



**ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ ΚΡΗΤΗΣ**  
**ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΚΑΙ**  
**ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ**

**Διπλωματική Εργασία**

# **Μελέτη Συγχρονισμού των Qubit: Εκδήλωση Κβαντικών Φαινομένων**

**Πολίδης Πέτρος**

**Επιβλέπων Καθηγητής Έλληνας Δημοσθένης**

**ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΗ ΕΠΙΤΡΟΠΗ:**

**Αναπλ. Καθηγητής Δεληγιαννάκης Αντώνιος**

**Επικ. Καθηγητής Μπεκιάρης Λυμπέρης Νικόλαος**

**Χανιά, Σεπτέμβριος 2020**

---

# Ευχαριστίες

Ιδιαίτερες ευχαριστίες για την εκπόνηση της διπλωματικής εργασίας εκφράζονται προς τον επιβλέπων καθηγητή Έλληνα Δημοσθένη, ο οποίος στάθηκε αρωγός στις προσπάθειές μου, πάντα διαθέσιμος σε ανάλυση και επεξήγηση κάθε απορίας και προβλήματος κατά τη συγγραφή της παρούσας βιβλιογραφικής διπλωματικής εργασίας.

Επέτρεψε με συνέπεια αυτή η εργασία να έχει την προσωπική μου σφραγίδα, καθοδηγώντας, όμως, προς τη σωστή κατεύθυνση όποτε αυτό χρειάστηκε. Θα ήθελα, επίσης, να ευχαριστήσω το QLab για τη φιλοξενία και τις παροχές του κατά την εφαρμογή αυτής της εργασίας. Ακόμη, θα ήθελα να ευχαριστήσω πολύ τα μέλη της επιτροπής Αναπληρωτή καθηγητή Δελγιαννάκη Αντώνιο και Επίκουρο καθηγητή Μπεκιάρη Λυμπέρη Νικόλαο για τη συμβολή τους.

Τέλος, είναι απαραίτητο να εκφράσω τη βαθιά μου ευγνωμοσύνη στους γονείς και την αδερφή μου που μου παρείχαν την αδιάκοπη υποστήριξη και συνεχή ενθάρρυνσή τους καθόλη τη διάρκεια των σπουδών μου και κατά τη διαδικασία έρευνας και γραφής αυτής της εργασίας. Αυτό το επίτευγμα δεν θα ήταν δυνατό χωρίς αυτούς.

Σας ευχαριστώ θερμά.

---

# Abstract

This work deals with the phenomenon of synchronization, (a well-known effect in the field of nonlinearly interacting multiparticle classical systems formulated by the so called Kuramoto model) , and the question of its possible interrelation with quantum effects, addressed in the minimal context of two interacting qubits. The aim of the work is to review available recent research results both in the fields of classical synchronization and multi-qubit systems. This shapes the form of the thesis as a comprehensive review of some of the available analytic-numerical results, methods and concepts, regarding the question of the synchronization effect in the presence of pair of qubits. In outline the content of the thesis is as follows: a pair of special qubits each described by a 2D complex vector with a simple azimuthal angle freedom (the equatorial qubit), are employed. A sequence of quantum gate operators, codified in the form of a quantum circuit, is utilized to show that the temporal dynamics of the qubit state vectors is governed by the Kuramoto models via their azimuthal angles. A matrix observable, the “quantum synchronization” operator, and the “quantum dispersion” observable are introduced. These observables combined with solutions of the Kuramoto driven state vectors for the pair of interacting equatorial qubits, are able to quantify the quantum effects of the classical synchronization measures. The resulting ‘quantum mean value’ and the quantum dispersion value of the qubit-qubit synchronization is studied by numerically plotting their variation for four important special cases: the temporally varying, or temporally constant (stationary), qubit states vectors, as well as the un-correlated pair of equatorial qubits described by pure states, and the uncorrelated pair of thermal equatorial qubits described by mixed states; as well as possible combinations of these special cases. In accordance to the available results of qubit-synchronization it is confirmed that the two-body synchronization survives in the qubit context. This is manifested by the non-zero value of the “quantum synchronization” operator, and its non-zero but bounded and asymptotically constant dispersion (quantum uncertainty).

---

# Περιεχόμενα

<b>0 Εισαγωγή.....</b>	<b>7</b>
<b>1 Μελέτη κλασσικού συγχρονισμού .....</b>	<b>9</b>
<b>1. Πρόλογος .....</b>	<b>9</b>
1.1 Συγχρονισμός .....	10
1.2 Δέσμευση συχνοτήτων .....	11
1.3 Μοντέλο Kuramoto.....	14
1.3.1 Παράμετρος τάξης .....	16
1.3.2 Εκθετική μορφή .....	17
1.3.3 Μέτρο και φάση .....	20
1.3.4 Χρόνο-ανεξάρτητη κατάσταση .....	26
1.3.5 Χρόνο-εξαρτώμενη κατάσταση .....	28
<b>2 Κβαντομηχανική των qubit .....</b>	<b>30</b>
<b>2. Εισαγωγή .....</b>	<b>30</b>
2.1 Διανυσματικός χώρος συμβολισμοί και ιδιότητες .....	31
2.1.1 Χώρος Hilbert .....	35
2.2 Το Qubit.....	35
2.3 Εξωτερικό γινόμενο .....	39
2.4 Προβολικός τελεστής .....	40
2.5 Unitary Τελεστές-Pauli Πίνακες.....	42
2.6 Ίχνος.....	43
2.7 Τανυστικό γινόμενο.....	44

---

<b>3 Κβαντική Πληροφορία .....</b>	<b>47</b>
<b>3. Πρόλογος .....</b>	<b>48</b>
3.1 Κβαντική Μέτρηση .....	48
3.1.1 Σφαιρικές συντεταγμένες .....	49
3.2 Κβαντικός εναγκαλισμός .....	51
3.3 Πίνακας πυκνότητας .....	55
3.3.1 Μικτές και καθαρές καταστάσεις .....	55
3.3.2 Αναμενόμενη τιμή .....	56
3.4 Μερικό Ίχνος.....	58
3.5 Εντροπία Shannon .....	59
3.6 Εντροπία Von Neumann.....	60
3.7 Γραμμική Εντροπία .....	61
3.8 Κβαντικά κυκλώματα.....	61
3.8.1 Κβαντικές πύλες .....	62
3.8.2 Πύλες ενός και περισσοτέρων qubit.....	64
<b>4 Μελέτη φαινομένων κβαντικού συγχρονισμού.....</b>	<b>65</b>
<b>4. Πρόλογος .....</b>	<b>66</b>
4.1 Τα Qubit στον ισημερινό-Equatorial Qubit .....	66
4.2 Η κβαντική πύλη εναλλαγής (SWAP).....	72
4.3 Συγχρονισμός, μέση τιμή και διασπορά .....	78
4.3.1 Το παρατηρήσιμο μέγεθος του συγχρονισμού .....	78
4.3.2 Η διασπορά της μέσης τιμής και η κβαντική αβεβαιότητα.....	81
4.4 Συγχρονισμός των qubit:κβαντικές καταστάσεις και ποσοτικά μέτρα.....	82
4.4.1 Ζεύγη μη συσχετισμένων qubit .....	82

---

---

4.4.2	Ζεύγη μη συσχετισμένων θερμικών qubit .....	90
<b>5</b>	<b>ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ .....</b>	<b>106</b>
<b>6</b>	<b>ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ .....</b>	<b>108</b>

---

---

# 0

## Εισαγωγή

---

Η παρούσα διπλωματική εργασία είναι βιβλιογραφικού χαρακτήρα αναφορικά με το θέμα του φαινομένου του συγχρονισμού κλασσικών συστημάτων π.χ. αρμονικοί ταλαντωτές βλ. [2-6], και της μελέτης των επιδράσεων κβαντικών φαινομένων όταν ο συγχρονισμός γενικεύεται για κβαντικά συστήματα π.χ. δύο qubit βλ. [1]

Σχετικά με τη σχέση του φαινομένου του συντονισμού με τον Κβαντικό Υπολογισμό-Πληροφορία, μία νέα προσέγγιση έχει προταθεί<sup>[1]</sup> για την περίπτωση του συντονισμού ενός πλήθους qubit. Η παρούσα διπλωματική εργασία βασίζεται στην<sup>[1]</sup> και ειδικότερα στην περίπτωση του συντονισμού δύο μόνον qubit.

Η εργασία μετά το εισαγωγικό μέρος (Μέρος 0), που παρουσιάζεται το φαινόμενο του κλασσικού συντονισμού συζευγμένων κλασσικών συστημάτων όπως παρουσιάζεται στην βιβλιογραφία, προχωρά, στο επόμενο μέρος (Μέρος I), όπου ανακεφαλαιώνει τις σχετικές έννοιες και ορισμούς του κβαντικού συντονισμού και την παραγωγή, με την μεθοδολογία των κβαντικών κυκλωμάτων, της εξίσωσης **Kuramoto** της χρονικής εξέλιξης δύο qubit, όπως έχουν προταθεί<sup>[1]</sup>.

Στη συνέχεια (Μέρος II), παρουσιάζεται η επίδραση του κβαντικού χαρακτήρα των δύο qubit στο φαινόμενο συντονισμού που εκδηλώνουν. Προς τούτο δύο είδη qubit παρουσιάζονται: Το πρώτο αφορά τα qubit ως καταστατικά δισδιάστατα διανύσματα ισημερινού κύκλου παραμετρικά

---

εξαρτώμενα από αζιμουθιακή γωνία σφαίρας, και δεύτερον τα qubit ως συστήματα μη μηδενικής θερμοκρασίας που περιγράφονται από κατάλληλο πίνακα πυκνότητας.

Στη συνέχεια παρουσιάζεται η επίδραση στον συντονισμό των διαφόρων τρόπων σύζευξης των δύο qubit. Κατά το γενικό πλαίσιο κβάντωσης του κλασσικού συντονισμού <sup>[1]</sup>, παρουσιάζονται δύο είδη συζεύξεων: Το πρώτο αφορά την περίπτωση στατιστικά ανεξάρτητων qubit που περιγράφονται από ένα τανυστικά παραγοντοποιημένο διμερές καταστατικό τετρά-διάνυσμα και το δεύτερο αφορά στη περίπτωση στατιστικά/κβαντικά εξαρτώμενων qubit (βλ. εναγκαλισμένα/entangled qubit ) που περιγράφονται από ένα τανυστικά μη παραγοντοποιημένο διμερές καταστατικό τετρά-διάνυσμα. Η αποτίμηση της αλληλο-επίδρασης κβάντωσης-συντονισμού παρουσιάζεται κατά ποιοτικό και ποσοτικό τρόπο βλ. τους σχετικούς ορισμούς νέων τελεστικών παρατηρήσιμων (observable operators) μεγεθών συντονισμού στην <sup>[1]</sup>.

Σχετικά αποτελέσματα παρουσιάζονται με γραφήματα που εικονίζουν ενδεικτικά την μεταβολή της παραμέτρου συντονισμού με τη θερμοκρασία των θερμικών qubit σε συμφωνία με την <sup>[1]</sup>.

Το τελικό αποτέλεσμα, στα πλαίσια των δύο qubit της εργασίας, είναι ενθαρρυντικό για την περίπτωση της ταυτόχρονης παρουσίασης δηλ. συνύπαρξης και κβαντικών φαινομένων και φαινομένων συντονισμού.



---

# 1

## Μελέτη κλασσικού συγχρονισμού

---

### 1. Πρόλογος

Η μελέτη του συγχρονισμού ήταν πάντα συνυφασμένη με τη μελέτη της μη γραμμικότητας. Ο συνεργιστικός χαρακτήρας των μη γραμμικών συστημάτων είναι αυτό που τα καθιστά τόσο ιδιαίτερα. Κάθε σημαντικό άλτο πρόβλημα στην επιστήμη, από την έννοια της συνείδησης έως τον καρκίνο μέχρι ακόμα και τα σύγχρονα προβλήματα στην οικονομία είναι μη γραμμικά. Ξεκινώντας τη δεκαετία του 1970, όλοι οι πρωτοπόροι του συγχρονισμού - άνθρωποι όπως οι **Wiener**, ο **Winfree**, ο **Kuramoto**, οι **Peskin** και **Josephon** ήταν ήδη στο μονοπάτι της παρατήρησης μιας αυθόρμητης τάξης σε τεράστια συστήματα ταλαντωτών.

Η παρούσα εργασία επιχειρεί να βάλει ένα επιπλέον λιθαράκι μελετώντας το φαινόμενο του συγχρονισμού, διερευνώντας αρχικά την μαθηματική θεμελίωσή του χρησιμοποιώντας τις κατάλληλες εξισώσεις.

---

Πιο συγκεκριμένα, οι εξισώσεις που χρησιμοποιούνται και επεξηγούνται αναλυτικά αφορούν το μοντέλο του σπουδαίου μαθηματικού **Yoshiki Kuramoto**. Στην πορεία επιχειρείται συνδυασμός, ανάλυση και εφαρμογή αυτού του μοντέλου σε κβαντικό πλαίσιο.

Προσαρμόζοντας κατάλληλα το μοντέλο παρατηρείται το φαινόμενο του συγχρονισμού και η εξέλιξή του. Διερευνήθηκε η εξάρτηση του συγχρονισμού από παράγοντες που επηρεάζουν το φαινόμενο και μελετήθηκαν στατιστικά μεγέθη όπως η μέση τιμή, η διασπορά και η αβεβαιότητα που παρατηρήθηκε εφαρμόζοντας το μοντέλο στο κβαντικό πεδίο.

Η παρούσα εργασία διαχωρίστηκε σε κεφάλαια που προσβλέπουν στην καλύτερη κατανόηση των απαραίτητων εννοιών που σχετίζονται με τα κβαντικά φαινόμενα. Στα πρώτα κεφάλαια παρουσιάζεται η κλασική ανάλυση του μαθηματικού μοντέλου **Kuramoto**, ενώ στα επόμενα αναλύονται λεπτομερώς οι απαραίτητες κβαντικές έννοιες. Αναπτύσσονται αναλυτικά οι εξισώσεις που οδηγούν στο κατάλληλο κβαντικό κύκλωμα, το οποίο σχεδιάστηκε με τον βέλτιστο τρόπο εφόσον δοκιμάστηκαν δύο προσεγγίσεις που παρουσιάζονται παρακάτω.

Τελικό στόχο της εργασίας συνιστά η ανάδειξη των κβαντικών φαινομένων μέσω των στατιστικών μεγεθών, με γραφήματα που σχεδιάστηκαν στη MATLAB. Καινοτομία αποτελεί ακριβώς αυτός ο συγκερασμός των κβαντικών φαινομένων που μοντελοποιούνται με μια μαθηματική φόρμουλα που έχει διερευνηθεί πολυποίκιλα και αποτελεί τη βασική ιδέα σε μια πληθώρα θεωριών.

## 1.1 Συγχρονισμός

Η λέξη «συγχρονισμός» συναντάται συχνά τόσο στην επιστημονική όσο και στην καθημερινή γλώσσα και αναφέρεται σε μια ποικιλία φαινομένων σε όλους σχεδόν τους κλάδους των φυσικών επιστημών, της μηχανικής και της κοινωνικής ζωής. Αρχικά, αυτό το φαινόμενο εντοπίστηκε και διερευνήθηκε σε διαφορετικές τεχνητές συσκευές, από ρολόγια εκκρεμούς (**Christian Huygens**-1673) έως μουσικά όργανα, ηλεκτρονικές γεννήτριες, ηλεκτρική ενέργεια συστημάτων και λείζερ. Βρήκε πολλές πρακτικές εφαρμογές σε ηλεκτρικά συστήματα και στη μηχανολογία.

Σήμερα το επίκεντρο των ερευνών κινείται προς τα βιολογικά συστήματα όπου ο συγχρονισμός παρατηρείται σε διαφορετικά επίπεδα. Σύγχρονη παραλλαγή των κυτταρικών πυρήνων, σύγχρονη πυροδότηση νευρώνων, προσαρμογή του καρδιακού ρυθμού με την αναπνοή, διαφορετικές μορφές της συνεργατικής συμπεριφοράς των εντόμων, των ζώων

---

ακόμα και των ανθρώπων. Αυτή η προσαρμογή των ρυθμών λόγω αλληλεπίδρασης είναι η ουσία του συγχρονισμού, το φαινόμενο που μελετάται συστηματικά σε αυτήν την εργασία.

Εάν, σε ένα πείραμα, παρατηρούμε δύο μεταβλητές που ταλαντεύονται φαινομενικά συγχρονισμένα, δε σημαίνει απαραίτητα ότι αντιμετωπίζουμε συγχρονισμό. Για να αποκαλέσουμε ένα συγχρονισμό φαινομένων, επιβάλλεται να είμαστε σίγουροι ότι αναλύουμε τη συμπεριφορά δύο αυτοσυντηρούμενων ταλαντωτών, δηλαδή συστημάτων ικανών να δημιουργήσουν τους δικούς τους ρυθμούς. Τα συστήματα ρυθμίζουν τους ρυθμούς τους λόγω της μεταξύ τους αλληλεπίδρασης. Η προσαρμογή των ρυθμών συμβαίνει σε ένα ορισμένο εύρος αναντιστοιχίας συστημάτων. Βασικό συμπέρασμα είναι πως μία μόνο παρατήρηση δεν αρκεί για να ολοκληρωθεί ο συγχρονισμός. Ο συγχρονισμός είναι μια πολύπλοκη δυναμική διαδικασία, όχι μια κατάσταση.

Συνοψίζουμε εν συντομία τις ιδιότητες των αυτοσυντηρούμενων συστημάτων ταλάντωσης. Ο ταλαντωτής είναι ένα ενεργό σύστημα και περιέχει μια εσωτερική πηγή ενέργειας, που μετατρέπεται σε κίνηση ταλάντωσης. Μαθηματικά περιγράφεται από ένα αυτόνομο δυναμικό σύστημα δηλαδή χωρίς ρητή χρόνο εξάρτηση. Η μορφή ταλάντωσης καθορίζεται από τις παραμέτρους του συστήματος και δεν εξαρτάται από τον τρόπο με τον οποίο «ενεργοποιήθηκε» το σύστημα.

## 1.2 Δέσμευση συχνότητων

Στη θεωρητική αντιμετώπιση του συγχρονισμού, η συχνότητα περιγράφει το ρυθμό του αριθμού των ταλαντώσεων ανά μονάδα χρόνου. Η γωνιακή συχνότητα είναι το μέγεθος που αναφέρεται σε όλα τα περιοδικά φαινόμενα και εκφράζει τον αριθμό των επαναλήψεων ενός φαινομένου σε χρόνο  $2\pi$  sec, δίδεται από τον τύπο :

$$\omega = 2\pi f = 2\pi / T \quad (1.1)$$

Για να αποφύγουμε την ασάφεια, καλούμε τη συχνότητα των αυτόνομων συστημάτων φυσική συχνότητα παραλείποντας συχνά τη λέξη «γωνιακή».

Τα πειράματα δείχνουν ότι ακόμη και μια αδύναμη αλληλεπίδραση μπορεί να συγχρονίσει δύο ρολόγια. Δύο μη ταυτόσημα ρολόγια, τα οποία, εάν διαχωριστούν, έχουν διαφορετικές περιόδους ταλάντωσης, όταν συνδέονται προσαρμόζουν τους ρυθμούς τους και αρχίζουν να ταλαντεύονται με μια κοινή περίοδο. Αυτό το φαινόμενο περιγράφεται συχνά λόγω της σύμπτωσης των συχνότητων τους ως δέσμευση συχνότητας ή κλείδωμα. Εάν δύο μη

---

ταυτόσημοι ταλαντωτές έχουν τις δικές τους συχνότητες και συνδέονται μεταξύ τους, μπορεί να αρχίσουν να ταλαντεύονται με κοινή συχνότητα. Το αν συγχρονίζονται ή όχι εξαρτάται από τους ακόλουθους δύο παράγοντες:

- **Παράμετρος ζεύξης:** Περιγράφει πόσο αδύναμη ή πόσο ισχυρή είναι η μεταξύ τους αλληλεπίδραση.
- **Αναντιστοιχία συχνοτήτων:** Η διαφορά των συχνοτήτων ποσοτικοποιεί το πόσο διαφορετικοί μεταξύ τους είναι δύο ασύνδετοι ταλαντωτές. Σε αντίθεση με την ισχύ ζεύξης είναι ένα μέγεθος που σε πειράματα μπορεί εύκολα να μετρηθεί και να μεταβληθεί. Για παράδειγμα μπορεί κάποιος να συντονίσει τη συχνότητα ενός ρολογιού αλλάζοντας το μήκος του εκκρεμούς. Όταν αυτή η αναντιστοιχία συχνοτήτων σε ένα αυτόνομο σύστημα δεν είναι πολύ μεγάλη τότε οι συχνότητες των δύο ρολογιών (δύο συστημάτων) συμπαρασύρουν η μία την άλλη και γίνονται ίσες οπότε και λαμβάνει μέρος ο συγχρονισμός.

Η έναρξη μιας συγκεκριμένης σχέσης μεταξύ των φάσεων δύο συγχρονισμένων αυτοσυντηρούμενων ταλαντωτών συχνά ονομάζεται κλείδωμα φάσης  *$\varphi$  (phase locking)*. Αυτό είναι και το κύριο χαρακτηριστικό του συγχρονισμού, δηλαδή, δύο ταλαντωτές με αρχικά διαφορετικές συχνότητες και με ανεξάρτητες φάσεις προσαρμόζουν τους ρυθμούς τους και αρχίζουν να ταλαντεύονται με κοινή συχνότητα. Αυτό υπονοεί, επίσης, μια συγκεκριμένη σχέση μεταξύ των φάσεων των συστημάτων. Τονίζεται πως αυτή η ακριβής ταυτότητα των συχνοτήτων διατηρείται εντός ενός συγκεκριμένου εύρους και όχι σε ένα σημείο όπως θα συνέβαινε για ένα περιστασιακό τυχαίο φαινόμενο.

Γενικά η αλληλεπίδραση μεταξύ δύο συστημάτων είναι μη συμμετρική: είτε ένας ταλαντωτής είναι πιο ισχυρός από τον άλλον είτε επηρεάζουν αμφίπλευρα σε διαφορετικά επίπεδα. Το κύριο σημείο μιας αμφίδρομης αλληλεπίδρασης είναι ότι οι συχνότητες των δύο ταλαντωτών αλλάζουν. Αν δηλώσουμε τις συχνότητες των αυτόνομων συστημάτων, τις οποίες μπορούμε να αποκαλέσουμε μερικές συχνότητες ως  $\omega_1$  και  $\omega_2$  [ $\omega_1 \ll \omega_2$ ], και τις παρατηρούμενες συχνότητες αλληλεπίδρασης μεταξύ των ταλαντωτών ως  $\Omega_1$ ,  $\Omega_2$ , τότε στη συνέχεια αν ο σύνδεσμος είναι αρκετά ισχυρός εμφανίζεται μια αμοιβαία ρύθμιση των συχνοτήτων που έχει ως τελικό αποτέλεσμα  $\Omega_1 = \Omega_2 = \Omega$ . Αυτό το φαινόμενο περιγράφεται ως κλείδωμα συχνότητας (*frequency locking*).

---

Στην πορεία και πριν εισάγουμε το μοντέλο Kuramoto παρουσιάζεται η γενική περίπτωση ενός μοντέλου αλληλεπίδρασης δύο ταλαντωτών και πως ακριβώς συσχετίζονται οι απομακρύνσεις των ταλαντωτών αναφορικά με τις φάσεις τους σύμφωνα με την βιβλιογραφία.

Ένα βασικό μοντέλο αλληλεπίδρασης δύο ταλαντωτών με σταθερά σύζευξης  $k$  είναι το ακόλουθο σύστημα διαφορικών εξισώσεων, ορισμένο στον  $\mathbb{R}^2$

$$\frac{dx_1}{dt} = f_1(x_1, x_2) + kg_1(x_1, x_2)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = f_2(x_1, x_2) + kg_2(x_1, x_2)$$

όπου  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^2$  και  $f_1, f_2$  συνεχείς συναρτήσεις στον  $\mathbb{R}^2$ , οι οποίες συνήθως περιγράφουν το αυτόνομο σύστημα όπου η σταθερά σύζευξης είναι  $k = 0$  οι ταλαντωτές είναι ανεξάρτητοι και έχουν κάποιο οριακό κύκλο, με συχνότητες  $\omega_1, \omega_2$  αντίστοιχα. Οι  $g_1, g_2$  είναι συνεχείς συναρτήσεις στον  $\mathbb{R}^2$  και περιγράφουν μία ασθενή αλληλεπίδραση μεταξύ των ταλαντωτών. Είναι βολικό και μπορούμε πάντα να πάμε από την περιγραφή με τις απομακρύνσεις  $x(t), y(t)$  στη περιγραφή με τις φάσεις  $\varphi_1(t), \varphi_2(t)$  των ταλαντωτών επάνω στον οριακό κύκλο (μια τέτοια αλλαγή μεταβλητής με ένα ταλαντωτή είναι π.χ. η  $\varphi(x, y) = \tan^{-1}(y/x) - (1/2) * \ln(x^2 + y^2)$ ). Σε αυτή τη περιγραφή οι εξισώσεις γράφονται:

$$\frac{d\varphi_1}{dt} = \omega_1 + kQ_1(\varphi_1, \varphi_2)$$

$$\frac{d\varphi_2}{dt} = \omega_2 + kQ_2(\varphi_1, \varphi_2)$$

όπου οι συναρτήσεις  $Q_1, Q_2$  είναι  $2\pi$  περιοδικές. Αν ο λόγος των συχνοτήτων  $\omega_1/\omega_2$  δεν είναι ρητός η κίνηση είναι ημιπεριοδική. Στη περίπτωση που ο λόγος αυτός είναι ρητός αριθμός, π.χ.  $m/n$ , μπορούμε να γράψουμε την κοινή φάση των ταλαντωτών ως  $\psi = n\varphi_1 - m\varphi_2$  και να πάρουμε μία εξίσωση

$$\frac{d\psi}{dt} = -v + k q(\psi)$$

όπου  $v = n\omega_1 - m\omega_2$ . Στη περίπτωση συγχρονισμού, η παραπάνω εξίσωση έχει ένα σταθερό σημείο  $\psi_0$ . Το πιο απλό μοντέλο της παραπάνω μορφής είναι η επιλογή  $q(\psi) = \sin \psi$  με την εξίσωση να γράφεται:

$$\frac{d\psi}{dt} = -v + k \sin \psi$$

η οποία έχει σταθερό σημείο το  $\psi_0 = \sin^{-1} v/k$ . Ανάλογα με το πρόσημο της σταθεράς  $k$  υπάρχουν δύο περιπτώσεις, η ελκτική και η απωστική συμπεριφορά. Αν  $k < 0$  τότε η τιμή της σταθερής φάσης  $\psi_0$  βρίσκεται στο διάστημα  $-\pi/2 < \psi < \pi/2$ . Άρα οι φάσεις «έλκονται» σε αυτή τη περίπτωση. Αν  $k > 0$  τότε η σταθερή φάση βρίσκεται στο διάστημα  $\pi/2 < \psi < 3\pi/2$  και έχουμε «άπωση» μεταξύ των φάσεων. Ο συγχρονισμός εμφανίζεται σαν ένα τέλειο κλείδωμα φάσης: η ύπαρξη του σταθερού σημείου  $\psi_0$  σημαίνει ότι όχι μόνο οι ταλαντωτές έχουν την ίδια συχνότητα αλλά ότι και οι φάσεις τους έχουν μία σταθερή διαφορά κάθε χρονική στιγμή.

Αφού αναλύθηκε ένα βασικό μοντέλο συγχρονισμού το οποίο εκφράστηκε ως κλείδωμα φάσης αναφορικά με τις συχνότητες η ενότητα κλείνει με μια διαπίστωση που στοιχειοθετεί τον συγχρονισμό και σε ένα ευρύτερο πλαίσιο. Ο συγχρονισμός δε παρατηρείται μονάχα μεταξύ δύο ταλαντωτών αλλά μπορεί να επιδράσει σε μεγάλα χωρικά ταξινομημένα σύνολα ταλαντωτών. Αυτό σημαίνει ότι τα συστήματα είναι διατεταγμένα σε μια χωρική δομή με απλούστερο παράδειγμα να είναι μια αλυσίδα όπου κάθε στοιχείο αλληλοεπιδρά με τους πλησιέστερους γείτονές του. Παρατηρήθηκε πως οι ταλαντωτές μπορούν, όμως, να επιδράσουν με πολλούς γείτονες και μπορεί να αναπτυχθεί συλλογική συμπεριφορά σε έναν τέτοιο πληθυσμό. Εάν η αλληλεπίδραση είναι πολύ αδύναμη, δεν υπάρχει συγχρονισμός και έτσι όλα τα επιμέρους συστήματα θα ταλαντώνονται με τις δικές τους συχνότητες. Στο ενδεχόμενο πως υπάρχει μια αρκετά ισχυρή ζεύξη που μπορεί να συγχρονίσει ολόκληρο το σύνολο με την προϋπόθεση ότι οι φυσικές συχνότητες δεν είναι πολύ διαφορετικές. Τέλος μπορεί και να παρατηρηθεί ενδιάμεσης έντασης ζεύξη και έτσι να δημιουργηθούν μερικώς συγχρονισμένες ομάδες. Ο στόχος όμως στην παρούσα εργασία είναι να παρουσιαστεί εκτενέστερα τι συμβαίνει σε ένα απλούστερο μοντέλο και με αυτό θα ασχοληθούμε περισσότερο στις επόμενες ενότητες.

### 1.3 Μοντέλο Kuramoto

Ο Winfree [1967] περιγράφει πως οι ταλαντωτές χαλαρώνουν τους κύκλους περιορισμού τους και έτσι χαρακτηρίζονται μόνο από τις φάσεις τους. Αυτές οι φάσεις εξελίσσονται εξαιτίας της αλληλεπίδρασης αδύναμης σύζευξης και ελαφρών διαφορών συχνοτήτων μεταξύ των ταλαντωτών. Κάθε ταλαντωτής συνδέεται με το συλλογικό ρυθμό που παράγεται από

---

ολόκληρο τον πληθυσμό των ταλαντωτών και είναι ανάλογος με μια προσέγγιση μέσου πεδίου στη φυσική. Όταν η εξάπλωση των φυσικών συχνοτήτων είναι μεγάλη σε σύγκριση με τη σύζευξη, το σύστημα συμπεριφέρεται ασύνδετα με κάθε ταλαντωτή να τρέχει στη φυσική του συχνότητα. Καθώς η εξάπλωση μειώνεται, η ασυνέπεια συνεχίζεται μέχρι να φτάσει ένα συγκεκριμένο κατώφλι όπου μια μικρή ομάδα ταλαντωτών ξαφνικά συγχρονίζεται.

Ο **Y. Kuramoto** [1975, 1984] εξέλιξε και απλοποίησε το μοντέλο του **Winfrey** αναπτύσσοντας την προσέγγιση φάσης που επιτρέπει μία καθολική περιγραφή των ταλαντωτών αμιγούς ημιτονοειδής σύζευξης. Το μοντέλο του **Kuramoto** περιγράφει ένα μεγάλο πληθυσμό συζευγμένων ταλαντωτών, των οποίων οι φυσικές συχνότητες έχουν σχεδιαστεί από μια καθορισμένη συμμετρική και κατακόρυφη κατανομή με πυκνότητα πιθανότητας  $g(\omega)$ .

Σε θεωρητική βάση για να εφαρμοστεί το μοντέλο πρέπει να ισχύουν τέσσερις βασικές συνθήκες. Κατά πρώτον, το σύστημα υπό διερεύνηση θα πρέπει να κατασκευαστεί από ένα σχετικά μεγάλο αριθμό συνιστωσών, καθένα από τα οποία είναι ένας αυτοσυντηρούμενος ταλαντωτής. Τα επιμέρους στοιχεία πρέπει να έχουν εξαιρετικά απλή δυναμική: καθαρό ρυθμό χωρίς να παρατηρείται χάος ή αναταραχή. Δεύτερον, οι ταλαντωτές πρέπει να συνδέονται ασθενώς, με την έννοια ότι η κατάσταση κάθε ταλαντωτή μπορεί να χαρακτηρίζεται μόνο από τη φάση του. Εάν ο σύνδεσμος είναι αρκετά ισχυρός για να παραμορφώσει σημαντικά το πλάτος του ταλαντωτή, το μοντέλο **Kuramoto** δεν θα ισχύει. Η τρίτη συνθήκη είναι η πιο περιοριστική: κάθε ταλαντωτής πρέπει να συνδέεται εξίσου έντονα με όλους τους άλλους. Τέλος, οι ταλαντωτές θα είναι σχεδόν πανομοιότυποι και η ποσότητα διασποράς στις ιδιότητές τους θα πρέπει να είναι συγκρίσιμη με την αδυναμία της ζεύξης τους. <sup>[2]</sup>

Εάν η ισχύς σύζευξης υπερβαίνει ένα συγκεκριμένο όριο, το σύστημα παρουσιάζει μια μετάβαση φάσης. Ορισμένοι από τους ταλαντωτές συγχρονίζονται αυθόρμητα, ενώ άλλοι παραμένουν ασυνάρτητοι. Η εξίσωση του μοντέλου του **Kuramoto** δίδεται ως εξής :

$$\theta'_i = \omega_i + \frac{k}{N} \sum_{j=1}^N \sin(\theta_j - \theta_i) \quad i = 1, \dots, N \quad (1.2)$$

όπου:

**k** : η ισχύς ή παράμετρος σύζευξης που αποτελεί θετικό μέγεθος

**$\theta$**  : η «μεταβλητή  $\theta$ » (angle variable)

---


$$\theta = \tan^{-1}(y/x) \quad (1.3)$$

Η μεταβλητή  $\theta$  προέρχεται από τη μετατροπή στις πολικές συντεταγμένες και μπορεί να θεωρηθεί ως μια εύκολα υπολογίσιμη προσέγγιση της φάσης  $\varphi$ . Στη βιβλιογραφία [2] σημειώνεται ως ένα καθαρά γεωμετρικό μέγεθος, το οποίο δεν αναφέρεται στο χρόνο υπό την έννοια ότι παραμένει σταθερό.

Η παράμετρος  $\mathbf{k}$  καθορίζει την ισχύ ζεύξης. Η σύζευξη μεταξύ ενός ζεύγους ταλαντωτών είναι ανάλογη του  $N^{-1}$ , σε αυτήν την περίπτωση παίρνουμε N-ανεξάρτητα αποτελέσματα που καταλήγουν στο θερμοδυναμικό όριο όταν  $N \rightarrow \infty$ . Εάν η ζεύξη σε κάθε ζεύγος είναι N-ανεξάρτητη, τότε η δύναμη που ενεργεί σε κάθε ταλαντωτή αυξάνεται με το μέγεθος του πληθυσμού και στο θερμοδυναμικό όριο αυτή η δύναμη τείνει στο άπειρο, κάτι που προφανώς οδηγεί στο συγχρονισμό ολόκληρου του πληθυσμού.

### 1.3.1 Παράμετρος τάξης

Η παράμετρος τάξης είναι μια μακροσκοπική ποσότητα, η οποία χρησιμοποιείται για τη μέτρηση του βαθμού συγχρονισμού στο σύστημα. Ορίζεται ως ο συνολικός μέσος όρος του μιγαδικού πλάτους των ταλαντωτών :

$$R(t)e^{i\psi(t)} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N e^{i\theta_j} \quad (1.4)$$

Όπου  $0 \leq R(t) \leq 1$  μετράει τη συμφωνία φάσης μεταξύ των ταλαντωτών του συστήματος και  $\psi(t)$  αποτελεί την ποσότητα που εκφράζει τη μέση φάση. Όταν η συμφωνία φάσης  $R(t) = 1$ , τότε το σύστημα βρίσκεται σε σύγχρονη κατάσταση και οι ταλαντωτές κινούνται σαν ένα ενιαίο σμήνος, ενώ όταν  $R(t) \approx 0$ , τότε οι ταλαντωτές εκδηλώνουν μια ασύγχρονη κατάσταση και ανεξάρτητη συμπεριφορά, διασκορπισμένοι γύρω από έναν κύκλο και δε δημιουργείται μακροσκοπικός ρυθμός.

Στην πορεία παρουσιάζεται η μελέτη της παραμέτρου τάξης για δύο ταλαντωτές. Ο λόγος που στην εργασία έχει επιλεγεί να παρουσιαστεί η μελέτη για σύστημα δύο ταλαντωτών είναι πως εξετάζεται το ενδεχόμενο να υπάρχει τουλάχιστον ένα ζεύγος με κοντινές συχνότητες και ως εκ τούτου, συγχρονίζεται εύκολα. Ως αποτέλεσμα, η συμβολή στο μέσο πεδίο στη συχνότητα αυτών των συγχρονισμένων ταλαντώσεων αυξάνεται. Αυτή η αυξημένη συνιστώσα λειτουργεί ως κινητήριος δύναμη και προσελκύει άλλα στοιχεία που έχουν κοντινές συχνότητες οδηγώντας στην ανάπτυξη συγχρονισμού συμπλέγματος.



---

### 1.3.2 Εκθετική μορφή

Έστω ο μιγαδικός  $z = x + yi$ . Τότε η δύναμη  $e^z$  ορίζεται ότι είναι ο μιγαδικός αριθμός:

$$e^z = e^{x+yi} = e^x(\cos y + i\sin y)$$

Όταν το  $y = 0$ , συμφωνεί με τον ορισμό του  $e^x$ , ενώ όταν  $x = 0$ , ορίζει την ταυτότητα του Euler (Euler's formula) :

$$e^{iy} = \cos y + i\sin y$$

Για δύο ταλαντωτές  $\theta_1, \theta_2$  η σχέση (1.4) παίρνει την εξής μορφή:

$$\text{Re}^{i\psi} = \frac{1}{2}(e^{i\theta_1} + e^{i\theta_2}) = C \quad (1.5)$$

**[Σημείωση:** Η (1.5) είναι μια σχέση που θα χρησιμοποιηθεί επόμενο εδάφιο της εργασίας και χαρακτηρίζουμε ως ποσότητα  $C$  με στόχο να λειτουργήσει ως συνδετικό κρίκο με την μελέτη του κβαντικού συγχρονισμού που παρουσιάζεται στο κεφάλαιο 4].

Πολλαπλασιάζοντας με  $e^{-i\theta_1}$  την σχέση (1.5) :

$$\begin{aligned} \text{Re}^{i\psi} e^{-i\theta_1} &= \frac{1 + e^{i(\theta_2 - \theta_1)}}{2} \\ &\Leftrightarrow \\ 2\text{Re}^{i(\psi - \theta_1)} &= 1 + e^{i(\theta_2 - \theta_1)} \end{aligned}$$

Λόγω της ταυτότητας του Euler μετατρέπεται ως εξής:

$$\begin{aligned} 2R(\cos(\psi - \theta_1) + i\sin(\psi - \theta_1)) &= 1 + \cos(\theta_2 - \theta_1) + i\sin(\theta_2 - \theta_1) \\ \Leftrightarrow 2R\cos(\psi - \theta_1) + i2R\sin(\psi - \theta_1) &= 1 + \cos(\theta_2 - \theta_1) + i\sin(\theta_2 - \theta_1) \end{aligned}$$

Εξισώνοντας τα φανταστικά μέρη:

$$2R\sin(\psi - \theta_1) = \sin(\theta_2 - \theta_1) \quad (1.6)$$

Οπότε η σχέση (1.2) μετατρέπεται ως εξής:

---


$$\dot{\theta}_1 = \omega_1 + kR \sin(\psi - \theta_1) \text{ και } \dot{\theta}_2 = \omega_2 + kR \sin(\psi - \theta_2) \quad (1.7)$$

Η οποία σχέση γενικεύεται για τις διάφορες τιμές του  $N$  ως:

$$\dot{\theta}_i = \omega_i + kR \sin(\psi - \theta_i) \quad \text{με } i=1,..N$$

Κάθε ταλαντωτής αρχικά φαίνεται αποσυνδεδεμένος από όλους τους άλλους, αν και σίγουρα αλληλοεπιδρούν, αλλά μόνο μέσω των μέσων πεδίων  $R$  και  $\psi$ . Συγκεκριμένα, η προσέγγιση φάσης  $\theta_i$  κινείται προς τη μέση φάση  $\psi$  παρά προς την ξεχωριστή φάση του κάθε ταλαντωτή. Επιπλέον, η αποτελεσματική ισχύς της σύζευξης είναι μέγεθος ανάλογο με τον παράγοντα τάξης  $R$ .

Η αναλογικότητα αυτή δημιουργεί ένα θετικό βρόγχο ανατροφοδότησης μεταξύ σύζευξης και συνοχής  $\psi$ . Καθώς ο πληθυσμός γίνεται πιο συνεπής, το  $R$  αυξάνεται και έτσι η ζεύξη  $k R$  ακολουθεί παρόμοια συμπεριφορά με αποτέλεσμα τη «στρατολόγηση» ακόμα περισσότερων ταλαντωτών σε συγχρονισμένη ομάδα.

Επιστρέφοντας στην εξίσωση (1.2) και αν ενδιαφερόμαστε για τη δυναμική των διαφορών των φάσεων των ταλαντωτών, η εξίσωση μπορεί να γραφεί ως

$$\begin{aligned} \theta'_i - \theta'_j = & \omega_i - \omega_j + \\ & + \frac{K}{N} \left\{ -2 \sin(\theta_i - \theta_j) + \sum_{k=1, k \neq i, j}^N (\sin(\theta_k - \theta_i) + \sin(\theta_j - \theta_k)) \right\} \end{aligned} \quad (1.8)$$

Όταν οι ταλαντωτές συγχρονιστούν, δηλαδή  $\theta'_i - \theta'_j \rightarrow 0$  καθώς  $t \rightarrow \infty$ , το δεξί μέλος της εξίσωσης γίνεται μηδέν. Επομένως η συνθήκη για συγχρονισμό είναι η εξίσωση να έχει ένα σταθερό σημείο:

$$\omega_j - \omega_i = \frac{K}{N} \left\{ 2 \sin(\theta_i - \theta_j) + \sum_{k=1, k \neq i, j}^N (\sin(\theta_k - \theta_i) + \sin(\theta_j - \theta_k)) \right\}$$

Για να βρούμε ένα κάτω όριο για τη σταθερά σύζευξης  $K$  πρέπει να μεγιστοποιήσουμε την έκφραση

$$E = 2 \sin(\theta_i - \theta_j) + \sum_{k=1, k \neq i, j}^N (\sin(\theta_k - \theta_i) + \sin(\theta_j - \theta_k)) \quad (1.9)$$

---

Με τις γνωστές συνθήκες από την ανάλυση:

$$\frac{\partial E}{\partial \theta_i} = 0, \quad \frac{\partial^2 E}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \leq 0 \quad \forall i, j = 1, \dots, N$$

βρίσκουμε τη λύση [Chopra,2005]:

$$\cos\left(\frac{\theta_j - \theta_i}{2}\right) = \frac{-(N-2) + \sqrt{(N-2)^2 + 32}}{8}$$

Για δύο ταλαντωτές,  $N = 2$  παίρνουμε τη λύση

$$\cos\left(\frac{\theta_j - \theta_i}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow \theta_j - \theta_i = \frac{\pi}{2}$$

Άρα η μέγιστη τιμή της (1.9) είναι:

$$E_{max} = 2 \sin(\theta_i - \theta_j)_{max} + 2(N-2) \sin\left(\frac{(\theta_j - \theta_i)_{max}}{2}\right)$$

και η τιμή της κρίσιμης σύζευξης είναι:

$$K_c = \frac{(\omega_j - \omega_i)N}{E_{max}}$$

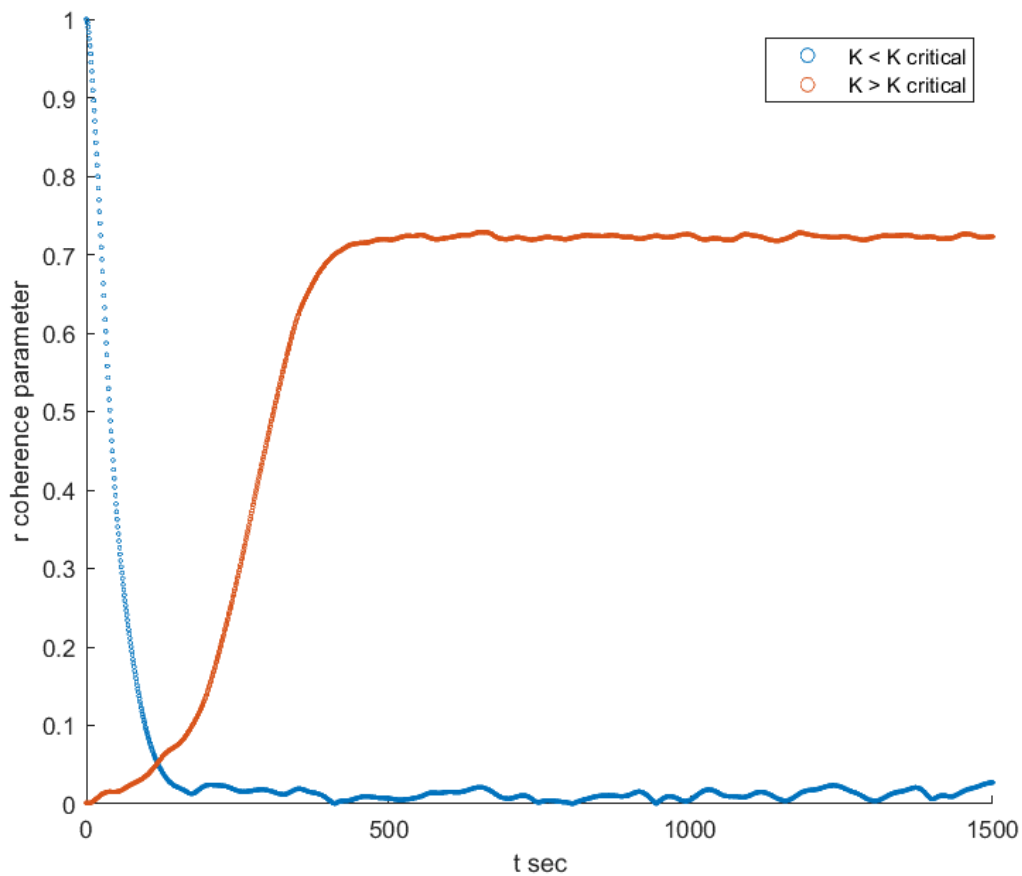
η οποία για δύο ταλαντωτές,  $N = 2$  είναι:

$$K_c = \omega_j - \omega_i$$

Αφού παρουσιάστηκε το μοντέλο **Kuramoto** με τα βασικά δομικά του στοιχεία κρίθηκε σκόπιμο να παρατηρήσουμε τη συμπεριφορά του με την παρουσία πολλών ταλαντωτών και πως ακριβώς συμπεριφέρεται και επηρεάζει τον συγχρονισμό η σταθερά σύζευξης **k** για μεγάλο αριθμό ταλαντωτών.

Ενσωματώνεται το μοντέλο αριθμητικά σε μια Gaussian κατανομή με ποικίλα **k**, με αποτέλεσμα οι προσομοιώσεις να δείχνουν ότι για όλα τα **k** μικρότερα από ένα κατώφλι οι ταλαντωτές ενεργούν σαν αποσυνδεδεμένοι. Όταν το **k** είναι μεγαλύτερο από μια κρίσιμη τιμή κατωφλίου, τότε το **R(t)** αυξάνεται εκθετικά αντανακλώντας ένα σύμπλεγμα ταλαντωτών που συγχρονίζονται ταυτόχρονα, δημιουργώντας έτσι μια συλλογική ταλάντωση. Σύμφωνα με τον Strogatz (2000) <sup>[2]</sup>, κάποια στιγμή το **R(t)** φτάνει σε σημείο κορεσμού  $R \ll 1$  και παρουσιάζει διακυμάνσεις. Στο επίπεδο των μεμονωμένων ταλαντωτών διαπιστώνεται πως ο

πληθυσμός χωρίζεται σε δύο ομάδες, τους ταλαντωτές κοντά στο κέντρο της κατανομής συχνοτήτων  $\Omega$  και συν-περιστρέφονται μαζί με το μέσο όρο φάσης και εκείνους των οποίων οι ουρές τρέχουν κοντά στις φυσικές τους συχνότητες και παρασύρονται σε σχέση με το συγχρονισμένο σύμπλεγμα. Αυτή η μικτή κατάσταση ονομάζεται μερικώς συγχρονισμένη. Με περαιτέρω αυξήσεις του  $K$  περισσότεροι ταλαντωτές συγχρονίζονται. Το επόμενο Σχήμα-1.1 περιγράφει τι συμβαίνει για τις διάφορες τιμές του  $k$ . Να σημειωθεί πως το παρακάτω γράφημα περιγράφει την συμπεριφορά μεγάλου πλήθους ταλαντωτών με στόχο να αποτυπώνει κατάλληλα τις βιβλιογραφικές αναφορές [2].



Σχήμα-1.1

### 1.3.3 Μέτρο και φάση

Σε αυτό το σημείο θεωρήθηκε σκόπιμο να γίνει μια σύντομη παρουσίαση των ιδιοτήτων ενός μιγαδικού αριθμού ώστε να παρουσιαστεί πιο ομαλά η μετάβαση στις μαθηματικές εξισώσεις

---

που ακολουθούν και σχετίζονται με την ανάλυση του μοντέλου που παρουσιάστηκε στη προηγούμενη ενότητα.

Ένας μιγαδικός αριθμός  $z = \alpha + \beta i$  μπορεί να αναπαρασταθεί στο μιγαδικό επίπεδο ως ένα διατεταγμένο ζεύγος  $(\alpha, \beta)$ . Επιπρόσθετα, μπορούμε να έχουμε και την **πολική μορφή** για το μιγαδικό αριθμό:

$$z = |z| (\cos \theta + i \sin \theta) = |z| e^{i\theta}$$

Με  $z^*$  ορίζεται ο μιγαδικός συζυγής:

$$z^* = \alpha - i\beta$$

Το μέτρο ή απόλυτη τιμή ενός μιγαδικού αριθμού συμβολίζεται με  $|Z|$  και ορίζεται από την έκφραση:

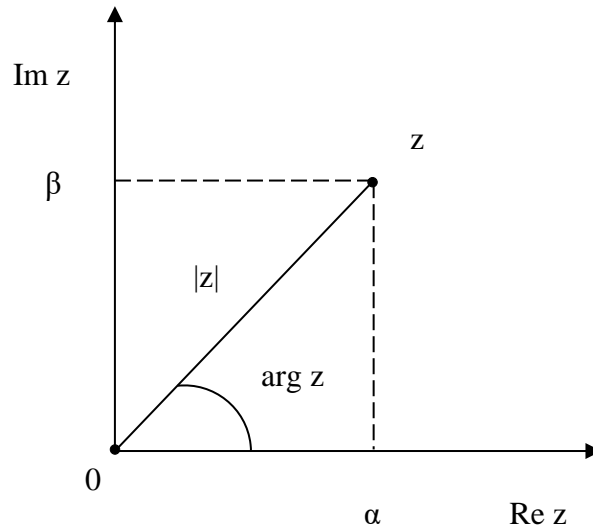
$$|z| \equiv \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \quad (1.10)$$

Η φάση του μιγαδικού  $z = \alpha + \beta i$  συμβολίζεται με  $\arg Z$  και ορίζεται από την έκφραση:

$$\tan(\arg z) = \frac{\beta}{\alpha} \Rightarrow \arg z \equiv \tan^{-1}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right) \quad (1.11)$$

Σε διάγραμμα Argand, το μέτρο είναι η απόσταση από την αρχή  $(0 + i0)$ , του σημείου που αντιπροσωπεύει το μιγαδικό αριθμό. Η φάση είναι η γωνία που σχηματίζει η ευθεία που περνά από το συγκεκριμένο σημείο και την αρχή με τον άξονα των πραγματικών. Η φορά διαγραφής

της γωνίας είναι αντίθετη από τη φορά των δεικτών του ρολογιού (Σχήμα 1.2).



Σχήμα 1-2

Χρησιμοποιώντας τριγωνομετρικές ταυτότητες και αναζητώντας την τιμή του  $\psi$  από τη σχέση (1.5) διαιρούμε το πραγματικό και φανταστικό μέρος ακολουθώντας τα παρακάτω βήματα:

$$\sin \theta_1 + \sin \theta_2 = 2 \sin\left(\frac{\theta_1 + \theta_2}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta_1 + \theta_2}{2}\right)$$

$$\cos \theta_1 + \cos \theta_2 = 2 \cos\left(\frac{\theta_1 + \theta_2}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta_1 + \theta_2}{2}\right)$$

Διαιρώντας κατά μέλη τις παραπάνω σχέσεις προκύπτει:

$$\frac{\sin \theta_1 + \sin \theta_2}{\cos \theta_1 + \cos \theta_2} = \frac{\sin\left(\frac{\theta_1 + \theta_2}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\theta_1 + \theta_2}{2}\right)} = \tan\left(\frac{\theta_1 + \theta_2}{2}\right)$$

Από την παραπάνω σχέση προκύπτει ως συμπέρασμα πως:

$$\Psi = \frac{1}{2}(\theta_1 + \theta_2) \quad (1.12)$$

Διαμορφώνεται η σχέση (1.5) κατά τέτοιο τρόπο ώστε να διαχωριστεί το πραγματικό και φανταστικό μέρος:

---


$$\begin{aligned} \operatorname{Re}^{i\psi} &= \frac{\cos\theta_1 + i\sin\theta_1 + \cos\theta_2 + i\sin\theta_2}{2} = \\ &= \frac{\cos\theta_1 + \cos\theta_2}{2} + i\frac{\sin\theta_1 + \sin\theta_2}{2} \end{aligned}$$

Χρησιμοποιούνται οι κατάλληλες τριγωνομετρικές ταυτότητες με στόχο να εκφραστεί το μέτρο του  $R$  με ξεκάθαρο τρόπο:

$$\begin{aligned} \cos\theta + \cos\varphi &= 2\cos\left(\frac{\theta+\varphi}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta-\varphi}{2}\right) \\ \sin\theta + \sin\varphi &= 2\sin\left(\frac{\theta+\varphi}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta-\varphi}{2}\right) \end{aligned}$$

Η σχέση (1.5) διαμορφώνεται ως εξής:

$$\operatorname{Re}^{i\psi} = \cos\left(\frac{\theta_1 - \theta_2}{2}\right) \left[ \cos\left(\frac{\theta_1 + \theta_2}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\theta_1 + \theta_2}{2}\right) \right]$$

Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί  $z_1 = a_1 + a_2 i$  και  $z_2 = b_1 + b_2 i$ . Τότε είναι  $z_1 = z_2$ , όταν

$$\left\{ \begin{array}{l} a_1 = b_1 \\ a_2 = b_2 \end{array} \right\}. \text{ Με αυτή την λογική διαμορφώνεται η σχέση ως εξής:}$$

$$R(\cos\psi + i\sin\psi) = \cos\left(\frac{\theta_1 - \theta_2}{2}\right) \left[ \cos\left(\frac{\theta_1 + \theta_2}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\theta_1 + \theta_2}{2}\right) \right]$$

Η κατάληξη είναι σε μορφή στην οποία διαχωρίζονται με ξεκάθαρο πλαίσιο οι ποσότητες οι οποίες ενδιαφέρουν:

$$R\cos\psi + iR\sin\psi = \cos\left(\frac{\theta_1 - \theta_2}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta_1 + \theta_2}{2}\right) + i\cos\left(\frac{\theta_1 - \theta_2}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta_1 + \theta_2}{2}\right)$$

Από αυτήν τη σχέση προκύπτει το συμπέρασμα πως το  $R$  ισούται με:

$$R = \cos\left(\frac{\theta_1 - \theta_2}{2}\right) \quad (1.13)$$

Εφαρμόζοντας την κατάλληλη τριγωνομετρική ταυτότητα ο υπολογισμός του μέτρου του R σύμφωνα και με τον ορισμό (1.10) δίδεται ως εξής υπολογίζοντας την υπόριζη ποσότητα:

$$\begin{aligned}
 & (\cos\theta_1 + \cos\theta_2)^2 + (\sin\theta_1 + \sin\theta_2)^2 = \\
 & = 2 + 2(\cos\theta_1 \cos\theta_2 + \sin\theta_1 \sin\theta_2) = \\
 & = 2 + 2\cos(\theta_1 - \theta_2) = 2(1 + \cos(\theta_1 - \theta_2))
 \end{aligned} \tag{1.14}$$

Στη σχέση (1.13) εμφανίζεται η διαφορά των φάσεων των δύο ταλαντωτών στο μισό της οπότε χρησιμοποιούνται οι αντίστοιχες τριγωνομετρικές ταυτότητες:

$$\frac{1 + \cos 2\theta}{2} = \cos^2 \theta \tag{1.15}$$

Για  $\theta = \theta/2$ :

$$\cos^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1 + \cos \theta}{2} \Rightarrow 1 + \cos \theta = 2 \cos^2 \frac{\theta}{2}$$

Συνεπάγεται λοιπόν για  $\theta = \theta_1 - \theta_2$  και με εφαρμογή των τριγωνομετρικών ταυτοτήτων πως:

$$\begin{aligned}
 \cos^2\left(\frac{\theta_1 - \theta_2}{2}\right) &= \frac{(\cos\theta_1 + \cos\theta_2)^2 + (\sin\theta_1 + \sin\theta_2)^2}{4} \\
 \Leftrightarrow \cos\left(\frac{\theta_1 - \theta_2}{2}\right) &= \sqrt{\frac{(\cos\theta_1 + \cos\theta_2)^2 + (\sin\theta_1 + \sin\theta_2)^2}{4}} \\
 &= \sqrt{\frac{2(1 + \cos(\theta_1 - \theta_2))}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + \cos(\theta_1 - \theta_2)}
 \end{aligned}$$

Έτσι τελικά προκύπτει πως το μέτρο της ποσότητας R υπολογίζεται ως εξής:

$$R = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + \cos(\theta_1 - \theta_2)} \tag{1.16}$$



Ενώ η σχέση (1.5) μπορεί να πάρει την εξής μορφή μετά από τους ανωτέρω υπολογισμούς για μέτρο του R και  $\psi$ :

$$\begin{aligned} \text{Re}^{i\psi} &= \frac{1}{2}(e^{\theta_1} + e^{\theta_2}) = \frac{1}{2}(\cos\theta_1 + \cos\theta_2) + \frac{i}{2}(\sin\theta_1 + \sin\theta_2) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1 + \cos(\theta_1 - \theta_2)}e^{i\frac{\theta_1 + \theta_2}{2}} \end{aligned} \quad (1.17)$$

Αναλύοντας περαιτέρω τις σχέσεις :

$$\dot{\theta}_1 = \omega_1 + \frac{k}{2}\sin(\theta_2 - \theta_1) \quad (1.18)$$

$$\dot{\theta}_2 = \omega_2 + \frac{k}{2}\sin(\theta_1 - \theta_2)$$

Υπολογίζονται το άθροισμα τους και αφού χρησιμοποιηθεί η τριγωνομετρική σχέση περί αντίθετων γωνιών προκύπτει:

$$\begin{aligned} \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 &= \omega_1 + \omega_2 + \frac{k}{2}[\sin(\theta_2 - \theta_1) + \sin(\theta_1 - \theta_2)] \\ &= \omega_1 + \omega_2 + \frac{k}{2}[\sin(-(\theta_1 - \theta_2)) + \sin(\theta_1 - \theta_2)] \\ &\Leftrightarrow \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 = \omega_1 + \omega_2 \end{aligned} \quad (1.19)$$

Εισάγοντας τη διαφορά των φάσεων προκύπτει το εξής :

$$\begin{aligned} \dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2 &= \omega_1 - \omega_2 + \frac{k}{2}[\sin(\theta_2 - \theta_1) - \sin(\theta_1 - \theta_2)] \\ &= \omega_1 - \omega_2 + \frac{k}{2}[\sin(-(\theta_1 - \theta_2)) - \sin(\theta_1 - \theta_2)] \\ &= \Delta\omega + \frac{k}{2}(-2\sin(\theta_1 - \theta_2)) \\ &\Leftrightarrow \dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2 = \Delta\omega - k\sin(\theta_1 - \theta_2) \end{aligned} \quad (1.20)$$

Η παραπάνω σχέση μπορεί να καταγραφεί και ως εξής :

$$\dot{\theta}_- = \Delta\omega - k\sin\theta_- \quad (1.21)$$

---

όπου  $\theta_-$  ορίζεται ως η διαφορά των φάσεων  $\theta_- = \theta_1 - \theta_2$

### 1.3.4 Χρόνο-ανεξάρτητη κατάσταση

Η χρόνο-ανεξάρτητη κατάσταση προκύπτει όταν οι παράγωγοι των γωνιακών μεταβλητών είναι ίσες μεταξύ τους η διαφορετικά η μεταξύ τους διαφορά γίνει ίση με το μηδέν  $\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2 = 0$ .

Αυτό έχει ως αποτέλεσμα ως προς τη σχέση της διαφοράς των φάσεων (1.21) το εξής:

$$\theta_-^{\text{stat}} = \arcsin\left(\frac{\Delta\omega}{k}\right) \quad (1.22)$$

Συνδυάζοντας τη σχέση του μέτρου της παραμέτρου τάξης  $R$  (coherence parameter) και με τις κατάλληλες προσαρμογές στις σχέσεις προκύπτει:

$$R = \left| \frac{1}{2}(e^{i\theta_1} + e^{i\theta_2}) \right| = \left| \frac{1}{2}e^{i\theta_1} \left(1 + e^{-i(\theta_1 - \theta_2)}\right) \right| = \frac{1}{2} \left| \left(1 + e^{-i(\theta_1 - \theta_2)}\right) \right| \quad (1.23)$$

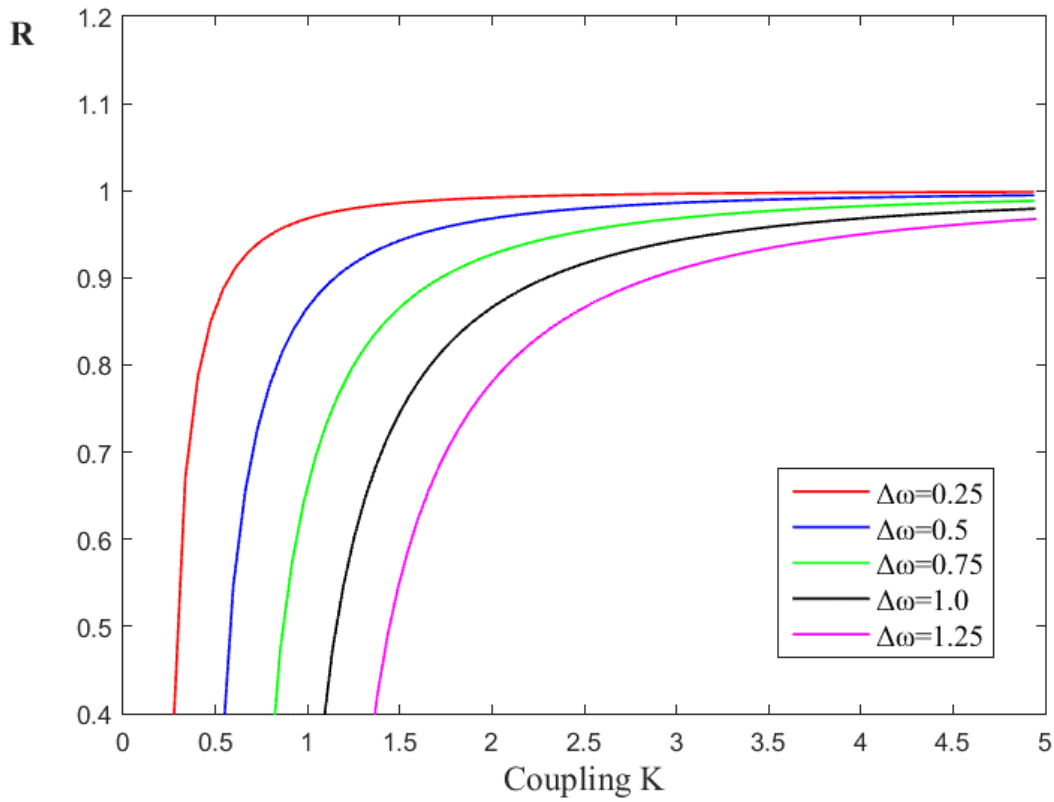
Λόγω των σχέσεων:

$$\begin{aligned} \sin^2 \theta_- + \cos^2 \theta_- &= 1 \\ \Leftrightarrow \left(\frac{\Delta\omega}{k}\right)^2 + \cos^2 \theta_- &= 1 \\ \Leftrightarrow \cos^2 \theta_- &= 1 - \left(\frac{\Delta\omega}{k}\right)^2 \\ \Rightarrow \cos \theta_- &= \sqrt{1 - \left(\frac{\Delta\omega}{k}\right)^2} \end{aligned} \quad (1.24)$$

Οπότε η σχέση (1.21) λόγω και της σχέσης (1.14) γράφεται πλέον ως:

$$\begin{aligned} R &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(1 + \cos \theta_-)} \Leftrightarrow \\ R &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + \sqrt{1 - \left(\frac{\Delta\omega}{k}\right)^2}} \end{aligned} \quad (1.25)$$

Σχεδιάστηκε η παράμετρος συγχρονισμού (coherence)  $R$  συναρτήσει του παράγοντα σύζευξης  $K$  για τις ενδεικτικές τιμές των διαφορών φυσικών συχνοτήτων  $\Delta\omega = 0.25, 0.5, 1, 1.25$ .



Σχήμα-1.3

Ένας βασικός τρόπος για να χαρακτηριστεί η μετάβαση συγχρονισμού είναι να υπολογιστούν οι συχνότητες των συζευγμένων ταλαντωτών και να σχεδιαστεί η διαφορά τους έναντι της μεταβλητής παραμέτρου.

Το γράφημα υποδηλώνει ότι η έναρξη του συγχρονισμού των δύο ταλαντωτών, που εκδηλώνεται με την αύξηση του  $R$ , επιταχύνει με καθυστέρηση, η οποία αυξάνεται αναλογικά με τις τιμές της διαφοράς των φυσικών συχνοτήτων. Αυτό είναι ένα αναμενόμενο χαρακτηριστικό καθώς είναι φυσικό οι ταλαντωτές με μικρότερη διαφορά συχνοτήτων να συμπαρασύρουν νωρίτερα τις συχνότητές τους. Παρατηρούμε ότι η κρίσιμη τιμή της σταθεράς  $K_{cr}$  αυξάνει με την αύξηση της διαφοράς  $\Delta\omega$  αλλά τελικά το σύστημα οδηγείται σε συγχρονισμό  $R = 1$ .

---

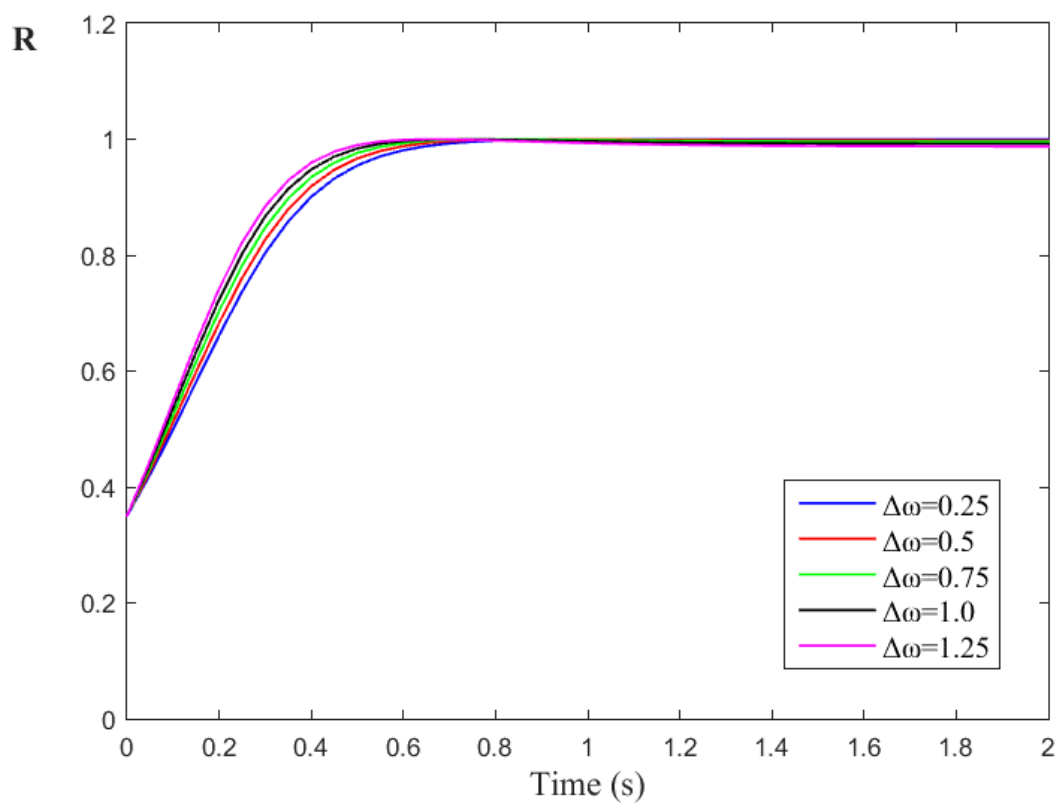
### 1.3.5 Χρόνο-εξαρτώμενη κατάσταση

Μια προσέγγιση που χρησιμοποιήθηκε είναι να σχεδιαστεί ο παράγοντας συγχρονισμού σε διαφορές φυσικές συχνότητες σε αναλογία με το χρόνο. Οι λύσεις ως προς τη χρόνο-εξαρτώμενη κατάσταση προέκυψαν έπειτα από αριθμητική ολοκλήρωση του μοντέλου του Kuramoto για την περίπτωση των δύο qubit στη MATLAB.

Κατά τη διαδικασία αυτή επιλέχθηκε σταθερό  $K$  ως παράγοντας σύζευξης διότι με τέτοιο τρόπο εφαρμόζεται κατάλληλα η μέθοδος *ode45* που χρησιμοποιήθηκε για την λύση του συστήματος εξισώσεων. Επιλέχθηκαν οι αντίστοιχες διαφορές φυσικών συχνοτήτων  $\Delta\omega = 0.25, 0.5, 1, 1.25$  του Σχήματος-1.3 με στόχο να διατηρηθεί ως ένα παγιωμένο πλαίσιο συχνοτήτων και για τις επακόλουθες γραφικές παραστάσεις το οποίο θα επιτρέψει να γίνουν πιο αποτελεσματικές συγκρίσεις.

Η αναζήτηση της κατάστασης στην οποία η αποτύπωση στη γραφική παράσταση για τον παράγοντα συγχρονισμού παραμένει στο ίδιο επίπεδο [plateau] και φτάνοντας στην τιμή 1 παρά την εξέλιξη του χρόνου, ειδικά όταν έπεται αυξητικής τάσης, είναι ένδειξη συγχρονισμού. Παρατηρείται μία μεταβατική κατάσταση για μικρούς χρόνους η οποία γρήγορα οδηγείται σε συγχρονισμό, με το  $R \rightarrow 1$ .

Στο παρακάτω διάγραμμα να σημειωθεί πως η σταθερά σύζευξης  $k$  έχει οριστεί να έχει τιμή  $k=2$ . Αναλογικά εκτελέστηκαν δοκιμές και με διαφορετικές τιμές της σταθεράς σύζευξης αλλά το διάγραμμα διατήρησε την συμπεριφορά του Σχήματος-1.4.



Σχήμα-1.4

---

# 2

## Κβαντομηχανική των qubit

---

### 2. Εισαγωγή

Οι κβαντικοί υπολογιστές αξιοποιούν τις ιδιαιτερότητες της κβαντικής μηχανικής για να εκτελούν υπολογισμούς πιο αποτελεσματικά από ένα συμβατικό υπολογιστή. Το θεμελιώδες χαρακτηριστικό του κβαντικού υπολογιστή είναι ότι χρησιμοποιεί το **qubit** έναντι του **bit** των συμβατικών υπολογιστών. Το **qubit** μπορεί να είναι ένα σωματίδιο όπως ένα ηλεκτρόνιο, με το "*spin up*" να αντιπροσωπεύει την κατάσταση 1, ενώ το "*spin down*" να αντιπροσωπεύει την κατάσταση 0, και τις κβαντικές καταστάσεις που ονομάζονται υπερθέσεις (**superposition**) που περιλαμβάνουν περιστροφή προς τα πάνω και περιστροφή προς τα κάτω ταυτόχρονα.

Η γραμμική άλγεβρα είναι η γλώσσα της κβαντικής πληροφορικής. Ήταν επομένως ζωτικής σημασίας να αναπτυχθεί μια καλή κατανόηση των βασικών μαθηματικών εννοιών στις οποίες βασίζεται η γραμμική άλγεβρα. Ο στόχος αυτής της ενότητας είναι να δημιουργήσει ένα θεμέλιο εισαγωγικών γνώσεων γραμμικής άλγεβρας πάνω στο οποίο οικοδομείται η παρούσα μελέτη των κβαντικών φαινομένων. Περιγράφονται τα διανύσματα που αντιπροσωπεύουν την κβαντική κατάσταση, οι διάφοροι τύποι τελεστών.

---

## 2.1 Διανυσματικός χώρος συμβολισμοί και ιδιότητες

Ο συμβολισμός Ντιράκ είναι ένα σύνολο μαθηματικών συμβόλων που χρησιμοποιούνται για το φορμαλισμό της κβαντομηχανικής. Η βασική υπόθεση της κβαντομηχανικής είναι πως σε κάθε δυναμική κατάσταση αντιστοιχεί ένα διάνυσμα. Τα διανύσματα αυτά ανήκουν σε ένα γραμμικό (διανυσματικό) χώρο απείρων διαστάσεων (**χώρος Χίλμπερτ**). Στην κβαντομηχανική, το οποιοδήποτε φυσικό σύστημα περιγράφεται από μια κυματοσυνάρτηση (συνήθως συμβολίζεται με  $\Psi$ ). Στη μαθηματική περιγραφή χωρίς συμβολισμό Ντιράκ, η κυματοσυνάρτηση είναι συνάρτηση του χώρου και χρόνου οπότε συμβολίζεται ως  $\Psi(\vec{r}, t)$ . Στην κβαντική θεωρία οτιδήποτε υπάρχει ανάμεσα σε  $|\rangle$  θεωρείται: κατάσταση, *vector*, ή *ket* σύμφωνα με το συμβολισμό Ντιράκ. Τα διανύσματα θα συμβολίζονται είτε με παχιά (**bold**) γράμματα (π.χ.  $\alpha$ ) είτε θα ακολουθούμε τον συμβολισμό Ντιράκ  $|\alpha\rangle$  ή  $|\alpha\rangle$  (αν υπάρχουν δίπλα και άλλες εκφράσεις).

Όσον αφορά την άλγεβρα της κβαντικής πληροφορικής, μια σημαντική έννοια είναι ο **χώρος Χίλμπερτ (Hilbert)**, ο οποίος είναι ένας πολύπλοκος διανυσματικός χώρος. Για καλύτερη κατανόηση σημειώνονται βασικές γνώσεις σχετικά με το διανυσματικό χώρο.

**Διανυσματικοί χώροι:** Χώροι που έχουν ως στοιχεία τους διανύσματα (σύνολα διανυσμάτων). Ο πιο οικείος είναι ο  $\mathbf{R}^3$ , δηλαδή ο τρισδιάστατος ευκλείδειος χώρος, καθώς και ο  $\mathbf{R}^2$ , δηλαδή το επίπεδο. Σε έναν τρισδιάστατο χώρο συντεταγμένων χρειαζόμαστε τρεις αριθμούς για να περιγράψουν ένα διάνυσμα. Αυτοί οι τρεις αριθμοί είναι ουσιαστικά προβολές κατά μήκος τριών κατευθύνσεων (ή τριών αξόνων) που καθορίζονται από τρία **ορθοκανονικά** διανύσματα.

**Ορθοκανονικά διανύσματα:** Λέγονται τα ορθογώνια (κάθετα) διανύσματα που έχουν ως μέτρο τη μονάδα. Για τα διανύσματα αυτά ισχύει:

$$\alpha_i \alpha_j = \delta_{ij} \quad (2.1)$$

το οποίο και ισούται με τη μονάδα για  $i = j$  και μηδέν για  $i$  διαφορετικό από το  $j$ . Όπου  $\delta_{ij}$  είναι το σύμβολο του *Kronecker*.

---

Αν ορίσουμε στον  $\mathbf{R}^2$  ένα ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων με μοναδιαία διανύσματα  $\mathbf{e}_1$  και  $\mathbf{e}_2$ , τότε κάθε διάνυσμα  $\mathbf{a}$  του  $\mathbf{R}^2$  μπορεί να προσδιοριστεί ως:

$$\mathbf{a} = \alpha_1 \mathbf{e}_1 + \alpha_2 \mathbf{e}_2 \quad (2.2)$$

γραμμικός συνδυασμός των  $\mathbf{e}_1$  και  $\mathbf{e}_2$ . Οι αριθμοί  $\alpha_1, \alpha_2$  λέγονται συνιστώσες του  $\mathbf{a}$  στο συγκεκριμένο σύστημα συντεταγμένων. Η γραφή ενός διανύσματος μέσω των συνιστωσών του αποτελεί απλώς αναπαράσταση του διανύσματος στο δεδομένο σύστημα συντεταγμένων.

### Χαρακτηριστικές ιδιότητες:

- ❖ Για κάθε διάνυσμα υπάρχει και το αντίθετό του.
- ❖ Υπάρχει ένα μηδενικό στοιχείο.
- ❖ Ο πολλαπλασιασμός με τη μονάδα αφήνει το διάνυσμα αναλλοίωτο.
- ❖ Η πρόσθεση διανυσμάτων είναι αντιμεταθετική και προσεταιριστική.
- ❖ Ο πολλαπλασιασμός διανύσματος με αριθμό είναι επιμεριστικός και ως προς το διάνυσμα και ως προς τον αριθμό. Δηλαδή αν  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  στοιχεία του διανυσματικού χώρου  $S$  και  $\lambda, \mu$  αριθμοί, τότε:

$$\begin{aligned} (\lambda + \mu)\mathbf{a} &= \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{a} \\ \lambda(\mathbf{a} + \mathbf{b}) &= \lambda\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b} \\ (\lambda\mu)\mathbf{a} &= \lambda(\mu\mathbf{a}) \end{aligned} \quad (2.3)$$

- ❖ Αν οι αριθμοί  $\lambda$  και  $\mu$  στις παραπάνω εκφράσεις είναι αποκλειστικά πραγματικοί ο διανυσματικός χώρος  $S$  λέγεται πραγματικός. Αν είναι μιγαδικοί, τότε ο  $S$  λέγεται μιγαδικός.

**Εσωτερικό γινόμενο:** Σε κάθε ζεύγος διανυσμάτων  $\mathbf{a}$  και  $\mathbf{b}$  αντιστοιχίζεται ένας αριθμός ο οποίος δίδεται από τη σχέση:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \theta \quad (2.4)$$

όπου  $\theta$  η γωνία μεταξύ  $\mathbf{a}$  και  $\mathbf{b}$  ο οποίος λέγεται εσωτερικό γινόμενο.



Το **εσωτερικό γινόμενο** των διανυσμάτων,  $\alpha$  και  $\beta$ , είναι ένας αριθμός, ο οποίος συνήθως συμβολίζεται με  $\langle \alpha | \beta \rangle$  και ο οποίος έχει τις εξής ιδιότητες (εξ ορισμού):

$$\langle \alpha | \beta \rangle = \langle \beta | \alpha \rangle^* \quad (2.5)$$

$$\langle \alpha | \lambda \beta + \mu \gamma \rangle = \lambda \langle \alpha | \beta \rangle + \mu \langle \alpha | \gamma \rangle \quad (2.6)$$

(το \* συμβολίζει το συζυγή μιγαδικό)

Το αριστερό διάνυσμα του εσωτερικού γινομένου λέγεται **bra** και το δεξιό **ket** (από το **bracket** = παρένθεση).

Η **νόρμα** ενός διανύσματος ορίζεται ως εξής :

$$\|u\| = (\langle u | u \rangle)^{\frac{1}{2}} \quad (2.7)$$

Ένα διάνυσμα περιγράφεται στο επίπεδο με διάφορους τρόπους. Μπορεί να γραφτεί ως αναπαράσταση με ένα γράμμα και με ένα βέλος, ως ένα μέγεθος πολλαπλασιασμένο με ένα μοναδιαίο διάνυσμα, ως επέκταση σε μια βάση συγκεκριμένων μοναδιαίων διανυσμάτων, ως μήτρα σειράς ή στήλης:

$$\vec{u} = u_x \mathbf{i} + u_y \mathbf{j} \leftrightarrow \begin{bmatrix} u_x & u_y \end{bmatrix} \text{ ή } \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

όπου:

$$\mathbf{i} \leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ ή } \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{j} \leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ ή } \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

Οι πίνακες γραμμών και στηλών εκφράζουν δύο διαφορετικές εκδόσεις ενός διανύσματος. Ορίζεται ως πίνακας στήλης η τυπική αναπαράσταση ενός διανύσματος, ενώ ο πίνακας γραμμής είναι η αναπαράσταση του συζυγούς, ο οποίος διακρίνεται όπως φαίνεται με το σύμβολο<sup>†</sup> (*dagger*):

$$\bar{u} \leftrightarrow \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix}, \quad \bar{u}^\dagger \leftrightarrow [u_x \ u_y] \quad (2.10)$$

Για να ικανοποιείται η συνθήκη στην οποία το εσωτερικό γινόμενο ενός αριθμού με τον εαυτό του να έχει θετικό πρόσημο, όταν οι συνιστώσες είναι σύνθετοι (μιγαδικοί αριθμοί) ο ορισμός  $\langle u|u \rangle \geq 0$  χρειάζεται μια γενίκευση. Συγκεκριμένα πρέπει να συμπεριληφθεί ένα σύνθετο προϊόν σύζευξης με μετατόπιση του πίνακα όταν υπολογίζεται ο συζυγής:

$$\begin{aligned} \bar{u}^\dagger \leftrightarrow [u_x^* \ u_y^*] &\Rightarrow \bar{u}^\dagger \bar{u} \leftrightarrow [u_x^* \ u_y^*] \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix} = \\ &= u_x^* u_x + u_y^* u_y = |u_x|^2 + |u_y|^2 \end{aligned} \quad (2.11)$$

Στο χώρο των διανυσμάτων λειτουργεί ένας τελεστής ταυτότητας, ο οποίος λειτουργεί ως αυτοπροσδιορισμός και ενεργεί σε οποιοδήποτε διάνυσμα ή στο συζυγές του:

$$I = \bar{I} \leftrightarrow I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \bar{u}^\dagger I = \bar{u}^\dagger, \quad I \bar{u} = \bar{u} \quad (2.12)$$

Ο μηδενικός πίνακας ορίζεται ως εξής:

$$0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.13)$$

---

### 2.1.1 Χώρος Hilbert

Τα παραπάνω αφορούν για διανύσματα στο επίπεδο, αλλά φυσικά ισχύουν και για διανύσματα στον τρισδιάστατο χώρο. Οι ίδιοι κανόνες ισχύουν για 4 ή 5 διαστάσεις ή και για άπειρο αριθμό. Αν θέλαμε να αντιπροσωπεύσουμε αυτά τα διανύσματα μονάδας με πίνακες στηλών, η απλούστερη ορθοκανονική **βάση** είναι αυτή:

$$\mathbf{e}_1 \leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix}, \mathbf{e}_2 \leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix}, \dots \mathbf{e}_n \leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \end{bmatrix}, \dots \quad (2.14)$$

Ένας λαμπρός μαθηματικός που ονομάζεται **David Hilbert** επέκτεινε την ιδέα και αντί να τα περιγράψει χρησιμοποιώντας ένα αυθαίρετο διάνυσμα που περιέχει 0 και 1 και χρησιμοποιώντας έναν ακέραιο αριθμό  $n$  συμπεριέλαβε και όλα τα σημεία μεταξύ των ακέραιων αριθμών κάτι που σημαίνει πως περιέγραψε το χώρο με έναν πραγματικό αριθμό  $\alpha$  σε έναν άξονα. Έτσι αντί να χρησιμοποιείται ο παραπάνω συμβολισμός των μοναδιαίων διανυσμάτων, γράφεται ως η θέση του  $\alpha$  ως ένα **ket**. Ενώ ο συζυγής του μοναδιαίου διανύσματος γράφεται ως **bra**:

$$|\alpha\rangle^\dagger = \langle\alpha| \quad (2.15)$$

Μπορούμε να γράψουμε ένα διάνυσμα ως ένα συνδυασμό διανυσμάτων βάσης. Στην κβαντική μηχανική χρησιμοποιούμε ένα φορέα διαστάσεων:

$$\text{Hilbert space vector : } |\Psi\rangle \quad (2.16)$$

## 2.2 Το Qubit

Όπως αναφέρθηκε στην εισαγωγή, η βασική μονάδα επεξεργασίας πληροφοριών που χρησιμοποιείται σε έναν κβαντικό υπολογισμό ονομάζεται **qubit**, το οποίο είναι συντομογραφία του κβαντικού bit. Ένα **qubit** μπορεί να υπάρχει στην κατάσταση  $|0\rangle$  ή στην κατάσταση  $|1\rangle$ , αλλά μπορεί επίσης να υπάρχει σε αυτό που καλείται μια κατάσταση υπέρθεσης (**superposition**

*state*). Αυτή είναι μια κατάσταση που είναι ένας γραμμικός συνδυασμός των καταστάσεων  $|0\rangle$  και  $|1\rangle$ . Εάν ονομάσουμε αυτήν την κατάσταση  $|\Psi\rangle$ , μια κατάσταση υπέρθεσης γράφεται ως:

$$|\Psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle \quad (2.17)$$

### Πλάτος πιθανότητας:

Οι βαθμωτοί συντελεστές  $\alpha, \beta$  που σχετίζονται με τα διανύσματα βάσης ονομάζονται πλάτη πιθανότητας. Διότι στην κβαντική μηχανική δίνουν τις πιθανότητες προβολής της κατάστασης σε κατάσταση βάσης,  $|0\rangle$  και  $|1\rangle$ , όταν πραγματοποιείται μια μέτρηση. Επιβεβαιώνοντας την ερμηνεία της πιθανότητας το άθροισμα των τετραγώνων των απόλυτων τιμών τους πρέπει να είναι ίσο με 1:

$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$$

$$\begin{aligned} |\alpha|^2 &: \text{Δίνει την πιθανότητα να βρίσκεται η } |\Psi\rangle \text{ στην κατάσταση } |0\rangle \\ |\beta|^2 &: \text{Δίνει την πιθανότητα να βρίσκεται η } |\Psi\rangle \text{ στην κατάσταση } |1\rangle \end{aligned} \quad (2.18)$$

Ο κβαντικός συμβολισμός για ένα **ket** που αντιπροσωπεύει ένα διάνυσμα δίδεται ως:

$$|u\rangle = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

όπου:

$$u_1 = \alpha_1 + \beta_1 i$$

και

$$u_2 = \alpha_2 + \beta_2 i$$

Ενώ δύο πολύ βασικά **kets** είναι τα:

---


$$|0\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ και } |1\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

Παρακάτω αναφέρονται μερικές βασικές ιδιότητες του πολλαπλασιασμού και της πρόσθεσης:

$$\alpha|u\rangle = \begin{bmatrix} \alpha u_1 \\ \vdots \\ \alpha u_2 \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

$$\alpha(\beta|u\rangle) = \alpha\beta|u\rangle \quad (2.22)$$

$$\alpha(|u\rangle + |v\rangle) = \alpha|u\rangle + \alpha|v\rangle \quad (2.23)$$

$$(\alpha + \beta)|u\rangle = \alpha|u\rangle + \beta|u\rangle \quad (2.24)$$

$$\alpha(|u\rangle + |v\rangle) = \alpha|u\rangle + \alpha|v\rangle \quad (2.25)$$

Ένα άθροισμα από διανύσματα μπορεί να αναπαρασταθεί ως εξής:

$$|u\rangle + |v\rangle = \begin{bmatrix} u_1 + v_1 \\ \vdots \\ u_n + v_n \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

Το άθροισμα έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:

$$|u\rangle + |v\rangle = |v\rangle + |u\rangle \quad (2.27)$$

$$(|u\rangle + |v\rangle) + |w\rangle = |u\rangle + (|u\rangle + |w\rangle) \quad (2.28)$$

---


$$|u\rangle + 0 = |u\rangle \quad (2.29)$$

Ο (dual vector) φορέας ο οποίος αντιστοιχεί σε ένα **ket**  $|u\rangle$  λαμβάνεται με μεταφορά του διανύσματος στήλης σε διάνυσμα γραμμής και υπολογίζοντας τον συζυγή των περιεχομένων του. Αυτό όπως προαναφέρθηκε ονομάζεται **bra** και ορίζεται ως εξής:

$$\langle u| = |u\rangle^\dagger = [u_1^*, u_2^*, \dots, u_n^*] \quad (2.30)$$

Το **bra** που αντιστοιχεί στο **ket**:

$$\langle 0| = |0\rangle^\dagger = [1^*, 0^*] \quad (2.31)$$

Παράδειγμα:

Για το φορέα  $|u\rangle$  που περιέχει:

$$|u\rangle = \begin{bmatrix} 1-i \\ 1+i \end{bmatrix}$$

Το **ket**  $\langle u|$  υπολογίζεται ως εξής:

$$\begin{aligned} \langle u| &= [(1-i)^*, (1+i)^*] \\ &= \begin{bmatrix} 1+i \\ 1-i \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Ορισμός:

Ένας  $n \times n$  τετραγωνικός μιγαδικός πίνακας  $A$  ονομάζεται **Ερμιτιανός (Hermitian)** αν και μόνο αν ισούται με το σύζυγό-ανάστροφό του. Οι ιδιοτιμές του πίνακα  $A$  είναι πραγματικές:

$$A = A^\dagger \quad (2.32)$$

Η **νόρμα** ενός φορέα (vector) δίδεται ως αντιστοιχία της νόρμας ενός διανύσματος υπολογίζοντας τη ρίζα του εσωτερικού γινομένου του φορέα με τον εαυτό του:

$$\|u\rangle = \sqrt{\langle u|u\rangle} \quad (2.33)$$

Ενώ ένας μοναδιαίος φορέας (unit vector) είναι ο φορέας για τον οποίο η νόρμα του είναι ίση με 1. :

$$\|u\rangle = 1 \quad (2.34)$$

Για τη μετατροπή ενός αυθαίρετου φορέα ο οποίος και συμβολίζεται με  $|\hat{u}\rangle$  σε μοναδιαίο πραγματοποιείται κανονικοποίησή του με τον εξής τρόπο :

$$|\hat{u}\rangle = \frac{|u\rangle}{\|u\rangle} \quad (2.35)$$

## 2.3 Εξωτερικό γινόμενο

Ορίζουμε ένα **εξωτερικό γινόμενο**,  $|u\rangle\langle v|$  ως ένα γραμμικό τελεστή A που κάνει τα εξής:

$$(|u\rangle\langle v|)(|w\rangle) = |u\rangle\langle v|w\rangle = \langle v|w\rangle|u\rangle \quad (2.36)$$

Το αποτέλεσμα αυτού του γραμμικού τελεστή  $|u\rangle\langle v|$  ερμηνεύεται ως δράση στο  $|w\rangle$  είτε ως το αποτέλεσμα του πολλαπλασιασμού του  $|u\rangle$  με το  $\langle v|w\rangle$ .

Σε πίνακες το  $|u\rangle\langle v|$  μπορεί να αναπαρασταθεί ως εξής:

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1^* & v_2^* & \dots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 v_1^* & u_1 v_2^* & \dots & u_1 v_n^* \\ u_2 v_1^* & u_2 v_2^* & & u_2 v_n^* \\ \vdots & & \ddots & \\ u_n v_1^* & u_n v_2^* & \dots & u_n v_n^* \end{bmatrix} \quad (2.37)$$

## 2.4 Προβολικός τελεστής

Ένας πίνακας  $P$  προβάλλει οποιονδήποτε άξονα  $V$  σε έναν νέο άξονα  $V_s$ . Η αναπαράσταση της προβολής γίνεται με το συμβολισμό του εξωτερικού γινομένου. Δεδομένου ενός υποδιαστήματος το οποίο καλύπτεται από ορθοκανονικούς φορείς,  $\{|u_1\rangle, |u_2\rangle, \dots, |u_n\rangle\}$  η προβολή στον διανυσματικό χώρο που παράγουν αυτά τα ορθοκανονικά διανύσματα μπορεί να αναπαρασταθεί ως το άθροισμα των εξωτερικών γινομένων:

$$\begin{aligned} P &= \sum_{i=1}^n |u_i\rangle\langle u_i| \\ &= |u_1\rangle\langle u_1| + |u_2\rangle\langle u_2| + \dots + |u_n\rangle\langle u_n| \end{aligned} \quad (2.38)$$

Κάποια χρήσιμα εξωτερικά γινόμενα, τα οποία χρησιμοποιούνται σε επόμενο στάδιο:

$$|0\rangle\langle 1| = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0^* & 1^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.39)$$

$$|1\rangle\langle 0| = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1^* & 0^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.40)$$

Κάθε πλήρες σύνολο ορθογώνιων προβολέων καθορίζει μια μέτρηση που μπορεί να πραγματοποιηθεί. Για την κατάσταση  $|\Psi\rangle$ , σχέση (2.17), οι προβολικοί τελεστές οι οποίοι αντιστοιχούν στα αποτελέσματα μέτρησης για  $|0\rangle$  και  $|1\rangle$  δίδονται από τους :

$$P_1 = |1\rangle\langle 1| = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0^* & 1^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.41)$$



---


$$P_0 = |0\rangle\langle 0| = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0^* & 1^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.42)$$

Ιδιότητες προβολών:

$$\sum_i |i\rangle\langle i| = I \text{ για κάθε ορθοκανονική βάση } \{|i\rangle\} \quad (2.43)$$

Κάθε συνιστώσα του  $|u\rangle\langle u|$  του  $P$  είναι ερμιτιανή όπως και το ίδιο το  $P$  :

$$P^\dagger = P \quad (2.44)$$

$$P^2 = P \quad (2.45)$$

Όταν η διάσταση του συστήματος είναι  $n$ , και οι αμοιβαία ορθογώνιοι προβολικοί τελεστές  $\{P_1, P_2, P_3, \dots, P_n\}$  και το σύστημα βρίσκεται σε μια κατάσταση  $|\psi\rangle$ , τότε η πιθανότητα να βρεθεί το αποτέλεσμα του νιοστού στοιχείου όταν πραγματοποιείται μια μέτρηση η οποία και λόγω των (2.44) και (2.45) γράφεται ως εξής δίδεται από:

$$\text{Pr}(i) = |P_i|\psi\rangle|^2 = (P_i|\psi\rangle)^\dagger (P_i|\psi\rangle) = \langle\psi|P_i^2|\psi\rangle = \langle\psi|P_i|\psi\rangle \quad (2.46)$$

Στη συνέχεια, ένα παρατηρήσιμο μέγεθος (observable) τελεστών προβολής, το οποίο δηλώνουμε ως  $A$ , με την βοήθεια των ιδιοδιανυσμάτων και των ιδιοτιμών του  $A$  συμβολίζονται με  $|u_i\rangle$ , καθένα από τα οποία έχει ιδιοτιμή  $\alpha_i$ . Η φασματική ανάλυση του  $A$  επιτρέπει να γράφεται ο προβολικός τελεστής ως:

$$A = \sum_{i=1}^n \alpha_i |u_i\rangle\langle u_i| = \sum_{i=1}^n \alpha_i P_i \quad (2.47)$$

όπου ο τελεστής προβολής που αντιστοιχεί στο αποτέλεσμα μέτρησης δίνεται από  $P_i = |u_i\rangle\langle u_i|$ .

Αναλύοντας την κατάσταση του συστήματος  $|\psi\rangle$  στη βάση των ιδιοδιανυσμάτων του  $A$  τότε:

---


$$|\psi\rangle = \sum_{i=1}^n (\langle u_i | \psi \rangle) |u_i\rangle = \sum_{i=1}^n c_i |u_i\rangle \quad (2.48)$$

Εδώ  $c_i = \langle u_i | \psi \rangle$  είναι το πλάτος πιθανότητας για τη λήψη του αποτελέσματος μέτρησης  $\alpha_i$  όταν το σύστημα είναι στην κατάσταση  $|\psi\rangle$ . Η πιθανότητα για τη δεδομένη μέτρηση βρίσκεται με τον υπολογισμό του συντελεστή τετραγώνου αυτής της ποσότητας, δηλαδή:

$$\text{Pr}(i) = |\langle u_i | \psi \rangle|^2 \quad (2.49)$$

Υποθέτοντας πως η κατάσταση είναι κανονικοποιημένη (σχέση 2.35) διαφορετικά απαιτείται διαίρεση με  $\langle \psi | \psi \rangle$ . Το αποτέλεσμα της σχέσης (2.49) ονομάζεται Born Rule.

## 2.5 Unitary Τελεστές-Pauli Πίνακες

Οι Unitary τελεστές έχουν την ιδιότητα να διατηρούν τη νόρμα και είναι αντιστρέψιμοι, συμβολίζονται με  $U$ :

$$U^{-1} = U^\dagger \quad (2.50)$$

$$UU^\dagger = U^\dagger U = I \quad (2.51)$$

Ορίζονται μερικοί πολύ σημαντικοί τελεστές οι οποίοι ονομάζονται πίνακες Pauli. Αναφέρονται με τα γράμματα  $I$  (σχέση 2.12),  $X, Y, Z$ . Χρησιμοποιείται ο συμβολισμός όπου:

$\sigma_1 = \sigma_x = X$ ,  $\sigma_2 = \sigma_y = Y$ , και  $\sigma_3 = \sigma_z = Z$ . Οι πίνακες Pauli ορίζονται ως:

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = |0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0| \quad (2.52)$$

$$Z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = |0\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 1| \quad (2.53)$$

---


$$Y = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \quad (2.54)$$

## 2.6 Ίχνος

Το ίχνος (*trace*) ενός πίνακα  $A$  είναι το άθροισμα των ιδιοτιμών του ή σε γενική περίπτωση των διαγώνιων στοιχείων:

$$\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n \alpha_{ii} \quad (2.55)$$

Επιπλέον, υπάρχουν οι παρακάτω χρήσιμες ιδιότητες:

$$\text{tr}(A + B) = \text{tr}(A) + \text{tr}(B) \quad (2.56)$$

$$\text{tr}(\alpha A + B) = \alpha \text{tr}(A) + \text{tr}(B) \quad (2.57)$$

$$\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA) \quad (2.58)$$

$$\text{tr}(|u\rangle\langle u|) = \langle u|u\rangle \quad (2.59)$$

$$\text{tr}(\alpha A) = \alpha \text{tr}(A) \quad (2.60)$$

$$\text{tr}(UAU^\dagger) = \text{tr}(A) \quad (2.61)$$

$$\text{tr}(U^\dagger AU) = \text{tr}(A) \quad (2.62)$$

$$\text{tr}(A|u\rangle\langle u|) = \langle u|A|u\rangle \text{ εαν το } |u\rangle \text{ είναι unitary} \quad (2.63)$$

Όπως προαναφέρθηκε το ίχνος του  $A$  είναι το άθροισμα των ιδιοτιμών του οπότε λόγω της ιδιότητας (2.59) ισχύει πως:

---


$$\text{tr}(U^\dagger AU) = \text{tr}(A) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix} \quad (2.64)$$

Το συμπέρασμα των σχέσεων (2.63) και (2.46) για την κατάσταση  $|\psi\rangle$  είναι πως το ίχνος μετατρέπει τα εξωτερικά γινόμενα σε εσωτερικά και έτσι η πιθανότητα λήψης μέτρησης γράφεται ως:

$$\text{Pr}(i) = \langle \psi | P_i | \psi \rangle = \text{Tr}(P_i |\psi\rangle \langle \psi|) \quad (2.65)$$

## 2.7 Τανυστικό γινόμενο

Σε ένα τανυστικό (*Tensor Product*) γινόμενο γίνεται ένας συνδυασμός δύο μικρότερων διανυσμάτων για να σχηματίσουν ένα μεγαλύτερο. Τα στοιχεία των μικρότερων διανυσμάτων χωρίζονται, ενώ διατηρούν το βαθμωτό πολλαπλασιασμό και τη γραμμικότητα. Εάν  $\{|u\rangle\}$  και  $\{|v\rangle\}$  είναι οι βάσεις για το  $V$  και  $W$ , τότε  $\{|u\rangle \otimes |v\rangle\}$  δημιουργεί μια βάση για το  $V \otimes W$ . Γράφεται ως:

$$|u\rangle \otimes |v\rangle = |u\rangle |v\rangle = |u, v\rangle = |uv\rangle \quad (2.65)$$

Ονομάζεται και γινόμενο του **Kronecker** και ορίζεται ως :

---


$$\begin{aligned}
A \otimes B &= \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} x & y \\ v & w \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a \cdot B & b \cdot B \\ c \cdot B & d \cdot B \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} ax & ay & bx & by \\ au & aw & bu & bw \\ cx & cy & dx & dy \\ cu & cw & dv & dw \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{2.66}$$

Ιδιότητες του τανυστικού γινομένου:

$$|u\rangle^{\otimes k} = (|u\rangle \otimes \dots \otimes |u\rangle)_k \text{ δηλαδή } k \text{ φορές} \tag{2.67}$$

$$(A \otimes B)^* = A^* \otimes B^* \tag{2.68}$$

$$(A \otimes B)^T = A^T \otimes B^T \text{ όπου } T = \text{transpose (ανάστροφος)} \tag{2.69}$$

$$(A \otimes B)^\dagger = A^\dagger \otimes B^\dagger \tag{2.70}$$

$$|ab\rangle^\dagger = \langle ab| \tag{2.71}$$

$$a(|u, v\rangle) = |au, v\rangle = |u, au\rangle \tag{2.72}$$

$$|u_1 + u_2, u\rangle = |u_1, u\rangle + |u_2, u\rangle \tag{2.73}$$

$$|u, u_1 + u_2\rangle = |u, u_1\rangle + |u, u_2\rangle \tag{2.74}$$

$$|uv\rangle \neq |vu\rangle \tag{2.75}$$

---

Το τανυστικό γινόμενο ακολουθεί τις ιδιότητες των επιμέρους τελεστών. Αυτό σημαίνει πως εάν αυτοί είναι **Ερμιτιανοί**, τότε και το τανυστικό τους γινόμενο θα είναι **Ερμιτιανό**. Ενώ εάν είναι Unitary οι επιμέρους τελεστές, το τανυστικό γινόμενο θα είναι και αυτό Unitary.

Έτσι και σύμφωνα με τη σχέση (2.63)  $|01\rangle$  σημαίνει ότι το πρώτο qubit βρίσκεται στην κατάσταση  $|0\rangle$ , ενώ το δεύτερο **qubit** βρίσκεται στην κατάσταση  $|1\rangle$ . Δηλαδή ουσιαστικά αυτό είναι το τανυστικό γινόμενο σε αυτή την περίπτωση αναλυτικά:

$$|01\rangle = |0\rangle \otimes |1\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ 0 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \times 0 \\ 1 \times 1 \\ 0 \times 0 \\ 0 \times 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.76)$$

---

# 3

## Κβαντική Πληροφορία

---

---

### 3. Πρόλογος

Ο κβαντικός κόσμος είναι αμετάκλητα μικρός κατά συνέπεια είναι αδύνατο να μετρηθεί ένα κβαντικό σύστημα δίχως να επηρεάζεται από τη συσκευή μέτρησης, η οποία είναι επίσης βασισμένη στην κβαντική μηχανική. Ως αποτέλεσμα, δεν υπάρχει τρόπος ακριβούς πρόβλεψης για όλες τις ιδιότητες ενός σωματιδίου. Υπάρχει μια αντιστάθμιση παραμέτρων ένα **trade-off** - εμφανίζονται οι ιδιότητες σε συμπληρωματικά ζεύγη (όπως αποτελούν η θέση και ορμή, η κάθετη και οριζόντια περιστροφή) και αν γνωρίζουμε μια ιδιότητα με υψηλό βαθμό βεβαιότητας, τότε δεν πρέπει να γνωρίζουμε σχεδόν τίποτα για την άλλη ιδιότητα. Αυτή η συμπεριφορά είναι ουσιαστικά τυχαία.

Σε αυτό το κεφάλαιο περιγράφονται φαινόμενα που επηρεάζουν μια κβαντική μέτρηση και είναι σημαντικά για την κβαντική πληροφορική αλλά και ως παράγοντες επίδρασης στη παρούσα εργασία. Παρουσιάζονται έννοιες πιθανότητας στο κβαντικό πεδίο. Γίνεται αναφορά στους πίνακες που αντιπροσωπεύουν τις κβαντικές πύλες που ενεργούν, στους τελεστές προβολής για χειρισμό κβαντικών μετρήσεων, εγκλιματισμός στη θεωρία πιθανότητας σε έννοιες όπως ο τελεστής πυκνότητα πιθανότητας και η μέση τιμή για τον υπολογισμό της **αβεβαιότητας** και τη διασπορά των μετρήσεων, **entanglement** (εναγκαλισμός και συγχρονισμός) και άλλες χρήσιμες έννοιες που χρειάστηκε να μελετηθούν στη πορεία της έρευνας κβαντικών φαινομένων.

Στους συμβατικούς υπολογιστές έχουμε λογικούς τελεστές (πύλες) όπως NOT, OR, AND που ενεργούν σε bits. Το κβαντικό ανάλογο αυτού είναι ένας τελεστής μήτρας που λειτουργεί σε ένα διάνυσμα κατάστασης qubit.

#### 3.1 Κβαντική Μέτρηση

Το **qubit** μετατρέπεται πάντα σε κατάσταση 0 ή 1 όταν αντλείται πληροφορία από αυτό με μια διαδικασία που ονομάζεται κβαντική **μέτρηση**. Ωστόσο, είναι δυνατό να μετακινείται σε άπειρο αριθμό πιθανών καταστάσεων κατά τον υπολογισμό πριν τη μέτρηση. Αντιπροσωπεύονται όλες οι πιθανές καταστάσεις στις οποίες θα μπορούσε να βρίσκεται το **qubit** σε μια σφαίρα όπου όπως φαίνεται στο Σχήμα-3.1 η κατάσταση  $|0\rangle$  βρίσκεται στο βόρειο πόλο και η κατάσταση  $|1\rangle$  βρίσκεται στο νότιο. Τα σημεία στη σφαίρα ισούνται με τις κβαντικές καταστάσεις.



Μια σημαντική διευκρίνιση για την **υπέρθηση** που έχει ήδη αναφερθεί, μαθηματικά το **qubit** είναι πάντα σε υπέρθεση επειδή η κατάστασή του μπορεί να βρίσκεται στους πόλους  $|0\rangle$  ή  $|1\rangle$  ή σε οποιοδήποτε σημείο μεταξύ τους. Εντούτοις, με κάποια ελαφρά κατάχρηση της ορολογίας, αυτό σημαίνει ότι η κατάσταση βρίσκεται σε υπέρθεση όταν δεν είναι  $|0\rangle$  ή  $|1\rangle$ . Εάν η παρούσα κατάσταση του **qubit** δεν είναι σε έναν από τους πόλους, μιλάμε για μια μη ασήμαντη υπέρθεση. Για να μετακινηθεί σε κατάσταση υπέρθεσης αυτό μεταφράζεται ότι η παρούσα κατάσταση μετακινείται σε ένα σημείο στον ισημερινό (*equator*). Με αυτό το σκεπτικό η παρούσα εργασία εξετάζει τα **equatorial qubit**, των οποίων τα χαρακτηριστικά παρουσιάζονται αναλυτικά σε επόμενο εδάφιο και είναι σημαντικό να αναφερθεί ο λόγος αυτής της επιλογής.

Ένας **κβαντικός αλγόριθμος** χρησιμοποιεί **qubit** που μαζί αποτελούν έναν κβαντικό καταχωρητή. Η δραστηριότητά του έχει τα εξής βήματα: ένα **qubit** είναι σε αρχική κατάσταση  $|0\rangle$ . Στη συνέχεια αυτό μετακινείται σε μια κατάσταση υπέρθεσης που μεταφράζεται ως ένα καθορισμένο σημείο στον ισημερινό. Στην πορεία είναι πιθανό να μετακινείται σε άλλη/άλλες καταστάσεις. Όταν βρίσκεται σε υπέρθεση καθορίζονται και μετρούνται οι πιθανότητες  $|0\rangle$  ή  $|1\rangle$ , οι οποίες τελικά όταν χρησιμοποιηθούν, μετατρέπονται σε τιμές 0 ή 1. Μέσω της διαδικασίας της μέτρησης ένα **qubit** αναγκάζεται να εκπέσει από την παρούσα κατάσταση με αποτέλεσμα να προβάλλεται είτε στο  $|0\rangle$  είτε στο  $|1\rangle$ . Αυτοί οι αριθμοί όπως παρατηρήσαμε στο κεφάλαιο-2 σχέση (2.17) ονομάζονται πλάτη των πιθανών αποτελεσμάτων και σχετίζονται με την πιθανότητα κάθε αποτελέσματος, αλλά σε αντίθεση με τις πιθανότητες, τα κβαντικά πλάτη είναι σύνθετοι αριθμοί.

### 3.1.1 Σφαιρικές συντεταγμένες

Θα μπορούσαμε να αντιπροσωπεύσουμε μια κβαντική κατάσταση ως:

$$|\psi\rangle = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)|0\rangle + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{-i\varphi}|1\rangle \quad (3.1)$$

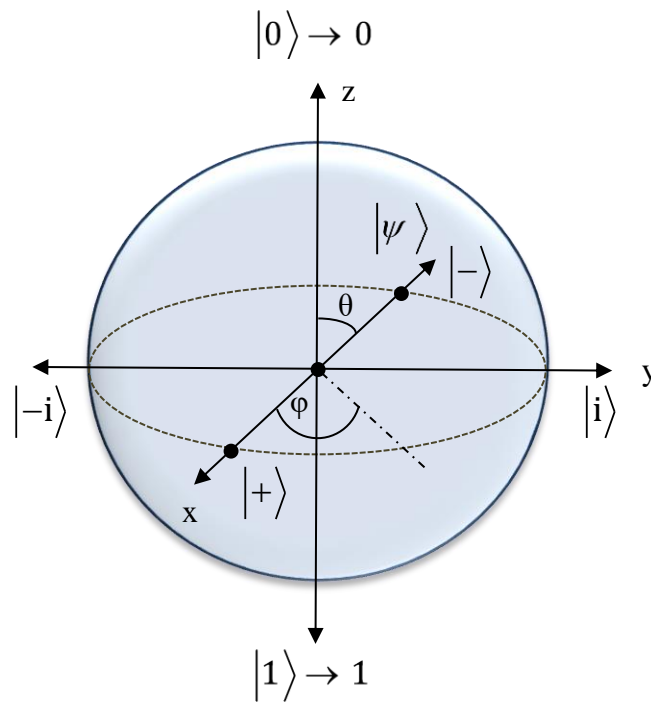
Έχουμε ελευθερία επιλογής του εκθετικού και πολλαπλασιάζω ένα ket με μια φάση διότι το μέτρον ως εκθετικό διάνυσμα είναι το ίδιο.

όπου οι τιμές για  $\theta, \varphi$  κυμαίνονται ως  $0 \leq \theta \leq \pi$  και  $0 \leq \varphi < 2\pi$ . Η γωνία  $\theta$  προκύπτει από τον άξονα z και το  $|\psi\rangle$  και ονομάζεται αζιμουθιακή. Ενώ η γωνία  $\varphi$  είναι αυτή η οποία προκύπτει

με τον άξονα  $y$  στο  $xy$  επίπεδο και ονομάζεται πολική. Δίνοντας ένα σημείο στο επίπεδο επιστρέφουμε στη σχέση (2.17) από την οποία μπορούν να υπολογιστούν τα πλάτη πιθανοτήτων  $\alpha, \beta$  ως:

$$\alpha = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \text{ και } \beta = \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{-\varphi i} \quad (3.2)$$

Υπολογίζοντας τα  $\alpha, \beta$  στη σχέση (3.2) τέτοια ώστε  $\theta = \frac{\pi}{2}$  και  $\varphi = 0$  για το  $\alpha$ , ενώ για το  $\beta$  ισχύει πως  $\theta = \frac{\pi}{2}$  και  $\varphi = \pi$  εισάγεται η ορθοκανονική βάση  $|+\rangle, |-\rangle$ , η οποία και καθορίζεται στο παρακάτω σχήμα πάνω στον άξονα  $X$ :



Σχήμα 3-1

Κάθε κβαντική κατάσταση στον ισημερινό έχει την ίδια πιθανότητα παραγωγής  $|0\rangle$  ή  $|1\rangle$  όταν μετρίεται. Δηλαδή, εάν μια κατάσταση βρίσκεται στον ισημερινό, τότε από την άποψη των συντεταγμένων της  $\alpha, \beta$  ισχύει  $\alpha^2 + \beta^2 = 1$  με  $|\alpha|^2 = |\beta|^2 = 0.5$ . Φυσιολογικά η κατάσταση  $|0\rangle$  έχει πιθανότητα ίση με 1 όταν παράγεται η ίδια κατά τη μέτρηση, ενώ η πιθανότητα είναι ίση με

0 όταν παράγεται η κατάσταση  $|1\rangle$ . Αντίστροφα ισχύει για τις πιθανότητες ως προς την κατάσταση  $|1\rangle$ . Για ένα γεωγραφικό πλάτος σε μια σφαίρα που δεν είναι στον ισημερινό, οι πιθανότητες «κατάπτωσης» στις καταστάσεις 0 ή 1 είναι μεταξύ τους διαφορετικές, αλλά αθροιστικά εξακολουθούν να έχουν ως αποτέλεσμα 1.

Καθώς φαίνεται και στον Πίνακα-3.1 υπάρχουν τρία ζευγάρια βάσης, τα οποία διαχωρίζονται σε τρεις δομικές κατηγορίες:

Βάσεις (αναλυτικά)	Βάσεις (συμβολικά)	Όνομα	Άξονας (σφαίρα)
$ 0\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ και $ 1\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\{ 0\rangle,  1\rangle\}$	Υπολογιστική	z
$ +\rangle = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ και $ -\rangle = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$	$\{ +\rangle,  -\rangle\}$	Hadamard	x
$ i\rangle = \frac{\sqrt{2}}{2} ( 0\rangle + i 1\rangle)$ και $ -i\rangle = \frac{\sqrt{2}}{2} ( 0\rangle - i 1\rangle)$	$\{ i\rangle,  -i\rangle\}$	Κυκλική	y

Πίνακας-3.1

Στην παρούσα εργασία θα χρησιμοποιηθεί ευρέως η βάση  $\{|+\rangle, |-\rangle\}$ , η οποία και θα περιγραφεί αναλυτικά σε επόμενο εδάφιο.

## 3.2 Κβαντικός εναγκαλισμός

Ο κβαντικός εναγκαλισμός (*Quantum Entanglement*) είναι η ικανότητα αλληλεπίδρασης ζευγών σωματιδίων σε οποιαδήποτε απόσταση στιγμιαία. Τα σωματίδια δεν επικοινωνούν ακριβώς, αλλά

υπάρχει μια στατιστική συσχέτιση μεταξύ των αποτελεσμάτων των μετρήσεων σε κάθε σωματίδιο.

Απλουστεύοντας, ο κβαντικός εναγκαλισμός στα **qubit** περιγράφει μια κατάσταση όπου δύο ή περισσότερα **qubit** συσχετίζονται τόσο στενά που δεν μπορούμε να «μάθουμε» κάτι για το ένα χωρίς να γνωρίζουμε για το άλλο.

Μέχρι αυτό το σημείο έχουν αναλυθεί οι πράξεις οι οποίες μπορούν να υλοποιηθούν σε ένα qubit οι οποίες και αναπαρίστανται από **vectors**. Σε ένα κβαντικό σύστημα, που απαρτίζεται από δύο **qubit**, χρησιμοποιείται το τανυστικό γινόμενο, το οποίο έχει ως αποτέλεσμα ένα τετραδιάστατο σύνθετο χώρο τελεστών οι οποίες 4 διαστάσεις προκύπτουν από δύο τελεστές διάστασης 2. Το τανυστικό γινόμενο είναι ο μηχανισμός, ο οποίος επιτρέπει να δημιουργηθούν κβαντικά συστήματα από δύο ή περισσότερα υποσυστήματα.

Για την περαιτέρω κατανόηση εισάγονται μερικές χρήσιμες απλοποιήσεις. Έστω  $q_1$  και  $q_2$  δύο **qubit** με :

$$|\psi\rangle_1 = \alpha_1|0\rangle_1 + \beta_1|1\rangle_1 \text{ με } |\alpha_1|^2 + |\beta_1|^2 = 1 \quad (3.3)$$

$$|\psi\rangle_2 = \alpha_2|0\rangle_2 + \beta_2|1\rangle_2 \text{ με } |\alpha_2|^2 + |\beta_2|^2 = 1 \quad (3.4)$$

με τα τέσσερα **kets** να είναι η βάση στο χώρο  $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$  για τα  $\mathbf{Q}_1$  και  $\mathbf{Q}_2$  :

$$|0\rangle_1 \otimes |0\rangle_2, |0\rangle_1 \otimes |1\rangle_2, |1\rangle_1 \otimes |0\rangle_2 \text{ και } |1\rangle_1 \otimes |1\rangle_2 \quad (3.5)$$

Από τις ιδιότητες του τανυστικού γινομένου (ενότητα 2.1.7) υποθέτουμε πως υπάρχει τανυστικό γινόμενο τέτοιο ώστε:

$$\begin{aligned} |\psi\rangle_1 \otimes |\psi\rangle_2 &= \alpha_1\alpha_2|0\rangle_1 \otimes |0\rangle_2 + \alpha_1\beta_2|0\rangle_1 \otimes |1\rangle_2 \\ &\quad + \beta_1\alpha_2|1\rangle_1 \otimes |0\rangle_2 + \beta_1\beta_2|1\rangle_1 \otimes |1\rangle_2 \end{aligned} \quad (3.6)$$

Συχνά παραλείπεται το σύμβολο  $\otimes$  μεταξύ δυοδιάστατων **ket** βάσης όταν υπολογίζεται το τανυστικό γινόμενο, ενώ μπορούν και να παραληφθούν οι δείκτες για τα **qubit**. Έτσι η (3.6) μπορεί ισοδύναμα να γραφτεί και με τη συνδρομή της ιδιότητας (2.65) ως:

---


$$|\psi\rangle_1 \otimes |\psi\rangle_2 = \alpha_1 \alpha_2 |00\rangle + \alpha_1 \beta_2 |01\rangle + \beta_1 \alpha_2 |10\rangle + \beta_1 \beta_2 |11\rangle \quad (3.7)$$

Χρήσιμα για υπολογισμούς είναι τα εξής:

$$|00\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad |01\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad |10\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad |11\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

Αν τα **qubit**  $Q_1$  και  $Q_2$  είναι σε μια κατάσταση τέτοια ώστε:

$$0|00\rangle + \frac{\sqrt{2}}{2}|01\rangle + \frac{\sqrt{2}}{2}|10\rangle + 0|11\rangle = \frac{\sqrt{2}}{2}|01\rangle + \frac{\sqrt{2}}{2}|10\rangle \quad (3.9)$$

Σε αυτήν την περίπτωση όταν επιχειρείται κάποια μέτρηση αναμένεται τις μισές φορές να προκύπτει η κατάσταση  $|01\rangle$  και τις άλλες μισές η  $|10\rangle$ . Δεν έχουμε ποτέ αποτελέσματα  $|00\rangle$  ή  $|11\rangle$ . Αν τώρα μετρηθεί ξεχωριστά το **qubit**  $Q_2$  στην περίπτωση που προκύπτει η κατάσταση  $|1\rangle$  αυτό έχει δύο πιθανότητες να συμβεί στο σύστημα στις καταστάσεις  $|01\rangle$  ή  $|11\rangle$ . Όμως, όπως αναφέρθηκε δεν έχουμε ποτέ αποτέλεσμα  $|11\rangle$ , κάτι που σημαίνει πως η πιθανότητα να συμβεί αυτό είναι μηδέν! Όποτε όταν γίνει η μέτρηση θα προκύπτει για το  $Q_2$  απαραίτητα το  $|0\rangle$

Πριν από τη μέτρηση, τα **qubit** ήταν σε κατάσταση εναγκαλισμού. Ήταν τόσο στενά συσχετισμένα έτσι ώστε όταν είναι γνωστή η τιμή μέτρησης του ενός, καθορίζει μοναδικά το δεύτερο. Κάτι που δεν μπορεί να γίνει με τα **bits**. Μετά την υπέρθεση, ο εναγκαλισμός είναι ένας από τους βασικούς διαφοροποιητές μεταξύ της κβαντικής και της κλασικής πληροφορικής.

Η εμπλεγμένη (*entangled*) κατάσταση, η οποία και χρησιμοποιήθηκε, είναι γνωστή ως **Bell state** η οποία και ονομάστηκε έτσι από τον Ιρλανδό φυσικό **John Stewart Bell** και υπάρχουν τέσσερις:

$$\begin{aligned}
|\Phi^+\rangle &= \frac{\sqrt{2}}{2}|00\rangle + \frac{\sqrt{2}}{2}|11\rangle & |\Psi^+\rangle &= \frac{\sqrt{2}}{2}|01\rangle + \frac{\sqrt{2}}{2}|10\rangle \\
|\Phi^-\rangle &= \frac{\sqrt{2}}{2}|00\rangle - \frac{\sqrt{2}}{2}|11\rangle & |\Psi^-\rangle &= \frac{\sqrt{2}}{2}|01\rangle - \frac{\sqrt{2}}{2}|10\rangle
\end{aligned} \tag{3.10}$$

Έστω  $|\Psi\rangle$  μια δυσδιάστατη κβαντική κατάσταση στον  $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$ . Η κατάσταση  $|\Psi\rangle$  καλείται **entangled** όταν και μόνο όταν **δεν** μπορεί να γραφτεί ως το τανυστικό γινόμενο δύο μονοδιάστατων **qubit** σε **kets**. Δηλαδή:

$$|\psi\rangle_1 \otimes |\psi\rangle_2 = (\alpha_1|0\rangle_1 + \beta_1|1\rangle_1) \otimes (\alpha_2|0\rangle_2 + \beta_2|1\rangle_2) \tag{3.11}$$

$$|\psi\rangle_1 = \alpha_1|0\rangle_1 + \beta_1|1\rangle_1 \quad \text{και} \quad |\psi\rangle_2 = \alpha_2|0\rangle_2 + \beta_2|1\rangle_2 \tag{3.12}$$

Υποθέτουμε πως  $|\Psi^+\rangle$  είναι μια κατάσταση η οποία δεν είναι εμπλεγμένη (not entangled). Αυτό έχει ως συνέπεια πως υπάρχουν  $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2$  στον  $\mathbb{C}$  τέτοια ώστε:

$$\begin{aligned}
|\Psi^+\rangle &= 0|00\rangle + \frac{\sqrt{2}}{2}|01\rangle + \frac{\sqrt{2}}{2}|10\rangle + 0|11\rangle = \\
&= \alpha_1\alpha_2|00\rangle + \alpha_1\beta_2|01\rangle + \beta_1\alpha_2|10\rangle + \beta_1\beta_2|11\rangle
\end{aligned} \tag{3.13}$$

Κάτι που έχει ως αποτέλεσμα τις σχέσεις:

$$\alpha_1\alpha_2 = 0 \quad \alpha_1\beta_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \beta_1\alpha_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \beta_1\beta_2 = 0 \tag{3.14}$$

Από την πρώτη το συμπέρασμα που προκύπτει είναι: πως είτε το  $\alpha_1$  είτε το  $\alpha_2$  είναι μηδέν.

Υποθέτοντας πως  $\alpha_1 = 0$  προκύπτει πως  $0 = \alpha_1\beta_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ . Καταλήγει σε άτοπο. Τότε το  $\alpha_2$  πρέπει

να είναι μηδέν. Πάλι  $0 = \beta_1\alpha_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$  και καταλήγουμε ξανά σε άτοπο. Το συμπέρασμα είναι πως

δεν υπάρχει τρόπος γραφής της  $|\Psi^+\rangle$  ως τανυστικό γινόμενο δύο 1-qubit **kets** και έτσι είναι μια **entangled** κατάσταση.

Αν μια 2-qubit κβαντική κατάσταση δεν είναι εμπλεγμένη (entangled) τότε είναι διαχωρίσιμη ως τανυστικό γινόμενο 1-qubit καταστάσεων. Προκύπτει, λοιπόν, πως όταν μια κβαντική κατάσταση δεν είναι entangled τότε είναι διαχωρίσιμη (separable).

### 3.3 Πίνακας πυκνότητας

Μια μήτρα πυκνότητας, διαφορετικά ένας τελεστής πυκνότητας, χρησιμοποιείται στην κβαντική θεωρία για να περιγράψει τη στατιστική κατάσταση ενός συστήματος. Ο φορμαλισμός αυτός εισήχθη από τον **John Von Neuman** (1927) και αποτελεί το κβαντικό ανάλογο των κλασικών στατιστικών μηχανισμών. Η ανάγκη αυτή για μια στατιστική περιγραφή μέσω των **πινάκων πυκνότητας** προέκυψε λόγω του ότι είναι αδύνατο να περιγραφεί ένα κβαντομηχανικό σύστημα, το οποίο υπόκειται σε κβαντικές δράσεις όπως είναι η μέτρηση, χρησιμοποιώντας αποκλειστικά καταστάσεις όπως τα *kets*.

Για την  $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$  ορίζεται ως πίνακας πυκνότητας (*density matrix*) της  $|\psi\rangle$  ως:

$$\rho = |\psi\rangle\langle\psi| = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} \otimes [\alpha^\dagger \quad \beta^\dagger] = \begin{bmatrix} \alpha\alpha^\dagger & \alpha\beta^\dagger \\ \beta\alpha^\dagger & \beta\beta^\dagger \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} |\alpha|^2 & \alpha\beta^\dagger \\ \beta\alpha^\dagger & |\beta|^2 \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

Σημειώνεται πως  $\text{Tr}(\rho) = \text{Tr}(|\psi\rangle\langle\psi|) = 1$  και ο πίνακας πυκνότητας  $\rho$  είναι **Ερμιτιανός**.

#### 3.3.1 Μικτές και καθαρές καταστάσεις

Γενικά ένα σύστημα λέγεται ότι βρίσκεται σε **μικτή** κατάσταση, εκτός από την περίπτωση που η κατάσταση δεν μπορεί να μειωθεί σε συνδυασμό άλλων στατιστικών καταστάσεων. Σε αυτήν την περίπτωση λέγεται ότι είναι σε **καθαρή** κατάσταση, η οποία και μπορεί να γραφτεί ως διάνυσμα κατάστασης. Σε πρακτικό επίπεδο όταν χρειάζεται να περιγραφεί μια μικτή κατάσταση είναι ιδιαίτερα βολική η χρήση του πίνακα πυκνότητας όπως και χρησιμοποιήθηκε ανάλογα κατά περίπτωση στην παρούσα εργασία.

Οι **μικτές** καταστάσεις προκύπτουν σε καταστάσεις όπου ο πειραματιστής δε γνωρίζει ποιες συγκεκριμένες καταστάσεις είναι χειριζόμενες μεταβλητές. Γνωστά παραδείγματα είναι ένα σύστημα θερμικής ισορροπίας σε θερμοκρασία πάνω από το απόλυτο μηδέν ή ένα σύστημα με ένα αβέβαιο ή τυχαία μεταβαλλόμενο ιστορικό (οπότε δεν υπάρχει τρόπος εποπτείας του

συστήματος και τότε αυτό θα βρεθεί σε καθαρή κατάσταση). Επιπροσθέτως, εάν ένα κβαντικό σύστημα έχει δύο ή περισσότερα υποσυστήματα τα οποία είναι εμπλεγμένα (*entangled*), τότε κάθε υποσύστημα πρέπει να αντιμετωπίζεται ως μικτή κατάσταση ακόμα και αν το πλήρες σύστημα βρίσκεται σε καθαρή κατάσταση. Κατά συνέπεια, ο πίνακας πυκνότητας είναι ένα κρίσιμο εργαλείο στη θεωρία της κβαντικής αποκρυπτογράφησης, στην οποία η χρονική εξέλιξη ενός συστήματος λαμβάνεται υπόψη με αυτή του περιβάλλοντος.

Ένας πίνακας πυκνότητας για τις καθαρές καταστάσεις δίνεται από τον προβολικό τελεστή (ενότητα -2.1.4). Ενώ για μια μικτή κατάσταση δίδεται ως το άθροισμα των προβολικών τελεστών σταθμισμένο με την πιθανότητα  $p_j$ . Μια μικτή κατάσταση ορίζεται ως :

$$\sum_{j=1}^k p_j |\psi\rangle_j \quad \text{για } 0 \leq p_j \leq 1 \quad (3.16)$$

με πίνακα πυκνότητα εάν  $\rho_j = |\psi_j\rangle\langle\psi_j|$  είναι ο density matrix των καθαρών καταστάσεων τότε για τις μικτές καταστάσεις ισχύει:

$$\rho = \sum_{j=1}^k p_j \rho_j \quad (3.17)$$

Είναι ένας πίνακας που περιγράφει τη στατιστική κατάσταση ενός συστήματος στην κβαντομηχανική. Η πιθανότητα για οποιοδήποτε αποτέλεσμα οποιασδήποτε καλά καθορισμένης μέτρησης σε ένα σύστημα μπορεί να υπολογιστεί από τον πίνακα πυκνότητας για αυτό το σύστημα. Στην πράξη οι όροι πυκνότητας πίνακα και πυκνότητας τελεστή χρησιμοποιούνται συχνά εναλλακτικά. Τόσο η μήτρα όσο και ο τελεστής είναι αυτοπροσδιοριζόμενοι, **Ερμιτιανοί**, θετικοί με **ίχνος** ένα.

### 3.3.2 Αναμενόμενη τιμή

Για τους πίνακες  $M_0 = |0\rangle\langle 0|$  και  $M_1 = |1\rangle\langle 1|$  είναι προβολικοί οπότε και **Ερμιτιανοί**.

Αναλυτικά παρουσιάζεται πως προκύπτει η μέση τιμή, η οποία είναι και ένα από τα μεγέθη που μελετάται στην παρούσα εργασία:



$$\begin{aligned}\langle\psi|M_0|\psi\rangle &= \langle\psi|(|0\rangle\langle 0|)|\psi\rangle = \langle\psi|0\rangle\langle 0|\psi\rangle = [\alpha^\dagger \ \beta^\dagger] \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} [1 \ 0] \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} \\ &= [\alpha^\dagger \ \beta^\dagger] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = [\alpha^\dagger \ \beta^\dagger] \begin{bmatrix} \alpha \\ 0 \end{bmatrix} = |\alpha|^2\end{aligned}$$

Το ίδιο ισχύει και για  $\langle\psi|M_1|\psi\rangle = |\beta|^2$ . Η  $\langle\psi|M_0|\psi\rangle = |\alpha|^2$  είναι η πιθανότητα μετρώντας  $|0\rangle$ , ενώ  $\langle\psi|M_1|\psi\rangle = |\beta|^2$  είναι η πιθανότητας μέτρησης  $|1\rangle$ . Οι ιδιοτιμές για το  $M_0$  είναι 0 και 1 για τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα  $|1\rangle$  και  $|0\rangle$ . Το  $M_1$  έχει ίδιες ιδιοτιμές με τα αντίστροφα ιδιοδιανύσματα. Τα  $M_0$  και  $M_1$  είναι παραδείγματα παρατηρήσιμων ποσοτήτων (observables).

Έστω η υπόθεση ότι ο πίνακας  $A$  είναι παρατηρήσιμος. Ο  $A$  είναι **Ερμιτιανός** πίνακας με ιδιοδιανύσματα φορέων  $|e_1\rangle$  και  $|e_2\rangle$ , τα οποία έχουν αντίστοιχες ιδιοτιμές  $e_1$  και  $e_2$ . Υποθέτουμε πως τα ιδιοδιανύσματα αυτά αποτελούν μια ορθοκανονική βάση στον  $\mathbb{C}^2$ . Εξ ορισμού ισχύει:

$$A|e_1\rangle = e_1|e_1\rangle \quad \text{και} \quad A|e_2\rangle = e_2|e_2\rangle$$

Εάν  $|\psi\rangle = \alpha|e_1\rangle + \beta|e_2\rangle$  και  $\langle\psi|\psi\rangle = 1$ , τότε λόγω των ιδιοτήτων του εσωτερικού γινομένου προκύπτει:

$$\alpha = \langle e_1|\psi\rangle \quad \text{και} \quad \beta = \langle e_2|\psi\rangle$$

και αυτό σημαίνει πως:

$$|\psi\rangle = \langle e_1|\psi\rangle|e_1\rangle + \langle e_2|\psi\rangle|e_2\rangle$$

Όταν γίνεται η μέτρηση για το παρατηρήσιμο μέγεθος  $A$  η πιθανότητα να προκύψει το  $e_1$  είναι  $|\langle e_1|\psi\rangle|^2$ , ενώ η πιθανότητα να προκύψει το  $e_2$  είναι  $|\langle e_2|\psi\rangle|^2$ .

Τελικά η αναμενόμενη τιμή  $\langle A \rangle$  για το  $A$  σε μια κατάσταση  $|\psi\rangle$  δίδεται ως:

$$\langle A \rangle = \left| \langle e_1 | \psi \rangle \right|^2 e_1 + \left| \langle e_2 | \psi \rangle \right|^2 e_2 \quad (3.18)$$

### 3.4 Μερικό Ίχνος

Ο πίνακας πυκνότητας μπορεί να περιγράψει κάθε υποσύστημα ενός μεγαλύτερου κβαντικού συστήματος συμπεριλαμβανομένων και μικτών υποσυστημάτων. Τα υποσυστήματα περιγράφονται από έναν περιθώριο πίνακα πυκνότητας (*reduced density matrix*). Εάν έχουμε δύο υποσυστήματα  $A$  και  $B$  από ένα σύστημα  $C$ , τότε  $A \otimes B = C$ . Οι πίνακες πυκνότητας για τα υποσυστήματα είναι οι  $\rho^A$  και  $\rho^B$ , ενώ ο πίνακας πυκνότητας του συστήματος συμβολίζεται ως  $\rho^{AB}$  ή διαφορετικά  $\rho^C$ . Ορίζονται ως:

$$\rho^A = \text{tr}_B(\rho^C) \quad \text{και} \quad \rho^B = \text{tr}_A(\rho^C) \quad (3.19)$$

Τα ίχνη των  $A$  και  $B$  ονομάζονται μερικά ίχνη (partial traces). Το μερικό ίχνος ορίζεται και σύμφωνα με τη σχέση (2.59):

$$\begin{aligned} \rho^A &= \text{tr}_B(|\alpha_1\rangle\langle\alpha_2| \otimes |\beta_1\rangle\langle\beta_2|) = |\alpha_1\rangle\langle\alpha_2| \text{tr}(|\beta_1\rangle\langle\beta_2|) \\ &= |\alpha_1\rangle\langle\alpha_2| \end{aligned} \quad (3.20)$$

Παραπάνω αναφέρθηκε η διαφορά μεταξύ καθαρών και μικτών καταστάσεων. Υπάρχει ένας τρόπος επιβεβαίωσης και προσδιορισμού μιας κατάστασης μεταξύ μικτής και καθαρής και αυτός είναι ο υπολογισμός του ίχνους της κατάστασης, αν αυτό έχει ως αποτέλεσμα το ίχνος του τετραγώνου του πίνακα πυκνότητας να είναι μικρότερο του ένα  $\text{tr}(\rho^2) < 1$ , τότε η κατάσταση αυτή είναι μικτή, διαφορετικά πρόκειται για μια καθαρή κατάσταση  $\text{tr}(\rho^2) = 1$ .

Μια πολύ σημαντική εφαρμογή του πίνακα πυκνότητας είναι στο χαρακτηρισμό σύνθετων συστημάτων που αποτελούνται από δύο ή περισσότερα επιμέρους συστήματα. Κάτι που ακριβώς συμβαίνει στην περίπτωση του κβαντικού εναγκαλισμού που όπως προαναφέρθηκε τα συστήματα είναι εμπλεγμένα μεταξύ τους. Η πλήρης κατάσταση του συστήματος περιέχει πληροφορίες και για τα δύο υποσυστήματα, αλλά δύο παρατηρητές στα δύο υποσυστήματα, όπως συνηθίζεται να λέγεται η Αλίκη και ο Μπομπ, δυο παρατηρητές που μπορεί να βρίσκονται ο ένας πολύ μακριά

---

από τον άλλον γνωρίζουν μονάχα για το ήμισυ του συστήματος. Από το μερικό ίχνος και το περιθώριο πίνακα πυκνότητας εξυπηρετείται, λοιπόν, η ανάγκη να αντιπροσωπευτεί μόνο ότι μπορεί να γνωρίζει ο ένας παρατηρητής ( για παράδειγμα το υποσύστημα που «βλέπει μονάχα» η Αλίκη) . Αυτή, λοιπόν, την ιδιότητα εκμεταλλευόμαστε και στην παρούσα εργασία ώστε να γίνει η εκτίμηση για την περίπτωση των qubit τα οποία είναι εμπλεγμένα μεταξύ τους.

### 3.5 Εντροπία Shannon

Ο **Shannon** απέδειξε ότι υπάρχει ένα ορισμένο όριο στην ποσότητα μιας πληροφορίας και στη δυνατότητα αυτής να συμπιεστεί. Η εντροπία κατά τον Shannon συμβολίζεται ως  $H(S)$  και αποτελεί τον ελάχιστο αριθμό των *bit* που απαιτούνται για τη μετάδοση ενός μηνύματος. Για μια πηγή  $S$  η εντροπία σχετίζεται με το μικρότερο μέσο μήκος κωδικοποίησης  $L_{\min}(S)$  ως:

$$H(S) \leq L_{\min}(S) \leq H(S) + 1 \quad (3.21)$$

Μπορεί να υπολογιστεί για μια συγκεκριμένη κατανομή πηγής μετρημένη σε bits από :

$$H(X) = -\sum_i p_{r_i} \log_2 p_{r_i} \quad (3.22)$$

Ο λογάριθμος βάσης 2 σημαίνει ότι η εντροπία Shannon υπολογίζεται σε bits. Η ποσότητα  $p_{r_i}$  αντιστοιχεί σε μια μέτρηση πιθανότητας (δηλαδή η συχνότητα με την οποία εκπέμπεται) για ένα σύμβολο που δημιουργείται από την πηγή και το άθροισμα είναι ένα άθροισμα όλων των συμβόλων τα οποία δημιουργούνται από τη πηγή.

Θέτοντας ένα παράδειγμα κατά το οποίο επιχειρείται μετάδοση συμβολοσειράς  $\{A,B,C,D,E\}$  με ξεχωριστές πιθανότητες εμφάνισης ώστε να γίνει περισσότερο κατανοητή η έννοια της εντροπίας. Η ελάχιστη εντροπία πραγματοποιείται όταν η πηγή πληροφοριών παράγει ένα μόνο γράμμα συνεχώς, αυτό έχει ως επακόλουθο πιθανότητα ίση με 1. Η μέγιστη εντροπία πραγματοποιείται όταν δεν υπάρχουν πληροφορίες για την κατανομή πιθανότητας της συμβολοσειράς (δηλαδή όλα τα σύμβολα είναι εξίσου πιθανό να προκύψουν).

Μια ειδική περίπτωση της εντροπίας είναι η δυαδική εντροπία όπου η πηγή έχει μόνο δύο σύμβολα με πιθανότητες  $p$  και  $1-p$ , όπως ένα μεροληπτικό νόμισμα. Σημειώνεται ότι μια δίκαιη ρίψη νομισμάτων έχει μέγιστη εντροπία ενός bit, ενώ ένα σταθμισμένο νόμισμα που εμφανίζεται πάντα

ως κορώνα ή γράμματα έχει ελάχιστη εντροπία 0 bit. Σε αντιστοιχία υιοθετείται η βασική ιδέα της εντροπίας όταν πλέον έχουμε να κάνουμε με κβαντικές καταστάσεις.

### 3.6 Εντροπία Von Neumann

Το κβαντικό ανάλογο για την εντροπία του **Shannon** είναι η εντροπία **Von Neumann** η οποία και εκφράζει το καλύτερο δυνατό ρυθμό μετάδοσης δεδομένων και συμβολίζεται με  $S(\rho)$  όπου  $\rho$  είναι ο πίνακας πυκνότητας που εκφράζει τις κατανομές πιθανότητας για την κλασική εντροπία. Ο πίνακας πυκνότητας κατέχει ισοδύναμες πληροφορίες για την κβαντική κατάσταση  $|\psi\rangle$ , οι οποίες μπορούν να σχηματιστούν στον πίνακα πυκνότητας  $\rho$  ως εναλλακτική της κατάστασης  $|\psi\rangle$  και απλοποιούν την περίπτωση. Ορίζεται ως:

$$S(\rho) = -\text{tr}(\rho \log_2 \rho) \quad (3.23)$$

Η **αβεβαιότητα** (uncertainty) μιας κβαντικής κατάστασης μπορεί να καθοριστεί πριν από κάποια μέτρηση χρησιμοποιώντας το κριτήριο της εντροπίας, δεδομένου ενός χώρου **Hilbert** διάστασης  $d$  τότε:

$$0 \leq S(\rho) \leq \log_2 d \quad (3.24)$$

Με αυτό το κριτήριο της εντροπίας Von Neumann είναι δυνατό να καθοριστεί πόσο εμπλεγμένη είναι μια κατάσταση όπως αντίστοιχα και για συμπίεση δεδομένων κάτι που, όμως, δε θα μελετηθεί στην παρούσα εργασία. Χρήσιμες ιδιότητες :

$$\rho_A = \text{tr}_B(\rho_{AB}) \quad \text{και} \quad \rho_B = \text{tr}_A(\rho_{AB}) \quad (3.25)$$

και λόγω ιδιοτήτων που παρουσιάστηκαν στο εδάφιο για το ίχνος:

$$\rho_{AB} = \rho_A \otimes \rho_B \quad (3.26)$$

Η εντροπία ενός απομονωμένου συστήματος αυξάνεται πάντα μέχρι το σύστημα να φθάσει στη θερμική ισορροπία (δηλαδή όλα τα μέρη του συστήματος βρίσκονται στην ίδια θερμοκρασία). Η εντροπία είναι η ποσότητα διαταραχής σε ένα σύστημα.

---

### 3.7 Γραμμική Εντροπία

Η γραμμική εντροπία είναι ένας τρόπος υπολογισμού και διάκρισης μιας κβαντικής κατάστασης σε μικτή ή καθαρή. Το κύριο χαρακτηριστικό του είναι ότι είναι εύκολο να υπολογιστεί. Ορίζεται ως:

$$S_L = 1 - \text{Tr}(\rho^2)$$

όπου  $\rho$  είναι ο πίνακας πυκνότητας της κατάστασης. Η γραμμική εντροπία μπορεί να κυμαίνεται μεταξύ μηδέν, που αντιστοιχεί σε μια εντελώς καθαρή κατάσταση και  $\left(1 - \frac{1}{d}\right)$  που αντιστοιχεί σε μια πλήρως μικτή κατάσταση. Η ποσότητα  $d$  περιγράφει την διάσταση του πίνακα πυκνότητας.

Η γραμμική εντροπία επιτυγχάνεται προσεγγίζοντας τον όρο  $\ln \rho = \ln(1 - (1 - \rho))$  της εντροπίας Neumann  $S = -\text{Tr}(\rho \ln \rho)$  με τον πρώτο όρο της σειράς Mercator σε μια πλήρη κατάσταση για την οποία ισχύει  $\rho = \rho^2$ .

$$-\left[\ln \rho\right] = \left[1 - \rho\right] + \left[\left(1 - \rho\right)^2\right]/2 + \left[\left(1 - \rho\right)^3\right]/3 + \dots$$

### 3.8 Κβαντικά κυκλώματα

Όταν σε μια κβαντική κατάσταση, που αντιπροσωπεύει ένα ή περισσότερα qubit, εφαρμοστεί μια σειρά ενοποιημένων τελεστών (*unitary*), αυτό που δημιουργείται είναι ένα κβαντικό κύκλωμα. Οι τελεστές αυτοί αποτελούν τις κβαντικές πύλες, οι οποίες δρουν στα qubit κατά αναλογία της δράσης των λογικών πυλών σε ένα συμβατικό κύκλωμα.

Όπως, λοιπόν, ακριβώς ένα qubit μπορεί να αναπαρασταθεί από ένα διάνυσμα στήλης, έτσι και μια κβαντική πύλη που δρα σε ένα qubit μπορεί να αναπαρασταθεί από έναν  $2 \times 2$  πίνακα. Ένας σημαντικός περιορισμός που πρέπει να ικανοποιείται είναι πως οι πίνακες θα πρέπει να είναι ενοποιημένοι και να ικανοποιούν την παρακάτω συνθήκη ώστε να είναι κανονικοποιημένοι:

$$U^\dagger U = I$$

---

### 3.8.1 Κβαντικές πύλες

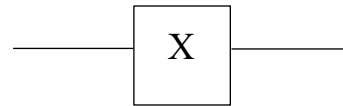
#### Κβαντική πύλη I:

Είναι η ταυτοτική πύλη, η οποία αποδίδει ακριβώς την είσοδο του κυκλώματος στην έξοδο:

$$\sigma_0 = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.27)$$

#### Η πύλη X:

Η πύλη X είναι μια κβαντική πύλη ανάλογη της λογικής πύλης NOT. Και αντιστοιχεί στον συντελεστή Pauli  $\sigma_1$



$$\sigma_1 = \sigma_X = X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.28)$$

Για παράδειγμα για την παρακάτω είσοδο:

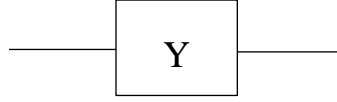
$$\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle \rightarrow X \rightarrow \beta|0\rangle + \alpha|1\rangle$$

Στα πλαίσια της σφαίρας, η πύλη X αναστρέφει κατά  $\pi$  πάνω στον X άξονα. Οπότε δεν αντιστρέφονται μονάχα οι πόλοι αλλά και σημεία που για παράδειγμα βρίσκονται στο νότιο ημισφαίριο «μετακινούνται» στο βόρειο και το ανάποδο.

#### Η πύλη Y:

Η πύλη Y αναστρέφει κατά  $\pi$  γύρω από τον άξονα y στη σφαίρα. Ταυτόχρονα δημιουργεί εναλλαγή των bit αλλά και αναστροφή φάσης.

Συμβολίζεται ως:



$$\sigma_2 = \sigma_Y = Y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad (3.29)$$

και έχει την εξής δράση:  $|0\rangle \rightarrow Y \rightarrow i|1\rangle$  και για  $|1\rangle \rightarrow Y \rightarrow -i|0\rangle$

Για παράδειγμα για την παρακάτω είσοδο, η έξοδος θα είναι:

$$\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle \rightarrow Y \rightarrow -\beta i|0\rangle + \alpha i|1\rangle$$

### **Η πύλη Z:**

Αυτή η πύλη έχει την ιδιότητα να αλλάζει τη σχετική φάση κατά έναν παράγοντα  $-1$ . Στα πλαίσια της σφαίρας περιστρέφει κατά  $\pi$  στον άξονα **Z**. Η πύλη εναλλάσσει τις καταστάσεις  $|+\rangle$  και  $|-\rangle$  όπως και τις καταστάσεις  $|i\rangle$  και  $|-i\rangle$  για αυτό και καλείται υπό τον όρο **phase-flip**.

Αντιστοιχεί στο συντελεστή:

$$\sigma_3 = \sigma_z = Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (3.30)$$

Δίδεται το παρακάτω παράδειγμα:

$$|0\rangle \rightarrow Z \rightarrow |0\rangle \quad \text{και} \quad |1\rangle \rightarrow Z \rightarrow |-1\rangle$$

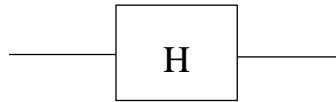
Δηλαδή για την είσοδο το αποτέλεσμα θα είναι:

$$\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle \rightarrow Z \rightarrow \alpha|0\rangle - \beta|1\rangle$$

---

### 3.8.2 Πύλες ενός και περισσοτέρων qubit

Η Hadamard πύλη είναι μια βασική κβαντική πύλη, η οποία χρησιμοποιείται συχνά στην παρούσα εργασία. Επιτρέπει τη μεταφορά μακριά από τους πόλους στη σφαίρα και επιφέρει την υπέρθεση για τις καταστάσεις  $|0\rangle$  και  $|1\rangle$ . Αρκετές φορές αναφέρεται ως η τετραγωνική ρίζα της πύλης NOT. Η πύλη **Hadamard** είναι ουσιαστικά η αλλαγή βάσης από τις καταστάσεις  $|0\rangle$  και  $|1\rangle$  στις  $|+\rangle$  και  $|-\rangle$ . Συμβολίζεται ως:



$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \sqrt{\frac{2}{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad (3.31)$$

Η πύλη Hadamard για τις βασικές εισόδους έχει το εξής επακόλουθο:

$$|0\rangle \rightarrow H \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$$

$$|1\rangle \rightarrow H \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)$$

Ενώ για την γνώριμη κατάσταση  $|\psi\rangle$  όταν δράσει η πύλη **Hadamard**, η είσοδος καταλήγει στην παρακάτω έξοδο:

$$\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle \rightarrow H \rightarrow \alpha \left( \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} \right) + \beta \left( \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} \right)$$



---

---

# 4

## Μελέτη φαινομένων κβαντικού συγχρονισμού

---

---

## 4. Πρόλογος

Σε αυτό το κεφάλαιο ο αρχικός στόχος είναι η εναρμόνιση του αναγνώστη με την εφαρμογή των εισαγωγικών εννοιών και η κατανόηση σε βαθύτερο πλαίσιο των ιδιοτήτων που παρουσιάστηκαν στα αρχικά κεφάλαια στα οποία γίνονται οι κατάλληλες παραπομπές. Επεξεργάζονται περαιτέρω τα **equatorial qubit** και αναφέρονται οι ιδιότητες και τα βασικά τους χαρακτηριστικά.

Η μελέτη βασίζεται στο μοντέλο του **Kuramoto** με 2 **equatorial qubit**, τα οποία και εξετάζονται στο φαινόμενο του συγχρονισμού. Η βασική ιδέα εμπεριέχει την παρατήρηση του συγχρονισμού στο χρόνο και πως και αν επηρεάζει κατά την εξέλιξή του, ενώ σημαντικό κομμάτι καταλαμβάνει και η ανάλυση σε στατικό χρόνο κατά τον οποίο ο βασικός παράγοντας είναι αυτός της σύζευξης μεταξύ των 2 **qubit**.

Σημαντική συνεισφορά στο κεφάλαιο αυτό επιτελεί η συσχέτιση των εξισώσεων του κλασσικού συγχρονισμού βλ: σχέση (1.4) και σχέση (1.7) με τις αντίστοιχες στη μελέτη των φαινομένων στο κβαντικό συγχρονισμό κάτι που παρουσιάζεται και σχηματικά.

Γίνεται μια εικονογραφημένη ανασκόπηση του φαινομένου του συγχρονισμού με αρχική βάση τα **qubit** στον ισημερινό παρουσιάζοντας σε γραφήματα την αναμενόμενη τιμή συγχρονισμού, αλλά και τη διασπορά αυτής και πως ακριβώς επιδρά στο συγχρονισμό ο χρόνος και ο παράγοντας σύζευξης. Με τη διασπορά τιμών ελέγχεται η αβεβαιότητα του συστήματος, η οποία επιφέρει χρήσιμα συμπεράσματα. Σχεδιάστηκαν γραφήματα, τα οποία φέρουν ενδεικτικές τιμές της αναντιστοιχίας των συχνοτήτων των 2 **qubit**.

### 4.1 Τα Qubit στον ισημερινό-Equatorial Qubit

Επιλέχθηκε η μελέτη να επικεντρωθεί αρχικά στα **qubit** που δρουν σύμφωνα και με την αποτύπωση μιας κόνης σφαίρας ακτίνας 1 στον ισημερινό (**equatorial qubit**), διότι παρουσιάζουν ιδιότητες οι οποίες βοηθούν στην εξαγωγή συμπερασμάτων, όπως αναφέρθηκε στην ενότητα(3.1). Αρχικά θα πρέπει να οριστεί η βάση, η οποία και χρησιμοποιήθηκε ευρέως στην παρούσα εργασία και παρουσιάστηκε πρώτα στον Πίνακα-3.1. Αυτή ορίζεται ως:

---


$$|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad |-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (4.1)$$

Τα **equatorial qubit** ορίζονται ως:

$$|\theta_k +\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{i\theta_k} \\ 1 \end{pmatrix} \quad \mu\epsilon \ k=1,2 \quad (4.2)$$

$$|\theta_k -\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -e^{-i\theta_k} \end{pmatrix} \quad \mu\epsilon \ k=1,2 \quad (4.3)$$

Η **νόρμα** διαμορφώνεται ως εξής. Αρχικά υπολογίζεται το εσωτερικό γινόμενο σύμφωνα με τις ιδιότητες της ενότητας (2.1) ως:

$$\langle \theta_k + | \theta_k + \rangle = \begin{pmatrix} \frac{e^{i\theta_k}}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{e^{i\theta_k}}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = 1$$

Υπολογίζοντας τη ρίζα καταλήγει πως το μέτρο είναι :  $\| |\theta_k +\rangle \| = \sqrt{\langle \theta_k + | \theta_k + \rangle} = 1$  Ενώ μια σημαντική ιδιότητα αποδεικνύει πως:

---


$$\langle \theta_k + | \theta_k - \rangle = \begin{pmatrix} \frac{e^{-i\theta_k}}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -e^{-i\theta_k} \end{pmatrix} = \frac{e^{-i\theta_k}}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \left( -\frac{e^{-i\theta_k}}{\sqrt{2}} \right) = 0$$

**Απόδειξη ιδιότητας**  $|\theta_k + \rangle \langle \theta_k +| + |\theta_k - \rangle \langle \theta_k -| = \mathbf{I}$ :

$$|\theta_k + \rangle \langle \theta_k +| = \begin{pmatrix} \frac{e^{i\theta_k}}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{e^{-i\theta_k}}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{e^{i\theta_k}}{2} \\ \frac{e^{-i\theta_k}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$|\theta_k - \rangle \langle \theta_k -| = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-e^{-i\theta_k}}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-e^{i\theta_k}}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{e^{i\theta_k}}{2} \\ \frac{-e^{-i\theta_k}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Αθροίζοντας κατά μέλη τις δυο σχέσεις καταλήγουμε στον ταυτοτικό πίνακα  $\mathbf{I}$ .

Ορίζονται ο ενοποιημένος τελεστής  $U_k = e^{i\theta_k P_1}$ , ο οποίος λόγω της σχέσης του προβολικού τελεστή (2.41), αλλά και της ιδιότητας του εκθετικού διαγώνιου πίνακα, ισούται με:

$$U_{1k} = e^{i\theta_k P_1} = e^{i\theta_k \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} e^0 & 0 \\ 0 & e^{i\theta_k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\theta_k} \end{pmatrix}$$

Ενώ κατά την ίδια λογική ο **Ερμιτιανός** συζυγής ισούται με:

---


$$U_{1k}^\dagger = e^{-i\theta_k P_1} = e^{-i\theta_k \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} e^0 & 0 \\ 0 & e^{-i\theta_k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-i\theta_k} \end{pmatrix}$$

Ο ενοποιημένος τελεστής  $U_{0k}$  ισούται με:

$$U_{0k} = e^{i\theta_k P_0} = \begin{pmatrix} e^{i\theta_k} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Σημειώνεται ακόμα πως  $U_{0k} U_{1k} = e^{i\theta_k} I$ .

Εισάγονται οι καταστάσεις  $|\theta_k +\rangle, |\theta_k -\rangle$  σύμφωνα με τους ενοποιημένους τελεστές ως εξής:

$$|\theta_k +\rangle = U_{0k} |+\rangle = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\theta_k} \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ e^{i\theta_k} \end{pmatrix}$$

Το οποίο μπορεί να περιγραφεί με πιο γενικό τρόπο ως:

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} (e^{i0\theta_k} |0\rangle + e^{i\theta_k} |1\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( e^0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + e^{i\theta_k} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

(αριθμός \* διάνυσμα)

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + e^{i\theta_k} \begin{pmatrix} 0 \\ e^{i\theta_k} \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ e^{i\theta_k} \end{pmatrix}$$

---

Αντίστοιχα αποδεικνύεται πως:

$$|\theta_k -\rangle = U_{1k} |-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{\alpha=0}^1 e^{-i\alpha\theta_k} |\alpha\rangle$$

Το διμερές σύστημα (**factorized bipartite states**) τέτοιων καταστάσεων, το οποίο μπορεί να περιγραφεί με το τανυστικό γινόμενο, γράφεται ως:

$$\begin{aligned} |\theta_k +\rangle \otimes |\theta_\lambda +\rangle &= U_{1k} |+\rangle \otimes U_{1\lambda} |+\rangle = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\theta_k} \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\theta_\lambda} \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ e^{i\theta_k} \end{pmatrix} \otimes \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ e^{i\theta_\lambda} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ e^{i\theta_k} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ e^{i\theta_\lambda} \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ e^{i\theta_k} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 \\ e^{i\theta_\lambda} \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ e^{i\theta_\lambda} \\ e^{i\theta_k} \\ e^{i(\theta_k + \theta_\lambda)} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Υπό τη μορφή αθροίσματος γράφεται ως:

$$|\theta_k +\rangle \otimes |\theta_\lambda +\rangle = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=0}^1 \sum_{\beta=0}^1 e^{i(\alpha\theta_k + \beta\theta_\lambda)} |\alpha\rangle \otimes |\beta\rangle =$$

---


$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{i(0\theta_k + 0\theta_\lambda)} |0\rangle \otimes |0\rangle + e^{i(0\theta_k + 1\theta_\lambda)} |0\rangle \otimes |1\rangle + \\ + e^{i(1\theta_k + 0\theta_\lambda)} |1\rangle \otimes |0\rangle + e^{i(1\theta_k + 1\theta_\lambda)} |1\rangle \otimes |1\rangle \end{pmatrix} = \\
&= \frac{1}{2} \left[ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + e^{i\theta_\lambda} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + e^{i\theta_k} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + e^{i(\theta_k + \theta_\lambda)} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] = \\
&= \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + e^{i\theta_\lambda} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + e^{i\theta_k} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + e^{i(\theta_k + \theta_\lambda)} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ e^{i\theta_\lambda} \\ e^{i\theta_k} \\ e^{i(\theta_k + \theta_\lambda)} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Μπορεί να γραφτεί και ως:

$$|\theta_k + \rangle \otimes |\theta_\lambda + \rangle = (e^{i\theta_k P_1} \otimes \mathbf{I} + \mathbf{I} \otimes e^{i\theta_\lambda P_1}) |+\rangle \otimes |+\rangle$$

Οι πίνακες πυκνότητας για τις καταστάσεις  $|\theta_k + \rangle, |\theta_k - \rangle$  δίδονται ως:

$$\rho(\theta_k +) = |\theta_k + \rangle \langle \theta_k +| = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{i\theta_k} \\ 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{i\theta_k} \\ 1 \end{pmatrix}^\dagger = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & e^{i\theta_k} \\ e^{-i\theta_k} & 1 \end{pmatrix} \quad (4.4)$$

---


$$\rho(\theta_k -) = |\theta_k -\rangle \langle \theta_k -| = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -e^{-i\theta_k} \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -e^{-i\theta_k} \end{pmatrix}^\dagger = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -e^{-i\theta_k} \\ -e^{i\theta_k} & 1 \end{pmatrix} \quad (4.5)$$

Ορίζεται το διμερές σύστημα δύο qubit με τις εμπλεγμένες (entangled) καταστάσεις  $\theta_1, \theta_2$ :

$$\begin{aligned} |\theta_{12}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle \otimes |\theta_1\rangle + |1\rangle \otimes |\theta_2\rangle) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} |\theta_1+\rangle \\ |\theta_2+\rangle \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e \\ |\theta_2+\rangle \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} |\theta_1+\rangle \\ |\theta_2+\rangle \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{i\theta_1} \\ 1 \\ e^{i\theta_2} \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.6)$$

όπου  $\| |\theta_{12}\rangle \| = 1$

## 4.2 Η κβαντική πύλη εναλλαγής (SWAP)

Έχοντας δυο qubit της μορφής:

$$|\psi\rangle_1 = \alpha_1 |0\rangle_1 + \beta_1 |0\rangle_1 \quad \text{και} \quad |\psi\rangle_2 = \alpha_2 |0\rangle_2 + \beta_2 |0\rangle_2$$

Το τανυστικό γινόμενο σε αυτήν την περίπτωση προκύπτει ως:

$$|\psi\rangle_1 \otimes |\psi\rangle_2 = \alpha_1 \alpha_2 |00\rangle + \alpha_1 \beta_2 |01\rangle + \beta_1 \alpha_2 |01\rangle + \beta_1 \beta_2 |11\rangle$$

Αν πάρουμε το τανυστικό γινόμενο με την αντίστροφη σειρά προκύπτει:



---


$$|\psi\rangle_2 \otimes |\psi\rangle_1 = \alpha_2 \alpha_1 |00\rangle + \alpha_2 \beta_1 |01\rangle + \beta_2 \alpha_1 |10\rangle + \beta_2 \beta_1 |11\rangle$$

Παρατηρείται πως ο πρώτος και ο τέταρτος όρος είναι ίδιοι, ενώ οι μεσαίοι όροι, ο δεύτερος και ο τρίτος είναι αναστραμμένοι.

Ο τελεστής  $S$  προκύπτει ως:

$$S = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^3 \sigma_k \otimes \sigma_k = \frac{1}{2} (\sigma_0 \otimes \sigma_0 + \sigma_1 \otimes \sigma_1 + \sigma_2 \otimes \sigma_2 + \sigma_3 \otimes \sigma_3) \Leftrightarrow$$

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{με } S \equiv U_s \quad (4.7)$$

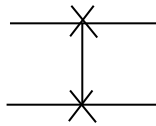
Μπορούμε να φανταστούμε ότι για τον  $S$  ξεκινάμε από έναν πίνακα  $I_4$  και εναλλάσσουμε τη δεύτερη και τρίτη στήλη.

Στη γενική περίπτωση ο πίνακας  $S$  έχει το εξής αποτέλεσμα:

$$S \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_3 \\ v_2 \\ v_4 \end{pmatrix}$$

Οπότε τελικά  $S(|\psi\rangle_2 \otimes |\psi\rangle_1) = |\psi\rangle_1 \otimes |\psi\rangle_2$ .

Μπορεί να συμβολιστεί και ως:



Εφαρμόζεται ο τελεστής  $U_s$  στην εξίσωση (4.6) και προκύπτει:

$$U_s |\theta_{12} + \rangle = U_s \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{i\theta_1} \\ 1 \\ e^{i\theta_2} \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{i\theta_1} \\ e^{i\theta_2} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (4.8)$$

Έπειτα χρησιμοποιώντας την πύλη Hadamard, η οποία αναλύθηκε στην ενότητα (3.7.2), εμφυτεύουμε τον πίνακα Hadamard:

$$U_H = I \otimes H = \begin{pmatrix} H & 0 \\ 0 & H \end{pmatrix}$$

ο οποίος επιδρά στην εξίσωση (4.8) ως εξής, ενώ χρησιμοποιείται και η σχέση (1.5)

$C = \frac{1}{2}(e^{i\theta_1} + e^{i\theta_2})$  την οποία και συναντήσαμε και αναλύσαμε στο κεφάλαιο 1 του κλασσικού συγχρονισμού:

$$U_H U_s |\theta_{12} + \rangle = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{1}{2}}(e^{i\theta_1} + e^{i\theta_2}) \\ \sqrt{\frac{1}{2}}(e^{i\theta_1} - e^{i\theta_2}) \\ \sqrt{\frac{1}{2}}(1+1) \\ \sqrt{\frac{1}{2}}(1-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}C \\ \frac{1}{2\sqrt{2}}(e^{i\theta_1} - e^{i\theta_2}) \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} C \\ \frac{1}{2}(e^{i\theta_1} - e^{i\theta_2}) \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.9)$$

Υπολογίζεται η χρονική παράγωγος της μεταβλητής  $\theta$  ως συνάρτηση του χρόνου  $\theta(t)$ :

$$\frac{d}{dt}U_s|\theta_{12}\rangle = \frac{d}{dt}\frac{1}{2}\begin{pmatrix} e^{i\theta_1(t)} \\ e^{i\theta_2(t)} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} ie^{i\theta_1}(i\theta_1)' \\ ie^{i\theta_2}(i\theta_2)' \\ (1)' \\ (1)' \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} ie^{i\theta_1}\frac{d\theta_1}{dt} \\ ie^{i\theta_2}\frac{d\theta_2}{dt} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.10)$$

Στη συνέχεια δρούμε με τον προβολικό τελεστή  $P_0 \otimes P_0$  στην εξίσωση (4.9):

$$U_H U_s |\theta_{12} + \rangle \rightarrow \kappa' P_0 \otimes P_0 U_H U_s |\theta_{12} + \rangle$$

Ανάλογα εφαρμόζουμε και για την εξίσωση (4.10). Εξισώνουμε τις σχέσεις που προκύπτουν:

$$P_0 \otimes P_0 \kappa' U_H U_s |\theta_{12} + \rangle = \kappa' \frac{1}{\sqrt{2}} C |0\rangle \otimes |0\rangle = \kappa' \frac{1}{\sqrt{2}} \text{Re}^{i\psi} |0\rangle \otimes |0\rangle$$

Όπως έχει αναλυθεί στην κλασική μελέτη συγχρονισμού  $C = \text{Re}^{i\psi} = \frac{1}{2}(e^{i\theta_1} + e^{i\theta_2})$  σχέση (1.5).

Επαναλαμβάνουμε τα ίδια βήματα για την εξίσωση (4.10) και προκύπτει πως:

$$P_0 \otimes P_0 \frac{d}{dt}U_s |\theta_{12}\rangle = i \frac{1}{2} e^{i\theta_1} \frac{d\theta_1}{dt} |0\rangle \otimes |0\rangle$$

Εξισώνουμε τις σχέσεις και καταλήγουμε πως:

$$i \frac{1}{2} e^{i\theta_1} \frac{d\theta_1}{dt} = \frac{\kappa'}{\sqrt{2}} \text{Re}^{i\psi} \quad \text{και} \quad i \frac{1}{2} e^{i\theta_2} \frac{d\theta_2}{dt} = \frac{\kappa'}{\sqrt{2}} (e^{i\theta_1} - e^{i\theta_2})$$

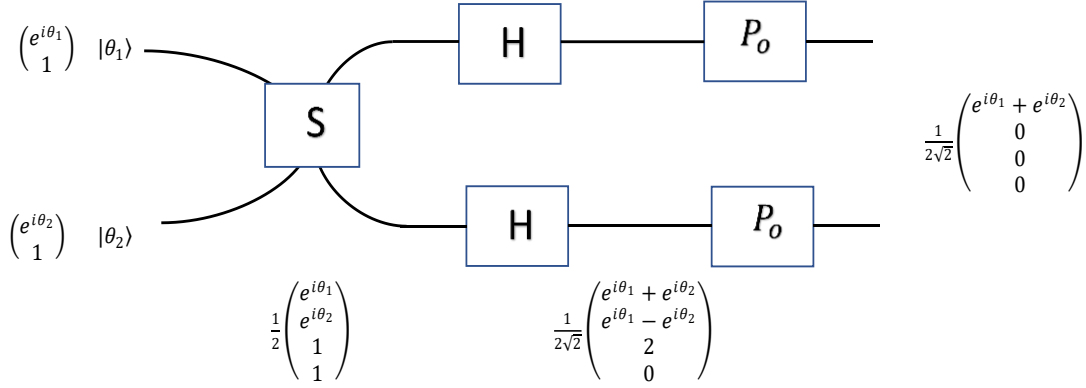
Πολλαπλασιάζοντας με  $e^{-i\theta_1}$  έχουμε:

$$i \frac{d\theta_1}{dt} = \frac{\kappa'}{\sqrt{2}} \text{Re}^{i(\psi - \theta_1)}$$

Εξισώνοντας τα φανταστικά μέρη και θέτοντας  $K = \sqrt{2}\kappa'$  τελικά έχουμε:

$$\frac{d\theta_1}{dt} = \kappa R \sin(\Psi - \theta_1) \quad (4.11)$$

Οι παραπάνω διεργασίες περιγράφονται κυκλωματικά ως:



Σχήμα-4.1

Ορίζεται η κατάσταση  $|\theta_{21} + \rangle$ , η οποία για να δημιουργηθεί χρησιμοποιούνται οι πύλες  $X$  και  $I$

$$|\theta_{12} + \rangle \rightarrow X \otimes I |\theta_{12} + \rangle = |\theta_{21} + \rangle$$

$$|\theta_{21} + \rangle = X \otimes I |\theta_{12} + \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|1\rangle \otimes |\theta_1 + \rangle + |1\rangle \otimes |\theta_2 + \rangle) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} |\theta_2 + \rangle \\ |\theta_1 + \rangle \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{i\theta_2} \\ 1 \\ e^{i\theta_1} \\ 1 \end{pmatrix} \quad (4.12)$$

Ακολουθώντας τα ίδια βήματα, αλλά αυτή τη φορά για την εξίσωση (4.12) και αφού δράσουν οι προβολικοί τελεστές στις εξισώσεις, προκύπτουν οι νέες κατά αντιστοιχία των (4.9) και (4.10) ως:

$$U_H U_s |\theta_{21} + \rangle \rightarrow \kappa' P_0 \otimes P_0 U_H U_s |\theta_{21} + \rangle$$

$$\frac{d}{dt} U_s |\theta_{21} + \rangle \rightarrow P_0 \otimes P_0 \frac{d}{dt} U_s |\theta_{21} + \rangle$$

Εξισώνουμε τις παραπάνω σχέσεις:

$$\kappa' P_0 \otimes P_0 U_H U_s |\theta_{21} + \rangle = \kappa' \frac{1}{\sqrt{2}} C |0\rangle \otimes |0\rangle = \kappa' \frac{1}{\sqrt{2}} \text{Re}^{i\psi} |0\rangle \otimes |0\rangle$$

$$P_0 \otimes P_0 \frac{d}{dt} U_s |\theta_{21}\rangle = i \frac{1}{2} e^{i\theta_2} \frac{d\theta_2}{dt} |0\rangle \otimes |0\rangle$$

Πολλαπλασιάζοντας με  $e^{-i\theta_2}$  έχουμε:

$$i \frac{d\theta_2}{dt} = \frac{\kappa'}{\sqrt{2}} \text{Re}^{i(\psi-\theta_2)}$$

Εξισώνοντας τα φανταστικά μέρη και θέτοντας  $K = \sqrt{2}\kappa'$  τελικά έχουμε:

$$\frac{d\theta_2}{dt} = K R \sin(\Psi - \theta_2) \quad (4.13)$$

Τελικά υποθέτοντας περαιτέρω πως έχουμε την ακόλουθη διάσπαση για τις φάσεις προκύπτει πως:

$$\theta_i(t) = \Theta_i(t) - \omega_i t \quad \text{για } i=1,2 \quad (4.14)$$

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις που εισήχθησαν στο Κεφάλαιο 1, (1.12) και (1.13) προκύπτει πως:

$$\Psi(t) = \frac{\Theta_1(t) - \omega_1 t + \Theta_2(t) - \omega_2 t}{2} = \frac{1}{2} \{ \Theta_1(t) + \Theta_2(t) - (\omega_1 + \omega_2)t \}$$

$$R(t) = \cos\left(\frac{\Theta_1(t) - \omega_1 t - \Theta_2(t) + \omega_2 t}{2}\right) = \cos\left(\frac{\Theta_1(t) - \Theta_2(t) - (\omega_1 t - \omega_2 t)}{2}\right)$$

Υπολογίζονται με βάση τις παραπάνω σχέσεις οι παράγωγοι από την σχέση (4.14) για  $\theta_{1,2}$  και

λύνουμε ως προς  $\dot{\theta}_1(t)$  και  $\dot{\theta}_2(t)$ :

$$\dot{\theta}_1(t) = \omega_1 + \kappa R \sin(\Psi(t) - \theta_1(t) + \omega_1 t) \quad (4.15)$$

$$\dot{\theta}_2(t) = \omega_2 + \kappa R \sin(\Psi(t) - \theta_2(t) + \omega_2 t) \quad (4.16)$$

## 4.3 Συγχρονισμός, μέση τιμή και διασπορά

### 4.3.1 Το παρατηρήσιμο μέγεθος του συγχρονισμού

Ορίζεται ο πίνακας Pauli ως  $\hat{C}_1 = \sigma_- = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  με  $\hat{C}_1^2 = \mathbf{0}$ . Αποτελεί το παρατηρήσιμο μέγεθος

συγχρονισμού, με τη μέση τιμή  $C_1$  για ένα *equatorial qubit* σε μικτή κατάσταση να δίδεται από τον πίνακα πυκνότητας  $\rho_k$  ως:

$$C_1 = \text{Tr} \left( \hat{C}_1 \rho(\theta_k) \right) = \text{Tr} \left( \sigma_- \rho(\theta_k) \right) = \text{Tr} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & e^{-i\theta_k} \\ e^{i\theta_k} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} e^{i\theta_k} \equiv \frac{1}{2} z_k \quad (4.17)$$

Ενώ για τα δύο qubit ορίζεται ως:

$$\begin{aligned} \hat{C}_2 &= \sigma_- \otimes I + I \otimes \sigma_- = \begin{pmatrix} 0 & I \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sigma_- & 0 \\ 0 & \sigma_- \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_- & I \\ 0 & \sigma_- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{C}_1 & I \\ 0 & \hat{C}_1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.18)$$

Στην ενότητα 3.2 και 3.3 περιγράφεται ο υπολογισμός για πίνακες πυκνότητας 2 qubit. Για τα qubit στον ισημερινό ισχύει πως ο πίνακας πυκνότητας είναι το τανυστικό τους γινόμενο  $\rho(\theta_k) \otimes \rho(\theta_\lambda)$ . Το μέσο παρατηρήσιμο μέγεθος συγχρονισμού για δύο τέτοια qubit στον ισημερινό ισούνται και σύμφωνα με τις ιδιότητες του ίχνους:

$$C_2 = \text{Tr} \left( \hat{C}_2 \rho(\theta_1) \otimes \rho(\theta_2) \right) = \frac{1}{2} (e^{i\theta_1} + e^{i\theta_2}) = \frac{1}{2} (z_1 + z_2) \quad (4.19)$$

Αναλυτικά:

$$\begin{aligned}
 \rho(\theta_1) \otimes \rho(\theta_2) &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & e^{-i\theta_1} \\ e^{i\theta_1} & 1 \end{pmatrix} \otimes \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & e^{-i\theta_2} \\ e^{i\theta_2} & 1 \end{pmatrix} = \\
 &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & \begin{pmatrix} 1 & e^{-i\theta_2} \\ e^{i\theta_2} & 1 \end{pmatrix} e^{i\theta_1} & \begin{pmatrix} 1 & e^{-i\theta_2} \\ e^{i\theta_2} & 1 \end{pmatrix} \\ e^{i\theta_1} \begin{pmatrix} 1 & e^{-i\theta_2} \\ e^{i\theta_2} & 1 \end{pmatrix} & 1 & \begin{pmatrix} 1 & e^{-i\theta_2} \\ e^{i\theta_2} & 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \\
 &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} e^{i(\theta_1+\theta_2)} & 1+e^{i(\theta_1-\theta_2)} & 1+e^{i(\theta_2-\theta_1)} & e^{-i\theta_1}+e^{-i\theta_2} \\ e^{i(\theta_1+\theta_2)} & e^{i\theta_1} & e^{i\theta_2} & 1 \\ e^{i(\theta_1+\theta_2)} & e^{i\theta_1} & e^{i\theta_2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Άρα:

$$C_2 = \text{Tr} \left( \hat{C}_2 \rho(\theta_1) \otimes \rho(\theta_2) \right) = \frac{1}{2} (e^{i\theta_1} + e^{i\theta_2}) = \frac{1}{2} (z_1 + z_2) \quad (4.20)$$

$$\Leftrightarrow C_2 = \text{Tr}(\rho(\theta_1) \otimes \rho(\theta_2)) (\sigma_- \otimes I + I \otimes \sigma_-)$$

Για να γενικεύσουμε τον όρο του παρατηρούμενου κβαντικού συγχρονισμού για  $n$  qubit εισάγεται ο εξής συμβολισμός  $\sigma_- \otimes I = (\sigma_-)_1$  και  $I \otimes \sigma_- = (\sigma_-)_2$ , ο οποίος και τονίζει πως αλλάζει η ερμηνεία του τανυστικού γινομένου ανάλογα με τη σειρά που βρίσκονται οι τελεστές. Επομένως  $C_2$  εκφράζεται ως:

$$C_2 = \text{Tr} \left( \hat{C}_2 \rho(\theta_\kappa) \otimes \rho(\theta_\lambda) \right) = \text{Tr} \left( \left( (\sigma_-)_1 + (\sigma_-)_2 \right) \rho(\theta_\kappa) \otimes \rho(\theta_\lambda) \right)$$

Έπειτα παρουσιάζεται ο γενικευμένος τελεστής συγχρονισμού για 2 qubit:

$$\hat{C}_2 = \sum_{j=1}^2 (\sigma_-)_j = \begin{pmatrix} \hat{C}_1 & \mathbf{I} \\ \mathbf{0} & \hat{C}_1 \end{pmatrix} = \hat{C}_1 \otimes \mathbf{I} + \mathbf{I} \otimes \hat{C}_1$$

Ενώ για το τετράγωνο  $\hat{C}_2^2$  ισχύει πως:

$$\hat{C}_2^2 = \hat{C}_2 \hat{C}_2 = \begin{pmatrix} \hat{C}_1^2 & 2\hat{C}_1 \\ \mathbf{0} & \hat{C}_1^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & 2\hat{C}_1 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} = 2\hat{C}_1 \otimes \hat{C}_1$$

Οι τελικές σχέσεις που μπορούν να χρησιμοποιηθούν με βάση τις προηγούμενες παραδοχές είναι:

$$\hat{C}_2 = \sigma_- \otimes \mathbf{I} + \mathbf{I} \otimes \sigma_-$$

$$\hat{C}_2^2 = 2\sigma_- \otimes \sigma_-$$

Η αριθμητική κλιμάκωση του ορισμού του παράγοντα συγχρονισμού  $C_2$  που δίνεται στη συνέχεια επιτρέπει την εξίσωση του  $C_2$  με τον παράγοντα του κλασικού συγχρονισμού  $\text{Re}^{i\psi}$ , ο οποίος και παρουσιάστηκε αναλυτικά στο Κεφάλαιο 1. Αποδεικνύεται πως:

$$C_2 = 2\text{Tr} \left( \hat{C}_2 \rho^{(n)} \right) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^2 e^{i\theta k_j} = R_2 e^{i\psi_2} \quad (4.21)$$

Σε αυτό το σημείο σημειώνεται πως η σημασιολογία των παραγόντων  $R$ ,  $C$  που εκφράζουν το συγχρονισμό είναι ταυτόσημη και οπουδήποτε χρησιμοποιείται εκφράζει το συγχρονισμό.



---

### 4.3.2 Η διασπορά της μέσης τιμής και η κβαντική αβεβαιότητα

Μια σχέση για μελλοντική χρήση είναι πως:

$$|C_2| = R_2 = 2 \left| \text{Tr} \left( \hat{C}_2 \rho^{(2)} \right) \right| \quad (4.22)$$

Αυτό αιτιολογεί και την έκφραση του παρατηρήσιμου μεγέθους συγχρονισμού για το  $\hat{C}_2$  αφού η μέση τιμή στην κατάσταση  $\rho^{(2)} = \rho \otimes \rho$  για 2 qubit ισούται με τον κλασικό παράγοντα συγχρονισμού στο μοντέλο του **Kuramoto**.

Στη συνέχεια προχωρούμε στην αξιολόγηση του παρατηρούμενου συγχρονισμού για το  $\hat{C}_2$  αναφορικά με τη διασπορά τιμών στην κατάσταση  $\rho^{(2)}$  για δυο συγχρονισμένα **qubit** υπολογίζοντας την **κβαντική αβεβαιότητα**.

Η αναμενόμενη τιμή μας δίνει ένα μέσο αποτέλεσμα, αλλά όταν λαμβάνονται πολλά δείγματα, αυτό που έχει εξαιρετικό ενδιαφέρον συχνά είναι το πόσο εξαπλώνονται τα αποτελέσματα. Εάν υπάρχει μόνο ένα πιθανό αποτέλεσμα, τότε αυτό το αποτέλεσμα είναι ο μέσος όρος και δεν υπάρχει καθόλου διασπορά των τιμών. Από την άλλη πλευρά, θα μπορούσαν να υπάρχουν δύο ή περισσότερα αποτελέσματα που έχουν πολύ μακρινές τιμές, αλλά η μέση τιμή τους είναι ίδια με την περίπτωση του ενός αποτελέσματος. Είναι χρήσιμο να έχουμε ένα καλά καθορισμένο μέτρο για το πώς διαδίδονται τα αποτελέσματα. Αυτό το μέτρο ονομάζεται τυπική απόκλιση και θα το αναφέρουμε, επίσης, στο κβαντομηχανικό μας πλαίσιο ως **αβεβαιότητα**. Η αβεβαιότητα οφείλεται στην ανεξέλεγκτη επίδραση σε ένα σωματίδιο κάθε προσπάθειας παρατήρησής του λόγω της κβαντικής αλληλεπίδρασης.

Είναι γνωστό πως ο υπολογισμός της τυπικής απόκλισης είναι ίσος με την τετραγωνική ρίζα της διαφοράς μεταξύ του μέσου όρου των τετραγώνων των (παρατηρούμενων τιμών συγχρονισμού) τιμών και του τετραγώνου της (παρατηρούμενης τιμής συγχρονισμού) μέσης τιμής, ενώ η διασπορά είναι το τετράγωνο της τυπικής απόκλισης:

$$\text{Var}(X) = \sigma^2(X) = E[X^2] - (E[X])^2$$

Συμπερασματικά ορίζεται η **κβαντική αβεβαιότητα** του παρατηρούμενου συγχρονισμού ως:

$$\Delta C_2 = \left| \left\langle \left( \hat{C}_2 \right)^2 \right\rangle \right| - \left| \left\langle \hat{C}_2 \right\rangle \right|^2 \quad (4.23)$$

Έπειτα και λόγω της σχέσης (4.22) ισχύει πως:

$$\Delta C_2 = \left| \left\langle \left( \hat{C}_2 \right)^2 \right\rangle \right| - R_2^2 \quad (4.24)$$

Αν περαιτέρω ορίσουμε τη μετατόπιση της τιμής της διασποράς της μέσης τιμής  $|C_2|$  ως:

$$\delta_{2\pm} := |C_2| \pm \frac{1}{2} \Delta C_2 = R_2 \pm \frac{1}{2} \Delta C_2 \quad (4.25)$$

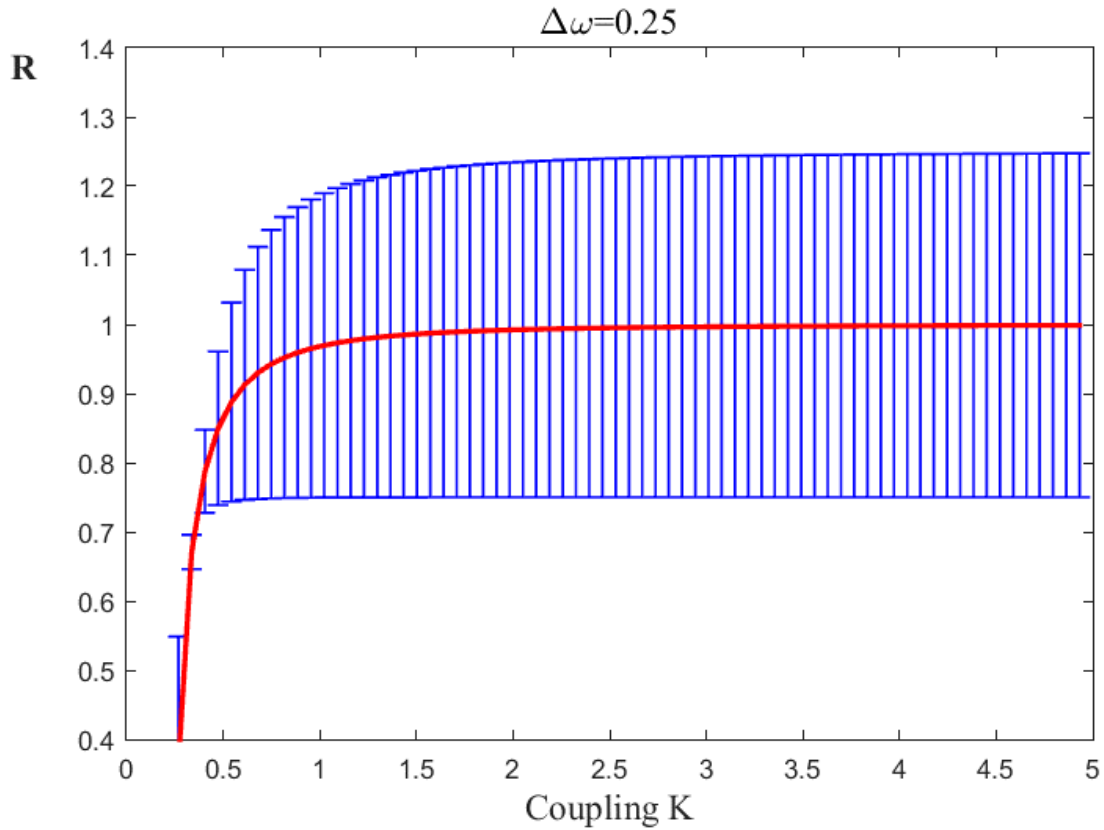
## 4.4 Συγχρονισμός των qubit: κβαντικές καταστάσεις και ποσοτικά μέτρα

Μια σημαντική σημείωση είναι η ακόλουθη που αντιπροσωπεύει την ύπαρξη δύο τύπων μετατόπισης των μέσων τιμών: η στατική μετατόπιση  $\delta_{2\pm}(\kappa)$  που επηρεάζεται από την παράμετρο ισχύς ζεύξης  $K$  (ενότητα 1.3) και η χρονική  $\delta_{2\pm}(t)$ . Σημειώνεται, ακόμα, πως οι σταθερές λύσεις των εξισώσεων **Kuramoto** υπολογίζουν τη μεταβλητή  $\theta(\kappa)$ , ενώ εναλλακτικά οι λύσεις των εξισώσεων **Kuramoto** στο χρόνο καθορίζουν τη μεταβλητή  $\theta(t)$ . Κάθε ένας τύπος των λύσεων που περιεγράφηκαν καθορίζουν την κβαντική συμπεριφορά του προβλήματος με αποτέλεσμα να έχουμε μέση τιμή στη στατική κατάσταση  $C_2(\kappa)$  όπως και αβεβαιότητα  $\Delta C_2(\kappa)$ .

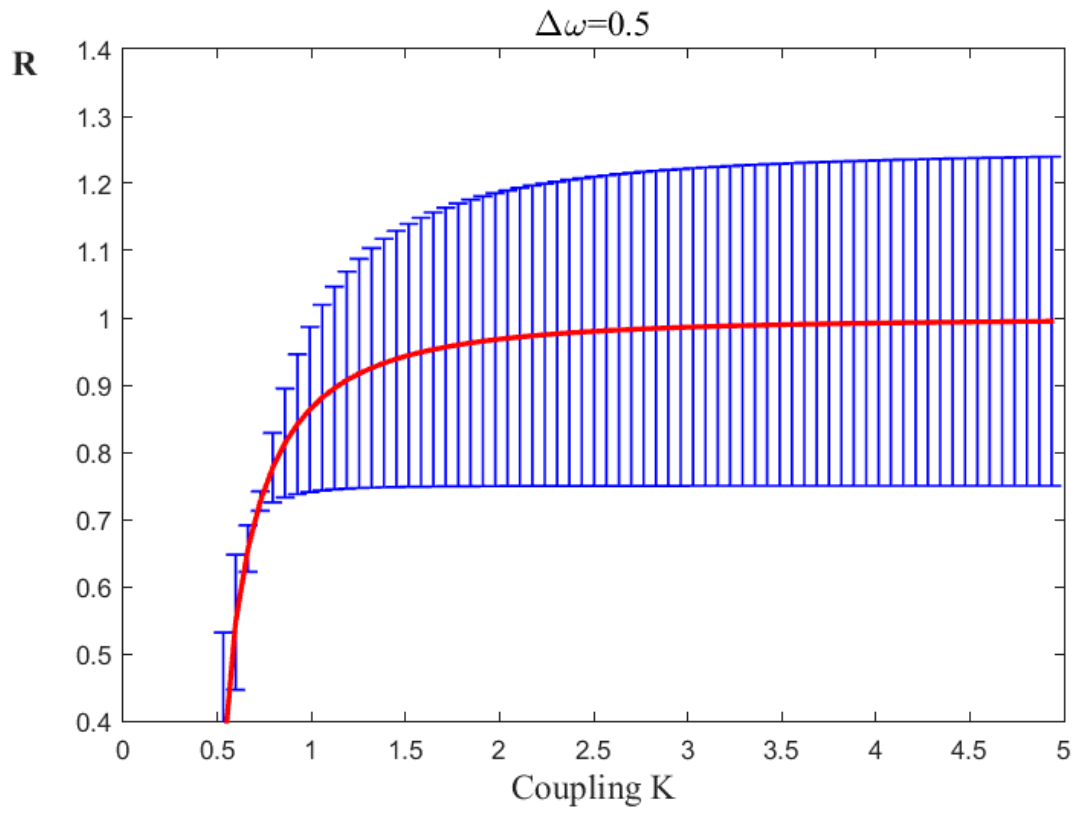
### 4.4.1 Ζεύγη μη συσχετισμένων qubit

Αρχικά παρατίθενται τα σχεδιαζόμενα γραφήματα που αποτυπώνουν τη μέση τιμή συγχρονισμού  $R$  και πως ακριβώς αυτή επηρεάζεται από τον παράγοντα σύζευξης “coupling  $K$ ” για τις αντίστοιχες διαφορές φυσικών συχνοτήτων  $\Delta\omega = 0.25, 0.5, 1, 1.25$  που χρησιμοποιήθηκαν και στη κλασική μελέτη συγχρονισμού. Σε κάθε γράφημα παρουσιάζεται και η παρατηρούμενη αβεβαιότητα υπό την μορφή error bar που δείχνει για κάθε τιμή του παράγοντα σύζευξης πως αυτή διαμορφώνεται. Αυτό που παρατηρείται σε κάθε ένα από τα γραφήματα που ακολουθούν είναι πως όταν η σταθερά σύζευξης φτάσει ένα ορισμένο κρίσιμο κατώφλι τότε έχουμε απότομη αύξηση

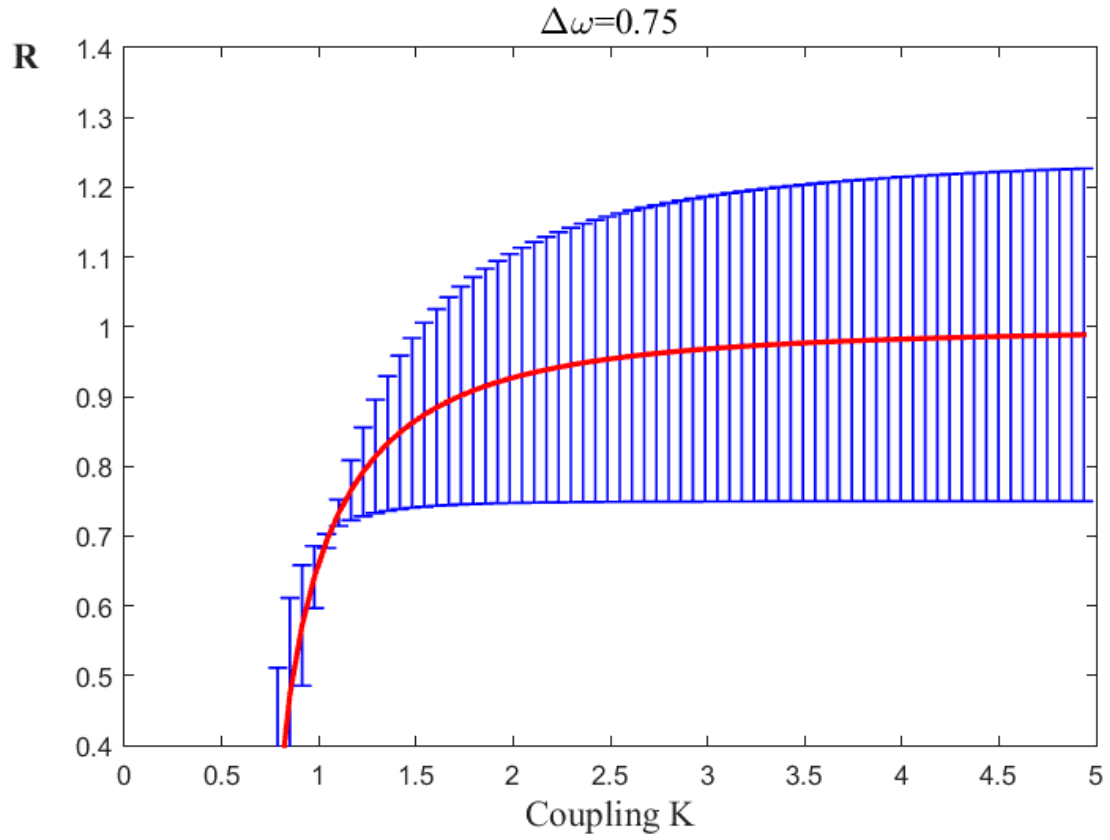
της καμπύλης που εκφράζει την μέση τιμή του συγχρονισμού και είναι χρωματισμένη με κόκκινο. Στην πορεία και εφόσον το σύστημα συγχρονιστεί παρατηρούμε ότι διατηρεί σταθερή συμπεριφορά. Η καμπύλη η οποία είναι χρωματισμένη με μπλε και δείχνει την αβεβαιότητα του συστήματος παρατηρούμε αρχικά να έχει κάποιες διαφοροποιήσεις πριν φτάσει το σημείο του κρίσιμου κατωφλίου της σταθεράς σύζευξης  $k$ . Έπειτα με τη σειρά της ακολουθεί την πορεία της μέσης τιμής συγχρονισμού και παρουσιάζει σταθερή τάση.



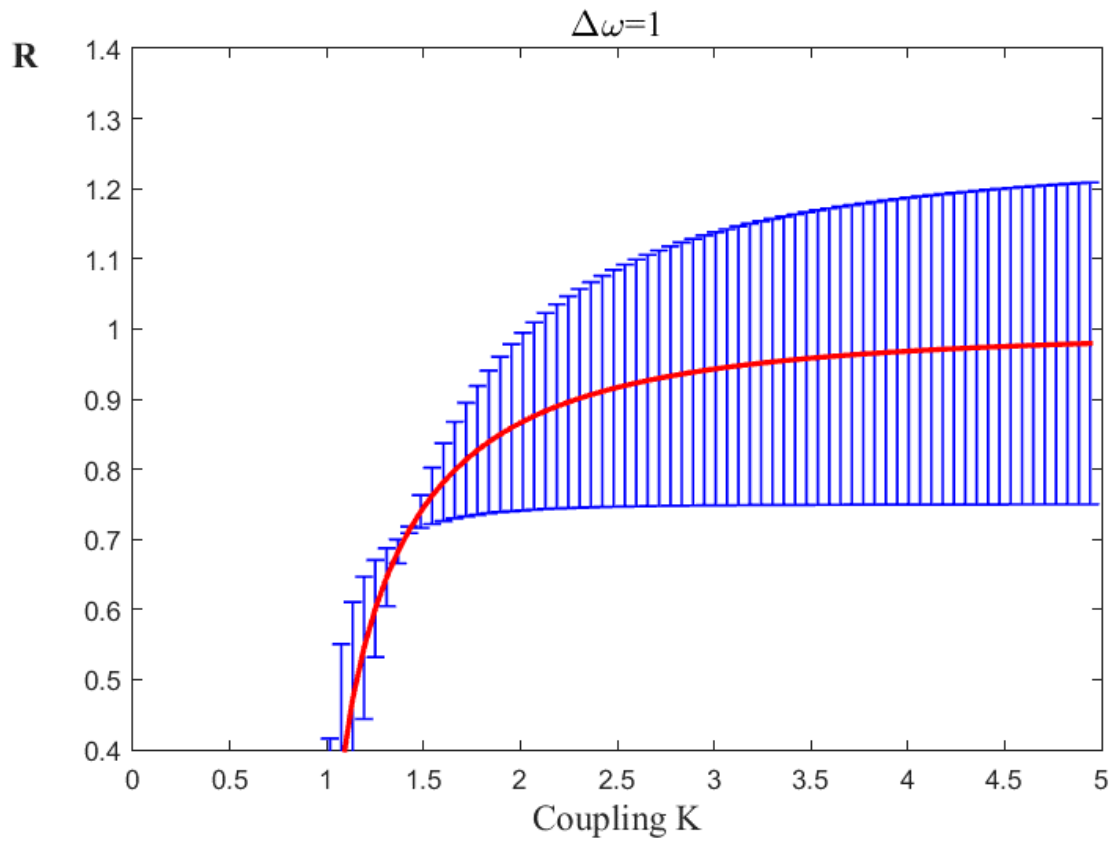
Σχήμα-4.2



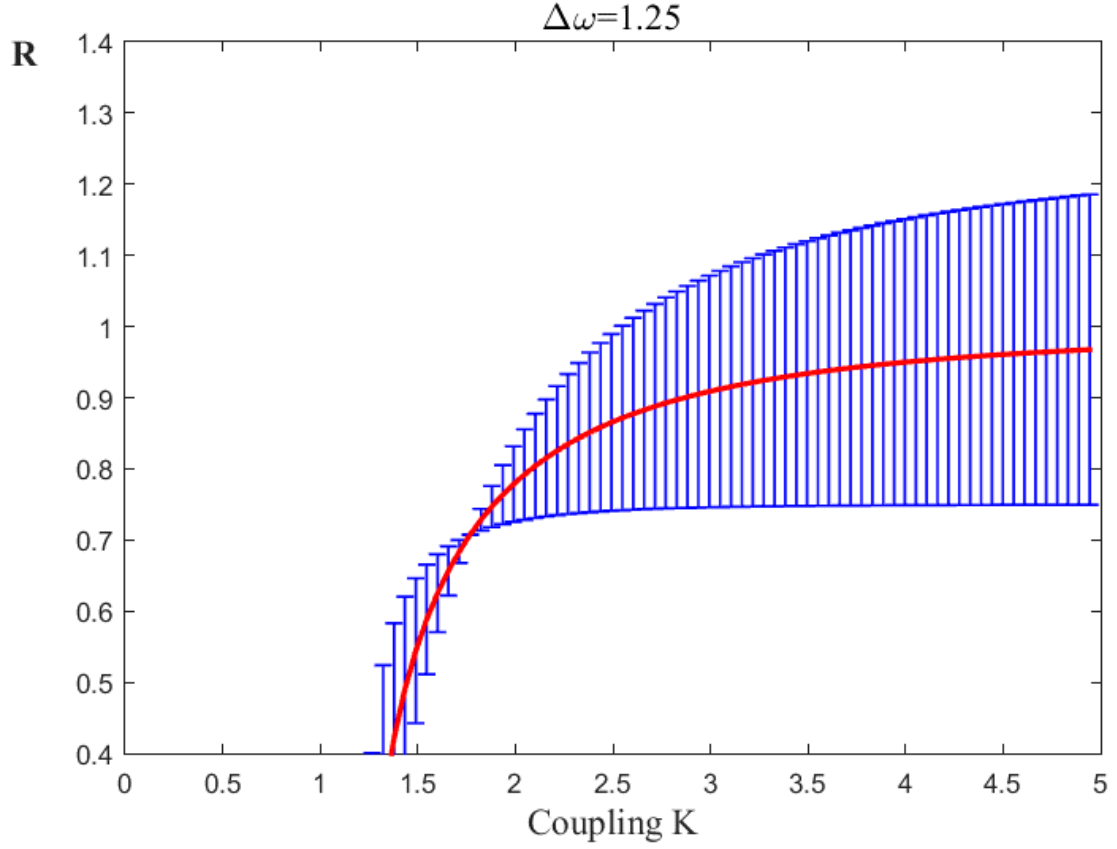
Σχήμα-4.3



*Σχήμα-4.4*



Σχήμα-4.5



Σχήμα-4.6

Τα παραπάνω γραφήματα (Σχήμα-4.2 ως Σχήμα-4.6) αναφορικά με την παρατηρούμενη μετατόπιση των τιμών διασποράς της μέσης τιμής συγχρονισμού και αβεβαιότητας σχεδιάστηκαν με βάση την χρονικά ανεξάρτητη γενική μορφή της εξίσωσης:

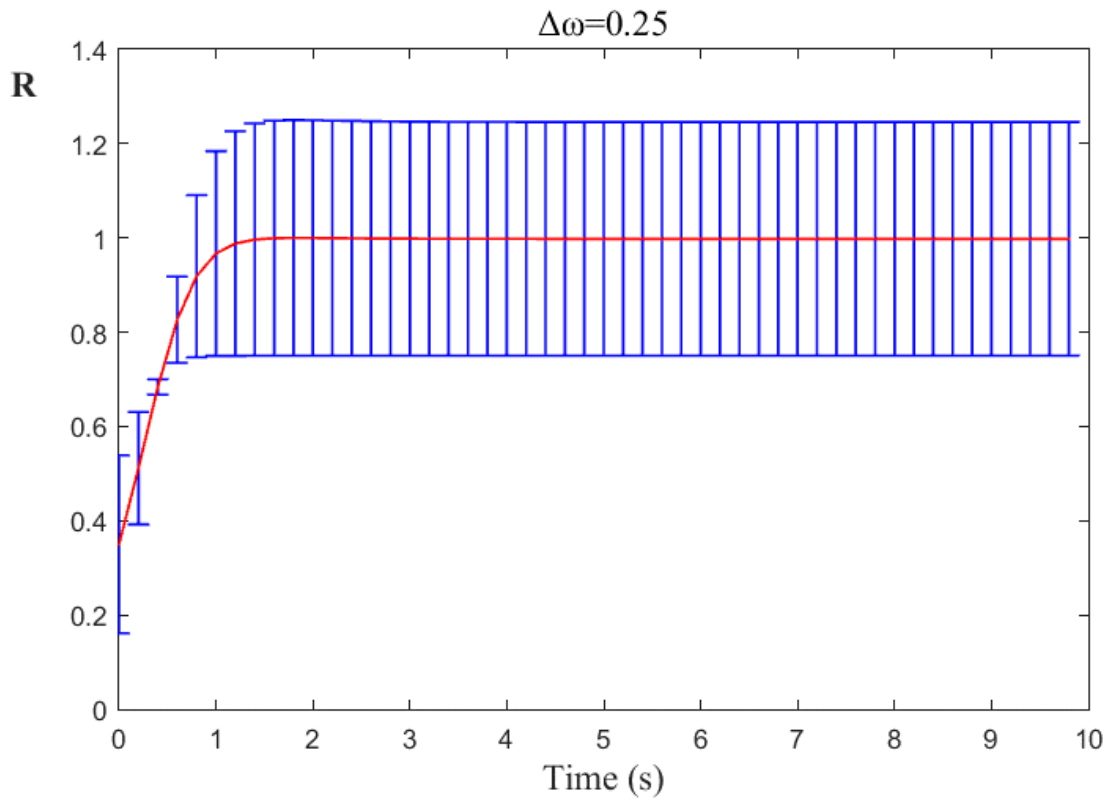
$$\delta_{2\pm}(\kappa) := |C_2(\kappa)| \pm \frac{1}{2} \Delta C_2(\kappa) = R_2(\kappa) \pm \frac{1}{2} \Delta C_2(\kappa) \quad (4.26)$$

Αντίστοιχα προκύπτουν και η χρονικά εξαρτώμενη μέση τιμή  $C_2(t)$  και η αβεβαιότητα  $\Delta C_2(t)$ . Συμπερασματικά, οι μετατοπίσεις των τιμών διασποράς της μέσης τιμής για τις δύο αυτές περιπτώσεις δίνονται ως:

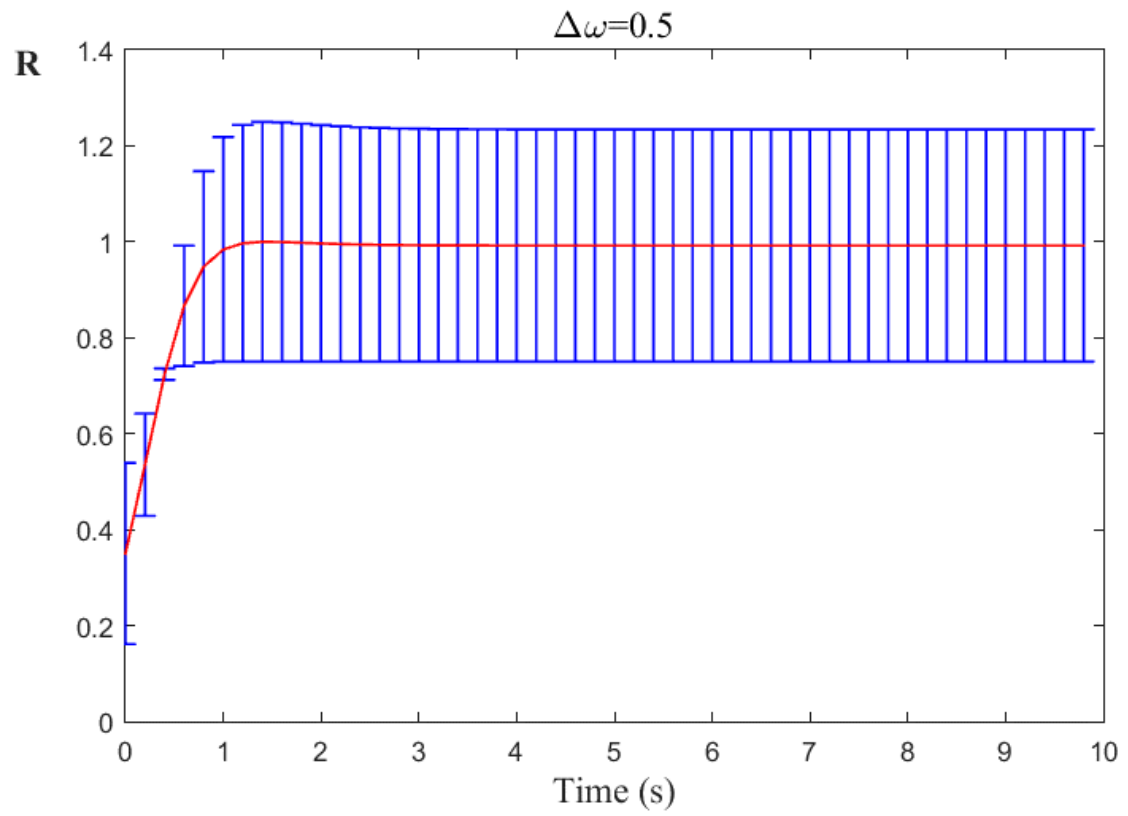
$$\delta_{2\pm}(t) := |C_2(t)| \pm \frac{1}{2} \Delta C_2(t) = R_2(t) \pm \frac{1}{2} \Delta C_2(t) \quad (4.27)$$

Για τα 5 διαγράμματα που ακολουθούν έχει θεσπιστεί η σταθερά σύζευξης  $K = 2$  διότι κινούμαστε στο χρόνο οπότε θα έπρεπε να έχουμε ένα σημείο αναφοράς και αυτό ήταν η σταθερά

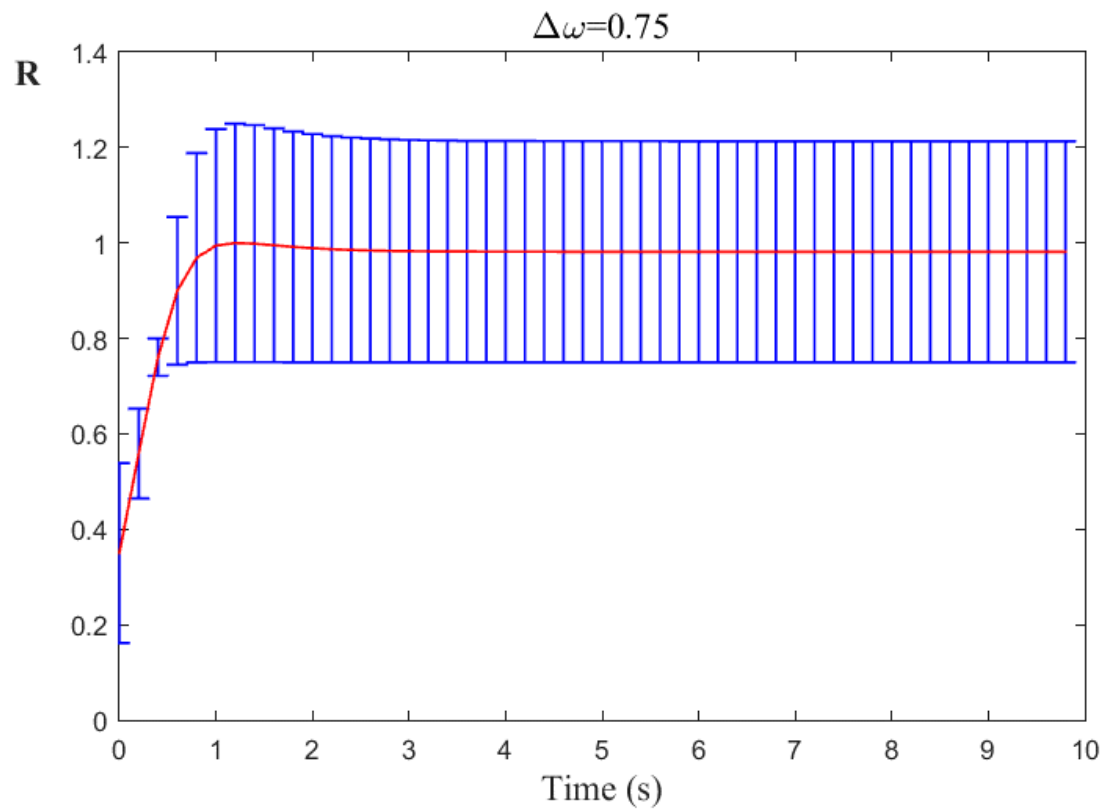
σύζευξης. Αναφορικά με την διακύμανση των τιμών διασποράς της μέσης τιμής συγχρονισμού και αβεβαιότητας θέτουμε ως οδηγό την σχέση (4.27). Τα διαγράμματα παριστάνουν τη μέση τιμή του συγχρονισμού (*παράγοντας τάξης*) ως συνάρτηση του χρόνου ( $t$ ). Παρατηρείται μία μεταβατική κατάσταση για μικρό χρονικό διάστημα η οποία έπειτα γρήγορα οδηγείται σε συγχρονισμό, δηλαδή όταν ο παράγοντας τάξης τείνει στο ένα ( $R \rightarrow 1$ ). Η τιμή της σταθεράς σύζευξης είναι  $K=2$  και η διαφορά των συχνοτήτων είναι το μέγεθος στο οποίο δίνουμε τις ενδεικτικές τιμές των διαφορών συχνοτήτων τις οποίες έχουμε ακολουθήσει και στα προηγούμενα γραφήματα για λόγους σύγκρισης και συμμετρίας.



Σχήμα-4.7

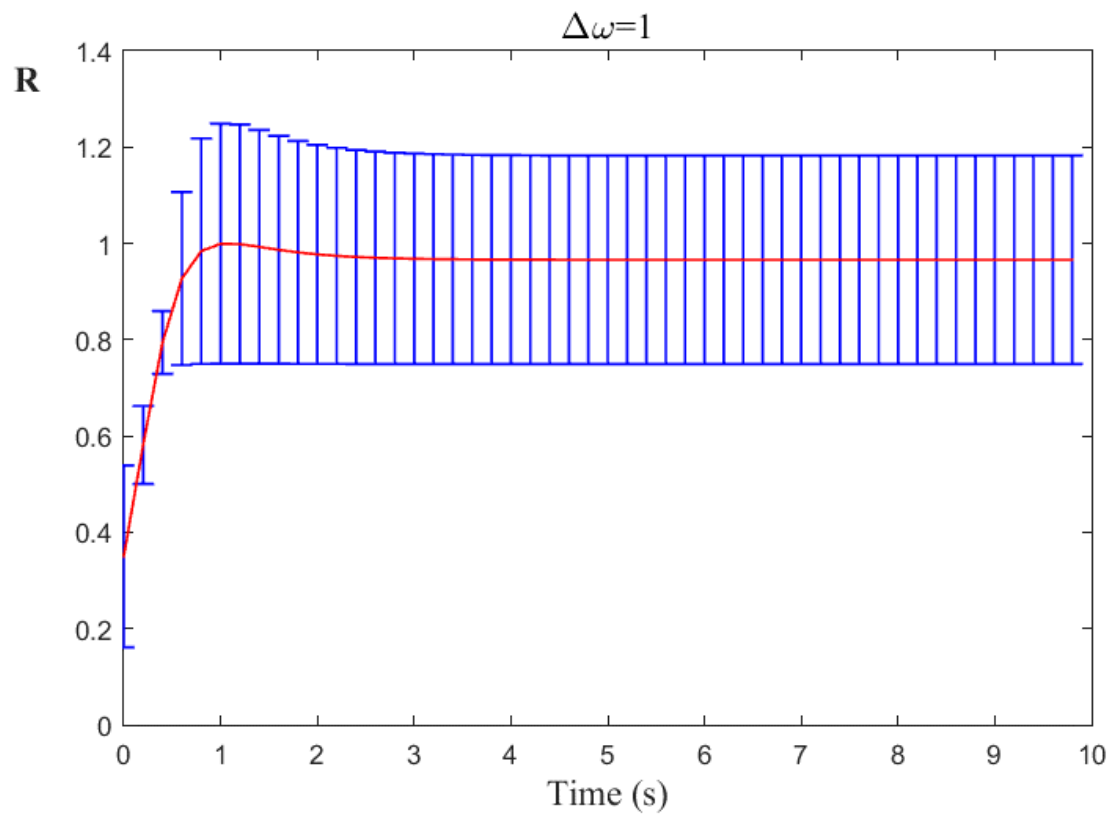


Σχήμα-4.8

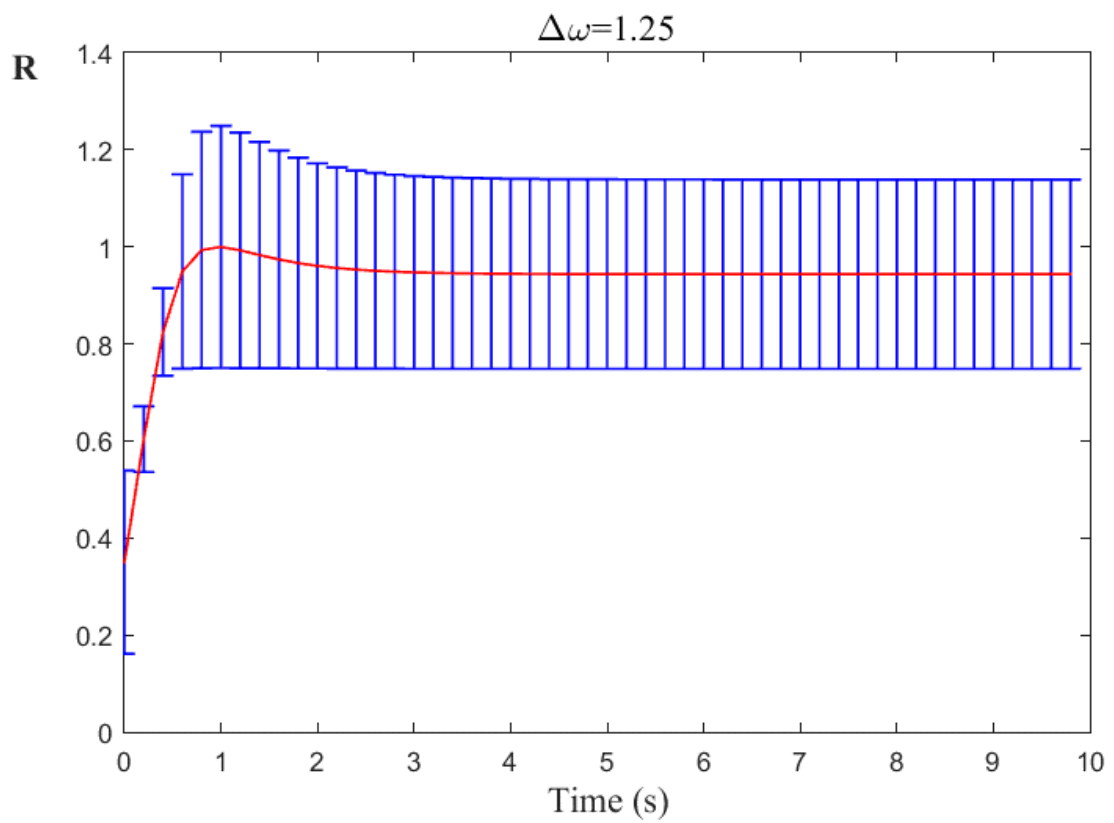


Σχήμα-4.9





*Σχήμα-4.10*



Τα **qubit** στον ισημερινό συνοψίζονται από τη σχέση  $|\text{equatorial}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(e^{i\theta_1}|0\rangle + e^{i\theta_2}|1\rangle)$ .

Χρησιμοποιώντας ως κοινό παράγοντα το  $e^{i\theta_2}$  καταλήγουμε στη διαφορά τους  $e^{i\theta_-}$ :

$$\frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\theta_2}(e^{i(\theta_1-\theta_2)}|0\rangle + |1\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}(e^{i\theta_-}|0\rangle + |1\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} e^{i\theta_-} \\ 1 \end{pmatrix} \equiv |\theta_- \rangle \equiv |\theta_-^{\text{eq}} \rangle$$

Οι σταθερές λύσεις  $\theta_-^{\text{stat}}$  της εξίσωσης (1.22) καθορίζουν τα qubit στον ισημερινό (**equatorial qubit**)  $|\theta_-^{\text{stat}}\rangle$  και οι πίνακες πυκνότητας χρησιμοποιούνται για να υπολογίσουν τη μέση τιμή και

τη διασπορά του παράγονται συγχρονισμού  $\hat{C}_2$ . Ισχύει πως:

$$\rho^{\text{eq}} = |\theta_-^{\text{stat}}\rangle\langle\theta_-^{\text{stat}}| = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} e^{i\theta_-^{\text{stat}}} \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{-i\theta_-^{\text{stat}}} & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & e^{i\theta_-^{\text{stat}}} \\ e^{-i\theta_-^{\text{stat}}} & 1 \end{pmatrix} \quad (4.28)$$

#### 4.4.2 Ζεύγη μη συσχετισμένων θερμικών qubit

Οι μεταβολές της κατάστασης, στο χώρο και στο χρόνο, ενός κβαντικού συστήματος περιγράφονται από την εξίσωση του **Schrodinger**. Η εξίσωση αυτή εκφράζει την αρχή

διατήρησης της ενέργειας:  $E = E_{\text{KIN}} + E_{\text{ΔYN}} \Rightarrow \frac{1}{2}mv^2 + V(x,t)$ , όπου  $V$  η ταχύτητα του συστήματος,  $m$  η μάζα και  $V(x,t)$  η δυναμική του ενέργεια η οποία εξαρτάται από το χώρο και

το χρόνο. Η ορμή είναι:  $p = mv$  και αντικαθιστώντας έχουμε  $E = \frac{p^2}{2m} + V(x,t)$ . Στην κβαντική

μηχανική, η ενέργεια και η ορμή αντιπροσωπεύονται από τελεστές. Ο τελεστής που αντιπροσωπεύει την ολική ενέργεια είναι:  $E \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$ .

Ο τελεστής  $H$  ονομάζεται τελεστής του **Hamilton** ή Χαμιλτονιανή (**Hamiltonian**)<sup>5</sup> και αντιπροσωπεύει την ολική ενέργεια του συστήματος. Μετά από αυτό, η εξίσωση Schrodinger γίνεται:

$$E \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(x,t) = H \Psi(x,t) \quad (4.29)$$

Η παραπάνω εξίσωση, αν γραφτεί χωρίς τις μεταβλητές  $(x,t)$  αλλά από την μορφή τελεστών πινάκων, παίρνει την εξής μορφή:

$$E[\Psi] = [H][\Psi] \quad (4.30)$$

Η ενέργεια  $E$  είναι ένας πραγματικός αριθμός. Ο πίνακας  $[\Psi]$  αντιπροσωπεύει τη συνάρτηση κύματος έχοντας στήλες και γραμμές όσες και οι βασικές καταστάσεις του κβαντικού συστήματος. Αν το κβαντικό σύστημα έχει  $n$  βασικές καταστάσεις, τότε ο  $[\Psi]$  είναι ένας πίνακας με διαστάσεις  $n \times 1$ . Ο πίνακας  $[H]$ , που αντιπροσωπεύει τον τελεστή Hamilton είναι ένας τετραγωνικός πίνακας διαστάσεων  $n \times n$ . Οι ιδιοτιμές του πίνακα  $[H]$  είναι οι διακριτές ενεργειακές τιμές τις οποίες μπορεί να πάρει το κβαντικό σύστημα.

Η κατάσταση ενός κβαντικού συστήματος κατά τη θερμική ισορροπία μιας θερμοκρασίας  $T$  μπορεί να περιγραφεί από (**Ren and Zhu 2006**)<sup>1</sup>:

$$\rho(T) = \frac{1}{Z} e^{\left(-\frac{H}{kT}\right)} = \frac{1}{Z} e^{-\beta H} \quad \text{όπου } \beta = \frac{1}{kT} \quad (4.31)$$

όπου  $k$  είναι η σταθερά του Boltzmann,  $T$  η θερμοκρασία. Η συνάρτηση επιμερισμού  $Z$  δίδεται από:

$$Z = \text{Tr}(e^{-\beta H}) \quad (4.32)$$

Για θερμοδυναμικούς σκοπούς είναι πιο χρηστικό αν αλλάξουμε τη Χαμιλτονιανή από μια σταθερά έτσι ώστε:

$$H = \sum_{n=0} \varepsilon_n |n\rangle\langle n| = \hbar\omega \sum_{n=0} n |n\rangle\langle n| \quad \text{όπου } \varepsilon_n = n\hbar\omega$$

όπου  $\varepsilon_n = n\hbar\omega$  είναι οι ιδιοτιμές των ενεργειακών σταθμών.

Από τις παραπάνω σχέσεις καταλήγουμε πως:

$$Z = \text{Tr} \sum_{n=0} e^{-n \frac{\hbar\omega}{kT}} |n\rangle\langle n| = \sum_{n=0} e^{-n \frac{\hbar\omega}{kT}} = \frac{1}{1 - e^{-\frac{\hbar\omega}{kT}}}$$

Χρησιμοποιώντας αυτόν το φορμαλισμό σε ένα σύστημα qubit και με τη Χαμιλτονιανή να είναι ένας διαγώνιος πίνακας σε ένα σύστημα ορθοκανονικών καταστάσεων, τότε ο πίνακας πυκνότητας έχει την εξής μορφή:

$$\rho^{\text{th}} = \frac{1}{Z} e^{-\beta H} = \frac{1}{Z} \left( e^{-\varepsilon_0 \beta} |\theta+\rangle\langle\theta+| + e^{-\varepsilon_1 \beta} |\theta-\rangle\langle\theta-| \right)$$

Υποθέτουμε πως  $\hbar\omega=1$  και υπολογίζεται πως  $Z = e^{-e_0 \beta} + e^{-e_1 \beta}$ . Επιλέγω  $e_0 = 0$  και  $e_1 = 1$ .

Συμπερασματικά  $Z = 1 + e^{-\beta}$ . Ορίζεται ο πίνακας πυκνότητας για τα θερμικά qubit ως:

$$\begin{aligned} \rho^{\text{th}}(\theta) &= \frac{1}{Z} \left( |\theta+\rangle\langle\theta+| + e^{\beta} |\theta-\rangle\langle\theta-| \right) = \\ &= \frac{1}{1 + e^{-\beta}} \left[ \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & e^{i\theta} \\ e^{-i\theta} & 1 \end{pmatrix} + \frac{e^{-\beta}}{2} \begin{pmatrix} 1 & e^{-i\theta} \\ -e^{-i\theta} & 1 \end{pmatrix} \right] = \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1 - e^{-\beta}}{1 + e^{-\beta}} e^{i\theta} \\ \frac{1 - e^{-\beta}}{1 + e^{-\beta}} e^{-i\theta} & 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.33)$$

Η μέση τιμή του τελεστή του παρατηρούμενου συγχρονισμού  $C_1$  δίδεται ως:

$$C_1^{\text{th}}(\theta) = \text{Tr} \left( \hat{C}_1 \rho(\theta_k) \right) = \frac{1}{2} \frac{1 - e^{-\beta}}{1 + e^{-\beta}} e^{-i\theta} = \frac{1}{2} \tanh\left(\frac{\beta}{2}\right) e^{-i\theta}$$

Και το μέτρο του τελεστή  $|C_1^{\text{th}}|$  υπολογίζεται ως:

$$|C_1^{\text{th}}| = \frac{1}{2} \tanh\left(\frac{\beta}{2}\right)$$

Στις παραπάνω σχέσεις έχει γίνει η χρήση της σχέσης:

$$\frac{1-e^{-\beta}}{1+e^{-\beta}} = \frac{e^{\beta/2} - e^{-\beta/2}}{e^{\beta/2} + e^{-\beta/2}} \tanh\left(\frac{\beta}{2}\right)$$

Υπολογίζεται το τανυστικό γινόμενο των πινάκων πυκνότητας των  $\theta_1, \theta_2$  ως:

$$\rho^{\text{th}}(\theta_1) \otimes \rho^{\text{th}}(\theta_2) = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1-e^{-\beta}}{1+e^{-\beta}} e^{i\theta_2} & \frac{1-e^{-\beta}}{1+e^{-\beta}} e^{i\theta_1} & \left(\frac{1-e^{-\beta}}{1+e^{-\beta}}\right)^2 e^{i(\theta_1+\theta_2)} \\ \frac{1-e^{-\beta}}{1+e^{-\beta}} e^{-i\theta_2} & 1 & \left(\frac{1-e^{-\beta}}{1+e^{-\beta}}\right)^2 e^{i(\theta_1-\theta_2)} & \frac{1-e^{-\beta}}{1+e^{-\beta}} e^{i\theta_1} \\ \frac{1-e^{-\beta}}{1+e^{-\beta}} e^{-i\theta_1} & \left(\frac{1-e^{-\beta}}{1+e^{-\beta}}\right)^2 e^{-i(\theta_1-\theta_2)} & 1 & \frac{1-e^{-\beta}}{1+e^{-\beta}} e^{i\theta_2} \\ \left(\frac{1-e^{-\beta}}{1+e^{-\beta}}\right)^2 e^{-i(\theta_1+\theta_2)} & \frac{1-e^{-\beta}}{1+e^{-\beta}} e^{-i\theta_1} & \frac{1-e^{-\beta}}{1+e^{-\beta}} e^{-i\theta_2} & 1 \end{pmatrix}$$

Το μέσο πατηρήσιμο μέγεθος συγχρονισμού για δύο θερμικά qubit, σύμφωνα με τις ιδιότητες του ίχνους:  $C_2^{\text{thermal}}$ , ισούται με:

$$C_2^{\text{th}} = \text{Tr}\left(\hat{C}_2 \rho^{\text{th}}(\theta_1) \otimes \rho^{\text{th}}(\theta_2)\right) = \frac{1}{2} \frac{1-e^{-\beta}}{1+e^{-\beta}} (e^{-i\theta_1} + e^{-i\theta_2}) = \frac{1}{2} \tanh\left(\frac{\beta}{2}\right) (e^{-i\theta_1} + e^{-i\theta_2}) \quad (4.34)$$

Με μέση τιμή του μέτρου  $|C_2^{\text{th}}|$  του παρατηρούμενου συγχρονισμού για 2 θερμικά qubit να δίδεται ως:

$$\begin{aligned}
|C_2^{\text{th}}| &= \frac{1}{2} \tanh\left(\frac{\beta}{2}\right) |e^{-i\theta_1} + e^{-i\theta_2}| = \frac{1}{2} \tanh\left(\frac{\beta}{2}\right) |1 + e^{-i\theta_-}| = \\
&= \frac{1}{2} \tanh\left(\frac{\beta}{2}\right) |(1 + \cos\theta_-) - i\sin\theta_-| = \frac{1}{2} \tanh\left(\frac{\beta}{2}\right) \sqrt{(1 + \cos\theta_-)^2 + \sin^2\theta_-} = \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \tanh\left(\frac{\beta}{2}\right) \sqrt{1 + \cos\theta_-}
\end{aligned} \tag{4.35}$$

Ενώ η μέση τιμή για το τετράγωνο δίδεται ως  $C_2^{\text{th}}$  :

$$C_2^{\text{th}} = 2\text{Tr}\left(\hat{C}_2^{\text{th}} \rho^{\text{th}}(\theta_1) \otimes \rho^{\text{th}}(\theta_2)\right) = \left(\frac{1 - e^{-\beta}}{1 + e^{-\beta}}\right)^2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$$

Η αβεβαιότητα για δύο θερμικά qubit δίδεται ως:

$$\Delta C_2^{\text{th}} = |C_2^{\text{th}}|^2 - |C_2|^2 = \frac{1}{4} \left(\frac{1 - e^{-\beta}}{1 + e^{-\beta}}\right)^2 e^{-2i\theta_1} (1 - e^{i\theta_-})^2 \tag{4.36}$$

Τελικά υπολογίζοντας το μέτρο της αβεβαιότητας για δύο θερμικά qubit προκύπτει πως:

$$|\Delta C_2^{\text{th}}| = \frac{1}{2} \left(\frac{1 - e^{-\beta}}{1 + e^{-\beta}}\right)^2 (1 - \cos\theta_-) = \frac{1}{2} \tanh^2\left(\frac{\beta}{2}\right) (1 - \cos\theta_-) \tag{4.37}$$

Στο όριο της κατώτερης θερμοκρασίας όταν δηλαδή το  $T \rightarrow 0$  προκύπτει πως ο παράγοντας  $\beta$ , ο οποίος λειτουργεί ως αντίστροφο της θερμοκρασίας, θα τείνει στο άπειρο διότι

$\beta = \frac{1}{kT} \rightarrow +\infty$ . Ενώ για τις υψηλές θερμοκρασίες δηλαδή όταν το  $T \rightarrow +\infty$  προκύπτει πως

$\beta = \frac{1}{kT} \rightarrow 0$ . Γνωρίζοντας πως  $\lim_{x \rightarrow 0}(\tanh x) = 0$  και  $\lim_{x \rightarrow \infty}(\tanh x) = 1$ , για τις χαμηλές

θερμοκρασίες ισχύει πως η μέση τιμή του μέτρου του παράγοντα συγχρονισμού για τα θερμικά **qubit** (σχέση-4.35) αλλά και της αβεβαιότητας (σχέση-4.37) θα εξαρτώνται από τη διαφορά  $\theta_-$  ως εξής:

---


$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} |C_2^{\text{th}}| = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + \cos \theta_-} \quad (4.38)$$

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} (|\Delta C_2^{\text{th}}|) = \frac{1}{2} (1 - \cos \theta_-) \quad (4.39)$$

Για τις υψηλές θερμοκρασίες δηλαδή όταν το  $T \rightarrow \infty$  αντίστοιχα εφαρμόζοντας το όριο για  $\beta \rightarrow 0$ , προκύπτει πως έχουμε μηδενική μέση τιμή και αβεβαιότητα διότι ισχύουν οι σχέσεις:

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} (|C_2^{\text{th}}|) = 0 \quad (4.40)$$

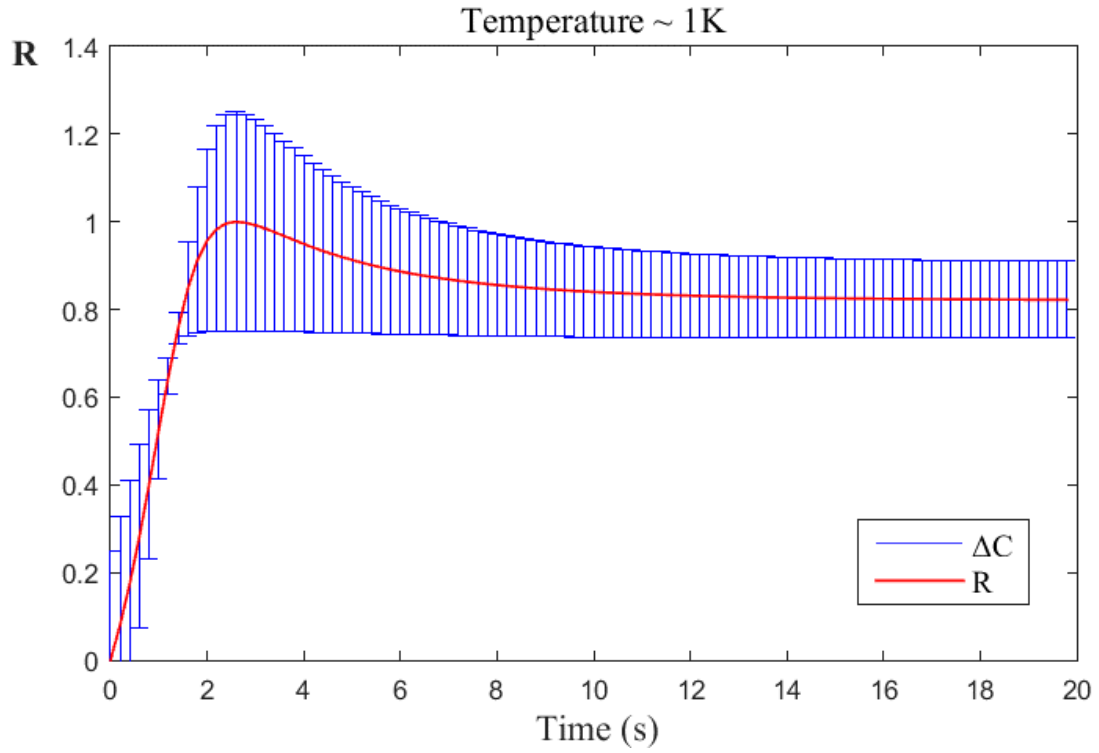
$$\lim_{\beta \rightarrow 0} (|\Delta C_2^{\text{th}}|) = 0 \quad (4.41)$$

Στην περίπτωση των υψηλών θερμοκρασιών δηλαδή όταν το  $\beta \rightarrow 0$ , δημιουργείται ένας πίνακας πυκνότητας στον οποίο οι καταστάσεις των  $|\theta+\rangle, \langle\theta-|$  έχουν ισόποση πιθανότητα. Για τις χαμηλές θερμοκρασίες και όταν το  $\beta = \frac{1}{kT} \rightarrow +\infty$  παρατηρούμε πως στον πίνακα πυκνότητας έχουμε μονάχα μια καθαρή κατάσταση  $|\theta+\rangle$ . Σε αυτήν την περίπτωση όπως φαίνεται και από τα διαγράμματα, όλες οι παρατηρούμενες ποσότητες είναι ανάλογες ως προς την περίπτωση των qubit στον ισημερινό.

Στο συγχρονισμό και όταν το  $\theta_- \rightarrow 0$ , τότε ο παράγοντας συγχρονισμού  $R_2 = |C_2^{\text{th}}|$  λόγω της σχέσης (4.35) τείνει:

$$R_2 \equiv |C_2^{\text{th}}| \rightarrow \tanh\left(\frac{\beta}{2}\right) \quad (4.42)$$

Το οποίο και συνεπάγεται πως όταν ο παράγοντας συγχρονισμού τείνει στο  $R \rightarrow 1$ , τότε το  $\beta$  θα τείνει στο άπειρο  $\beta \rightarrow \infty$  όπως είναι αναμενόμενο.

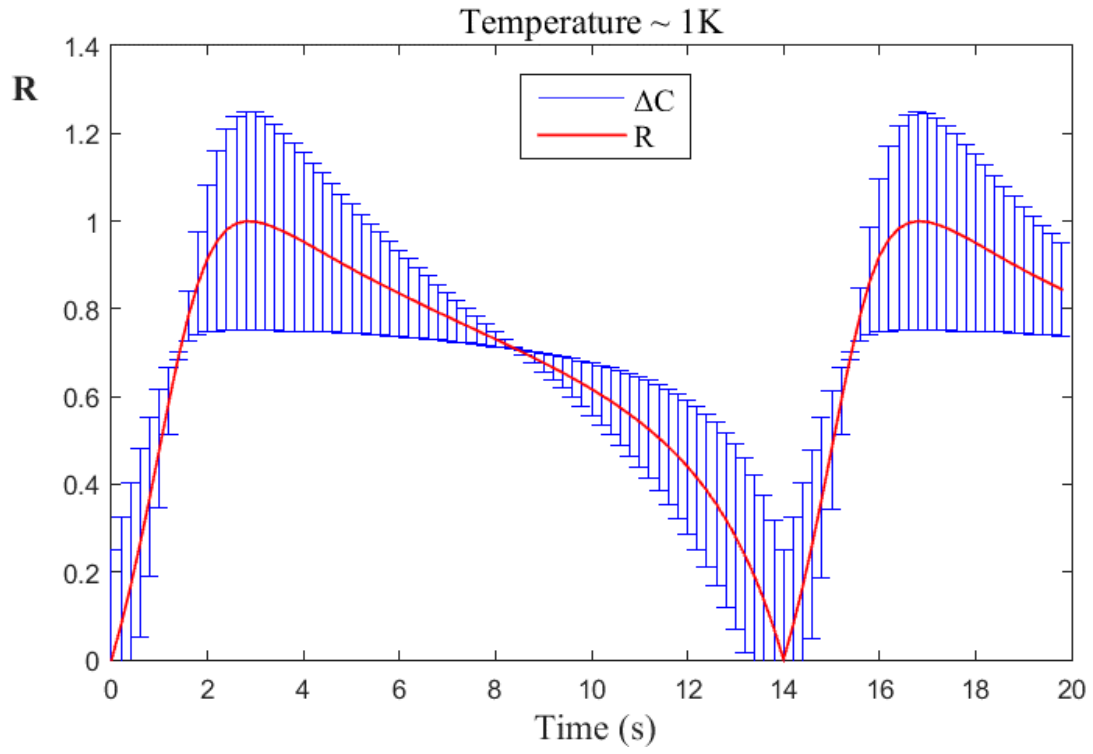


Σχήμα-4.12

Στο παραπάνω γράφημα ισχύουν τα ακόλουθα:

Σταθερά σύζευξης  $K = 0.8$ . Κρίσιμη σταθερά σύζευξης  $K_{cr} = 0.75$ . Η θερμοκρασία είναι  $\sim 1K$  ή  $\beta \sim 10^{23}$ . Σε αυτό το διάγραμμα έχω  $K > K_{cr}$  άρα παρατηρούμε συγχρονισμό.

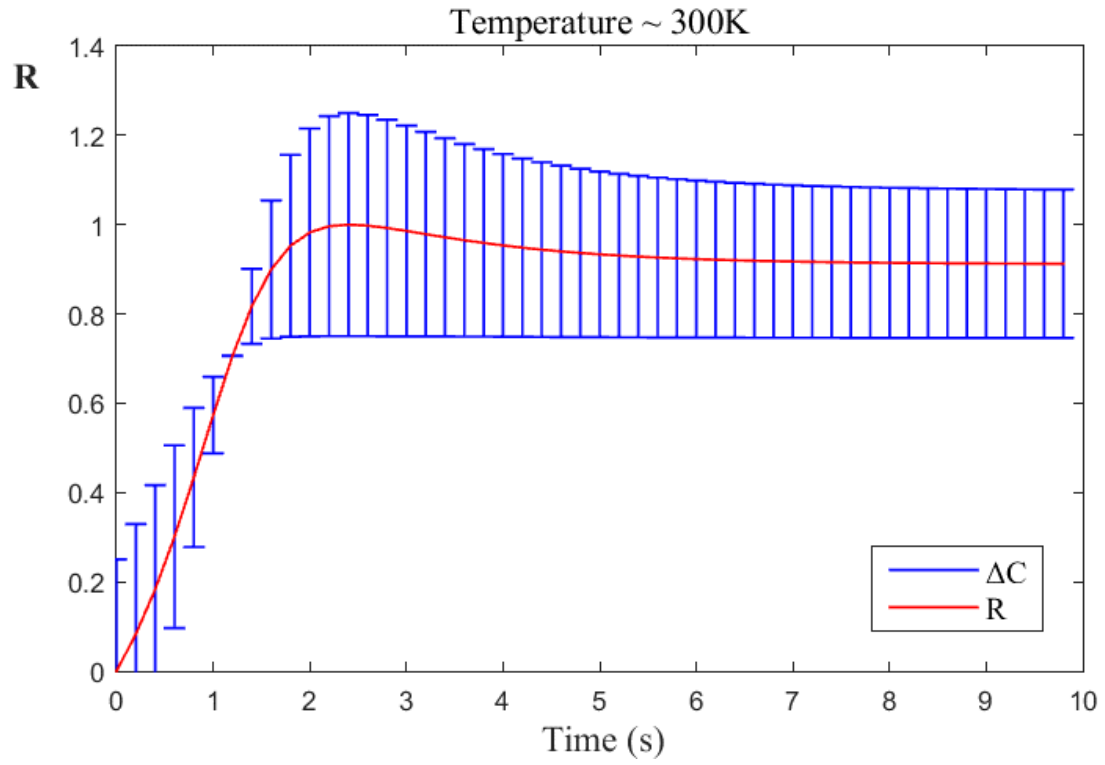




Σχήμα-4.13

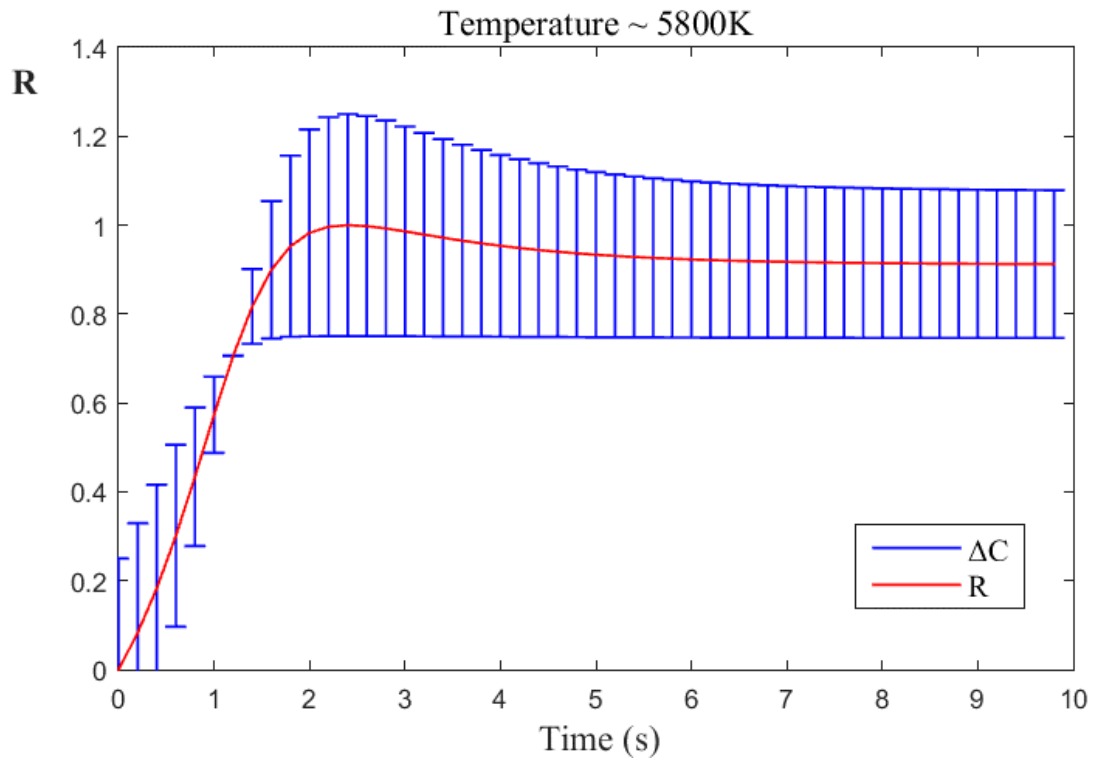
Στο παραπάνω γράφημα ισχύουν τα ακόλουθα:

Σταθερά σύζευξης  $K = 0.6$ . Κρίσιμη σταθερά σύζευξης  $K_{cr} = 0.75$ . Η θερμοκρασία είναι  $\sim 1K$  ή  $\beta \sim 10^{23}$ . Σε σχέση με το προηγούμενο διάγραμμα, η σταθερά είναι τώρα  $K < K_{cr}$  και δεν υπάρχει συγχρονισμός.



Σχήμα-4.14

Σταθερά σύζευξης  $K = 1$ . Η θερμοκρασία είναι  $\sim 300K$  ή  $\beta \sim 2.4 \times 10^{20}$ . Το  $\Delta\omega = 0.75$ .



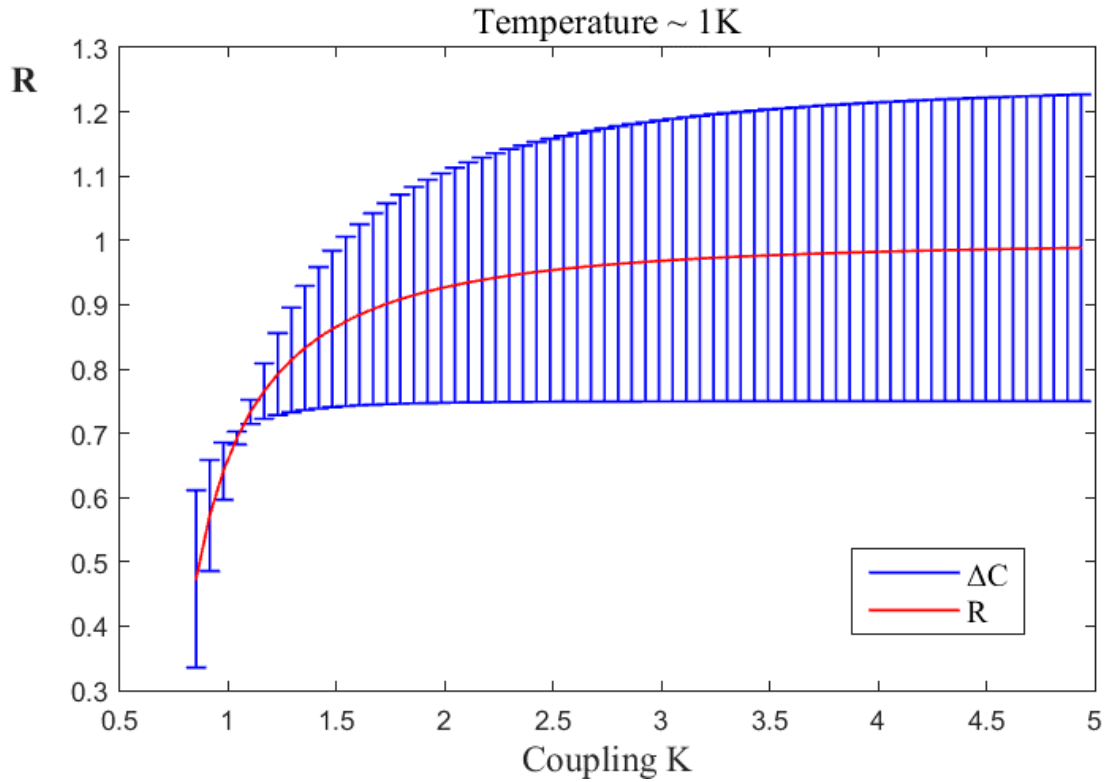
Σχήμα-4.15

---

Στο παραπάνω γράφημα ισχύουν τα ακόλουθα:

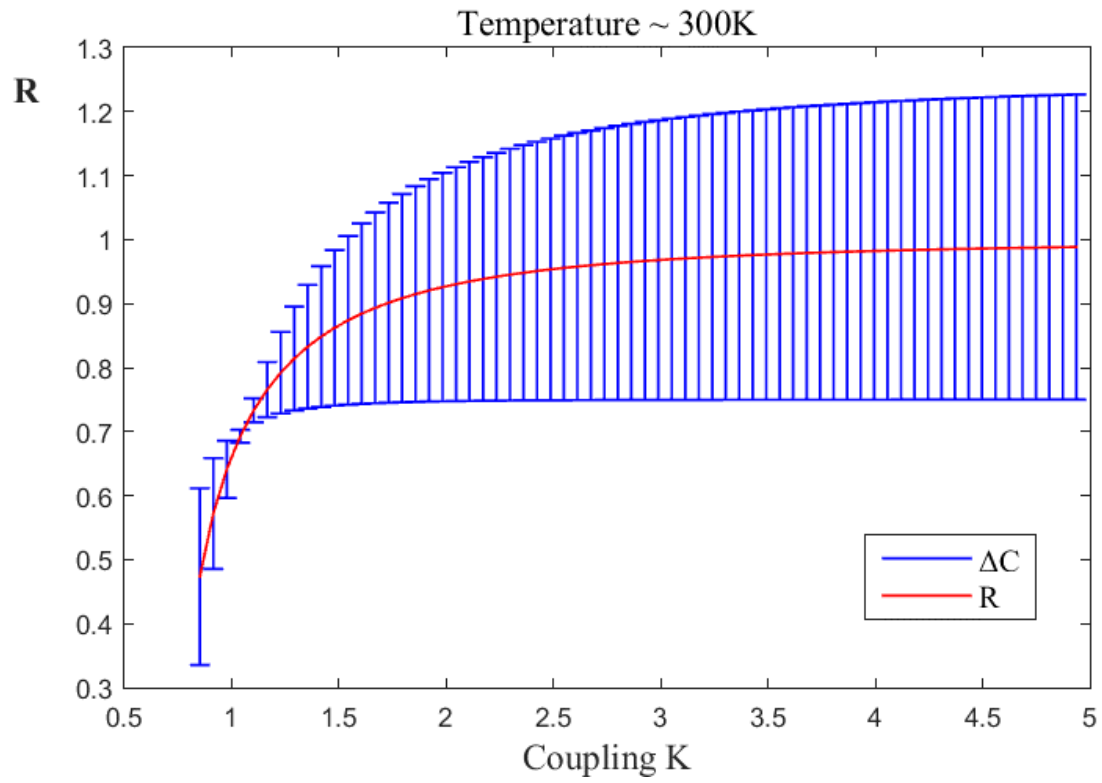
Σταθερά σύζευξης  $K = 1$ . Η θερμοκρασία είναι  $\sim 5800K$  (η θερμοκρασία στην επιφάνεια του ήλιου) ή  $\beta \sim 1.2 \times 10^{19}$ . Το  $\Delta\omega = 0.75$ .

Διαγράμματα του μέσου συγχρονισμού με την σταθερά σύζευξης  $K$

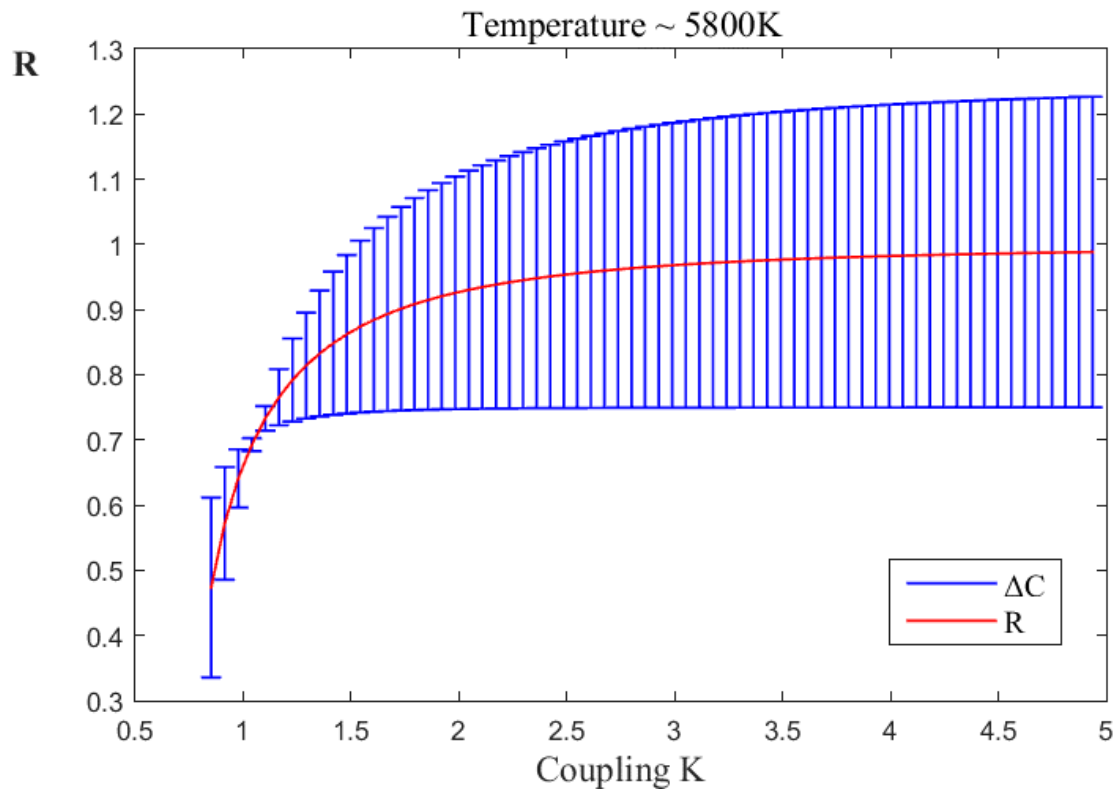


Σχήμα-4.16

Η θερμοκρασία σε αυτό το γράφημα ισούται με  $T = 1 K$  ή  $\beta \sim 1.0 \times 10^{23}$ . Το  $\Delta\omega = 0.75$ .



Η θερμοκρασία είναι  $T = 300\text{ K}$  ή  $\beta \sim 2.4 \times 10^{20}$ . Το  $\Delta\omega = 0.75$ .

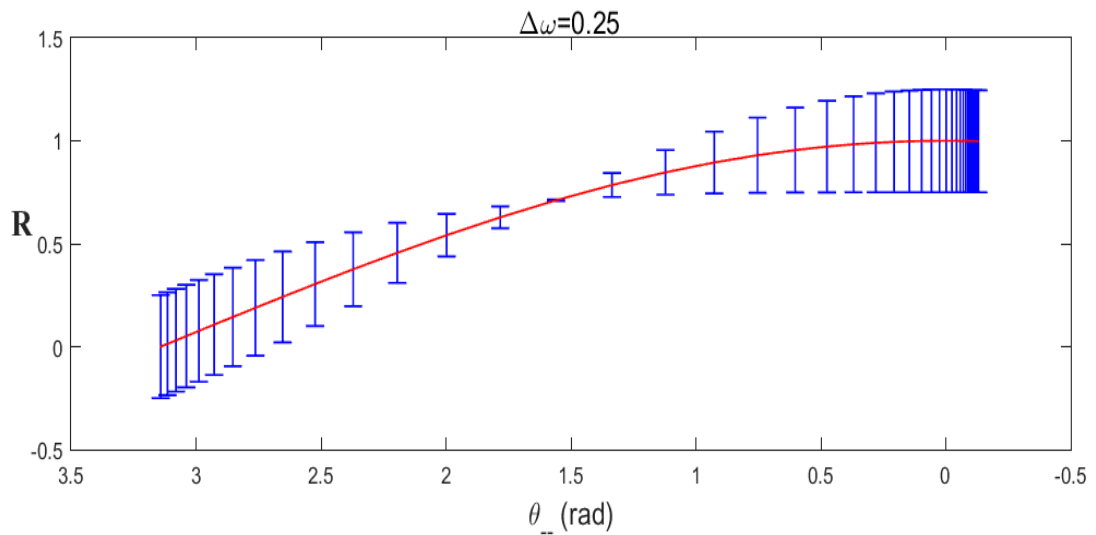


Η θερμοκρασία είναι  $\sim 5800K$  (η θερμοκρασία στην επιφάνεια του ήλιου) ή  $\beta \sim 1.2 \times 10^{19}$ . Το  $\Delta\omega = 0.75$ .

Στα γραφήματα (4.19-4.20-4.21) εξετάζεται η ειδική περίπτωση των χαμηλών θερμοκρασιών στην οποία όπως φάνηκε και από τα προηγούμενα διαγράμματα παρατηρείται συγχρονισμός. Τα γραφήματα που ακολουθούν έχουν στον οριζόντιο άξονα τιμές που αφορούν την διαφορά γωνιών  **$\theta_-$**  ενδεικτικές τιμές σε **rad** και στον κάθετο το παράγοντα τάξης συγχρονισμού  **$R$**  συνεπικουρούμενο από την παρατηρούμενη αβεβαιότητα  $\Delta C$  του  **$R$**  σε αντίστοιχη παρουσίαση τύπου **errorbars** για την διασπορά των τιμών της παρατηρούμενης αβεβαιότητας.

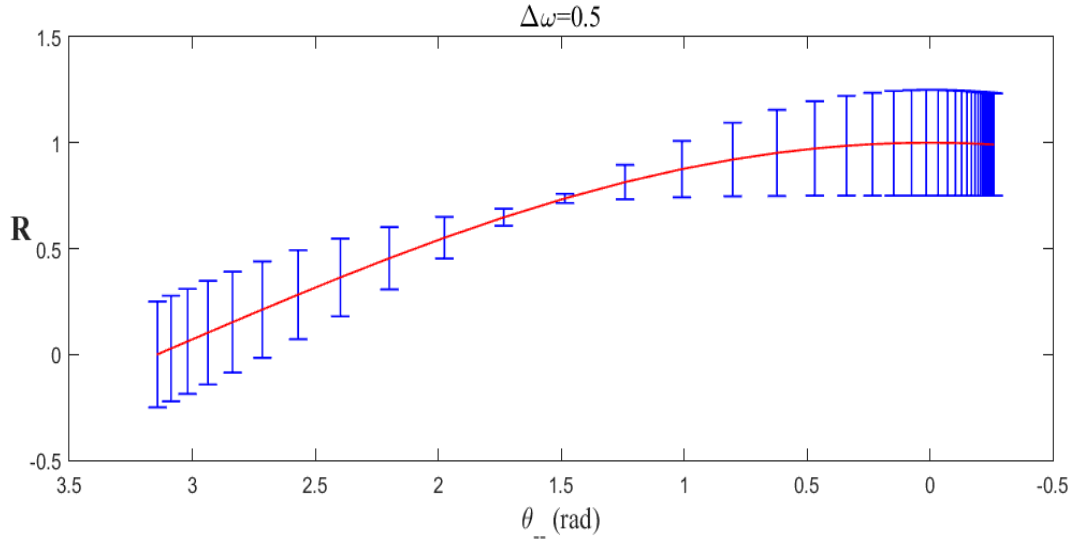
Πιο συγκεκριμένα για τις ενδεικτικές τιμές του  **$\theta_-$**  από τις εξισώσεις που καταλήξαμε (4.38-4.39) για  $T \rightarrow 0$  (τείνει πολύ σε χαμηλές θερμοκρασίες) προκύπτει το συμπέρασμα πως ο παράγοντας τάξης εξαρτάται αποκλειστικά από τη διαφορά των  **$\theta_-$**  και η παρατηρούμενη αβεβαιότητα μηδενίζεται για την διαφορά  **$\theta_-$**  ίση με  $\pi/2$  (ισούται περίπου με 1,5rad).

Παρουσιάζονται αναλυτικά τα διαγράμματα που αφορούν την μεταβολή του παράγοντα τάξης (συγχρονισμού)  **$R$**  ως προς τα θερμικά qubit για τις χαμηλές θερμοκρασίες τα οποία έχουν συμπεριφορά που διαμορφώνεται ανάλογα της διαφοράς των  $\theta_1 - \theta_2 = \theta_-$



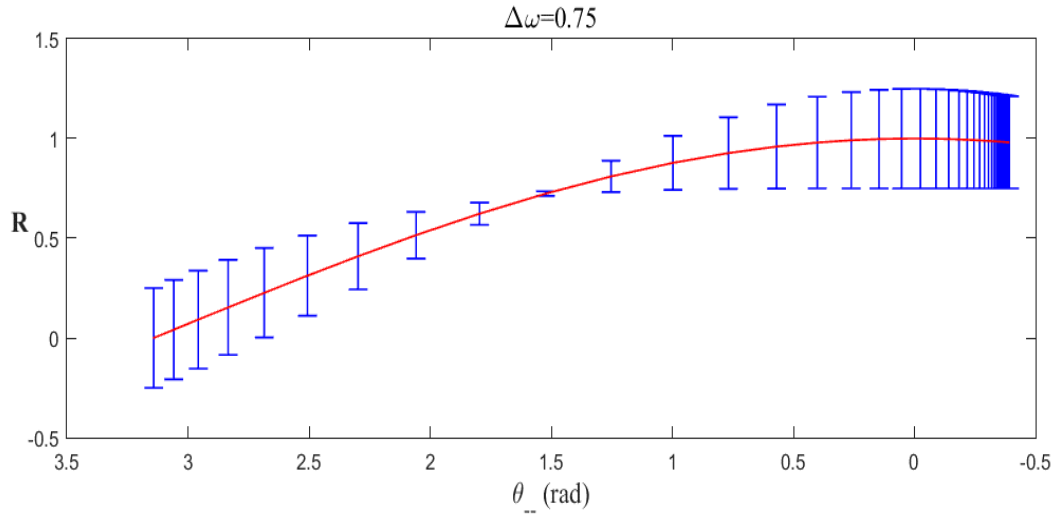
Σχήμα-4.19

Ο παράγοντας τάξης ή συγχρονισμού  $R = \langle C \rangle$  παρουσιάζεται έναντι του  $\theta_-$  στην περίπτωση των θερμικών qubit. Η τιμή της σταθεράς σύζευξης  $K = 2$  και η θερμοκρασία ισούται με 1Kelvin. Το γράφημα παρουσιάζεται σε διαφορά συχνοτήτων  $\Delta\omega = 0.25$ .



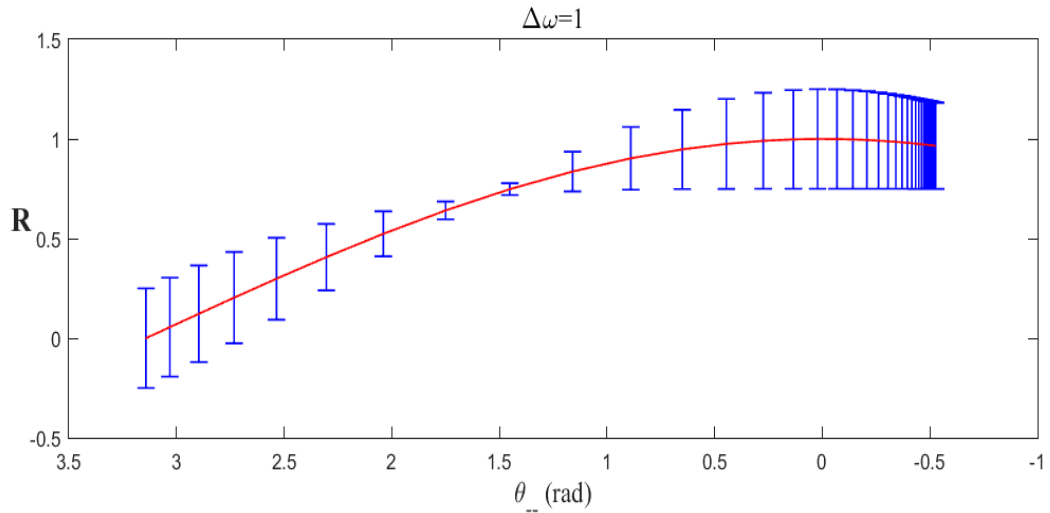
Σχήμα-4.20

Ο παράγοντας τάξης ή συγχρονισμού  $R = \langle C \rangle$  παρουσιάζεται έναντι του  $\theta_-$  στην περίπτωση των θερμικών qubit. Η τιμή της σταθεράς σύζευξης  $K = 2$  και η θερμοκρασία ισούται με  $1\text{Kelvin}$ . Το γράφημα παρουσιάζεται σε διαφορά συχνοτήτων  $\Delta\omega = 0.5$ .



Σχήμα-4.21

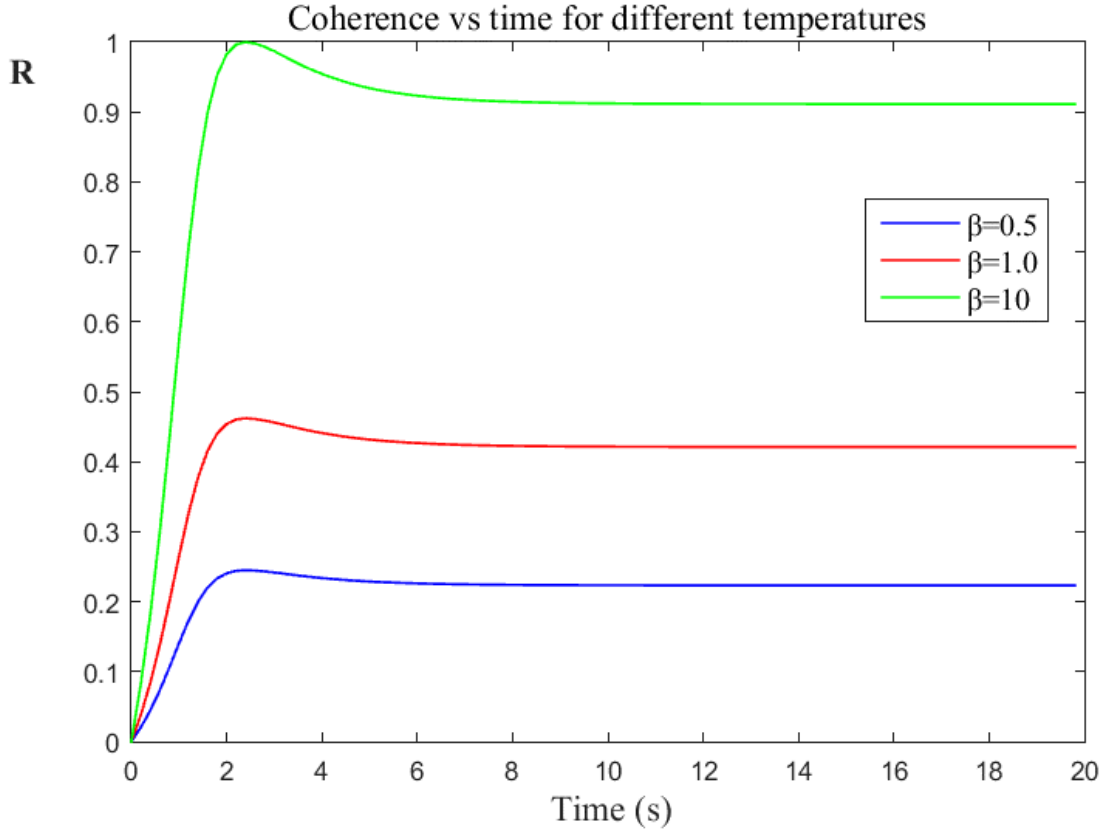
Ο παράγοντας τάξης ή συγχρονισμού  $R = \langle C \rangle$  παρουσιάζεται έναντι του  $\theta_-$  στην περίπτωση των θερμικών qubit. Η τιμή της σταθεράς σύζευξης  $K = 2$  και η θερμοκρασία ισούται με  $1\text{Kelvin}$ . Το γράφημα παρουσιάζεται σε διαφορά συχνοτήτων  $\Delta\omega = 0.75$ .



Σχήμα-4.22

Ο παράγοντας τάξης ή συγχρονισμού  $R = \langle C \rangle$  παρουσιάζεται έναντι του  $\theta_-$  στην περίπτωση των θερμικών qubit. Η τιμή της σταθεράς σύζευξης  $K = 2$  και η θερμοκρασία ισούται με  $1\text{Kelvin}$ . Το γράφημα παρουσιάζεται σε διαφορά συχνοτήτων  $\Delta\omega = 1.0$

Στη συνέχεια παρουσιάζονται γραφήματα που εκφράζουν τρεις διαφορετικές τιμές του παράγοντα  $\beta$  (δηλαδή σε διαφορετικές θερμοκρασίες) σε αναλογία με τον παράγοντα σύζευξης και την εξέλιξη στο χρόνο.

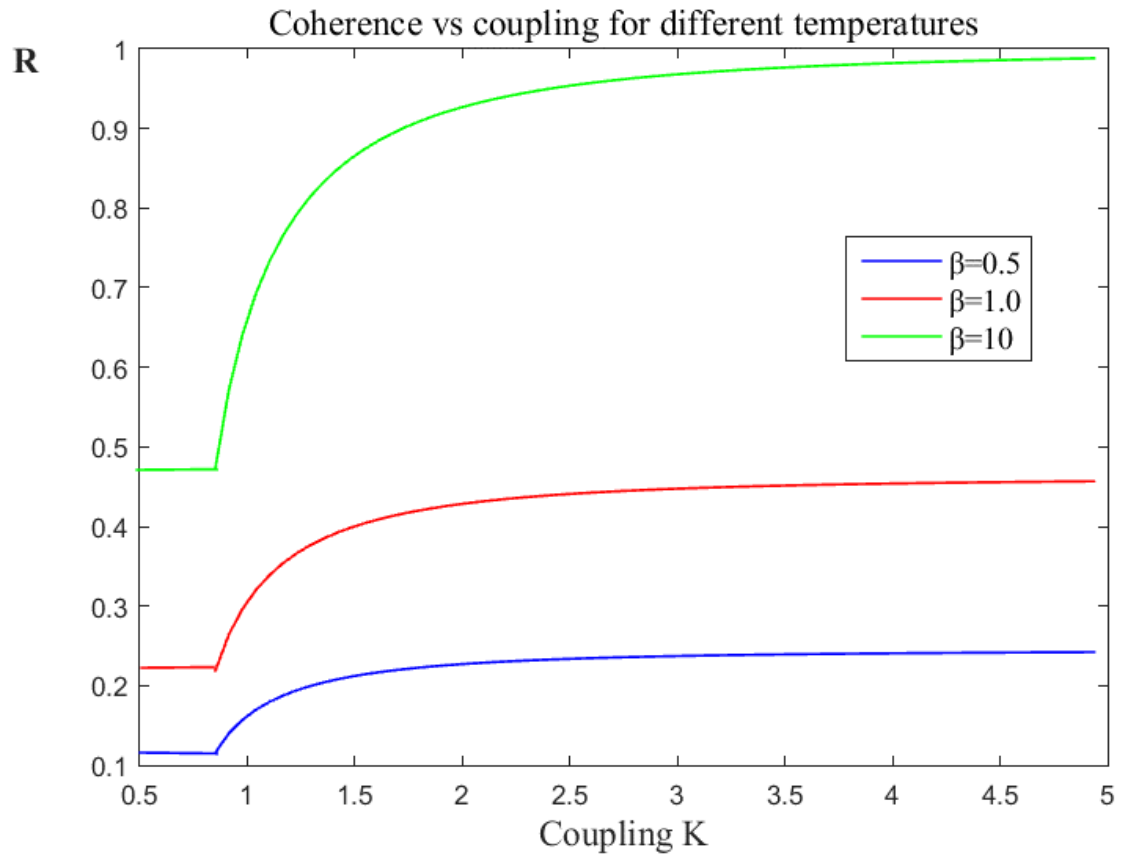


Σχήμα-4.23

Η τιμή της σταθεράς σύζευξης είναι  $K = 1$  και του  $\Delta\omega = 0.75$ . Παρατηρούμε ότι στο συγχρονισμό ( $\theta_- \rightarrow 0$ ) ο παράγοντας τάξης (συγχρονισμού) πλησιάζει τη τιμή  $\tanh(\beta/2)$ . Επίσης για μεγάλη τιμή του  $\beta = 1/kT$  (μικρή θερμοκρασία) ο παράγοντας τάξης (συγχρονισμού) πλησιάζει τη τιμή 1.

Ανάλογη συμπεριφορά παρατηρείται και στο γράφημα του παράγοντα συγχρονισμού ως προς την εξέλιξη του στον χρόνο όπως φαίνεται στο Σχήμα-4.24.





*Σχήμα-4.24*

---

# 5

## ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

---

Πιθανή προέκταση της έρευνας των κβαντικών φαινομένων μπορεί να είναι μια μελέτη σε κατάσταση χίμαιρας. Ο ανθρώπινος εγκέφαλος φαίνεται να είναι ένα πολύπλοκο είδος χίμαιρας καθώς ταυτόχρονα διατηρεί σύγχρονη και ασύγχρονη ανάφλεξη των νευρώνων. Υπάρχουν ποιοτικές ομοιότητες μεταξύ της αποσταθεροποίησης των καταστάσεων χίμαιρας και των επιληπτικών κρίσεων. Λαμβάνοντας υπόψη πόσες ασθένειες σχετίζονται με το συγχρονισμό και τη διαταραχή του (επιληψία, καρδιακές αρρυθμίες, χρόνια αϋπνία), περαιτέρω μελέτες στο φαινόμενο του συγχρονισμού μπορούν να καθορίσουν νέες θεραπευτικές μεθόδους.

Λαμβάνοντας υπόψη πόσες συσκευές βασίζονται στο συγχρονισμό (συστοιχίες Josephson και λέιζερ, ηλεκτρικά δίκτυα, το Παγκόσμιο Σύστημα Στιγματοθέτησης [GPS]), φαίνεται ασφαλές να θεωρηθεί ότι η βαθύτερη κατανόηση του αυθόρμητου συγχρονισμού αναμένεται να βρει πρακτικό όφελος.

Οι ερευνητές μπορούν να μελετήσουν και να προβλέψουν τον έλεγχο του συγχρονισμού σε πραγματικό περιβάλλον και να θεσπίσουν κανόνες σχετικούς με τον τρόπο σταθεροποίησης του συγχρονισμού των ηλεκτρικών δικτύων και την πιο σταθερή ενσωμάτωση του ενεργειακού πλέγματος στις Ηνωμένες Πολιτείες της Αμερικής με διακοπτόμενες πηγές ενέργειας όπως η αιολική ενέργεια και ο άνεμος.

---

Μπορεί να μελετηθεί περαιτέρω η γκρίζα ζώνη μεταξύ διαφορετικών σύγχρονων καταστάσεων, κάτι που θα μπορούσε να είναι ιδιαίτερα χρήσιμο για τη διόρθωση των ακανόνιστων ηλεκτρικών παλμών, σε εφαρμογές κρυπτογράφησης και ασφαλείς μορφές επικοινωνίας, σε συστήματα δικτύων και στο διαδίκτυο. Μια ειδική περίπτωση μελέτης είναι ο «απομακρυσμένος συγχρονισμός»: οι ταλαντωτές που δεν είναι άμεσα συνδεδεμένοι συγχρονίζονται σχηματίζοντας ένα σύμπλεγμα, ενώ οι ταλαντωτές που είναι μεταξύ αυτών συμπεριφέρονται διαφορετικά, συγχρονίζονται με άλλο σύμπλεγμα (παράδειγμα: social networks).

---

# 6

## ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

---

1. D. Ellinas, “Qubit Quantum Synchronization: A novel approach”, manuscript 2020.
2. Strogatz, Steven & Goldenfeld, Nigel. *Sync: The Emerging Science of Spontaneous Order*. Physics Today, (2004).
3. Pikovsky, A., Rosenblum, M. G. and Kurths, J.. *Synchronization, A Universal Concept in Nonlinear Sciences*. Cambridge: Cambridge University Press, 2001.
4. Strogatz, Steven H. 2000. “From Kuramoto to Crawford: Exploring the Onset of Synchronization in Populations of Coupled Oscillators.” *Physica D: Nonlinear Phenomena* 143 (1–4): 1–20. [https://doi.org/10.1016/S0167-2789\(00\)00094-4](https://doi.org/10.1016/S0167-2789(00)00094-4).
5. Ren, Jie, and Shi Qun Zhu. 2006. “Bipartite and Tripartite Entanglement in a Three-Qubit Heisenberg Model.” *Communications in Theoretical Physics* 46 (6): 969–74. <https://doi.org/10.1088/0253-6102/46/6/003>.
6. Diosi L. (2011) *Foundations of Q-Physics*. In: *A Short Course in Quantum Information Theory. Lecture Notes in Physics*, vol 827. Springer, Berlin, Heidelberg. [https://doi.org/10.1007/978-3-632-16117-9\\_4](https://doi.org/10.1007/978-3-632-16117-9_4).

- 
7. N. Chopra and M. W. Spong, "On Synchronization of Kuramoto Oscillators," *Proceedings of the 44th IEEE Conference on Decision and Control, Seville, Spain, 2005*, pp. 3916-3922, doi: 10.1109/CDC.2005.1582773.
  8. Pikovsky, A., Rosenblum, M., & Kurths, J. (2001). *Synchronization: A Universal Concept in Nonlinear Sciences (Cambridge Nonlinear Science Series)*. Cambridge: Cambridge University Press. doi:10.1017/CBO9780511755743
  9. Cooray, Gerald. 2008. "The Kuramoto Model." *Leonardo*, no. September
  10. (Hu et al. 2014) Abrams, Daniel M., Rennie Mirollo, Steven H. Strogatz, and Daniel A. Wiley. 2008. "Solvable Model for Chimera States of Coupled Oscillators." *Physical Review Letters* 101 (8): 1–4. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.101.084103>.
  11. Acebrón, Juan A., L. L. Bonilla, Conrad J. Pérez Vicente, Félix Ritort, and Renato Spigler. 2005. "The Kuramoto Model: A Simple Paradigm for Synchronization Phenomena." *Reviews of Modern Physics* 77 (1): 137–85. <https://doi.org/10.1103/RevModPhys.77.137>.
  12. Hu, Xin, S. Boccaletti, Wenwen Huang, Xiyun Zhang, Zonghua Liu, Shuguang Guan, and Choy Heng Lai. 2014. "Exact Solution for First-Order Synchronization Transition in a Generalized Kuramoto Model." *Scientific Reports* 4. <https://doi.org/10.1038/srep07262>.
  13. Huang, Xia, Jian Gao, Yu Ting Sun, Zhi Gang Zheng, and Can Xu. 2016. "Effects of Frustration on Explosive Synchronization." *Frontiers of Physics* 11 (6): 1–8. <https://doi.org/10.1007/s11467-016-0597-y>.
  14. Jin, Yan Liang, Lin Yao, Wei Si Guo, Rui Wang, Xue Wang, and Xue Tao Luo. 2019. "Explosive Synchronization of Multi-Layer Frequency-Weighted Coupled Complex Systems." *Chinese Physics B* 28 (7). <https://doi.org/10.1088/1674-1056/28/7/070502>.
  15. Zhu, Liuhua. 2020. "Synchronization Dynamics in the Sakaguchi-Kuramoto Oscillator Network with Frequency Mismatch Rules." *Journal of Applied Mathematics and Physics* 08 (02): 259–69. <https://doi.org/10.4236/jamp.2020.82021>.
-