

**ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ ΚΡΗΤΗΣ**

**ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΟΡΥΚΤΩΝ ΠΟΡΩΝ**



**ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΔΙΑΔΟΣΗΣ ΣΕΙΣΜΙΚΩΝ  
ΚΥΜΑΤΩΝ ΜΕ ΤΗ ΧΡΗΣΗ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΩΝ  
ΜΕΘΟΔΩΝ ΥΨΗΛΗΣ ΤΑΞΗΣ ΑΚΡΙΒΕΙΑΣ**

Διπλωματική Εργασία

**ΣΠΥΡΙΔΩΝ Δ. ΚΑΡΑΜΟΥΤΣΟΣ**

**Εξεταστική Επιτροπή**

Επιβλέπων: Αν. Καθηγητής **Εμμανουήλ Μαθιουδάκης**

Καθηγήτρια **Έλενα Παπαδοπούλου**

Καθηγητής **Αντώνιος Βαφείδης**

Χανιά, Ιούνιος 2020





# Ευχαριστίες

Αρχικά, θα ήθελα να ευχαριστήσω ιδιαίτερα τον Επιβλέποντα της διπλωματικής εργασίας, Αναπληρωτή Καθηγητή Εμμανουήλ Μαθιουδάκη, για την επιστημονική καθοδήγηση που μου παρείχε σε όλη τη διάρκεια εκπόνησης της διπλωματικής εργασίας μου.

Στη συνέχεια, θα ήθελα να ευχαριστήσω τα μέλη της Εξεταστικής Επιτροπής Καθηγήτρια Έλενα Παπαδοπούλου και Καθηγητή Αντώνιο Βαφείδη για τις επιστημονικές παρατηρήσεις τους σχετικά με την ερευνητική διαδικασία της εργασίας.

Επίσης θα ήθελα να ευχαριστήσω το μέλος Ε.ΔΙ.Π. της Σχολής ΜΗΧ.Ο.Π. Δρ. Γεώργιο Κρητικάκη για τις στοχευμένες παρατηρήσεις του.

Τέλος, ευχαριστώ τα μέλη της οικογένειάς μου, χωρίς την υποστήριξη των οποίων δεν θα μπορούσα να ολοκληρώσω τις σπουδές μου.



# Περίληψη

Η αξιόπιστη προσομοίωση τεχνητών σεισμικών κυμάτων αποτελεί σημαντικό εργαλείο των εφαρμογών που σχετίζονται με την ανίχνευση ορυκτών πόρων. Επίσης, η ρεαλιστική προσομοίωση επιφανειακών σεισμικών κυμάτων κατέχει καθοριστικό ρόλο στη σχεδίαση και μελέτη της συμπεριφοράς των κατασκευών στο φυσικό φαινόμενο των σεισμών. Το αντικείμενο της παρούσας διπλωματικής εργασίας αποτελεί τη κατασκευή ενός νέου αριθμητικού επιλυτή υψηλής τάξης ακρίβειας για τη μοντελοποίηση της διάδοσης σεισμικών κυμάτων και τη μελέτη της συμπεριφοράς του από προσομοιώσεις προβλημάτων δοκιμών για δυο χωρικές διαστάσεις.

Πιο συγκεκριμένα, εφαρμόζονται μέθοδοι πεπερασμένων διαφορών συμπαγών σχημάτων έκτης τάξης ακρίβειας ως προς τη χωρική διακριτοποίηση, μαζί με την άμεση μέθοδο Runge-Kutta Cash-Karp πέμπτης τάξης ακρίβειας για τη χρονική διακριτοποίηση.

Η διπλωματική εργασία αποτελείται από τα παρακάτω τέσσερα κεφάλαια :

Στο πρώτο κεφάλαιο, παρουσιάζονται αρχικά οι αριθμητικές μέθοδοι για τη διακριτοποίηση της χωρικής και χρονικής διάστασης του επιλυτή που θα χρησιμοποιηθεί σε αυτή την ερευνητική διαδικασία. Στη συνέχεια παρουσιάζονται αριθμητικά σχήματα υψηλής τάξης ακρίβειας προσέγγισης τιμών πρώτης παραγώγου, τα οποία χρησιμοποιούνται για τη μοντελοποίηση της διάδοσης των επιφανειακών σεισμικών κυμάτων.

Το δεύτερο κεφάλαιο αναφέρεται στη μοντελοποίηση της διάδοσης ενός σεισμικού κύματος στις δύο χωρικές διαστάσεις μέσω κατάλληλου συστήματος πέντε διαφορικών εξισώσεων και στην αριθμητική επίλυση του. Η υλοποίηση του προτεινόμενου επιλυτή

με τη κατασκευή ενός νέου προσομοιωτή διάδοσης σεισμικών κυμάτων ολοκληρώνει τη μεθοδολογία και την εφαρμογή της αριθμητικής μεθόδου.

Στο τρίτο κεφάλαιο μελετάται η συμπεριφορά του προσομοιωτή και παρουσιάζονται τα αποτελέσματα από τη προσομοίωση τεσσάρων ανεξάρτητων προβλημάτων δοκιμής, τα οποία αναφέρονται σε συγκεκριμένα χαρακτηριστικά του φαινομένου της διάδοσης των σεισμικών κυμάτων στο υπέδαφος και την επιφάνεια του.

Τέλος, στο τέταρτο κεφάλαιο γίνεται αναφορά στα συμπεράσματα που προέκυψαν από τη μελέτη του αριθμητικού επιλυτή για τις προσομοιώσεις των δοκιμαστικών προβλημάτων της διάδοσης διαμήκων, εγκάρσιων και επιφανειακών σεισμικών κυμάτων.

# Περιεχόμενα

<b>Ευχαριστίες</b>	<b>iii</b>
<b>Περίληψη</b>	<b>v</b>
<b>Κατάλογος Σχημάτων</b>	<b>ix</b>
<b>1 Αριθμητικές Μέθοδοι επίλυσης Διαφορικών Εξισώσεων</b>	<b>1</b>
1.1 Μέθοδοι πεπερασμένων διαφορών συμπαγών σχημάτων . . . . .	1
1.2 Μέθοδοι επίλυσης Προβλημάτων Αρχικών Τιμών . . . . .	6
1.3 Αριθμητικά σχήματα προσέγγισης τιμών πρώτης παραγώγου με ακρίβεια έκτης τάξης . . . . .	8
<b>2 Μοντελοποίηση διάδοσης σεισμικών κυμάτων</b>	<b>13</b>
2.1 Εισαγωγή . . . . .	13
2.2 Μοντελοποίηση . . . . .	14
2.3 Αριθμητική επίλυση . . . . .	15
2.4 Αριθμητικές μέθοδοι προσομοίωσης επιφανειακών σεισμικών κυμάτων . .	19
<b>3 Μελέτη προσομοίωσης σεισμικών κυμάτων</b>	<b>21</b>
3.1 Προσομοίωση πρώτου προβλήματος δοκιμής . . . . .	21
3.2 Προσομοίωση δεύτερου προβλήματος δοκιμής . . . . .	22
3.3 Προσομοίωση τρίτου προβλήματος δοκιμής . . . . .	27

3.4 Προσομοίωση τέταρτου προβλήματος δοκιμής . . . . .	29
<b>4 Συμπεράσματα</b>	<b>31</b>
<b>Α΄ ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ</b>	<b>33</b>
<b>Β΄ ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ</b>	<b>53</b>
<b>Γ΄ ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ</b>	<b>69</b>
<b>Δ΄ ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ</b>	<b>77</b>
<b>Βιβλιογραφία</b>	<b>91</b>

# Κατάλογος Σχημάτων

1.1	Πλέγμα διακριτοποίησης προσέγγισης πρώτης παραγώγου στους κόμβους. . .	2
1.2	Πλέγμα διακριτοποίησης προσέγγισης πρώτης παραγώγου στα μέσα των κελιών. . .	4
1.3	Πλέγμα διακριτοποίησης προσέγγισης πρώτης παραγώγου στον κόμβο N-1. . .	8
1.4	Πλέγμα διακριτοποίησης προσέγγισης πρώτης παραγώγου στον κόμβο N-1. . .	9
1.5	Πλέγμα διακριτοποίησης προσέγγισης πρώτης παραγώγου στον κόμβο N-1. . .	9
1.6	Πλέγμα διακριτοποίησης προσέγγισης πρώτης παραγώγου στον τελευταίο κόμβο. . .	10
2.1	Σχηματική αναπαράσταση χωρικού πλέγματος διακριτοποίησης. . . . .	16
2.2	Σχηματική αναπαράσταση κατανομής αγνώστων σε κάθε κόμβο χωρικού πλέγματος. . .	17
2.3	Σχηματική αναπαράσταση κατανομής αγνώστων σε κάθε υπολογιστικό κελί πλέγματος. . . . .	17
2.4	Αρίθμηση των αγνώστων τιμών $\sigma_{xx}$ ή $\sigma_{zz}$ στο πλέγμα διακριτοποίησης και των κόμβων απομείωσης κύματος περιμετρικά της πηγής (κόμβος 41). . . . .	18
3.1	Θέσεις γεωφώνων καταγραφής της οριζόντιας ταχύτητας μετατόπισης $u_x$ ως προς τη πηγή δημιουργίας του σεισμικού κύματος. . . . .	23
3.2	Θέσεις γεωφώνων καταγραφής της κατακόρυφης ταχύτητας μετατόπισης $u_z$ ως προς τη πηγή δημιουργίας του σεισμικού κύματος. . . . .	23
3.3	Θέσεις γεωφώνων καταγραφής των τάσεων $\sigma_{xx}$ και $\sigma_{zz}$ ως προς τη πηγή δημιουργίας του σεισμικού κύματος. . . . .	24
3.4	Θέσεις γεωφώνων καταγραφής της μεικτής τάσης $\sigma_{xz}$ ως προς τη πηγή δημιουργίας του σεισμικού κύματος. . . . .	24

3.5	Καταγραφή κατακόρυφης ταχύτητας μετατόπισης δεξιά της πηγής. . . . .	28
3.6	Καταγραφή οριζόντιας ταχύτητας μετατόπισης δεξιά της πηγής. . . . .	28
A'.1	Οριζόντια ταχύτητα μετατόπισης για τη χρονική στιγμή $t = 0.062sec$ . . . . .	34
A'.2	Κατακόρυφη ταχύτητα μετατόπισης για τη χρονική στιγμή $t = 0.062sec$ . . . . .	34
A'.3	Οριζόντια ταχύτητα μετατόπισης για τη χρονική στιγμή $t = 0.07sec$ . . . . .	35
A'.4	Κατακόρυφη ταχύτητα μετατόπισης για τη χρονική στιγμή $t = 0.07sec$ . . . . .	35
A'.5	Οριζόντια ταχύτητα μετατόπισης για τη χρονική στιγμή $t = 0.08sec$ . . . . .	36
A'.6	Κατακόρυφη ταχύτητα μετατόπισης για τη χρονική στιγμή $t = 0.08sec$ . . . . .	36
A'.7	Οριζόντια ταχύτητα μετατόπισης για τη χρονική στιγμή $t = 0.09sec$ . . . . .	37
A'.8	Κατακόρυφη ταχύτητα μετατόπισης για τη χρονική στιγμή $t = 0.09sec$ . . . . .	37
A'.9	Οριζόντια ταχύτητα μετατόπισης για τη χρονική στιγμή $t = 0.1sec$ . . . . .	38
A'.10	Κατακόρυφη ταχύτητα μετατόπισης για τη χρονική στιγμή $t = 0.1sec$ . . . . .	38
A'.11	Οριζόντια ταχύτητα μετατόπισης για τη χρονική στιγμή $t = 0.11sec$ . . . . .	39
A'.12	Κατακόρυφη ταχύτητα μετατόπισης για τη χρονική στιγμή $t = 0.11sec$ . . . . .	39
A'.13	Οριζόντια ταχύτητα μετατόπισης για τη χρονική στιγμή $t = 0.12sec$ . . . . .	40
A'.14	Κατακόρυφη ταχύτητα μετατόπισης για τη χρονική στιγμή $t = 0.12sec$ . . . . .	40
A'.15	Οριζόντια ταχύτητα μετατόπισης για τη χρονική στιγμή $t = 0.13sec$ . . . . .	41
A'.16	Κατακόρυφη ταχύτητα μετατόπισης για τη χρονική στιγμή $t = 0.13sec$ . . . . .	41
A'.17	Οριζόντια ταχύτητα μετατόπισης για τη χρονική στιγμή $t = 0.14sec$ . . . . .	42
A'.18	Κατακόρυφη ταχύτητα μετατόπισης για τη χρονική στιγμή $t = 0.14sec$ . . . . .	42
A'.19	Οριζόντια ταχύτητα μετατόπισης για τη χρονική στιγμή $t = 0.15sec$ . . . . .	43
A'.20	Κατακόρυφη ταχύτητα μετατόπισης για τη χρονική στιγμή $t = 0.15sec$ . . . . .	43
A'.21	Οριζόντια ταχύτητα μετατόπισης για τη χρονική στιγμή $t = 0.16sec$ . . . . .	44
A'.22	Κατακόρυφη ταχύτητα μετατόπισης για τη χρονική στιγμή $t = 0.16sec$ . . . . .	44
A'.23	Οριζόντια ταχύτητα μετατόπισης για τη χρονική στιγμή $t = 0.17sec$ . . . . .	45
A'.24	Κατακόρυφη ταχύτητα μετατόπισης για τη χρονική στιγμή $t = 0.17sec$ . . . . .	45
A'.25	Οριζόντια ταχύτητα μετατόπισης για τη χρονική στιγμή $t = 0.18sec$ . . . . .	46



A'.26	Κατακόρυφη ταχύτητα μετατόπισης για τη χρονική στιγμή $t = 0.18sec$ . . . . .	46
A'.27	Οριζόντια ταχύτητα μετατόπισης για τη χρονική στιγμή $t = 0.19sec$ . . . . .	47
A'.28	Κατακόρυφη ταχύτητα μετατόπισης για τη χρονική στιγμή $t = 0.19sec$ . . . . .	47
A'.29	Οριζόντια ταχύτητα μετατόπισης για τη χρονική στιγμή $t = 0.20sec$ . . . . .	48
A'.30	Κατακόρυφη ταχύτητα μετατόπισης για τη χρονική στιγμή $t = 0.20sec$ . . . . .	48
A'.31	Οριζόντια ταχύτητα μετατόπισης για τη χρονική στιγμή $t = 0.21sec$ . . . . .	49
A'.32	Κατακόρυφη ταχύτητα μετατόπισης για τη χρονική στιγμή $t = 0.21sec$ . . . . .	49
A'.33	Οριζόντια ταχύτητα μετατόπισης για τη χρονική στιγμή $t = 0.22sec$ . . . . .	50
A'.34	Κατακόρυφη ταχύτητα μετατόπισης για τη χρονική στιγμή $t = 0.22sec$ . . . . .	50
A'.35	Οριζόντια ταχύτητα μετατόπισης για τη χρονική στιγμή $t = 0.07sec$ . . . . .	51
A'.36	Οριζόντια ταχύτητα μετατόπισης για τη χρονική στιγμή $t = 0.23sec$ . . . . .	51
A'.37	Κατακόρυφη ταχύτητα μετατόπισης για τη χρονική στιγμή $t = 0.07sec$ . . . . .	52
A'.38	Κατακόρυφη ταχύτητα μετατόπισης για τη χρονική στιγμή $t = 0.23sec$ . . . . .	52
B'.1	Καταγραφή κατακόρυφης ταχύτητας μετατόπισης στο γεώφωνο $\Gamma_1$ . . . . .	53
B'.2	Καταγραφή κατακόρυφης ταχύτητας μετατόπισης στο γεώφωνο $\Gamma_2$ . . . . .	54
B'.3	Καταγραφή κατακόρυφης ταχύτητας μετατόπισης στο γεώφωνο $\Gamma_5$ . . . . .	54
B'.4	Καταγραφή κατακόρυφης ταχύτητας μετατόπισης στο γεώφωνο $\Gamma_6$ . . . . .	55
B'.5	Καταγραφή κατακόρυφης ταχύτητας μετατόπισης στο γεώφωνο $\Gamma_7$ . . . . .	55
B'.6	Καταγραφή κατακόρυφης ταχύτητας μετατόπισης στο γεώφωνο $\Gamma_8$ . . . . .	56
B'.7	Καταγραφή οριζόντιας ταχύτητας μετατόπισης στο γεώφωνο $\Gamma_3$ . . . . .	56
B'.8	Καταγραφή οριζόντιας ταχύτητας μετατόπισης στο γεώφωνο $\Gamma_4$ . . . . .	57
B'.9	Καταγραφή οριζόντιας ταχύτητας μετατόπισης στο γεώφωνο $\Gamma_5$ . . . . .	57
B'.10	Καταγραφή οριζόντιας ταχύτητας μετατόπισης στο γεώφωνο $\Gamma_6$ . . . . .	58
B'.11	Καταγραφή οριζόντιας ταχύτητας μετατόπισης στο γεώφωνο $\Gamma_7$ . . . . .	58
B'.12	Καταγραφή οριζόντιας ταχύτητας μετατόπισης στο γεώφωνο $\Gamma_8$ . . . . .	59
B'.13	Καταγραφή των τιμών της τάσης $\sigma_{xx}$ στο γεώφωνο $\Gamma_3$ . . . . .	59
B'.14	Καταγραφή των τιμών της τάσης $\sigma_{xx}$ στο γεώφωνο $\Gamma_4$ . . . . .	60

B'.15	Καταγραφή των τιμών της τάσης $\sigma_{xx}$ στο γεώφωνο $\Gamma_5$ . . . . .	60
B'.16	Καταγραφή των τιμών της τάσης $\sigma_{xx}$ στο γεώφωνο $\Gamma_6$ . . . . .	61
B'.17	Καταγραφή των τιμών της τάσης $\sigma_{xx}$ στο γεώφωνο $\Gamma_7$ . . . . .	61
B'.18	Καταγραφή των τιμών της τάσης $\sigma_{xx}$ στο γεώφωνο $\Gamma_8$ . . . . .	62
B'.19	Καταγραφή των τιμών της τάσης $\sigma_{zz}$ στο γεώφωνο $\Gamma_1$ . . . . .	62
B'.20	Καταγραφή των τιμών της τάσης $\sigma_{zz}$ στο γεώφωνο $\Gamma_2$ . . . . .	63
B'.21	Καταγραφή των τιμών της τάσης $\sigma_{zz}$ στο γεώφωνο $\Gamma_5$ . . . . .	63
B'.22	Καταγραφή των τιμών της τάσης $\sigma_{zz}$ στο γεώφωνο $\Gamma_6$ . . . . .	64
B'.23	Καταγραφή των τιμών της τάσης $\sigma_{zz}$ στο γεώφωνο $\Gamma_7$ . . . . .	64
B'.24	Καταγραφή των τιμών της τάσης $\sigma_{zz}$ στο γεώφωνο $\Gamma_8$ . . . . .	65
B'.25	Καταγραφή των τιμών μεικτών τάσεων στο γεώφωνο $\Gamma_5$ . . . . .	65
B'.26	Καταγραφή των τιμών μεικτών τάσεων στο γεώφωνο $\Gamma_6$ . . . . .	66
B'.27	Καταγραφή των τιμών μεικτών τάσεων στο γεώφωνο $\Gamma_7$ . . . . .	66
B'.28	Καταγραφή των τιμών μεικτών τάσεων στο γεώφωνο $\Gamma_8$ . . . . .	67
Γ'.1	Απεικόνιση οριζόντιας ταχύτητας μετατόπισης τη χρονική στιγμή 0.05secs. . .	69
Γ'.2	Απεικόνιση οριζόντιας ταχύτητας μετατόπισης τη χρονική στιγμή 0.06secs. . .	70
Γ'.3	Απεικόνιση οριζόντιας ταχύτητας μετατόπισης τη χρονική στιγμή 0.07secs. . .	70
Γ'.4	Απεικόνιση οριζόντιας ταχύτητας μετατόπισης τη χρονική στιγμή 0.08secs. . .	71
Γ'.5	Απεικόνιση οριζόντιας ταχύτητας μετατόπισης τη χρονική στιγμή 0.09secs. . .	71
Γ'.6	Απεικόνιση οριζόντιας ταχύτητας μετατόπισης τη χρονική στιγμή 0.10secs. . .	72
Γ'.7	Απεικόνιση κατακόρυφης ταχύτητας μετατόπισης τη χρονική στιγμή 0.05secs. .	72
Γ'.8	Απεικόνιση κατακόρυφης ταχύτητας μετατόπισης τη χρονική στιγμή 0.06secs. .	73
Γ'.9	Απεικόνιση κατακόρυφης ταχύτητας μετατόπισης τη χρονική στιγμή 0.07secs. .	73
Γ'.10	Απεικόνιση κατακόρυφης ταχύτητας μετατόπισης τη χρονική στιγμή 0.08secs. .	74
Γ'.11	Απεικόνιση κατακόρυφης ταχύτητας μετατόπισης τη χρονική στιγμή 0.09secs. .	74
Γ'.12	Απεικόνιση κατακόρυφης ταχύτητας μετατόπισης τη χρονική στιγμή 0.10secs. .	75





# Κεφάλαιο 1

## Αριθμητικές Μέθοδοι επίλυσης Διαφορικών Εξισώσεων

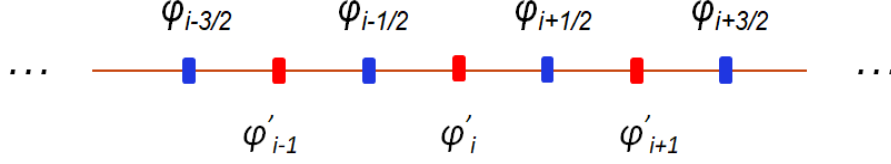
### 1.1 Μέθοδοι πεπερασμένων διαφορών συμπαγών σχημάτων

Θεωρούμε το πρόβλημα συνοριακών τιμών

$$(ΠΣΤ) \quad \begin{cases} y'(x) = f(y(x), x) \quad , \quad x \in [a, b] \\ y(a) = A \\ y(b) = B \end{cases} . \quad (1.1)$$

Για την αριθμητική επίλυση της παραπάνω διαφορικής εξίσωσης με τη χρήση μιας μεθόδου διακριτοποίησης, θεωρούμε αρχικά την ομοιόμορφη διακριτοποίηση του διαστήματος  $[a, b]$  σε  $N$  υποδιαστήματα πλάτους  $h = \frac{b-a}{N}$  για τους κόμβους  $x_i = a + ih$  με  $i = 0, 1, \dots, N$ .

Με τη χρήση της αριθμητικής μεθόδου των Πεπερασμένων Διαφορών Συμπαγών Σχημά-



**Σχήμα 1.1:** Πλέγμα διακριτοποίησης προσέγγισης πρώτης παραγώγου στους κόμβους.

των [5], [10], [11], [14], [15] μπορεί να προσεγγιστεί η τιμή της παραγώγου  $y'(x_i) = y'_i$  στον κόμβο  $x_i$  από τις τιμές της συνάρτησης σύμφωνα με τη σχέση [5], [9]

$$b_2 y'_{i-2} + b_1 y'_{i-1} + y'_i + b_1 y'_{i+1} + b_2 y'_{i+2} = a_1 \frac{y_{i+3} - y_{i-3}}{6h} + a_2 \frac{y_{i+2} - y_{i-2}}{4h} + a_3 \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} \quad (1.2)$$

Η σχέση των συντελεστών  $a_1$ ,  $a_2$  και  $a_3$  με τους  $b_1$  και  $b_2$  καθορίζει την ακρίβεια προσέγγισης του αριθμητικού σχήματος. Ειδικότερα, για ακρίβεια προσέγγισης έκτης τάξης θα ισχύει ότι

$$81 a_1 + 16 a_2 + a_3 = 10(b_1 + 16 b_2) \quad (1.3)$$

Η κατασκευή συμπαγούς αριθμητικού σχήματος πεπερασμένων διαφορών προϋποθέτει την συμμετοχή του ελάχιστου δυνατού πλήθους τιμών στους κόμβους. Έτσι επιλέγουμε τις τιμές  $b_2 = a_1 = 0$ ,  $a_2 = \frac{1}{9}$ ,  $a_3 = \frac{14}{9}$  και έτσι  $b_1 = \frac{1}{3}$ . Οπότε το αριθμητικό σχήμα

$$y'_{i-1} + 3y'_i + y'_{i+1} = \frac{7}{3h}(y_{i+1} - y_{i-1}) + \frac{1}{12h}(y_{i+2} - y_{i+1}) \quad (1.4)$$

θα διαθέτει ακρίβεια προσέγγισης  $\frac{4}{7!}h^6 y^{(7)}$ .

Για τη προσέγγιση των τιμών της παραγώγου συνάρτησης  $\phi'$  με ακρίβεια  $O(h^6)$  στους κόμβους του πλέγματος διακριτοποίησης με τη χρήση τιμών της συνάρτησης  $\phi$  στα μέσα των υπολογιστικών κελιών του πλέγματος, μπορεί να χρησιμοποιηθεί το παρακάτω αριθμητικό σχήμα [5],

$$\phi'_{i-1} + \frac{62}{9}\phi'_i + \phi'_{i+1} = \frac{7}{h}(\phi_{i+\frac{1}{2}} - \phi_{i-\frac{1}{2}}) + \frac{17}{27h}(\phi_{i+\frac{3}{2}} - \phi_{i-\frac{3}{2}}). \quad (1.5)$$

Το σχήμα 1.1 εμφανίζει τις τιμές της συνάρτησης και της παραγώγου της στους εμπλεκόμενους κόμβους του πλέγματος διακριτοποίησης.

Για τη προσέγγιση των τιμών των παραγώγων στους κοντινότερους κόμβους στο αριστερό σύνορο μπορούν να χρησιμοποιηθούν τα αριθμητικά σχήματα [5]

$$62\phi'_0 + 1627\phi'_1 = \frac{62}{h} \left( -\frac{1104667}{39680}\phi_{\frac{1}{2}} + \frac{658913}{23808}\phi_{\frac{3}{2}} + \frac{16343}{11904}\phi_{\frac{5}{2}} - \frac{6941}{3968}\phi_{\frac{7}{2}} + \frac{15007}{23808}\phi_{\frac{9}{2}} - \frac{10799}{119040}\phi_{\frac{11}{2}} \right) \quad (1.6)$$

και

$$\frac{961}{409}\phi'_0 + 62\phi'_1 + \frac{961}{409}\phi'_2 = \frac{62}{h} \left( -\frac{5195}{4908}\phi_{\frac{1}{2}} + \frac{4957}{4908}\phi_{\frac{3}{2}} + \frac{119}{1227}\phi_{\frac{5}{2}} - \frac{85}{1227}\phi_{\frac{7}{2}} + \frac{119}{4908}\phi_{\frac{9}{2}} - \frac{17}{4908}\phi_{\frac{11}{2}} \right) \quad (1.7)$$

Αντίστοιχα για τη προσέγγιση των τιμών των παραγώγων στους κοντινότερους κόμβους του δεξιού συνόρου μπορούν να χρησιμοποιηθούν τα αριθμητικά σχήματα [5]

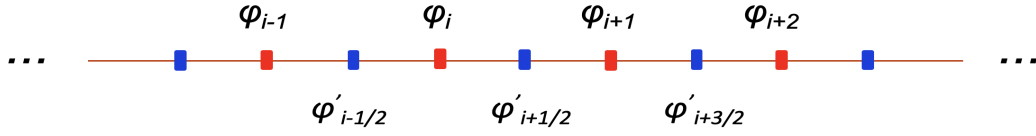
$$\frac{961}{409}\phi'_{N-2} + 62\phi'_{N-1} + \frac{961}{409}\phi'_N = \frac{62}{h} \left( \frac{5195}{4908}\phi_{N-\frac{1}{2}} - \frac{4957}{4908}\phi_{N-\frac{3}{2}} - \frac{119}{1227}\phi_{N-\frac{5}{2}} + \frac{85}{1227}\phi_{N-\frac{7}{2}} - \frac{119}{4908}\phi_{N-\frac{9}{2}} + \frac{17}{4908}\phi_{N-\frac{11}{2}} \right) \quad (1.8)$$

και

$$62\phi'_N + 1627\phi'_{N-1} = \frac{62}{h} \left( \frac{1104667}{39680}\phi_{N-\frac{1}{2}} - \frac{658913}{23808}\phi_{N-\frac{3}{2}} - \frac{16343}{11904}\phi_{N-\frac{5}{2}} + \frac{6941}{3968}\phi_{N-\frac{7}{2}} - \frac{15007}{23808}\phi_{N-\frac{9}{2}} + \frac{10799}{119040}\phi_{N-\frac{11}{2}} \right) \quad (1.9)$$

Οπότε η προσέγγιση των τιμών της πρώτης παραγώγου στους κόμβους του πλέγματος διακριτοποίησης επιτυγχάνεται με την επίλυση του γραμμικού συστήματος  $A \phi' = \phi$  όπου

$$A = \begin{bmatrix} 62 & 1627 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{961}{409} & 62 & \frac{961}{409} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 62 & 9 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 62 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 62 & 9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 9 & 62 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{961}{409} & 62 & \frac{961}{409} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1627 & 62 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(N+1) \times (N+1)}. \quad (1.10)$$



**Σχήμα 1.2:** Πλέγμα διακριτοποίησης προσέγγισης πρώτης παραγώγου στα μέσα των κελιών.

και

$$\phi' = \begin{bmatrix} \phi'_0 \\ \phi'_1 \\ \phi'_2 \\ \phi'_3 \\ \vdots \\ \phi'_{N-3} \\ \phi'_{N-2} \\ \phi'_{N-1} \\ \phi'_N \end{bmatrix},$$

$$\phi = \frac{1}{h} \begin{bmatrix} 62(-\frac{1104667}{39680}\phi_{\frac{1}{2}} + \frac{658913}{23808}\phi_{\frac{3}{2}} + \frac{16343}{11904}\phi_{\frac{5}{2}} - \frac{6941}{3968}\phi_{\frac{7}{2}} + \frac{15007}{23808}\phi_{\frac{9}{2}} - \frac{10799}{119040}\phi_{\frac{11}{2}}) \\ 62(-\frac{5195}{4908}\phi_{\frac{1}{2}} + \frac{4957}{4908}\phi_{\frac{3}{2}} + \frac{119}{1227}\phi_{\frac{5}{2}} - \frac{85}{1227}\phi_{\frac{7}{2}} + \frac{119}{4908}\phi_{\frac{9}{2}} - \frac{17}{4908}\phi_{\frac{11}{2}}) \\ 63(\phi_{\frac{5}{2}} - \phi_{\frac{3}{2}}) + \frac{17}{3}(\phi_{\frac{7}{2}} - \phi_{\frac{1}{2}}) \\ 63(\phi_{\frac{7}{2}} - \phi_{\frac{5}{2}}) + \frac{17}{3}(\phi_{\frac{9}{2}} - \phi_{\frac{3}{2}}) \\ \vdots \\ 63(\phi_{N-\frac{5}{2}} - \phi_{N-\frac{7}{2}}) + \frac{17}{3}(\phi_{N-\frac{3}{2}} - \phi_{N-\frac{9}{2}}) \\ 63(\phi_{N-\frac{3}{2}} - \phi_{N-\frac{5}{2}}) + \frac{17}{3}(\phi_{N-\frac{1}{2}} - \phi_{N-\frac{7}{2}}) \\ 62(\frac{5195}{4908}\phi_{N-\frac{1}{2}} - \frac{4957}{4908}\phi_{N-\frac{3}{2}} - \frac{119}{1227}\phi_{N-\frac{5}{2}} + \frac{85}{1227}\phi_{N-\frac{7}{2}} - \frac{119}{4908}\phi_{N-\frac{9}{2}} + \frac{17}{4908}\phi_{N-\frac{11}{2}}) \\ 62(\frac{1104667}{39680}\phi_{N-\frac{1}{2}} - \frac{658913}{23808}\phi_{N-\frac{3}{2}} - \frac{16343}{11904}\phi_{N-\frac{5}{2}} + \frac{6941}{3968}\phi_{N-\frac{7}{2}} - \frac{15007}{23808}\phi_{N-\frac{9}{2}} + \frac{10799}{119040}\phi_{N-\frac{11}{2}}) \end{bmatrix}.$$

Για τη προσέγγιση των τιμών της παραγώγου της συνάρτησης  $\phi'$  με ακρίβεια  $O(h^6)$  στα μέσα των υπολογιστικών κελιών του πλέγματος διακριτοποίησης με τη χρήση τιμών της συνάρτησης  $\phi$  στους κόμβους του πλέγματος, μπορεί να χρησιμοποιηθεί το παρακάτω αριθμητικό σχήμα

$$\phi'_{i-\frac{1}{2}} + \frac{62}{9}\phi'_{i+\frac{1}{2}} + \phi'_{i+\frac{3}{2}} = \frac{63}{9h}(\phi_{i+1} - \phi_i) + \frac{17}{27h}(\phi_{i+2} - \phi_{i-1}). \quad (1.11)$$

Το σχήμα 1.2 εμφανίζει τις τιμές της συνάρτησης και της παραγώγου της στους εμπλεκόμενους κόμβους του πλέγματος διακριτοποίησης.



Για τη προσέγγιση των τιμών των παραγώγων στους κοντινότερους κόμβους στο αριστερό σύνορο μπορεί να χρησιμοποιηθεί το παρακάτω αριθμητικό σχήμα [5]

$$\phi'_{\frac{1}{2}} + \frac{62}{9}\phi'_{\frac{3}{2}} = \frac{1}{h} \left( -\frac{10799}{17280}\phi_0 - \frac{2713}{384}\phi_1 + \frac{523}{64}\phi_2 - \frac{937}{1728}\phi_3 + \frac{25}{384}\phi_4 - \frac{3}{640}\phi_5 \right) \quad (1.12)$$

Αντίστοιχα για τη προσέγγιση των τιμών των παραγώγων στους κοντινότερους κόμβους του δεξιού συνόρου μπορεί να χρησιμοποιηθεί το εξής αριθμητικό σχήμα

$$\phi'_{N-\frac{1}{2}} + \frac{62}{9}\phi'_{N-\frac{3}{2}} = \frac{1}{h} \left( \frac{10799}{17280}\phi_N + \frac{2713}{384}\phi_{N-1} - \frac{523}{64}\phi_{N-2} + \frac{937}{1728}\phi_{N-3} - \frac{25}{384}\phi_{N-4} + \frac{3}{640}\phi_{N-5} \right) \quad (1.13)$$

Οπότε η προσέγγιση των τιμών της πρώτης παραγώγου στα μέσα των υπολογιστικών κελιών του πλέγματος διακριτοποίησης επιτυγχάνεται με την επίλυση του γραμμικού συστήματος  $B \phi' = \phi$ , όπου

$$B = \begin{bmatrix} 1 & \frac{62}{9} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{62}{9} & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{62}{9} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{62}{9} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \frac{62}{9} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{62}{9} & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{N \times N}. \quad (1.14)$$

και

$$\phi' = \begin{bmatrix} \phi'_{\frac{1}{2}} \\ \phi'_{\frac{3}{2}} \\ \phi'_{\frac{5}{2}} \\ \vdots \\ \phi'_{N-\frac{5}{2}} \\ \phi'_{N-\frac{3}{2}} \\ \phi'_{N-\frac{1}{2}} \end{bmatrix},$$

$$\phi = \frac{1}{h} \begin{bmatrix} -\frac{10799}{17280}\phi_0 - \frac{2713}{384}\phi_1 + \frac{523}{64}\phi_2 - \frac{937}{1728}\phi_3 + \frac{25}{384}\phi_4 - \frac{3}{640}\phi_5 \\ \frac{63}{9}(\phi_2 - \phi_1) + \frac{17}{27}(\phi_3 - \phi_0) \\ \frac{63}{9}(\phi_3 - \phi_2) + \frac{17}{27}(\phi_4 - \phi_1) \\ \vdots \\ \frac{63}{9}(\phi_{N-2} - \phi_{N-3}) + \frac{17}{27}(\phi_{N-1} - \phi_{N-4}) \\ \frac{63}{9}(\phi_{N-1} - \phi_{N-2}) + \frac{17}{27}(\phi_N - \phi_{N-3}) \\ \frac{10799}{17280}\phi_N + \frac{2713}{384}\phi_{N-1} - \frac{523}{64}\phi_{N-2} + \frac{937}{1728}\phi_{N-3} - \frac{25}{384}\phi_{N-4} + \frac{3}{640}\phi_{N-5} \end{bmatrix}.$$

## 1.2 Μέθοδοι επίλυσης Προβλημάτων Αρχικών Τιμών

Θεωρούμε το πρόβλημα αρχικών τιμών (ΠΑΤ)

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = f(t, u) , & t \in [a, b] \\ u(a) = A \end{cases} . \quad (1.15)$$

Για την αριθμητική επίλυση θα θεωρήσουμε ομοιόμορφη χρονική διαμέριση σε  $N_t$  πλήθους υποδιαστημάτων με τα χρονικά σημεία  $t^{(i)} = a + i\Delta t$  για  $i = 0, 1, 2, \dots, N_t$ , με χρονικό βήμα  $\Delta t = \frac{b-a}{N_t} = t^{(i+1)} - t^{(i)}$ .

### Μέθοδος Runge Kutta πέμπτης τάξης ακρίβειας

Οι Runge-Kutta μέθοδοι μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την αριθμητική επίλυση προβλημάτων με συνεχείς λύσεις. Έστω ότι θέλουμε να προσεγγίσουμε την λύση  $u(x, t)$  του παραπάνω προβλήματος εφαρμόζοντας μια μέθοδο χωρικής διακριτοποίησης, όπως αυτή των πεπερασμένων διαφορών, οπότε θα είναι δυνατή η προσέγγιση της λύσης σε συγκεκριμένους κόμβους του χωρικού πλέγματος  $u(x_j, t)$  για κάθε χρονική στιγμή  $t$ . Έτσι για την προσέγγιση  $u_j^{(i)} \approx u(x_j, t^{(i)})$  της λύσης στον κόμβο  $x_j$  κατά τη χρονική στιγμή  $t^{(i)}$  χρησιμοποιείται συνδυασμός δύο αριθμητικών μεθόδων διακριτοποίησης, μία για την χρονική και μία για την χωρική διάσταση.

Στην παρούσα διπλωματική εργασία χρησιμοποιήθηκε η άμεση μέθοδος Runge-Kutta Cash-Karp πέμπτης τάξης ακρίβειας έξι βημάτων/σταδίων, η οποία αποτελεί τροποποίηση της μεθόδου Runge-Kutta-Fehlberg πέμπτης τάξης και διαθέτει το παρακάτω

πίνακα Butcher

0						
$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$					
$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{40}$	$\frac{9}{40}$				
$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{10}$	$-\frac{9}{10}$	$\frac{6}{5}$			
1	$-\frac{11}{54}$	$\frac{5}{2}$	$-\frac{70}{27}$	$\frac{35}{27}$		
$\frac{7}{8}$	$\frac{1631}{55296}$	$\frac{175}{512}$	$\frac{575}{13824}$	$\frac{44275}{110592}$	$\frac{253}{4096}$	
<hr/>						
	$\frac{37}{378}$	0	$\frac{250}{621}$	$\frac{125}{594}$	0	$\frac{512}{1771}$

κι έχει το αριθμητικό σχήμα

$$u^{(n+1)} = u^{(n)} + \Delta t \left( \frac{37}{378} k_1 + \frac{250}{621} k_3 + \frac{125}{594} k_4 + \frac{512}{1771} k_6 \right), \quad (1.16)$$

όπου  $k_i = f(u^{(n)} + \Delta t \sum_{j=1}^5 a_{ij} k_j)$  για  $i = 1, 2, \dots, 6$ .

Πιο συγκεκριμένα οι τιμές της μεθόδου για κάθε βήμα θα υπολογίζονται ως

$$k_1 = f(u^{(n)}),$$

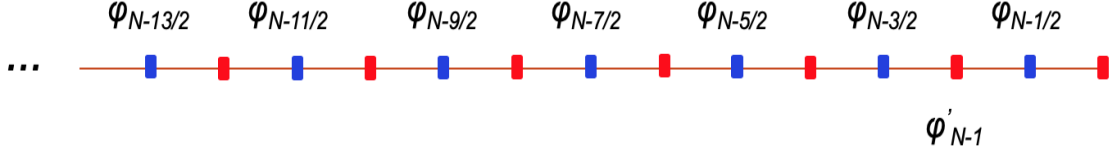
$$k_2 = f(u^{(n)} + \frac{\Delta t}{5} k_1),$$

$$k_3 = f(u^{(n)} + \frac{\Delta t}{40} (3k_1 + 9k_2)),$$

$$k_4 = f(u^{(n)} + \Delta t (\frac{3}{10} k_1 - \frac{9}{10} k_2 + \frac{6}{5} k_3)),$$

$$k_5 = f(u^{(n)} + \Delta t (-\frac{11}{54} k_1 + \frac{5}{2} k_2 - \frac{70}{27} k_3 + \frac{35}{27} k_4)),$$

$$k_6 = f(u^{(n)} + \Delta t (\frac{1631}{55296} k_1 + \frac{175}{512} k_2 + \frac{575}{13824} k_3 + \frac{44275}{110592} k_4 + \frac{253}{4096} k_5)).$$



**Σχήμα 1.3:** Πλέγμα διακριτοποίησης προσέγγισης πρώτης παραγώγου στον κόμβο  $N-1$ .

### 1.3 Αριθμητικά σχήματα προσέγγισης τιμών πρώτης παραγώγου με ακρίβεια έκτης τάξης

Για τη προσέγγιση της τιμής της πρώτης παραγώγου στον κόμβο  $N-1$  του πλέγματος διακριτοποίησης, κάνοντας χρήση τιμών της συνάρτησης στα μέσα των υπολογιστικών κελιών (Σχήμα 1.3), θα εφαρμόσουμε το παρακάτω αριθμητικό σχήμα [5]

$$\begin{aligned} \phi'_{N-1} = & -\frac{62}{1627} \left[ \phi'_N + \frac{1}{h} \left( -\frac{1104667}{39680} \phi_{N-\frac{1}{2}} + \frac{658913}{23808} \phi_{N-\frac{3}{2}} + \frac{16343}{11904} \phi_{N-\frac{5}{2}} - \right. \right. \\ & \left. \left. -\frac{6941}{3968} \phi_{N-\frac{7}{2}} + \frac{15007}{23808} \phi_{N-\frac{9}{2}} - \frac{10799}{119040} \phi_{N-\frac{11}{2}} \right) \right]. \end{aligned} \quad (1.17)$$

Αντίστοιχα, η τιμή της πρώτης παραγώγου  $\phi'_N$  μπορεί να προσεγγιστεί ως εξής:

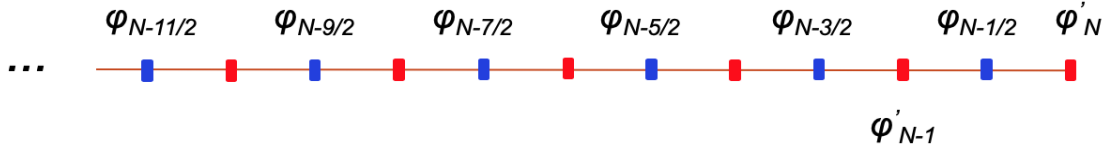
$$\begin{aligned} \phi'_N = & \phi'_{N-2} + \frac{818}{31} \left[ -\phi'_{N-1} + \frac{1}{h} \left( \frac{5195}{4908} \phi_{N-\frac{1}{2}} - \frac{4957}{4908} \phi_{N-\frac{3}{2}} - \frac{119}{1227} \phi_{N-\frac{5}{2}} \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{85}{1227} \phi_{N-\frac{7}{2}} - \frac{119}{4908} \phi_{N-\frac{9}{2}} + \frac{17}{4908} \phi_{N-\frac{11}{2}} \right) \right]. \end{aligned} \quad (1.18)$$

Η τιμή της παραγώγου  $\phi'_{N-2}$  μπορεί να προσεγγιστεί με τη χρήση τιμών της συνάρτησης στα μέσα των υπολογιστικών κελιών, σύμφωνα με το αριθμητικό σχήμα

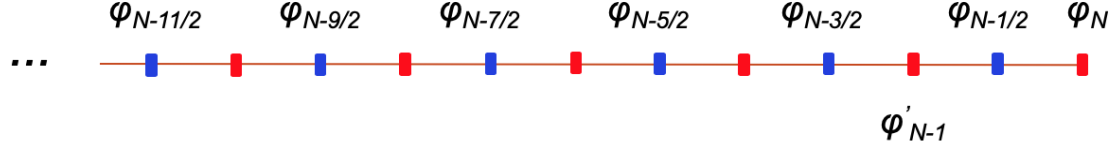
$$\begin{aligned} \phi'_{N-2} = & -\frac{62}{1627} \left[ \phi'_{N-1} + \frac{1}{h} \left( -\frac{1104667}{39680} \phi_{N-\frac{1}{2}} + \frac{658913}{23808} \phi_{N-\frac{3}{2}} + \frac{16343}{11904} \phi_{N-\frac{5}{2}} - \right. \right. \\ & \left. \left. -\frac{6941}{3968} \phi_{N-\frac{7}{2}} + \frac{15007}{23808} \phi_{N-\frac{9}{2}} - \frac{10799}{119040} \phi_{N-\frac{11}{2}} \right) \right]. \end{aligned} \quad (1.19)$$

Συνδυάζοντας τις παραπάνω μαθηματικές σχέσεις προσεγγίσεων, η τιμή της πρώτης παραγώγου  $\phi'_{N-1}$  μπορεί να προσεγγιστεί από την παρακάτω σχέση:

$$\begin{aligned} \phi'_{N-1} = & \frac{1}{h} (0.84739 \phi_{N-\frac{1}{2}} - 0.32969 \phi_{N-\frac{3}{2}} - 1.22917 \phi_{N-\frac{5}{2}} + 1.22396 \phi_{N-\frac{7}{2}} \\ & - 0.71094 \phi_{N-\frac{9}{2}} + 0.23073 \phi_{N-\frac{11}{2}} - 0.03229 \phi_{N-\frac{13}{2}}). \end{aligned} \quad (1.20)$$



**Σχήμα 1.4:** Πλέγμα διακριτοποίησης προσέγγισης πρώτης παραγώγου στον κόμβο  $N-1$ .



**Σχήμα 1.5:** Πλέγμα διακριτοποίησης προσέγγισης πρώτης παραγώγου στον κόμβο  $N-1$ .

Σύμφωνα με το αριθμητικό σχήμα χωρικής διακριτοποίησης για τον κόμβο  $N-1$ , κάνουμε χρήση των τιμών της συνάρτησης στα μέσα των υπολογιστικών κελιών καθώς και της τιμής της πρώτης παραγώγου  $\phi'_N$  του τελευταίου κόμβου. (Σχήμα 1.4)

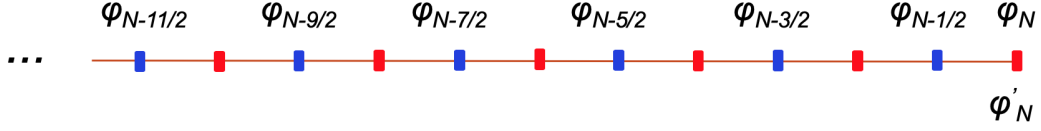
$$62\phi'_N + 1627\phi'_{N-1} = -\frac{62}{h} \left( -\frac{1104667}{39680}\phi_{N-\frac{1}{2}} + \frac{658913}{23808}\phi_{N-\frac{3}{2}} + \frac{16343}{11904}\phi_{N-\frac{5}{2}} - \frac{6941}{3968}\phi_{N-\frac{7}{2}} + \frac{15007}{23808}\phi_{N-\frac{9}{2}} - \frac{10799}{119040}\phi_{N-\frac{11}{2}} \right) \quad (1.21)$$

Λύνοντας την παραπάνω αριθμητική σχέση ως προς  $\phi'_{N-1}$  προκύπτει:

$$\phi'_{N-1} = -\frac{62}{1627} \left[ \phi'_N + \frac{1}{h} \left( -\frac{1104667}{39680}\phi_{N-\frac{1}{2}} + \frac{658913}{23808}\phi_{N-\frac{3}{2}} + \frac{16343}{11904}\phi_{N-\frac{5}{2}} - \frac{6941}{3968}\phi_{N-\frac{7}{2}} + \frac{15007}{23808}\phi_{N-\frac{9}{2}} - \frac{10799}{119040}\phi_{N-\frac{11}{2}} \right) \right]. \quad (1.22)$$

Για τη προσέγγιση της τιμής της παραγώγου  $\phi'_{N-1}$  με ένα αριθμητικό σχήμα  $O(h^6)$  τάξης ακρίβειας κάνοντας χρήση της τιμής της συνάρτησης στον τελευταίο κόμβο και στα μέσα των υπολογιστικών κελιών (Σχήμα 1.5) θα χρησιμοποιηθεί αρχικά το παραπάνω αριθμητικό σχήμα.

Η τιμή της παραγώγου  $\phi'_N$  μπορεί να προσεγγιστεί με τη χρήση του προς τα πίσω σχήματος διαφορών  $O(h^6)$  τάξης ακρίβειας με βήμα διακριτοποίησης  $\frac{h}{2}$  ως [5]



**Σχήμα 1.6:** Πλέγμα διακριτοποίησης προσέγγισης πρώτης παραγώγου στον τελευταίο κόμβο.

$$\phi'_N = \frac{2}{h} \left( \frac{49}{20} \phi_N - 6 \phi_{N-\frac{1}{2}} + \frac{15}{2} \phi_{N-1} - \frac{20}{3} \phi_{N-\frac{3}{2}} + \frac{15}{4} \phi_{N-2} - \frac{6}{5} \phi_{N-\frac{5}{2}} + \frac{1}{6} \phi_{N-3} \right), \quad (1.23)$$

όπου οι τιμές της συνάρτησης  $\phi_{N-1}$  και  $\phi_{N-2}$  προσεγγίζονται από τις τιμές της στα μέσα κάθε υπολογιστικού κελιού σύμφωνα με τους τύπους

$$\phi_{N-1} = \frac{63}{256} \phi_{N-\frac{1}{2}} + \frac{315}{256} \phi_{N-\frac{3}{2}} - \frac{105}{128} \phi_{N-\frac{5}{2}} + \frac{63}{128} \phi_{N-\frac{7}{2}} - \frac{45}{256} \phi_{N-\frac{9}{2}} + \frac{7}{256} \phi_{N-\frac{11}{2}} \quad (1.24)$$

$$\phi_{N-2} = \frac{63}{256} \phi_{N-\frac{3}{2}} + \frac{315}{256} \phi_{N-\frac{5}{2}} + \frac{105}{128} \phi_{N-\frac{7}{2}} + \frac{63}{128} \phi_{N-\frac{9}{2}} - \frac{45}{256} \phi_{N-\frac{11}{2}} + \frac{7}{256} \phi_{N-\frac{13}{2}}, \quad (1.25)$$

ενώ η τιμή  $\phi_{N-3}$  θα προσεγγιστεί ως

$$\phi_{N-3} = \frac{1}{2} \left[ \frac{75}{64} (\phi_{N-\frac{5}{2}} + \phi_{N-\frac{7}{2}}) - \frac{25}{128} (\phi_{N-\frac{3}{2}} + \phi_{N-\frac{9}{2}}) + \frac{3}{128} (\phi_{N-\frac{1}{2}} + \phi_{N-\frac{11}{2}}) \right]. \quad (1.26)$$

Άρα η τιμή της παραγώγου  $\phi'_{N-1}$  προσεγγίζεται σύμφωνα με τον τύπο

$$\begin{aligned} \phi'_{N-1} = \frac{1}{h} & (-0.1867 \phi_N + 1.37734 \phi_{N-\frac{1}{2}} - 1.31899 \phi_{N-\frac{3}{2}} + 0.14892 \phi_{N-\frac{5}{2}} + 0.01233 \phi_{N-\frac{7}{2}} - \\ & - 0.06297 \phi_{N-\frac{9}{2}} + 0.03792 \phi_{N-\frac{11}{2}} - 0.00781 \phi_{N-\frac{13}{2}}). \end{aligned} \quad (1.27)$$

Για την προσέγγιση της τιμής της πρώτης παραγώγου του τελευταίου κόμβου του πλέγματος διακριτοποίησης, κάνοντας χρήση τιμών της συνάρτησης του τελευταίου κόμβου και τιμών της στα μέσα των υπολογιστικών κελιών (Σχήμα 1.6), θα κάνουμε αρχικά χρήση του συμπαγούς σχήματος πεπερασμένων διαφορών για τη προσέγγιση της τιμής της παραγώγου στον τελευταίο κόμβο διακριτοποίησης

$$\begin{aligned}\phi'_N = -[\frac{1627}{62}\phi'_{N-1} + \frac{1}{h}(-\frac{1104667}{39680}\phi_{N-\frac{1}{2}} + \frac{658913}{23808}\phi_{N-\frac{3}{2}} + \frac{16343}{11904}\phi_{N-\frac{5}{2}} - \\ - \frac{6941}{3968}\phi_{N-\frac{7}{2}} + \frac{15007}{23808}\phi_{N-\frac{9}{2}} - \frac{10799}{119040}\phi_{N-\frac{11}{2}})].\end{aligned}\quad (1.28)$$

Συνδυάζοντας τις μαθηματικές σχέσεις 1.27 και 1.28 η προσέγγιση της παραγώγου  $\phi'_N$  θα επιτυγχάνεται με το παρακάτω αριθμητικό σχήμα τάξης ακρίβειας  $O(h^6)$

$$\begin{aligned}\phi'_N = \frac{1}{h}(-\frac{1063}{128}\phi_{N-\frac{1}{2}} + \frac{10655}{1536}\phi_{N-\frac{3}{2}} - \frac{13519}{2560}\phi_{N-\frac{5}{2}} + \frac{365}{256}\phi_{N-\frac{7}{2}} + \\ + \frac{785}{768}\phi_{N-\frac{9}{2}} - \frac{463}{512}\phi_{N-\frac{11}{2}} + \frac{105}{512}\phi_{N-\frac{13}{2}} + \frac{49}{10}\phi_N)\end{aligned}\quad (1.29)$$





## Κεφάλαιο 2

# Μοντελοποίηση διάδοσης σεισμικών κυμάτων

### 2.1 Εισαγωγή

Τα σεισμικά κύματα είναι ελαστικά κύματα που παράγονται με φυσικό ή τεχνητό τρόπο στο εσωτερικό ή στην επιφάνεια της Γης και διαδίδονται μέσα σε αυτήν. Διακρίνονται σε δύο κατηγορίες,

- τα κύματα χώρου, τα οποία αποτελούνται από εγκάρσια κύματα (S) και διαμήκη κύματα (P) και
- τα επιφανειακά κύματα, τα οποία αποτελούνται από τα κύματα τύπου Love και τα κύματα του είδους Rayleigh.

Πιο συγκεκριμένα, στα διαμήκη κύματα τα υλικά σημεία ταλαντώνονται κατά διεύθυνση παράλληλη με τη διεύθυνση διάδοσης του κύματος, σε αντίθεση με τα εγκάρσια κύματα στα οποία τα υλικά σημεία ταλαντώνονται κάθετα προς τη διεύθυνση διάδοσης του κύματος. Στο συγκεκριμένο κεφάλαιο γίνεται αναφορά στα κύματα του διδιάστατου χώρου καθώς γίνεται μελέτη των διαφορικών εξισώσεων οι οποίες τα διέπουν στις δυο χωρικές διαστάσεις. Έτσι για τη περίπτωση των επιφανειακών κυμάτων προσομοιώνονται μόνο τα κύματα τύπου Rayleigh.

Η μελέτη της διάδοσης των σεισμικών κυμάτων παρουσιάζει πολύ μεγάλο ερευνητικό ενδιαφέρον κι έχει πολύ μεγάλη πρακτική αξία, καθώς οι αξιόπιστες προσομοιώσεις τους μπορούν να οδηγήσουν στη πρόβλεψη της έντασης των σεισμικών φαινομένων και να ελαχιστοποιηθούν οι καταστροφές που προξενούνται στις κατασκευές. Ακόμα η αξιόπιστη και ρεαλιστική προσομοίωση της διάδοσης των σεισμικών κυμάτων είναι απαραίτητη σε πολλές βιομηχανικές εφαρμογές, όπως για παράδειγμα στη βιομηχανία πετρελαίου, καθώς και για την ανίχνευση και αξιολόγηση γεωλογικών δομών του υπεδάφους [1], [4], [12].

## 2.2 Μοντελοποίηση

Οι παρακάτω διαφορικές εξισώσεις εφαρμόζονται για τη μαθηματική μοντελοποίηση της διάδοσης ενός P-SV σεισμικού κύματος στις δύο διαστάσεις [1] [2],[12],[13],[15],[16]

$$\rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} \quad (2.1)$$

$$\rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} \quad (2.2)$$

$$\sigma_{xx} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial w}{\partial x} + \lambda \frac{\partial v}{\partial z} \quad (2.3)$$

$$\sigma_{zz} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial v}{\partial z} + \lambda \frac{\partial w}{\partial x} \quad (2.4)$$

$$\sigma_{xz} = \mu \left( \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad (2.5)$$

όπου  $\vec{u} = (w, v)$  οι συνιστώσες μετατόπισης του μέσου ως προς την  $x$  και  $z$  κατεύθυνση. Οι ορθές τάσεις  $\sigma_{xx}$  και  $\sigma_{zz}$  αναφέρονται ως προς στις κατευθύνσεις  $x$  και  $z$ , αντίστοιχα, ενώ η  $\sigma_{xz}$  είναι η διατμητική τάση. Η παράμετρος  $\rho$  θα αναφέρεται στη τιμή της πυκνότητας του εδάφους, ενώ οι μεταβλητές  $\lambda$  και  $\mu$  στους συντελεστές ελαστικότητας του Lamé'.

Αν θέσουμε ότι οι συνιστώσες της ταχύτητας μετατόπισης του μέσου είναι ίσες με  $u_x = \frac{\partial w}{\partial t}$  και  $u_z = \frac{\partial v}{\partial t}$ , τότε προκύπτει το παρακάτω σύστημα διαφορικών εξισώσεων

πρώτης τάξης:

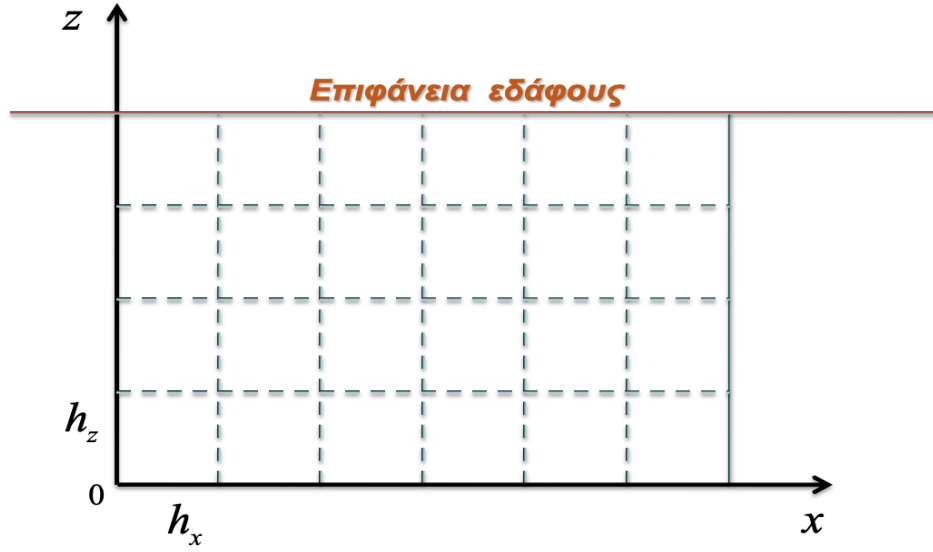
$$\begin{bmatrix} u_x \\ u_z \\ \sigma_{xx} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xz} \end{bmatrix}_t = \begin{bmatrix} 0 & 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b \\ \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_x \\ u_z \\ \sigma_{xx} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xz} \end{bmatrix}_x + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ \mu & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_x \\ u_z \\ \sigma_{xx} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xz} \end{bmatrix}_z \quad (2.6)$$

όπου  $b = \frac{1}{\rho}$ . Η διάδοση ενός σεισμικού κύματος εξαρτάται από την παράμετρο του λόγου Poisson του μέσου διάδοσης  $\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}$ . Στην ειδική περίπτωση όπου  $\lambda = \mu$  προκύπτει ότι  $\nu = \frac{1}{4}$ . Η τιμή αυτή είναι κοντινή στις τιμές του λόγου Poisson που διαθέτουν πολλά είδη πετρωμάτων, ενώ για τα υγρά μέσα διάδοσης η διατμητική τάση τείνει στο μηδέν και επομένως  $\nu \rightarrow 0.5$ .

## 2.3 Αριθμητική επίλυση

Για την αριθμητική επίλυση του συστήματος των διαφορικών εξισώσεων μέσω το οποίου μοντελοποιείται η διάδοση των σεισμικών κυμάτων στις δύο διαστάσεις (2.6), αρχικά θα χρησιμοποιήσουμε ομοιόμορφη διαμέριση για κάθε χωρική κατεύθυνση. Έστω ότι  $x \in [0, L_x]$  και  $z \in [0, L_z]$ , τότε για ομοιόμορφη διαμέριση σε  $N_x$  και  $N_z$  πλήθος υποδιαστημάτων ανά κατεύθυνση, το πλάτος τους θα είναι  $h_x = \frac{L_x}{N_x}$  και  $h_z = \frac{L_z}{N_z}$ . Το σχήμα 2.1 εμφανίζει το πλέγμα διακριτοποίησης για την περίπτωση  $N_x = 6$  και  $N_z = 4$  πλήθους των ανά κατεύθυνση υποδιαστημάτων. Το είδος του πλέγματος θα είναι εναλλασσόμενου τύπου (staggered grid) οπότε τα υπολογιστικά κελιά πλέγματος  $C_{i,j}$  ορίζονται από τους κόμβους  $(x_i, z_j)$  που βρίσκονται στις κορυφές τους, για  $x_i = ih_x$  και  $z_j = jh_z$  με  $i = 0, \dots, N_x$  και  $j = 0, \dots, N_z$ . Επίσης σε κάθε οριζόντια και κάθετη γραμμή πλέγματος ορίζονται οι ενδιάμεσοι κόμβοι τους  $x_{i-\frac{1}{2}} = (i - \frac{1}{2})h_x$  και  $z_{j-\frac{1}{2}} = (j - \frac{1}{2})h_z$  για  $i = 1, \dots, N_x$  και  $j = 1, \dots, N_z$ . Το σχήμα 2.2 εμφανίζει τους κόμβους του πλέγματος διακριτοποίησης για το προηγούμενο παράδειγμα χωρικής διακριτοποίησης, ενώ στο σχήμα 2.3 εμφανίζονται οι θέσεις των πέντε αγνώστων σε κάθε υπολογιστικό κελί. Έτσι ο συνολικός αριθμός για κάθε είδος αγνώστων θα είναι :

- $N_x(N_z + 1)$  για τη ταχύτητα μετατόπισης  $u_x$

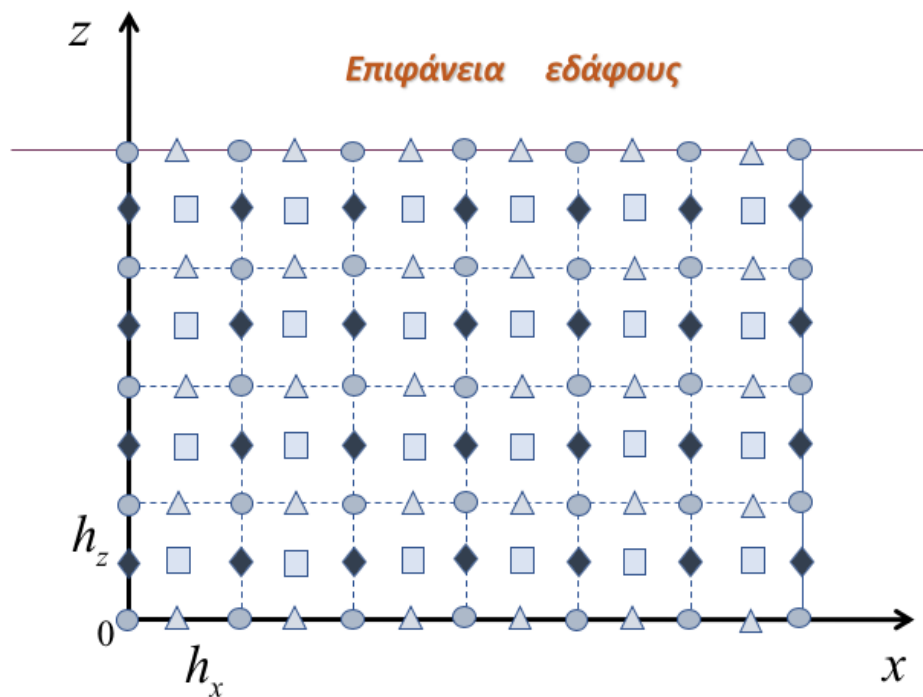


**Σχήμα 2.1:** Σχηματική αναπαράσταση χωρικού πλέγματος διακριτοποίησης.

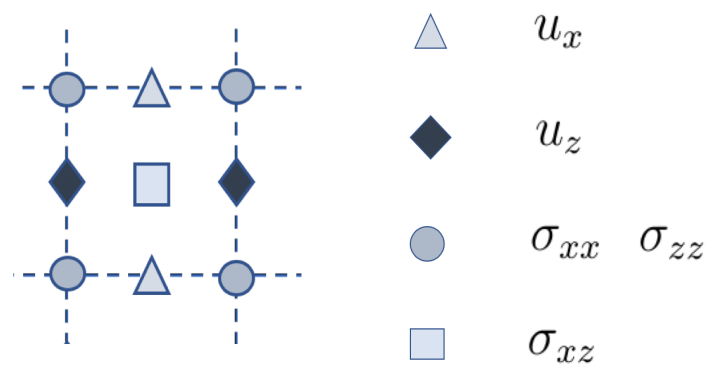
- $(N_x + 1)N_z$  για τη ταχύτητα μετατόπισης  $u_z$
- $N_x N_z$  για τη τάση  $\sigma_{xz}$
- $(N_x + 1)(N_z + 1)$  για τις τάσεις  $\sigma_{xx}$  και  $\sigma_{zz}$ .

Ως προς την χρονική διάσταση θεωρούμε ότι ο χρόνος διάδοσης του σεισμικού κύματος  $t \in [0, T]$  και σε αυτό το διάστημα περιλαμβάνεται και ο χρόνος δημιουργίας του σεισμικού κύματος από την πηγή του. Η πηγή αυτή είναι του τύπου Gauss, όπως περιγράφεται αναλυτικά στην εργασία [13]. Ο χρόνος αυτός λειτουργίας της σεισμικής πηγής  $t_s \in [0, T_s]$ , αναφέρεται σαν το αρχικό χρονικό υποδιάστημα του συνολικού χρόνου διάδοσης του σεισμικού κύματος. Το διάστημα αυτό διακριτοποιείται σε  $N_t$  ίσα χρονικά υποδιαστήματα με χρονικό βήμα  $\Delta t = \frac{T}{N_t}$  κι έτσι ο χρόνος διάδοσης του σεισμικού κύματος και ο χρόνος λειτουργίας της πηγής του θα διαθέτουν ίσα χρονικά βήματα διακριτοποίησης.

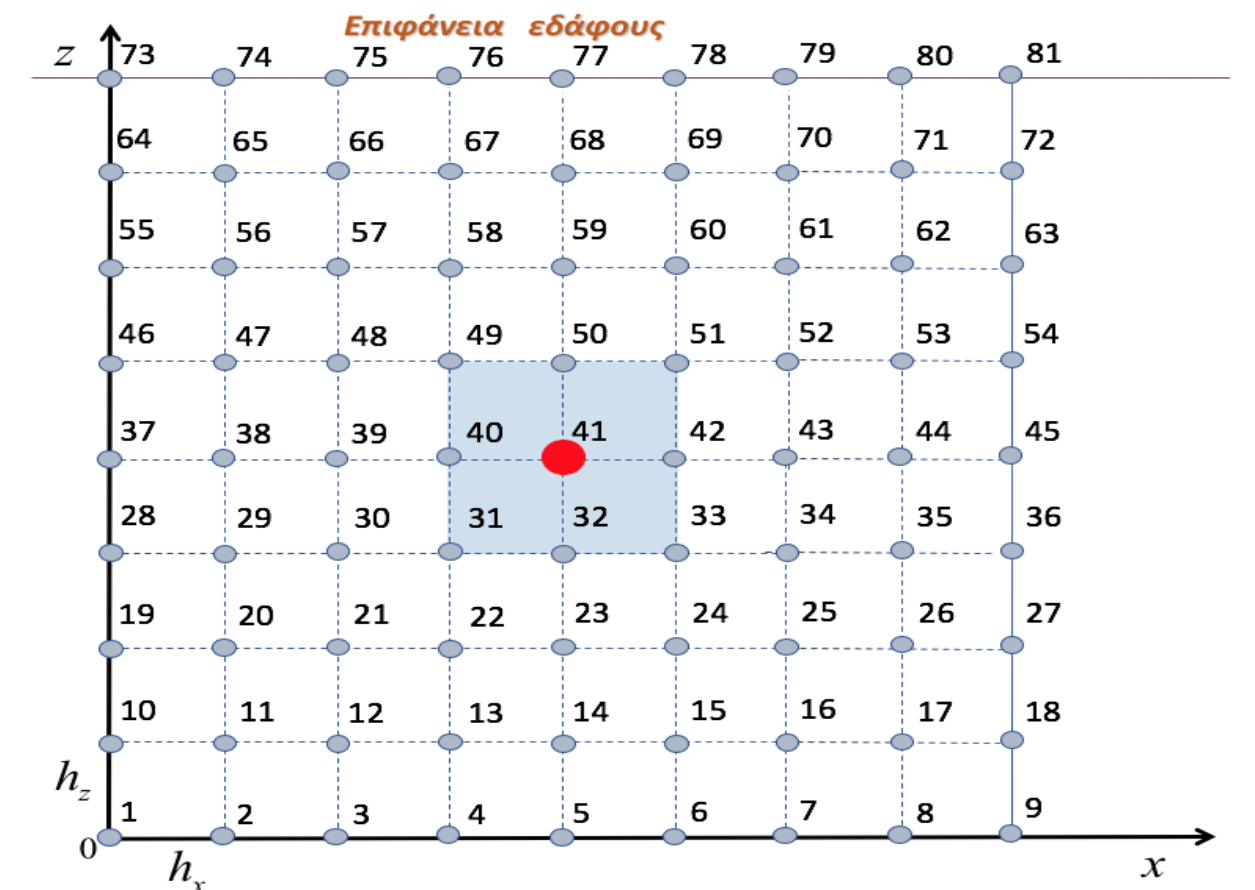
Σε κάθε κόμβο του χωρικού πλέγματος διακριτοποίησης θα αναζητηθεί μία προσεγγιστική τιμή (άγνωστος) για κάθε παράμετρο του προβλήματος, δηλαδή για κάθε ταχύτητα και τάση. Η αρίθμηση των αγνώστων βασίζεται στο λεξικογραφικό σύστημα αρίθμησης



**Σχήμα 2.2:** Σχηματική αναπαράσταση κατανομής αγνώστων σε κάθε κόμβο χωρικού πλέγματος.



**Σχήμα 2.3:** Σχηματική αναπαράσταση κατανομής αγνώστων σε κάθε υπολογιστικό κελί πλέγματος.



**Σχήμα 2.4:** Αρίθμηση των αγνώστων τιμών  $\sigma_{xx}$  ή  $\sigma_{zz}$  στο πλέγμα διακριτοποίησης και των κόμβων απομείωσης κύματος περιμετρικά της πηγής (κόμβος 41).

με διάταξη προς την επιφάνεια του εδάφους. Το σχήμα 2.4 εμφανίζει την αρίθμηση των αγνώστων τιμών  $\sigma_{xx}$  ή  $\sigma_{zz}$  για τη περίπτωση οκτώ υποδιαστημάτων ανά κατεύθυνση. Η πηγή δημιουργίας του σεισμικού κύματος βρίσκεται στο κέντρο του χωρίου και περιμετρικά της υπάρχει ένα υπολογιστικό κελί όπου στους κόμβους τους όλες οι τιμές τεχνικά μηδενίζονται κατά τη διάρκεια λειτουργίας της πηγής [10], ώστε να αναγκαστεί το σεισμικό κύμα να απομακρυνθεί από την πηγή δημιουργίας του.

Για την αποφυγή επιστροφής των σεισμικών κυμάτων στην περιοχή μελέτης όταν αυτά προσκρούσουν στο σύνορο της περιοχής θα πρέπει να δημιουργηθεί μία τεχνητή περιοχή απορρόφησης του σεισμικού κύματος. Στην παρούσα μελέτη χρησιμοποιήθηκαν οι τεχνικές κατασκευής απορροφητικών ζωνών όπως περιγράφονται στην εργασία [3]. Θα

πρέπει να σημειωθεί ότι χρησιμοποιήθηκε ο συνδυασμός και των δύο τεχνικών απορρόφησης, διότι κατά την χρήση αριθμητικών σχημάτων υψηλής ακρίβειας η εφαρμογή της μία μόνο τεχνικής δεν ήταν αρκετή για την ολοκληρωτική απόσβεση του σεισμικού κύματος.

## 2.4 Αριθμητικές μέθοδοι προσομοίωσης επιφανειακών σεισμικών κυμάτων

Για τη προσομοίωση της διάδοσης των σεισμικών κυμάτων στην ελεύθερη επιφάνεια του χωρίου εφαρμόζονται οι συνοριακές συνθήκες  $\sigma_{xz} = 0$  και  $\sigma_{zz} = 0$  στην επιφάνεια του εδάφους [6], [7], [8], [13], [15]. Η εισαγωγή των δυο συνθηκών στο σύστημα των διαφορικών εξισώσεων για τη μοντελοποίηση των σεισμικών κυμάτων με την εφαρμογή αριθμητικών μεθόδων διακριτοποίησης για εναλλασσόμενα πλέγματα μπορεί να επιτευχθεί με τη μεθοδολογία που περιγράφεται στην εργασία [7],[12]. Πιο συγκεκριμένα η εισαγωγή των δυο συνοριακών συνθηκών θα επιδράσει άμεσα στις τιμές των μεταβλητών που αναφέρονται σε όλους τους κόμβους των υπολογιστικών κελιών του συνόρου της επιφάνειας του εδάφους. Η εφαρμογή της τεχνικής H-AFDA περιλαμβάνει τα παρακάτω βήματα

- $\sigma_{zz}((N_x + 1)N_z + 1 : (N_x + 1)(N_z + 1)) = 0$
- Στον υπολογισμό  $\sigma_{xx}((N_x + 1)N_z + 1 : (N_x + 1)(N_z + 1))$  εφαρμόζεται η σχέση  $\frac{\partial u_z}{\partial z}((N_x + 1)N_z + 1 : (N_x + 1)(N_z + 1)) = -\frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \frac{\partial u_x}{\partial x}((N_x + 1)N_z + 1 : (N_x + 1)(N_z + 1))$  διότι  $\sigma_{zz} = 0$  στην επιφάνεια του εδάφους.
- Στον υπολογισμό  $\sigma_{xz}((N_z - 1)N_x + 1 : N_x N_z)$  προσεγγίζεται η τιμή της παραγώγου  $\frac{\partial u_x}{\partial z}((N_z - 1)N_x + 1 : N_x N_z)$  σύμφωνα με τη σχέση 1.20.
- Στον υπολογισμό  $\sigma_{xx}((N_x + 1)(N_z - 1) + 1 : (N_x + 1)N_z)$  προσεγγίζεται η τιμή της παραγώγου  $\frac{\partial u_z}{\partial z}((N_x + 1)(N_z - 1) + 1 : (N_x + 1)N_z)$  εφαρμόζοντας τη σχέση 1.22 στην

οποία οι τιμές  $\frac{\partial u_z}{\partial z}((N_x + 1)N_z + 1 : (N_x + 1)(N_z + 1)) = -\frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \frac{\partial u_x}{\partial x}((N_x + 1)N_z + 1 : (N_x + 1)(N_z + 1))$  διότι  $\sigma_{zz} = 0$  στην επιφάνεια του εδάφους.

- Στον υπολογισμό  $\sigma_{zz}((N_x + 1)(N_z - 1) + 1 : (N_x + 1)N_z)$  προσεγγίζεται η τιμή της παραγώγου  $\frac{\partial u_z}{\partial z}((N_x + 1)(N_z - 1) + 1 : (N_x + 1)N_z)$  εφαρμόζοντας τη σχέση 1.22 στην οποία οι τιμές  $\frac{\partial u_z}{\partial z}((N_x + 1)N_z + 1 : (N_x + 1)(N_z + 1)) = -\frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \frac{\partial u_x}{\partial x}((N_x + 1)N_z + 1 : (N_x + 1)(N_z + 1))$  διότι  $\sigma_{zz} = 0$  στην επιφάνεια του εδάφους.
- Στον υπολογισμό  $u_x(N_z N_x + 1 : N_x(N_z + 1))$  προσεγγίζεται η τιμή της παραγώγου  $\frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z}(N_z N_x + 1 : N_x(N_z + 1))$  σύμφωνα με τη σχέση 1.29 στην οποία οι τιμές  $\sigma_{xz}(N_z N_x + 1 : N_x(N_z + 1)) = 0$ .
- Στον υπολογισμό  $u_z((N_z - 1)(N_x + 1) + 1 : N_z(N_x + 1))$  προσεγγίζεται η τιμή της παραγώγου  $\frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z}((N_z - 1)(N_x + 1) + 1 : N_z(N_x + 1))$  σύμφωνα με τη σχέση 1.20.
- Στον υπολογισμό  $u_x((N_z - 1)N_x + 1 : N_x N_z)$  προσεγγίζεται η τιμή της παραγώγου  $\frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z}((N_z - 1)N_x + 1 : N_x N_z)$  σύμφωνα με τη σχέση 1.27 στην οποία οι τιμές  $\sigma_{xz}(N_z N_x + 1 : N_x(N_z + 1)) = 0$ .

Η εισαγωγή των συνοριακών συνθηκών και αντίστοιχα η υλοποίηση της παραπάνω τεχνικής H-AFDA θα πρέπει να εφαρμοστεί σε κάθε χρονικό βήμα της αριθμητικής μεθόδου χρονικής διακριτοποίησης καθώς και σε κάθε ενδιάμεσο στάδιο της.



## Κεφάλαιο 3

# Μελέτη προσομοίωσης σεισμικών κυμάτων

Η ενότητα αυτή παρουσιάζει τα αποτελέσματα της συμπεριφοράς από τη προσομοίωση σεισμικών κυμάτων εφαρμόζοντας τις αριθμητικές μεθόδους που παρουσιάστηκαν στο προηγούμενο κεφάλαιο. Η εφαρμογή του προσομοιωτή αναπτύχθηκε με τη χρήση του λογισμικού Matlab.

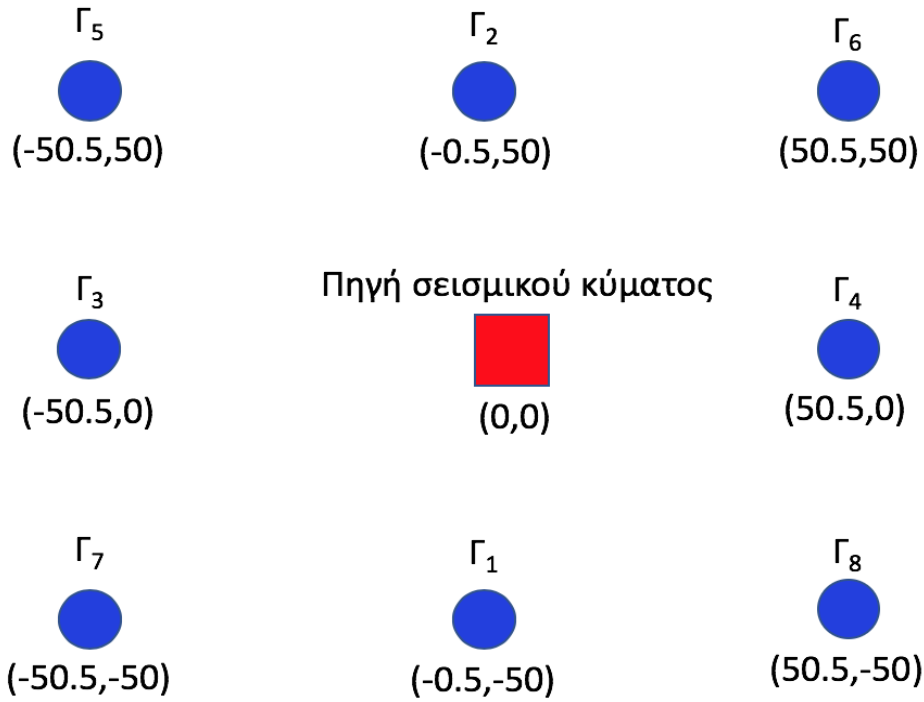
### 3.1 Προσομοίωση πρώτου προβλήματος δοκιμής

Η πρώτη ομάδα προσομοιώσεων παρουσιάζει την απεικόνιση της διάδοσης σεισμικών κυμάτων σε ομοιόμορφο χωρίο υπεδάφους με τη χρήση απορροφητικών στρωμάτων στο σύνορο της περιοχής διάδοσης. Θεωρήθηκε μία περιοχή υπεδάφους διάστασης 640m μήκους και 320m βάθους με τη πηγή δημιουργίας των κυμάτων να βρίσκεται στο κέντρο της. Οι τέσσερις συνοριακές περιοχές περιλαμβάνουν απορροφητικά όρια πλάτους 35m με συντελεστή απομείωσης 0.5. Η χωρική διακριτοποίηση είναι ένα μέτρο σε κάθε κατεύθυνση με τη χρονική διάρκεια της πηγής να είναι στα 0.062sec. Οι ιδιότητες του μέσου διάδοσης είχαν τις εξής τιμές  $V_p = 1732 \frac{m}{s}$ ,  $V_s = 1000 \frac{m}{s}$  και  $\rho = 2000 \frac{Kg}{m^3}$ , ενώ η πηγή παρήγαγε κύμα συχνότητας  $f = 50Hz$ . Το χρονικό βήμα διακριτοποίησης ήταν 0.0005 δευτερόλεπτα. Τα πρώτα τριάντα τέσσερα γραφήματα του Παραρτήματος Α' εμφανίζουν τις ταχύτητες μετατόπισης των υλικών του μέσου διάδοσης σε επιλεγμένες χρονικές στιγμές για ολόκληρο το χωρίο της προσομοίωσης. Η λειτουργία της πηγής δημιουργίας του

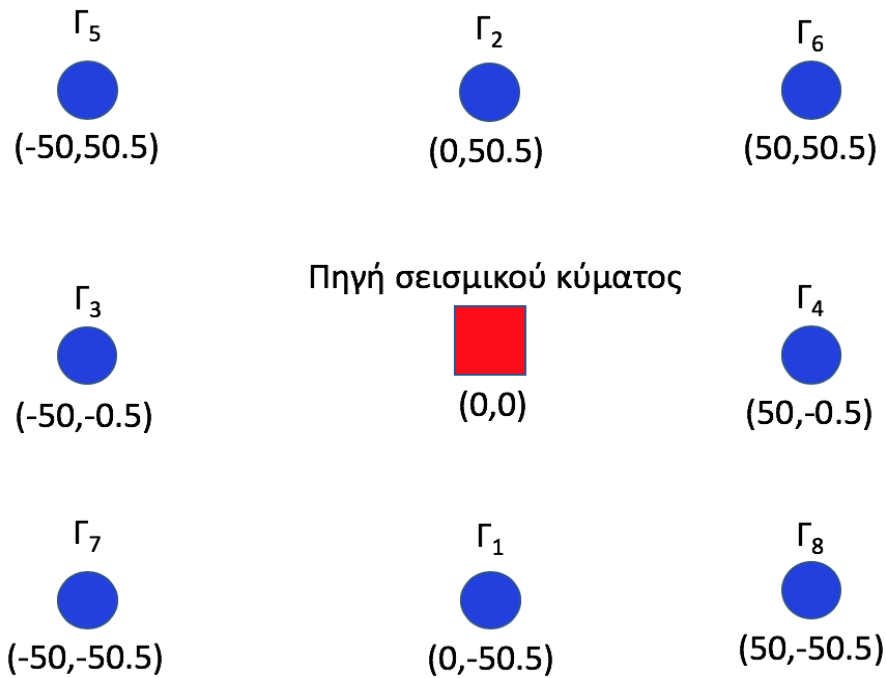
σεισμικού κύματος είναι από την αρχή της προσομοίωσης έως τη χρονική στιγμή λήξης της στα  $t = 0.062sec$ . Η διάρκεια της προσομοίωσης ήταν μέχρι τα 0.23 δευτερόλεπτα. Τα τρισδιάστατα γραφήματα των εικόνων Α'.35 και Α'.36 παρουσιάζουν τις οριζόντιες, ενώ αυτά των εικόνων Α'.37 και Α'.38 τις κατακόρυφες ταχύτητες των μετατοπίσεων για τις χρονικές στιγμές των 0.07 και 0.23 δευτερολέπτων, αντίστοιχα. Παρατηρούμε ότι τις χρονικές στιγμές  $t = 0.11sec$  και  $t = 0.19sec$  το σεισμικό κύμα έχει αρχίσει να εισέρχεται στην άνω και κάτω ζώνη απορρόφησης και στην αριστερή και δεξιά ζώνη απορρόφησης αντίστοιχα, με αποτέλεσμα το πλάτος του να παρουσιάζεται εξασθενημένο. Τέλος, παρατηρούμε ότι οι ταχύτητες των μετατοπίσεων τη χρονική στιγμή των 0.23 δευτερολέπτων έχουν μειωθεί σε βαθμό όπου μπορεί να θεωρηθεί ότι τα σεισμικά κύματα έχουν απορροφηθεί με επιτυχία από τα περιμετρικά απορροφητικά όρια.

### **3.2 Προσομοίωση δεύτερου προβλήματος δοκιμής**

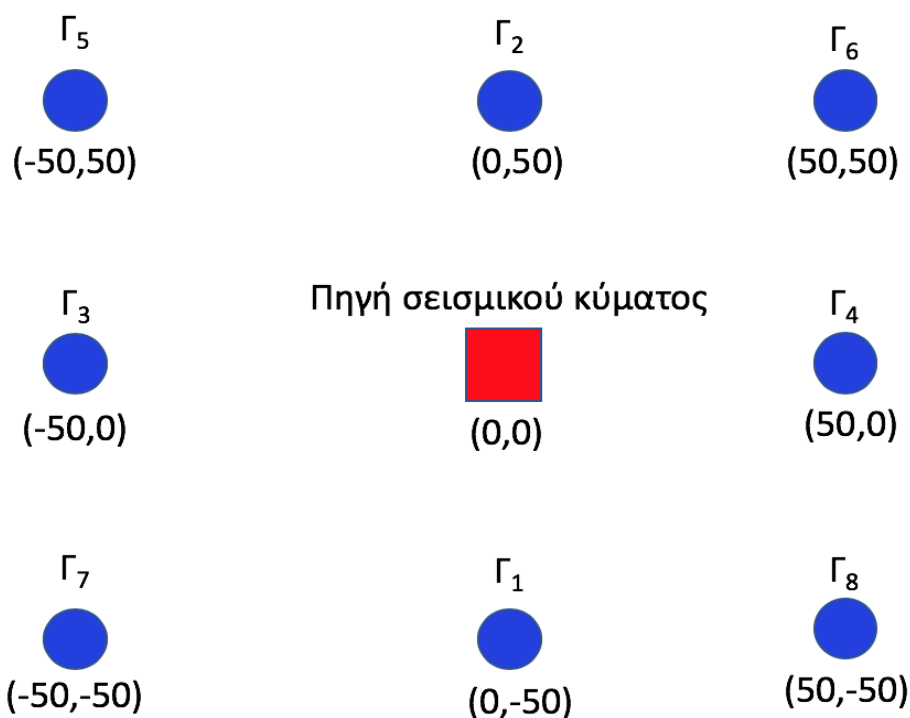
Στην ενότητα αυτή παρουσιάζεται η συμπεριφορά του αριθμητικού επιλυτή προσομοίωσης της διάδοσης των σεισμικών κυμάτων ως προς την ακρίβεια προσέγγισης σε σχέση με την ακριβή λύση για το προηγούμενο πρόβλημα δοκιμής ομοιογενούς χώρου. Η μελέτη περιλαμβάνει τη καταγραφή των τιμών οριζόντιας ταχύτητας μετατόπισης  $u_x$ , κατακόρυφης ταχύτητας μετατόπισης  $u_z$ , της διατμητικής τάσης  $\sigma_{xz}$ , των τάσεων  $\sigma_{xx}$  και  $\sigma_{zz}$  σε οκτώ σημεία επιλογής περιμετρικά της πηγής δημιουργίας του σεισμικού κύματος. Ειδικότερα, οι καταγραφές των τιμών πραγματοποιήθηκαν με τη τοποθέτηση οκτώ γεωφώνων σε απόσταση 50 μέτρων περιμετρικά της πηγής για ολόκληρη τη χρονική διάρκεια της προσομοίωσης. Στη συνέχεια υπολογίστηκαν αριθμητικά από την αναλυτική λύση του προβλήματος οι τιμές αυτές κι έγινε η γραφική αναπαράσταση των δύο ειδών μετρήσεων για όλα τα σημεία καταγραφής των γεωφώνων. Οι θέσεις των γεωφώνων στους κατάλληλους κόμβους του πλέγματος διακριτοποίησης για την καταγραφή των τιμών της οριζόντιας  $u_x$  και της κατακόρυφης ταχύτητας μετατόπισης  $u_z$  ως προς τη πηγή δημιουργίας του σεισμικού κύματος εμφανίζονται στα σχήματα 3.1 και 3.2, αντίστοιχα.



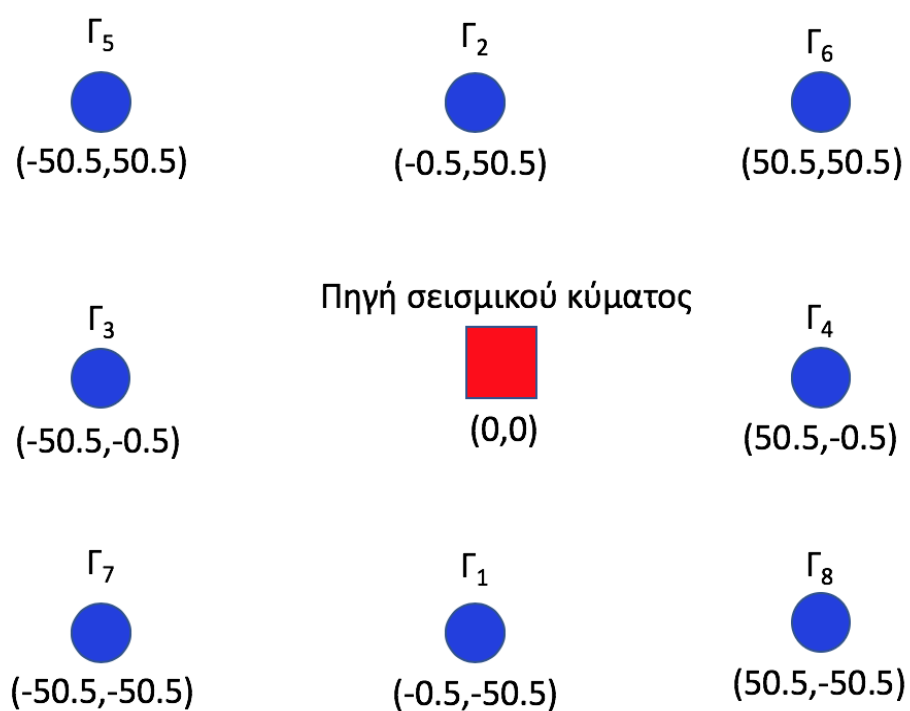
**Σχήμα 3.1:** Θέσεις γεωφώνων καταγραφής της οριζόντιας ταχύτητας μετατόπισης  $u_x$  ως προς τη πηγή δημιουργίας του σεισμικού κύματος.



**Σχήμα 3.2:** Θέσεις γεωφώνων καταγραφής της κατακόρυφης ταχύτητας μετατόπισης  $u_z$  ως προς τη πηγή δημιουργίας του σεισμικού κύματος.



**Σχήμα 3.3:** Θέσεις γεωφώνων καταγραφής των τάσεων  $\sigma_{xx}$  και  $\sigma_{zz}$  ως προς τη πηγή δημιουργίας του σεισμικού κύματος.



**Σχήμα 3.4:** Θέσεις γεωφώνων καταγραφής της μεικτής τάσης  $\sigma_{xz}$  ως προς τη πηγή δημιουργίας του σεισμικού κύματος.

Το σχήμα 3.3 εμφανίζει τις θέσεις των γεωφώνων για την καταταγραφή των τιμών των τάσεων  $\sigma_{xx}$  και  $\sigma_{zz}$ , ενώ στο σχήμα 3.4 παρουσιάζονται οι θέσεις για τις τιμές της διατμητικής τάσης  $\sigma_{xz}$ .

Ο υπολογισμός της μετατόπισης του υλικού μέσου στη θέση  $(x, z)$  τη χρονική στιγμή  $t$  μπορεί να πραγματοποιηθεί από την παρακάτω αναλυτική σχέση [13] για τη περίπτωση ομοιογενούς χώρου διάδοσης των σεισμικών κυμάτων ταχύτητας  $c$

$$v(x, z, t) = \frac{H(t - \frac{d}{c})}{2\pi\rho c^2} \int_{\frac{d}{c}}^t \frac{S(t - \tau)}{\sqrt{\tau^2 - \frac{d^2}{c^2}}} d\tau$$

όπου η συνάρτηση  $H(\cdot)$  είναι η Heaviside step συνάρτηση, ενώ η Gaussian συνάρτηση

$$S(t) = Ce^{-\sigma(t-t_I)^2}$$

με  $\sigma$ ,  $C$  σταθερές και  $t_I$  ένας θετικός αριθμός που αναφέρεται στην χρονική καθυστέρηση της πηγής δημιουργίας του σεισμικού κύματος στη θέση  $(x_s, z_s)$ , οπότε η απόσταση από τη πηγή θα είναι  $d = \sqrt{(x - x_s)^2 + (z - z_s)^2}$ .

Επειδή δεν μπορεί να υπάρξει αναλυτική έκφραση υπολογισμού του ολοκληρώματος στην παραπάνω σχέση της συνάρτησης  $v(x, z, t)$ , θα χρειαστεί μια αριθμητική μέθοδος προσέγγισης του. Η πιο συνηθισμένη είναι η μέθοδος Romberg μέσω της οποίας μπορεί να ρυθμιστεί το αριθμητικό σφάλμα προσέγγισης του ολοκληρώματος.

Ανάλογες αναλυτικές σχέσεις ισχύουν και για τον υπολογισμό των τάσεων [13].

Τα σχήματα γραφικών παραστάσεων στο Παράρτημα Β' εμφανίζουν τις καταγραφές των τιμών σε όλες τις παραπάνω θέσεις των γεωφώνων. Θα πρέπει να σημειωθεί ότι οι γραφικές παραστάσεις των μετρήσεων με μηδενικές τιμές δεν παρουσιάζονται, όπως για παράδειγμα στα γεώφωνα  $\Gamma_1$  και  $\Gamma_2$  για τις τιμές της οριζόντιας ταχύτητας μετατόπισης του υλικού  $u_x$ .

Στη συνέχεια υπολογίστηκε το σχετικό σφάλμα ως προς την ευκλείδεια νόρμα κάθε τιμής για κάθε καταμέτρηση. Ο πίνακας που ακολουθεί εμφανίζει τα σφάλματα όπως υπολογίστηκαν για ολόκληρη τη χρονική περίοδο της προσομοίωσης των 0.15 δευτερολέπτων.

	$u_x$	$u_z$	$\sigma_{xx}$	$\sigma_{zz}$	$\sigma_{xz}$
$\Gamma_1$	—	$6.06e-3$	—	$5.95e-3$	—
$\Gamma_2$	—	$6.06e-3$	—	$5.95e-3$	—
$\Gamma_3$	$4.75e-3$	—	$4.71e-3$	—	—
$\Gamma_4$	$4.75e-3$	—	$4.71e-3$	—	—
$\Gamma_5$	$6.27e-3$	$8.45e-3$	$6.59e-3$	$8.72e-3$	$6.69e-3$
$\Gamma_6$	$6.27e-3$	$8.45e-3$	$6.59e-3$	$8.72e-3$	$6.69e-3$
$\Gamma_7$	$6.27e-3$	$8.45e-3$	$6.59e-3$	$8.72e-3$	$6.69e-3$
$\Gamma_8$	$6.27e-3$	$8.45e-3$	$6.59e-3$	$8.72e-3$	$6.69e-3$

Ο πίνακας που ακολουθεί εμφανίζει τα κανονικοποιημένα σχετικά σφάλματα της ευκλείδειας νόρμας ως προς το μέγεθος του προβλήματος.

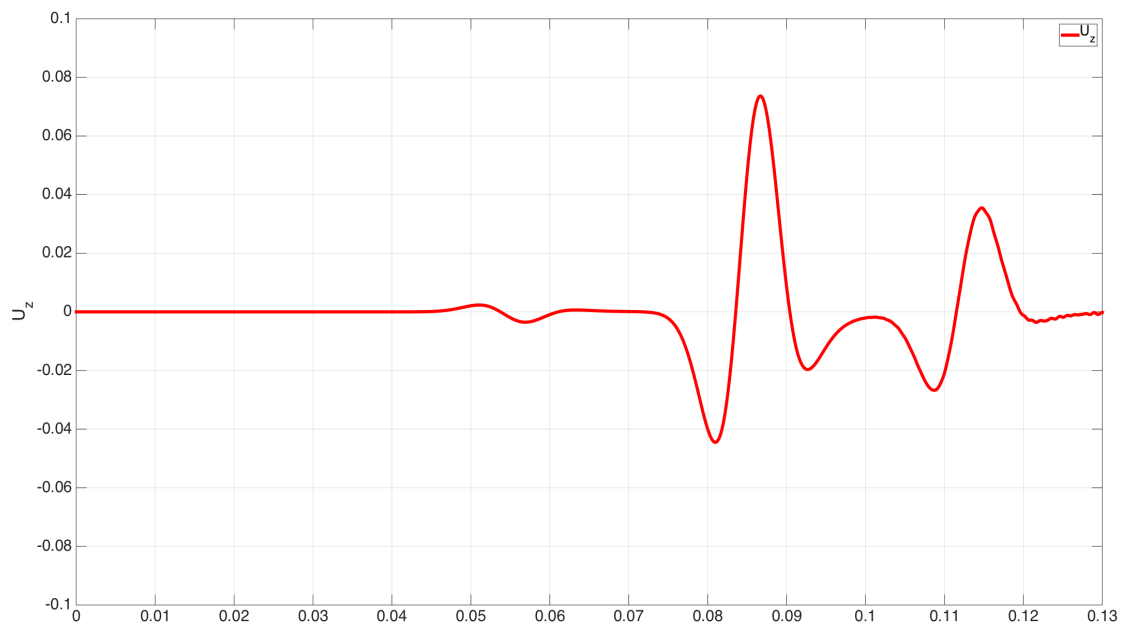
	$u_x$	$u_z$	$\sigma_{xx}$	$\sigma_{zz}$	$\sigma_{xz}$
$\Gamma_1$	—	$2.95e-8$	—	$2.89e-8$	—
$\Gamma_2$	—	$2.95e-8$	—	$2.89e-8$	—
$\Gamma_3$	$2.31e-8$	—	$2.29e-8$	—	—
$\Gamma_4$	$2.31e-8$	—	$2.29e-8$	—	—
$\Gamma_5$	$3.06e-8$	$4.12e-8$	$3.20e-8$	$4.24e-8$	$3.27e-8$
$\Gamma_6$	$3.06e-8$	$4.12e-8$	$3.20e-8$	$4.24e-8$	$3.27e-8$
$\Gamma_7$	$3.06e-8$	$4.12e-8$	$3.20e-8$	$4.24e-8$	$3.27e-8$
$\Gamma_8$	$3.06e-8$	$4.12e-8$	$3.20e-8$	$4.24e-8$	$3.27e-8$

### 3.3 Προσομοίωση τρίτου προβλήματος δοκιμής

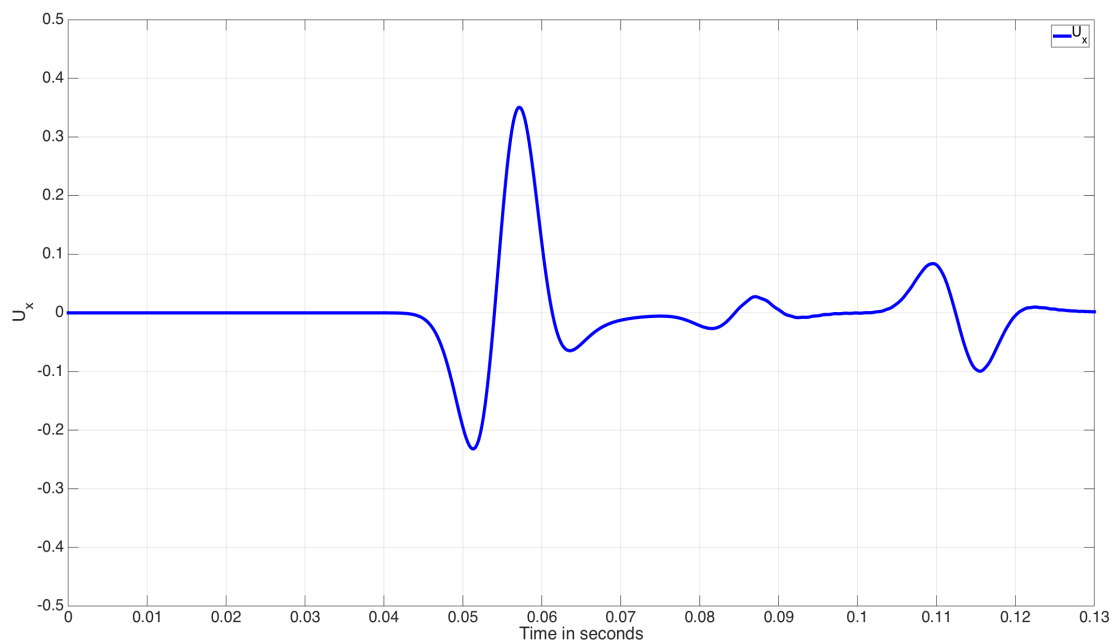
Στο τρίτο πρόβλημα δοκιμής μελετήθηκε η συμπεριφορά του αριθμητικού σχήματος προσομοίωσης σε μια περιοχή μήκους 1280 μέτρων και βάθους 640 μέτρων, η οποία αποτελούνταν από δυο ζώνες με διαφορετικά γεωλογικά χαρακτηριστικά. Ειδικότερα το πρώτο στρώμα της περιοχής ήταν μέχρι τα 400 μέτρα βάθος και είχε πυκνότητα  $\rho = 2000 \frac{Kg}{m^3}$ , ταχύτητες  $V_p = 2000 \frac{m}{s}$  και  $V_s = 1000 \frac{m}{s}$  και το σεισμικό κύμα είχε συχνότητα  $f = 50Hz$ . Τα αντίστοιχα χαρακτηριστικά του δεύτερου στρώματος ήταν  $\rho = 2500 \frac{Kg}{m^3}$ ,  $V_p = 4000 \frac{m}{s}$  και  $V_s = 2000 \frac{m}{s}$  και το σεισμικό κύμα είχε συχνότητα  $f = 50Hz$ . Η χωρική διακριτοποίηση ήταν ένα μέτρο για κάθε κατεύθυνση, ενώ η πηγή δημιουργίας του σεισμικού κύματος ήταν στα 350 μέτρα βάθους και στα 615 μέτρα μήκους από την αρχή της περιοχής με τη χρονική διάρκεια της πηγής να είναι στα 0.062sec. Το χρονικό βήμα της μεθόδου ήταν 0.0002 δευτερόλεπτα για διάρκεια προσομοίωσης 0.13 δευτερολέπτων.

Τα γραφήματα των ταχυτήτων μετατόπισης του Παραρτήματος Γ' εμφανίζουν τα στιγμιότυπα διάδοσης του σεισμικού κύματος από τα 0.05 μέχρι τα 0.1 δευτερόλεπτα της προσομοίωσης για κάθε 0.01 δευτερόλεπτο διάδοσής του.

Στη μελέτη της συμπεριφοράς του αριθμητικού σχήματος προσομοίωσης αξιολογήθηκαν οι καταγραφές των ταχυτήτων μετατόπισης σε δυο γεωφώνω, τα οποία ήταν εγκατεστημένα δεξιά της πηγής δημιουργίας του σεισμικού κύματος. Η θέση του γεωφώνου καταγραφής της οριζόντιας ταχύτητας μετατόπισης ήταν 50.5 μέτρα δεξιά και στο ίδιο βάθος με τη πηγή, ενώ αυτό της κατακόρυφης ταχύτητας ήταν 50 μέτρα δεξιά και μισό μέτρο πιο βαθιά από τη θέση της πηγής. Τα παρακάτω γραφήματα εμφανίζουν τις δυο καταγραφές για ολόκληρη τη χρονική διάρκεια της προσομοίωσης. Παρατηρούμε αρχικά τις καταγραφές των ταχυτήτων του απευθείας διαμήκους κύματος και στη συνέχεια των δυο τύπων ανακλώμενων κυμάτων. Το πρώτο ανακλώμενο είναι το διαμήκες και το δεύτερο το εγκάρσιο κύμα, των οποίων οι χρόνοι άφιξης είναι οι αναμενόμενοι.



**Σχήμα 3.5:** Καταγραφή κατακόρυφης ταχύτητας μετατόπισης δεξιά της πηγής.



**Σχήμα 3.6:** Καταγραφή οριζόντιας ταχύτητας μετατόπισης δεξιά της πηγής.



### 3.4 Προσομοίωση τέταρτου προβλήματος δοκιμής

Στο τέταρτο πρόβλημα δοκιμής μελετήθηκε η συμπεριφορά του αριθμητικού σχήματος προσομοίωσης στη δημιουργία και διάδοση των επιφανειακών (Rayleigh waves) σε μια ομοιόμορφη γεωλογικά περιοχή μήκους 1024 μέτρων και βάθους 512 μέτρων. Ειδικότερα, το υπέδαφος είχε πυκνότητα  $\rho = 2000 \frac{Kg}{m^3}$  με ταχύτητες  $V_p = 1732 \frac{m}{s}$  και  $V_s = 1000 \frac{m}{s}$ , ενώ το σεισμικό κύμα είχε συχνότητα  $f = 50Hz$ . Η χωρική διακριτοποίηση ήταν μεγέθους μισού μέτρου για κάθε κατεύθυνση, ενώ η πηγή δημιουργίας του σεισμικού κύματος ήταν στα 100 μέτρα βάθους και στα 512 μέτρα μήκους από την αρχή της περιοχής με τη χρονική διάρκεια της πηγής να είναι ως τα 0.062sec. Το χρονικό βήμα της μεθόδου ήταν 0.0002 δευτερόλεπτα για διάρκεια προσομοίωσης 0.26 δευτερολέπτων.

Τα γραφήματα των ταχυτήτων μετατόπισης του Παραρτήματος Δ' εμφανίζουν τα στιγμιότυπα διάδοσης του σεισμικού κύματος από τα 0.08 μέχρι τα 0.2 δευτερόλεπτα της προσομοίωσης για κάθε 0.01 δευτερόλεπτο διάδοσής του.

Τα γραφήματα των ταχυτήτων μετατόπισης του υλικού μέσου μας απεικονίζουν ρεαλιστικά την πρόσκρουση του διαμήκους κύματος της πηγής στην επιφάνεια του εδάφους με συνέπεια τη δημιουργία αρχικά του ανακλώμενου διαμήκους και στη συνέχεια του εγκάρσιου κύματος, τα οποία κινούνται προς το υπέδαφος. Στη συνέχεια εμφανίζεται η δημιουργία των Rayleigh κυμάτων, τα οποία έχουν μικρότερο πλάτος και ακολουθούν τη πορεία των διαμήκων στην επιφάνεια του εδάφους.



## Κεφάλαιο 4

### Συμπεράσματα

Σε αυτή τη διπλωματική εργασία παρουσιάστηκε η κατασκευή και η μελέτη της συμπεριφοράς ενός νέου αριθμητικού επιλυτή υψηλής τάξης ακρίβειας για τη προσομοίωση της διάδοσης σεισμικών κυμάτων σε δύο χωρικές διαστάσεις. Ο προτεινόμενος προσομοιωτής περιλαμβάνει αριθμητικά σχήματα χωρικής διακριτοποίησης έκτης τάξης ακρίβειας προσεγγίσεων που παράγονται από συμπαγή σχήματα πεπερασμένων διαφορών. Όσο αφορά την χρονική διακριτοποίηση χρησιμοποιήθηκε η άμεση Runge-Kutta Cash-Karp μέθοδος πέμπτης τάξης ακρίβειας. Τα αποτελέσματα των πειραμάτων προσομοίωσης μας οδήγησαν στα παρακάτω συμπεράσματα:

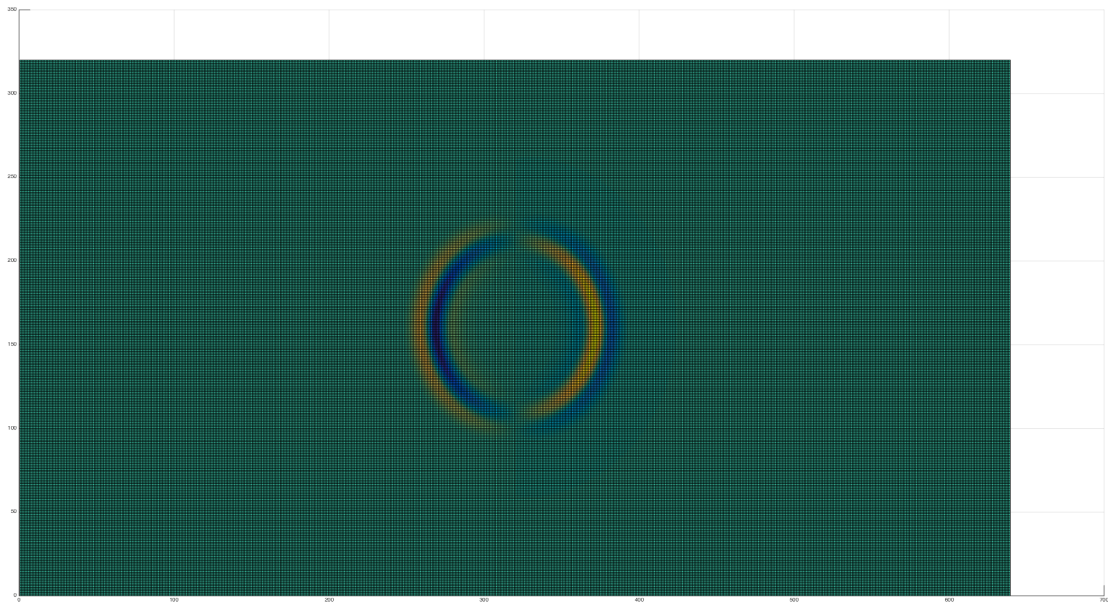
- Η εφαρμογή συμπαγών σχημάτων πεπερασμένων διαφορών χωρικής διακριτοποίησης έκτης τάξης ακρίβειας συσχετίζουν τρεις τιμές παραγώγων συνάρτησης με τέσσερις τιμές της συνάρτησης, δηλαδή μόνο δυο τιμές συνάρτησης παραπάνω από τα αντίστοιχα σχήματα τέταρτης τάξης. Έτσι η δομή του πίνακα συντελεστών του γραμμικού συστήματος παραμένει να είναι σχεδόν η ίδια με συνέπεια το υπολογιστικό κόστος εφαρμογής του σχήματος της έκτης τάξης ακρίβειας να είναι παραπλήσιο με αυτό της τέταρτης, ενώ οι απαιτήσεις μνήμης είναι οι ίδιες.
- Η επιλογή σχημάτων υψηλής τάξης ακρίβειας ως προς την χωρική και χρονική

διάσταση προσομοιώνει με λεπτομέρεια και αξιοπιστία την διάδοση των σεισμικών κυμάτων. Ειδικότερα η χρήση συμπαγών αριθμητικών σχημάτων δεν περιορίζει τη χρήση συγκεκριμένου χωρικού βήματος διακριτοποίησης.

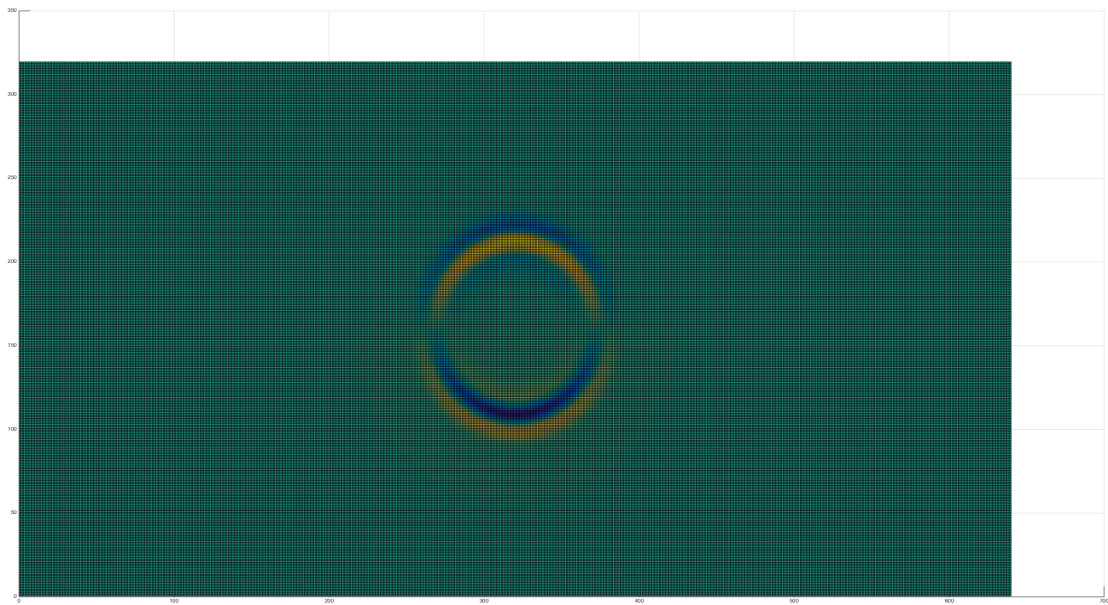
- Κατά την διάρκεια της μελέτης της συμπεριφοράς του προτεινόμενου επιλυτή εξετάστηκε η προσομοίωση των επιφανειακών κυμάτων. Όπως ήταν αναμενόμενο η χρήση εναλλασσόμενου πλέγματος σε συνδυασμό με μεθόδους υψηλής τάξης σε χώρο και χρόνο προσφέρουν ρεαλιστική προσομοίωση της πρόσκρουσης των σεισμικών κυμάτων στην επιφάνεια και στη δημιουργία των Rayleigh κυμάτων.
- Τα απορροφητικά όρια ήταν αποτελεσματικά σε όλα τα προβλήματα δοκιμής, όπως περιγράφονται στην εργασία [3] με την χρήση και των δύο τεχνικών που περιγράφονται σε αυτή.
- Ο προτεινόμενος επιλυτής εφαρμόζεται σε εναλλασσόμενο (Staggered) πλέγμα με συνέπεια η άρση της ασυνέχειας των συντελεστών των διαφορικών εξισώσεων της μοντελοποίησης διάδοσης των σεισμικών κυμάτων που προκύπτει σε περιοχές με διαφορετικά γεωλογικά χαρακτηριστικά να είναι αποτελεσματική.
- Η επέκταση του προσομοιωτή στις τρεις διαστάσεις είναι άμεση, καθώς το βασικό αριθμητικό σχήμα του αναφέρεται στο διακριτοποιημένο μονοδιάστατο πρόβλημα με συμπαγή σχήματα πεπερασμένων διαφορών.

Ο νέος προσομοιωτής που κατασκευάστηκε και αξιολογήθηκε η συμπεριφορά του μέσω προβλημάτων δοκιμής διαθέτει υψηλή τάξη ακρίβειας στη χωρική και χρονική διάσταση. Έτσι είναι σε θέση να παράγει αξιόπιστες προσομοιώσεις, οι οποίες μπορούν να αξιοποιηθούν για τη μελέτη ρεαλιστικών προβλημάτων της Μηχανικής. Ιδιαίτερα η επέκταση του στις τρεις διαστάσεις και η υλοποίηση του σε σύγχρονες υπολογιστικές αρχιτεκτονικές πολλαπλών πυρήνων θα μπορούσε να αποδειχτεί ως ένα σημαντικό εργαλείο προσομοίωσης της διάδοσης των σεισμικών κυμάτων.

## **Παράρτημα Α΄**

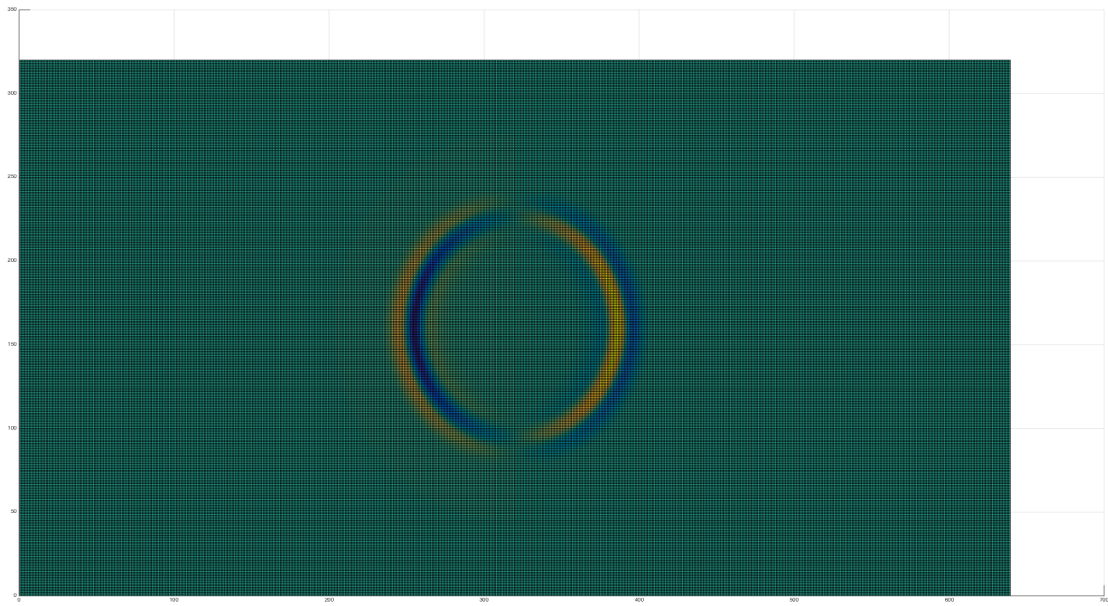


**Σχήμα Α΄.1:** Οριζόντια ταχύτητα μετατόπισης για τη χρονική στιγμή  $t = 0.062sec$  .

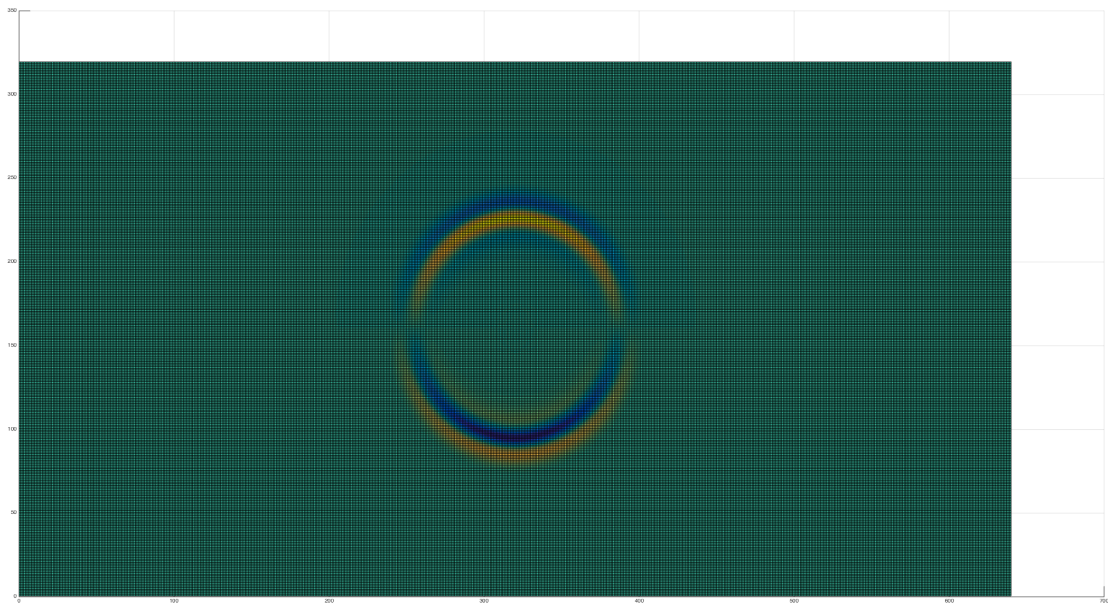


**Σχήμα Α΄.2:** Κατακόρυφη ταχύτητα μετατόπισης για τη χρονική στιγμή  $t = 0.062sec$  .



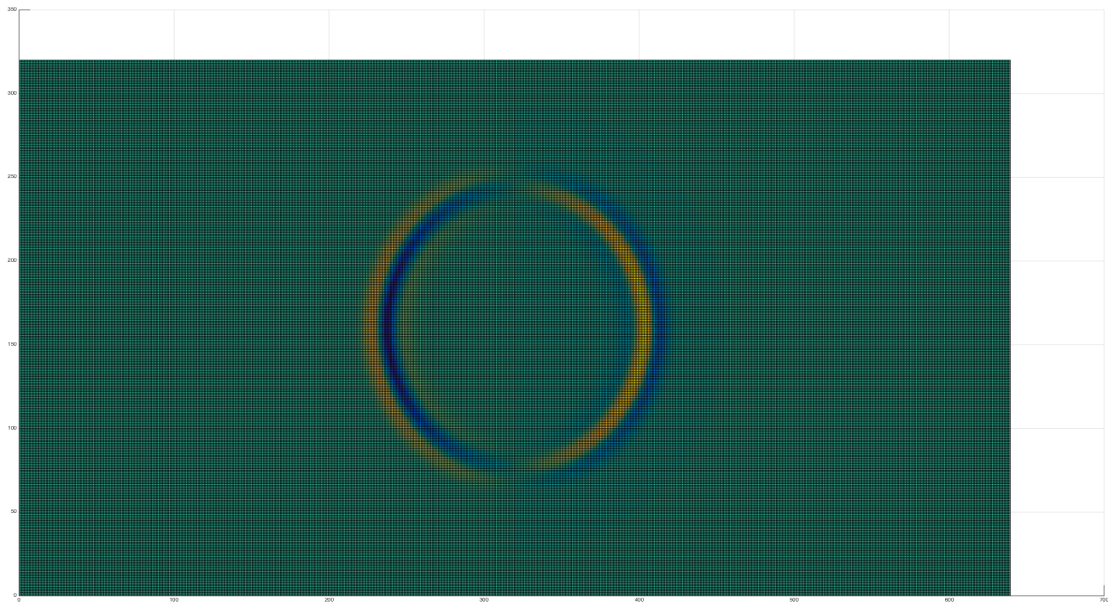


**Σχήμα Α'.3:** Οριζόντια ταχύτητα μετατόπισης για τη χρονική στιγμή  $t = 0.07sec$  .

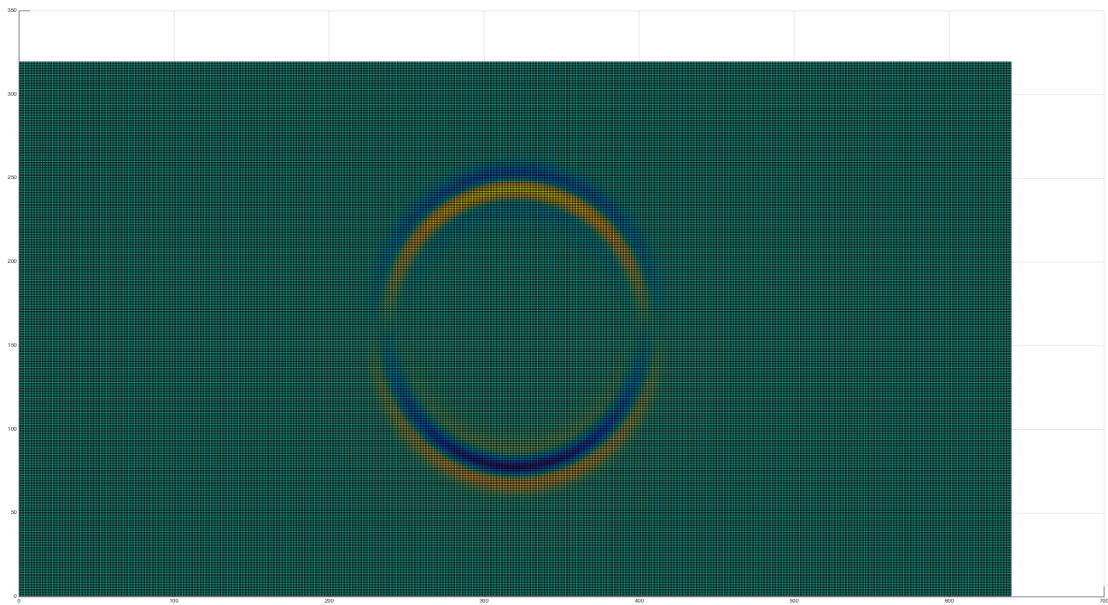


**Σχήμα Α'.4:** Κατακόρυφη ταχύτητα μετατόπισης για τη χρονική στιγμή  $t = 0.07sec$  .



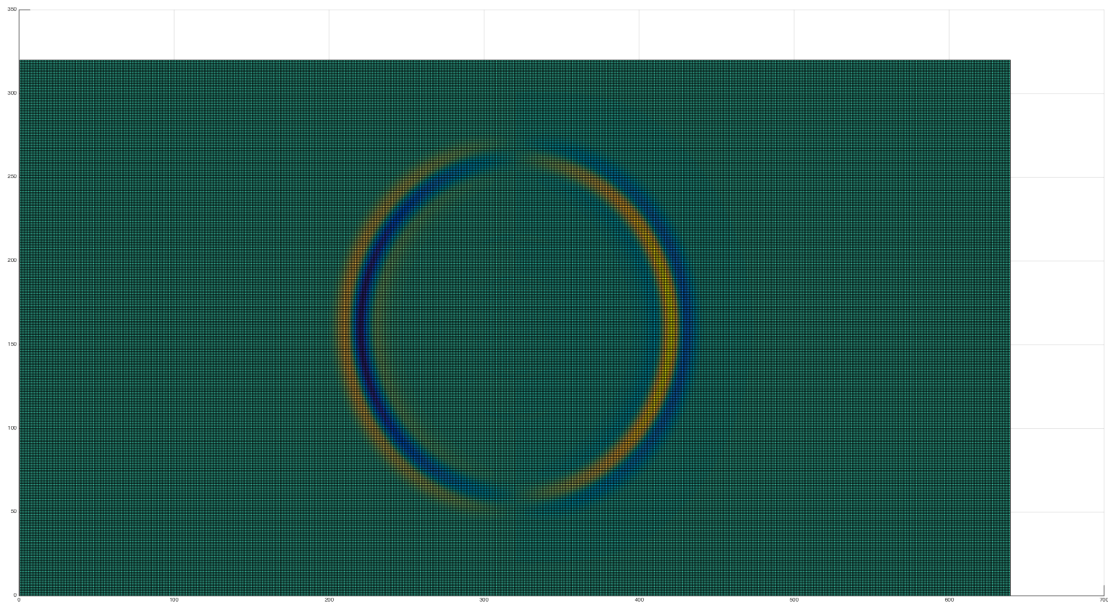


**Σχήμα Α'.5:** Οριζόντια ταχύτητα μετατόπισης για τη χρονική στιγμή  $t = 0.08sec$  .

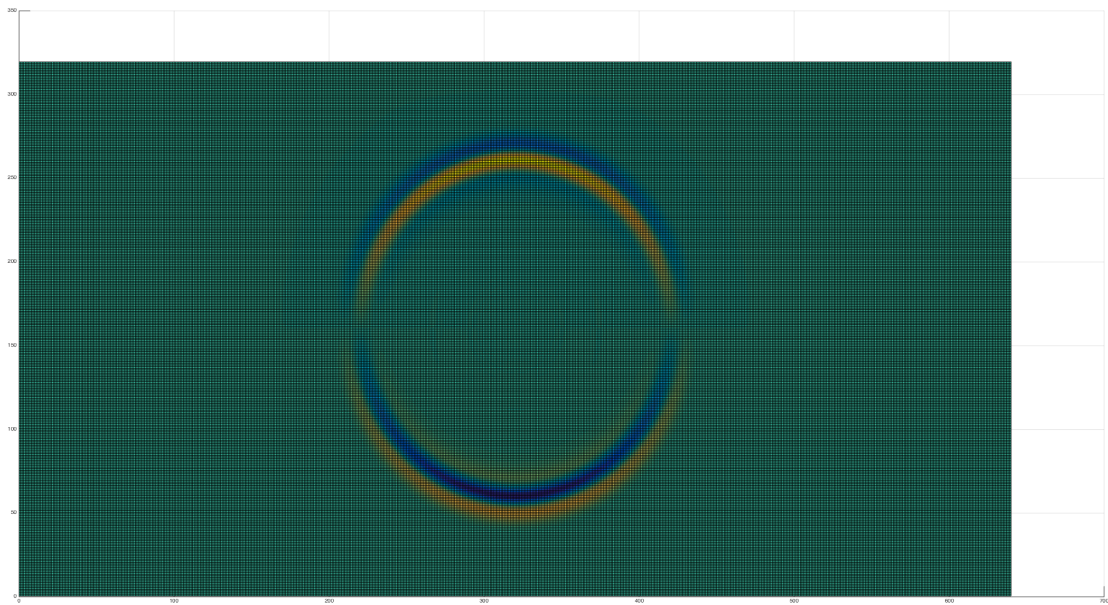


**Σχήμα Α'.6:** Κατακόρυφη ταχύτητα μετατόπισης για τη χρονική στιγμή  $t = 0.08sec$  .



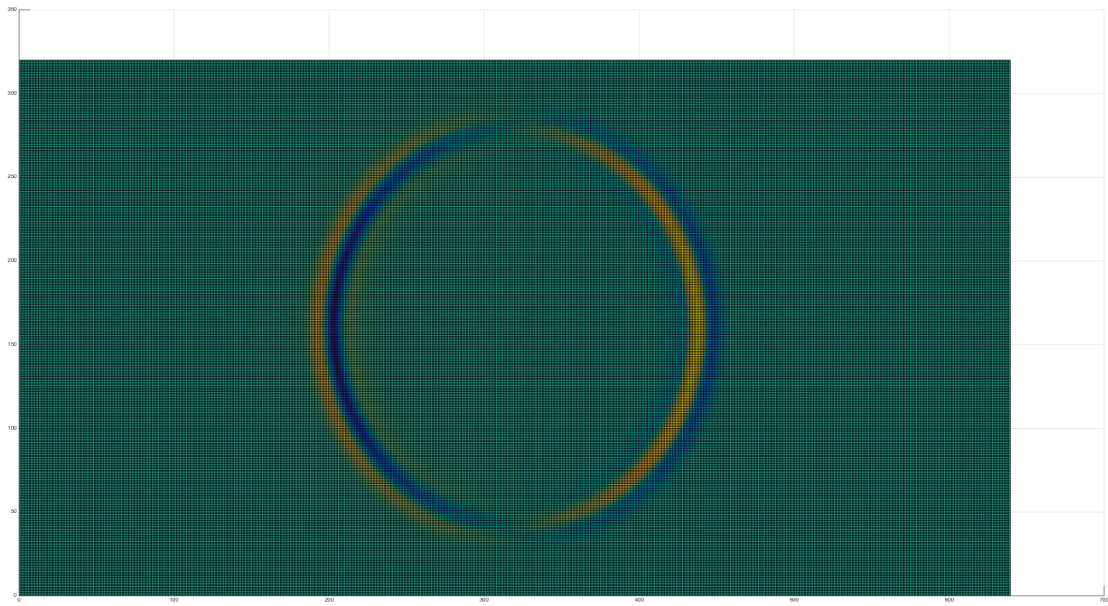


**Σχήμα Α'.7:** Οριζόντια ταχύτητα μετατόπισης για τη χρονική στιγμή  $t = 0.09sec$  .

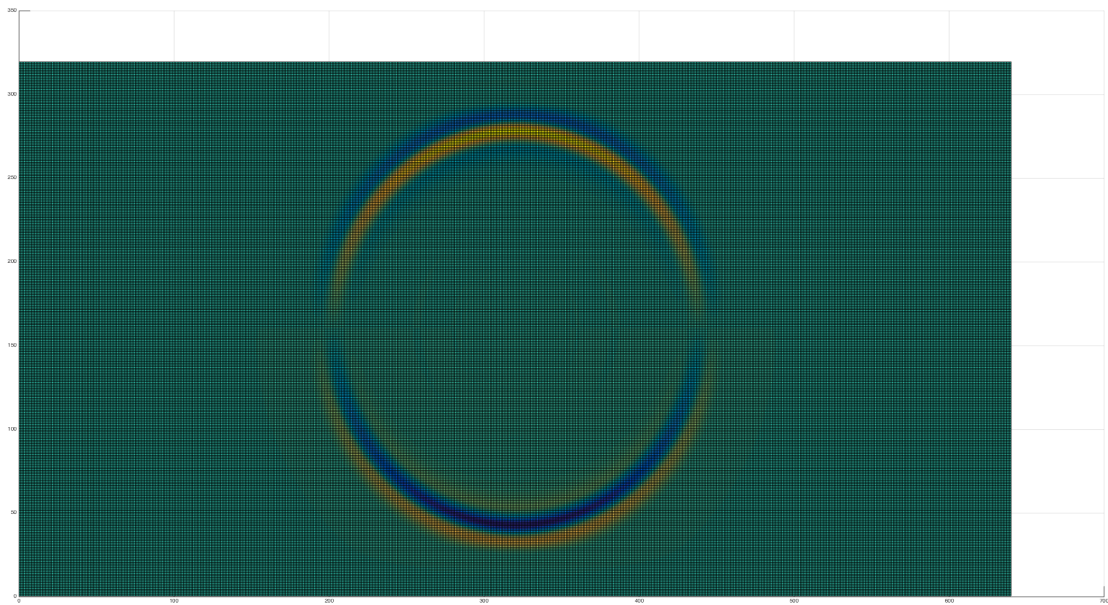


**Σχήμα Α'.8:** Κατακόρυφη ταχύτητα μετατόπισης για τη χρονική στιγμή  $t = 0.09sec$  .



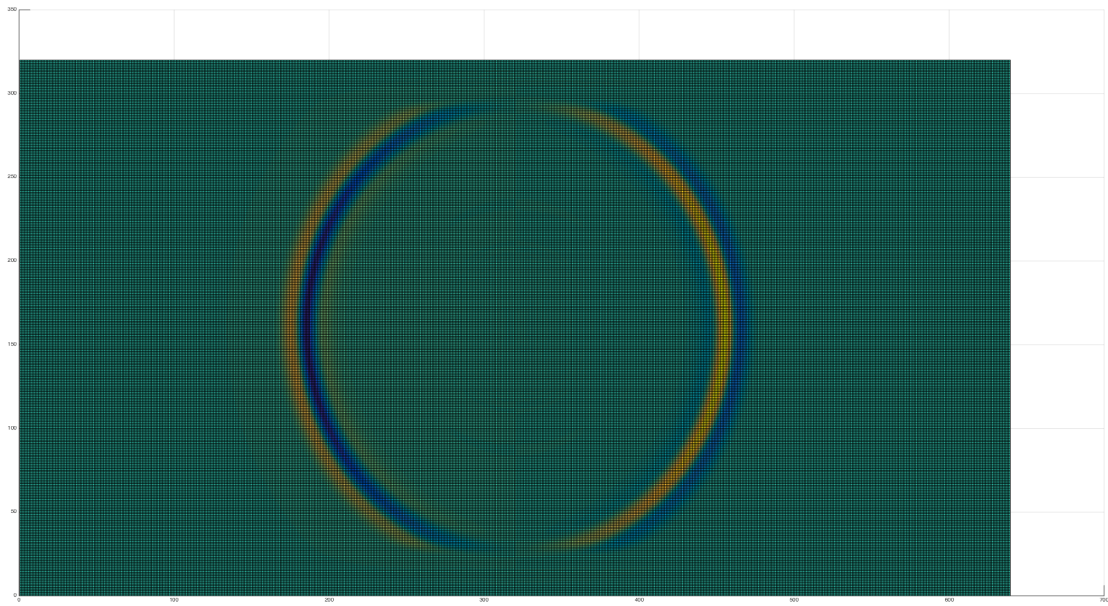


**Σχήμα Α΄.9:** Οριζόντια ταχύτητα μετατόπισης για τη χρονική στιγμή  $t = 0.1sec$  .

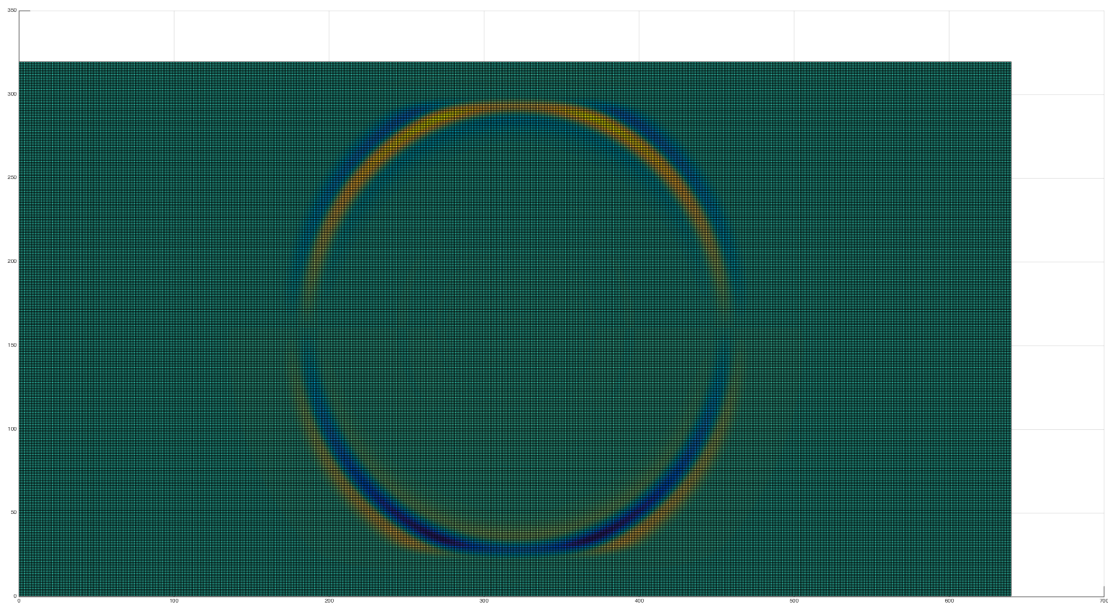


**Σχήμα Α΄.10:** Κατακόρυφη ταχύτητα μετατόπισης για τη χρονική στιγμή  $t = 0.1sec$  .



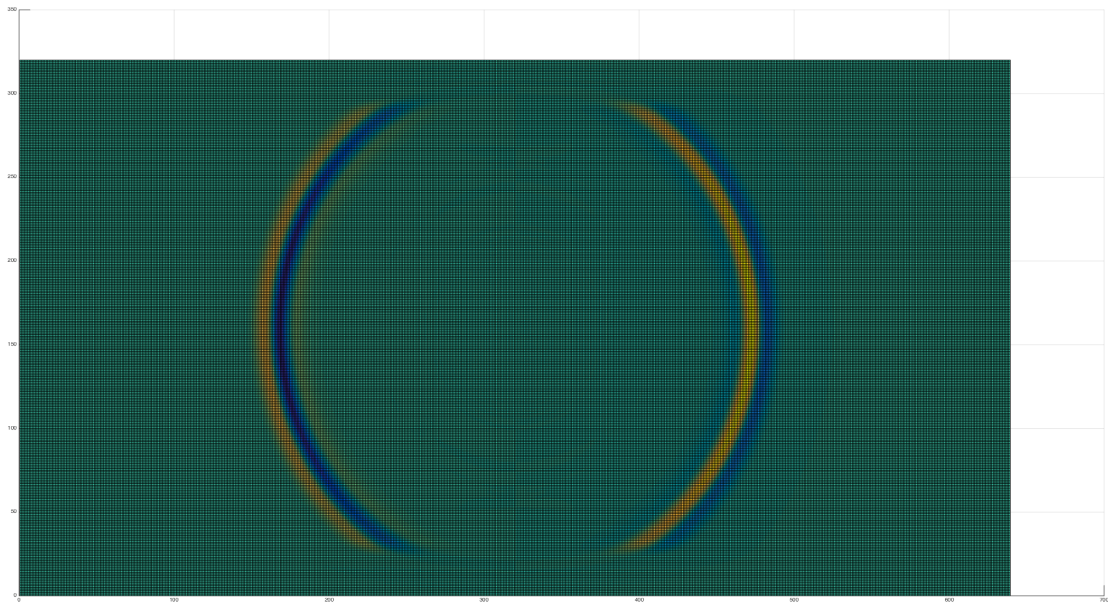


**Σχήμα Α'.11:** Οριζόντια ταχύτητα μετατόπισης για τη χρονική στιγμή  $t = 0.11sec$  .

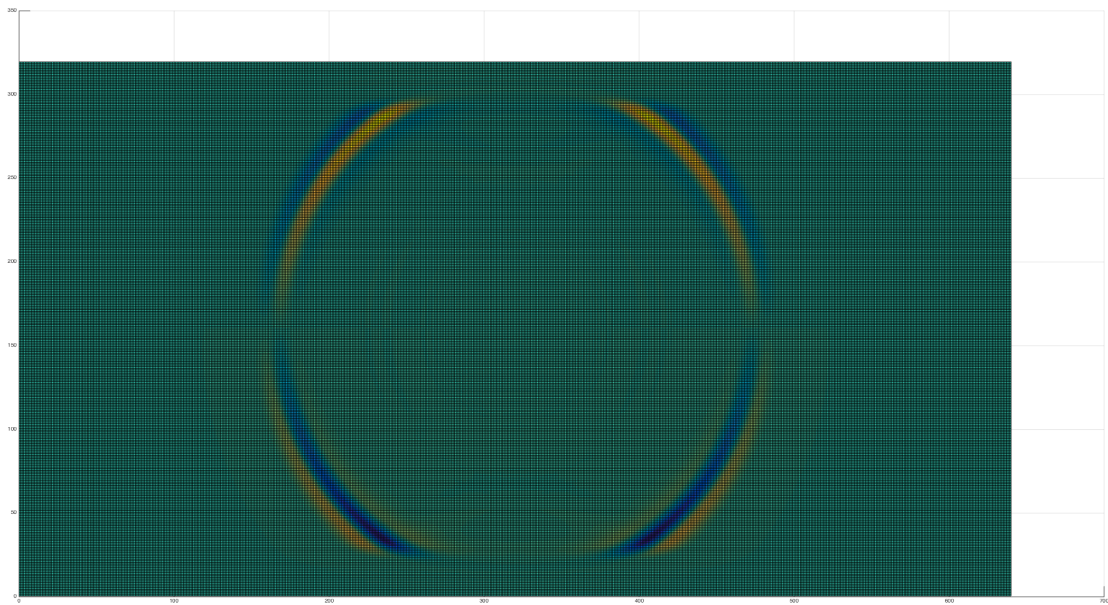


**Σχήμα Α'.12:** Κατακόρυφη ταχύτητα μετατόπισης για τη χρονική στιγμή  $t = 0.11sec$  .



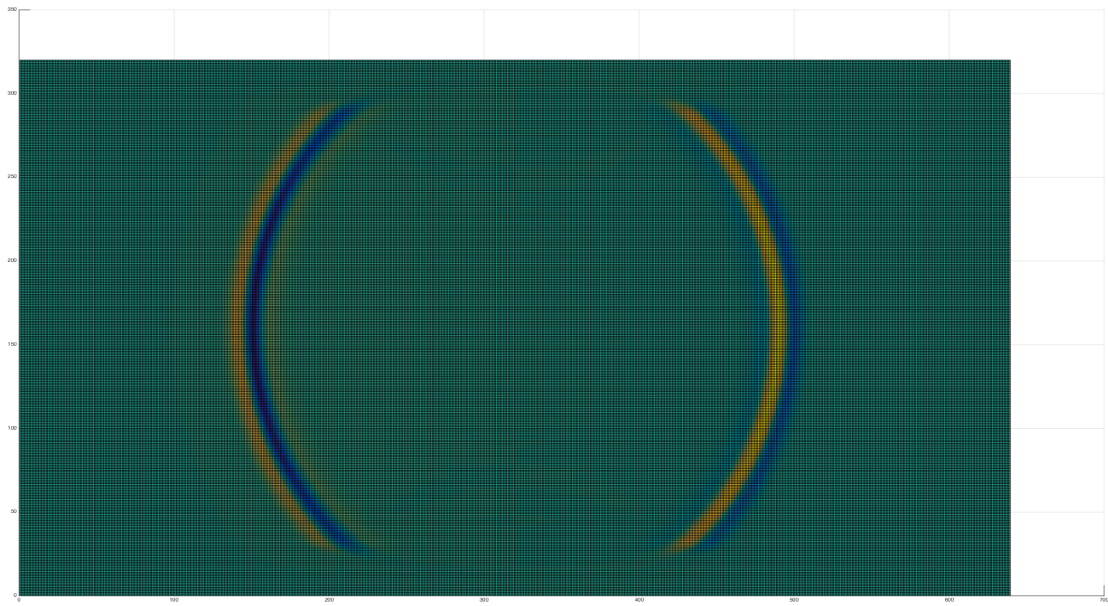


**Σχήμα Α'.13:** Οριζόντια ταχύτητα μετατόπισης για τη χρονική στιγμή  $t = 0.12sec$  .

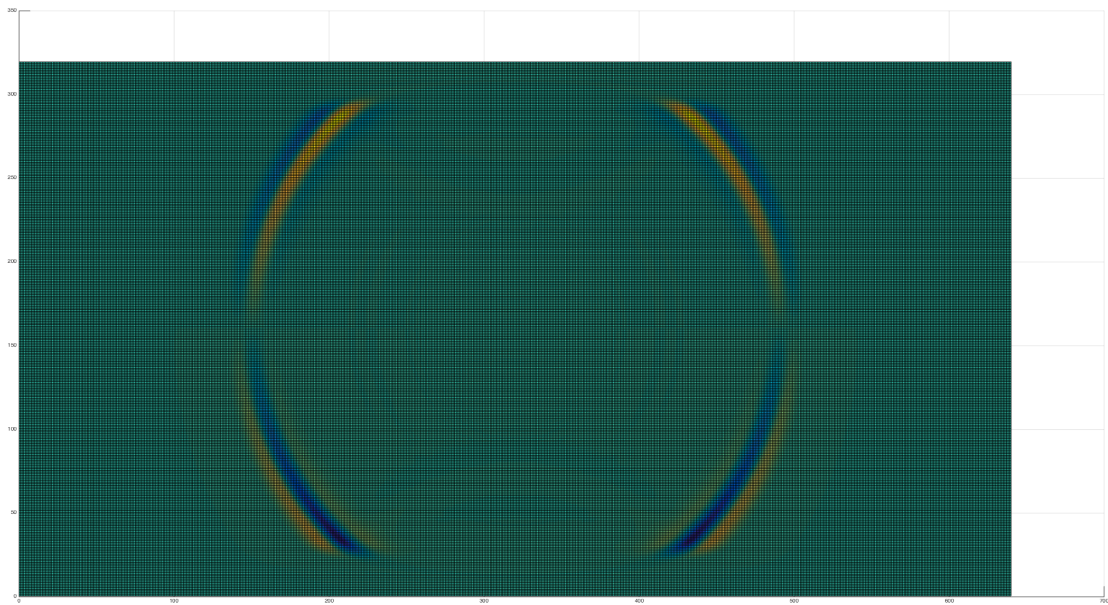


**Σχήμα Α'.14:** Κατακόρυφη ταχύτητα μετατόπισης για τη χρονική στιγμή  $t = 0.12sec$  .



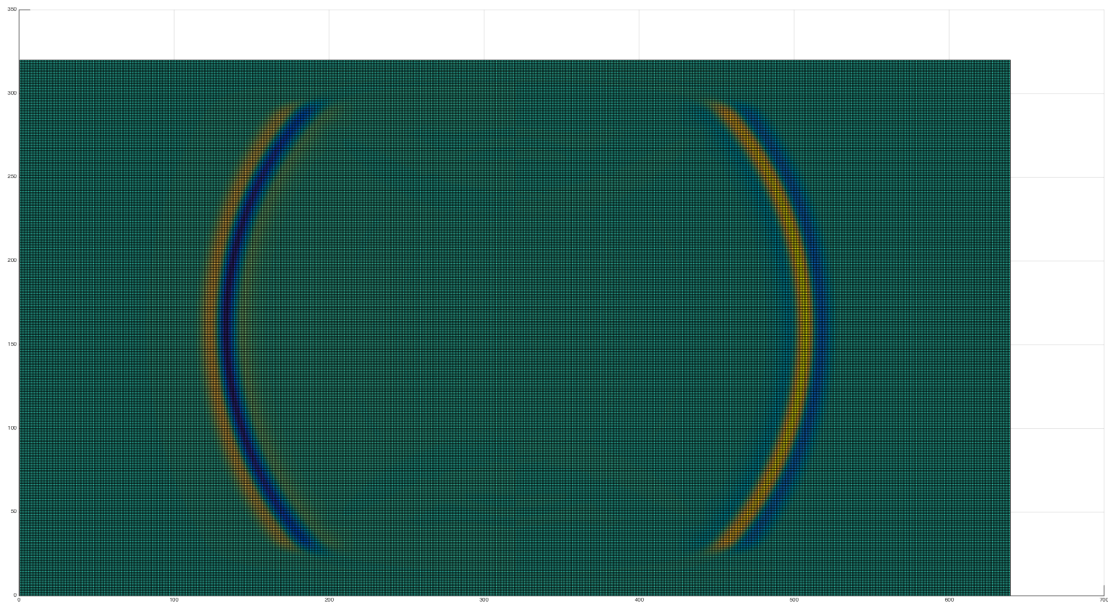


**Σχήμα Α'.15:** Οριζόντια ταχύτητα μετατόπισης για τη χρονική στιγμή  $t = 0.13sec$  .

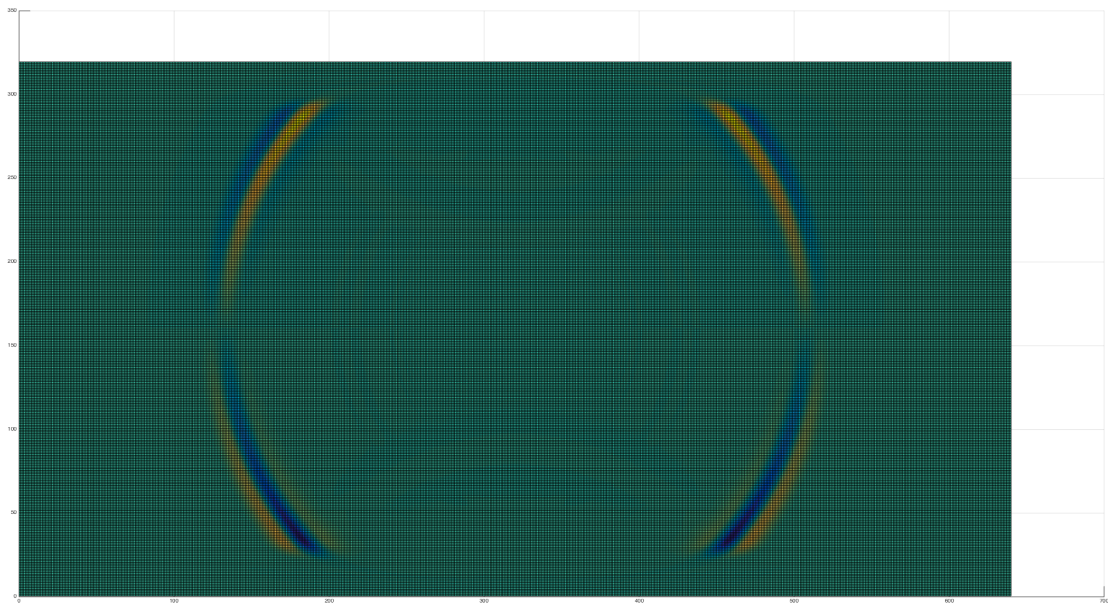


**Σχήμα Α'.16:** Κατακόρυφη ταχύτητα μετατόπισης για τη χρονική στιγμή  $t = 0.13sec$  .



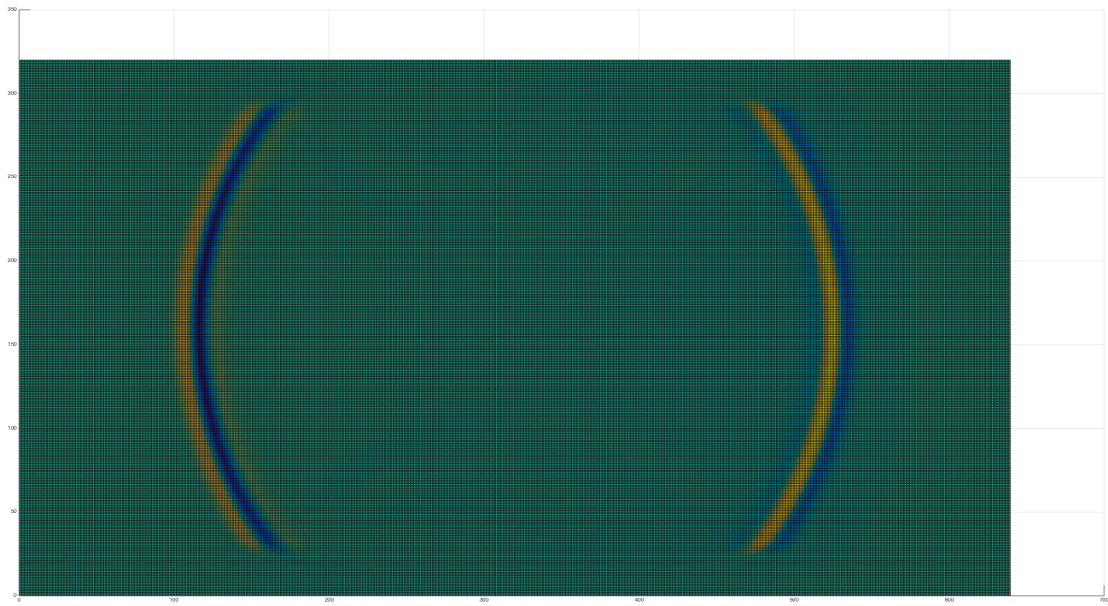


**Σχήμα Α'.17:** Οριζόντια ταχύτητα μετατόπισης για τη χρονική στιγμή  $t = 0.14sec$  .

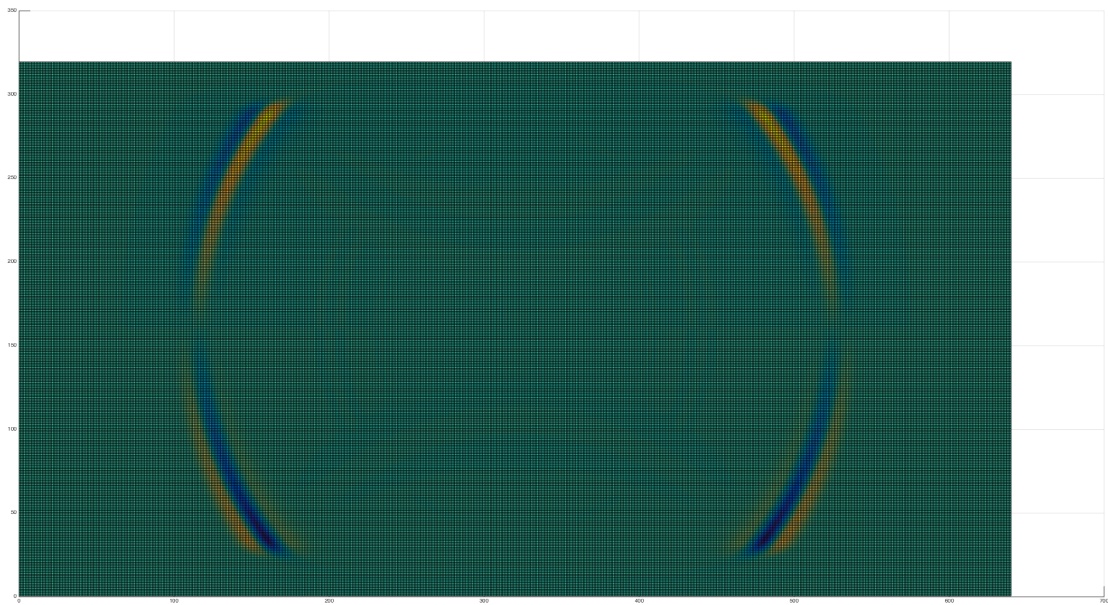


**Σχήμα Α'.18:** Κατακόρυφη ταχύτητα μετατόπισης για τη χρονική στιγμή  $t = 0.14sec$  .



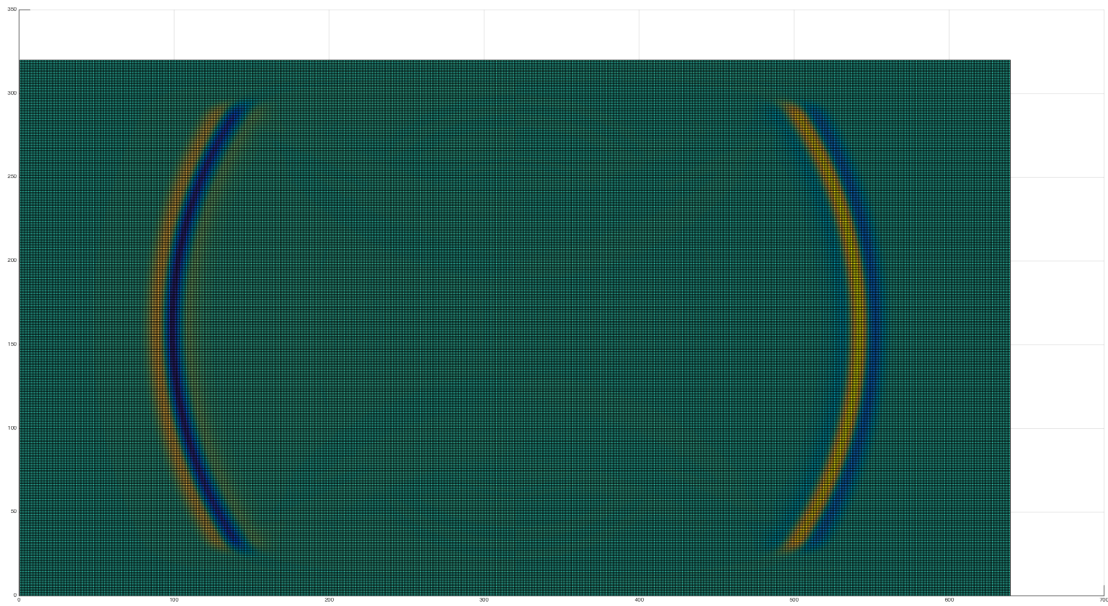


**Σχήμα Α'.19:** Οριζόντια ταχύτητα μετατόπισης για τη χρονική στιγμή  $t = 0.15sec$  .

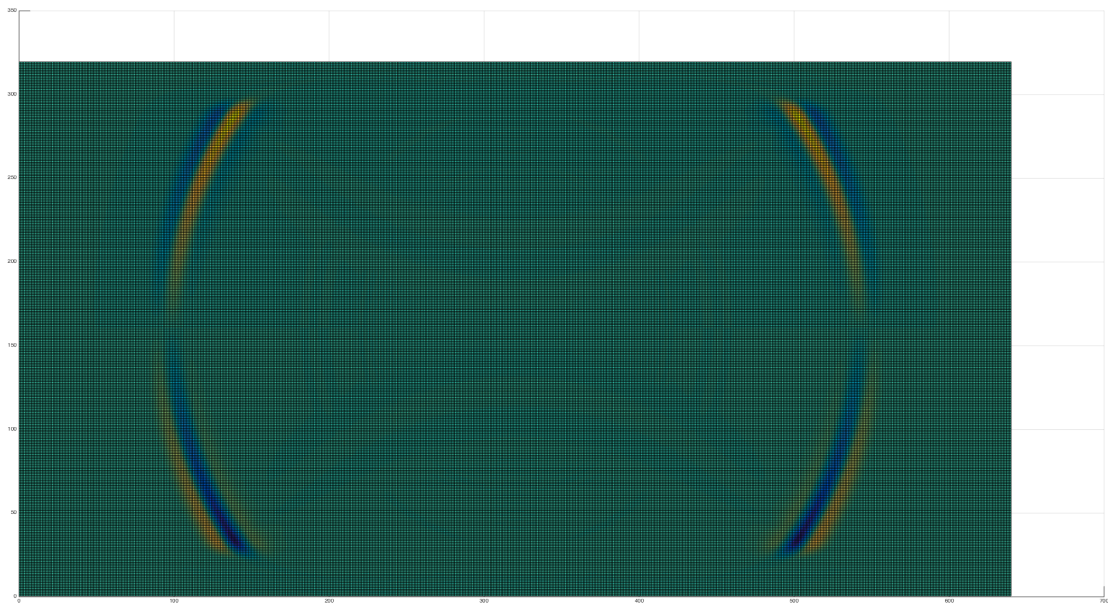


**Σχήμα Α'.20:** Κατακόρυφη ταχύτητα μετατόπισης για τη χρονική στιγμή  $t = 0.15sec$  .





**Σχήμα Α'.21:** Οριζόντια ταχύτητα μετατόπισης για τη χρονική στιγμή  $t = 0.16sec$  .

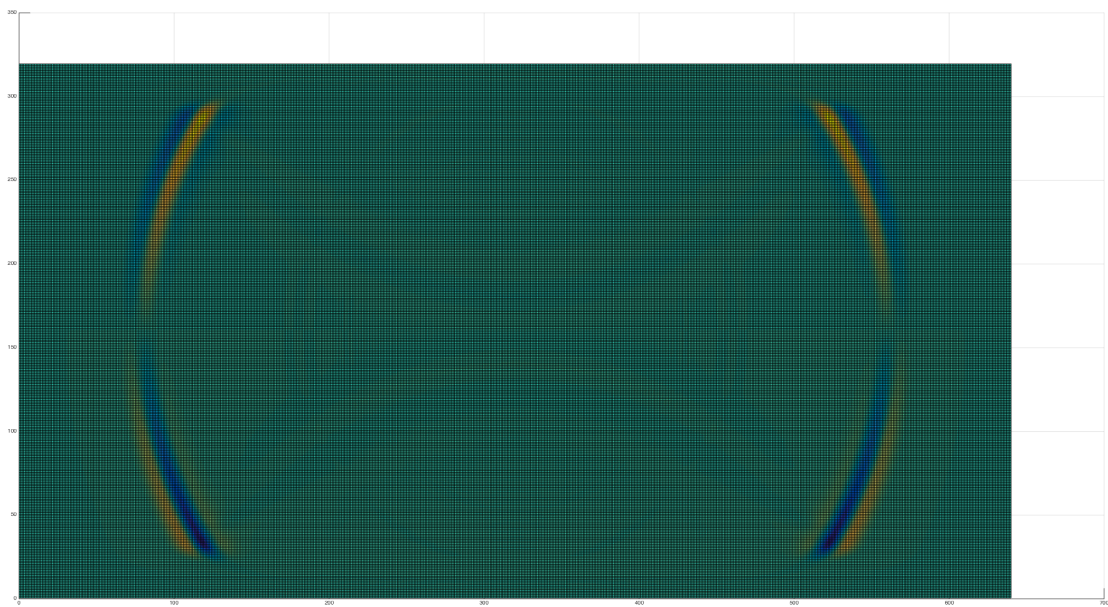


**Σχήμα Α'.22:** Κατακόρυφη ταχύτητα μετατόπισης για τη χρονική στιγμή  $t = 0.16sec$  .





**Σχήμα Α'.23:** Οριζόντια ταχύτητα μετατόπισης για τη χρονική στιγμή  $t = 0.17sec$  .



**Σχήμα Α'.24:** Κατακόρυφη ταχύτητα μετατόπισης για τη χρονική στιγμή  $t = 0.17sec$  .





**Σχήμα Α'.25:** Οριζόντια ταχύτητα μετατόπισης για τη χρονική στιγμή  $t = 0.18sec$  .



**Σχήμα Α'.26:** Κατακόρυφη ταχύτητα μετατόπισης για τη χρονική στιγμή  $t = 0.18sec$  .





**Σχήμα Α'.27:** Οριζόντια ταχύτητα μετατόπισης για τη χρονική στιγμή  $t = 0.19sec$  .

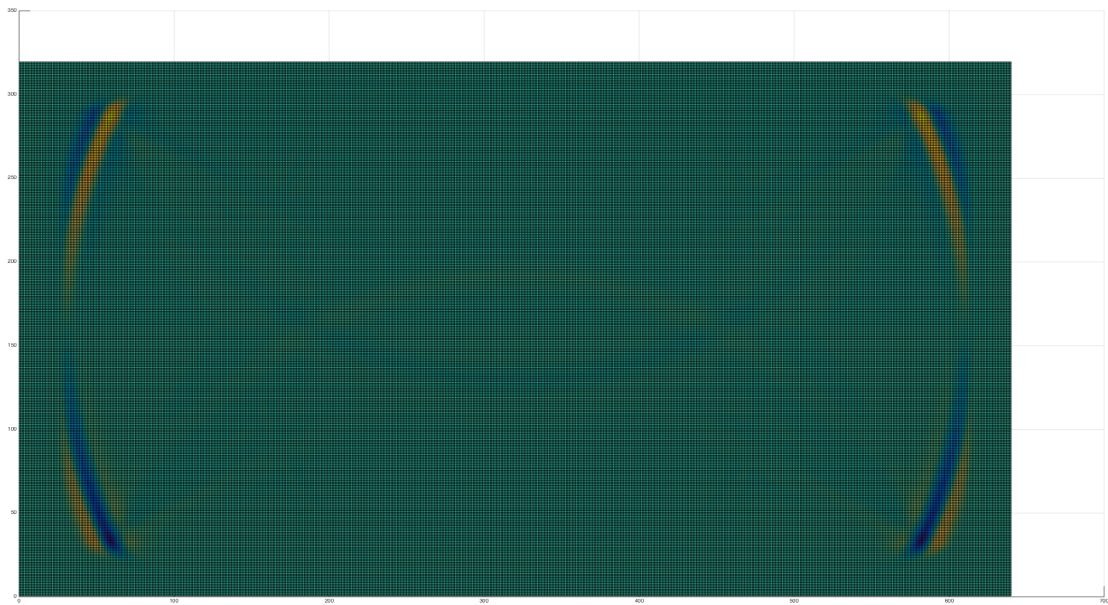


**Σχήμα Α'.28:** Κατακόρυφη ταχύτητα μετατόπισης για τη χρονική στιγμή  $t = 0.19sec$  .





**Σχήμα Α'.29:** Οριζόντια ταχύτητα μετατόπισης για τη χρονική στιγμή  $t = 0.20sec$  .

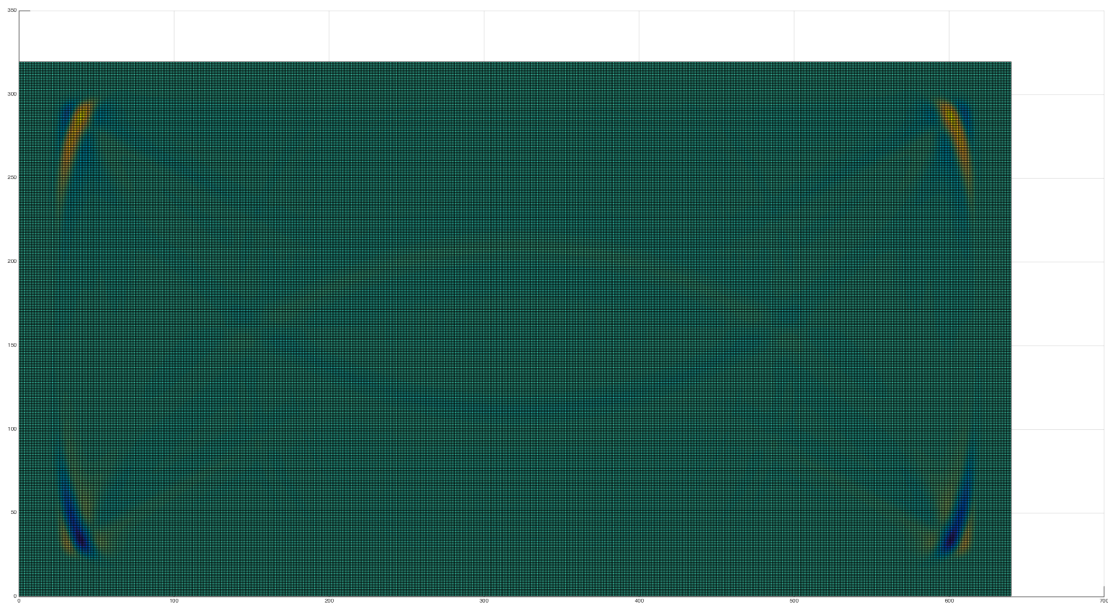


**Σχήμα Α'.30:** Κατακόρυφη ταχύτητα μετατόπισης για τη χρονική στιγμή  $t = 0.20sec$  .





**Σχήμα Α'.31:** Οριζόντια ταχύτητα μετατόπισης για τη χρονική στιγμή  $t = 0.21sec$  .

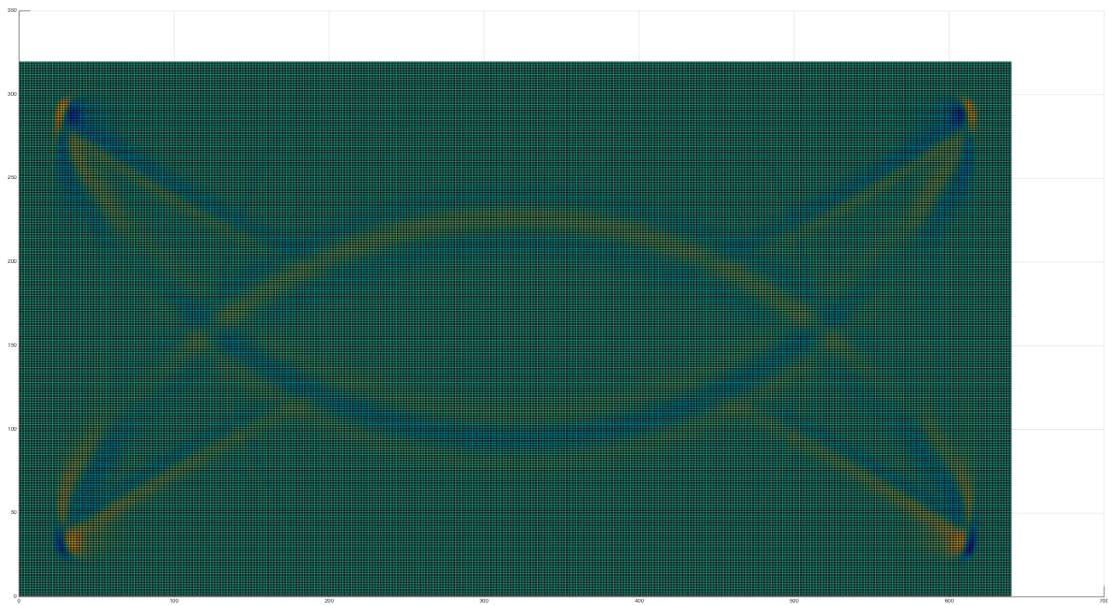


**Σχήμα Α'.32:** Κατακόρυφη ταχύτητα μετατόπισης για τη χρονική στιγμή  $t = 0.21sec$  .

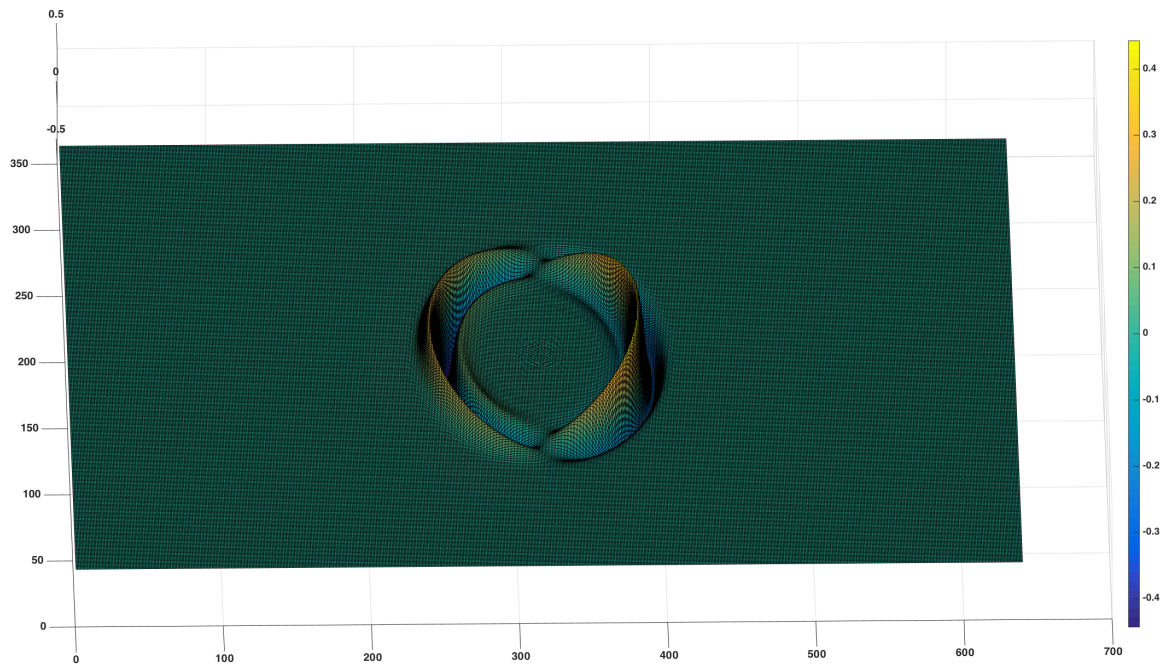




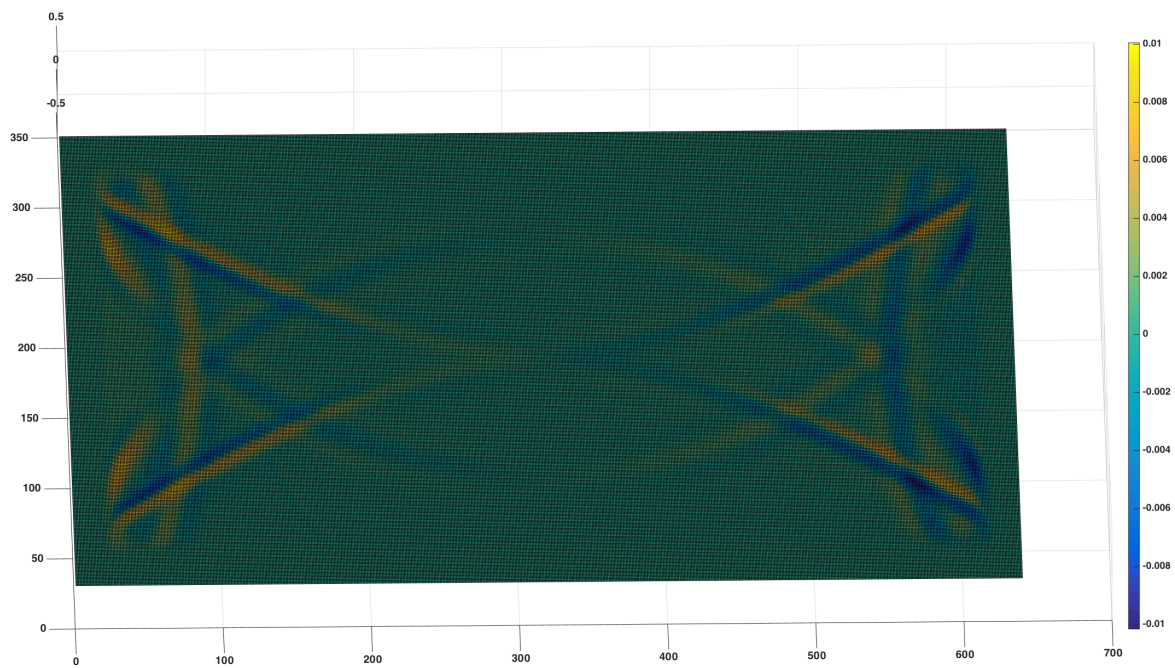
**Σχήμα Α'.33:** Οριζόντια ταχύτητα μετατόπισης για τη χρονική στιγμή  $t = 0.22sec$  .



**Σχήμα Α'.34:** Κατακόρυφη ταχύτητα μετατόπισης για τη χρονική στιγμή  $t = 0.22sec$  .

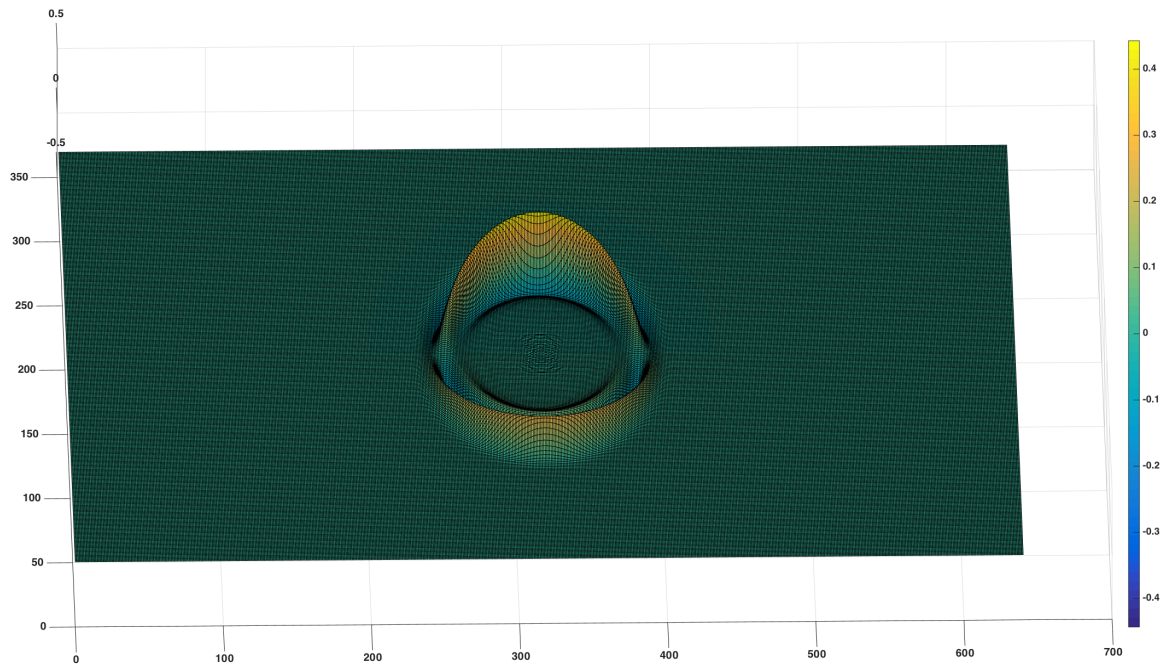


**Σχήμα Α΄.35:** Οριζόντια ταχύτητα μετατόπισης για τη χρονική στιγμή  $t = 0.07sec$  .

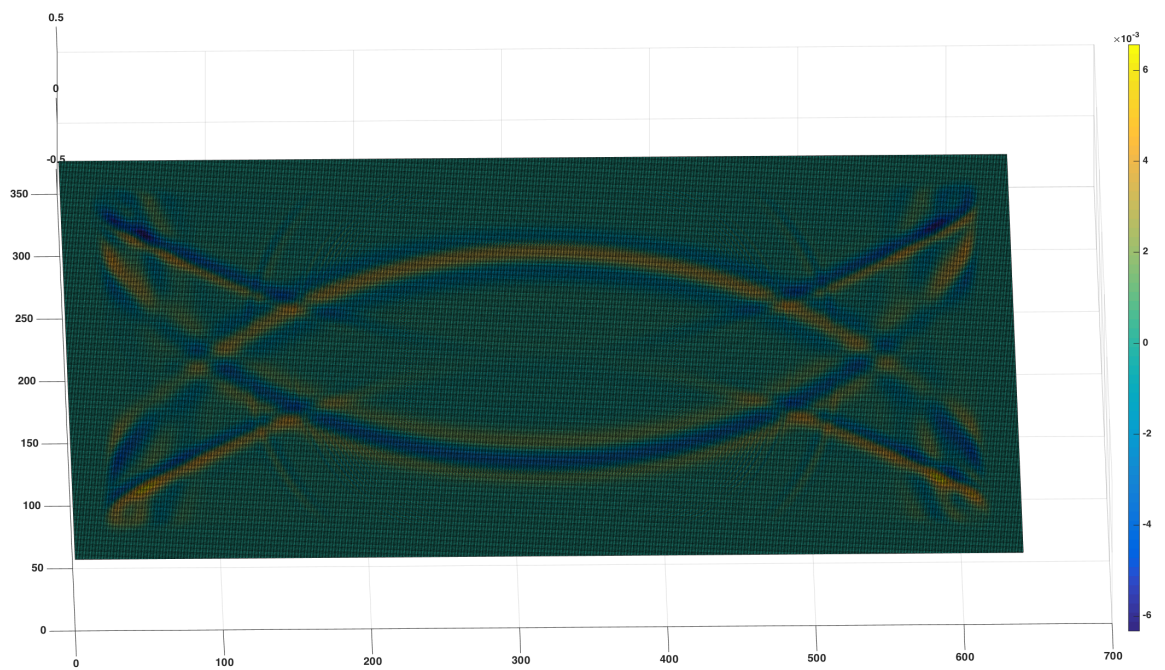


**Σχήμα Α΄.36:** Οριζόντια ταχύτητα μετατόπισης για τη χρονική στιγμή  $t = 0.23sec$  .





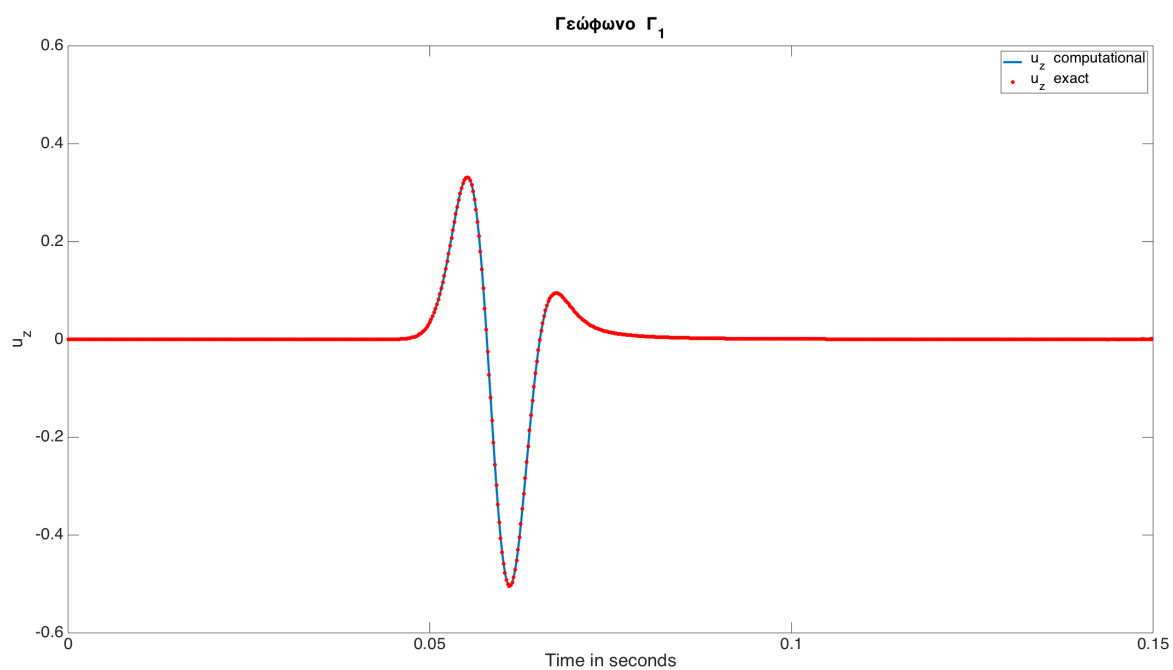
**Σχήμα Α'.37:** Κατακόρυφη ταχύτητα μετατόπισης για τη χρονική στιγμή  $t = 0.07 \text{ sec}$  .



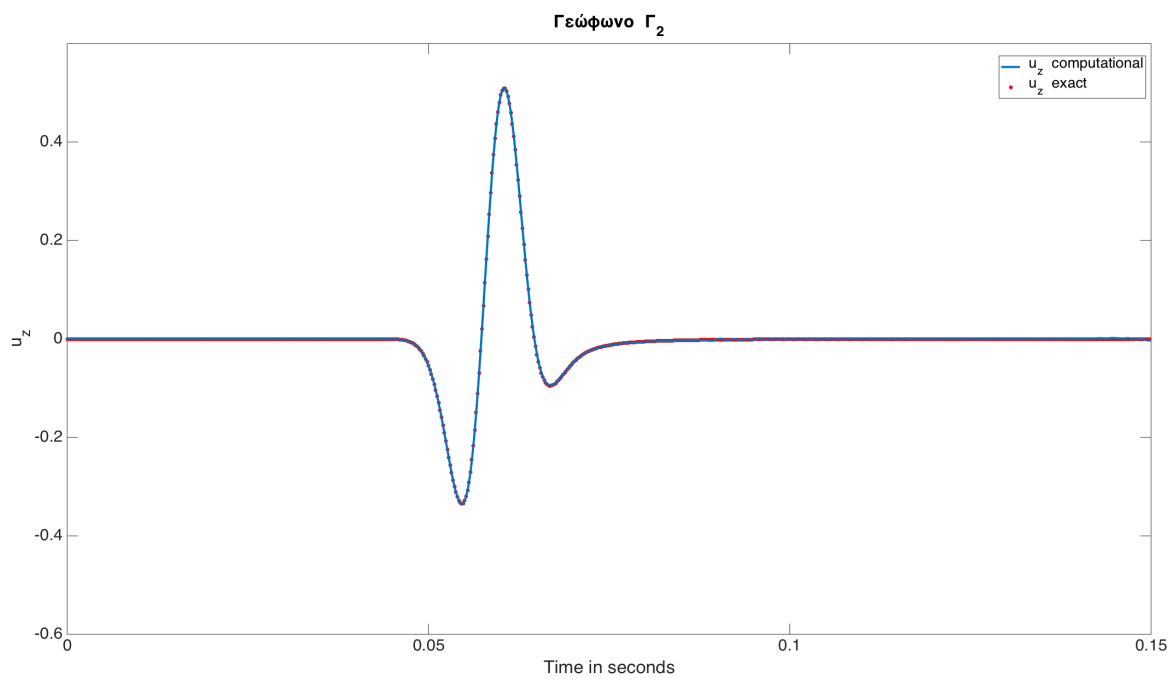
**Σχήμα Α'.38:** Κατακόρυφη ταχύτητα μετατόπισης για τη χρονική στιγμή  $t = 0.23 \text{ sec}$  .



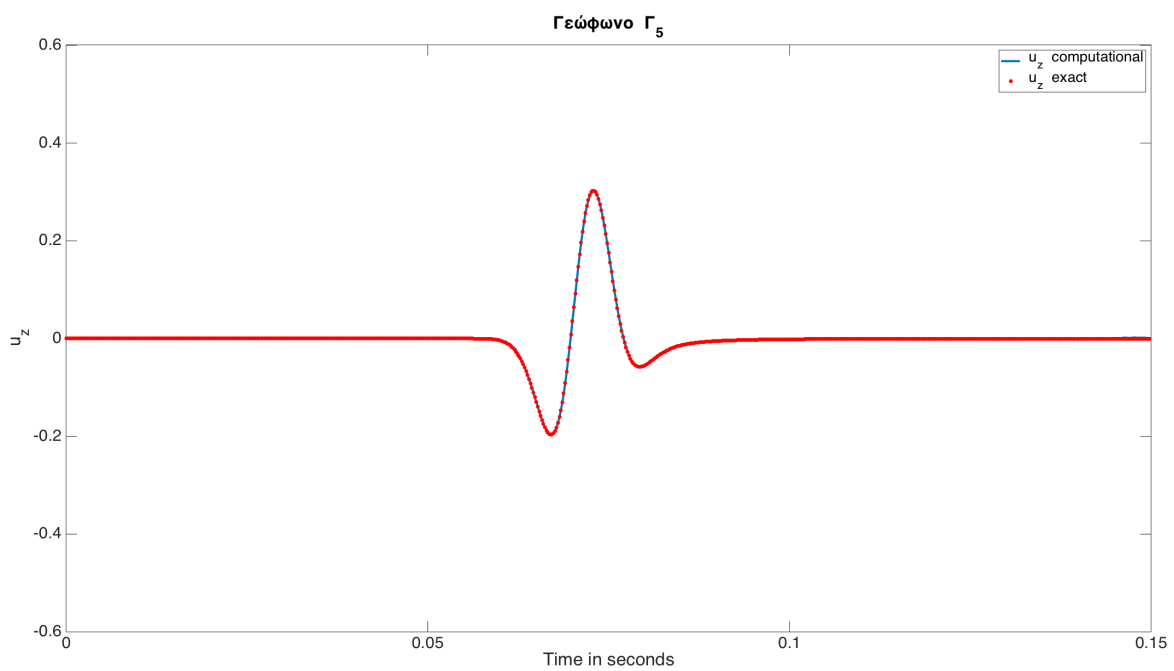
## Παράρτημα Β΄



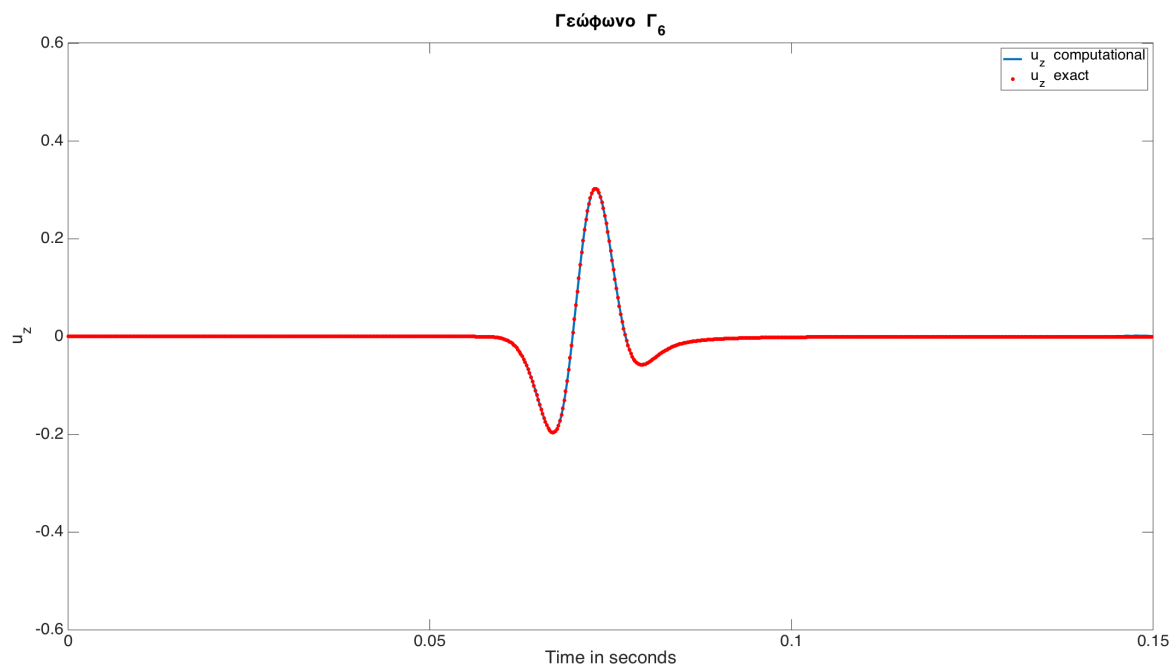
**Σχήμα Β΄.1:** Καταγραφή κατακόρυφης ταχύτητας μετατόπισης στο γεώφωνο  $\Gamma_1$ .



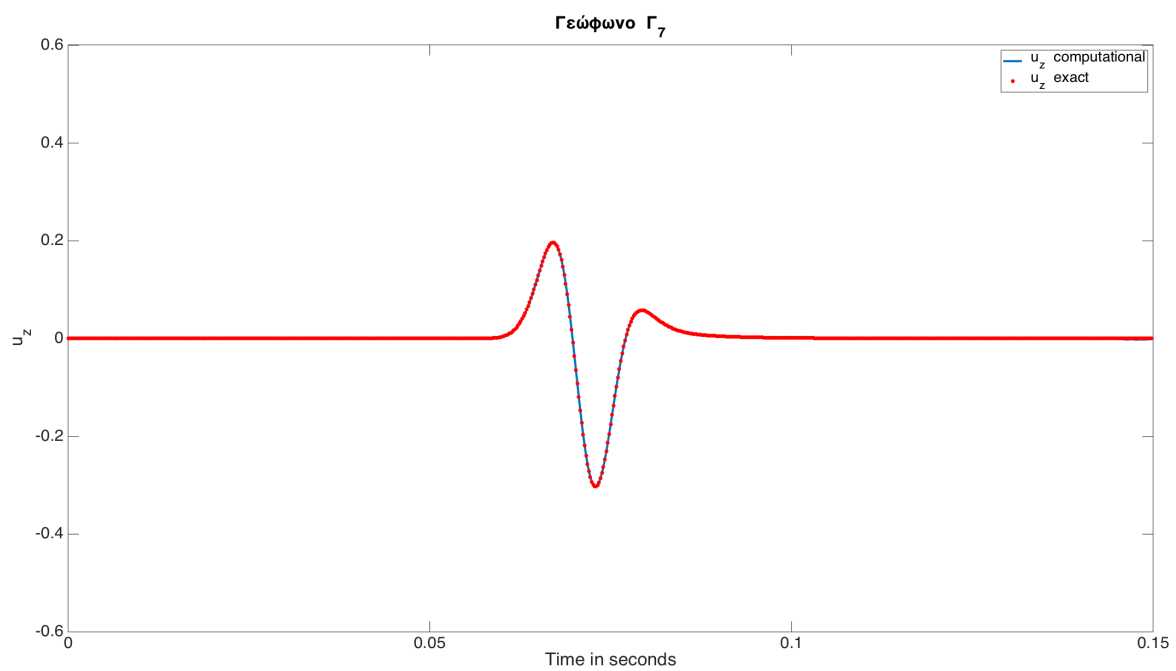
**Σχήμα Β'.2:** Καταγραφή κατακόρυφης ταχύτητας μετατόπισης στο γεώφωνο  $\Gamma_2$ .



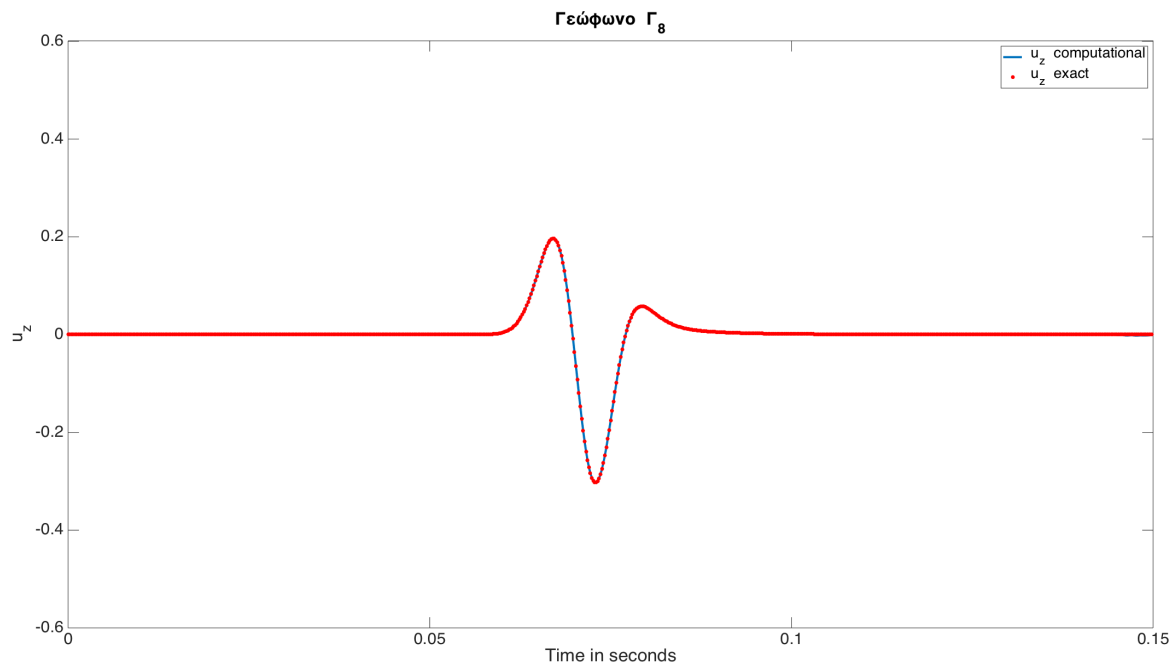
**Σχήμα Β'.3:** Καταγραφή κατακόρυφης ταχύτητας μετατόπισης στο γεώφωνο  $\Gamma_5$ .



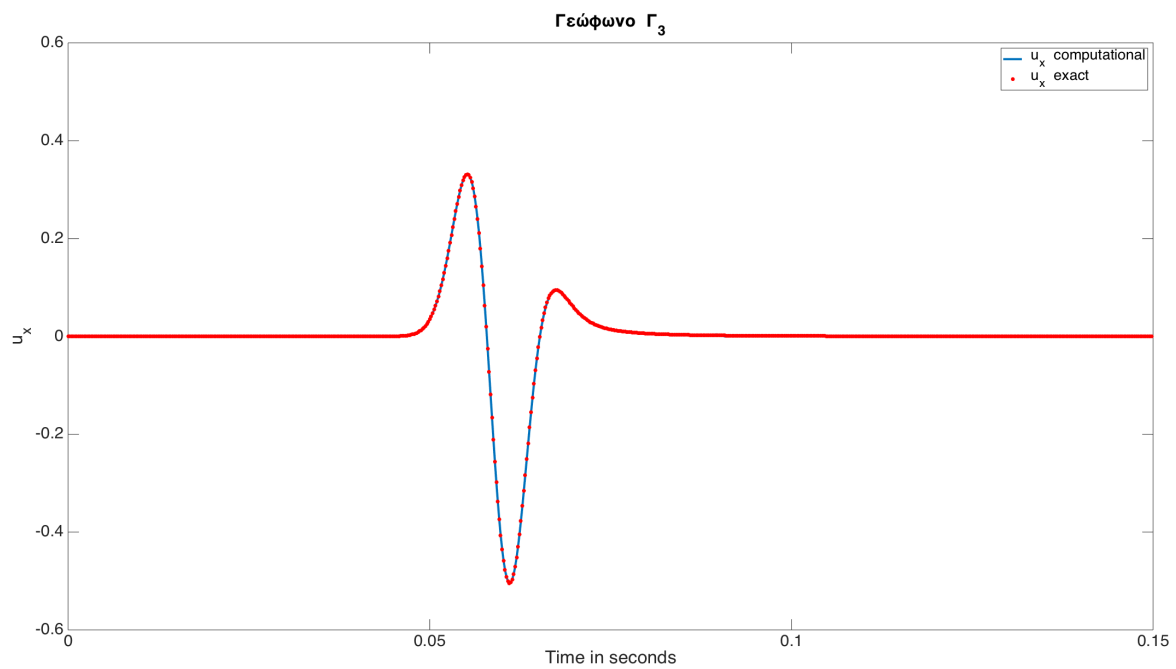
**Σχήμα Β'.4:** Καταγραφή κατακόρυφης ταχύτητας μετατόπισης στο γεώφωνο  $\Gamma_6$ .



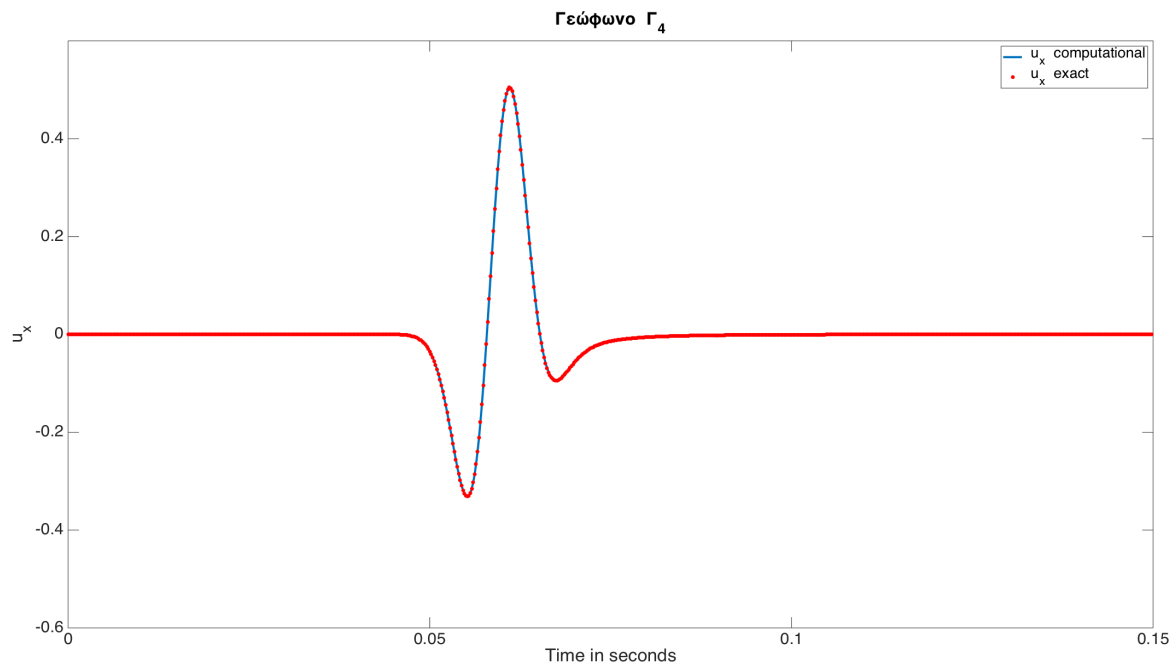
**Σχήμα Β'.5:** Καταγραφή κατακόρυφης ταχύτητας μετατόπισης στο γεώφωνο  $\Gamma_7$ .



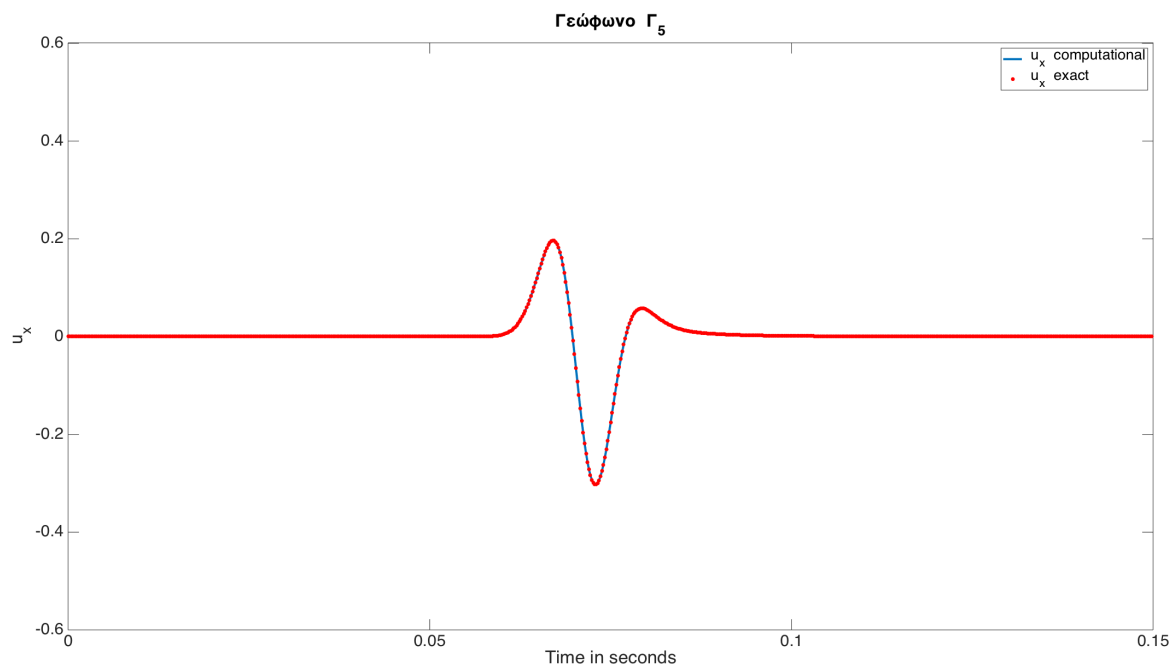
**Σχήμα Β'.6:** Καταγραφή κατακόρυφης ταχύτητας μετατόπισης στο γεώφωνο  $\Gamma_8$ .



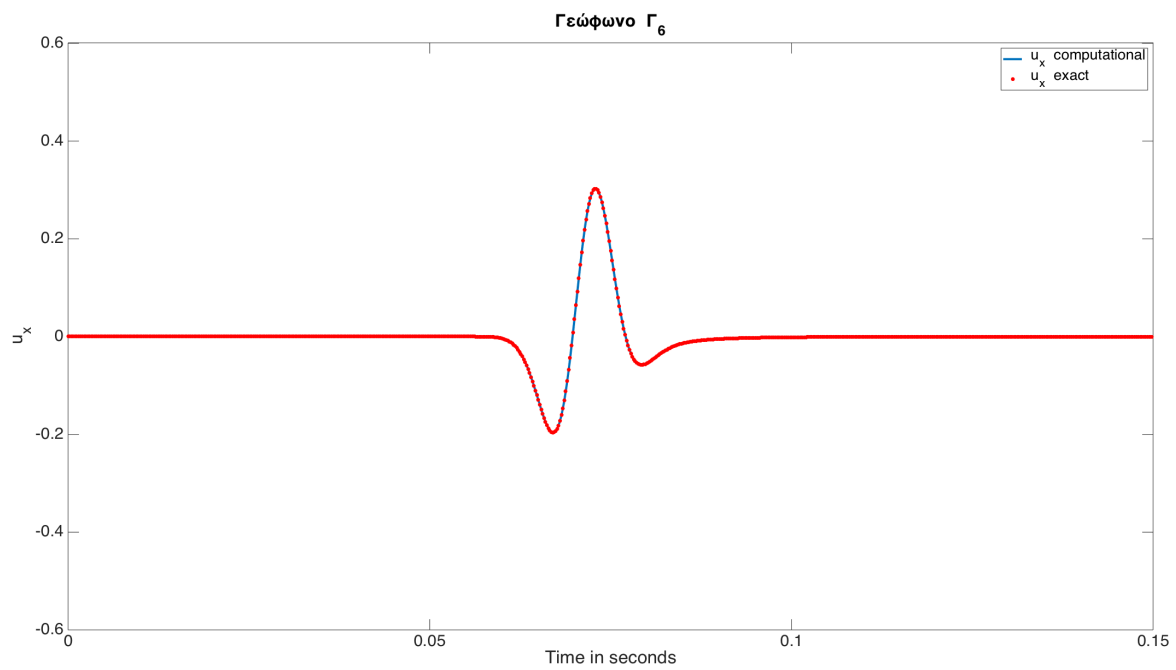
**Σχήμα Β'.7:** Καταγραφή οριζόντιας ταχύτητας μετατόπισης στο γεώφωνο  $\Gamma_3$ .



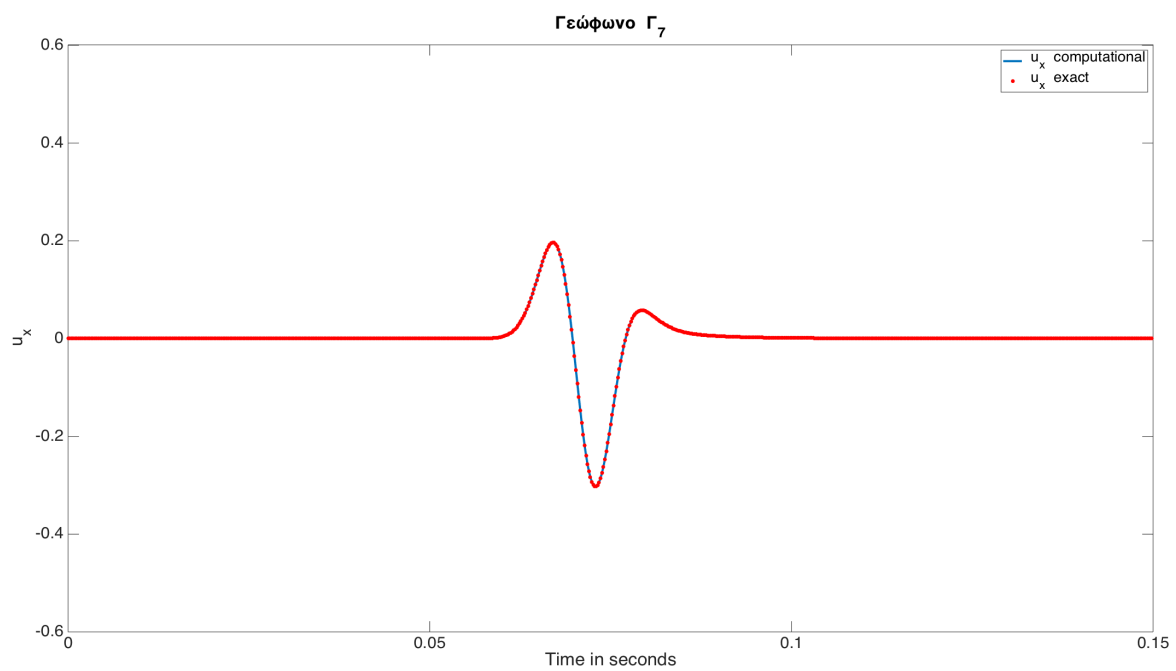
**Σχήμα Β'.8:** Καταγραφή οριζόντιας ταχύτητας μετατόπισης στο γεώφωνο  $\Gamma_4$ .



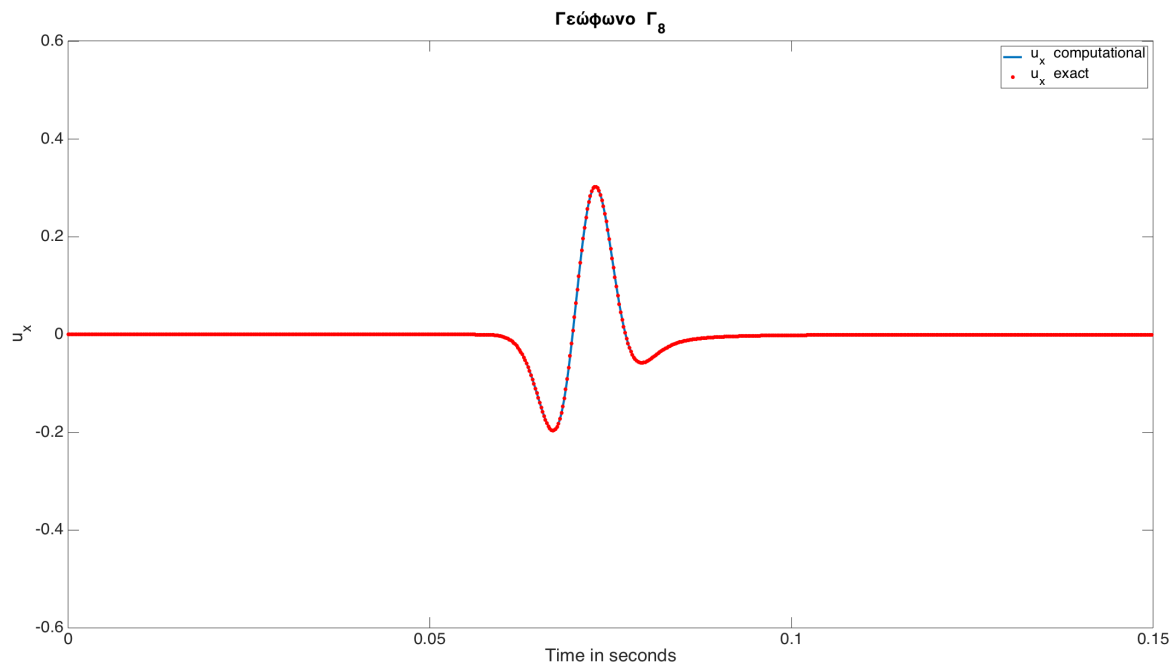
**Σχήμα Β'.9:** Καταγραφή οριζόντιας ταχύτητας μετατόπισης στο γεώφωνο  $\Gamma_5$ .



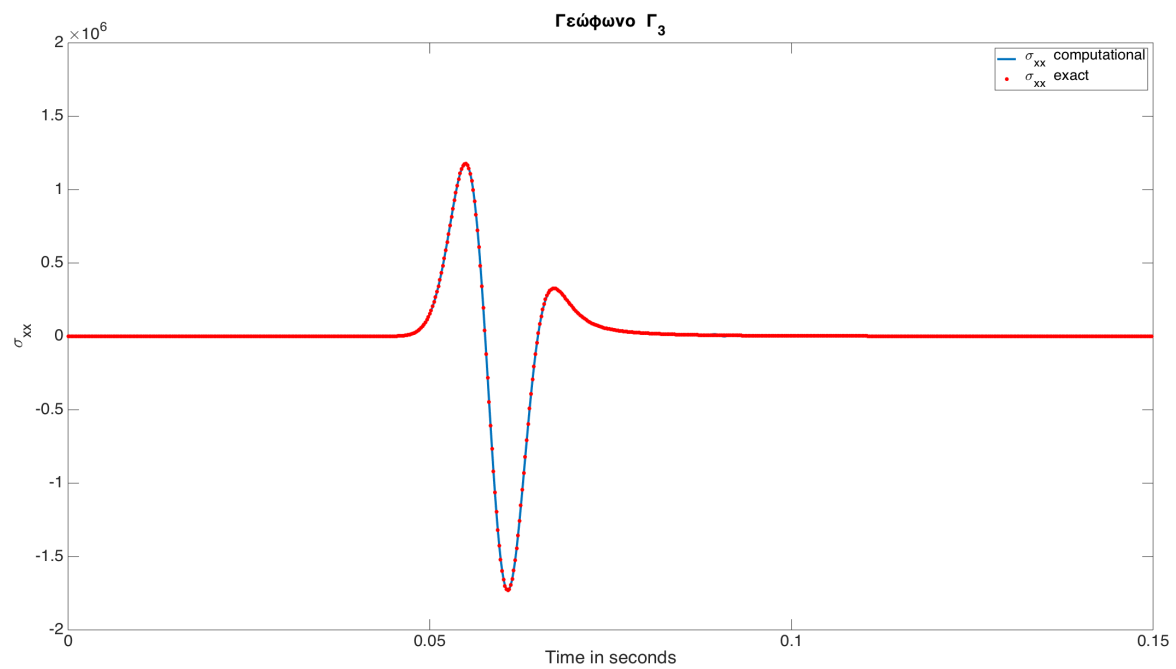
**Σχήμα Β'.10:** Καταγραφή οριζόντιας ταχύτητας μετατόπισης στο γεώφωνο  $\Gamma_6$ .



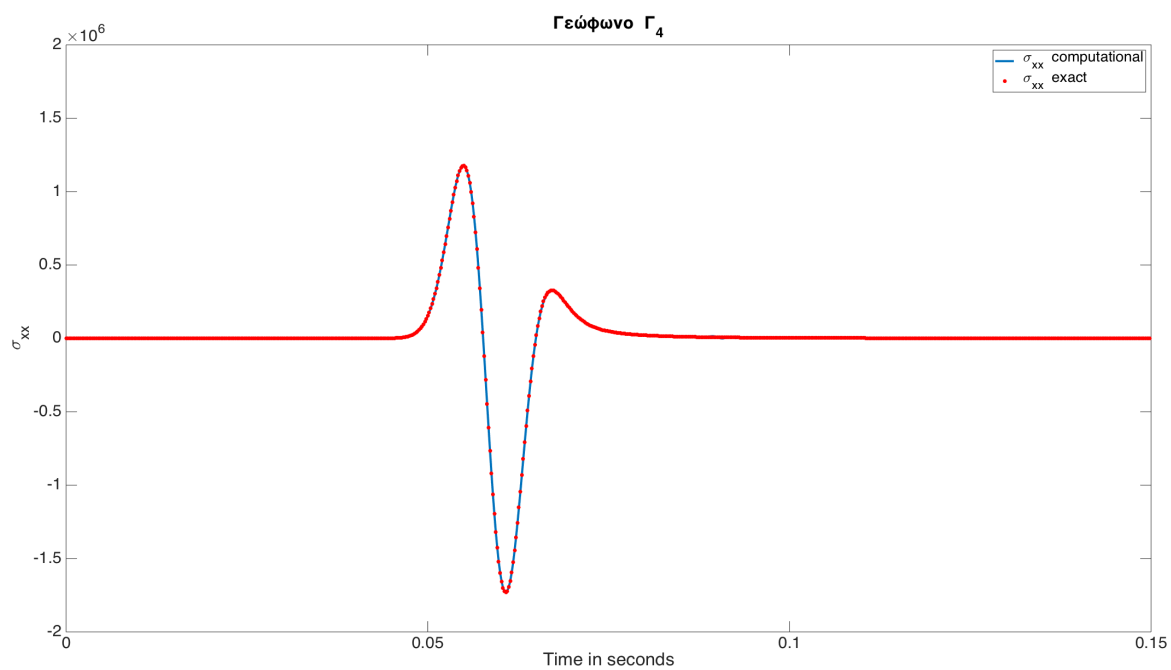
**Σχήμα Β'.11:** Καταγραφή οριζόντιας ταχύτητας μετατόπισης στο γεώφωνο  $\Gamma_7$ .



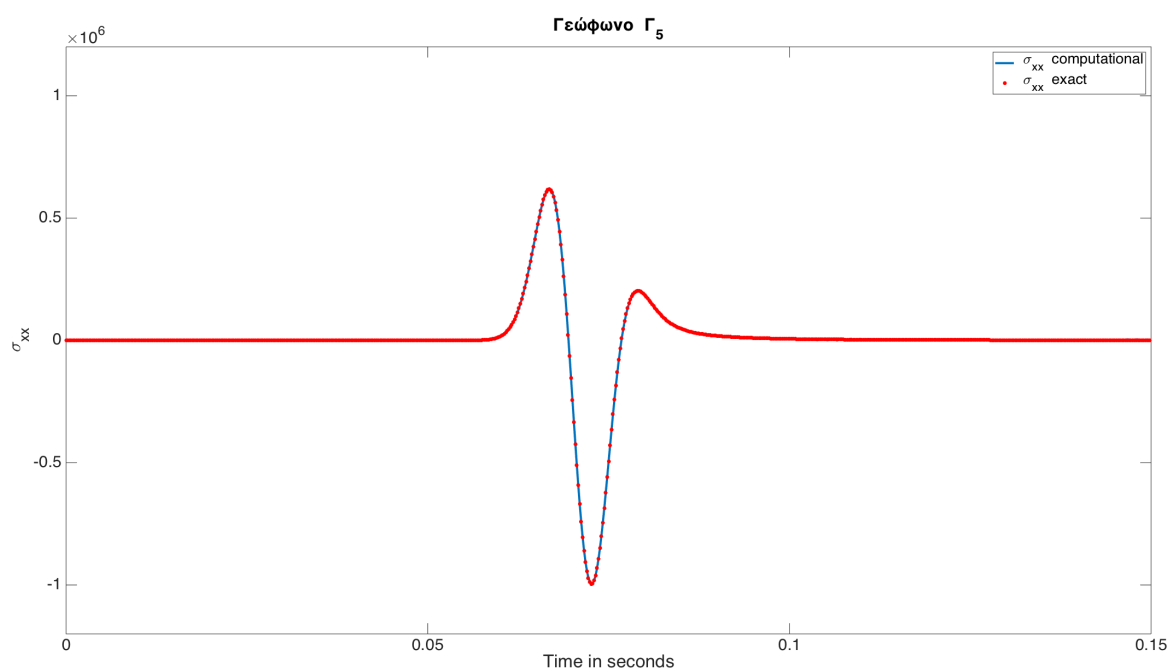
**Σχήμα Β΄.12:** Καταγραφή οριζόντιας ταχύτητας μετατόπισης στο γεώφωνο  $\Gamma_8$ .



**Σχήμα Β΄.13:** Καταγραφή των τιμών της τάσης  $\sigma_{xx}$  στο γεώφωνο  $\Gamma_3$ .

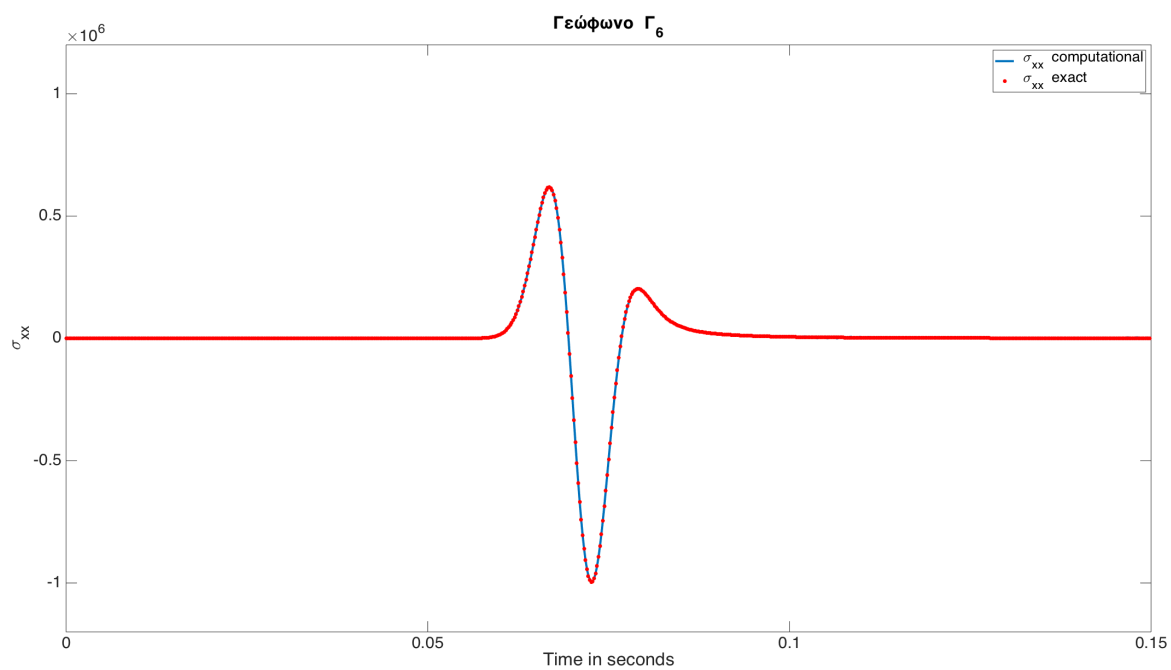


**Σχήμα Β'.14:** Καταγραφή των τιμών της τάσης  $\sigma_{xx}$  στο γεώφωνο  $\Gamma_4$ .

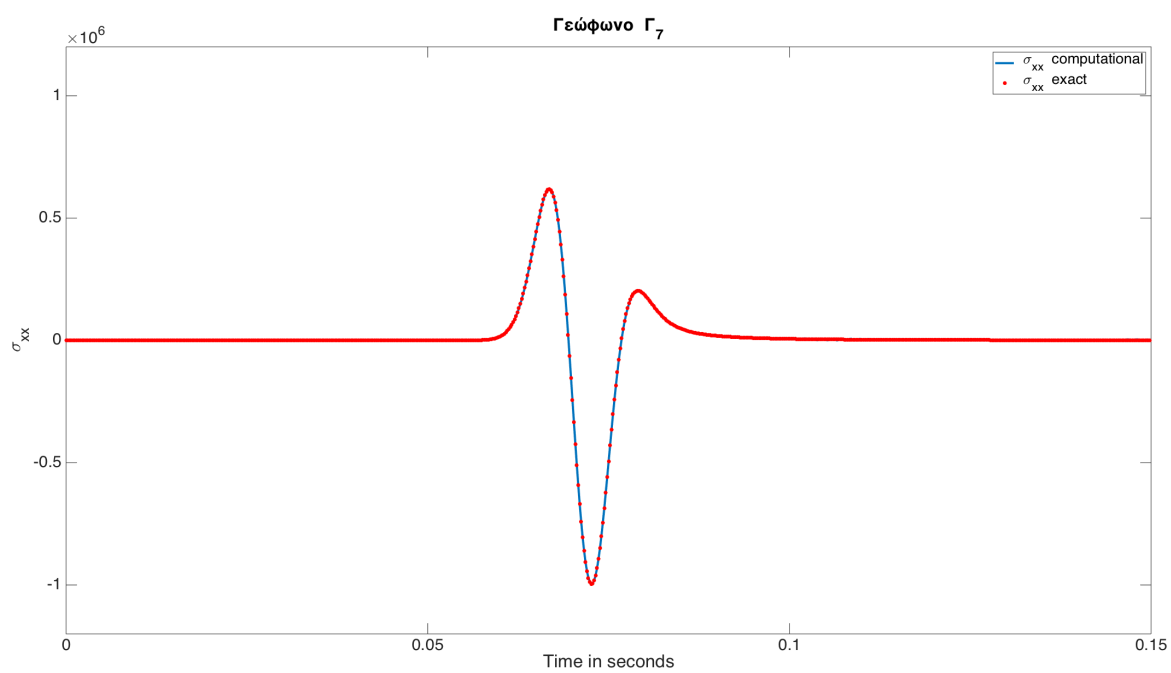


**Σχήμα Β'.15:** Καταγραφή των τιμών της τάσης  $\sigma_{xx}$  στο γεώφωνο  $\Gamma_5$ .

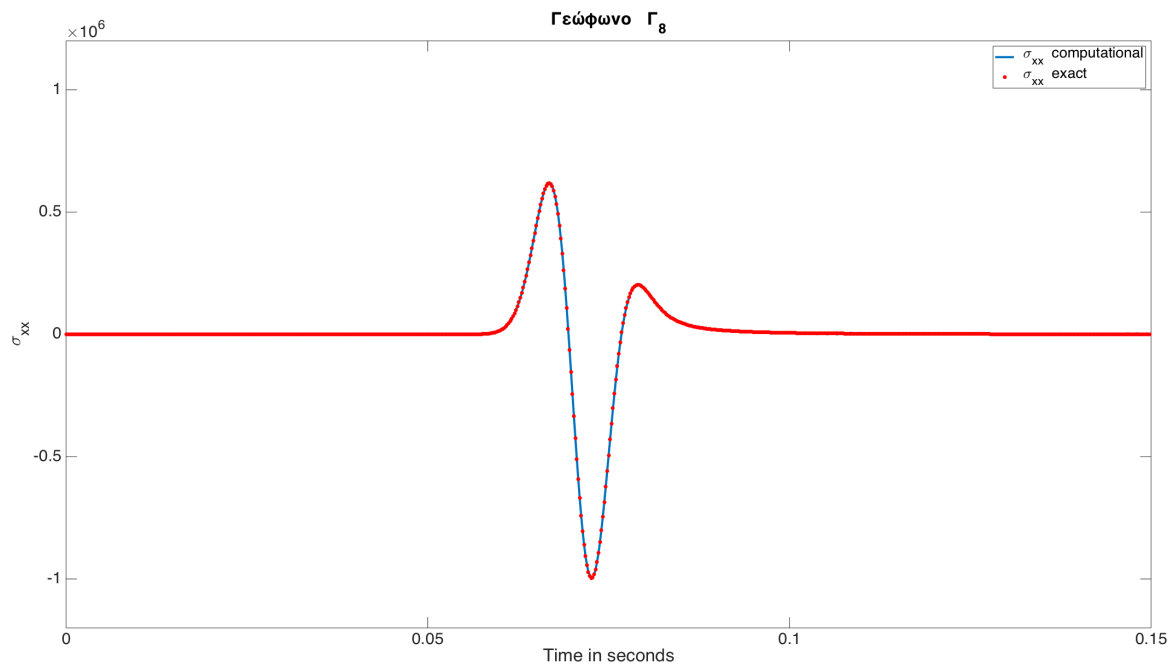




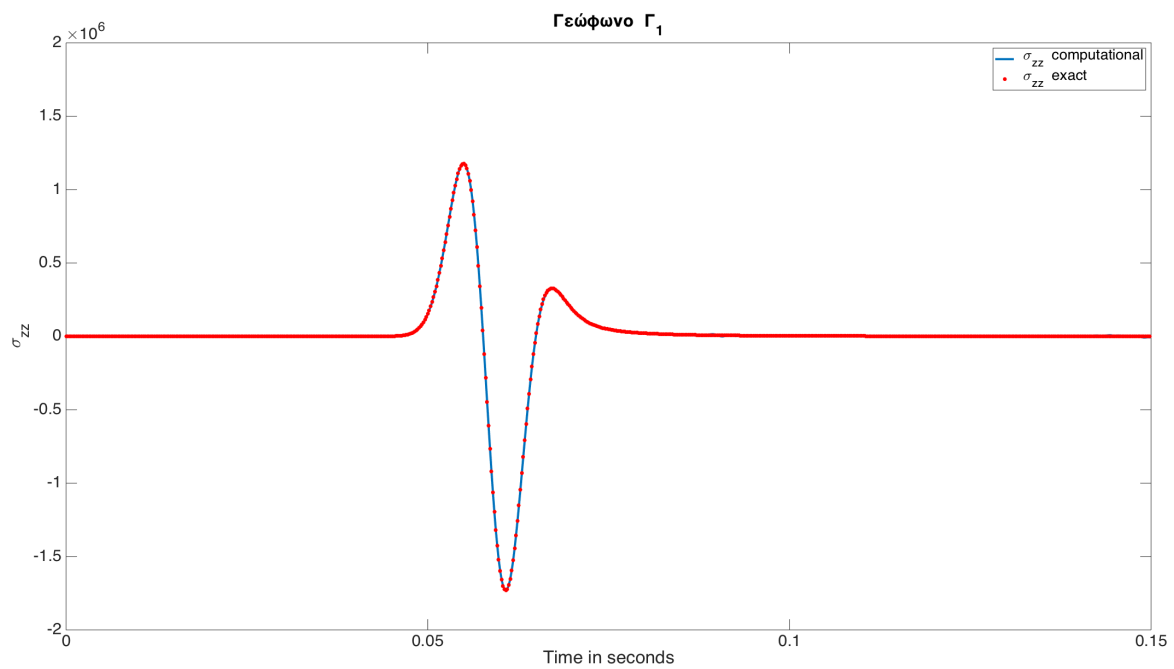
**Σχήμα Β'.16:** Καταγραφή των τιμών της τάσης  $\sigma_{xx}$  στο γεώφωνο  $\Gamma_6$ .



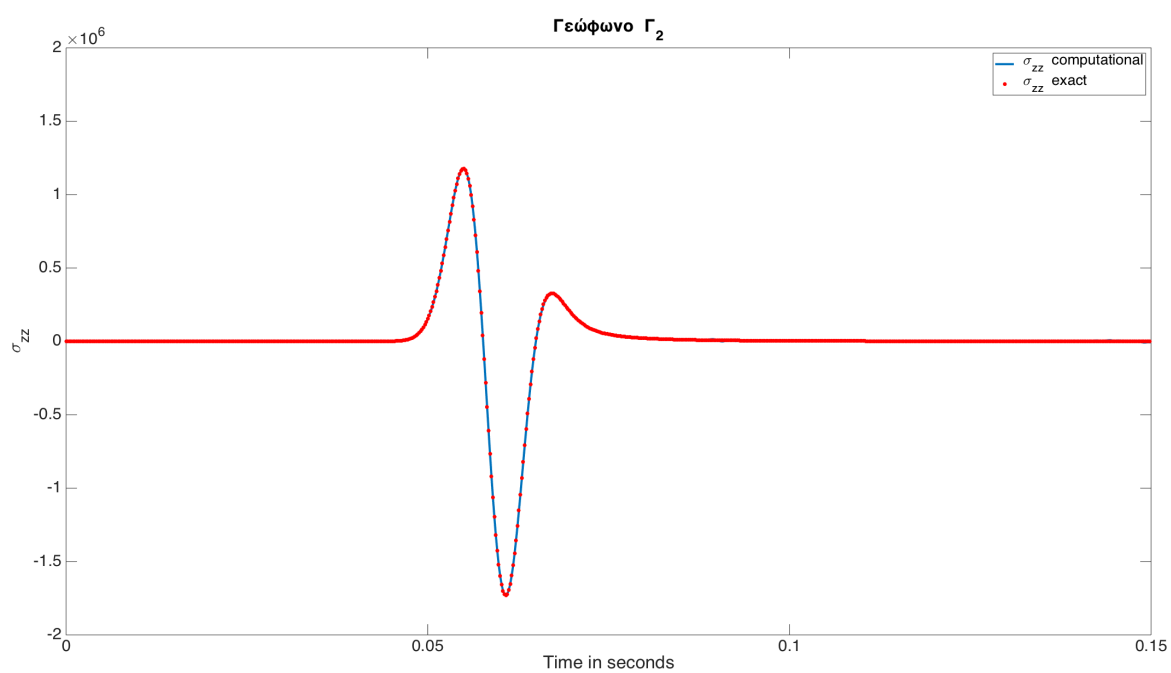
**Σχήμα Β'.17:** Καταγραφή των τιμών της τάσης  $\sigma_{xx}$  στο γεώφωνο  $\Gamma_7$ .



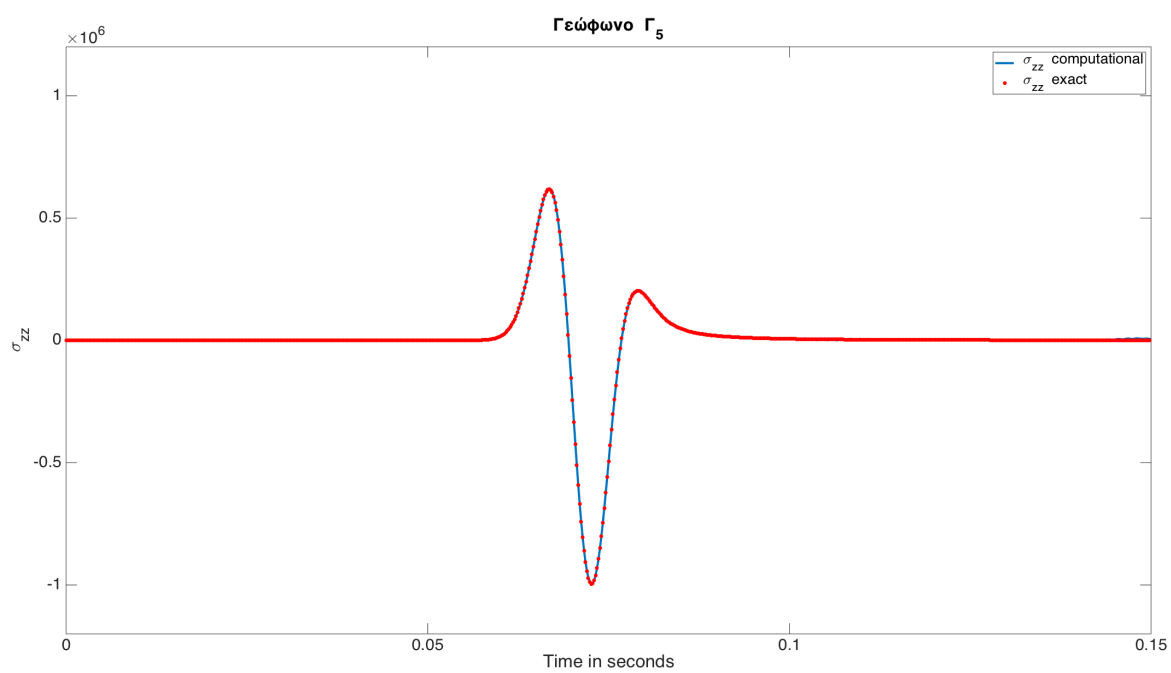
**Σχήμα Β'.18:** Καταγραφή των τιμών της τάσης  $\sigma_{xx}$  στο γεώφωνο  $\Gamma_8$ .



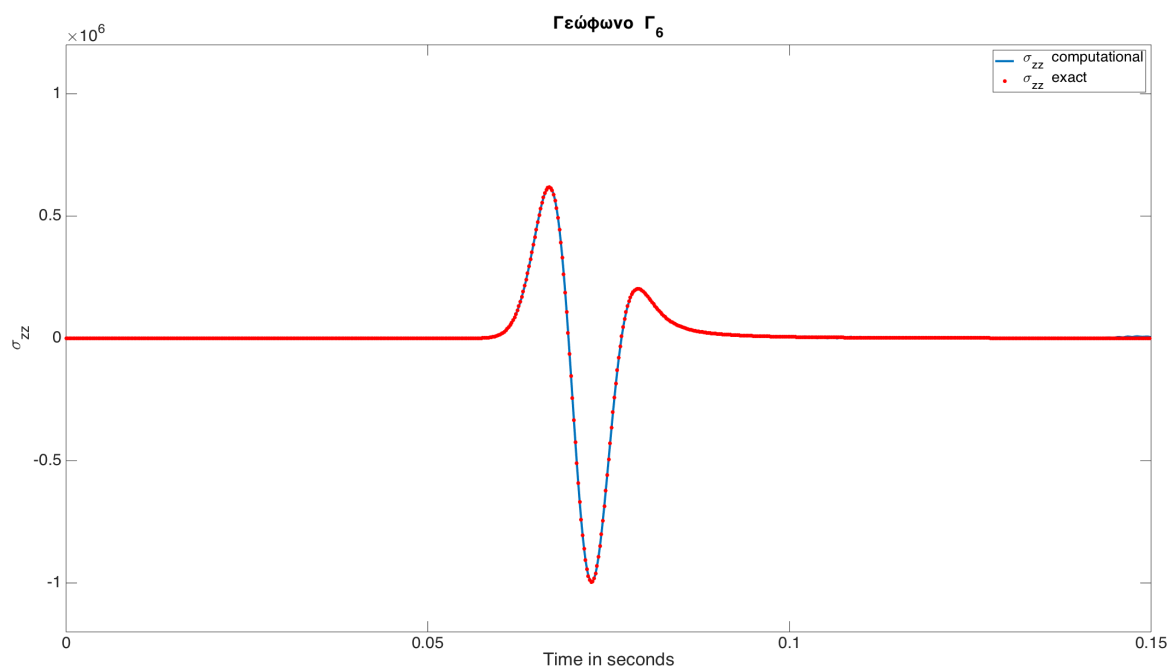
**Σχήμα Β'.19:** Καταγραφή των τιμών της τάσης  $\sigma_{zz}$  στο γεώφωνο  $\Gamma_1$ .



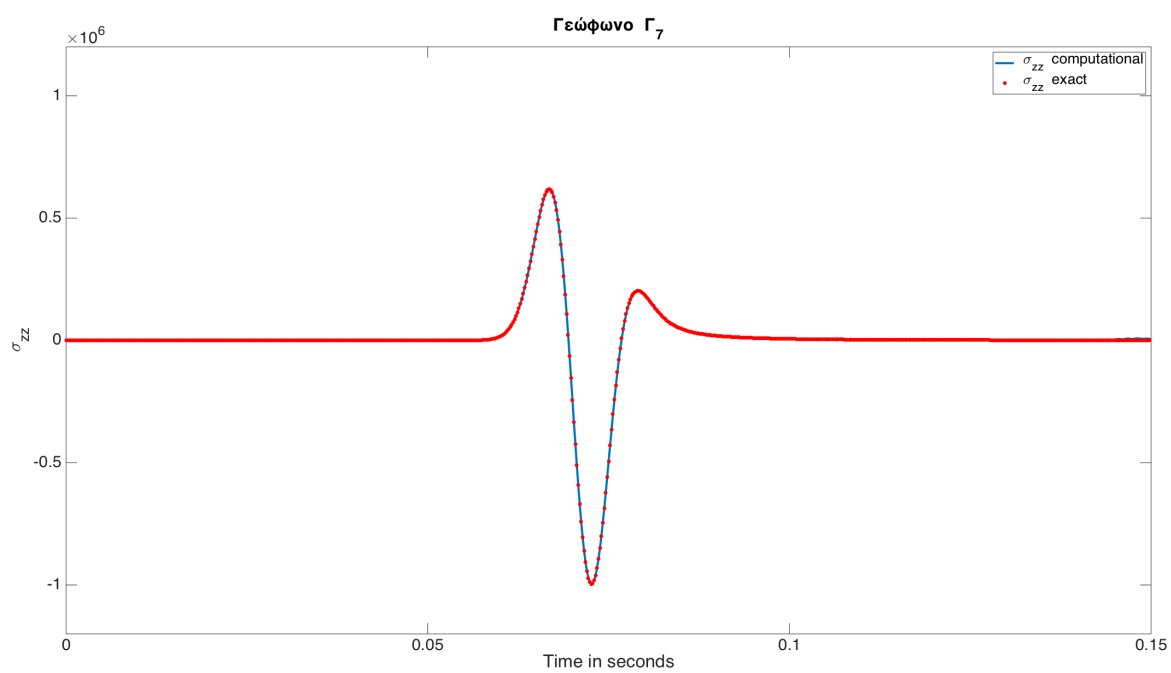
**Σχήμα Β'.20:** Καταγραφή των τιμών της τάσης  $\sigma_{zz}$  στο γεώφωνο  $\Gamma_2$ .



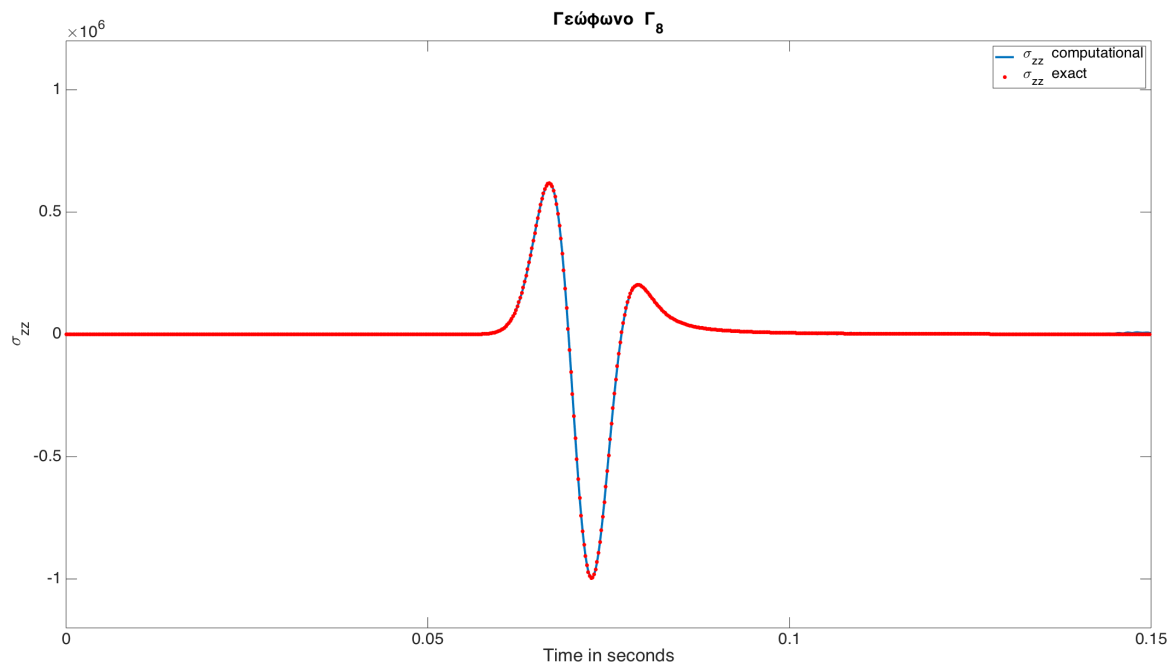
**Σχήμα Β'.21:** Καταγραφή των τιμών της τάσης  $\sigma_{zz}$  στο γεώφωνο  $\Gamma_5$ .



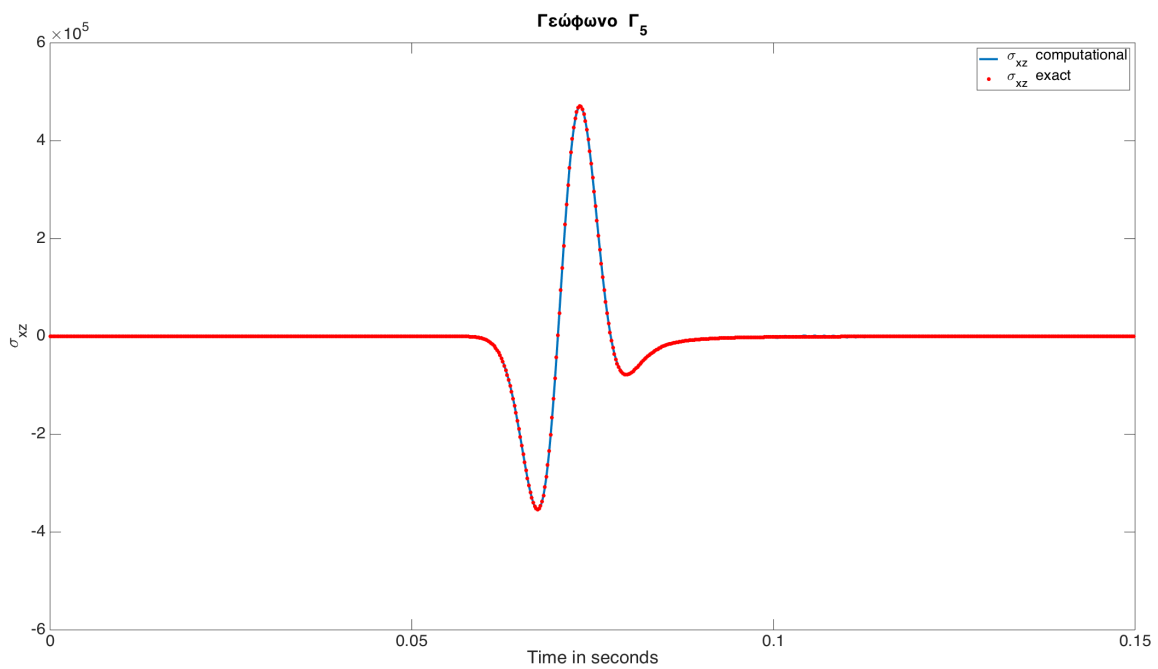
**Σχήμα Β'.22:** Καταγραφή των τιμών της τάσης  $\sigma_{zz}$  στο γεώφωνο  $\Gamma_6$ .



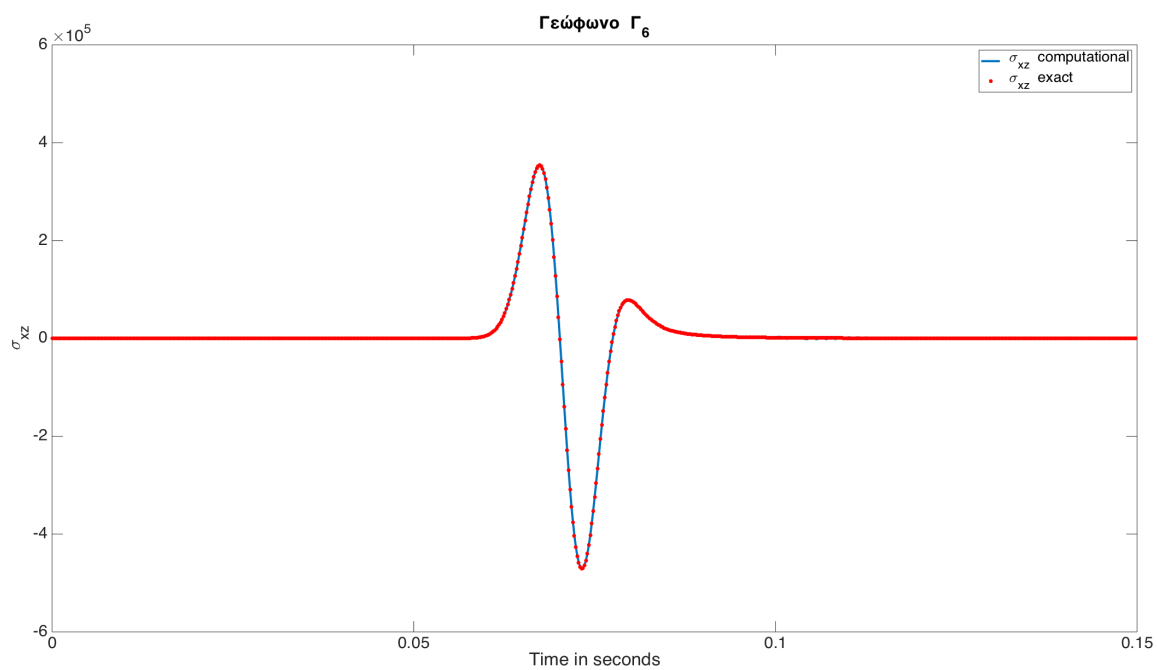
**Σχήμα Β'.23:** Καταγραφή των τιμών της τάσης  $\sigma_{zz}$  στο γεώφωνο  $\Gamma_7$ .



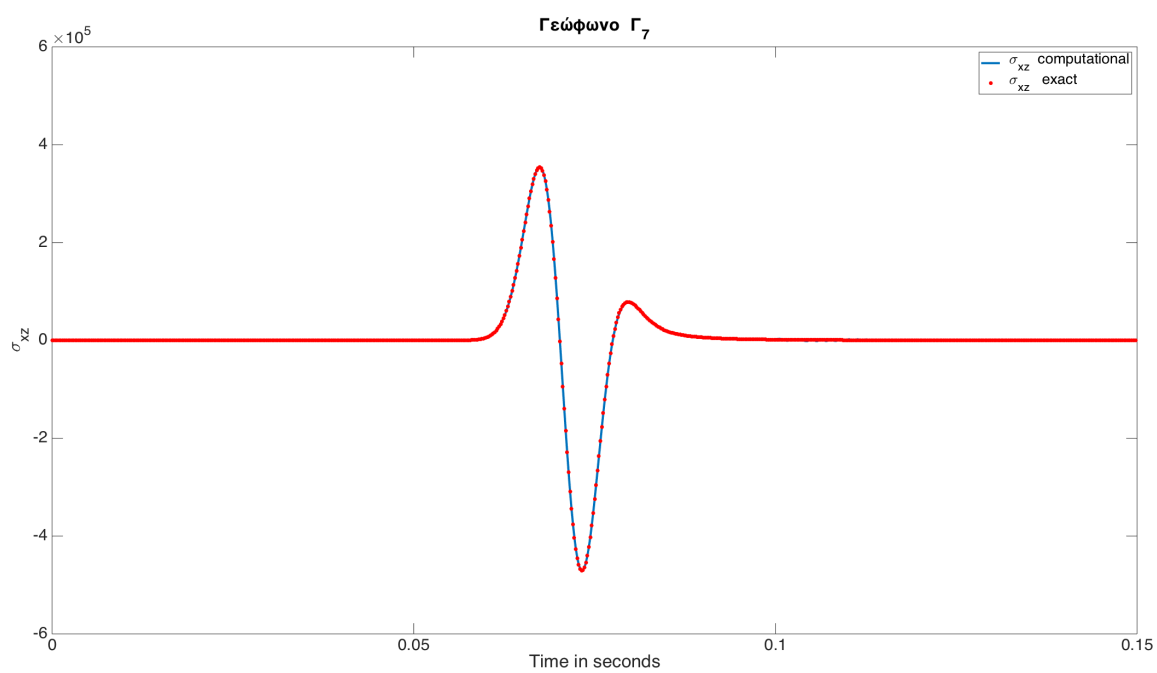
**Σχήμα Β'.24:** Καταγραφή των τιμών της τάσης  $\sigma_{zz}$  στο γεώφωνο  $\Gamma_8$ .



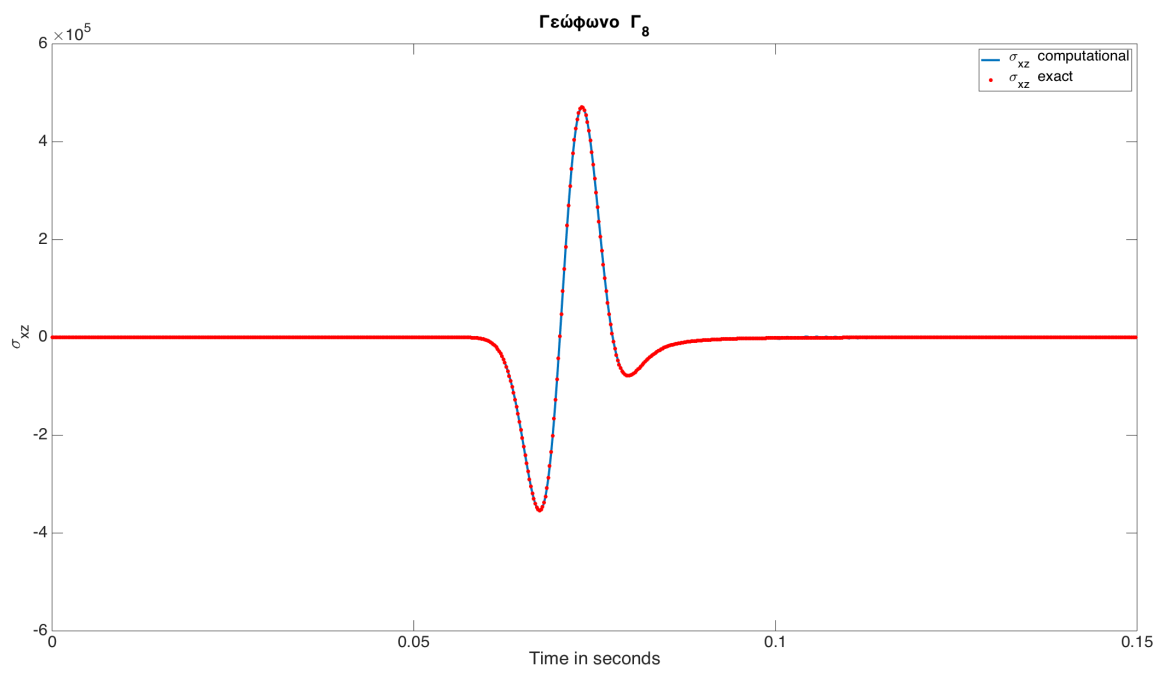
**Σχήμα Β'.25:** Καταγραφή των τιμών μεικτών τάσεων στο γεώφωνο  $\Gamma_5$ .



**Σχήμα Β'.26:** Καταγραφή των τιμών μεικτών τάσεων στο γεώφωνο  $\Gamma_6$ .



**Σχήμα Β'.27:** Καταγραφή των τιμών μεικτών τάσεων στο γεώφωνο  $\Gamma_7$ .

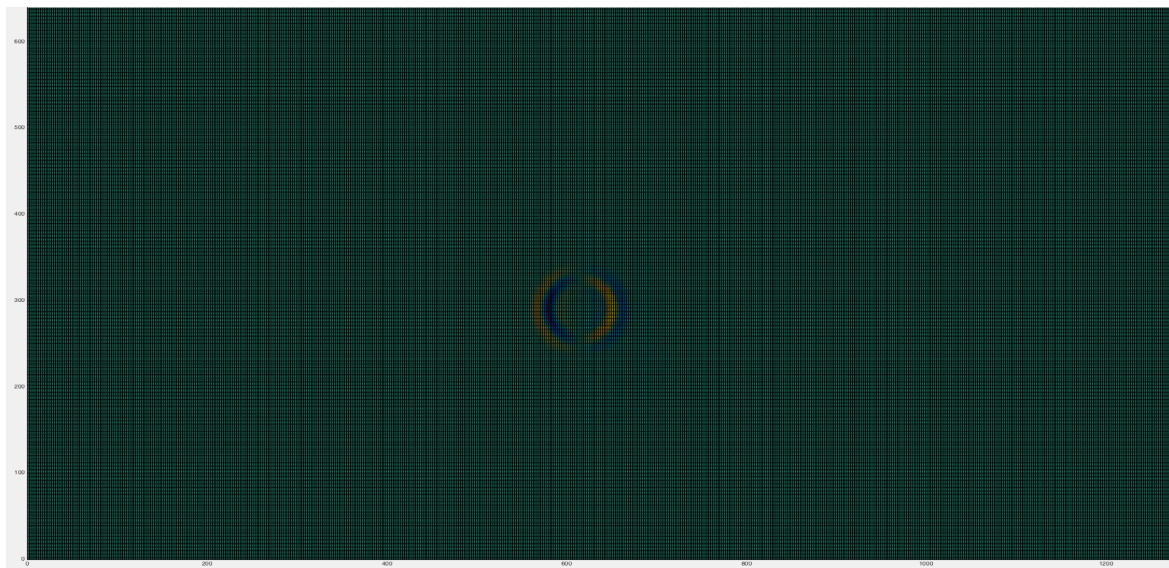


**Σχήμα Β'.28:** Καταγραφή των τιμών μεικτών τάσεων στο γεώφωνο  $\Gamma_8$ .

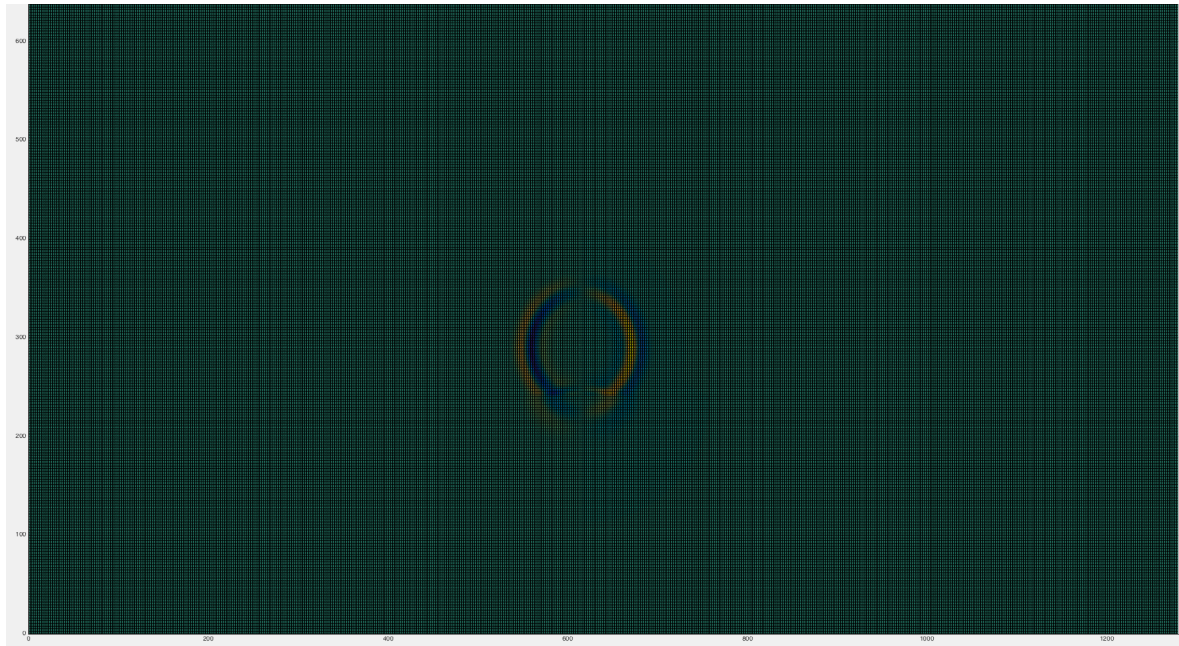




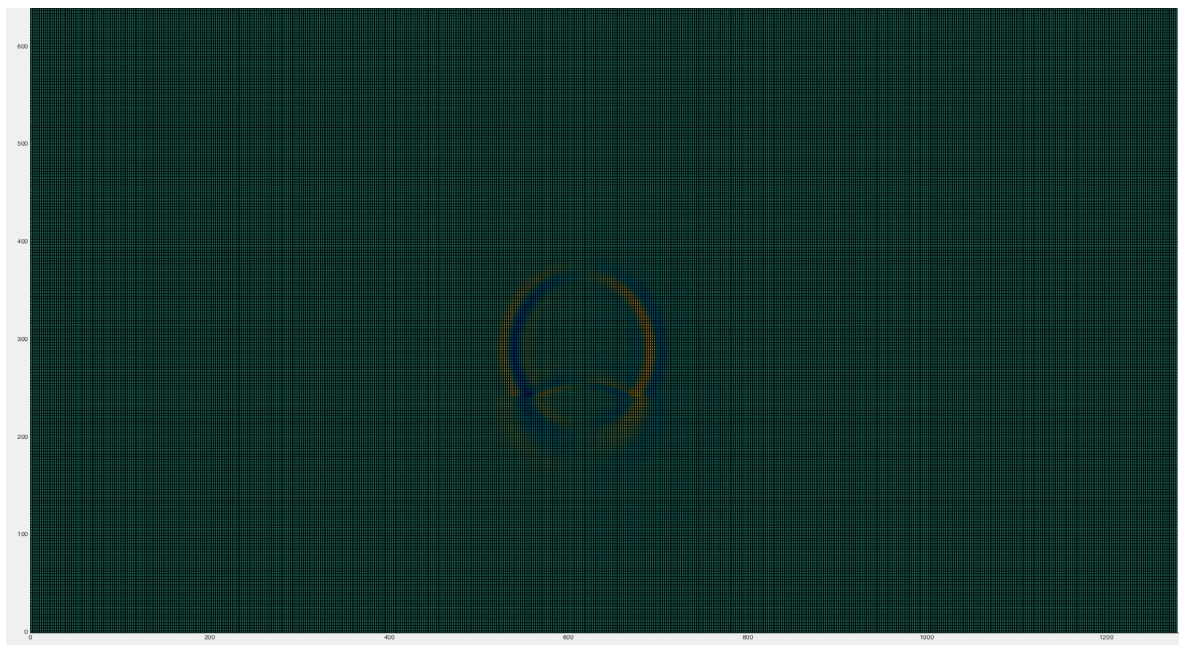
## Παράρτημα Γ'



**Σχήμα Γ'.1:** Απεικόνιση οριζόντιας ταχύτητας μετατόπισης τη χρονική στιγμή  $0.05 \text{ secs}$ .

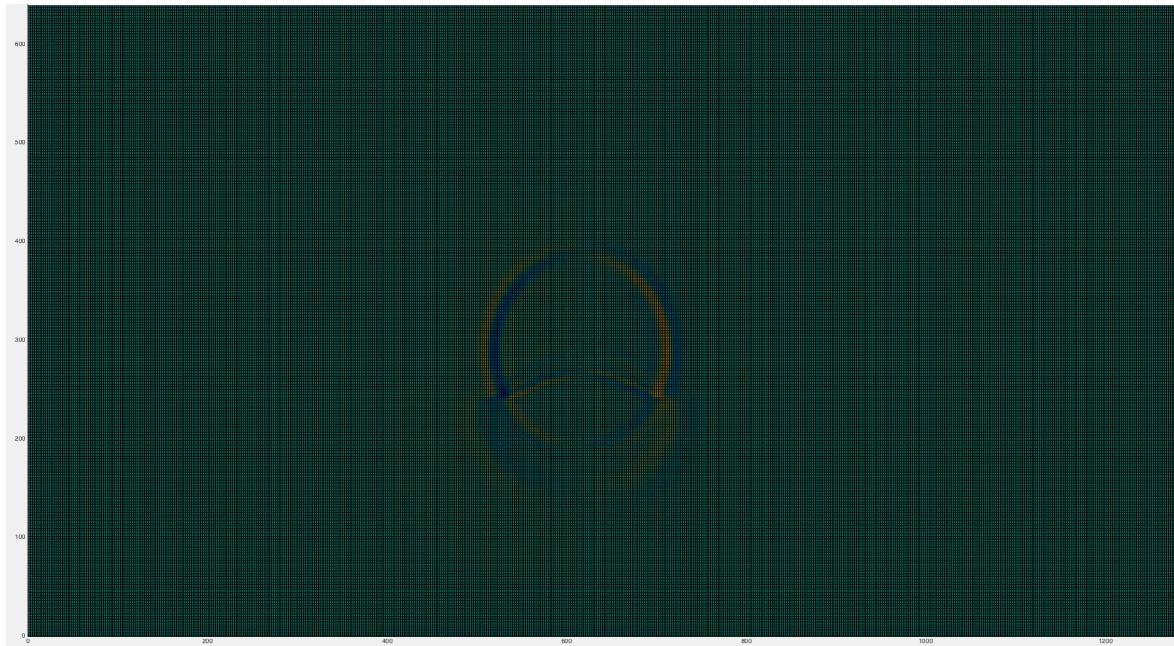


**Σχήμα Γ.2:** Απεικόνιση οριζόντιας ταχύτητας μετατόπισης τη χρονική στιγμή  $0.06secs$ .

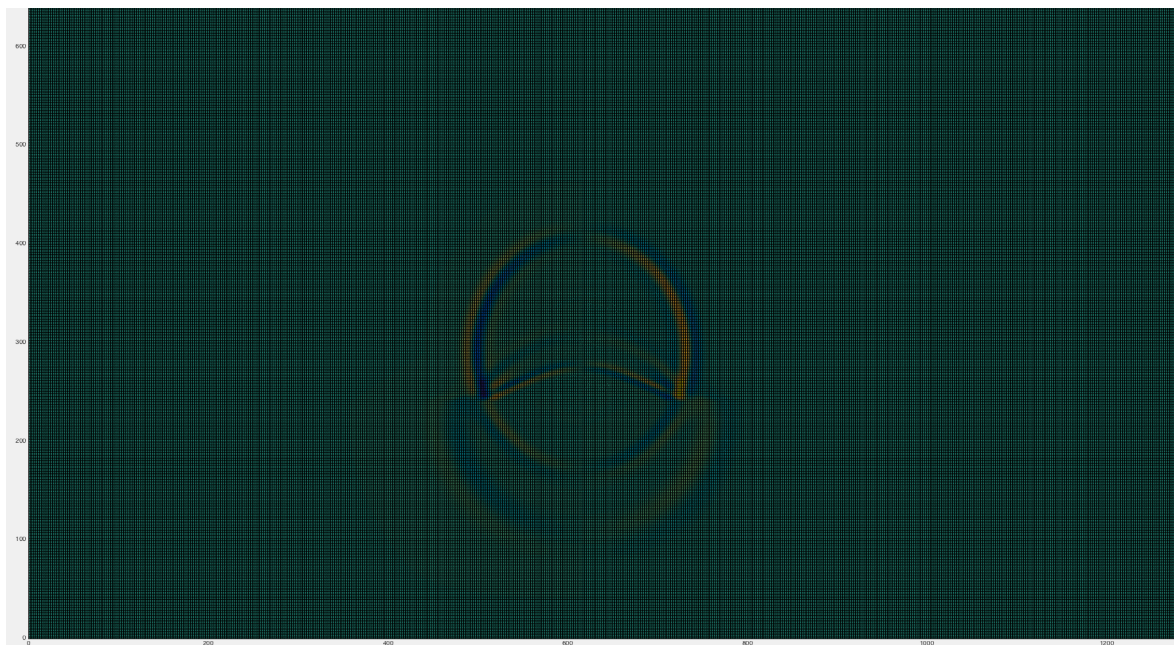


**Σχήμα Γ.3:** Απεικόνιση οριζόντιας ταχύτητας μετατόπισης τη χρονική στιγμή  $0.07secs$ .



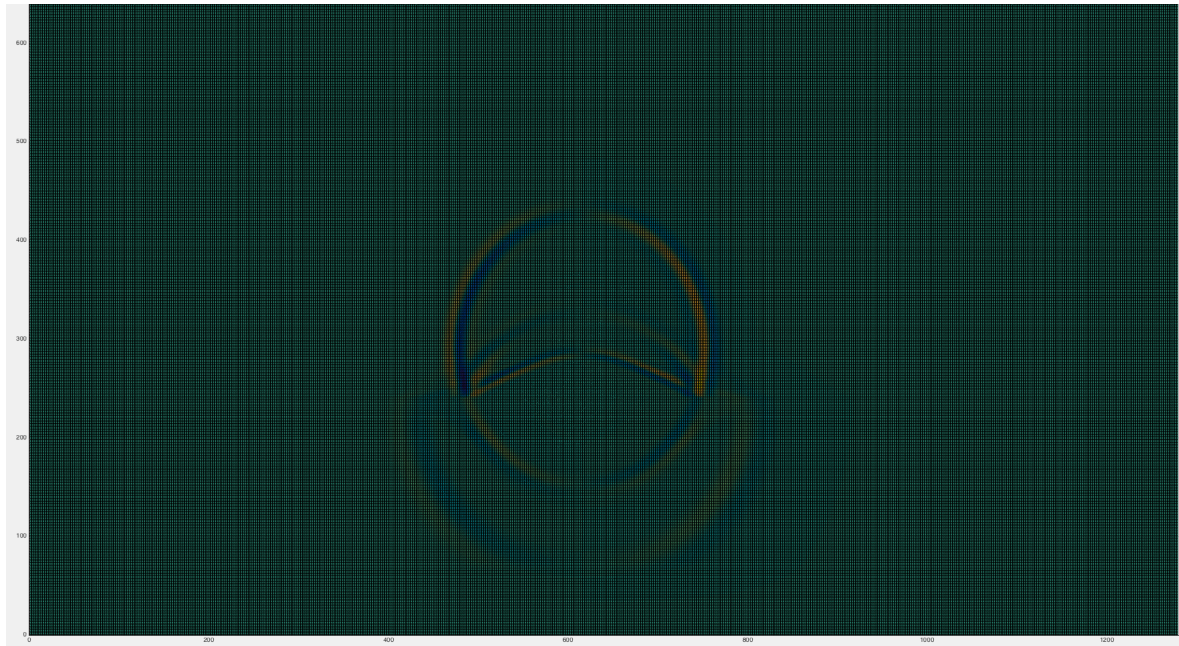


**Σχήμα Γ.4:** Απεικόνιση οριζόντιας ταχύτητας μετατόπισης τη χρονική στιγμή  $0.08secs$ .

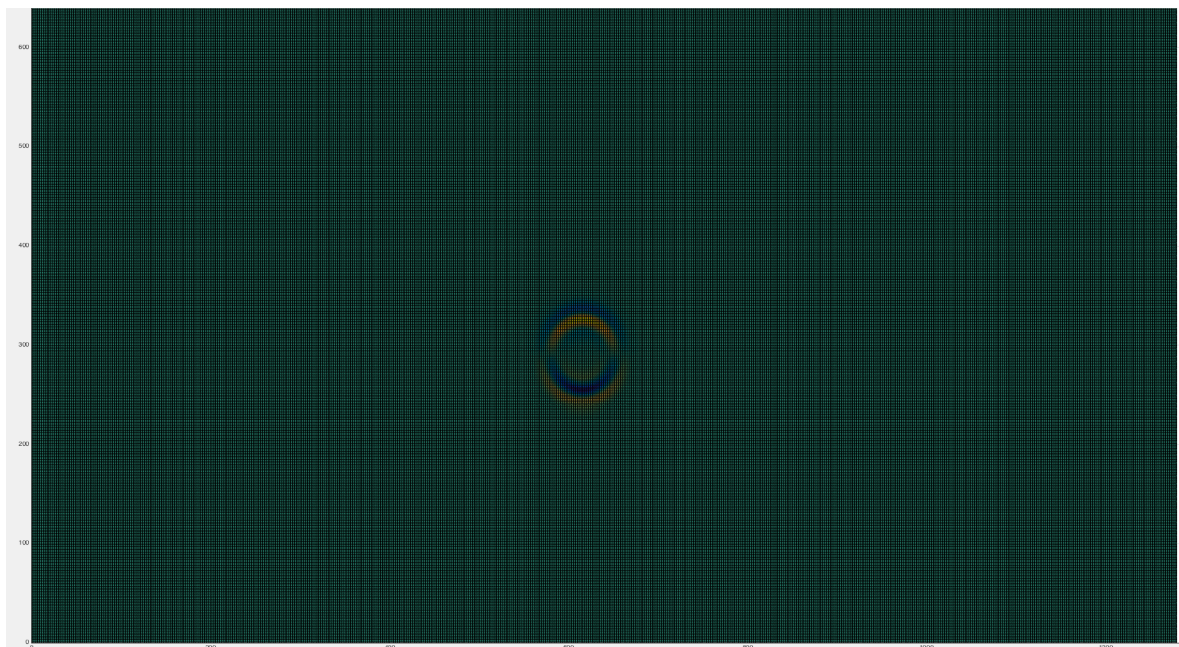


**Σχήμα Γ.5:** Απεικόνιση οριζόντιας ταχύτητας μετατόπισης τη χρονική στιγμή  $0.09secs$ .



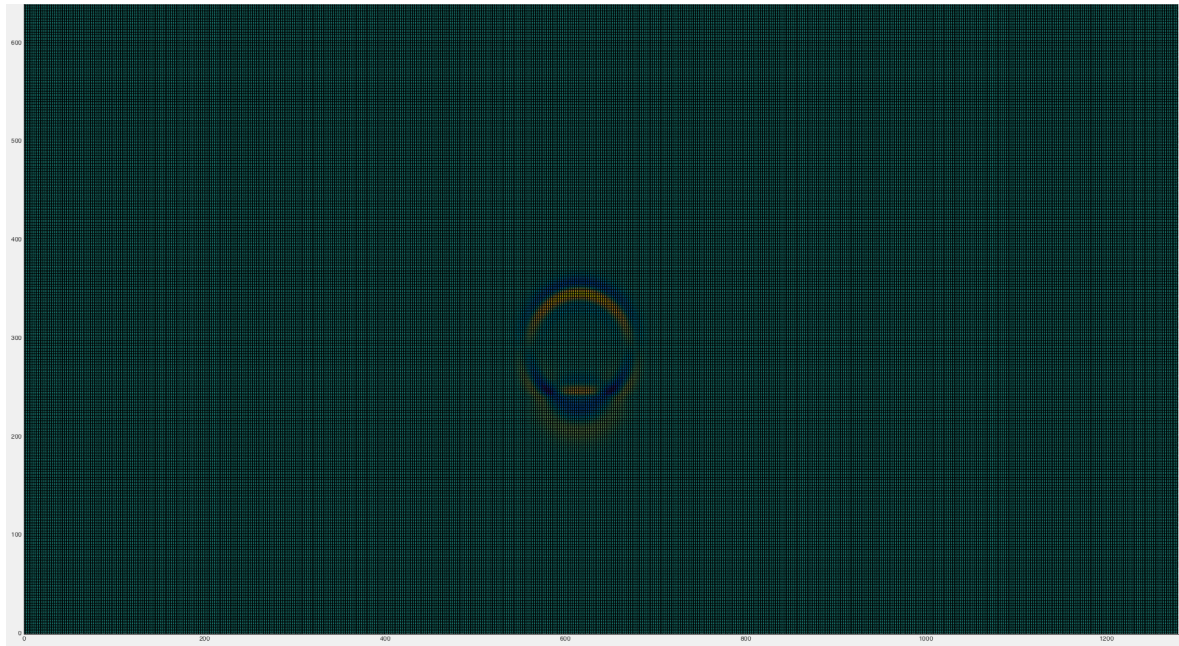


**Σχήμα Γ.6:** Απεικόνιση οριζόντιας ταχύτητας μετατόπισης τη χρονική στιγμή  $0.10secs$ .

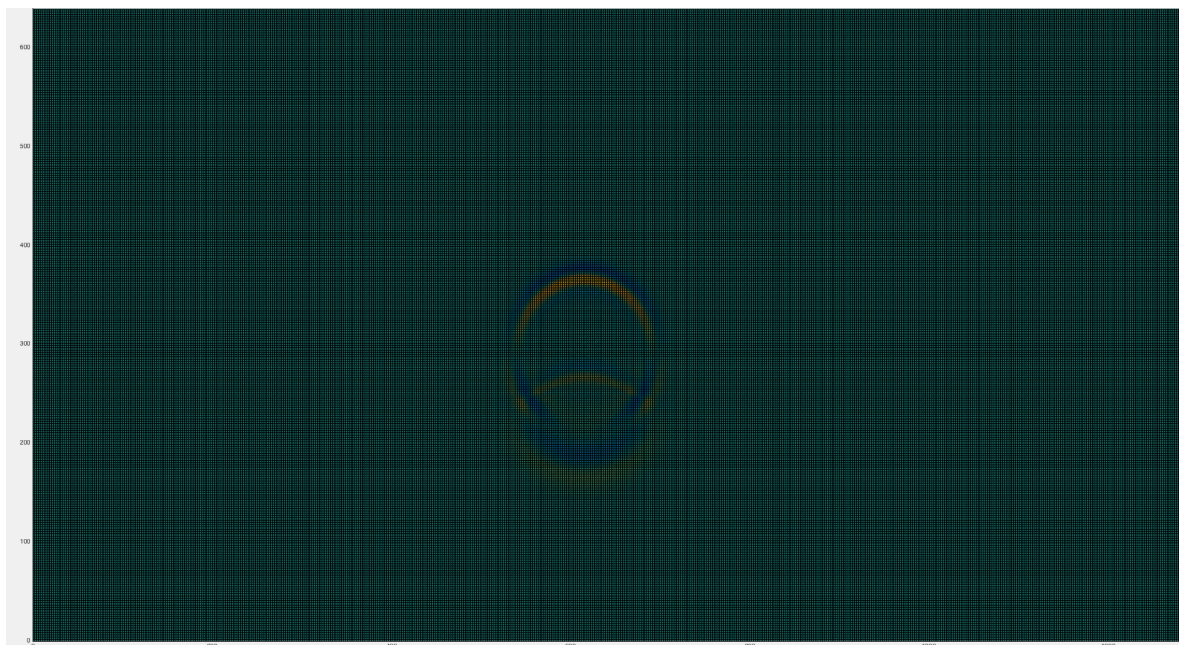


**Σχήμα Γ.7:** Απεικόνιση κατακόρυφης ταχύτητας μετατόπισης τη χρονική στιγμή  $0.05secs$ .



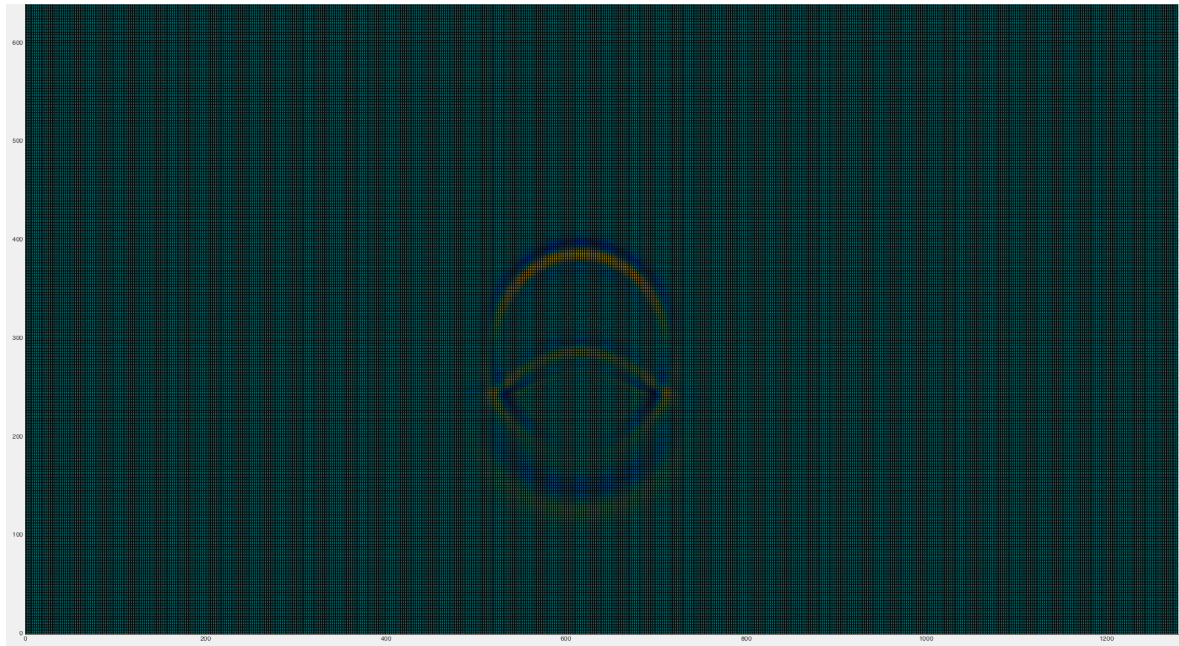


**Σχήμα Γ'.8:** Απεικόνιση κατακόρυφης ταχύτητας μετατόπισης τη χρονική στιγμή  $0.06secs$ .

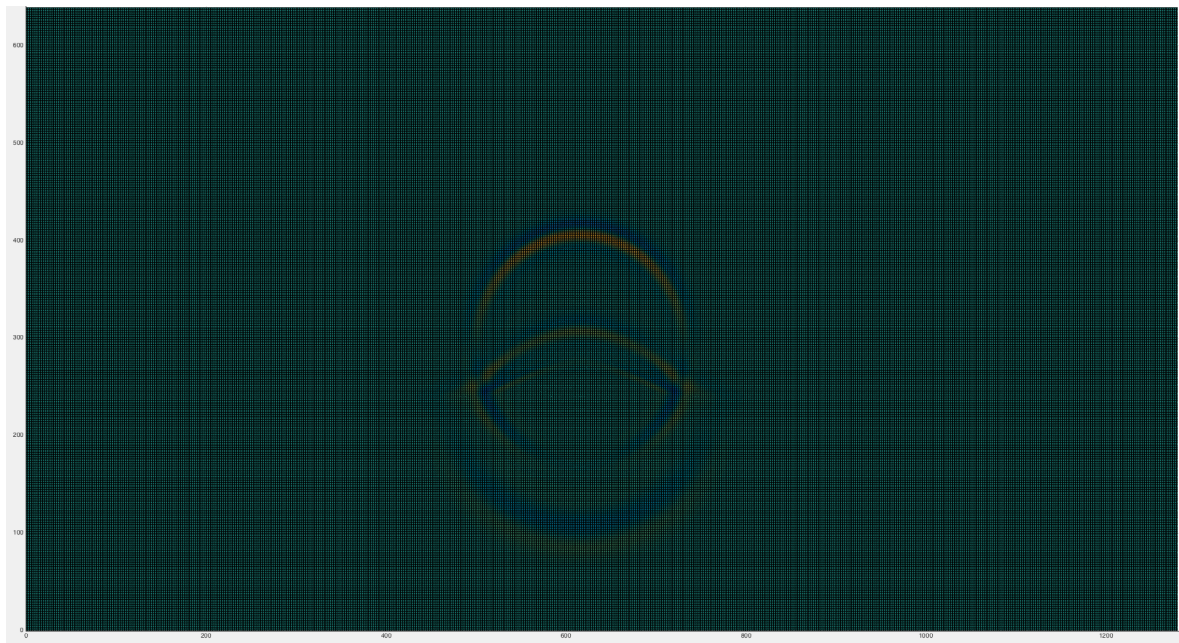


**Σχήμα Γ'.9:** Απεικόνιση κατακόρυφης ταχύτητας μετατόπισης τη χρονική στιγμή  $0.07secs$ .

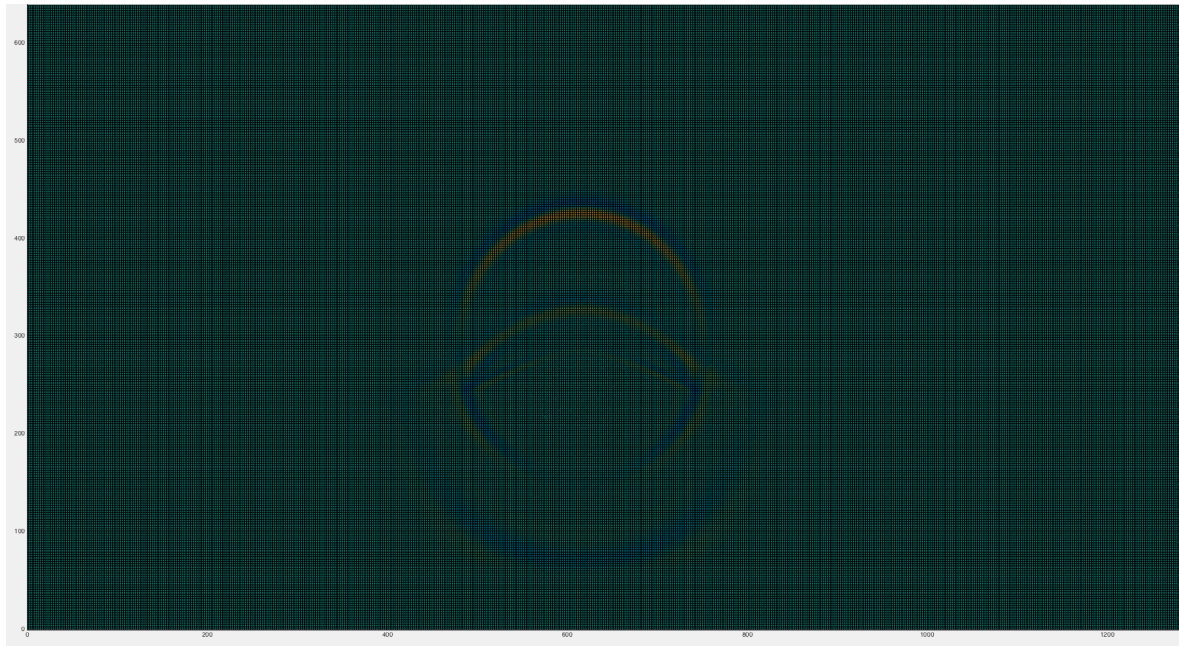




**Σχήμα Γ'.10:** Απεικόνιση κατακόρυφης ταχύτητας μετατόπισης τη χρονική στιγμή  $0.08\text{secs}$ .



**Σχήμα Γ'.11:** Απεικόνιση κατακόρυφης ταχύτητας μετατόπισης τη χρονική στιγμή  $0.09\text{secs}$ .

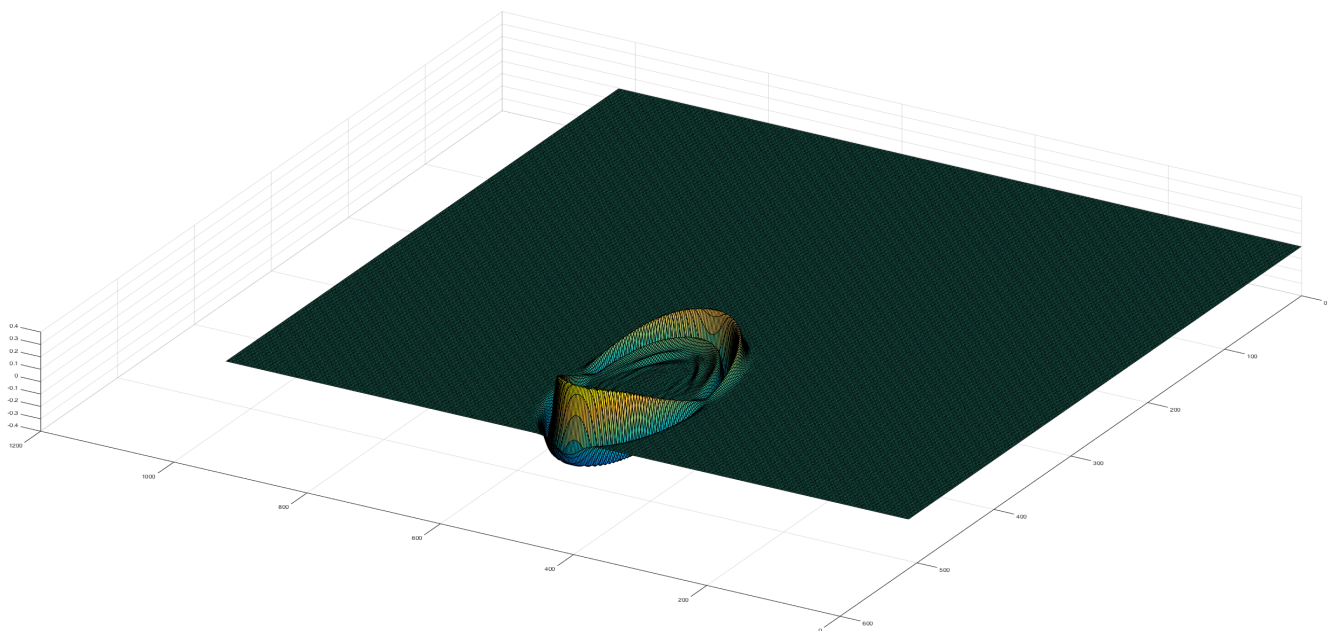


**Σχήμα Γ.12:** Απεικόνιση κατακόρυφης ταχύτητας μετατόπισης τη χρονική στιγμή  $0.10secs$ .

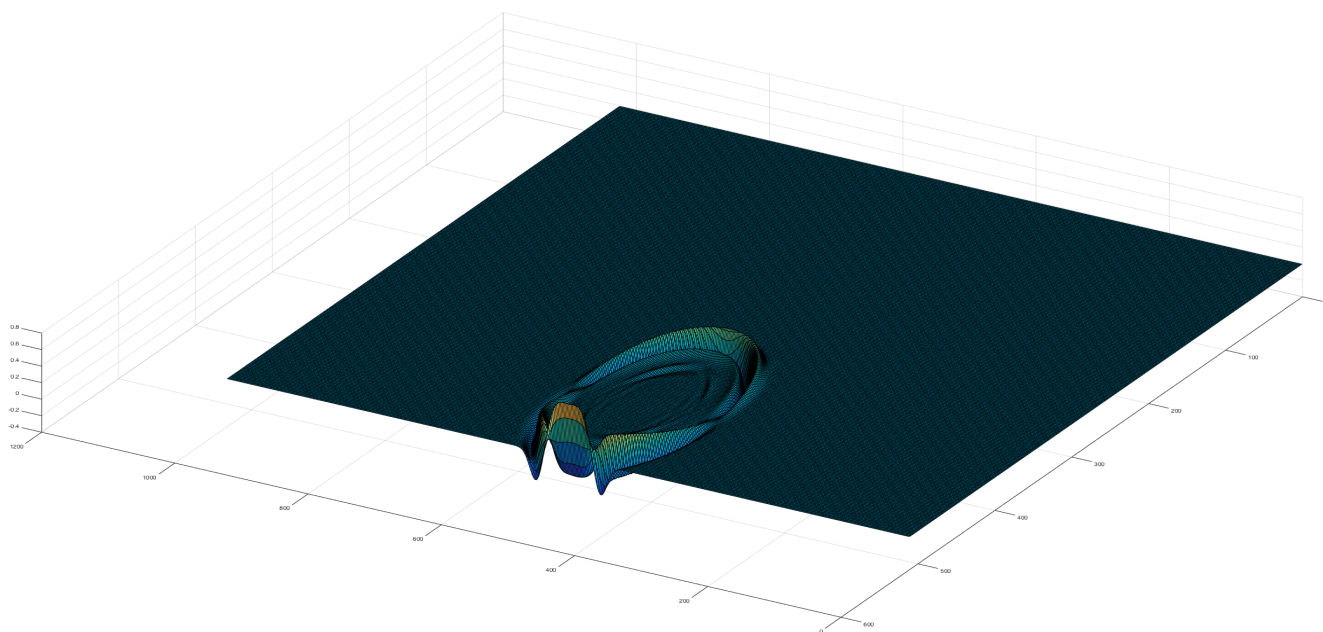




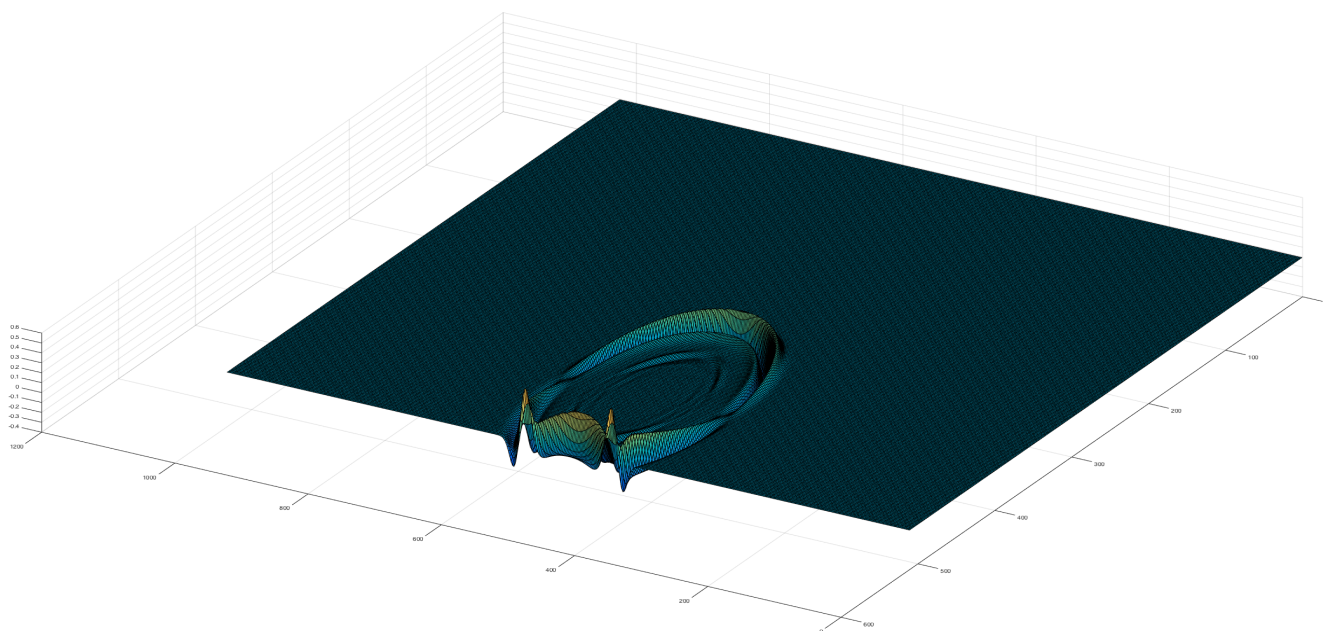
## Παράρτημα Δ΄



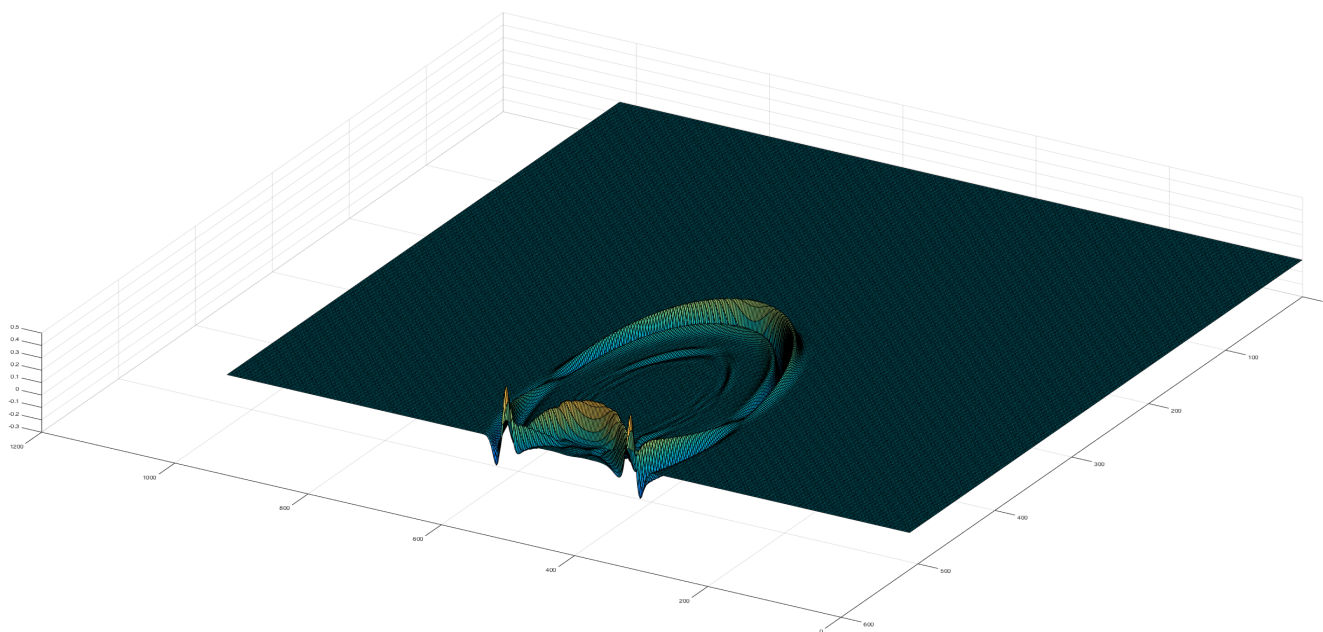
**Σχήμα Δ΄.1:** Απεικόνιση κατακόρυφης ταχύτητας μετατόπισης τη χρονική στιγμή  $0.08secs$ .



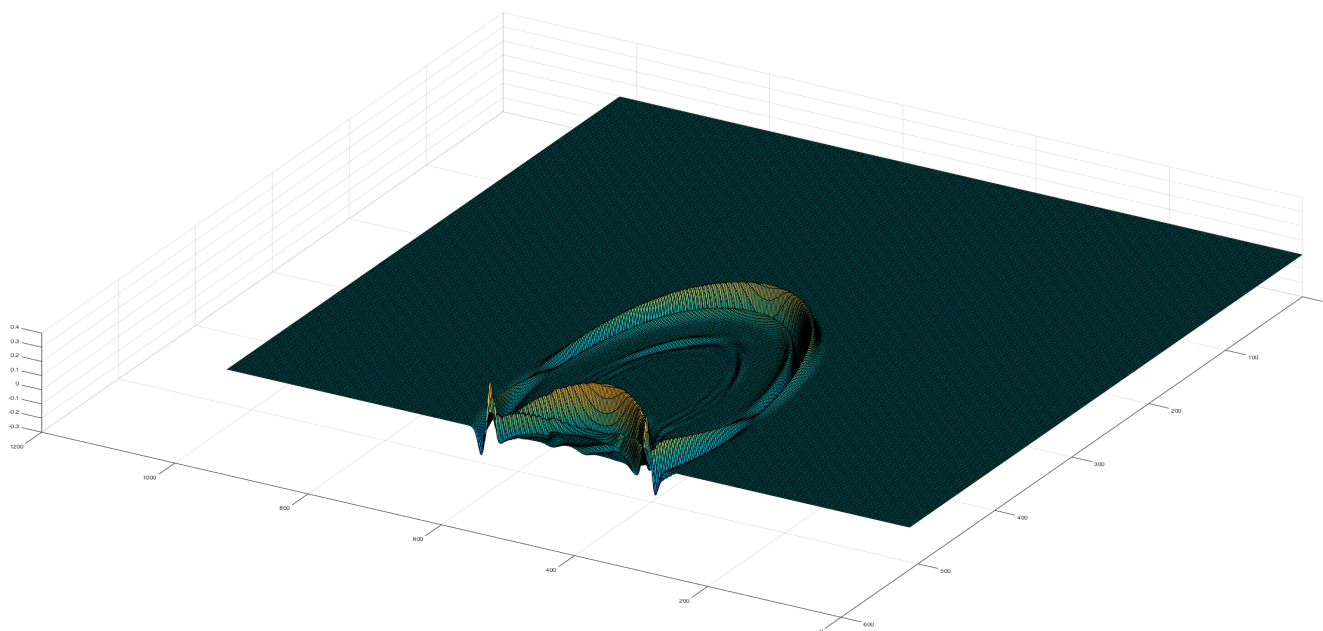
**Σχήμα Δ'.2:** Απεικόνιση κατακόρυφης ταχύτητας μετατόπισης τη χρονική στιγμή  $0.09secs$ .



**Σχήμα Δ'.3:** Απεικόνιση κατακόρυφης ταχύτητας μετατόπισης τη χρονική στιγμή  $0.10secs$ .

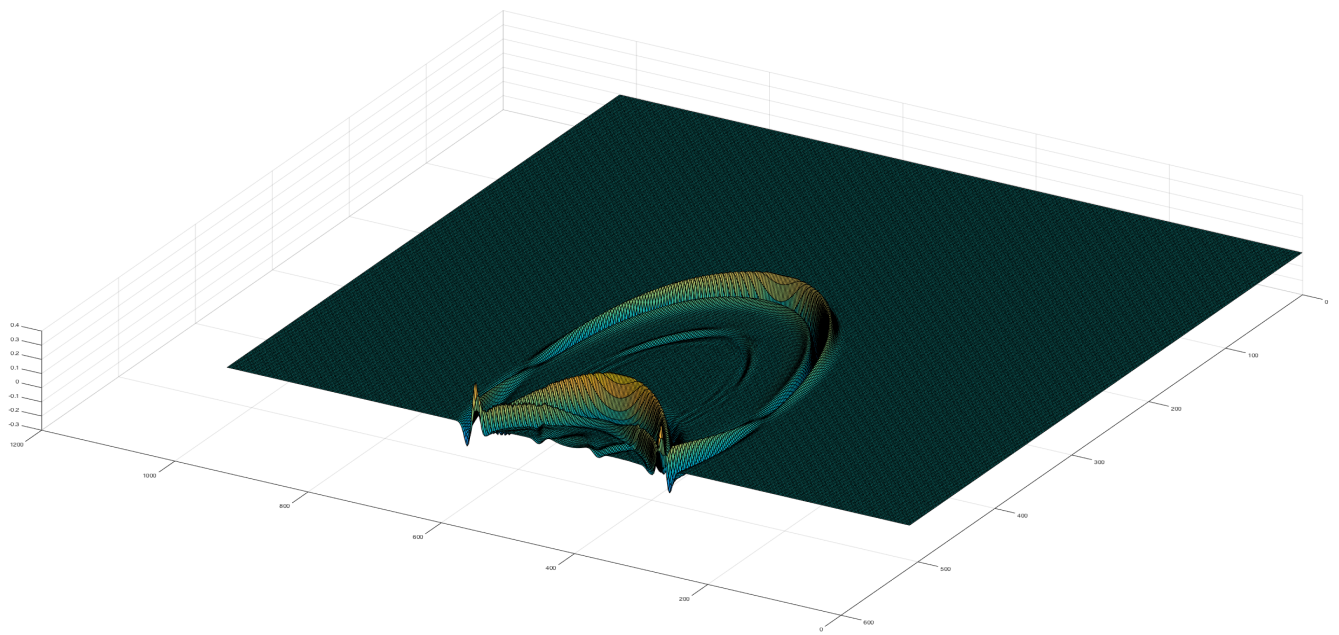


**Σχήμα Δ'.4:** Απεικόνιση κατακόρυφης ταχύτητας μετατόπισης τη χρονική στιγμή  $0.11secs$ .

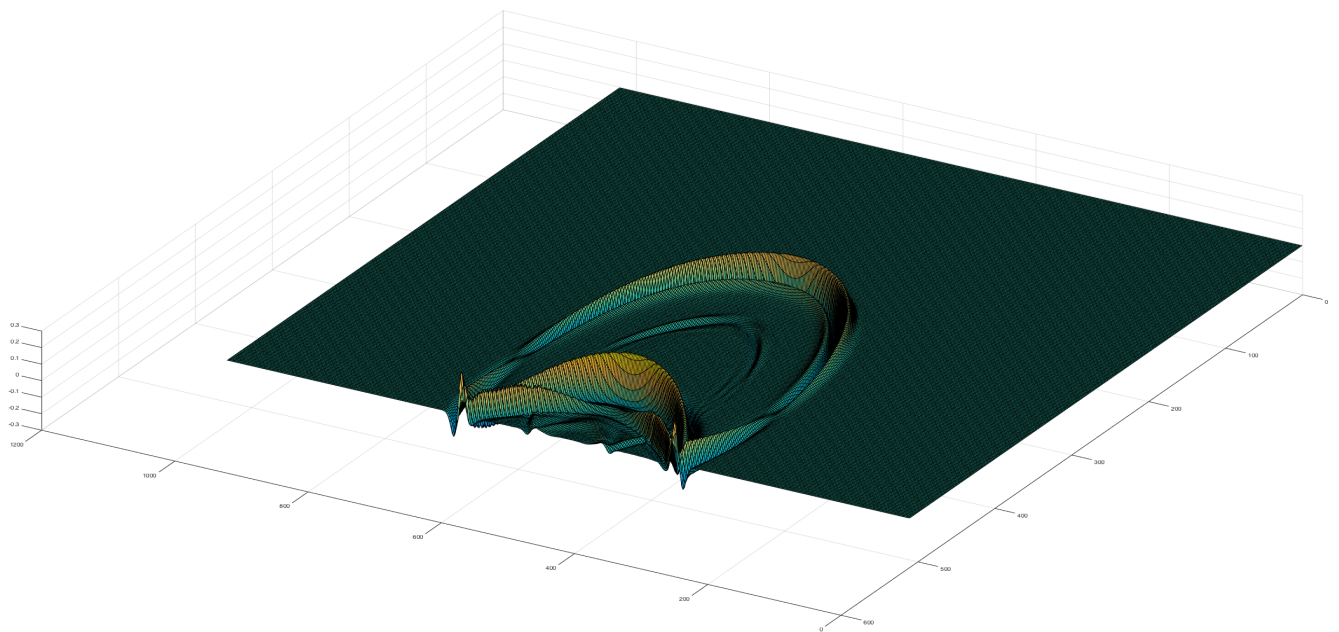


**Σχήμα Δ'.5:** Απεικόνιση κατακόρυφης ταχύτητας μετατόπισης τη χρονική στιγμή  $0.12secs$ .



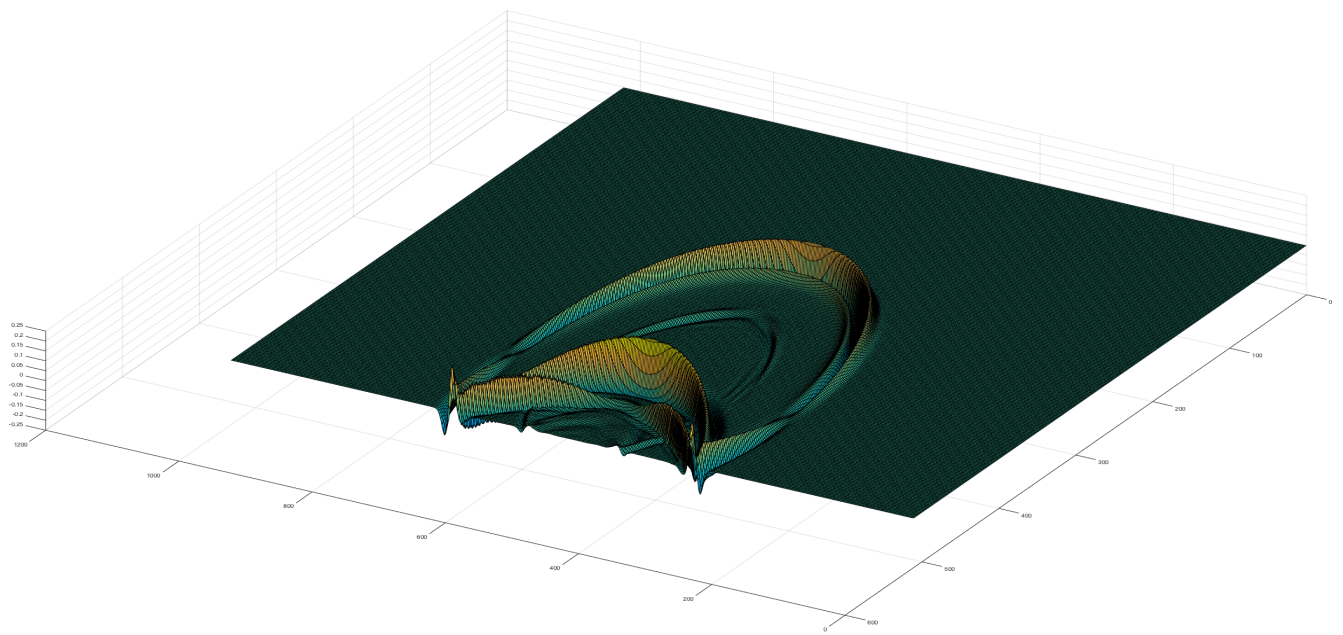


**Σχήμα Δ'.6:** Απεικόνιση κατακόρυφης ταχύτητας μετατόπισης τη χρονική στιγμή  $0.13secs$ .

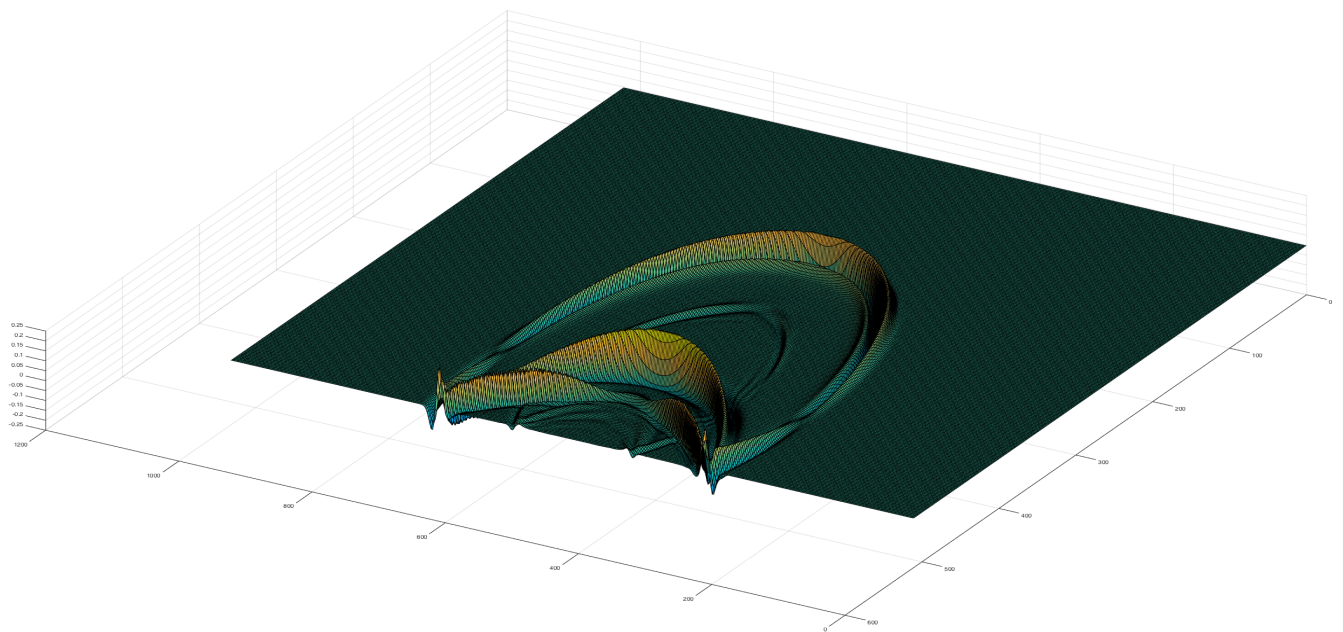


**Σχήμα Δ'.7:** Απεικόνιση κατακόρυφης ταχύτητας μετατόπισης τη χρονική στιγμή  $0.14secs$ .

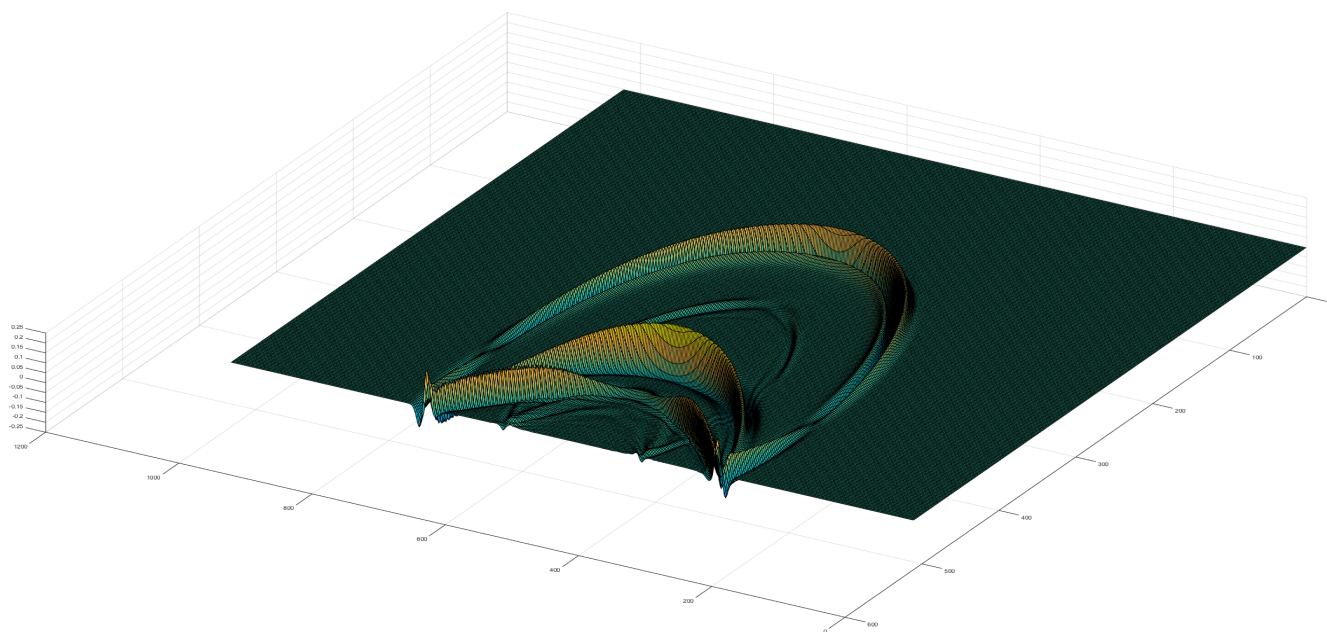




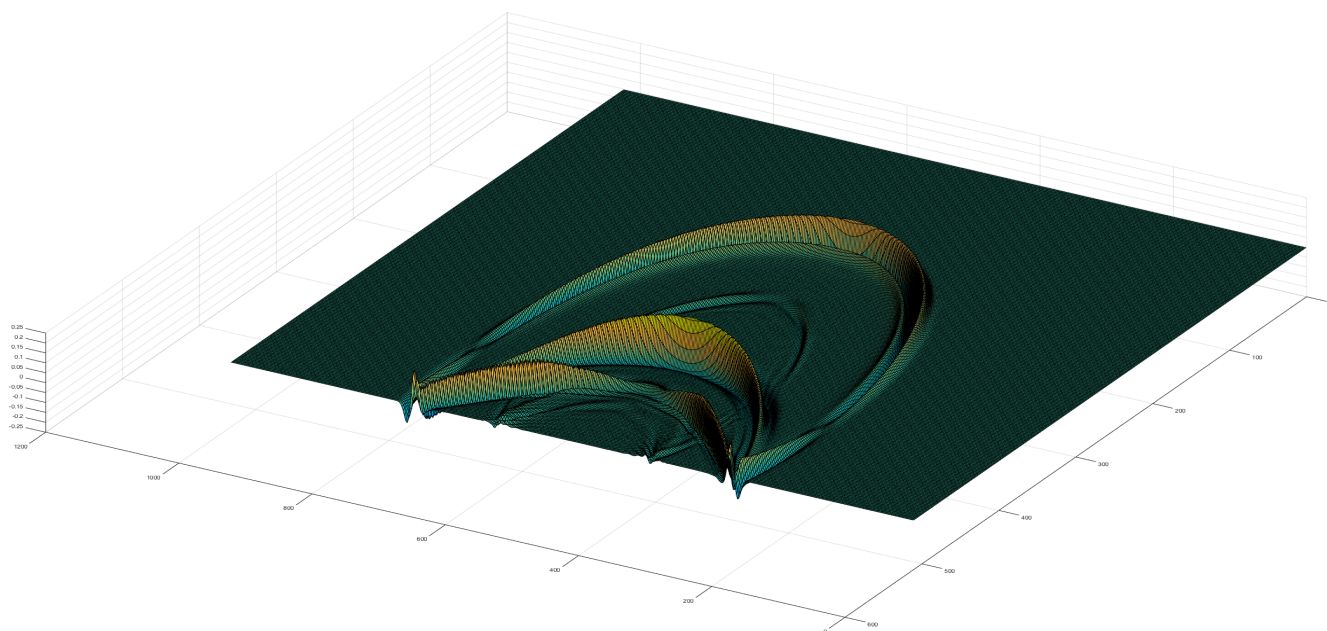
**Σχήμα Δ'.8:** Απεικόνιση κατακόρυφης ταχύτητας μετατόπισης τη χρονική στιγμή  $0.15secs$ .



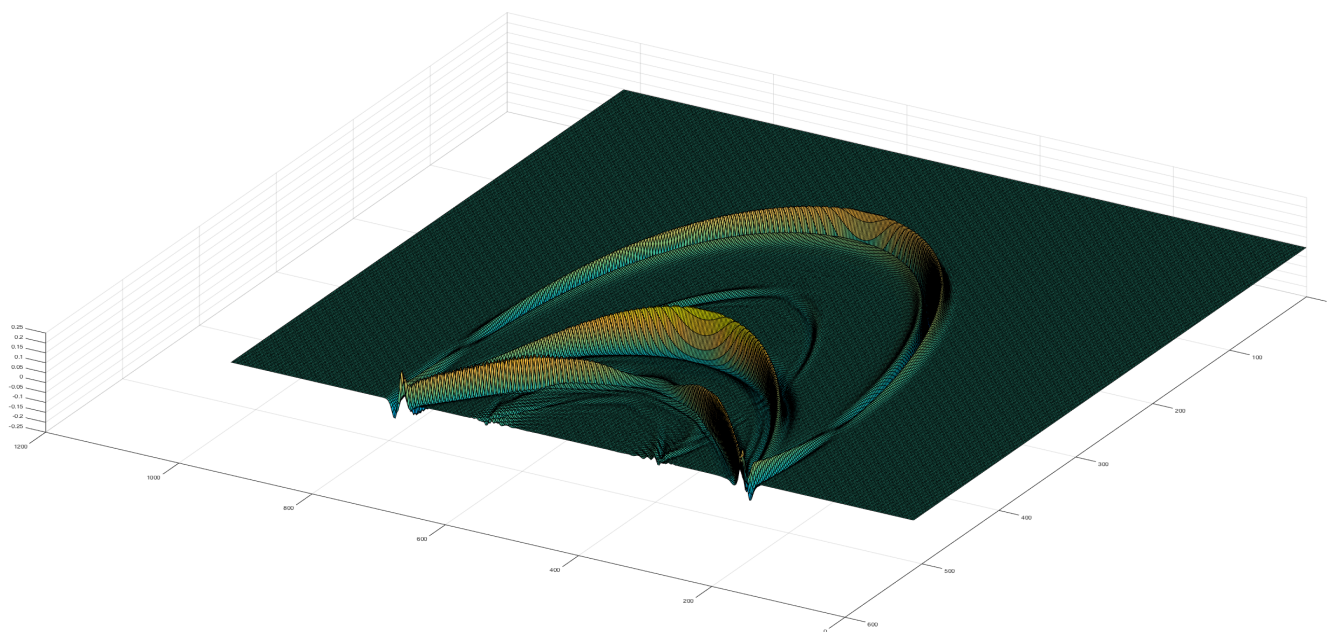
**Σχήμα Δ'.9:** Απεικόνιση κατακόρυφης ταχύτητας μετατόπισης τη χρονική στιγμή  $0.16secs$ .



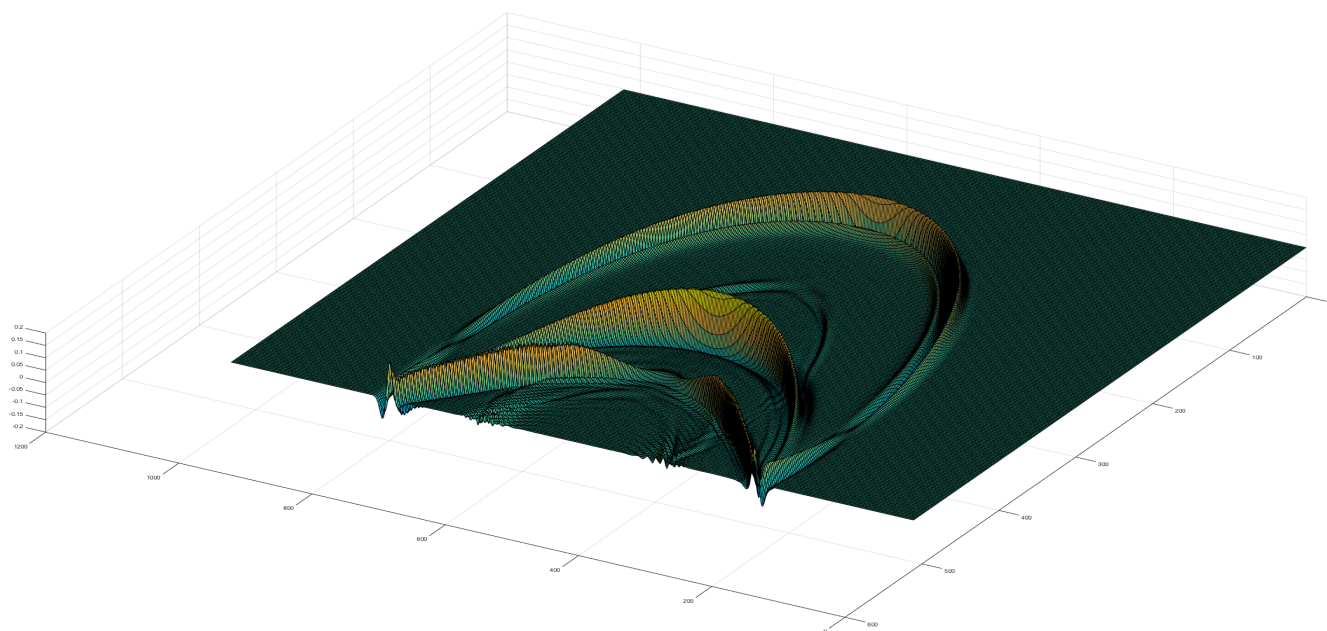
**Σχήμα Δ'.10:** Απεικόνιση κατακόρυφης ταχύτητας μετατόπισης τη χρονική στιγμή  $0.17secs$ .



**Σχήμα Δ'.11:** Απεικόνιση κατακόρυφης ταχύτητας μετατόπισης τη χρονική στιγμή  $0.18secs$ .

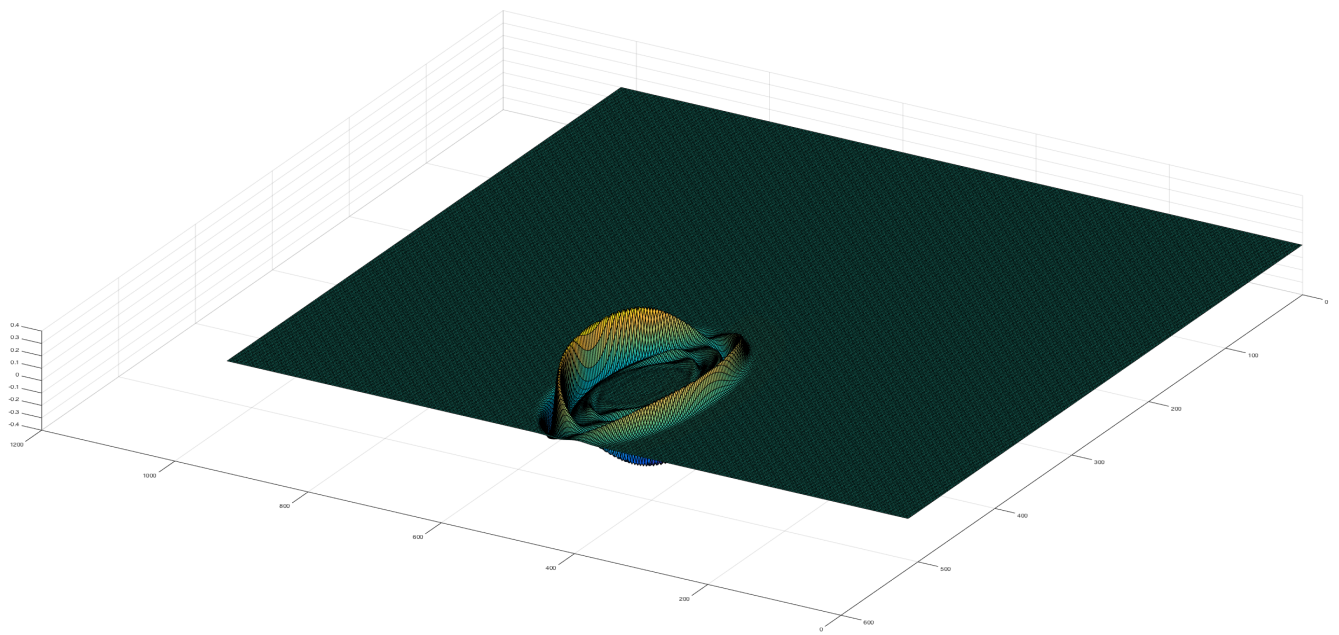


**Σχήμα Δ'.12:** Απεικόνιση κατακόρυφης ταχύτητας μετατόπισης τη χρονική στιγμή  $0.19secs$ .

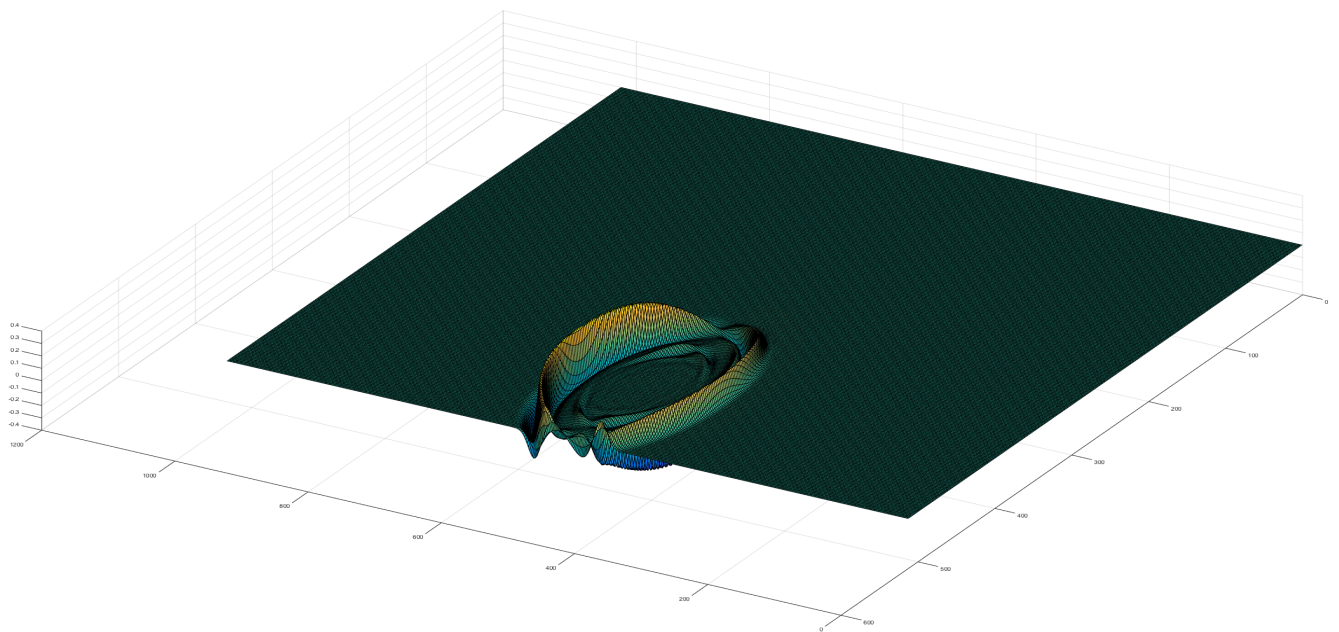


**Σχήμα Δ'.13:** Απεικόνιση κατακόρυφης ταχύτητας μετατόπισης τη χρονική στιγμή  $0.20secs$ .

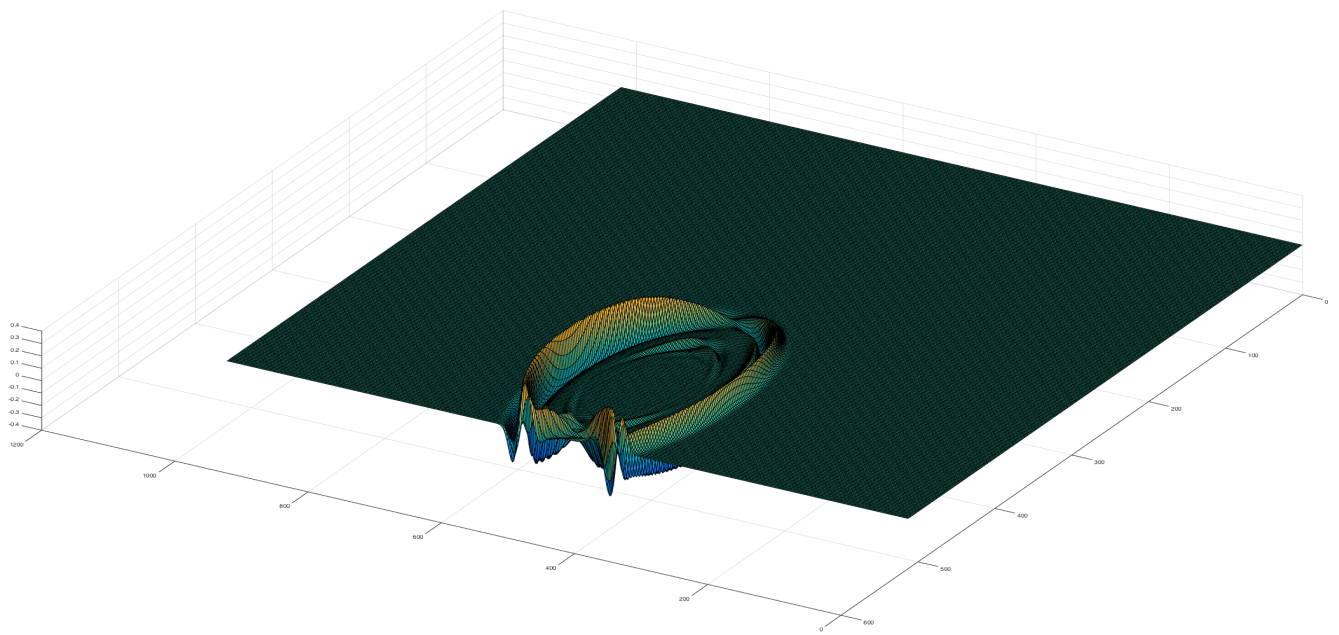




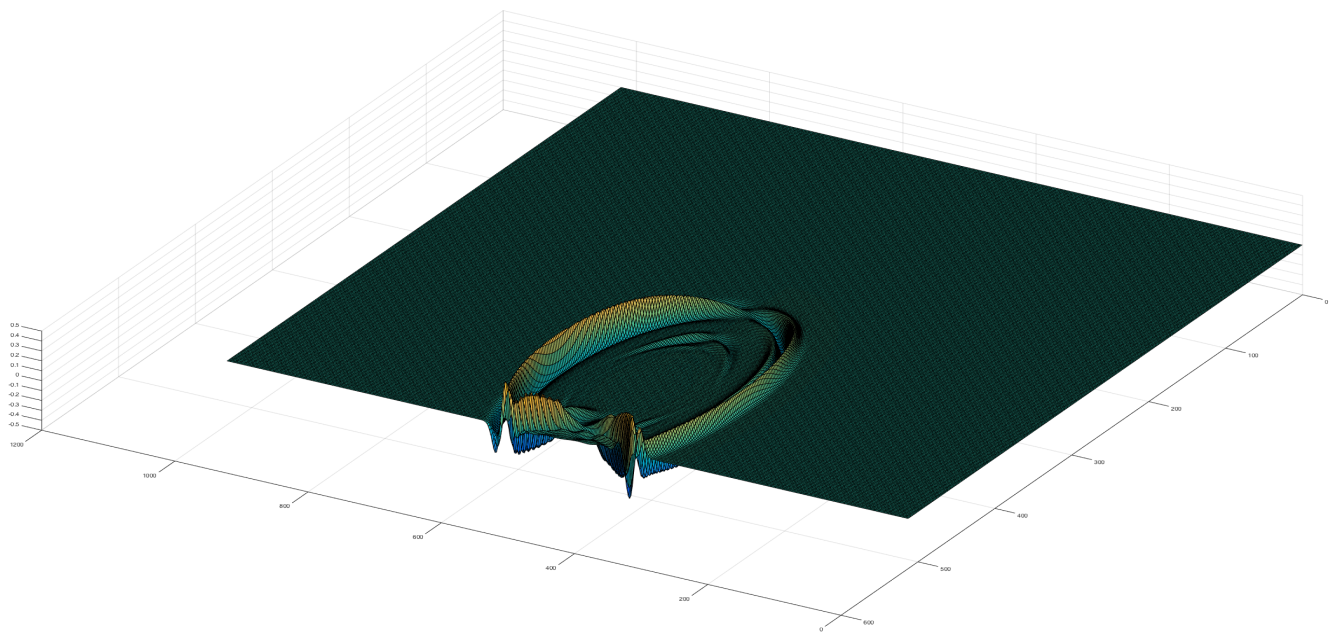
**Σχήμα Δ'.14:** Απεικόνιση οριζόντιας ταχύτητας μετατόπισης τη χρονική στιγμή  $0.08\text{secs}$ .



**Σχήμα Δ'.15:** Απεικόνιση οριζόντιας ταχύτητας μετατόπισης τη χρονική στιγμή  $0.09\text{secs}$ .

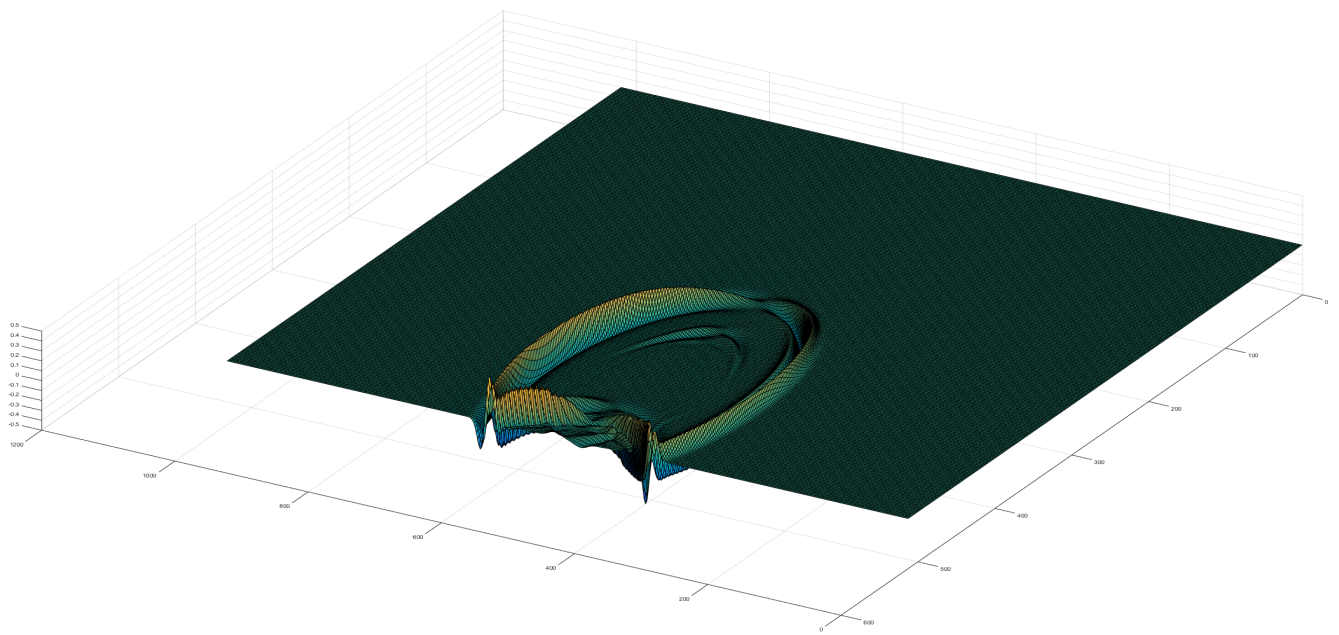


**Σχήμα Δ'.16:** Απεικόνιση οριζόντιας ταχύτητας μετατόπισης τη χρονική στιγμή  $0.10secs$ .

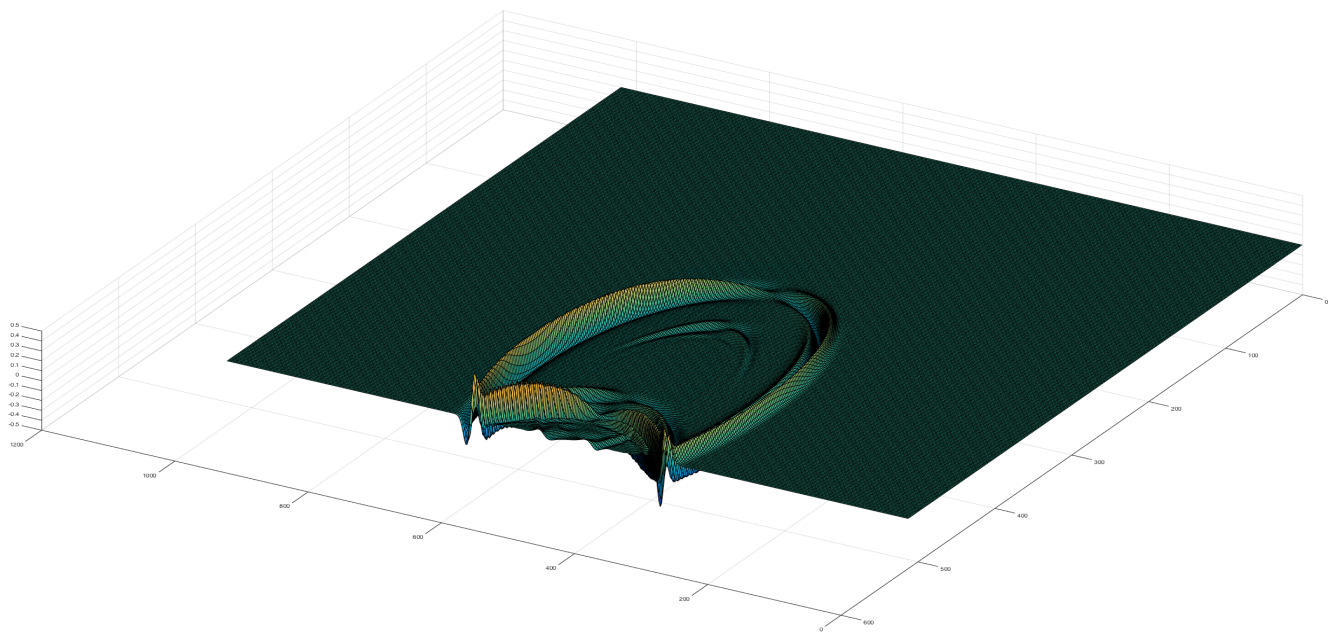


**Σχήμα Δ'.17:** Απεικόνιση οριζόντιας ταχύτητας μετατόπισης τη χρονική στιγμή  $0.11secs$ .

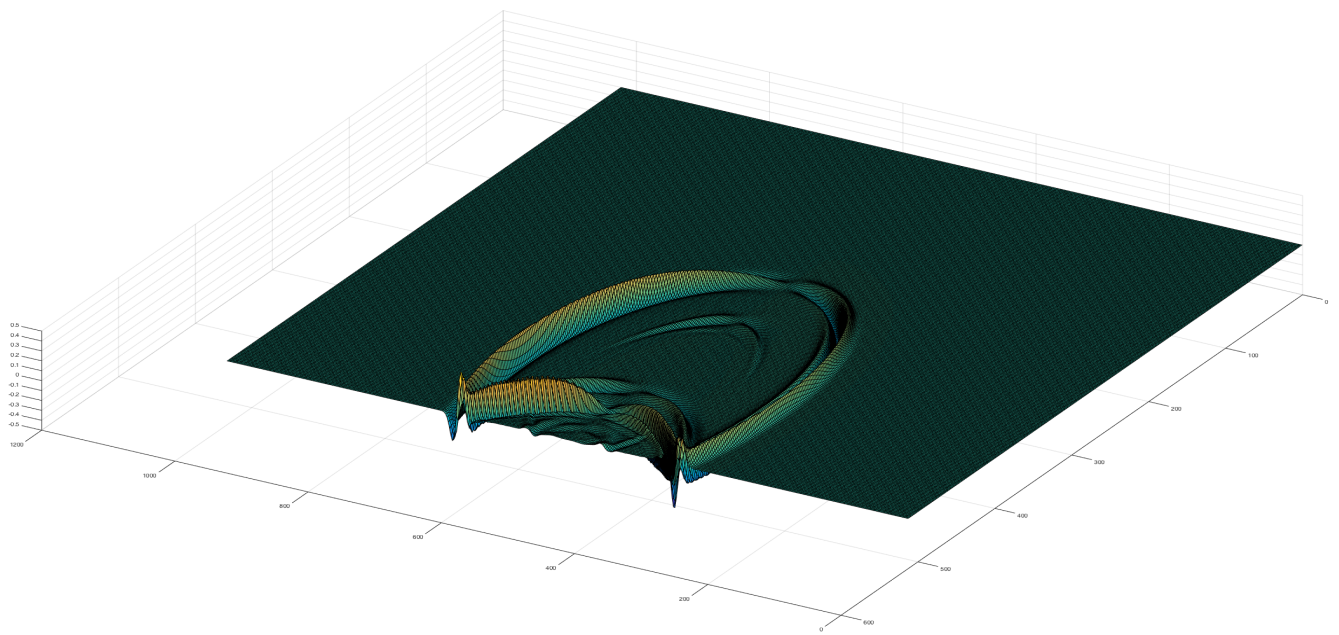




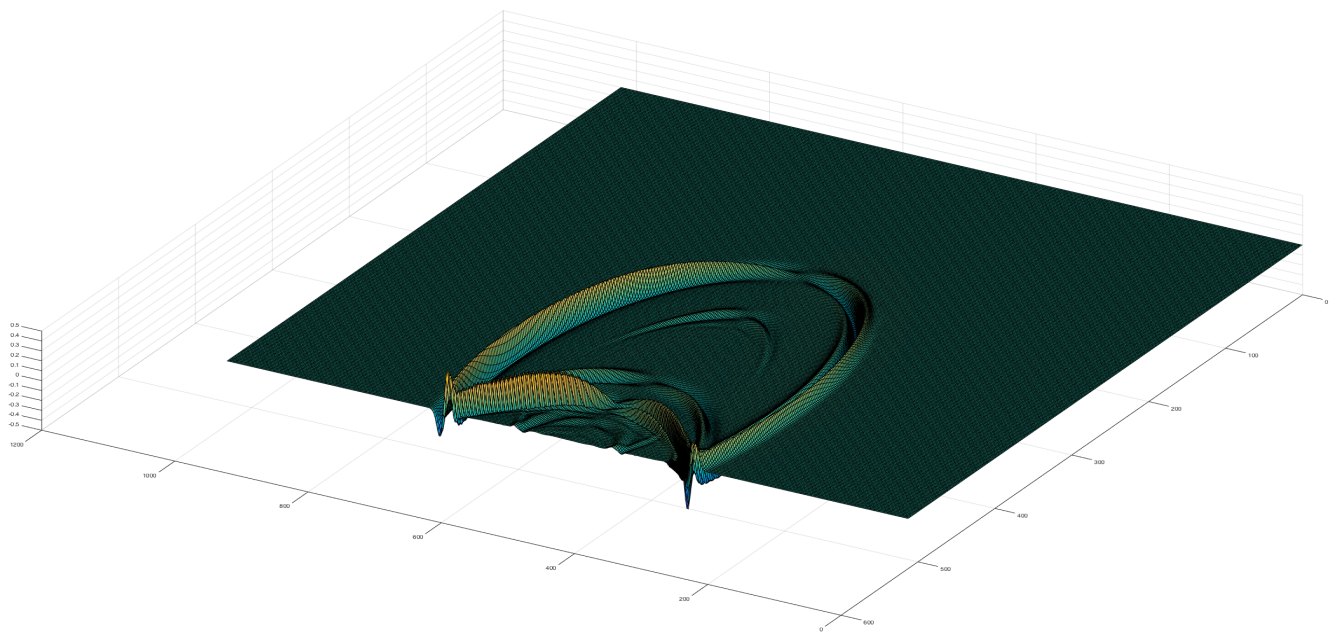
**Σχήμα Δ'.18:** Απεικόνιση οριζόντιας ταχύτητας μετατόπισης τη χρονική στιγμή  $0.12secs$ .



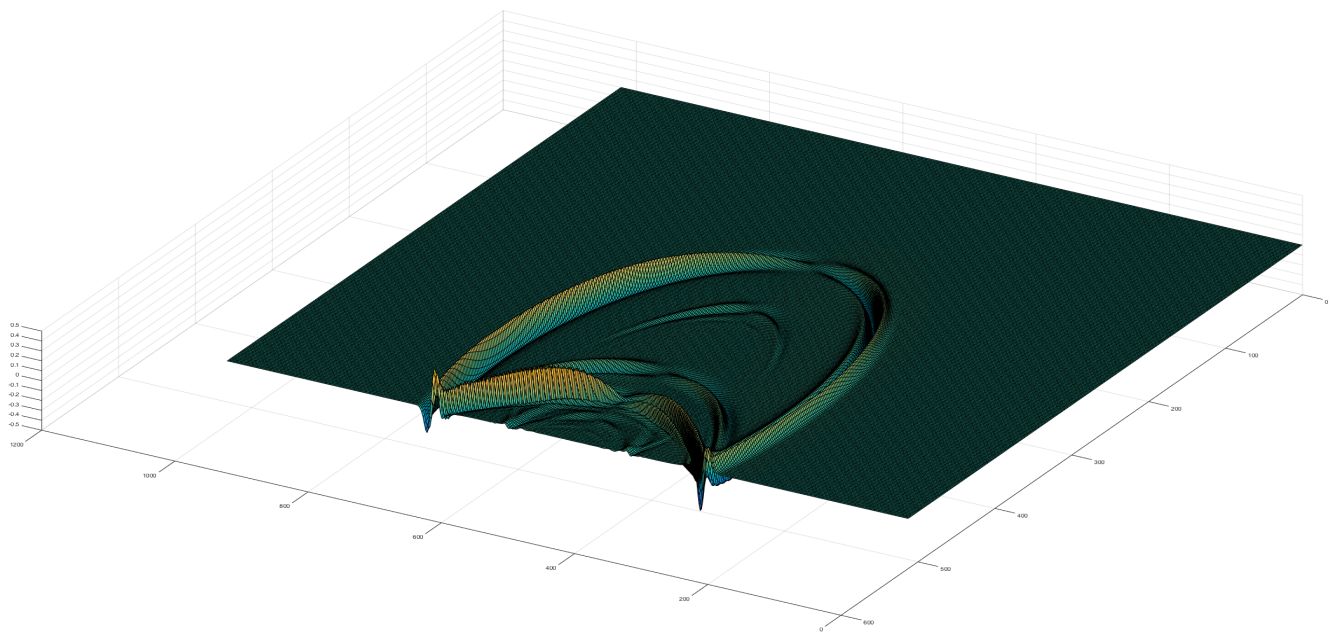
**Σχήμα Δ'.19:** Απεικόνιση οριζόντιας ταχύτητας μετατόπισης τη χρονική στιγμή  $0.13secs$ .



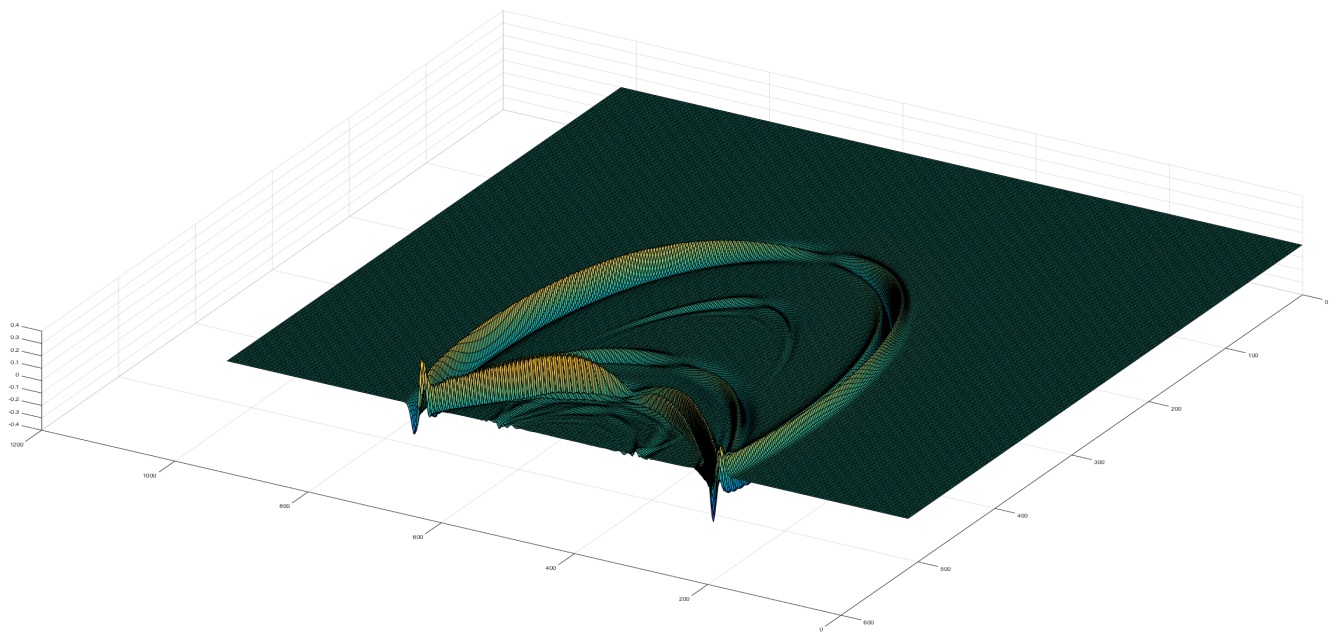
**Σχήμα Δ'.20:** Απεικόνιση οριζόντιας ταχύτητας μετατόπισης τη χρονική στιγμή  $0.14secs$ .



**Σχήμα Δ'.21:** Απεικόνιση οριζόντιας ταχύτητας μετατόπισης τη χρονική στιγμή  $0.15secs$ .

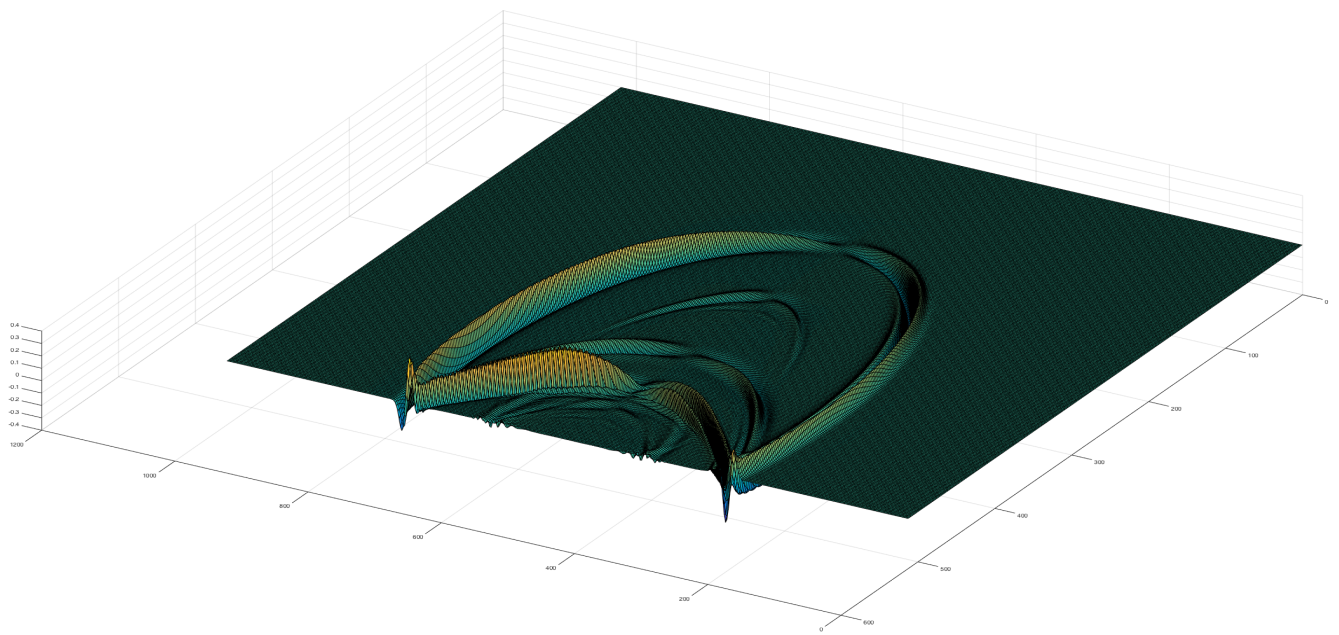


**Σχήμα Δ'.22:** Απεικόνιση οριζόντιας ταχύτητας μετατόπισης τη χρονική στιγμή  $0.16\text{secs}$ .

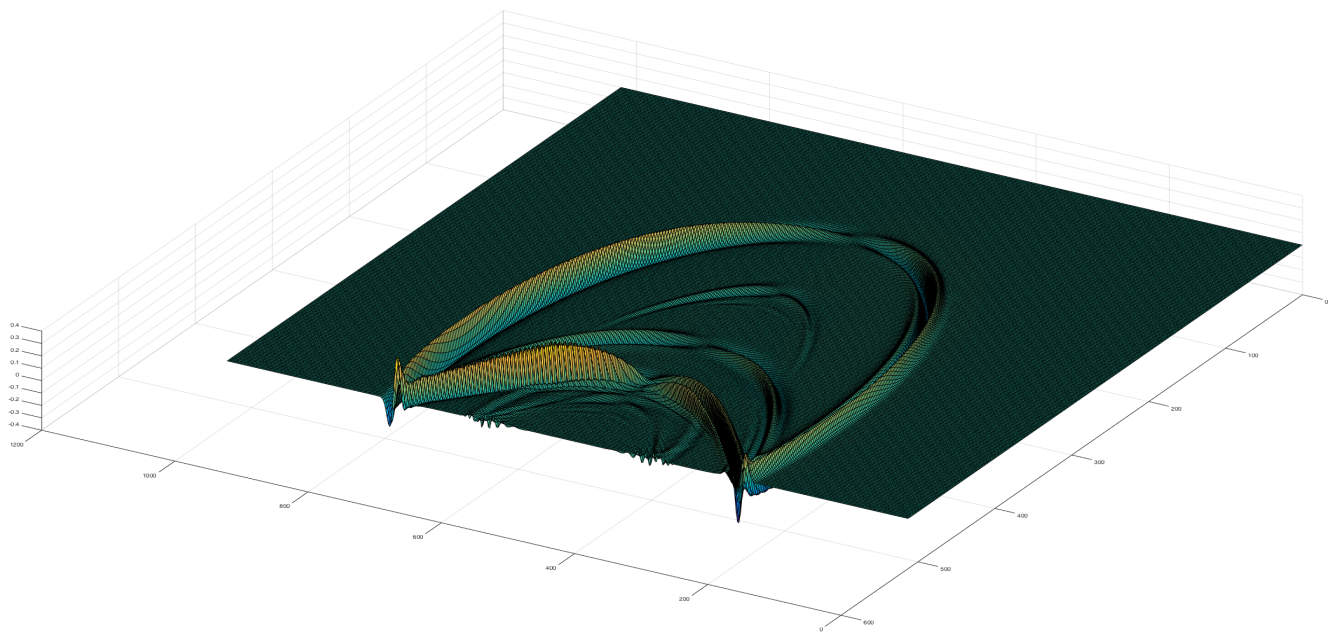


**Σχήμα Δ'.23:** Απεικόνιση οριζόντιας ταχύτητας μετατόπισης τη χρονική στιγμή  $0.17\text{secs}$ .

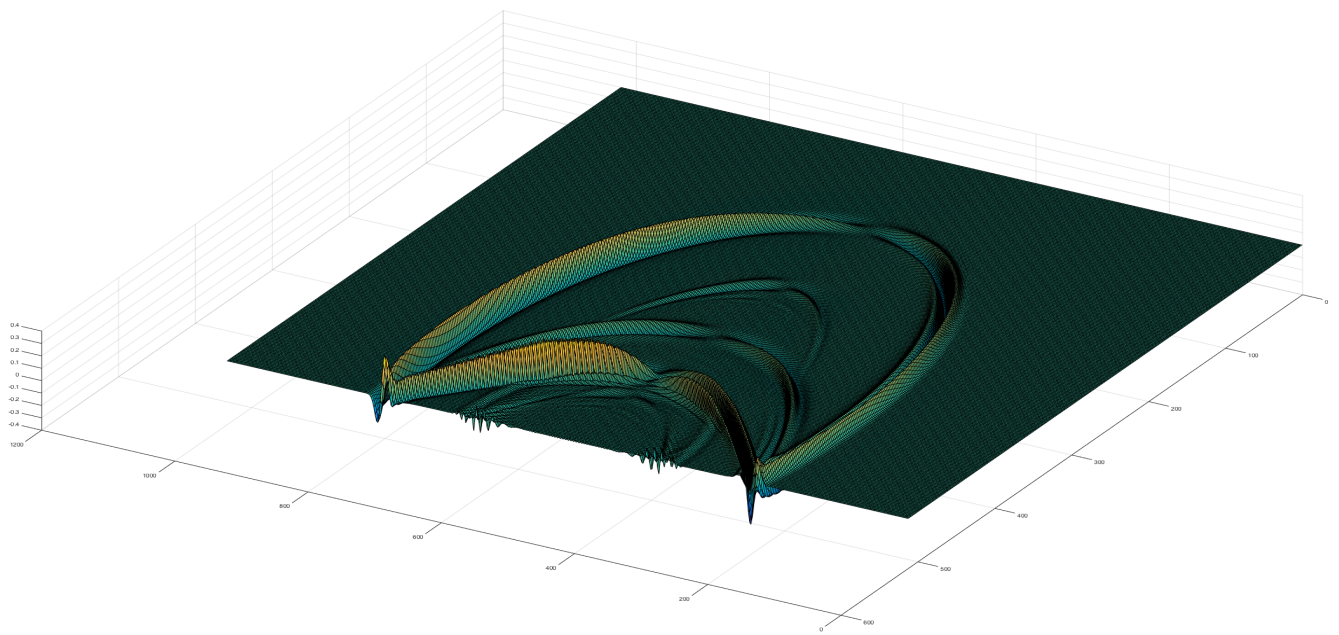




**Σχήμα Δ'.24:** Απεικόνιση οριζόντιας ταχύτητας μετατόπισης τη χρονική στιγμή  $0.18secs$ .



**Σχήμα Δ'.25:** Απεικόνιση οριζόντιας ταχύτητας μετατόπισης τη χρονική στιγμή  $0.19secs$ .



**Σχήμα Δ'.26:** Απεικόνιση οριζόντιας ταχύτητας μετατόπισης τη χρονική στιγμή  $0.20secs$ .



# Βιβλιογραφία

- [1] T. Becker and B. Kaus, "Numerical Modeling of Earth Systems", <http://www-udc.ig.utexas.edu/external/becker/preprints/Geodynamics557.pdf>, 2017.
- [2] J. Carcione, "Rayleigh waves in isotropic viscoelastic media", *Geophysical Journal International*, 108, pp. 453-464, 1992.
- [3] N. Dai, A. Vafidis and E. Kanasevich, "Composite Absorbing Boundaries for the numerical simulation of seismic waves", *Bulletin of the Seismological Society of America*, 84(1), pp. 185-191, 1994.
- [4] A. Delis and E. Mathioudakis, "A Finite Volume Method Parallelization for the Simulation of Free Surface Shallow Water Flows", *Maths and Computers in Simulation*, 79(11), pp. 3339-3359, 2009.
- [5] D. Gaitonde and M. Visbal. "High order schemes for Navier-Stokes equations: Algorithm and implementation into FDL3DI", *In NASA, AFRL-VA-WP-TR-1998-3060*. 1998.
- [6] D. Kosloff and J. M. Carcione, "Two-dimensional simulation of Rayleigh waves with staggered sine/cosine transforms and variable grid spacing ", *Geophysics.*, 75(4), pp. T133-140, 2010.
- [7] J. Kristek, P. Moczo and R.J. Archuleta, "Efficient Methods to simulate planar free surface in the 3D 4th-order staggered grid finite difference schemes", *Stud.Geophys. Geod.*, (46), pp. 355-381, 2002.

- [8] H. Lan and Z. Zhang, "Comparative study of the free-surface boundary condition in two-dimensional finite-difference elastic wave field simulation ", *J. Geophysics. Eng.*, 8 , pp. 275-286, 2011.
- [9] S. K. Lele. "Compact finite difference schemes with spectral-like resolution", *J. Comput. Physics*, 103, pp 16-42, 1992.
- [10] V. Mandikas and E. Mathioudakis, "A parallel multigrid solver for incompressible flows on computing architectures with accelerators", *The Journal of Supercomputing - SUPE*, vol. 73 (11), pp. 4931-4956, Springer, 2017.
- [11] E. Mathioudakis, V. Mandikas, G. Kozyrakis, N. Kampanis, and J. Ekaterinaris, "Multigrid cell-centered techniques for high-order incompressible flow numerical solutions", *Aerospace Science and Technology - AESTE*, 64, pp. 85-101, Elsevier, 2017.
- [12] P. Moczo, J. Kristek and M. Galis, "The Finite-Difference Modelling of Earthquake Motions", <https://doi.org/10.1017/CBO9781139236911>, Cambridge University Press, 2014.
- [13] A. Vafidis, "Supercomputer Finite Difference Methods for Seismic Wave Propagation", Phd Thesis, Univ. of Alberta, 1988.
- [14] Jun Zhang, "Multigrid Method and fourth order compact difference scheme for 2D Poisson equation with unequal meshsize discretization", *J. Comp. Physics.*, 179, pp. 170-179, 2002.
- [15] N. Ελευθερίου, Γ. Κρητικάκης, Ε. Μαθιουδάκης, Α. Βαφείδης, "Αριθμητικές Μέθοδοι Υψηλής Ακρίβειας για την Προσομοίωση Επιφανειακών Σεισμικών Κυμάτων σε Σύγχρονες Υπολογιστικές Αρχιτεκτονικές", Πρακτικά 4ου Πανελ. Συν. Αντισεισμικής Μηχ/κής και Τεχ. Σεισμολογίας, Αθήνα , 2019.

- [16] Α. Κουτελιδάκης, "Αριθμητικές μέθοδοι διακριτοποίησης συμπαγών σχημάτων πεπερασμένων διαφορών για την προσομοίωση της διάδοσης των σεισμικών κυμάτων", Διπλωματική εργασία, ΜΗΧ.Ο.Π. - Πολυτεχνείο Κρήτης, <https://doi.org/10.26233/heallink.tuc.79171> , 2018.