



ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΠΑΡΑΓΩΓΗΣ ΚΑΙ ΔΙΟΙΚΗΣΗΣ

Εργαστήριο Υπολογιστικής Μηχανικής & Βελτιστοποίησης

Διπλωματική Εργασία:

**«Διερεύνηση δυναμικών ιδιοτήτων σύνθετης δοκού δύο υλικών,
με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων»**

Οικονομίδης Ιορδάνης
Α.Μ. 2011010063

Επιβλέπων Καθηγητής
Σταυρουλάκης Γεώργιος

Χανιά 2017

Ευχαριστίες

Η παρούσα διπλωματική εργασία υλοποιήθηκε με τη στήριξη ορισμένων ανθρώπων στους οποίους θα ήθελα να εκφράσω τις θερμότερες ευχαριστίες μου.

Αρχικά, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον κ. Γεώργιο Σταυρουλάκη, καθηγητή της σχολής Μηχανικών Παραγωγής και Διοίκησης Πολυτεχνείου Κρήτης, ο οποίος επέβλεπε την εργασία καθ' όλη τη διάρκειά της.

Επίσης, θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον κ. Γεώργιο Ταϊρίδη, διδάκτορα του Πολυτεχνείου Κρήτης, για τις συμβουλές και το χρόνο που αφιέρωσε στην επίλυση αποριών μου.

Μια ειδική αναφορά θα ήθελα να κάνω στον καλύτερο μου φίλο και μηχανικό Ξενοφώντα Καλογερόπουλο, για τις γνώσεις που μου μετέδωσε και κυρίως για όλο τον προσωπικό χρόνο που αφιέρωσε στο να με βοηθήσει να ξεπεράσω τις όποιες δυσκολίες συνάντησα κατά τη διάρκεια της εργασίας αυτής.

Τέλος, η παρούσα διπλωματική εργασία είναι αφιερωμένη στους γονείς μου Δημήτρη και Αφροδίτη, για όλη την αγάπη, τις θυσίες και την υπομονή που έκαναν όλα αυτά τα χρόνια.

*Οικονομίδης Ιορδάνης
Χανιά, Οκτώβριος 2017*

ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

ΠΕΡΙΛΗΨΗ	1
1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ	3
2. ΔΥΝΑΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ	5
2.1. Τι είναι ένα Δυναμικό Σύστημα	5
2.2. Εξισώσεις Κίνησης	5
2.3. Ιδιομορφική Ανάλυση	7
2.3.1. Ιδιοσυχνότητες – Ιδιοτιμές	8
2.3.2. Ιδιοδιανύσματα – Ιδιομορφές	9
3. ΣΧΕΔΙΑΣΗ ΜΟΝΤΕΛΟΥ	11
3.1. SolidWorks	11
3.2. Περιγραφή – Διαστάσεις Μοντέλου	11
3.3. Παραμετροποίηση (Parameterization)	13
4. ΑΝΑΛΥΣΗ ΜΟΝΤΕΛΟΥ	15
4.1. Μέθοδος Πεπερασμένων Στοιχείων	15
4.1.1. Γενικά	15
4.1.2. Ιστορική Αναδρομή	15
4.2. Comsol Multiphysics	16
4.2.1. Γεωμετρία Μοντέλου (Geometry)	16
4.2.2. Επιλογή Υλικών (Materials)	17
4.2.3. Περιβάλλον Στατικής Μελέτης (Physics)	18
4.2.4. Πλέγμα (Mesh)	19
4.2.5. Παραμετρική Ανάλυση (Parametric Sweep)	25
4.3. Ανάλυση Ιδιοσυχνοτήτων – Ιδιομορφών	26
5. ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΩΝ	29
6. ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΜΕ ΑΠΛΗ ΔΟΚΟ	37
7. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ	41
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ	43
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ	45

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στην παρούσα διπλωματική εργασία μελετώνται οι μηχανικές ιδιότητες ενός δυναμικού συστήματος με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων. Το μηχανικό μοντέλο το οποίο εξετάζεται, αποτελείται από μία σύνθετη δοκό, δύο μηχανικών υλικών, η οποία είναι πακτωμένη μόνο από τη μία πλευρά. Η εργασία πραγματοποιήθηκε σε δύο φάσεις. Αρχικά έγινε η σχεδίαση του μοντέλου σε 3D απεικόνιση με χρήση προγράμματος CAD και στη συνέχεια η ανάλυση του. Οι παραπάνω διαδικασίες πραγματοποιήθηκαν με τη βοήθεια των προγραμμάτων SolidWorks Mechanics και Comsol Multiphysics.

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Στην παρούσα διπλωματική εργασία μελετώνται τα δυναμικά χαρακτηριστικά μίας σύνθετης, ευφυούς δοκού, η οποία αποτελείται από δύο μηχανικά υλικά διαφορετικού τύπου.

Η ανάγκη για διερεύνηση των δυναμικών χαρακτηριστικών μιας τέτοιας δοκού οφείλεται στην ταχεία ανάπτυξη 3D εκτυπωτών που εστιάζουν στην δημιουργία (κατασκευή) μοντέλων αποτελούμενα από διαφορετικού τύπου υλικά και πολύπλοκης γεωμετρίας με μεγάλη ακρίβεια.

Αρχικά, μέσω του προγράμματος SolidWorks σχεδιάσαμε την προς μελέτη δοκό και στη συνέχεια προχωρήσαμε στην ιδιομορφική της ανάλυση με τη χρήση του προγράμματος Comsol Multiphysics. Σημαντικό κομμάτι της μελέτης θεωρούνται οι πιθανές διαφοροποιήσεις που θα υπάρξουν στα αποτελέσματα λόγω παραμετροποίησης μίας εκ των διαστάσεων της γεωμετρίας της δοκού.

Η ανάλυση έγινε με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων. Αφού προσδιορίστηκε η γεωμετρία, τα υλικά από τα οποία θα αποτελείται η δοκός (αλουμίνιο, πολυπροπυλένιο) και το περιβάλλον της στατικής μελέτης, προχωρήσαμε στη δημιουργία χειροκίνητου πλέγματος με στόχο την κατά το δυνατό βελτιστοποίησή του.

Το CM μας επέστρεψε ως αποτελέσματα τις δέκα πρώτες ιδιοσυχνότητες και ιδιομορφές για πέντε παρόμοια μοντέλα δοκού ίδιου όγκου αλλά ελαφρώς διαφορετικής κατανομής των δύο υλικών. Πρόσθετα καταγράφηκε η μέγιστη τιμή της μετατόπισης σε κάθε ιδιομορφή.

Στη συνέχεια έγινε ανάλυση των αποτελεσμάτων και σύγκριση των μοντέλων μεταξύ τους αλλά και σε σχέση με μία απλή δοκό αλουμινίου.

Τέλος, η παρούσα εργασία έγινε υπό την επίβλεψη και την καθοδήγηση του καθηγητή του τμήματος Μηχανικών Παραγωγής και Διοίκησης του Πολυτεχνείου Κρήτης κ. Γεώργιου Σταυρουλάκη.

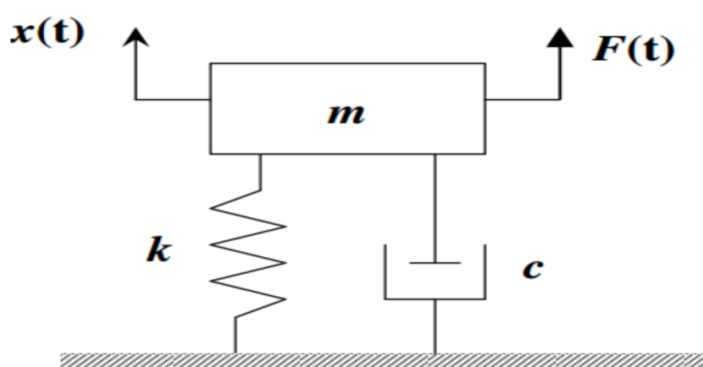
2. ΔΥΝΑΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

2.1. Τι είναι ένα Δυναμικό Σύστημα

Ως δυναμικό σύστημα ορίζεται κάθε σύστημα φυσικό, χημικό, βιολογικό, οικονομικό, οικολογικό, κλπ, που εξελίσσεται με την πάροδο του χρόνου. Η κατάσταση ενός δυναμικού συστήματος χαρακτηρίζεται, κάθε χρονική στιγμή, από ένα πεπερασμένο ή άπειρο πλήθος παραμέτρων και το σύνολο των εφικτών καταστάσεων ορίζει τον πεπερασμένης ή άπειρης διάστασης χώρο καταστάσεων [1].

2.2. Εξισώσεις Κίνησης

Ο τρόπος με τον οποίο ένα σύστημα εκτελεί ανεξάρτητες κινήσεις ορίζεται από τους βαθμούς ελευθερίας του [2]. Σε αυτή την παράγραφο θα αναλύσουμε ένα δυναμικό σύστημα ταλάντωσης, ενός βαθμού ελευθερίας, το οποίο αποτελείται από ένα ελατήριο, μία μάζα και έναν αποσβεστήρα (Σχήμα 1).



Σχήμα 1: Δυναμικό Σύστημα ενός Βαθμού Ελευθερίας

Στο παραπάνω σχήμα χρησιμοποιήθηκε ο εξής συμβολισμός:

m : μάζα

k : ελατήριο

c : αποσβεστήρας

$x(t)$: απόκριση συστήματος (μετατόπιση), χρονικά μεταβαλλόμενη

$F(t)$: εξωτερική διέγερση συστήματος (δύναμη), χρονικά μεταβαλλόμενη

Θεωρούμε πως το κάτω άκρο των στοιχείων ελαστικότητας και απόσβεσης (k , c αντίστοιχα) είναι προσδεδεμένο σε ακίνητη και απαραμόρφωτη οριζόντια επιφάνεια και το άνω άκρο τους συνδεδεμένο με τη μάζα m .

Το παραπάνω παράδειγμα δυναμικού συστήματος χαρακτηρίζεται ως σύστημα ενός Βαθμού Ελευθερίας, καθώς το μοναδικό εμφανιζόμενο κινηματικό μέγεθος του συστήματος είναι η κοινή μετατόπιση του κέντρου της μάζας m και των άνω άκρων των στοιχείων k και c .

Η βαρύτητα αποτελεί μία μόνιμη, στατική φόρτιση που δεν λαμβάνεται υπόψη, γιατί ως αρχή της μετατόπισης θέτουμε την, παραμορφωμένη από το βάρος, κατάσταση ισορροπίας του συστήματος.

Οι φυσικές ιδιότητες ενός δυναμικού συστήματος χαρακτηρίζονται από τα φυσικά του στοιχεία. Στο συγκεκριμένο σύστημα ορίζονται τρία φυσικά στοιχεία (μάζα, απόσβεση, δυσκαμψία).

Η μάζα m χαρακτηρίζει την αδράνεια του συστήματος και έχει ως αποτέλεσμα την ανάπτυξη αδρανειακών δυνάμεων, σύμφωνα με την εξίσωση:

$$F_m = m\ddot{x} \quad (1)$$

Σύμφωνα με την παραπάνω εξίσωση, η αδρανειακή δύναμη μίας μάζας m είναι ανάλογη της επιτάχυνσης της, με σταθερά αναλογίας την ίδια τη μάζα m .

Απόσβεση ονομάζεται η μείωση του πλάτους ταλάντωσης, λόγω τριβής. Το φαινόμενο αυτό οφείλεται στην απώλεια ενέργειας από το ταλαντευόμενο σύστημα προς το περιβάλλον. Ορίζεται από την εξίσωση:

$$F_c = c\dot{x} \quad (2)$$

Όπου c η σταθερά απόσβεσης. Η εξίσωση (2) δηλώνει ότι η δύναμη απόσβεσης είναι ανάλογη της σχετικής ταχύτητας \dot{x} , με σταθερά αναλογίας την ποσότητα c .

Η σταθερά ελατηρίου k εκφράζει την σκληρότητα ενός ελατηρίου (στοιχείο ελαστικότητας – παραμορφωσιμότητας) και εξαρτάται από τα φυσικά χαρακτηριστικά του (μήκος, πάχος σύρματος, διάμετρο σπειρών, υλικό και θερμοκρασία, απόσταση μεταξύ σπειρών).

Μεταβολή του μήκους του ελατηρίου κατά απόσταση x οδηγεί στην εμφάνιση ελαστικής δύναμης, η οποία περιγράφεται από την εξίσωση:

$$F_k = kx \quad (3)$$

Δηλαδή, η ελαστική δύναμη F_k είναι ανάλογη της μετατόπισης x του ελεύθερου άκρου του ελατηρίου, με σταθερά αναλογίας την ποσότητα k .

Στον πίνακα που ακολουθεί συνοψίζονται τα στοιχεία που μελετήσαμε μέχρι τώρα.

Πίνακας 1: Φυσικά στοιχεία συστήματος

Στοιχείο	Φυσική Σημασία	Αναπτυσσόμενες Δυνάμεις	Εξίσωση
m	Μάζα Συστήματος	Αδρανειακές	$F_m = m\ddot{x}$
c	Καταστροφή Ενέργειας	Απόσβεσης	$F_c = c\dot{x}$
k	Παραμορφωσιμότητα	Ελαστικές	$F_k = kx$

Τα τρία στοιχεία του πίνακα είναι συνδεδεμένα μεταξύ τους από τη δυναμική ισορροπία του συστήματος και το σύνολο των εσωτερικών δυνάμεων θα είναι αλγεβρικά ίσο προς την εξωτερική διέγερση (ασκούμενη δύναμη), σύμφωνα με την εξίσωση ισορροπίας:

$$F_k + F_c + F_m = f(t) \quad (4)$$

Αντικαθιστώντας στην εξίσωση (4) τις εσωτερικές δυνάμεις με τις εξισώσεις (1), (2), (3) προκύπτει:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f(t)$$

Η παραπάνω σχέση είναι μία Γραμμική Διαφορική Εξίσωση 2^{ης} τάξης, η οποία περιγράφει την κίνηση του συστήματος. Επιλύοντας την βλέπουμε πώς θα αποκριθεί το σύστημά μας.

2.3. Ιδιομορφική Ανάλυση

Στην ενότητα που ακολουθεί θα γίνει αναλυτική επισκόπηση των Ιδιομορφών και Ιδιοσυχνοτήτων ενός δυναμικού συστήματος. Πρόκειται για δύο έννοιες με αρκετά σημαντικό ρόλο στην δυναμική ανάλυση των κατασκευών, δηλαδή στην εσωτερική τους ταλάντωση ή συμπεριφορά, που πραγματοποιείται χωρίς την επιβολή εξωτερικών δυνάμεων. Σε ένα δυναμικό σύστημα, ο αριθμός των ιδιομορφών και των ιδιοσυχνοτήτων είναι ίσος με τον βαθμό ελευθερίας του. Ο υπολογισμός τους γίνεται με τη βοήθεια των μητρώων μάζας και δυσκαμψίας της κατασκευής [3].

2.3.1. Ιδιοσυχνότητες – Ιδιοτιμές

Με τον όρο Ιδιοσυχνότητα εννοούμε τη συχνότητα εκείνη για την οποία το σύστημα απορροφά τη μέγιστη ενέργεια και βρίσκεται σε κατάσταση συντονισμού. Συμβολίζεται με ω και χαρακτηρίζει την ταλάντωση ενός συστήματος στο οποίο ασκούνται μόνο συντηρητικές δυνάμεις (δυνάμεις των οποίων το έργο είναι μηδενικό) [3].

Η μονάδα μέτρησης της κυκλικής ιδιοσυχνότητας είναι (rad/sec) και για μονοβάθμια συστήματα ή αλλιώς ταλαντωτές δίνεται από την παρακάτω σχέση:

$$\omega^2 = \lambda = k/m \quad (5)$$

Επίσης, η συχνότητα του συστήματος μετρούμενη σε (Hz) δίνεται από τη σχέση:

$$f = \omega/2\pi$$

Οι ιδιοτιμές υπολογίζονται από τα μητρώα μάζας m και δυσκαμψίας k , όπως παρουσιάζεται παρακάτω (σε μορφή πίνακα, matrix equation):

$$M\ddot{u}(t) - Ku(t) = 0 \quad (6)$$

Παρατηρούμε ότι η εξίσωση είναι της μορφής $u(t) = af(t)$, όπου:

a : το άγνωστο και ανεξαρτήτου χρόνου διάνυσμα μετακινήσεων,

$f(t)$: η κοινή – άγνωστη χρονική συνάρτηση όλων των μετακινήσεων

Από τις εξισώσεις (5), (6) προκύπτει:

$$K - \lambda M = 0 \quad (7)$$

Και η προφανής λύση αυτής η ορίζουσα:

$$\det(K - \lambda M) = 0$$

Οι λύσεις τις ορίζουσας είναι οι ζητούμενες ιδιοτιμές λ .

Σε κάθε μία ιδιοτιμή που υπολογίσαμε αντιστοιχεί ένας πίνακας μετακινήσεων $a_{i,j}$. Το a καλείται ιδιοδιάνυσμα του προβλήματος της ιδιοτιμής. Για τον υπολογισμό του a γίνεται κανονικοποίηση από την οποία προκύπτουν τα ιδιοδιανύσματα φ_i .

$$\varphi_i = c_i a_i$$

όπου c_i : αυθαίρετη σταθερά.

Υποθέτουμε ότι το σύστημα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με διάνυσμα μετακινήσεων, με ημιτονοειδή μορφή, σε σχέση με το χρόνο:

$$U = \varphi \sin \omega t$$

Όπου ω : η γωνιακή συχνότητα, φ : τα ιδιοδιανύσματα

Από τις σχέσεις (5), (7) προκύπτει:

$$(K - \lambda M)\varphi = 0 \quad (8)$$

Λύση της παραπάνω εξίσωσης είναι η προφανής $\varphi = 0$ ή η οριζουσα ίση με το μηδέν:

$$\det(K - \lambda M) = 0$$

Με λύσεις τις $\omega_i^2 = \lambda_i$, όπου i ο αριθμός των ιδιοτιμών και των βαθμών ελευθερίας του συστήματος [3].

2.3.2. Ιδιοδιανύσματα – Ιδιομορφές

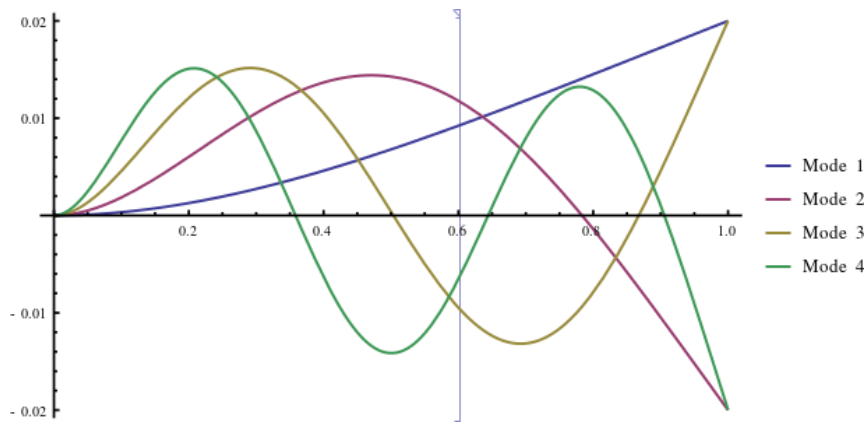
Τα ιδιοδιανύσματα είναι μία έννοια με την οποία βλέπουμε τον τρόπο ταλάντωσης ενός μηχανικού συστήματος. Μέσω αυτών λαμβάνουμε χρήσιμες πληροφορίες σχετικά με την παραμόρφωση και την μετατόπιση του συστήματος. Συμβολίζονται με φ_i , ενώ ο υπολογισμός τους γίνεται με τη βοήθεια της εξίσωσης (8):

$$(-\omega^2 M + K)\varphi = 0$$

Όπου:

M : το μητρώο μάζας,
 K : το μητρώο δυσκαμψίας,
 ω : η κυκλική ιδιοσυχνότητα,
 φ : τα ιδιοδιανύσματα

Στις τεχνολογικές εφαρμογές συνήθως υπολογίζεται ένας μικρός αριθμός πρώτων ιδιομορφών (5-20) [3]. Αυτό συμβαίνει, πρώτον γιατί οι δυνάμεις διέγερσης στη φύση διεγείρουν μόνο τις πρώτες ιδιοσυχνότητες της κατασκευής (χαμηλές) και δεύτερον επειδή οι αδρανειακές δυνάμεις έχουν μικρότερη επιρροή στη δυναμική του συστήματος όσο αυξάνεται η συχνότητα διέγερσης. Στο ακόλουθο σχήμα παρουσιάζονται, για τυχαίο παράδειγμα, οι πρώτες τέσσερις (4) ιδιομορφές μίας απλής δοκού.



Σχήμα 2: Ιδιομορφές απλής (κοινής) δοκού

(Πηγή Εικόνας: <https://www.crystallinstruments.com/visualizing-mode-shapes-with-a-stroboscope-and-cola-output/>)

Η ιδιομορφική ανάλυση θεωρείται ιδιαίτερα σημαντική, καθώς μας δίνει χρήσιμες πληροφορίες για τη συμπεριφορά ενός δυναμικού συστήματος. Πέρα από τη μορφή της ταλάντωσης μας δείχνει και τα κρίσιμα σημεία (δεσμούς) της κατασκευής [4].

3. ΣΧΕΔΙΑΣΗ ΜΟΝΤΕΛΟΥ

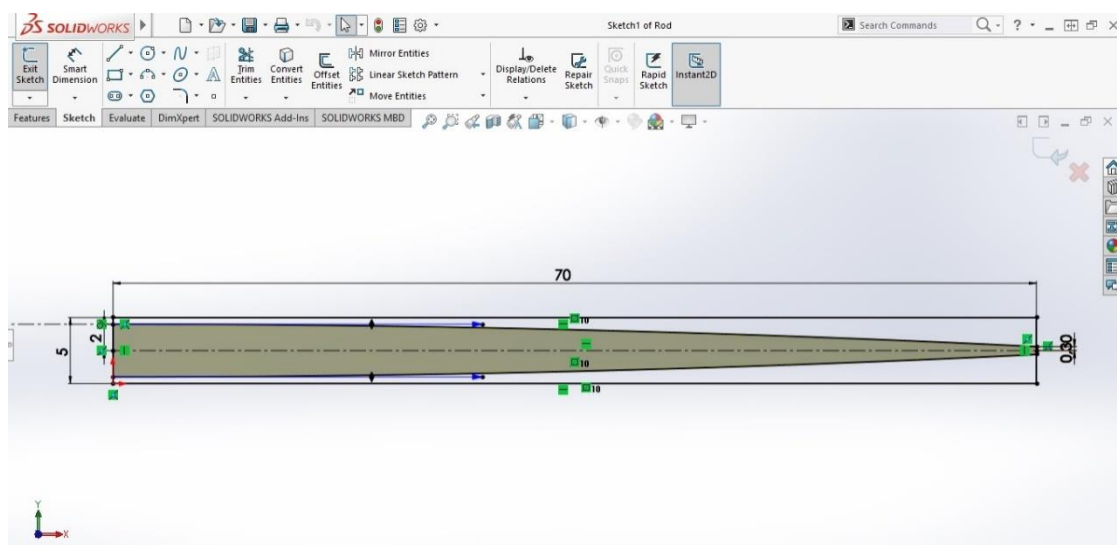
3.1. SolidWorks

Η κατασκευή του μοντέλου του προβλήματος έγινε με τη βοήθεια του Solidworks 2016. Πρόκειται για ένα πρόγραμμα 3D μηχανολογικού σχεδιασμού CAD (Computer Aided Design).

3.2. Περιγραφή – Διαστάσεις Μοντέλου

Σε αυτή την ενότητα θα γίνει μία συνοπτική αναφορά στη διαδικασία σχεδίασης της δοκού που μελετήθηκε.

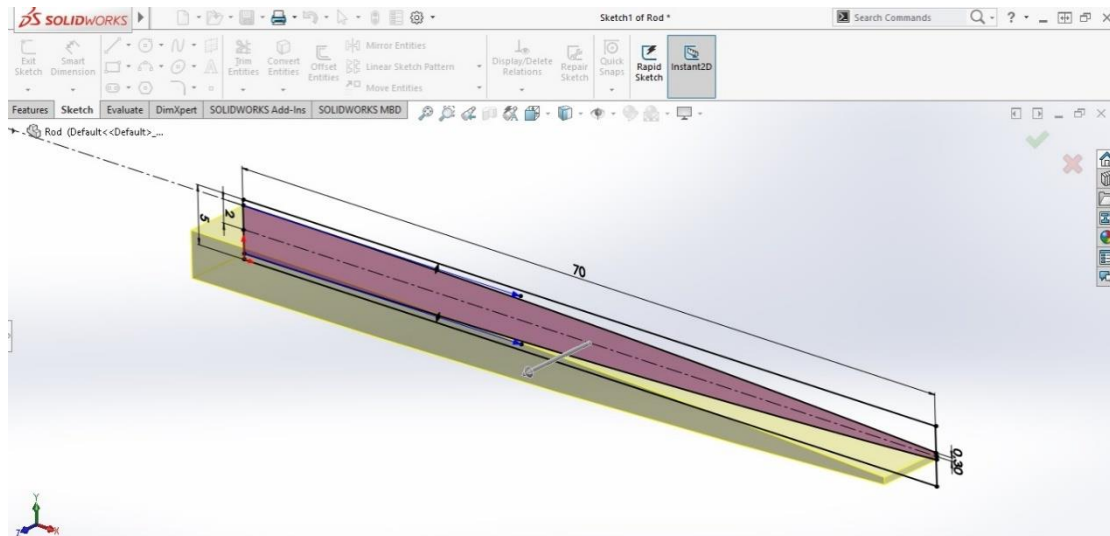
Το μοντέλο της δοκού που κατασκευάστηκε, αποτελείται από τρία κομμάτια, τα οποία όμως συμπεριφέρονται ως ένα. Τα τμήματα αυτά δεν έχουν κάποια από τις γνωστές γεωμετρίες. Αντίθετα, η επιφάνεια επαφής τους είναι μια καμπύλη η οποία συγκλίνει προς τον άξονα συμμετρίας της δοκού, από αριστερά προς τα δεξιά, όπως φαίνεται στην Εικόνα 1.



Εικόνα 1: Διαστάσεις Σύνθετης Δοκού

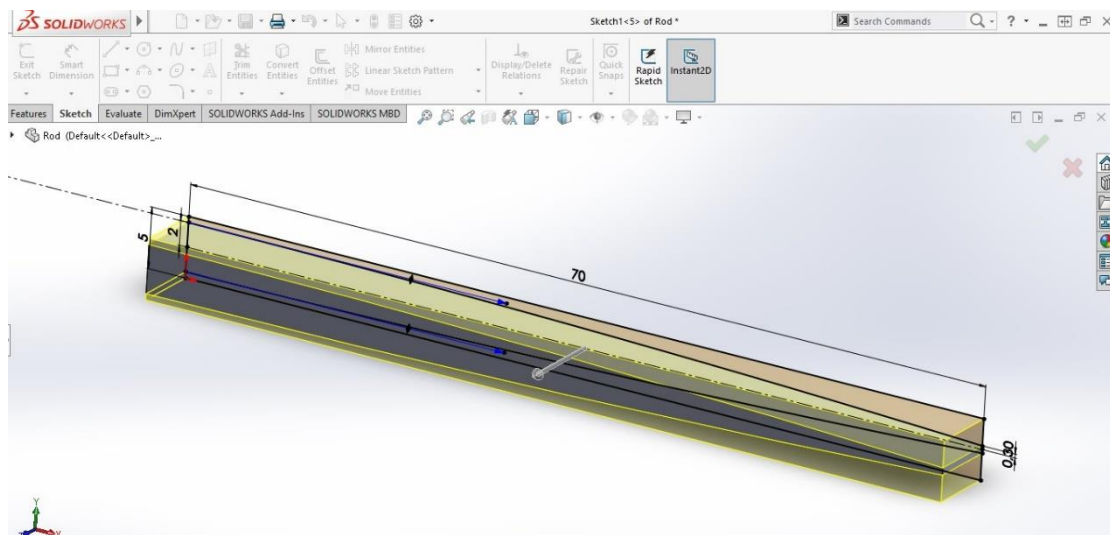
Οι διαστάσεις της δοκού είναι 70m x 5m x 6m.

Αφού ολοκληρώθηκε ο σχεδιασμός έγινε η μετατροπή του σχεδίου από 2D σε 3D με τη χρήση της εντολής **Extrude** η οποία πραγματοποιήθηκε σε δύο φάσεις. Αρχικά δημιουργήθηκε το κύριο τμήμα της δοκού και στη συνέχεια δημιουργήθηκαν τα δύο ακραία τμήματα, επάνω και κάτω από το κεντρικό τμήμα.



Εικόνα 2: Πρώτο Extrude (μεσαίο τμήμα δοκού)

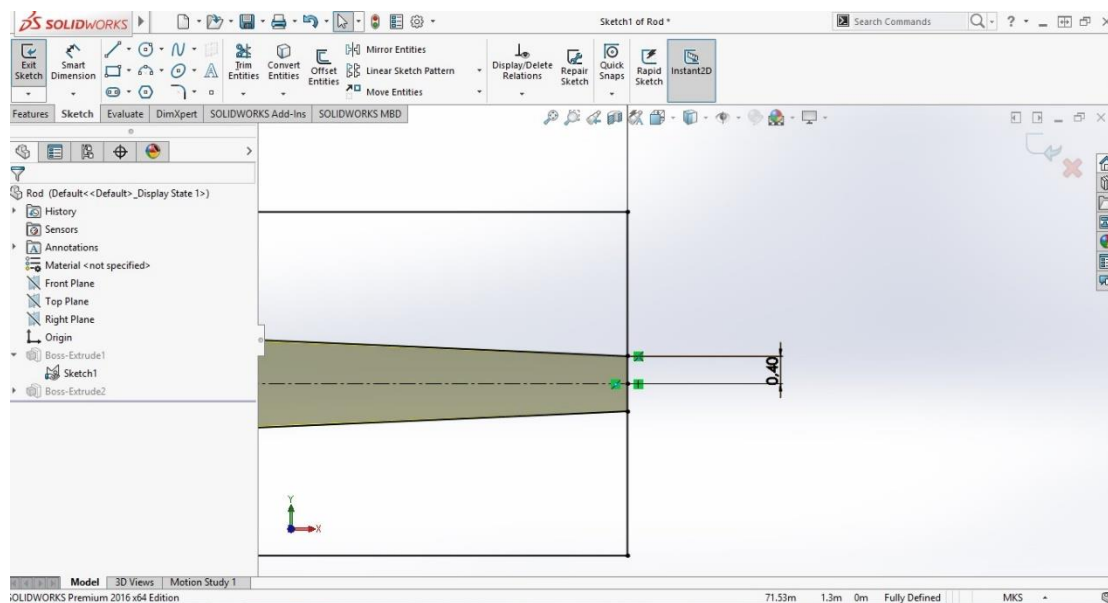
Κατά το δεύτερο extrude δεν χρησιμοποιήθηκε η επιλογή **Merge**, με στόχο να διατηρηθούν τρία ξεχωριστά συμπαγή σώματα και όχι ένα, ώστε να πετύχουμε την επιθυμητή γεωμετρία στο μοντέλο.



Εικόνα 3: Δεύτερο Extrude (ακραία τμήματα δοκού)

3.3. Παραμετροποίηση (Parameterization)

Ένα από τα πλεονεκτήματα χρήσης προγραμμάτων CAD όπως το Solidworks, είναι η δυνατότητα του χρήστη να ορίζει οποιαδήποτε διάσταση ως παράμετρο [6]. Με τον όρο Global Variable αναφερόμαστε σε τέτοιου είδους παραμέτρους. Στη συγκεκριμένη διπλωματική εργασία επιθυμούμε να μελετήσουμε το ίδιο μοντέλο διαφοροποιώντας κάθε φορά το μέγεθος της μικρής πλευράς του εσωτερικού υλικού (Εικόνα 3). Για λόγους διευκόλυνσης η συγκεκριμένη διάσταση θα αναφέρεται με το συμβολισμό (L).



Εικόνα 4: Η διάσταση που παραμετροποιήθηκε

Το μοντέλο κατασκευάστηκε, κατά ένα μεγάλο κομμάτι, χρησιμοποιώντας αξονική συμμετρία λόγω της απλής μορφής του. Επομένως, αλλάζοντας τη διάσταση της Εικόνας 4, διαφοροποιείται ολόκληρη η διάσταση της πλευράς (L).

Για το λόγο αυτό ορίσαμε στο Solidworks την παράμετρο X για τη συγκεκριμένη διάσταση όπως φαίνεται στην Εικόνα 5.

Equations, Global Variables, and Dimensions

Filter All Fields

Name	Value / Equation	Evaluates to	Comments
Add global variable			
Features			
Add feature suppression			
Dimensions			
D1@Sketch1	70m	70m	
D2@Sketch1	5m	5m	
D3@Sketch1	2m	2m	
X@Sketch1	0.3m	0.3m	
D1@Boss-Extrude1	6m	6m	
D1@Boss-Extrude2	6m	6m	

Angular equation units: Degrees

Automatic solve order

Link to external file:

OK

Cancel

Import...

Export...

Help

Εικόνα 5: Πίνακας διαστάσεων και παραμέτρων στο SolidWorks

4. ΑΝΑΛΥΣΗ ΜΟΝΤΕΛΟΥ

4.1. Μέθοδος Πεπερασμένων Στοιχείων

4.1.1. Γενικά

Η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων (Finite Elements Method, FEM), αποτελεί ένα σημαντικό εργαλείο για την αριθμητική επίλυση πολλών προβλημάτων της μηχανικής. Διάφορα τεχνικά προβλήματα περιγράφονται από εξισώσεις, για τις οποίες τις περισσότερες φορές είναι αδύνατο να δοθούν λύσεις εκτός αν πρόκειται για προβλήματα με πολύ απλή μορφή. Η ανάγκη επίλυσης προβλημάτων σύνθετης μορφής οδήγησε στην ανάπτυξη προσεγγιστικών μεθόδων επίλυσης. Μια τέτοια μέθοδος είναι αυτή των πεπερασμένων στοιχείων. Πρόκειται για μία προσεγγιστική μέθοδο με αρκετά αξιόπιστα αποτελέσματα με κύριο πλεονέκτημα την δυνατότητα εφαρμογής της μεθόδου σε όλα τα είδη προβλημάτων, τα οποία μπορούν να περιγραφούν από διαφορικές εξισώσεις.

Το μοναδικό μειονέκτημα της μεθόδου είναι οι αυξημένες απαιτήσεις σε υπολογιστική ισχύ, όταν εφαρμόζεται σε σύνθετα προβλήματα με πολύπλοκη γεωμετρία και ιδίως για μη γραμμικά προβλήματα [7].

4.1.2. Ιστορική Αναδρομή

Τα πρώτα βήματα για την ανάπτυξη της μεθόδου έγιναν το 1941 με αφορμή την επίλυση προβλημάτων στη δομική ανάλυση αεροσκαφών. Τότε ο Hrenikoff παρουσίασε τη “μέθοδο των δικτυωμάτων”. Το 1943, ο Courant δημοσίευσε μία εργασία, η οποία χρησιμοποιούσε τριγωνική παρεμβολή σε τριγωνικές υποπεριοχές για να μοντελοποιήσει προβλήματα στρέψης. Ο Turner και άλλοι, δημιούργησαν τα μητρώα ακαμψίας για δικτυώματα, δοκούς, κλπ, και παρουσίασαν τα αποτελέσματά τους το 1956. Ο όρος “πεπερασμένα στοιχεία” χρησιμοποιήθηκε για πρώτη φορά το 1960 από τον Clough. Από τις αρχές του 1960, οι μηχανικοί χρησιμοποιούσαν τη μέθοδο για να δώσουν προσεγγιστικές λύσεις σε προβλήματα όπως ανάλυσης τάσεων, ροής ρευστών και μεταφοράς θερμότητας. Ο Ιωάννης Αργύρης το 1955 σε ένα βιβλίο του, σχετικά με θεωρήματα ενέργειας και μητρικές μεθόδους, έθεσε τα θεμέλια για την μελλοντική ανάπτυξη της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων. Το πρώτο βιβλίο για πεπερασμένα στοιχεία κυκλοφόρησε από τους Zienkiewicz και Cung το 1967. Οι μαθηματικές βάσεις της μεθόδου τέθηκαν τη δεκαετία του '70.

4.2. Comsol Multiphysics

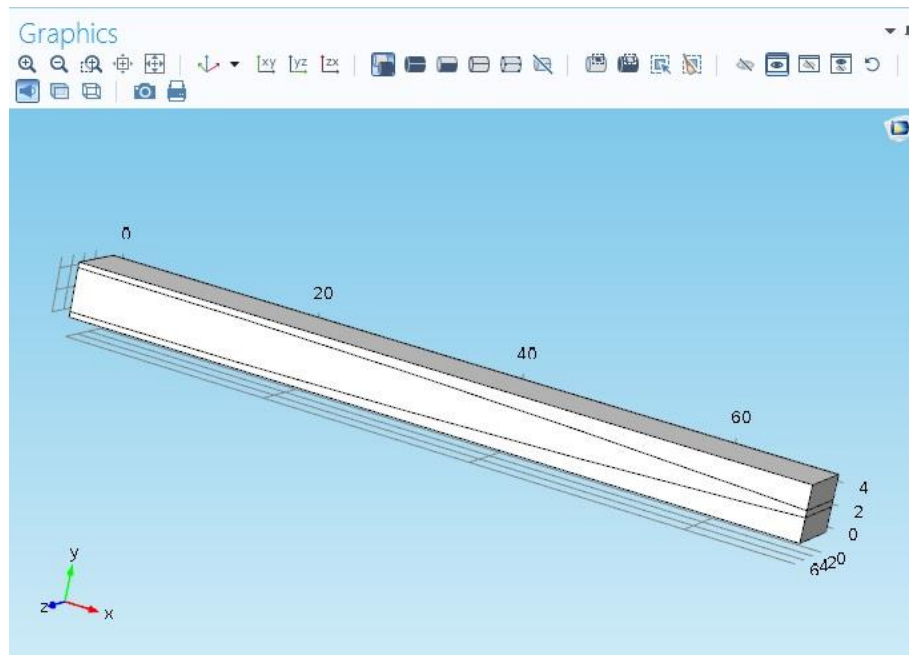
Το Comsol Multiphysics είναι ένα σύγχρονο και ευρέως διαδεδομένο πρόγραμμα πεπερασμένων στοιχείων, κατάλληλο για την μοντελοποίηση και επίλυση όλων των επιστημονικών και τεχνικών προβλημάτων. Το CM παρέχει στο χρήστη ένα ολοκληρωμένο περιβάλλον εργασίας και τη δυνατότητα επεξεργασίας του μοντέλου που δημιουργήσε, χωρίς να προαπαιτεί εξειδικευμένες γνώσεις πληροφορικής (κώδικα, software). Επιπλέον, παρέχει στο χρήστη τη δυνατότητα επίλυσης σύνθετων φυσικών φαινομένων με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων. Αποτελεί πλατφόρμα μοντελοποίησης και σχεδιασμού σε πληθώρα εφαρμογών όπως αισθητήρες και μικροηλεκτρομηχανολογικές συσκευές, προβλήματα ανάλυσης κατασκευών, σχεδιασμό RF (Radio Frequency) συστημάτων, ανάλυση εναλλακτών θερμότητας, κλπ.

Το γραφικό περιβάλλον του CM παρέχει στο σχεδιαστή τη δυνατότητα να δημιουργήσει και να απεικονίσει το μοντέλο που μελετάει σε μία (1D), δύο (2D) ή τρεις (3D) διαστάσεις. Σημαντική ιδιαιτερότητα του προγράμματος Comsol Multiphysics είναι η δυνατότητα του να αλληλεπιδρά με άλλες εφαρμογές όπως η MATLAB, το Pro Engineer και το Solidworks[7]. Στην παρούσα διπλωματική εργασία, η ανάλυση της σύνθετης δοκού έγινε με τη βοήθεια του Comsol Multiphysics 5.1.

4.2.1. Γεωμετρία Μοντέλου (Geometry)

Παρά το γεγονός ότι το πρόγραμμα Comsol διαθέτει ολοκληρωμένο περιβάλλον σχεδίασης, για το σχεδιασμό του μοντέλου έγινε χρήση του σχεδιαστικού προγράμματος SolidWorks 2016, στο οποίο αναφερθήκαμε σε προηγούμενη παράγραφο, λόγω εύκολης παραμετροποίησης.

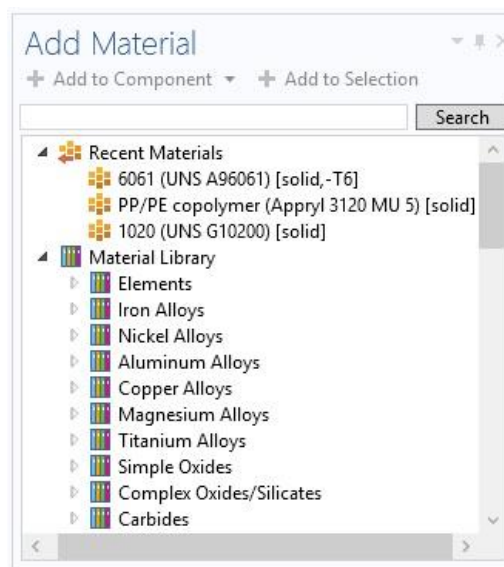
Αξιοποιώντας τη δυνατότητα αλληλεπίδρασης του Comsol με το SolidWorks χρησιμοποιήσαμε την επιλογή **LiveLink for SolidWorks**, με την οποία εισάγαμε την γεωμετρία του μοντέλου που σχεδιάσαμε νωρίτερα καθώς επίσης και πληροφορίες σχετικά με **Global Variables** που έχουμε ορίσει. Με τον τρόπο αυτό έχουμε διασφαλίσει μία διαρκή επικοινωνία μεταξύ των προγραμμάτων καθ'όλη τη διάρκεια της ανάλυσης.



Εικόνα 6: Μοντέλο στο Comsol μέσω LiveLink

4.2.2. Επιλογή Υλικών (Materials)

Το επόμενο βήμα για την διαδικασία της ανάλυσης, αφού καθοριστεί η γεωμετρία του μοντέλου, είναι η επιλογή των υλικών για κάθε τμήμα της δοκού. Το CM παρέχει στο χρήστη τη δυνατότητα να επιλέξει ανάμεσα σε μεγάλο αριθμό και διαφορετικού τύπου υλικών, τα οποία είναι κατηγοριοποιημένα σε βιβλιοθήκη.



Εικόνα 7: Εισαγωγή Υλικών

Για το μοντέλο του προβλήματος επιλέξαμε να χρησιμοποιήσουμε δύο υλικά διαφορετικού τύπου. Πιο συγκεκριμένα, για τα ακραία τμήματα της δοκού (επάνω και κάτω), επιλέχθηκε ένα κοινό μέταλλο αλουμίνιου (6061 T6), ενώ για το κεντρικό τμήμα επιλέξαμε ένα θερμοπλαστικό πολυμερές υλικό, συγκεκριμένα το πολυπροπυλένιο (3120 MU 5). Παρακάτω παρατίθεται πίνακας με τα βασικά χαρακτηριστικά των υλικών.

Πίνακας 2: Μηχανικές Ιδιότητες Υλικών [8]

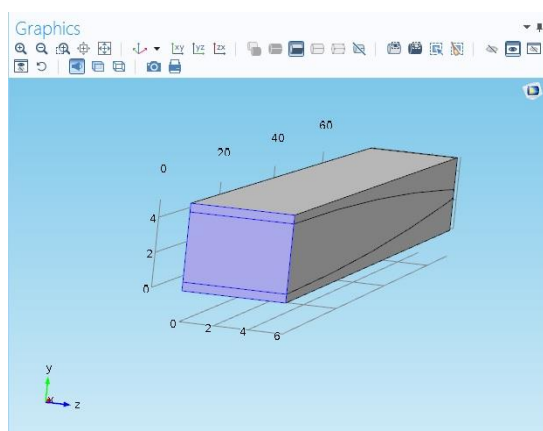
Υλικό (Material)	Μέτρο Ελαστικότητας (Young's Modulus)	Λόγος Poisson (Poisson Ratio)	Πυκνότητα (Density)
Αλουμίνιο	68.9 GPa	0.33	2.70 g/cc
Πολυπροπυλένιο	1.18 GPa	0.42	0.902 g/cc

Η επιλογή των υλικών έγινε δίνοντας έμφαση στο μέτρο ελαστικότητας τους, καθώς ήταν επιθυμητό να ορίσουμε δύο υλικά που θα έχουν μεγάλη διαφορά μεγέθους μεταξύ τους.

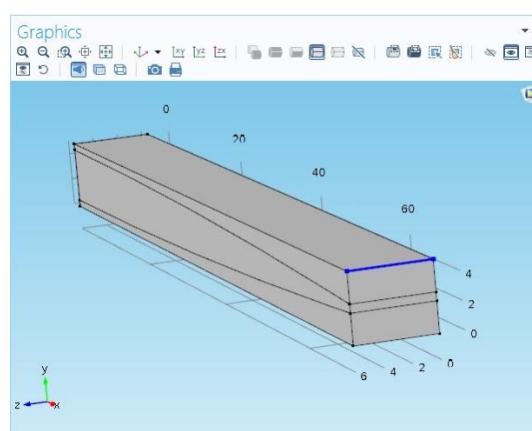
4.2.3. Περιβάλλον Στατικής Μελέτης (Physics)

Σε αυτή την ενότητα θα ορίσουμε το περιβάλλον της στατικής μελέτης κάτω από το οποίο θα γίνει η ανάλυση της δοκού.

Η δοκός είναι πακτωμένη από τη μία πλευρά μόνο ενώ εφαρμόζουμε κατακόρυφη συνολική δύναμη $F = 30 \text{ kN}$ σε ακμή της, όπως φαίνεται στις παρακάτω εικόνες.



Εικόνα 8: Η πλευρά της δοκού που πακτώθηκε



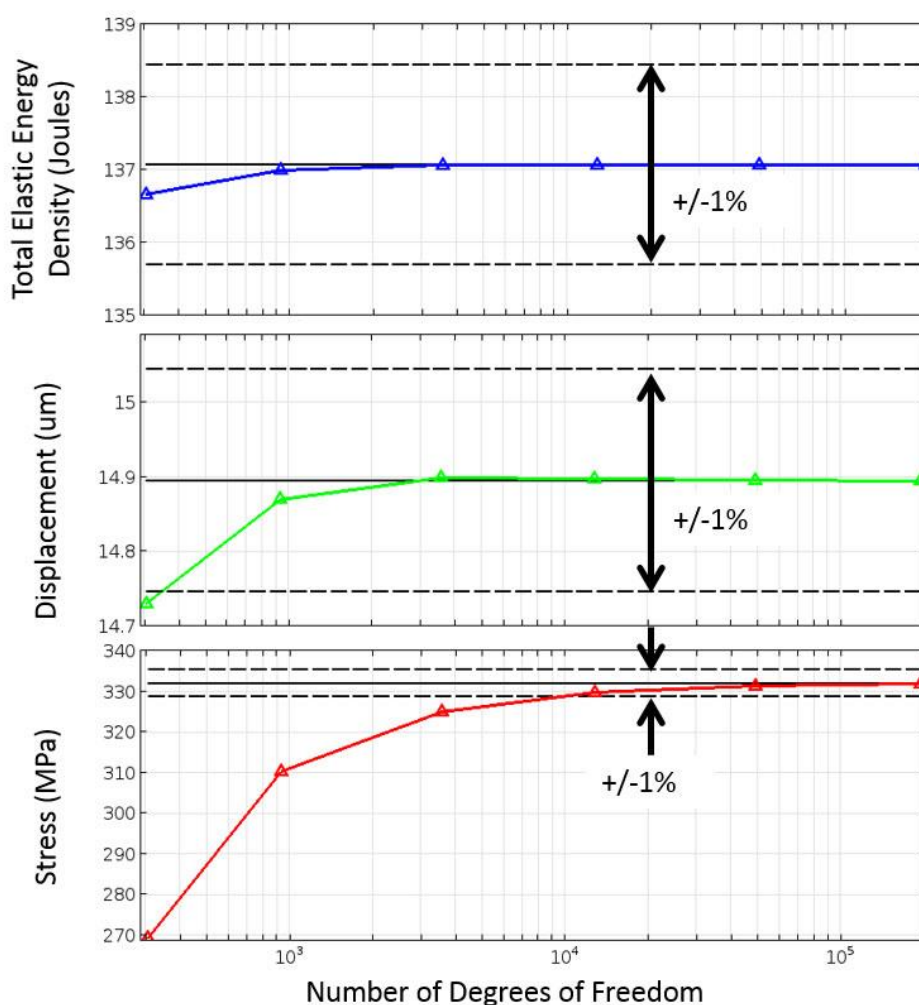
Εικόνα 9: Ακμή που εφαρμόζεται η δύναμη F

4.2.4. Πλέγμα (Mesh)

Κομβικό σημείο στην ανάλυση με πεπερασμένα στοιχεία είναι η σωστή επιλογή του αριθμού των στοιχείων (elements) του πλέγματος που θα δημιουργήσουμε για το προς ανάλυση μοντέλο. Ο βέλτιστος αριθμός στοιχείων και το μέγεθός τους επιτυγχάνεται μέσω της εφαρμογής της μεθόδου **Convergence Study**.

Σε ένα *Convergence Study*, στόχος μας είναι, η ανεξάρτητη μεταβλητή (π.χ. Stress, Displacement, κλπ) σε μία συγκεκριμένη θέση, να μην επηρεάζεται από την αύξηση του αριθμού των στοιχείων. Η πρώτη εκτέλεση της μεθόδου γίνεται για ένα μικρό αριθμό στοιχείων. Έπειτα γίνεται σταδιακή αύξηση του αριθμού των στοιχείων έως ότου η ανεξάρτητη μεταβλητή τείνει να συγκλίνει προς μία συγκεκριμένη τιμή. Ωστόσο, στην περίπτωση που η ανεξάρτητη μεταβλητή μεταβάλλεται σε διάστημα τιμών $\pm 1\%$ σε σχέση με την αμέσως προηγούμενη τιμή της, τότε έχει επιτευχθεί καλή ποιότητα πλέγματος ενώ πλέον τα αποτελέσματα θα είναι ανεξάρτητα του πλέγματος [9].

Στην Εικόνα 10 που ακολουθεί παραθέτονται τρία ίδια γραφήματα καμπύλης, για την εύρεση του βέλτιστου αριθμού elements, για διάφορες ανεξάρτητες μεταβλητές του ίδιου προβλήματος.

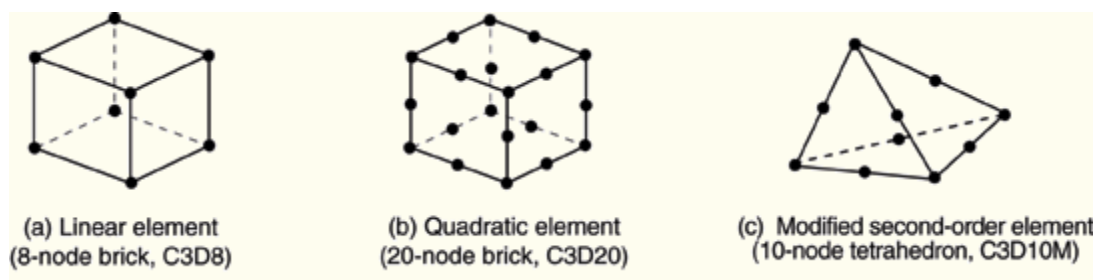


Εικόνα10: Convergence Study για τρεις ανεξάρτητες μεταβλητές [7]

Από τα παραπάνω γραφήματα παρατηρούμε ότι υπάρχει διαφορετική ταχύτητα στην σύγκλιση των τιμών κάθε ανεξάρτητης μεταβλητής του προβλήματος. Συγκεκριμένα, βλέπουμε ότι παράμετροι όπως η μετατόπιση (Displacement) και η δυναμική ενέργεια (Total Elastic Energy Density) συγκλίνουν σχεδόν αμέσως σε αντίθεση με την καταπόνηση (Stress).

Ο λόγος που συμβαίνει αυτό, είναι ότι η μετατόπιση υπολογίζεται σε κάθε κορυφή (κόμβο) ενός element και επομένως η τιμή της μπορεί να συγκλίνει γρήγορα και για πολύ μικρό αριθμό στοιχείων. Αντίθετα, το Stress υπολογίζεται βάσει όλων των μετατοπίσεων ενός element και επομένως απαιτείται μεγαλύτερος αριθμός στοιχείων για να υπάρξει σύγκλιση.

Ο αριθμός των στοιχείων (elements) συνδέεται άμεσα με τον βαθμό ελευθερίας κάθε στοιχείου, καθώς για κάθε κόμβο του αντιστοιχούν 3 βαθμοί ελευθερίας. Στο δικό μας πρόβλημα, το πλέγμα θα αποτελείται από τετραεδρικά elements 2^{ου} βαθμού (10 κόμβοι).



Εικόνα 11: Διάφοροι τύποι Element [10]

Element Quality Metrics

Για τη δημιουργία ενός ποιοτικού πλέγματος με αξιόπιστα αποτελέσματα, δεν είναι αρκετή η γνώση του βέλτιστου αριθμού των στοιχείων. Επιπρόσθετα, είναι απαραίτητη η καλή ποιότητα γεωμετρίας κάθε στοιχείου ατομικά σύμφωνα με τα παρακάτω κριτήρια.

- **Element Skewness**

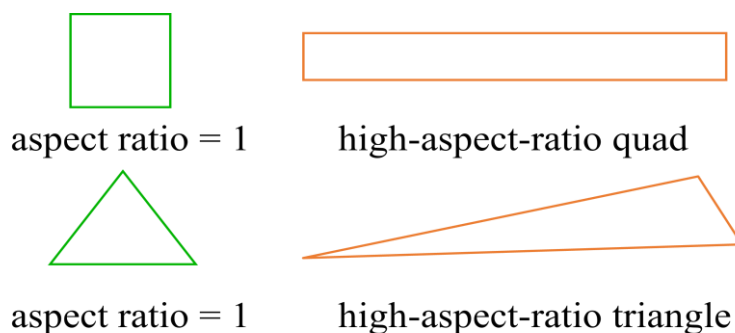
Με τον όρο *Skewness* αναφερόμαστε στο σφάλμα μεταξύ βέλτιστου και πραγματικού μεγέθους του κάθε στοιχείου [11]. Οι επιθυμητές τιμές του Element Skewness δεν πρέπει να υπερβαίνουν το **0.25**.

Ο υπολογισμός δίνεται από τον παρακάτω τύπο:

$$Skewness = \frac{\text{Optimal Cell Size} - \text{Cell Size}}{\text{Optimal Size}}$$

- **Element Aspect Ratio**

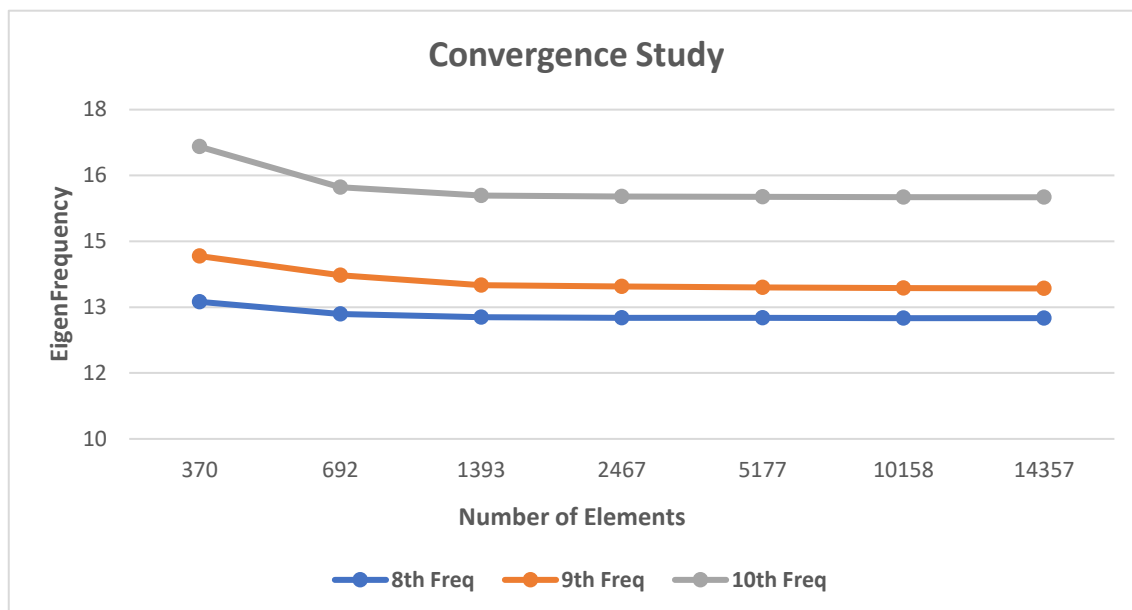
Με τον όρο *Aspect Ratio* αναφερόμαστε στο λόγο της μεγαλύτερης προς τη μικρότερη πλευρά ενός τριγωνικού (triangle) ή τετραεδρικού (quad) element. Ιδανικά ο επιθυμητός λόγος πρέπει να ισούται με ένα. Τότε το element έχει τη μορφή ισόπλευρου τριγώνου ή τετραγώνου [11]. Για τα διάφορα προβλήματα που απαιτούν τη δημιουργία πλέγματος, δεχόμαστε τιμές μεγαλύτερες του **0.7**.



Σχήμα 3: Aspect Ratio βάσει γεωμετρίας element [11]

Στη συνέχεια θα προχωρήσουμε στην εφαρμογή της μεθόδου *Convergence Study* για την εύρεση του βέλτιστου αριθμού των στοιχείων του πλέγματος ορίζοντας ως ανεξάρτητες μεταβλητές την 8^η, 9^η και 10^η ιδιοσυχνότητα του συστήματος. Σε αυτές τις ιδιοσυχνότητες παρατηρείται διαφοροποίηση και χρειάζεται να επαναλάβουμε τη διαδικασία τουλάχιστον τρεις φορές ώστε να φτάσουμε σε σύγκλιση των τιμών. Αντίθετα, για τις πρώτες ιδιοσυχνότητες παρατηρείται σύγκλιση των τιμών της ανεξάρτητης μεταβλητής σχεδόν από την πρώτη δοκιμή. Αυτό πιθανώς οφείλεται στο σχήμα των ιδιομορφών. Όπως θα δούμε στη συνέχεια, οι πρώτες 3 ιδιομορφές έχουν μικρή διακύμανση, επομένως δεν απαιτείται μεγάλος αριθμός elements για να συγκλίνουν οι τιμές τους.

Η μέθοδος θα εφαρμοστεί για τη γεωμετρία του αρχικού μοντέλου (διάσταση L=0,8) καθώς τότε το μοντέλο έχει την πιο σύνθετη γεωμετρία σε σύγκριση με τα υπόλοιπα τέσσερα μοντέλα που θα προκύψουν. Πρακτικά σε κάθε επόμενο μοντέλο θα βελτιώνεται η γεωμετρία και η ποιότητα του πλέγματος.



Γράφημα 1: Convergence Study για το μοντέλο του προβλήματος

Από τα γραφήματα παρατηρούμε ότι οι τιμές διαφοροποιούνται αισθητά στις πρώτες 3 δοκιμές, εκεί όπου ο αριθμός των στοιχείων είναι πολύ μικρός (370 – 1400 elements).

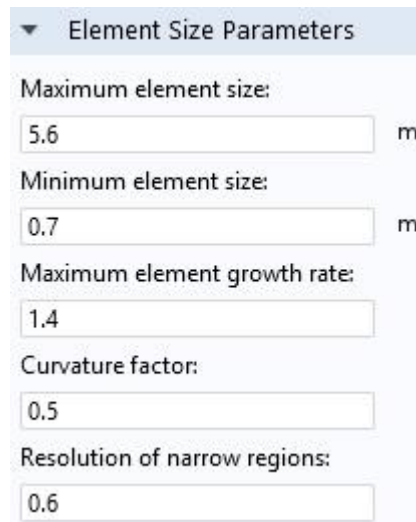
Οι διαφοροποιήσεις συνεχίζονται σε μικρότερο βαθμό καθώς ο αριθμός των στοιχείων αυξάνεται (1400 – 14000 elements), ενώ τελικώς η σύγκλιση πραγματοποιείται για περίπου 10000 elements.

Meshing

Αφού ολοκληρωθεί η διαδικασία του *Convergence Study* προχωρούμε στην κατασκευή του πλέγματος για τη δοκό του προβλήματός μας. Αρχικά επιχειρήθηκε η δημιουργία πλέγματος μέσω αυτοματοποιημένων εργασιών του Comsol, κάτι που απορρίφθηκε καθώς το *Minimum* και *Average Element Quality* των στοιχείων ήταν μη αποδεκτό.

Element Quality είναι μια παράμετρος που έχει ορίσει το Comsol για να αξιολογεί την ποιότητα των στοιχείων του πλέγματος, συνδυάζοντας τα κριτήρια των element skewness και Aspect Ratio. Σύμφωνα με τη μεθοδολογία, για να είναι αποδεκτή η τιμή του *Minimum Element Quality* πρέπει να είναι μεγαλύτερη από **0.1**, ενώ για το *Average Element Quality* μεγαλύτερη από **0.7**.

Η τελική κατασκευή του πλέγματος πραγματοποιήθηκε μέσα από χειροκίνητο meshing. Πιο συγκεκριμένα, χρησιμοποιήσαμε τετραεδρικά (tetrahedral) elements 2^{ου} βαθμού (10 κόμβοι) και έγινε τροποποίηση των παραμέτρων του μεγέθους των στοιχείων.



Element Size Parameters	
Maximum element size:	5.6 m
Minimum element size:	0.7 m
Maximum element growth rate:	1.4
Curvature factor:	0.5
Resolution of narrow regions:	0.6

Εικόνα 12: Παράμετροι μεγέθους στοιχείων πλέγματος

Maximum element size: Καθορίζει το μέγιστο επιτρεπόμενο μέγεθος των στοιχείων.

Minimum element size: Καθορίζει το ελάχιστο επιτρεπόμενο μέγεθος των στοιχείων.

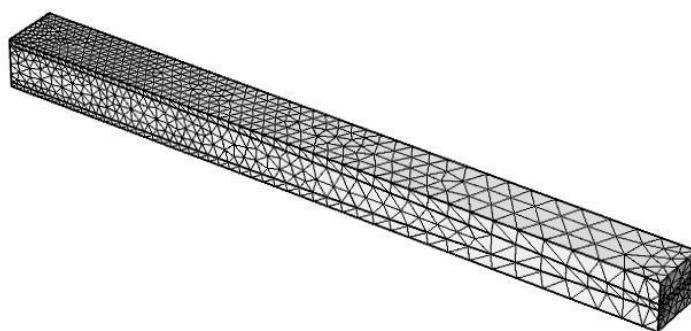
Maximum element growth rate: Εκφράζει το ρυθμό με τον οποίο αναπτύσσεται το μέγεθος στοιχείων από μία περιοχή με μικρά elements σε μία με μεγαλύτερα.

Curvature factor: Μέσω αυτού ορίζεται το μέγεθος του τόξου των στοιχείων που περιέχουν καμπύλη στη γεωμετρία τους.

Resolution of narrow regions: Μέσω αυτού ρυθμίζεται ο αριθμός των στοιχείων που δημιουργούνται σε μικρές περιοχές. Η τιμή πρέπει πάντα να είναι μη αρνητική, ενώ σε περίπτωση που η τιμή του είναι μικρότερη από ένα, το πλέγμα θα προχωρήσει σε ανακατανομή του αριθμού των στοιχείων για μία περιοχή με μικρό πάχος.

Μορφή Πλέγματος

Με την τροποποίηση των παραπάνω παραμέτρων και την ένταξη τετράεδρων στοιχείων ολοκληρώθηκε η διαδικασία κατασκευής του πλέγματος, το οποίο παρουσιάζεται στην Εικόνα 13 που ακολουθεί.



Εικόνα 13: Τελική Μορφή Πλέγματος

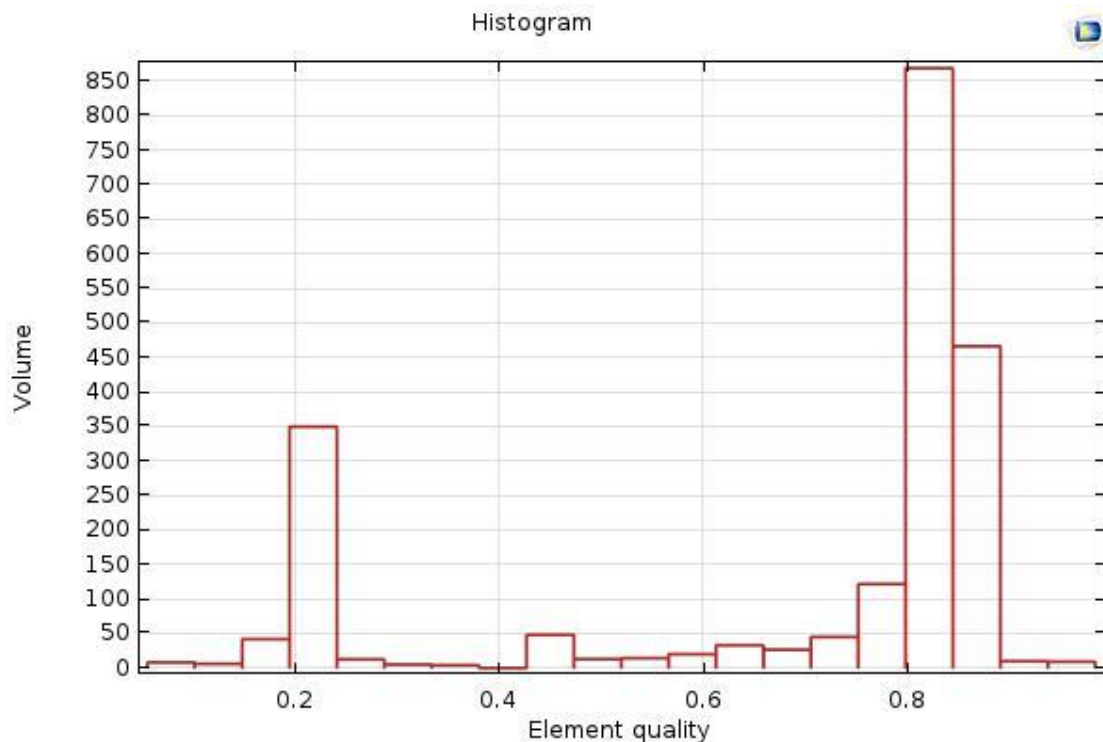
Το CM μας παρέχει στατιστικά στοιχεία σχετικά με το πλέγμα που έχουμε δημιουργήσει. Ο τελικός αριθμός των στοιχείων από τα οποία αποτελείται το πλέγμα μας είναι **10158 elements**.

Επίσης το *Minimum element quality* είναι περίπου ίσο με **0.14** ενώ το *Average* μεγαλύτερο από **0.7** και επομένως οι τιμές μας είναι αποδεκτές.

Domain element statistics	
Number of elements:	10158
Minimum element quality:	0.1414
Average element quality:	0.7024

Εικόνα 14: Πίνακας στατιστικών στοιχείων πλέγματος

Ένα στατιστικό στοιχείο ιδιαίτερης σημασίας είναι το ιστόγραμμα που ακολουθεί, το οποίο δείχνει τι μέγεθος όγκου σε σχέση με τον συνολικό (2100 m^3) καταλαμβάνουν τα στοιχεία ανάλογα με το *Element Quality* που έχουν.



Γράφημα 2: Ιστόγραμμα Element Quality από τη μελέτη στο Comsol

Παρατηρώντας το ιστόγραμμα φαίνεται ότι το μοντέλο μας αποτελείται στην πλειοψηφία του από καλής ποιότητας elements καθώς το μεγαλύτερο μέρος του όγκου της δοκού αποτελείται από στοιχεία με **ποιότητα > 0.8** . Εξαίρεση αποτελούν συγκεκριμένα μικρά τμήματα της δοκού όπου η ποιότητα είναι μέτρια. Αυτός είναι και ο λόγος για τον οποίο το *minimum element quality* είναι 0.14 .

4.2.5. Παραμετρική Ανάλυση (Parametric Sweep)

Όπως αναφέρθηκε και σε προηγούμενη παράγραφο, επιθυμούμε να επαναλάβουμε την ίδια ανάλυση στη σύνθετη δοκό που κατασκευάσαμε, για διαφορετικές τιμές της διάστασης (L) (Κεφ 3, παρ 3). Ο τρόπος για να επιτευχθεί αυτό είναι μέσα από τη δημιουργία μίας παραμετρικής ανάλυσης (Parametric Sweep) .

Με τη διαδικασία αυτή, το Comsol δίνει τη δυνατότητα στο χρήστη να επαναλάβει την ανάλυση για διαφορετικές τιμές μίας παραμέτρου, αρκεί να ορίσει το εύρος των τιμών (αρχική, τελική τιμή) και το βήμα με το οποίο θα αλλάζει η παράμετρος.

Για τη δική μας ανάλυση, ορίσαμε το διάστημα τιμών (0.8,4) για την παράμετρο L , ενώ το βήμα $\dot{L} = 0.8$. Πρακτικά αυτό σημαίνει πως θα επαναλάβουμε τη διαδικασία για πέντε μοντέλα. Το CM για κάθε τιμή του L θα δίνει εντολή στο Solidworks να αλλάξει τη γεωμετρία του μοντέλου και να την επιστρέψει στο Comsol το οποίο θα κάνει την ανάλυση. Όμοια θα επαναλαμβάνεται η διαδικασία έως ότου καλυφθούν οι τιμές του L .

4.3. Ανάλυση Ιδιοσυχνοτήτων – Ιδιομορφών

Η ανάλυση που θα πραγματοποιηθεί μέσω του Comsol, είναι η διερεύνηση των δέκα πρώτων Ιδιοσυχνοτήτων και Ιδιομορφών της δοκού για κάθε ένα από τα πέντε μοντέλα που θα δημιουργηθούν μέσα από το *Parametric Sweep* που περιγράψαμε στην προηγούμενη παράγραφο.

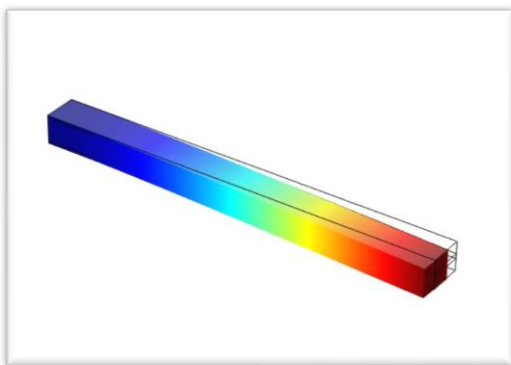
Ο επόμενος συγκεντρωτικός πίνακας δείχνει τις δέκα πρώτες ιδιοσυχνότητες για κάθε μία τιμή της διάστασης (L), όπως προέκυψαν βάσει του εύρους και του βήματος που ορίσαμε.

Πίνακας 3: Αποτελέσματα Ιδιοσυχνοτήτων

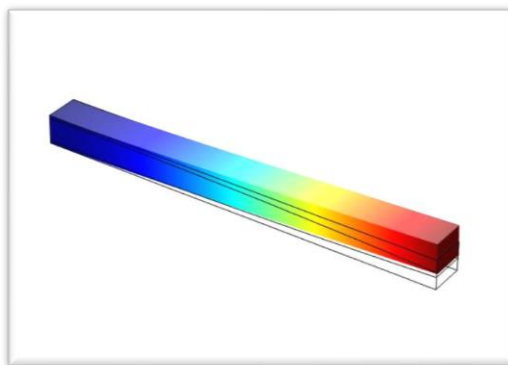
EigenFreq (Hz)	L = 0.8	L = 1.6	L = 2.4	L = 3.2	L = 4.0
1	0.58048	0.60188	0.62662	0.65562	0.69026
2	0.69221	0.71884	0.74977	0.78617	0.82978
3	3.5875	3.6166	3.676	3.7831	3.9667
4	4.1417	4.1537	4.1846	4.2093	4.1863
5	4.4462	4.4082	4.358	4.2887	4.2172
6	9.6676	9.6662	9.6773	9.679	9.6252
7	11.654	11.859	12.075	11.726	11.17
8	12.695	12.44	12.127	12.122	12.156
9	13.294	12.768	12.355	12.294	12.498
10	15.475	15.403	15.401	15.443	15.46

Για κάθε μία Ιδιοσυχνότητα που υπολογίσαμε μέσω του Comsol, υπάρχει και η αντίστοιχη ιδιομορφή. Ακολουθεί η γραφική αναπαράσταση των ιδιομορφών, των 10 πρώτων ιδιοσυχνοτήτων, για το πρώτο μοντέλο της δοκού (L = 0.8).

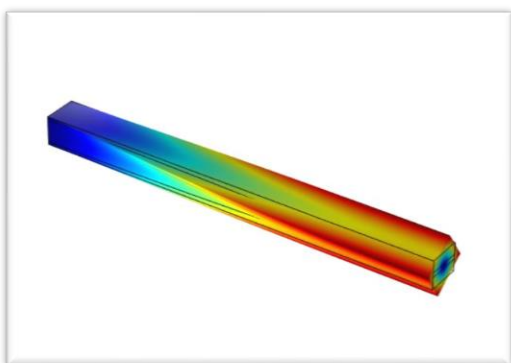
Στο Παράρτημα που βρίσκεται στο τέλος της παρούσας εργασίας υπάρχουν οι ιδιομορφές και για τα υπόλοιπα τέσσερα μοντέλα που μελετήθηκαν.



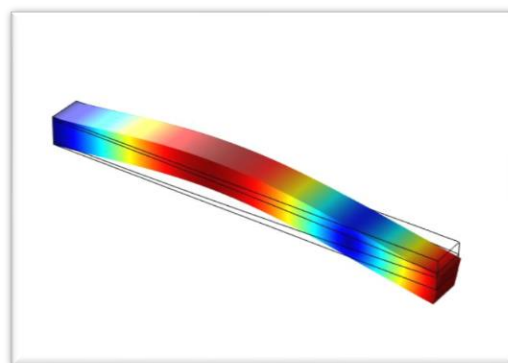
1^η Ιδιομορφή



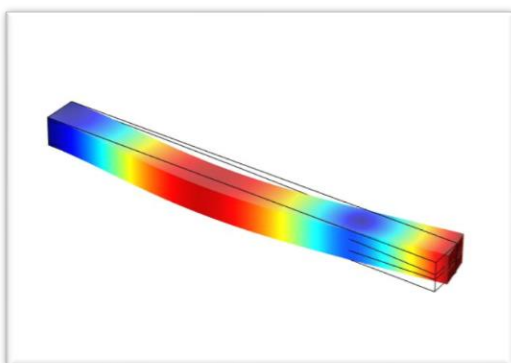
2^η Ιδιομορφή



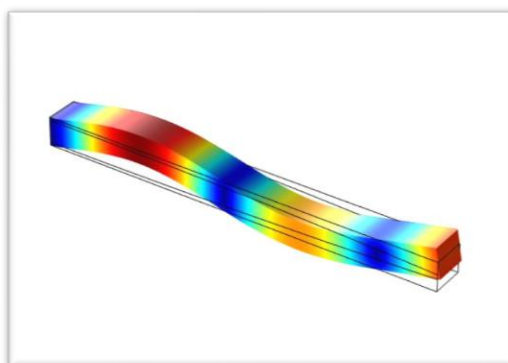
3^η Ιδιομορφή



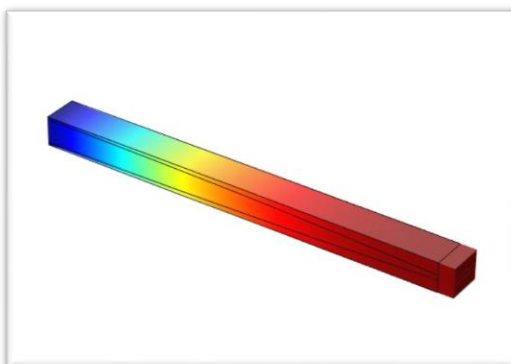
4^η Ιδιομορφή



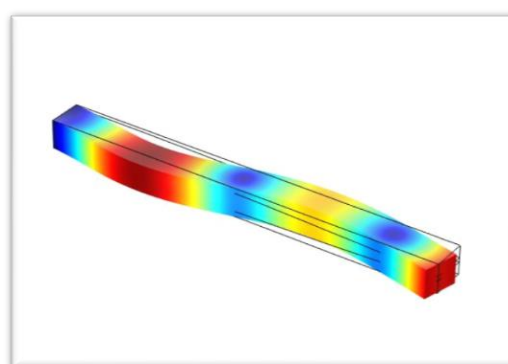
5^η Ιδιομορφή



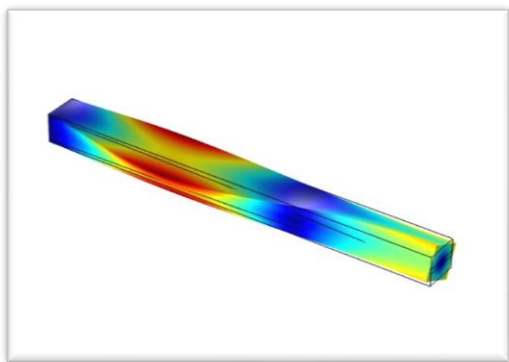
6^η Ιδιομορφή



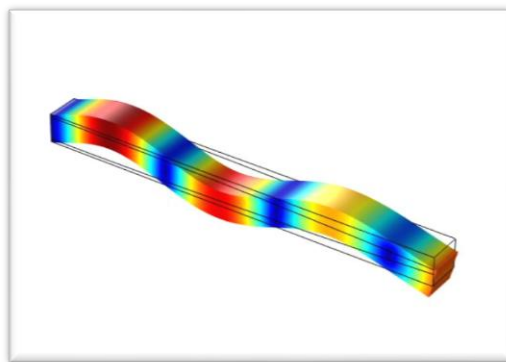
7^η Ιδιομορφή



8^η Ιδιομορφή



9^η Ιδιομορφή



10^η Ιδιομορφή

Περισσότερα σχετικά με τις ιδιομορφές και ιδιοσυχνότητες των μοντέλων θα συζητηθούν στην ενότητα που ακολουθεί.

5. ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΩΝ

Παρατηρώντας τις ιδιομορφές των 5 μοντέλων, όπως αυτές προέκυψαν από την ανάλυση στο Comsol, γίνεται αντιληπτό πως διαφοροποιείται η σειρά με την οποία εμφανίζονται, για κάποια μοντέλα. Συγκεκριμένα υπάρχει αλλαγή σειράς μεταξύ της 4^{ης} και 5^{ης} ιδιομορφής για το 5^ο μοντέλο ($L=4.0$) και αλλαγές στη σειρά μεταξύ 7^{ης}, 8^{ης} και 9^{ης} ιδιομορφής για το 4^ο ($L=3.2$) και 5^ο μοντέλο. Αντίθετα, στα 3 πρώτα μοντέλα δεν παρατηρείται καμία διαφορά στη σειρά των ιδιομορφών.

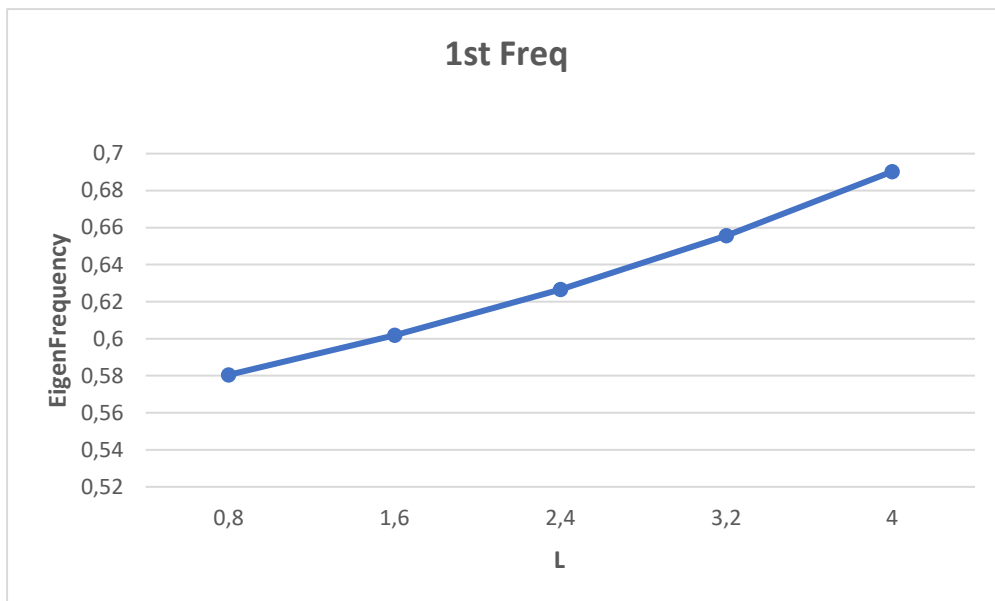
Με κατάλληλη τροποποίηση της σειράς των ιδιομορφών, με τρόπο τέτοιο ώστε να έχουν όλα τα μοντέλα την ίδια, έγινε προσπάθεια κατανόησης της συμπεριφοράς των τιμών κάθε ιδιοσυχνότητας για όλα τα μοντέλα.

Πίνακας 4: Τροποποιημένος πίνακας 3 Ιδιοσυχνοτήτων.

EigenFreq (Hz)	L = 0.8	L = 1.6	L = 2.4	L = 3.2	L = 4.0
1	0,58048	0,60188	0,62662	0,65562	0,69026
2	0,69221	0,71884	0,74977	0,78617	0,82978
3	3,5875	3,6166	3,676	3,7831	3,9667
4	4,1417	4,1537	4,1846	4,2093	4,2172
5	4,4462	4,4082	4,358	4,2887	4,1863
6	9,6676	9,6662	9,6773	9,679	9,6252
7	11,654	11,859	12,075	12,294	12,498
8	12,695	12,44	12,127	11,726	11,17
9	13,294	12,768	12,355	12,122	12,156
10	15,475	15,403	15,401	15,443	15,46

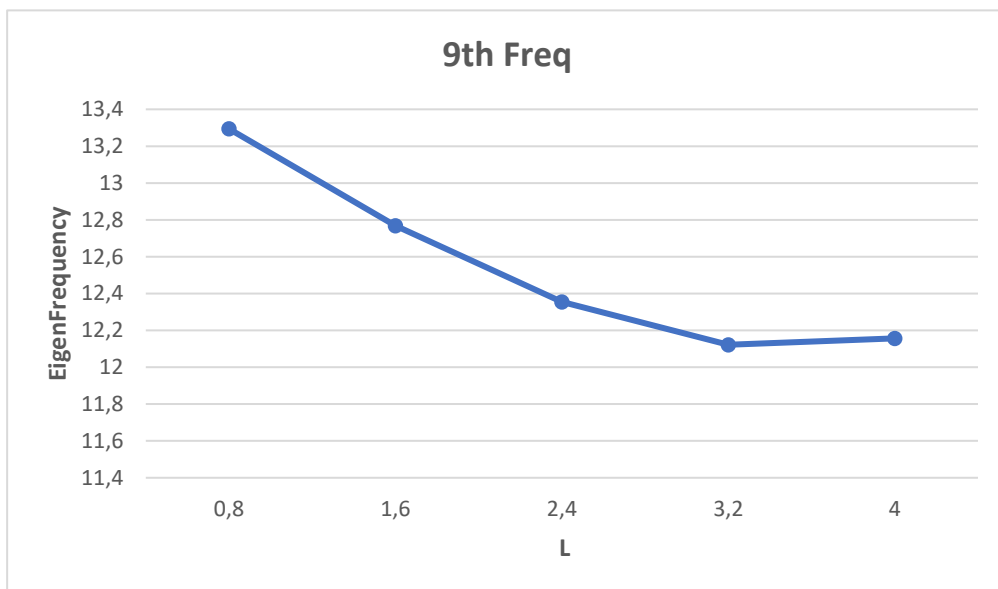
Αναλυτικότερα, δημιουργήθηκε για κάθε μία από τις 10 ιδιοσυχνότητες γράφημα με ορίσμα στον άξονα y τις τιμές της ιδιοσυχνότητας για κάθε μοντέλο ενώ στον άξονα x τοποθετήθηκαν τα 5 μοντέλα που μελετήθηκαν.

Για την 1^η, 2^η και 7^η ιδιοσυχνότητα παρατηρήθηκε συνεχής αύξηση των τιμών τους καθώς μεγάλωνε η τιμή του (L). Μάλιστα όπως φαίνεται και στο γράφημα που ακολουθεί, η αύξηση αυτή ήταν σχεδόν γραμμική. Παρόμοια αύξηση είχε και η 4^η ιδιοσυχνότητα. Για την 5^η ιδιοσυχνότητα παρατηρείται συνεχής μείωση της τιμής της καθώς αυξάνεται το (L), ενώ το διάγραμμα της δείχνει ότι πιθανώς είναι γραμμικά φθίνουσα.



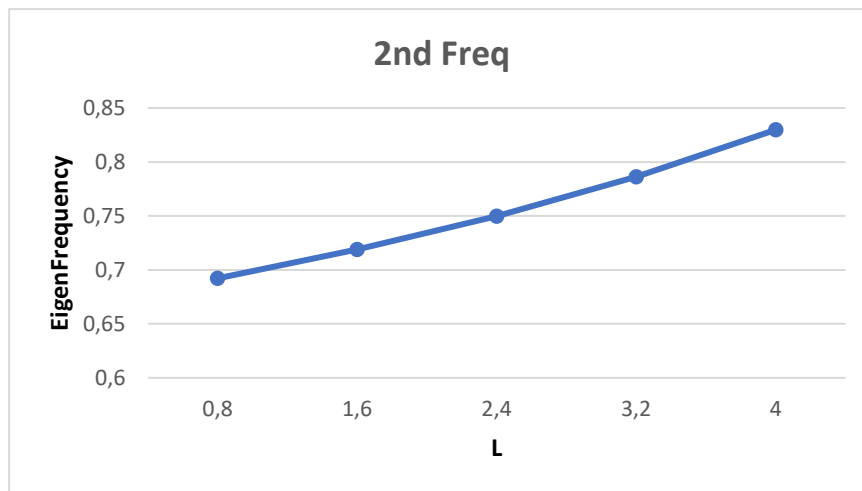
Γράφημα 3: Γραμμή τιμών για την 1^η ιδιοσυχνότητα

Για την 3^η ιδιοσυχνότητα παρατηρήθηκε επίσης συνεχής αύξηση των τιμών καθώς μεγάλωνε η τιμή του (L), ενώ αντίθετα, για την 8^η και 9^η ιδιοσυχνότητα είχαμε συνεχόμενη μείωση των τιμών τους, χωρίς όμως να μπορούμε να προσδιορίσουμε τη μορφή της αύξησης ή μείωσης αυτής.

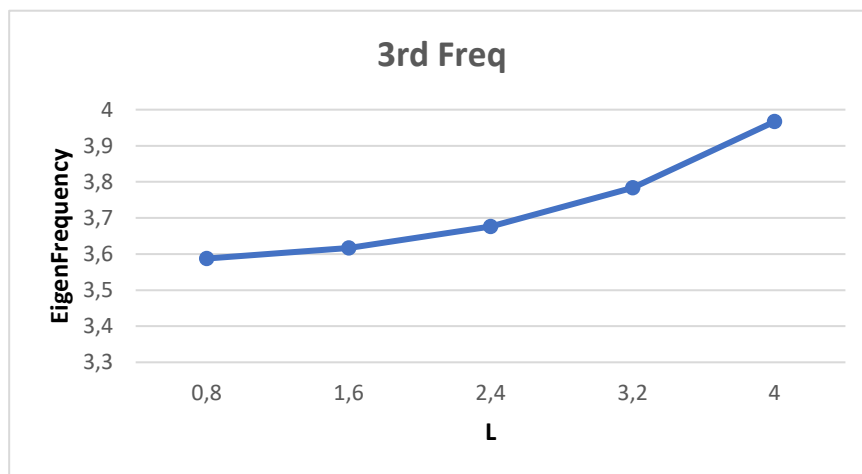


Γράφημα 4: Καμπύλη τιμών για την 9^η ιδιοσυχνότητα

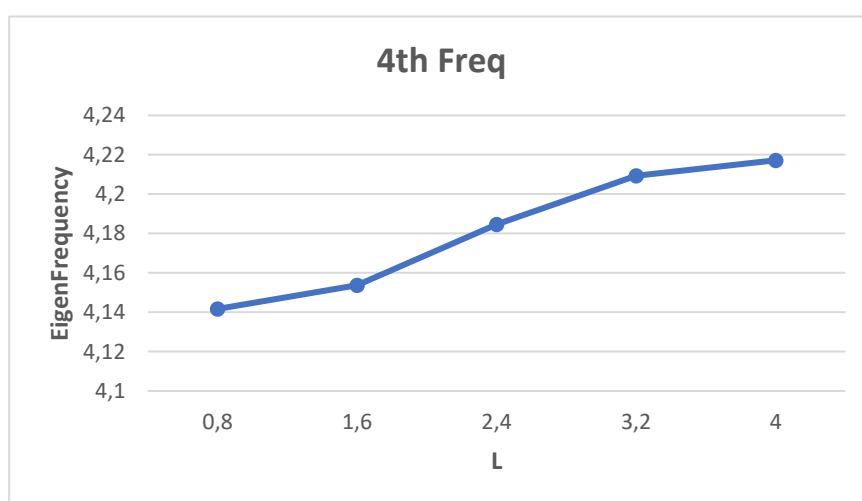
Για την 6^η και 10^η ιδιοσυχνότητα παρατηρείται πως το εύρος των τιμών τους είναι αρκετά μικρό και μπορεί να θεωρηθεί ότι δεν υπάρχει μεταβολή της τιμής τους. Ακολουθούν τα γραφήματα και για τις υπόλοιπες ιδιοσυχνότητες:



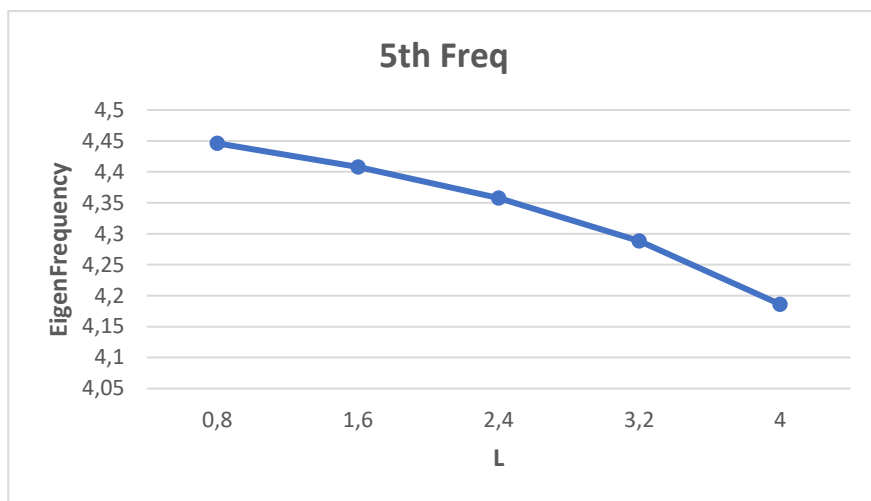
Γράφημα 2^{ης} Ιδιοσυχνότητας



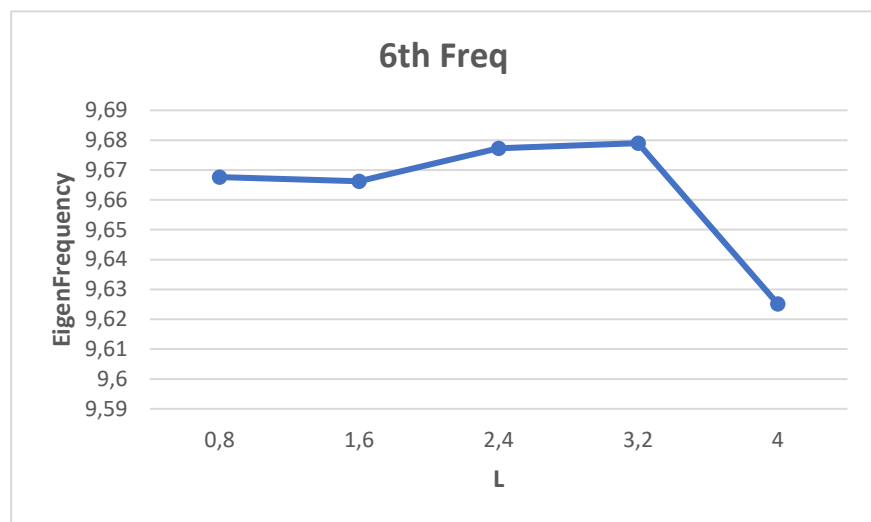
Γράφημα 3^{ης} Ιδιοσυχνότητας



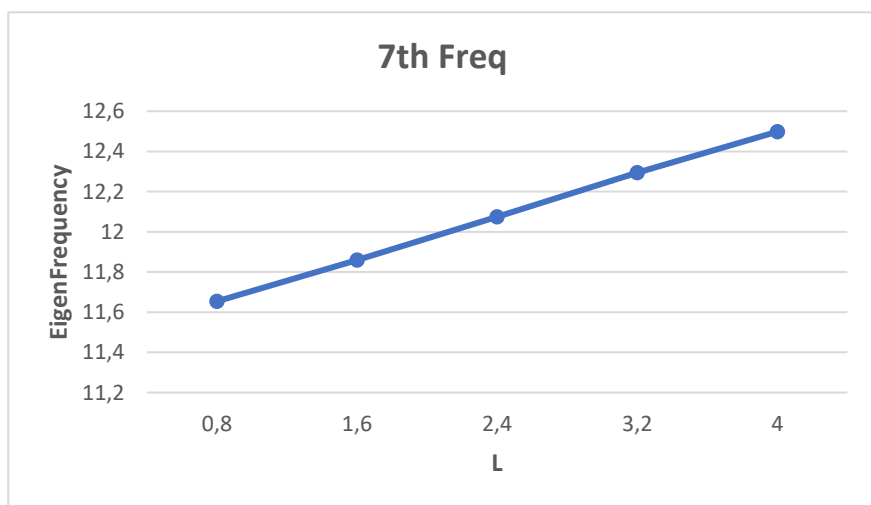
Γράφημα 4^{ης} Ιδιοσυχνότητας



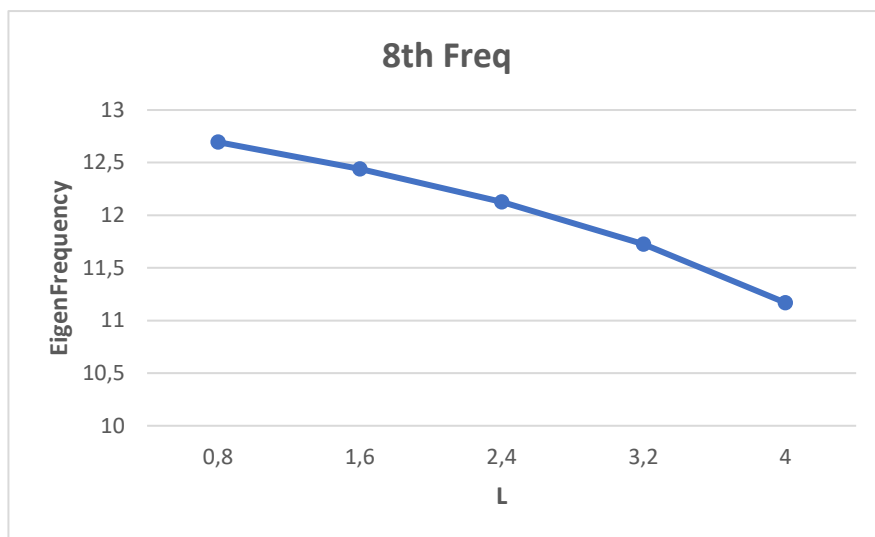
Γράφημα 5^{ης} Ιδιοσυχνότητας



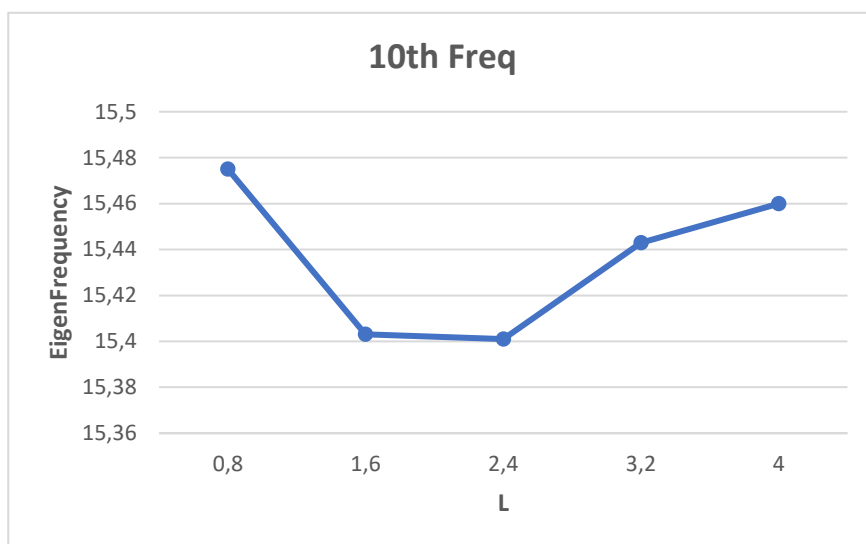
Γράφημα 6^{ης} Ιδιοσυχνότητας



Γράφημα 7^{ης} Ιδιοσυχνότητας



Γράφημα 8^{ης} Ιδιοσυχνότητας



Γράφημα 10^{ης} Ιδιοσυχνότητας

Δεύτερη σημαντική παρατήρηση που αξίζει να σημειωθεί, είναι ότι στις ιδιομορφές της σύνθετης δοκού, σε όλα τα μοντέλα προηγείται σε σειρά η 1^η μεταφορική ιδιομορφή κατά τον άξονα z σε σχέση με αυτή του άξονα y. Αυτό οφείλεται στη σκληρότητα της δοκού.

Για τον υπολογισμό της σκληρότητας k, χρειάστηκε να κάνουμε, με τη βοήθεια του Comsol, μία επιπλέον στατική μελέτη του προβλήματος μας, ώστε να σημειώσουμε τις μέγιστες μετατοπίσεις που παρατηρούνται σε κάθε μοντέλο. Η διαδικασία αυτή εκτελέστηκε 2 φορές, μία πακτώνοντας τη δοκό από τη μία πλευρά και τοποθετώντας της δύναμη F σε ακμή κατά τον άξονα y, ενώ τη δεύτερη φορά η ίδια δύναμη τοποθετήθηκε σε ακμή κατά τον άξονα z.

Στη συνέχεια για κάθε μοντέλο που είχαμε, υπολογίστηκε η σκληρότητα της δοκού με τη χρήση του τύπου (Πίνακες 5, 6) :

$$k = \frac{F}{D}$$

όπου D: η μέγιστη τιμή της μετατόπισης στον άξονα y και z.

Πίνακας 5: Σκληρότητα k_y για κάθε μοντέλο.

L(m)	0.8	1.6	2.4	3.2	4.0
Max Disp(m)	1,43E-03	1,47E-03	1,52E-03	1,59E-03	1,67E-03
k(N/m)	2,10E+07	2,04E+07	1,97E+07	1,89E+07	1,80E+07

Πίνακας 6: Σκληρότητα k_z για κάθε μοντέλο.

L(m)	0.8	1.6	2.4	3.2	4.0
Max Disp(m)	2,06E-03	2,13E-03	2,23E-03	2,34E-03	2,50E-03
k(N/m)	1,46E+07	1,41E+07	1,35E+07	1,28E+07	1,20E+07

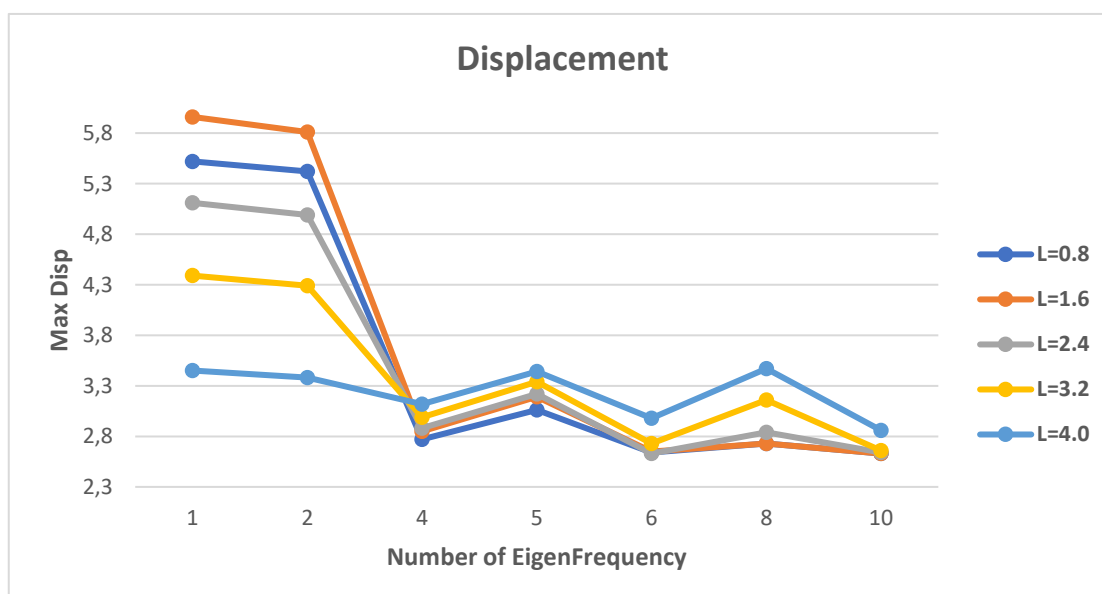
Από τους παραπάνω πίνακες βλέπουμε πως το k_y είναι μεγαλύτερο από το k_z σε όλες τις περιπτώσεις. Αυτό πρακτικά σημαίνει ότι η δοκός είναι πιο εύκαμπτη στον άξονα z από ότι στο y και εξηγεί γιατί οι μεταφορικές ιδιομορφές στον z προηγούνται αυτών του y.

Συνεχίζοντας, θα προσπαθήσουμε να αξιολογήσουμε τα μοντέλα βάσει της μέγιστης μετατόπισης (displacement) που παρουσιάζουν σε κάθε ιδιομορφή. Στον παρακάτω πίνακα είναι σημειωμένες οι μέγιστες μετατοπίσεις για κάθε ιδιομορφή και ιδιοσυχνότητα.

Πίνακας 7: Μέγιστες Μετατοπίσεις για κάθε Ιδιοσυχνότητα

Max Disp (m)	L = 0.8	L = 1.6	L = 2.4	L = 3.2	L = 4.0
1	5.52	5.96	5.11	4.39	3.45
2	5.42	5.81	4.99	4.29	3.38
3	5.35	5.38	5.03	4.59	3.88
4	2.77	2.85	2.88	2.99	3.12
5	3.06	3.19	3.22	3.34	3.44
6	2.64	2.65	2.63	2.73	2.98
7	3.17	3.17	2.99	2.78	2.48
8	2.73	2.73	2.84	3.16	3.47
9	4.13	4.07	4.01	3.96	4.05
10	2.63	2.63	2.64	2.66	2.86

Μεταφέροντας τα δεδομένα του πίνακα σε γράφημα, παρατηρούνται οι διαφοροποιήσεις που υπάρχουν στις τιμές των μετατοπίσεων για κάθε μοντέλο. Να σημειωθεί ότι στο γράφημα τοποθετήθηκαν μόνο οι ιδιοσυχνότητες με μεταφορικές ιδιομορφές στους άξονες y και z , εξαιρέθηκαν δηλαδή οι 3^η, 7^η (στρεπτικές) και η 9^η (εφελκυστική) ιδιοσυχνότητες.



Γράφημα 5: Συμπεριφορά μετατοπίσεων σε κάθε μοντέλο

Το μεγαλύτερο εύρος τιμών παρατηρείται για τις 2 πρώτες ιδιοσυχνότητες, ενώ στη συνέχεια οι τιμές σε κάθε ιδιομορφή βρίσκονται αρκετά κοντά μεταξύ τους.

Η έντονη διαφορά των τιμών για τις 2 πρώτες ιδιομορφές πιθανώς οφείλεται στη δυσκολία του Comsol να δημιουργήσει καλά elements στο τμήμα του πλέγματος της δοκού, όπου βρίσκεται η μεταβαλλόμενη διάσταση (L), σε συνδυασμό με το γεγονός ότι οι συγκεκριμένες ιδιομορφές εμφανίζουν την μέγιστη μετατόπιση σε εκείνο το τμήμα.

6. ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΜΕ ΑΠΛΗ ΔΟΚΟ

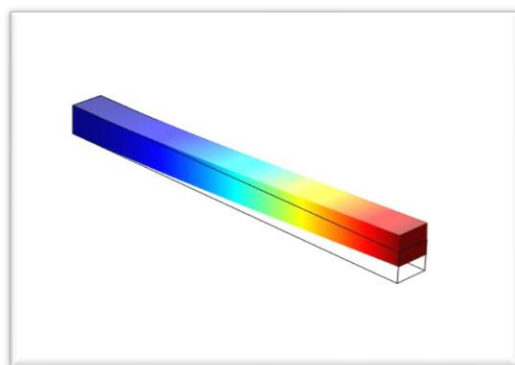
Σε αυτή την ενότητα θα γίνει μία κατά το δυνατό σύγκριση της δοκού δύο υλικών που μελετήσαμε με μία κοινή δοκό αλουμινίου ίδιων διαστάσεων. Αρχικά, πραγματοποιήθηκε η ίδια ιδιομορφική ανάλυση για την απλή δοκό, με στόχο τον υπολογισμό των 10 πρώτων ιδιομορφών – ιδιοσυχνότητων του συστήματος αυτού.

Ακολουθεί σχετικός πίνακας αποτελεσμάτων:

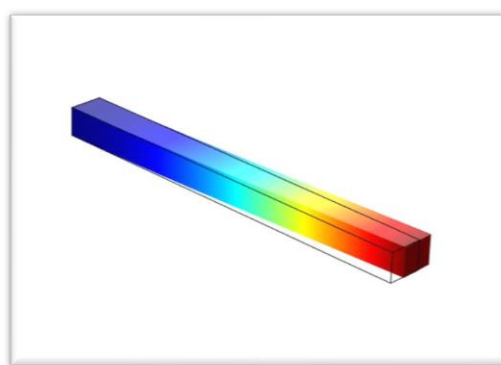
Πίνακας 8: Ιδιοσυχνότητες απλής δοκού

N/a	EigenFreq
1	0,83621
2	1,001
3	5,1207
4	6,069
5	10,301
6	13,855
7	16,202
8	18,133
9	25,951
10	29,881

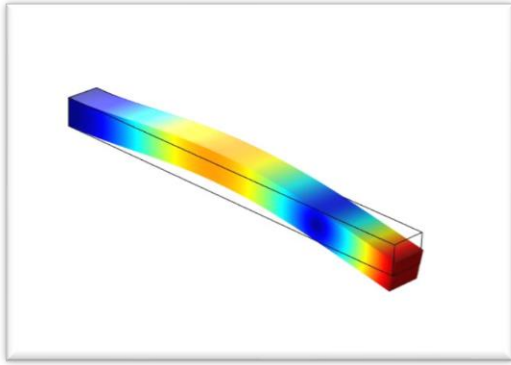
Στη συνέχεια παραθέτονται και οι δέκα ιδιομορφές της δοκού σύμφωνα με το Comsol:



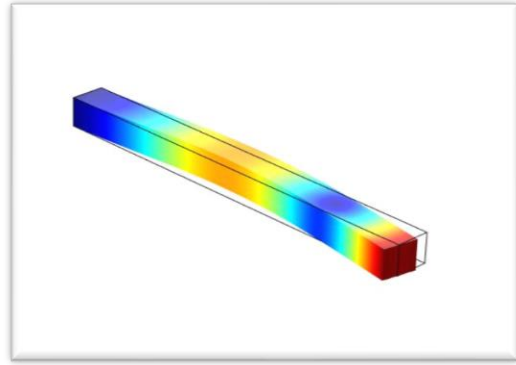
1^η Ιδιομορφή



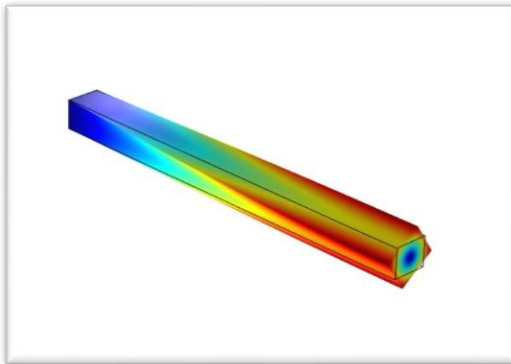
2^η Ιδιομορφή



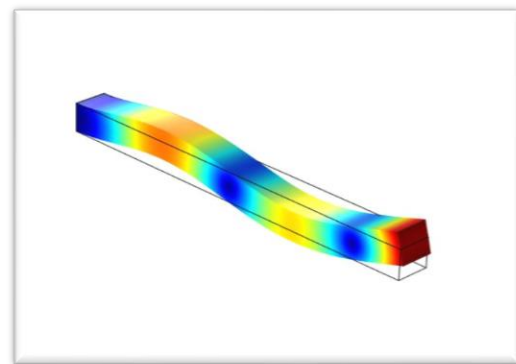
3^η Ιδιομορφή



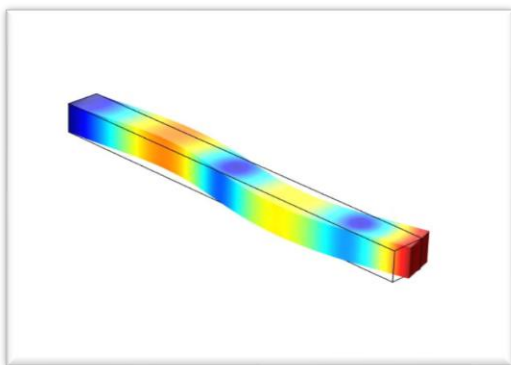
4^η Ιδιομορφή



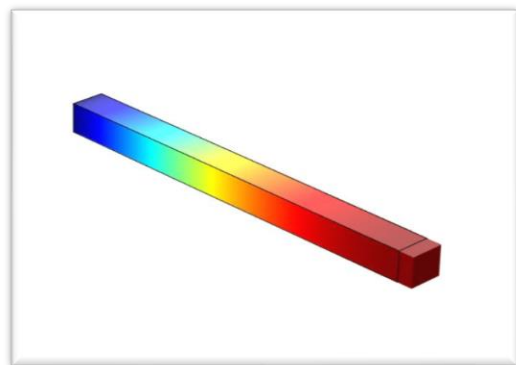
5^η Ιδιομορφή



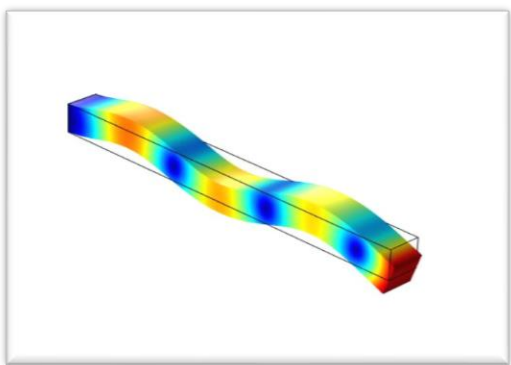
6^η Ιδιομορφή



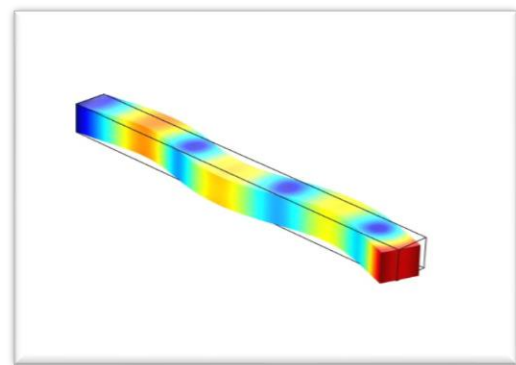
7^η Ιδιομορφή



8^η Ιδιομορφή



9^η Ιδιομορφή



10^η Ιδιομορφή

Και οι αντίστοιχες μέγιστες μετατοπίσεις για κάθε ιδιομορφή:

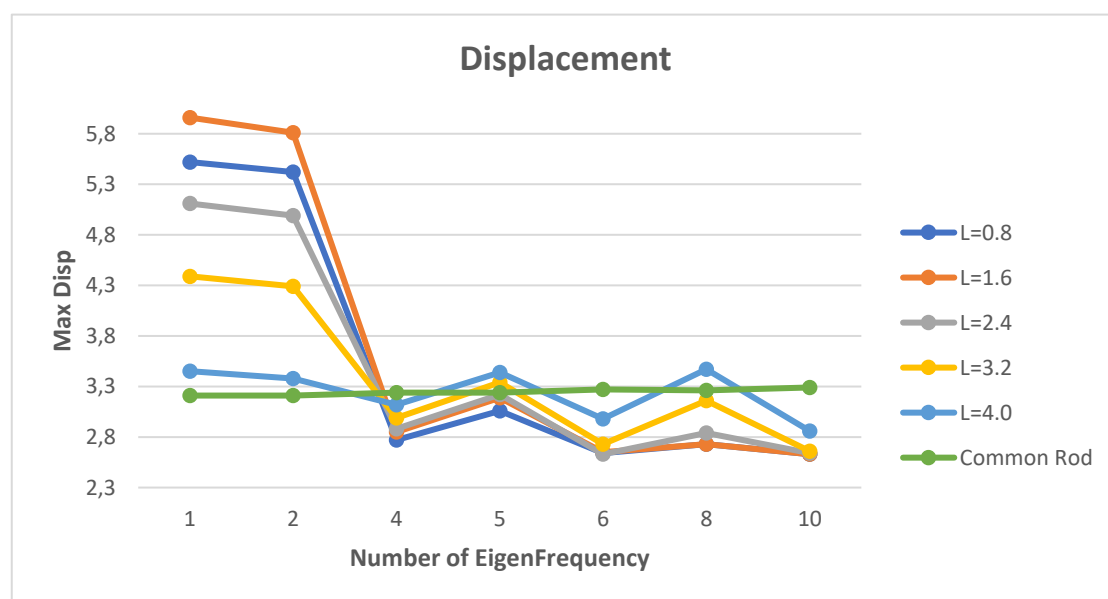
Πίνακας 9: Μέγιστες Μετατοπίσεις ανά ιδιοσυχνότητα στην απλή δοκό

EigenFreq	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Max Disp (m)	3.21	3.21	3.24	3.24	3.46	3.27	3.26	2.44	3.29	3.29

Η πρώτη παρατήρηση που μπορούμε να κάνουμε είναι ότι υπάρχει διαφοροποίηση τόσο στη σειρά, με την οποία παρουσιάζονται οι ιδιομορφές στην κοινή δοκό σε σχέση με τη σύνθετη, όσο και στον τύπο της ιδιομορφής. Για παράδειγμα, η σύνθετη δοκός παρουσιάζει δύο στρεπτικές ιδιομορφές στις πρώτες 10 τιμές σε αντίθεση με την άλλη, που παρουσιάζει μόνο μία, αλλά εμφανίζει την 3η μεταφορική ιδιομορφή και στους δύο άξονες (y , z). Επίσης, στην απλή δοκό φαίνεται να προηγούνται οι μεταφορικές ιδιομορφές, κατά τον άξονα y , αυτών του άξονα z . Αυτό πιθανώς, να οφείλεται στη διαφορετική σκληρότητα των δύο δοκών λόγω χρήσης του δεύτερου υλικού.

Συγκρίνοντας τους πίνακες 3 και 8, παρατηρείται μεγάλη διαφορά στις τιμές των ιδιοσυχνοτήτων, καθώς αυτές της δοκού από αλουμίνιο είναι, κατά πολύ, μεγαλύτερες των αντίστοιχων της σύνθετης. Μάλιστα για κάποιες τιμές η διαφορά αυτή φτάνει να είναι υπερδιπλάσια.

Προσθέτοντας στο γράφημα 5 και τις τιμές των μέγιστων μετατοπίσεων της κοινής δοκού για τις αντίστοιχες μεταφορικές ιδιομορφές, παρατηρείται πως έχουν πολύ μικρές αλλαγές σε κάθε ιδιομορφή και θα μπορούσε να θεωρηθεί ότι τελικώς είναι ίδια για όλες. Κάτι τέτοιο δεν συμβαίνει για τη σύνθετη δοκό.



Γράφημα 6: Γραφική σύγκριση μετατοπίσεων απλής – σύνθετης δοκού

7. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Στόχος της παρούσας διπλωματικής εργασίας ήταν η διερεύνηση των δυναμικών ιδιοτήτων μίας σύνθετης δοκού, δύο υλικών, με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων. Βασική ιδιαιτερότητα της ιδιομορφικής ανάλυσης αυτής ήταν η παραμετροποίηση μίας διάστασης του μοντέλου της δοκού, με αποτέλεσμα την τελική επεξεργασία πέντε παρομοιότυπων μοντέλων. Τα αποτελέσματα της ανάλυσης ήταν οι δέκα πρώτες ιδιομορφές και ιδιοσυχνότητες κάθε μοντέλου.

Ο υπολογισμός τους έγινε με τη χρήση του εμπορικού λογισμικού Comsol Multiphysics, με το οποίο παρατηρήσαμε τη συμπεριφορά των τιμών των ιδιοσυχνοτήτων, τη συμπεριφορά των τιμών της μετατόπισης σε κάθε ιδιομορφή, τη σειρά εμφάνισης αλλά και τη συμπεριφορά των ιδιομορφών.

Στη συνέχεια, πραγματοποιήθηκε σύγκριση της σύνθετης δοκού με μία απλή, αποτελούμενη μόνο από αλουμίνιο. Από τη σύγκριση αυτή, προέκυψε ότι με τη χρήση δεύτερου υλικού καταφέραμε να βελτιώσουμε τα δυναμικά χαρακτηριστικά της δοκού και να μειώσουμε τις ιδιοσυχνότητες της κατά πολύ μεγάλο βαθμό. Επίσης, παρατηρήθηκαν μεγαλύτερες διαφοροποιήσεις στις τιμές των μετατοπίσεων σε κάθε ιδιομορφή κάτι που όπως είδαμε δεν ισχύει για την απλή δοκό.

Μία τέτοια σύνθετη δοκός θα ήταν κατάλληλη για εφαρμογή σε δυναμικά συστήματα στα οποία οι εξωτερικές διεγέρσεις (π.χ. ένας άνεμος με δυνάμεις ημιτονοειδούς συμπεριφοράς) έχουν υψηλές συχνότητες, έτσι ώστε να αποφευχθεί η κατάσταση συντονισμού του συστήματος. Αντίθετα, για συστήματα στα οποία, οι εξωτερικές διεγέρσεις έχουν χαμηλές συχνότητες (π.χ. σεισμός) είναι προτιμότερη η χρήση της απλής δοκού.

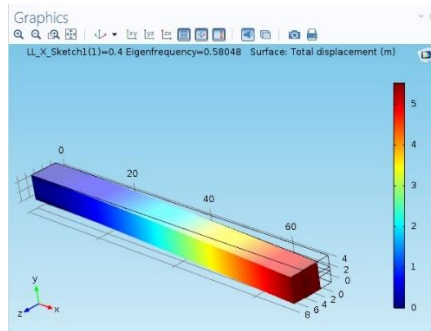
Ένα πρόβλημα το οποίο αντιμετωπίσαμε στα πλαίσια αυτής της εργασίας ήταν η ανάγκη για μεγάλη υπολογιστική ισχύ στο κομμάτι επίλυσης του προβλήματος για πλέγματα με πολύ μεγάλο αριθμό elements (>20000). Όπως είναι γνωστό, η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων έχει ως κύριο μειονέκτημα της, την ανάγκη για μεγάλη υπολογιστική ισχύ. Τελικώς, το πρόβλημα αυτό ξεπεράστηκε με χρήση εναλλακτικού χειροκίνητου πλέγματος, του οποίου η ανάλυση απέδιδε αρκετά καλά αποτελέσματα.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

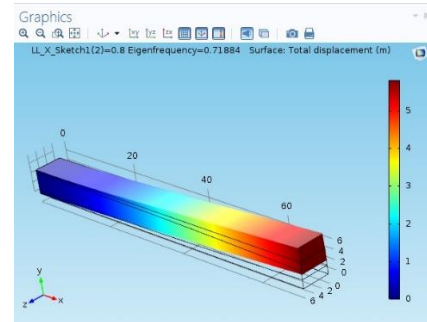
- [1] Σ. Πνευματικός, Δυναμικά Συστήματα, Πανεπιστήμιο Πάτρας, Τμήμα Μαθηματικών, 2010-2011
- [2] Βενετσάνος, Αντωνιάδης, Εργαστήριο Δυναμικής και Κατασκευών, ΕΜΠ, Σχολή Μηχανολόγων Μηχανικών, 2010-2011
- [3] Αμφιθέα Τσιγούρη, Δυναμική απόκριση πλακών και επιρροή αποκόλλησης, Διπλωματική εργασία, Πολυτεχνείο Κρήτης, 2016
- [4] Γεώργιος Ταϊρίδης, Optimal design of smart structures with intelligent control, Διδακτορική Διατριβή, Πολυτεχνείο Κρήτης, 2016
- [5] Θεόφιλος Αγαθοκλέους, Προσομοίωση σύνθετης διάταξης πιεζοηλεκτρικών στοιχείων με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων, Πολυτεχνείο Κρήτης, 2013
- [6] Νικόλαος Μπιλάλης, Εμμανουήλ Μαραβελάκης, Συστήματα CAD/CAM και τρισδιάστατη μοντελοποίηση – 2^η Έκδοση, Οκτώβριος 2014
- [7] Comsol Multiphysics CYCLOPEDIA, engineering guide (www.comsol.com) προσπελάστηκε την 27/9/2017.
- [8] Matweb, MATERIAL PROPERTY DATA (www.matweb.com) προσπελάστηκε την 25/8/2017.
- [9] NAFEMS, (<https://www.nafems.org/join/resources/knowledgebase/001>) προσπελάστηκε την 20/9/2017.
- [10] Introduction to Autodesk Algor Simulation FEA, Nodes and Elements (http://download.autodesk.com/us/algor/userguides/mergedProjects/Getting_Started/introduction_to_algor/Nodes_and_Elements.htm) προσπελάστηκε την 27/9/2017.
- [11] ANSYS, Appendix A - Mesh Quality, Meshing Application Introduction, April 28, 2009

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

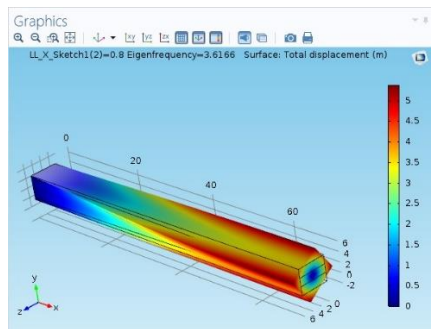
Ιδιομορφές δοκού για $L = 1.6$:



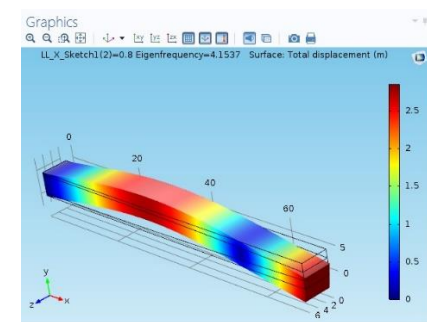
1^η Ιδιομορφή



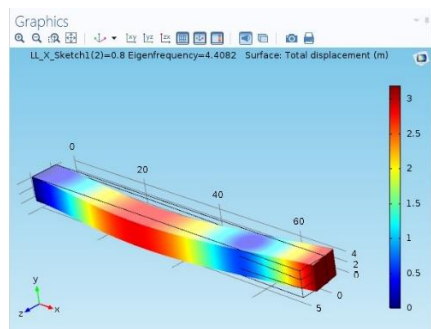
2^η Ιδιομορφή



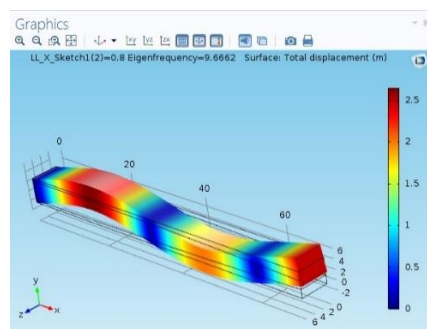
3^η Ιδιομορφή



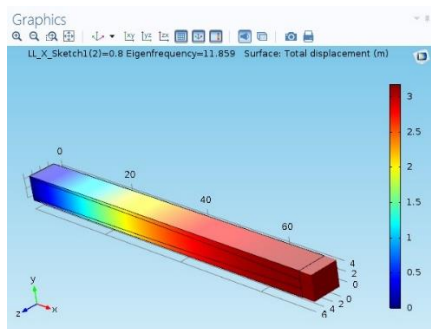
4^η Ιδιομορφή



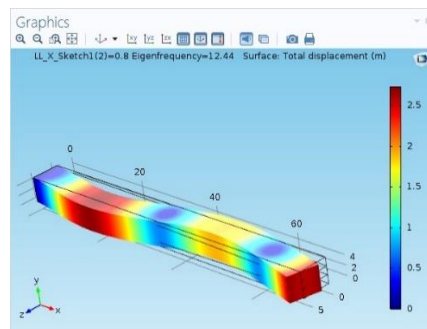
5^η Ιδιομορφή



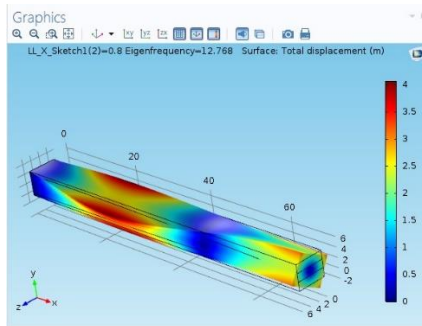
6^η Ιδιομορφή



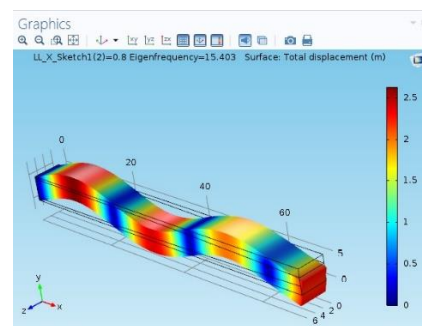
7^η Ιδιομορφή



8^η Ιδιομορφή

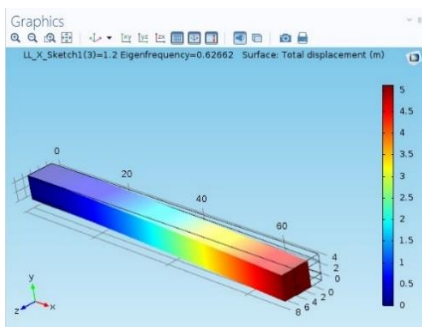


9^η Ιδιομορφή

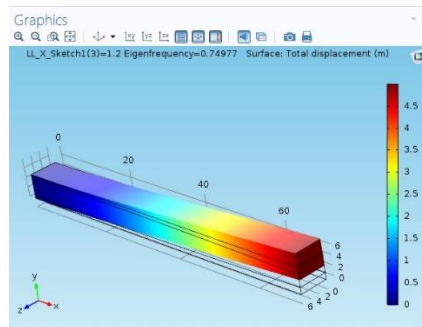


10^η Ιδιομορφή

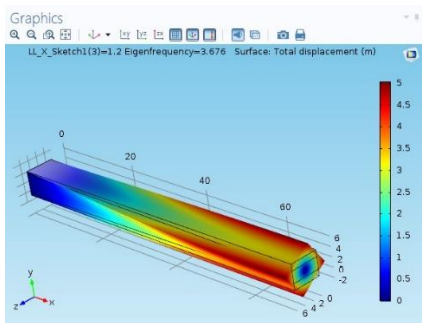
Ιδιομορφές δοκού για $L = 2.4$:



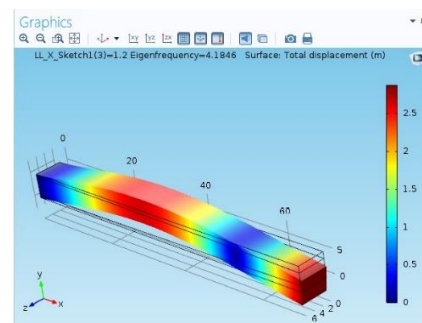
1^η Ιδιομορφή



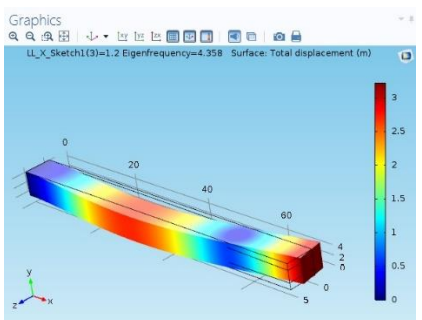
2^η Ιδιομορφή



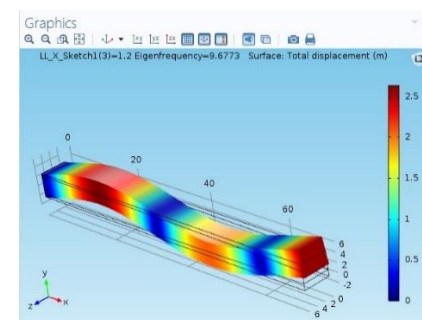
3^η Ιδιομορφή



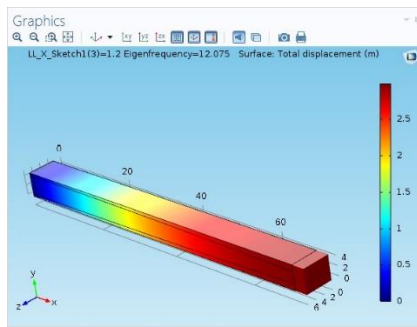
4^η Ιδιομορφή



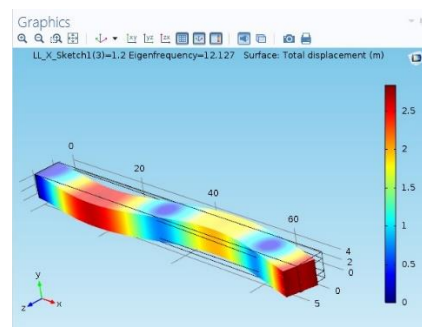
5^η Ιδιομορφή



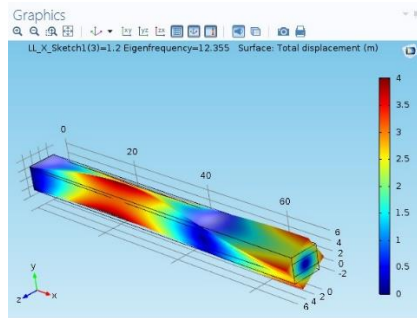
6^η Ιδιομορφή



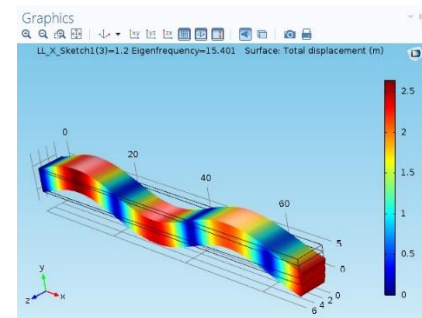
7^η Ιδιομορφή



8^η Ιδιομορφή

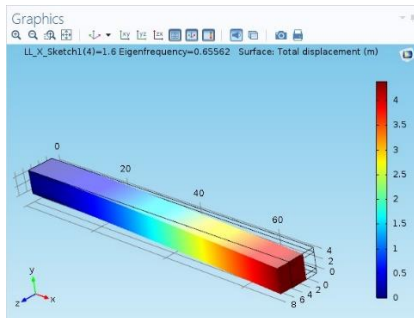


9^η Ιδιομορφή

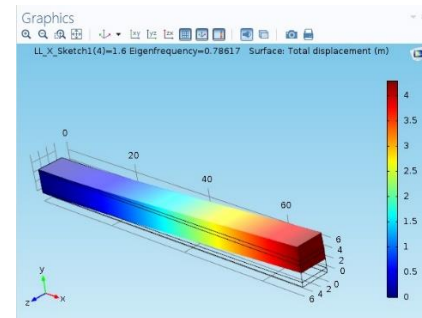


10^η Ιδιομορφή

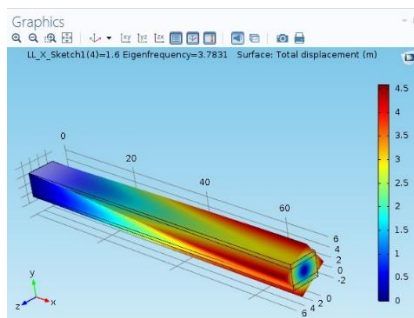
Ιδιομορφές δοκού για $L = 3.2$:



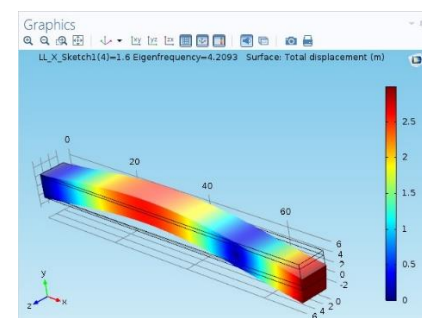
1^η Ιδιομορφή



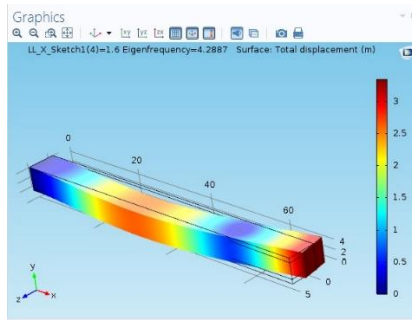
2^η Ιδιομορφή



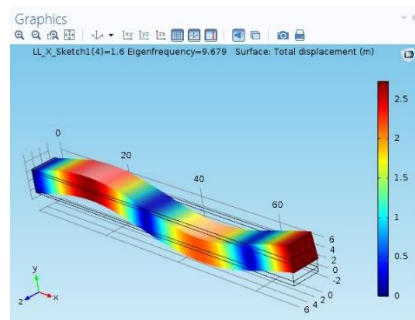
3^η Ιδιομορφή



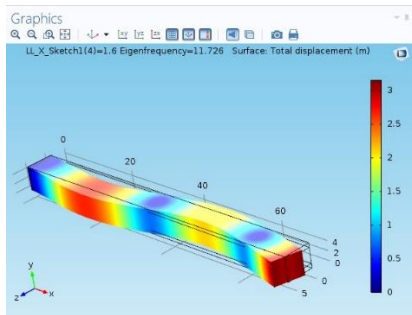
4^η Ιδιομορφή



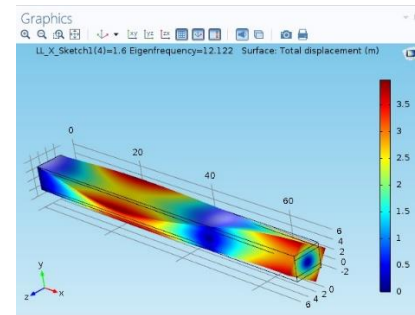
5^η Ιδιομορφή



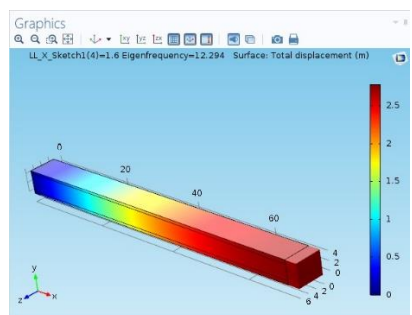
6^η Ιδιομορφή



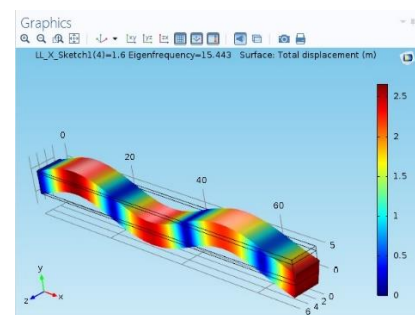
7^η Ιδιομορφή



8^η Ιδιομορφή

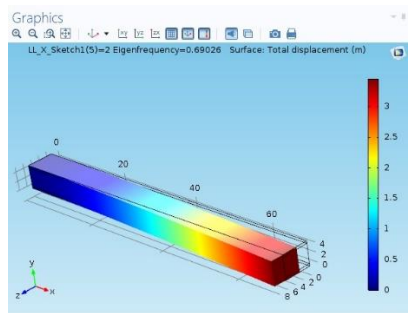


9^η Ιδιομορφή

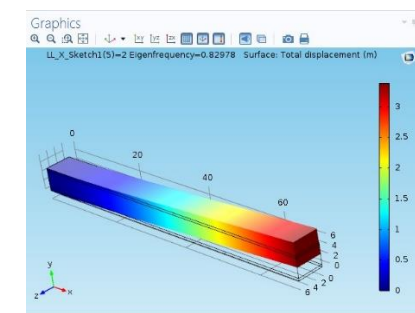


10^η Ιδιομορφή

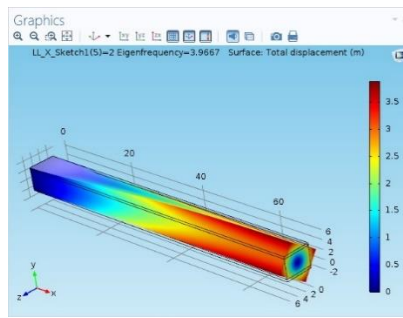
Ιδιομορφές δοκού για $L = 4.0$:



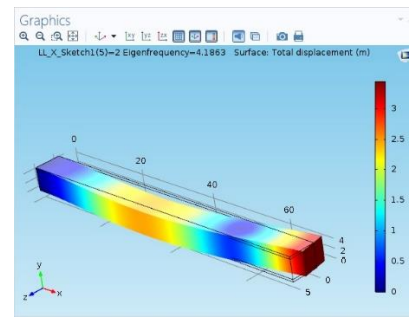
1^η Ιδιομορφή



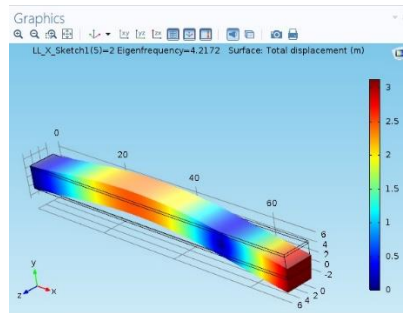
2^η Ιδιομορφή



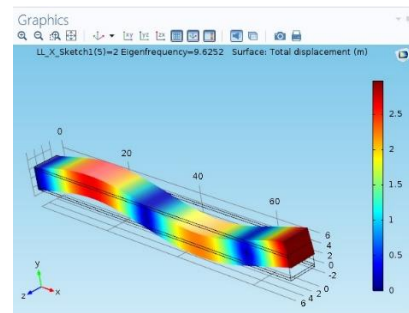
3^η Ιδιομορφή



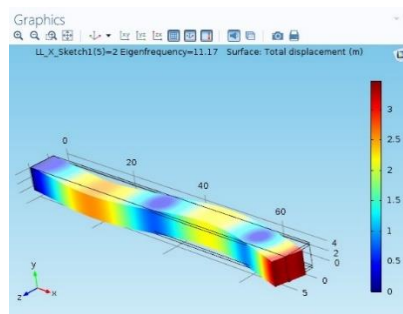
4^η Ιδιομορφή



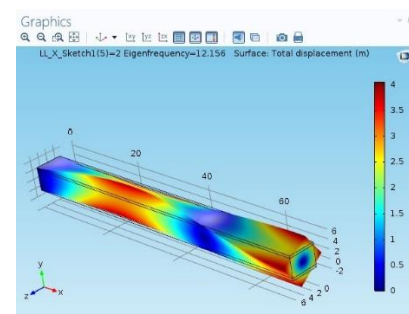
5^η Ιδιομορφή



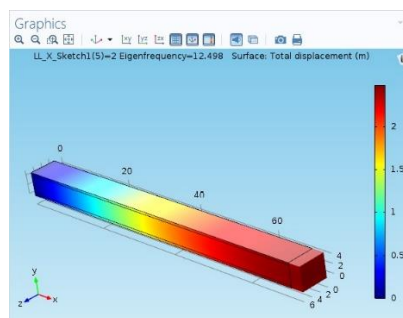
6^η Ιδιομορφή



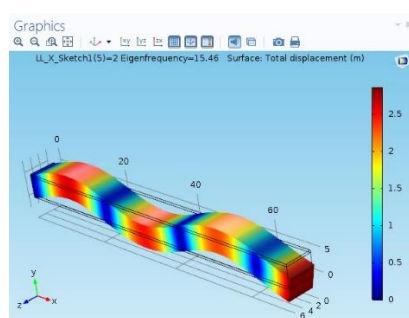
7^η Ιδιομορφή



8^η Ιδιομορφή



9^η Ιδιομορφή



10^η Ιδιομορφή