



Οι μεταβολές της παραμέτρου «χρόνος» λόγω Σχετικότητας και εφαρμογές στη Γεωδαισία

Αντωνοπούλου Αλεξάνδρα

*Διπλωματική Εργασία
που υποβλήθηκε στη Σχολή
Μηχανικών Ορυκτών Πόρων
ως μέρος των απαιτήσεων
για τη λήψη του προπτυχιακού διπλώματος
στο*

Πολυτεχνείο Κρήτης

Υπό την επίβλεψη του Καθηγητή
Μερτίκα Στυλιανού



Χανιά

Ιούλιος 2017

Περίληψη

Η παρούσα διπλωματική εργασία πραγματεύεται τις επιδράσεις και τις μεταβολές στον χρόνο των δορυφόρων που κινούνται με υψηλές ταχύτητες και σε διαφορετικό πεδίο βαρύτητας. Στόχος είναι ο προσδιορισμός των απαραίτητων εκείνων αναγωγών στον χρόνο που τηρούν οι δορυφόροι με την εφαρμογή της Ειδικής και Γενικής Θεωρίας της Σχετικότητας.

Τα συστήματα δορυφορικού εντοπισμού (Global Navigation Satellite Systems, GNSS) χρησιμοποιούν υψηλής ακρίβειας και σταθερότητας ατομικά χρονόμετρα, στους δορυφόρους αλλά και στο έδαφος, ώστε να προσδιορίζεται η θέση, η ταχύτητα και ο χρόνος ενός δέκτη σε παγκόσμια κλίμακα. Επίσης, οι δορυφόροι αλτιμετρίας χρησιμοποιούν παρόμοια χρονόμετρα για τη μέτρηση αποστάσεων από τον δορυφόρο, σε ύψος 1300 km, μέχρι την επιφάνεια της θάλασσας. Όλα αυτά τα δορυφορικά χρονόμετρα υπόκεινται σε βαρυτικές και κινητικές επιδράσεις που εξηγούνται με τη Θεωρία της Σχετικότητας, και οι οποίες αν δεν ληφθούν προσεκτικά υπ' όψιν, οι δορυφορικές παρατηρήσεις δεν θα είχαν καμία χρησιμότητα.

Η εργασία αυτή μελέτησε και εξέτασε τα φαινόμενα και τις επιδράσεις αυτές στην τήρηση ενός απόλυτου χρόνου ακριβείας, όπως είναι η διαστολή του χρόνου, το φαινόμενο Sagnac, η βαρυτική μετατόπιση συχνότητας, κ.ά. Κατόπιν, ανέλυσε της εξισώσεις που διέπουν τα φαινόμενα αυτά, σε συνδυασμό με τις τροχιές των δορυφόρων, ώστε προσδιοριστούν οι προβλεπόμενες μετατοπίσεις στη συχνότητα των δορυφορικών χρονομέτρων. Επίσης, προσδιόρισε τις αναμενόμενες μεταβολές και μετατοπίσεις στον χρόνο των συστημάτων εντοπισμού GNSS αλλά και επεξεργάστηκε δεδομένα στους δορυφόρους αλτιμετρίας και προσδιόρισε τις αναγκαίες αναγωγές για τη σωστή και ακριβή τήρηση του χρόνου.

Τα αποτελέσματα που προέκυψαν συμφωνούν απόλυτα με αντίστοιχες μελέτες που αναφέρονται στη βιβλιογραφία για τα συστήματα GNSS. Αντίστοιχες σχετικιστικές επιδράσεις προσδιορίστηκαν επίσης και για τα χρονόμετρα στους δορυφόρους αλτιμετρίας αλλά δεν έγινε σύγκριση επειδή δεν υπάρχουν μέχρι σήμερα αντίστοιχα βιβλιογραφικά δεδομένα. Ωστόσο, επειδή οι δορυφόροι αλτιμετρίας κινούνται σε διαφορετικές τροχιές, πρέπει να διερευνηθεί κατά πόσο οι σχετικιστικές διορθώσεις που χρησιμοποιούνται σε αυτή τη διπλωματική είναι επαρκείς ή χρειάζεται να συμπεριληφθούν διορθώσεις υψηλότερης τάξης.

Η παρούσα διπλωματική εργασία για πρώτη φορά πραγματοποίησε εκτενή μελέτη για επιδράσεις φαινομένων της Θεωρίας της Σχετικότητας στα χρονόμετρα των δορυφόρων αλτιμετρίας, αλλά και στα χρονόμετρα του συστήματος δορυφορικού εντοπισμού της Κίνας BeiDou.

Abstract

This thesis studies the relativistic effects and variations on the proper time of satellite clocks moving at high speeds and along different trajectories in space. The main objective is to determine the time corrections needed to be applied on navigation and altimetry satellite clocks, in order to synchronize them with reference clocks on earth, utilizing the fundamental principles of Special and General Relativity.

Global Navigation Satellite Systems (GNSS) use very accurate and stable atomic clocks, in satellites and on the ground, in order to determine position, velocity and time of a GNSS receiver on or near earth's surface. Altimetry satellites use also high accuracy clocks to measure distances from the satellite (on an altitude of about 1300 km) down to the sea surface. These clocks undergo gravitational and motional frequency shifts which produce significant errors that if relativistic effects not taken into account, no accurate satellite observation would be possible.

This study examines relativistic effects, from the view of absolute timekeeping, such as time dilation, Sagnac effect, gravitational frequency shift, etc. Then, it analyses the equations governing these relativistic effects, combined with orbital mechanics, in order to specify the predicted satellite clock frequency shifts. In addition, real data from altimetry satellite Jason-2 were processed and the necessary corrections applied to its altimeter were determined.

The computed variations and frequency shifts on GNSS clocks are in complete agreement with corresponding published studies for GNSS systems. The same relativistic effects were also determined for altimetry satellite clocks, but no comparison was made because the related literature is not widely available so far. However, since altimetry satellites have different orbit characteristics, it should be examined whether the relativistic corrections used in this thesis are sufficient or corrections of higher order need to be added.

The contribution of this work is the extensive study of relativistic frequency shifts on several altimetry satellite clocks, as well as on clocks for the BeiDou Global Navigation Satellite System.

Ευχαριστίες

Η παρούσα διπλωματική εργασία εκπονήθηκε στο εργαστήριο Γεωδαισίας και Πληροφορικής των Γεωεπιστημών (GeoMatLab) που ανήκει στη Σχολή Μηχανικών Ορυκτών Πόρων του Πολυτεχνείου Κρήτης. Αρχικά, εκφράζω βαθιά ευγνωμοσύνη στον αξιότιμο καθηγητή μου Στέλιο Μερτίκα για την ευκαιρία που μου έδωσε να μελετήσω ένα τόσο ενδιαφέρον και πρωτοποριακό θέμα στη διπλωματική μου εργασία, αλλά και για τις ανεκτίμητης αξίας συμβουλές, την εμπιστοσύνη και τη γενναιόδωρη, πολύμηνη στήριξή του στην ολοκλήρωση αυτής της προσπάθειας. Θερμές ευχαριστίες οφείλω και σε όλο το επιτελείο του εργαστηρίου Γεωδαισίας, Ξενοφώντα Φραντζή, Αχιλλέα Τριπολιτσιώτη, Δημήτρη Γαλανάκη, για την πολύμηνη συνεργασία, την υπομονή και τον χρόνο που διέθεσαν. Οφείλω επίσης ένα μεγάλο ευχαριστώ στον αξιότιμο καθηγητή μου Διονύση Χριστόπουλο που διάβασε με επιμέλεια αυτή την εργασία και έκανε εύστοχα σχόλια και καίριες, ουσιαστικές παρατηρήσεις. Θερμές ευχαριστίες οφείλω επίσης στον αγαπητό καθηγητή μου Παναγιώτη Παρτσινέβελο για την προθυμία του να βοηθήσει με κάθε τρόπο και την πολύτιμη ενθάρρυνση σε όλα τα στάδια αυτής της προσπάθειας. Νιώθω τυχερή που συνεργάστηκα με αυτούς τους ανθρώπους. Δεν θα μπορούσα να λησμονήσω να εκφράσω ευγνωμοσύνη στην οικογένειά μου αλλά και στον αγαπημένο μου για την κατανόηση, την ανεξάντλητη υπομονή, τη στήριξη και για αμέτρητους άλλους λόγους.

Πίνακας περιεχομένων

1	Εισαγωγή	9
2	Χρόνος & Συστήματα Αναφοράς.....	13
2.1	Συστήματα Αναφοράς	13
2.1.1	Το Ουράνιο Σύστημα Αναφοράς και οι υλοποιήσεις του	16
2.1.2	Το Γήινο-Γεωσταθερό Σύστημα Αναφοράς και οι υλοποιήσεις του.....	16
2.2	Ο χρόνος και η μέτρησή του	18
2.2.1	UTC – Το Παγκόσμιο Πρότυπο Χρόνου	19
2.2.2	Δυναμικός Χρόνος.....	20
2.2.3	Αστρικός Χρόνος	21
2.2.4	Ατομικός Χρόνος.....	21
2.2.5	Ατομικά Χρονόμετρα	22
3	Βαρυτικό Πεδίο & Μηχανική Ουράνιων Σωμάτων	29
3.1	Το πεδίο βαρύτητας.....	29
3.1.1	Ο Νόμος της Παγκόσμιας Έλξης	30
3.1.2	Βαρυτικό Δυναμικό	31
3.1.3	Το πεδίο βαρύτητας της Γης.....	32
3.2	Μηχανική Ουράνιων Σωμάτων	35
3.2.1	Ιστορικά στοιχεία και εισαγωγή στους νόμους του Kepler.....	35
3.2.2	Τα έξι στοιχεία του Kepler (<i>Keplerian elements</i>).....	37
3.2.3	Αναλυτική περιγραφή των νόμων και της εξίσωσης του Kepler	38
3.2.4	Περιγραφή κίνησης δορυφόρου επί της τροχιάς του.....	43
4	Σχετικότητα & διορθώσεις χρόνου	45
4.1	Τα αξιώματα της Ειδικής Θεωρίας.....	45
4.2	Συνέπειες της Ειδικής Θεωρίας	46
4.3	Γενική Θεωρία της Σχετικότητας - Αρχή της Ισοδυναμίας.....	51
4.4	Συνέπειες της Γενικής Θεωρίας – Βαρυτική μετατόπιση συχνότητας	52
4.5	Ολική βαρυτική μετατόπιση συχνότητας δορυφορικού χρονομέτρου	53
4.6	Ολική μετατόπιση συχνότητας.....	54
4.7	Ο χωροχρόνος στη Θεωρία της Σχετικότητας - Μετασχηματισμοί	55
4.7.1	Περιστρεφόμενο Σύστημα.....	56
4.7.2	Σύστημα κοντά στο βαρυτικό πεδίο της Γης.....	56
4.7.3	Γεωειδές – επιφάνεια αναφοράς για δορυφόρους πλοήγησης.....	57
4.7.4	Επίγεια χρονόμετρα.....	59
4.7.5	Δορυφορικά χρονόμετρα	60

4.8	Ανάλυση της εξίσωσης διόρθωσης χρόνου	61
5	Βασικές Αρχές Λειτουργίας Δορυφόρων Εντοπισμού και Αλτιμετρίας.....	65
5.1	Παγκόσμια Δορυφορικά Συστήματα Εντοπισμού και Πλοήγησης – GNSS (Global Navigation Satellite Systems).....	66
5.1.1	GPS (Global Positioning System)	68
5.1.2	Galileo	71
5.1.3	GLONASS.....	74
5.1.4	Compass/BeiDou.....	75
5.2	Δορυφόροι αλτιμετρίας (Altimetry satellites)	77
5.2.1	Αρχές λειτουργίας	77
5.2.2	Δορυφόροι Jason	80
5.2.3	SARAL/AltiKa.....	82
5.2.4	Sentinel-3.....	84
5.2.5	HY-2.....	85
5.2.6	Cryosat-2	85
6	Εφαρμογή Σχετικότητας στο χρόνο των δορυφόρων Εντοπισμού και Αλτιμετρίας	89
6.1	Δορυφόροι GNSS.....	90
6.1.1	Σταθερός όρος (σταθερή κινητική και βαρυτική σχετικιστική επίδραση)	90
6.1.2	Περιοδικός όρος (περιοδική κινητική και βαρυτική σχετικιστική επίδραση λόγω εκκεντρότητας τροχιάς).....	92
6.2	Δορυφόροι Αλτιμετρίας	97
6.1.2	Σταθερός όρος (σταθερή κινητική και βαρυτική σχετικιστική επίδραση)	97
6.2.2	Περιοδικός όρος (περιοδική κινητική και βαρυτική σχετικιστική επίδραση λόγω εκκεντρότητας τροχιάς).....	98
6.2.3	Αντισταθμιστική αναγωγή αλτιμέτρου (Net Instrument Correction).....	101
6.2.4	Εφαρμογή ισοδύναμων εξισώσεων	104
7	Συμπεράσματα	109

1^ο Κεφάλαιο

Εισαγωγή

Στην παρούσα εργασία εξετάζεται η έννοια *χρόνος*, οι παράγοντες που συμμετέχουν στον προσδιορισμό των επιδράσεων στον χρόνο καθώς και το πώς επηρεάζεται από τις διαταραχές στο ρυθμό των χρονομέτρων η λειτουργία των συστημάτων δορυφορικού εντοπισμού και των δορυφόρων αλτιμετρίας. Η μελέτη αυτή έχει ως στόχο τον προσδιορισμό των προβλεπόμενων μετατοπίσεων στη συχνότητα των δορυφορικών χρονομέτρων σε σχέση με επίγεια χρονόμετρα αναφοράς και τελικά τον προσδιορισμό των απαραίτητων διορθώσεων στη συχνότητα των χρονομέτρων τους, ώστε να καθίσταται δυνατός ο συγχρονισμός τους με τα χρονόμετρα στη Γη. Ο χρόνος και το αντίστροφό του, η συχνότητα, είναι η πιο ακριβής μετρήσιμη ποσότητα στη φύση και συχνά ένας σημαντικός παράγοντας στην εξέλιξη της επιστήμης.

Η ταχύτατη επιστημονική και τεχνολογική πρόοδος στα ατομικά χρονόμετρα έχει ωθήσει πλέον τη χρονομέτρηση σε νέα επίπεδα ακρίβειας και σταθερότητας. Ωστόσο, με αυτά τα επίπεδα ακρίβειας, η διατήρηση μιας απόλυτης χρονικής κλίμακας παρουσιάζει δυσκολίες, δεδομένου ότι ένα ατομικό χρονόμετρο είναι τόσο ακριβές που καταγράφει ανεπαίσθητες μεταβολές στην ίδια τη ροή του χρόνου. Αυτές οι μεταβολές δημιουργούν προβλήματα στη μέτρηση και διατήρηση του χρόνου, η οποία απαιτεί να υπάρχουν πολλά χρονόμετρα απόλυτα συγχρονισμένα μεταξύ τους.

Για να μπορούν τα χρονόμετρα στη Γη και στο διάστημα να αναγράφουν έναν μοναδικό, συντονισμένο χρόνο, δηλαδή να είναι συγχρονισμένα μεταξύ τους, θα πρέπει να εφαρμοσθούν διορθώσεις στον ρυθμό λειτουργίας τους. Αυτές οι διορθώσεις βασίζονται στη *θεωρία της Σχετικότητας*, η οποία περιγράφει τις επιδράσεις πάνω στον μετρούμενο τοπικό χρόνο ενός ρολογιού, λόγω της *σχετικής τους κίνησης* ή του *διαφορετικού βαρυτικού δυναμικού* στη θέση που βρίσκονται, σε σχέση με ένα ιδανικό χρονόμετρο αναφοράς.

Όλα τα δορυφορικά συστήματα πλοήγησης, όπως για παράδειγμα το GPS, βασίζονται στην έννοια του συγχρονισμού των χρονομέτρων τους με βάση ένα τοπικό αδρανειακό σύστημα αναφοράς. Τα χρονόμετρα αυτά όμως κινούνται με διαφορετικές ταχύτητες και βρίσκονται σε διαφορετικά σημεία μέσα στο πεδίο βαρύτητας της Γης.

Έχοντας συγχρονισμένα τα επίγεια με τα δορυφορικά χρονόμετρα, οι δορυφόροι εκπέμπουν σήματα γνωρίζοντας τον ακριβή χρόνο εκπομπής, τα οποία λαμβάνονται από κατάλληλους δέκτες στη Γη σε συγκεκριμένο χρόνο. Αξιοποιώντας την αρχή της Ειδικής Σχετικότητας για την ταχύτητα του φωτός, μπορούν να υπολογιστούν οι επιμέρους αποστάσεις και με συνδυασμό μετρήσεων να προσδιοριστούν οι συντεταγμένες σημείων.

Η Ειδική Σχετικότητα περιγράφει ότι η ταχύτητα του φωτός (δηλαδή η ταχύτητα διάδοσης ενός ηλεκτρομαγνητικού κύματος) έχει σταθερή και πεπερασμένη τιμή ως προς οποιοδήποτε

αδρανειακό σύστημα. Επομένως, η σταθερότητα της ταχύτητας του φωτός αλλά και ο ορισμός ενός τοπικού αδρανειακού συστήματος αναφοράς αποτελούν θεμελιώδεις έννοιες για τα δορυφορικά συστήματα εντοπισμού και αλτιμετρίας.

Συνέπεια της Ειδικής Σχετικότητας αποτελεί το γεγονός ότι ο χρόνος ενός χρονομέτρου, όταν αυτό είναι ακίνητο σε ένα αδρανειακό σύστημα αναφοράς, κυλάει πιο γρήγορα σε σχέση με ένα πανομοιότυπο χρονόμετρο, το οποίο κινείται με σχετική ταχύτητα. Επομένως ο χρόνος διάδοσης ενός δορυφορικού σήματος, για παράδειγμα, εξαρτάται από τη σχετική ταχύτητα μεταξύ δορυφόρου και επίγειου δέκτη.

Λόγω της περιστροφής της Γης γύρω από τον άξονά της είναι απαραίτητος και ο ορισμός ενός τοπικού περιστρεφόμενου συστήματος αναφοράς. Σε ένα τέτοιο σύστημα όμως, η ταχύτητα του φωτός δεν είναι σταθερή. Εδώ παρουσιάζεται το σχετικιστικό φαινόμενο Sagnac (*Sagnac effect*), το οποίο είναι η επίδραση στο συγχρονισμό των επίγειων χρονομέτρων εξαιτίας της γωνιακής ταχύτητας της Γης.

Η επίδραση της βαρύτητας στον χρόνο προκύπτει από τη Γενική Θεωρία της Σχετικότητας. Η θεωρία της βαρύτητας κατά Einstein περιγράφει ότι η βαρύτητα δεν είναι δύναμη που έλκει τα σώματα σε έναν ευκλείδειο χώρο, αλλά παρουσιάζεται ως μία παραμόρφωση στον χώρο, που προκαλείται από μία συμπαγή μάζα. Αυτή η παραμόρφωση του χώρου λόγω βαρύτητας έχει ως συνέπεια, οι αποστάσεις ή ο χρόνος που μετρείται να διαφέρουν από τόπο σε τόπο. Όσο πιο κοντά βρίσκεται το χρονόμετρο στη συμπαγή μάζα, τόσο πιο αργά θα κυλάει ο χρόνος του.

Το γεγονός ότι η μάζα της Γης δεν είναι ομοιόμορφα κατανομημένη, αλλά παρατηρείται επιπλάτυνση στους πόλους, δημιουργεί μία επιπλέον επίδραση στον τοπικό χρόνο ενός επίγειου ή δορυφορικού χρονομέτρου σε τροχιά. Αυτή η επίδραση είναι ισχυρότερη σε δορυφόρους που κινούνται σε πολικές τροχιές χαμηλού υψομέτρου (π.χ. δορυφόροι αλτιμετρίας) από ό,τι σε δορυφόρους μεγαλύτερου υψομέτρου και μικρότερης κλίσης της τροχιάς ως προς τον ισημερινό της Γης (π.χ. δορυφόροι πλοήγησης).

Στην παρούσα εργασία γίνεται επίσης μελέτη των δορυφορικών τροχιών. Σύμφωνα με τους νόμους του Kepler, η τροχιά ενός δορυφόρου είναι ελλειπτική και τη μία εστία της έλλειψης κατέχει το κέντρο μάζας της Γης. Αυτό σημαίνει ότι σε μία περιφορά του γύρω από τη Γη ο δορυφόρος μεταβάλλει την απόστασή του από το κέντρο μάζας της, με αποτέλεσμα να μεταβάλλεται και η ταχύτητά του καθώς και το βαρυτικό του δυναμικό. Έτσι, παρουσιάζεται ένα επιπλέον περιοδικό σχετικιστικό φαινόμενο, το μέγεθος του οποίου εξαρτάται από την τιμή της εκκεντρότητας της ελλειπτικής τροχιάς του κάθε δορυφόρου. Η περίοδος αυτής της περιοδικής επίδρασης στον χρόνο ισούται με την περίοδο περιφοράς του εκάστοτε δορυφόρου γύρω από τη Γη.

Όλοι οι παράγοντες που συμμετέχουν στη διαμόρφωση και τον προσδιορισμό των προβλεπόμενων μετατοπίσεων στη συχνότητα των δορυφορικών χρονομέτρων σε σχέση με επίγεια χρονόμετρα αναφοράς και τελικά στον προσδιορισμό των απαραίτητων διορθώσεων στα

χρονόμετρά τους ώστε να καθίσταται δυνατός ο συγχρονισμός τους με τα χρονόμετρα στη Γη, περιγράφονται αναλυτικά στα κεφάλαια που ακολουθούν.

Στο 2^ο κεφάλαιο της εργασίας, αρχικά εξετάζονται τα συστήματα αναφοράς που ορίζονται και υλοποιούνται στη δορυφορική γεωδαισία και στην πλοήγηση. Στη συνέχεια, εξετάζονται οι κλίμακες χρόνου, δηλαδή οι μέθοδοι μέτρησής του και γίνεται αναφορά στα ατομικά χρονόμετρα.

Στο 3^ο κεφάλαιο προσδιορίζεται το πεδίο βαρύτητας της Γης, με βάση την Κλασική Μηχανική. Εξετάζονται οι έννοιες του δυναμικού λόγω επιπλάτυνσης της Γης και του δυναμικού περιστροφής. Στο ίδιο κεφάλαιο μελετάται η ουράνια μηχανική. Αυτή περιλαμβάνει τους τρεις εμπειρικούς νόμους του Kepler που περιγράφουν τις κινήσεις των ουράνιων σωμάτων και γίνεται εκτενής αναφορά στα γεωμετρικά χαρακτηριστικά των τροχιών των δορυφόρων.

Το 4^ο κεφάλαιο περιλαμβάνει τις αρχές της θεωρίας της Σχετικότητας, τις συνέπειες που προκύπτουν από τη θεωρία και έχουν αντίκτυπο στον μετρούμενο χρόνο ενός ρολογιού και τις επιδράσεις στον χρόνο των επίγειων και δορυφορικών χρονομέτρων. Αναλύονται τα σχετικιστικά φαινόμενα της διαστολής του χρόνου, του φαινομένου Sagnac και της βαρυτικής μετατόπισης συχνότητας, με την περιγραφή σχετικών παραδειγμάτων και την επεξεργασία των αντίστοιχων εξισώσεων. Επίσης γίνεται ανάλυση της θεμελιώδους εξίσωσης του χωροχρόνου της Ειδικής θεωρίας (μέτρο Minkowski), ορίζοντας τις έννοιες της *συντεταγμένης χρόνου* (coordinate time) και του *τοπικού χρόνου* ή *ιδιοχρόνου* (proper time).

Το κεφάλαιο καταλήγει στις εξισώσεις που προσδιορίζουν τις μετατοπίσεις στη συχνότητα των δορυφορικών χρονομέτρων σε σχέση με χρονόμετρα αναφοράς στην επιφάνεια της Γης, λαμβάνοντας υπ' όψιν τις αρχές της Σχετικότητας αλλά και εξισώσεις από την Κλασική Μηχανική (π.χ. προσδιορισμός βαρυτικού δυναμικού στη γήινη επιφάνεια και στο υψόμετρο της δορυφορικής τροχιάς) και την Ουράνια Μηχανική (π.χ. εξίσωση ταχύτητας δορυφόρου στην τροχιά του).

Στο 5^ο κεφάλαιο γίνεται επισκόπηση των συστημάτων δορυφορικού εντοπισμού και των δορυφόρων αλτιμετρίας, από τους οποίους χρησιμοποιούνται τροχιακά δεδομένα για την εφαρμογή των επιδράσεων Σχετικότητας στον μετρούμενο χρόνο των χρονομέτρων τους. Περιγράφονται οι αρχές λειτουργίας τους, ο βασικός τους εξοπλισμός, τα χαρακτηριστικά των τροχιών τους, καθώς και πληροφορίες για τις διορθώσεις Σχετικότητας που ήδη εφαρμόζονται στη συχνότητα των χρονομέτρων τους.

Το 6^ο κεφάλαιο περιλαμβάνει τα αποτελέσματα των προβλεπόμενων σχετικιστικών επιδράσεων στα χρονόμετρα των δορυφόρων εντοπισμού που επιλέχθηκαν από τα συστήματα GPS, Galileo, GLONASS, Compass/BeiDou και στα χρονόμετρα των δορυφόρων αλτιμετρίας Jason-3, Saral/AltiKa, HY-2A, CryoSat-2, Sentinel-3. Παρουσιάζονται αποτελέσματα για την επίδραση του φαινομένου της διαστολής του χρόνου και του φαινομένου της βαρυτικής μετατόπισης στη συχνότητα των δορυφορικών χρονομέτρων ξεχωριστά, αλλά και αποτελέσματα για την ολική

σχετικιστική επίδραση, όπως προκύπτει από το συνδυασμό αυτών των σχετικιστικών φαινομένων. Επίσης αναλύεται η περιοδική σχετικιστική επίδραση στα δορυφορικά χρονόμετρα.

Επιπλέον γίνεται σύγκριση των αποτελεσμάτων (για δορυφόρους εντοπισμού) με αντίστοιχα βιβλιογραφικά δεδομένα και σύγκριση της περιοδικής επίδρασης (για δορυφόρους GPS) με αντίστοιχη μελέτη από τη βιβλιογραφία που αναφέρεται σε πειραματικά επιβεβαιωμένα δεδομένα. Για τους δορυφόρους αλτιμετρίας δεν υπήρχαν διαθέσιμα πειραματικά δεδομένα στη βιβλιογραφία ώστε να γίνει άμεση σύγκριση των αποτελεσμάτων. Έτσι, έγινε προσπάθεια να χρησιμοποιηθούν πραγματικά δορυφορικά δεδομένα, με σκοπό την εύρεση της σχετικιστικής διόρθωσης που ήδη εφαρμόζεται στα χρονόμετρά τους.

Τα συμπεράσματα τα οποία προκύπτουν από τα αποτελέσματα που παρουσιάζονται στο 6^ο κεφάλαιο περιγράφονται στο 7^ο κεφάλαιο της εργασίας.

Κλείνοντας, πρέπει να επισημανθεί ότι η επίτευξη υψηλής ακρίβειας στη χρονομέτρηση και στο συγχρονισμό ρολογιών μπορεί να φανεί χρήσιμη, πέρα από εφαρμογές στη γεωδαισία, και σε άλλες επιστήμες όπως η γεωλογία και η γεωφυσική, για τον εντοπισμό σχηματισμών του υπεδάφους που προκαλούν ανεπαίσθητες βαρυτικές μεταβολές και ως εκ τούτου και μετρήσιμες μεταβολές στο ρυθμό λειτουργίας των χρονομέτρων.

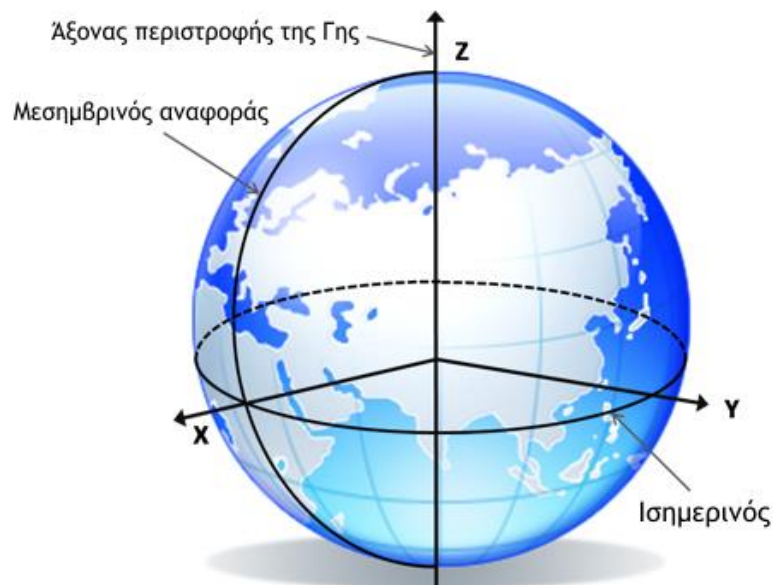
2^ο Κεφάλαιο

Χρόνος & Συστήματα Αναφοράς

Στο παρόν κεφάλαιο εξετάζονται τα χωρικά συστήματα αναφοράς και τα συστήματα χρόνου. Η συνεχής παρακολούθηση της κίνησης των δορυφόρων και της Γης απαιτεί τον ορισμό ενός συστήματος συντεταγμένων, ενώ ο ορισμός του απαιτεί μία σύμβαση, για τον προσανατολισμό των αξόνων του και για τη θέση του κέντρου του, η οποία σχετίζεται με μία συγκεκριμένη χρονική στιγμή αναφοράς. Για τη συνεχή μέτρηση και διατήρηση του χρόνου έχουν αναπτυχθεί διάφορες μέθοδοι που συνήθως σχετίζονται με μία περιοδική διαδικασία. Η περιοδική κίνηση ενός ουράνιου σώματος και ένας ατομικός ταλαντωτής είναι δύο ενδεικτικά παραδείγματα.

2.1 Συστήματα Αναφοράς

Στη δορυφορική γεωδαισία μελετώνται με μεθόδους υψηλής ακρίβειας το σχήμα, το βαρυτικό πεδίο, οι κινήσεις της Γης καθώς και ποικίλα φυσικά φαινόμενα, σε έναν τρισδιάστατο χώρο ο οποίος μεταβάλλεται με τον χρόνο. Οι διάφορες γεωδαιτικές μετρήσεις και παρατηρήσεις γίνονται σε σχέση με ένα σύστημα αναφοράς. Ένα τρισδιάστατο σύστημα αναφοράς ορίζεται από ένα σημείο που αντιπροσωπεύει το κέντρο του συστήματος και από τρεις ορθογώνιους άξονες (Εικόνα 2.1).



Εικόνα 2.1: Τρισδιάστατο σύστημα συντεταγμένων που χρησιμοποιείται στη γεωδαισία, με την αρχή των αξόνων του στο κέντρο της Γης.

Για τον ακριβή προσδιορισμό της θέσης ενός σημείου πάνω στη Γη απαιτούνται τέσσερις συντεταγμένες: τρεις χωρικές, ώστε να οριστεί η γεωμετρική θέση του σημείου σε σχέση με τους άξονες αναφοράς (X, Y, Z) και μια χρονική συντεταγμένη, για να αποτυπώσει τον χρόνο κατά τον οποίο προσδιορίστηκαν οι τρεις προαναφερθείσες. Ο προσδιορισμός συντεταγμένων σημείων πάνω σε ένα τρισδιάστατο σύστημα αναφοράς συναρτήσει του χρόνου είναι η υλοποίηση του συστήματος αναφοράς και καλείται σύστημα συντεταγμένων ή *πλαίσιο αναφοράς* (reference frame).

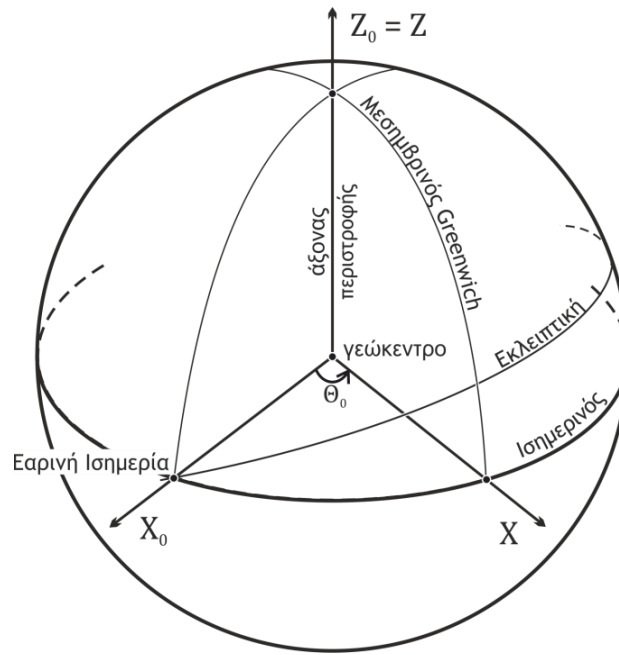
Για παγκόσμιας εμβέλειας εφαρμογές, όπως η δορυφορική γεωδαισία, χρησιμοποιούνται συνήθως δύο πλαίσια αναφοράς. Το πρώτο είναι ένα *αδρανειακό πλαίσιο*, στο οποίο οι εξισώσεις που διέπουν τους νόμους της φύσης παίρνουν την πιο απλή τους μορφή, ενώ το δεύτερο είναι ένα *περιστρεφόμενο πλαίσιο*, εξαιτίας της περιστροφής της Γης γύρω από τον άξονά της.

Στα συστήματα συντεταγμένων υπάρχει πάντα ένα *σημείο αναφοράς* ως προς το οποίο γίνεται ο προσδιορισμός, όπως για παράδειγμα, το σημείο που αντιστοιχεί στο κέντρο μάζας της Γης. Το σημείο αναφοράς θεωρείται ακίνητο και το διάνυσμα που αντιστοιχεί σε αυτό μέσω του συστήματος συντεταγμένων είναι κατά κανόνα το μηδενικό διάνυσμα, δηλαδή το διάνυσμα του οποίου όλοι οι αριθμοί που το περιγράφουν ισούνται με μηδέν. Οι αριθμοί που προσδιορίζουν κατά μοναδικό τρόπο κάθε διάνυσμα με αρχή το σημείο αναφοράς, μέσω ενός συστήματος συντεταγμένων, ονομάζονται *συντεταγμένες*.

Στη δορυφορική γεωδαισία κρίνεται κατάλληλο να ορίζονται *ισημερινά συστήματα συντεταγμένων*. Σε ένα ισημερινό σύστημα συντεταγμένων, η αρχή για τη μέτρηση του γεωδαιτικού πλάτους ενός σημείου είναι ο ισημερινός ($latitude_{equator} = 0^\circ$). Αρχικά, διακρίνονται δύο ισημερινά συστήματα: ένα **ουράνιο αδρανειακό σύστημα** (celestial space-fixed reference system, CRS) (X_0, Y_0, Z_0), με την αρχή των αξόνων του να βρίσκεται είτε στο βαρύκεντρο του ηλιακού συστήματος (σύστημα Κοπέρνικου), είτε στο κέντρο μάζας της Γης (σύστημα Γαλιλαίου) και ένα **γήινο γεωσταθερό σύστημα** (terrestrial earth-fixed reference system, TRS) (X, Y, Z). Ένα γήινο σύστημα αναφοράς (TRS) είναι ένα χωρικό σύστημα αναφοράς που περιστρέφεται μαζί με τη Γη κατά την ημερήσια κίνησή της στο χώρο. Σε ένα τέτοιο σύστημα, οι θέσεις των σημείων στη στερεά επιφάνεια της Γης έχουν συντεταγμένες οι οποίες υφίστανται μόνο μικρές μεταβολές με την πάροδο του χρόνου, λόγω γεωφυσικών φαινομένων, όπως τεκτονικές ή παλιρροιακές παραμορφώσεις (IERS, 2010).

Το διάνυσμα περιστροφής της Γης ω_E αντιπροσωπεύει τον άξονα Z και στις δύο περιπτώσεις. Για το ουράνιο σύστημα, ο άξονας X_0 έχει κατεύθυνση προς το σημείο της εαρινής ισημερίας και ορίζεται ως η γραμμή τομής μεταξύ των επιπέδων του ισημερινού και της εκλειπτικής.

Ο άξονας X του γήινου γεωσταθερού συστήματος ορίζεται από την γραμμή τομής του ισημερινού επιπέδου με το επίπεδο που αντιστοιχεί στον μεσημβρινό του Greenwich. Η γωνία Θ_0 μεταξύ των δύο συστημάτων καλείται Αστρικός Χρόνος Greenwich (Greenwich Sidereal



Εικόνα 2.2: Αναπαράσταση του ουράνιου $\{X_0, Y_0, Z_0\}$ και του γήινου $\{X, Y, Z\}$ συστήματος αναφοράς. (Wellenhof, 2008)

Time). Ο άξονας Y είναι κάθετος στους X και Z άξονες και έτσι ολοκληρώνεται ένα δεξιόστροφο πλαίσιο συντεταγμένων.

Ένα ουράνιο μη περιστρεφόμενο σύστημα, η αρχή του οποίου βρίσκεται στο κέντρο μάζας του ηλιακού συστήματος, είναι σε ηρεμία σε σχέση με το ηλιακό σύστημα. Επομένως, είναι ένα αδρανειακό σύστημα, σύμφωνα με τη Νευτώνεια Μηχανική. Όμως, σε ένα γεωκεντρικό σύστημα παρουσιάζονται επιταχύνσεις, εξαιτίας της τροχιάς της Γης γύρω από το πεδίο βαρύτητας του Ήλιου. Συνεπώς, σε ένα τέτοιο σύστημα, οι νόμοι της Γενικής Σχετικότητας πρέπει να ληφθούν υπ' όψιν. Το γεωκεντρικό σύστημα ταιριάζει καλύτερα για την περιγραφή της κίνησης ενός δορυφόρου κοντά στη Γη, δεδομένου ότι το κυρίως σχετικιστικό φαινόμενο προκαλείται από το πεδίο βαρύτητας της Γης (Wellenhof, 2008).

Συχνά το σύστημα Γαλιλαίου αναφέρεται ως **γεωκεντρικό αδρανειακό** σύστημα. Οι άξονες ενός γεωκεντρικού αδρανειακού συστήματος αναφοράς παραμένουν παράλληλοι στο χώρο, διότι σε αυτό το σύστημα, η κίνηση της Γης γύρω από τον Ήλιο περιγράφεται χωρίς την περιστροφή της γύρω από τον άξονά της. Η υλοποίηση ενός γεωκεντρικού αδρανειακού συστήματος συντεταγμένων, το λεγόμενο «**Γεωκεντρικό Αδρανειακό Πλαίσιο Αναφοράς**» (**Earth-Centered Inertial frame – ECI frame**) έχει τις εξής ιδιότητες:

- 1) Λαμβάνει υπ' όψιν το βαρυτικό πεδίο της Γης,
- 2) Δεν λαμβάνει υπ' όψιν την περιστροφή της.

Το πλεονέκτημα σε ένα τέτοιο σύστημα αναφοράς είναι ότι η ταχύτητα του φωτός c είναι σταθερή, είτε η Γη επιταχύνει προς τον Ήλιο, είτε απομακρύνεται επιβραδυνόμενη. Αντίθετα, οι άξονες ενός «**Γεωκεντρικού Γεωσταθερού Πλαισίου Αναφοράς**» (**Earth-Centered Earth-**

Fixed frame – ECEF frame) ακολουθούν τη Γη και περιστρέφονται μαζί της. Άρα, το φως σε ένα τέτοιο πλαίσιο ταξιδεύει σε μία σπειροειδή διαδρομή (Weiss, Ashby, 1997).

2.1.1 Το Ουράνιο Σύστημα Αναφοράς και οι υλοποιήσεις του

Κατά σύμβαση, ο άξονας Z_0 του ουράνιου συστήματος συντεταγμένων είναι ταυτόσημος με τη θέση του άξονα περιστροφής που αντιστοιχεί σε μία συγκεκριμένη εποχή. Η διεύθυνση του άξονα X_0 δείχνει προς την αντίστοιχη εαρινή ισημερία. Οι συντεταγμένες της ισημερίας καθορίζονται σε σχέση με ένα σύνολο από θεμελιώδεις αστέρες που θεωρούνται σταθεροί στο χώρο. Από τη στιγμή που το πλαίσιο αυτό ορίζεται συμβατικά και η πρακτική εφαρμογή του δεν συμπίπτει αναγκαστικά με το θεωρητικό σύστημα, καλείται Συμβατικό Ουράνιο Πλαίσιο Αναφοράς (Conventional Celestial Reference Frame – **CCRF**) (Wellenhof, 2008).

Η υλοποίηση ενός τέτοιου ουράνιου συστήματος συντεταγμένων είναι, για παράδειγμα, το πλαίσιο που ορίζεται από τη Διεθνή Υπηρεσία Περιστροφής Γης και Συστημάτων Αναφοράς (International Earth Rotation and Reference Systems Service – IERS) η οποία εδρεύει στο Παρίσι. Αυτό το πλαίσιο καλείται **ICRF**, όπου το πρώτο γράμμα επιδεικνύει ότι προέρχεται από την υπηρεσία IERS. Το ICRF ορίζεται κινηματικά σε σχέση με ένα σύνολο από ακριβείς συντεταγμένες εξωγαλαξιακών ραδιοπηγών, ως επί το πλείστον κβάζαρ (IERS, 2010).

2.1.2 Το Γήινο-Γεωσταθερό Σύστημα Αναφοράς και οι υλοποιήσεις του

Κατά σύμβαση και εδώ, ο άξονας Z είναι ταυτόσημος με τη μέση θέση του άξονα περιστροφής της Γης και η διεύθυνση του άξονα X ορίζεται από την τομή του ισημερινού με τον μέσο μεσημβρινό Greenwich. Η υλοποίηση αυτού του συστήματος ονομάζεται Συμβατικό Γήινο Πλαίσιο Αναφοράς (Conventional Terrestrial Reference Frame – **CTRF**) και καθορίζεται από ένα σύνολο επίγειων σταθμών, εξοπλισμένων με διάφορα γεωδαιτικά συστήματα παρατήρησης, οι οποίοι χρησιμοποιούνται ως σημεία αναφοράς.

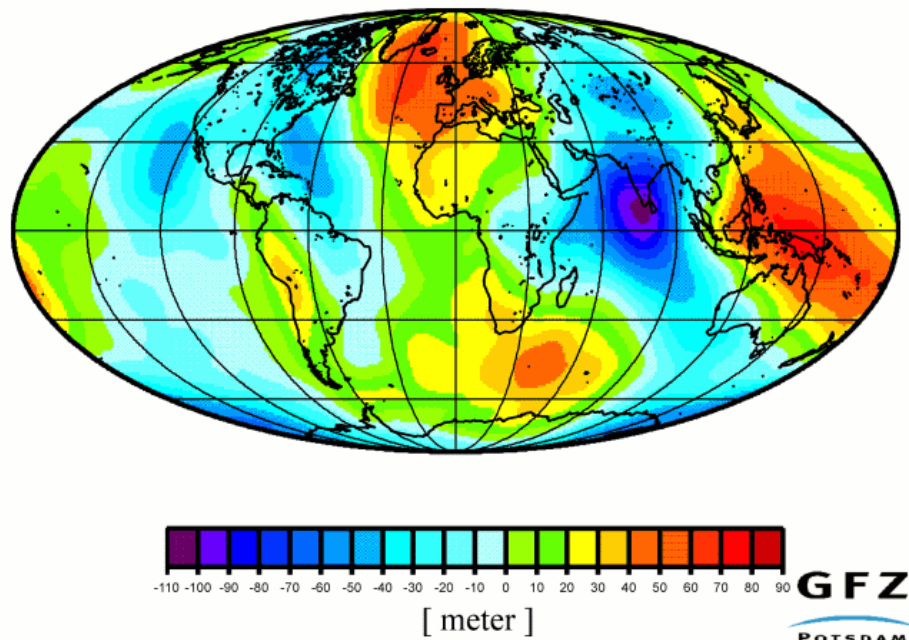
Ένα παράδειγμα ενός τέτοιου συστήματος συντεταγμένων είναι το **ITRF** (International Terrestrial Reference Frame) που υλοποιείται από την IERS. Το ITRF υλοποιείται με έναν αριθμό από σημεία πάνω στη Γη για τα οποία λαμβάνονται υπ' όψιν διαχρονικά φαινόμενα, όπως η κίνηση των τεκτονικών πλακών ή παλιρροιακά φαινόμενα. Επομένως, το ITRF προσδιορίζει καρτεσιανές συντεταγμένες σημείων (X , Y , Z), αλλά και την ταχύτητα των σημείων αυτών (vX , vY , vZ), έτσι ώστε να μπορεί να προσδιοριστεί η μετατόπισή τους με την πάροδο του χρόνου, εξαιτίας των γεωφυσικών φαινομένων που αναφέρθηκαν.

Έτσι, το ITRF ενημερώνεται τακτικά και το ακρωνύμιο συμπληρώνεται από ψηφία που επισημαίνουν το τελευταίο έτος του οποίου τα δεδομένα χρησιμοποιήθηκαν για τη διαμόρφωση του πλαισίου.

2.1.2.1 Γεωδαιτικές συντεταγμένες – ελλειψοειδές αναφοράς

Η μετατροπή των καρτεσιανών συντεταγμένων του ITRF σε γεωδαιτικές συντεταγμένες προϋποθέτει την ύπαρξη ενός μαθηματικού μοντέλου που να περιγράφει προσεγγιστικά το σχήμα της Γης. Το σχήμα αυτό ονομάζεται *ελλειψοειδές εκ περιστροφής* ή *ελλειψοειδές αναφοράς* και αντιπροσωπεύει την επιφάνεια πάνω στην οποία πραγματοποιούνται οι γεωδαιτικοί υπολογισμοί και ορίζονται οι συντεταγμένες σημείων, όπως το γεωδαιτικό μήκος και πλάτος (Εικόνα 2.3).

Ένα ελλειψοειδές αναφοράς προσδιορίζεται από δύο βασικές γεωμετρικές παραμέτρους: τον **μεγάλο ημιάξονα του ελλειψοειδούς a** (ή αλλιώς ισημερινή ακτίνα) και την **επιπλάτυση f** .



Εικόνα 2.3: Ελλειψοειδές αναφοράς – γεωμετρικό μοντέλο αναπαράστασης του σχήματος της Γης. (German Research Centre for Geosciences, 2014)

2.1.2.2 Γεωδαιτικά συστήματα αναφοράς GRS80, WGS84

Υπάρχουν διάφορα γεωδαιτικά συστήματα αναφοράς που προσδιορίζουν ορισμένες παγκόσμιες φυσικές σταθερές και παραμέτρους, όπως για παράδειγμα τις γεωμετρικές παραμέτρους του ελλειψοειδούς αναφοράς, τη γωνιακή ταχύτητα της Γης κ.ά.

Το Γεωδαιτικό Σύστημα Αναφοράς 1980 (Geodetic Reference System 1980 – **GRS80**) προσδιορίζει ένα ελλειψοειδές αναφοράς, το γεωμετρικό κέντρο του οποίου ταυτίζεται με το κέντρο μάζας της Γης (συμπεριλαμβανομένων ωκεανών και ατμόσφαιρας) και με την αρχή των αξόνων του ITRF συστήματος συντεταγμένων.

Παρόμοιο με το GRS80, είναι το Παγκόσμιο Γεωδαιτικό Σύστημα 1984 (World Geodetic System 1984 – **WGS84**) το οποίο χρησιμοποιείται στο δορυφορικό σύστημα εντοπισμού GPS (Global Positioning System). Βασίζεται σε ένα συνεκτικό σύνολο σταθερών και παραμέτρων

που περιγράφουν το μέγεθος, το σχήμα της Γης και το βαρυτικό της πεδίο. Το ελλειψοειδές WGS84 είναι όμοιο με το ελλειψοειδές GRS80 στην κλίμακα του χιλιοστού. Ορισμένες βασικές παράμετροι που καθορίζουν τα γεωδαιτικά συστήματα GRS80 και WGS84 παρουσιάζονται στον Πίνακα 2.1. Η τιμή της βαρυτιμετρικής σταθεράς της Γης GM είναι η μάζα της επί την παγκόσμια σταθερά της βαρύτητας και συμπεριλαμβάνει τη μάζα της ατμόσφαιρας της Γης και στις δύο περιπτώσεις. Οι χρήστες GPS θα πρέπει να διατηρούν την αρχική τιμή WGS84 $GM = 3.986.005,0 \times 10^8 \text{ m}^3/\text{s}^2$, όπως καθορίζεται στο έγγραφο GPS Interface Control Document (ICD-GPS-200) και στην τεχνική αναφορά NIMA Technical Report 8350.2.

Γενικά, το Διεθνές Γήινο Σύστημα Αναφοράς και οι υλοποιήσεις του, ITRFyy, είναι πανομοιότυπα με το Παγκόσμιο Γεωδαιτικό Σύστημα WGS84 στην κλίμακα του ενός μέτρου. Το σημερινό ITRF2014 είναι σε συμφωνία με το WGS84 σε κλίμακα εκατοστών, αποδίδοντας μηδενικές παραμέτρους μετασχηματισμού.

Πίνακας 2.1: Οι βασικές παράμετροι των συστημάτων αναφοράς GRS80 και WGS84. (NIMA Technical Report 8350.2, 2000)

Παράμετρος	Συμβολισμός	GRS 80	WGS84	Μονάδες
ημιάξονας ισημερινού	a	6378137.0	6378137.0	m
γεωμετρική επιπλάτυνση	$1/f$	298.2572221	298.2572236	-
γεωκεντρική βαρυτιμετρική σταθερά	GM	3986005×10^8	3986004.418×10^8	$\text{m}^3 \text{s}^{-2}$
δυναμικός παράγοντας επιπλάτυνσης	J_2	108263×10^{-8}	$108\,263 \times 10^{-8}$	-
μέση γωνιακή ταχύτητα	ω	7292115×10^{-11}	7292115×10^{-11}	rad s^{-1}

2.2 Ο χρόνος και η μέτρησή του

Εκτός από τις απαιτήσεις για την τήρηση μίας σταθερής κλίμακας χρόνου για πολιτική χρήση, ο χρόνος είναι απαραίτητος στη φυσική, την πλοήγηση, την αστρονομία, τις τηλεπικοινωνίες, τη γεωδαισία και στις διαστημικές επιστήμες. Για παράδειγμα, για τον προσδιορισμό μίας δορυφορικής τροχιάς ή ενός σημείου πάνω στη Γη, απαιτούνται 4 συντεταγμένες εκ των οποίων η μία είναι ο χρόνος.

Η υλοποίηση ενός συμβατικού χρονικού συστήματος αναφοράς ονομάζεται κλίμακα χρόνου. Ιδεατή κλίμακα χρόνου είναι μία κλίμακα χρόνου που χρησιμοποιεί μία σαφώς ορισμένη και σταθερή μονάδα μέτρησης. Ειδικότερα, για την υλοποίηση ενός χρονικού συστήματος πρέπει να προσδιοριστούν δύο μεγέθη: η μονάδα μέτρησης του χρόνου, δηλαδή η διάρκεια ενός περιοδικού φαινομένου και η εποχή ή το μηδέν του επιλεγμένου χρόνου.

Ενώ για πολλούς αιώνες η τροχιά της Γης και η περιστροφή της αποτελούσαν βάση για τη μέτρηση του χρόνου, η αναγνώριση του ότι αυτές οι κινήσεις της Γης δεν είναι ομοιόμορφες (εκκεντρότητα τροχιάς, κλίση ως προς την εκλειπτική, κλόνηση, μετάπτωση, κίνηση πόλου, επιβραδυνόμενη περιστροφή), απαίτησε την εισαγωγή νέων ορισμών για τη μέτρησή του. Οι

μέθοδοι και η ακρίβεια μέτρησης του χρόνου έχουν αλλάξει εντυπωσιακά από το 1960 και έπειτα. Στις μέρες μας, ο ορισμός του δευτερολέπτου – η πιο ακριβής μετρήσιμη μονάδα στο διεθνές σύστημα S.I. – βασίζεται σε φυσικές συχνότητες ατόμων συγκεκριμένων στοιχείων. Επιπλέον, ο συγχρονισμός των χρονομέτρων και η διατήρηση ενός μοναδικού συντονισμένου χρόνου στη Γη απαιτεί συνδυασμό δύο μεθόδων (Συντονισμένος Παγκόσμιος Χρόνος). Τα χρονικά συστήματα που αναλύονται στην παρούσα ενότητα είναι ο Δυναμικός, ο Ατομικός, ο Αστρικός και ο Παγκόσμιος Συντονισμένος Χρόνος.

Πίνακας 2.2: Τα διάφορα συστήματα χρόνου σε αντιστοιχία με την περιοδική διεργασία που τα ορίζει. (Wellenhof, 2008)

Περιοδική διεργασία	Συστήματα χρόνου
Περιστροφή Γης	Παγκόσμιος Χρόνος (UT) Αστρικός Χρόνος Greenwich (Θ_0)
Περιφορά Γης	Γήινος Δυναμικός Χρόνος (TDT) Βαρυκεντρικός Δυναμικός Χρόνος (BDT)
Ατομικές ταλαντώσεις	Ατομικός Χρόνος (TAI) Συντονισμένος Παγκόσμιος Χρόνος (UTC) Χρόνος αναφοράς στα δορυφορικά συστήματα εντοπισμού

2.2.1 UTC – Το Παγκόσμιο Πρότυπο Χρόνου

Ο Συντονισμένος Παγκόσμιος Χρόνος (Coordinated Universal Time – UTC) είναι ένα πρότυπο χρόνου (time standard) που χρησιμοποιείται ευρέως σε όλο τον κόσμο. Αυτό το 24ωρο πρότυπο χρόνου διατηρείται με τη χρήση υψηλής ακρίβειας ατομικών χρονομέτρων σε συνδυασμό με την παρατήρηση της περιστροφής της Γης.

Κατά διαστήματα, ένα *εμβόλιμο δευτερόλεπτο* (*leap second*) προστίθεται στο Συντονισμένο Παγκόσμιο Χρόνο (UTC), έτσι ώστε ο χρόνος των ρολογιών στη Γη να συμβαδίζει με την επιβραδυνόμενη κίνηση της Γης γύρω από τον άξονά της.

Τα δύο στοιχεία που χρησιμοποιούνται για τον προσδιορισμό του Συντονισμένου Παγκόσμιου Χρόνου (UTC) είναι:

- 1) Ο Ατομικός Χρόνος (TAI): μια χρονική κλίμακα που συνδυάζει την απόδοση, περίπου διακοσίων, εξαιρετικά μεγάλης ακρίβειας ατομικών χρονομέτρων ανά τον κόσμο και παρέχει την ακριβή συχνότητα των χτύπων των ρολογιών στη Γη.
- 2) Ο Παγκόσμιος Χρόνος (UT1): επίσης γνωστός και ως Αστρονομικός ή Ηλιακός Χρόνος, αναφέρεται στην περιστροφή της Γης γύρω από τον άξονά της, η οποία καθορίζει το *μήκος της ημέρας*.

Όταν η διαφορά μεταξύ της ώρας UTC και UT1 προσεγγίζει τα 0.9 δευτερόλεπτα, ένα δευτερόλεπτο προστίθεται στον UTC και στα χρονόμετρα σε όλο τον κόσμο. Με την προσθήκη ενός εμβόλιμου δευτερολέπτου, τα ρολόγια στη Γη σταματούν για αυτό το δευτερόλεπτο, ούτως ώστε να μπορέσει η περιστροφή να συντονιστεί με τον ατομικό χρόνο.

Η ανάγκη για προσθήκη εμβόλιμων δευτερολέπτων προκύπτει από το γεγονός ότι, σε σύγκριση με την περιστροφή της Γης η οποία πραγματοποιείται με μία μικρή επιβράδυνση, τα ατομικά χρονόμετρα είναι πολύ πιο συνεπή και σταθερά, αφού λειτουργούν με τον ίδιο ρυθμό για μια διάρκεια εκατομμυρίων ετών. Τα επερχόμενα προστιθέμενα δευτερόλεπτα ανακοινώνονται από τη διεθνή υπηρεσία IERS, στο Παρίσι.

2.2.2 Δυναμικός Χρόνος

Ο Δυναμικός Χρόνος (Dynamical Time) χρησιμοποιείται για την περιγραφή της κίνησης ουράνιων σωμάτων λαμβάνοντας υπ' όψιν μία συγκεκριμένη δυναμική θεωρία. Η Γενική Θεωρία της Σχετικότητας και ένα αδρανειακό σύστημα αναφοράς αποτελούν θεμελιώδεις έννοιες για τον Δυναμικό Χρόνο. Η θεωρία αυτή ορίζει 1) τον Συντεταγμένο Χρόνο, ως ο χρόνος ο οποίος μετρείται από ένα ιδανικό χρονόμετρο στάσιμο σε αδρανειακό σύστημα μακριά από βαρυτικές επιδράσεις (χρόνος αναφοράς, «απόλυτος» χρόνος) και 2) τον Τοπικό Χρόνο ή Ιδιοχρόνο, ως ο μετρούμενος πραγματικός χρόνος ενός χρονομέτρου κινούμενου ή στάσιμου σε οποιοδήποτε σημείο στο χώρο. Ο όρος *συντεταγμένος χρόνος* επισημαίνει το ότι παριστάνει την 4^η συντεταγμένη του χωροχρόνου, όπως ορίζεται στη Σχετικότητα.

Ο Δυναμικός Χρόνος αντιπροσωπεύει την ανεξάρτητη μεταβλητή των εξισώσεων κίνησης των ουράνιων σωμάτων του ηλιακού συστήματος. Σύμφωνα με τη θεωρία της Σχετικότητας, αυτή η ανεξάρτητη μεταβλητή σχετίζεται με το επιλεγμένο σύστημα συντεταγμένων που χρησιμοποιείται ως σύστημα αναφοράς.

Στη σημερινή αστρονομία, οι εξισώσεις κίνησης σχετίζονται με το βαρύκεντρο του ηλιακού συστήματος. Εδώ, η ανεξάρτητη μεταβλητή του χρόνου ονομάζεται Βαρυκεντρικός Συντεταγμένος Χρόνος (Barycentric Coordinate Time, TCB) και προκύπτει από μετρήσεις σε ένα σύστημα αναφοράς το οποίο θεωρείται αδρανειακό και έχει κέντρο το κέντρο μάζας του ηλιακού μας συστήματος. Είναι μία κλίμακα χρόνου που χρησιμοποιείται στην αστρονομία ως πρότυπο χρόνου, το οποίο λαμβάνει υπ' όψιν σχετικιστικά φαινόμενα, κατά τον υπολογισμό των τροχιών και των αστρονομικών εφημερίδων πλανητών, δορυφόρων και άλλων ουράνιων σωμάτων του ηλιακού μας συστήματος.

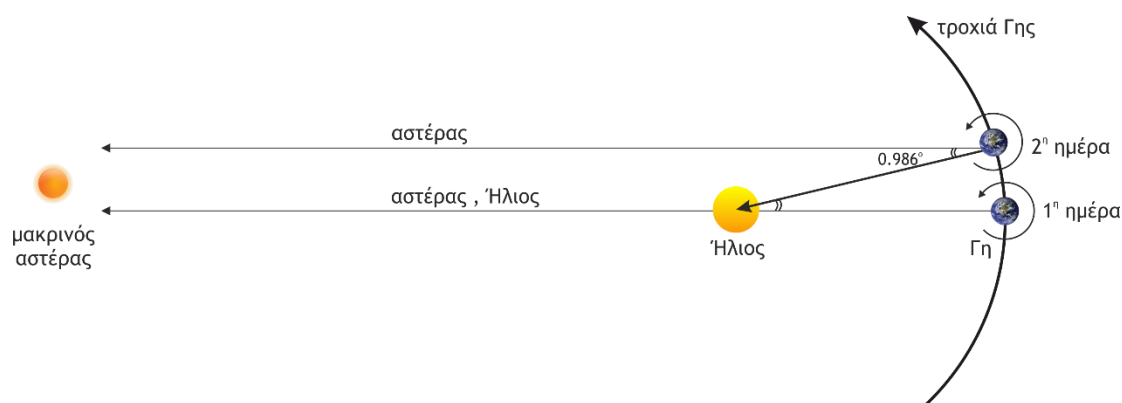
Ένα χρονόμετρο πάνω στη Γη παρουσιάζει περιοδικές μεταβολές σε σχέση με τον χρόνο TCB εξαιτίας της κίνησης της Γης στο βαρυτικό πεδίο του Ήλιου. Παρ' όλα αυτά, για την περιγραφή των τροχιών των τεχνητών δορυφόρων δεν απαιτείται η χρήση του χρόνου TCB, αλλά ούτε και να εφαρμοστούν στον χρόνο αυτόν οι επιδράσεις λόγω Σχετικότητας, εφόσον οι τεχνητοί δορυφόροι αλλά ταυτόχρονα και η Γη υπόκεινται στις ίδιες συστηματικές διαταραχές από το πεδίο βαρύτητας του Ήλιου. Στη δορυφορική γεωδαισία η ανεξάρτητη μεταβλητή του χρόνου είναι ο Γήινος Χρόνος (Terrestrial Time, TT), ο οποίος ορίζεται σε γεωκεντρικό σύστημα αναφοράς και υλοποιείται από μετρήσεις χρονομέτρων στο γεωειδές.

2.2.3 Αστρικός Χρόνος

Ο αστρικός χρόνος αποτελεί το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας ενός σημείου πάνω στη Γη σε σχέση με ένα ουράνιο σώμα. Ο χρόνος αυτός δηλαδή μετράει τη γωνιακή ταχύτητα περιστροφής της Γης γύρω από τον άξονά της, ως προς τα άστρα. Όταν το ουράνιο σώμα είναι ο Ήλιος, τότε ο χρόνος καλείται *ηλιακός χρόνος*.

Αστρικός χρόνος (Sidereal time) ορίζεται ως η γωνία (εκφρασμένη σε μονάδες χρόνου) που διαγράφει ο μεσημβρινός του Greenwich τέμνοντας διαδοχικά την εαρινή ισημερία. Η διεύθυνση αναφοράς καθορίζεται από πολύ απομακρυσμένους αστέρες έτσι ώστε να θεωρείται σταθερή στο χώρο. Η σταθερή αυτή διεύθυνση ορίζεται (συνήθως) ως το σημείο της εαρινής ισημερίας.

Ο ηλιακός χρόνος διαφέρει από τον αστρικό ($3'56''$ / ημέρα), διότι στον πρώτο, η διεύθυνση αναφοράς είναι ο Ήλιος, ενώ ο δεύτερος έχει ως αφετηρία μέτρησης κάποιον απλανή αστέρα. Εξαιτίας του ότι η Γη περιστρέφεται, ενώ παράλληλα είναι σε τροχιά γύρω από τον Ήλιο, η Γη πρέπει να συμπληρώσει κάτι παραπάνω από 360 μοίρες σε μία ηλιακή ημέρα. Από την άλλη πλευρά, οι απλανείς αστέρες είναι τόσο μακριά από τη Γη, έτσι ώστε η κίνηση της Γης γύρω από τον Ήλιο να είναι αμελητέα ως προς το άστρο. Συνεπώς, η Γη περιστρέφεται ακριβώς 360 μοίρες σε μία αστρική μέρα. Έτσι, η γωνία που σχηματίζεται μεταξύ των ακτινικών διανυσμάτων Γης-Ήλιου και Γης-απλανούς αστέρα αυξάνεται κατά μερικές μοίρες κάθε μέρα.



Εικόνα 2.4: Αστρικός Χρόνος με αφετηρία μέτρησης μακρινό αστέρα και *Ηλιακός Χρόνος* με αφετηρία μέτρησης τον Ήλιο.

2.2.4 Ατομικός Χρόνος

Ο Ατομικός Χρόνος TAI (Temps Atomique International) προκύπτει από μετρήσεις στην επιφάνεια της Γης με ατομικά χρονόμετρα. Ο TAI διαμορφώνεται από τον υπολογισμό του σταθμισμένου μέσου όρου των μετρούμενων χρόνων πολλών ατομικών χρονομέτρων ανά τον κόσμο. Είναι δηλαδή μία συντονισμένη κλίμακα χρόνου, η οποία έχει ως θεμελιώδη μονάδα μέτρησης το *second* στο διεθνές σύστημα SI, μετρημένο στην επιφάνεια του γεωειδούς.

Ο ορισμός του «1 second (TAI)» έχει ως εξής: 1 second είναι η χρονική διάρκεια των 9.192.631.770 περιόδων ακτινοβολίας του ισότοπου 133 του στοιχείου του καισίου (Cs-133), κατά τη διαδοχική μετάβασή του μεταξύ δύο ενεργειακών καταστάσεων (International Bureau of Weights and Measures, 1967).

Ο χρόνος TAI μπορεί να επεκταθεί σε οποιοδήποτε σταθερό ή κινούμενο σημείο κοντά στο γεωειδές εφαρμόζοντας τις διορθώσεις της Θεωρίας της Σχετικότητας (διορθώσεις για τις διαφορές στο βαρυτικό δυναμικό, την ταχύτητα και την περιστροφή της Γης).

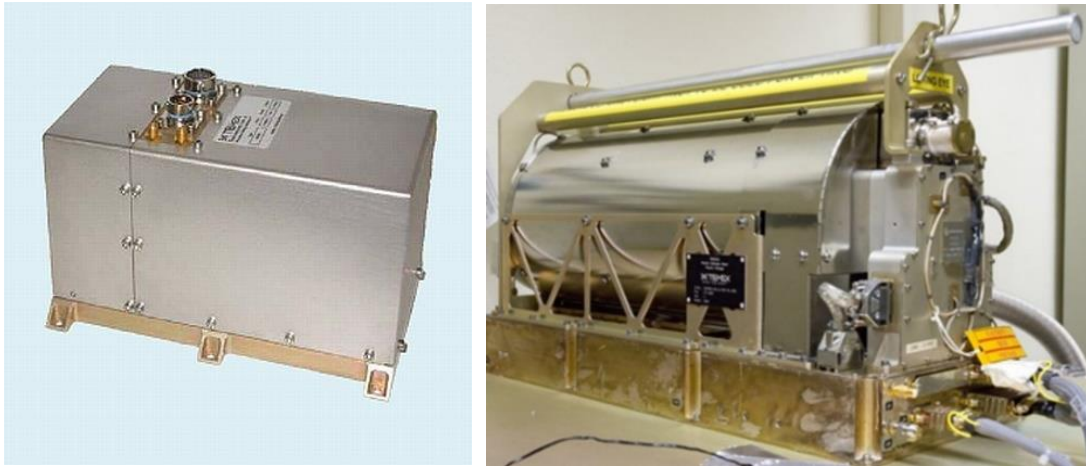
2.2.5 Ατομικά Χρονόμετρα

Τα ατομικά χρονόμετρα είναι ένα εξαιρετικά ακριβές μέσο χρονομέτρησης. Αποκλίνουν μόλις 1 δευτερόλεπτο σε περίπου 20 εκατομμύρια χρόνια. Ατομικό χρονόμετρο είναι ουσιαστικά ένας ταλαντωτής που εκτελεί (σχεδόν) αμείωτη ταλάντωση. Τα άτομα έχουν χαρακτηριστικές συχνότητες ταλάντωσης, δηλαδή απορροφούν και εκπέμπουν ακτινοβολία ορισμένων μόνο συχνοτήτων, που είναι χαρακτηριστικές για κάθε είδος ατόμων.

Τον Οκτώβριο του 1964, η Διεθνής Επιτροπή Μέτρων και Σταθμών (International Committee of Weights and Measures) ενέκρινε ως προσωρινό ορισμό για τη μέτρηση του χρόνου, μια συγκεκριμένη συχνότητα από το φάσμα εκπομπής του καισίου-133. Το 1967, η ίδια συχνότητα επιλέχθηκε να χρησιμοποιηθεί στον ορισμό του δευτερολέπτου από το Διεθνές Σύστημα Μονάδων (S.I.). Από τότε το καίσιο χρησιμοποιείται ευρέως σε ατομικά χρονόμετρα.

Τα στοιχεία που χρησιμοποιούνται συνήθως στα ατομικά χρονόμετρα των δορυφόρων είναι υδρογόνου μείζερ, ρουβιδίου Rb και καισίου Cs-133. Το Καίσιο-133 είναι το μόνο σταθερό ισότοπο του καισίου. Χρησιμοποιείται ευρέως στα ατομικά χρονόμετρα των δορυφόρων GPS. Μείζερ (Maser – Microwave Amplification by Stimulated Emission of Radiation) σημαίνει ενίσχυση μικροκυμάτων με εξαναγκασμένη εκπομπή ακτινοβολίας. Είναι μία διάταξη που χρησιμοποιείται ως ενισχυτής ή πομπός ηλεκτρομαγνητικών ακτινοβολιών μοριακών ή ατομικών συστημάτων.

Η θεμελιώδης φυσική αρχή λειτουργίας του Maser είναι η έννοια της εξαναγκασμένης εκπομπής, η οποία παρουσιάστηκε για πρώτη φορά από τον Einstein το 1917. Ένα μείζερ υδρογόνου (επίσης γνωστό ως πρότυπο συχνότητας υδρογόνου) είναι ένας ειδικός τύπος μείζερ που χρησιμοποιεί τις εγγενείς ιδιότητες του ατόμου του υδρογόνου για να λειτουργήσει ως μία ακριβής συχνότητα αναφοράς.



Εικόνα 2.5: Το ατομικό χρονόμετρο ρουβιδίου (αριστερά) και το ατομικό χρονόμετρο υδρογόνου maser (δεξιά). (ESA, 2007)

2.2.5.1. Διασπορά Allan

Η σταθερότητα της ταλάντωσης των ατόμων και η αβεβαιότητα αυτής, σε βάθος χρόνου, αντιπροσωπεύει την ποιότητα του ατομικού χρονομέτρου. Η ακρίβεια και η σταθερότητα είναι τα δύο βασικότερα κριτήρια για την απόδοση ενός ρολογιού.

Η ακρίβεια ενός ρολογιού (σε σχέση με κάποιο πρότυπο) μπορεί να προσδιοριστεί με μία μοναδική, στιγμιαία μέτρηση του χρόνου. Ο προσδιορισμός του *ρυθμού* των χτύπων ενός ρολογιού, από την άλλη πλευρά, απαιτεί τουλάχιστον δύο χρονικές μετρήσεις που χωρίζονται από ένα σταθερό χρονικό διάστημα. Το αποτέλεσμα δίνει ένα μέτρο του μέσου ρυθμού του ρολογιού. Εν τέλει, χρειάζονται τρεις ή περισσότερες χρονικές μετρήσεις, οι οποίες αποτελούν δύο ή περισσότερες μετρήσεις του ρυθμού, προκειμένου να καθοριστεί εάν ένα ρολόι λειτουργεί με σταθερό ρυθμό.

Δεδομένου ότι τα ρολόγια με χρονικές μετατοπίσεις (καθυστερήσεις) ή μετατοπίσεις στον ρυθμό μπορούν πάντα να ρυθμίζονται, ένα πιο ρεαλιστικό μέτρο της εγγενούς ποιότητας του ρολογιού δεν θα πρέπει να είναι ούτε η ακρίβεια, ούτε ο ρυθμός, αλλά η *σταθερότητα* – η οποία είναι ένα μέτρο της *συνέπειας* του ρυθμού.

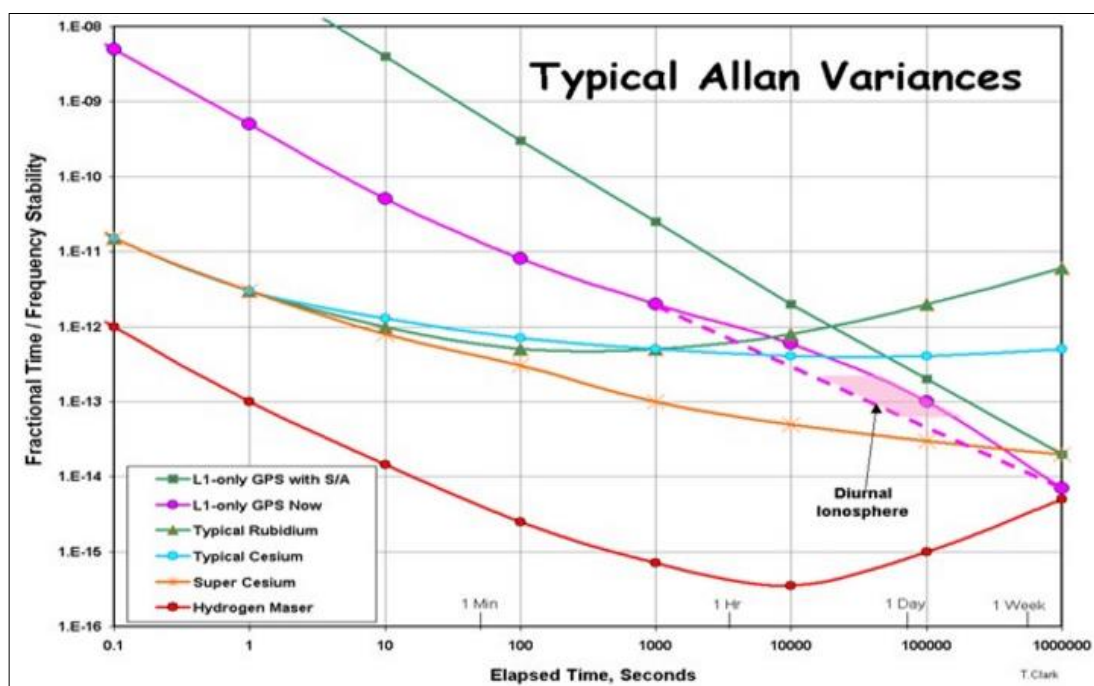
Για τον έλεγχο της σταθερότητας του ρυθμού των διάφορων ατομικών χρονομέτρων χρησιμοποιείται η «τυπική απόκλιση Allan» $\sigma_y(\tau)$, όπου το τ συμβολίζει τον χρόνο. Η τυπική απόκλιση Allan (Allan deviation – **ADEV**) αποτελεί μια στατιστική φόρμουλα που υπολογίζει τη σταθερότητα του ρολογιού. Όσο περισσότερες μετρήσεις του χρόνου ή του ρυθμού γίνονται σε τακτά χρονικά διαστήματα, ένα σαφέστερο μέτρο της σταθερότητας του ρυθμού αναδύεται. Ας σημειωθεί ότι η φράση «διασπορά Allan» (Allan variance – **AVAR**), ήταν δημοφιλέστερη στο παρελθόν και ότι $AVAR = (ADEV)^2$.

Μία τιμή ADEV είναι ουσιαστικά μια πρόβλεψη – η οποία βασίζεται στον μέσο όρο πολλών χρονικών διαστημάτων του παρελθόντος – του κατά πόσο ο ρυθμός του ρολογιού είναι πιθανό να μετατοπιστεί κατά τη διάρκεια ενός χρονικού διαστήματος στο μέλλον.

Επιλέγοντας διαφορετικά χρονικά διαστήματα, μπορούν να υπολογιστούν πολλές τιμές της τυπικής απόκλισης Allan, από το ίδιο σύνολο δεδομένων. Αλλά και οι μεμονωμένοι αριθμοί από μόνοι τους κάνουν πλήρη χρήση όλων των διαθέσιμων δεδομένων. Η ADEV είναι ακόμα πιο ισχυρό εργαλείο, όταν γίνεται ένα μοναδικό διάγραμμα, με σημεία από πολλούς διαφορετικούς μέσους χρόνους (χρονικές στιγμές). Ένα διάγραμμα log-log είναι πολύ χρήσιμο, όπου ο άξονας x είναι ο μέσος χρόνος (τ) και ο άξονας y είναι η υπολογιζόμενη σχετική σταθερότητα (σ), το λεγόμενο *σίγμα-ταυ* (σ - τ) διάγραμμα.

Όταν γίνει αυτό, ένα διάγραμμα με μια διάταξη από ευθείες και καμπύλες μπορεί να γίνει ορατό (Εικόνα 2.6). Μια μικρή αύξηση ή μείωση στη σταθερότητα εμφανίζεται στο διάγραμμα, με τον μέσο χρόνο να αντιστοιχεί σε μικρότερες ή μεγαλύτερες τιμές. Κατά συνέπεια, ένα log-log διάγραμμα τυπικής απόκλισης Allan μπορεί να λειτουργήσει ως μία διαγνωστική "ακτινογραφία", αποκαλύπτοντας την εσωτερική λειτουργία ενός ρολογιού.

Δεν υπάρχει κανένας κανόνας που να ορίζει το πόσο συχνά θα πρέπει κανείς να λαμβάνει δεδομένα από ένα χρονόμετρο ταλάντωσης. Για ένα τυπικό χρονόμετρο δευτερολέπτου, θα μπορούσαν να πραγματοποιηθούν μετρήσεις κάθε ένα ή δύο δευτερόλεπτα. Για ένα μακροπρόθεσμο πείραμα ίσως είναι πιο κατάλληλο να καταγράφονται μετρήσεις χρόνου μόνο κάθε λεπτό, ώρα, ή ακόμα και μία φορά την ημέρα (Van Baak, 2013).



Εικόνα 2.6: Διασπορά Allan – γραφική παράσταση της απόδοσης των διάφορων χρονομέτρων συναρτήσει του χρόνου. (Clark, Hambly, 2003)

Ένα μέτρο σ_x που περιγράφει κατά πόσο μετατοπίστηκε η συχνότητα f σε ένα ατομικό χρονόμετρο μετά την πάροδο χρονικού διαστήματος τ δίδεται ως συνάρτηση της τυπικής απόκλισης Allan σ_y ως:

$$\sigma_X = \tau \sigma_Y \quad (2.1)$$

όπου τη χρονική στιγμή t_i οι σχετικές μετρήσεις y_i , με $i = 1, 2, \dots, n$ είναι

$$y_i = \frac{\Delta t_i}{\tau} \quad \text{ή} \quad y_i = \frac{\Delta f_i}{f} \quad (2.2)$$

όπου

$$\Delta t_i = t(t_i - \tau) - t(t_i) \quad , \quad \Delta f_i = f(f_i - \tau) - f(f_i) \quad (2.3)$$

Η διασπορά Allan ορίζεται ως:

$$\sigma_Y^2(\tau) = \frac{y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i^2 \quad (2.4)$$

Τα ατομικά χρονόμετρα παρουσιάζουν μεταβολές στο ρυθμό οι οποίες, σύμφωνα με την τελική τυπική απόκλιση σ_X , κατατάσσονται σε τρεις κατηγορίες (Μερτίκας, 2016):

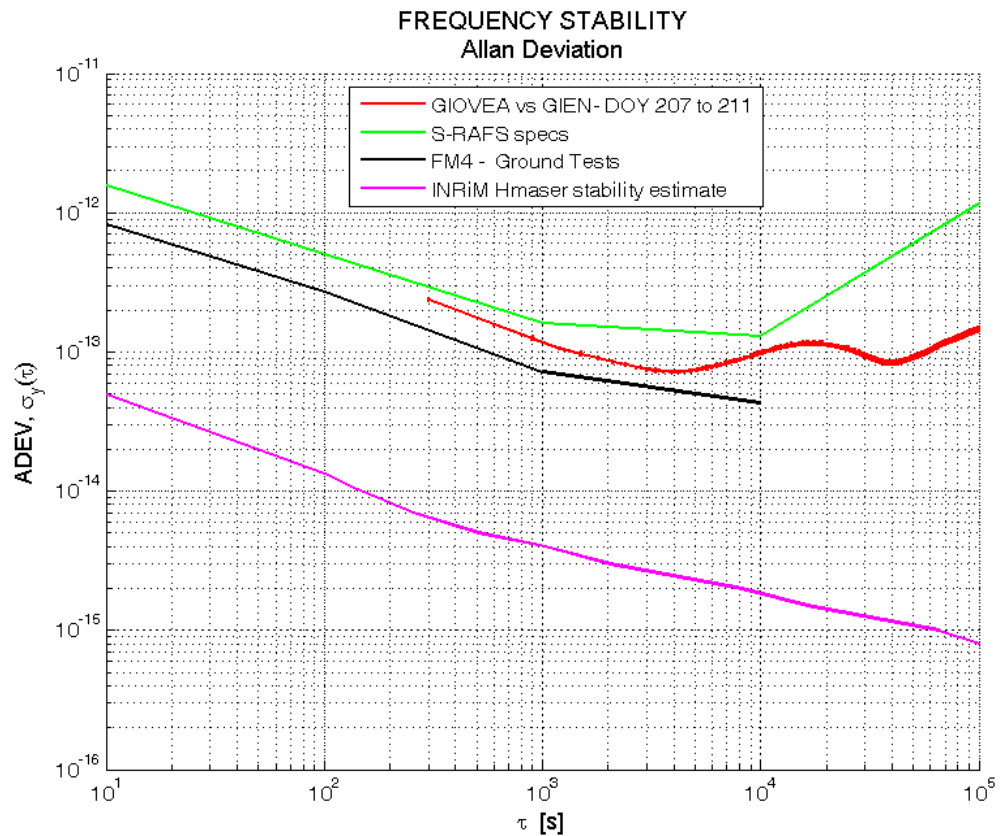
- 1) Μικρής διάρκειας μεταβολές: η τυπική απόκλιση Allan μειώνεται, καθώς το χρονικό διάστημα τ αυξάνει, σύμφωνα με τη σχέση $\sigma_X = K_1 \tau^\alpha$, όπου $\alpha > 0$. Για χρονόμετρα κρυστάλλου και maser υδρογόνου $\alpha = 1$, ενώ για χρονόμετρα καισίου και ρουβιδίου $\alpha = 0.5$.
- 2) Μέσης διάρκειας μεταβολές: η διασπορά Allan παραμένει σταθερή με τον χρόνο τ .
- 3) Μεγάλης διάρκειας μεταβολές: η τυπική απόκλιση Allan μειώνεται, καθώς το χρονικό διάστημα τ αυξάνει, σύμφωνα με τη σχέση $\sigma_X = K_2 \tau^{-0.5}$.

Τα K_1 , K_2 είναι παράμετροι που εξαρτώνται από το είδος του ατομικού χρονομέτρου. Παραδείγματος χάρη, για χρονόμετρα καισίου, $K_1 = 5.0 \times 10^{-11} \sqrt{s}$, $K_2 = 3.0 \times 10^{-17} \sqrt{s^{-1}}$ και $\sigma_Y = 1.0 \times 10^{-13}$. Ένα τυπικό διάγραμμα της διασποράς Allan ορισμένων ατομικών χρονομέτρων παρουσιάζεται στην Εικόνα 2.6.

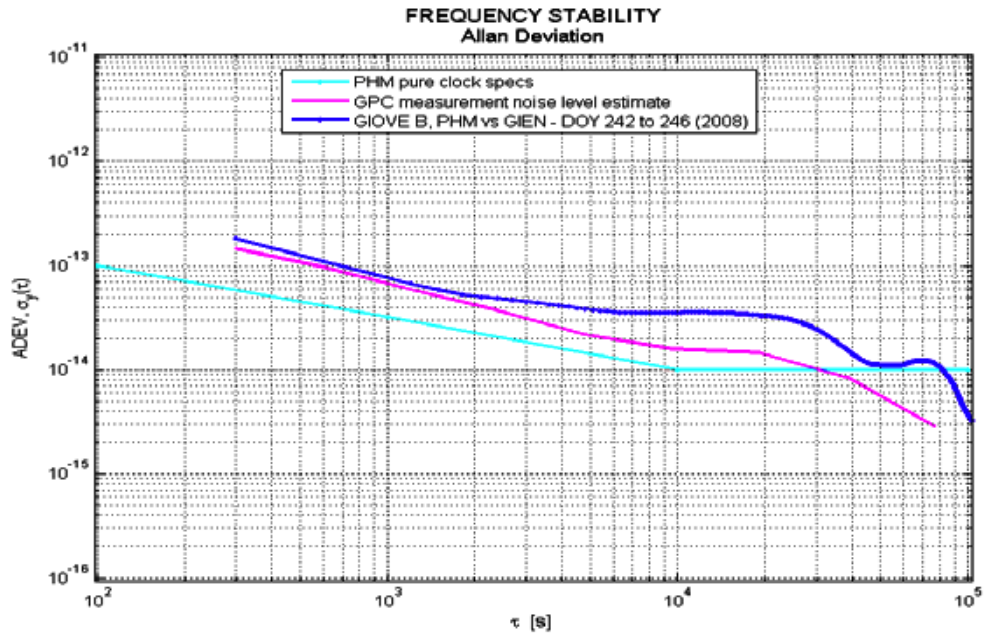
Δύο δοκιμαστικοί δορυφόροι του ευρωπαϊκού συστήματος εντοπισμού Galileo, κατασκευάστηκαν για την Ευρωπαϊκή Υπηρεσία Διαστήματος (ESA) με σκοπό τον έλεγχο της τεχνολογίας τους όταν κινούνται σε τροχιά. Οι δύο δορυφόροι GIOVE-A, B (Galileo In-Orbit Validation Element) εκτοξεύθηκαν το Δεκέμβριο του 2005 και τον Απρίλιο του 2008 αντίστοιχα. Ο δορυφόρος GIOVE-A εξοπλίστηκε με δύο χρονόμετρα ρουβιδίου, με σταθερότητα 10 ns/ημέρα, ενώ ο GIOVE-B με δύο χρονόμετρα ρουβιδίου και ένα χρονόμετρο Maser υδρογόνου. Η διασπορά Allan για τα χρονόμετρα υψηλής ακρίβειας και σταθερότητας των δύο δορυφόρων φαίνονται στα παρακάτω γραφήματα (Εικόνες 2.8 - 2.10).



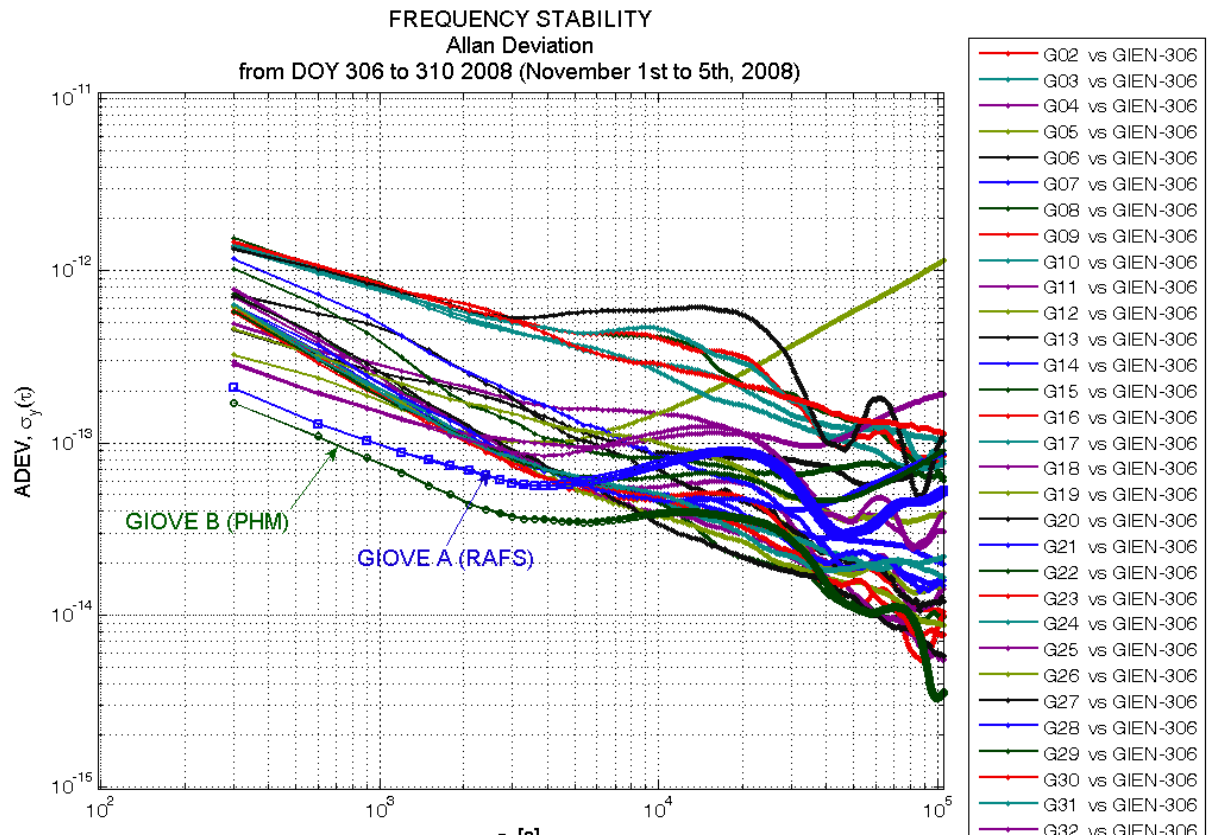
Εικόνα 2.7: Εξοπλισμός δορυφόρου πλοήγησης Galileo. Στο κέντρο φαίνονται τα δύο ατομικά χρονόμετρα ρουβιδίου (δεξιά) και τα δύο maser υδρογόνου (αριστερά). (ESA, 2015)



Εικόνα 2.8: Τυπική απόκλιση Allan για το ατομικό χρονόμετρο ρουβιδίου (Rubidium Atomic Frequency Standard – RAFS FM5) του δορυφόρου GIOVE-A, συναρτήσει του παρερχόμενου χρόνου σε second. (Waller, 2008)



Εικόνα 2.9: Τυπική απόκλιση Allan για το ατομικό χρονόμετρο υδρογόνου μείζερ (Passive Hydrogen Maser – PHM) του δορυφόρου GIOVE-B, συναρτήσει του παρερχόμενου χρόνου σε second. (Waller, 2008)



Εικόνα 2.10: Σύγκριση της σταθερότητας των ατομικών χρονομέτρων των GIOVE-A και GIOVE-B με ατομικά χρονόμετρα δορυφόρων GPS. (Waller, 2008)

3^ο Κεφάλαιο

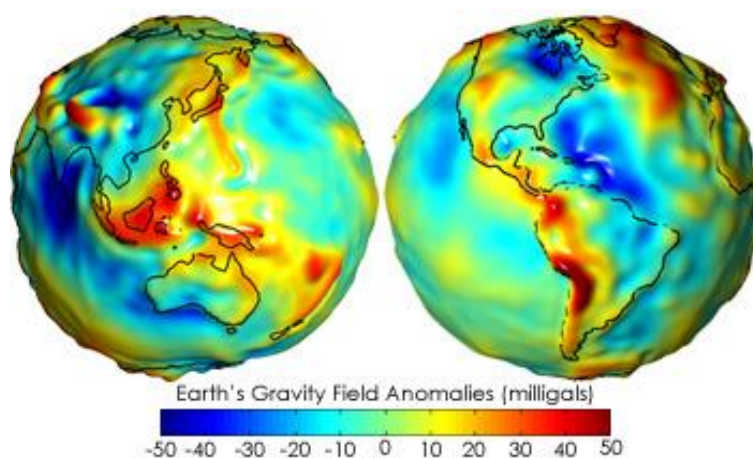
Βαρυτικό Πεδίο & Μηχανική Ουράνιων Σωμάτων

Ένας δορυφόρος κινείται σε μία σταθερή τροχιά εξαιτίας της βαρύτητας της Γης. Η περιγραφή του βαρυτικού πεδίου της Γης και των μεταβολών του από τόπο σε τόπο μπορεί να βασιστεί στους νόμους και τις εξισώσεις της Κλασικής Μηχανικής και ιδιαίτερα στο νόμο της βαρυτικής έλξης του Νεύτωνα. Στον ακριβή προσδιορισμό του νευτώνειου βαρυτικού δυναμικού της Γης όμως, πρέπει να συμπεριλαμβάνονται ορισμένες παράμετροι που εξαρτώνται από το ανομοιογενές της σχήμα και την περιστροφή της.

Η κίνηση ενός δορυφόρου γύρω από τη Γη περιγράφεται με ικανοποιητική ακρίβεια από τους εμπειρικούς νόμους του Kepler για τις πλανητικές τροχιές. Το γεγονός ότι οι τροχιές των δορυφόρων είναι ελλειπτικές και όχι κυκλικές δημιουργεί ένα περιοδικό σφάλμα στις μετρήσεις που πραγματοποιούν, το οποίο εξαρτάται από τη γεωμετρία της έλλειψης που ο κάθε δορυφόρος ακολουθεί.

3.1 Το πεδίο βαρύτητας

Το βαρυτικό δυναμικό ενός σώματος δίνεται με καλή προσέγγιση από τους νόμους του Νεύτωνα, οι οποίοι όμως ισχύουν για σημειακές μάζες, σε αδρανειακό σύστημα αναφοράς. Άρα, για τον υπολογισμό του βαρυτικού δυναμικού ενός σώματος, όπως η Γη, που δεν είναι στατικό (περιστρέφεται και επιταχύνεται), ούτε απόλυτα συμμετρικό (παρατηρείται επιπλάτυνση στους πόλους, επομένως αποκλίνει από μία σφαιρικής συμμετρίας, ομοιόμορφα κατανεμημένη μάζα) είναι απαραίτητες ορισμένες διορθώσεις πάνω στο νευτώνειο βαρυτικό δυναμικό, για τον ακριβή προσδιορισμό του βαρυτικού δυναμικού της Γης και για το πώς αυτό επηρεάζει στην πραγματικότητα τις τροχιές των δορυφόρων.



Εικόνα 3.1: Μοντέλο του βαρυτικού πεδίου της Γης. Μονάδα μέτρησης βαρυτικών ανωμαλιών: *milligal*. (NASA, University of Texas Center for Space Research, 2003)

Στην Εικόνα 3.1 παρουσιάζεται ένα μοντέλο του πεδίου βαρύτητας της Γης, όπως υπολογίζεται από διαχρονικές μετρήσεις του δορυφόρου GRACE (Gravity Recovery And Climate Experiment). Το σχήμα που προκύπτει από τη χαρτογράφηση του βαρυτικού πεδίου είναι μία ισοδυναμική επιφάνεια που ονομάζεται *γεωειδές*. Παρατηρείται ότι διαφέρει σημαντικά από μία ομοιογενή σφαίρα, ενώ η μεγαλύτερη παραμόρφωση φαίνεται να είναι το εξόγκωμα στο επίπεδο του ισημερινού. Στη Γεωδαισία, το γεωειδές είναι η ειδική επιφάνεια ισοδύναμου βαρυτικού δυναμικού, κοντά στη μέση στάθμη της θάλασσας. Το γεωειδές αντανakλά τις ανωμαλίες στο πεδίο βαρύτητας της Γης στην επιφάνειά της, λόγω της ανομοιογενούς κατανομής μάζας και πυκνότητας στο εσωτερικό της (GFZ German Research Centre for Geosciences, 2014).

3.1.1 Ο Νόμος της Παγκόσμιας Έλξης

Ο νόμος της βαρυτικής έλξης του Νεύτωνα δημοσιεύθηκε το 1687, περίπου 3 γενιές μετά τον προσδιορισμό της επιτάχυνσης της βαρύτητας από τον Galileo και την ανακάλυψη των εμπειρικών νόμων για την περιγραφή των πλανητικών τροχιών από τον Kepler. Σημαντικό επιχείρημα για την εγκυρότητα των νόμων κίνησης και βαρύτητας του Νεύτωνα αποτέλεσε το γεγονός ότι μέσω αυτών αποδεικνύονταν και οι νόμοι του Kepler.

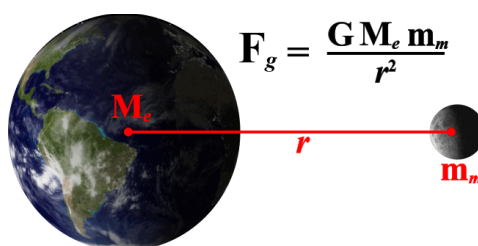
Ο νόμος της βαρύτητας κατά Νεύτωνα αναφέρει ότι κάθε δύο σωματίδια μάζας M και m , με μεταξύ τους απόσταση r , έλκονται το ένα προς το άλλο με μία δύναμη

$$F = \frac{GMm}{r^2} \quad (3.1)$$

όπου G η **παγκόσμια σταθερά της βαρύτητας**, της οποίας η τιμή έχει καθοριστεί από μετρήσεις ως (Μερτίκας, 2012)

$$G = 6.673 \times 10^{-11} \left[\frac{m^3}{kg \ s^2} \right] \quad (\text{ή } Nm^2kg^{-2}). \quad (3.2)$$

Η τιμή G είναι μετρημένη με ακρίβεια ένα μέρος στα 13000. Η τιμή $\mu = M_E G$ από την άλλη πλευρά, όπου M_E η μάζα της Γης, είναι γνωστή με πολύ μεγαλύτερη ακρίβεια και συνεπώς χρησιμοποιείται στους υπολογισμούς (Chobotov, 2002).



Εικόνα 3.2: Εφαρμογή του νόμου της Παγκόσμιας Έλξης στο σύστημα Γη-Σελήνη. Ο νόμος ισχύει προσεγγιστικά καθώς τα σώματα δεν έχουν ομοιόμορφα κατανεμημένη μάζα.

Μια πιο γενική έκφραση του παραπάνω νόμου είναι στη διανυσματική του μορφή

$$\mathbf{F} = -G \frac{Mm}{\|\mathbf{r}\|^3} \mathbf{r} = -G \frac{Mm}{\|\mathbf{r}\|^2} \hat{\mathbf{r}} \quad (3.3)$$

όπου \mathbf{r} το διάνυσμα της απόστασης μεταξύ των δύο μαζών και $\|\mathbf{r}\| = r$ το μέτρο του διανύσματος της μεταξύ τους απόστασης. Το μοναδιαίο ακτινικό διάνυσμα $\hat{\mathbf{r}}$ δείχνει τη διεύθυνση του διανύσματος \mathbf{r} ($\hat{\mathbf{r}} = \mathbf{r}/\|\mathbf{r}\|$). Η ποσότητα G δεν πρέπει να συγχέεται με την ποσότητα g , τη βαρυτική επιτάχυνση ή δύναμη ανά μονάδα μάζας λόγω βαρύτητας, για την οποία μπορεί να παραχθεί μία σχέση, συνδυάζοντας τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$, όπου $\mathbf{a} = d^2\mathbf{r}/dt^2$ η επιτάχυνση και m η αδρανειακή μάζα του σώματος που επιταχύνεται, με το νόμο της Παγκόσμιας Έλξης,

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} = m\mathbf{g} = -G \frac{mM}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \Rightarrow \mathbf{g} = \frac{\mathbf{F}}{m} = -G \frac{M}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \quad \text{και} \quad g = \|\mathbf{g}\| = G \frac{M}{r^2} \quad (3.4)$$

Η επιτάχυνση g είναι το μέτρο ενός διανύσματος \mathbf{g} το οποίο περιγράφει τη βαρυτική δύναμη ανά μονάδα μάζας. Το διάνυσμα \mathbf{g} ορίζεται ως το **πεδίο της βαρύτητας** και θεωρείται κατά συνθήκη θετικό προς την κατεύθυνση του κέντρου της Γης, δηλαδή, προς το σημείο που προκαλεί την έλξη (ελκτικό κέντρο) ή αλλιώς, προς την κατεύθυνση του διανύσματος θέσης \mathbf{r} . Το μέτρο του \mathbf{g} μεταβάλλεται από σημείο σε σημείο στην επιφάνεια της Γης, αλλά η τιμή που συνήθως χρησιμοποιείται είναι $g = 9.8 = m/s^2$ (στο S.I.). Προς τιμήν του Γαλιλαίου, η μονάδα που χρησιμοποιείται στη βαρυτιμετρία είναι το Gal: $1 \text{ Gal} = 1 \text{ cm/s}^2 = 0.01 \text{ m/s}^2 \approx 10^{-3} g$. Οι βαρυτικές ανωμαλίες συνήθως εκφράζονται σε *miligal*. (Hager, 2002)

3.1.2 Βαρυτικό Δυναμικό

Η Εξ. (3.4) της βαρυτικής δύναμης μπορεί να εκφραστεί σε όρους **βαρυτικού δυναμικού** V ενός σώματος (Chobotov, 2002):

$$\mathbf{F} = \nabla V \quad (3.5)$$

όπου $V = V(r) = -GM/r$ είναι το βαρυτικό δυναμικό για σφαιρικό σώμα.

Για μη σφαιρικό σώμα με ανομοιόμορφη κατανομή μάζας, το V περιέχει πρόσθετους όρους που μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να προσδιοριστεί η τιμή της βαρυτικής δύναμης \mathbf{F} , όπως θα φανεί στη συνέχεια του κεφαλαίου.

Εάν ένα οποιοδήποτε σώμα μάζας m βρίσκεται εντός βαρυτικού πεδίου \mathbf{g} που οφείλεται σε μάζα M , τότε αυτό θα έχει βαρυτική δυναμική ενέργεια. Αυτή η ενέργεια μπορεί να θεωρηθεί ως το έργο W που απαιτείται – λόγω της βαρυτικής δύναμης που ασκείται από το σώμα μάζας M – προκειμένου το σώμα μάζας m να μετακινηθεί από μια θέση αναφοράς \mathbf{r}_{ref} έως τη θέση \mathbf{r} .

Το βαρυτικό δυναμικό V είναι η δυναμική ενέργεια ανά μονάδα μάζας. Με άλλα λόγια, είναι το έργο που απαιτείται, λόγω της βαρυτικής δύναμης, ανά μονάδα μάζας, το αποτέλεσμα του οποίου δίνει ένα βαθμωτό μέγεθος, γι' αυτό και εξυπηρετεί να χρησιμοποιείται στους υπολογισμούς. Στη Φυσική συνηθίζεται να γράφεται με αρνητικό πρόσημο, κάτι το οποίο υποδεικνύει ότι η βαρυτική δύναμη είναι ελκτική. Η θέση αναφοράς συχνά θεωρείται στο άπειρο ($\mathbf{r}_{\text{ref}} = \infty$), δεδομένου ότι το δυναμικό μηδενίζεται στο άπειρο $V(\infty) = 0$.

Το δυναμικό V είναι η ολοκλήρωση πάνω στον χώρο του πεδίου βαρύτητας. Αντιστρόφως, το πεδίο βαρύτητας \mathbf{g} , η βαρυτική δύναμη ανά μονάδα μάζας, είναι η χωρική παράγωγος (κλίση) του δυναμικού.

$$\mathbf{g} = -\frac{GM}{r^2} \hat{\mathbf{r}} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \left(\frac{GM}{r} \right) = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} V = -\text{grad}V \equiv -\nabla V \quad (3.6)$$

Το γεγονός ότι το βαρυτικό δυναμικό ορίζεται να είναι αρνητικό σημαίνει ότι όταν η μάζα πλησιάζει τη Γη, το δυναμικό της μάζας (η ενέργεια) μειώνεται ενώ η επιτάχυνσή της, λόγω της έλξης από το κέντρο της Γης, αυξάνεται. Η κλίση της καμπύλης είναι η (θετική) τιμή του g , και το αρνητικό πρόσημο διασφαλίζει ότι το V δείχνει προς την κατεύθυνση της μείωσης, δηλαδή προς το κέντρο μάζας. (Hager, 2002)

3.1.3 Το πεδίο βαρύτητας της Γης

Οι εκφράσεις για το ελκτικό πεδίο με επιτάχυνση g της μορφής που περιγράφει ο νόμος της Παγκόσμιας Έλξης ισχύουν μόνο για υλικά σημεία. Στην περίπτωση που θέλει κανείς να εξετάσει την έλξη και τη συνάρτηση δυναμικού για ένα σώμα, όπως η Γη, τότε οι εξισώσεις περιπλέκονται και κατά κανόνα εξαρτώνται από τη μορφή του σώματος. Η βαρύτητα της Γης μπορεί να θεωρηθεί ως η δύναμη που ασκείται σε ένα σώμα μάζας m από το συνδυασμό α) της βαρυτικής έλξης της Γης, μάζας M_E και β) της περιστροφής της Γης (Μερτίκας, 2012). Στην πραγματικότητα, τα σώματα όχι μόνο έλκονται από τη μάζα της Γης και των άλλων γειτονικών σωμάτων, αλλά και απωθούνται από την επιφάνειά της λόγω της περιστροφής της γύρω από τον άξονά της.

Η περιστροφή της Γης δημιουργεί μια φυγόκεντρο δύναμη η οποία, σε συνδυασμό με την βαρυτική έλξη από την ίδια της τη μάζα, οδηγεί στο πεπλατυσμένο της σχήμα στους πόλους (εξόγκωμα του ισημερινού). Η συνισταμένη αυτή δύναμη ορίζεται ως η δύναμη της βαρύτητας. Η φυγόκεντρος επιτάχυνση είναι μέγιστη στον ισημερινό, αφού η απόσταση από τον άξονα περιστροφής είναι μέγιστη, ενώ τείνει να μηδενίζεται στους πόλους, αφού η απόσταση από τον άξονα περιστροφής είναι μηδενική. Αντίθετα, η ελκτική δύναμη της βαρύτητας είναι μέγιστη στους πόλους (η ακτίνα της Γης στους πόλους είναι μικρότερη), ενώ ελαχιστοποιείται στο επίπεδο του ισημερινού (η ακτίνα της Γης στον ισημερινό είναι μεγαλύτερη). Οι προαναφερθείσες συνεισφορές μπορούν να εκφραστούν σε όρους σφαιρικών αρμονικών.

Το ενεργό δυναμικό της Γης αποτελείται από τρεις συνιστώσες:

1. Το βαρυτικό δυναμικό λόγω της μάζας της Γης:

$$V_{\text{gravitation}} = -\frac{GM}{r} \quad (3.7)$$

όπου $GM = 3.986004418 \times 10^{14} \text{ m}^3\text{s}^{-2}$ (στο WGS84) το γινόμενο της μάζας της Γης επί τη νευτώνεια βαρυτική σταθερά και r η απόσταση από το κέντρο μάζας της.

2. Το δυναμικό περιστροφής:

$$V_{\text{rotation}} = -\frac{1}{2} r_E^2 \omega_E^2 \sin^2 \vartheta \quad (3.8)$$

όπου ϑ η πολική γωνία, r_E η κάθετη απόσταση από τον άξονα περιστροφής της Γης και ω_E η γωνιακή ταχύτητα της Γης. Στην πραγματικότητα, το δυναμικό περιστροφής είναι ακριβώς η κινητική ενέργεια λόγω περιστροφής, $K = \frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{1}{2} m r^2 \omega^2$ (όπου I η ροπή αδράνειας $I = m r^2$), ανά μονάδα μάζας στερεού σώματος $-\frac{1}{2} \omega^2 r^2 = -\frac{1}{2} v^2$ (όπου v η γραμμική ταχύτητα ενός σημείου στην επιφάνεια της Γης $v = \omega r$).

3. Το επιπλέον δυναμικό λόγω του πεπλατυσμένου σχήματος της Γης:

$$V_{\text{oblate}} = \frac{GM}{r} J_2 \left(\frac{a_1}{r} \right)^2 P_2(\cos \vartheta) \quad (3.9)$$

όπου $a_1 = 6.3781370 \times 10^6 \text{ m}$ (στο WGS84) η ακτίνα της Γης στο επίπεδο του ισημερινού και r η απόσταση από το κέντρο μάζας της. Το δυναμικό V_{oblate} μπορεί να προκύψει από το ανάπτυγμα του βαρυτικού δυναμικού για μια τυχαία κατανομή μάζας.

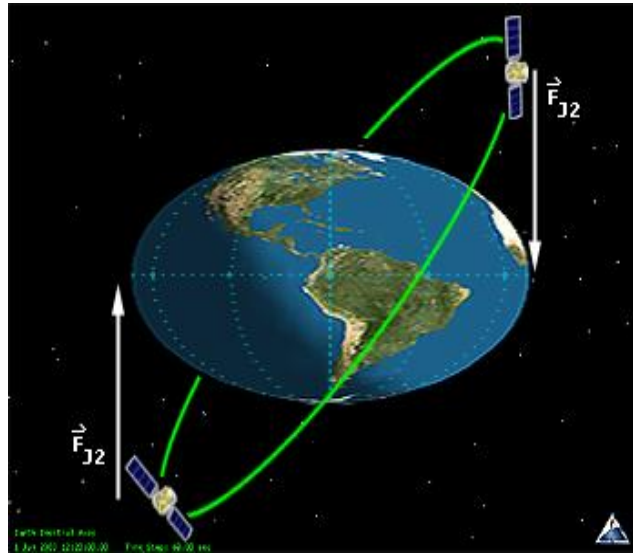
Το J_2 είναι ένας συντελεστής που περιγράφει την παραμόρφωση ενός αντικειμένου εξαιτίας της περιστροφής του. Στην προκειμένη περίπτωση, ο συντελεστής αυτός παρουσιάζεται λόγω του πεπλατυσμένου σχήματος της Γης στους πόλους (Earth's Oblateness) που προκαλείται από την περιστροφή γύρω από τον άξονά της και η τιμή του δίνει ουσιαστικά ένα μέτρο της ελλειπτικότητας της Γης. Για σφαίρα, $J_2 = 0$ και το δυναμικό ανάγεται στην έκφραση του δυναμικού ενός σώματος με σφαιρική συμμετρία ($V = -GM/r$).

Ο συντελεστής ελλειπτικότητας της Γης J_2 ή αλλιώς ο *δυναμικός παράγοντας επιπλάτυνσης*, όπως ορίστηκε στον Πίνακα 2.1 συνδέεται άμεσα με τη *γεωμετρική επιπλάτυνση* f (Hager, 2002):

$$f \equiv \frac{a_1 - b_1}{a_1} \simeq \frac{3}{2} J_2 + \frac{1}{2} m \quad (3.10)$$

Η παρούσα σχέση δείχνει ουσιαστικά ότι η γεωμετρική επιπλάτυνση f , όπως ορίζεται από τη σχετική διαφορά μεταξύ πολικής b_1 και ισημερινής ακτίνας a_1 , σχετίζεται με τον συντελεστή ελλειπτικότητας J_2 και με τον λόγο m της περιστροφικής $a_1 \omega_E^2$ προς τη βαρυτική GM/a_1^2

συνιστώσα της βαρύτητας στον ισημερινό. Η τιμή του συντελεστή J_2 στο σύστημα WGS-84 είναι $J_2 = 1.0826300 \times 10^{-3}$ (NIMA, 2000).



Εικόνα 3.3: Η επιπλάτυνση στους πόλους της Γης προκαλεί μια δύναμη περιστροφής στις δορυφορικές τροχιές, η οποία επηρεάζει τις παραμέτρους της τροχιάς των δορυφόρων (διατάραξη τροχιάς) με την πάροδο του χρόνου. (J.J. Sellers, www.agi.com)

Το P_2 είναι το πολυώνυμο *Legendre* δευτέρου βαθμού:

$$P_2(\cos \vartheta) = \frac{1}{2}(3\cos^2 \vartheta - 1) \quad (3.11)$$

όπου ϑ η πολική γωνία. Τα πολυώνυμα *Legendre* εισήχθησαν για πρώτη φορά το 1782 από τον Adrien-Marie Legendre ως συντελεστές του αναπτύγματος του νευτώνειου δυναμικού για μη σημειακή μάζα και είναι μία ειδική περίπτωση σφαιρικών αρμονικών (Kawadu, IJRST 2013). Γενικά, τα πολυώνυμα *Legendre* ορίζονται ως (Hager, 2002)

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n (x^2 - 1)^n}{dx^n} \quad (3.12)$$

όπου στην προκειμένη περίπτωση έχουμε $x = \cos \vartheta$, έτσι ώστε η υπέρθεση των πολωνύμων *Legendre* να περιγράφει τη διακύμανση του δυναμικού συναρτήσει του γεωδαιτικού πλάτους (γεωδαιτικό πλάτος = 90° - πολική γωνία ϑ).

$$\text{Για } n = 0, 1, 2: P_0(\cos \vartheta) = 1, \quad P_1(\cos \vartheta) = \cos \vartheta, \quad P_2(\cos \vartheta) = \frac{1}{2}(3\cos^2 \vartheta - 1) \quad (3.13)$$

Σύμφωνα με τα παραπάνω, **το ενεργό δυναμικό της Γης ορίζεται ως:**

$$V_{\text{Geoid}} = V_{\text{gravitation}} + V_{\text{oblate}} + V_{\text{rotation}}$$

$$\Leftrightarrow V(r, \vartheta) = -\frac{GM}{r} + \frac{GM}{r^3} J_2 a_1^2 \left(\frac{3}{2} \cos^2 \vartheta - \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{2} r_E^2 \omega^2 \sin^2 \vartheta \quad (3.14)$$

όπου r η απόσταση από το κέντρο μάζας της Γης, ϑ η πολική γωνία, a_1 η ισημερινή ακτίνα, GM η βαρυτιμετρική σταθερά, J_2 ο δυναμικός παράγοντας επιπλάτυνσης και ω η γωνιακή ταχύτητα της Γης.

Έτσι, το δυναμικό στο επίπεδο του ισημερινού (όπου $r = a_1$, $\vartheta = \pi/2$) είναι

$$V_{equator} = -\frac{GM}{a_1} - \frac{G}{2a_1^3} J_2 M a_1^2 - \frac{1}{2} a_1^2 \omega^2 \quad (3.15)$$

ενώ το δυναμικό στο επίπεδο των πόλων (όπου $r = b_1$, $\vartheta = 0$) είναι

$$V_{pole} = -\frac{GM}{b_1} + \frac{G}{b_1^3} J_2 M a_1^2 \quad (3.16)$$

Η βαρυτική έλξη της Γης φαίνεται τελικά ότι αποκλίνει σημαντικά από τη βαρυτική έλξη που θα προκαλούσε μία ιδεατή σφαιρική, μη περιστρεφόμενη μάζα που περιγράφουν οι εξισώσεις του Νεύτωνα. Στην επόμενη ενότητα αναλύεται η μηχανική που διέπει τις τροχιές των ουράνιων σωμάτων δίνοντας έμφαση στις δορυφορικές τροχιές και φανερώνοντας τη θεμελιώδη εξάρτησή τους από το πεδίο βαρύτητας της Γης.

3.2 Μηχανική Ουράνιων Σωμάτων

Όπως το φεγγάρι περιστρέφεται γύρω από τη Γη ή οι πλανήτες γύρω από τον Ήλιο, οι τεχνητοί δορυφόροι κινούνται σε τροχιές οι οποίες, σύμφωνα με την Κλασική Μηχανική, σχηματίζονται με την βαρυτική έλξη. Προκειμένου να υπολογιστεί με ακρίβεια η θέση ενός δορυφόρου στην τροχιά του οποιαδήποτε στιγμή, η βαρύτητα καθώς και κάποιες άλλες μικρότερες δυνάμεις που δρουν πάνω στον δορυφόρο πρέπει να ληφθούν προσεκτικά υπ' όψιν. Σε αυτή την ενότητα εξετάζονται οι παράγοντες που καθορίζουν την τροχιά ενός δορυφόρου και περιγράφονται οι σχετικοί νόμοι, μαζί με τις θεμελιώδεις εξισώσεις που τους διέπουν.

3.2.1 Ιστορικά στοιχεία και εισαγωγή στους νόμους του Kepler

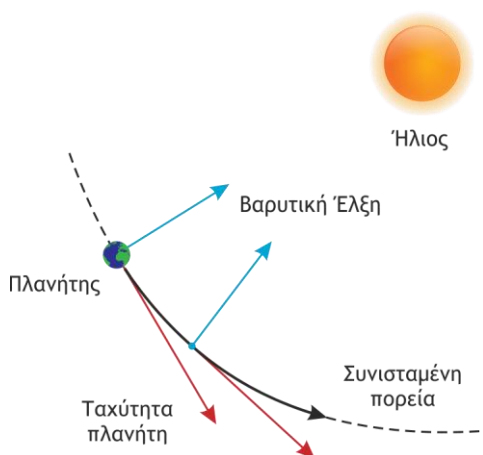
Οι τροχιές όλων των δορυφόρων ανεξαιρέτως διέπονται από τους τρεις νόμους για τις τροχιακές κινήσεις, οι οποίοι διατυπώθηκαν από τον Γερμανό αστρονόμο Johannes Kepler τον 17^ο αιώνα. Ο Kepler πίστευε σε ένα κοπερνίκαιο σύμπαν, δηλαδή ένα σύμπαν στο οποίο ο Ήλιος αντί της Γης, βρισκόταν στο κέντρο. Για να επαληθεύσει τις πεποιθήσεις του, ο Kepler χρειάστηκε αρκετά χρόνια παρατηρήσεων της κίνησης των πλανητών στην ουράνια σφαίρα. Τα αποτελέσματά του τελικά δεν θα συμπίσουν με τη θεωρία του Κοπέρνικου, η οποία υποστήριζε ότι οι πλανήτες ταξιδεύουν σε μικρές κυκλικές τροχιές.

Έπειτα από οκτώ χρόνια εργασιών και συλλογής δεδομένων, ο Kepler ανακάλυψε συγκεκριμένα ότι η τροχιά του πλανήτη Άρη ήταν στην πραγματικότητα έλλειψη, με τον Ήλιο να βρίσκεται στη μία της εστία. Αυτή η ανακάλυψη έγινε γνωστή ως ο πρώτος νόμος του Kepler

για την κίνηση των πλανητών. Κατά τη διάρκεια της ανάλυσής του, ο Kepler ανακάλυψε άλλον ένα σημαντικό νόμο που διέπει τις κινήσεις των πλανητών, τον λεγόμενο νόμο των ίσων εμβαδών.

Και οι δύο αυτοί νόμοι, οι οποίοι συγκεκριμένα αφορούσαν στον πλανήτη Άρη, δημοσιεύθηκαν το 1609 στο βιβλίο του *Astronomia Nova (Η Νέα Αστρονομία)*. Το 1618, ο Kepler ανακοίνωσε ότι οι δύο νόμοι διέπουν την κίνηση και των άλλων πλανητών, του φεγγαριού της Γης και των τεσσάρων νέων τότε ανακαλυφθέντων φεγγαριών του πλανήτη Δία. Ένα χρόνο αργότερα, σε ένα βιβλίο του με τίτλο *Harmonices Mundi (Η Αρμονία του Κόσμου)*, ο Kepler δημοσίευσε τον τρίτο και τελευταίο νόμο, τον νόμο της αρμονίας.

Παρόλο που ο Kepler θεμελίωσε τους νόμους του χωρίς να υπάρχει εφαρμόσιμη θεωρία για την εξήγησή τους, ο Isaac Newton, μόλις μισό αιώνα αργότερα, έδειξε ότι οι νόμοι του Kepler μπορούσαν να τεθούν σε μια σταθερή επιστημονική βάση και ότι στην πραγματικότητα προκύπτουν από το νόμο της Παγκόσμιας Έλξης.



Εικόνα 3.4: Σύνδεση νόμων Νεύτωνα με εμπειρικούς νόμους Kepler: ο πλανήτης κινείται σε τροχιά γύρω απ' τον Ήλιο εξαιτίας της βαρυτικής έλξης. Το διάνυσμα θέσης είναι συγγραμμικό με τη βαρυτική δύναμη και στο ίδιο επίπεδο με το διάνυσμα της ταχύτητας.

Ο Newton έδειξε ότι ο τρίτος νόμος του Kepler ουσιαστικά συσχετίζει την περίοδο μιας πλανητικής ελλειπτικής τροχιάς με τις διαστάσεις της έλλειψης και έδειξε το πώς ο συντελεστής αναλογίας συσχετιζόταν με το γινόμενο του αθροίσματος των μαζών του Ήλιου και του πλανήτη, επί την παγκόσμια βαρυτική σταθερά. Ο Newton επίσης υπέθεσε ότι, δίνοντας τη σωστή αρχική ταχύτητα, ένα βλήμα εκτοξευμένο από τη Γη θα ήταν δυνατό να μπει σε τροχιά γύρω από αυτήν. Ουσιαστικά ο Newton προέβλεψε τη λειτουργία τεχνητών δορυφόρων σχεδόν 200 χρόνια πριν την εκτόξευση του πρώτου. (Langley, GPS World 1991)

Οι κινήσεις των διαφόρων πλανητών και δορυφόρων, όπως ήδη αναφέρθηκε, μπορούν να εξηγηθούν με τυποποιημένες μαθηματικές εκφράσεις που επινοήθηκαν από τους Κέπλερ και Νεύτωνα, με πολύ καλή προσέγγιση. Η ερμηνεία τους βασίζεται στον 2^ο νόμο του Νεύτωνα (Θεμελιώδης Νόμος της Μηχανικής), ο οποίος μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τη μελέτη και

περιγραφή της κίνησης των τεχνητών δορυφόρων της Γης. Γενικά, οι νόμοι του Kepler περιγράφουν τα κύρια χαρακτηριστικά της τροχιάς ενός πλανήτη ή δορυφόρου, η οποία ονομάζεται *κίνηση κατά Κέπλερ*. Όλα αυτά τα στοιχεία περιγράφονται στις ενότητες που ακολουθούν.

3.2.2 Τα έξι στοιχεία του Kepler (*Keplerian elements*)

Οι νόμοι του Kepler περιγράφουν ότι η διαδρομή ενός δορυφόρου σε τροχιά γύρω από τη Γη σχηματίζει μία έλλειψη, με το κέντρο μάζας της Γης στη μία της εστία. Δίνοντας την ακριβή θέση και ταχύτητα ενός δορυφόρου για μία τυχαία χρονική στιγμή, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τους νόμους για να προβλέψουμε μία μελλοντική θέση του δορυφόρου. Παρ' όλα αυτά, ένας εναλλακτικός και συνήθως πιο χρήσιμος τρόπος της αναπαράστασης της τροχιάς είναι η χρήση των έξι λεγόμενων στοιχείων του Kepler.

Τα δύο από τα έξι στοιχεία, ο **μεγάλος ημιάξονας a** και η **εκκεντρότητα e** , δίνουν το μέγεθος και το σχήμα της τροχιακής έλλειψης. Ο μεγάλος ημιάξονας a είναι το ήμισυ της μεγαλύτερης διάστασης της έλλειψης. Η εκκεντρότητα e είναι ένα μέτρο της ελλειπτικότητάς της. Η παράμετρος a είναι η μόνη που έχει διαστάσεις μήκους, η εκκεντρότητα είναι αδιάστατος αριθμός μεταξύ 0 και 1, ενώ τα υπόλοιπα στοιχεία όπως θα φανεί ακολούθως είναι γωνίες.

Ο προσανατολισμός του επιπέδου της τροχιάς σε σχέση με τους απλανείς (σταθερούς) αστέρες δίνεται από τρεις επιπλέον παραμέτρους (*γωνίες του Euler*):

i = *κλίση τροχιάς* ή *γωνία κλόνισης* (inclination): Η κλίση i μετριέται σε σχέση με το ισημερινό επίπεδο, στον ανιόντα ισημερινό δεσμό (ascending node), όπου δηλαδή η τροχιά του δορυφόρου τέμνει τον ισημερινό από το Νότιο προς το Βόρειο Ημισφαίριο. Στην Εικόνα 3.6 ο άξονας X ταυτίζεται με την εαρινή ισημερία (*vernal equinox*), η οποία περιγράφει τη διεύθυνση του Ήλιου όπως αυτή παρατηρείται από τη Γη την πρώτη μέρα της Άνοιξης.

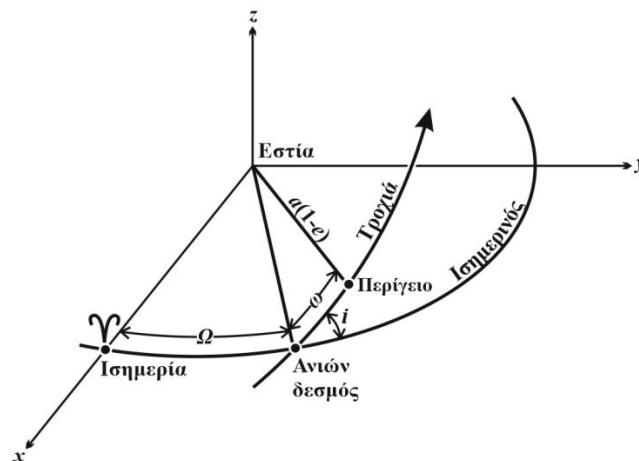
Ω = *γωνία της μετάπτωσης* ή *ορθή αναφορά του ανιόντος δεσμού* (right ascension of the ascending node): Το στοιχείο Ω είναι η γωνία μεταξύ της εαρινής ισημερίας και του σημείου της τροχιάς του δορυφόρου που τέμνει τον ισημερινό από το νότο προς τον βορρά.

ω = *στοιχείο του περιγείου* (argument of perigee): Το στοιχείο ω περιγράφει τη γωνία μεταξύ της διεύθυνσης του ανιόντος ισημερινού δεσμού (ascending node) και του περιγείου. Με λίγη γεωμετρία αποδεικνύεται πως η απόσταση από το κέντρο μάζας της Γης έως το περίγειο δίνεται από τη σχέση $a(1 - e)$, όπως φαίνεται στην Εικόνα 3.8.

Το έκτο κεπλεριανό στοιχείο υποδηλώνει σε ποια θέση της ελλειπτικής τροχιάς βρίσκεται ο δορυφόρος για μια συγκεκριμένη χρονική στιγμή. Υπάρχουν πολλοί τρόποι για να προσδιορίσει κανείς αυτό το στοιχείο. Ο πιο θεμελιώδης τρόπος είναι ο προσδιορισμός της αληθούς ανωμαλίας του δορυφόρου για μία δεδομένη χρονική στιγμή αναφοράς, η οποία ονομάζεται *εποχή*. Η αληθής ανωμαλία είναι η γωνία μεταξύ του περιγείου και του δορυφόρου, όπως παρουσιάζεται στην Εικόνα 3.6. Γνωρίζοντας την αληθή ανωμαλία για έναν συγκεκριμένο

χρόνο, καθώς και τις τιμές του μεγάλου ημιάξονα και της εκκεντρότητας της έλλειψης, υπολογίζεται η απόσταση του δορυφόρου από την εστία, δηλαδή η *τροχιακή ακτίνα*. Το άθροισμα της αληθούς ανωμαλίας με το στοιχείο του περιγείου δίνει τη θέση πάνω στην τροχιά, σε σχέση με τον ανιόντα ισημερινό δεσμό. Αυτή η ποσότητα ονομάζεται *στοιχείο του γεωγραφικού πλάτους* (argument of latitude) και χρησιμοποιείται, για παράδειγμα, στους υπολογισμούς που πραγματοποιεί ένας δέκτης GPS, για τον εντοπισμό της θέσης ενός δορυφόρου.

Εναλλακτικά, μπορεί να προσδιοριστεί η *μέση ανωμαλία*, όπως παρουσιάζεται στην Εικόνα 3.8. Αυτή είναι η γωνία μεταξύ του περιγείου και ενός φανταστικού δορυφόρου που έχει την ίδια τροχιακή περίοδο με τον πραγματικό, αλλά κινείται με σταθερή ταχύτητα. Αυτή η σταθερή ταχύτητα ονομάζεται *μέση κίνηση* του δορυφόρου. Γνωρίζοντας τη μία εκ των δύο ανωμαλιών, η δεύτερη μπορεί να υπολογιστεί. Η χρήση του όρου *ανωμαλία* προέκυψε εξαιτίας της πεποίθησης των αστρονόμων που προηγήθηκαν του Kepler ότι οι πλανητικές τροχιές είναι κυκλικές. Η λέξη δηλαδή υποδηλώνει την απόκλιση των τροχιών από την ομαλότητα (συμμετρία) του κύκλου (Langley, GPS World 1991).



Εικόνα 3.5: Στοιχεία της τροχιάς κατά Kepler. (M. Kaula, 2013)

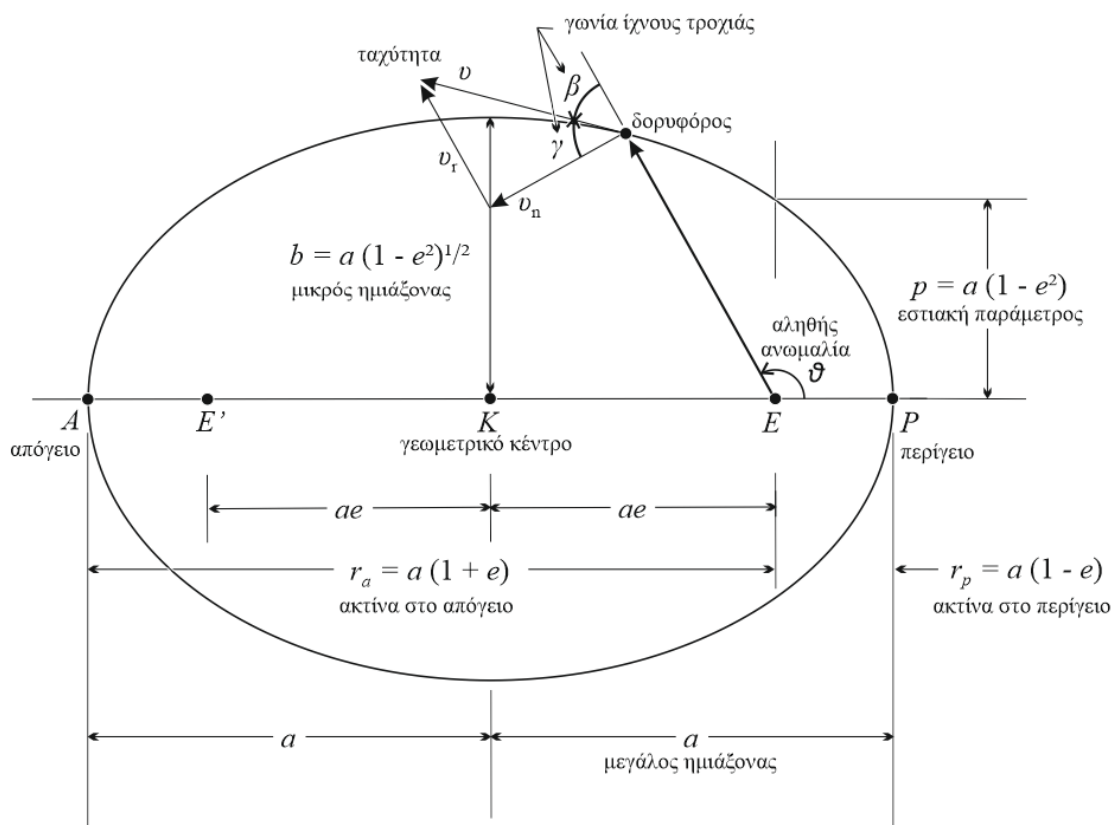
3.2.3 Αναλυτική περιγραφή των νόμων και της εξίσωσης του Kepler

Ο Kepler ανέπτυξε μια σειρά από θεωρήματα και νόμους που περιγράφουν την κίνηση των πλανητών στις τροχιές τους γύρω από τον ήλιο. Αυτοί οι νόμοι, σε γενικές γραμμές, περιγράφουν επίσης την κίνηση ενός δορυφόρου σε τροχιά γύρω από τη γη και ως εκ τούτου οι νόμοι εξετάζονται αναλυτικά παρακάτω.

1^{ος} Νόμος του Kepler (Νόμος των ελλείψεων): Θεωρείται Γη και Ήλιος ως υλικά σημεία που κινούνται σε ένα νευτώνειο πεδίο βαρύτητας (πεδίο κεντρικών δυνάμεων) το οποίο προέρχεται από τον Ήλιο και ένα αδρανειακό σύστημα αναφοράς (σύστημα Γαλιλαίου). Ο 1^{ος} νόμος του Kepler δηλώνει ότι **οι τροχιές των πλανητών είναι ελλείψεις** των οποίων τη μία εστία κατέχει ο Ήλιος. Η γραμμή που ενώνει το *περιήλιο* (μικρότερη απόσταση από τον Ήλιο) με το *αφήλιο*

(μεγαλύτερη απόσταση από τον Ήλιο) ονομάζεται *γραμμή των αψίδων* και αναπαριστά τον μεγάλο άξονα της ελλειπτικής τροχιάς (Μερτίκας, 2012).

Επίδραση στους δορυφόρους: Ακριβώς με τον ίδιο τρόπο κινούνται και οι δορυφόροι (φυσικοί και τεχνητοί) γύρω από τους πλανήτες. Κάθε τεχνητός δορυφόρος της Γης διαγράφει μια έλλειψη που στη μία της εστία βρίσκεται το κέντρο μάζας της Γης. Επομένως, απαιτείται μελέτη της γεωμετρίας της έλλειψης, για την κατανόηση και την περιγραφή της τροχιάς των δορυφόρων (Jensen, DTU 2010).



Εικόνα 3.6: Η γεωμετρία της δορυφορικής τροχιάς.

3.2.3.1 Τροχιακές παράμετροι δορυφόρου

Η γεωμετρία της δορυφορικής τροχιάς φαίνεται στο σχήμα της Εικόνας 3.8. Ο συμβολισμός που χρησιμοποιείται συνήθως για τις γεωμετρικές παραμέτρους είναι ο ακόλουθος (Chobotov, 2002):

$$a = \text{μεγάλος ημιάξονας} = (r_a + r_p)/2$$

$$b = \text{μικρός ημιάξονας} = a\sqrt{1 - e^2}$$

$$e = \text{απόσταση από το κέντρο της έλλειψης έως την εστία} = ae$$

Ο λόγος της απόστασης από το κέντρο έως την εστία, προς τον μεγάλο ημιάξονα της έλλειψης ονομάζεται *εκκεντρότητα* της έλλειψης και συμβολίζεται με e :

$$e = \text{εκκεντρότητα} = \varepsilon/\alpha = (r_a - r_p) / (r_a + r_p)$$

$\vartheta(t)$ = γωνία της αληθούς ανωμαλίας

$$r_p = r (\vartheta = 0^\circ) = \text{ακτίνα στο περίγειο (ελάχιστη απόσταση από το γεώκεντρο)} = a(1-e)$$

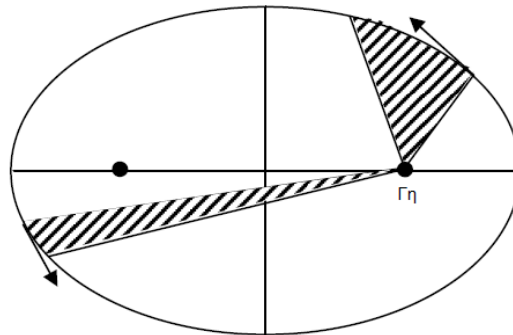
$$r_a = r (\vartheta = 180^\circ) = \text{ακτίνα στο απόγειο (μέγιστη απόσταση από το γεώκεντρο)} = a(1+e)$$

$$p = \text{εστιακή παράμετρος (semi-latus rectum)}: = a(1-e^2) = b^2/a = r_p(1+e) = r_a(1-e)$$

γ = γωνία του ίχνους της τροχιάς (*flight-path angle*) γωνία μεταξύ του διανύσματος της ταχύτητας του σώματος σε τροχιά και της τοπικής οριζοντίου = $\pi/2 - \beta$.

2^{ος} Νόμος του Kepler (Νόμος των ίσων εμβαδών): Η επιβατική ακτίνα κάθε πλανήτη (εάν θεωρηθεί ο Ήλιος ως αρχή των συντεταγμένων), σαρώνει σε ίσους χρόνους ίσα εμβαδά, δηλαδή **οι πλανήτες δεν κινούνται πάνω στις τροχιές τους ισοταχώς** αλλά μεταβάλλουν τις ταχύτητες τους έτσι ώστε η επιβατική ακτίνα να σαρώνει σε ίσους χρόνους ίσα εμβαδά. (Τα αντίστοιχα διαστήματα όμως είναι άνισα.)

Επίδραση στους δορυφόρους: Οι δορυφόροι κινούνται με σταθερή εμβαδική ταχύτητα επί της τροχιάς. Η ταχύτητα του δορυφόρου δεν είναι σταθερή, αλλά διαφέρει, ανάλογα με τη θέση του δορυφόρου πάνω στην τροχιά, έτσι ώστε η ταχύτητα να είναι υψηλότερη όταν ο δορυφόρος είναι κοντά στο περίγειο και χαμηλότερη στο απόγειο (Jensen, DTU 2010).



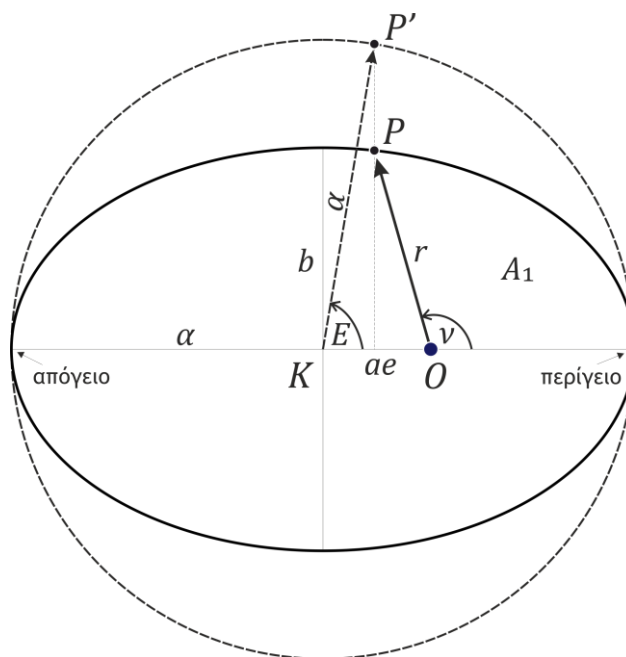
Εικόνα 3.7: Ο δορυφόρος σαρώνει ίσα εμβαδά της έλλειψης σε ίσα χρονικά διαστήματα ενώ κινείται σε τροχιά γύρω από τη Γη.

3.2.3.2 Η εξίσωση του Kepler

Από το δεύτερο νόμο του Kepler είναι γνωστό ότι ο λόγος των εμβαδών που διαγράφει ένας πλανήτης (ή δορυφόρος) είναι ίσος προς το λόγο των αντίστοιχων χρόνων της κίνησης. Έτσι, αν T το χρονικό διάστημα που απαιτείται για να διαγραφεί το εμβαδόν ολόκληρης της έλλειψης, $A = \pi a^2 \sqrt{1-e^2}$ και $t - t_0$ ο χρόνος κίνησης που αντιστοιχεί σε εμβαδόν A_1 , τότε ισχύει

$$\frac{t-t_0}{A_1} = \frac{T}{\pi a^2 \sqrt{1-e^2}} \quad (3.17)$$

όπου η αρχή μέτρησης του χρόνου ταυτίζεται με τη χρονική στιγμή κατά την οποία το κινητό διέρχεται από το περικέντρο της τροχιάς (περίγειο), $t_0 = t_p$, που ονομάζεται χρόνος (ή εποχή) διάβασης του περικέντρου. Το πρόβλημα πλέον έγκειται στην εύρεση του εμβαδού A_1 , ως συνάρτησης της αληθούς ανωμαλίας ν και των σταθερών στοιχείων της έλλειψης. Ο Kepler έδωσε τη λύση του προβλήματος σε δύο βήματα, χρησιμοποιώντας έναν βοηθητικό κύκλο, περιγεγραμμένο της έλλειψης (πρωτεύων κύκλος), και ορίζοντας την **έκκεντρο ανωμαλία** E , όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Εικόνα 3.8: Ορισμός εκκέντρο ανωμαλίας E , αληθούς ανωμαλίας ν και γεωμετρική κατασκευή της εξίσωσης Kepler.

Οι καρτεσιανές συντεταγμένες του κινητού, ως συναρτήσεις της εκκέντρο ανωμαλίας, δίνονται από τις σχέσεις

$$x = a(\cos E - e), \quad y = a\sqrt{1-e^2} \sin E \quad (3.18)$$

και το μέτρο του διανύσματος θέσης ισούται με

$$r = a(1 - e \cos E). \quad (3.19)$$

Από τη γεωμετρία του σχήματος (Εικόνα 3.9) προκύπτουν επίσης οι σχέσεις που συνδέουν τις γωνίες E και ν .

$$\cos E = \frac{e + \cos \nu}{1 + e \cos \nu}, \quad \sin E = \frac{\sqrt{1-e^2} \sin \nu}{1 + e \cos \nu} \quad (3.20)$$

Ο Kepler, για τον υπολογισμό του εμβαδού που σαρώνει η επιβατική ακτίνα, χρησιμοποιώντας αναλυτική γεωμετρία κατέληξε στο αποτέλεσμα

$$A_1 = \frac{a^2 \sqrt{1-e^2}}{2} (E - e \sin E) \quad (3.21)$$

και αντικαθιστώντας στην αρχική σχέση (Εξ. 3.18) προκύπτει η περίφημη *εξίσωση του Kepler*:

$$E - e \sin E = \sqrt{\frac{GM_E}{a^3}} (t - t_p) \quad (3.22)$$

η οποία συνδέει το χρόνο κίνησης με την τιμή της εκκέντρου ανωμαλίας E (αντί της αληθούς ν). Η ποσότητα αυτή αντιπροσωπεύει τη μέση ανωμαλία και συμβολίζεται με M . Έχει διαστάσεις γωνίας και αντιστοιχεί στη θέση ενός ιδεατού κινητού που ακολουθεί ομαλή κυκλική κίνηση σε κύκλο ακτίνας a , με συχνότητα ίση προς τη μέση κίνηση της πραγματικής ελλειπτικής τροχιάς (μέση κίνηση: $n = \sqrt{GM_E/a^3} \text{ rad/sec}$). Επομένως η M είναι γραμμική συνάρτηση του χρόνου, σε αντίθεση με τις γωνίες E και ν (Τσιγάνης, 2015).

Ο ρυθμός μεταβολής της έκκεντρου ανωμαλίας με τον χρόνο, διαφορίζοντας την παραπάνω σχέση (Εξ. 3.22), εκφράζεται ως (Ashby, 2003)

$$\frac{dE}{dt} = \frac{\sqrt{GM_E/a^3}}{1 - e \cos E} \quad (3.23)$$

Η παρούσα εξίσωση είναι χρήσιμη στον υπολογισμό της σχετικιστικής διόρθωσης στον χρόνο των δορυφόρων σε τροχιά που περιγράφεται στο επόμενο κεφάλαιο.

Η εύρεση της θέσης του σώματος επί της έλλειψης για δεδομένη χρονική στιγμή, δεν έχει τόσο απλή λύση. Ο λόγος είναι ότι η εξίσωση $t(E) = 0$ δεν μπορεί να λυθεί σε κλειστή μορφή, καθώς είναι υπερβατική ως προς E . Η λύση της μπορεί να βρεθεί με τη χρήση, είτε αριθμητικών (π.χ. μέθοδος Newton-Raphson), είτε αναλυτικών μεθόδων (π.χ. αντιστροφή Lagrange).

3^{ος} Νόμος του Kepler (Νόμος της Αρμονίας): Το τετράγωνο της περιόδου T της τροχιάς κάθε πλανήτη είναι ανάλογο προς τον κύβο του μεγάλου ημιάξονα a της ελλειπτικής τροχιάς του:

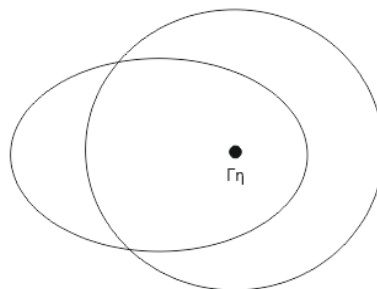
$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{G(M+m)}{4\pi^2} \Rightarrow \frac{a^3}{T^2} = K = \text{σταθερό} \Rightarrow a^3 = K T^2 \quad (3.24)$$

όπου

$K = 2,97 \cdot 10^{-19} \text{ s}^2/\text{m}^3$, η σταθερά αναλογίας

M, m = οι μάζες ήλιου και πλανήτη (ή πλανήτη και δορυφόρου) αντίστοιχα.

Επίδραση στους δορυφόρους: Δύο δορυφορικές τροχιές που έχουν ίδια τιμή μεγάλου ημιάξονα, θα έχουν ίδια τροχιακή περίοδο, ακόμα και αν οι εκκεντρότητες των τροχιακών τους ελλείψεων διαφέρουν (Jensen, DTU 2010).



Εικόνα 3.9: Δύο δορυφορικές τροχιές με ίδιο μεγάλο ημιάξονα και περίοδο, αλλά με διαφορετικές εκκεντρότητες.

3.2.4 Περιγραφή κίνησης δορυφόρου επί της τροχιάς του

Αν P είναι η θέση του δορυφόρου πάνω στην τροχιά του και O το κέντρο μάζας της Γης, τότε η επιβατική ακτίνα OP μπορεί να περιγράψει την κίνησή του (Εικόνα 3.9). Το μήκος της επιβατικής ακτίνας είναι η απόσταση $r(t)$. Η λύση της διαφορικής εξίσωσης της τροχιάς ενός υλικού σημείου σε βαρυτικό πεδίο (εδώ της Γης) δίνει το μέτρο του διανύσματος της τροχιάς ενός δορυφόρου γύρω από τη Γη. Για την εύρεση της θέσης και της ταχύτητας του δορυφόρου κάθε στιγμή, μπορεί να χρησιμοποιηθεί η αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας και η διατήρηση της στροφορμής.

3.2.4.1 Αρχή Διατήρησης Μηχανικής Ενέργειας

Για έναν δορυφόρο ο οποίος κινείται σε τροχιά γύρω από τη Γη, με την παραδοχή ότι κινείται σε ένα πεδίο κεντρικών δυνάμεων (συντηρητικό πεδίο) ισχύει η αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας

$$\varepsilon = \frac{1}{2}v^2 + g r \Rightarrow \varepsilon = \frac{v^2}{2} - \frac{GM}{r} \quad (3.25)$$

όπου $k = v^2/2$ η ειδική κινητική ενέργεια (κινητική ενέργεια ανά μονάδα μάζας), όπου v η ταχύτητα του δορυφόρου και $u = g r$ η ειδική δυναμική ενέργεια (δυναμική ενέργεια ανά μονάδα μάζας), όπου g η επιτάχυνση της βαρύτητας, η οποία δίνεται από την Εξ. (3.6) και r η απόσταση του δορυφόρου από το κέντρο της Γης. Επίσης, $\mu = GM$ η βαρυτιμετρική σταθερά, όπου M η μάζα της Γης.

3.2.4.2 Αρχή Διατήρησης Στροφορμής

Σύμφωνα με το νόμο της βαρυτικής έλξης του Νεύτωνα, η Γη έλκει έναν δορυφόρο με δύναμη F , η οποία είναι κεντρική ελκτική δύναμη, δηλαδή ο φορέας της κείται επάνω στην ευθεία που ενώνει τον δορυφόρο με τη Γη, με κατεύθυνση πάντα προς το κέντρο της Γης που θεωρείται σταθερό σημείο. Με λίγα λόγια η F είναι συγγραμμική με το διάνυσμα θέσης του δορυφόρου. Μία κεντρική δύναμη είναι συνάρτηση μόνο του \mathbf{r} , $F = F(r)$. Η δύναμη είναι συγγραμμική με το διάνυσμα θέσης, επομένως το εξωτερικό τους γινόμενο δίνει μηδέν και τότε στον δορυφόρο ασκείται μηδενική ροπή:

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{r} \times F(r)\hat{\mathbf{r}} = r \cdot F \cdot \sin 0^\circ = 0 \quad (3.26)$$

Όμως, η ροπή ισούται με τον ως προς το χρόνο ρυθμό μεταβολής της στροφορμής, άρα:

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{d\mathbf{H}}{dt} = 0 \Rightarrow \mathbf{H} = \text{σταθερά} \Rightarrow \mathbf{H} = m\mathbf{r} \times \mathbf{v} = \text{σταθερή} \quad (3.27)$$

Επομένως η στροφορμή αποτελεί σταθερά της κίνησης και η κίνηση των δορυφόρων πραγματοποιείται σε ένα επίπεδο που ορίζουν τα \mathbf{r} και \mathbf{v} .

Η γενική εξίσωση για την επιβατική ακτίνα r παίρνει τη μορφή (Chobotov, 2002):

$$r = \frac{H^2/\mu}{1 + (B/\mu)\cos\nu} \Rightarrow r = \frac{p}{1 + e\cos\nu} \quad (3.28)$$

όπου

$H^2/\mu = p =$ εστιακή παράμετρος

$B/\mu = e = \left(1 + \frac{2\varepsilon H^2}{\mu^2}\right)^{1/2} =$ εκκεντρότητα

$\nu =$ αληθής ανωμαλία

$\mu = GM =$ βαρυτιμετρική σταθερά

Η ακτινική v_r και η κάθετη v_n συνιστώσα της ταχύτητας υπολογίζονται ως:

$$v_r = \sqrt{\frac{\mu}{p}} e \sin\nu, \quad v_n = \sqrt{\frac{\mu}{p}} (1 + e \cos\nu) \quad (3.29)$$

και το μέτρο της ταχύτητας είναι

$$v = \sqrt{v_n^2 + v_r^2} = \left[\frac{\mu}{p} (1 + e^2 + 2e \cos\nu) \right]^{1/2} \quad (3.30)$$

Τότε η ταχύτητα στο περίγειο v_p και στο απόγειο v_a είναι:

$$v_p = \sqrt{\frac{\mu}{p}(1+e)}, \quad v_a = \sqrt{\frac{\mu}{p}(1-e)} \quad (3.31)$$

όπου v_p , v_a η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή της ταχύτητας v επί της τροχιάς του δορυφόρου.

Η εξίσωση της ταχύτητας v σε οποιοδήποτε σημείο της τροχιάς μπορεί να υπολογισθεί ως εξής (Chobotov, 2002): δεδομένου ότι η ολική ειδική ενέργεια ε παραμένει σταθερή, θέτοντας όπου $e \rightarrow 1$, $v_a \rightarrow 0$ και $r_a \rightarrow 2a$, η Εξ. (3.24) παίρνει τη μορφή $\varepsilon = -\mu/2a$. Πιο αναλυτικά, η σχέση διατήρησης της ενέργειας ανά μονάδα μάζας μπορεί να εκφραστεί ως

$$\frac{1}{2} v^2 - \frac{GM_E}{r} = -\frac{GM_E}{2a} \quad (3.32)$$

Λύνοντας την Εξ. (3.32) ως προς την ταχύτητα προκύπτει:

$$v = \sqrt{\mu \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right)} \quad (3.33)$$

Η παραπάνω σχέση της ταχύτητας ενός δορυφόρου χρησιμοποιείται στη δημιουργία της τελικής εξίσωσης διόρθωσης χρόνου των δορυφορικών χρονομέτρων, όπως θα φανεί στο κεφάλαιο που ακολουθεί.

4ο Κεφάλαιο

Σχετικότητα & διορθώσεις χρόνου

Στο παρόν κεφάλαιο εξετάζονται οι αρχές της Θεωρίας της Σχετικότητας, οι σχετικιστικές επιδράσεις στο χρόνο καθώς και οι τελικές διορθώσεις που πρέπει να εφαρμοσθούν στον μετρούμενο τοπικό χρόνο ενός επίγειου ή δορυφορικού χρονομέτρου, σύμφωνα με τη θεωρία αυτή. Παράλληλα, γίνεται φανερή η σύνδεση της Σχετικότητας με τους νόμους της Κλασικής Μηχανικής του Κέπλερ, του Γαλιλαίου και του Νεύτωνα. Η πρώτη επίδραση στα χρονόμετρα προκύπτει λόγω της σχετικής κίνησης των χρονομέτρων, ενώ η δεύτερη λόγω της διαφορετικής έντασης του βαρυτικού πεδίου ανάλογα με την απόστασή τους από το κέντρο μάζας.

4.1 Τα αξιώματα της Ειδικής Θεωρίας

Η Ειδική Θεωρία της Σχετικότητας δημοσιεύτηκε το 1905 από τον Albert Einstein στο επιστημονικό άρθρο με τίτλο «*On the Electrodynamics of Moving Bodies*» (Wudka, UCR 2000). Πρέπει να επισημανθεί ότι η θεωρία αυτή δεν καταρρίπτει ή ακυρώνει τη θεωρία του Νεύτωνα, όσο μελετώνται συστήματα σωμάτων τα οποία κινούνται με μικρές ταχύτητες σε σύγκριση με την ταχύτητα του φωτός c . Η θεωρία του Νεύτωνα είναι μία ειδική περίπτωση της θεωρίας του Einstein, που ισχύει στο μη σχετικιστικό όριο, δηλαδή για ταχύτητες $v \ll c$. Γι' αυτό και όταν μελετώνται κινήσεις ουράνιων σωμάτων, όπως στο προηγούμενο κεφάλαιο, χρησιμοποιούνται οι νόμοι της Νευτώνειας Μηχανικής.

Ο Einstein θεμελίωσε την Ειδική Θεωρία της Σχετικότητας με τα εξής δύο αξιώματα:

1. Δυναμικό αξίωμα (Αρχή της Ειδικής Σχετικότητας):

«Όλοι οι νόμοι της φύσης έχουν την ίδια μορφή ως προς όλους τους αδρανειακούς παρατηρητές».

Ο Γαλιλαίος είχε διατυπώσει το ίδιο αξίωμα, με τη διαφορά ότι περιοριζόταν στους νόμους της Μηχανικής και δεν αφορούσε όλους τους νόμους της φύσης.

Αδρανειακός παρατηρητής είναι ένας παρατηρητής ως προς τον οποίο οι εξισώσεις που διέπουν τους νόμους της φύσης ισχύουν και εφαρμόζονται στην πιο απλή τους μορφή. Ειδικότερα, ένα σύστημα στο οποίο μελετάται ένα σώμα ελεύθερο, μακριά από την επίδραση οποιασδήποτε δύναμης και παρατηρείται να κινείται ευθυγράμμως και ισοταχώς (1^{ος}, 2^{ος} νόμος Νεύτωνα) λέγεται **αδρανειακό σύστημα αναφοράς**. Οποιοδήποτε σύστημα αναφοράς είναι ακίνητο ή κινείται με σταθερή ταχύτητα ως προς ένα αδρανειακό σύστημα θα είναι και αυτό αδρανειακό σύστημα αναφοράς.

2. Κινηματικό αξίωμα:

«Η ταχύτητα του φωτός στο κενό είναι σταθερή (και ίση με $c = 299.792.458 \text{ m/s}$) ως προς όλους τους αδρανειακούς παρατηρητές, ανεξαρτήτως της κίνησης της πηγής του φωτός» (Wudka, UCR 2000).

4.2 Συνέπειες της Ειδικής Θεωρίας

1. Σχετικότητα του ταυτόχρονου

Η πρώτη συνέπεια που προκύπτει από το κινηματικό αξίωμα της θεωρίας είναι η σχετικότητα του ταυτόχρονου (relativity of simultaneity): *δύο γεγονότα που είναι ταυτόχρονα ως προς έναν παρατηρητή, δεν είναι ταυτόχρονα ως προς κάποιον άλλο παρατηρητή με διαφορετική ταχύτητα.*

Χρησιμοποιώντας ένα παράδειγμα που βασίζεται στη σταθερότητα της ταχύτητας του φωτός, φαίνεται το πώς ο συγχρονισμός ενός δικτύου χρονομέτρων εξαρτάται από την κίνηση του παρατηρητή. Στην Εικόνα 4.1 φαίνεται μία ράβδος μήκους $L = x$, η οποία κινείται με ταχύτητα u (κινούμενο πλαίσιο) σε σχέση με έναν σταθερό παρατηρητή. Ένα φωτεινό σήμα προερχόμενο από την αριστερή άκρη της ράβδου διαδίδεται προς τη δεξιά άκρη της ράβδου. Ένας παρατηρητής στο κινούμενο πλαίσιο θα υπολόγιζε τον χρόνο διάδοσης t'

$$t' = \frac{x}{c} \quad (4.1)$$

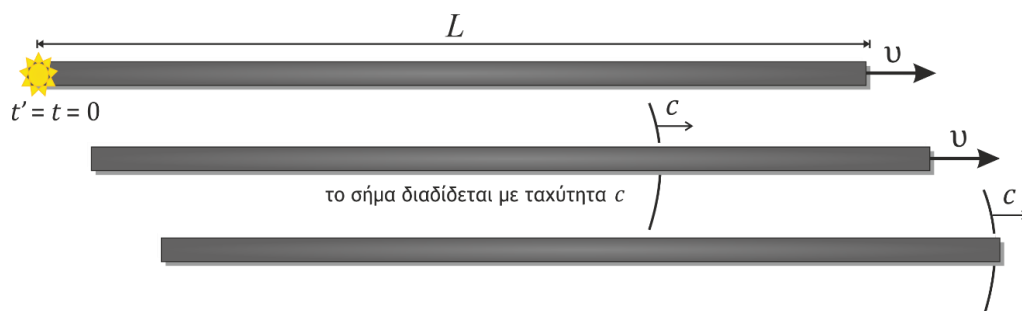
Από την άλλη πλευρά, ο σταθερός ως προς τη ράβδο παρατηρητής βλέπει το φωτεινό σήμα να φτάνει στο μπροστινό μέρος της ράβδου με μία σχετική ταχύτητα $c - u$. Επομένως, για αυτόν τον παρατηρητή, ο χρόνος διάδοσης t θα είναι

$$t = \frac{x}{c - u} = \frac{x}{c} \left(\frac{1 - u}{c} \right)^{-1} \approx \frac{x}{c} + \frac{ux}{c^2} \quad (4.2)$$

Επομένως,

$$t' = t - \frac{ux}{c^2} \quad (4.3)$$

Επομένως η έννοια του «ταυτόχρονου» είναι σχετική. Δηλαδή, δύο γεγονότα μπορεί να είναι ταυτόχρονα ως προς ένα σύστημα και να μην είναι ως προς ένα άλλο. Αν δύο παρατηρητές είναι σε σχετική κίνηση και επιχειρούν να συγχρονίσουν τα χρονόμετρά τους στέλνοντας φωτεινά σήματα τα οποία διαδίδονται με ταχύτητα c , τότε ακόμα και αν αρχικά τα χρονόμετρα ήταν συγχρονισμένα, όταν αφιχθεί το σήμα στο τέλος, τα χρονόμετρά τους δεν θα είναι συγχρονισμένα και θα διαφέρουν κατά την ποσότητα ux/c^2 (Ashby, 2006).



Εικόνα 4.1: Η ανάλυση ενός φωτεινού σήματος που διαδίδεται μέσω μίας κινούμενης ράβδου οδηγεί στη *σχετικότητα του ταυτόχρονου*.

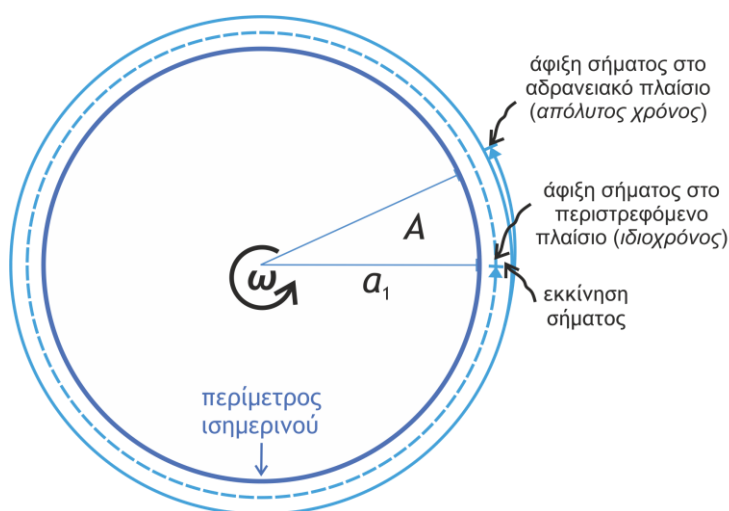
2. Φαινόμενο Sagnac

Όπως ήδη αναφέρθηκε, η ταχύτητα του φωτός είναι σταθερή σε ένα αδρανειακό σύστημα αναφοράς. Η Γη όμως δεν αποτελεί αδρανειακό σύστημα, αλλά στην πραγματικότητα είναι ένα περιστρεφόμενο σύστημα. Το φαινόμενο «Sagnac» (Sagnac effect) είναι η επίδραση στα επίγεια χρονόμετρα, όπως προκύπτει από την Ειδική Σχετικότητα, εξαιτίας της περιστροφής της Γης.

Ο Einstein είχε περιγράψει το φαινόμενο ως εξής: αν ένα από δύο συγχρονισμένα ρολόγια, ευρισκόμενα στο σημείο A , κινείται σε μια κλειστή καμπύλη με σταθερή ταχύτητα v , μέχρι να επιστρέψει στο A , το ταξίδι διαρκεί t δευτερόλεπτα. Στη συνέχεια, σε σχέση με το ρολόι το οποίο έχει παραμείνει σε κατάσταση ηρεμίας, το ρολόι που ταξίδεψε, κατά την άφιξή του στο A θα είναι κατά $\frac{1}{2}(tv^2/c^2)$ δευτερόλεπτα καθυστερημένο. Από εκεί καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι ένα ρολόι στον ισημερινό πρέπει να λειτουργεί πιο αργά, κατά μια πολύ μικρή ποσότητα, σε σχέση με ένα πανομοιότυπο ρολόι που βρίσκεται σε έναν από τους πόλους, υπό τις ίδιες ακριβώς συνθήκες (Einstein, 1905).

Η σχετικότητα του ταυτόχρονου μπορεί να συνδεθεί άμεσα με το φαινόμενο Sagnac ως εξής (Ashby, 2006): στην Εικόνα 4.2 φαίνεται μία διαδικασία κατά την οποία δύο παρατηρητές επιχειρούν να συγχρονίσουν ένα σύστημα από χρονόμετρα, τα οποία είναι καταναμεμένα στην περίμετρο του ισημερινού της Γης, στέλνοντας ένα φωτεινό σήμα να ταξιδέψει το γύρο της διαδρομής μία φορά, μέσω ενός συστήματος κατόπτρων (συγχρονισμός Einstein). Η ακτίνα της Γης στον ισημερινό είναι $a_1 = 6378.137$ m και το μήκος της ισημερινής περιμέτρου είναι $2\pi a_1$. Οπότε για έναν παρατηρητή πάνω στην περιστρεφόμενη Γη φαίνεται ότι χρειάζεται χρόνος $t = 2\pi a_1/c$ για να μεταδοθεί το σήμα ολοκληρώνοντας μία περιφορά.

Αλλά για έναν παρατηρητή σε ένα τοπικό, μη περιστρεφόμενο πλαίσιο, το σημείο εκκίνησης του σήματος φαίνεται να μετακινείται μια απόσταση $vt = \omega a_1 t = \omega a_1 (2\pi a_1/c)$ κατά τη διάρκεια της ίδιας διαδικασίας, όπου $\omega = 7.291151467 \times 10^{-5}$ rad/s η γωνιακή ταχύτητα της Γης. Επομένως, το σήμα χρειάζεται ένα επιπλέον χρονικό διάστημα



Εικόνα 4.2: Φαινόμενο Sagnac: επίδραση στο συγχρονισμό χρονομέτρων στην περιστρεφόμενη Γη.

$$\Delta t = \frac{vt}{c} = \frac{2\omega}{c^2} \pi a_1^2 = \frac{2\omega A}{c^2} \quad (4.4)$$

για να ολοκληρώσει έναν κύκλο γύρω από τον ισημερινό. Οι παρατηρητές θα διαφωνήσουν με το αποτέλεσμα της διαδικασίας συγχρονισμού. Η διαφορά που λαμβάνεται με βάση την Εξ. (4.3) αντικαθιστώντας στο x το $2\pi a_1$ και στο v το ωa_1 , είναι

$$t - t' = \frac{2\omega \pi a_1^2}{c^2} \quad (4.5)$$

και είναι σε συμφωνία με την Εξ. (4.4). Ειδικότερα, αν σε αυτή τη διαδικασία συγχρονισμού, το φως ακολουθεί τον ισημερινό της Γης με κατεύθυνση προς ανατολάς, τότε για τη Γη, $2\omega_E/c^2 = 1.6227 \times 10^{-21} \text{ s m}^{-2}$ και το εμβαδόν είναι $\pi a_1^2 = 1.27802 \times 10^{14} \text{ m}^2$. Επομένως, τα χρονόμετρα διαφέρουν κατά

$$\frac{2\omega \pi a_1^2}{c^2} = 207.4 \text{ ns} \quad (4.6)$$

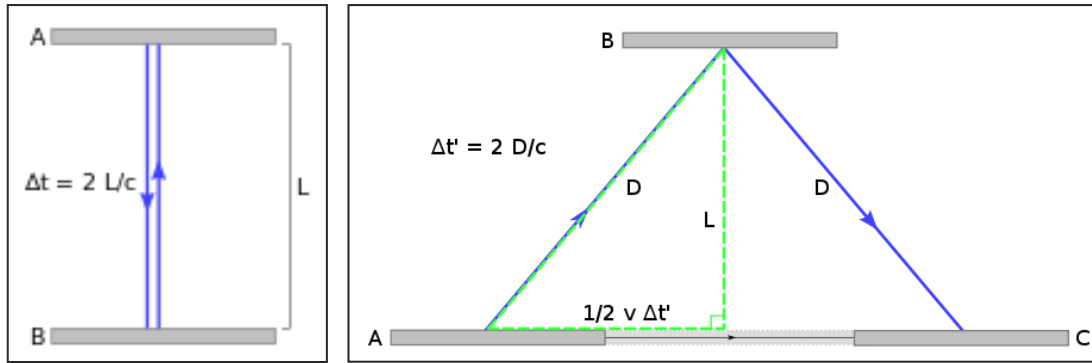
Από τη στιγμή που τα σύγχρονα ατομικά χρονόμετρα έχουν συχνά ακρίβεια λίγων nsec / ημέρα, η επίδραση Sagnac πρέπει να λαμβάνεται υπόψη κατά τη σύγκριση χρονομέτρων σε διαφορετικά μέρη στη Γη και στο διάστημα (D. Eardley, 1985).

3. Διαστολή του χρόνου

Απόρροια της σχετικότητας του ταυτόχρονου είναι ότι ο χρόνος ενός χρονομέτρου, όταν αυτό είναι στάσιμο σε ένα αδρανειακό σύστημα (**συντεταγμένος χρόνος, coordinate time**), παρατηρείται να κυλάει πιο γρήγορα, σε σχέση με το χρόνο ενός χρονομέτρου που κινείται με σχετική ταχύτητα v (**ιδιοχρόνος, proper time**). Επομένως, ο χρόνος μεταξύ δύο γεγονότων εξαρτάται από τον παρατηρητή και κατά συνέπεια, δεν μπορεί να οριστεί μέτρηση χρόνου μεταξύ δύο γεγονότων, αν δεν προσδιοριστεί πρώτα ως προς ποιον παρατηρητή γίνονται οι μετρήσεις.

Στην Εικόνα 4.3 φαίνεται μία κατακόρυφη ράβδος μήκους L , κινούμενη με ταχύτητα v σε σχέση με έναν στάσιμο παρατηρητή, διαμέσου της οποίας διαδίδεται ένα φωτεινό σήμα προς τα πάνω, ανακλάται σε οριζόντιο καθρέφτη και επιστρέφει στο σημείο εκκίνησης. Για έναν παρατηρητή που κινείται μαζί με τη ράβδο με ταχύτητα v , ο χρόνος από το γεγονός εκπομπής έως το γεγονός της επιστροφής του σήματος είναι $t = 2L/c$. Επομένως, $L = ct/2$. Για τον στάσιμο παρατηρητή, η ακτίνα φωτός ακολουθεί μια διαφορετική διαδρομή, η οποία εξαρτάται από την ταχύτητα της ράβδου σε σχέση με αυτόν. Από το πυθαγόρειο θεώρημα, η κατακόρυφη απόσταση είναι $L = \sqrt{c^2 + v^2} (t'/2)$. Τότε, εξισώνοντας τις σχέσεις των δύο παρατηρητών

$$ct = t' \sqrt{c^2 + v^2} \quad \Rightarrow \quad t = t' \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad \Rightarrow \quad t' = \frac{t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (4.7)$$



Εικόνα 4.3: Διαστολή του χρόνου όπου αριστερά, ο παρατηρητής κινείται μαζί με τη ράβδο και δεξιά, ο παρατηρητής είναι ακίνητος σε σχέση με τη ράβδο.

όπου $1/\sqrt{1-(v^2/c^2)}$ ο παράγοντας Lorentz ο οποίος, από τη σειρά Taylor για την τετραγωνική ρίζα

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4 + \dots \quad \text{για } |x| \leq 1, \quad (4.8)$$

απλοποιείται σε

$$\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \approx 1 - \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} \quad (4.9)$$

Αυτό το αποτέλεσμα καλείται συχνά Doppler δεύτερης τάξης. Οι σχέσεις αυτές ισχύουν μόνο σε ένα αδρανειακό (ήτοι, μη περιστρεφόμενο) πλαίσιο αναφοράς. Σε ένα περιστρεφόμενο πλαίσιο η φυσική είναι ακριβώς η ίδια, αλλά η έκφραση των αποτελεσμάτων είναι κάπως διαφορετική. Η διαφορά αυτή είναι σημαντική, διότι η Γη περιστρέφεται και οι δορυφόροι περιστρέφονται γύρω από τη Γη (D. Eardley, 1985).

Ενδεικτικά, στο GPS οι ταχύτητες των δορυφόρων είναι περίπου 4000 m/s και κατά συνέπεια, η τάξη μεγέθους του φαινομένου της διαστολής του χρόνου προκύπτει

$$-\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} \approx -8.35 \times 10^{-11} \quad (4.10)$$

Ένα χρονόμετρο αναφοράς στον ισημερινό της Γης είναι επίσης σε κίνηση (λόγω της περιστροφής), αλλά με μικρότερη ταχύτητα, της τάξης 465 m/s. Για την εύρεση της μετατόπισης της κλασματικής συχνότητας μεταξύ δορυφόρου GPS και χρονομέτρου αναφοράς στον ισημερινό, πρέπει να υπολογιστεί η διαφορά:

$$\frac{\Delta f}{f} = -\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} - \left(-\frac{1}{2}\frac{(\omega a_1)^2}{c^2}\right) = -8.228 \times 10^{-11}. \quad (4.11)$$

Αν αυτό δεν προσμετρηθεί, θα συμβάλλει στο να δημιουργηθεί ένα σφάλμα της τάξης 2.13 km/day (Ashby, 2006).

4. Φαινόμενο Doppler

α) Διαμήκες φαινόμενο – Doppler πρώτης τάξης

Το σχετικιστικό φαινόμενο Doppler πρώτης τάξης (first-order Doppler ή αλλιώς longitudinal Doppler effect) μπορεί να περιγραφεί ως εξής: αν ένα H/M κύμα έχει συχνότητα f σε σχέση με έναν ακίνητο ως προς την πηγή παρατηρητή, τότε η συχνότητα f' που μετρά ένας κινούμενος με ταχύτητα v παρατηρητής είναι

$$f' = f \sqrt{\left(1 - \frac{v}{c}\right) / \left(1 + \frac{v}{c}\right)} \quad (4.12)$$

για διάδοση στην κατεύθυνση της κίνησης. Το μέγεθος και το πρόσημο αυτής της διόρθωσης εξαρτάται από τις προβολές των στιγμιαίων ταχυτήτων δορυφόρου και παρατηρητή πάνω στο μεταξύ τους διάνυσμα, οι οποίες ταχύτητες πρέπει να ανάγονται στο ίδιο πλαίσιο αναφοράς. Η μέγιστη τιμή της παρούσας επίδρασης είναι $\Delta f / f \approx 1.4 \times 10^{-5}$. Οι συχνότητες στους δορυφόρους GPS είναι περίπου 1.5 GHz, οπότε η μέγιστη τιμή της επίδρασης Doppler πρώτης τάξης θα είναι περίπου ± 19.4 kHz. (Levine, 2002). Για ταχύτητες $v \ll c$, η Εξ. (4.12) απλοποιείται στο κλασικό (μη σχετικιστικό) φαινόμενο Doppler:

$$\frac{\Delta f}{f} = -\frac{v}{c} \quad (4.13)$$

Εάν η ταχύτητα v είναι θετική, η πηγή απομακρύνεται από τον παρατηρητή και το μήκος κύματος του φωτός παίρνει μεγαλύτερες τιμές. Αυτό σημαίνει ότι αν το φως ξεκινά στο ορατό μέρος του ηλεκτρομαγνητικού φάσματος, το φαινόμενο Doppler μετακινεί το χρώμα του προς το ερυθρό. Εάν η v είναι αρνητική, η πηγή κινείται προς τον παρατηρητή και το φως μετατοπίζεται προς το μπλε, μειώνοντας το μήκος κύματος, και αυξάνοντας τη συχνότητα. Το αποτέλεσμα της Εξ. (4.13) είναι κατά προσέγγιση σωστό για πηγές των οποίων η ταχύτητα είναι πολύ μικρότερη από την ταχύτητα του φωτός και συνήθως για $v < c/3$ (Daw, 2011). Επομένως, είναι μία καλή προσέγγιση για την περίπτωση των δορυφόρων και της Γης.

β) Εγκάρσιο φαινόμενο – Doppler δεύτερης τάξης

Το σχετικιστικό αυτό φαινόμενο (second-order Doppler ή αλλιώς transverse Doppler effect) παρατηρείται όταν η κίνηση είναι κάθετη στη διεύθυνση διάδοσης. Για ταχύτητες πολύ μικρότερες του c , δεν παρατηρείται καμία μετατόπιση Doppler στο μήκος κύματος ή στη συχνότητα του εκπεμπόμενου φωτός, σύμφωνα με την Κλασική Μηχανική. Ωστόσο, στη Σχετικότητα, αφού ο παράγοντας Lorentz εξαρτάται μόνο από την ταχύτητα v , και συνεπώς είναι ανεξάρτητος από την κατεύθυνση της κίνησης του χρονομέτρου, υπάρχει μια μετατόπιση Doppler ακόμη και σε αυτή την περίπτωση, που προκαλείται από τη διαστολή του χρόνου της πηγής. Εάν η περίοδος του εκπεμπόμενου κύματος είναι T στο αδρανειακό πλαίσιο της πηγής,

τότε στο πλαίσιο του ανιχνευτή, η περίοδος θα είναι γT , όπου $\gamma = 1/\sqrt{1 - (v^2/c^2)}$ ο παράγοντας Lorentz.

Επομένως, αν η διάδοση του κύματος γίνεται κάθετα στον άξονα της σχετικής ταχύτητας, η σχέση που συνδέει τις δύο μετρούμενες συχνότητες δύο διαφορετικών αδρανειακών παρατηρητών είναι (Daw, 2011)

$$f' = f / \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad (4.14)$$

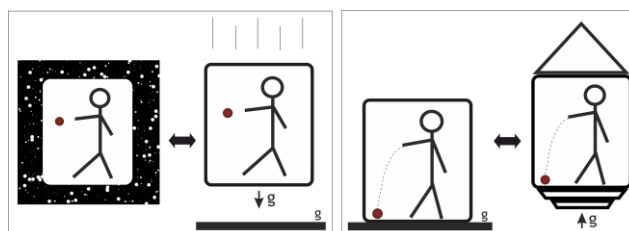
Η επίδραση στη συχνότητα είναι πάντα μετατοπισμένη προς το ερυθρό - το χρονόμετρο στον δορυφόρο παρουσιάζεται με μικρότερη συχνότητα σε σχέση με ένα πανομοιότυπο χρονόμετρο αναφοράς στο περιστρεφόμενο γεωειδές (Levine, 2002). Η επίδραση Doppler δεύτερης τάξης μπορεί να εξαχθεί άμεσα από τη σχέση της διαστολής του χρόνου, δεδομένου ότι η συχνότητα f είναι αντιστρόφως ανάλογη του χρόνου t . Η μετατόπιση Doppler είναι σημαντική για την εξαγωγή της βαρυτικής μετατόπισης συχνότητας, η οποία περιγράφεται στην Ενότητα 4.4. (Ashby, 2006).

4.3 Γενική Θεωρία της Σχετικότητας - Αρχή της Ισοδυναμίας

Η Γενική Θεωρία της Σχετικότητας (ΓΘΣ) δημοσιεύθηκε το 1915 και περιλαμβάνει τη θεωρία της βαρύτητας κατά Einstein. Η επίδραση στα χρονόμετρα με βάση τη Γενική Σχετικότητα προκύπτει από την *αρχή της ισοδυναμίας*, το βασικό αξίωμα της θεωρίας.

Η Αρχή της Ισοδυναμίας (Εικόνα 4.4) περιγράφει ότι (Τομαράς, 2011): η Φυσική σε ένα σύστημα αναφοράς που πέφτει ελεύθερα στο πεδίο βαρύτητας είναι ισοδύναμη με τη Φυσική σε ένα αδρανειακό σύστημα χωρίς βαρύτητα. Ισοδύναμα, η Φυσική σε ένα σύστημα αναφοράς με μηδενική επιτάχυνση, σε πεδίο βαρύτητας g είναι ισοδύναμη με τη Φυσική σε σύστημα χωρίς βαρύτητα αλλά επιταχυνόμενο με επιτάχυνση $-g$.

Με άλλα λόγια μπορεί να ειπωθεί ότι, για μία μικρή περιοχή του χώρου και του χρόνου, είναι αδύνατο να γίνει διάκριση ανάμεσα σε βαρυτικό πεδίο λόγω μάζας και σε πλασματικό βαρυτικό πεδίο λόγω επιτάχυνσης (Ashby, 2006).

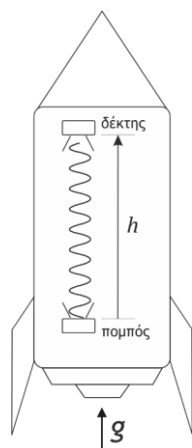


Εικόνα 4.4: Αρχή της Ισοδυναμίας: σύστημα που πέφτει ελεύθερα μέσα σε βαρυτικό πεδίο ισοδυναμεί με αδρανειακό σύστημα μακριά από βαρύτητα (αριστερά), σύστημα σε ηρεμία στην επιφάνεια της Γης (επιτάχυνσης g) ισοδυναμεί με σύστημα επιταχυνόμενο που απομακρύνεται από την επιφάνεια (με επιτάχυνση $-g$) (δεξιά).

4.4 Συνέπειες της Γενικής Θεωρίας – Βαρυτική μετατόπιση συχνότητας

Οι σημαντικότερες συνέπειες της ΓΘΣ που επηρεάζουν τη λειτουργία των δορυφόρων είναι:

- μετατόπιση συχνότητας ενός μεταδιδόμενου σήματος λόγω διαφοράς βαρυτικού δυναμικού,
- εξάρτηση του ρυθμού των χρονομέτρων από τη θέση τους στο βαρυτικό πεδίο.



Εικόνα 4.5: Επιταχυνόμενος πύραυλος με πομπό και δέκτη σε κατακόρυφη απόσταση h .

Η εξίσωση της βαρυτικής μετατόπισης συχνότητας μπορεί να εξαχθεί με ένα παράδειγμα που χρησιμοποιεί την Αρχή της Ισοδυναμίας σε συνδυασμό με το φαινόμενο Doppler (Ashby, 2006): στην Εικόνα 4.5 φαίνεται ένας επιταχυνόμενος πύραυλος, κινούμενος ανοδικά με επιτάχυνση g , ο οποίος είναι εξοπλισμένος με έναν πομπό και με έναν δέκτη σε ύψος h πάνω από τον πομπό. Ο πύραυλος παρατηρείται από ένα αδρανειακό πλαίσιο αναφοράς και τη στιγμή που ξεκινά να κινείται, ένα σήμα εκπέμπεται από τον πομπό. Ο χρόνος που απαιτείται για να φθάσει το σήμα από τον πομπό στον δέκτη είναι $t = h/c$, όπου c η ταχύτητα του φωτός. Αλλά κατά τη διάρκεια της μετάδοσης του σήματος στον δέκτη, ο δέκτης αποκτά ταχύτητα ίση με

$$v = gt = \frac{gh}{c}. \quad (4.15)$$

Έπειτα, όταν ανιχνεύεται το σήμα, η συχνότητα στον δέκτη θα πρέπει να είναι ίδια με εκείνη που θα ανιχνευόταν από έναν δέκτη, κινούμενο με σταθερή ταχύτητα v (αδρανειακό σύστημα), ευρισκόμενος στιγμιαία στην ίδια θέση με τον δέκτη του πυραύλου. Για αυτόν τον δέκτη, ο πομπός είναι μία πηγή που απομακρύνεται και τότε η συχνότητα θα είναι μετατοπισμένη προς τα κάτω κατά Doppler. Επομένως, συνδυάζοντας τις Εξ. (4.13) και Εξ. (4.15) προκύπτει

$$\frac{\Delta f}{f} = -\frac{v}{c} = -\frac{gh}{c^2}. \quad (4.16)$$

Σύμφωνα με την Αρχή της Ισοδυναμίας, η Φυσική μέσα στον επιταχυνόμενο πύραυλο είναι η ίδια όπως θα ήταν σε ένα βαρυτικό πεδίο έντασης g . Ως εκ τούτου, ένας παρατηρητής μέσα στον πύραυλο (επιταχυνόμενο σύστημα) θα απέδιδε την αλλαγή συχνότητας στο βαρυτικό πεδίο και έτσι το γινόμενο gh μπορεί να ταυτοποιηθεί με όρους μεταβολής βαρυτικού δυναμικού $\Delta\Phi = gh$

$$\frac{\Delta f}{f} = -\frac{\Delta\Phi}{c^2}. \quad (4.17)$$

Κατά συνέπεια, συγκρίνοντας δύο χρονόμετρα σε διαφορετικά βαρυτικά δυναμικά, θα πρέπει να λειτουργούν με διαφορετικό ρυθμό. Η διαφορά αυτή, μεταξύ ενός χρονομέτρου σε δυναμικό $\Phi + \Delta\Phi$ και ενός άλλου σε δυναμικό Φ , μπορεί να υπολογισθεί σε όρους κλασματικής μετατόπισης συχνότητας, αντιστρέφοντας το πρόσημο στην Εξ. (4.17):

$$\frac{\Delta f}{f} = -\frac{\Phi - (\Phi + \Delta\Phi)}{c^2} = \frac{\Delta\Phi}{c^2}. \quad (4.18)$$

4.5 Ολική βαρυτική μετατόπιση συχνότητας δορυφορικού χρονομέτρου

Σύμφωνα με τα παραπάνω, μελετώντας ένα *χρονόμετρο αναφοράς στον ισημερινό της Γης*, ακτίνας a_1 και ένα *χρονόμετρο σε τροχιά*, ακτίνας r , παρατηρείται μεταβολή στη συχνότητα του δεύτερου, λόγω μεταβολής του βαρυτικού δυναμικού. Το **βαρυτικό δυναμικό του χρονομέτρου σε τροχιά** σε καρτεσιανές συντεταγμένες στη θέση (x, y, z) μπορεί να εκφρασθεί ως

$$\Phi = -\frac{GM_E}{r} \left[1 - J_2 \left(\frac{a_1}{r} \right)^2 \frac{(3z^2 - r^2)}{2r^2} \right] \quad (4.19)$$

όπου

GM_E	η γεωκεντρική βαρυτιμετρική σταθερά
r	η ακτινική θέση του δορυφόρου επί της τροχιάς του
a_1	η ακτίνα της Γης στον Ισημερινό
J_2	ο δυναμικός παράγοντας της επιπλάτυνσης της Γης

Η παραπάνω σχέση είναι εκφρασμένη σε καρτεσιανές συντεταγμένες και περιλαμβάνει τα δυναμικά $V_{\text{gravitation}}$, V_{oblate} , όπως περιγράφηκαν στην Ενότητα 3.1.3.

Ο δεύτερος όρος στο βαρυτικό δυναμικό του χρονομέτρου ενός δορυφόρου σε τροχιά αντιπροσωπεύει τη συνεισφορά του δυναμικού παράγοντα επιπλάτυνσης της Γης J_2 . Αυτός ο όρος μπορεί να παραλειφθεί, εφόσον η επίδραση του J_2 μειώνεται σημαντικά με την απόσταση r , όπως φαίνεται και από την παραπάνω σχέση. Επομένως, το βαρυτικό δυναμικό του χρονομέτρου σε τροχιά δίνεται προσεγγιστικά από την εξίσωση του Νεύτωνα $\Phi = -GM_E/r$. Αυτή η προσέγγιση, του δυναμικού της Γης στη θέση του δορυφόρου, είναι ικανοποιητική για δορυφόρους μεσαίου υψομέτρου, αλλά όχι για δορυφόρους χαμηλότερου υψομέτρου (Ashby, 2006).

Η επίδραση του παράγοντα J_2 είναι πολύ μεγαλύτερη για το δυναμικό στην επιφάνεια της Γης και ως εκ τούτου, το **βαρυτικό δυναμικό ενός χρονομέτρου αναφοράς στη Γη** δίνεται από την Εξ. (4.19). Εφόσον το χρονόμετρο αναφοράς στην προκειμένη περίπτωση βρίσκεται στον ισημερινό ($z = 0$, $r = a_1$), τότε σε ένα αδρανειακό μη περιστρεφόμενο πλαίσιο, η σχέση απλοποιείται σε

$$\Phi_{\text{reference}} = -\frac{GM_E}{a_1} \left(1 + \frac{J_2}{2} \right) \quad (4.20)$$

Άρα, η ολική βαρυτική μετατόπιση συχνότητας ενός δορυφορικού χρονομέτρου σε τροχιά θα είναι

$$\frac{\Delta f}{f} = \frac{\Phi - \Phi_{\text{reference}}}{c^2} = -\frac{GM_E}{c^2 r} - \left(-\frac{GM_E}{a_1 c^2} \left(1 + \frac{J_2}{2} \right) \right) \quad (4.21)$$

Ενδεικτικά, για έναν δορυφόρο GPS, ανέρχεται περίπου στα 5.288×10^{-10} . Αν δεν προσμετρηθεί στις χρονικές διορθώσεις, σε μία μέρα θα έχτιζε μία μετατόπιση η οποία θα μεταφραζόταν σε σφάλμα πλοήγησης της τάξης των 13.7 km. Τα ατομικά χρονόμετρα των δορυφόρων GPS έχουν εγγενή σταθερότητα ταλάντωσης που τους επιτρέπει να διατηρούν το χρόνο με ακρίβεια, μερικά μέρη στα 10^{14} , μετά από ένα 24ωρο. Η βαρυτική μετατόπιση συχνότητας είναι πάνω από 10000 φορές μεγαλύτερη. (Ashby, 2006)

4.6 Ολική μετατόπιση συχνότητας

Η καθαρή συνεισφορά της βαρυτικής μετατόπισης συχνότητας και της διαστολής του χρόνου στην κλασματική μετατόπιση της συχνότητας ενός δορυφορικού χρονομέτρου σε σχέση με ένα χρονόμετρο αναφοράς, μπορεί να εξαχθεί με απλή πρόσθεση (δεδομένου ότι οι τιμές τους είναι πολύ μικρότερες από την τιμή της ταχύτητας του φωτός). Συνδυάζοντας τις Εξ. (4.11) και Εξ. (4.21) το άθροισμά τους δίνει

$$\frac{\Delta f}{f} = \frac{\left(-\frac{GM_E}{r} + \frac{GM_E}{a_1} \left(1 + \frac{J_2}{2} \right) \right)}{c^2} + \frac{-\frac{1}{2}v^2 - \left(-\frac{1}{2}(\omega a_1)^2 \right)}{c^2} \quad (4.22)$$

Δεδομένου ότι οι δορυφορικές τροχιές μπορούν να θεωρηθούν με καλή προσέγγιση *τροχιές κατά Κέπλερ*, η παραπάνω σχέση τροποποιείται περαιτέρω, χρησιμοποιώντας τη σχέση για την ολική διατήρηση της ενέργειας ανά μονάδα μάζας. Όπως έχει ήδη αναφερθεί στο κεφάλαιο 3, στη Νευτώνεια Μηχανική το πεδίο βαρύτητας είναι ένα συντηρητικό πεδίο και η ολική ενέργεια διατηρείται. Τότε, χρησιμοποιώντας την Εξ. (3.33) που δίνει την ταχύτητα σε οποιοδήποτε σημείο της τροχιάς, ο όρος της ταχύτητας στην Εξ. (4.22) μπορεί να αντικατασταθεί, αποδίδοντας την τελική σχέση,

$$\frac{\Delta f}{f} = -\frac{2GM_E}{c^2} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{a} \right) - \frac{3GM_E}{2c^2 a} + \frac{GM_E}{c^2 a_1} \left(1 + \frac{J_2}{2} \right) + \frac{1}{2} \frac{(\omega a_1)^2}{c^2} \quad (4.23)$$

όπου

GM_E	η γεωκεντρική βαρυτιμετρική σταθερά
r	η ακτινική θέση του δορυφόρου στην τροχιά του
a	ο μεγάλος ημιάξονας της δορυφορικής τροχιάς
a_1	η ακτίνα της Γης στο επίπεδο του Ισημερινού
J_2	ο δυναμικός παράγοντας επιπλάτυνσης της Γης
ω	η γωνιακή ταχύτητα της Γης

c η ταχύτητα του φωτός

Η παραπάνω σχέση μπορεί να συμπτυχθεί ως εξής

$$\frac{\Delta f}{f} = -\frac{3GM_E}{2c^2 a} - \frac{\Phi_0}{c^2} - \frac{2GM_E}{c^2} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{a} \right) \quad (4.24)$$

εφόσον θέσουμε

$$\frac{\Phi_0}{c^2} = -\frac{GM_E}{a_1 c^2} - \frac{GM_E J_2}{2a_1 c^2} - \frac{\omega^2 a_1^2}{2c^2} \quad (4.25)$$

όπου το Φ_0 αντιπροσωπεύει το ολικό δυναμικό της Γης, συνέπεια μάζας, περιστροφής και επιπλάτυνσης, σύμφωνα με την Εξ. (3.24), σε αντίθεση με το $\Phi_{\text{reference}}$ (Εξ. 4.20) το οποίο δεν περιλαμβάνει το δυναμικό περιστροφής της Γης.

Η παραπάνω έκφραση της ολικής μετατόπισης της κλασματικής συχνότητας (Εξ. 4.24) αντιπροσωπεύει τη διαφορά στο χρόνο μεταξύ χρονομέτρου αναφοράς στη Γη και δορυφορικού χρονομέτρου σε τροχιά. Στην επόμενη ενότητα εξετάζεται η παρούσα σχέση όπως προκύπτει από τη θεμελιώδη εξίσωση της Ειδικής Σχετικότητας, η οποία ορίζει έναν κανόνα μέτρησης αποστάσεων και χρόνου και μέσω της οποίας ορίζονται με πιο σαφή τρόπο οι έννοιες της συντεταγμένης χρόνου και του ιδιοχρόνου. Η θεμελιώδης αυτή εξίσωση, η οποία περιγράφεται στην ακόλουθη ενότητα, χρήζει μετασχηματισμών, εφόσον ορίζεται σε ένα αδρανειακό σύστημα, απουσία βαρυτικών επιδράσεων.

4.7 Ο χωροχρόνος στη Θεωρία της Σχετικότητας - Μετασχηματισμοί

Ο χωροχρόνος (*spacetime*) στην Ειδική Σχετικότητα είναι ένα τετραδιάστατο αδρανειακό σύστημα αναφοράς για την περιγραφή της κίνησης. Ως γεγονός (*event*) ορίζεται ένα σημείο στον χωροχρόνο το οποίο προσδιορίζεται μοναδικά δίνοντας τις τέσσερις συντεταγμένες του $\{t, x, y, z\}$. Σε αυτό το πλαίσιο αναφοράς οι συντεταγμένες δίνουν χρόνους και αποστάσεις, όπως μετρούνται από έναν παρατηρητή σε κατάσταση ηρεμίας σε αυτό το πλαίσιο.

Σύμφωνα με την Ειδική Θεωρία, δύο αδρανειακοί παρατηρητές με διαφορετικές ταχύτητες θα μετρήσουν διαφορετικές αποστάσεις Δx και διαφορετικούς χρόνους Δt μεταξύ δύο γεγονότων. Οι συντεταγμένες διαφορετικών αδρανειακών παρατηρητών συνδέονται μεταξύ τους με τους γραμμικούς μετασχηματισμούς Lorentz. Οι μετασχηματισμοί Lorentz εξαρτώνται μόνο από τη σχετική ταχύτητα των παρατηρητών και ο παράγοντας Lorentz όπως ήδη έχει αναφερθεί είναι $\gamma = 1/\sqrt{1 - (v^2/c^2)}$.

Οι μετασχηματισμοί Lorentz έχουν το σημαντικό πλεονέκτημα να αφήνουν ανεξάρτητη μία ποσότητα η οποία καλείται χωροχρονικό διάστημα (*the spacetime interval*). Η ποσότητα αυτή μένει αναλλοίωτη σε αυτούς τους μετασχηματισμούς, δηλαδή δεν αλλάζει από παρατηρητή σε παρατηρητή. Όταν δύο χωροχρονικά σημεία (γεγονότα) συμβαίνουν πολύ κοντά το ένα στο άλλο, τότε το χωροχρονικό διάστημα καλείται μέτρο (*the metric* ή *Minkowski metric*).

(Bertschinger, 2003). Το μέτρο Minkowski είναι ένας μαθηματικός τύπος που προσδιορίζει τον τοπικό χρόνο (proper time) ή την τοπική απόσταση (proper distance) για απειροστές μετακινήσεις στον τετραδιάστατο χώρο.

Εάν οι συντεταγμένες διαφορές γράφονται ως $\{dt, dx, dy, dz\}$, τότε το μέτρο Minkowski δίνεται από την ακόλουθη εξίσωση, σε καρτεσιανές συντεταγμένες

$$-ds^2 = -(cdt)^2 + (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2 = \sigma\alpha\theta. \quad (4.26)$$

Σε κυλινδρικές συντεταγμένες (ακτίνα r , αζιμούθιο γωνία ϕ), όπου $x = r \cos \phi$, $y = r \sin \phi$, $z = z$

$$-ds^2 = -(cdt)^2 + (dr)^2 + (rd\phi)^2 + (dz)^2 \quad (4.27)$$

Σε σφαιρικές συντεταγμένες (ακτίνα r , αζιμούθιο γωνία ϕ , πολική γωνία ϑ), όπου $x = r \sin \vartheta \cos \phi$, $y = r \sin \vartheta \sin \phi$, $z = r \cos \vartheta$

$$-ds^2 = -cdt^2 + dr^2 + r^2 d\vartheta^2 + r^2 \sin^2 \vartheta d\phi^2 \quad (4.28)$$

Η εξίσωση Minkowski είναι η βάση για την εξαγωγή των σχετικιστικών διορθώσεων στο χρόνο των επίγειων και δορυφορικών χρονομέτρων. Ισχύει σε τετραδιάστατο αδρανειακό χωροχρονικό σύστημα, τοποθετημένο «στο άπειρο», δηλαδή απομονωμένο, μακριά από επιδράσεις βαρύτητας. Επομένως χρειάζεται να γίνουν οι απαραίτητοι μετασχηματισμοί για να δημιουργηθεί ένα πλαίσιο το οποίο θα είναι πιο κοντά στο μοντέλο της Γης. Δηλαδή, περιστρεφόμενο και υπό την επίδραση βαρυτικού πεδίου.

4.7.1 Περιστρεφόμενο Σύστημα

Το γεγονός ότι η Γη περιστρέφεται δημιουργεί την ανάγκη για μετασχηματισμό της εξίσωσης Minkowski η οποία όπως ειπώθηκε ισχύει σε ένα μη περιστρεφόμενο αδρανειακό σύστημα. Ο μετασχηματισμός της Εξ. (4.28) από αδρανειακό σύστημα αναφοράς $O (ct, r, \phi, \vartheta)$ σε περιστρεφόμενο $O' (ct', r', \phi', \vartheta')$ με γωνιακή ταχύτητα ω_E είναι

$$t = t', \quad r = r', \quad \vartheta = \vartheta', \quad \phi = \phi' + \omega_E t' \quad (4.29)$$

Εφαρμόζοντας τους μετασχηματισμούς, η Εξ. (4.28) σε περιστρεφόμενο πλαίσιο αναφοράς με σφαιρικές συντεταγμένες γίνεται (Ashby, 2003)

$$\begin{aligned} -ds^2 = & - \left[1 - \left(\frac{\omega_E r' \sin \vartheta'}{c} \right)^2 \right] (cdt')^2 + 2\omega_E r'^2 \sin^2 \vartheta' d\phi' dt' + \\ & + dr'^2 + r'^2 d\vartheta'^2 + r'^2 \sin^2 \vartheta' d\phi'^2. \end{aligned} \quad (4.30)$$

4.7.2 Σύστημα κοντά στο βαρυτικό πεδίο της Γης

Για το μετασχηματισμό σε ένα μη περιστρεφόμενο, αδρανειακό πλαίσιο, του οποίου η αρχή των αξόνων βρίσκεται στο κέντρο μάζας της Γης, η εξίσωση Minkowski τροποποιείται εισάγοντας έναν επιπλέον όρο V ο οποίος αντιπροσωπεύει το βαρυτικό δυναμικό της Γης.

$$-ds^2 = -\left(1 + \frac{2V}{c^2}\right)(cdt)^2 + \left(1 - \frac{2V}{c^2}\right)(dr^2 + r^2 d\vartheta^2 + r^2 \sin^2 \vartheta d\phi^2). \quad (4.31)$$

Όπου $\{r, \vartheta, \phi\}$ είναι σφαιρικές πολικές συντεταγμένες και V το νευτώνειο βαρυτικό δυναμικό της Γης, το οποίο σε αυτή την περίπτωση, όπου δεν λαμβάνεται υπ' όψιν η περιστροφή της, είναι (Ashby, Nelson, 2009)

$$V = -\frac{GM_E}{r} \left[1 - J_2 \left(\frac{a_1}{r} \right)^2 P_2(\cos \vartheta) \right] \quad (4.32)$$

Στην Εξ. (4.31) οι συντεταγμένες ορίζονται σε ένα νέο χωροχρονικό σύστημα, στο οποίο λαμβάνεται υπ' όψιν η επίδραση του βαρυτικού πεδίου της Γης. Ας σημειωθεί ότι για $M \rightarrow 0$ ή $r \rightarrow \infty$ η μετρική αυτή περιπίπτει στην μετρική Minkowski (Εξ. 4.28).

Εφαρμόζοντας στην Εξ. (4.31) τους μετασχηματισμούς της Εξ. (4.29) για περιστρεφόμενο σύστημα (και διατηρώντας μόνο όρους της τάξης $1/c^2$), η εξίσωση παίρνει τη μορφή

$$\begin{aligned} -ds^2 = & -\left[1 + \frac{2V}{c^2} - \left(\frac{\omega_E r' \sin \vartheta'}{c} \right)^2 \right] (cdt')^2 + 2\omega_E r'^2 \sin^2 \vartheta' d\phi' dt' + \\ & + \left(1 - \frac{2V}{c^2} \right) (dr'^2 + r'^2 d\vartheta'^2 + r'^2 \sin^2 \vartheta' d\phi'^2). \end{aligned} \quad (4.33)$$

Ως $g_{\mu\nu}$ ορίζεται ένας τανυστής δεύτερης τάξης που ονομάζεται *μετρικός τανυστής*. Σύμφωνα με τη Γενική Θεωρία, ο συντελεστής του cdt' σε περιστρεφόμενο πλαίσιο υπό την επίδραση βαρύτητας, είναι το στοιχείο g_{00} του *μετρικού τανυστή* και φαίνεται από την παραπάνω σχέση να είναι

$$g_{00} = -\left[1 + \frac{2V}{c^2} - \left(\frac{\omega_E r' \sin \vartheta'}{c} \right)^2 \right] = -\left[1 + \frac{2V - (\omega_E r' \sin \vartheta')^2}{c^2} \right] = -\left(1 + \frac{2\Phi}{c^2} \right) \quad (4.34)$$

όπου το Φ αναπαριστά το ενεργό δυναμικό της Γης στο περιστρεφόμενο πλαίσιο, το οποίο περιλαμβάνει το στατικό δυναμικό αλλά και το φυγόκεντρο δυναμικό της Γης (Ashby, 2003).

4.7.3 Γεωειδές – επιφάνεια αναφοράς για δορυφόρους πλοήγησης

Σύμφωνα με τη Θεωρία της Σχετικότητας, στις Εξ. (4.30, 31, 33) η τιμή του *συντεταγμένου χρόνου* t , σύμφωνα με τον οποίο γίνονται οι χρονικές διορθώσεις, καθορίζεται από χρονόμετρα σε κατάσταση ηρεμίας σε ένα αδρανειακό χωροχρονικό σύστημα, τοποθετημένο «στο άπειρο», δηλαδή απομονωμένο, μακριά από την επίδραση πεδίων βαρύτητας. Όμως, ο *χρόνος αναφοράς* για τους δορυφόρους, συνδέεται στενά με τον Ατομικό Χρόνο (TAI).

Όπως αναφέρθηκε στο 2^ο κεφάλαιο, ο χρόνος TAI είναι μια χρονική κλίμακα που υπολογίζεται από το BIPM στο Παρίσι, με βάση τα δεδομένα εκατοντάδων προτύπων χρόνου, μείζερ υδρογόνου και άλλων χρονομέτρων ανά τον κόσμο. Για την εξαγωγή αυτής της χρονικής κλίμακας, εφαρμόζονται διορθώσεις στο μετρούμενο τοπικό ιδιοχρόνο του κάθε χρονομέτρου,

με βάση τα χρονόμετρα αναφοράς στο γεωειδές, μια επιφάνεια σταθερού ενεργού δυναμικού, στη μέση στάθμη της θάλασσας, στο περιστρεφόμενο (ECEF) πλαίσιο.

Άρα πρέπει να ληφθεί υπ' όψιν το γεγονός ότι τα χρονόμετρα αναφοράς για τους δορυφόρους δεν βρίσκονται «στο άπειρο», ούτε στο γεωκέντρο, αλλά στο γεωειδές της Γης. Αυτά τα χρονόμετρα μετακινούνται λόγω της περιστροφής της Γης και είναι σε διάφορες αποστάσεις από το κέντρο μάζας της, δεδομένου ότι η Γη είναι ελαφρώς πεπλατυσμένη. Συνεπώς, είναι απαραίτητο ένα μοντέλο έκφρασης για το σχήμα της επιφάνειας του γεωειδούς και μια τιμή που να εκφράζει το ενεργό βαρυτικό δυναμικό επάνω στην επιφάνεια αυτή του περιστρεφόμενου πλαισίου. Για αυτόν τον υπολογισμό, μπορεί να χρησιμοποιηθεί η Εξ. (4.33) στο γεωκεντρικό περιστρεφόμενο (ECEF) πλαίσιο. Για ένα χρονόμετρο, σε κατάσταση ηρεμίας στο γεωειδές, η Εξ. (4.33) απλοποιείται σε (Ashby, 2003)

$$-ds^2 = -\left[1 + \frac{2V}{c^2} - \left(\frac{\omega_E r' \sin \vartheta'}{c}\right)^2\right] (cdt')^2 \quad (4.35)$$

με το δυναμικό V να δίνεται από την Εξ. (4.32).

Η παρούσα εξίσωση προσδιορίζει την ακτίνα r' του γεωειδούς, συναρτήσει της πολικής γωνίας ϑ' . Μια **σταθερή τιμή** για το ενεργό δυναμικό στο περιστρεφόμενο πλαίσιο (Εξ. 4.25), μπορεί να καθοριστεί στον ισημερινό (όπου $\vartheta' = \pi/2$ και $r = a_1$), δεδομένου ότι το γεωειδές είναι μια επιφάνεια σταθερού δυναμικού. Επομένως,

$$\frac{\Phi_0}{c^2} = -\frac{GM_E}{c^2} - \frac{GM_E J_2}{2a_1 c^2} - \frac{\omega_E^2 a_1^2}{2c^2} \quad (4.36)$$

$$= -6.95348 \times 10^{-10} - 3.764 \times 10^{-13} - 1.203 \times 10^{-12} = -6.96927 \times 10^{-10} \text{ (στο WGS-84)}$$

Η παραπάνω εξίσωση αντιπροσωπεύει τις συνεισφορές $V_{\text{gravitation}}$, V_{rotation} , V_{oblate} , διαιρεμένες με c^2 , δεδομένου ότι ο χρόνος ενός χρονομέτρου μπορεί εύκολα να εκφραστεί σε αυτή τη μορφή. Από την Εξ. (4.35) για χρονόμετρα στο γεωειδές, διαιρώντας την αναλλοίωτη ποσότητα ds με την ταχύτητα του φωτός c ,

$$d\tau = \frac{ds}{c} = dt' \left(1 + \frac{\Phi_0}{c^2}\right). \quad (4.37)$$

Συμπερασματικά, ο χρόνος στα χρονόμετρα σε κατάσταση ηρεμίας πάνω στην επιφάνεια του περιστρεφόμενου γεωειδούς κυλάει πιο αργά, σε σύγκριση με χρονόμετρα σε ηρεμία «στο άπειρο», δηλαδή το 1 δευτερόλεπτο, για παράδειγμα, διαρκεί πιο πολύ στο γεωειδές, σε σχέση με τη διάρκειά του «στο άπειρο», περίπου επί επτά μέρη στα 10^{10} . Αυτές οι επιπτώσεις στο χρόνο έχουν άθροισμα περίπου 10000 φορές μεγαλύτερο από την κλασματική συχνότητα της σταθερότητας ενός ατομικού χρονομέτρου καισίου υψηλής ακρίβειας.

Οι παρατηρητές σε κατάσταση ηρεμίας στο γεωειδές καθορίζουν τη μονάδα του χρόνου σε όρους *ιδιοχρόνου*, ατομικών ρολογιών. Στην Εξ. (4.37), το Φ_0 είναι σταθερό. Στην αριστερή

πλευρά της Εξ. (4.37), το dt αντιπροσωπεύει τη διαστολή του μετρούμενου χρονικού διαστήματος που έχει παρέλθει σε ένα πρότυπο ρολόι σε κατάσταση ηρεμίας, με βάση το *συντεταγμένο* (απόλυτο) χρονικό διάστημα dt .

Κατά συνέπεια, από την τελευταία σχέση προκύπτει ότι όλα τα πρότυπα χρονόμετρα σε κατάσταση ηρεμίας στο γεωειδές της περιστρεφόμενης Γης λειτουργούν με τον ίδιο σταθερό ρυθμό. Το αποτέλεσμα αυτό είναι λογικό, δεδομένου ότι η επιφάνεια αυτή είναι μια βαρυτική ισοδυναμική επιφάνεια στο περιστρεφόμενο πλαίσιο.

4.7.4 Επίγεια χρονόμετρα

Σύμφωνα με τα παραπάνω, η εξίσωση της αναλλοίωτης ποσότητας ds , για χρονόμετρα σε διαφορετικά σημεία στην επιφάνεια της Γης, σε σχέση με χρονόμετρα στην επιφάνεια αναφοράς του γεωειδούς, γράφεται

$$-ds^2 = -\left(1 + \frac{2(V - \Phi_0)}{c^2}\right)(cdt)^2 + \left(1 - \frac{2V}{c^2}\right)(dr^2 + r^2 d\vartheta^2 + r^2 \sin^2 \vartheta d\phi^2) \quad (4.38)$$

όπου το Φ_0 αντιπροσωπεύει το δυναμικό στο γεωειδές.

Η διαφορά $(V - \Phi_0)$ που εμφανίζεται στον πρώτο όρο προκύπτει λόγω του ότι στο υποκείμενο γεωκεντρικό αδρανειακό πλαίσιο, στο οποίο εκφράζεται η παραπάνω εξίσωση, η μονάδα του χρόνου προσδιορίζεται από χρονόμετρα που κινούνται σε ένα χωρικά-εξαρτώμενο βαρυτικό πεδίο. Γίνεται φανερό ότι η εξίσωση αυτή συμπεριλαμβάνει τις επιδράσεις της διαστολής του χρόνου, καθώς και τις μετατοπίσεις συχνότητας λόγω βαρύτητας.

Εξαιτίας αυτών των επιδράσεων, οι οποίες έχουν αντίκτυπο στον τοπικό ιδιοχρόνο (proper time) ενός ατομικού χρονομέτρου, ο ιδιοχρόνος των δορυφορικών χρονομέτρων σε τροχιά δεν μπορεί έτσι απλά να χρησιμοποιηθεί για τον υπολογισμό του χρονικού διαστήματος από το ένα γεγονός μετάδοσης στο άλλο. Επιδράσεις που εξαρτώνται από τη διαδρομή θα πρέπει να προσμετρηθούν.

Από την άλλη πλευρά, σύμφωνα με τη ΓΘΣ, ο *συντεταγμένος χρόνος* t της παραπάνω εξίσωσης είναι βάσιμος σε μία περιοχή αρκετά μεγάλη ώστε να καλύπτει τη Γη μαζί με τους δορυφόρους πλοήγησης. Η εξίσωση αυτή είναι μία προσεγγιστική λύση των πεδιακών εξισώσεων κοντά στη Γη, που συμπεριλαμβάνει το βαρυτικό πεδίο που προκύπτει από τη μάζα της (Ashby, 2003).

Επομένως, ο συντεταγμένος χρόνος t της παραπάνω εξίσωσης μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως βάση για συγχρονισμό στη γειτονιά της Γης, δηλαδή ως χρόνος αναφοράς. Η εξίσωση μετά από πράξεις μπορεί να εκφραστεί αλλιώς ως

$$-ds^2 = -\left[1 + \frac{2(V - \Phi_0)}{c^2} - \left(1 - \frac{2V}{c^2}\right) \frac{dr^2 + r^2 d\vartheta^2 + r^2 \sin^2 \vartheta d\phi^2}{(cdt)^2}\right](cdt)^2. \quad (4.39)$$

και να απλοποιηθεί, γράφοντας την ταχύτητα στο γεωκεντρικό αδρανειακό σύστημα ως

$$v^2 = \frac{dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2}{dt^2} \quad (4.40)$$

Τότε, ο ιδιοχρόνος (proper time) στο χρονόμετρο δίνεται προσεγγιστικά

$$d\tau = ds/c = \left[1 + \frac{(V - \Phi_0)}{c^2} - \frac{v^2}{2c^2} \right] dt. \quad (4.41)$$

Τέλος, λύνοντας ως προς τον συντεταγμένο χρόνο και ολοκληρώνοντας κατά μήκος της διαδρομής που διανύει το χρονόμετρο,

$$\int_{path} dt = \int_{path} d\tau \left[1 - \frac{(V - \Phi_0)}{c^2} + \frac{v^2}{2c^2} \right]. \quad (4.42)$$

Επομένως, η σχετικιστική επίδραση πάνω στο χρονόμετρο που περιγράφει η Εξ. (4.41) διορθώνεται από την Εξ. (4.42).

4.7.5 Δορυφορικά χρονόμετρα

Για τα ατομικά χρονόμετρα στους δορυφόρους, είναι πιο εύκολο να εξετάζονται οι κινήσεις τους όπως αυτές θα παρατηρούνταν στο *γεωκεντρικό αδρανειακό πλαίσιο αναφοράς*. Οι βαρυτικές και οι κινητικές επιδράσεις θα πρέπει να λαμβάνονται υπ' όψιν μαζί.

Ο όρος Φ_0 στην παραπάνω εξίσωση διόρθωσης του χρόνου περιλαμβάνει τη διόρθωση που χρειάζεται, έτσι ώστε όλα τα χρονόμετρα στην επιφάνεια της Γης να μπορούν να χρησιμοποιούνται ως χρονόμετρα αναφοράς (δηλαδή να λειτουργούν με τον ίδιο ρυθμό με αυτά στο γεωειδές).

Το δυναμικό λόγω επιπλάτυνσης συμβάλλει στο Φ_0 με τον όρο $-GM_E J_2/2a_1$ στην Εξ. (4.58) και συνεισφέρει στην διόρθωση της κλασματικής μετατόπισης περίπου -3.76×10^{-13} . Η επίδραση αυτή θα πρέπει να λαμβάνεται υπ' όψιν στις διορθώσεις (Ashby, 2003).

Επίσης, το V είναι το βαρυτικό δυναμικό στην τοποθεσία του εκάστοτε δορυφόρου, το οποίο δίνεται με σχετικά καλή προσέγγιση από την σχέση του Νεύτωνα $V = GM_E/r$, δεδομένου ότι το δυναμικό λόγω επιπλάτυνσης της Γης μειώνεται πολύ γρήγορα με την απόσταση. Επομένως, με την παραδοχή ότι οι δορυφόροι ακολουθούν τροχιές κατά Kepler, (καλή προσέγγιση για δορυφόρους μεσαίου υψόμετρου, αλλά φτωχή για δορυφόρους χαμηλού υψόμετρου), οι εξισώσεις μπορούν να εκφραστούν χρησιμοποιώντας τη Νευτώνεια Μηχανική για τις τροχιές των δορυφόρων. Τέλος, χρησιμοποιώντας την Εξ. (3.33) για την ταχύτητα, η διόρθωση στον χρόνο της Εξ. (4.42) παίρνει τελικά τη μορφή

$$\Delta t = \int_{path} d\tau \left[1 + \frac{3GM_E}{2ac^2} + \frac{\Phi_0}{c^2} - \frac{2GM_E}{c^2} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{r} \right) \right] \quad (4.43)$$

Γίνεται φανερό ότι η εξίσωση διόρθωσης του ρυθμού λειτουργίας των δορυφορικών ρολογιών εξαρτάται μόνο από το μεγάλο ημιάξονα a της τροχιακής έλλειψης του δορυφόρου και από τη στιγμιαία ακτινική θέση $r(t)$ του δορυφόρου.

4.8 Ανάλυση της εξίσωσης διόρθωσης χρόνου

Σύμφωνα με την παραπάνω εξίσωση, οι σχετικιστικές επιδράσεις στα χρονόμετρα των δορυφόρων μπορούν να διαχωριστούν σε έναν **σταθερό όρο** και έναν **περιοδικό όρο** από τους οποίους ο δεύτερος εξαφανίζεται εάν η τροχιά του δορυφόρου είναι απόλυτα κυκλική ($a = r$).

Σταθερός όρος (ολική σχετικιστική επίδραση):

$$\frac{3GM_E}{2ac^2} + \frac{\Phi_0}{c^2} \quad (4.44)$$

Ο όρος αυτός οφείλεται και στα δύο φαινόμενα που συμβάλλουν, δηλαδή στη διαστολή του χρόνου (μετατόπιση Doppler 2^{ης} τάξης) και στη βαρυτική μετατόπιση συχνότητας και είναι σταθερός, γιατί η παράμετρος a (μεγάλος ημιάξονας της τροχιάς) για τον κάθε δορυφόρο θεωρείται ότι δεν μεταβάλλεται.

Στους παλαιότερους δορυφόρους, ο εν λόγω όρος αντισταθμιζόταν, ρυθμίζοντας τη συχνότητα του δορυφορικού χρονομέτρου προς τα κάτω κατά αυτή την ποσότητα, πριν την εκτόξευση. Αυτή η ρύθμιση ονομάζεται «εργοστασιακή μετατόπιση συχνότητας» (factory frequency offset). Πιο πρόσφατα, πολλοί δορυφόροι εξοπλίζονται με ατομικά χρονόμετρα ρουβιδίου. Η συχνότητα των συγκεκριμένων ρολογιών μπορεί να διαταραχθεί κατά τη διάρκεια της εκτόξευσης. Κατά συνέπεια, η συχνότητα μετρείται ξανά μετά την ένταξη του δορυφόρου στην προβλεπόμενη τροχιά και οι απαραίτητες διορθώσεις μεταδίδονται προς τους δέκτες, μέσω του μηνύματος πλοήγησης.

Περιοδικός όρος (επιπρόσθετη σχετικιστική επίδραση λόγω εκκεντρότητας δορυφορικής τροχιάς):

$$\int \frac{2GM_E}{c^2} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{r} \right) d\tau \quad (4.45)$$

Αυτός ο όρος μεταβάλλεται κατά τη διάρκεια της τροχιάς του δορυφόρου γύρω από τη Γη. Εξαρτάται από την εκκεντρότητα της τροχιάς και μπορεί να οδηγήσει σε σφάλμα έως και 75 ns αν δεν προσμετρηθεί στις διορθώσεις (Ashby, 2006).

Η εκκεντρότητα συμβάλλει με δύο τρόπους στη μετατόπιση συχνότητας όπως παρατηρείται στον δέκτη. Πρώτον, η εκκεντρότητα οδηγεί σε μεταβαλλόμενη ακτινική απόσταση, η οποία είναι ισοδύναμη με μεταβαλλόμενο βαρυτικό δυναμικό. Δεύτερον, η εκκεντρότητα οδηγεί σε μεταβαλλόμενη τροχιακή ταχύτητα (2^{ος} νόμος Kepler) η οποία επηρεάζει την μετατόπιση Doppler δεύτερης τάξης. Αυτές οι επιδράσεις μεταβάλλονται μαζί με την περίοδο της τροχιάς του δορυφόρου. Η μετρούμενη συχνότητα του δορυφορικού χρονομέτρου είναι χαμηλότερη στο

περίγειο και υψηλότερη στο απόγειο. Αυτή η διόρθωση στη συχνότητα γίνεται συνήθως στον δέκτη και το μέγεθος της επίδρασης εκτιμάται με βάση τις δορυφορικές εφημερίδες (Levine, 2002).

Οι πρώτοι δορυφόροι είχαν περιορισμένη υπολογιστική ισχύ και έτσι, ήταν στα καθήκοντα του δέκτη να εφαρμόσει την περιοδική διόρθωση, στον χρόνο μετάδοσης του σήματος. Στις μέρες μας, οι δορυφόροι έχουν αφθονία υπολογιστικών δυνατοτήτων και θα μπορούσαν εύκολα να εφαρμόσουν αυτή τη διόρθωση στο χρόνο πριν από τη μετάδοση του σήματος. Εικάζεται ότι στο δορυφορικό σύστημα GLONASS της Σοβιετικής Ένωσης αυτές οι διορθώσεις εφαρμόζονται στον επεξεργαστή του δορυφόρου.

Αν οι τροχιά ενός δορυφόρου είναι κυκλική ($e = 0$), ο όρος αυτός μηδενίζεται. Ο όρος είναι περιοδικός, διότι κατά τη διάρκεια μιας περιφοράς του δορυφόρου γύρω από τη Γη, η ακτινική θέση του δορυφόρου $r(t)$ σε σχέση με το κέντρο μάζας της Γης μεταβάλλεται, δεδομένου ότι η Γη βρίσκεται στη μία εστία της τροχιακής έλλειψης, αλλά και λόγω του δεύτερου νόμου του Kepler.

Χρησιμοποιώντας την εξίσωση για το μέτρο του διανύσματος θέσης r του δορυφόρου στην τροχιά του (Εξ. 3.20), ο όρος της παρένθεσης της παραπάνω εξίσωσης εκφράζεται ως

$$\frac{1}{r} - \frac{1}{a} = \frac{1}{a} \cdot \frac{e \cos E}{1 - e \cos E} \quad (4.46)$$

Με τη βοήθεια της Εξ. (4.46), η εξίσωση της περιοδικής επίδρασης στο δορυφορικό χρονόμετρο μπορεί να γραφθεί ως

$$\begin{aligned} \frac{2GM_E}{c^2} \int \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{a} \right) dt &= \frac{2GM_E}{c^2} \cdot \frac{1}{a} \int \frac{e \cos E}{1 - e \cos E} dt \\ &= \frac{2\sqrt{GM_E a}}{c^2} \cdot \sqrt{\frac{GM_E}{a^3}} \int \frac{e \cos E}{1 - e \cos E} dt \end{aligned} \quad (4.47)$$

Χρησιμοποιώντας την έκφραση του ρυθμού μεταβολής της έκκεντρου ανωμαλίας με τον χρόνο (Εξ. 3.24), η παρούσα εξίσωση παίρνει την τελική μορφή

$$\begin{aligned} &= \frac{2\sqrt{GM_E a}}{c^2} \int \left(\frac{\sqrt{GM_E/a^3}}{1 - e \cos E} \right) \cdot e \cos E dt \\ &= \frac{2\sqrt{GM_E a}}{c^2} \int \frac{dE}{dt} e \cos E dt \\ &= \frac{2\sqrt{GM_E a}}{c^2} \cdot e \sin E(t) \end{aligned} \quad (4.48)$$

Από την παρούσα σχέση είναι προφανές ότι το σφάλμα του χρονομέτρου σε τροχιά μεταβάλλεται ημιτονοειδώς με τον χρόνο και εξαρτάται από τον μεγάλο ημιάξονα και την εκκεντρότητα της τροχιάς του κάθε δορυφόρου. Η έκκεντρος ανωμαλία, όπως ήδη έχει αναφερθεί, παίρνει τιμές από 0 (περίγειο) έως 2π , ενώ παίρνει την τιμή π όταν ο δορυφόρος βρίσκεται στο απόγειο. Κατά συνέπεια, η ημιτονοειδής σχετικιστική διόρθωση μηδενίζεται όταν ο δορυφόρος διαβαίνει το περίγειο και το απόγειο της τροχιάς του.

Η εφαρμογή των επιδράσεων Σχετικότητας στα χρονόμετρα των δορυφόρων εντοπισμού και αλτιμετρίας μελετήθηκε και παρουσιάζεται στο κεφάλαιο 6. Πρώτα όμως είναι απαραίτητο να αναφερθούν βασικές πληροφορίες για τις αρχές λειτουργίας των δορυφόρων και το στόχο της κάθε αποστολής.

5^ο Κεφάλαιο

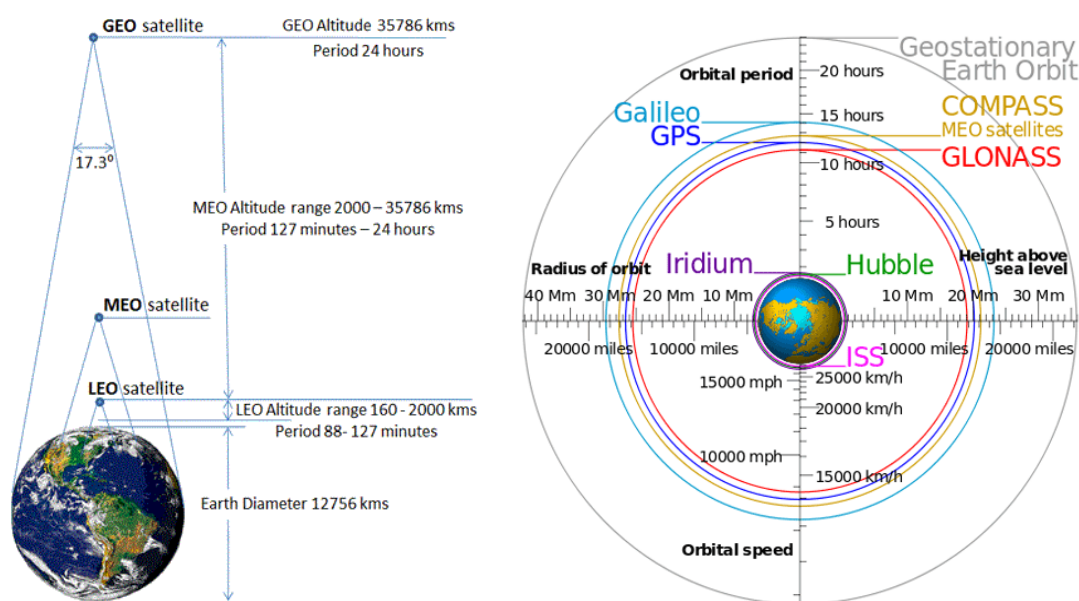
Βασικές Αρχές Λειτουργίας Δορυφόρων Εντοπισμού και Αλτιμετρίας

Στο παρόν κεφάλαιο γίνεται αρχικά επισκόπηση των αρχών των δορυφορικών συστημάτων πλοήγησης (Global Navigation Satellite Systems, GNSS), με βάση το αμερικανικό σύστημα GPS (Global Positioning System), ενώ εξετάζονται και τα υπόλοιπα συστήματα GNSS. Στη συνέχεια αναφέρονται τα χαρακτηριστικά και οι αρχές λειτουργίας των δορυφόρων αλτιμετρίας, μαζί με σχετικές πληροφορίες για τον στόχο κάθε δορυφορικής αποστολής που μελετήθηκε.

Γενικά, οι τροχιές των δορυφόρων χωρίζονται σε τρεις κατηγορίες με βάση το υψόμετρο. Αυτές είναι: η χαμηλή γήινη τροχιά, (Low Earth Orbit – LEO), η μεσαία γήινη τροχιά (Medium Earth Orbit – MEO) και η γεωστατική τροχιά (Geostationary Earth Orbit – GEO). Η σχέση μεταξύ υψομέτρου τροχιάς και τροχιακής περιόδου είναι σταθερή.

Οι δορυφόροι LEO πετούν σε ένα υψόμετρο κάτω των 2000 km και περιστρέφονται γύρω από τη Γη σε χρόνο από 95 έως 120 λεπτά. Οι δορυφόροι MEO βρίσκονται σε υψόμετρο πάνω από τα 2000 km και χρειάζονται συνήθως 6 ή 12 ώρες για να πραγματοποιήσουν μία περιφορά. Το υψόμετρο των δορυφόρων GEO ανέρχεται στα 35786 km, στο οποίο η ταχύτητα περιφοράς τους είναι ταυτόσημη με την ταχύτητα περιστροφής της Γης (δηλαδή για μία πλήρη περιφορά γύρω από τη Γη χρειάζονται περίπου 24 ώρες), έτσι ώστε να παραμένουν ακριβώς στο ίδιο σημείο σταθεροί, σε σχέση με τη Γη (Gulklett, UCPH 2013).

Επίσης υπάρχουν και οι δορυφόροι IGSO (Inclined Geo-Synchronous orbit) οι οποίοι κινούνται σε γεωσύγχρονη τροχιά, με κλίση ως προς τον ισημερινό. Δορυφόροι IGSO χρησιμοποιούνται για παράδειγμα στο δορυφορικό σύστημα εντοπισμού της Κίνας.



Εικόνα 5.1: Κατηγοριοποίηση δορυφόρων με βάση το υψόμετρο της τροχιάς τους. (Gini, 2014)

5.1 Παγκόσμια Δορυφορικά Συστήματα Εντοπισμού και Πλοήγησης – GNSS (Global Navigation Satellite Systems)

Ένα Δορυφορικό Σύστημα Εντοπισμού και Πλοήγησης χρησιμοποιείται για τον προσδιορισμό της θέσης ενός σημείου στην ξηρά, τη θάλασσα ή το διάστημα, μέσω ενός συστήματος τεχνητών δορυφόρων. Ο προσδιορισμός της θέσης του σημείου (δηλαδή το γεωγραφικό πλάτος, μήκος και γεωμετρικό υψόμετρο) βασίζεται στη μέτρηση των επιμέρους αποστάσεων του σημείου αυτού προς τους διάφορους δορυφόρους.

Κάθε δορυφόρος εκπέμπει συνεχώς ηλεκτρομαγνητικά κύματα σε συγκεκριμένες συχνότητες. Τα φέροντα αυτά σήματα διαμορφώνονται με κώδικες οι οποίοι παρέχουν πληροφορίες για τη θέση του δορυφόρου κάθε χρονική στιγμή, τον χρόνο εκπομπής του σήματος από τον δορυφόρο και άλλες παραμέτρους που περιγράφουν τη γενική κατάσταση του δορυφόρου.

Ο χρήστης, με έναν δέκτη, λαμβάνει τα κωδικοποιημένα σήματα από τους δορυφόρους που είναι ταυτόχρονα ορατοί στον ορίζοντά του. Μετά την αποκωδικοποίηση των δορυφορικών σημάτων στον δέκτη, προσδιορίζεται ο χρόνος εκπομπής του κάθε σήματος από τους δορυφόρους. Έτσι, γνωρίζοντας και τον χρόνο λήψης του σήματος, υπολογίζεται ο χρόνος μετάδοσης, από τον δορυφόρο έως τον δέκτη. Δεδομένου ότι η ταχύτητα διάδοσης των σημάτων είναι ίση με την ταχύτητα του φωτός c , υπολογίζεται η απόσταση δορυφόρου-δέκτη ($\Delta x = c\Delta t$).

Ειδικότερα, αν τέσσερα συγχρονισμένα ατομικά χρονόμετρα σε τέσσερις δορυφόρους διαδίδουν σήματα από τις θέσεις \mathbf{r}_j τις χρονικές στιγμές t_j με $j = 1, 2, 3, 4$ και λαμβάνονται στη θέση \mathbf{r} ταυτόχρονα τη χρονική στιγμή t , τότε

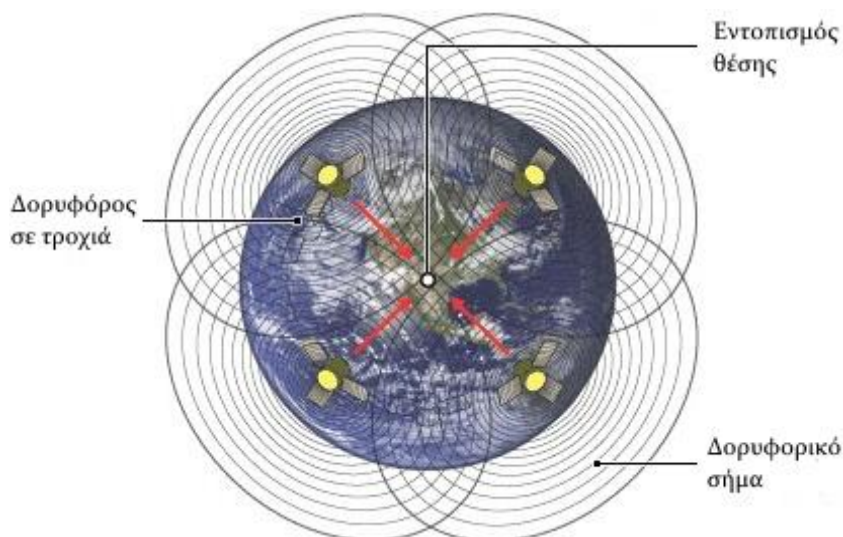
$$c^2 (t - t_j)^2 = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_j|^2, \quad j = 1, 2, 3, 4. \quad (5.1)$$

όπου $c = 299\,792\,458$ m/s. Αυτές οι τέσσερις εξισώσεις μπορούν να λυθούν ως προς τις άγνωστες συντεταγμένες του χωροχρόνου $\{\mathbf{r}, t\}$.

Για κάθε GNSS, ένας επαρκής αριθμός δορυφόρων πρέπει να εκτοξευθεί στο διάστημα, έτσι ώστε να διασφαλισθεί ότι τουλάχιστον τέσσερις δορυφόροι είναι ταυτόχρονα ορατοί από κάθε σημείο στη Γη. Κάθε δορυφόρος, στέλνοντας κωδικοποιημένα σήματα (μηνύματα), οριοθετεί την επιφάνεια μίας σφαίρας, όπου ο δορυφόρος βρίσκεται στο κέντρο της. Τυπικά, τρεις δορυφόροι είναι αρκετοί για να καθοριστεί το γεωγραφικό μήκος, πλάτος και ύψος, με τρεις εξισώσεις (Εικόνα 5.1).

Όλοι οι δορυφόροι είναι εξοπλισμένοι με ατομικά χρονόμετρα που μπορούν να συγχρονιστούν στην κλίμακα του nanosecond. Αυτό όμως δεν συμβαίνει με τους ισχύοντες επίγειους δέκτες, καθώς τα ατομικά ρολόγια είναι δαπανηρά (περισσότερο από \$100.000 το καθένα). Επομένως, οι κατασκευαστές δεκτών χρησιμοποιούν φθηνά ατομικά χρονόμετρα κρυστάλλου. Ωστόσο, 1ns σφάλμα στο συγχρονισμό τους οδηγεί σε σφάλματα στον εντοπισμό θέσης της τάξης των 30 cm. Για να ξεπεραστεί το πρόβλημα του συγχρονισμού, ένα τέταρτο δορυφορικό σήμα

απαιτείται, έτσι ώστε να υπολογιστεί αυτή η χρονική απόκλιση (Δt). Από μαθηματικής άποψης, για την επίλυση τεσσάρων αγνώστων (x , y , z και Δt), πρέπει να υπάρχουν τέσσερις εξισώσεις. Χρησιμοποιώντας περισσότερους από τέσσερις δορυφόρους, δεν επιτρέπεται μόνο ο υπολογισμός του Δt , αλλά αυξάνεται και η ακρίβεια στον υπολογισμό της θέσης του δέκτη.



Εικόνα 5.2: Πώς λειτουργούν τα δορυφορικά συστήματα πλοήγησης (GNSS). Όταν ο δέκτης δέχεται σήματα από ένα αριθμό δορυφόρων, τότε μπορεί να προσδιορίσει με ακρίβεια τη θέση του.

Τα σήματα από τον κάθε δορυφόρο επιτρέπουν στον χρήστη να μετρήσει *προσεγγιστικά* την απόσταση δορυφόρου – δέκτη, η οποία ονομάζεται **ψευδοαπόσταση (pseudorange)**. Η ψευδοαπόσταση υπολογίζεται από τον χρόνο που χρειάστηκε το σήμα να ταξιδέψει από τον δορυφόρο έως τον δέκτη, δεδομένου ότι τα σήματα ταξιδεύουν με την ταχύτητα του φωτός.

Η ψευδοαπόσταση αποκλίνει από την πραγματική απόσταση, εξαιτίας σφαλμάτων που προκύπτουν λόγω της καθυστέρησης των σημάτων στην ιονόσφαιρα και την τροπόσφαιρα, σφαλμάτων στο χρονόμετρο του δέκτη και σφαλμάτων λόγω πολυκλαδικών παρεμβολών στο διαδιδόμενο σήμα (multipath propagation). Για τον προσδιορισμό της πραγματικής απόστασης χρησιμοποιούνται μοντέλα (ιονόσφαιρα, τροπόσφαιρα) αλλά και συνδυασμοί μετρήσεων μεταξύ δεκτών και δορυφόρων (ιονόσφαιρα, πολυκλαδικές παρεμβολές, χρονόμετρα), επιτυγχάνοντας έτσι ακρίβειες κάτω του εκατοστού στον προσδιορισμό της θέσης του δέκτη.

Την τελευταία δεκαετία έχει σημειωθεί μια ταχεία ανάπτυξη νέων GNSSs. Μερικά από αυτά βρίσκονται ήδη σε λειτουργία (π.χ. το GPS των ΗΠΑ). Ωστόσο, ορισμένα GNSSs είναι ακόμη υπό σχεδιασμό ή μερική λειτουργία (π.χ. το Compass της Κίνας και το Galileo από την Ευρωπαϊκή Ένωση). Επιπλέον, η Ρωσία έθεσε σε πλήρη λειτουργία το δορυφορικό σύστημα GLONASS, κατά τα τέλη του 2011.

Ένα GNSS αποτελείται από τρία τμήματα: το διαστημικό τμήμα (space segment), το τμήμα ελέγχου (control segment) και το τμήμα χρηστών (user segment). **Το διαστημικό τμήμα** αποτελείται από πολλούς δορυφόρους τοποθετημένους πάνω από τη Γη σε σχεδόν κυκλικά

τροχιακά επίπεδα, οι οποίοι συνήθως κινούνται σε τροχιές μεσαίου υψομέτρου (MEO).

Το επίγειο τμήμα ελέγχου είναι υπεύθυνο για τον έλεγχο ολόκληρου του συστήματος, συμπεριλαμβανομένης της ανάπτυξης και συντήρησης του συστήματος, της παρακολούθησης των δορυφορικών τροχιών και των παραμέτρων του χρόνου, της παρακολούθησης βοηθητικών δεδομένων και της μεταφόρτωσης του μηνύματος δεδομένων στους δορυφόρους. Το τμήμα ελέγχου είναι επίσης υπεύθυνο για την κρυπτογράφηση δεδομένων και την προστασία των υπηρεσιών από μη εξουσιοδοτημένους χρήστες. Επιπλέον, **σταθμοί παρακολούθησης** σε όλο τον κόσμο συντονίζουν τις δραστηριότητες για τον έλεγχο και την παρακολούθηση του συστήματος, χρησιμοποιώντας αμφίδρομη επικοινωνία μεταξύ των εν λόγω σταθμών και των δορυφόρων GNSS.

Το τμήμα χρηστών αποτελείται από παθητικούς δέκτες, με δυνατότητα αποκωδικοποίησης των λαμβανόμενων σημάτων από τους δορυφόρους. Ωστόσο, οι πολίτες δεν επιτρέπεται να έχουν πρόσβαση στα στρατιωτικά GNSS σήματα. Επομένως, εκτός από τους ειδικούς δέκτες που αποσκοπούν σε στρατιωτικές εφαρμογές, υπάρχει μια ποικιλία δεκτών GNSS διαθέσιμων στην αγορά σήμερα, για πολιτική χρήση.

Στις ενότητες που ακολουθούν, γίνεται επισκόπηση του κάθε GNSS ξεχωριστά. Παρατίθενται βασικές πληροφορίες για το GPS των ΗΠΑ, το οποίο συγκρίνεται με το GLONASS της Ρωσίας, το Galileo της Ευρώπης και το BeiDou της Κίνας.

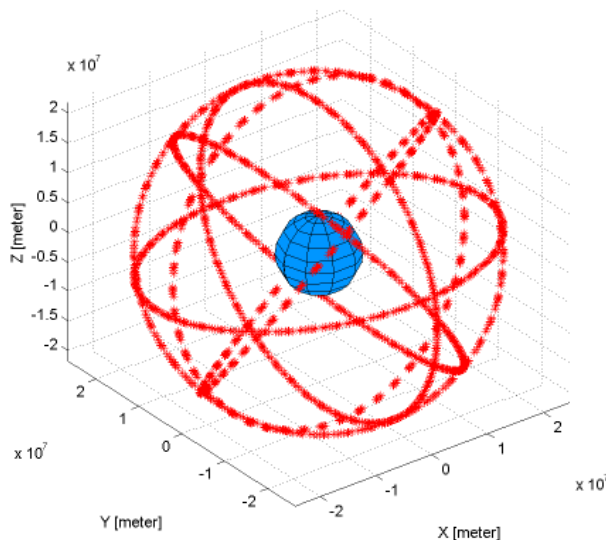
Πίνακας 4.7.5.1: Σύγκριση δορυφορικών αποστολών πλοήγησης GNSS. (Potsdam University, 2012)

Χαρακτηριστικά	GPS	GLONASS	GALILEO	COMPASS
Πρώτη Εκτόξευση	Φεβρουάριος 1978	Οκτώβριος 1982	Δεκέμβριος 2005	Απρίλιος 2007
Αριθμός Δορυφόρων	24	24	27	27
Τροχιακά Επίπεδα	6	3	3	3
Κλίση ως προς τον Ισημερινό	55°	64.8°	56°	55°
Μεγάλος Ημιάξονας	26 560 km	25 508 km	29 601 km	27 840 km
Μέσο Υψόμετρο στο Περίγειο	19 652 km	18 622 km	23 016 km	20 982 km
Μέσο Υψόμετρο στο Απόγειο	20 715 km	19 642 km	24 216 km	22 115 km
Περίοδος Περιφοράς	11h 57.96 min	11h 15.73 min	14h 4.75 min	12h 35 min
Γεωδαιτικό Σύστημα	WGS-84	PE-90	GTRF	CGS2000
Σύστημα Χρόνου	GPS time, UTC (USNO)	GLONASS time, UTC (SU)	Galileo system time	BeiDou System Time (BDT)

5.1.1 GPS (Global Positioning System)

Το Υπουργείο Άμυνας των ΗΠΑ (US Department of Defense – DoD) ξεκίνησε να αναπτύσσει ένα παγκόσμιο σύστημα εντοπισμού θέσης από το 1973, για στρατιωτικούς σκοπούς. Ο πρώτος δορυφόρος εκτοξεύθηκε το 1978. Το Παγκόσμιο Σύστημα Εντοπισμού Θέσης NAVSTAR (NavGPS) έφθασε στην πλήρη στρατιωτική του λειτουργία το 1995. Το έτος 2000, το Κογκρέσο των ΗΠΑ έκανε ορισμένες ενέργειες, έτσι ώστε η παγκόσμια υπηρεσία εντοπισμού να διατίθεται και για τους πολίτες. Από την εποχή εκείνη, το Υπουργείο Άμυνας προσφέρει απεριόριστη

πρόσβαση των υπηρεσιών του GPS για τους πολίτες σε όλο τον κόσμο δωρεάν. Ο αρχικός στόχος ήταν ακρίβεια στις μετρήσεις της τάξης των $\pm 10\text{-}15\text{ m}$ στον προσδιορισμό θέσης, σε πραγματικό χρόνο. Γρήγορα όμως έγινε αντιληπτό ότι θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί σε ακριβέστερους υπολογισμούς και επεκτάθηκε η χρήση του και σε γεωδαιτικές εφαρμογές.



Εικόνα 5.3: Οι τροχιές των δορυφόρων GPS. (Jensen, 2010)

Το διαστημικό τμήμα του συστήματος GPS αποτελείται από 24 ενεργούς δορυφόρους οι οποίοι είναι τοποθετημένοι σε τροχιές MEO, σε υψόμετρο 20 200 km πάνω από τη Γη. Οι τροχιές των δορυφόρων GPS έχουν σχετικά μικρές εκκεντρότητες ($e < 0.02$), μεγάλο ημιάξονα περίπου 26 560 km και κλίση ως προς τον ισημερινό (inclination) 55 μοίρες.

Οι δορυφόροι τοποθετούνται σε τέτοιες τροχιές, έτσι ώστε να εξασφαλίζεται ότι κάθε χρονική στιγμή υπάρχουν τουλάχιστον 6 δορυφόροι στο οπτικό πεδίο ενός δέκτη. Έτσι, οι δορυφόροι GPS χωρίζονται σε έξι τροχιακά επίπεδα (δηλαδή τέσσερις ισαπέχοντες δορυφόροι ανά επίπεδο), ονόματι από A έως F, με τη γωνία μεταξύ των επιπέδων να είναι 60 μοίρες (που σημαίνει ότι οι ορθές αναφορές των ανιόντων δεσμών (right ascensions of ascending nodes) των τροχιών των γειτονικών επιπέδων απέχουν κατά 60 μοίρες).

Επί του παρόντος, υπάρχουν 31 δορυφόροι GPS σε λειτουργία, συν 4 ανενεργοί εφεδρικοί δορυφόροι που μπορούν να ενεργοποιηθούν όταν απαιτείται. Κάθε δορυφόρος εκπέμπει ραδιοσήματα που ταξιδεύουν με την ταχύτητα του φωτός, μεταδίδοντας τα «μηνύματα πλοήγησης» (navigation messages).

Το τμήμα ελέγχου αποτελείται από ένα δίκτυο σταθμών παρακολούθησης που είναι υπεύθυνοι για τον έλεγχο, την παρακολούθηση και τη συντήρηση των δορυφόρων. Ο κεντρικός σταθμός ελέγχου (master control segment), ο οποίος βρίσκεται στην πολιτεία του Κολοράντο, συλλέγει τα δεδομένα από κάθε έναν από τους σταθμούς παρακολούθησης που είναι καταναμεμημένοι σε όλο τον κόσμο και προσδιορίζει τόσο τα δεδομένα που πρόκειται να μεταφορτωθούν όσο και

τους σταθμούς εδάφους που θα διαβιβάσουν αυτά τα δεδομένα ελέγχου στους δορυφόρους. Το τμήμα χρηστών αποτελείται από συσκευές ραδιο-δεκτών που λαμβάνουν σήματα από τους διαθέσιμους δορυφόρους GPS. Στην πραγματικότητα, υπάρχουν εκατομμύρια δέκτες που χρησιμοποιούνται σήμερα, συμπεριλαμβανομένων των εκατοντάδων εκατομμυρίων δεκτών σε συσκευές κινητής τηλεφωνίας.

5.1.1.1 Διορθώσεις Σχετικότητας στα χρονόμετρα GPS

Το GPS είναι το σύστημα στο οποίο χρησιμοποιήθηκαν για πρώτη φορά οι διορθώσεις Σχετικότητας. Η εξίσωση διόρθωσης που χρησιμοποιείται στα GPS για τη σχετικιστική επίδραση στη συχνότητα, εμπεριέχει δύο όρους. Το πρώτο μέρος του σταθερού όρου της εξίσωσης προκύπτει λόγω της σχετικής ταχύτητας μεταξύ του δορυφόρου GPS και του επίγειου δέκτη (Ειδική Σχετικότητα) και το δεύτερο μέρος από βαρυτικές διαφορές μεταξύ δορυφόρου-δέκτη (Γενική Σχετικότητα). Οι επιδράσεις έχουν αντίθετο πρόσημο και το συνολικό ποσό σε όρους κλασματικής μετατόπισης συχνότητας είναι $\Delta f/f = -4.4647 \times 10^{-10}$. Η συχνότητα GPS, η οποία θα μετριοταν στο δορυφόρο ($f = 10.23 \text{ MHz}$), τροποποιείται κατά το ποσό αυτό ($\Delta f/f$), με τον εξής τρόπο:

$$(1 - 4.4647 \times 10^{-10}) \times 10.23 = 10.229\,999\,995\,432\,6 \text{ MHz} \quad (5.2)$$

Έτσι, ο παρατηρητής στην επιφάνεια της Γης λαμβάνει συχνότητα στα 10.23 MHz.

Οι μέσες συχνότητες των φέροντων κυμάτων L1 και L2 είναι 1575.42 MHz και 1227.6 MHz, αντίστοιχα. Εφαρμόζοντας αυτή τη διόρθωση στη συχνότητα, ο χρόνος μετάδοσης του δορυφόρου GPS επιβραδύνεται κατά $4.4647 \times 10^{-10} \times 60 \times 60 \times 24 = 38\,575 \text{ ns/μέρα}$.

Με αυτόν τον τρόπο, ένα σημαντικό μέρος των σχετικιστικών επιδράσεων αφαιρείται. Όμως, οι περιοδικές σχετικιστικές επιδράσεις λόγω εκκεντρότητας παραμένουν. Αυτές αφαιρούνται κατά τη διάρκεια της επεξεργασίας του σήματος στον δέκτη.

Ο χρόνος που λαμβάνεται στον δέκτη από τους δορυφόρους GPS θα πρέπει να διορθωθεί από τον δέκτη, χρησιμοποιώντας την εξίσωση:

$$t = t_{SV} - \Delta t_{SV} \quad (5.3)$$

όπου t είναι ο χρόνος GPS, t_{SV} ο χρόνος κατά τη στιγμή της μετάδοσης του δορυφορικού σήματος και Δt_{SV} η διόρθωση στον χρόνο του δορυφόρου. Το τελευταίο δίνεται από την πολωνυμική σχέση

$$\Delta t_{SV} = a_{f_0} + a_{f_1} (t - t_{0c}) + a_{f_2} (t - t_{0c})^2 + \Delta t_r \quad (5.4)$$

όπου a_{f_0} , a_{f_1} και a_{f_2} οι συντελεστές του πολωνύμου οι οποίοι μεταδίδονται με το μήνυμα πλοήγησης του GPS, t_{0c} ο χρόνος αναφοράς και Δt_r είναι η σχετικιστική διόρθωση, η οποία υπολογίζεται από την Εξ. (4.59).

Υπάρχουν επίσης μικρότερες σχετικιστικές επιδράσεις οι οποίες δεν λαμβάνονται υπ' όψιν από το σύστημα GPS, αλλά μπορούν να μοντελοποιηθούν κατά την επεξεργασία των μετρήσεων

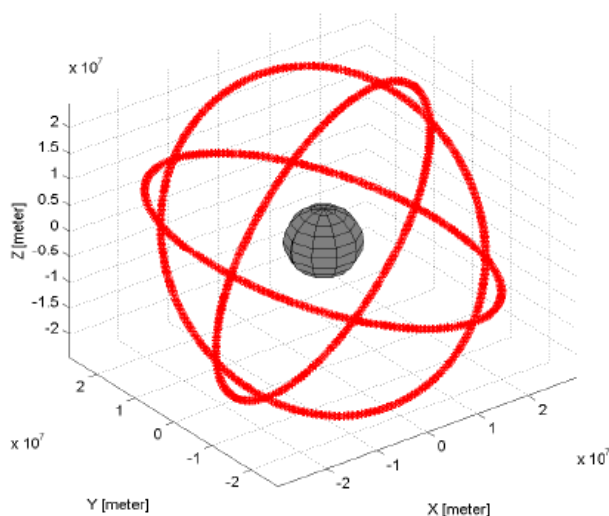
GPS. Για παράδειγμα, ο κώδικας GPS, οι μετρήσεις φάσης και οι μετρήσεις Doppler επηρεάζονται από σχετικιστικά φαινόμενα, τα οποία θα μπορούσαν να λαμβάνονται υπ' όψιν στην επεξεργασία των μετρήσεων που γίνονται στον δέκτη (Z. Hecimovic, 2013).

5.1.2 Galileo

Το σύστημα Galileo είναι το δορυφορικό σύστημα πλοήγησης της Ευρώπης, το οποίο παρέχει μία υψηλής ακρίβειας παγκόσμια υπηρεσία προσδιορισμού θέσης, για πολιτική χρήση. Εκπέμποντας σήματα σε δύο συχνότητες, το Galileo έχει προγραμματιστεί να παρέχει σε πραγματικό χρόνο ακρίβεια στον εντοπισμό θέσης της τάξης του μέτρου (m).

Κληρονομώντας το όνομά του από τον αστρονόμο που εντόπισε την πραγματική θέση της Γης στο ηλιακό μας σύστημα, το δορυφορικό σύστημα πλοήγησης Galileo, έχει σήμερα 14 δορυφόρους σε τροχιά. Η ολοκλήρωση του συστήματος έχει προγραμματιστεί για το 2020. Το πλήρως αναπτυγμένο δορυφορικό τμήμα του συστήματος Galileo θα αποτελείται από 24 εν λειτουργία δορυφόρους, συν έξι εφεδρικούς σε τροχιά, τοποθετημένους σε τρία κυκλικά MEO επίπεδα, σε υψόμετρο 23 222 km πάνω από τη Γη, και με κλίση των τροχιακών επιπέδων 56 μοίρες ως προς τον ισημερινό.

Ο χρόνος αναφοράς του συστήματος Galileo (Galileo System Time, GST) χρησιμοποιείται για συγχρονισμό των δορυφορικών χρονομέτρων όπως επίσης και για πρόβλεψη φάσης και συχνότητας των δορυφορικών χρονομέτρων. Αυτές οι προβλέψεις συμπεριλαμβάνονται στο μήνυμα πλοήγησης (navigation message) που εκπέμπεται από τους δορυφόρους Galileo το οποίο επιτρέπει στον χρήστη τη δυνατότητα πλοήγησης και παροχής χρόνου ακριβείας. Ο χρόνος GST καθορίζεται από το σύστημα Galileo αυτόνομα από άλλες κλίμακες χρόνου και ακολουθεί τις διεθνείς προδιαγραφές. Είναι μία συνεχής κλίμακα χρόνου σε ένα γεωκεντρικό σύστημα αναφοράς, με 1 second διαφορά σε σχέση με τον χρόνο UTC (Mudrak, 2015).



Εικόνα 5.4: Οι τροχιές των δορυφόρων Galileo. (Jensen, 2010)

5.1.2.1 Διορθώσεις Σχετικότητας στα χρονόμετρα Galileo

Στα πρώτα έγγραφα ελέγχου - χρήσης (Interface Control Document) του Galileo αναφέρθηκε ότι τα χρονόμετρα των δορυφόρων δεν συμπεριλάμβαναν τις σχετικιστικές διορθώσεις και ότι τα σχετικιστικά φαινόμενα θα πρέπει να λαμβάνονται υπ' όψιν από τους δέκτες. Πιο πρόσφατα όμως δημοσιεύθηκε διόρθωση, στα επίσημα έγγραφα ελέγχου του Galileo (Space Interface Control Document), για τα δορυφορικά χρονόμετρα η οποία συμπεριλαμβάνει τη σχετικιστική διόρθωση. Έχει την ίδια πολωνυμική μορφή με τη χρονική διόρθωση που χρησιμοποιείται στο GPS (Εξ. 5.4), η οποία εμπεριέχει τη διόρθωση της Σχετικότητας Δt_r .

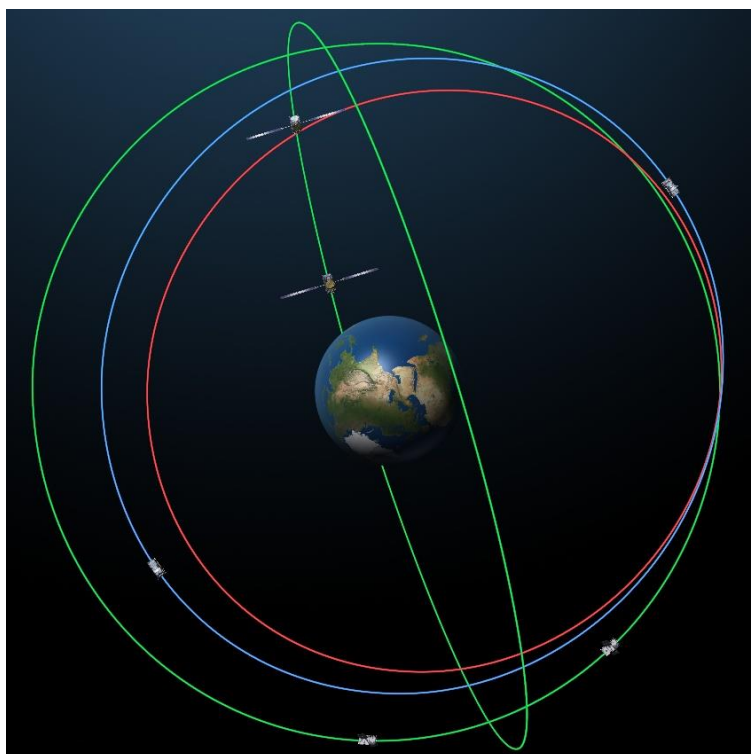
Η σχετικιστική διόρθωση είναι ίδια με το GPS (Εξ. 4.43), μόνο που στην εξίσωσή της χρησιμοποιούνται οι παράμετροι της τροχιάς των δορυφόρων Galileo. Επίσης, λόγω διαφορετικών παραμέτρων που χρησιμοποιούνται για τη Γη, (μάζα, ελλειψοειδές αναφοράς, βαρυτική σταθερά, επιπλάτυνση κ.ά.), η σταθερή τιμή που προκύπτει από την εξίσωση της σχετικιστικής διόρθωσης του χρόνου διαφέρει: $\Delta f/f = -4.442\,807\,309 \times 10^{-10}$. Χρησιμοποιώντας αυτή τη σχετικιστική διόρθωση, τα χρονόμετρα των δορυφόρων Galileo δεν αποκλίνουν γρήγορα από τον χρόνο ΤΑΙ και δεν απαιτείται να διαβιβάζονται προς τους χρήστες μεγάλοι διορθωτικοί όροι, όπως είχε προγραμματιστεί στο παρελθόν (Z. Hecimovic, 2013).

Το σύστημα Galileo διαθέτει υψηλών προδιαγραφών πρότυπα χρόνου. Θα χρησιμοποιεί το πρότυπο ατομικής συχνότητας ρουβιδίου RAFS (Rubidium Atomic Frequency Standard) και το παθητικό πρότυπο υδρογόνου μείζερ PHM (Passive Hydrogen Maser) ως βάση για την τεχνολογία των χρονομέτρων. Οι πρώτοι τέσσερις δορυφόροι Galileo, εκτοξεύθηκαν σε ζεύγη το 2011 και 2012 και τέθηκαν σε κυκλικές τροχιές, στα 23 222 km υψόμετρο, σε δύο διαφορετικά επίπεδα. Ο 5^{ος} και ο 6^{ος} εκτοξεύθηκαν στις 22 Αυγούστου το 2014, όμως κατέληξαν σε λανθασμένη τροχιά, εξαιτίας ενός τεχνικού προβλήματος.

Ενώ ήταν προγραμματισμένο οι τροχιές τους να είναι κυκλικές, τελικά κατέληξαν σε ελλειπτικές τροχιές, με μια εκκεντρότητα περίπου 0.23, η οποία τους οδηγούσε σε υψόμετρα από 13 713 km έως 25 900 km πάνω από τη Γη. Το υψόμετρο 13 713 km είναι πολύ χαμηλό για να λειτουργούν σωστά τα όργανα των δορυφόρων πλοήγησης. Έτσι, κατά την περίοδο του Νοεμβρίου 2014 - Φεβρουαρίου 2015, πραγματοποιήθηκαν προσπάθειες ώστε να ανυψωθεί το χαμηλότερο σημείο της τροχιάς τους κατά 3 500 km, ενώ παράλληλα οι τροχιές τους γίνονταν πιο κυκλικές, με την τιμή της εκκεντρότητας να είναι πλέον μικρότερη από 0.16.

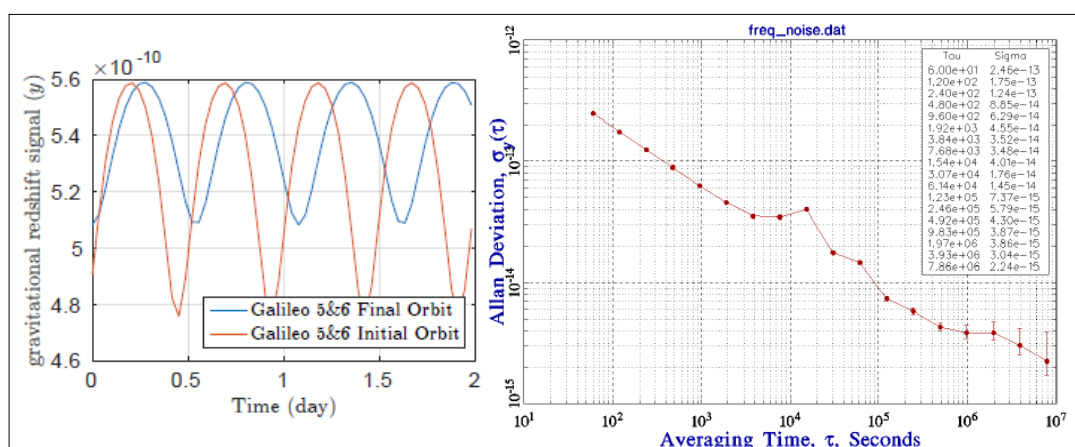
Πίνακας 5.2: Στοιχεία τροχιάς δορυφόρων Galileo 5 & 6. (P. Delva, 2015)

Όνομα	e	a (km)	i (°)
Galileo 5, 6 - Αρχική Τροχιά	0.2330	26192	49.7740
Galileo 5, 6 - Τελική Τροχιά	0.1561	27977	49.7212



Εικόνα 5.5: Λανθασμένη τροχιά (κόκκινο) και διορθωμένη τροχιά (μπλε) των δορυφόρων Galileo 5, 6, μαζί με τη σωστή κυκλική τροχιά (πράσινο) των τεσσάρων πρώτων δορυφόρων. (ESA, 13/03/2015)

Οι κυκλικές τροχιές με μηδενική εκκεντρότητα, όπως ειπώθηκε στο 4^ο κεφάλαιο, εξαλείφουν το περιοδικό σφάλμα στα χρονόμετρα, το οποίο είναι συνέπεια του συνδυασμού των φαινομένων της διαστολής του χρόνου και της βαρυτικής μετατόπισης συχνότητας. Ως εκ τούτου, δεν είχε σχεδιαστεί κάποια φόρμουλα διόρθωσης στα δορυφορικά χρονόμετρα Galileo για ελλειπτικές τροχιές με μη μηδενική εκκεντρότητα. Οι δύο δορυφόροι τελικά χρησιμοποιήθηκαν ως ένας έλεγχος ακριβείας για την εγκυρότητα της Θεωρίας της Σχετικότητας και για τη σταθερότητα της ταλάντωσης των ατομικών τους χρονομέτρων. Τα αποτελέσματα παρουσιάζονται στα παρακάτω γραφήματα.



Εικόνα 5.6: Αποτελέσματα μετρήσεων των επιδράσεων Σχετικότητας στη συχνότητα λόγω αυξημένης εκκεντρότητας των δορυφόρων Galileo SV 5, 6 και της σταθερότητας των χρονομέτρων τους σύμφωνα με την διασπορά Allan. (P. Delva, 2015)

5.1.3 GLONASS

Το σύστημα GLONASS (Global'naya Navigatsionnaya Sputnikowaya Sistema) έχει αναπτυχθεί και συντηρείται από τη Ρωσική Ομοσπονδιακή Υπηρεσία Διαστήματος και το Υπουργείο Άμυνας της Ρωσίας, από το 1970. Ο πρώτος δορυφόρος GLONASS μπήκε σε τροχιά και λειτούργησε επιτυχώς το 1984, ενώ μέχρι το 1993 ο σχηματισμός είχε φτάσει τους 12 εν λειτουργία δορυφόρους. Το 1996, το GLONASS άρχισε να λειτουργεί πλήρως με έναν ολοκληρωμένο σχηματισμό 24 δορυφόρων.

Μεταξύ 1996 και 1998 όμως, ο αριθμός των διαθέσιμων δορυφόρων μειωνόταν λόγω οικονομικών προβλημάτων. Το 2001, ο αριθμός των διαθέσιμων δορυφόρων ήταν μόνο 6 έως 8. Μετά το 2000, η ρωσική οικονομία ανέκαμψε και το σύστημα GLONASS έγινε μία από τις σημαντικότερες προτεραιότητες της κυβέρνησης. Το 2009 ορίστηκε ένα σχέδιο για την αποκατάσταση και πλήρη λειτουργία του συστήματος. Ωστόσο, υπήρχε καθυστέρηση στο σχέδιο, που οφείλεται σε κάποιες επιπλοκές και αποτυχίες στη δρομολόγηση ορισμένων δορυφόρων. Τον Δεκέμβριο του 2010, η ρωσική διαστημική υπηρεσία απέτυχε να στείλει τρεις δορυφόρους πλοήγησης GLONASS σε τροχιά, με τους δορυφόρους να χάνονται στον Ειρηνικό Ωκεανό.

Τον Δεκέμβριο του 2011, ανακοινώθηκε ότι ο σχηματισμός GLONASS έχει φτάσει τον αριθμό των 24 εν λειτουργία δορυφόρων σε τροχιά, μετά την εκτόξευση και του 24ου δορυφόρου, από το Διαστημικό Κέντρο Μπαϊκονούρ (Baikonur Cosmodrome), το Νοέμβριο του 2011. Το σύστημα GLONASS αναπτύχθηκε κυρίως για στρατιωτικούς σκοπούς. Ωστόσο, μετά την επίτευξη της πλήρους λειτουργίας του, το GLONASS γίνεται διαθέσιμο, χωρίς χρέωση, για πολιτική χρήση.

Οι συντεταγμένες στο σύστημα GLONASS εκφράζονταν χρησιμοποιώντας το Σοβιετικό Γεωδαιτικό Σύστημα 1985 (Soviet Geodetic System – **SGS-85**). Το 1994, το σύστημα αναφοράς συντεταγμένων άλλαξε σε SGS-90. Το SGS-90 είναι γνωστό στις μέρες μας ως Parametry Zemli 1990 – **PZ90** ή αλλιώς PE-90 (Parameters of Earth - 1990). Το ελλειψοειδές του SGS-90 διαφέρει από το WGS84 κατά λιγότερο από 0.4 m ως προς κάθε κατεύθυνση (Dawoud, 2012). Το GLONASS έχει τη δική του κλίμακα χρόνου που ονομάζεται *χρόνος Glonass*, συγχρονισμένος στην κλίμακα του 1 second με τον χρόνο UTC. Το μήνυμα πλοήγησης διαθέτει τα απαραίτητα δεδομένα για τη μετατροπή μεταξύ του χρόνου GLONASS και του UTC. Το μήνυμα πλοήγησης περιλαμβάνει πληροφορίες σχετικά με τις δορυφορικές τροχιές, την κατάσταση υγείας των δορυφόρων, τα δεδομένα διόρθωσης, και τα ημερολογιακά δεδομένα (almanac data) για όλους τους δορυφόρους του σχηματισμού. Επιπλέον, περιλαμβάνει τη διόρθωση του χρόνου GLONASS σε σχέση με το UTC και τη διαφορά στο χρόνο μεταξύ του συστήματος GLONASS και του συστήματος GPS.

Το διαστημικό τμήμα του GLONASS αποτελείται από 24 δορυφόρους, σε τρία τροχιακά

επίπεδα. Μεταξύ αυτών των δορυφόρων υπάρχουν 21 ενεργοί, ενώ οι άλλοι τρεις χρησιμοποιούνται ως εφεδρικοί, καλύπτοντας έτσι το 97-99% της επιφάνειας της Γης. Οι τροχιές των δορυφόρων είναι σχεδόν κυκλικές, με πολύ μικρή εκκεντρότητα, μεγάλο ημιάξονα στα 25440 km και γωνία κλίσης στις 64.8 μοίρες. Οι δορυφόροι κατανέμονται ομοιόμορφα στις τροχιές, δηλαδή η μεταξύ τους γωνία είναι 45 μοίρες. Τα τρία τροχιακά επίπεδα κατανέμονται ομοιόμορφα γύρω από τον ισημερινό, που σημαίνει ότι η μεταξύ τους γωνία είναι 120 μοίρες. Πρέπει να σημειωθεί επίσης ότι οι τροχιές των δορυφόρων GLONASS έχουν μεγαλύτερη γωνία κλίσης από τους GPS και Galileo, παρέχοντας έτσι μια καλύτερη δορυφορική κάλυψη σε υψηλότερα γεωγραφικά πλάτη. Το GLONASS συνεπώς, αντιμετωπίστηκε με ιδιαίτερο ενδιαφέρον σε περιοχές υψηλού γεωγραφικού πλάτους, όπως για παράδειγμα στη Νορβηγία, όπου για τη θαλάσσια ναυσιπλοΐα, ο αξιόπιστος δορυφορικός εντοπισμός είναι σημαντικός.

5.1.3.1 Διορθώσεις Σχετικότητας στα δορυφορικά χρονόμετρα GLONASS

Το σύστημα GLONASS έχει ένα πιο σύνθετο πρότυπο χρόνου/συχνότητας από το GPS. Κάθε δορυφόρος GLONASS προσδιορίζει το δικό του πρότυπο χρόνου/συχνότητας και κάθε δορυφόρος χρησιμοποιεί μία διαφορετική συχνότητα για τα L1 και L2 φέροντα σήματα. Οι δορυφόροι GLONASS έχουν μέση συχνότητα 5 MHz, μετρημένη στη φυσική επιφάνεια της Γης. Η μέση συχνότητα των δορυφόρων GLONASS μειώνεται για φαινόμενα Σχετικότητας, ανάλογα με το GPS, κατά -2.18×10^{-3} Hz και είναι 4.999 999 997 82 MHz. Αυτή η τιμή δίνεται για ένα μέσο υψόμετρο της τροχιάς, στα 19 100 km. Όταν τα πρότυπα χρόνου/συχνότητας υλοποιούνται στον δορυφόρο GLONASS, χρησιμοποιούνται οι σχετικές διαφορές του ποσού $\pm 2 \times 10^{-11}$ στη συχνότητα του φέροντος σήματος (Z. Hecimovic, 2013).

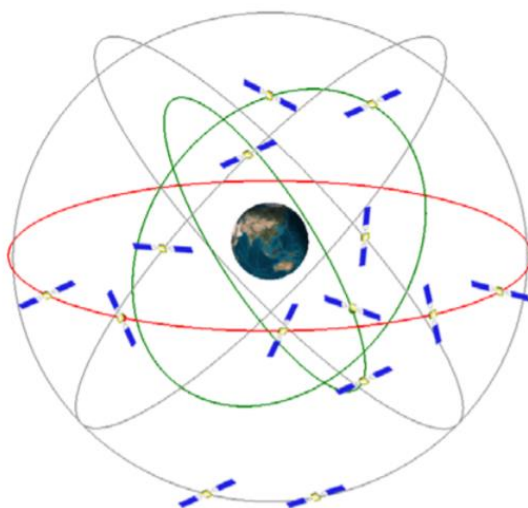
5.1.4 Compass/BeiDou

Το Compass/BeiDou είναι το σύστημα πλοήγησης της Κίνας, το οποίο βρίσκεται ακόμη στο στάδιο της κατασκευής. Η κινεζική κυβέρνηση αποφάσισε να κατασκευάσει το δικό της παγκόσμιο σύστημα πλοήγησης, το 1980. Ανέπτυξαν ένα σύστημα πλοήγησης ονόματι BeiDou, αποτελούμενο αρχικά από τρεις δορυφόρους. Από το 2000, το BeiDou παρέχει τις υπηρεσίες του στην Κίνα και τις γειτονικές περιοχές, καλύπτοντας μία έκταση περίπου 120 μοίρες γεωγραφικό μήκος στο Βόρειο Ημισφαίριο.

Το Compass έρχεται ως μια δεύτερη γενιά του Δορυφορικού Συστήματος Πλοήγησης BeiDou, το οποίο έχει προγραμματιστεί να παρέχει υπηρεσίες πλοήγησης για την περιοχή Ασίας-Ειρηνικού έως το 2012 και σε παγκόσμια κλίμακα έως το 2020. Το Compass θα διατίθεται για πολιτική χρήση, με ακρίβεια στον εντοπισμό θέσης της τάξης των 10 μέτρων, περίπου 20 nanosecond ακρίβεια στον χρόνο και 0.2 m/s στην ταχύτητα. Το Compass θα διατίθεται επίσης για στρατιωτική χρήση και εξουσιοδοτημένους χρήστες, παρέχοντας υψηλότερη ακρίβεια.

Ο δορυφορικός σχηματισμός του Compass θα αποτελείται από 35 δορυφόρους,

συμπεριλαμβανομένων 5 δορυφόρων GEO, 3 δορυφόρων σε γεωσύγχρονη τροχιά μεγάλης κλίσης (IGSO) και 27 δορυφόρων MEO, που συνολικά θα προσφέρουν πλήρη κάλυψη σε ολόκληρο τον πλανήτη. Ο πέμπτος δορυφόρος GEO εκτοξεύθηκε τον Δεκέμβριο του 2011. Η διαφορά ανάμεσα στον χρόνο BeiDou και UTC είναι μικρότερη από 50 ns. Το πλαίσιο συντεταγμένων είναι το Κινεζικό Γεωδαιτικό Σύστημα Συντεταγμένων 2000. Είναι σύμφωνο με το ITRF στην κλίμακα των 5 cm (Hecimovic, 2013).



Εικόνα 5.7: Αναπαράσταση του δορυφορικού σχηματισμού BeiDou (China Satellite Navigation Project Center – CSNPC, 2012)

5.1.4.1 Διορθώσεις Σχετικότητας στα δορυφορικά χρονόμετρα Compass

Η βιβλιογραφία σχετικά με επιδράσεις Σχετικότητας δεν είναι ευρέως διαθέσιμη, αλλά για να φθάσει αυτή την ακρίβεια το σύστημα Compass, σχετικιστικά φαινόμενα θα πρέπει να λαμβάνονται υπ' όψιν στις μετρήσεις. Για παράδειγμα, η επίδραση Sagnac μπορεί να ανέλθει σε σφάλμα αρκετών εκατοντάδων nanosecond (Hecimovic, 2013).

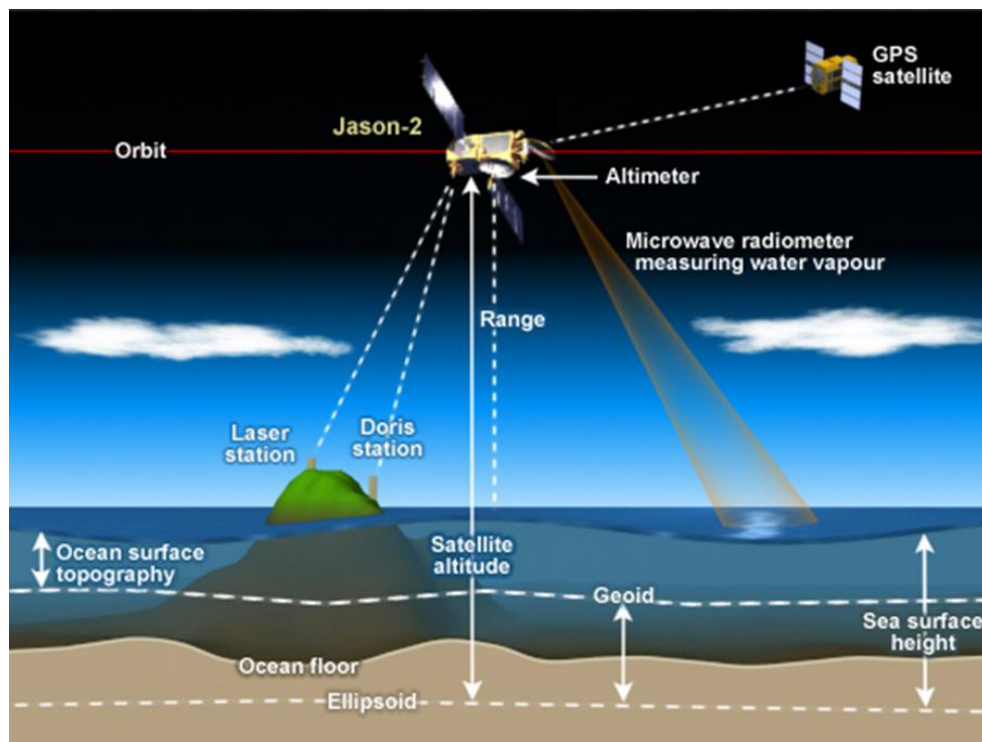
Οι σημαντικότερες πληροφορίες, οι αρχές λειτουργίας και τα χαρακτηριστικά της τροχιάς των GNSS εξετάστηκαν και παρουσιάστηκαν στην παρούσα ενότητα. Οι δορυφόροι GNSS εμφανίζουν αξιοσημείωτες διαφορές σε σύγκριση με τους δορυφόρους αλτιμετρίας. Για παράδειγμα, οι περισσότεροι δορυφόροι GNSS κινούνται σε τροχιές με μία κλίση των 55 μοιρών ως προς τον ισημερινό, με αποτέλεσμα να μην επηρεάζονται ιδιαίτερα από την επιπλάτυνση της Γης στους πόλους. Επίσης, σε αντίθεση με τα συστήματα GNSS που κινούνται σε τροχιές μεσαίου υψομέτρου, οι δορυφόροι αλτιμετρίας κινούνται σε χαμηλές γήινες τροχιές και συνήθως με πολύ μεγάλη κλίση ως προς τον ισημερινό. Οι σημαντικότερες διαφορές φανερώνονται στην ενότητα που ακολουθεί.

5.2 Δορυφόροι αλτιμετρίας (Altimetry satellites)

5.2.1 Αρχές λειτουργίας

Οι δορυφόροι αλτιμετρίας αποτελούν σημαντικό παράγοντα στη μελέτη και παρακολούθηση του κλίματος της Γης και ιδιαίτερα στη διαχρονική παρακολούθηση του θαλάσσιου περιβάλλοντος, των ωκεανών και των θαλάσσιων πάγων. Η βασική αρχή της δορυφορικής αλτιμετρίας είναι η μέτρηση της απόστασης (*Range*) από το δορυφόρο προς την επιφάνεια της θάλασσας. Το αλτίμετρο εκπέμπει έναν παλμό ακτινοβολίας μικροκυμάτων προς την επιφάνεια της θάλασσας. Ο παλμός αλληλεπιδρά με την ανώμαλη επιφάνεια της θάλασσας και ένα μέρος της προσπίπτουσας ακτινοβολίας ανακλάται πίσω στο αλτίμετρο (Chelton, 2000). Το αλτίμετρο μετρά τον αμφίδρομο χρόνο διάδοσης του σήματος Δt και δεδομένου ότι το σήμα κινείται με την ταχύτητα του φωτός c , μπορεί να καθοριστεί η κατακόρυφη απόσταση (ύψος) του δορυφόρου από τη θάλασσα ως

$$2 * Range = c \Delta t \Rightarrow Range = c \Delta t / 2 \quad (5.1)$$



Εικόνα 5.8: Τα διάφορα υψόμετρα που μετρούν οι δορυφόροι αλτιμετρίας. (www.star.nesdis.noaa.gov)

Χρησιμοποιώντας τις μετρήσεις του δορυφορικού αλτίμετρου, σε συνδυασμό με τον καθορισμό εκ των προτέρων της δορυφορικής τροχιάς ως προς το ελλειψοειδές (*Altitude*) μέσω ενός γεωδαιτικού συστήματος εντοπισμού (π.χ. GPS), είναι δυνατόν να προσδιοριστεί το *υψόμετρο της επιφάνειας της θάλασσας (sea-surface height)*. Εκτός από το υψόμετρο της θαλάσσιας επιφάνειας, η μέτρηση αυτή δίδει πληθώρα άλλων πληροφοριών, όπως είναι η ταχύτητα του

ανέμου κοντά στην επιφάνεια της θάλασσας και το ύψος των κυμάτων της.

Η δορυφορική αλτιμετρία μαζί με την ακριβή γνώση της δορυφορικής τροχιάς μπορεί να αποκαλύψει πληροφορίες για τα ωκεάνια ρεύματα ή τις ανωμαλίες στο πεδίο βαρύτητας της Γης, που εν γένει συνεπάγεται πιθανή πηγή ορυκτών ή και να οδηγήσει σε μελέτη των κλιματικών αλλαγών της υδρογείου. Επίσης, παρατηρούμενες διαταραχές στις δορυφορικές τροχιές μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να αποδώσουν τα ποιοτικά και ποσοτικά χαρακτηριστικά του υπεδάφους (Μερτίκας, 2016).

5.2.1.1 Περιγραφή μίας δορυφορικής τροχιάς αλτιμετρίας

Στους δορυφόρους αλτιμετρίας επιχειρήθηκε η σύγκριση των αποτελεσμάτων που προέκυψαν από τις εξισώσεις με βάση τη Σχετικότητα, με τις χρονικές διορθώσεις που ήδη εφαρμόζονται σε ορισμένους δορυφόρους. Για να γίνει εφικτή η σύγκριση, ήταν απαραίτητη η μελέτη, επεξεργασία και ανάλυση πραγματικών δορυφορικών δεδομένων αλτιμετρίας. Για τη σωστή χρήση των δορυφορικών δεδομένων αλτιμετρίας είναι απαραίτητη η αποσαφήνιση των παρακάτω όρων, οι οποίοι χρησιμοποιούνται διεθνώς για την περιγραφή των δορυφορικών τροχιών.

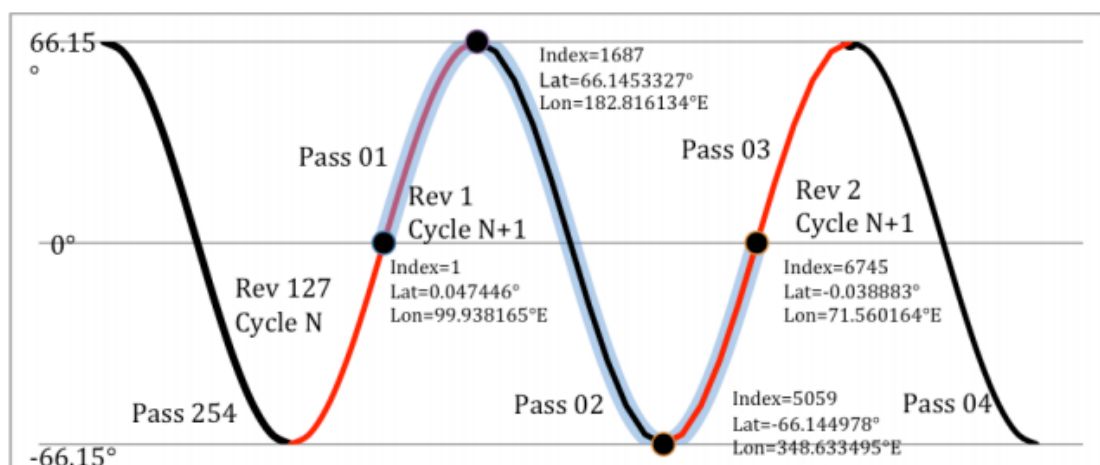
Repeat cycle: Η τροχιά κάθε δορυφόρου παρουσιάζει έναν επαναληπτικό κύκλο (repeat cycle). Προφανώς, λόγω της περιστροφής της Γης γύρω από τον άξονά της, ο δορυφόρος (ηλιοσύγχρονος) δεν σαρώνει τα ίδια σημεία της Γης σε κάθε του περιφορά γύρω από αυτήν. Για την ακρίβεια, ο δορυφόρος, σε κάθε περιφορά του, σαρώνει ίδια γεωγραφικά πλάτη, αλλά διαφορετικά γεωγραφικά μήκη. Το γεωγραφικό πλάτος που σαρώνει είναι ίδιο για όλες τις περιφορές του γύρω από τη Γη και εξαρτάται από τη γωνία κλίσης (inclination) της τροχιάς του κάθε δορυφόρου.

Αν ο επαναληπτικός κύκλος ενός δορυφόρου διαρκεί για παράδειγμα 10 ημέρες, αυτό σημαίνει ότι ο δορυφόρος περνάει από το ίδιο σημείο πάνω από τη Γη ή σαρώνει την ίδια ακριβώς περιοχή της Γης κάθε 10 ημέρες. Ο επαναληπτικός κύκλος δηλαδή έχει να κάνει με την τροχιά όπως αυτή παρατηρείται από την περιστρεφόμενη Γη.

Revolutions per cycle: Κάθε επαναληπτικός κύκλος αποτελείται από έναν αριθμό περιφορών (revolutions). Αυτός ο αριθμός δηλαδή δείχνει το πόσες περιφορές χρειάζεται να πραγματοποιήσει ο δορυφόρος γύρω από τη Γη έτσι ώστε να ξαναφτάσει στην αφετηρία του επαναληπτικού κύκλου. Συνήθως ο δορυφόρος χρειάζεται πολλές δεκάδες περιφορές έως ότου να αρχίσει να σαρώνει ξανά ίδια σημεία στη Γη. Η αφετηρία μέτρησης μίας περιφοράς είναι ο ισημερινός ($lat = 0$), δεδομένου ότι συνήθως χρησιμοποιούνται ισημερινά συστήματα συντεταγμένων. Η περίοδος περιφοράς (orbital ή nodal ή revolution period) αντιστοιχεί στον χρόνο που χρειάζεται ο δορυφόρος να ολοκληρώσει μία περιφορά γύρω από τη Γη. Με άλλα λόγια, η περίοδος του δορυφόρου είναι ο χρόνος που μεσολαβεί μεταξύ δύο διαδοχικών διαβάσεών του από τον ανιόντα (ή από τον κατιόντα) ισημερινό δεσμό.

Passes: Κάθε περιφορά περιλαμβάνει δύο διαβάσεις (passes). Η μέτρηση μίας διάβασης ξεκινά από το χαμηλότερο (ή υψηλότερο) γεωγραφικό πλάτος της τροχιάς του δορυφόρου και ολοκληρώνεται όταν ο δορυφόρος φτάσει στο υψηλότερο (ή χαμηλότερο) γεωγραφικό πλάτος στην τροχιά του, σε σχέση με τον ισημερινό. Έτσι, η μέτρηση της επόμενης διάβασης ξεκινά από το υψηλότερο γεωγραφικό πλάτος της τροχιάς μέχρι το χαμηλότερο και ούτω καθεξής. Το χαμηλότερο/υψηλότερο γεωγραφικό πλάτος της τροχιάς ισοδυναμεί με την κλίση (inclination) της δορυφορικής τροχιάς, εφόσον η κλίση είναι η γωνία μεταξύ ισημερινού και μεγάλου ημιάξονα του δορυφόρου.

Κατά συνέπεια, σε μία διάβαση ο δορυφόρος διαβαίνει πάνω από τον ισημερινό μία φορά. Όταν ο δορυφόρος έχει ανοδική πορεία σε σχέση με τον ισημερινό, τότε το σημείο της τροχιάς του που τέμνει το ισημερινό επίπεδο λέγεται *ανιών δεσμός* (ascending node). Αντίθετα, όταν η πορεία πάνω στην τροχιά του είναι καθοδική, τότε το σημείο τομής λέγεται *κατιών δεσμός* (descending node).



Εικόνα 5.9: Γράφημα αναπαράστασης μιας δορυφορικής τροχιάς αλτιμετρίας (στον άξονα X ο παρερχόμενος χρόνος και στον άξονα Y το γεωμετρικό πλάτος). (TPJAOS User's Handbook, 2013)

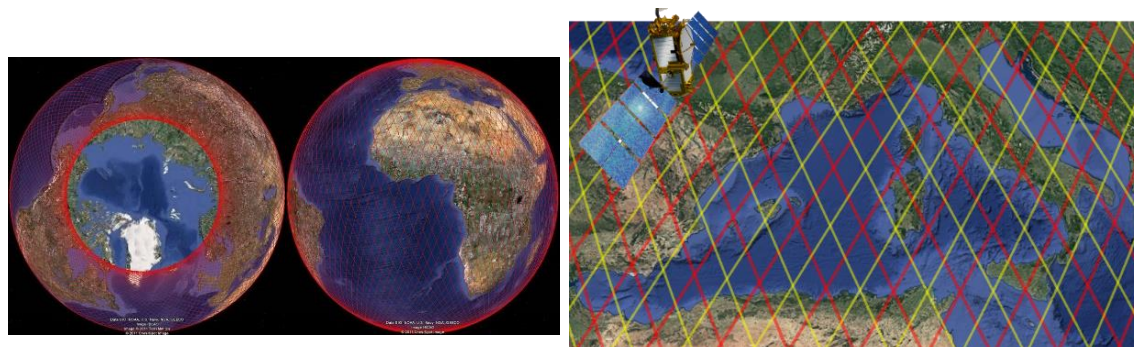
Συνοψίζοντας, τα δεδομένα των δορυφόρων αλτιμετρίας χωρίζονται σε επαναληπτικούς κύκλους, οι οποίοι διαιρούνται σε έναν αριθμό περιφορών, μετρημένες από τον ισημερινό. Οι περιφορές με τη σειρά τους χωρίζονται σε έναν διπλάσιο αριθμό διαβάσεων, μετρημένες από τους πόλους. Ένα επεξηγηματικό παράδειγμα, για την επεξεργασία δορυφορικών δεδομένων που σχετίζονται με την τροχιά και την κατανόηση των μετρήσεων, παρουσιάζεται στο γράφημα της Εικόνας 5.9.

Στις ενότητες που ακολουθούν γίνεται επισκόπηση των δορυφόρων αλτιμετρίας, τα δεδομένα των οποίων χρησιμοποιήθηκαν με σκοπό την ανάδειξη των προβλεπόμενων σφαλμάτων στη συχνότητα των χρονομέτρων τους, με βάση τη Σχετικότητα.

5.2.2 Δορυφόροι Jason

Η δορυφορική αποστολή αλτιμετρίας Jason στηρίζει κυρίως επιστημονικές εφαρμογές που σχετίζονται με την άνοδο της στάθμης της θάλασσας, τα ωκεάνια ρεύματα και την αλλαγή του κλίματος. Ο δορυφόρος Jason-3 εκτοξεύθηκε στις 17 Ιανουαρίου του 2016 και ξεκίνησε τη συλλογή δεδομένων στις 12 Φεβρουαρίου του 2016. Ακολουθεί την προϋπάρχουσα δορυφορική αποστολή αλτιμετρίας Jason-1, Jason-2, με σκοπό τη συνέχιση των δορυφορικών παρατηρήσεων αλτιμετρίας για το υψόμετρο της επιφάνειας της θάλασσας. Η αποστολή Jason-3 είναι μια διεθνής συνεργασία μεταξύ της διαστημικής υπηρεσίας CNES της Γαλλίας, της ευρωπαϊκής υπηρεσίας EUMETSAT και των υπηρεσιών NOAA και NASA των ΗΠΑ (Jason-3 Products Handbook, 2016).

Ο δορυφόρος Jason-3 έχει τη δυνατότητα να μετρά με εξαιρετική ακρίβεια το υψόμετρο της θαλάσσιας επιφάνειας, μια μέτρηση που χρησιμοποιείται στη μελέτη για την άνοδο της στάθμης της θάλασσας, σημαντική παράμετρος για την κατανόηση του δυναμικού κλίματος της Γης. Τα δεδομένα από δορυφόρους αλτιμετρίας όπως ο Jason-3 χρησιμοποιούνται επίσης για τη μελέτη της έντασης των τυφώνων, τη δυναμική των tsunamí, τη ρευστοδυναμική, τα ωκεάνια ρεύματα, τις παλίρροιας, την παρατήρηση του φαινομένου El Niño καθώς και την πρόβλεψη του καιρού και του κλίματος.



Εικόνα 5.10: Το ίχνος της τροχιάς του δορυφόρου Jason-3 σε σχέση με την περιστρεφόμενη Γη, με γωνία κλίσης $i = 66^\circ$ ως προς το επίπεδο του ισημερινού. (<http://www.avisio.altimetry.fr>)

Το μεγάλο υψόμετρο της τροχιάς του Jason (1336 km) μειώνει τις αλληλεπιδράσεις με την ατμόσφαιρα και το βαρυτικό πεδίο της Γης στο ελάχιστο, καθιστώντας έτσι τον προσδιορισμό της τροχιάς ευκολότερο και πιο ακριβή. Η κλίση της τροχιάς, 66 μοίρες βόρεια και νότια, επιτρέπει στο δορυφόρο να καλύπτει το μεγαλύτερο μέρος των μη παγωμένων ωκεανών του πλανήτη. Ο κύκλος επανάληψης του ίχνους της τροχιάς του, όπως αυτό παρατηρείται από την περιστρεφόμενη Γη, είναι περίπου 10 ημέρες. Με άλλα λόγια, ο δορυφόρος περνάει πάνω από το ίδιο σημείο στη Γη (με απόκλιση ενός χιλιομέτρου) μία φορά στις δέκα ημέρες.

5.2.2.1 Ο εξοπλισμός (payload) του δορυφόρου Jason-2

Ο εξοπλισμός του Jason-2 αποτελείται από 5 βασικά όργανα. Τα όργανα αυτά παρέχουν

σημαντικά δεδομένα σχετικά με τη στάθμη της θάλασσας, τις συνθήκες του ανέμου, της θάλασσας και της διακύμανσης αυτών, τα οποία χρησιμοποιούνται στη μετεωρολογία, την ωκεανογραφία, την εποχιακή πρόγνωση και την παρακολούθηση του κλίματος.

1. Poseidon-3 Altimeter

Το Poseidon-3 είναι το κύριο όργανο της αποστολής. Είναι ένα συμπαγές, χαμηλής ισχύος και μικρής μάζας όργανο, το οποίο παρέχει υψηλού βαθμού αξιοπιστία. Το Poseidon-3 είναι ένα αλτίμετρο ραντάρ, που εκπέμπει παλμούς (σήματα) σε δύο συχνότητες, 13.6 GHz (Ku-band) και 5.3 GHz (C-band) και αναλύει το σήμα επιστροφής που ανακλάται από τη θαλάσσια επιφάνεια. Ο χρόνος, μετάδοσης – ανάκλασης και επιστροφής του σήματος μετρείται με πολύ μεγάλη ακρίβεια, έτσι ώστε να καθίσταται δυνατός ο υπολογισμός της ακριβούς απόστασης, μετά την εφαρμογή των απαραίτητων διορθώσεων.

Βασικός στόχος της λειτουργίας δύο συχνοτήτων είναι να παρέχει μία ακριβή διόρθωση για τις επιδράσεις από την ιονόσφαιρα. Πέρα από την καθυστέρηση στα σήματα λόγω της ιονόσφαιρας, τα Ku- και C-band σήματα επηρεάζονται σημαντικά από γεωφυσικά φαινόμενα, όπως η ατμοσφαιρική κατακρήμνιση (βροχή, χιόνι, κ.λπ.) και η τραχύτητα της θαλάσσιας επιφάνειας.

2. Advanced Microwave Radiometer (AMR)

Το AMR μετρά την ακτινοβολία από την επιφάνεια της Γης σε 3 συχνότητες (18, 21, 37 GHz). Αυτές οι διαφορετικές μετρήσεις συνδυάζονται για τον προσδιορισμό της περιεκτικότητας της ατμόσφαιρας σε υγρό νερό και υδρατμούς. Μόλις η περιεκτικότητα σε νερό γίνει γνωστή, είναι δυνατόν να υπολογισθεί η διόρθωση που πρέπει να εφαρμοσθεί για τις καθυστερήσεις στο σήμα του ραντάρ.

3. Doppler Orbitography and Radio-positioning Integrated by Satellite (DORIS)

Το σύστημα DORIS είναι ένα σύστημα προσδιορισμού της τροχιάς. Βασίζεται στην αρχή του φαινομένου Doppler, με ένα δίκτυο επίγειων σταθμών που εκπέμπουν σήματα και σχετικά ενσωματωμένα όργανα στον εξοπλισμό του δορυφόρου (κεραία, ραδιοδέκτη και εξαιρετικά σταθερό ταλαντωτή (Ultra Stable Oscillator, USO)).

Χρησιμοποιεί ένα επίγειο δίκτυο 60 σταθμών ανά τον κόσμο, οι οποίοι στέλνουν σήματα σε δύο συχνότητες προς έναν δέκτη επί του δορυφόρου. Η σχετική κίνηση του δορυφόρου (σε σχέση με τη Γη) δημιουργεί μία μετατόπιση στη συχνότητα του σήματος, που ονομάζεται μετατόπιση Doppler (The Doppler Shift). Η μετατόπιση Doppler μετρείται για να προσδιοριστεί η ταχύτητα του δορυφόρου σε σχέση με τη Γη. Αυτά τα δεδομένα, στη συνέχεια, αφομοιώνονται σε μοντέλα για τον προσδιορισμό της τροχιάς, ώστε να τηρείται μόνιμη παρακολούθηση της ακριβούς θέσης του δορυφόρου (με ακρίβεια 3 cm) στην τροχιά του.

4. Global Positioning System Payload (GPSP)

Το GPSP χρησιμοποιεί το GPS για να προσδιορίσει τη θέση του δορυφόρου με τη μέθοδο του

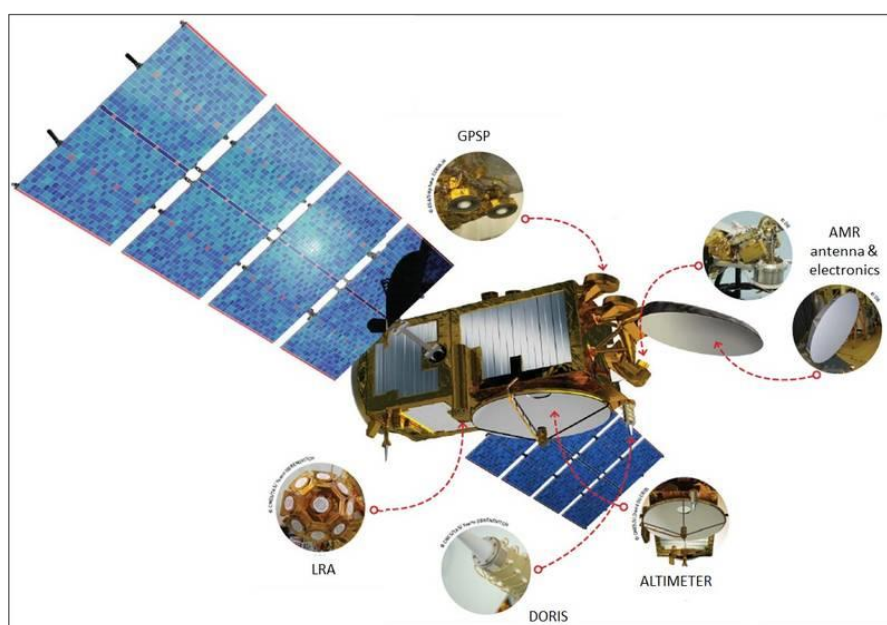
τριγωνισμού. Τουλάχιστον τρεις δορυφόροι GPS είναι απαραίτητοι για τον υπολογισμό της ακριβούς θέσης του δορυφόρου σε μία δεδομένη στιγμή. Τα δεδομένα θέσης, στη συνέχεια, ενσωματώνονται σε ένα μοντέλο προσδιορισμού της τροχιάς, έτσι ώστε να καθίσταται δυνατή η συνεχής παρακολούθηση της πορείας του δορυφόρου με μεγάλη ακρίβεια.

5. Laser Retroreflector Array (LRA)

Το LRA είναι μία σειρά από καθρέφτες επί του εδάφους που χρησιμοποιούνται ως στόχος για τις μετρήσεις με laser. Με την ανάλυση του διπλού χρόνου μετάδοσης και επιστροφής της δέσμης laser, μπορεί να εντοπιστεί η θέση του δορυφόρου στην τροχιά του και να βαθμονομηθούν οι αλτιμετρικές μετρήσεις.

6. Passenger Instruments

- Το όργανο Carmen-2 (Environment Characterization and Modelisation-2) παρέχεται από τη Γαλλία, η οποία μελετά την ακτινοβολία στο περιβάλλον του δορυφόρου
- Το LPT (Light Particle Telescope) παρέχεται από την Ιαπωνία, η οποία επίσης μελετά την ακτινοβολία στο περιβάλλον του δορυφόρου.
- Το T2L2 (Time Transfer by Laser Link), επίσης της Γαλλίας, αποτελείται από ανιχνευτές που έχουν ως σκοπό την εξαιρετικά ακριβή μεταφορά του χρόνου. Το T2L2 χρησιμοποιεί μία σύνδεση με laser για σύγκριση και συγχρονισμό υψηλής ακρίβειας των απομακρυσμένων χρονομέτρων στο έδαφος με τα δορυφορικά χρονόμετρα.



Εικόνα 5.11: Ο δορυφόρος Jason-3 και ο εξοπλισμός του. (J3 Products Handbook, 2016)

5.2.3 SARAL/AltiKa

Εκτοξεύθηκε στις 25 Φεβρουαρίου 2013 και αποτελεί μια κοινή γαλλο-ινδική αποστολή των διαστημικών υπηρεσιών CNES και ISRO, με έμφαση στην παρακολούθηση του περιβάλλοντος.

Τοποθετημένος στην ίδια τροχιά με τον δορυφόρο της προηγούμενης αποστολής αλτιμετρίας Envisat (πολική τροχιά με κλίση 98.55 μοίρες ως προς τον ισημερινό, στα 800 km υψόμετρο πάνω από τη Γη), ο δορυφόρος Saral/AltiKa επιτρέπει τη συνεχή παρακολούθηση και καταγραφή της μακράς σειράς διαχρονικών δεδομένων που απαιτούνται για τη μελέτη της κλιματικής αλλαγής. (SARAL/AltiKa Products Handbook, 2013)

Ο δορυφόρος SARAL/AltiKa φέρει δύο ανεξάρτητα όργανα: τα ARGOS-3 και AltiKa. Το ARGOS-3 αποτελεί τον τρίτης γενιάς δέκτη του συστήματος Argos, επιτρέποντας τον εντοπισμό και τη συλλογή περιβαλλοντικών δεδομένων από κάθε «αντικείμενο» εξοπλισμένο με έναν πομπό Argos.

Το όργανο AltiKa αποτελεί έναν πρωτοποριακό σχεδιασμό, ο οποίος ενσωματώνει ένα αλτίμετρο, ένα ραδιόμετρο και ένα όργανο εντοπισμού θέσης (DORIS). Μετρά την τοπογραφία της επιφάνειας του ωκεανού, χρησιμοποιώντας ένα πολύ υψηλής συχνότητας ηλεκτρομαγνητικό κύμα στην Ka-Band (περίπου 35.75 GHz, αντί του παλαιότερου 13.6 GHz). Το αλτίμετρο AltiKa παρέχει καλύτερη πρόσβαση σε παράκτιες περιοχές, σε ποτάμια και λίμνες. Διεισδύει επίσης λιγότερο βαθιά μέσα στο χιόνι και τον πάγο, επιτρέποντας έτσι τη συλλογή πληροφοριών για το υψόμετρο της επιφάνειάς τους (snow, ice freeboard).

Έτσι, εκτός από τη συμβολή στις μέσης κλίμακας παρατηρήσεις (50 έως 500 km) των ωκεάνιων ρευμάτων, που είναι απαραίτητες για την κατανόηση της δυναμικής των ωκεανών και τις επιπτώσεις τους στο κλίμα, τα δεδομένα AltiKa χρησιμοποιούνται επίσης ευρέως στη μελέτη των παγετώνων και την υδρολογία. Τα δεδομένα AltiKa χρησιμοποιούνται επίσης στην ωκεανογραφία και σε καθημερινή βάση, από την Υπηρεσία Παρακολούθησης του Θαλάσσιου Περιβάλλοντος Copernicus και τις γαλλικές και άλλες ευρωπαϊκές μετεωρολογικές υπηρεσίες.



Εικόνα 5.12: Εξοπλισμός δορυφόρου Saral/AltiKa. (www.researchgate.net/publication/276249795)

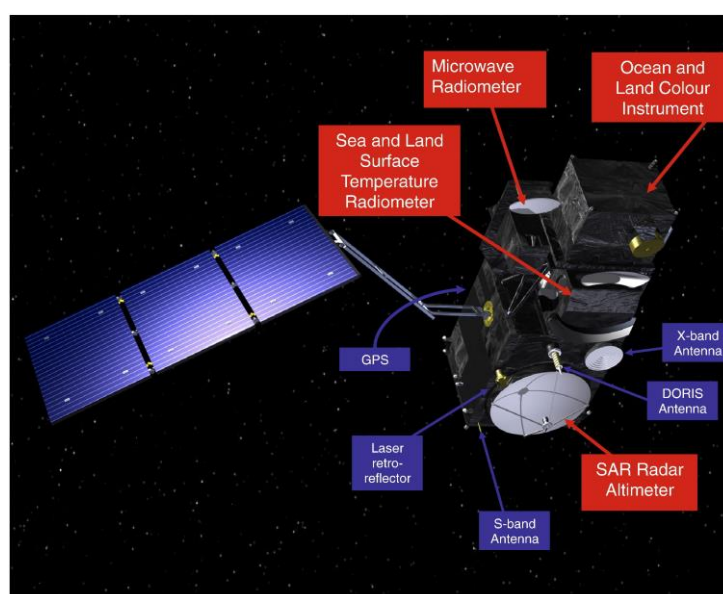
5.2.4 Sentinel-3

Ο δορυφόρος Sentinel-3A εκτοξεύθηκε μόλις στις 16 Φεβρουαρίου, 2016. Κύριος στόχος της αποστολής Sentinel-3 είναι η μέτρηση της τοπογραφίας της επιφάνειας της θάλασσας και της θερμοκρασίας της θάλασσας και της ξηράς με υψηλή ακρίβεια και αξιοπιστία, για την υποστήριξη των συστημάτων πρόβλεψης της συμπεριφοράς των ωκεανών, την παρακολούθηση του περιβάλλοντος και του κλίματος. Το μέσο υψόμετρο της τροχιάς του Sentinel-3 είναι 814.5 km και η περίοδος περιφοράς του γύρω από τη Γη 100.987 min. Ο δορυφόρος είναι ηλιοσύγχρονος, με κλίση 98.65° ως προς τον ισημερινό.

Ο εξοπλισμός (payload) του Sentinel-3 αποτελείται από διάφορα όργανα που συνδέονται με την αλτιμετρία: ένα αλτίμετρο SRAL, το οποίο μετρά την απόσταση (*Range*), ένα ραδιόμετρο, το οποίο μετρά διαταραχές εξαιτίας των υδρατμών της ατμόσφαιρας και τρία συστήματα για τον εντοπισμό θέσης (Precise Location Systems), τα DORIS, GNSS και LRA. Ο δορυφόρος είναι επίσης εξοπλισμένος με έναν αισθητήρα για τη θερμοκρασία της θάλασσας και της ξηράς και με έναν δεύτερο, για το χρώμα των ωκεανών και της ξηράς.

Το αλτίμετρο SRAL είναι μια βελτιωμένη έκδοση του αλτίμετρου *delay-Doppler SIRAL* του δορυφόρου CryoSat. Η κύρια συχνότητα που χρησιμοποιείται για τις μετρήσεις απόστασης (*Range*) είναι η Ku-band στα 13.575 GHz, με εύρος (bandwidth) 350 MHz, αλλά σε αντίθεση με τον CryoSat, χρησιμοποιείται και μια δεύτερη συχνότητα, η C-band στα 5.41 GHz, με εύρος 320 MHz, η οποία χρησιμοποιείται για την ιονοσφαιρική διόρθωση.

Το MWR ραδιόμετρο (microwave radiometer) πραγματοποιεί μετρήσεις στα 23.8 GHz και 36.5 GHz, καλύπτοντας ένα εύρος (bandwidth) των 200 MHz σε κάθε κανάλι. Το κανάλι χαμηλότερης συχνότητας είναι περισσότερο ευαίσθητο στους υδρατμούς της ατμόσφαιρας ενώ το κανάλι υψηλότερης συχνότητας στο νερό σε υγρή κατάσταση των νεφών.



Εικόνα 5.13: Εξοπλισμός δορυφόρου Sentinel 3-A. (www.sentinel.esa.int)

5.2.5 HY-2

Ο δορυφόρος HY-2 (Hai Yang σημαίνει «ωκεανός» στα κινεζικά) είναι μια δορυφορική σειρά παρακολούθησης της θάλασσας (HY-2A έως HY-2D), προγραμματισμένη από την Κίνα. Ο HY-2 ακολουθεί τη σειρά των δορυφόρων HY-1A και HY-1B (εκτόξευση τον Μάιο του 2002 και τον Απρίλιο του 2007 αντίστοιχα), οι οποίοι σχεδιάστηκαν με σκοπό να μετρούν τη θερμοκρασία και το χρώμα των ωκεανών στο ορατό και στο υπέρυθρο φάσμα. Ο δορυφόρος HY-2 επικεντρώνεται στο θαλάσσιο δυναμικό περιβάλλον, ενώ ο HY-3 θα συνδυάζει ορατούς και υπέρυθρους αισθητήρες και αισθητήρες μικροκυμάτων.

Στόχος του HY-2 είναι η παρακολούθηση του δυναμικού περιβάλλοντος του ωκεανού με αισθητήρες ραντάρ για τη μέτρηση του υψομέτρου της θαλάσσιας επιφάνειας, της θερμοκρασίας και της έντασης του ανέμου στην επιφάνεια της θάλασσας. Ο δορυφόρος HY-2A εκτοξεύθηκε στις 15 Αυγούστου του 2011. Περιλαμβάνει ένα ραντάρ αλτιμετρίας διπλής συχνότητας στις ζώνες Ku-band και C-band, ένα σκεδασίμετρο (scatterometer) για τη μέτρηση της ταχύτητας και της κατεύθυνσης του ανέμου και σύστημα απεικόνισης με μικροκύματα. Η τροχιά του είναι ηλιοσύγχρονη, με κλίση 99.3° ως προς τον ισημερινό και μέσο υψόμετρο στα 971 km, ενώ μία περιφορά του γύρω από τη Γη διαρκεί μόλις 112 λεπτά.



Εικόνα 5.14: Το πρώτο μοντέλο του δορυφόρου HY-2A. (CNES, 2016)

5.2.6 Cryosat-2

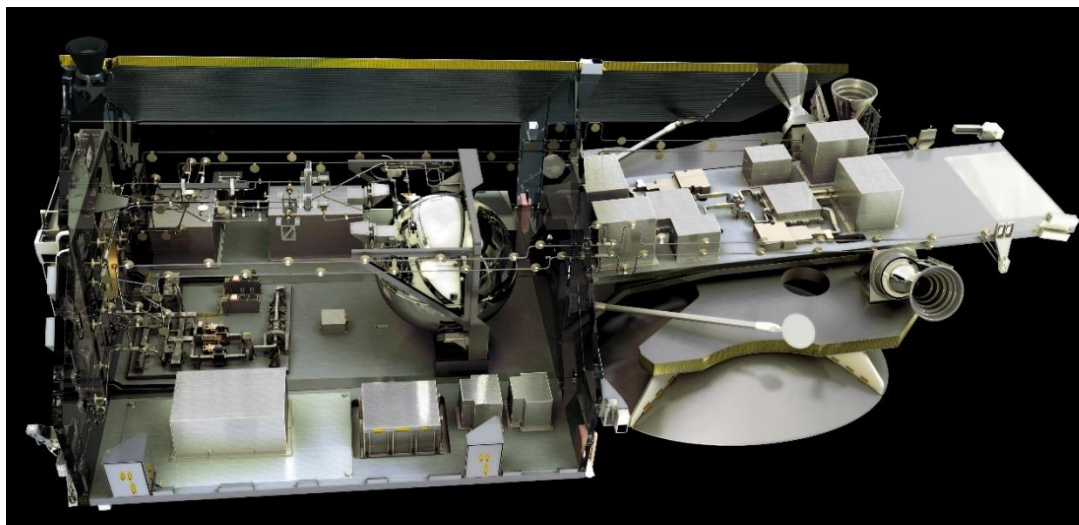
Με την εκτόξευσή του να πραγματοποιείται στις 8 Απριλίου του 2010, ο CryoSat-2 είναι ο πρώτος ευρωπαϊκός δορυφόρος που έχει ως στόχο την παρατήρηση των πολικών πάγων. Ο

δορυφόρος CryoSat-2 αντικατέστησε τον αρχικό CryoSat, ο οποίος καταστράφηκε λόγω μιας αστοχίας στην εκτόξευση τον Οκτώβριο του 2005.

Το υψόμετρο της τροχιάς του CryoSat-2 φτάνει μόλις τα 717 km πάνω από τη Γη (χαμηλής γήινης τροχιάς – LEO), ενώ η γωνία κλίσης είναι 92° , καλύπτοντας έτσι μεγάλα γεωγραφικά πλάτη, έως 88° . Ικανός να μετρά το πάχος του πάγου με ακρίβεια εκατοστού, παρακολουθεί τον όγκο και την έκταση των πολικών πάγων σε βάθος χρόνου και παρέχει δεδομένα για την τήξη του πάγου των πολικών περιοχών, ως αποτέλεσμα της υπερθέρμανσης του πλανήτη.

Η τροχιά του CryoSat-2 δεν είναι ηλιοσύγχρονη. Το γεγονός αυτό παρουσίασε ορισμένες προκλήσεις στον σχεδιασμό του: όλα τα μέρη του κάποια στιγμή εκτίθενται σε πλήρη θερμική ισχύ από τον Ήλιο, ενώ άλλες φορές τα μέρη του δορυφόρου είναι σε μόνιμη σκιά για ολόκληρες εβδομάδες.

Ο CryoSat-2 είναι εφοδιασμένος με το ραντάρ αλτιμετρίας SIRAL. Προερχόμενο από το ραντάρ αλτιμετρίας Poseidon του δορυφόρου Jason-1, το SIRAL μετρά συνεχώς την απόσταση από το δορυφόρο έως την επιφάνεια του πάγου, ενώ περιλαμβάνει και μία συμβολομετρική λειτουργία για τη χαρτογράφηση του ανάγλυφου των πολικών πάγων.

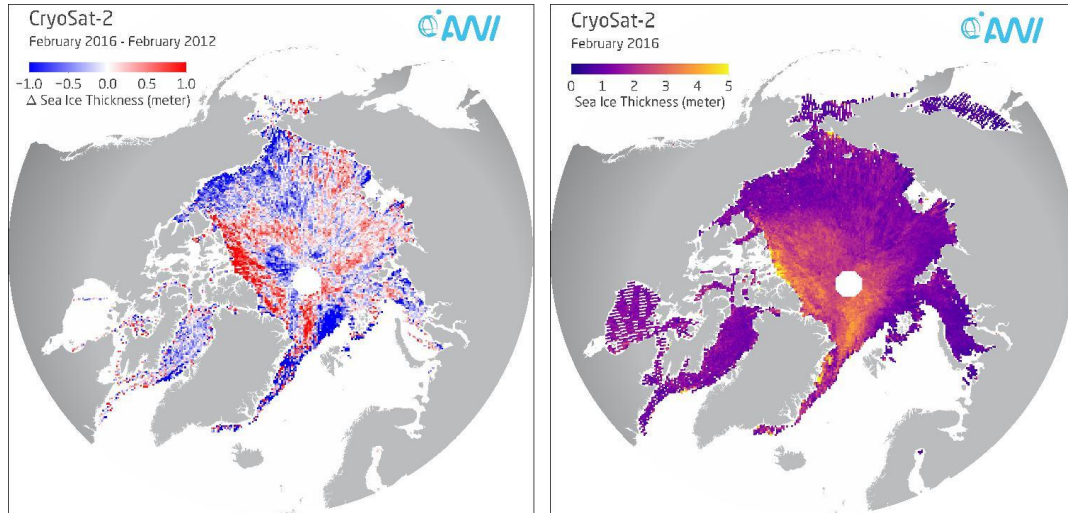


Εικόνα 5.15: Ο βασικός εξοπλισμός του CryoSat-2 είναι το ραντάρ αλτίμετρο SIRAL (SAR / Interferometric Radar Altimeter), σχεδιασμένο για να πληροί τις απαιτήσεις των μετρήσεων που αφορούν τις μεγάλες μάζες των παγετώνων της Γης (ice sheets) και το υψόμετρο των θαλάσσιων πάγων (sea-ice freeboard). (ESA/AOES, 2010)

Για να προσδιοριστεί όμως το πάχος του πάγου, πρέπει να προσδιοριστεί άλλη μια παράμετρος: η τροχιακή θέση του δορυφόρου $r(t)$. Αυτή μετριέται – επίσης με ακρίβεια εκατοστών – από το σύστημα DORIS. Το DORIS είναι το όργανο, επί του Cryosat-2, που επικοινωνεί με 60 επίγειους σταθμούς μετάδοσης σημάτων προς τον δορυφόρο, όπως και στους νεότερους δορυφόρους Jason, Saral/AltiKa.

Χωρίς το DORIS, ο CryoSat-2 δεν θα ήταν σε θέση να επιτύχει τους στόχους του και να απαντήσει σε πολλά από τα ζητήματα που προκύπτουν από την υπερθέρμανση του πλανήτη:

Για παράδειγμα, αν αυξάνεται η τήξη των πολικών πάγων με επιταχυνόμενο ρυθμό, αν η τήξη των πάγων είναι ταχύτερη στην Ανταρκτική από ότι στην Αρκτική, μήπως ο πάγος αναμορφώνεται εντελώς κάθε χρόνο και, σε ποιο βαθμό συμβάλλει η τήξη του πολικού πάγου στην άνοδο της στάθμης της θάλασσας.



Εικόνα 5.16: Αριστερά: ο χάρτης δείχνει σε ποιες περιοχές το στρώμα του θαλάσσιου πάγου της Αρκτικής, το Φεβρουάριο του 2016, ήταν λεπτότερο (μπλε) ή πυκνότερο (κόκκινο), σε σχέση με τον Φεβρουάριο του 2012. Δεξιά: γράφημα από δεδομένα του CryoSat-2 για το πάχος του θαλάσσιου πάγου, για τον Φεβρουάριο του 2016. (AWI, Hendricks, 2016)

Στο κεφάλαιο που ακολουθεί προβάλλονται τα αποτελέσματα της επίδρασης της Σχετικότητας στο χρόνο των δορυφόρων που εξετάστηκαν στις παραπάνω ενότητες. Για την επαλήθευση των αποτελεσμάτων, επιχειρείται να γίνει σύγκριση με τις υπάρχουσες χρονικές διορθώσεις που εφαρμόζονται στους δορυφόρους αλλά και με αντίστοιχες τιμές που βρέθηκαν στη βιβλιογραφία.

6^ο Κεφάλαιο

Εφαρμογή Σχετικότητας στο χρόνο των δορυφόρων Εντοπισμού και Αλτιμετρίας

Η επίδραση της Σχετικότητας στα δορυφορικά χρονόμετρα που περιγράφηκε στο 4^ο κεφάλαιο εφαρμόστηκε σε δορυφόρους εντοπισμού των συστημάτων GPS, Galileo, Compass, GLONASS και στους δορυφόρους αλτιμετρίας Jason-2, Saral-AltiKa, Sentinel-3, HY-2, CryoSat-2, με στόχο τον προσδιορισμό των προβλεπόμενων μετατοπίσεων στη συχνότητα των δορυφορικών χρονομέτρων.

Η τελική σχέση που χρησιμοποιήθηκε και που αντιπροσωπεύει τη συνολική επίδραση της Σχετικότητας στον τοπικό χρόνο ενός δορυφορικού χρονομέτρου, ως αποτέλεσμα του συνδυασμού των φαινομένων της διαστολής του χρόνου και της βαρυτικής μετατόπισης συχνότητας, είναι

$$\Delta t = \int_{path} d\tau \left[1 + \frac{3GM_E}{2ac^2} + \frac{\Phi_0}{c^2} - \frac{2GM_E}{c^2} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{r} \right) \right] \quad (6.1)$$

όπου G , M η παγκόσμια σταθερά της βαρύτητας και η μάζα της Γης συμπεριλαμβανομένης της ατμόσφαιρας, αντίστοιχα και c η ταχύτητα του φωτός, σταθερή ως προς όλα τα αδρανειακά συστήματα. Οι τιμές για τις παραπάνω φυσικές σταθερές, οι οποίες χρησιμοποιήθηκαν στην εφαρμογή της εξίσωσης, εξάγονται από την υπηρεσία IERS και προβάλλονται στον Πίνακα 6.1. Τα a , r είναι παράμετροι της τροχιάς κάθε δορυφόρου και συγκεκριμένα ο μεγάλος ημιάξονας και η ακτινική θέση επί της τροχιάς του, αντίστοιχα.

Το Φ_0 αντιπροσωπεύει το δυναμικό της Γης στην επιφάνεια του γεωειδούς:

$$\begin{aligned} \frac{\Phi_0}{c^2} &= -\frac{GM_E}{c^2} - \frac{GM_E J_2}{2a_1 c^2} - \frac{\omega_E^2 a_1^2}{2c^2} \\ &= -6.95348 \times 10^{-10} - 3.764 \times 10^{-13} - 1.203 \times 10^{-12} \\ &= -6.96927 \times 10^{-10} \end{aligned} \quad (6.2)$$

Πίνακας 6.1: Φυσικές σταθερές. (IERS, 2010)

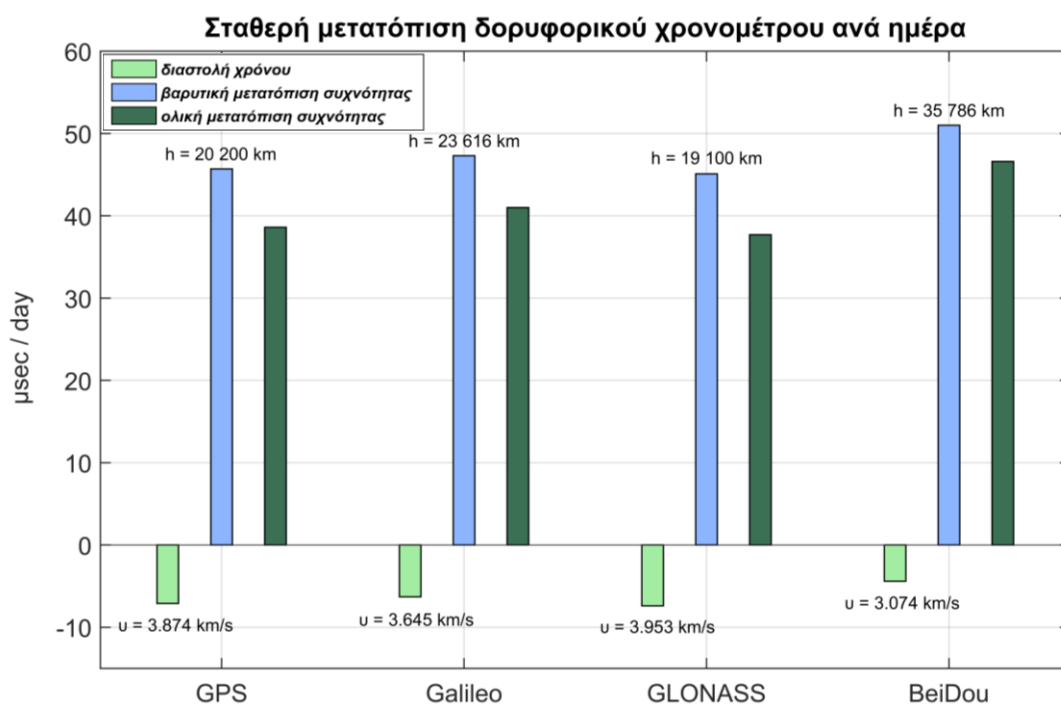
Παράμετρος	Τιμή
Ταχύτητα του φωτός c	299 792 458 m s ⁻¹
Παγκόσμια σταθερά της βαρύτητας G	6.67428×10^{-11} m ³ kg ⁻¹ s ⁻²
Γεωκεντρική βαρυτιμετρική σταθερά GM	$3.986004418 \times 10^{14}$ m ³ s ⁻²
Ακτίνα της Γης στον Ισημερινό a_1	6 378 136.6 m
Δυναμικός παράγοντας επιπλάτυνσης J_2	1.0826359×10^{-3}

6.1 Δορυφόροι GNSS

6.1.1 Σταθερός όρος (σταθερή κινητική και βαρυτική σχετικιστική επίδραση)

Εφόσον προκύπτει ένας σταθερός και ένας περιοδικός όρος στην εξίσωση (Εξ. 6.1), οι δύο αυτοί όροι μπορούν να υπολογιστούν ως ξεχωριστές επιδράσεις. Η σταθερή διόρθωση στον χρόνο μπορεί να εφαρμοσθεί απευθείας στη συχνότητα που εκπέμπει ο δορυφόρος ($frequency_{sat}$), ακόμα και πριν την εκτόξευσή του, με τον εξής τρόπο

$$\text{Διορθωμένη συχνότητα} : \left[1 - \left(\frac{3GM}{2ac^2} + \frac{\Phi_0}{c^2} \right) \right] * frequency_{sat} \quad (6.3)$$

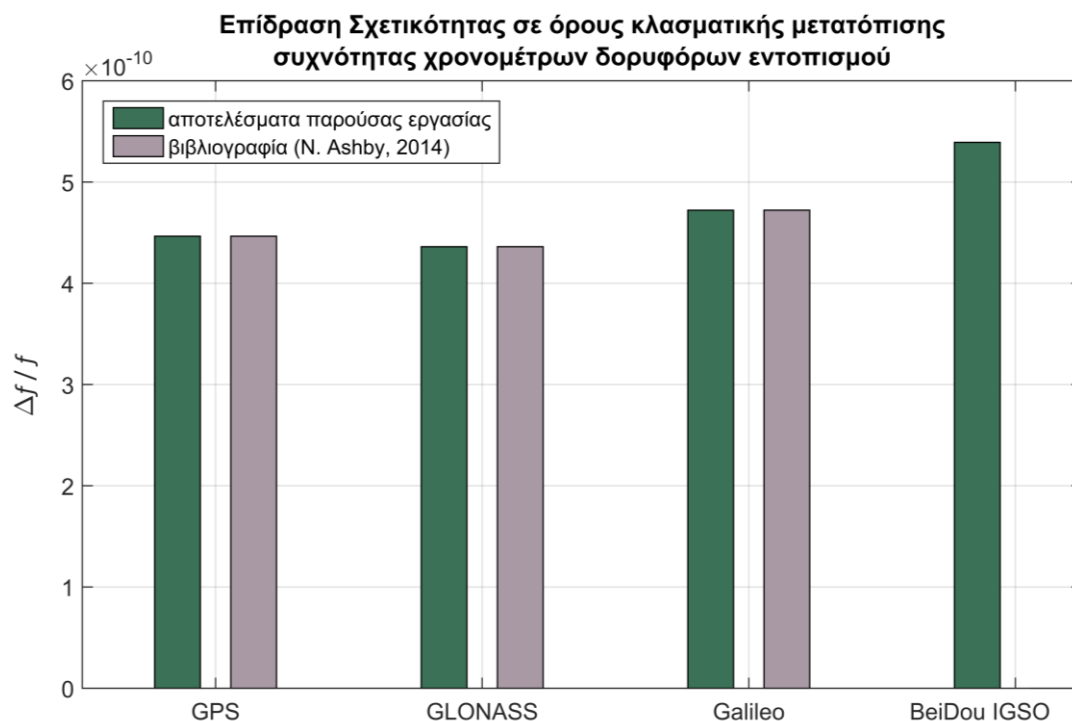


Εικόνα 6.1: Προβλεπόμενη μετατόπιση συχνότητας σε χρονόμετρα δορυφόρων εντοπισμού μετά την πάροδο μίας ημέρας. Αποτελέσματα από το συνδυασμό κινητικών και βαρυτικών σχετικιστικών επιδράσεων.

Πίνακας 6.2: Αποτελέσματα κλασματικής μετατόπισης συχνότητας $\Delta f / f = (3GM / 2ac^2) + \Phi_0/c^2$ χρονομέτρων δορυφόρων GNSS.

Δορυφόρος GNSS	μεγάλος ημιάξονας a (m)	$\Delta f / f$
BeiDou IGSO 05 (Geosynchronous)	42 167 000	$-5.391604 \times 10^{-10}$
GALILEO GSAT-SV22	29 599 800	$-4.721774 \times 10^{-10}$
GLONASS SV12, SV17	25 508 000	$-4.361248 \times 10^{-10}$
GPS PRN14	26 563 363.68	$-4.464865 \times 10^{-10}$
GPS PRN02	26 558 823.95	$-4.464437 \times 10^{-10}$
GPS PRN28	26 559 442.98	$-4.464495 \times 10^{-10}$

Για να ελεγχθεί η εγκυρότητα των αποτελεσμάτων του Πίνακα 6.2, συγκρίνονται με αντίστοιχη μελέτη που βρέθηκε στη βιβλιογραφία και αφορούν δορυφόρους εντοπισμού GPS, GLONASS, Galileo (Ashtekar, Petkov, 2014). Συγκρίνοντας τα αποτελέσματα στο ραβδόγραμμα (Εικόνα 6.2), γίνεται αντιληπτό ότι τα αποτελέσματα είναι πανομοιότυπα.



Εικόνα 6.2: Ραβδόγραμμα σύγκρισης αποτελεσμάτων με αντίστοιχα αποτελέσματα του N. Ashby (Ashtekar, Petkov, 2014) για δορυφόρους των ίδιων συστημάτων GNSS.

6.1.2 Περιοδικός όρος (περιοδική κινητική και βαρυτική σχετικιστική επίδραση λόγω εκκεντρότητας τροχιάς)

Ο δεύτερος όρος της εξίσωσης που χρησιμοποιήθηκε και που αντιπροσωπεύει το περιοδικό σφάλμα στον μετρούμενο ιδιοχρόνο ενός δορυφορικού χρονομέτρου, εξαιτίας της εκκεντρότητας της τροχιάς του δορυφόρου, όπως αναλύθηκε στο 4^ο κεφάλαιο, ισοδυναμεί με

$$\Delta t = \frac{2 \cdot \sqrt{GMa} \cdot e \cdot \sin E}{c^2} \quad (6.4)$$

και μετατρέποντας το σφάλμα στο χρονόμετρο, σε σφάλμα στη μετρούμενη απόσταση, σύμφωνα με τη σχέση $\Delta x = c \Delta t$, η εξίσωση γίνεται

$$\Delta x = \frac{2 \cdot \sqrt{GMa} \cdot e \cdot \sin E}{c} \quad (6.5)$$

όπου GM η γεωκεντρική βαρυτιμετρική σταθερά, c η ταχύτητα του φωτός και a, e ο μεγάλος ημιάξονας και η εκκεντρότητα της τροχιάς του κάθε δορυφόρου, αντίστοιχα.

Η εκκεντρος ανωμαλία E είναι η γωνία που σχηματίζεται από το γεωκεντρικό ακτινικό διάνυσμα του δορυφόρου, εάν αυτός κινούνταν με σταθερή ταχύτητα, σε κύκλο με ακτίνα ίση με τον μεγάλο ημιάξονα της τροχιακής του έλλειψης. Επομένως, παίρνει τιμές από 0 έως 2π . Η γωνία E είναι 0 όταν ο δορυφόρος βρίσκεται στο περίγειο και π όταν ο δορυφόρος βρίσκεται στο απόγειο. Αυτό σημαίνει ότι το περιοδικό σφάλμα στην μετρούμενη απόσταση (ή στον τοπικό χρόνο) μηδενίζεται μόνο όταν ο δορυφόρος βρίσκεται στο περίγειο και στο απόγειο της τροχιάς του.

Σύμφωνα λοιπόν με την παραπάνω εξίσωση, δημιουργήθηκαν γραφήματα σε περιβάλλον Matlab, στα οποία αναπαρίσταται το προβλεπόμενο περιοδικό σφάλμα στην μετρούμενη απόσταση Δx συναρτήσει της εκκεντρος ανωμαλίας E . Για τη βέλτιστη κατανόηση των γραφημάτων, έγινε μετατροπή της εκκεντρος ανωμαλίας, από μονάδες γωνίας [rad] σε μονάδες χρόνου [sec], έτσι ώστε τα τελικά γραφήματα να αναπαριστούν το προβλεπόμενο σφάλμα στη μετρούμενη απόσταση Δx συναρτήσει του παρερχόμενου χρόνου t .

Για τη συγκεκριμένη μετατροπή, πρέπει να είναι γνωστή και η περίοδος περιφοράς T (sec) του κάθε δορυφόρου, εφόσον $t = \frac{T}{2\pi} E$. Η περίοδος περιφοράς αντιστοιχεί στον χρόνο που χρειάζεται κάθε δορυφόρος ώστε να ολοκληρώσει μία περιφορά γύρω από τη Γη.

Τα αποτελέσματα των προβλεπόμενων περιοδικών σχετικιστικών σφαλμάτων στο χρόνο των δορυφόρων GNSS αλλά και η σύγκρισή τους με αντίστοιχες τιμές που βρέθηκαν στη βιβλιογραφία παρουσιάζονται στην ακόλουθη ενότητα.

GPS

Από το Παγκόσμιο Σύστημα Εντοπισμού GPS επιλέχθηκαν για μελέτη τρεις δορυφόροι με διαφορετικές εκκεντρότητες και μεγάλους ημιάξονες, έτσι ώστε να αναδειχθεί η εξάρτηση της επίδρασης της Σχετικότητας από τις παραμέτρους αυτές.

Στον Πίνακα 6.5 παρουσιάζονται οι παράμετροι της τροχιάς του κάθε δορυφόρου, οι οποίες συλλέχθηκαν από την δορυφορική εφημερίδα (GPS Almanac) που δημοσιεύεται από το Κέντρο Πληροφοριών και Ανάλυσης για Εντοπισμό, Πλοήγηση και Συγχρονισμό (Information and Analysis Center for Positioning, Navigation and Timing – IAC PNT).

Στην Εικόνα 6.1 παρουσιάζεται η επίδραση της Σχετικότητας στα χρονόμετρα των δορυφόρων, εξαιτίας της εκκεντρότητας της τροχιάς τους. Ο άξονας X του διαγράμματος αντιστοιχεί στον παρερχόμενο χρόνο, ενώ ο άξονας Y στο περιοδικό σφάλμα του χρονομέτρου εκφρασμένο σε μονάδες μήκους.

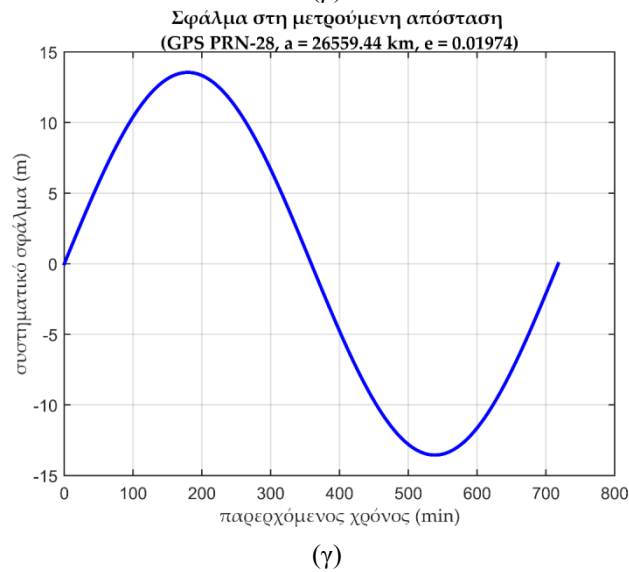
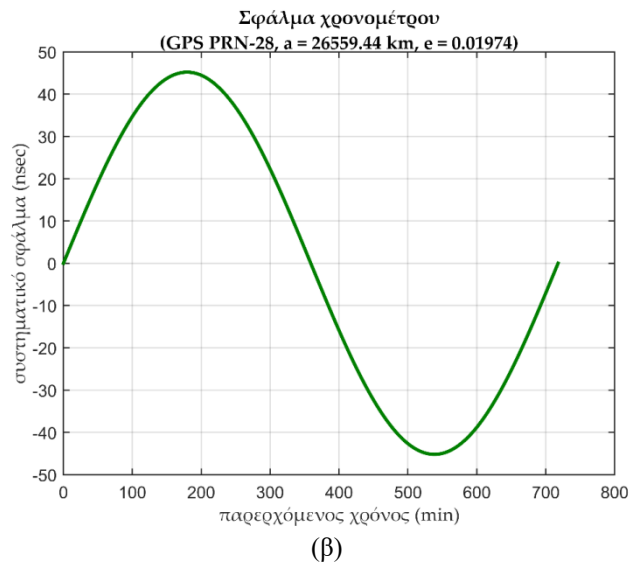
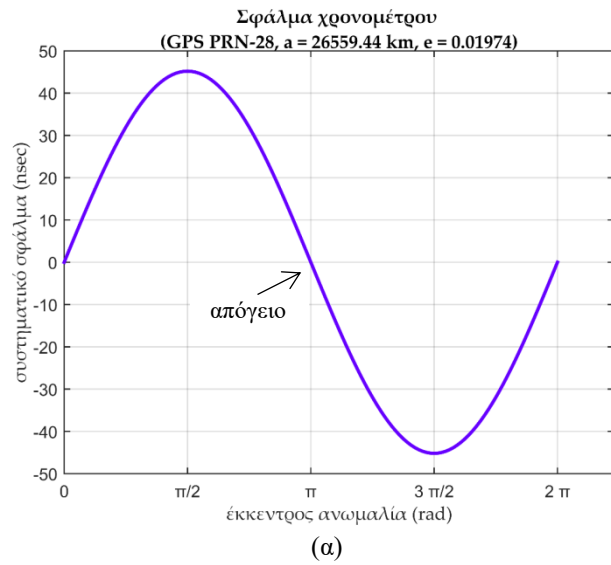
Τα αποτελέσματα αυτά συγκρίνονται παρακάτω με αντίστοιχα διαγράμματα που δημοσιεύθηκαν από τον N. Ashby, το 2003. Ο δορυφόρος GPS, του οποίου τα δεδομένα χρησιμοποίησε ο Ashby για την εφαρμογή της ίδιας σχετικιστικής διόρθωσης, είναι ο SV-13.¹ Ο Ashby, στο ίδιο διάγραμμα, συγκρίνει τα αποτελέσματά του με πραγματικές μετρήσεις του δορυφόρου. Η εκκεντρότητα της τροχιάς του SV-13 την περίοδο που διεξάχθηκε το πείραμα (22 Οκτωβρίου 1995) ήταν ίση με 0.01486, σύμφωνα με τον Ashby. Η περίοδος περιφοράς των δορυφόρων GPS είναι $T = 43\,080\text{ sec} = 718\text{ min} = 11\text{ h }58\text{ min}$.

Πίνακας 6.3: Δεδομένα δορυφόρων GPS. (IAC PNT, 05.06.2016)

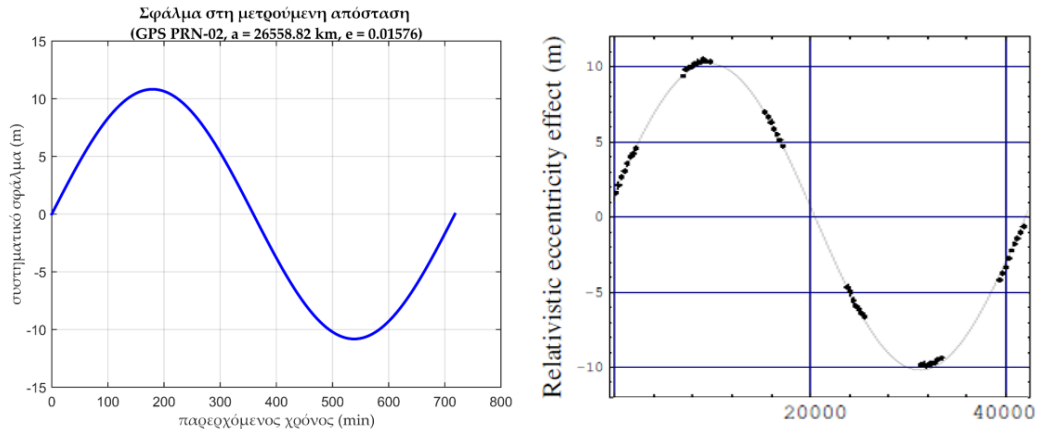
Δορυφόρος GPS	Εκτόξευση	Τροχιακό επίπεδο	Εκκεντρότητα e	Μεγάλος ημιάξονας a (m)
GPS-PRN02 ²	06/11/2004	D	0.01576	26558823.95
GPS-PRN14	10/11/2000	F	0.00873	26563363.68
GPS-PRN28	16/07/2000	B	0.01974	26559442.98

¹ SV: Satellite Vehicle

² PRN: Pseudo-Range Number



Εικόνα 6.2: Η επίδραση της Σχετικότητας στο χρονόμετρο του δορυφόρου GPS PRN28, λόγω εκκεντρότητας της τροχιάς ($e = 0.01974$), α) συναρτήσει της εκκέντρου ανωμαλίας E (rad), β) συναρτήσει του παρερχόμενου χρόνου (min), γ) εκφρασμένη σε μονάδες μήκους (m). Στη διάρκεια μίας περιφοράς του γύρω από τη Γη (718 min) ανέρχεται στα ± 13.5 m σφάλμα στην απόσταση.



Εικόνα 6.3: Η επίδραση της Σχετικότητας στο χρονόμετρο του δορυφόρου GPS PRN-02, λόγω εκκεντρότητας τροχιάς ($e = 0.01576$) στη διάρκεια μίας περιφοράς του γύρω από τη Γη (718 min) ανέρχεται σε σφάλμα ± 11 m στη μετρούμενη απόσταση (αριστερά). Αποτελέσματα προβλεπόμενης και μετρούμενης επίδρασης της Σχετικότητας (N. Ashby, 2003) στο χρονόμετρο του δορυφόρου GPS SV-13, λόγω εκκεντρότητας τροχιάς ($e = 0.01486$), με την πάροδο του χρόνου εκφρασμένου σε second. Εκφρασμένη σε μονάδες μήκους ανέρχεται στα ± 11 m σφάλμα (δεξιά).

Συγκρίνοντας το διάγραμμα του N. Ashby (Εικόνα 6.3), το οποίο αναπαριστά το σφάλμα του χρονομέτρου του δορυφόρου GPS SV-13 ($e = 0.01486$), με το διάγραμμα του PRN-02 ($e = 0.01576$), παρατηρείται ότι λόγω παρόμοιας εκκεντρότητας των τροχιών των δύο δορυφόρων, το σφάλμα στη μέτρηση της απόστασης και στις δύο περιπτώσεις ανέρχεται περίπου έως τα ± 11 m. Αυτό αποδεικνύει έμμεσα την εγκυρότητα των αποτελεσμάτων (για τους δορυφόρους GNSS) της παρούσας εργασίας. Το μέγεθος της περιοδικής επίδρασης της Σχετικότητας στους δορυφόρους GPS που μελετήθηκαν και η διακύμανση αυτού είναι αξιοσημείωτο.

Υπόλοιποι δορυφόροι GNSS

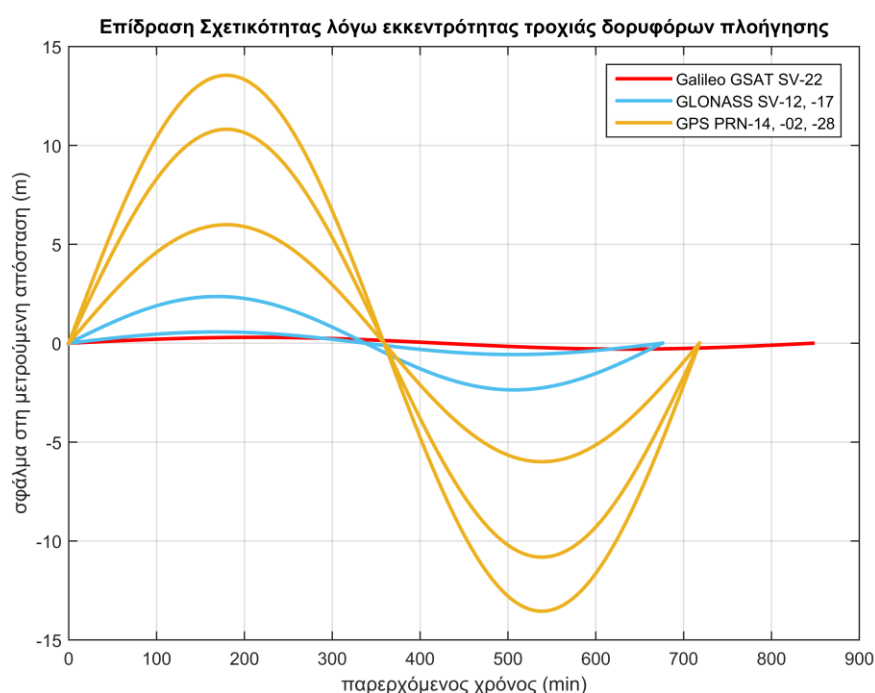
Οι δορυφόροι Galileo κινούνται σε σχεδόν κυκλικές τροχιές με πολύ μικρή εκκεντρότητα, την μικρότερη από όλες τις εκκεντρότητες των δορυφορικών σχηματισμών GNSS. Ο δορυφόρος Galileo SV-22, τα τροχιακά δεδομένα του οποίου χρησιμοποιήθηκαν, εκτοξεύθηκε στις 27 Μαρτίου 2015 και είναι σε λειτουργία. Από το κινεζικό δορυφορικό σχηματισμό Compass επιλέχθηκε ο δορυφόρος IGSO 05, ο οποίος κινείται σε γεωσύγχρονη τροχιά (ολοκληρώνει μία περιφορά σε σχεδόν 24 ώρες), με κλίση 53.5° ως προς τον ισημερινό.

Από το δορυφορικό σύστημα εντοπισμού της Ρωσίας επιλέχθηκαν για ανάλυση οι δορυφόροι SV-12 και SV-17 με εκκεντρότητες $e = 0.00351$ και $e = 0.00085$, αντίστοιχα (IAC PNT, 19.11.2016). Τα στοιχεία της τροχιάς των δορυφόρων GLONASS είναι παρόμοια με αυτά των δορυφόρων GPS, με εξαίρεση την εκκεντρότητα, η οποία παρουσιάζει μικρότερες τιμές. Επομένως, το περιοδικό σφάλμα στα χρονόμετρα των δορυφόρων GLONASS προβλέπεται μικρότερο.

Στο παρακάτω διάγραμμα παρουσιάζεται το προβλεπόμενο σφάλμα στα χρονόμετρα των δορυφόρων GNSS, σύμφωνα με την Εξ. (6.5), με τα στοιχεία της τροχιάς τους να παρουσιάζονται στον Πίνακα 6.4.

Πίνακας 6.4: Παράμετροι τροχιάς δορυφόρων GPS PRN 02 (IAC PNT, 05.06.2016), Galileo SV 22 (European GNSS Service Centre, 18.11.2016), BeiDou IGSO 05 (Heavens Above, 18.11.2016), GLONASS SV 12, 17 (IAC PNT, 19.11.2016).

Παράμετρος	GPS PRN02	Galileo SV-22	GLONASS SV-12	GLONASS SV-17	BeiDou IGSO 05
Εκκεντρότητα e	0.01576	0.000412	0.00351	0.00085	0.0044638
Μεγάλος ημιάξονας a (km)	26 558.8	29 599.8	25 508	25 508	42 167
Κλίση τροχιάς i (°)	55	56	64.8	64.8	53.5
Περίοδος Περιφοράς T (h)	11.97	14.12	11.27	11.27	23.94



Εικόνα 6.4: Σύγκριση της επίδρασης της Σχετικότητας στα χρονόμετρα των δορυφόρων GPS PRN-02, 14, 28, Galileo SV-22, BeiDou IGSO-05, GLONASS SV-12 και SV-17, λόγω εκκεντρότητας των τροχιών τους, στη διάρκεια μίας περιφοράς τους γύρω από τη Γη, εκφρασμένη σε μονάδες μήκους (m).

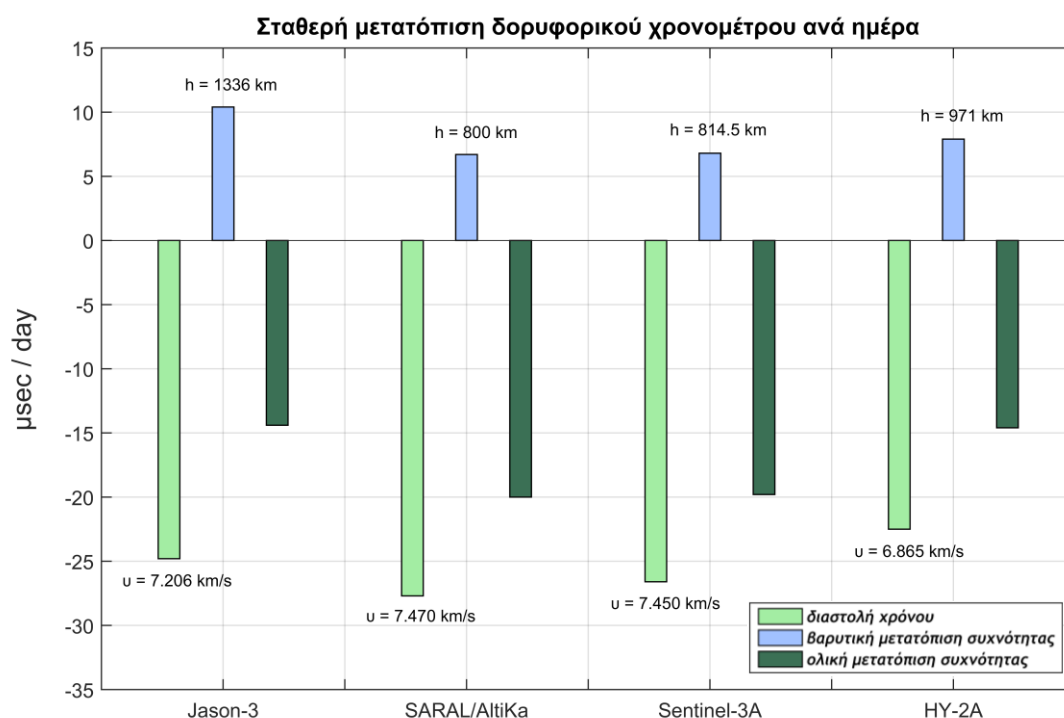
Σύμφωνα με το παραπάνω διάγραμμα, προκύπτουν τα ακόλουθα αποτελέσματα: η επίδραση της Σχετικότητας στο χρονόμετρο του δορυφόρου Galileo SV-22 λόγω εκκεντρότητας της τροχιάς του ($e = 0.00041$), στη διάρκεια μίας περιφοράς του γύρω από τη Γη (847 min) ανέρχεται έως τα ± 30 cm σφάλμα στη μετρούμενη απόσταση. Η επίδραση της Σχετικότητας στα χρονόμετρα των δορυφόρων GLONASS SV-12 και SV-17, λόγω εκκεντρότητας της τροχιάς τους ($e = 0.00351$, $e = 0.00085$), στη διάρκεια μίας περιφοράς τους γύρω από τη Γη (676 min) ανέρχεται στα ± 2.36 m και ± 57 cm σφάλμα στη μετρούμενη απόσταση, αντίστοιχα. Τα χρονόμετρα των δορυφόρων GPS που επιλέχθηκαν παρουσιάζουν το μεγαλύτερο σφάλμα, με διακύμανση 6 – 13.5 m.

6.2 Δορυφόροι Αλτιμετρίας

Το χαμηλότερο υψόμετρο και η μεγαλύτερη κλίση της τροχιάς των δορυφόρων αλτιμετρίας έθεσε το ερώτημα, εάν είναι κατάλληλο να χρησιμοποιείται η ίδια εξίσωση για τη ρύθμιση των χρονομέτρων τους λόγω επιδράσεων Σχετικότητας, με αυτήν που χρησιμοποιείται στα GNSS. Το προβλεπόμενο σφάλμα του δορυφορικού χρονομέτρου βασίστηκε στο συνδυασμό των φαινομένων της διαστολής του χρόνου (second-order Doppler shift) και της βαρυτικής μετατόπισης συχνότητας (gravitational frequency shift) που περιγράφει η Θεωρία της Σχετικότητας.

6.1.2 Σταθερός όρος (σταθερή κινητική και βαρυτική σχετικιστική επίδραση)

Από τη στιγμή που, μέσω της σύγκρισης που προηγήθηκε (ραβδόγραμμα, Εικόνα 6.1), αποδεικνύεται η εγκυρότητα των αποτελεσμάτων για τα GNSS, ο σταθερός όρος της Εξ. (6.1) εφαρμόστηκε και στους δορυφόρους αλτιμετρίας, των οποίων τα αποτελέσματα παρουσιάζονται στον ακόλουθο πίνακα. Σημειώνεται ότι στην αλτιμετρία δεν υπάρχει διαθέσιμη βιβλιογραφία έτσι ώστε να γίνει άμεση σύγκριση των τιμών.



Εικόνα 6.5: Προβλεπόμενη μετατόπιση συχνότητας σε χρονόμετρα δορυφόρων αλτιμετρίας μετά την πάροδο μίας ημέρας. Αποτελέσματα από το συνδυασμό κινητικών και βαρυτικών σχετικιστικών επιδράσεων.

Πίνακας 6.5: Αποτελέσματα κλασματικής μετατόπισης συχνότητας ($\Delta f/f = 3GM/2ac^2 + \Phi_0/c^2$) στα χρονόμετρα των δορυφόρων αλτιμετρίας.

Δορυφόρος αλτιμετρίας	a (m)	$\Delta f/f$
SENTINEL-3	7 180 000	2.296109×10^{-10}
SARAL/ALTIKA	7 162 000	2.319395×10^{-10}
CRYOSAT-2	7 096 000	2.405789×10^{-10}
JASON-2	7 714 428	1.654234×10^{-10}

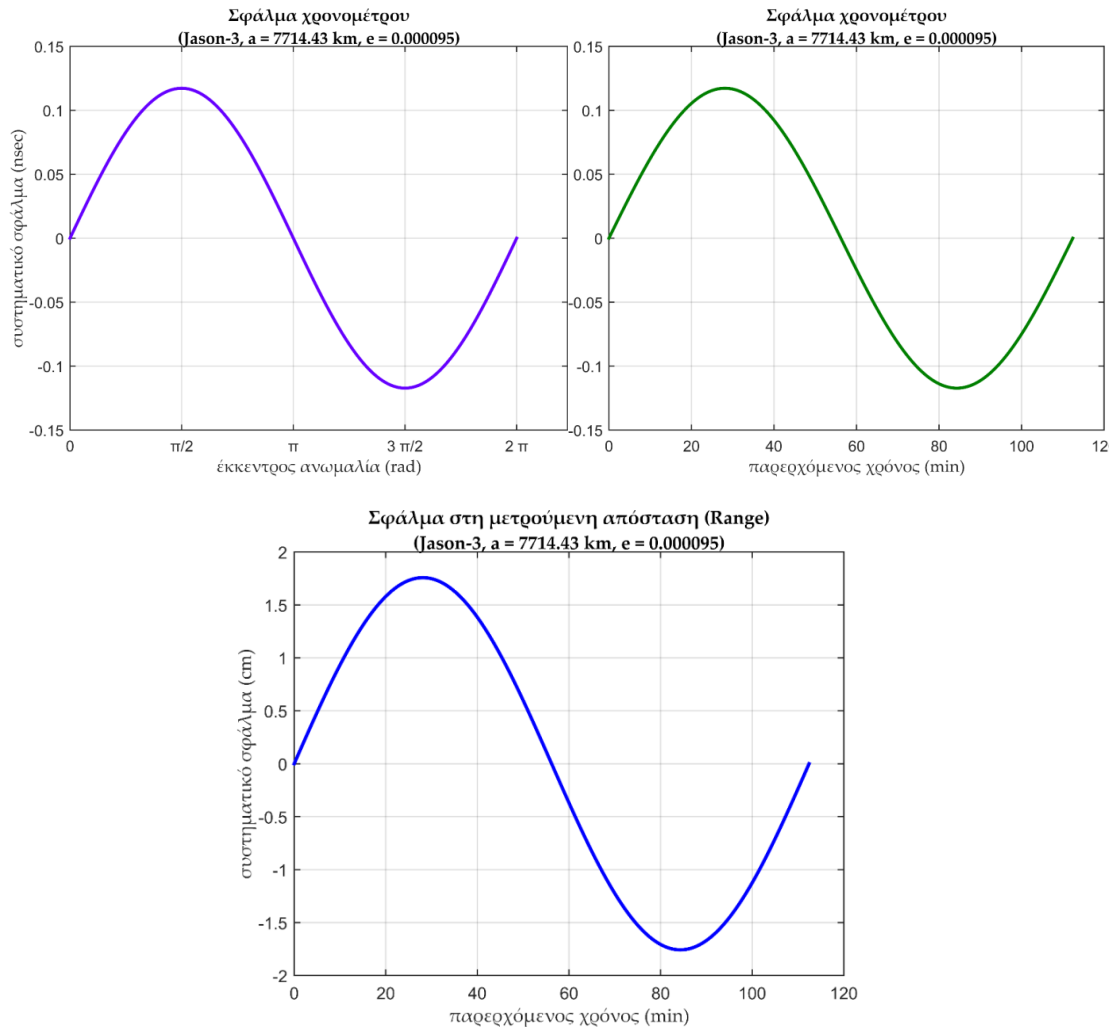
6.2.2 Περιοδικός όρος (περιοδική κινητική και βαρυτική σχετικιστική επίδραση λόγω εκκεντρότητας τροχιάς)

JASON 3

Για την εφαρμογή της εξίσωσης και την ανάδειξη του προβλεπόμενου σφάλματος του χρονόμετρου, ήταν απαραίτητες ορισμένες από τις παραμέτρους της τροχιάς του Jason-3. Η συλλογή των παραμέτρων της τροχιάς του δορυφόρου πραγματοποιήθηκε από την ιστοσελίδα της AVISO+ (www.aviso.altimetry.fr), το οποίο παρέχει δεδομένα και πληροφορίες για τις περισσότερες δορυφορικές αποστολές αλτιμετρίας. Η επίδραση της Σχετικότητας λόγω εκκεντρότητας της τροχιάς του Jason-3 παρουσιάζεται στο παρακάτω γράφημα.

Πίνακας 6.6: Παράμετροι τροχιάς δορυφόρου Jason-3. (AVISO+)

Παράμετρος	Τιμή
Γωνία κλίσης i	66.039°
Εκκεντρότητα e	0.000095
Μεγάλος ημιάξονας a	7 714.428 km
Υψόμετρο στο απόγειο	1 380 km
Υψόμετρο στο περίγειο	1 328 km
Υψόμετρο στον ισημερινό	1 336 km
Στοιχείο του περιγείου ω	270°
Περίοδος περιφοράς T	6 745.72 sec (112' 42" ή 1h 52')
Επαναληπτικός κύκλος	9.9151 ημέρες
Διελύσεις ανά κύκλο	254
Μέση ταχύτητα v	7.2 km/sec



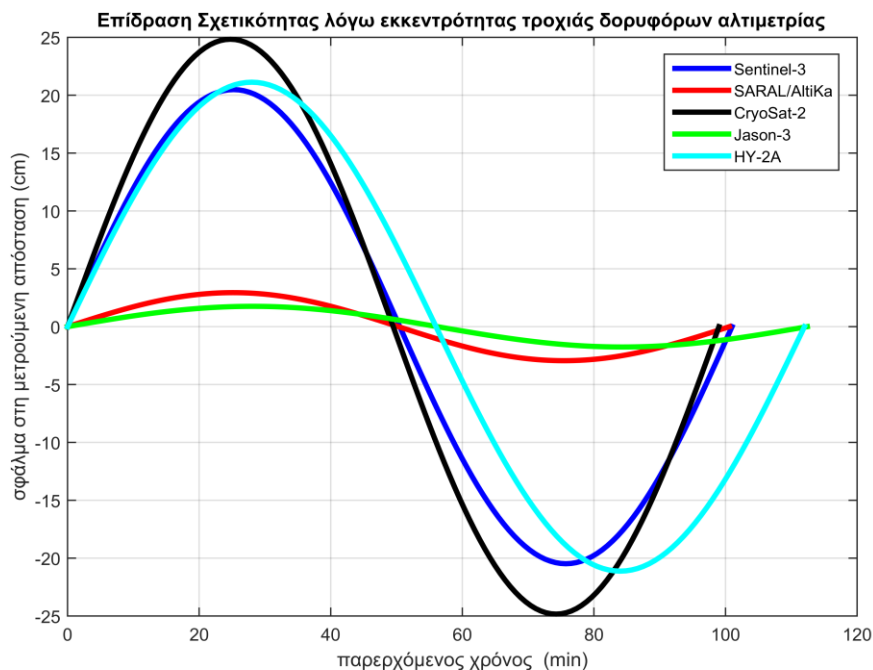
Εικόνα 6.5: Το περιοδικό σφάλμα στο χρονόμετρο του Jason (σε cm) λόγω εκκεντρότητας της τροχιάς του στη διάρκεια μίας περιφοράς του γύρω από τη Γη (112 min).

Υπόλοιποι δορυφόροι αλτιμετρίας

Ακολουθούν αντίστοιχα αποτελέσματα για τους δορυφόρους αλτιμετρίας SARAL/AltiKa, HY-2A, CryoSat-2 και Sentinel-3A, για τους οποίους εφαρμόστηκε το ίδιο μοντέλο για την επίδραση της Σχετικότητας στα χρονόμετά τους λόγω εκκεντρότητας της τροχιάς τους. Οι παράμετροι των τροχιών των δορυφόρων που χρησιμοποιήθηκαν για την ανάδειξη του προβλεπόμενου σφάλματος στα χρονόμετρα συλλέχθηκαν και εδώ από την ιστοσελίδα της AVISO+ και παρουσιάζονται στον παρακάτω πίνακα.

Πίνακας 6.7: Παράμετροι τροχιάς υπόλοιπων δορυφόρων αλτιμετρίας. (AVISO+)

Παράμετρος	SARAL/AltiKa	HY-2A	CryoSat-2	Sentinel-3
Γωνία κλίσης i ($^{\circ}$)	98.55	99.3 $^{\circ}$	92 $^{\circ}$	98.65 $^{\circ}$
Εκκεντρότητα e	0.000165	0.00117	0.001407	0.001148
Μεγάλος ημιάξονας a (km)	7 159.496	7 349.137	7 095.349	7 177.926
Περίοδος περιφοράς T (min)	100.59	112	97	100.987
Μέσο υψόμετρο h (km)	800	971	717	814.5



Εικόνα 6.6: Σύγκριση της επίδρασης της Σχετικότητας στα χρονόμετρα των δορυφόρων αλτιμετρίας Sentinel-3, Saral/AltiKa, CryoSat-2, Jason-2 και HY-2A, λόγω εκκεντρότητας των τροχιών τους, στη διάρκεια μίας περιφοράς τους γύρω από τη Γη, εκφρασμένη σε μονάδες μήκους (cm).

Σύμφωνα με το παραπάνω διάγραμμα, προκύπτουν τα ακόλουθα αποτελέσματα: η επίδραση της Σχετικότητας στο χρονόμετρο του δορυφόρου Saral/AltiKa, λόγω εκκεντρότητας τροχιάς, στη διάρκεια μίας περιφοράς του γύρω από τη Γη (101 min) ανέρχεται έως τα ± 2.9 cm σφάλμα στη μετρούμενη απόσταση. Η επίδραση της Σχετικότητας στο χρονόμετρο του δορυφόρου HY-2A, λόγω εκκεντρότητας τροχιάς, στη διάρκεια μίας περιφοράς του γύρω από τη Γη (112 min) ανέρχεται έως τα ± 22 cm σφάλμα στη μετρούμενη απόσταση. Η επίδραση της Σχετικότητας στο χρονόμετρο του δορυφόρου CryoSat-2, λόγω εκκεντρότητας τροχιάς, ανέρχεται έως τα ± 25 cm σφάλμα στη μετρούμενη απόσταση. Η επίδραση της Σχετικότητας στο χρονόμετρο του δορυφόρου Sentinel-3, λόγω εκκεντρότητας τροχιάς, ανέρχεται έως τα ± 21 cm σφάλμα στη μετρούμενη απόσταση.

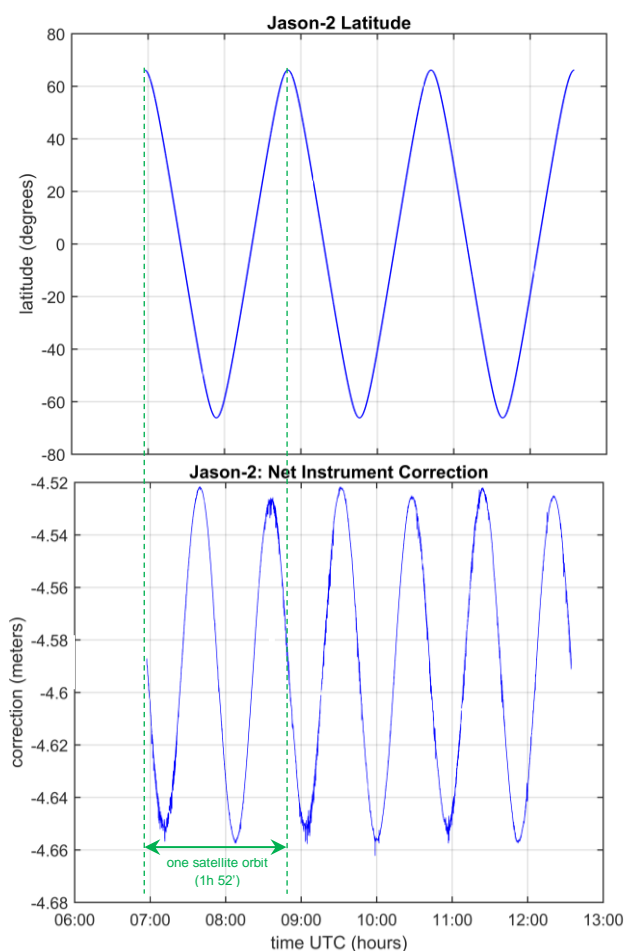
Για την επαλήθευση των αποτελεσμάτων, έγινε χρήση και επεξεργασία πραγματικών δορυφορικών δεδομένων αλτιμετρίας, με σκοπό την εύρεση του σχετικιστικού μοντέλου διόρθωσης που εφαρμόζεται ήδη στα χρονόμετρα τους. Ειδικότερα, μελετήθηκε η αντισταθμιστική αναγωγή (net instrument correction) που εφαρμόζεται στο αλτίμετρο του κάθε δορυφόρου, με στόχο την άντληση πληροφοριών για τις διορθώσεις που εφαρμόζονται στο αλτίμετρο έτσι ώστε να μπορεί να υπολογίζει την πραγματική απόσταση δορυφόρου-θαλάσσιας επιφάνειας. Η αντισταθμιστική αναγωγή που εφαρμόζεται στα αλτίμετρα των δορυφόρων αναλύθηκε σε περιβάλλον Matlab και παρουσιάζεται στην ακόλουθη ενότητα.

6.2.3 Αντισταθμιστική αναγωγή αλτιμέτρου (Net Instrument Correction)

Η βασική μέτρηση που πραγματοποιούν οι δορυφόροι αλτιμετρίας είναι όπως ειπώθηκε η απόσταση από την τροχιά του δορυφόρου έως τη στάθμη της θάλασσας. Αυτή η απόσταση δεν είναι σταθερή, εμπεριέχει σφάλματα και χρήζει διορθώσεων για διάφορους λόγους, πέραν της Σχετικότητας. Παρακάτω γίνεται μία σύντομη αναφορά στους διορθωτικούς όρους, οι οποίοι προστίθενται για να δώσουν τη συνολική διόρθωση (ή αλλιώς *αντισταθμιστική αναγωγή – Net Instrument Correction*) που εφαρμόζεται στη μετρούμενη απόσταση δορυφόρου- Γης.

Μαζί με την περιγραφή, παρουσιάζονται ορισμένα διαγράμματα που εξάχθηκαν κατά την επεξεργασία της αντισταθμιστικής αναγωγής του δορυφόρου Jason-2, από δεδομένα που αντιστοιχούν σε τρεις συνεχόμενες περιφορές του δορυφόρου γύρω από τη Γη, από τον εκατοστό επαναληπτικό του κύκλο (Cycle 100).

Οι διαβάσεις του δορυφόρου που χρησιμοποιήθηκαν από τον συγκεκριμένο κύκλο είχαν αριθμό από 16 έως 21. Η 16^η διέλευση του Jason-2 πάνω από τον ισημερινό (pass 16) έγινε από το βόρειο προς το νότιο πόλο κ.ο.κ.. Τα διαθέσιμα δεδομένα προς επεξεργασία ήταν η αντισταθμιστική αναγωγή του οργάνου (net instrument correction), το γεωγραφικό πλάτος και μήκος (latitude, longitude) και ο αντίστοιχος χρόνος UTC.



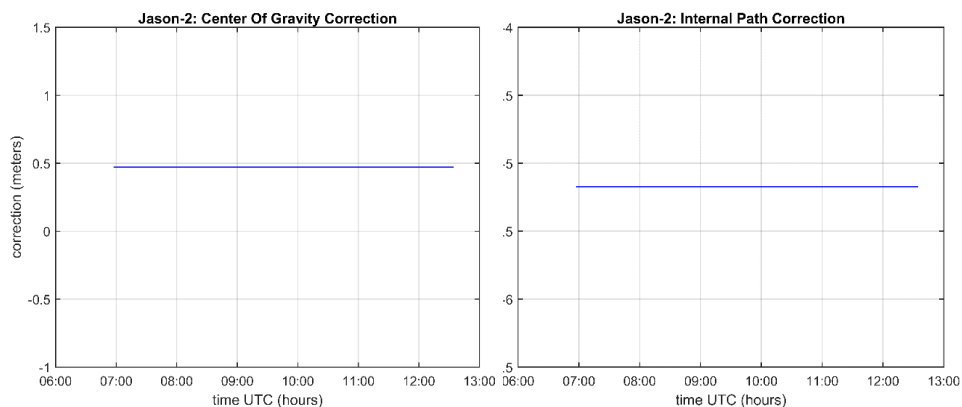
Εικόνα 6.7: Η εφαρμοζόμενη αντισταθμιστική αναγωγή στη μετρούμενη απόσταση (κάτω) σε σχέση με το γεωγραφικό πλάτος του Jason-2 (πάνω), συναρτήσει του παρερχόμενου χρόνου, για τρεις συνεχόμενες περιφορές του δορυφόρου γύρω από τη Γη.

1. Διόρθωση κέντρου μάζας δορυφόρου (COG , Center Of Gravity)

Η τροχιά κάθε δορυφόρου μπορεί να αναπαρασταθεί από διαδοχικά σημεία που σχηματίζουν μία έλλειψη, γύρω από τη Γη. Ωστόσο, ο δορυφόρος δεν είναι σημειακή μάζα, επομένως καθώς κινείται, το κέντρο μάζας του είναι αυτό που σχηματίζει την ελλειπτική του τροχιά. Παρ' όλα αυτά, το όργανο που πραγματοποιεί τις μετρήσεις (αλτίμετρο) δεν βρίσκεται στο κέντρο μάζας του δορυφόρου, αλλά αποκλίνει κατά μερικά μέτρα. Ως εκ τούτου, είναι απαραίτητη η εφαρμογή μίας διόρθωσης για την απόσταση της κεραίας του αλτίμετρου από το κέντρο μάζας του δορυφόρου, έτσι ώστε η μετρούμενη απόσταση να αντιστοιχεί στην πραγματική απόσταση, από την τροχιά του δορυφόρου έως την επιφάνεια της θάλασσας. Η διόρθωση που προκύπτει είναι σταθερός αριθμός.

2. Καθυστέρηση στα εσωτερικά κυκλώματα του οργάνου (Internal Path Correction)

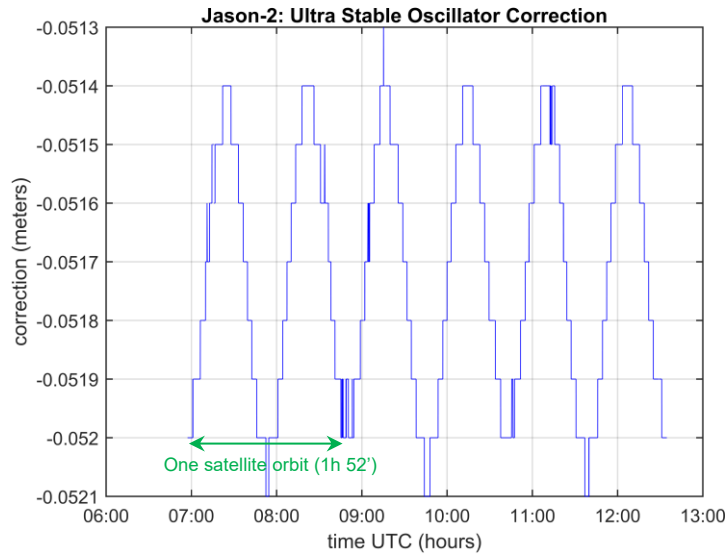
Το αλτίμετρο επί του δορυφόρου παρουσιάζει εσωτερικές χρονικές καθυστερήσεις κατά την επεξεργασία των ληφθέντων σημάτων. Η διόρθωση αυτή, σε μονάδες μήκους, είναι συνήθως μερικά εκατοστά.



Εικόνα 6.8: Η διόρθωση για την απόσταση κεραίας - κέντρον μάζας του δορυφόρου Jason (αριστερά) και η διόρθωση για τις καθυστερήσεις των ηλεκτρονικών κυκλωμάτων του δορυφόρου Jason (δεξιά).

3. Διόρθωση συστηματικής παρέκκλισης χρονομέτρου (USO drift correction)

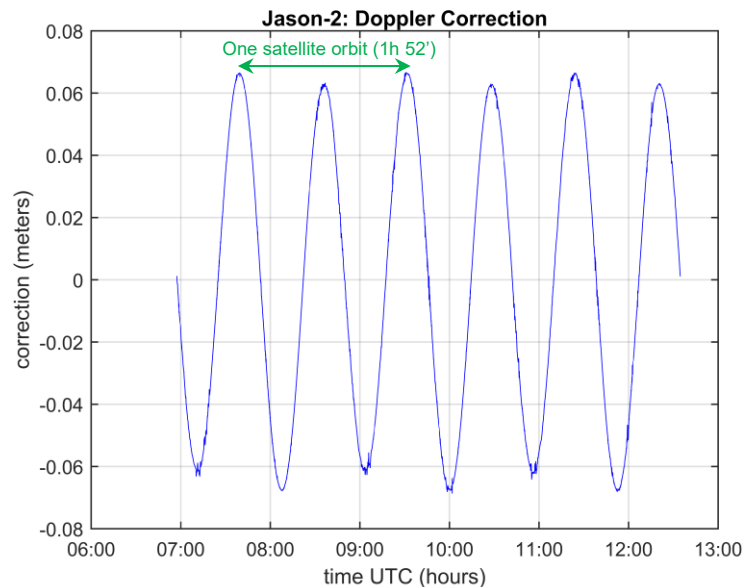
Όπως αναλύθηκε στο 2^ο κεφάλαιο της εργασίας, η ταλάντωση των ατομικών χρονομέτρων δεν είναι απόλυτα σταθερή. Ο ρυθμός των χτύπων του ρολογιού εμπεριέχει σφάλματα, τα οποία μπορούν να προσδιοριστούν με τη διασπορά Allan, ανάλογα με τον τύπο του χρονομέτρου. Επομένως η σταθερότητα του ρυθμού αποκλίνει από αυτήν ενός ιδανικού χρονομέτρου που εκτελεί αμείωτη ταλάντωση και έτσι η μετρούμενη απόσταση, η οποία στηρίζεται στην ακριβή μέτρηση του χρόνου στο χρονόμετρο πρέπει να διορθωθεί.



Εικόνα 6.9: Διόρθωση χρονομέτρου δορυφόρου Jason λόγω συστηματικών παρεκκλίσεων.

4. Διόρθωση Doppler

Η διόρθωση Doppler εφαρμόζεται λόγω της μεταβολής της θέσης του δορυφόρου όπως παρατηρείται από το ελλειψοειδές αναφοράς και σχετίζεται άμεσα με την περιοδικώς μεταβαλλόμενη απόσταση δορυφόρου-επιφάνειας Γης, λόγω της επιπλάτυνσης της Γης στους πόλους.



Εικόνα 6.10: Διόρθωση Doppler για τον δορυφόρο Jason-2 λόγω μεταβαλλόμενης απόστασης δορυφόρου-επιφάνειας Γης.

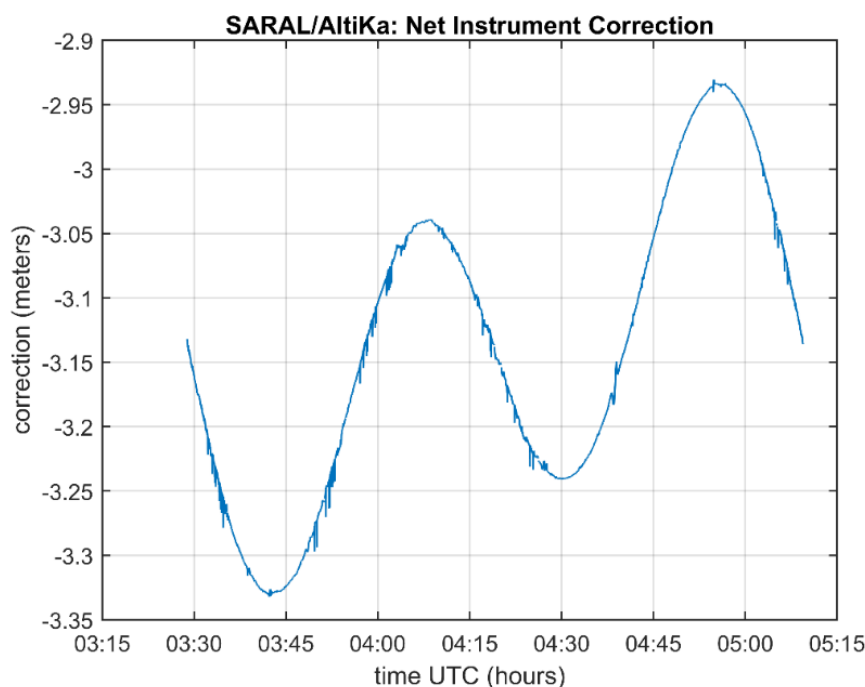
5. Modeled Instrumental Errors Correction, System Bias

Υπολειπόμενα σφάλματα εκφρασμένα σε μονάδες απόστασης, τα οποία ανέρχονται σε μερικά χιλιοστά.

Η άθροιση όλων των παραπάνω δίνει τη συνολική διόρθωση που εφαρμόζεται στο αλτιμέτρο του δορυφόρου (αντισταθμιστική αναγωγή), με αποτέλεσμα το όργανο να προσδιορίζει την πραγματική απόσταση από την τροχιά του δορυφόρου έως την επιφάνεια της θάλασσας.

Σύμφωνα με τα παραπάνω διαγράμματα, προκύπτει ότι οι διορθώσεις που περιλαμβάνονται στην αντισταθμιστική αναγωγή του αλτιμέτρου δεν περιέχουν την περιοδική σχετικιστική διόρθωση λόγω εκκεντρότητας της τροχιάς του Jason-2.

Η διαδικασία που ακολουθήθηκε για τον δορυφόρο SARAL/AltiKa είναι όμοια με αυτή του Jason. Διαθέσιμα δεδομένα προς επεξεργασία ήταν η συνολική αντισταθμιστική αναγωγή, το γεωγραφικό πλάτος και ο αντίστοιχος χρόνος UTC (net instrument correction, latitude, UTC time). Τα δεδομένα αντιστοιχούν στον 7^ο επαναληπτικό κύκλο του δορυφόρου (Cycle number 7) και συγκεκριμένα στην 571^η και 572^η διάβασή του (Pass number 571-572), δηλαδή δεδομένα για μία περιφορά του γύρω από τη Γη.



Εικόνα 6.11: Αντισταθμιστική αναγωγή δορυφορικού αλτιμέτρου SARAL/AltiKa για μία περιφορά του γύρω από τη Γη.

6.2.4 Εφαρμογή ισοδύναμων εξισώσεων

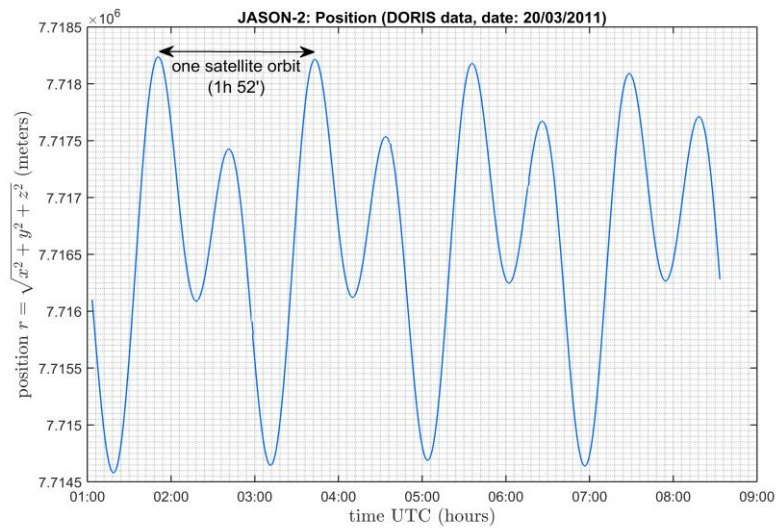
Λόγω του ότι δεν βρέθηκαν αντίστοιχα δεδομένα στην αντισταθμιστική αναγωγή ή αντίστοιχες τιμές στη βιβλιογραφία έτσι ώστε να είναι εφικτή η σύγκριση και επαλήθευση των αποτελεσμάτων της επίδρασης της Σχετικότητας στο χρόνο των δορυφόρων αλτιμετρίας, επιχειρήθηκε η εφαρμογή ισοδύναμων εξισώσεων, με σκοπό την εξαγωγή του ίδιου

αποτελέσματος για την έμμεση επαλήθευσή του. Παρ' όλα αυτά, τα αποτελέσματα δεν είναι σε συμφωνία μεταξύ τους.

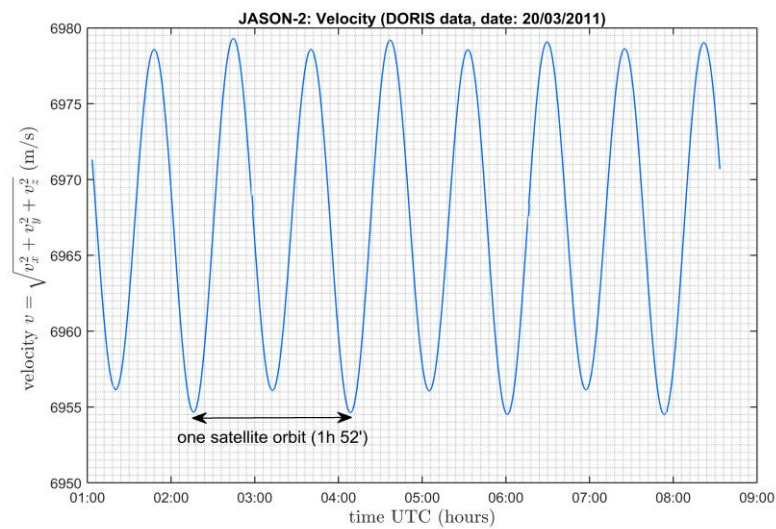
Θεωρητικά, η ισοδύναμη εξίσωση για την επίδραση στο χρόνο λόγω εκκεντρότητας τροχιάς είναι

$$\Delta t_{rel} = 2 \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}}{c^2} \quad (6.6)$$

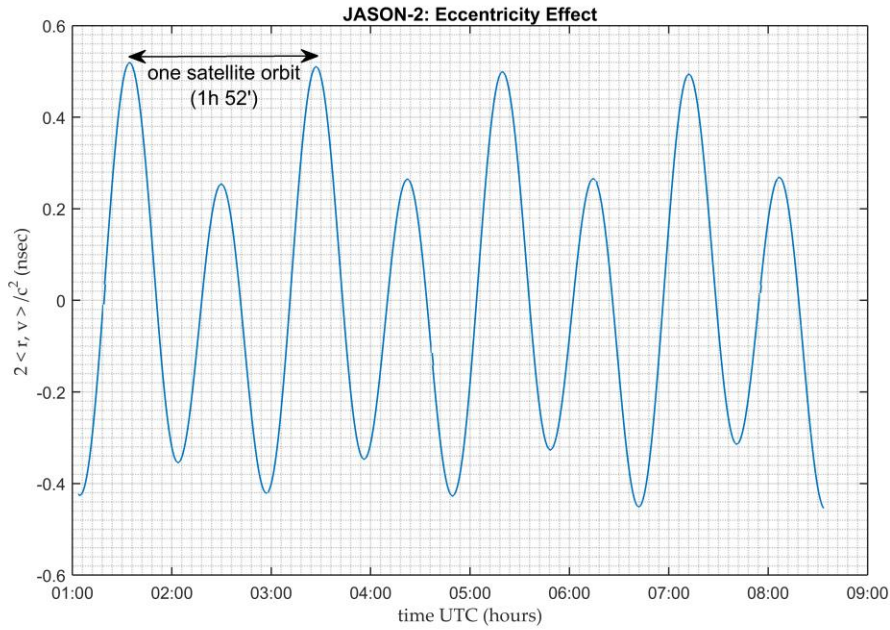
όπου \mathbf{r} είναι το διάνυσμα θέσης του δορυφόρου, \mathbf{v} το διάνυσμα της ταχύτητάς του και c η ταχύτητα του φωτός. Με βάση αυτή την εξίσωση, συλλέχθηκαν δεδομένα από το DORIS του Jason-2, για τη θέση και την ταχύτητά του κάθε χρονική στιγμή. Τα αποτελέσματα της επεξεργασίας παρουσιάζονται στα παρακάτω διαγράμματα.



(α)



(β)



(γ)

Εικόνα 6.12: Δεδομένα θέσης και ταχύτητας δορυφόρου Jason-2. Αποτελέσματα εφαρμογής της ισοδύναμης εξίσωσης της επίδρασης της Σχετικότητας στο χρόνο λόγω εκκεντρότητας τροχιάς (Εξ. 6.6).

Ένας επιπλέον όρος που εξετάστηκε είναι αυτός της επίδρασης του δυναμικού επιπλάτυνσης της Γης στη θέση του δορυφόρου. Η παρακάτω εξίσωση εφαρμόστηκε με τα στοιχεία της τροχιάς του δορυφόρου αλτιμετρίας Jason-2 και αντιπροσωπεύει το σφάλμα στο χρονόμετρο του δορυφόρου που προκαλείται από το δυναμικό επιπλάτυνσης της Γης.

$$\delta t_{J_2} = -\sqrt{\frac{GM_E}{a^3}} \frac{J_2 a_1^2 \sin^2 i}{2c^2} \sin(2nt + 2w) \quad (6.7)$$

όπου G είναι η παγκόσμια βαρυτική σταθερά, M_E η μάζα της Γης, a_1 η ισημερινή ακτίνα ή αλλιώς ο μεγάλος ημιάξονας του ελλειψοειδούς αναφοράς, J_2 ο δυναμικός παράγοντας επιπλάτυνσης της Γης, a είναι ο μεγάλος ημιάξονας της ελλειπτικής τροχιάς του δορυφόρου, i η κλίση της τροχιάς ως προς τον ισημερινό, n η μέση ταχύτητα του δορυφόρου, w το υψόμετρο της τροχιάς στο περίγειο, c η ταχύτητα του φωτός και t ο παρερχόμενος χρόνος.

Τα αποτελέσματα εφαρμογής της παραπάνω σχέσης δεν παρουσιάζονται διότι δεν υπήρξε κάποιο μέσο για την επαλήθευσή τους. Θεωρητικά το μέγεθος της παρούσας επίδρασης στο χρόνο είναι της τάξης των λίγων nanosecond και το σφάλμα (ή η διόρθωση) μηδενίζεται όταν ο δορυφόρος διαβαίνει πάνω από το επίπεδο του ισημερινού, πηγαίνοντας προς τον βορρά (δηλαδή στον ανιόντα ισημερινό δεσμό).

Στους δορυφόρους GPS ο παραπάνω περιοδικός όρος σε όρους κλασματικής μετατόπισης συχνότητας είναι της τάξης

$$\frac{\Delta f}{f} = 6.95 \times 10^{-15} \quad (6.8)$$

Τα χρονόμετρα των δορυφόρων GPS σε τροχιά έχουν σταθερότητες περίπου 5 μέρη στα 10^{15} μέσα σε μία ημέρα. Αυτή η τιμή είναι ελάχιστα μικρότερη από την επίδραση του δυναμικού επιπλάτυνσης και συμπερασματικά η παραπάνω περιοδική επίδραση στο χρόνο θα πρέπει να λαμβάνεται υπ' όψιν στις διορθώσεις.

Κεφάλαιο 7

Συμπεράσματα

Στην παρούσα διπλωματική εργασία εξετάσθηκε η παράμετρος *χρόνος*, οι τρόποι μέτρησής του και οι επιδράσεις στον χρόνο που προβλέπονται από τη θεωρία της Σχετικότητας. Στόχος ήταν ο προσδιορισμός των προβλεπόμενων κινητικών και βαρυτικών σχετικιστικών επιδράσεων στο χρόνο των δορυφορικών χρονομέτρων, όπως προκύπτουν από τα φαινόμενα της διαστολής του χρόνου και της βαρυτικής μετατόπισης συχνότητας.

Στη μελέτη αυτή εισήχθησαν οι έννοιες του σχετικού χρόνου (ή αλλιώς του τοπικού χρόνου ή ιδιοχρόνου) και του χρόνου αναφοράς (ή αλλιώς της συντεταγμένης χρόνου) όπως εξηγούνται στη θεωρία της Σχετικότητας. Επιπλέον εξετάσθηκαν αναλυτικά οι νόμοι και οι εξισώσεις που διέπουν τις δορυφορικές τροχιές και περιγράφηκαν οι βασικές λειτουργίες και ο εξοπλισμός των δορυφόρων εντοπισμού και των δορυφόρων αλτιμετρίας. Επίσης έγινε ανάλυση των συνιστωσών που προσδιορίζουν το βαρυτικό πεδίο της Γης, με σκοπό τον ακριβή προσδιορισμό της βαρυτικής σχετικιστικής επίδρασης στα δορυφορικά χρονόμετρα.

Η εργασία επικεντρώθηκε στην ανάλυση ενός μαθηματικού μοντέλου που βασίζεται στις αρχές της Σχετικότητας, το οποίο υπολογίζει την ολική μετατόπιση συχνότητας ενός δορυφορικού χρονομέτρου σε τροχιά, σε σχέση με ένα χρονόμετρο αναφοράς στην επιφάνεια της Γης. Τα αποτελέσματα που παρουσιάστηκαν στο προηγούμενο κεφάλαιο οδηγούν σε αρκετά συμπεράσματα, τα οποία περιγράφονται στις ακόλουθες παραγράφους.

Αρχικά, έγινε κατανοητό ότι η πρώτη και θεμελιώδης μέτρηση που πραγματοποιούν αυτά τα δορυφορικά συστήματα για τον προσδιορισμό αποστάσεων είναι η μέτρηση του χρόνου μέσω ατομικών χρονομέτρων υψηλής ακρίβειας και επιπλέον ότι η αρχή λειτουργίας τους βασίζεται στην εκπομπή και λήψη σημάτων τα οποία διαδίδονται με την ταχύτητα του φωτός. Συμπερασματικά, γίνεται σαφές ότι τα αξιώματα και οι συνέπειες της Σχετικότητας πρέπει απαραίτητα να λαμβάνονται υπ' όψιν, αλλιώς οι δορυφορικές παρατηρήσεις δεν θα είχαν καμία απολύτως χρησιμότητα.

Τα αποτελέσματα για τους δορυφόρους εντοπισμού δείχνουν ότι το φαινόμενο της βαρυτικής μετατόπισης συχνότητας έχει πολύ μεγαλύτερη επίδραση στα χρονόμετρά τους από ό,τι το φαινόμενο της διαστολής του χρόνου. Αυτό το αποτέλεσμα είναι λογικό, διότι οι δορυφόροι εντοπισμού κινούνται σε μεγάλα υψόμετρα (> 20000 km από την επιφάνεια της Γης) επομένως παρουσιάζουν και μεγάλη διαφορά δυναμικού σε σχέση με χρονόμετρα στην επιφάνεια της Γης.

Αντίθετα, για τους δορυφόρους αλτιμετρίας, τα αποτελέσματα δείχνουν ότι το φαινόμενο της διαστολής του χρόνου έχει πολύ μεγαλύτερη επίδραση στα χρονόμετρά τους από ό,τι το φαινόμενο της βαρυτικής μετατόπισης συχνότητας. Αυτό συμβαίνει λόγω του ότι οι δορυφόροι

αλτιμετρίας κινούνται με εξαιρετικά υψηλές ταχύτητες ($> 7 \text{ km/s}$) σε σχέση με την περιστρεφόμενη Γη, ενώ παράλληλα έχουν μικρή διαφορά δυναμικού με την επιφάνεια της Γης, λόγω του χαμηλού υψομέτρου της τροχιάς τους.

Επιπροσθέτως, έγινε σαφές ότι η ολική επίδραση της Σχετικότητας στο χρόνο ενός δορυφόρου σε τροχιά μπορεί να αναλυθεί σε δύο όρους, όπου ο ένας μεταβάλλεται με σταθερό ρυθμό (Εξ. 4.44), ενώ ο δεύτερος μεταβάλλεται περιοδικά (Εξ. 4.45). Επομένως, αυτές οι δύο μεταβολές μπορούν να υπολογίζονται και να εφαρμόζονται ως ξεχωριστές διορθώσεις στα δορυφορικά χρονόμετρα. Και οι δύο όροι οφείλονται στη σχετική ταχύτητα και στο διαφορετικό βαρυτικό δυναμικό στη θέση του εκάστοτε δορυφόρου, σε σχέση με τη Γη. Η περιοδικότητα της επίδρασης στο χρόνο του δορυφόρου παρουσιάζεται εξαιτίας της μεταβαλλόμενης ακτινικής απόστασης της τροχιάς του από το κέντρο της Γης, δεδομένου ότι οι δορυφορικές τροχιές είναι ελλειπτικές. Επομένως, η περιοδική σχετικιστική επίδραση βασίζεται στον πρώτο και τον δεύτερο νόμο του Kepler.

Επομένως, έγινε αντιληπτό ότι οι σχετικιστικές διαταραχές των χρονομέτρων σε τροχιά όταν συγκρίνονται με επίγεια χρονόμετρα εξαρτώνται από: την ταχύτητα του δορυφόρου σε σχέση με την ταχύτητα στην επιφάνεια της Γης λόγω της γωνιακής ταχύτητας της περιστρεφόμενης Γης, το βαρυτικό δυναμικό στο υψόμετρο του δορυφόρου σε σχέση με το δυναμικό στην επιφάνεια της Γης και την εκκεντρότητα και τον μεγάλο άξονα της ελλειπτικής τροχιάς του δορυφόρου.

Ειδικότερα, στην εργασία αυτή εξετάστηκαν δορυφόροι από τα παγκόσμια συστήματα εντοπισμού GPS, Galileo, GLONASS, Compass/BeiDou. Τα αποτελέσματα που προέκυψαν από την εξίσωση που προσδιορίζει την ολική προβλεπόμενη μετατόπιση στη συχνότητα των χρονομέτρων τους (Εξ. 4.22) οφείλονται στο μέσο υψόμετρο της τροχιάς τους και στη μέση ταχύτητά τους. Αυτά τα αποτελέσματα ταυτίζονται απόλυτα με αντίστοιχα δεδομένα που βρέθηκαν στη βιβλιογραφία. Οι ίδιες εξισώσεις εφαρμόστηκαν και στους δορυφόρους αλτιμετρίας Jason-2, Saral/AltiKa, Sentinel-3, CryoSat-2, HY-2, όμως δεν κατέστη δυνατή η επαλήθευσή τους, καθώς δεν υπάρχουν αντίστοιχα διαθέσιμα δεδομένα στη βιβλιογραφία.

Λόγω των διαφορετικών γεωμετρικών παραμέτρων της τροχιάς των δορυφόρων αλτιμετρίας, τέθηκε το ερώτημα εάν μπορεί να εφαρμοσθεί η ίδια εξίσωση που χρησιμοποιήθηκε στους δορυφόρους εντοπισμού. Έτσι, επιχειρήθηκε η εφαρμογή ισοδύναμων εξισώσεων οι οποίες χρησιμοποιούν δεδομένα θέσης και ταχύτητας (Εξ. 6.6), αντί για γεωμετρικές παραμέτρους της τροχιάς, έτσι ώστε να είναι εφικτή η έμμεση επαλήθευση της αρχικής εξίσωσης (Εξ. 4.24). Τα αποτελέσματα όμως δεν συμπίπτουν και το θέμα απαιτεί εκτενέστερη μελέτη.

Κατά τη διάρκεια της μελέτης των δορυφορικών τροχιών, έγινε σαφές ότι το *ανομοιόμορφο* πεδίο βαρύτητας της Γης επηρεάζει πολύ περισσότερο τους δορυφόρους αλτιμετρίας από ό,τι τους δορυφόρους εντοπισμού. Αυτό συμβαίνει γιατί οι δορυφόροι αλτιμετρίας κινούνται σε πολικές τροχιές χαμηλού υψομέτρου, με αποτέλεσμα να επηρεάζονται περισσότερο από το

δυναμικό επιπλάτυνσης της Γης (από ό,τι οι δορυφόροι εντοπισμού που κινούνται σε υψηλότερες τροχιές και με μικρότερη κλίση ως προς τον ισημερινό), του οποίου η επίδραση, όπως φάνηκε από τις εξισώσεις, μειώνεται σημαντικά με την απόσταση.

Έτσι, εφαρμόστηκαν και άλλες εξισώσεις οι οποίες λαμβάνουν υπ' όψιν όρους μικρότερης τάξης, όπως η επίδραση του δυναμικού επιπλάτυνσης στη θέση του δορυφόρου (Εξ. 6.7). Και εδώ όμως δεν υπήρξε δυνατότητα σύγκρισης και επαλήθευσης των αποτελεσμάτων, καθώς τα δεδομένα από τη βιβλιογραφία είναι πολύ περιορισμένα.

Τα αποτελέσματα της επίδρασης της Σχετικότητας στο χρόνο υποδεικνύουν επίσης ότι το πλάτος του περιοδικού σφάλματος παρουσιάζει έντονες διακυμάνσεις, της τάξης cm έως m (Εικόνες 6.4, 6.6), ανάλογα με τα χαρακτηριστικά της τροχιάς του εκάστοτε δορυφόρου. Επομένως, αυτό δείχνει ότι κάθε δορυφορικό χρονόμετρο πρέπει να εξετάζεται και να διορθώνεται ξεχωριστά. Οι τροχιές των δορυφόρων αλτιμετρίας παρουσιάζουν πολύ μικρές εκκεντρότητες και έτσι το περιοδικό σφάλμα στα χρονόμετρά τους αποδείχθηκε να είναι μία τάξη μεγέθους μικρότερο από ό,τι των δορυφόρων πλοήγησης. Επίσης, μία μικρή απόκλιση της τροχιάς από την προβλεπόμενη τροχιά ενός δορυφόρου προκαλεί σημαντικές επιπτώσεις στο ρυθμό λειτουργίας των χρονομέτρων και απαιτεί επαναπροσδιορισμό της επίδρασης της Σχετικότητας στον χρόνο.

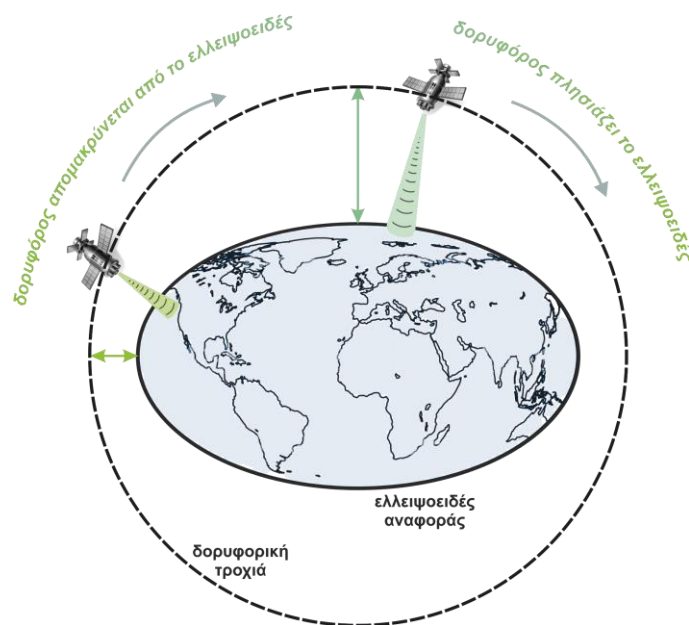
Πέρα από το προβλεπόμενο σφάλμα των χρονομέτρων, το οποίο υπολογίσθηκε με τη χρήση των κατάλληλων εξισώσεων με βάση τη Σχετικότητα, μελετήθηκαν επίσης οι διορθώσεις που εφαρμόζονται στο κύριο όργανο των δορυφόρων αλτιμετρίας. Στόχος ήταν ο εντοπισμός της σχετικιστικής διόρθωσης που χρησιμοποιείται, έτσι ώστε να είναι εφικτή η σύγκριση με το προβλεπόμενο σφάλμα που υπολογίσθηκε από τις εξισώσεις.

Κατά τη μελέτη της αντισταθμιστικής αναγωγής του οργάνου (συνολική διόρθωση που εμπεριέχει όλους τους διορθωτικούς όρους που εφαρμόζονται στο αλτίμετρο) του δορυφόρου Jason-2 (Εικόνα 6.7), εντοπίστηκε ο διορθωτικός όρος Doppler (*Doppler correction*). Λόγω της ημιτονοειδούς μορφής αλλά και του παρόμοιου πλάτους της διόρθωσης Doppler (Εικόνα 6.10) σε σχέση με την προβλεπόμενη μορφή της επίδρασης της Σχετικότητας (Εικόνα 6.5), πιθανολογήθηκε ότι η συγκεκριμένη διόρθωση αντιπροσωπεύει την περιοδική διόρθωση Σχετικότητας λόγω εκκεντρότητας της τροχιάς (Εξ. 4.45). Μέσω της επεξεργασίας όμως, αποδεικνύεται ότι η συγκεκριμένη διόρθωση Doppler που εφαρμόζεται στο αλτίμετρο σχετίζεται με τη μεταβαλλόμενη απόσταση του δορυφόρου από την επιφάνεια αναφοράς του ελλειψοειδούς της Γης, δηλαδή τη μεταβολή της απόστασης δορυφόρου-Γης λόγω επιπλάτυνσης της Γης και όχι λόγω εκκεντρότητας τροχιάς του δορυφόρου.

Εξαιτίας της επιπλάτυνσης της Γης στους πόλους, όσο ο δορυφόρος στην τροχιά του κινείται προς τον ισημερινό, η απόστασή του από το ελλειψοειδές αναφοράς μειώνεται, ενώ όσο απομακρύνεται από τον ισημερινό, η απόσταση αυξάνεται. Αντίστοιχα, όσο ο δορυφόρος στην τροχιά του πλησιάζει τους πόλους, η απόστασή του από το ελλειψοειδές αυξάνεται, ενώ όσο

απομακρύνεται από τους πόλους, η απόσταση μειώνεται.

Το φαινόμενο αυτό συμβάλλει στο γεγονός ότι και η παρατηρούμενη ταχύτητα του δορυφόρου αλτιμετρίας, όπως μετρείται στο ελλειψοειδές της Γης, αυξομειώνεται, ανάλογα με το αν ο δορυφόρος πλησιάζει ή απομακρύνεται από τον ισημερινό (ή τους πόλους). Κατά συνέπεια, είναι αναγκαία μία επιπλέον περιοδική διόρθωση Doppler στο σήμα που εκπέμπει το δορυφορικό αλτίμετρο, η οποία βασίζεται στην περιοδικά μεταβαλλόμενη απόσταση του δορυφόρου από το ελλειψοειδές αναφοράς της Γης. Η ημιτονοειδής αυτή διόρθωση παρουσιάζει ακριβώς τη μισή περίοδο της περιοδικής διόρθωσης Σχετικότητας λόγω εκκεντρότητας τροχιάς. Το φαινόμενο αυτό συμβαίνει γιατί σε μία περιφορά του δορυφόρου, η επίδραση Doppler μηδενίζεται 4 φορές (στον ανιόντα και κατιόντα ισημερινό δεσμό και στον βόρειο και νότιο πόλο), ενώ η επίδραση Σχετικότητας λόγω εκκεντρότητας 2 φορές (στο περίγειο και στο απόγειο της ελλειπτικής τροχιάς).



Εικόνα 7.1: Φαινόμενο Doppler στο παρατηρούμενο σήμα του δορυφόρου λόγω πεπλατυσμένου σχήματος Γης.

Η διόρθωση αυτή δεν μπορεί να συγκριθεί άμεσα με την περιοδική σχετικιστική διόρθωση, η οποία οφείλεται στην εκκεντρότητα της τροχιάς ενός δορυφόρου. Η τελευταία εξάχθηκε χρησιμοποιώντας τον ορισμό του Kepler για την ελλειπτική τροχιά ενός ουράνιου σώματος (δορυφόρος), η οποία έχει στη μία της εστία το *κέντρο μάζας* ενός συμπαγούς σώματος (γεώκεντρο). Στον ορισμό δηλαδή της ελλειπτικής τροχιάς κατά Kepler, η απόσταση δορυφόρου-Γης δεν εξαρτάται από το σχήμα της Γης (ελλειψοειδές), παρά μόνο από τις γεωμετρικές παραμέτρους της ίδιας της τροχιακής έλλειψης.

Η σχετικιστική διόρθωση των χρονομέτρων των δορυφόρων αλτιμετρίας εικάζεται ότι εφαρμόζεται είτε εκ των προτέρων, δηλαδή ακόμα και πριν την εκτόξευση του δορυφόρου,

είτε σε κάποιο από τα γεωδαιτικά συστήματα εντοπισμού (π.χ. στο DORIS) με τα οποία είναι εξοπλισμένος ο δορυφόρος. Η επεξεργασία δεδομένων από το DORIS δεν κατέστη δυνατή και το θέμα χρήζει περαιτέρω έρευνας. Στους παρακάτω πίνακες συνοψίζονται τα παραχθέντα αποτελέσματα της παρούσας εργασίας.

Πίνακας 7.1: Σύνοψη αποτελεσμάτων για δορυφόρους εντοπισμού.

Δορυφόροι Εντοπισμού		GPS	Galileo	GLONASS	BeiDou IGSO
Βαρυτική Μετατόπιση Συχνότητας	μέσο υψόμετρο	20 200 km	23 616 km	19 100 km	35 786 km
	ταχύτερος ρυθμός κατά	45.7 $\mu\text{s/day}$	47.3 $\mu\text{s/day}$	45.1 $\mu\text{s/day}$	51.0 $\mu\text{s/day}$
Διαστολή Χρόνου (Doppler 2^{ης} τάξης)	μέση ταχύτητα	3.874 km/s	3.645 km/s	3.953 km/s	3.074 km/s
	βραδύτερος ρυθμός κατά	7.1 $\mu\text{s/day}$	6.3 $\mu\text{s/day}$	7.4 $\mu\text{s/day}$	4.4 $\mu\text{s/day}$
Ολική Μετατόπιση	ταχύτερος ρυθμός κατά	38.6 $\mu\text{s/day}$	41.0 $\mu\text{s/day}$	37.7 $\mu\text{s/day}$	46.6 $\mu\text{s/day}$
Παραγόμενο σφάλμα στη μετρούμενη απόσταση	μικρότερη απόσταση κατά	11.57 km/day	12.29 km/day	11.30 km/day	13.97 km/day
Μέγιστη μετατόπιση συχνότητας / περίοδο λόγω εκκεντρότητας	εκκεντρότητα	0.01576 (GPS PRN-02)	0.000412 (Galileo SV-22)	0.00351 (GLONASS SV-12)	0.0044638 (BeiDou IGSO-05)
	\pm	36 ns	1 ns	8 ns	13 ns
Μέγιστο σφάλμα στη μετρούμενη απόσταση / περίοδο λόγω εκκεντρότητας	\pm	11 m	30 cm	2.36 m	3.86 m

Πίνακας 7.2: Σύνοψη αποτελεσμάτων για δορυφόρους αλτιμετρίας.

Δορυφόροι Αλτιμετρίας		Jason-3	SARAL/AltiKa	Sentinel-3A	HY-2A
Βαρυτική Μετατόπιση Συχνότητας	μέσο υψόμετρο	1 336 km	800 km	814.5 km	971 km
	ταχύτερος ρυθμός κατά	10.4 $\mu\text{s/day}$	6.7 $\mu\text{s/day}$	6.8 $\mu\text{s/day}$	7.9 $\mu\text{s/day}$
Διαστολή Χρόνου (Doppler 2^{ης} τάξης)	μέση ταχύτητα	7.206 km/s	7.470 km/s	7.450 km/s	6.865 km/s
	βραδύτερος ρυθμός κατά	24.8 $\mu\text{s/day}$	27.7 $\mu\text{s/day}$	26.6 $\mu\text{s/day}$	22.5 $\mu\text{s/day}$
Ολική Μετατόπιση	βραδύτερος ρυθμός κατά	14.4 $\mu\text{s/day}$	20.0 $\mu\text{s/day}$	19.8 $\mu\text{s/day}$	14.6 $\mu\text{s/day}$
Παραγόμενο σφάλμα στη μετρούμενη απόσταση	μεγαλύτερη απόσταση κατά	4.317 km/day	5.996 km/day	5.936 km/day	4.377 km/day
Μέγιστη μετατόπιση συχνότητας / περίοδο λόγω εκκεντρότητας	εκκεντρότητα	0.000095	0.000165	0.001148	0.00117
	\pm	0.12 ns	0.2 ns	1.4 ns	1.44 ns
Μέγιστο σφάλμα στη μετρούμενη απόσταση / περίοδο λόγω εκκεντρότητας	\pm	1.75 cm	2.9 cm	21 cm	22 cm

Προτάσεις για μελλοντική έρευνα

Σε μελλοντική εργασία, η σχετικιστική επίδραση στα χρονόμετρα των δορυφόρων χαμηλού υψόμετρου, όπως των δορυφόρων αλτιμετρίας, πρέπει ενδεχομένως να μελετηθεί εκτενέστερα. Επίσης, ο συνυπολογισμός επιπρόσθετων όρων στην εξίσωση διόρθωσης του χρόνου μπορεί να συμβάλλει στην επίτευξη μεγαλύτερης ακρίβειας στις δορυφορικές μετρήσεις. Ακόμη ένα θέμα που δεν ολοκληρώθηκε στην παρούσα εργασία είναι η επεξεργασία δεδομένων του DORIS, για τη μελέτη των διορθώσεων που εφαρμόζονται σε αυτό.

Επιπλέον, υπάρχουν αρκετές επιπρόσθετες σημαντικές επιδράσεις Σχετικότητας που πρέπει να εξεταστούν, στο επίπεδο ακρίβειας των λίγων εκατοστών (που αντιστοιχεί σε σφάλμα περίπου 100 picoseconds). Πολλοί ερευνητές μοντελοποιούν συστηματικές επιδράσεις στο επίπεδο του χιλιοστού. Επομένως αυτές οι επιδράσεις, οι οποίες επί του παρόντος δεν είναι αρκετά μεγάλες για να επηρεάσουν την πλοήγηση και την αλτιμετρία, ενδέχεται να πρέπει να εξεταστούν και να συμπεριληφθούν στο μέλλον. Ορισμένες από τις επιδράσεις Σχετικότητας που χρήζουν

μελλοντικής έρευνας είναι το εγκάρσιο φαινόμενο Doppler, το φαινόμενο Shapiro (Shapiro time delay), η συστολή του μήκους (effect on geodetic distance), η επίδραση στη μετρούμενη φάση του μεταδιδόμενου σήματος (phase wrap-up) και η επίδραση από άλλα ουράνια σώματα του ηλιακού συστήματος.

Εν κατακλείδι, μέσω της παρούσας εργασίας διαπιστώθηκε ότι ο χρόνος των δορυφόρων σε τροχιά πρέπει απαραίτητα να συγχρονίζεται με τα χρονόμετρα αναφοράς στην επιφάνεια της Γης. Αν οι επιδράσεις Σχετικότητας δεν λαμβάνονται υπ' όψιν στις απαραίτητες διορθώσεις, τα σφάλματα στον εντοπισμό θέσης σημείων θα είναι σημαντικά και οι δορυφορικές μετρήσεις δεν θα έχουν καμία επιστημονική αξία και εφαρμογή. Η κατανόηση της σωστής μέτρησης του χρόνου, των συστημάτων αναφοράς ως προς τα οποία υλοποιούνται όλες οι δορυφορικές μετρήσεις και των εννοιών του χώρου και του χρόνου όπως ορίζονται στη Σχετικότητα συμβάλλουν στην εξέλιξη των δορυφορικών συστημάτων και στη διεύρυνση των επιστημονικών τους εφαρμογών, μέσω της επίτευξης μεγαλύτερης ακρίβειας στις μετρήσεις.

Βιβλιογραφία

- Μερτίκας, Σ., Π. (2002), *Εισαγωγή στη Γεωδαισία και τον Δορυφορικό Εντοπισμό*, Πολυτεχνείο Κρήτης, Εργαστήριο Γεωδαισίας και Γεωπληροφορικής, 5 Οκτωβρίου 2012.
- Μερτίκας Σ., Π. (2016), *Εισαγωγή στη Γεωδαισία τον Δορυφορικό Εντοπισμό και την Αλτιμετρία*, Εκδόσεις Κλειδάριθμος, ISBN 978-960-461-721-0.
- Τομαράς, Θ., Ν. (2011). *Βαρύτητα και Κοσμολογία*, Πανεπιστήμιο Κρήτης, Τμήμα Φυσικής, pp. 1–8.
- Τσιγάνης, Γ., Κ., Βάρβογλης, Χ. (2015). *Πλανητικά Συστήματα*, Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο, Θεσσαλονίκη 2015.
- Allan, D. W., Ashby, N., & Hodge, C. C. (1997). *The Science of Timekeeping*. Hewlett Packard, Vol. AN1289. Retrieved from <https://goo.gl/CXLKvY>
- Allan, D. W., & Leschiutta, S. (1974). *Atomic Frequency Standards*. Alta Frequenza, Vol. 54(2), pp. 221–230. Retrieved from <http://adsabs.harvard.edu/abs/1974AIr...43..844L>
- Ashby, N. (2003). *Relativity in the global positioning system*. Living Reviews in Relativity, Vol. 6(1), <https://doi.org/10.12942/lrr-2003-1>, 28 January 2003.
- Ashby, N. (2006). *Relativistic Effects in the Global Positioning System*, Department of Physics, University of Colorado Boulder, CO 80309-0390, 18 July 2006.
- Ashby, N., & Nelson, R. A. (2009). *The global positioning system, relativity and extraterrestrial navigation*, Relativity in Fundamental Astronomy Proceedings IAU Symposium 2009, International Astronomical Union, No. 261, pp. 1-9. <https://goo.gl/zthRwD>
- Ashby, N. (2002). *Relativity and the Global Positioning System*, Physics Today pp.41–47, American Institute of Physics, S-0031-9228-0205-020-2, May 2002.
- Ashtekar, A., Petkov, V., *Handbook Spacetime, Relativity in GNSS*, Ch. 24, pp. 509-525, ISBN 978-3-642-41991-1, DOI 10.1007/978-3-642-41992-8, Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2014.
- Baak, T. Van. (2008). *A Short Lesson in Allan Deviation (Tides, part 2), Precision Pendulum Clocks, Gravity and Tides*, pp. 1–6, LeapSecond.com, September 2008.
- Barnes, J., A., et al., *Characterization of Frequency Stability*, NBS Technical Note 394, October 1970.
- Barsan, E. (2009). *GPS-GLONASS-GALILEO: a dynamical comparison*, Journal of Navigation, Vol.62, No.I, pp.135-150, Cambridge University Press, January 2009. <https://goo.gl/Atvj6h>
- Beckley, B., et al. (2013). *Integrated Multi-Mission Ocean Altimeter Data for Climate Research TOPEX/Poseidon, Jason-1 and OSTM/Jason-2 User's Handbook (Version 2)*, California Institute of Technology 2013.
- BeiDou Navigation Satellite System (2011). *Signal In Space*, Interface Control Document (Test Version), China Satellite Navigation Office, December 2011.
- Bertschinger, E. (2003). *Coordinates and Proper Time*, 31 January 2003.
- Boucher, C., & Altamimi, Z. (2001). *ITRS, PZ-90 and WGS 84: current realizations and the related transformation parameters*, Journal of Geodesy, Vol.75, pp. 613–619, 12 June 2001.

- Bronner, E., Guillot, A., Picot, N. (2013). *SARAL /AltiKa Products Handbook*, 9 December 2013.
- Chelton, D. B., & Ries, J. C., B. J. Haines, Lee-Lueng Fu and P. S. Callahan (2000). *Satellite Altimetry (Chapter 1)*, 15 March 2000.
- Chobotov, V. A. (2002). *Orbital Mechanics*. AIAA Education Series Air Force Institute of Technology, American Institute of Aeronautics and Astronautics, Inc., Reston, Virginia, 1-56347-537-5, <https://doi.org/10.2514/4.862250>
- Clark, T., Hambly, R. (2003). *Timing for VLBI*, pp. 1–25, IVS TOW Meeting, 21-24 September 2003.
- Daw, E. (2011). *The relativistic doppler shift of light (Lecture 6)*, pp. 1–8, Sheffield University, 4 April 2011.
- Dawoud, S. (2012). *GNSS principles and comparison*, Potsdam University, Potsdam Germany 2012.
- Delporte, J. *The Definition and Implementation of Galileo System Time (GST)*.
- Delva, P. (2015). *GNSS: physique fondamentale et relativité*, Journée GNSS et Science, CNES 29 January 2015.
- Delva, P., Hees, A., Bertone, S., Richard, E., & Wolf, P. (2015). *Test of the gravitational redshift with stable clocks in eccentric orbits: application to Galileo satellites 5 and 6*, pp. 1–13, 21 October 2015.
- Dumont, J., et al. (2016). *Jason-3 Products Handbook*, 12 February 2016.
- Eardley, D., F. Dyson, P Horowitz, W. Press, M. Ruderman, I. Shapiro, S. Treiman. (1985). *Relativistic Effects in the Global Positioning System*, JSR-84-104 Technical Report, The MITRE Corporation, May 1985.
- EUMETSAT (2010). *Satellite Altimetry*, EUM/OPS/DOC/09/4920, Vol. 1, pp. 1–2, 19 July 2010.
- Gini, A., *Satellite Orbits: GEO – LEO – MEO*, Space Safety Magazine, 8 July 2014.
- GPS Interface Control Document (1993), ICD-GPS-200C, 10 October 1993.
- Hahn, Jörg H., et al., *GIOVE-A Apparent Clock Assessment and Results*, Proceedings of the 39th Annual Precise Time and Time Interval Meeting, pp. 95-114, Long Beach California, November 2007. <https://goo.gl/a6cIb5>
- Hager, B., H. (2002). *The Earth's Gravitational field*, Essentials of Geophysics Lecture notes, pp. 25–64, MIT Department of Geodesy and Geodynamics, Fall 2002.
- Habrich, H., Neumaier, P., & Fischer, K. (1998). *GLONASS Orbit Determination*, Federal Agency of Cartography and Geodesy, Germany 1998.
- Higgins, K., D. Miner, C.N. Smith, D.B. Sullivan, *A Walk Through Time*, National Institute of Standards and Technology, 2010.
- Hofmann-Wellenhof, B., Lichtenegger, H., Collins, J. (1992). *Global Positioning System Theory and Practice*. Springer-Verlag Wien 1992.
- Howard D. Curtis, *Orbital Mechanics for Engineering Students*, Embry-Riddle Aeronautical University, Daytona Beach, Florida, Elsevier Aerospace Engineering Series, ISBN 0 7506 6169 0, 2005.

- IERS (2001). *Conventional Terrestrial Reference System and Frame*, IERS Technical Note, No. 32, pp. 21–32.
- International Hydrographic Bureau (2008). *User's Handbook On Datum Transformations Involving WGS 84*, Special Publication No. 60, Monaco, August 2008.
- Jensen, A. B. O. (2010). *GNSS Satellite Orbits*, Lecture notes DTU, 28 August 2010.
- Kawadu, R. R. (2013). *Data analysis on boundary value problem (spherical body)*, International Journal of Research in Science And Technology, Vol. 2, No.5, pp. 18–26, April-June 2013.
- Kox, A. J., Klein M. J., Schulmann R. *The Collected Papers of Albert Einstein, Volume 6, The Berlin Years: Writings, 1914-1917*, pp. 146-200, ISBN 9780691010861, Princeton University Press 1997.
- Langley, B., R. (1991). *The Orbits of GPS Satellites*, GPS World, March 1991.
- Larson, K. M., Ashby, N. Hackman, C. & Bertiger, W. (2007). *An Assessment of Relativistic Effects for Low Earth Orbiters: the GRACE Satellites*, Metrologia, Vol. 44, No. 6, 7 November 2007.
- Levine, J. (2002). *Time and frequency distribution using satellites*, Progress in Physics Vol. 65, pp. 1119–1164, 5 July 2002.
- Morrow, R. (2008). *Satellite Altimetry*, Laboratoire d' Etudes Géophysiques et Océanographiques Spatiales, August 2008.
- Murray, W. A. S. (1986). *If you want to know the time*, pp. 28–31.
- NIMA (2000). *Department of Defense World Geodetic System 1984*, NIMA Technical Report 8350.2, 3 January 2000.
- Peraire, J., & Widnall, S. (2008). - *Central Force Motion: Kepler's Laws Kepler's Laws*, MIT Lecture Notes L15, pp. 1–12, Fall 2008.
- Post, E., J. (1967). *Sagnac Effect*, Reviews of Modern Physics, Vol. 39, No. 2, April 1967.
- Page C., H., Vigoureux P. (1975). *The International Bureau of Weights and Measures 1875-1975*, U.S. Department Of Commerce National Bureau of Standards, NBS Special Publication 420, May 1975.
- Petit, G., Luzum, B. (2010). *IERS Conventions (2010)*, IERS Technical Note No.36.
- Sellers, J., J., *Orbit Perturbations*, Astronautics Primer, www.agi.com.
- Taylor B., N., Thompson A., NIST (2008). *The International System of Units (SI)*, U.S. Department of Commerce, NIST, March 2008, pp. 1–10.
- Waller, P., Gonzalez, F., Hahn, J., Binda, S., Piriz, R., Hidalgo, I., Cerretto, G. (2008). *IN-ORBIT PERFORMANCE ASSESSMENT OF GIOVE CLOCKS*, ESA ESTEC, 40th Annual Precise Time and Time Interval (PTTI) Meeting, 1 December 2008.
- Wilson, A. (2006). *The First Galileo Satellites, Galileo In-OrbitValidation Element*, ESA ESTEC August 2006.
- Yoder C. F. et al. (1983). *Secular variation of Earth's gravitational harmonic J2*, Nature, Vol. 303, No. 5920, pp. 757-762, 30 June 1983. J2Dot83.pdf. (n.d.).
- Željko, H. (2013). *Relativistic effects on satellite navigation*, Tehnički vjesnik, Vol. 20, No. 1, pp.

195-203.

Bureau International des Poids et Mesures, *International Atomic Time*. <https://goo.gl/wQelwA>

Cornell University, Department of Astronomy, Academics, *Sidereal Time*. <https://goo.gl/NDddnE>

International Earth Rotation and Reference Systems Service. <https://www.iers.org>

International Terrestrial Reference Frame. <http://itrf.ensg.ign.fr/>

Hydrographic and Marine Software Solutions. <https://goo.gl/o8Iug8>

Royal Observatory of Belgium, GNSS Research Group. http://gnss.be/systems_tutorial

Time and Date AS. <https://goo.gl/uMkEEo>

ESA, Observing the Earth. http://www.esa.int/Our_Activities/Observing_the_Earth

CNES. <https://cnes.fr/en>

EUMETSAT. <http://www.eumetsat.int/>

AVISO⁺ Satellite Altimetry Data, CNES. <http://www.aviso.altimetry.fr/>

Radar Altimetry Tutorial & Toolbox, CNES, ESA. <http://www.altimetry.info/>

EO, Satellite Missions Database. <https://directory.eoportal.org/>

Satellite Orbit Data. <http://heavens-above.com/>

Jet Propulsion Laboratory, California Institute of Technology, NASA. <http://www.jpl.nasa.gov/>