^η -9 ^η [7911- 7947 Hz]	8 ^η -9 ^η [6363-7753 Hz]
3 ^ο band gap	10 ^η -11 ^η [12275- 12326 Hz]	9 ^η -10 ^η [9750- 9793 Hz]	11 ^η -12 ^η [10025- 10494 Hz]	13 ^η -14 ^η [9740- 11820 Hz]	13 ^η -14 ^η [9362-10760 Hz]
4 ^ο band gap	11 ^η -12 ^η [12955- 13425 Hz]	10 ^η -11 ^η [10320- 10722 Hz]	13 ^η -14 ^η [10690- 13111 Hz]	14 ^η -15 ^η [12084- 12275 Hz]	14 ^η -15 ^η [11055- 11182 Hz]
5 ^ο band gap	13 ^η -14 ^η [13600- 15660 Hz]	11 ^η -12 ^η [10870- 11780 Hz]	14 ^η -15 ^η [13346- 13576 Hz]	15 ^η -16 ^η [12345- 13200 Hz]	15 ^η -16 ^η [11285- 11926 Hz]
6 ^ο band gap	19 ^η -20 ^η [19630- 20270 Hz]	13 ^η -14 ^η [11972- 14717 Hz]	15 ^η -16 ^η [13690- 14525 Hz]	17 ^η -18 ^η [13465- 14270 Hz]	17 ^η -18 ^η [12203- 12990 Hz]
7 ^ο band gap	-	14 ^η -15 ^η [14914- 15144 Hz]	17 ^η -18 ^η [15000- 15390 Hz]	19 ^η -20 ^η [14293- 14348 Hz]	19 ^η -20 ^η [13014- 13120 Hz]
8 ^ο band gap	-	19 ^η -20 ^η [17775- 17780 Hz]	-	-	-

Εν συνεχεία παρατηρείται, ότι σε όλες τις περιπτώσεις υπάρχει band gap ανάμεσα στην 4^η-5^η, 13^η-14^η ιδιοσυχνότητα. Επίσης, καθώς αυξάνεται η ακτίνα, σταδιακά εξαφανίζονται τα χάσματα από την 9^η μέχρι και την 12^η ιδιοσυχνότητα και αντί αυτών δημιουργούνται στις 14^η μέχρι 16^η και 17^η με 18^η.

Τέλος, φαίνεται ότι το εύρος των χασμάτων, όσο αυξάνεται η ακτίνα, έχει μικρότερη απόκλιση.

Παραμετροποίηση μήκους άρθρωσης σκελετού (l)

Αρχικά, φαίνεται ότι το εύρος των 20 πρώτων ιδιοσυχνοτήτων παραμένουν αρκετά σταθερά [0-1600 Hz], με μια μικρή ανοχή, αλλά από αυτό συμπεραίνουμε ότι η αλλαγή του μήκους της άρθρωσης δεν επηρεάζει σημαντικά το εύρος των ιδιοσυχνοτήτων.

Στον παρακάτω πίνακα συνοψίζονται τα στοιχεία, για ευκολία:

	$l=0.01875\text{ m}$	$l=0.021875\text{ m}$	$l=0.025\text{ m}$	$l=0.028125\text{ m}$	$l=0.03125\text{ m}$
1 ^ο band gap	4 ⁿ -5 ⁿ [4675-4701 Hz]	4 ⁿ -5 ⁿ [3805-4018 Hz]	4 ⁿ -5 ⁿ [3030- 3148 Hz]	4 ⁿ -5 ⁿ [2947-3099 Hz]	9 ⁿ -10 ⁿ [7005-7670 Hz]
2 ^ο band gap	5 ⁿ -6 ⁿ [4930-5550 Hz]	8 ⁿ -9 ⁿ [8950-9550 Hz]	10 ⁿ -11 ⁿ [9505- 9550 Hz]	9 ⁿ -10 ⁿ [7797-7824 Hz]	10 ⁿ -11 ⁿ [8140-9550 Hz]
3 ^ο band gap	9 ⁿ -10 ⁿ [10150-10490 Hz]	9 ⁿ -10 ⁿ [9634-10382 Hz]	11 ⁿ -12 ⁿ [10025-10494 Hz]	10 ⁿ -11 ⁿ [8197-9550 Hz]	11 ⁿ -12 ⁿ [9593-9805 Hz]
4 ^ο band gap	11 ⁿ -12 ⁿ [10714-13115 Hz]	13 ⁿ -14 ⁿ [12443-13120 Hz]	13 ⁿ -14 ⁿ [10690-13111 Hz]	11 ⁿ -12 ⁿ [9615-10488 Hz]	15 ⁿ —16 ⁿ [11956-13096 Hz]
5 ^ο band gap	-	14 ⁿ -15 ⁿ [13553-13635 Hz]	14 ⁿ -15 ⁿ [13346-13576 Hz]	13 ⁿ -14 ⁿ [10676-12002 Hz]	17 ⁿ -18 ⁿ [13668-14674 Hz]
6 ^ο band gap	-	15 ⁿ -16 ⁿ [13786-14975 Hz]	15 ⁿ -16 ⁿ [13690-14525 Hz]	19 ⁿ -20 ⁿ [15092-15834 Hz]	19 ⁿ -20 ⁿ [15028-15576 Hz]
7 ^ο band gap	-	17 ⁿ -18 ⁿ [15046-15835 Hz]	17 ⁿ -18 ⁿ [15000-15390 Hz]	-	-
8 ^ο band gap	-	19 ⁿ -20 ⁿ [15857-16018 Hz]	-	-	-

Από τα αποτελέσματα παρατηρείται ότι με την σταδιακή αύξηση του l φαίνεται και η σταδιακή εξαφάνιση των χασμάτων μέχρι την 10ⁿ ιδιοσυχνότητα.

Παραμετροποίηση πυκνότητας κυκλικού εγκλείσματος (ρ)

Συνοψίζοντας τα αποτελέσματα σε έναν πίνακα έχουμε:

	$\rho=7160$ kg/m ³	$\rho=8060$ kg/m ³	$\rho=8960$ kg/m ³	$\rho=9860$ kg/m ³	$\rho=10760$ kg/m ³
1 ^ο band gap	2 ⁿ -3 ⁿ [2935-3028 Hz]	2 ⁿ -3 ⁿ [2933-3030 Hz]	4 ⁿ -5 ⁿ [3030- 3148 Hz]	10 ⁿ -11 ⁿ [9460-9500 Hz]	4 ⁿ -5 ⁿ [3010-3030 Hz]
2 ^ο band gap	4 ⁿ -5 ⁿ [3260-3443 Hz]	4 ⁿ -5 ⁿ [3091-3285 Hz]	10 ⁿ -11 ⁿ [9505- 9550 Hz]	11 ⁿ -12 ⁿ [10020- 10485 Hz]	10 ⁿ -11 ⁿ [9420-9456 Hz]
3 ^ο band gap	10-11 ⁿ [9630-9700]	10 ⁿ -11 ⁿ [9562-9617 Hz]	11 ⁿ -12 ⁿ [10025- 10494 Hz]	13 ⁿ -14 ⁿ [10700- 13110 Hz]	11 ⁿ -12 ⁿ [10015- 10479 Hz]
4 ^ο band gap	11 ⁿ -12 ⁿ [10050- 10515 Hz]	11 ⁿ -12 ⁿ [10035- 10503 Hz]	13 ⁿ -14 ⁿ [10690- 13111 Hz]	14 ⁿ -15 ⁿ [13340- 13575 Hz]	13 ⁿ -14 ⁿ [10693- 13110 Hz]
5 ^ο band gap	13 ⁿ -14 ⁿ [10724- 13110 Hz]	13 ⁿ -14 ⁿ [10714- 13110 Hz]	14 ⁿ -15 ⁿ [13346- 13576 Hz]	15 ⁿ -16 ⁿ [13690- 14525 Hz]	14 ⁿ -15 ⁿ [13340- 13575 Hz]
6 ^ο band gap	14 ⁿ -15 ⁿ [13340- 13575 Hz]	14 ⁿ -15 ⁿ [13341- 13575 Hz]	15 ⁿ -16 ⁿ [13690- 14525 Hz]	17 ⁿ -18 ⁿ [15000- 15390 Hz]	15 ⁿ -16 ⁿ [13690- 14525 Hz]
7 ^ο band gap	15 ⁿ -16 ⁿ [13690- 14525 Hz]	15 ⁿ -16 ⁿ [13690- 14525 Hz]	17 ⁿ -18 ⁿ [15000- 15390 Hz]	-	17 ⁿ -18 ⁿ [15000- 15390 Hz]
8 ^ο band gap	17 ⁿ -18 ⁿ [15000- 15390 Hz]	17 ⁿ -18 ⁿ [15000- 15390 Hz]	-	-	-

Παρατηρείται, ότι η μεταβολή της πυκνότητας υλικού του πυρήνα, δεν επηρεάζει σε σημαντικό βαθμό το εύρος που καλύπτουν οι 20 πρώτες ιδιοσυχνότητες. Τα τρία τελευταία band gap, σε κάθε μεταβολή, ταυτίζονται και τέλος, όσο αυξάνουμε την πυκνότητα φαίνεται η σταδιακή ελάττωση ως την εξαφάνιση των band gaps κάτω από την 10ⁿ ιδιοσυχνότητα.

Κεφάλαιο 9 – Προτάσεις για περαιτέρω διερεύνηση

Έγινε εμφανές, κατά την διάρκεια ελέγχου της βιβλιογραφίας, ότι οι διερευνήσεις των τετραχειρομόρφων δομών είναι λίγες συγκριτικά με τις αντιτετραχειρόμορφες δομές, όπου βρέθηκε αρκετό υλικό είτε πειραματικό είτε θεωρητικό με την χρήση Finite Element Analysis.

Για αυτό, προτείνεται να γίνουν έλεγχοι τετραχειρόμορφων δομών με ακόμα μεγαλύτερη παραμετροποίηση στα γεωμετρικά χαρακτηριστικά, στην επιλογή των υλικών αλλά και στο εύρος του φάσματος συχνοτήτων.

Τέλος, θα ήταν συνετό να ελεγχθεί και το οικονομικό στοιχείο, δηλαδή το κόστος δημιουργίας και συντήρησης μιας τέτοιας μικροδομής για καθημερινή χρήση, καθώς δεν υπήρξε καμία μελέτη πάνω σε αυτή την διάσταση του αντικειμένου.

Αναφορές

- [1] BRILLOUIN, Leon. *Wave propagation in periodic structures: electric filters and crystal lattices*. Dover publications, 1953.
- [2] STAVROULAKIS, G. E. Auxetic behaviour: appearance and engineering applications. *physica status solidi (b)*, 2005, 242.3: 710-720.
- [3] YANG, Wei, et al. Review on auxetic materials. *Journal of materials science*, 2004, 39.10: 3269-3279.
- [4] BLOCH, Felix; WALECKA, John Dirk. *Fundamentals of statistical mechanics: manuscript and notes of Felix Bloch*. World Scientific, 2000.
- [5] FARZBOD, Farhad; LEAMY, Michael J. Analysis of Bloch's method and the propagation technique in periodic structures. *Journal of vibration and acoustics*, 2011, 133.3.
- [6] GOMEZ GARCIA, Pablo; FERNÁNDEZ-ÁLVAREZ, José-Paulino. Floquet-Bloch theory and its application to the dispersion curves of nonperiodic layered systems. *Mathematical Problems in Engineering*, 2015, 2015.
- [7] VIYAND, Davood Mousanezhad. *Mechanics of chiral, anti-chiral, and hierarchical honeycombs*. Northeastern University, 2016.
- [8] COLLET, Manuel, et al. Floquet–Bloch decomposition for the computation of dispersion of two-dimensional periodic, damped mechanical systems. *International Journal of Solids and Structures*, 2011, 48.20: 2837-2848.
- [9] MAURIN, Florian, et al. Probability that a band-gap extremum is located on the irreducible Brillouin-zone contour for the 17 different plane crystallographic lattices. *International Journal of Solids and Structures*, 2018, 135: 26-36.
- [10] CHEN, Luyun; GUO, Yongjin; YI, Hong. Optimization study of bandgaps properties for two-dimensional chiral phononic crystals base on lightweight design. *Physics Letters A*, 2021, 388: 127054.
- [11] MOUSANEZHAD, Davood, et al. Elastic properties of chiral, anti-chiral, and hierarchical honeycombs: a simple energy-based approach. *Theoretical and Applied Mechanics Letters*, 2016, 6.2: 81-96.
- [12] BLOCH, Felix. Über die quantenmechanik der elektronen in kristallgittern. *Zeitschrift für physik*, 1929, 52.7: 555-600.
- [13] FLOQUET, Gaston. Sur les équations différentielles linéaires à coefficients périodiques. In: *Annales scientifiques de l'École normale supérieure*. 1883. p. 47-88.
- [14] KOUTSIANITIS, Panagiotis I.; TAIRIDIS, Georgios K.; STAVROULAKIS, Georgios E. Shunted piezoelectric patches on auxetic microstructures for the enhancement of band gaps. *Archive of Applied Mechanics*, 2021, 91.2: 739-751.
- [15] KITTEL, Charles; WILEY, John. *Elementary solid state physics: a short course*. Wiley, 1962.
- [16] PHANI, A. Srikantha; WOODHOUSE, J.; FLECK, N. A. Wave propagation in two-dimensional periodic lattices. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 2006, 119.4: 1995-2005.
- [17] TEE, K. F., et al. Wave propagation in auxetic tetrachiral honeycombs. *Journal of Vibration and Acoustics*, 2010, 132.3.
- [18] SPADONI, Alessandro, et al. Phononic properties of hexagonal chiral lattices. *Wave motion*, 2009, 46.7: 435-450.
- [19] KOUTSIANITIS, Panagiotis I., et al. Conventional and star-shaped auxetic materials for the creation of band gaps. *Archive of Applied Mechanics*, 2019, 89.12: 2545-2562.
- [20] BACIGALUPO, Andrea; DE BELLIS, Maria Laura. Auxetic anti-tetrachiral materials: equivalent elastic properties and frequency band-gaps. *Composite Structures*, 2015, 131: 530-544.
- [21] KOUTSIANITIS, Panagiotis I.; TAIRIDIS, Georgios K.; KOUGKOULOS, Alexandros A.; STAVROULAKIS Georgios E. *Effect of Chiral Materials on Presence of Band Gaps* 5th Serbian-Greek Symposium on Advanced Mechanics, 2021, 430-439