

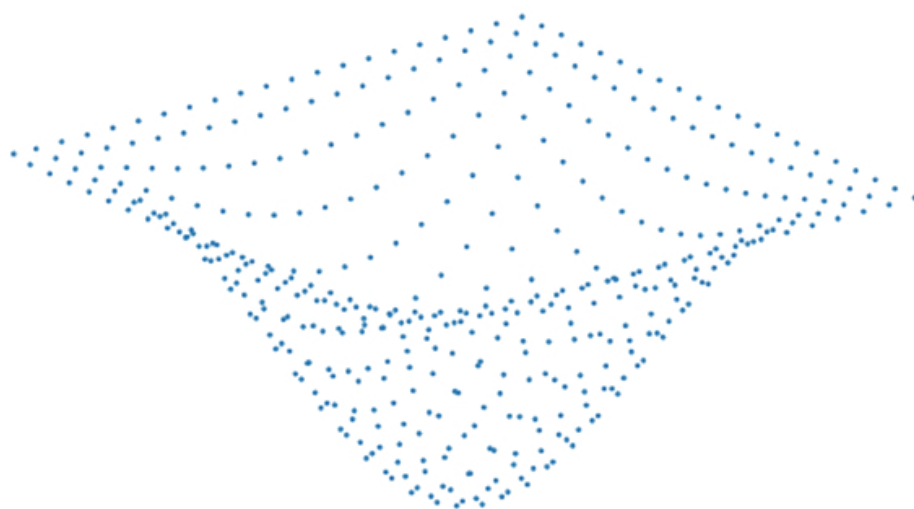


Πολυτεχνείο Κρήτης

Τμήμα Μηχανικών Παραγωγής και Διοίκησης

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Θέμα: Στατική Ανάλυση προβλήματος Κάμψης σε τετραγωνική Πλάκα



φοιτητής:

ΧΡΙΣΤΟΣ ΜΑΝΟΥΣΟΣ

επιβλέπων:

ΓΕΩΡΓΙΟΣ ΣΤΑΥΡΟΥΛΑΚΗΣ

Χανιά, Ιούνιος 2017

**Στατική Ανάλυση Προβλήματος Κάμψης
σε Τετραγωνική Πλάκα**

Χρίστος Παναγιώτης Γ. Μανούσος

Εξεταστική Επιτροπή

Σταυρουλάκης Γεώργιος (Επιβλέπων)
Καθηγητής Πολυτεχνείου Κρήτης

Αριστομένης Αντωνιάδης
Καθηγητής Πολυτεχνείου Κρήτης

Νικόλαος Μπιλάλης
Καθηγητής Πολυτεχνείου Κρήτης

Ευχαριστίες

Για την παρούσα διπλωματική εργασία, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα Καθηγητή μου Γεώργιο Σταυρουλάκη για το επιστημονικό υπόβαθρο και την καθοδήγηση που μου προσέφερε, αλλά κυρίως για την θετική του διάθεση και τις αξίες οι οποίες θα με συνοδεύουν στην μετέπειτα πορεία μου στη ζωή. Επίσης θα ήθελα να ευχαριστήσω την κ. Αλίκη Μουράντοβα και τον κ. Γιώργο Ταϊρίδη για την καθοδήγηση και την υπομονή τους.

Ευχαριστώ και όλους μου τους φίλους για τα ανεπανάληπτα φοιτητικά μας χρόνια στα Χανιά. Τέλος ένα μεγάλο ευχαριστώ στους γονείς μου Άρια και Γιάννη για την υποστήριξή τους σε κάθε εμπόδιο και δυσκολία της ζωής μου.

Η παρούσα διπλωματική αφιερώνεται
στους γονείς μου
και στους φίλους μου
που η χαρά τους να με δούν να εκπληρώνω τα όνειρα μου, ήταν και θα είναι, το
μεγαλύτερο πάτημα για να προχωρώ.

Περιεχόμενα

Εισαγωγή.....	3
Ανάλυση των Κατασκευών.....	5
1.1 Τι είναι Μηχανική.....	6
1.2 Στατική και Δυναμική Ανάλυση.....	6
1.3 Η έννοια της Ανάλυσης Κατασκευών.....	7
1.4 Η μέθοδος των Πεπερασμένων Στοιχείων	8
1.4.1 Έννοια	8
1.4.2 Ιστορική Αναδρομή.....	10
1.4.3 Φασματική Ανάλυση (SFEM)	10
1.5 Ανάλυση Κατασκευών.....	11
1.5.1 Ορισμοί.....	11
1.5.2 Τρόπος Πραγματοποίησης της Ανάλυσης.....	12
Θεωρία Πλακών.....	13
2.1 Ορισμός- Έννοια.....	14
2.1.1 Ορισμός.....	14
2.1.2 Ορθές και διατμητικές τάσεις.....	15
2.2 Θεωρία Πλακών.....	16
2.2.1 Η θεωρία Kirchhoff.....	16
2.2.2 Επίπεδη παραμόρφωση.....	16
2.2.3 Επίπεδη ένταση.....	18
2.2.4 Η Μέθοδος του Mindlin.....	19
2.3 Συνοριακές Συνθήκες.....	20
Δομικά Υλικά.....	22
3.1 Ισότροπα Υλικά.....	23
3.1.1 Ισότροπος Ελαστικός Καταστατικός Νόμος.....	23

3.2 Ελαστική παραμόρφωση.....	23
3.3 Σκληρότητα Υλικών.....	24
3.4 Άλλες θεμελιώδης έννοιες	24
3.4.1 Λόγος Poisson.....	24
3.4.2 Μέτρο ελαστικότητας.....	25
Επεξεργασία Πειραμάτων.....	27
4.1 Προσδιορισμός προβλήματος.....	27
4.2 Τα υλικά.....	33
4.2.1 Κράματα Χαλκού.....	33
4.2.2 Υαλοκεραμικά υλικά.....	34
4.2.3 Ενισχυμένο Σκυρόδεμα.....	34
4.3 Παρουσίαση Αποτελεσμάτων.....	35
4.3.1 Κράμα Χαλκού- C26000.....	36
4.3.2.1 Προσομοίωση 1 ^η	36
4.3.2.1 Προσομοίωση 2 ^η	38
4.3.2 Υαλοκεραμικό (pyroceram)	39
4.3.2.1 Προσομοίωση 3 ^η	40
4.3.2.2. Προσομοίωση 4 ^η	41
4.3.3 Οπλισμένο σκυρόδεμα.....	42
4.3.3.1 Προσομοίωση 5 ^η	42
4.3.3.2 Προσομοίωση 6 ^η	43
4.4 Συμπεράσματα.....	44
Παράρτημα Α'	46
Παράρτημα Β'	61
Βιβλιογραφία.....	94

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η μελέτη και η δημιουργία μιας μηχανικής κατασκευής μεταφράζεται σε μια διαδικασία επίλυσης ενός προβλήματος, τη λύση δηλαδή διαφορεικών εξισώσεων.

Ο ρόλος της Μηχανικής και της Στατικής έχει ως κύριο στόχο να αναπτύξει οποιοδήποτε πρόβλημα με τον πιο απλό τρόπο και να το επιλύσει εφαρμόζοντας τις θεμελιώδεις αρχές που διέπουν την φύση. Από την άλλη πλευρά, υποχρέωση του μηχανικού είναι να υπολογίσει κάθε μια πιθανή περίπτωση των δυνάμεων και τάσεων που δέχετε μια κατασκευή, ώστε αυτή να είναι αξιόπιστη και να αποτραπεί η περίπτωση κατάρρευσής της.

Οι τάσεις που δημιουργούνται σε ένα σώμα, κατ'επέκτασιν των εσωτερικών και εξωτερικών δυνάμεων που ασκούνται στην εκάστοτε κατασκευή, κυμαίνονται μεταξύ κάποιων ορίων. Τα όρια αυτά υπολογίζονται στη σύγχρονη εποχή, όπου ο υπολογιστικός φόρτος είναι μεγάλος, με την χρήση ηλεκτρονικών υπολογιστών.

Η πιο σύνηθης μέθοδος επίλυσης των περίπλοκων αυτών εξισώσεων είναι αυτή των πεπερασμένων στοιχείων. Η μέθοδος αυτή είναι εκείνη που χρησιμοποιείται σε αυτή τη διπλωματική.

Στη συγκεκριμένη περίπτωση επιχειρείται η μελέτη των δυνάμεων κάμψης που ασκούνται σε μια τετραγωνική πλάκα μέσω της θεωρίας του Mindlin για λεπτές πλάκες. Η θεωρία αυτή είναι επέκταση εκείνης του Kirchhoff και αναπτύσσεται με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων

Κεφάλαιο 1^ο

Ανάλυση Κατασκευών

1.1 Τι είναι τελικά η Μηχανική

Η Μηχανική είναι μια επιστήμη, μια φυσική και εφαρμοσμένη επιστήμη. Φυσική γιατί ασχολείται με τη πρόβλεψη και τη μελέτη των φυσικών φαινομένων. Τα εξηγεί και εφαρμόζει τις βασικές της αρχές για να επιλύσει τα προβλήματα που προκύπτουν. Εφαρμοσμένη, γιατί συνδέεται με τα μαθηματικά αλλά και την τεχνική του πώς θα κατασκευαστεί κάτι που ο άνθρωπος χρειάζεται. Διότι όλα γίνονται για την διευκόλυνση του ανθρώπου ώστε να γίνει η ζωή του πιο εύκολη. Η μηχανική λοιπόν είναι η επιτομή όλων των παραπάνω. Η θεωρία και η εφαρμογή.

Η Μηχανική ξεκίνησε με την πρόβλεψη και την περιγραφή των καταστάσεων της κίνησης ή της ακινησίας των σωμάτων υπό την δράση δυνάμεων ή την αδράνεια αυτών. Η μελέτη ξεκίνησε από τα πολύ βασικά προβλήματα που εμφανίστηκαν. Πώς θα σταθεί ένα σπίτι; πώς θα μεταφερθούν τα ξύλα ή οι πέτρες ώστε να μην τις κουβαλάνε οι άνθρωποι; (εφεύρεση του τροχού, του γερανού). Πώς θα μεταφέρουμε το νερό εκεί που θέλουμε; Πώς θα παράγουμε ενέργεια;

Η μηχανική λοιπόν εξαπλώνεται σε όλους τους τομείς των ανθρώπινων δραστηριοτήτων. Ο τομέας όμως που θα ασχοληθούμε εμείς είναι αυτός της **στατικής των σωμάτων**. Ο τομέας αυτός διαιρείται σε τρία μέρη. Τη μηχανική των στερεών σωμάτων, τη μηχανική των παραμορφώσιμων σωμάτων και τη μηχανική των ρευστών σωμάτων.

Η μηχανική των στερεών σωμάτων υποδιαιρείται στη στατική και τη δυναμική. Έννοιες τις οποίες θα αναλύσουμε στη συνέχεια. Η μηχανική των παραμορφώσιμων σωμάτων εμπλέκεται στην περίπτωση που θέλουμε να αναπαράγουμε ακριβώς τις συνθήκες τις οποίες θα έχουμε στην κατασκευή. Με την τρίτη κατηγορία αυτή των ρευστών στοιχείων δεν θα ασχοληθούμε. (Beer, 2016)

1.2 Στατική και δυναμική Ανάλυση

Όπως είναι γνωστό, τα φορτία που δέχονται οι κατασκευές χωρίζονται σε δύο κύριες κατηγορίες, στατικά και δυναμικά ή αλλιώς, σταθερά ή μεταβαλλόμενα με το χρόνο. Η δυναμική ανάλυση κατασκευών, με χρήση της φασματικής μεθόδου, βασίζεται στους φυσικούς τρόπους ταλάντωσης του μηχανικού συστήματος μιας κατασκευής για τον υπολογισμό των μέγιστων τιμών απόκρισης όταν αυτό υποβάλλεται σε δυναμική διέγερση.

Η εφαρμογή της φασματικής αντισεισμικής μεθόδου ανάλυσης, για παράδειγμα, απαιτεί ως πρώτο βήμα, τον καθορισμό ενός κατάλληλου μοντέλου προσομοίωσης, το οποίο να μπορεί να περιγράψει σωστά τη μηχανική συμπεριφορά του φορέα. Στην

πράξη για το δυναμικό υπολογισμό των κατασκευών γίνεται μια σειρά απλοποιήσεων. (Kristal, n.d.)

Η Δυναμική Ανάλυση των δομικών κατασκευών εξετάζεται με δύο διαφορετικές μεθόδους, μια εκ των οποίων εμπλέκει φορτίσεις χαμηλής συχνότητας ενώ η άλλη περιλαμβάνει φορτίσεις υψηλής συχνότητας.

Τα προβλήματα χαμηλής συχνότητας κατηγοριοποιούνται ως προβλήματα Δυναμικής των Κατασκευών, ενώ εκείνα που αφορούν τις φορτίσεις υψηλών συχνοτήτων στην κατηγορία των προβλημάτων Κυματικής Διάδοσης.

Σε διαρθρωτικά προβλήματα δυναμικής, το περιεχόμενο της συχνότητας του δυναμικού φορτίου είναι της τάξης των μερικών εκατοντάδων hertz (Hz) και οι σχεδιαστές θα πρέπει να ενδιαφέρονται ως επί το πλείστον για τη μόνιμη κατάσταση των αποτελεσμάτων της δυναμικής φόρτισης για τις δομές. Ως εκ τούτου, οι πρώτες κανονικές λειτουργίες και οι πρώτες φυσικές συχνότητες είναι επαρκείς για την αξιολόγηση της απόδοσης της δομής τους, ενώ η πληροφορία για τη φάση της απόκρισης δεν είναι κρίσιμη. Τα περισσότερα από τα δυναμικά προβλήματα των κατασκευών εμπίπτουν στην κατηγορία αυτή.

Από την άλλη πλευρά, για τα προβλήματα της Κυματικής Διάδοσης, το περιεχόμενο των συχνοτήτων των διαφόρων φορτίσεων στην είσοδο είναι υψηλή (της τάξεως των kilohertz (kHz) ή ακόμα υψηλότερη) και ως εκ τούτου, οι βραχυπρόθεσμες επιδράσεις (παροδική απόκριση) γίνονται πολύ κρίσιμες. Επιπλέον, πολλές λειτουργίες υψηλότερης τάξης θα συμμετάσχουν προκειμένου να γίνει ενίσχυση της δυναμικής απόκρισης. Περιπτώσεις συγκρούσεων και εκρήξεων της φόρτωσης υπάγονται σε αυτή την κατηγορία. Η πολυτροπική φύση της διάδοσης κυμάτων κάνει κάθε παράμετρο πολύ σημαντική, και αυτό είναι η λεγόμενη πληροφορία φάσης. (Gopalakrishnan, 2008)

1.3 Η Έννοια της Ανάλυσης Κατασκευών

Οι αυξημένες απαιτήσεις των σύγχρονων κατασκευών καθιστούν σχεδόν αδύνατη την επίλυση φορέων με υπολογισμούς των εξισώσεων που απαιτούνται, με το χέρι, χρησιμοποιώντας τις πιο παλιές και κλασικές μεθόδους ανάλυσης.

Ο σύγχρονος μελετητής λοιπόν χρησιμοποιεί αποκλειστικά πλέον προγράμματα ηλεκτρονικού υπολογιστή που βασίζονται στις λεγόμενες *Μητρωικές Μεθόδους Ανάλυσης Κατασκευών*. Τα προγράμματα αυτά βασίζονται στην Μέθοδο των Πεπερασμένων Στοιχείων που αντιμετωπίζει με ενιαίο τρόπο σύνθετα προβλήματα ανάλυσης φορέων οποιασδήποτε μορφής.

Η Ανάλυση των Κατασκευών εστιάζεται συνήθως στα έργα του πολιτικού μηχανικού και την ανάλυση των επίγειων φορέων, στα πλεούμενα σκάφη που αποτελούν το αντικείμενο του ναυπηγού μηχανικού και στα έργα του μεταλλειολόγου μηχανικού ή του μηχανικού ορυκτών πόρων (γεωτρύπανα, εκρήξεις). Εκτός όμως από τις παραπάνω σύνηθες εφαρμογές, πολύ σημαντική είναι και η συμβολή στο έργο του μηχανολόγου μηχανικού στη βιομηχανία.

Κατά τη φάση της ανάπτυξης και σχεδιασμού (research and development R&D) ενός προϊόντος, η μηχανολόγοι εξετάζουν την βιωσιμότητα των ιδεών τους και επιθυμούν να ελέγξουν και βεβαίως να αξιολογήσουν, τις ιδέες τους προτού αναπτυχθεί το τελικό προϊόν. Οι επιλογές αφορούν α) τον καθορισμό του σχήματος (γεωμετρία) ώστε αυτό να είναι λειτουργικό, β) την αντοχή του και το βάρος του ώστε να είναι ανθεκτικό και όσον το δυνατόν πιο ελαφρύ, καθώς επίσης και γ) την επιλογή του υλικού με τέτοιο τρόπο ώστε να εξασφαλίζεται η δομική του ακεραιότητα κατά τη λειτουργία του. (Προβατίδης, 2016)

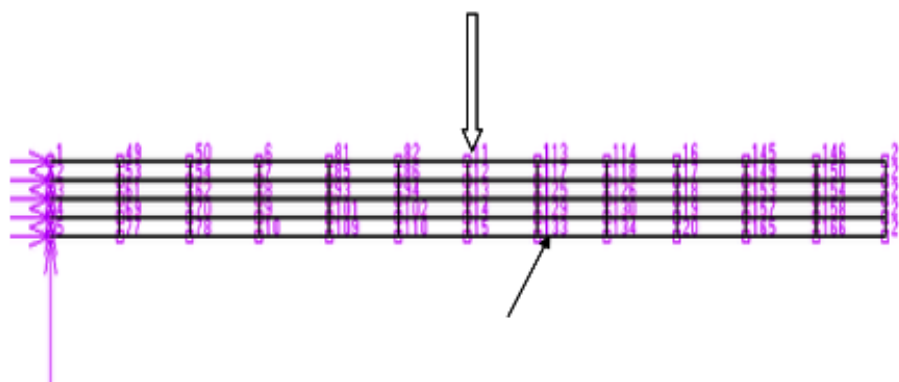
1.4 Η Μέθοδος των Πεπερασμένων στοιχείων (ΜΠΕ)

1.4.1 Ορισμός

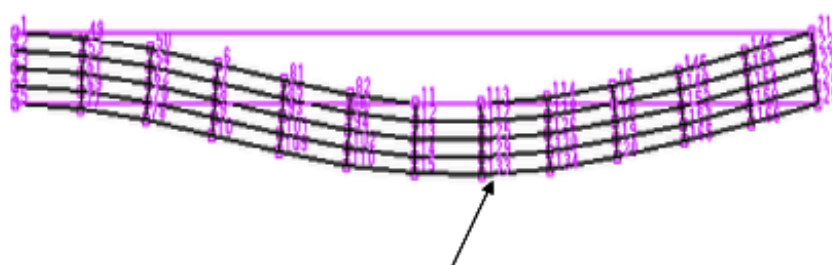
Η βασική ιδέα της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων είναι η αντικατάσταση συνεχών συναρτήσεων με τμηματικές προσεγγίσεις, συνήθως πολυώνυμα. Η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων απαιτεί την κατάτμηση του χωρίου σε μικρότερα κομμάτια, τα πεπερασμένα στοιχειά, και τη χρήση μεθόδων μεταβολών, από το διαφορικό λογισμό, με στόχο την επίλυση του προβλήματος.

Η κατάτμηση του χωρίου σε απλουστέρα τμήματα έχει πολλά πλεονεκτήματα. Με τον τρόπο αυτό μπορούν να περιγραφούν συνθέτες γεωμετρικές μορφές, να ληφθούν υπόψη διαφορετικές ιδιότητες υλικού ή, με τη χρήση μικρότερων στοιχείων σε ορισμένες περιοχές, να δοθεί βάρος στη λεπτομερέστερη περιγραφή τους και τον υπολογισμό τοπικών φαινομένων.

Ουσιαστικά η μέθοδος αυτή γίνεται χωρίς τη διενέργεια πειραμάτων. Με την εφαρμογή των υπολογιστικών τεχνικών στον Η/Υ μπορούμε να αποφύγουμε την εκτέλεση δαπανηρών και χρονοβόρων πειραμάτων και έτσι να επιταχύνουμε το σχεδιασμό των κατασκευών. Η μέθοδος των Πεπερασμένων στοιχείων (Finite Element Method, FEM) είναι προσεγγιστική με μεγάλο όμως βαθμό ακριβείας, και όπως η γεωμετρία μιας κατασκευής μπορεί να προσεγγιστεί τμηματικά, έτσι και η λύση μιας διαφορικής εξίσωσης μερικών παραγώγων που περιγράφει τη συμπεριφορά μιας κατασκευής, μπορεί να προσεγγιστεί επίσης τμηματικά.



Εικόνα 1.4.1. Απεικόνιση πεπερασμένων στοιχείων όπως αυτά διαμορφώνονται μετά την κατάτμηση του χωρίου σε κελιά.



Εικόνα 1.4.2. Απεικόνιση των πεπερασμένων στοιχείων όπως αυτά διαμορφώνονται μετά την φόρτιση της πλάκας.

Με άλλα λόγια, ενώ τα περισσότερα προβλήματα των εφαρμοσμένων μαθηματικών τίθενται υπό μορφή διαφορικών εξισώσεων, η λύση αυτών μέσω αυτής της μεθόδου βασίζεται σε ιδέες οι οποίες είναι πολύ παλαιότερες εκείνων που χρησιμοποιούνται για τη δημιουργία των εξισώσεων αρχικά. (Σταυρουλάκης, 2015)

1.4.2 Ιστορική αναδρομή

Η χρήση τέτοιων μεθόδων ‘πεπερασμένων στοιχείων’ ξεκίνησε από πολύ παλιά για να προσδιορίσουν μια προσεγγιστική τιμή του $\pi \sim 3,14$ ενώ η ουσιαστική του εφαρμογή, με την χρήση ηλεκτρονικών υπολογιστών παρουσιάστηκε περί το τέλος του Β’ Παγκοσμίου πολέμου. Ακόμη παλαιότερα ο Αρχιμήδης, ο έλληνας μαθηματικός, χρησιμοποίησε μεθόδους τμηματικών προσεγγίσεων για να προσδιορίσει τις επιφάνειες επίπεδων σχημάτων και τους όγκους των στερεών.

Οι μηχανικοί είχαν τοποθετήσει τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων ως μια πρακτική τεχνική για την επίλυση προβλημάτων τους σχετικά με την ελαστικότητα, και παρόλο που δεν είχε αναπτυχθεί μια αυστηρή μαθηματική βάση, τα επόμενα χρόνια είδαν την επέκταση της μεθόδου για την επίλυση μιας μεγάλης ποικιλίας δομικών προβλημάτων. Λύσεις τρισδιάστατων προβλημάτων απαιτήσαν απλές μόνο επεκτάσεις της βασικής θεωρίας των δύο διαστάσεων. Το προφανές πρόβλημα προς εξέταση μετά από προβλήματα επίπεδης κατάστασης ήταν η κάμψη πλακών.

Σε αυτή την περίπτωση, οι ερευνητές αντιμετώπισαν τις πρώτες πραγματικές δυσκολίες και οι αρχικές προσπάθειες δεν ήταν καθόλου επιτυχημένες. Όμως αργότερα τα προβλήματα συμβατότητας επιλύθηκαν από τους Bazely and al. το 1965. (Προβατίδης, 2016)

1.4.3 Φασματική Ανάλυση Πεπερασμένων στοιχείων (Spectral finite element method, SFEM)

Η συνεχής έρευνα των τελευταίων δεκαετιών και η αναγκαστική χρήση της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων σε όλα τα φάσματα και τους κλάδους της μηχανολογίας, έχει επιφέρει την ανάπτυξη διαφόρων εναλλακτικών μεθόδων πεπερασμένων στοιχείων, χωρίς να απαιτούν αυστηρά την τοπολογία των πεπερασμένων στοιχείων αλλά κατά κανόνα στηρίζονται σε ένα πλέγμα υποβάθρου που ουσιαστικά δεν διαφοροποιούν τις λεπτομέρειες (π.χ. μία θραύση ή μια ρωγμή).

Διάφορες αριθμητικές μέθοδοι έχουν προταθεί και χρησιμοποιηθεί για τη διερεύνηση της κυματικής διάδοσης σε ρεαλιστικά φαινόμενα.

Μια από αυτές τις μεθόδους είναι και η Φασματική Μέθοδος (Spectral Element Method: SEM) η οποία χρησιμοποιεί υψηλού βαθμού πολώνυμα που στηρίζονται στο ανάπτυγμα σε πολώνυμα Chebyshev ή σε τριγωνομετρικές σειρές. Έχει αναπτυχθεί κυρίως σε προβλήματα διάδοσης κυμάτων 3D ελαστικών μέσων. Η Φασματική Μέθοδος είναι μια ιδιαίτερα ακριβής στα αποτελέσματα της αριθμητική μέθοδος που έχει τις ρίζες της στην υπολογιστική ρευστοδυναμική. Αρχικά μάλιστα η

μέθοδος αυτή προτάθηκε από έλληνα καθηγητή, τον Α. Πατέρα, το 1984 για την επίλυση αυτών των προβλημάτων.

Η ανάπτυξη της ήταν το αποτέλεσμα του συνδυασμού της ακριβής και ταχείας σύγκλισης των ψευδο-φασματικών μεθόδων με τη γεωμετρική ευελιξία που προσφέρει η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων (FEM), ενώ όταν αντιμετωπίζει προβλήματα μη επίπεδων επιφανειών δεν επιβαρύνει τη διαδικασία με πρόσθετες εξισώσεις. (Ostachowicz, n.d.)

1.5 Ανάλυση κατασκευών

1.5.1 Έννοια

Ο όρος ‘Κατασκευή’ είναι διευρυμένος και αναφέρεται σε παντός είδους ελαστικές δομές που συναντώνται στους κλάδους του Πολιτικού μηχανικού, του Αεροναυπηγού μηχανικού, του Μηχανολόγου Μηχανικού κλπ.

Εκτός από την ελαστική δομή που είναι το βασικό τμήμα κάθε φέροντος οργανισμού ή του σκελετού μίας μηχανής, η ανάλυση μιας κατασκευής μπορεί να περιλαμβάνει και πρόσθετα άλλα φυσικά φαινόμενα που εμφανίζονται μέσα ή γύρο από το κέλυφος των μηχανών ή των δομών. Τέτοια φαινόμενα είναι η μετάδοση θερμότητας (θερμικά φαινόμενα), η διάδοση του ήχου (ακουστικά φαινόμενα), η υδροδυναμική λίπανση σε ένα έδρανο κύλισης και άλλα ρευστομηχανικά φαινόμενα (στρωτής ή τυρβώδους ροής) όπως για παράδειγμα η ροή του αέρα σε ένα κτήριο ή σε ένα τούνελ καθώς διέρχεται ένα τρένο, ηλεκτρομαγνητικά φαινόμενα κλπ. Πολλές φορές τα διάφορα φυσικά φαινόμενα αλληλεπιδρούν με το ελαστικό σώμα και τότε μιλάμε για φυσική πολλαπλών σωμάτων (multiphysics).

Ο όρος ‘Ανάλυση Κατασκευών’ αναφέρεται στην εύρεση της συμπεριφοράς μιας κατασκευής υπό την επενέργεια των πιο πάνω φυσικών φαινομένων, με χρήση μαθηματικών μοντέλων που, τα τελευταία κυρίως χρόνια, γίνεται με την χρήση H/Y. (Προβατίδης, 2016)

Ασφαλώς, προϋπόθεση για την ανάλυση μιας κατασκευής είναι η γνώση:

- Του γεωμετρικού σχήματος
- Του τρόπου στήριξης
- Των επιβαλλόμενων φορτίων

1.5.2 Τρόπος πραγματοποίησης της Ανάλυσης

Ο τρόπος που πραγματοποιείται η Ανάλυση μιας Κατασκευής δεν είναι μονοσήμαντος αλλά εξαρτάται από πολλούς παράγοντες, τεχνικούς και οικονομικούς, ανάλογα με τις τρέχουσες ανάγκες παραγωγής ή ελέγχου. Πιο συγκεκριμένα, ανάλογα με την επιθυμητή ακρίβεια προσομοίωσης, την κρισιμότητα της κατάστασης και τον διαθέσιμο χρόνο ή ανάλογα με ένα προκαθορισμένο προϋπολογισμό μελέτης. Ως αποτέλεσμα της προμελέτης, μια κατασκευή μπορεί να μοντελοποιηθεί είτε σαν συνεχές μέσο, είτε με διακριτά στοιχεία, με την συνεχή μοντελοποίηση να είναι η πιο πιστή αναπαράσταση της πραγματικότητας.

Οι περισσότερες κατασκευές ή δομές σχηματίζονται από ένα συνεχές μέσο που συγκροτείται από ένα οι περισσότερα υλικά, όπως δοκοί (κολώνες, δοκάρια, πλαίσια), ράβδοι (δικτυώματα), ελατήρια, πλάκες, κελύφη, τόξα, χορδές, μεμβράνες και αλυσοειδείς. Αυτή η διακριτοποίηση των υλικών και των στοιχείων ισχύει στους περισσότερους κλάδους της μηχανικής καθώς επίσης και στην ανάλυση της ελαστικότητας και σε όλα τα άλλα φυσικά φαινόμενα που αναφέραμε (π.χ. θερμικά, ακουστικά, ρευστομηχανικά), που μπορούν να αναλυθούν ως μονοδιάστατα, δισδιάστατα, αξονοσυμμετρικά ή ως πλήρη τρισδιάστατα. (Προβατίδης, 2016)

Κεφάλαιο 2^ο

Θεωρία Πλακών

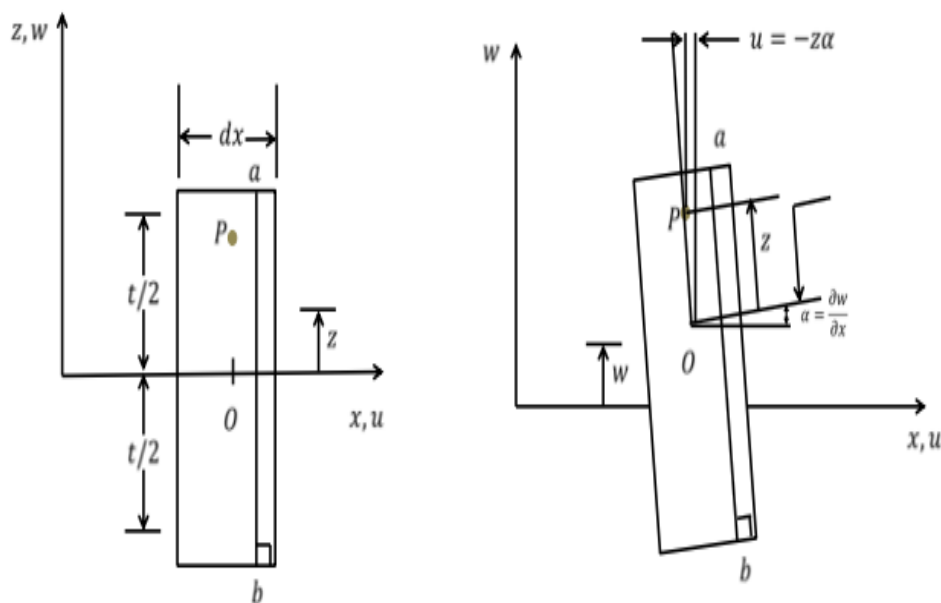
2.1 Ορισμός-Έννοιες

2.1.1 Ορισμός

Μια πλάκα ορίζεται ως ένα επίπεδο σώμα του οποίου το πάχος είναι πολύ μικρότερο από τις υπόλοιπες διαστάσεις του. (Σταυρουλάκης, 2015)

Μια πλάκα αναπτύσσει ροπές κάμψης σε δύο κατευθύνσεις και μία στρεπτική ροπή. Θεωρούμε δηλαδή ότι η πλάκα έχει καμπτική ακαμψία σε δύο διευθύνσεις και επιπλέον ακαμψία στρεπτικής παραμόρφωσης. (Σταυρουλάκης, 2015)

Δύο είναι οι πιο γνωστές θεωρίες για ανάλυση μιας πλάκας σε κάμψη, ανάλογα με το εάν αμελούνται οι εγκάρσιες διατμητικές παραμορφώσεις ή όχι. Η θεωρία του *Kirchhoff* και η θεωρία του *Mindlin* η οποία είναι επέκταση της πρώτης. (Kolukula n.d.)



Εικόνα 2.1.1. Τομή λεπτής πλάκας πάχους t . Στο σχήμα εμφανίζονται οι α) απαράμορφωτη κατάσταση β) η παραμορφωμένη κατάσταση, με τις μετακινήσεις του σημείου P σύμφωνα με τη θεωρία του Kirchhoff. Οι εγκάρσιες διατμητικές παραμορφώσεις αμελούνται, συνεπώς οι ορθές γωνίες στην τομή παραμένουν ορθές. Οι μετακινήσεις στο επίπεδο y - z είναι παρόμοιες.

2.1.2 Ορθές και διατμητικές δυνάμεις

Σε μια διατομή ενός καταπονούμενου φορέα ενδέχεται να συναντήσουμε ορθές δυνάμεις ή τέμνουσες δυνάμεις ή και τις δύο ταυτόχρονα.

Η τέμνουσα δύναμη T κείται στο επίπεδο της διατομής και ονομάζεται εγκάρσια ή διατμητική δύναμη. Εξαιτίας των δυνάμεων αυτών αναπτύσσονται αντίστοιχες τάσεις, τις διατμητικές τάσεις τ που δρουν και αυτές στο επίπεδο της διατομής.

Εάν υποθέσουμε ότι οι διατμητικές τάσεις τ κατανέμονται ομοιόμορφα στο επίπεδο της διατομής, τότε ισχύει ότι:

$$\tau = T/A \text{ [N/m}^2\text{]}$$

Στην περίπτωση των διατμητικών τάσεων, οι παραμορφώσεις είναι γωνιακές και ισχύει ο νόμος του Hooke

$$\tau = \gamma G$$

όπου G το μέτρο ελαστικότητας ή ολίσθησης ενώ αν λάβουμε υπόψιν το μέτρο ελαστικότητας E του υλικού τότε ισχύει:

$$G = E / (1 + \mu)$$

Όπου μ είναι ο συντελεστής Poisson που για τα μέταλλα είναι $\mu = 0,3$. (Μπαράκος, n.d.)

2.2 Η θεωρία λεπτών πλακών

2.2.1 Η θεωρία του Kirchhoff

Η βασική υπόθεση για την κλασική θεωρία του Kirchhoff για πλάκα σε κάμψη, είναι ότι μια ευθεία γραμμή κάθετη στο μεσαίο επίπεδο της πλάκας πριν την παραμόρφωση παραμένει κανονική ακόμη και μετά την παραμόρφωση. Σε αυτή τη θεωρία η εγκάρσια διατμητική παραμόρφωση απαλείφεται, δηλαδή δεν λαμβάνεται υπόψη κι έτσι οι μετατοπίσεις των u , v εκφράζονται ως εξής:

$$u = -z \frac{\partial w}{\partial x}$$

$$v = -z \frac{\partial w}{\partial y}$$

$$w = w(x, y)$$

όπου x , y είναι οι άξονες τοποθετημένοι στο κέντρο της πλάκας, και ο άξονας z είναι ορισμένος κατά μήκος του πάχους της πλάκας.

Δηλαδή στην θεωρία αυτή εφαρμόζεται η περίπτωση επίπεδης παραμόρφωσης.

Το πρόγραμμα του matlab, Plate Bending, βασίζεται στη θεωρία του Mindlin σε αντίθεση με τη θεωρία που βρίσκουμε στο βιβλίο *Υπολογιστική Μηχανική* το οποίο βασίζεται στην κλασική θεωρία του Kirchhoff για λεπτές πλάκες.

2.2.2 Επίπεδη παραμόρφωση - Plane Strain.

Ορίζεται ως η παραμόρφωση που είναι κάθετη στο επίπεδο $x - y$, ε_z και οι διατμητικές παραμορφώσεις γ_{xz} , γ_{yz} μηδενίζονται.

Οι υποθέσεις επίπεδης παραμόρφωσης ισχύουν συνήθως για σώματα τα οποία εκτείνονται στο άπειρο στη μια διεύθυνση (π.χ. στην διεύθυνση z) με σταθερή

διατομή και ίδιες φορτίσεις εντός του επιπέδου καθ' όλο το μήκος του άξονα z.

$$\gamma_{yz} = \gamma_{xz} = 0$$

Επομένως, οι σχέσεις που ισχύουν σε αυτή την περίπτωση για τις τάσεις που ασκούνται στην πλάκα είναι:

$$\varepsilon_x = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

$$\varepsilon_y = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$$

$$\gamma_{xy} = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

Για μια λεπτή πλάκα υποθέτοντας τις συνθήκες επίπεδης έντασης, έχουμε τις εξής τάσεις:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \end{Bmatrix} = -z \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu \\ \nu & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \partial^2 w / \partial x^2 \\ \partial^2 w / \partial y^2 \end{Bmatrix}$$

$$\tau_{xy} = -2zG \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

Οι παραπάνω πιέσεις προκαλούν τις παρακάτω στιγμές:

$$M_x = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \sigma_x z dz, \quad M_y = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \sigma_y z dz, \quad M_{xy} = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \tau_{xy} z dz$$

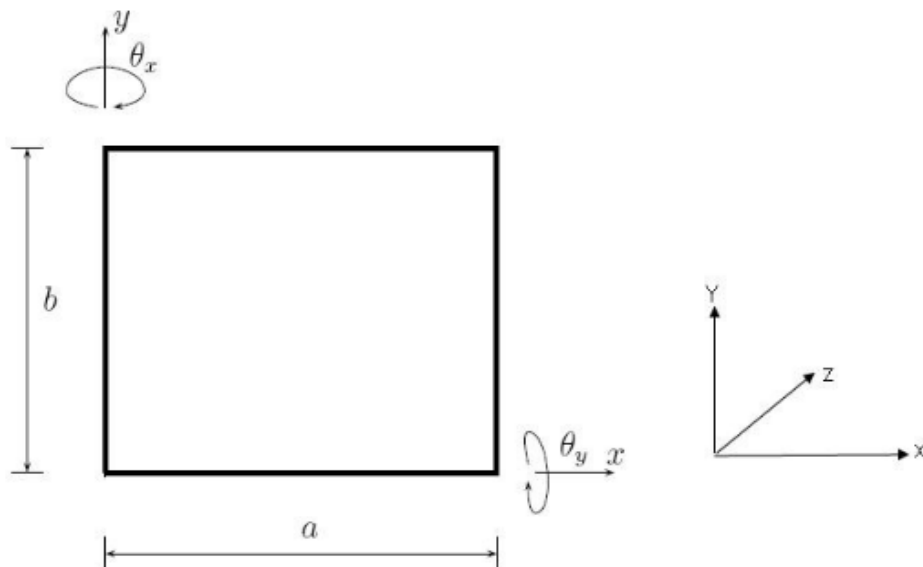
επομένως οι σχέσεις που σχηματίζονται για μια ομογενοποιημένη και ισοτροπική πλάκα Kirchhoff είναι:

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = D \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix}$$

2.2.3 Επίπεδη ένταση - Plane stress.

Με την υπόθεση του μηδενισμού των κυρίων τάσεων κάθετα στο επίπεδο του φορέα, οι πλάκες στο επίπεδο $x-y$ είναι φορτισμένες με δύναμη όντος επιπέδου T και καθορίζουν πρόβλημα επίπεδης έντασης.

Συνεπώς οι αξονικές τάσεις σ_z και οι διατμητικές τάσεις τ_{xy} και τ_{xz} μηδενίζονται. Αξίζει να σημειωθεί πως ο ίδιος δισδιάστατος φορέας λειτουργεί ως πλακά σε κάμψη η δίσκος σε επίπεδη ένταση, ανάλογα με τη μορφή της φόρτισης.



Εικόνα 2.2.1. Απεικόνιση πλάκας, γεωμετρίας και βαθμών ελευθερίας.

Η απλουστευμένη μορφή δηλαδή για γραμμικώς ελαστικά προβλήματα επίπεδης έντασης, ισότροπα υλικά και για προβλήματα επίπεδης έντασης, όπως προαναφέρθηκε, ισχύουν όπως ορίζονται παρακάτω :

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\}$$

όπου $D = \frac{E h^3}{12(1-\nu^2)}$ ο συντελεστής κοπτικής ακαμψία, E το μέτρο ελαστικότητας, και ν ο λόγος διόγκωσης ή λόγος του Poisson.

Αν μάλιστα απαλειφθούν οι τάσεις και παραμορφώσεις από τις σχέσεις που περιγράφουν τη μηχανική του γραμμικά ελαστικού σώματος, προκύπτουν οι μερικές διαφορικές εξισώσεις που περιγράφουν το φαινόμενο με μόνες αγνώστους το διανυσματικό πεδίο των μετακινήσεων.

2.2.4 Η θεωρία του Mindlin/ Mindlin- Reissner

Στην θεωρία αυτή το επίπεδο κάθετο στο μεσαίο επίπεδο πριν την παραμόρφωση, δεν παραμένει κάθετο μετά από αυτή.

Δηλαδή σε αυτή την περίπτωση η εγκάρσια διατμητική παραμόρφωση λαμβάνεται υπόψη.

Οι παραμορφώσεις και οι τάσεις δίνονται από τις σχέσεις:

$$u = z\theta_y, \quad \varepsilon_x = z\frac{\partial\theta_y}{\partial x}$$

$$v = -z\theta_x, \quad \varepsilon_y = -z\frac{\partial\theta_x}{\partial y}$$

$$\gamma_{xy} = z \left(\frac{\partial\theta_y}{\partial y} - \frac{\partial\theta_x}{\partial x} \right), \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} - \theta_w, \quad \gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \theta_y$$

Επομένως οι σχέσεις που σχηματίζονται θα είναι, για την κάμψη και τη διατμητική παραμόρφωση, ως εξής:

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = D \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix}$$

και

$$\begin{Bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Gt & 0 \\ 0 & Gt \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_x \\ \gamma_y \end{Bmatrix}$$

αντίστοιχα. Όπου Q_x και Q_y είναι οι εγκάρσιες διατμητικές δυνάμεις.

Η Μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων εφαρμόζεται στην θεωρία του Mindlin. Έτσι η μετατόπιση για πλάκες δίνεται από τη σχέση:

$$\begin{Bmatrix} w \\ \theta_x \\ \theta_y \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^n \begin{bmatrix} N_i & 0 & 0 \\ 0 & N_i & 0 \\ 0 & 0 & N_i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_i \\ \theta_{xi} \\ \theta_{yi} \end{Bmatrix} = Nd$$

όπου N_i είναι οι εξισώσεις παρεμβολής που έχουν δημιουργηθεί για την πλάκα.

2.3 Συνοριακές συνθήκες

Στα σύνορα του χωρίου, της πλάκας στη συγκεκριμένη περίπτωση, μπορούμε να έχουμε δύο τύπων συνοριακές συνθήκες, α) συνοριακές συνθήκες τάσεων και β) συνοριακές συνθήκες μετακινήσεων. Γενικά μια από τις δύο ποσότητες μπορούν να ορισθούν σε κάθε σημείο:

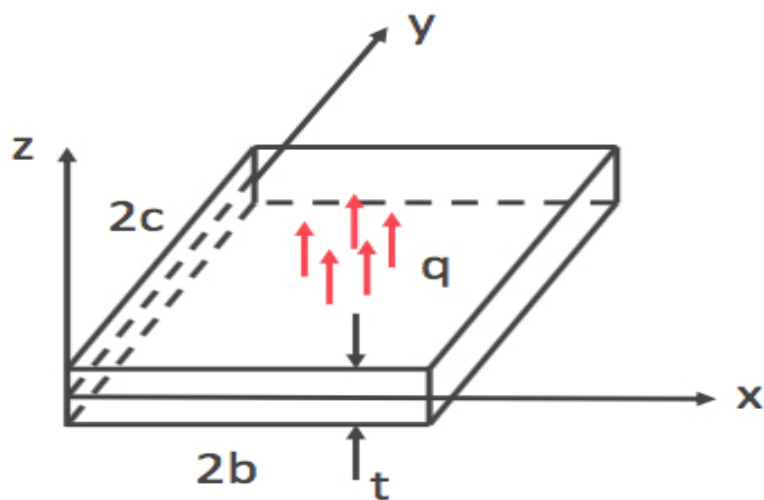
1. Σε ένα ελεύθερο σύνορο οι τάσεις είναι δοσμένες (σ), και οι μετακινήσεις άγνωστες, πριν την επίλυση.
2. Σε ένα στηριγμένο σύνορο οι μετακινήσεις είναι δοσμένες (u), ενώ οι τάσεις και δυνάμεις στηρίζεως μένουν να υπολογισθούν. (Σταυρουλάκης 2015)

Στο πρόβλημά μας παίρνουμε δύο περιπτώσεις στηριγμένων συνόρων:

1) απλά στηριγμένη (simply supported) και

2) πακτωμένη (clamped plate).

σε όλα τα άκρα.



Εικόνα 2.4.1. Μοντέλο λεπτής πλάκας σε κάμψη.

Κεφάλαιο 3^ο

Δομικά Υλικά

3.1 Ισότροπα Υλικά

Ένα υλικό, το οποίο θεωρείται ως ένα τρισδιάστατο στερεό σώμα καλείται ισότροπο όταν παρουσιάζει τις ίδιες ιδιότητες (π.χ. μηχανικές) ως προς κάθε διεύθυνση εξέτασης τους. Αν συμβαίνει το αντίθετο, δηλαδή εάν το υλικό παρουσιάζει διαφορετική συμπεριφορά ως προς τις διαφορές διευθύνσεις, τότε αυτό καλείται ανισότροπο. Οι διάφορες μηχανικές κατεργασίες διαμόρφωσης του υλικού εντείνουν το φαινόμενο της ανισοτροπίας διότι το παραμορφώνουν πολύ περισσότερο ως προς μία διεύθυνση, αλλάζοντας τις ιδιότητές του σε σχέση με τις άλλες διευθύνσεις.

3.1.1 Ισότροπος ελαστικός καταστατικός Νόμος

Τα ισότροπα υλικά χαρακτηρίζονται από ιδιότητες που είναι ανεξάρτητες της κατεύθυνσης. Οι φυσικές εξισώσεις που περιγράφουν θα πρέπει συνεπώς να είναι ανεξάρτητες του επιλεγθέντος συστήματος συντεταγμένων. Ο τανυστής παραμόρφωσης είναι συμμετρικός. Εφόσον το ίχνος κάθε τανυστή είναι ανεξάρτητο του συστήματος συντεταγμένων, η πληρέστερη διάσπαση ενός συμμετρικού τανυστή είναι η γραφή του ως άθροισμα ενός σταθερού τανυστή και ενός συμμετρικού τανυστή με μηδενικό ίχνος. (Σταυρουλάκης, 2015)

3.2 Ελαστική Παραμόρφωση

Όπως είναι γνωστό από την Αντοχή των Υλικών, ένα μεταλλικό υλικό συνήθως μπορεί να καταπονηθεί με τρεις διαφορετικούς τρόπους ανάλογα με την παραμόρφωση που τείνει να επιφέρει η επιβαλλόμενη τάση. Έτσι, αναφέρεται ενδεικτικά η εφελκυστική καταπόνηση (εφελκυσμός), η θλιπτική καταπόνηση (θλίψη) και η διατμητική καταπόνηση (διάτμηση ή στρέψη). Τα περισσότερα εξαρτήματα ή στοιχεία μηχανών καταπονούνται σε πιο σύνθετες καταπονήσεις που αναλύονται σε απλούστερες. Όταν η τάση διατηρηθεί κάτω από μία κρίσιμη τιμή (όριο ελαστικότητας) επιφέρει ελαστικές παραμορφώσεις, που εξαλείφονται μετά από την απόσυρση της δύναμης. Σε ατομικό επίπεδο οι εν λόγω τάσεις προκαλούν επιμήκυνση ή συμπίεση των ατομικών δεσμών, οι οποίες αντιστοιχούν στις παραμορφώσεις ελατηρίου. Η τάση που προκαλεί μία τέτοια αντιστρεπτή (ελαστική) παραμόρφωση ακολουθεί το Νόμο του Hooke:

$$\sigma = E \cdot \varepsilon$$

όπου E το μέτρο ελαστικότητας του υλικού. (Σταυρουλάκης, 2015)

3.3 Σκληρότητα Υλικού

Σκληρότητα ενός υλικού είναι το μέτρο αντίστασης του υλικού σε περιορισμένη τοπικά πλαστική παραμόρφωση. Συνήθως αυτή η παραμόρφωση δημιουργείται από διείσδυση ξένου σώματος όπου πιέζει την επιφάνεια του υλικού με συγκεκριμένη δύναμη και για ορισμένη χρονική διάρκεια (ένα μικρό κοίλωμα, ή χαραγή). Η σκληρότητα εκφράζεται μαθηματικά ως εξής:

$$H = \frac{P}{A}$$

3.4 Άλλες θεμελιώδεις έννοιες

3.4.1 Λόγος Poisson

Οι εφελκυστικές τάσεις που ασκούνται στις κατασκευές και στα δοκίμια, η ελαστική επιμήκυνση και η αντίστοιχη παραμόρφωση ε_z που την συνοδεύει, παρατηρούνται κατά την διεύθυνση της εφαρμοζόμενης τάσης. Αποτέλεσμα αυτής της επιμήκυνσης είναι η εμφανής συρρίκνωσης στις πλάγιες διευθύνσεις κάθετα στην εφαρμοζόμενη τάση. Από αυτές τις συστολές μπορούν να προσδιοριστούν οι θλιπτικές παραμορφώσεις ε_x και ε_y . Εάν η εφαρμοζόμενη τάση είναι μονοαξονική και το υλικό ισότροπο, τότε ε_x και ε_y . Ο λόγος των εγκάρσιων παραμορφώσεων προς την αξονική παραμόρφωση ορίζει μια νέα παράμετρο, που ονομάζεται **λόγος Poisson** λ και ορίζεται ως :

$$\lambda = - \frac{\varepsilon_x}{\varepsilon_y}$$

Το αρνητικό πρόσημο που εμπεριέχεται στον τύπο δηλώνει ότι το λ πρέπει πάντα να είναι θετικό, καθώς το ε_x και ε_y έχουν πάντοτε αντίθετα πρόσημα. Θεωρητικά, ο λόγος Poisson για ισότροπα υλικά πρέπει να είναι $1/4$. Επίσης η μέγιστη τιμή που λαμβάνει το λ , δηλαδή η τιμή για την οποία δεν υπάρχει καθαρή μεταβολή του όγκου, είναι 0.50. Στα ισότροπα υλικά, το μέτρο ελαστικότητας και το μέτρο διάτμησης σχετίζονται μεταξύ τους και με τον λόγο Poisson ως εξής:

$$E = 2G(1 + \lambda)$$

Στα περισσότερα μέταλλα το G είναι περίπου $0.4E$, κι έτσι μπορεί να υπολογιστεί η τιμή του κατά προσέγγιση. (Callister, 2008)

3.4.2 Μέτρο ελαστικότητας

Ο βαθμός κατά τον οποίο παραμορφώνεται μια κατασκευή εξαρτάται από την τάση στην οποία υπόκειται. Για τα περισσότερα μέταλλα όταν υφίστανται εφελκυστικές τάσεις, σε σχετικά χαμηλά επίπεδα, η τάση και η παραμόρφωση είναι μεγέθη μεταξύ τους ανάλογα μέσω της σχέσης

$$\sigma = E\varepsilon$$

Αυτή η σχέση είναι γνωστή ως ο νόμος του Hooke και η σταθερά αναλογίας E είναι το μέτρο ελαστικότητας ή μέτρο Young.

Οι μεταβολές των γεωμετρικών χαρακτηριστικών των σωμάτων κατά τις οποίες η τάση και η παραμόρφωση είναι μεγέθη ανάλογα ονομάζονται ελαστικές παραμορφώσεις, το διάγραμμα της τάσης συναρτήσει της παραμόρφωσης δίνει μια γραμμική σχέση. Η κλίση του γραμμικού τμήματος αντιστοιχεί στο μέτρο ελαστικότητας. Το μέτρο αυτό μπορεί να θεωρηθεί και ως δυσκαμψία του υλικού ή αντίσταση του σε ελαστική παραμόρφωση. Όσο μεγαλύτερο είναι το μέτρο ελαστικότητας, τόσο πιο δύσκαμπτο είναι το υλικό, ή αλλιώς τόσο μικρότερη είναι η ελαστική παραμόρφωση που προκύπτει από την εφαρμογή μιας δεδομένης τάσης. (Callister, 2008)

Κεφάλαιο 4^ο

Επεξεργασία Προσομοιώσεων

4.1 Προσδιορισμός προβλήματος

Θεωρούμε *λεπτή πλάκα* στο επίπεδο x - y με πάχος t κατά τη διεύθυνση του άξονα z . Οι πάνω και κάτω επιφάνειες της πλάκας βρίσκονται σε ύψος $z = \pm t/2$, ενώ το μέσον της στη θέση $z=0$.

Η *γεωμετρία της πλάκας* έχει τα εξής χαρακτηριστικά:

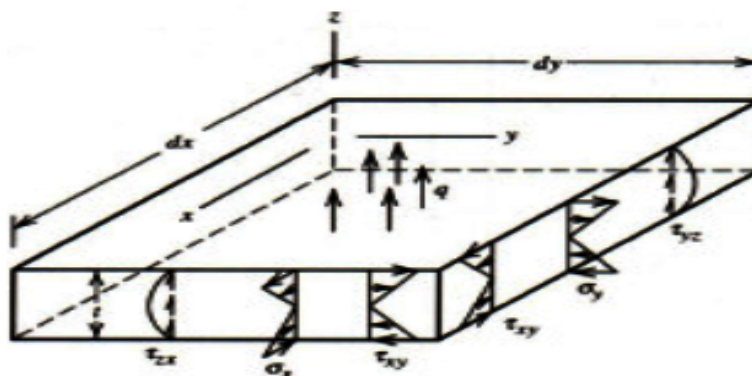
- Το *πάχος* είναι πολύ μικρότερο από τις διαστάσεις της πλάκας a, b (δηλαδή, $t \ll a$ or b)

Το πάχος της πλάκας πρέπει είναι μεγαλύτερο από το ένα δέκατο του μήκους της διότι διαφορετικά οι διατμητικές παραμορφώσεις πρέπει να ληφθούν υπ' όψιν και τότε έχουμε θεωρία για παχιά πλάκα.

- Η *εγκάρσια παραμόρφωση* w είναι πολύ μικρότερη από το πάχος t (δηλαδή, $w/t \ll 1$)

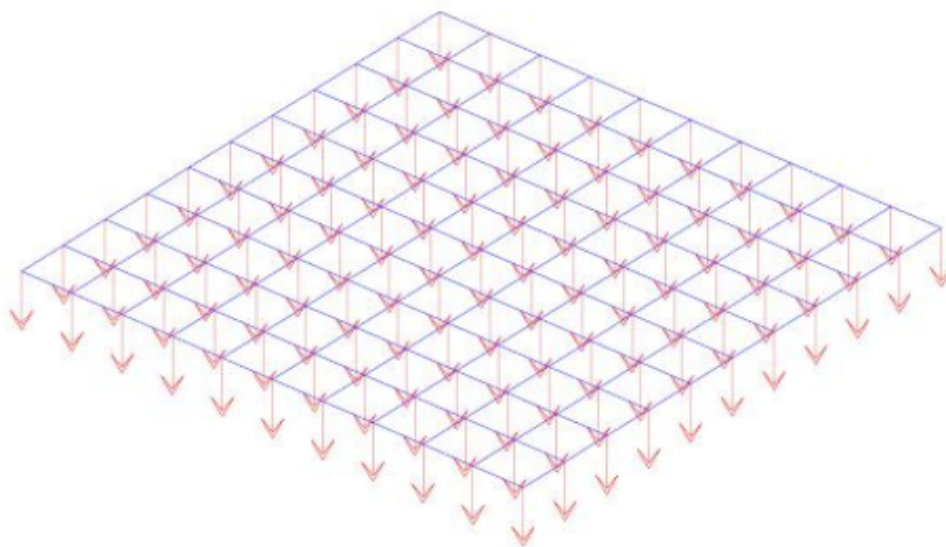
Η *πλάκα προδιαγράφεται* με τα παρακάτω χαρακτηριστικά:

- Θεωρείται *ισότροπη* και *ελαστική*.
- Η ανάλυση της γίνεται σε *ισοπαραμετρικά στοιχεία* με τέσσερις κόμβους το κάθε ένα σύμφωνα με την θεωρία των πεπερασμένων στοιχείων.
- Οι *δυνάμεις* που ασκούνται είναι *ομοιόμορφες* και *εγκάρσιες* (βλ. Σχήμα)



Εικόνα 4.1.1. Απεικόνιση τάσεων, και διανεμημένων πλευρικών δυνάμεων πάνω στην πλάκα.

Η σύνδεση και οι εγκάρσιες διατμητικές δυνάμεις όπως αυτές εφαρμόζονται στο πρόγραμμα φαίνονται στο παρακάτω σχήμα.



Εικόνα 4.1.2. Σχήμα λεπτής πλάκας υπό ομοιόμορφες εγκάρσιες πιέσεις

Η μελετή της πλάκας γίνεται για **δύο διαφορετικές συνοριακές συνθήκες**, δηλαδή τον τρόπο που αυτή είναι στηριγμένη στα άκρα της.

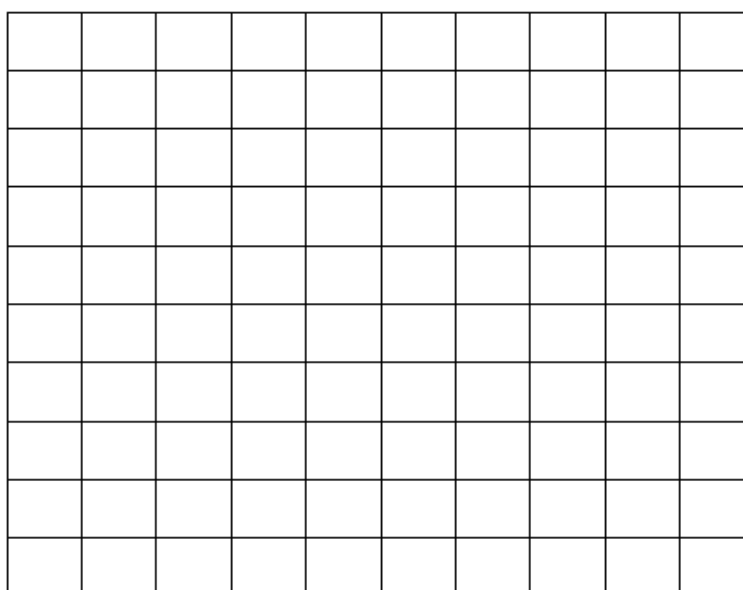
- Πακτωμένη στήριξη (clamped plate)
- Απλά στηριγμένη (simply supported)

Επιπλέον, τα πεπερασμένα στοιχεία που χωρίζουν σε κελιά την πλάκα αλλάζουν πυκνότητα. Αυτό σημαίνει ότι οι κόμβοι πληθαίνουν ανάλογα με το βήμα που παίρνουμε σε κάθε πείραμα.

Η απεικόνιση των πλεγμάτων γίνεται για 3 διαφορετικά βήματα 0.1, 0.05, 0.02 για την πλάκα μήκους ενός μέτρου ($\alpha=1\mu.$) ενώ για την πλάκα μήκους δυο μέτρων ($\alpha=2\mu.$) γίνεται για βήματα 0.1, 0.05 και 0.04.

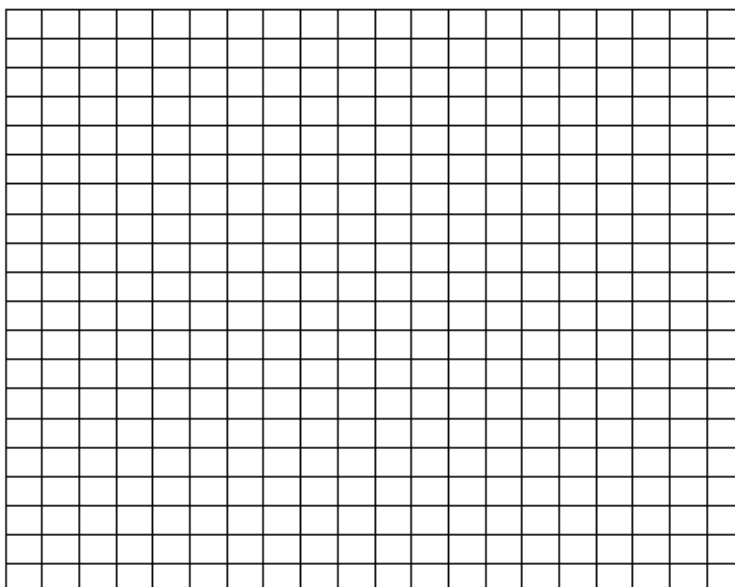
Τα πλέγματα παρουσιάζονται παρακάτω:

Finite Element Mesh



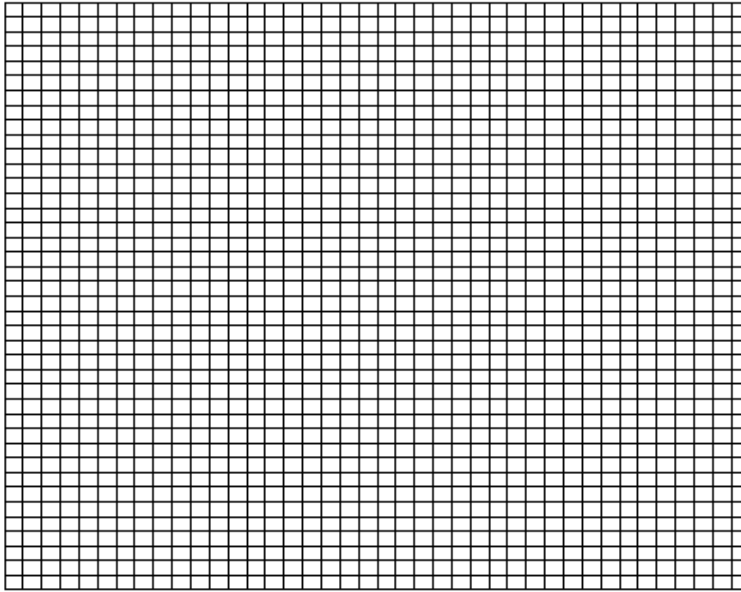
Εικόνα 4.1.5. Πλέγμα πεπερασμένων στοιχείων. Βήμα=0.1μ. για μέγεθος πλάκας $\alpha=1\mu$.
(κελιά 10x10)

Finite Element Mesh



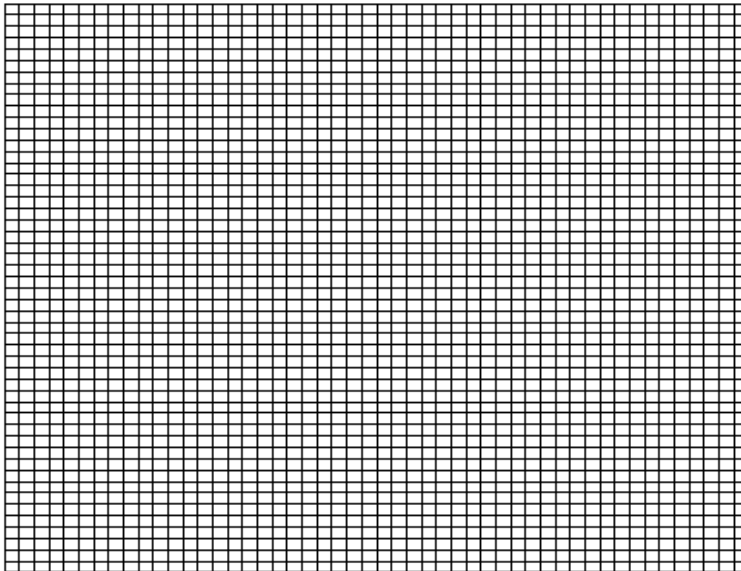
Εικόνα 4.1.6. Πλέγμα πεπερασμένων στοιχείων. Βήμα=0.05μ. για μέγεθος πλάκας $\alpha=1\mu$.
ή βήμα= 0.1μ. για μέγεθος πλάκας $\alpha=2\mu$. (κελιά 20x20)

Finite Element Mesh



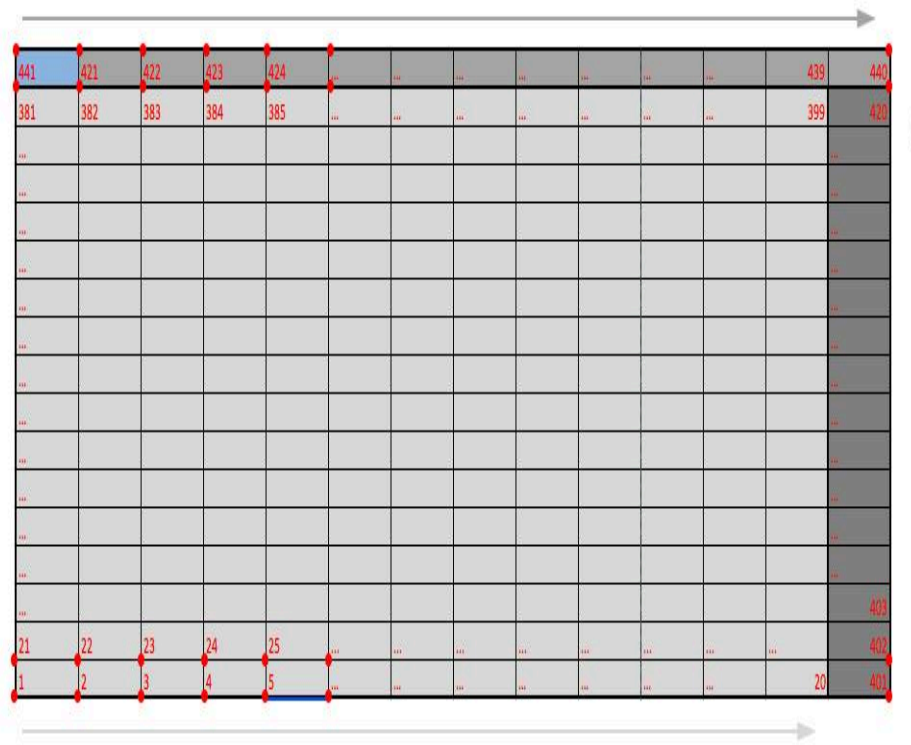
Εικόνα 4.1.7. Πλέγμα πεπερασμένων στοιχείων. Βήμα=0.02μ. για μέγεθος πλάκας α=2μ. (κελιά 40x40)

Finite Element Mesh



Εικόνα 4.1.8. Πλέγμα πεπερασμένων στοιχείων. Βήμα=0.02μ. για μέγεθος πλάκας α=1μ. ή βήμα=0.04μ. για μέγεθος πλάκας α=2μ. (κελιά 50x50)

Τέλος, παρουσιάζεται ο τρόπος με τον οποίο γίνεται η σύνδεση των στοιχείων και αρίθμηση των κόμβων, που είναι βασικό στοιχείο για τον υπολογισμό των εξισώσεων που χρειάζονται και για την πρόοδο της μεθόδου, ώστε να βρεθεί η μέγιστη κάμψη της πλάκας.



Εικόνα 4.1.9 Ενδεικτική παρουσίαση αρίθμησης κόμβων των πεπερασμένων στοιχείων της πλάκας.

4.2 Τα Υλικά

4.2.1 Κράμα Χαλκού- C26000

Ο Χαλκός και τα κράματά του, συνδυάζουν πολλές επιθυμητές ιδιότητες και έχουν χρησιμοποιηθεί σε ευρύτατο πεδίο εφαρμογών. Ο καθαρός χαλκός είναι τόσο μαλακός και όλκιμος που είναι δύσκολο να επεξεργαστεί μηχανικά σε εργαλειομηχανές, επίσης έχει απεριόριστη δυνατότητα σε ψυξηλασία.

Ο χαλκός παρουσιάζει ισχυρή αντίσταση στη διάβρωση σε αρκετά διαφορετικά περιβάλλοντα όπως στην ατμόσφαιρα, στο θαλασσινό νερό και σε ορισμένα βιομηχανικά χημικά.

Οι μηχανικές του ιδιότητες καθώς και η αντίστασή του στη διάβρωση είναι δυνατόν να βελτιωθούν με κραμάτωση. Τα περισσότερα κράματα χαλκού δεν μπορούν να σκληρυνθούν ή να ενισχυθούν με διαδικασίες θερμικής κατεργασίας, συνεπώς, η βελτίωση των ιδιοτήτων του επιτυγχάνεται με ψυξηλασία ή και με κραμάτωση στερεού διαλύματος.

Τα πιο κοινά κράματα χαλκού είναι οι ορείχαλκοι στους οποίους το πρωτεύον κραματικό στοιχείο ως πρόσμιξη αντικατάστασης, είναι ο ψευδάργυρος.

Οι ορείχαλκοι είναι και αυτοί σχετικά μαλακοί, όλκιμοι και επεξεργάζονται εύκολα με ψυξηλασία. Μερικοί κοινοί ορείχαλκοι είναι ο κίτρινος, ο ναυτικός, ο ορείχαλκος φυσιγγίων, το μέταλλο νομισμάτων. Οι χρήσεις του εκτίνονται από κάλυκες φυσιγγίων, μουσικά όργανα, ψυγεία αυτοκινήτων και νομίσματα.

Ο ορείχαλκος C26000 που επιλέξαμε δημιουργείται με ανόπτηση ή ψυξηλασία (H04 hard) και χρησιμοποιείται σε πυρομαχικά (κάλυκες φυσιγγίων) και σε ψυγεία αυτοκινήτων. (Callister, 2008)

Οι μηχανικές ιδιότητες του είναι οι εξής :

- Αντοχή σε εφελκυσμό: 300-365 MPa
- Αντοχή σε διαρροή: 75-150 MPa
- Ολκιμότητα [% EL]: 68mm
- Μέτρο ελαστικότητας: 110 GPa
- Λόγος Poisson: 0.35

4.2.2 Υαλοκεραμικό (Pyroceram)

Οι ύαλοι (γυαλιά) είναι μια πολύ οικεία οικογένεια κεραμικών. Αποτελούν μη κρυσταλλικά πυριτικά άλατα που περιέχουν άλλα οξείδια, όπως CaO , Na_2O , K_2O , Al_2O_3 , τα οποία επηρεάζουν τις ιδιότητες των υάλων.

Οι περισσότερες ανόργανες ύαλοι παρόλα αυτά μπορούν να μετασχηματισθούν από την μη κρυσταλλική κατάσταση σε μια άλλη κρυσταλλική με την κατάλληλη υψιθερμική κατεργασία. Η διεργασία αυτή καλείται αγνάλωση και έχει σαν προϊόν ένα λεπτόκοκκο πολυκρυσταλλικό υλικό το οποίο συχνά ονομάζεται υαλοκεραμικό. Σε αυτό πρέπει να προστεθεί ένας παράγοντας δημιουργίας πυρήνων (συνήθως οξείδιο τιτανίου) ώστε να προκληθεί η διαδικασία της κρυστάλλωσης (αφυάλωσης). Ένα από τα επιθυμητά χαρακτηριστικά των υαλοκεραμικών είναι ο χαμηλός συντελεστής θερμικής διαστολής, έτσι ώστε τα σκεύη από υαλοκεραμικά να μην υφίστανται θερμικό σοκ. Επιπλέον επιτυγχάνεται μεγάλη μηχανική αντοχή και θερμική αγωγιμότητα με μεγάλη ευκολία κατασκευής.

Οι πιο συνήθεις χρήσεις αυτών είναι τα σκεύη για φούρνους, λόγω της αντοχής τους στο θερμικό σοκ, και την υψηλή θερμική αγωγιμότητα. Επίσης χρησιμοποιούνται σαν ηλεκτρικοί μονωτές και σαν υποστρώματα για τυπωμένα ηλεκτρονικά κυκλώματα, καθώς και ως εναλλάκτες θερμότητας.

Οι μηχανικές του ιδιότητες είναι οι εξής:

- Αντοχή σε εφελκυσμό^{1*}: 123-370 MPa
- Μέτρο ελαστικότητας: 110 GPa
- Λόγος Poisson: 0.35

Οι μακροί βελονοειδείς σχηματισμοί που εμφανίζονται στα υαλοκεραμικά υλικά μετά την κατεργασία δημιουργίας τους, προσδίδουν στο υλικό μια ασυνήθιστη αντοχή και σκληρότητα. (Callister, 2008)

4.2.3 Ενισχυμένο Σκυρόδεμα

Το σκυρόδεμα είναι ένα κοινό σύνθετο υλικό μεγάλου μεγάλου κόκκου στο οποίο και η μήτρα και οι διεσπαρμένες φάσεις είναι κεραμικά υλικά. Τα πιο κοινά σκυροδέματα είναι εκείνα τα οποία γίνονται από τσιμέντο Portland και άσφαλτο όπου το αδρανές

¹ Η αντοχή των κεραμικών υλικών θεωρήθηκε ως η αντοχή σε κάμψη.

μίγμα είναι χαλίκι και άμμος. Το ασφαλικό σκυρόδεμα έχει ευρεία χρήση ως υλικό οδοστρώματος ενώ το τσιμέντο Portland χρησιμοποιείται ευρέως ως δομικό υλικό κατασκευών.

Το ενισχυμένο σκυρόδεμα είναι ένα υλικό με μεγαλύτερη αντοχή από το απλό σκυρόδεμα καθώς προσθέτονται σε αυτό χαλύβδινες βέργες, σύρματα, ράβδους ή δίχτυα τα οποία είναι εμβαπτισμένα μέσα σε φρέσκο σκυρόδεμα το οποίο δεν έχει ακόμα αντιδράσει χημικά. Έτσι, η ενίσχυση καθιστά μεγαλύτερες εφελκυστικές, θλιπτικές και διατμητικές τάσεις. Ακόμα και αν εμφανιστούν ρωγμές στο σκυρόδεμα, ένα μεγάλο μέρος της ενίσχυσης διατηρείται.

Ο χάλυβας είναι ένα κατάλληλο ενισχυτικό υλικό διότι οι συντελεστές θερμικής διαστολής είναι σχεδόν ίδιοι με αυτούς του σκυροδέματος. Επιπρόσθετα, ο χάλυβας δεν διαβρώνεται ταχέως μέσα στο περιβάλλον του σκυροδέματος και ένας σχετικά ισχυρός δεσμός συγκόλλησης σχηματίζεται μεταξύ του χάλυβα και του σκυροδέματος που έχει χημικά αντιδράσει. (Callister, 2008)

Οι μηχανικές ιδιότητες του σκυροδέματος είναι οι εξής:

- Αντοχή σε εφελκυσμό: 37.3- 41.3 MPa
- Μέτρο ελαστικότητας: 2 GPa
- Λόγος Poisson: 0.17

4.3 Παρουσίαση Αποτελεσμάτων

Σε κάθε προσομοίωση το πρόγραμμα Matlab Mathworks εμφάνιζε τη μέγιστη μετατόπιση (κάμψη) της πλάκας μέσω αναλυτικών διαγραμμάτων. Τα διαγράμματα αυτά είναι τριών ειδών.

Δύο απεικονίζουν χρωματικά τις μετατοπίσεις, δύο απεικονίζουν το πλέγμα και τους κόμβους όπως αυτά διαμορφώνονται σύμφωνα με τα στοιχεία που δώσαμε αρχικά (μέγεθος πλάκας, βήμα) και τέλος ένα πίνακα με τη ακριβή μετατόπιση κάθε κόμβου.

Σημείωση : Όλες οι προσομοιώσεις δίνουν διαγράμματα τα οποία παρουσιάζονται στο Παράρτημα Β' λόγω του μεγάλου τους όγκου, όπου θα ήταν δύσκολο να δοθούν κάτω από κάθε προσομοίωση που ακολουθεί

Τα αποτελέσματα που εξετάζουμε κρίνονται από δύο στοιχεία των οποίων τη σύγκριση θέλουμε να τονίσουμε:

- Τη μεταβολή των αποτελεσμάτων ανάλογα με την πυκνότητα του πλέγματος.

- Τη μεταβολή των αποτελεσμάτων ανάλογα με την διαφορετική στήριξη στις πλευρές της πλάκας. (clamped, simply supported).

Τα υπόλοιπα στοιχεία, δηλαδή το πάχος της πλάκας και η δύναμη που ασκείται στους κόμβους ($t=3\text{mm}$, $P=1000\text{N}$), τα οποία επηρεάζουν άμεσα τα αποτελέσματα, παραμένουν σταθερά σε κάθε μέτρηση προς ευκολότερη σύγκριση των αποτελεσμάτων.

4.3.1 Κράμα Χαλκού- C26000- (ορείχαλκος φυσιγγίων)

$E= 110 \text{ GPa}$

$\lambda= 0.35$

Αντοχή σε διαρροή- $\delta_1= 75\text{-}150 \text{ MPa}$ (κατεργασία με ανόπτηση)

$\delta_2=435 \text{ MPa}$ (κατεργασία με ψυξηλασία)

4.3.1.1 Προσομοίωση 1^η, μέγεθος πλάκας $\alpha=1\mu$.

$\alpha=1$	$\beta\acute{\eta}\mu\alpha=0.1$	$\beta\acute{\eta}\mu\alpha=0.05$	$\beta\acute{\eta}\mu\alpha=0.02$
<i>Clamped</i>	0.00490013	0.00492677	0.00493427
<i>Simply</i>	0.01579381	0.01583155	0.01584199
Μεταβολή (%)	68.97	68.88	68.85

$\alpha=1$	$\beta\acute{\eta}\mu\alpha_{0.05} - \beta\acute{\eta}\mu\alpha_{0.1}$	$\beta\acute{\eta}\mu\alpha_{0.02} - \beta\acute{\eta}\mu\alpha_{0.05}$
clamped	0.00002664	0.0000075
simply	0.00009174	0.00001044

<u>Ακρίβεια</u> <u>αποτελεσμάτων</u> <u>επί %</u> $\alpha=1$	$\frac{\beta\eta\mu\alpha_{0.1}}{\beta\eta\mu\alpha_{0.05}}$	$\frac{\beta\eta\mu\alpha_{0.05}}{\beta\eta\mu\alpha_{0.02}}$
Clamped	99.46	99.84
Simply	99.76	99.93

Από τα αποτελέσματα, εξάγουμε τα εξής συμπεράσματα:

- Στον πρώτο πίνακα, παρατηρούμε ότι η μεταβολή της μέγιστης κάμψης για πακτωμένη στήριξη (clamped) είναι πολύ μικρότερη από ότι στη απλή στήριξη (simply supported), της τάξεως μιας δεκαδικής μονάδος. Επομένως η καλύτερη στήριξη οδηγεί σε πιο σταθερή κατασκευή.

Πιο συγκεκριμένα η μεταβολή που επιφέρει η διαφορετική στήριξη είναι κοντά στο **68.80%**, δηλαδή η μέγιστη κάμψη αυξάνεται κατά αυτό το ποσοστό όταν η στήριξη αλλάζει από πακτωμένη σε απλή.

- Οι διαφορετικές πυκνότητες πλέγματος επίσης επιφέρουν μεταβολές στα αποτελέσματα που παίρνουμε για τη μέγιστη κάμψη. Η αύξηση της πυκνότητας των κόμβων παρατηρούμε ότι επιφέρει σύγκλιση αυτών προς μια τιμή.
- Στον δεύτερο πίνακα λαμβάνονται οι διαφορές των αποτελεσμάτων τα οποία αναδεικνύουν την ύπαρξη σύγκλισης προς μια τιμή.

Παρατηρούμε ότι οι διαφορές των αποτελεσμάτων των πυκνότερων πλεγμάτων τίνουν προς το μηδέν

Η πυκνότητα του πλέγματος προκύπτει ανάλογα με το βήμα, δηλαδή την απόσταση την οποία χρησιμοποιούμε για να καταμετρήσουμε τον επόμενο κόμβο.

Η τιμή στην οποία συγκλίνουν τα αποτελέσματα γίνεται πιο ξεκάθαρη και ακριβής όσο πληθαίνουν οι κόμβοι. Αυτό προκύπτει λογικά, καθώς περισσότεροι κόμβοι σημαίνουν περισσότερα σημεία για καταμέτρηση της μεταβολής των συντεταγμένων τους. Η τιμή θα ήταν ακριβής αν είχαμε άπειρους κόμβους, δηλαδή άπειρα σημεία για να μετρήσουμε την μετατόπισή τους.

- Τέλος, παρατηρούμε ότι τα αποτελέσματα για την απλή στήριξη (simply supported), έχουν μικρότερες μεταβολές, ως ποσοστό, όταν αλλάζουμε το βήμα.

4.3.1.2 Προσομοίωση 2^η, μέγεθος πλάκας α=2μ.

$\alpha=2$	$\beta\eta\mu\alpha=0.1$	$\beta\eta\mu\alpha=0.05$	$\beta\eta\mu\alpha=0.04$
<i>Clamped</i>	0.07881677	0.07892396	0.07893684
<i>Simply</i>	0.25322966	0.25344454	0.25346235
Μεταβολή (%)	68.88	68.86	68.85

$\alpha=2$	$\beta\eta\mu\alpha_{0.05} - \beta\eta\mu\alpha_{0.1}$	$\beta\eta\mu\alpha_{0.04} - \beta\eta\mu\alpha_{0.05}$
<i>Clamped</i>	0.0001072	0.00001288
<i>Simply</i>	0.0002148	0.00001781

<u>Ακρίβεια αποτελεσμάτων επί % $\alpha=2$</u>	$\frac{\beta\eta\mu\alpha_{0.1}}{\beta\eta\mu\alpha_{0.05}}$	$\frac{\beta\eta\mu\alpha_{0.05}}{\beta\eta\mu\alpha_{0.04}}$
<i>Clamped</i>	99.86	99.98
<i>Simply</i>	99.94	99.99

Τα ίδια φαινόμενα παρατηρούνται και όταν μεγαλώνουμε στο διπλάσιο την πλάκα. Τα αποτελέσματα σε αυτή την περίπτωση είναι τα εξής:

- Η μεταβολή της μέγιστης βύθισης για την πακτωμένη στήριξη είναι πολύ μικρότερη από ότι στη απλά στηριγμένη, της τάξεως πάλι της μιας δεκαδικής μονάδος.

Συγκεκριμένα η μεταβολή που επιφέρει η διαφορετική στήριξη κυμαίνεται και πάλι κοντά στο **68.80%** της πακτωμένης στηρίξεως. Δηλαδή η μετατόπιση αυξήθηκε κατά αυτό το ποσοστό όταν η στήριξη έγινε απλή από πακτωμένη.

- Στον δεύτερο πίνακα φαίνονται ακριβώς οι διαφορές των αποτελεσμάτων ανάλογα με τα διαφορετικά βήματα που παίρνουμε. Παρατηρούμε ότι όσο

αυξάνεται η πυκνότητα των κόμβων τόσο μικραίνει η διαφορά στα αποτελέσματα που σημαίνει ότι η τιμή της μέγιστης κάμψης κατευθύνεται προς μια τιμή, συγκλίνει δηλαδή προς αυτή.

- Τέλος, παρατηρούμε ότι οι μεταβολές στην απλή στήριξη είναι μικρότερες, ποσοστιαία, όταν αλλάζουμε το βήμα, όπως δηλαδή συνέβαινε και όταν το μέγεθος ήταν μισό.

Αυτό το οποίο χρειάζεται να επισημανθεί είναι ότι παρά τον διπλασιασμό του μεγέθους, η μέγιστη κάμψη που παρατηρείται δεν ακολουθεί αυτή τη 'γραμμική μεταβολή' του μεγέθους, και καθώς θα περιμέναμε διπλάσια βύθιση αυτή κυμαίνεται κοντά στις **16 φορές** όπως παρατηρούμε στον παρακάτω πίνακα.

$a=1, a=2,$ $\beta\eta\mu a=0.05$	$\frac{w_{a=2}}{w_{a=1}}$	Μεταβολή (%)
Clamped	16.02	93.7576
Simply	16.01	93.7453

$$\frac{w_{a=2}}{w_{a=1}} = 16.02, \quad \frac{w_{a=2}}{w_{a=1}} = 16.01.$$

4.3.2 Υαλοκεραμικό (pyroceram)

$E=120 \text{ GPa}$

$\lambda=0.25$

Αντοχή σε εφελκυσμό =123-370 MPa

4.3.2.1 Προσομοίωση 3^η, μέγεθος πλάκας $\alpha=1\mu$.

$\alpha=1$	βήμα =0.1	βήμα =0.05	βήμα =0.02
Clamped	0.00436082	0.00438583	0.00439287
Simply	0.01405844	0.0140942	0.01410413
Μεταβολή (%)	68.981	68.882	68.855

$\alpha=1$	$\beta\eta\mu\alpha_{0.05} - \beta\eta\mu\alpha_{0.1}$	$\beta\eta\mu\alpha_{0.02} - \beta\eta\mu\alpha_{0.05}$
Clamped	0.00002501	0.00000704
Simply	0.00003576	0.00000993

Ακρίβεια αποτελεσμάτων επί % $\alpha=1$	$\frac{\beta\eta\mu\alpha_{0.1}}{\beta\eta\mu\alpha_{0.05}}$	$\frac{\beta\eta\mu\alpha_{0.05}}{\beta\eta\mu\alpha_{0.02}}$
Clamped	99.43	99.84
Simply	99.75	99.93

Από τα αποτελέσματα σε αυτή την περίπτωση, εξάγουμε τα εξής συμπεράσματα:

- Παρατηρούμε ότι η μεταβολή της μέγιστης κάμψης για πακτωμένη στήριξη (clamped) είναι πολύ μικρότερη από ότι στη απλή στήριξη (simply supported), της τάξεως μιας δεκαδικής μονάδος.

Πιο συγκεκριμένα η μεταβολή που επιφέρει η διαφορετική στήριξη είναι αύξηση **68.98%** όταν η στήριξη μετατρέπεται σε απλής, όπως παρατηρούμε από τα στοιχεία που δίνονται. Κοντά στο ποσοστό που είχαμε και για το υλικό του κράματος χαλκού.

- Στον δεύτερο πίνακα φαίνονται ακριβώς οι διαφορές των αποτελεσμάτων σε σχέση με τα διαφορετικά βήματα. Τα πειράματα δείχνουν ότι υπάρχει σύγκλιση προς μια τιμή η οποία αν συνεχίζαμε να μειώνουμε την απόσταση των κόμβων θα βρίσκαμε ακριβώς την μετατόπιση της πλάκας.

- Τέλος, παρατηρούμε ότι οι μεταβολές στα αποτελέσματα, για την απλή στήριξη (simply supported), είναι μικρότερες, ως ποσοστό, όταν αλλάζουμε το βήμα και εδώ.

4.3.2.2 Προσομοίωση 4^η, μέγεθος πλάκας $\alpha=2\mu$.

$\alpha=2$	$\beta\eta\mu\alpha=0.1$	$\beta\eta\mu\alpha=0.05$	$\beta\eta\mu\alpha=0.04$
Clamped	0.07016435	0.07892396	0.07893684
Simply	0.22550063	0.22564182	0.22565872
Μεταβολή (%)	68.886	68.860	68.857

$\alpha=2$	$\beta\eta\mu\alpha_{0.05} - \beta\eta\mu\alpha_{0.1}$	$\beta\eta\mu\alpha_{0.04} - \beta\eta\mu\alpha_{0.05}$
Clamped	0.00875961	0.00001288
Simply	0.00014119	0.0000169

<u>Ακρίβεια</u> <u>αποτελεσμάτων</u> <u>επί %</u> $\alpha=2$	$\frac{\beta\eta\mu\alpha_{0.1}}{\beta\eta\mu\alpha_{0.05}}$	$\frac{\beta\eta\mu\alpha_{0.05}}{\beta\eta\mu\alpha_{0.04}}$
Clamped	99.86	99.98
Simply	99.49	99.99

Τα ίδια φαινόμενα παρατηρούνται και όταν *μεγαλώνουμε στο διπλάσιο την πλάκα*. Τα αποτελέσματα σε αυτή την περίπτωση είναι τα εξής:

- Η μεταβολή της μέγιστης βύθισης για πακτωμένη στήριξη είναι πολύ μικρότερη από ότι στη απλά στηριγμένη, της τάξεως και πάλι της μιας δεκαδικής μονάδος.

Συγκεκριμένα η αύξηση που επιφέρει η στήριξη όταν αυτή γίνεται απλή κυμαίνεται και πάλι κοντά στο 68.88% της πακτωμένης στηρίξεως.

- Στον δεύτερο πίνακα φαίνονται ακριβώς οι διαφορές των αποτελεσμάτων ανάλογα με τα διαφορετικά βήματα. Όπως και στις προηγούμενες περιπτώσεις.
- Τέλος, παρατηρούμε ότι οι μεταβολές για την απλή στήριξη είναι και εδώ μικρότερες, ως ποσοστά, όταν αλλάζουμε το βήμα, όπως και όταν το μέγεθος ήταν μισό.

Αυτό το οποίο χρειάζεται να επισημανθεί είναι ότι παρά τον διπλασιασμό του μεγέθους, η μέγιστη κάμψη που παρατηρείται και εδώ δεν ακολουθεί αυτή τη ‘γραμμική μεταβολή’ του μεγέθους και ενώ θα περιμέναμε διπλάσια βύθιση αυτή είναι πιο κοντά στις **18 φορές** μεγαλύτερη στην τετραγωνική πλάκα μεγέθους $a=2\mu$.

$\alpha=1, \alpha=2,$ βήμα=0.05	$\frac{w_{a=1}}{w_{a=2}}$	Μεταβολή (%)
Clamped	17.99	93.7582
Simply	16.01	93.7538

$$\frac{w_{a=2}}{w_{a=1}} = 17.99 \text{ για πακτωμένη, } \frac{w_{a=2}}{w_{a=1}} = 16.01 \text{ για απλή στήριξη}$$

4.3.3 Οπλισμένο σκυρόδεμα

Σκοπός των πειραμάτων αυτών είναι η σύγκριση των αποτελεσμάτων με αυτά της μεθόδου της **Φασματικής Ανάλυσης**. (Muradova, 1997)

$E= 2 \text{ GPa}$

$\lambda= 0.17$

Αντοχή σε εφελκυσμό: 123-370 MPa

4.3.3.1 Προσομοίωση 5^η, μέγεθος πλάκας $\alpha=2\mu$.

Πάχος πλάκας $t=0.03\mu$.

$\alpha=2$	βήμα _{0.1}	βήμα _{0.05}	βήμα _{0.04}
<u>Kirchhoff</u>	0.004377	0.004383	0.004384
<u>SFEM</u>	0.00344	0.00344	0.00344
Διαφορά	0.000937	0.000943	0.000944

4.3.3.2. Προσομοίωση 6^η, μέγεθος πλάκας $\alpha=2\mu$.

Πάχος πλάκας $t=0.015\mu$.

$\alpha=2$	βήμα _{0.1}	βήμα _{0.05}	βήμα _{0.04}
<u>Kirchhoff</u>	0.03491	0.03496	0.03497
<u>SFEM</u>	0.02751	0.02751	0.02751
Διαφορά	0.0074	0.00745	0.00746

Οι προσομοιώσεις διεξήχθησαν για δυο διαφορετικά πάχη πλάκας $t=0.03$ και $t=0.015$ ενώ το μέγεθος της πλάκας είναι δυο μέτρα $\alpha=2\mu$.

Στα αποτελέσματα παρατηρούμε ότι εκείνα που προκύπτουν από το πρόγραμμα του Plate Bending το οποίο χρησιμοποιεί τη μέθοδο του Kirchhoff για τον υπολογισμό της μέγιστης κάμψης της πλάκας ταυτίζονται με μεγάλη ακρίβεια με εκείνα της μεθόδου της Φασματικής ανάλυσης (Spectral Finite Element Method).

Οι δύο μέθοδοι συγκλίνουν στα ίδια αποτελέσματα και έτσι φαίνεται η αξιοπιστία του προγράμματος που χρησιμοποιήθηκε.

Σε αυτή την περίπτωση επίσης κάναμε πειράματα για διαφορετικά βήματα ώστε να παρατηρήσουμε τις μεταβολές που οι διαφορετικές πυκνότητες πλέγματος επιφέρουν στα αποτελέσματα που παίρνουμε για τη μέγιστη κάμψη.

Η μείωση της απόστασης των κόμβων επιφέρει σύγκλιση προς μια συγκεκριμένη τιμή κάμψης:

- $w=0.00439 \mu$. για την πλάκα πάχους $t=0.03\mu$.
- $w=0.0350 \mu$. για την πλάκα πάχους $t=0.015\mu$.

4.4 Συμπεράσματα

Τα αποτελέσματα προέκυψαν από προσομοιώσεις οι οποίες έγιναν μέσω του προγράμματος Matlab Mathwork και συγκεκριμένα του πακέτου Plate Blending. Αφού αυτό βελτιστοποιήθηκε, κατά τρόπο ώστε το μέγεθος της τετραγωνικής πλάκας να μπορεί να μεταβληθεί ανάλογα με τις προθέσεις του χειριστή, έγιναν πειράματα με σκοπό να εξάγουμε συμπεράσματα για την μέγιστη κάμψη που επιδέχεται μια πλάκα ανάλογα με το υλικό που αυτή είναι φτιαγμένη.

Το πρόγραμμα για τον υπολογισμό αυτό χρησιμοποιεί τη μέθοδο του Mindlin για λεπτές πλάκες, μια μέθοδος γνωστή αλλά όχι μοναδική. Έτσι επιλέχθηκε και μια άλλη μέθοδος, αυτή της Φασματικής Ανάλυσης, ώστε να γίνουν συγκρίσεις των αποτελεσμάτων και ταύτιση αυτών.

Στα αποτελέσματα ανεξάρτητα από το υλικό και το μέγεθος της πλάκας, παρατηρούμε:

- Ότι η μεταβολή της μέγιστης κάμψης για πακτωμένη στήριξη (clamped) είναι πολύ μικρότερη από ότι στη απλή στήριξη (simply supported), της τάξεως μιας δεκαδικής μονάδος. Επομένως, καλύτερη στήριξη σημαίνει πιο συμπαγής κατασκευή.

Οι συνοριακές συνθήκες και η ένταση με την οποία είναι στηριγμένα τα άκρα της πλάκας επιφέρουν μεταβολές στα αποτελέσματα. Η μεταβολή αυτή κυμαίνεται στο **68.00%** αύξηση όταν η στήριξη μετατρέπεται σε απλή, όπως παρατηρούμε στις περιπτώσεις που παίρνουμε και από τα στοιχεία που πάρθηκαν.

- Επίσης, παρατηρούμε ότι υπάρχει σύγκλιση των αποτελεσμάτων προς μια συγκεκριμένη τιμή η οποία γίνεται πιο ξεκάθαρη και ακριβής όσο πληθαίνουν οι κόμβοι.

Η πυκνότητα του πλέγματος προκύπτει ανάλογα με το βήμα, δηλαδή την απόσταση την οποία χρησιμοποιούμε για να καταμετρήσουμε τον επόμενο κόμβο. Η μείωση της απόστασης αυτής επιφέρει σύγκλιση των αποτελεσμάτων. Όσο πληθαίνουν οι κόμβοι, τόσο πιο ακριβή είναι τα αποτελέσματα, κάτι το οποίο είναι λογικό καθώς περισσότεροι κόμβοι σημαίνει περισσότερα σημεία προς καταμέτρηση της μεταβολής των συντεταγμένων τους. Η τιμή θα ήταν απολύτως ακριβής αν είχαμε άπειρους κόμβους, δηλαδή άπειρα σημεία για να μετρήσουμε την μετατόπισή τους.

- Επιπλέον, παίρνουμε τις διαφορές των αποτελεσμάτων για τις διαφορετικές πυκνότητες του πλέγματος και έτσι αναδεικνύονται οι μεταβολές στα αποτελέσματα. Η σύγκλιση στην οποία αναφερθήκαμε γίνεται εμφανής με τις παραπάνω διαφορές.
- Παρατηρούμε ότι τα αποτελέσματα για την απλή στήριξη (simply supported) μεταβάλλονται λιγότερο, ως ποσοστό, όταν αλλάζουμε το βήμα των κόμβων από ότι στην περίπτωση της πακτωμένης πλάκας.
- Τέλος, χρειάζεται να επισημανθεί ότι όταν γίνεται διπλασιασμός του μεγέθους της πλάκας, η μέγιστη κάμψη δεν είναι διπλάσια όπως θα περίμενε κανείς αλλά κυμαίνεται σε 16 με 18 φορές μεγαλύτερη μετατόπιση.

Από τις προσομοιώσεις τις οποίες διενεργήσαμε, πρέπει να σημειωθεί ότι η μέθοδος η οποία χρησιμοποιήθηκε κρίνεται αποτελεσματική ως προς την επίτευξη του αρχικού στόχου της διπλωματικής. Μάλιστα, η σύγκριση η οποία γίνεται και με τα αποτελέσματα της Φασματικής Μεθόδου αποδεικνύει την αξιοπιστία του προγράμματος και της ορθότητα των αποτελεσμάτων.

Η στατική ανάλυση της λεπτής πλάκας η οποία διεκπεραιώνεται είναι ένα πρωταρχικό στάδιο στη μηχανική και στατική όμως απαραίτητο για να γίνει μια μελέτη σωστά.

Παράρτημα Α΄

Πρόγραμμα Matlab (Plate Bending)


```

% Static Analysis of plate
% Problem : To find the maximum bending of plate when
uniform transverse
% pressure is applied.
% Two Boundary conditions are used, simply supported and
clamped

%~~~~~
~~~~~
% Warning : On running this the workspace memory will be
deleted. Save if
% any data present before running the code !!
%~~~~~
~~~~~
%-----
-----
% Code written by : Siva Srinivas Kolukula
|
%           Senior Research Fellow
|
%           Structural Mechanics Laboratory
|
%           Indira Gandhi Center for Atomic
Research      |
%           India
|
% E-mail : allwayzitzme@gmail.com
|
%-----
-----
%-----
-----
%
% Variable descriptions
%   ke = element stiffness matrix
%   kb = element stiffness matrix for bending
%   ks = element stiffness matrix for shear
%   f = element force vector
%   stiffness = system stiffness matrix
%   force = system vector
%   displacement = system nodal displacement vector
%   coordinates = coordinate values of each node
%   nodes = nodal connectivity of each element
%   index = a vector containing system dofs associated
with each element
%   pointb = matrix containing sampling points for
bending term
%   weightb = matrix containing weighting coefficients
for bending term
%   points = matrix containing sampling points for shear
term

```

```

% weights = matrix containing weighting coefficients
for shear term
% bcdof = a vector containing dofs associated with
boundary conditions
% bcval = a vector containing boundary condition values
associated with
%           the dofs in 'bcdof'
% B_pb = matrix for kinematic equation for bending
% D_pb = matrix for material property for bending
% B_ps = matrix for kinematic equation for shear
% D_ps = matrix for material property for shear
%
%-----
%-----
clear
clc
%
%cdisp('Please wait Programme is under Run')
%-----
%-----
% Input data
%-----
%-----

disp('Εισάγετε το μέγεθος της τετραγωνικής πλάκας')
megethos= 'a'
a=input(megethos)

disp('Εισάγετε το βήμα των κόμβων')
vima='vima'
vima=input(vima)

a
vima

[coordinates]=Coordinates(a,vima);
%load coordinates ;

%-----
%-----
% Input data for nodal connectivity for each element
%-----
%-----

[nodes]=Nodes(a,vima)

%load nodes ;

nel = length(nodes) ; % number of
elements

```

```

nnel=4; % number of nodes
per element
ndof=3; % number of dofs
per node
nnode = length(coordinates) ; % total number of
nodes in system
sdof=nnode*ndof; % total system
dofs
edof=nnel*ndof; % degrees of
freedom per element
%-----
% Geometrical and material properties of plate
%-----
a = 1 ; % Length of the plate
(along X-axes)
b = 1 ; % Length of the plate
(along Y-axes)

E = 100*10^9; % elastic modulus
nu = 0.35; % Poisson's ratio
t = 0.003 ; % plate thickness (σε
μέτρα)
I = t^3/12 ; % t^3/12 flexural
rigidity
% το μεγαλύτερο ρόλο στο αποτέλεσμα το έχει το πάχος της
πλάκας

PlotMesh(coordinates,nodes)
%-----
% Order of Gauss Quadrature
%-----
nglb=2; % 2x2 Gauss-Legendre
quadrature for bending
ngls=1; % 1x1 Gauss-Legendre
quadrature for shear

%-----
% Initialization of matrices and vectors
%-----
force = zeros(sdof,1) ; % System Force Vector
stiffness=zeros(sdof,sdof); % system stiffness
matrix
index=zeros(edof,1); % index vector
B_pb=zeros(3,edof); % kinematic matrix
for bending

```

```

B_ps=zeros(2,edof); % kinematic matrix
for shear

%-----
% Transverse uniform pressure on plate Αυτό πρέπει να
% είναι τάση όχι δύναμη
%-----

P = -1000; %συμφωνα με πινακα αντοχής σε διαρροή!!!

%-1*10^0 Η άσκηση τις πίεσης είναι τυπική είτε βάλω 10000
είτε 1
%δεν αλλάζει το αποτέλεσμα παρα σε κάτι δεκαδικά στο
10^15

%-----
% Computation of element matrices and vectors and their
assembly
%-----

%
% For bending stiffness
%
[pointb,weightb]=GaussQuadrature('second'); % sampling
points & weights

D_pb= I*E/(1-nu*nu)*[1 nu 0; nu 1 0; 0 0 (1-nu)/2];
% bending

material property
%
% For shear stiffness
%
[points,weights] = GaussQuadrature('first'); %
sampling points & weights
G = 0.5*E/(1.0+nu); % shear
modulus
shcof = 5/6; % shear
correction factor
D_ps=G*shcof*t*[1 0; 0 1]; % shear
material property

for iel=1:nel % loop for the total
number of elements

for i=1:nnel
node(i)=nodes(iel,i); % extract connected
node for (iel)-th element

```

```

xx(i)=coordinates(node(i),1);      % extract x value of
the node
yy(i)=coordinates(node(i),2);      % extract y value of
the node
end

ke = zeros(edof,edof);              % initialization of
element stiffness matrix
kb = zeros(edof,edof);              % initialization of
bending matrix
ks = zeros(edof,edof);              % initialization of
shear matrix
f = zeros(edof,1) ;                 % initialization of
force vector
%-----
% Numerical integration for bending term
%-----
for intx=1:nqlb
xi=pointb(intx,1);                  % sampling point
in x-axis
wtx=weightb(intx,1);                % weight in x-axis
for inty=1:nqlb
eta=pointb(inty,2);                % sampling point
in y-axis
wti=weightb(inty,2) ;               % weight in y-axis

[shape,dhdr,dhds]=Shapefunctions(xi,eta);
% compute shape functions and derivatives at sampling
point

[detjacobian,invjacobian]=Jacobian(nnel,dhdr,dhds,xx,yy);
% compute Jacobian

[dhdx,dhdy]=ShapefunctionDerivatives(nnel,dhdr,dhds,invja
cobian);
% derivatives w.r.t.
physical coordinate
B_pb=PlateBending(nnel,dhdx,dhdy); % bending kinematic
matrix

%-----
% compute bending element matrix
%-----

kb=kb+B_pb'*D_pb*B_pb*wtx*wti*detjacobian;

end

```



```

end                                     % end of numerical integration
loop for bending term

%-----
%-----
%   numerical integration for shear term
%-----
%-----

for intx=1:nxls
xi=points(intx,1);                     % sampling point in
x-axis
wtx=weights(intx,1);                   % weight in x-axis
for inty=1:nxls
eta=points(inty,2);                   % sampling point in
y-axis
wty=weights(inty,2) ;                 % weight in y-axis

[shape,dhdr,dhds]=Shapefunctions(xi,eta);
% compute shape functions and derivatives at
sampling point

[detjacobian,invjacobian]=Jacobian(nnel,dhdr,dhds,xx,yy);
% compute Jacobian

[dhdx,dhdy]=ShapefunctionDerivatives(nnel,dhdr,dhds,invja
cobian);
% derivatives w.r.t. physical coordinate

fe = Force(nnel,shape,P) ;             % Force vector
B_ps=PlateShear(nnel,dhdx,dhdy,shape); % shear
kinematic matrix

%-----
%-----
%   compute shear element matrix
%-----
%-----

ks=ks+B_ps'*D_ps*B_ps*wtx*wty*detjacobian;
f = f+fe*wtx*wty*detjacobian ;

end
end                                     % end of numerical integration
loop for shear term

%-----
%-----
%   compute element matrix
%-----
%-----

```

```

ke = kb+ks ;

index=elementdof(node,nnel,ndof);% extract system dofs
associated with element

[stiffness,force]=assemble(stiffness,force,ke,f,index);
                                % assemble element stiffness
and force matrices
end
%-----
%-----
% Boundary conditions
%-----
%-----

%typeBC = 'ss-ss-ss-ss' ;           % Boundary Condition
type
typeBC = 'c-c-c-c' ;
bcdof = BoundaryCondition(typeBC,coordinates) ;
bcval = zeros(1,length(bcdof)) ;

[stiffness,force] =
constraints(stiffness,force,bcdof,bcval);

%-----
%-----
% Solution
%-----
%-----
displacement = stiffness\force ;
%-----
%-----
% Output of displacements
%-----
%-----

[w,titax,titay] = mytable(nnode,displacement,sdof) ;

%-----
%-----
% Deformed Shape
%-----
%-----
x = coordinates(:,1) ;
y = coordinates(:,2) ;
f3 = figure ;
set(f3,'name','Postprocessing','numbertitle','off') ;
plot3(x,y,w,'.') ;
title('plate deformation') ;

```

```

% Maximum transverse displacement
format long
D1 = E*I/(1-nu^2) ; %edw eixe t^3/12 anti gia I
minw = min(w) %*D1/(P*a^4)

%-----
% Contour Plots
%-----
PlotFieldonMesh(coordinates,nodes,w)
title('Profile of UZ/w on plate')
%
PlotFieldonDefoMesh(coordinates,nodes,w,w)
title('Profile of UZ on deformed Mesh') ;

```

Coordinates

```

%disp ('Dose megethos plakas')

%vima=0.05 %vima tw n suntetagmenwn

function [coordinates]=coordinates(a,vima)

%a=1;% Platos

%vima=0.05 ; % kathe poso mikos tha allazei to element

loop=a/vima; %edw einai 20

i=0 ;%vohthitiki metavliti gia axona x
y=0; %vohthitiki metavliti gia axona y
n=1;

```

```

h=0 ;
count=0;
count1=0;
for h=0:1:(loop-1) % 20 einai to loop=mikos/vima
    for l=(h*loop)+1:1:loop*n %n*20

        coordinates(l,1)=i*vima;
        coordinates(l,2)=y*vima;
        i=i+1;
        count1=count1+1;

    end

    i=0;
    y=y+1;
    %b=b+1
    n=n+1;
    count=count+1;

end

count1=count1+1;

for f=0:1:(loop-1)

    coordinates(count1,1)=a;
    coordinates(count1,2)=f*vima;

```

```

        count1=count1+1;

end

for g=1:1:loop

    coordinates(count1,1)=g*vima;
    coordinates(count1,2)=a;
    count1=count1+1;

end

coordinates(count1,1)=0;
coordinates(count1,2)=a;

coordinates;
count1 ;
n;
h;

```

Nodes

```
function [nodes]=Nodes(a,vima)

%a=1;

%b=1;

%vima=0.05;

loop=a/vima;

T=1;

count=0;

for k=1:1:loop*loop-loop % 1-380

    if k==T*loop

        nodes(k,1)=k;

        nodes(k,2)=(loop*loop)+T;

        nodes(k,3)=(loop*loop)+T+1;

        nodes(k,4)=loop+k;

        T=T+1;

        count=count+1;

    else

        nodes(k,1)=k; %1

        nodes(k,2)=k+1; %2

        nodes(k,3)=(k+1)+loop; %22

        nodes(k,4)=(k+1)+loop-1; %21

        count=count+1;
```

```

        end
    end
%end

y=1;

for k=(loop*loop)-loop+1:1:loop*loop-1 % 381-399 node

    if k==loop*loop-loop+1

        nodes(k,1)=k;
        nodes(k,2)=k+1;
        nodes(k,3)=loop*loop+loop+y;
        nodes(k,4)=(loop+1)*(loop+1);
        y=y+1;
        count=count+1;

    elseif loop*loop-loop<k<loop*loop

        nodes(k,1)=k;
        nodes(k,2)=k+1;
        nodes(k,3)=(loop*loop)+(loop+y);
        nodes(k,4)=(loop*loop)+(loop+y-1);
        y=y+1;
        count=count+1;
    end
end
end

```

count

k=k+1

nodes(k,1)=k;

nodes(k,2)=loop*loop+loop;

nodes(k,3)=k+loop+loop;

nodes(k,4)=k+loop+loop-1 ;

Παράρτημα Β΄

Αποτελέσματα Matlab

Κράμα Χαλκού C26000

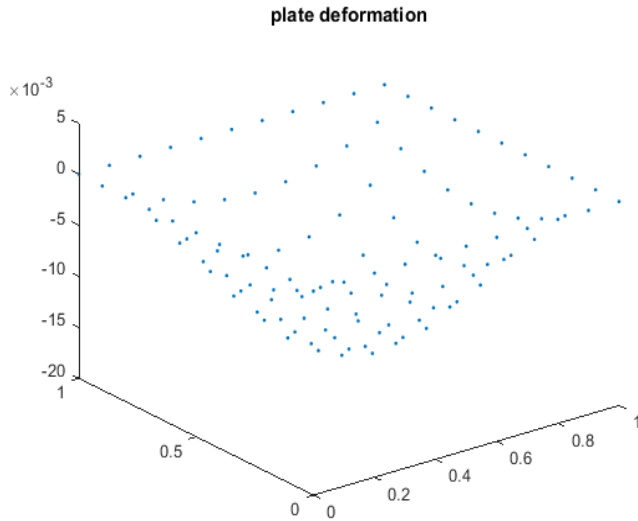
Στήριξη: simply supported

Μέγεθος πλάκας: $\alpha = 1 \mu$.

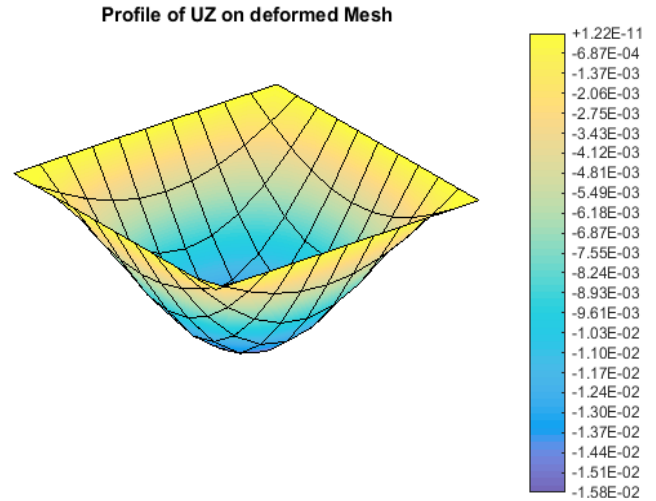
Απόσταση κόμβων: βήμα = 0.1μ .

Μέτρο ελαστικότητας: $E = 110 \text{ GPa}$

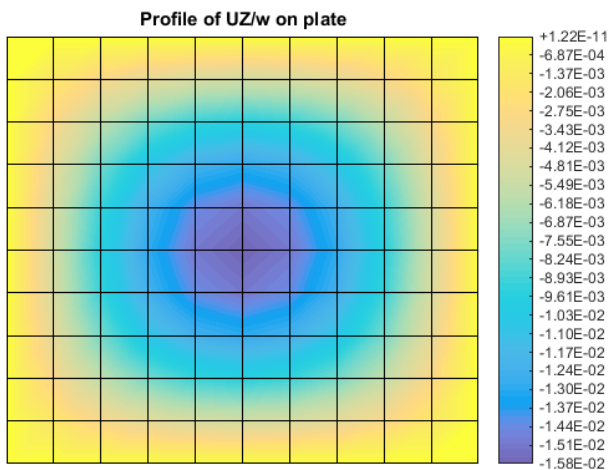
Λόγος Poisson: $\lambda = 0.35$



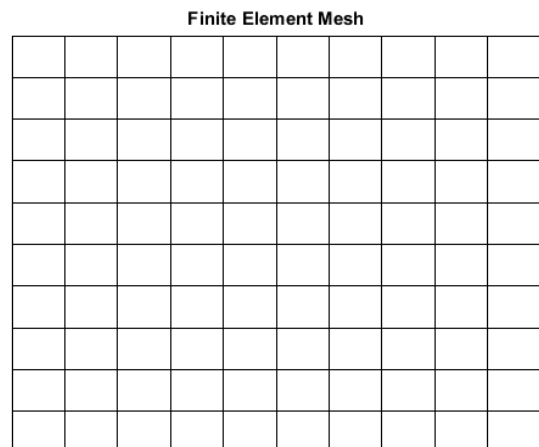
Εικόνα 1.1.1 Παραμόρφωση πλάκας. Απεικόνιση των κόμβων.



Εικόνα 1.1.2. Προφίλ αξόνων UZ παραμορφωμένου πλέγματος έπειτα από φόρτιση.

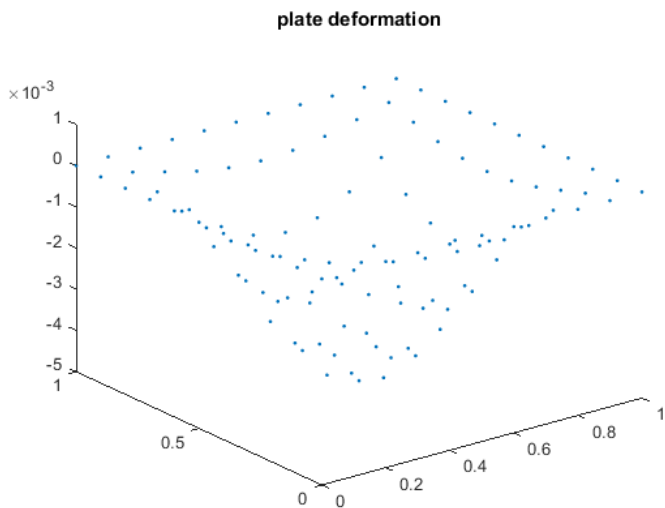


Εικόνα 1.1.3. Χρωματική απεικόνιση προφίλ μετατόπισης αξόνων UZ και w της παραμορφωμένης πλάκας.

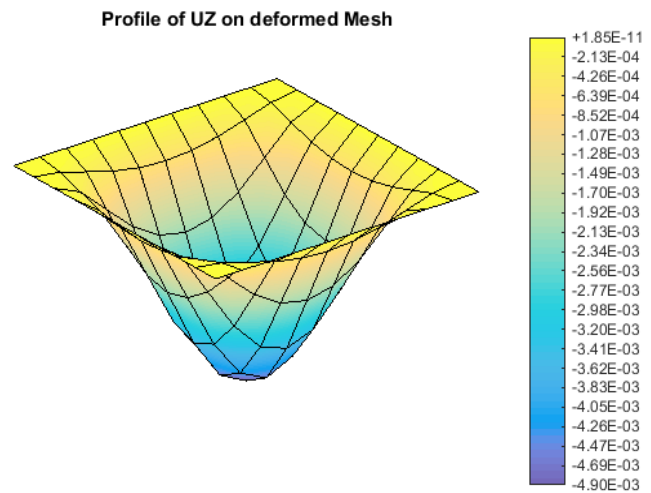


Εικόνα 1.1.4. Πλέγμα πεπερασμένων στοιχείων.

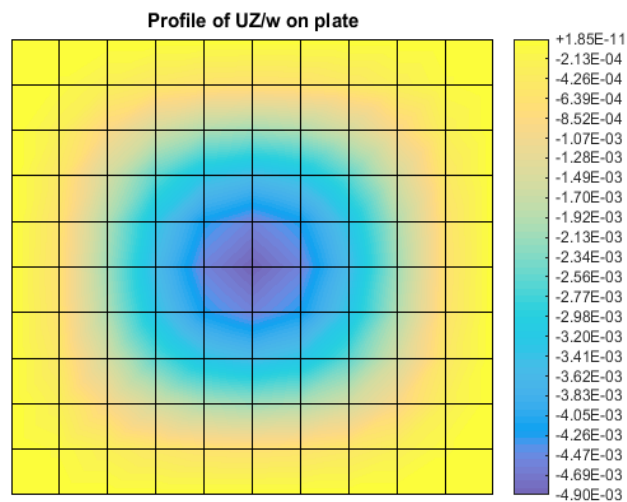
Στήριξη: clamped supported
 Μέγεθος πλάκας: $\alpha = 1 \mu$.
 Απόσταση κόμβων: βήμα 0.1 μ .



Εικόνα 1.2.1. Παραμόρφωση πλάκας. Απεικόνιση των κόμβων

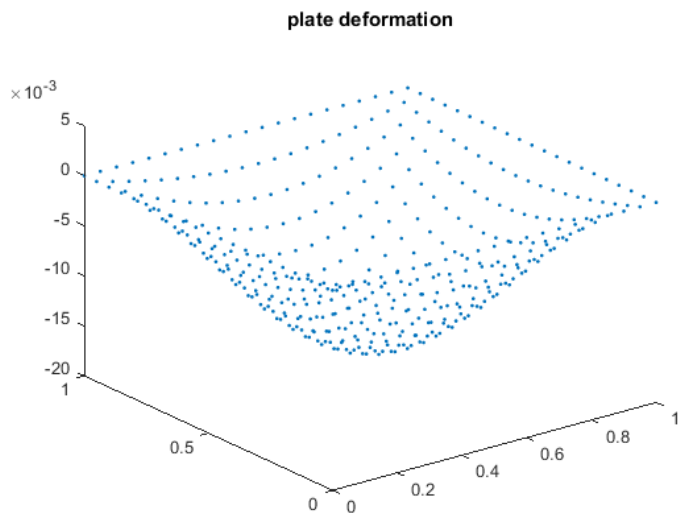


Εικόνα 1.2.2. Προφίλ αξόνων UZ παραμορφωμένου πλέγματος έπειτα από φόρτιση.

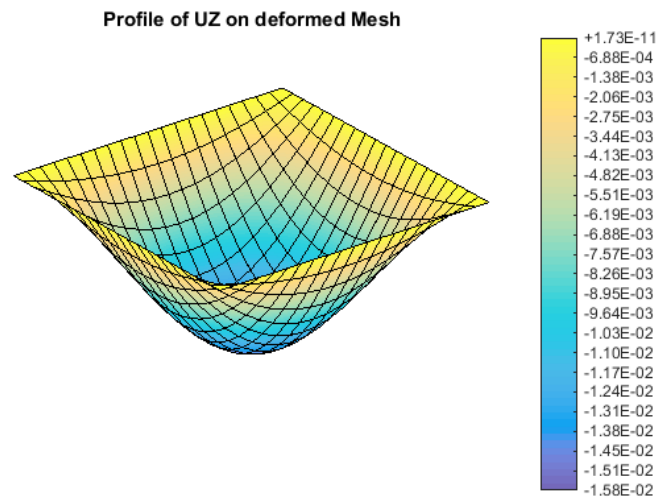


Εικόνα 1.2.3. Χρωματική απεικόνιση προφίλ μετατόπισης αξόνων UZ και w της παραμορφωμένης πλάκας.

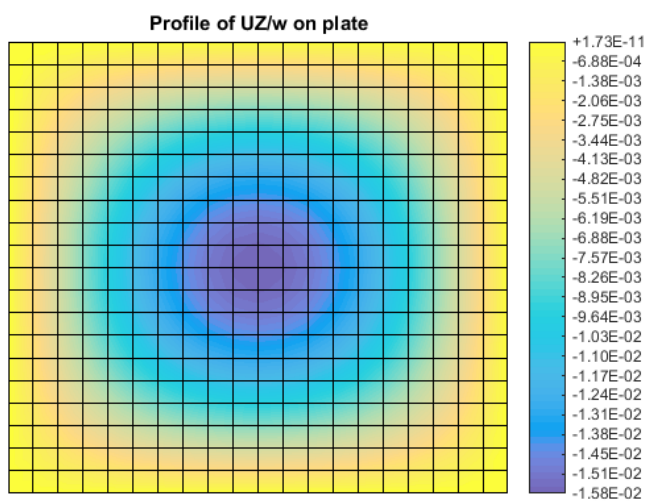
Στήριξη: simply supported
 Μέγεθος πλάκας: $\alpha = 1 \mu$.
 Απόσταση κόμβων: βήμα 0.05μ .



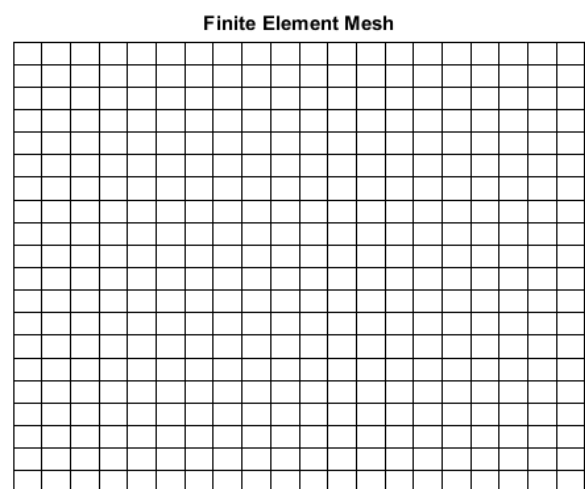
Εικόνα 1.3.1. Παραμόρφωση πλάκας. Απεικόνιση των κόμβων



Εικόνα 1.3.2. Προφίλ αξόνων UZ παραμορφωμένου πλέγματος έπειτα από φόρτιση.

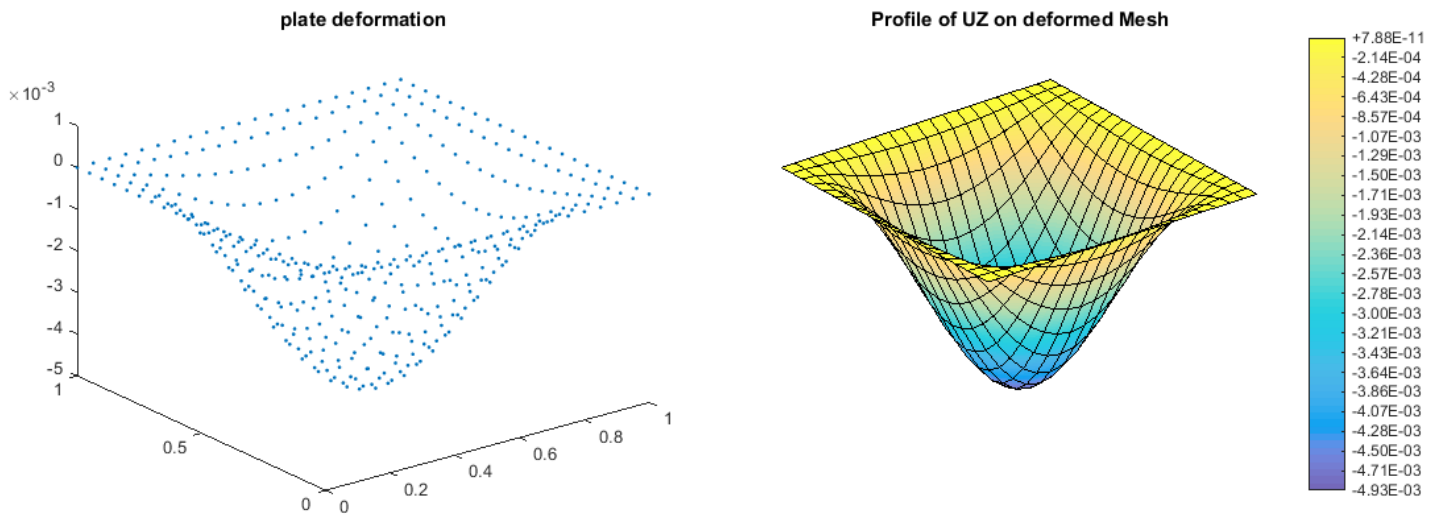


Εικόνα 1.3.3. Χρωματική απεικόνιση προφίλ μετατόπισης αξόνων UZ και w της παραμορφωμένης πλάκας.

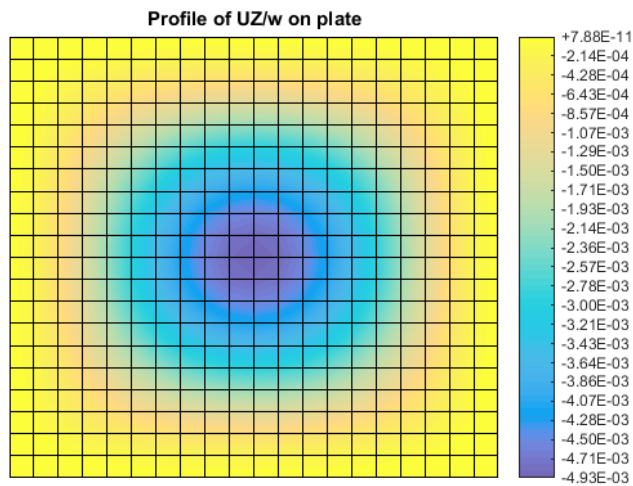


Εικόνα 1.3.4. Πλέγμα πεπερασμένων στοιχείων.

Στήριξη: clamped supported
 Μέγεθος πλάκας: $\alpha = 1 \mu$.
 Απόσταση κόμβων: βήμα 0.05 μ .

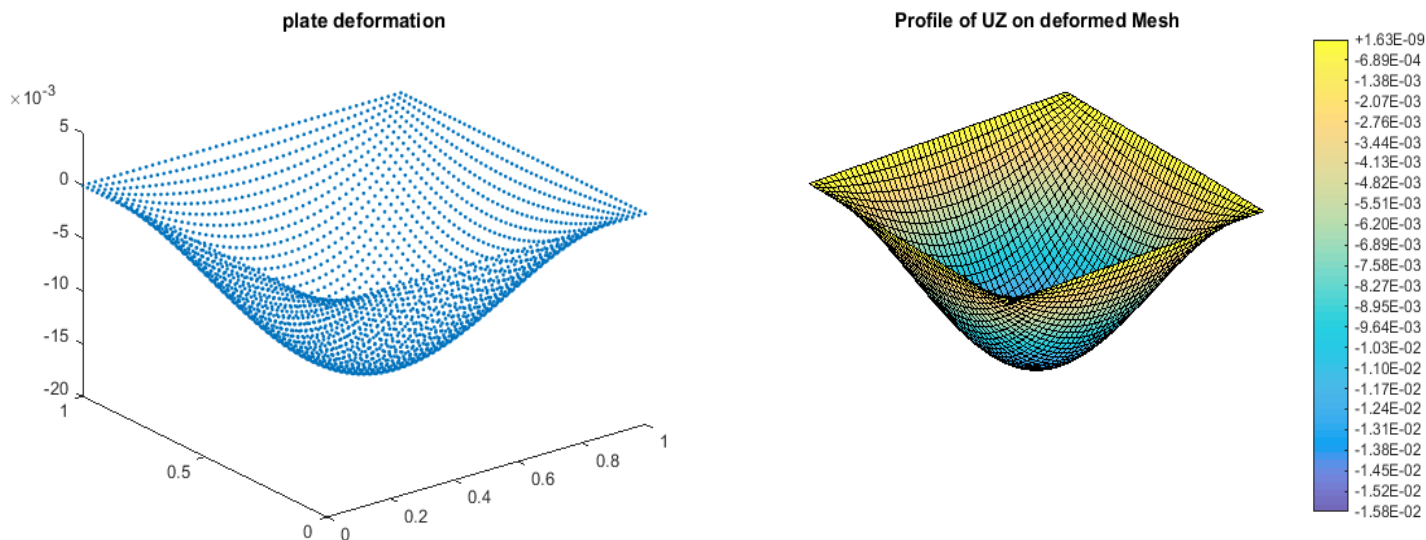


Εικόνα 1.4.1. Παραμόρφωση πλάκας. Απεικόνιση των κόμβων. Εικόνα 1.4.2. Προφίλ αξόνων UZ παραμορφωμένου πλέγματος έπειτα από φόρτιση.

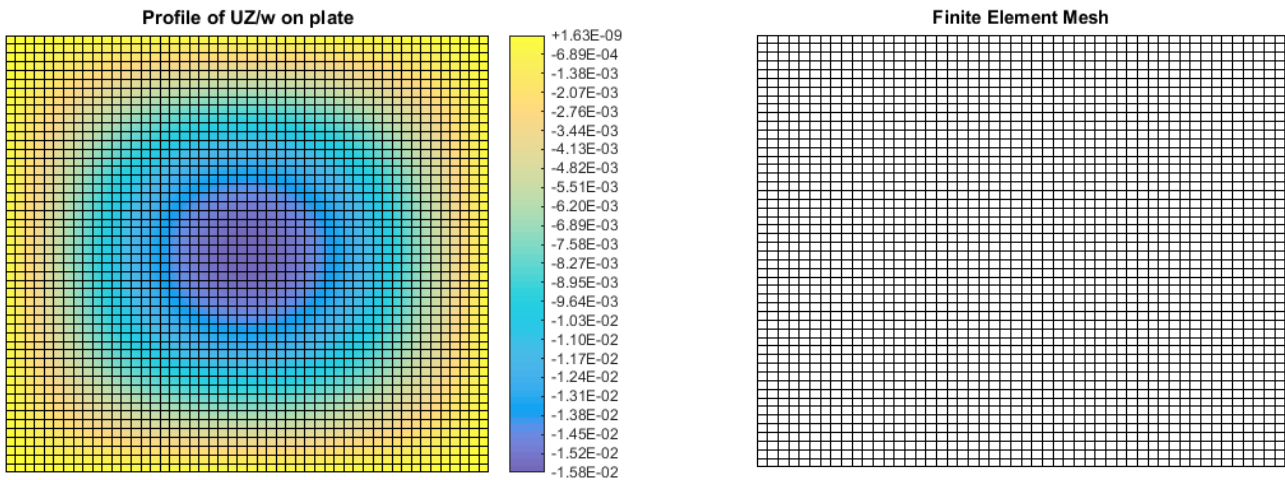


Εικόνα 1.4.3. Χρωματική απεικόνιση προφίλ μετατόπισης αξόνων UZ και w της παραμορφωμένης πλάκας.

Στήριξη: simply supported
 Μέγεθος πλάκας: $\alpha = 1 \mu$.
 Απόσταση κόμβων: βήμα 0.02 μ .

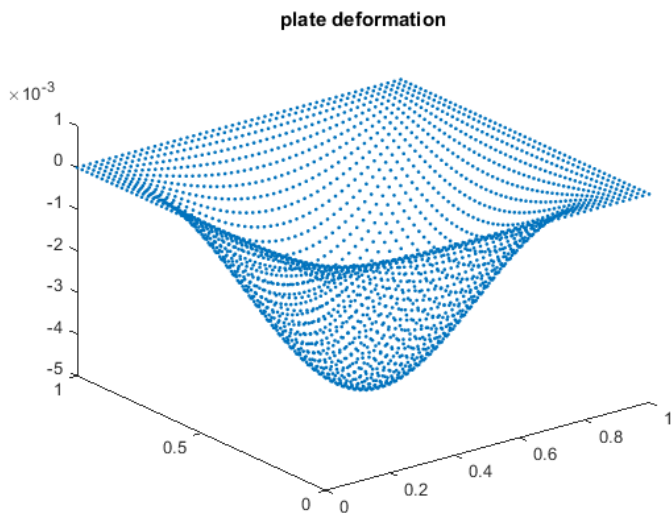


Εικόνα 1.5.1. Παραμόρφωση πλάκας. Απεικόνιση των κόμβων. Εικόνα 1.5.2. Προφίλ αξόνων UZ παραμορφωμένου πλέγματος έπειτα από φόρτιση.

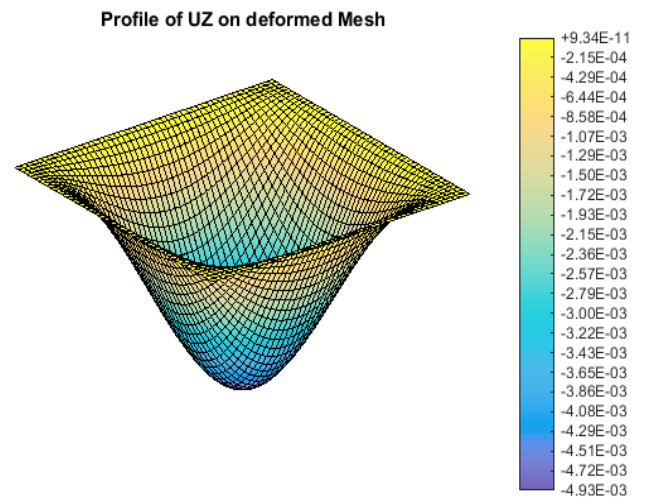


Εικόνα 1.5.3. Χρωματική απεικόνιση προφίλ μετατόπισης αξόνων UZ και w της παραμορφωμένης πλάκας. Εικόνα 1.5.4. Πλέγμα πεπερασμένων στοιχείων.

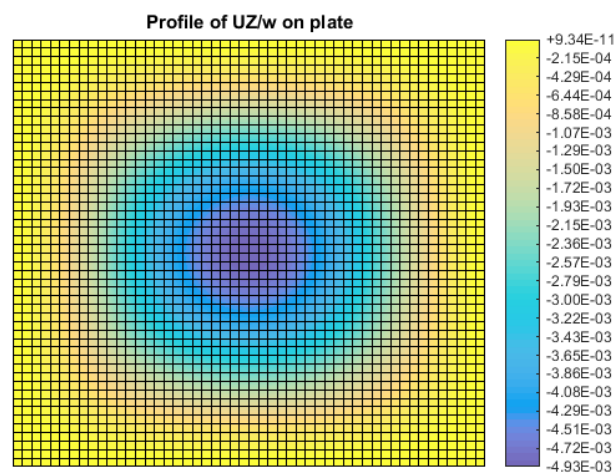
Στήριξη: clamped supported
 Μέγεθος πλάκας: $\alpha = 1 \mu$.
 Απόσταση κόμβων: βήμα 0.02μ .



Εικόνα 1.6.1. Παραμόρφωση πλάκας. Απεικόνιση των κόμβων.

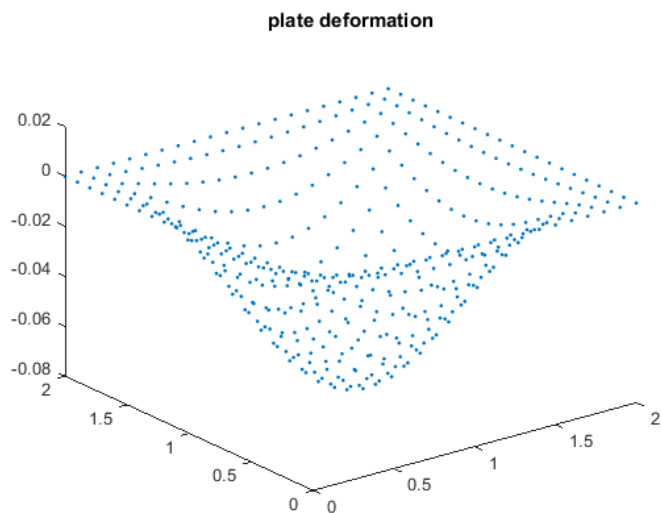


Εικόνα 1.6.2. Προφίλ αξόνων UZ παραμορφωμένου πλέγματος έπειτα από φόρτιση.

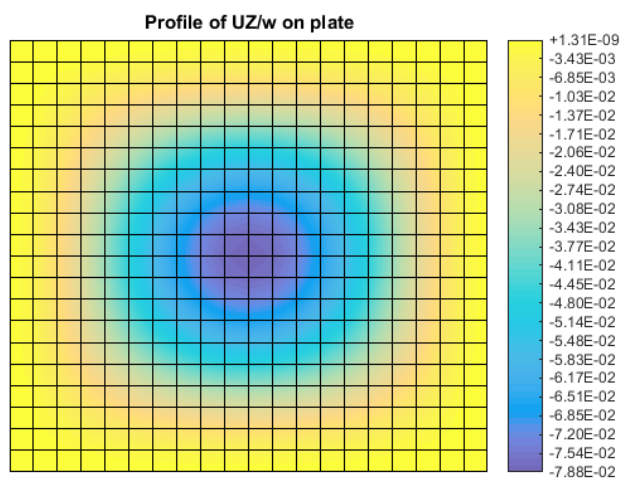


Εικόνα 1.6.1. Χρωματική απεικόνιση προφίλ μετατόπισης αξόνων UZ και w της παραμορφωμένης πλάκας.

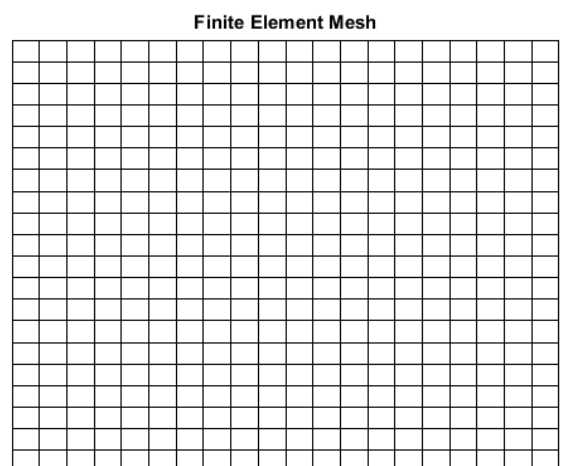
Στήριξη: simply supported
Μέγεθος πλάκας: $\alpha=2 \mu$.
Απόσταση κόμβων: βήμα 0.1μ .



Εικόνα 2.1.1. Παραμόρφωση πλάκας. Απεικόνιση των κόμβων.

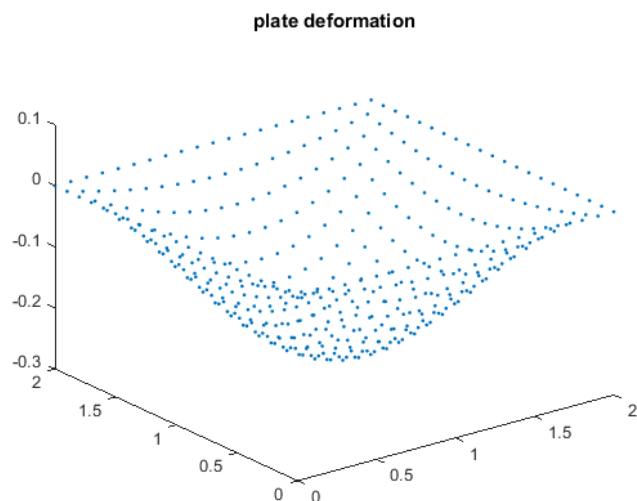


Εικόνα 2.1.3. Χρωματική απεικόνιση προφίλ μετατόπισης αξόνων U_Z και w της παραμορφωμένης πλάκας.

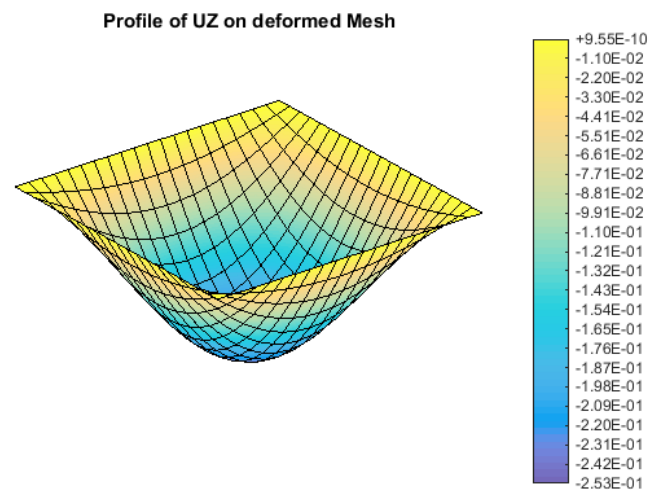


Εικόνα 2.1.4. Πλέγμα πεπερασμένων στοιχείων.

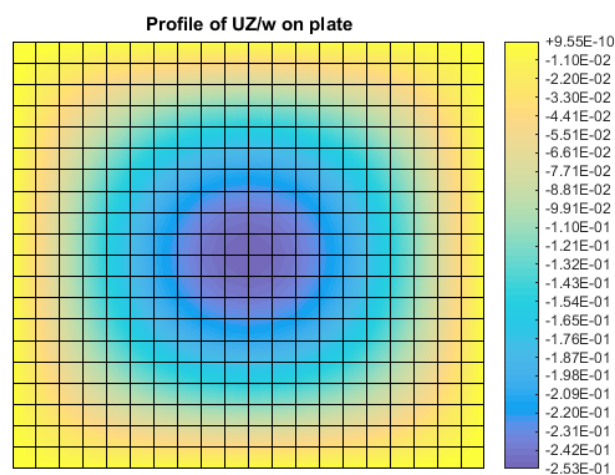
Στήριξη: clamped supported
 Μέγεθος πλάκας: $\alpha = 2 \mu$.
 Απόσταση κόμβων: βήμα 0.1μ .



Εικόνα 2.2.1. Παραμόρφωση πλάκας. Απεικόνιση των κόμβων.

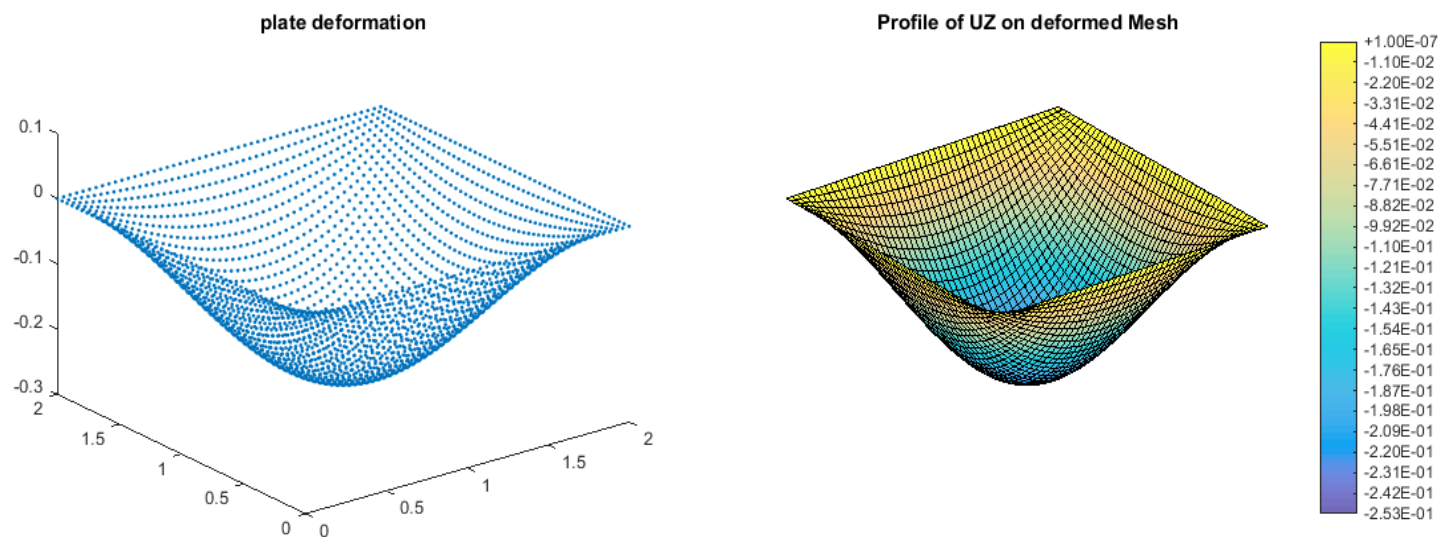


Εικόνα 2.2.2. Προφίλ αξόνων UZ παραμορφωμένου πλέγματος έπειτα από φόρτιση.

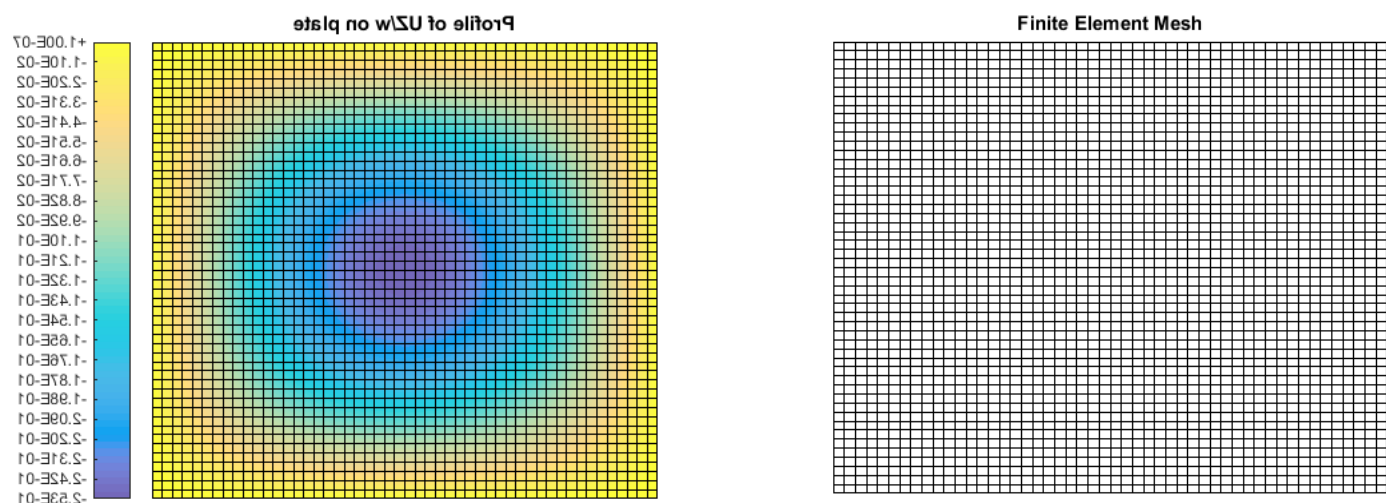


Εικόνα 2.2.3. Χρωματική απεικόνιση προφίλ μετατόπισης αξόνων UZ και w της παραμορφωμένης πλάκας.

Στήριξη: simply supported
 Μέγεθος πλάκας: $\alpha = 2 \mu$.
 Απόσταση κόμβων: βήμα 0.04μ .



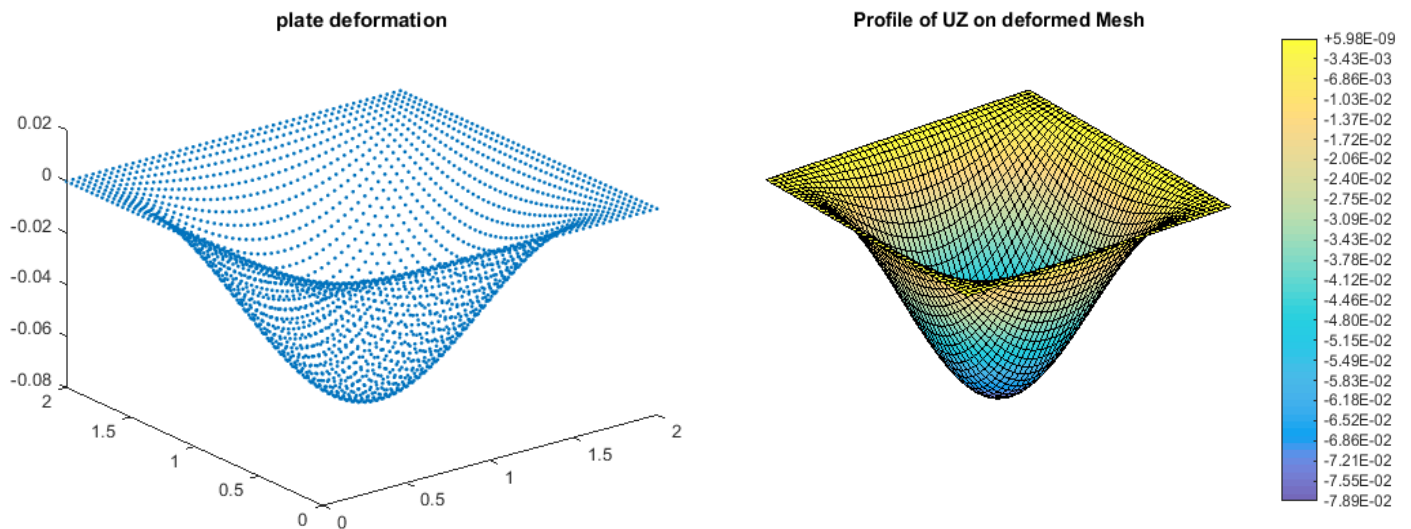
Εικόνα 2.3.1. Παραμόρφωση πλάκας. Απεικόνιση των κόμβων. Εικόνα 2.3.2. Προφίλ αξόνων UZ παραμορφωμένου πλέγματος έπειτα από φόρτιση.



Εικόνα 2.3.3. Χρωματική απεικόνιση προφίλ μετατόπισης αξόνων UZ και w της παραμορφωμένης πλάκας. Εικόνα 2.3.4. Πλέγμα πεπερασμένων στοιχείων.

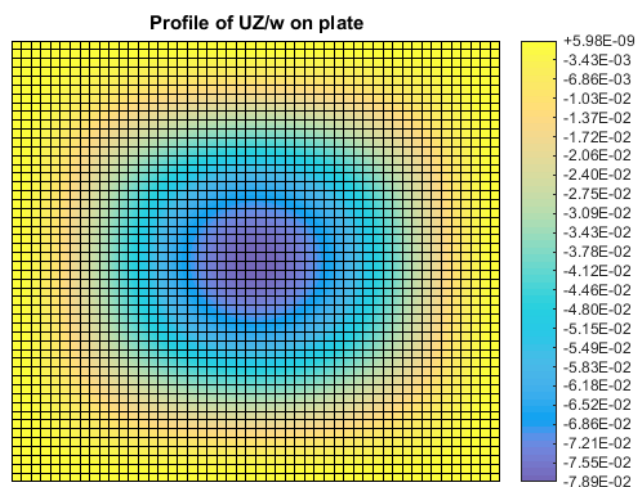
Στήριξη: clamped supported
Μέγεθος πλάκας: $\alpha = 2 \mu$.
Απόσταση κόμβων: βήμα 0.04μ .

Χρωματική απεικόνιση προφίλ μετατόπισης αξόνων UZ και w της παραμορφωμένης πλάκας.



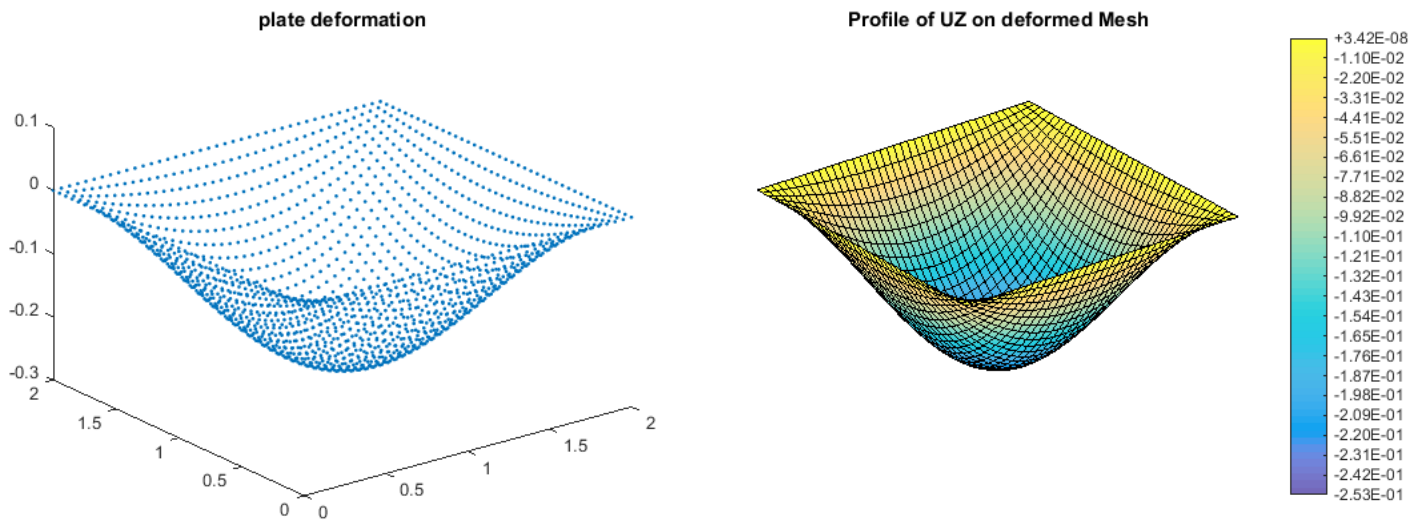
Εικόνα 2.4.1. Παραμόρφωση πλάκας. Απεικόνιση των κόμβων.

Εικόνα 2.4.2. Προφίλ αξόνων UZ παραμορφωμένου πλέγματος έπειτα από φόρτιση.

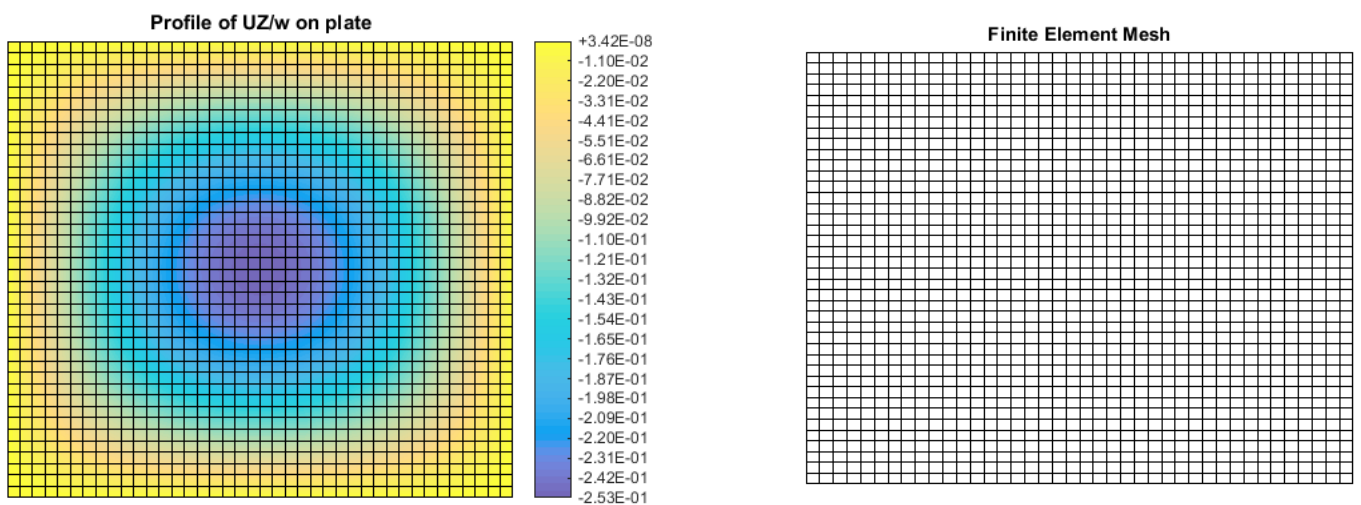


Εικόνα 2.4.3. Χρωματική απεικόνιση προφίλ μετατόπισης αξόνων UZ και w της παραμορφωμένης πλάκας.

Στήριξη: simply supported
 Μέγεθος πλάκας: $\alpha = 2 \mu$.
 Απόσταση κόμβων: βήμα 0.05μ .

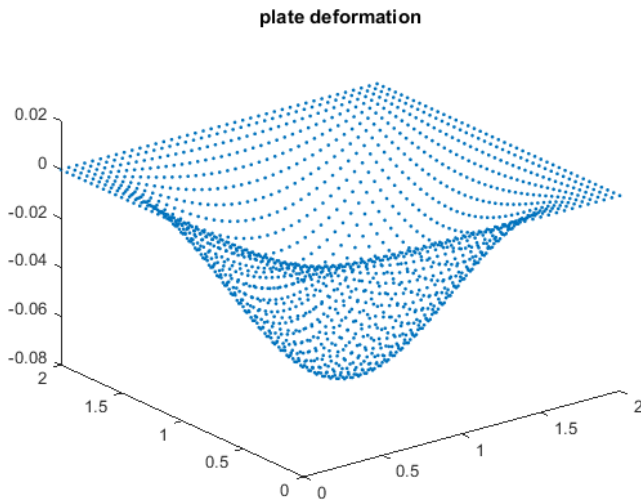


Εικόνα 2.5.1. Παραμόρφωση πλάκας. Απεικόνιση των κόμβων. Εικόνα 2.5.2. Προφίλ αξόνων UZ παραμορφωμένου πλέγματος έπειτα από φόρτιση.

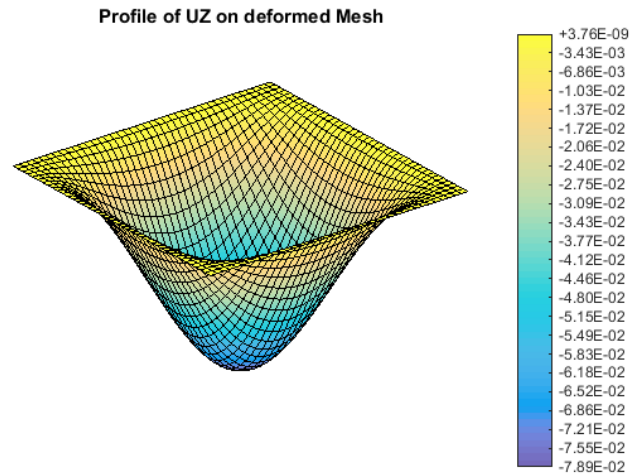


Εικόνα 2.5.3. Χρωματική απεικόνιση προφίλ μετατόπισης αξόνων UZ και w της παραμορφωμένης πλάκας. Εικόνα 2.5.4. Πλέγμα πεπερασμένων στοιχείων.

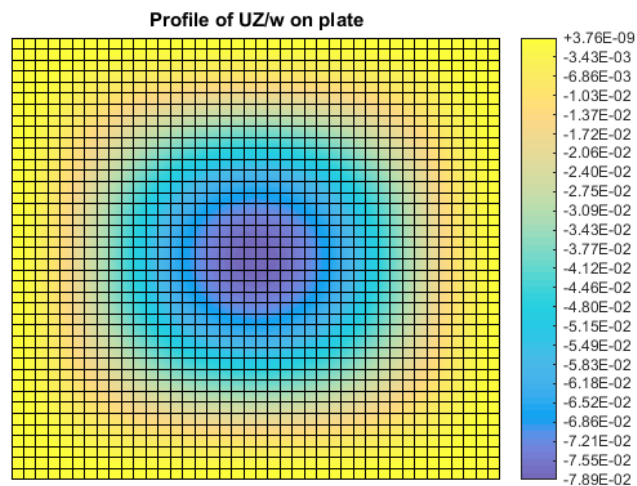
Στήριξη: clamped supported
Μέγεθος πλάκας: $\alpha = 2 \mu$.
Απόσταση κόμβων: βήμα 0.05μ .



Εικόνα 2.6.1. Παραμόρφωση πλάκας. Απεικόνιση των κόμβων.



Εικόνα 2.6.2. Προφίλ αξόνων UZ παραμορφωμένου πλέγματος έπειτα από φόρτιση.



Εικόνα 2.6.3. Χρωματική απεικόνιση προφίλ μετατόπισης αξόνων UZ και w της παραμορφωμένης πλάκας.

Υαλοκεραμικο (pyroceram)

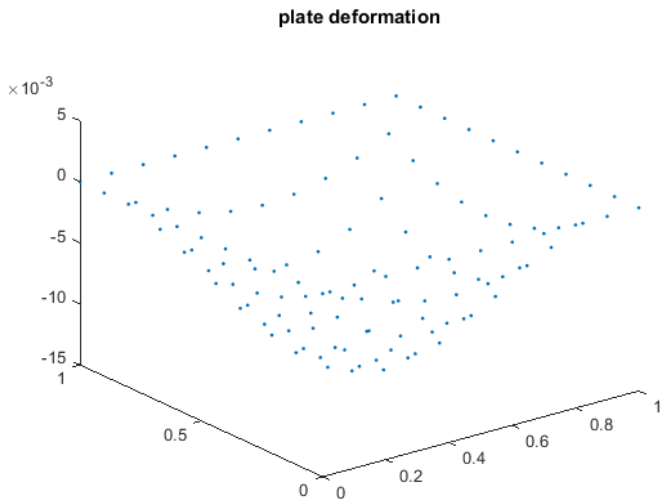
Στήριξη: simply supported

Μέγεθος πλάκας: $\alpha = 1 \mu$.

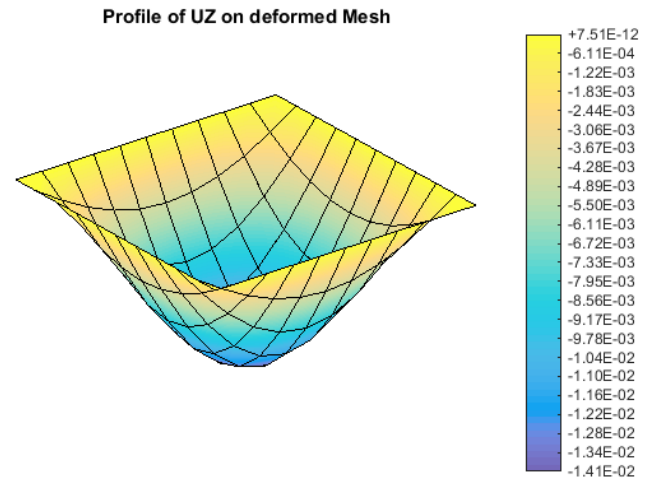
Απόσταση κόμβων: βήμα 0.1μ .

Μέτρο Ελαστικότητας $E=120 \text{ GPa}$

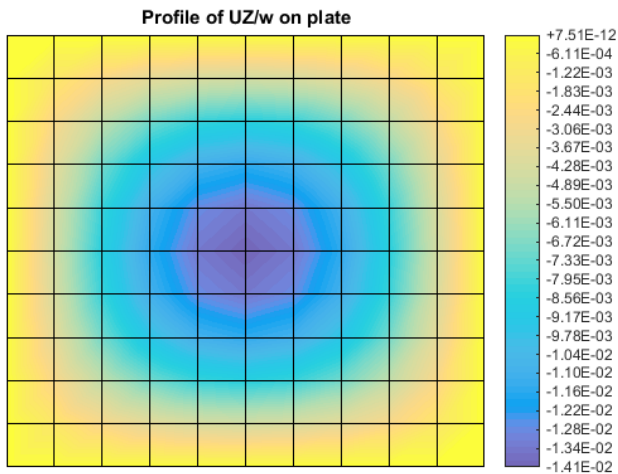
Λόγος Poisson $\lambda=0.25$



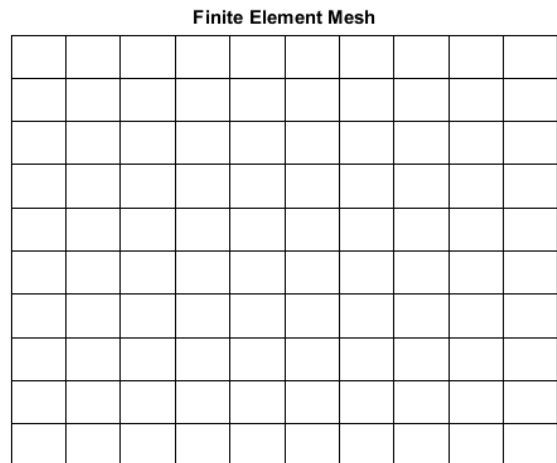
Εικόνα 3.1.1. Παραμόρφωση πλάκας. Απεικόνιση των κόμβων.



Εικόνα 3.1.2. Προφίλ αξόνων UZ παραμορφωμένου πλέγματος έπειτα από φόρτιση.

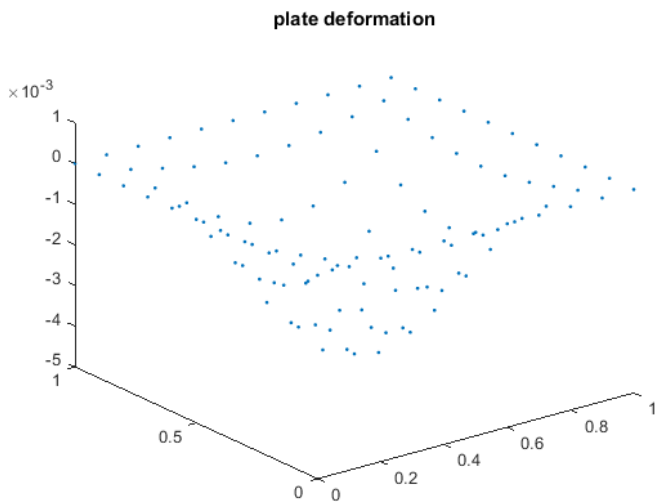


Εικόνα 2.1.3. Χρωματική απεικόνιση προφίλ μετατόπισης αξόνων UZ και w της παραμορφωμένης πλάκας.

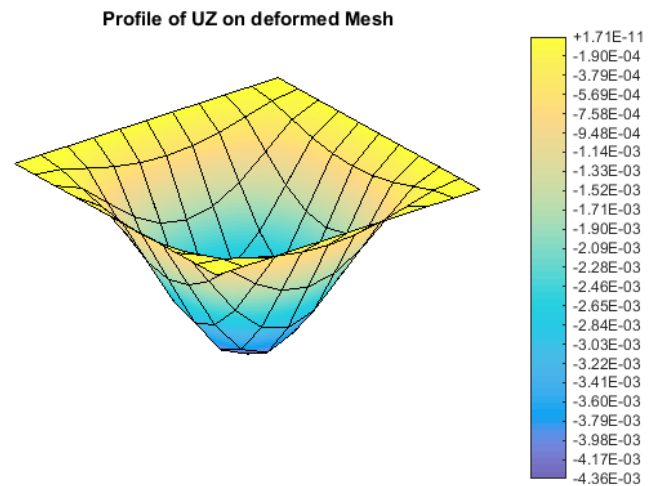


Εικόνα 1.1.4. Πλέγμα πεπερασμένων στοιχείων.

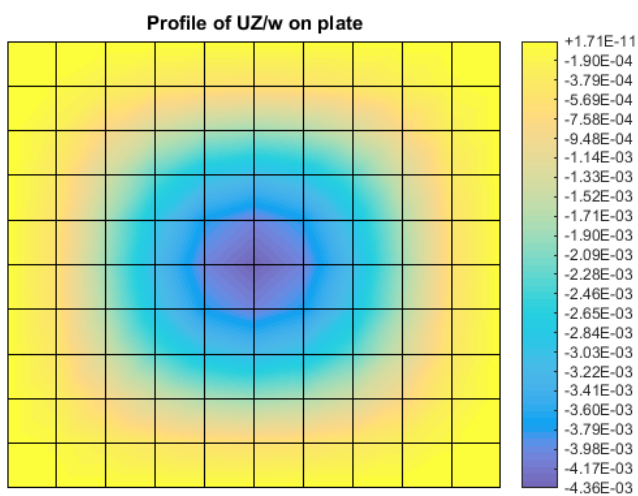
Στήριξη: clamped supported
 Μέγεθος πλάκας: $\alpha = 1 \mu$.
 Απόσταση κόμβων: βήμα 0.1 μ .



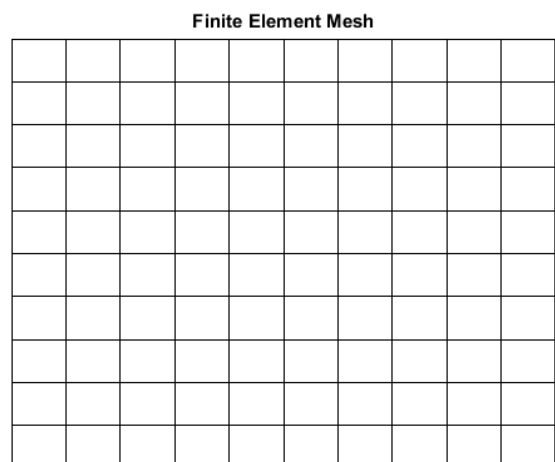
Εικόνα 3.2.1. Παραμόρφωση πλάκας. Απεικόνιση των κόμβων.



Εικόνα 3.2.2. Προφίλ αξόνων UZ παραμορφωμένου πλέγματος έπειτα από φόρτιση.

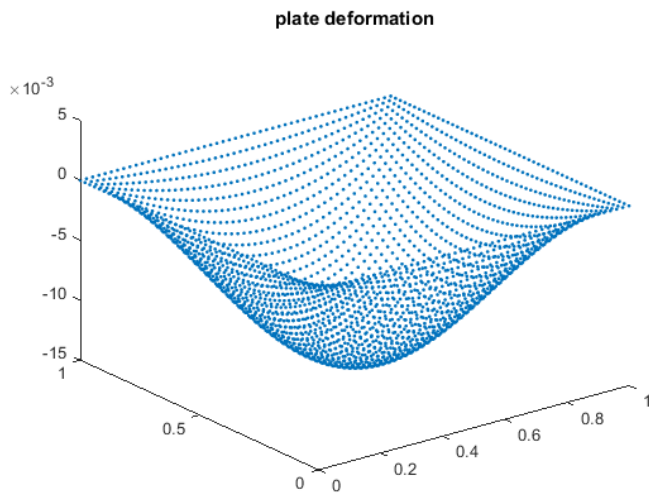


Εικόνα 3.2.3. Χρωματική απεικόνιση προφίλ μετατόπισης αξόνων UZ και w της παραμορφωμένης πλάκας.

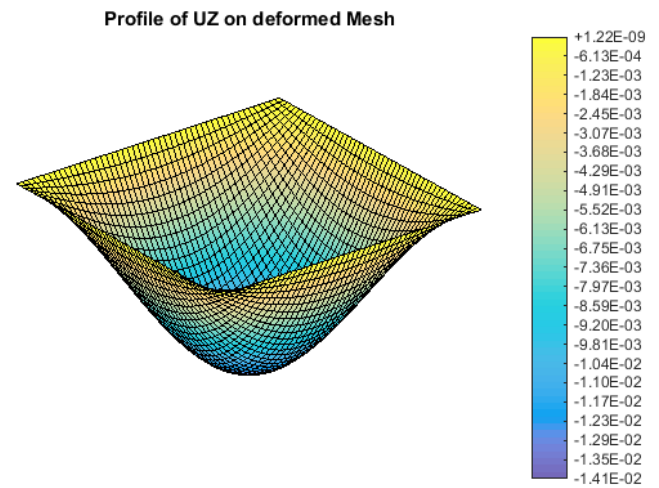


Εικόνα 3.2.4. Πλέγμα πεπερασμένων στοιχείων.

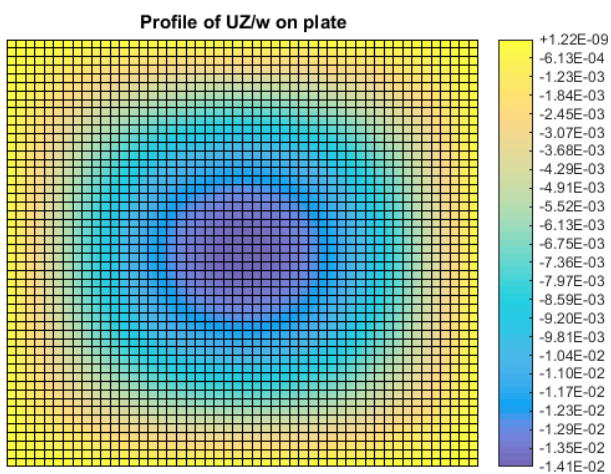
Στήριξη: simply supported
Μέγεθος πλάκας: $\alpha = 1 \mu$.
Απόσταση κόμβων: βήμα 0.02μ .



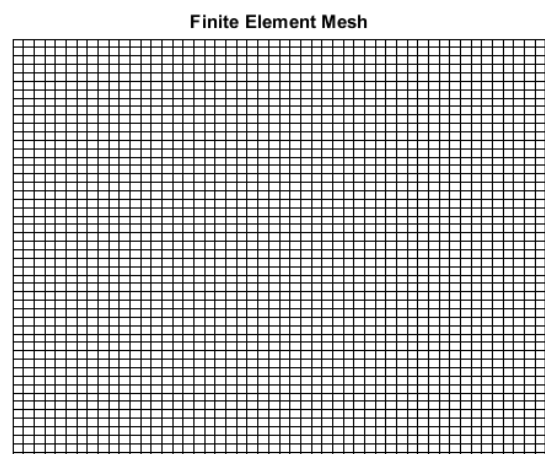
Εικόνα 3.3.1. Παραμόρφωση πλάκας. Απεικόνιση των κόμβων.



Εικόνα 3.3.2. Προφίλ αξόνων UZ παραμορφωμένου πλέγματος έπειτα από φόρτιση.

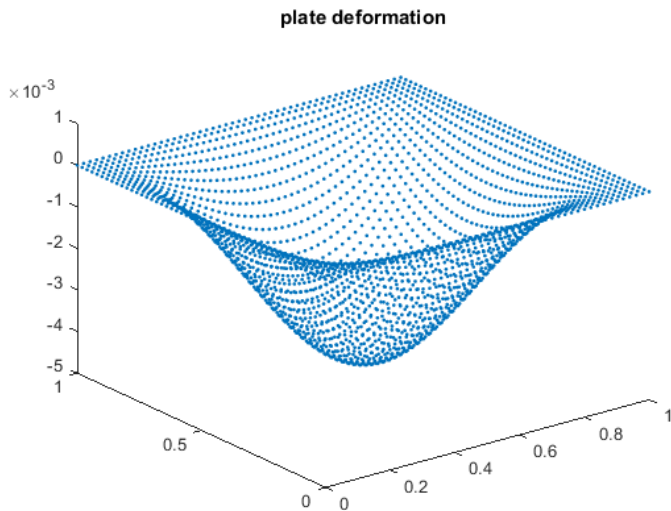


Εικόνα 3.3.3. Χρωματική απεικόνιση προφίλ μετατόπισης αξόνων UZ και w της παραμορφωμένης πλάκας.

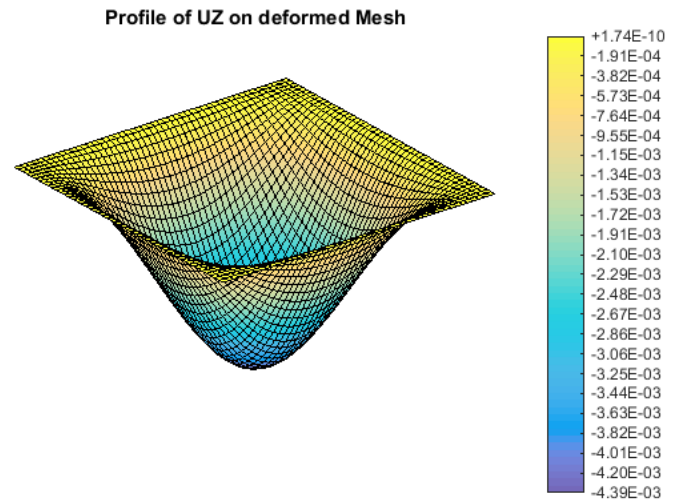


Εικόνα 3.3.4. Πλέγμα πεπερασμένων στοιχείων.

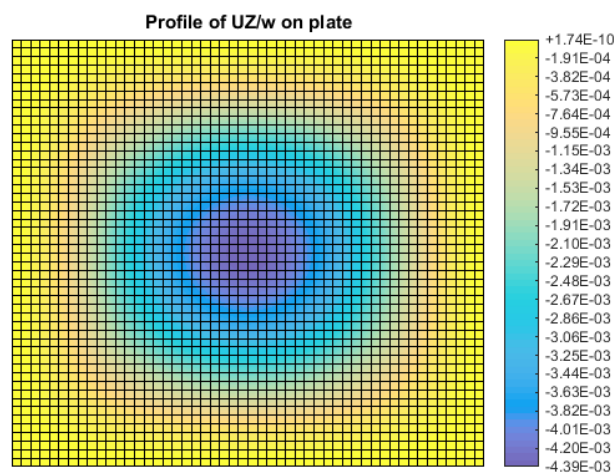
Στήριξη: clamped supported
Μέγεθος πλάκας: $\alpha = 1 \mu$.
Απόσταση κόμβων: βήμα 0.02μ .



Εικόνα 3.4.1. Παραμόρφωση πλάκας. Απεικόνιση των κόμβων.

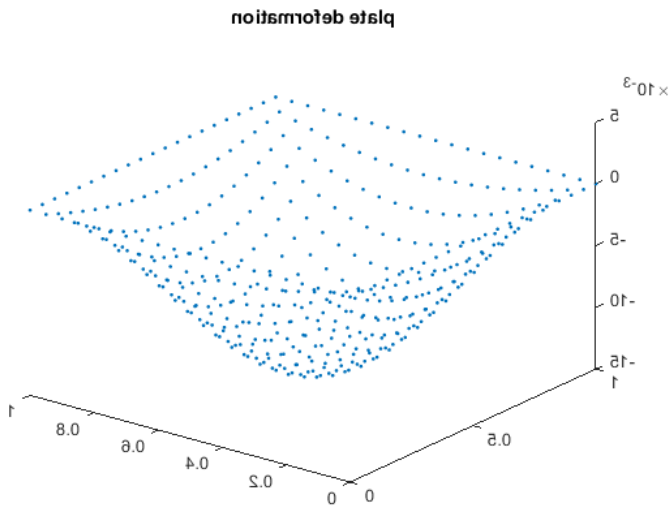


Εικόνα 3.4.2. Προφίλ αξόνων UZ παραμορφωμένου πλέγματος έπειτα από φόρτιση.

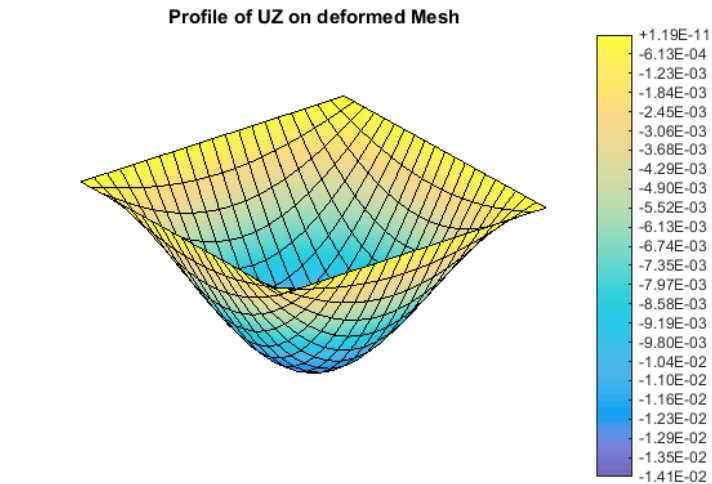


Εικόνα 3.4.3. Χρωματική απεικόνιση προφίλ μετατόπισης αξόνων UZ και w της παραμορφωμένης πλάκας.

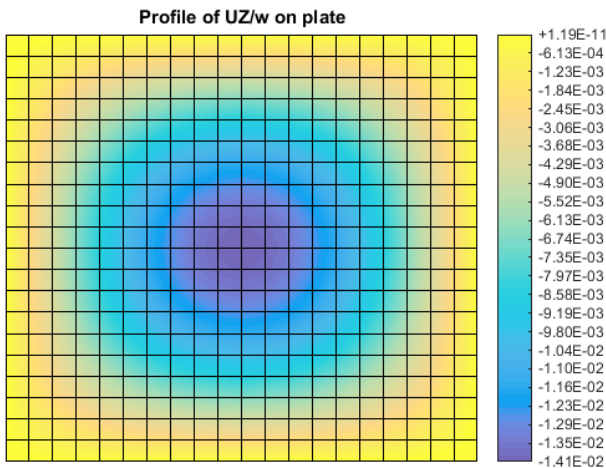
Στήριξη: simply supported
 Μέγεθος πλάκας: $\alpha = 1 \mu$.
 Απόσταση κόμβων: βήμα 0.05μ .



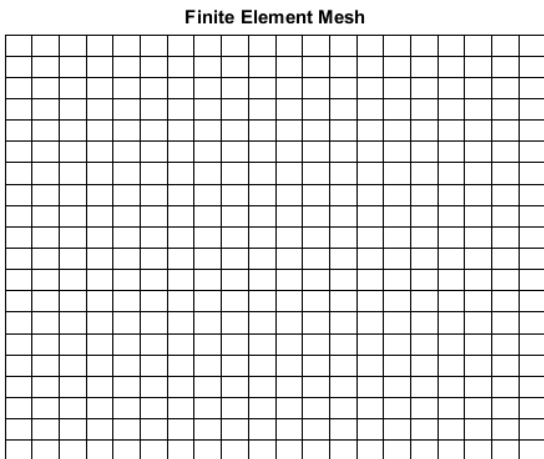
Εικόνα 3.5.1. Παραμόρφωση πλάκας. Απεικόνιση των κόμβων.



Εικόνα 3.5.2. Προφίλ αξόνων UZ παραμορφωμένου πλέγματος έπειτα από φόρτιση.

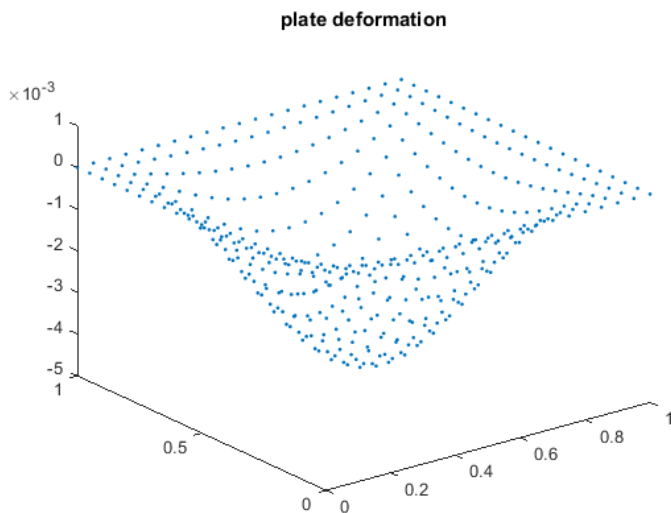


Εικόνα 3.5.3. Χρωματική απεικόνιση προφίλ μετατόπισης αξόνων UZ και w της παραμορφωμένης πλάκας.

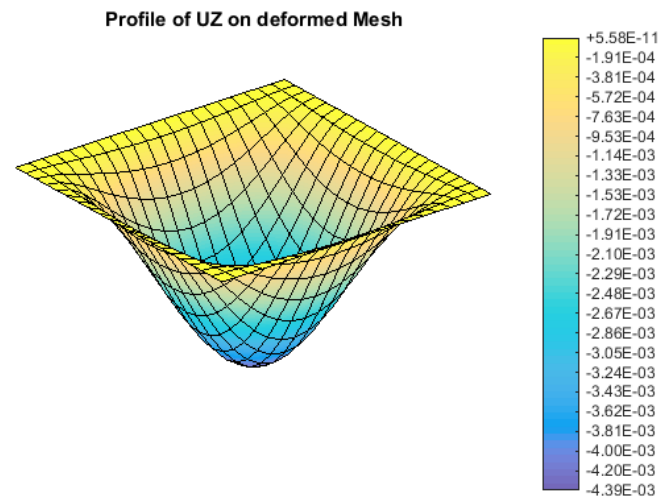


Εικόνα 3.5.4. Πλέγμα πεπερασμένων στοιχείων.

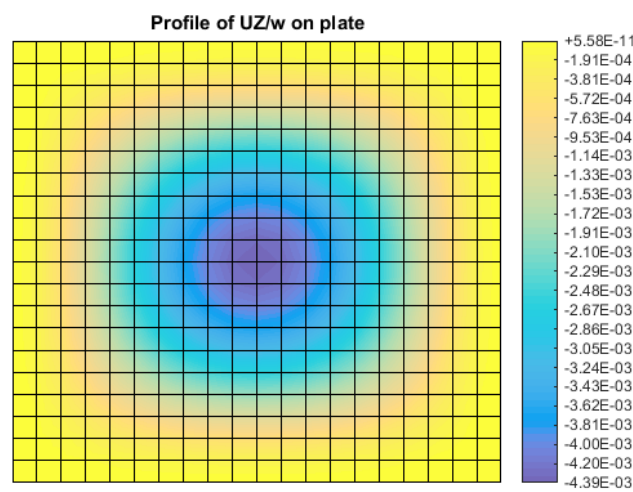
Στήριξη: clamped supported
Μέγεθος πλάκας: $\alpha = 1 \mu$.
Απόσταση κόμβων: βήμα 0.05μ .



Εικόνα 3.6.1. Παραμόρφωση πλάκας. Απεικόνιση των κόμβων.

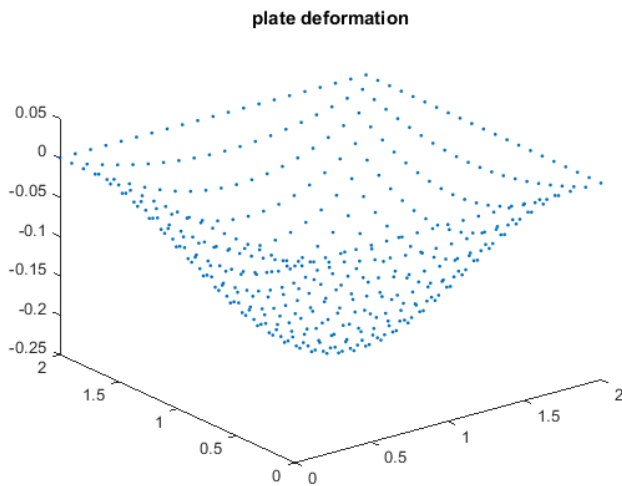


Εικόνα 3.6.2. Προφίλ αξόνων UZ παραμορφωμένου πλέγματος έπειτα από φόρτιση.

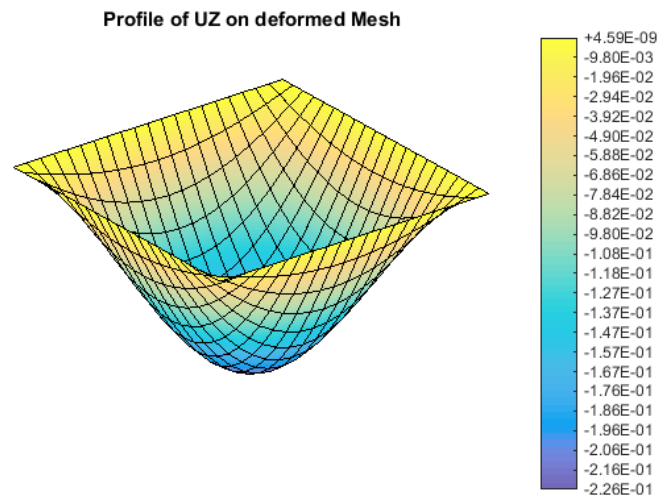


Εικόνα 3.6.3. Χρωματική απεικόνιση προφίλ μετατόπισης αξόνων UZ και w της παραμορφωμένης πλάκας.

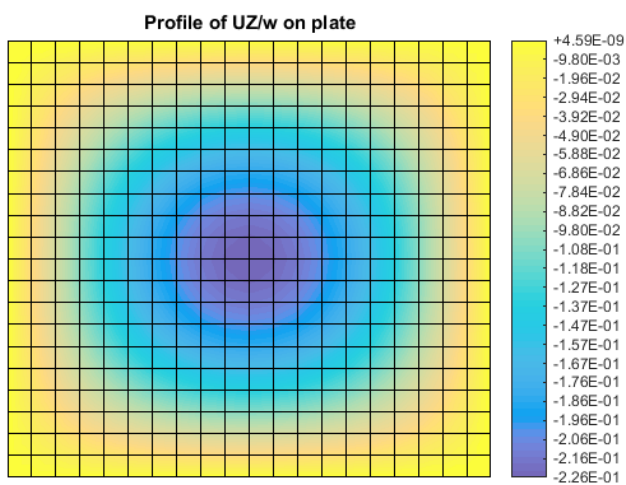
Στήριξη: simply supported
Μέγεθος πλάκας: $\alpha = 2 \mu$.
Απόσταση κόμβων: βήμα 0.1μ .



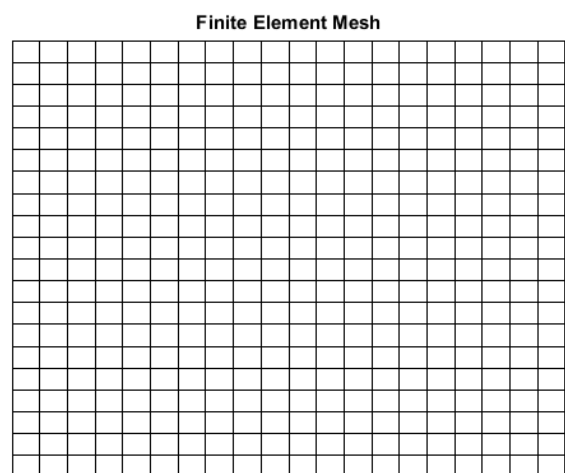
Εικόνα 4.1.1. Παραμόρφωση πλάκας. Απεικόνιση των κόμβων.



Εικόνα 4.1.2. Προφίλ αξόνων UZ παραμορφωμένου πλέγματος έπειτα από φόρτιση.

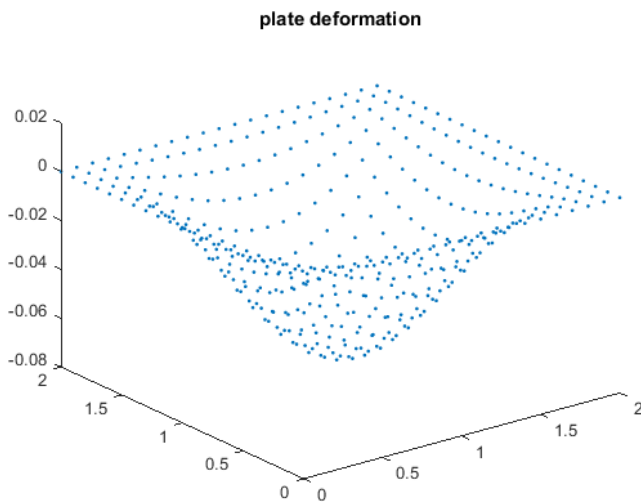


Εικόνα 4.1.3. Χρωματική απεικόνιση προφίλ μετατόπισης αξόνων UZ και w της παραμορφωμένης πλάκας.

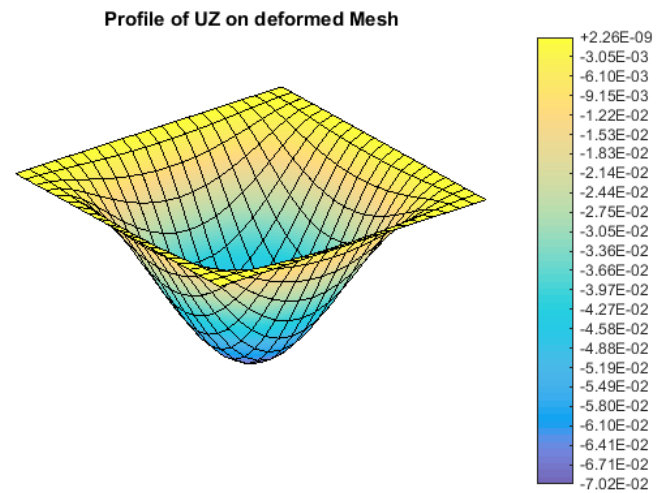


Εικόνα 4.1.4. Πλέγμα πεπερασμένων στοιχείων.

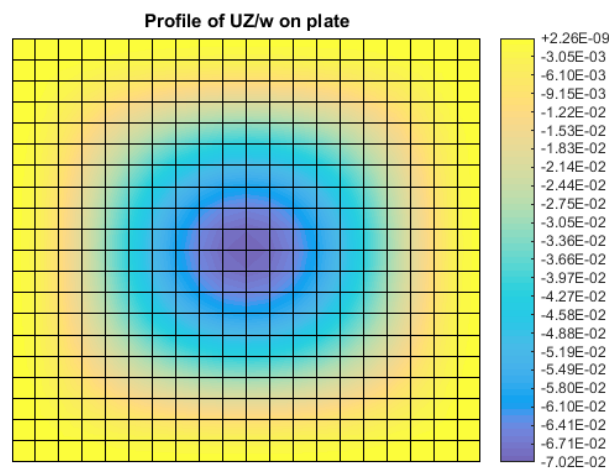
Στήριξη: clamped supported
Μέγεθος πλάκας: $\alpha = 2 \mu$.
Απόσταση κόμβων: βήμα 0.1μ .



Εικόνα 4.2.1. Παραμόρφωση πλάκας. Απεικόνιση των κόμβων.

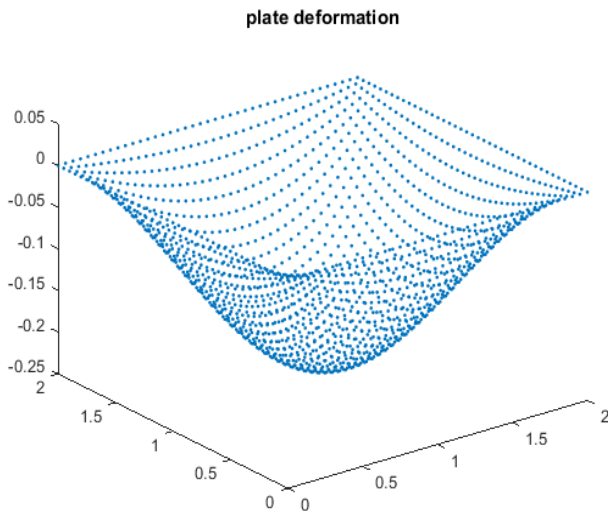


Εικόνα 4.2.2. Προφίλ αξόνων UZ παραμορφωμένου πλέγματος έπειτα από φόρτιση.

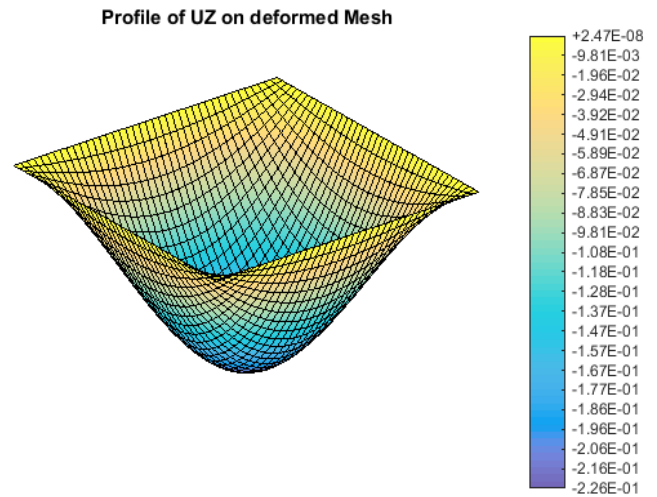


Εικόνα 4.2.3. Χρωματική απεικόνιση προφίλ μετατόπισης αξόνων UZ και w της παραμορφωμένης πλάκας.

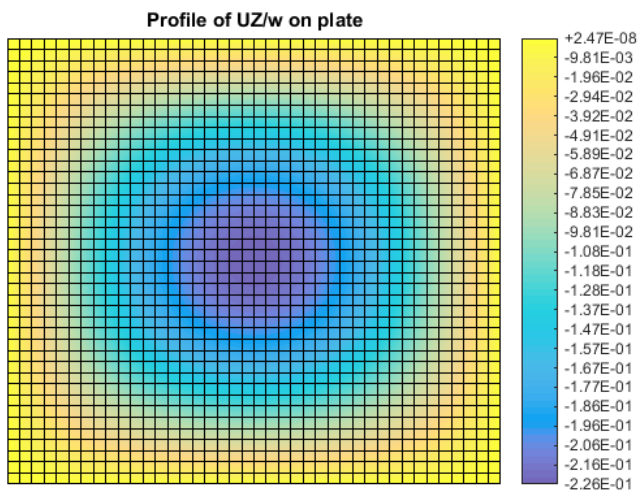
Στήριξη: simply supported
 Μέγεθος πλάκας: $\alpha = 2 \mu$.
 Απόσταση κόμβων: βήμα 0.05μ .



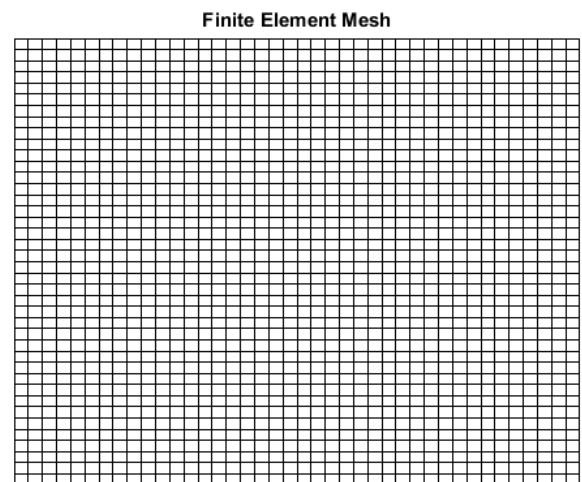
Εικόνα 4.3.1. Παραμόρφωση πλάκας. Απεικόνιση των κόμβων.



Εικόνα 4.3.2. Προφίλ αξόνων UZ παραμορφωμένου πλέγματος έπειτα από φόρτιση.

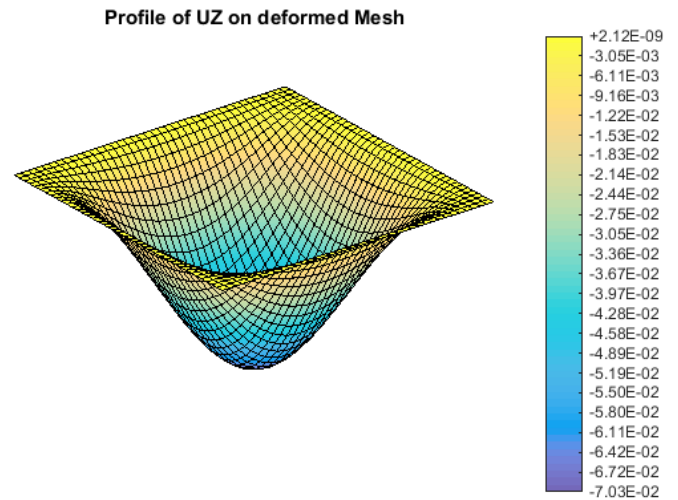
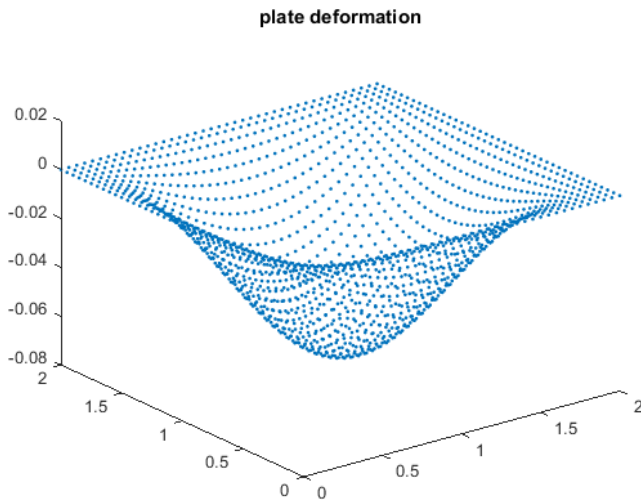


Εικόνα 4.3.3. Χρωματική απεικόνιση προφίλ μετατόπισης αξόνων UZ και w της παραμορφωμένης πλάκας.



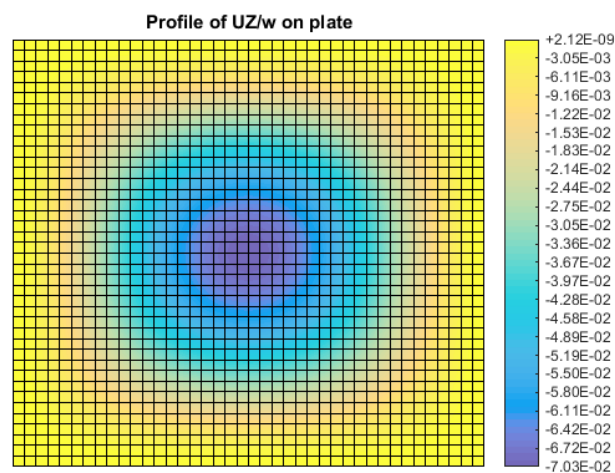
Εικόνα 4.3.4. Πλέγμα πεπερασμένων στοιχείων.

Στήριξη: clamped supported
Μέγεθος πλάκας: $\alpha = 2 \mu$.
Απόσταση κόμβων: βήμα 0.05μ .



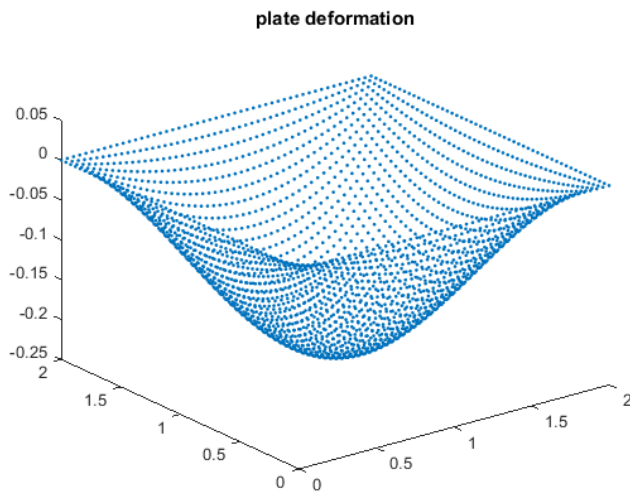
Εικόνα 4.4.1. Παραμόρφωση πλάκας. Απεικόνιση των κόμβων.

Εικόνα 4.4.2. Προφίλ αξόνων UZ παραμορφωμένου πλέγματος έπειτα από φόρτιση.

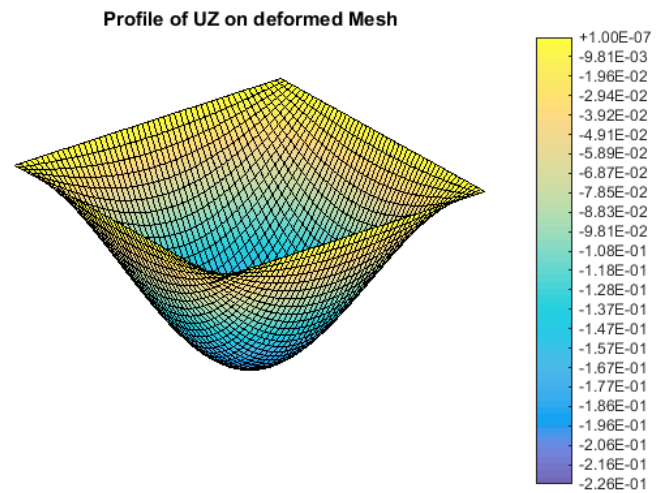


Εικόνα 4.4.3. Χρωματική απεικόνιση προφίλ μετατόπισης αξόνων UZ και w της παραμορφωμένης πλάκας.

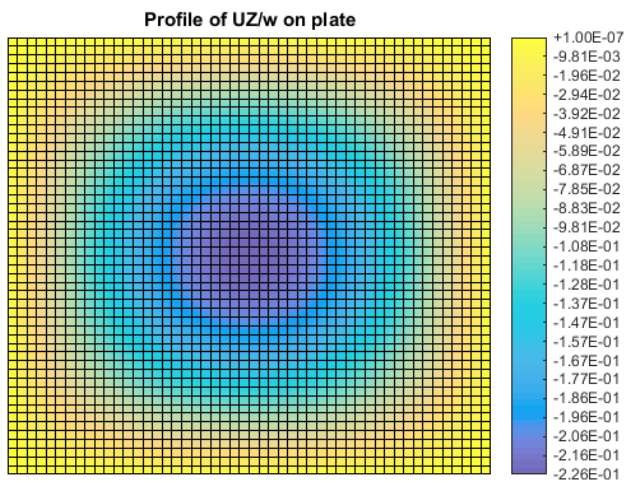
Στήριξη: simply supported
 Μέγεθος πλάκας: $\alpha = 2 \mu$.
 Απόσταση κόμβων: βήμα 0.04μ .



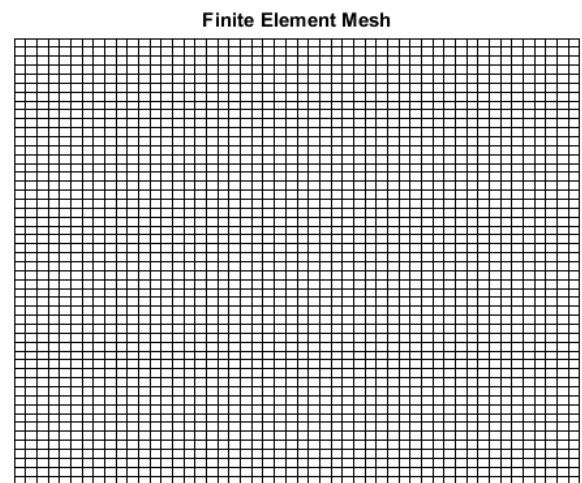
Εικόνα 4.5.1. Παραμόρφωση πλάκας. Απεικόνιση των κόμβων.



Εικόνα 4.5.2. Προφίλ αξόνων UZ παραμορφωμένου πλέγματος έπειτα από φόρτιση.

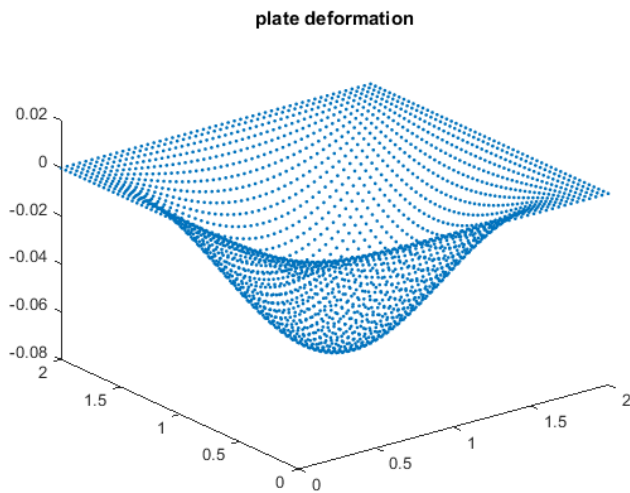


Εικόνα 4.5.3. Χρωματική απεικόνιση προφίλ μετατόπισης αξόνων UZ και w της παραμορφωμένης πλάκας.

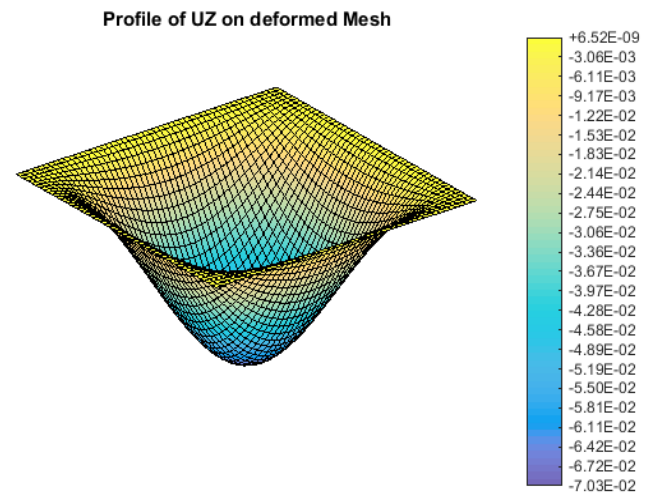


Εικόνα 4.5.4. Πλέγμα πεπερασμένων στοιχείων.

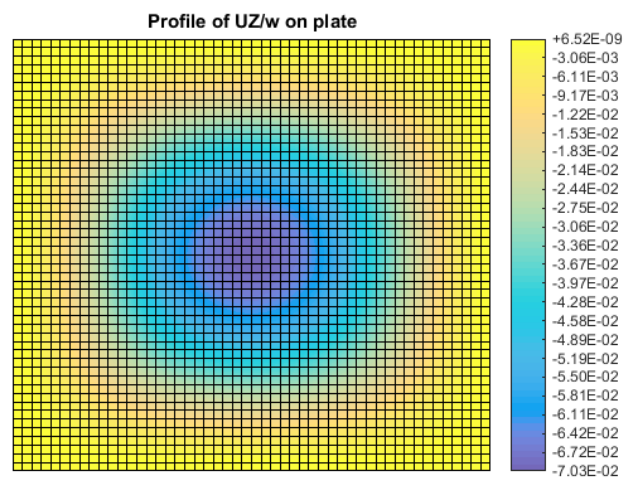
Στήριξη: clamped supported
 Μέγεθος πλάκας: $\alpha = 2 \mu$.
 Απόσταση κόμβων: βήμα 0.05μ .



Εικόνα 4.6.1. Παραμόρφωση πλάκας. Απεικόνιση των κόμβων.



Εικόνα 4.6.2. Προφίλ αξόνων UZ παραμορφωμένου πλέγματος έπειτα από φόρτιση.



Εικόνα 4.6.3. Χρωματική απεικόνιση προφίλ μετατόπισης αξόνων UZ και w της παραμορφωμένης πλάκας.

Οπλισμένο σκυρόδεμα (ferroconcrete)

Στήριξη: clamped supported

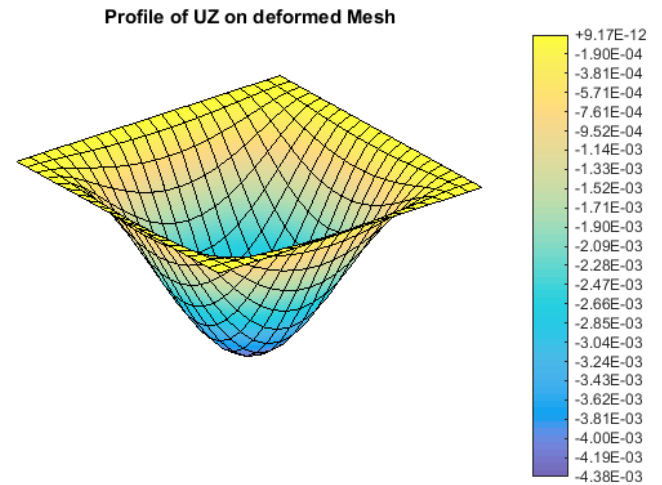
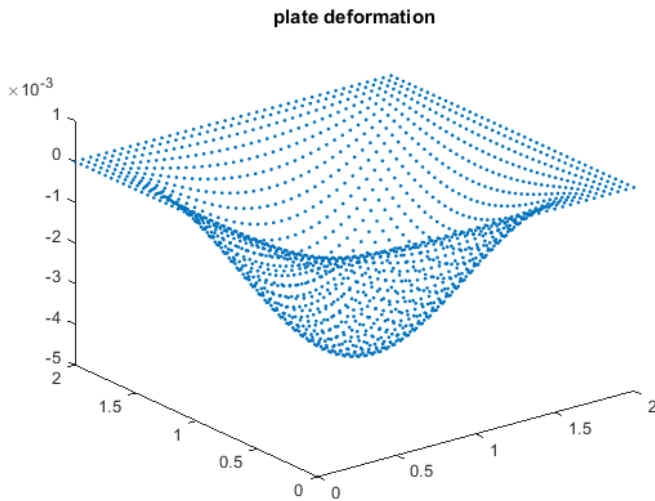
Πλάτος πλάκας: $t=0.03 \mu$.

Μέγεθος πλάκας: $a=2 \mu$.

Απόσταση κόμβων: βήμα 0.1μ .

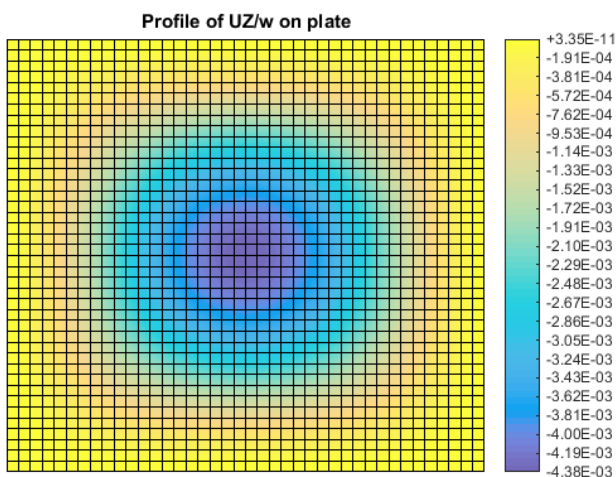
Μέτρο Ελαστικότητας $E=2 \text{ GPa}$

Λόγος Poisson $\lambda=0.17$

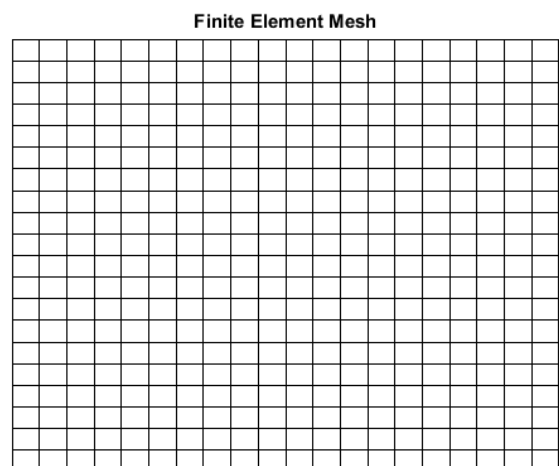


Εικόνα 5.1.1. Παραμόρφωση πλάκας. Απεικόνιση των κόμβων.

Εικόνα 5.1.2. Προφίλ αξόνων UZ παραμορφωμένου πλέγματος έπειτα από φόρτιση.

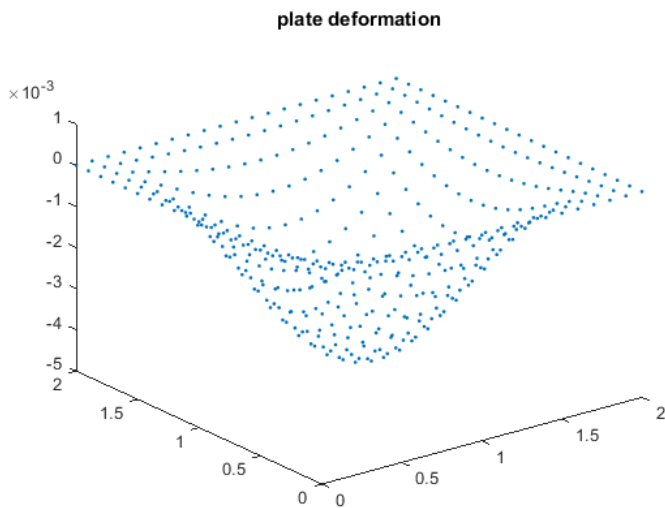


Εικόνα 5.1.3. Χρωματική απεικόνιση προφίλ μετατόπισης αξόνων UZ και w της παραμορφωμένης πλάκας.

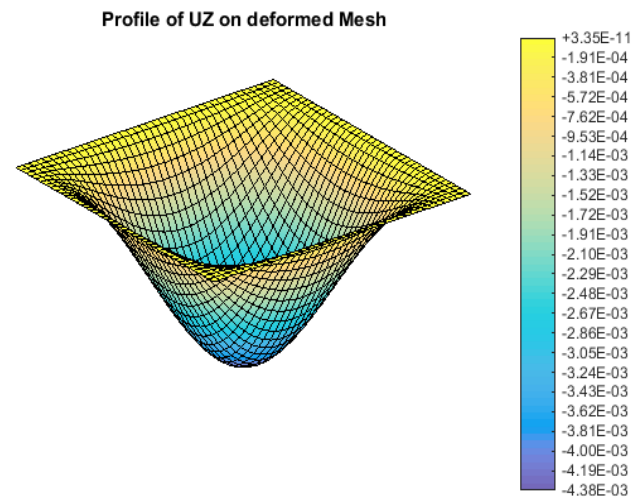


Εικόνα 5.1.4. Πλέγμα πεπερασμένων στοιχείων.

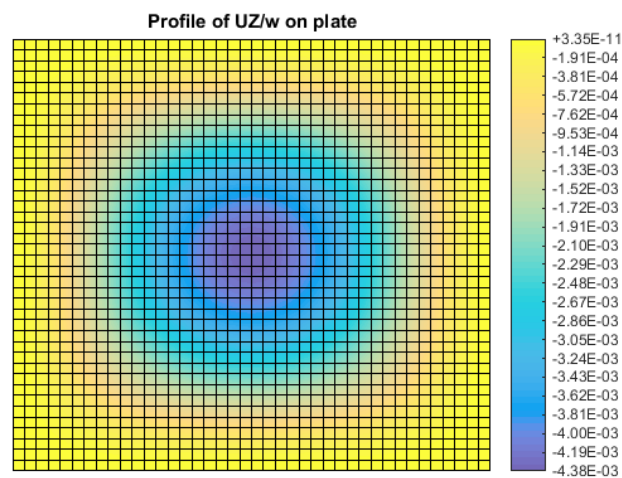
Στήριξη: clamped supported
Μέγεθος πλάκας: $\alpha = 2 \mu$.
Απόσταση κόμβων: βήμα 0.05μ .



Εικόνα 5.2.1. Παραμόρφωση πλάκας. Απεικόνιση των κόμβων.

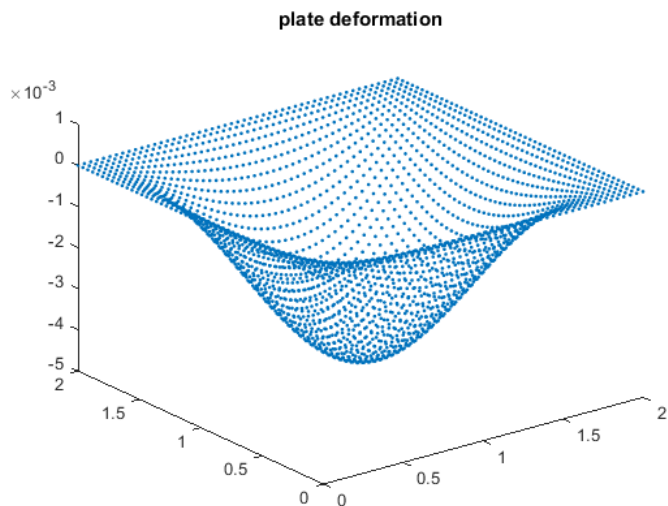


Εικόνα 5.2.2. Προφίλ αξόνων UZ παραμορφωμένου πλέγματος έπειτα από φόρτιση.

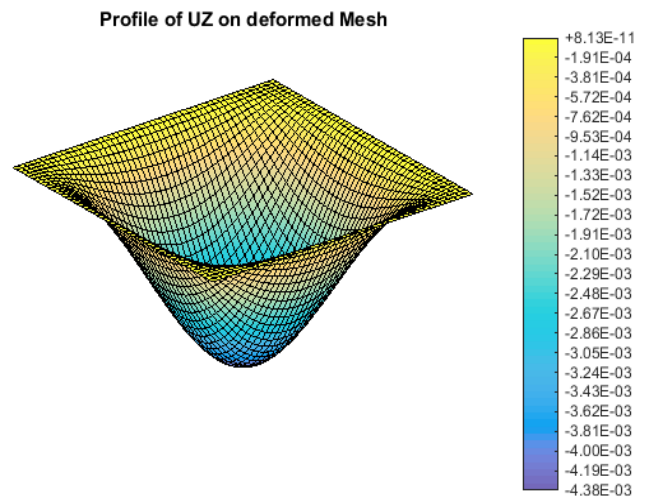


Εικόνα 5.2.3. Χρωματική απεικόνιση προφίλ μετατόπισης αξόνων UZ και w της παραμορφωμένης πλάκας.

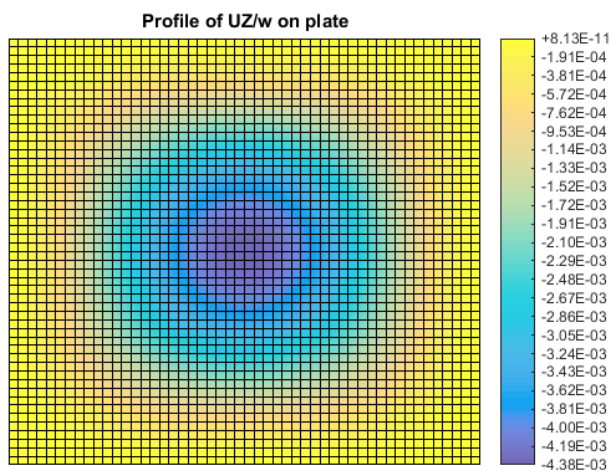
Στήριξη: clamped supported
 Μέγεθος πλάκας: $\alpha = 2 \mu$.
 Απόσταση κόμβων: βήμα 0.04μ .



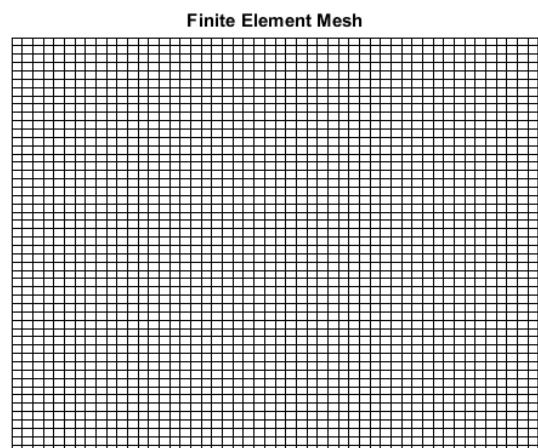
Εικόνα 5.3.1. Παραμόρφωση πλάκας. Απεικόνιση των κόμβων.



Εικόνα 5.3.2. Προφίλ αξόνων UZ παραμορφωμένου πλέγματος έπειτα από φόρτιση.

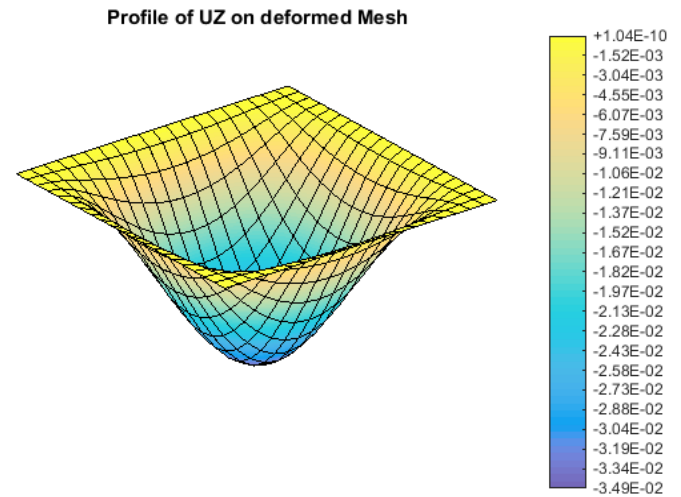
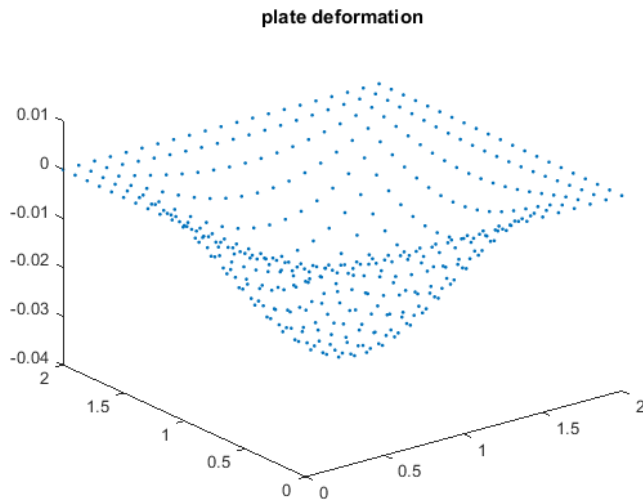


Εικόνα 5.3.3. Χρωματική απεικόνιση προφίλ μετατόπισης αξόνων UZ και w της παραμορφωμένης πλάκας.



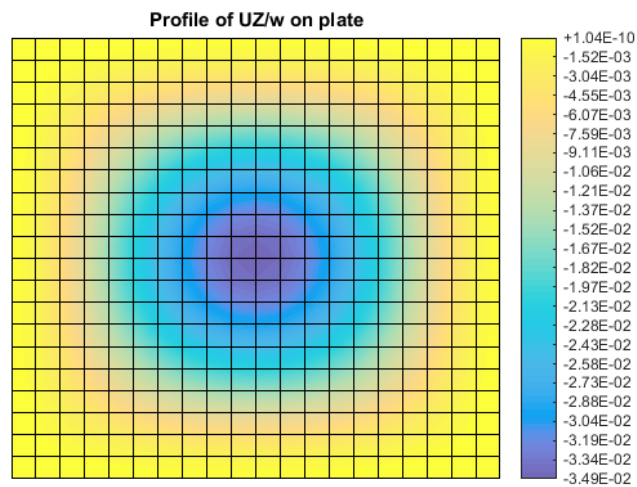
Εικόνα 5.3.4. Πλέγμα πεπερασμένων στοιχείων.

Στήριξη: clamped supported
Πλάτος πλάκας : $t=0.015 \mu$.
 Μέγεθος πλάκας: $\alpha = 2 \mu$.
 Απόσταση κόμβων: βήμα 0.1μ .



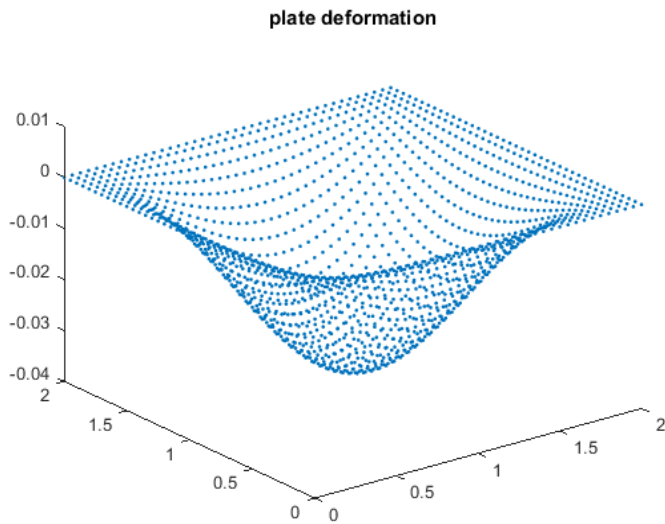
Εικόνα 6.1.1. Παραμόρφωση πλάκας. Απεικόνιση των κόμβων.

Εικόνα 6.1.2. Προφίλ αξόνων UZ παραμορφωμένου πλέγματος έπειτα από φόρτιση.

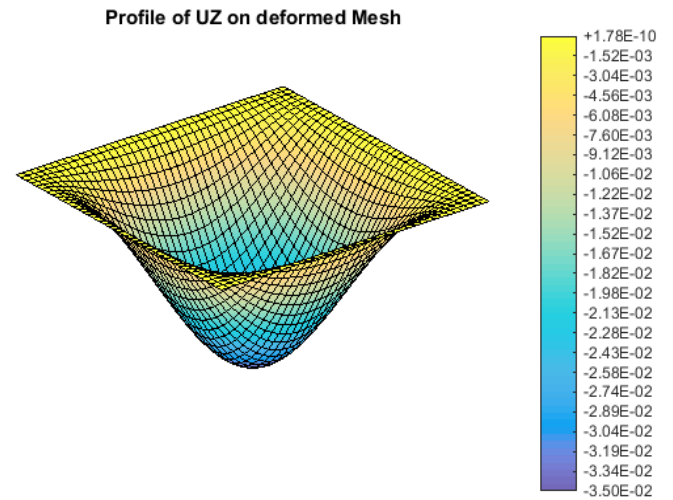


Εικόνα 6.1.3.

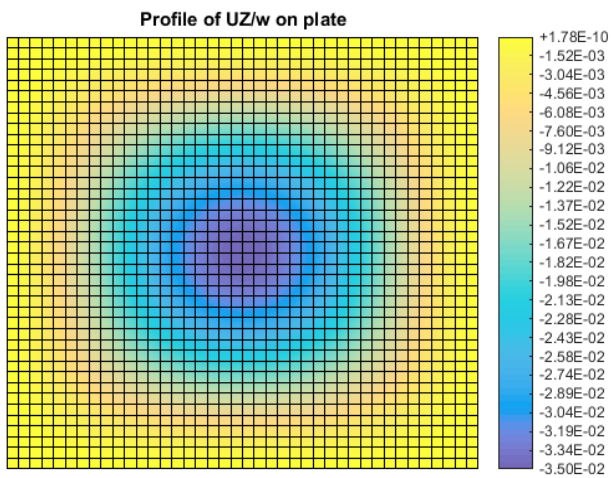
Στήριξη: clamped supported
Μέγεθος πλάκας: $\alpha = 2 \mu$.
Απόσταση κόμβων: βήμα 0.05μ .



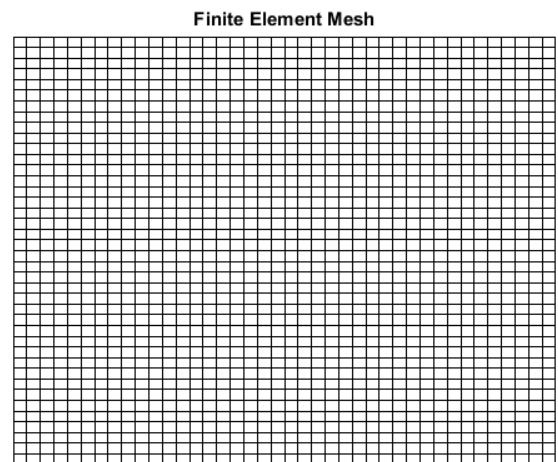
Εικόνα 6.2.1. Παραμόρφωση πλάκας. Απεικόνιση των κόμβων.



Εικόνα 6.2.2. Προφίλ αξόνων UZ παραμορφωμένου πλέγματος έπειτα από φόρτιση.

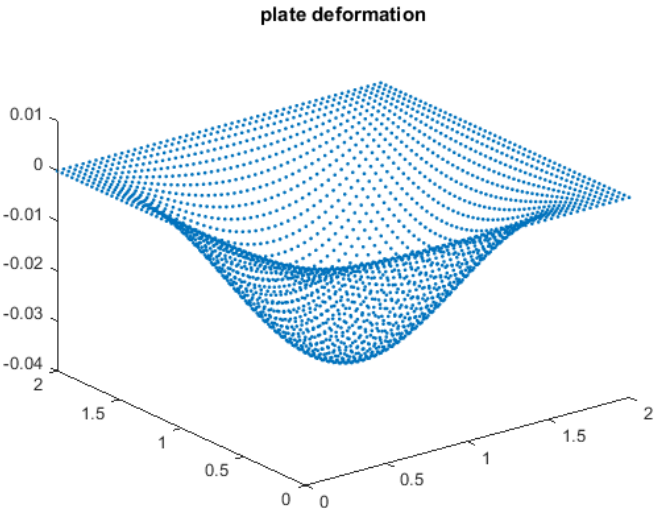


Εικόνα 6.2.3. Χρωματική απεικόνιση προφίλ μετατόπισης αξόνων UZ και w της παραμορφωμένης πλάκας.

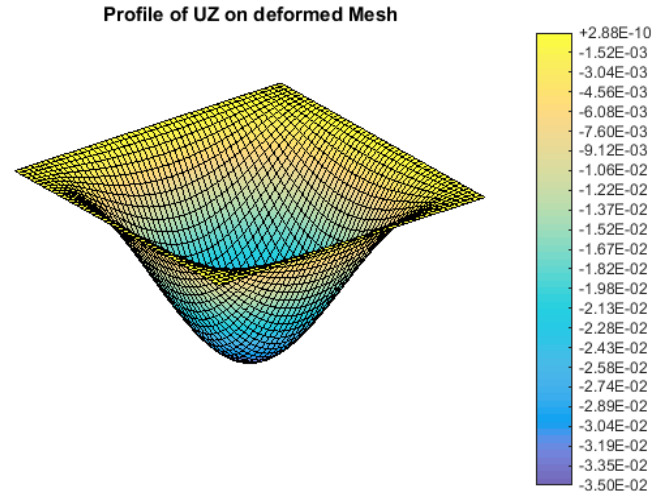


Εικόνα 6.2.4. Πλέγμα πεπερασμένων στοιχείων.

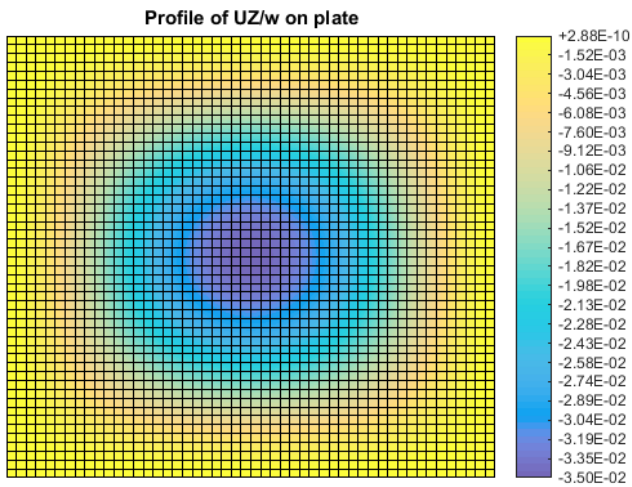
Στήριξη: clamped supported
 Μέγεθος πλάκας: $\alpha = 2 \mu$.
 Απόσταση κόμβων: βήμα 0.04μ .



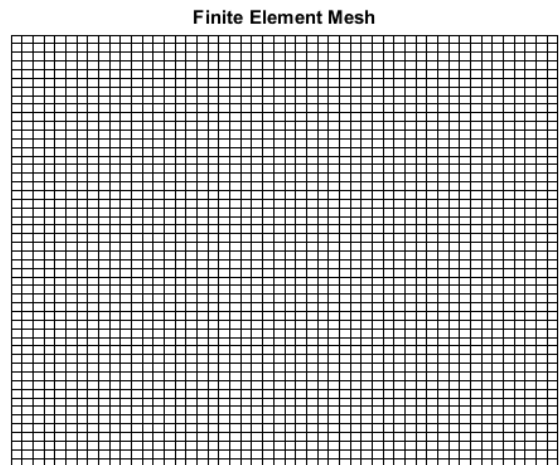
Εικόνα 6.3.1. Παραμόρφωση πλάκας. Απεικόνιση των κόμβων.



Εικόνα 6.3.2. Προφίλ αξόνων UZ παραμορφωμένου πλέγματος έπειτα από φόρτιση.



Εικόνα 6.3.3. Χρωματική απεικόνιση προφίλ μετατόπισης αξόνων UZ και w της παραμορφωμένης πλάκας.



Εικόνα 6.3.4. Πλέγμα πεπερασμένων στοιχείων.

Βιβλιογραφία

- [1] Beer, F., Johnston R., Mazurek D., Eisenberg E. (2016), *Στατική*, Αθήνα: Εκδόσεις Τζιόλα.
- [2] Callister, William D. (2008), *Επιστήμη και Τεχνολογία των Υλικών*, Αθήνα: Εκδόσεις Τζιόλα.
- [3] Chakhaidze, Kh. , Muradova, A. , Vashakmadze, T. (1998) Design of some bending projects.
- [4] Gopalakrishnan, S. ,Chakraborty , A. , and Mahapatra, R. (2008), *Spectral Finite Element Method*, London: Springer-Verlag.
- [5] Kolukula, S. (n.d), *Plate Bending, Structural Mechanics Laboratory, India*, <https://sites.google.com/site/kolukulasivasrinivas/matlab-fea/plate/plate-bending> (last access 3/3/2017).
- [6] Kristle, C. , Fejaro, M. and Papageorgiou, A. (n.d.), *The Spectral Element Method (SEM): Formulation and implementation of the method for engineering seismology problems*, at The 14th World Conference on Earthquake Engineering , Beijin, China, 12-17 October 2008.
- [7] Μπαράκος, Γ. (n.d.), *Διάτμηση*, <https://eclass.gunet.gr/modules/document/file.php/LABGU100/ΘΕΩΡΙΑ ΠΕΙΡΑΜΑΤΩΝ/ΠΕΙΡΑΜΑ ΔΙΑΤΜΗΣΗΣ/diatmisi.pdf>, (τελευταία πρόσβαση 25/5/2017).
- [8] Προβατίδης, Χριστόφορος Γ. (2016), *Πεπερασμένα στοιχεία στην Ανάλυση Κατασκευών*, Αθήνα: Εκδόσεις Τζιόλα.
- [9] Σταυρουλάκης, Γ., Σταυρουλάκη Μ., Μουράντοβα Α. (2015), *Υπολογιστική Μηχανική*, Αθήνα: Σύνδεσμος Ελληνικών Ακαδημαϊκών Βιβλίων.
- [10] Ostachowicz, I. (n.d.), *Structural Health Monitoring: Spectral Finite Element Method*, http://www.cesos.ntnu.no/attachments/083_Ostachowicz_Structural_Health_Monitoring_II.pdf, (last access 23/02/2017).