



ΣΤΡΑΤΙΩΤΙΚΗ ΣΧΟΛΗ ΕΥΕΛΠΙΔΩΝ  
Τμήμα Στρατιωτικών Επιστημών

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ  
ΔΙΔΡΥΜΑΤΙΚΟ ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ  
ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ  
ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΟΥ ΕΤΟΥΣ 2017-18

ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΗ  
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΗ ΕΡΕΥΝΑ & ΑΝΑΛΥΣΗ

(ΠΔ 97 /2015/ΦΕΚ 163Α'/20.08.2014)



ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ ΚΡΗΤΗΣ  
Σχολή Μηχανικών Παραγωγής & Διοίκησης

# ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

## ΣΥΣΤΗΜΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ

## ΚΑΙ

## ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΠΡΟΒΛΕΨΗ

Διατριβή που υπεβλήθη για την μερική ικανοποίηση των απαιτήσεων για την  
απόκτηση Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης

Υπό:

ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΥ ΖΩΪΔΗ

A.M.: 2016018022

ΑΠΡΙΛΙΟΣ 2019



ΖΩΪΔΗΣ ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ

ΣΥΣΤΗΜΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ ΚΑΙ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΠΡΟΒΛΕΨΗ

Η Μεταπτυχιακή Διτριβή του Ζωΐδη Κωνσταντίνου εγκρίνεται:

**ΤΡΙΜΕΛΗΣ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΗ ΕΠΙΤΡΟΠΗ**

Καθηγητής Λάρας Νικόλαος (Επιβλέπων)



Καθηγητής Κονικόγλου Βασίλειος



Επίκουρος Καθηγητής Τριανταφύλλου Δημήτριος



ΣΤΡΑΤΙΩΤΙΚΗ ΣΧΟΛΗ ΕΥΕΛΠΙΔΩΝ - ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ ΚΡΗΤΗΣ  
2019

iii



ΣΕΛΙΔΑ ΣΚΟΠΙΜΑ ΚΕΝΗ

© Copyright υπό Ζωΐδη Κωνσταντίνου

Έτος 2018

ΣΕΛΙΔΑ ΣΚΟΠΙΜΑ ΚΕΝΗ

## ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

ΠΕΡΙΛΗΨΗ.....	1
ΕΙΣΑΓΩΓΗ.....	3
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1	
§1. Προβλεπτική Συλλογιστική.....	6
§1.1 Πρόβλεψη έναντι Πρόγνωσης.....	6
§1.1.1 Μοντέλα/Μέθοδοι Πρόβλεψης.....	7
§1.2.1 Μοντέλα/Μέθοδοι Πρόγνωσης.....	8
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2	
§2. Αρχές και Μεθοδολογία των Ποιοτικών Συστημικών Αναλύσεων.....	11
§2.1 Σχεδιάζοντας τη μεθοδολογική πρόταση μιας ποιοτικής συστημικής ανάλυσης.....	11
§2.2 Η Λακατοσιανή (Lakatosian) δομή των περιεχομένων της συστημικής ανάλυσης.....	14
§2.1.1 Οι τρεις θεμελιώδεις αξιωματικές υποθέσεις που πληροί ο σκληρός πυρήνας ενός συστημικού ερευνητικού προγράμματος..	14
§2.1.2 Οι βοηθητικές υποθέσεις της προστατευτικής ζώνης ενός συστημικού ερευνητικού προγράμματος.....	15
§2.1.3 Σχετικά με το ζήτημα των θετικών ευρετικών του συστημικού ερευνητικού προγράμματος.....	16
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3	
§3. Σταθμισμένοι Συστημικοί Δείκτες και Συστημικές Μετρήσεις.....	19
§3.1 Ο χώρος των σταθμισμένων συστημικών δεικτών υπεράνω ενός συστήματος.....	23
§3.2 Συνάφεια μεταξύ συστημάτων.....	24

§3.3 Το νηματικό γινόμενο δύο χώρων σταθμισμένων συστημικών δεικτών.....	26
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4	
§4. Γεωμετρική Προσέγγιση.....	27
§4.1 Καθολικότητες σταθμισμένων συστημικών δεικτών.....	27
§4.1.1 Λείες παραμετριοποιημένες επιφάνειες σταθμισμένων συστημικών δεικτών .....	28
§4.1.2 Ασυνεχείς καθολικότητες των σταθμισμένων συστημικών δεικτών .....	31
§4.2 Συστημικές Μετρήσεις .....	32
§4.2.1 Αποκλίσεις συστημικών μετρήσεων .....	32
§4.2.2 Λείες παραμετριοποιημένες επιφάνειες συστημικών μετρήσεων.....	36
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5	
§5. Απόσταση μεταξύ καθολικοτήτων των σταθμισμένων συστημικών δεικτών και μιας παραμετριοποιημένης επιφάνειας που διέρχεται από τα σημεία μιας συστημικής μέτρησης .....	39
§5.1 Η μέθοδος προσέγγισης με γραμμικές splines .....	47
§5.2 Η μέθοδος παρεμβολής Lagrange.....	52
§5.3 Η μέθοδος προσέγγισης ελαχίστων τετραγώνων.....	58
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6	
§6. Αριθμητική επίλυση συστημάτων ανισώσεων .....	65
§6.1 Μεθευρετικοί Αλγόριθμοι .....	66
§6.2 Συνδυαστική Καθολική Περιορισμένη αναζήτηση (Tabu Search) και τοπική αναζήτηση (Local Search).....	67
§6.2.1 Κατευθυνόμενη Περιορισμένη Αναζήτηση (Directed Tabu Search ή DTS).....	68
§6.2.2 Μέθοδος τοπικής αναζήτησης Hooke-Jeeves.....	69



§6.2.3 Αλγόριθμος Μη Μονότονης Μείωσης της Αντικειμενικής Συνάρτησης.....	70
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7	
§7. Αριθμητικά αποτελέσματα.....	72
§7.1 Αριθμητικά Παραδείγματα.....	72
§7.1.1 Εφαρμογή της μεθόδου παρεμβολής Lagrange.....	73
§7.1.2 Εφαρμογή μεθόδου Lagrange σε Σημεία Chebyshev.....	79
§7.1.3 Εφαρμογή μεθόδου Ελαχίστων τετραγώνων.....	80
§7.1.4 Εφαρμογή μεθόδου προσέγγισης με γραμμικές Splines ....	81
§7.1.5 Εφαρμογή μεθόδου σε γνωστή συνάρτηση .....	82
§7.2 Συγκρίσεις μεταξύ των αλγορίθμων.....	84
ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ.....	85
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ.....	87



# ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η παρούσα εργασία προέρχεται από προς δημοσίευση εργασία του επιβλέποντα Καθηγητή Νικολάου Ιω. Δάρα σε συνέχεια της ανάπτυξης και μελέτης μαθηματικών μοντέλων με αντικείμενο την πρόβλεψη **γεωπολιτικών** γεγονότων μέσα σε γεωπολιτικά σύμπλοκα.

Ο στόχος της εργασίας είναι να καταγραφεί μια γενική μέθοδος πρόβλεψης των διαστημάτων εμφάνισης ιδιόμορφων συστημικών γεγονότων κατά τη διάρκεια μιας χρονικής περιόδου. Για να πραγματοποιηθεί αυτό, θεωρούμε τους σταθμισμένους συστημικούς δείκτες και τις συστημικές μετρήσεις τους σε ένα σταθερό πεδίο ορισμού στον χώρο και τον χρόνο. Το μέγεθος της (Ευκλείδειας ή μη) απόστασης ανάμεσα στην επιφάνεια των σταθμισμένων συστημικών δεικτών και μιας παραμετρικής επιφάνειας η οποία παρεμβάλλεται ή βρίσκεται πολύ κοντά στις συστημικές μετρήσεις και σε προκαθορισμένα μελλοντικά σημεία χωρίς απόκλιση, μπορεί να θεωρηθεί ένα μέτρο για την εκτίμηση της εμφάνισης ιδιόμορφων συστημικών γεγονότων στο πεδίο ορισμού που θεωρήθηκε, έτσι ώστε ανάλογα με τα προεπιλεγμένα σημεία, να διαθέτουμε ένα γενικό αλγοριθμικό πλαίσιο που θα προβλέπει τα χρονικά διαστήματα στα οποία αναμένουμε την εμφάνιση ιδιόμορφων συστημικών γεγονότων.

## ABSTRACT

This Thesis comes from a manuscript of the supervisor Professor Nicholas J. Daras, following prior work on the development and study of mathematical models for the prediction of geopolitical events within geopolitical complexes.

The aim of this Thesis is to document a general method to predict the intervals of appearance of peculiar systemic incidents during a given time period. To do so, we consider weighted systemic indices and their systemic measurements over a fixed

under consideration domain in the space time. The magnitude of the (Euclidean or not) distance between the surface of weighted systemic indices and a parameterized surface which interpolates or passes very close to systemic measurements and preselected future points without deviation can be considered as a measure for assessing the occurrence of peculiar systemic incidents over the domain under consideration, so depending on these preselected points, we provide a general algorithmic framework predicting time intervals into which is expected appearance of peculiar systemic incidents.

# Εισαγωγή

Σε πολλές επιστημονικές μελέτες, η ποσοτικοποίηση υποθέσεων, δεδομένων και μεταβλητών μπορεί να συμβάλλει τόσο στην ακριβή περιγραφή όσο και στην πρόβλεψη φαινομένων μέσω κατάλληλων μαθηματικών μοντέλων ([1, 2, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 14, 15]).

Η παρούσα διατριβή έχει στηριχθεί ευθέως στην υπό ετοιμασία εργασία [7] η οποία παρουσιάζει μία γενίκευση μαθηματικών μοντέλων της γεω-συστημικής θεωρίας που αναπτύχθηκε με αντικείμενο την πρόβλεψη **γεωπολιτικών** γεγονότων μέσα σε ένα γεωπολιτικό σύμπλοκο ([9]). Στην εν λόγω θεωρία, εισήχθησαν και εξετάστηκαν οι σταθμισμένοι γεωπολιτικοί δείκτες με τις μετρήσεις τους. Σταθμισμένος γεωπολιτικός δείκτης είναι μια σταθερή τιμή κανονικότητας ενός γεωπολιτικού χαρακτηριστικού και γεωπολιτική μέτρηση είναι η πραγματική τιμή του χαρακτηριστικού. Όταν οι σταθμισμένοι γεωπολιτικοί δείκτες, καθώς και οι σχετικές γεωπολιτικές μετρήσεις, παίρνουν τιμές σε διαφορετικούς χρόνους και σε διαφορετικά γεωγραφικά σημεία, τότε σχηματίζουν δύο ομάδες δεδομένων μέσα στον 4-διάστατο Ευκλείδειο χώρο που διαμορφώνεται από τις τρεις διαστάσεις του χώρου και την μια του χρόνου. Η απόσταση μεταξύ αυτών των συνόλων μπορεί να θεωρηθεί ως ένα μέτρο για την εκτίμηση του γεγονότος ή όχι ενός γεωπολιτικού συμβάντος. Αξιοποιώντας τις βασικές προδιαγραφές του μέτρου αυτού, παρουσιάστηκαν τα γενικά πλαίσια εργασίας δύο αλγορίθμων οι οποίοι προσδιορίζουν **χρονικές στιγμές** και **γεωγραφικά σημεία** στα οποία αναμένεται η εμφάνιση ιδιαίτερων γεωπολιτικών συμβάντων. Τέτοια συμβάντα θα μπορούσαν να είναι μια σύρραξη ή ένας πόλεμος.

Προς αυτή την κατεύθυνση, ο βασικός στόχος της διατριβής είναι να καταγράψει μια γενική **αιτιοκρατική μέθοδο** πρόβλεψης **ολόκληρων χρονικών διαστημάτων** εμφάνισης **ιδιαίτερων συστημικών συμβάντων** κατά τη διάρκεια μιας μελλοντικής χρονικής περιόδου γενικά για ένα σύστημα  $S$ . Ιδιαίτερο συστημικό συμβάν στη μελέτη ενός οχήματος θα μπορούσε να θεωρηθεί η βλάβη σε κάποια από τις λειτουργίες του. Για να πραγματοποιηθεί η πρόβλεψη, εισάγουμε και θεωρούμε τους σταθμισμένους συστημικούς δείκτες και τις συστημικές μετρήσεις τους σε ένα σταθερό πεδίο ορισμού στον χώρο και τον χρόνο. Σταθμισμένος συστημικός δείκτης είναι μια σταθερή τιμή κανονικότητας ενός συστημικού χαρακτηριστικού και συστημική μέτρηση είναι η πραγματική τιμή του χαρακτηριστικού αυτού για το σύστημα  $S$ . Η απόσταση ανάμεσα στην επιφάνεια των σταθμισμένων συστημικών δεικτών και μιας παραμετροποιημένης επιφάνειας η οποία παρεμβάλλεται ή βρίσκεται πολύ κοντά στις συστημικές μετρήσεις και σε προκαθορισμένα

μελλοντικά σημεία χωρίς απόκλιση, μπορεί να θεωρηθεί ένα μέτρο για την εκτίμηση της εμφάνισης ιδιόμορφων συστημικών γεγονότων στο πεδίο ορισμού που θεωρήθηκε, έτσι ώστε ανάλογα με τα προεπιλεγμένα σημεία, να διαθέτουμε ένα γενικό αλγοριθμικό πλαίσιο που θα προβλέπει τα χρονικά διαστήματα στα οποία αναμένουμε την εμφάνιση ιδιόμορφων συστημικών γεγονότων.

Δύο βασικά και εύλογα ζητήματα εγείρονται άμεσα και μπορούν να αποτελέσουν κεντρικά θέματα προς συζήτηση.

Το πρώτο αφορά στην υποκειμενικότητα των συστημικών επιλογών και προτεραιοτήτων, δεδομένου ότι είναι πολύ αμφιλεγόμενο το κατά πόσο ένα σύνολο από σταθμισμένους συστημικούς δείκτες μπορεί να θεωρηθεί επαρκώς εξαντλητικό ώστε να εγγυάται την απόλυτη αξιοπιστία της αντίστοιχης πρόβλεψης. Εδώ, προς απλοποίηση της μοντελοποίησης, θα θεωρούμε ανελλιπώς ότι *υπάρχει πλήρης αντικειμενικότητα σε όλες τις συστημικές επιλογές και προτεραιότητες*, υπό την έννοια ότι όλοι οι συστημικοί αναλυτές έχουν συμφωνήσει για την τελική επιλογή όλων των σταθμισμένων συστημικών δεικτών.

Το δεύτερο ζήτημα αφορά στην αξιοπιστία των συστημικών μετρήσεων και το κατά πόσο αυτή επηρεάζει την εγκυρότητα της πρόβλεψης. Ομοίως, για λόγους απλοποίησης, θα θεωρούμε ανελλιπώς ότι *όλες οι συστημικές μετρήσεις γίνονται με επαρκή αξιοπιστία σε βαθμό που να αποκλείεται οποιαδήποτε ασυμφωνία στις εκτιμήσεις των προβλέψεων*.

Η διατριβή είναι δομημένη ως εξής. Στο Κεφάλαιο 1 θα δοθεί, για λόγους πληρότητας, μια σύντομη επισκόπηση των βασικών μεθόδων και τάσεων της προβλεπτικής συλλογιστικής ([1]). Στη συνέχεια, το Κεφάλαιο 2 θα εισαγάγει βασικές αρχές και μεθοδολογία για μια ποιοτική συστημική ανάλυση. Σε συνάφεια με τα παραπάνω, το Κεφάλαιο 3 θα παράσχει βασικούς συστημικούς ορισμούς, όπως του σταθμισμένου συστημικού δείκτη και της συστημικής μέτρησης. Ακολουθώντας, στο ίδιο κεφάλαιο θα επισημανθεί η αλγεβρική προσέγγιση που δίνει την δυνατότητα εισαγωγής νέων εννοιών, όπως η έννοια της συστημικής ίνας σε ένα σημείο του χώρου και του χρόνου και την έννοια της συστημικής συνάφειας μεταξύ δυο συστημάτων. Έπειτα, στο Κεφάλαιο 4, θα ασχοληθούμε με τις γεωμετρικές διατυπώσεις που επιτρέπουν να εξετάσουμε την δομή των καθολικοτήτων (universalities) των σταθμισμένων συστημικών δεικτών, δηλαδή των παραμετροποιημένων επιφανειών που περνούν μόνο από περιοχές χαμηλού ρίσκου συστημικών δεικτών, δηλαδή περιοχές κοντά στην κανονικότητα, σε μια δοθείσα περιοχή στον χώρο και τον χρόνο. Επιπλέον, στο ίδιο κεφάλαιο θα περιγράψουν οι συστημικές μετρήσεις που λαμβάνονται σε διακριτές χρονικές στιγμές και σημεία του χώρου και θα εξετασθούν οι αποκλίσεις που μπορεί να έχει μια τέτοια συστημική μέτρηση από μια δοθείσα καθολικότητα σταθμισμένων συστημικών

δεικτών. Με βάση αυτό το υπόβαθρο, το Κεφάλαιο 5 θα θεωρήσει τις (Ευκλείδειες ή μη) αποστάσεις μεταξύ μιας δοθείσας καθολικότητας σταθμισμένων συστημικών δεικτών και μιας παραμετροποιημένης επιφάνειας η οποία παρεμβάλλεται ή διέρχεται πολύ κοντά στα σημεία της μέτρησης καθώς και σε μερικά μελλοντικά σημεία ισορροπίας. Τα τελευταία αυτά σημεία είναι σημεία που έχουν ληφθεί σε προκαθορισμένες μελλοντικές χρονικές στιγμές τις οποίες επιλέγουν αυθαίρετα οι συστημικοί αναλυτές υπό την προϋπόθεση ότι σε αυτές τις μελλοντικές χρονικές στιγμές δεν θα υπάρξει απόκλιση από τη δοθείσα καθολικότητα σταθμισμένων συστημικών δεικτών. Θα λέμε ότι, στα σημεία αυτά το σύστημα είναι σε ισορροπία, ενώ τα σημεία αυτά θα λέγονται σημεία ισορροπίας. Η προσέγγιση αυτή επιτρέπει την (αιτιοκρατική) πρόβλεψη χρονικών στιγμών και σημείων θέσης στα οποία αναμένονται να συμβούν ιδιαίτερα συστημικά συμβάντα. Πράγματι, αν σε κάποιο σημείο του χώρου και του χρόνου, η απόσταση μεταξύ των δυο επιφανειών ξεπερνάει μια δεδομένη κρίσιμη τιμή, τότε αυτό σημαίνει ότι στο εν λόγω χωροχρονικό σημείο προβλέπεται να συμβούν ιδιαίτερα συστημικά συμβάντα. Η πρόβλεψη αυτή μπορεί να περιγραφεί σε 2 (δύο) περιπτώσεις: στην περίπτωση όπου η τοποθεσία παραμένει σταθερή και στην περίπτωση όπου οι μετρήσεις γίνονται σε διακριτούς χρόνους και (γενικά) σε διαφορετικά σημεία θέσης. Ωστόσο, όπως ήδη αναφέρθηκε, στην παρούσα διατριβή, θα περιοριστούμε στο να θεωρήσουμε μόνο την περίπτωση κατά την οποία οι μετρήσεις γίνονται σε διακριτά σημεία του χρόνου και σε σταθερή τοποθεσία. Για αυτό το σκοπό, δεδομένων των προκαθορισμένων μελλοντικών σημείων ισορροπίας, το ίδιο κεφάλαιο θα παράσχει ένα γενικό αλγοριθμικό πλαίσιο για τον προσδιορισμό χρονικών διαστημάτων στα οποία προβλέπεται ότι θα συμβούν ιδιόμορφα συστημικά γεγονότα. Στο ίδιο κεφάλαιο, θα αξιοποιήσουμε αυτό το γενικό πλαίσιο, μέσω τεσσάρων εναλλακτικών και ανεξάρτητων μεταξύ τους μεθοδολογικών κατευθύνσεων, χρησιμοποιώντας τεχνικές παρεμβολής, τεχνικές εύκαμπτων συναρτήσεων (splines), καθώς και τεχνικές προσέγγισης μέσω της μεθόδου ελαχίστων τετραγώνων. Το Κεφάλαιο 6 παρέχει ένα αλγοριθμικό πλαίσιο αριθμητικής επίλυσης συστημάτων ανισώσεων μέσω Μεθευρετικών Αλγορίθμων. Η διατριβή θα ολοκληρωθεί με την εξέταση και μελέτη ενδεικτικών αριθμητικών παραδειγμάτων προσδιορισμού τέτοιων χρονικών διαστημάτων.

# Κεφάλαιο I

## Προβλεπτική Συλλογιστική

Μια επιστημονική μεθοδολογία η οποία απασχόλησε για αιώνες τους ανθρώπους είναι η **προβλεπτική συλλογιστική** ή απλά **προβλεπτική** ([16]). Αυτή αναφέρεται και αποσκοπεί στην εκ των προτέρων απόκτηση του αποτελέσματος είτε της εξέλιξης μίας ή περισσότερων διαδικασιών με γνώμονα τις προβλέψεις και τις καταλήξεις που την ή τις απαρτίζουν. Άλλοι δόκιμοι όροι που θα μπορούσαν να χρησιμοποιηθούν προκειμένου να αποδώσουν την έννοια της προβλεπτικής είναι **συλλογιστική διορατικότητα** ή, εναλλακτικά, **διορατικός λογισμός**.

Τα δύο είδη στα οποία διακρίνεται η προβλεπτική συλλογιστική είναι η **πρόβλεψη** και η **πρόγνωση**.

### I.1. Πρόβλεψη έναντι Πρόγνωσης

Η **πρόβλεψη** (prediction) είναι κάθε **συλλογιστική τεχνική διαδικασία** η οποία καταλήγει σε μία δήλωση σχετικά με τη μελλοντική έκβαση ενός αβέβαιου φαινομένου, με χρήση μεθόδου η οποία συχνά, αλλά όχι πάντα, βασίζεται στην εμπειρία ή τη γνώση. Αυτή η πρόβλεψη πραγματοποιείται μέσω χρησιμοποίησης στατιστικών στοιχείων από την ούτως καλούμενη **προβλεπτική μοντελοποίηση**, η οποία μπορεί να εφαρμοστεί σε οποιοδήποτε τύπο αγνώστου συμβάντος, ανεξάρτητα το πότε αυτό συνέβη με στόχο την απόκτηση δεδομένων που αφορούν μια μελλοντική κατάσταση. Ειδική περίπτωση αποτελεί η **πρόγνωση** (forecasting) η οποία συνιστά μια τεχνική διαδικασία πρόβλεψης του μέλλοντος βάσει προηγούμενων και τωρινών δεδομένων, και πιο συχνά **από την ανάλυση των τάσεων**. Η **πρόβλεψη** που αναφέρθηκε είναι παρόμοιος όρος με τη πρόγνωση, αλλά πιο γενικός([16]).

Αμφότερες οι έννοιες αναφέρονται κυρίως σε επίσημες στατιστικές μεθόδους οι οποίες χρησιμοποιούν **χρονολογικές σειρές, διασταυρούμενα ή διαχρονικά δεδομένα** ή εναλλακτικά σε λιγότερο επίσημες κρίσιμες μεθόδους. Η χρήση τους διαφέρει κυρίως στις εφαρμογές: για παράδειγμα, στην υδρολογία, ο όρος «**πρόγνωση**» προορίζεται για εκτιμήσεις αξιών σε συγκεκριμένους μελλοντικούς χρόνους, ενώ ο όρος «**πρόβλεψη**» χρησιμοποιείται για γενικότερες εκτιμήσεις, όπως ο αριθμός των πλημμυρών που θα συμβούν κατά τη διάρκεια μεγάλου χρονικού διαστήματος.



### Ι.1.1. Μοντέλα / Μέθοδοι Πρόβλεψης

Η **προβλεπτική μοντελοποίηση** είναι η διαδικασία καταγραφής και περιγραφής δεδομένων μέσω της χρησιμοποίησης στατιστικών στοιχείων για την πρόβλεψη αποτελεσμάτων. Χρησιμοποιείται κυρίως για την πρόβλεψη του μέλλοντος, ωστόσο μπορεί να χρησιμοποιηθεί και για προσδιορισμό είτε περιγραφή στοιχείων και καταστάσεων που αναφέρονται σε παρελθόντα γεγονότα, κυρίως ως προς το χρόνο πραγματοποίησής τους.

Τα *μοντέλα προβλεπτικής προτυποποίησης* ή *μοντέλα πρόβλεψης* διακρίνονται στα εξής τρία είδη ([16]):

- 1) **Παραμετρικά μοντέλα** (ή παραμετρικές μέθοδοι) στα οποία γίνονται συγκεκριμένες παραδοχές αναφορικά με πληθυσμιακές παραμέτρους που χαρακτηρίζουν υποκείμενες κατανομές,
- 2) **Μη παραμετρικά μοντέλα** (ή μη παραμετρικές μέθοδοι) στα οποία γίνονται λιγότερες παραδοχές από τα αντίστοιχα της πρώτης κατηγορίας και
- 3) **Ημί-παραμετρικά μοντέλα** (ή ημί-παραμετρικές μέθοδοι) τα οποία περιλαμβάνουν χαρακτηριστικά και των δύο κατηγοριών.

Ειδικότερα, τα πλέον γνωστά *μοντέλα πρόβλεψης* είναι τα ακόλουθα([16, 34, 35, 36]):

- 1) το ομαδικό μοντέλο της επεξεργασίας δεδομένων,
- 2) το απλοϊκό μοντέλο Bayes (Naïve Bayes model),
- 3) ο αλγόριθμος της  $k$  –πλησιέστερης γειτονιάς,
- 4) το μοντέλο της πλειοψηφικής κατηγοριοποίησης,
- 5) οι μηχανές των διανυσμάτων υποστήριξης,
- 6) το μοντέλο των τυχαίων δασών,
- 7) το μοντέλο των ενισχυμένων δέντρων,
- 8) το μοντέλο των δέντρων ταξινόμησης και παλινδρόμησης,
- 9) το μοντέλο των νευρωνικών δικτύων,
- 10) το μοντέλο των πολυμεταβλητών splines προσαρμοστικής παλινδρόμησης (Multivariate Adaptive Regression Splines),
- 11) το μοντέλο των εναλλασσόμενων υπό όρους προσδοκιών (Alternating Conditional Expectations) των Breiman και Friedman ([3]) και η μέθοδος προσθετικότητας και σταθεροποίησης της διακύμανσης (Additivity and Variance Stabilization) του Tibshirani ([26]),

- 12) το μοντέλο των ελαχίστων τετραγώνων,
- 13) το μοντέλο των γενικευμένων γραμμικών μοντέλων,
- 14) η μέθοδος της λογιστικής παλινδρόμησης,
- 15) το μοντέλο των γενικευμένων προσθετικών μοντέλων,
- 16) το μοντέλο της ισχυρής παλινδρόμησης και
- 17) το μοντέλο της ημι-παραμετρικής παλινδρόμησης.

Όσον αφορά στις **μεθόδους πρόβλεψης**, αυτές συνιστούν σύνολα τεχνικών που χρησιμοποιούνται για την πρόβλεψη του μέλλοντος στα παραπάνω μοντέλα. Τα κυριότερα είδη τέτοιων μεθόδων διακρίνονται σε: *μεθόδους διεύρυνσης τεχνολογικών προοπτικών* (για τον προσδιορισμό των πιο πιθανών τεχνολογικών εξελίξεων στο μεσοπρόθεσμο μέλλον), *μεθόδους σάρωσης* (για την ανίχνευση κρυφών ενδείξεων που αφορούν στο μέλλον των διαθέσιμων πηγών πληροφοριών), *μεθόδους παρέκτασης* (για εκ των προτέρων εντοπισμό και ανάλυση των τάσεων, βάσει ιστορικών δεδομένων και παρατηρήσεων), *μεθόδους σεναρίων* (για την ιεραρχική διάταξη των αντιλήψεων ενός ατόμου περί των εναλλακτικών μελλοντικών περιβαλλόντων στα οποία θα μπορούσαν να διαδραματίσουν σημαίνοντα ρόλο οι σημερινές αποφάσεις) και *μεθόδους έρευνας Delphi* (για συνεργατικές κρίσεις επί των γεγονότων και των εξ αυτών απορρευουσών τάσεων του εκάστοτε προβλήματος).

### I.1.ii. Μοντέλα / Μέθοδοι Πρόγνωσης

Η πρόγνωση είναι η βασική λειτουργία για την πρόβλεψη του μέλλοντος με βάση τη χρήση δεδομένων-παρατηρήσεων που διαθέτουμε, επηρεάζοντας τις αποφάσεις που λαμβάνουμε σε μια δεδομένη χρονική στιγμή. Κάθε πρόγνωση οδηγεί σε κάτι παραπάνω από ένα μόνο αριθμό, καθώς περιλαμβάνει μια μέση τιμή και τυπική απόκλιση, ως επίσης και ένα εύρος ακρίβειας([16]).

Υπάρχουν δύο κύριες κατηγορίες μεθόδων πρόγνωσης:

- A) οι **ποιοτικές μέθοδοι** (υποκειμενικές που λειτουργούν με βάση τη **γνώμη** και την **κρίση** των εμπλεκόμενων στο φαινόμενο και των εμπειρογνομόνων) και
- B) οι **ποσοτικές μέθοδοι** (αντικειμενικές) που περιλαμβάνουν δύο κύριες μεθόδους τα *αιτιώδη (αιτιοκρατικά) μοντέλα* και τις *μεθόδους των χρονολογικών σειρών*. Ας δώσουμε μια συνοπτική περιγραφή των δύο αυτών μεθόδων.

- 1) **Αιτιώδη Μοντέλα**: Έστω  $Y$  η ποσότητα που πρέπει να προβλεφθεί και έστω  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  είναι  $n$  μεταβλητές που έχουν προβλεπτική ισχύ επί της τιμής του  $Y$ . Ένα αιτιώδες μοντέλο ορίζεται ως  $Y = f(X_1, X_2, \dots, X_n)$ . Έτσι, για παράδειγμα, σε περίπτωση που η  $f$  είναι η γραμμική συνάρτηση, η πρόβλεψη παίρνει τη μορφή  $Y = a_0 + a_1X_1 + \dots + a_nX_n$ , με  $a_0, a_1, \dots, a_n$  σταθερούς πραγματικούς συντελεστές.
- 2) **Μέθοδοι Χρονολογικών Σειρών**: Η μέθοδος αφορά στη συλλογή και αξιοποίηση προηγούμενων τιμών της υπό πρόγνωση μεταβλητής. Η γενική διάρθρωση της μεθόδου έχει ως εξής.

- 1) Έστω  $D_1, D_2, \dots, D_n, \dots$  οι τιμές μιας αριθμητικής σειράς από τις οποίες που γνωρίζουμε μόνο τις τιμές  $D_t, D_{t-1}, \dots, D_1$ . Ας υποθέσουμε ότι κατά τη χρονική στιγμή (ή γενικότερα, κατά τη χρονική περίοδο)  $t$  ζητείται να γίνει μία μελλοντική πρόγνωση.
- 2) Ορίζουμε ως  $F_{t,t+\tau}$  ( $\tau = 1, 2, \dots$ ) την πρόγνωση που γίνεται τη χρονική στιγμή  $t$  για την τιμή κατά τη χρονική στιγμή  $t + \tau$ . Τότε,  $F_{t-1,t}$  είναι η πρόγνωση που γίνεται τη χρονική στιγμή  $t - 1$  για την τιμή κατά τη χρονική στιγμή  $t$ . Χάριν απλοποίησης των συμβολισμών, μπορούμε να γράφουμε  $F_t = F_{t-1,t}$ .
- 3) Επίσης, ορίζουμε ως  $e_t$  το σφάλμα πρόγνωσης της χρονικής στιγμής  $t$ , όπου είναι η διαφορά της τιμής της ζήτησης που έχουμε προβλέψει και της αντίστοιχης πραγματικής, δηλαδή  $e_t = F_{t-1,t} - D_t$  με  $\tau = 1, 2, \dots$
- 4) Ορίζουμε τα μεγέθη:  $MAD = (1/n) \sum |e_i|$  που είναι ο μέσος όρος των απόλυτων αποκλίσεων ή σφαλμάτων και  $MSE = (1/n) \sum e_i^2$  που είναι το μέσο τετραγωνικό σφάλμα. (Πράγματι, αποδεικνύεται ότι, όταν  $n \rightarrow \infty$  και τα σφάλματα έχουν κανονική κατανομή με μέση τιμή 0, τότε έχουμε  $MSE^{0.5} = 1.25 MAD = \sigma_{error}$ . Μπορούμε να δημιουργήσουμε ένα "Χάρτη Ελέγχου" για την παρακολούθηση σφαλμάτων ώστε να μπορούμε να μελετούμε την απόκλιση του εκάστοτε μοντέλου μας από την πρόβλεψη. Προς τούτο, συνήθως, τα όρια "ελέγχου" για την αποδοχή της απόκλισης ρυθμίζονται σε  $\pm 3 (\sigma_{error})$  ή  $\pm 3.75(MAD)$ .

Μια ιδιαίτερη, αλλά συνηθισμένη και ενδεικτική περίπτωση είναι μία **στάσιμη χρονολογική σειρά** που ικανοποιεί τη σχέση

$$D_t = \mu + \varepsilon_t,$$

όπου  $\mu$  είναι μια σταθερή και  $\varepsilon_t$  μια τυχαία μεταβλητή με μέσο 0 και διασπορά  $\sigma^2$ . Μια στάσιμη χρονολογική σειρά υποδηλώνει την παρουσία σταθερών διαδικασιών χωρίς κλίσεις που είναι εύκολα παρατηρούμενες κλίσεις.

Για την πρόγνωση στάσιμων χρονολογικών σειρών ενδείκνυνται οι ακόλουθες 6 (έξι) τεχνικές:

α) η τεχνική του κινητού μέσου όρου, η οποία σχηματίζεται από τον αριθμητικό μέσο όρο των  $n$  πιο πρόσφατων παρατηρήσεων  $F_t = \frac{1}{n}(D_{t-1} + D_{t-2} + \dots + D_{t-n})$

β) η τεχνική του σταθμισμένου κινητού μέσου όρου, η οποία βασίζεται σε παρελθοντικά δεδομένα και επιδιώκει να αποδώσει σταθμισμένα βάρη σε ορισμένα δεδομένα υπεράνω άλλων δεδομένων,

γ) η τεχνική της εκθετικής εξομάλυνσης, η οποία αποτελεί έναν τύπο της τεχνικής του σταθμισμένου κινητού μέσου όρου στην οποία προσδίδονται αποκλιμακούμενα σταθμισμένα βάρη σε προηγούμενα δεδομένα, εκφράζοντας τη νέα πρόγνωση σύμφωνα με τα εξής μοντέλα:

i. Νέα Πρόγνωση =  $a \times$

(πιο πρόσφατη παρατήρηση) +  $(1 - a) \times$  (προηγούμενη πρόγνωση),

ή, εναλλακτικά,

ii. Νέα Πρόγνωση = προηγούμενη πρόγνωση  $- a \times$

(το σφάλμα προηγούμενης πρόγνωσης),

όπου  $0 < a < 1$  και έχει μικρή τιμή για τη σταθερότητα προβλέψεων.

δ) η τεχνική της παλινδρόμησης (regression), η οποία χρησιμοποιείται όταν υπάρχει κυρίως μία τάση-ροπή παρατηρήσεων προς μια συγκεκριμένη τιμή και που εκφράζει την πρόγνωση με την εξίσωση  $F_{t-1,t} = a + bt + \varepsilon_t$ .

ε) η τεχνική της διπλής εκθετικής εξομάλυνσης, της οποίας μέθοδος Holt είναι το πιο συνηθισμένο παράδειγμα και χρησιμοποιείται όταν υπάρχει γραμμική τάση στα δεδομένα, μέσω της χρήσης των εξισώσεων  $S_i = aD_i + (1 - a)(S_{i-1} + G_{i-1})$  και  $G_i = b(S_i + S_{i-1}) + (1 - b)G_{i-1}$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), όπου  $D_i$ : η  $i$ -οστή παρατήρηση της τιμής,  $S_i$ : η  $i$ -οστή εκτίμηση της παρακέντησης,  $G_i$ : η  $i$ -οστή εκτίμηση της κλίσης και  $F_{t,t+\tau} = S_t + \tau * G_t$  είναι η πρόγνωση σε χρόνο  $\tau$  στο μέλλον.

στ) η τεχνική του Winter (Winter method), ή τεχνική της τριπλής εκθετικής εξομάλυνσης, η οποία χρησιμοποιεί 3 σταθερές εξομάλυνσης: μία για το σήμα, μία για την τάση και μία για εποχιακούς παράγοντες και, επί πλέον, για την πρόβλεψη του μέλλοντος εφαρμόζει την εξίσωση:

$$D_t = (\mu + Gt)c_t + e_t,$$

όπου  $\mu$ : η (ούτως λεγόμενη) παρακέντηση της τιμής για  $t = 0$ ,  $G$ : η τάση της σειράς,  $c_t$ : η εποχιακή συνιστώσα για το χρόνο ενδιαφέροντος και  $e_t$ : το σφάλμα.

## Κεφάλαιο II

# Αρχές και μεθοδολογία των ποιοτικών συστημικών αναλύσεων

### II.1. Σχεδιάζοντας την μεθοδολογική πρόταση μιας ποιοτικής συστημικής ανάλυσης

Είναι ευρέως γνωστό ότι ένα σύστημα ή σύμπλοκο  $S$  είναι ένα σύνολο από διαδραστικά ή αλληλεξαρτώμενα συστατικά μέρη που σχηματίζουν ένα πολύπλοκο σύνολο. Μια ποιοτική συστημική ανάλυση ή απλά μια συστημική ανάλυση αποτελείται από τα ακόλουθα έξι γενικά στάδια ([9, 37, 11, 12, 13]).

#### 1<sup>ο</sup>Στάδιο: Αποκρυπτογράφηση του τίτλου του θέματος

Ο τίτλος του θέματος μιας μελέτης στο πλαίσιο της συστημικής ανάλυσης θα πρέπει να ορίζει τα δεδομένα και τους στόχους του προβλήματός μας. Συγκεκριμένα ορίζει:

- 1) Τα σύνορα του συμπλέγματος που προσδιορίζουν την περιοχή που θα αναλυθεί
- 2) Τον (εσωτερικό ή εξωτερικό) χώρο του υπό μελέτη συμπλόκου ως πεδίου κατανομής και αναδιανομής της ισχύος λόγω της επίδρασης κάποιου συγκεκριμένου συστημικού παράγοντα
- 3) Ο προαναφερθείς συστημικός παράγοντας, η επίδραση του οποίου μπορεί να επηρεάσει την κατανομή της ισχύος εντός και εκτός του συμπλέγματος

#### 2<sup>ο</sup>Στάδιο: Προσδιορισμός των συνόρων των υπό μελέτη συστημάτων

Σε αυτό το στάδιο, προσδιορίζουμε τα σύνορα των συστημάτων που εντός των οποίων σκοπεύουμε να μελετήσουμε την δραστηριότητα (ή τις δραστηριότητες) του συστημικού παράγοντα που ορίστηκε στον τίτλο. Υπάρχουν τρία επίπεδα συστημάτων ορισμένα ανάλογα με την έκταση της περιοχής στην οποία αναφέρονται:

- i. Τα υποσυστήματα τα οποία είναι υποσύνολα των συστημάτων
- ii. Το σύστημα το οποίο είναι το υπό μελέτη σύμπλοκο
- iii. Τα υπερσυστήματα τα οποία περιέχουν το κυρίως υπό μελέτη σύστημα σαν υποσύνολο μαζί με άλλα συστήματα τα οποία μπορεί να μην απασχολούν την συγκεκριμένη ανάλυση.

**Παρατήρηση 2.1.** Γενικά, προκειμένου να ορίσουμε το εν λόγω σύμπλοκο σε επίπεδο συστημικής έκτασης, είναι απαραίτητο επίσης ένα συστημικό χαρακτηριστικό, τέτοιο ώστε να προσδιορίζει με την παρουσία του, τις μορφές του και το επίπεδο των επιρροών του, την έκταση των περιοχών των προαναφερθέντων συστημικών επιπέδων. Για παράδειγμα η ισχύς (αμυντική, οικονομική, πολιτική) του συστημικού παράγοντα. Χωρίς αυτό το ποιοτικό χαρακτηριστικό ο ορισμός των προαναφερθέντων συστημικών επιπέδων δεν θα ήταν μόνο αδύνατος αλλά και ανούσιος.

### **3<sup>ο</sup>Στάδιο: Ορισμός των πεδίων επιρροής ενός συστημικού παράγοντα**

Αφού έχουμε ορίσει τα τρία επίπεδα συστημάτων, θα πρέπει να ορίσουμε τα πεδία επιρροής του υπό μελέτη συστημικού παράγοντα. Με άλλα λόγια, θα πρέπει να προσδιορίσουμε ποιο συνδυασμό πεδίων ή συστημικών πυλώνων του συγκεκριμένου συστημικού παράγοντα θα ερευνήσουμε, πάντοτε στο πλαίσιο της επιλεγμένης συστημικής κλίμακας (π.χ. στο επίπεδο του συστήματος ή στο επίπεδο των υποσυστημάτων). Για να μπορέσουμε να ακολουθήσουμε μια ορθολογική σειρά στην εξέταση των επιρροών του συστημικού παράγοντα, θα πρέπει να ξεκινήσουμε την έρευνα από το επίπεδο των υπερσυστημάτων και να συνεχίσουμε με το επίπεδο του συστήματος. Μια τέτοια διαδοχική σειρά στις περισσότερες των περιπτώσεων αποδεικνύει ότι αν ολοκληρωθεί η ανάλυση των επιρροών του συστημικού παράγοντα στο επίπεδο των υποσυστημάτων, και αν τα υποσυστήματα έχουν προσδιοριστεί ορθά, τότε η αντίστοιχη ανάλυση ολόκληρου του συστήματος θα έχει επίσης ολοκληρωθεί.

### **4<sup>ο</sup>Στάδιο: Αναγνώριση της λειτουργίας ενός συστημικού παράγοντα για τους συγκεκριμένους πυλώνες επιρροής**

Σε αυτό το στάδιο θα αναγνωρίσουμε τις συστημικές τάσεις-δυναμική για κάθε καθορισμένο υποσύστημα. Αυτές οι τάσεις δύνανται να απαντήσουν στις ακόλουθες ερωτήσεις:

- Τους πυλώνες στους οποίους υπερισχύει ο υπό μελέτη συστημικός παράγοντας, και κατά συνέπεια προσδιορίζει ή μπορεί να προσδιορίσει την συμπεριφορά τους μέσα στο πλαίσιο κάθε υποσυστήματος. Αυτό το είδος αποτελέσματος ορίζεται ως θετική υπό συστημική συνιστώσα της τάσης ισχύος του συστημικού παράγοντα στο εσωτερικό του συστήματος.
- Ποιοι πυλώνες απορροφούν την επιρροή του συστημικού παράγοντα και κατά συνέπεια δεν επηρεάζεται ολόκληρη η συμπεριφορά του υποσυστήματος. Αυτό το είδος αποτελέσματος ορίζεται ως μηδενική υπό συστημική συνιστώσα της τάσης ισχύος του συστημικού παράγοντα στο εσωτερικό του συστήματος.

### **5<sup>ο</sup>Στάδιο: Σύνθεση**

Ο όρος σύνθεση αναφέρεται στη διαδικασία μέσω της οποίας μπορούμε να εντοπίσουμε την αποκαλούμενη συνισταμένη τάση ισχύος του δοθέντος συστημικού παράγοντα σε οποιαδήποτε τελική συστημική κλίμακα (π.χ. υπό συστημικό, συστημικό, υπερ συστημικό επίπεδο). Μπορούμε να ξεχωρίσουμε δύο περιπτώσεις:

- 1<sup>η</sup> περίπτωση: Αν έχουμε εντοπίσει και ορίσει τις συγκεκριμένες συνιστώσες ισχύος στο υποσυστημικό επίπεδο, και ο σκοπός μας είναι η συνιστώσα του συστήματος στο συστημικό επίπεδο, τότε το στάδιο της σύνθεσης ξεκινάει από το επίπεδο του συστήματος.
- 2<sup>η</sup> περίπτωση: Αν η εν λόγω συνιστώσα είναι στο επίπεδο των υπερ συστημάτων, τότε το στάδιο της σύνθεσης ξεκινάει μετά την κατάληξη της ανάλυσης των συνιστωσών των μεμονωμένων συστημάτων. Αυτό σημαίνει ότι η σύνθεση θα πρέπει να ξεκινήσει από το επίπεδο των υποσυστημάτων, ύστερα θα πρέπει να σχηματίσουμε την εικόνα των συνιστωσών στο επίπεδο των συστημάτων και τέλος να καταλήξουμε με την αναγνώριση της συνιστώσας στο επίπεδο των υπερσυστημάτων.

#### **6<sup>ο</sup> Στάδιο: Συμπεράσματα**

Το τελευταίο στάδιο της συστημικής ανάλυσης είναι τα συμπεράσματα. Σε αυτό το στάδιο θα πρέπει να περιγράψουμε τις συστημικές δυναμικές, στις οποίες η συνιστώσα ισχύος του υπό μελέτη συστημικού παράγοντα, υποβάλλει την συμπεριφορά του υπό εξέταση συστήματος στο πλαίσιο των υπερσυστημάτων.

Πρέπει να τονιστεί ότι: σε αυτό το στάδιο της μελέτης, όπως σε κάθε άλλο στάδιο της προαναφερθείσας συστημικής ανάλυσης δεν κάνουμε προτάσεις. Επιπλέον, σε αυτό το στάδιο:

- i. Ανακαλύπτουμε τις δομές, τις δράσεις, τις λειτουργίες, τις επιρροές, τις μορφές και τη δυναμική του συστημικού παράγοντα και τις περιγράφουμε
- ii. Περιγράφουμε πως επιδρούν στη συμπεριφορά του συστήματος.

Οι προτάσεις δεν αποτελούν μέρος της συστημικής ανάλυσης. Είναι μέρος της στρατηγικής προσέγγισης που μπορεί να εφαρμοστεί, μόνον εφόσον ζητηθεί και εκμεταλλευόμενοι τα αποτελέσματα της συστημικής ανάλυσης που προηγήθηκε.



## Παράδειγμα Συστημικής ανάλυσης [9, 37]

**Θέμα:** «Η γεωπολιτική του ισλαμιστικού Κινήματος στην Ευρύτερη Μέση Ανατολή».

### Ανάλυση του Τίτλου του Θέματος

- i. **Προσδιορισμός ορίων Γεωγραφικού Συμπλόκου:** Τα όρια του Γεωγραφικού Συμπλόκου προσδιορίζονται στον όρο «*Ευρύτερη Μέση Ανατολή*».
- ii. **Ορισμός του ακριβούς προς μελέτη Χώρου:** Ο προς μελέτη Χώρος του Συμπλόκου είναι το «*εσωτερικό*» του γεωγραφικού Συμπλόκου της Ευρύτερης Μέσης Ανατολής και φαίνεται από το «*στην*» δηλ. «*Εις την...*», «*εντός των ορίων της...*».
- iii. **Ορισμός γεωπολιτικού παράγοντος:** Ο οριζόμενος γεωπολιτικός παράγων είναι το «*ισλαμιστικό Κίνημα*».

Στο προαναφερθέν θέμα τα όρια των Συστημικών κλιμάκων ορίζονται ως εξής:

1) **Σύστημα:** Είναι το Γεωγραφικό Σύμπλοκο της Ευρύτερης Μέσης Ανατολής, όχι μόνο διότι αυτό δίδεται στον τίτλο, πράγμα που αποτελεί ήδη θεμελιώδες κριτήριο, αλλά και από το γεγονός ότι ο «*Γεωπολιτικός παράγοντας*» που είναι το «*Ισλαμιστικό κίνημα*» υπάρχει, δρα και επηρεάζει το σύνολο του γεωγραφικού χώρου του Συμπλόκου.

### 2) Υποσύστημα:

- Το «*Ισλαμιστικό κίνημα του Μαγκρέμπ*» αποτελεί ένα Υποσύστημα λόγω των ιδιοτήτων του οι οποίες ανάγονται στο πολιτισμικό, οικονομικό, πολιτικό και οργανωσιακό χαρακτήρα του Ισλάμ στη γεωγραφική αυτή περιοχή.
- Το «*Ισλαμιστικό κίνημα στην περιοχή της Μέσης Ανατολής*» για τους ίδιους λόγους
- Το «*Αφγανοπακιστανικό και Ιρανικό Ισλαμιστικό κίνημα*».

3) **Υπερσύστημα:** Ως Υπερσύστημα μπορεί να ορισθεί ο Διεθνής Daar al-Islam (Οίκος του Ισλάμ) δηλ. το Γεωγραφικό Σύμπλοκο εκείνο που εμπεριέχει τις γαίες του Ισλάμ διεθνώς οι οποίες κατοικούνται από ισλαμικούς πληθυσμούς και ο Daar al-Sulh (Οίκος της Συνύπαρξης) όπου κατοικεί ανενόχλητη η ισλαμική διασπορά (Π.χ. Ευρώπη. Η.Π.Α. Αυστραλία).

### Ορισμός πεδίων επιρροής του «γεωπολιτικού παράγοντα».

Αφού έχουμε ήδη ορίσει τις τρεις κλίμακες των Συστημάτων, θα πρέπει να προσδιορίσουμε τα υπό εξέταση **πεδία γεωπολιτικής επιρροής του «γεωπολιτικού παράγοντα»** του τίτλου.



Δηλαδή θα πρέπει να καθορίσουμε για ποιο συνδυασμό εκ των τεσσάρων πεδίων (γεωπολιτικών πυλώνων) θα εξετάσουμε τις επιρροές του «γεωπολιτικού παράγοντα» μας στο πλαίσιο πάντα της επιλεγμένης Συστημικής κλίμακας (π.χ. στο επίπεδο του «Συστήματος»).

*Γεωπολιτικοί πυλώνες είναι οι κατωτέρω:*

- a) Αμυντικός πυλώνας
- b) Οικονομικός πυλώνας
- c) Πολιτικός πυλώνας
- d) Πολιτισμικός πυλώνας και πυλώνας πληροφορίας

*Όλοι οι ανωτέρω πυλώνες εξετάζονται με όρους ισχύος, π.χ.: Οικονομικής ισχύος, πολιτικής ισχύος, κ.τ.λ.*

## II.2. Η Λακατοσιανή (Lakatosian) δομή των περιεχομένων της συστημικής ανάλυσης

Παρακάτω παρουσιάζουμε τα τέσσερα βασικά πεδία του μεθοδολογικού οικοδομήματός μας: Ο ορισμός των θεμελιωδών αξιωματικών συνθηκών (: Υποθέσεις 1-3) του σκληρού πυρήνα του συστημικού ερευνητικού προγράμματος, τον ορισμό των βοηθητικών υποθέσεων (: Υποθέσεις 4-9) (της ούτως ονομαζόμενης **προστατευτικής ζώνης**) ενός συστημικού ερευνητικού προγράμματος, το ζήτημα των θετικών ευρετικών του συστημικού ερευνητικού προγράμματος, και τις υποθέσεις των θετικών ευρετικών του συστημικού ερευνητικού προγράμματος.

### II.2.i Οι τρεις θεμελιώδεις αξιωματικές υποθέσεις που πληροί ο σκληρός πυρήνας ενός συστημικού ερευνητικού προγράμματος

Σύμφωνα με την Lakatosian μετα-θεωρητική προσέγγιση, όπως αναφέρεται από τους Colin Elman και Miriam Fendius Elman ([12]), ο σκληρός πυρήνας (: θεμελιώδεις υποθέσεις) συγκροτούν τη βασική προϋπόθεση ενός ερευνητικού προγράμματος. Ο σκληρός πυρήνας προστατεύεται από αρνητικές ευρετικές, εν συντομία, από τον κανόνα που απαγορεύει στους ερευνητές να αντιτεθούν στις θεμελιώδεις ιδέες ενός εκάστοτε ερευνητικού προγράμματος, π.χ. με τον σκληρό πυρήνα ενός προγράμματος. Οποιαδήποτε αλλαγή στο σκληρό πυρήνα θα σήμαινε την δημιουργία ενός νέου

ερευνητικού προγράμματος, αφού είναι σαφές ότι ο σκληρός πυρήνας είναι η προϋπόθεση που προσδιορίζει τον χαρακτήρα του προγράμματος. Είναι, ως εκ τούτου, προφανές, με βάση την Λακατοσιανή σκοπιά, ότι αν ο πυρήνας αλλάξει, αλλάζει επίσης και το ερευνητικό πρόγραμμα. Με βάση αυτό εισάγουμε τις ακόλουθες υποθέσεις.

**Υπόθεση 1.** Η πρώτη θεμελιώδης αξιωματική συνθήκη η οποία αποτελεί το κέντρο του σκληρού πυρήνα του συστημικού ερευνητικού προγράμματος, είναι ότι *όλα τα χαρακτηριστικά των προαναφερθέντων υποχώρων του συμπλέγματος είναι αριθμήσιμα ή μπορούν να αριθμηθούν* μέσω των αριθμήσιμων αποτελεσμάτων που παράγουν.■

Για προφανείς λόγους, και για να αποφευχθεί η σύγχυση, σε ότι ακολουθεί, θα υποθέσουμε την ιδανική κατάσταση:

**Υπόθεση 2.** *Υπάρχει πλήρης αντικειμενικότητα σε όλες τις συστημικές επιλογές και προτεραιότητες*, υπό την έννοια ότι όλοι οι συστημικοί αναλυτές που μελετούν το δοθέν σύμπλοκο, έχουν συμφωνήσει για την τελική επιλογή όλων των σταθμισμένων συστημικών δεικτών που διέπουν τη συμπεριφορά του συστήματος.■

**Υπόθεση 3.** *Η δεύτερη θεμελιώδης αξιωματική υπόθεση του σκληρού πυρήνα του συστημικού προγράμματος είναι ότι εντός του πλαισίου της εκάστοτε υπό μελέτη συστημικής περιοχής, υπάρχουν περισσότεροι από δύο συνεπείς και ομογενείς συστημικοί πόλοι* οι οποίοι είναι επίσης:

- Αυτοπροσδιοριζόμενοι, ως προς το «τι» θεωρούν «κέρδος» και «τι» θεωρούν «ζημία» για τους ίδιους, ως επίσης και σε σχέση με το περιβάλλον, και
- Ετεροπροσδιοριζόμενοι, ομοιόμορφα και όμοια προς το εκάστοτε περιβάλλον τους οι οποίοι προσδιορίζονται από φορείς που εκδηλώνονται μέσα τους και η κοινή συστημική σχέση τους αποτελεί το χαρακτηριστικό τους. ■

## II.2.ii Οι βοηθητικές υποθέσεις της προστατευτικής ζώνης ενός συστημικού ερευνητικού προγράμματος

**Υπόθεση 4.** Το μέγεθος της ισχύος αναλύεται σε θεμελιώδεις καθορισμένους συστημικούς πυλώνες επιρροής κάθε ένας από τους οποίους αναλύεται σε ένα πλήθος συστημικών δεικτών. Αυτοί οι συστημικοί δείκτες, όπως έχει ήδη αναφερθεί, είναι αριθμήσιμοι ή μπορούν να αριθμηθούν και εντοπίζονται και αριθμούνται στις εσωτερικές δομές αυτών των

*πυλώνων που απαρτίζουν τα υποσυστήματα των συμπλεγμάτων υπό συστημική ανάλυση.■*

*Υπόθεση 5. Οι συστημικοί πυλώνες απαρτίζουν τις θεμελιώδεις δομικές συνιστώσες ενός συνεχώς μεταβαλλόμενου, ασταθούς συστήματος.■*

*Υπόθεση 6. Οι συστημικοί πυλώνες εκφράζουν βουλήσεις (volitions) ή παραβάσεις καθοριστικών παραγόντων που χαρακτηρίζουν εξωτερική συμπεριφορά πυλώνων.■*

*Υπόθεση 7. Η τέταρτη βοηθητική υπόθεση (της «προστατευτικής ζώνης») ενός συστημικού ερευνητικού προγράμματος αποτελείται από τη στέρεα θεώρηση των εννοιών του “αιτίου και του αιτιατού” εντός του πρωτεύοντος, του δευτερεύοντος και του τριτεύοντος χώρου ενδιαφέροντος, καθώς επίσης και των συνδυασμών αυτών («πλήρων χώρων» και «ειδικών σύνθετων χώρων»).■*

*Υπόθεση 8. Κάθε γενικευμένο σύστημα εμφανίζει μια εντελώς αβέβαιη, ασταθής και μεταβαλλόμενη δομή.■*

*Υπόθεση 9. Η συστημική ανάλυση στοχεύει στα αποτελέσματα της πρακτικολογίας, δηλαδή και εν συντομία, στα αποτελέσματα μιας θεωρίας της πρακτικής (π.χ. στην κατασκευή ενός μοντέλου πρόβλεψης των τάσεων για την ανακατανομή ισχύος) και σε καμία περίπτωση δεν στοχεύει σε υπόδειξη κατευθύνσεων για δράση κάτω από πολωμένη οπτική, καθώς μια τέτοια υπόδειξη δεν θα μπορούσε παρά να αποτελεί μία (πιθανόν μεροληπτική) στρατηγική σύνθεση, και όχι μια συστημική ανάλυση. Αυτή η σύνθεση ισοδυναμεί με τη χρήση αποτελεσμάτων ενός μοντέλου της συστημικής ανάλυσης και έπεται του σταδίου της συστημικής ανάλυσης.■*

Πρέπει να σημειωθεί ότι η «ιστορικότητα» όλων αυτών των Υποθέσεων που χαρακτηρίζουν τη δομική υπόσταση κάθε συστημικού ερευνητικού προγράμματος επαληθεύεται από σχηματισμούς που αναπτύσσονται στο πλαίσιο κάποιου συστημικού πυλώνα επιρροής *P*. Ωστόσο, η δυνατότητα θεώρησής τους είναι δυνατή (κατά τον ίδιο τρόπο) και στους υπόλοιπους συστημικούς πυλώνες που έχουν μια «ποιοτική φύση», μέσω της έννοιας των συστημικών δεικτών.

### **II.2.iii. Το ζήτημα των θετικών ευρετικών του συστημικού ερευνητικού προγράμματος**

Δεν πρέπει να παραληφθεί ότι κάθε αντικατάσταση ενός συνόλου βοηθητικών υποθέσεων με ένα άλλο συνιστά μια **ενδοπρογραμματική αλλαγή** προβλήματος, αφού μόνο η προστατευτική ζώνη μεταβάλλεται και όχι ο σκληρός πυρήνας. Οι ενδοπρογραμματικές αλλαγές ενός προβλήματος θα πρέπει να γίνονται σε συμφωνία με τις θετικές ευρετικές του προβλήματος, οι οποίες αποδίδονται με ένα σύνολο προτάσεων και συμπερασμάτων που λειτουργούν ως κατευθύνσεις για την ανάπτυξη συγκεκριμένων θεωριών εντός του προγράμματος.

Πρέπει να δοθεί έμφαση στο ότι, ένα βασικό μέλημα σε κάθε συστημικό ερευνητικό πρόγραμμα είναι η σωστή περιγραφή των κατάλληλων προτάσεων προς τον ερευνητή που θα προσδιορίσει το περιεχόμενο της θετικής ευρετικής του εν λόγω προγράμματος. Χωρίς αυτή, είναι αδύνατο να αξιολογήσουμε τον προοδευτισμό της συστημικής ανάλυσης σύμφωνα με το απαραίτητο “νέο εμπειρικό περιεχόμενο” που αναμένεται στο αναλυτικό (χωρικό) μοντέλο μας.

Δοθεισών των απαραίτητων διευκρινήσεων που αφορούν τις υποθέσεις της θετικής ευρετικής του συστημικού ερευνητικού προγράμματος, ορίζουμε, για λόγους πληρότητας, τα ακόλουθα:

- 1) Η μεθοδολογία κάθε θεωρητικής προσέγγισης θα πρέπει να παραμένει σταθερή τουλάχιστον μέχρις ότου προκύψει ένας δυνητικός εντοπισμός συνεχούς εκφυλισμού.
- 2) Η προϋπόθεση της προβλεπτικής ικανότητας και η επέκταση της εμπειρικής βάσης της θεωρητικής προσέγγισης πρέπει να διατηρούνται.
- 3) Τα εμπειρικά γεγονότα θα πρέπει να απαρτίζουν την τελική μέτρηση για την αξιολόγηση ανταγωνιστικών θεωρητικών προσεγγίσεων του ίδιου συνόλου (ερευνητικού προγράμματος).
- 4) Τα γεγονότα που έχουν χρησιμοποιηθεί για την εξέταση μιας θεωρητικής προσέγγισης δεν θα πρέπει να είναι τα μοναδικά που έχουν χρησιμοποιηθεί για την πιστοποίηση της προσέγγισης αυτής αλλά, με την πάροδο του χρόνου της έρευνας, η εξέταση της θεωρητικής προσέγγισης θα πρέπει να ανατροφοδοτείται με επί πλέον γεγονότα τα οποία θα πρέπει να παράγονται από την επέκταση της εμπειρικής βάσης της δοθείσας προσέγγισης.

## Κεφάλαιο III

# Σταθμισμένοι συστημικοί δείκτες και συστημικές μετρήσεις

Έστω  $S$  ένα δοθέν σύστημα του οποίου θέλουμε να προβλέψουμε την συμπεριφορά. Για τον σκοπό αυτόν αποδεχόμαστε ότι το σύστημα αναγνωρίζεται από τα δικά του συστημικά χαρακτηριστικά τα οποία μπορούμε να γνωρίζουμε πλήρως ένα προς ένα. Χωρίς βλάβη γενικότητας, θεωρούμε ότι κάθε συστημικό χαρακτηριστικό εξαρτάται από τον χρόνο και την θέση. Για την ποσοτικοποίηση του συστήματος  $S$  δίνουμε τον ακόλουθο ορισμό.

Υποθέτουμε ότι για οποιοδήποτε συστημικό χαρακτηριστικό  $j$  ( $j = 1, 2, \dots, l+1$ ) και σε οποιοδήποτε χρόνο  $t \in \mathbb{R}$  και τοποθεσία  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  στο  $S$ , θεωρούνται ως δεδομένα τα ακόλουθα:

1. Το **διάστημα κανονικότητας**  $[\tilde{\beta}_S^{(j)}, \beta_S^{(j)}] \subset \mathbb{R}$
2. Το **υποσταθμισμένο διάστημα επισφάλειας** (sub-weighted precarity interval)  $[\tilde{c}_S^{(j)}, \tilde{\beta}_S^{(j)}] \subset \mathbb{R}$  και το **υπερσταθμισμένο διάστημα επισφάλειας** (over-weighted precarity interval)  $[\beta_S^{(j)}, c_S^{(j)}] \subset \mathbb{R}$  και
3. Το **υποσταθμισμένο διάστημα καταστροφής** (sub-weighted disaster interval)  $[\tilde{d}_S^{(j)}, \tilde{c}_S^{(j)}] \subset \mathbb{R}$  και το **υπερσταθμισμένο διάστημα καταστροφής** (over-weighted disaster interval)  $[c_S^{(j)}, d_S^{(j)}] \subset \mathbb{R}$ .

Αυτά ορίζονται ως τα μεγαλύτερα διαστήματα με τις ακόλουθες ιδιότητες.

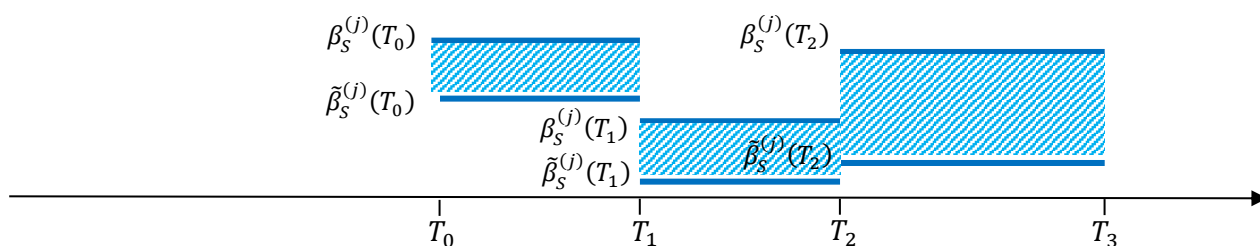
- Εντός του  $[\tilde{\beta}_S^{(j)}, \tilde{\beta}_S^{(j)}]$  **δεν υπάρχει μεταβολή** στη συμπεριφορά του χαρακτηριστικού  $j$  εντός του συστήματος τέτοια που να επηρεάζει άλλους συστημικούς δείκτες (ή την ισχύ και επίδραση άλλων συστημικών χαρακτηριστικών που δραστηριοποιούνται στο σύστημα).
- Εντός του  $[\tilde{c}_S^{(j)}, \tilde{\beta}_S^{(j)}] \cup [\beta_S^{(j)}, c_S^{(j)}]$  **υπάρχει μικρή μεταβολή** στη συμπεριφορά του χαρακτηριστικού  $j$  εντός του συστήματος που επηρεάζει άλλους συστημικούς δείκτες (ή την ισχύ και επίδραση άλλων συστημικών χαρακτηριστικών που δραστηριοποιούνται στο σύστημα).

- Εντός του  $[\tilde{d}_S^{(j)}, \tilde{c}_S^{(j)}] \cup [c_S^{(j)}, d_S^{(j)}]$  **υπάρχει μεγάλη μεταβολή** στη συμπεριφορά του χαρακτηριστικού  $j$  εντός του συστήματος που επηρεάζει άλλους συστημικούς δείκτες (ή την ισχύ και επίδραση άλλων συστημικών χαρακτηριστικών που δραστηριοποιούνται στο σύστημα).
- Στο εξωτερικό του  $[\tilde{d}_S^{(j)}, d_S^{(j)}]$  **υπάρχει ολέθρια καταστροφική αλλαγή** στη συμπεριφορά του χαρακτηριστικού  $j$  που επηρεάζει άλλους συστημικούς δείκτες (ή την ισχύ και επίδραση άλλων συστημικών χαρακτηριστικών που δραστηριοποιούνται στο σύστημα).

Τα διανύσματα  $(\tilde{\beta}_S^{(j_1)}, \dots, \tilde{\beta}_S^{(j_k)}) \in \mathbb{R}^k$  και  $(\beta_S^{(j_1)}, \dots, \beta_S^{(j_k)}) \in \mathbb{R}^k$  είναι αντίστοιχα τα **κάτω και άνω όρια της κανονικότητας** των συστημικών χαρακτηριστικών  $j_1, j_2, \dots, j_k$  σε χρόνο  $t \in \mathbb{R}$  και στην τοποθεσία  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ . Ειδικά, για  $(j_1, j_2, \dots, j_k) = (1, 2, \dots, l+1)$  θα προτιμούμε τους συμβολισμούς  $\tilde{\beta} = (\tilde{\beta}_S^{(1)}, \tilde{\beta}_S^{(2)}, \dots, \tilde{\beta}_S^{(l+1)})$  και  $\beta = (\beta_S^{(1)}, \beta_S^{(2)}, \dots, \beta_S^{(l+1)})$ .

Στην ειδική συμπτωματική περίπτωση όπου  $\tilde{\beta}_S^{(j)} = \beta_S^{(j)} = D_S^{(j)}$  ο σταθμισμένος δείκτης  $D_S^{(j)}$  είναι η **μοναδική τιμή κανονικότητας** του συστημικού χαρακτηριστικού  $j$  σε χρόνο  $t \in \mathbb{R}$  και στην θέση  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  στο  $S$ .

Η αντιστοιχία που συνδέει κάθε στοιχείο του χωροχρόνου  $\mathbb{R}^4$  με το αντίστοιχο διάστημα κανονικότητας του χαρακτηριστικού  $j$  είναι η **απεικόνιση κανονικής κατάστασης** του συστημικού χαρακτηριστικού  $j$  πάνω στον χωρόχρονο. Οποιοδήποτε σημείο της εικόνας της είναι μια **κατάσταση κανονικότητας** ή ένα **σημείο κανονικότητας** και κάθε σύνολο στο γράφημα της ονομάζεται **ζώνη κανονικότητας** για  $j$ . Για παράδειγμα αν έχουμε μια σταθερή τοποθεσία  $(x, y, z)$  και αφήσουμε τον χρόνο  $t$  να βρίσκεται ανάμεσα στις χρονικές στιγμές  $T_0$  και  $T_3$ , τότε η ζώνη κανονικότητας του χαρακτηριστικού  $j$  μπορεί να έχει την μορφή του παρακάτω γραφήματος [7]:



Τα χρονικά διαστήματα  $[T_0, T_1]$ ,  $[T_1, T_2]$  και  $[T_2, T_3]$  καλούνται **περίοδοι κανονικότητας** για το χαρακτηριστικό  $j$ , ενώ, ιδιαιτέρως τα σημεία  $T_0$ ,  $T_1$ ,  $T_2$  και  $T_3$  ονομάζονται **σημεία μεταβολής της κανονικότητας** για το χαρακτηριστικό  $j$ .

Τα διανύσματα  $(\tilde{c}_S^{(j_1)}, \dots, \tilde{c}_S^{(j_k)}) \in \mathbb{R}^k$  και  $(c_S^{(j_1)}, \dots, c_S^{(j_k)}) \in \mathbb{R}^k$  ονομάζονται αντιστοίχως **κάτω όριο υποσταθμισμένης επισφάλειας** και **άνω όριο υπερσταθμισμένης επισφάλειας** των συστημικών χαρακτηριστικών  $j_1, j_2, \dots, j_k$  σε χρόνο  $t \in \mathbb{R}$  και στην τοποθεσία  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ . Ειδικά, για  $(j_1, j_2, \dots, j_k) = (1, 2, \dots, l+1)$  θα προτιμούμε τον συμβολισμό  $\tilde{c} = (\tilde{c}_S^{(1)}, \tilde{c}_S^{(2)}, \dots, \tilde{c}_S^{(l+1)})$  και  $c = (c_S^{(1)}, c_S^{(2)}, \dots, c_S^{(l+1)})$ . Στην ειδική συμπτωματική περίπτωση που ισχύει  $\tilde{c}_S^{(j)} = \tilde{\beta}_S^{(j)}$  ή  $c_S^{(j)} = \beta_S^{(j)}$ , οι κοινές τιμές τους καλούνται **τιμή υποσταθμισμένης επισφάλειας** και **τιμή υπερσταθμισμένης επισφάλειας** αντίστοιχα, του συστημικού χαρακτηριστικού  $j$  σε χρόνο  $t \in \mathbb{R}$  και στη θέση  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  στο  $S$ .

Η απεικόνιση που αντιστοιχίζει σε κάθε στοιχείο του χωροχρόνου τα αντίστοιχα διαστήματα επισφάλειας του χαρακτηριστικού  $j$  λέγεται **απεικόνιση επισφαλούς κατάστασης** του συστημικού χαρακτηριστικού  $j$  στον χωρόχρονο. Οποιοδήποτε σημείο της εικόνας της είναι μια **επισφαλής κατάσταση** ή ένα **σημείο επισφάλειας**, ενώ κάθε σύνολο στο γράφημά της είναι μια **επισφαλής ζώνη** για το  $j$ . Οι εκτάσεις της υποσταθμισμένης επισφάλειας και της υπερσταθμισμένης επισφάλειας σε χρόνο  $t$  και τοποθεσία  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  στο  $S$  ορίζονται ως οι διαφορές  $\delta_{critical}^{(j)} := |\tilde{c}_S^{(j)} - \tilde{b}_S^{(j)}|$  και  $\delta_{critical}^{(j)} = |c_S^{(j)} - b_S^{(j)}|$ .

Τέλος, τα διανύσματα  $(\tilde{d}_S^{(j_1)}, \dots, \tilde{d}_S^{(j_k)}) \in \mathbb{R}^k$  και  $(d_S^{(j_1)}, \dots, d_S^{(j_k)}) \in \mathbb{R}^k$  ονομάζονται αντίστοιχα **κάτω όριο υποσταθμισμένου κινδύνου** και **άνω όριο υπερσταθμισμένου κινδύνου** των συστημικών χαρακτηριστικών  $j_1, j_2, \dots, j_k$  σε χρόνο  $t \in \mathbb{R}$  και στην τοποθεσία  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ . Ειδικά, για  $(j_1, j_2, \dots, j_k) = (1, 2, \dots, l+1)$ , θα προτιμούμε τους συμβολισμούς

$$\tilde{d} = (\tilde{d}_S^{(1)}, \tilde{d}_S^{(2)}, \dots, \tilde{d}_S^{(l+1)}) \text{ και } d = (d_S^{(1)}, d_S^{(2)}, \dots, d_S^{(l+1)}).$$

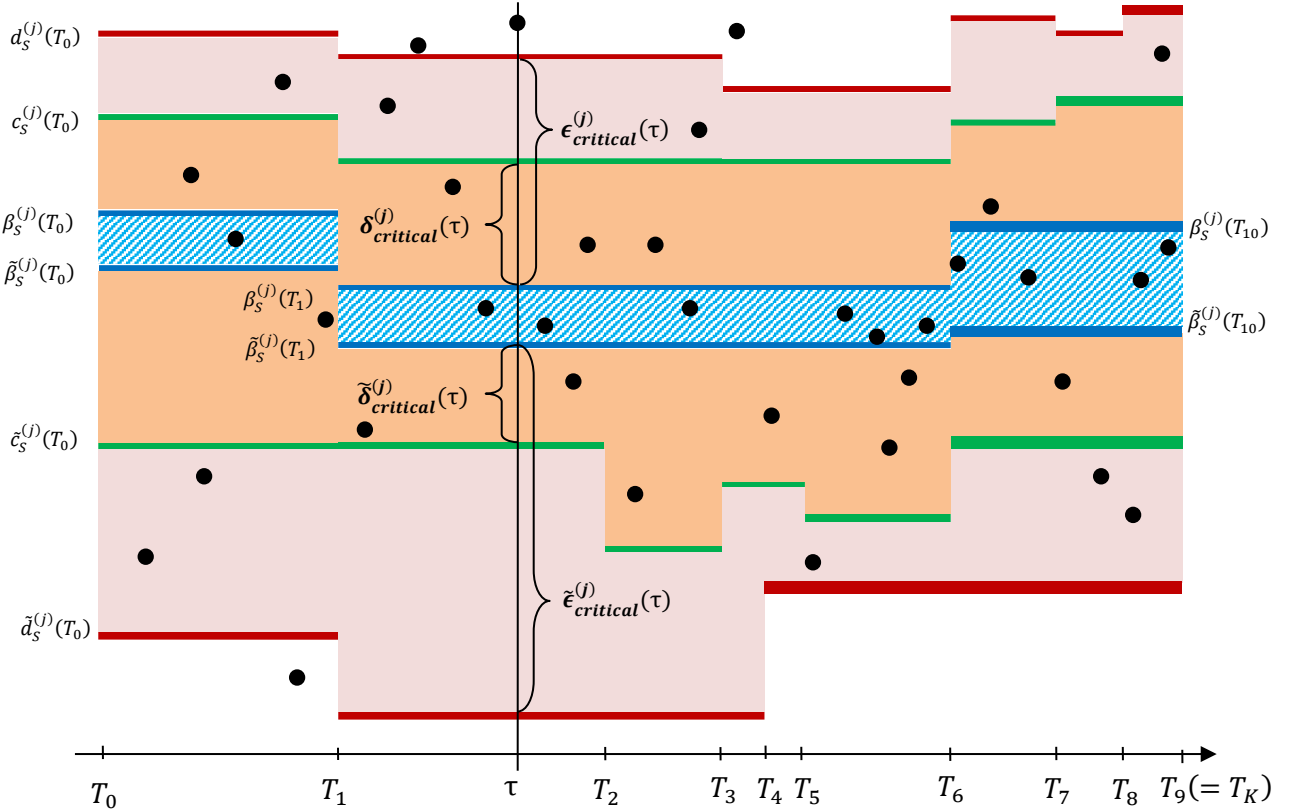
**Παρατήρηση 3.1.** Στην οριακή περίπτωση που ισχύει  $\tilde{d}_S^{(j)} = \tilde{c}_S^{(j)}$  ή  $d_S^{(j)} = c_S^{(j)}$ , οι εν λόγω κοινές τιμές καλούνται **τιμή υποσταθμισμένου** και **υπερσταθμισμένου κινδύνου** αντίστοιχα, του συστημικού χαρακτηριστικού  $j$  σε χρόνο  $t \in \mathbb{R}$  και στη θέση  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  στο  $S$  ([9]).

Η απεικόνιση που αντιστοιχίζει σε κάθε στοιχείο του χωροχρόνου τα αντίστοιχα διαστήματα κινδύνου του χαρακτηριστικού  $j$  λέγεται **απεικόνιση επικίνδυνης κατάστασης** του συστημικού χαρακτηριστικού  $j$  στον χωρόχρονο. Οποιοδήποτε σημείο της εικόνας της είναι μια **κατάσταση κινδύνου** ή ένα **σημείο κινδύνου** και κάθε σύνολο στο γράφημά της είναι μια **καταστροφική ζώνη** για το  $j$ . Οι εκτάσεις του υποσταθμισμένου κινδύνου και του υπερσταθμισμένου κινδύνου σε



χρόνο  $t$  και τοποθεσία  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  στο  $S$  ορίζονται ως οι διαφορές  $\tilde{\epsilon}_{critical}^{(j)} := |\tilde{d}_S^{(j)} - \tilde{\beta}_S^{(j)}|$  και  $\epsilon_{critical}^{(j)} = |\delta_S^{(j)} - \beta_S^{(j)}|$ .

Μια συμβολική και ενδεικτική σχηματική απεικόνιση όλων των παραπάνω εννοιών για συγκεκριμένη τοποθεσία  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ , δίνεται αμέσως τώρα [7].



### Ορισμός 3.1

- i. Ένα σύστημα  $S$  εφοδιασμένο με τις παραπάνω ορισμένες ανοχές κανονικότητας, επισφάλειας και καταστροφής είναι ένα **προβλέψιμο σύστημα**.
- ii. Ένας **συστημικός δείκτης**  $g_S^{(j)}(t, x, y, z)$  είναι η **πραγματική τιμή** του χαρακτηριστικού  $j$  σε χρόνο  $t \in \mathbb{R}$  και τοποθεσία  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ , σε ένα προβλέψιμο σύστημα  $S$ .
- iii. Κάθε χρονικό διάστημα  $[T_n, T_{n+1}]$  κατά τη διάρκεια του οποίου όλα τα όρια διατηρούνται σταθερά ονομάζεται **περίοδος συστημικής διατήρησης**. Κάθε χρονικό σημείο  $T_n$  στο οποίο εκδηλώνεται μεταβολή κάποιου ορίου καλείται **σημείο συστημικής μεταβολής**.
- iv. Ένας **σταθμισμένος συστημικός δείκτης** του χαρακτηριστικού  $j$ , σε χρόνο  $t \in \mathbb{R}$  και τοποθεσία  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  ενός προβλέψιμου συστήματος  $S$ , ορίζεται μία **προκαθορισμένη τιμή αναφοράς**  $D_S^{(j)}(t, x, y, z) \in [\tilde{\beta}_S^{(j)}, \beta_S^{(j)}] \subset \mathbb{R}$ , η οποία παραμένει σταθερή καθ' όλη τη διάρκεια μίας περιόδου **συστημικής διατήρησης**  $[T_n, T_{n+1}]$ .



- ν. Ένας δείκτης συστημικής απόκλισης σε ένα προβλέψιμο σύστημα  $S$  είναι ένας οποιοσδήποτε λόγος της μορφής  $g_S^{(j)}(t, x, y, z)/D_S^{(j)}(t, x, y, z)$ . ■

**Παρατήρηση 3.2.** Οι έννοιες της κανονικής ζώνης, της επισφαλούς ζώνης και της ζώνης κινδύνου μπορούν να θεωρηθούν ανάλογες των πιθανών θεωρητικών εννοιών που αντιλαμβανόμαστε σε μία θεωρία διαχείρισης κινδύνου μιλώντας για ζώνη χαμηλού κινδύνου, ζώνη μέτριου κινδύνου και ζώνη υψηλού κινδύνου, αντίστοιχα.

**Παρατήρηση 3.3.** Είναι σαφές ότι το πλήθος των συστημικών δεικτών ενός συστήματος είναι ίσο με το πλήθος των σταθμισμένων συστημικών δεικτών του συστήματος. ■

**Παρατήρηση 3.4.** Για λόγους απλοποίησης της παρουσίασης, θα υποθέτουμε παρακάτω ότι όλες οι συστημικές μετρήσεις εκτελούνται με επαρκή αξιοπιστία σε τέτοιο βαθμό ώστε να αποκλείεται οποιαδήποτε ασυμφωνία στις εκτιμήσεις των προβλέψεων.

### III.1. Ο χώρος των σταθμισμένων συστημικών δεικτών υπεράνω ενός συστήματος

Υποθέτουμε ότι υπάρχει ένας πεπερασμένος αριθμός από  $(l + 1)$  διακεκριμένους σταθμισμένους συστημικούς δείκτες ενός προβλέψιμου συστήματος  $S$ , έστω  $D_S^{(1)}, D_S^{(2)}, \dots, D_S^{(l+1)}$  για οποιοδήποτε χρόνο  $t$  και σε οποιαδήποτε τοποθεσία  $(x, y, z)$ .

Προφανώς, κάθε σταθμισμένος συστημικός δείκτης  $D_S^{(j)}$  μπορεί να θεωρηθεί ως μία κατά τμήματα σταθερή αριθμητική συνάρτηση  $D_S^{(j)} = D_S^{(j)}(P_{1/S}^{(j)}, \dots, P_{N_j/S}^{(j)}; t, x, y, z)$  εξαρτώμενη από τις τιμές των  $N_j$  το πλήθος εσωτερικών φυσικών χαρακτηριστικών  $(P_{1/S}^{(j)}, \dots, P_{N_j/S}^{(j)})$  του συστήματος  $S$ , σε χρόνο  $t \in \mathbb{R}$  και στην τοποθεσία  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ .

**Ορισμός 3.2.**

- i. Ο χώρος  $\mathbb{G}_{t,x,y,z}(S) := \{D_S = \lambda_1 D_S^{(1)} + \dots + \lambda_l D_S^{(l+1)} : \lambda_1, \dots, \lambda_{l+1} \in \mathbb{R}\} \equiv \mathbb{R}^{l+1}$  εφοδιασμένος με τη συνήθη Ευκλείδεια απόσταση στο  $\mathbb{R}^{l+1}$  είναι ο **διανυσματικός χώρος των στιγμιαίων τοπικών σταθμισμένων συστημικών δεικτών** του  $S$ , σε χρόνο  $t$  και στην τοποθεσία  $(x, y, z)$ . Κάθε μοναδιαίο διάνυσμα

$$l^{(j)} = \underbrace{(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)}_j$$

του εν λόγω διανυσματικού χώρου  $\mathbb{G}_{t,x,y,z}(S) \equiv \mathbb{R}^{l+1}$  θεωρείται ότι ταυτίζεται με μια μονάδα του σταθμισμένου συστημικού δείκτη  $D^{(j)}$  του συστήματος  $S$ , σε χρόνο  $t$  και στην τοποθεσία  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ .

- ii. Ο γραμμικός χώρος  $\mathbb{G}(S) := \bigcup_{t \in \mathbb{R}, (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, D_S \in \mathbb{G}_{t,x,y,z}(S)} (t, (x, y, z), D_S) \equiv \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^{l+1} = \mathbb{R}^{l+5}$ , εφοδιασμένος με τη συνήθη Ευκλείδεια τοπολογία στο  $\mathbb{R}^{l+5}$ , είναι ο **χώρος των σταθμισμένων συστημικών δεικτών** πάνω στο σύστημα  $S$ . Τα στοιχεία του  $\mathbb{G}(S)$  είναι οι **σταθμισμένοι συστημικοί δείκτες** του συστήματος  $S$ . ■

Είναι σαφές ότι ο  $\mathbb{G}(S)$  μπορεί να εφοδιαστεί με μια συνεχή προβολή  $\pi_S: \mathbb{G}(S) \rightarrow \mathbb{B} \equiv \mathbb{R}^4$  έτσι ώστε, για κάθε σημείο  $(t, x, y, z) \in \mathbb{B}$ , ο χώρος  $\mathbb{G}_{t,x,y,z}(S)$  να συμπίπτει με τη **συστημική ίνα**  $\pi_S^{-1}(t, x, y, z)$  του  $\mathbb{G}(S)$  στο σημείο  $(t, x, y, z)$ . Επειδή, για οποιαδήποτε  $D_S$  και  $V_S$  στην  $\pi_S^{-1}(t, x, y, z)$ , υπάρχουν δύο ξένες περιοχές των  $D_S$  και  $V_S$ , ο χώρος των σταθμισμένων συστημικών δεικτών είναι διαχωρίσιμος. Αφού ο  $\mathbb{G}(S)$  είναι επίσης συνεκτικός, αποδεικνύεται αμέσως η ακόλουθη πρόταση.

**Πρόταση 3.1** Για οποιοδήποτε  $(t, x, y, z) \in \mathbb{B}$ , ο πληθάριμος της αντίστοιχης συστημικής ίνας  $\pi_S^{-1}(t, x, y, z) \equiv \mathbb{G}_{t,x,y,z}(S)$  δεν ξεπερνάει την άπειρη πληθικότητα οποιασδήποτε βάσης ανοιχτών συνόλων στο  $\mathbb{B}$ . ■

Περαιτέρω, αφού  $\mathbb{G}(S) = \mathbb{R}^{l+5} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^{l+1} = \mathbb{B} \times \mathbb{G}_{t,x,y,z}(S)$ , ο χώρος των σταθμισμένων συστημικών δεικτών  $\mathbb{G}(S)$  είναι μια **τετριμμένη δέσμη διακριτών ινών**  $\mathbb{G}_{t,x,y,z}(S) = \mathbb{R}^{l+1}$  και συνεπώς ο  $\mathbb{G}(S)$ , εφοδιασμένος με την συνεχή προβολή  $\pi_S: \mathbb{G}(S) \rightarrow \mathbb{B}$  είναι (επίσης) ένας συστημικός χώρος επικάλυψης του  $\mathbb{B}$ .

**Πρόταση 3.2** Ο χώρος των σταθμισμένων συστημικών δεικτών  $\mathbb{G}(S)$  είναι **γνήσιος χώρος** υπεράνω του  $\mathbb{B}$ . ■

## III.2. Συνάφεια μεταξύ συστημάτων

Έστω  $S$  και  $T$  δυο προβλέψιμα συστήματα. Ας θεωρήσουμε τους αντίστοιχους χώρους σταθμισμένων συστημικών δεικτών  $\mathbb{G}(S)$  και  $\mathbb{G}(T)$  με προβολές  $\pi_S$  και  $\pi_T$  αντίστοιχα.

**Ορισμός 3.3.** Μια συνεχής απεικόνιση  $\chi: \mathbb{G}(S) \rightarrow \mathbb{G}(T)$  θα λέγεται ότι είναι μια **συστημική συνάφεια** μεταξύ των συστημάτων  $S$  και  $T$  αν το ακόλουθο διάγραμμα είναι μεταθετικό:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{G}(S) & \xrightarrow{\chi} & \mathbb{G}(T) \\ \searrow & & \swarrow \\ \pi_S & \mathbb{B} & \pi_T \end{array} \quad \blacksquare$$

Προφανώς αν  $\chi$  είναι συστημική συνάφεια μεταξύ των συστημάτων  $S$  και  $T$ , τότε, για οποιοδήποτε  $(t, x, y, z) \in \mathbb{B}$ , η  $\chi$  επάγει μια απεικόνιση  $\chi_{t,x,y,z}: \mathbb{G}_{t,x,y,z}(S) \rightarrow \mathbb{G}_{t,x,y,z}(T)$  μεταξύ των χώρων των στιγμιαίων τοπικών σταθμισμένων συστημικών δεικτών του  $S$  σε χρόνους στην τοποθεσία  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ . Επιπλέον, είναι εύκολο να δείξουμε το ακόλουθο.

**Πρόταση 3.3.** Οποιαδήποτε συστημική συνάφεια  $\chi: \mathbb{G}(S) \rightarrow \mathbb{G}(T)$  μεταξύ των συστημάτων  $S$  και  $T$  είναι επιμορφισμός επί του  $\mathbb{G}(T)$ . Αν επιπλέον υπάρχει ένα σημείο  $(t, x, y, z) \in \mathbb{B}$  στο οποίο η επαγόμενη απεικόνιση  $\chi_{t,x,y,z}: \mathbb{G}_{t,x,y,z}(S) \rightarrow \mathbb{G}_{t,x,y,z}(T)$  είναι ένα προς ένα, τότε η συστημική συνάφεια μεταξύ των συστημάτων  $S$  και  $T$  είναι ένας ισομορφισμός. ■

Δοθισών δύο οιονδήποτε συστημικών συναφειών  $\chi$  και  $\psi$  μεταξύ των συστημάτων  $S$  και  $T$ , το σύνολο όλων των  $\mathfrak{D} \in \mathbb{G}(T)$  τέτοιων ώστε  $\chi(\mathfrak{D}) = \psi(\mathfrak{D})$  είναι ανοικτό και κλειστό στο  $\mathbb{G}(T)$ . Συγκεκριμένα, αφού ο χώρος των σταθμισμένων συστημικών δεικτών  $\mathbb{G}(S)$  είναι συνεκτικός, συμπεραίνουμε το παρακάτω αποτέλεσμα.

**Πρόταση 3.4.** Έστω  $\chi$  και  $\psi$  είναι δύο συστημικές συνάφειες μεταξύ των συστημάτων  $S$  και  $T$ .

- i. Αν υπάρχει ένας σταθμισμένος συστημικός δείκτης  $g \in \mathbb{G}(T)$  τέτοιος ώστε  $\chi(g) = \psi(g)$ , οι συστημικές συνάφειες συμπίπτουν.
- ii. Αν υπάρχει ένα  $(t, x, y, z) \in \mathbb{B}$  τέτοιο ώστε  $\chi_{t,x,y,z} = \psi_{t,x,y,z}$  οι συστημικές συνάφειες  $\chi$  και  $\psi$  συμπίπτουν

Η κατηγορία με αντικείμενα τους χώρους σταθμισμένων συστημικών δεικτών και μορφισμούς της συστημικές συνάφειες μεταξύ δυο συστημάτων είναι η **κατηγορία των συστημικών συστημάτων**. Θα συμβολίζεται με  $\mathbb{B} - \text{Top}$ . Το άθροισμα των  $\mathbb{G}(S)$  και  $\mathbb{G}(T)$  στο  $\mathbb{B} - \text{Top}$  είναι η ξένη ένωση  $\mathbb{G}(S) \sqcup \mathbb{G}(T)$  η οποία θεωρείται εφοδιασμένη με την προβολή που επάγει την  $\pi_S$  στο  $\mathbb{G}(S)$  και  $\pi_T$  στο  $\mathbb{G}(T)$ . Φαίνεται αμέσως ότι

$$(\mathbb{G}(S) \sqcup \mathbb{G}(T))_{t,x,y,z} = \mathbb{G}_{t,x,y,z}(S) \sqcup \mathbb{G}_{t,x,y,z}(T).$$

### III.3. Το νηματικό γινόμενο δύο χώρων σταθμισμένων συστημικών δεικτών

Έστω  $S$  και  $T$  δυο προβλέψιμα συστήματα με τους αντίστοιχους χώρους σταθμισμένων συστημικών δεικτών  $\mathbb{G}(S)$  και  $\mathbb{G}(T)$ , και προβολές  $\pi_S$  και  $\pi_T$  αντίστοιχα. Το **νηματικό γινόμενο**

$$\mathbb{G}(S) \times_{\mathbb{B}} \mathbb{G}(T)$$

**των χώρων**  $\mathbb{G}(S)$  και  $\mathbb{G}(T)$  είναι ένας υπόχωρος του τοπολογικού χώρου  $\mathbb{G}(S) \times \mathbb{G}(T)$  που απαρτίζεται από όλα τα ζεύγη  $(D_S, D_T)$  που ικανοποιούν την εξίσωση

$$\pi_S(D_S) = \pi_T(D_T).$$

Το νηματικό γινόμενο  $\mathbb{G}(S) \times_{\mathbb{B}} \mathbb{G}(T)$  εφοδιασμένο με την απεικόνιση  $(D_S, D_T) \rightarrow \pi_S(D_S)$  είναι το **γινόμενο των χώρων**  $\mathbb{G}(S)$  και  $\mathbb{G}(T)$  **στην κατηγορία συστημάτων**.

Είναι σαφές ότι

$$(\mathbb{G}(S) \times_{\mathbb{B}} \mathbb{G}(T))(t, x, y, z) = \mathbb{G}_{t,x,y,z}(S) \times \mathbb{G}_{t,x,y,z}(T)$$

όπου  $(t, x, y, z) \in \mathbb{B}$ . Έστω τώρα  $h: \mathbb{B} \equiv \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{B} \equiv \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$  μια συνεχής απεικόνιση. Ο τοπολογικός χώρος

$$\mathbb{G}^*(S) := h(\mathbb{B}) \times_{\mathbb{B}} \mathbb{G}(S)$$

εφοδιασμένος με την πρώτη προβολή  $\mathbb{G}^*(S) \rightarrow h(\mathbb{B})$  είναι ένας χώρος μέσα στον τοπολογικό χώρο  $h(\mathbb{B})$  που καλείται **χώρος υπεράνω του  $h(B)$  που λαμβάνεται από τον  $\mathbb{G}(S)$  μέσω αλλαγής βάσης** από το  $\mathbb{B}$  στο  $h(\mathbb{B})$ . Είναι σαφές ότι η ίνα του  $\mathbb{G}^*(S)$  σε ένα σημείο  $b'$  του  $h(\mathbb{B})$  ταυτίζεται με την ίνα του  $\mathbb{G}(S)$  στο  $h(b')$ .

## Κεφάλαιο IV

# Γεωμετρική προσέγγιση

Έστω  $S$  ένα προβλέψιμο σύστημα. Υποθέτουμε ότι σε κάθε συστημικό δείκτη  $g_S^{(j)} = g_S^{(j)}(P_{1/S}^{(j)}, \dots, P_{N_j/S}^{(j)}; t, x, y, z)$  έχει αντιστοιχισθεί ένας μοναδικός σταθμισμένος συστημικός δείκτης  $D_S^{(j)} = D_S^{(j)}(P_{1/S}^{(j)}, \dots, P_{N_j/S}^{(j)}; t, x, y, z)$ . Για τους σκοπούς της εργασίας, οι τιμές των σταθμισμένων συστημικών δεικτών  $D_S^{(j)}$  θα θεωρούνται πάντοτε ως δεδομένες και προκαθορισμένες για οποιοδήποτε χρόνο  $t \in \mathbb{R}$  και τοποθεσία  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ .

Ένα εργαλείο που θα επέτρεπε τη σε βάθος μελέτη των μετρήσεων που εκτελούνται στον χώρο των σταθμισμένων συστημικών δεικτών είναι η προσάρτηση μετρήσεων του συστημικού διανυσματικού πεδίου σε όλα τα σημεία του χώρου των σταθμισμένων συστημικών δεικτών. Σύμφωνα με την Παρατήρηση 3.3, οι τιμές που λαμβάνουμε από τις μετρήσεις αυτές θα θεωρούνται ότι είναι αξιόπιστες και ακριβείς. Επί πλέον, θα υποθέτουμε ότι μπορούμε να συγκρίνουμε τις τιμές αυτές των μετρήσεων με τις δοθείσες προκαθορισμένες σταθερές τιμές των σταθμισμένων συστημικών δεικτών.

### IV.1. Καθολικότητες σταθμισμένων συστημικών δεικτών

Έστω  $U$  ένα μη κενό ανοιχτό υποσύνολο του  $\mathbb{R}^4 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$  που αναπαριστά μία χωροχρονική ιστορική φάση.

**Ορισμός 4.1.**

i. Μία απεικόνιση

$$\mathcal{D}: U \rightarrow \mathbb{G}(S) \equiv \mathbb{R}^{l+5}: (t, x, y, z) \mapsto (t, x, y, z; D_S^{(1)}, \dots, D_S^{(l+1)})$$

Ονομάζεται **καθολικότητα (universality) των σταθμισμένων συστημικών δεικτών για το σύστημα  $S$  υπεράνω της χωροχρονικής ιστορικής φάσης  $U$** .

ii. Αν η απεικόνιση  $\mathcal{D}$  είναι λεία και κανονική στο  $U$ , δηλαδή το διαφορικό  $d\mathcal{D}_{(t,x,y,z)}$  είναι αντιστρέψιμο (έχει τάξη 4) για κάθε  $(t, x, y, z) \in U$  τότε το  $\mathcal{D}$  είναι μια παραμετροποιημένη επιφάνεια διάστασης 4 μέσα στο χώρο των σταθμισμένων συστημικών δεικτών  $\mathbb{G}(S)$ . Σε αυτήν την περίπτωση, λέμε ότι η εικόνα της

καθολικότητας  $\Sigma_D = \mathcal{D}(U)$ , ή απλά η  $\mathcal{D}$  είναι μια **παραμετρικοποιημένη επιφάνεια των σταθμισμένων συστημικών δεικτών** για το σύστημα  $S$  υπεράνω του  $U$ . ■

#### IV.1.i. Λείες παραμετρικοποιημένες επιφάνειες σταθμισμένων συστημικών δεικτών

Αρχικά θα θεωρήσουμε την περίπτωση κατά την οποία η απεικόνιση  $\mathcal{D}: U \rightarrow \mathbb{R}^{l+5}$  είναι λεία και κανονική. Το **διαφορικό** της  $\mathcal{D}$  είναι η λεία απεικόνιση  $\mathcal{D}: U \times \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^{l+5} \times \mathbb{R}^{l+5}$  ορισμένη ως εξής. Ένα σημείο  $v \in U \times \mathbb{R}^4$  είναι ένα διάνυσμα  $v = ((t, x, y, z), u)$  σε ένα σημείο  $(t, x, y, z) \in U$ . Ας είναι  $\alpha: I \rightarrow U$  μια παραμετρικοποιημένη καμπύλη στο  $U$  με  $\dot{\alpha}(t_0) = v$ . Τότε  $d\mathcal{D}(v)$  είναι ένα διάνυσμα στο  $\mathcal{D}(t, x, y, z)(: d\mathcal{D}(v) \in \mathbb{R}_{\mathcal{D}(t, x, y, z)}^{l+5} \subset \mathbb{R}^{l+5} \times \mathbb{R}^{l+5})$  ορισμένο από τη σχέση  $d\mathcal{D}(v) = \mathcal{D} \circ \dot{\alpha}(t_0)$ . Σημειώνεται ότι η τιμή της  $d\mathcal{D}(v)$  δεν εξαρτάται από την επιλογή της παραμετρικοποιημένης καμπύλης  $\alpha$ , επειδή

$$\begin{aligned} \mathcal{D} \circ \dot{\alpha}(t_0) &= \left( \mathcal{D} \circ \alpha(t_0), \left( D_S^{(1)} \circ \alpha \right)'(t_0), \dots, \left( D_S^{(l+1)} \circ \alpha \right)'(t_0) \right) \\ &= \left( \mathcal{D}(t, x, y, z), \nabla D_S^{(1)}(\alpha(t_0)) \cdot \dot{\alpha}(t_0), \dots, \nabla D_S^{(l+1)}(\alpha(t_0)) \cdot \dot{\alpha}(t_0) \right) \\ &= \left( \mathcal{D}(t, x, y, z), \nabla D_S^{(1)}(t, x, y, z) \cdot v, \dots, \nabla D_S^{(l+1)}(t, x, y, z) \cdot v \right). \end{aligned}$$

Επομένως,  $d\mathcal{D}(v) = \left( \mathcal{D}(t, x, y, z), \nabla_v D_S^{(1)}, \dots, \nabla_v D_S^{(l+1)} \right)$ . Ακολουθεί αμέσως ότι ο περιορισμός  $d\mathcal{D}_{(t, x, y, z)}$  του  $d\mathcal{D}$  στο  $\mathbb{R}_{(t, x, y, z)}^4$  ( $:$  των διανυσμάτων  $(t, x, y, z)$ ) είναι μια γραμμική απεικόνιση  $d\mathcal{D}_{(t, x, y, z)}: \mathbb{R}_{(t, x, y, z)}^4 \rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{D}(t, x, y, z)}^{l+5}$ . Ο πίνακας που σχετίζεται με τις τυποποιημένες βάσεις των  $\mathbb{R}_{(t, x, y, z)}^4$  και  $\mathbb{R}_{\mathcal{D}(t, x, y, z)}^{l+5}$  είναι ο Ιακωβιανός πίνακας της  $\mathcal{D}$  στο  $(t, x, y, z)$ . Έτσι, η κατάσταση κανονικότητας στο  $\mathcal{D}$  εξασφαλίζει ότι

**Πρόταση 4.1.** Η εικόνα  $d\mathcal{D}_{(t, x, y, z)}(\mathbb{R}_{(t, x, y, z)}^4)$  του  $d\mathcal{D}_{(t, x, y, z)}$  είναι ένας 4-διαστατος υπόχωρος του  $\mathbb{R}_{\mathcal{D}(t, x, y, z)}^{l+5}$  για κάθε  $(t, x, y, z) \in U$ . Επιπλέον, η εικόνα αυτή είναι ο εφαπτόμενος χώρος στην παραμετρικοποιημένη επιφάνεια  $\mathcal{D}$  διάστασης 4 στον χώρο σταθμισμένων συστημικών δεικτών  $\mathbb{G}(S)$  που αντιστοιχεί στο σημείο  $(t, x, y, z)$ . ■

Σημειώνεται ότι η παραμετρικοποιημένη επιφάνεια  $\mathcal{D}$  διάστασης 4 στον χώρο σταθμισμένων συστημικών δεικτών  $\mathbb{G}(S) \equiv \mathbb{R}^{l+5}$  **δεν χρειάζεται** να είναι ένα προς ένα και ότι η σχέση  $\mathcal{D}(t, x, y, z) = \mathcal{D}(t', x', y', z')$  για  $(t, x, y, z) \neq (t', x', y', z')$  δεν σημαίνει απαραίτητα ότι η εικόνα  $\mathcal{D}_{(t, x, y, z)}(\mathbb{R}_{(t, x, y, z)}^4)$  του  $d\mathcal{D}_{(t, x, y, z)}$  είναι ίση με την εικόνα  $d\mathcal{D}_{(t', x', y', z')}(\mathbb{R}_{(t', x', y', z')}^4)$  του  $d\mathcal{D}_{(t', x', y', z')}$ .

Ένα συστημικό διανυσματικό πεδίο κατά μήκος της παραμετρικοποιημένης επιφάνειας  $\Sigma_D$  των σταθμισμένων συστημικών δεικτών για το  $S$  υπεράνω του  $U$  είναι μια απεικόνιση  $f$  η οποία εκχωρεί σε κάθε σημείο  $p = (t, x, y, z) \in U$  ένα διάνυσμα  $f(p) \in \mathbb{R}_{\mathcal{D}(t,x,y,z)}^{l+5}$ . Η μελέτη των συστημικών διανυσματικών πεδίων κατά μήκος της παραμετρικοποιημένης επιφάνειας  $\Sigma_D$  χρειάζεται τη θεώρηση μερικών συμπληρωματικών εννοιών.

**Ορισμός 4.2.** Έστω

$$f: U \rightarrow \mathbb{R}^{l+5}; p = (t, x, y, z) \mapsto f(p) = (\mathcal{D}(p); f_1, \dots, f_{l+5}) \in \mathbb{R}_{\mathcal{D}(t,x,y,z)}^{l+5}$$

ένα συστημικό διανυσματικό πεδίο κατά μήκος της παραμετρικοποιημένης επιφάνειας  $\Sigma_D$ .

- i. Θα λέμε ότι το  $f$  είναι **λείο** αν κάθε συντεταγμένη  $f_j: U \rightarrow \mathbb{R}$  είναι λεία ( $j = 1, 2, \dots, n$ ).
- ii. Θα λέμε ότι το  $f$  είναι **εφαπτόμενο στην παραμετρικοποιημένη επιφάνεια  $\Sigma_D$  των σταθμισμένων συστημικών δεικτών** για το  $S$  υπεράνω του  $U$  αν είναι της μορφής

$$f(p) = d\mathcal{D}_{(t,x,y,z)}(\psi(p))$$

για κάποιο  $\psi$  στο  $U$ .

- iii. Θα λέμε ότι το  $f$  είναι **φυσιολογικό στην παραμετρικοποιημένη επιφάνεια  $\Sigma_D$  των σταθμισμένων συστημικών δεικτών** για το  $S$  υπεράνω του  $U$  αν

$$f(p) \perp \text{Εικόνα}[d\mathcal{D}_{(t,x,y,z)}] \text{ για κάθε } (t, x, y, z) \in U. \blacksquare$$

Ας δώσουμε μια γενίκευση της έννοιας του πεδίου ταχύτητας στην περίπτωση ενός συστημικού διανυσματικού πεδίου κατά μήκος της παραμετρικοποιημένης επιφάνειας  $\Sigma_D$  των σταθμισμένων συστημικών δεικτών για το  $S$  υπεράνω του  $U$ . Έστω ότι με  $\mathcal{E}^{(1)}, \mathcal{E}^{(2)}, \mathcal{E}^{(3)}$  και  $\mathcal{E}^{(4)}$  συμβολίζουμε εκείνα τα εφαπτόμενα διανυσματικά πεδία κατά μήκος της παραμετρικοποιημένης επιφάνειας  $\Sigma_D$  τα οποία ορίζονται από τη σχέση

$$\mathcal{E}^{(i)}(t, x, y, z) = d\mathcal{D}_{(t,x,y,z)}((t, x, y, z); 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$$

όπου το 1 βρίσκεται στην  $(i + 1)$  θέση ( $i$  θέσεις μετά το  $(t, x, y, z) \in U$ ).

**Πρόταση 4.2.** Οι συνιστώσες των  $\mathcal{E}^{(i)}$  είναι απλώς οι τιμές της  $i$ -οστής στήλης του Ιακωβιανού πίνακα της  $\mathcal{D}$  στο  $(t, x, y, z) \in U$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}^{(1)}(t, x, y, z) &= \left( \mathcal{D}(t, x, y, z); \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial t}(t, x, y, z) \right) = \left( \mathcal{D}; \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial t}, \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial x}, \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial y}, \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial z}, \frac{\partial D_1}{\partial t}, \dots, \frac{\partial D_{l+1}}{\partial t} \right)(t, x, y, z), \\ \mathcal{E}^{(2)}(t, x, y, z) &= \left( \mathcal{D}(t, x, y, z); \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial x}(t, x, y, z) \right) = \left( \mathcal{D}; \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial x}, \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial x}, \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial x}, \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial x}, \frac{\partial D_1}{\partial x}, \dots, \frac{\partial D_{l+1}}{\partial x} \right)(t, x, y, z), \\ \mathcal{E}^{(3)}(t, x, y, z) &= \left( \mathcal{D}(t, x, y, z); \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial y}(t, x, y, z) \right) = \left( \mathcal{D}; \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial y}, \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial y}, \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial y}, \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial y}, \frac{\partial D_1}{\partial y}, \dots, \frac{\partial D_{l+1}}{\partial y} \right)(t, x, y, z), \\ \mathcal{E}^{(4)}(t, x, y, z) &= \left( \mathcal{D}(t, x, y, z); \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial z}(t, x, y, z) \right) = \left( \mathcal{D}; \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial z}, \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial z}, \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial z}, \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial z}, \frac{\partial D_1}{\partial z}, \dots, \frac{\partial D_{l+1}}{\partial z} \right)(t, x, y, z), \end{aligned}$$

όπου  $\mathcal{D}(t, x, y, z) = \left( t, x, y, z; D_S^{(1)}(t, x, y, z), \dots, D_S^{(l+1)}(t, x, y, z) \right). \blacksquare$

Σημειώνεται ότι το  $\mathcal{E}^{(i)}(t, x, y, z)$  είναι απλά η **ταχύτητα στο σημείο**  $(t, x, y, z) \in U$  της προσανατολισμένης καμπύλης  $u_i \mapsto \mathcal{D}(u_1, u_2, u_3, u_4)$  η οποία διέρχεται από το  $\mathcal{D}(t, x, y, z)$ . Εδώ  $u_1 = t, u_2 = x, u_3 = y, u_4 = z$ . Αφού το  $d\mathcal{D}_{(t,x,y,z)}$  είναι αντιστρέψιμο, συμπεραίνουμε:

**Πρόταση 4.3.**

- i. Τα εφαπτόμενα διανυσματικά πεδία  $\mathcal{E}^{(1)}, \mathcal{E}^{(2)}, \mathcal{E}^{(3)}$  και  $\mathcal{E}^{(4)}$  είναι γραμμικά ανεξάρτητα για κάθε  $(t, x, y, z) \in U$ .
- ii. Για κάθε  $(t, x, y, z) \in U$ , τα εφαπτόμενα διανυσματικά πεδία  $\mathcal{E}^{(1)}, \mathcal{E}^{(2)}, \mathcal{E}^{(3)}$  και  $\mathcal{E}^{(4)}$  σχηματίζουν μια βάση για την εφαπτόμενη εικόνα του  $d\mathcal{D}_{(t,x,y,z)}$ . ■

**Ορισμός 4.3.** Για οποιοδήποτε λείο συστημικό διανυσματικό πεδίο  $\mathcal{f}: U \rightarrow \mathbb{R}^{l+5}$  ( $U$  ανοικτό στο  $\mathbb{R}^4 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ ) κατά μήκος της παραμετρικοποιημένης επιφάνειας  $\Sigma_D$  των σταθμισμένων συστημικών δεικτών για το σύστημα  $S$ , η **παράγωγος**

$$\nabla_u \mathcal{f} \in \mathbb{R}_{\mathcal{D}(t,x,y,z)}^{l+5}$$

του  $\mathcal{f}$  ως προς το  $u \in \mathbb{R}_{(t,x,y,z)}^4 ((t, x, y, z) \in U)$  ορίζεται από τη σχέση

$$\nabla_u \mathcal{f} = \left( \mathcal{D}(t, x, y, z), \frac{d}{d\tau} \Big|_{\tau_0} (d \circ \alpha) \right) = (\mathcal{D}(t, x, y, z), \nabla_u \mathcal{f}_1, \dots, \nabla_u \mathcal{f}_{l+5})$$

όπου

- $\mathcal{f} = (\mathcal{f}_1, \dots, \mathcal{f}_{l+5})$  είναι το διανυσματικό μέρος της  $\mathcal{f}(\mathcal{f}(q)) = (\mathcal{D}(q); \mathcal{f}_1(q), \dots, \mathcal{f}_{l+5}(q))$  για  $q \in U$  και
- $\alpha$  είναι οποιαδήποτε παραμετρικοποιημένη καμπύλη στο  $U$  με  $\dot{\alpha}(\tau_0) = u$ . ■

Παρατηρούμε πως όταν

$$u \in \{e_1 = ((t, x, y, z); 1, 0, 0, 0),$$

$$e_2 = ((t, x, y, z); 0, 1, 0, 0), e_3 = ((t, x, y, z); 0, 0, 1, 0), e_4 = ((t, x, y, z); 0, 0, 0, 1)\},$$

έχουμε:

$$\nabla_{e_1} \mathcal{f} = \left( \mathcal{D}(t, x, y, z); \frac{\partial \mathcal{f}}{\partial t}(t, x, y, z) \right) = \left( \mathcal{D}(t, x, y, z); \frac{\partial \mathcal{f}_1}{\partial t}(t, x, y, z), \dots, \frac{\partial \mathcal{f}_{l+5}}{\partial t}(t, x, y, z) \right),$$

$$\nabla_{e_2} \mathcal{f} = \left( \mathcal{D}(t, x, y, z); \frac{\partial \mathcal{f}}{\partial x}(t, x, y, z) \right) = \left( \mathcal{D}(t, x, y, z); \frac{\partial \mathcal{f}_1}{\partial x}(t, x, y, z), \dots, \frac{\partial \mathcal{f}_{l+5}}{\partial x}(t, x, y, z) \right),$$

$$\nabla_{e_3} \mathcal{f} = \left( \mathcal{D}(t, x, y, z); \frac{\partial \mathcal{f}}{\partial y}(t, x, y, z) \right) = \left( \mathcal{D}(t, x, y, z); \frac{\partial \mathcal{f}_1}{\partial y}(t, x, y, z), \dots, \frac{\partial \mathcal{f}_{l+5}}{\partial y}(t, x, y, z) \right)$$

και

$$\nabla_{e_4} \mathcal{f} = \left( \mathcal{D}(t, x, y, z); \frac{\partial \mathcal{f}}{\partial z}(t, x, y, z) \right) = \left( \mathcal{D}(t, x, y, z); \frac{\partial \mathcal{f}_1}{\partial z}(t, x, y, z), \dots, \frac{\partial \mathcal{f}_{l+5}}{\partial z}(t, x, y, z) \right).$$



#### IV.1.ii. Ασυνεχείς καθολικότητες των σταθμισμένων συστημικών δεικτών

Εκ κατασκευής, είναι αρκετά λογικό να δεχόμαστε ότι όλες οι συνιστώσες

$$D_S^{(1)} = D_S^{(1)} \left( P_{1/S}^{(1)}, \dots, P_{N_1/S}^{(1)}; t, x, y, z \right), \dots, D_S^{(l+1)} = D_S^{(l+1)} \left( P_{1/S}^{(l+1)}, \dots, P_{N_{l+1}/S}^{(l+1)}; t, x, y, z \right)$$

μίας καθολικότητας σταθμισμένων συστημικών δεικτών μέσα σε ένα προβλέψιμο σύστημα  $S$ , παραμένουν σταθερές για μεγάλα ή μικρά χρονικά διαστήματα και για μεγάλες ή μικρές περιοχές. Με άλλα λόγια, μπορούμε να υποθέτουμε ότι η χωροχρονική ιστορική φάση  $U$  διαμερίζεται σε διαφορετικές (κλειστές) περιοχές, κάθε μια συσχετισμένη με μια διαφορετική σταθερή έκφραση των συστημικών δεικτών, έτσι ώστε να υπάρχουν

- μια πεπερασμένη διαμέριση

$$\{\bar{U}_i: U_i \text{ είναι μη κενός ανοικτός υπόχωρος του } U \text{ και } i = 1, 2, \dots, I\}$$

του  $U$ , τέτοια ώστε

$$U_i \cap U_{i'} = \emptyset \text{ για κάθε } i \neq i' \text{ και}$$

- ένα πεπερασμένο σύνολο σταθερών διανυσμάτων

$$c^{(i)} = (c_1^{(i)}, \dots, c_{l+1}^{(i)}) \text{ στο } \mathbb{R}^{l+1}, i = 1, 2, \dots, I,$$

τέτοιων ώστε

$$\left( D_S^{(1)} \left( P_{1/S}^{(1)}, \dots, P_{N_1/S}^{(1)}; t, x, y, z \right), \dots, D_S^{(l+1)} \left( P_{1/S}^{(l+1)}, \dots, P_{N_{l+1}/S}^{(l+1)}; t, x, y, z \right) \right) = (c_1^{(i)}, \dots, c_{l+1}^{(i)})$$

για οποιαδήποτε  $(t, x, y, z) \in U_i$ .

Η τομή  $Y_{i,i'} := \bar{U}_i \cap \bar{U}_{i'}$  των κλειστών θηκών των συνόλων  $U_i$  και  $U_{i'}$  είναι είτε μια 3-διάστατη πολλαπλότητα στα όρια των  $\partial U_i$  και  $\partial U_{i'}$ , είτε ένα κενό σύνολο. Το σύνολο  $Y_{i,i'}$  ονομάζεται **συστημικό σύνορο ασυνέχειας**.

## IV.2. Συστημικές Μετρήσεις

### IV.2.i. Αποκλίσεις συστημικών μετρήσεων

Έστω  $U$  ένα μη κενό υποσύνολο του  $\mathbb{R}^4 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$  που απεικονίζει μια χωροχρονική ιστορική φάση. Ας θεωρήσουμε τώρα μια συστημική μέτρηση  $\mathfrak{M}_{\mathcal{F}}$  μεγέθους  $K + 1$  στο  $U$ . Αυτό σημαίνει ότι έχει επιλεγεί μια συγκεκριμένη διαδικασία  $\mathcal{F}$  μέσω της οποίας κάθε πραγματική τιμή  $g_S^{(j)} = g_S^{(j)}(P_{1/S}^{(j)}, \dots, P_{N_j/S}^{(j)}; t, x, y, z)$  αντιστοιχεί σε  $K + 1$  αριθμούς

$$\mathcal{F}\left(g_S^{(j)}\left(P_{1/S}^{(1)}, \dots, P_{N_j/S}^{(1)}; t_1, x_1, y_1, z_1\right)\right), \dots, \mathcal{F}\left(g_S^{(j)}\left(P_{1/S}^{(1)}, \dots, P_{N_j/S}^{(1)}; t_{K+1}, x_{K+1}, y_{K+1}, z_{K+1}\right)\right)$$

όπου  $(t_k, x_k, y_k, z_k)$  είναι σε ένα δοθέν διακριτό σύνολο  $E_{K+1} = \{(t_k, x_k, y_k, z_k) \in U, k = 1, 2, \dots, K + 1\}$  με πληθικότητα  $K + 1$ . Αν γράψουμε

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(t_k, x_k, y_k, z_k) &\equiv \left(\mathcal{F}_k^{(1)}(t_k, x_k, y_k, z_k), \dots, \mathcal{F}_k^{(l+1)}(t_k, x_k, y_k, z_k)\right) \\ &:= \left(\mathcal{F}\left(g_S^{(1)}\left(P_{1/S}^{(1)}, \dots, P_{N_j/S}^{(1)}; t_k, x_k, y_k, z_k\right)\right), \dots, \mathcal{F}\left(g_S^{(l+1)}\left(P_{1/S}^{(l+1)}, \dots, P_{N_j/S}^{(l+1)}; t_k, x_k, y_k, z_k\right)\right)\right), \end{aligned}$$

τότε η συστημική μέτρηση  $\mathfrak{M}_{\mathcal{F}}$  μπορεί να εκλαμβάνεται ως μια απεικόνιση η οποία εκφράζεται μέσω της ακόλουθης μορφής

$$\mathfrak{M}_{\mathcal{F}}: E_{K+1} \rightarrow \mathbb{G}(S): (t_k, x_k, y_k, z_k) \mapsto (t_k, x_k, y_k, z_k, \mathcal{F}_k^{(1)}, \dots, \mathcal{F}_k^{(l+1)}).$$

**Ορισμός 4.4.** Υποθέτουμε πως ο χώρος  $\mathbb{G}(S)$  είναι εφοδιασμένος με την μετρική  $dist$ , η επιλογή της οποίας μπορεί να εξαρτάται από την μοντελοποίηση ή τη φύση του εκάστοτε προβλήματος.

i. Η συνάρτηση

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_*: E_{K+1} &\rightarrow \mathbb{R}: (t_k, x_k, y_k, z_k) \mapsto \mathcal{W}_*(t_k, x_k, y_k, z_k) \\ &:= dist\left(\tilde{\beta}(t_k, x_k, y_k, z_k), \mathcal{F}(t_k, x_k, y_k, z_k)\right) \end{aligned}$$

είναι η **απόκλιση της συστημικής μέτρησης από το χαμηλότερο όριο κανονικότητας στα σημεία του  $E_{K+1}$**

ii. Η συνάρτηση

$$\begin{aligned} \mathcal{W}^*: E_{K+1} &\rightarrow \mathbb{R}: (t_k, x_k, y_k, z_k) \mapsto \mathcal{W}^*(t_k, x_k, y_k, z_k) \\ &:= dist\left(\beta(t_k, x_k, y_k, z_k), \mathcal{F}(t_k, x_k, y_k, z_k)\right) \end{aligned}$$

είναι η **απόκλιση της συστημικής μέτρησης από το υψηλότερο όριο κανονικότητας στα σημεία του  $E_{K+1}$ .**

iii. Στην οριακή περίπτωση κατά την οποία  $\tilde{\beta}_S^{(j)} = \beta_S^{(j)} = D_S^{(j)}$  ( $\forall j = 1, 2, \dots, l+1$ ), η συνάρτηση

$$\mathcal{W}: E_{K+1} \rightarrow \mathbb{R}: (t_k, x_k, y_k, z_k) \mapsto \mathcal{W}(t_k, x_k, y_k, z_k) := \text{dist}(\mathcal{D}(t_k, x_k, y_k, z_k), \mathcal{F}(t_k, x_k, y_k, z_k))$$

είναι η **απόκλιση της συστημικής μέτρησης από το σημείο κανονικότητας του συστήματος  $S$  στα σημεία του  $E_{K+1}$** . ■

Αφού το  $U$  είναι ένας διαχωρίσιμος τοπολογικός χώρος, είναι δυνατό να επιλέξουμε μια ακολουθία  $\dots \subsetneq E_K \subsetneq E_{K+1} \subsetneq E_{K+2} \subsetneq \dots$  από πεπερασμένα σύνολα στοιχείων του  $U$ , τέτοια ώστε

- η ένωσή τους  $E = \bigcup_{K=1}^{\infty} E_{K+1}$  είναι πυκνή στο  $U$  και
- το  $E_{K+1}$  να περιέχει μόνο ένα στοιχείο περισσότερο από το  $E_K$ , ας πούμε

$$(t_{K+1}, x_{K+1}, y_{K+1}, z_{K+1}).$$

Επομένως για κάθε  $(t, x, y, z) \in U$ , υπάρχει μια καλά ορισμένη ακολουθία

$$((t_{K+1}, x_{K+1}, y_{K+1}, z_{K+1}) \in E_{K+1})_{K=1,2,\dots}$$

τέτοια ώστε  $(t, x, y, z) = \lim_{K+1 \rightarrow \infty} (t_{K+1}, x_{K+1}, y_{K+1}, z_{K+1})$ . Ορίζοντας

$$\underline{\mathcal{F}}^{(j)}(t, x, y, z) := \liminf_{K+1 \rightarrow \infty} \mathcal{F} \left( g_S^{(j)} \left( P_{1/S}^{(j)}, \dots, P_{N_j/S}^{(j)}; t_{K+1}, x_{K+1}, y_{K+1}, z_{K+1} \right) \right) \quad (j = 1, 2, \dots, l+1)$$

και

$$\overline{\mathcal{F}}^{(j)}(t, x, y, z) := \limsup_{K+1 \rightarrow \infty} \mathcal{F} \left( g_S^{(j)} \left( P_{1/S}^{(j)}, \dots, P_{N_j/S}^{(j)}; t_{K+1}, x_{K+1}, y_{K+1}, z_{K+1} \right) \right) \quad (j = 1, 2, \dots, l+1),$$

Είναι σαφές ότι τα  $\underline{\mathcal{F}}^{(j)}$  και  $\overline{\mathcal{F}}^{(j)}$  μπορούν να θεωρηθούν ως δυο διαδικασίες μέσω των οποίων η πραγματική τιμή  $g_S^{(j)} = g_S^{(j)} \left( P_{1/S}^{(j)}, \dots, P_{N_j/S}^{(j)}; t, x, y, z \right)$  αντιστοιχεί σε 2 πραγματικούς αριθμούς  $\underline{\mathcal{F}}^{(j)}(t, x, y, z)$  και  $\overline{\mathcal{F}}^{(j)}(t, x, y, z)$ , αντίστοιχα, για  $(t, x, y, z) \in U$ .

#### Ορισμός 4.5.

i. Οι απεικονίσεις

$$\underline{\mathcal{F}}: U \rightarrow \mathbb{G}(S) \equiv \mathbb{R}^{l+5}: (t, x, y, z) \mapsto \left( t, x, y, z; \left( \underline{\mathcal{F}}^{(1)}(t, x, y, z), \dots, \underline{\mathcal{F}}^{(l+1)}(t, x, y, z) \right) \right) \text{ και}$$

$$\overline{\mathcal{F}}: U \rightarrow \mathbb{G}(S) \equiv \mathbb{R}^{l+5}: (t, x, y, z) \mapsto \left( t, x, y, z; \left( \overline{\mathcal{F}}^{(1)}(t, x, y, z), \dots, \overline{\mathcal{F}}^{(l+1)}(t, x, y, z) \right) \right)$$

ονομάζονται αντίστοιχα, **το κάτω και το άνω τμήμα της συστημικής μέτρησης  $\mathfrak{M}_{\mathcal{F}}$  για το προβλέψιμο σύστημα  $S$  υπεράνω του  $U$** .

ii. Αν το σύνολο  $U$  είναι ανοικτό στο  $\mathbb{R}^4$  και οι δύο απεικονίσεις  $\mathcal{F}_*$  και  $\mathcal{F}^*$  είναι λείες και κανονικές στο  $U$ , δηλαδή τα διαφορικά  $d\mathcal{F}_{(t,x,y,z)}$  και  $d\overline{\mathcal{F}}_{(t,x,y,z)}$  είναι αντιστρέψιμα (:είναι τάξης 4) για κάθε  $(t, x, y, z) \in U$ , τότε

- a.  $\mathcal{F} = \overline{\mathcal{F}} =: \tilde{\mathcal{F}}$  και η  $\tilde{\mathcal{F}}(t, x, y, z) = (\tilde{\mathcal{F}}^{(1)}(t, x, y, z), \dots, \tilde{\mathcal{F}}^{(l+1)}(t, x, y, z))$  λέγεται **λεία και κανονική προέκταση της συστημικής μέτρησης  $\mathfrak{M}_{\mathcal{F}}$  για το προβλέψιμο σύστημα  $S$  υπεράνω του  $U$** .
- b. Η εικόνα  $\Sigma_{\tilde{\mathcal{F}}} =: \tilde{\mathcal{F}}(U)$  της  $\tilde{\mathcal{F}}$  είναι μια **παραμετρικοποιημένη επιφάνεια της συστημικής μέτρησης  $\mathfrak{M}_{\mathcal{F}}$  για το προβλέψιμο σύστημα  $S$  υπεράνω του  $U$** . ■

Αναλογικά, ορίζοντας

$$\overline{\mathcal{W}}_*(t, x, y, z) := \limsup_{K+1 \rightarrow \infty} \mathcal{W}_*(t_{K+1}, x_{K+1}, y_{K+1}, z_{K+1}),$$

$$\underline{\mathcal{W}}_*(t, x, y, z) := \liminf_{K+1 \rightarrow \infty} \mathcal{W}_*(t_{K+1}, x_{K+1}, y_{K+1}, z_{K+1})$$

και

$$\overline{\mathcal{W}}^*(t, x, y, z) := \limsup_{K+1 \rightarrow \infty} \mathcal{W}^*(t_{K+1}, x_{K+1}, y_{K+1}, z_{K+1}),$$

$$\underline{\mathcal{W}}^*(t, x, y, z) := \liminf_{K+1 \rightarrow \infty} \mathcal{W}^*(t_{K+1}, x_{K+1}, y_{K+1}, z_{K+1}),$$

είναι προφανές ότι τα  $\overline{\mathcal{W}}_*(t, x, y, z)$ ,  $\underline{\mathcal{W}}_*(t, x, y, z)$ ,  $\overline{\mathcal{W}}^*(t, x, y, z)$  και  $\underline{\mathcal{W}}^*(t, x, y, z)$  είναι τέσσερις συναρτήσεις που περιγράφουν τις αποστάσεις, από τη μια μεριά, μεταξύ των  $\mathcal{F}(t, x, y, z)$  και  $\overline{\mathcal{F}}(t, x, y, z)$  και από την άλλη μεριά, των κατώτερων και ανώτερων ορίων κανονικότητας  $\tilde{\beta}(t, x, y, z)$  και  $\beta(t, x, y, z)$  αντίστοιχα για κάθε σημείο  $(t, x, y, z) \in U$ . Πιο συγκεκριμένα καταλήγουμε στον επόμενο ορισμό.

**Ορισμός 4.6.**

i. Η συνάρτηση

$$\underline{\mathcal{W}}^*: U \rightarrow \mathbb{R}: (t, x, y, z) \mapsto \underline{\mathcal{W}}^*(t, x, y, z) := \text{dist}(\tilde{\beta}(t, x, y, z), \overline{\mathcal{F}}(t, x, y, z))$$

είναι η **άνω απόκλιση της συστημικής μέτρησης στα σημεία του  $U$  από το κατώτερο όριο κανονικότητας** υπεράνω του προβλέψιμου συστήματος  $S$ .

ii. Η συνάρτηση

$$\underline{\mathcal{W}}_*: U \rightarrow \mathbb{R}: (t, x, y, z) \mapsto \underline{\mathcal{W}}_*(t, x, y, z) := \text{dist}(\tilde{\beta}(t, x, y, z), \mathcal{F}(t, x, y, z))$$

είναι η **κάτω απόκλιση της συστημικής μέτρησης στα σημεία του  $U$  από το κατώτερο όριο κανονικότητας** υπεράνω του προβλέψιμου συστήματος  $S$ .

iii. Η συνάρτηση

$$\overline{\mathcal{W}}^*: U \rightarrow \mathbb{R}: (t, x, y, z) \mapsto \overline{\mathcal{W}}^*(t, x, y, z) := \text{dist}(\beta(t, x, y, z), \overline{\mathcal{F}}(t, x, y, z))$$

είναι η **άνω απόκλιση της συστημικής μέτρησης στα σημεία του  $U$  από το ανώτερο όριο κανονικότητας** υπεράνω του προβλέψιμου συστήματος  $S$ .

iv. Η συνάρτηση

$$\overline{\mathcal{W}}_*: U \rightarrow \mathbb{R}: (t, x, y, z) \mapsto \overline{\mathcal{W}}_*(t, x, y, z) := \text{dist}(\beta(t, x, y, z), \underline{\mathcal{F}}(t, x, y, z))$$

είναι η **κάτω απόκλιση της συστημικής μέτρησης στα σημεία του  $U$  από το ανώτερο όριο κανονικότητας** υπεράνω του προβλέψιμου συστήματος  $S$ . ■

Στην οριακή περίπτωση κατά την οποία συμβαίνει

$$\tilde{\beta}_S^{(j)} = \beta_S^{(j)} = D_S^{(j)} \text{ για } j = 1, 2, \dots, l + 1,$$

τότε

$$\underline{\mathcal{W}}^* \equiv \overline{\mathcal{W}}^* =: \mathcal{W}^* \text{ και } \underline{\mathcal{W}}_* \equiv \overline{\mathcal{W}}_* =: \mathcal{W}_*.$$

Σε μια τέτοια περίπτωση βλέπουμε ότι η συνάρτηση  $\mathcal{W}^*(t, x, y, z)$  ισούται με την απόσταση  $\text{dist}(\overline{\mathcal{F}}(t, x, y, z), \mathcal{D}(t, x, y, z))$  ανάμεσα στο **άνω τμήμα  $\overline{\mathcal{F}}(t, x, y, z)$  της συστημικής μέτρησης  $\mathfrak{M}_{\mathcal{F}}$  και της καθολικότητας  $\mathcal{D}(t, x, y, z)$  των σταθμισμένων συστημικών δεικτών σε ένα σύστημα  $S$  υπεράνω του  $U$** . Ομοίως, στην περίπτωση αυτή, η συνάρτηση  $\mathcal{W}_*(t, x, y, z)$  ισούται με την απόσταση  $\text{dist}(\underline{\mathcal{F}}(t, x, y, z), \mathcal{D}(t, x, y, z))$  ανάμεσα στο **κάτω τμήμα  $\underline{\mathcal{F}}(t, x, y, z)$  της συστημικής μέτρησης  $\mathfrak{M}_{\mathcal{F}}$  και της καθολικότητας  $\mathcal{D}(t, x, y, z)$  των σταθμισμένων συστημικών δεικτών σε ένα σύστημα  $S$  υπεράνω του  $U$** .

#### Ορισμός 4.7.

i. Η συνάρτηση

$$\mathcal{W}^*: U \rightarrow \mathbb{R}: (t, x, y, z) \mapsto \mathcal{W}^*(t, x, y, z) := \text{dist}(\mathcal{D}(t, x, y, z), \overline{\mathcal{F}}(t, x, y, z))$$

είναι η **άνω απόκλιση της συστημικής μέτρησης στα σημεία του  $U$  από τους σταθμισμένους συστημικούς δείκτες** υπεράνω του προβλέψιμου συστήματος  $S$ .

ii. Η συνάρτηση

$$\mathcal{W}_*: U \rightarrow \mathbb{R}: (t, x, y, z) \mapsto \mathcal{W}_*(t, x, y, z) := \text{dist}(\mathcal{D}(t, x, y, z), \underline{\mathcal{F}}(t, x, y, z))$$

είναι η **κάτω απόκλιση της συστημικής μέτρησης στα σημεία του  $U$  από τους σταθμισμένους συστημικούς δείκτες** υπεράνω του προβλέψιμου συστήματος  $S$ . ■

## IV.2.ii. Λείες παραμετρικοποιημένες επιφάνειες συστημικών μετρήσεων

Αν  $U$  είναι ένα μη κενό ανοιχτό υποσύνολο του  $\mathbb{R}^4$  και αν η απεικόνιση  $\tilde{\mathcal{F}}: U \rightarrow \mathbb{R}^{l+5}$  υπάρχει και είναι ομαλώς κανονική επέκταση της συστημικής μέτρησης  $\mathfrak{M}_{\mathcal{F}}$  για ένα προβλέψιμο σύστημα  $S$  στο  $U$ , το διαφορικό της  $\tilde{\mathcal{F}}$  είναι η ομαλή απεικόνιση  $d\tilde{\mathcal{F}}: U \times \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^{l+5} \times \mathbb{R}^{l+5}$  που ορίζεται ως εξής.

Ένα σημείο  $v \in U \times \mathbb{R}^4$  είναι ένα διάνυσμα  $v = ((t, x, y, z), u)$  σε ένα σημείο  $(t, x, y, z) \in U$ . Έστω  $\alpha: I \rightarrow U$  μια παραμετρικοποιημένη καμπύλη στο  $U$  με  $\dot{\alpha}(t_0) = v$ . Τότε το  $d\tilde{\mathcal{F}}(v)$  είναι το διάνυσμα στο  $\tilde{\mathcal{F}}(t, x, y, z)$  ( $d\tilde{\mathcal{F}}(v) \in R_{\tilde{\mathcal{F}}(t, x, y, z)}^{l+5} \subset \mathbb{R}^{l+5} \times \mathbb{R}^{l+5}$ ) που ορίζεται από την σχέση  $d\tilde{\mathcal{F}}(v) = \tilde{\mathcal{F}} \circ \dot{\alpha}(t_0)$ . Σημειώνεται ότι η τιμή του  $d\tilde{\mathcal{F}}(v)$  δεν εξαρτάται από την επιλογή του  $\alpha$ , γιατί

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{F}} \circ \dot{\alpha}(t_0) &= \left( \tilde{\mathcal{F}} \circ \alpha(t_0), (\tilde{\mathcal{F}}_S^{(1)} \circ \alpha)'(t_0), \dots, (\tilde{\mathcal{F}}_S^{(l+1)} \circ \alpha)'(t_0) \right) \\ &= \left( \tilde{\mathcal{F}}(t, x, y, z), \nabla \tilde{\mathcal{F}}_S^{(1)}(\alpha(t_0)) \cdot \dot{\alpha}(t_0), \dots, \nabla \tilde{\mathcal{F}}_S^{(l+1)}(\alpha(t_0)) \cdot \dot{\alpha}(t_0) \right) \\ &= \left( \tilde{\mathcal{F}}(t, x, y, z), \nabla \tilde{\mathcal{F}}_S^{(1)}(t, x, y, z) \cdot v, \dots, \nabla \tilde{\mathcal{F}}_S^{(l+1)}(t, x, y, z) \cdot v \right). \end{aligned}$$

Επομένως

$$d\tilde{\mathcal{F}}(v) = \left( \tilde{\mathcal{F}}(t, x, y, z), \nabla_v \tilde{\mathcal{F}}_S^{(1)}, \dots, \nabla_v \tilde{\mathcal{F}}_S^{(l+1)} \right).$$

Ακολουθεί αμέσως ότι ο περιορισμός  $d\tilde{\mathcal{F}}_{(t, x, y, z)}$  του  $d\tilde{\mathcal{F}}$  στο  $\mathbb{R}_{(t, x, y, z)}^4$  (: των διανυσμάτων  $(t, x, y, z)$ ) είναι μια γραμμική απεικόνιση  $d\tilde{\mathcal{F}}_{(t, x, y, z)}: \mathbb{R}_{(t, x, y, z)}^4 \rightarrow \mathbb{R}_{\tilde{\mathcal{F}}(t, x, y, z)}^{l+5}$ . Ο πίνακας που σχετίζεται με τις τυποποιημένες βάσεις των  $\mathbb{R}_{(t, x, y, z)}^4$  και  $\mathbb{R}_{\tilde{\mathcal{F}}(t, x, y, z)}^{l+5}$  είναι ο Ιακωβιανός πίνακας της  $\tilde{\mathcal{F}}$  στο  $(t, x, y, z)$ . Έτσι, η κατάσταση κανονικότητας της  $\tilde{\mathcal{F}}$  εξασφαλίζει ότι:

**Πρόταση 4.4.** Η εικόνα  $d\tilde{\mathcal{F}}_{(t, x, y, z)}(\mathbb{R}_{(t, x, y, z)}^4)$  του  $d\tilde{\mathcal{F}}_{(t, x, y, z)}$  είναι ένας 4-διαστατος υπόχωρος του  $\mathbb{R}_{\tilde{\mathcal{F}}(t, x, y, z)}^{l+5}$  για κάθε  $(t, x, y, z) \in U$ . Επιπλέον, η εικόνα αυτή είναι ο εφαπτόμενος χώρος στην παραμετρικοποιημένη υπερεπιφάνεια  $\Sigma_{\tilde{\mathcal{F}}} = \tilde{\mathcal{F}}(U)$  διάστασης 4 στον χώρο των σταθμισμένων συστημικών δεικτών  $\mathbb{G}(S)$  που αντιστοιχεί στο σημείο  $(t, x, y, z)$ . ■

Σημειώνεται ότι η παραμετρικοποιημένη επιφάνεια  $\tilde{\mathcal{F}}(U)$  διάστασης 4 στο χώρο σταθμισμένων συστημικών δεικτών  $\mathbb{G}(S) \equiv \mathbb{R}^{l+5}$  δεν χρειάζεται να είναι ένα προς ένα και ότι η σχέση  $\tilde{\mathcal{F}}(t, x, y, z) = \tilde{\mathcal{F}}(t', x', y', z')$  για  $(t, x, y, z) \neq (t', x', y', z')$  δεν σημαίνει απαραίτητα ότι η εικόνα  $d\tilde{\mathcal{F}}_{(t, x, y, z)}(\mathbb{R}_{(t, x, y, z)}^4)$  του  $d\tilde{\mathcal{F}}_{(t, x, y, z)}$  είναι ίση με την εικόνα  $d\tilde{\mathcal{F}}_{(t', x', y', z')}(\mathbb{R}_{(t', x', y', z')}^4)$  του  $d\tilde{\mathcal{F}}_{(t', x', y', z')}$ .

Ένα **συστημικό διανυσματικό πεδίο κατά μήκος της παραμετρικοποιημένης επιφάνειας**  $\Sigma_{\tilde{\mathcal{F}}}$  της συστημικής μέτρησης  $\mathbb{M}_{\mathcal{F}}$  για το σύστημα  $S$  υπεράνω του  $U$  είναι μια απεικόνιση  $\tilde{f} = (\tilde{\mathcal{F}}; \tilde{f}_1, \dots, \tilde{f}_{l+5})$  η οποία εκχωρεί σε κάθε σημείο  $p = (t, x, y, z) \in U$  ένα διάνυσμα  $\tilde{f}(p) \in \mathbb{R}_{\tilde{\mathcal{F}}(t,x,y,z)}^{l+5}$ . Η μελέτη των συστημικών διανυσματικών πεδίων κατά μήκος της παραμετρικοποιημένης επιφάνειας  $\Sigma_{\tilde{\mathcal{F}}}$  χρειάζεται τη θεώρηση μερικών συμπληρωματικών εννοιών.

**Ορισμός 4.8.** Έστω

$$\tilde{f}: U \rightarrow \mathbb{R}^{l+5}; p = (t, x, y, z) \mapsto \tilde{f}(p) = (\tilde{\mathcal{F}}(p); \tilde{f}_1, \dots, \tilde{f}_{l+5}) \in \mathbb{R}_{\tilde{\mathcal{F}}(t,x,y,z)}^{l+5}$$

ένα συστημικό διανυσματικό πεδίο κατά μήκος της παραμετρικοποιημένης επιφάνειας  $\Sigma_{\tilde{\mathcal{F}}}$ .

i. Θα λέμε ότι το  $\tilde{f} = (\tilde{\mathcal{F}}; \tilde{f}_1, \dots, \tilde{f}_{l+5})$  είναι **λείο**, αν κάθε συντεταγμένη  $\tilde{f}_j: U \rightarrow \mathbb{R}$  είναι λεία ( $j = 1, 2, \dots, l+5$ ).

ii. Θα λέμε ότι το  $\tilde{f}$  είναι **εφαπτόμενο στην παραμετρικοποιημένη επιφάνεια**  $\Sigma_{\tilde{\mathcal{F}}}$  των **σταθμισμένων συστημικών δεικτών** για το  $S$  υπεράνω του  $U$  αν είναι της μορφής

$$\tilde{f}(p) = d\tilde{\mathcal{F}}_{(t,x,y,z)}(\psi(p))$$

για κάποιο  $\psi$  στο  $U$ .

iii. Θα λέμε ότι το  $\tilde{f}$  είναι **φυσιολογικό στην παραμετρικοποιημένη επιφάνεια**  $\Sigma_{\tilde{\mathcal{F}}}$  της συστημικής μέτρησης  $\mathbb{M}_{\mathcal{F}}$  για το  $S$  υπεράνω του  $U$  αν

$$\tilde{f}(p) \perp \text{Eικονα}[d\tilde{\mathcal{F}}_{(t,x,y,z)}] \text{ για κάθε } (t, x, y, z) \in U. \blacksquare$$

Ας δώσουμε μια γενίκευση της έννοιας του πεδίου ταχύτητας στην περίπτωση ενός συστημικού διανυσματικού πεδίου κατά μήκος της παραμετρικοποιημένη επιφάνειας  $\Sigma_{\tilde{\mathcal{F}}}$  της συστημικής μέτρησης  $\mathbb{M}_{\mathcal{F}}$  για το  $S$  υπεράνω του  $U$ . Έστω ότι με  $\mathcal{G}^{(1)}, \mathcal{G}^{(2)}, \mathcal{G}^{(3)}$  και  $\mathcal{G}^{(4)}$  συμβολίζουμε τα εφαπτόμενα διανυσματικά πεδία κατά μήκος της παραμετρικοποιημένης επιφάνειας  $\Sigma_{\tilde{\mathcal{F}}}$  ορισμένα από τη σχέση

$$\mathcal{G}^{(i)}(t, x, y, z) = d\tilde{\mathcal{F}}_{(t,x,y,z)}((t, x, y, z); 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$$

όπου το 1 βρίσκεται στην  $(i+1)$  θέση ( $i$  θέσεις μετά το  $(t, x, y, z) \in U$ ).

**Πρόταση 4.5.** Οι συνιστώσες των  $\mathcal{G}^{(i)}(t, x, y, z)$  είναι απλώς οι τιμές της  $i$ -οστής στήλης του Ιακωβιανού πίνακα για το  $\tilde{\mathcal{F}}$  στο  $(t, x, y, z) \in U$ .  $\blacksquare$

Σημειώνεται ότι το  $\mathcal{G}^{(i)}(t, x, y, z)$  είναι απλά η **διανυσματική ταχύτητα** στο  $(t, x, y, z) \in U$  της προσανατολισμένης καμπύλης  $u_i \mapsto \tilde{\mathcal{F}}(u_1, u_2, u_3, u_4)$  που διέρχεται από το  $\tilde{\mathcal{F}}(t, x, y, z)$ . Εδώ  $u_1 = t, u_2 = x, u_3 = y, u_4 = z$ . Αφού το  $d\tilde{\mathcal{F}}_{(t,x,y,z)}$  είναι αντιστρέψιμο, συμπεραίνουμε:

**Πρόταση 4.6.**

- i. Τα εφαπτόμενα διανυσματικά πεδία  $\mathcal{G}^{(1)}, \mathcal{G}^{(2)}, \mathcal{G}^{(3)}$  και  $\mathcal{G}^{(4)}$  είναι γραμμικά ανεξάρτητα για κάθε  $(t, x, y, z) \in U$ .
- ii. Για κάθε  $(t, x, y, z) \in U$ , τα εφαπτόμενα διανυσματικά πεδία  $\mathcal{G}^{(1)}, \mathcal{G}^{(2)}, \mathcal{G}^{(3)}$  και  $\mathcal{G}^{(4)}$  σχηματίζουν μια βάση για την εφαπτόμενη εικόνα του  $d\tilde{\mathcal{F}}_{(t,x,y,z)}$ . ■

**Ορισμός 4.9.** Για οποιοδήποτε λείο συστημικό διανυσματικό πεδίο  $\mathfrak{f}: U \rightarrow \mathbb{R}^{l+5}$  ( $U$  ανοιχτό σύνολο στο  $\mathbb{R}^4 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ ) κατά μήκος της παραμετρικοποιημένης επιφάνειας  $\Sigma_{\tilde{\mathcal{F}}}$  της συστημικής μέτρησης  $\mathfrak{M}_{\mathcal{F}}$  για το σύστημα  $S$ , η **παράγωγος**

$$\nabla_u \mathfrak{f} \in \mathbb{R}_{\tilde{\mathcal{F}}(t,x,y,z)}^{l+5}$$

του  $\mathfrak{f}$  ως προς το  $u \in \mathbb{R}_{(t,x,y,z)}^4 ((t, x, y, z) \in U)$  ορίζεται από τη σχέση

$$\nabla_u \mathfrak{f} = \left( \tilde{\mathcal{F}}(t, x, y, z), \frac{d}{d\tau} \Big|_{\tau_0} (\mathfrak{f} \circ \alpha) \right) = (\tilde{\mathcal{F}}(t, x, y, z), \nabla_u \mathfrak{f}_1, \dots, \nabla_u \mathfrak{f}_{l+5})$$

όπου

- $\mathfrak{f} = (\mathfrak{f}_1, \dots, \mathfrak{f}_{l+5})$  είναι το διανυσματικό μέρος της  $\mathfrak{f}(\mathfrak{q}) = (\tilde{\mathcal{F}}(\mathfrak{q}); \mathfrak{f}_1(\mathfrak{q}), \dots, \mathfrak{f}_{l+5}(\mathfrak{q}))$  για  $\mathfrak{q} \in U$  και
- $\alpha$  είναι οποιαδήποτε παραμετρικοποιημένη καμπύλη στο  $U$  με  $\dot{\alpha}(\tau_0) = u$ . ■

Παρατηρούμε πως όταν

$$u \in \{e_1 = ((t, x, y, z); 1, 0, 0, 0), \\ e_2 = ((t, x, y, z); 0, 1, 0, 0), e_3 = ((t, x, y, z); 0, 0, 1, 0), e_4 = ((t, x, y, z); 0, 0, 0, 1)\},$$

έχουμε:

$$\nabla_{e_1} \mathfrak{f} = \left( \tilde{\mathcal{F}}(t, x, y, z); \frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial t}(t, x, y, z) \right) = \left( \tilde{\mathcal{F}}(t, x, y, z); \frac{\partial \mathfrak{f}_1}{\partial t}(t, x, y, z), \dots, \frac{\partial \mathfrak{f}_{l+5}}{\partial t}(t, x, y, z) \right),$$

$$\nabla_{e_2} \mathfrak{f} = \left( \tilde{\mathcal{F}}(t, x, y, z); \frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial x}(t, x, y, z) \right) = \left( \tilde{\mathcal{F}}(t, x, y, z); \frac{\partial \mathfrak{f}_1}{\partial x}(t, x, y, z), \dots, \frac{\partial \mathfrak{f}_{l+5}}{\partial x}(t, x, y, z) \right),$$

$$\nabla_{e_3} \mathfrak{f} = \left( \tilde{\mathcal{F}}(t, x, y, z); \frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial y}(t, x, y, z) \right) = \left( \tilde{\mathcal{F}}(t, x, y, z); \frac{\partial \mathfrak{f}_1}{\partial y}(t, x, y, z), \dots, \frac{\partial \mathfrak{f}_{l+5}}{\partial y}(t, x, y, z) \right)$$

και

$$\nabla_{e_4} \mathfrak{f} = \left( \tilde{\mathcal{F}}(t, x, y, z); \frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial z}(t, x, y, z) \right) = \left( \tilde{\mathcal{F}}(t, x, y, z); \frac{\partial \mathfrak{f}_1}{\partial z}(t, x, y, z), \dots, \frac{\partial \mathfrak{f}_{l+5}}{\partial z}(t, x, y, z) \right).$$



## Κεφάλαιο V

# Απόσταση μεταξύ καθολικοτήτων των σταθμισμένων συστημικών δεικτών και μιας παραμετροποιημένης επιφάνειας που διέρχεται από τα σημεία μιας συστημικής μέτρησης

Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τα αποτελέσματα της μέτρησης για να προβλέψουμε ημερομηνίες και τοποθεσίες όπου θα συμβούν μελλοντικά γεγονότα σε προβλέψιμα συστήματα. Για το σκοπό αυτό, θα αρκούσε να κατασκευάσουμε τα κάτω και άνω τμήματα  $\underline{\mathcal{F}}$  και  $\overline{\mathcal{F}}$  μιας συστημικής μέτρησης  $\mathcal{M}_{\mathcal{F}}$  σε ένα προβλέψιμο σύστημα  $S$  και έπειτα να αναγνωρίσουμε τις τέσσερις συστημικές αποκλίσεις του Ορισμού 4.6, προκειμένου να διερευνηθεί αν κάποια από αυτές είναι μεγαλύτερη ή μικρότερη από τα δοσμένα αντίστοιχα επίπεδα ανοχής.

Για κάθε συστημικό χαρακτηριστικό  $j$  και κάθε  $t \in \mathbb{R}$ , ας θεωρήσουμε το **μήκος**  $\alpha_S^{(j)} = \beta_S^{(j)} - \tilde{\beta}_S^{(j)}$  του διαστήματος κανονικότητας  $[\tilde{\beta}_S^{(j)}, \beta_S^{(j)}]$ . Το σημείο  $\alpha = (\alpha_S^{(1)}, \dots, \alpha_S^{(l+1)})$  καλείται **διανυσματικό εύρος της κανονικότητας** του  $S$  σε χρόνο  $t$  και στην τοποθεσία  $(x, y, z)$ . Το συσχετισμένο υπερεπίπεδο που είναι ορθογώνιο επί του διανυσματικού εύρους  $\alpha$  διαιρεί τον χώρο  $\mathbb{R}^{\ell+1}$  σε δύο μέρη, στο  $\mathcal{P}_1 = \{z \in \mathbb{R}^{\ell+1} : \alpha^T z > 0\}$  που συμβατικά θα ονομάζεται **κάτω εστιακός ημιχώρος** και το  $\mathcal{P}_2 = \{z \in \mathbb{R}^{\ell+1} : \alpha^T z < 0\}$  που συμβατικά θα ονομάζεται **άνω εστιακός ημιχώρος**, έτσι ώστε αν  $z \in \mathcal{P}_1$ , τότε  $dist(\tilde{\beta}, z) < dist(\beta, z)$  και αν  $z \in \mathcal{P}_2$ , τότε  $dist(\tilde{\beta}, z) > dist(\beta, z)$ .

Είναι σαφές ότι **μόνο** τέσσερις περιπτώσεις μπορούν να συμβούν:

- i.  $\overline{\mathcal{F}}(t, x, y, z) \in \mathcal{P}_1$  και  $\underline{\mathcal{F}}(t, x, y, z) \in \mathcal{P}_2$  ή
- ii.  $\overline{\mathcal{F}}(t, x, y, z) \in \mathcal{P}_1$  και  $\underline{\mathcal{F}}(t, x, y, z) \in \mathcal{P}_1$  ή
- iii.  $\overline{\mathcal{F}}(t, x, y, z) \in \mathcal{P}_2$  και  $\underline{\mathcal{F}}(t, x, y, z) \in \mathcal{P}_1$  ή
- iv.  $\overline{\mathcal{F}}(t, x, y, z) \in \mathcal{P}_2$  και  $\underline{\mathcal{F}}(t, x, y, z) \in \mathcal{P}_2$ .

Στην πρώτη και την τρίτη περίπτωση, θα λέμε ότι η μέτρηση στο  $(t, x, y, z)$  έχει **δίκλαδη κατάληξη** και το  $(t, x, y, z)$  είναι ένα **σημείο με δίκλαδη τάση μέτρησης**. Στη δεύτερη περίπτωση, θα λέμε ότι η μέτρηση στο  $(t, x, y, z)$  είναι **καθοδική** και το  $(t, x, y, z)$  θα λέγεται **σημείο μέτρησης καθοδικής τάσης**, ενώ στην τέταρτη περίπτωση η μέτρηση στο  $(t, x, y, z)$  θα είναι **ανοδική** και το  $(t, x, y, z)$  θα είναι ένα **σημείο μέτρησης ανοδικής τάσης**.

**Ορισμός 5.1.** Έστω σαν

$$\begin{aligned}\tilde{\delta}_{critical}(t, x, y, z) &= \left( \tilde{\delta}_{critical}^{(1)}(t, x, y, z), \dots, \tilde{\delta}_{critical}^{(l+1)}(t, x, y, z) \right), \\ \tilde{\epsilon}_{critical}(t, x, y, z) &= \left( \tilde{\epsilon}_{critical}^{(1)}(t, x, y, z), \dots, \tilde{\epsilon}_{critical}^{(l+1)}(t, x, y, z) \right), \\ \delta_{critical}(t, x, y, z) &= \left( \delta_{critical}^{(1)}(t, x, y, z), \dots, \delta_{critical}^{(l+1)}(t, x, y, z) \right) \text{ και} \\ \epsilon_{critical}(t, x, y, z) &= \left( \epsilon_{critical}^{(1)}(t, x, y, z), \dots, \epsilon_{critical}^{(l+1)}(t, x, y, z) \right)\end{aligned}$$

οι κρίσιμες απεικονίσεις που αναπαριστούν τις αποστάσεις από το κατώτερο και το ανώτερο όριο κανονικότητας.

i. Έστω  $(\tau, x, y, z) \in U$  ένα **σημείο μέτρησης καθοδικής τάσης**.

- Αν  $0 < \max\{\underline{\mathcal{W}}_*(\tau, x, y, z), \underline{\mathcal{W}}^*(\tau, x, y, z)\} < \|\tilde{\delta}_{critical}(\tau, x, y, z)\|$ , τότε το σημείο  $(\tau, x, y, z)$  είναι ένα **δυναμικό σημείο επισφάλειας (εμφάνισης επισφαλούς γεγονότος)**, λόγω χαμηλής επίδοσης ή ανεπάρκειας.
- Αν  $\|\tilde{\delta}_{critical}(\tau, x, y, z)\| \leq \min\{\underline{\mathcal{W}}_*(\tau, x, y, z), \underline{\mathcal{W}}^*(\tau, x, y, z)\}$   
 $\leq \max\{\underline{\mathcal{W}}_*(\tau, x, y, z), \underline{\mathcal{W}}^*(\tau, x, y, z)\} < \|\tilde{\epsilon}_{critical}(\tau, x, y, z)\|$ ,  
 τότε το σημείο  $(\tau, x, y, z)$  είναι ένα **δυναμικό σημείο επικινδυνότητας (εμφάνισης επικίνδυνου γεγονότος)**, λόγω χαμηλής επίδοσης ή ανεπάρκειας.
- Αν  $\|\tilde{\epsilon}_{critical}(\tau, x, y, z)\| \leq \min\{\underline{\mathcal{W}}_*(\tau, x, y, z), \underline{\mathcal{W}}^*(\tau, x, y, z)\}$ , τότε το σημείο  $(\tau, x, y, z)$  είναι ένα **δυναμικό σημείο κατάρρευσης (εμφάνισης καταστροφικού γεγονότος)**, λόγω χαμηλής επίδοσης ή ανεπάρκειας.

ii. Έστω  $(\tau, x, y, z) \in U$  ένα **σημείο μέτρησης ανοδικής τάσης**.

- Αν  $0 < \max\{\overline{\mathcal{W}}_*(\tau, x, y, z), \overline{\mathcal{W}}^*(\tau, x, y, z)\} < \|\delta_{critical}(\tau, x, y, z)\|$ , τότε το σημείο  $(\tau, x, y, z)$  είναι ένα **δυναμικό σημείο επισφάλειας (εμφάνισης επισφαλούς γεγονότος)**, λόγω υψηλής επίδοσης ή λόγω υπερεπάρκειας.
- Αν  $\|\delta_{critical}(\tau, x, y, z)\| \leq \min\{\overline{\mathcal{W}}_*(\tau, x, y, z), \overline{\mathcal{W}}^*(\tau, x, y, z)\} \leq$   
 $\max\{\overline{\mathcal{W}}_*(\tau, x, y, z), \overline{\mathcal{W}}^*(\tau, x, y, z)\} < \|\epsilon_{critical}(\tau, x, y, z)\|$ ,

τότε το σημείο  $(t, x, y, z)$  είναι ένα **δυναμικό σημείο επικινδυνότητας** (εμφάνισης επικίνδυνου γεγονότος), λόγω υψηλής επίδοσης ή λόγω υπερεπάρκειας.

- Αν  $\|e_{critical}(t, x, y, z)\| \leq \min\{\overline{\mathcal{W}}_*(t, x, y, z), \overline{\mathcal{W}}^*(t, x, y, z)\}$ , τότε το σημείο  $(t, x, y, z)$  είναι ένα **δυναμικό σημείο κατάρρευσης** (εμφάνισης καταστροφικού γεγονότος), λόγω υψηλής επίδοσης ή λόγω υπερεπάρκειας

Στην πράξη μοιάζει αρκετές φορές δύσκολο να αναγνωριστούν τα κάτω και άνω τμήματα  $\underline{\mathcal{F}}$  και  $\overline{\mathcal{F}}$  μιας συστημικής μέτρησης  $\mathfrak{M}_{\mathcal{F}}$  για ένα προβλέψιμο σύστημα  $S$  υπεράνω ενός ανοικτού συνόλου  $U \subset \mathbb{R}^4$ . Ως εκ τούτου, στην παρούσα ενότητα θα προτιμήσουμε να αναζητήσουμε παραμετροποιημένες επιφάνειες οι οποίες διέρχονται αρκούντως πλησίον ή επί των αποτελεσμάτων της συστημικής μέτρησης, ώστε να εκτιμήσουμε τις αποκλίσεις μεταξύ των επιφανειών αυτών και της καθολικότητας των σταθμισμένων συστημικών δεικτών. Με αυτόν τον σκοπό δίνουμε τον ακόλουθο ορισμό.

**Ορισμός 5.2.** Εάν  $H: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{G}(S) \equiv \mathbb{R}^{l+5}: (t, x, y, z) \mapsto H(t, x, y, z)$  είναι μια παραμετροποιημένη επιφάνεια στον χώρο  $\mathbb{G}(S)$  των σταθμισμένων συστημικών δεικτών στο προβλέψιμο σύστημα  $S$ , τότε οι συναρτήσεις

$$\mathcal{V}_*: U \rightarrow \mathbb{R}: (t, x, y, z) \mapsto \mathcal{V}_*(t, x, y, z) := \text{dist}(\tilde{\beta}(t, x, y, z), H(t, x, y, z)) \text{ και}$$

$$\mathcal{V}^*: U \rightarrow \mathbb{R}: (t, x, y, z) \mapsto \mathcal{V}^*(t, x, y, z) := \text{dist}(\beta(t, x, y, z), H(t, x, y, z))$$

είναι αντίστοιχα οι αποκλίσεις της παραμετροποιημένης επιφάνειας  $H$  από το κατώτερο και από το ανώτερο όριο κανονικότητας στα σημεία του  $U$  υπεράνω του συστήματος  $S$ . Στην οριακή περίπτωση κατά την οποία  $\tilde{\beta} = \beta = \mathcal{D}$ , η συνάρτηση

$$\mathcal{V}: U \rightarrow \mathbb{R}: (t, x, y, z) \mapsto \mathcal{V}(t, x, y, z) := \text{dist}(\mathcal{D}(t, x, y, z), H(t, x, y, z))$$

ονομάζεται **απόκλιση της παραμετροποιημένης επιφάνειας  $H$  από την τιμή κανονικότητας του  $S$  στα σημεία του  $U$** . ■

**Ορισμός 5.3.** Έστω

$$\tilde{\delta}_{critical}(t, x, y, z) = \left( \tilde{\delta}_{critical}^{(1)}(t, x, y, z), \dots, \tilde{\delta}_{critical}^{(l+1)}(t, x, y, z) \right),$$

$$\tilde{\epsilon}_{critical}(t, x, y, z) = \left( \tilde{\epsilon}_{critical}^{(1)}(t, x, y, z), \dots, \tilde{\epsilon}_{critical}^{(l+1)}(t, x, y, z) \right),$$

$$\delta_{critical}(t, x, y, z) = \left( \delta_{critical}^{(1)}(t, x, y, z), \dots, \delta_{critical}^{(l+1)}(t, x, y, z) \right)$$

$$\epsilon_{critical}(t, x, y, z) = \left( \epsilon_{critical}^{(1)}(t, x, y, z), \dots, \epsilon_{critical}^{(l+1)}(t, x, y, z) \right)$$

οι κρίσιμες διανυσματικές τιμές που αναπαριστούν τις αποστάσεις από το κατώτερο μέχρι το ανώτερο όριο κανονικότητας. Έστω επίσης

$$H: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{G}(S) \equiv \mathbb{R}^{l+5}: (t, x, y, z) \mapsto H(t, x, y, z)$$

μια παραμετρικοποιημένη επιφάνεια στον χώρο  $\mathbb{G}(S)$  των σταθμισμένων συστημικών δεικτών στο προβλέψιμο σύστημα  $S$ .

i. Υποθέτουμε  $(\tau, x, y, z) \in U$  ένα σημείο τέτοιο ώστε το  $H(\tau, x, y, z)$  να είναι στον **κάτω εστιακό ημιχώρο**  $\mathcal{P}_1$ .

- Αν  $0 < \mathcal{V}_*(\tau, x, y, z) < \|\tilde{\delta}_{critical}(\tau, x, y, z)\|$ , τότε το σημείο  $(\tau, x, y, z)$  είναι ένα **δυναμικό σημείο επισφάλειας (εμφάνισης επισφαλούς γεγονότος)**, λόγω **χαμηλής επίδοσης ή ανεπάρκειας**.
- Αν  $\|\tilde{\delta}_{critical}(\tau, x, y, z)\| \leq \mathcal{V}_*(\tau, x, y, z) < \|\tilde{\epsilon}_{critical}(\tau, x, y, z)\|$ , τότε το σημείο  $(\tau, x, y, z)$  είναι ένα **δυναμικό σημείο επικινδυνότητας (εμφάνισης επικίνδυνου γεγονότος)**, λόγω **χαμηλής επίδοσης ή ανεπάρκειας**.
- Αν  $\|\tilde{\epsilon}_{critical}(\tau, x, y, z)\| \leq \mathcal{V}_*(\tau, x, y, z)$ , τότε το σημείο  $(\tau, x, y, z)$  είναι ένα **δυναμικό σημείο κατάρρευσης (εμφάνισης καταστροφικού γεγονότος)**, λόγω **χαμηλής επίδοσης ή ανεπάρκειας**.

ii. Υποθέτουμε  $(\tau, x, y, z) \in U$  ένα σημείο τέτοιο ώστε το  $H(\tau, x, y, z)$  να είναι στον **άνω εστιακό ημιχώρο**  $\mathcal{P}_2$ .

- Αν  $0 < \mathcal{V}^*(\tau, x, y, z) < \|\delta_{critical}(\tau, x, y, z)\|$ , τότε το σημείο  $(\tau, x, y, z)$  είναι ένα **δυναμικό σημείο επισφάλειας (εμφάνισης επισφαλούς γεγονότος)**, λόγω **υψηλής επίδοσης ή υπερεπάρκειας**.
- Αν  $\|\delta_{critical}(\tau, x, y, z)\| \leq \mathcal{V}^*(\tau, x, y, z) < \|\epsilon_{critical}(\tau, x, y, z)\|$ , τότε το σημείο  $(\tau, x, y, z)$  είναι ένα **δυναμικό σημείο επικινδυνότητας (εμφάνισης επικίνδυνου γεγονότος)**, λόγω **υψηλής επίδοσης ή υπερεπάρκειας**.
- Αν  $\|\epsilon_{critical}(\tau, x, y, z)\| \leq \mathcal{V}^*(\tau, x, y, z)$ , τότε το σημείο  $(\tau, x, y, z)$  είναι ένα **δυναμικό σημείο κατάρρευσης (εμφάνισης καταστροφικού γεγονότος)**, λόγω **υψηλής επίδοσης ή υπερεπάρκειας**.

Έχοντας ορίσει το απαραίτητο θεωρητικό υπόβαθρο, είμαστε πλέον έτοιμοι να αναζητήσουμε αριθμητικές ή προσεγγιστικές κατασκευές από παραμετρικοποιημένες επιφάνειες  $H_M$  που διέρχονται από  $M + 1$  αποτελέσματα συστημικών μετρήσεων στα σημεία ενός δοθέντος πεπερασμένου υποσυνόλου  $E$  του  $U$ , ώστε να προσδιορίσουμε τις αποκλίσεις μεταξύ των

επιφανειών αυτών και της καθολικότητας των σταθμισμένων συστημικών δεικτών για κάθε σημείο  $(t, x, y, z)$  του  $U \subset \mathbb{R}^4$ .

Θεωρούμε ότι

$$E_{K+1} = \{(t_v, x_v, y_v, z_v) \in [T_0, T_N] \times [X_0, X_N] \times [Y_0, Y_N] \times [Z_0, Z_N] \subset U : v = 0, 1, \dots, M\}$$

είναι ένα δοθέν πεπερασμένο σύνολο από  $M + 1$  διαφορετικά σημεία. Έστω επίσης  $k < M$ . Υποθέτουμε ότι, **για κάθε  $v = 0, 1, \dots, k$ , γνωρίζουμε τα αντίστοιχα σημεία μέτρησης**. Συγκεκριμένα, αυτό σημαίνει ότι για κάθε  $j = 1, 2, \dots, l + 1$  γνωρίζουμε τις τιμές της μέτρησης

$$f_j(t_v, x_v, y_v, z_v) = \mathcal{F} \left( g_S^{(j)} \left( P_{1/S}^{(1)}, \dots, P_{N_j/S}^{(1)}; t_v, x_v, y_v, z_v \right) \right)$$

του  $j$ -οστού συστημικού δείκτη  $g_S^{(j)} \left( P_{1/S}^{(j)}, \dots, P_{N_j/S}^{(j)}; t, x, y, z \right)$  σύμφωνα με τη συστημική μέτρηση  $\mathfrak{M}_{\mathcal{F}}$  στα  $k$  διακριτά σημεία  $t_v$ ,  $v = 0, 1, \dots, k$ .

Επιπρόσθετα, θεωρούμε ότι, **για κάθε  $v = k + 1, k + 2, \dots, M$ , το σημείο  $(t_v, x_v, y_v, z_v)$  είναι μία κατάσταση κανονικότητας**. Αυτό σημαίνει ότι για κάθε  $j = 1, 2, \dots, l + 1$  και  $v = k + 1, k + 2, \dots, M$ , η πραγματική τιμή  $g_S^{(j)} \left( P_{1/S}^{(j)}, \dots, P_{N_j/S}^{(j)}; t_v, x_v, y_v, z_v \right)$  συμπίπτει με την αριθμητική τιμή του μοναδικού σταθμισμένου συστημικού δείκτη

$$D_S^{(j)} = D_S^{(j)} \left( P_{1/S}^{(j)}, \dots, P_{N_j/S}^{(j)}; t_v, x_v, y_v, z_v \right)$$

του συστήματος  $S$  σε χρόνο  $t_v$  και τοποθεσία  $(x_v, y_v, z_v)$ .

Παρακάτω, θα διατυπώσουμε μια γενική προσεγγιστική μέθοδο για να προσδιορίσουμε χρονικά διαστήματα μέσα στην περιοχή  $]t_k, t_{k+1}[ \times ]x_k, x_{k+1}[ \times ]y_k, y_{k+1}[ \times ]z_k, z_{k+1}[$ , κατά τη διάρκεια των οποίων μπορούν να συμβούν στο σύστημα κάποια ιδιαίτερα γεγονότα.

#### Γενικό αλγοριθμικό πλαίσιο

**για τον προσδιορισμό του χρόνου και της τοποθεσίας εκδήλωσης  
ιδιαίτερων συστημικών γεγονότων**

1. Για κάθε  $j = 1, 2, \dots, l + 1$ , κατασκευάζουμε μια καλώς διαχειρίσιμη (well manageable) αριθμητική συνάρτηση

$$H_M^{(j)}(t, x, y, z)$$

η οποία διέρχεται πολύ κοντά από τις  $M + 1$  μετρημένες τιμές  $f_j(t_v, x_v, y_v, z_v)$  ( $v = 0, 1, \dots, k$ ).

2. Κατασκευάζουμε την παραμετρικοποιημένη επιφάνεια

$$H_M: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{G}(S) \equiv \mathbb{R}^{l+5}: (t, x, y, z) \mapsto H_M(t, x, y, z) \\ := \left( t, x, y, z, H_M^{(1)}(t, x, y, z), \dots, H_M^{(l+1)}(t, x, y, z) \right).$$

3. Επιλέγουμε τέσσερις συναρτήσεις κρίσιμης ανοχής

$$\tilde{\delta}_{critical}(t, x, y, z) = \left( \tilde{\delta}_{critical}^{(1)}(t, x, y, z), \dots, \tilde{\delta}_{critical}^{(l+1)}(t, x, y, z) \right), \\ \tilde{\epsilon}_{critical}(t, x, y, z) = \left( \tilde{\epsilon}_{critical}^{(1)}(t, x, y, z), \dots, \tilde{\epsilon}_{critical}^{(l+1)}(t, x, y, z) \right) \\ \delta_{critical}(t, x, y, z) = \left( \delta_{critical}^{(1)}(t, x, y, z), \dots, \delta_{critical}^{(l+1)}(t, x, y, z) \right) \text{ και} \\ \epsilon_{critical}(t, x, y, z) = \left( \epsilon_{critical}^{(1)}(t, x, y, z), \dots, \epsilon_{critical}^{(l+1)}(t, x, y, z) \right)$$

οι οποίες αναπαριστούν τις αποστάσεις από το κατώτερο και το ανώτερο όριο κανονικότητας.

4. Αν  $\tilde{\beta} = \beta = \mathbb{D}$ , τότε

i. **Βρίσκουμε** το σύνολο  $\mathbb{P}$  όλων των σημείων  $(\tau, x, y, z)$  που ικανοποιούν τις σχέσεις

$$t_k < \tau < t_{k+1}, \\ x_k < x < x_{k+1}, \\ y_k < y < y_{k+1} \text{ και} \\ z_k < z < z_{k+1}.$$

ii. **Λύνουμε** στο  $\mathbb{P}$  την ανισότητα

$$0 < \mathcal{V}(\tau, x, y, z) < \|\delta_{critical}(\tau, x, y, z)\|.$$

Κάθε σημείο  $(\tau, x, y, z)$  που ικανοποιεί αυτή την ανισότητα είναι ένα **δυναμικό σημείο εμφάνισης επισφαλούς γεγονότος** στο  $\mathbb{P}$ .

iii. **Λύνουμε** στο  $\mathbb{P}$  τις ανισότητες

$$\|\delta_{critical}(\tau, x, y, z)\| \leq \mathcal{V}(\tau, x, y, z) < \|\epsilon_{critical}(\tau, x, y, z)\|.$$

Κάθε σημείο  $(\tau, x, y, z)$  που ικανοποιεί αυτή την ανισότητα είναι ένα **δυναμικό σημείο εμφάνισης επικίνδυνου γεγονότος** στο  $\mathbb{P}$ .

iv. **Λύνουμε** στο  $\mathbb{P}$  την ανισότητα

$$\|\epsilon_{critical}(\tau, x, y, z)\| \leq \mathcal{V}(\tau, x, y, z).$$

Κάθε σημείο  $(\tau, x, y, z)$  που ικανοποιεί αυτή την ανισότητα είναι ένα **δυναμικό σημείο εμφάνισης καταστροφικού γεγονότος** στο  $\mathbb{P}$ .

5. Αλλιώς

- i. **Βρίσκουμε** το σύνολο  $\mathbb{P}_1$  όλων των σημείων  $(\tilde{\tau}, \tilde{\chi}, \tilde{\psi}, \tilde{\zeta}) \in \mathbb{R}^4$ , που ικανοποιούν το σύστημα ανισώσεων

$$\text{dist}(\tilde{\beta}, H_M(\tilde{\tau}, \tilde{\chi}, \tilde{\psi}, \tilde{\zeta})) < \text{dist}(\beta, H_M(\tau, \chi, \psi, \zeta))$$

$$t_k < \tilde{\tau} < t_{k+1},$$

$$x_k < \tilde{\chi} < x_{k+1},$$

$$y_k < \tilde{\psi} < y_{k+1} \text{ και}$$

$$z_k < \tilde{\zeta} < z_{k+1}.$$

- ii. **Λύνουμε** στο  $\mathbb{P}_1$  την ανισότητα

$$0 < \mathcal{V}_*(\tilde{\tau}, \tilde{\chi}, \tilde{\psi}, \tilde{\zeta}) < \|\tilde{\delta}_{critical}(\tilde{\tau}, \tilde{\chi}, \tilde{\psi}, \tilde{\zeta})\|.$$

Κάθε σημείο  $(\tilde{\tau}, \tilde{\chi}, \tilde{\psi}, \tilde{\zeta})$  που ικανοποιεί αυτή την ανισότητα είναι ένα **δυναμικό σημείο εμφάνισης επισφαλούς γεγονότος στο  $\mathbb{P}_1$** , λόγω χαμηλής επίδοσης ή ανεπάρκειας.

- iii. **Λύνουμε** στο  $\mathbb{P}_1$  τις ανισότητες

$$\|\tilde{\delta}_{critical}(\tilde{\tau}, \tilde{\chi}, \tilde{\psi}, \tilde{\zeta})\| \leq \mathcal{V}_*(\tilde{\tau}, \tilde{\chi}, \tilde{\psi}, \tilde{\zeta}) < \|\tilde{\epsilon}_{critical}(\tilde{\tau}, \tilde{\chi}, \tilde{\psi}, \tilde{\zeta})\|.$$

Κάθε σημείο  $(\tilde{\tau}, \tilde{\chi}, \tilde{\psi}, \tilde{\zeta})$  που ικανοποιεί αυτή την ανισότητα που ικανοποιεί αυτή την ανισότητα είναι ένα **δυναμικό σημείο εμφάνισης επικίνδυνου γεγονότος στο  $\mathbb{P}_1$** , λόγω χαμηλής επίδοσης ή ανεπάρκειας.

- iv. **Λύνουμε** στο  $\mathbb{P}_1$  την ανισότητα

$$\|\tilde{\epsilon}_{critical}(\tilde{\tau}, \tilde{\chi}, \tilde{\psi}, \tilde{\zeta})\| \leq \mathcal{V}_*(\tilde{\tau}, \tilde{\chi}, \tilde{\psi}, \tilde{\zeta})$$

Κάθε σημείο  $(\tilde{\tau}, \tilde{\chi}, \tilde{\psi}, \tilde{\zeta})$  που ικανοποιεί αυτή την ανισότητα που ικανοποιεί αυτή την ανισότητα είναι ένα **δυναμικό σημείο εμφάνισης καταστροφικού γεγονότος στο  $\mathbb{P}_1$** , λόγω χαμηλής επίδοσης ή ανεπάρκειας.

- v. **Βρίσκουμε** το σύνολο  $\mathbb{P}_2$  όλων των σημείων  $(\tau, \chi, \psi, \zeta) \in \mathbb{R}^4$ , που ικανοποιούν το σύστημα ανισοτήτων

$$\text{dist}(\tilde{\beta}, H_M(\tau, \chi, \psi, \zeta)) > \text{dist}(\beta, H_M(\tau, \chi, \psi, \zeta))$$

$$t_k < \tau < t_{k+1},$$

$$x_k < \chi < x_{k+1},$$

$$y_k < \psi < y_{k+1},$$

$$z_k < \zeta < z_{k+1}.$$

vi. Λύνουμε στο  $\mathbb{P}_2$  την ανισότητα

$$0 < \mathcal{V}^*(\tau, \chi, \psi, \zeta) < \|\delta_{critical}(\tau, \chi, \psi, \zeta)\|.$$

Κάθε σημείο  $(\tau, \chi, \psi, \zeta)$  που ικανοποιεί αυτή την ανισότητα είναι ένα **δυναμικό σημείο εμφάνισης επισφαλούς γεγονότος στο  $\mathbb{P}_2$** , λόγω υψηλής επίδοσης ή υπερεπάρκειας.

vii. Λύνουμε στο  $\mathbb{P}_2$  τις ανισότητες

$$\|\delta_{critical}(\tau, \chi, \psi, \zeta)\| \leq \mathcal{V}^*(\tau, \chi, \psi, \zeta) < \|\epsilon_{critical}(\tau, \chi, \psi, \zeta)\|.$$

Κάθε σημείο  $(\tau, \chi, \psi, \zeta)$  που ικανοποιεί αυτή την ανισότητα είναι ένα **δυναμικό σημείο εμφάνισης επικίνδυνου γεγονότος στο  $\mathbb{P}_2$** , λόγω υψηλής επίδοσης ή υπερεπάρκειας.

viii. Λύνουμε στο  $\mathbb{P}_2$  την ανισότητα

$$\|\epsilon_{critical}(\tau, \chi, \psi, \zeta)\| \leq \mathcal{V}^*(\tau, \chi, \psi, \zeta).$$

Κάθε σημείο  $(\tau, \chi, \psi, \zeta)$  που ικανοποιεί αυτή την ανισότητα είναι ένα **δυναμικό σημείο εμφάνισης καταστροφικού γεγονότος στο  $\mathbb{P}_2$** , λόγω υψηλής επίδοσης ή υπερεπάρκειας.

Προς απλοποίηση της πολυπλοκότητας της υπολογιστικής προσέγγισης, θα θεωρήσουμε ότι η συστημική μελέτη αφορά μια προκαθορισμένη τοποθεσία, ως πούμε

$$x = x_0 = \text{σταθερό}, y = y_0 = \text{σταθερό}, z = z_0 = \text{σταθερό}.$$

Εδώ για να βρούμε μια καλώς διαχειρίσιμη (well manageable) αριθμητική συνάρτηση  $H_M^{(j)}(t, x_0, y_0, z_0)$  η οποία διέρχεται πολύ κοντά στις  $M + 1$  τιμές  $f_j(t_n, x_0, y_0, z_0)$  ( $n = 0, 1, \dots, k$ ), θα χρησιμοποιήσουμε τρεις προσεγγιστικές τεχνικές, τη μέθοδο παρεμβολής με γραμμικές Splines (linear splines), τη μέθοδο παρεμβολής Lagrange και τη μέθοδο ελάχιστων τετραγώνων. Προφανώς αυτές οι τρεις τεχνικές δεν είναι οι μοναδικές που θα μπορούσαν να εφαρμοστούν για τον προσδιορισμό τέτοιων συναρτήσεων, αφού είναι γνωστό ότι υπάρχουν άλλες τεχνικές πρόβλεψης που θα μπορούσαν να δώσουν ικανοποιητικές και αξιόπιστες προβλέψεις. Παρ' όλα αυτά, όπως στις εργασίες [7] και [9], για τους σκοπούς αυτής της Διατριβής, είναι επαρκές να ασχοληθούμε με αυτές τις τρεις ενδεικτικές μεθόδους, καθώς σε μια πλειάδα περιπτώσεων η εφαρμογή τους δίνει ικανοποιητικά αποτελέσματα.



## V.1. Η μέθοδος προσέγγισης με γραμμικές splines

**Ορισμός 5.4.** ([32]) Έστω  $[a, b] \subset \mathbb{R}, \Delta: a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$  ένας διαμερισμός του  $[a, b]$ , και  $m \in \mathbb{N}$ . Τα στοιχεία του γραμμικού χώρου

$$S_m(\Delta) := \{s \in C^{m-1}[a, b]: s|_{[x_i, x_{i+1}]} \in \mathbb{P}_m, i = 0, \dots, n-1\}$$

λέγονται **(πολυωνυμικές) Splines** βαθμού  $m$ . ■

Θα ασχοληθούμε με την περίπτωση  $m = 1$  δηλαδή με τις συνεχείς στο  $[a, b]$  και τμηματικά γραμμικές συναρτήσεις.

Η γραμμική Spline ορίζεται από τον τύπο:

$$s = \mathcal{L}S_M(x) = \begin{cases} \sigma_1(x) = f(x_0) \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} + f(x_1) \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}, x \in [x_0, x_1] \\ \sigma_2(x) = f(x_1) \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} + f(x_2) \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}, x \in [x_1, x_2] \\ \vdots \\ \sigma_n(x) = f(x_{n-1}) \frac{x - x_n}{x_{n-1} - x_n} + f(x_n) \frac{x - x_{n-1}}{x_n - x_{n-1}}, x \in [x_{n-1}, x_n] \end{cases}$$

όπου  $s \in S_1(\Delta)$ .

Για κάθε συνάρτηση  $f \in C[a, b]$  υπάρχει ακριβώς μια συνάρτηση  $s \in S_1(\Delta)$ , η οποία παρεμβάλλεται στην  $f$  στα σημεία  $x_0, \dots, x_n$  δηλαδή υπάρχει ακριβώς μια συνάρτηση  $s$  τέτοια ώστε

$$s(x_i) = f(x_i), i = 0, \dots, n.$$

Για το σύστημα  $S$  οι γραμμικές Splines εφαρμόζονται ως εξής.

Έστω  $E_{K+1} = \{t_v \in [T_0, T_N]: v = 0, 1, \dots, M\}$  ένα δοθέν πεπερασμένο σύνολο από  $M + 1$  διαφορετικές χρονικές στιγμές σε ένα προκαθορισμένο χρονικό διάστημα  $[T_0, T_N]$ , τέτοιο ώστε  $(t_v, x_0, y_0, z_0) \in U$  και  $t_v < t_{v'}$ , για κάθε  $v, v' \in \{0, 1, \dots, M\}$  με  $v < v'$ . Έστω επίσης  $k < M$ . Θεωρούμε ότι, για κάθε  $v = 0, 1, \dots, k$ , **γνωρίζουμε τα αντίστοιχα σημεία μέτρησης**. Συγκεκριμένα, αυτό σημαίνει ότι για κάθε  $v = 0, 1, \dots, k$  και  $j = 1, 2, \dots, l + 1$ , γνωρίζουμε τις μετρηθείσες τιμές

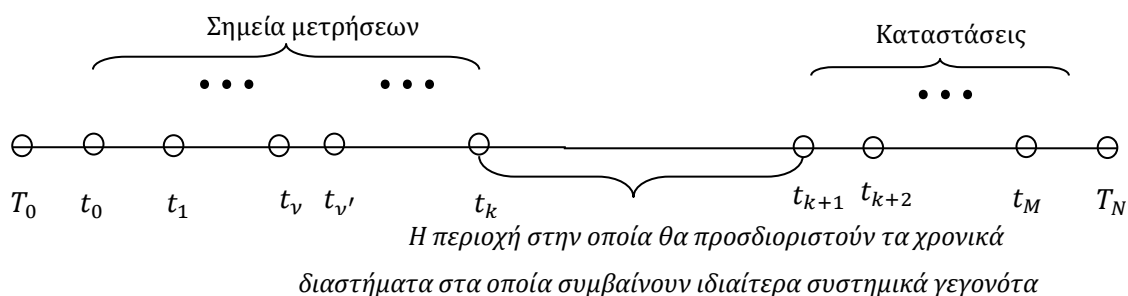
$$f_j(t_v) := \mathcal{F} \left( g_S^{(j)} \left( P_{1/S}^{(1)}, \dots, P_{N_j/S}^{(1)}; t_v, x_0, y_0, z_0 \right) \right)$$

του  $j$ -οστού συστημικού δείκτη  $g_S^{(j)} \left( P_{1/S}^{(j)}, \dots, P_{N_j/S}^{(j)}; t, x, y, z \right)$  σύμφωνα με τη συστημική μέτρηση  $\mathfrak{M}_{\mathcal{F}}$  στα  $k$  διακριτά σημεία  $t_v$ ,  $v = 0, 1, \dots, k$ . Επιπλέον θεωρούμε ότι, **για κάθε  $v = k + 1, k + 2, \dots, M$ , το σημείο  $(t_v, x_0, y_0, z_0)$  είναι μία κατάσταση κανονικότητας**. Αυτό σημαίνει ότι, για κάθε  $j = 1, 2, \dots, l + 1$ , κάθε τιμή  $f_j(t_v)$ ,  $v = k + 1, k + 2, \dots, M$ , ισούται με την τιμή του μοναδικού σταθμισμένου συστημικού δείκτη

$$D_S^{(j)} = D_S^{(j)} \left( P_{1/S}^{(j)}, \dots, P_{N_j/S}^{(j)}; t_v, x_0, y_0, z_0 \right)$$

του συστήματος  $S$  σε χρόνο  $t_v$  και στην τοποθεσία  $(x_0, y_0, z_0)$ .

Παρακάτω, θα διατυπώσουμε μια γενική προσεγγιστική μέθοδο για να προσδιορίσουμε χρονικά διαστήματα μέσα στην περιοχή  $]t_k, t_{k+1}[$  κατά τη διάρκεια των οποίων μπορούν να συμβούν στο σύστημα ιδιαίτερα γεγονότα.



Το πλεονέκτημα της εφαρμογής της μεθόδου παρεμβολής με γραμμικές splines βρίσκεται στη χαμηλή υπολογιστική πολυπλοκότητα, όχι μόνο στον υπολογισμό κάθε γραμμικής Spline, αλλά και στον υπολογισμό των ριζών και των διαστημάτων στα οποία οι προσεγγιστικές αποκλίσεις ανοχής είναι θετικές ή αρνητικές.

Στην περίπτωση μικρού αριθμού σημείων παρεμβολής, αυτή η μέθοδος θα δώσει ανακριβή αποτελέσματα. Στην περίπτωση όμως που υπάρχουν αρκετά σημεία παρεμβολής, η μέθοδος είναι αποδοτική, και επομένως προτείνεται σε αυτήν την περίπτωση.

Τώρα το γενικό αλγοριθμικό πλαίσιο ειδικεύεται ως εξής.

### Αλγόριθμος 1

**Είσοδος:** τα σημεία παρεμβολής  $(t_v, f_j(t_v))$ ;  
τα  $k$  σημεία μέτρησης και τα  $M - k$  σημεία κανονικότητας

**Έξοδος:** οι ρίζες των συναρτήσεων

$$\mathfrak{F}_{\text{LinearSpline}}(\tau) = \|\delta_{\text{critical}}(\tau)\| - \mathcal{V}(\tau),$$

$$\mathfrak{F}'_{\text{LinearSpline}}(\tau) = \|\epsilon_{\text{critical}}(\tau)\| - \mathcal{V}(\tau),$$

$$\tilde{\mathfrak{G}}_{\text{LinearSpline}}(\tilde{\tau}) = \|\tilde{\delta}_{\text{critical}}(\tilde{\tau})\| - \mathcal{V}_*(\tilde{\tau}),$$

$$\tilde{\mathfrak{G}}'_{\text{LinearSpline}}(\tilde{\tau}) = \|\tilde{\epsilon}_{\text{critical}}(\tilde{\tau})\| - \mathcal{V}_*(\tilde{\tau}),$$

$$\mathfrak{G}_{\text{LinearSpline}}(\tau) = \|\delta_{\text{critical}}(\tau)\| - \mathcal{V}^*(\tau) \text{ και}$$

$$\mathfrak{G}'_{\text{LinearSpline}}(\tau) = \|\epsilon_{\text{critical}}(\tau)\| - \mathcal{V}^*(\tau).$$

μέσα στο δοθέν διάστημα  $]t_k, t_{k+1}[$

και

τα διαστήματα στα οποία ισχύει

$$\mathfrak{F}_{\text{LinearSplines}}(\tau) < 0,$$

$$\mathfrak{F}'_{\text{LinearSpline}}(\tau) < 0,$$

$$\tilde{\mathfrak{G}}_{\text{LinearSpline}}(\tilde{\tau}) < 0,$$

$$\tilde{\mathfrak{G}}'_{\text{LinearSpline}}(\tilde{\tau}) < 0,$$

$$\mathfrak{G}_{\text{LinearSpline}}(\tau) < 0 \text{ και}$$

$$\mathfrak{G}'_{\text{LinearSpline}}(\tau) < 0.$$

1. Για κάθε  $j = 1, 2, \dots, l + 1$ , υπολογίζουμε τη γραμμική Spline

$$\mathcal{LS}_M^{(j)}(t) = \begin{cases} \sigma_1(t) = f_j(t_0) \frac{t - t_1}{t_0 - t_1} + f_j(t_1) \frac{t - t_0}{t_1 - t_0}, t \in [t_0, t_1] \\ \sigma_2(t) = f_j(t_1) \frac{t - t_2}{t_1 - t_2} + f_j(t_2) \frac{t - t_1}{t_2 - t_1}, t \in [t_1, t_2] \\ \vdots \\ \sigma_M(t) = f_j(t_{M-1}) \frac{t - t_M}{t_{M-1} - t_M} + f_j(t_M) \frac{t - t_{M-1}}{t_M - t_{M-1}}, t \in [t_{M-1}, t_M] \end{cases}$$

στις  $M + 1$  τιμές  $(t_\nu, f_j(t_\nu))$ .

2. Κατασκευάζουμε την καμπύλη

$$H_M \equiv \mathcal{LS}_M$$

με

$$\mathcal{LS}_M: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{l+1}: t \mapsto \mathcal{LS}_M(t) := (t, \mathcal{LS}_M^{(1)}(t), \dots, \mathcal{LS}_M^{(l+1)}(t)).$$

3. Επιλέγουμε τις τέσσερις συναρτήσεις κρίσιμης ανοχής

$$\tilde{\delta}_{\text{critical}}(t) = (\tilde{\delta}_{\text{critical}}^{(1)}(t), \dots, \tilde{\delta}_{\text{critical}}^{(l+1)}(t)),$$

$$\tilde{\epsilon}_{\text{critical}}(t) = (\tilde{\epsilon}_{\text{critical}}^{(1)}(t), \dots, \tilde{\epsilon}_{\text{critical}}^{(l+1)}(t)),$$

$$\delta_{\text{critical}}(t) = (\delta_{\text{critical}}^{(1)}(t), \dots, \delta_{\text{critical}}^{(l+1)}(t)) \text{ και}$$

$$\epsilon_{\text{critical}}(t) = (\epsilon_{\text{critical}}^{(1)}(t), \dots, \epsilon_{\text{critical}}^{(l+1)}(t))$$

που αναπαριστούν τις αποστάσεις από το ανώτερο και το κατώτερο όριο κανονικότητας.

4. Αν  $\tilde{\beta} = \beta = \mathfrak{D}$ , τότε

- i. Υπολογίζουμε τις αποκλίσεις ανοχής

$$\mathfrak{F}_{\text{LinearSpline}}(\tau) = \|\delta_{\text{critical}}(\tau)\| - \mathcal{V}(\tau) \text{ και}$$

$$\mathfrak{F}'_{\text{LinearSpline}}(\tau) = \|\epsilon_{\text{critical}}(\tau)\| - \mathcal{V}(\tau)$$

στο δοθέν διάστημα  $]t_k, t_{k+1}[$ .

- ii. **Υπολογίζουμε** τις ρίζες των  $\mathfrak{F}_{\text{LinearSpline}}(\tau)$  και  $\mathfrak{F}'_{\text{LinearSpline}}(\tau)$ .
- iii. **Βρίσκουμε** τα διαστήματα στα οποία η απόκλιση ανοχής  $\mathfrak{F}_{\text{LinearSpline}}(\tau)$  είναι θετική χρησιμοποιώντας τις υπολογισμένες ρίζες. Κάθε σημείο  $\tau$  στο  $]t_k, t_{k+1}[$  που ικανοποιεί αυτή την ανισότητα είναι ένα **δυναμικό σημείο εμφάνισης επισφαλούς γεγονότος**.
- iv. **Βρίσκουμε** τα διαστήματα στα οποία η απόκλιση ανοχής  $\mathfrak{F}_{\text{LinearSpline}}(\tau)$  είναι αρνητική και η απόκλιση ανοχής  $\mathfrak{F}'_{\text{LinearSpline}}(\tau)$  είναι θετική χρησιμοποιώντας τις υπολογισμένες ρίζες. Κάθε σημείο  $\tau$  στο  $]t_k, t_{k+1}[$  που ικανοποιεί την δεύτερη ανισότητα είναι ένα **δυναμικό σημείο εμφάνισης επικίνδυνου γεγονότος**.
- v. **Βρίσκουμε** τα διαστήματα στα οποία η απόκλιση ανοχής  $\mathfrak{F}'_{\text{LinearSpline}}(\tau)$  είναι αρνητική χρησιμοποιώντας τις υπολογισμένες ρίζες. Κάθε σημείο  $\tau$  στο  $]t_k, t_{k+1}[$  που ικανοποιεί την ανισότητα είναι ένα **δυναμικό σημείο εμφάνισης καταστροφικού γεγονότος**.

5. Αλλιώς

- i. **Βρίσκουμε** τα σύνολα  $\tilde{\mathbb{P}}$  και  $\mathbb{P}$  όλων των σημείων  $\tilde{\tau}, \tau \in ]t_k, t_{k+1}[$ , που ικανοποιούν τις ανισώσεις

$$\text{dist}(\tilde{\beta}, S_M(\tilde{\tau})) < \text{dist}(\beta, S_M(\tilde{\tau})) \text{ και } \text{dist}(\tilde{\beta}, S_M(\tau)) > \text{dist}(\beta, S_M(\tau)),$$

αντίστοιχα.

**Υπολογίζουμε** τις αποκλίσεις ανοχής

$$\tilde{\mathfrak{G}}_{\text{LinearSpline}}(\tilde{\tau}) = \|\tilde{\delta}_{\text{critical}}(\tilde{\tau})\| - \mathcal{V}_*(\tilde{\tau}) \text{ και}$$

$$\tilde{\mathfrak{G}}'_{\text{LinearSpline}}(\tilde{\tau}) = \|\tilde{\epsilon}_{\text{critical}}(\tilde{\tau})\| - \mathcal{V}_*(\tilde{\tau})$$

$$\mathfrak{G}_{\text{LinearSpline}}(\tau) = \|\delta_{\text{critical}}(\tau)\| - \mathcal{V}^*(\tau) \text{ και}$$

$$\mathfrak{G}'_{\text{LinearSpline}}(\tau) = \|\epsilon_{\text{critical}}(\tau)\| - \mathcal{V}^*(\tau).$$

**Υπολογίζουμε** τις ρίζες των  $\tilde{\mathfrak{G}}_{\text{LinearSpline}}(\tilde{\tau})$ ,  $\tilde{\mathfrak{G}}'_{\text{LinearSpline}}(\tilde{\tau})$ ,  $\mathfrak{G}_{\text{LinearSpline}}(\tau)$  και  $\mathfrak{G}'_{\text{LinearSpline}}(\tau)$ .

- ii. **Βρίσκουμε**

- Στο  $\tilde{\mathbb{P}}$  τα διαστήματα στα οποία η απόκλιση ανοχής  $\tilde{\mathcal{G}}_{\text{LinearSpline}}(\tilde{\tau})$  είναι θετική χρησιμοποιώντας τις υπολογισμένες ρίζες. Κάθε σημείο  $\tilde{\tau}$  στο  $]t_k, t_{k+1}[$  που ικανοποιεί αυτή την ανισότητα είναι ένα **δυναμικό σημείο εμφάνισης επισφαλούς γεγονότος, λόγω χαμηλής επίδοσης ή ανεπάρκειας.**
- Στο  $\mathbb{P}$  τα διαστήματα στα οποία η απόκλιση ανοχής  $\mathcal{G}_{\text{LinearSpline}}(\tau)$  είναι θετική χρησιμοποιώντας τις υπολογισμένες ρίζες. Κάθε σημείο  $\tau$  στο  $]t_k, t_{k+1}[$  που ικανοποιεί αυτή την ανισότητα είναι ένα **δυναμικό σημείο εμφάνισης επισφαλούς γεγονότος λόγω υψηλής επίδοσης ή υπερεπάρκειας.**

### iii. Βρίσκουμε

- Στο  $\tilde{\mathbb{P}}$  τα διαστήματα στα οποία η απόκλιση ανοχής  $\tilde{\mathcal{G}}_{\text{LinearSpline}}(\tilde{\tau})$  είναι αρνητική και η απόκλιση ανοχής  $\tilde{\mathcal{G}}'_{\text{LinearSpline}}(\tilde{\tau})$  είναι θετική χρησιμοποιώντας τις υπολογισμένες ρίζες. Κάθε σημείο  $\tilde{\tau}$  στο  $]t_k, t_{k+1}[$  που ικανοποιεί την δεύτερη ανισότητα είναι ένα **δυναμικό σημείο εμφάνισης επικίνδυνου γεγονότος, λόγω χαμηλής επίδοσης ή ανεπάρκειας.**
- Στο  $\mathbb{P}$  τα διαστήματα στα οποία η απόκλιση ανοχής  $\mathcal{G}_{\text{LinearSpline}}(\tau)$  είναι αρνητική και η απόκλιση ανοχής  $\mathcal{G}'_{\text{LinearSpline}}(\tau)$  είναι θετική χρησιμοποιώντας τις υπολογισμένες ρίζες. Κάθε σημείο  $\tau$  στο  $]t_k, t_{k+1}[$  που ικανοποιεί την δεύτερη ανισότητα είναι ένα **δυναμικό σημείο εμφάνισης επικίνδυνου γεγονότος λόγω υψηλής επίδοσης ή υπερεπάρκειας.**

### vi. Βρίσκουμε

- Στο  $\tilde{\mathbb{P}}$  τα διαστήματα στα οποία η απόκλιση ανοχής  $\tilde{\mathcal{G}}'_{\text{LinearSpline}}(\tilde{\tau})$  είναι αρνητική χρησιμοποιώντας τις υπολογισμένες ρίζες. Κάθε σημείο  $\tilde{\tau}$  στο  $]t_k, t_{k+1}[$  που ικανοποιεί αυτή την ανισότητα είναι ένα **δυναμικό σημείο εμφάνισης καταστροφικού γεγονότος, λόγω χαμηλής επίδοσης ή ανεπάρκειας.**
- Στο  $\mathbb{P}$  τα διαστήματα στα οποία η απόκλιση ανοχής  $\mathcal{G}'_{\text{LinearSpline}}(\tau)$  είναι αρνητική χρησιμοποιώντας τις υπολογισμένες ρίζες. Κάθε σημείο  $\tau$  στο  $]t_k, t_{k+1}[$  που ικανοποιεί αυτή την ανισότητα είναι **δυναμικό σημείο εμφάνισης καταστροφικού γεγονότος λόγω υψηλής επίδοσης ή υπερεπάρκειας.**

## V.2. Η μέθοδος παρεμβολής Lagrange

**Ορισμός 5.5.** ([32]) Έστω  $x_0, \dots, x_n \in \mathbb{R}$  ανα δυο διαφορετικά μεταξύ τους σημεία. Για κάθε  $i = 0, \dots, n$ , υπάρχει ακριβώς ένα πολυώνυμο  $L_i \in \mathbb{P}_n$ , τέτοιο ώστε

$$L_i(x) = \prod_{j=0, j \neq i}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}, i = 0, \dots, n$$

Τα πολυώνυμα  $L_0, \dots, L_n$  λεγονται πολυωνυμα του Lagrange ως προς τα σημεία  $x_0, \dots, x_n$ . ■

Αν  $p \in \mathbb{P}_n$  είναι το πολυώνυμο παρεμβολής της  $f$  στα σημεία  $x_0, \dots, x_n$  τότε το  $p$  γράφεται στη μορφή

$$p(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i) L_i(x),$$

η οποία λέγεται **παράσταση σε μορφή Lagrange** του πολυωνύμου παρεμβολής. Πράγματι, το δεξιό μέλος είναι ένα πολυώνυμο βαθμού το πολύ  $n$ , το οποίο για  $k = 0, 1, \dots, n$ , έχει την τιμή  $f(x_k)$  στο σημείο  $x = x_k$ . Συνεπώς συμπίπτει με το  $p$  λόγω μοναδικότητας του πολυωνύμου παρεμβολής.

**Παράδειγμα 5.1.** Θα προσδιορίσουμε το πολυώνυμο παρεμβολής της συνάρτησης  $f(x) := \frac{1}{x}$  στα σημεία  $x_0 = 2, x_1 = 2.5, x_2 = 4$  με χρήση μεθοδου Lagrange.

Έχουμε:

$$L_0(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \frac{x - x_2}{x_0 - x_2} = x^2 - 6.5x + 10$$

$$L_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} = -\frac{4}{3}x^2 + 8x - \frac{32}{3}$$

$$L_2(x) = \frac{x - x_0}{x_2 - x_0} \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{1}{3}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{5}{3}$$

$$\text{Άρα } p(x) = \frac{1}{2}L_0(x) + \frac{2}{5}L_1(x) + \frac{1}{4}L_2(x) = 0.05x^2 - 0.425x + 1.15.$$

Το πλεονέκτημα της εφαρμογής της μεθόδου Lagrange είναι η ενοποιημένη μοντελοποίηση ολόκληρου του διαστήματος. Η υπολογιστική πολυπλοκότητά της είναι μεγαλύτερη από εκείνη των γραμμικών Splines και, σε περιπτώσεις υψηλού αριθμού σημείων παρεμβολής, το πολώνυμο που προκύπτει θα είναι μεγάλου βαθμού, το οποίο μπορεί να δημιουργήσει πρόβλημα καταστροφικής ακύρωσης σημαντικών ψηφίων κατά τη διάρκεια των πράξεων κινητής υποδιαστολής και θα αυξήσει κατά πολύ την πολυπλοκότητα του υπολογισμού των ριζών του. Επομένως, αυτή η μέθοδος προτείνεται σε περιπτώσεις μικρού αριθμού σημείων παρεμβολής. Με αυτή τη μέθοδο το γενικό αλγοριθμικό πλαίσιο διαμορφώνεται ως εξής.

**Αλγόριθμος2**

**Είσοδος:** τα σημεία παρεμβολής  $(t_v, f_j(t_v))$ ;

Τα  $k$  σημεία μέτρησης και τα  $M - k$  σημεία κανονικότητας

**Έξοδος:** οι ρίζες των

$$\mathfrak{F}_{\text{Interpolation}}(\tau) = \|\delta_{\text{critical}}(\tau)\| - \mathcal{V}(\tau),$$

$$\mathfrak{F}'_{\text{Interpolation}}(\tau) = \|\epsilon_{\text{critical}}(\tau)\| - \mathcal{V}(\tau),$$

$$\tilde{\mathfrak{G}}_{\text{Interpolation}}(\tilde{\tau}) = \|\tilde{\delta}_{\text{critical}}(\tilde{\tau})\| - \mathcal{V}_*(\tilde{\tau}),$$

$$\tilde{\mathfrak{G}}'_{\text{Interpolation}}(\tilde{\tau}) = \|\tilde{\epsilon}_{\text{critical}}(\tilde{\tau})\| - \mathcal{V}_*(\tilde{\tau}),$$

$$\mathfrak{G}_{\text{Interpolation}}(\tau) = \|\delta_{\text{critical}}(\tau)\| - \mathcal{V}^*(\tau) \text{ και}$$

$$\mathfrak{G}'_{\text{Interpolation}}(\tau) = \|\epsilon_{\text{critical}}(\tau)\| - \mathcal{V}^*(\tau)$$

στο δοθέν διάστημα  $]t_k, t_{k+1}[$ ;

και

τα διαστήματα στα οποία ισχύει

$$\mathfrak{F}_{\text{Interpolation}}(\tau) < 0,$$

$$\mathfrak{F}'_{\text{Interpolation}}(\tau) < 0,$$

$$\tilde{\mathfrak{G}}_{\text{Interpolation}}(\tilde{\tau}) < 0,$$

$$\tilde{\mathfrak{G}}'_{\text{Interpolation}}(\tilde{\tau}) < 0,$$

$$\mathfrak{G}_{\text{Interpolation}}(\tau) < 0 \text{ και}$$

$$\mathfrak{G}'_{\text{Interpolation}}(\tau) < 0.$$

1. Για κάθε  $j = 1, 2, \dots, l + 1$ , **υπολογίζουμε** το μοναδικό πολυώνυμο *Lagrange* βαθμού το πολύ  $M$

$$L_M^{(j)}(t) = \sum_{v=0}^M \left[ f_j(t_v) \prod_{v'=0, v' \neq v}^M \frac{t - t_{v'}}{t_v - t_{v'}} \right]$$

που παρεμβάλλει τις  $M + 1$  τιμές  $(t_v, f_j(t_v))$ .

2. **Κατασκευάζουμε** την καμπύλη

$$H_M \equiv L_M$$

με

$$L_M: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{l+1}: t \mapsto L_M(t) := \left( t, L_M^{(1)}(t), \dots, L_M^{(l+1)}(t) \right).$$



3. **Επιλέγουμε** τέσσερις συναρτήσεις κρίσιμης ανοχής

$$\tilde{\delta}_{critical}(t) = \left( \tilde{\delta}_{critical}^{(1)}(t), \dots, \tilde{\delta}_{critical}^{(l+1)}(t) \right),$$

$$\tilde{\epsilon}_{critical}(t) = \left( \tilde{\epsilon}_{critical}^{(1)}(t), \dots, \tilde{\epsilon}_{critical}^{(l+1)}(t) \right),$$

$$\delta_{critical}(t) = \left( \delta_{critical}^{(1)}(t), \dots, \delta_{critical}^{(l+1)}(t) \right) \text{ και}$$

$$\epsilon_{critical}(t) = \left( \epsilon_{critical}^{(1)}(t), \dots, \epsilon_{critical}^{(l+1)}(t) \right)$$

που αναπαριστούν τις αποστάσεις από το ανώτερο και το κατώτερο κατώφλι εκτός των οποίων καταργείται η κανονικότητα.

4. Αν  $\tilde{\beta} = \beta = \mathbb{D}$ , τότεi. **Υπολογίζουμε** τις αποκλίσεις ανοχής

$$\mathfrak{I}_{\text{Interpolation}}(\tau) = \|\delta_{critical}(\tau)\| - \mathcal{V}(\tau) \text{ και}$$

$$\mathfrak{I}'_{\text{Interpolation}}(\tau) = \|\epsilon_{critical}(\tau)\| - \mathcal{V}(\tau)$$

στο δοθέν διάστημα  $]t_k, t_{k+1}[$ .

ii. **Υπολογίζουμε τα διαστήματα**  $[a_i, b_i]$ ,  $[a'_i, b'_i] \subset ]t_k, t_{k+1}[$  στα οποία οι αποκλίσεις ανοχής  $\mathfrak{I}_{\text{Interpolation}}(\tau)$  και  $\mathfrak{I}'_{\text{Interpolation}}(\tau)$  αλλάζουν πρόσημο, αντίστοιχα.

Για κάθε διάστημα  $[a_i, b_i]$  και  $[a'_i, b'_i]$

- **Εφαρμόζουμε** κάποια βήματα της μεθόδου **διχοτόμησης** για να προσεγγίσουμε τη ρίζα της  $\mathfrak{I}_{\text{Interpolation}}(\tau)$  στο  $[a_i, b_i]$  και τη ρίζα της  $\mathfrak{I}'_{\text{Interpolation}}(\tau)$  στο  $[a'_i, b'_i]$ .
- **Εφαρμόζουμε** τη μέθοδο **Newton** για τον υπολογισμό της ρίζας της  $\mathfrak{I}_{\text{Interpolation}}(\tau)$  στο  $[a_i, b_i]$  και της ρίζας της  $\mathfrak{I}'_{\text{Interpolation}}(\tau)$  στο  $[a'_i, b'_i]$ .

iii. **Βρίσκουμε** τα διαστήματα στα οποία η απόκλιση ανοχής  $\mathfrak{I}_{\text{Interpolation}}(\tau)$  είναι θετική χρησιμοποιώντας τις υπολογισμένες ρίζες. Κάθε σημείο  $\tau$  στο  $]t_k, t_{k+1}[$  που ικανοποιεί αυτή την ανισότητα είναι ένα **δυναμικό σημείο εμφάνισης επισφαλούς γεγονότος**.iv. **Βρίσκουμε** τα διαστήματα στα οποία η απόκλιση ανοχής  $\mathfrak{I}_{\text{Interpolation}}(\tau)$  είναι αρνητική και η απόκλιση ανοχής  $\mathfrak{I}'_{\text{Interpolation}}(\tau)$  είναι θετική χρησιμοποιώντας τις υπολογισμένες ρίζες. Κάθε σημείο  $\tau$  στο  $]t_k, t_{k+1}[$  που ικανοποιεί την δεύτερη ανισότητα είναι ένα **δυναμικό σημείο εμφάνισης επικίνδυνου γεγονότος**.

- v. **Βρίσκουμε** τα διαστήματα στα οποία η απόκλιση ανοχής  $\mathfrak{G}'_{\text{Interpolation}}(\tau)$  είναι αρνητική χρησιμοποιώντας τις υπολογισμένες ρίζες. Κάθε σημείο  $\tau$  στο  $]t_k, t_{k+1}[$  που ικανοποιεί την ανισότητα είναι ένα **δυναμικό σημείο εμφάνισης καταστροφικού γεγονότος**.

5. Αλλιώς

- i. **Βρίσκουμε** τα σύνολα  $\tilde{\mathbb{P}}$  και  $\mathbb{P}$  όλων των σημείων  $\tilde{\tau}, \tau \in ]t_k, t_{k+1}[$ , που ικανοποιούν τις ανισότητες

$$\text{dist}(\tilde{\beta}, L_M(\tilde{\tau})) < \text{dist}(\beta, L_M(\tilde{\tau})) \text{ και } \text{dist}(\tilde{\beta}, L_M(\tau)) > \text{dist}(\beta, L_M(\tau)).$$

αντίστοιχα.

- ii. **Υπολογίζουμε** τις αποκλίσεις από τις ανοχές

$$\tilde{\mathfrak{G}}_{\text{Interpolation}}(\tilde{\tau}) = \|\tilde{\delta}_{\text{critical}}(\tilde{\tau})\| - \mathcal{V}_*(\tilde{\tau}) \text{ και}$$

$$\tilde{\mathfrak{G}}'_{\text{Interpolation}}(\tilde{\tau}) = \|\tilde{\epsilon}_{\text{critical}}(\tilde{\tau})\| - \mathcal{V}_*(\tilde{\tau})$$

$$\mathfrak{G}_{\text{Interpolation}}(\tau) = \|\delta_{\text{critical}}(\tau)\| - \mathcal{V}^*(\tau) \text{ και}$$

$$\mathfrak{G}'_{\text{Interpolation}}(\tau) = \|\epsilon_{\text{critical}}(\tau)\| - \mathcal{V}^*(\tau).$$

- iii. **Υπολογίζουμε τα διαστήματα**  $[\tilde{c}_i, \tilde{d}_i], [\tilde{c}'_i, \tilde{d}'_i], [c_i, d_i], [c'_i, d'_i] \subset ]t_k, t_{k+1}[$  στα οποία οι αποκλίσεις ανοχής  $\tilde{\mathfrak{G}}_{\text{Interpolation}}(\tilde{\tau}), \tilde{\mathfrak{G}}'_{\text{Interpolation}}(\tilde{\tau}), \mathfrak{G}_{\text{Interpolation}}(\tau)$  και  $\mathfrak{G}'_{\text{Interpolation}}(\tau)$  αλλάζουν πρόσημο αντίστοιχα.

Για κάθε διάστημα  $[\tilde{c}_i, \tilde{d}_i], [\tilde{c}'_i, \tilde{d}'_i], [c_i, d_i]$  και  $[c'_i, d'_i]$

- **Εφαρμόζουμε** κάποια βήματα της μεθόδου **διχοτόμησης** για να προσεγγίσουμε τη ρίζα της  $\tilde{\mathfrak{G}}_{\text{Interpolation}}(\tilde{\tau})$  στο  $[\tilde{c}_i, \tilde{d}_i]$ , τη ρίζα της  $\tilde{\mathfrak{G}}'_{\text{Interpolation}}(\tilde{\tau})$  στο  $[\tilde{c}'_i, \tilde{d}'_i]$ , τη ρίζα της  $\mathfrak{G}_{\text{Interpolation}}(\tau)$  στο  $[c_i, d_i]$ , και τη ρίζα της  $\mathfrak{G}'_{\text{Interpolation}}(\tau)$  στο  $[c'_i, d'_i]$
- **Εφαρμόζουμε** την μέθοδο **Newton** για να υπολογίσουμε τη ρίζα της  $\tilde{\mathfrak{G}}_{\text{Interpolation}}(\tilde{\tau})$  στο  $[\tilde{c}_i, \tilde{d}_i]$ , τη ρίζα της  $\tilde{\mathfrak{G}}'_{\text{Interpolation}}(\tilde{\tau})$  στο  $[\tilde{c}'_i, \tilde{d}'_i]$ , τη ρίζα της  $\mathfrak{G}_{\text{Interpolation}}(\tau)$  στο  $[c_i, d_i]$ , και τη ρίζα της  $\mathfrak{G}'_{\text{Interpolation}}(\tau)$  στο  $[c'_i, d'_i]$ .

- iv. **Βρίσκουμε**

- a. στο  $\tilde{\mathbb{P}}$  τα διαστήματα στα οποία η απόκλιση  $\tilde{\mathfrak{G}}_{\text{Interpolation}}(\tilde{\tau})$  είναι θετική χρησιμοποιώντας τις υπολογισμένες ρίζες. Κάθε σημείο  $\tilde{\tau}$  στο  $]t_k, t_{k+1}[$  που

ικανοποιεί αυτή την ανισότητα είναι ένα **δυναμικό σημείο εμφάνισης επισφαλούς γεγονότος, λόγω χαμηλής επίδοσης ή ανεπάρκειας.**

- b. στο  $\mathbb{P}$  τα διαστήματα στα οποία η απόκλιση ανοχής  $\mathcal{G}_{\text{Interpolation}}(\tau)$  είναι θετική χρησιμοποιώντας τις υπολογισμένες ρίζες. Κάθε σημείο  $\tau$  στο  $]t_k, t_{k+1}[$  που ικανοποιεί αυτή την ανισότητα είναι ένα **δυναμικό σημείο εμφάνισης επισφαλούς γεγονότος, λόγω υψηλής επίδοσης ή υπερεπάρκειας.**

**v. Βρίσκουμε**

- a. στο  $\tilde{\mathbb{P}}$  τα διαστήματα στα οποία η απόκλιση ανοχής  $\tilde{\mathcal{G}}_{\text{Interpolation}}(\tilde{\tau})$  είναι αρνητική και η απόκλιση ανοχής  $\tilde{\mathcal{G}}'_{\text{Interpolation}}(\tilde{\tau})$  είναι θετική χρησιμοποιώντας τις υπολογισμένες ρίζες. Κάθε σημείο  $\tilde{\tau}$  στο  $]t_k, t_{k+1}[$  που ικανοποιεί την δεύτερη ανισότητα είναι ένα **δυναμικό σημείο εμφάνισης επικίνδυνου γεγονότος, λόγω χαμηλής επίδοσης ή ανεπάρκειας.**
- b. στο  $\mathbb{P}$  τα διαστήματα στα οποία η απόκλιση ανοχής  $\mathcal{G}_{\text{Interpolation}}(\tau)$  είναι αρνητική και η απόκλιση ανοχής  $\mathcal{G}'_{\text{Interpolation}}(\tau)$  είναι θετική χρησιμοποιώντας τις υπολογισμένες ρίζες. Κάθε σημείο  $\tau$  στο  $]t_k, t_{k+1}[$  που ικανοποιεί την δεύτερη ανισότητα είναι ένα **δυναμικό σημείο εμφάνισης επικίνδυνου γεγονότος, λόγω υψηλής επίδοσης ή υπερεπάρκειας.**

**vi. Βρίσκουμε**

- a. στο  $\tilde{\mathbb{P}}$  τα διαστήματα στα οποία η απόκλιση ανοχής  $\tilde{\mathcal{G}}'_{\text{Interpolation}}(\tilde{\tau})$  είναι αρνητική χρησιμοποιώντας τις υπολογισμένες ρίζες. Κάθε σημείο  $\tilde{\tau}$  στο  $]t_k, t_{k+1}[$  που ικανοποιεί αυτή την ανισότητα είναι ένα **δυναμικό σημείο εμφάνισης καταστροφικού γεγονότος, λόγω χαμηλής επίδοσης ή ανεπάρκειας.**
- b. στο  $\mathbb{P}$  τα διαστήματα στα οποία η απόκλιση ανοχής  $\mathcal{G}'_{\text{Interpolation}}(\tau)$  είναι αρνητική χρησιμοποιώντας τις υπολογισμένες ρίζες. Κάθε σημείο  $\tau$  στο  $]t_k, t_{k+1}[$  που ικανοποιεί αυτή την ανισότητα είναι ένα **δυναμικό σημείο εμφάνισης καταστροφικού γεγονότος λόγω υψηλής επίδοσης ή υπερεπάρκειας.**

### V.3. Η μέθοδος προσέγγισης ελαχίστων τετραγώνων

Η τρίτη μέθοδος που χρησιμοποιούμε είναι η πολυωνυμική προσέγγιση ελαχίστων τετραγώνων. Τα πλεονεκτήματα αυτής της μεθόδου είναι η ενοποιημένη μοντελοποίηση για ολόκληρο το διάστημα και ότι ο βαθμός του υπολογισμένου πολυωνύμου επιλέγεται από τον χρήστη, επομένως μπορεί να είναι μικρός. Μπορεί να χρησιμοποιηθεί ακόμα και όταν υπάρχει μεγάλος αριθμός γνωστών σημείων. Το μειονέκτημα της μεθόδου είναι ότι το υπολογισμένο πολυώνυμο δεν παρεμβάλλει όλα (η κανένα) από τα δοθέντα σημεία.

Δοθέντων  $(M + 1)$  σημείων  $(t_i, f_j(t_i))$  και ενός βαθμού  $m$ ,  $m < M + 1$ , θα βρούμε ένα βέλτιστο πολυώνυμο  $p_M^{(j)}(t)$  βαθμού  $m$  το οποίο ελαχιστοποιεί την νόρμα-2 της απόστασης του  $p_M^{(j)}(t)$  από τα δοθέντα  $(M + 1)$  σημεία. Για να μπορέσουμε να αξιολογήσουμε την ελαχιστοποίηση της νόρμας-2, θα χρησιμοποιήσουμε παραγοντοποίηση QR.

#### Παραγοντοποίηση QR

**Ορισμός 5.6.** Ένας πίνακας της μορφής

$$H = I - \frac{2uu^T}{u^T u}$$

όπου  $u$  ένα μη μηδενικό διάνυσμα, ονομάζεται **πίνακας Householder**.■

Ισχύει

$$\begin{aligned} H^2 &= I^2 - 4 \frac{uu^T}{u^T u} + 4 \frac{uu^T}{u^T u} \frac{uu^T}{u^T u} = I \\ \|H^2\| &= \|H\|^2 = \|I\| = 1 \\ \|H\| &= 1 \end{aligned}$$

επομένως ο πίνακας Householder είναι ορθογώνιος πίνακας.

**Θεώρημα 5.1.** Δοθέντος ενός  $n \times n$  πίνακα  $A$ , υπάρχει ένας ορθογώνιος πίνακας  $Q$  και ένας άνω τριγωνικός πίνακας  $R$  τέτοιοι ώστε

$$A = QR$$

Ο πίνακας  $Q$  μπορεί να εκφραστεί ως  $Q = H_1 H_2 \dots H_{n-1}$  όπου κάθε  $H_i$  είναι ένας πίνακας householder. Η παραγοντοποίηση του  $A$  σε  $QR$  καλείται **QR παραγοντοποίηση του  $A$** .

**Αλγόριθμος παραγοντοποίησης QR:**

Βήμα 1: Κατασκευάζουμε έναν πίνακα Householder  $H_1$  τέτοιον ώστε ο πίνακας  $H_1 A$  να έχει όλα τα στοιχεία ο κάτω από το στοιχείο  $a_{11}$ :

$$H_1 A = \begin{pmatrix} a_{11} & * & \dots & * \\ 0 & * & \dots & * \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & * & \dots & * \end{pmatrix}$$

Αντικαθιστούμε τον πίνακα  $A$  με τον  $A^{(1)} = H_1 A$

Βήμα  $k$ : Κατασκευάζουμε έναν πίνακα Householder  $H_k$  τέτοιον ώστε ο πίνακας  $H_k A^{(k-1)}$  να έχει όλα τα στοιχεία ο κάτω από το στοιχείο  $a_{kk}$  ως εξής:

Κατασκευάζουμε

$$\hat{H}_k = I_{n-k+1} - \frac{2u_{n-k+1}u_{n-k+1}^T}{(u_{n-k+1}^T u_{n-k+1})}$$

τέτοιον ώστε

$$\hat{H}_k \begin{pmatrix} a_{kk} \\ \vdots \\ \vdots \\ a_{nk} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

και έπειτα ορίζοντας

$$H_k = \begin{pmatrix} I_{k-1} & 0 \\ 0 & \hat{H}_k \end{pmatrix}$$

Υπολογίζουμε τον  $A^{(k)} = H_k A^{(k-1)}$  και τον αντικαθιστούμε στη θέση του  $A$ .

Ο πίνακας  $A^{(k)}$  έχει όλα τα στοιχεία κάτω από το  $a_{kk}$  ίσα με 0. Στο τέλος του βήματος  $n-1$  ο πίνακας  $A^{(n-1)}$  που προκύπτει θα είναι ένας άνω τριγωνικός πίνακας  $R$ .

Έχουμε  $R = A^{(n-1)} = H_{n-1} A^{(n-2)} = H_{n-2} H_{n-1} A^{(n-3)} = \dots = H_{n-1} H_{n-2} \dots H_1 A$

Θέτουμε  $Q^T = H_{n-1} H_{n-2} \dots H_1$  και αφού κάθε Householder πίνακας είναι ορθογώνιος ο  $Q^T$  είναι επίσης ορθογώνιος. Έτσι προκύπτει  $R = Q^T A$  ή  $A = QR$ . ([33])

Στον αλγόριθμο 3 παρακάτω θα χρησιμοποιήσουμε τις ακόλουθες παρατηρήσεις.

- Για κάθε σημείο  $(t_i, f_j(t_i))$ , θέτουμε

$$f_j(t_i) = a_m^{(j)} t_i^m + a_{m-1}^{(j)} t_i^{m-1} + \dots + a_1^{(j)} t_i + a_0^{(j)}. \quad (1)$$

- Έστω  $A$  ένας  $\ell \times m$  πίνακας με  $\ell > m$ ,  $b$  ένα διάνυσμα μεγέθους  $\ell$  και υποθέτουμε ότι θέλουμε να ελαχιστοποιήσουμε την νόρμα-2 της σχέσης  $At - b$ . Η παραγοντοποίηση QR του  $A$  έχει την ακόλουθη μορφή:

$$R = \begin{bmatrix} R_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

όπου  $R_1$  είναι ένας  $m \times m$  άνω τριγωνικός πίνακας.

Έτσι,  $A = QR$  και για την ελαχιστοποίηση της  $\ell_2$ -νόρμας του  $At - b$  έχουμε:

$$\|At - b\|_2 = \|QRt - b\|_2 = \|Q^T\|_2 \|QRt - b\|_2 = \|Q^T QRt - Q^T b\|_2$$

$$\|Rt - Q^T b\|_2 = \left\| \begin{bmatrix} R_1 \\ 0 \end{bmatrix} t - \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} \right\|_2 = \left\| \begin{bmatrix} R_1 t - c_1 \\ -c_2 \end{bmatrix} \right\|_2$$

όπου

$$Q^T b = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}.$$

Αφού το  $c_2$  είναι σταθερά, η νόρμα ελαχιστοποιείται όταν  $R_1 t - c_1 = 0$ , έτσι λύνουμε το γραμμικό σύστημα

$$R_1 t = c_1 \quad (2)$$

Ακολουθεί ο αλγόριθμος που περιγράφει με την παραπάνω τεχνική.

### Αλγόριθμος 3

**Είσοδος:** τα σημεία  $(t_v, f_j(t_v))$  και ο βαθμός  $m$  κάθε πολωνύμου  $p_M^{(j)}(t)$ ,  
τακ σημεία μέτρησης και τα  $M - k$  σημεία ισορροπίας

**Έξοδος:** οι ρίζες των

$$\mathfrak{F}_{\text{LeastSquares}}(\tau) = \|\delta_{\text{critical}}(\tau)\| - \mathcal{V}(\tau),$$

$$\mathfrak{F}'_{\text{LeastSquares}}(\tau) = \|\epsilon_{\text{critical}}(\tau)\| - \mathcal{V}(\tau),$$

$$\mathfrak{G}_{\text{LeastSquares}}(\tilde{\tau}) = \|\tilde{\delta}_{\text{critical}}(\tilde{\tau})\| - \mathcal{V}_*(\tilde{\tau}),$$

$$\mathfrak{G}'_{\text{LeastSquares}}(\tilde{\tau}) = \|\tilde{\epsilon}_{\text{critical}}(\tilde{\tau})\| - \mathcal{V}_*(\tilde{\tau}),$$

$$\mathfrak{G}_{\text{LeastSquares}}(\tau) = \|\delta_{\text{critical}}(\tau)\| - \mathcal{V}^*(\tau) \text{ και}$$

$$\mathfrak{G}'_{\text{LeastSquares}}(\tau) = \|\epsilon_{\text{critical}}(\tau)\| - \mathcal{V}^*(\tau).$$

στο δοθέν διάστημα  $]t_k, t_{k+1}[$

και

τα διαστήματα στα οποία ισχύουν

$$\mathfrak{F}_{\text{LeastSquares}}(\tau) < 0,$$

$$\mathfrak{F}'_{\text{LeastSquares}}(\tau) < 0,$$

$$\tilde{\mathfrak{F}}_{\text{LeastSquares}}(\tilde{\tau}) < 0,$$

$$\tilde{\mathfrak{F}}'_{\text{LeastSquares}}(\tilde{\tau}) < 0,$$

$$\mathfrak{G}_{\text{LeastSquares}}(\tau) < 0 \text{ και}$$

$$\mathfrak{G}'_{\text{LeastSquares}}(\tau) < 0.$$

1. Για κάθε  $j = 1, 2, \dots, l + 1$ ,

**Σχηματίζουμε** το γραμμικό σύστημα

$$T * a^{(j)} = f_j(T) \left( \Leftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} t_M^m & t_M^{m-1} & \dots & t_M & 1 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ t_0^m & t_0^{m-1} & \dots & t_0 & 1 \end{pmatrix}}_T \underbrace{\begin{pmatrix} a_m^{(j)} \\ \vdots \\ a_0^{(j)} \end{pmatrix}}_{a^{(j)}} = \underbrace{\begin{pmatrix} f_j(t_M) \\ \vdots \\ f_j(t_0) \end{pmatrix}}_{f_j(T)} \right),$$

που προκύπτει από τις εξισώσεις (1)

**Εφαρμόζουμε** την παραγοντοποίηση QR στο  $T$ :  $[Q, R] = qr(T)$ .

**Υπολογίζουμε** τους συντελεστές  $a_i^{(j)}, i = m, m - 1, \dots, 0$  του πολωνύμου  $p_M^{(j)}(t)$  επιλύοντας το γραμμικό σύστημα

$$R_1 a^{(j)} = c_1$$

που προκύπτει από τη (2) εφαρμόζοντας την παραγοντοποίηση LU με μερική οδήγηση.

2. **Κατασκευάζουμε** την καμπύλη

$$H_M \equiv P_M$$

με

$$P_M: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{l+1}: (t) \mapsto P_M(t) := (t, p_M^{(1)}(t), \dots, p_M^{(l+1)}(t))$$

3. **Επιλέγουμε** τέσσερις συναρτήσεις κρίσιμης ανοχής

$$\delta_{\text{critical}}(t) = (\delta_{\text{critical}}^{(1)}(t), \dots, \delta_{\text{critical}}^{(l+1)}(t)),$$

$$\tilde{\epsilon}_{\text{critical}}(t) = (\tilde{\epsilon}_{\text{critical}}^{(1)}(t), \dots, \tilde{\epsilon}_{\text{critical}}^{(l+1)}(t))$$

$$\delta_{\text{critical}}(t) = (\delta_{\text{critical}}^{(1)}(t), \dots, \delta_{\text{critical}}^{(l+1)}(t)) \text{ και}$$

$$\epsilon_{\text{critical}}(t) = (\epsilon_{\text{critical}}^{(1)}(t), \dots, \epsilon_{\text{critical}}^{(l+1)}(t))$$

που αναπαριστούν τις αποστάσεις από το ανώτερο και το κατώτερο κατώφλι εκτός των οποίων καταργείται η κανονικότητα.

## 4. Κατασκευάζουμε την καμπύλη

$$H_M \equiv P_M$$

με

$$P_M: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{G}(S) \equiv \mathbb{R}^{l+1}: t \mapsto P_M(t) := (t, L_M^{(1)}(t), \dots, L_M^{(l+1)}(t)).$$

## 5. Επιλέγουμε τέσσερις συναρτήσεις κρίσιμης ανοχής

$$\tilde{\delta}_{critical}(t) = (\tilde{\delta}_{critical}^{(1)}(t), \dots, \tilde{\delta}_{critical}^{(l+1)}(t)),$$

$$\tilde{\epsilon}_{critical}(t) = (\tilde{\epsilon}_{critical}^{(1)}(t), \dots, \tilde{\epsilon}_{critical}^{(l+1)}(t))$$

$$\delta_{critical}(t) = (\delta_{critical}^{(1)}(t), \dots, \delta_{critical}^{(l+1)}(t)) \text{ και}$$

$$\epsilon_{critical}(t) = (\epsilon_{critical}^{(1)}(t), \dots, \epsilon_{critical}^{(l+1)}(t))$$

που αντιπροσωπεύουν τις αποστάσεις από το ανώτερο και το κατώτερο κατώφλι εκτός των οποίων καταργείται η κανονικότητα.

6. Αν  $\tilde{\beta} = \beta = \mathcal{D}$ , τότε

## i. Υπολογίζουμε τις αποκλίσεις ανοχής

$$\mathfrak{F}_{LeastSquares}(\tau) = \|\delta_{critical}(\tau)\| - \mathcal{V}(\tau) \text{ και}$$

$$\mathfrak{F}'_{LeastSquares}(\tau) = \|\epsilon_{critical}(\tau)\| - \mathcal{V}(\tau)$$

στο δοθέν διάστημα  $]t_k, t_{k+1}[$

ii. Υπολογίζουμε τα διαστήματα  $[a_i, b_i]$ ,  $[a'_i, b'_i] \subset ]t_k, t_{k+1}[$  στα οποία οι αποκλίσεις ανοχής  $\mathfrak{F}_{LeastSquares}(\tau)$  και  $\mathfrak{F}'_{LeastSquares}(\tau)$  αλλάζουν πρόσημο, αντίστοιχα:

Για κάθε διάστημα  $[a_i, b_i]$  και  $[a'_i, b'_i]$

- Εφαρμόζουμε μερικά βήματα της μεθόδου **διχοτόμησης** για να προσεγγίσουμε τη ρίζα της  $\mathfrak{F}_{LeastSquares}(\tau)$  στο  $[a_i, b_i]$  και τη ρίζα της  $\mathfrak{F}'_{LeastSquares}(\tau)$  στο  $[a'_i, b'_i]$
- Εφαρμόζουμε τη μέθοδο **Newton** για τον υπολογισμό της ρίζας της  $\mathfrak{F}_{LeastSquares}(\tau)$  στο  $[a_i, b_i]$  και τη ρίζα της  $\mathfrak{F}'_{LeastSquares}(\tau)$  στο  $[a'_i, b'_i]$ .

iii. Βρίσκουμε τα διαστήματα στα οποία η απόκλιση ανοχής  $\mathfrak{F}_{LeastSquares}(\tau)$  είναι θετική χρησιμοποιώντας τις υπολογισμένες ρίζες. Κάθε σημείο  $\tau$  στο  $]t_k, t_{k+1}[$  που ικανοποιεί αυτή την ανισότητα είναι ένα **δυνητικό σημείο εμφάνισης επισφαλούς γεγονότος**.iv. Βρίσκουμε τα διαστήματα στα οποία η απόκλιση ανοχής  $\mathfrak{F}_{LeastSquares}(\tau)$  είναι



αρνητική και η απόκλιση ανοχής  $\mathfrak{F}'_{\text{LeastSquares}}(\tau)$  είναι θετική χρησιμοποιώντας τις υπολογισμένες ρίζες. Κάθε σημείο  $\tau$  στο  $]t_k, t_{k+1}[$  που ικανοποιεί τη δεύτερη ανισότητα είναι ένα **δυναμικό σημείο εμφάνισης επικίνδυνου γεγονότος**.

- v. **Βρίσκουμε** τα διαστήματα στα οποία η απόκλιση ανοχής  $\mathfrak{F}'_{\text{LeastSquares}}(\tau)$  είναι αρνητική χρησιμοποιώντας τις υπολογισμένες ρίζες. Κάθε σημείο  $\tau$  στο  $]t_k, t_{k+1}[$  που ικανοποιεί την ανισότητα είναι ένα **δυναμικό σημείο εμφάνισης καταστροφικού γεγονότος**.

## 7. Αλλιώς

- i. **Βρίσκουμε** τα σύνολα  $\tilde{\mathbb{P}}$  και  $\mathbb{P}$  όλων των σημείων  $\tilde{\tau}, \tau \in ]t_k, t_{k+1}[$ , που ικανοποιούν τις ανισότητες

$$\text{dist}(\tilde{\beta}, P_M(\tilde{\tau})) < \text{dist}(\beta, P_M(\tilde{\tau})) \text{ και } \text{dist}(\tilde{\beta}, P_M(\tau)) > \text{dist}(\beta, P_M(\tau)).$$

αντίστοιχα.

- ii. **Υπολογίζουμε** τις αποκλίσεις από τις ανοχές

$$\tilde{\mathfrak{G}}_{\text{LeastSquares}}(\tilde{\tau}) = \|\tilde{\delta}_{\text{critical}}(\tilde{\tau})\| - \mathcal{V}_*(\tilde{\tau}),$$

$$\tilde{\mathfrak{G}}'_{\text{LeastSquares}}(\tilde{\tau}) = \|\tilde{\epsilon}_{\text{critical}}(\tilde{\tau})\| - \mathcal{V}_*(\tilde{\tau}),$$

$$\mathfrak{G}_{\text{LeastSquares}}(\tau) = \|\delta_{\text{critical}}(\tau)\| - \mathcal{V}^*(\tau) \text{ και}$$

$$\mathfrak{G}'_{\text{LeastSquares}}(\tau) = \|\epsilon_{\text{critical}}(\tau)\| - \mathcal{V}^*(\tau).$$

**Υπολογίζουμε** τα διαστήματα  $[\tilde{c}_i, \tilde{d}_i], [\tilde{c}'_i, \tilde{d}'_i], [c_i, d_i], [c'_i, d'_i] \subset ]t_k, t_{k+1}[$  στα οποία οι αποκλίσεις ανοχής  $\tilde{\mathfrak{G}}_{\text{LeastSquares}}(\tilde{\tau}), \tilde{\mathfrak{G}}'_{\text{LeastSquares}}(\tilde{\tau}), \mathfrak{G}_{\text{LeastSquares}}(\tau)$  και  $\mathfrak{G}'_{\text{LeastSquares}}(\tau)$  αλλάζουν πρόσημο, αντίστοιχα.

Για κάθε διάστημα  $[\tilde{c}_i, \tilde{d}_i], [\tilde{c}'_i, \tilde{d}'_i], [c_i, d_i]$  και  $[c'_i, d'_i]$

- **Εφαρμόζουμε** κάποια βήματα της μεθόδου **διχοτόμησης** για να προσεγγίσουμε τη ρίζα της  $\tilde{\mathfrak{G}}_{\text{LeastSquares}}(\tilde{\tau})$  στο  $[\tilde{c}_i, \tilde{d}_i]$ , τη ρίζα της  $\tilde{\mathfrak{G}}'_{\text{LeastSquares}}(\tilde{\tau})$  στο  $[\tilde{c}'_i, \tilde{d}'_i]$ , τη ρίζα της  $\mathfrak{G}_{\text{LeastSquares}}(\tau)$  στο  $[c_i, d_i]$ , και τη ρίζα της  $\mathfrak{G}'_{\text{LeastSquares}}(\tau)$  στο  $[c'_i, d'_i]$
- **Εφαρμόζουμε** τη μέθοδο **Newton** για τον υπολογισμό της ρίζας της  $\tilde{\mathfrak{G}}_{\text{LeastSquares}}(\tilde{\tau})$  στο  $[\tilde{c}_i, \tilde{d}_i]$ , της ρίζας της  $\tilde{\mathfrak{G}}'_{\text{LeastSquares}}(\tilde{\tau})$  στο  $[\tilde{c}'_i, \tilde{d}'_i]$ , της ρίζας της  $\mathfrak{G}_{\text{LeastSquares}}(\tau)$  στο  $[c_i, d_i]$ , και της ρίζας της  $\mathfrak{G}'_{\text{LeastSquares}}(\tau)$  στο  $[c'_i, d'_i]$ .

## iii. Βρίσκουμε

- a. στο  $\mathbb{P}$  τα διαστήματα στα οποία η απόκλιση ανοχής  $\tilde{\mathcal{G}}_{\text{LeastSquares}}(\tilde{\tau})$  είναι θετική χρησιμοποιώντας τις υπολογισμένες ρίζες. Κάθε σημείο  $\tilde{\tau}$  στο  $]t_k, t_{k+1}[$  που ικανοποιεί αυτή την ανισότητα είναι ένα **δυναμικό σημείο εμφάνισης επισφαλούς γεγονότος, λόγω χαμηλής επίδοσης η ανεπάρκειας.**
- b. στο  $\mathbb{P}$  τα διαστήματα στα οποία η απόκλιση ανοχής  $\mathcal{G}_{\text{LeastSquares}}(\tau)$  είναι θετική χρησιμοποιώντας τις υπολογισμένες ρίζες. Κάθε σημείο  $\tau$  στο  $]t_k, t_{k+1}[$  που ικανοποιεί αυτή την ανισότητα είναι ένα **δυναμικό σημείο εμφάνισης επισφαλούς γεγονότος λόγω υψηλής επίδοσης η υπερεπάρκειας.**

## iv. Βρίσκουμε

- a. στο  $\mathbb{P}$  τα διαστήματα στα οποία η απόκλιση ανοχής  $\tilde{\mathcal{G}}_{\text{LeastSquares}}(\tilde{\tau})$  είναι αρνητική και η απόκλιση ανοχής  $\tilde{\mathcal{G}}'_{\text{LeastSquares}}(\tilde{\tau})$  είναι θετική χρησιμοποιώντας τις υπολογισμένες ρίζες. Κάθε σημείο  $\tilde{\tau}$  στο  $]t_k, t_{k+1}[$  που ικανοποιεί αυτή την ανισότητα είναι ένα **δυναμικό σημείο εμφάνισης επικίνδυνου γεγονότος, λόγω χαμηλής επίδοσης η ανεπάρκειας.**
- b. στο  $\mathbb{P}$  τα διαστήματα στα οποία η απόκλιση ανοχής  $\mathcal{G}_{\text{LeastSquares}}(\tau)$  είναι θετική χρησιμοποιώντας τις υπολογισμένες ρίζες. Κάθε σημείο  $\tau$  στο  $]t_k, t_{k+1}[$  που ικανοποιεί αυτή την ανισότητα είναι ένα **δυναμικό σημείο εμφάνισης επικίνδυνου γεγονότος, λόγω υψηλής επίδοσης η υπερεπάρκειας.**

## vi. Βρίσκουμε

- a. στο  $\mathbb{P}$  τα διαστήματα στα οποία η απόκλιση ανοχής  $\tilde{\mathcal{G}}'_{\text{LeastSquares}}(\tilde{\tau})$  είναι αρνητική χρησιμοποιώντας τις υπολογισμένες ρίζες. Κάθε σημείο  $\tilde{\tau}$  στο  $]t_k, t_{k+1}[$  που ικανοποιεί αυτή την ανισότητα είναι ένα **δυναμικό σημείο εμφάνισης καταστροφικού γεγονότος, λόγω χαμηλής επίδοσης η ανεπάρκειας.**
- b. στο  $\mathbb{P}$  τα διαστήματα στα οποία η απόκλιση ανοχής  $\mathcal{G}'_{\text{LeastSquares}}(\tau)$  είναι αρνητική χρησιμοποιώντας τις υπολογισμένες ρίζες. Κάθε σημείο  $\tau$  στο  $]t_k, t_{k+1}[$  που ικανοποιεί αυτή την ανισότητα είναι ένα **δυναμικό σημείο εμφάνισης καταστροφικού γεγονότος, λόγω υψηλής επίδοσης η υπερεπάρκειας.**

# Κεφάλαιο VI

## Αριθμητική επίλυση συστημάτων ανισώσεων

Για την εφαρμογή των παραπάνω αλγορίθμων σε πραγματικά ζητήματα πρόβλεψης είναι πολύ σημαντική η χρήση μεθόδων αριθμητικής επίλυσης συστημάτων ανισώσεων. Μερικές από αυτές τις μεθόδους θα αναλύσουμε σε αυτό το κεφάλαιο.

Έστω το σύστημα  $p$  ανισώσεων και εξισώσεων με  $n$  μεταβλητές όπου  $p > n$ :

$$\begin{cases} f_i(x) \leq 0, & i = 1, \dots, m \\ f_i(x) = 0, & i = m + 1, \dots, p \end{cases} \quad (1)$$

όπου κάθε  $f_i: \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  και  $\Omega$  ένα κλειστό κυρτό σύνολο.

Ο απλούστερος τρόπος επίλυσης τέτοιων συστημάτων είναι ο μετασχηματισμός των ανισώσεων σε εξισώσεις μέσω της παρακάτω ισοδυναμίας:

$$\begin{cases} f_i(x) \leq 0, \\ f_i(x) = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \max\{0, f_i(x)\} = 0, \\ f_i(x) = 0, \end{cases} \quad \begin{matrix} i = 1, \dots, m \\ i = m + 1, \dots, p \end{matrix} \quad (2)$$

Βάσει αυτού του μετασχηματισμού, το πρόβλημα επίλυσης ενός μη γραμμικού συστήματος ανισοτήτων και εξισώσεων μπορεί να μοντελοποιηθεί ως ένα πρόβλημα ολικών ακροτάτων. Λέμε ότι τα προβλήματα αυτά είναι ισοδύναμα, υπό την έννοια ότι το αρχικό πρόβλημα έχει τις ίδιες λύσεις, με τον εντοπισμό της ολικά ελάχιστης τιμής του τετραγώνου της  $\ell_2$ -νόρμας της συνάρτησης σφάλματος που σχετίζεται με το σύστημα, δηλαδή με το πρόβλημα:

$$\text{minimize } M(x) \equiv \sum_{i=1}^m (\max\{0, f_i(x)\})^2 + \sum_{j=m+1}^p f_j(x)^2 \quad (3)$$

για  $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$ . Σημειώνεται εδώ ότι απαιτείται να βρεθεί το **ολικό ελάχιστο** της αντικειμενικής συνάρτησης  $M(x)$  και όχι απλά ένα τοπικό ελάχιστο στο σύνολο  $\Omega$ . Θα συμβολίσουμε το ολικό ελάχιστο με  $x^*$ .

Οι κλασσικές μέθοδοι τοπικής αναζήτησης όπως αυτές που βασίζονται στη μέθοδο Newton, έχουν κάποια μειονεκτήματα σε σύγκριση με μεθόδους καθολικής αναζήτησης. Συγκεκριμένα:

- i. Η τελική λύση εξαρτάται σε μεγάλο βαθμό από την αρχική προσέγγιση της επαναληπτικής διαδικασίας.
- ii. Μπορούν να εγκλωβιστούν σε τοπικά ελάχιστα.
- iii. Χρειάζονται διαφορίσιμες ιδιότητες όλων των εξισώσεων του με γραμμικού συστήματος.

Η πολυτροπική φύση της  $M$  καθιστά τη διαδικασία αναζήτησης ολικού ελαχίστου εξαιρετικά δύσκολη. Για τη σύγκλιση προς μια καθολική λύση, ενδείκνυται η εφαρμογή μιας στρατηγικής **καθολικής αναζήτησης**. Οι πιο σημαντικές τεχνικές καθολικής αναζήτησης περιέχουν διαδικασίες εξερεύνησης και αξιοποίησης των ευρημάτων οι οποίες στοχεύουν στη:

- i. **Διαφοροποίηση** της έρευνας μέσα στις διάφορες περιοχές του χώρου των λύσεων.
- ii. **Εντατικοποίηση** της έρευνας μέσα στις περισσότερο υποσχόμενες περιοχές του χώρου των λύσεων, δηλαδή μέσα στις περιοχές που περιέχουν **υψηλής ποιότητας λύσεις**, δηλαδή τοπικές λύσεις οι οποίες θα μπορούσαν βασίμως να είναι ολικά ελάχιστα.

Μια γνωστή κλάση τέτοιων τεχνικών είναι οι **μεθευρετικοί αλγόριθμοι** (metaheuristics) οι οποίοι χρησιμοποιούν τυχαίες διαδικασίες που αξιοποιούν εργαλεία τεχνητής νοημοσύνης και προσομοιώνουν φυσικές συμπεριφορές. Θα αναφερθούμε στους μεθευρετικούς αλγορίθμους στο αμέσως επόμενο Εδάφιο.

## VI.1. Μεθευρετικοί Αλγόριθμοι

Η λέξη “μεθευρετικοί” χρησιμοποιείται για να περιγράψει όλες τις ευρετικές μεθόδους που μπορούν να επιτύχουν μιας υψηλής ποιότητας λύση σε αποδεκτό χρόνο. Λόγω της τυχαίας φύσης τους, οι αλγόριθμοι αυτοί συγκλίνουν αργά αφού μπορεί να αποτύχουν να εντοπίσουν ελπιδοφόρες κατευθύνσεις αναζήτησης στη γειτονιά ενός ολικού ελαχίστου. Υπάρχουν δυο κατηγορίες μεθευρετικών. Σε αντίθεση με τους πληθυσμιακούς ευρετικούς αλγορίθμους, οι **σημείο-προς-σημείο μεθευρετικοί** προσδιορίζουν μια μόνο λύση στο τέλος κάθε επανάληψης η οποία χρησιμοποιείται ως σημείο εκκίνησης της επόμενης.

Η **μέθοδος περιορισμένης αναζήτησης (Tabu Search)**, ή σε συντομογραφία (TS), αποτελεί ένα βασικό παράδειγμα ενός σημείο-προς-σημείο μεθευρετικού που σχεδιάστηκε κυρίως για την επίλυση συνδυαστικών προβλημάτων. Η TS που παρουσιάστηκε από τους Cnijnović και Klinowski ([27]) για συνεχή βελτιστοποίηση οδηγεί την τοπική αναζήτηση μακριά από τα τοπικά ελάχιστα και έχει τη δυνατότητα να εξερευνάει νέες περιοχές.

Στην εργασία [31], οι Gisela C. V. Ramadas και Edite M. G. P. Fernandes μελέτησαν το πρόβλημα της επίλυσης μη λείων (μη ομαλών) συστημάτων ανισοτήτων και εξισώσεων μέσω μίας διαδικασίας καθολικής αναζήτησης, συγκεκριμένα μέσω μιας παραλλαγής μεθευρετικής περιορισμένης αναζήτησης, χρησιμοποιώντας την αντικειμενική συνάρτηση  $M$  ως μέτρο για την πρόοδο του αλγορίθμου προς την λύση. Σύμφωνα με την μοντελοποίηση (3), αυτό σημαίνει ότι η καταλληλόλητα κάθε λύσης  $x$  εκτιμάται αξιολογώντας την αντικειμενική συνάρτηση  $M(x)$  στο  $x$ . Επιπλέον παρουσιάστηκε ένας συνδυασμός στρατηγικών καθολικής αναζήτησης και στρατηγικών τοπικής αναζήτησης που στηρίζεται σε δύο εναλλακτικά βήματα: Το βήμα **καθολικής αναζήτησης** και το βήμα **τοπικής αναζήτησης**. Σε κάθε επανάληψη ο αλγόριθμος αποφασίζει ποιο από τα δυο θα ακολουθήσει. Η απόφαση βασίζεται στην παρατηρούμενη μείωση της τιμής της αντικειμενικής συνάρτησης. Γενικά, απαιτείται μονότονη μείωση της αντικειμενικής συνάρτησης. Παρ'όλα αυτά, στη συγκεκριμένη εργασία, η αντικειμενική συνάρτηση στο επόμενο σημείο δοκιμής συγκρίνεται με την μέγιστη των τιμών της αντικειμενικής συνάρτησης ενός προκαθορισμένου αριθμού προηγούμενων επαναλήψεων, αντί για την τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης στο τρέχον σημείο.

## VI.2. Συνδυαστική Καθολική Περιορισμένη αναζήτηση (Tabu Search) και τοπική αναζήτηση (Local Search)

Η προαναφερθείσα στρατηγική συνδυάζει δυο εναλλακτικά βήματα: ένα καθολικό και ένα τοπικό. Η γενική ιδέα είναι βασισμένη στον αλγόριθμο που παρουσιάστηκε στο [28] όπου χρησιμοποιείται μια κλασσική, βασισμένη στο ανάδελτα, σχεδόν-Newton (Quasi-Newton) μη μονότονη στρατηγική για την επίλυση μη γραμμικών συστημάτων εξισώσεων. Η επιλογή των G. C. V. Ramadas και E. M. G. P. Fernandes βασίστηκε σε μια τροποποιημένη έκδοση της μεθόδου Κατευθυνόμενης Περιορισμένης Αναζήτησης (Directed Tabu Search) των Hedar και Fukushima ([29]) για το καθολικό βήμα, καθώς και σε μια κλασσική μέθοδο αναζήτησης που οφείλεται στους Hooke-Jeeves [30] για το τοπικό βήμα. Ας περιγράψουμε σε πολύ αδρές γραμμές αυτές τις δύο μεθόδους.

### VI.2.i. Κατευθυνόμενη Περιορισμένη Αναζήτηση (Directed Tabu Search ή DTS)

Η Περιορισμένη Αναζήτηση είναι μια επαναληπτική διαδικασία που λειτουργεί με τον ακόλουθο τρόπο. Ο αλγόριθμος ξεκινάει με μια τυχαία αρχική λύση,  $x^{(0)}$ , και εφαρμόζοντας προκαθορισμένες κινήσεις στην γειτονιά της, δημιουργεί ένα σύνολο λύσεων  $\mathcal{Y}$ . Η αντικειμενική συνάρτηση προς ελαχιστοποίηση υπολογίζεται σε κάθε λύση του  $\mathcal{Y}$  και η καλύτερη από όλες,  $y_{best}$  αντικαθιστά τη λύση μας, ακόμα και αν είναι χειρότερη από την  $x^{(0)}$ . Ο αλγόριθμος αποφεύγει να παγιδευτεί σε κάποιο τοπικό ελάχιστο αποδεχόμενος λύσεις με υψηλότερη καταλληλότητα. Η προηγούμενη διαδικασία επαναλαμβάνεται μέχρι να υπερβεί μια δοθείσα κατάσταση τερματισμού, για παράδειγμα, όταν η λύση δεν βελτιώνεται για συγκεκριμένο αριθμό επαναλήψεων. Για να αποφευχθούν ανακυκλώσεις λύσεων, αφού ένα σημείο που έχουμε ήδη επισκεφτεί μπορεί να δημιουργηθεί ξανά μέσω του αλγορίθμου, ένα σύνολο από σημεία τα οποία έχουμε ήδη επισκεφτεί αποθηκεύονται σε μια λίστα που ονομάζεται **λίστα περιορισμένης αναζήτησης (Tabu List)**. Οι λύσεις του  $\mathcal{Y}$  που ανήκουν στην TL (Tabu List) εξουδετερώνονται.

Ιδιαίτερως, η μέθοδος **κατευθυνόμενης περιορισμένης αναζήτησης (DTS)** ([29]) αποτελείται από τρεις βασικές διαδικασίες: **εξερεύνηση**, **διαφοροποίηση** και **εντατικοποίηση** της αναζήτησης. Οι διαδικασίες της εξερεύνησης και της διαφοροποίησης της αναζήτησης απαιτούν μια τυχαία αρχική λύση, όμως μπορούν να χρησιμοποιηθούν και άλλες αρχικές εκτιμήσεις.

#### i. Εξερεύνηση της αναζήτησης

Η εξερεύνηση της αναζήτησης ([31]) στοχεύει στο να εξερευνήσει τον χώρο αναζήτησης  $\Omega$ . Χρησιμοποιεί άμεσες μεθόδους αναζήτησης έτσι ώστε να σταθεροποιήσει την αναζήτηση, ειδικά σε περίπτωση εγγύτητας ενός τοπικού ελαχίστου. Μια από τις παραλλαγές του αλγορίθμου χρησιμοποιεί την στρατηγική **προσαρμοστικής αναζήτησης προτύπου**. Η κυκλική διαδικασία αποφεύγεται όχι μόνο με την βασική περιορισμένη λίστα αλλά, επιπλέον, συμπεριλαμβάνοντας τέσσερα νέα στοιχεία στη μνήμη της TS: την **περιορισμένη λίστα πολλαπλών τάξεων**, την **περιορισμένη περιοχή (Tabu Region)**, την **ημι-περιορισμένη περιοχή (Semi-Tabu Region)** και τη **λίστα επισκεφθεισών περιοχών (Visited Region List, VRL)**. Τα εν λόγω στοιχεία είναι δομές μνήμης **μακράς διάρκειας** που επιτρέπουν στη μέθοδο να συμπεριφέρεται ως μια ευφυής τεχνική αναζήτησης κατά τις διαδικασίες της διαφοροποίησης και της εντατικοποίησης της αναζήτησης.

## ii. Διαφοροποίηση της αναζήτησης

Η διαδικασία της διαφοροποίησης αναζήτησης ([31]) στοχεύει στη δημιουργία νέων αρχικών σημείων δοκιμής εκτός των επισκεφθεισών περιοχών. Η πληροφορία που έχει αρχικοποιηθεί στη VRL χρησιμοποιείται για να κατευθύνει την αναζήτηση σε νέες περιοχές. Αυτή η VRL λειτουργεί ως εργαλείο διαφοροποίησης με στόχο την διάχυση της αναζήτησης σε περιοχές που δεν έχουμε επισκεφθεί στον χώρο αναζήτησης.

## iii. Εντατικοποίηση της αναζήτησης

Όταν μια από τις καλύτερες αποκτηθείσες δοκιμαστικές λύσεις είναι ικανοποιητικά κοντά σε ένα ολικό ελάχιστο, ή η τιμή της δεν έχει μεταβληθεί για ένα προκαθορισμένο αριθμό επαναλήψεων, η DTS εφαρμόζει τη διαδικασία εντατικοποίησης της αναζήτησης ([31]), στο τελευταίο στάδιο του αλγορίθμου, στοχεύοντας να υπολογίσει μια λύση ακόμη πιο κοντά στο ολικό ελάχιστο. Σε αυτό το σημείο χρησιμοποιείται η μέθοδος **τοπικής αναζήτησης Hooke-Jeeves** ως διαδικασία εντατικοποίησης της αναζήτησης.

### VI.2.ii. Μέθοδος τοπικής αναζήτησης Hooke-Jeeves

Η άνευ παραγώνων μέθοδος **Hooke-Jeeves (HJ)** είναι μια αιτιοκρατική μέθοδος τοπικής αναζήτησης προτύπων που έχει χρησιμοποιηθεί ευρέως στο μη γραμμικό προγραμματισμό για την επίλυση προβλημάτων χωρίς περιορισμούς είτε προβλημάτων με φραγμένους περιορισμούς, καθώς επίσης μη λείων προβλημάτων με περιορισμούς. Εκτελεί δύο ειδών βήματα: το **εξερευνητικό** και το **πρότυπο**. Για κάθε επανάληψη  $j$ , η μέθοδος εκτελεί μια σειρά από εξερευνητικές κινήσεις κατά μήκος των αξόνων συντεταγμένων γύρω από μια προσέγγιση  $x^{(j)}$  προκειμένου να εντοπίσει μια νέα προσέγγιση  $x^{(j+1)} = x^{(j)} + \Delta^{(j)}s^{(j)}$ , με χαμηλότερη τιμή στην αντικειμενική συνάρτηση διατηρώντας την προσέγγιση εντός του συνόλου  $\Omega$ . Ο αριθμός  $\Delta^{(j)}$  αναπαριστά το μήκος του βήματος και το διάνυσμα  $s^{(j)}$  προσδιορίζει την κατεύθυνση της κίνησης στην επανάληψη  $j$ . Το μήκος του βήματος μειώνεται κάθε φορά που η προηγούμενη επανάληψη είναι ανεπιτυχής, για παράδειγμα όταν δεν έχουμε βελτίωση της  $M$ . Η μέθοδος αυτή επιπλέον εκτελεί μια πρότυπη μετακίνηση κάθε φορά που συναντούμε μια επιτυχημένη επανάληψη. Το διάνυσμα  $x^{(j+1)} - x^{(j)}$  ορίζει μια κατεύθυνση και ύστερα εκτελείται μια πρότυπη μετακίνηση, που σημαίνει ότι η εξερευνητική κίνηση εκτελείται γύρω από το δοκιμαστικό σημείο  $x^{(j+1)} + (x^{(j+1)} - x^{(j)})$  αντί για το σημείο  $x^{(j+1)}$ . Αν αυτή η συντεταγμένη αναζήτηση είναι επιτυχής, το σημείο που μας επιστρέφει ο αλγόριθμος γίνεται δεκτό ως το νέο σημείο αλλιώς η πρότυπη μετακίνηση απορρίπτεται και η μέθοδος εκτελεί συντεταγμένη αναζήτηση γύρω από το  $x^{(j+1)}$ .



### VI.2.iii. Αλγόριθμος Μη Μονότονης Μείωσης της Αντικειμενικής Συνάρτησης

Μια προηγούμενη πρόταση σχετικά με τη συνθήκη που αποφασίζει ποιο βήμα είναι το καταλληλότερο να εκτελεστεί σε κάθε επανάληψη  $k$ , εξαρτάται από την ικανοποιητική μείωση που επέρχεται στην αντικειμενική συνάρτηση, συγκριτικά με την τιμή της στην προηγούμενη επανάληψη. Η απαίτηση μιας μονότονης μείωσης της αντικειμενικής συνάρτησης ενδέχεται να εμποδίζει το βήμα της τοπικής αναζήτησης να εκτελείται συχνότερα. Σταδιακά τα βήματα της καθολικής αναζήτησης κυριαρχούν και η επαναληπτική διαδικασία γίνεται υπολογιστικά απαιτητική σε ότι αφορά την αξιολόγηση της συνάρτησης. Το ζήτημα αυτό μπορεί εύκολα να αντιμετωπιστεί χαλαρώνοντας τη συνθήκη στην αντικειμενική συνάρτηση για την επιλογή βημάτων τοπικής αναζήτησης. Αυτό απαιτεί μια στρατηγική μη μονότονης μείωσης της αντικειμενικής συνάρτησης. Μη μονότονες στρατηγικές έχουν εφαρμοστεί σε διάφορα ζητήματα, για παράδειγμα, σε μεθόδους σχεδόν-Newton για συστήματα εξισώσεων, σε προβλήματα συμπληρωματικότητας, σε μεθόδους τύπου Newton για την επίλυση μιας λείας προσέγγισης του συστήματος.

Ο Αλγόριθμος 4 συνοψίζει τα βασικά βήματα της **μη μονότονης συνδυαστικά καθολικής περιορισμένης αναζήτησης** και της **Τοπικής Αναζήτησης (Nonmonotone Combined Global Tabu Search and Local Search, σε συντομογραφία NonM-CGTSLs [31])**. Θα παρουσιάσουμε τον βασικό αλγόριθμο που μπορεί να χρησιμοποιηθεί σε περιβάλλον Matlab καθώς και σε άλλα υπολογιστικά προγράμματα.

#### Αλγόριθμος 4: NonM-CGTSLs ([31])

Είσοδος:  $x^{(0)}, \eta^* > 0, \eta_k > \eta^*, 0 < \gamma_1, \gamma_2 < 1, k_{max} > 0, S_{max} \geq 0$

Set  $k = 0, s = 0, flag = 0$

**while**  $M(x^{(k)}) > \eta^* AND k < k_{max}$  **do**

$M_s \leftarrow M(x^{(k)})$

**if**  $flag = 1$  **then**

Χρήση τοπικής αναζήτησης HJ για τον υπολογισμό μιας  $\eta_k$ -προσέγγισης  $x^{(k+1)}$

**else**

Χρήση καθολικής αναζήτησης DTS για τον υπολογισμό μιας  $\eta_k$ -προσέγγισης  $x^{(k+1)}$

**end if**



```

if  $M(x^{(k+1)}) \leq \gamma_1 \max_{0 \leq j \leq s} \{M_{s-j}\}$  then
  Set  $flag = 1$ 
else
  Set  $flag = 0$ 
end if
  Set  $k = k + 1, \eta_k = \max\{\eta^*, \gamma_2 \eta_{k-1}\}, s = \max\{s + 1, S_{max}\}$ 
if  $k > S_{max}$  then
   $M_0 \leftarrow M_1, \dots, M_{s-2} \leftarrow M_{s-1}, M_{s-1} \leftarrow M_s$ 
end if
end while

```

Τόσο στα ολικά όσο και στα τοπικά βήματα του αλγορίθμου, μας αρκεί μόνο μια  $\eta_k$ -προσέγγιση  $x^{(k+1)}$  της βέλτιστης λύσης, για παράδειγμα, κάθε αναζήτηση τερματίζεται όταν στην  $k$ -οστή επανάληψη, η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης στην μέχρι στιγμής βέλτιστη λύση είναι μικρότερη του  $\eta_k$ . Οι τιμές της ακολουθίας  $\eta_k$  θα πρέπει να μειώνονται και να συγκλίνουν στο μηδέν, καθώς το  $k$  αυξάνεται. Το επιχείρημα είναι ότι όταν η επαναληπτική διαδικασία ξεκινάει μακριά από τη λύση του προβλήματος, δεν υπάρχει λόγος σπατάλης πόρων για τον υπολογισμό μιας προσέγγισης με υψηλή ακρίβεια. Ωστόσο, όσο η διαδικασία πλησιάζει τη λύση, οι υψηλής ακρίβειας προσεγγίσεις είναι σημαντικές για την επιτάχυνση της όλης διαδικασίας. Η συνθήκη  $M(x^{(k+1)}) \leq \gamma_1 \max_{0 \leq j \leq s} \{M_{s-j}\}$  στον αλγόριθμο προσδιορίζει τη μη μονότονη μείωση της αντικειμενικής συνάρτησης. Αντί να απαιτούμε μια μείωση στην αντικειμενική συνάρτηση σε σχέση με την προηγούμενη επανάληψη για την επιλογή της τοπικής αναζήτησης  $HJ$  (με  $flag = 1$ ), χρησιμοποιεί μια μείωση σε σχέση με τη μέγιστη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης που αποκτήσαμε σε έναν προκαθορισμένο αριθμό ( $\leq S_{max} + 1$ ) προηγούμενων επαναλήψεων. Με αυτόν τον τρόπο, ο αλγόριθμος μπορεί να επιλέξει την  $HJ$  ακόμα και αν η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης έχει αυξηθεί σε σχέση με την προηγούμενη επανάληψη. Είναι αρκετό η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης να είναι μικρότερη της μέγιστης τιμής της αντικειμενικής συνάρτησης που παρατηρήθηκε στις τελευταίες  $S_{max} + 1$  επαναληψεις. Όσο πιο κοντά στο ένα είναι η παράμετρος  $\gamma_1$ , τόσο πιο χαλαρή είναι η συνθήκη. Μια επιτυχής εκτέλεση καταγράφεται όταν ο αλγόριθμος σταματάει λόγω της συνθήκης  $M(x^{(k)}) \leq \eta^*$ . Ο σκοπός της παραμέτρου  $\gamma_2$  είναι να ορίσει την φθίνουσα ακολουθία  $\eta_k$ .

## Κεφάλαιο VII

# Αριθμητικά αποτελέσματα

Θα παρουσιάσουμε τώρα μερικά αριθμητικά αποτελέσματα αξιολογώντας τους προτεινομένους αλγορίθμους του Κεφαλαίου 5.

### VII.1. Αριθμητικά Παραδείγματα

**Παράδειγμα 6.1.** Έστω

$$H_M(t, x_0, y_0, z_0) = (H_M^{(1)}(t, x_0, y_0, z_0), H_M^{(2)}(t, x_0, y_0, z_0), H_M^{(3)}(t, x_0, y_0, z_0)),$$

όπου  $H_M^{(1)}$  είναι μια συνάρτηση που διέρχεται από τα σημεία

$$\begin{aligned}(t_1^{(1)}, w_1^{(1)}) &= (0.227995363116753, 0.005887473341432) \\(t_2^{(1)}, w_2^{(1)}) &= (0.666935900301706, -0.002451487989435) \\(t_3^{(1)}, w_3^{(1)}) &= (1.088758378092684, -0.026536596177317) \\(t_4^{(1)}, w_4^{(1)}) &= (1.222118728436067, -0.083738292365262) \\(t_5^{(1)}, w_5^{(1)}) &= (1.919487917032162, 0.000000000000002),\end{aligned}$$

$H_M^{(2)}$  μια συνάρτηση που διέρχεται από τα σημεία

$$\begin{aligned}(t_1^{(2)}, w_1^{(2)}) &= (1.084431059927606, 0.001824976373948) \\(t_2^{(2)}, w_2^{(2)}) &= (1.217471981917524, -0.008796025804148) \\(t_3^{(2)}, w_3^{(2)}) &= (1.303998173014984, -0.005794329946252) \\(t_4^{(2)}, w_4^{(2)}) &= (1.306656948627908, -0.005645884524371) \\(t_5^{(2)}, w_5^{(2)}) &= (1.918582850410889, 0.000000000000004)\end{aligned}$$

και  $H_M^{(3)}$  μια συνάρτηση που διέρχεται από τα σημεία

$$\begin{aligned}(t_1^{(3)}, w_1^{(3)}) &= (0.477049937449979, 0.003546169430236) \\(t_2^{(3)}, w_2^{(3)}) &= (0.831405751301321, 0.037059412329365) \\(t_3^{(3)}, w_3^{(3)}) &= (0.969342971854446, 0.076154493784762) \\(t_4^{(3)}, w_4^{(3)}) &= (1.136154854287057, 0.100711757050127) \\(t_5^{(3)}, w_5^{(3)}) &= (1.858527246374456, 0.000000000000001).\end{aligned}$$

Έστω

$$D(t, x_0, y_0, z_0) = (D^{(1)}(t, x_0, y_0, z_0), D^{(2)}(t, x_0, y_0, z_0), D^{(3)}(t, x_0, y_0, z_0)),$$

όπου

$$D^{(1)}(t, x_0, y_0, z_0) = \begin{cases} 0.3, & t \in [0,1] \\ 1, & t \in (1,2] \end{cases}, D^{(2)}(t, x_0, y_0, z_0) = \begin{cases} 5, & t \in [0,0.5] \\ 4.8, & t \in (0.5,1.5] \\ 4.5, & t \in (1.5,2] \end{cases}$$

και

$$D^{(3)}(t, x_0, y_0, z_0) = 1, \quad t \in [0,2]$$

μια κατά τμήματα σταθερή συνάρτηση. Τέλος έστω  $\epsilon_{critical} = 0.2$ .

### VII.1.i. Εφαρμογή της μεθόδου παρεμβολής Lagrange

Εφαρμόζοντας τη μέθοδο παρεμβολής Lagrange στα πρώτα 5 ζεύγη σημείων κατασκευάζουμε το ακόλουθο πολυώνυμο 4<sup>ου</sup> βαθμού:

$$H_M^{(1)}(t, x_0, y_0, z_0) = t^4 - 3.834982837445468t^3 + 4.754550511049691t^2 - 2.230278241661984t + 0.309978747075857.$$

Ομοίως εφαρμόζοντας την ίδια μέθοδο στα άλλα 2 σύνολα από ζεύγη σημείων κατασκευάζουμε τα ακόλουθα πολυώνυμα

$$H_M^{(2)}(t, x_0, y_0, z_0) = t^4 - 6.192973860723464t^3 + 14.172259131310970t^2 - 14.183279563983136t + 5.230995486528229$$

και

$$H_M^{(3)}(t, x_0, y_0, z_0) = t^4 - 4.674114367931685t^3 + 7.506905149871919t^2 - 4.781612611847812t + 1.031873971027329$$

Στο διάστημα [0, 0.5]: Είναι

$$D^{(1)}(t, x_0, y_0, z_0) = 0.3, \quad D^{(2)}(t, x_0, y_0, z_0) = 5 \text{ και } D^{(3)}(t, x_0, y_0, z_0) = 1.$$

Έτσι, έχουμε

$$\begin{aligned} dist(t^*, x_0, y_0, z_0) &:= d(D(t^*, x_0, y_0, z_0), H_M(t^*, x_0, y_0, z_0))^2 - \epsilon_{critical}^2 = \\ &= \left( \sqrt{(H_M^{(1)}(t, x_0, y_0, z_0) - D^{(1)}(t, x_0, y_0, z_0))^2 + (H_M^{(2)}(t, x_0, y_0, z_0) - D^{(2)}(t, x_0, y_0, z_0))^2 + (H_M^{(3)}(t, x_0, y_0, z_0) - D^{(3)}(t, x_0, y_0, z_0))^2} \right)^2 - 0.2^2 \\ &= 10^2 (0.03000000000000000 t^8 - 0.294041421322012 t^7 + 1.277747933120760 t^6 \\ &\quad - 3.245707071889221 t^5 + 5.178371259645941 t^4 - 4.982519922531551 t^3 \end{aligned}$$

$$+ 2.361242738501194 t^2 - 0.069018758555689 t + 0.00014474440218668).$$

Εφαρμόζοντας μερικά βήματα της μεθόδου διχοτόμησης και συνεχίζοντας με την μέθοδο Newton, υπολογίζουμε τις 2 πραγματικές ρίζες της προηγούμενης διαφοράς:

$$r_1 = 0.002273099702700 \text{ και } r_2 = 0.028800172170581.$$

Οι υπόλοιπες ρίζες είναι μιγαδικές:

$$r_3 = 2.509738528010871 + 0.386784138440236i,$$

$$r_4 = 2.509738528010871 - 0.386784138440236i,$$

$$r_5 = 0.867076621261211 + 1.616852099664138i,$$

$$r_6 = 0.867076621261211 - 1.616852099664138i,$$

$$r_7 = 1.508338570158150 + 1.058472988403263i \text{ και}$$

$$r_8 = 1.508338570158150 - 1.058472988403263i.$$

Οι δύο πραγματικές ρίζες ανήκουν στο  $[0, 0.5]$ , έτσι αναζητούμε το υποδιάστημα στο οποίο, η απόσταση  $dist$  υπερβαίνει το  $\epsilon_{critical}$ , προσδιορίζοντας το πρόσημο της  $dist(t^*, x_0, y_0, z_0)$ :

$$dist\left(\frac{0+r_1}{2}, x_0, y_0, z_0\right) = 0.006934396087571 > 0, \quad \text{υπερβαίνει}$$

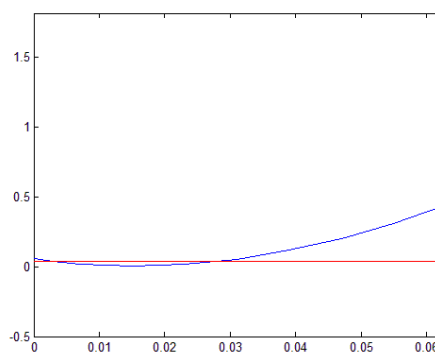
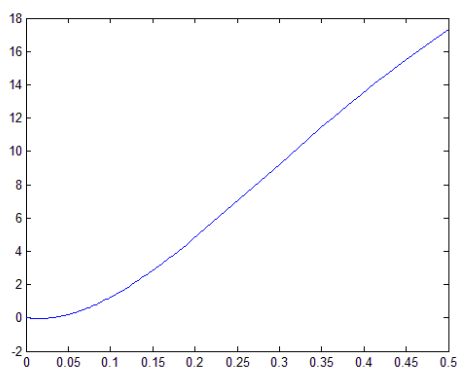
$$dist\left(r_1 + \frac{r_2-r_1}{2}, x_0, y_0, z_0\right) = -0.037415583826047 < 0, \quad \text{δεν υπερβαίνει}$$

$$dist\left(r_2 + \frac{0.5-r_2}{2}, x_0, y_0, z_0\right) = 7.639373481094819 > 0, \quad \text{υπερβαίνει.}$$

Ο υπολογισμός του μέσου ενός διαστήματος  $[a, b]$  είναι αριθμητικά πιο ευσταθής εφόσον χρησιμοποιηθεί ο τύπος  $a + (b - a)/2$  αντί για τον τύπο  $(a + b)/2$ . Έτσι προκύπτουν τα εξής υποδιαστήματα:

$$[0, r_1] = [0, 0.002273099702700] \text{ και } [r_2, 0.5] = [0.028800172170581, 0.5].$$

Τα προηγούμενα αποτελέσματα επιβεβαιώνονται στο παρακάτω γράφημα:



$$\text{Σχ. 1: } d(D(t^*, x_0, y_0, z_0), H_M(t^*, x_0, y_0, z_0))^2 - \epsilon_{critical}^2 = 0, \text{ στο } [0, 0.5]$$

Δεξιά: Μπλε:  $d(D(t^*, x_0, y_0, z_0), H_M(t^*, x_0, y_0, z_0))^2$ , Κόκκινο:  $\epsilon_{critical}^2$

Ομοίως συνεχίζουμε με τα υπόλοιπα διαστήματα:

Στο διάστημα [0.5, 1]: Είναι

$$D^{(1)}(t, x_0, y_0, z_0) = 0.3, \quad D^{(2)}(t, x_0, y_0, z_0) = 4.8 \text{ και } D^{(3)}(t, x_0, y_0, z_0) = 1$$

Έτσι, έχουμε  $dist(t^*, x_0, y_0, z_0) := d(D(t^*, x_0, y_0, z_0), H_M(t^*, x_0, y_0, z_0))^2 - \epsilon_{critical}^2 =$

$$10^2 \cdot (0.0300000000000000 t^8 - 0.294041421322012 t^7 + 1.277747933120760 t^6 - 3.245707071889221 t^5 + 5.182371259645940 t^4 - 5.007291817974445 t^3 + 2.417931775026438 t^2 - 0.125751876811622 t + 0.00146872634829960).$$

Το πολυώνυμο αυτό δεν έχει ρίζες στο [0.5, 1] καθώς οι υπολογισμένες πραγματικές ρίζες είναι:

$$r_1 = 0.040004113476170 \text{ και } r_2 = 0.017116857501511.$$

Οι μιγαδικές ρίζες είναι

$$r_3 = 2.498396249450112 + 0.381204610043865i,$$

$$r_4 = 2.498396249450112 - 0.381204610043865i,$$

$$r_5 = 0.870193396478612 + 1.606200335093546i,$$

$$r_6 = 0.870193396478612 - 1.606200335093546i,$$

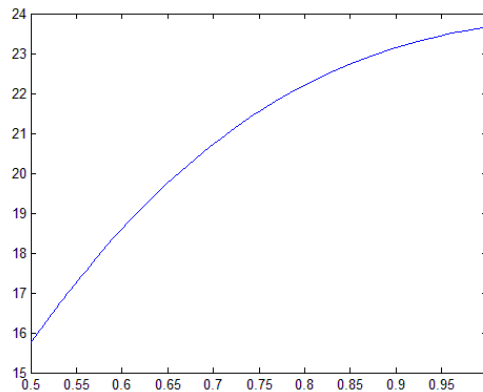
$$r_7 = 1.503540223949301 + 1.045786599012817i \text{ και}$$

$$r_8 = 1.503540223949301 - 1.045786599012817i.$$

Επομένως, η  $dist$  δεν αλλάζει πρόσημο στο [0.5, 1]. Ελέγχουμε το πρόσημό της στο διάστημά μας:

$$dist\left(0.5 + \frac{1-0.5}{2}, x_0, y_0, z_0\right) = 21.546863660167102 > 0, \text{ υπερβαίνει}$$

Ως εκ τούτου, η ανισότητα ικανοποιείται σε ολόκληρο το διάστημα [0.5, 1]. Το αποτέλεσμα επιβεβαιώνεται από το επόμενο γράφημα:



$$\Sigma\chi. 2: d(D(t^*, x_0, y_0, z_0), H_M(t^*, x_0, y_0, z_0))^2 - \epsilon_{critical}^2 = 0, \text{ στο } [0.5, 1]$$

Στο διάστημα [1, 1.5]: Είναι

$$D^{(1)}(t, x_0, y_0, z_0) = 1, \quad D^{(2)}(t, x_0, y_0, z_0) = 4.8 \text{ και } D^{(3)}(t, x_0, y_0, z_0) = 1$$

Έτσι,

$$\begin{aligned} dist(t^*, x_0, y_0, z_0) := & d(D(t^*, x_0, y_0, z_0), H_M(t^*, x_0, y_0, z_0))^2 - \epsilon_{critical}^2 = \\ & 10^2 \cdot (0.0300000000000000 t^8 - 0.294041421322012 t^7 + 1.277747933120760 t^6 \\ & - 3.245707071889221 t^5 + 5.168371259645941 t^4 - 4.953602058250208 t^3 \\ & + 2.351368067871742 t^2 - 0.094527981428354 t + 0.006629023889238). \end{aligned}$$

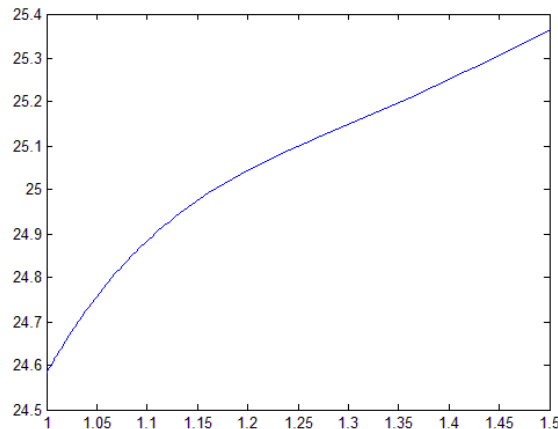
Το πολυώνυμο αυτό δεν έχει ρίζες στο  $[1, 1.5]$  και γενικά στο  $\mathbb{R}$ . (Πράγματι, οι μιγαδικές ρίζες του είναι:

$$\begin{aligned} & 2.514237185330458 + 0.344992663751071i \\ & 2.514237185330458 - 0.344992663751071i \\ & 0.900301772604769 + 1.607482372841454i \\ & 0.900301772604769 - 1.607482372841454i \\ & 1.467435882497859 + 1.066846497745094i \\ & 1.467435882497859 - 1.066846497745094i \\ & 0.018715514933777 + 0.050350085665568i \\ & 0.018715514933777 - 0.050350085665568i). \end{aligned}$$

Αυτό, ειδικότερα, σημαίνει ότι η  $dist$  δεν αλλάζει (διατηρεί σταθερό) πρόσημο στο  $[1, 1.5]$ . Ελέγχουμε το πρόσημό της στο  $[1, 1.5]$ . Έχουμε

$$dist\left(1 + \frac{1.5-1}{2}, x_0, y_0, z_0\right) = 25.099633861696560 > 0, \text{ υπερβαίνει}$$

Έτσι, ολόκληρο το διάστημα  $[1, 1.5]$  ικανοποιεί την ανίσωση. Το αποτέλεσμα επιβεβαιώνεται από το γράφημα της  $dist$  στο  $[1, 1.5]$ :



$$\Sigma\chi. 3: d\left(D(t^*, x_0, y_0, z_0), H_M(t^*, x_0, y_0, z_0)\right)^2 - \epsilon_{critical}^2 = 0, \text{ στο } [1, 1.5]$$

Στο διάστημα  $[1.5, 2]$ : Είναι

$$D^{(1)}(t, x_0, y_0, z_0) = 1, \quad D^{(2)}(t, x_0, y_0, z_0) = 4.5 \text{ και } D^{(3)}(t, x_0, y_0, z_0) = 1.$$

Έτσι, έχουμε

$$\begin{aligned} dist(t^*, x_0, y_0, z_0) &:= d\left(D(t^*, x_0, y_0, z_0), H_M(t^*, x_0, y_0, z_0)\right)^2 - \epsilon_{critical}^2 = \\ &10^2 \cdot (0.030000000000000000 t^8 - 0.294041421322012 t^7 + 1.277747933120760 t^6 \\ &- 3.245707071889221 t^5 + 5.168371259645941 t^4 - 4.990759901414549 t^3 \\ &+ 2.436401622659608 t^2 - 0.179627658812253 t + 0.00971499680840698). \end{aligned}$$

Το πολυώνυμο αυτό δεν έχει πραγματικές ρίζες στο διάστημα  $[1.5, 2]$  και γενικά στο  $\mathbb{R}$ . (Πράγματι, οι μιγαδικές του ρίζες είναι

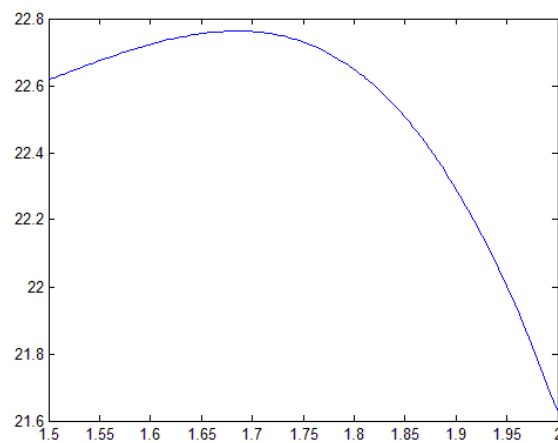
$$\begin{aligned} &2.497812467041424 + 0.334671115024619i \\ &2.497812467041424 - 0.334671115024619i \\ &0.906499569034136 + 1.591152415627324i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&0.906499569034136 - 1.591152415627324i \\
&1.458054516088373 + 1.048451106568287i \\
&1.458054516088373 - 1.048451106568287i \\
&0.038323803202940 + 0.056970513529854i \\
&0.038323803202940 - 0.056970513529854i ).
\end{aligned}$$

Αυτό, ειδικότερα, σημαίνει ότι η  $dist$  δεν αλλάζει (διατηρεί σταθερό) πρόσημο στο  $[1.5, 2]$ . Ελέγχουμε το πρόσημο της συνάρτησης στο  $[1.5, 2]$ :

$$dist\left(1.5 + \frac{2-1.5}{2}, x_0, y_0, z_0\right) = 22.689534856364734 > 0, \text{ υπερβαίνει}$$

Έτσι, ολόκληρο το διάστημα  $[1.5, 2]$  ικανοποιεί την ανίσωση. Το αποτέλεσμα επιβεβαιώνεται από το γράφημα της  $dist$  στο  $[1.5, 2]$ :



Σχ. 4:  $d(D(t^*, x_0, y_0, z_0), H_M(t^*, x_0, y_0, z_0))^2 - \epsilon_{critical}^2 = 0$ , στο  $[1.5, 2]$



## VII.1.ii. Εφαρμογή μεθόδου Lagrange σε Σημεία Chebyshev

**Ορισμός 7.1.** Τα σημεία τα οποία, για  $n = 0, 1, 2, \dots$ , δίνονται από τους τύπους

$$x_i := \cos\left(\frac{2i+1}{n+1}\frac{\pi}{2}\right), i = 0, \dots, n.$$

ονομάζονται **σημεία Chebyshev**. [32] ■

Τα σημεία αυτά είναι όλα στο διάστημα  $[-1, 1]$ , είναι ανά δυο διαφορετικά μεταξύ τους, “συσσωρεύονται” προς τα άκρα του διαστήματος καθώς το  $n$  αυξάνει και είναι ρίζες του πολυωνύμου του Chebyshev πρώτου είδους  $T_{n+1}$

$$T_{n+1}(x) := \cos((n+1)\arccos x), x \in [-1, 1].$$

Θεωρούμε ότι οι μετρήσεις έγιναν σε σημεία Chebyshev, κατάλληλα μετασχηματισμένες για το διάστημα  $[0, 2]$ , έτσι

$$x = \begin{bmatrix} 1.951056516295154, 1.587785252292473, 1.000000000000000, \\ 0.412214747707527, 0.048943483704846 \end{bmatrix}$$

$H_M^{(1)}$  μια συνάρτηση που διέρχεται από τα σημεία

$$(t_1^{(1)}, w_1^{(1)}) = (1.951056516295154, 0.065558230683740)$$

$$(t_2^{(1)}, w_2^{(1)}) = (1.587785252292473, -0.240026117055866)$$

$$(t_3^{(1)}, w_3^{(1)}) = (1.000000000000000, -0.000731820981905)$$

$$(t_4^{(1)}, w_4^{(1)}) = (0.412214747707527, -0.041221034220753)$$

$$(t_5^{(1)}, w_5^{(1)}) = (0.048943483704846, 0.211766633448476)$$

$H_M^{(2)}$  μια συνάρτηση που διέρχεται από τα σημεία

$$(t_1^{(2)}, w_1^{(2)}) = (1.951056516295154, 0.002603154846258)$$

$$(t_2^{(2)}, w_2^{(2)}) = (1.587785252292473, 0.006004566492993)$$

$$(t_3^{(2)}, w_3^{(2)}) = (1.000000000000000, 0.027001193132598)$$

$$(t_4^{(2)}, w_4^{(2)}) = (1.306656948627908, 1.387695745483932)$$

$$(t_5^{(2)}, w_5^{(2)}) = (1.918582850410889, 4.570045178558653)$$

και  $H_M^{(3)}$  μια συνάρτηση που διέρχεται από τα σημεία

$$(t_1^{(3)}, w_1^{(3)}) = (1.951056516295154, 0.054654055471936)$$

$$(t_2^{(3)}, w_2^{(3)}) = (1.587785252292473, 0.010790868704285)$$

$$(t_3^{(3)}, w_3^{(3)}) = (1.000000000000000, 0.083052141119750)$$

$$(t_4^{(3)}, w_4^{(3)}) = (0.412214747707527, 0.037883303951495)$$

$$(t_5^{(3)}, w_5^{(3)}) = (0.048943483704846, 0.815285451543443).$$

Αξιοποιώντας την παραπάνω μέθοδο (Παρεμβολή Lagrange) στα παραπάνω σημεία Chebyshev και επιλύοντας την ανισότητα του βήματος 4 του Αλγορίθμου 2', καταλήγουμε στα ακόλουθα διαστήματα που ικανοποιούν την ανισότητα:

$$[0 \ 0.002273099702700], [0.028800172170581 \ 0.5], [0.5 \ 1], [1 \ 1.5] \text{ και } [1.5 \ 2].$$

Η νορμα-2 της διαφοράς των αποτελεσμάτων που λάβαμε από τους Αλγορίθμους 2 και 2' είναι  $1.314636333821229 * 10^{-12}$ .

### VII.1.iii. Εφαρμογή μεθόδου Ελαχίστων τετραγώνων

Στην περίπτωση πολλών μετρήσεων, η χρήση της πολυωνυμικής παρεμβολής καταλήγει σε ένα πολυώνυμο υψηλού βαθμού, το οποίο δεν μπορεί να διαχειριστεί αποτελεσματικά εξαιτίας των σφαλμάτων κινητής υποδιαστολής και εξαιτίας της αυξημένης υπολογιστικής πολυπλοκότητας. Η χρήση ελαχίστων τετραγώνων που καταλήγουν σε πολυώνυμα διαχειρίσιμου βαθμού, είναι πιο κατάλληλη.

Υποθέτοντας ότι έχουμε 100 μετρήσεις (η παρεμβολή Lagrange θα μας οδηγούσε σε πολυώνυμο 99<sup>ου</sup> βαθμού!), εφαρμόζουμε τον αλγόριθμο 3, αξιοποιώντας την μέθοδο Ελαχίστων Τετραγώνων για να παράγουμε ένα πολυώνυμο βαθμού 4. Τα διαστήματα στα οποία η ανίσωση, που προκύπτει από το βήμα 4, είναι θετική, είναι:

$$[0 \ 0.002273099702699], \quad [0.028800172170581 \ 0.5], \quad [0.5 \ 1], \quad [1 \ 1.5] \text{ και } [1.5 \ 2].$$

### VII.1.iv. Εφαρμογή μεθόδου προσέγγισης με γραμμικές splines

Χρησιμοποιήσαμε 500 σύνολα μετρημένων σημείων για κάθε συνιστώσα του  $H$ . Προσεγγίζοντας τα  $H_M^{(1)}$ ,  $H_M^{(2)}$  και  $H_M^{(3)}$  χρησιμοποιώντας γραμμική Spline και υπολογίζοντας τα διαστήματα στα οποία η διαφορά του βήματος 4 του αλγορίθμου 1 είναι θετική, καταλήγουμε στο ακόλουθο αποτέλεσμα

$[0, 0.002257794228617], [0.029015423603700, 0.5], [0.5, 1], [1, 1.5]$  και  $[1.5, 2]$ .

Το σφάλμα της νόρμας-2 με τις άλλες μεθόδους είναι  $2.15 \times 10^{-4}$ . Χρησιμοποιώντας 50 αντί για 500 μετρήσεις σε κάθε διάστημα, για κάθε συνιστώσα του  $H$ , το σφάλμα είναι παρόμοιο:  $2.31 \times 10^{-4}$  αλλά η μείωση του χρόνου υπολογισμού είναι σημαντική.

**Παράδειγμα 6.3.** Μια ενδιαφέρουσα εργασία είναι η περίπτωση όπου έχουμε μερικά σφάλματα μέτρησης στα αρχικά σημεία. Σε αυτήν την περίπτωση, η πιο κατάλληλη μέθοδος είναι εκείνη των ελαχίστων τετραγώνων, η οποία ελαχιστοποιεί την νόρμα-2 του συστήματος  $At = b$ , που αναλύθηκε στην ενότητα 5.3. Υποθέτουμε ότι υπάρχουν σφάλματα στις μετρήσεις των  $y_i$  της τάξης του  $O(10^{-3})$ . Αξιοποιώντας τον αλγόριθμο 3 σε 100 σημεία με σφάλματα μετρήσεων, καταλήγουμε στα ακόλουθα διαστήματα:

$[0, 0.001903961570183], [0.028255098676371, 0.5], [0.5, 1], [1, 1.5]$  και  $[1.5, 2]$ .

Το απόλυτο σφάλμα στο πρώτο διάστημα είναι  $3.691381325159999 \times 10^{-4}$  και στο δεύτερο  $5.450734942099994 \times 10^{-4}$  για σφάλματα μετρήσεων τάξεως  $10^{-3}$ . Εφαρμόζοντας των αλγόριθμο 2, αξιοποιώντας την παρεμβολή Lagrange, ο αλγόριθμος αποτυγχάνει να υπολογίσει τις ρίζες της τελικής απόστασης και έτσι το πρόσημο του τελικού υπολογισμένου πολωνύμου δεν αλλάζει παραμένοντας θετικό για όλο το αρχικό διάστημα. Έτσι η ανίσωση ικανοποιείται για κάθε  $t$  στο  $[0, 2]$  το οποίο δεν είναι σωστό. Αν τα σημεία μέτρησης είναι Chebyshev, τότε το αποτέλεσμα είναι αρκετά κοντά στο πραγματικό:

$[0, 0.001447041826483], [0.027872115109573, 0.5], [0.5, 1], [1, 1.5]$  και  $[1.5, 2]$ .

Το απόλυτο σφάλμα στο πρώτο διάστημα είναι  $8.260578762160000 \times 10^{-4}$  και στο δεύτερο είναι  $9.280570610080002 \times 10^{-4}$  για σφάλματα μετρήσεων τάξης  $10^{-3}$ .

## VII.1.v. Εφαρμογή μεθόδου σε γνωστή συνάρτηση

### Παράδειγμα 6.4

Έστω η συνάρτηση  $f(x) = \ln(x + 1)$  ορισμένη στο διάστημα  $[0, 15]$  και τα σημεία αυτής:

$$(x_1, y_1) = (0, 0)$$

$$(x_2, y_2) = (1, 0.6931471805599453)$$

$$(x_3, y_3) = (5, 1.791759469228055)$$

$$(x_4, y_4) = (10, 2.3025850929940457)$$

$$(x_5, y_5) = (15, 2.7725887222397812)$$

Θέτουμε τα όρια επισφάλειας και κινδύνου  $\delta_{critical} = c = e - 1 = 1.7182818284590452$  και  $\epsilon_{critical} = d = e = 2.7182818284590452$  και τη σταθερή συνάρτηση  $D(x) = 0$  την τιμή κανονικότητας. Θα συγκρίνουμε το αποτέλεσμα της παρεμβολής μέσω Lagrange στα δοθέντα σημεία και τις πραγματικές τιμές της συνάρτησης.

Λύνουμε:

$$\ln(x + 1) > e - 1, \quad \ln(x + 1) > e$$

$$x + 1 > \exp(e - 1), \quad x + 1 > \exp(e)$$

$$x > 4.5749415247608806, \quad x > 14.1542622414792642$$

Υπολογίζουμε με τη μέθοδο Lagrange το πολυώνυμο παρεμβολής:

$$p(x) = -0.000342848x^4 + 0.0119389x^3 - 0.144704x^2 + 0.826255x + 0$$

Υπολογίζουμε την απόσταση του πολυωνύμου από τα όρια επισφάλειας και κινδύνου:

$$\underline{dist}(x) = p(x) - c =$$

$$= -0.000342848x^4 + 0.0119389x^3 - 0.144704x^2 + 0.826255x - 1.7182818284590452$$

$$\overline{dist}(x) = p(x) - d =$$

$$= -0.000342848x^4 + 0.0119389x^3 - 0.144704x^2 + 0.826255x - 2.7182818284590452$$

Χρησιμοποιώντας μερικά βήματα της μεθόδου διχοτόμησης και της μεθόδου Newton, λαμβάνουμε τις ακόλουθες ρίζες για τα παραπάνω πολυώνυμα:

Για το  $\underline{dist}(x)$  έχουμε τις πραγματικές ρίζες:

$$r_1 = 4.367229678387217, r_2 = 17.877097351069622$$

Και τις μιγαδικές:  $6.289196621541882 \pm 4.963800089179261i$ .

Στο διάστημα  $[0,15]$  ανήκει μόνο η  $r_1$ . Αναζητούμε το υποδιάστημα στο οποίο, η απόσταση  $\underline{dist}$  υπερβαίνει το  $\delta_{critical}$ , προσδιορίζοντας το πρόσημο της  $\underline{dist}(x)$ .

$$\underline{dist}\left(\frac{0+r_1}{2}\right) = -0.487521684785757 < 0, \text{δεν υπερβαίνει}$$

$$\underline{dist}\left(r_1 + \frac{r_2 - r_1}{2}\right) = 0.750856300949919 > 0, \text{υπερβαίνει}$$

Παρατηρούμε ότι το πολυώνυμο υπερβαίνει την τιμή  $\delta_{critical}$  που ορίσαμε για  $x > 4.367229678387217$ . Αυτή η τιμή βρίσκεται «κοντά» στην πραγματική τιμή μετά την οποία η  $f(x)$  υπερβαίνει το  $\delta_{critical}$ . Η απόκλιση είναι 0.207711846373664.

Ομοίως για το  $\overline{dist}(x)$  έχουμε τις πραγματικές ρίζες:

$$r'_1 = 12.945584967685770, r'_2 = 15.457571609683566$$

Και τις μιγαδικές:  $3.209781847585647 \pm 5.414675375342656i$

Στο διάστημα  $[0,15]$  ανήκει μόνο η  $r'_1$ . Αναζητούμε το υποδιάστημα στο οποίο, η απόσταση  $\overline{dist}$  υπερβαίνει το  $\epsilon_{critical}$ , προσδιορίζοντας το πρόσημο της  $\overline{dist}(x)$ .

$$\overline{dist}\left(\frac{0+r'_1}{2}\right) = -0.796876145910328 < 0, \text{δεν υπερβαίνει}$$

$$\overline{dist}\left(r'_1 + \frac{r'_2 - r'_1}{2}\right) = 0.081202195160536 > 0, \text{υπερβαίνει}$$

Παρατηρούμε ότι το πολυώνυμο υπερβαίνει την τιμή  $\epsilon_{critical}$  που ορίσαμε για  $x > 12.945584967685770$ . Αυτή η τιμή βρίσκεται σχετικά πιο μακριά από την πραγματική τιμή μετά την οποία η  $f(x)$  υπερβαίνει το  $\epsilon_{critical}$ . Η απόκλιση είναι 1.208677273793494.

## VII.2 Συγκρίσεις μεταξύ των αλγορίθμων

Συγκρίνοντας τους αλγορίθμους που παρουσιάστηκαν στην ενότητα 5, καταλήγουμε στα ακόλουθα αποτελέσματα:

Μέθοδος	Πλήθος σημείων μέτρησης	Αποδοτικότητα	Πρόταση	Υπολογιστική πολυπλοκότητα
Γραμμική Splines	Πολλά	Υψηλή	Προτείνεται	Χαμηλή
Γραμμική Splines	Λίγα	Χαμηλή	Δεν προτείνεται	Χαμηλή
Lagrange	Πολλά	Χαμηλή	Δεν προτείνεται	Πολύ υψηλή
Lagrange	Λίγα	Καλή	Προτείνεται	Χαμηλή
Chebyshev	Πολλά	Υψηλή	Δεν προτείνεται	Πολύ υψηλή
Chebyshev	Λίγα	Καλή	Προτείνεται	Χαμηλή
Ελάχιστα τετράγωνα	Πολλά	Υψηλή	Προτείνεται	Χαμηλή <sup>(*)</sup>
Ελάχιστα τετράγωνα	Λίγα	Καλή	Προτείνεται	Χαμηλή <sup>(*)</sup>

(\*) Χαμηλή πολυπλοκότητα για πολυώνυμα χαμηλού βαθμού

Η παρεμβολή Lagrange και η Chebyshev-Lagrange δεν συνιστάται στην περίπτωση πολλών σημείων μέτρησης αφού το πολυώνυμο που υπολογίζεται θα είναι υψηλού βαθμού, γεγονός που προκαλεί θέματα αστάθειας λόγω των υπολογισμών κινητής υποδιαστολής με αποτέλεσμα την υψηλή υπολογιστική πολυπλοκότητα. Η δεύτερη μπορεί να αξιοποιηθεί στην περίπτωση που υπάρχει η δυνατότητα οι μετρήσεις να εκτελεστούν σε σημεία Chebyshev. Στην περίπτωση μικρού αριθμού σημείων μέτρησης η συμπεριφορά των δυο μεθόδων είναι καλή και έτσι συνιστώνται.

Η μέθοδος ελαχίστων τετραγώνων συνιστάται στην περίπτωση που έχουμε μεγάλο αριθμό σημείων μέτρησης ή αν υπάρχουν σφάλματα μετρήσεων. Η μέθοδος είναι αποδοτική και η υπολογιστική πολυπλοκότητα χαμηλή για πολυώνυμα χαμηλού βαθμού.

Η γραμμική Splines συνιστάται στην περίπτωση πολλών σημείων μέτρησης. Η υπολογιστική του πολυπλοκότητα είναι χαμηλή και ο υπολογισμός των ριζών των ανισοτήτων του βήματος 4 του αλγορίθμου είναι ευσταθής, αφού οι Splines είναι πολυώνυμα 1<sup>ου</sup> βαθμού. Δεν συνιστάται στην περίπτωση μικρού αριθμού σημείων

## Συμπεράσματα

Η παρούσα εργασία επισήμανε το ζήτημα της πρόγνωσης περιόδων πραγματοποίησης ιδιαίτερων γεγονότων σε ένα δοθέν σύστημα. Η ιδέα της μεθόδου είναι απλή, άλλα το τεχνικό κομμάτι της συγγενούς αριθμητικής θεωρίας χρειάζεται ειδική προσοχή και μελέτη. Επιπλέον υπάρχουν διαφορά ανοιχτά ερωτήματα προς απάντηση. Ενδεικτικά παρουσιάζουμε τα ακόλουθα ζητήματα.

- 1) Έρευνα και αριθμητική εφαρμογή άλλων προγνωστικών μεθόδων διαφορετικών από αυτές που παρουσιάστηκαν στην εργασία.
- 2) Συζήτηση σχετικά με τη συμπεριφορά των διαδικασιών αναλόγως την μετρική που επιλέγεται για να μετρηθούν οι αποκλίσεις
- 3) Έχοντας υπόψη τα αποτελέσματα των 1) και 2),
  - Ελέγχουμε για τα καλύτερα χρονικά σημεία για να κάνουμε μετρήσεις έτσι ώστε να εξασφαλίσουμε αξιόπιστα αποτελέσματα για την πρόβλεψη
  - Βρίσκουμε τα καλύτερα χρονικά σημεία για να κάνουμε μετρήσεις έτσι ώστε να εξασφαλίσουμε αξιόπιστα αποτελέσματα για την πρόβλεψη
  - Ελέγχουμε για τον ελάχιστο αριθμό μετρήσεων έτσι ώστε να εξασφαλίσουμε αξιόπιστα αποτελέσματα για την πρόβλεψη
- 4) Εφαρμογή των μεθόδων πρόβλεψης χρονικών διαστημάτων πραγματοποίησης ιδιαίτερων συστημικών γεγονότων σε τομείς της γεωπολιτικής, του κυβερνοχώρου, της οικολογίας της βιολογίας, της φαρμακευτικής, της διαχείρισης ρίσκου, της οικονομίας, της ψυχολογίας κτλ.
- 5) Μελέτη των διαστημάτων που ικανοποιούν την ανίσωση που περιγράψαμε στους αλγορίθμους της ενότητας 5, με έμφαση στην επιλογή όσο το δυνατόν περισσότερων σημείων για τα οποία είναι πιο πιθανή η εμφάνιση ιδιαίτερων συστημικών γεγονότων
- 6) Γενίκευση της μεθόδου στις 4 διαστάσεις με την ακόλουθη έννοια. Στην παρούσα εργασία ασχοληθήκαμε μόνο με τον προσδιορισμό των χρονικών περιόδων που εμφανίζονται ιδιαίτερα γεγονότα σε μια προκαθορισμένη τοποθεσία ενός συστήματος. Πιο γενικά θα ήταν ενδιαφέρον και χρήσιμο αν μπορούσαν να προσδιοριστούν, ταυτόχρονα σε τοποθεσίες  $U \in \mathbb{R}^3$  και χρονικές περιόδους  $I \in \mathbb{R}$ , οι εμφανίσεις ιδιαίτερων γεγονότων σε ένα δοθέν σύστημα.

- 7) Προσδιορισμός της βέλτιστης επιλογής δεικτών. Η επιλογή των δεικτών μπορεί να εξαρτάται από την πληροφορία, τις δυνατότητες και τις προτεραιότητες του ατόμου που μελετάει το σύστημα. Επομένως, η επιλογή των δεικτών ποικίλει ανάλογα με το άτομο που το μελετάει. Επιπλέον, οι δείκτες μπορεί να είναι πάρα πολλοί και/ή δύσκολα διαχειρίσιμοι. Για όλους αυτούς τους λόγους, είναι σημαντικό να είμαστε σε θέση να προσδιορίσουμε μια βέλτιστη επιλογή από δείκτες για κάθε σύστημα. Φυσικά, η έρευνα για αποδοτικά κριτήρια βελτιστοποίησης είναι ένα άλλο πρόβλημα...



# Βιβλιογραφία

- [1]. Basu D. (editor): **Economic Models. Methods, Theory and Applications**, World Scientific, 2009, ISBN: 978-981-283-645-8 (hardcover)&ISBN: 978-981-4469-40-1 (e-book)
- [2]. Batchelder W. H.: *Mathematical Psychology*, In Kazdin, A. E.: **Encyclopedia of Psychology**, Washington/NY, APA/Oxford University Press, 2002, ISBN 1-55798-654-1
- [3]. Breiman L. and Friedman J.H.: *Estimating Optimal Transformations for Multiple Regression and Correlation*, **Journal of the American Statistical Association**, September 1985, Vol. 80, No. 391, Theory and Method, pp.580-598  
<https://pdfs.semanticscholar.org/e1ee/012f12793b4021352bb953f2fe9a40c33cf2.pdf>
- [4]. Brinkhuis J. &Tikhomirov V.: **Optimization: Insights and Applications**, Princeton University Press, 2005
- [5]. Chrysler Group LLC, Ford Motor Company, General Motors Corporation: **Measurement Systems Analysis**, Reference Manual, Fourth Edition, June 2010, ISBN#: 978-1-60-534211-5  
[http://www.rubymetrology.com/add\\_help\\_doc/MSA\\_Reference\\_Manual\\_4th\\_Edition.pdf](http://www.rubymetrology.com/add_help_doc/MSA_Reference_Manual_4th_Edition.pdf)
- [6]. Coleman J. S.: **Foundations of Social Theory**, Harvard University Press, 1990
- [7]. Daras N. J.: *Geometric Prediction Theory*, submitted
- [8]. Daras N. J.: *Subjective Preferences in Data Management*, in preparation
- [9]. Daras N. J. and Mazis J. Th.: *Systemic Geopolitical Modeling. Part 1. Prediction of Geopolitical Events*, **Geojournal** 80(5)(2015), Pages 653-678,  
<http://link.springer.com/article/10.1007/s10708-014-9569-3>
- [10]. Daras N. J. and Mazis J. Th.: *Systemic Geopolitical Modeling. Part 2. Subjectivity in the Prediction of Geopolitical Events*, **Geojournal**, Springer, pages 30, 2015, Digital Object Identifier (DOI) 10.1007/s10708-015-9670-2,  
<http://link.springer.com/article/10.1007/s10708-015-9670-2>
- [11]. Edling C.E.: *Mathematics in Sociology*, **Annual Review of Sociology**, 28(2002), pp. 197-220, doi: 10.1146/annurev.soc.28.110601.140942
- [12]. Elman C. & Elman M. F. (eds.) (2003). **Progress in International Relations Theory: Appraising the Field**, MIT Press, Cambridge, Massachusetts, London, England (Belfer

- Center for Science and International Affairs, John F. Kennedy School of Government, Harvard University)
- [13]. Johnson P.: *Formal Theories of Politics: The Scope of Mathematical Modelling in Political Science*, **Mathematical and Computer Modelling**, 12(4-5)(1989), pp. 397-404, doi:10.1016/0895-7177(89)90412-3
  - [14]. Hazewinkel Michiel, ed.: **Spline Interpolation**, Encyclopedia of Mathematics, Springer, 2001, ISBN 978-1-55608-010-4
  - [15]. Hoffman J.D.: **Numerical Methods for Engineers and Scientists**, 2<sup>nd</sup> Edition, Marcel Dekker, Inc., New York-Basel, 2001, ISBN 0-8247-0443-6
  - [16]. Karanatsios Em. and Passinios Stam.: **Intelligent Support Decision Systems for Predictive Reasoning**(in Greek), Bachelor's thesis (Supervisor: Nicholas J. Daras), Hellenic Military Academy, 2018
  - [17]. Levin R. I. and Rubin D. S.: **Statistics for Management**, 7<sup>th</sup> Edition, Prentice Hall, 1997, ISBN 10: 0134762924 / ISBN 13: 9780134762920
  - [18]. Merriam-Webster: *Definition of system*, Springfield, MA, USA; retrieved 09-10-2006
  - [19]. Nahorski Z. and Ravn H.F.: *A Review of Mathematical Models in Economic Environmental Problems*, **Annals of Operations Research**, 97(1)(2000), pp 165-201
  - [20]. Parsopoulos K.E. and Vrahatis M.N. : **Particle Swarm Optimization and Intelligence : Advances and Applications**, Information Science Reference, Hershey-New York, 2010, [ISBN 978-1-61520-666-7](#) (hardcover)- [ISBN 978-1-61520-667-4](#) (e-book)
  - [21]. Rivlin Th.J.: **An Introduction to the Approximation of Functions**, Dover Publications, INC, Mineola, New York, 1969, ISBN 0-486-49554-X
  - [22]. Robertson G.H.: **Quality Through Statistical Thinking: Improving Process Control and Capability**, ASI Press, 1989, Business & Economics, 366 pages, Hardcover, 1989, ISBN: 0941243087, 9780941243087
  - [23]. Ruszczynski A. P.: **Nonlinear Optimization**, Princeton, NJ: Princeton University Press, 2006, pp.xii+454, [ISBN 978-069119151](#). [MR 2199043](#)
  - [24]. Scott de Marchi: **Computational and Mathematical Modeling in the Social Sciences**, Cambridge University Press, 2005, ISBN 9780521853620
  - [25]. Szegő G.: **Orthogonal Polynomials**, 4th ed., Providence, RI: Amer. Math. Soc., pp. 329 and 332, 1975

- [26]. Tibshirani R.: *Estimating Transformations for Regression Via Additivity and Variance Stabilization*, **Journal of the American Statistical Association**, Vol. 83, No. 402 (Jun.1988), pp. 94-405
- [27]. Cvijovic, D., Klinowski, J.: **Taboo search: an approach to the multiple minima problem**, *Science* 267, pp. 664-666 (1995)
- [28]. Friedlander, A., Gomes-Ruggiero, M.A., Kozakevich, D.N., Martinez, J.M., Santos, S.A.: *Solving nonlinear systems of equations by means of Quasi-Newton methods with a nonmonotone strategy*, **Optimization Methods and Software** 8, pp. 25-51 (1997)
- [29]. Hedar, A., Fukushima, M.: *Tabu search direct by direct search methods for nonlinear global optimization*, **European Journal of Operational Research** 170, pp. 329-349 (2006)
- [30]. Hooke, R., Jeeves, T.A.: *Direct search solution of numerical and statistical problems*, **Journal on Associated Computation** 8, pp. 212-229 (1961)
- [31]. Gisela C. V. Ramadas, Edite M. G. P. Fernandes: **Solving Systems of Nonlinear Inequalities and Equalities by a Nonmonotone Merit Reduction**, pp. 6-7 (2015)
- [32]. Γ.Δ. Ακρίβης, Β. Α. Δουγαλής: **Εισαγωγή στην Αριθμητική Ανάλυση**, 4<sup>η</sup> έκδοση (2010)
- [33]. Biswa Nath Datta: **Numerical Linear Algebra and Applications**, Brooks-Cole Pub Co, pp. 133-146 (1995)
- [34]. Ian H. Witten, Eibe Frank, Mark A. Hall, Christopher J. Pal: **Data Mining: Practical Machine Learning Tools and Techniques** (2017)
- [35]. Guojun Gan, Chaoqun Ma, Jianhong Wu: **Data Clustering: Theory, Algorithms, and Applications** (2007)
- [36]. Jerome H. Friedman: **The Annals of Statistics** Vol. 19, No. 1 (Mar., 1991), pp. 1-67
- [37]. Mazis, I Th. (2014a). **Methodology for systemic geopolitical analysis according to the Lakatosian model**, (Post graduate Colloquium) Avrasya Enstitüsü. Turkey: İstanbul Üniversitesi