

Δέσποινα Η. Τσιλίκη

Μεταπτυχιακή Διατριβή

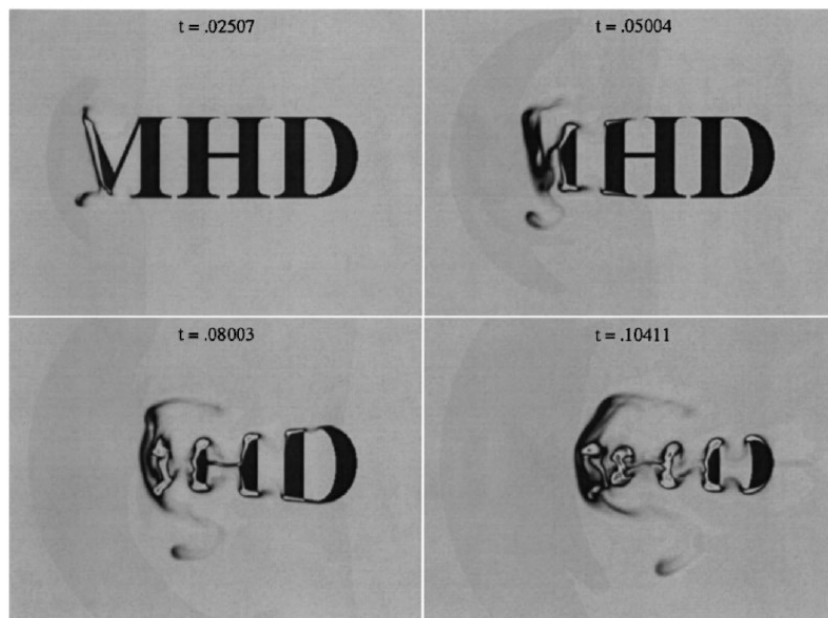
Προσομοίωση μαγνητοϋδροδυναμικών φαινομένων: οι εναλλακτικές προσεγγίσεις

Τριμελής επιτροπή:

Ι.Κ. Νικολός (επιβλέπων)

Α. Δελής

Μ. Ταταράκης



(Dai, et al., 1998)

Χανιά, Μάιος, 2020

Ευχαριστίες

Η εκπόνηση της παρούσας διατριβής δεν θα ήταν εφικτή χωρίς την βοήθεια των συγγενών, των συναδέλφων από το μεταπτυχιακό πρόγραμμα Συστήματα Παραγωγής, και των φίλων που αυτά τα χρόνια ήταν δίπλα μου σε κάθε βήμα.

Ευχαριστώ ιδιαιτέρως τους παρακάτω συγγραφείς κωδίκων, προγραμματιστές, ακαδημαϊκούς, ερευνητές: Darren De Zeeuw (UM, SWMF code), Luca Del Zanna (USF, ECHO code), Pierre Kestener (CEA Saclay-DRF, RAMSES GPU code), Nikola Vitas (IAC, MANCHA3D code). Με την άμεση και ολοκληρωμένη απάντηση τους φώτισαν κάποια σημεία που τα εγχειρίδια και τα ακαδημαϊκά άρθρα δεν μπορούσαν να απαντήσουν για να μπορέσει η παρούσα εργασία να είναι όσο το δυνατόν πιο επίκαιρη.

Η καθοδήγηση, η επιμέλεια και η υπομονή, την οποία ο επιβλέπων Καθ. Ι.Κ. Νικολός έδειξε το διάστημα εκπόνησης της διατριβής αυτής, ήταν καθοριστική για την προσωπική μου ακαδημαϊκή εξέλιξη και την δημιουργία μιας δουλειάς πρωτότυπης και ελπίζω επιστημονικά ενδιαφέρουσας. Ευελπιστώ να αποτελέσει ένα λιθαράκι για την επικαιροποίηση της γνώσης πάνω στο θέμα της επίλυσης MHD προβλημάτων και τον προβληματισμό για την περαιτέρω ανάπτυξη κωδίκων MHD.

Aknowledgements

The fulfilling of the present post graduate issue would have not been possible without the support of my relatives, colleagues and friends that stood by me in every step.

I especially want to thank the following developers, academics, researchers: Darren De Zeeuw (UM, SWMF code), Luca Del Zanna (USF, ECHO code), Pierre Kestener (CEA Saclay-DRF, RAMSES GPU code), Nikola Vitas (IAC, MANCHA3D code). Their immediate and complete answers have lightened some aspects of their MHD codes, aspects that the user's guides and papers could not, so as the issue's information could be up-to date.

The guiding, diligence and patience that my supervisor, Prof. I.K. Nikolos has shown from the beginning till the end of writing, has been decisive for my personal academic step forward and for the creation of something new and I hope scientifically interesting. I hope this issue could be a necessary step for the bibliographical update on MHD problems-handling codes and further food for thought on their evolution hereafter.

Περίληψη

Οι αρχές της Μαγνητοϋδροδυναμικής (MHD - Magneto Hydrodynamics) έχουν πολλές εφαρμογές μεταξύ άλλων στη γεωλογία, στην αστροφυσική στη ρευστομηχανική και στην τέταρτη κατάσταση της ύλης, το «πλάσμα». Η MHD θεωρία αποτελεί επιστημονικό αντικείμενο με τεράστιο εύρος και όσον αφορά το ίδιο το φαινόμενο καθώς και τις εφαρμογές του, με συνεχή εξέλιξη. Η παρούσα εργασία στοχεύει στην παρουσίαση των εναλλακτικών προσεγγίσεων, που εφαρμόζονται από την ακαδημαϊκή κοινότητα, όσον αφορά στην προσομοίωση των μαγνητοϋδροδυναμικών φαινομένων.

Χρησιμοποιήθηκε βιβλιογραφική και διαδικτυακή αναζήτηση (ακαδημαϊκά άρθρα, εγχειρίδια χρήσης κωδίκων, πληροφορίες στις ιστοσελίδες των κωδίκων προσομοίωσης MHD ροών), καθώς και διάλογος με τους εμπνευστές των διαφορετικών προσεγγίσεων, όταν τα εγχειρίδια και τα ακαδημαϊκά άρθρα δεν ήταν αρκετά για την επικαιροποίηση αυτών των προσεγγίσεων.

Η παρούσα εργασία δεν διεκδικεί την ολότητα της καταγραφής των κωδίκων που μπορεί να επιλύουν MHD προβλήματα (για π.χ. δεν αναλύονται αυτοί που επιλύουν σχετικιστικές εξισώσεις, ούτε και όσοι είναι μέρος εμπορικών/μη ελεύθερων προγραμμάτων). Παρόλα αυτά μπορεί να αποτελέσει ένα καλό εφόδιο για όποιον θέλει να γνωρίσει τη θεωρία της μαγνητοϋδροδυναμικής μέσα από τις εξισώσεις που την περιγράφουν, τις μεθόδους που εφαρμόζονται κατά πλειοψηφία σε ενεργούς κώδικες MHD αυτή τη στιγμή και την εν δυνάμει χρήση τους. Ταυτόχρονα, η ανάδειξη των προβληματικών σημείων και ελλείψεων των υπάρχουσών μεθόδων προσομοίωσης θα συνεισφέρει στο να τεθούν τα σωστά ερωτήματα προς επίλυση για τους ερευνητές στο μέλλον.

Λέξεις κλειδιά

Μαγνητοϋδροδυναμική – αριθμητική προσομοίωση– κώδικες – μη σχετικιστικές εξισώσεις.

Abstract

The magnetohydrodynamics' (MHD) principles are applied in a variety of applications among others in geology, astrophysics, fluid mechanics, and in the fourth state of matter the "plasma". MHD theory is a scientific area with large spectrum in regards to the phenomenon itself, as well as its applications, with constant evolution. This work aims to present the alternative approaches that are used by the academic community regarding the simulation of magnetohydrodynamic phenomena.

Bibliographic and internet searching has been conducted (papers, manuals, information in the MHD flow simulation codes' websites), as well as personal communication with the developers of the alternative approaches, when the manuals and papers were not adequate.

The present work does not contain all the codes solving MHD problems (for example those solving relativistic equations are not mentioned, nor those parts of commercial/non-free programmes). Nevertheless, it could be a proper tool for anyone that wants to know at first the theory of magnetohydrodynamics through equations, the methods used in the majority of active MHD codes and also the possible applications of such methods.

Key words

MHD-numerical simulation- codes- non-relativistic equations.

Περιεχόμενα

Ευχαριστίες	2
Aknowledgements	2
Περίληψη	3
Abstract.....	4
Ορολογία.....	7
Nomenclature	8
Συντομογραφίες	9
Εισαγωγή	10
Κεφάλαιο 1: Εισαγωγή στη μελέτη μαγνητοϋδροδυναμικών ροών (Magnetohydrodynamics, MHD).....	12
1.1 Εισαγωγή.....	12
1.2 Περιγραφή φαινομένου	12
1.3 Βασικές παράμετροι/μεγέθη για την Μαγνητοϋδροδυναμική	13
1.4 Ιδανικές εξισώσεις	14
1.4.1 Εξισώσεις Maxwell.....	14
1.4.2 Εξισώσεις ρευστομηχανικής	16
1.4.3 Σύζευξη	16
1.5 Συντηρητική μορφή εξισώσεων.....	18
1.5.1 Ιδανικές εξισώσεις σε καρτεσιανές συντεταγμένες	19
1.5.2 Ιδανικές εξισώσεις σε κυλινδρικές συντεταγμένες	20
1.6 Διατήρηση περιορισμού σωληνοειδούς μαγνητικού πεδίου ή divergence free magnetic field	22
1.6.1 8-κυματική δομή (χρήση όρου πηγής του Powell).....	22
1.6.2 7-κυματική δομή.....	24
1.6.3 Υβριδική μέθοδος	25
1.6.4 Σχήμα προβολής (projection scheme, Hodge projection) ή ελλειπτικό divergence cleaning...25	
1.6.5 Διανυσματικό δυναμικό (vector potential)	26
1.6.6 Χρήση γενικευμένου πολλαπλασιαστή Lagrange (Generalized Lagrangian Multiplier/GLM formulation)	28
1.6.7 Σχήμα περιορισμένης μεταφοράς (Constrained Transport/CT method)	29
1.6.8 Μέθοδος διάχυσης (diffusive method)	31
1.6.9 Πλεονεκτήματα-μειονεκτήματα	31
Κεφάλαιο 2: Υπάρχοντες κώδικες επίλυσης προβλημάτων μαγνητοϋδροδυναμικής	32
2.1 Εισαγωγή.....	32
2.2 Alsvid-UQ V.3.0	33
2.3 AstroBEAR V.2.0	35

2.4 ATHENA V.4.2.....	38
2.5 BATS-R-US (SWMF V.2.4)	40
2.6 ECHO	44
2.7 FARGO3D V.1.3	45
2.8 FLASH V.4.6.1	49
2.9 MANCHA3D.....	52
2.10 MURaM.....	55
2.11 NIRVANA V.3.8.....	58
2.12 PENCIL	62
2.13 PLUTO V.4.3	65
2.14 RAMSES V.3.0.....	70
2.15 RAMSES-GPU V.1.3.0	72
2.16 TRISTAN-MP-PITP.....	73
2.17 ZEUS-3D V.3.6	75
Κεφάλαιο 3: Προβλήματα - test cases.....	78
3.1 Brio-Wu MHD shock tube (1d).....	78
3.2 Orszag-Tang MHD Vortex (2d, 3d)	79
3.3 MHD rotor (ρότορας) (2d)	83
3.4 MHD current sheet (φύλλο ρεύματος) (2d)	87
3.5 Field loop advection (2d, 3d)	91
3.6 Προβλήματα ανά κώδικα.....	93
Κεφάλαιο 4: Συμπεράσματα.....	96
Βιβλιογραφία	105
Ιστοσελίδες	111
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ : Είδη εξισώσεων MHD	112

Ορολογία

(με **έντονη** γραμματοσειρά τα διανυσματικά μεγέθη)

B	Μαγνητική επαγωγή
<i>c</i>	Ταχύτητα του φωτός
<i>c_h</i>	Υπερβολικός όρος διόρθωσης
<i>c_p</i>	Ειδική θερμοχωρητικότητα υπό σταθερή πίεση
<i>c_p</i>	Παραβολικός όρος διόρθωσης
<i>CV</i>	Όγκος ελέγχου
E	Ένταση ηλεκτρικού πεδίου
F, G, L	Διανύσματα ροών κατά τη διεύθυνση x,y,z
<i>Ha</i>	Αριθμός Hartmann
J	Πυκνότητα Έντασης ρεύματος
<i>k</i>	Συντελεστής θερμικής αγωγιμότητας
<i>l₀</i>	Μήκος αναφοράς
<i>Lu</i>	Αριθμός Lundquist
<i>Pr</i>	Αριθμός Prandtl
<i>p</i>	Πίεση
<i>p_{tot}</i>	Ολική πίεση
<i>q</i>	Ροή θερμότητας
<i>q_c</i>	Πυκνότητα των ελεύθερων φορτίων
Q	Πρωτεύουσες μεταβλητές
<i>Re_m</i>	Μαγνητικός αριθμός Reynolds
<i>S</i>	Εντροπία
S	Όρος πηγών
<i>U</i>	Ηλεκτρικό δυναμικό
V_{alf}	Ταχύτητα Alfvén
V	Ταχύτητα
W	Συντηρητικές μεταβλητές
<i>β</i>	Bulk συνεκτικότητα
<i>ε</i>	Ηλεκτρική διαπερατότητα
<i>ε_r</i>	Σχετική ηλεκτρική διαπερατότητα
<i>η</i>	Ηλεκτρική αντίσταση
<i>η</i>	Τεχνητή παράμετρος διάχυσης
<i>η_m</i>	Μαγνητική αντίσταση (δεν είναι το αντίστροφο της διαπερατότητας)
<i>λ</i>	Μαγνητική διαχυσιμότητα/διάχυση
<i>μ</i>	Μαγνητική διαπερατότητα
<i>μ₀</i>	Μαγνητική διαπερατότητα κενού
<i>μ</i>	Δυναμική συνεκτικότητα
<i>ρ</i>	Πυκνότητα
<i>ρE</i>	Ολική ενέργεια ανά μονάδα όγκου
<i>σ</i>	ηλεκτρική αγωγιμότητα
<i>τ</i>	Μαγνητικός χρόνος απόσβεσης
τ	Διατμητική τάση
<i>φ</i>	Βαθμωτό πεδίο

Nomenclature

(**bold** for the vector variables)

B	Magnetic induction
<i>c</i>	Speed of light
<i>c_h</i>	Hyperbolic term of correction
<i>c_p</i>	Special heat capacity under standard pressure
<i>c_p</i>	Parabolic term of correction
<i>CV</i>	Control volume
E	Electric field
F, G, L	Fluxes vectors in x,y,z direction
<i>Ha</i>	Hartmann number
J	Electric current density
<i>k</i>	Thermal conductivity coefficient
<i>l₀</i>	Characteristic length scale
<i>Lu</i>	Lundquist number
<i>Pr</i>	Prandtl number
<i>p</i>	Pressure
<i>p_{tot}</i>	Total pressure
<i>q</i>	Heat flux
<i>qc</i>	Density of free charged particles
Q	Primitive variables
<i>Re_m</i>	Magnetic Reynolds
<i>S</i>	Entropy
S	Sources term
<i>U</i>	Electric potential
V_{alf}	Alfvén velocity
V	Velocity
W	Conservative variables
<i>β</i>	Bulk viscosity
<i>ε</i>	Electric permeability
<i>ε_r</i>	Relative electric permeability
<i>η</i>	Electric resistance
<i>η</i>	Artificial diffusion parameter
<i>η_m</i>	Magnetic resistance
<i>λ</i>	Magnetic diffusivity
<i>μ</i>	Magnetic permeability
<i>μ₀</i>	Vacuum Magnetic permeability
<i>μ</i>	Dynamic viscosity
<i>ρ</i>	Density
<i>ρE</i>	Total energy per volume
<i>σ</i>	Electric conductivity
<i>τ</i>	Magnetic time damping
τ	Shear stress
<i>φ</i>	Scalar field

Με κόκκινο σημειώνονται όροι που χρησιμοποιούνται με πολλές σημασίες.

Συντομογραφίες

BC - boundary conditions, συνοριακές συνθήκες

CPU - Central Processing Unit

CT - Constrained Transport scheme, σχήμα περιορισμένης μεταφοράς

EOS - Equation of State, καταστατική εξίσωση

FD - Finite Difference methods, ΠΔ - μέθοδος πεπερασμένων διαφορών

FVM - Finite Volume methods, ΠΟ - μέθοδος πεπερασμένων όγκων

GLM - Generalized Lagrangian Multiplier, γενικευμένος πολλαπλασιαστής Lagrange

GPU - Graphics Processing Unit, μονάδα επεξεργασίας γραφικών

MHD - MagnetoHydroDynamics, μαγνητοϋδροδυναμική

PDE - Partial Differential Equation, μερική διαφορική εξίσωση

RK- Runge-Kutta scheme, σχήμα Runge-Kutta

Εισαγωγή

Η παρούσα Μεταπτυχιακή Διατριβή αποτελεί την εργασία ολοκλήρωσης των μεταπτυχιακών σπουδών στο πρόγραμμα «Συστήματα Παραγωγής» της Σχολής Μηχανικών Παραγωγής και Διοίκησης, του Πολυτεχνείου Κρήτης. Το θέμα της διατριβής επιλέχθηκε σαν ακαδημαϊκή συνέχεια του μαθήματος επιλογής πάνω στην προσομοίωση των υδροδυναμικών ροών, με διδάσκοντα τον Καθ. Ι.Κ. Νικολό.

Οι αρχές της Μαγνητοϋδροδυναμικής (MHD - Magneto Hydrodynamics) έχουν εφαρμογές στη γεωλογία (για τη μελέτη του πυρήνα της Γης), στην αστροφυσική (όπου μελετώνται μεταξύ άλλων αστέρες και νεφελώματα), στη ρευστομηχανική (όπου μελετώνται μεταξύ άλλων η σταθεροποίηση και ο περιορισμός του πλάσματος, η ψύξη πυρηνικών αντιδραστήρων με υγρό μέταλλο και η χύτευση μετάλλων με ηλεκτρομαγνητικά μέσα) και στη μελέτη της δυναμικής του πλάσματος. Η MHD θεωρία αποτελεί επιστημονικό αντικείμενο με τεράστιο εύρος και όσον αφορά το ίδιο το φαινόμενο καθώς και τις εφαρμογές του, με συνεχή εξέλιξη.

Η εργασία που εκπονήθηκε στα πλαίσια της Μεταπτυχιακής Διατριβής βασίζεται σε δύο τμήματα. Το πρώτο τμήμα αφορά στη δημιουργία αναλυτικού εγχειριδίου για τον κώδικα Galatea C, ο οποίος αντιμετωπίζει την αριθμητική επίλυση του προβλήματος μόνιμης ροής συμπιεστού ρευστού και της μετάδοσης θερμότητας μέσω ακτινοβολίας. Το εν λόγω εγχειρίδιο αποτελεί απαραίτητο εφόδιο για να μπορέσει σε επόμενο στάδιο να γίνει η προσθήκη των νέων όρων - των όρων της μαγνητοϋδροδυναμικής στους υπάρχοντες όρους της υδροδυναμικής. Το εν λόγω εγχειρίδιο δεν αποτελεί τμήμα της παρούσας Διατριβής.

Οι εξισώσεις στο Κεφάλαιο 1 της παρούσας Διατριβής χρησιμοποιούν τα σύμβολα τα οποία χρησιμοποιούνται στη Διδακτορική Διατριβή του Γ. Ν. Λυγιδάκη με τίτλο «On the Numerical Solution of the Compressible Fluid Flow and Radiative Heat Transfer Problems», για να διευκολυνθεί η ανάπτυξη σε επόμενο στάδιο της αριθμητικής μεθοδολογίας και της ενσωμάτωσης των εξισώσεων MHD.

Το δεύτερο τμήμα της εργασίας αποτελείται κι αυτό με τη σειρά του από δύο βασικά μέρη. Το πρώτο μέρος (Κεφάλαιο 1) εισάγει τον μη εξειδικευμένο αναγνώστη στη θεωρία της μαγνητοϋδροδυναμικής, μέσω της περιγραφής του φαινομένου, της ανάλυσης των εξισώσεων (ιδανικών και μη ιδανικών) και της παρουσίασης των μεθόδων αντιμετώπισης μιας κρίσιμης συνθήκης (διατήρηση μαγνητικού πεδίου ως σωληνοειδές), που η αριθμητική επίλυση των παραπάνω εξισώσεων, επιβάλλει.

Το δεύτερο μέρος βασίστηκε στην βιβλιογραφική αναφορά βασικών χρησιμοποιούμενων αριθμητικών μεθόδων σε ελεύθερη διάθεση (υπολογιστικοί κώδικες, Κεφάλαιο 2) για την περιγραφή της παραπάνω θεωρίας (μεταξύ άλλων εφαρμογών της φυσικής) και την παρουσίαση των αποτελεσματικότητάς τους, κατά βάση μέσω της επίλυσης χαρακτηριστικών MHD προβλημάτων (Κεφάλαιο 3). Βασικό κομμάτι αποτέλεσε η εκτενής αναζήτηση, με βασικό εργαλείο το διαδίκτυο (καθώς το αντικείμενο έχει εφαρμογές σε διεθνές επίπεδο) των κωδίκων και στη συνέχεια η αποτύπωση/κατηγοριοποίηση ως προς τα βασικά τους χαρακτηριστικά, έτσι ώστε να μπορέσει η παρούσα εργασία να αποτελέσει ένα εύχρηστο εργαλείο σύγκρισης για τον αναγνώστη/χρήστη, που θα αναζητήσει τον κατάλληλο για τις εφαρμογές του κώδικα. Η εξειδικευμένη χρήση τους και κατ'αντιστοιχία το εξειδικευμένο κοινό, στο οποίο απευθυνόταν ο κάθε κώδικας (συνήθως αστροφυσικοί), με

την αντίστοιχη εμπειρία, συνήθως οδηγούσε στο να πρέπει να μελετηθεί εκτενώς το αντίστοιχο εγχειρίδιο ή σειρά επιστημονικών άρθρων με αναφορά στον κώδικα, ώστε να μπορέσει να αποτελέσει η εν λόγω εργασία ένα εκσυγχρονισμένο ντοκουμέντο. Η ξένη αποκλειστικά βιβλιογραφία αποτελούσε ένα επιπλέον εμπόδιο για την κατανόηση πολλές φορές νέων όρων, οι οποίοι σε πολλές περιπτώσεις δεν έχουν δόκιμη μετάφραση στην ελληνική γλώσσα, για αυτό και μέσα στο κείμενο χρησιμοποιούνται στην αγγλική.

Τέλος, παρουσιάζονται τα βασικά συμπεράσματα από τη διαδικασία αποτύπωσης κάποιων βασικών υπαρχόντων και εν εξελίξει κωδίκων, η ανάδειξη προβληματικών σημείων και τομέων για επίλυση από τους ερευνητές στο εξής. Συμπληρωματικά, το Παράρτημα συμπληρώνει το πλαίσιο των εξισώσεων MHD με την παρουσίαση των μη - ιδανικών εξισώσεων MHD.

Η παρούσα εργασία δεν διεκδικεί την ολότητα της καταγραφής των κωδίκων που μπορεί να επιλύουν MHD προβλήματα, μιας και δεν αναφέρεται εκτενώς στη σχετικιστική MHD (καθότι θα απαιτούνταν πολύ εξειδικευμένες γνώσεις φυσικής), η οποία αφορά και επιλύεται από σειρά λογισμικών, μεταξύ άλλων και του τύπου PIC (δίνεται ένα παράδειγμα μέσα στην εργασία για τον κώδικα TRISTAN-MP-PITP). Επιπλέον, λόγω πολύ μεγάλου όγκου πληροφορίας για λογισμικά που είναι σε ελεύθερη διάθεση ή ελεύθερη διάθεση υπό όρους, δεν ασχοληθήκαμε με εμπορικά λογισμικά. Παρόλα αυτά θεωρούμε ότι η παρούσα εργασία αποτελεί ένα καλό εφόδιο για όποιον θέλει να γνωρίσει τις μεθόδους που εφαρμόζονται κατά πλειοψηφία σε ενεργούς κώδικες MHD αυτή τη στιγμή και την εν δυνάμει χρήση τους.

Κεφάλαιο 1: Εισαγωγή στη μελέτη μαγνητοϋδροδυναμικών ροών (Magnetohydrodynamics, MHD)

1.1 Εισαγωγή

Μαγνητοϋδροδυναμική ονομάζεται ο επιστημονικός κλάδος που μελετά τη δυναμική των ηλεκτρικά αγωγίμων ρευστών. Παραδείγματα τέτοιων ρευστών είναι τα λιωμένα μέταλλα, το πλάσμα και το αλατόνερο. Η βασική ιδέα της μαγνητοϋδροδυναμικής έγκειται στο ότι είναι δυνατό να δημιουργηθεί ρεύμα σε ένα αγωγίμο υγρό, όταν αυτό βρεθεί υπό την επίδραση μαγνητικών πεδίων. Τα ηλεκτρικά ρεύματα που δημιουργούνται στο ρευστό δημιουργούν δυνάμεις εξ επαγωγής, λόγω της ροής του ρευστού και κατά συνέπεια μπορούν να μεταβάλλουν το συνολικό μαγνητικό πεδίο, συνεπώς το πεδίο της ταχύτητας \mathbf{V} έρχεται σε σύζευξη με το μαγνητικό πεδίο \mathbf{B} . Το σύνολο των εξισώσεων που περιγράφουν τα αντίστοιχα φαινόμενα είναι ένας συνδυασμός των εξισώσεων **Navier-Stokes** της μηχανικής των ρευστών μαζί με τις εξισώσεις **Maxwell** του ηλεκτρομαγνητισμού. Αυτές οι εξισώσεις πρέπει να επιλυθούν ταυτόχρονα, ώστε να υπάρξει περιγραφή των αντίστοιχων φυσικών φαινομένων της ροής.

1.2 Περιγραφή φαινομένου

Η αλληλεπίδραση της ροής ενός αγωγίμου ρευστού με το υπάρχον μαγνητικό πεδίο, με αποτέλεσμα την μεταβολή του συνολικού μαγνητικού πεδίου, μπορεί να περιγραφεί ως αλληλουχία τριών σταδίων (Davidson, 2017):

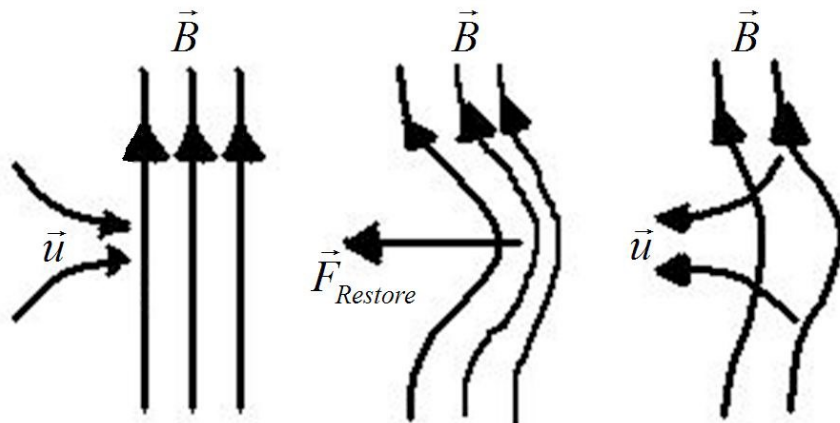
1. Η σχετική κίνηση του αγωγίμου ρευστού και του μαγνητικού πεδίου δημιουργεί μια ηλεκτρεγερτική δύναμη, της τάξης του $|\mathbf{V} \times \mathbf{B}|$ η οποία αναπτύσσεται σύμφωνα με τον νόμο του Faraday για την επαγωγή (law of induction). Ακολουθώς, επάγονται ηλεκτρικά ρεύματα με ένταση της τάξης του $\sigma(\mathbf{V} \times \mathbf{B})$, όπου σ η ηλεκτρική αγωγιμότητα.
2. Τα επαγόμενα ηλεκτρικά ρεύματα, σύμφωνα με το νόμο του Ampère, προκαλούν με τη σειρά τους ένα επαγόμενο μαγνητικό πεδίο. Αυτό προστίθεται στο ήδη υπάρχον μαγνητικό πεδίο και η αλλαγή είναι συνήθως τέτοια ώστε το ρευστό φαίνεται να «παρασύρει» (advection) τις γραμμές του μαγνητικού πεδίου κατά μήκος της κίνησής του.
3. Το συνδυασμένο μαγνητικό πεδίο (επιβαλλόμενο συν επαγόμενο) αλληλεπιδρά με την επαγόμενη ένταση του ρεύματος \mathbf{J} για να δώσει σαν απότοκο μια δύναμη Lorentz ($\mathbf{J} \times \mathbf{B}$). Αυτή επενεργεί πάνω στον αγωγό και γενικά έχει κατεύθυνση τέτοια ώστε να αποτρέπει την σχετική κίνηση του μαγνητικού πεδίου και του ρευστού.

Το πόσο επηρεάζει το πεδίο των ταχυτήτων το αρχικό μαγνητικό πεδίο εξαρτάται από το μέτρο της ταχύτητας, την αγωγιμότητα του ρευστού και το χαρακτηριστικό μήκος (ή μήκος αναφοράς) l καθώς επηρεάζει το πόσο χώρο καταλαμβάνει η πυκνότητα της έντασης του ρεύματος (Davidson, 2017).

1.3 Βασικές παράμετροι/μεγέθη για την Μαγνητοϋδροδυναμική

A. *Μαγνητικός αριθμός Reynolds*: Δίνεται από τον τύπο $Re_m = \mu\sigma V l = V l / \lambda$, όπου μ η μαγνητική διαπερατότητα, σ η ειδική αγωγιμότητα, V η ταχύτητα αναφοράς, l το χαρακτηριστικό μήκος, λ η μαγνητική διαχυσιμότητα (magnetic diffusivity, $\lambda = 1/\mu\sigma$). Είναι καθαρός αριθμός. Είναι χαρακτηριστικό μέγεθος του λόγου της μεταφοράς (advection) προς τη διάχυση (diffusion) ενός μαγνητικού πεδίου. Στα ρευστά υψηλής αγωγιμότητας η διάχυση είναι ασθενής και ο Re_m υψηλός (Davidson, 2017).

B. *Ταχύτητα Alfvén*: Δίνεται από τον τύπο $V_{alf} = B/\sqrt{\rho\mu}$. Για υψηλή τιμή του Re_m , μικρές διαταραχές στο μέσο-ρευστό τείνουν να καταλήξουν σε σχεδόν ελαστικές ταλαντώσεις, με το μαγνητικό πεδίο να είναι αυτό που παρέχει τη δύναμη επαναφοράς για την ταλάντωση. Σε ένα ρευστό αυτό καταλήγει σε **κύματα Alfvén** με συχνότητα $\bar{\omega} \sim \frac{V_{alf}}{l}$. Τα μαγνητοϋδροδυναμικά κύματα (hydromagnetic waves) Alfvén δημιουργούνται ως εξής: αρχικά, υπάρχει ένα σταθερό μαγνητικό πεδίο και ένα πεδίο ταχυτήτων που εγκάρσια «σαρώνει» το μαγνητικό πεδίο προς τη μία πλευρά. Η αδράνεια του ρευστού υπερβαίνεται από μία δύναμη επαναφοράς, η οποία εγείρεται από τις καμπτόμενες γραμμές του μαγνητικού πεδίου. Εκείνη τη στιγμή, η κίνηση των μαγνητικών γραμμών προς το πλάι, παρασυρόμενες από το ρευστό, θα σταματήσει, οπότε η **δύναμη Lorentz** θα αντιστρέψει τη ροή, ώστε να επαναφέρει τις μαγνητικές γραμμές στη θέση ισορροπίας. Παρόλα αυτά, όσο η δύναμη Lorentz δρα ως αναφέρθηκε, η αδράνεια του ρευστού μεταφέρει τις γραμμές του μαγνητικού πεδίου μετά την θέση ισορροπίας και η όλη διαδικασία ξεκινάει εκ νέου αλλά προς την αντίθετη κατεύθυνση. Έτσι προκύπτει ένα κύμα Alfvén (Battista, 2010). Το κυματάνυσμα του κύματος Alfvén είναι παράλληλο στο διάνυσμα του μαγνητικού πεδίου.



Εικόνα 1: Σχηματισμός κύματος Alfvén (Battista, 2010).

Γ. *Μαγνητικός χρόνος απόσβεσης (magnetic damping time)*: Δίνεται από τον τύπο $\tau = [\frac{\sigma B^2}{\rho}]^{-1}$. Για μικρές τιμές του Re_m αποτελεί την **χαρακτηριστική κλίμακα χρόνου** πάνω από την οποία η δύναμη Lorentz επηρεάζει αξιοσημείωτα τη ροή.

Δ. *Αριθμός Hartmann*: Δίνεται από τον τύπο $Ha = Bl(\frac{\sigma}{\rho\nu})^{1/2}$. Για $Re_m \ll 1$, ο αριθμός Hartmann υψωμένος στο τετράγωνο αναπαριστά την αναλογία της δύναμης Lorentz προς τις συνεκτικές δυνάμεις.

Ε. Αριθμός Lundquist: Η αδιάστατη μορφή του δίνεται από τον τύπο $Lu = l_0 \frac{\mu_0 V_{0,Alf}}{\eta_{m,0}}$ όπου l_0 το μήκος αναφοράς (ενδεικτικό της κλίμακας του υπό μελέτη προβλήματος), μ_0 η μαγνητική διαπερατότητα του κενού, $V_{0,Alf}$ η ταχύτητα αναφοράς των κυμάτων Alfvén και $\eta_{m,0}$ η μαγνητική ειδική αντίσταση (resistivity) αναφοράς. Αποτελεί ένα μέτρο του πόσο τα κύματα Alfvén μπορούν να θεωρηθούν ελεύθερα από μαγνητική διάχυση (magnetic dissipation).

1.4 Ιδανικές εξισώσεις

Οι ιδανικές εξισώσεις περιγράφουν την ροή ενός ιδανικά αγωγίμου ρευστού σε αλληλεπίδραση με μαγνητικό πεδίο. Ο όρος «ιδανικά» αγωγίμο ρευστό αναφέρεται σε ρευστό με την ικανότητα να άγει ηλεκτρικό ρεύμα χωρίς ταυτόχρονα να είναι μαγνητίσιμο¹ (ελεύθερο από πόλωση, μαγνήτιση και επιβαλλόμενα ρεύματα), με την ροή της έντασης του ηλεκτρικού και του μαγνητικού πεδίου να αναπαριστώνται από γραμμικές σχέσεις, που τις συνδέουν με την ένταση του ηλεκτρικού και μαγνητικού πεδίου αντίστοιχα (Schafelner, 2016). Για να μπορέσει να γίνει η αναλυτική περιγραφή της ως άνω ροής θα πρέπει να συνδυαστούν οι εξισώσεις Maxwell του ηλεκτρομαγνητισμού με τις εξισώσεις Navier-Stokes της ρευστομηχανικής και να παρασχεθούν εξισώσεις που περιγράφουν την αλληλεπίδραση.

Όσον αφορά στην κινηματική διάσταση, η χρονική κλίμακα η οποία χρειάζεται για την δημιουργία ρεόντων ηλεκτρονίων και ιόντων είναι πολύ πολύ μικρότερη από την χρονική κλίμακα στην οποία λαμβάνει χώρα η διάχυση, για αυτό και η δυναμική των μακροσκοπικών φαινομένων μπορεί να θεωρηθεί χωρίς διάχυση (Goebloed, et al., 2004). Επιπλέον, στους ιδανικούς αγωγούς το $\sigma V l \rightarrow \infty$ (αντίστοιχα το Re_m παίρνει πολύ μεγάλες τιμές), δηλαδή το επαγόμενο και το επιβαλλόμενο αρχικά μαγνητικό πεδίο είναι της ίδιας τάξης, με ταυτόχρονη την μη ύπαρξη διάχυσης ($\lambda = 0$). Σε αυτές τις περιπτώσεις το συνδυασμένο μαγνητικό πεδίο συμπεριφέρεται σαν να ήταν κλειδωμένο στο ρευστό (Davidson, 2017). Αυτή η συνθήκη ικανοποιείται στην αστροφυσική MHD, λόγω του πολύ μεγάλου μεγέθους του l . (Από την άλλη μεριά, συνήθως στα υγρά μέταλλα $\sigma V l \rightarrow 0$, δηλαδή η \mathbf{V} δεν επηρεάζει ουσιωδώς το μαγνητικό πεδίο \mathbf{B} , αλλά παρόλα αυτά το \mathbf{B} επηρεάζει το \mathbf{V} μέσω της δύναμης Lorentz).

Η βιβλιογραφία αναφέρεται σε **ισότροπους υγρούς αγωγούς ηλεκτρικού ρεύματος** (π.χ. υγρά μέταλλα, τηγμένα άλατα και ηλεκτρολύτες), για τους οποίους ισχύει $\mu_r = 1 = \epsilon_r$ και κατ' επέκταση $\epsilon = \epsilon_0$, $\mu = \mu_0$ (Schafelner, 2016), όπου μ η μαγνητική διαπερατότητα και ϵ η ηλεκτρική διαπερατότητα (δείκτης 0 για το κενό, δείκτης r για τα σχετικά μεγέθη έτσι ώστε $\mu = \mu_r \mu_0$ και αντίστοιχα για το ϵ).

Θα πρέπει να ληφθεί υπόψη ότι το μοντέλο των ιδανικών εξισώσεων αναπαριστά τις εξισώσεις ενός ρευστού, παρόλο που αφορά μίγμα ηλεκτρονίων-ιόντων, με μία ενεργειακή εξίσωση (σε αντίθεση με το β-temperature Euler model που το αναπαριστά με δύο θερμοκρασιακές - ενεργειακές εξισώσεις).

1.4.1 Εξισώσεις Maxwell

¹ Μη μαγνητικά ρευστά. Με την μελέτη μαγνητικών ρευστών ασχολείται η φεροϋδροδυναμική (ferrohydrodynamics).

Θεωρείται ότι όλες οι ιδιότητες της ύλης είναι χωρικά ομοιόμορφες, δηλαδή το ρευστό είναι ομοιογενές και επιπλέον ασυμπίεστο.

Ακολουθούν οι 4 εξισώσεις, που ο Maxwell συγκέντρωσε, σε διαφορετική μορφή, κάθε μία εκ των οποίων αντιστοιχεί σε ένα νόμο και οι οποίες όλες μαζί συνιστούν την θεωρία του ηλεκτρομαγνητισμού.

Ο νόμος του Faraday:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B} / \partial t \quad [1.1]$$

Φυσική σημασία: Περιγράφει την σχέση μεταξύ ενός επαγόμενου ηλεκτρικού πεδίου και του μεταβαλλόμενου μαγνητικού πεδίου που το προκαλεί. Η μεταβαλλόμενη μαγνητική ροή λόγω χρονικά μεταβαλλόμενου μαγνητικού πεδίου ή κινούμενου αγωγού ή βρόχου μέσα σε μαγνητικό πεδίο ή μεταβαλλόμενου σχήματος βρόχου (Davidson, 2017) μέσα από μια επιφάνεια επάγει **ηλεκτρεγερτική δύναμη** σε κάθε δυνατό όριο αυτής της επιφάνειας (Schafelner, 2016).

Ο νόμος του Ampère, όπως διορθώθηκε από τον Maxwell:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad c \equiv (\epsilon_0 \mu_0)^{-1/2} \quad [1.2]$$

Φυσική σημασία: Περιγράφει τη σχέση ανάμεσα στο μαγνητικό πεδίο και την ένταση του ηλεκτρικού ρεύματος (Schafelner, 2016). Το ρεύμα αγωγιμότητας (πρώτος όρος δεξιά) μαζί με το ρεύμα μετατόπισης (δεύτερος όρος δεξιά) δρουν ως πηγές μαγνητικού πεδίου (Young, 1994). Το ρεύμα μετατόπισης είναι ο όρος που πρόσθεσε ο Maxwell, ώστε να ικανοποιείται ο νόμος διατήρησης του ηλεκτρικού φορτίου.

Ο νόμος του Gauss:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = (qc)/\epsilon_0 \quad [1.3]$$

Φυσική σημασία: Τα ηλεκτρικά φορτία παράγουν ηλεκτρικό πεδίο. Η ροή του ηλεκτρικού πεδίου διαμέσου μια κλειστής επιφάνειας είναι ανάλογη του περιεχόμενου φορτίου.

Ο νόμος του Gauss για το μαγνητικό πεδίο:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad [1.4]$$

Φυσική σημασία: Δηλώνει ότι η συνολική μαγνητική ροή διαμέσου οποιασδήποτε κλειστής επιφάνειας είναι μηδέν (Schafelner, 2016). Το **μαγνητικό πεδίο είναι σωληνοειδές**, δηλαδή όλες οι γραμμές του μαγνητικού πεδίου κλείνουν, πράγμα το οποίο οδηγεί στο συμπέρασμα ότι **δεν υπάρχουν μαγνητικά μονόπολα** (Battista, 2010).

Όπου,

\mathbf{E} η ένταση του ολικού ηλεκτρικού πεδίου, που οφείλεται δηλαδή στο ηλεκτρικό φορτίο καθώς και το μαγνητικά επαγόμενο,

\mathbf{B} η μαγνητική επαγωγή,

$\mathbf{J}(\mathbf{r}, t)$ η πυκνότητα της έντασης του ρεύματος,

c η ταχύτητα των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων (ταχύτητα του φωτός)

$qc(\mathbf{r}, t)$ η πυκνότητα των ελεύθερων φορτίων (βλ. 3.6, 3.7 Goebloed, et al., 2004)

ϵ_0 η ηλεκτρική διαπερατότητα στο κενό.

Επιπλέον, από την εξίσωση ηλεκτρικού πεδίου σε ιδανικά αγώγιμο κινούμενο ρευστό ισχύει:

$$\mathbf{E} = -\mathbf{V} \times \mathbf{B} \quad [1.5]$$

Για μη σχετικιστικές ταχύτητες, δηλαδή για ταχύτητα ρευστού πολύ μικρότερη της ταχύτητας του φωτός, δεδομένο που αφορά τα περισσότερα φαινόμενα που σχετίζονται με πλάσμα (Goebloed, et al., 2004), γίνονται μερικές απλοποιήσεις.

Αφ' ενός απαλείφεται το ρεύμα μετατόπισης (displacement current) από την εξίσωση [1.2], οπότε χρησιμοποιείται ο νόμος του Ampere χωρίς την διόρθωση που έγινε από τον Maxwell. Δηλαδή,

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} \quad [1.2]'$$

Αφετέρου, λόγω της χαμηλής πυκνότητας φορτίου στα αγώγιμα ρευστά, ο όρος qc είναι ασήμαντος στην Μαγνητοϋδροδυναμική και ο νόμος του Gauss δεν χρησιμοποιείται (Davidson, 2017).

1.4.2 Εξισώσεις ρευστομηχανικής

Οι εξισώσεις αντιστοιχούν στις αντίστοιχες αρχές διατήρησης των συντηρητικών μεγεθών (μάζας, ορμής, ενέργειας).

1.4.3 Σύζευξη

Προκύπτουν στις 3 διαστάσεις (3D) 8 εξισώσεις για 8 μεταβλητές ($\rho, p, \mathbf{V}, \mathbf{B}$). Από τις ως άνω 4 εξισώσεις ηλεκτρομαγνητισμού, θα χρησιμοποιηθούν οι [1.1], [1.2]' και [1.4].

Σε αδιάστατη μορφή, οι συντηρητικές εξισώσεις για συνεκτική, με ηλεκτρική ειδική αντίσταση MHD ροή (viscous, resistive) περιλαμβάνουν την εξίσωση της συνέχειας, την εξίσωση της ορμής (διανυσματική), την εξίσωση της ενέργειας (Α' Θερμοδυναμικός Νόμος) και την εξίσωση της μαγνητικής επαγωγής (Yang, et al., 2017). **Οι όροι με γαλάζιο αντιστοιχούν στην αντίσταση (resistance) - κανονικά δεν αποτελούν τμήμα των ιδανικών εξισώσεων, καθώς ιδανικές σημαίνει τέλειος αγωγός, άρα μηδενική ειδική αντίσταση.**

Απαραίτητη συνθήκη που πρέπει να τηρείται: το σωληνοειδές μαγνητικό πεδίο ($\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$).

Εξίσωση συνέχειας (η μόνη εξίσωση που είναι όπως και στην ρευστομηχανική):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) = 0 \quad [1.6]$$

Εξίσωση της ορμής:

$$\frac{\partial \rho \mathbf{V}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V} \mathbf{V} + p_{tot} \mathbf{I} - \mathbf{B} \mathbf{B}) = \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \rho \mathbf{g} \quad [1.7]$$

Εξίσωση της ολικής ενέργειας:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho E}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{V}(\rho E + p_{tot}) - (\mathbf{V} \cdot \mathbf{B})\mathbf{B}) \\ = \nabla \cdot (\mathbf{V}\boldsymbol{\tau} - \mathbf{q}) + \frac{\eta_m}{Lu} \nabla \cdot \left(\mathbf{B} \cdot \nabla \mathbf{B} - \nabla \frac{\mathbf{B}^2}{2} \right) + \rho(\mathbf{g} \cdot \mathbf{V}) \end{aligned} \quad [1.8]$$

Εξίσωση της μαγνητικής επαγωγής:

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{V}\mathbf{B} - \mathbf{B}\mathbf{V}) = -\frac{\eta_m}{Lu} \nabla \times \mathbf{J} \quad [1.9]$$

Όπου,

$\mathbf{B} = [B_x \ B_y \ B_z]$, το διάνυσμα της μαγνητικής επαγωγής (μαγνητική ροή ανά μονάδα επιφανείας) σε καρτεσιανό σύστημα αναφοράς,

$\mathbf{V} = [u \ v \ w]$, το διάνυσμα της ταχύτητας σε καρτεσιανό σύστημα αναφοράς,

ρE , η ολική ενέργεια ανά μονάδα όγκου,

p_{tot} , η ολική πίεση,

\mathbf{J} , η πυκνότητα του ρεύματος,

$\boldsymbol{\tau}$, το διάνυσμα των διατμητικών τάσεων,

\mathbf{q} , η ροή θερμότητας,

Re , ο αριθμός Reynolds,

Pr , ο αριθμός Prandtl,

k , ο συντελεστής θερμικής αγωγιμότητας,

c_p η ειδική θερμοχωρητικότητα υπό σταθερή πίεση,

μ , η δυναμική συνεκτικότητα,

β , η bulk συνεκτικότητα,

Lu , ο αδιάστατος αριθμός Lundquist,

η_m , η μαγνητική ειδική αντίσταση,

Ισχύουν συμπληρωματικά οι σχέσεις που χρησιμοποιούνται για τον υπολογισμό κάποιων από τα παραπάνω μεγέθη:

$$\rho E = \frac{p}{\gamma - 1} + \frac{1}{2} \rho \mathbf{V}^2 + \frac{1}{2} \mathbf{B}^2 \quad [1.10]$$

$$p_{tot} = p + \frac{\mathbf{B}^2}{2} \quad [1.11]$$

$$\nabla \times \mathbf{J} = \nabla \times \nabla \times \mathbf{B} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \nabla^2 \mathbf{B} \quad [1.12]$$

$$\tau_{ij} = \frac{1}{Re} (\mu(V_{i,j} + V_{j,i}) + \left(\beta - \frac{2}{3} \mu \right) V_{k,k} \sigma_{ij}) \quad [1.13]$$

$$q = -k T_i = -\frac{1}{Re} \frac{c_p}{Pr} T_i \quad [1.14]$$

$$Re = \frac{\rho_0 u_{0,Alf} l_0}{\mu_0} \quad [1.15]$$

$$Lu = l_0 \frac{\mu_0 u_{0,Alf}}{\eta_{m,0}} \quad [1.16]$$

Όπου,

l_0 , το μήκος αναφοράς,

μ_0 , η μαγνητική διαπερατότητα του κενού,

$\eta_{m,0}$, η μαγνητική ειδική αντίσταση αναφοράς,

$u_{0,Alf}$ η ταχύτητα αναφοράς των κυμάτων Alfvén.

Σημείωση για τον **όρο βαρύτητας**: Ο όρος που περιλαμβάνει την επιτάχυνση της βαρύτητας και που συναντάται στις εξισώσεις [1.7] και [1.8], αναλόγως του προβλήματος φυσικής που επιλύεται κάθε φορά, μπορεί είτε να αποτελεί μια εξωτερική ορισμένη ποσότητα ή να αποφασίζεται μερικώς από το ίδιο το πλάσμα. Σε πολλά αστροφυσικά συστήματα, η εσωτερική βαρυτική δύναμη είναι πλήρως αμελητέα, συγκρινόμενη με τη δύναμη Lorentz, όπως επίσης και συγκρινόμενη με την βαρυτική δύναμη λόγω ενός εξωτερικού συμπαγούς αντικειμένου (σχετική απόδειξη βλ. παράγραφος 4.1.1, Goebloed , et al., 2004). Για παράδειγμα, στην περίπτωση ενός Tokamak, η δύναμη Lorentz είναι της τάξης του 10^6 όταν η εσωτερική βαρυτική δύναμη είναι της τάξης του 10^{-24} . Γι αυτό το λόγο όταν μπαίνει στις εξισώσεις εννοείται ως εξωτερική βαρυτική δύναμη. Στην πλειονότητα των περιπτώσεων, για να βρίσκονται οι εξισώσεις σε εύχρηστη μορφή, δηλαδή στη συντηρητική, αγνοείται ο εν λόγω όρος (Goebloed, et al., 2004).

1.5 Συντηρητική μορφή εξισώσεων

Οι παραπάνω εξισώσεις θα μπορούσαν να γραφτούν ως μία εξίσωση που περιγράφει την ροή στην μορφή

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial L}{\partial z} = 0 \quad [1.17]$$

όπου $\mathbf{W} = [\rho \ \rho u \ \rho v \ \rho w \ \rho E \ B_x \ B_y \ B_z]^T$ το διάνυσμα των συντηρητικών μεταβλητών και $\mathbf{F}, \mathbf{G}, \mathbf{L}$ τα διανύσματα των ροών (fluxes) κατά διεύθυνση x, y, z αντίστοιχα, εκφραζόμενα συναρτήσει των πρωτευουσών μεταβλητών $\mathbf{Q} = [\rho \ u \ v \ w \ p_{tot} \ B_x \ B_y \ B_z]^T$, τα οποία περιλαμβάνουν τρία μέρη: το μη-συνεκτικό, το συνεκτικό και αυτό της αντίστασης. Ισχύει (Yang, et al., 2017, Halashi, et al., 2011):

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_{inv} + \mathbf{F}_{vis} + \mathbf{F}_{res} = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p_{tot} - B_x^2 \\ \rho uv - B_x B_y \\ \rho uw - B_x B_z \\ (\rho E + p_{tot})u - (\mathbf{V} \cdot \mathbf{B})B_x \\ 0 \\ -\Omega_z = -(vB_x - uB_y) \\ \Omega_y = uB_z - wB_x \end{bmatrix} + \frac{1}{Re} \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_{xx} \\ \tau_{yx} \\ \tau_{zx} \\ \beta_x \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{\eta_m}{Lu} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \alpha_x \\ 0 \\ J_z \\ -J_y \end{bmatrix} \quad [1.18]$$

$$\mathbf{G} = \mathbf{G}_{inv} + \mathbf{G}_{vis} + \mathbf{G}_{res} = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho v u - B_y B_x \\ \rho v^2 + p_{tot} - B_y^2 \\ \rho v w - B_y B_z \\ (\rho E + p_{tot})v - (\mathbf{V} \cdot \mathbf{B})B_y \\ \Omega_z = v B_x - u B_y \\ 0 \\ -\Omega_x = -(w B_y - v B_z) \end{bmatrix} + \frac{1}{Re} \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yy} \\ \tau_{zy} \\ \beta_y \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{\eta_m}{Lu} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \alpha_y \\ -J_z \\ 0 \\ J_x \end{bmatrix} \quad [1.19]$$

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}_{inv} + \mathbf{L}_{vis} + \mathbf{L}_{res} = \begin{bmatrix} \rho w \\ \rho w u - B_x B_z \\ \rho w v - B_y B_z \\ \rho w^2 + p_{tot} - B_z^2 \\ (\rho E + p_{tot})w - (\mathbf{V} \cdot \mathbf{B})B_z \\ -\Omega_y = w B_x - u B_z \\ \Omega_x = w B_y - v B_z \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{Re} \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zz} \\ \beta_z \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{\eta_m}{Lu} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \alpha_z \\ J_y \\ -J_x \\ 0 \end{bmatrix} \quad [1.20]$$

Όπου

$$\boldsymbol{\Omega} = -\mathbf{V} \times \mathbf{B} = \begin{cases} \Omega_x = w B_y - v B_z \\ \Omega_y = u B_z - w B_x \\ \Omega_z = v B_x - u B_y \end{cases} \quad [1.21]$$

$$\mathbf{J} = \begin{cases} J_x = \frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} \\ J_y = \frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x} \\ J_z = \frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} \end{cases} \quad [1.22]$$

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{cases} \alpha_x = B_y J_z - B_z J_y \\ \alpha_y = B_z J_x - B_x J_z \\ \alpha_z = B_x J_y - B_y J_x \end{cases} \quad [1.23]$$

$$\boldsymbol{\beta} = \begin{cases} \beta_x = u \tau_{xx} + v \tau_{yx} + w \tau_{zx} + k T_x \\ \beta_y = u \tau_{xy} + v \tau_{yy} + w \tau_{zy} + k T_y \\ \beta_z = u \tau_{xz} + v \tau_{yz} + w \tau_{zz} + k T_z \end{cases} \quad [1.24]$$

1.5.1 Ιδανικές εξισώσεις σε καρτεσιανές συντεταγμένες

Οι ιδανικές εξισώσεις, οι οποίες είναι αυτές που αφορούν μόνο τα μη συνεκτικά ρευστά, (inv) συμπληρώνουν τις εξισώσεις Euler σε τρεις διαστάσεις (Halashi, et al., 2011).

Ισχύει και πάλι η εξίσωση [1.17] με

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_{inv} = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p_{tot} - B_x^2 \\ \rho uv - B_x B_y \\ \rho uw - B_x B_z \\ (\rho E + p_{tot})u - (\mathbf{V} \cdot \mathbf{B})B_x \\ 0 \\ -\Omega_z = -(vB_x - uB_y) \\ \Omega_y = uB_z - wB_x \end{bmatrix} \quad [1.25]$$

$$\mathbf{G} = \mathbf{G}_{inv} = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho vu - B_y B_x \\ \rho v^2 + p_{tot} - B_y^2 \\ \rho vw - B_y B_z \\ (\rho E + p_{tot})v - (\mathbf{V} \cdot \mathbf{B})B_y \\ \Omega_z = vB_x - uB_y \\ 0 \\ -\Omega_x = vB_z - wB_y \end{bmatrix} \quad [1.26]$$

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}_{inv} = \begin{bmatrix} \rho w \\ \rho wu - B_x B_z \\ \rho wv - B_y B_z \\ \rho w^2 + p_{tot} - B_z^2 \\ (\rho E + p_{tot})w - (\mathbf{V} \cdot \mathbf{B})B_z \\ -\Omega_y = wB_x - uB_z \\ \Omega_x = wB_y - vB_z \\ 0 \end{bmatrix} \quad [1.27]$$

1.5.2 Ιδανικές εξισώσεις σε κυλινδρικές συντεταγμένες

Ισχύει και πάλι η εξίσωση [1.17] με την προσθήκη όρου πηγών \mathbf{S} στο δεξί σκέλος:

$$\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}_R}{\partial R} + \frac{\partial \mathbf{G}_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial z} = \mathbf{S} \quad [1.28]$$

Όπου $\mathbf{W} = [R\rho \quad R\rho u_R \quad R^2\rho u_\varphi \quad R\rho u_z \quad R\rho E \quad RB_R \quad RB_\varphi \quad RB_z]^T$ το διάνυσμα των συντηρητικών μεταβλητών και $\mathbf{F}_R, \mathbf{G}_\varphi, \mathbf{L}_z$ τα διανύσματα των ροών κατά διεύθυνση R, φ, z αντίστοιχα εκφραζόμενα συναρτήσει των πρωτεύουσών μεταβλητών $\mathbf{Q} = [\rho \quad u_R \quad u_\varphi \quad u_z \quad p_{tot} \quad B_R \quad B_\varphi \quad B_z]^T$ (Skinner & Ostriker, 2010), (Estibals, 2017).

Ισχύει

$$\mathbf{F}_R = \mathbf{F}_{R,inv} = \begin{bmatrix} R\rho u_R \\ R(\rho u_R^2 + p_{tot} - B_R^2) \\ R^2(\rho u_R u_\phi - B_R B_\phi) \\ R(\rho u_R u_z - B_R B_z) \\ R[(\rho E + p_{tot})u_R - (\mathbf{V} \cdot \mathbf{B})B_R] \\ 0 \\ R(u_R B_\phi - u_\phi B_R) \\ R(u_R B_z - u_z B_R) \end{bmatrix} \quad [1.29]$$

$$\mathbf{G}_\phi = \mathbf{G}_{\phi,inv} = \begin{bmatrix} \rho u_\phi \\ \rho u_R u_\phi - B_R B_\phi \\ R(\rho u_\phi^2 + p_{tot} - B_\phi^2) \\ \rho u_\phi u_z - B_\phi B_z \\ (\rho E + p_{tot})u_\phi - (\mathbf{V} \cdot \mathbf{B})B_\phi \\ u_\phi B_R - u_R B_\phi \\ 0 \\ u_\phi B_z - u_z B_\phi \end{bmatrix} \quad [1.30]$$

$$\mathbf{L}_z = \mathbf{L}_{z,inv} = \begin{bmatrix} R\rho u_z \\ R(\rho u_z u_R - B_R B_z) \\ R(\rho u_z u_\phi - B_\phi B_z) \\ R(\rho u_z^2 + p_{tot} - B_z^2) \\ R[(\rho E + p_{tot})u_z - (\mathbf{V} \cdot \mathbf{B})B_z] \\ R(u_z B_R - u_R B_z) \\ R(u_z B_\phi - u_\phi B_z) \\ 0 \end{bmatrix} \quad [1.31]$$

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 0 \\ \rho u_\phi^2 + p_{tot} - B_\phi^2 \\ -(\rho u_R u_\phi - B_R B_\phi) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ (u_R B_\phi - u_\phi B_R) \\ 0 \end{bmatrix} \quad [1.32]$$

1.6 Διατήρηση περιορισμού σωληνοειδούς μαγνητικού πεδίου ή divergence free magnetic field

Ο Νόμος του Gauss για μαγνητικό πεδίο όπως αναφέρθηκε παραπάνω είναι:

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \text{ ή } \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad [1.4]$$

Είναι εξέχουσας σημασίας γιατί δηλώνει ότι η συνολική μαγνητική ροή διαμέσου οποιασδήποτε κλειστής επιφάνειας είναι μηδέν, δηλαδή όλες οι γραμμές του μαγνητικού πεδίου κλείνουν, πράγμα το οποίο οδηγεί στο συμπέρασμα ότι δεν υπάρχουν μαγνητικά μονόπολα (Battista, 2010, Schafelner, 2016).

Στα αριθμητικά μοντέλα είναι αναμενόμενο να υπάρχει σφάλμα σε όλες τις συνιστώσες του \mathbf{B} . Ακόμα και μικρά σφάλματα στην ικανοποίηση της εξίσωσης [1.4] μπορούν να δημιουργήσουν μεγάλα σφάλματα στην επίλυση των MHD εξισώσεων. Τα εν λόγω σφάλματα ακολουθούν τον σχηματισμό της μαγνητικής δύναμης σαν μια σχηματιζόμενη δύναμη και ακολούθως επιτάχυνση παράλληλη με το πεδίο (μη φυσικό αποτέλεσμα) (Brackbill, et al., 1980), ειδικά αν χρησιμοποιείται η συντηρητική μορφή της εξίσωσης της ορμής (Evans, et al., 1988). Αποτελεί κατά συνέπεια αντικείμενο έρευνας η διόρθωση του παραπάνω σφάλματος προς όφελος της θεωρητικής ακρίβειας και της στιβαρότητας του μοντέλου.

Στη μονοδιάστατη ροή είναι εύκολο να ικανοποιηθεί ο περιορισμός, καθώς $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \Rightarrow B_x = \text{const.}$

Για τις πολυδιάστατες ροές προτείνονται διάφορες μέθοδοι για την διατήρηση του παραπάνω περιορισμού:

1.6.1 8-κυματική δομή (χρήση όρου πηγής του Powell)

Στη συγκεκριμένη περίπτωση γίνεται επίλυση των ιδανικών εξισώσεων στην συμμετρικοποιήσιμη τους μορφή. Αυτή η μορφή, όπως πρώτος σημείωσε ο Godunov, επιτρέπει τη δημιουργία ενός προσεγγιστικού επιλύτη Riemann με 8 κύματα (Powell, et al., 1999). Για να γίνει αυτό προστίθενται στις εξισώσεις της ροής (ορμής, ενέργειας και μαγνητικής επαγωγής) όροι που εμπεριέχουν το $\nabla \cdot \mathbf{B}$ (όροι πηγής). Έτσι, ελέγχεται το αριθμητικό σφάλμα (δεδομένου ότι είναι εκ των προτέρων γνωστό ότι ο όρος θα πρέπει να ισούται με το μηδέν). Με το εν λόγω σετ τύπων το σφάλμα διαδίδεται με τη ροή, με αποτέλεσμα αυξημένη στιβαρότητα (robustness) και ακρίβεια του αριθμητικού σχήματος (Tóth, et al., 2011, Estibals, 2017). Κατά συνέπεια, οι εξισώσεις γίνονται (η εξίσωση της συνέχειας παραμένει αμετάβλητη):

$$\frac{\partial \rho \mathbf{V}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V} \mathbf{V} + p_{tot} \mathbf{I} - \mathbf{B} \mathbf{B}) = -\mathbf{B} \nabla \cdot \mathbf{B} \quad [1.33]$$

$$\frac{\partial \rho E}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{V}(\rho E + p_{tot}) - (\mathbf{V} \cdot \mathbf{B}) \mathbf{B}) = -\mathbf{V} \cdot \mathbf{B} \nabla \cdot \mathbf{B} \quad [1.34]$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{V}\mathbf{B} - \mathbf{B}\mathbf{V}) = -\mathbf{V}\nabla \cdot \mathbf{B} \quad [1.35]$$

Ο όρος των πηγών θα μπορούσε να γραφτεί (Powell, et al., 1999):

$$\mathbf{S} = -\nabla \cdot \mathbf{B} \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{B} \\ \mathbf{V} \cdot \mathbf{B} \\ \mathbf{V} \end{pmatrix} \quad [1.36]$$

Ο όρος των πηγών προκύπτει από το γράψιμο εκ νέου των όρων μαγνητικού πεδίου των εξισώσεων σε διαφορική μορφή.

- ✓ Το 8^ο κύμα είναι αυτό που σχετίζεται με τη απόκλιση του μαγνητικού πεδίου. Η προσθήκη του 8^{ου} κύματος, συγκριτικά με τα 7 κύματα (παράγρ. 1.6.2), επιτρέπει την επίλυση MHD προβλημάτων σε πολλές διαστάσεις χωρίς τη χρήση staggered grids (αναλύονται παρακάτω), ή σχήματος προβολής (projection scheme)/δηλαδή ανεξαρτήτως τύπου υπολογιστικού πλέγματος (Powell, 1994, Τόθ, 2000).
- ✓ Επιπλέον, διατηρεί τη μηδενική απόκλιση του μαγνητικού πεδίου σε επίπεδο truncation error² ακόμα και για μεγάλους χρόνους ολοκλήρωσης. Στην περίπτωση μονοδιάστατης ροής, το σχήμα επίλυσης κατά Roe καταλήγει σε 7-κυματικό προσεγγιστικό επιλύτη Riemann (σύστημα 7 εξισώσεων με 7 αγνώστους, αφού $B_x = \text{const}$).
- ✓ Το σύστημα υπακούει στην αρχή σχετικότητας του Γαλιλαίου³. Όλα τα κύματα στο σύστημα διαδίδονται με ταχύτητες $u \pm c$ (για τα MHD οι πιθανές τιμές του c είναι η ταχύτητα Alfvén, η ταχύτητα μαγνητικο-ακουστικού κύματος fast-magnetofast ή fast magnetosonic, η ταχύτητα μαγνητικό-ακουστικού κύματος slow-magnetoslow ή slow magnetosonic, ή μηδέν για τα κύματα εντροπίας). Καμία από αυτές τις ιδιότητες δεν θα ίσχυε για το MHD σύστημα εάν ο όρος της πηγής είχε αγνοηθεί (Powell, et al., 1999).
- ✓ Αποτελεί μια απλή, γρήγορη και στιβαρή μέθοδο διατήρησης του σωληνοειδούς περιορισμού (Τόθ, et al., 2011).
- ✗ Η συγκεκριμένη μέθοδος εγείρει ανακριβείς τιμές των μεταβολών (jumps) κατά μήκος των ασυνεχειών, λόγω της μη συντηρητικής μορφής των εξισώσεων (Τόθ, 2000), γι αυτό και προτείνεται η μη-χρήση του όρου πηγής στην εξίσωση της ορμής και της ενέργειας (Estivals, 2017, Goebloed, et al., 2004). Η τελευταία εξίσωση (εξίσωση μαγνητικής επαγωγής) ξαναγράφεται σε συντηρητική μορφή $\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \mathbf{B}) + \nabla \cdot (\mathbf{V}\nabla \cdot \mathbf{B}) = 0$ και αντικαθιστά την $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$. Το μέγεθος $\nabla \cdot \mathbf{B}$ μεταδίδεται με την ροή με τον ίδιο τρόπο όπως και η πυκνότητα. Αυτό υπονοεί ότι η εάν το $\nabla \cdot \mathbf{B}$ είναι αρχικά αρκετά μικρό, θα πρέπει να παραμείνει μικρό και στα όρια. Αριθμητικά λάθη $\nabla \cdot \mathbf{B} \neq 0$, απλά μεταφέρονται με τη ροή έξω από το υπολογιστικό πεδίο.
- ✗ Ένα αποτέλεσμα της συμμετριοποιήσιμης μορφής των συντηρητικών νόμων είναι ότι μπορεί να προκύψει ένας επιπρόσθετος νόμος διατήρησης για την εντροπία, πολλαπλασιάζοντας κάθε εξίσωση του συστήματος με έναν παράγοντα και αθροίζοντας τις εξισώσεις που προκύπτουν. Δηλαδή,

² Διαφορά αριθμητικής και αναλυτικής λύσης της παραγώγου μιας συνάρτησης.

³ Οι νόμοι της φυσικής είναι οι ίδιοι για όλους τους παρατηρητές που βρίσκονται σε αδρανειακό σύστημα αναφοράς.

$$\frac{\partial(\rho s)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u s)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v s)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w s)}{\partial z} = 0 \quad [1.37]$$

όπου $s = \log(\frac{p}{\rho^\gamma})$ για τις ιδανικές MHD εξισώσεις.

- ✱ Τα shock jump conditions μπορεί να μην εκπληρούνται ακριβώς, εκτός εάν οι όροι πηγής είναι μικροί και/ή αλλάζουν κατά πρόσημο με τέτοιο τρόπο ώστε τα σφάλματα να είναι τοπικά και σε γενικές γραμμές ακυρώνονται με γειτονικούς όρους. Αυτό το μειονέκτημα παρόλα αυτά πρέπει να ζυγιστεί έναντι της εναλλακτικής, δηλαδή του αρχικού συστήματος με μηδενικούς όρους πηγής, το οποίο είναι μεν συντηρητικό αλλά δεν υπακούει στην αρχή σχετικότητας του Γαλιλαίου, έχει μηδενική ιδιοτιμή στο Ιακωβιανό Μητρώο και δεν είναι συμμετρικοποιήσιμο (Powell, et al., 1999).
- ✱ Μειώνει αλλά δεν εξαλείφει τα μαγνητικά μονόπολα (Flash Center for Computational Science, University of Chicago, 2019).

1.6.2 7-κυματική δομή

Η εν λόγω διαμόρφωση προκύπτει από τον αριθμό των ιδιοτιμών που είναι διαφορετικές από 0 (επτά χαρακτηριστικές – κύματα) όταν γίνεται η εφαρμογή του επιλύτη Riemann για την επίλυση των 8 MHD εξισώσεων στην περίπτωση πολλών διαστάσεων. Για την ακρίβεια, εάν κάποιος προσπαθούσε να λύσει το πρόβλημα των ιδιοτιμών όπως είναι θα κατέληγε σε 8 λύσεις με μία ψευδο-ιδιοτιμή ίση με μηδέν για να ξεχωρίζει από την ιδιοτιμή του κύματος εντροπίας που ισούται με μηδέν (Goebloed, et al., 2004). Η διαφορά από το 8-κυματικό σχήμα, που έχει ήδη αναφερθεί, είναι ότι η απόκλιση μεταξύ των 8 πιθανών μεταβλητών jumps στο πρόβλημα Riemann και των 7 χαρακτηριστικών κυμάτων αντιμετωπίζεται με διαφορετικό τρόπο: στο 8-κυματικό σχήμα εισάγεται μια νέα χαρακτηριστική εξίσωση ενώ στην 7-κυματική προσέγγιση, ένα από τα jumps εξαλείφεται. Σαν αποτέλεσμα τα ως άνω σχήματα είναι διαφορετικά από κάθε όψη εκτός από το γραμμικό όριο (Sokolov, et al., 2008).

- ✓ Το πλεονέκτημα της εφαρμογής του συγκεκριμένου σχήματος είναι ότι κάθε μη-γραμμικός και αυστηρά μαθηματικός μονοδιάστατος επιλύτης MHD μπορεί εύκολα να εφαρμοστεί σε MHD υπολογισμούς πολλών διαστάσεων με μικρές τροποποιήσεις χωρίς να υστερεί σε ποιότητα (Sokolov, et al., 2008).
- ✱ Προβληματική παρόλα αυτά είναι η ύπαρξη της ψευδο-ιδιοτιμής 0, καθώς μπορεί να οδηγήσει στο να μην είναι άμεσα αντιληπτή η διαφοροποίηση της ψευδο-ιδιοτιμής από την γνήσια μετάβαση από την σταθερότητα στην αστάθεια (π.χ. στον υπολογισμό ιδιοτιμών για το εάν μια συγκεκριμένη διαμόρφωση πλάσματος είναι σταθερή ή όχι). Για να ξεπεραστεί το συγκεκριμένο πρόβλημα θα πρέπει ο περιορισμός όσον αφορά στη μαγνητική απόκλιση να ενσωματωθεί σε ένα πρόβλημα ιδιοτιμών, μέσω της εξάλειψης μίας από τις μεταβλητές του μαγνητικού πεδίου, ώστε να προκύψει ένας πίνακας 7x7. Ο ένας τρόπος συμπεριλαμβάνει την εξάλειψη του \widehat{B}_z και την αντικατάσταση του σαν συνάρτηση του \widehat{B}_x , δηλαδή

$$\widehat{B}_z = -(\frac{k_\perp}{k_\parallel})\widehat{B}_x \quad [1.38]$$

Όπου το k είναι διάνυσμα πάνω στο επίπεδο x-z. Η συμμετρία όμως του πίνακα σε αυτή την περίπτωση θα χαθεί.

Ένας δεύτερος τρόπος είναι η προβολή του διανύσματος του κύματος (wave vector projection). Σε αυτή την προσέγγιση ορίζονται νέες μεταβλητές, που αντικατοπτρίζουν την φυσική του προβλήματος, π.χ. μέσω της προβολής των συνιστωσών Fourier των διανυσμάτων \mathbf{V} και \mathbf{B} στις 3 κατευθύνσεις που σχετίζονται με το διάνυσμα του κύματος/projector \mathbf{k} ($\nabla \rightarrow i\mathbf{k}$). Αυτό ισοδυναμεί με την εκμετάλλευση των 2 συνιστωσών του στροβιλισμού (vorticity) ($\nabla \times \hat{\mathbf{V}}$) και της συμπίεστότητας ($\nabla \cdot \hat{\mathbf{V}}$) ως μεταβλητές του πεδίου ταχυτήτων και με τον περιορισμό των μεταβλητών του μαγνητικού πεδίου σε δύο συνιστώσες της πυκνότητας ρεύματος ($\nabla \times \hat{\mathbf{B}}$). Ως αποτέλεσμα προκύπτει ένας συμμετρικός πίνακας εξισώσεων 7x7 ακόμα πιο απλός από αυτόν που προκύπτει στην 8x8 περίπτωση, ο οποίος με απαλοιφή της σειράς και της στήλης που αντιστοιχεί στο κύμα εντροπίας καταλήγει σε μορφή 6x6 για τα κύρια MHD κύματα (Goebloed, et al., 2004).

1.6.3 Υβριδική μέθοδος

Η συγκεκριμένη μέθοδος χρησιμοποιεί σχήμα περιορισμένης μεταφοράς, σε συνδυασμό με σχήμα Godunov. Το σχήμα περιορισμένης μεταφοράς τροποποιήθηκε μέσω της σύζευξης ενός επιλύτη Riemann-based για την συντηρητική μορφή των MHD εξισώσεων. Στα αναπτύγματα που χρησιμοποιήθηκαν, αυτό απαιτούσε δυο αναπαραστάσεις του μαγνητικού πεδίου: μία κεντροκομβική για το σχήμα Godunov και μία εδροκεντρική (face-centered) για την ενίσχυση της συνθήκης $\text{div}\mathbf{B} = 0$ (Nagy, et al., 2008, Dai, et al., 1998, Powell, et al., 1999, Balsara, et al., 1999). Στην περίπτωση του (Balsara et al., 1999), χρησιμοποιήθηκε συγκεκριμένα σχήμα, όπου οι συνιστώσες του μαγνητικού πεδίου υπολογίζονταν στο κέντρο των επιφανειών και η διττότητα του σχήματος αφορούσε τα ηλεκτρικά πεδία και της ροές που υπολογίζονταν με ένα υψηλότερης τάξης σχήμα Godunov (τα ηλεκτρικά πεδία στις ακμές των υπολογιστικών χωρίων μέσω μιας διαδικασίας ανακατασκευής (reconstruction), η οποία εφαρμόζοταν άμεσα στα κατάλληλα upwinded fluxes, τα οποία είχαν υπολογιστεί από το υψηλότερης τάξης σχήμα Godunov. Τα ηλεκτρικά πεδία στη συνέχεια χρησιμοποιούνταν για να γίνει επικαιροποίηση των μαγνητικών πεδίων, έτσι ώστε να διατηρείται η σωληνοειδής φύση τους.

- ✓ Δεν περιλαμβάνεται επιλύτης Poisson, με συνέπεια η μέθοδος να είναι κατάλληλη για χρήση με παράλληλους υπολογιστές με πολυεπεξεργαστές (multiprocessors) (Dai, et al., 1998).
- ✓ Η ακρίβεια φάσης του σχήματος είναι τόσο καλή όπως στην περίπτωση zone-centered collocation of variables (Balsara, et al., 1999).
- ✓ Εξίσου καλή μέθοδος/όχι υποδεέστερη από την divergence cleaning method (Balsara, et al., 1999).

1.6.4 Σχήμα προβολής (projection scheme, Hodge projection) ή ελλειπτικό divergence cleaning

Στην προβολή Hodge, το μαγνητικό πεδίο εκφράζεται από δύο συνιστώσες: την κλίση ενός βαθμωτού μεγέθους και τη στροβιλότητα ενός διανύσματος, των οποίων το άθροισμα αποτελεί, δηλαδή $\mathbf{B}^* = \nabla \times \mathbf{A} + \nabla\phi$. Κατά συνέπεια, ο περιορισμός θα ενισχυθεί καθώς

παίρνοντας την απόκλιση και των δύο μερών καταλήγει για το βαθμωτό μέγεθος στην επίλυση εξίσωσης Poisson⁴ (εξ. 1.41) μετά από κάθε χρονικό βήμα (Tóth, 2000).

Αρχικά αναφέρθηκε από τους Brackbill & Barnes (Goebloed, et al., 2010). Με την παρούσα μέθοδο κάποιος μπορεί να συνδυάσει οποιαδήποτε πολυδιάστατη μέθοδο με μια στρατηγική σχήματος προβολής, το οποίο ελέγχει την αριθμητική τιμή του $\text{div}\mathbf{B}$ μιας καθορισμένης διακριτοποίησης (κεντροκομβικής) μέχρι σημείο ορισμένης ακρίβειας. Η βασική ιδέα είναι η διόρθωση του \mathbf{B}^* όπως υπολογίζεται από σχήμα όπου $\nabla \cdot \mathbf{B}^* \neq 0$, μέσω της προβολής του σε έναν υποχώρο των λύσεων της εξίσωσης μηδενικής απόκλισης. Έτσι τροποποιείται το \mathbf{B}^* μέσω της αφαίρεσης της κλίσης ενός βαθμωτού πεδίου φ , η οποία υπολογίζεται από την εξίσωση Poisson:

$$\nabla^2 \varphi = \nabla \cdot \mathbf{B}^* \quad [1.41]$$

Αυτό με τη σειρά του δημιουργεί ένα σωληνοειδές $\mathbf{B} = \mathbf{B}^* - \nabla \varphi$, το οποίο χρησιμοποιείται στο επόμενο χρονικό βήμα. Για $\nabla \cdot \mathbf{B}^* \neq 0$, προκύπτει η παρακάτω μη-συντηρητική μορφή των εξισώσεων:

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \nabla \times (\mathbf{V} \times \mathbf{B}) + \mathbf{V}(\nabla \cdot \mathbf{B}) = 0 \quad [1.41]$$

$$\rho \frac{d\mathbf{V}}{dt} = -\nabla p - \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{B}) \quad [1.42]$$

η εξίσωση της μαγνητικής επαγωγής και η εξίσωση της ορμής αντίστοιχα (Brackbill, et al., 1980).

- ✓ Η μη φυσική απόκλιση του μαγνητικού πεδίου μπορεί να εξαλειφθεί στο σημείο που φθάνει η ακρίβεια της μηχανής (Flash Center for Computational Science University of Chicago, 2019)
- ✓ Ακριβές σχήμα, διατηρεί τη συντηρητική μορφή των εξισώσεων.
- ✓ Μπορεί να ενσωματωθεί με έναν αποδοτικό, παραλληλήσιμο και ευέλικτο τρόπο, χρησιμοποιώντας επαναληπτικούς επιλύτες Poisson.
- ✓ Αφαιρεί τα σφάλματα από την αρχική συνθήκη, ενώ τα σφάλματα λόγω των συνοριακών συνθηκών επηρεάζουν μόνο της ακμές του υπολογιστικού χωρίου.
- ✓ Μπορεί να χρησιμοποιηθεί σε οποιοδήποτε δίκτυο στο οποίο η εξίσωση Poisson μπορεί να λυθεί, δηλαδή σε δομημένα και μη-δομημένα πλέγματα.
- ✗ Ακριβό σχήμα, ειδικά με AMR.

1.6.5 Διανυσματικό δυναμικό (vector potential⁵)

Χρησιμοποιώντας την ιδιότητα $\nabla \cdot (\nabla \times \cdot) = 0$ μπορεί να ξαναγραφεί η εξίσωση του μαγνητικού πεδίου \mathbf{B} σαν στροβιλισμός ενός διανύσματος δυναμικού, ενός άλλου πεδίου, \mathbf{A} ως

⁴ $\Delta u = v$ ή $\nabla^2 u = v$ όπου u βαθμωτό μέγεθος, v συνάρτηση πηγής και Δ Τελεστής Laplace.

⁵ Vector potential πεδίου: $\mathbf{v} = \nabla \times \mathbf{A}$ όπου \mathbf{v}, \mathbf{A} διανύσματα πεδίου.

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad [1.43]$$

και να αντικαταστήσει στις εξισώσεις ιδανικού ρευστού τους όρους που περιλαμβάνουν το μαγνητικό πεδίο. Το σύστημα των εξισώσεων θα έχει ως εξής:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) = 0 \quad [1.44]$$

$$\frac{\partial(\rho V)}{\partial t} + \nabla \cdot [\rho \mathbf{V} \otimes \mathbf{V} - (\nabla \times \mathbf{A}) \otimes (\nabla \times \mathbf{A})] + \nabla [p + \frac{1}{2} (\nabla \times \mathbf{A})^2] = 0 \quad [1.45]$$

$$\frac{\partial \rho E}{\partial t} + \nabla \cdot [(\rho E + p + (\nabla \times \mathbf{A})^2) \mathbf{V} - [\mathbf{V} \cdot (\nabla \times \mathbf{A})] \nabla \times \mathbf{A}] = 0 \quad [1.46]$$

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \mathbf{V} \times (\nabla \times \mathbf{A}) = -\nabla U \quad [1.47]$$

Με αυτόν τον τρόπο η τάξη της χωρικής παραγωγού έχει αυξηθεί κατά μία και στην εξίσωση επαγωγής εμφανίζεται το ηλεκτρικό δυναμικό U (βαθμωτό δυναμικό – scalar potential⁶), το οποίο και θα πρέπει να υπολογιστεί μέσω της επιλογής μια συνθήκης (gauge condition)⁷. Μπορεί χωρίς βλάβη της γενικότητας να επιλεγεί $U = 0$ ως τέτοια συνθήκη, καθώς η τελευταία από τις παραπάνω εξισώσεις, όπως και ο ορισμός του μαγνητικού πεδίου ως στροβιλισμός διανύσματος δυναμικού, παραμένουν αμετάβλητα μετά από τον μετασχηματισμό $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A} + \nabla \chi, U \rightarrow U - \frac{\partial \chi}{\partial t}$, όπου, χ αυθαίρετη βαθμωτή συνάρτηση (Goebloed, et al., 2004). Η $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$, ή αλλιώς **Coulomb gauge**, επιλέγεται στις περιπτώσεις όπου μπορεί να αγνοηθεί το ρεύμα μετατόπισης στην εξίσωση του Maxwell, όπως είναι η μαγνητοστατική και η μαγνητουδροδυναμική (Davidson, 2017).

- ✓ Με την παραπάνω μέθοδο, γίνεται ευκολότερη η διαχείριση προσαρμοζόμενης (adaptive) και μετακινούμενης πύκνωσης του υπολογιστικού πλέγματος (mesh refinement) παράλληλα με τη διατήρηση του divergence-free πεδίου.
- ✓ Ακρίβεια για χρήση σε μαγνητικά πεδία, Νευτώνεια αλλά και σχετικιστικά.
- ✗ Οι συνοριακές συνθήκες θα πρέπει να υπολογιστούν για το \mathbf{A} αντί για το \mathbf{B} στα ghost cells του υπολογιστικού πλέγματος, πρόβλημα το οποίο μπορεί να επιλυθεί μέσω της επιβολής της ροής (flux) στις συνοριακές διεπιφάνειες.
- ✗ Για αριθμητικά σχήματα που χρησιμοποιούν τον επιλύτη Riemann, μπορεί να είναι δύσκολο να χρησιμοποιηθεί το διανυσματικό δυναμικό \mathbf{A} ως βασική μεταβλητή αντί του μαγνητικού πεδίου \mathbf{B} (Estivals, 2017).
- ✗ Αποτελεί πρόβλημα για τους επιλύτες που βασίζονται στη μέθοδο των χαρακτηριστικών (Goebloed, et al., 2010).
- ✗ Δεν υπάρχει απευθείας τρόπος αντιστροφής της εξίσωσης 1.43, οπότε μπορεί να προκύψει δυσκολία στον ορισμό του διανυσματικού δυναμικού (Fragile, et al., 2019)

⁶ Scalar potential πεδίου: $\mathbf{v} = \nabla A$, \mathbf{v} διάνυσμα πεδίου, A βαθμωτό πεδίο.

⁷ Για τον πλήρη ορισμό του πεδίου \mathbf{A} πρέπει να οριστεί και η στροβιλότητά του και η απόκλιση του, όπως επίσης και οι κατάλληλες οριακές συνθήκες. Ο ορισμός του $\nabla \cdot \mathbf{A}$ είναι γνωστός ως «setting the gauge» και εξαρτάται από τις συνθήκες κάθε φορά.

Εξέλιξη της παραπάνω μεθόδου (χρήση Euler potential) αποτελεί η αντικατάσταση του διανύσματος δυναμικού με $\mathbf{A} = \alpha \nabla \beta$, όπου α και β Euler potentials, τα οποία αποτελούν λύσεις απλών εξισώσεων μεταφοράς στην περίπτωση ιδανικών MHD μοντέλων. Ως αποτέλεσμα $\mathbf{B} = \nabla \alpha \times \nabla \beta$ και στον διδιάστατο χώρο όπου $\partial/\partial z = 0 \Rightarrow \mathbf{B} = B_z \mathbf{e}_z + \mathbf{e}_z \times \nabla \psi$ με ψ ένα Euler potential και B_z σταθερά.

Η εν λόγω διαμόρφωση καταλήγει στην προσθήκη μίας ακόμη εξίσωσης, η οποία σε συντηρητική μορφή για ιδανικές MHD είναι η ακόλουθη (Estivals, 2017):

$$\frac{\partial(\rho\psi)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\psi\mathbf{V}) = 0 \quad [1.48]$$

και λαμβάνοντας υπόψη τους όρους αντίστασης:

$$\frac{\partial(\rho\psi)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\psi\mathbf{V}) = \rho\eta\nabla^2\psi \quad [1.49]$$

1.6.6 Χρήση γενικευμένου πολλαπλασιαστή Lagrange (Generalized Lagrangian Multiplier/GLM formulation)

Η μέθοδος αποτελεί συνδυασμό υπερβολικής & παραβολικής μεθόδου επίλυσης. Στη συγκεκριμένη μέθοδο προστίθεται νέο βαθμωτό πεδίο σε σύζευξη με την εξίσωση της μαγνητικής επαγωγής, έτσι ώστε

$$\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{V}\mathbf{B} - \mathbf{B}\mathbf{V}) = -\nabla\varphi \quad [1.39]$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + c_h^2 \nabla \cdot \mathbf{B} = -\frac{c_h^2}{c_p^2} \varphi \quad [1.40]$$

όπου φ το βαθμωτό πεδίο, c_h η ταχύτητα μετάδοσης του $\nabla \cdot \mathbf{B}$ (υπερβολικός όρος διόρθωσης) και c_p η ταχύτητα διάχυσης του ίδιου όρου (παραβολικός όρος διόρθωσης) με $c_h, c_p \in (0, \infty)$ (Dedner, et al., 2002). Το βαθμωτό πεδίο συζευγμένο με το $\text{div}\mathbf{B}$, μεταφέρει και διαχέει το τελευταίο μακριά (Tóth, et al., 2011). Δηλαδή, τα σφάλματα απόκλισης (divergence errors), μεταφέρονται στα όρια του χωρίου με την μέγιστη επιτρεπτή ταχύτητα και απαλείφονται την ίδια στιγμή (Dedner, et al., 2002).

Οι παραπάνω εξισώσεις μαζί με τις εξισώσεις της συνέχειας, της ορμής και της ενέργειας αποτελούν την GLM μορφοποίηση (Generalized Lagrange Multiplier formulation) των εξισώσεων MHD και αποτελούν ένα υπερβολικό σύστημα για την περίπτωση του συνδυασμού μεθόδων διόρθωσης ή της καθαρά υπερβολικής διόρθωσης ($c_p = 0$).

- ✓ Γρήγορη και εύκολα ενσωματώσιμη μέθοδος σε οποιονδήποτε κώδικα, χωρίς να απαιτείται τροποποίηση του επιλύτη για τις MHD εξισώσεις.
- ✓ Διατηρεί τη συντηρητική μορφή των εξισώσεων.
- ✓ Προσφέρει ταυτόχρονα διασπορά και απόσβεση των σφαλμάτων απόκλισης ακόμα και σε stagnation points.
- ✓ Ο συνδυασμός που περιγράφουν οι εξισώσεις 1.39, 1.40, ξεπερνάει τις δυσκολίες του περιορισμού της επιλογής c_p λόγω των συνθηκών ευστάθειας στην περίπτωση ύπαρξης μόνο παραβολικής προσέγγισης σε ρητό σχήμα. Μάλιστα το σχήμα είναι

ευσταθές ανεξαρτήτως συνθηκών και η τιμή του c_p δεν περιορίζει το ρητό χρονικό βήμα.

- ✓ Μικρότερα σφάλματα σε σχέση με το σχήμα που χρησιμοποιεί όρο πηγής (1.6.1).
- ✓ Εφαρμόσιμη μέθοδος σε προβλήματα ιδανικών εξισώσεων MHD με πλέγματα 2 ή 3 διαστάσεων.
- ✓ Και αυτή και η προηγούμενη μέθοδος είναι εύκολα ενσωματώσιμη στους υπολογισμούς με fluxes τύπου Riemann.

1.6.7 Σχήμα περιορισμένης μεταφοράς (Constrained Transport/CT method)

Η συγκεκριμένη μέθοδος αποτελεί μια καθορισμένη διακριτοποίηση πεπερασμένων διαφορών σε ένα staggered πλέγμα, η οποία διατηρεί τον περιορισμό σε συγκεκριμένη διακριτοποίηση. Για την ακρίβεια, δημιουργείται εξίσωση πεπερασμένων διαφορών ανάλογη του περιορισμού απόκλισης στο μαγνητικό πεδίο (Evans, et al., 1988).

Έχουν προταθεί διάφοροι αλγόριθμοι (Τόθ, 2000): κατά Dai και Woodward (DW), κατά Ryu et al. (RMJA), κατά Balsara και Spicer (BS). Ο πρώτος επικαιροποιεί τις μεταβλητές του μαγνητικού πεδίου μέσω απλών ΠΔ χρησιμοποιώντας τα προϊόντα γραμμικών παρεμβολών του μαγνητικού πεδίου και του πεδίου ταχυτήτων, ο δεύτερος τις interpolated ροές (fluxes) και ο τρίτος τις interpolated transport fluxes του λεγόμενου σχήματος βάσης⁸.

Ως αποτέλεσμα εφαρμογής της συγκεκριμένης μεθόδου, αν το αρχικό μαγνητικό πεδίο έχει μηδενική απόκλιση (div) στη συγκεκριμένη διακριτοποίηση, τότε σε κάθε χρονικό βήμα θα διατηρείται αυτή με την ακρίβεια στρογγυλοποίησης του σφάλματος από τον Η/Υ, όσο οι οριακές συνθήκες είναι συμβατές με τους περιορισμούς (Τόθ, 2000). Ιδιαίτερη προσοχή πρέπει να δίνεται στον ορισμό των οριακών συνθηκών, ώστε να είναι ελεύθερης ροής (free-flow), ειδάλλως μπορεί να υπάρχει εισαγωγή μαγνητικού πεδίου που να μην πληρεί τον περιορισμό. Μιάς και οι εν λόγω οριακές συνθήκες αλλάζουν συχνά, θα πρέπει να υπάρχει μέτρηση της ικανοποίησης του περιορισμού σε ολόκληρο το χωρίο, ως διαγνωστική μέτρηση κατά τη διάρκεια των προσομοιώσεων (Evans, et al., 1988).

CT κατά Evans και Hawley: διακριτοποίηση της εξίσωσης μαγνητικής επαγωγής με ΠΔ κατά μήκος των ακμών του κελιού.

CT κατά Dai και Woodward: συνδυασμός με Godunov type σχήματα

CT κατά Ryu et al.: συνδυασμός με Harten's one step TVD σχήμα

CT κατά Balsara και Spicer: συνδυασμός με Godunov type σχήματα

CT κατά Toth: διακριτοποίηση σε μορφή ΠΟ, χωρική averaging για τον υπολογισμό του B και της ροής του. Χρήση απλής κεντρικής διαφορίσης για την εξίσωση μαγνητικής επαγωγής στο αρχικό δίκτυο (field- and flux-interpolated CD schemes).

Εικόνα 2: Πίνακας παρουσίασης των διαφορών αλγορίθμων περιορισμένης μεταφοράς / CT (Τόθ, 2000).

⁸ 2^{ης} τάξης ακρίβειας στο χώρο και στο χρόνο για ομαλές λύσεις, συντηρητικό με την έννοια των πεπερασμένων όγκων, έτσι ώστε οι ασυνέχειες να μπορούν να αντιμετωπιστούν κατάλληλα (Toth, 2000).

Η εξίσωση της μαγνητικής επαγωγής διατυπώνεται σε ολοκληρωτική μορφή για τις 3 διαστάσεις, στην περίπτωση όπου οι όγκοι ελέγχου είναι ευθυγραμμισμένοι με τις x, y, z διαστάσεις, ως:

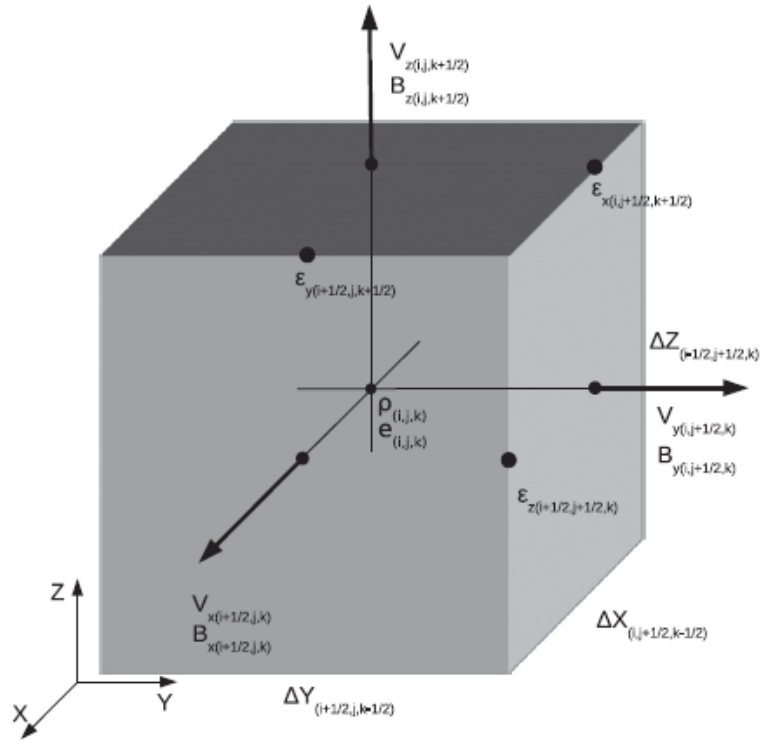
$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{CV_p} \mathbf{B} dS = - \oint_{\partial CV_p} \mathbf{E} d\mathbf{s} \quad [1.52]$$

Οι διαφορετικές συνιστώσες της μαγνητικής επαγωγής \mathbf{B} υπολογίζονται σε διαφορετικές θέσεις του όγκου ελέγχου (Εικόνα 3). Για την ακρίβεια, η μαγνητική επαγωγή και η ταχύτητα υπολογίζονται (αποθηκεύονται οι τιμές τους) στο βαρύκεντρο της επιφάνειας κάθε κελιού (face-centered)⁹, ενώ τα μη διανυσματικά μεγέθη υπολογίζονται στο βαρύκεντρο του κελιού (cell-centered). Αυτού του είδους το πλέγμα ονομάζεται staggered¹⁰ και διακρίνεται από το collocated πλέγμα στο οποίο όλες οι μεταβλητές αποθηκεύονται σε κοινό σημείο.

- ✓ Είναι γρήγορη και ακριβής μέθοδος, που σε κάποιες ειδικές διακριτοποιήσεις φτάνει σε ακρίβεια έως αυτή των round off errors.
- ✓ Εάν το αρχικό μαγνητικό πεδίο εκπληρώνει τον περιορισμό, θα συνεχίσει να ισχύει για όσο το πεδίο εξελίσσεται. Το αντίστοιχο ισχύει και για τις αρχικές συνοριακές συνθήκες και τον free-flow περιορισμό (Evans, et al., 1988).
- ✓ Η χρήση staggered grid αποτελεί έναν απλό τρόπο αποφυγής του χαρακτηριστικού φαινομένου στα αποτελέσματα «**odd-even decoupling**» μεταξύ της πίεσης και της ταχύτητας.
- ✓ Μπορεί να γενικευθεί στην resistive MHD, στους αξονοσυμμετρικούς υπολογισμούς και στα κυλινδρικά δίκτυα.
- ✗ Η αξιοποίηση της σε μη-δομημένα πλέγματα μπορεί να αποδειχθεί πολύπλοκη, ενώ παράλληλα ελλοχεύει ο κίνδυνος να χαθούν κάποιες από της επιθυμητές ιδιότητες του σχήματος, λόγω της μερικής χρήσης του πεδίου (Dedner, et al., 2002). Για AMR σχήματα συνιστάται η χρήση face-centered και όχι edge-based αποθήκευση για την διατήρηση του περιορισμού. Για multigrid σχήματα μπορεί να χρησιμοποιηθεί edge-based restriction operator (Tóth, et al., 2002).
- ✗ Αποτελεί μειονέκτημα της χρήσης staggered grid το γεγονός ότι χρησιμοποιούνται διαφορετικά σημεία για διαφορετικές μεταβλητές, καθώς δυσκολεύει η διαχείριση διαφορετικών όγκων ελέγχου ανάλογα με τη μεταβλητή, καθώς και ο υπολογισμός των διαφορών μετρικών.

⁹ Σε κάποιες περιπτώσεις εφαρμογών το βλέπουμε και σε edge-based διακριτοποιήσεις (Evans, et al., 1988).

¹⁰ Χρησιμοποιείται κυρίως σε δομημένα πλέγματα για προσομοίωση συμπιεστού ή ασυμπιεστού ρευστού.



Εικόνα 3: Χωροθέτηση των μεταβλητών για την περιοριστική μέθοδο αναφοράς (Benitez-Llambay, et al., 2016 - κώδικας FARGO3D).

1.6.8 Μέθοδος διάχυσης (diffusive method)

Η μέθοδος διάχυσης περιλαμβάνει την προσθήκη ενός όρου πηγής ($\eta \nabla(\nabla \cdot \mathbf{B})$, όπου η τεχνητή παράμετρος διάχυσης) στην εξίσωση επαγωγής για την μείωση του αριθμητικού σφάλματος του $\nabla \cdot \mathbf{B}$ (Zhang, et al., 2016). Το σφάλμα που παράγεται από τη συγκεκριμένη μέθοδο ελέγχεται μέσω επαναληπτικής μεθόδου.

Η τεχνητή αυτή διάχυση δεν παραβιάζει την shock capturing ιδιότητα ή την 2^{ης} τάξης ακρίβεια, τουλάχιστον στις ομαλές περιοχές, αλλά η μεγαλύτερης τάξης ακρίβεια μπορεί να εξαρτηθεί από την συνάρτηση περιορισμού κλίσης (slope limiter) που χρησιμοποιείται.

1.6.9 Πλεονεκτήματα-μειονεκτήματα

Όλα τα σχήματα διατηρούν την 2^{ης} τάξης ακρίβεια για τις ομαλές λύσεις.

Όλα πλην του 1 & 2, αποτελούν συντηρητικά σχήματα (Tóth, 2000).

Κεφάλαιο 2: Υπάρχοντες κώδικες επίλυσης προβλημάτων μαγνητοϋδροδυναμικής

2.1 Εισαγωγή

Στη συνέχεια θα παρουσιαστούν κάποιοι βασικοί αριθμητικοί κώδικες, που βρίσκονται αυτή τη στιγμή σε χρήση, σε ελεύθερη διάθεση (υπό όρους) για ακαδημαϊκούς ή εμπορικούς σκοπούς, καθώς και τα βασικά χαρακτηριστικά τους για την δυνατότητα άμεσης σύγκρισης. Η παρουσίαση γίνεται με αλφαβητική και όχι αξιολογική σειρά.

Οι αναφορές, που γίνονται στο παρόν κεφάλαιο, σχετίζονται με τα χαρακτηριστικά του εκάστοτε κώδικα, όσον αφορά στην επίλυση των MHD προβλημάτων και μόνο. Οι κώδικες στην πλειονότητά τους, αν όχι καθ' ολοκληρία, επιλύουν και άλλου είδους προβλήματα (υδροδυναμικής κ.λπ.), τα χαρακτηριστικά των οποίων είναι εκτός του πεδίου έρευνας της παρούσης διατριβής και άρα δεν περιλαμβάνονται στη μελέτη.

Όσον αφορά στα βασικά χαρακτηριστικά των κωδίκων, θα γίνει αναφορά ως προς:

1. Το είδος των εξισώσεων που επιλύουν¹¹: ιδανικές, με όρους αντίστασης, με όρους συνεκτικότητας, ημισχετικιστικές, Hall, με ανισοτροπία πίεσης, με μετάδοση θερμότητας, πολλών ειδών ιόντων - multi species, ή πολλών υλικών - multi material, πολλών ρευστών - multi fluid, με μετάδοση ακτινοβολίας, σχετικιστικές. Αν χρησιμοποιούνται εναλλακτικές εξισώσεις, όπως εξίσωση πίεσης, εντροπίας κ.λπ., καθώς και ποιά/ποιές θερμικές καταστατικές εξισώσεις χρησιμοποιούνται.
2. Τον τρόπο διατήρησης του σωληνοειδούς περιορισμού ($\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$): 8-κυματική δομή (χρήση όρου πηγής του Powell), 7-κυματική δομή, υβριδική μέθοδος, σχήμα προβολής, διανυσματικό δυναμικό (vector potential), χρήση γενικευμένου πολλαπλασιαστή Lagrange, σχήμα περιορισμένης μεταφοράς, σχήμα διάχυσης.
3. Τις διαστάσεις του προβλήματος που μπορούν να επιλύσουν: 1, 2 ή 3 διαστάσεις, είδη συντεταγμένων.
4. Τη χρήση του: ακαδημαϊκούς, εμπορικούς σκοπούς κ.λπ.
5. Τη γλώσσα προγραμματισμού: Fortran, C++, Python κ.λπ.
6. Το είδος του πεδίου - πλέγματος: δομημένο (structured), μη δομημένο (unstructured), ομοιόμορφο (uniform).
7. Το είδος διακριτοποίησης στο χώρο (spatial discretization): μέθοδος πεπερασμένων όγκων (FV), μέθοδος πεπερασμένων διαφορών (FD).
8. Τη μέθοδο υπολογισμού των διανυσμάτων ροής (fluxes): σχήμα upwind ή downwind, κατά Roe προσεγγιστικός επιλύτης Riemann, κ.λπ.
9. Τα σχήματα υψηλότερης τάξης ακρίβειας και οι slope limiters: σχήμα διακριτοποίησης βασισμένο στο MUSCL, ανακατασκευή των πρωτευουσών ή των συντηρητικών μεταβλητών, slope limiter Van Albada- Van Leer, Min mod, Barth-Jespersen κ.λπ.
10. Τους όρους πηγής (source terms).
11. Τις συνοριακές συνθήκες (boundary conditions).
12. Το είδος της διακριτοποίησης στο χρόνο - χρονικής ολοκλήρωσης (time integration): μέθοδοι implicit ή explicit.

¹¹ αναλυτικά στο Παράρτημα Α.

13. Τον τρόπο επιτάχυνσης της αριθμητικής επίλυσης: παράλληλη επεξεργασία, δημιουργία πολυπλέγματος (multigrid – spatial, angular agglomeration), restriction-prolongation, grid adaptation.
14. Την ενδοεπικοινωνία μέσα στον κώδικα: MPI library κ.λπ.
15. Το γραφικό περιβάλλον: IDL, Python, Paraview, Vapour κ.λπ.
16. Πλεονεκτήματα/μειονεκτήματα.

2.2 Alsvid-UQ V.3.0

Ο αρχικός κώδικας ονομάζεται Alsvid (Mishra, et al., 2012, Fuchs, et al., 2011) ενώ ο Alsvid-UQ αποτελεί έναν πολυεπίπεδο Monte Carlo επιλύτη πεπερασμένων όγκων (Multi Level Monte Carlo MLMC-FVM), ο οποίος χρησιμοποιείται για την ποσοτικοποίηση της αβεβαιότητας (uncertainty quantification) σε υπερβολικά συστήματα συντηρητικών νόμων μέχρι και 3 διαστάσεων. Σχεδιάστηκε από ερευνητές στο CMA, στο Πανεπιστήμιο του Όσλο και στο SAM, του ΕΤΗ της Ζυρίχης (Lye, 2015, Mishra, et al., 2012). Ο MLMC αποτελεί εξέλιξη- γρηγορότερος για την ίδια τάξη μεγέθους λάθους- σε σχέση με τον προηγούμενο, MC, επιλύτη. Η βασική ιδέα πίσω από τον παραπάνω επιλύτη είναι ο ταυτόχρονος σχεδιασμός/δημιουργία MC δειγμάτων εντός μίας ιεραρχίας από συνδεδεμένα υπολογιστικά πλέγματα (Mishra, et al., 2012).

Πολύ συχνά στην πράξη υπάρχει θέμα με τον ορισμό των αρχικών συνθηκών. Συγκεκριμένα, δεν είναι ακριβείς για να μπορέσει ο κώδικας να επιλύσει αριθμητικά το πρόβλημα των συντηρητικών εξισώσεων (το ίδιο μπορεί να συμβαίνει και με τους όρους πηγής, τις συνοριακές συνθήκες και τους συντελεστές). Αυτή η αβεβαιότητα στις αρχικές συνθήκες οδηγεί στην διάδοση της αβεβαιότητας και στη λύση. Η μοντελοποίηση και η προσέγγιση της διάδοσης της αβεβαιότητας στη λύση, λόγω ακριβώς αυτής της αβεβαιότητας στα δεδομένα που εισάγονται, καθιστά το αντικείμενο της UQ. Αυτή η αβεβαιότητα μπορεί να αντιμετωπιστεί με πιθανολογικό τρόπο. Τα αρχικά δεδομένα (inputs) είναι τυχαία πεδία με προδιαγεγραμμένους πιθανολογικούς νόμους. Η λύση αντιμετωπίζεται επίσης ως πεδίο τυχαίων τιμών, το οποίο ικανοποιεί τρεις παραμέτρους: την μετρησιμότητα (measurability), το να αποτελεί ασθενή λύση και να ικανοποιεί τις συνθήκες εντροπίας (Mishra, et al., 2012).

Ο πιθανολογικός χώρος των αρχικών δεδομένων εισόδου (δημιουργείται με γεννήτρια τυχαίων αριθμών) χωρίζεται σε δείγματα (samples) και οι μερικές διαφορικές εξισώσεις (PDEs) λύνονται για κάθε δείγμα. Τα δείγματα συνδυάζονται σε στατιστικούς υπολογισμούς (statistical estimates of expectation) και άλλες στατιστικές ροπές¹² της τυχαίας λύσης που είναι απαραίτητα για την ποσοτικοποίηση της αβεβαιότητας. Ο αριθμός των δειγμάτων αυτών σε κάθε επίπεδο της ανάλυσης καθορίζει και την επίδοση του μοντέλου.

Όσον αφορά στα βασικά χαρακτηριστικά του ALSVID-UQ:

1. Το είδος των εξισώσεων που επιλύει: ιδανικές εξισώσεις.
2. Τον τρόπο διατήρησης του σωληνοειδούς περιορισμού ($\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$): χρησιμοποιείται 8-κυματική δομή (χρήση όρου πηγής του Powell διακριτά για 1^ης τάξης και για μεγαλύτερης τάξης - αυτό αναφέρεται μέσα στον κώδικα).
3. Τις διαστάσεις του προβλήματος που μπορεί να επιλύσουν: 1, 2, 3 ¹³ . Καρτεσιανές συντεταγμένες.

¹² (Μέση τιμή, διακύμανση, λοξότητα, κύρτωση της συνάρτησης πιθανότητας).

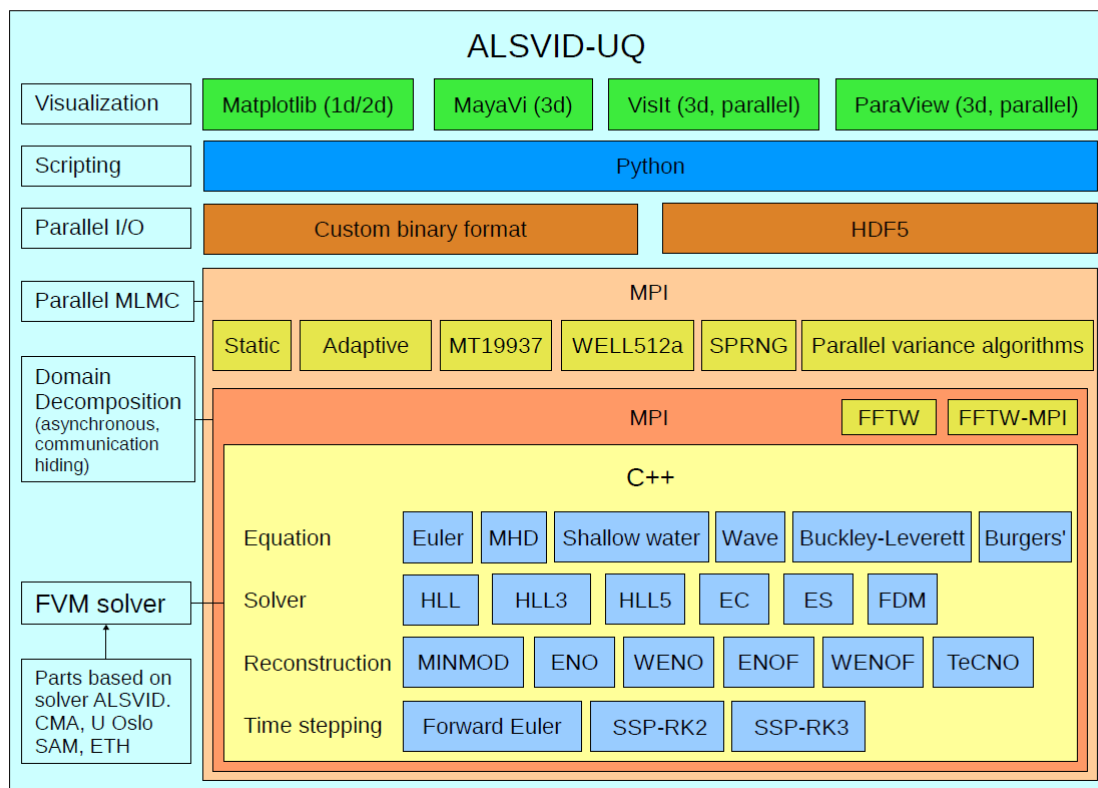
¹³ Λύνει και για 3 διαστάσεις ο κώδικας, αλλά δεν έχει καταγραφεί η αποτελεσματικότητά του για MHD.

4. Τη χρήση του: ακαδημαϊκοί σκοποί.
5. Τη γλώσσα προγραμματισμού: C++, Python 2.5 ή νεότερη έκδοση.
6. Το είδος διακριτοποίησης στο χώρο (spatial discretization): μέθοδος πεπερασμένων όγκων (Finite Volume methods): FVM-ντετερμινιστική ή MC (Monte Carlo)-FVM-στοχαστική ή **MLMC-FVM** - στοχαστική – κεντροκομβική, βασισμένη στις ακμές κ.λπ.
7. Τη μέθοδο υπολογισμού των διανυσμάτων ροής (fluxes): βασίζεται σε προσεγγιστικούς επιλύτες Riemann τύπου HLL.
Για την MHD χρησιμοποιούνται οι κάτωθι επιλύτες.
HLL3: «δεύτερος» τριών κυμάτων επιλύτης,
HLL3L: κατά Linde τριών κυμάτων επιλύτης,
HLL3R: επαναληπτικός επιλύτης 3 κυμάτων (relaxed),
HLL5: «δεύτερος» πέντε κυμάτων επιλύτης.
8. Τα σχήματα υψηλότερης ακρίβειας και οι slope limiters: Για την απόκτηση υψηλότερης τάξης χωρική ακρίβεια χρησιμοποιούνται είτε κλαδικές πολυωνυμικές μη ταλαντωτικές διαδικασίες ανακατασκευής, είτε η μέθοδος DG (Discontinuous Galerkin). Συγκεκριμένα για την απόκτηση 1^{ης}, 2^{ης} και 3^{ης} τάξης ακριβείας για το χώρο.
Ειδικότερα χρησιμοποιούνται:
2^{ης} τάξης κεντρικό σχήμα χωρίς limiters, 2^{ης} τάξης με διατήρηση της εντροπίας-Min Mod limiter, 2^{ης} τάξης plain ENO, 2^{ης} τάξης positive fixed ENO, 2^{ης} τάξης plain Min Mod, 2^{ης} τάξης στο χρόνο χωρίς ανακατασκευή, 2^{ης} τάξης με διατήρηση της εντροπίας ENO, 2^{ης} τάξης plain WENO, 2^{ης} τάξης positive fixed WENO, 3^{ης} τάξης στο χρόνο χωρίς ανακατασκευή, 3^{ης} τάξης plain WENO, 3^{ης} τάξης positive fixed WENO (εκτός αν αναφέρεται διαφορετικά η τάξη είναι ως προς το χώρο) με τροποποιήσεις για να μπορεί να διατηρείται η θετικότητα της πίεσης και της πυκνότητας.
9. Τους όρους πηγής (source terms): ο όρος πηγής Powell. Για την αριθμητική ευστάθεια του σχήματος, χρησιμοποιείται upwinding των όρων.
10. Τις συνοριακές συνθήκες (boundary conditions): Διαθέσιμοι τύποι:
- REPEAT,
- NEUMANN,
- ZERO_FLUX και
- WAVE_REFLECT.
11. Το είδος της διακριτοποίησης στο χρόνο-χρονικής ολοκλήρωσης (time integration):
Στο χρόνο αντίστοιχα με το χώρο, επιτυγχάνεται 1^{ης}, 2^{ης} και 3^{ης} τάξης ακρίβεια. Χρησιμοποιείται ρητή (explicit) μέθοδος διακριτοποίησης: 1^{ης} τάξης Euler time stepping, 2^{ης} τάξης Runge-Kutta time stepping, 3^{ης} τάξης Runge-Kutta time stepping (SSP RK).
12. Τον τρόπο επιτάχυνσης της αριθμητικής επίλυσης: με παράλληλη επεξεργασία, χρησιμοποιώντας τρεις αναλλακτικούς τρόπους παραλληλισμού: α) πάνω σε διαφορετικά επίπεδα ανάλυσης του χωρίου (resolution levels), β) πάνω σε MC δείγματα, γ) μέσα στον ντετερμινιστικό επιλύτη (FV) χρησιμοποιώντας την διαμέριση του χωρίου (domain decomposition).
13. Την ενδοεπικοινωνία μέσα στον κώδικα: με χρήση MPI βιβλιοθήκης.
14. Το γραφικό περιβάλλον: numpy, matplotlib (για 1 και 2d), MayaVi, VisIt, Paraview (για 3d).
15. Πλεονεκτήματα/μειονεκτήματα:

Η διακύμανση είναι ένας πολύ καλός δείκτης της ύπαρξης στο πλέγμα, σημείων συγκέντρωσης ασυνεχειών και απότομων κλίσεων της λύσης (Mishra, et al., 2012). Οι

ντετερμινιστικοί FVM επιλύτες μπορούν να επαναχρησιμοποιηθούν και υπάρχει η δυνατότητα παράλληλης επεξεργασίας (Šukys, 2014). Ο πέντε κυμάτων επιλύτης ήταν καλύτερος με όρους ανάλυσης από ότι ο τριών κυμάτων και αντίστοιχα τα WENO σχήματα ήταν πιο ακριβή σε σχέση με τα ENO. Διασφαλίζεται χαμηλότερο υπολογιστικό κόστος σε σχέση με την projection μέθοδο και ταυτόχρονα είναι απλούστερα/ευκολότερα να τα κατανοήσει κάποιος. Αντίστοιχα τα σχήματα είναι ευκολότερο να παραλληλιστούν και να χρησιμοποιηθούν σε σύνδεση με την AMR από ότι με staggering-based μεθόδους (Fuchs, et al., 2011). Σταθερότητα στην εντροπία (μη παραβίαση του 2^{ου} Νόμου της Θερμοδυναμικής), διατήρηση της θετικότητας της πίεσης και της πυκνότητας (πλεονεκτήματα των Riemann solvers τύπου HLL σε σχέση με τους τύπου Roe, (Fuchs, et al., 2011)). Αριθμητικά σταθερά σχήματα τα 1^{ης} και 2^{ης} τάξης ακρίβειας, για διάφορα είδη πλεγμάτων, συμπεριλαμβανομένων και των πολύ πυκνών.

Μειονεκτήματα: Υψηλό υπολογιστικό κόστος για πολλές διαστάσεις.



Εικόνα 4: MLMC-FVM εφαρμογή παραλληλισμού - ALSVID-UQ (Šukys, 2014).

2.3 AstroBEAR V.2.0

Ο AstroBEAR αποτελεί έναν παραλληλισμένο κώδικα προσομοίωσης εξισώσεων υδροδυναμικής/MHD, κατάλληλο για μια ποικιλία αστροφυσικών προβλημάτων. Προήλθε από το πακέτο BEARCLAW¹⁴ το οποίο συντάχθηκε από τον Sorin Mitran. Ο AstroBEAR είναι σχεδιασμένος για Multiphysics προσομοιώσεις, σε διδιάστατα και τριδιάστατα AMR συστήματα και λύνει υπερβολικά συστήματα εξισώσεων (Frank, et al., 2013, Carroll-Nellenback, et al., 2013, Li, et al., 2012, Yirak, et al., 2010, Carver, et al., 2010, Cunningham, et al., 2009, Cunningham, et al., 2005).

Όσον αφορά στα βασικά χαρακτηριστικά του AstroBEAR:

¹⁴ Boundary Embedded Adaptive mesh Refinement Conservation LAW.

1. Το είδος των εξισώσεων που επιλύει¹⁵: ιδανικές εξισώσεις, για διαφορετικά ρευστά-υλικά μη ιδανικά¹⁶ (Carver, et al., 2010), με ανισότροπη θερμική αγωγιμότητα (Li, et al., 2012), με μετάδοση ακτινοβολίας (radiative cooling¹⁷, Yirak, et al., 2010). EOS: ιδανικού αερίου, με διαφορετικό ισεντροπικό συντελεστή γ από τα ιδανικά. Νέα multi-physics modules, που μπορούν να χειριστούν ελλειπτικές και παραβολικές εξισώσεις. Ενσωμάτωση του γραμμικού επιλύτη HYPRE επιτρέπει την γρήγορη προσομοίωση συστημάτων, στα οποία η self-gravity, η θερμική αγωγιμότητα και η μαγνητική αντίσταση είναι σημαντικά.
2. Τον τρόπο διατήρησης του σωληνοειδούς περιορισμού ($\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$): χρησιμοποιείται σχήμα περιορισμένης μεταφοράς.
3. Τις διαστάσεις του προβλήματος που μπορεί να επιλύσουν: 2, 2.5 (π.χ. κυλινδρικές) και 3 διαστάσεις, σε καρτεσιανές ή καμπυλόγραμμες συντεταγμένες.
4. Τη χρήση του: για την διατύπωση/επίλυση αστροφυσικών φαινομένων από ομάδες Πανεπιστημίων διεθνώς (University of Rochester Computational Astrophysics Group, Rice University - Laboratory Astrophysics Group, University of Minnesota - Computational Astrophysics Group, University of North Carolina - Physics and Astronomy, Applied Mathematics (University Collaborators and Computing Systems)). Για υδροδυναμικές και μαγνητοϋδροδυναμικές εφαρμογές. Πέραν της ακαδημαϊκής συνεργασίας, υπάρχει και συνεργασία πανεπιστημίου και εταιρειών (Rice University, Sun Microsystems, και Sigma Solutions, Inc.). High Energy Density Laboratory Astrophysics studies. Πλέον χρησιμοποιείται και για το σχηματισμό αστεριών (Frank, et al., 2013).
5. Τη γλώσσα προγραμματισμού: Fortran 90/95.
6. Το είδος του πεδίου – πλέγματος: ημι-δομημένο, μη δομημένο.
7. Το είδος διακριτοποίησης στο χώρο (spatial discretization): Μέθοδος πεπερασμένων όγκων (FVM) για την αριθμητική ολοκλήρωση του συστήματος των συντηρητικών νόμων.
8. Τη μέθοδο υπολογισμού των διανυσμάτων ροής (fluxes): upwind επιλύτης Riemann. Διάφορες μέθοδοι:
 - α) HLLD flux (όπως περιγράφεται από Miyoshi & Kusano),
 - β) Roe flux - προσεγγιστικός γραμμικοποιημένος επιλύτης Riemann (κατά Ryu & Jones) (για MHD),
 - γ) Marquina flux,
 - δ) τροποποιημένη Marquina flux, που εισάγει μια μικρή ποσότητα αριθμητικής διάχυσης με τη χρήση της ίδιας διαδικασίας υπολογισμού μέσου (averaging procedure) όπως ο τύπος του Roe.
 Προτιμάται η κατά Roe flux λόγω της χαμηλότερης διάχυσης (least diffusive formulation) αν και η μέθοδος δ) είναι καταλληλότερη για μαγνητισμένη ροή, η οποία περιλαμβάνει δομές of compound κύματα. Επίσης προτιμάται και η γραμμικοποίηση του αριθμητικού μέσου κατά Ryu & Jones για MHD.
9. Τα σχήματα υψηλότερης ακρίβειας και οι slope limiters: Συνιστώνται γενικά dimensionally unsplit σχήματα, λόγω της μικρότερης διάχυσης. Σε ορισμένες περιπτώσεις χρησιμοποιείται η direction-split προσέγγιση, λόγω της αξιοπιστίας

¹⁵ Επιπλέον αλλά εκτός του αντικειμένου της εν λόγω διατριβής: αναλυτική διαμόρφωση Thomas-Fermi του A.R.Bell.

¹⁶ Σε αντίθεση με τα ιδανικά, εξετάζεται συνδυασμός των κατωτέρω: Coulomb interaction, ionization potential perturbation, electron degeneracy gas pressure, με αποτέλεσμα αύξηση στην πίεση κ.λπ.

¹⁷ Shock waves convert kinetic energy directed perpendicular to the shock front into random thermal motions. Radiative cooling removes thermal energy from the system at a rate that is characterized by some cooling law (Yirak, et al., 2010).

που έχουν δείξει αυτά τα σχήματα σε HD προβλήματα. Σ αυτή την περίπτωση, ένα χρονικό βήμα σπάει σε ενδιάμεσα και στα διαδοχικά χρονικά βήματα συντελείται ταυτόχρονα κυκλική ή αντικυκλική εναλλαγή, ή συνδυασμός όσον αφορά στην κατεύθυνση των συντεταγμένων εντός των τύπων υπολογισμού (Cunningham, et al., 2009).

Επιτυγχάνεται 2^ης τάξης ακρίβεια με παρεμβολή των πρωτευουσών μεταβλητών και όχι των συντηρητικών, ώστε η κατάσταση μετά την ανακατασκευή των ακμών του πλέγματος να είναι διασφαλισμένη ως προς την μη-αρνητική πίεση.

Χρησιμοποιούνται τρεις διαφορετικές μέθοδοι:

α) γραμμική - MUSCL μέθοδος ανακατασκευής κατά Van Leer, με τη χρήση ενός slope limiter για την διατήρηση της μονοτονίας,

β) κλαδική υπερβολική μέθοδος (Piecewise Hyperbolic method-PHM) του Marquina,

γ) κλαδική παραβολική μέθοδος των Colella & Woodward (PPM).

Συναρτήσεις περιορισμού που χρησιμοποιούνται: min-mod limiter, Van Leer, monotonized-centered limiter.

10. Τους όρους πηγής (source terms): μηδενικοί για καρτεσιανές συντεταγμένες, μη μηδενικοί για κυλινδρικές. Για μη μηδενικούς όρους πηγής, όσον αφορά σε καρτεσιανό επίπεδο, θα πρέπει να χρησιμοποιηθεί η operator splitting τεχνική, δηλαδή το σπάσιμο του όρου πηγής σε 3 όρους: οι γεωμετρικοί όροι πηγής, οι microphysical όροι πηγής και οι κεντρικοί βαρυτικοί όροι πηγής (Cunningham, et al., 2005).
11. Τις συνοριακές συνθήκες (boundary conditions): Τρεις φυσικές συνοριακές επιλογές: constant extrapolation, reflecting ή περιοδικές.
 - Extrapolating: γενικά είναι μη φυσικά όρια και θα πρέπει τεχνικά να χρησιμοποιούνται μόνο όταν η ροή εγγυημένα θα αφήνει το πλέγμα υπερηχητικά πάντα. Συνήθως δεν δημιουργείται πρόβλημα, μιας και η ροή δεν εισέρχεται στο πλέγμα. Εάν κάποιο σώμα εισέλθει στο πλέγμα σε interpolating bc, τότε η πληροφορία θα ταξιδεύει και upstream και downstream και ενός είδους τροφοδότηση είναι δυνατή τέτοια ώστε να καταλήγει στο λεγόμενο run-away growth. Προβλήματα με πηγές βαρύτητας είναι ειδικά διακείμενα σε extrapolating bc και εάν αυτές χρησιμοποιηθούν θα πρέπει να ελεγχθεί ώστε να διασφαλιστεί ότι δεν υπάρχει ποτέ είσοδος ροής σε αυτό το όριο.
 - Περιοδικές.
 - Reflecting: αντανakλούν τις τιμές μέσα στο πλέγμα στις ζώνες των ελλειπόντων κόμβων (ghost nodes). Παρόλα αυτά κάποια στοιχεία τους αλλάζουν πρόσημο, εξαρτώμενα στις συγκεκριμένες οριακές συνθήκες.
 - Reflecting wall: αυτού του είδους το όριο θα αλλάξει το πρόσημο των ταχυτήτων, όπως και των συνιστωσών του μαγνητικού πεδίου, που είναι κανονικές ως προς τον τοίχο. Με αυτό τον τρόπο διασφαλίζεται ότι δεν θα υπάρχει ροή μάζας κατά μήκος του ορίου και αποτρέπει από το να διασχίζουν το όριο οι γραμμές των πεδίων. Πέρα από την χρησιμότητα τους στην περίπτωση των υπεραγωγίων τοίχων, η συμμετρία του προβλήματος ταυτόχρονα συχνά επιτρέπει την εξοικονόμηση υπολογιστικού κόστους με την μοντελοποίηση μόνο του μισού χωρίου.
 - Reflecting B parallel: Αντίστοιχα με το παραπάνω, η κανονική συνιστώσα της ταχύτητας θα αλλάξει πρόσημο αλλά αντί να αλλάξει και η αντίστοιχη του μαγνητικού πεδίου, θα αλλάξει πρόσημο η παράλληλη συνιστώσα του τελευταίου. Με αυτό τον τρόπο οι γραμμές του πεδίου παραμένουν κανονικές ως προς το όριο.

- Reflect cylindrical: Αντίστοιχο με το Reflect wall, με την προσθήκη ότι επίσης και η συνιστώσα της ταχύτητας στον άξονα των z και των μαγνητικών πεδίων θα αλλάξει επίσης πρόσημο. Αυτό το όριο πρέπει να χρησιμοποιείται για το όριο στο $x=0$ στην περίπτωση αξονοσυμμετρικής γεωμετρίας, λόγω του γεγονότος ότι όταν διασχίζεται ο z άξονας η κατεύθυνση των μοναδιαίων ακτινικών και αζιμουθιακών διανυσμάτων αντιστρέφεται.
 - User specified: Όταν υπάρχουν δέσμες ή άνεμοι είναι γενικά καλύτερο να τεθούν οι ghost zones ρητά (explicitly) από το να βασιστούμε σε extrapolating bc, ώστε να διατηρηθεί το αρχικό προφίλ του ανέμου ή των δεσμών. Με την ύπαρξη των μαγνητικών πεδίων δεν γίνεται απλά να τεθούν τα βοηθητικά πεδία χωρίς να εισαχθεί η απόκλιση. Εναλλακτικά θα μπορούσαν να χρησιμοποιηθούν οι reflective bc για το πεδίο, ώστε να παραμείνουν οι γραμμές του πεδίου κανονικές ή παράλληλες στο όριο και το μοναδικό βήμα ως προς τις μεταβλητές του ρευστού.
12. Το είδος της διακριτοποίησης στο χρόνο - χρονικής ολοκλήρωσης (time integration): Χρησιμοποιούνται μέθοδοι implicit (Li, et al., 2012) ή explicit. Δύο μέθοδοι για 2^{ης} τάξης χρονική ακρίβεια:
 α) MUSCL-Hancock predictor (cell centered, volume averaged fluxes) – corrector¹⁸: Προσθήκη διαδικασίας για την διασφάλιση θετικής πίεσης και πυκνότητας.
 β) Δυο βημάτων Runge-Kutta χρονική update operator του Shu. Πλεονεκτήματα: θετικότητα πίεσης, πιο στιβαρό σχήμα, unsplit φύση. Μειονέκτημα: υπολογιστικό κόστος).
13. Τον τρόπο επιτάχυνσης της αριθμητικής επίλυσης: με παράλληλη επεξεργασία, restriction (volume-weighted average restriction of cell-centered conserved fields) - prolongation (prolongating-overlapping-advancing-synchronizing-restricting). AMR: patch, grid ή block (ή cell)-based method (Carroll-Nellenback, et al., 2013).
14. Την ενδοεπικοινωνία μέσα στον κώδικα: με χρήση MPI βιβλιοθήκης, distributed tree αλγόριθμος για patch-based AMR, δηλαδή κάθε επεξεργαστής είναι ενήμερος μόνο για το κομμάτι του δέντρου που περιλαμβάνει κόμβους που συνδέονται με τους κόμβους του δικού τους δικτύου.
15. Το γραφικό περιβάλλον: HDF5, Chombo.
16. Πλεονεκτήματα/μειονεκτήματα:
 Η επίλυση εξισώσεων για μη ιδανικά ρευστά κάνει τον κώδικα πιο αντιπροσωπευτικό για την προσομοίωση των εργαστηριακών πειραμάτων. Η χρήση μεθόδου περιορισμένης μεταφοράς για την διατήρηση του σωληνοειδούς πεδίου σε συνδυασμό με την πολυσταδιακή Runge-Kutta, υπερέχει στο πλαίσιο των προβλημάτων αστροφυσικής φύσης που επιλύει ο εν λόγω κώδικας, τα οποία συνδέονται με ισχυρά shock και radiative cooling, διατηρείται η θερμική ενέργεια χωρίς αρνητική τιμή της θερμικής πίεσης¹⁹.

2.4 ATHENA V.4.2

Ο ATHENA αποτελεί έναν κώδικα για αστροφυσικές MHD προσομοιώσεις. Αναπτύχθηκε αρχικά για μελέτες πάνω στο διαστρικό μέσο, στον σχηματισμό αστέρων και στις accretion ροές. Η ανάπτυξη του ξεκίνησε το 2000 από τους J. Stone, T. Gardiner και P. Teuben στο University of Maryland με την υποστήριξη του NSF Information Technology

¹⁸«...by advancing the grid-face interpolated states by a half-time-step using a one-dimensional predictor step» (Cunningham, et al., 2009).

¹⁹ Στις εφαρμογές αστροφυσικής δεν υπάρχει διατήρηση της ενέργειας εξ' αιτίας την απωλειών ενέργειας λόγω ακτινοβολίας.

Research program. Από τότε, η λίστα με τους συνεργάτες, που συνεισφέρουν στον κώδικα, συνεχώς αυξάνει, ενώ πλέον το ίδρυμα, που φιλοξενεί την ανάπτυξη του κώδικα, είναι το Princeton (Stone, et al., 2008).

Όσον αφορά στα βασικά χαρακτηριστικά του κώδικα ATHENA:

1. Το είδος των εξισώσεων που επιλύουν²⁰: ιδανικές, Hall (με ειδική αντίσταση, ambipolar diffusion, Hall effect), με μετάδοση θερμότητας (ισότροπη και ανισότροπη), με όρους συνεκτικότητας (ισότροπη/Navier Stokes και ανισότροπη/Braginskii), πολλών υλικών - multi material (passive scalars που μεταφέρονται με τη ροή), με μετάδοση ακτινοβολίας (optically thin radiative cooling). EOS: ιδανικών αερίων, ισόθερμη, για αυθαίρετο γ. Επιπλέον, στις εξισώσεις συμπεριλαμβάνεται η self-gravity ή/και στατικό βαρυτικό δυναμικό.
2. Τον τρόπο διατήρησης του σωληνοειδούς περιορισμού ($\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$): σχήμα περιορισμένης μεταφοράς.
3. Τις διαστάσεις του προβλήματος που μπορεί να επιλύσει: 1, 2 ή 3 διαστάσεις, καρτεσιανές, κυλινδρικές συντεταγμένες.
4. Τη χρήση του: έρευνα, ελεύθερη διάθεση.
5. Τη γλώσσα προγραμματισμού: C, Fortran.
6. Το είδος του πεδίου - πλέγματος: δομημένο.
7. Το είδος διακριτοποίησης στο χώρο (spatial discretization): μέθοδος πεπερασμένων όγκων, 1^{ης} τάξης κλαδική συνεχής ανακατασκευή.
8. Τη μέθοδο υπολογισμού των διανυσμάτων ροής (fluxes): κατά Roe προσεγγιστικός επιλύτης Riemann, HLLC (Harten-Lax-van Leer με Einfeldt fix), HLLD (Harten-Lax-van Leer με επαφή και Alfvén λειτουργία), force (με τη κατά Toro force flux). Συνιστώνται το κατά Roe ή το HLLD σχήμα. Για την ολοκλήρωση: Corner Transport Upwind (CTU) MUSCL-Hancock ή 1^{ης} τάξης flux διόρθωση.
9. Τα σχήματα υψηλότερης ακρίβειας και οι slope limiters: 2^{ης} τάξης κλαδική γραμμική ανακατασκευή, 3^{ης} τάξης κλαδική παραβολική ανακατασκευή.
10. Τους όρους πηγής (source terms): όροι βαρύτητας. Για την μελέτη της δυναμικής των accretion ροών χρησιμοποιούνται shearing box όροι πηγής, δηλαδή επιπρόσθετοι όροι Coriolis και παλιρροϊκής βαρύτητας.
11. Τις συνοριακές συνθήκες (boundary conditions): τεσσάρων ειδών, συγκεκριμένα:
 - Reflecting.
 - Flow out.
 - Periodic.
 - Ορισμένες από το χρήστη.
12. Το είδος της διακριτοποίησης στο χρόνο-χρονικής ολοκλήρωσης (time integration): 2^{ης} τάξης ακριβείας.
13. Τον τρόπο επιτάχυνσης της αριθμητικής επίλυσης: παράλληλη επεξεργασία με χρήση χωρικής διαμέρισης και MPI.
14. Την ενδοεπικοινωνία μέσα στον κώδικα: MPI library.
15. Το γραφικό περιβάλλον: δεν υπάρχει προεπιλεγμένο πακέτο γραφικών, Δυνατότητα οπτικοποίησης των αποτελεσμάτων σε: supermongo, IDL, Matlab, VisIt, ImageMagick, FLI.

²⁰ Επιπλέον, αλλά εκτός του αντικειμένου της εν λόγω διατριβής: ειδικής σχετικότητας.

2.5 BATS-R-US (SWMF V.2.4)

Η πρώτη εκδοχή του πλαισίου προσομοίωσης SWMF (Space Weather Modelling Framework) αναπτύχθηκε στο Κέντρο Μοντελοποίησης Διαστημικού Περιβάλλοντος (CSEM²¹) του Πανεπιστημίου του Michigan, στα πλαίσια του προγράμματος NASA Earth Science Technology Office (ESTO) Computational Technologies (CT) (συγκεκριμένα, NASA CAN NCC5-614). Η λογική του υπολογιστικού πλαισίου κρίθηκε κατάλληλη για την μοντελοποίηση multi-physics συστημάτων, λόγω της χρήσης διαφορετικών μοντέλων για τις διαφορετικές περιοχές του συστήματος, ειδικότερα για τη physics-based μοντελοποίηση του καιρού του διαστήματος. Στο συγκεκριμένο πλαίσιο, κάθε περιοχή της φυσικής αντιστοιχεί σε ένα συστατικό. Κάθε συστατικό αντιπροσωπεύεται από μία ή περισσότερες εκδοχές. Μία τέτοια εκδοχή αποτελεί ένα μοντέλο φυσικής συν τα απαραίτητα wrappers και couplers (Εικόνα 5). Αυτά τα συστατικά μεταγλωττίζονται σε βιβλιοθήκες και συνδέονται με τον πυρήνα του πλαισίου. Το SWMF διαμοιράζει τις συνιστώσες στην παράλληλη μηχανή, τις εκτελεί και τις συνενώνει, χρησιμοποιώντας την MPI βιβλιοθήκη για επικοινωνία. Η δομή είναι τέτοια έτσι ώστε κάθε μοντέλο φυσικής να μπορεί να μεταγλωττίζεται σε ξεχωριστά εκτελέσιμα και να μπορεί να χρησιμοποιείται σαν αυτοτελής κώδικας (Toth, et al., 2012).

Μεταξύ άλλων, ο BATS-R-US (Block-Adaptive Tree, Solarwind Roe type Upwind Scheme) αποτελεί ένα γενικό, υψηλά σπονδυλωτό εργαλείο μοντελοποίησης της φυσικής του διαστήματος και αποτελεί κομμάτι του παραπάνω πλαισίου²². Μπορεί ο ίδιος ακριβώς κώδικας να μοντελοποιεί διαφορετικές καταστάσεις (π.χ. ηλιακή κορόνα, ηλιόσφαιρα, μαγνητόσφαιρα κ.λπ.), πράγμα που δεν συμβαίνει για παράδειγμα στον CISM κώδικα, που αποτελεί έναν άλλο ευρέως αναγνωρισμένο κώδικα μοντελοποίησης του καιρού του διαστήματος. Αυτή τη στιγμή, οι κύριοι υπεύθυνοι ανάπτυξής του είναι οι: G. Toth, Bart van der Holst, και I. Sokolov (CSEM, 2019).

Στην παρακάτω διεύθυνση

<https://ccmc.gsfc.nasa.gov/models/modelinfo.php?model=BATS-R-US>

είναι δυνατή η online προσομοίωση πραγματικού χρόνου, η αίτηση αποτελεσμάτων/ προσομοίωσης για συγκεκριμένες συνθήκες²³.

Όσον αφορά τα βασικά χαρακτηριστικά του BATS-R-US²⁴:

1. Το είδος των εξισώσεων που επιλύει: ιδανικές, με όρους συνεκτικότητας²⁵, με όρους ηλεκτρικής αντίστασης, με αντίσταση κατά Hall, με όρο Biermann Battery, με ανισοτροπία πίεσης, με μετάδοση θερμότητας, πολλών ειδών - multi species ή πολλών υλικών - multi material, πολλών ρευστών - multi fluid, με μετάδοση με ακτινοβολία, ημισχετικιστικές (βλ. Παράρτημα Α για ανάλυση των παραπάνω).

²¹ Center for Space Environment Modeling.

²² Δεν είναι το μοναδικό και δεν μοντελοποιεί όλες τις δυνατές καταστάσεις. “...A SWMF run of the magnetosphere at CCMC can include the Rice Convection Model (RCM) in the inner magnetosphere (SWMF/IM) in addition to the BATS-R-US MHD module of the global magnetosphere (GM) and the ionospheric electrodynamic (IE) potential solver...” (https://ccmc.gsfc.nasa.gov/models/modelinfo.php?model=BATS-R-US).

²³ Π.χ. πρόβλεψη για μαγνητοσφαιρικές και ιονοσφαιρικές συνθήκες με τη χρήση SWMF προσομοίωσης πραγματικού χρόνου- GM-BATS-R-US, IE-Ridley ιονοσφαιρικό μοντέλο- μαζί με την χρήση Fok μοντέλου δακτυλίου ρεύματος.

²⁴ Επιλέχθηκε γιατί επιλύει την πλειονότητα των φυσικών προβλημάτων από αυτά που λύνονται εντός του πλαισίου SWMF.

²⁵ Navier-Stokes τύπος συνεκτικότητας.

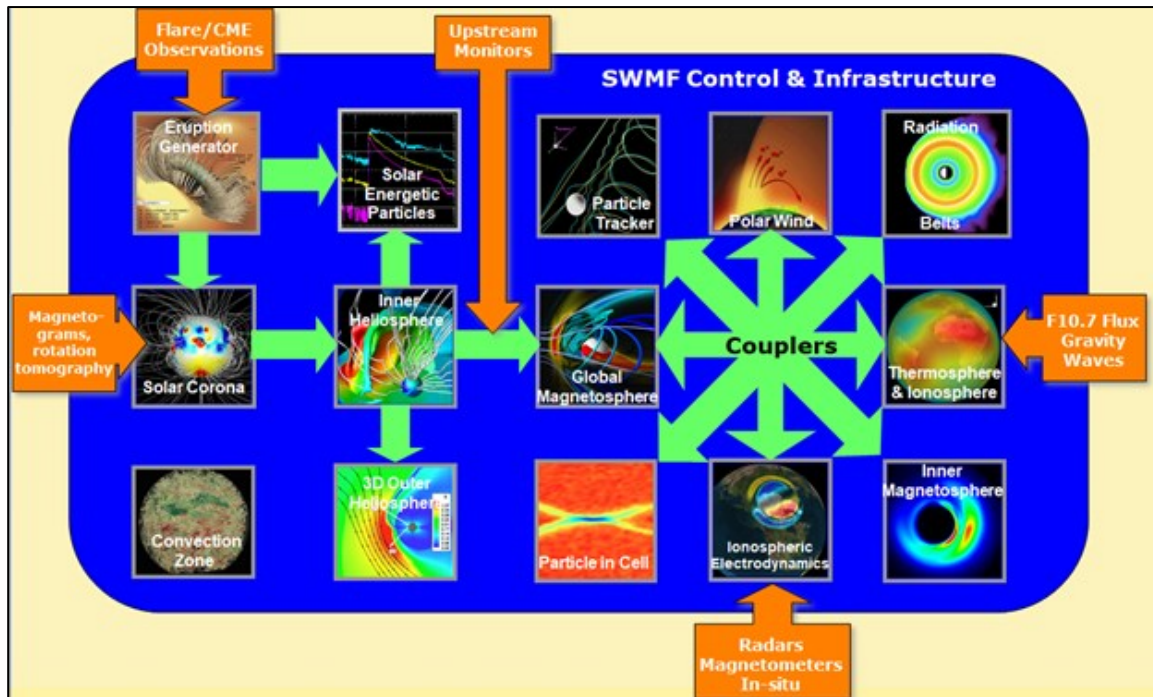
Μακριά από τις ασυνέχειες (shocks) γίνεται χρήση σαν πεπλεγμένης μεταβλητής της πίεσης αντί της ενέργειας²⁶, για την επίτευξη μεγαλύτερης ακρίβειας και στιβαρότητας σχήματος (εξίσωση 2.1). Επιπλέον, υπάρχει η πρόβλεψη για όρο βαρύτητας²⁷ όπως και τεχνητής συνεκτικότητας, EOS: εξαρτάται από το ρευστό.

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \nabla \cdot (p\mathbf{u}) = -(\gamma - 1)p\nabla \cdot \mathbf{u} \quad [2.1]$$

2. Τον τρόπο διατήρησης του σωληνοειδούς περιορισμού ($\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$): 8-κυματική δομή (χρήση όρου πηγής του Powell), 7-κυματική δομή, υβριδική μέθοδος, σχήμα προβολής, διανυσματικό δυναμικό (vector potential), χρήση γενικευμένου πολλαπλασιαστή Lagrange, σχήμα περιορισμένης μεταφοράς, σχήμα διάχυσης.
3. Τις διαστάσεις του προβλήματος που μπορεί να επιλύσουν: 1,2,3 διαστάσεις. Καρτεσιανές, περιστρεφόμενες καρτεσιανές, κυλινδρικές, σφαιρικές, roundcube (ακτινικά τραβηγμένο καρτεσιανό δίκτυο) συντεταγμένες.
4. Τη χρήση: Έρευνα, εφαρμογή στην υπηρεσία της NASA, ελεύθερα διαθέσιμο μετά από εγγραφή στο σύστημα. Στην Εικόνα 5 παρουσιάζονται οι περιοχές της φυσικής που επιλύονται από τον κώδικα.
5. Τη γλώσσα προγραμματισμού: Fortran 90, Fortran 77, C++.
6. Το είδος του πεδίου – πλέγματος: δομημένο, ομοιόμορφο ή με δυνατότητα AMR.
7. Το είδος διακριτοποίησης στο χώρο: Σχήμα πεπερασμένων όγκων ή διαφορών, ανάλογα με την τάξη ακρίβειας. Παραθέτονται τα διάφορα είδη συνδυασμών διακριτοποίησης στο χώρο και στο χρόνο:
 - 1^{ης} τάξης στο χώρο & ενός σταδίου χρονική ολοκλήρωση,
 - 2^{ης} τάξης MUSCL σχήμα πεπερασμένων όγκων & είτε ρητό 2 σταδίων RK (Runge-Kutta), είτε πεπλεγμένο 3 επιπέδων BDF2,
 - 4^{ης} τάξης FIVOL4 (FV) & 4^{ης} τάξης RK σχήμα για την χρονική ολοκλήρωση (δεν συνίσταται),
 - 5^{ης} τάξης FD & 3^{ης} τάξης RK σχήμα για την χρονική ολοκλήρωση. Με δυνατότητα αλλαγής του σχήματος χρονικής διακριτοποίησης.

²⁶ χρήση εξίσωσης πίεσης: η ενέργεια υπολογίζεται σαν συνάρτηση της πίεσης και της κινητικής και μαγνητικής ενέργειας.

²⁷ "...gravitational force is determined by the mass of the central body".



Εικόνα 5: Πλαίσιο SWMF – τα συστατικά (κουτιά) και οι αλληλεπιδράσεις τους (τόξα με πράσινο χρώμα). Οι εισοδοι παρουσιάζονται με πορτοκαλί χρώμα (Toth, et al., 2012).

8. Τη μέθοδο υπολογισμού των διανυσμάτων ροής (fluxes): Διάφοροι τρόποι υπολογισμού:
 - Rusanov ή Lax-Friedrichs flux,
 - Linde's HLLEL flux,
 - Sokolon's τοπικό τεχνητό Wind flux,
 - LFDW- Lax-Friedrichs & Dominant-Wave flux,
 - HLLDW- HLLE & Dominant-Wave flux (μόνο για ιδανικές MHD),
 - Miyoshi & Kusano's HLLD flux (μόνο για ιδανικές MHD),
 - Κατά Roe προσεγγιστικός Riemann flux (παλιό) (μόνο για ιδανικές MHD),
 - Κατά Roe προσεγγιστικός Riemann flux (νέο) (μόνο για ιδανικές MHD),
 - Φυσικά fluxes χωρίς κανενός είδους επιλύτη Riemann (μόνο για τεστ).
9. Τα σχήματα υψηλότερης ακρίβειας και οι slope limiters:
 Για τις 1^{ης} τάξης σχήματα δεν χρησιμοποιείται συνάρτηση περιορισμού (limiter).
 Τα 2^{ης} τάξης TVD σχήματα χρησιμοποιούν έναν TVD limiter παντού. Τα 5^{ης} τάξης σχήματα έχουν δικό τους 5^{ης} τάξης ακριβείας limiter (MP5 ή CWENO).
 Τα είδη των limiters είναι: minmod (στιβαρός, διαχυτικός), monotonized κεντρικός limiter με βήτα παράμετρο, Koren's 3^{ης} τάξης limiter με βήτα παράμετρο, βήτα limiter (λιγότερο στιβαρός από τον κεντρικό monotonized για την ίδια τιμή του βήτα).
 Επιλύτες Krylov: GMRES-Generalized Minimal Residual Method, BiCGSTAB-BiConjugate Gradient Method, CG-Conjugate Gradient.
10. Τους όρους πηγής (source terms): Οι όροι που χρειάζονται για την διατήρηση της απόκλισης του \mathbf{B} ίση με μηδέν (βλ. παραγρ.1.6). Επιπλέον σημειακοί όροι πηγής μπορεί να υπάρχουν υπό προϋποθέσεις.
11. Τις συνοριακές συνθήκες (boundary conditions): Στην εικόνα 6, παρουσιάζονται οι δυνατές συνοριακές συνθήκες, δηλαδή οι τιμές που μπορούν να λάβουν οι μεταβλητές στα ghost cells στα κεντροκομβικά σύνορα στις ακμές του δικτύου.

Υπάρχουν και ειδικότερες συνθήκες π.χ. εδροκεντρικές τιμές στην περίπτωση brick shaped box κομμένου από ένα γενικευμένο δίκτυο συντεταγμένων.

Εικόνα 6: Κώδικας BATS-R-US, πίνακας δυνατών συνοριακών συνθηκών (CSEM, 2019).

coupled	- set from coupling with another component
periodic	- periodic
float	- zero gradient for all variables except: Phi=0 set for the scalar in hyperbolic div B control (see #HYPERBOLICDIVB) radiative outflow boundaries are applied for radiation energy densities
outflow	- same as 'float' but the pressure is set to pOutflow from #OUTFLOWPRESSURE
reflect	- reflective (anti-symmetric for the normal components of V and B, symmetric for all other variables)
linetied	- symmetric for density, anti-symmetric for momentum, float all others
fixed	- fixed solarwind values, total B is set
fixedB1	- fixed solarwind values, B1 is set
inflow/vary	- time dependent boundary based on solar wind input file (#SOLARWINDFILE)
shear	- sheared (intended for shock tube problem only)
ihbuffer	- values obtained from the IH component (this is set automatically)
none	- do not change ghost cells. This is useful if the outer boundary is not used.
fieldlinethreads	- threaded magnetic field BC for AWSOM-R solar model
user	- user defined

12. Το είδος της διακριτοποίησης στο χρόνο-χρονικής ολοκλήρωσης (time integration):

Χρήση διαφορετικών σχημάτων ανάλογα με την εφαρμογή:

- Ρητό 1 έως 4 σταδίων: 1 σταδίου (1^{ης} τάξης forward σχήμα Euler), 2 σταδίων (προσωρινό 2^{ης} τάξης), 3 σταδίων (TVD Runge-Kutta 3^{ης} τάξης), 4 σταδίων (κλασικό σχήμα Runge-Kutta 4^{ης} τάξης), Πεπλεγμένο 2 σταδίων (σχήμα BDF2-Backward Difference Formula 2). Preconditioning: Jacobi (πάντα left), Gauss-Seidel, BlockJacobi (πάντα left), BILU, MBILU-modified BILU.
- Point-implicit σχήμα: εφαρμογή σε multi ion MHD μόνο.
- Ημι-πεπλεγμένο (κάποιοι όροι υπολογίζονται ρητά και κάποια πεπλεγμένα): 1^{ης} τάξης ακριβείας στο χρόνο - μελλοντικά και 2^{ης} τάξης ακριβείας. Preconditioning: Jacobi, BlockJacobi, Gauss-Seidel, DILU-Diagonal Incomplete Lower-Upper, BILU, MBILU, HYPRE (όλα για το semi-implicit σχήμα)

13. Τον τρόπο επιτάχυνσης της αριθμητικής επίλυσης: παραλληλισμός, AMR – block refinement, μέχρι 3 τύποι μη γεωμετρικών κριτηρίων μπορούν να χρησιμοποιηθούν ταυτόχρονα για το refinement/coarsening. Μπορεί να γίνει σε όλο το χώρο προσομοίωσης ή σε μέρος του.

14. Την ενδοεπικοινωνία μέσα στον κώδικα: MPI, HDF5.

15. Το γραφικό περιβάλλον: format/Tecplot, HDF5 (για το VisIt), IDL μονής και διπλής ακρίβειας, ASCII.

16. Πλεονεκτήματα/μειονεκτήματα:

Υπάρχει η δυνατότητα σύγκρισης των αποτελεσμάτων του κώδικα με τις πραγματικές παρατηρήσεις σε μια σειρά τομέων της αστροφυσικής.

2.6 ECHO

Ο ECHO (Eulerian Conservative High Order scheme) αποτελεί ένα υπολογιστικό εργαλείο για την αριθμητική επίλυση υπερβολικών συντηρητικών νόμων της HD και της MHD, και για κλασικό και για σχετικιστικό (αστροφυσικής φύσεως) πλάσμα. Ξεκίνησε το 2000 για κλασικό MHD και το 2007 αναβαθμίστηκε για την αντιμετώπιση πλάσματος ειδικής σχετικότητας. Έκτοτε υπάρχει η έκδοση ECHO για 3-D γενική σχετικιστική MHD (GRMHD) (Del Zanna, 2009), η έκδοση X-ECHO, ομοίως (GRMHD) αλλά σε δυναμικά περιβάλλοντα χώρου-χρόνου (2011) και η έκδοση ECHO-QGP, 2013 για την διερεύνηση του Quark-Gluon πλάσμα που σχηματίζεται σε σχετικιστικές συγκρούσεις βαρέων ιόντων (σε συνεργασία με το Florence Theoretical Physics Group). Τελευταία ενημέρωση της ιστοσελίδας το 2017.

Όσον αφορά τα βασικά χαρακτηριστικά του ECHO:

1. Το είδος των εξισώσεων που επιλύει²⁸: ιδανικές εξισώσεις, με όρους αντίστασης, σχετικιστικές εξισώσεις.
2. Τον τρόπο διατήρησης του σωληνοειδούς περιορισμού ($\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$): χρησιμοποιείται upwind σχήμα περιορισμένης μεταφοράς (Londrillo, et al., 2004).
3. Τις διαστάσεις του προβλήματος που μπορεί να επιλύσουν: 3 διαστάσεις, καρτεσιανές ή σφαιρικές συντεταγμένες.
4. Τη χρήση του: ακαδημαϊκοί σκοποί. Χρησιμοποιείται κυρίως για σχετικιστικές εφαρμογές πλέον και μόνο από την ομάδα του Del Zanna. Πάνω στο ηλιακό πλάσμα και το πλάσμα ανέμου, διαστρικό μέσο (κύματα, τύρβη). Ενδεικτικά: Μελέτες πάνω στην μη-γραμμική ανάπτυξη της παραμετρικής αστάθειας των μεγάλου μεγέθους κυμάτων Alfvén, πάνω στην ανάπτυξη τύρβης στον ηλιακό άνεμο, μοντέλο για τις ταλαντώσεις μετά την φλόγα σε coronal arcades, μελέτη 3d μη-γραμμικής εξέλιξης της tearing mode and shear instabilities με εφαρμογές στο περιβάλλον χαμηλού ηλιακού ανέμου (Del Zanna, 2009).
5. Τη γλώσσα προγραμματισμού: Fortran 90.
6. Το είδος του πεδίου – πλέγματος: δομημένο.
7. Το είδος διακριτοποίησης στο χώρο (spatial discretization): η διακριτοποίηση γίνεται με υψηλής τάξης πεπερασμένες διαφορές.
8. Τη μέθοδο υπολογισμού των διανυσμάτων ροής (fluxes): σχήμα upwind. Χρησιμοποιούνται κεντρικού τύπου προσεγγιστικοί επιλύτες όπως ο LLF (Local Lax-Friedrichs ή Rusanov flux) ή ο HLL (Del Zanna, 2009). Ειδική μεταχείριση απαιτείται για τα μαγνητικά διανύσματα ροής τα οποία πρέπει να προσδιοριστούν σαν τετραδιαστασιακές αριθμητικές ροές, από τη στιγμή που δύο διαφορετικά προβλήματα Riemann θα πρέπει να συνδυαστούν στις ακμές των κελιών. Να σημειωθεί ότι απλές μέσες τιμές των συνεισφορών στις διεπιφάνειες των κελιών δεν είναι κατάλληλες, π.χ. επειδή δεν μειώνουν στη σωστή σχέση 1D για ασυνέχειες που είναι ευθυγραμμισμένες με το πλέγμα (Londrillo, et al., 2004).
9. Τα σχήματα υψηλότερης ακρίβειας και οι slope limiters: Χρησιμοποιούνται υψηλής τάξης πεπερασμένες διαφορές για την επίτευξη μέχρι και 5^{ης} τάξης ακρίβεια (Del Zanna, et al., 2007). Για 2^{ης} τάξης ακρίβειας: Min mod, monotonized centered, etc. Για μεγαλύτερη της 2^{ης} τάξης ακρίβεια: ENO3 για την 3^{ης} τάξης αυθεντική ENO method, CENO3 για την convex-ENO, WENO5 για την 5ης τάξης σταθμισμένη - ENO μέθοδο και WENO7. Διατηρητικό της μονοτονίας (MC-monotonicity preserving) σχήμα για την απομάκρυνση των ανεπιθύμητων ταλαντώσεων (είτε σε πεπλεγμένα

²⁸ Επιπλέον, αλλά εκτός του αντικείμενου της εν λόγω διατριβής: γενική θεωρία της σχετικότητας στο MHD (GRMHD), ειδική θεωρία της σχετικότητας στο MHD (RMHD).

είτε σε ρητά σχήματα με spectral like ανάλυση, βασισμένο στην αναστροφή των τρι- ή πέντε-διαγώνιων πινάκων).

10. Τους όρους πηγής (source terms): χωρίς όρους πηγής.
11. Τις συνοριακές συνθήκες (boundary conditions): χωρίς ορισμένες συνθήκες.
12. Το είδος της διακριτοποίησης στο χρόνο-χρονικής ολοκλήρωσης (time integration): με χρήση σχήματος Runge Kutta 2^{ης} ή 3^{ης} τάξης.
13. Τον τρόπο επιτάχυνσης της αριθμητικής επίλυσης: με παράλληλη επεξεργασία.
14. Την ενδοεπικοινωνία μέσα στον κώδικα: MPI library.
15. Το γραφικό περιβάλλον: -
16. Πλεονεκτήματα/μειονεκτήματα:

Πλεονεκτήματα: Λόγω της χρήσης CT μεθόδου δεν απαιτούνται επί τούτου τροποποιήσεις της μορφής του συστήματος συντηρητικών εξισώσεων. Μεγάλο εύρος εφαρμογών (ιδανικές, σχετικιστικές εξισώσεις) χωρίς τροποποιήσεις στη επαναληπτική μέθοδο.

2.7 FARGO3D V.1.3

Ο FARGO3D (Fast Advection in Rotating Gaseous Objects) αποτελεί έναν πολυχρηστικό κώδικα πολλαπλών ρευστών HD/MHD που εκτελείται σε clusters από CPUs ή GPUs, δίνοντας ιδιαίτερη έμφαση στους πρωτοπλανητικούς δίσκους²⁹. Συνάμα, αποτελεί τον διάδοχο του κώδικα FARGO, ο οποίος ακόμα είναι διαθέσιμος. Αναπτύχθηκε από τον Pablo Benítez Llambay (βασικός δημιουργός/προγραμματιστής) και τον Frédéric Masset. Η εκδοχή περισσότερων του ενός ρευστών αναπτύχθηκε από τους Pablo Benítez Llambay και Leonardo Krapp. (Benítez-Llambay, et al., 2018, Benítez-Llambay, et al., 2016).

Όσον αφορά στα βασικά χαρακτηριστικά του FARGO3D:

1. Το είδος των εξισώσεων που επιλύει: ιδανικές εξισώσεις, εξισώσεις με όρους αντίστασης με διάχυση του μαγνητικού πεδίου (magnetic field diffusion (resistivity module)), με όρους συνεκτικότητας (για όλες τις γεωμετρίες), Hall³⁰, πολλών ρευστών-multi fluid (κάθε ρευστό μπορεί να έχει τη δική του EOS). Παράλληλα υπάρχουν εξισώσεις για την προσομοίωση N-πλανητών ή αστερών, που αλληλεπιδρούν βαρυτικά με το ρευστό αλλά και μεταξύ τους (αυθαίρετος αριθμός σημειακών μαζών), για τη μετάδοση με ακτινοβολία και για μια δύο-θερμοκρασιών προσέγγιση (αέριο και φωτόνια). EOS: Αδιαβατική ή ισόθερμη. Orbital advection³¹ σχήμα είναι ενσωματωμένο.
2. Τον τρόπο διατήρησης του σωληνοειδούς περιορισμού ($\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$): χρησιμοποιείται σχήμα περιορισμένης μεταφοράς.

²⁹ «Ο πρωτοπλανητικός δίσκος είναι ένας περιστρεφόμενος περιαστρικός δίσκος πυκνών αερίων και σκόνης που περιβάλλει έναν νεοσύστατο αστέρα, έναν αστέρα τύπου T Ταύρου, ή έναν αστέρα Χέρμπεργκ Ae/Be. Ο πρωτοπλανητικός δίσκος μπορεί επίσης να θεωρηθεί ως ένας δίσκος προσαύξησης για τον αστέρα, επειδή αέρια ή άλλα υλικά μπορεί να πέφτουν από την εσωτερική άκρη του δίσκου στην επιφάνεια του αστέρα» (el.Wikipedia.org).

³⁰ Δεν έχουν παρουσιαστεί αποτελέσματα σχετικά.

³¹ «...the main idea of orbital advection techniques is to decompose, for each ring of cells at a given radius and colatitude (η συμπληρωματική γωνία του latitude), the azimuthal velocity into a large, uniform velocity and a residual, smaller velocity (which is tantamount to working in a nearly co-rotating frame in each ring)». Κατά συνέπεια, η εξίσωση μεταφοράς (εκτενής αναφορά στο σημείο 10 που ακολουθεί) σπάει σε δύο εξισώσεις λόγω των δύο ταχυτήτων.

3. Τις διαστάσεις του προβλήματος που μπορεί να επιλύσουν: 1, 2 ή 3 διαστάσεις, καρτεσιανές, κυλινδρικές ή σφαιρικές συντεταγμένες. Ο κώδικας θεωρεί την x-κατεύθυνση περιοδική, με αποτέλεσμα στις κυλινδρικές και τις σφαιρικές συντεταγμένες η x-διεύθυνση να αντιστοιχεί στην αζιμουθιακή γωνία.
4. Τη χρήση του: Δημιουργήθηκε με έμφαση στους πρωτοπλανητικούς δίσκους και στην αλληλεπίδραση πλανητών και δίσκων, αλλά δουλεύει σωστά και με γενικής φύσεως προβλήματα.
5. Τη γλώσσα προγραμματισμού: C (υπάρχει ενσωματωμένο Python script για την αυτόματη μετατροπή από C σε κώδικα CUDA).
6. Το είδος του πεδίου – πλέγματος: Eulerian mesh³², δομημένο. Μη αδρανειακά συστήματα/πλαίσια αναφοράς (συμπεριλαμβανομένου του shearing box³³ για καρτεσιανά χωρία).
7. Το είδος διακριτοποίησης στο χώρο (spatial discretization): μέθοδος πεπερασμένων διαφορών³⁴ γενικά & μέθοδος πεπερασμένων όγκων για την επίλυση αντιστοιχών διαφορικών εξισώσεων. Δυνατότητα dimensionally splitting³⁵. Χρήση της μεθόδου των χαρακτηριστικών (MOC) ειδικά για την εξίσωση της μαγνητικής επαγωγής (MOCCT³⁶). Ειδικότερα, δεν χρησιμοποιείται μια μοναδική χαρακτηριστική ταχύτητα, όπως γίνεται για τα μεγέθη της υδροδυναμικής αλλά λαμβάνονται υπόψη ασυμπίεστα εγκάρσια κύματα Alfvén. Τα αριστερόστροφα και τα δεξιόστροφα (με την έννοια της διάδοσης) κύματα Alfvén μεταφέρουν διαφορετικές ιδιοτιμές, οι οποίες υπολογίζονται στη βάση των αντιστοιχών τους χαρακτηριστικών, στην αρχή κάθε χρονικού βήματος και συνδυάζονται στο μισό του χρονικού βήματος για να αποδώσουν τις τιμές της ταχύτητας και του μαγνητικού πεδίου στην άκρη της ζώνης (zone edge).
8. Τη μέθοδο υπολογισμού των διανυσμάτων ροής (fluxes): σχήμα upwind με χρήση του staggering του πεδίου ταχυτήτων για την έκφραση του flux. Δηλαδή

$$F_{x_{i+1/2}}^{n+1/2} = vx_{i+1/2} [Q_{i+1/2}^{*x}]^{n+1/2} S_{i+1/2} \quad [2.2]$$

Όπου ο δείκτης x αντιπροσωπεύει την κατεύθυνση που είναι κανονική στην επιφάνεια, κατά μήκος της οποίας υπολογίζεται η ροή και ο όρος $Q_{i+1/2}^{*x}$ είναι η τιμή της παρεμβαλλόμενης τιμής κατά x της cell-centered ποσότητας Q στην επιφάνεια $i + 1/2$, στο μέσον του χρονικού βήματος. Οι δείκτες j, k έχουν παραλειφθεί για λόγους συντομίας, δεδομένου ότι ο υπολογισμός περιλαμβάνει ενέργειες κατά μήκος ενός άξονα.

Χρησιμοποιείται η μέθοδος operator splitting. Δηλαδή, σπάει η επίλυση για τις εξισώσεις της (μαγνητο)υδροδυναμικής σε δύο εξισώσεις-δύο βήματα: το βήμα πηγής (source step) και το βήμα μεταφοράς (transport step). Συγκεκριμένα το βήμα μεταφοράς είναι η επίλυση του συστήματος εξισώσεων σαν να ήταν μηδενικές οι πηγές, ενώ στο βήμα πηγής αντιστοιχεί η εξίσωση της χρονικής παραγώγου ίσης μόνο με τον όρο των πηγών.

9. Τα σχήματα υψηλότερης ακρίβειας και οι slope limiters: Για την τιμή των μεταβλητών που προκύπτει από παρεμβολή, χρησιμοποιείται γραμμική

³² Έναντι του Lagrangian mesh που αναδιαμορφώνεται αναλόγως της τελικής κατάστασης του ρευστού, αυτό παραμένει ως έχει.

³³ Η έννοια του shearing box αναλύεται στον κώδικα Pluto παρακάτω.

³⁴ Ενισχύεται η ακρίβεια μηχανής στη διατήρηση της μάζας και της ορμής αλλά όχι της ολικής ενέργειας.

³⁵ Επίλυση πολυδιάστατων εξισώσεων μέσω ακολουθίας μονοδιάστατου προβλήματος.

³⁶ MOC + CT.

ανακατασκευή με χρήση Van Leer's slopes για όλα τα υποβήματα του βήματος μεταφοράς-transport που αναφέρονται στην Εικόνα 7 (κελί 12b – υπολογισμός πυκνότητας, ενέργειας και ορμής στην διεπιφάνεια των κελιών) με εξαίρεση το «uniform residual step of orbital advection», για το οποίο χρησιμοποιείται παραβολική ανακατασκευή του πεδίου με τον αλγόριθμο PPA (piecewise parabolic advection) με παρόμοιο τρόπο με αυτόν που χρησιμοποιείται στον κώδικα PLUTO.

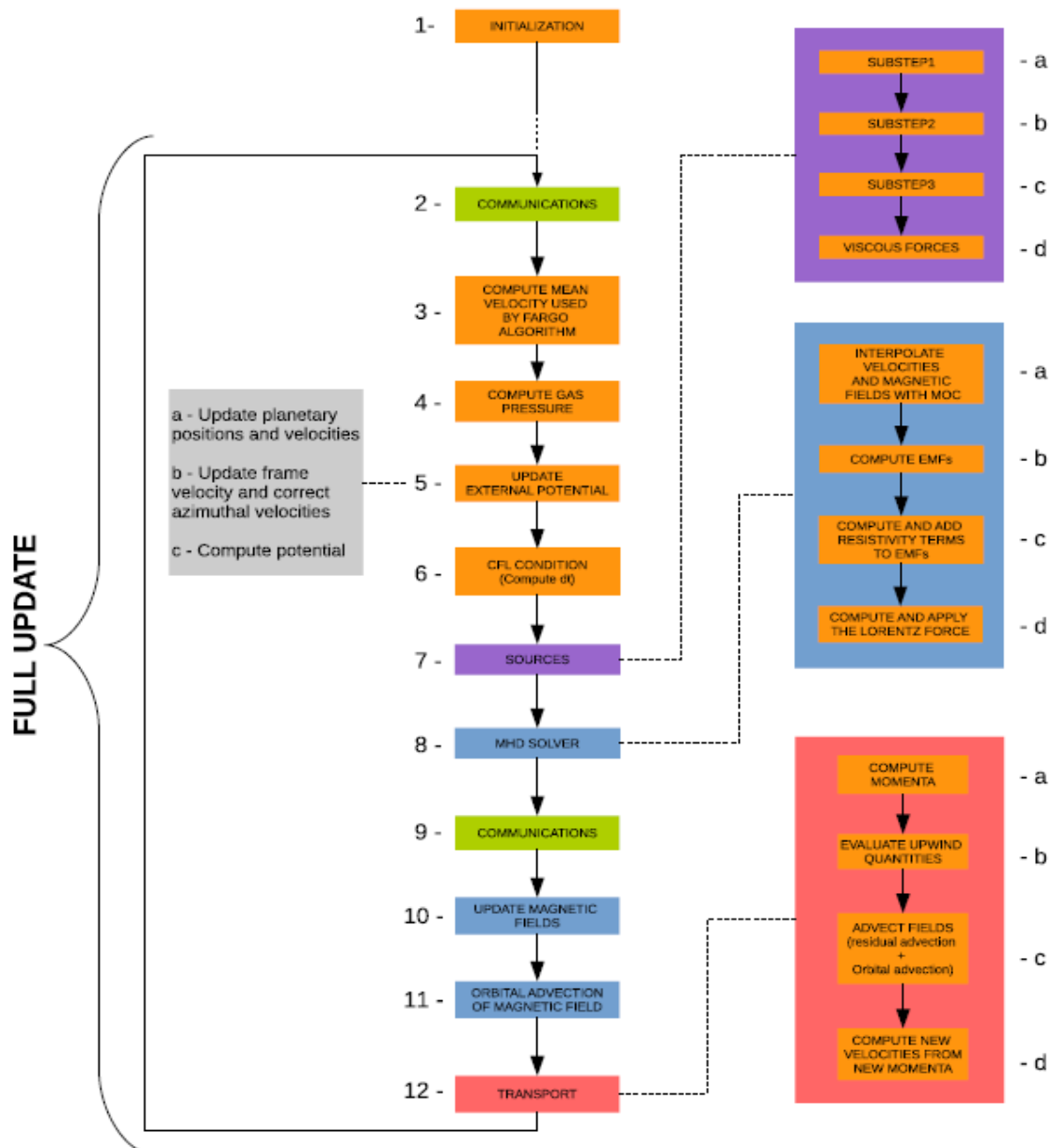
10. Τους όρους πηγής (source terms): σαν όρος πηγής λαμβάνεται η φυγόκεντρη δύναμη, η κλίση της πίεσης, οι μαζικές δυνάμεις και το έργο λόγω των δυνάμεων πίεσης.
11. Τις συνοριακές συνθήκες (boundary conditions): Μπορούν να οριστούν μόνο για την y και z διεύθυνση (άρα στα 4 όρια συνολικά) καθώς η x είναι ορισμένη ως περιοδική³⁷, ορίζοντας τα ghost cells (με διαφορετικό τρόπο για μεγέθη που μπορεί είναι centered και staggered υπολογισμένα). Μερικά από τα είδη ως αναφέρονται στο εγχειρίδιο:
 - Reflecting: αντισυμμετρικές τιμές των διανυσματικών μεγεθών ως προς τον άξονα στον οποίο υπάρχει η αντανάκλαση.
 - Periodic: περιοδικές.
 - Symmetric: συμμετρικές ως προς τις τιμές εσωτερικά του πλέγματος.
 - Antisymmetric: αντισυμμετρικές (αντίθετες) ως προς τις τιμές εσωτερικά του πλέγματος.
 - Stockholm: wave-killing συνθήκες. Χρησιμοποιείται για να εξουδετερώνει διακυμάνσεις κοντά στα όρια του πλέγματος.
 - User defined: ορισμένες από το χρήστη.
12. Το είδος της διακριτοποίησης στο χρόνο-χρονικής ολοκλήρωσης (time integration): χρησιμοποιείται ρητή μέθοδος. Ένα πλήρες χρονικό βήμα αντιστοιχεί σε δύο επί μέρους βήματα που εκτελούνται διαδοχικά, ακολουθώντας τα βήματα στα οποία σπάει η εξίσωση (βλ. σημείο 8) συν ένα υποβήμα για την αλληλεπίδραση της ροής με το μαγνητικό πεδίο (βλ. σημείο 7). Για πλανητικά μοντέλα γίνεται χρήση της μεθόδου Cah-Karp 5^{ης} τάξης ακρίβειας, η οποία αποτελεί μια Runge-Kutta μέθοδο με σταθερό χρονικό βήμα. Οι εξισώσεις (απλό ολοκλήρωμα) για την προσομοίωση N-πλανητών ή αστερών, που αλληλεπιδρούν βαρυτικά με το ρευστό αλλά και μεταξύ τους, επιλύονται από έναν επιλύτη ολοκληρωτικής μορφής 5^{ης} τάξης Runge-Kutta, ο οποίος είναι πλήρως αποσυζευγμένος- από τον υπόλοιπο κώδικα για να μπορεί να αντικατασταθεί αν χρειαστεί από άλλο ολοκλήρωμα.
13. Τον τρόπο επιτάχυνσης της αριθμητικής επίλυσης: δυνατότητα παράλληλης επεξεργασίας (Sequential Mode ή Parallel Mode - για clusters (distributed memory, with MPI)).
14. Την ενδοεπικοινωνία μέσα στον κώδικα: με ή χωρίς MPI library, σε συνδυασμό με CUDA³⁸ ή μόνο CUDA (μία GPU (CUDA χωρίς MPI) ή Parallel GPU Mode (για clusters of GPUs (mixed MPI-CUDA version))).
15. Το γραφικό περιβάλλον: VTK format, ASCII.
16. Πλεονεκτήματα/μειονεκτήματα:
Πλεονεκτήματα: η δυνατότητα να τρέχει ο κώδικας σε GPU profile του δίνει τη δυνατότητα μέχρι και 2 τάξεων μεγαλύτερη ταχύτητα από ότι σε CPU. Αντίστοιχα και απαίτηση μικρότερης μνήμης. Οι staggered mesh κώδικες σε αντίθεση με τις

³⁷ Για προβλήματα που δεν υπάρχει περιοδικότητα σε ένα άξονα, ο εν λόγω κώδικας δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί.

³⁸ Computed unified device architecture/ένα είδος γλώσσας προγραμματισμού GPU.

μεθόδους Godunov δεν έχουν προβλήματα με τις μόνιμες ροές με όρους πηγής, ενώ και το υπολογιστικό κόστος για ένα πλήρες χρονικό βήμα είναι μικρότερο. Είναι ευκολότερο να ενταχθούν νέες διαδικασίες (νέες ή διαφορετικές διεργασίες της φυσικής) μέσω του operator splitting μοντέλου. Εύκολος χειρισμός του κώδικα, χωρίς προαπαιτούμενο εξειδικευμένων γνώσεων προγραμματισμού GPU από το χρήστη. Έχει αποδειχθεί η αποδοτικότητα του σε ένα εύρος πλανητικών μαζών, από βαθιά ενσωματωμένων, μικρής μάζας αντικειμένων, τα οποία απαιτούν λεπτή συγχρονισμένη περιστροφική ισορροπία, ακριβή εντροπία και vortensity advection, μέχρι και πλανήτες-γίγαντες οι οποίοι «καθαρίζουν» ένα κενό και προκαλούν ισχυρά shocks στην εγγύ περιοχή τους. Παρόμοια αποτελέσματα με τις μεθόδους Godunov για shocks που περιλαμβάνουν gap clearance και την πρόκληση των shocks.

Μειονεκτήματα: πέραν ειδικών περιπτώσεων (protoplanetary disks), δεν πληρούται η διατήρηση της ενέργειας με ακρίβεια μηχανής και αυτό αποτελεί πρόβλημα, για αυτό και επιλέγεται η εξίσωσης εσωτερικής ενέργειας για επίλυση χωριστά.



Εικόνα 7: Διάγραμμα ροής των διαδοχικών διεργασιών που λαμβάνουν χώρα στην FARGO3D κατά τη διάρκεια μιας πλήρους ανανέωσης (full update)(Benitez-Llambay, et al., 2016).

2.8 FLASH V.4.6.1

Ο κώδικας FLASH αποτελεί έναν δημόσια διαθέσιμο υψηλής επίδοσης κώδικα εφαρμογών, ο οποίος από μια συλλογή μη συνδεδεμένων κωδικών εξελίχθηκε σε έναν σπονδυλωτό, επεκτεινόμενο λογισμικό. Αποτελείται από διαφορετικά modules, τα οποία μπορούν να συνδυαστούν για να δημιουργηθούν ποικίλες εφαρμογές. Ένα ενσωματωμένο πλαίσιο τεσταρίσματος συνδυασμένο με παλινδρόμα τεστ (regression tests), τρέχουν κατά τη διάρκεια της νύχτας σε διαφορετικές υπολογιστικές πλατφόρμες, για την συνεχή επιβεβαίωση του κώδικα (FCCSUC, 2019, Banerjee, 2013).

Όσον αφορά στα χαρακτηριστικά του κώδικα FLASH:

1. Το είδος των εξισώσεων που επιλύει³⁹: ιδανικές, Hall, με μαγνητική αντίσταση (magnetic resistivity – ο όρος που υπολογίζεται είναι αυτός της μαγνητικής διαχυτότητας/magnetic diffusivity), με όρους συνεκτικότητας, με όρο Biermann battery, με μετάδοση θερμότητας (για συνεχή ισόχωρη μεταβολή, για θερμική αγωγιμότητα των ηλεκτρονίων, για μετάδοση με συνεχή σταθερά διάχυσης), με ανισοτροπία στη μετάδοση θερμότητας, πολλών ειδών (multi species), πολλών ρευστών (multi fluid), πολλών υλικών (multi material). EOS: ιδανικών αερίων, πολλαπλών γ για ρευστό που αποτελείται από πολλά αέρια, tabular Helmholtz free energy, για διαφορετικές θερμοκρασίες (3T- flux-based formulation⁴⁰). Χρήση επιπλέον εξίσωσης για την εσωτερική ενέργεια, ώστε να διασφαλίζεται η θετικότητα των πιέσεων και των θερμοκρασιών και δυνατότητα επίλυσης όρου βαρύτητας. Χρήση υβριδική PIC (particle-in-cell) μεθόδου, σε περιπτώσεις όπου η χωροχρονική κλίμακα των ιόντων ενδιαφέρει τον χρήστη.
2. Τον τρόπο διατήρησης του σωληνοειδούς περιορισμού ($\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$): με 8-κυματική δομή και χρήση directionally-splitting μεθόδου, με σχήμα περιορισμένης μεταφοράς και χρήση directionally-unsplit staggered-mesh αλγορίθμου.
3. Τις διαστάσεις του προβλήματος που μπορεί να επιλύσουν: 1, 2 ή 3 διαστάσεις, σε καρτεσιανές συντεταγμένες, 2 και 2.5 διαστάσεις σε κυλινδρικές συντεταγμένες (unsplit-mesh).
4. Τη χρήση του: αρχικά αποτελούσε μέρος έργου χρηματοδοτούμενου από τη Δ /νση Ενέργειας των ΗΠΑ. Πλέον για έρευνα, ιδίως στο κομμάτι της αστροφυσικής, και για εμπορική χρήση⁴¹. Δημόσια διαθέσιμος.
5. Τη γλώσσα προγραμματισμού: Fortran 90, C (μπορεί να δουλέψει επίσης με τις εκδόσεις Python-2 και Python-3).
6. Το είδος του πεδίου – πλέγματος: δομημένο, τρία είδη (2 AMR, 1 Uniform): α) PARAMESH AMR-block structured oct-tree⁴² (Εικόνα 8) based AMR, που χρησιμοποιεί την PARAMESH βιβλιοθήκη, β) CHOMBO⁴³ - block-structured patch-based AMR, που χρησιμοποιεί το CHOMBO, γ) uniform, no-AMR (μπορεί να είναι και

³⁹ Επιπλέον, αλλά εκτός του αντικειμένου της εν λόγω διατριβής: εξισώσεις σχετικιστικής υδροδυναμικής.

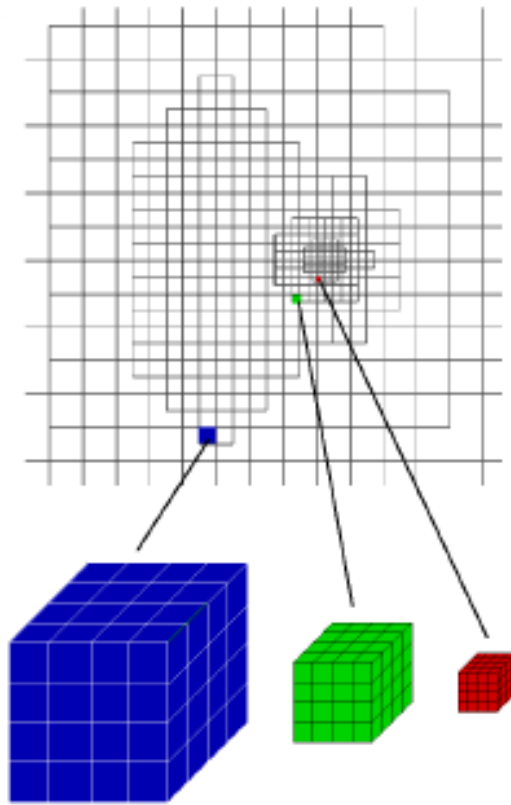
⁴⁰ Όπως στην περίπτωση HEDP (High Energy Density Physics) πειραμάτων με laser.

⁴¹ Με την άδεια του Δ /ντη του Flash Κέντρου για την Υπολογιστική Επιστήμη του Πανεπιστημίου του Σικάγο.

⁴² “Tree data structure, where each internal node has 8 children”, Wikipedia.org.

⁴³ Περιορισμένη χρήση- δεν συνίσταται (από τους ίδιους).

CHOMBO ταυτόχρονα). Δυνατότητα χρήσης πολλαπλών πακέτων πλέγματος από τον κώδικα, καθώς το πλέγμα είναι ανεξάρτητο από τους επιλύτες.



Εικόνα 8: Oct-tree δομή (Ziegler, 2014).

7. Το είδος διακριτοποίησης στο χώρο (spatial discretization): μέθοδος πεπερασμένων όγκων (Finite Volume methods). Unsplit μέθοδος: (cell-centered μεταβλητές) 2^{ης} τάξης MUSCL-Hancock TVD unsplit χωρο-χρόνο ολοκληρώματα, χρησιμοποιώντας υψηλής τάξης Godunov fluxes, (face-centered μεταβλητές). Εφαρμογή του θεωρήματος του Stokes σε ένα σετ επαγωγικών εξισώσεων, ενισχύοντας τον $\text{div} \mathbf{B}=0$ περιορισμό (διασφάλιση του με αυτόματο τρόπο στην 1 διάσταση- για περισσότερες διαστάσεις θα πρέπει να ληφθεί ιδιαίτερη μέριμνα). Splitting μέθοδος: Με MUSCL type περιορισμένη ανακατασκευή κλίσεων (limited gradient reconstruction), εφαρμόζομενη στις χαρακτηριστικές μεταβλητές. Οι υπόλοιπες υπολογίζονται με παρεμβολή των προαναφερθεισών μεταβλητών.
8. Τη μέθοδο υπολογισμού των διανυσμάτων ροής (fluxes): σχήμα upwind ή downwind.
Splitting μέθοδος: κατά Roe επιλύτης (για τις ιδανικές εξισώσεις).
Unsplit μέθοδος: Για τον υπολογισμό των υψηλής τάξης Godunov fluxes χρησιμοποιούνται: κατά Roe γραμμικοποιημένος προσεγγιστικός επιλύτης Riemann, HLL, HLLC, HLLD Riemann επιλύτες, υβριδικός επιλύτης Riemann (συνδυασμός Roe και HLLD).

9. Τα σχήματα υψηλότερης ακρίβειας και οι slope-limiters: υψηλής τάξης μεθόδους ανακατασκευής (των συντηρητικών μεταβλητών) στους unsplit MHD⁴⁴ επιλύτες. TVD slope limiters (χρήση σε unsplit staggered mesh scheme): minmod, compressible limiters, όπως ο VanLeer ή ο MC (monotonized central), ο υβριδικός (χρήση και των δύο προηγούμενων κατηγοριών, διαφορετικού ανάλογα με τη μεταβλητή⁴⁵), ο «περιορισμένος» (limited)⁴⁶. Μία υψηλότερης τάξης ακρίβειας εκδοχή διατίθεται επίσης, η οποία παίρνει προεκτάσεις της σειράς Taylor του ηλεκτρικού πεδίου (cell cornered) προς όλες τις κατευθύνσεις, ακολουθούμενη από έναν αριθμητικό μέσο αυτών.
10. Τους όρους πηγής (source terms): χρήση του όρου μπαταρίας του Biermann ως όρο πηγής (μη ιδανικές εξισώσεις - στο καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων στις 2 και 3 διαστάσεις, ενώ στο κυλινδρικό μόνο στις 2), στην 8-κυματική δομή οι όροι του Powell.
11. Τις συνοριακές συνθήκες (boundary conditions):
 - A) periodic : περιοδικές (wrap-around) π.χ. περιοδικές στον x άξονα σημαίνει ότι τα πρώτα blocks στην x κατεύθυνση παίρνουν τις τιμές των πιο αριστερά γειτόνων τους που είναι τελευταία στην x κατεύθυνση και αντίστροφα.
 - B) reflecting: επίπεδης συμμετρίας, με τις κανονικές διανυσματικές συνιστώσες να αλλάζουν πρόσημο (non-penetrating).
 - Γ) outflow: μηδενικής κλίσης, επιτρέπουν στα shocks να εγκαταλείπουν την περιοχή.
 - Δ) diode: όπως στο (Γ), με τη διαφορά ότι οι ταχύτητες του ρευστού δεν επιτρέπεται ποτέ να αφήνουν την ροή της ύλης μέσα στην περιοχή, οι κανονικές διανυσματικές συνιστώσες εξισώνονται με μηδέν στα γειτονικά κελιά αν είναι απαραίτητο.
 - E) axisymmetric: αξονοσυμμετρικές, όπως στο (B), αλλά και οι κανονικές και οι τοροϊδείς διανυσματικές συνιστώσες αλλάζουν πρόσημο.
 - Στ) eqtsymmetric: όπως στο (B) για τις ταχύτητες, αλλά οι συνιστώσες του μαγνητικού πεδίου (πολικές και τοροϊδείς) αλλάζουν πρόσημο. Το πρόσημο της κανονικής συνιστώσας του μαγνητικού πεδίου παραμένει το ίδιο.
 - Z) user-defined: ορισμένες από το χρήστη.
 Υπάρχουν περαιτέρω συνοριακές συνθήκες, οι οποίες καλύπτουν την διεπιφάνεια που δημιουργείται σε περίπτωση που κάποια blocks απομακρυνθούν από το χωρίο, χρησιμοποιούνται όπως και οι external domain boundaries και διατίθενται μόνο με την PARAMESH λειτουργία (βλ. σημείο 6).
12. Το είδος της διακριτοποίησης - χρονικής ολοκλήρωσης (time integration): ρητές μέθοδοι (η πλειοψηφία των επιλυτών). Στην εκκίνηση χρησιμοποιείται ένα αρχικό Δt , το οποίο όμως ελέγχεται και τροποποιείται αν χρειαστεί (μέσω κατάλληλης ρουτίνας και για διάφορα κριτήρια, μεταξύ άλλων για την διασφάλιση ότι συγκεκριμένες μεταβλητές, ορισμένες από το χρήστη, δεν θα αποκτήσουν ποτέ αρνητική τιμή).
Unsplit: χρήση ηλεκτρικών πεδίων για την χρονική εξέλιξη των staggered μαγνητικών πεδίων.

⁴⁴ Οι φυσικές ρουτίνες ανακαλούνται μία φορά ανά χρονικό βήμα και κάθε φορά αναβαθμίζονται τα διανύσματα-λύσεις ανά ένα χρονικό βήμα. Στο τέλος κάθε επανάληψης του χρονικού βήματος, η συνθήκη της αναβάθμισης του μοτίβου του AMR ελέγχεται και εφαρμόζεται.

⁴⁵ Ειδικότερα χρησιμοποιείται για την διαχείριση slowly moving shocks (SMS) (διαφορετικό από slow MHD shock).

⁴⁶ Και PCM (Piecewise Cubic Method), GP (Gaussian Process) σε άλλες εφαρμογές.

Splitting: χρήση μιας μεθόδου ενός βήματος, 2^{ης} τάξης, κατά Hancock. Στα γραμμικά συστήματα με απεριόριστη ανακατασκευή της κλίσης, αυτή η μέθοδος συμπίπτει με το κλασικό σχήμα Lax-Wendroff.

13. Τον τρόπο επιτάχυνσης της αριθμητικής επίλυσης: παράλληλη επεξεργασία, δημιουργία πολυπλέγματος (multigrid), restriction-prolongation (για καρτεσιανές συντεταγμένες: direct injection method ή Balsara's method για την prolongation των μεταβλητών του μαγνητικού πεδίου, για κυλινδρικές συντεταγμένες: τροποποιημένος αλγόριθμος, grid adaptation, refinement βασισμένη στη μέθοδο/κριτήριο του Löhner.
14. Την ενδοεπικοινωνία μέσα στον κώδικα: MPI (V2.0 ή μεγαλύτερη) βιβλιοθήκη για την ενδοεπικοινωνία και HDF5 ή Parallel-NetCDF βιβλιοθήκη για την παράλληλη I/O, για την φορητότητα και την επεκτασιμότητα σε ένα εύρος διαφορετικών παράλληλων υπολογιστών.
15. Το γραφικό περιβάλλον: IDL, GUI/Flash interface, VisIt, ASCII/PGM greyscale converter.
16. Πλεονεκτήματα/μειονεκτήματα:
 - 16.1 Η κατάντη (outflow) οριακή συνθήκη για face-centered μεταβλητές στη χρήση του σωληνοειδούς μαγνητικού πεδίου στο AMR αποτυγχάνει να διασφαλίσει τον εν λόγω περιορισμό στα φυσικά κατάντη όρια της ροής. Παρ' όλα αυτά, αριθμητικές λύσεις με σεβασμό σε αυτό το σφάλμα είναι ακόμα φυσικά σωστές μακριά από τα παραπάνω όρια.
 - 16.2 Η upwind εφαρμογή του ηλεκτρικού πεδίου για unsplit staggered πλέγματος επιλύτη, σε ορισμένες περιπτώσεις αποτυγχάνει να ικανοποιήσει τον div-free περιορισμό στην επανεκκίνηση. Γι αυτό και προτείνεται να μην χρησιμοποιείται η εν λόγω upwind εφαρμογή στις περισσότερες εφαρμογές.
 - 16.3 Ο κώδικας, αξιοποιώντας την δομή του Unix directory, εφαρμόζει μια ιεραρχία κληρονομικότητας δική του. Με αυτό τον τρόπο κάθε child directory στην ιεραρχία μιας μονάδας, κληρονομεί όλο τον source code του parent κι έτσι εξαλείφεται η διπλοτυπία του κοινού κώδικα.
 - 16.4 Γενικά η splitting μέθοδος φαίνεται να είναι πιο στιβαρή, σχετικά άμεσα εφαρμόσιμη και γενικά γρηγορότερη από την unsplit μέθοδο. Παρόλα αυτά, εισάγει splitting σφάλματα όταν επιλύει μονοδιάστατα υποπροβλήματα σε κάθε εναλλαγή κατεύθυνσης σάρωσης για τις πολυδιάστατες MHD εξισώσεις. Κι αυτό, λόγω του ότι στο MHD, οι dimensional-splitting based κώδικες δεν είναι ικανοί να εξελίσσουν το κανονικό (προς τη κατεύθυνση σάρωσης) μαγνητικό πεδίο κατά την σάρωση της κατεύθυνσης αυτής. Η εν λόγω μέθοδος τελικά συμπιέζει αλλά δεν εξαλείφει τελείως τα μαγνητικά μονόπολα.

2.9 MANCHA3D

Πέρα από τη βιβλιογραφία ερωτήματα απαντήθηκαν μέσω email από τον Nikola Vitas- ενός εκ των συγγραφέων (Hennicker, et al., 2019, Παν. Πατρών, 2019, Khomenko, et al., 2018, Khomenko, et al., 2017, Ludwig, et al., 2013, Meyer, et al., 2012, **Felipe, et al., 2010**, Garcia, 2010, Steffen, 1990, Anders, et al., 1989).

Αποτελεί έναν 3d μη γραμμικό επιλύτη MHD εξισώσεων για την μελέτη γραμμικών και μη γραμμικών κυμάτων. Για την εξυπηρέτηση του ανωτέρω σκοπού, επιλέχθηκε ο επιμερισμός της μεταβλητής σε δύο μέρη- το μέρος της ισορροπίας και της διαταραχής. Ο κώδικας μπορεί να χρησιμοποιηθεί είτε με αυτή τη μέθοδο είτε μηδενίζοντας τον όρο

ισορροπίας, δηλαδή χωρίς splitting, χωρίς να υπάρχει ιδιαίτερη διαφορά μεταξύ των δύο αυτών προσεγγίσεων.

Έχει χρησιμοποιηθεί ιδιαίτερα για υπολογισμό διαταραχών.

Υπό ανάπτυξη βρίσκεται και ο κώδικας MANCHA RAY.

Όσον αφορά τα χαρακτηριστικά του κώδικα MANCHA:

1. Το είδος των εξισώσεων που επιλύει: ιδανικές εξισώσεις, Hall (συγκεκριμένα την ambipolar diffusion και το battery effect) – υπόθεση ότι το πλάσμα είναι ισχυρά συγκρουσιακό-συζευγμένο (collisionally-coupled), με μετάδοση θερμότητας, πολλών ειδών (multi species) ή πολλών υλικών (multi material), με μετάδοση με ακτινοβολία, με πολλά ρευστά (συγκεκριμένα 2, ένα τα ιόντα και τα ηλεκτρόνια και δεύτερο τα ουδέτερα φορτισμένα σωμάτια). Χρησιμοποιείται και η εξίσωση πίεσης, όταν η μαγνητική πίεση είναι πολύ μεγαλύτερη της πίεσης του αερίου. Χρησιμοποιείται επιπλέον και όρος βαρύτητας στις εξισώσεις. EOS: χρησιμοποιείται η εξίσωση των ιδανικών αερίων, η εξίσωση για σταθερή θερμοκρασία βασισμένη στην εσωτερική ενέργεια, για να προληφθεί το να πέσει η θερμοκρασία κάτω από ένα ορισμένο όριο (περί τους 2000 K), η OPAL για την σύνδεση των θερμικών μεταβλητών, ενώ στην περίπτωση που λαμβάνεται υπόψη η ambipolar-diffusion, η εξίσωση των ιδανικών αερίων επιλύεται για το μίγμα των χημικών στοιχείων με μηδενικό φορτίο και των ιονισμένων ιόντων. Ο όρος απωλειών ακτινοβολίας υπολογίζεται από την non-gray εξίσωση μετάδοσης της ακτινοβολίας (RT), υποθέτοντας Local Thermodynamic Equilibrium (LTE)⁴⁷, χρησιμοποιώντας χωρική διαμέριση. Δυνατότητα εναλλακτικής γραφής της εξίσωσης διατήρησης ολικής ενέργειας, σε όρους ηλεκτρομαγνητικής Poynting flux⁴⁸ (περίπτωση μη-ιδανικών εξισώσεων):

$$\frac{\partial \rho E}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\mathbf{V} \left(\rho E + p_{tot} - \frac{|\mathbf{B}^2|}{2\mu_0} \right) + \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{\mu_0} + \mathbf{F}_R \right) = \rho(\mathbf{g} \cdot \mathbf{V}) \quad [2.3]$$

Όπου $\mathbf{Q}_R = -\nabla \mathbf{F}_R$ η ροή ακτινοβολίας (radiative flux) και η ηλεκτρομαγνητική Poynting flux ορίζεται ως:

$$\mathbf{S}_{EM} = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{\mu_0} \quad [2.4]$$

2. Τον τρόπο διατήρησης του σωληνοειδούς περιορισμού ($\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$): Κανένας, σχήμα διάχυσης.
3. Τις διαστάσεις του προβλήματος που μπορεί να επιλύσουν: 1,2, 3 διαστάσεις, καρτεσιανές συντεταγμένες.
4. Τη χρήση του: στην έρευνα (αστροφυσική, φυσική του Ήλιου, φυσική των ηλιακών και αστρικών ατμοσφαιρών). Αποτελεί κατοχυρωμένο κώδικα, ο οποίος χρησιμοποιείται από την ομάδα έργου για την Μαγνητική συνδεσιμότητα δια μέσου της Ηλιακής μερικώς ιονισμένης ατμόσφαιρας (SPIA), του Ινστιτούτου Αστροφυσικών των Καναρίων Νήσων και τους συνεργάτες τους με σύμβαση

⁴⁷ Δηλαδή η Boltzman θερμοκρασία (αναφερόμενη στα άτομα/μόρια) είναι σε ισορροπία με την κινητική θερμοκρασία.

⁴⁸ Poynting θεώρημα: θεώρημα διατήρησης της ενέργειας για ένα ηλεκτρομαγνητικό πεδίο σε μορφή μερικής διαφορικής εξίσωσης. Η διεύθυνση του διανύσματος δείχνει τη φορά ροής της ενέργειας.

εμπιστευτικότητας. Δεν αποτελεί εμπορεύσιμο προϊόν - αποτελεί αποκλειστικό προϊόν.

5. Τη γλώσσα προγραμματισμού: Fortran 90.
6. Το είδος του πεδίου – πλέγματος: ομοιόμορφο ή μη ομοιόμορφο (στην κατακόρυφη διάσταση, ορισμένο/fixed) πλέγμα ή AMR (για εξιδανικευμένα setups, PARAMESH library).
7. Το είδος διακριτοποίησης στο χώρο (spatial discretization): σχήμα πεπερασμένων διαφορών.
8. Τη μέθοδο υπολογισμού των διανυσμάτων ροής (fluxes): Για την μετάδοση με ακτινοβολία χρησιμοποιείται η short-characteristics μέθοδος⁴⁹.
9. Τα σχήματα υψηλότερης ακρίβειας και οι slope limiters: Κεντρικό σχήμα 4^{ης} ή 6^{ης} τάξης πεπερασμένων διαφορών (χρησιμοποιώντας πέντε σημεία του πλέγματος, Khomenko, et al., 2018). Χωρίς slope limiters για το MHD κομμάτι. Για την μετάδοση με ακτινοβολία, χρησιμοποιούνται λιγότερο γνωστές μέθοδοι για την διατήρηση της μονοτονίας⁵⁰. Επίσης χρησιμοποιούνται constant και hyper-diffusivities για την σταθεροποίηση του κώδικα (μέθοδος του Nordlund).
10. Τους όρους πηγής (source terms): ο όρος πηγής αντιστοιχεί σε μια χρονικά εξαρτώμενη εξωτερική δύναμη, που είναι αυτή που προκαλεί την διαταραχή (Felipe, 2010). Στην περίπτωση όπου υπάρχει όρος μπαταρίας (battery term), αυτός λειτουργεί σαν όρος πηγής στην εξίσωση μαγνητικής επαγωγής και είναι ανεξάρτητος από το μαγνητικό πεδίο (Khomenko, et al., 2018).
11. Τις συνοριακές συνθήκες (boundary conditions):
Ανοιχτό ή κλειστό οριζόντιο όριο, όσον αφορά στη ροή μάζας, κάθετο ή δυναμικό πεδίο για το **B**. Έλεγχος της ροής εισόδου της μάζας και της εντροπίας στο κάτω όριο (bottom). Τα κατακόρυφα όρια είναι περιοδικά. (Βλ. συνοριακές συνθήκες κώδικα MURaM - χρησιμοποιούνται οι ίδιες).
Στον εν λόγω κώδικα, οι συνοριακές συνθήκες ορίζονται στο επίπεδο του χρήστη, (οπότε υπάρχει σχετική ποικιλία, η οποία έχει χρησιμοποιηθεί σε διάφορα πειράματα).
12. Το είδος της διακριτοποίησης στο χρόνο-χρονικής ολοκλήρωσης (time integration): ρητή μέθοδος, σχήμα Runge-Kutta 4^{ης} τάξης. Το κλασικό σχήμα και ένα εναλλακτικό 2^{ης} τάξης, για λόγους εξοικονόμησης μνήμης.
13. Τον τρόπο επιτάχυνσης της αριθμητικής επίλυσης: πλήρης παράλληλη επεξεργασία με την χρήση του MPI 3.0 standard και χρησιμοποιώντας τεχνητή διαμέριση του χωρίου (domain decomposition). Για κάποιες εφαρμογές χρησιμοποιείται super time stepping⁵¹.
14. Την ενδοεπικοινωνία μέσα στον κώδικα: MPI 3.0, για I/O χρήση παράλληλης HDF5.
15. Το γραφικό περιβάλλον: IDL, Python, Paraview, Vapour.
16. Πλεονεκτήματα/μειονεκτήματα:

⁴⁹ Η χρήση των χαρακτηριστικών μεθόδων οδηγεί στη λύση με χρήση ακριβούς ολοκληρώματος της εξίσωσης της μετάδοσης με ακτινοβολία κατά μήκος μιας ακτίνας (ray). Στην περίπτωση της short-characteristics μεθόδου, λαμβάνονται υπόψη οι ακτίνες από κελί σε κελί, σε αντίθεση με την long-characteristics μέθοδο, όπου λαμβάνεται υπόψη μια συγκεκριμένη ακτίνα από το σύνορο μέχρι το καθορισμένο σημείο του δικτύου (Hennicker, et al. 2019).

⁵⁰ Συγκεκριμένα, χρησιμοποιείται μια παραλλαγή της μεθόδου που παρουσιάζεται από τον M. Steffen (Steffen, 1990) όπου για κάθε διάστημα (x_i, x_{i+1}) η συνάρτηση παρεμβολής είναι ένα τρίτης τάξης πολυώνυμο, που περνά από τα σημεία αποθήκευσης της πληροφορίας (data points).

⁵¹ Αφορά προβλήματα ρευστομηχανικής με υπερβολικούς και παραβολικούς όρους. Σχήμα το οποίο δίνει τη δυνατότητα μεγάλων ολικών-overall χρονικών βημάτων για τους παραβολικούς όρους, ενώ χρησιμοποιεί μόνο έναν μικρό αριθμό ρητών χρονικών βημάτων. Χρησιμοποιείται σε αντίθεση με τις multi-grid Newton-Krylov μεθόδους οι οποίες απαιτούν μεγάλο αριθμό επαναλήψεων για να συγκλίνουν (Meyer, et al. 2012).

Αριθμητική ακρίβεια: οι όροι που περιγράφουν το στατικό μοντέλο μπορεί να διαφέρουν πολλές τάξεις μεγέθους από εκείνους που περιγράφουν τις διαταραχές. Εξαιρώντας τους πρώτους όρους, αποφεύγονται σημαντικά προβλήματα αριθμητικής ακρίβειας.

Οριακές συνθήκες: είναι ευκολότερο να εισαχθούν σε εξισώσεις που περιγράφουν τις διαταραχές.

Ακριβής συμφωνία: σε σχέση με αριθμητικά τεστ άλλων κωδίκων και αναλυτικές λύσεις (όταν είναι διαθέσιμες). Ενδεικτικά: 1d Riemann shock tube test, 1.5d Brio & Wu shock tube, 2d Orszag-Tang Vortex, 3d acoustic κύμα, 3d Alfvén κύμα, 3d ισχυρό blast κύμα (Felipe, et al., 2010).

Στιβαρότητα: σε σχέση με την διάδοση των ταχυτήτων του κύματος, την ανάλυση των shocks και την διατήρηση της ενέργειας.

Η χρήση της τεχνητής διάχυσης κάνει δυνατή την επίλυση ισχυρών ασυνεχειών με λίγα σημεία πλέγματος, χωρίς να παράγει σφάλματα στη λύση και με καλή διατήρηση της ενέργειας.

Δυνατότητα άμεσης σύγκρισης της αριθμητικής προσομοίωσης του κώδικα με τις ηλιακές spectropolarimetric παρατηρήσεις (δυνατότητα προσομοίωσης της sunspot ατμόσφαιρας και δυνατότητα μελέτης κυμάτων μεγάλης περιόδου στα επίπεδα που παρατηρούνται).

2.10 MURaM

Ο κώδικας MURaM (Max-Planck-Institute for Solar System Research (MPS)/University of Chicago Radiation Magnetohydrodynamics code) αποτελεί έναν πολυδιάστατο MHD κώδικα που αναπτύχθηκε από την ομάδα Solar-MHD στο MPS σε συνεργασία με τους F. Cattaneo, T. Linde και T. Emonet του Πανεπιστημίου του Σικάγο. Ο κώδικας σχεδιάστηκε για να διευκολύνει τις ρεαλιστικές προσομοιώσεις της ηλιακής magneto-convection και άλλης σχετικής μαγνητικής δραστηριότητας⁵² στη φωτόσφαιρα και σε ανώτερα στρώματα της ζώνης μεταφοράς θερμότητας (Beeck, et al., 2012, Vögler, et al., 2005, Schüssler, et al., 2004).

Όσον αφορά στα χαρακτηριστικά του κώδικα MURaM:

1. Το είδος των εξισώσεων που επιλύει: μη-ιδανικές συμπιεστού ρευστού, πολλών ειδών-multi species ή πολλών υλικών-multi material, με μετάδοση θερμότητας, με μετάδοση με ακτινοβολία. Το πλαίσιο αναφοράς είναι αδρανειακό με σταθερή επιτάχυνση της βαρύτητας g και λαμβάνει υπόψη τις διατμητικές τάσεις (viscous terms). Περιλαμβάνει ακόμα την περίπτωση non-local και non-gray μετάδοση με ακτινοβολία⁵³ (βλ. Παράρτημα A.9) και παίρνει υπόψη τον μερικό (όχι πλήρη) ιονισμό. Η μετάδοση με ακτινοβολία είναι ζωτικής σημασίας, καθώς η μεταφορά, στα ανώτερα στρώματα της ζώνης μεταφοράς, οδηγείται από ένα λεπτό ακτινοβολούμενο ψυχρό (radiatively-cooled) στρώμα στην φωτόσφαιρα.

Όσον αφορά στη μετάδοση της θερμότητας και την EOS: στις θερμοκρασίες που επικρατούν στην φωτόσφαιρα και την ανώτερη ζώνη συναγωγής (convection

⁵² Π.χ. Pores, emerging flux tubes.

⁵³ Ειδικά στην περίπτωση της φωτόσφαιρας, η ακτινοβολία γίνεται ο βασικός τρόπος μεταφοράς ενέργειας (από convection που ήταν πριν) και στην περιοχή της φωτόσφαιρας επιπλέον το πλάσμα γίνεται αδιαφανές για την ακτινοβολία στο ορατό εύρος μήκους κύματος (Vögler, et al., 2005).

zone⁵⁴), το ηλιακό πλάσμα ιονίζεται μερικώς και οι απλές θερμοδυναμικές σχέσεις για ιδανικό αέριο δεν μπορούν να εφαρμοστούν. Λόγω των αντίστοιχων αλλαγών στις θερμοδυναμικές ιδιότητες της ύλης, πάνω από τα 2/3 της ροής της ενθαλπίας μεταφέρεται μέσω λανθάνουσας θερμότητας και οι convective motions κάτω από την επίδραση της άνωσης⁵⁵ είναι αυξημένες (αποτέλεσμα του μερικού ιονισμού). Για τους παραπάνω λόγους και συνθήκες, είναι επαρκής η θεώρηση του πρώτου ιονισμού των 11 στοιχείων που βρίσκονται σε μεγαλύτερη αφθονία (Vögler, et al., 2005, Schüssler, et al., 2004).

Πρόβλημα solar convection zone: χαμηλό ιξώδες, υψηλός Re με αποτέλεσμα μήκος διάχυσης μεγάλης τάξης (cm). Χρησιμοποιείται μέθοδος LES (Large-Eddy Simulation) για την τύρβη και αριθμητικά σχήματα highly non-diffusive, ενώ ταυτόχρονα γίνεται η χρήση ρητών συνεκτικών όρων για την διασπορά της ενέργειας στην κλίμακα του πλέγματος.

2. Τις διαστάσεις του προβλήματος που μπορεί να επιλύσει: 1, 2 ή 3 διαστάσεις, καρτεσιανές συντεταγμένες.
3. Τη χρήση του: για την διευκόλυνση της πραγματοποίησης ρεαλιστικών προσομοιώσεων της ηλιακής magneto-convection και άλλης σχετικής μαγνητικής δραστηριότητας (όπως οι pores και οι emerging flux tubes) στη φωτόσφαιρα και σε ανώτερα επίπεδα της convection ζώνης. Δεν είναι δημόσια διαθέσιμος.
4. Το είδος του πεδίου – πλέγματος: δομημένο.
5. Το είδος διακριτοποίησης στο χώρο (spatial discretization): μέθοδος πεπερασμένων διαφορών.
6. Τα σχήματα υψηλότερης ακρίβειας και οι slope limiters: 4^{ης} τάξης ακρίβειας ρητό σχήμα πεπερασμένων διαφορών και για της πρώτης και για της δεύτερης τάξης παραγώγους, σε ένα 5³ point stencil. Η σταθεροποίηση του σχήματος γίνεται με την εφαρμογή shock-resolving diffusion και hyperdiffusivity, τα οποία αποτρέπουν την δημιουργία ενέργειας σε συγκρίσιμη κλίμακα με το μέγεθος των κελιών του πλέγματος (Schüssler, et al., 2004).
Σε τι αντιστοιχεί η τεχνητή διάχυση; Οι όροι διάχυσης στις εξισώσεις της ενέργειας και της ορμής αντικαθίστανται από τεχνητά ισοδύναμους όρους. Αντίστοιχα και στην εξίσωση της συνέχειας, εισάγεται ένας τεχνητός όρος διάχυσης, ο οποίος και δεν έχει φυσικό αντίστοιχο όρο. Στην εξίσωση της επαγωγής, διατηρείται ο όρος της 4^{ης} τάξης κεντρικής διαφοράς με σταθερό η και προστίθεται τεχνητή διάχυση μόνο κοντά στο κατώτερο όριο του υπολογιστικού χωρίου, όπου και κρίνεται απαραίτητο να σταθεροποιηθεί το αριθμητικό σχήμα. Τελικά, οι τεχνητοί όροι διάχυσης προϋποθέτουν μεγάλες τιμές μόνο κοντά στις ασυνέχειες και σε περιοχές μη επιλύσιμων κυμάτων, ενώ στις περιοχές που είναι επιλύσιμα δεν επηρεάζονται από την διάχυση.
7. Τους όρους πηγής (source terms): Q_{rad} ο όρος πηγής στην εξίσωση της ενέργειας που αναπαριστά τη θέρμανση και την ψύξη από ακτινοβολία και δίνεται από τη σχέση 2.5:

⁵⁴ Το εσωτερικό του ήλιου χωρίζεται σε τρεις ζώνες από μέσα προς τα έξω: α) πυρήνας, β) ζώνη ακτινοβολίας-μεταφορά θερμότητας με ακτινοβολία, γ) ζώνη συναγωγής – η ενέργεια μεταφέρεται εν μέρει λόγω της μεταφοράς της ύλης και όσο φτάνουμε πιο έξω και πάλι μέσω ακτινοβολίας.

⁵⁵ Η δύναμη επαναφοράς είναι η άνωση, έμμεσα δηλαδή η βαρύτητα (ειδικές περιπτώσεις εξέτασης ηλιοσεισμολογίας/εξέταση ταλαντώσεων), Wikipedia.org.

$$Q_{rad} = - \int_v (\nabla \cdot F_v) dv = 4\pi\rho \int_v \kappa_v (J_v - B_v) dv \quad [2.5]$$

Αποτελεί συνήθως το πιο χρονοβόρο κομμάτι μιας ρεαλιστικής προσομοίωσης και τον βασικό όρο για το δυναμικό κομμάτι και την προσομοίωση της θερμοκρασίας (συγκεκριμένα για τα προβλήματα της φωτόσφαιρας: η ενεργειακή ανταλλαγή μεταξύ του αερίου και της ακτινοβολίας είναι αυτή που καθορίζει την ένταση της προς τα έξω ακτινοβολίας, όπως επίσης και τη δομή της θερμοκρασίας της φωτόσφαιρας και είναι υπεύθυνη για την ισχυρή κλίση της εντροπίας, η οποία και δρα σαν τον κύριο οδηγό της συναγωγής). Υπολογίζεται με τον short characteristics formal επιλύτη, βασισμένο στην διακριτοποιημένη μορφή της formal λύσης της RTE, με γραμμική παρεμβολή δύο μεταβλητών (bilinear interpolation).

8. Τις συνοριακές συνθήκες (boundary conditions):

- Ανώτατο όριο του υπολογιστικού χωρίου. Θεωρείται κλειστό (δηλαδή οι κάθετες convective ροές της μάζας, της ενέργειας και η οριζόντια ορμή εξαφανίζονται στο ίδιο το όριο), ελεύθερο διάτμησης/με stress-free συνθήκες για τις οριζόντιες συνιστώσες της ταχύτητας. Αυτό ισοδυναμεί με την w συνιστώσα της ταχύτητας καθώς και τις κλίσεις της μάζας, της πυκνότητας και της ενεργειακής πυκνότητας ως προς τον άξονα z ίσες με μηδέν. Ταυτόχρονα, οι μερικές παράγωγοι της u και v συνιστώσας ως προς τον άξονα z είναι μηδέν (stress free boundary conditions) ενώ οι B_x, B_y συνιστώσες είναι μηδέν στο όριο, αφού οι γραμμές του πεδίου είναι κάθετες και η διατήρηση του σωληνοειδούς περιορισμού μεταφράζεται σε μερική παράγωγο του B_z ως προς τον άξονα z ίση με μηδέν. Όσον αφορά στην κλίση της πίεσης κατά τον άξονα z , δίνεται από 1^{ης} και 2^{ης} τάξης εκφράσεις (που δεν χρησιμοποιούν τις τιμές της πίεσης των ελλειπόντων κελιών (ghost cells)) αντί των 4^{ης} τάξης κεντρικών διαφορών όπου δίνονται τα άλλα μεγέθη, για να αποφευχθεί η αφύσικη συμπεριφορά συμμετρικών συνθηκών πίεσης και πυκνότητας. Παρόλα αυτά, η ανωτέρω θεώρηση οδηγεί σε μη-φυσική αντανάκλαση των κυμάτων και των shocks. Για αυτό και κατά περίπτωση χρησιμοποιείται και το ανοιχτό ανώτατο όριο του υπολογιστικού χωρίου - εμπεριέχεται στον κώδικα (Beeck, et al., 2011, Vögler, et al., 2005).
- Κατώτερο όριο του υπολογιστικού χωρίου. Ιδανικά η ενσωμάτωση ενός ανοιχτού κατώτερου ορίου θα έπρεπε να επιτρέπει την ελεύθερη κίνηση κατά μήκος του ορίου χωρίς ανάμειξη με το ρευστό. Επειδή αυτό δεν είναι εφικτό, καθώς θα πρέπει να είναι γνωστές οι συνθήκες εκτός του χωρίου-πράγμα που δεν συμβαίνει- γίνονται κάποιες λογικές θεωρήσεις όσον αφορά στις φυσικές ιδιότητες του εισερχόμενου ρευστού στο όριο (π.χ. ότι η ολική πίεση είναι ομοιόμορφη κατά μήκος του εν λόγω ορίου - δικαιολογημένη θεώρηση, καθώς οι κινήσεις του ρευστού είναι χαμηλής ταχύτητας συγκριτικά με την ταχύτητα των μαγνητο-ακουστικών κυμάτων). Για τις συνιστώσες του μαγνητικού πεδίου ισχύει ότι αναφέρθηκε στο ανώτερο όριο. Στις κατάντη της ροής περιοχές ($w < 0$), θεωρείται ομαλή εξερχόμενη ισεντροπική ροή (outflow) (οι μερικές παράγωγοι των συνιστωσών της ταχύτητας ως προς τον άξονα z είναι μηδέν στο όριο, όπως και η μερική παράγωγος της πυκνότητας της εντροπίας ως προς τον άξονα z). Θεωρείται επίσης ότι όλες οι εισερχόμενες ροές είναι κάθετες (δηλαδή $u=v=0$ στο όριο και η μερική παράγωγος της w ως προς τον άξονα z είναι μηδέν). Προσοχή πρέπει να δίδεται στη διατήρηση της συνολικής μάζας του συστήματος - γι αυτό το σκοπό γίνεται αναπροσαρμογή της πίεσης των αερίων στις ανάντη περιοχές.
- Πλευρικά όρια. Περιοδικά για όλα τα μεγέθη και στις δύο οριζόντιες κατευθύνσεις.

9. Το είδος της διακριτοποίησης στο χρόνο-χρονικής ολοκλήρωσης (time integration): ρητή μέθοδος, 4^{ης} τάξης ακριβείας, σχήμα Runge-Kutta.
10. Τον τρόπο επιτάχυνσης της αριθμητικής επίλυσης: παράλληλη επεξεργασία, χρησιμοποιώντας τεχνητή διαμέριση του χωρίου (domain decomposition) σε τριών διαστάσεων πίνακα ορθογωνικών υποχώρων, ο καθένας εκ των οποίων αντιστοιχίζεται σε διαφορετική διεργασία στον υπολογιστή και ο καθένας εκ των οποίων συνοδεύεται από 2 επίπεδα ελλειπόντων κελιών στα όρια του (όπως απαιτείται από το 4^{ης} τάξης χωρικής διακριτοποίησης σχήμα). Ακολουθείται η λογική της επιμερισμένης μνήμης (distributed memory), δηλαδή κάθε διαδικασία κατέχει τη γνώση των μεταβλητών του δικού της υποχώρου.
11. Την ενδοεπικοινωνία μέσα στον κώδικα: MPI για παράλληλους υπολογιστές με επιμερισμένη μνήμη.

2.11 NIRVANA V.3.8

Ο κώδικας NIRVANA αποτελεί έναν κώδικα ο οποίος ολοκληρώνει αριθμητικά τις χρονικά εξαρτώμενες εξισώσεις ενός multi-physics συστήματος, το οποίο αποτελείται από μη-σχετικιστικές καταστάσεις συμπίεστου MHD, πολλαπλές διαδικασίες διάχυσης, self-gravity και έναν όρο πηγής απωλειών θερμότητας (heatloss).

Ο κώδικας αναπτύχθηκε κυρίως από τον Udo Ziegler, AIP (Leibniz-Institut fur Astrophysik Potsdam), με τη συνεισφορά του Oliver Gressel, NBI, Kobenhagen, Denmark (Ziegler, 2014, Ziegler, 2014, Ziegler, 2012, Ziegler, 2011).

Όσον αφορά στα χαρακτηριστικά του κώδικα NIRVANA:

1. Το είδος των εξισώσεων που επιλύει: ιδανικές εξισώσεις, με όρους συνεκτικότητας, με μαγνητική διάχυση, με ambipolar διάχυση, με μετάδοση θερμότητας. Περιλαμβάνεται και η self-gravity. Στην εξίσωση διατήρησης της ενέργειας μπορεί να οριστεί συνάρτησης ψύξης και συνάρτηση θέρμανσης και το άθροισμα τους δίνει τον όρο απωλειών θερμότητας. Στην εικόνα 9 που ακολουθεί παρουσιάζονται οι δυνατοί συνδυασμοί εξισώσεων και πλεγμάτων.

Code functionality	CARTESIAN				CYLINDRICAL/SPHERICAL			
	unigrid		AMR		unigrid		AMR**	
	serial	MPI	serial	MPI	serial	MPI*	serial	MPI
ideal MHD	+	+	+	+	+	+	+	+
viscosity	+	+	+	+	+	+	+	+
magnetic diffusion	+	+	+	+	+	+	+	+
thermal conduction	+	+	+	+	+	+	+	+
ambipolar diffusion	+	+	+	+	•	•	•	•
selfgravity	+	+	+	+	–	–	–	–
heatloss	+	+	+	+	+	+	+	+
tracer	+	+	+	+	+	+	+	+

* domain decomposition in $\phi(\theta)$ -direction for 'F'-type BC with geometric axis unsupported.

** AMR for 'F'-type BC unsupported.

+ available

– not available

• implemented but not validated

Εικόνα 9: Συνδυασμός εξισώσεων, συστημάτων συντεταγμένων και είδος πλέγματος που επιλύεται με τον κώδικα (Ziegler, 2014).

EOS: α) αδιαβατική με συντελεστή γ , β) πολυτροπική με πολυτροπική σταθερά K και πολυτροπικό εκθέτη Γ , γ) ισόθερμη, δ) ορισμένη από το χρήστη αναλυτικά ή σε πίνακα

Ειδικότερα:

- Για την μετάδοση θερμότητας με αγωγή: α) κλασική μορφή αγωγής με ανισότροπη θερμική ροή (εξαρτημένη από το μαγνητικό πεδίο/ διαφορετικοί συντελεστές για ισχυρό και ασθενές αντίστοιχα), β) κορεσμένη θερμική ροή σύμφωνα με τους Cowie & McKee, συναρτήσει της ταχύτητας του ήχου. Εφαρμόζεται στις περιπτώσεις όπου οι κλίσεις της θερμοκρασίας γίνονται τόσο μεγάλες ώστε η κλασική προσέγγιση για τη διάχυση καταρρέει.
- Για την ambipolar διάχυση: σε ασθενή ιονισμένα αέρια, διαμέσου της προσέγγισης ενός ρευστού και θεωρώντας ισχυρή προσεγγιστική σύζευξη/strong coupling approximation. Ο συντελεστής για την εν λόγω διάχυση ορίζεται από το χρήστη.
- Φορμαλισμός διπλής ενέργειας/dual energy formalism: εφαρμόζεται για την διαχείριση των προβλημάτων που ανακύπτουν από τον υψηλό αριθμό Mach/χαμηλές πλασματικές β ⁵⁶ fluxes. Ονομάζεται έτσι γιατί η εξίσωση ολικής ενέργειας επιλύεται ταυτόχρονα με την εξίσωση θερμικής ενέργειας⁵⁷.
- 2. Τον τρόπο διατήρησης του σωληνοειδούς περιορισμού ($\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$): χρησιμοποιείται είτε διανυσματικό δυναμικό (vector potential), είτε σχήμα περιορισμένης μεταφοράς, είτε υβριδική μέθοδος, είτε σχήμα διάχυσης.
- 3. Τις διαστάσεις του προβλήματος που μπορεί να επιλύσει: 2 ή 3 διαστάσεις, καρτεσιανές, κυλινδρικές και σφαιρικές συντεταγμένες με δυνατότητα περιστροφής του πλαισίου (σχετικά μεγέθη: περιστροφική γωνιακή ταχύτητα πλαισίου και δύναμη Coriolis & φυγοκεντρική).
- 4. Τη χρήση του: επιστημονικοί - μη εμπορικοί σκοποί. Προμηθεύεται από τον Udo Ziegler.
- 5. Τη γλώσσα προγραμματισμού: C.
- 6. Το είδος του πεδίου – πλέγματος: δομημένο, AMR (block-structured).
- 7. Το είδος διακριτοποίησης στο χώρο (spatial discretization): unsplit μέθοδος πεπερασμένων όγκων για τους υπερβολικούς όρους, για τους παραβολικούς (όροι διασποράς) η διακριτοποίηση γίνεται μέσα στο πλαίσιο των πεπερασμένων όγκων. Οι μεταβλητές είναι volume-centered (τα βαθμωτά μεγέθη) και face-centered (οι συνιστώσες του μαγνητικού πεδίου).
- 8. Τη μέθοδο υπολογισμού των διανυσμάτων ροής (fluxes):
Για το υπερβολικό μέρος των εξισώσεων χρησιμοποιούνται δύο διαφορετικοί Godunov-type επιλύτες σε συνδυασμό με CT μέθοδο για τον div-free περιορισμό (τρεις συνδυασμοί συνολικά). Συγκεκριμένα:
CU_CCT: εκδοχή του Κεντρικού-Upwind σχήματος, 2^{ης} τάξης ακριβείας, εφαρμοσμένη σε εξισώσεις Euler, που περιλαμβάνουν σαν όρο τη δύναμη Lorentz, σε συνδυασμό με CT σχήμα για την εξίσωση επαγωγής. Το ηλεκτρικό πεδίο υπολογίζεται από μια γνησίως διδιάστατη κεντρική-upwind διαδικασία (CCT), βασισμένη στην evolution-projection μέθοδο των Bryson&Levy.
HLLD_CCT: ο HLLD προσεγγιστικός επιλύτης Riemann⁵⁸, εφαρμοσμένος σε 2d/3d εξισώσεις Euler με όρο δύναμης Lorentz, σε συνδυασμό με CT σχήμα για την εξίσωση επαγωγής. Το ηλεκτρικό πεδίο υπολογίζεται όπως και στη μέθοδο CU_CCT.
HLLD_CT⁵⁹: ο HLLD προσεγγιστικός επιλύτης Riemann, εφαρμοσμένος σε 2d/3d MHD εξισώσεις σε συνδυασμό με CT σχήμα για την εξίσωση επαγωγής. Το

⁵⁶ Το β του πλάσματος είναι η αναλογία της πλασματικής πίεσης προς την μαγνητική πίεση.

⁵⁷ Αναλυτικότερα βλ. (Ziegler, 2014, User's guide).

⁵⁸ Των Miyoshi & Kusano.

ηλεκτρικό πεδίο υπολογίζεται με face-to-edge παρεμβολή από τις HLLD ροές του ηλεκτρικού πεδίου, χρησιμοποιώντας την entropy-wave-sensitive upwind διόρθωση, από τους Gardiner & Stone.

Για το παραβολικό μέρος των εξισώσεων και τις αντίστοιχες ροές (όροι διασποράς/dissipation terms) γίνεται χρήση προσεγγίσεων 2^{ης} τάξης ακριβείας πεπερασμένων διαφορών. Ο επιλύτης της μαγνητικής διάχυσης και ο αντίστοιχος της ambipolar διάχυσης διατηρούν τον div-free περιορισμό.

Όρος βαρύτητας / επίλυση Poisson εξίσωσης⁶⁰: Στην περίπτωση χρήσης AMR, επιλύεται με μια συντηρητική πολυπλεγματική μέθοδο (V-cycle επανάληψη, GS-RB smoother, 2^{ης} τάξης restriction/prolongation τελεστές) ενσωματώνοντας ελλειπτικό ταίριασμα (elliptic matching) στις διεπιφάνειες του δικτύου. Στην περίπτωση ομοιόμορφου πλέγματος επιλύεται με μία μέθοδο 2-δικτύων που χρησιμοποιεί έναν SOR-RB coarse-level επιλύτη.

9. Τα σχήματα υψηλότερης ακρίβειας και οι slope limiters: Van Leer, Min mod, Monotonized-centered limiters για τον έλεγχο της συνολικής διακύμανσης του ανακατασκευασμένου πεδίου.
10. Τους όρους πηγής (source terms): Ο χρήστης μπορεί να ορίσει εξωτερική ειδική δύναμη, η οποία και εισάγεται στην εξίσωση της ορμής σαν όρος πηγής. Επίσης, υπάρχει γεωμετρικός όρος πηγής στην εξίσωση της ορμής κατά τον x και y άξονα και όχι κατά τον z (διατήρηση της στροφορμής στις κυλινδρικές και σφαιρικές συντεταγμένες) (Ziegler, 2012). Σαν όρος πηγής, όπως ήδη έχει αναφερθεί, εισάγεται και ο όρος απωλειών θερμότητας.
11. Τις συνοριακές συνθήκες (boundary conditions): χρησιμοποιούνται διάφορα είδη συνοριακών συνθηκών. Μπορεί να υπάρχουν είτε περιοδικές συνοριακές συνθήκες είτε Dirichlet όχι όμως συνδυασμός τους. Συγκεκριμένα:
 - α) inflow: το ρευστό επιτρέπεται να μπει στο χωρίο αλλά όχι να βγει (εξαφανίζονται οι κλίσεις των βαθμωτών μεγεθών και των παράλληλων συνιστωσών συν την div-free εξαγωγή από το μαγνητικό πεδίο.
 - β) outflow: ακριβώς το ανάποδο από το inflow (ισχύουν τα ίδια για τις κλίσεις και τον div-free όρο).
 - γ) mirror symmetry / συμμετρία καθρέφτη: ανακλώμενες συνθήκες σε όλες τις μεταβλητές.
 - δ) antimirror symmetry / συμμετρία ανάποδη του καθρέφτη: το ίδιο με το γ για τις υδροδυναμικές μεταβλητές, αλλά το μαγνητικό πεδίο αναγκάζεται να εμφανίζει dipole-parity, σεβόμενο το σύνορο του χωρίου.
 - ε) reflection on axis / αντανάκλαση στον άξονα: ανακλώμενες συνθήκες σε όλες τις μεταβλητές ενός γεωμετρικού άξονα σε κυλινδρικές και σφαιρικές συντεταγμένες.
 - στ) reflection at center / αντανάκλαση στο κέντρο: ανακλώμενες συνθήκες σε όλες τις μεταβλητές στην αρχή των σφαιρικών συντεταγμένων.
 - ζ) periodicity / περιοδικές.
 - η) default: χωρίς κλίση στις υδροδυναμικές μεταβλητές και κανονική ως προς το όριο συνθήκη (pseudo-vacuum) για το μαγνητικό πεδίο.
 - θ) full geometry / πλήρης γεωμετρία: μόνο για κυλινδρική και σφαιρική γεωμετρία. Χρησιμοποιεί φυσιολογικές⁶¹ οριακές συνθήκες για τον γεωμετρικό άξονα για $y=0$ στην κυλινδρική γεωμετρία και για $x=0$, $y=0$, $y=\pi$ στη σφαιρική γεωμετρία. Εάν ο

⁵⁹ Το συγκεκριμένο σχήμα δεν δουλεύει σε συνδυασμό με τις συνοριακές συνθήκες τύπου «πλήρους γεωμετρίας».

⁶⁰ Μόνο σε 3d καρτεσιανές συντεταγμένες.

⁶¹ Με τον όρο «φυσιολογικές» ορίζονται οι οριακές συνθήκες που αυτόματα ικανοποιούνται μετά την επίλυση του προβλήματος. Ανάλογα με το πρόβλημα μπορεί να είναι διαφορετικές.

γεωμετρικός άξονας είναι αποκλεισμένος από το χωρίο, οι συνοριακές συνθήκες είναι τύπου ψευδο-άξονα.

I) user defined / ορισμένες από το χρήστη: πυκνότητα μάζας, πυκνότητα ολικής ενέργειας, πυκνότητες ορμής, μαγνητικό πεδίο, πυκνότητα θερμικής ενέργειας, tracer⁶² κλπ. Το βαρυτικό δυναμικό δεν είναι δυνατόν να οριστεί από το χρήστη.

12. Το είδος της διακριτοποίησης στο χρόνο-χρονικής ολοκλήρωσης (time integration):
Για τους υπερβολικούς όρους: ρήτη μέθοδος Runge-Kutta, 2^{ης} τάξης, 3^{ης} τάξης ακριβείας.

Για τους παραβολικούς όρους:

STD / κλασικός ρητός χρονικός ολοκληρωτής βασισμένος σε RK2/RK3 σχήματα, όπως χρησιμοποιείται και για τους υπερβολικούς όρους των εξισώσεων. Η σύζευξη με το υπερβολικό κομμάτι είναι unsplit.

RKL / σταθεροποιημένος Runge-Kutta-Legendre ολοκληρωτής. Το σχήμα είναι ειδικά σχεδιασμένο για ελαφρώς άκαμπτες (mildly-stiff) παραβολικές εξισώσεις⁶³ επιτρέποντας αποτελεσματικούς αριθμούς Courant πολύ μεγαλύτερους από αντίστοιχους με το σχήμα STD. Η σύζευξη με το υπερβολικό σχήμα γίνεται δια μέσου Strang-splitting⁶⁴.

Για τον όρο απωλειών θερμότητας (διεργασίες θέρμανσης/ψύξης): ολοκληρώνεται χρονικά στην εξίσωση της ενέργειας μέσω μιας 3^{ης} τάξεως εκθετικής μεθόδου Rosenbrock με ενσωματωμένο εκτιμητή λάθους. Η σύζευξη με το υπερβολικό μέρος γίνεται μέσω Strang-splitting.

13. Τον τρόπο επιτάχυνσης της αριθμητικής επίλυσης: παράλληλη επεξεργασία. Το AMR (block-structured) ακολουθεί τα παρακάτω κριτήρια πύκνωσης του πλέγματος: α) gradient-based / βασισμένο στην δεύτερη παράγωγο κριτήριο, β) Jeans-length based κριτήριο στην περίπτωση self-gravitation ροών, γ) κριτήριο βασισμένο στο μήκος του πεδίου για να ακολουθεί θερμικά ασταθές αέριο στην περίπτωση προσομοιώσεων με συνδυασμένο όρο απωλειών θερμότητας και όρο συναγωγής.

Για κυλινδρικές/σφαιρικές συντεταγμένες χρειάζονται 3 ghost ζώνες ανά πλευρά, σε διαφορετική περίπτωση 2.

14. Την ενδοεπικοινωνία μέσα στον κώδικα: MPI βιβλιοθήκη.

15. Το γραφικό περιβάλλον: IDL, SILO, εργαλείο CAIVS, mixed ASCII/Binary files, VisIt, Paramesh.

16. Πλεονεκτήματα/μειονεκτήματα:

Γνωστά και ανεπίλυτα προβλήματα

- Κάτω από συγκεκριμένες συνθήκες, το HLLD_CT σχήμα είναι επιρρεπές σε μικρής κλίμακας αριθμητικές ταλαντώσεις σε 3d προσομοιώσεις, ειδικότερα σε συνδυασμό με AMR.
- Ροές με υψηλό αριθμό Mach/ χαμηλό πλάσμα-β είναι επιρρεπείς στην εμφάνιση μηδενικής/αρνητικής πίεσης, ειδικότερα με AMR. Ο φορμαλισμός διπλής ενέργειας μειώνει αυτό το πρόβλημα αλλά δεν μπορεί πλήρως να το απομακρύνει.
- Στις προσομοιώσεις MPI με πολύ χαμηλό φορτίο ανά MPI thread (νήμα), ο επαναδιαμερισμός του πλέγματος μπορεί να αποτύχει στην περίπτωση όπου

⁶² Χρησιμοποιείται για να «χρωματίσει» τη ροή και να οπτικοποιήσει την κίνηση του ρευστού. Δεν αλληλεπιδρά καθόλου με τη ροή. Ακολουθεί παθητικά τη ροή.

⁶³ “A stiff equation is a differential equation for which certain numerical methods for solving the equation are numerically unstable, unless the step size is taken to be extremely small. It has proven difficult to formulate a precise definition of stiffness, but the main idea is that the equation includes some terms that can lead to rapid variation in the solution”, Wikipedia.org.

⁶⁴ “Αριθμητική μέθοδος επίλυσης διαφορικών εξισώσεων που μπορούν να γραφτούν ως άθροισμα διαφορικών τελεστών”, Wikipedia.org.

ισχυρή τοπική πύκνωση του πλέγματος (mesh refinement) απαιτεί ένα ολοκληρωμένο data shift.

- CAIVS⁶⁵: blocks του πλέγματος που μερικώς αλληλεπικαλύπτονται από διαφορετικές αναλύσεις μπορεί να δημιουργήσουν μικρές ατέλειες στις 3d AMR απεικονίσεις.
- Ο κώδικας δεν μπορεί να ελέγξει ως προς τη συνοχή/συνέχεια το ορισμένο από το χρήστη μαγνητικό πεδίο. Γι αυτό το λόγο, εάν υπάρξουν ασυνέχειες στην αρχή του AMR, μπορεί να οδηγήσουν σε δημιουργία μαγνητικού μονόπολου, καθώς θα τρέξει ο κώδικας, ακόμα και αν δεν είναι ορατό αρχικά.

2.12 PENCIL

Ο Pencil αποτελεί έναν υψηλής τάξης ακριβείας κώδικα πεπερασμένων διαφορών για προσομοίωση συμπιεστών υδροδυναμικών ροών με επίδραση μαγνητικών πεδίων. Αποτελείται από πολλά τμήματα (εξαιρετικά σπονδυλωτός) και μπορεί εύκολα να χρησιμοποιηθεί σε διαφορετικούς τύπους προβλημάτων (Dobler, et al., 2019, Bourdin, 2019, Losada, et al., 2017, Brandenburg, 2003).

Γίνεται ετήσια συνάντηση χρηστών Pencil Code (η πλέον πρόσφατη έγινε στη Φιλανδία τον Αύγουστο του 2019), η οποία και ορίζει εμμέσως την έγκριση αλλαγών στον κώδικα. Ο κώδικας έχει αναπτυχθεί και διατηρείται κάτω από Subversion (SVN) από περίπου 25 ανθρώπους, ενώ έχει «κατέβει» από περίπου 500 εγγεγραμμένους χρήστες. Ελέγχεται κατά τη διάρκεια της νύχτας σε πολλές πλατφόρμες και παρέχει ένα εξαιρετικό παιδαγωγικό εργαλείο για επαγγελματίες επιστήμονες, όπως και για σπουδαστές, που θέλουν να εισάγουν νέο κώδικα μέσα σε ένα οργανωμένο πλαίσιο εργασίας (framework). Χρησιμοποιείται CVS⁶⁶ το οποίο επιτρέπει την παρακολούθηση της δουλειάς όλων των προγραμματιστών και την συνεργασία τους, ενώ ταυτόχρονα κρατάει αρχείο όλης της δουλειάς που γίνεται και των αλλαγών σε ένα κομμάτι αρχείων (η δυνατότητα είναι περιορισμένη σε λίγους χρήστες).

Όσον αφορά τα βασικά χαρακτηριστικά του κώδικα PENCIL:

1. Το είδος των εξισώσεων που επιλύει⁶⁷: ιδανικές (με δυνατότητα να γίνει switch off κάποιων εξισώσεων ή μεμονωμένων όρων από τις εξισώσεις), σχετικιστικές⁶⁸, Hall (ambipolar diffusion), πολλών ρευστών – multi fluid (η σκόνη αντιμετωπίζεται ως ξεχωριστό ρευστό με διαφορετική ταχύτητα)⁶⁹, πολλών ειδών – multi species (ουδέτερο υδρογόνο, ηλεκτρόνια, πρωτόνια και ουδέτερο ήλιο), πολλών υλικών – multi material (για υδρογόνο και ήλιο για την ώρα, με passive scalar σωματίδια), με μετάδοση θερμότητας (στην εξίσωση της εντροπίας), με μετάδοση με ακτινοβολία. Περιλαμβάνεται επίσης στις εξισώσεις ο όρος της βαρύτητας (Εξ. της ορμής/ το self-potential ικανοποιεί την εξίσωση Poisson) και της μαγνητικής διάχυσης (Εξ.

⁶⁵ Μετασχηματιστής των εξαγωγικών δεδομένων του κώδικα, ώστε να είναι κατάλληλα για επεξεργασία ή απεικόνιση από εργαλεία οπτικοποίησης.

⁶⁶ Concurrent versioning system.

⁶⁷ Επιπλέον αλλά εκτός του αντικειμένου της εν λόγω διατριβής: με όρο πίεσης λόγω κοσμικών ακτίνων (στην προσεγγιστική διαδικασία που λαμβάνει υπόψη τη διάχυση), για εξισώσεις βαρυτικών κυμάτων (gravitational waves).

⁶⁸ Χειρομορφικό μαγνητικό φαινόμενο (chiral magnetic effect).

⁶⁹ Αλληλεπιδρούν μέσω μιας οπισθέλκουσας δύναμης, η οποία λαμβάνεται υπόψη σαν επιπλέον όρος στην εξίσωση της ορμής.

μαγνητικής επαγωγής). Αντί της εξίσωσης διατήρησης της ολικής ενέργειας μπορεί να χρησιμοποιηθεί, εναλλακτικά, η εξίσωση διατήρησης της εντροπίας

$$\rho T \frac{Ds}{Dt} = H - C + \nabla \cdot (K \nabla T) + \eta \mu_0 j^2 + 2\rho \nu \mathbf{S} \times \mathbf{S} + \zeta \rho (\nabla \cdot \mathbf{u})^2 \quad [2.6]$$

όπου H , C ρητοί όροι θέρμανσης και ψύξης, K η θερμική αγωγιμότητα για ακτινοβολία, ζ το bulk ιξώδες⁷⁰ και \mathbf{S} ο τανυστής του ρυθμού διάτμησης (rate-of-shear tensor) που δίνεται, σε καρτεσιανές συντεταγμένες από την εξίσωση 2.7 και σε κυλινδρικές συντεταγμένες από την εξίσωση 2.8, με τις μερικές διαφορικές να αντικαθίστανται από covariant παραγωγή, η οποία παρουσιάζεται με το σύμβολο «;».

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \nabla \cdot \mathbf{u} \right) \quad [2.7]$$

$$S_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i;j} + u_{j;i}) - \frac{1}{3} \delta_{ij} \nabla \cdot \mathbf{u} \quad [2.8]$$

2. Τον τρόπο διατήρησης του σωληνοειδούς περιορισμού ($\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$): διανυσματικό δυναμικό (vector potential), σχήμα διάχυσης.
3. Τις διαστάσεις του προβλήματος που μπορεί να επιλύσει: 1, 2, 3 διαστάσεις (ψευδο-3, ενώνοντας 2 διδιάστατα προβλήματα), καρτεσιανές, κυλινδρικές και σφαιρικές συντεταγμένες.
4. Τη χρήση του: ακαδημαϊκούς/ερευνητικούς κ.λπ. σκοπούς. Αποτελεί ανοιχτό λογισμικό. Πρωταρχικά σχεδιάστηκε για αδύναμες συμπιεστές τυρβώδεις ροές (ισότροπη τύρβη: MHD, passive scalar, cosmic rays, διαστρωματωμένα επίπεδα: convection, μεταφορά μέσω ακτινοβολίας, shearing box: MRI, planetesimals, interstellar, Sphere embedder in box: πλήρως convective αστέρες, γεωδυναμική) (Brandenburg, 2003).
5. Τη γλώσσα προγραμματισμού: Fortran90 (κυρίως), C.
6. Το είδος του πεδίου – πλέγματος: δομημένο.
7. Το είδος διακριτοποίησης στο χώρο (spatial discretization): μέθοδος πεπερασμένων διαφορών για υψηλής τάξης 1^{ης} και 2^{ης} παράγωγοι.
8. Τη μέθοδο υπολογισμού των διανυσμάτων ροής (fluxes): σχήμα upwind πεπερασμένων διαφορών (κεντρικό ή 4^{ης} ή 5^{ης} τάξης, διδιαγώνιο για τις παραγώγους δύο μεταβλητών/cross derivatives). Με την μέθοδο του upwinding σταματούν οι Nyquist διακυμάνσεις από το να εξαπλωθούν πέρα από το σύνορο ή το στάσιμο σημείο. Μάλιστα με τις 4^{ης} τάξεως εξισώσεις, είναι πολύ δύσκολο να αναπτυχθούν καν αυτές οι διακυμάνσεις.
9. Τα σχήματα υψηλότερης ακρίβειας και οι slope limiters: μέθοδοι τύπου πεπερασμένων διαφορών 6^{ης} τάξης. Υπάρχει η εναλλακτική μεταξύ spectral ή compact σχημάτων. Επιπλέον, η επιλογή μη-συντηρητικού σχήματος, επιτρέπει από τη μία την χρήση του λογαρίθμου της πυκνότητας και την χρήση της

⁷⁰ Για μονοατομικό αέριο εξαφανίζεται, ενώ για υπερηχητικές ροές, εάν κάποιος θέλει να προσθέσει shock συνεκτικότητα, προσθέτει bulk.

εντροπίας σαν μεγέθη, ενώ από την άλλη συνεργάζεται καλά με συνθήκες ισχυρής διαστρωμάτωσης (stratification) και θερμοκρασιακές αντιθέσεις (contrasts).

Λόγω της υψηλής τάξης επίλυσης, ο κώδικας έχει μειωμένη αριθμητική διάχυση. Για την πραγματοποίηση μη συνεκτικών προσομοιώσεων, μπορούν να χρησιμοποιηθούν φίλτρα υψηλής συχνότητας για να παρέχουν επιπλέον διάχυση για καταστάσεις/modes που προσεγγίζουν την συχνότητα Nyquist⁷¹.

Γι' αυτό χρησιμοποιούνται: α) η κατά Laplace συνεκτικότητα, β) η υπερσυνεκτικότητα⁷² (hyperviscosity), γ) η συντηρητική υπερδιάχυση⁷³ (conservative hyperdissipation), ένα αριθμητικό εργαλείο που διαχέει την ενέργεια σε μικρές κλίμακες και δεν δίνει καμία εγγύηση ότι τα αποτελέσματα είναι συγκλίνοντα με την κανονική διασπορά κλπ.

10. Τους όρους πηγής (source terms): όρος βαρύτητας.

11. Τις συνοριακές συνθήκες (boundary conditions):

Οι συνοριακές συνθήκες εφαρμόζονται μέσω τριών επιπέδων ελλειπόντων σημείων σε κάθε σύνορο. Οι βασικότερες συνθήκες είναι:

A) περιοδική συνοριακή συνθήκη.

B) αντισυμμετρική συνθήκη αναφορικά με το σύνορο.

Γ) συμμετρική συνθήκη αναφορικά με το σύνορο.

Δ) αντισυμμετρική συνθήκη αναφορικά με την αυθαίρετη τιμή στο σύνορο.

E) ειδική συνοριακή συνθήκη για $\ln \rho$ και s (συνεχής ροή θερμότητας διαμέσου του συνόρου).

ΣΤ) ειδική συνοριακή συνθήκη για s (σταθερή θερμοκρασία στο σύνορο - σε συνδυασμό με την $[\Delta]$ για $\ln \rho$).

Z) ειδική συνοριακή συνθήκη για s ή $\ln \rho$ (σταθερή θερμοκρασία στο σύνορο, για αυθαίρετα ορισμένο $\ln \rho$).

H) ειδική συνοριακή συνθήκη για s (ορίζεται η θερμοκρασία στα ελλείποντα σημεία στο σύνορο, για ορισμένο $\ln \rho$).

Θ) χαμηλής τάξης μίας πλευράς παράγωγοι/one-sided derivatives ("no boundary condition") για την πυκνότητα.

I) συνοριακή συνθήκη διατμητικού-φύλλου/shearing sheet.

K) επιβολή της τιμής του αντίστοιχου πεδίου στα κατακόρυφα όρια.

Λ) ειδική συνοριακή συνθήκη για $\ln \rho$ και s η οποία ενισχύει την υδροστατική ισορροπία στα κατακόρυφα όρια.

M) μηδενική τιμή στις ghost zones και ελεύθερη τιμή στο σύνορο.

Ειδικές συνοριακές συνθήκες για σφαιρικές και κυλινδρικές συντεταγμένες:

N) τέλει αγωγού: $B_n = 0$ και $E_t = 0$ το κανονικό και εφαπτομενικό διάνυσμα αντίστοιχα στο σύνορο. Στην καρτεσιανή γεωμετρία οι ίδιες συνθήκες μπορούν να εισαχθούν θέτοντας τις δύο εφαπτομενικές συνιστώσες του vector potential A ίσες με το μηδέν στο σύνορο.

Ξ) ελεύθερη τάσης (stress-free): σε ένα τέτοιο αδιαπέραστο σύνορο θα ισχύει $u_n = 0$ και οι συνιστώσες των διατμητικών τάσεων S_{nt} πρέπει να εξαφανιστούν για κάθε εφαπτομενική κατεύθυνση t , για το εν λόγω σύνορο. Στο ακτινικό σύνορο

⁷¹ «Η μέγιστη συχνότητα πάνω από την οποία θα συμβεί παραποίηση», Sciencedirect.com.

⁷² Η διαφορά σε σχέση με την απλή συνεκτικότητα βρίσκεται στο ότι η ροή της ορμής λόγω της συνεκτικότητας δεν είναι ανάλογη προς την κλίση της ταχύτητας αλλά προς τον ρυθμό του τανυστή της διάτμησης (S_{ij}).

⁷³ Οι συντηρητικοί όροι αντιστοιχίζονται ως εξής. Η υπερδιάχυση σε συντηρητικό όρο μάζας, η υπερσυνεκτικότητα σε συντηρητικό όρο ορμής και η υπεραντίσταση (hyperresistivity) σε συντηρητικό όρο ενέργειας, γραμμένοι στη μορφή απόκλισης της ροής του αντίστοιχου μεγέθους (ώστε να εφαρμόζεται το θεώρημα Gauss).

οι αντίστοιχοι όροι που πρέπει να εξαφανιστούν είναι οι $S_{r\theta}$, $S_{r\varphi}$, πράγμα το οποίο συμβαίνει για $u_r = 0$, $\theta_r(u_\theta/r) = 0$, $\theta_r(u_\varphi/r) = 0$.

Ο) κανονικού πεδίου ακτινική συνοριακή συνθήκη: παρόλο που δεν έχει φυσικό νόημα, η συγκεκριμένη συνθήκη χρησιμοποιείται συχνά σαν απλό αντικαταστάτο για την potential-field συνθήκη του μαγνητικού πεδίου. Συγκεκριμένα, οι δύο εφαπτομενικές συνιστώσες του μαγνητικού πεδίου είναι μηδέν στο σύνορο, ενώ η κανονική συνιστώσα είναι μη περιορισμένη/unconstrained από τα αριστερά.

12. Το είδος της διακριτοποίησης στο χρόνο (time integration): Χρησιμοποιείται ρητή μέθοδος.

α. RK-2N: αναφέρεται στο 3^{ης} τάξης Runge-Kutta σχήμα όπως παρουσιάστηκε από τον Williamson με μία κατανάλωση μνήμης από μόνο δύο σετ μεταβλητών (2N).

β. RK3-2N: σχήμα RK-2N με τρία βήματα (οι συντελεστές διαφέρουν για διαφορετικού τύπου σχήμα π.χ. συμμετρικό, ανομοιογενές).

13. Τον τρόπο επιτάχυνσης της αριθμητικής επίλυσης: παράλληλη επεξεργασία, Astaroth API.

14. Την ενδοεπικοινωνία μέσα στον κώδικα: επιλογή για MPI library, PacxMPI για συνεργασία μεταξύ κρατών. Για I/O χρήση HDF5.

15. Το γραφικό περιβάλλον: IDL, GUI-based visualization, Python, DX κ.ά. και Matlab, Tecplot, ParaView κ.ά. για την προβολή των HDF5 δεδομένων (Bourdin, 2019).

16. Πλεονεκτήματα/μειονεκτήματα:

Προβλήματα (Brandenburg, 2003):

- Όλες οι διεργασίες θα πρέπει να συνδυάζονται ταυτόχρονα.
- Χρειάζονται και οι rms και μέγιστες τιμές για την οπτικοποίηση/έλεγχο (monitoring).
- Όμοιες ρουτίνες για τον μέσο στην τοροειδή περίπτωση κ.λπ.
- Η online ανάλυση (spectra, slices, vectors).
- Σε Linux clusters ευαισθησία στο layout (πιο αργή προσομοίωση).
- Συνεχώς επικαιροποιήσιμος.

2.13 PLUTO V.4.3

Ο κώδικας PLUTO αποτελεί ένα λογισμικό για την αριθμητική επίλυση μικτών υπερβολικών/παραβολικών συστημάτων μερικών διαφορικών εξισώσεων, ειδικά για ροές υψηλού αριθμού Mach στην δυναμική του αστροφυσικού ρευστού. Είναι σχεδιασμένος με μια σπονδυλωτή και ευέλικτη δομή, όπου διαφορετικοί αριθμητικοί αλγόριθμοι μπορούν να συνδυαστούν ξεχωριστά για να επιλύσουν συστήματα συντηρητικών νόμων, χρησιμοποιώντας τη μέθοδο των πεπερασμένων όγκων ή διαφορών, βασισμένοι σε σχήματα τύπου Godunov. Ο κώδικας αναπτύχθηκε στο Dipartimento di Fisica, Torino University σε μια συνεργασία με την INAF, το Osservatorio Astronomico di Torino και το SCAI Department of CINECA (Mignone, et al., 2018, Mignone, et al., 2011, Mignone, et al., 2007).

Όσον αφορά στα βασικά χαρακτηριστικά του κώδικα PLUTO:

1. Το είδος των εξισώσεων που επιλύει: ιδανικές, με όρους αντίστασης, με όρους συνεκτικότητας, ιδανικές σχετικιστικές, Hall, με μετάδοση θερμότητας, με πολλά υλικά (multi-material, συγκεκριμένα cosmic rays/χρήση PIC τεχνικών, Lagrangian σωματίδια, είτε απλά tracer σωματίδια, είτε για την μοντελοποίηση sub-grid

φυσικών διεργασιών, αποκλείοντας παρόλα αυτά μια προς τα πίσω αντίδραση στο ρευστό), με μετάδοση θερμότητας με ακτινοβολία.

Συγκεκριμένα, για τη μετάδοση θερμότητας (optically thin radiative losses): χρησιμοποιούνται πολλών ειδών εξισώσεις, πολλών ειδών (ιόντων) και εξισώσεις χημικών αντιδράσεων και όρος πηγής αντίδρασης.

EOS:

A) νόμος ιδανικών αερίων,

B) ισόθερμης μεταβολής (εξίσωση πίεσης, αντί για εξίσωση ενέργειας). Συγκεκριμένα:

$$p = \rho c_{iso}^2 \quad [2.9]$$

Όπου, c_{iso} η ισοθερμική ταχύτητα του ήχου, που μπορεί να έχει είτε σταθερή τιμή είτε να είναι χωρικά-εξαρτώμενη ποσότητα.

Γ) PVTE (Pressure-Volume-Temperature-Energy) EOS, όπου ο χρήστης ορίζει την εσωτερική ενέργεια σαν γενική εξίσωση της θερμοκρασίας και των χημικών συγκεντρώσεων. Λύνονται ταυτόχρονα η θερμική και η θερμιδική EOS.

Δ) Taub-Matthews, για το σχετικιστικό ιδανικό αέριο, για το οποίο ο αδιαβατικός εκθέτης αποτελεί συνάρτηση της θερμοκρασίας.

Στις περιπτώσεις των μη ιδανικών εξισώσεων (εξισώσεων Hall, με αντίσταση, με συνεκτικότητα, με μετάδοσης θερμότητας), μπορεί να χρησιμοποιηθεί και εξίσωση εντροπίας, δίνοντας τη δυνατότητα η πίεση να υπολογίζεται είτε από την εξίσωση της ολικής ενέργειας είτε από την εξίσωση της εντροπίας.

Υπάρχει επίσης πρόβλεψη για body forces (γραμμένες ως συναρτήσεις του δυναμικού της βαρύτητας & της επιτάχυνσης της βαρύτητας).

2. Τον τρόπο διατήρησης του σωληνοειδούς περιορισμού ($\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$): κανέναν, 8-κυματική δομή, Vector potential, χρήση γενικευμένου πολλαπλασιαστή Lagrange, σχήμα περιορισμένης μεταφοράς. Πέραν των γνωστών σχημάτων που προαναφέρθηκαν, χρησιμοποιείται και μια παραλλαγή του σχήματος προβολής, που ονομάζεται background field splitting. Σε περιπτώσεις όπου υπάρχει ένα ενδογενές μαγνητικό πεδίο (π.χ. στην πλανητική μαγνητόσφαιρα), είναι βολικό να γραφτεί το συνολικό μαγνητικό πεδίο ως άθροισμα δύο όρων, ενός background curl-free (συνάρτηση μόνο της απόστασης) μαγνητικού πεδίου και μιας απόκλισης (συνάρτηση και της απόστασης και του χρόνου). Δηλαδή:

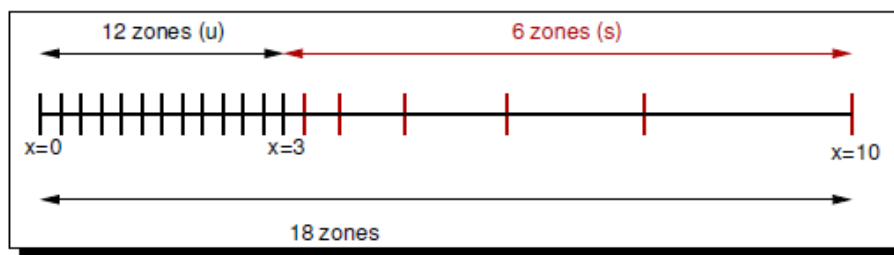
$$\mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{B}_0(\mathbf{x}) + \mathbf{B}_1(\mathbf{x}, t) \quad [2.10]$$

$$\mu \varepsilon \frac{\partial \mathbf{B}_0}{\partial t} = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{B}_0 = 0, \quad \nabla \times \mathbf{B}_0 = 0 \quad [2.11]$$

Η εν λόγω τεχνική λειτουργεί μαζί με τον γενικευμένο πολλαπλασιαστή Lagrange ή το σχήμα περιορισμένης μεταφοράς και όχι μόνη της.

3. Τις διαστάσεις του προβλήματος που μπορεί να επιλύσει: 1, 2 ή 3 διαστάσεις, καρτεσιανές, κυλινδρικές, πολικές, σφαιρικές συντεταγμένες (με δυνατότητα περιστροφής του πλαισίου αναφοράς με σταθερή γωνιακή ταχύτητα γύρω από τον άξονα z σε όλες πλην των καρτεσιανών συντεταγμένων).
4. Τη χρήση του: Διανέμεται δωρεάν κάτω από GNU γενική δημόσια άδεια. Προβλήματα αστροφυσικής δυναμικής των ρευστών για υψηλούς αριθμούς Mach.
5. Τη γλώσσα προγραμματισμού: C (για την στατική εκδοχή του πλέγματος), Fortran & C++ (για την AMR εκδοχή).

6. Το είδος του πεδίου – πλέγματος: δομημένο (static ή adaptive/AMR, block-structured). Το διάστημα του πλέγματος/κελιού μπορεί να είναι ομοιόμορφο ή (γεωμετρικά ή λογαριθμικά) παραμορφωμένο (stretched), (βλ. εικόνα 10).



Εικόνα 10: Εφαρμογή ενός διαστασιοποιημένου πεδίου με ομοιόμορφο (αριστερά) και παραμορφωμένο τμήμα (δεξιά με κόκκινο) για το διάστημα $[0, 10]$ (Mignone, et al., 2018).

7. Το είδος διακριτοποίησης στο χώρο (spatial discretization): μέθοδος πεπερασμένων όγκων (FV), ή πεπερασμένων διαφορών (FD), αναλόγως το σύστημα των συντηρητικών νόμων. Δυνατότητα dimensionally splitting (Strang operator) ή όχι⁷⁴ (unsplit). Στην τελευταία περίπτωση ο υπολογισμός των μεταβλητών και των fluxes γίνεται ταυτόχρονα από όλες τις κατευθύνσεις.
8. Τη μέθοδο υπολογισμού των διανυσμάτων ροής (fluxes):⁷⁵ επίλυση μονοδιάστατου προβλήματος Riemann στο μέσο στις διεπιφάνειες των κελιών: γραμμικοποιημένος επιλύτης κατά Roe, HLL και HLLC επιλύτες κατά Li και HLLD κατά Miyoshi & Kusano και piecewise Lax-Friedrichs σχήμα (TVDLF). Το μαγνητικό πεδίο (η διακριτοποίησή του) υπολογίζεται ως cell-centered ή staggered/faced-centered (αναλόγως την επιλογή στο σημείο 2).
9. Τα σχήματα υψηλότερης ακρίβειας και οι slope limiters:
 Στην FV εκδοχή: επίπεδη ανακατασκευή (flat/1^{ης} τάξης), TVD) γραμμική ανακατασκευή (linear/2^{ης} τάξης), 3^{ης} τάξης WENO⁷⁶, κλαδική (piece-wise) παραβολική ανακατασκευή των πρωτεύουσών ή των συντηρητικών μεταβλητών (PPM) ή 3^{ης} τάξης limiter συνάρτηση.
 Στην FD εκδοχή: Σχήματα 3^{ης} και 5^{ης} τάξης ακριβείας (3^{ης} τάξης WENO+3, 5^{ης} τάξης WENOZ, 3^{ης} τάξης limiter συνάρτηση, monotonicity preserving σχήμα MP5).
 Limiters (για γραμμική ανακατασκευή): minmod, van Albada, OSPRE, harmonic mean limiter of van Leer, umist, monotonized central difference.
10. Τους όρους πηγής (source terms): Οι τοπικοί όροι πηγής αποτελούν συναρτήσεις των ίδιων των μεταβλητών και όχι των παραγώγων τους και συμπεριλαμβάνονται είτε στο advection βήμα, είτε μέσω του operator splitting (στις συγκεκριμένες συνθήκες, οι όροι πηγών που προαναφέρθηκαν, δημιουργούνται/διαχειρίζονται αυτόματα από το πρόγραμμα⁷⁷). Στα παραδείγματα περιλαμβάνονται η κεντρομόλος και οι όροι Coriolis (προκύπτουν έμμεσα για προβλήματα σε πολικές ή σφαιρικές συντεταγμένες), οι εξωτερικές δυνάμεις (όπως η βαρύτητα ή οι optically thin radiative losses). Τα μη ιδανικά φαινόμενα, όπως η συνεκτικότητα, η ειδική

⁷⁴ “Dimensionally unsplit schemes avoid the errors due to operator splitting and are generally preferred”, (Mignone, et al., 2018).

⁷⁵ «... under some circumstances (high Mach number flows, low density plasmas), more diffusive solvers such as HLL or TVDLF turn out to be more robust than accurate solvers» (Mignone, et al., 2018).

⁷⁶ Weighted Essentially Non-oscillatory Reconstruction.

⁷⁷ Μέσω του module για περιστρεφόμενο πλαίσιο.

αντίσταση και η θερμική συναγωγή, εισάγουν από την άλλη παραβολικού τύπου διορθώσεις στις εξισώσεις και εμπεριέχουν την λύση των εξισώσεων διάχυσης.

11. Τις συνοριακές συνθήκες (boundary conditions): Για τον ορισμό αρχικών και συνοριακών συνθηκών χρησιμοποιούνται οι πρωτεύουσες μεταβλητές και όχι οι συντηρητικές.

A) outflow: μηδενική κλίση όλων των μεγεθών στο σύνορο (ως προς την κατεύθυνση που είναι κάθετη στο σύνορο)

B) συμμετρικές/ reflective (rigid walls): οι μεταβλητές είναι συμμετρικές κατά μήκος του συνόρου με εξαίρεση τις κανονικές συνιστώσες των διανυσματικών πεδίων (για τις οποίες το μέτρο παραμένει σταθερό αλλά αλλάζει το πρόσημο)

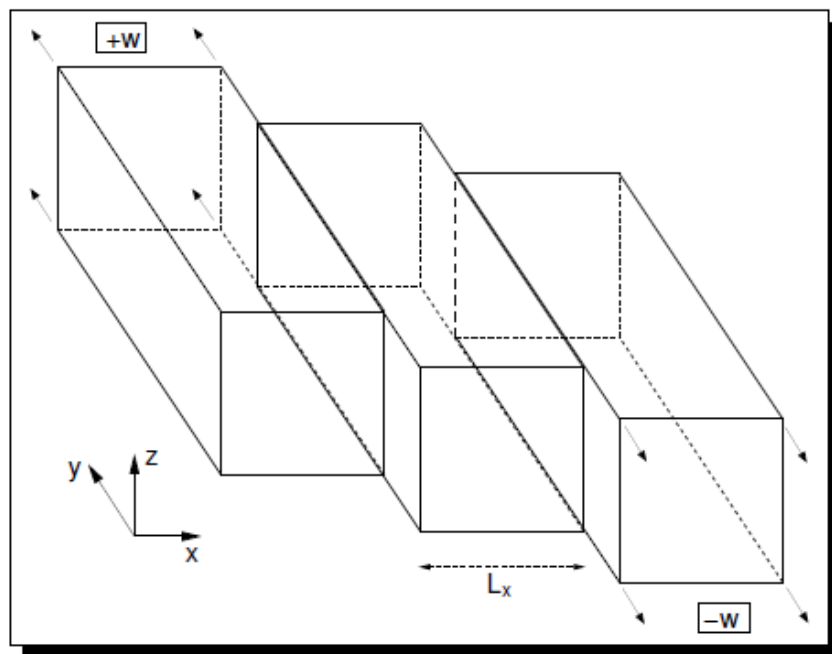
Γ) αξονοσυμμετρικές: όμοιες με τις (B) με τη διαφορά ότι και η γωνιακή συνιστώσα των διανυσματικών μεγεθών αλλάζει πρόσημο στην περίπτωση κυλινδρικών ή σφαιρικών συντεταγμένων.

Δ) συμμετρικές ως προς τον ισημερινό (συγκεκριμένο επίπεδο): όμοιες με τις (B) με το ανεστραμμένο πρόσημο να ισχύει όμως μόνο για την μαγνητική επαγωγή.

Ε) περιοδικές: και στις δύο πλευρές του υπολογιστικού χωρίου.

ΣΤ) shearing box: όμοιες με τις (Ε), με τη διαφορά ότι είναι sheared σε μία κατεύθυνση. Στην εικόνα 11 που ακολουθεί, το κεντρικό κουτί αναπαριστά το υπολογιστικό χωρίο μήκους L_x και δεξιά και αριστερά του βρίσκονται δύο πανομοιότυπα κουτιά που «γλιστρούν» με σταθερή ταχύτητα w το ένα ως προς το άλλο. Η συγκεκριμένη οριακή συνθήκη παρέχει το τοπικό μοντέλο ενός διαφορικά περιστρεφόμενου συστήματος, το οποίο προκύπτει μέσω της επέκτασης των παλιρροϊκών (tidal) δυνάμεων εντός ενός πλαισίου αναφοράς, που περιστρέφεται μαζί με το δίσκο σε κάποια ακτίνα αναφοράς.

Ζ) Ορισμένες από τον χρήστη.



Εικόνα 11: Σχηματική αναπαράσταση της shearing συνοριακής συνθήκης (Mignone et al., 2018).

12. Το είδος της διακριτοποίησης στο χρόνο - χρονικής ολοκλήρωσης (time integration):⁷⁸

1^{ης} τάξης ρητή Euler.

Δύο ειδών ρητές μέθοδοι: α) πλήρως διακριτές, zone-edge extrapolated (2^{ης} τάξης) και β) ημιδιακριτές⁷⁹. Για πάνω από μία διάσταση χρησιμοποιείται είτε operator splitting, είτε πλήρης πολυδιαστασιακή ολοκλήρωση (fully multidimensional integration). Αναλυτικότερα:

α) MUSCL-Hancock σχήμα ενός βήματος (σε συνδυασμό με γραμμική ανακατασκευή) με upwind limiting υπό συνθήκες & directionally splitting σχήμα.

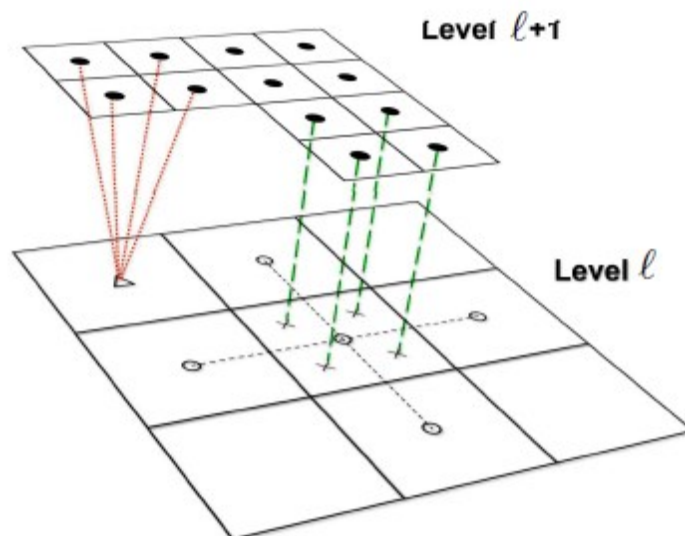
β) 2^{ης} και 3^{ης} τάξης TVD Runge-Kutta σχήματα από Gottfried & Shu και 1-12 Riemann προβλήματα ανά κελί και κατεύθυνση θα πρέπει να λυθούν από καθένα σχήμα αντίστοιχα.

Μπορεί να χρησιμοποιηθεί και 2^{ης} τάξης πεπλεγμένο σχήμα σε περιοχές ταχέων μεταβολών παράλληλα με 2^{ης} τάξης ρητό σχήμα για όλες τις άλλες.

Στα προβλήματα που επικρατεί η διάχυση και/ή στις αυξανόμενης υψηλής-ανάλυσης προσομοιώσεις, η ολοκλήρωση με ρητό σχήμα μπορεί σημαντικά να επιταχυνθεί χρησιμοποιώντας την υπερ-χρονικού βηματισμού μέθοδο, 1^{ης} τάξης ακρίβειας (Super Time Stepping, STS⁸⁰) (Mignone et al., 2007).

Για το λόγο αυτό, η με όρους συνεκτικότητας MHD, όπως και η μετάδοση θερμότητας, μπορεί να επιλύεται με α) ρητό τρόπο ή β) με STS ή γ) με RK-Legendre (RKL). Η Hall MHD μπορεί να επιλύεται μόνο με ρητό τρόπο.

13. Τον τρόπο επιτάχυνσης της αριθμητικής επίλυσης: παράλληλη επεξεργασία, grid adaptation (controlling refinement_AMR), restriction-prolongation (βλ. εικόνα 12).



Εικόνα 12: Σχηματικό διδιάστατο παράδειγμα διαδικασιών prolongation (πράσινες γραμμές, από το επίπεδο l στο $l+1$)-restriction (κόκκινες γραμμές, από το επίπεδο $l+1$ στο l) μεταξύ δύο επιπέδων με αναλογία refinement ίση με 2 (Mignone, et al., 2011).

⁷⁸ «Multi-step algorithms (RK2, RK3) work in all system of coordinates and are the default choice. Single Step Schemes (HANCOCK, CHARACTERISTICS TRACING) are more sophisticated, have less dissipation and have been tested mainly on Cartesian and cylindrical grids».

⁷⁹ «Semidiscrete methods are based on the classical method of lines, where the spatial discretization is considered separately from the temporal evolution that is left continuous in time» (Mignone et al., 2007).

⁸⁰ diffusion terms are included via operator splitting, and the solution vector is evolved over a super time step ΔT consisting of N smaller substeps.

14. Την ενδοεπικοινωνία μέσα στον κώδικα: MPI library, HDF5 library (για I/O σε συνδυασμό με την CHOMBO library, ή και για την στατική εκδοχή του πλέγματος του κώδικα), PNG library (όταν απαιτείται PNG έξοδος).
15. Το γραφικό περιβάλλον: IDL, Paraview, HDF5, VisIt, pyPLUTO, ASCII, VTK (Visualization Toolkit format), ppm και png εικόνες, Mathematica, gnuplot.
16. Πλεονεκτήματα/μειονεκτήματα:
 - Μεγάλος αριθμός φυσικών φαινομένων που μπορούν να συνδυαστούν.
 - Ποικιλία αλγορίθμων έχει κωδικοποιηθεί έτσι ώστε η επιλογή να επιβάλλεται από το πρόβλημα είτε με το χέρι και/ή με βάση κριτήρια αποδοτικότητας και ανθεκτικότητας.
 - Ο κώδικας έχει μεταφερθεί σε έναν αριθμό διαφορετικών Unix-based συστημάτων, ανάμεσα στα οποία τα IBM sp6/sp5/sp4, SGI Irix, Linux, Beowulf clusters, Mac OS X, Windows/Cygwin, IBM BluGene/P.
 - Απλή διεπιφάνεια χρήστη, βασισμένη στην γλώσσα κωδικοποίησης Python είναι διαθέσιμη, για να στηθεί ένα φυσικό πρόβλημα με απλό και αυτοεπεξηγηματικό τρόπο. Η διεπιφάνεια είναι τέτοια ώστε να ελαχιστοποιούνται οι προσπάθειες για κωδικοποίηση, που αφήνονται στο χρήστη.

2.14 RAMSES V.3.0

Ο κώδικας RAMSES αναπτύχθηκε στο Saclay για την μελέτη μεγάλης κλίμακας δομών και τη διαμόρφωση γαλαξιών. Σήμερα αποτελεί ένα αρκετά ευέλικτο πακέτο, το οποίο μπορεί να χρησιμοποιηθεί για γενικής χρήσης προσομοιώσεις στην δυναμική του self-gravitating ρευστού (Teyssier, 2008, Fromang, et al., 2006, Teyssier, et al., 2006, Teyssier, 2002). Ο κώδικας γράφτηκε από τον Romain Teyssier.

Όσον αφορά στα βασικά χαρακτηριστικά του κώδικα RAMSES:

1. Το είδος των εξισώσεων που επιλύει: ιδανικές εξισώσεις, με μετάδοση θερμότητας, με μετάδοση με ακτινοβολία, πολλών ειδών (multi species) ή πολλών υλικών⁸¹ (multi material) (ο κώδικας χρησιμοποιείται εντός του Horizon simulation/cosmological HD simulation). EOS: ιδανικού αερίου. Η εξίσωση μαγνητικής επαγωγής μπορεί να γραφτεί σε συντηρητική μορφή (για την περίπτωση εξισώσεων Euler), μέσω μιας ευθέως ολοκλήρωσης στο χώρο-χρόνο, συμπεριλαμβάνοντας την χρονικά και edge-averaged EMF (Fromang, et al., 2006). Επιπλέον, περιλαμβάνονται στις εξισώσεις και τριών ειδών βαρυτικές δυνάμεις (self-gravity (Poisson solver), αναλυτικό διάλυμα της ταχύτητας, self-gravity και επιπρόσθετο αναλυτικό προφίλ πυκνότητας) και όρος πηγής⁸² στις εξισώσεις ορμής και ενέργειας, για τον υπολογισμό της ψύξης και της θέρμανσης ενός πλουσίου σε μέταλλα πλάσματος, λόγω φυσικών διεργασιών σε επίπεδο ατόμου και ενός ομογενούς UV background (μοντέλο Haardt και Madau).
2. Τον τρόπο διατήρησης του σωληνοειδούς περιορισμού ($\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$): σχήμα περιορισμένης μεταφοράς (Fromang et al., 2006), υβριδική μέθοδος.
3. Τις διαστάσεις του προβλήματος που μπορεί να επιλύσει: 1, 2 ή 3 διαστάσεις, καρτεσιανές συντεταγμένες.

⁸¹ Συγκεκριμένα, συμπεριλαμβάνει αλγόριθμο μη-συγκρουσιακών (dark matter, stars) N-σωμάτων τύπου Particle-Mesh (PM), ο οποίος αποτελείται από Vlasov-Poisson εξισώσεις (Teyssier, 2002).

⁸² Για εφαρμογές στην κοσμολογία, στον σχηματισμό αστέρων και στην ανατροφοδότηση από σουπερνοβα.

4. Τη χρήση του: διατίθεται δωρεάν, αποκλειστικά για μη εμπορική χρήση, κάτω από την άδεια CeCILL. Εφαρμογές κυρίως στην αστροφυσική.
5. Τη γλώσσα προγραμματισμού: Fortran. Για την documentation και διάφορα post-processing εργαλεία: IDL, python, C ή Fortran 90.
6. Το είδος του πεδίου – πλέγματος: δομημένο, στατικό ή AMR.
7. Το είδος διακριτοποίησης στο χώρο (spatial discretization): 2^{ης} τάξης Godunov scheme (μέθοδος πεπερασμένων όγκων (Finite Volume methods). Χρήση των πρωτευουσών μεταβλητών για κάθε βήμα update εκτός του τελικού (Fromang, et al. 2006).
8. Τη μέθοδο υπολογισμού των διανυσμάτων ροής (fluxes): προσεγγιστικός επιλύτης Riemann LLF (local Lax-Friedrich), HLL, HLLD, Roe, Upwind, “hydro” (για αδιαβατικό αέριο). Για την εξίσωση μαγνητικής επαγωγής, οι ίδιοι πλην του hydro.
9. Τα σχήματα υψηλότερης ακρίβειας και οι slope limiters: κλαδική γραμμική ανακατασκευή (piecewise linear reconstruction) των πρωτευουσών ή των συντηρητικών μεταβλητών συν slope limiters: 1^{ης} τάξης σχήμα, Min mod limiter, MonCen limiter, Multi-dimensional MonCen limiter, Superbee & Ultrabee limiters (για 1D προσομοιώσεις) για τον έλεγχο της συνολικής διακύμανσης του ανακατασκευασμένου πεδίου.
Ολοκλήρωση με σχήμα MUSCL predictor-corrector, όπως παρουσιάστηκε από τον van Leer. Στο predictor βήμα, το μέγεθος υπολογίζεται στο μισό χρονικό βήμα ($t^{n+1/2} = t^n + \Delta t/2$), χρησιμοποιώντας ανάπτυγμα Taylor του υποκείμενου υπερβολικού συστήματος. Γίνεται επίσης χωρική ανακατασκευή του μεγέθους από το κέντρο του κελιού στις επιφάνειες του, χρησιμοποιώντας μια κλαδική γραμμική ανακατασκευή βασισμένη σε TVD slope limiters. Στο corrector βήμα, οι ροές υπολογίζονται λύνοντας ένα μονοδιάστατο πρόβλημα Riemann μεταξύ δύο (left, right) ανακατασκευασμένων καταστάσεων, στην διεπιφάνεια τελικά κάθε κελιού. Για την μαγνητική επαγωγή χρησιμοποιείται το σχήμα C-MUSCL⁸³ για το predictor βήμα και μονοδιάστατοι ή διδιάστατοι επιλύτες Riemann (στις ακμές των κελιών) για το corrector βήμα (Fromang, et al. 2006, Teyssier et al., 2007). Η επίλυση της εξίσωσης Poisson, δηλαδή της self-gravity (όταν λαμβάνεται υπόψη), γίνεται είτε με Multi-grid (MG), είτε με Conjugate Gradient (CG) solver, είτε με συνδυασμό τους.
10. Τους όρους πηγής (source terms): Η βαρύτητα περιλαμβάνεται στο σύστημα εξισώσεων σαν ένας non-stiff όρος πηγής, καθώς και η θέρμανση/ψύξη σε συγκεκριμένες συνθήκες.
11. Τις συνοριακές συνθήκες (boundary conditions): διαφόρων ειδών συνοριακές συνθήκες. Ειδικότερα:
Α) reflexive,
Β) outflow (zero gradients),
Γ) περιοδικές,
Δ) inflow- ορισμένες από το χρήστη (περίπλοκο).
Για την εξίσωση Poisson: είτε περιοδικές είτε Dirichlet.
12. Το είδος της διακριτοποίησης στο χρόνο - χρονικής ολοκλήρωσης (time integration):
Μονού χρονικού βήματος⁸⁴ σχήμα και adaptive χρονικού βήματος⁸⁵ σχήμα (παρόμοιο με «W cycle» με όρους πολυπλέγματος) (Teyssier, 2002). 1^{ης} τάξης (σε

⁸³ “Conservative MUSCL scheme: designed by dropping the solenoidality constraint for the predictor step”.

⁸⁴ Η ολοκλήρωση των εξισώσεων γίνεται με το ίδιο χρονικό βήμα για όλα τα επίπεδα του refinement.

⁸⁵ Κάθε επίπεδο εξελίσσεται στον χρόνο στο δικό του χρονικό βήμα, όπως ορίζεται σε συνάρτηση με την CFL συνθήκη.

ειδικές περιπτώσεις εφαρμογής του adaptive χρονικού βήματος), ειδικά 2^{ης} τάξης midpoint σχήμα (Teyssier, 2002), predictor-corrector βημάτων.

13. Τον τρόπο επιτάχυνσης της αριθμητικής επίλυσης: παράλληλη επεξεργασία με MPI, restriction-prolongation, Hilbert, planar ή angular χωρική decomposition, Peano-Hilbert space-filling curve για space ordering⁸⁶. Grid adaptation (adaptive mesh refinement, AMR): Quasi-Lagrangian στρατηγική, Jeans refinement στρατηγική, Discontinuity-based στρατηγική, Geometry-based στρατηγική. Για κάθε AMR grid, ο κώδικας βασίζεται σε tree-based⁸⁷ AMR δομή. Πολλών ειδών refinements μπορούν να χρησιμοποιηθούν (fluid variable gradients, instability wavelength, κ.λπ.).
14. Την ενδοεπικοινωνία μέσα στον κώδικα: MPI library.
15. Το γραφικό περιβάλλον: Output binary Fortran ή VTK files (εικόνες ή δεδομένα), τα οποία μπορούν να διαβαστούν χρησιμοποιώντας οποιοδήποτε κατάλληλο εργαλείο π.χ. Gnuplot, xmgrace. SDvision στο πλαίσιο του IDL Object Graphics.

2.15 RAMSES-GPU V.1.3.0

Ο RAMSES-GPU αποτελεί έναν γενικού σκοπού κώδικα, προσομοίωσης υδροδυναμικών και μαγνητοϋδροδυναμικών ροών, γραμμένο αρχικά για εφαρμογές αστροφυσικής. Ο σκοπός του είναι να παρέχει υλοποιήσεις GPU κάποιων FV αριθμητικών σχημάτων που χρησιμοποιούνται για τις παραπάνω προσομοιώσεις. Ο RAMSES-GPU εμπεριέχει ταυτόχρονα μια CPU και μία GPU implementation (χρησιμοποιώντας μοντέλο προγραμματισμού NVIDIA CUDA), σε ομοιόμορφο πλέγμα μόνο, για τον MHD αλγόριθμο που είχε αρχικά αναπτυχθεί στο Service d'Astrophysique of CEA/Saclay για τον κώδικα RAMSES και αργότερα ενσωματώθηκε στον κώδικα HERACLES.

Ο RAMSES-GPU αναπτύσσεται από το Maison de la Simulation (CUDA research and teaching center από το 2012) και το CEA/Sap. Η ανάπτυξη του ξεκίνησε 10 χρόνια πριν με σκοπό την αξιοποίηση της υπολογιστικής δύναμης των GPU clusters (Ryan, et al., 2017, Kestener, et al., 2014).

Όσον αφορά τα βασικά χαρακτηριστικά του κώδικα RAMSES-GPU:

1. Το είδος των εξισώσεων που επιλύει: ιδανικές εξισώσεις. Συμπεριλαμβάνονται κατά περίπτωση όροι διάχυσης (συνεκτικότητα, ειδική αντίσταση), όπως και η στατική βαρύτητα (π.χ. Rayleigh-Taylor study), self-gravity. EOS: εξίσωση ιδανικών αερίων.
2. Τον τρόπο διατήρησης του σωληνοειδούς περιορισμού ($\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$): με χρήση σχήματος περιορισμένης μεταφοράς.
3. Τις διαστάσεις του προβλήματος που μπορεί να επιλύσει: 1, 2 ή 3 διαστάσεις, καρτεσιανές συντεταγμένες. Δυνατότητα εύκολης προσαρμογής για κυλινδρικές ή σφαιρικές συντεταγμένες.
4. Τη χρήση του: για ερευνητικούς σκοπούς, διατίθεται δωρεάν με τους όρους διανομής της σύμβασης CeCILL. Εφαρμογές στην αστροφυσική (επιτρέπει πολύ μεγάλες προσομοιώσεις (για δίκτυα μεγέθους έως και 4096³) στο μεγαλύτερο GPU cluster που είναι διαθέσιμο σήμερα⁸⁸).
5. Τη γλώσσα προγραμματισμού: C++.
6. Το είδος του πεδίου – πλέγματος: δομημένο (μόνο ομοιόμορφο).

⁸⁶ Ο υπολογιστικός χώρος «αποσυντίθεται» σε επιμέρους επεξεργαστές, χρησιμοποιώντας την mesh partitioning strategy, που βασίζεται στο Peano-Hilbert cell ordering.

⁸⁷ “Parent cells are refined into children cells, on a cell-by-cell basis”.

⁸⁸ Στοιχεία ιστοσελίδας κώδικα 2015

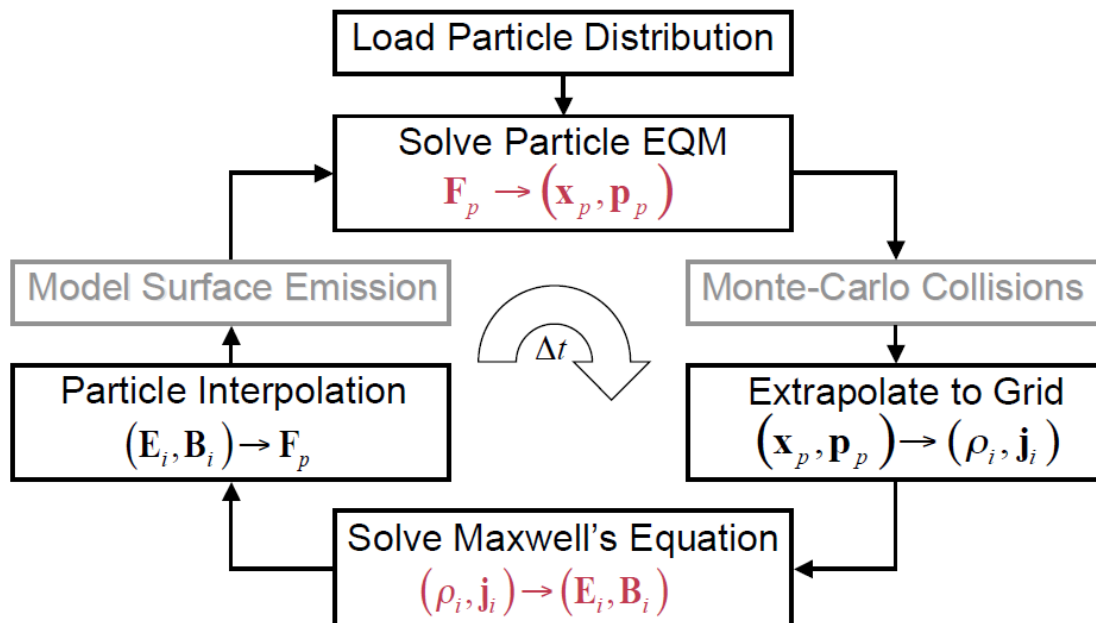
7. Το είδος διακριτοποίησης στο χώρο (spatial discretization): μέθοδος πεπερασμένων όγκων. Χρήση split και unsplit μεθόδων.
8. Τη μέθοδο υπολογισμού των διανυσμάτων ροής (fluxes): προσεγγιστικός επιλύτης Riemann διάφορων τύπων: HLL, LLF, HLLD (2^{ης} τάξης unsplit Godunov-based). Χρήση FFT-based (Fast Fourier Transformation) επιλύτη Poisson για την self-gravity.
9. Τα σχήματα υψηλότερης ακρίβειας και οι slope limiters: βασισμένο στο Godunov MUSCL_Hancock για 2^{ης} τάξης σχήματα. Υπολογισμός της μαγνητικής επαγωγής κατά face-averaged. MinMod ή MonCen slope limiters.
10. Τους όρους πηγής (source terms): οι όροι στατικής βαρύτητας καθώς και οι επιπρόσθετοι όροι όταν ενεργοποιείται το shearing box (π.χ. αδρανειακές δυνάμεις).
11. Τις συνοριακές συνθήκες (boundary conditions): διαφόρων ειδών συνθήκες:
 - A) Reflexive (wall).
 - B) Absorbent: το ρευστό μπορεί ελεύθερα να εγκαταλείψει το κουτί προσομοίωσης.
 - Γ) Περιοδικές.
 - Δ) Shearing box: για την διακριτοποίηση της διαφορικής περιστροφής π.χ. περίπτωση MRI.
 - E) z-stratified: χρήση του shearing box για προσομοίωση του accretion disk, η βαρύτητα είναι διαστρωματωμένη (χωρική διακριτοποίηση κατά μήκος του z άξονα).
12. Το είδος της διακριτοποίησης στο χρόνο-χρονικής ολοκλήρωσης (time integration): 2^{ης} τάξης στο χρόνο πεπλεγμένες μέθοδοι.
13. Τον τρόπο επιτάχυνσης της αριθμητικής επίλυσης: παράλληλη επεξεργασία με MPI και GPU (CUDA).
14. Την ενδοεπικοινωνία μέσα στον κώδικα: MPI library, parallel HDF5 με XDFM, parallel-NetCDF, pVTK file format.
15. Το γραφικό περιβάλλον: PnetCDF, HDF5, XDMF –Paraview VisIt, VTK, PNG, XSM, NRRD-xtk.
16. Πλεονεκτήματα/μειονεκτήματα:
 Η GPU-based λύση βοηθάει στην ταχύτερη επίλυση του προβλήματος και στην επίλυση μεγαλύτερων προβλημάτων σε λιγότερο χρόνο (εξαιρετικές επιδόσεις για single-GPU, πολύ καλές επιδόσεις για multi-GPU με ταυτόχρονη χρήση μεγάλου μεγέθους υπο-χωρίων).
 Έχει λειτουργήσει για κάποιες από τις μεγαλύτερες MHD προσομοιώσεις. Επιτρέπει την πλήρη εφαρμογή σε GPU.

2.16 TRISTAN-MP-PITP

Ο κώδικας TRISTAN-mp (TRIdimensional STANford-Massively Parallel code, pic method) αναπτύχθηκε από τους Anatoly Spitkovsky, Luis Gargate, Jaehong Park, Lorenzo Sironi, βασισμένος στον αρχικό κώδικα TRISTAN των O. Buneman, K. Nishikawa, και T. Neubert. Αποτελεί την παράλληλη εκδοχή (MP) του αρχικού κώδικα και είναι σχεδιασμένος με σπονδυλωτό τρόπο, ώστε τα νέα χαρακτηριστικά του να μπορούν να προστεθούν με σχετική ευκολία στον κώδικα.

Αποτελεί έναν πλήρως σχετικιστικό Particle-In-Cell (PIC) κώδικα, με χρήση στους υπολογισμούς της φυσικής του πλάσματος. Επιλύει το πλήρες σετ των εξισώσεων του Maxwell, μαζί με τις σχετικιστικές εξισώσεις κίνησης των φορτισμένων σωματιδίων. Ακολουθεί τη γενική αρχιτεκτονική των PIC κωδίκων: τα πεδία διακριτοποιούνται σε ένα

πεπερασμένο πλέγμα 3D ή 2D, το υπολογιστικό πεδίο, και αυτό το πεδίο στη συνέχεια χρησιμοποιείται για την ανάπτυξη της ταχύτητας των σωματιδίων μέσα στο χρόνο μέσω της εξίσωσης της δύναμης Lorentz (Spitkovsky, 2009, Spitkovsky, 2005).



Εικόνα 12: Διάγραμμα ροής του κώδικα TRISTAN-MP (Spitkovsky, 2009).

Όσον αφορά στα βασικά χαρακτηριστικά του κώδικα TRISTAN-mp:

1. Το είδος των εξισώσεων που επιλύει: Ουσιαστικά είναι μη ιδανικές, με ηλεκτροστατικό πεδίο. Απαντούν στο πρόβλημα επίλυσης 6d των εξισώσεων Maxwell-Vlasov (οι οποίες περιγράφουν το μη συγκρουσιακό πλάσμα), λύνοντας εξισώσεις για κάθε σωματίδιο (particle-in-cell). Εξισώσεις Maxwell και σχετικιστικές εξισώσεις της κίνησης για τα φορτισμένα σωματίδια.
2. Τις διαστάσεις του προβλήματος που μπορεί να επιλύσει: 1, 2, 3 διαστάσεις, καρτεσιανές συντεταγμένες.
3. Τη χρήση του: φυσική του πλάσματος, ανοιχτό λογισμικό.
4. Τη γλώσσα προγραμματισμού: Fortran 95.
5. Το είδος του πεδίου – πλέγματος: δομημένο.
6. Το είδος διακριτοποίησης στο χώρο (spatial discretization): μέθοδος πεπερασμένων διαφορών leapfrog.
7. Τη μέθοδο υπολογισμού των διανυσμάτων ροής (fluxes): Maxwell solver κατά Yee.
8. Τα σχήματα υψηλότερης ακρίβειας και οι slope limiters: 2^{ης} τάξης, 4^{ης} τάξης stencil. Tri-linear συνάρτηση παρεμβολής (γραμμική σε κάθε μία χωρική διάσταση) για την παρεμβολή του ηλεκτρικού και μαγνητικού πεδίου στις θέσεις των σωματιδίων. Tree point digital binomial filter, με διαφορετικούς σταθμικούς όρους/όρους βαρύτητας, χρησιμοποιείται στους όρους πηγής των εξισώσεων του πεδίου, για να «καταπίεσει» τις μη φυσικές υψηλής συχνότητας συνθήκες στο πεδίο.
9. Τους όρους πηγής (source terms): Τα φορτία και τα ρεύματα, που προκύπτουν από τις ταχύτητες και τις θέσεις των σωματιδίων, χρησιμοποιούνται στη συνέχεια σαν όροι πηγής για τον επανυπολογισμό των ηλεκτρομαγνητικών πεδίων.
10. Τις συνοριακές συνθήκες (boundary conditions): Ενδεικτικά:
 - περιοδικές,
 - conducting: ηλεκτρικό πεδίο παράλληλα του συνόρου ίσο με μηδέν,

- outgoing: ταίριασμα με ένα outgoing κύμα, στα E, B πεδία στο σύνορο,
 - perfectly matched layer: λειτουργεί σαν ένα απορροφητικό υλικό με διαφορετική αγωγιμότητα για τα E, B πεδία,
 - moving window: προσομοίωση που μπορεί να “πετάξει” με c για να ακολουθήσει μια γρήγορη ακτίνα,
 - injection: τα σωματίδια μπορούν να εισαχθούν από το σύνορο ή να δημιουργηθούν σε ζευγάρια κατά μήκος του χωρίου. Ενσωματώνονται κινούμενοι injectors και επεκτεινόμενα χωρία για προβλήματα με shock.
11. Το είδος της διακριτοποίησης στο χρόνο - χρονικής ολοκλήρωσης (time integration): 2^{ης} τάξης ακριβείας, πεπλεγμένο σχήμα (leapfrog scheme), ή ρητό σχήμα (Boris scheme).
 12. Τον τρόπο επιτάχυνσης της αριθμητικής επίλυσης: παράλληλη επεξεργασία, χωρική διαμέριση του πεδίου.
 13. Την ενδοεπικοινωνία μέσα στον κώδικα: MPI library, HDF5 library.

2.17 ZEUS-3D V.3.6

Ο κώδικας ZEUS ξεκίνησε σαν κώδικας HD, γραμμένος από τον M. Norman με τον J. Wilson στα τέλη της δεκαετίας του 1970. Ο D. Clarke έκανε ουσιώδεις τροποποιήσεις και βελτιώσεις στην αρχή της δεκαετίας του 80, και έδωσε το όνομα «ZEUS». Στο τέλος της δεκαετίας του 1980, ο J. Stone ξαναέγραψε τον κώδικα για να εισάγει ένα covariant διαφορικό φορμαλισμό, για να προσθέσει νέους αλγόριθμους για MHD και radiation HD και για να το εξάγει σε λειτουργικό UNIX. Ο εκ νέου γραμμένος κώδικας ονομάστηκε ZEUS-2D. Ο D. Clarke ξαναέγραψε πάλι τον κώδικα για να τον επεκτείνει σε 3D (ZEUS-3D). Έτσι δημιουργήθηκαν δύο διαφορετικές εκδοχές του κώδικα, οι οποίες ενσωματώνουν θεμελιακά τους ίδιους αλγόριθμους, αλλά διαφέρουν σε πολλές λεπτομέρειες. Πιο πρόσφατα, η ομάδα του M. Norman στο UCSD έχει αναπτύξει μία MPI εκδοχή, η οποία ονομάζεται ZEUS-MP, η οποία έχει και νεότερες εκδοχές, π.χ. βλέπε από J. Vernaleo (ZEUS – MP v1.5.19, “<http://www.netpurgatory.com/zeusmp.html>”, τελευταία τροποποίηση το 2012, F77 version, HDF4 libraries για output, MPI, GNU/Linux clusters), J. Hayes (ZEUS – MP v2.0, “https://github.com/bwoshea/ZEUS-MP_2” τελευταία τροποποίηση το 2007, F90 version) (Clarke, 2015, Clarke, 2010, Clarke, 1996).

Η ανάλυση γίνεται για τον ZEUS-3D v3.6, ο οποίος έχει τροποποιηθεί πιο πρόσφατα (2016). Ο συγκεκριμένος κώδικας αποτελεί ένα εργαλείο προσομοίωσης για multi-physics MHD εφαρμογές, σχεδιασμένος κατ'εξοχήν αλλά όχι αποκλειστικά για εφαρμογές στην αστροφυσική. Η πρώτη ανάπτυξη του κώδικα έγινε στο National Center for Supercomputing Applications (NCSA) μεταξύ του 1988 και του 1990, και το 1992 η version 3.2 έγινε διαθέσιμη στο κοινό.

Όσον αφορά στα βασικά χαρακτηριστικά του κώδικα ZEUS 3D:

1. Το είδος των εξισώσεων που επιλύει: ιδανικές εξισώσεις, Hall (ενός ρευστού ambipolar diffusion - για ρευστό χαμηλού ιονισμού, όπου η προσέγγιση είναι ενός ρευστού), σχετικιστικές εξισώσεις - μέσω προσέγγισης δύο ρευστών, με μετάδοση με ακτινοβολία, και πολλών υλικών (Lagrangian tracer particles). EOS: ισόθερμη, αδιαβατική ή πολυτροπική. Η πίεση είναι ισότροπη και η βαρύτητα είναι περιορισμένη σε καθορισμένη σημειακή μάζα. Υπάρχει η εξίσωση της ολικής ενέργειας και εναλλακτικά η εξίσωση της εσωτερικής ενέργειας, εκ των οποίων η μια μόνο χρησιμοποιείται, αναλόγως του τι θεωρείται σημαντικότερο: η αυστηρή διατήρηση της ενέργειας (χωρίς cooling και ambipolar diffusion) ή η αυστηρή

θετικά ορισμένη εσωτερική ενεργειακή πυκνότητα, με θετικά ορισμένες πιέσεις αντίστοιχα.

Επιπρόσθετες επιλογές: molecular cooling , ψευδο-βαρύτητα ("pseudogravity"). Η πρώτη επιλογή υποστηρίζεται από μια εξίσωση ψύξης για εννέα ψυκτικά⁸⁹, τοποθετημένη ως αρνητικός όρος στην εξίσωση της ολικής ενέργειας και στην εξίσωση της εσωτερικής ενέργειας (από την πλευρά των πηγών). Η δεύτερη επιλογή υποστηρίζεται από τεχνητές κλίσεις πιέσεων (artificial pressure gradients), σε τεχνητές ατμόσφαιρες. Το ψευδο-βαρυτικό δυναμικό έχει τις ίδιες μονάδες με την πίεση αντί με τις συνήθεις μονάδες βαρυτικού δυναμικού, και αντιμετωπίζεται ακριβώς όπως η πίεση στις ρουτίνες του όρου πηγών.

Για την σταθεροποίηση των shocks, χρησιμοποιείται κανονική (σε σύγκριση με την τεχνητή) gas diffusion.

2. Τον τρόπο διατήρησης του σωληνοειδούς περιορισμού ($\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$): σχήμα περιορισμένης μεταφοράς, υβριδική μέθοδος, τροποποιημένη με την συνεκτική μέθοδο των χαρακτηριστικών (Consistent Method of Characteristics, CMoC). Η συγκεκριμένη μέθοδος χρησιμοποιήθηκε για την επίλυση του χρόνιου προβλήματος της «εκρηκτικής» ανάπτυξης (μέσα σε ένα χρονικό βήμα) των ασθενών μαγνητικών πεδίων στη γειτονιά της ισχυρής διατμητικής ταχύτητας (Clarke, 1996).
3. Τις διαστάσεις του προβλήματος που μπορεί να επιλύσει⁹⁰: 1, 1 1/2, 2, 2 1/2 ή 3 διαστάσεις, καρτεσιανές (1, 2, 3d), κυλινδρικές (1, 2d) ή σφαιρικά πολικές (1d) συντεταγμένες.
4. Τη χρήση του: αποτελεί ανοιχτό κώδικα για ακαδημαϊκή, ερευνητική, μη επικερδή, μη στρατιωτική χρήση, κάτω από την Implicit User Agreement. Με ειδική γραπτή άδεια μπορεί να γίνει εμπορική χρήση του. Χρησιμοποιείται ευρέως από την αστροφυσική κοινότητα: τον Ιανουάριο του 2003, υπήρχε αναφορά της μεθοδολογίας του ZEUS από 480 papers στα NASA ADS.
5. Τη γλώσσα προγραμματισμού: Fortran77.
6. Το είδος του πεδίου – πλέγματος: δομημένο (ομοιόμορφο ή όχι), πλέγμα Eulerian (δεν ακολουθεί/μεταβάλλεται με την ροή του ρευστού). Ο κώδικας έχει και δυνατότητα δημιουργίας πλέγματος. Operator split σχήμα (directional και planar splitting).
7. Το είδος διακριτοποίησης στο χώρο (spatial discretization): μέθοδος πεπερασμένων διαφορών. Οι εξισώσεις είναι γραμμένες σε covariant μορφή⁹¹ για την ελαχιστοποίηση των επιδράσεων από τα διαφορετικά συστήματα συντεταγμένων στην κατασκευή του κώδικα και το δίκτυο είναι πλήρως staggered. Επιπρόσθετα, χρησιμοποιείται, ένας από τους παρακάτω Poisson επιλύτες για το βαρυτικό δυναμικό (self-gravity): successive overrelaxation (SOR), Full-Multigrid (FMG), FFT/FST solvers. Για σημειακό μαζικό δυναμικό (point mass potential), χρησιμοποιούνται όροι πηγής ταχύτητας (velocity source terms). Μπορεί να υπάρχει μεμονωμένο ή συνδυασμός των δυναμικών.
8. Τη μέθοδο υπολογισμού των διανυσμάτων ροής (fluxes): σχήμα upwind, μονοτονική παρεμβολή χρησιμοποιώντας one of donor cell (1^{ης} τάξης). Consistent Advection (CA) για την εξέλιξη της εσωτερικής ενέργειας και της ροπής και CT με MoC για τα μαγνητικά πεδία. Ο υπολογισμός των fluxes γίνεται απευθείας από τις

⁸⁹ Hi, Hii, Ci, Cii, Ciii, Oi, Oii, Oiii, Sii.

⁹⁰ Οι κλασματικοί όροι εννοούν ότι οι διανυσματικοί όροι στην κατεύθυνση/εις συμμετρίας συμπεριλαμβάνονται.

⁹¹ "Meaning key vector identities (e.g., $\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{A} = 0$; $\nabla \times \nabla \phi = 0$) are preserved to machine round-off error for the three most commonly used orthogonal coordinate systems: Cartesian (XYZ); cylindrical (ZRP); and spherical polar (RTP)".

ταχύτητες στην διεπιφάνεια των ζωνών, δεν χρειάζεται να γίνουν παρεμβολές ούτε να επιλυθούν χαρακτηριστικές εξισώσεις για να υπολογιστούν αυτές οι ταχύτητες (Clarke, 2016).

9. Τα σχήματα υψηλότερης ακρίβειας και οι slope limiters: σχήματα upwind, μονοτονική παρεμβολή, χρησιμοποιώντας τους αλγορίθμους van Leer (2^{ης} τάξης) και PPI (piecewise parabolic interpolation, 3^{ης} τάξης). Operator και directional splitting. Von-Neumann Richtmyer artificial viscosity για την εξάπλωση των shocks.
10. Τους όρους πηγής (source terms): Σαν όροι πηγής αντιμετωπίζονται η κλίση της πίεσης, ο όρος $p \nabla \cdot \mathbf{u}$ καθώς και ο όρος της συνεκτικότητας (Clarke, 2006). Επιπλέον, αναφέρθηκε στο σημείο 7 για την περίπτωση του σημειακού μαζικού δυναμικού ως όρος πηγής.
11. Τις συνοριακές συνθήκες (boundary conditions): δέκα ειδών, συγκεκριμένα:
 - Slip periodic.
 - Reflecting: ιδιαιτερότητα δικτύου ή συμμετρία άξονα.
 - Reflecting/non-conducting boundary: η μαγνητική επαγωγή παράλληλα στο σύνορο ισούται με μηδέν.
 - Reflecting/conducting boundary: η μαγνητική επαγωγή κάθετα στο σύνορο ισούται με μηδέν.
 - Reflecting, άλλος τύπος: το \mathbf{B} δεν αλλάζει πρόσημο κατά μήκος του συνόρου (καμία από τις συνιστώσες του).
 - Self-computing (για το AMR).
 - Outflow: δεν είναι ακόμα λειτουργικό.
 - Selective inflow: συμπεριφέρεται σαν την non-characteristic inflow συνοριακή συνθήκη, με τη διαφορά ότι επιτρέπει καθορισμένες μεταβλητές στο σύνορο να παίρνουν την τιμή του εγγύτερου σημείου του δικτύου/ανάλογα με την τιμή στην εγγύτερη ενεργή ζώνη του δικτύου, παρά να τίθενται στις προαποφασισμένες συνοριακές σειρές.
 - Non-characteristic outflow.
 - Non-characteristic inflow.Οι συνοριακές συνθήκες για την ολική ενέργεια δεν τίθενται άμεσα, αλλά υπολογίζονται από τις συνοριακές τιμές των πρωτευουσών μεταβλητών. Επιπλέον, η συνοριακή συνθήκη για το βαρυτικό δυναμικό αντιμετωπίζεται ξέχωρα από τις MHD συνοριακές συνθήκες, λόγω τις ελλειπτικής φύσεως της εξίσωσης Poisson, σε αντίθεση με την υπερβολική φύση των MHD εξισώσεων. Συγκεκριμένα, υπάρχουν: περιοδικές, six-term multipole expansion και αναλυτικές (ή προεπιλεγμένες) συνοριακές τιμές.
12. Το είδος της διακριτοποίησης στο χρόνο-χρονικής ολοκλήρωσης (time integration): ρητή μέθοδος, super-stepping Runge-Kutta μέθοδος των Meyer, Balsara & Aslam. Για την περίπτωση της ambipolar diffusion: subcycling⁹², όχι subcycling και super-time stepping.
13. Τον τρόπο επιτάχυνσης της αριθμητικής επίλυσης: παράλληλη επεξεργασία (με το OpenMP, φτάνει στο 98/100, Cray microtaking) δημιουργία πολυπλέγματος (multigrid). Βρίσκεται υπό ανάπτυξη: grid adaptation (AMR εκδοχή, AZEuS/Adaptive Zone Eulerian Scheme).
14. Το γραφικό περιβάλλον: PSLOT, NCAR, HDF4, ASCII, mpeg movie file.

⁹² Αλγόριθμος ολοκλήρωσης με σταδιακά μικρότερα βήματα (Wikipedia.org).

Κεφάλαιο 3: Προβλήματα - test cases

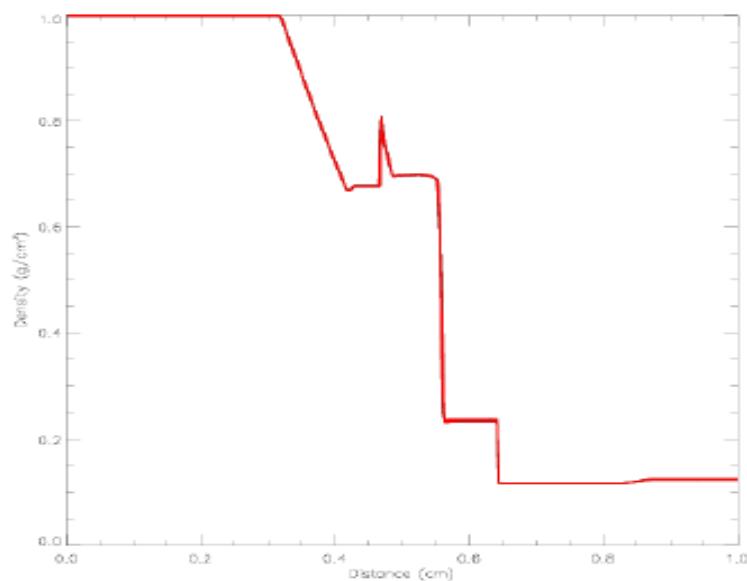
Στο παρόν κεφάλαιο θα παρουσιαστούν προβλήματα και λύσεις με βάση τους κώδικες που αναλύθηκαν στο προηγούμενο κεφάλαιο για προβλήματα ιδανικών και μη ιδανικών εξισώσεων σε όλες τις διαστάσεις. Θα παρουσιαστούν με τη σειρά αποτελέσματα για πέντε (5) συχνά προβλήματα (test cases), τα οποία επιλέγονται ως επί το πλείστον για την δοκιμή ενός MHD κώδικα. Αναλόγως της διάστασης ή των συντεταγμένων, αλλάζουν και τα προς δοκιμή προβλήματα.

Στο τέλος του κεφαλαίου παρουσιάζονται ομαδικά τα προβλήματα που φέρεται να επιλύει κάθε κώδικας, σύμφωνα με την βιβλιογραφία που χρησιμοποιήθηκε στην παρούσα εργασία.

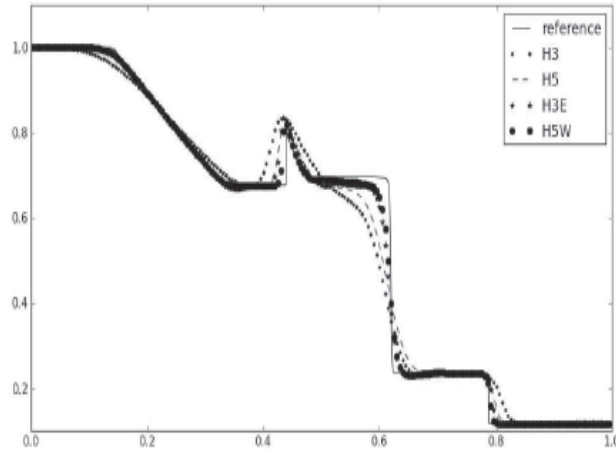
3.1 Brio-Wu MHD shock tube (1d)

Αποτελεί το συνεπίπεδο μαγνητοϋδροδυναμικό ανάλογο του υδροδυναμικού προβλήματος Sod. Συγκεκριμένα, οι Brio και Wu ανέπτυξαν ένα test πρόβλημα για μονοδιάστατους επιλύτες MHD, βασιζόμενοι στο πρόβλημα shock-tube του Sod. Δύο στάσιμα plasmas είναι διαχωρισμένα από μία μεμβράνη, η οποία απομακρύνεται την χρονική στιγμή 0, επιτρέποντας τα plasmas να αλληλεπιδράσουν (Powell, 1994).

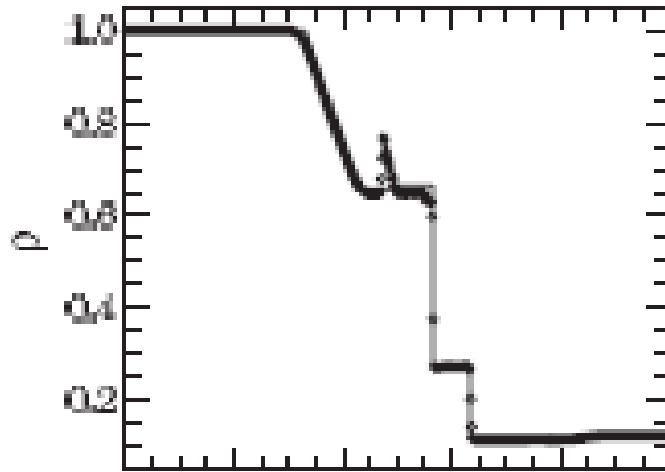
Κατάλληλο πρόβλημα Riemann για τον έλεγχο των κυματικών ιδιοτήτων ενός MHD επιλύτη, γιατί περιλαμβάνει 2 ταχέα rarefaction κύματα, ένα αργό compound κύμα, μια ασυνέχεια επαφής και ένα αργό κρουστικό κύμα (Flash Center for Computational Science, University of Chicago, 2019). Παραθέτονται στη συνέχεια τα προφίλ της πυκνότητας, μετά από εφαρμογή του κώδικα FLASH, του κώδικα ALSVID-UQ και του κώδικα ZEUS-3D (εικόνες 13-15).



Εικόνα 13: Προφίλ πυκνότητας για το Brio-Wu shock tube πρόβλημα, με εφαρμογή του κώδικα FLASH (Flash Center for Computational Science, University of Chicago, 2019).



Εικόνα 14: Προφίλ πυκνότητας για το Brio-Wu shock tube πρόβλημα, με εφαρμογή του κώδικα ALSVID-UQ (Fuchs, et al., 2011).



Εικόνα 15: Προφίλ πυκνότητας για το Brio-Wu shock tube πρόβλημα, με εφαρμογή του κώδικα ZEUS-3D (Clarke, 2010).

3.2 Orszag-Tang MHD Vortex (2d, 3d)

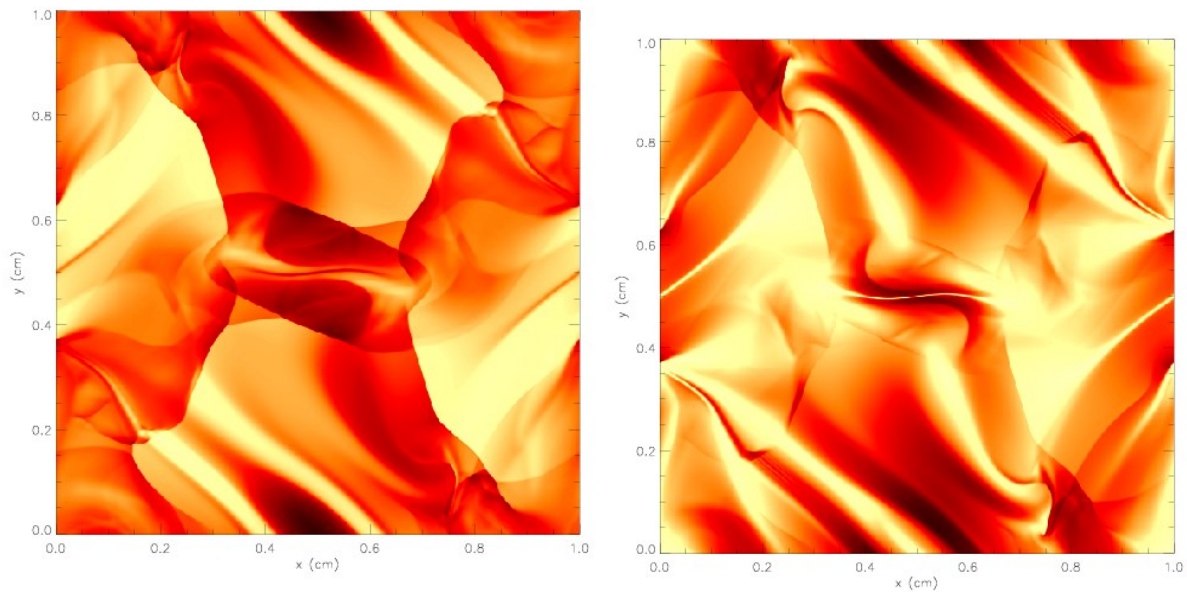
Αποτελεί ένα απλό διδιάστατο πρόβλημα, που είναι κλασικό τεστ στις δύο διαστάσεις για τους κώδικες επίλυσης MHD. Στο εν λόγω πρόβλημα, μία απλή, μη-τυχαία αρχική συνθήκη επιβάλλεται την χρονική στιγμή $t=0$ (Fuchs, et al., 2011), (Orszag, et al., 1979). Συγκεκριμένα:

$$(\rho, \rho \mathbf{V}, \mathbf{B}, p) = (\gamma^2, -\gamma^2 \sin(\pi y), \gamma^2 \sin(\pi x), 0, -\sin(\pi y), \sin(2\pi x), 0, \gamma) \quad [3.1]$$

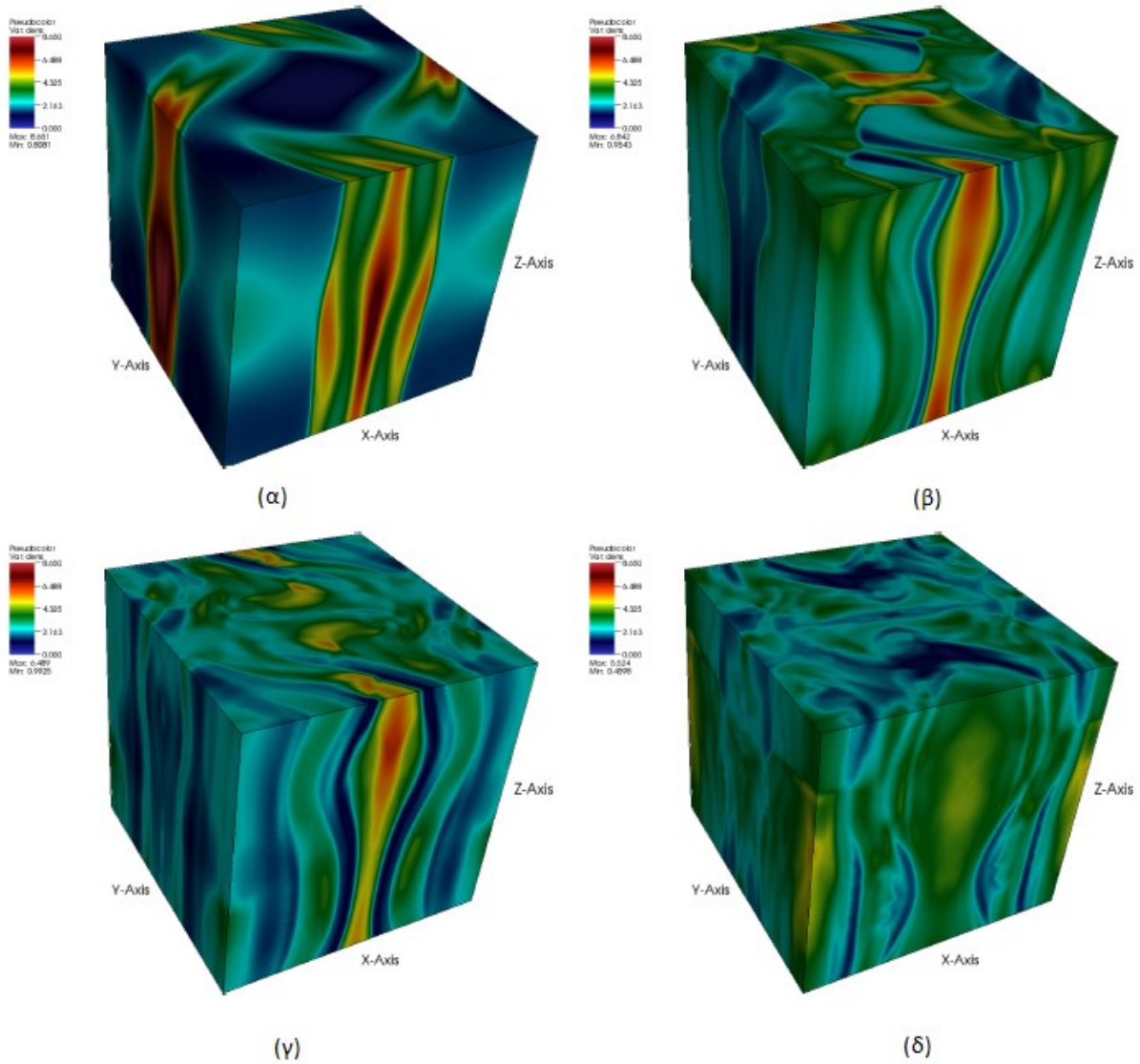
Κατά συνέπεια, η αρχική ροή είναι ένας στρόβιλος ταχύτητας, επιβεβλημένος πάνω σε ένα στρόβιλο μαγνητικού πεδίου, με ένα κοινό X-point αλλά με διαφορετική κατασκευή. Όσο περνάει ο χρόνος, το μοτίβο της στροβιλώδους ροής γίνεται όλο και περισσότερο πολύπλοκο, λόγω των μη γραμμικών αλληλεπιδράσεων των κυμάτων. Μια προσομοίωση του προβλήματος υψηλής τάξης θα παρήγαγε 2-διάστατη MHD τύρβη.

Ακολουθούν οι λύσεις του προβλήματος από τους κώδικες FLASH, FARGO3D, MANCHA3D, NIRVANA και RAMSES-GPU.

Από τον κώδικα FLASH, παραθέτονται οι ισοϋψείς καμπύλες για την πυκνότητα και το μαγνητικό πεδίο, την χρονική στιγμή $t = 0.5$ (Εικόνα 16) καθώς και η πυκνότητα υπολογισμένη σε διαφορετικές χρονικές στιγμές, συναρτήσει της θέσης σε 3-διάστατο πρόβλημα (Εικόνα 17). Όπως μπορεί κανείς να δει από την Εικόνα 16, το μοτίβο της ροής την συγκεκριμένη στιγμή είναι ήδη πολύπλοκο. Έχουν δημιουργηθεί πολυάριθμα ισχυρά κύματα, που περνάνε το ένα μέσα από το άλλο, δημιουργώντας χαρακτηριστικά τυρβώδους ροής σε όλες τις χωρικές κλίμακες. Η Εικόνα 17, παρουσιάζει τα αποτελέσματα για την πυκνότητα για 3-διάστατο πρόβλημα.

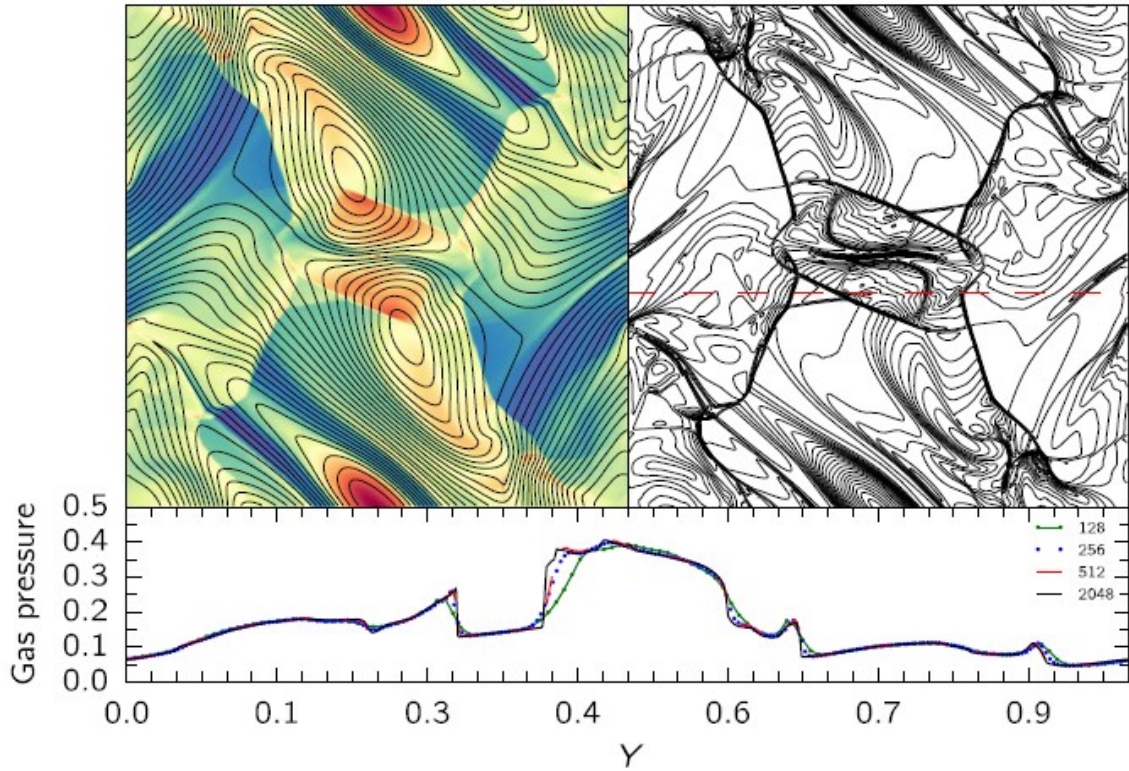


Εικόνα 16: Ισοψείς καμπύλες για πυκνότητα (αριστερά) και για μαγνητικό πεδίο (δεξιά), στο Orszag-Tang MHD vortex πρόβλημα, για την ίδια χρονική στιγμή ($t = 0.5$), κώδικας FLASH (Flash Center for Computational Science, University of Chicago, 2019).



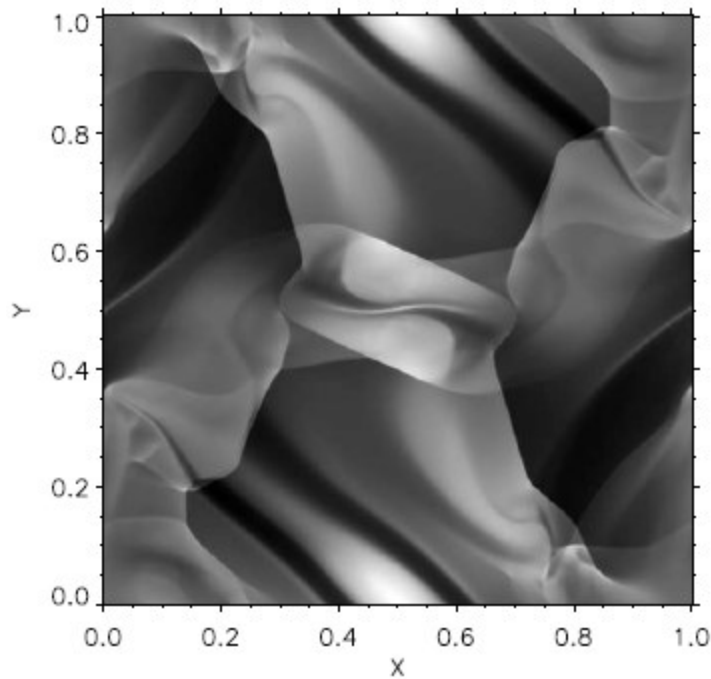
Εικόνα 17: Απεικόνιση της πυκνότητας σε 3-D εκδοχή του Orszag-Tang MHD vortex προβλήματος, για ομοιόμορφο δίκτυο 128 σημείων α) τη χρονική στιγμή $t=0$, β) τη χρονική στιγμή $t=0,2$, γ) τη χρονική στιγμή $t=0,5$, δ) τη χρονική στιγμή $t=1$, κώδικας FLASH (Flash Center for Computational Science, University of Chicago, 2019).

Από τον κώδικα FARGO3D, παρουσιάζονται ομοίως χάρτες για την πυκνότητα, το μαγνητικό πεδίο και την πίεση του αερίου, για την ίδια χρονική στιγμή $t = 0.5$ (Εικόνα 18). Μάλιστα, στο διάγραμμα της πίεσης του αερίου για $y = \text{σταθ. του πλέγματος}$, φαίνονται οι ομοιότητες- στις περιοχές αραιότερων ισοϋψών πίεσης- στο αποτέλεσμα για διαφορετικής πυκνώσης πλέγματα (128, 256, 512, 2048) και οι διαφορές - στις περιοχές πυκνότερων ισοϋψών πίεσης π.χ. για $0.3 \leq y \leq 0.65$.

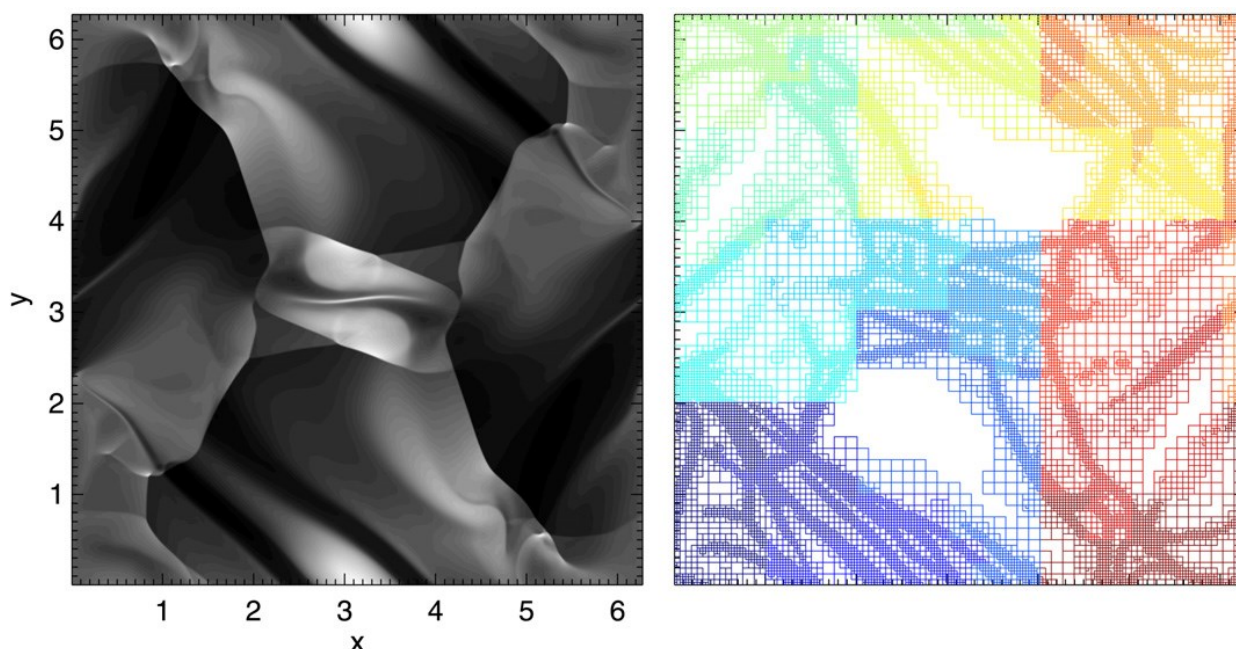


Εικόνα 18: Χάρτης της πυκνότητας με κλίμακα χρώματος, πάνω στον οποίο φαίνονται οι μαγνητικές γραμμές (πάνω αριστερά), ισοϋψείς καμπύλες της πίεσης του αερίου (πάνω δεξιά) και καμπύλη της πίεσης του αερίου για ένα συγκεκριμένο γ (διάγραμμα), την τομή με κόκκινη διακεκομμένη στο χάρτη των ισοϋψών, για $t = 0.5$, Orszag-Tang MHD vortex πρόβλημα, κώδικας FARGO3D (Benítez-Llambay, et al., 2016).

Ομοίως, τα αποτελέσματα για την πυκνότητα από τον κώδικα MANCHA3D και για την πίεση από τον κώδικα NIRVANA, δίνονται στις Εικόνες 19 και 20 που ακολουθούν.

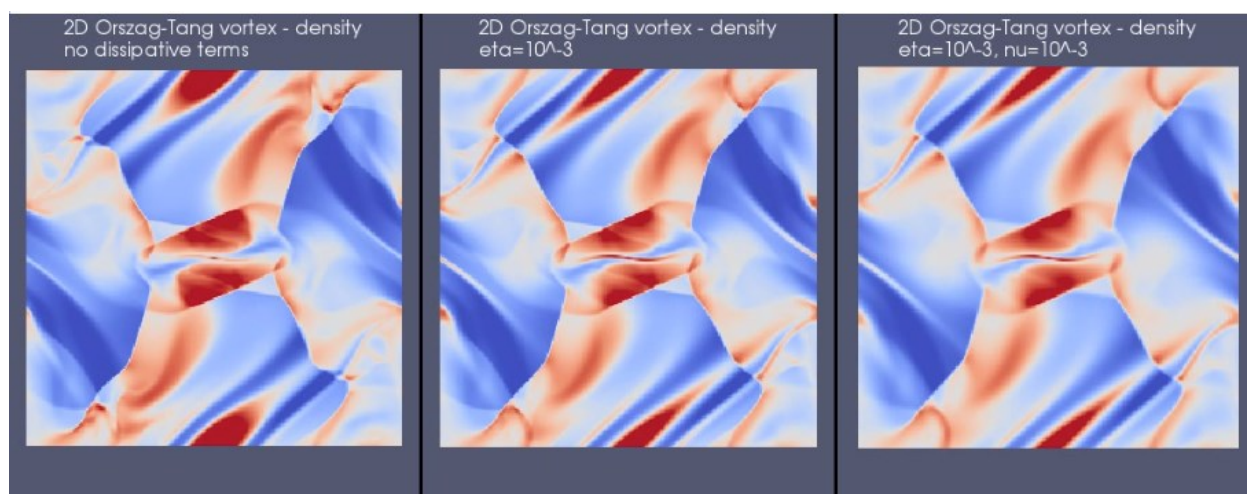


Εικόνα 19: Ισοϋψείς καμπύλες για πυκνότητα στο Orszag-Tang MHD vortex πρόβλημα, για την ίδια χρονική στιγμή ($t = 0.5$), κώδικας MANCHA3D (Garcia, 2010).



Εικόνα 20: Ισοϒψείς καμπύλες πίεσης (αριστερά) και κατανομή των blocks του πλέγματος (AMR, δεξιά) για το Orszag-Tang MHD vortex πρόβλημα, κώδικας NIRVANA (Ziegler, 2008).

Τέλος, στην Εικόνα 21, παρουσιάζεται η πυκνότητα του πεδίου σε 3 διαφορετικές περιπτώσεις επίλυσης του προβλήματος: χωρίς όρους διάχυσης, με όρους διάχυσης (ειδική αντίσταση ή συνεκτικότητα και ειδική αντίσταση), από τον κώδικα RAMSES – GPU.



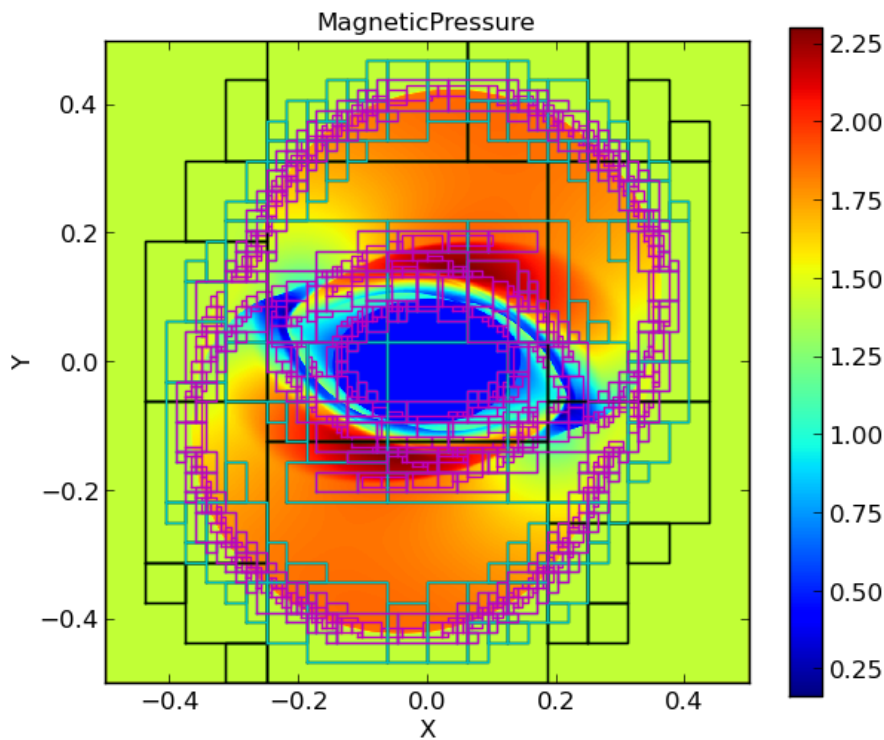
Εικόνα 21: Πυκνότητα πεδίου σε πρόβλημα Orszag-Tang χωρίς χρήση όρων διάχυσης (αριστερά), με όρο αντίστασης (κέντρο) και με όρο αντίστασης και συνεκτικότητας (δεξιά), κώδικας RAMSES – GPU (<http://www.maisondelasimulation.fr/projects/RAMSES-GPU/html/gallery.html>).

3.3 MHD rotor (ρότορας) (2d)

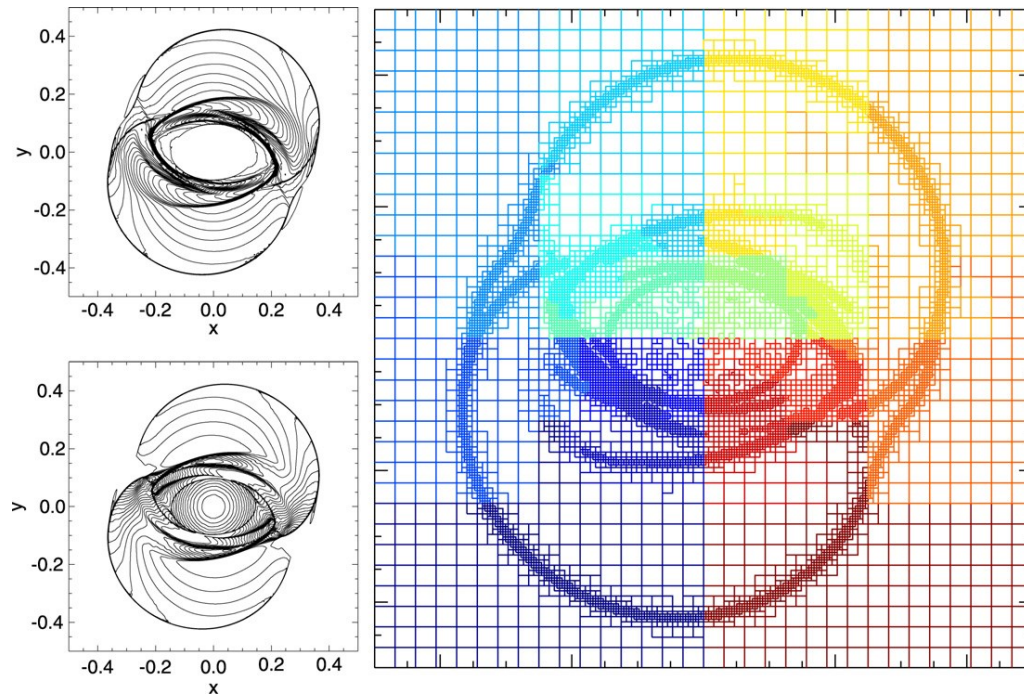
Το 2-D MHD πρόβλημα ρότορα έχει σχεδιαστεί για να μελετηθούν η απαρχή και η διάδοση των ισχυρών στρεπτικών κυμάτων Alfvén, τα οποία είναι με αυτό τον τρόπο σχετιζόμενα με τον σχηματισμό των άστρων. Το αρχικό στήσιμο αποτελείται από έναν πυκνό περιστρεφόμενο δίσκο στο κέντρο του υπολογιστικού χώρου, περιβαλλόμενο από ροή σε ακινησία με ομοιόμορφη πυκνότητα και πίεση. Η γρήγορη περιστροφή του ρότορα δεν αποτελεί κατάσταση ισορροπίας, λόγω των φυγόκεντρων (αδρανειακών) δυνάμεων.

Όπως ο ρότορας περιστρέφεται με την δεδομένη αρχική γωνιακή ταχύτητα, το αρχικά ομοιόμορφο μαγνητικό πεδίο κατά την x διεύθυνση, θα «κουρδίσει». Ο ρότορας θα τυλιχθεί γύρω από το μαγνητικό πεδίο και για αυτό θα ξεκινήσουν να δημιουργούνται στρεπτικά κύματα Alfvén στο περιβάλλον ρευστό. Η στροφορμή του ρότορα θα εξαφανιστεί με την πάροδο του χρόνου. Ο κυκλικός ρότορας θα συμπιεστεί σταδιακά σε οβάλ σχήμα, λόγω της δημιουργούμενης μαγνητικής πίεσης γύρω του. Οι κώδικες που επιλύουν το διδιάστατο πρόβλημα είναι ο FLASH, NIRVANA, PLUTO, FARGO3D, ECHO, ALSVID-UQ. Ο κώδικας ZEUS3d επιλύει το πρόβλημα σε μία διάσταση.

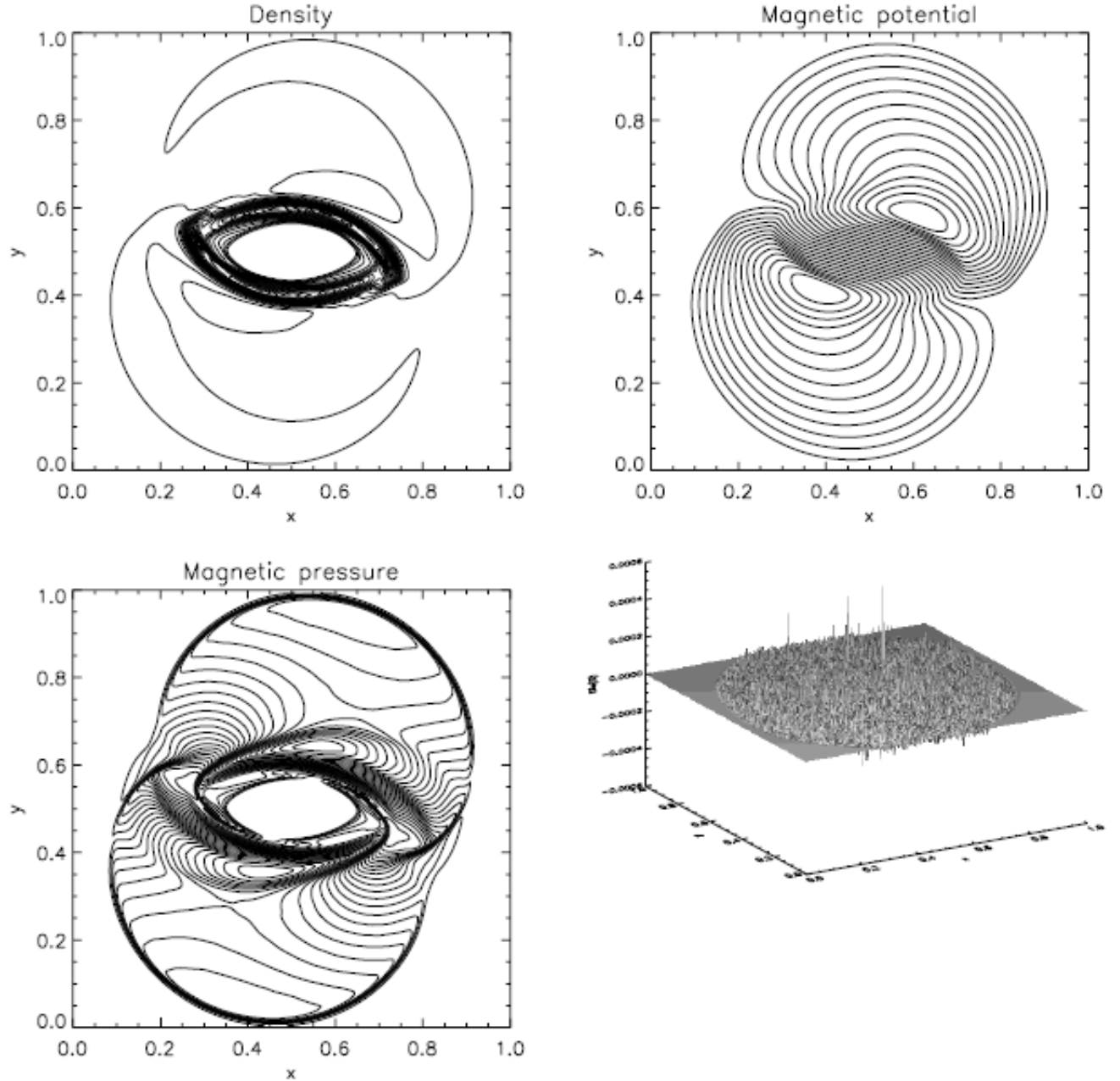
Παρατίθενται στην συνέχεια τα αποτελέσματα από τους κώδικες PLUTO για την ολική μαγνητική πίεση (Εικόνα 22), από τον κώδικα NIRVANA για την πίεση και το τετράγωνο της ταχύτητας (Εικόνα 23), από τον κώδικα ECHO για την πυκνότητα του ρευστού, την μαγνητική πίεση, το μαγνητικό δυναμικό και την απόκλιση του μαγνητικού πεδίου (Εικόνα 24) και από τον κώδικα FARGO3D για την πυκνότητα σε καρτεσιανές και κυλινδρικές συντεταγμένες (Εικόνα 25).



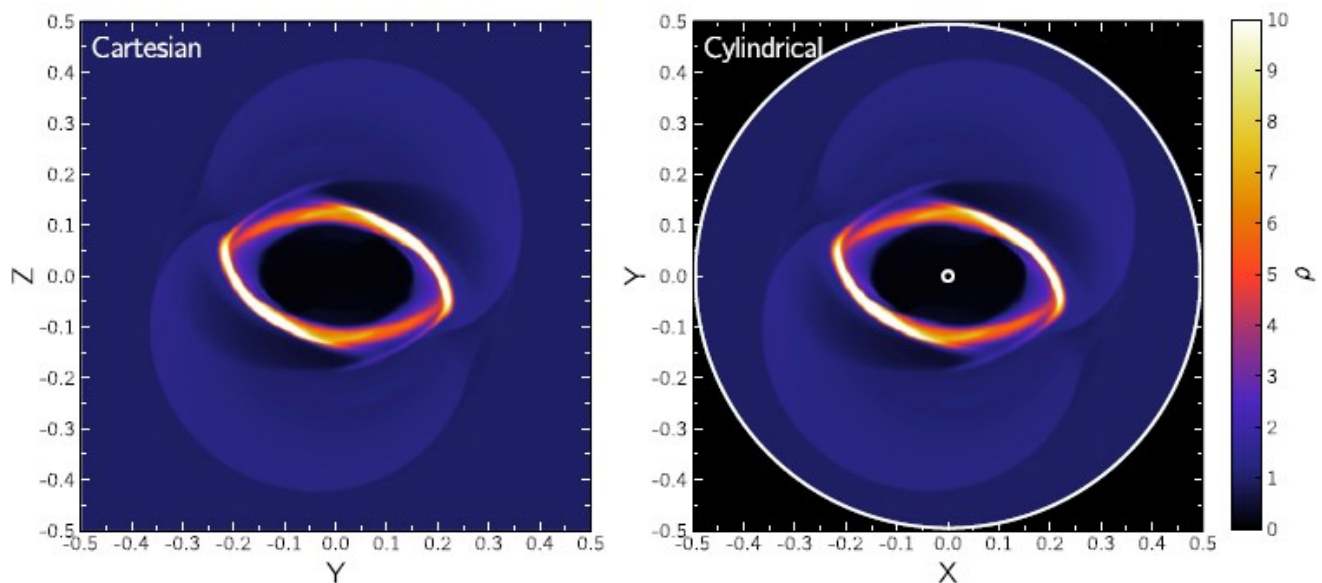
Εικόνα 22: Ολική μαγνητική πίεση του ρευστού για το πρόβλημα MHD rotor σε 2d, τέσσερα AMR επίπεδα (γκρι, πράσινο, φούξια, κόκκινο χρώμα), που χρησιμοποιήθηκαν για την διαδοχική πύκνωση του πλέγματος, για να αποδοθεί αυτή η λύση, κώδικας PLUTO (Mignone, et al., 2018).



Εικόνα 23: Ισοϋψείς καμπύλες πίεσης p (πάνω αριστερά) και του τετραγώνου της ταχύτητας V^2 (κάτω αριστερά) για το πρόβλημα MHD rotor καθώς και block διαμέριση την τελική χρονική στιγμή (τα διαφορετικά χρώματα αντιστοιχούν σε διαφορετικά partitions του πλέγματος, δεξιά), κώδικας NIRVANA (Ziegler, 2008).



Εικόνα 24: Αποτελέσματα κώδικα *ECHO* για την πυκνότητα του ρευστού (πάνω αριστερά), την μαγνητική πίεση (κάτω αριστερά), το μαγνητικό δυναμικό (πάνω δεξιά) και την απόκλιση του μαγνητικού πεδίου ($\text{div} \mathbf{B}$, κάτω δεξιά) για *MHD rotor 2d* πρόβλημα για $t = 0.18$ (Londrillo, et al., 2000).



Εικόνα 25: Αποτελέσματα κώδικα FARGO3D για την πυκνότητα του ρευστού για MHD rotor 2d πρόβλημα σε καρτεσιανές (αριστερά) και κυλινδρικές (δεξιά, η άσπρη γραμμή είναι το όριο του χωρίου) συντεταγμένες για $t = 0.15$ (Benítez-Llambay, et al., 2016).

Όσο τα στρεπτικά κύματα που προέρχονται από τον κεντρικό ρότορα δεν φτάνουν στα σύνορα του υπολογιστικού χωρίου, όπως στην περίπτωση της Εικόνας 25, η συμφωνία μεταξύ των δύο λύσεων, δηλαδή για καρτεσιανές και για κυλινδρικές συντεταγμένες, θα συνεχίζει να είναι αξιοσημείωτη.

3.4 MHD current sheet (φύλλο ρεύματος) (2d)

Το φύλλο ρεύματος αποτελεί μία επιφάνεια του χώρου από την οποία περνάει ηλεκτρικό ρεύμα (π.χ. ένα σύνολο αγωγών ηλεκτρικού ρεύματος τοποθετημένων παράλληλα, ο ένας δίπλα στον άλλο, αποτελεί ένα φύλλο ρεύματος). Αν λοιπόν, το ρεύμα αναπτύσσεται στο επίπεδο π.χ. $x - y$, το μαγνητικό πεδίο θα αναπτύσσεται στον άξονα z (νόμος Ampère, κανόνας δεξιού χεριού), με αντίθετο πρόσημο εκατέρωθεν του φύλλου ρεύματος. Στις εφαρμογές που θα παρουσιαστούν στη συνέχεια, ορίζονται⁹³ 2 current sheets κάθετα στις θέσεις $\frac{1}{4}$ και $\frac{3}{4}$ του οριζοντίου άξονα.

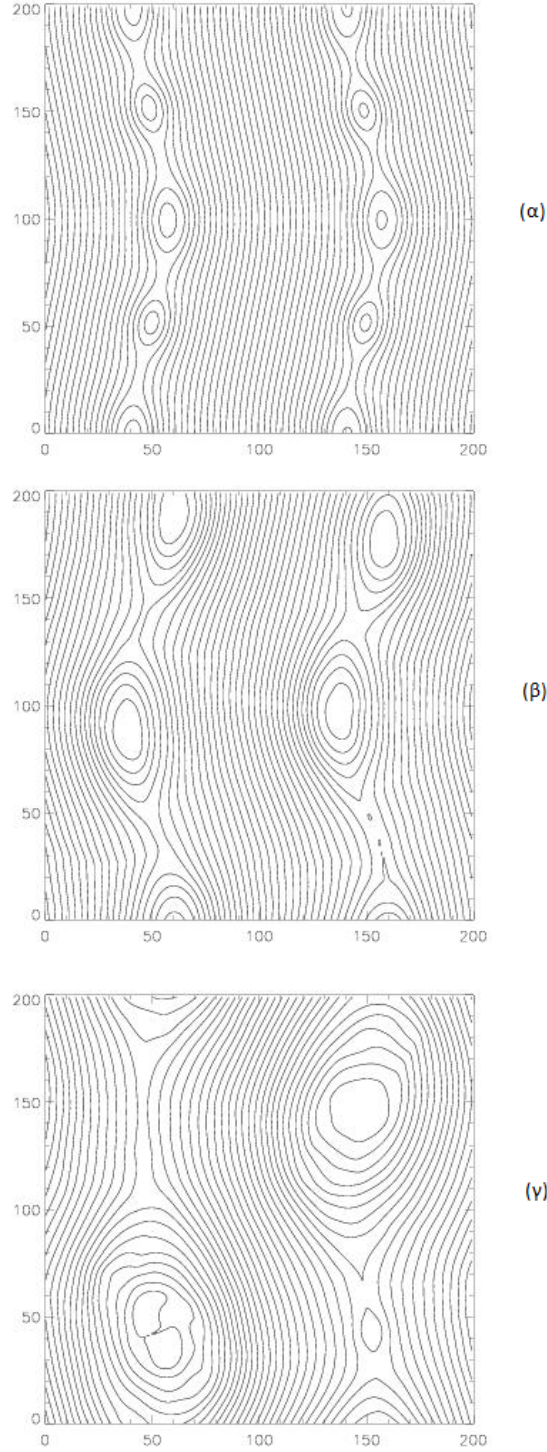
Για τις ιδανικές MHD, η λύση αρχικά θα πρέπει να είναι μη γραμμικά πολωμένα κύματα Alfvén, που διαδίδονται κατά μήκος του πεδίου στη μία διεύθυνση (τα οποία άμεσα δημιουργούν magnetosonic κύματα από τη στιγμή που η μαγνητική πίεση δεν είναι σταθερή). Παρόλα αυτά, λόγω της ύπαρξης δύο φύλλων ρεύματος, η μαγνητική επανασύνδεση⁹⁴ αναπόφευκτα θα συμβεί. Στις περιοχές όπου η μαγνητική επανασύνδεση λαμβάνει χώρα, η μαγνητική ροή πλησιάζει πάρα πολύ μικρές τιμές και η μαγνητική ενέργεια που χάνεται, μετατρέπεται σε θερμότητα. Αυτό το φαινόμενο αλλάζει ολόκληρη την τοπολογία των μαγνητικών πεδίων και άρα επηρεάζει την παγκόσμια μαγνητική διάταξη. Ως συνέπεια αυτής της αλλαγής, μαγνητικά νησιά θα δημιουργηθούν, θα μεγαλώσουν και θα συγχωνευτούν, κατά μήκος των δύο φύλλων ρεύματος. Για την ακρίβεια, τα μικρά νησιά ενώνονται και σχηματίζουν μεγαλύτερα, μέσω της συνεχούς

⁹³ Μέσω των αρχικών συνθηκών για το μαγνητικό πεδίο

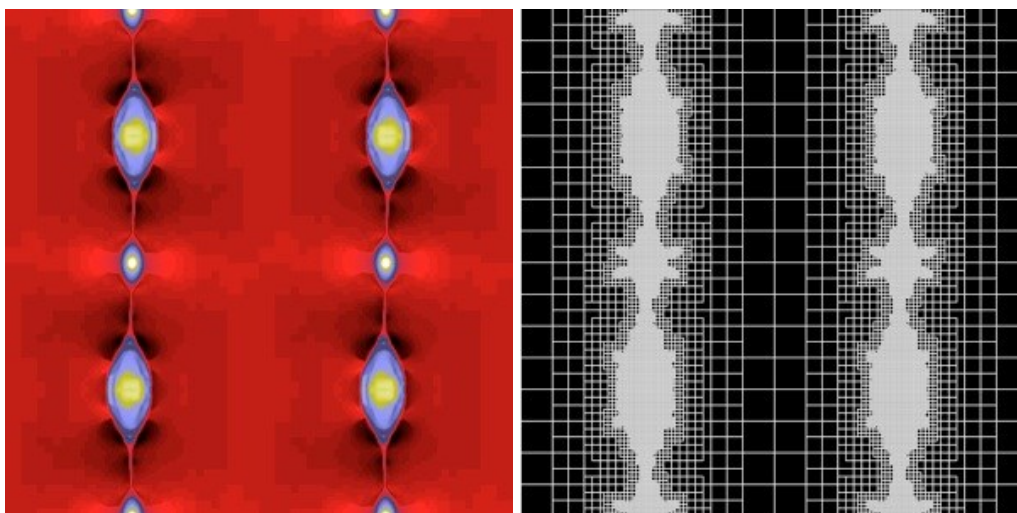
μετατόπισης πάνω κάτω κατά μήκος των δύο φύλλων ρεύματος, μέχρι να μείνει ένα μεγάλο νησί σε κάθε ένα φύλλο.

Το βασικό ζήτημα σε σχέση με το συγκεκριμένο test είναι να εξασφαλιστεί ότι ο αλγόριθμος μπορεί να ακολουθήσει αυτή την εξέλιξη για όσο το δυνατόν περισσότερο χρόνο, χωρίς να σταματήσει να δουλεύει (crashing), διατηρώντας ταυτόχρονα τον div-free περιορισμό, μιας και η τοπολογία του πεδίου υπόκειται σε πολύπλοκες αλλαγές. Η αναλυτική λύση του προβλήματος παρόλα αυτά δεν είναι γνωστή για άμεση σύγκριση (<https://www.astro.princeton.edu/~jstone/Athena/tests/current-sheet/current-sheet.html>).

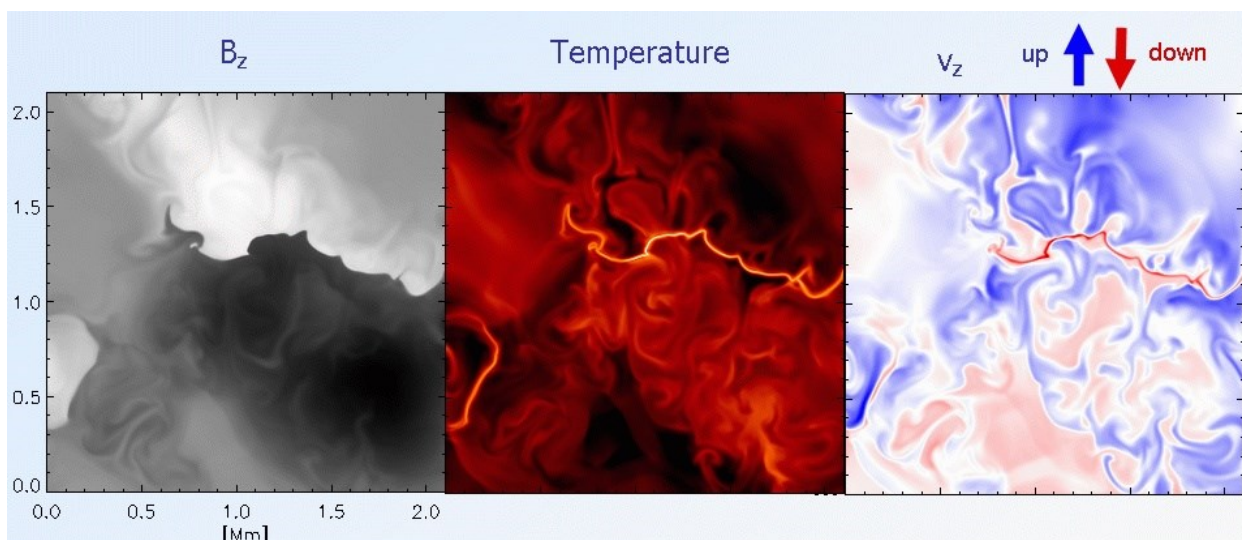
Το εν λόγω πρόβλημα επιλύεται στην βιβλιογραφία από τους κώδικες: FLASH, MURaM, PLUTO, RAMSES και ATHENA. Στη συνέχεια παρουσιάζονται τα αποτελέσματα από τους κώδικες ATHENA (Εικόνα 26), RAMSES (Εικόνα 27) και MURaM (Εικόνα 28), που επιβεβαιώνουν την ανωτέρω θεωρία.



Εικόνα 26: Γραμμές μαγνητικού πεδίου για τις χρονικές στιγμές α) $t = 2$, β) $t = 5$, γ) $t = 10$ για το MHD current sheet πρόβλημα, κώδικας ATHENA (<https://www.astro.princeton.edu/~jstone/Athena/tests/current-sheet/current-sheet.html>).



Εικόνα 27: Χάρτης πιέσεων τη χρονική στιγμή $t = 2$ (αριστερά) και AMR πλέγμα (δεξιά) για το MHD current sheet πρόβλημα, κώδικας RAMSES (https://www.ics.uzh.ch/~teyssier/ramses/Test_Suite.html).



Εικόνα 28: Κατακόρυφη συνιστώσα B_z (αριστερά/ με άσπρο και μαύρο οι αντίθετες πολικότητες), θερμοκρασία (στο κέντρο) και κατακόρυφη συνιστώσα της ταχύτητας w (δεξιά, με μπλε upflows, με κόκκινο downflows, με άσπρο στάσιμα σημεία), για το MHD current sheet πρόβλημα, κώδικας MURaM (https://www2.mps.mpg.de/projects/solar-mhd/muram_site/results.html#sheet).

Ειδικότερα στην Εικόνα 28, παρουσιάζονται τα αποτελέσματα προσομοιώσεων μαγνητικών πεδίων μικτής πολικότητας του κώδικα MURaM, αποκαλύπτοντας την εμφάνιση current sheets ανάμεσα στα κομμάτια του πεδίου που εμφανίζουν αντίθετη πολικότητα στην περίπτωση της ανώτερης φωτόσφαιρας (ηλιακή επιφάνεια). Η εικόνα παρουσιάζει ένα μικρό μέρος της υψηλής ανάλυσης και από τις μεγαλύτερες σε μέγεθος προσομοιώσεις της ηλιακής μαγνητο-μεταφοράς. Το κατακόρυφο μαγνητικό πεδίο μαζί με την θερμοκρασία (περιοχή υψηλής θερμοκρασίας) δείχνουν την ύπαρξη μιας ισχυρής αντιστροφής πολικότητας (εκεί που εναλλάσσεται το άσπρο με το μαύρο), συνδεδεμένης με μία ισχυρή προς τα κάτω ροή (έντονα κόκκινη γραμμή στο σχήμα της κατακόρυφης ταχύτητας). Η παραπάνω κατασκευή δείχνει όλα τα χαρακτηριστικά γνωρίσματα που θα συναντούσε κανείς σε ένα current sheet: μια οιονεί ασυνέχεια μαγνητικού πεδίου, τοπική

θέρμανση Joule και ανώτατο θερμοκρασίας, οριζόντια είσοδος και κατακόρυφη έξοδος ροής.

Στη συνέχεια, (<https://www.astro.princeton.edu/~jstone/Athena/tests/current-sheet/current-sheet.gif>) για τον κώδικα ATHENA φαίνεται καθαρά η παραγωγή magnetosonic κυμάτων, λόγω της διάχυσης της μαγνητικής ενέργειας στις περιοχές επανασύνδεσης.

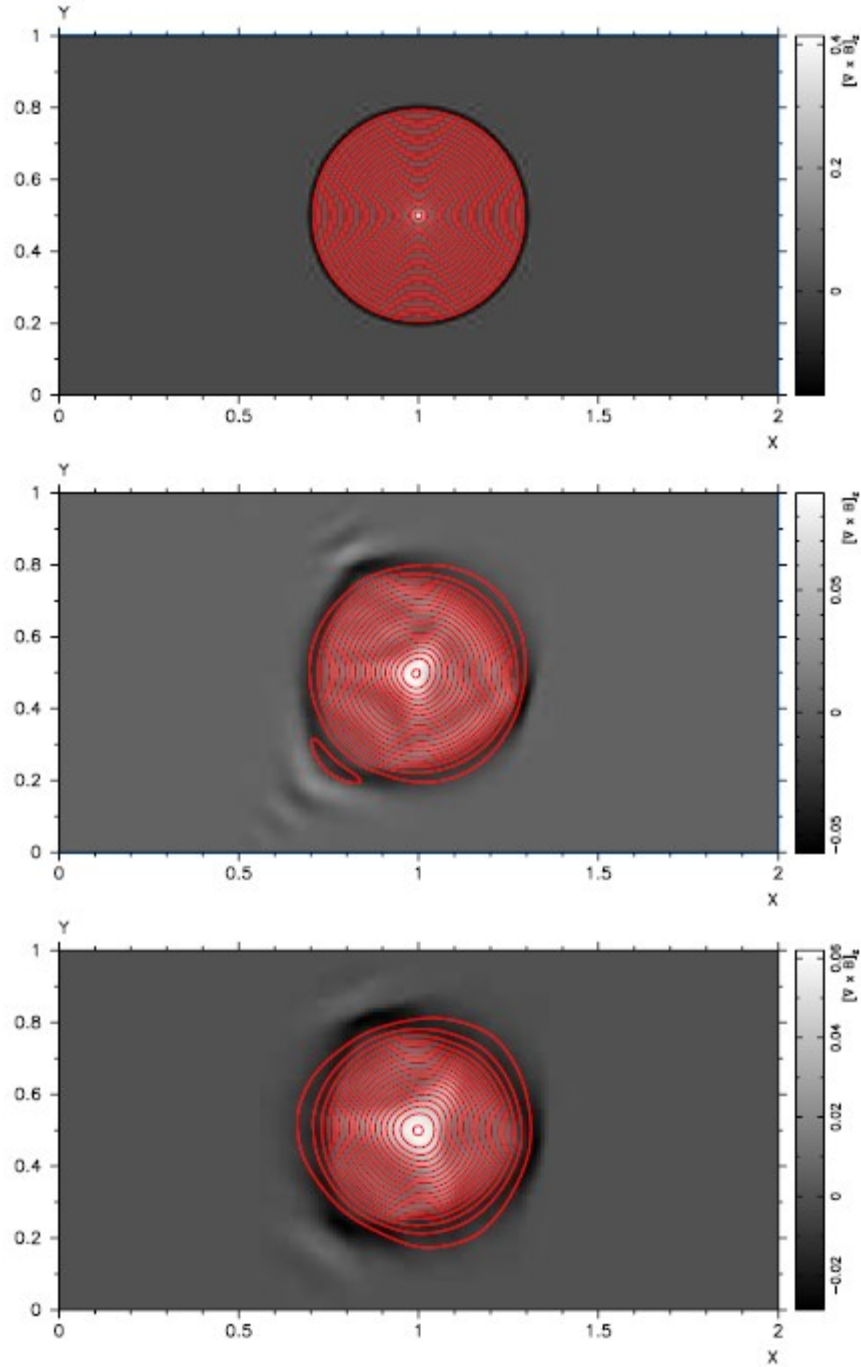
3.5 Field loop advection (2d, 3d)

Το πρόβλημα αποτελείται από ένα αρχικά ιδιόμορφο (singular) current sheet κατά μήκος της επιφάνειας και μία ιδιόμορφη κορυφή/spike στο κέντρο, η οποία είναι πολύ ευαίσθητη σε λάθος στην εξέλιξη του μαγνητικού πεδίου. Η εξάπλωση αυτών των ιδιόμορφων χαρακτηριστικών κατά μήκος του πλέγματος κρίνουν την επιτυχία του αλγόριθμου σε περισσότερες της μίας διαστάσεις. Το πρόβλημα περιλαμβάνει την μετακίνηση ενός βρόχου, δηλαδή μιας κυλινδρικής διανομής ρεύματος, διαγώνια κατά μήκος του δικτύου, για οποιαδήποτε γωνία.

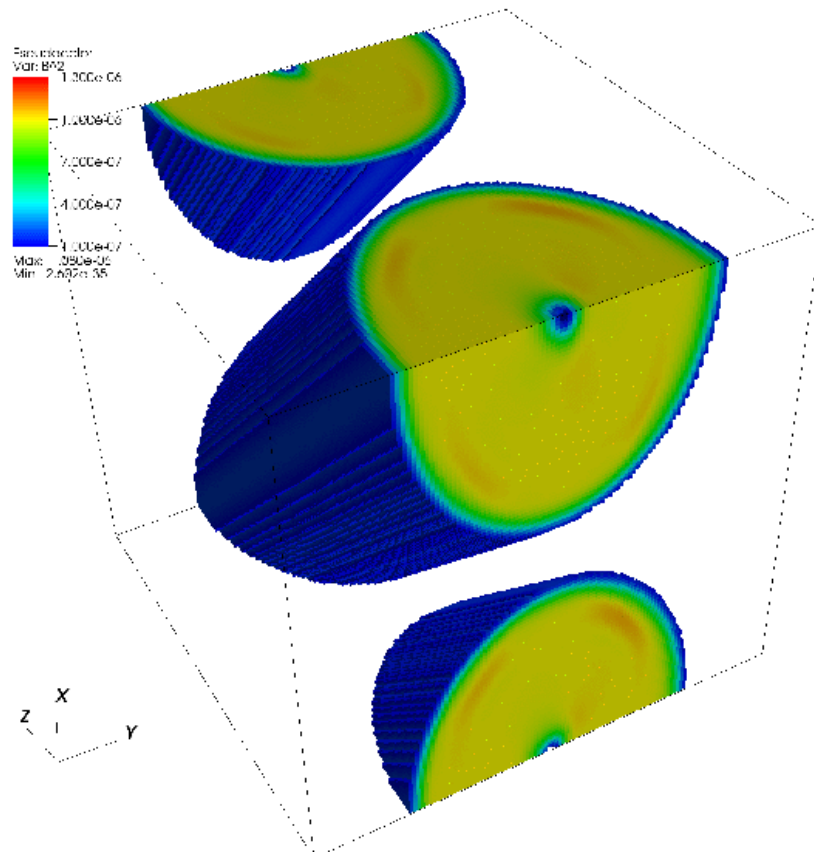
Το πρόβλημα έχει επιλυθεί στη βιβλιογραφία από τους κώδικες AstroBEAR, FLASH, FARGO3D, PLUTO, RAMSES και ATHENA (2d, 3d). Ακολουθούν τα αποτελέσματα για διδιάστατο πρόβλημα από τον κώδικα AstroBEAR για το μαγνητικό πεδίο (εικόνα 28) και για τριδιάστατο πρόβλημα από τον κώδικα ATHENA για την πυκνότητα της μαγνητικής ενέργειας (εικόνα 29).

Στην εικόνα 29, παρουσιάζονται τα αποτελέσματα δύο σχημάτων αριθμητικής ολοκλήρωσης με εξίσου αποτελεσματική διατήρηση της σωστής τοποθέτησης των ιδιομορφιών και των ισοϋψών γραμμών του μαγνητικού πεδίου, οι οποίες είναι ομαλές και σχεδόν συμμετρικές σε σχέση με την κορυφή του ρεύματος.

Στην εικόνα 30, χρησιμοποιείται ένας υπό κλίση flux tube εντός ενός τριδιάστατου πλέγματος. Η γεωμετρία του βρόχου διατηρείται εξαιρετικά καλά. Επιπλέον, η προβολή της συνιστώσας του μαγνητικού πεδίου κατά μήκος του άξονα του κυλίνδρου στις 3 διαστάσεις παραμένει μικρή.



Εικόνα 29: 2d field loop advection, γραμμές μαγνητικού πεδίου (με κόκκινο) πάνω από την αναπαράσταση της έντασης του ηλεκτρικού ρεύματος (σε κλίμακα του γκρι) για την αρχική συνθήκη (πάνω σχήμα), μετά την μεταφορά του loop μέσα από το περιοδικό σύνορο για $t=1$ για RK σχήμα (κεντρικό σχήμα) και για MUSCL-Hancock σχήμα χρονικής ολοκλήρωσης (κάτω σχήμα), κώδικας AstroBEAR (Cunningham, et al., 2009).



Εικόνα 30: 3d επιφάνειες σταθερής πυκνότητας μαγνητικής ενέργειας για 3d field loop advection πρόβλημα, κώδικας ATHENA
(<https://www.astro.princeton.edu/~jstone/Athena/tests/field-loop/Field-loop.html>).

3.6 Προβλήματα ανά κώδικα

ALSVID-UQ: Orszag-Tang vortex, Brio-Wu shock tube, Super-fast expansion, Rotor problem, Cloud-shock interaction, Isothermal blast wave, Toth shock tube.

AstroBEAR: Έχει δοκιμαστεί για μονοδιάστατα διδιάστατα και τριδιάστατα προβλήματα. Ενδεικτικά για προβλήματα σε 1 και 2 διαστάσεις: advection of a weak magnetic field loop, propagation of a cylindrical, supersonic cloud through a magnetized medium, light cylindrical MHD jet simulation, propagation of a strongly radiative shock through an inhomogeneous environment, MTI πρόβλημα (Magnetothermal Instability) με ανισότροπη θερμική αγωγιμότητα.

ATHENA:

1d: linear waves test, Brio & Wu shock tube test, Ryu and Jones shock tube test.

2d: linear waves test, non-linear Circular Polarized Alfvén Wave Test, magnetic field loop test, current sheet test, Orszag-Tang vortex test, Spherical blast waves test, Kelvin-Helmholtz Instability Test, Rayleigh-Taylor Instability Test.

3d: linear waves test, Circular Polarized Alfvén Wave Test, magnetic field loop test, Ryu and Jones test. Επιπλέον, για Orbital advection (αλγόριθμος FARGO).

BATS-R-US (SWMF): Προβλήματα που έχουν να κάνουν με multi-physics και καιρό του διαστήματος. Στην πλατφόρμα του CCMC⁹⁵ υπάρχουν διαθέσιμες προσομοιώσεις μοντέλων και πραγματικών γεγονότων που αφορούν τον καιρό του διαστήματος (από την ηλιακή κορόνα μέχρι την ανώτερη ατμόσφαιρα της Γης).

ECHO: κυρίως επιλύει σχετικιστικά προβλήματα.

FARGO 3D: Brio & Wu MHD shock tube test, standard Sod shock-tube test, MHD rotor, Orszag-Tang vortex, MHD loop, Current sheet.

FLASH: Brio-Wu MHD shock tube test, Orszag-Tang MHD Vortex, magnetized accretion torus, Μαγνητισμένο Noh z-pinch, MHD rotor, MHD current sheet, Field loop advection προβλήματα, 3D MHD Blast.

MANCHA3D: Ακουστικά κύματα, Alfvén κύματα, Orszag-Tang vortex, Rayleigh-Taylor, Kelvin-Helmholtz, προβλήματα με συνέπεια τον μερικό ιονισμό (Hall, ambipolar, Ohmic όροι). Πλήρης τριδιάστατη προσομοίωση ηλιακής magneto-convection μέχρι το ύψος της χρωμόσφαιρας⁹⁶.

MURaM: Prenumbral δομή, Radiative Magnetohydrodynamic Simulation of Sunspot Structure, Turbulent magnetic fields, Magnetoconvection in a sunspot umbra, solar surface dynamo, current sheets στην ανώτερη φωτόσφαιρα, Magneto-convection στην ηλιακή φωτόσφαιρα, decay of bipolar fields in the solar surface layers, Προσομοίωση ηλιακών πόρων, Δημιουργία/ανάδυση μαγνητικής ροής, μη-γκρίζα διάδοση ακτινοβολίας σε MHD προσομοιώσεις.

NIRVANA: Orszag-Tang vortex, Blast wave test, Αλληλεπίδραση ενός gas clump/cloud με έναν άνεμο υψηλού αριθμού Mach (Cloud – wind interaction), rising bubble/axisymmetric problem, 2d Riemann problem, rotor problem, Disk-crossing circularly polarized Alfvén waves, MHD blast wave.

PENCIL CODE: Sod shock tube, Coronal heating, Helical MHD τύρβη, Random forcing function (με helicity), 3-layered convection model, Magnetic helicity in the shearing sheet, magnetized accretion disks.

PLUTO: Shock cloud interaction, MHD rotor, Jet, Orszag-Tang MHD vortex test, Spherical Disk, Shock tube, Advection of a magnetic field loop, Resistive reconnection, Current sheet, Rayleigh Taylor instability, Shock-Cloud interaction, Radiative shocks in stellar jets.

RAMSES: Μη γραμμικό Alfvén κύμα, MHD shock tube test, Advection of a magnetic loop, the current sheet (2d), Orszag-Tang Vortex (2d), Magneto-rotational instability (MRI), Magnetized cloud core collapse, Sod shock tube test, Ponomarenko Dynamo, ABC dynamo.

RAMSES GPU: 2d Kelvin-Helmholtz instability, 2d Orszag-Tang Vortex, Magneto-rotational instability (MRI), Stratified MRI, Compressible MHD turbulence.

⁹⁵ Community Coordinated Modeling Center, https://ccmc.gsfc.nasa.gov/ungrouped/GM_IM/GM_main.php

⁹⁶ Όριο μεταξύ εσωτερικού και εξωτερικού του ήλιου.

TRISTAN-MP-PITP: PIC προβλήματα.

ZEUS:

1d: Advection in Cartesian, in cylindrical, in spherical polar coordinates, Relaxation in cylindrical, in spherical polar coordinates, Bennett pinch (αλλιώς Z-pinch), Alfvén waves με περιοδικές οριακές συνθήκες, MHD rotor, Shock tube problem, Brio & Wu problem.

2d: Advection (FIT utility) σε καρτεσιανές συντεταγμένες, Shear Alfvén waves, MHD οριακές συνθήκες σε κυλινδρικές συντεταγμένες, MHD Blast wave, Orszang-Tang magnetic vortex.

3d: Super-Alfvénic turbulence.

Κεφάλαιο 4: Συμπεράσματα

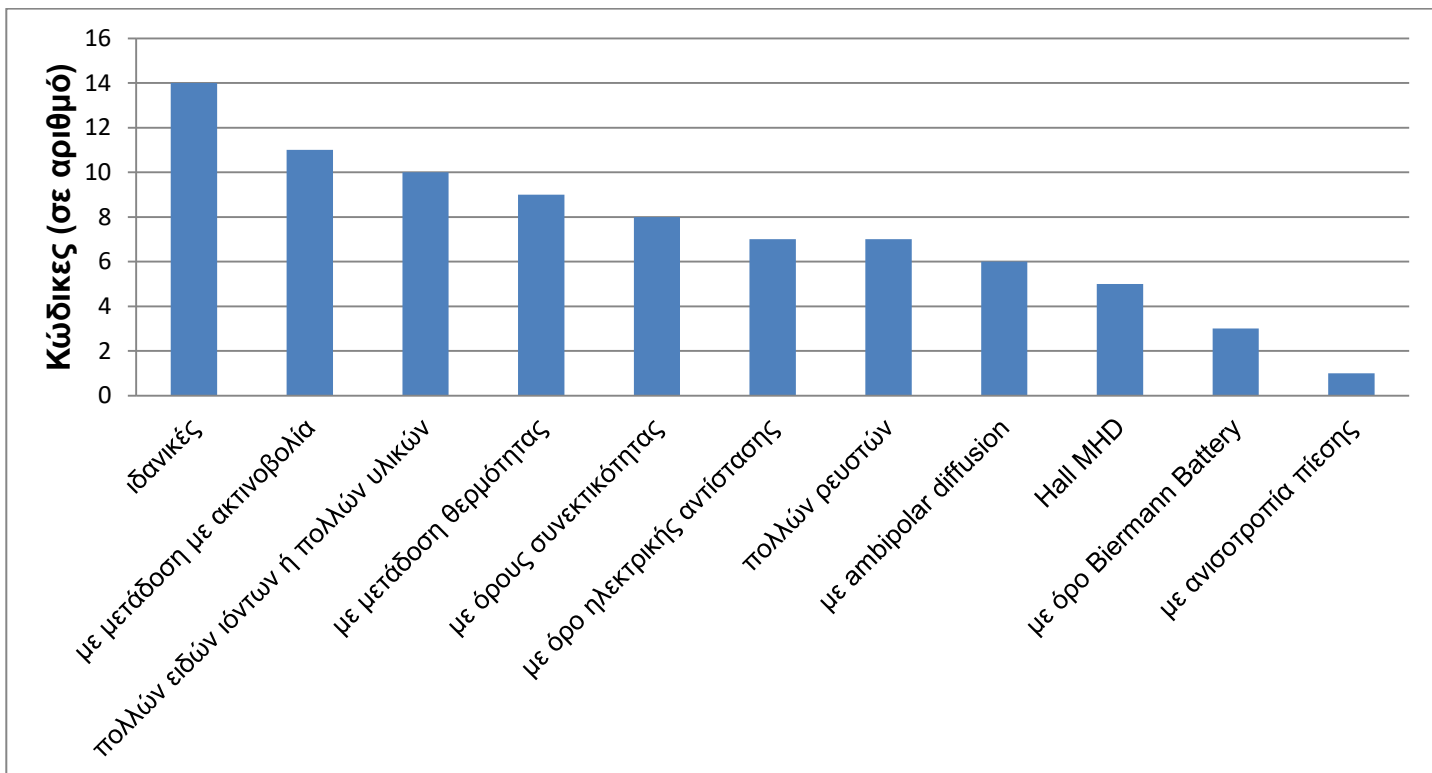
Η αριθμητική επίλυση προβλημάτων MHD αποτελεί πρακτικά μονόδρομο, συγκριτικά με την αναλυτική επίλυση των εξισώσεων, που είναι δυνατή μόνο για περιορισμένο αριθμό απλών προβλημάτων. Γι αυτό το λόγο, η εξέλιξη της ίδιας της διαδικασίας προσομοίωσης αποτελεί βασικό κομμάτι της άμεσης εφαρμογής της θεωρίας στην πράξη, είτε αυτή αφορά την κοσμολογία και την φυσική του διαστήματος, είτε αυτή αφορά πιο γήινες εφαρμογές (περιορισμός πλάσματος, γεωλογία κ.λπ.).

Στην πλειονότητα τους οι κώδικες που παρουσιάστηκαν αποτελούσαν εξέλιξη ήδη υπάρχοντων κωδίκων, με εφαρμογή συνήθως στο κομμάτι της υδροδυναμικής, οι οποίοι αναπτύχθηκαν ειδικά την τελευταία εικοσαετία και ως προς το κομμάτι της μαγνητοϋδροδυναμικής. Έχει ενδιαφέρον το γεγονός ότι βασικά προβλήματα που χρησιμοποιούνται και σήμερα για την δοκιμή της προσομοίωσης, όπως αυτά που παρουσιάστηκαν στο Κεφάλαιο 3, είχαν ήδη διατυπωθεί δεκαετίες πριν. Χαρακτηριστικό παράδειγμα το Orszag-Tang vortex πρόβλημα, το οποίο είχε διατυπωθεί αρχικά από τους Orszag και Tang το 1979. Η επίλυση multi-physics που απαιτείται, κατέστη δυνατή με υψηλότερη ακρίβεια αποτελεσμάτων, γρήγορα και οικονομικά με την έννοια των υπολογιστικών πόρων, με την τεχνολογική πρόοδο των ίδιων των υπολογιστών και τη δυνατότητα παραλληλοποίησης.

Από τους δεκαέξι (16) κώδικες που παρουσιάστηκαν, παρατηρούμε τα παρακάτω, όσον αφορά κάποιες βασικές παραμέτρους σύγκρισης:

1) τις εξισώσεις που επιλύουν:

- τις ιδανικές τις επιλύουν δεκατέσσερις (14) από τους δεκαέξι κώδικες (όλοι πλην του MURaM και του TRISTAN-MP-PITP),
 - με μετάδοση με ακτινοβολία έντεκα (11) κώδικες (AstroBEAR, ATHENA, BATS-R-US, FARGO3D, MANCHA3D, MURaM, PENCIL, PLUTO, RAMSES, ZEUS 3D),
 - πολλών ειδών ιόντων ή πολλών υλικών δέκα (10) κώδικες (ATHENA, BATS-R-US, FLASH, MANCHA3D, MURaM, PENCIL, PLUTO, RAMSES, ZEUS 3D),
 - με μετάδοση θερμότητας εννέα (9) κώδικες (AstroBEAR, ATHENA, BATS-R-US, FLASH, MURaM, NIRVANA, PENCIL, PLUTO, RAMSES),
 - με όρους συνεκτικότητας οχτώ (8) κώδικες (ATHENA, BATS-R-US, FARGO3D, FLASH, MURaM, NIRVANA, PLUTO, RAMSES-GPU),
 - με όρο ηλεκτρικής αντίστασης-μη ιδανικός αγωγός επτά (7) κώδικες (ATHENA, BATS-R-US, ECHO, FARGO3D, MURaM, PLUTO, RAMSES-GPU),
 - πολλών ρευστών επτά κώδικες (7) (AstroBEAR, BATS-R-US, FARGO3D, FLASH, MANCHA3D, PENCIL, ZEUS 3D),
 - με *ambipolar diffusion* έξι (6) κώδικες (ATHENA, BATS-R-US, MANCHA3D, NIRVANA, PENCIL, ZEUS 3D),
 - *Hall MHD* πέντε (5) κώδικες (ATHENA, BATS-R-US, FARGO3D, FLASH, PLUTO),
 - με όρο *Biermann Battery* τρεις (3) κώδικες (BATS-R-US, FLASH, MANCHA3D) και
 - με ανισοτροπία πίεσης μόνο ένας (1) κώδικας (BATS-R-US).
- Από αυτούς σχετικιστικές *MHD* προσομοιώνουν οι ATHENA, ECHO, PENCIL, PLUTO, TRISTAN-MP-PITP, ZEUS 3D και ο BATS-R-US (ημισχετικιστικές).



Διάγραμμα 1. Κώδικες ανά είδος εξίσωσης

2) Τον τρόπο διατήρησης του σωληνοειδούς περιορισμού:

- σχήμα περιορισμένης μεταφοράς χρησιμοποιείται από έντεκα (11) κώδικες (AstroBEAR, ATHENA, BATS-R-US, ECHO, FARGO3D, FLASH, NIRVANA, PLUTO, RAMSES, RAMSES-GPU, ZEUS 3D),
- σχήμα διάχυσης χρησιμοποιείται από πέντε (5) κώδικες (BATS-R-US, MANCHA3D, NIRVANA, PENCIL),
- 8-κυματική δομή (χρήση όρου πηγής του Powell) χρησιμοποιείται από τέσσερις (4) κώδικες (BATS-R-US, Alsvid-UQ, FLASH, PLUTO)
- διανυσματικό δυναμικό (vector potential) χρησιμοποιείται από τέσσερις (4) κώδικες (BATS-R-US, NIRVANA, PENCIL, PLUTO)
- υβριδική μέθοδος χρησιμοποιείται από τέσσερις (4) κώδικες (BATS-R-US, NIRVANA, RAMSES, ZEUS 3D)
- χρήση γενικευμένου πολλαπλασιαστή Lagrange χρησιμοποιείται από δύο (2) κώδικες (BATS-R-US, PLUTO)
- κανένας τρόπος, χρησιμοποιείται από δύο (2) κώδικες (MANCHA3D, PLUTO)
- 7-κυματική δομή χρησιμοποιείται από ένα (1) κώδικα (BATS-R-US),
- σχήμα προβολής χρησιμοποιείται από ένα (1) κώδικα (BATS-R-US).



Διάγραμμα 2. Κώδικες ανά μέθοδο διατήρησης σωληνοειδούς περιορισμού

3) Τις διαστάσεις του προβλήματος που μπορεί να επιλύσουν:

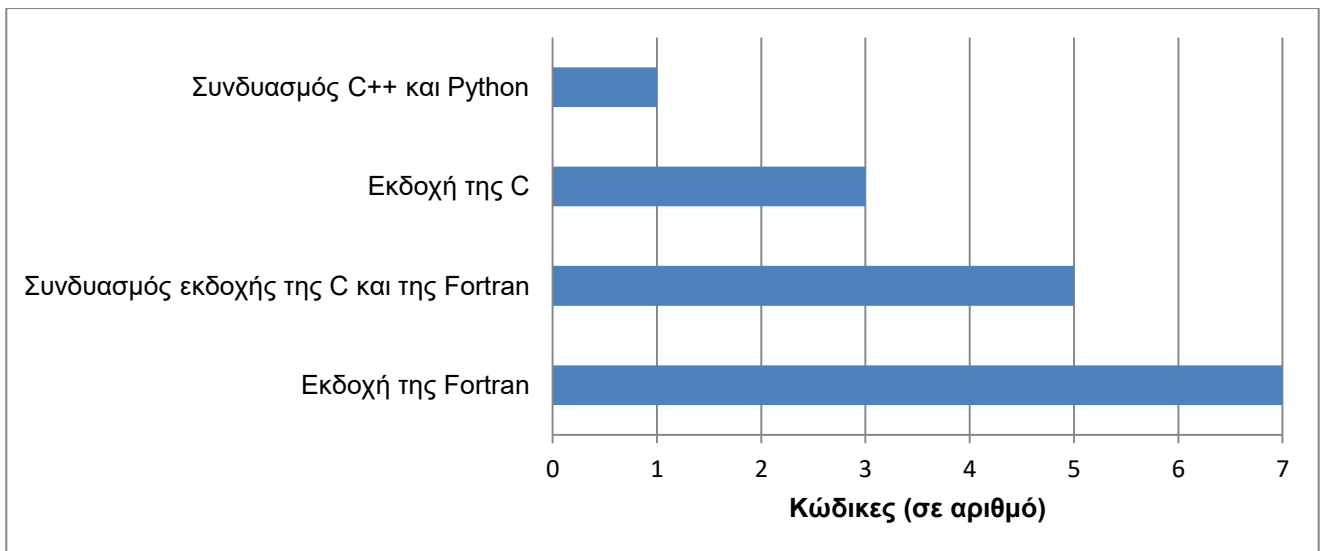
- 1,2,3 διαστάσεις και καρτεσιανές, κυλινδρικές, σφαιρικές συντεταγμένες από έξι (6) κώδικες (BATS-R-US, FARGO3D, PENCIL, PLUTO, RAMSES-GPU, ZEUS-3D) κάποιои εκ των οποίων με δυνατότητα περιστροφής του πλαισίου αναφοράς.
- 1,2,3 διαστάσεις και καρτεσιανές, κυλινδρικές συντεταγμένες από τρεις (3) κώδικες (AstroBEAR, ATHENA, FLASH).
- 1,2,3 διαστάσεις και καρτεσιανές συντεταγμένες από πέντε (5) (Alsvid-UQ, MANCHA3D, MURaM, RAMSES, TRISTAN-MP-PITP).
- 2,3 διαστάσεις και καρτεσιανές, κυλινδρικές, σφαιρικές συντεταγμένες από έναν (1) κώδικα (NIRVANA).
- Μόνο σε 3 διαστάσεις και καρτεσιανές, σφαιρικές συντεταγμένες από έναν (1) κώδικα (ECHO).



Διάγραμμα 3. Κώδικες ανά διάσταση και είδος συντεταγμένων

4) Τη γλώσσα προγραμματισμού:

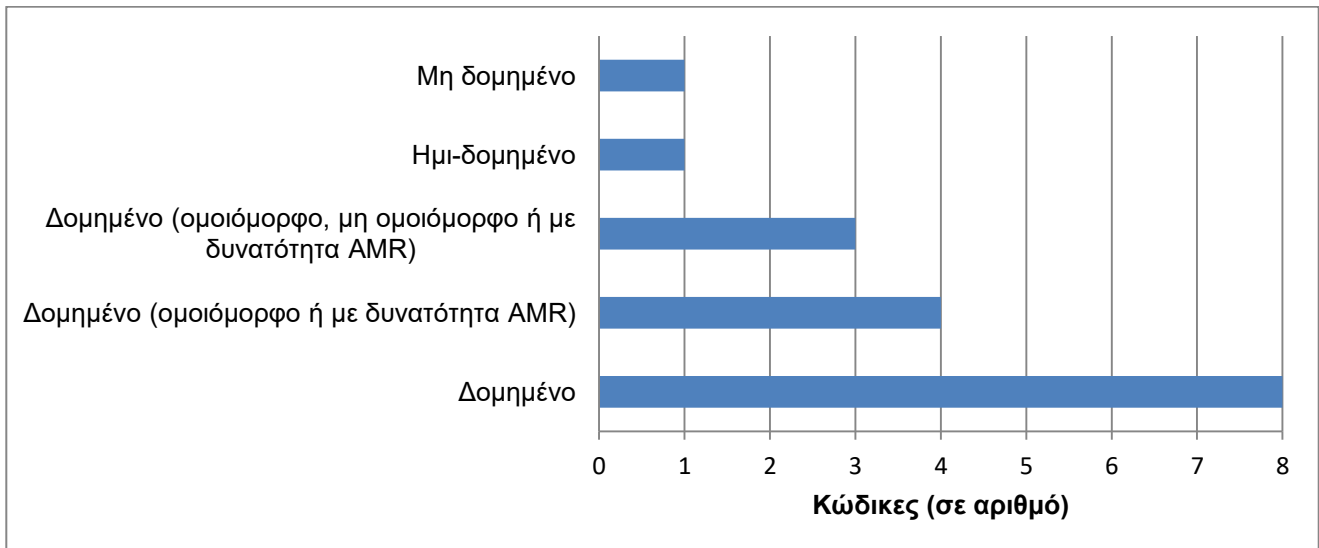
- εκδοχή της fortran από εφτά (7) κώδικες: (RAMSES), fortran77 (ZEUS 3D), fortran 90 (MANCHA3D, ECHO, AstroBEAR), Fortran 95 (TRISTAN-MP-PITP, AstroBEAR).
- συνδυασμός εκδοχής της C και της fortran από πέντε (5) κώδικες: C, fortran (ATHENA, PENCIL, FLASH) , C, Fortran, C++ (PLUTO), C++, fortran 77, fortran 90 (BATS-R-US).
- εκδοχή της C από τρεις (3) κώδικες: C++ (RAMSES-GPU), C (NIRVANA, FARGO3D).
- συνδυασμός C++ και Python από ένα (1) κώδικα (Alsvid-UQ).



Διάγραμμα 4. Κώδικες ανά γλώσσα προγραμματισμού

5) Το είδος του πλέγματος:

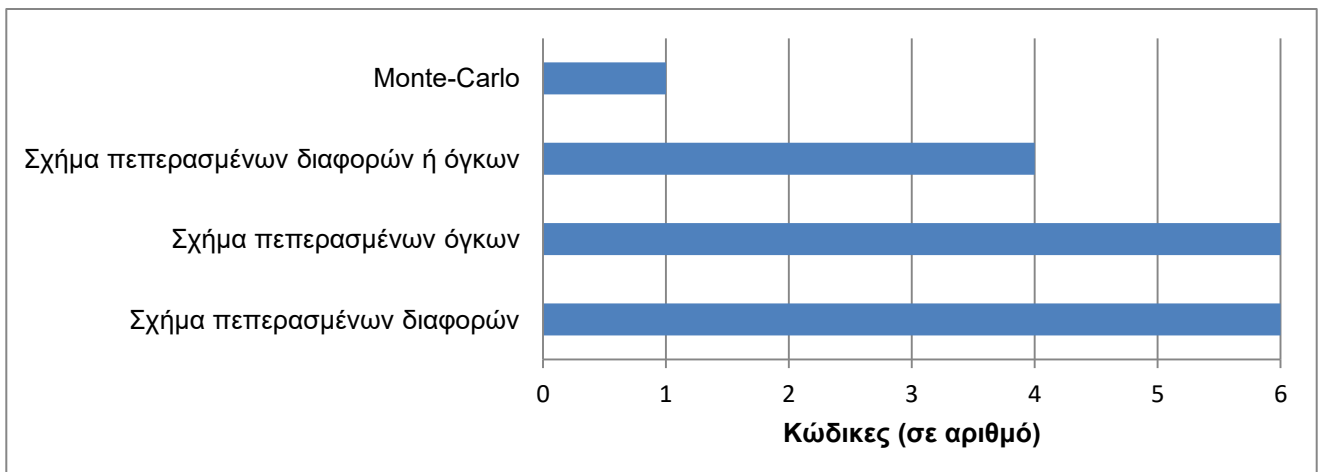
- δομημένο από οχτώ (8) κώδικες (Alsvid-UQ, ATHENA, ECHO, FARGO3D, MURaM, PENCIL, RAMSES-GPU μόνο ομοιόμορφο, TRISTAN-MP-PITP).
- δομημένο (ομοιόμορφο ή με δυνατότητα AMR) από τέσσερεις (4) κώδικες (BATS-R-US, FLASH, NIRVANA, RAMSES).
- δομημένο (ομοιόμορφο, μη ομοιόμορφο ή με δυνατότητα AMR) από τρεις (3) κώδικες (MANCHA3D, PLUTO, ZEUS 3D).
- ημι-δομημένο από έναν (1) κώδικα (AstroBEAR).
- μη δομημένο από έναν (1) κώδικα (AstroBEAR).



Διάγραμμα 5. Κώδικες ανά είδος πλέγματος

6) Το είδος διακριτοποίησης στο χώρο:

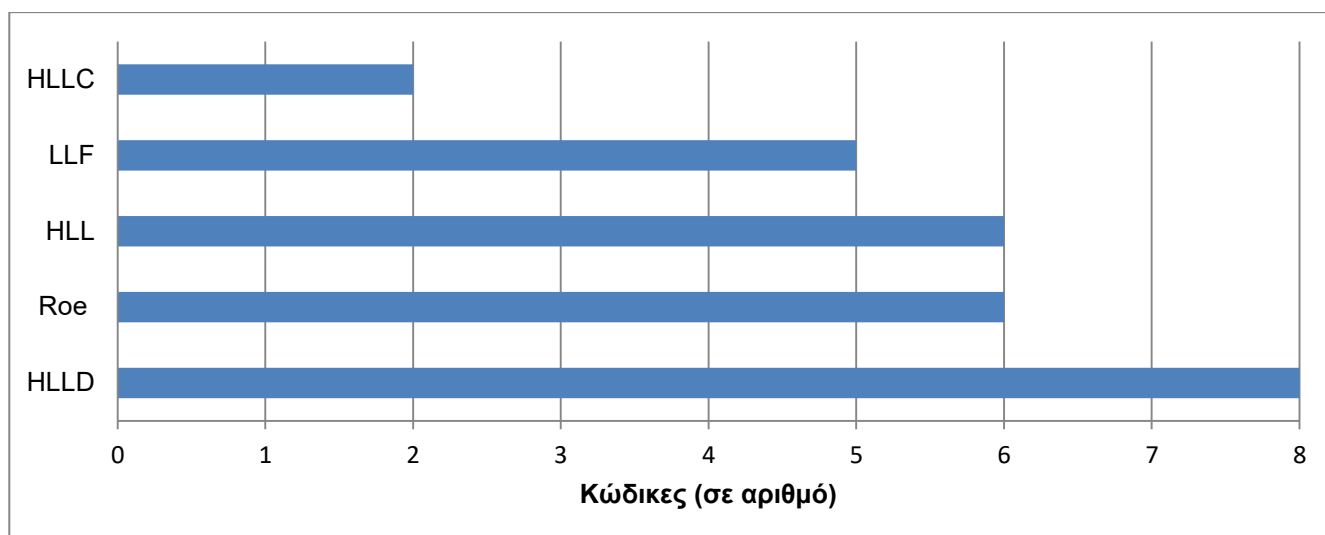
- σχήμα πεπερασμένων διαφορών από έξι (6) κώδικες (ECHO, MANCHA3D, MURaM, PENCIL, TRISTAN-MP-PITP, ZEUS 3D).
- σχήμα πεπερασμένων όγκων από έξι (6) κώδικες (Alsvid-UQ, AstroBEAR, ATHENA, FLASH, RAMSES, RAMSES-GPU).
- σχήμα πεπερασμένων διαφορών ή όγκων από τέσσερεις (4) κώδικες (BATS-R-US, FARGO3D, NIRVANA, PLUTO).
- Monte-Carlo από έναν (1) κώδικα (Alsvid-UQ).



Διάγραμμα 6. Κώδικες ανά είδος χωρικής διακριτοποίησης

7) Τη μέθοδο υπολογισμού των διανυσμάτων ροής:

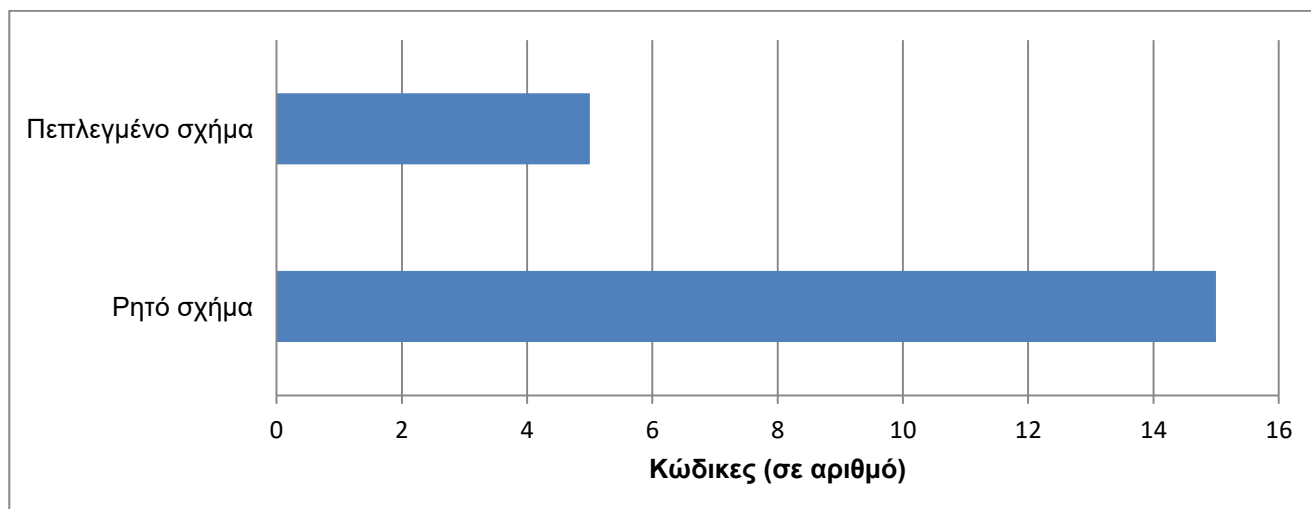
- HLLD από οχτώ (8) κώδικες (AstroBEAR, ATHENA, BATS-R-US, FLASH, NIRVANA, PLUTO, RAMSES, RAMSES-GPU).
- κατά Roe προσεγγιστικός επιλύτης από έξι (6) κώδικες (AstroBEAR, ATHENA, BATS-R-US, FLASH, PLUTO, RAMSES).
- HLL από έξι (6) κώδικες (Alsvid-UQ, ECHO, FLASH, PLUTO, RAMSES, RAMSES-GPU).
- LLF από πέντε (5) κώδικες (BATS-R-US, ECHO, PLUTO, RAMSES, RAMSES-GPU).
- HLLC από δύο (2) κώδικες (FLASH, PLUTO).



Διάγραμμα 7. Κώδικες ανά επιλύτη Riemann

8) Το είδος διακριτοποίησης στο χρόνο:

- ρητό σχήμα, συνήθως Runge Kutta 2^{ης} τάξης ακριβείας και πάνω από δεκαπέντε (15) κώδικες (Alsvid-UQ, AstroBEAR, ATHENA, BATS-R-US, ECHO, FARGO3D, FLASH, MANCHA3D, MURaM, NIRVANA, PENCIL, PLUTO, RAMSES, TRISTAN-MP-PITP, ZEUS 3D).
- πεπλεγμένο σχήμα από πέντε (5) κώδικες (AstroBEAR, BATS-R-US, PLUTO, RAMSES-GPU, TRISTAN-MP-PITP).



Διάγραμμα 8. Κώδικες ανά είδος χρονικής διακριτοποίησης

Η πλειοψηφία των κωδίκων επιλύει ιδανικές και μη ιδανικές εξισώσεις για συμπιεστό ρευστό (Διάγραμμα 1), επιβεβαιώνοντας την multi-physics δυνατότητα τους. Ιδιαίτερα, παρατηρείται ότι η μετάδοση θερμότητας με όλους τους τρόπους (αγωγή, συναγωγή, ακτινοβολία) λόγω της συγκρουσιακότητας του στοιχείων του ρευστού υιοθετείται από τους περισσότερους κώδικες. Επίσης, η multi-species και multi-fluid μελέτη είναι αντικείμενο της πλειοψηφίας των προσομοιώσεων. Αυτό έχει ιδιαίτερη σημασία, καθώς η πραγματικότητα της μαγνητοϋδροδυναμικής και των προβλημάτων που σχετίζονται με αυτή αντιστοιχεί είτε σε πολλά είδη αγωγίμων ρευστών ταυτόχρονα είτε σε πολλά είδη ιόντων με διαφορετικές EOS, διαφορετικές ιδιότητες και χαρακτηριστικά, τα οποία οι ιδανικές εξισώσεις του ενός ρευστού και κατά συνέπεια της μίας θερμικής εξίσωσης, ιδίως σε υψηλού ιονισμού ρευστά, δεν μπορούν να αποδώσουν με επιστημονική ακρίβεια.

Για την επιτάχυνση της αριθμητικής επίλυσης, όλοι οι κώδικες λειτουργούν με παράλληλη επεξεργασία, είτε με χωρική διαμέριση του πλέγματος είτε με AMR σύστημα, είτε και με τα δύο (Διάγραμμα 5), γραμμένοι είτε σε κάποια εκδοχή της fortran είτε σε συνδυασμό fortran και εκδοχής C ή C++ (Διάγραμμα 4).

Το μεγάλο πρόβλημα της αριθμητικής επίλυσης, όσον αφορά στη διατήρηση του σωληνοειδούς περιορισμού του μαγνητικού πεδίου και κατά συνέπεια της επιστημονικής αλήθειας της μη-ύπαρξης μαγνητικών μονόπολων, αντιμετωπίζεται με την μεγαλύτερη ακρίβεια, με το σχήμα περιορισμένης μεταφοράς σε staggered grid, το οποίο και υιοθετείται από την πλειοψηφία (Διάγραμμα 2). Τα προβλήματα που επιλύονται είναι έως και τριών διαστάσεων με ποικιλία συνδυασμού σε γεωμετρικές συντεταγμένες, είτε μόνο καρτεσιανές, είτε καρτεσιανές και κυλινδρικές είτε καρτεσιανές και κυλινδρικές και σφαιρικές (Διάγραμμα 3). Συνήθως οι κώδικες δεν ανταποκρίνονται σε όλους τους δυνατούς συνδυασμούς διάστασης και γεωμετρίας. Το πλέγμα είναι δομημένο, με δυνατότητα πύκνωσης (AMR) ή όχι, σε όλους τους κώδικες πλην ενός, ο οποίος επιλύει για μη-δομημένα ή ημιδομημένα πλέγματα. Η διακριτοποίηση στο χώρο γίνεται με σχήμα πεπερασμένων διαφορών ή πεπερασμένων όγκων, ή συνδυασμού τους, χωρίς κάποιο σχήμα να είναι το επικρατέστερο (Διάγραμμα 6), ενώ η διακριτοποίηση στο χρόνο γίνεται στη συντριπτική πλειοψηφία (15/16 κώδικες) με ρητό σχήμα RK 2^{ης} τάξης και πάνω (Διάγραμμα 8), ενώ οι συνηθέστεροι επιλύτες προβλημάτων Riemann είναι ο HLLD και ο προσεγγιστικός κατά Roe (Διάγραμμα 7). Για εκτενέστερη αναφορά στη δυνατότητα διακριτοποίησης στο χρόνο και στο χώρο και στους επιλύτες και συναρτήσεις περιορισμού που χρησιμοποιούνται, ο αναγνώστης θα πρέπει να ανατρέξει στο Κεφάλαιο 2 ανά κώδικα.

Η χρήση των κωδίκων που αναφέραμε είναι ακαδημαϊκή, ερευνητική από ιδρύματα, πανεπιστήμια ή και δημόσιους φορείς π.χ. NASA. Ανατρέχοντας στη βιβλιογραφία και την ιστορία των κωδίκων, παρατηρεί κανείς την αλληλεπίδραση μεταξύ τους, π.χ. το FARGO3D module για την orbital advection έχει υιοθετηθεί ως έχει και από άλλους κώδικες.

Για το κομμάτι των όρων πηγής, όπως η βαρύτητα, η κεντρομόλος δύναμη, η δύναμη Coriolis, η κλίση της πίεσης, οι μαζικές δυνάμεις κλπ., γίνεται αναφορά του τρόπου ενσωμάτωσης και των μεθόδων επίλυσης χωρίς παρουσίαση των εξισώσεων που επιλύονται ή της ιδιαίτερης μεθοδολογίας που ακολουθείται σε κάθε περίπτωση, καθώς θα έκανε ακόμα πιο πεπλεγμένη την κατηγοριοποίηση και τη δυνατότητα μετέπειτα σύγκρισης των κωδίκων μεταξύ τους. Για τις οριακές συνθήκες, χρησιμοποιούνται οι αναφορές που γίνονται στα user's guide ή manual του κάθε κώδικα, οι οποίες μπορεί να είναι αναλυτικές μπορεί και όχι. Για το δε υπολογιστικό κομμάτι, που έχει να κάνει με την παράλληλη επεξεργασία, π.χ. βιβλιοθήκες, την ενδοεπικοινωνία μέσα στον κώδικα και το

γραφικό περιβάλλον των εξαγωγικών αποτελεσμάτων, γίνεται αναφορά στον κώδικα, μιας και ειδική ανάλυση θα ήταν εκτός του αντικειμένου της παρούσης εργασίας.

Μελετώντας κανείς το Κεφάλαιο 3, μπορεί να παρατηρήσει ότι τα αποτελέσματα των κωδίκων είναι συγκρίσιμα, ενώ η πλειοψηφία μπορεί και επιλύει αποτελεσματικά κοινά προβλήματα. Η μέχρι τώρα εμπειρία θα μπορούσε λοιπόν να αξιοποιηθεί για την δημιουργία ενός κώδικα σε κοινή προγραμματιστική γλώσσα, όπως διαφαίνεται να είναι η *fortran* ή ο συνδυασμός της με την *C/C++*, ο οποίος θα προχωρήσει την επίλυση νευτώνειων/μη-σχετικιστικών MHD προβλημάτων και σε μη-δομημένα πλέγματα, με περισσότερους συνδυασμούς διαστάσεων και γεωμετρίας πλέγματος. Το σχήμα της περιορισμένης μεταφοράς σε συνδυασμό με κάποιο σχήμα *Godunov* για την διακριτοποίηση στο χώρο ή και όχι, με την χρήση των *staggered* πλεγμάτων, χρησιμοποιείται και θα συνεχίζει να χρησιμοποιείται ως ακριβέστερο για τον περιορισμό μηδενικής απόκλισης του μαγνητικού πεδίου, παρόλο τον υπολογιστικό φόρτο διακριτοποίησης μεταβλητών σε πολλά επίπεδα ταυτόχρονα. Το θέμα της διακριτοποίησης στο χώρο είναι υπό διερεύνηση καθώς χρησιμοποιούνται αποτελεσματικά εξίσου τα σχήματα πεπερασμένων διαφορών, πεπερασμένων όγκων και ο συνδυασμός τους (για διαφορετικές εξισώσεις), ενώ η διακριτοποίηση στο χρόνο με ρητά σχήματα εξασφαλίζει υψηλή ακρίβεια αποτελέσματος. Τα σχήματα HLL (-, C, D) όπως και η εξέλιξη των Roe επιλυτών φαίνεται να κυριαρχεί στον MHD υπολογισμό των διανυσμάτων των ροών (*fluxes*).

Καθότι η σχετικιστική MHD σε συνδυασμό με την μετάδοση με ακτινοβολία αποτελεί ίσως το αντιπροσωπευτικότερο κομμάτι της εφαρμογής των MHD εξισώσεων αυτή τη στιγμή διεθνώς στην έρευνα, δεν μπορεί η παρούσα διατριβή παρά να αποτελέσει εργαλείο για την σύγκριση των κωδίκων μόνο για ένα μέρος εφαρμογής τους και όχι για το σύνολο των δυνατοτήτων τους.

Βιβλιογραφία

- Anders, E., Grevesse, N. (1989), “Abundancies of the elements: meteoritic and solar”, *Geochimica et Cosmochimica Acta*, 53, 197-214.
- Balsara, D.S., Spicer, D.S. (1999), “A staggered Mesh Algorithm Using High Order Godunov Fluxes to Ensure Solenoidal Magnetic Fields in Magnetohydrodynamic Simulations”, *Journal of Computational Physics*, 149, 270-292.
- Banerjee, R. (2013), *FLASH Code Tutorial, a user’s perspective*, Hamburger Sternwarte, ISSAC.
- Battista, N.A. (2010), *An introduction to Magnetohydrodynamics*, Stony Brook University, New York.
- Beeck, B., Collet, R., Steffen, M., Asplund, M., Cameron, R.H., Freytag, B., Hayek, W., Ludwig, H.-G., Schlusser, M. (2012), “Simulations of the solar near-surface layers with the CO⁵BOLD, MURaM, and Stagger codes”, *Astronomy & Astrophysics*, 539.
- Benítez-Llambay, P., Masset, F.S. (2016), “FARGO3D: A new GPU-oriented MHD code”, *The Astrophysical Journal Supplement Series*, 223, 11-40.
- Benítez-Llambay, P., Masset, F.S. (2018), *FARGO3D User Guide, Release 1.3*.
- Bourdin, P.-A. (2019), “Massive-parallel Input & Output with structured extensible data (HDF5 successful implementation)”, Pencil Code User Meeting, Espoo Finland.
- Brackbill, J., Barnes, D. (1980), “The effect of nonzero $\nabla \cdot B$ on the numerical solution of the magnetohydrodynamics equations”, *Journal of Computational Physics*, 35, 426-430.
- Brandenburg, A. (2003), “The Pencil Code: multi-purpose and multi-user maintained”, Oslo.
- Carroll-Nellenback, J.J., Shroyer, B., Frank, A., Ding, C. (2013), “Efficient parallelization for AMR MHD Multiphysics calculations; implementation in AstroBEAR”, *Journal of Computational Physics*, 236, 461-476.
- Carver, R.L., Cunningham, A. J., Frank, A., Hartigan, P., Coker, R., Wilde, B.H., Foster, J., Rosen, P. (2010), “Laboratory astrophysics and non-ideal equations of state: the next challenges for astrophysical MHD simulations”, *High Energy Density Physics*, 6, 381-390.
- Center for Space Environment Modeling, (2019), *Space Weather Modeling Framework User Manual, Code Version 2.4*, The University of Michigan.
- Clarke, D. A. (1996), “A Consistent Method of Characteristics for Multidimensional MHD”, *The Astrophysical Journal Supplement series*, 457.
- Clarke, D. A. (2010), “On the Reliability of ZEUS-3D”, *The Astrophysical Journal Supplement series*, 187.
- Clarke, D.A. (2015), *ZEUS-3D User Manual Version 3.6*, Institute for Computational Astrophysics, Saint Mary’s University, Canada

- Cunningham, A., Frank, A., Hartmann, L. (2005), "Wide-angle wind-driven bipolar outflows: high resolution models with application to source I of the Becklin-Neugebauer/Kleinmann-low OMC-I region", *The Astrophysical Journal*, 631,1010-1021.
- Cunningham, A.J., Frank, A., Varniere, P., Mitran, S., Jones, T.W. (2009), "Simulating Magnetohydrodynamical flow with constrained transport and adaptive mesh refinement: Algorithms and tests of the AstroBEAR code", *The Astrophysical Journal Supplement Series*, 182, 519-542.
- Dai, W., Woodward, P.R. (1998), "A simple finite difference scheme for multidimensional magnetohydrodynamical equations", *Journal of Computational Physics*, 142, 331-369
- Davidson, P.A. (2017), *Introduction to Magnetohydrodynamics*, Cambridge texts in applied mathematics, Cambridge University Press, 2nd edition.
- Dedner, A., Kemm, F., Kroner, D., Munz, C.-D., Schnitzer, T., Wesenberg, M. (2002), "Hyperbolic Divergence Cleaning for the MHD Equations", *Journal of Computational Physics* 175, 645-673.
- Del Zanna, L., Zanotti, O., Bucciantini, N., Londrillo, P. (2007), "ECHO: a Eulerian conservative high-order scheme for general relativistic magnetohydrodynamics and magnetohydrodynamics", *Astronomy & Astrophysics*, 473, 11-30.
- Dobler, W., Brandenburg, A. (2019), *The Pencil Code: A High-order MPI code for MHD Turbulence, User's and Reference manual*.
- Estivals, E. (2017), *MHD modeling and numerical simulation with finite volume-type methods. Application to fusion plasma*, General Mathematics, Université Côte d'Azur.
- Evans, C.R., Hawley, J.F. (1988), "Simulation of magnetohydrodynamic flows- a constrained transport method", *Astrophysical Journal*, 332, 659-677.
- Felipe, T., Khomenko, E., Collados, M. (2010), "Magneto-acoustic waves in sunspots: first results from a new three-dimensional nonlinear magnetohydrodynamic code", *The Astrophysical Journal*, 719, 357-377.
- Flash Center for Computational Science University of Chicago, (2019), *FLASH User's guide Version 4.6.1*.
- Fragile, P.C., Nemergut, D., Shaw, P.L., Animos, P. (2019), "Divergence-free magnetohydrodynamics on conformally moving, adaptive meshes using a vector potential method", *Journal of Computational Physics: X*, 2.
- Frank, A., Carroll, J., Blackman, E.G., Heitsch, F., Lebedev, S. (2013) "Molecular clouds, colliding flows and HEDLA experiments: Star formation with the AstroBEAR AMR code", *High Energy Density Physics*, 9, 341-346.

Fromang, S., Hennebelle, P., Teyssier, R. (2006), "A high order Godunov scheme with constrained transport and adaptive mesh refinement for astrophysical magnetohydrodynamics", *Astronomy & Astrophysics*, 457, 371-384.

Fuchs, F.G., McMurtry, A.D., Mishra, S., Risebro, N.H., Waagan, K. (2011), "Approximate Riemann Solvers and Robust High-Order Finite Volume Schemes for Multi-Dimensional Ideal MHD Equations", *Communications in Computational Physics*, Vol.9 (2)324-362.

Garcia, T.F. (2010), *Ondas MHD en la fotosfera y cromosfera de manchas solares*, Departamento de astrofisica de Canarias, Universidad de la Laguna.

Goebloed, J.P., Poedts, S. (2004), *Principles of Magnetohydrodynamics with applications to laboratory and astrophysical plasmas*, Cambridge University Press.

Goebloed, J.P., Keppens, R., Poedts, S. (2010), *Advanced Magnetohydrodynamics: With applications to Laboratory and Astrophysical Plasmas*, Cambridge University Press.

Gourdain, P.A. (2017), "The impact of the Hall term on tokamak plasmas", Extreme State Physics Laboratory, Department of Physics and Astronomy, University of Rochester, online courses.

Halashi, B.K., Luo, H., Spicer, D., MacNiece, P. (2011), "A discontinuous Galerkin method for the Magnetohydrodynamics on Arbitrary Grids", 49th AIAA Aerospace Sciences Meeting including the New Horizons Forum and Aerospace Exposition, 4-7 January 2011, Orlando, Florida, American Institute of Aeronautics and Astronautics.

Hennicker, J., Puls, J., Kee, N.D., Sundqvist, J.O.(2019), "A 3D short-characteristics method for continuum and line scattering problems in the winds of hot stars", *Astronomy & Astrophysics*, 15.

Kestener, P., Fromang, S., Kritsuk, A., Hennebelle, P. (2014), *High resolution fluid dynamics simulations on a GPU cluster*, GPU Technology Conference, San Jose.

Khomenko, E., Vitas, N., Collados, M., De Vicente, A. (2017), "Numerical simulations of quiet Sun magnetic fields seeded by Biermann Battery", *Astronomy & Astrophysics*, 604.

Khomenko, E., Vitas, N., Collados, M., De Vicente, A. (2018), "Three-dimensional simulations of solar magneto-convection including effects of partial ionization", *Astronomy & Astrophysics*, ESO.

Lee, D. (2014), "Part 2: Challenges in computing - The Biermann Battery Effects", Applied Mathematics & Statistics, University of California, AMS 280C seminar.

Li, S., Frank, A., Blackman, E. (2012), "Consequences of magnetic field structure for heat transport in magnetohydrodynamics", *The Astrophysical Journal*, 748, 24-38.

Losada, I.R., Lambrechts, M., Cole, E., Bourdin, P. (2017), *Pencil Code: Quick Start guide*.

Ludwig, H.-G., Steffen, M. (2013), "Opacities in Co⁵BOLD", *Memorie della Societa Astronomica Italiana Supplement*, 24, 53-61.

- Londrillo, P., Del Zanna, L. (2004), "On the divergence-free condition in Godunov-type schemes for ideal magnetohydrodynamics: the upwind constrained transport method", *Journal of Computational Physics*, 195, 17-48.
- Lye, K.O. (2015), "Getting started with ALSVID-UQ", eVITA Winter School.
- Meyer, C.D., Balsara, D.S., Aslam, T.D. (2012), "A second-order accurate Super Time-stepping formulation for anisotropic thermal conduction", *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 422, 2102-2115.
- Mignone, A., Bodo, G., Massaglia, S., Matsakos, T., Tesileanu, O., Zanni, C., Ferrari, A. (2007), "PLUTO: A numerical code for computational astrophysics", *The Astrophysical Journal Supplement series*, 170, 228-242.
- Mignone, A., Zanni, C., Tzeferakos, P., van Straalen, B., Collela, P., Bodo, G. (2011), "The PLUTO code for adaptive mesh computations in astrophysical fluid dynamics", *The Astrophysical Journal Supplement series*, 198 (2).
- Mignone, A., Zanni, C., Vaidya, B., Muscianisi, G., Tzeferacos, P., Tesileanu, O., Matsakos, T. (2018), *PLUTO v.4.3, User's Guide*, Universita Degli Studi di Torino, INAF, SCAI.
- Mishra, S., Scwab, C., Sukys, J. (2012), "Multi-level Monte Carlo finite volume methods for nonlinear systems of conservation laws in multi-dimensions", *Journal of Computational Physics*, 213, 3365-3388.
- Nagy, A.F., Balogh, A., Cravens, T.E., Mendillo, M., Müller-Wodarg, I. (2008), *Comparative Aeronomy*, Space Science Reviews, 139, 1-4, 162.
- Orszag, S., Tang, C.-M. (1979), "Small-scale structure of two dimensional magnetohydrodynamic turbulence", *Journal of Fluid Mechanics*, 90 (1), 129-143.
- Powell, K.G. (1994), "An approximate Riemann solver for magnetohydrodynamics (that works in more than one dimension)", Institute for Computer Applications in Science and Engineering Report No.94-24, NASA Contractor report 194902.
- Powell, K.G., Roe, P.L., Linde, T.J., Gombosi, T.I., De Zeeuw, D.L (1999), "A solution-Adaptive Upwind Scheme for Ideal Magnetohydrodynamics", *Journal of Computational Physics*, 154, 284-309.
- Ryan, B.R., Gammie, C.F., Fromang, S., Kestener, P. (2017), "Resolution dependence of Magnetorotational turbulence in the isothermal stratified shearing box", *The Astrophysical Journal*, 840.
- Schafelner, A. (2016), *Introduction to Magnetohydrodynamics*, Bakkalaureatsarbeit, Johannes Kepler Universität Linz.
- Schüssler, M., Bruls, J.H.M.J., Vögler, A., Vollmöller, P. (2004), "Simulation of Solar Radiative Magneto-Convection", *Analysis and Numerics for Conservation Laws*, 107-136.

Skinner, M. A., Ostriker, E. C. (2010), "The Athena Astrophysical MHD Code in Cylindrical Geometry", [arXiv: 1004.2487v1 [astro-ph.IM] 14 Apr 2010].

Sokolov, I.V., Powell, K.G., Cohen, O., Gombosi, T.I. (2008), "Computational MagnetoHydrodynamics, Based on Solution of the Well-Posed Riemann Problem", *Numerical Modeling of Space Plasma Flows/ Astronom- 2007*, ASP Conference Series, Vol.385.

Spitkovsky, A. (2005), "Simulations of relativistic collisionless shocks: shock structure and particle acceleration", *AIP Conference Proceeding*, Ser. 801, 345-350.

Spitkovsky, A. (2009), *Kinetic Plasma Simulations*, PowerPoint presentation.

Steffen, M. (1990), "A simple method for monotonic interpolation in one dimension", *Astronomy and Astrophysics*, 239,443-450.

Stone, J.M., Gardiner, T.A. (2008), "ATHENA: a new code for astrophysical MHD", *The Astrophysical Journal Supplement series*, 178, 137-177.

Šukys, J. (2014), "Multi-level Monte Carlo Finite Volume methods for stochastic systems of hyperbolic conservation laws", MascotNum, ETH Zürich, Switzerland.

Teyssier, R. (2002), "Cosmological hydrodynamics with adaptive mesh refinement, A new high resolution code called RAMSES", *Astronomy & Astrophysics*, 385, 337-364.

Teyssier, R. (2008), *RAMSES User's guide, Self-gravitating fluid dynamics with Adaptive Mesh Refinement using massively parallel computers, Version 3.0*, Irfu cea saclay.

Teyssier, R., Fromang, S., Dormy, E. (2006), "Kinematic Dynamos using Constrained Transport with High Order Godunov schemes and Adaptive Mesh Refinement", *Journal of Computational Physics*, 218, 44-67.

Teyssier, R. (2009), *Computational Astrophysics 8, The equations of Magneto-hydrodynamics*, Computational Astrophysics 2009, University of Zürich..

Tóth, G. (2000), "The $\nabla \cdot B = 0$ constraint in shock-capturing magnetohydrodynamics codes", *Journal of Computational Physics*, 212(2), 617-636.

Tóth, G., Holst, B. van der, Sokolov, I.V., De Zeeuw, D. I., Gombosi, T.I., Fang, F., Manchester, W.B., Meng, X. , Najib, D., Powell, K.G., Stout, Q.F., Glocer, A., Ma, Y.-J., Opher, M. (2012), "Adaptive numerical algorithms in space weather modeling", *Journal of Computational Physics*, 231, 870-903.

Tóth, G., Roe, P.L. (2002), "Divergence- and Curl- Preserving Prolongation and Restriction Formulas", *Journal of Computational Physics*, 180, 736-750.

Tóth, G., CSEM team (2011), *Computational MHD: Tutorial*, Center for Space Environment Modeling, University of Michigan.

Vögler, A., Shelyag, S., Schüssler, M., Cattaneo, F., Emonet, T., Linde, T. (2005), "Simulations of magneto-convection in the solar photosphere, Equations, methods, and results of the MURaM code", *Astronomy & Astrophysics*, 429, 335-351.

Yang, J., Liang, C. (2017), "A high-order flux reconstruction adaptive mesh refinement method for magnetohydrodynamics on unstructured grids", *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 1-23.

Yirak, K., Frank, A., Cunningham, A.J. (2010), "Self-convergence of radiatively cooling clumps in the interstellar medium", *The Astrophysical Journal*, 722, 412-424.

Young, H.D. (1994), *Πανεπιστημιακή Φυσική Τόμος β Ηλεκτρομαγνητισμός, Οπτική, Σύγχρονη φυσική*, Εκδόσεις Παπαζήση.

Welling, D.T., Ridley, A.J. (2010), "Validation of SWMF magnetic field and plasma", *Space Weather*, 8, s03002.

Zanna, L.D. (2009), "The ECHO code for classical and relativistic MHD", *Numerical Modeling of space plasma flows: Astronom-2008*, ASP Conference Series, Vol.406.

Zhang, M., Feng, X. (2016), "A Comparative Study pf Divergence Cleaning Methods of Magnetic Field in the Solar Coronal Numerical Simulation", *Frontiers in Astronomy and Space Sciences*, 3:6.

Ziegler, U. (2008), "The NIRVANA code: Parallel computational MHD with adaptive mesh refinement", *Computer Physics Communications*, 179, 227-244.

Ziegler, U. (2011), "A semi-discrete central-upwind scheme for magnetohydrodynamics on orthogonal-curvilinear grids", *Journal of Computational Physics*, 230, 1035.

Ziegler, U. (2012), "Block-structured adaptive mesh refinement on curvilinear-orthogonal grids", *SIAM Journal on Scientific Computing*, 34.

Ziegler, U. (2014), *Nirvana v3.8, astrophysical gas dynamics code, DOCU-user's guide*, AIP, Leibniz-Institut für Astrophysik Potsdam.

Ziegler, U. (2014), *Nirvana v3.8, astrophysical gas dynamics code, DOCU-appendix*, AIP, Leibniz-Institut für Astrophysik Potsdam.

Πανεπιστήμιο Πατρών, *Ηλεκτρονικές σημειώσεις μαθήματος Υπολογιστικής Ρευστομηχανικής, Ανάλυση διακριτής μορφής διαφορικών μερικών παραγώγων με πεπερασμένες διαφορές*, 2019.

Ιστοσελίδες

- I. Sciencedirect.com
- II. Wikipedia.org
- III. <http://csem.engin.umich.edu/tools/swmf/index.php>
- IV. <https://ccmc.gsfc.nasa.gov/requests/requests.php>
- V. <http://www.sam.math.ethz.ch/alsvid-ug/>
- VI. <https://www.pas.rochester.edu/astrobear> και
- VII. <http://www.astro.unifi.it/echo/index.html>
- VIII. <http://fargo.in2p3.fr/>
- IX. <http://flash.uchicago.edu/site/flashcode/>
- X. <http://research.iac.es/proyecto/spia//pages/codes.php>
- XI. http://www2.mps.mpg.de/projects/solar-mhd/muram_site/code.html
- XII. <https://www.aip.de/Members/uziegler/nirvana-code>
- XIII. <http://pencil-code.nordita.org/> και <https://github.com/pencil-code/pencil-code>
(για κατέβασμα του κώδικα),
- XIV. <https://agenda.albanova.se/conferenceDisplay.py?confId=6785>
- XV. <http://plutocode.ph.unito.it/>
- XVI. <https://www.ics.uzh.ch/~teyssier/ramses/RAMSES.html>
- XVII. <https://www.horizon-simulation.org/>
- XVIII. <http://www.maisonodelasimulation.fr/projects/RAMSES-GPU/html/index.html>
- XIX. <https://ntoles.github.io/tristan-mp-pitp/> και <https://github.com/ntoles/tristan-mp-pitp> (για κατέβασμα του κώδικα)
- XX. <https://www.astro.princeton.edu/~jstone/zeus.html>
- XXI. https://github.com/bwoshea/ZEUS-MP_2
- XXII. <http://www.netpurgatory.com/zeusmp.html>
- XXIII. <http://www.ap.smu.ca/~dclarke/zeus3d/version3.6/> (δεν δουλεύει το link για να τον κατεβάσεις)
- XXIV. <https://princetonuniversity.github.io/Athena-Cversion/>
- XXV. <https://www.astro.princeton.edu/~jstone/Athena/tests/index.html>
- XXVI. https://earth.esa.int/dragon/D2_L2_Carli.pdf

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ : Είδη εξισώσεων MHD

Στο Κεφάλαιο 1, αναφέρονται εκτενώς οι ιδανικές εξισώσεις μαγνητοϋδροδυναμικής καθώς και οι εξισώσεις που περιλαμβάνουν βασικούς όρους διάχυσης (συνεκτικότητα και ειδική αντίσταση). Πέραν αυτών, όπως ήδη έχει αναφερθεί στο Κεφάλαιο 2, υπάρχει μια πληθώρα εξισώσεων οι οποίες είτε διαφοροποιούνται πλήρως από τις ιδανικές (σχετικιστικές εξισώσεις) είτε αποτελούν παραλλαγές των ιδανικών (τροποποιήσεις εξισώσεων, προσθήκη όρων ή εξισώσεων). Αυτές οι περιπτώσεις παρουσιάζονται συνοπτικά στη συνέχεια, για να έχει δυνατότητα ο αναγνώστης να αντιληφθεί τη χρησιμότητα κάθε κώδικα όπως αναλύθηκε (Tóth, et al., 2012, εκτός αν αναφέρεται διαφορετικά).

1. Ιδανικές εξισώσεις μαγνητοϋδροδυναμικής

Έχουν αναφερθεί αναλυτικά στο Κεφάλαιο 1.

2. Ημισχετικιστικές εξισώσεις μαγνητοϋδροδυναμικής

Η ταχύτητα Alfvén δεν περιορίζεται από την ταχύτητα του φωτός, μάλιστα κοντά σε ισχυρά μαγνητισμένους πλανήτες είναι μεγαλύτερη της ($u_{alf} > c$).

Οι εξισώσεις διαφοροποιούνται σε σχέση με τις ιδανικές όσον αφορά την εξίσωση της μαγνητικής επαγωγής, κατά τον όρο του ρεύματος μετατόπισης ο οποίος είχε απαλειφθεί:

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{V}\mathbf{B} - \mathbf{B}\mathbf{V}) = -\frac{\eta_m}{Lu} \nabla \times (\mathbf{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}) \quad [\text{A.1}]$$

ενώ παρέχεται εξωτερικά το φυσικώς ορθό όριο στις ταχύτητες των κυμάτων.

3. Σχετικιστικές εξισώσεις μαγνητοϋδροδυναμικής

Οι ειδικές και γενικές σχετικιστικές εξισώσεις μαγνητοϋδροδυναμικής εφαρμόζονται σε μεγάλο βαθμό στον τομέα της αστροφυσικής. Επειδή είναι εκτός του πλαισίου αναφοράς της παρούσας εργασίας – απαιτούνται εξειδικευμένες γνώσεις φυσικής για να μπορέσουν να παρουσιαστούν- δεν γίνεται παρουσίαση των ίδιων των εξισώσεων ούτε εφαρμογών τους. Παρόλα αυτά, στο κεφάλαιο 2, γίνεται αναφορά στο ποιοι κώδικες προσομοιώνουν την επίλυση τους για να μπορεί να ανατρέξει κάποιος για περαιτέρω πληροφορίες.

4. Μη ιδανικές, μη σχετικιστικές εξισώσεις ή Hall εξισώσεις μαγνητοϋδροδυναμικής

Στις μη ιδανικές, μη σχετικιστικές εξισώσεις, περιλαμβάνονται όροι διάχυσης καθώς ο αγωγός δεν είναι ιδανικός. Για την περιγραφή τους καθώς και για την περιγραφή άλλων φαινομένων, χρησιμοποιείται ο γενικευμένος νόμος του Ohm. Η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου υπολογίζεται σ' αυτή την περίπτωση από την εξίσωση A.2. Η

εξίσωση συμπεριλαμβάνει τον όρο ηλεκτρικής αντίστασης (ή ωμικής διάχυσης) ($\eta \mathbf{J}$), τον όρο Hall ($\frac{\mathbf{J} \times \mathbf{B}}{q_e n_e}$) και τον όρο Biermann battery (ambipolar όρος) ($-\frac{\nabla p_e}{q_e n_e}$) όπου p_e η πίεση των ηλεκτρονίων) ενώ ο όρος αδρανείας των ηλεκτρονίων παραλείπεται (λόγω της μικρής τους μάζας σε σχέση με τα ιόντα).

$$\mathbf{E} = -\mathbf{V} \times \mathbf{B} + \eta \mathbf{J} + \frac{\mathbf{J} \times \mathbf{B}}{q_e n_e} - \frac{\nabla p_e}{q_e n_e} \quad [\text{A.2}]$$

Ειδικότερα για τη φυσική σημασία των παραπάνω όρων:

Α) Όρος ηλεκτρικής αντίστασης (resistivity) ή ωμικής διάχυσης (Ohmic dissipation term). Εφόσον ο αγωγός δεν είναι ιδανικός, η (ηλεκτρική) ειδική αντίσταση η είναι διάφορη του μηδενός. Λόγω της δύναμης Lorentz που επενεργεί στον αγωγό (βλ. αναλυτικά κεφάλαιο 1, παράγραφος 1.2), επάγεται ηλεκτρικό ρεύμα ίσο με

$$\mathbf{J} = \frac{1}{\eta} (\mathbf{E} + \mathbf{V} \times \mathbf{B}) \quad [\text{A.3}]$$

Β) Φαινόμενο Hall. Όταν τεθεί σε μαγνητικό πεδίο ένα αγωγίμο έλασμα που διαρρέεται από ρεύμα, τότε αναπτύσσεται διαφορά δυναμικού σε διεύθυνση κάθετη στο ρεύμα και στο μαγνητικό πεδίο. Το φαινόμενο αυτό δημιουργεί η μονομερής απόκλιση των φορέων φορτίου, λόγω της αλληλεπίδρασης με το μαγνητικό πεδίο. Ο όρος του Hall σε πολλές περιπτώσεις δεν περιλαμβάνεται σε MHD κώδικες λόγω της δυσκολίας υπολογισμού του. Πέραν τούτου, στην περίπτωση όπου η κίνηση των ιόντων είναι ανεξάρτητη από την κίνηση των ηλεκτρονίων, ο όρος του Hall είναι ιδιαίτερα ισχυρός (Gourdain, 2017).

Γ) Όρος Biermann battery (BBT/Biermann Battery Term). Αποτελεί μια δημοφιλή λύση για την γένεση ενός seed μαγνητικού πεδίου από το μηδέν (Lee, 2014). Για ιδανική ή συμμετρική ροή, ή σε σφαιρικά shocks, ο BBT είναι μηδέν. Γίνεται διάφορος του μηδέν όταν η συμμετρία σπάει και δύο κλίσεις δεν είναι ευθυγραμμισμένες μεταξύ τους (αυτή της ηλεκτρικής πίεσης και της πυκνότητας).

Κατά συνέπεια αλλάζουν όλες οι εξισώσεις πλην της εξίσωσης της συνέχειας ως προς τον όρο του ηλεκτρικού πεδίου και γίνονται:

Εξίσωση διατήρησης της ορμής:

$$\frac{\partial \rho \mathbf{V}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V} \mathbf{V} + (p_{tot} + p_e) \mathbf{I} - \mathbf{B} \mathbf{B}) = 0 \quad [\text{A.4}]$$

Εξίσωση διατήρησης της ενέργειας:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial (\rho E + \frac{P_e}{\gamma - 1})}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\mathbf{V} (\rho E + p_{tot} - B^2) + \left(\frac{P_e}{\gamma - 1} + p_e \right) \mathbf{V}_e + B^2 \mathbf{V}_e - \mathbf{B} \mathbf{B} \cdot \mathbf{V}_e - \mathbf{B} \times (\eta \mathbf{J} \right. \\ & \left. - \frac{\nabla p_e}{q_e n_e}) \right) = 0 \end{aligned} \quad [\text{A.5}]$$

Όπου,

$\mathbf{V}_e = \mathbf{V} - \frac{\mathbf{J}}{q_e n_e}$, το διάνυσμα της ταχύτητας των ηλεκτρονίων

n_e , η πυκνότητα του αριθμού των ηλεκτρονίων

η , η (ηλεκτρική) ειδική αντίσταση (resistivity)

Εξίσωση μαγνητικής επαγωγής (magnetic induction):

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \nabla \times [-\mathbf{V}_e \times \mathbf{B} + \eta \mathbf{J} - \frac{\nabla p_e}{q_e n_e}] = 0 \quad [\text{A.6}]$$

Δ) Ambipolar diffusion. Η φυσική διεργασία μέσω της οποίας το μαγνητικό πεδίο δεν είναι πλήρως συζευγμένο με το ρευστό. Εάν ένα μόνο μέρος του ρευστού είναι ιονισμένο, τα ουδέτερα σωματίδια είναι συζευγμένα με το μαγνητικό πεδίο μόνο μέσω συγκρούσεων με τα ιονισμένα σωματίδια τα οποία είναι συζευγμένα με το πεδίο. Η αποτυχία τέτοιων συγκρούσεων να κρατήσουν τα ιονισμένα και τα ουδέτερα σωματίδια μαζί, μπορεί να προκαλέσει μια ποσότητα τους να ολισθήσει/“slip” σε σχέση με το μαγνητικό πεδίο. Αυτή η διαδικασία είναι γνωστή ως ambipolar diffusion (Clarke, 2015). Για χαμηλού ιονισμού (low ionization) ρευστά, χρησιμοποιείται συνήθως προσέγγιση ενός ρευστού. Σε αυτή την περίπτωση η εξίσωση μαγνητικής επαγωγής γίνεται:

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \nabla \times [-\mathbf{V} \times \mathbf{B} - \mathbf{V}_d \times \mathbf{B}] = 0 \text{ με } \mathbf{V}_d = \frac{\tau_{in}}{\rho_i} \mathbf{J} \times \mathbf{B} \text{ και } \tau_{in} = \frac{10^{-13}}{\rho_n} \text{ sec} \quad [\text{A.7}]$$

Όπου, \mathbf{V}_d drift velocity, i δείκτης για ιόντα και n δείκτης για ουδέτερα σωματίδια (Teyssier, 2009).

Για υψηλού ιονισμού ρευστά, θα πρέπει να χρησιμοποιηθεί προσέγγιση δύο ρευστών.

5. Κατάσταση ανισότροπης πίεσης

Στις προηγούμενες περιπτώσεις η πίεση των ιόντων και των ηλεκτρονίων θεωρήθηκε ισότροπη και κατά συνέπεια μπορεί να περιγραφεί από μία μόνο βαθμωτή ποσότητα.

Στις μη συγκρουσιακές (collisionless) μορφές πλάσματος του διαστήματος η διανομή της πίεσης των ιόντων μπορεί να γίνει ανισότροπη (εξακολουθεί να θεωρείται ισότροπη η πίεση των ηλεκτρονίων) και κατά συνέπεια η πίεση των ιόντων δεν θα αποτελεί πλέον βαθμωτό μέγεθος αλλά διάνυσμα της μορφής:

$$\mathbf{P} = p_{\perp} \mathbf{I} + (p_{\parallel} - p_{\perp}) \mathbf{b} \mathbf{b} \quad [\text{A.8}]$$

Όπου,

(p_{\perp}) , η κάθετη συνιστώσα της πίεσης ως προς την διεύθυνση του μαγνητικού πεδίου,

(p_{\parallel}) , η παράλληλη συνιστώσα της πίεσης ως προς την διεύθυνση του μαγνητικού πεδίου,

$\mathbf{b} = \frac{\mathbf{B}}{B}$, το διάνυσμα της διεύθυνσης του μαγνητικού πεδίου.

Κατά συνέπεια αλλάζουν όλες οι εξισώσεις πλην της εξίσωσης της συνέχειας ως προς τον όρο της πίεσης και γίνονται:

Εξίσωση διατήρησης της ορμής (για τον γενικευμένο νόμο του Ohm):

$$\frac{\partial \rho \mathbf{V}}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\rho \mathbf{V} \mathbf{V} + \mathbf{P} + p_e \mathbf{I} + \mathbf{I} \frac{B^2}{2} - \mathbf{B} \mathbf{B} \right) = 0 \quad [\text{A.9}]$$

Εξίσωση διατήρησης της ενέργειας:

$$\frac{\partial \left(\rho E + \frac{P_e}{\gamma - 1} \right)}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\varepsilon \mathbf{V} + \mathbf{P} \cdot \mathbf{V} + \left(\frac{P_e}{\gamma - 1} + p_e \right) \mathbf{V}_e + B^2 \mathbf{V}_e - \mathbf{B} \mathbf{B} \cdot \mathbf{V}_e - \mathbf{B} \times \left(\eta \mathbf{J} - \frac{\nabla p_e}{q_e n_e} \right) \right) = 0 \quad [\text{A.10}]$$

Με την \mathbf{V}_e να ορίζεται ανάλογα με το αν έχουμε Hall MHD ή ideal MHD ($\mathbf{V}_e = \mathbf{V}$).

Εξίσωση μαγνητικής επαγωγής (magnetic induction):

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \nabla \times \left[-\mathbf{V}_e \times \mathbf{B} + \eta \mathbf{J} - \frac{\nabla p_e}{q_e n_e} \right] = \mathbf{0} \quad [\text{A.11}]$$

6. Μετάδοση θερμότητας

Στις καταστάσεις όπου το διαστημικό πλάσμα είναι συγκρουσιακό (collisional) θα πρέπει να ληφθεί υπόψη η κατά μήκος του πεδίου μετάδοση θερμότητας των ηλεκτρονίων (για πολύ ιονισμένα αέρια όπου τα ηλεκτρόνια είναι αυτά που βασικά συνεισφέρουν στη μετάδοση θερμότητας). Υιοθετείται ο κατά Spitzer υπολογισμός της ροής θερμότητας των ηλεκτρονίων, \mathbf{q}_e :

$$\mathbf{q}_e = -\kappa_e T_e^{5/2} \mathbf{b} \mathbf{b} \cdot \nabla T_e \quad [\text{A.12}]$$

Όπου,

κ_e , σταθερά η οποία εξαρτάται από την επιλογή του λογαρίθμου Coulomb και T_e , η θερμοκρασία των ηλεκτρονίων.

Ο συγκεκριμένος όρος τροποποιεί την εξίσωση της ενέργειας με την προσθήκη του όρου της απόκλισης της ροής θερμότητας:

Για τις ιδανικές εξισώσεις

$$\frac{\partial \rho E}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{V}(\rho E + p_{tot}) - (\mathbf{V} \cdot \mathbf{B}) \mathbf{B}) + \nabla \cdot \mathbf{q}_e = 0 \quad [\text{A.13}]$$

Για τις εξισώσεις κατά Hall

$$\frac{\partial \left(\rho E + \frac{P_e}{\gamma - 1} \right)}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\mathbf{V}(\rho E + p_{tot} - B^2) + \left(\frac{P_e}{\gamma - 1} + p_e \right) \mathbf{V}_e + B^2 \mathbf{V}_e - \mathbf{B} \mathbf{B} \cdot \mathbf{V}_e - \mathbf{B} \times \left(\eta \mathbf{J} - \frac{\nabla p_e}{q_e n_e} \right) \right) + \nabla \cdot \mathbf{q}_e = 0 \quad [\text{A.14}]$$

Για τις εξισώσεις με ανισότροπη πίεση

$$\frac{\partial \left(\rho E + \frac{P_e}{\gamma - 1} \right)}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\varepsilon \mathbf{V} + \mathbf{P} \cdot \mathbf{V} + \left(\frac{P_e}{\gamma - 1} + p_e \right) \mathbf{V}_e + B^2 \mathbf{V}_e - \mathbf{B} \mathbf{B} \cdot \mathbf{V}_e - \mathbf{B} \times \left(\eta \mathbf{J} - \frac{\nabla p_e}{q_e n_e} \right) \right) + \nabla \cdot \mathbf{q}_e = 0 \quad [\text{A.15}]$$

7. Εξισώσεις για $n \geq 2$ είδη ιόντων (multi-species) και $n \geq 2$ διαφορετικά υλικά (multi-material)

Διαφορετικά είδη ιόντων αντιστοιχούν σε διαφορετικά χαρακτηριστικά του πλάσματος γι αυτό και θα πρέπει να διαχωρίζονται ευκρινώς. Στην περίπτωση συγκρουσιακού πλάσματος οι ταχύτητες και οι θερμοκρασίες των διαφορετικών ειδών είναι σχεδόν ίδιες.

Για την σχετική μοντελοποίηση τροποποιείται η εξίσωση της συνέχειας με την επίλυση επιπρόσθετων εξισώσεων όσα και τα είδη των ιόντων δηλαδή:

Εξίσωση της συνέχειας για $s=1 \dots N_{\text{species}}$

$$\frac{\partial \rho_s}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_s \mathbf{V}) = S_{\rho_s} \quad [\text{A.16}]$$

Όπου,

ρ_s , η πυκνότητα του είδους s έτσι ώστε $\rho = \sum_1^s \rho_s$

S_{ρ_s} , ο όρος πηγής για το είδος s .

Σε ορισμένες εφαρμογές (όχι στη φυσική του διαστήματος), θα πρέπει να υπάρχει διαχωρισμός για διαφορετικά υλικά τα οποία δεν αναμιγνύονται μεταξύ τους αλλά έχουν διαφορετικές ιδιότητες όπως π.χ. η EOS που ισχύει για το καθένα.

Υιοθετούνται οι εξισώσεις A.16 για τις διαφορετικές πυκνότητες υλικών. Εάν υπάρχει βασικό/κυρίαρχο είδος, είναι δυνατόν να χρησιμοποιηθούν οι αντίστοιχες ιδιότητες του. Στις διεπιφάνειες όμως των διαφορετικών υλικών είτε χρησιμοποιείται ο σταθμισμένος μέσος όρος των ιδιοτήτων των υλικών είτε χρησιμοποιούνται εξισώσεις που γίνονται μηδέν ομαλά στις διεπιφάνειες.

Ένας συνήθης διαχωρισμός των περιπτώσεων που συναντώνται είναι μεταξύ στερεών σωματιδίων που έχουν την ίδια τοπική ταχύτητα με το ρευστό (tracer particles, passive scalar) ή και όχι (π.χ. dust particles), που δεν αλληλεπιδρούν ή αλληλεπιδρούν με το ρευστό αντίστοιχα.

8. Εξισώσεις για $n \geq 2$ ρευστά (multi-fluid)

Για μη συγκρουσιακά διαφορετικά είδη ιόντων και ουδέτερων στοιχείων, οι ταχύτητες και οι θερμοκρασίες μπορεί να διαφέρουν σημαντικά. Σε αυτή την περίπτωση ακολουθεί ξεχωριστή περιγραφή ανά ρευστό όσον αφορά την πυκνότητα, την ταχύτητα του και την θερμοκρασία του. Επηρεάζεται το σύνολο των εξισώσεων οι οποίες ορίζονται χωριστά για τα ιοντικά ρευστά και για τα ουδέτερα ρευστά.

Έστω s το ιοντικό ρευστό (σύνολο N_{ion}) και n το ουδέτερο ρευστό (σύνολο $N_{\text{fluid}} - N_{\text{ion}}$).

Για τα ιοντικά ρευστά

➤ Εξίσωση της συνέχειας

$$\frac{\partial \rho_s}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_s \mathbf{V}_s) = S_{\rho_s} \quad [\text{A.17}]$$

➤ Εξίσωση της ορμής

$$\frac{\partial \rho_s \mathbf{V}_s}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_s \mathbf{V}_s \mathbf{V}_s + p_s \mathbf{I}) = n_s q_s (\mathbf{V}_s - \mathbf{V}_+) \times \mathbf{B} + \frac{n_s q_s}{n_e q_e} (\mathbf{J} \times \mathbf{B} - \nabla p_e) + S_{\rho_s} \mathbf{V}_s \quad [\text{A.18}]$$

Όπου

n_s , η αριθμητική πυκνότητα του ιοντικού ρευστού s ,

q_s , το ηλεκτρικό φορτίο του ιοντικού ρευστού s

\mathbf{V}_s , το διάνυσμα της ταχύτητας του ιοντικού ρευστού s

p_s , η πίεση του ιοντικού ρευστού s

\mathbf{V}_+ , η ιοντική ταχύτητα ανά φορτίο ή αλλιώς η μέση ταχύτητα των θετικά φορτισμένων φορτίων με $V_+ = \frac{\sum_s q_s n_s \mathbf{V}_s}{q_e n_e}$.

➤ Εξίσωση της μαγνητικής επαγωγής

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \nabla \times \left(-\mathbf{V}_e \times \mathbf{B} - \frac{\nabla p_e}{q_e n_e} \right) = 0 \quad [\text{A.19}]$$

όπου

\mathbf{V}_e , η ταχύτητα των ηλεκτρονίων με $\mathbf{V}_e = \mathbf{V}_+ - \frac{\mathbf{J}}{q_e n_e}$.

➤ Εξίσωση της ενέργειας

$$\frac{\partial \rho_s E_s}{\partial t} + \nabla \cdot [(\rho_s E_s + p_s) \mathbf{V}_s] = \mathbf{V}_s \cdot \left[n_s q_s (\mathbf{V}_s - \mathbf{V}_+) \times \mathbf{B} + \frac{n_s q_s}{n_e q_e} (\mathbf{J} \times \mathbf{B} - \nabla p_e) \right] + S_{e_s} \quad [\text{A.20}]$$

Όπου

$\rho_s E_s = \frac{\rho_s u_s^2}{2} + \frac{p_s}{\gamma-1}$, η ολική ενεργειακή πυκνότητα του ιοντικού ρευστού s και S οι αντίστοιχοι όροι πηγής ανά εξίσωση.

Για τα ουδέτερα φορτισμένα ρευστά

➤ Εξίσωση της συνέχειας

$$\frac{\partial \rho_n}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_n \mathbf{V}_n) = S_{\rho_n} \quad [\text{A.21}]$$

➤ Εξίσωση της ορμής

$$\frac{\partial \rho_n \mathbf{V}_n}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_n \mathbf{V}_n \mathbf{V}_n + p_n \mathbf{I}) = S_{\rho_n} \mathbf{V}_n \quad [\text{A.22}]$$

Όπου

n_n , η αριθμητική πυκνότητα του ουδέτερου ρευστού n

q_n , το ηλεκτρικό φορτίο του ουδέτερου ρευστού n

\mathbf{V}_n , το διάνυσμα της ταχύτητας του ουδέτερου ρευστού n

p_n , η πίεση του ουδέτερου ρευστού n .

➤ Εξίσωση της ενέργειας

$$\frac{\partial \rho E_n}{\partial t} + \nabla \cdot [(\rho E_n + p_n) \mathbf{V}_n] = S_{e_n} \quad [\text{A.23}]$$

Όπου

$\rho_n E_n = \frac{\rho_n u_n^2}{2} + \frac{p_n}{\gamma-1}$, η ολική ενεργειακή πυκνότητα του ουδέτερου ρευστού n

S οι αντίστοιχοι όροι πηγής ανά εξίσωση λόγω διάφορων διεργασιών όπως η βαρύτητα, η συναλλαγή φορτίου, ο ανασυνδυασμός, ο φωτιονισμός κ.λπ.

9. Μετάδοση με ακτινοβολία

Ο όρος απωλειών λόγω ακτινοβολίας δίνεται από την non-gray εξίσωση μετάδοσης της ακτινοβολίας (RTE/Radiative Transfer Equation), δηλαδή για έναν αριθμό συχνοτήτων και κατευθύνσεων των ακτινών. Με τον όρο non-gray ακτινοβολία χαρακτηρίζεται η ακτινοβολία με τυχαία διασπορά της ενέργειας στο φάσμα.

$$\frac{dI_\nu}{d\tau_\nu} = S_\nu - I_\nu \quad [\text{A.24}]$$

Όπου,

I_ν είναι η (φασματική) ειδική ένταση

S_ν είναι η συνάρτηση της πηγής

$d\tau_\nu = \kappa_\nu \rho ds$ είναι το οπτικό πάχος του path element ds , με κ_ν να είναι η opacity/αδιαφάνεια του πλάσματος. Η εξίσωση υποδηλώνει ότι η ειδική ένταση της ακτινοβολίας κατά τη διάρκεια της εξάπλωσης της σε ένα μέσο υπόκειται σε απώλειες λόγω της εξαφάνισης της (extinction=absorption+scattering) και σε κέρδη λόγω της εκπομπής.

Αγνοώντας αναχωρήσεις/departures από την LTE και υποθέτοντας ότι η συνάρτηση της πηγής δίνεται από την συνάρτηση του Planck (για συγκεκριμένη συχνότητα και θερμοκρασία) δηλαδή:

$$S_\nu = B_\nu \quad [\text{A.25}]$$

Πιο συγκεκριμένα, για την εφαρμογή της εξίσωσης από τους κώδικες, αναφέρεται η μεθοδολογία στο Κεφάλαιο 2.