

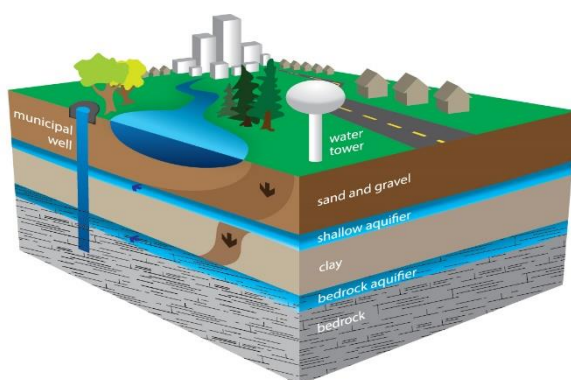


ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ ΚΡΗΤΗΣ  
ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΠΕΡΙΒΑΛΛΟΝΤΟΣ

**ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΤΗΣ ΥΠΟΓΕΙΑΣ ΡΟΗΣ ΚΑΙ ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗ  
ΑΝΤΛΗΣΕΩΝ ΣΤΗΝ ΠΕΡΙΟΧΗ ΜΟΙΡΕΣ ΗΡΑΚΛΕΙΟΥ ΚΡΗΤΗΣ**

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

**Μαρτζάκλη Χριστίνα**



Τριμελής Επιτροπή:

Καρατζάς Γεώργιος (Επιβλέπων)

Νικολαΐδης Νικόλαος

Τριχάκης Ιωάννης

Χανιά, Ιούλιος 2020

"Απαγορεύεται η αντιγραφή, αποθήκευση και διανομή της παρούσας εργασίας, εξ ολοκλήρου ή τμήματος αυτής, για εμπορικό σκοπό. Επιτρέπεται η ανατύπωση, αποθήκευση και διανομή για μη κερδοσκοπικό σκοπό, εκπαιδευτικού ή ερευνητικού χαρακτήρα, με την προϋπόθεση να αναφέρεται η πηγή προέλευσης. Ερωτήματα που αφορούν τη χρήση της εργασίας για άλλη χρήση θα πρέπει να απευθύνονται προς το συγγραφέα.

Οι απόψεις και τα συμπεράσματα που περιέχονται σε αυτό το έγγραφο εκφράζουν τον συγγραφέα και δεν πρέπει να ερμηνευθεί ότι αντιπροσωπεύουν τις επίσημες θέσεις του Πολυτεχνείου Κρήτης".

ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ ΚΡΗΤΗΣ  
ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΠΕΡΙΒΑΛΛΟΝΤΟΣ



**ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΤΗΣ ΥΠΟΓΕΙΑΣ ΡΟΗΣ ΚΑΙ ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗ  
ΑΝΤΛΗΣΕΩΝ ΣΤΗΝ ΠΕΡΙΟΧΗ ΜΟΙΡΕΣ ΗΡΑΚΛΕΙΟΥ ΚΡΗΤΗΣ**

**ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ**

**Μαρτζάκλη Χριστίνα**

Τριμελής Επιτροπή:

Καρατζάς Γεώργιος (Επιβλέπων)

Νικολαΐδης Νικόλαος

Τριχάκης Ιωάννης

## ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η παρούσα διπλωματική εργασία έχει στόχο την προσομοίωση της υπόγειας ροής και τη βελτιστοποίηση των αντλήσεων στην περιοχή των Μοιρών του Ηρακλείου της Κρήτης.

Στην εργασία αρχικά αναφέρονται κάποιες γενικές πληροφορίες για τα υπόγεια ύδατα και για την περιοχή μελέτης μας. Στη συνέχεια, αναφέρουμε το μαθηματικό υπόβαθρο των μοντέλων προσομοίωσης υπόγειας ροής εξηγώντας κάποιες βασικές εξισώσεις. Γίνεται επίσης, αναφορά στα μοντέλα των πεπερασμένων διαφορών και στοιχείων. Επειδή, στη συγκεκριμένη εργασία ασχοληθήκαμε κυρίως με το μαθηματικό μοντέλο PTC γίνεται ανάλυση των εξισώσεων του αλλά και αναφορά του προγράμματος ArgusOne στο οποίο αυτό περικλείεται.

Παρακάτω, ορίζουμε το πρόβλημα το οποίο πρέπει να γραμμικοποιήσουμε καθώς, ο υδροφορέας μας είναι ελεύθερος και το υδραυλικό του ύψος μειώνεται μη γραμμικά. Γι' αυτό το λόγο εφαρμόζουμε τη μέθοδο Simplex.

Πιο συγκεκριμένα, ορίσαμε εννιά πηγάδια άντλησης και εννιά πηγάδια παρατήρησης όπου, με τη βοήθεια του PTC και με παροχές που ορίσαμε εμείς στο πρόγραμμα παρουσιάζονταν τα αντίστοιχα υδραυλικά ύψη. Τα δεδομένα που διαθέτουμε αφορούν τα έτη 2008-2009.

Ορίζοντας τις παροχές προκύπτουν κάποια υδραυλικά ύψη τα οποία επεξεργαζόμαστε με μαθηματικούς τύπους και ύστερα μέσω του προγράμματος της Matlab, γίνεται η γραμμικοποίηση της μεθόδου Simplex. Έτσι, προκύπτουν οι βέλτιστες παροχές.

Το πρόγραμμα χρειάστηκε να το «τρέξουμε» τέσσερις φορές μέχρι να συγκλίνουν τα αποτελέσματα, δηλαδή να βρεθεί η βέλτιστη λύση για τις παροχές άντλησης. Παρατηρούμε, ότι κάποια πηγάδια θα πρέπει να παραμείνουν κλειστά και άλλα να αντλούν με τις μέγιστες παροχές τους.

## **ABSTRACT**

The present thesis aims to the simulation of the groundwater flow and to optimize pumping scheme in the area of Moires, Heraklion Crete.

This thesis initially provides some general information about groundwater and our study area. In the first part the mathematical background of the underground flow simulation models is presented as well as some of the basic equations of groundwater flow. Reference is also made to finite difference models and data. In addition the mathematical model of PTC, is employed and the reference to Argus One program is presented.

Since the groundwater flow equation for unconfined aquifers is nonlinear in the present thesis a piece linear approach is present to linearize the problem and determine a groundwater management solution of an optimal pumping scheme. For the solution of this problem the Simplex Method is used.

Specifically, nine pumping wells were selected and nine observation wells where, with the help of the PTC mathematical model the objective is to minimize pumping cost subject to a set of hydraulic head constraints. The data we have are for the years 2008-2009.

The program had to run four times until the results converged to the optimal solution for pumping supplies. The results have shown that some wells should remain closed and others pump at their maximum capacity.

## ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Στα πλαίσια του προγράμματος σπουδών της Σχολής Μηχανικών Περιβάλλοντος, του Πολυτεχνείου Κρήτης εκπονήθηκε η παρούσα διπλωματική εργασία, η οποία θεωρείται υποχρεωτικό κομμάτι για την ολοκλήρωση των σπουδών. Η εργασία εκπονήθηκε υπό την επίβλεψη του καθηγητή της σχολής κ. Γεώργιο Καρατζά και τη βοήθεια του Δρ. Τριχάκη Ιωάννη.

## **ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ**

Φέροντας εις πέρας την παρούσα διπλωματική, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα καθηγητή μου κ. Γεώργιο Καρατζά, καθηγητή της Σχολής Μηχανικών Περιβάλλοντος του Πολυτεχνείου Κρήτης για την καθοδήγηση και τη βοήθεια του. Επίσης, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον Δρ. Ιωάννη Τριχάκη για τις πολύτιμες συμβουλές του και τη συνεχή επικοινωνία και βοήθεια. Ακόμα, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον Δρ. Εμμανουήλ Βαρουχάκη και τέλος, τον καθηγητή κ. Νικόλαο Νικολαΐδη για τη συμμετοχή του στην εξεταστική επιτροπή.

Ξεχωριστά θα ήθελα να ευχαριστήσω την οικογένεια μου και τους φίλους μου.

## ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΠΕΡΙΛΗΨΗ .....	1
ABSTRACT .....	2
ΠΡΟΛΟΓΟΣ.....	3
ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ .....	4
ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΠΙΝΑΚΩΝ.....	6
ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΩΝ – ΕΙΚΟΝΩΝ .....	7
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1 : ΕΙΣΑΓΩΓΗ .....	9
1.1 Γενικά Στοιχεία .....	9
1.2 Υδρολογικός κύκλος .....	9
1.3 Διαχείριση Υπόγειων Υδροφορέων .....	10
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 : ΠΕΡΙΟΧΗ ΜΕΛΕΤΗΣ .....	12
2.1 Γενικά Χαρακτηριστικά .....	12
2.2 Φυσικό Περιβάλλον.....	13
2.3 Μετεωρολογικά Χαρακτηριστικά.....	14
2.4 Γεωλογικά Χαρακτηριστικά .....	15
2.5 Υδρογεωλογικά Χαρακτηριστικά.....	17
2.6 Σεισμικότητα .....	18
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 : ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΥΠΟΒΑΘΡΟ ΜΟΝΤΕΛΩΝ ΠΡΟΣΟΜΕΙΩΣΗΣ ΚΑΙ ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗΣ .....	18
3.1 Μοντέλα Υπόγειας Ροής .....	18
3.2 Βασικές Μαθηματικές Εξισώσεις .....	19
3.3 Μοντέλα Προσομοίωσης Υπόγειας Ροής .....	22
3.4 Οριακές Συνθήκες.....	23
3.5 Προσομοίωση Ακόρεστης Ζώνης .....	24
3.6 Διαρροή .....	24
3.7 Μοντέλο PTC (Princeton Transport Code) .....	26
3.7.1 Βασικές Εξισώσεις Μοντέλου PTC.....	26
3.7.2 Ο αλγόριθμος επίλυσης του μοντέλου PTC .....	27
3.7.3 Τρισδιάστατη Ροή Υπόγειων Υδάτων .....	28
Μια πεπερασμένη προσέγγιση αυτής της σειράς είναι: .....	28
3.7.4 Οριακές Συνθήκες.....	30
3.7.5 Εξισώσεις του Συστήματος.....	31
3.7.6 Οριακές Συνθήκες.....	31
3.7.7 Εφαρμογή του PTC στο υπό μελέτη πρόβλημα .....	31



ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4: ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΜΟΝΤΕΛΟΥ PTC ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΩΝ ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗΣ ΣΤΗ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗ ΤΩΝ ΥΠΟΓΕΙΩΝ ΥΔΑΤΩΝ .....	33
4.1 Ορισμός Προβλήματος .....	33
4.2 Προβλήματα μη Γραμμικού Προγραμματισμού .....	34
4.2.1 Δομή μη Γραμμικού Προβλήματος .....	34
4.3 Επίλυση μη Γραμμικών Προβλημάτων .....	35
4.4 Προβλήματα Γραμμικού Προγραμματισμού .....	37
4.4.1 Μαθηματικοί ορισμοί του γραμμικού προγραμματισμού .....	37
4.4.2 Διαδικασία μοντελοποίησης .....	38
4.4.3 Συνθήκες εφαρμογής μοντέλων γραμμικού προγραμματισμού .....	39
4.5 Μέθοδος Simplex .....	39
4.5.1 Μετατροπή του γραμμικού προβλήματος στην πρότυπη μορφή .....	40
4.5.2 Θεωρητικό υπόβαθρο .....	40
4.6 Επίλυση του Υπό Μελέτη Προβλήματος με Χρήση Γραμμικού Προγραμματισμού .....	41
4.6.1 Εφαρμογή αλγορίθμου στο υπό μελέτη πρόβλημα .....	47
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5 : ΑΝΑΛΥΣΗ ΤΩΝ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΩΝ ΚΑΙ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ .....	68
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ: .....	72

## ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΠΙΝΑΚΩΝ

Πίνακας 1: Παροχές στα πηγάδια άντλησης για το 1 <sup>ο</sup> Βήμα .....	48
Πίνακας 2: Αρχικά υδραυλικά ύψη στους κόμβους παρατήρησης και υδραυλικά ύψη που προκύπτουν από το μοντέλο PTC για κάθε διαταραχή .....	49
Πίνακας 3: Ο πίνακας απόκρισης για το 1 <sup>ο</sup> Βήμα .....	50
Πίνακας 4: Η βέλτιστη λύση του 1 <sup>ου</sup> βήματος .....	52
Πίνακας 5: Αρχική παροχή και διαταραγμένες παροχές για τα πηγάδια άντλησης για το 2 <sup>ο</sup> βήμα .....	53
Πίνακας 6: Αρχικά υδραυλικά ύψη στους κόμβους παρατήρησης και υδραυλικά ύψη που προκύπτουν από το μοντέλο PTC για κάθε διαταραχή για το 2 <sup>ο</sup> βήμα .....	54
Πίνακας 7: Ο πίνακας απόκρισης για το 2 <sup>ο</sup> Βήμα .....	55
Πίνακας 8: Η βέλτιστη λύση του 2 <sup>ου</sup> βήματος .....	57
Πίνακας 9: Αρχική παροχή και διαταραγμένες παροχές για τα πηγάδια άντλησης για το 3 <sup>ο</sup> βήμα .....	58
Πίνακας 10: Αρχικά υδραυλικά ύψη στους κόμβους παρατήρησης και υδραυλικά ύψη που προκύπτουν από το μοντέλο PTC για κάθε διαταραχή για το 3 <sup>ο</sup> βήμα .....	59

Πίνακας 11: Ο πίνακας απόκρισης για το 3ο Βήμα .....	60
Πίνακας 12: Η βέλτιστη λύση του 3ου βήματος.....	62
Πίνακας 13: Αρχική παροχή και διαταραγμένες παροχές για τα πηγάδια άντλησης για το 4ο βήμα .....	63
Πίνακας 14: Αρχικά υδραυλικά ύψη στους κόμβους παρατήρησης και υδραυλικά ύψη που προκύπτουν από το μοντέλο PTC για κάθε διαταραχή για το 4ο βήμα .....	64
Πίνακας 15: Ο πίνακας απόκρισης για το 4ο Βήμα .....	65
Πίνακας 16: Η βέλτιστη λύση του 4ου βήματος.....	67
Πίνακας 17: Αρχική και τελική βέλτιστη τιμή παροχής .....	67
Πίνακας 18: Αρχικές Παροχές Αντλήσεων .....	68
Πίνακας 19:Τελικές Βέλτιστες Παροχές κάθε βήματος .....	71

## **ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΩΝ – ΕΙΚΟΝΩΝ**

Εικόνα 1: Υδρολογικός Κύκλος .....	10
Εικόνα 2: Διακύμανση Στάθμης Λεκάνης Μοιρών έτη 1980-2013.....	13
Εικόνα 3: Βροχοπτώσεις (ITE 1970-1990) Κλίμακα 1cm:12km .....	14
Εικόνα 4: Μηνιαίες θερμοκρασίες υδρολογικού έτους 2018, από μετεωρολογικό σταθμό Πετροκεφάλι Μοιρών .....	15
Εικόνα 5: Μηνιαίες βροχοπτώσεις υδρολογικού έτους 2018, από μετεωρολογικό σταθμό Πετροκεφάλι Μοιρών .....	15
Εικόνα 6: Στρωματογραφική στήλη Νεογενών σχηματισμών (φύλλο Άνω Αρχάνες ΙΓΜΕ,1994).....	17
Εικόνα 7: Διάταξη οριζόντιων πλεγμάτων πεπερασμένων στοιχείων το ένα επάνω στο άλλο, παράγοντας τρισδιάστατη διακριτοποίηση .....	27
Εικόνα 8: Τα επίπεδα του Argus ONE .....	33
Εικόνα 9: Προσέγγιση της καμπύλης υδραυλικού ύψους-παροχής άντλησης από τον αλγόριθμο της διαδοχικής γραμμικοποίησης.....	35
Εικόνα 10: Εύρεση ακροτάτου με γνωστή την παράγωγο της συνάρτησης σε διάφορα σημεία .....	36
Εικόνα 11: Η αρχή λειτουργίας της μεθόδου Simplex.....	40
Εικόνα 12: Θέσεις Πηγαδιών Άντλησης .....	69

Εικόνα 13: : Γραφική απεικόνιση των αποτελεσμάτων του μοντέλου PTC για τα υδραυλικά ύψη στην αρχική κατάσταση όταν τα πηγάδια αντλούν .....	69
Εικόνα 14: Γραφική απεικόνιση των αποτελεσμάτων του μοντέλου PTC για τα υδραυλικά ύψη του 4 <sup>ου</sup> βήματος όταν τα πηγάδια αντλούν.....	70

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1 : ΕΙΣΑΓΩΓΗ

### 1.1 Γενικά Στοιχεία

Το νερό χαρακτηρίζεται πηγή ζωής καθώς, είναι ένα βασικό στοιχείο του ανθρώπινου οργανισμού αλλά και του πλανήτη. Η επιφάνεια της Γης καλύπτεται με νερό στο 75% από το οποίο το 95% περίπου είναι χημικά δεσμευμένο στα πετρώματα και δεν είναι αξιοποιήσιμο από τον άνθρωπο. Από το υπόλοιπο 5%, το 97% περίπου είναι αλμυρό νερό, το 2,37% αποτελεί τους πολικούς πάγους και παγετώνες, το 0,6% περιλαμβάνει τα υπόγεια νερά και μόνο το 0,03% περιλαμβάνει τα επιφανειακά νερά.

Το νερό είναι ένας ανανεώσιμος φυσικός πόρος αλλά όχι ανεξάντλητος. Η αυξημένη ζήτηση για καθαρό νερό λόγω της αύξησης του πληθυσμού και του βιοτικού επιπέδου, ασκεί έντονη πίεση στις επιφανειακές και υπόγειες πηγές. Ο άνθρωπος χρησιμοποιεί το νερό, όχι μόνο ως πόσιμο, αλλά και σε διάφορες άλλες δραστηριότητες, όπως για οικιακή και βιομηχανική χρήση, καθώς και σε δραστηριότητες αναψυχής. Συνεπώς; η επαρκής διαθεσιμότητα νερού σε σχέση με την ποιότητα και την ποσότητά του, είναι ζωτικής σημασίας.

Στην Ευρώπη, το μεγαλύτερο ποσοστό νερού που καταναλώνεται, κυρίως από τη βιομηχανία, αγγίζει το 81% και προέρχεται από επιφανειακές πηγές, ενώ από τις υπόγειες καλύπτονται κυρίως ανάγκες ύδρευσης και άρδευσης με ποσοστό που αγγίζει το 55%.

Στην Ελλάδα, ο αγροτικός τομέας χρησιμοποιεί περίπου το 84% του διαθέσιμου νερού αντλώντας το είτε από υπόγεια νερά, είτε από επιφανειακά. Ακολουθεί η ύδρευση με 13% και η βιομηχανία με 3%. Κατά τη διάρκεια του καλοκαιριού, τα υπόγεια ύδατα της χώρας δέχονται ιδιαίτερη πίεση τόσο λόγω της μεγαλύτερης ανάγκης για άρδευση όσο και της εποχιακής αύξησης του πληθυσμού εξαιτίας του τουρισμού. [VICE]

Το μεγαλύτερο μέρος του υπόγειου υδατικού δυναμικού της χώρας υφίσταται τις συνέπειες της εντατικής εκμετάλλευσης ή της ποιοτικής υποβάθμισης, που εκδηλώνονται με τη δραματική πτώση της στάθμης των υδροφόρων οριζόντων και την εκτεταμένη ρύπανση του υπόγειου νερού, με περιβαλλοντικές αλλά και σοβαρές οικονομικές συνέπειες και επιπτώσεις. [Στρατηγάκης, 2007]

### 1.2 Υδρολογικός κύκλος

Ο υδρολογικός κύκλος, γνωστός και ως κύκλος του νερού, είναι η συνεχής ανακύκλωση του νερού της Γης μέσα στην υδρόσφαιρα και στην ατμόσφαιρα. Το συνεχές της κυκλικής διαδικασίας του υδρολογικού κύκλου επιτυγχάνεται με τη βοήθεια της ηλιακής ακτινοβολίας.

Πιο συγκεκριμένα, λόγω της θέρμανσης και των ανέμων στην επιφάνεια της γης τα νερά της (θάλασσα, λίμνες, ποτάμια) εξατμίζονται και συγκεντρώνονται ως υδρατμοί δημιουργώντας τα σύννεφα. Η διαπνοή των φυτών είναι μια ακόμη λειτουργία που

αποδίδει υδρατμούς στην ατμόσφαιρα. Η εξάτμιση και διαπνοή από την ξηρά συχνά δεν διακρίνονται και έτσι αναφερόμαστε στην εξατμισοδιαπνοή. Μια μικρή ποσότητα υδρατμών στην ατμόσφαιρα προέρχεται από την εξάχνωση, μέσω της οποίας μόρια από πάγους και χιόνια μετατρέπονται απευθείας σε υδρατμούς χωρίς να περάσουν από την υγρή μορφή. Οι υδρατμοί συμπυκνώνονται, υγροποιούνται και στη συνέχεια πέφτουν ως βροχή ή άλλες μορφές υετού, εμπλουτίζοντας έτσι τις αποθήκες νερού της γης, είτε αυτές είναι επιφανειακές, όπως οι θάλασσες και οι λίμνες, είτε είναι υπόγειες. Οι παρεμβάσεις του ανθρώπου στον φυσικό αυτό κύκλο μπορεί να προκαλέσουν ανεπανόρθωτες βλάβες. [Στρατηγάκης, 2007]



Εικόνα 1: Υδρολογικός Κύκλος

### 1.3 Διαχείριση Υπόγειων Υδροφορέων

Υδροφορέας χαρακτηρίζεται το πορώδες πέτρωμα το οποίο περιέχει νερό, συναντάται σε διάφορα βάθη και έχει την ικανότητα να συγκεντρώνει το νερό και να επιτρέπει την κίνησή του μέσα στη μάζα του. Οι υπόγειοι υδροφορείς είναι τα αποθέματα γλυκού νερού που βρίσκονται κάτω από την επιφάνεια του εδάφους, συνήθως στη στεριά, αλλά και κάτω από τον πυθμένα της θάλασσας, κοντά στις ακτές. Τα υπόγεια νερά συνήθως καταλαμβάνουν τον κενό χώρο μεταξύ των πετρωμάτων.

Το νερό εισέρχεται στο υπέδαφος από την επιφάνεια του εδάφους, είτε κατευθείαν από τις βροχοπτώσεις, είτε από σώματα επιφανειακού νερού (ποτάμια, λίμνες). Μετά κινείται αργά σε ποικίλες αποστάσεις μέχρι να επιστρέψει στην επιφάνεια του

εδάφους είτε με φυσική εκφόρτιση (πηγές), είτε με ανθρώπινη παρέμβαση (πηγάδια, γεωτρήσεις), είτε τέλος με τη διαπνοή των φυτών.

Η διαθεσιμότητα των υπογείων υδροφορέων ως πηγή νερού εξαρτάται σε σημαντικό βαθμό από τη γεωλογία της επιφάνειας και του υπεδάφους καθώς και από το κλίμα της περιοχής.

Βασικές χρήσεις των υπόγειων υδάτων μπορούν να χωριστούν σε:

1. Αστικές χρήσεις, δηλαδή όταν τα ύδατα διοχετεύονται σε σπίτια. Σε αντίθεση με το νερό από διάφορες πηγές, τα υπόγεια ύδατα έχουν μικρότερες μολυσματικές ουσίες τους και συνεπώς απαιτούν μικρότερη επεξεργασία.
2. Άρδευση, καθώς το νερό διοχετεύεται από πηγάδια είναι διαθέσιμο σε μεγάλους ποσότητες. Ακόμη καλύτερα, το νερό που προέρχεται από τους υδροφόρους ορίζοντες είναι πλούσιο σε ορυκτά και απαλλαγμένο από τοξικές ουσίες.
3. Βιομηχανικές χρήσεις, οι περισσότερες βιομηχανίες απαιτούν σημαντική ποσότητα νερού για την παραγωγή αγαθών και λόγω της συνεχούς ροής των υδάτων, τα υπόγεια ύδατα παρέχουν συνεχή λειτουργία των βιομηχανιών, συνεπώς βιώσιμη παραγωγή. [HouseWaterMatters]

Η χρήση των υπόγειων υδροφορέων έχει και πλεονεκτήματα και μειονεκτήματα. Ένα βασικό θετικό χαρακτηριστικό είναι ότι αποτελούν φθηνότερες λύσεις για τη χρήση του νερού συγκριτικά με άλλες πηγές, όπως για παράδειγμα τα ποτάμια, που απαιτούν φράγματα για να μπορούν να διατηρούν επαρκείς ποσότητες νερού. Μπορεί το κόστος λειτουργίας για την άντληση νερού από τα πηγάδια να είναι μεγαλύτερο αλλά δεν μπορεί να συγκριθεί με ένα φράγμα.

Στη χώρα μας, η μεγάλη άντληση των υπόγειων υδάτων συνδυαστικά με την κακή διαχείρισή τους με λανθασμένες πρακτικές ειδικά από την γεωργία, έχει ως αποτέλεσμα η ποσότητα νερού που καταναλώνεται να είναι πολλαπλάσια από αυτή που μπορεί να αναπληρωθεί από τη φύση. Επιπλέον, η ρύπανση που προκαλούν οι αγροτικές, βιομηχανικές και αστικές πηγές υποβαθμίζουν σε μεγάλο βαθμό την ποιότητά του νερού. [Καρατζάς, 2017]

Επίσης, φυσικά φαινόμενα όπως πλημμύρες και ξηρασίες είναι πιθανό να προκαλέσουν σημαντικά προβλήματα. Πολλές φορές για τη διαχείριση των υπόγειων υδάτων χρειάζεται να γίνουν κατασκευές φραγμάτων, καναλιών και η διάνοξη γεωτρήσεων άντλησης νερού, επηρεάζοντας όμως το φυσικό περιβάλλον.

### Ελεύθεροι Υδροφορείς

Είναι αυτοί που έχουν ως ανώτερη επιφάνεια τον υδροφόρο ορίζοντα. Οι μεταβολές της στάθμης του νερού αντιστοιχούν σε μεταβολές του όγκου του αποθηκευμένου νερού στον υδροφόρο.

### Περιορισμένοι Υδροφορείς

Είναι αυτοί που περιέχουν νερό υπό πίεση μεγαλύτερης της ατμοσφαιρικής και περιορίζονται στην άνω και κάτω επιφάνεια τους από αδιαπέραστα στρώματα. Για τον λόγο αυτό ηπιεζομετρική επιφάνεια βρίσκεται ψηλότερα από τη βάση της αδιαπέραστης οροφής. Όταν η πιεζομετρική επιφάνεια βρίσκεται πάνω από την

επιφάνειά του εδάφους, τότε παρατηρείται αυτόματη ροή με τη μορφή πίδακα (αρτεσιανισμός).

#### Κορεσμένη Ζώνη

Όλα τα διάκενα αυτής της ζώνης είναι γεμάτα νερό κάτω από υδροστατική πίεση. Αντιπροσωπεύει ουσιαστικά το υδροφόρο στρώμα όπου η επάνω επιφάνεια της ζώνης αυτής είναι η ελεύθερη επιφάνεια. Η ζώνη αυτή μπορεί να μας τροφοδοτήσει με νερό. Το επιφανειακό νερό με την επίδραση της βαρύτητας, της υδροστατικής πίεσης, των τριχοειδών δυνάμεων διεισδύει στο έδαφος διαμέσου των διακένων και κινείται προς την κορεσμένη ζώνη, εμπλουτίζοντας τους υπόγειους υδροφόρους ορίζοντες.

#### Ακόρεστη Ζώνη

Χαρακτηρίζεται η ζώνη του υπεδάφους όπου οι εδαφικοί πόροι καταλαμβάνονται από νερό και αέρα συγχρόνως. Καταλαμβάνει το τμήμα μεταξύ της στάθμης του υπόγειου νερού και της επιφάνειας του εδάφους.

## **ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 : ΠΕΡΙΟΧΗ ΜΕΛΕΤΗΣ**

### **2.1 Γενικά Χαρακτηριστικά**

Σε αυτή τη διπλωματική εργασία, μελετάμε την περιοχή των Μοιρών Ηρακλείου. Οι Μοίρες είναι η έδρα του Δήμου Φαιστού της Περιφερειακής Ενότητας Ηρακλείου και σύμφωνα με την απογραφή του 2011 έχει 6.379 κατοίκους. Βρίσκεται περίπου 45km νότια του Ηρακλείου και ανήκει στην ευρύτερη πεδιάδα της Μεσσαράς η οποία εκτείνεται από ανατολικά προς δυτικά, στη νότια ακτή της Κρήτης. Συνορεύει βόρεια με την οροσειρά του Ψηλορείτη και νότια με τα Αστερούσια Όρη. Την πεδιάδα της διασχίζει ο Γεροπόταμος ο οποίος εκβάλλει στον κόλπο της Μεσσαράς. Η πεδιάδα της είναι η μεγαλύτερη του νησιού, έχει μήκος 50km και πλάτος περίπου 7km.

Η πεδιάδα της Μεσσαράς είναι αρκετά εύφορη, και κατά συνέπεια και αυτή των Μοιρών, και πάντα αποτελούσε το κυριότερο αγροτικό κέντρο της Κρήτης. Μόλις το 1,1% της λεκάνης αποτελεί αστική περιοχή. Λόγω του γόνιμου εδάφους και του θερμού κλίματος οι καλλιέργειες καταλαμβάνουν περίπου το 65% της περιοχής με κυριότερες χρήσης γης την καλλιέργεια ελιάς και αμπελώνων. Όμως η λειψυδρία και η αλόγιστη χρήση του υδροφορέα, δημιουργεί προβλήματα στην περιοχή.

Η λεκάνη των Μοιρών εκμεταλλεύεται εντατικά τους υπόγειους υδροφορείς από το 1984 έχοντας πλέον ως αποτέλεσμα την αισθητή μείωση των αποθεμάτων της. Το διάγραμμα της Εικόνας 1 δείχνει τη διαχρονική πτώση στάθμης από το έτος 1980 μέχρι το 2015. Από τη λεκάνη αντλούνται κατά μέσο όρο 27,3 εκατ. m<sup>3</sup> και εμφανίζει μέσο ετήσιο έλλειμμα της τάξης των 8 εκατ. m<sup>3</sup>. [Κριτωτάκης, 2013]



Εικόνα2: Διακύμανση Στάθμης Λεκάνης Μοιρών έτη 1980-2013

## 2.2 Φυσικό Περιβάλλον

Το κυρίαρχο οικοσύστημα που επικρατεί στο νησί της Κρήτης και κατ' επέκταση στην περιοχή ενδιαφέροντός μας, είναι το θαμνώδες. Αυτά τα οικοσυστήματα μπορούν να ευδοκιμήσουν σε διάφορες περιοχές, όπως παραλίες ή ορεινές περιοχές, και μπορούν να διαχωριστούν σε δύο υποκατηγορίες: τα φυσικά θαμνώδη οικοσυστήματα και τα πρώην δασικά οικοσυστήματα. Στην πρώτη κατηγορία ανήκουν εκείνα τα οποία επωφελούνται από ευνοϊκές κλιματικές συνθήκες, ενώ στη δεύτερη ανήκουν εκείνα τα οποία έχουν δημιουργηθεί λόγω της υποβάθμισης από ανθρωπογενείς δραστηριότητες. Τα θαμνώδη οικοσυστήματα αποτελούν ζωτική πηγή για τη διατροφή και τη διαμονή ποικίλων ειδών χερσαίας πανίδας θηλαστικών και ερπετών, καθώς αποτελούνται από πληθώρα διαφορετικών φυτών.

Λόγω της υπερβόσκησης και της επέκτασης των καλλιεργειών, η αυτοφυής βλάστηση περιορίζεται σε ρέματα, φαράγγια και περιοχές με έντονη κλίση και χορτολιβάδικες εκτάσεις. Στην ευρύτερη περιοχή υπάρχει μεγάλη ποικιλία από αυτοφυή μελισσοκομικά, αρωματικά και φαρμακευτικά φυτά.

Όσον αφορά την υδρόβια βλάστηση, τους καλοκαιρινούς μήνες όπου στην περιοχή αναπτύσσονται υψηλές θερμοκρασίες τα ρέματα στερεύουν και διατηρούν ελάχιστο νερό. Με την κατασκευή βέβαια, του φράγματος της Φανερωμένης δημιουργήθηκαν οι συνθήκες ανάπτυξης μικρού υδροβιότοπου γύρω από το φράγμα. Η τελική εδραίωση ενός τέτοιου οικοσυστήματος δεν είναι δεδομένη αλλά θα εξαρτηθεί από το αν η περιοχή θα προστατευτεί από την αυθαίρετη βόσκηση και την μόλυνση των νερού του φράγματος. [moires.gov]



### 2.3 Μετεωρολογικά Χαρακτηριστικά

Η Κρήτη διαθέτει εύκρατο κλίμα με σχεδόν 300 ημέρες ηλιοφάνειας κάθε χρόνο. Ένας παράγοντας ο οποίος παίζει καθοριστικό ρόλο στη διαμόρφωση του είναι η θάλασσα που περιβάλλει το νησί και περιορίζει την ένταση του ήλιου κατά το καλοκαίρι, με αποτέλεσμα να έχει ζεστά, ξηρά καλοκαίρια και πολύ ήπιους χειμώνες.

Ο καιρός στην Κρήτη χαρακτηρίζεται από τους ήπιους, βροχερούς χειμώνες και τα ξηρά καλοκαίρια. Το κλίμα χαρακτηρίζεται και ως μεσογειακό. Η ανατολική Κρήτη περιλαμβάνει τις περισσότερες άνυδρες, θερμές και ηλιόλουστες περιοχές της Ευρώπης. Οι βροχές στα νότια και ανατολικά δεν ξεπερνούν τα 400 χιλιοστά το χρόνο, η μέση θερμοκρασία είναι μεγαλύτερη από τους 20°C και η ηλιοφάνεια είναι η μεγαλύτερη της Ευρώπης. Οι βροχές όταν εκδηλώνονται είναι έντονες και περιορίζονται στο διάστημα Οκτωβρίου – Μαρτίου. Τα μελέμια που κυριαρχούν τους καλοκαιρινούς μήνες μετριάζουν τη θερμοκρασία, ενώ το χειμώνα οι νοτιάδες είναι εξίσου συχνόι με τους βοριάδες.

Υπάρχουν σημαντικές διαφορές μεταξύ της παράκτιας ζώνης και των ορεινών περιοχών, καθώς επίσης και μεταξύ του δυτικού και ανατολικού τμήματος της Κρήτης. Στη παράκτια ζώνη παρατηρείται ξηρό καλοκαίρι με ήπιο χειμώνα. Η βροχερή περίοδος αρχίζει στα τέλη Οκτωβρίου και διαρκεί μέχρι το Μάρτιο ή ακόμα και τον Απρίλιο.

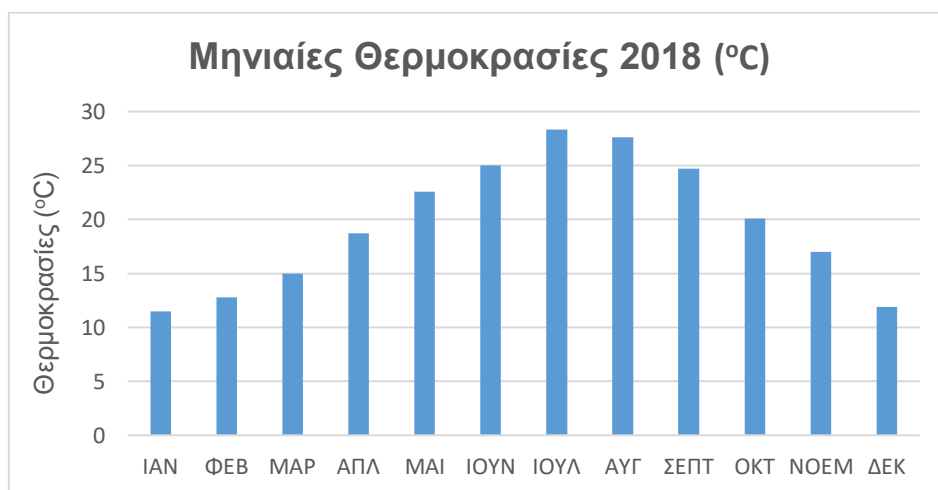
Οι χιονοπτώσεις είναι εξαιρετικά σπάνιες στην παράκτια ζώνη της Κρήτης, ιδιαίτερα στο ανατολικό μέρος του νησιού. Ο χειμώνας στην ορεινή ζώνη της ανατολικής Κρήτης μπορεί να είναι πολύ κρύος με αρκετές χιονοπτώσεις. Επάνω στις υψηλές κορυφές των βουνών το χιόνι μένει μέχρι τα τέλη Ιουνίου.



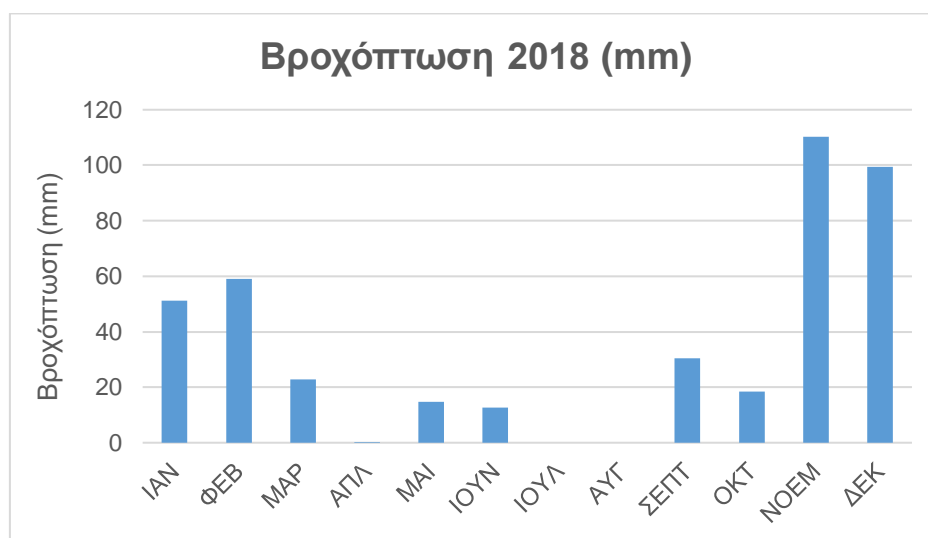
Εικόνα 2: Βροχοπτώσεις (ΙΤΕ 1970-1990) Κλίμακα 1cm:12km

Συγκεκριμένα στις Μοίρες Ηρακλείου, ο χειμώνας μπορεί να χαρακτηριστεί ήπιος λόγω της άφιξης στην περιοχή νοτιοδυτικών ανέμων ενώ, το καλοκαίρι παρατηρείται ιδιαίτερα ξηρό.

Στις παρακάτω εικόνες παρουσιάζονται κλιματολογικά στοιχεία της περιοχής για το προηγούμενο έτος 2018.



Εικόνα 3: Μηνιαίες θερμοκρασίες υδρολογικού έτους 2018, από μετεωρολογικό σταθμό Πετροκεφάλι Μοιρών



Εικόνα 4: Μηνιαίες βροχοπτώσεις υδρολογικού έτους 2018, από μετεωρολογικό σταθμό Πετροκεφάλι Μοιρών

## 2.4 Γεωλογικά Χαρακτηριστικά

Το μεγαλύτερο τμήμα της Κρήτης είναι ορεινό. Πιο συγκεκριμένα, το 33% είναι πεδινό, 26% ημιορεινό και 41% ορεινό. Μόλις το 1% της περιοχής μελέτης συνιστά πυκνή δασική έκταση ενώ το 4,5% αποτελεί εκτάσεις πάρα πολύ αραιής βλάστησης και σχεδόν απογυμνωμένου βράχου. Το υπόλοιπο τμήμα της περιοχής μελέτης

περιλαμβάνει κυρίως δασώδεις περιοχές ποώδους και θαμνώδους βλάστησης και δευτερευόντως λιβάδια, βοσκότοπους και περιοχές με συνδυασμό φυσικής βλάστησης δάσους και γεωργικής γης. Το μέσο υψόμετρο της λεκάνης συνολικά είναι 445 m και η μέση κλίση 23,7%. Η διακύμανση του ανάγλυφου είναι αρκετά έντονη με ήπιες έως μηδενικές κλίσεις στο πεδινό τμήμα της λεκάνης, έντονες κλίσεις στα πιο ορεινά τμήματα της λεκάνης της όπως το βορειοδυτικό και νότιο τμήμα και πολύ έντονες κλίσεις στο ανατολικό τμήμα. [Μορέλας, 2014]

Η Κρήτη έχει μία πολύπλοκη γεωλογική δομή αντιπροσωπευτική των πολύπλοκων τεκτονομεταμορφικών διαδικασιών του Αλπικού Ορογενετικού Κύκλου στο χώρο της Ανατολικής Μεσογείου. Το αλπικό αυτό υπόβαθρο αποτελείται από τους πλακώδεις ασβεστόλιθους της σειράς Κρήτη-Μάνη, το σύστημα Φυλλιτών-Χαλαζιτών και τους σχηματισμούς φλύσχη και ασβεστόλιθων των ζωνών Τρίπολης και Πίνδου. [9]

Χαρακτηριστικό της δομής της είναι η καλυμματική τοποθέτηση τεκτονικών ενοτήτων που αποτελούν λιθοστρωματογραφικές ομάδες πετρωμάτων, που διαφέρουν όχι μόνο στην αρχική τους παλαιογεωγραφική προέλευση και εξάπλωση, αλλά και στη σύσταση και το βαθμό μεταμόρφωσης. Το μεγαλύτερο ποσοστό προνεογενούς ηλικίας πετρωμάτων που δομούν και εμφανίζονται στην Κρήτη, ανήκουν σε μια ακολουθία μεταμορφωμένων πετρωμάτων που είναι γνωστή ως: «Πλακώδεις Ασβεστόλιθοι». [Μορέλας, 2014]

Η λεκάνη της Μεσσαράς και κατ' επέκταση η περιοχή μελέτης, αποτελεί μια τεκτονική τάφρο που ορίζεται από τις ρηξιγενείς ζώνες Μαλεβυζίου-Καμαρών-Γέργερης στα δυτικά, στα ανατολικά από τα ρήγματα Καστελίου-Χερσονήσου-Ξενιάκου και των Αστερουσίων ορέων στα νότια. Η λεκάνη διακρίνεται σε δύο επιμέρους τεκτονικές ενότητες: Στην πρώτη περιλαμβάνονται οι τεταρτογενείς και οι νεογενείς σχηματισμοί και στη δεύτερη ανήκουν οι προνεογενείς σχηματισμοί των οροσειρών του Ψηλορείτη, της Δίκτης και των Αστερουσίων ορέων, οι οποίες καταλαμβάνουν τα όρια της λεκάνης. [Μορέλας, 2014]

Στη γεωλογική δομή της περιοχής μας συμμετέχουν οι παρακάτω στρωματογραφικές και τεκτονικές ενότητες σχηματισμών όπως φαίνονται στην Εικόνα 6:



2. Κώνοι κορημάτων και πλευρικά κορήματα που καταλαμβάνουν κύρια τις νότιες περιοχές
  3. Αποθέσεις που καλύπτουν την υπόλοιπη λεκάνη
- Πλειστοκαινικός: τα πλειστοκαινικά ιζήματα εναποτέθηκαν στα ρηξιτεμάχη των νεογενών σχηματισμών κάτω από ηπειρωτικές συνθήκες (ποταμολιμναία φάση). Το πλειστόκαινο στα κατώτερα υψομετρικά ρηξιτεμάχη, λεκάνη Μοιρών, διατηρείται σε σχετικά καλή κατάσταση
  - Νεογενής: αποτελεί το υπόβαθρο των τεταρτογενών αποθέσεων και χαρακτηρίζονται από πετρώματα διαφορετικής σύστασης και στρωματογραφίας. Χαρακτηριστικό του Νεογενούς αποτελούν οι ρηξιγενείς ζώνες οι οποίες μετακίνησαν κατακόρυφα τα ρηξιτεμάχη και σχημάτισαν διάφορες λεκάνες μέσα στις οποίες εναποτέθηκαν οι σύγχρονες αποθέσεις.

## 2.6 Σεισμικότητα

Η Κρήτη βρίσκεται πάνω στην καμπή του «Ελληνικού Τόξου», που εκτείνεται από τη Δυτική Ηπειρωτική Ελλάδα, τη δυτική Πελοπόννησο, τα Κύθηρα, την Κρήτη, την Κάσο, την Κάρπαθο μέχρι τη Ρόδο. Στην εξωτερική πλευρά του τόξου, δηλαδή στο Ιόνιο, στο Λυβικό πέλαγος, και νότια από τη Ρόδο, εκτείνεται η «Ελληνική Τάφρος», η οποία σχηματίζεται περίπου στο μέτωπο της σύγκρουσης της Αφρικανικής λιθοσφαιρικής πλάκας με την αντίστοιχη Ευρωασιατική. Η βύθιση της Αφρικανικής πλάκας κάτω από την Ευρωαστική, στο χώρο της Κρήτης, συντελείται με διεύθυνση προς Β.Α., κλίση  $35^\circ$  και μέση ταχύτητα σύγκλισης 3,5 cm/έτος. Οι κινήσεις αυτές των λιθοσφαιρικών πλακών αποτελούν τη βασική αιτία του έντονου τεκτονικού τεμαχισμού με τα τεράστια ρήγματα και της σεισμικότητας που παρατηρούνται στο νησί και στη γύρω θαλάσσια περιοχή.

Η Κρήτη κατά τη διάρκεια των σύγχρονων τεκτονικών κινήσεων, δεν συμπεριφέρεται ως μια ενιαία συμπαγής και άκαμπτη πλάκα, αλλά ως ένα σύστημα τεκτονικών τμημάτων που χωρίζονται από μεγάλα ρήγματα. Κάθε τμήμα αποκτά διαφορετικά μεγέθη κίνησης. Ένα σημαντικό μέρος της σεισμικής δραστηριότητας που παρατηρείται στην Κρήτη, οφείλεται σε αυτές τις επιφανειακές τεκτονικές κινήσεις.

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 : ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΥΠΟΒΑΘΡΟ ΜΟΝΤΕΛΩΝ ΠΡΟΣΟΜΕΙΩΣΗΣ ΚΑΙ ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗΣ

### 3.1 Μοντέλα Υπόγειας Ροής

Η χρήση μοντέλων υπόγειας ροής επικρατεί στον τομέα της περιβαλλοντικής επιστήμης. Η εφαρμογή τους έχει στόχο τη διερεύνηση μιας ευρείας ποικιλίας υδρογεωλογικών συνθηκών καθώς και την αξιολόγηση κινδύνου για την πρόβλεψη μεταφοράς ρύπων. Γενικά, τα μοντέλα είναι εννοιολογικές περιγραφές ή

προσεγγίσεις που περιγράφουν φυσικά συστήματα που χρησιμοποιούν μαθηματικές εξισώσεις. Για να αξιολογηθεί η χρησιμότητα ενός μοντέλου, είναι απαραίτητο να έχουμε κατανοήσει το φυσικό σύστημα και τις παραδοχές που ενσωματώνονται στην παραγωγή των μαθηματικών εξισώσεων.

Τα μοντέλα υπόγειας ροής περιγράφουν τη ροή των υπόγειων υδάτων και τις διεργασίες μεταφοράς, χρησιμοποιώντας μαθηματικές εξισώσεις βασισμένες σε ορισμένες απλουστευτικές υποθέσεις. Αυτές οι υποθέσεις συνήθως περιλαμβάνουν την κατεύθυνση ροής, τη γεωμετρία του υδροφόρου ορίζοντα, την ετερογένεια ιζημάτων ή υπόγειων βράχων εντός του υδροφόρου ορίζοντα και τη μεταφορά μολυσματικών ουσιών και χημικών αντιδράσεων. Λόγω των ενσωματωμένων απλουστευτικών υποθέσεων στις μαθηματικές εξισώσεις και τις πολλές αβεβαιότητες στις τιμές των απαιτούμενων δεδομένων, ένα μοντέλο πρέπει να θεωρείται ως προσέγγιση και όχι ως ακριβές αντίγραφο των συνθηκών του πεδίου. Ωστόσο, τα μοντέλα υπόγειων υδάτων, ακόμη και ως προσεγγίσεις, είναι χρήσιμα εργαλεία έρευνας.

Μια εφαρμογή μοντέλου υπόγειων υδάτων μπορεί να θεωρηθεί ως δύο ξεχωριστές διαδικασίες. Η πρώτη, είναι η ανάπτυξη του μοντέλου με αποτέλεσμα ένα προϊόν λογισμικού και η δεύτερη, είναι η εφαρμογή αυτού του προϊόντος για συγκεκριμένο σκοπό. [Kumar, 2009]

### 3.2 Βασικές Μαθηματικές Εξισώσεις

Η προσομοίωση των υπόγειων υδάτων ξεκινά με μια εννοιολογική κατανόηση του φυσικού προβλήματος. Το επόμενο βήμα στη μοντελοποίηση είναι η μετάφραση του φυσικού συστήματος σε μαθηματικούς όρους. Για τα συστήματα του υπόγειου υδροφορέα υπάρχουν δύο θεωρητικές εκδοχές, η θεώρηση του υδροφορέα και η θεώρηση ενός συστήματος ροής.

#### Θεώρηση του υδροφορέα:

Η εκδοχή αυτή, βασίζεται στη λογική των περιορισμένων και ελεύθερων υδροφορέων. Ο περιορισμένος υδροφορέας καλύπτεται από ένα περιοριστικό στρώμα πορώδους υλικού ενώ, ο ελεύθερος υδροφορέας έχει ως ανώτατο όριο τον υδροφόρο ορίζοντα. Η ροή του υπόγειου ύδατος θεωρείται οριζόντια μεταξύ των υδροφορέων και κάθετη μεταξύ των περιοριστικών στρωμάτων. Από τη μαθηματική πλευρά, υπολογίζεται μέσω του ολοκληρώματος της διαπερατότητας στην κατακόρυφη διάσταση η μεταβιβασιμότητα, που ισούται με το γινόμενο της διαπερατότητας επί το πάχος της κορεσμένης ζώνης. Η μεταβιβασιμότητα ενός περιορισμένου ομογενούς και σταθερού πάχους υδροφορέα είναι σταθερή ενώ εκείνη ενός ελεύθερου υδροφορέα είναι πάντα μεταβλητή χωρικά αφού το πάχος της κορεσμένης ζώνης εξαρτάται από το υδραυλικό ύψος του υδροφόρου ορίζοντα. Παρότι, στις αναλυτικές λύσεις η διαπερατότητα και η μεταβιβασιμότητα θεωρούνται σταθερές, στην πραγματικότητα είναι χωρικά μεταβλητές αφού οι υδροφορείς οι οποίοι συναντώνται στο πεδίο είναι πάντα ετερογενείς. Με χρήση αυτής της θεώρησης προσομοιώνονται συστήματα δισδιάστατης ροής σε περιορισμένους και ελεύθερους υδροφορείς

Η γενική μορφή της εξίσωσης του συστήματος για τη θεώρηση του υδροφορέα είναι:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( T_x \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( T_y \frac{\partial h}{\partial y} \right) = S \frac{\partial h}{\partial t} - R + L \quad (3.1)$$

Γνωρίζοντας ότι,

$$L = -K'_z \frac{h_{source} - h}{b'}$$

- $h$ : υδραυλικό ύψος
- $T_x$  και  $T_y$ : συνιστώσες της μεταβιβασιμότητας
- $S$ : συντελεστής αποθηκευτικότητας
- $R$ : όρος εμπλουτισμού (Αν λαμβάνει χώρα άντληση με ρυθμό  $W$  τότε στην εξίσωση πρέπει να τεθεί  $R = -W$ )
- $L$ : διαρροή από ένα περιοριστικό στρώμα
- $K'_z$ : κάθετη υδραυλική αγωγιμότητά
- $b'$ : πάχος
- $h_{source}$ : υδραυλικό ύψος στο στρώμα που βρίσκεται στην άλλη πλευρά του περιοριστικού στρώματος

#### Θεώρηση ενός συστήματος ροής:

Στην περίπτωση αυτή έμφαση δίνεται στην ερμηνεία της τρισδιάστατης κατανομής της ροής, της υδραυλικής αγωγιμότητας και των ιδιοτήτων της αποθηκευτικότητας σε κάθε σημείο του συστήματος και όχι στη μελέτη των ίδιων των υδροφορέων και των περιοριστικών στρωμάτων. Η θεώρηση αυτή επιτρέπει τόσο οριζόντιες όσο και κάθετες συνιστώσες ροής στο σύστημα και κατ' επέκταση επιτρέπει την προσομοίωση της ροής είτε σε δύο είτε σε τρεις διαστάσεις.

Η γενική μορφή της εξίσωσης του συστήματος για την θεώρηση του συστήματος ροής:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( K_x \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( K_y \frac{\partial h}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( K_z \frac{\partial h}{\partial z} \right) = S_s \frac{\partial h}{\partial t} - R^* \quad (3.2)$$

- $K_x, K_y, K_z$ : συνιστώσες της υδραυλικής διαπερατότητας
- $S_s$ : ειδική αποθηκευτικότητα
- $R^*$ : όρος εμπλουτισμού ( Στην περίπτωση άντλησης  $R^* = -W$ ) [7]

#### Μοντέλα Ροής Υπόγειων Υδάτων

Στις παρακάτω εξισώσεις (3.3) και (3.4), που σχετίζονται με τη ροή των υπόγειων υδάτων και την ταχύτητα διαρροής αντίστοιχα, επιλύονται τα μοντέλα ροής των υπόγειων υδάτων στη κορεσμένη ζώνη. [Καρατζάς, 2017]

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( K_{xx} \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( K_{yy} \frac{\partial h}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( K_{zz} \frac{\partial h}{\partial z} \right) - S \left( \frac{\partial h}{\partial t} \right) + \sum_{i=1}^r Q_i \delta(x - x_i) \delta(y - y_i) \delta(z - z_i) = 0 \quad (3.3)$$

Όπου,

- $K_{xx}$ : υδραυλική αγωγιμότητα στην κατεύθυνση x [ $LT^{-1}$ ]
- $K_{yy}$ : υδραυλική αγωγιμότητα στην κατεύθυνση y [ $LT^{-1}$ ]
- $K_{zz}$ : υδραυλική αγωγιμότητα στην κατεύθυνση z [ $LT^{-1}$ ]
- $S$ : συντελεστής ειδικής αποθήκευσης [ $L^{-1}$ ]
- $Q_i$ : όρος της άντλησης στο σημείο i [ $L^3T^{-1}$ ]
- $\delta$ : λειτουργία δέλτα
- $r$ : ο αριθμός πηγών/απαγωγών

$$V_x = -K_{xx} \frac{\partial h}{\partial x}, \quad V_y = -K_{yy} \frac{\partial h}{\partial y}, \quad V_z = -K_{zz} \frac{\partial h}{\partial z} \quad (3.4)$$

Με  $V_x$ ,  $V_y$ ,  $V_z$  τις συνιστώσες της ταχύτητας Darcy στις κατευθύνσεις x, y, z, αντίστοιχα [ $LT^{-1}$ ]

#### Μοντέλα μεταφοράς μάζας υπογείων υδάτων

Τα μοντέλα αυτά περιγράφουν τις κύριες διαδικασίες διάχυσης, πρόσληψης και διασποράς καθώς και ορισμένες διαδικασίες μεταφοράς μάζας όπως αποσύνθεση και προσρόφηση. Επιλύουν κυρίως, ένα σύστημα μερικών διαφορικών εξισώσεων που σχετίζονται με τη ροή υπογείων υδάτων, την ταχύτητα των υπογείων υδάτων και τη μαζική μεταφορά. [Καρατζάς, 2017]

Συγκεκριμένα, πρώτα λύνεται η πάνω εξίσωση ροής (3.3) και στη συνέχεια, γνωρίζοντας τα υδραυλικά ύψη  $h$ , λύνεται η εξίσωση της ταχύτητας υπογείων υδάτων (3.4). Τέλος, λύνεται η εξίσωση μεταφοράς μάζας ως προς την συγκέντρωση  $C$ , ως εξής:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left( D_{xx} \frac{\partial C}{\partial x} + D_{xy} \frac{\partial C}{\partial y} + D_{xz} \frac{\partial C}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( D_{yx} \frac{\partial C}{\partial x} + D_{yy} \frac{\partial C}{\partial y} + D_{yz} \frac{\partial C}{\partial z} \right) \\ + \frac{\partial}{\partial z} \left( D_{zx} \frac{\partial C}{\partial x} + D_{zy} \frac{\partial C}{\partial y} + D_{zz} \frac{\partial C}{\partial z} \right) - \left( V_x \frac{\partial C}{\partial x} + V_y \frac{\partial C}{\partial y} + V_z \frac{\partial C}{\partial z} \right) \\ + Q(C^\omega - C) - \theta[1 + E(C)] \left( \frac{\partial C}{\partial t} \right) = 0 \quad (3.5) \end{aligned}$$



Όπου,

- C: η συγκέντρωση ρύπων [ML<sup>-3</sup>]
- θ: το πορώδες του υδροφορέα
- C<sup>ω</sup>: η συγκέντρωση του αντλούμενου υγρού [ML<sup>-3</sup>]
- E(C): συνάρτηση που αντιπροσωπεύει τις ιδιότητες χημικής προσρόφησης
- D<sub>ij</sub>: οι όροι διασποράς στις τρεις κύριες κατευθύνσεις (x, y, z) [L<sup>2</sup>T<sup>-1</sup>]

Οι όροι της διασποράς D<sub>ij</sub> ορίζονται ως εξής:

$$D_{xx} = \frac{a_L V_x^2 + a_T V_y^2 + a_V V_z^2}{V} + D_M$$

$$D_{yy} = \frac{a_T V_x^2 + a_L V_y^2 + a_V V_z^2}{V} + D_M$$

$$D_{zz} = \frac{a_V V_x^2 + a_V V_y^2 + a_L V_z^2}{V} + D_M$$

$$D_{yx} = D_{xy} = \frac{(a_L - a_T)V_x V_y}{V}$$

$$D_{yz} = D_{zy} = \frac{(a_L - a_V)V_y V_z}{V}$$

$$D_{zx} = D_{xz} = \frac{(a_L - a_V)V_z V_x}{V}$$

Όπου,

- D<sub>M</sub>: συντελεστής μοριακής διάχυσης [L<sup>2</sup>T<sup>-1</sup>]
- α<sub>L</sub>: διαμήκης διασπορά [L]
- α<sub>T</sub>: εγκάρσια διασπορά [L]
- α<sub>V</sub>: κάθετη διασπορά [L]
- V: ταχύτητα ροής υπόγειου νερού [LT<sup>-1</sup>]

### 3.3 Μοντέλα Προσομοίωσης Υπόγειας Ροής

Για την προσομοίωση ενός υπόγειου υδροφορέα χρησιμοποιούνται συνήθως πέντε κατηγορίες μοντέλων: [Καρτεράκης, 2005]

1. Η μέθοδος των πεπερασμένων διαφορών
2. Η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων
3. Η μέθοδος των ολοκληρωμένων πεπερασμένων διαφορών
4. Η μέθοδος ολοκληρωμένης οριακής εξίσωσης
5. Η μέθοδος των αναλυτικών στοιχείων

Όσον αφορά την πρώτη μέθοδο γνωρίζουμε ότι υπολογίζει μια τιμή για το υδραυλικό ύψος σε κάθε κόμβο που είναι επίσης και το μέσο υδραυλικό ύψος του κελιού γύρω από τον κόμβο αυτό. Με αυτή τη μέθοδο δεν μπορεί να γίνει καμία υπόθεση για τον τρόπο που μεταβάλλεται το υδραυλικό ύψος από τον ένα κόμβο στον επόμενο. Οι ροές κατά μήκος του υδροφόρου ορίζοντα αντιπροσωπεύουν έναν όγκο ύδατος που εφαρμόζεται στην άνω περιοχή του κελιού ανά μονάδα χρόνου. Ο εμπλουτισμός μπορεί να προσομοιώνεται στα πηγάδια ή σε έναν πίνακα που θα μπορεί να εισαχθεί. Σαν μέθοδος είναι εύκολη στην κατανόηση και στον προγραμματισμό και δεν απαιτεί πολλά στοιχεία για την κατασκευή του πλέγματος. Επίσης, έχει αποδειχθεί ότι είναι μια ειδική περίπτωση της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων, αν το πρόβλημα έχει κόμβους ανά ίσα διαστήματα όπου οι παραγόμενες από τις δύο μεθόδους αλγεβρικές εξισώσεις είναι οι ίδιες, και ακολουθεί η ανάλυσή της.

Όσον αφορά τη δεύτερη μέθοδο γνωρίζουμε ότι ορίζει ακριβώς τη μεταβολή του υδραυλικού ύψους μέσα σε ένα στοιχείο με τη βοήθεια πολλαπλασιαστικών συναρτήσεων. Τα υδραυλικά ύψη υπολογίζονται για ευκολία από τους κόμβους, αλλά το υδραυλικό ύψος ορίζεται παντού μέσω βασικών συναρτήσεων. Χαρακτηριστικό γνώρισμα αυτών των μοντέλων είναι ότι επιτρέπεται στο χρήστη να προσδιορίσει τις κατανεμημένες πηγές σε ένα στοιχείο και τις σημειακές πηγές ή καταβόθρες σε ένα κόμβο. Η κατάρτιση της εξίσωσης του πίνακα όμως μέσα στον κώδικα απαιτεί την αναδιανομή των κατανεμημένων πηγών και καταβόθρων σε κόμβους. Ο κώδικας πολλαπλασιάζει την εισαγόμενη ροή για κάθε στοιχείο στο επί την επιφάνεια του στοιχείου και ακολουθεί διανομή του ύδατος αναλογικά σε κάθε κόμβο του στοιχείου. Σαν μέθοδος έχει καλύτερη προσέγγιση των ορίων ακανόνιστων σχημάτων, προσαρμόζονται εύκολα τα μεγέθη μεμονωμένων στοιχείων και η θέση των ορίων, υπάρχει καλύτερη διαχείριση των εσωτερικών ορίων και καλύτερη προσομοίωση σημειακών πηγών, επιφανειών με διαρροή και κινούμενων υδροφόρων οριζόντων.

Είναι γνωστό ότι τα δύο παραπάνω μοντέλα είναι αρκετά κοντά μεταξύ τους και ουσιαστικά για να επιλέξουμε κάποιο εξαρτάται από το εκάστοτε πρόβλημα αλλά και από την προτίμηση του χειρίστη.

### 3.4 Οριακές Συνθήκες

Οι οριακές συνθήκες είναι ουσιαστικά η αλληλεπίδραση του όγκου ελέγχου με το περιβάλλον και μαθηματικά μιλώντας είναι τα όρια του μελετώμενου χώρου. Καθορίζουν δηλαδή την εξαρτημένη μεταβλητή, που στην περίπτωσή μας είναι το υδραυλικό ύψος, ή την παράγωγό που είναι η ροή, στα όρια της περιοχής του προβλήματος. Φυσικά, ένα σημαντικό βήμα στην κατασκευή του μοντέλου μας είναι η επιλογή σωστών οριακών συνθηκών, η οποία μπορεί να οδηγήσει σε αρκετά σφάλματα αν δεν γίνει σωστά. Τα όρια αυτά μπορούν να καθορίσουν τη μορφή της ροής ως ένα βαθμό.

Τα όρια που θα επιλέξουμε αρκετές φορές μπορεί να οφείλονται σε φυσικά αίτια όπως στη φυσική παρουσία ενός αδιαπέραστου στρώματος βράχου ή ενός στρώματος επιφανειακού ύδατος. Διαφορετικού τύπου όρια μπορούν να σχηματιστούν ως αποτέλεσμα υδρολογικών συνθηκών, όπως ύπαρξη υπόγειων χωρισμάτων.

Τα υδρογεωλογικά όρια εκφράζονται από τους ακόλουθους τρεις τύπους μαθηματικών συνθηκών.

- Τύπος 1: Όρια καθορισμένου υδραυλικού ύψους (Συνθήκες Dirichlet) για τα οποία είναι δεδομένο το υδραυλικό ύψος.
- Τύπος 2: Όρια καθορισμένης ροής (Συνθήκες Neumann) για τα οποία η παράγωγος της ροής κατά μήκος του ορίου είναι δεδομένη.
- Τύπος 3: Όρια εξαρτημένης από το υδραυλικό ύψος ροής (Συνθήκες Cauchy ή μικτού ορίου) για τα οποία η ροή κατά μήκος του ορίου υπολογίζεται με δεδομένη μια τιμή του υδραυλικού ύψους στο όριο. Αυτός ο τύπος οριακής συνθήκης καλείται μερικές φορές συνθήκη μικτού ορίου επειδή συσχετίζει τις οριακές τιμές της στάθμης με τη ροή.

Για να τοποθετήσουμε τις οριακές συνθήκες στο πλέγμα θα πρέπει να γνωρίζουμε εάν αυτό ανήκει στις πεπερασμένες διαφορές ή στα πεπερασμένα στοιχεία. [Τριχάκης, 2004]

### 3.5 Προσομοίωση Ακόρεστης Ζώνης

Με τη χρήση του μοντέλου ροής στην ακόρεστη ζώνη μπορεί να προσομοιωθεί ο εμπλουτισμός για να καθοριστεί η πορεία του ύδατος που υπάρχει στον υπόγειο υδροφορέα. Γενικά, τα μοντέλα της ακόρεστης ζώνης θεωρούνται πολύπλοκα και χρειάζονται περισσότερες πληροφορίες από τα μοντέλα κορεσμένης ζώνης. Για να μπορέσουμε να ορίσουμε την άνω οριακή συνθήκη, χρειάζεται να γνωρίζουμε τον ρυθμό εμπλουτισμού αφού, η διήθηση που εισάγεται στο άνω όριο του μοντέλου της ακόρεστης ζώνης θα φτάσει τελικά στον υδροφόρο ορίζοντα ως εμπλουτισμός εκτός και αν προσομοιωθεί ως εξατμισοδιαπνοή (συνολική διεργασία μεταφοράς νερού στην ατμόσφαιρα από φυτοκαλυμμένες επιφάνειες). Έτσι, λόγω αυτών των δυσκολιών τα μοντέλα της ακόρεστης ζώνης δε χρησιμοποιούνται ευρέως παρά μόνο αν υπάρχουν συγκεκριμένοι λόγοι. Παλαιότερα, είχαν χρησιμοποιηθεί για να προσομοιώσουν χρονικά την άφιξη του εμπλουτισμού στον υδροφόρο ορίζοντα.

Ένα μοντέλο που μπορεί να περιλαμβάνει μαζί ακόρεστη και κορεσμένη ζώνη, θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί για την προσομοίωση της απόκρισης του υδροφορέα στον εμπλουτισμό έχοντας έτσι θετική έκβαση, καθώς το πεδίο ροής μεταξύ των δύο ζωνών είναι συνεχές και ο υδροφόρος ορίζοντας υπολογίζεται ως η επιφάνεια μηδενικής πίεσης ύδατος. Το μειονέκτημα βέβαια είναι ότι με τη χρήση του συγκεκριμένου ή και οποιουδήποτε άλλου τύπου μοντέλου που περιέχει ακόρεστη ζώνη, η εισαγωγή σημαντικού βαθμού επιπλέον πολυπλοκότητας. [Τριχάκης, 2004]

### 3.6 Διαρροή

Είναι η κίνηση του ύδατος διαμέσου ενός στρώματος υλικού του οποίου η κάθετη υδραυλική αγωγιμότητα είναι μικρότερη από αυτή του υδροφορέα. Έχει τη ικανότητα να μπαίνει και να βγαίνει από τον υδροφορέα ανάλογα με τη σχετική διαφορά υδραυλικού ύψους μεταξύ του υδροφορέα και της πηγής που βρίσκεται από την άλλη πλευρά του στρώματος με διαρροή. Σαν πηγή μπορεί να θεωρηθεί ένας ελεύθερος

υδροφορέας, μία λίμνη ή ένα ποτάμι. Γνωρίζουμε ότι το υδραυλικό ύψος του υδροφορέα μπορεί να αλλάξει και αυτό έχει ως αποτέλεσμα να μπορεί να αλλάζει κατά τη διάρκεια της προσομοίωσης η κατεύθυνση και ο όγκος της διαρροής.

Η διαρροή είναι ένα είδος ορίου που εξαρτάται από το υδραυλικό ύψος. Στις δισδιάστατες προσομοιώσεις, η διαρροή μέσα από περιοριστικά στρώματα εκφράζεται με έναν όρο. Η χρήση αυτού του όρου είναι ένας βολικός τρόπος προσομοίωσης μερική διείσδυσης από λίμνες και ποτάμια σε δισδιάστατα εμβαδικά μοντέλα. Μια προσομοίωση που χρησιμοποιεί την επιλογή της διαρροής, δεν εμφανίζει ρητά την πηγή στο πλέγμα. Ο όγκος ύδατος που διαρρέει προστίθεται ή αφαιρείται από τον κόμβο που βρίσκεται ακριβώς κάτω από την πηγή της διαρροής. Εάν το υδραυλικό ύψος του υδροφορέα είναι μεγαλύτερο από εκείνο της πηγής, από το μοντέλο αφαιρείται νερό. Ενώ, αν είναι μικρότερο από της πηγής προστίθεται νερό μέσω διαρροής.

Σε κάθε περίπτωση όμως ο όγκος της διαρροής υπολογίζεται από τον τύπο:

$$Q_L^* = -K'_z \cdot \left( \frac{h_{source} - h}{b'} \right) \cdot w \cdot 1$$

Όπου,

- $K'_z$ : κάθετη υδραυλική αγωγιμότητα του στρώματος από το οποίο γίνεται η διαρροή
- $h_{source}$ : υδραυλικό ύψος
- $h$ : υδραυλικό ύψος υδροφορέα
- $b'$ : πάχος του στρώματος
- $w$ : πλάτος πηγής
- $l$ : μήκος πηγής

Ο χρήστης δίνει τις τιμές του  $K'_z$ ,  $h_{source}$ ,  $b'$ ,  $w$  και  $l$ .

Το  $Q_L^*$ , που είναι ο ογκομετρικός ρυθμός διαρροής, πρέπει να μετατραπεί σε επιφανειακό ρυθμό διαρροής εφαρμοσμένο στην κορυφή του κελιού. Σε αυτό το σημείο μπορεί να παρουσιαστεί το πρόβλημα ότι η πηγή (π.χ. λίμνη, ποτάμι) μπορεί να είναι πιο στενή από τα κελιά ή τα στοιχεία του μοντέλου. Τότε, ο επιφανειακός ρυθμός διαρροής ( $L$ ) θα πρέπει να προσαρμοστεί ώστε ο όγκος που πηγάζει από την επιφάνεια  $w \cdot l$  να είναι ίσος με το όγκο που εφαρμόζεται στο κελί ή στοιχείο ( $\Delta x \cdot \Delta y$ ). Δηλαδή,

$$Q_L^* = L \cdot \Delta x \cdot \Delta y$$

ή

(3.6)

$$L = \frac{Q_L^*}{\Delta x} \cdot \Delta y$$

Σε αυτή την περίπτωση, στο μοντέλο πρέπει να μπει ο παρακάτω τροποποιημένος λόγος:

$$\left( \frac{K'_z}{b} \right)_m = \frac{K'_z}{b} \cdot \frac{w \cdot 1}{\Delta x \cdot \Delta y} \quad (3.7)$$

### 3.7 Μοντέλο PTC (Princeton Transport Code)

Το μαθηματικό μοντέλο PTC υπολογίζει τη ροή των υπόγειων υδάτων και τη μεταφορά ρύπων σε πορώδη μέσα συνδυάζοντας τα πεπερασμένα στοιχεία και τις μεθόδους πεπερασμένων διαφορών. Αυτός ο συνδυασμός επιτρέπει την εφαρμογή της διαδικασίας διαχωρισμού. Είναι ένα Plug-InExtension (PIE) για το πρόγραμμα GISArgusOne.

Το PTC χρησιμοποιεί μερικές διαφορικές εξισώσεις για να παρουσιάσει την κορεσμένη ροή υπογείων υδάτων που περιγράφεται από την υδραυλική κεφαλή, τα στοιχεία ταχύτητας των υπόγειων υδάτων και τη μεταφορά ρύπων. Αυτές οι εξισώσεις προέρχονται από την αρχή διατήρησης της μάζας και από τον νόμο του Darcy. Πιο συγκεκριμένα, ο αλγόριθμος περιλαμβάνει τη διακριτοποίηση του τομέα σε περίπου παράλληλες οριζόντιες στρώσεις. [Καρατζάς, 2017]

#### 3.7.1 Βασικές Εξισώσεις Μοντέλου PTC

Το μοντέλο PTC έχει ως στόχο την προσομοίωση της υπόγειας ροής μέσω της χρήσης μιας σειράς διαφορικών εξισώσεων. Οι βασικές αυτές εξισώσεις, όπως έχει ήδη αναφερθεί, αφορούν τα εξής:

- Υδραυλικό ύψος  $h$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( K_{xx} \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( K_{yy} \frac{\partial h}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( K_{zz} \frac{\partial h}{\partial z} \right) - S \frac{\partial h}{\partial t} + Q = 0 \quad (3.2)$$

- Ταχύτητα υπογείων υδάτων στις κατευθύνσεις  $x$ ,  $y$  και  $z$

$$V_x = -K_{xx} \frac{\partial h}{\partial x}, \quad V_y = -K_{yy} \frac{\partial h}{\partial y}, \quad V_z = -K_{zz} \frac{\partial h}{\partial z} \quad (3.4)$$

- Μεταφορά μάζας που περιγράφεται από την συγκέντρωση  $C$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} \left( D_{xx} \frac{\partial C}{\partial x} + D_{xy} \frac{\partial C}{\partial y} + D_{xz} \frac{\partial C}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( D_{yx} \frac{\partial C}{\partial x} + D_{yy} \frac{\partial C}{\partial y} + D_{yz} \frac{\partial C}{\partial z} \right) \\ & + \frac{\partial}{\partial z} \left( D_{zx} \frac{\partial C}{\partial x} + D_{zy} \frac{\partial C}{\partial y} + D_{zz} \frac{\partial C}{\partial z} \right) - \left( V_x \frac{\partial C}{\partial x} + V_y \frac{\partial C}{\partial y} + V_z \frac{\partial C}{\partial z} \right) \\ & + Q(C^\omega - C) - \theta[1 + E(C)] \left( \frac{\partial C}{\partial t} \right) = 0 \quad (3.5) \end{aligned}$$

Οι εξισώσεις αυτές προέρχονται από την αρχή διατήρησης της μάζας και από τον νόμο του Darcy. Το μοντέλο PTC επιλύει τις εξισώσεις αυτές υπολογίζοντας πρώτα τα υδραυλικά ύψη  $h$  από την εξίσωση (3.2), στη συνέχεια υπολογίζονται οι ταχύτητες του Darcy και για τις τρεις κατευθύνσεις ( $x$ ,  $y$ ,  $z$ ) από την εξίσωση (3.4), χρησιμοποιώντας τα υδραυλικά ύψη που ήδη υπολογίστηκαν και τέλος, υπολογίζεται

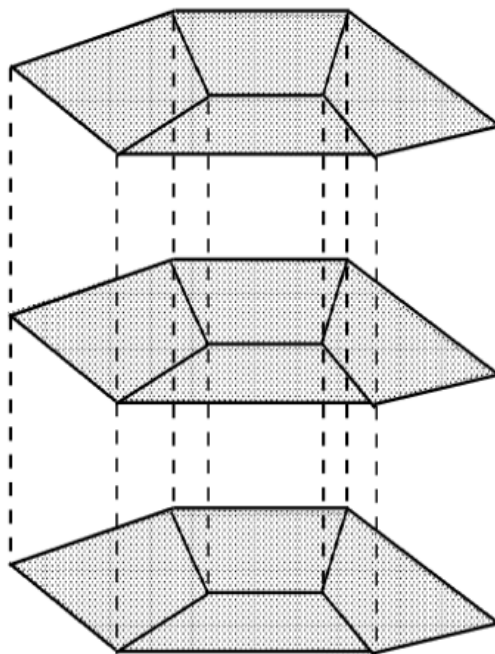
η συγκέντρωση της μάζας  $C$  ως ο πλέον μόνος άγνωστος όρος της εξίσωσης από την εξίσωση (3.5).

### 3.7.2 Ο αλγόριθμος επίλυσης του μοντέλου PTC

Η επίλυση του συστήματος των παραπάνω εξισώσεων, για σύνθετα φυσικά συστήματα, απαιτεί την εφαρμογή αριθμητικών μεθόδων. Για τα συστήματα κλίμακας πεδίου, η υπολογιστική προσπάθεια που εμπλέκεται στην επίλυση των τρισδιάστατων εξισώσεων είναι μεγάλη.

Το PTC χρησιμοποιεί έναν μοναδικό αλγόριθμο διαχωρισμού για την επίλυση των πλήρως τρισδιάστατων εξισώσεων, ο οποίος μειώνει αισθητά το υπολογιστικό φορτίο. Πιο συγκεκριμένα, στον αλγόριθμο αυτό, χωρίζεται η περιοχή σε σχεδόν παράλληλα οριζόντια στρώματα μέσα στα οποία γίνεται διακριτοποίηση των πεπερασμένων στοιχείων έτσι ώστε να επιτευχθεί η ακριβής απεικόνιση ακανόνιστων περιοχών. Τα στρώματα αυτά συνδέονται μεταξύ τους κάθετα με μια διακριτοποίηση πεπερασμένων διαφορών.

Τέλος, κατά τη διάρκεια μιας δεδομένης χρονικής επανάληψης, όλοι οι υπολογισμοί χωρίζονται σε δύο βήματα. Στο πρώτο βήμα όλα οι οριζόντιοι διαχωρισμοί πεπερασμένων στοιχείων επιλύονται ανεξάρτητα ο ένας από τον άλλο και στο δεύτερο βήμα, λύνονται οι κατακόρυφες εξισώσεις που συνδέουν τα στρώματα. [Τριχάκης, 2004]



Εικόνα 6: Διάταξη οριζόντιων πλεγμάτων πεπερασμένων στοιχείων το ένα επάνω στο άλλο, παράγοντας τρισδιάστατη διακριτοποίηση

### 3.7.3 Τρισδιάστατη Ροή Υπόγειων Υδάτων

Όπως αναφέρθηκε και παραπάνω, η εξίσωση που περιγράφει τη ροή υπόγειων υδάτων είναι η (3.3), η οποία θεωρείται βασική εξίσωση για την τρισδιάστατη ροή προσδιορίζει τα χαρακτηριστικά της ροής ενός υπόγειου συστήματος βρίσκοντας το υδραυλικό ύψος.

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( K_{xx} \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( K_{yy} \frac{\partial h}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( K_{zz} \frac{\partial h}{\partial z} \right) - S \left( \frac{\partial h}{\partial t} \right) + \sum_{i=1}^r Q_i \delta(x - x_i) \delta(y - y_i) \delta(z - z_i) = 0 \quad (3.3)$$

#### Εφαρμογή της μεθόδου πεπερασμένων στοιχείων

Το διαχωριστικό πλάνο ενεργειών που χρησιμοποιεί το PTC για την επίλυση της (3.3) περιλαμβάνει προσέγγιση των όρων της που περιέχουν παραγώγους του  $x$  και του  $y$  με χρήση μιας μεθόδου πεπερασμένων στοιχείων. Η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων υποθέτει ότι υπάρχει ένα άπειρο άθροισμα συναρτήσεων, που θα αντιπροσωπεύει ακριβώς τη λύση της μερικής διαφορικής εξίσωσης, η οποία περιγράφει τη ροή του υπόγειου ύδατος.

Μια πεπερασμένη προσέγγιση αυτής της σειράς είναι:

$$h(x, y, z, t) \approx \tilde{h}(x, y, z, t) = \sum_{i=1}^N h_i(z, t) w_i(x, y) \quad (3.7)$$

Όπου,

- $h$ : το υδραυλικό ύψος [L]
- $\tilde{h}$ : η προσεγγιστική σειρά του  $h$  [L]
- $h_i$ : ένας μη καθορισμένος συντελεστής [L],
- $w_i$ : μια βασική συνάρτηση (αδιάστατη)
- $N$ : ο αριθμός των κόμβων του δικτύου πεπερασμένων στοιχείων

Η εξίσωση (3.7) δίνει μια ακριβή έκφραση όσο ο αριθμός των κόμβων  $N$  τείνει στο άπειρο (το  $\tilde{h}$  τείνει στο  $h$ ). Με μια προσεκτική επιλογή των συναρτήσεων  $w_i$ , οι μη καθορισμένοι συντελεστές  $h_i$  γίνονται οι τιμές του υδραυλικού ύψους στους κόμβους με συντεταγμένες  $(x, y, z)$ . Η χρήση συνεχών βασικών συναρτήσεων με ξεχωριστά βήματα, είναι αρκετά σημαντική στην υπολογιστική αποτελεσματικότητα της μεθόδου πεπερασμένων στοιχείων.

Σύμφωνα με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων αν και ο διαφορικός τελεστής  $L$  που λειτουργεί στο  $h$  ισούται με μηδέν, όταν το  $L$  λειτουργεί στην προσεγγιστική συνάρτηση εισάγεται ένα σφάλμα.

Έτσι με μαθηματικούς τύπους η (3.3) γράφεται ως

$$L(h) = 0 \text{ ενώ } L(\tilde{h}) = R$$

Όπου, R το υπολειμματικό σφάλμα.

Για την επίλυση της (3.7) επιχειρείται η ελαχιστοποίηση του υπολειμματικού R. Αυτό επιτυγχάνεται αρχικά με τη θεώρηση μιας ολόκληρης ομάδας συναρτήσεων  $w_j$ . Αν τώρα εξαναγκαστεί το υπολειμματικό R να γίνει ορθογώνιο για κάθε πιθανή τιμή του  $w_j$  ουσιαστικά εξαναγκάζεται να μηδενιστεί και με αυτό τον τρόπο επιτυγχάνεται μια λύση της (3.7). Διαφορετικά αυτό μπορεί να εκφραστεί ως:

$$L(\tilde{h}) = L(h) \text{ όταν } R=0$$

Το PTC χρησιμοποιεί την ίδια ομάδα συναρτήσεων για τις συναρτήσεις βάρους  $w_j$  όπως και για τις βασικές συναρτήσεις  $w_i$ . Αυτή η διαδικασία ονομάζεται μέθοδος Galerkin..

#### Εφαρμογή της μεθόδου πεπερασμένων διαφορών

Με βάση τα παραπάνω μπορεί να προκύψει η εξίσωση:

$$Ah + B$$

Όπου, τα γράμματα A και B αναπαριστούν τετραγωνικούς και το γράμμα h αναπαριστά διάνυσμα.

#### Η Κάθετη Παράγωγος

Το κεντρικό στοιχείο αυτού του κώδικα είναι η χρήση ενός κεντρικού σχεδίου διαχωρισμού των χωρικών παραγώγων στην κατεύθυνση z. Ο κάθετος διαχωρισμός επιτυγχάνεται με την απαίτηση ότι τα οριζόντια πλέγματα πεπερασμένων στοιχείων πρέπει να επαναλαμβάνονται σε στρώματα με κόμβους στοιβαγμένους τον ένα πάνω στον άλλο όπως φαίνεται και στην Εικόνα 7. Αυτό σημαίνει ότι στην κάθετη διεύθυνση μια μονοδιάστατη εξίσωση πεπερασμένων διαφορών μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να προσεγγίσει το  $\nabla$  (όπως δίνεται από τους τύπους).

#### Η Παράγωγος του Χρόνου

Έχει αποδειχθεί ότι η ενδεχόμενη προσέγγιση προς τα πίσω διαφορίσης της παραγώγου του χρόνου εξασφαλίζει την πιο ακριβή λύση της υπόγειας ροής για δεδομένο κόστος. Στην αναπαράσταση πίσω διαφορίσης χρησιμοποιείται ένα σύστημα διόρθωσης πρώτης τάξης για να προσεγγισθεί η παράγωγος του χρόνου και οι χωρικές παράγωγοι γράφονται για το νέο επίπεδο χρόνου. Εφαρμόζοντας αυτό το σύστημα για κάθε επίπεδο παράγεται ένας πλήρης διαχωρισμός της (3.3), και λαμβάνεται ένα σύστημα  $M \times N$  εξισώσεων με N αγνώστους στην (3.3) για κάθε ένα από τα M επίπεδα. [Καρτεράκης, 2005]



### 3.7.4 Οριακές Συνθήκες

Το PTC δέχεται τρεις τύπους οριακών συνθηκών στην εξίσωση της ροής. Οι τρεις αυτοί τύποι είναι οι συνθήκες Dirichlet (καθορισμένο υδραυλικό ύψος), Neumann (καθορισμένη ροή) και τρίτου τύπου (διαρροή).

Οι οριακές συνθήκες μπορούν να μεταβληθούν από το χρήστη κατά τη διάρκεια μιας προσομοίωσης. Η προεπιλεγμένη οριακή συνθήκη για όλα τα όρια είναι μηδενικής ροής, το οποίο υποδηλώνει περιορισμένο υδροφορέα με αδιαπέρατα στρώματα κάτω και γύρω από αυτόν. Επιλέγοντας διαφορετικές οριακές συνθήκες κατά μήκος της περιοχής μελέτης, ο χρήστης μπορεί να αναπαραστήσει άλλες υδρολογικές συνθήκες.

#### Καθορισμένο Υδραυλικό Ύψος

Θέτουμε τα όρια του υδραυλικού ύψους δηλώνοντας τους κόμβους και την σταθερή τιμή υδραυλικού ύψους σε καθένα από αυτούς. Ορίζονται αυτόματα από το πρόγραμμα ως σταθεροί όροι που σχετίζονται με αυτούς τους κόμβους οι γραμμές και οι στήλες του πίνακα συντελεστών. Έτσι, οι κόμβοι με σταθερό υδραυλικό ύψος απαλείφονται από την εξίσωση του πίνακα και επομένως, απομένουν ( $N \times M - N_c$ ) εξισώσεις με ( $N \times M - N_c$ ) αγνώστους, όπου  $N_c$  ο ολικός αριθμός κόμβων με σταθερό υδραυλικό ύψος. [Βραχνού, 2018]

#### Καθορισμένη Ροή

Απλό μέσο καθορισμού των οριακών συνθηκών καθορισμένης ροής μπορεί να παρέχει η μέθοδος πεπερασμένων στοιχείων. Όταν η ροή θεωρείται σταθερή κατά μήκος ενός στοιχείου μήκους  $L$ , η ολοκλήρωση των σχέσεων θα δίνει τις κομβικές κατανομές. Έτσι, ο χρήστης αρκεί να ορίσει την ογκομετρική ροή σε ένα κόμβο για να αναπαραστήσει τη ροή κατά μήκος ενός ορίου. Η ροή λόγω άντλησης εισάγεται μαθηματικά επίσης με τον καθορισμό της ογκομετρικής ροής σε ένα κόμβο. Για διευκόλυνση της εισαγωγής ομοιόμορφης διήθησης, το πρόγραμμα επιτρέπει τον καθορισμό μιας κομβικής ροής διήθησης, ενώ κάνει αυτόματα ολοκλήρωση σε όλη την περιοχή για να καθορίσει την ογκομετρική ροή. [Βραχνού, 2018]

#### Τρίτου Τύπου

Με μία μετατροπή των εξισώσεων του συστήματος μπορούν να εισαχθούν οι οριακές συνθήκες διαρροής. Έτσι εισάγεται ένας όρος αγωγιμότητας διαρροής (υδραυλική αγωγιμότητα προς την απόσταση). Ο όρος αυτός ολοκληρώνεται στην περιοχή και αναπαριστά την κάθετη διαρροή. Με τον κατάλληλο ορισμό της παραμέτρου που δηλώνεται από τον χρήστη,  $k_L$ , μπορεί να οριστεί οποιαδήποτε διαρροή.

### 3.7.5 Εξισώσεις του Συστήματος

Οι ταχύτητες του Darcy  $V_x$ ,  $V_y$  and  $V_z$  υπολογίζονται ως ποσότητες στρογγυλοποιημένες στο μέσο όρο των στοιχείων. Οι όροι διασποράς από την εξίσωση μεταφοράς (3.8) δίνονται από τις εξής εξισώσεις, όπως έχει αναφερθεί προηγουμένως.

$$D_{xx} = \frac{a_L V_x^2 + a_T V_y^2 + a_V V_z^2}{V} + D_M$$

$$D_{yy} = \frac{a_T V_x^2 + a_L V_y^2 + a_V V_z^2}{V} + D_M$$

$$D_{zz} = \frac{a_V V_x^2 + a_V V_y^2 + a_L V_z^2}{V} + D_M$$

$$D_{yx} = D_{xy} = \frac{(a_L - a_T)V_x V_y}{V}$$

$$D_{yz} = D_{zy} = \frac{(a_L - a_V)V_y V_z}{V}$$

$$D_{zx} = D_{xz} = \frac{(a_L - a_V)V_z V_x}{V}$$

### 3.7.6 Οριακές Συνθήκες

Το PTC δέχεται δύο τύπους οριακών συνθηκών στην εξίσωση μεταφοράς:

1. την καθορισμένη συγκέντρωση σε κάποιο κόμβο
2. την καθορισμένη ροή συμμεταφοράς

Οι οριακές συνθήκες είναι μηδενική ροή από διασπορά στα κάθετα όρια και μηδενική ολική ροή ρύπου στα άνω και κάτω όρια.

Ο χρήστης δίνει τις καθορισμένες συγκεντρώσεις κόμβων ενώ μέσω δήλωσης μιας συγκεντρώσης συσχετισμένης με τις ογκομετρικές ροές υγρών στα δεδομένα του προγράμματος δίνεται η ροή συμμεταφοράς. Ομοίως έμμεσα η καθορισμένη ροή συμμεταφοράς εισάγεται μέσω της συγκεντρώσης, που σχετίζεται με το διαρρέον υγρό στην οριακή συνθήκη ροής τρίτου τύπου.[Καρτεράκης, 2005]

### 3.7.7 Εφαρμογή του PTC στο υπό μελέτη πρόβλημα

Για να μπορέσουμε να προσομοιώσουμε την κατάσταση των υπόγειων υδάτων της περιοχής στο PTC, πρέπει να εισάγουμε στο μοντέλο στοιχεία που αφορούν τις ιδιαίτερες συνθήκες που επικρατούν εκεί. Οι υδραυλικές αγωγιμότητες, τα υψόμετρα της περιοχής, οι αρχικές και τις οριακές συνθήκες, η βροχόπτωση, οι θέσεις των

πηγαδιών άντλησης και οι ρυθμοί άντλησης, η χρονική διάρκεια της προσομοίωσης όπως και μερικά άλλα είναι τα στοιχεία που μας αφορούν.

Μετά την εφαρμογή του PTC θα είναι γνωστά τα υδραυλικά ύψη του υπόγειου υδροφορέα σε όλα τα σημεία της περιοχής. Το μοντέλο έχει τη δυνατότητα να εισάγει και την παράμετρο της ρύπανσης του υδροφορέα, προσομοιώνοντας τη διάδοση του ρύπου μετά από ορισμένο χρόνο, λόγω της μεταφοράς του από το νερό.

### 3.8 Πρόγραμμα ArgusOne

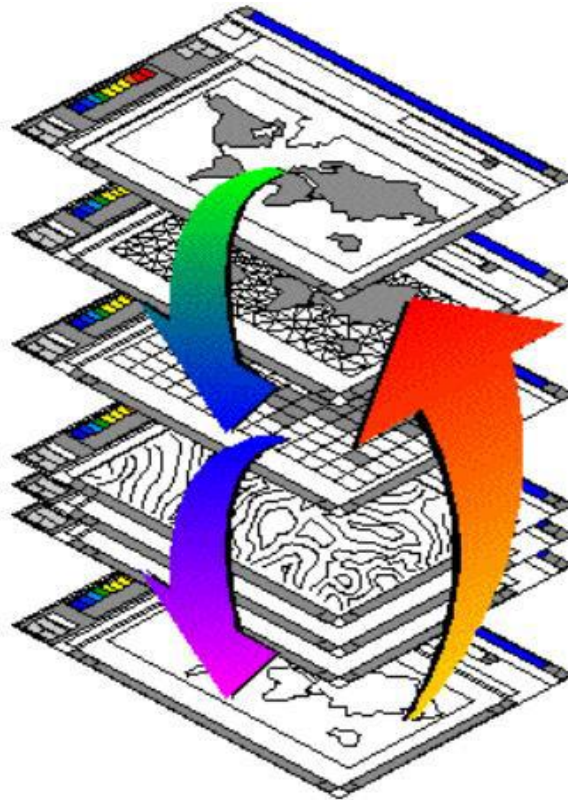
Το πρόγραμμα ArgusOpenNumericalEnvironments (ArgusONE) είναι ένα ανεξάρτητο μοντέλο που βασίζεται στις πληροφορίες. Σε αντίθεση με οποιοδήποτε άλλο GIS ή ειδικό λογισμικό προεπεξεργασίας, το Argus ONE έχει σχεδιαστεί για να επιτρέπει την απρόσκοπτη ενσωμάτωση πληροφοριών και οποιουδήποτε μοντέλου.

Έχει σχεδιαστεί για να γίνεται:

- εισαγωγή πληροφοριών από κάθε πηγή και σε οποιαδήποτε μορφή
- σύνδεση χωρικών πληροφοριών κατ' απαίτηση και σύμφωνα με την έννοια του μοντέλου
- εξαγωγή συνθετικών πληροφοριών με την ακριβή μορφή που απαιτείται από το μοντέλο
- ανάλυση εισόδου και εξόδου του μοντέλου

Μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την μοντελοποίηση υπόγειων και επιφανειακών υδάτων, για την ανάλυση των χρήσεων γης και για την περιβαλλοντική διαχείριση και τον σχεδιασμό της. [ArgusOne]

Ακόμη, το ArgusONE δίνει τη δυνατότητα εύκολης προετοιμασίας των δεδομένων για οποιοδήποτε πακέτο μοντελοποίησης, είτε πεπερασμένων στοιχείων, είτε πεπερασμένων διαφορών. Επίσης, εισάγοντας αυτόματα τα φυσικά δεδομένα σε στρώματα GIS, σε πλέγματα ή σε κόμβους και στοιχεία, το ArgusONE διατηρεί τα δεδομένα έτοιμα για επαναχρησιμοποίηση, δηλαδή, η αλλαγή του πλέγματος δεν απαιτεί ξανά την εισαγωγή δεδομένων. Πιο συγκεκριμένα, οι πληροφορίες αυτές αποθηκεύονται σε διαφορετικά επίπεδα τα οποία ο χρήστης μπορεί να επεξεργάζεται, καθώς και να δημιουργεί καινούργια. [Βραχνού, 2018]



Εικόνα 7: Τα επίπεδα του Argus ONE

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4: ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΜΟΝΤΕΛΟΥ ΡΤC ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΩΝ ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗΣ ΣΤΗ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗ ΤΩΝ ΥΠΟΓΕΙΩΝ ΥΔΑΤΩΝ

### 4.1 Ορισμός Προβλήματος

Το μοντέλο υπολογίζει τα υδραυλικά ύψη του υπόγειου υδροφορέα σε όλα τα σημεία της περιοχής, καθώς και την ταχύτητα του νερού στις διευθύνσεις  $x$  και  $y$ . Για να θέσουμε σε λειτουργία το πρόγραμμα, χρησιμοποιήσαμε κάποια δεδομένα από τη διπλωματική εργασία του Νικόλαου Θωμαδάκη «Μοντελοποίηση της Ροής Υπόγειων Υδάτων του Υδροφορέα Περιοχής Μοιρών Ηρακλείου, Κρήτης» για τη χρονική περίοδο 2008-2009. Συγκεκριμένα, στην εργασία του υπήρχαν 30 πηγάδια άντλησης τα οποία εμείς ομαδοποιήσαμε σε 9.

Ο στόχος της βελτιστοποίησης είναι να καταφέρουμε να μεγιστοποιήσουμε την άντληση από τα πηγάδια χωρίς όμως να δημιουργήσουμε πρόβλημα με την παροχή του νερού.

Πρέπει να λάβουμε υπόψιν μας ότι οι παροχές στα πηγάδια άντλησης δεν μπορούν να υπερβούν τις αντίστοιχες μέγιστες τους και προφανώς δεν μπορούν να είναι μικρότερες από το μηδέν. Οπότε, το πρόβλημα αναλύεται ως εξής:

$$\max \sum_{i=1}^9 q_i \text{ subject to } H_1, H_2, \dots, H_9 \geq 165,5 \text{ m}$$

$$0 \leq q_1 \leq 4284 \text{ m}^3/\text{day}$$

$$0 \leq q_2 \leq 3064 \text{ m}^3/\text{day}$$

$$0 \leq q_3 \leq 2940 \text{ m}^3/\text{day}$$

$$0 \leq q_4 \leq 3318 \text{ m}^3/\text{day}$$

$$0 \leq q_5 \leq 7056 \text{ m}^3/\text{day}$$

$$0 \leq q_6 \leq 5460 \text{ m}^3/\text{day}$$

$$0 \leq q_7 \leq 1864,8 \text{ m}^3/\text{day}$$

$$0 \leq q_8 \leq 588 \text{ m}^3/\text{day}$$

$$0 \leq q_9 \leq 3990 \text{ m}^3/\text{day}$$

## 4.2 Προβλήματα μη Γραμμικού Προγραμματισμού

Σε πολλές εφαρμογές προβλημάτων βελτιστοποίησης στα υπόγεια ύδατα, η αντικειμενική συνάρτηση και οι συναρτήσεις των περιορισμών παρουσιάζουν μη γραμμική συμπεριφορά. Αυτή η μη γραμμική συμπεριφορά οφείλεται κυρίως στην μη γραμμική απόκριση του συστήματος στην άντληση, δηλαδή το υδραυλικό ύψος δεν μεταβάλλεται γραμμικά σε σχέση με την παροχή, και εμφανίζεται συνήθως στις περιπτώσεις όπου υπάρχουν ελεύθεροι υδροφορίες.

Έτσι δημιουργούνται αλλαγές στις μαθηματικές εξισώσεις επίλυσης του συστήματος υπογείων υδάτων και προφανώς σε κάθε σχετικό πρόβλημα βελτιστοποίησης. Για το λόγο αυτό πρέπει να χρησιμοποιείται κάποιος εναλλακτικός αλγόριθμος. Κατά κανόνα ένας τέτοιος αλγόριθμος απαιτεί μεγαλύτερο υπολογιστικό χρόνο για την εξεύρεση λύσης, ενώ ταυτόχρονα δεν είναι βέβαιο ότι η λύση που θα προκύψει θα είναι η βέλτιστη.

### 4.2.1 Δομή μη Γραμμικού Προβλήματος

Μια γενική μαθηματική έκφραση ενός προβλήματος διαχείρισης υπογείων υδάτων, που περιλαμβάνει όλες τις πιθανές παραμέτρους, έχει τη μορφή:

$$\text{Minimize } (q_1, q_2, \dots, q_n, X_1, X_2, \dots, X_n, h_1, h_2, \dots, h_n,)$$

$$\text{Υπό τον περιορισμό } g_k(q_1, q_2, \dots, q_n, X_1, X_2, \dots, X_n, h_1, h_2, \dots, h_n, ) \leq 0$$

$$k = 1, \dots, m$$

Όπου,

- $f$ : η αντικειμενική συνάρτηση
- $g_k$ : οι συναρτήσεις των περιορισμών
- $q$ : οι παροχές άντλησης
- $X$ : οι συγκεντρώσεις (π.χ. ρύπων)
- $h$ : τα υδραυλικά ύψη

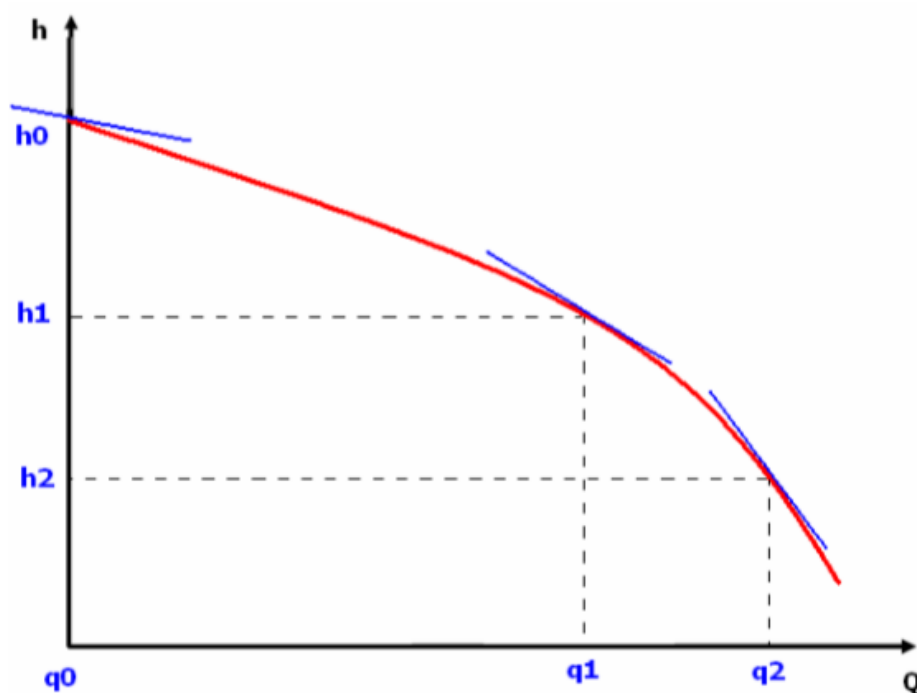
### 4.3 Επίλυση μη Γραμμικών Προβλημάτων

Η μέθοδος Simplex (αναλύεται παρακάτω) είναι η πιο διαδεδομένη μέθοδος για τη λύση γραμμικών συστημάτων, καθώς μπορεί να λύσει πρακτικά κάθε πρόβλημα. Σε αντίθεση με τα μη γραμμικά προβλήματα όπου για την επίλυσή τους, υπάρχουν πολλοί και διαφορετικοί αλγόριθμοι, καθένας από τους οποίους διακρίνεται ανάλογα με την φύση του προβλήματος και θεωρείται ικανοποιητικός. [Καρατζάς, 2017]

Κάποιοι βασικοί αλγόριθμοι για την επίλυση μη γραμμικών προβλημάτων είναι:

#### 1. Μέθοδοι διαδοχικής γραμμικοποίησης

Αυτή η μέθοδος εφαρμόζεται στις περιπτώσεις όπου τα υδραυλικά ύψη προσομοιώνονται με εξισώσεις του ελεύθερου υδροφορέα αλλά οι υπόλοιπες παράμετροι της μαθηματικής επίλυσης είναι γραμμικές. Ο αλγόριθμος λύνει το πρόβλημα εφαρμόζοντας διαδοχικά γραμμικές μεθόδους. Γενικά, το πάχος του υδροφορέα και τα όρια ελέγχου θεωρούνται γνωστά στα γραμμικά προβλήματα και δημιουργείται ένας πίνακας απόκρισης ο οποίος αποτελεί την βάση για την λύση του συστήματος. Σε κάθε επανάληψη ο υδροφορέας θεωρείται περιορισμένος και με δεδομένες τις παροχές άντλησης και θέτοντας τους κατάλληλους περιορισμούς, υπολογίζονται τα υδραυλικά ύψη. Αυτά στην συνέχεια, εισάγονται και πάλι στο πρόβλημα ώστε να προκύψουν τα νέα όρια του όγκου ελέγχου και να δημιουργηθεί ο νέος πίνακας απόκρισης. Η διαδικασία επαναλαμβάνεται μέχρι να υπάρξει σύγκλιση.

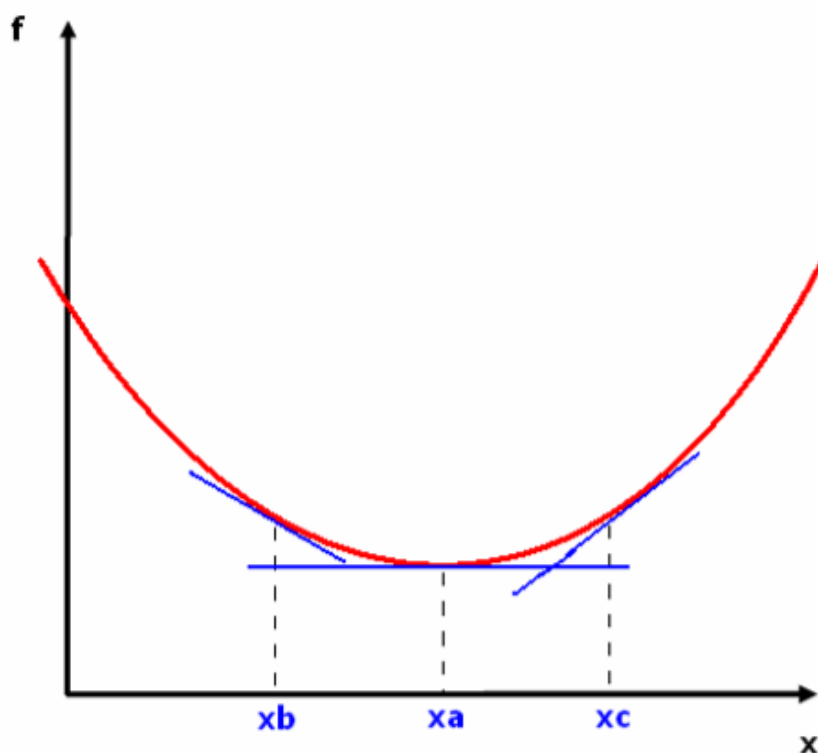


Εικόνα 8: Προσέγγιση της καμπύλης υδραυλικού ύψους-παροχής άντλησης από τον αλγόριθμο της διαδοχικής γραμμικοποίησης

Στην Εικόνα 9 φαίνεται η λειτουργία του διαδοχικά εφαρμοζόμενου αλγόριθμου γραμμικής επίλυσης θεωρώντας συγκεκριμένα όρια του όγκου ελέγχου σε κάθε επανάληψη. Σε καθένα από τα τρία σημεία που απεικονίζονται υπολογίζεται η παράγωγος του υδραυλικού ύψους με την παροχή άντλησης και η καμπύλη προσεγγίζεται με την εύρεση διαφορετικών κλίσεων.

## 2. Μέθοδοι βασισμένες στην κλίση της συνάρτησης

Σημαντικές πληροφορίες για τη θέση του ελαχίστου σημείου της συνάρτησης μπορεί να δώσει η παράγωγος μιας συνάρτησης. Στην Εικόνα 10 που ακολουθεί, η συνάρτηση έχει ελάχιστο στο σημείο  $x_a$  και επομένως η παράγωγος στο σημείο αυτό είναι μηδέν. Στο σημείο  $x_b$  η παράγωγος δεν είναι μηδέν έτσι δεν πρόκειται για ελάχιστο. Επίσης, η κλίση παρουσιάζει αρνητικό πρόσημο, γεγονός που δείχνει ότι το ελάχιστο θα βρίσκεται δεξιά του σημείου  $x_b$ . Ομοίως, στο σημείο  $x_c$  η παράγωγος δεν είναι μηδέν, επομένως το σημείο δεν είναι ελάχιστο, και η κλίση είναι θετική άρα το ελάχιστο βρίσκεται αριστερά του σημείου  $x_c$ .



Εικόνα 9: Εύρεση ακροτάτου με γνωστή την παράγωγο της συνάρτησης σε διάφορα σημεία

Με τον παραπάνω τρόπο λύνονται τρεις βασικές κατηγορίες προβλημάτων. Πιο συγκεκριμένα εφαρμόζεται

- για προβλήματα χωρίς περιορισμούς, όπου ζητούμενο είναι η ελαχιστοποίηση της αντικειμενικής συνάρτησης,
- για μη γραμμικά προβλήματα με γραμμικούς περιορισμούς, όπου η αντικειμενική συνάρτηση είναι μη γραμμική και οι περιορισμοί γραμμικοί,

- για προβλήματα με μη γραμμικούς περιορισμούς, όπου η αντικειμενική συνάρτηση μπορεί να είναι γραμμική ή μη και οι περιορισμοί μη γραμμικοί.

### 3. Μέθοδοι που δεν είναι βασισμένες στην κλίση της συνάρτησης

Τα μη κυρτά προβλήματα φέρουν αρκετές δυσκολίες στην επίλυση του έχοντας έτσι δημιουργηθεί αρκετοί αλγόριθμοι προσπαθώντας να αντιμετωπιστούν οι δυσκολίες τους. Συχνά χαρακτηρίζονται ως μέθοδοι ολικής βελτιστοποίησης, καθώς έχουν τη δυνατότητα να αποφεύγουν αποτελεσματικά τα τοπικά ακρότατα, χωρίς ωστόσο να υπάρχουν απόλυτες αποδείξεις ότι τελικά εντοπίζουν τα ολικά ακρότατα. Επιπλέον, πρόκειται για αλγόριθμους που απαιτούν αρκετά υψηλή υπολογιστική ισχύ και εφαρμόζονται καλύτερα σε προβλήματα μικρής έκτασης. Στόχος της έρευνας στον τομέα αυτό είναι πλέον ο συνδυασμός τεχνικών αναζήτησης ώστε να μειωθεί ο υπολογιστικός χρόνος και ταυτόχρονα να γίνει η καλύτερη δυνατή εκμετάλλευση των πλεονεκτημάτων τους. [Βραχνού, 2018]

## 4.4 Προβλήματα Γραμμικού Προγραμματισμού

### 4.4.1 Μαθηματικοί ορισμοί του γραμμικού προγραμματισμού

Ο γραμμικός προγραμματισμός είναι ένα μαθηματικό μοντέλο που έχει ως σκοπό την εύρεση μιας βέλτιστης λύσης μιας γραμμικής αντικειμενικής συνάρτησης άγνωστων, πραγματικών μεταβλητών, η οποία να είναι συμβατή με ένα πεπερασμένο σύνολο γραμμικών ανισοτήτων. Οι άγνωστες μεταβλητές προσδιορίζουν το αντικείμενο απόφασης του προβλήματος και ονομάζονται μεταβλητές απόφασης.

Επίσης, όταν πρόκειται για βελτιστοποίηση (ελαχιστοποίηση ή μεγιστοποίηση) ενός και μόνου κριτηρίου απόφασης (αντικειμενική συνάρτηση), το πρόγραμμα ονομάζεται μονοκριτήριο. Σε αυτό, ζητείται να προσδιοριστούν οι τιμές των μεταβλητών ( $x_1, x_2, \dots, x_i$ ) που βελτιστοποιούν τη γραμμική αντικειμενική συνάρτηση:

$$g(x) = z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_ix_i$$

υπό τους γραμμικούς περιορισμούς:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1l}x_l \leq \text{ή} = \text{ή} \geq b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2l}x_l \leq \text{ή} = \text{ή} \geq b_2$$

... ..

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{ml}x_l \leq \text{ή} = \text{ή} \geq b_m$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_l \geq 0$$

Όπου  $i=1,2,\dots,m$  και  $j=1,2,\dots,l$  είναι γνωστοί πραγματικοί συντελεστές.



#### 4.4.2 Διαδικασία μοντελοποίησης

Η μοντελοποίηση γίνεται σε τέσσερα στάδια τα οποία αναλύονται ως εξής:

##### Στάδιο 1<sup>ο</sup>: Αντικείμενο της απόφασης

Είναι ο καθορισμός των μεταβλητών απόφασης, οι οποίες πρέπει να αντανakλούν απόλυτα το ζητούμενο της απόφασης, μέσα από τις ανάγκες του περιβάλλοντος στο οποίο θα παρθεί η απόφαση και σύμφωνα με τις αξίες μιας κοινωνίας.

Το αντικείμενο της απόφασης ολοκληρώνεται με τον προσδιορισμό του συνόλου των λύσεων  $A = \{x \in R \mid Ax \leq b, x \geq 0\}$  μετά από τη διαμόρφωση περιορισμών που είναι γραμμικές συναρτήσεις των μεταβλητών απόφασης. Το τετράπτυχο: τεχνολογία-περιβάλλον-πόροι-προτιμήσεις είναι η πηγή των έμμεσων επιτρεπτών ορίων μέσα στα οποία «κινούνται» οι τιμές των μεταβλητών απόφασης.

##### Στάδιο 2<sup>ο</sup>: Κριτήρια απόφασης

Ο αναλυτής του προβλήματος οφείλει να διαμορφώσει γραμμικές αντικειμενικές συναρτήσεις των μεταβλητών απόφασης,  $x$ , σύμφωνα με τους στόχους που έχουν τεθεί.

Τα κριτήρια αυτά έχουν τη μορφή:

$$[max]g_1(x) = c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \dots + c_{1l}$$

$$[max]g_2(x) = c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + \dots + c_{2l}$$

... ..

$$[max]g_n(x) = c_{n1}x_1 + c_{n2}x_2 + \dots + c_{nl}$$

Όπου  $n$  ο αριθμός των κριτηρίων και είναι η μήτρα των συντελεστών των αντικειμενικών συναρτήσεων.

##### Στάδιο 3<sup>ο</sup> : Μοντέλα απόφασης

Αυτό το στάδιο είναι καθαρά τεχνικό. Ο αναλυτής χρησιμοποιεί μια σειρά από αλγόριθμους και σχετικές τεχνικές για την επίτευξη ικανοποιητικών λύσεων και την τεκμηρίωση των λύσεων αυτών. Σε προβλήματα καθαρής βελτιστοποίησης, όταν το κριτήριο βελτιστοποίησης είναι ένα και μοναδικό, χρησιμοποιείται ως βασικό εργαλείο επίτευξης βέλτιστης λύσης ο γνωστός, ευρέως χρησιμοποιούμενος αλγόριθμος Simplex. Σε πολυκριτήρια μοντέλα γραμμικού προγραμματισμού, όπου η έννοια της βέλτιστης λύσης χάνει τη σημασία της, χρησιμοποιούνται πιο εξειδικευμένες μέθοδοι. Στις πρακτικές εφαρμογές, ο αναλυτής οφείλει σε κάθε περίπτωση να επεξεργαστεί σε βάθος τα στοιχεία επίλυσης που του παρέχει η μέθοδος Simplex. Τεχνικές που συμβάλλουν αποτελεσματικά στην ανάλυση αυτή είναι η ανάπτυξη της λύσης, η ανάλυση ευαισθησίας, η παραμετρική ανάλυση και η ανάλυση ευστάθειας.

#### Στάδιο 4<sup>ο</sup>: Υποστήριξη της απόφασης

Στο στάδιο αυτό, πρέπει να στηριχθεί το αποτέλεσμα της διαδικασίας. Σε περίπτωση που η λύση και οι επιπτώσεις της δεν ικανοποιούν τον αποφασίζοντα, θα πρέπει να αναθεωρηθεί ένας ή περισσότεροι από τους παράγοντες: τεχνολογία, περιβάλλον, πόροι και προτιμήσεις.

#### *4.4.3 Συνθήκες εφαρμογής μοντέλων γραμμικού προγραμματισμού*

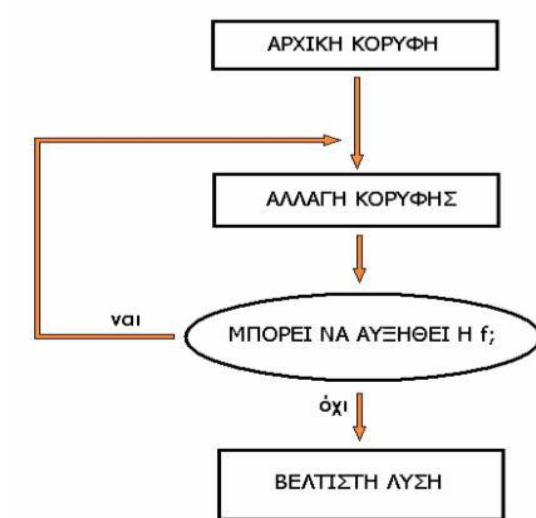
Για να μπορέσουμε να προσεγγίσουμε ένα πρόβλημα απόφασης μέσω του γραμμικού προγραμματισμού υπάρχουν κάποιες προϋποθέσεις όπως: [Βραχνού, 2018]

1. Γραμμικότητα: Το αποτέλεσμα, είτε αυτό είναι όρος περιορισμού  $a_{ij}x_j$  είτε όρος αντικειμενικής συνάρτησης  $c_jx_j$  είναι γραμμική συνάρτηση του αιτίου  $x_j$  που το προκαλεί.
2. Διαιρετότητα: Οι μεταβλητές απόφασης είναι άπειρα διαιρετές, δηλαδή εκφράζονται για παράδειγμα σε μονάδες μήκους ή βάρους. Σε περίπτωση που οι μεταβλητές δεσμεύονται να πάρουν όλες τις ακέραιες τιμές, το πρόβλημα εμπίπτει στην κατηγορία του ακέραιου γραμμικού προγραμματισμού. Όταν δεν δεσμεύονται όλες οι μεταβλητές να πάρουν ακέραιες τιμές, αλλά μόνο μερικές από αυτές, το πρόβλημα ανήκει στην κατηγορία του μικτού γραμμικού προγραμματισμού.
3. Βεβαιότητα: Τα δεδομένα του προβλήματος είναι γνωστά με απόλυτη βεβαιότητα. Όταν ορισμένα από αυτά δεν είναι γνωστά με βεβαιότητα, αλλά ακολουθούν γνωστούς στατιστικούς νόμους, ο προγραμματισμός λέγεται στοχαστικός. Επίσης, όταν η πληροφορία για κάποιους συντελεστές είναι προσεγγιστική, ο προγραμματισμός ονομάζεται ασαφής.
4. Μονοδιάστατη: Στον κλασικό γραμμικό προγραμματισμό, η αντικειμενική συνάρτηση πρέπει να είναι μια και μοναδική (μονοδιάστατος ή μονοκριτήριος γραμμικός προγραμματισμός). Στην αντίθετη περίπτωση, το πρόβλημα ανήκει στην κατηγορία του πολυκριτήριου γραμμικού προγραμματισμού.

#### **4.5 Μέθοδος Simplex**

Αποτελεί τα τελευταία χρόνια τον δημοφιλέστερο αλγόριθμο γραμμικού προγραμματισμού. Ανακαλύφθηκε το 1947 από τον Αμερικανό George Dantzig. Πρόκειται για μια πολύ αποτελεσματική μέθοδο μέσω της οποίας προσδιορίζεται η βέλτιστη λύση ενός γραμμικού προβλήματος. Πιο συγκεκριμένα, η μέθοδος αυτή προσπαθεί, αφού βρεθεί μια εφικτή λύση, να βελτιώσει σε κάθε επανάληψη την τιμή της συνάρτησης κόστους ή αλλιώς αντικειμενική συνάρτηση. Η διαδικασία αυτή αρχίζει βρίσκοντας μια μεταβλητή του προβλήματος η οποία μπορεί να αυξηθεί,

μειώνοντας ταυτόχρονα κάποια άλλη μεταβλητή ούτως ώστε να βρεθεί βέλτιστη τιμή της συνάρτησης κόστους. Στην Εικόνα 11, παρουσιάζεται η διαδικασία που αναφέρθηκε. Βέλτιστη λύση θεωρείται η κορυφή πέραν της οποίας δεν υπάρχει άλλη βελτίωση και σε αυτήν σταματάει η διαδικασία.



Εικόνα 10: Η αρχή λειτουργίας της μεθόδου Simplex

#### 4.5.1 Μετατροπή του γραμμικού προβλήματος στην πρότυπη μορφή

Στο πρώτο στάδιο της μεθόδου Simplex απαιτείται ο μετασχηματισμός σε ισότητες όλων των ανισοεξισώσεων του γραμμικού προβλήματος, ώστε να προκύψει η πρότυπη μορφή  $[\max]z = c^t x$  με πίνακα  $A$  ώστε  $Ax = b$  ( $x \geq 0$ ). Για το σκοπό αυτό, εισάγεται για κάθε ανισοεξίσωση μια θετική μεταβλητή απόκλισης, η οποία προστίθεται όταν ο περιορισμός είναι τύπου  $\leq$  και αφαιρείται όταν ο περιορισμός είναι τύπου  $\geq$ . Αυτές οι μεταβλητές έχουν μηδενικό συντελεστή στην αντικειμενική συνάρτηση και το νέο γραμμικό πρόβλημα είναι ισοδύναμο με το αρχικό, από την άποψη ότι υπάρχει μονοσήμαντη αντιστοιχία μεταξύ των λύσεων των δύο επιμέρους γραμμικών προβλημάτων.

#### 4.5.2 Θεωρητικό υπόβαθρο

Με σκοπό τη συστηματική διερεύνηση των δυνατών λύσεων ενός γραμμικού προβλήματος, με αλγεβρικό τρόπο, και την κατεύθυνση προς την βέλτιστη λύση, απαιτούνται τα εξής θεωρήματα:

- Θεώρημα 1: Ο αριθμός των βασικών δυνατών λύσεων ενός γραμμικού προβλήματος είναι πεπερασμένος
- Θεώρημα 2: Το σύνολο των δυνατών λύσεων είναι κυρτό
- Θεώρημα 3: Κάθε βασική δυνατή λύση του γραμμικού προβλήματος είναι μια κορυφή του υπερπολυέδρου και αντίστροφα
- Θεώρημα 4: Εάν υπάρχει μια δυνατή λύση τότε υπάρχει και μια βασική δυνατή λύση
- Θεώρημα 5: Εάν υπάρχει μια βέλτιστη δυνατή λύση, τότε η αντικειμενική συνάρτηση παίρνει τη βέλτιστη τιμή της σε ένα τουλάχιστον ακραίο σημείο του κυρτού συνόλου των δυνατών λύσεων, δηλαδή σε μια βασική δυνατή λύση

#### 4.6 Επίλυση του Υπό Μελέτη Προβλήματος με Χρήση Γραμμικού Προγραμματισμού

Γνωρίζοντας ότι η μεταβολή του υδραυλικού ύψους και της παροχής είναι ένα μη γραμμικό πρόβλημα επομένως, για την επίλυση του επιλέγουμε τη διαδικασία διαδοχικής γραμμικοποίησης. Για τη διαδικασία αυτή εφαρμόζουμε τη μέθοδο Simplex του γραμμικού προγραμματισμού επανειλημμένως και σε κάθε επανάληψη ορίζουμε ως αρχική τιμή τη βέλτιστη θεωρητικά λύση που προέκυψε από το προηγούμενο βήμα. Σκοπός είναι να προσεγγιστεί η καμπύλη υδραυλικού ύψους και παροχής άντλησης με διαδοχικές ευθείες.

Στα παρακάτω βήματα παρουσιάζεται ο αλγόριθμος που εφαρμόστηκε: [Καρτεράκης, 2005]

##### 1<sup>ο</sup> Βήμα

1. Αρχικά, επιλέγουμε εννιά πηγάδια άντλησης και ορίζουμε σε όλα μηδενικές παροχές για όλες τις χρονικές περιόδους. Έτσι, δημιουργείτε το διάνυσμα παροχών  $\vec{Q}_0$  το οποίο εισάγουμε στο PTC και προσομοιώνεται η κατάσταση των υπόγειων υδάτων για δύο χρόνια (2008,2009) και προκύπτει για τους εννιά κόμβους παρατήρησης το αρχικό διάνυσμα υδραυλικών υψών  $\vec{H}_0$ .

$$\overrightarrow{Q_0} = \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \\ Q_5 \\ Q_6 \\ Q_7 \\ Q_8 \\ Q_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \overrightarrow{H_0} = \begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \\ H_3 \\ H_4 \\ H_5 \\ H_6 \\ H_7 \\ H_8 \\ H_9 \end{bmatrix}$$

2. Στη συνέχεια, προσθέτουμε στην παροχή του πρώτου πηγαδιού άντλησης (201) ένα  $\Delta Q = 2000$  και έτσι προκύπτει το καινούργιο διάνυσμα  $\overrightarrow{Q'_{01}}$  το οποίο εισάγουμε πάλι στο PTC, προσομοιώνεται και προκύπτει ένα νέο διάνυσμα υδραυλικών υψών  $\overrightarrow{H'_{01}}$ .

$$\overrightarrow{Q'_{01}} = \begin{bmatrix} Q_1 + \Delta Q \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \\ Q_5 \\ Q_6 \\ Q_7 \\ Q_8 \\ Q_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 + 2000 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \overrightarrow{H'_{01}} = \begin{bmatrix} H'_1 \\ H'_2 \\ H'_3 \\ H'_4 \\ H'_5 \\ H'_6 \\ H'_7 \\ H'_8 \\ H'_9 \end{bmatrix}$$

Με βάση τα παραπάνω, υπολογίζεται το διάνυσμα του υδραυλικού ύψους, δηλαδή της κλίσης, ως προς την παροχή άντλησης.

$$\left(\frac{\partial H}{\partial Q}\right)_1 = \begin{bmatrix} \frac{H'_1 - H_1}{\Delta Q} \\ \frac{H'_2 - H_2}{\Delta Q} \\ \frac{H'_3 - H_3}{\Delta Q} \\ \frac{H'_4 - H_4}{\Delta Q} \\ \frac{H'_5 - H_5}{\Delta Q} \\ \frac{H'_6 - H_6}{\Delta Q} \\ \frac{H'_7 - H_7}{\Delta Q} \\ \frac{H'_8 - H_8}{\Delta Q} \\ \frac{H'_9 - H_9}{\Delta Q} \end{bmatrix}$$

3. Επαναλαμβάνεται η ίδια διαδικασία με αύξηση κατά  $\Delta Q$  αυτή τη φορά στην παροχή του δεύτερου πηγαδιού άντλησης (204) και έτσι προκύπτουν τα εξής διανύσματα κατά σειρά.

$$\overrightarrow{Q'}_{02} = \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 + \Delta Q \\ Q_3 \\ Q_4 \\ Q_5 \\ Q_6 \\ Q_7 \\ Q_8 \\ Q_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 + 2000 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \overrightarrow{H'}_{02} = \begin{bmatrix} H'_1 \\ H'_2 \\ H'_3 \\ H'_4 \\ H'_5 \\ H'_6 \\ H'_7 \\ H'_8 \\ H'_9 \end{bmatrix} \rightarrow \left( \frac{\partial H}{\partial Q} \right)_2 = \begin{bmatrix} \frac{H'_1 - H_1}{\Delta Q} \\ \frac{H'_2 - H_2}{\Delta Q} \\ \frac{H'_3 - H_3}{\Delta Q} \\ \frac{H'_4 - H_4}{\Delta Q} \\ \frac{H'_5 - H_5}{\Delta Q} \\ \frac{H'_6 - H_6}{\Delta Q} \\ \frac{H'_7 - H_7}{\Delta Q} \\ \frac{H'_8 - H_8}{\Delta Q} \\ \frac{H'_9 - H_9}{\Delta Q} \end{bmatrix}$$

4. Επαναλαμβάνεται η ίδια διαδικασία με αύξηση κατά  $\Delta Q$  αυτή τη φορά στην παροχή του τρίτου πηγαδιού άντλησης (205) και έτσι προκύπτουν τα εξής διανύσματα κατά σειρά.

$$\overrightarrow{Q'}_{03} = \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 + \Delta Q \\ Q_4 \\ Q_5 \\ Q_6 \\ Q_7 \\ Q_8 \\ Q_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 + 2000 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \overrightarrow{H'}_{03} = \begin{bmatrix} H'_1 \\ H'_2 \\ H'_3 \\ H'_4 \\ H'_5 \\ H'_6 \\ H'_7 \\ H'_8 \\ H'_9 \end{bmatrix} \rightarrow \left( \frac{\partial H}{\partial Q} \right)_3 = \begin{bmatrix} \frac{H'_1 - H_1}{\Delta Q} \\ \frac{H'_2 - H_2}{\Delta Q} \\ \frac{H'_3 - H_3}{\Delta Q} \\ \frac{H'_4 - H_4}{\Delta Q} \\ \frac{H'_5 - H_5}{\Delta Q} \\ \frac{H'_6 - H_6}{\Delta Q} \\ \frac{H'_7 - H_7}{\Delta Q} \\ \frac{H'_8 - H_8}{\Delta Q} \\ \frac{H'_9 - H_9}{\Delta Q} \end{bmatrix}$$

Ακολουθούμε την ίδια διαδικασία αυξάνοντας κατά  $\Delta Q$  τις παροχές και στα υπόλοιπα πηγάδια άντλησης αντίστοιχα.

Τελικά, πραγματοποιώντας τις παραπάνω διαδικασίες προκύπτει ένας τελικός πίνακας απόκρισης (response matrix) με 9 στήλες όπως τα πηγάδια άντλησης και 9 γραμμές όπως τα πηγάδια παρατήρησης από τον οποίο φαίνονται οι μεταβολές του υδραυλικού ύψους προς τις αντίστοιχες μεταβολές της παροχής άντλησης.

$$A = \begin{bmatrix} \frac{H'_1 - H_1}{\Delta Q} & \frac{H'_1 - H_1}{\Delta Q} & \frac{H'_1 - H_1 H'_1 - H_1}{\Delta Q} & \frac{H'_1 - H_1}{\Delta Q} & \frac{H'_1 - H_1 H'_1 - H_1}{\Delta Q} & \frac{H'_1 - H_1}{\Delta Q} & \frac{H'_1 - H_1}{\Delta Q} \\ \frac{H'_2 - H_2}{\Delta Q} & \frac{H'_2 - H_2}{\Delta Q} & \frac{H'_2 - H_2 H'_2 - H_2}{\Delta Q} & \frac{H'_2 - H_2}{\Delta Q} & \frac{H'_2 - H_2 H'_2 - H_2}{\Delta Q} & \frac{H'_2 - H_2}{\Delta Q} & \frac{H'_2 - H_2}{\Delta Q} \\ \frac{H'_3 - H_3}{\Delta Q} & \frac{H'_3 - H_3}{\Delta Q} & \frac{H'_3 - H_3 H'_3 - H_3}{\Delta Q} & \frac{H'_3 - H_3}{\Delta Q} & \frac{H'_3 - H_3 H'_3 - H_3}{\Delta Q} & \frac{H'_3 - H_3}{\Delta Q} & \frac{H'_3 - H_3}{\Delta Q} \\ \frac{H'_4 - H_4}{\Delta Q} & \frac{H'_4 - H_4}{\Delta Q} & \frac{H'_4 - H_4 H'_4 - H_4}{\Delta Q} & \frac{H'_4 - H_4}{\Delta Q} & \frac{H'_4 - H_4 H'_4 - H_4}{\Delta Q} & \frac{H'_4 - H_4}{\Delta Q} & \frac{H'_4 - H_4}{\Delta Q} \\ \frac{H'_5 - H_5}{\Delta Q} & \frac{H'_5 - H_5}{\Delta Q} & \frac{H'_5 - H_5 H'_5 - H_5}{\Delta Q} & \frac{H'_5 - H_5}{\Delta Q} & \frac{H'_5 - H_5 H'_5 - H_5}{\Delta Q} & \frac{H'_5 - H_5}{\Delta Q} & \frac{H'_5 - H_5}{\Delta Q} \\ \frac{H'_6 - H_6}{\Delta Q} & \frac{H'_6 - H_6}{\Delta Q} & \frac{H'_6 - H_6 H'_6 - H_6}{\Delta Q} & \frac{H'_6 - H_6}{\Delta Q} & \frac{H'_6 - H_6 H'_6 - H_6}{\Delta Q} & \frac{H'_6 - H_6}{\Delta Q} & \frac{H'_6 - H_6}{\Delta Q} \\ \frac{H'_7 - H_7}{\Delta Q} & \frac{H'_7 - H_7}{\Delta Q} & \frac{H'_7 - H_7 H'_7 - H_7}{\Delta Q} & \frac{H'_7 - H_7}{\Delta Q} & \frac{H'_7 - H_7 H'_7 - H_7}{\Delta Q} & \frac{H'_7 - H_7}{\Delta Q} & \frac{H'_7 - H_7}{\Delta Q} \\ \frac{H'_8 - H_8}{\Delta Q} & \frac{H'_8 - H_8}{\Delta Q} & \frac{H'_8 - H_8 H'_8 - H_8}{\Delta Q} & \frac{H'_8 - H_8}{\Delta Q} & \frac{H'_8 - H_8 H'_8 - H_8}{\Delta Q} & \frac{H'_8 - H_8}{\Delta Q} & \frac{H'_8 - H_8}{\Delta Q} \\ \frac{H'_9 - H_9}{\Delta Q} & \frac{H'_9 - H_9}{\Delta Q} & \frac{H'_9 - H_9 H'_9 - H_9}{\Delta Q} & \frac{H'_9 - H_9}{\Delta Q} & \frac{H'_9 - H_9 H'_9 - H_9}{\Delta Q} & \frac{H'_9 - H_9}{\Delta Q} & \frac{H'_9 - H_9}{\Delta Q} \end{bmatrix}$$

Η παραπάνω πρόταση μπορεί να εκφραστεί μαθηματικά από τη σχέση:

$$\Delta H = A \cdot \Delta Q$$

$$\begin{bmatrix} \Delta H_1 \\ \Delta H_2 \\ \Delta H_3 \\ \Delta H_4 \\ \Delta H_5 \\ \Delta H_6 \\ \Delta H_7 \\ \Delta H_8 \\ \Delta H_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{H'_1 - H_1}{\Delta Q} & \frac{H'_1 - H_1}{\Delta Q} & \frac{H'_1 - H_1 H'_1 - H_1}{\Delta Q} & \frac{H'_1 - H_1}{\Delta Q} & \frac{H'_1 - H_1 H'_1 - H_1}{\Delta Q} & \frac{H'_1 - H_1}{\Delta Q} & \frac{H'_1 - H_1}{\Delta Q} \\ \frac{H'_2 - H_2}{\Delta Q} & \frac{H'_2 - H_2}{\Delta Q} & \frac{H'_2 - H_2 H'_2 - H_2}{\Delta Q} & \frac{H'_2 - H_2}{\Delta Q} & \frac{H'_2 - H_2 H'_2 - H_2}{\Delta Q} & \frac{H'_2 - H_2}{\Delta Q} & \frac{H'_2 - H_2}{\Delta Q} \\ \frac{H'_3 - H_3}{\Delta Q} & \frac{H'_3 - H_3}{\Delta Q} & \frac{H'_3 - H_3 H'_3 - H_3}{\Delta Q} & \frac{H'_3 - H_3}{\Delta Q} & \frac{H'_3 - H_3 H'_3 - H_3}{\Delta Q} & \frac{H'_3 - H_3}{\Delta Q} & \frac{H'_3 - H_3}{\Delta Q} \\ \frac{H'_4 - H_4}{\Delta Q} & \frac{H'_4 - H_4}{\Delta Q} & \frac{H'_4 - H_4 H'_4 - H_4}{\Delta Q} & \frac{H'_4 - H_4}{\Delta Q} & \frac{H'_4 - H_4 H'_4 - H_4}{\Delta Q} & \frac{H'_4 - H_4}{\Delta Q} & \frac{H'_4 - H_4}{\Delta Q} \\ \frac{H'_5 - H_5}{\Delta Q} & \frac{H'_5 - H_5}{\Delta Q} & \frac{H'_5 - H_5 H'_5 - H_5}{\Delta Q} & \frac{H'_5 - H_5}{\Delta Q} & \frac{H'_5 - H_5 H'_5 - H_5}{\Delta Q} & \frac{H'_5 - H_5}{\Delta Q} & \frac{H'_5 - H_5}{\Delta Q} \\ \frac{H'_6 - H_6}{\Delta Q} & \frac{H'_6 - H_6}{\Delta Q} & \frac{H'_6 - H_6 H'_6 - H_6}{\Delta Q} & \frac{H'_6 - H_6}{\Delta Q} & \frac{H'_6 - H_6 H'_6 - H_6}{\Delta Q} & \frac{H'_6 - H_6}{\Delta Q} & \frac{H'_6 - H_6}{\Delta Q} \\ \frac{H'_7 - H_7}{\Delta Q} & \frac{H'_7 - H_7}{\Delta Q} & \frac{H'_7 - H_7 H'_7 - H_7}{\Delta Q} & \frac{H'_7 - H_7}{\Delta Q} & \frac{H'_7 - H_7 H'_7 - H_7}{\Delta Q} & \frac{H'_7 - H_7}{\Delta Q} & \frac{H'_7 - H_7}{\Delta Q} \\ \frac{H'_8 - H_8}{\Delta Q} & \frac{H'_8 - H_8}{\Delta Q} & \frac{H'_8 - H_8 H'_8 - H_8}{\Delta Q} & \frac{H'_8 - H_8}{\Delta Q} & \frac{H'_8 - H_8 H'_8 - H_8}{\Delta Q} & \frac{H'_8 - H_8}{\Delta Q} & \frac{H'_8 - H_8}{\Delta Q} \\ \frac{H'_9 - H_9}{\Delta Q} & \frac{H'_9 - H_9}{\Delta Q} & \frac{H'_9 - H_9 H'_9 - H_9}{\Delta Q} & \frac{H'_9 - H_9}{\Delta Q} & \frac{H'_9 - H_9 H'_9 - H_9}{\Delta Q} & \frac{H'_9 - H_9}{\Delta Q} & \frac{H'_9 - H_9}{\Delta Q} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta Q_1 \\ \Delta Q_2 \\ \Delta Q_3 \\ \Delta Q_4 \\ \Delta Q_5 \\ \Delta Q_6 \\ \Delta Q_7 \\ \Delta Q_8 \\ \Delta Q_9 \end{bmatrix}$$

Για τη βελτιστοποίηση των αντλήσεων χρησιμοποιούμε τη μέθοδο Simplex η επίλυση της οποίας λαμβάνει χώρα στο πρόγραμμα Matlab. Στο πρόγραμμα αυτό θα χρησιμοποιήσουμε την εντολή **linprog** (linearprogramming) η οποία συντάσσεται ως εξής:

$$[x, fval] = \text{linprog}(f, A, b, A_{eq}, b_{eq}, LB, UB)$$

Όπου,

- $x$  : οι μεταβλητές απόφασης
  - $fval$  : η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης
  - $f$  : το διάνυσμα της αντικειμενικής συνάρτησης με τους συντελεστές των μεταβλητών απόφασης
  - $A, b$  : πίνακας και διάνυσμα αντίστοιχα των περιορισμών ανισότητας
  - $A_{eq}, b_{eq}$  : πίνακας και διάνυσμα αντίστοιχα των περιορισμών ισότητας
  - $LB$  : διάνυσμα ελάχιστων ορίων για τις μεταβλητές απόφασης (lower bound)
  - $UB$  : διάνυσμα μέγιστων ορίων για τις μεταβλητές απόφασης (upper bound)
- [Καρτεράκης, 2005]

Σύμφωνα με τα παραπάνω λύνεται το εξής πρόβλημα:

$$\min f(x) \text{ subject to } A \cdot x \leq b$$

Για να μπορέσει να εφαρμοστεί το συγκεκριμένο πρόβλημα πρέπει να γίνουν κάποιες προσαρμογές. Γνωρίζουμε από τον ορισμό του προβλήματος ότι πρέπει να γίνει μεγιστοποίηση της ολικής παροχής άντλησης, έτσι η εντολή `linprog` θα χρησιμοποιηθεί για να ελαχιστοποιήσει την αρνητική ολική παροχή. Σύμφωνα λοιπόν με τον περιορισμό, θα πρέπει το υδραυλικό ύψος σε κάθε κόμβο παρατήρησης ξεχωριστά να έχει τους αντίστοιχους περιορισμούς:

1<sup>ος</sup> κόμβος (128) → 178m

2<sup>ος</sup> κόμβος (91) → 177m

3<sup>ος</sup> κόμβος (189) → 180m

4<sup>ος</sup> κόμβος (304) → 182m

5<sup>ος</sup> κόμβος (536) → 187m

6<sup>ος</sup> κόμβος (701) → 189m

7<sup>ος</sup> κόμβος (663) → 193m

8<sup>ος</sup> κόμβος (743) → 195m

9<sup>ος</sup> κόμβος (799) → 199m



Επίσης, η εντολή linprog απαιτεί η μεταβλητή απόφασης  $x$  να εκφράζει τον περιορισμό όπου στη δεδομένη περίπτωση ο περιορισμός είναι η παροχή άντλησης ( $q$ ). Για το λόγο αυτό πρέπει να γίνουν οι παρακάτω διαμορφώσεις:

$$H \geq H_{ref} \rightarrow H_0 + \Delta H \geq H_{ref}$$

και αν το  $\Delta H$  εκφραστεί συναρτήσει του πίνακα απόκρισης  $A$ , τότε:

$$H_0 + A \cdot \Delta H \geq H_{ref} \rightarrow H_0 + A \cdot (Q - Q_0) \geq H_{ref}$$

και

$$A \cdot Q \geq H_0 - H_{ref} - A \cdot Q_0 \rightarrow -A \cdot Q \leq H_0 - H_{ref} - A \cdot Q_0$$

Όπου,

- $Q_0$  και  $H_0$ : το αρχικό ζεύγος τιμών παροχής και υδραυλικού ύψους με βάση το οποίο υπολογίστηκε ο πίνακας απόκρισης  $A$
- $Q$ : η διαταραγμένη παροχή άντλησης
- $H$ : η απόκριση του μοντέλου PTC για την παροχή αυτή

Σύμφωνα λοιπόν με τη σχέση  $A \cdot x \leq b$ ,

→ ο πίνακας  $A$  του περιορισμού ανισότητας της linprog είναι ο αρνητικός του πίνακα απόκρισης  $A$

→ το διάνυσμα  $b$  του περιορισμού ανισότητας είναι η στήλη  $H_0 - H_{ref} - A \cdot Q_0$

→ το διάνυσμα ελάχιστων ορίων για τις μεταβλητές απόφασης είναι το  $LB =$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

→ το διάνυσμα μεγίστων ορίων για τις μεταβλητές απόφασης είναι το  $UB =$

$$\begin{bmatrix} 4284 \\ 3064 \\ 2940 \\ 3318 \\ 7056 \\ 5460 \\ 1864,8 \\ 588 \\ 3990 \end{bmatrix}$$

Στο τελικό αποτέλεσμα προκύπτουν εννέα βέλτιστες παροχές άντλησης στα πηγάδια και η συνολική παροχή.

## 2<sup>ο</sup> Βήμα

Σε αυτό το βήμα, χρησιμοποιούμε ένα νέο διάνυσμα  $\vec{Q}_0$  το οποίο είναι το αποτέλεσμα της βελτιστοποίησης του προηγούμενου βήματος. Στη συνέχεια ακολουθούμε ακριβώς την ίδια διαδικασία και συγκρίνουμε τα αποτελέσματα που προκύπτουν με τα αποτελέσματα της προηγούμενης διαδικασίας. Τα βήματα αυτά επαναλαμβάνονται μέχρι να υπάρξει σύγκλιση, μέχρι δηλαδή οι τελευταίες δύο λύσεις να είναι παραπλήσιες.

### 4.6.1 Εφαρμογή αλγορίθμου στο υπό μελέτη πρόβλημα

Σε αυτό το υπό κεφάλαιο, παρουσιάζεται η εφαρμογή των βημάτων που αναλύθηκαν με τα πραγματικά δεδομένα για το συγκεκριμένο πρόβλημα.

## 1<sup>ο</sup> Βήμα

Στους πίνακες που ακολουθούν, παρουσιάζονται όλα τα σενάρια του πρώτου βήματος. Δηλαδή, το αρχικό διάνυσμα της παροχής των πηγαδιών άντλησης και το διάνυσμα των αρχικών υδραυλικών υψών στα πηγάδια παρατήρησης, οι διαταραχές της παροχής που πραγματοποιήθηκαν σε κάθε σενάριο για κάθε ένα πηγάδι άντλησης (κατά 2000) και οι αντίστοιχες αποκρίσεις υδραυλικών υψών του μοντέλου για τα οκτώ πηγάδια παρατήρησης.

Πηγάδια Άντλησης	Αρχική Παροχή $Q_0$	Διαταραγμέν η παροχή $Q'_{01}$ ως προς το 1° πηγάδι άντλησης	Διαταραγμέν η παροχή $Q'_{02}$ ως προς το 2° πηγάδι άντλησης	Διαταραγμέν η παροχή $Q'_{03}$ ως προς το 3° πηγάδι άντλησης	Διαταραγμέν η παροχή $Q'_{04}$ ως προς το 4° πηγάδι άντλησης	Διαταραγμέν η παροχή $Q'_{05}$ ως προς το 5° πηγάδι άντλησης	Διαταραγμέν η παροχή $Q'_{06}$ ως προς το 6° πηγάδι άντλησης	Διαταραγμέν η παροχή $Q'_{07}$ ως προς το 7° πηγάδι άντλησης	Διαταραγμέν η παροχή $Q'_{08}$ ως προς το 8° πηγάδι άντλησης	Διαταραγμέν η παροχή $Q'_{09}$ ως προς το 9° πηγάδι άντλησης
1 (201)	0	0 + 2000	0	0	0	0	0	0	0	0
2 (204)	0	0	0 + 2000	0	0	0	0	0	0	0
3 (205)	0	0	0	0 + 2000	0	0	0	0	0	0
4 (MG8)	0	0	0	0	0 + 2000	0	0	0	0	0
5 (B6)	0	0	0	0	0	0 + 2000	0	0	0	0
6 (B7)	0	0	0	0	0	0	0 + 2000	0	0	0
7 (126)	0	0	0	0	0	0	0	0 + 2000	0	0
8 (212)	0	0	0	0	0	0	0	0	0 + 2000	0
9 (46)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0 + 2000

Πίνακας 1: Παροχές στα πηγάδια άντλησης για το 1° Βήμα

Πηγάδια Παρατήρησης (κόμβοι)	Αρχικό Υδραυλικό Ύψος $H_0$	Υδραυλικό ύψος $H'_{01}$ για την 1 <sup>η</sup> διαταραχή	Υδραυλικό ύψος $H'_{02}$ για την 2 <sup>η</sup> διαταραχή	Υδραυλικό ύψος $H'_{03}$ για την 3 <sup>η</sup> διαταραχή	Υδραυλικό ύψος $H'_{04}$ για την 4 <sup>η</sup> διαταραχή	Υδραυλικό ύψος $H'_{05}$ για την 5 <sup>η</sup> διαταραχή	Υδραυλικό ύψος $H'_{06}$ για την 6 <sup>η</sup> διαταραχή	Υδραυλικό ύψος $H'_{07}$ για την 7 <sup>η</sup> διαταραχή	Υδραυλικό ύψος $H'_{08}$ για την 8 <sup>η</sup> διαταραχή	Υδραυλικό ύψος $H'_{09}$ για την 9 <sup>η</sup> διαταραχή
<b>1 (140)</b>	166,01477 4	165,940633	165,94904 0	165,954406	165,959154	165,966977	165,975874	165,982959	165,992544	165,996247
<b>2 (156)</b>	169,00434 6	168,905444	168,83638 8	168,861358	168,876649	168,890914	168,912511	168,929522	168,952193	168,960945
<b>3 (280)</b>	170,92221 0	170,833702	170,78078 2	170,712621	170,741809	170,772850	170,801073	170,823361	170,853221	170,864750
<b>4 (446)</b>	173,26904 4	173,190021	173,14449 0	173,090894	172,786088	173,117305	173,139730	173,160025	173,191119	173,203208
<b>5 (438)</b>	175,24559 2	175,176981	175,13612 5	175,099840	175,095493	174,904840	175,031696	175,075127	175,128090	175,148452
<b>6 (598)</b>	178,31438 5	178,259679	178,22726 0	178,198174	178,188660	178,103978	178,015094	178,093096	178,161328	178,187835
<b>7 (691)</b>	180,75334 8	180,709307	180,68331 7	180,659792	180,648753	180,587883	180,534900	180,457370	180,570052	180,603726
<b>8 (814)</b>	184,29406 1	184,263920	184,26390 1	184,230012	184,220707	184,182202	184,145839	184,114159	184,044912	184,121810
<b>9 (893)</b>	186,15236 3	186,127509	186,11290 1	186,099533	186,090985	186,060784	186,031004	186,006956	185,981791	185,771448

Πίνακας 2: Αρχικά υδραυλικά ύψη στους κόμβους παρατήρησης και υδραυλικά ύψη που προκύπτουν από το μοντέλο PTC για κάθε διαταραχή

Ακολουθεί ο πίνακας απόκρισης (response matrix) όπου φαίνονται οι μεταβολές του υδραυλικού ύψους ως προς την παροχή.

$\frac{\partial H}{\partial Q_1}$	$\frac{\partial H}{\partial Q_2}$	$\frac{\partial H}{\partial Q_3}$	$\frac{\partial H}{\partial Q_4}$	$\frac{\partial H}{\partial Q_5}$	$\frac{\partial H}{\partial Q_6}$	$\frac{\partial H}{\partial Q_7}$	$\frac{\partial H}{\partial Q_8}$	$\frac{\partial H}{\partial Q_9}$
- 0,0000370705	-0,000032867	-0,000030184	-0,00002781	- 0,0000238985	-0,00001945	- 0,0000159075	-0,000011115	- 0,0000092635
-0,000049451	-0,000083979	-0,000071494	- 0,0000638485	-0,000056716	- 0,0000459175	-0,000037412	- 0,0000260765	- 0,0000217005
-0,000044254	-0,000070714	-0,000104794	- 0,0000902005	-0,00007468	- 0,0000605685	- 0,0000494245	- 0,0000344945	-0,00002873
- 0,0000395115	-0,000062277	-0,000089075	-0,000241478	- 0,0000758695	-0,000064657	- 0,0000545095	- 0,0000389625	-0,000032918
- 0,0000343055	- 0,0000547335	-0,000072876	- 0,0000750495	-0,000170376	-0,000106948	- 0,0000852325	-0,000058751	-0,00004857
-0,000027353	- 0,0000435625	- 0,0000581055	- 0,0000628625	-0,000105203	-0,000149645	-0,000110644	- 0,0000765285	-0,000063275
- 0,0000220205	- 0,0000350155	-0,000046778	- 0,0000522975	-0,000082732	-0,000109224	-0,000147989	-0,000091648	-0,000074811
- 0,0000150705	-0,00001508	- 0,0000320245	-0,000036677	- 0,0000559295	-0,000074111	-0,000089951	-0,000124574	- 0,0000861255
-0,000012427	-0,000019731	-0,000026415	-0,000030689	- 0,0000457895	- 0,0000606795	- 0,0000727035	-0,000085286	-0,000190458

Πίνακας 3: Ο πίνακας απόκρισης για το 1ο Βήμα

Μετά την δημιουργία του παραπάνω πίνακα, μπορεί να εφαρμοστεί η μέθοδος Simplex και με βάση τα όσα αναλύθηκαν, προκύπτει το εξής αρχείο στην Matlab έχοντας ως δεδομένα τον πίνακα A, το διάνυσμα b, το διάνυσμα ελάχιστων ορίων για τις μεταβλητές απόφασης LB και το διάνυσμα μεγίστων ορίων για τις μεταβλητές απόφασης UB.

Για να βρούμε την τιμή του  $b = H_0 - H_{ref} - A \cdot Q_0$  υπολογίζουμε αρχικά το γινόμενο  $A \cdot Q_0$ , δηλαδή έναν πίνακα 9x9 και ένα διάνυσμα 9x1 και προκύπτουν τα εξής αποτελέσματα:

$$A \cdot Q_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Λογικό αφού, έχουμε ορίσει τις αρχικές μας παροχές ίσες με το μηδέν.

```
f=[-1;-1;-1;-1;-1;-1;-1;-1;-1];
A=[-0.0000370705 -0.000032867 -0.000030184 -0.00002781 -0.0000238985 -0.00001945 -
0.0000159075 -0.000011115 -0.0000092635
-0.000049451 -0.000083979 -0.000071494 -0.0000638485 -0.000056716 -0.0000459175 -
.000037412 -0.0000260765 -0.0000217005
-0.000044254 -0.000070714 -0.000104794 -0.0000902005 -0.00007468 -0.0000605685 -
0.0000494245 -0.0000344945 -0.00002873
-0.0000395115 -0.000062277 -0.000089075 -0.000241478 -0.0000758695 -0.000064657 -
0.0000545095 -0.0000389626 -0.000032918
-0.0000343055 -0.0000547335 -0.000072876 -0.0000750495 -0.0000170376 -0.000106948 -
0.0000852325 -0.000058751 -0.00004857
-0.000027353 -0.0000435625 -0.0000581055 -0.0000628625 -0.000105203 -0.000149645 -
0.000110644 -0.0000765285 -0.000063275
-0.0000220205 -0.0000350155 -0.000046778 -0.0000522975 -0.000082732 -0.000109224 -
0.000147989 -0.000091648 -0.000074811
-0.0000150705 -0.00001508 -0.0000320245 -0.000036677 -0.0000559295 -0.000074111 -
0.000089951 -0.000124574 -0.0000861255
-0.000012427 -0.000019731 -0.000026415 -0.000030689 -0.0000457895 -0.0000606795 -
0.0000727035 -0.000085286 -0.000190458];
b=[0.514774;3.504346;5.42221;7.769044;9.745592;12.814385;15.253348;18.794061;20.652
363];
LB=zeros(9,1);
UB=[4284;3064;2940;3318;7056;5460;1864.8;588;3990];
[q,fval]=linprog(f,-A,b,[],[],LB,UB);
q
Q=sum(q)
```

Τελικά, οι νέες βελτιωμένες παροχές άντλησης που προκύπτουν είναι οι εξής:

Πηγάδι Αντλησης	Βέλτιστη τιμή παροχής (m <sup>3</sup> /day)
1	0
2	0
3	2468,7
4	3318
5	7056
6	5460
7	1864,8
8	588
9	3990
$\sum q_i$	24745,5

Πίνακας 4: Η βέλτιστη λύση του 1ου βήματος

Τα αποτελέσματα που προέκυψαν απέχουν αρκετά από τα αρχικά όπου η παροχή τους ήταν μηδενική οπότε, ο αλγόριθμος δεν έχει συγκλίνει και θα πρέπει ένα επαναλάβουμε τη διαδικασία.

## 2<sup>ο</sup> Βήμα

Αυτή τη φορά, σαν αρχική στήλη των παροχών λαμβάνεται η βελτιωμένη λύση του προηγούμενου βήματος που φαίνεται στον Πίνακα 4. Επομένως, ακολουθούμε την ίδια διαδικασία.

Πηγάδια Αντλησης	Αρχική Παροχή Q <sub>0</sub>	Διαταραγμέν η παροχή Q' <sub>01</sub> ως προς το 1 <sup>ο</sup> πηγάδι άντλησης	Διαταραγμέν η παροχή Q' <sub>02</sub> ως προς το 2 <sup>ο</sup> πηγάδι άντλησης	Διαταραγμέν η παροχή Q' <sub>03</sub> ως προς το 3 <sup>ο</sup> πηγάδι άντλησης	Διαταραγμέν η παροχή Q' <sub>04</sub> ως προς το 4 <sup>ο</sup> πηγάδι άντλησης	Διαταραγμέν η παροχή Q' <sub>05</sub> ως προς το 5 <sup>ο</sup> πηγάδι άντλησης	Διαταραγμέν η παροχή Q' <sub>06</sub> ως προς το 6 <sup>ο</sup> πηγάδι άντλησης	Διαταραγμέν η παροχή Q' <sub>07</sub> ως προς το 7 <sup>ο</sup> πηγάδι άντλησης	Διαταραγμέν η παροχή Q' <sub>08</sub> ως προς το 8 <sup>ο</sup> πηγάδι άντλησης	Διαταραγμέν η παροχή Q' <sub>09</sub> ως προς το 9 <sup>ο</sup> πηγάδι άντλησης
<b>1 (201)</b>	0	<b>0 + 2000</b>	0	0	0	0	0	0	0	0
<b>2 (204)</b>	0	0	<b>0 + 2000</b>	0	0	0	0	0	0	0
<b>3 (205)</b>	2468,7	2468,7	2468,7	<b>2468,7 + 2000</b>	2468,7	2468,7	2468,7	2468,7	2468,7	2468,7
<b>4 (MG8)</b>	3318	3318	3318	3318	<b>3318 + 2000</b>	3318	3318	3318	3318	3318
<b>5 (B6)</b>	7056	7056	7056	7056	7056	<b>7056 + 2000</b>	7056	7056	7056	7056
<b>6 (B7)</b>	5460	5460	5460	5460	5460	5460	<b>5460 + 2000</b>	5460	5460	5460
<b>7 (126)</b>	1864,8	1864,8	1864,8	1864,8	1864,8	1864,8	1864,8	<b>1864,6 + 2000</b>	1864,8	1864,8
<b>8 (212)</b>	588	588	588	588	588	588	588	588	<b>588 + 2000</b>	588
<b>9 (46)</b>	3990	3990	3990	3990	3990	3990	3990	3990	3990	<b>3990 + 2000</b>

Πίνακας 5: Αρχική παροχή και διαταραγμένες παροχές για τα πηγάδια άντλησης για το 2ο βήμα



Πηγάδια Παρατήρησης (κόμβοι)	Αρχικό Υδραυλικό Ύψος $H_0$	Υδραυλικό ύψος $H'_{01}$ για την 1 <sup>η</sup> διαταραχή	Υδραυλικό ύψος $H'_{02}$ για την 2 <sup>η</sup> διαταραχή	Υδραυλικό ύψος $H'_{03}$ για την 3 <sup>η</sup> διαταραχή	Υδραυλικό ύψος $H'_{04}$ για την 4 <sup>η</sup> διαταραχή	Υδραυλικό ύψος $H'_{05}$ για την 5 <sup>η</sup> διαταραχή	Υδραυλικό ύψος $H'_{06}$ για την 6 <sup>η</sup> διαταραχή	Υδραυλικό ύψος $H'_{07}$ για την 7 <sup>η</sup> διαταραχή	Υδραυλικό ύψος $H'_{08}$ για την 8 <sup>η</sup> διαταραχή	Υδραυλικό ύψος $H'_{09}$ για την 9 <sup>η</sup> διαταραχή
<b>1 (140)</b>	165,499688	165,425332	165,433777	165,439186	165,443988	165,451822	165,460749	165,467853	165,477453	165,481160
<b>2 (156)</b>	167,790312	167,690761	167,621429	167,646386	167,661869	167,676221	167,697995	167,715122	167,737922	167,746721
<b>3 (280)</b>	169,273681	169,184412	169,131019	169,062518	169,091728	169,123101	169,151637	169,174130	169,204226	169,215843
<b>4 (446)</b>	171,094752	171,014922	170,968897	170,914724	170,607014	170,941551	170,964269	170,984790	171,016183	171,028384
<b>5 (438)</b>	172,630898	172,561488	172,520134	172,483414	172,479145	172,286976	172,414399	172,458462	172,512087	172,532690
<b>6 (598)</b>	175,887131	175,831822	175,799038	175,769636	175,760105	175,674205	175,584793	175,663239	175,732351	175,759174
<b>7 (691)</b>	178,646742	178,602304	178,18772	178,552341	178,541270	178,479676	178,426064	178,348184	178,461596	178,495646
<b>8 (814)</b>	182,704584	182,674270	182,656422	182,640165	182,630856	182,592018	182,555360	182,523374	182,453836	182,531026
<b>9 (893)</b>	184,380712	184,355729	184,341041	184,327607	184,319056	184,288595	184,258586	184,234324	184,208879	183,997582

Πίνακας 6: Αρχικά υδραυλικά ύψη στους κόμβους παρατήρησης και υδραυλικά ύψη που προκύπτουν από το μοντέλο PTC για κάθε διαταραχή για το 2ο βήμα

Ακολουθεί ο πίνακας απόκρισης (response matrix) όπου φαίνονται οι μεταβολές του υδραυλικού ύψους ως προς την παροχή.

$\frac{\partial H}{\partial Q_1}$	$\frac{\partial H}{\partial Q_2}$	$\frac{\partial H}{\partial Q_3}$	$\frac{\partial H}{\partial Q_4}$	$\frac{\partial H}{\partial Q_5}$	$\frac{\partial H}{\partial Q_6}$	$\frac{\partial H}{\partial Q_7}$	$\frac{\partial H}{\partial Q_8}$	$\frac{\partial H}{\partial Q_9}$
-0.000037178	-0.0000329555	-0.000030251	-0.000027850	-0.000023933	-0.0000194695	-0.0000159175	-0.0000111175	-0.000009264
- 0.0000497755	-0.0000844415	-0.000071963	-0.0000642215	-0.000057045	-0.0000461585	-0.000037595	-0.000026195	-0.0000217955
- 0.0000446345	-0.000071331	-0.000105582	-0.0000909765	-0.00007529	-0.000061022	-0.0000497755	-0.0000347275	-0.000028919
-0.000039915	-0.0000629275	-0.000090014	-0.000243869	-0.0000766005	-0.0000652415	-0.000054981	-0.0000392845	-0.000033184
-0.000034705	-0.000055382	-0.000073742	-0.0000758765	-0.000171961	-0.000108249	-0.000086218	-0.0000594055	-0.000049104
- 0.0000276545	-0.000044046	-0.0000587475	-0.000063513	-0.000106463	-0.000151169	-0.000111946	-0.00007739	-0.0000639785
-0.000022219	-0.000229511	-0.000047200	-0.000052736	-0.000083533	-0.000110339	-0.000149279	-0.000092573	-0.000075548
-0.000015157	-0.000024081	-0.0000322095	-0.000036864	-0.000056283	-0.000074612	-0.000090605	-0.000125374	-0.000086779
- 0.0000124915	-0.0000198355	-0.0000265525	-0.000030828	-0.0000460585	-0.000061063	-0.000073194	-0.0000859165	-0.000191565

Πίνακας 7: Ο πίνακας απόκρισης για το 2<sup>ο</sup> Βήμα

Μετά την δημιουργία του παραπάνω πίνακα, μπορεί να εφαρμοστεί η μέθοδος Simplex και με βάση τα όσα αναλύθηκαν, προκύπτει το εξής αρχείο στην Matlab έχοντας ως δεδομένα τον πίνακα A, το διάνυσμα b, το διάνυσμα ελάχιστων ορίων για τις μεταβλητές απόφασης LB και το διάνυσμα μεγίστων ορίων για τις μεταβλητές απόφασης UB.

Για να βρούμε την τιμή του  $b = H_0 - H_{ref} - A \cdot Q_0$  υπολογίζουμε αρχικά το γινόμενο  $A \cdot Q_0$ , δηλαδή έναν πίνακα 9x9 και ένα διάνυσμα 9x1 και προκύπτουν τα εξής αποτελέσματα:

$$A \cdot Q_0 = \begin{bmatrix} -0,5154 \\ -1,2178 \\ -1,6556 \\ -2,1861 \\ -2,6298 \\ -2,4419 \\ -2,1176 \\ -1,5953 \\ -1,7776 \end{bmatrix}$$

```
f=[-1;-1;-1;-1;-1;-1;-1;-1;-1]
A=[-0.000037178 -0.0000329555 -0.000030251 -0.000027850 -0.000023933 -
0.0000194695 -0.0000159175 -0.0000111175 -0.000009264
-0.0000497755 -0.0000844415 -0.000071963 -0.0000642215 -0.000057045 -0.0000461585
-0.000037595 -0.000026195 -0.0000217955
-0.0000446345 -0.000071331 -0.000105582 -0.0000909765 -0.00007529 -0.000061022 -
0.0000497755 -0.0000347275 -0.000028919
-0.000039915 -0.0000629275 -0.000090014 -0.000243869 -0.0000766005 -0.0000652415 -
0.000054981 -0.0000392845 -0.000033184
-0.000034705 -0.000055382 -0.000073742 -0.0000758765 -0.000171961 -0.000108249 -
0.000086218 -0.0000594055 -0.000049104
-0.0000276545 -0.000044046 -0.0000587475 -0.000063513 -0.000106463 -0.000151169 -
0.000111946 -0.00007739 -0.0000639785
-0.000022219 -0.000229511 -0.000047200 -0.000052736 -0.000083533 -0.000110339 -
0.000149279 -0.000092573 -0.000075548
-0.000015157 -0.000024081 -0.0000322095 -0.000036864 -0.000056283 -0.000074612 -
0.000090605 -0.000125374 -0.000086779
-0.0000124915 -0.0000198355 -0.0000265525 -0.000030828 -0.0000460585 -0.000061063
-0.000073194 -0.0000859165 -0.000191565];
b=[0.515088;3.508112;5.429281;7.780852;9.760698;12.829031;15.264342;18.799884;20.65
8312];
LB=zeros(9,1);
UB=[4284;3064;2940;3318;7056;5460;1864.8;588;3990];
[q,fval]=linprog(f,-A,b,[],[],LB,UB);
q
Q=sum(q)
```

Τελικά, οι νέες βελτιωμένες παροχές άντλησης που προκύπτουν είναι οι εξής:

Πηγάδι Άντλησης	Βέλτιστη τιμή παροχής (m <sup>3</sup> /day)
1	0
2	0
3	2456,9
4	3318
5	7056
6	5460
7	1864,8
8	588
9	3990
$\sum q_i$	24733,7

Πίνακας 8: Η βέλτιστη λύση του 2ου βήματος

Τα αποτελέσματα που προέκυψαν απέχουν αρκετά από αυτά του προηγούμενου βήματος οπότε, ο αλγόριθμος δεν έχει συγκλίνει και θα πρέπει ένα επαναλάβουμε τη διαδικασία.

### 3<sup>ο</sup> Βήμα

Ομοίως με το δεύτερο βήμα λαμβάνουμε τις καινούργιες παροχές και ακολουθούμε την ίδια διαδικασία.

Πηγάδια Αντλησης	Αρχική Παροχή Q <sub>0</sub>	Διαταραγμέν η παροχή Q' <sub>01</sub> ως προς το 1 <sup>ο</sup> πηγάδι άντλησης	Διαταραγμέν η παροχή Q' <sub>02</sub> ως προς το 2 <sup>ο</sup> πηγάδι άντλησης	Διαταραγμέν η παροχή Q' <sub>03</sub> ως προς το 3 <sup>ο</sup> πηγάδι άντλησης	Διαταραγμέν η παροχή Q' <sub>04</sub> ως προς το 4 <sup>ο</sup> πηγάδι άντλησης	Διαταραγμέν η παροχή Q' <sub>05</sub> ως προς το 5 <sup>ο</sup> πηγάδι άντλησης	Διαταραγμέν η παροχή Q' <sub>06</sub> ως προς το 6 <sup>ο</sup> πηγάδι άντλησης	Διαταραγμέν η παροχή Q' <sub>07</sub> ως προς το 7 <sup>ο</sup> πηγάδι άντλησης	Διαταραγμέν η παροχή Q' <sub>08</sub> ως προς το 8 <sup>ο</sup> πηγάδι άντλησης	Διαταραγμέν η παροχή Q' <sub>09</sub> ως προς το 9 <sup>ο</sup> πηγάδι άντλησης
<b>1 (201)</b>	0	<b>0 + 2000</b>	0	0	0	0	0	0	0	0
<b>2 (204)</b>	0	0	<b>0 + 2000</b>	0	0	0	0	0	0	0
<b>3 (205)</b>	2456,9	2456,9	2456,9	<b>2456,9 + 2000</b>	2456,9	2456,9	2456,9	2456,9	2456,9	2456,9
<b>4 (MG8)</b>	3318	3318	3318	3318	<b>3318 + 2000</b>	3318	3318	3318	3318	3318
<b>5 (B6)</b>	7056	7056	7056	7056	7056	<b>7056 + 2000</b>	7056	7056	7056	7056
<b>6 (B7)</b>	5460	5460	5460	5460	5460	5460	<b>5460 + 2000</b>	5460	5460	5460
<b>7 (126)</b>	1864,8	1864,8	1864,8	1864,8	1864,8	1864,8	1864,8	<b>1864,6 + 2000</b>	1864,8	1864,8
<b>8 (212)</b>	588	588	588	588	588	588	588	588	<b>588 + 2000</b>	588
<b>9 (46)</b>	3990	3990	3990	3990	3990	3990	3990	3990	3990	<b>3990 + 2000</b>

Πίνακας 9: Αρχική παροχή και διαταραγμένες παροχές για τα πηγάδια άντλησης για το 3ο βήμα

Πηγάδια Παρατήρησης (κόμβοι)	Αρχικό Υδραυλικό Ύψος $H_0$	Υδραυλικό ύψος $H'_{01}$ για την 1 <sup>η</sup> διαταραχή	Υδραυλικό ύψος $H'_{02}$ για την 2 <sup>η</sup> διαταραχή	Υδραυλικό ύψος $H'_{03}$ για την 3 <sup>η</sup> διαταραχή	Υδραυλικό ύψος $H'_{04}$ για την 4 <sup>η</sup> διαταραχή	Υδραυλικό ύψος $H'_{05}$ για την 5 <sup>η</sup> διαταραχή	Υδραυλικό ύψος $H'_{06}$ για την 6 <sup>η</sup> διαταραχή	Υδραυλικό ύψος $H'_{07}$ για την 7 <sup>η</sup> διαταραχή	Υδραυλικό ύψος $H'_{08}$ για την 8 <sup>η</sup> διαταραχή	Υδραυλικό ύψος $H'_{09}$ για την 9 <sup>η</sup> διαταραχή
<b>1 (140)</b>	165,500045	165,425689	165,434134	165,439543	165,444345	165,452179	165,461106	165,468210	165,477810	165,481517
<b>2 (156)</b>	167,791161	167,691611	167,622279	167,647236	167,662718	167,677071	167,698844	168,146901	167,738771	167,747570
<b>3 (280)</b>	169,274927	169,185658	169,132265	169,063765	169,092975	169,124347	169,152883	169,175376	169,205472	169,217089
<b>4 (446)</b>	171,095813	171,015984	170,969960	170,915787	170,608078	170,942614	170,965332	170,985852	171,017245	171,029445
<b>5 (438)</b>	172,631768	172,562358	172,521004	172,484284	172,480016	172,287847	172,415270	172,459333	172,512958	172,533560
<b>6 (598)</b>	175,887824	175,832516	175,799732	175,770329	175,760798	175,674899	175,585487	175,663932	175,733045	175,759868
<b>7 (691)</b>	178,647299	178,602861	178,576629	178,552898	178,541827	178,480233	178,426621	178,348742	178,462153	178,496204
<b>8 (814)</b>	182,704964	182,674650	182,656802	182,640546	182,631236	182,592398	182,555740	182,523754	182,454216	182,531406
<b>9 (893)</b>	184,381025	184,356042	184,341355	184,327920	184,319369	184,288909	184,258899	184,234638	184,209193	183,997896

Πίνακας 10: Αρχικά υδραυλικά ύψη στους κόμβους παρατήρησης και υδραυλικά ύψη που προκύπτουν από το μοντέλο PTC για κάθε διαταραχή για το 3ο βήμα

Ακολουθεί ο πίνακας απόκρισης (response matrix) όπου φαίνονται οι μεταβολές του υδραυλικού ύψους ως προς την παροχή.

$\frac{\partial H}{\partial Q_1}$	$\frac{\partial H}{\partial Q_2}$	$\frac{\partial H}{\partial Q_3}$	$\frac{\partial H}{\partial Q_4}$	$\frac{\partial H}{\partial Q_5}$	$\frac{\partial H}{\partial Q_6}$	$\frac{\partial H}{\partial Q_7}$	$\frac{\partial H}{\partial Q_8}$	$\frac{\partial H}{\partial Q_9}$
-0.000037178	-0.0000329555	-0.000030251	-0.00002785	-0.000023933	0.0000194695	0.0000159175	0.0000111175	-0.000009264
-0.000049775	-0.000084441	0.0000719625	0.0000642215	-0.000057045	0.0000461585	-0.00017787	-0.000026195	0.0000217955
0.0000446345	-0.000071331	-0.000105581	-0.000090976	-0.00007529	-0.000061022	0.0000497755	0.0000347275	-0.000028919
0.0000399145	0.0000629265	-0.000090013	-0.000243867	0.0000765995	0.0000652405	0.0000549805	-0.000039284	-0.000033184
-0.000034705	-0.000055382	-0.000073742	-0.000075876	-0.00017196	-0.000108249	0.0000862175	-0.000059405	-0.000049104
-0.000027654	-0.000044046	0.0000587475	-0.000063513	-0.000106462	-0.000151168	-0.000111946	0.0000773895	-0.000063978
-0.000022219	-0.000035335	0.0000472005	-0.000052736	-0.000083533	-0.000110339	-0.000149279	-0.000092573	0.0000755475
-0.000015157	-0.000024081	-0.000032209	-0.000036864	-0.000056283	-0.000074612	-0.000090605	-0.000125374	-0.000086779
0.0000124915	-0.000019835	0.0000265525	-0.000030828	-0.000046058	-0.000061063	0.0000731935	-0.000085916	-0.000191564

Πίνακας 11: Ο πίνακας απόκρισης για το 3ο Βήμα

Μετά την δημιουργία του παραπάνω πίνακα, μπορεί να εφαρμοστεί η μέθοδος Simplex και με βάση τα όσα αναλύθηκαν, προκύπτει το εξής αρχείο στην Matlab έχοντας ως δεδομένα τον πίνακα A, το διάνυσμα b, το διάνυσμα ελάχιστων ορίων για τις μεταβλητές απόφασης LB και το διάνυσμα μεγίστων ορίων για τις μεταβλητές απόφασης UB.

Για να βρούμε την τιμή του  $b = H_0 - H_{ref} - A \cdot Q_0$  υπολογίζουμε αρχικά το γινόμενο  $A \cdot Q_0$ , δηλαδή έναν πίνακα 9x9 και ένα διάνυσμα 9x1 και προκύπτουν τα εξής αποτελέσματα:

$$A \cdot Q_0 = \begin{bmatrix} -0,5151 \\ -1,4785 \\ -1,6543 \\ -2,1850 \\ -2,6290 \\ -2,4412 \\ -2,1170 \\ -1,5949 \\ -1,7773 \end{bmatrix}$$

```
f=[-1;-1;-1;-1;-1;-1;-1;-1;-1]
A=[-0.000037178 -0.0000329555 -0.000030251 -0.00002785 -0.000023933 -0.0000194695
-0.0000159175 -0.0000111175 -0.000009264
-0.000049775 -0.000084441 -0.0000719625 -0.0000642215 -0.000057045 -0.0000461585
-0.00017787 -0.000026195 -0.0000217955
-0.0000446345 -0.000071331 -0.000105581 -0.000090976 -0.00007529 -0.000061022
-0.0000497755 -0.0000347275 -0.000028919
-0.0000399145 -0.0000629265 -0.000090013 -0.000243867 -0.0000765995 -0.0000652405
-0.0000549805 -0.000039284 -0.000033184
-0.000034705 -0.000055382 -0.000073742 -0.000075876 -0.00017196 -0.000108249 -
0.0000862175 -0.000059405 -0.000049104
-0.000027654 -0.000044046 -0.0000587475 -0.000063513 -0.000106462 -0.000151168 -
0.000111946 -0.0000773895 -0.000063978
-0.000022219 -0.000035335 -0.0000472005 -0.000052736 -0.000083533 -0.000110339 -
0.000149279 -0.000092573 -0.0000755475
-0.000015157 -0.000024081 -0.000032209 -0.000036864 -0.000056283 -0.000074612 -
0.000090605 -0.000125374 -0.000086779
-0.0000124915 -0.000019835 -0.0000265525 -0.000030828 -0.000046058 -0.000061063 -
0.0000731935 -0.000085916 -0.000191564];
b=[0.515145;3.769661;5.429227;7.780813;9.760768;12.829024;15.264299;18.799864;20.65
8325];
LB=zeros(9,1);
UB=[4284;3064;2940;3318;7056;5460;1864.8;588;3990];
[q,fval]=linprog(f,-A,b,[],[],LB,UB);
q
Q=sum(q)
```



Τελικά, οι νέες βελτιωμένες παροχές άντλησης που προκύπτουν είναι οι εξής:

Πηγάδι Άντλησης	Βέλτιστη τιμή παροχής (m <sup>3</sup> /day)
1	0
2	0
3	2458,8
4	3318
5	7056
6	5460
7	1864,8
8	588
9	3990
$\sum Q_i$	24735,6

Πίνακας 12: Η βέλτιστη λύση του 3ου βήματος

Τα αποτελέσματα που προέκυψαν απέχουν αρκετά από αυτά του προηγούμενου βήματος οπότε, ο αλγόριθμος δεν έχει συγκλίνει και θα πρέπει ένα επαναλάβουμε τη διαδικασία.

#### 4<sup>ο</sup> Βήμα

Ομοίως με το τρίτο βήμα λαμβάνουμε τις καινούργιες παροχές και ακολουθούμε την ίδια διαδικασία.

Πηγάδια Άντλησης	Αρχική Παροχή Q <sub>0</sub>	Διαταραγμέν η παροχή Q' <sub>01</sub> ως προς το 1 <sup>ο</sup> πηγάδι άντλησης	Διαταραγμέν η παροχή Q' <sub>02</sub> ως προς το 2 <sup>ο</sup> πηγάδι άντλησης	Διαταραγμέν η παροχή Q' <sub>03</sub> ως προς το 3 <sup>ο</sup> πηγάδι άντλησης	Διαταραγμέν η παροχή Q' <sub>04</sub> ως προς το 4 <sup>ο</sup> πηγάδι άντλησης	Διαταραγμέν η παροχή Q' <sub>05</sub> ως προς το 5 <sup>ο</sup> πηγάδι άντλησης	Διαταραγμέν η παροχή Q' <sub>06</sub> ως προς το 6 <sup>ο</sup> πηγάδι άντλησης	Διαταραγμέν η παροχή Q' <sub>07</sub> ως προς το 7 <sup>ο</sup> πηγάδι άντλησης	Διαταραγμέν η παροχή Q' <sub>08</sub> ως προς το 8 <sup>ο</sup> πηγάδι άντλησης	Διαταραγμέν η παροχή Q' <sub>09</sub> ως προς το 9 <sup>ο</sup> πηγάδι άντλησης
<b>1 (201)</b>	0	<b>0 + 2000</b>	0	0	0	0	0	0	0	0
<b>2 (204)</b>	0	0	<b>0 + 2000</b>	0	0	0	0	0	0	0
<b>3 (205)</b>	2458,8	2458,8	2458,8	<b>2458,8 + 2000</b>	2458,8	2458,8	2458,8	2458,8	2458,8	2458,8
<b>4 (MG8)</b>	3318	3318	3318	3318	<b>3318 + 2000</b>	3318	3318	3318	3318	3318
<b>5 (B6)</b>	7056	7056	7056	7056	7056	<b>7056 + 2000</b>	7056	7056	7056	7056
<b>6 (B7)</b>	5460	5460	5460	5460	5460	5460	<b>5460 + 2000</b>	5460	5460	5460
<b>7 (126)</b>	1864,8	1864,8	1864,8	1864,8	1864,8	1864,8	1864,8	<b>1864,6 + 2000</b>	1864,8	1864,8
<b>8 (212)</b>	588	588	588	588	588	588	588	588	<b>588 + 2000</b>	588
<b>9 (46)</b>	3990	3990	3990	3990	3990	3990	3990	3990	3990	<b>3990 + 2000</b>

Πίνακας 13: Αρχική παροχή και διαταραγμένες παροχές για τα πηγάδια άντλησης για το 4ο βήμα

Πηγάδια Παρατήρησης (κόμβοι)	Αρχικό Υδραυλικό Ύψος $H_0$	Υδραυλικό ύψος $H'_{01}$ για την 1 <sup>η</sup> διαταραχή	Υδραυλικό ύψος $H'_{02}$ για την 2 <sup>η</sup> διαταραχή	Υδραυλικό ύψος $H'_{03}$ για την 3 <sup>η</sup> διαταραχή	Υδραυλικό ύψος $H'_{04}$ για την 4 <sup>η</sup> διαταραχή	Υδραυλικό ύψος $H'_{05}$ για την 5 <sup>η</sup> διαταραχή	Υδραυλικό ύψος $H'_{06}$ για την 6 <sup>η</sup> διαταραχή	Υδραυλικό ύψος $H'_{07}$ για την 7 <sup>η</sup> διαταραχή	Υδραυλικό ύψος $H'_{08}$ για την 8 <sup>η</sup> διαταραχή	Υδραυλικό ύψος $H'_{09}$ για την 9 <sup>η</sup> διαταραχή
<b>1 (140)</b>	165,499988	165,425631	165,434076	165,439486	165,444287	165,452121	165,461048	165,468152	165,477752	165,481459
<b>2 (156)</b>	167,791024	167,691474	167,622142	167,647099	167,662581	167,676934	167,698707	167,715834	167,738634	167,747433
<b>3 (280)</b>	169,274726	169,185457	169,132065	169,063564	169,092774	169,124146	169,152682	169,175175	169,205271	169,216888
<b>4 (446)</b>	171,095642	171,015813	170,969789	170,915615	170,607906	170,942443	170,965161	170,985681	171,017074	171,029274
<b>5 (438)</b>	172,631628	172,562218	172,520864	172,484144	172,479876	172,287707	172,415130	172,459193	172,512818	172,533420
<b>6 (598)</b>	175,887712	175,832404	175,799620	175,770217	175,760687	175,674787	175,585375	175,663821	175,732933	175,759756
<b>7 (691)</b>	178,647210	178,602771	175,76539	178,552808	178,541737	178,480144	178,426532	178,348652	178,462063	178,496114
<b>8 (814)</b>	182,704903	182,674589	182,656741	182,640484	182,631174	182,592337	182,555679	182,523693	182,454155	182,531345
<b>9 (893)</b>	184,380975	184,355992	184,341304	184,327869	184,319319	184,288858	184,258849	184,234587	184,209143	183,997845

Πίνακας 14: Αρχικά υδραυλικά ύψη στους κόμβους παρατήρησης και υδραυλικά ύψη που προκύπτουν από το μοντέλο PTC για κάθε διαταραχή για το 4ο βήμα

Ακολουθεί ο πίνακας απόκρισης (response matrix) όπου φαίνονται οι μεταβολές του υδραυλικού ύψους ως προς την παροχή.

$\frac{\partial H}{\partial Q_1}$	$\frac{\partial H}{\partial Q_2}$	$\frac{\partial H}{\partial Q_3}$	$\frac{\partial H}{\partial Q_4}$	$\frac{\partial H}{\partial Q_5}$	$\frac{\partial H}{\partial Q_6}$	$\frac{\partial H}{\partial Q_7}$	$\frac{\partial H}{\partial Q_8}$	$\frac{\partial H}{\partial Q_9}$
- 0.0000371785	-0.000032956	-0.000030251	- 0.0000278505	- 0.0000239335	-0.00001947	-0.000015918	-0.000011118	- 0.0000092645
-0.000049775	-0.000084441	- 0.0000719625	- 0.0000642215	-0.000057045	- 0.0000461585	-0.000037595	-0.000026195	- 0.0000217955
- 0.0000446345	- 0.0000713305	-0.000105581	-0.000090976	-0.00007529	-0.000061022	- 0.0000497755	- 0.0000347275	-0.000028919
- 0.0000399145	- 0.0000629265	- 0.0000900135	-0.000243868	- 0.0000765995	- 0.0000652405	- 0.0000549805	-0.000039284	-0.000033184
-0.000034705	-0.000055382	-0.000073742	-0.000075876	-0.00017196	-0.000108249	- 0.0000862175	-0.000059405	-0.000049104
-0.000027654	-0.000044046	- 0.0000587475	- 0.0000635125	-0.000106462	-0.000151168	-0.000111945	- 0.0000773895	-0.000063978
- 0.0000222195	-0.00144091	-0.000047201	- 0.0000527365	-0.000083533	-0.000110339	-0.000149279	- 0.0000925735	-0.000075548
-0.000015157	-0.000024081	- 0.0000322095	- 0.0000368645	-0.000056283	-0.000074612	-0.000090605	-0.000125374	-0.000086779
- 0.0000124915	- 0.0000198355	-0.000026553	-0.000030828	- 0.0000460585	-0.000061063	-0.000073194	-0.000085916	-0.000191565

Πίνακας 15: Ο πίνακας απόκρισης για το 4ο Βήμα

Μετά την δημιουργία του παραπάνω πίνακα, μπορεί να εφαρμοστεί η μέθοδος Simplex και με βάση τα όσα αναλύθηκαν, προκύπτει το εξής αρχείο στην Matlab έχοντας ως δεδομένα τον πίνακα A, το διάνυσμα b, το διάνυσμα ελάχιστων ορίων για τις μεταβλητές απόφασης LB και το διάνυσμα μεγίστων ορίων για τις μεταβλητές απόφασης UB.

Για να βρούμε την τιμή του  $b = H_0 - H_{ref} - A \cdot Q_0$  υπολογίζουμε αρχικά το γινόμενο  $A \cdot Q_0$ , δηλαδή έναν πίνακα 9x9 και ένα διάνυσμα 9x1 και προκύπτουν τα εξής αποτελέσματα:

$$A \cdot Q_0 = \begin{bmatrix} -0,5152 \\ -1,2170 \\ -1,6545 \\ -2,1852 \\ -2,6291 \\ -2,4413 \\ -2,1171 \\ -1,5950 \\ -1,7773 \end{bmatrix}$$

```
f=[-1;-1;-1;-1;-1;-1;-1;-1;-1]
A=[-0.0000371785 -0.000032956 -0.000030251 -0.0000278505 -0.000023933 -
0.00001947 -0.000015918 -0.000011118 -0.0000092645
-0.000049775 -0.000084441 -0.0000719625 -0.0000642215 -0.000057045 -0.0000461585 -
0.000037595 -0.000026195 -0.0000217955
-0.0000446345 -0.0000713305 -0.000105581 -0.000090976 -0.00007529 -0.000061022 -
0.0000497755 -0.0000347275 -0.000028919
-0.0000399145 -0.0000629265 -0.0000900135 -0.000243868 -0.0000765995 -
0.0000652405 -0.0000549805 -0.000039284 -0.000033184
-0.000034705 -0.000055382 -0.000073742 -0.000075876 -0.00017196 -0.000108249 -
0.0000862175 -0.000059405 -0.000049104
-0.000027654 -0.000044046 -0.0000587475 -0.0000635125 -0.000106462 -0.000151168
-0.000111945 -0.0000773895 -0.000063978
-0.0000222195 -0.00144091 -0.000047201 -0.0000527365 -0.000083533 -0.000110339 -
0.000149279 -0.0000925735 -0.000075548
-0.000015157 -0.000024081 -0.0000322095 -0.0000368645 -0.000056283 -0.000074612
-0.000090605 -0.000125374 -0.000086779
-0.0000124915 -0.0000198355 -0.000026553 -0.000030828 -0.0000460585 -0.000061063
-0.000073194 -0.000085916 -0.000191565];
b=[0.515188;3.508024;5.429226;7.780842;9.760728;12.829012;15.26431;18.799903;20.658
275];
LB=zeros(9,1);
UB=[4284;3064;2940;3318;7056;5460;1864.8;588;3990];
[q,fval]=linprog(f,-A,b,[],[],LB,UB);
q
Q=sum(q)
```

Τελικά, οι νέες βελτιωμένες παροχές άντλησης που προκύπτουν είναι οι εξής:

Πηγάδι Άντλησης	Βέλτιστη τιμή παροχής (m <sup>3</sup> /day)
1	0
2	0
3	2460
4	3318
5	7056
6	5460
7	1864,8
8	588
9	3990
$\sum q_i$	24736,8

Πίνακας 16: Η βέλτιστη λύση του 4ου βήματος

Συγκρίνοντας τα αποτελέσματα με αυτά του προηγούμενου βήματος, παρατηρούμε ότι οι τιμές είναι σχεδόν ίδιες, με μία απόκλιση στο 0,0005%, γεγονός που σημαίνει ότι ο αλγόριθμος έχει συγκλίνει, δηλαδή το μη γραμμικό πρόβλημα γραμμικοποιήθηκε επομένως, δεν απαιτούνται άλλες επαναλήψεις.

Πηγάδι Άντλησης	Αρχική τιμή παροχής (m <sup>3</sup> /day)	Βέλτιστη τιμή παροχής (m <sup>3</sup> /day)
1	4284	0
2	3064	0
3	2940	2460
4	3318	3318
5	7056	7056
6	5460	5460
7	1864,8	1864,8
8	588	588
9	3990	3990
$\sum q_i$	32564,8	24736,8

Πίνακας 17: Αρχική και τελική βέλτιστη τιμή παροχής

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5 : ΑΝΑΛΥΣΗ ΤΩΝ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΩΝ ΚΑΙ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Στην παρούσα διπλωματική εργασία, ασχοληθήκαμε με μια αγροτική περιοχή της Κρήτης, την περιοχή των Μοιρών Ηρακλείου. Λόγω της πεδιάδας την Μεσσαράς στην οποία ανήκει η περιοχή, ο γεωργικός τομέας της έχει αναπτυχθεί αρκετά με αποτέλεσμα να αυξάνεται ολοένα και παραπάνω η ζήτηση για άρδευση. Για να μπορέσουμε να βρούμε τις βέλτιστες συνθήκες «λειτουργίας» του υπόγειου υδροφορέα της περιοχής χρησιμοποιήσαμε το πρόγραμμα ArgusOne και συγκεκριμένα το μαθηματικό μοντέλο PTC (PrincetonTransportCode), καθώς και τη μέθοδο Simplex. Οι αλλαγές στις συνθήκες άντλησης είναι απαραίτητες για να κρατήσουμε τον υδροφορέα σε υψηλά επίπεδα.

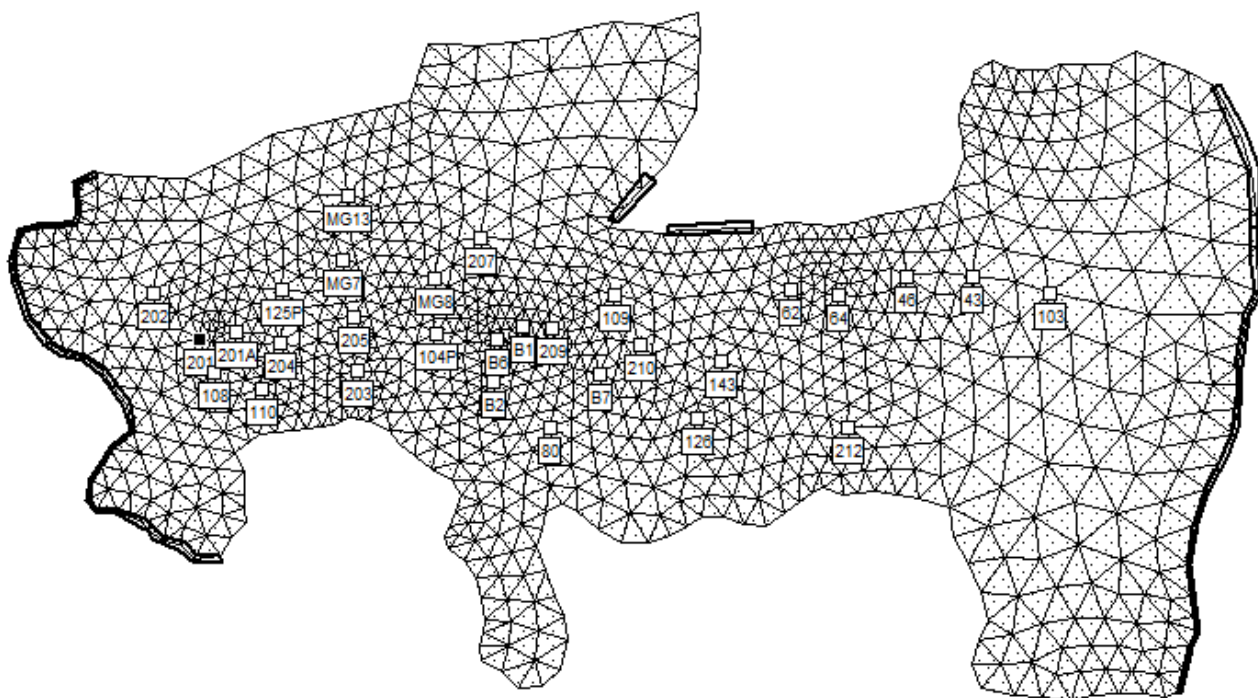
Όπως αναφέραμε και στο 4<sup>ο</sup> Κεφάλαιο, για να θέσουμε σε λειτουργία το πρόγραμμα, χρησιμοποιήσαμε κάποια δεδομένα από τη διπλωματική εργασία του Νικόλαου Θωμαδάκη «Μοντελοποίηση της Ροής Υπόγειων Υδάτων του Υδροφορέα Περιοχής Μοιρών Ηρακλείου, Κρήτης» για τη χρονική περίοδο 2008-2009. Στην περιοχή υπάρχουν 58 επίσηςμα πηγάδια άντλησης που λειτουργούν νόμιμα τα οποία τα ομαδοποίησε σε 30 και έπειτα εμείς σε 9. Για την ομαδοποίηση αυτή λάβαμε υπόψιν μας τα πηγάδια που ήταν κοντά μεταξύ τους, επιλέγοντας ένα κεντρικό και έπειτα αθροίσαμε όλες τις παροχές των γειτονικών πηγαδιών σε αυτό που είχαμε επιλέξει να κρατήσουμε.

Η προσομοίωση έγινε για 2 χρόνια, δηλαδή για τέσσερις χρονικές περιόδους (δύο ανά έτος). Σε αυτή την εργασία χρησιμοποιήσαμε την τέταρτη περίοδο για τις μετρήσεις μας, δηλαδή τις εαρινές παροχές του 2009. Αυτό έγινε διότι, το καλοκαίρι οι ανάγκες για νερό αυξάνονται λόγω της πληθυσμιακής κάλυψης της περιοχής αλλά και του βιοτικού επιπέδου που ολοένα και αυξάνεται.

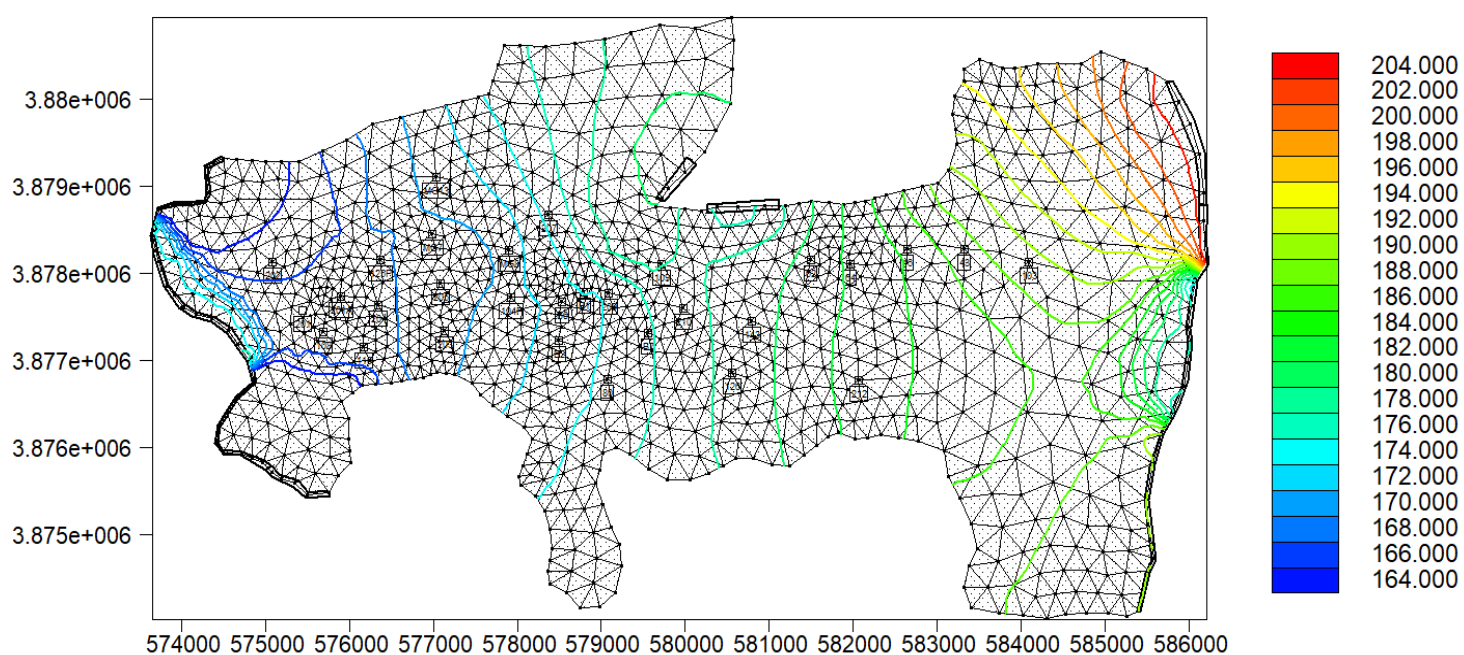
Έτσι, δημιουργήθηκαν τα εξής 9 πηγάδια:

Πηγάδια	Παροχές Αντλήσεων (m <sup>3</sup> /day)			
	Χειμερινή 2008	Εαρινή 2008	Εαρινή 2009	Χειμερινή 2009
201	-1836	-4284	-1836	-4284
204	-1296	-3064	-1296	-3064
205	-1260	-2940	-1260	-2940
MG8	-1422	-3318	-1422	-3318
B6	-3024	-7056	-3024	-7056
B7	-2340	-5460	-2340	-5460
126	-749,2	-1864,8	-749,2	-1864,8
212	-252	-588	-252	-588
46	-1710	-3990	-1710	-3990

Πίνακας 18: Αρχικές Παροχές Αντλήσεων

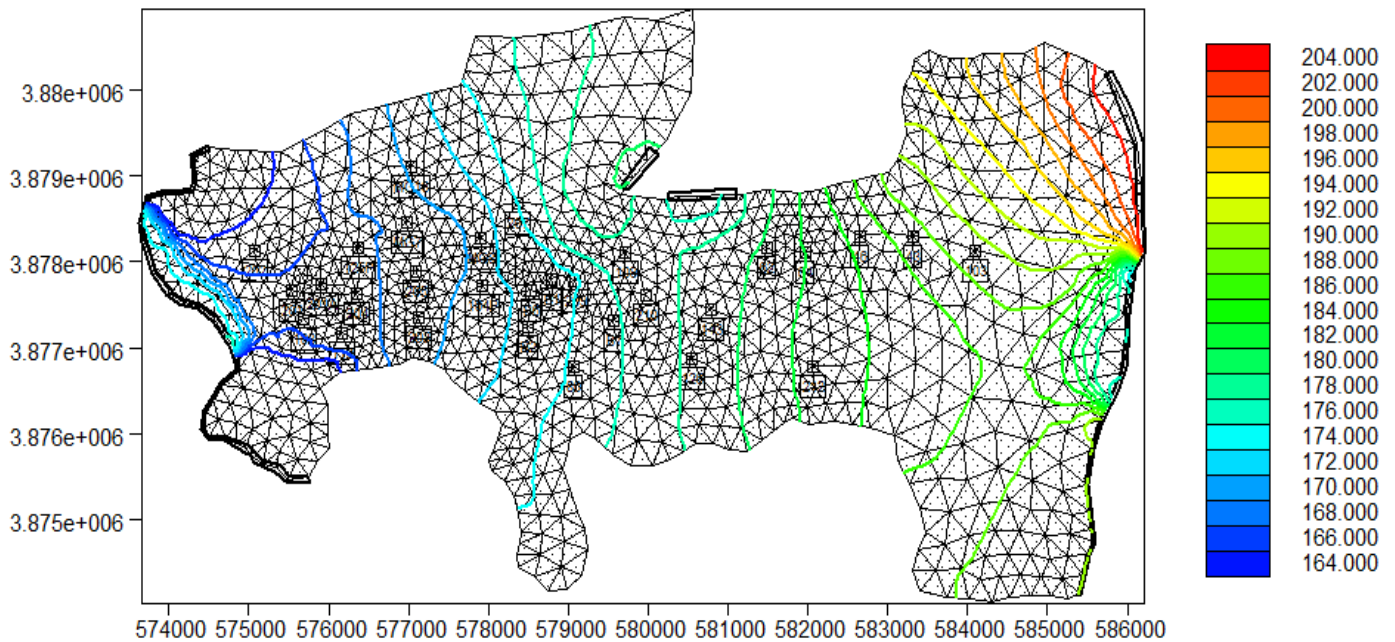


Εικόνα 11: Θέσεις Πηγαδιών Αντλησης



Εικόνα 12: Γραφική απεικόνιση των αποτελεσμάτων του μοντέλου PTC για τα υδραυλικά ύψη στην αρχική κατάσταση όταν τα πηγάδια αντλούν





Εικόνα 13: Γραφική απεικόνιση των αποτελεσμάτων του μοντέλου PTC για τα υδραυλικά ύψη του 4<sup>ου</sup> βήματος όταν τα πηγάδια αντλούν

Όπως δείξαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο, χωρίζουμε τη διαδικασία σε κάποια βήματα έτσι ώστε να φτάσουμε στη βέλτιστη λύση. Στο πρώτο βήμα μηδενίζουμε όλες τις παροχές στα πηγάδια άντλησης και προκύπτουν τα αντίστοιχα 9 υδραυλικά ύψη. Στη συνέχεια, αυξάνουμε τις παροχές του κάθε πηγαδιού διαδοχικά με ένα  $\Delta Q = 2000 \text{ m}^3/\text{day}$  και έτσι προκύπτει ένας πίνακας με τα αντίστοιχα υδραυλικά ύψη στην κάθε περίπτωση. Η διαδικασία αυτή γίνεται με το μαθηματικό μοντέλο PTC όπου περνάμε τις παροχές και «τρέχουμε» το πρόγραμμα. Έπειτα, σχηματίζεται ένας πίνακας απόκρισης A, με 9 στήλες (πηγάδια άντλησης) και 9 γραμμές (κόμβοι παρατήρησης) όπου περιλαμβάνει τη διαφορά των υδραυλικών υψών σε κάθε πηγάδι προς την παροχή που έχουμε προσθέσει. Για να βελτιστοποιηθούν οι συνθήκες άντλησης, χρησιμοποιούμε τη μέθοδο Simplex η οποία θα πραγματοποιηθεί μέσω του προγράμματος Matlab. Συντάσσουμε τον κώδικα, τον «τρέχουμε» και προκύπτουν 9 καινούργιες βελτιωμένες παροχές. Οι παροχές αυτές δεν συγκλίνουν με τις αρχικές μηδενικές τις οποίες είχαμε δημιουργήσει οπότε, η διαδικασία αυτή θα πρέπει να επαναληφθεί ορίζοντας πλέον τις καινούργιες παροχές ως αρχικές συνεχίζοντας έτσι στο δεύτερο βήμα.

Χρειάστηκε να κάνουμε τέσσερις επαναλήψεις μέχρι να συγκλίνει ο αλγόριθμος και να γραμμικοποιηθεί το πρόβλημα ώστε να προκύψουν παροχές ίδιες με αυτές του προηγούμενου βήματος. Τα αποτελέσματα του κάθε βήματος είναι τα παρακάτω:

Πηγάδι Άντλησης	1° Βήμα	2° Βήμα	3° Βήμα	4° Βήμα
	Βέλτιστη τιμή παροχής (m <sup>3</sup> /day)	Βέλτιστη τιμή παροχής (m <sup>3</sup> /day)	Βέλτιστη τιμή παροχής (m <sup>3</sup> /day)	Βέλτιστη τιμή παροχής (m <sup>3</sup> /day)
1 (201)	0	0	0	0
2 (204)	0	0	0	0
3 (205)	2468,7	2456,9	<b>2458,8</b>	<b>2460</b>
4 (MG8)	3318	3318	3318	3318
5 (B6)	7056	7056	7056	7056
6 (B7)	5460	5460	5460	5460
7 (126)	1864,8	1864,8	1864,8	1864,8
8 (212)	588	588	588	588
9 (46)	3990	3990	3990	3990
$\sum Qi$	24745,5	24733,7	24735,6	24736,8

Πίνακας 19:Τελικές Βέλτιστες Παροχές κάθε βήματος

Στα δύο τελευταία βήματα παρατηρούμε ότι υπάρχει μία απόκλιση της τάξης του 0,0005% στη βέλτιστη παροχή του 3<sup>ου</sup> πηγαδιού άντλησης (205) η οποία θεωρείται αμελητέα και γι' αυτόν το λόγο σταματάμε τις επαναλήψεις. Γενικά, από τα αποτελέσματα που προκύπτουν βλέπουμε ότι οι τιμές μεταξύ των βημάτων είναι ίδιες εξαιρώντας το 3<sup>ο</sup> πηγάδι που σε αυτό υπάρχουν διαφοροποιήσεις. Το βέλτιστο σενάριο λοιπόν είναι, τα πηγάδια 201 και 204 να παραμείνουν κλειστά, το πηγάδι 205 να αντλεί με παροχή μικρότερη από τη μέγιστη δυνατή του (2940 m<sup>3</sup>/day) δηλαδή, με 2460m<sup>3</sup>/day και τα υπόλοιπα πηγάδια να αντλούν με τις μέγιστες δυνατές παροχές.

Ο τρόπος αυτός, θα πρέπει να εξασφαλίσει τη διατήρηση του υδροφόρου ορίζοντα σε υψηλά επίπεδα έτσι ώστε να υπάρχει μία ομαλή λειτουργία στο αρδευτικό κυρίως σύστημα αλλά και στην κάλυψη των αναγκών σε άλλες χρήσεις, χωρίς να επιβαρύνει την ποιότητα των υπόγειων νερών και να συντελεί στην εξάντληση των διαθέσιμων αποθεμάτων τους.

## **ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ:**

1. Βάιος Π. Μορέλας, Διπλωματική Εργασία «Τρισδιάστατη Γεωλογική προσομοίωση του Πλειο-Τεταρτογενούς της πεδιάδας της Μεσσαράς» Χανιά, 2014
2. Βασιλική Στρατηγάκη, Σχεδιασμός και λειτουργία εγκαταστάσεων επεξεργασίας πόσιμου νερού, Θεσσαλονίκη, Νοέμβριος 2007
3. Βραχνού Κούλλα, Βέλτιστος σχεδιασμός αναχίτησης της υφαλμύρισης με χρήση μοντέλων προσομοίωσης, βελτιστοποίησης και MATLAB –Εφαρμογή πεδίου στην περιοχή Τροιζήνα Αττικής, Χανιά, Ιούνιος 2018
4. C. P. Kumar “GROUNDWATER FLOW MODELS” National Institute of Hydrology, Roorkee, 2009:  
<http://www.angelfire.com/nh/cpkumar/publication/flowmodels.pdf>
5. George P. Karatzas, 23 May 2017. Developments on Modeling of Groundwater Flow and Contaminant Transport, 3235-3243
6. Ιωάννης Τριχάκης, Προσομοίωση της υπόγειας ροής και προσδιορισμός της ζώνης υφαλμύρισης στην βιομηχανική περιοχή (ΒΙ.ΠΕ.) Ηρακλείου Κρήτης, Χανιά, 2004
7. Μαρίνος Κριτωτάκης - Σαΐα Παυλίδου, Ηράκλειο, Δεκέμβριος 2013.  
‘Κατάσταση Υπόγειων Υδροφορών Κρήτης’
8. Mary P. Anderson, William W. Woessner, Applied Groundwater Modeling, Academic Press, 1992
9. Περλέρος Β., Παπαμαστοράκης Δ., Κριτωτάκης Μ., Δρακοπούλου Ε. και Παναγόπουλος Α. 2004, ‘Υπόγειο Υδατικό Δυναμικό Κρήτης. Προβλήματα και Προοπτικές’
10. Στέφανος Μ. Κατεράκης, Μεταπτυχιακή Διατριβή « Διαχείριση των υπογείων υδάτων με χρήση συνδυασμού μεθόδων προσομοίωσης και βελτιστοποίησης», Μηχανικών Περιβάλλοντος, Πολυτεχνείο Κρήτης. Αύγουστος 2005

### **Ιστοσελίδες:**

11. Βασικές έννοιες Υδρογεωλογίας-Ορολογία: [www.geo.auth.gr](http://www.geo.auth.gr)
12. Μετεωρολογικά Δεδομένα Μοιρών: <http://www.meteo.gr/>
13. <http://www.prosodol.gr/?q=el/node/>
14. [http://kpe-kastor.kas.sch.gr/the\\_lake/water.htm/katanomi.htm](http://kpe-kastor.kas.sch.gr/the_lake/water.htm/katanomi.htm)
15. <http://www.loutraki365.gr/blog/post/poso-apeileitai-i-ellada-apo-mia-krisi-neroy-oi-periohes-ypsilo-kindynoy-hartes>
16. <https://www.vice.com/gr/article/vbwwg4/antio-nero-elleipsh-posimoy-neroy-kai-erhmopoihsh-sto-pi8ano-mellon-ths-elladas>
17. <http://housewatermatters.com/what-are-the-uses-of-groundwater/>
18. <http://www.moires.gov.gr>
19. <http://www.argusone.com/>