



ΣΤΡΑΤΙΩΤΙΚΗ ΣΧΟΛΗ ΕΥΕΛΠΙΔΩΝ
Τμήμα Στρατιωτικών Επιστημών

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
ΔΙΔΡΥΜΑΤΙΚΟ ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ
ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΟΥ ΕΤΟΥΣ 2016-17
ΣΧΕΔΙΑΣΗ & ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ

ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ (SYSTEMS ENGINEERING)

(ΠΔ 96 / 2015 / ΦΕΚ 163Α' / 20.08.2014)



ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Σχολή Μηχανικών Παραγωγής & Διοίκησης

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

ΑΝΑΛΥΣΗ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΠΑΡΑΓΩΓΗΣ

ΚΑΙ ΣΥΝΑΡΜΟΛΟΓΗΣΗΣ ΔΥΟ

ΕΞΑΡΤΗΜΑΤΩΝ ΣΕ ΣΥΝΘΕΤΟ ΠΡΟΪΟΝ

Διατριβή που υπεβλήθη για την μερική ικανοποίηση των απαιτήσεων
για την απόκτηση Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης

Υπό:

ΣΟΦΙΑΝΟΣ ΑΝΔΡΙΑΝΑΚΟΣ

A.M.: 2016018007

ΜΑΡΤΙΟΣ 2019

Η Μεταπτυχιακή Διατριβή του Σοφιανού Ανδριανάκου.....
εγκρίνεται:

ΤΡΙΜΕΛΗΣ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΗ ΕΠΙΤΡΟΠΗ

Καθηγητής Απόστολος Μπουρνέτας (Επιβλέπων)

Καθηγητής Νικόλαος Δάρας

Καθηγητής Βασίλειος Κουϊκόγλου (Συνεπιβλέπων)

ΣΕΛΙΔΑ ΣΚΟΠΙΜΑ ΚΕΝΗ

© Copyright υπό:

Στρατιωτική Σχολή Ευελπίδων - Τμήμα Στρατιωτικών Επιστημών
Πολυτεχνείο Κρήτης - Σχολή Μηχανικών Παραγωγής & Διοίκησης

Έτος 2019

Αφιερώσεις

Η παρούσα εργασία, αποτελεί τον «τελευταίο σταθμό» σε ένα ακόμη «ταξίδι» που έκανα στον απέραντο και συνάμα συναρπαστικό κόσμο της μόρφωσης, στα πλαίσια της αέναης αναζήτησής μου για προσωπική και επαγγελματική εξέλιξη.

Η εργασία αυτή αφιερώνεται λοιπόν, πρωτίστως στην οικογένειά μου και συγκεκριμένα στη σύζυγό μου Στέλλα για την αμέριστη συμπαράσταση που μου παρέχει όλα αυτά τα χρόνια και την ανοχή που επιδεικνύει στηρίζοντας με στις επιλογές μου και βοηθώντας με καθημερινά να γίνομαι καλύτερος άνθρωπος, καθώς και στην κόρη μου Θεοδώρα η οποία αποτελεί αστείρευτη πηγή έμπνευσης και δύναμης σε οτιδήποτε κάνω στην ζωή και την καθημερινότητά μου.

Τέλος, δε θα ήθελα να παραλείψω να αφιερώσω τη παρούσα εργασία, στη μητέρα μου, τον πατέρα μου και την αδερφή μου Βασιλική, για λόγους ευκόλως εννοούμενους που δεν αναγκαστεί να αναφερθούν.

ΣΕΛΙΔΑ ΣΚΟΠΙΜΑ ΚΕΝΗ

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Η παρούσα μεταπτυχιακή διατριβή, αποτελεί διπλωματική εργασία στα πλαίσια του Μεταπτυχιακού Προγράμματος «Σχεδίαση και Επεξεργασία Συστημάτων» του Τμήματος Μηχανικών Παραγωγής και Διοίκησης του Πολυτεχνείου Κρήτης σε συνεργασία με τη Στρατιωτική Σχολή Ευελπίδων.

Πριν από τη παρουσίαση των αποτελεσμάτων της υπόψη διπλωματικής διατριβής, αισθάνομαι την υποχρέωση να ευχαριστήσω ορισμένους από τους ανθρώπους που γνώρισα, διδάχτηκα από αυτούς, αποκόμισα εμπειρίες, συνεργάστηκα μαζί τους και διαδραμάτισαν σημαίνοντα ρόλο στην διεκπεραίωσή της.

Πρωτίστως, θέλω να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα και συνεπιβλέποντα καθηγητή της παρούσας εργασίας, Καθηγητή κύριο Απόστολο Μπουρνέτα και κύριο Βασίλη Κουϊκόγλου αντίστοιχα, για την πολύτιμη καθοδήγησή τους και την απεριόριστη στήριξη και βοήθεια που μου παρείχαν καθ' όλο το διάστημα της υλοποίησης της εργασίας καθώς και για την εμπιστοσύνη, την εκτίμηση και τον σεβασμό που μου έδειξαν.

Στη συνέχεια θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά, τον Καθηγητή και Κοσμήτορα της ΣΣΕ κύριο Νικόλαο Δάρα, για την εν γένει άρτια διοργάνωση και διεξαγωγή των μαθημάτων του ΜΠΣ, αλλά και για την αποδοχή του στο αίτημα μου να είναι μέλος της τριμελούς επιτροπής αξιολόγησης της παρούσας εργασίας και επειδή παράλληλα με την τεράστια ακαδημαϊκή και συγγραφική του εμπειρία, συνέβαλλε στην βελτιστοποίηση και ολοκλήρωσή της.

Τις ευχαριστίες μου εκφράζω τέλος, στο σύνολο του διδακτικού προσωπικού του ΠΚ και της ΣΣΕ που συμμετείχαν στη διδασκαλία των μαθημάτων του ΜΠΣ, για τις χρήσιμες γνώσεις που μας μεταλαμπάδευσαν και ιδιαίτερα στον Καθηγητή κύριο Φίλη Ιωάννη του ΠΚ, για τον σεβασμό, το ήθος και τον ιδιαίτερο τρόπο διδασκαλίας του, ο οποίος αποτελεί φάρο πνευματικού προσανατολισμού για κάθε διδασκόμενο μέλος της ακαδημαϊκής κοινότητας.

ΣΕΛΙΔΑ ΣΚΟΠΙΜΑ ΚΕΝΗ

ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

ABSTRACT

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Μαθηματική Μοντελοποίηση

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Περιγραφή συστήματος παραγωγής και αντικείμενο εργασίας

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Θεωρία Markov

§1. Στοχαστικές διαδικασίες

§2. Μαθηματική θεμελίωση

§3. Παραλλαγές Διαδικασιών Markov

§4. Ο πίνακας τάσεων Q

§5. Υπολογισμός του πίνακα P - Επίλυση της εξίσωσης $Q \cdot P = 0$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

Επαναληπτικός αλγόριθμος αντιστροφής

§1. Δημιουργία «γονικής» διαδικασίας Markov

§2. LU αλγόριθμος παραγοντοποίησης

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

Γεωμετρική μέθοδος υπολογισμού πινάκων

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

Εφαρμογή, Αποτελέσματα, Συμπεράσματα

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η παρούσα εργασία, αποτελεί μια λεπτομερειακή αξιολόγηση της απόδοσης μιας γραμμής παραγωγής σύνθετου προϊόντος, ενός συστήματος παραγωγής δύο σταδίων, στο οποίο τα επιμέρους προϊόντα που παράγονται κατά το πρώτο στάδιο, δύναται να χρησιμοποιηθούν τόσο ως πρώτη ύλη αλλά και ως τελικά προϊόντα.

Η γραμμή παραγωγής που θα μελετηθεί, αποτελείται από δύο μηχανές παραγωγής επί μέρους εξαρτημάτων, οι οποίες λειτουργούν παράλληλα και κάθε μία ακολουθείται από αντίστοιχη αποθήκη πεπερασμένης χωρητικότητας. Τα εξαρτήματα που παράγουν οι δύο μηχανές, τροφοδοτούν μια τρίτη μηχανή η οποία τα συναρμολογεί για την παραγωγή του τελικού προϊόντος.

Η περιγραφή της διαδικασίας αφίξεων των παραγγελιών και εξυπηρέτησης, γίνεται με τη βοήθεια των διαδικασιών Poisson και με την υπόθεση ότι ο χρόνος μεταξύ διαδοχικών αφίξεων ή αναχωρήσεων ακολουθεί την εκθετική κατανομή. Η προσέγγιση της λύσης του προβλήματος θα γίνει με τεχνικές της θεωρίας των διαδικασιών Markov και της θεωρίας ουρών.

Στόχος της παρούσας εργασίας είναι:

α. Η μοντελοποίηση του προβλήματος και η εύρεση της γενικής λύσης του, για τις διάφορες τιμές των παραμέτρων του.

β. Η σύγκριση διαφορετικών τεχνικών ανάλυσης του συστήματος καθώς και η ανάλυση της αποτελεσματικότητας και της περιπλοκότητας υπολογισμού των πινάκων πλήρους περιγραφής του συστήματος με γνώμονα την διατήρηση του υπολογιστικού χρόνου επίλυσης και της αλγοριθμικής πολυπλοκότητας σε χαμηλά επίπεδα.

γ. Η ανάλυση της ευαισθησίας της απόδοσης του συστήματος ως προς διάφορες τιμές των παραμέτρων.

δ. Η εξαγωγή συμπερασμάτων ως προς την ανάλυση ευαισθησίας και της πολυπλοκότητας των διαφόρων αλγορίθμων.

ABSTRACT

This work is a detailed assessment of the performance of a composite product line which can be described by a two-stage production system. The products that are the exports of the first stage can be used both as raw material and as final products.

The production line to be studied consists of two individual component production machines operating in parallel and each of which is followed by a corresponding finite buffer. The components produced by the two machines feed a third machine which assembles them to produce the final product.

The process that best describes the arrivals of the orders is Poisson procedures and assuming that the machine time of each machine follows an exponential distribution, the modeling approach of the problem will be through Markov's theory and queueing theory.

Objectives of the work will be:

- a. Problem modeling and finding the general solution for the different values of its parameters.
- b. The comparison of different system analysis techniques and the efficiency and complexity analysis of calculating the matrices that fully describe the system, aiming to maintain the computational time and algorithmic complexity at lowest possible levels.
- c. Sensitivity analysis of system's performance for different parameter values.
- d. Inference on the sensitivity analysis and the complexity of the various algorithms.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η παρούσα εργασία, αποτελεί μια λεπτομερειακή μελέτη ενός συστήματος παραγωγής δύο σταδίων. Στα συστήματα παραγωγής δύο σταδίων, τα προϊόντα που παράγονται κατά το πρώτο στάδιο, χρησιμοποιούνται τόσο ως πρώτη ύλη αλλά και ως τελικά προϊόντα. Η περιγραφή της διαδικασίας αφίξεων των παραγγελιών γίνεται με τη βοήθεια των διαδικασιών Poisson και οι χρόνοι παραγωγής είναι εκθετικά κατανομημένοι. Στόχος της παρούσας εργασίας είναι η σύγκριση διαφορετικών τεχνικών ανάλυσης του συστήματος καθώς και η ανάλυση της περιπλοκότητας υπολογισμού των πινάκων πλήρους περιγραφής του συστήματος. Για το σκοπό αυτό, υλοποιήθηκαν διαφορετικοί αλγόριθμοι σε προγραμματιστικό περιβάλλον και μετρήθηκε η αποτελεσματικότητα και η πολυπλοκότητά τους, κάτω από τις ίδιες πάντα συνθήκες.

Η σύγχρονη βιομηχανική παραγωγή στηρίζεται, κατά κύριο λόγο, στα συστήματα παραγωγής. Η ανάπτυξη μοντέλων που περιγράφουν τις διαδικασίες παραγωγής και η μελέτη αυτών, επιτρέπει στις επιχειρήσεις να την καταστήσουν πιο ευέλικτη και φυσικά να επιτύχουν τους βασικούς άξονες καλής λειτουργίας τους με απώτερο σκοπό τη μείωση του λειτουργικού κόστους και την παράλληλη αύξηση των κερδών. Η ραγδαία αύξηση της τεχνολογίας επιτάσσει, σε κάθε επιχείρηση η οποία στοχεύει στην ανταγωνιστικότητά της, να προσδιορίζει επακριβώς τις παθογένειες των συστημάτων παραγωγής της, προκειμένου να αποφεύγει πιθανές διακοπές στην ομαλή λειτουργία της.

Μετά τη βιομηχανική ανάπτυξη, οι περισσότερες βιομηχανίες ακολούθησαν το μοντέλο μαζικής παραγωγής, κατά το οποίο στόχος της παραγωγικής μονάδας ήταν η παραγωγή όσο το δυνατόν μεγαλύτερου αριθμού προϊόντων. Το μοντέλο αυτό ευδοκίμησε κατά τον προηγούμενο αιώνα καθώς παρατηρήθηκε η ύπαρξη μονοπωλίων στους περισσότερους τομείς. Με την πολιτική αυτή, οι μεγάλες παραγωγικές μονάδες

μεγιστοποιούσαν το κέρδος τους όσο δεν δημιουργούνταν το πρόβλημα της αποθήκευσης προϊόντων.

Κατά τον 21ο αιώνα και καθώς οι ανάγκες της αγοράς είναι εμφανώς πολυπλοκότερες και σαφώς μεγαλύτερες από αυτές του περασμένου αιώνα, παρατηρείται διαφοροποίηση στο μοντέλο παραγωγής που ακολουθείται από τη μεγαλύτερη μερίδα παραγωγικών μονάδων. Στόχος πλέον είναι ο βέλτιστος προσδιορισμός του αποθέματος, καθώς το κόστος αποθήκευσης και συντήρησης ενδιάμεσων και τελικών προϊόντων είναι συχνά η σημαντικότερη συνιστώσα στη διαμόρφωση του συνολικού κόστους παραγωγής. Κρίνεται λοιπόν αναγκαία η διατήρηση αποθεμάτων σε επίπεδα μικρότερα από κάποια μέγιστη στάθμη για την ελαχιστοποίηση του κόστους, αλλά και μεγαλύτερα από ένα κάτω όριο ασφαλείας για την αποφυγή ανικανοποίητης ζήτησης. Οι δύο αυτές παράμετροι αποτελούν τους βασικούς ρυθμιστές της επιλογής του ρυθμού παραγωγής ενός συστήματος παραγωγής.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Μαθηματική Μοντελοποίηση

Τα μαθηματικά αποτελούν την καταλληλότερη «γλώσσα» για τη μελέτη και την περιγραφή των φαινομένων του φυσικού κόσμου. Επιτρέπουν, μέσω της χρήσης τους, να πραγματοποιήσουμε προβλέψεις για τα παραπάνω φαινόμενα, δηλαδή τη δημιουργία μοντέλων αναπαράστασης των φαινομένων που εξετάζονται. Αυτός ακριβώς είναι ο στόχος της μαθηματικής μοντελοποίησης. Συγκεκριμένα τι εννοείται με τον όρο μαθηματική μοντελοποίηση παρατίθεται στον ορισμό που ακολουθεί:

Ορισμός: Μαθηματική Μοντελοποίηση (Mathematical Modeling) είναι η ανάπτυξη μαθηματικής περιγραφής ενός φαινομένου, ενός συστήματος ή μιας διαδικασίας και η μελέτη τους με τη χρήση μαθηματικών εργαλείων.

Τα εργαλεία αυτά μπορεί να είναι ένα σύστημα εξισώσεων, ένα σύνολο αριθμών, ένας αλγόριθμος, μια στοχαστική διαδικασία κλπ. Δηλαδή η Μαθηματική Μοντελοποίηση είναι η διαδικασία ανάπτυξης και η μελέτη ενός μαθηματικού μοντέλου, η έννοια του οποίου αποσαφηνίζεται στον εξής ορισμό:

Ορισμός: Μαθηματικό μοντέλο (mathematical model) είναι η περιγραφή ενός φαινομένου, ενός συστήματος ή μιας διαδικασίας χρησιμοποιώντας μαθηματικές έννοιες και σύμβολα.

Με τον όρο φαινόμενο εννοούνται τα συστήματα από διαφορετικά επιστημονικά πεδία, όπως από τις φυσικές επιστήμες, τις επιστήμες της μηχανικής, τα οικονομικά, τις κοινωνικές επιστήμες αλλά και τις ανθρωπιστικές σπουδές. Έτσι, ο αριθμός των εν δυνάμει μαθηματικών μοντέλων είναι αρκετά μεγάλος, καθώς επίσης ένα συγκεκριμένο φαινόμενο δεν περιγράφεται μοναδικά από ένα μοντέλο.

Οι στόχοι ενός μαθηματικού μοντέλου πιο συγκεκριμένα είναι οι εξής:

- Η μελέτη και κατανόηση της συμπεριφοράς πολύπλοκων συστημάτων με τη χρήση των Μαθηματικών.
- Η χρήση και η ανάπτυξη νέων, μαθηματικών εργαλείων που απαιτούνται για τη επίλυση ενός μοντέλου.
- Η πρόβλεψη / προσομοίωση (prediction/simulation) συμπεριφορών και ιδιοτήτων πολύπλοκων συστημάτων μέσω των μαθηματικών μοντέλων.
- Ο έλεγχος των υποθέσεων ενός μοντέλου και η αντίστοιχη βελτίωσή του.

Το τελευταίο είναι ιδιαίτερα σημαντικό, διότι δεν υπάρχει το «τέλειο μοντέλο», καθώς όλα τα μοντέλα αφενός μεν βασίζονται σε ορισμένες υποθέσεις και αφ' εταίρου το γεγονός ότι ένα μοντέλο μπορεί να αναπαράγει αποτελέσματα τα οποία, για ορισμένες τιμές των δεδομένων είναι σε συμφωνία με πειραματικές παρατηρήσεις, δεν σημαίνει ότι οι υποθέσεις/παραδοχές του μοντέλου είναι σωστές.

Τα μαθηματικά μοντέλα κατατάσσονται σε διάφορες κατηγορίες, όπως:

- Ανάλογα με το είδος των εξισώσεων που χρησιμοποιούνται: Μοντέλα συνεχών διαφορικών εξισώσεων, ή μερικών διαφορικών εξισώσεων.
- Ντετερμινιστικά/Στοχαστικά μοντέλα: ανάλογα με την ύπαρξη ή μη τυχαιότητας στο μοντέλο.
- Διακριτά/Συνεχή μοντέλα: ανάλογα με το είδος των μεταβλητών που ορίζονται.
- Γραμμικά/Μη γραμμικά μοντέλα: ανάλογα με το αν οι μαθηματικές σχέσεις είναι γραμμικές ή όχι.
- Χρόνο-εξαρτώμενα/Χρόνο-ανεξάρτητα: ανάλογα με το αν οι παράμετροι του προβλήματος μεταβάλλονται με το χρόνο.

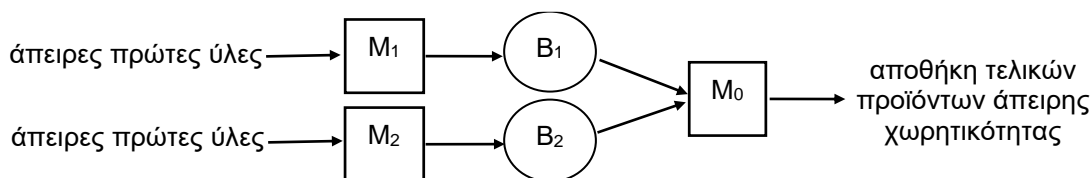
- Μηχανιστικά/Περιγραφικά: ανάλογα με το αν προκύπτουν από βασικούς νόμους ή είναι περισσότερο μια ποιοτική περιγραφή του υπό μελέτη συστήματος

Στην παρούσα εργασία παρουσιάζονται στοχαστικά μοντέλα για την περιγραφή ενός συστήματος παραγωγής.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Περιγραφή συστήματος παραγωγής και αντικείμενο εργασίας

Η παρούσα εργασία αποτελεί, μία συγκριτική μελέτη διαφορετικών τεχνικών υπολογισμού των μεγεθών που περιγράφουν ένα σύστημα παραγωγής και συναρμολόγησης δύο εξαρτημάτων σε σύνθετο προϊόν. Θεωρούμε την περίπτωση όπου, η γραμμή παραγωγής αποτελείται από δύο μηχανές παραγωγής επί μέρους εξαρτημάτων οι οποίες λειτουργούν παράλληλα και κάθε μία ακολουθείται από αντίστοιχη αποθήκη πεπερασμένης χωρητικότητας. Τα εξαρτήματα που παράγουν οι δύο μηχανές, τροφοδοτούν μια τρίτη μηχανή, η οποία τα συναρμολογεί για την παραγωγή του τελικού προϊόντος, κάτω από την υπόθεση ότι ο χρόνος εργασιών της κάθε μηχανής ακολουθεί εκθετική κατανομή. Το πρόβλημα αναπαρίσταται γραφικά στο Σχήμα 1.



Σχήμα 1-Αναπαράσταση του συστήματος

Στόχος της προτεινόμενης εργασίας είναι, η μοντελοποίηση του προβλήματος και η εύρεση της γενικής λύσης του για τις διάφορες τιμές των παραμέτρων του, με γνώμονα την διατήρηση του υπολογιστικού χρόνου επίλυσης και της αλγοριθμικής πολυπλοκότητας σε χαμηλά επίπεδα. Η εργασία αποτελείται από δύο τμήματα. Στο πρώτο τμήμα γίνεται η περιγραφή του μοντέλου, η παρουσίαση του θεωρητικού υπόβαθρου και η ανάλυση των μεθόδων υπολογισμού των μέτρων απόδοσης. Στο δεύτερο τμήμα αναπτύσσονται υπολογιστικά προγράμματα, για την εφαρμογή των θεωρητικών μεθόδων υπολογισμού και

υπολογιστικές εφαρμογές σε διάφορες περιπτώσεις για την εξαγωγή συμπερασμάτων ως προς την ευαισθησία της απόδοσης του συστήματος, ως προς διάφορες τιμές των παραμέτρων. Εν συνεχεία παρατίθεται, ο κώδικας που συντάχθηκε για την ανάπτυξη των υπολογιστικών εφαρμογών που απαιτούνται για την επίλυση του προβλήματος. Τα υπολογιστικά προγράμματα αναπτύχθηκαν σε περιβάλλον ανοικτού κώδικα Octave και είναι απολύτως συμβατά με τη συμβολική γλώσσα προγραμματισμού Matlab.

Το σύστημα παραγωγής και συναρμολόγησης δύο εξαρτημάτων σε σύνθετο προϊόν, όπου οι μηχανές παραγωγής ακολουθούν εκθετικές κατανομές με παραμέτρους μ_0, μ_1, μ_2 , αποτελεί κλασικό πρόβλημα ανάλυσης συστημάτων γραμμής παραγωγής. Το πρόβλημα μοντελοποιείται με μία διαδικασία γέννησης-θανάτου, όπου οι παράμετροι των μηχανών M_1 και M_2 περιγράφουν τις αφίξεις του συστήματος ενώ η παράμετρος της μηχανής M_0 είναι ο χρόνος εξυπηρέτησης. Η κατάσταση του συστήματος την τυχαία στιγμή t_0 περιγράφεται από ένα ζεύγος ακεραίων (n_1, n_2) το οποίο μεταφράζεται ως εξής:

Τη χρονική στιγμή T στο σύστημα παραγωγής υπάρχουν n_1 εξαρτήματα τύπου 1 και n_2 εξαρτήματα τύπου 2.

Ο αριθμός n_i $i = 1, 2$ συμβολίζει το σύνολο των εξαρτημάτων τύπου i τα οποία βρίσκονται στην αποθήκη i και στην μηχανή i .

Αν υποθεθεί ότι το σύστημα έχει για τα επιμέρους εξαρτήματα χωρητικότητες k_1 και k_2 , το πλήθος των καταστάσεων του είναι $(k_1 + 1) \cdot (k_2 + 1)$ και μπορεί να παρασταθεί σε μορφή επίπεδου πλέγματος ως εξής:

(0,0)	(0,1)	(0,2)	...	(0, n_2)	...	(0, k_2)
(1,0)	(1,1)	(1,2)	...	(1, n_2)	...	(1, k_2)
...
(n_1 ,0)	(n_1 ,1)	(n_1 ,2)	...	(n_1 , n_2)	...	(n_1 , k_2)
...
(k_1 ,0)	(k_1 ,1)	(k_1 ,2)	...	(k_1 , n_2)	...	(k_1 , k_2)

Πίνακας 1-Σύνολο καταστάσεων

Το εν λόγω σύστημα αποτελεί μία στοχαστική διαδικασία, η οποία ακολουθεί την εκθετική κατανομή. Η συγκεκριμένη διαδικασία ακολουθεί την ιδιότητα της έλλειψης μνήμης, δηλαδή η διαδικασία αναμονής για μία άφιξη ή εξυπηρέτηση, δεν εξαρτάται από τον χρόνο που παρήλθε από την προηγούμενη άφιξη ή εξυπηρέτηση αντίστοιχα. Είναι δυνατόν δηλαδή το σύστημα να περιγραφεί από μία στοχαστική διαδικασία Markov, για το οποίο η κατάστασή στο οποίο θα βρισκείται την χρονική στιγμή $T + \delta T$ εξαρτάται μόνο από την κατάσταση στην οποία βρισκόταν τη χρονική στιγμή t .

Οι δυνατές μεταβάσεις από χρονική στιγμή σε χρονική στιγμή, εξαρτώνται αποκλειστικά και μόνο από τη συμπεριφορά των τριών μηχανών. Ας υποθέσουμε ότι στο χρονικό διάστημα $(T, T + \delta T)$ παράγει μία μόνο από τις τρεις μηχανές. Τότε θα συμβεί ένα από τα ακόλουθα τρία ενδεχόμενα:

- εάν λειτουργήσει η μηχανή M_1 , εάν δηλαδή έχουμε άφιξη τύπου 1, το σύστημα θα μεταβεί από την κατάσταση

$$(n_1, n_2) \rightarrow (n_1 + 1, n_2)$$

Αυξάνεται δηλαδή ο ακέραιος n_1 κατά 1, εφ' όσον $n_1 < k_1$

- εάν λειτουργήσει η μηχανή M_2 , εάν δηλαδή έχουμε άφιξη τύπου 2, το σύστημα θα μεταβεί από την κατάσταση

$$(n_1, n_2) \rightarrow (n_1, n_2 + 1)$$

Αυξάνεται δηλαδή ο ακέραιος n_2 κατά 1, εφ' όσον $n_2 < k_2$

- εάν λειτουργήσει η μηχανή M_0 , εάν δηλαδή έχουμε εξυπηρέτηση, το σύστημα θα μεταβεί από την κατάσταση

$$(n_1, n_2) \rightarrow (n_1 - 1, n_2 - 1)$$

Μειώνονται δηλαδή και οι δύο ακέραιοι κατά 1, εφ' όσον $n_1 > 0$ και $n_2 > 0$.

Το σύστημα επομένως επιτρέπει τη μετάβαση από μία κατάσταση το πολύ σε τρεις πιθανές. Το πλήθος των πιθανών καταστάσεων για τις οποίες επιτρέπεται η μετάβαση είναι μικρότερο του τρία στις περιπτώσεις των οριακών συνθηκών, όταν δηλαδή

- $n_1 = 0$ ή $n_2 = 0$
- $k_1 = 0$ ή $k_2 = 0$

Για να προσδιοριστεί πλήρως το σύστημα, αρκεί να δοθούν τιμές στις εξής παραμέτρους:

$\mu_i, i = 0, 1, 2$: Παράμετρος της εκθετικής κατανομής της μηχανής M_i

$k_i, i = 1, 2$: Χωρητικότητα της αποθήκης B_i

Η επίλυσή του ανάγεται στον υπολογισμό της κατανομής πιθανοτήτων $P(n_1, n_2)$ η οποία για την τυχαία χρονική στιγμή t_0 είναι:

$$P(n_1, n_2)$$

$$= \{ \text{Το σύστημα τη χρονική στιγμή } t_0 \text{ βρίσκεται στην κατάσταση } (n_1, n_2) \}$$

Είναι δηλαδή η δημιουργία ενός πίνακα στήλη $P_{((k_1+1) \cdot (k_2+1)) \times 1}$ ο οποίος επιπλέον θα είναι στοχαστικός, θα ισχύει δηλαδή

$$\sum_{i=0}^{k_1} \sum_{j=0}^{k_2} P(i, j) = 1$$

Ο προσδιορισμός του πίνακα P θα πραγματοποιηθεί με τρεις διαφορετικούς τρόπους:

- Επίλυση της εξίσωσης $Q \cdot P = 0$, όπου Q ο πίνακας τάσεων του συστήματος
- Με τη χρήση επαναληπτικού αλγορίθμου αντιστροφής υποπινάκων
- Με τη χρήση γεωμετρικής προόδου υπολογισμού πινάκων

Για την υλοποίηση των συγκεκριμένων μεθόδων απαιτείται βασική γνώση της Θεωρίας Διαδικασιών Markov, συνοπτική ανασκόπησή της οποίας παρουσιάζεται στο κεφάλαιο που ακολουθεί.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Θεωρία Markov

§1. Στοχαστικές διαδικασίες

Ορισμός: Μία στοχαστική διαδικασία είναι μία οικογένεια $\{X(t)\}$ τυχαίων μεταβλητών, που είναι ορισμένες στον ίδιο χώρο πιθανότητας (Ω, F, P) . Η παράμετρος t συνήθως παριστάνει το χρόνο και παίρνει είτε διακριτές είτε συνεχείς μεταβλητές.

- Όταν η παράμετρος t παίρνει διακριτές τιμές, τότε συνήθως γράφουμε σαν δείκτη n αντί για t , όπου n παίρνει τιμές $n = 0, 1, 2, 3, \dots$, και λέμε ότι η στοχαστική διαδικασία $\{X_n\}_{n \geq 0}$ αποτελεί μία στοχαστική διαδικασία διακριτού χρόνου.
- Όταν η παράμετρος t παίρνει συνεχείς τιμές, θεωρούμε ότι $t \in \mathbb{R}, t \geq 0$, και η στοχαστική διαδικασία $\{X(t)\}_{t \geq 0}$ ονομάζεται στοχαστική διαδικασία συνεχούς χρόνου.

Στις περιπτώσεις που πρόκειται για διαδικασία διακριτού ή συνεχούς χρόνου, αυτό κρίνεται απαραίτητο να αποσαφηνιστεί.

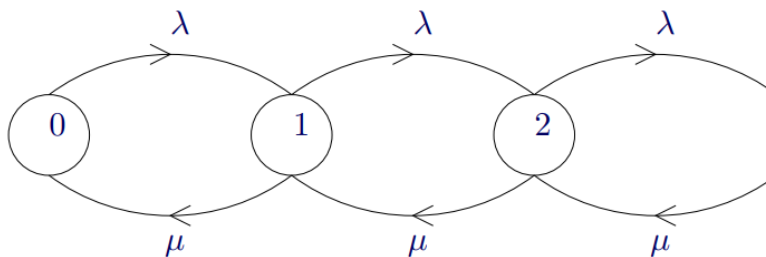
Μία από τις σημαντικότερες και πιο διαδεδομένες ειδικές περιπτώσεις στοχαστικών διαδικασιών είναι στοχαστικές διαδικασίες Markov.

- Οι τυχαίες μεταβλητές $\{X_n\}_{n \geq 0}$ είναι διακριτές και παίρνουν τιμές σε ένα αριθμήσιμο (πεπερασμένο ή άπειρο) σύνολο S , το οποίο ονομάζεται χώρος καταστάσεων της διαδικασίας και τα στοιχεία του ονομάζονται καταστάσεις της διαδικασίας. Επιπλέον, αν $X_n = s_j$ (ή $X_t = s_j$), για κάποιο $s_j \in S$, θα λέμε ότι η τυχαία μεταβλητή X_n (ή X_t) θα βρίσκεται στην κατάσταση s_j στο χρόνο n (ή t).
- Οι διαδικασίες Markov έχουν την ιδιότητα της έλλειψης μνήμης, όπως περιγράφηκε στην εισαγωγή. Είναι δηλαδή αμνήμονες διαδικασίες για τις οποίες η κατάσταση στην οποία βρίσκονται την στιγμή T εξαρτάται μόνο από την κατάσταση στην οποία βρίσκονταν τη στιγμή $T - 1$.

Στην περίπτωση των διακριτών συστημάτων παραγωγής, η περιγραφή τους μπορεί να γίνει με μεγάλη ακρίβεια με τη βοήθεια των αλυσίδων Markov. Στην περίπτωση που εξετάζεται επιλέγονται οι διαδικασίες συνεχούς χρόνου με έλλειψη μνήμης και συγκεκριμένα οι Poisson

(όταν μετράμε πλήθος ή συχνότητα εμφάνισης γεγονότων) και οι εκθετικές (όταν μετράμε περίοδο ή χρόνο μέχρι επόμενη εμφάνιση). Ένα από τα πιο δημοφιλή παραδείγματα τέτοιας διαδικασίας είναι το σύστημα αναμονής $M/M/1$. Ο συμβολισμός αυτός σημαίνει: Αφίξεις με κατανομή Poisson (το 1^ο M), Χρόνο Εξυπηρέτησης με Εκθετική κατανομή (το 2^ο M) και μία μονάδα εξυπηρέτησης (το 1). Αν το σύστημα διαθέτει περισσότερες μονάδες εξυπηρέτησης (s) τότε το μοντέλο συμβολίζεται σαν $M/M/s$. Το σύστημα της μορφής $M/M/1$ ακολουθεί το πρότυπο FIFO (Firs In First Out), εξυπηρετείται πρώτα η άφιξη που συνέβη πρώτη.

Στις $M/M/1$ οι μέσοι ρυθμοί αφίξεων και εξυπηρέτησης είναι σταθεροί. Κάθε μοντέλο $M/M/1$ και $M/M/s$ συνοδεύεται και από δυο παραμέτρους τη λ (μέσος όρος αφίξεων) και τη μ (μέσος όρος εξυπηρετήσεων), με το περιορισμό $\mu > \lambda$ ή $s > \lambda$ αντίστοιχα, ώστε η εξυπηρέτηση να προλαβαίνει τη ζήτηση και η ουρά αναμονής να μην τείνει στο άπειρο με την πάροδο του χρόνου. Οι Διαδικασίες Γεννήσεων-Θανάτων, αποτελούν μια κλάση των διαδικασιών Markov, οι οποίες γενικεύουν τις $M/M/1$, με την επιπλέον ιδιαίτερη συνθήκη ότι μεταβάσεις επιτρέπονται μόνο ανάμεσα σε γειτονικές καταστάσεις.



Εικόνα 1- δομή μετάβασης $M/M/1$

Ιδιότητες των διαδικασιών Poisson:

- Οι χρόνοι μεταξύ διαδοχικών αφίξεων μιας διαδικασίας Poisson με ρυθμό λ , είναι τυχαίες μεταβλητές εκθετικά κατανομημένες με μέση τιμή $1/\lambda$
- Υπέρθωση ανεξάρτητων διαδικασιών Poisson $\lambda_1, \lambda_2 \rightarrow$ διαδικασία Poisson $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$
- Διάσπαση διαδικασίας Poisson λ με πείραμα Bernoulli $p, q = 1 - p \rightarrow$ ανεξάρτητες διαδικασίες Poisson $\lambda_1 = p\lambda$ $\lambda_2 = q\lambda$

Διαδικασία Γεννήσεων – Θανάτων (Birth-Death Process)

Για τις διαδικασίες Γεννήσεων Θανάτων εισάγουμε τις εξής παραδοχές:

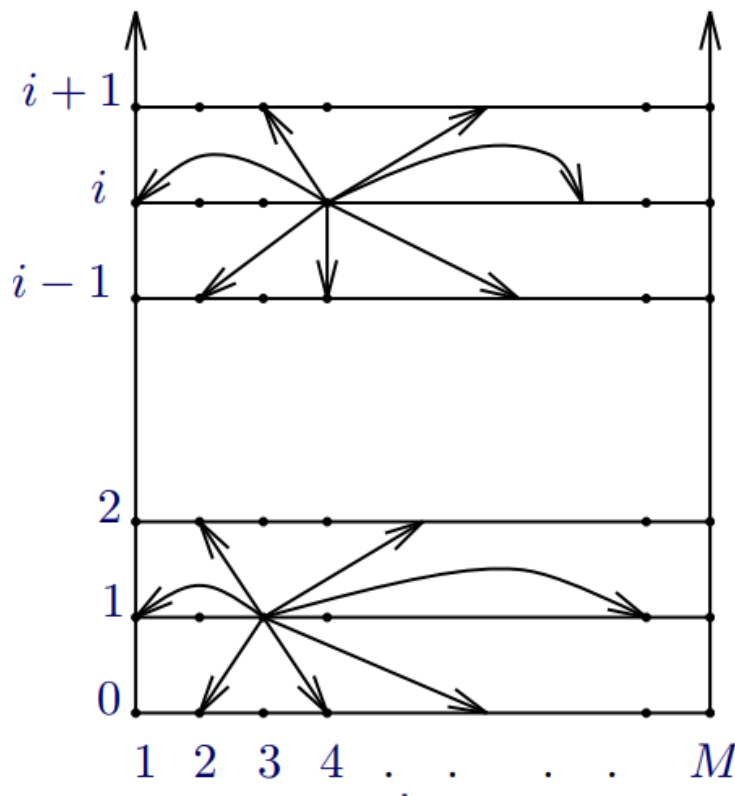
- Ανεξαρτησία γεννήσεων-θανάτων
- Εξέλιξη βασισμένη στο παρόν (Markov)

- Την χρονική στιγμή t όταν το σύστημα καταλήγει σε πληθυσμό $n > 0$ μπορεί να έχουν προηγηθεί οι ακόλουθες μεταβάσεις από την χρονική στιγμή $t - \Delta T, \Delta T \rightarrow 0$

1. Μία άφιξη στο διάστημα ΔT , με πιθανότητα $\lambda_{n-1}\Delta T$
2. Μία αναχώρηση, με πιθανότητα $\mu_{n+1}\Delta T$
3. Τίποτα από τα δύο, με πιθανότητα $1 - (\lambda_n + \mu_n)\Delta T$
4. Η εξίσωση μετάβασης (Kolmogorov) προκύπτει από τον τύπο συνολικής πιθανότητας: $P_n(t) =$

$$\lambda_{n-1}\Delta T P_{n-1}(t - \Delta T) + \mu_{n+1}\Delta T P_{n+1}(t - \Delta T) + [1 - (\lambda_n + \mu_n)\Delta T]P_n(t - \Delta T)$$

Η γενίκευση των παραπάνω διαδικασιών η οποία περιγράφει με τη μεγαλύτερη ακρίβεια το μοντέλο το οποίο εξετάζεται στην παρούσα εργασία είναι αλυσίδες Markov πολυδιάστατων καταστάσεων για την περιγραφή συστημάτων με πολλά σημεία αποθεμάτων και πολλές μηχανές. Οι λεγόμενες διαδικασίες ψευδο-γεννήσεως-θανάτου (quasi-birth-death processes, QBDs) οι οποίες είναι δισδιάστατες αλυσίδες Markov και η μία πρώτη διάσταση συμπεριφέρεται περίπου ως διαδικασία γέννησης-θανάτου. Οι διαδικασίες αυτές αποτελούν γενίκευση της ουράς αναμονής M/M/1.



Εικόνα 2 - Αναπαράσταση μεταβάσεων Quasi-Birth-Death

§2. Μαθηματική θεμελίωση

Οι αλυσίδες Markov χρησιμοποιούνται για να περιγράψουν διάφορες διαδικασίες όπως είναι η θεωρία ουρών αναμονής και η θεωρία ανανέωσης με φάσεις, ενώ μπορούν να χρησιμοποιηθούν και σαν μοντέλο αναφοράς σε τεχνικές κωδικοποίησης, όπως η αριθμητική κωδικοποίηση. Έχουν επίσης πολλές βιολογικές εφαρμογές, ιδιαίτερα στις πληθυσμιακές διαδικασίες, οι οποίες είναι χρήσιμες στη μοντελοποίηση των βιολογικών πληθυσμών. Κρυφά μοντέλα Markov έχουν επίσης χρησιμοποιηθεί στη βιοπληροφορική, για παράδειγμα για την περιοχή κωδικοποίησης και την πρόβλεψη γονιδίων. Ακόμη, αλυσίδες Markov χρησιμοποιούνται σε ένα μεγάλο εύρος διαδικασιών που ποικίλλουν από την ιατρική μέχρι τη συγγραφή μουσικών κομματιών. Μια Αλυσίδα Markov είναι μια ακολουθία τυχαίων μεταβλητών X_1, X_2, X_3, \dots με τη μαρκοβιανή ιδιότητα, δηλαδή με δεδομένη την παρούσα κατάσταση, οι παλαιότερες και οι μελλοντικές καταστάσεις είναι ανεξάρτητες. Ορίζουμε

$$P(X_{T+\Delta T} = x | X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_T = x_T) = P(X_{T+\Delta T} = x | X_T = x_T)$$

Οι πιθανές τιμές των X_i σχηματίζουν ένα αριθμήσιμο σύνολο S το οποίο ονομάζουμε χώρο-καταστάσεων της αλυσίδας.

Οι πιθανότητες $p_{ij}(T)$ είναι η πιθανότητα η αλυσίδα Markov X_T να μεταβεί στην κατάσταση j , δεδομένου ότι την προηγούμενη χρονική στιγμή ήταν στην κατάσταση i . Οι πιθανότητες $p_{ij}(T)$ για $i, j = 1, \dots, k$ και $T = 1, 2, \dots$ ονομάζονται και πιθανότητες μετάβασης της αλυσίδας Markov. Ο πλέον βολικός τρόπος αναφοράς σ' αυτές τις πιθανότητες είναι με τη μορφή ενός πίνακα $P(T)$ με πεπερασμένες διαστάσεις όταν ο χώρος των καταστάσεων S είναι πεπερασμένος. Δηλαδή

$$P = \begin{pmatrix} p_{11}(T) & \dots & p_{1k}(T) \\ \dots & \dots & \dots \\ p_{k1}(T) & \dots & p_{kk}(T) \end{pmatrix}$$

Ο πίνακας $P(t)$ ονομάζεται πίνακας μετάβασης της αλυσίδας Markov για το χρονικό διάστημα $[T - \Delta T, T)$, όπου οι πιθανότητες $p_{ij}(T)$ είναι χρονικές συναρτήσεις.

Ο Πίνακας Μετάβασης είναι μη αρνητικός, δηλαδή όλα τα στοιχεία του είναι θετικά ή μηδέν. Επίσης το άθροισμα των γραμμών του είναι ίσο με την μονάδα. Από την τελευταία πρόταση έχει καθιερωθεί, ως στοχαστικός πίνακας να θεωρείται ο πίνακας ο οποίος έχει την ιδιότητα να έχει άθροισμα γραμμών ίσο με τη μονάδα. Ο πίνακας μετάβασης περιγράφει πλήρως την αλυσίδα Markov.

Ορισμός: Μία διαδικασία καλείται ομογενής όταν η πιθανότητα μετάβασης από μία κατάσταση σε μία άλλη είναι ανεξάρτητη του χρόνου δηλαδή εάν ισχύει

$$P\{X_T = j \mid X_{T-\Delta T} = i\} = p_{ij}, T = 1, 2, 3 \dots$$

Σε περίπτωση που οι πιθανότητες μετάβασης της διαδικασίας εξαρτώνται από το χρόνο, τότε η διαδικασία καλείται μη ομογενής. Ως αποτέλεσμα ο πίνακας μετάβασης δεν είναι μοναδικός αλλά η διαδικασία περιγράφεται από ένα σύνολο πινάκων $P(t)$.

Για τις ομογενείς αλυσίδες Markov, η πιθανότητα μετάβασης από την κατάσταση i στην κατάσταση j σε n χρονικά βήματα είναι:

$$p_{ij}^{(n)} = P(X_T = j \mid X_0 = i)$$

Με βήμα μετάβασης:

$$p_{ij} = P(X_1 = j \mid X_0 = i)$$

Για μια ομογενή-χρονικά Αλυσίδα Markov ισχύει:

$$p_{ij}^{(n)} = P(X_{T+K} = j \mid X_T = i) \text{ και } p_{ij} = P(X_{T+\Delta T} = j \mid X_T = i)$$

Οι πιθανότητες του n -βήματος μετάβασης ικανοποιούν το Θεώρημα Chapman-Kolmogorov, σύμφωνα με το οποίο, οποιοδήποτε k τέτοιο ώστε $0 < k < n$, ισχύει $p_{ij}^{(n)} = \sum_{r \in S} p_{ir}^{(T)} p_{rj}^{(K-T)}$, όπου S ο χώρος καταστάσεων της Αλυσίδας Markov. Η οριακή

κατανομή $P(X_T = x)$ αποτελεί το μοίρασμα των καταστάσεων σε χρόνο T , ενώ η αρχική κατανομή είναι η $\Pr(X_0 = x)$.

Η εξέλιξη της διαδικασίας για ένα χρονικό βήμα περιγράφεται από τη σχέση:

$$P(X_T = j) = \sum_{r \in S} p_{rj} P(X_{T-\Delta T} = r) = \sum_{r \in S} p_{rj}^{(T)} P(X_0 = r)$$

§3. Παραλλαγές Διαδικασιών Markov

Στις Αλυσίδες Markov Συνεχούς Χρόνου οι αλλαγές καταστάσεων γίνονται οποιεσδήποτε χρονικές στιγμές, σε αντίθεση με του διακριτού χρόνου που συμβαίνουν σε ακέραιους χρόνους. Εν γένει οι πιθανότητες μετάβασης μεταβάλλονται με το χρόνο. Οι ομοιογενείς Αλυσίδες Markov (ή σταθερές Αλυσίδες Markov) είναι διαδικασίες για τις οποίες ισχύει

$$\Pr(X_{T+t+h} = x | X_{T+t} = y) = \Pr(X_{T+h} = x | X_T = y)$$

για όλα τα T, t, h, x και y . Με άλλα λόγια οι πιθανότητες μετάβασης εξαρτώνται μόνο από το μήκος h του χρονικού διαστήματος $(T, T + h)$ ή $(T + t, T + t + h)$ και είναι ίδιες σε όλους τους χρόνους T ή $T + t$.

Μια Αλυσίδα Markov τάξης m (ή Αλυσίδα Markov με μνήμη m), όπου το m είναι πεπερασμένο, είναι μια διαδικασία η οποία ικανοποιεί για $m < n$

$$\begin{aligned} P(X_n = x_n | X_{n-1} = x_{n-1}, X_{n-2} = x_{n-2}, \dots, X_1 = x_1) = \\ = P(X_n = x_n | X_{n-1} = x_{n-1}, X_{n-2} = x_{n-2}, \dots, X_{n-m} = x_{n-m}) \end{aligned}$$

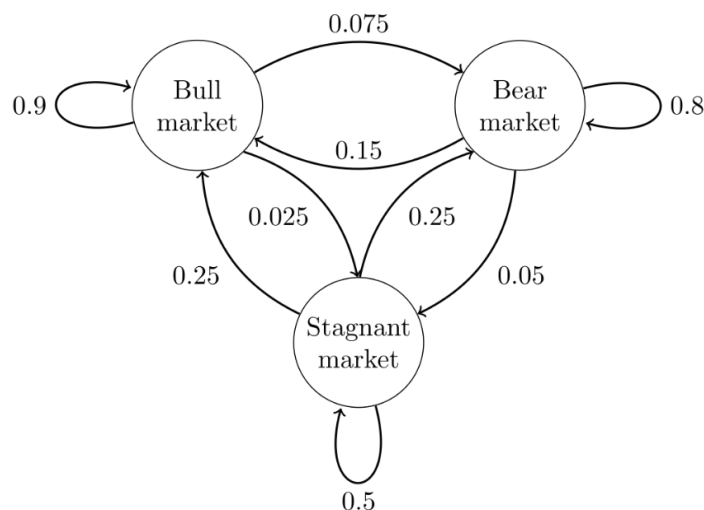
Με άλλα λόγια η μελλοντική κατάσταση εξαρτάται από τις προηγούμενες m καταστάσεις. Είναι δυνατή η κατασκευή μιας αλυσίδα Y_n από τη X_n που να έχει την κλασική Ιδιότητα Markov παίρνοντας ως χώρο καταστάσεων το σύνολο των m -πλειάδων του X , πχ. $(X_n, X_{n-1}, \dots, X_{n-m+1})$.

Παράδειγμα

Ένα απλό παράδειγμα με χρήση κατευθυνόμενου γραφήματος για τις απεικονίσεις των μεταβάσεων μεταξύ των καταστάσεων, φαίνεται στο σχήμα 2. Οι καταστάσεις αντιπροσωπεύουν αν μια υποθετική χρηματιστηριακή αγορά παρουσιάζει ανοδική ή πτωτική πορεία ή αν παραμένει στάσιμη κατά τη διάρκεια μιας συγκεκριμένης εβδομάδας. Με βάση την εικόνα, μια ανοδική εβδομάδα ακολουθείται από μια ακόμα ανοδική εβδομάδα κατά 90%, από μια πτωτική εβδομάδα κατά 7,5% και από μια στάσιμη εβδομάδα κατά 2,5%. Ο χώρος καταστάσεων είναι (1=ανοδική εβδομάδα, 2=πτωτική εβδομάδα, 3=στατική εβδομάδα) και ο πίνακας μετάβασης των καταστάσεων είναι ο εξής:

$$P = \begin{bmatrix} 0.9 & 0.075 & 0.025 \\ 0.15 & 0.8 & 0.05 \\ 0.25 & 0.25 & 0.5 \end{bmatrix}.$$

Η διαδικασία παριστάνεται από το παρακάτω κατευθυνόμενο γράφημα:



Σχήμα 2-Γράφημα μεταβάσεων Διαδικασίας Markov

Η κατανομή των καταστάσεων μπορεί να γραφτεί ως ένα στοχαστικό διάνυσμα x , το οποίο ικανοποιεί τη σχέση $x^{(T+1)} = x^{(T)}P$. Άρα αν σε χρόνο T το σύστημα είναι στη 2^η κατάσταση (πτωτική), τότε 3 περιόδους μετά για χρόνο $T + 3$ η κατανομή θα είναι ως εξής:

$$x^{(T+3)} = x^{(T+2)}P = (x^{(T+1)}P)P = x^{(T+1)}P^2 = (x^{(T)}P^2)P = x^{(T)}P^3 =$$

$$= [0 \ 1 \ 0] \begin{bmatrix} 0.9 & 0.075 & 0.025 \\ 0.15 & 0.8 & 0.05 \\ 0.25 & 0.25 & 0.5 \end{bmatrix}^3 =$$

$$= [0 \ 1 \ 0] \begin{bmatrix} 0.7745 & 0.17875 & 0.04675 \\ 0.3575 & 0.56825 & 0.07425 \\ 0.4675 & 0.37125 & 0.16125 \end{bmatrix} =$$

$$= [0.3575 \ 0.56825 \ 0.07425].$$

Χρησιμοποιώντας τον πίνακα μετάβασης είναι δυνατόν να υπολογιστεί, για παράδειγμα, μακροπρόθεσμα η ασυμπτωτική συμπεριφορά της διαδικασίας, δηλαδή το ποσοστό των εβδομάδων για τις οποίες η αγορά μένει στάσιμη, ή ο μέσος αριθμός των εβδομάδων για τις οποίες θα χρειαστούν για να περάσει η αγορά από στάσιμη σε ανοδική κατάσταση. Χρησιμοποιώντας τις πιθανότητες μετάβασης, η σταθερή κατάσταση των πιθανοτήτων δείχνει ότι η αγορά θα βρίσκεται σε ανοδική φάση το 62.5% του χρόνου, 31.25% σε πτωτική φάση και 6.25 θα παραμένει σταθερή αφού:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} P^N = \begin{bmatrix} 0.625 & 0.3125 & 0.0625 \\ 0.625 & 0.3125 & 0.0625 \\ 0.625 & 0.3125 & 0.0625 \end{bmatrix}$$

Μια μηχανή πεπερασμένων καταστάσεων μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως αναπαράσταση της Αλυσίδας Markov. Θεωρώντας μια ακολουθία από ανεξάρτητα και ταυτόσημα κατανομημένα σήματα εισόδου, αν η μηχανή είναι στην κατάσταση y για χρόνο T , τότε η πιθανότητα να κινηθεί στην κατάσταση x για χρόνο $T + 1$ εξαρτάται μόνο από την τωρινή κατάσταση.

§4. Ο πίνακας τάσεων Q

Στην περίπτωση διαδικασίας συνεχούς χρόνου, δεν υπάρχει νόημα στο σχηματισμό του πίνακα P καθώς δεν υπάρχει η έννοια της επόμενης χρονικής στιγμής. Για το λόγο αυτό σχηματίζεται ο πίνακας τάσεων Q . Κατά το συνεχή χρόνο, εάν τη χρονική στιγμή t το σύστημα βρίσκεται στην κατάσταση j , τότε το ενδιαφέρον συγκεντρώνεται στον προσδιορισμό της πιθανότητας το σύστημα να βρίσκεται στην κατάσταση k τη χρονική στιγμή $t + h$ για $h \rightarrow 0$, δηλαδή

$$f(h) = P\{X(t+h) = k | X(t) = j\}$$

Τα χρονικά βήματα δηλαδή είναι σχεδόν μηδενικά, επομένως για τη χρονική στιγμή $t=0$ υπολογίζονται οι ποσότητες

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{P\{X(t+h) = k | X(t) = j\}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = f'(0) = q_{jk}$$

Ενώ για όλες τις τιμές του j όταν το j ανήκει στο σύνολο καταστάσεων έχουμε

$$P\{X(t+h) = j | X(t) = j\} = 1 - \sum_{k \neq j} q_{jk} h = 1 + q_{jj} h$$

Ορίζοντας $q_{jj} = -\sum_{k \neq j} q_{jk}$ προκύπτει ότι

$$q_{jj} = f'(0) \text{ για } f(h) = P\{X(t+h) = k | X(t) = j\} \text{ και } f(0) = 1.$$

Εισάγοντας τις παραπάνω πληροφορίες σε ένα πίνακα $Q = \{q_{ij} : i, j \in I\}$ ο οποίος έχει τις εξής ιδιότητες:

- Όλα τα διαγώνια στοιχεία $\{q_{ii}\}$ είναι μη θετικά
- Όλα τα υποδιαγώνια στοιχεία (off-positive) είναι μη αρνητικά
- Το άθροισμα των στοιχείων του πίνακα είναι ίσο με μηδέν

Ο πίνακας τάσεων στην περίπτωση της M/M/1 ουράς έχει την εξής μορφή:

$$Q = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & & 0 & 0 \\ \mu & -(\mu + \lambda) & & 0 & 0 \\ & 0 & \mu & & \\ & 0 & 0 & \ddots & -(\mu + \lambda) & \lambda \\ & & & \ddots & \mu & \ddots \end{pmatrix}$$

Ενώ για την περίπτωση των quasi-birth death διαδικασιών ο πίνακας έχει την εξής τρι-διαγώνια μορφή:

$$Q = \begin{pmatrix} B_{00} & B_{01} & 0 & 0 \\ B_{01} & A_1 & A_2 & 0 \\ 0 & A_0 & A_1 & A_2 \\ 0 & 0 & A_0 & A_1 \\ & & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

Όπου οι πίνακες B_{00} , B_{01} , A_1 , A_0 και A_2 κατάλληλοι υποπίνακες.

Στο πρόβλημα της περιγραφής ενός συστήματος παραγωγής με τη βοήθεια διαδικασιών Markov το κύριο ενδιαφέρον επικεντρώνεται στον υπολογισμό του πίνακα μετάβασης P .

§5. Υπολογισμός του πίνακα P - Επίλυση της εξίσωσης $Q \cdot P = 0$

Καθώς οι διαδικασίες Markov είναι αμνήμονες διαδικασίες, η κατάσταση στην οποία θα μεταβούν την επόμενη χρονική στιγμή εξαρτάται μόνο από την παρούσα. Το σύνολο των καταστάσεων χωρίζεται σε δύο βασικές κατηγορίες βάσει των τιμών των μεταβλητών n_1, n_2 . Όπως παρουσιάστηκε και σε προηγούμενο κεφάλαιο, οι καταστάσεις για τις οποίες οι μεταβλητές n_1, n_2 παίρνουν οριακές τιμές επηρεάζουν σε μία πρώτη ανάγνωση το πλήθος των καταστάσεων στις οποίες είναι πιθανό να μεταβεί το σύστημα στην επόμενη χρονική στιγμή. Οι οριακές καταστάσεις όμως, επηρεάζουν όπως είναι αναμενόμενο και τις πιθανότητες το σύστημα την τυχαία χρονική στιγμή t να βρίσκεται σε μία «γειτονική»

κατάσταση των οριζικών. Για τη μελέτη της μετάβασης του συστήματος από μία κατάσταση σε μία γειτονική, εισάγονται οι εξισώσεις Chapman-Kolmogorov, οι οποίες παρουσιάζουν την τάση του συστήματος να μεταβεί από την κατάσταση (n_1, n_2) τη στιγμή T στην κατάσταση (n'_1, n'_2) τη στιγμή $T + 1$.

Οι εξισώσεις Chapman-Kolmogorov είναι οι εξής:

$n_1 = 0$ (οριζική κατάσταση):

$$(\mu_1 + \mu_2)P(0, 0) = \mu_0P(1, 1)$$

$$(\mu_1 + \mu_2)P(0, n_2) = \mu_2P(0, n_2 - 1) + \mu_0P(1, n_2 + 1)$$

$$\mu_1 P(0, K_2) = \mu_2P(0, K_2 - 1)$$

$1 \leq n_1 \leq K_1 - 1$:

$$(\mu_1 + \mu_2)P(n_1, 0) = \mu_1P(n_1 - 1, 0) + \mu_0P(n_1 + 1, 1)$$

$$(\mu_0 + \mu_1 + \mu_2)P(n_1, n_2) = \mu_1P(n_1 - 1, n_2) + \mu_2P(n_1, n_2 - 1) + \mu_0P(n_1 + 1, n_2 + 1)$$

$$(\mu_0 + \mu_1) P(n_1, K_2) = \mu_1P(n_1 - 1, K_2) + \mu_2P(n_1, K_2 - 1)$$

$n_1 = K_1$ (οριζική κατάσταση):

$$\mu_2P(K_1, 0) = \mu_1P(K_1 - 1, 0)$$

$$(\mu_0 + \mu_2)P(K_1, n_2) = \mu_1P(K_1 - 1, n_2) + \mu_2P(K_1, n_2 - 1)$$

$$\mu_0 P(K_1, K_2) = \mu_1P(K_1 - 1, K_2) + \mu_2P(K_1, K_2 - 1)$$

Από τις παραπάνω εξισώσεις, προκύπτει άμεσα ο πίνακας Q , ο οποίος είναι τετραγωνικός και αποτελείται από $(K_1 + 1)(K_2 + 1)$ σειρές και στήλες. Σε κάθε γραμμή εμφανίζεται η τάση το σύστημα να μεταβεί από την κατάσταση (n_i, n_j) τη στιγμή T στην κατάσταση (n'_1, n'_2) τη στιγμή $T + 1$. Έχει μπλοκ διαγώνια μορφή, το οποίο σημαίνει ότι υπάρχουν υποπίνακες στην κύρια διαγώνιο και εκατέρωθεν αυτής, ενώ μακριά της υπάρχουν μηδενικά. Ο πίνακας Q δηλαδή είναι ο εξής:

	(0,0)	(0,1)	...	(0, K_2)	(1,1)	(1,2)	...	(1, K_2)	...	($K_1+1,1$)	($K_1+1,2$)	...	(K_1+1, K_2+1)
(0,0)	$-(m_1+m_2)$	m_2	0	0	m_1	0	...	0	...	0	0	...	0
(0,1)	0	$-(m_1+m_2)$	m_2	0	0	m_1	...	0	...	0	0	...	0
...
(0, K_2)	0	0	0	$-m_1$	0	0	0	m_1	...	0	0	...	0
(1,1)	m_0	0	0	0	$-(m_1+m_2+m_0)$	m_2	0	0	...	0	0	...	0
(1,2)	0	m_0	0	0	0	$-(m_1+m_2+m_0)$	0	0	...	0	0	...	0
...	0	0	m_0	0	0	0	$-(m_1+m_2+m_0)$	m_2	...				
(1, K_2)	0	0	0	m_0	0	0	0	$-(m_0+m_1)$...	0	0	...	0
...
($K_1+1,1$)	0	0	0	0	0	0	0	0	...	$-(m_0+m_2)$	m_2	0	0
($K_1+1,2$)	0	0	0	0	0	0	0	0	...	0	$-(m_0+m_2)$	m_2	0
...	0	0	0	0	0	0	0	0	...	0	0	$-(m_0+m_2)$	m_2
(K_1+1, K_2+1)	0	0	0	0	0	0	0	0	...	0	0	0	$-m_0$

Πίνακας 2-Πίνακας τάσεων

Στο σημείο αυτό, είναι δυνατός ο υπολογισμός του ζητούμενου πίνακα P ως λύση του συστήματος $QP = 0$. Το σύστημα αυτό, όταν οι χωρητικότητες των αποθηκών είναι μεγάλες είναι υπολογιστικά απαιτητικό, καθώς η αντιστροφή πινάκων είναι μια χρονοβόρα διαδικασία. Για το λόγο αυτό χρησιμοποιούνται οι παρακάτω δύο αλγόριθμοι:

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

Επαναληπτικός αλγόριθμος
αντιστροφής υποπινάκων

§1. Δημιουργία «γονικής» διαδικασίας Markov

Σύμφωνα με όσα αναφέρθηκαν παραπάνω, το διάνυσμα (n_1, n_2) υποδηλώνει την κατάσταση του συστήματος. Όταν ο πίνακας καταστάσεων του συστήματος είναι διατεταγμένος σύμφωνα με το πλήθος εξαρτημάτων κάθε τύπου, (όπως παρουσιάστηκε στο κεφάλαιο 2), ο πίνακας μεταβάσεων παρουσιάζει μία σχεδόν τριγωνική μορφή όπου οι μη μηδενικοί υποπίνακες, εμφανίζονται στην κύρια διαγώνιο και ακριβώς άνω και κάτω αυτής.

Το διάνυσμα $P(n_1, n_2)$ συμβολίζει την πιθανότητα μόνιμης κατάστασης για την κατάσταση (n_1, n_2) . Ομαδοποιούμε το σύνολο των πιθανοτήτων αυτών θέτοντας $P(n_1) :=$

$$\begin{bmatrix} P(n_1, 0) \\ P(n_1, 1) \\ \dots \\ P(n_1, k_2) \end{bmatrix} \text{ για όλες τις τιμές του } n_1. \text{ Με τον τρόπο αυτό, δημιουργείται μια «Γονική»}$$

αλυσίδα Markov, η οποία είναι μονοπαραμετρική, με σύνολο καταστάσεων $S = \{n_i | 0 \leq i \leq k_1\}$.

Έστω Q ο πίνακας τάσεων της παραπάνω αλυσίδας Markov. Όπως αναφέρθηκε στην προηγούμενη ενότητα, ο πίνακας πιθανοτήτων μόνιμης κατάστασης μπορεί να υπολογιστεί ως λύση του συστήματος γραμμικών εξισώσεων και της εξίσωσης κανονικοποίησης

$$\begin{cases} PQ = 0 \\ \sum_{\text{για όλα τα } n_1, n_2} P(n_1, n_2) = 1 \end{cases}$$

Ο προσδιορισμός του πίνακα τάσεων Q προκύπτει από την επίλυση του συστήματος εξισώσεων Chapman-Kolmogorov, για την περίπτωση πινάκων το οποίο έχει την εξής μορφή:

$$A_0P(0) = CP(1) \quad (\text{αυτό το σύστημα αναφέρεται ως Εξ. CK-0})$$

...

$$AP(n_1) = BP(n_1 - 1) + CP(n_1 + 1) \quad (\text{Εξ. CK-}n_1)$$

...

$$A_1P(K_1) = BP(K_1 - 1) \quad (\text{Εξ. CK-}K_1)$$

Το σύνολο πινάκων A_i είναι τα μπλοκ πινάκων τα οποία βρίσκονται στην κύρια διαγώνιο του πίνακα Q .

Οι πίνακες B είναι τα μπλοκ κάτω από την κύρια διαγώνιο ενώ τα μπλόκ πάνω από την κύρια διαγώνιο είναι οι υποπίνακες C .

Στο σχήμα που ακολουθεί παρουσιάζεται κατάτμηση του πίνακα Q σε υποπίνακες σύμφωνα με το παραπάνω σύστημα.

$$Q = \begin{bmatrix} A_n & C_{n-1} & \dots & 0 \\ B_{n-1} & A_{n-1} & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & A_1 & C_1 \\ & & B_0 & A_0 \end{bmatrix}$$

Οι υποπίνακες αυτοί αποτελούν τους πίνακες μετάβασης για κάθε «γονική» κατάσταση της αλυσίδας Markov. Συγκεκριμένα:

- Ο A_n περιλαμβάνει όλες τις τάσεις πιθανοτήτων μετάβασης για την περίπτωση όπου η τυχαία μεταβλητή n_2 λαμβάνει την τιμή $N_2 - n_2$, και η μετάβαση είναι της μορφής

$$n_i \rightarrow n_i$$

- Ο C_n περιλαμβάνει όλες τις τάσεις πιθανοτήτων μετάβασης για την περίπτωση όπου η τυχαία μεταβλητή n_2 λαμβάνει την τιμή $N_2 - n_2 + 1$, και η μετάβαση είναι της μορφής

$$n_i \rightarrow n_{i+1}$$

- Ο b_n περιλαμβάνει όλες τις τάσεις πιθανοτήτων μετάβασης για την περίπτωση όπου η τυχαία μεταβλητή n_2 λαμβάνει την τιμή $N_2 - n_2 - 1$, και η μετάβαση είναι της μορφής

$$n_i \rightarrow n_{i-1}$$

Στη συνέχεια παρουσιάζεται ο LU αλγόριθμος παραγοντοποίησης, ο οποίος εφαρμόζεται για τον υπολογισμό του πίνακα P .

§2. LU αλγόριθμος παραγοντοποίησης

Στόχος της LU παραγοντοποίησης πίνακα M , είναι η εύρεση δύο πινάκων L και U τέτοιων ώστε:

$$M = L \cdot U$$

Όπου L κάτω τριγωνικός πίνακας και U άνω τριγωνικός πίνακας.

Κατά την εκτέλεση του αλγορίθμου, σχηματίζεται ένα σύνολο βοηθητικών πινάκων G_i .

- Προετοιμασία

$$\text{Υπολογισμός } G_N = -B_{N-1}[A_N]^{-1}$$

$$\text{Επίλυση της } P_0[A_0 + G_1 C_1] = 0$$

- Επαγωγικά βήματα

$$G_n = -B_{n-1}[A_n + G_{n+1} C_{n+1}]^{-1}, \quad n = N-1, N-2, \dots, 1$$

$$P_n = P_{n-1} G_n$$

Με τον τρόπο αυτό ο χρόνος υπολογισμού των πιθανοτήτων μόνιμης κατάστασης μειώνεται, καθώς αντί της αντιστροφής του πίνακα Q που απαιτείται για την επίλυση του συστήματος $PQ = 0$, αντιστρέφονται οι υποπίνακες του.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

Γεωμετρική μέθοδος υπολογισμού πινάκων

Στην θεωρία πιθανοτήτων, η γεωμετρική μέθοδος υπολογισμού πινάκων είναι μία μέθοδος για την ανάλυση διαδικασιών quasi-birth-death συνεχούς χρόνου αλυσίδων Markov των οποίων οι πίνακες ρυθμών μετάβασης έχουν μία επαναλαμβανόμενη μπλοκ δομή. Αυτή η μέθοδος αναπτύχθηκε περισσότερο το 1975 από τον Marcel F. Neuts και τους μαθητές του.

Ακολουθεί η συνοπτική παρουσίαση της μεθόδου, η οποία έχει ως βασικό στόχο τη μείωση του χρόνου υπολογισμού του πίνακα P . Η γεωμετρική μέθοδος υπολογισμού πινάκων χρησιμοποιείται ευρέως στην ανάλυση συστημάτων birth-death και Αλυσίδων Markov συνεχούς χρόνου, στην περίπτωση που οι πίνακες των ρυθμών μετάβασης μπορούν να ταξινομηθούν σε μια επαναλαμβανόμενη μορφή μπλοκ.

Αρχικά σχηματίζονται τα διανύσματα γραμμής Π_{n_2} , τα οποία περιέχουν τις πιθανότητες καταστάσεων $P(n_1, n_2)$, όπου $P(n_1, n_2)$ οι πιθανότητες καταστάσεων του συστήματος που αναλύσαμε πριν και η μορφή των διανυσμάτων αυτών είναι η εξής:

$$\Pi_{n_2} = [P(0, n_2) \dots P(X, n_2) \dots P(r, n_2) \dots P(N1, n_2)]$$

Δηλαδή το διάνυσμα Π_{n_2} περιέχει τις πιθανότητες όλων των καταστάσεων για τις οποίες η τιμή της δεύτερης μεταβλητής n_2 είναι ίση με n_2 .

Τα διανύσματα Π_{n_2} σε συνδιασμό με τις εξισώσεις Chapman-Kolmogorov λαμβάνουν την εξής μορφή:

$$\Pi_0 B_{00} + \Pi_1 A_2 = \mathbf{0}$$

$$\Pi_{n_2-1} + \Pi_{n_2} A_1 + \Pi_{n_2+1} A_2 = \mathbf{0}$$

Τα συστήματα στα οποία εφαρμόζεται η εν λόγω μέθοδος, χαρακτηρίζονται από πίνακα τάσεων Q με διαγώνια (ή ακριβέστερα τριδιαγώνια) μορφή. Το σύστημα το οποίο εξετάζεται στην παρούσα εργασία περιγράφεται πλήρως από τον ακόλουθο πίνακα τάσεων

$$Q = \begin{bmatrix} B_{00} & A_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_2 & A_1 & A_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_2 & A_1 & A_0 & 0 & 0 \\ & \ddots & & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & & \ddots & \ddots \\ 0 & 0 & 0 & & \ddots & \ddots \\ 0 & 0 & 0 & & \ddots & \ddots \end{bmatrix}$$

Πίνακας 3-Πίνακας τάσεων

Όλοι οι υποπίνακες του πίνακα Q είναι τετράγωνοι με διάσταση $(N_1 + 1)(N_1 + 1)$ και περιέχουν το σύνολο των ρυθμών μεταβάσεων από και προς τις καταστάσεις οι οποίες αντιστοιχούν στις γραμμές τους και τις στήλες τους.

Συγκεκριμένα:

- Ο πίνακας B_{00} περιέχει τους ρυθμούς μετάβασης για την τιμή $n_2 = 0$, δηλαδή για την περίπτωση που στο σύστημα δεν υπάρχει κανένα εξάρτημα τύπου 2. Επομένως με τον πίνακα B_{00} πολλαπλασιάζεται το διάνυσμα π_0 για να προκύψει το διάνυσμα π_1 και περιέχει όλους τους ρυθμούς μετάβασης $\pi_0 \rightarrow \pi_1$
- Ο πίνακας A_0 εμπεριέχει τους ρυθμούς μετάβασης για την τιμή $n_2 > 0$, δηλαδή για την περίπτωση που στο σύστημα υπάρχει τουλάχιστον ένα εξάρτημα τύπου 2. Επομένως, με τον πίνακα A_0 πολλαπλασιάζεται το διάνυσμα π_{n_2-1} για να προκύψει το διάνυσμα π_{n_2} και περιέχει τους ρυθμούς μετάβασης $\pi_{n_2-1} \rightarrow \pi_{n_2}$

- Ο πίνακας A_1 χρησιμοποιείται για όλα τα n_2 και πολλαπλασιάζεται με το διάνυσμα π_{n_2+1} για να προκύψει το διάνυσμα π_{n_2} και περιέχει τους ρυθμούς μετάβασης $\pi_{n_2+1} \rightarrow \pi_{n_2}$. Η διαφορά του A_0 με τον A_1 έγκειται στη φορά, καθώς ο ένας χρησιμοποιείται στον υπολογισμό των π όταν υπάρχει έξοδος στο σύστημα, ενώ ο A_0 στην περίπτωση που υπάρχει είσοδος στο σύστημα.
- Για τις οριακές καταστάσεις στις οποίες δεν υπάρχει η δυνατότητα νέας εισόδου στο σύστημα για εξάρτημα τύπου 2, δηλαδή για $n_2 = N_2$ χρησιμοποιείται ο υποπίνακας μεταβάσεων A_1 ο οποίος πολλαπλασιάζεται με το διάνυσμα π_{N_2} προκειμένου να προκύψει το διάνυσμα π_{N_2-1}

Επομένως για τις εξισώσεις ισορροπίας θα έχουμε

$$\begin{aligned}\pi_0 B_{00} + \pi_1 B_{10} &= 0 \\ \pi_0 B_{01} + \pi_1 A_1 + \pi_2 A_0 &= 0 \\ \pi_1 A_2 + \pi_2 A_1 + \pi_3 A_0 &= 0 \\ &\vdots \\ \pi_{i-1} A_2 + \pi_i A_1 + \pi_{i+1} A_0 &= 0 \\ &\vdots\end{aligned}$$

Για να απλοποιηθεί το παραπάνω σύστημα εισάγεται ο R πίνακας ρυθμών του Neut. Ο πίνακας αυτός αποτελεί την ελάχιστη λύση της τετραγωνικής εξίσωσης

$$A_0 + RA_1 + R^2 A_2 = 0$$

Παρατηρούμε ότι $\pi_i = \pi_1 R^{i-1}$ Κάνοντας χρήση αυτού έχουμε ότι

$$\begin{pmatrix} \pi_0 & \pi_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{00} & B_{01} \\ B_{10} & A_1 + RA_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}$$

το οποίο μπορεί να λυθεί βρίσκοντας τα π_0 και π_1 και επομένως επαναληπτικά όλα τα π_i .

Επιστρέφοντας και αντικαθιστώντας στις εξισώσεις Chapman-Kolmogorov θα έχουμε ότι:

$$\pi_{i-1}A_2 + \pi_i A_1 + \pi_{i+1}A_0 = 0$$

δίνοντας

$$\pi_1 R^{i-2} A_2 + \pi_1 R^{i-1} A_1 + \pi_1 R^i A_0 = 0$$

δηλαδή,

$$\pi_1 R^{i-2} (A_2 + R A_1 + R^2 A_0) = 0$$

Έτσι βρίσκουμε τον R από

$$(A_2 + R A_1 + R^2 A_0) = 0 \quad (2)$$

Ο πιο απλός τρόπος είναι να αντικαταστήσουμε στην (2) η οποία μας δίνει

$$A_2 A_1^{-1} + R + R^2 A_0 A_1^{-1} = 0$$

δηλαδή,

$$R = -A_2 A_1^{-1} - R^2 A_0 A_1^{-1} = -V - R^2 W$$

με

$$R_{(0)} = 0; R_{(k+1)} = -V - R_{(k)}^2 W, k = 1, 2, \dots$$

Έχοντας υπολογίσει όλες τις πιθανότητες μόνιμης κατάστασης, κατασκευάζουμε τον πίνακα P .

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

Εφαρμογή, Αποτελέσματα,
Συμπεράσματα

Για το πρόβλημα με παραμέτρους $k_1 = 6$, $k_2 = 4$, $\mu_1 = 60$, $\mu_2 = 18$ και $\mu_0 = 37$, υπολογίζονται οι πιθανότητες μόνιμης κατάστασης. Αρχικά, σχηματίζεται ο πίνακας τάσεων Q και ταξινομούνται οι καταστάσεις έτσι ώστε ο Q να πάρει τρι-διαγώνια μορφή, όπως στον πίνακα 3.

$$Q = \begin{pmatrix} -78 & 18 & 0 & 0 & 60 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -78 & 18 & 0 & 0 & 60 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -78 & 18 & 0 & 0 & 60 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -60 & 0 & 0 & 0 & 60 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -78 & 18 & 0 & 0 & 60 & 0 & 0 & 0 \\ 37 & 0 & 0 & 0 & 0 & -115 & 18 & 0 & 0 & 60 & 0 & 0 \\ 0 & 37 & 0 & 0 & 0 & 0 & -115 & 18 & 0 & 0 & 60 & 0 \\ 0 & 0 & 37 & 0 & 0 & 0 & 0 & -97 & 0 & 0 & 0 & 60 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -78 & 18 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 37 & 0 & 0 & 0 & 0 & -115 & 18 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 37 & 0 & 0 & 0 & 0 & -115 & 18 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 37 & 0 & 0 & 0 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 37 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 37 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 37 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Οι πιθανότητες μόνιμης κατάστασης είναι:

$$P = \begin{pmatrix} 0.0003 & 0.0019 & 0.0093 & 0.034 & 0.115 & 0.3832 \\ 0.0002 & 0.0007 & 0.0035 & 0.0166 & 0.0566 & 0.1872 \\ 0.0001 & 0.0002 & 0.001 & 0.0051 & 0.0293 & 0.0932 \\ 0.0001 & 0.0001 & 0.0002 & 0.001 & 0.0061 & 0.0552 \end{pmatrix}$$

Ο πίνακας P υπολογίστηκε με εφαρμογή του:

α. Ορισμού σε 2.79 δευτερόλεπτα,

β. Επαναληπτικού αλγορίθμου αντιστροφής υποπινάκων σε 0.251 δευτερόλεπτα

γ. Γεωμετρικού αλγορίθμου σε 0.385 δευτερόλεπτα.

α/α	k1	k2	k1+k2	Μέθοδος 1η	Μέθοδος 2η	Μέθοδος 3η	Σύγκριση 1ης προς 2η	Σύγκριση 1ης προς 3η	Σύγκριση 2ης προς 3η
1.	50	50	100	320.763	13.578	3.985	95.77%	98.76%	70.65%
2.	45	50	95	279.485	11.394	3.004	95.92%	98.93%	73.64%
3.	50	45	95	274.502	9.901	2.987	96.39%	98.91%	69.83%
4.	45	45	90	242.501	9.081	3.009	96.26%	98.76%	66.87%
5.	50	40	90	220.142	8.285	2.926	96.24%	98.67%	64.68%
6.	35	50	85	214.531	7.416	10.617	96.54%	95.05%	-43.16%
7.	40	50	90	210.765	8.260	15.583	96.08%	92.61%	-88.64%
8.	35	45	80	209.876	6.291	2.997	97.00%	98.57%	52.36%
9.	30	50	80	203.855	6.355	5.002	96.88%	97.55%	21.30%
10.	50	35	85	193.500	7.283	2.005	96.24%	98.96%	72.47%
11.	40	40	80	187.795	6.425	3.578	96.58%	98.09%	44.31%
12.	45	40	85	179.818	7.090	3.025	96.06%	98.32%	57.33%
13.	30	45	75	157.635	5.421	3.010	96.56%	98.09%	44.48%
14.	40	45	85	157.521	7.186	4.024	95.44%	97.45%	44.00%
15.	45	35	80	146.628	5.732	3.018	96.09%	97.94%	47.35%
16.	35	40	75	144.970	5.442	2.965	96.25%	97.95%	45.51%
17.	25	50	75	138.135	5.428	3.944	96.07%	97.14%	27.33%
18.	50	30	80	117.191	6.355	1.929	94.58%	98.35%	69.65%
19.	40	35	75	113.745	5.203	3.003	95.43%	97.36%	42.28%
20.	25	45	70	109.300	4.763	3.001	95.64%	97.25%	36.99%

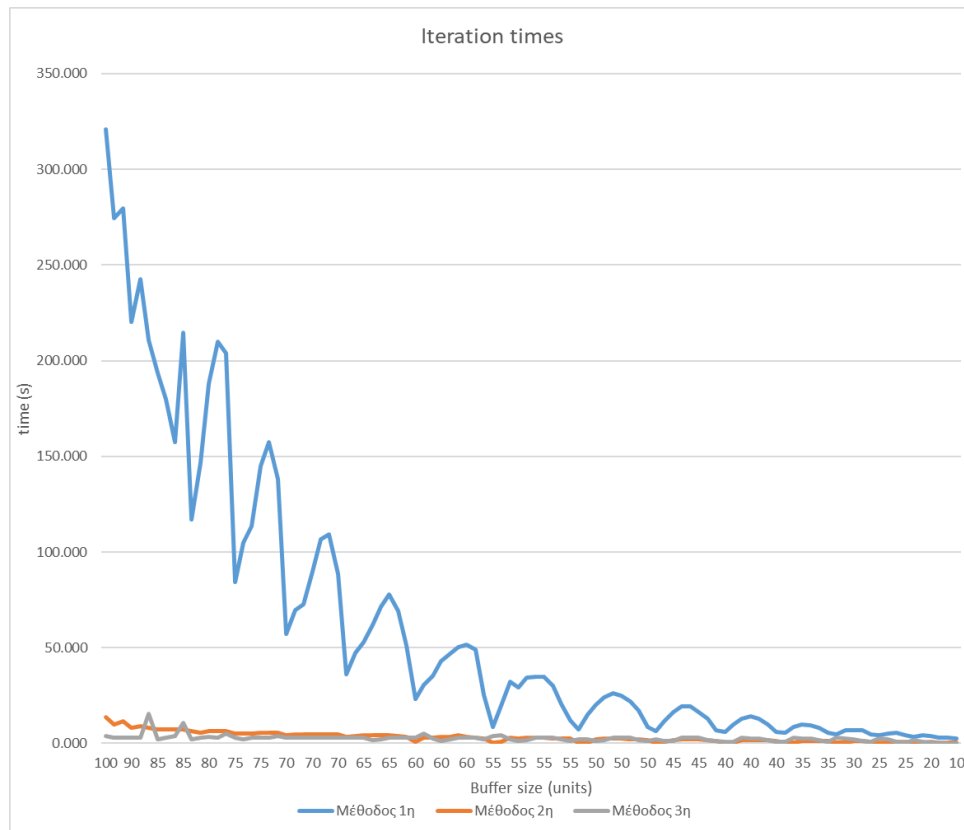
α/α	k1	k2	k1+k2	Μέθοδος 1η	Μέθοδος 2η	Μέθοδος 3η	Σύγκριση 1ης προς 2η	Σύγκριση 1ης προς 3η	Σύγκριση 2ης προς 3η
21.	30	40	70	106.819	4.591	2.914	95.70%	97.27%	36.52%
22.	45	30	75	104.931	5.164	2.000	95.08%	98.09%	61.27%
23.	35	35	70	90.067	4.852	2.899	94.61%	96.78%	40.26%
24.	20	50	70	88.497	4.577	2.889	94.83%	96.74%	36.88%
25.	50	25	75	84.242	5.145	3.003	93.89%	96.44%	41.64%
26.	25	40	65	77.619	4.141	2.991	94.67%	96.15%	27.76%
27.	40	30	70	72.604	4.631	3.000	93.62%	95.87%	35.22%
28.	30	35	65	71.225	4.116	2.004	94.22%	97.19%	51.32%
29.	45	25	70	69.711	4.590	3.000	93.42%	95.70%	34.62%
30.	20	45	65	69.224	3.857	2.887	94.43%	95.83%	25.16%
31.	35	30	65	61.700	4.044	1.562	93.45%	97.47%	61.37%
32.	50	20	70	57.219	4.346	2.961	92.40%	94.83%	31.88%
33.	40	25	65	52.786	4.061	2.803	92.31%	94.69%	30.98%
34.	20	40	60	51.437	3.434	2.884	93.32%	94.39%	16.02%
35.	15	50	65	50.973	3.474	3.033	93.18%	94.05%	12.69%
36.	25	35	60	50.441	4.261	2.928	91.55%	94.19%	31.28%
37.	15	45	60	48.942	3.135	3.027	93.59%	93.81%	3.44%
38.	45	20	65	47.188	3.884	2.998	91.77%	93.65%	22.80%
39.	30	30	60	47.050	3.491	1.969	92.58%	95.82%	43.59%
40.	35	25	60	42.946	3.327	1.417	92.25%	96.70%	57.41%
41.	50	15	65	36.232	3.277	3.008	90.96%	91.70%	8.20%
42.	40	20	60	35.442	2.978	2.529	91.60%	92.86%	15.07%
43.	25	30	55	34.675	2.996	2.916	91.36%	91.59%	2.65%
44.	20	35	55	34.600	2.794	2.791	91.92%	91.93%	0.12%
45.	30	25	55	34.214	2.800	1.706	91.82%	95.01%	39.06%
46.	40	15	55	32.397	2.856	2.062	91.19%	93.63%	27.78%
47.	45	15	60	30.345	3.162	4.998	89.58%	83.53%	-58.05%

α/α	k1	k2	k1+k2	Μέθοδος 1η	Μέθοδος 2η	Μέθοδος 3η	Σύγκριση 1ης προς 2η	Σύγκριση 1ης προς 3η	Σύγκριση 2ης προς 3η
48.	15	40	55	30.030	2.519	2.953	91.61%	90.17%	-17.25%
49.	35	20	55	29.390	2.721	1.405	90.74%	95.22%	48.36%
50.	25	25	50	25.989	2.372	2.908	90.87%	88.81%	-22.61%
51.	10	50	60	25.164	2.576	2.119	89.76%	91.58%	17.74%
52.	20	30	50	24.851	2.442	2.787	90.17%	88.79%	-14.11%
53.	30	20	50	24.184	2.431	1.500	89.95%	93.80%	38.28%
54.	50	10	60	23.375	0.817	2.990	96.50%	87.21%	-265.81%
55.	15	35	50	22.008	2.245	2.944	89.80%	86.62%	-31.13%
56.	10	45	55	20.639	2.424	2.005	88.25%	90.29%	17.31%
57.	35	15	50	20.102	2.228	1.370	88.92%	93.18%	38.50%
58.	45	10	55	19.825	0.664	4.248	96.65%	78.57%	-540.06%
59.	20	25	45	19.200	2.004	2.767	89.56%	85.59%	-38.04%
60.	25	20	45	19.173	2.040	2.906	89.36%	84.84%	-42.49%
61.	10	40	50	16.966	2.126	1.863	87.47%	89.02%	12.36%
62.	30	15	45	16.422	1.836	1.271	88.82%	92.26%	30.80%
63.	15	30	45	16.280	1.968	2.942	87.91%	81.93%	-49.50%
64.	40	10	50	15.139	0.545	1.992	96.40%	86.84%	-265.32%
65.	20	20	40	14.263	1.595	2.721	88.82%	80.92%	-70.64%
66.	25	15	40	12.902	1.751	2.901	86.43%	77.52%	-65.71%
67.	10	35	45	12.884	1.818	1.752	85.89%	86.40%	3.61%
68.	15	25	40	12.843	1.570	2.564	87.78%	80.03%	-63.39%
69.	5	50	55	11.966	2.620	1.442	78.10%	87.95%	44.95%
70.	35	10	45	11.623	0.658	1.366	94.34%	88.25%	-107.51%
71.	10	30	40	10.014	1.504	1.727	84.98%	82.75%	-14.86%
72.	20	15	35	9.851	1.309	2.676	86.71%	72.84%	-104.40%
73.	30	10	40	9.779	0.478	1.003	95.11%	89.75%	-109.80%
74.	15	20	35	9.556	1.230	2.368	87.13%	75.22%	-92.58%

α/α	k1	k2	k1+k2	Μέθοδος 1η	Μέθοδος 2η	Μέθοδος 3η	Σύγκριση 1ης προς 2η	Σύγκριση 1ης προς 3η	Σύγκριση 2ης προς 3η
75.	50	5	55	8.763	0.448	3.975	94.88%	54.64%	-786.69%
76.	5	45	50	8.681	1.615	1.251	81.40%	85.59%	22.54%
77.	25	10	35	8.449	0.467	2.899	94.48%	65.69%	-521.22%
78.	10	25	35	8.110	1.197	1.545	85.24%	80.95%	-29.13%
79.	45	5	50	7.117	0.371	2.292	94.79%	67.79%	-518.38%
80.	15	15	30	7.043	1.172	2.185	83.36%	68.97%	-86.47%
81.	5	40	45	6.925	1.407	1.230	79.69%	82.24%	12.58%
82.	10	20	30	6.846	1.068	1.353	84.41%	80.23%	-26.76%
83.	20	10	30	6.646	0.479	2.656	92.80%	60.03%	-455.09%
84.	40	5	45	6.360	0.337	1.931	94.71%	69.64%	-473.60%
85.	5	35	40	6.078	1.346	0.979	77.85%	83.88%	27.23%
86.	35	5	40	5.994	0.323	1.016	94.62%	83.05%	-215.07%
87.	5	30	35	5.713	1.150	0.898	79.88%	84.29%	21.93%
88.	10	15	25	5.610	0.927	0.921	83.47%	83.58%	0.64%
89.	30	5	35	5.452	0.333	0.931	93.89%	82.93%	-179.17%
90.	15	10	25	5.214	0.459	1.974	91.19%	62.15%	-329.85%
91.	5	25	30	4.810	0.904	0.832	81.20%	82.70%	7.94%
92.	25	5	30	4.739	0.337	2.898	92.89%	38.85%	-760.66%
93.	20	5	25	4.243	0.376	2.601	91.14%	38.70%	-592.24%
94.	10	10	20	4.105	0.459	0.728	88.82%	82.26%	-58.72%
95.	5	20	25	4.046	0.831	0.383	79.47%	90.52%	53.84%
96.	5	15	20	3.798	0.714	0.328	81.21%	91.36%	54.05%
97.	15	5	20	3.334	0.291	1.828	91.28%	45.17%	-528.91%
98.	10	5	15	3.126	0.337	0.574	89.23%	81.62%	-70.60%
99.	5	10	15	3.060	0.398	0.136	86.99%	95.55%	65.77%
100.	5	5	10	2.524	0.255	0.116	89.90%	95.41%	54.58%

Πίνακας 4

Διαγραμματικά (Διάγραμμα 1) φαίνεται η ελαχιστοποίηση του υπολογιστικού χρόνου μέσω της εφαρμογής των δύο αλγορίθμων αντιστροφής υποπινάκων. Ακόμη και για μεγάλες τιμές των k_1 και k_2 , οι χρόνοι επίλυσης δεν ξεπερνούν τα δέκα δευτερόλεπτα.

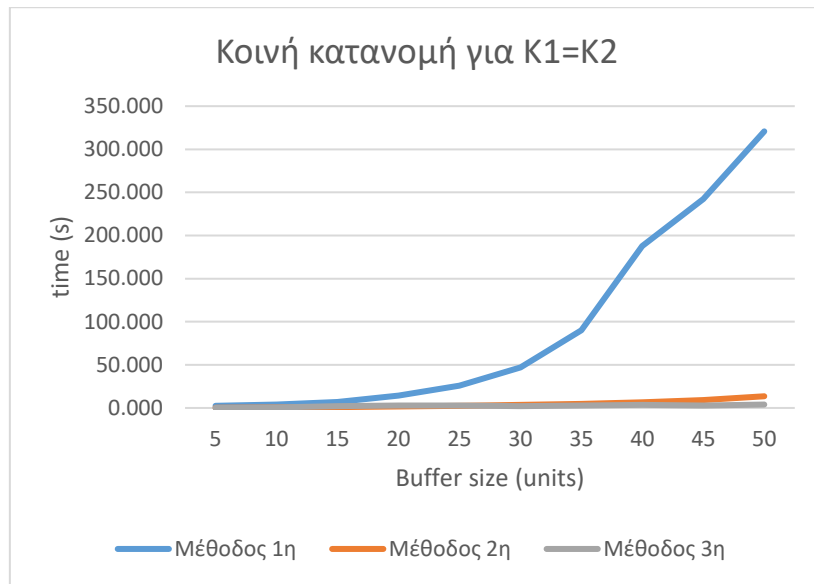


Διάγραμμα 1-οι χρόνοι σε δευτερόλεπτα για τις τρεις μεθόδους για k_1+k_2

Για να απλοποιηθεί το παραπάνω σύστημα εισάγεται ο R πίνακας ρυθμών του Neut. Ο πίνακας αυτός αποτελεί την ελάχιστη λύση της τετραγωνικής εξίσωσης

Για τις δύο τελευταίες μεθόδους παρατηρείται ότι οι χρόνοι υπολογισμού ακολουθούν παρόμοια κατανομή. Για μεγάλους αριθμούς, ο ρυθμός μεταβολής του χρόνου για τον επαναληπτικό αλγόριθμο αντιστροφής πινάκων είναι μεγαλύτερος σε σχέση με αυτόν του γεωμετρικού, ενώ για μικρές τιμές, από τους τρεις αλγόριθμους ο πιο αποτελεσματικός κρίνεται ο επαναληπτικός.

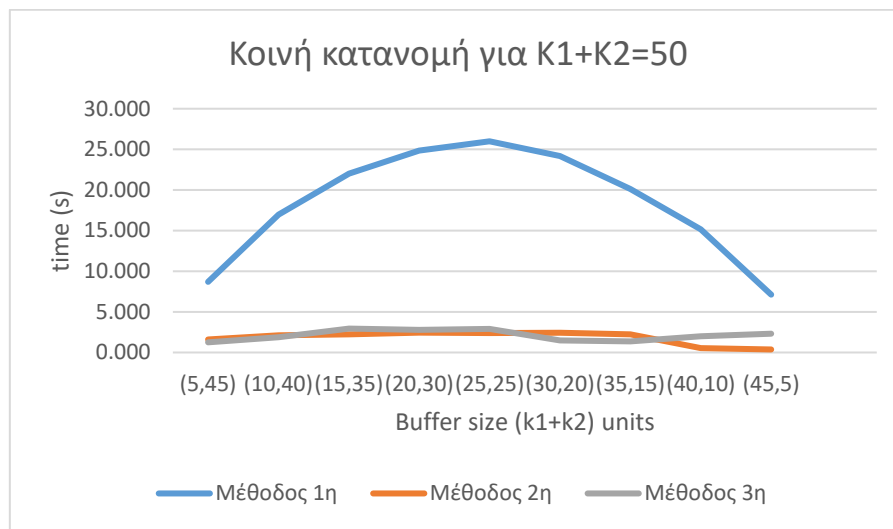
Εξετάζοντας την περίπτωση όπου έχουμε ισοκατανομή των εργαλείων, δηλαδή $K_1 = K_2$ βλέπουμε διαγραμματικά ότι



Διάγραμμα 2-οι χρόνοι σε δευτερόλεπτα για την περίπτωση της ισοκατανομής εργαλείων στις δύο αποθήκες

Οι δύο μέθοδοι έχουν παρόμοια αποτελέσματα, αλλά η τάση της LU παραγοντοποίησης να αυξήσει τον χρόνο επεξεργασίας είναι αρκετά μεγαλύτερη από αυτή της γεωμετρικής.

Τέλος παρουσιάζεται η περίπτωση όπου το σύνολο και των δύο εξαρτημάτων μαζί είναι 50. Η κατανομή του χρόνου υπολογισμού για τους τρεις αλγορίθμους είναι η εξής



Διάγραμμα 3 - οι χρόνοι σε δευτερόλεπτα για την περίπτωση το άθροισμα των εργαλείων στις δύο αποθήκες να είναι 50

Για το συγκεκριμένο σύστημα παραγωγής και για 100 διαφορετικές χωρητικότητες υπολογίστηκαν οι μέσοι ρυθμοί παραγωγής για κάθε μία περίπτωση και παρουσιάζονται στον πίνακα 5. Ο μέσος ρυθμός παραγωγής είναι ο

$$G = \mu_0 \times \sum \{P(n_1, n_2) | n_1 > 0, n_2 > 0\}$$

α/α	k1	k2	k1+k2	Μέσος ρυθμός παραγωγής 1ου αλγορίθμου	Μέσος ρυθμός παραγωγής 2ου αλγορίθμου	Μέσος ρυθμός παραγωγής 3ου αλγορίθμου
1.	50	50	100	14.99999999999	14.99357272001	14.99295882880
2.	50	45	95	14.99999999992	14.99492570213	14.99977321729
3.	45	50	95	14.99999999999	14.98884689226	14.98802050798
4.	50	40	90	14.99999999879	14.99015254442	14.98742033099
5.	45	45	90	14.99999999992	14.98634052328	14.99093099066
6.	40	50	90	14.99999999999	14.99680300919	14.98765018377
7.	50	35	85	14.99999998114	14.99475906283	14.99221653380
8.	45	40	85	14.99999999879	14.99586017513	14.98708752601

α/α	k1	k2	k1+k2	Μέσος ρυθμός παραγωγής 1ου αλγορίθμου	Μέσος ρυθμός παραγωγής 2ου αλγορίθμου	Μέσος ρυθμός παραγωγής 3ου αλγορίθμου
9.	40	45	85	14.99999999992	14.98908564719	14.99416878749
10.	35	50	85	14.99999999978	14.98926841404	14.98799534827
11.	50	30	80	14.99999970501	14.98648467312	14.98958234348
12.	45	35	80	14.99999998114	14.98912798702	14.99492896356
13.	40	40	80	14.99999999879	14.99603894098	14.98706952676
14.	35	45	80	14.99999999971	14.99830943228	14.99132408867
15.	30	50	80	14.99999999302	14.99804339210	14.99516855435
16.	50	25	75	14.99999538452	14.99509885270	14.98721968248
17.	45	30	75	14.99999970501	14.98704399106	14.99172307824
18.	40	35	75	14.99999998114	14.99505077131	14.99860576107
19.	35	40	75	14.99999999858	14.99851408805	14.98746780279
20.	30	45	75	14.99999999294	14.98501732407	14.98531639787
21.	25	50	75	14.99999977648	14.99901433826	14.99521652446
22.	50	20	70	14.99992778508	14.98699207906	14.98571446179
23.	45	25	70	14.99999538452	14.99259181100	14.98525454354
24.	40	30	70	14.99999970501	14.98618638973	14.99586302217
25.	35	35	70	14.99999998093	14.98814147009	14.99387967350
26.	30	40	70	14.99999999182	14.98506038236	14.98521845021
27.	25	45	70	14.99999977641	14.99648700045	14.99940516143
28.	20	50	70	14.99999284743	14.99276500231	14.99375307217
29.	50	15	65	14.99887007130	14.98885063920	14.98492603525
30.	45	20	65	14.99992778508	14.99496004927	14.99317593374
31.	40	25	65	14.99999538453	14.98571935045	14.99833129261
32.	35	30	65	14.99999970479	14.99725576739	14.99181412119
33.	30	35	65	14.99999997417	14.99363069246	14.98560577428
34.	25	40	65	14.99999977529	14.99132066705	14.99478158740
35.	20	45	65	14.99999284736	14.98710838108	14.99032533050

α/α	k1	k2	k1+k2	Μέσος ρυθμός παραγωγής 1ου αλγορίθμου	Μέσος ρυθμός παραγωγής 2ου αλγορίθμου	Μέσος ρυθμός παραγωγής 3ου αλγορίθμου
36.	15	50	65	14.99977111467	14.99265176885	14.99412847691
37.	50	10	60	14.98230549589	14.97276431251	14.97283324630
38.	45	15	60	14.99887007130	14.99493283657	14.98429909602
39.	40	20	60	14.99992778506	14.99610419958	14.99243845656
40.	35	25	60	14.99999538431	14.98661360502	14.98562853154
41.	30	30	60	14.99999969804	14.99839912085	14.98576279324
42.	25	35	60	14.99999975768	14.98525605815	14.98646409161
43.	20	40	60	14.99999284626	14.99835087029	14.98717348143
44.	15	45	60	14.99977111461	14.99698976606	14.99704767855
45.	10	50	60	14.99267220322	14.98087874024	14.97833867000
46.	50	5	55	14.71901867049	14.71900920253	14.70604531576
47.	45	10	55	14.98230549588	14.96746207257	14.97535037284
48.	40	15	55	14.99887007129	14.99353235062	14.99701618397
49.	35	20	55	14.99992778485	14.98663779019	14.99950839959
50.	30	25	55	14.99999537757	14.98611538003	14.99754380373
51.	25	30	55	14.99999948175	14.99448298800	14.99627976849
52.	20	35	55	14.99999282891	14.99112384341	14.99948483990
53.	15	40	55	14.99977111361	14.98522344636	14.99667473245
54.	10	45	55	14.99267220318	14.98071716127	14.98292539823
55.	5	50	55	14.76190476189	14.75807457130	14.75828115359
56.	45	5	50	14.71901867013	14.70698560018	14.71503802776
57.	40	10	50	14.98230549577	14.98226155544	14.97037115565
58.	35	15	50	14.99887007099	14.99641075139	14.99120668586
59.	30	20	50	14.99992777804	14.98933137168	14.99617939680
60.	25	25	50	14.99999516195	14.99075295583	14.99219306020
61.	20	30	50	14.99999255515	14.99700788467	14.98756195749
62.	15	35	50	14.99977109747	14.99673665179	14.99922029402

α/α	k1	k2	k1+k2	Μέσος ρυθμός παραγωγής 1ου αλγορίθμου	Μέσος ρυθμός παραγωγής 2ου αλγορίθμου	Μέσος ρυθμός παραγωγής 3ου αλγορίθμου
63.	10	40	50	14.99267220249	14.98693520370	14.98610477647
64.	5	45	50	14.76190476189	14.74852093247	14.76025818754
65.	40	5	45	14.71901866561	14.71103402762	14.70487692752
66.	35	10	45	14.98230549408	14.96914860529	14.96805869342
67.	30	15	45	14.99887006286	14.98759770515	14.99718177501
68.	25	20	45	14.99992756216	14.99241707522	14.99288340975
69.	20	25	45	14.99998824788	14.99260352162	14.98981175435
70.	15	30	45	14.99977083745	14.98587946255	14.98751958738
71.	10	35	45	14.99267219069	14.98091988423	14.98619587668
72.	5	40	45	14.76190476183	14.74884700931	14.74865352749
73.	35	5	40	14.71901860948	14.71547603800	14.71471587618
74.	30	10	40	14.98230546506	14.97905557622	14.97098098537
75.	25	15	40	14.99886982731	14.99242629555	14.99429704968
76.	20	20	40	14.99992067345	14.99597668392	14.99666879207
77.	15	25	40	14.99976665576	14.98949327136	14.99190604191
78.	10	30	40	14.99267198734	14.98063871021	14.98537072974
79.	5	35	40	14.76190475985	14.75839654630	14.75355741129
80.	30	5	35	14.71901790996	14.71629371154	14.70717413187
81.	25	10	35	14.98230492059	14.97701322453	14.97678841508
82.	20	15	35	14.99886269044	14.98985713627	14.98938191481
83.	15	20	35	14.99969978478	14.99181192318	14.99487043008
84.	10	25	35	14.99266848684	14.97856457243	14.98281416496
85.	5	30	35	14.76190471322	14.75271409871	14.75799834110
86.	25	5	30	14.71900918546	14.71205588414	14.71238930290
87.	20	10	30	14.98229339434	14.96795243444	14.97764960966
88.	15	15	30	14.99864075266	14.98484642476	14.98940187174
89.	10	20	30	14.99260832368	14.98360784036	14.99250021787

α/α	k1	k2	k1+k2	Μέσος ρυθμός παραγωγής 1ου αλγορίθμου	Μέσος ρυθμός παραγωγής 2ου αλγορίθμου	Μέσος ρυθμός παραγωγής 3ου αλγορίθμου
90.	5	25	30	14.76190361182	14.75872070443	14.76124906929
91.	20	5	25	14.71889997797	14.71736895489	14.71173570475
92.	15	10	25	14.98201471787	14.96756761071	14.96714209665
93.	10	15	25	14.99158135351	14.97749212346	14.98149276417
94.	5	20	25	14.76187759351	14.75100092362	14.74723920027
95.	15	5	20	14.71751431253	14.71147475907	14.70309205729
96.	10	10	20	14.97450567668	14.97448764375	14.97431196724
97.	5	15	20	14.76126295942	14.75820841660	14.74967903154
98.	10	5	15	14.99158135351	14.98306607831	14.98539353232
99.	5	10	15	14.69903722477	14.68474692722	14.68637919210
100.	5	5	10	14.41047924985	14.40338468442	14.40282233671

Πίνακας 5 - Ο ρυθμός παραγωγής

Επιπλέον, υπολογίζεται το ποσοστό του χρόνου που το buffer i είναι γεμάτο με χρήση του τύπου:

$$q_1 = \sum_{n_2=0}^{k_2} p(k_1, n_2)$$

$$q_2 = \sum_{n_2=0}^{k_2} p(k_2, n_2)$$

Για τις θεωρητικές περιπτώσεις που τα buffers έχουν άπειρο μέγεθος, ο μέγιστος ρυθμός παραγωγής είναι ίσος με

$$G_{max} = \min(\mu_1, \mu_2, \mu_0)$$

Η πιο αργή μηχανή θα καθορίζει λοιπόν και το ρυθμό εξόδου από το σύστημα. Για τη διερεύνηση των παραπάνω ρυθμών, υπολογίστηκαν οι τιμές των G, q_1, q_2, G_{max} , για τα εξής 6 διαφορετικά σενάρια του Πίνακα 5:

α/α σεναρίου	μ_1	μ_2	μ_0	Περιγραφή Σεναρίου
1	2	2	4	(αργή παραγωγή κομματιών, σχετικά γρήγορη συναρμολόγηση)
2	2	4	2	(διαφορετικές ταχύτητες παραγωγής, αργή συναρμολόγηση)
3	4	4	4	(μέτριες ταχύτητες παραγωγής, μέτρια ταχύτητα συναρμολόγησης)
4	4	4	8	(μέτριες ταχύτητες παραγωγής, γρήγορη συναρμολόγηση)
5	8	8	4	(γρήγορες ταχύτητες παραγωγής, μέτρια συναρμολόγηση)
6	2	8	12	(πολύ διαφορετικές ταχύτητες παραγωγής, γρήγορη συναρμολόγηση)

Πίνακας 6 – Πίνακας σεναρίων

Για καθένα από τα παραπάνω σενάρια υπολογίστηκαν οι ρυθμοί παραγωγής για τους εξής συνδυασμούς μεγέθους buffer:

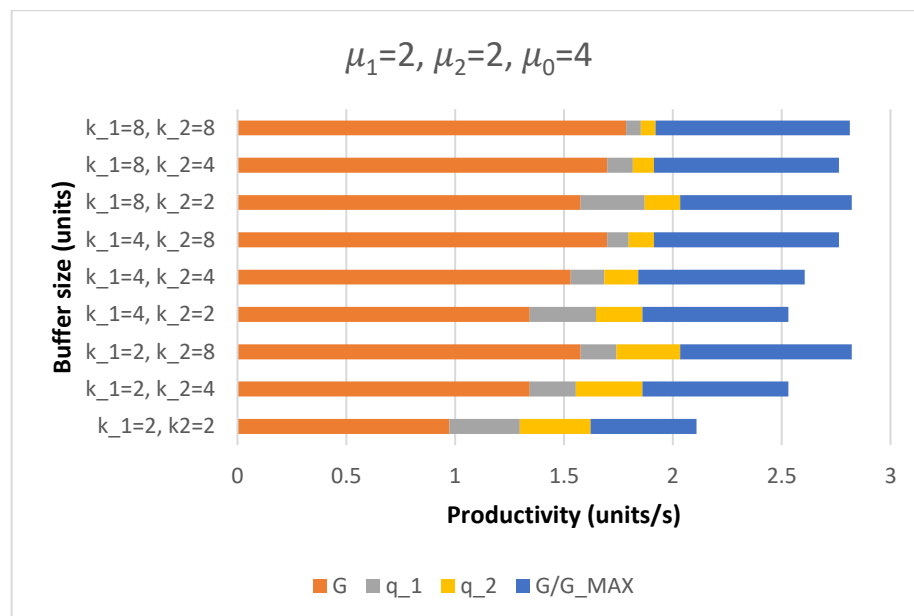
α/α συνδυασμού	k_1	k_2
1	2	2
2	2	4
3	2	8
4	4	2
5	4	4
6	4	8
7	8	2
8	8	4
9	8	8

Πίνακας 7 – Πίνακας συνδυασμών buffer size

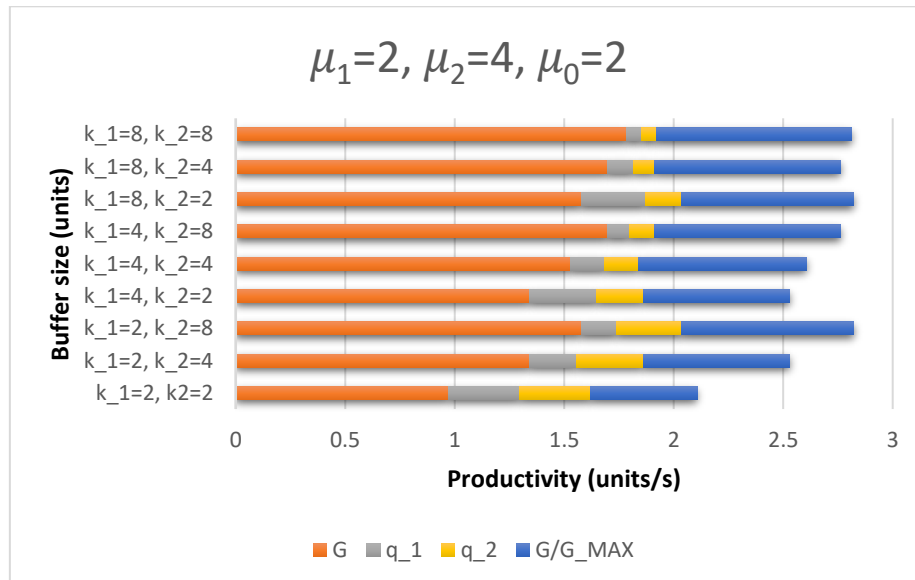
Τα αποτελέσματα παρουσιάζονται στους πίνακες που ακολουθούν:

α/α	k_1	k_2	G_{MAX}	G	q_1	q_2	G/G_{MAX}
1.	$k_1=2$	$k_2=2$	2	0.972973	0.324324	0.324324	0.486486
2.	$k_1=2$	$k_2=4$	2	1.34202	0.212812	0.305103	0.67101
3.	$k_1=2$	$k_2=8$	2	1.577179	0.163353	0.292855	0.788589
4.	$k_1=4$	$k_2=2$	2	1.34202	0.305103	0.212812	0.67101
5.	$k_1=4$	$k_2=4$	2	1.530189	0.155434	0.155434	0.765095
6.	$k_1=4$	$k_2=8$	2	1.698277	0.098178	0.117437	0.849139
7.	$k_1=8$	$k_2=2$	2	1.577179	0.292855	0.163353	0.788589
8.	$k_1=8$	$k_2=4$	2	1.698277	0.117437	0.098178	0.849139
9.	$k_1=8$	$k_2=8$	2	1.78547	0.067754	0.067754	0.892735

Πίνακας 8 - $\mu_1 = 2, \mu_2 = 2, \mu_0 = 4$

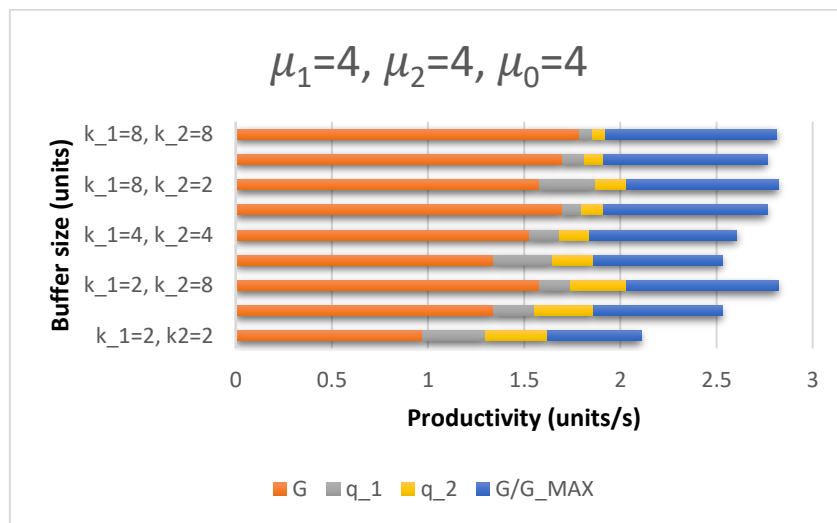


α/α	k_1	k_2	G_{MAX}	G	q_1	q_2	G/G_{MAX}
1.	$k_1=2$	$k_2=2$	2	1.223744	0.246575	0.3379	0.611872
2.	$k_1=2$	$k_2=4$	2	1.3282	0.239966	0.333547	0.6641
3.	$k_1=2$	$k_2=8$	2	1.333321	0.239742	0.333334	0.666661
4.	$k_1=4$	$k_2=2$	2	1.482426	0.267215	0.230309	0.741213
5.	$k_1=4$	$k_2=4$	2	1.585434	0.249413	0.202697	0.792717
6.	$k_1=4$	$k_2=8$	2	1.599885	0.248084	0.20002	0.799942
7.	$k_1=8$	$k_2=2$	2	1.633599	0.279277	0.168833	0.8168
8.	$k_1=8$	$k_2=4$	2	1.757281	0.253723	0.11868	0.878641
9.	$k_1=8$	$k_2=8$	2	1.777299	0.249885	0.111243	0.88865

Πίνακας 9 - $\mu_1 = 2, \mu_2 = 4, \mu_0 = 2$ 

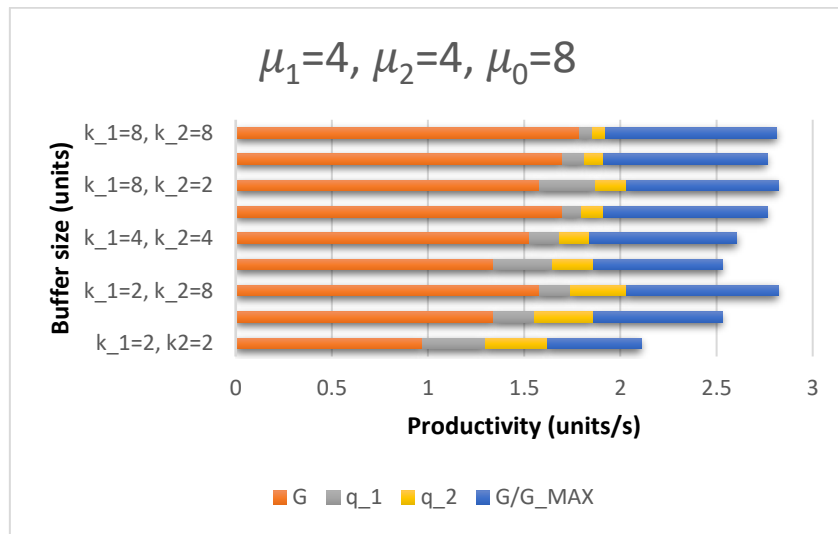
α/α	k_1	k_2	G_{MAX}	G	q_1	q_2	G/G_{MAX}
1.	$k_1=2$	$k_2=2$	4	2.044444	0.333333	0.333333	0.511111
2.	$k_1=2$	$k_2=4$	4	2.488038	0.272727	0.333333	0.62201
3.	$k_1=2$	$k_2=8$	4	2.646993	0.254588	0.333333	0.661748
4.	$k_1=4$	$k_2=2$	4	2.488038	0.333333	0.272727	0.62201
5.	$k_1=4$	$k_2=4$	4	2.877995	0.231041	0.231041	0.719499

α/α	k_1	k_2	G_{MAX}	G	q_1	q_2	G/G_{MAX}
6.	$k_1=4$	$k_2=8$	4	3.114874	0.186251	0.208117	0.778719
7.	$k_1=8$	$k_2=2$	4	3.114874	0.186251	0.208117	0.778719
8.	$k_1=8$	$k_2=4$	4	3.114874	0.208117	0.186251	0.778719
9.	$k_1=8$	$k_2=8$	4	3.382674	0.140312	0.140312	0.845669

Πίνακας 10 - $\mu_1 = 4, \mu_2 = 4, \mu_0 = 4$ 

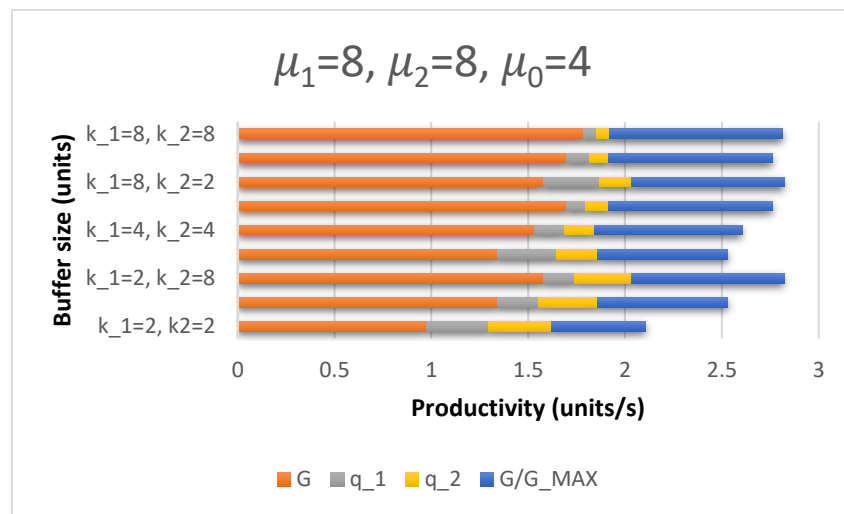
α/α	k_1	k_2	G_{MAX}	G	q_1	q_2	G/G_{MAX}
1.	$k_1=2$	$k_2=2$	4	1.945946	0.324324	0.324324324	0.486486
2.	$k_1=2$	$k_2=4$	4	2.684039	0.212812	0.305103149	0.671101
3.	$k_1=2$	$k_2=8$	4	3.154358	0.163353	0.292855271	0.788589
4.	$k_1=4$	$k_2=2$	4	2.684039	0.305103	0.212812161	0.671101
5.	$k_1=4$	$k_2=4$	4	3.060379	0.155434	0.1554341	0.765095
6.	$k_1=4$	$k_2=8$	4	3.396555	0.098178	0.117437397	0.849139
7.	$k_1=8$	$k_2=2$	4	3.154358	0.292855	0.163352819	0.788589
8.	$k_1=8$	$k_2=4$	4	3.396555	0.117437	0.098177584	0.849139
9.	$k_1=8$	$k_2=8$	4	3.570941	0.067754	0.067753504	0.892735

Πίνακας 11 - $\mu_1 = 4, \mu_2 = 4, \mu_0 = 8$



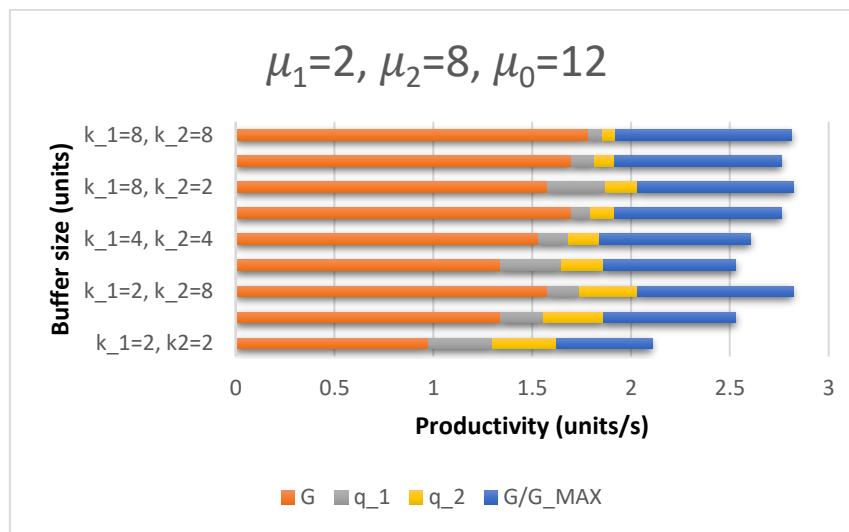
α/α	k_1	k_2	G_MAX	G	q_1	q_2	G/G_MAX
1.	$k_1=2$	$k_2=2$	4	3.055901	0.279503	0.279503106	0.763975
2.	$k_1=2$	$k_2=4$	4	3.38805	0.264971	0.285038936	0.847013
3.	$k_1=2$	$k_2=8$	4	3.428044	0.263378	0.285705493	0.857011
4.	$k_1=4$	$k_2=2$	4	3.38805	0.285039	0.264971401	0.847013
5.	$k_1=4$	$k_2=4$	4	3.779326	0.259693	0.259693487	0.944831
6.	$k_1=4$	$k_2=8$	4	3.867897	0.254714	0.258119333	0.966974
7.	$k_1=8$	$k_2=2$	4	3.428044	0.285705	0.263378035	0.857011
8.	$k_1=8$	$k_2=4$	4	3.867897	0.258119	0.254713818	0.966974
9.	$k_1=8$	$k_2=8$	4	3.985384	0.250757	0.250756652	0.996346

Πίνακας 12 - $\mu_1 = 8, \mu_2 = 8, \mu_0 = 4$



α/α	k_1	k_2	G_MAX	G	q_1	q_2	G/G_MAX
1.	k_1=2	k_2=2	2	1.511437	0.191593	0.149395726	0.755718
2.	k_1=2	k_2=4	2	1.93513	0.18768	0.139944399	0.967565
3.	k_1=2	k_2=8	2	1.953456	0.18764	0.139535611	0.976728
4.	k_1=4	k_2=2	2	1.569949	0.193105	0.006210146	0.784975
5.	k_1=4	k_2=4	2	1.97254	0.187589	0.003986566	0.98627
6.	k_1=4	k_2=8	2	1.998628	0.18752	0.003858934	0.999314
7.	k_1=8	k_2=2	2	1.572905	0.193182	0.000021020	0.786453
8.	k_1=8	k_2=4	2	1.973764	0.187573	0.000003923	0.986882
9.	k_1=8	k_2=8	2	1.999897	0.1875	0.000002980	0.999948

Πίνακας 13 - $\mu_1 = 2, \mu_2 = 8, \mu_0 = 12$



Σε κάθε περίπτωση παρατηρείται ότι όταν το buffer size είναι ίσο με 8 και για τις δύο κατηγορίες, ο λόγος G/G_{max} είναι μεγαλύτερος του 80%. Στα σενάρια 1, 2, 3 και 4 για μικρά buffer sizes υπάρχει μεγάλο ποσοστό χρόνου που είναι γεμάτο κάποιο buffer (μεγαλύτερο από 30%)

Βιβλιογραφία

- [1] Guy Latouche and V. Ramaswami, A logarithmic reduction algorithm for quasi-birth-death processes, *Journal of Applied Probability*, Volume 30, Issue 3, September 1993 , pp. 650-674
- [2] Dario Bini and Beatrice Meini, On the Solution of a Nonlinear Matrix Equation Arising in Queueing Problems, *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, Volume 17, Issue 4
- [3] Kleinrock, Leonard (1975). *Queueing Systems Volume 1: Theory*. p. 77. ISBN 0471491101.
- [4] Asmussen, S. R. (2003). "Queueing Theory at the Markovian Level". *Applied Probability and Queues. Stochastic Modelling and Applied Probability*. 51. pp. 60–31. doi:10.1007/0-387-21525-5_3. ISBN 978-0-387-00211-8.
- [5] *Adan, Ivo*. "Course QUE: Queueing Theory, Fall 2003: The M/M/1 system" (PDF). Retrieved 2012-08-06.
- [6] William J. Stewart, *The Matrix Geometric/Analytic Methods for Structured Markov Chains*, Department of Computer Science N.C. State University
- [7] Vassilis S. Kouikoglou, Sensitivity analysis and decomposition of unreliable production lines with blocking, *Annals of Operations Research* 93 (2000) 245–264
- [8] Bini, D. A., Meini, B., Steffé, S., Van Houdt, B. (2006, October). Structured Markov chains solver: software tools. In *Proceeding from the 2006 workshop on Tools for solving structured Markov chains* (p. 14). ACM.
- [9] Σταύρος Κομηνέας, Ευάγγελος Χαρμανδάρης. *Μαθηματική Μοντελοποίηση - Μια Σπουδή στις Φυσικές Επιστήμες*, ISBN: 978-960-603-425-1

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

Κώδικας

Στο παρόν Παράρτημα παρατίθεται ενδεικτικά ο κώδικας που αναπτύχθηκε για τις ανάγκες της εργασίας σε περιβάλλον Octave

```
%Συνάρτηση υπολογισμού του πίνακα τάσεων Q
function Q=taseis(k_1,k_2,k,m_1,m_2,m_0)
%Input arguments:
%K_1: χωρητικότητα αποθήκης 1
%K_2: χωρητικότητα αποθήκης 2
%k_1: χωρητικότητα συστήματος για εξάρτημα τύπου 1
k_1=K_1+1
%k_2: χωρητικότητα συστήματος για εξάρτημα τύπου 2
k_2=K_2+1
%m_1: παράμετρος κατανομής της μηχανής εισόδου 1
%m_2: παράμετρος κατανομής της μηχανής εισόδου 2
%m_0: παράμετρος κατανομής της μηχανής εξόδου 0
%Output arguments:
%Matrix Q: πίνακας τάσεων
%Υπολογισμός πίνακα τάσεων A
%Initialize matrix A
Q = zeros(k_1*k_2,k_1*k_2);
n_1=1;
n_2=1;
for i = 1:k_1
    for j = 1:k_2
        if (i==1 && j==1)
            Q((i-1)*k_2+j,(n_1-1)*k_2+n_2)=-(m_1+m_2);
        elseif (i==2 && j==2)
            Q((i-1)*k_2+j,(n_1-1)*k_2+n_2)=m_0;
        end
    end
end
end
```

```

for n_2=2:(k_2-1)
    for i =1:k_1
        for j=1:k_2
            if (i==n_1 && j==n_2);
                Q((i-1)*k_2+j,(n_1-1)*k_2+n_2)=-(m_1+m_2);
            elseif (i==n_1+1 && j==n_2+1);
                Q((i-1)*k_2+j,(n_1-1)*k_2+n_2)=m_0;
            elseif (i==n_1 && j==n_2-1);
                Q((i-1)*k_2+j,(n_1-1)*k_2+n_2)=m_2;
            end
        end
    end
end

```

```

n_2=k_2;
for i =1:k_1
    for j=1:k_2
        if (i==n_1 && j==k_2)
            Q((i-1)*k_2+j,(n_1-1)*k_2+n_2)=-m_1;
        elseif (i==n_1 && j==k_2-1)
            Q((i-1)*k_2+j,(n_1-1)*k_2+n_2)=m_2;
        end
    end
end

```

```

for n_1=2:(k_1-1)
    n_2=1;
    for i=1:k_1
        for j=1:k_2
            if (i==n_1&&j==1)
                Q((i-1)*k_2+j,(n_1-1)*k_2+1)=-(m_1+m_2);
            elseif (i==n_1+1 && j==1+1)
                Q((i-1)*k_2+j,(n_1-1)*k_2+1)=m_0;
            elseif (i==n_1-1 && j==1)
                Q((i-1)*k_2+j,(n_1-1)*k_2+1)=m_1;
            end
        end
    end
end

```



```

        end
    end
end
end

for n_1=2:(k_1-1)
    for n_2=2:(k_2-1)
        for i=1:k_1
            for j=1:k_2
                if (i==n_1 && j==n_2)
                     $Q((i-1)*k_2+j, (n_1-1)*k_2+n_2) = -(m_1+m_2+m_0);$ 

                elseif (i==n_1-1 && j==n_2)
                     $Q((i-1)*k_2+j, (n_1-1)*k_2+n_2) = m_1;$ 

                elseif (i==n_1 && j==n_2-1)
                     $Q((i-1)*k_2+j, (n_1-1)*k_2+n_2) = m_2;$ 
                elseif (i==n_1+1 && j==n_2+1)
                     $Q((i-1)*k_2+j, (n_1-1)*k_2+n_2) = m_0;$ 
                end
            end
        end
    end
end

for n_1=2:(k_1-1)
    n_2=k_2;
    for i=1:k_1
        for j=1:k_2
            if (i==n_1 && j==n_2)
                 $Q((i-1)*k_2+j, (n_1-1)*k_2+n_2) = -(m_1+m_0);$ 
            elseif (i==n_1-1 && j==k_2)
                 $Q((i-1)*k_2+j, (n_1-1)*k_2+n_2) = m_1;$ 
            elseif (i==n_1 && j==k_2-1)
                 $Q((i-1)*k_2+j, (n_1-1)*k_2+n_2) = m_2;$ 
            end
        end
    end
end
end

```

```

n_1=k_1;
n_2=1;
for i=1:k_1
    for j=1:k_2
        if (i==n_1 && j==n_2)
            Q((i-1)*k_2+j,(n_1-1)*k_2+n_2)=-(m_2);
        elseif (i==k_1-1 && j==1)
            Q((i-1)*k_2+j,(n_1-1)*k_2+n_2)=m_1;
        end
    end
end
end

```

```

n_1=k_1;
n_2=1;
for i=1:k_1
    for j=1:k_2
        if (i==n_1&&j==n_2)
            Q((i-1)*k_2+j,(n_1-1)*k_2+n_2)=-(m_2);
        elseif (i==n_1-1 && j==n_2)
            Q((i-1)*k_2+j,(n_1-1)*k_2+n_2)=m_1;
        elseif (i==n_1 && j==n_2-1)
            Q((i-1)*k_2+j,(n_1-1)*k_2+n_2)=m_2;
        end
    end
end
end

```

```

for n_2=2:(k_2-1)
    for i=1:k_1
        for j=1:k_2
            if (i==n_1&&j==n_2)
                Q((i-1)*k_2+j,(n_1-1)*k_2+n_2)=-(m_2+m_0);
            elseif (i==n_1-1 && j==n_2)
                Q((i-1)*k_2+j,(n_1-1)*k_2+n_2)=m_1;
            elseif (i==n_1 && j==n_2-1)
                Q((i-1)*k_2+j,(n_1-1)*k_2+n_2)=m_2;
            end
        end
    end
end

```

```

end
end

n_1=k_1;
n_2=k_2;
for i=1:k_1
    for j=1:k_2
        if (i==n_1&&j==n_2)
            Q((i-1)*k_2+j,(n_1-1)*k_2+n_2)=-(m_0);
        elseif (i==n_1-1 && j==n_2)
            Q((i-1)*k_2+j,(n_1-1)*k_2+n_2)=m_1;
        elseif (i==n_1 && j==n_2-1)
            Q((i-1)*k_2+j,(n_1-1)*k_2+n_2)=m_2;
        end
    end
end
end
end

%Συνάρτηση υπολογισμού της κατανομής μόνιμων πιθανοτήτων P
%Input arguments
%Q: το output της συνάρτησης Q

function P=solvePQ(Q)

%Output arguments
%P: ο πίνακας κατανομής μόνιμων πιθανοτήτων
a=size(Q);
p=sym('p',[1 a(1)]);
T=p*Q;
w=solve([T==0,sum(p)==1],p);
P=subs(p,w);
end

clear all
clc
k_1=5;
k_2=5;
k=k_1+k_2;

```

```
m_1=15;
m_2=26;
m_0=30;
Q=taseis(k_1,k_2,k,m_1,m_2,m_0);

P=double(vpa(solvePQ(Q),4));
P=reshape(P,k_2,k_1);

%sximatismos A
T=zeros(k_1*k_2,k_1*k_2);
for i=1:k_1*k_2
    for j=1:k_1*k_2
        if i==j
            T(i,j)=Q(i,j);
        end
        if i==j-1
            T(i,j)=Q(i,j);
        end
    end
end
for t=1:k_1
    for i=1:k_2
        for j=1:k_2
            A(i,(t-1)*k_2+j)=T(i+(t-1)*k_2,j+(t-1)*k_2);
        end
    end
end

%sximatismos A_1
A_1=A(1:k_2*k_2);
A_1=reshape(A_1,k_2,k_2);
%sximatismos A_1
A_0=A((k_1-1)*k_2^2+1:(k_1)*k_2^2);
A_0=reshape(A_0,k_2,k_2);

%oloklirosi A
A=A(k_2^2+1:2*k_2^2);
A=reshape(A,k_2,k_2);
```

```

%sximatismos B
B=Q(1:k_2^2*k_1);
B=reshape(B,[],k_2);
B=B';
B=B(k_2*k_2+1:2*k_2*k_2);
B=reshape(B,k_2,k_2);
B=B';

%sximatismos C
C=Q(k_2^2*k_1+1:k_2^2*2*k_1);
C=reshape(C,[],k_2);
C=C';
C=C(1:k_2*k_2);
C=reshape(C,k_2,k_2);

%Ypologismos G
for ii=0:k_1
    G{ii+1} = zeros(k_2,k_2);
end
G{k_1}=-B/(A_1);
for i=1:k_1-1
    G{k_1-i}=-B/(A+G{k_1+1-i}*C);
end

%Ypologismos P

for ii=0:k_1
    p{ii+1} = zeros(k_2,k_2);
end

p_1=sym('p_0',[1 k_2]);
T=p_1.*(A_0+G{1}*C);
w=solve([T==0],p_1);
p{1}=subs(p_1,w);
for i=2:k_1
    p{i} = p{i-1}*G{i-1};
end

```