

ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Σχολή Μηχανικών Παραγωγής και Διοίκησης



Αριθμητικές μέθοδοι υψηλής τάξης ακρίβειας για μοντέλα κυκλοφοριακής ροής

Διπλωματική Εργασία Μ.Δ.Ε
ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΣΤΙΣ ΕΠΙΣΤΗΜΕΣ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

ΛΕΩΝΙΔΑΣ Μ. ΜΠΟΛΑΡΗΣ

Επιβλέπων : Αναπλ. Καθηγητής **Ανάργυρος Δελής**

ΧΑΝΙΑ , 2018

Η διατριβή αυτή εξετάστηκε με επιτυχία στις 11 Οκτωβρίου 2018 από την τριμελή:

- Αναπλ Καθηγητή Ανάργυρο Δελή ως επιβλέπων
- Επικ. Καθηγητή Εμμανουήλ Μαθιουθάκη
- Καθηγητή Ιωάννης Νικολός

η οποία ορίστηκε κατά την διάρκεια της 1ης /21-5-2018 ΓΣΕΣ της Σχολής Μηχανικών και Διοίκησης του Πολυτεχνείου Κρήτης

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω τον Επιβλέποντα της διατριβής Αναπληρωτή Καθηγητή Ανάργυρος Δελή και τον Επικ. Καθηγητή Εμμανουήλ Μαθιουδάκη για την επιστημονική καθοδήγηση που μου παρείχαν σε όλα τα στάδια των μεταπτυχιακών σπουδών

Επίσης ευχαριστώ το τρίτο μέλος της συμβουλευτικής μου επιτροπής Καθηγητή Ιωάννη Νικολό. Ιδιαίτερα θα ήθελα να ευχαριστήσω την Ανδρονίκη για την συμπαράσταση της στην ολοκλήρωση των σπουδών μου.

Τέλος ευχαριστώ τα μέλη της οικογένειας μου για την υποστήριξη που μου παρείχαν σε όλη την διάρκεια των σπουδών μου.

Περιεχόμενα

1	Εισαγωγή	7
2	Μακροσκοπικά Μοντέλα Κυκλοφορίας	11
2.1	Το μοντέλο των Payne-Whitman(PW)	12
2.2	Το Μοντέλο των Aw and Rascle(AR)	13
2.3	Το Μοντέλο των Aw-Rascle-Zang (ARZ)	14
2.4	Το μοντέλο Gas-Kinetic-Traffic (GKT)	15
3	Το Μοντέλο Ξαλάρωσης και η Αριθμητική Επίλυση του	17
3.1	Το Σύστημα διαφορικών εξισώσεων κυκλοφοριακής ροής (Traffic flow)	17
3.2	Η μετατροπή των διαφορικών εξισώσεων	17
3.3	Χωρική Διακριτικοποίηση	19
3.3.1	Πρώτης τάξης στο χώρο (1st-order Upwind)	20
3.3.2	Δεύτερης Τάξης στο χώρο (2nd-order MUSCL)	20
3.3.3	Πέμπτης Τάξης στον χώρο (5th-order WENO)	21
3.4	Χρονική Διακριτικοποίηση	23
3.5	Αρχικές και Συνοριακές Συνθήκες	25
3.6	Επιλογή χαρακτηριστικής ταχύτητας	26
4	Αριθμητικές Προσομοιώσεις	27
4.1	Part A	27
4.1.1	PW μοντέλο προσομοίωση	27
4.1.2	AR μοντέλο προσομοίωση	37
4.1.3	ARZ μοντέλο προσομοίωση	45
4.1.4	GKT μοντέλο προσομοίωσης	52
5	Συμπεράσματα	59
5.1	Σύγκριση μεταξύ Weno-Muscl τρόπου επίλυσης	59
5.1.1	Μοντέλο PW	60
5.1.2	Μοντέλο AR	63
5.1.3	Μοντέλο ARZ	65
5.1.4	Μοντέλο GKT	67
5.2	Relaxation vs Relaxed	68

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

Η παρούσα μεταπτυχιακή εργασία περιλαμβάνει την αριθμητική επίλυση συστημάτων μερικών διαφορικών εξισώσεων (ΜΔΕ) που αναπαριστούν την κυκλοφοριακή ροή οχημάτων (Traffic flow). Η μοντελοποίηση της κυκλοφοριακής ροής αποτελεί ένα ταχέως αναπτυσσόμενο ερευνητικό αλλά και πρακτικό ζήτημα τα τελευταία χρόνια λόγω της ανάγκης για βελτιστοποίηση της χρήσης των υπαρχών κυκλοφοριακών δικτύων και την κατασκευή νέων. Η εργασία περιλαμβάνει την ανάλυση και επίλυση μερικών ευρέως χρησιμοποιούμενων μακροσκοπικών μοντέλων κυκλοφορίας δεύτερης τάξης. Ποιο συγκεκριμένα κατασκευάζονται αριθμητικές προσεγγίσεις πεπερασμένων όγκων τύπου χαλάρωσης (Relaxation) για τις μερικές διαφορικές εξισώσεις που περιγράφουν το κάθε μοντέλο

Για την αριθμητική επίλυση του συστήματος χαλάρωσης, εξετάζονται ανακατασκευές χαμηλής και υψηλής ανάλυσης στο χώρο και ρητά σχήματα ενσωμάτωσης χρόνου τύπου Runge-Kutta. Η οικογένεια χωρικών διακριτοποιήσεων περιλαμβάνει μία προσέγγιση τύπου MUSCL δεύτερης τάξης και WENO πέμπτης τάξης. Έμφαση δίνεται στη μέθοδο WENO για την επίλυση των διαφορετικών μοντέλων κυκλοφορίας. Για να αποδειχθεί η αποτελεσματικότητα της προτεινόμενης προσέγγισης, διεξάγονται εκτεταμένες αριθμητικές δοκιμές για τα διάφορα μοντέλα κυκλοφοριακής ροής. Εκτενείς επεκτάσεις αυτών των μοντέλων μπορούν να βρεθούν στα [25, 31, 7, 58]. Η μέθοδος WENO εφαρμόστηκε, κυρίως, στο πρότυπο μακροσκοπικής ροής πρώτης τάξης Lighthill-Whitham-Richards (LWR), στις παραλλαγές του και σε πολύ λίγες ερευνητικές ομάδες μέχρι στιγμής. Η μέθοδος WENO πέμπτης τάξης του [32], τύπου Lax-Friedrichs για κάθε εξίσωση στο σύστημα, εφαρμόστηκε στο [65] για να λύσει την επέκταση πολλαπλών τάξεων που προτάθηκε στο [62] του μοντέλου LWR (MCLWR) με ετερογενείς οδηγούς. Μια επέκταση σε αυτό το έργο παρουσιάστηκε στο [67] για την προσέγγιση ενός μοντέλου MCLWR, τροποποιημένου για να αντιμετωπίσει τις ανομοιογενείς οδικές συνθήκες. Χρησιμοποιήθηκε μια μέθοδος WENO με βάση την ακριβή συνιστώσα πέμπτης τάξης, το οποίο εφαρμόζει την αριθμητική ροή Lax-Friedrichs στη μέθοδο πεπερασμένου όγκου και τη διάσπαση της ροής στη μέθοδο πεπερασμένων διαφορών. Μια επέκταση του έργου από το [65] παρουσιάστηκε στο [68], όπου παρέχεται καλύτερη εκτίμηση της ελάχιστης χαρακτηριστικής ταχύτητας του μοντέλου MCLWR, βελτιώνοντας έτσι τα αριθμητικά αποτελέσματα. Στο [9] προτάθηκε οικογένεια αριθμητικών σχημάτων για κινηματικές ροές πολλαπλών ειδών

με ασυνεχείς ροές, συμπεριλαμβανομένου ενός μοντέλου ροής κυκλοφορίας MCLWR. Αυτά τα προγράμματα πρώτης τάξης μπορούν να αναβαθμιστούν σε ακρίβεια υψηλότερης τάξης χρησιμοποιώντας τεχνικές τύπου MUSCL. Η προσέγγιση της χαλάρωσης που εισάγεται στο [34], έχει βρει ευρεία εφαρμογή σε προβλήματα ρευστοδυναμικής, αναφέρουμε για παράδειγμα τα [4, 6, 13, 18, 20, 19, 21, 22, 36, 51, 52, 53, 5], μεταξύ άλλων. Το κύριο πλεονέκτημα αυτών των συστημάτων είναι ότι δεν χρειάζονται Riemann solvers ούτε ο υπολογισμός των ιδιοτιμών που καθιστά αυτή τη μεθοδολογία ιδανική για προβλήματα όπου μια αναλυτική έκφραση για τις ιδιοτιμές των Jacobian πινάκων μπορεί να μην είναι δυνατή ή να είναι υπολογιστικά απαιτητική, ή τα προβλήματα Riemann είναι δύσκολο να την προσεγγίσουν [54]. Ωστόσο, οι εργασίες χρησιμοποιώντας την μέθοδο χαλάρωσης για προβλήματα κυκλοφοριακής ροής περιλαμβάνουν, μέχρι στιγμής, πολύ λίγες εργασίες σε μεθόδους δεύτερης ή ανώτερης τάξης για τις μεθόδους LWR (και παραλλαγές) και χαμηλής τάξης σε πρότυπα μοντέλα ροής κυκλοφορίας δεύτερης τάξης, όπως Aw και Rascle (AR) [2] και Aw-Rascle-Zhang (ARZ) [63].

Η προσέγγιση που ακολουθείται σε αυτή την εργασία περικλείει μια μέθοδο χαλάρωσης (relaxed) που προτείνεται στο [34] και είναι βασισμένη σε θεωρία πεπερασμένων όγκων αριθμητικής διακριτικοποίησης ενός μη-γραμμικού συστήματος μερικών διαφορικών εξισώσεων (M.Δ.Ε). Με τον τρόπο αυτό η μεθοδολογία που ακολουθείται είναι ανεξάρτητη από την χρησιμοποίηση ενός Riemann επιλυτή. Με αυτή την προσέγγιση οι διαφορές μεταξύ των διάφορων κυκλοφοριακών μοντέλων λαμβάνονται υπόψιν διαμέσου των διαφορετικών ροών (fluxes), κεντρικών όρων, παραμέτρων και άνω φραγμάτων για τις αντίστοιχες ιδιοτιμές των Jacobian πινάκων.

Παρόλο που στο παρελθόν έχουν χρησιμοποιηθεί με επιτυχία μέθοδοι χαμηλής τάξης που βασίζονται σε πεπερασμένους όγκους με μακροσκοπικά μοντέλα κυκλοφορίας (π.χ αναφέρουμε τα [24, 44, 8, 45]), η χρησιμοποίηση μοντέλων μεγαλύτερης τάξης παράγει μια πιο ακριβή προσέγγιση και μειώνει την αριθμητική διάχυση στην υπολογιστική προσέγγιση. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα την χρησιμοποίηση λιγότερων σημείων διακριτικοποίησης για την επιθυμητή ακρίβεια που θέλουμε καθώς ο υπολογισμός γίνεται πολύ πιο αποδοτικός.

Σε αυτή την εργασία σε αντίθεση με την [70] επιχειρείται μια χαλαρή επίλυση του συστήματος διαφορικών εξισώσεων ("Traffic Flow") με απώτερο σκοπό την περαιτέρω ελαχιστοποίηση υπολογιστικού κόστους. Έτσι ο κύριος σκοπός της εργασίας έγκειται στην σύγκριση μεταξύ του χαλαροποιημένου (relaxation) και χαλαρού (relaxed) τρόπου επίλυσης των αριθμητικών προσεγγίσεων. Καθώς ουσιαστικά πρέπει να έχουμε τα ίδια αποτελέσματα μεταξύ των δύο τρόπων επίλυσης με τα αντίστοιχα οφέλη τόσο σε κόστος όσο και σε χρόνος επίλυσης που προσφέρει η χαλαρή προσέγγιση που μελετάται σε αυτήν την εργασία.

Αρχικά περιγράφουμε μια περίληψη των μοντέλων κυκλοφορίας που χρησιμοποιούνται και έπειτα θα αναφέρουμε και τους τρόπους με τα οποία υλοποιούμε αυτά τα μοντέλα

καθώς και την χρονική και χωρική τους διακριτοποίησης. Έπειτα γίνεται μια παρουσίαση των αποτελεσμάτων που δίνουν τα μοντέλα από μία ευρεία γκάμα περιπτώσεων στην χαλαρή προσέγγιση (relaxed). Οι περιπτώσεις αυτές είναι ίδιες με αυτές της [70] με διαφορά την σύγκριση μεταξύ των δύο τρόπων αριθμητικής προσέγγισης (relaxed, relaxation). Ο αλγόριθμος επίλυσης υλοποιείται στην γλώσσα προγραμματισμού Fortran και η δημιουργία των διαγραμμάτων χρησιμοποιώντας το πρόγραμμα MatLab.

Κεφάλαιο 2

Μακροσκοπικά Μοντέλα Κυκλοφορίας

Τα μαθηματικά μοντέλα που θα μελετήσουμε σε αυτήν την εργασία ανήκουν στην κατηγορία των μακροσκοπικών μοντέλων δεύτερης τάξης και είναι τα εξής ¹:

1. Το μοντέλο των Paine-Whitman (PW)[47],[61]
2. Το μοντέλο των Aw-Rascle (AR)[2]
3. Το μοντέλο των Aw-Rascle-Zang (ARZ)[63]
4. Το μοντέλο Gas-Kinetic-Traffic (GKT) base[57, 26, 58]

Η γενική αριθμητική μορφή του συστήματος διαφορικών εξισώσεων για τα μακροσκοπικά μοντέλα μίας διάστασης(1-D) χρησιμοποιώντας τους νόμους διατήρησης της μάζας και ροής (conservation laws) (και με έναν γενικό πηγαίο ορό) είναι της εξής μορφής [34]

$$\begin{aligned}\partial_t \mathbf{u} + \partial_x \mathbf{f}(\mathbf{u}) &= \mathbf{s}(\mathbf{u}) \\ \mathbf{u}(x, 0) &= \mathbf{u}_0(x)\end{aligned}\tag{2.1}$$

ή στην ημι-γραμμική μορφή

$$\partial_t \mathbf{u} + \mathbf{J}(u) \partial_x \mathbf{u} = \mathbf{s}(\mathbf{u})\tag{2.2}$$

όπου έχουμε $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$ το διάνυσμα των αγνώστων και

- $\mathbf{s}(\mathbf{u})$ διάνυσμα πηγαίων όρων
- $\mathbf{f}(\mathbf{u})$ είναι συνάρτηση κυκλοφοριακής ροής
- $\mathbf{J}(\mathbf{u})$ ο Ιακωβιανός πίνακας του συστήματος

$$\mathbf{J}(\mathbf{u}) = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}}$$

¹Από δω και στο εξής θα χρησιμοποιούμε τα σύντομα ονόματα της παρένθεσης για κάθε μοντέλο.

2.1 Το μοντέλο των Payne-Whitman(PW)

Το Payne-Whitman (PW) μοντέλο προτάθηκε στις εργασίες [47] και [61] και είναι ένα από τα πρώτα non-equilibrium μοντέλα κυκλοφορίας. Σε μορφή διατήρησης των νόμων της μάζας και ροής (conservation laws) γράφεται ως

$$\begin{aligned} \partial_t \rho + \partial_x(\rho u) &= 0 \\ \partial_t(\rho u) + \partial_x(\rho u^2 + P(\rho)) &= \rho \left(\frac{V^e(\rho) - u}{\tau} \right) \end{aligned} \quad (2.3)$$

όπου

- $\rho(x, t)$ είναι η κυκλοφοριακή πυκνότητα (traffic density) (Veh/Km)
- $u(x, t)$ είναι η μέση ταχύτητα των οχημάτων (Km/h) με $q = \rho u$ να είναι η μεταβλητή κυκλοφοριακής ροής (Veh/h)
- $P(\rho) = C_0^2 \rho$ είναι ο όρος κυκλοφοριακής πίεσης
- C_0 είναι μια παράμετρος που περιγράφει την αναμενόμενη αντίδραση του οδηγού στην κυκλοφοριακή πυκνότητα (traffic density)
- $V^e(\rho)$ είναι η ταχύτητα ισορροπίας (equilibrium speed)
- τ είναι ο χρόνος χαλάρωσης (s)
- $f^e(\rho, V^e) = \rho V^e(\rho)$ είναι το θεμελιώδες διάγραμμα (fundamental diagram)

Για αυτό το μοντέλο η γενική μορφή των νόμων διατήρησης της μάζας και ροής (2.1) ικανοποιείται για :

- $\mathbf{u} = [\rho, \rho u]^T$
- $\mathbf{f}(\mathbf{u}) = [\rho u, \rho u^2 + P(\rho)]^T$
- $\mathbf{s}(\mathbf{u}) = [0, (\rho V^e(\rho) - \rho u)/\tau]^T$
- $\lambda_{1,2} = u \pm C_0$ οι δύο διαφορετικές και πραγματικές ιδιοτιμές του $\mathbf{J}(\mathbf{u})$ οι οποίες συνήθως αναφέρονται και σαν στάσιμες χαρακτηριστικές ταχύτητες (characteristic speeds)
- $\lambda_* = V^e(\rho) + \rho V^{e'}(\rho)$ που αποτελεί έξτρα χαρακτηριστική ταχύτητα του PW σε σχέση με τον δρόμο η οποία είναι στην πραγματικότητα η πραγματική ταχύτητα στο LWR μοντέλο
- $C_0 = \sqrt{\frac{-V_e'(\rho)}{2\tau}}$

Πρέπει να σημειωθεί ότι για $\tau \rightarrow 0$ το σύστημα (2.3) παίρνει σαν όριο του το LWR μοντέλο. Το PW μπορεί να θεωρηθεί σαν ένα σύστημα υπερβολικής διατήρησης της μάζας με χαλαρικοποίηση από τον Whitham [61] και Liu [40]. Έχει αποδειχθεί στο [61] ότι η σταθερή συνθήκη για το γραμμικό σύστημα με την μέθοδο χαλαρικοποίησης είναι η

$$\lambda_1 < \lambda_* < \lambda_2$$

Αυτό το μοντέλο έχει ένα μεγάλο μειονέκτημα το οποίο έχει απασχολήσει τους ερευνητές (για παράδειγμα παραπέμπουμε τα [17] και [16]) κυρίως γιατί το μοντέλο ακολουθεί αυστηρά την θεωρία του ρευστής κυκλοφορίας. Η ανισοτροπική φύση της κυκλοφοριακής ροής δεν διατηρείται καθώς τα οχήματα μπορούν να πάρουν και αρνητική ταχύτητα για παράδειγμα αντίθετα στην κίνηση. Είναι ξεκάθαρο από τις ιδιοτιμές ότι η μία είναι πάντα μεγαλύτερη από την ταχύτητα του οχήματος u . Έτσι η πληροφορία από πίσω επηρεάζει την συμπεριφορά του οδηγού. Αυτό δεν είναι πάντα φυσικό μειονέκτημα καθώς η ταχύτητα είναι ο μέσος όρος των ταχυτήτων των οχημάτων σε ένα δρόμο [46, 66] και [28]. Επομένως εξετάζουμε αυτό το μοντέλο γιατί έχει μια ενδιαφέρον αριθμητική επίλυση. Για την $V^e(\rho)$ έχουν χρησιμοποιηθεί πολλές εξισώσεις για παραπάνω παραπέμπουμε στο [41] Εδώ εμείς χρησιμοποιούμε τις παραμέτρους που χρησιμοποιούνται στα [33, 29, 35, 64] και [69]

- $V^e(\rho) = 5.0461 \left[(1 + \exp((\rho - 0.25)/0.06))^{-1} - 3.72 * 10^{-6} \right] l/\tau$ με l, τ να είναι τη μονάδα μέτρησης μήκους και χρόνου και

$$C_0 = 2.48445l/\tau$$

- $V^e(\rho) = u_{max} \left(1 - \exp \left(\frac{C_m}{u_{max}} \left(\frac{\rho_{jam}}{\rho} - 1 \right) \right) \right)$ με
 - ρ_{jam} να είναι η πυκνότητα του δρόμου σε συνθήκη κυκλοφοριακής συμφόρησης
 - u_{max} η μέγιστη επιτρεπόμενη ταχύτητα σε m/s
 - c_m η κινητική ταχύτητα σε συνθήκες κυκλοφοριακή συμφόρησης

2.2 Το Μοντέλο των Aw and Rascle(AR)

Οι Aw and Rascle [2] πρότειναν ένα νέο σύστημα δύο εξισώσεων που βελτιώνει το PW και αντιμετωπίζει τα ζητήματα με το PW μοντέλο απομακρύνοντας την αρνητική ροή και εισάγοντας την ανισοτροπική ιδιότητα της κυκλοφορίας. Συνέστησαν ότι η σωστή εξάρτηση πρέπει να εισάγει και την απόλυτη παράγωγο του όρου πίεσης. Έτσι το AR μοντέλο σε μορφή διατήρησης των νόμων μάζας και ροής γράφεται σαν

$$\begin{aligned} \partial_t \rho + \partial_x(\rho u) &= 0 \\ \partial_t(\rho(u + P(\rho))) + \partial_x(\rho u(u + P(\rho))) &= 0 \end{aligned} \quad (2.4)$$

όπου

- $P(\rho) = C_0^2 \rho^\gamma$, $\gamma > 0$ η οποία τώρα σε αντίθεση με το PW είναι μια μονότονη αύξουσα συνάρτηση πυκνότητας έτσι ώστε να εισάγει στο μοντέλο την ανισοτροπική ιδιότητα της κυκλοφορίας
- $\lambda_1 = u - \rho P'(\rho)$ και $\lambda_2 = u$ είναι η δύο διακριτές και πραγματικές ιδιοτιμές που παίρνουμε για το συγκεκριμένο μοντέλο
- $\lambda_1 < \lambda_2$ επειδή η συνάρτηση $P(\rho)$ είναι μονότονη αύξουσα συνάρτηση. Το σύστημα είναι αυστηρά υπερβολικό εκτός για το σημείο όπου $\rho = 0$
- $C_0 = 1$ και $\gamma = 2$ είναι η άλλες μεταβλητές που χρησιμοποιούμε για αυτή την εργασία

2.3 Το Μοντέλο των Aw-Rascle-Zang (ARZ)

Το Aw-Rascle-Zang (ARZ) [63] μοντέλο είναι παρόμοιο με το AR αλλά η δεύτερη του εξίσωση εισάγει έναν όρο ισορροπίας (equilibrium) ο οποίος μιμείται την συμπεριφορά του οδηγού. Το μοντέλο αυτό σε αρχή διατήρησης των νόμων της μάζας και ροής είναι την μορφής :

$$\begin{aligned} \partial_t \rho + \partial_x (x + \rho V^e(\rho)) &= 0 \\ \partial_t x + \partial_x \left(\frac{x^2}{\rho} - x V^e(\rho) \right) &= 0, x = \rho(u - V^e(\rho)) \end{aligned} \quad (2.5)$$

όπου

- $V^e(\rho)$ είναι η μέγιστη επιτρεπόμενη ταχύτητα "equilibrium speed"
- x είναι η μεταβλητή που εκφράζει την διαφορά μεταξύ της πραγματική ροής $q = \rho u$ και της ροής από την εξίσωση $q^e = \rho V^e$
- $\lambda_1 = u + \rho(V^e)'$ και $\lambda_2 = u$ είναι οι δύο διακριτές και πραγματικές μεταβλητές που παίρνουμε από το σύστημα (2.5)

Επομένως αυτό το σύστημα είναι ξανά αυστηρά υπερβολικό καθώς $(V^e)'$ είναι αρνητική και η μέγιστη πληροφορία που μπορεί να ταξιδεύσει το όχημα είναι ίση με την ταχύτητα του οχήματος u . Πρέπει να αναφέρουμε ότι το ARZ και AR είναι αυστηρά υπερβολικά μοντέλα εκτός για το σημείο όπου $\rho = 0$ που οι δύο ιδιοτιμές είναι ίσες Σε αυτή την εργασία χρησιμοποιούμε δύο εξισώσεις για $V^e(\rho)$

- $V^e(\rho) = u_{max} \left(1 - \frac{\rho}{\rho_{max}} \right)$ όπου
 - u_{max} είναι η μέγιστη επιτρεπόμενη ταχύτητα
 - ρ_{max} είναι η μέγιστη πυκνότητα
- $V^e(\rho) = u_{max} \left(1 - \exp \left(\frac{C_m}{u_{max}} \left(\frac{\rho_{jam}}{\rho} - 1 \right) \right) \right)$ ίδια με δεύτερη V^e του PW μοντέλου

2.4 Το μοντέλο Gas-Kinetic-Traffic (GKT)

Το GKT μοντέλο [57] και [58] είναι ένα μακροσκοπικό "gas-kinetic-base" μοντέλο που προέρχεται από την μικροσκοπική δυναμική των οχημάτων και χρησιμοποιώντας τους νόμους διατήρησης της μάζας και ροής έχει την ακόλουθη μορφή:

$$\begin{aligned}\partial_t \rho + \partial_x(\rho u) &= 0 \\ \partial_t(\rho u) + \partial_x(\rho u^2 + \Theta \rho) &= \rho \left(\frac{V^e(\rho) - u}{\tau} \right)\end{aligned}\quad (2.6)$$

όπου ο Ιακωβιανός πίνακας του συστήματος είναι της μορφής :

$$\mathbf{J}(\mathbf{u}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{\partial P}{\partial \rho} - u^2 & \frac{\partial P}{\partial \rho} - 2u \end{bmatrix} \text{ με } P = \rho \theta(\rho, u)$$

$$\det[\mathbf{J}(\mathbf{u}) - \lambda \mathbf{I}] = 0$$

βρίσκουμε τις ιδιοτιμές του Ιακωβιανού πίνακα (χαρακτηριστικές ταχύτητες) που δίνονται από

$$\lambda_{1,2} = u + \frac{1}{2} \frac{\partial P}{\partial q} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2} \frac{\partial P}{\partial q} \right)^2 + \frac{q}{r} \frac{\partial P}{\partial q} + \frac{\partial P}{\partial \rho}} = u \left(1 + A(\rho) \pm \sqrt{A(\rho)^2 + A(\rho) + \rho \frac{\partial A(\rho)}{\partial \rho}} \right) \quad (2.7)$$

που ορίζουν ότι το σύστημα (2.1) αποτελείται από αυστηρά υπερβολικές μερικώς παραγωγίσιμες διαφορικές εξισώσεις.

- $\Theta = A(\rho)u^2$
- $A(\rho) = A_0 + \delta A \left[1 + \tanh \left(\frac{\rho - \rho_{cr}}{\delta \rho} \right) \right]$ η οποία είναι μια συνάρτηση που εξαρτάται από την κυκλοφοριακή πυκνότητα
 - ρ_{cr} είναι η κρίσιμη πυκνότητα που απεικονίζει την διαφορά μεταξύ της ελεύθερης ροής και της ροής σε συνθήκες κυκλοφοριακής συμφόρησης.
 - $A_0, \delta A, \delta \rho$ είναι διάφορες μεταβλητές που χρησιμοποιούνται στο μοντέλο και δίνονται στον πίνακα 2.1
- V^e είναι το "equilibrium speed" (μέγιστη επιτρεπόμενη ταχύτητα)

Σε αυτό το μοντέλο η συνάρτηση V^e εκφράζεται σαν:

$$V^e(\rho, u, \rho_\alpha, u_\alpha) = v_{max} \left[1 - \frac{A(\rho)}{2A(\rho_{max})} \left(\frac{\rho_\alpha T u}{1 - \rho_\alpha / \rho_{max}} \right)^2 B(\delta u) \right] \quad (2.8)$$

Με βάση την (2.8) έχουμε ότι η V^e συνάρτηση δίνεται από την μέγιστη (δυνατή) πυκνότητα v_{max} μειωμένη κατά ένα όρο ο οποίος αντικατοπτρίζει την αναγκαία μείωση των φυσικών ελιγμών. Η ρ_α και η u_α υπολογίζονται στο σημείο $x_\alpha = x + \gamma(1/\rho_{max} + T * u)$ με T να είναι

ο ασφαλές χρόνος πορείας και $\gamma \in [1, 2]$. Ο όρος B ονομάζεται συνήθως σαν Boltzmann (interaction) factor με $\delta = \frac{u - u_\alpha}{\sqrt{2\Theta}}$, ο όρος υπολογίζεται σαν:

$$B(z) = 2 \left[z \frac{\exp^{-z^2/2}}{\sqrt{2\pi}} + (1 + z^2) \int_{-\infty}^z \frac{e^{-y^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dy \right]$$

και περιγράφει την αλληλεπίδραση πέδησης της αδιανυσματικής ταχύτητας. Ο όρος δu εκφράζει την διαφορά μεταξύ της πραγματικής θέσης και της θέσης αλληλεπίδρασης x_α . Η βασική διαφορά του GKT μοντέλου και τον υπόλοιπων μακροσκοπικών μοντέλων είναι ο μή-τοπικός χαρακτήρας του μοντέλου. Ο μη τοπικός όρος στην (2.6) προκαλεί μία ιδιότητα λείανση που μοιάζει με έναν όρο ροής αλλά η επίδρασή της είναι μια θετική κατεύθυνση επομένως είναι ποιο ρεαλιστικός. Ο ιακωβιανός του μοντέλου (2.5) έχει δύο διακριτές ιδιοτιμές (2.7) το οποίο δείχνει ότι το μοντέλο είναι αυστηρά υπερβολικό. Παρακάτω παραθέτουμε ένα πίνακα με ενδεικτικές τιμές για τις μεταβλητές του GKT μοντέλου που ακολουθούν τις τιμές από το [57, 26].

Παράμετροι	Μονάδες Μέτρησης	Τιμές
Μέγιστη ταχύτητα u_{max}	km/h	110
Μέγιστη πυκνότητα ρ_{max}	$vehicle/km$	160
Κρίσιμη πυκνότητα ρ_{cr}	$vehicle/km$	$0.27\rho_{max}$
Χρόνος ομαλής ροής T	s	1.8
Συντελεστής κλίμακας γ		1.2
Χρόνος χαλάρωσης τ	s	32
A_0		0.008
δA		$2.5A_0$
$\delta\rho$	$vehicle/km$	$0.05\rho_{max}$

Πίνακας 2.1: Ενδεικτικές τιμές για τις παραμέτρους του GKT μοντέλου

Κεφάλαιο 3

Το Μοντέλο Ξαλάρωσης και η Αριθμητική Επίλυση του

3.1 Το Σύστημα διαφορικών εξισώσεων κυκλοφοριακής ροής (Traffic flow)

Η αριθμητική μορφή των διαφορικών εξισώσεων για το μακροσκοπικό μοντέλο μίας διάστασης χρησιμοποιώντας τους νόμους διατήρησης της μάζας και ροής (conservation law) (και με έναν γενικό πηγαίο ορό) είναι της εξής μορφής [34]:

$$\begin{aligned}\partial_t \mathbf{u} + \partial_x \mathbf{f}(\mathbf{u}) &= \mathbf{s}(\mathbf{u}) \\ \mathbf{u}(x, 0) &= \mathbf{u}_0(x)\end{aligned}\tag{3.1}$$

όπου έχουμε $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$ το διάνυσμα των αγνώστων, $\mathbf{f}(\mathbf{u})$ συνάρτηση ροής $\mathbf{s}(\mathbf{u})$ διάνυσμα με πηγαίους όρους

Το συγκεκριμένο σύστημα (3.1) μπορεί να γραφτεί σε μορφή συστήματος

$$\partial_t \mathbf{u} + \mathbf{J}(\mathbf{u}) \partial_x \mathbf{u} = \mathbf{s}(\mathbf{u})\tag{3.2}$$

Στην συγκεκριμένη εργασία μας ενδιαφέρουν όταν οι αρχικές συνθήκες του προβλήματος είναι της εξής μορφής :

$$\mathbf{u}_0(x) = \begin{cases} \mathbf{u}_l, & \text{for } x < x^* \\ \mathbf{u}_r, & \text{for } x > x^* \end{cases}\tag{3.3}$$

Όπου στο σημείο x^* έχουμε μια ασυνέχεια που ορίζει ένα Riemann πρόβλημα

3.2 Η μετατροπή των διαφορικών εξισώσεων

Το (3.1) μετατρέπεται σε ήμι-γραμμικό διαγωνιοποίησης σύστημα χρησιμοποιώντας μια μέθοδο μερικής χαλάρωσης.

Το σύστημα αυτό αποτελείται από γραμμικές χαρακτηριστικές μεταβλητές και δύσκαμπτες πηγές. Εισάγουμε ένα διάνυσμα τεχνητών μεταβλητών χαλάρωσης \mathbf{v} (relaxation

variables) στο σύστημα εξισώσεων (3.1) και έτσι μετατρέπεται στην εξής μορφή :

$$\begin{aligned}\partial_t \mathbf{u} + \partial_x \mathbf{v} &= \mathbf{s}(\mathbf{u}) \\ \partial_t \mathbf{v} + \mathbf{C}^2 \partial_x \mathbf{u} &= -\frac{1}{\epsilon}(\mathbf{v} - \mathbf{f}(\mathbf{u}))\end{aligned}\quad (3.4)$$

με αρχικές συνθήκες

$$\begin{aligned}\mathbf{u}(x, 0) &= \mathbf{u}_0(x), \\ \mathbf{v}(x, 0) &= \mathbf{v}_0(x) = \mathbf{f}(\mathbf{u}_0(x))\end{aligned}\quad (3.5)$$

όπου η μικρή παράμετρος ϵ είναι ο ρυθμός της χαλάρωσης ($0 < \epsilon \ll 1$) και

$$\mathbf{C}^2 = \text{diag}\{c_1^2, c_2^2\}$$

είναι ένας θετικός διαγώνιος πίνακας που διαλέγουμε¹.

Για μικρά ϵ , υλοποιώντας την Chapman-Enskog expansion ς στο σύστημα χαλαροποίησης (3.4), δίνουμε για παράδειγμα τα [11, 12, 34], μπορούμε να πάρουμε την εξής προσέγγιση \mathbf{u}

$$\partial_t \mathbf{u} + \partial_x \mathbf{f}(\mathbf{u}) = \mathbf{s}(\mathbf{u}) + \epsilon \partial_x [\mathbf{f}'(\mathbf{u})\mathbf{s}(\mathbf{u})] + \epsilon \partial_x [(\mathbf{C}^2 - \mathbf{f}'(\mathbf{u})^2) \partial_x \mathbf{u}] + O(\epsilon^2), \quad (3.6)$$

όπου $\mathbf{f}'(\mathbf{u})$ συμβολίζει το Ιακωβιανό πίνακα για την συνάρτηση ροής \mathbf{f} . Η συνάρτηση (3.6) μας ορίζει την πρώτης τάξης συμπεριφορά του χαλαροποιημένου συστήματος (3.4), με ένα τρίτο όρο στο δεξιό μέρος τάξης $O(\epsilon)$ κυρίαρχο όρο στο μοντέλο και $(\mathbf{C}^2 - \mathbf{f}'(\mathbf{u})^2)$ να είναι ο πίνακας διάχυσης. Το μοντέλο (3.4) είναι καλώς ορισμένο μόνο όταν $(\mathbf{C}^2 - \mathbf{f}'(\mathbf{u})^2)$ είναι ένας θετικός ορισμένος πίνακας για όλα τα \mathbf{u} . Αυτή η συνθήκη στο πίνακα της διάχυσης των μεταβλητών λέγεται sub-characteristic condition, [34],

$$\mathbf{C}^2 - \mathbf{f}'(\mathbf{u})^2 \geq 0, \quad \forall \mathbf{u}, \quad (3.7)$$

η οποία εξασφαλίζει την αποσβεστική φύση του (3.6). Στο 1-D, είναι ίση με :

$$\lambda^2 \leq c^2, \quad \text{όπου} \quad \lambda = \max_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i| \quad \text{και} \quad c = \min_{1 \leq i \leq n} |c_i|. \quad (3.8)$$

Είναι ξεκάθαρο ότι για το \mathbf{u} μεταβαλλόμενο σε έναν οριοθετημένο τομέα, (3.7) μπορεί να ικανοποιηθεί πάντα επιλέγοντας αρκετά μεγάλες τιμές για τα διαγώνια στοιχεία στο \mathbf{C}^2 . Ωστόσο, λόγω περιορισμών σταθερότητας σε ένα αριθμητικό σχήμα, είναι επιθυμητό να αποκτήσουμε τις μικρότερες τιμές για \mathbf{C}^2 που πληρούν το κριτήριο (3.7).

Γράφοντας το σύστημα (3.4) σε μορφή πίνακα έχει την ακόλουθη μορφή

$$\begin{bmatrix} \partial_t \mathbf{u} \\ \partial_t \mathbf{v} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{I} \\ \mathbf{C}^2 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \partial_x \mathbf{u} \\ \partial_x \mathbf{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{s}(\mathbf{u}) \\ -\frac{(\mathbf{v} - \mathbf{f}(\mathbf{u}))}{\epsilon} \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

με την απαλοιφή του από το (3.9) αποκτούμε την ακόλουθη κανονικοποίηση στο αρχικό σύστημα

$$\partial_t \mathbf{u} + \partial_x \mathbf{f}(\mathbf{u}) = \mathbf{s}(\mathbf{u}) + \epsilon \mathbf{s} \partial_t(\mathbf{u}) - \epsilon (\partial_{tt}^2 \mathbf{u} - \mathbf{C}^2 \partial_{xx}^2 \mathbf{u}), \quad (3.10)$$

¹Η επιλογή αυτού του πίνακα θα την εξετάσουμε ξεχωριστά για κάθε ένα μοντέλο

που εισάγει μια κανονικοποίηση τύπου κύματος υψηλότερης τάξης του αρχικού νόμου διατήρησης και των πρόσθετων $(\mathbf{u}) \in \partial_t \mathcal{S}$. Σε [11, 12, 43] δείχθηκε ότι οι λύσεις της χαλάρωσης του μοντέλου (3.4) συγκλίνει αυστηρά στη λύση της μοναδικής εντροπίας του αρχικού νόμου διατήρησης. Το μοντέλο χαλάρωσης παρέχει ένα μηχανισμό ενάντια στην αποσταθεροποιητική επίδραση της μη γραμμικής απόκρισης, καθώς και μηχανισμό απόσβεσης των ταλαντώσεων.

3.3 Χωρική Διακριτικοποίηση

Ας υποθέσουμε τώρα ότι αρχικά έχουμε $s(\mathbf{u}) = 0$ τότε το σύστημα (3.9) γράφεται στην μορφή :

$$\partial_t \mathbf{W} + \mathbf{M} \partial_x \mathbf{W} = \mathbf{H} \quad (3.11)$$

όπου έχουμε

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \end{bmatrix}, \mathbf{M} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{I} \\ \mathbf{C}^2 & 0 \end{bmatrix} \text{ και } \mathbf{H} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -\frac{1}{\epsilon(\mathbf{v} - \mathbf{f}(\mathbf{u}))} \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

Επειδή το (3.11) είναι υπερβολικό ο πίνακας \mathbf{M} διαγωνοποιείται άρα έχουμε

$$\mathbf{M} = \mathbf{S} \mathbf{\Lambda} \mathbf{S}^{-1} \text{ ή } \mathbf{\Lambda} = \mathbf{S}^{-1} \mathbf{M} \mathbf{S}$$

όπου

- Ο όρος \mathbf{S} είναι ο πίνακας με τα δεξιά ιδιοδιανύσματα του \mathbf{M}
- Ο όρος $\mathbf{\Lambda}$ είναι ο διαγώνιος πίνακας των ιδιοτιμών του \mathbf{M}

θέτοντας

$$\mathbf{G} = \mathbf{S}^{-1} \mathbf{M}$$

έχουμε το ακόλουθο διαγώνιο σύστημα

$$\partial_t \mathbf{G} + \mathbf{\Lambda} \partial_x \mathbf{G} = \mathbf{S}^{-1} \mathbf{H} \quad (3.13)$$

και μετά από απλές αλγεβρικές πράξεις καταλήγουμε στο ακόλουθο σύστημα

$$\begin{bmatrix} \partial_t (\mathbf{C} \mathbf{u} + \mathbf{v}) \\ \partial_t (\mathbf{C} \mathbf{u} - \mathbf{v}) \end{bmatrix} + \mathbf{\Lambda} \begin{bmatrix} \partial_x (\mathbf{C} \mathbf{u} + \mathbf{v}) \\ \partial_x (\mathbf{C} \mathbf{u} - \mathbf{v}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\epsilon} (\mathbf{v} - \mathbf{f}(\mathbf{u})) \\ \frac{1}{\epsilon} (\mathbf{v} - \mathbf{f}(\mathbf{u})) \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

όπου

$$\mathbf{\Lambda} = \text{diag}\{c_1, c_2, -c_1, -c_2\}$$

Έτσι έχουμε γραμμικές υπερβολικές εξισώσεις με κυματικές ταχύτητες διαχωριζόμενες σε θετικά και αρνητικά τμήματα. Έτσι η λύση του (3.13) έχει την ιδιότητα να κινείται

ανάμεσα στις μερικές ταχύτητες των γραμμικών χαρακτηριστικών καμπυλών Τα συστήματα (3.13) και (3.11) είναι ίσα καθώς η διακριτικοποίηση του ένα οδηγεί στο άλλο. Από το (3.14) και θέτοντας $\mathbf{g}_{1,2} = \mathbf{v} \pm \mathbf{C}\mathbf{u}$ έχουμε ότι τα \mathbf{u} και \mathbf{v} έχουν την εξής μορφή

$$\mathbf{u} = \frac{1}{2}\mathbf{C}^{-1}(\mathbf{g}_1 - \mathbf{g}_2) \text{ και } \mathbf{v} = \frac{1}{2}(\mathbf{g}_1 + \mathbf{g}_2) \quad (3.15)$$

Τώρα διακριτοποιώντας τον χώρο σε κελιά $I_i = [x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}]$ άρα έχουμε τα εξής χωρικά βήματα $x_i = i\Delta x$, $x_{i\pm\frac{1}{2}} = (i \pm \frac{1}{2})\Delta x$ για κάθε χρονική στιγμή t άρα έχουμε

$$\mathbf{u}_i(t) = \frac{1}{\Delta x} \int_{I_i} \mathbf{u}(x, t) dx$$

και χρησιμοποιώντας την (3.4) έχουμε για το χρόνο t το ακόλουθο σύστημα

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{u}_i + \frac{1}{\Delta x} \left(\mathbf{v}_{i+\frac{1}{2}} - \mathbf{v}_{i-\frac{1}{2}} \right) &= \mathbf{s}(\mathbf{u})_i \\ \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{v}_i + \frac{1}{\Delta x} \left(\mathbf{u}_{i+\frac{1}{2}} - \mathbf{u}_{i-\frac{1}{2}} \right) &= -\frac{1}{\epsilon} (\mathbf{v}_i - \mathbf{f}(\mathbf{u})_i) \end{aligned} \quad (3.16)$$

όπου τα $\mathbf{s}(\mathbf{u})_i$ και $\mathbf{f}(\mathbf{u})_i$ είναι τα χωρικά μέσα του κεντρικού όρου και της συνάρτησης ροής (flux) αντίστοιχα. Για να ολοκληρώσουμε την χωρική διακριτικοποίηση πρέπει να υπολογίσουμε τους όρους $\mathbf{u}_{i\pm\frac{1}{2}}$ και $\mathbf{v}_{i\pm\frac{1}{2}}$

Σε αυτή την εργασία εξετάζουμε την χαλαρή (relaxed) μορφή του συστήματος (3.4) η οποία προέρχεται από την (3.16) όταν $\epsilon \rightarrow 0$ και έχουμε το ακόλουθο χαλαρό σύστημα

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{u}_i + \frac{1}{\Delta x} \left(\mathbf{v}_{i+\frac{1}{2}} - \mathbf{v}_{i-\frac{1}{2}} \right) &= \mathbf{s}(\mathbf{u})_i \\ \mathbf{v}_i &= \mathbf{f}(\mathbf{u}_i) \end{aligned} \quad (3.17)$$

το οποίο είναι ανεξάρτητο από τον ρυθμό χαλάρωσης.

3.3.1 Πρώτης τάξης στο χώρο (1st-order Upwind)

Αφού το σύστημα (3.4) έχει γραμμικά χαρακτηριστικά με συνεχής χαρακτηριστικές ταχύτητες $+c_k$ και $-c_k$ μπορούμε να υλοποιήσουμε ένα σχετικά ευθύ "Upwind scheme" που μας δίνει για τα g_1 και g_2 τα εξής

$$\begin{aligned} g_{1_{i+\frac{1}{2}}} &= g_{1_i} \\ g_{2_{i+\frac{1}{2}}} &= g_{2_i} \end{aligned} \quad (3.18)$$

3.3.2 Δεύτερης Τάξης στο χώρο (2nd-order MUSCL)

Όμοια μπορεί να υλοποιηθεί και μία δεύτερης τάξης διακριτικοποίηση στο χώρο χρησιμοποιώντας "van Leer's MUSCL² scheme" στον όρο των g_1 και g_2 σαν αυτό

$$g_{1_{i+\frac{1}{2}}}^{(k)} = g_{1_i}^{(k)} + \frac{1}{2} \Delta x s_i^+ \quad (3.19)$$

²Monotonic Upwind Scheme for Conservation Laws

$$g_{2_{i+\frac{1}{2}}}^{(k)} = g_{2_{i+1}}^{(k)} - \frac{1}{2} \Delta x s_{i+1}^- \quad (3.20)$$

όπου τα s_i^+ και s_i^- είναι οι κλίσεις των $g_1^{(k)}$ και $g_2^{(k)}$ στον χώρο του κελιού I_i και ορίζονται από το παρακάτω τύπο

$$\begin{aligned} s_i^\pm &= \frac{1}{\Delta x} (g_{1,2_{i+1}}^{(k)} - g_{1,2_i}^{(k)}) \phi(\theta_i^\pm) \\ \theta_i^\pm &= \frac{g_{1,2_i}^{(k)} - g_{1,2_{i-1}}^{(k)}}{g_{1,2_{i+1}}^{(k)} - g_{1,2_i}^{(k)}} \end{aligned} \quad (3.21)$$

όπου $\phi(\theta)$ ορίζεται από τον "Van Leer's slope limiter" συνάρτηση η οποία είναι η

$$\phi = \frac{|\theta| + \theta}{1 + |\theta|} \quad (3.22)$$

Σε αυτήν την εργασία θα χρησιμοποιήσουμε και άλλους limiter οι οποίοι είναι οι εξής :

- Upwind

$$\phi(\theta) = 0 \quad (3.23)$$

- SuperBee

$$\phi(\theta) = \max(0, \min(1, 2\theta), \min(2, \theta)) \quad (3.24)$$

- MinMod

$$\phi(\theta) = \minmod(1, \theta) \quad (3.25)$$

- Nononized Centerer

$$\phi(\theta) = \max(0, \min((1 + \theta)/2, 2, 2\theta)) \quad (3.26)$$

3.3.3 Πέμπτης Τάξης στον χώρο (5th-order WENO)

Το WENO³ είναι μια μέθοδος προσέγγισης της λύσης της εξίσωσης (3.4) χρησιμοποιώντας υψηλής τάξης πολυώνυμα σε αντίθεση με το MUSCL που χρησιμοποιεί χαμηλής τάξης πολυώνυμα. Εφαρμόζοντας την ανακατασκευή κατευθείαν στον κ-οστό όρο των χαρακτηριστικών μεταβλητών $g_{1,2} = v \pm Cu$ δίνει μια "non-oscillatory" υψηλής τάξης διακριτικοποίηση στο χώρο. Σε αυτή την εργασία παρουσιάζουμε με 5-της τάξης WENO διακριτικοποίηση με διακριτές τιμές για τις μεταβλητές $g_{1_{i+\frac{1}{2}}}$ και $g_{2_{i+\frac{1}{2}}}$ στο όριο ενός κελιού $i + \frac{1}{2}$ και ορίζονται σαν δεξί και αριστερές τιμές $g_{1_{i+\frac{1}{2}}}^L$ και $g_{2_{i+\frac{1}{2}}}^R$ π.χ

$$\begin{aligned} g_{1_{i+\frac{1}{2}}} &= g_{1_{i+\frac{1}{2}}}^L \\ g_{2_{i+\frac{1}{2}}} &= g_{2_{i+\frac{1}{2}}}^R \end{aligned} \quad (3.27)$$

Για μια γενική συνάρτηση $\Psi(x)$ 5-της τάξης ακρίβειας για το αριστερό όριο τιμής $\Psi_{i+\frac{1}{2}}^L$ είναι μια εξίσωση της μορφής

$$\psi_{i+\frac{1}{2}}^L = \sum_{r=0}^2 \omega_r^- h_r^- \quad (3.28)$$

³Weighted Essentially non-oscillatory scheme

όπου h_r^- είναι η τιμή του μέσου όρου του κελιού r -th "stencil" $(i-r, i-r+1, i-r+2)$ σαν

$$\begin{aligned} h_0^- &= \frac{1}{3}\psi_i + \frac{5}{6}\psi_{i+1} - \frac{1}{6}\psi_{i+2} \\ h_1^- &= -\frac{1}{6}\psi_{i-1} + \frac{5}{6}\psi_i + \frac{1}{3}\psi_{i+1} \\ h_2^- &= \frac{1}{3}\psi_{i-2} - \frac{7}{6}\psi_{i-1} + \frac{11}{6}\psi_i \end{aligned} \quad (3.29)$$

και $\omega_r^-, r = 0, 1, 2$ είναι μη γραμμικά WENO βάρη που δίνονται από

$$\omega_r^- = \frac{\alpha_r}{\sum_{i=0}^2 \alpha_i}, \alpha_r = C_r(1 + \frac{\eta_5}{IS_r^- + \epsilon}), r = 0, 1, 2 \quad (3.30)$$

με $C_0 = \frac{3}{10}, C_1 = \frac{3}{5}, C_2 = \frac{1}{10}$ και ϵ να είναι ένας πολύ μικρός αριθμός που εγγυάται ότι ο παρανομαστής δεν θα εξαφανιστεί και είναι ορισμένος στην συγκεκριμένη εργασία σαν $\epsilon = 10^{-40}$ όπως αναφέρεται στο [8]. Η ένδειξη ομαλότητας IS_r^- δίνεται από τις παρακάτω εξισώσεις

$$\begin{aligned} IS_0^- &= \frac{13}{12}(\psi_i - 2\psi_{i+1} + \psi_{i+2})^2 + \frac{1}{4}(3\psi_i - 4\psi_{i+1} + \psi_{i+2})^2 \\ IS_1^- &= \frac{13}{12}(\psi_{i-1} - 2\psi_i + \psi_{i+1})^2 + \frac{1}{4}(\psi_{i-1} - \psi_{i+1})^2 \\ IS_2^- &= \frac{13}{12}(\psi_{i-2} - 2\psi_{i-1} + \psi_i)^2 + \frac{1}{4}(\psi_{i-2} - 4\psi_{i-1} + 3\psi_i)^2 \end{aligned} \quad (3.31)$$

Ο όρος η_5 δίνεται από την ένδειξη ομαλότητας σαν

$$\eta_5 = |IS_0^- - IS_2^-|$$

όμοια βρίσκουμε και τον όρο

$$\psi_{i+\frac{1}{2}}^R = \sum_{r=0}^2 \omega_r^+ h_r^+ \quad (3.32)$$

$$\begin{aligned} h_0^+ &= \frac{1}{3}\psi_i + \frac{5}{6}\psi_{i+1} - \frac{1}{6}\psi_{i+2} \\ h_1^+ &= -\frac{1}{6}\psi_{i-1} + \frac{5}{6}\psi_i + \frac{1}{3}\psi_{i+1} \\ h_2^+ &= \frac{1}{3}\psi_{i-2} - \frac{7}{6}\psi_{i-1} + \frac{11}{6}\psi_i \end{aligned} \quad (3.33)$$

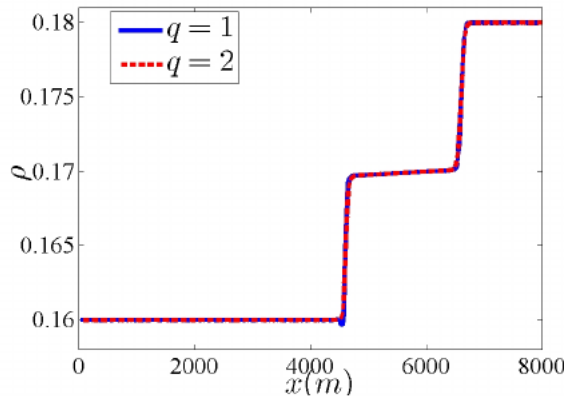
$$\begin{aligned} IS_0^+ &= \frac{13}{12}(\psi_i - 2\psi_{i+1} + \psi_{i+2})^2 + \frac{1}{4}(3\psi_i - 4\psi_{i+1} + \psi_{i+2})^2 \\ IS_1^+ &= \frac{13}{12}(\psi_{i-1} - 2\psi_i + \psi_{i+1})^2 + \frac{1}{4}(\psi_{i-1} - \psi_{i+1})^2 \\ IS_2^+ &= \frac{13}{12}(\psi_{i-2} - 2\psi_{i-1} + \psi_i)^2 + \frac{1}{4}(\psi_{i-2} - 4\psi_{i-1} + 3\psi_i)^2 \end{aligned} \quad (3.34)$$

Αφού γίνουν όλες η πράξεις για κάθε όρο της (3.32) και (3.28) (με όμοιο τρόπο για τα άλλο όριο του κελιού $i - \frac{1}{2}$) τότε η αριθμητικές ροές (fluxes) για $u_{i+\frac{1}{2}}$ και $v_{i+\frac{1}{2}}$ υπολογίζονται από την (3.15)

Έχει προταθεί μια μικρή αλλαγή στους τύπους στα βάρη της (3.30) για τον υπολογισμό 5-ης τάξης ακρίβειας σε ένα πρώτης τάξης κρίσιμο σημείο. Τα καινούρια βάρη υπολογίζονται από την παρακάτω εξίσωση

$$\omega_r^- = \frac{\alpha_r}{\sum_{i=0}^2 \alpha_i}, \alpha_r = C_r \left(1 + \left(\frac{\eta_5}{IS_r^- + \epsilon} \right)^q \right), r = 0, 1, 2 \quad (3.35)$$

και με $q = 2$ έχουμε επιτύχει μία 5-ης τάξης ακρίβεια σε ένα πρώτης τάξης κρίσιμο σημείο. Από πρακτικής άποψης αυξάνοντας το q μειώνεται η σχετική σημασία της ασυνέχειας. Επιπλέον έχει παρατηρηθεί ότι αυτό προκαλεί μία σταθεροποίηση στα κρίσιμα σημεία με ασυνέχειες.



Σχήμα 3.1: Σύγκριση τιμών για (3.30) χρησιμοποιώντας τα βάρη της (3.35)

3.4 Χρονική Διακριτικοποίηση

Το ημιδιακριτό σύστημα (3.16) και κατά επέκταση το (3.17) μπορούν να αναδιαμορφωθούν σαν αυτόνομες κανονικές παραγωγίσιμες εξισώσεις όπως :

$$\frac{d\mathcal{Y}}{dt} = \mathcal{F}(\mathcal{Y}) - \frac{1}{\epsilon} \mathcal{G}(\mathcal{Y}) \quad (3.36)$$

με το χρονικά εξαρτώμενο διάνυσμα να δίνεται από

$$\mathcal{Y} = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_i \\ \mathbf{v}_i \end{pmatrix}, \mathcal{F}(\mathcal{Y}) = \begin{pmatrix} \mathbf{s}(\mathbf{u})_i - \mathcal{D}_x \mathbf{v}_i \\ -\mathbf{C}^2 \mathcal{D}_x \mathbf{u}_i \end{pmatrix} \text{ και } \mathcal{G}(\mathcal{Y}) = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{v}_i - \mathbf{f}(\mathbf{u})_i \end{pmatrix} \quad (3.37)$$

με

$$\mathcal{D}_x \mathbf{v}_i = \frac{\mathbf{v}_{i+\frac{1}{2}} - \mathbf{v}_{i-\frac{1}{2}}}{\Delta x} \text{ και } \mathcal{D}_x \mathbf{u}_i = \frac{\mathbf{u}_{i+\frac{1}{2}} - \mathbf{u}_{i-\frac{1}{2}}}{\Delta x} \quad (3.38)$$

Καθώς το $\epsilon \rightarrow 0$ το σύστημα (3.36) γίνεται δύσκαμπτο και η αποκλειστική διαχείριση του δεξιού τμήματος θα χρειαστεί πολύ μικρά βήματα που μπορούν να περιορίσουν τον

χρόνο στον οποίο τρέχουμε την προσομοίωση μας. Αυτό μπορεί να αποδειχτεί εξαιρετικά υπολογιστικά απαιτητικό. Για την ανακούφιση αυτού του προβλήματος χρησιμοποιούμε μια χρονική πορεία βασισμένη στο implicit-explicit (IMEX) Runge-Kutt (RK) διακριτικοποίηση. Το μη δύσκαμπτο στάδιο διακριτικοποίησης για το $\mathcal{F}(\mathcal{Y})$ χρησιμοποιούμε ένα "explicit RK scheme". Ενώ για το δύσκαμπτο στάδιο της $\mathcal{G}(\mathcal{Y})$ χρησιμοποιούμε ένα "RK(DIRK) scheme", παραθέτουμε το [3, 48] για παραπάνω πληροφορίες. Θέτοντας σαν Δt^n κάθε χρονικό βήμα και \mathcal{Y}^n την προσεγγιστική λύση στον χρόνο $t = t_n$ τότε η υλοποίηση της "s-stage IMEX" μεθόδου για την λύση του (3.36) μπορεί να γίνει όπως παρακάτω:

$$\mathcal{Y}_k = \mathcal{Y}^n + \Delta t^n \sum_{m=1}^{k-1} \{ \tilde{\alpha}_{km} \mathcal{F}(\mathcal{Y}_m) - \frac{\Delta t^n}{\epsilon} \sum_{m=1}^k \alpha_{km} \mathcal{G}(\mathcal{Y}_m) \}, k = 1, 2, \dots, s \quad (3.39)$$

$$y^{n+1} = y^n + \Delta t^n \sum_{k=1}^s \tilde{b}_k \mathcal{F}(\mathcal{Y}_k) - \frac{\Delta t^n}{\epsilon} \sum_{k=1}^s \tilde{b}_k \mathcal{G}(\mathcal{Y}_k) \quad (3.40)$$

Η $s \times s$ πίνακες $\tilde{\mathbf{A}} = [\tilde{\alpha}_{km}]$, $\tilde{\alpha}_{km}$ για $m \geq k$ και $\tilde{\mathbf{A}} = [\alpha_{km}]$ τους επιλέγουμε ώστε τα αποτελέσματα της διακριτικοποίησης να είναι explicit στην $\mathcal{F}(\mathcal{Y})$ και implicit στην $\mathcal{G}(\mathcal{Y})$. Το s- διανύσματα $\tilde{\mathbf{b}}$ και \mathbf{b} είναι οι κανονικοί συντελεστές που χαρακτηρίζουν την "IMEX RK scheme". Μπορούν να δοθούν σαν ένα απλό "double tableau" "Butcher notation"

$$\begin{array}{c|c} \tilde{\mathbf{c}} & \tilde{\mathbf{A}} \\ \hline & \tilde{\mathbf{b}}^T \end{array} \text{ και } \begin{array}{c|c} \mathbf{c} & \mathbf{A} \\ \hline & \mathbf{b}^T \end{array} \quad (3.41)$$

όπου το $\tilde{\mathbf{c}}$ και \mathbf{c} είναι s-διανύσματα στο μη-αυτοματοποιημένο σύστημα. Οι αριστεροί και το δεξιοί πίνακες σχετίζονται με την "IMEX RK schemes" αντίστοιχα. Για δεύτερης τάξης χρονική διακριτικοποίηση (χρησιμοποιώντας και το MUSCL scheme) οι πίνακες δίνονται από:

$$\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ \hline & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array} \text{ και } \begin{array}{c|cc} -1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ \hline & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array} \quad (3.42)$$

Ο δύσκαμπτος κύριο όρος λύνεται με implicitly σε δύο βήματα (λόγω γραμμικότητας του \mathbf{v}) και ο μεταγωγικός όρος λύνεται με δύο explicit βήματα. Έτσι έχουμε μια explicit υλοποίηση για έναν implicit κύριο όρο με σταθερό μεταγωγικό όρο από μια μη-δύσκαμπτη οριζόντια μεταφορά όπως ένα συνήθης πεπερασμένου όγκου scheme. Σε αυτή την εργασία χρησιμοποιούμε τρίτης τάξης IMEX μεθόδους που εξετάζονται στο [3] με WENO διακριτικοποίηση και οι πίνακες δίνονται όπως παρακάτω:

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \gamma & 0 & \gamma & 0 \\ 1-\gamma & \gamma-1 & 2-2\gamma & 0 \\ \hline & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array} \text{ και } \begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \gamma & 0 & \gamma & 0 \\ 1-\gamma & 0 & 1-2\gamma & \gamma \\ \hline & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array} \quad (3.43)$$

με $\gamma = (3+\sqrt{3})/6$. Ομοίως με την προηγούμενη μέθοδο χρησιμοποιώντας την παραπάνω IMEX scheme μπορούμε να βρούμε γραμμικές αλγεβρικές εξισώσεις για μη γραμμικές μεταβλητές. Επιπλέον επειδή οι κεντρικοί όροι υπολογίζονται implicit και οι οριζόντιοι

όροι explicit, η υψηλή τάξη χαλαροποίηση είναι σταθερά ανεξάρτητη από το ϵ , έτσι για την επιλογή το Δt^n για κάθε χρονικό βήμα της προσομοίωσης χρησιμοποιούμε την CFL συνθήκη:

$$CFL = \max \left(\left(\max_{i,k} c_k^n \right) \frac{\Delta t^n}{\Delta x}, \frac{\Delta t^n}{\Delta x} \right) \leq 1 \quad (3.44)$$

για πρώτης τάξης σχέδιο(scheme) και για δεύτερης και μεγαλύτερης τάξης την :

$$CFL = \max \left(\left(\max_{i,k} c_k^n \right) \frac{\Delta t^n}{\Delta x}, \frac{\Delta t^n}{\Delta x} \right) \leq \frac{1}{2}. \quad (3.45)$$

Για υψηλότερης τάξης σχέδια (schemes) όπου οι τιμές της χαλάρωσης είναι συνεχής c_n^k υπολογίζονται σε κάθε χρονικό βήμα παρουσιάζονται παρακάτω στο 3.6

3.5 Αρχικές και Συνοριακές Συνθήκες

Για μια δεδομένη τιμή $\mathbf{u}_0(x)$ διαλέγουμε αρχικές συνθήκες για το χαλαροποιησιμο πρόβλημα όπως παρακάτω

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(x, 0) &= \mathbf{u}_0(x), \\ \mathbf{v}(x, 0) &= \mathbf{v}_0(x) \equiv \mathbf{f}(\mathbf{u}_0(x)). \end{aligned} \quad (3.46)$$

Σε ένα μικρό όριο χαλαροποίησης ($\epsilon \rightarrow 0^+$) το σύστημα (3.11) ικανοποιεί αρχικά τις παραπάνω τοπικές ισορροπίες και για να αποφύγουμε την εισαγωγή ενός αρχικού στρώματος μέσω του συστήματος χαλάρωσης δίνουμε τις παραπάνω αρχικές τιμές του \mathbf{v} . Για συνοριακές συνθήκες θέτοντας φυσικές συνοριακές συνθήκες \mathbf{u}_p , που μπορούν να εισάγονται στο πρόβλημα θέτουμε $\mathbf{v}_p = \mathbf{f}(\mathbf{u}_p)$ έτσι ώστε να αποφύγουμε την εισαγωγή ενός τεχνητού συνοριακού στρώματος. Για παράδειγμα αν μας δίνουν συνοριακές συνθήκες τύπου Dirichlet στο αρχικό μη-γραμμικό σύστημα τότε σε ένα διακριτικοποιήσιμο υπολογιστικό σύνορο $[a, b]$ έχουμε:

$$\mathbf{u}(a, t) = \mathbf{u}_a(t) \text{ και } \mathbf{u}(b, t) = \mathbf{u}_b(t), t > 0$$

έπειτα οι συνοριακές συνθήκες για τις μεταβλητές χαλαροποίησης \mathbf{v} είναι:

$$\mathbf{v}(a, t) = \mathbf{f}(\mathbf{u}_a(t)), \mathbf{v}(b, t) = \mathbf{f}(\mathbf{u}_b(t)), t > 0$$

Αν αντί, \mathbf{u} ικανοποιεί της ομογενής συνοριακές συνθήκες Neumann τότε

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} \Big|_{x=a} = 0 \text{ και } \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} \Big|_{x=b} = 0, t > 0$$

έπειτα επειδή

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{f}'(\mathbf{u}) \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}}$$

Η συνοριακές συνθήκες για το χαλαροποιήσιμο σύστημα (3.11) παίρνουμε

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} \Big|_{x=a} = 0 \text{ και } \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} \Big|_{x=b} = 0, t > 0$$

Περιοδικές συνθήκες δίνονται της μορφής $\mathbf{u}(a, t) = \mathbf{u}(b, t)$ μπορούμε εύκολα να τις εισάγουμε στην μεταβλητή χαλαροποίησης σαν $\mathbf{v}(a, t) = \mathbf{v}(b, t) = \mathbf{f}(\mathbf{u}(a, t))$. Γενικά οποιαδήποτε επιλογή που οδηγεί στα όρια του σχετικού διαστήματος και αρχικής χαλαροποίησης μπορεί να χρησιμοποιηθεί. Από πρακτικής πλευράς μια εύκολη λύση εισαγωγής συνοριακών συνθηκών στα αριθμητικά μοντέλα είναι η χρησιμοποιήσει των λεγόμενων "ghost cells" που επιμηκύνουν τον υπολογιστικό διάστημα εισάγοντας έξτρα κελιά στα σύνορα που έχουμε τις συνοριακές τιμές βάση των δεδομένων συνοριακών συνθηκών για κάθε αρχικό βήμα στον "RK solver". Παραθέτουμε το [37] για αναλυτική συζήτηση της υλοποίησης σε πεπερασμένους όγκους.

3.6 Επιλογή χαρακτηριστικής ταχύτητας

Σημαντικό ζήτημα από πρακτικής σκοπιάς είναι και η επιλογή χαρακτηριστικής ταχύτητας του πίνακα \mathbf{C}^2 έτσι ώστε να ικανοποιεί το κριτήριο (3.7). Το μέγεθος του πίνακα \mathbf{C}^2 παίζει σημαντικό ρόλο στην αριθμητική μετατροπή με τα αριθμητικά σχήματα που προέρχονται από την (3.4). Για υπολογιστικούς και θεωρητικούς λόγους είναι μερικές φορές αναγκαίο να διαλέξουμε ο πίνακας \mathbf{C}^2 να έχει διακριτά διαγώνια στοιχεία έτσι ώστε να αποφύγουμε την εκφύλιση του χαλαροποιημένου συστήματος. Η κατασκευή του πίνακα \mathbf{C}^2 πρέπει να γίνει με βάση τις μέσες εκτιμήσεις των χαρακτηριστικών ταχυτήτων του αρχικού προβλήματος. Έτσι για παράδειγμα μπορούμε να θέσουμε ότι όλες οι ιδιοτιμές λ του $\mathbf{f}(\mathbf{u})$ πρέπει να ικανοποιούν την συνθήκη $|\lambda| \geq c_{max}$ όπου το $c_{max} = \max_k c_k$. Κάνοντας αυτό εξασφαλίζουμε ότι η χαρακτηριστικές ταχύτητες του υπερβολικού τμήματος (3.4) είναι τόσο μεγάλες όσο και οι πραγματικές ταχύτητες του αρχικού προβλήματος. Στην υλοποίησή μας οι τιμές του $c_k, k = 1, \dots, n$ ($n = 2$ για τα μοντέλα κυκλοφορίας) είναι προσαρμοσμένες σε σχέση με την συμπεριφορά της λύσης με βάση μια γενική επιλογή για κάθε χρονικό βήμα Δt^n . Με βάση ένα γενικό μέγιστο για κάθε ιδιοτιμή του συστήματος των Jacobian πινάκων για κάθε κελί I_i η επιλογή γίνεται όπως παρακάτω:

$$c_n^k = \max_i |\lambda_k^n| + e, k = 1, \dots, n$$

, όπου e είναι μια μικρή μεταβλητή διόρθωσης της τάξης του (10^{-2}) για να αποφύγουμε ότι οι χαρακτηριστικές ταχύτητες δεν θα εξαφανίζονται. Μια άλλη επιλογή είναι ο υπολογισμός των ταχυτήτων c_k να γίνεται τοπικά σε κάθε κελί I_i [6, 53] θέτοντας

$$c_k^n |_i = \max_k |\lambda_k^n|_i + e, k = 1, \dots, n.$$

Σημειώνουμε ότι για μεγάλες τιμές του c_k συνήθως αυξάνεται η αριθμητική απόκλιση έτσι για λόγους ακρίβειας προτιμάμε να έχουμε όσο το δυνατόν μικρότερα c_k .

Κεφάλαιο 4

Αριθμητικές Προσομοιώσεις

Σε αυτήν την εργασία τα συστήματα που θα προσεγγίσουμε αφορούν το χαλαρό σύστημα (3.17) για προσέγγιση του (3.16) συστήματος παραθέτουμε την αντίστοιχη εργασία [70]. Στην αριθμητική προσομοίωση θα χρησιμοποιήσουμε την εξής $V^e(\rho)$

Part A: $V^e(\rho) = u_{max} \left(1 - \frac{\rho}{\rho_{max}}\right)$

4.1 Part A

4.1.1 PW μοντέλο προσομοίωση

Σε αυτή την ενότητα θα πραγματοποιήσουμε τις αριθμητικές προσομοιώσεις για το PW μοντέλο χρησιμοποιώντας τέσσερις διαφορετικές αρχικές συνθήκες της μορφής (3.3) ("Riemanns Problem"). Είναι γνωστό ότι για το PW μοντέλο δέχεται οχτώ τύπους κυματικών λύσεων εισάγοντας τέσσερα πρώτης τάξης κύματα και τέσσερα δεύτερης τάξης κύματα

- **[RP1]** $R1 - R2$ κυματική λύση με

$$\begin{aligned} \rho(x, 0) &= 0.16 \\ u(x, 0) &= \begin{cases} u_i = V^e(0.16), & \text{for } x \leq 4000 \\ u_r = V^e(0.16) + 0.2, & \text{for } x > 4000 \end{cases} \end{aligned} \quad (4.1)$$

- **[RP2]** $R1 - S2$ κυματική λύση με

$$\begin{aligned} \rho(x, 0) &= \begin{cases} \rho_i = 0.16, & \text{for } x \leq 4000 \\ \rho_r = 0.16 - 0.02, & \text{for } x > 4000 \end{cases} \\ u(x, 0) &= V^e(0.16) \end{aligned} \quad (4.2)$$

- **[RP3]** $S1 - S2$ κυματική λύση με

$$\begin{aligned} \rho(x, 0) &= 0.16 \\ u(x, 0) &= \begin{cases} u_i = V^e(0.16), & \text{for } x \leq 4000 \\ u_r = V^e(0.16) - 0.2, & \text{for } x > 4000 \end{cases} \end{aligned} \quad (4.3)$$

- **[RP4]** $S1 - R2$ κυματική λύση με

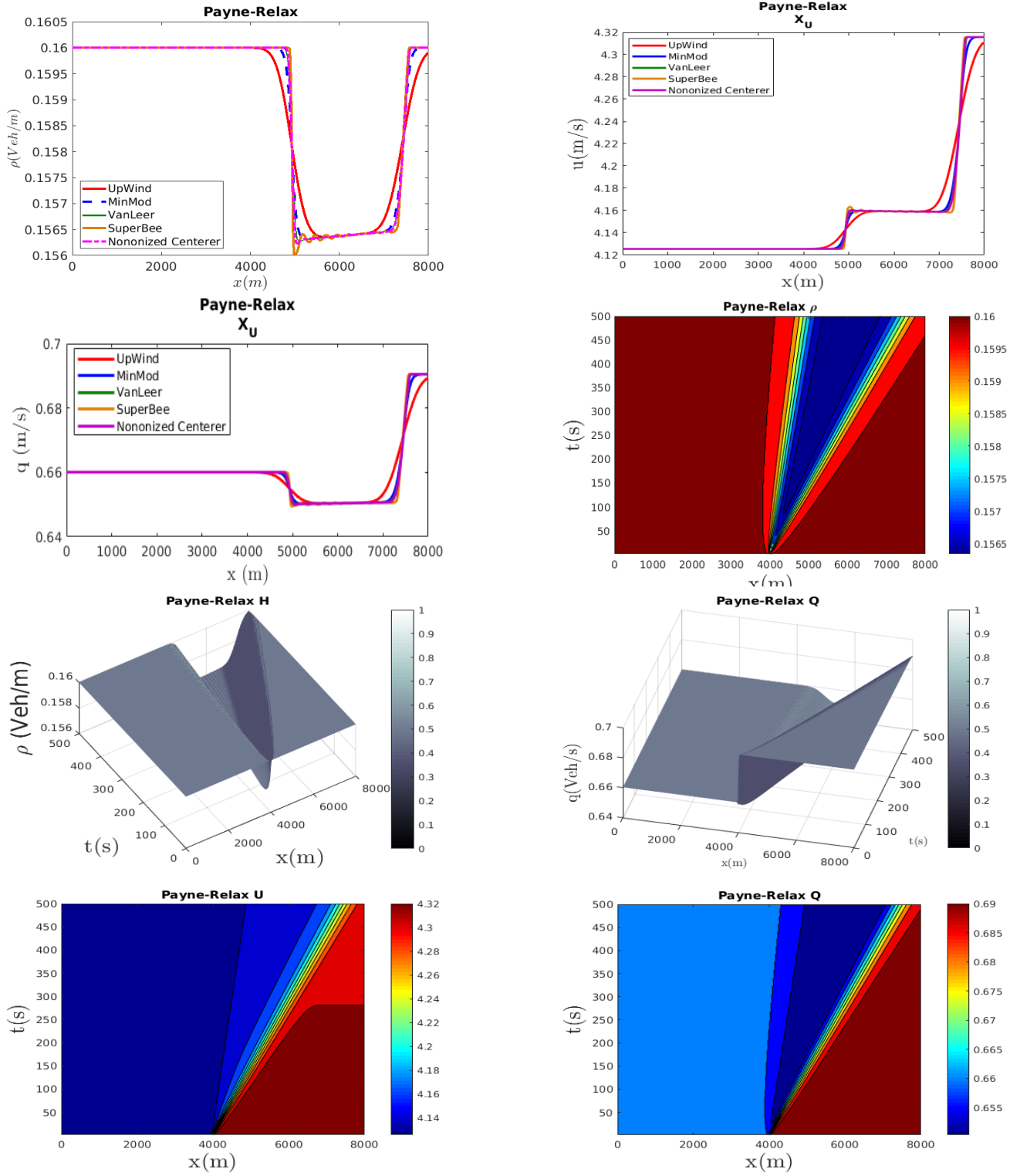
$$\begin{aligned} \rho(x, 0) &= \begin{cases} \rho_i = 0.16, & \text{for } x \leq 4000 \\ \rho_r = 0.16 + 0.02, & \text{for } x > 4000 \end{cases} \\ u(x, 0) &= V^e(0.16) \end{aligned} \quad (4.4)$$

Για αυτό μοντέλο οι τιμές που τρέχουν οι προσομοιώσεις είναι οι εξής :

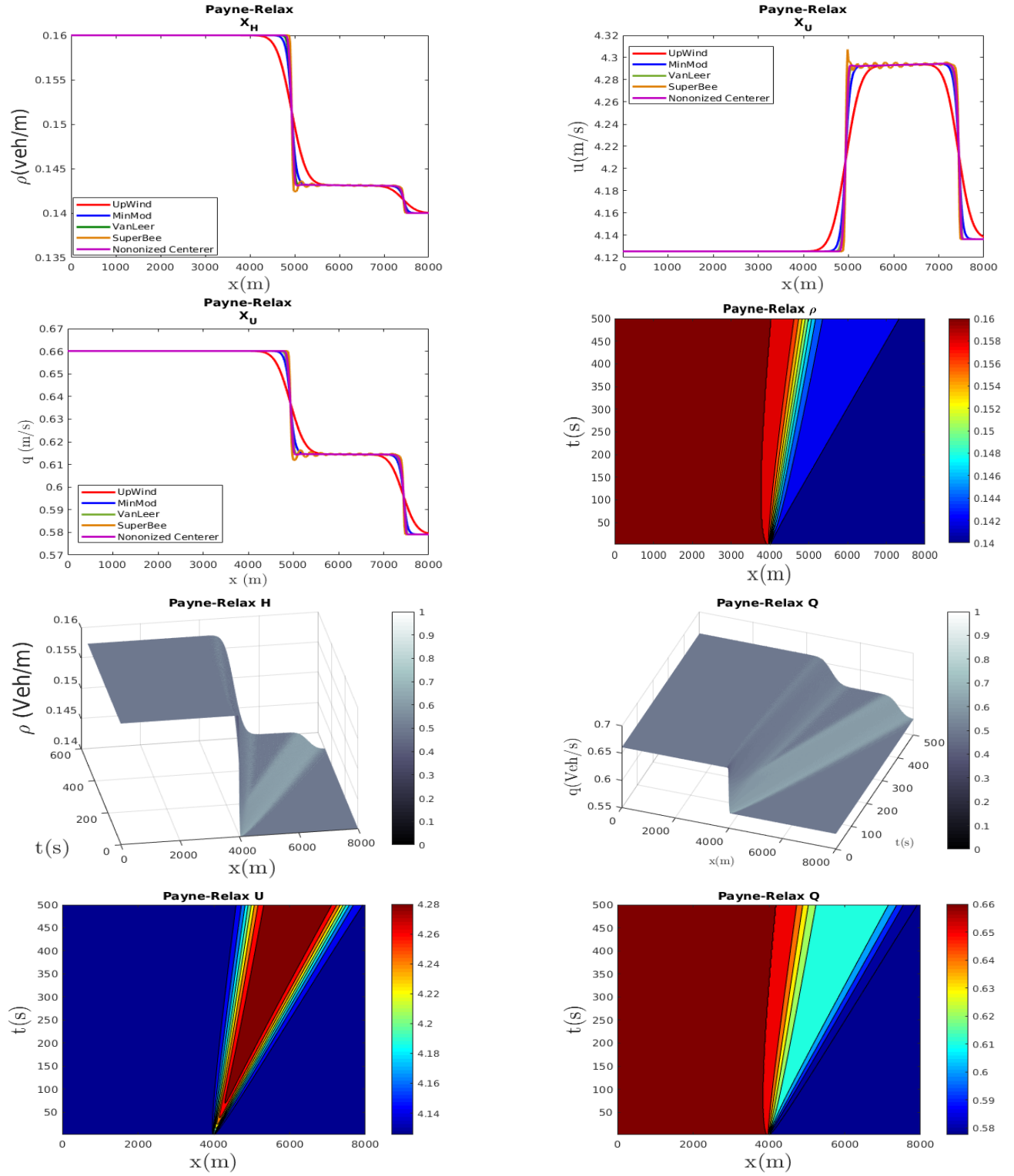
Παράμετροι	Μονάδες Μέτρησης	Τιμές
L	m	8000
u_{max}	m/s	1
ρ_{max}	$vehicle/m$	1
T_f	s	500
τ	s	10000

Πίνακας 4.1: Τιμές μεταβλητών για το PW μοντέλο

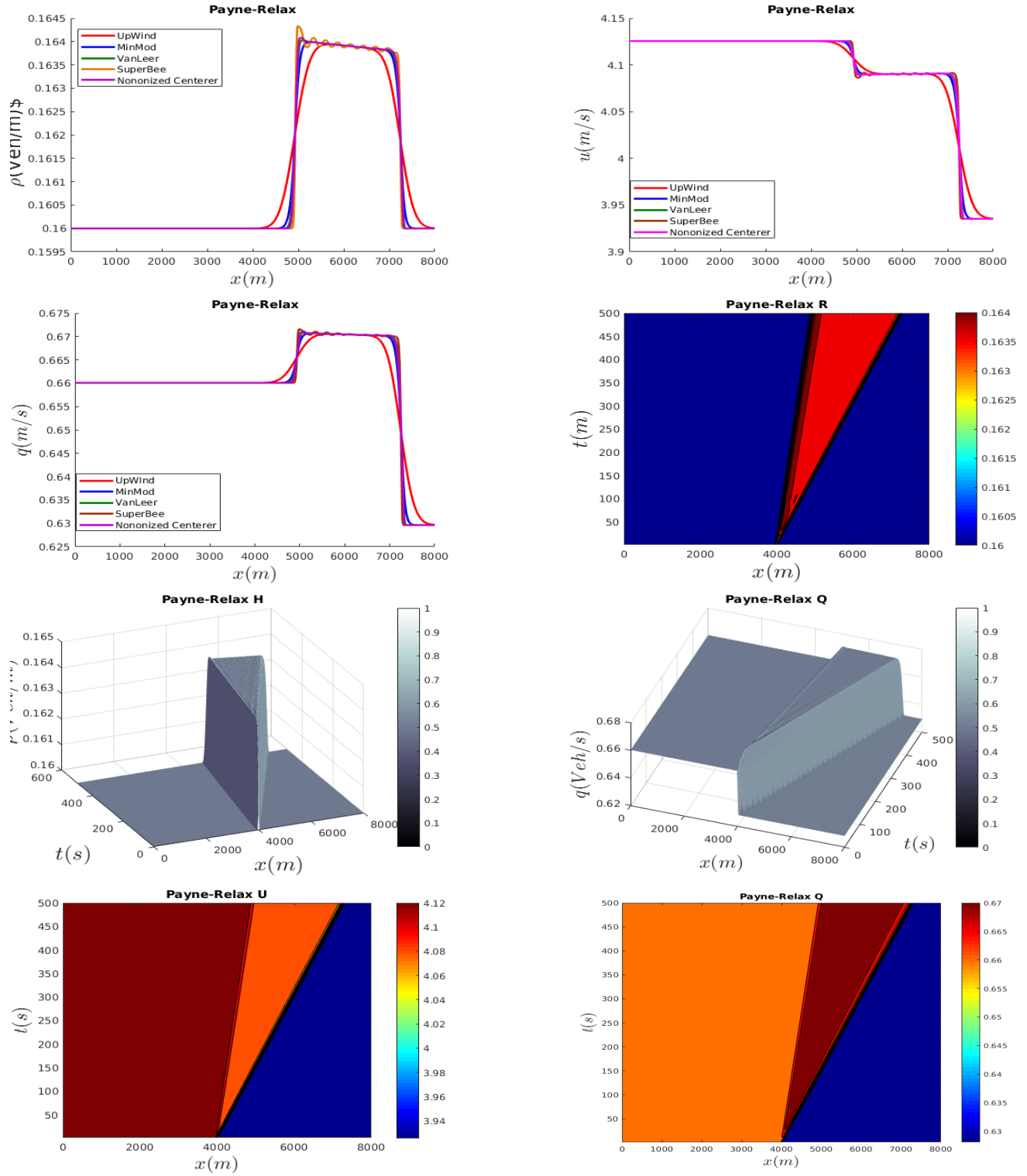
Ενώ σαν συνοριακές τιμές έχουν χρησιμοποιηθεί οι Neumann (freeflow) τιμές



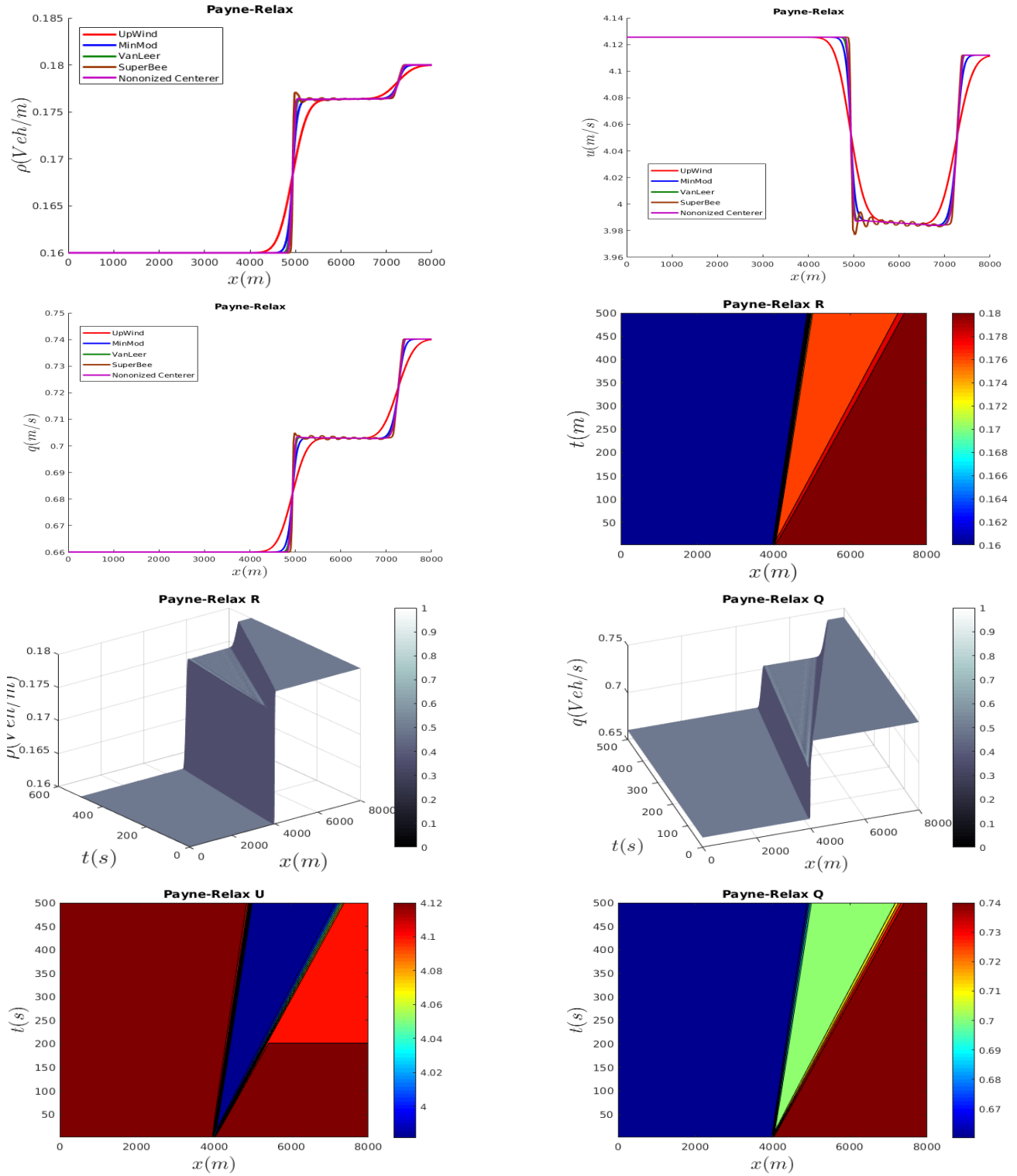
Σχήμα 4.1: To PW model-MUSCL για το RP1



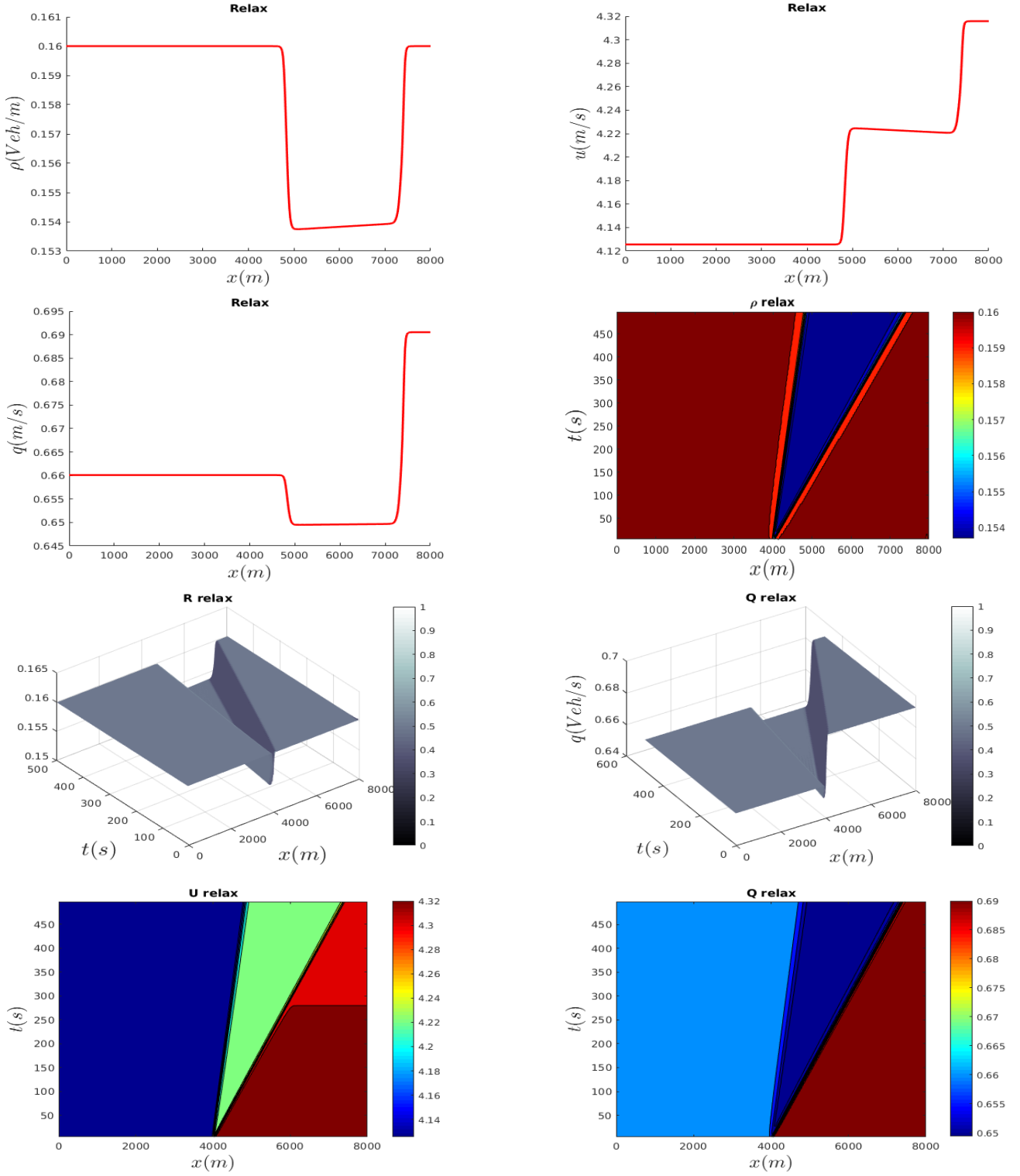
Σχήμα 4.2: Το PW model-MUSCL για το RP2



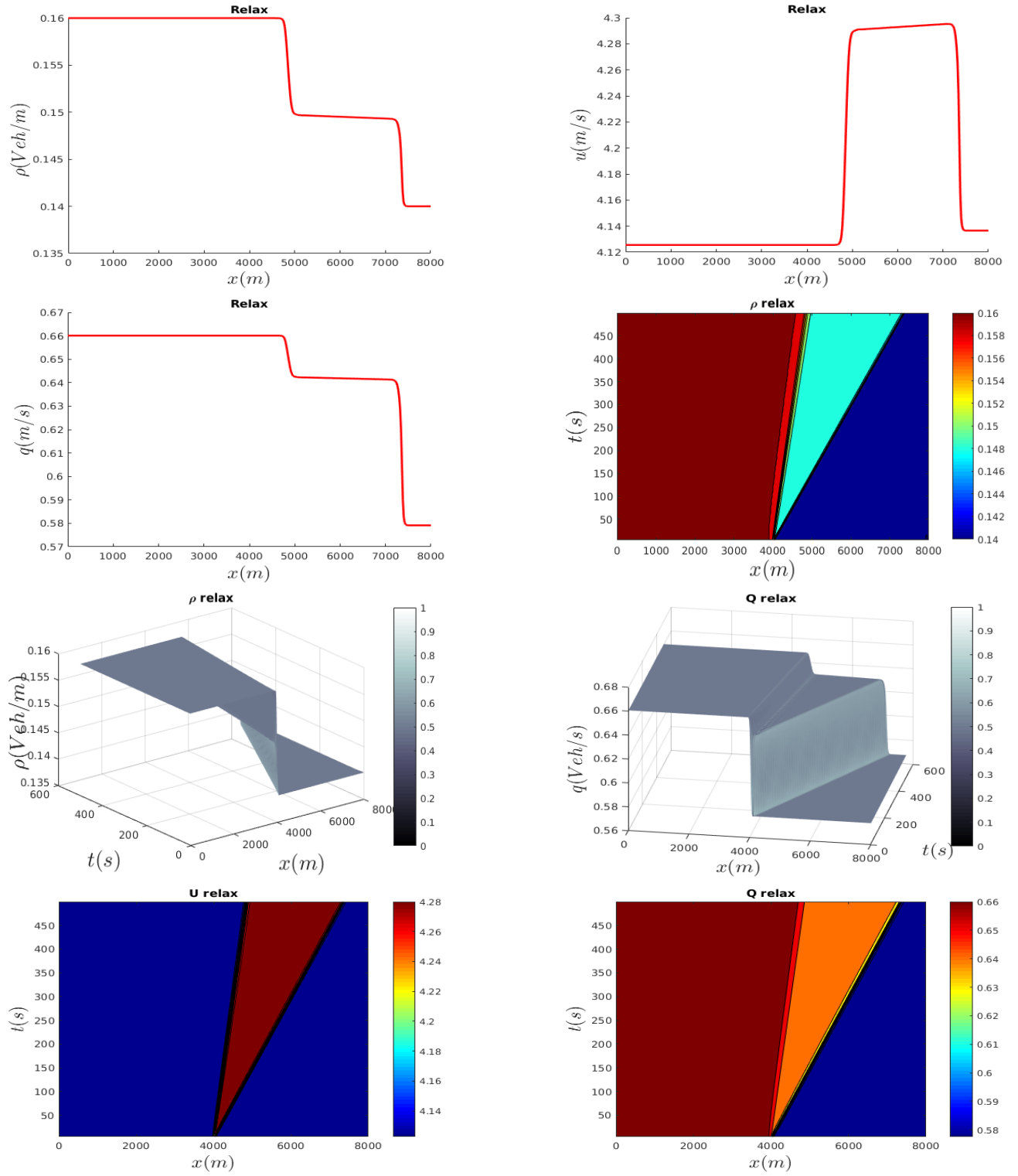
Σχήμα 4.3: To PW model-MUSCL για το RP3



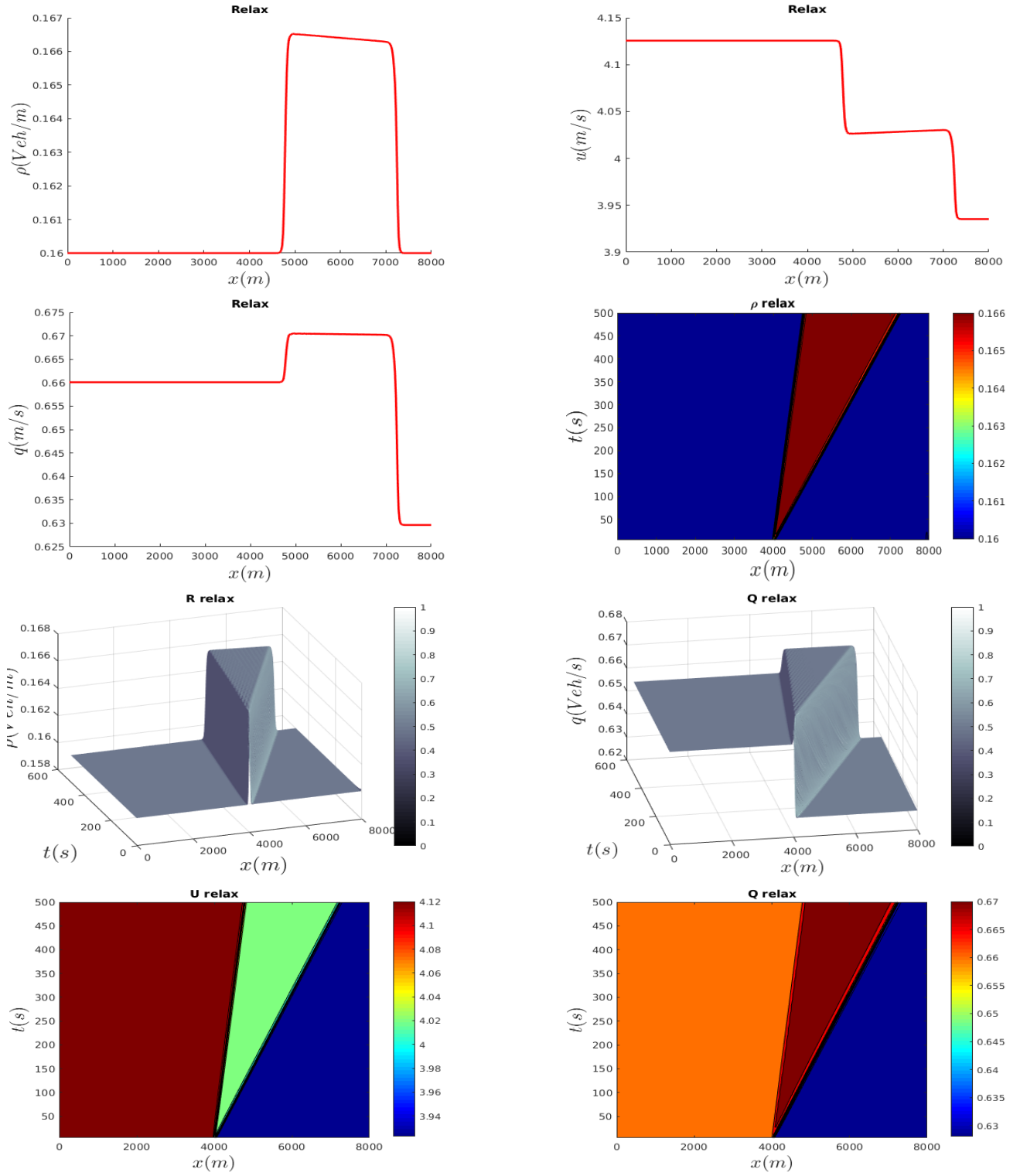
Σχήμα 4.4: To PW model-MUSCL για το RP4



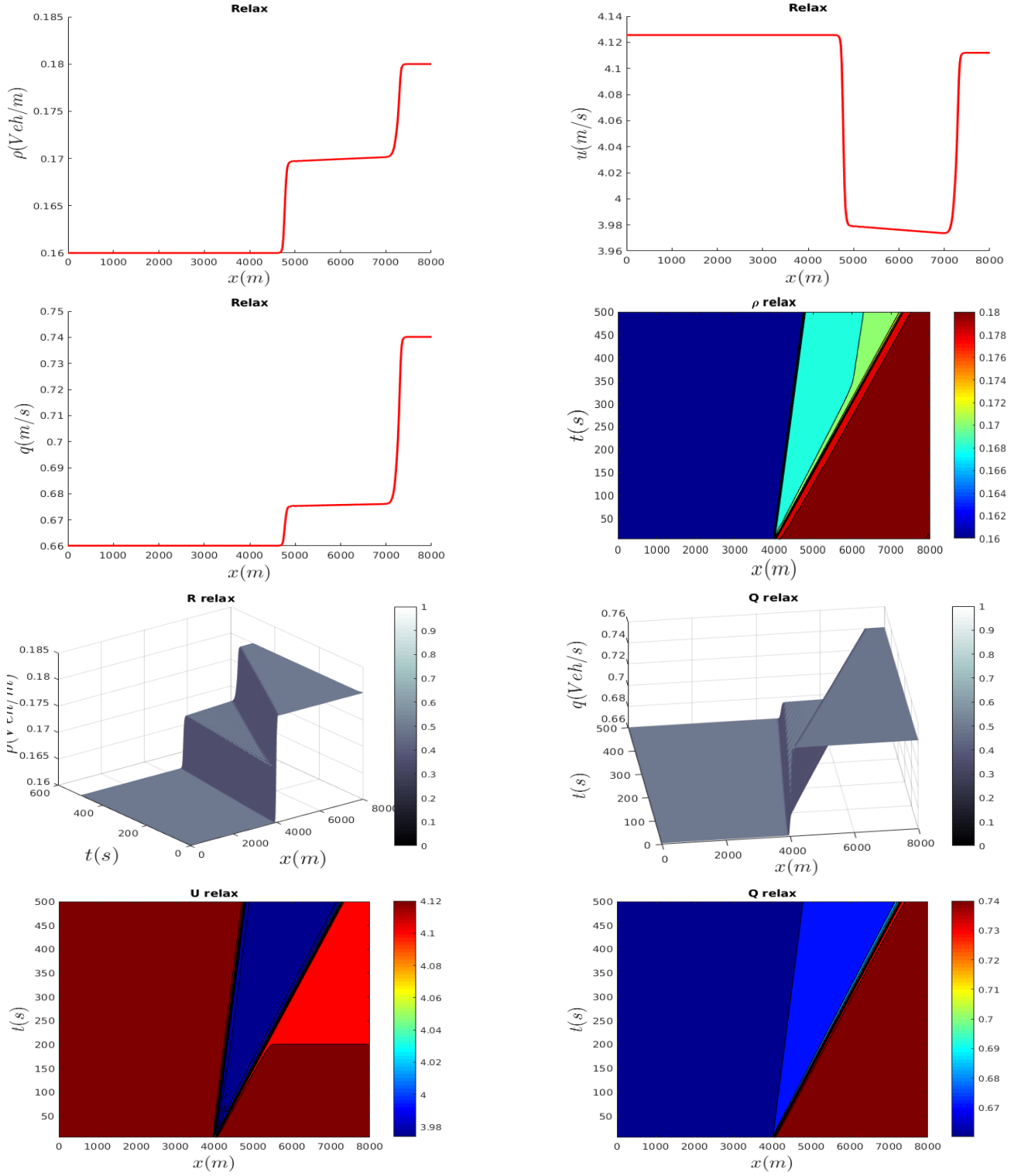
Σχήμα 4.5: To PW model-WENO για το RP1



Σχήμα 4.6: Το PW model-WENO για το RP2



Σχήμα 4.7: To PW model-WENO για το RP3



Σχήμα 4.8: Το PW model-WENO για το RP4

4.1.2 AR μοντέλο προσομοίωση

Αντίθετα με το PW μοντέλο η λ_2 για το AR και ARZ μοντέλα κυκλοφορίας είναι γραμμικά εκφυλισμένα και έτσι μια συνεχής ασυνέχεια (C_2) είναι αποδεκτή στο αρχικό κύμα. Επομένως σε σχέση με το τα δεδομένα το κύμα που σχετίζεται με την πρώτη χαρακτηριστική εξίσωση είναι είτε μία αραίωση R_1 ή ένα σόκ S_1 και είναι σχετικά με την δεύτερη ταχύτητα της ασυνέχειας (discontinuity) Οι τιμές των μεταβλητών που χρησιμοποιούμε για αυτό την προσομοίωση παρουσιάζονται στον παρακάτω πίνακα

Παράμετροι	Μονάδες Μέτρησης	Τιμές
L	m	16
T_f	s	6
CFL		0.4
$GridPoints$		400

Πίνακας 4.2: Τιμές μεταβλητών για το AR μοντέλο

Ενώ σαν συνοριακές τιμές έχουν χρησιμοποιηθεί οι Neumann (freeflow) τιμές και εξετάζουμε τις εξής περιπτώσεις :

- **[AR Case1] με αρχικές συνθήκες**

$$[\rho(x, 0), u(x, 0)] = \begin{cases} [\rho_l, u_l] = [0.5, 0.6], & \text{for } x \leq 8 \\ [\rho_r, u_r] = [0.8, 0.4], & \text{for } x > 8 \end{cases} \quad (4.5)$$

- **[AR Case2] με αρχικές συνθήκες**

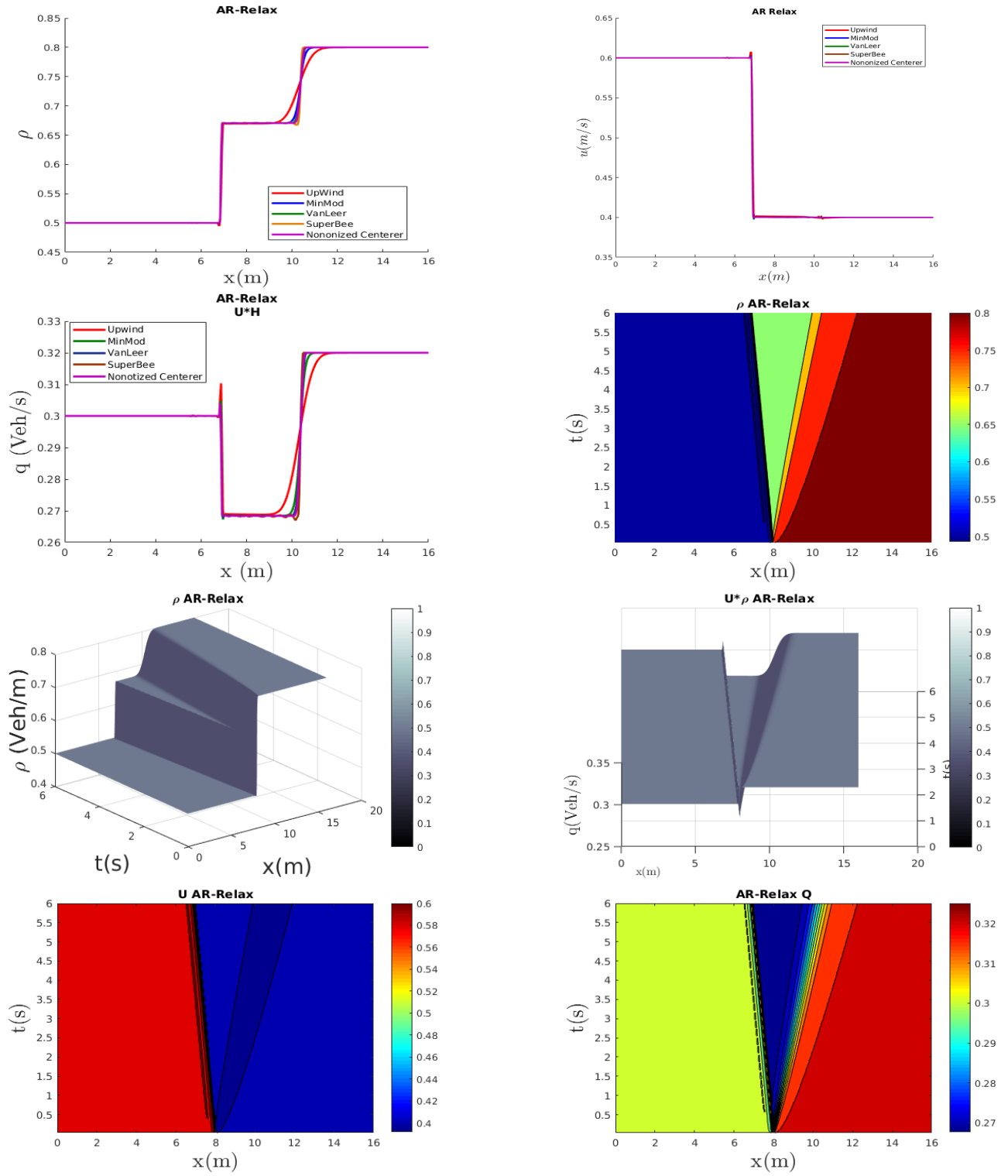
$$[\rho(x, 0), u(x, 0)] = \begin{cases} [\rho_l, u_l] = [0.8, 0.6], & \text{for } x \leq 8 \\ [\rho_r, u_r] = [0.6, 1], & \text{for } x > 8 \end{cases} \quad (4.6)$$

- **[AR Case3] με αρχικές συνθήκες**

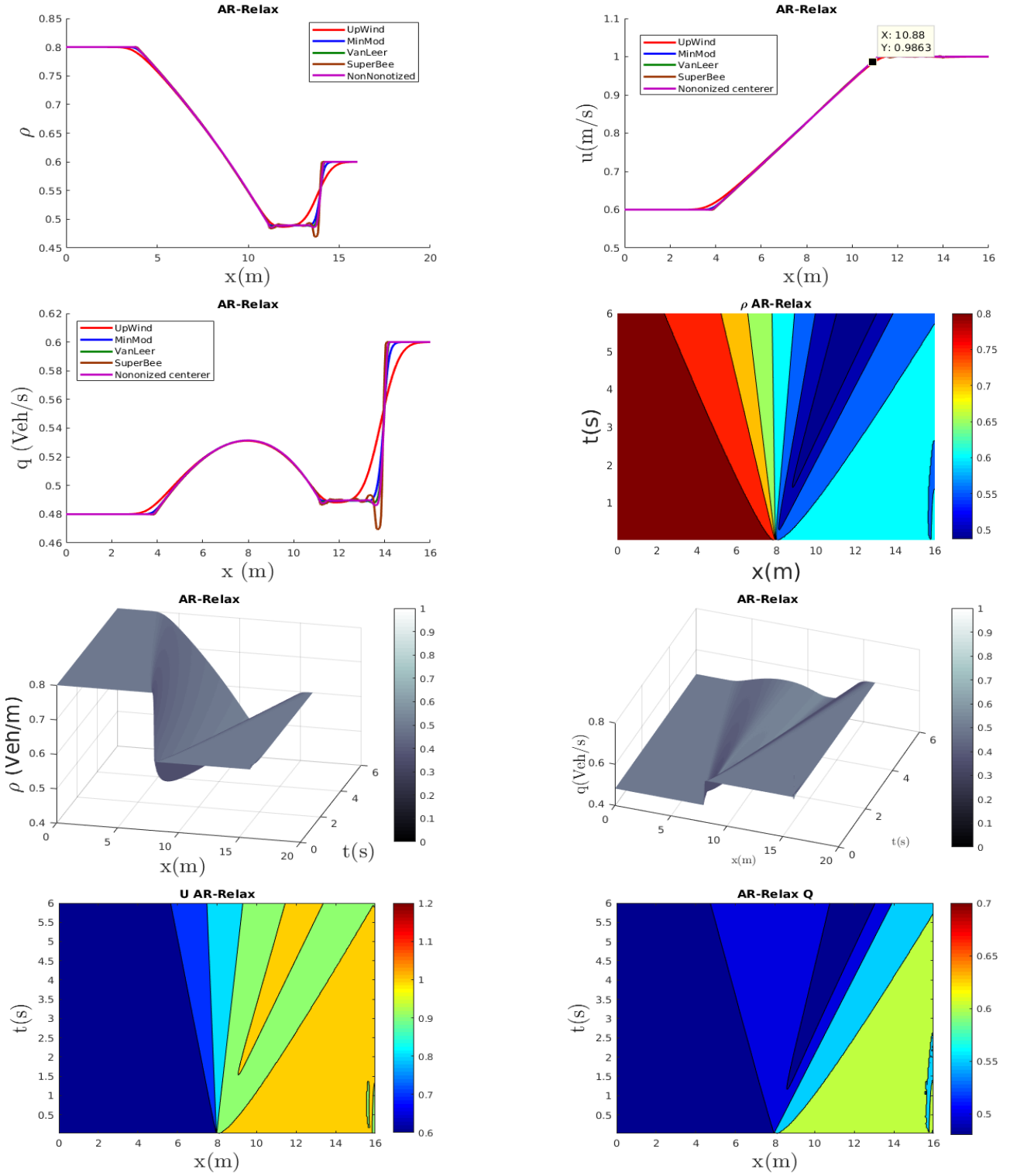
$$[\rho(x, 0), u(x, 0)] = \begin{cases} [\rho_l, u_l] = [0.5, 0.6], & \text{for } x \leq 8 \\ [\rho_r, u_r] = [0, 1], & \text{for } x > 8 \end{cases} \quad (4.7)$$

- **[AR Case4] με αρχικές συνθήκες**

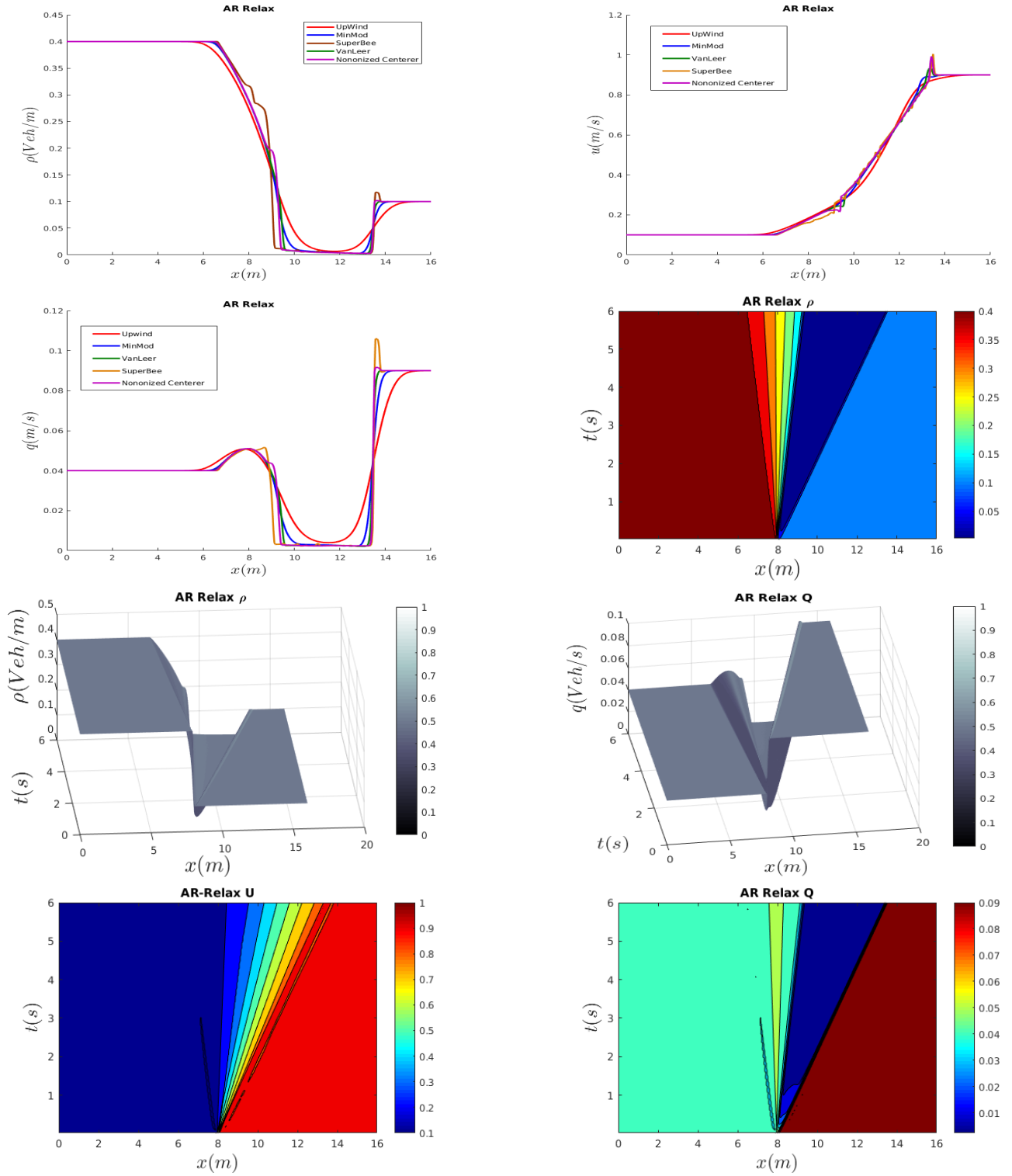
$$[\rho(x, 0), u(x, 0)] = \begin{cases} [\rho_l, u_l] = [0.4, 0.1], & \text{for } x \leq 8 \\ [\rho_r, u_r] = [0.1, 0.9], & \text{for } x > 8 \end{cases} \quad (4.8)$$



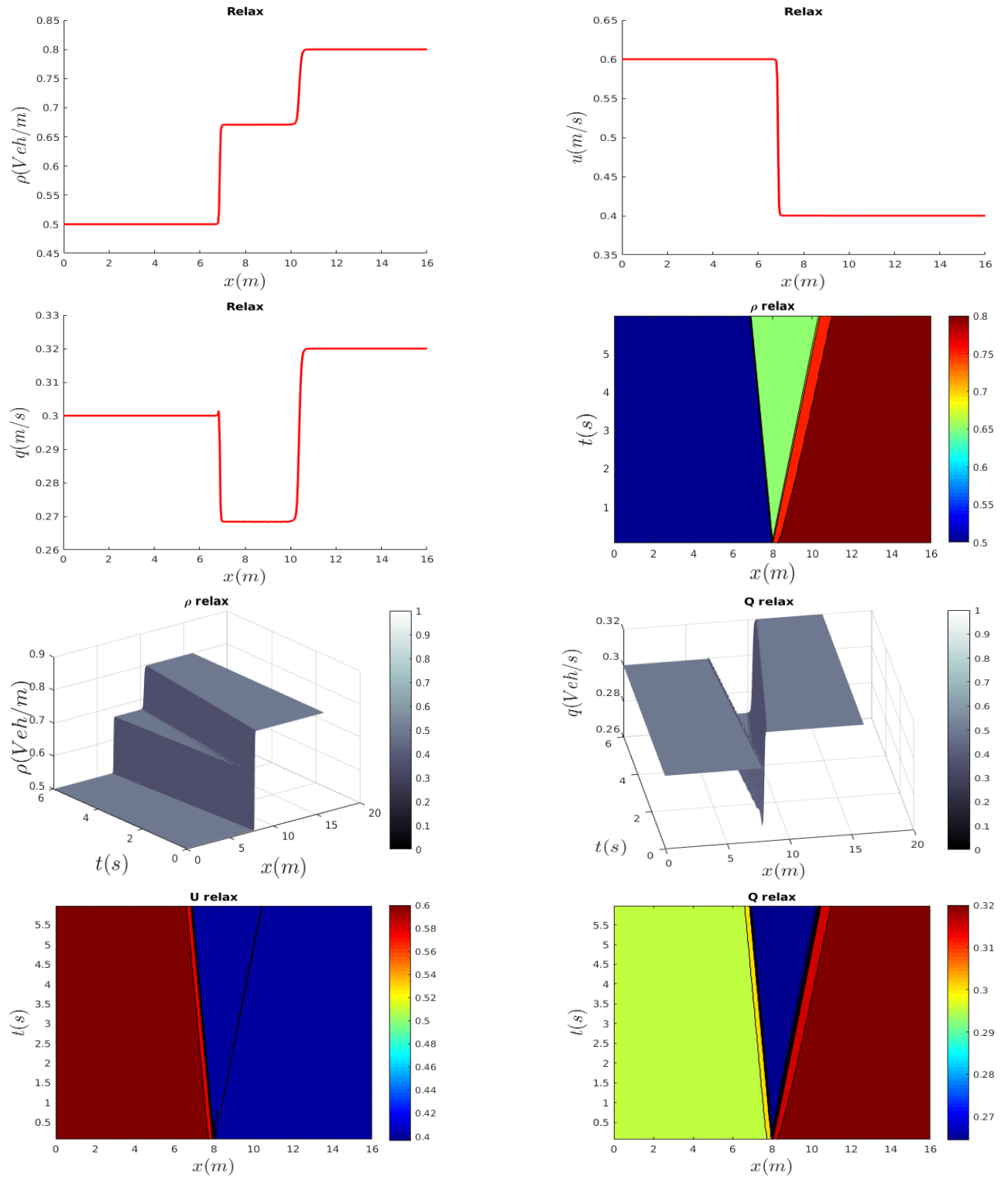
Σχήμα 4.9: Το AR model-MUSCL για το AR Case1



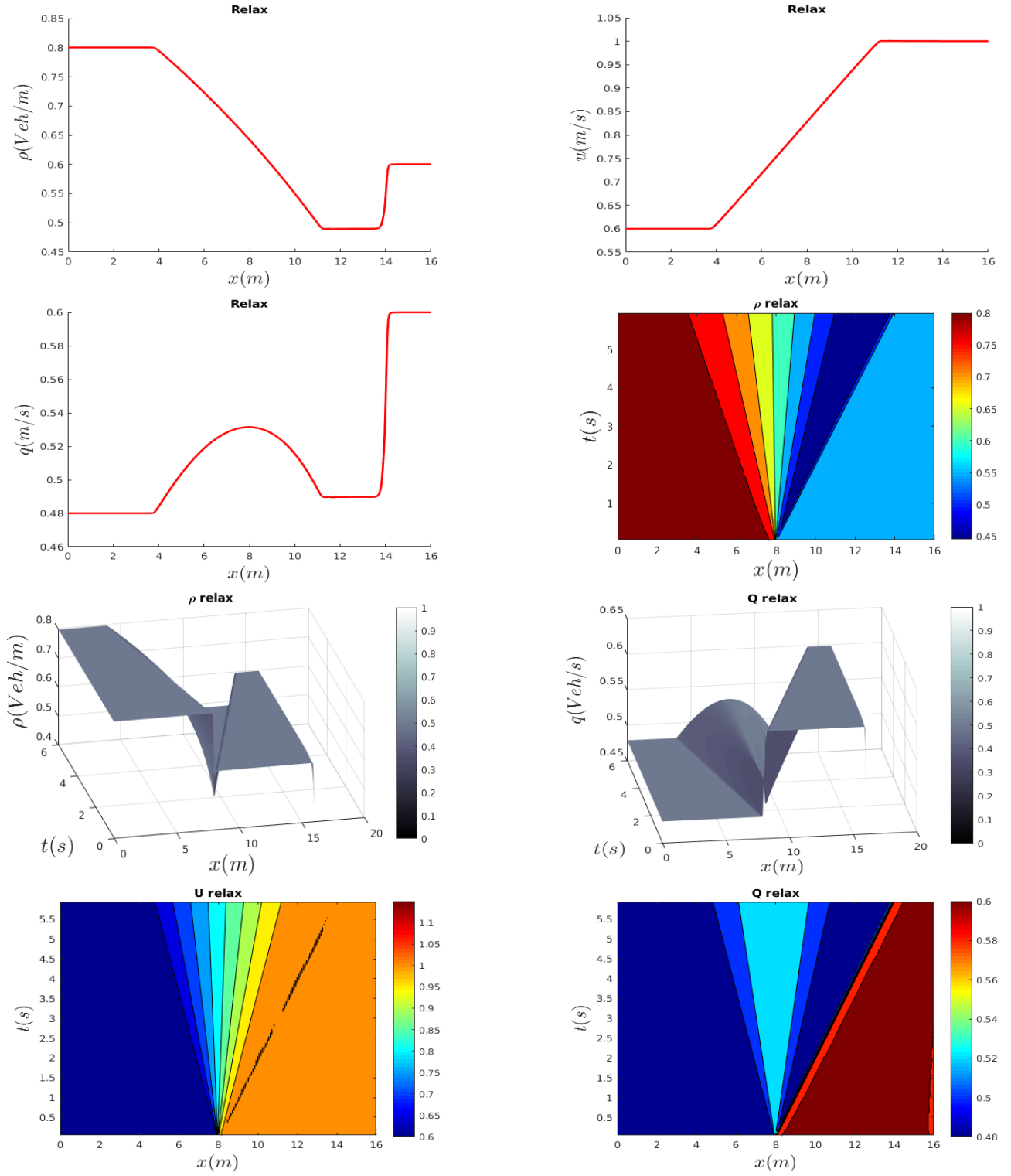
Σχήμα 4.10: Το AR model-MUSCL για το AR Case2



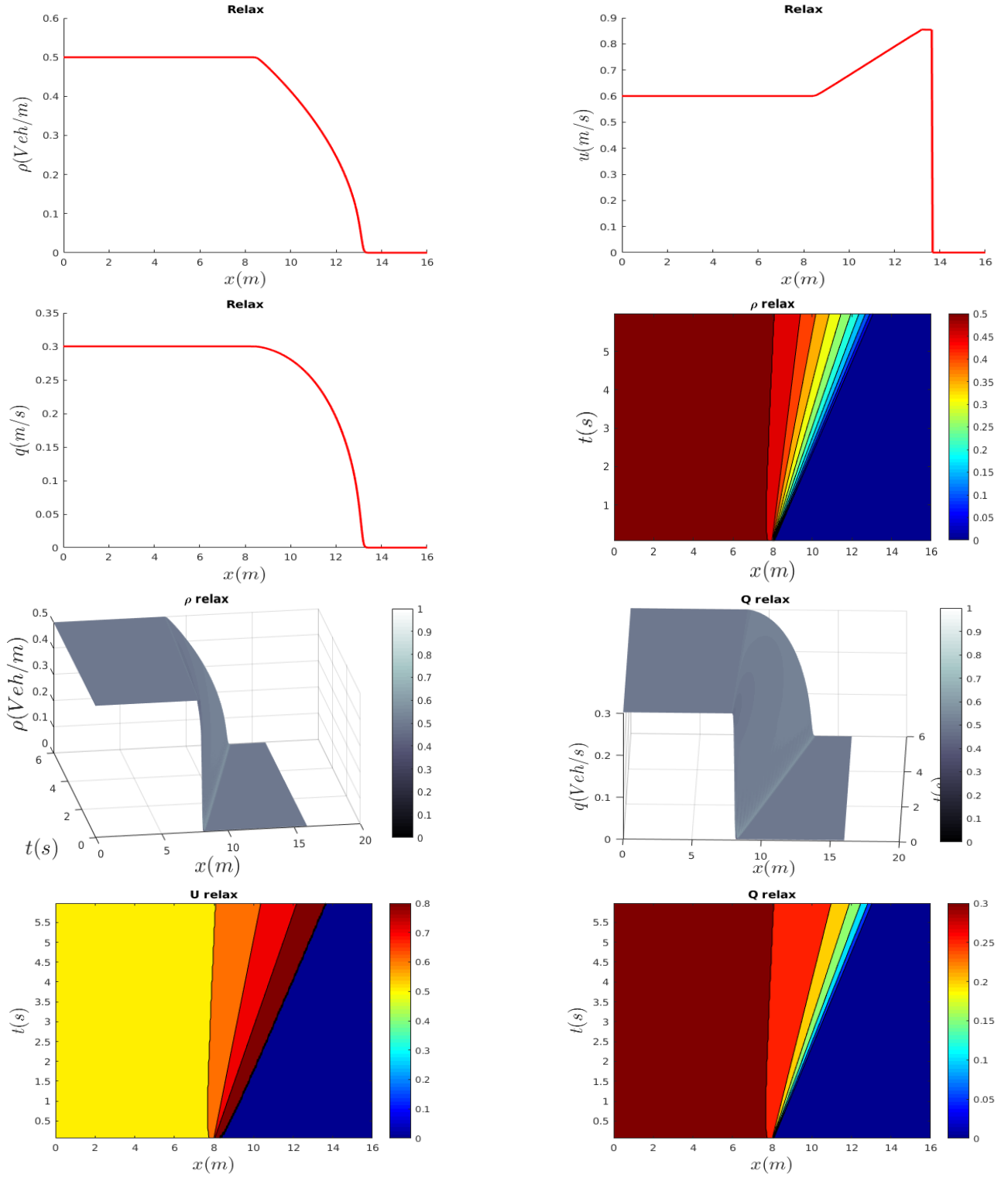
Σχήμα 4.11: Το AR model-MUSCL για το AR Case4



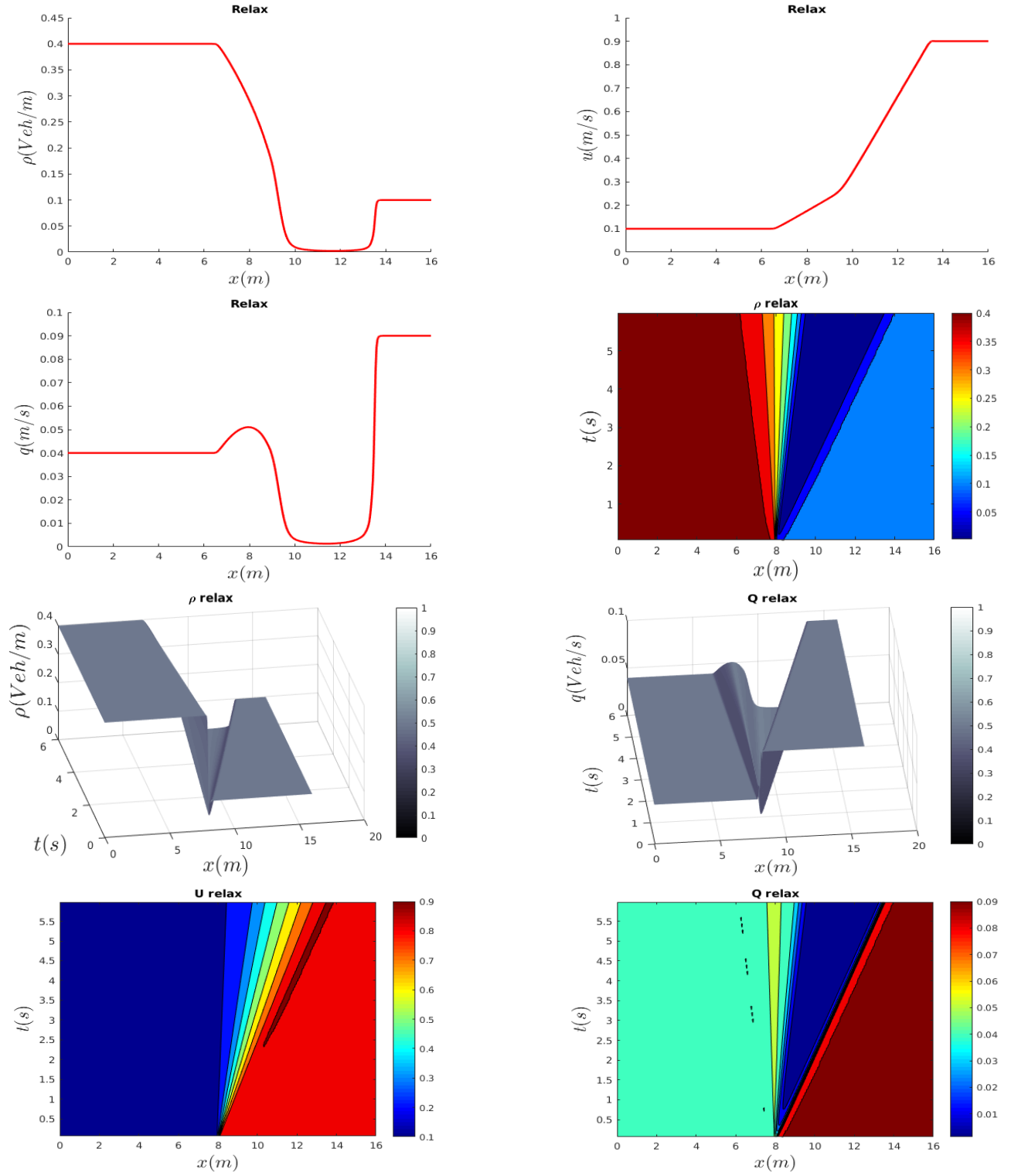
Σχήμα 4.12: To AR model-WENO για το AR Case1



Σχήμα 4.13: To AR model-WENO για το AR Case2



Σχήμα 4.14: To AR model-WENO για το AR Case3



Σχήμα 4.15: To AR model-WENO για το AR Case4

4.1.3 ARZ μοντέλο προσομοίωση

Για το μοντέλο ARZ έχουμε τις εξής τιμές των μεταβλητών:

Παράμετροι	Μονάδες Μέτρησης	Τιμές
L	m	1
T_f	s	0, 8
CFL		0.4
$GridPoints$		400
u_{max}	m/s	1
ρ_{max}	veh/s	1

Πίνακας 4.3: Τιμές μεταβλητών για το ARZ μοντέλο

Ενώ σαν συνοριακές τιμές έχουν χρησιμοποιηθεί οι Neumann (freeflow) τιμές. Οι περιπτώσεις που χρησιμοποιούμε είναι η εξής :

- **[ARZ Case1] με αρχικές συνθήκες**

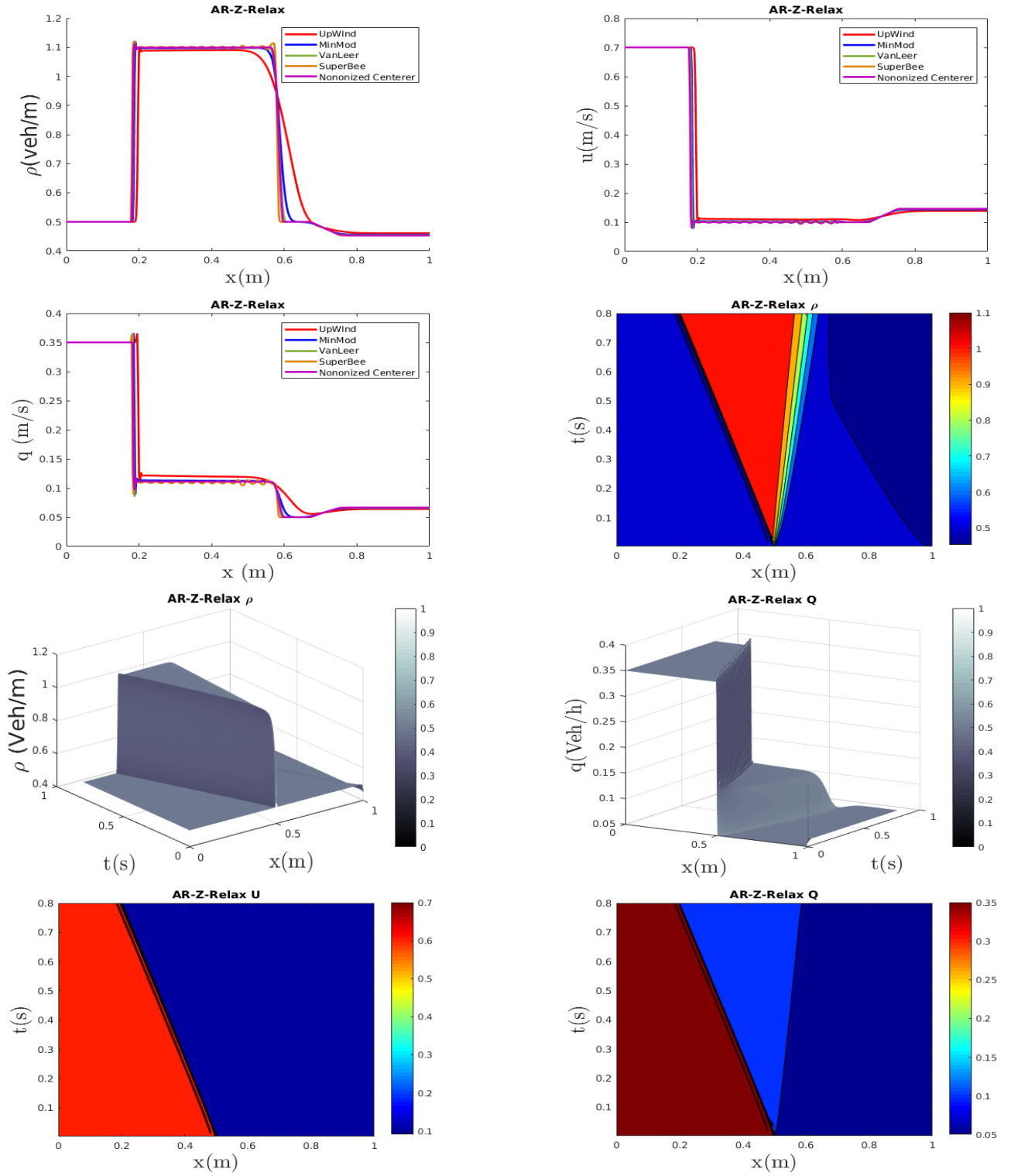
$$[\rho(x, 0), u(x, 0)] = \begin{cases} [\rho_l, u_l] = [0.5, 0.7], & \text{for } x \leq 0.5 \\ [\rho_r, u_r] = [0.5, 0.1], & \text{for } x > 0.5 \end{cases} \quad (4.9)$$

- **[ARZ Case2] με αρχικές συνθήκες**

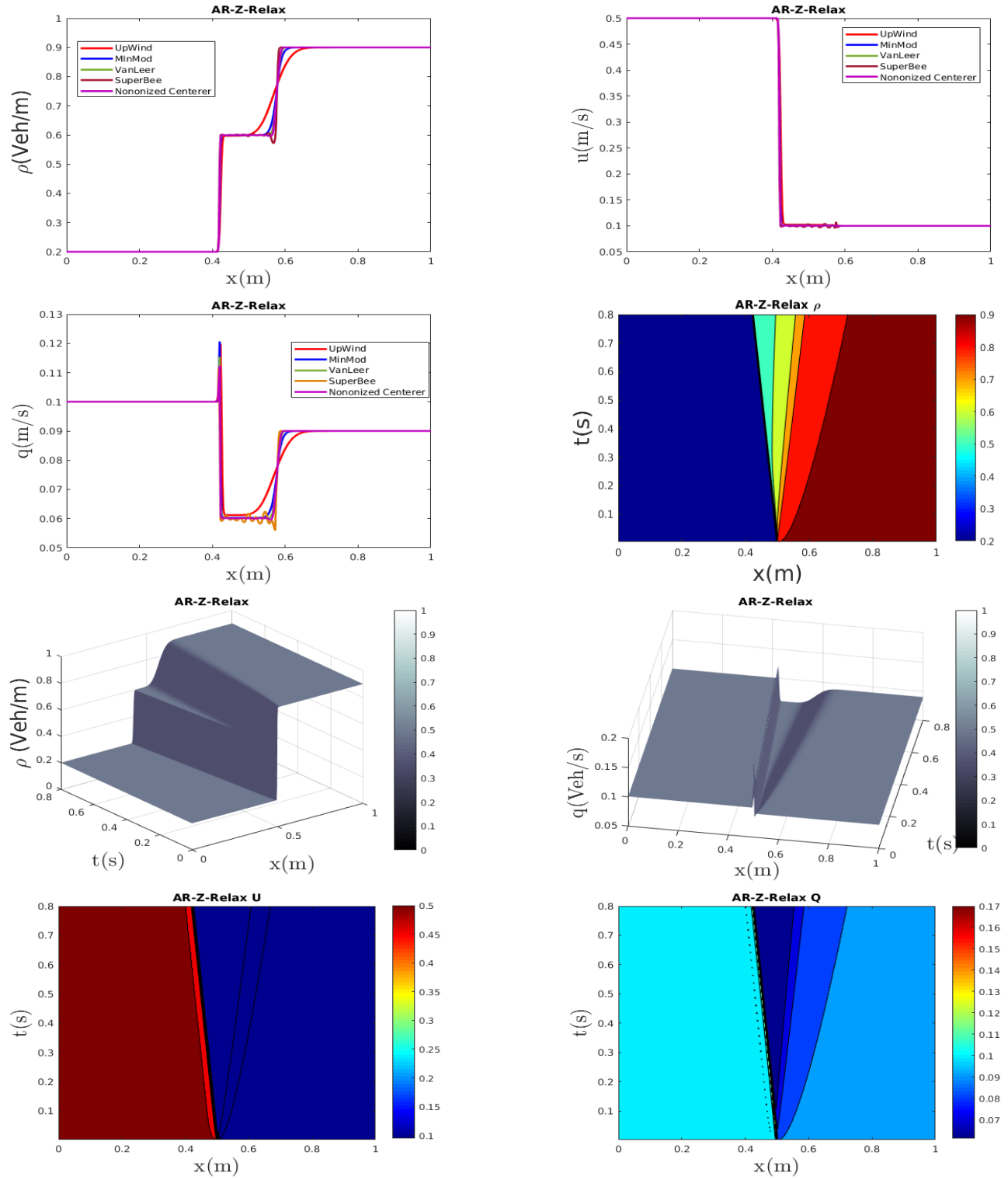
$$[\rho(x, 0), u(x, 0)] = \begin{cases} [\rho_l, u_l] = [0.2, 0.5], & \text{for } x \leq 0.5 \\ [\rho_r, u_r] = [0.9, 0.1], & \text{for } x > 0.5 \end{cases} \quad (4.10)$$

- **[ARZ Case3] με αρχικές συνθήκες**

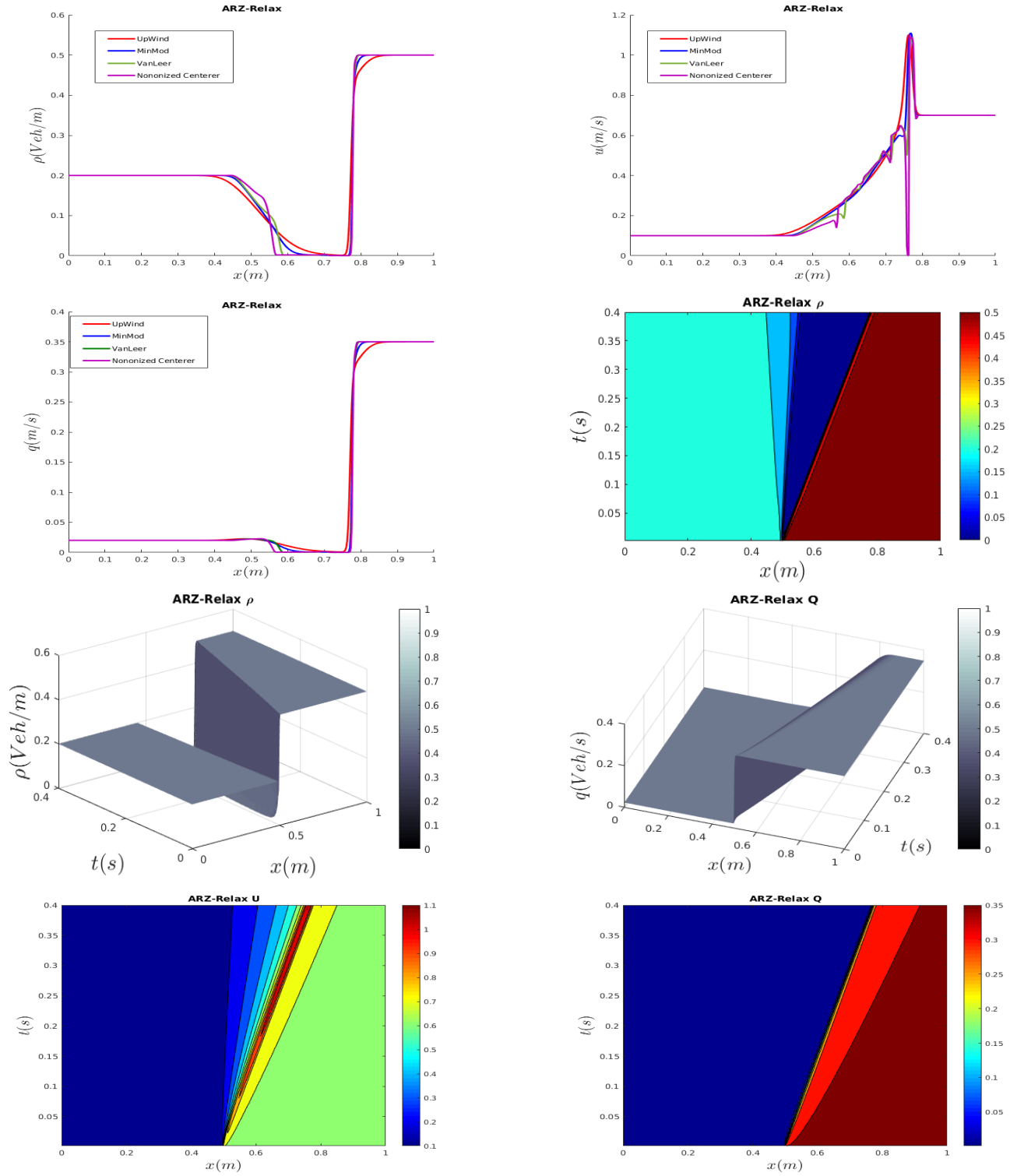
$$[\rho(x, 0), u(x, 0)] = \begin{cases} [\rho_l, u_l] = [0.2, 0.1], & \text{for } x \leq 0.5 \\ [\rho_r, u_r] = [0.5, 0.7], & \text{for } x > 0.5 \end{cases} \quad (4.11)$$



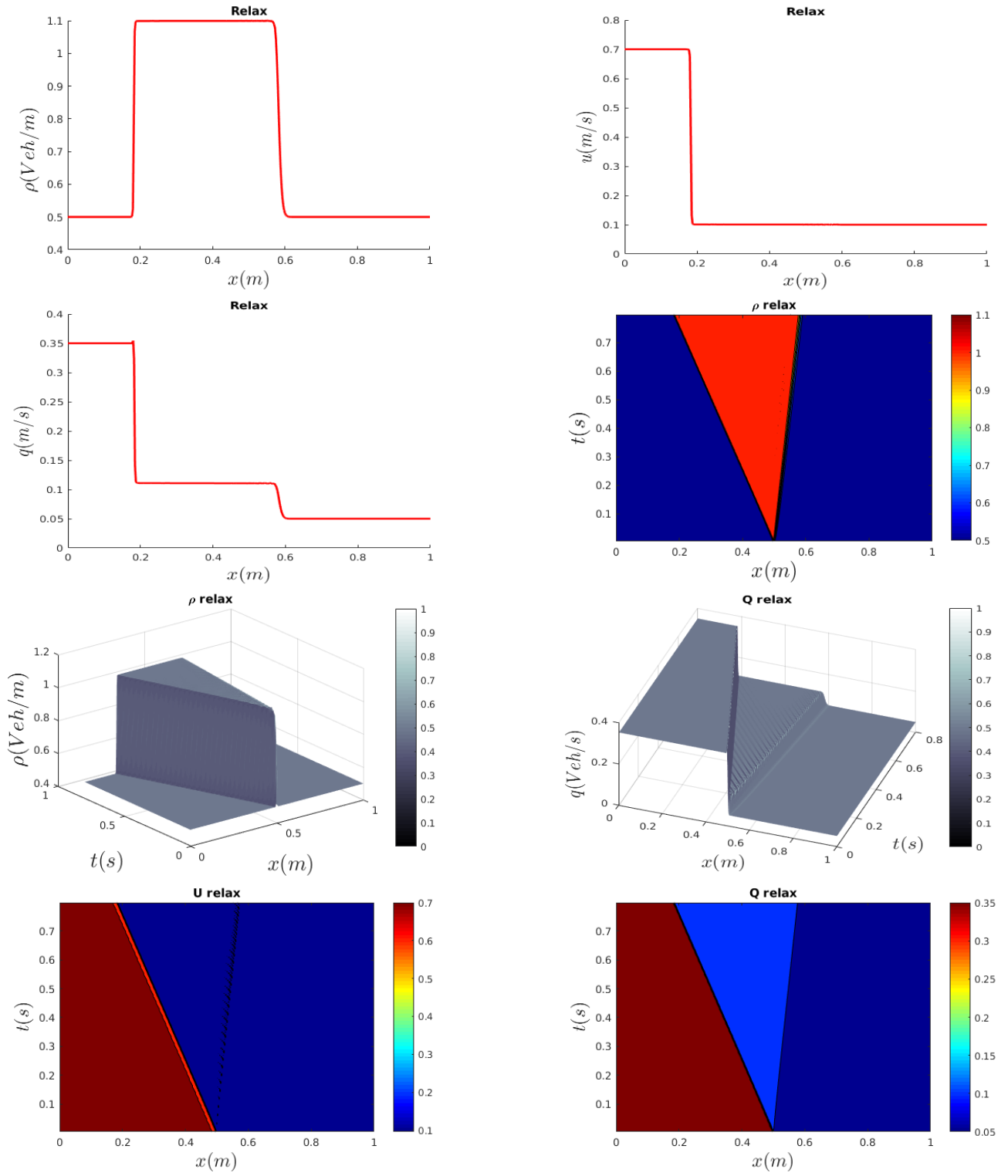
Σχήμα 4.16: Το ARZ model-MUSCL για το ARZ Case1



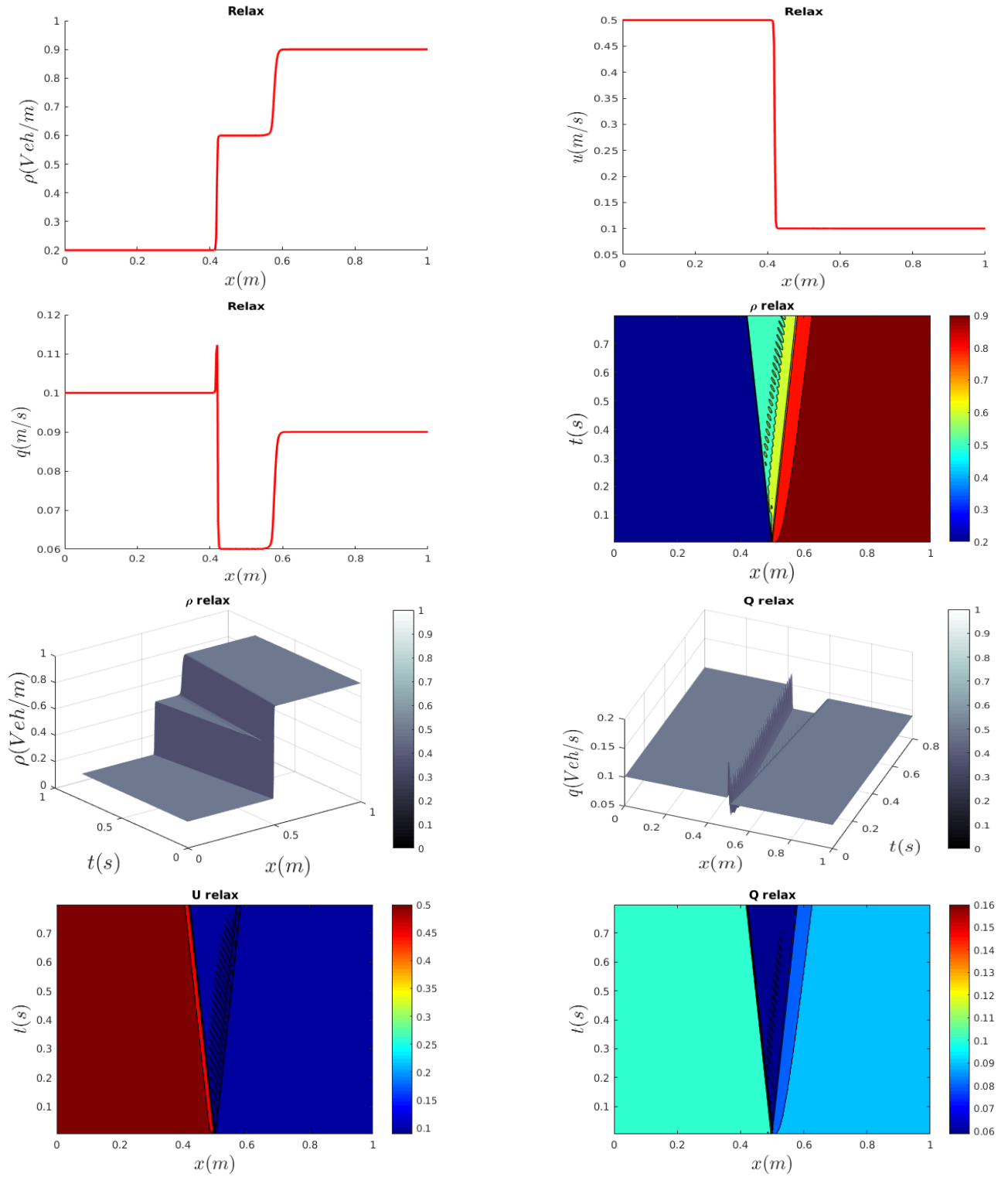
Σχήμα 4.17: To ARZ model-MUSCL για το ARZ Case2



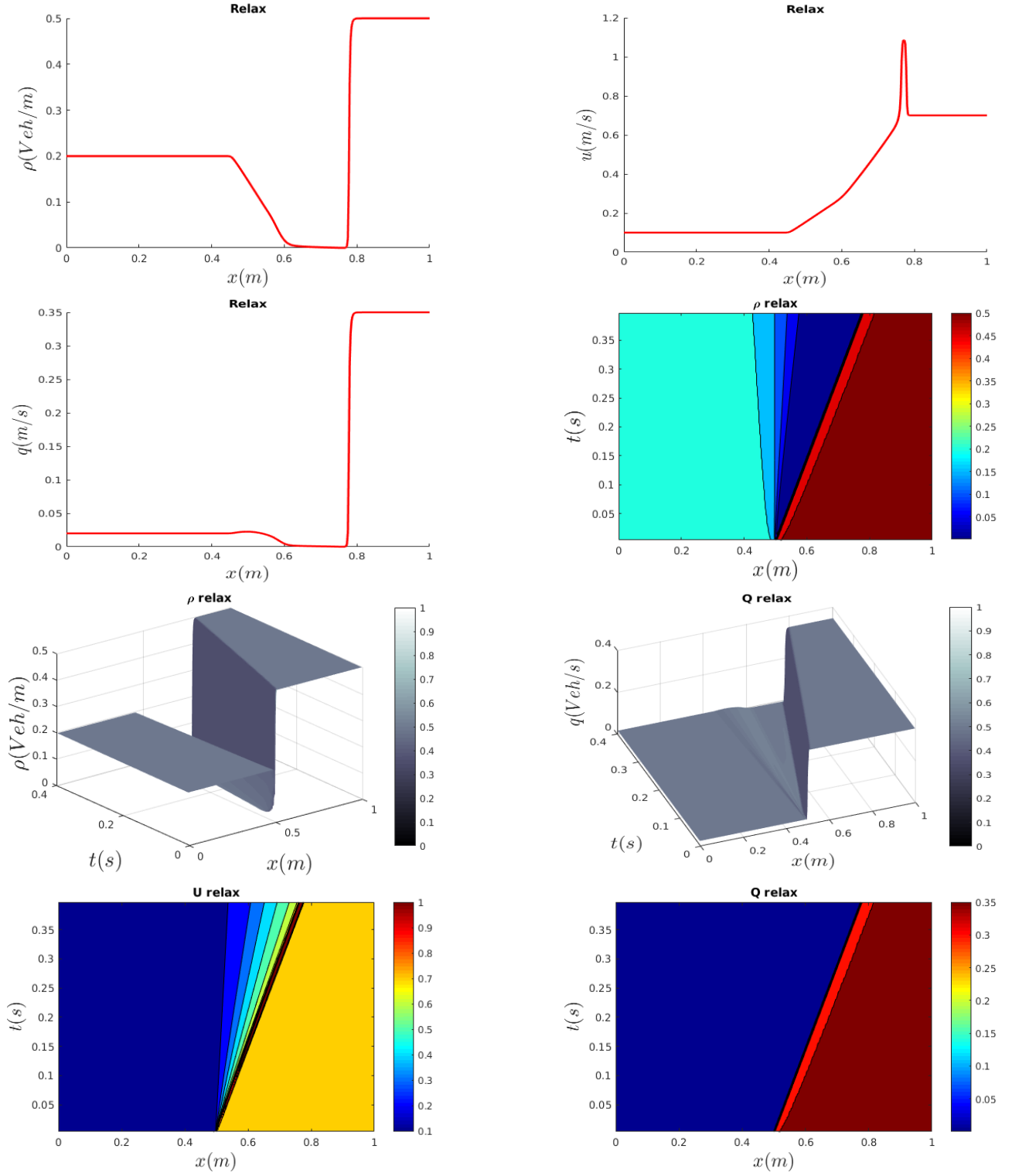
Σχήμα 4.18: Το ARZ model-MUSCL για το ARZ Case3



Σχήμα 4.19: To ARZ model-WENO για το ARZ Case 1



Σχήμα 4.20: Το ARZ model-WENO για το ARZ Case2



Σχήμα 4.21: To ARZ model-WENO για το ARZ Case3

4.1.4 GKT μοντέλο προσομοίωσης

Σε αυτήν την παράγραφο παρουσιάζω τα αποτελέσματα για το μοντέλο GKT. Όπως και στα προηγούμενα παραθέτουμε για τις περιπτώσεις Muscl και Weno αποτελέσματα. Τα δεδομένα που χρησιμοποιούμε για τις προσομοιώσεις εμφανίζονται στον παρακάτω πίνακα

Παράμετροι	Μονάδες Μέτρησης	Τιμές
L	m	6000
CFL		0.4
u_{max}	m/h	30.556
ρ_{max}	$vehicle/m$	0.16
ρ_{cr}	$vehicle/m$	$0.27\rho_{max} = 0.0432$
T	s	1.8
γ		1.2
τ	s	22
A_0		0.008
δA		$2.5A_0$
$\delta\rho$	$vehicle/m$	$0.05\rho_{max}$

Πίνακας 4.4: Τιμές μεταβλητών για το GKT μοντέλο

Ενώ σαν συνοριακές τιμές έχουν χρησιμοποιηθεί οι Neumann (freeflow) τιμές
Εξετάζουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις για το GKT μοντέλο

- **[GKT Case1] με αρχικές συνθήκες**

$$[\rho(x, 0), u(x, 0)] = \begin{cases} [0.005, 0.0], & \text{for } x \leq 500 \\ [0.0015, 0.0], & \text{for } 500 < x < 3500 \\ [0.005, 0.0], & \text{for } x > 3500 \end{cases} \quad (4.12)$$

- **[GKT Case2] με αρχικές συνθήκες**

$$[\rho(x, 0), u(x, 0)] = \begin{cases} [0.015, 0.0], & \text{for } x \leq 500 \\ [0.0125, 0.0], & \text{for } 500 < x < 3500 \\ [0.001, 0.0], & \text{for } x > 3500 \end{cases} \quad (4.13)$$

[GKT Case 3]Ομογενής κυκλοφορία με τοπικές διαταραχές

Η ανάπτυξη αστάθειας της κυκλοφορίας, ξεκινώντας με σχεδόν ομοιογενή αρχική κυκλοφορία, θεωρείται πολύ αυστηρή δοκιμή της αριθμητικής απόδοσης. Ακολουθώντας το [57], εξετάζουμε μια διπολική αρχική μεταβολή της μέσης πυκνότητας $\bar{\rho}$ που δίνεται ως

$$\rho(x, 0) = \bar{\rho} + \Delta\rho \left[\cosh^{-2} \left(\frac{x - x_0}{w^+} \right) - \frac{w^+}{w^-} \cosh^{-2} \left(\frac{x - x_0 - \Delta x_0}{w^-} \right) \right]$$

όπου

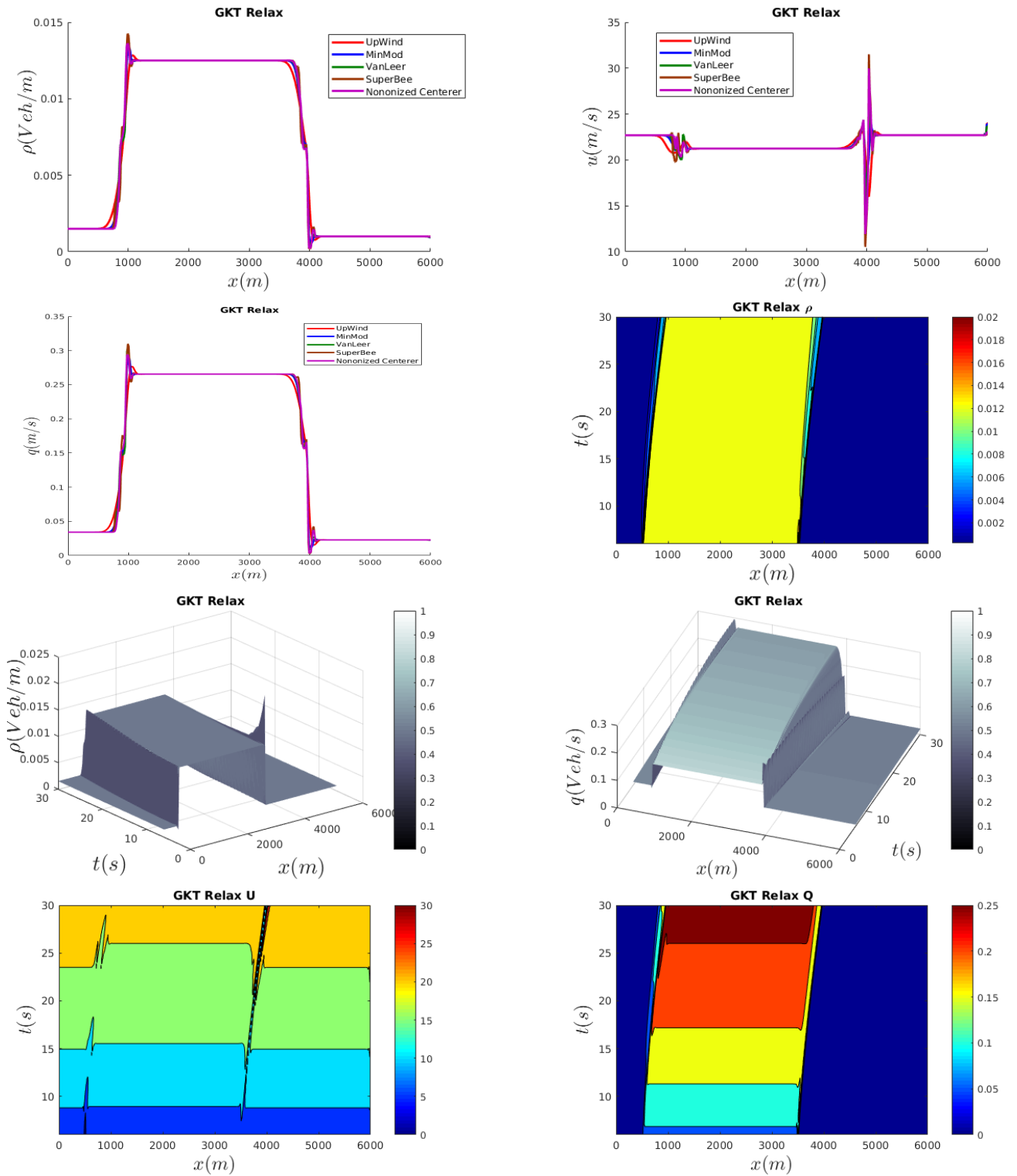
$$w^+ = 201.5 \text{ και } w^- = 805 \text{ και } \Delta x_0 = w^+ + w^-$$

Με αρχική ροή $q(x, 0) = q_e(\rho(x, 0)) = \rho V^e$ που δίνεται στην τοπική ισορροπία

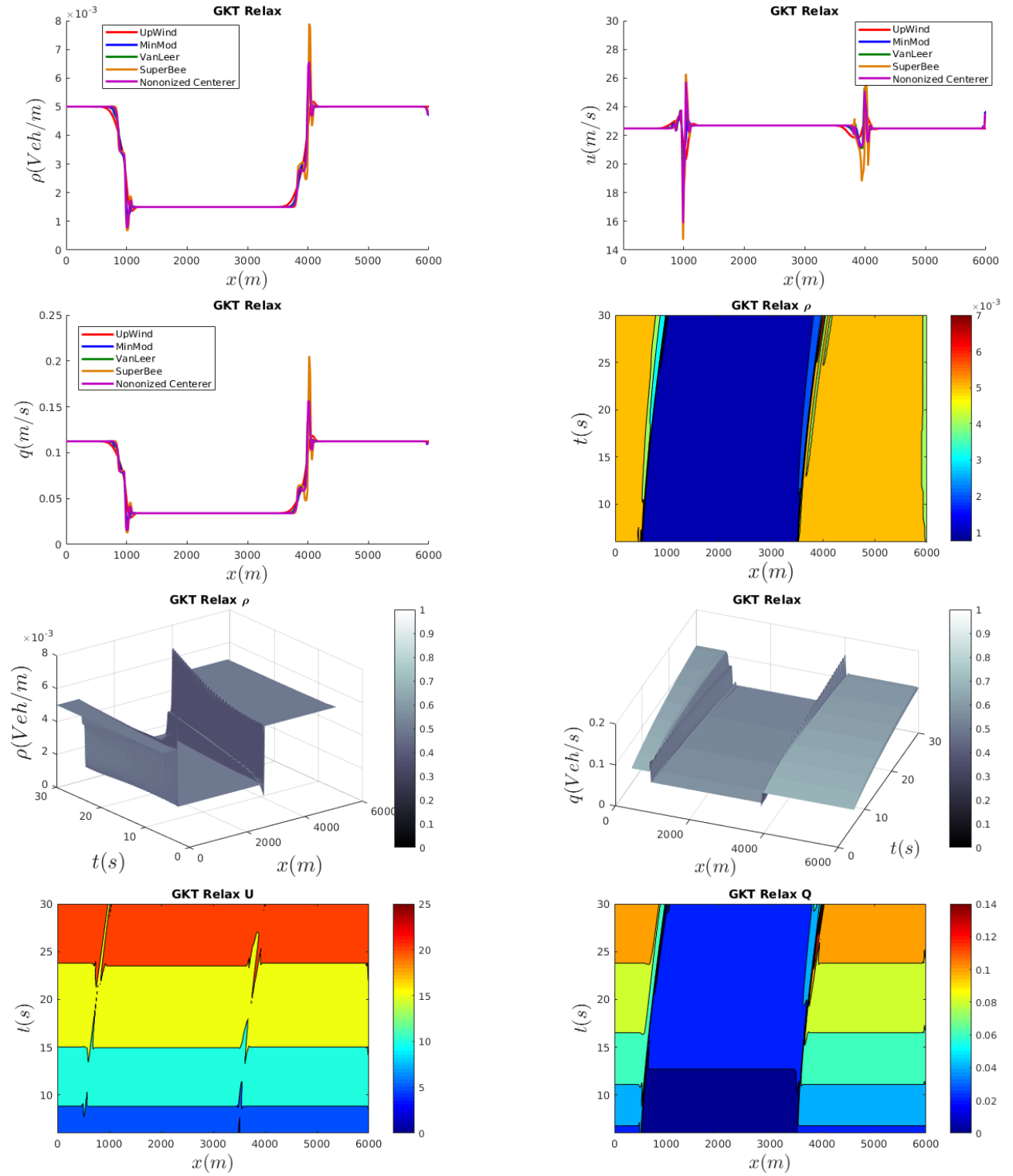
$$V^e(\rho) = \frac{\tilde{u}^2}{2u_{\max}} \left(-1 + \sqrt{1 + \frac{4u_{\max}^2}{\tilde{v}}} \right)$$

$$\tilde{u} = \sqrt{\frac{u_{\max}}{\tau \rho A(\rho) P(\rho)}}, \quad P(\rho) = \frac{u_{\max} \rho T^2}{\tau A(\rho_{\max})(1 - \rho/\rho_{\max})^2}.$$

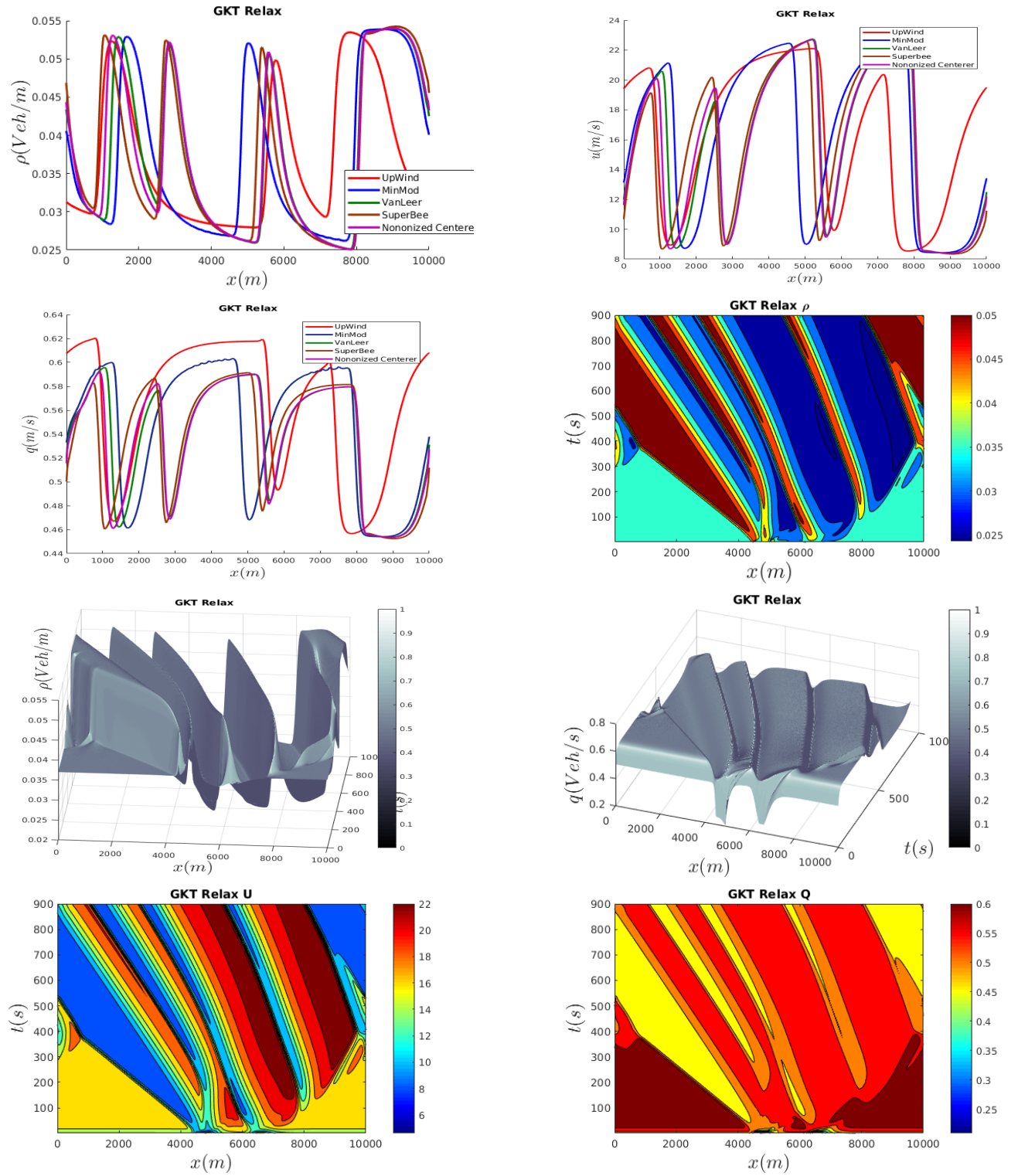
είχε οριστεί σε $\Delta\rho = 0.008veh/m$ και έγιναν διάφορες δοκιμές με πυκνότητα $\bar{\rho} = 0.037$. Στα αποτελέσματα που παρουσιάζονται στη συνέχεια, υποθέτουμε ότι η κυκλοφοριακή ροή είναι σε δακτύλιο περιφέρειας $L = 10000m$, Με αποτέλεσμα να εφαρμόζονται περιοδικές συνθήκες ορίων, διακριτικοποιημένες με $npts = 400$ πλέγμα.



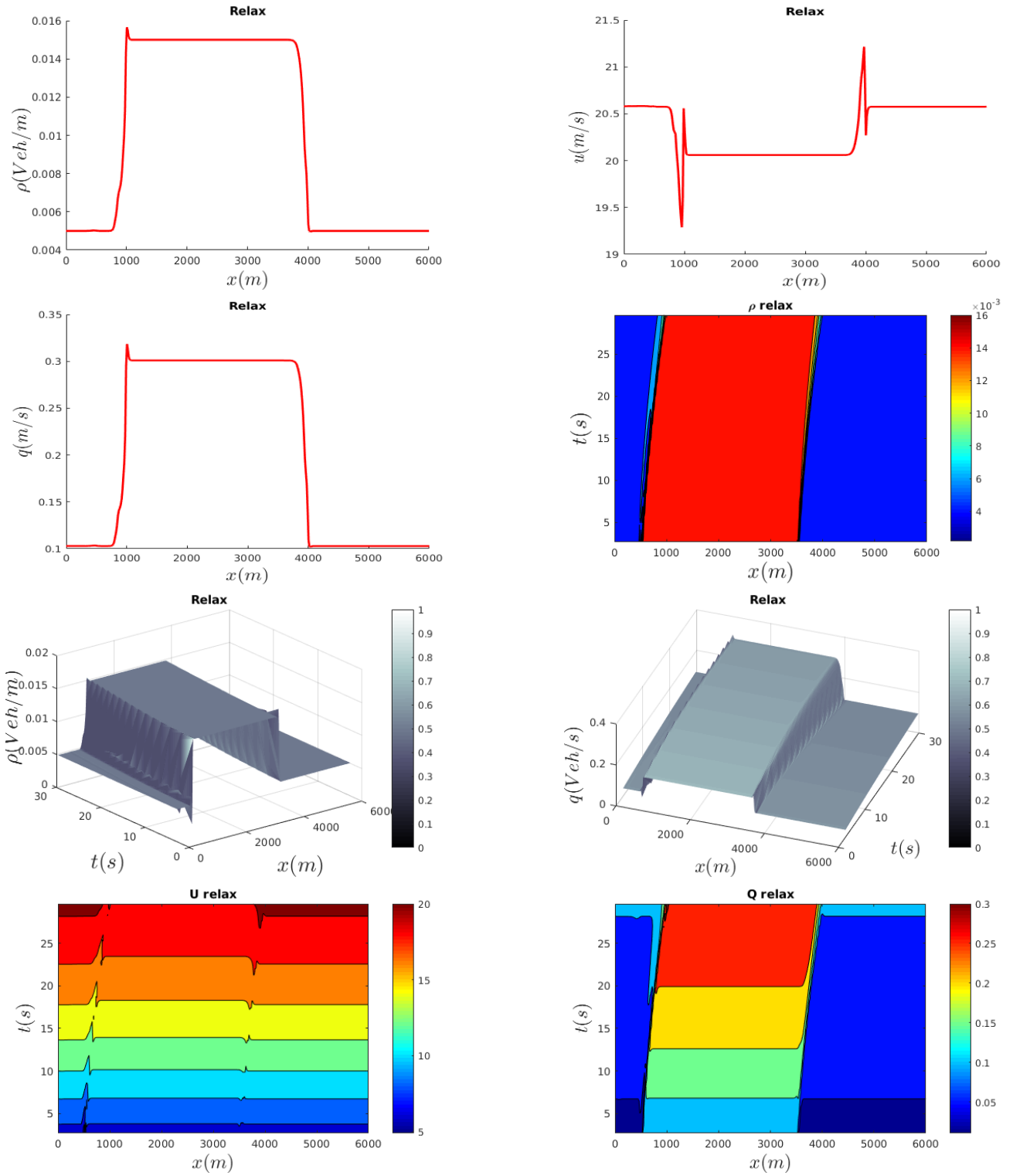
Σχήμα 4.22: Τα MUSCL αποτελέσματα για το GKT Case1



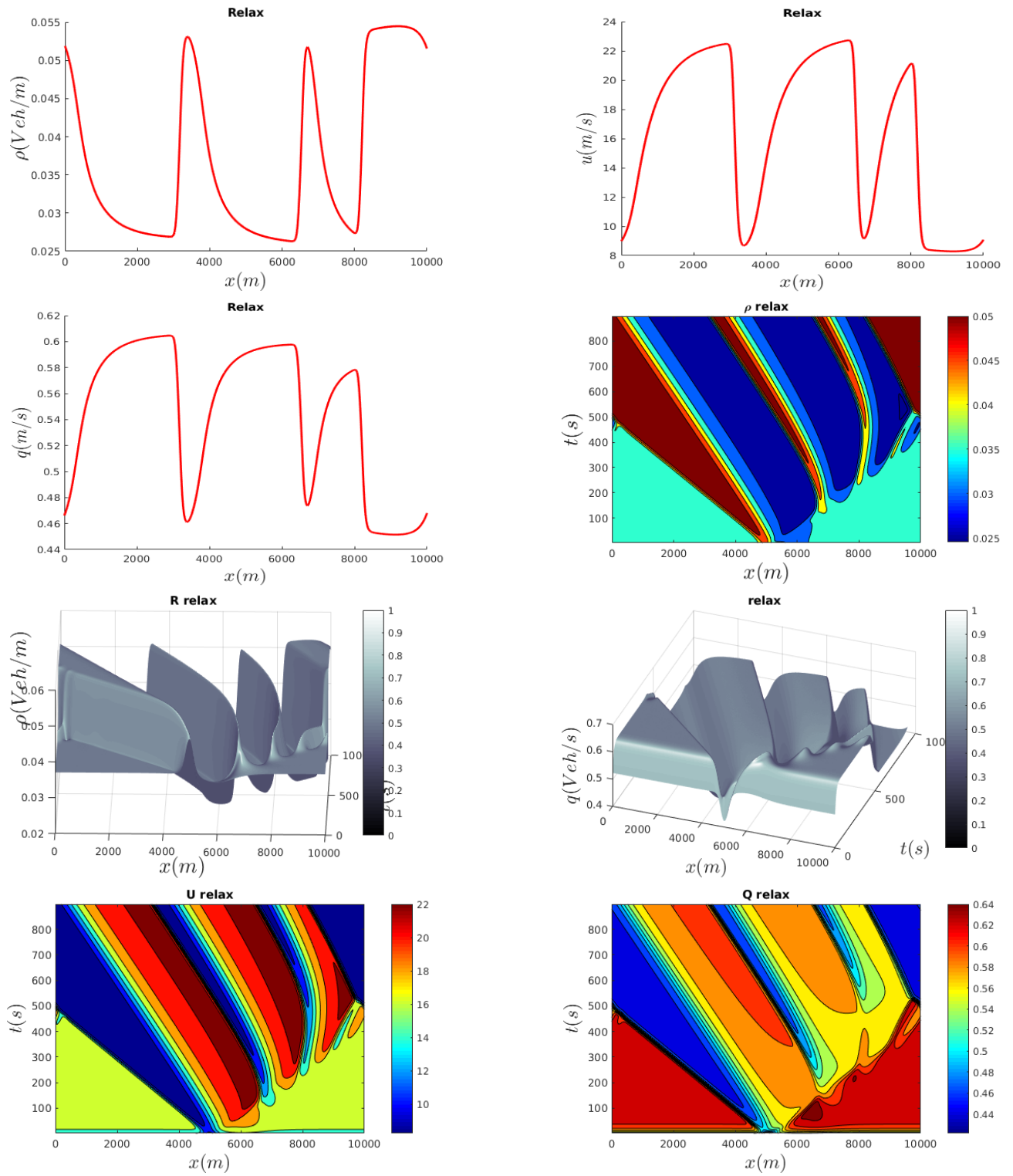
Σχήμα 4.23: Τα MUSCL αποτελέσματα για το GKT Case2



Σχήμα 4.24: Τα MUSCL αποτελέσματα για το GKT Case3



Σχήμα 4.25: Τα WENO αποτελέσματα για το GKT Case1



Σχήμα 4.26: Τα WENO αποτελέσματα για το GKT Case3

Κεφάλαιο 5

Συμπεράσματα

Αρχικά πρέπει να πούμε ότι δεν υπάρχει ουσιαστική διαφορά μεταξύ των αποτελεσμάτων της μεθόδου χαλαροποίησης που χρησιμοποιείται στο [70] και της χαλαρής προσέγγισης που χρησιμοποιούμε στην παρούσα εργασία για αυτό δεν θα μπορούμε στην διαδικασία σύγκρισης μεταξύ αυτών των δύο εργασιών. Αντίθετα θα κάνουμε σύγκριση μεταξύ των δύο μεθόδων επίλυσης Muscl-Weno καθώς και την επιρροή των λεγόμενων limiter στην υπολογιστική μας λύση (που αφορούν μόνο την μέθοδο Muscl).

5.1 Σύγκριση μεταξύ Weno-Muscl τρόπου επίλυσης

Μέθοδος επίλυσης Muscl	
Πλεονεκτήματα	Μειονεκτήματα
Καλή ταχύτητα υπολογισμών	Μεγάλη επιρροή των limiters
Λίγες πράξεις	Μείωση ακρίβειας αποτελεσμάτων
Ακρίβειας λύσης 2ης τάξης	Μεγάλη επιρροή από τις υπόλοιπες μεταβλητές

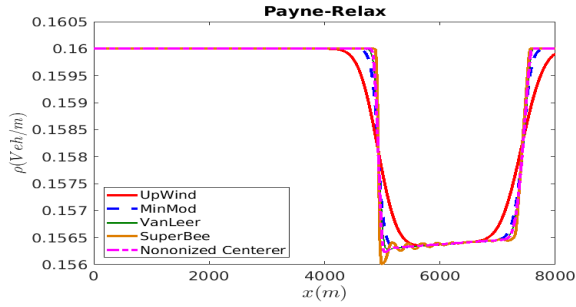
Πίνακας 5.1: Χαρακτηριστικά της Muscl

Μέθοδος επίλυσης Weno	
Πλεονεκτήματα	Μειονεκτήματα
Δεν χρησιμοποιεί limiter	Πολλές πράξεις
Μεγάλη ακρίβεια της λύσης	Υψηλό κόστος σε χώρος μνήμης
Ακρίβειας 5η τάξης	Πολυπλοκότητα υπολογιστικού κώδικα

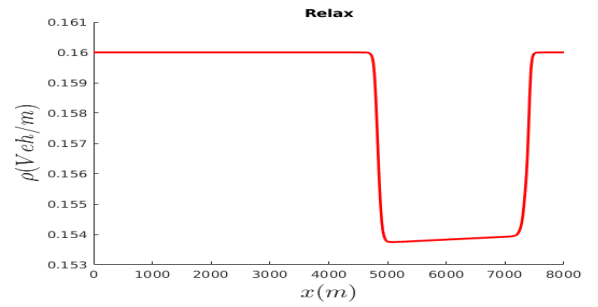
Πίνακας 5.2: Χαρακτηριστικά της Weno

Στις παρακάτω ενότητες θα παρουσιάσουμε τις διαφορές αυτές για κάθε μοντέλο που χρησιμοποιούμε χρησιμοποιώντας τα διαγράμματα πυκνότητας καθώς αυτά αντιπροσωπεύουν την πιο χαρακτηριστική απεικόνιση της διαφοράς μεταξύ των δύο μεθόδων προσέγγιση της λύσης.

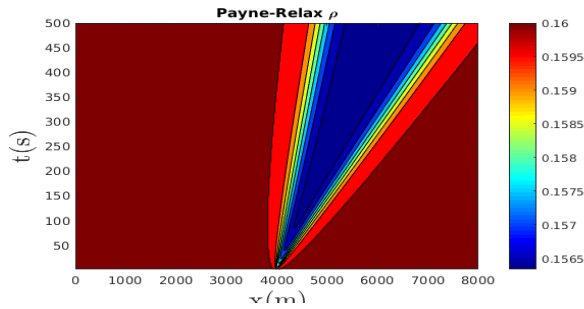
5.1.1 Μοντέλο PW



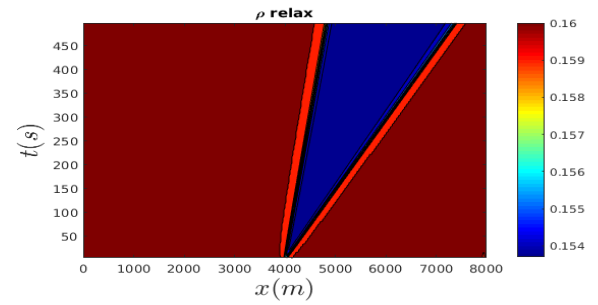
(α') Διάγραμμα πυκνότητας Muscl RP1



(β') Διάγραμμα πυκνότητας Weno RP1



(γ') Διάγραμμα πυκνότητας Upwind RP1

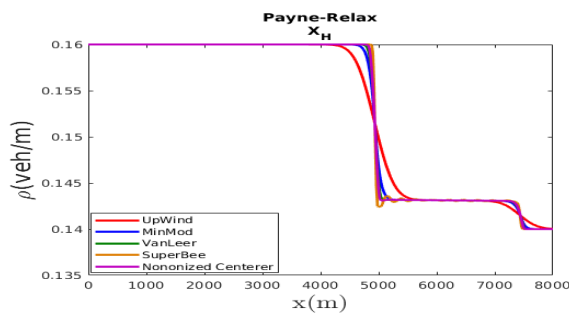


(δ') Διάγραμμα πυκνότητας Weno RP1

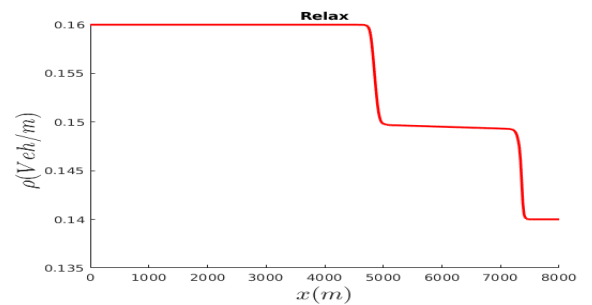
Σχήμα 5.1: Διαγράμματα πυκνότητας στο PW μοντέλο RP1

Από την παρατήρηση των διαγραμμάτων παρατηρούμε την μεγάλη επιρροή των limiter στα αποτελέσματα καθώς βλέπουμε την διαφορά στο διάγραμμα (5.1α'). Ακόμη παρατηρούμε την κακή εκτίμηση μεταξύ των limiter καθώς για παράδειγμα ο limiter Superbee ξεκινάει να ταλαντώνεται, αυτό θα ήταν δυνατόν να διορθωθεί με μία καλύτερη CFL συνθήκη που μας οδηγεί να παρατήσουμε την μεγάλη επιρροή των limiter από τις υπόλοιπες μεταβλητές του προβλήματος. Αυτό έρχεται σε αντίθεση με την μέθοδο επίλυσης Weno (5.1β') που βλέπουμε ότι δεν χρειάζεται διερεύνηση για την εύρεση μεταξύ του καταλληλότερου limiter καθώς μας δίνει απευθείας την καλύτερη αριθμητική προσέγγιση της εκάστοτε λύσης. Παρατηρούμε επίσης την αρκετά πιο "sharp" λύση που μας παρουσιάζουν τα διαγράμματα (5.1γ') και (5.1δ') μεταξύ της Muscl-Weno.

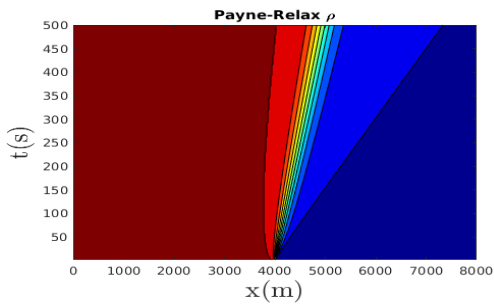
Οι παρατηρήσεις αυτές εντοπίζονται σε όλα τα διαγράμματα του συγκεκριμένου μοντέλου. Ομοίως παρουσιάζουμε και τα διαγράμματα για τις υπόλοιπες προσομοιώσεις που εκτελούμε.



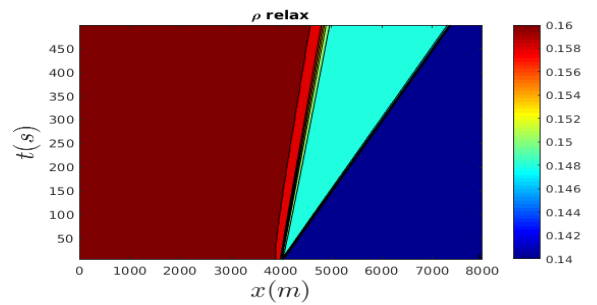
(α) Διάγραμμα ροής Muscl RP2



(β) Διάγραμμα πυκνότητας Weno RP2



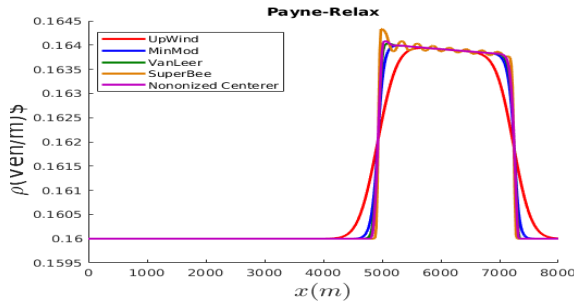
(γ) Διάγραμμα πυκνότητας Upwind RP2



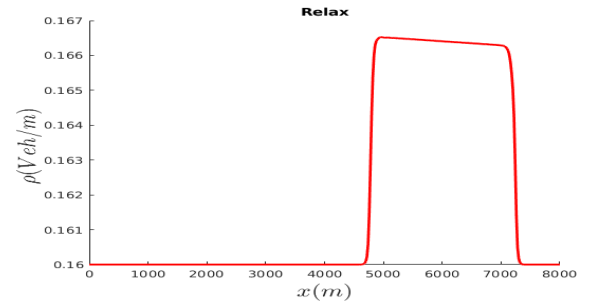
(δ) Διάγραμμα πυκνότητας Weno RP2

Σχήμα 5.2: Διαγράμματα πυκνότητας στο PW μοντέλο RP2

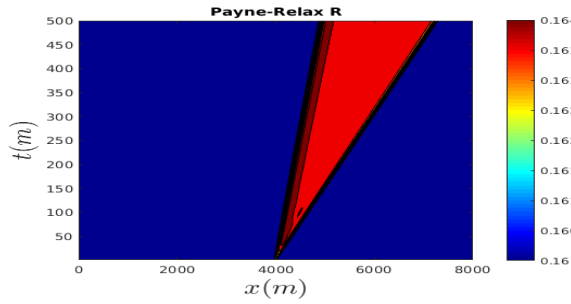
Σε αυτήν την προσομοίωση η δημιουργία του διαγράμματος (5.2γ) έχει γίνει χρησιμοποιώντας την Upwind προσέγγιση για να παρουσιάσει την διαφορά της χαμηλής τάξης λύσης με την μεγάλης τάξης προσέγγιση που μας δίνει η μέθοδος επίλυσης Weno (5.2δ)



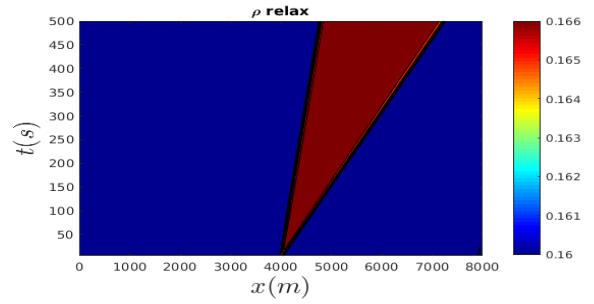
(α') Διάγραμμα πυκνότητας Muscl RP3



(β') Διάγραμμα πυκνότητας Weno RP3

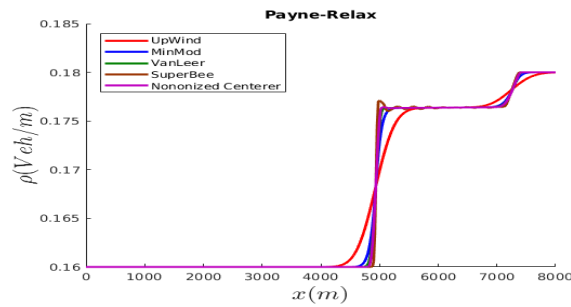


(γ') Διάγραμμα πυκνότητας Upwind RP3

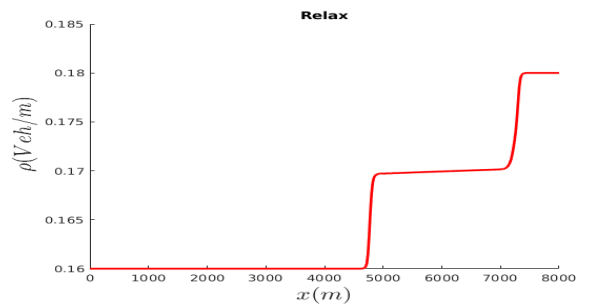


(δ') Διάγραμμα πυκνότητας Weno RP3

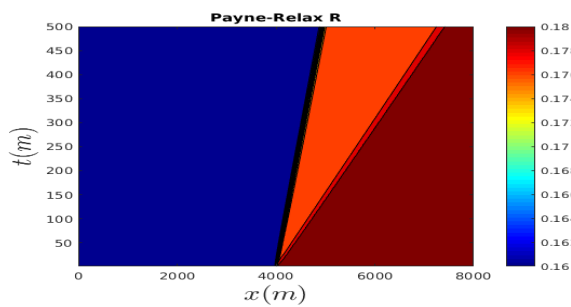
Σχήμα 5.3: Διαγράμματα πυκνότητας στο PW μοντέλο RP3



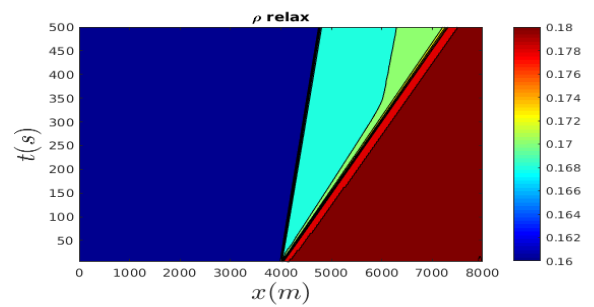
(α') Διάγραμμα πυκνότητας Muscl RP4



(β') Διάγραμμα πυκνότητας Weno RP4



(γ') Διάγραμμα πυκνότητας Upwind RP4



(δ') Διάγραμμα πυκνότητας Weno RP4

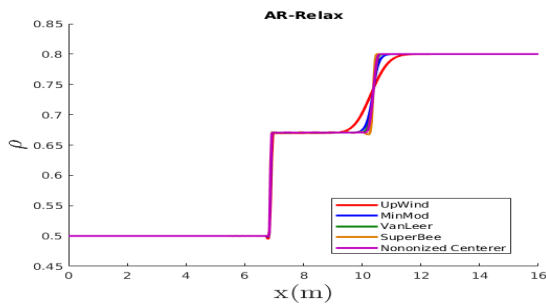
Σχήμα 5.4: Διαγράμματα πυκνότητας στο PW μοντέλο RP4

Σε αυτήν την προσομοίωση παρατηρούμε την μεγάλη διαφορά μεταξύ της Muscl-Weno καθώς στο διάγραμμα (5.4δ') παρατηρούμε την εμφάνιση ενός κύματος που το

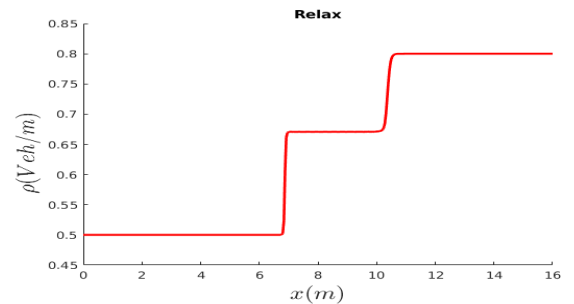
διάγραμμα (5.4γ') δεν παρουσιάζει καθόλου.

5.1.2 Μοντέλο AR

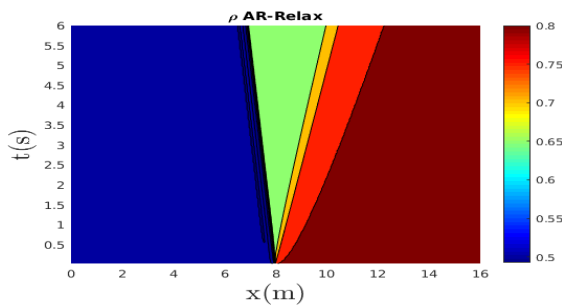
Σε αυτήν την ενότητα παρατηρούμε την σύγκριση μεταξύ των προσομοιώσεων σε WENO και MUSCL για το AR μοντέλο.



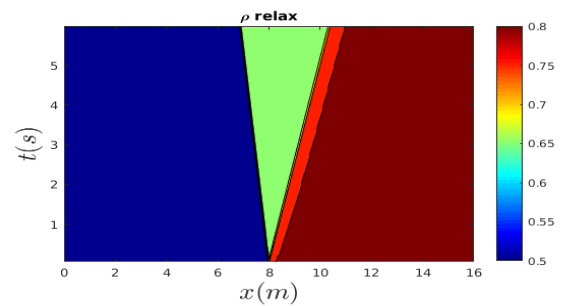
(α) Διάγραμμα πυκνότητας Muscl case1



(β) Διάγραμμα πυκνότητας Weno case1



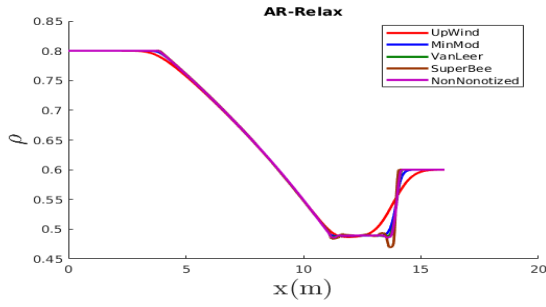
(γ) Διάγραμμα πυκνότητας Upwind case1



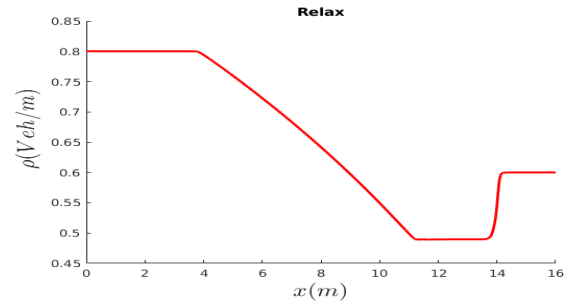
(δ) Διάγραμμα πυκνότητας Weno case1

Σχήμα 5.5: Διαγράμματα πυκνότητας στο AR μοντέλο case1

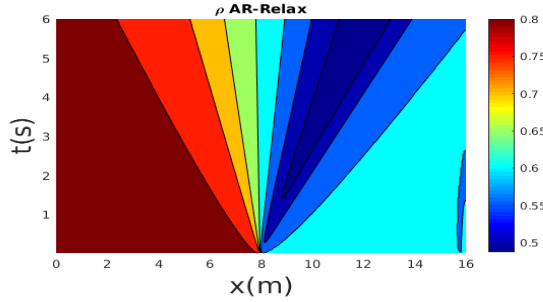
Όμοίως και σε αυτά τα διαγράμματα παρατηρούμε την πολλή καλύτερη προσέγγιση που μας δίνει την μέθοδος επίλυσης Weno σε σχέση με την Muscl προσέγγιση παρακάτω παραθέτουμε τα διαγράμματα και τις υπόλοιπες προσομοιώσεις που έγιναν.



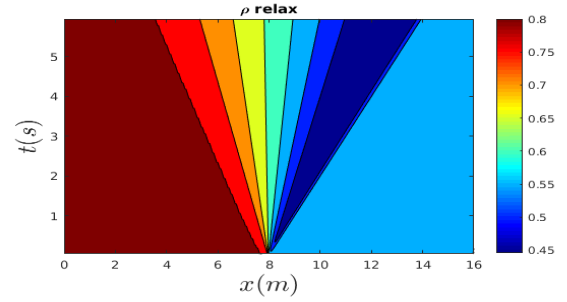
(α) Διάγραμμα πυκνότητας Muscl case2



(β') Διάγραμμα πυκνότητας Weno case2

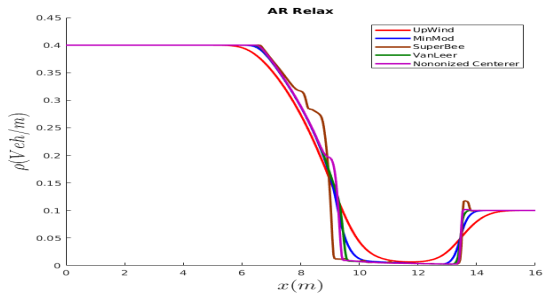


(γ) Διάγραμμα πυκνότητας Upwind case2

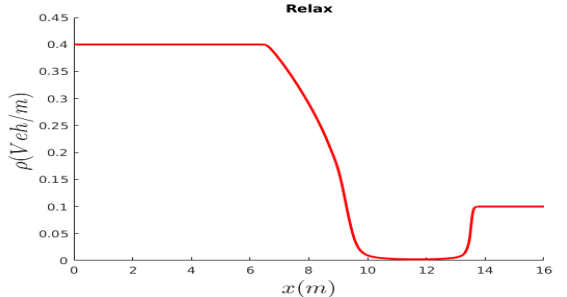


(δ') Διάγραμμα πυκνότητας Weno case2

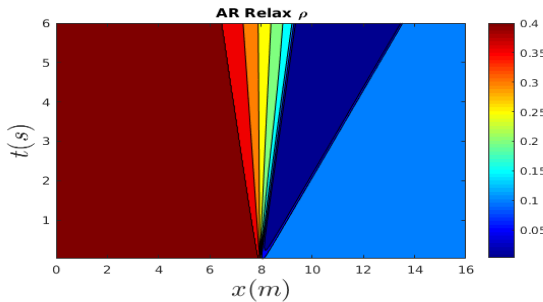
Σχήμα 5.6: Διαγράμματα πυκνότητας στο AR μοντέλο case2



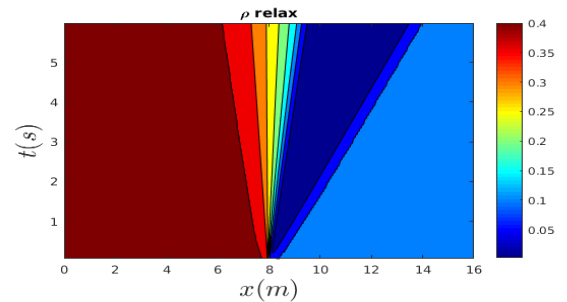
(α) Διάγραμμα πυκνότητας Muscl case4



(β') Διάγραμμα πυκνότητας Weno case4



(γ) Διάγραμμα πυκνότητας Upwind case4

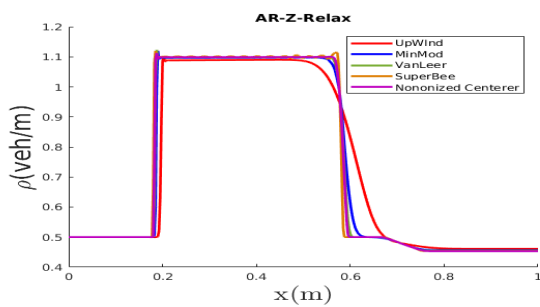


(δ') Διάγραμμα πυκνότητας Weno case4

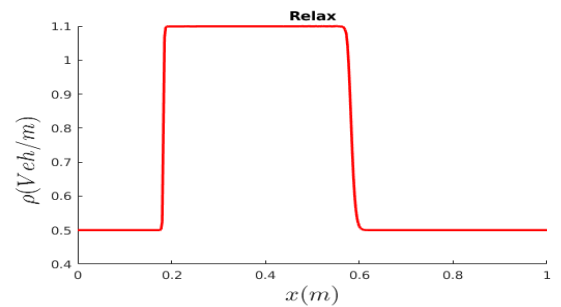
Σχήμα 5.7: Διαγράμματα πυκνότητας στο AR μοντέλο case4

5.1.3 Μοντέλο ARZ

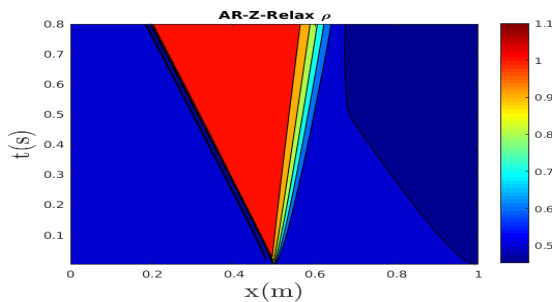
Σε αυτήν την ενότητα παρατηρούμε την σύγκριση μεταξύ των προσομοιώσεων σε WENO και MUSCL για το ARZ μοντέλο.



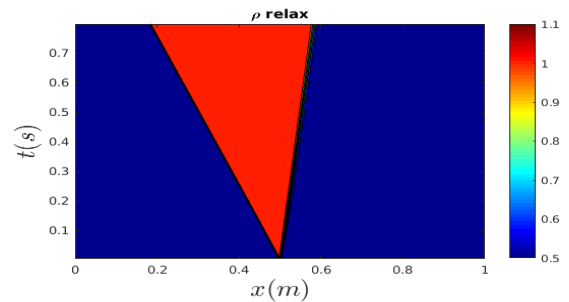
(α) Διάγραμμα πυκνότητας Muscl case1



(β) Διάγραμμα πυκνότητας Weno case1



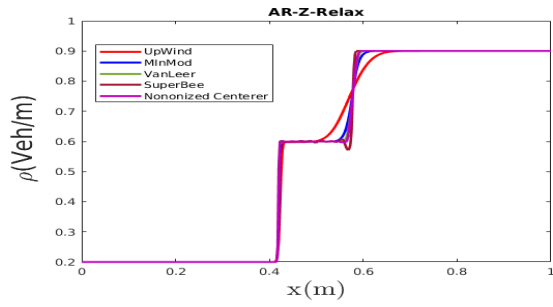
(γ) Διάγραμμα πυκνότητας Upwind case1



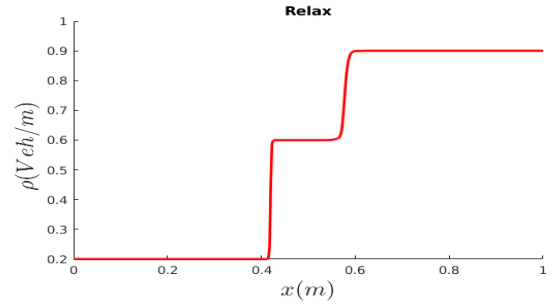
(δ) Διάγραμμα πυκνότητας Weno case1

Σχήμα 5.8: Διαγράμματα πυκνότητας στο ARZ μοντέλο case1

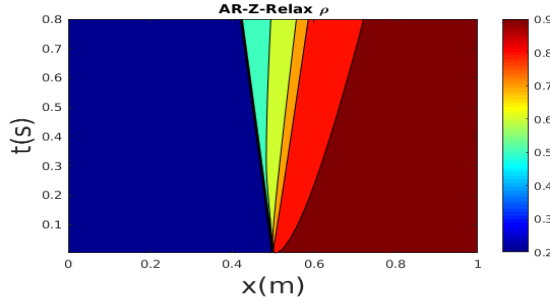
Σε αυτά τα διαγράμματα παρατηρούμε το Muscl μας δίνει μια μη επιτρεπτή προσέγγιση σε σχέση με το Weno το οποίο μας δίνει την σωστή προσέγγιση η διαφορά αυτή έγκειται στην χαμηλή τάξη που χρησιμοποιείται σε αυτή την μέθοδο.



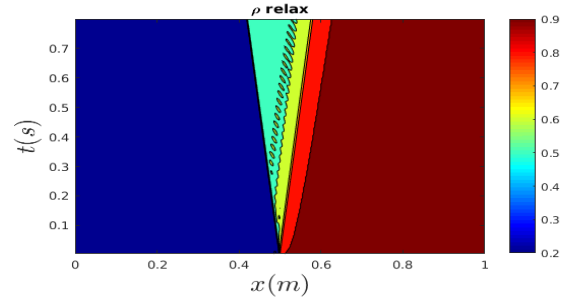
(α) Διάγραμμα πυκνότητας Muscl case2



(β') Διάγραμμα πυκνότητας Weno case2

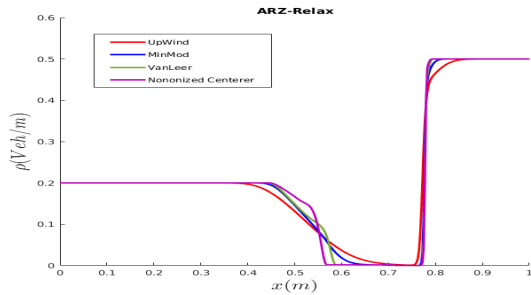


(γ) Διάγραμμα πυκνότητας Upwind case2

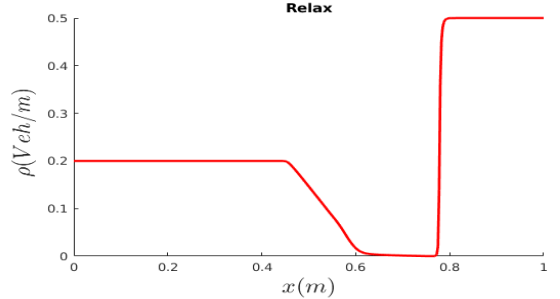


(δ') Διάγραμμα πυκνότητας Weno case2

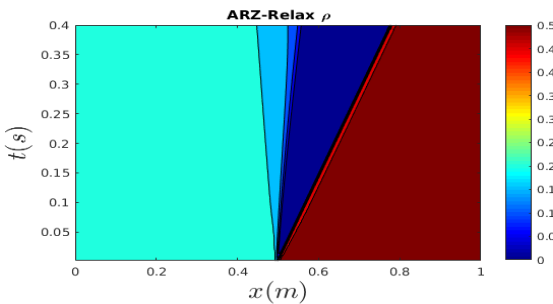
Σχήμα 5.9: Διαγράμματα πυκνότητας στο ARZ μοντέλο case2



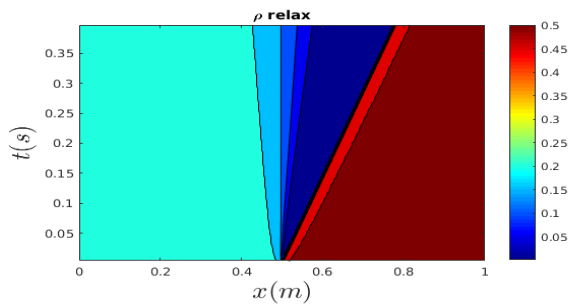
(α) Διάγραμμα πυκνότητας Muscl case3



(β') Διάγραμμα πυκνότητας Weno case3



(γ) Διάγραμμα πυκνότητας Upwind case3

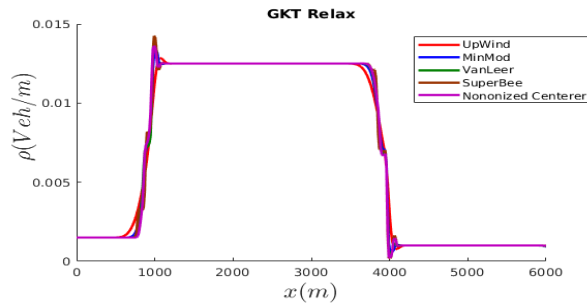


(δ') Διάγραμμα πυκνότητας Weno case3

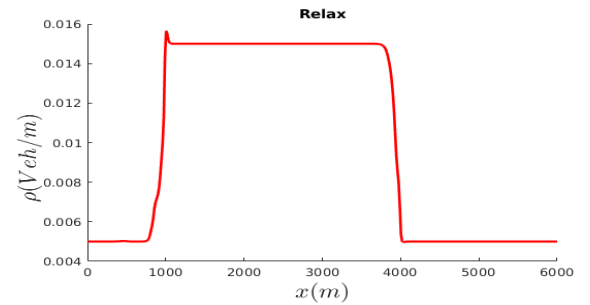
Σχήμα 5.10: Διαγράμματα πυκνότητας στο ARZ μοντέλο case3

5.1.4 Μοντέλο GKT

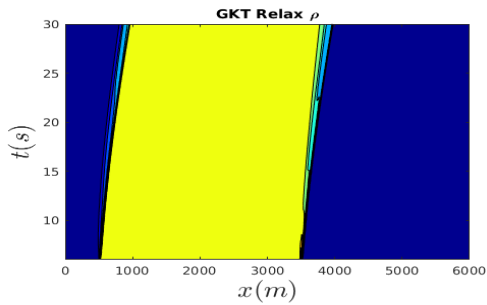
Σε αυτήν την ενότητα παρατηρούμε την σύγκριση μεταξύ των προσομοιώσεων σε WENO και MUSCL για το GKT μοντέλο.



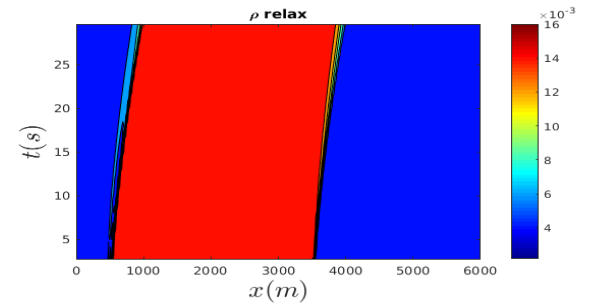
(α) Διάγραμμα πυκνότητας Muscl case1



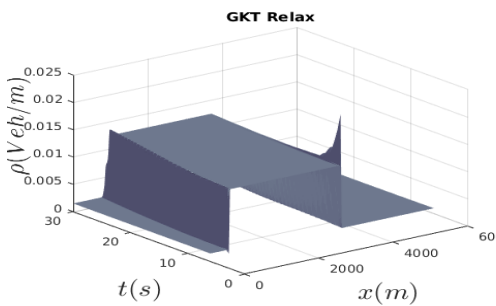
(β') Διάγραμμα πυκνότητας Weno case1



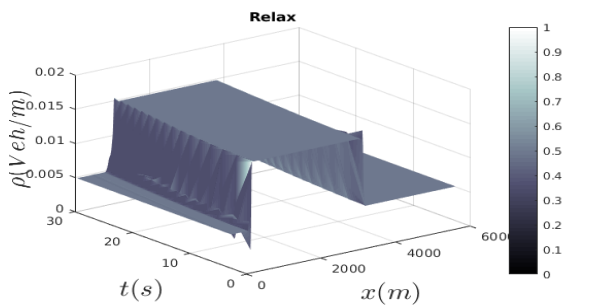
(γ') Διάγραμμα πυκνότητας Upwind case1



(δ') Διάγραμμα πυκνότητας Weno case1

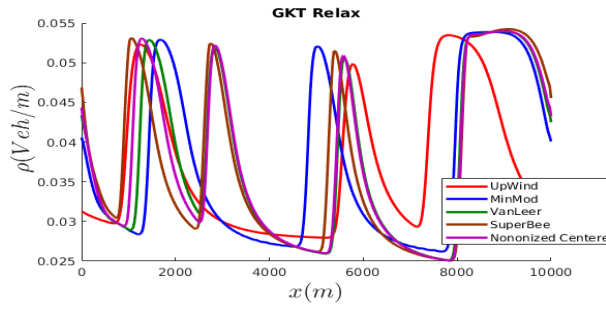


(ε) Διάγραμμα πυκνότητας Upwind case1

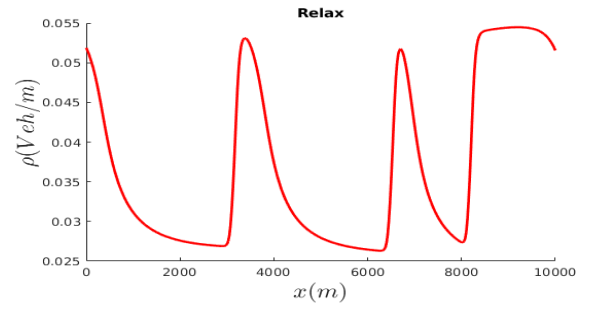


(ζ') Διάγραμμα πυκνότητας Weno case1

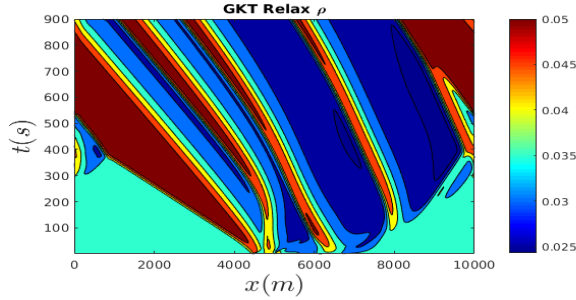
Σχήμα 5.11: Διαγράμματα πυκνότητας στο GKT μοντέλο case1



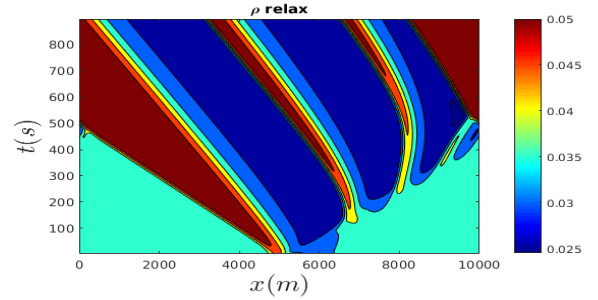
(α) Διάγραμμα πυκνότητας Muscl case3



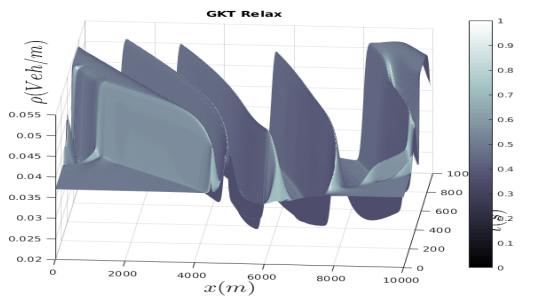
(β') Διάγραμμα πυκνότητας Weno case3



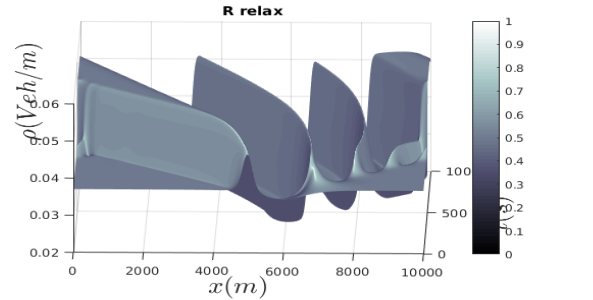
(γ') Διάγραμμα πυκνότητας Upwind case3



(δ') Διάγραμμα πυκνότητας Weno case3



(ε') Διάγραμμα πυκνότητας Muscl case3



(ζ') Διάγραμμα πυκνότητας Weno case3

Σχήμα 5.12: Διαγράμματα πυκνότητας στο GKT μοντέλο case3

Παρατηρούμε σε όλα τα διαγράμματα ότι ο nononized centerer είναι ο καλύτερος από τους υπόλοιπους limiters καθώς τα αποτελέσματα που μας δίνει πλησιάζουν σε ακρίβεια την μέθοδο Weno παρά την διαφορά τάξης που υπάρχει. (2ης τάξη Muscl , -5ης τάξης Weno)

5.2 Relaxation vs Relaxed

Σε αυτήν την ενότητα συγκρίνουμε τις Relaxation και την Relaxed μορφή του συστήματος (3.1). Στον παρακάτω πίνακα παρουσιάζουμε τον αλγόριθμο που ακολουθούμε για την επίλυση του (3.16) που είναι η Relaxation μορφή [70] και την Relaxed μορφή που είναι η (3.17).

Ο πίνακας αυτός παρουσιάζει τον αλγόριθμο για μία δεύτερης τάξης Runge-Kutta μέθοδο χρονικής διακριτικοποίησης που χρησιμοποιείται για την Muscl μέθοδο χωρικής διακριτικοποίησης.

Βήματα	Relaxation	Relaxed
<i>a</i>	$\mathbf{u}^* = \mathbf{u}^n$	$\mathbf{u}^* = \mathbf{u}^n$
<i>b</i>	$\mathbf{v}^* = \mathbf{v}^n + \frac{1}{\epsilon}(\mathbf{v}^* - f(\mathbf{u}^*))$	$\mathbf{v}^* = f(\mathbf{u}^*)$
<i>c</i>	$\mathbf{u}^{(1)} = \mathbf{u}^* - D_+ \mathbf{v}^*$	$\mathbf{u}^{(1)} = \mathbf{u}^n - D_+ \mathbf{v}^n _{\mathbf{v}^n=f(\mathbf{u}^n)}$
<i>d</i>	$\mathbf{v}^{(1)} = \mathbf{v}^* - AD_+ \mathbf{u}^*$	$\mathbf{v}^{(1)} = \mathbf{v}^* - AD_+ \mathbf{u}^*$
<i>e</i>	$\mathbf{u}^{**} = \mathbf{u}^{(1)}$	$\mathbf{u}^{**} = \mathbf{u}^{(1)}$
<i>f</i>	$\mathbf{v}^{**} = \mathbf{v}^{(1)} - \frac{1}{\epsilon}(\mathbf{v}^{**} - f(\mathbf{u}^{**})) - 2\frac{1}{\epsilon}(\mathbf{v}^* - f(\mathbf{u}^*))$	$\mathbf{v}^{**} = \mathbf{v}^{(1)}$
<i>g</i>	$\mathbf{u}^{(2)} = \mathbf{u}^{**} - D_+ \mathbf{v}^{**}$	$\mathbf{u}^{(2)} = \mathbf{u}^{(1)} - D_+ \mathbf{v}^{(1)} _{\mathbf{v}^{(1)}=f(\mathbf{u}^{(1)})}$
<i>h</i>	$\mathbf{v}^{(2)} = \mathbf{v}^{**} - AD_+ \mathbf{u}^{**}$	$\mathbf{v}^{(2)} = \mathbf{v}^{**} - AD_+ \mathbf{u}^{**}$
<i>i</i>	$\mathbf{u}^{n+1} = \frac{1}{2}(\mathbf{u}^n + \mathbf{u}^{(2)})$	$\mathbf{u}^{n+1} = \frac{1}{2}(\mathbf{u}^n + \mathbf{u}^{(2)})$
<i>j</i>	$\mathbf{v}^{n+1} = \frac{1}{2}(\mathbf{v}^n + \mathbf{v}^{(2)})$	$\mathbf{v}^{n+1} = \frac{1}{2}(\mathbf{v}^n + \mathbf{v}^{(2)})$

Πίνακας 5.3: Διαφορές αλγορίθμου μεταξύ των Relaxation και Relax μορφής. Από τον (5.2) πίνακα είναι εμφανές ότι ο relax αλγόριθμος απαιτεί αρκετά λιγότερες πράξεις καθώς στα βήματα c και g αρκεί μία ανάθεση τιμής στις μεταβλητές χωρίς την ανάγκη επίλυσης παραπάνω εξισώσεων που απαιτεί ο relaxation αλγόριθμος. Πρέπει εδώ να τονίσουμε ότι έχουμε μεγαλύτερο κόστος στην Weno μέθοδο καθώς εκεί χρησιμοποιούμε υψηλότερης τάξης Runge-Kutta (5-ης τάξης) και ο υπολογισμός της Weno μέθοδος είναι πιο απαιτητικός σε πράξεις και χώρο μνήμης σε σχέση με την Muscl μέθοδο στην οποία χρησιμοποιούμε δεύτερης τάξης Runge-Kutta. Αξίζει επίσης να αναφέρουμε το η relax μορφή τρέχει αρκετά πιο γρήγορα σε σχέση με την relaxation μορφή ιδιαίτερα σε πυκνές διακριτικοποιήσεις.

Βιβλιογραφία

- [1] Ankamah J.D., Relaxation scheme for macroscopic traffic flow models, M.Sc. thesis, Department of Mathematics TU-Kaiserlautern and TU-Eindhoven, 2012.
- [2] Aw A. and Rascle M., Ressurrection of second-order models of traffic flow, *SIAM J. App. Math.*, **60**, 916-938, 2000.
- [3] Ascher U., Ruuth S. and Spiteri R., Implicit-explicit Runge-Kutta methods for time-dependent partial differential equations, *Appl. Numer. Math.*, **25**:151-167, 1997.
- [4] Banda M. K., Variants of relaxed schemes and two-dimensional gas dynamics, *J. Comput. Appl. Math.* **175**: 41-62, 2005.
- [5] Banda M. K., Non-oscillatory relaxation schemes for one-dimensional ideal magnetohydrodynamic equations, *Nonlinear Analysis:Real World Applications*, **10**:3345-3352, 2009.
- [6] Banda M. K. and Seaid M., Higher-Order Relaxation Schemes for Hyperbolic Systems of Conservation Laws, *J. Numer. Math.* **13**:171-196, 2005.
- [7] Bellomo N. and Dogbe C., On the modeling of traffic and crowds: a survey of models, speculations, and perspectives, *SIAM Rev.*, **53**:409-463, 2011.
- [8] Borges R., Carmona M., Costa B. and Don W.-S., An improved weighted essentially non-oscillatory scheme for hyperbolic conservation laws, *J. of Comp. Phys.*, **227**:3191-3211, 2008.
- [9] Burger R., Garcia A., Karlsen K.H., Towers J.T., A family of numerical schemes for kinematic flows with discontinuous flux, *J. Eng. Math.*, **60**, 387-425, 2008.
- [10] Coclite G.M., Garavello M. and Piccoli B., Traffic flow on a road network, *SIAM J. Math. Anal.*, **36**:1861-1886, 2005.
- [11] Chalabi A., Convergence of relaxation schemes for hyperbolic conservation laws with stiff source terms. *Math. Comput.*, **68**:955-970, 1999.
- [12] Chalabi A. and Seghir D., Convergence of relaxation schemes for initial boundary value problems for conservation laws, *Comput. Math. Appl.* **43** (8-9):1079-1093, 2002.

- [13] Chen J.-Z. and Shi Z-K., Application of a fourth-order relaxation scheme to hyperbolic systems of conservation laws, *Acta Mech. Sinica*, 22(1):84-92, 2006.
- [14] Chen J.-Z., Shi Z-K., and Hu Y-M., A relaxation scheme for a multi-class Lighthill-Withan-Richards traffic model, *J. Zhejiang Univ Sci A*, **10**:1835-1844, 2009.
- [15] Chen J.-Z., Shi Z-K., and Hu Y-M., Numerical solutions of a multiclass traffic flow model on an inhomogeneous highway using a high-resolution relaxed scheme, *J. Zhejiang Univ Sci C (Comput & Electron)*, **13**:29-36, 2012.
- [16] Daganzo C., Requiem for second-order fluid approximations to traffic flow, *Transportation Res. B*, **25**:277-286, 1995.
- [17] Del Castillo J., Pintado, P. and Benitez F., The reaction of drivers and the stability of traffic flow, *Transportation Res. B*, **28**, 35-60, 1994.
- [18] Delis A. I. and Katsaounis Th., Relaxation schemes for the shallow water equations, *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, **41**: 695-719, 2003.
- [19] Delis A. I. and Katsaounis Th., A generalized relaxation method for transport and diffusion of pollutant models in shallow water, *Comp. Meth. Appl. Math.*, **4**(4):410-430, 2004.
- [20] Delis A. I. and Katsaounis Th., Numerical solution of the two-dimensional shallow water equations by the application of relaxation methods. *Appl. Math. Model.*, **29**:754-783, 2005.
- [21] Delis A. I., Papoglou P., Relaxation approximation to bed-load sediment transport, *J. of computational and Applied Mathematics*, **213**:521-546, 2008.
- [22] Evje S. and Fjelde K. K., Relaxation schemes for the calculation of two-phase flow in pipes, *Mathematical and Computer Modelling* **36**(4-5):535-567, 2002.
- [23] Garavello M. and Goatin P., The Aw-Rascle traffic model with locally constrained flow, *J. Of Mathematical Analysis and Applications*, **378**:634-648, 2011.
- [24] Helbing D. and Treiber M., Numerical simulation of macroscopic traffic equations, *Computing in Science and Engineering*, **1**(5):89-99, 1999.
- [25] Helbing D., Traffic and related self-driven many-particle systems", *Reviews of Modern Physics*, **73**:1067-1141, 2001.
- [26] Helbing D., Hennecke A., Shvetsov V. and Treiber, M., MASTER: Macroscopic traffic simulation based on a gas-kinetic, non-local traffic model, *Transportation Research Part B: Methodological*, **35**(2):183-211, 2001.
- [27] Helbing D., Hennecke A., Shvetsov, V. and Treiber M., Micro- and macro-simulation of freeway traffic, *Mathematical and Computer Modelling*, **35**:517-547, 2002.

- [28] Helbing D. and Johansson, A.F., On the controversy around Daganzo's requiem for and Aw-Rascle's resurrection of second-order traffic flow models, *The European Physical Journal B*, **69**, 549-562, 2009.
- [29] Hermann M. and Kerner B.S. Local cluster effects in different traffic flow models *Physica A*, **255**:163-198, 1998.
- [30] Herty M., Pareschi, L. and Seaid, M., Discrete-velocity models and relaxation schemes for traffic flows, *SIAM J. Sci. Comput.*, **28**:1582-1596, 2006
- [31] Hoogendoorn, S.P., Bovy, P.H.L., State-of-the-art of vehicular traffic flow modeling, Proceedings of the Institution of Mechanical Engineering. Part I: Journal of Systems and Control Engineering, **215**:283-303, 2001.
- [32] Jiang G.S., Shu C.-W., Efficient implementation of weighted ENO schemes, *Journal of Computational Physics*, **126**:202-228, 1996.
- [33] Kerner B.S. and Konhauser P., Structure and parameters of clusters in traffic flow, *Physical Review E*, **50**, 54-83, 1994.
- [34] Jin S. and Xin Z., The relaxing schemes of conservation laws in arbitrary space dimensions, *Comm. Pure Appl. Math.*, **48**:235-277, 1995.
- [35] Jin W.L. and Zhang H.M., Solving the Payne-Whitham traffic flow model as a hyperbolic system of conservation laws with relaxation, Technical Report, University of California, Davis, 2001.
- [36] LeVeque R.J. and Pelanti M., A class of Approximate Riemann solvers and their relation to relaxation schemes, *J. Comp. Phys.*, **172**:572-592, 2001.
- [37] LeVeque R. J., Finite Volume Methods for Hyperbolic Problems. Cambridge University Press, 2002.
- [38] Li X. G., Yu X.J. and Chen G. N., The third-order relaxation schemes for hyperbolic conservation laws, *J. Comput. Appl. Math.*, **138**(1):93-108, 2002,
- [39] Lighthill M.J. and Witham G.B., On kinematic waves I: Flood movement in long rivers, On kinematic waves II: A theory of traffic flow on long crowded roads, *In Proceedings of the Royal Society of London series A, Mathematical and Physical Sciences*, **229**:281-345, 1955.
- [40] Liu T.P., Hyperbolic conservation laws with relaxation, *Comm. Math. Phys.*, **108**:153-175, 1987.
- [41] Liu G., Lyrantzis A.S. and Michalopoulos P.G., Improved high-order model for freeway traffic flow, *Transportation Research Record*. 1644:37-47, 1998.
- [42] Mammer S., Lebacque J.P. and Salem H.H., Riemann Problem resolution and Godunov scheme for the Aw-Rascle-Zhang model, *Trans. Sci.* **43**:531-545, 2009.

- [43] Natalini R. Convergence to equilibrium for the relaxation approximations of conservation laws. *Comm. Pure Appl. Math.*, **49**:795-823, 1996.
- [44] Ngoduy D., Hoogendorn S.P., and Van Zuylen H.J., Comparison of numerical schemes for macroscopic traffic flow models, *Transportation Research Record: Journal of the Transportation Research Board*, No. 1876, 52-61, 2004.
- [45] Ngoduy D., Instability of cooperative adaptive cruise control traffic flow: A macroscopic approach, *Commun Nonlinear Sci Numer Simulat.*, **18**:2838-2851, 2013.
- [46] Papageorgiou, M., Some remarks on macroscopic traffic flow modelling, *Transportation Research Part B*, **32**, 323-329, 1998.
- [47] Payne H.J., Models of freeway traffic and control, in Mathematical Models of Public Systems, Vol. 1 of Simulation Councils Proc. Ser., 51-60, 1971.
- [48] Pareschi L. and Russo G., Implicit-explicit Runge-Kutta schemes and applications to hyperbolic systems with relaxation *J. Sci. Comput.*, **25**(1):129-155, 2005.
- [49] Richards P.I., Shock waves on the highway, Operations Research, *The Journal of the Operations Research Society of America*, **4**:42-51, 1956.
- [50] Rosini M.D., Macroscopic models for vehicular flows and crowd dynamics: theory and applications, Springer, 2013.
- [51] Seaid M., Non-oscillatory relaxation methods for the shallow water equations in one and two space dimensions, *Int. J. Num. Meth. Fluids*, **46**:457-484, 2004.
- [52] Seaid M., High-Resolution Relaxation Scheme for the Two-Dimensional Riemann Problems in Gas Dynamics, *Numer. Methods for Partial Differential Equations*, **22**:397-413, 2006.
- [53] Seaid M., Improved Applications of Relaxation Schemes for Hyperbolic Systems of Conservation Laws and Convection-Diffusion Problems, *Comp. Meth. Appl. Math.* **6**(2):56-86, 2006.
- [54] Seaid M., Stable numerical methods for conservation laws with discontinuous flux function, *Applied Mathematics and Computation*, **175**:383-400, 2006.
- [55] Schnetzler B. and Louis X., Anisotropic second-order models and associated fundamental diagrams, *Trans. Res. Part C*, **27**:131-139, 20013.
- [56] Sweby P. K., High Resolution Schemes Using Flux Limiters for Hyperbolic Conservation Laws, *SIAM J. Numer. Anal.*, **21**:995, 1984.
- [57] Treiber M., Hennecke A. and Helbing D., Derivation, properties, and simulation of a gas-kinetic-based, nonlocal traffic model, *Physical Review E - Statistical Physics, Plasmas, Fluids, and Related Interdisciplinary Topics*, **59**(1):239-253, 1999.

- [58] Treiber M. and Kesting A. Traffic flow dynamics: data, models and simulation, Springer, 2013.
- [59] van Wageningen-Kessels F., van't Hof B., Hoogendoorn S.P., van Lint H. and Vuik K., Anisotropy in generic multi-class traffic flow models, *Transportmetrica A: Transport Science*, 9:451-472, 2013.
- [60] Wiens J.K., Stockie, J.M. and Williams, J.F., Riemann solver for a kinetic wave traffic model with discontinuous Flux, *J. of Computational Physics*, **242**:1-23, 2013
- [61] Witham G.B., Linear and nonlinear waves, John Wiley and Sons, New York, 1974
- [62] Wong G.C.K. and Wong S.C., A multi-class traffic flow model - an extension of LWR model with heterogeneous drivers", *Transportation Research Part A*, **36**:827-841, 2002.
- [63] Zhang H.M., A non-equilibrium traffic model devoid of gas-like behavior, *Transportation Research B*, **36**:275-290, 2002.
- [64] Zhang H.M., Kuhne R and Michalopoulos P., Continuum Flow Models, Chapter 3 in Monograph on Traffic flow Theory, 2003.
- [65] Zhang M., Shu C.-W., Wong, G.C.K. and Wong, S.C., A weighted essentially non-oscillatory numerical scheme for a multi-class Lighthill-Whitham-Richards traffic flow model, *Journal of Computational Physics*, **191**:639-659, 2003.
- [66] Zhang H.M., Anisotropic property revisited-does it hold in multi lane traffic?, *Transportation Research Part A*, **37**, 561-577, 2003.
- [67] Zhang P., Wong S.C. and Shu, C.-W., A weighted essentially non-oscillatory numerical scheme for a multi-class traffic flow model on an inhomogeneous highway, *Journal of Computational Physics*, **212**:739-756, 2006.
- [68] Zhang P., Wong S.C. and Dai, S.-Q., A note on the weighted essentially non-oscillatory numerical scheme for a multi-class Lighthill-Whitham-Richards traffic flow model, *Communications in Numerical Methods in Engineering*, **25**:1120-1126, 2009.
- [69] Mohammadian, Saeed Numerical Simulation of second-Order Continuum Traffic Flow Models Using Different High-resolution Approximations
- [70] A.I. Delis, I.K. Nikolos, M. Papageorgiou High-resolution numerical relaxation approximations to second-order macroscopic traffic flow models, *Transportation Research Part C* **44**: (2014) 318-349