

ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
ΓΕΝΙΚΟ ΤΜΗΜΑ



ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΕΣ ΕΠΙΣΤΗΜΕΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟΥ
ΔΙΠΛΩΜΑΤΟΣ ΕΙΔΙΚΕΥΣΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ :
«ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΗ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗ ΦΥΣΙΚΗ
ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑ ΛΕΪΖΕΡ»

Κβαντική Ηλεκτροδυναμική Υπεραγώγιμων
Κυκλωμάτων και Εφαρμογές στην Κβαντική
Πληροφορία

Τσαφαντάκη Μαρκέλλα

Επιβλέπων : Επίκουρος Καθηγητής **Αγγελάκης Δημήτριος**

ΧΑΝΙΑ, 2017

Κβαντική Ηλεκτροδυναμική Υπεραγώγιμων Κυκλωμάτων και Εφαρμογές στην Κβαντική Πληροφορία

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία εκπονήθηκε στα πλαίσια των
σπουδών για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού Διπλώματος
ειδίκευσης στην

**Εφαρμοσμένη και Τεχνολογική Φυσική και
Τεχνολογία των Λέιζερ**

που απομένει το

Γενικό Τμήμα

του

Πολυτεχνείου Κρήτης.

Χανιά, Κρήτη 2017

Εξεταστική Επιτροπή:

Καθ. Δημοσθένης Έλληνας

Σχολής Η.Μ.Μ.Υ, Πολυτεχνείο Κρήτης

Καθ. Διονύσιος Χριστόπουλος

Σχολής ΜΗΧ.Ο.Π, Πολυτεχνείο Κρήτης

Επίκουρος Καθ. Δημήτρης Αγγελάκης

Σχολής Η.Μ.Μ.Υ,
Πολυτεχνείο Κρήτης (Επιβλέπων)

Αφιερώνεται στην οικογένεια μου και σε όσους με στήριξαν.

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα καθηγητή της διπλωματικής μου εργασίας, Δημήτρη Αγγελάκη για την ευκαιρία που μου έδωσε να ασχοληθώ με ένα τόσο ενδιαφέρον θέμα καθώς επίσης και για την αμέριστη συμπαράστασή του καθ' όλη τη διάρκεια της συνεργασίας μας.

Περίληψη

Σε αυτή τη ΜΔΕ διπλωματική διατριβή, μελετούμε τα βασικά στοιχεία της υλοποίησης κβαντικών υπολογισμών σε κβαντικά υπεραγώγιμα κυκλώματα. Αφού παρουσιάσουμε τις βασικές έννοιες των κβαντοδυφίων και των κβαντικών πυλών σε χώρους Hilbert προχωρούμε σε μια ανασκόπηση των βασικών αλγορίθμων του πεδίου της Κβαντικής Επεξεργασίας Πληροφορίας. Μεταξύ αυτών περιγράφουμε διεξοδικά τους αλγόριθμους Deutch και Deutch-Josza όπως και το αλγόριθμο αναζήτησης σε μια βάση δεδομένων του Grover.

Στο δεύτερο μέρος, περνάμε στο κομμάτι της υλοποίησης κβαντικών υπολογισμών σε πραγματικά κβαντικά συστήματα. Αφού κάνουμε μια ανασκόπηση των σύγχρονων κβαντικών τεχνολογιών υλοποίησης βασισμένων σε ψυχρά ιόντα, NMR και συστήματα cavity QED, αναλύουμε σε βάθος τα κβαντικά υπεραγώγιμα κυκλώματα. Στο κομμάτι αυτό πρώτα περιγράφουμε την κβάντωση ενός ηλεκτρικού κυκλώματος LC και κατόπιν κάνουμε ανασκόπηση των βασικών στοιχείων της θεωρίας της υπεραγωγιμότητας. Εδώ αναλύουμε διεξοδικά τον μηχανισμό γένεσης και μεταφοράς των Cooper pairs σε υπεραγωγούς και της επαφής Josephson. Έχοντας περιγράψει την βασική λειτουργία της επαφής Josephson σε κβαντικό επίπεδο πέρα από την ημικλασική προσέγγιση, προχωρούμε στην περιγραφή και μελέτη των βασικών υπεραγωγίων κβαντοδυφίων βασισμένων σε κβάντωση φορτίου, φάσης και μαγνητική ροής.

Ειδικά για κβαντοδυφίο φορτίου, γνωστό και ως Cooper pair box, μελετούμε αναλυτικά όλες τις περιοχές λειτουργίας σε συνάρτηση με τις απαιτήσεις για την δημιουργία αποτελεσματικών κβαντικών πυλών, αναδεικνύοντας τις βέλτιστες περιοχές υλοποίησης. Κλείνουμε περιγράφοντας κβαντικά κυκλώματα για υλοποίηση κβαντικών πυλών σε δύο κβαντοδυφία βασισμένα είτε σε σύζευξη μέσω κοινού κβαντικού πυκνωτή είτε μέσω κοινού κβαντικού πηνίου.

Περιεχόμενα

1. Εισαγωγή στην Κβαντική Πληροφορία

- 1.1 Κβαντοδύφια - Qubits
 - 1.1.1 Σφαίρα Bloch
- 1.2 Διεργασίες σε κβαντικά bits και κβαντικοί επεξεργαστές
 - 1.2.1 Ορθομοναδιαίοι μετασχηματισμοί-Κβαντικές πύλες
 - 1.2.1.1 Πύλες που δρουν πάνω σε ένα κβαντοδυφίο
 - 1.2.1.2 Πύλες που δρουν πάνω σε δυο κβαντοδυφία
 - 1.2.2 Μετρήσεις

2. Κβαντικοί αλγόριθμοι

- 2.1 Εισαγωγή
- 2.2 Το πρόβλημα του Deutsch
 - 2.2.1 Γενίκευση του προηγούμενου προβλήματος
Deutsch - Jozsa Problem (1992)
- 2.3 Αλγόριθμος Grover : Αλγόριθμος Αναζήτησης

3. Κβαντικά υπεραγώγιμα κυκλώματα

- 3.1 Εισαγωγή
- 3.2 Κβάντωση ηλεκτρικών κυκλωμάτων
 - 3.2.1 Γραμμές μετάδοσης και ανοιχτά κυκλώματα
- 3.3 Υπεραγωγιμότητα
- 3.4 Κβαντική περιγραφή της επαφής Josephson
- 3.5 SQUID (Superconducting Quantum Interference Device)

4. Υλοποίηση κβαντικών υπολογισμών σε υπεραγώγιμα κβαντικά κυκλώματα

4.1 Υλοποίηση ενός υπεραγώγιμου κβαντοδυφίου

4.2 Ανάλυση των ιδιοτήτων του Cooper pair box

4.2.1 Περίπτωση μηδενικής σύζευξης $E_J = 0$

4.2.2 Περιοχή μικρής σύζευξης - $E_J \ll E_C$

4.3 Μέτρηση του υπεραγώγιμου κβαντοδυφίου

4.4 Σύζευξη υπεραγώγιμων κβαντοδυφίων και υλοποίηση πυλών δυο κβαντοδυφίων

4.4.1 Υλοποίηση πυλών σε αλληλεπιδρώντα κβαντοδυφία σπιν

4.4.2 Αλληλεπίδραση κβαντοδυφίων μέσω σύζευξης με πυκνωτή

Επίλογος

Παράρτημα

Βιβλιογραφία

Κεφάλαιο 1^ο

Εισαγωγή στην Κβαντική Πληροφορία

1.1 Κβαντοδύφια - Qubits

Το απλούστερο κβαντικό σύστημα που μπορούμε να φανταστούμε είναι ένα σύστημα δύο επιπέδων. Ένα τέτοιο σύστημα θα το αποκαλούμε με την ονομασία κβαντοδυφίο ή "κβαντικό bit" ή qubit και είναι η πρωταρχική μονάδα δεδομένων ενός κβαντικού υπολογιστή [1-4]. Το κλασσικό bit μπορεί να βρίσκεται όπως ξέρουμε στην κατάσταση 0 ή 1. Αντίθετα το κβαντικό bit μπορεί να βρίσκεται σε οποιαδήποτε κατάσταση της μορφής:

$$\psi = \alpha_0 0 + \alpha_1 1$$

όπου τα $\alpha_0, \alpha_1 \in \mathbb{C}$ και δεν είναι ταυτόχρονα 0. Δύο καταστάσεις $|\psi\rangle$ και $|\psi'\rangle$ για τις οποίες ισχύει $\psi = \gamma\psi'$ με $\gamma \in \mathbb{C}$ είναι ισοδύναμες. Ισχύει η κανονικοποίηση $|\alpha_0|^2 + |\alpha_1|^2 = 1$. Τα α_0, α_1 είναι μιγαδικοί αριθμοί και φυσικά δεν έχουν άμεση φυσική σημασία. Όμως το τετράγωνο του μέτρου τους μας δίνει την πιθανότητα να μετρήσουμε την αντίστοιχη κατάσταση σε ένα πείραμα. Δηλαδή σε μία μέτρηση έχουμε $|\alpha_0|^2$ πιθανότητα να μετρήσουμε 0 και $|\alpha_1|^2$ να μετρήσουμε 1.

Αξίζει να σημειωθεί σε αυτό το σημείο ότι ενώ οι δύο καταστάσεις μπορούν να δίνουν ακριβώς τα ίδια μετρήσιμα αποτελέσματα (ίδια με την έννοια της ίδιας κατανομής μετρήσεων) μπορεί να μην είναι ισοδύναμες. Για παράδειγμα οι καταστάσεις $(0 \pm 1)/\sqrt{2}$. Μόνο με περαιτέρω επεξεργασία τους μπορούμε να ξεχωρίσουμε την μία κατάσταση από την άλλη και όχι με μετρήσεις. Συγκεκριμένα η πρώτη μέτρηση στην κατάσταση θα καταστρέψει την υπέρθεση και όλη η πληροφορία για τα α_0, α_1 θα χαθεί. Επομένως κάθε κατάσταση ενός κβαντοδυφίου ορίζεται μονοσήμαντα από ένα ζεύγος μιγαδικών αριθμών και άρα πρόκειται για διάνυσμα στο χώρο $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$. Η βάση αυτού του χώρου είναι τα διανύσματα $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ και $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ τα οποία συμβολίζουν τις καταστάσεις 0 και 1 αντίστοιχα.

Αυτές οι καταστάσεις ονομάζονται κλασσικές καταστάσεις καθώς ένα κλασσικό bit βρίσκεται σε μία από τις δύο. Στη βιβλιογραφία οι καταστάσεις των κβαντοδυφίων συμβολίζονται ως $|\psi\rangle$ και οι δύο σταθερές καταστάσεις που αποτελούν την βάση πάνω στην οποία επιλέγουμε να αναπαραστήσουμε ή να κωδικοποιήσουμε την κβαντική πληροφορία με $|0\rangle$ και $|1\rangle$.

Όλες οι υπόλοιπες καταστάσεις αποτελούν υπέρθεση αυτών των δύο. Στην κβαντική πληροφορία αυτές οι σταθερές καταστάσεις δεν συνδέονται απαραίτητα με τις ιδιοκαταστάσεις του συστήματος.

Χρησιμοποιώντας ως υπολογιστική βάση τις παραπάνω καταστάσεις, μια αυθαίρετη κατάσταση του κβαντοδυφίου μπορεί να γραφεί ως:

$$(1.1) \quad |\psi\rangle = \alpha_0|0\rangle + \alpha_1|1\rangle$$

όπου α_0 και α_1 είναι μιγαδικοί αριθμοί και ικανοποιούν την συνθήκη κανονικοποίησης $|\alpha_0|^2 + |\alpha_1|^2 = 1$.

Στην πραγματικότητα υπάρχουν τρεις βάσεις όπου διερευνούν διαφορετικές πτυχές της κατάστασης του κβαντοδυφίου. Η πρώτη είναι η υπολογιστική βάση, $\{|0\rangle, |1\rangle\}$, και οι άλλες δύο δημιουργούνται από ισοδύναμες υπερθέσεις των παραπάνω καταστάσεων: $\{| \pm \rangle \equiv (|0\rangle \pm |1\rangle)/\sqrt{2}\}$ και $\{| \pm i \rangle \equiv (|0\rangle \pm i|1\rangle)/\sqrt{2}\}$. Για να καταλάβουμε περαιτέρω τις παραπάνω εξισώσεις, είναι χρήσιμο να γραφεί η κατάσταση του κβαντοδυφίου με παράγοντες φάσης και πλάτους. Η αυθαίρετη κατάσταση για το κβαντοδυφίο δίνεται από την σχέση:

$$(1.2) \quad |\psi\rangle = \alpha_0|0\rangle + \alpha_1 e^{i\Delta}|1\rangle$$

όπου α_j αποτελεί μια *πραγματική παράμετρος* και Δ είναι η *σχετική φάση* ανάμεσα σε δύο καταστάσεις της βάσης. Το $\{| \pm \rangle$ δίνει πληροφορία για το πραγματικό κομμάτι της υπέρθεσης ($\Delta=0$) και $\{| \pm i \rangle$ δίνει πληροφορία για το φανταστικό κομμάτι της υπέρθεσης ($\Delta=\pi/2$).

Υπάρχουν δυο τρόποι για να δημιουργήσουμε ένα κβαντοδυφίο. Στο πρώτο τρόπο, χρησιμοποιούμε ένα καλώς ορισμένο σύστημα με δυο διακριτές στάθμες. Παραδείγματα τέτοιων συστημάτων μπορεί να θεωρηθούν είτε ένα πολωμένο φωτόνιο είτε ένα στοιχειώδες σωματίδιο με σπιν 1/2 όπως είναι το ηλεκτρόνιο. Τέτοιου είδους συστήματα δεν μπορούν να αναδυθούν με φυσικό τρόπο, λόγω των πολλών εσωτερικών βαθμών ελευθερίας που υπάρχουν.

Ο εναλλακτικός τρόπος για την δημιουργία ενός κβαντοδυσφίου, είναι μέσω της χρήσης μη γραμμικών συστημάτων αποτελούμενα από πολλαπλά ενεργειακά επίπεδα (όπως ένας ταλαντωτής ή ένα άτομο) [1]. Στα συστήματα αυτά έχουμε την δυνατότητα να απομονώσουμε ,μέσα από τον άπειρο στο σύνολό του χώρο Hilbert, τα δυο ενεργειακά επίπεδα που μας ενδιαφέρουν. Η τεχνική αυτή χρησιμοποιείται σε συστήματα όπως τα παγιδευμένα ιόντα [5], τα "κρύα" άτομα [6], τα συστήματα NMR [7] και τα υπεραγώγιμα κβαντοδυσφία [8].

1.1.1 Σφαίρα Bloch

Μια πολύ χρήσιμη μέθοδος προκειμένου να οπτικοποιήσουμε την κατάσταση ενός κβαντοδυσφίου και να κατανοήσουμε καλύτερα την επίδραση των μετασχηματισμών σε αυτά είναι η σφαίρα Bloch [9].

Έστω ένα κβαντοδυσφίο $|\psi\rangle = \alpha_0|0\rangle + \alpha_1|1\rangle$ με $|\alpha_0|^2 + |\alpha_1|^2 = 1$. Μπορούμε να εκφράσουμε την κατάσταση αυτή σε σφαιρικές συντεταγμένες:

$$(1.3) \quad |\psi\rangle = r_\alpha e^{i\varphi_\alpha}|0\rangle + r_\beta e^{i\varphi_\beta}|1\rangle$$

με τέσσερις πραγματικές παραμέτρους: $r_\alpha, r_\beta, \varphi_\alpha, \varphi_\beta$.

Επειδή οι μόνες μετρήσιμες ποσότητες είναι οι πιθανότητες $|\alpha_0|^2, |\alpha_1|^2$, μπορούμε να πολλαπλασιάσουμε με τον παράγοντα $e^{i\gamma}$, χωρίς παρατηρήσιμες αλλαγές αφού δεν αλλάζουν οι πιθανότητες $|\alpha_0|^2, |\alpha_1|^2$. Δηλαδή:

$$(1.4) \quad |e^{i\gamma}\alpha|^2 = (e^{i\gamma}\alpha)^*(e^{i\gamma}\alpha) = (e^{-i\gamma}\alpha^*)(e^{i\gamma}\alpha) = \alpha^*\alpha = |\alpha|^2$$

αντίστοιχα και για το $|\beta|^2$.

Πολλαπλασιάζουμε με το $e^{-i\varphi_\alpha}$ την αρχική μας κατάσταση:

$$(1.5) \quad |\psi\rangle = r_\alpha e^{i\varphi_\alpha}|0\rangle + r_\beta e^{i\varphi_\beta}|1\rangle$$

και έχουμε:

$$(1.6) \quad |\psi\rangle = e^{-i\varphi_\alpha} r_\alpha e^{i\varphi_\alpha}|0\rangle + e^{-i\varphi_\alpha} r_\beta e^{i\varphi_\beta}|1\rangle = r_\alpha|0\rangle + r_\beta e^{i\varphi}|1\rangle$$

με $\varphi = \varphi_\beta - \varphi_\alpha$

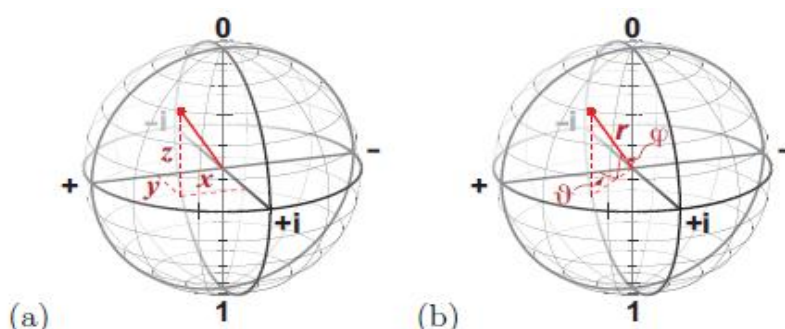
Έτσι περιγράψαμε την τελική μας κατάσταση με τρεις πραγματικές παραμέτρους r_a, r_β, φ . Ισχύει ότι:

$$(1.7) \quad x = r \sin \theta \cos \varphi$$

$$(1.8) \quad y = r \sin \theta \sin \varphi$$

$$(1.9) \quad z = r \cos \theta$$

Μπορούμε λοιπόν να αναπαραστήσουμε το σύνολο όλων των πιθανών καταστάσεων του κβαντοδυσφίου, με την επιφάνεια μιας μοναδιαίας σφαίρας σε ένα 3D χώρο την σφαίρα *Bloch* (**Σχήμα 1.1**).



Σχήμα 1.1: Η σφαίρα Bloch σε α) Καρτεσιανές συντεταγμένες β) Πολικές συντεταγμένες.

Έτσι μετονομάζοντας το r_a σε z και γνωρίζοντας ότι $r=1$ μπορούμε να γράψουμε :

$$\begin{aligned} |\psi\rangle &= z|0\rangle + (x + yi)|1\rangle \\ &= \cos\theta|0\rangle + \sin\theta(\cos\varphi + i\sin\varphi)|1\rangle \\ (1.10) \quad &= \cos\theta|0\rangle + e^{i\varphi}\sin\theta|1\rangle \end{aligned}$$

Τώρα έχουμε δύο παραμέτρους που καθορίζουν σημεία πάνω σε μία σφαίρα. Επειδή θέλουμε η γωνία θ να παίρνει τιμές από το 0 μέχρι π θα έχουμε τελικά:

$$(1.11) \quad |\psi\rangle = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)|0\rangle + e^{i\varphi}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)|1\rangle$$

με

$$0 \leq \theta \leq \pi \quad \text{και} \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

Στην περίπτωση $\varphi=0$ παρατηρούμε το πέρασμα του κύκλου μέσα από τους δυο πόλους καθώς επίσης και μέσα από τις δύο καταστάσεις υπέρθεσης. Διαπιστώνουμε ότι η φάση είναι ένας κύκλος που τρέχει κάθετα γύρω από την σφαίρα. Σημειώνουμε ,ότι στην αναπαράσταση της Bloch σφαίρα, οι ορθογωνοποιημένες καταστάσεις, είναι σημεία που βρίσκονται σε κατοπτρικές θέσεις πάνω στην επιφάνεια της σφαίρας.

Έτσι για:

- $\theta=0$ θα έχουμε $|\psi\rangle = |0\rangle$
- $\theta=\pi$ θα έχουμε $|\psi\rangle = |1\rangle$
- $\theta=\pi/2$ θα έχουμε $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$

Είναι εμφανές πλέον ο λόγος που επιλέξαμε τις τρεις βάσεις και γιατί μας παρέχουν μια "σύνθετη" πληροφορία.

Οι συντεταγμένες ενός σημείου $\vec{r} = (x, y, z)$, πάνω στην επιφάνεια της σφαίρας δίνονται από τις σχέσεις:

$$(1.12) \quad x = |\langle +|\psi\rangle|^2 - |\langle -|\psi\rangle|^2$$

$$(1.13) \quad y = |\langle +i|\psi\rangle|^2 - |\langle -i|\psi\rangle|^2$$

$$(1.14) \quad z = |\langle 0|\psi\rangle|^2 - |\langle 1|\psi\rangle|^2$$

Στην αναπαράσταση της σφαίρας Bloch, μια αυθαίρετη βάση $\{| \varphi \rangle, | \varphi_{\perp} \rangle\}$ αναπαριστά από ένα άξονα που "τρέχει" μεταξύ φ και φ_{\perp} . Μία κβαντική κατάσταση $|\psi\rangle$ αναπαριστάτε από το σημείο $\underline{\psi}(x, y, z)$ πάνω στην σφαίρα. Η προσδοκώμενη μέτρηση των πιθανοτήτων, στην βάση $\{| \varphi \rangle, | \varphi_{\perp} \rangle\}$, σχετίζεται με τα στοιχεία του $\underline{\psi}(x, y, z)$ στην κατεύθυνση των αξόνων φ και φ_{\perp} . (Η τιμή 1 μας λέει ότι η μέτρηση θα δίνει το αποτέλεσμα φ ενώ η τιμή -1 θα δίνει το αποτέλεσμα φ_{\perp} .)

Οι μοναδιαίοι τελεστές ενός κβαντοδυφίου έχουν την δυνατότητα να περιστρέφουν την Bloch σφαίρα. Τέτοιοι πίνακες είναι οι γνωστοί *πίνακες Pauli*:

$$(1.15) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sigma_x \equiv X = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\ \sigma_y \equiv Y = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \\ \sigma_z \equiv Z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \end{array} \right\}$$

Αξιίζει να σημειωθούν οι δράσεις των παραπάνω πινάκων στις καταστάσεις μας:

$$(1.16) \quad \sigma_x |0\rangle = |1\rangle, \quad \sigma_x |1\rangle = |0\rangle, \quad \sigma_x |\pm\rangle = |\pm\rangle \quad \& \quad \sigma_x |\pm i\rangle = |\mp i\rangle$$

Παρατηρούμε ότι ο τελεστής σ_x αντιστοιχεί σε μια περιστροφή 180° στη σφαίρα Bloch γύρω από τον άξονα που ορίζεται από τις ιδιοκαταστάσεις του, $|\pm\rangle$.

Γενικά, είναι πιθανόν ναδειχθεί ότι οποιοσδήποτε μοναδιαίος τελεστής μπορεί να περιστρέψει μοναδιαία την Bloch σφαίρα κατά συγκεκριμένη γωνία γύρω από τον "ιδιοάξονά" της. Έστω ένα σύστημα κβαντοδυφίου με ενεργειακό χάσμα Δ μεταξύ των δυο καταστάσεων βάσης. Η Χαμιλτονιανή που περιγράφει το σύστημα είναι η $H_0 = -\frac{1}{2}\hbar\sigma_z$. Ο μοναδιαίος τελεστής εξέλιξης είναι:

$$(1.17) \quad U_0 = \begin{bmatrix} e^{i\Delta t/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\Delta t/2} \end{bmatrix}$$

Εάν αφήσουμε την κατάσταση να εξελιχθεί για χρόνο $t=\pi/2\Delta$, τότε ισχύει:

$$(1.18) \quad \begin{aligned} U_0|0\rangle &= |0\rangle, & U_0|1\rangle &= |1\rangle, & U_0|+\rangle &= |-i\rangle, & U_0|-i\rangle &= |-\rangle, \\ U_0|-\rangle &= |+i\rangle & \& & U_0|+i\rangle &= |+\rangle \end{aligned}$$

όπου U_0 είναι μια περιστροφή κατά 90° της Bloch σφαίρας γύρω από τον άξονά της. Επομένως η αυθαίρετη μοναδιαία εξέλιξη ενός κβαντοδυφίου μπορεί να πάρει την μορφή:

$$(1.19) \quad U_{\underline{n}}(\theta) = e^{-i\frac{\theta}{2}\underline{n}\cdot\underline{\sigma}}$$

όπου \underline{n} ένα 3D μοναδιαίο διάνυσμα, $\underline{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ και $\underline{n} \cdot \underline{\sigma} = \sum_{j=x,y,z} n_j \sigma_j$. Η $U_{\underline{n}}(\theta)$ αναπαριστά μια περιστροφή της Bloch σφαίρας κατά γωνία θ γύρω από τον άξονα που ορίζεται από το \underline{n} . [1]

Ένα σύστημα δυο κβαντικών bit μπορεί να βρίσκεται στην κατάσταση $|q\rangle = a|00\rangle + b|01\rangle + c|10\rangle + d|11\rangle$ όπου δεν είναι όλα τα a, b, c, d μηδέν. Επομένως οι καταστάσεις δυο κβαντοδυφίων ανήκουν στο διανυσματικό χώρο τεσσάρων διαστάσεων \mathbb{C}^4 . Ας υποθέσουμε τώρα ότι τα δύο κβαντοδυφία είναι ανεξάρτητα και βρίσκονται στις καταστάσεις $|q_1\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ και $|q_2\rangle = \gamma|0\rangle + \delta|1\rangle$. Τότε η κοινή τους κατάσταση θα είναι:

$$\begin{aligned} |q_1\rangle|q_2\rangle &= |q_1\rangle \otimes |q_2\rangle = \alpha\gamma|0\rangle|0\rangle + \alpha\delta|0\rangle|1\rangle + \beta\gamma|1\rangle|0\rangle + \beta\delta|1\rangle|1\rangle \\ &= \alpha\gamma|00\rangle + \alpha\delta|01\rangle + \beta\gamma|10\rangle + \beta\delta|11\rangle \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι δεν μπορούν όλες οι καταστάσεις του διανυσματικού χώρου \mathbb{C}^4 να γραφτούν ως καταστάσεις ανεξάρτητων κβαντοδυφίων.

Παράδειγμα αποτελεί η κατάσταση $\frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$.

Για να γραφτεί ως γινόμενο δυο ανεξάρτητων καταστάσεων πρέπει $\alpha\delta=\beta\gamma=0$ και $\alpha\gamma=\beta\delta=\frac{1}{\sqrt{2}}$ πράγμα αδύνατο. Σε αυτή την περίπτωση λοιπόν τα δυο κβαντοδυφία δεν είναι ανεξάρτητα.

Γενικεύοντας ένας επεξεργαστής n κβαντοδυφίων βρίσκεται σε μία κατάσταση η οποία είναι ένα διάνυσμα του χώρου \mathbb{C}^{2^n} και είναι υπέρθεση των 2^n καταστάσεων $|00 \dots 0\rangle, |00 \dots 1\rangle, \dots, |11 \dots 1\rangle$.

Ο όρος εναγκαλισμός (entanglement) αναφέρεται σε δύο ή περισσότερα κβαντοδυφία τα οποία δεν είναι ανεξάρτητα αλλά είναι συζευγμένα όπως στο προηγούμενο παράδειγμα. αυτό το φαινόμενο δημιουργεί την πολύ περίεργη « δράση από απόσταση » δύο σωματιδίων. Στη προηγούμενη περίπτωση μία μέτρηση στο πρώτο κβαντοδυφίο προκαλεί κατάρρευση της κυματοσυνάρτησης και επηρεάζει την τιμή του άλλου κβαντοδυφίου. Αν μετρηθεί - το πρώτο κβαντοδυφίο τότε και το δεύτερο γίνεται ακαριαία 0.

Όταν τα δύο κβαντικά bit δεν είναι συζευγμένα λέμε πως είναι ανεξάρτητα. Σε αυτή την περίπτωση η κοινή τους κατάσταση δίνεται όπως είδαμε αν πολλαπλασιάσουμε τις δυο καταστάσεις.

Η αντίστοιχη πράξη από τη γραμμική άλγεβρα για να περιγράψουμε τις καταστάσεις 2 κβαντοδυφίων είναι το τανυστικό γινόμενο (tensor product). Αυτό ορίζεται ως εξής: $u \in \mathbb{C}^n$ και $v \in \mathbb{C}^m$ τότε $w = u \otimes v \in \mathbb{C}^{mn}$ και $w_{(i,j)} = u_i v_j$. Αυτή η πράξη φαίνεται και στο πρώτο παράδειγμα των δύο ανεξάρτητων κβαντοδυφίων q_1 και q_2 .

1.2 Διεργασίες σε κβαντικά bits και κβαντικοί επεξεργαστές

Η λειτουργία ενός κβαντικού υπολογιστή -δηλαδή η εκτέλεση ενός υπολογιστικού προγράμματος για ένα συγκεκριμένο σκοπό- γίνεται μέσω συγκεκριμένων χειρισμών πάνω στα κβαντοδύφια που συγκροτούν την μνήμη του ή τον επεξεργαστή του όπως έχει επίσης καθιερωθεί να λέγεται. Επειδή τα κβαντοδύφια είναι κβαντικά αντικείμενα, ο χειρισμός τους -δηλαδή η πρόκληση των επιθυμητών αλλαγών στην κατάστασή τους- γίνεται με τις δύο μοναδικές διαδικασίες που προβλέπει η κβαντική θεωρία: Τη *μοναδιαία εξέλιξη μέσω της εξίσωσης Schrödinger*- που προκαλείται κυρίως με την δράση κατάλληλων εξωτερικών πεδίων- καθώς και με την προβολική μέτρηση που δεν είναι μοναδιαία όπως γνωρίζουμε, αλλά διέπεται από την αρχή της κατάρρευσης του καταστασιακού διανύσματος [3].

Συνεπώς μετά την μέτρηση το κβαντοδυφίο μεταβαίνει σε κλασσική κατάσταση και θεωρητικά μπορούμε να το χειριστούμε με κλασσικές πύλες αν αντιγράψουμε την τιμή του σε ένα κλασσικό bit. Με ένα ορθομοναδιαίο κβαντικό μετασχηματισμό όμως μπορούμε να το επαναφέρουμε σε οποιαδήποτε κβαντική κατάσταση.

1.2.1 Ορθομοναδιαίοι μετασχηματισμοί-Κβαντικές πύλες

Καθώς όμως η μέτρηση πραγματοποιείται στο τέλος της υπολογιστικής διαδικασίας (και αποσκοπεί στην ανάγνωση του αποτελέσματος) οι δυνατοί χειρισμοί επί των κβαντοδύφίων θα πρέπει να είναι υποχρεωτικά μοναδιαίοι.

Ως προς την ορολογία, ο καθιερωμένος όρος για αυτές τις μοναδιαίες "πράξεις" είναι οι *κβαντικές πύλες ή απλώς πύλες*. Είναι βασικό να υπογραμμίσουμε από την αρχή ένα βασικό γεγονός πάνω στο οποίο βασίζεται όλο το κυκλωματικό μοντέλο (circuit model) των υπολογιστών, κλασσικών ή μη: Ότι αρκεί ένας μικρός αριθμός στοιχειωδών πυλών -δηλαδή απλών μοναδιαίων τελεστών- για να υλοποιηθεί μέσω αυτών κάθε δυνατός μοναδιαίος μετασχηματισμός επί του συνόλου των κβαντοδυφίων του καταχωρητή. Ακόμα πιο συγκεκριμένα: Αρκεί ένας μικρός αριθμός πυλών που δρουν μόνο πάνω σε ένα κβαντοδυφίο, σε συνδυασμό με μία μόνο πύλη που δρα σε δυο κβαντοδυφία για να πραγματοποιηθεί οποιοσδήποτε αλγόριθμος.







Οι πύλες ενός κβαντοδυφίου αναπαρίστανται από μοναδιαίες μήτρες διαστάσεων 2×2 και η πύλες δυο κβαντοδυφίων από μια αντίστοιχη μήτρα διαστάσεων 4×4 . Θα αρχίσουμε την μελέτη μας από την πρώτη κατηγορία πυλών.

1.2.1.1 Πύλες που δρουν πάνω σε ένα κβαντοδυφίο

Εξετάζοντας αρχικά την περίπτωση ενός κβαντοδυφίου, η κατάστασή του θα είναι ένα διάνυσμα στον χώρο \mathbb{C}^2 . Ένας μετασχηματισμός σε αυτή την κατάσταση ορίζεται ως ένας πίνακας 2×2 με στοιχεία μιγαδικούς αριθμούς. Ο μετασχηματισμός λέγεται ορθομοναδιαίος όταν ισχύει $SS^* = I$ όπου S^* είναι ο αναστροφosuζυγής πίνακας του S . Η κατάσταση του κβαντοδυφίου μετασχηματίζεται τότε ως εξής [1-4]:

$$(1.20) \quad \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \mapsto S \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

Όπως αναφέραμε και παραπάνω η κατάσταση ενός καταχωρητή n κβαντοδυφίων είναι ένα διάνυσμα στο χώρο \mathbb{C}^{2^n} . Επομένως οι αντίστοιχοι ορθομοναδιαίοι μετασχηματισμοί είναι διαστάσεων $2^n \times 2^n$. Συγκεκριμένα, στα κβαντικά κυκλώματα οι πύλες που χρησιμοποιούνται για την δράση πάνω σε ένα κβαντοδυφίο είναι οι Hadamard, πύλη X, πύλη Z, πύλη φάσης S και πύλη Y (Σχήμα 1.2).

Gate	Name	Matrix
	Pauli X	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$
	Pauli Y	$\begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}$
	Pauli Z	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$
	Hadamard	$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$
	Phase	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}$
	$\frac{\pi}{8}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\pi}{4}} \end{bmatrix}$

Σχήμα 1.2: Κβαντικές πύλες πάνω σε ένα κβαντοδυφίο

Αξιίζει να σημειωθεί, προτού προχωρήσουμε στην περαιτέρω ανάλυσή τους, ότι οι πύλες X, Y και Z δεν είναι παρά οι γνωστές μήτρες του Pauli σ_x, σ_y και σ_z που είναι ταυτόχρονα ερμιτιανές και μοναδιαίες λόγω της γνωστής τους ιδιότητας να είναι $\sigma_x^2 = \sigma_z^2 = \sigma_y^2 = 1$.

Ερμιτιανή και μοναδιαία είναι επίσης και η πύλη Hadamard αφού ισχύει και γι' αυτήν ότι $H^2 = 1$. Μεταξύ άλλων αυτό συνεπάγεται ότι η διπλή δράση αυτών των πυλών επαναφέρει το κβαντοδυφίο στην αρχική του κατάσταση.

Ως προς το αποτέλεσμα της "μονής" δράσης των παραπάνω πυλών είναι χρήσιμο να σημειώσουμε τα εξής:

➤ Η κβαντική πύλη μετατόπισης φάσης

Η κβαντική πύλη μετατόπισης φάσης περιγράφεται από έναν τελεστή που ονομάζεται S. Ο πίνακας που αντιστοιχεί στον τελεστή της πύλης αυτής είναι:

$$(1.21) \quad S = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\varphi} \end{bmatrix}$$

Ας δούμε τώρα το αποτέλεσμα της δράσης αυτής της πύλης σε ένα κβαντοδυφίο. Έστω ένα κβαντοδυφίο του οποίου η κατάσταση δίνεται από:

$$(1.22) \quad |q_1\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

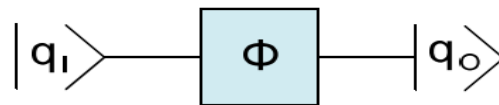
Η κβαντική πύλη μετατόπισης φάσης δρα σε αυτό και αλλάζει την κατάσταση του σε $|q_0\rangle$. Ας υπολογίσουμε τη νέα αυτή κατάσταση:

$$(1.23) \quad |q_0\rangle = S|q_1\rangle = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\varphi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ e^{i\varphi} b \end{bmatrix}$$

Η νέα κατάσταση του κβαντοδυφίου είναι:

$$(1.24) \quad |q_0\rangle = a|0\rangle + e^{i\varphi} b|1\rangle$$

Δηλαδή η δράση της πύλης αυτής άλλαξε μόνο τη γωνία φάσης του κβαντοδυφίου.



Σχήμα 1.3: Το σύμβολο της κβαντικής πύλης μετατόπισης φάσης, S .

Στο **Σχήμα 1.3** φαίνεται το σύμβολο της πύλης S και στον **Πίνακα 1.1** οι ιδιότητές της. Στη στήλη του πίνακα φαίνονται οι καταστάσεις των κβαντοδυφίων πριν τη δράση της πύλης ($|q_1\rangle$) και στη δεύτερη οι καταστάσεις μετά τη δράση της.

$ q_i\rangle$	$ q_o\rangle$
$ 0\rangle$	$ 0\rangle$
$ 1\rangle$	$e^{i\varphi} 1\rangle$
$a 0\rangle + b 1\rangle$	$a 0\rangle + e^{i\varphi}b 1\rangle$

Πίνακας 1.1: Η δράση της κβαντικής πύλης μετατόπισης φάσης στις καταστάσεις ενός κβαντοδυφίου.

Αξίζει να σημειωθεί ότι την πύλη φάσης μπορούμε να την φανταστούμε ως την τετραγωνική ρίζα της πύλης Z , $S^2 = Z$, και αντικατοπτρίζει την αζιμουθιακή περιστροφή κατά $\pi/2$.

➤ **Η κβαντική πύλη Hadamard:**

Η κβαντική πύλη Hadamard περιγράφεται από ένα τελεστή που ονομάζεται H . Ο πίνακας που αντιστοιχεί στον τελεστή της πύλης αυτής είναι:

$$(1.25) \quad H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Προκειμένου να διαπιστώσουμε την δράση της πύλης Hadamard πάνω στο κβαντοδυφίο αρκεί να δράσουμε τον πίνακα H πάνω στις καταστάσεις $|0\rangle$ και $|1\rangle$. Έτσι για την κατάσταση $|0\rangle$ έχουμε:

$$(1.26) \quad H|0\rangle = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$$

Το αποτέλεσμα της δράσης αυτής της πύλης σε ένα κβαντοδυφίο που βρίσκεται στην κατάσταση $|1\rangle$:

$$(1.27) \quad H|1\rangle = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)$$

Δηλαδή, όταν η πύλη Hadamard δρα σε ένα κβαντοδυφίο που βρίσκεται σε μία από τις δύο βασικές καταστάσεις τα θέτει σε μία κατάσταση που είναι υπέρθεση των βασικών καταστάσεων. Όταν ένα κβαντοδυφίο βρίσκεται σε μια από τις καταστάσεις που βρήκαμε παραπάνω, η πιθανότητα να το μετρήσουμε και να το βρούμε στην κατάσταση $|0\rangle$ είναι ίση με την πιθανότητα να το βρούμε στην κατάσταση $|1\rangle$. Φυσικά και οι δύο πιθανότητες είναι ίσες με 0,5.

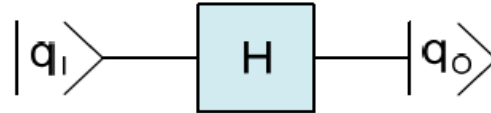
Παρακάτω θα δούμε τι αποτέλεσμα θα έχουμε αν η πύλη Hadamard δράσει σε ένα κβαντοδυφίο που βρίσκεται σε υπέρθεση καταστάσεων:

$$(1.28) \quad H \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = |0\rangle$$

Το αποτέλεσμα της δράσης αυτής της πύλης σε ένα κβαντοδυφίο που βρίσκεται στην κατάσταση $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)$:

$$(1.29) \quad H \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle) = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = |1\rangle$$

Δηλαδή η πύλη Hadamard επιστρέφει τα κβαντοδυφία στις βασικές τους καταστάσεις.



Σχήμα 1.4: Το σύμβολο της κβαντικής πύλης Hadamard H .

$ q_i\rangle$	$ q_o\rangle$
$ 0\rangle$	$\frac{1}{\sqrt{2}}(0\rangle + 1\rangle)$
$ 1\rangle$	$\frac{1}{\sqrt{2}}(0\rangle - 1\rangle)$
$\frac{1}{\sqrt{2}}(0\rangle + 1\rangle)$	$ 0\rangle$
$\frac{1}{\sqrt{2}}(0\rangle - 1\rangle)$	$ 1\rangle$

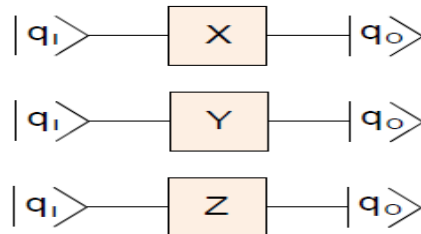
Πίνακας 1.2: Η δράση της κβαντικής Hadamard στις καταστάσεις ενός κβαντοδυφίου

Στο **Σχήμα 1.4** φαίνεται το σύμβολο της πύλης H και στο **Πίνακα 1.2** οι ιδιότητές της. Στην πρώτη στήλη του πίνακα φαίνονται οι καταστάσεις των κβαντοδυφίων πριν τη δράση της πύλης ($|q_i\rangle$) και στη δεύτερη οι καταστάσεις μετά τη δράση της.

Η πύλη Hadamard είναι πολύ σημαντική, όπως παρατηρούμε, καθώς δημιουργεί ισοβαρείς επαλληλίες των βασικών καταστάσεων $|0\rangle$ και $|1\rangle$ -οι οποίες είναι απαραίτητες για πολλούς κβαντικούς αλγορίθμους. Όπως θα δούμε στις παρακάτω ενότητες, η πύλη Hadamard επιτρέπει τον κβαντικό παραλληλισμό, όπως είναι για παράδειγμα η εκτίμηση με τη μία της συνάρτησης ενός κβαντοφυδίου για όλο το σύνολο των υπολογίσιμων καταστάσεων. Για την περιστροφή ενός κβαντοφυδίου, η πύλη Hadamard δημιουργεί μια περιστροφή κατά $\pi/4$ γύρω από τον άξονα y η οποία συνοδεύεται με μία περιστροφή κατά π γύρω από τον άξονα z .

➤ Κβαντικές πύλες ενός κβαντοδυφίου

Κάθε δυνατή κβαντική πύλη ενός κβαντοδυφίου μπορεί να συντεθεί από ένα γραμμικό συνδυασμό των πυλών Pauli. Δηλαδή με τις πύλες αυτές μπορούμε να εκτελέσουμε όλες τις περιστροφές του διανύσματος κατάστασης ενός κβαντοδυφίου στην σφαίρα Bloch.



Σχήμα 1.5: Τα σύμβολα των κβαντικών πυλών Pauli

Οι κβαντικές πύλες ενός κβαντοδυφίου συμβολίζονται με τα γράμματα X,Y,Z και αναπαρίστανται από τους παρακάτω πίνακες:

$$(1.30) \quad X = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad Y = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \quad Z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Για την πύλη X: Η δράση της πύλης X σε ένα κβαντοδυφίο είναι:

$$(1.31) \quad X|0\rangle = |1\rangle$$

$$(1.32) \quad X|1\rangle = |0\rangle$$

$$(1.33) \quad X|q_1\rangle = X(a|0\rangle + b|1\rangle) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ a \end{bmatrix} = b|0\rangle + a|1\rangle = |q_0\rangle$$

Η πύλη X συχνά αναφέρεται και ως πύλη NOT ή πύλη bit-flip καθώς αλλάζει την τιμή της υπολογιστικής βάσης από την μία κατάσταση στην άλλη. Είναι ισοδύναμη με τον τελεστή του Pauli σ_x και εκτελεί περιστροφή γύρω από τον άξονα y κατά π. Ένας συμπαγής συμβολισμός για την δράση αυτή είναι ο

$$(1.34) \quad X|x\rangle = |\bar{x}\rangle$$

όπου $x=(0,1)$ η συνήθης δυαδική μεταβλητή και $\bar{x} = (1,0)$ το ανεστραμμένο είδωλο της όπου η παύλα πάνω από το x παραπέμπει εύλογα στο καθιερωμένο σύμβολο για το αντισωματίδιο.

Για την πύλη Y: Η δράση της πύλης Y σε ένα κβαντοδυφίο είναι:

$$(1.35) \quad Y|0\rangle = i|1\rangle$$

$$(1.36) \quad Y|1\rangle = -i|0\rangle$$

$$(1.37) \quad Y|q_1\rangle = Y(a|0\rangle + b|1\rangle) = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -ib \\ ia \end{bmatrix} = -ib|0\rangle + ia|1\rangle = |q_0\rangle$$

Για την πύλη Z: Η δράση της πύλης Z σε ένα κβαντοδυφίο είναι:

$$(1.38) \quad Z|0\rangle = 0|0\rangle$$

$$(1.39) \quad Z|1\rangle = -|1\rangle$$

$$(1.40) \quad Z|q_1\rangle = Z(a|0\rangle + b|1\rangle) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ -b \end{bmatrix} = a|0\rangle - b|1\rangle = |q_0\rangle$$

Για την πύλη Z, ή πύλη phase-flip, είναι απλά ο πίνακας Pauli σ_z και αναπαριστά την αζιμουθιακή περιστροφή του διανύσματος Bloch κατά π .

➤ **Για την πύλη T:**

Η πύλη T ή αλλιώς $\pi/8$ είναι η τετραγωνική ρίζα της πύλης της φάσης, $T^2 = S$ και είναι μαζί με την Hadamard οι πλέον κβαντικές πύλες χωρίς κλασσικά ανάλογα.[2]

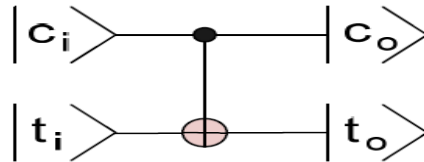
1.2.1.2 Πύλες που δρουν πάνω σε δύο κβαντοδυφία

Στην προηγούμενη ενότητα ασχοληθήκαμε με την ύπαρξη ενός κβαντοδυφίου. Σε αυτή την ενότητα θα επεκτείνουμε την θεωρία έχοντας πλέον δύο κβαντοδυφία, και θα ανακαλύψουμε νέες μοναδικές πύλες στο χώρο Hilbert οι οποίες δεν προκύπτουν απλά από τους τελεστές ενός κβαντοδυφίου. Τέτοιες πύλες αποτελούν οι *τελεστές ελέγχου*.

Το ένα κβαντοδυφίο μπορεί να θεωρηθεί ως "*κβαντοδυφίο στόχος*" ενώ το άλλο ως "*κβαντοδυφίο ελέγχου*". Οι τελεστές ελέγχου περιλαμβάνουν δράσεις πάνω στα "*κβαντοδυφία στόχος*" με αποτέλεσμα να αλλάζουν την εξάρτησή τους από τις καταστάσεις των "*κβαντοδυφίων ελέγχου*". Τέτοιες πύλες είναι βασικές για να δημιουργηθεί ο κβαντικός εναγκαλισμός.

➤ Πύλη cNOT

Η πύλη cNOT ή πύλη controlled-NOT είναι η "κανονικοποιημένη" πύλη εναγκαλισμού δύο κβαντοδυφίων. Η αναπαράσταση της πύλης cNOT στην γλώσσα των κυκλωμάτων φαίνεται στο **Σχήμα 1.6**, με τις δύο εισόδους (άρα και δύο εξόδους) να αντιστοιχούν στα κβαντοδυφία ελέγχου και στόχου.



Σχήμα 1.6: Κυκλωματική αναπαράσταση της πύλης cNOT. Στα κβαντικά κυκλωματικά μοντέλα, οι τελεστές απεικονίζονται σε διαφορετικές κάθετες διαδρομές. Για την cNOT πύλη υπάρχουν δυο κβαντοδυφία και δυο διαδρομές, ένα κβαντοδυφίο ελέγχου κατά μήκος της πάνω διαδρομής και ένα κβαντοδυφίο στόχος κατά μήκος της κάτω διαδρομής.

Οι καταστάσεις των δυο κβαντοδυφίων πριν την δράση της πύλης είναι $|c_i\rangle$ και $|t_i\rangle$. Οι καταστάσεις των κβαντοδυφίων μετά την δράση είναι $|c_o\rangle$ και $|t_o\rangle$.

Η πύλη CNOT αλλάζει την κατάσταση του κβαντοδυφίου στόχου, όταν η κατάσταση του κβαντοδυφίου ελέγχου είναι $|1\rangle$, ενώ αφήνει την κατάσταση του κβαντοδυφίου στόχου αναλλοίωτη, όταν η κατάσταση του κβαντοδυφίου ελέγχου είναι $|0\rangle$. Η κατάσταση του κβαντοδυφίου ελέγχου $|c_i\rangle$ δεν μεταβάλλεται, δηλαδή ισχύει πάντα $|c_i\rangle = |c_o\rangle$. Έτσι η cNOT πύλη μπορεί να γραφεί ως ένας μοναδιαίος πίνακας 4x4 ως εξής:

$$(1.41) \quad U_{\text{CNOT}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Το κλασσικό ανάλογο της cNOT είναι η XOR πύλη, η οποία παίρνει δύο κβαντοδυφία A και B και επιστρέφει ένα κβαντοδυφίο που αντιστοιχεί στο modulo 2 addition operator \oplus .

$$(1.42) \quad A \oplus 0 = A$$

$$(1.43) \quad A \oplus 1 = 1 - A = \bar{A}$$

Κλασσικά αυτή είναι μία μη αναστρέψιμη διαδικασία. Η cNOT πύλη καταφέρει ένα παρόμοιο αποτέλεσμα, αλλά είναι αναστρέψιμο και μπορεί να περιγραφεί από ένα μοναδιαίο πίνακα. Ας δούμε τη δράση της πύλης αυτής σε ένα κβαντικό επεξεργαστή που αποτελείται από δυο κβαντοδυφία. Η γενική περιγραφή της δράσης της πύλης αυτής είναι:

$$(1.44) \quad CNOT|c_i t_i\rangle = |c_o t_o\rangle$$

Έστω ότι η κατάσταση του κβαντικού επεξεργαστή πριν τη δράση της πύλης είναι $|01\rangle$, τότε:

$$(1.45) \quad CNOT|01\rangle = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = |01\rangle$$

Αφού η κατάσταση του κβαντοδυφίου ελέγχου είναι $|0\rangle$, η κατάσταση του κβαντοδυφίου στόχου δεν αλλάζει. Με τον ίδιο τρόπο μπορούμε να δούμε και τις υπόλοιπες περιπτώσεις.

$ c_i t_i\rangle$	$ c_o t_o\rangle$
$ 00\rangle$	$ 00\rangle$
$ 01\rangle$	$ 01\rangle$
$ 10\rangle$	$ 11\rangle$
$ 11\rangle$	$ 10\rangle$

Πίνακας 1.3: Η δράση της κβαντικής πύλης CNOT στα κβαντοδυφία ελέγχου και στόχου.

1.2.2 Μετρήσεις

Η δεύτερη φυσική διεργασία που μπορούμε να εφαρμόσουμε στα κβαντικά bits είναι η κβαντική *μέτρηση*. Πρόκειται για μια μη αντιστρέψιμη διαδικασία κατά την οποία προσπαθούμε να βρούμε την τιμή ενός κβαντοδυφίου. Τα χαρακτηριστικά στοιχεία της πράξης της μέτρησης είναι ότι δίνει αποτέλεσμα είτε 0 είτε 1 με συγκεκριμένη πιθανότητα και μετά τη μέτρηση η κυματοσυνάρτηση του κβαντοδυφίου καταρρέει είτε στην κατάσταση $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ είτε στην $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Καθώς η δύναμη των αλγορίθμων, που θα αναφερθούμε στη συνέχεια του κεφαλαίου, βασίζεται στην υπέρθεση καταστάσεων οι μετρήσεις συνήθως εκτελούνται είτε στην αρχή (για να προετοιμάσουμε την αρχική κατάσταση που επιθυμούμε), είτε στο τέλος. Ο λόγος είναι ότι έπειτα από κάθε μέτρηση οποιαδήποτε υπέρθεση καταστάσεων καταστρέφεται. Στο τέλος των αλγορίθμων οι μετρήσεις χρησιμοποιούνται αναγκαστικά για να διαβάσουμε το όποιο αποτέλεσμα. Έστω για παράδειγμα ένα κβαντοδυφίο στην κατάσταση $|q_1\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$. Τότε μια τέτοια μέτρηση του θα μας δώσει το αποτέλεσμα 1 με πιθανότητα $|\alpha|^2$ και 0 με πιθανότητα $|\beta|^2$. Περαιτέρω μέτρηση στο ίδιο κβαντοδυφίο θα μας δώσει το ίδιο αποτέλεσμα με την πρώτη μέτρηση αφού η κατάσταση του κβαντοδυφίου θα είναι πια κλασσική. Ένα δεύτερο παράδειγμα είναι το σύστημα των δυο κβαντοδυφίων και η κατάσταση $|q\rangle = \alpha|00\rangle + \beta|01\rangle + \gamma|10\rangle + \delta|11\rangle$. Υποθέτοντας ότι οι συντελεστές είναι κανονικοποιημένοι, μέτρηση στο πρώτο κβαντοδυφίο θα δώσει 0 με πιθανότητα $|\alpha|^2 + |\beta|^2$ και 1 με πιθανότητα $|\gamma|^2 + |\delta|^2$. Η νέα κατάσταση στην οποία θα καταρρεύσει τώρα το σύστημα θα είναι $|q\rangle = \alpha|00\rangle + \beta|01\rangle$ στην πρώτη περίπτωση και $|q\rangle = \gamma|10\rangle + \delta|11\rangle$ στη δεύτερη. Οι νέοι συντελεστές τώρα δεν είναι κανονικοποιημένοι επομένως σε περίπτωση μίας ακόμα μέτρησης για την πρώτη από τις δύο καταστάσεις η πιθανότητα το δεύτερο κβαντοδυφίο να δώσει 0 είναι $\frac{|\alpha|^2}{|\alpha|^2 + |\beta|^2}$, και η πιθανότητα να δώσει 1 είναι $\frac{|\beta|^2}{|\alpha|^2 + |\beta|^2}$. Η συνολική πιθανότητα παρατήρησης κάθε μίας εκ των καταστάσεων $|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle$ είναι $|\alpha|^2, |\beta|^2, |\gamma|^2, |\delta|^2$ αντίστοιχα ανεξάρτητα από την σειρά των μετρήσεων.

Στην κβαντομηχανική η σειρά των μετρήσεων επηρεάζει στην γενική περίπτωση τα αποτελέσματα, κάτι το οποίο επηρεάζει και τους κβαντικούς υπολογισμούς.

Κεφάλαιο 2ο

Κβαντικοί αλγόριθμοι

2.1 Εισαγωγή

Μετά τις κβαντικές πύλες το αναγκαίο επόμενο βήμα είναι η ανάπτυξη κατάλληλων προγραμμάτων -δηλαδή κατάλληλων αλγορίθμων- με σκοπό την επίλυση υπολογιστικών προβλημάτων. Συγκεκριμένα, το 1994, ο Peter Shor επινόησε ένα κβαντικό αλγόριθμο, βασισμένο στον περίφημο κβαντικό μετασχηματισμό Fourier [10]. Με τον αλγόριθμο αυτόν έγινε για πρώτη φορά εφικτή η επίλυση ενός από τα δυσκολότερα προβλήματα στην ιστορία των μαθηματικών και της επιστήμης των υπολογιστών: Η παραγοντοποίηση ενός μεγάλου ακέραιου αριθμού σε πολυωνυμικό χρόνο. Στο κεφάλαιο αυτό θα ασχοληθούμε με την διεξοδική ανάλυση των αλγορίθμων **Deutsch και Grover** που έχουν να κάνουν με την εύρεση ενός στοιχείου σε μια βάση δεδομένων [11,12]. Ξεκινάμε την περιγραφή από τον αλγόριθμο του Deutsch.

2.2 Το πρόβλημα του Deutsch

Έστω μία συνάρτηση $f: \{0,1\} \rightarrow \{0,1\}$. Έστω ένα μαντείο όπου μπορούμε να ρωτήσουμε ποιο θα είναι το αποτέλεσμα της f αν έχουμε ως είσοδο κάποιο $x \in \{0,1\}$. Τότε υπάρχουν τέσσερις πιθανές συναρτήσεις:

$$(2.1) \quad f(x) = 0, f(x) = 1, f(x) = x, f(x) = \bar{x}$$

Οι δύο πρώτες είναι σταθερές συναρτήσεις ενώ οι δύο τελευταίες είναι ισοζυγισμένες. Το πρόβλημα του Deutsch είναι το εξής [11]:

Καθορίστε εάν η $f(x)$ είναι σταθερή ή ισοζυγισμένη κάνοντας στο μαντείο όσο λιγότερες ερωτήσεις γίνεται.

Κλασσικά θα πρέπει να ρωτήσουμε 2 φορές το μαντείο για να λύσουμε το πρόβλημα του Deutsch.

Ποιο είναι το αποτέλεσμα της f για $x=0$?

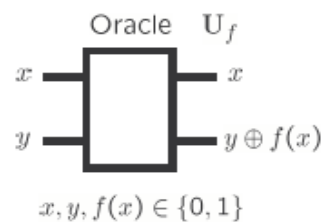
Ποιο είναι το αποτέλεσμα της f για $x=1$?

Αυτό γιατί υπάρχουν τέσσερις περιπτώσεις:

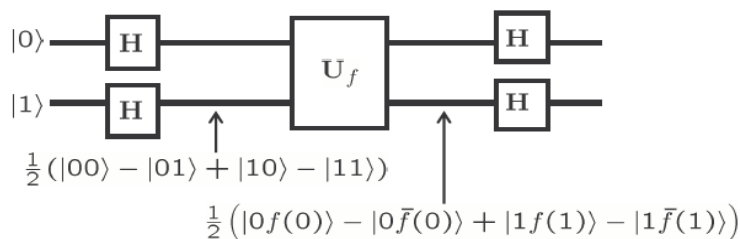
x	$f_1(x)$	x	$f_2(x)$
0	0	0	1
1	0	1	1

x	$f_3(x)$	x	$f_4(x)$
0	0	0	1
1	1	1	0

Στην κβαντική λύση θα χρησιμοποιήσουμε ένα κβαντικό μαντείο που θα αντιστοιχεί σε ένα μετασχηματισμό U_f που θα δρα ως εξής .



Πιο συγκεκριμένα θα κατασκευάσουμε ένα κβαντικό κύκλωμα όπου η αρχική κατάσταση θα είναι δυο κβαντικά bit, το ένα στην κατάσταση $|0\rangle$ και το άλλο στην κατάσταση $|1\rangle$, όπως φαίνεται στο σχήμα:



Η αρχική κατάσταση των κβαντοδυφίων είναι η: $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Μετά τις πρώτες πύλες Hadamard η κατάστασή των δυο κβαντοδυφίων θα είναι η:

$$(2.2) \quad \frac{1}{2} (|00\rangle - |01\rangle + |10\rangle - |11\rangle)$$

και αυτό γιατί οι δύο παράλληλες πύλες Hadamard αντιστοιχούν στο πίνακα:

$$(2.3) \quad H \otimes H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \otimes \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Τελικά μετά τις δυο πύλες H έχουμε:

$$(2.4) \quad \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Δηλαδή την κατάσταση:

$$(2.5) \quad \frac{1}{2} (|00\rangle - |01\rangle + |10\rangle - |11\rangle)$$

Το μαντείο έχει ως αποτέλεσμα τα εξής:

$$\begin{aligned} |xy\rangle &\rightarrow |xy \oplus f(x)\rangle \\ |00\rangle &\rightarrow |00 \oplus f(0)\rangle = |0f(0)\rangle \\ |01\rangle &\rightarrow |01 \oplus f(0)\rangle = |0\overline{f(0)}\rangle \\ |10\rangle &\rightarrow |10 \oplus f(1)\rangle = |1f(1)\rangle \\ |11\rangle &\rightarrow |11 \oplus f(1)\rangle = |1\overline{f(1)}\rangle \end{aligned}$$

Έτσι η κατάσταση μετά το μαντείο είναι:

$$(2.6) \quad \frac{1}{2} (|0f(0)\rangle - |0\overline{f(0)}\rangle + |1f(1)\rangle - |1\overline{f(1)}\rangle)$$

Τι γίνεται μετά τις 2 τελευταίες Hadamard;

Έχουμε τέσσερις περιπτώσεις και αυτό γιατί το μαντέιο μας μπορεί να είναι:

$$(2.7) \quad U_{f_1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, U_{f_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, U_{f_3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$U_{f_4} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Περίπτωση 1^η: Ένα $f_1(x) = \bar{x}$ (balanced) το μαντέιο θα είναι:

$$(2.8) \quad U_{f_1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

και η κατάσταση μας μετά το μαντέιο θα είναι:

$$(2.9) \quad \frac{1}{2}(|01\rangle - |00\rangle + |10\rangle - |11\rangle)$$

ή αλλιώς σε περιγραφή Heisenberg: $\frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

Μετά τις δύο τελευταίες Hadamard θα έχουμε:

$$(2.10) \quad \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = -1 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Αυτό σημαίνει ότι θα μετρήσουμε με πιθανότητα 100% την

κατάσταση: $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

Περίπτωση 2^η: Ένα $f_2(x) = x$ (balanced) το μαντέιο θα είναι:

$$(2.11) \quad U_{f_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

και η κατάσταση μας μετά το μαντέιο θα είναι:

$$(2.12) \quad \frac{1}{2}(|00\rangle - |01\rangle + |11\rangle - |10\rangle)$$

ή αλλιώς :

$$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Μετά τις δύο τελευταίες Hadamard θα έχουμε:

$$(2.13) \quad \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Αυτό σημαίνει ότι θα μετρήσουμε με πιθανότητα 100% την κατάσταση: $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

Περίπτωση 3η: Ένα $f_3(x) = 0$ (σταθερή) το μαντείο θα είναι το

$$(2.14) \quad U_{f_1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

και η κατάσταση μας μετά το μαντείο θα είναι:

$$(2.15) \quad \frac{1}{2}(|00\rangle - |01\rangle + |10\rangle - |11\rangle)$$

ή αλλιώς σε περιγραφή Heisenberg: $\frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$

Μετά τις δύο τελευταίες Hadamard θα έχουμε:

$$(2.16) \quad \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Αυτό σημαίνει ότι θα μετρήσουμε με πιθανότητα 100% την κατάσταση: $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Περίπτωση 4η: Ένα $f_4(x) = 1$ (σταθερή) το μαντείο θα είναι:

$$(2.17) \quad U_{f_4} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

η κατάσταση μας μετά το μαντέιο θα είναι:

$$(2.18) \quad \frac{1}{2}(|01\rangle - |00\rangle + |11\rangle - |10\rangle)$$

ή αλλιώς σε περιγραφή Heisenberg: $\frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Μετά τις δύο τελευταίες Hadamard θα έχουμε:

$$(2.19) \quad \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = -1 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Αυτό σημαίνει ότι θα μετρήσουμε με πιθανότητα 100% την κατάσταση: $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Τελικά κάνοντας μόνο μία ερώτηση στο μαντέιο καταλαβαίνουμε εάν η συνάρτηση είναι σταθερή ή balanced και αυτό αφού αν μετρήσουμε την κατάσταση $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ καταλαβαίνουμε ότι είναι σταθερή ενώ εάν

μετρήσουμε την κατάσταση $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ καταλαβαίνουμε ότι είναι balanced.

2.2.1 Γενίκευση του προηγούμενου προβλήματος

Deutsch - Jozsa Problem (1992)

Έστω μία συνάρτηση $f: \{0,1\}^n \rightarrow \{0,1\}$ Όπου είναι δεδομένο ότι η f μπορεί να είναι είτε:

α) Σταθερή:

$$f(x) = b \quad \forall x$$

β) Balanced:

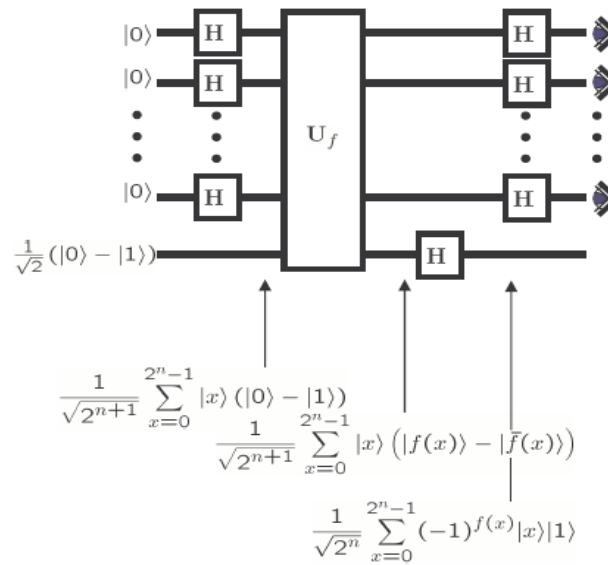
$$xx \in S \quad \text{όπου } S \text{ έχει } 2^{n-1} \text{ στοιχεία}$$

$$\text{εάν } f(x) = 1 \text{ αλλιώς } f(x) = 0$$

Να βρεθεί εάν η $f(x)$ είναι σταθερή ή balanced χρησιμοποιώντας όσο λιγότερες ερωτήσεις γίνεται.

Κλασσικά θα πρέπει να ρωτήσουμε $2^{n-1} + 1$ φορές το μαντείο για να λύσουμε το πρόβλημα του Deutsch. Αντίθετα κβαντικά χρειαζόμαστε να κάνουμε μία μόνο ερώτηση [13]!

Αρκεί το κατάλληλο κύκλωμα.

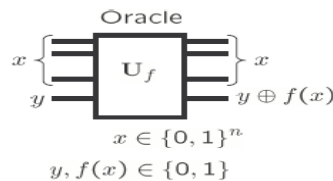


Βήμα 1^ο: Αρχική κατάσταση που αποτελείται από n καταστάσεις $|0\rangle$ και $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)$.

Βήμα 2^ο: n παράλληλες πύλες Hadamard οι οποίες δρουν στις n καταστάσεις $|0\rangle$ και έχουν σαν αποτέλεσμα η κάθε μία από αυτές να βρεθεί σε μία υπέρθεση καταστάσεων $|0\rangle$ και $|1\rangle$.

$$(2.20) \quad \frac{1}{\sqrt{2^{n+1}}} \sum_{x=0}^{2^n-1} |x\rangle (|0\rangle - |1\rangle)$$

Βήμα 3^ο: Μετά το μαντείο U_f θα βρούμε την κατάσταση:



$$(2.21) \quad \frac{1}{\sqrt{2^{n+1}}} \sum_{x=0}^{2^n-1} |x\rangle (|f(x)\rangle - |\bar{f}(x)\rangle)$$

$$(2.22) \quad \frac{1}{\sqrt{2^{n+1}}} \sum_{x=0}^{2^n-1} |x\rangle (-1)^{f(x)} (|0\rangle - |1\rangle)$$

Βήμα 4ο: Το τελευταίο κβαντοδυφίο περνάει από μία πύλη Hadamard οπότε η κατάσταση του συστήματος γίνεται τώρα:

$$(2.23) \quad \frac{1}{\sqrt{2^{n+1}}} \sum_{x=0}^{2^n-1} (-1)^{f(x)} |x\rangle |1\rangle$$

Αφού όπως είπαμε μία πύλη Hadamard όταν δρα στον τελεστή $|1\rangle$ έχει ως αποτέλεσμα:

$$(2.24) \quad H|1\rangle = H \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle - |1\rangle)$$

αλλά αφού οι κβαντικές πύλες είναι αντίστροφες τότε θα ισχύει:

$$(2.25) \quad H \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle - |1\rangle) = H|1\rangle$$

Βήμα 5ο: Γίνεται η μέτρηση. Αν η f είναι σταθερή τότε αυτό θα αποθηκευτεί στη φάση. Πιο συγκεκριμένα εάν η $f(x) = 0$ για κάθε x τότε πριν τις Hadamard η κατάσταση θα είναι:

$$(2.26) \quad (+1) \frac{1}{\sqrt{2^{n+1}}} \sum_{x=0}^{2^n-1} |x\rangle |1\rangle$$

Εάν $f(x) = 1$ για κάθε x τότε πριν τις Hadamard η κατάσταση θα είναι:

$$(2.27) \quad (-1) \frac{1}{\sqrt{2^{n+1}}} \sum_{x=0}^{2^n-1} |x\rangle |1\rangle$$

και στις δυο περιπτώσεις όμως το αποτέλεσμα της μέτρησης θα είναι το ίδιο

$$|0000 \dots 000000\rangle$$

Εάν η $f(x) = \text{δεν είναι σταθερή}$ θα μετρήσουμε οποιαδήποτε άλλη κατάσταση εκτός από την $|0000 \dots 000000\rangle$.

Έτσι με μία ερώτηση έχουμε βρει εάν η f είναι σταθερή ή όχι.

2.3 Αλγόριθμος Grover

Αλγόριθμος Αναζήτησης (Grover 1996 [12])

Το πρόβλημα:

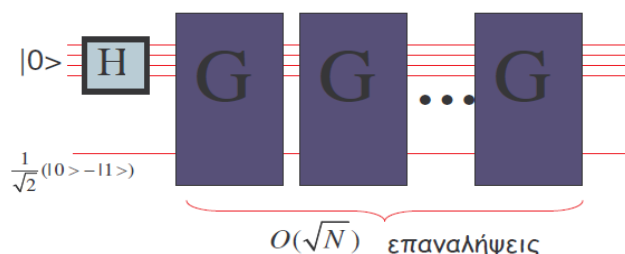
« Έστω μία μη ταξινομημένη βάση που περιέχει N αντικείμενα, από τα οποία μόνο ένα ικανοποιεί μια συνθήκη. Ποιο είναι το αντικείμενο αυτό? »

Κλασσική Λύση: Κατά μέσο όρο χρειαζόμαστε $N/2$ βήματα δηλαδή $O(N)$.

Κβαντική Λύση: Η κβαντική διερεύνηση του αλγορίθμου Grover είναι σε θέση να βελτιστοποιήσει τον χρόνο επεξεργασίας των δεδομένων, αντικαθιστώντας την κλασσική χρονοβόρα διαδικασία. Συγκεκριμένα, μπορεί να επιτύχει γρηγορότερα την αναζήτηση ενός ακέραιου n -bit από μία λίστα που περιλαμβάνει $N = 2^n$ διαφορετικούς ακέραιους, κατά ένα παράγοντα $O(\sqrt{N})$.

Κβαντική απάντηση:

Το κύκλωμα που θα χρησιμοποιήσουμε είναι το εξής:



Βήμα 1°: Αρχική κατάσταση. Αποτελείται από n κβαντοδυφία στην κατάσταση $|0\rangle$ και ένα στην κατάσταση $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)$.

Βήμα 2°: n παράλληλες πύλες Hadamard οι οποίες δρουν στις n καταστάσεις $|0\rangle$ και έχουν σαν αποτέλεσμα η κάθε μία από αυτές να βρεθεί σε μία υπέρθεση καταστάσεων $|0\rangle$ και $|1\rangle$.

$$(2.28) \quad \frac{1}{\sqrt{2^{n+1}}} \sum_{x=0}^{2^n-1} |x\rangle (|0\rangle - |1\rangle)$$

Μετασχηματισμός G

Βήμα 3ο: (πρώτο βήμα στο G). Μαντείο O: δηλαδή ο μετασχηματισμός της U_f . Πιο συγκεκριμένα είναι ο μετασχηματισμός U_{fa} . Το αποτέλεσμα του μετασχηματισμού είναι να αλλάζει το πρόσημο του $|x\rangle = |a\rangle$ το οποίο ψάχνουμε και να αφήνει όλες τις άλλες καταστάσεις (πρόσημα) ίδιες (ίδια).

Παραδείγματα για 3 κβαντοδυφία: (Έστω ότι ψάχνουμε το $|101\rangle$)

Η κατάσταση του συστήματος μας μετά τις πρώτες 8 Hadamard θα είναι:

$$(2.29) \quad \frac{1}{\sqrt{2^{3+1}}} \sum_{x=0}^{2^3-1} |x\rangle (|0\rangle - |1\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2^{3+1}}} (|000\rangle + |001\rangle + \dots + |111\rangle)(|0\rangle - |1\rangle)$$

Μετά το μετασχηματισμό U_{fa} θα έχουμε την:

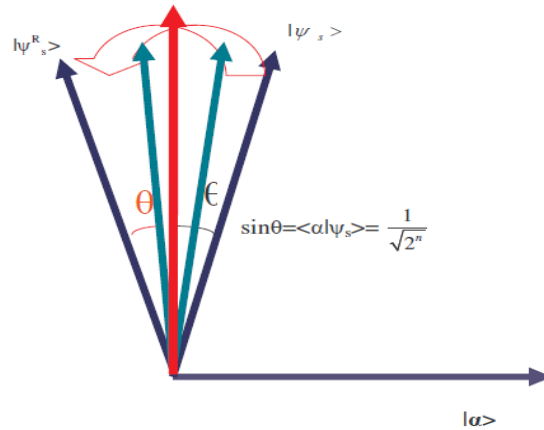
$$(2.30) \quad \frac{1}{\sqrt{2^{3+1}}} \sum_{x=0}^{2^3-1} |x\rangle (|f(x)\rangle - |\overline{f(x)}\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2^{3+1}}} (|000\rangle + |001\rangle + \dots + |111\rangle)(|f(x)\rangle - |\overline{f(x)}\rangle)$$

$$(2.31) \quad \frac{1}{\sqrt{2^{3+1}}} \sum_{x=0}^{2^3-1} |x\rangle (-1)^{f(x)} (|0\rangle - |1\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2^{3+1}}} ((-1)^{f(000)} |000\rangle + (-1)^{f(001)} |001\rangle + \dots + (-1)^{f(111)} |111\rangle)(|0\rangle - |1\rangle)$$

$$(2.32) \quad \frac{1}{\sqrt{2^{3+1}}} \sum_{x=0}^{2^3-1} |x\rangle (-1)^{f(x)} (|0\rangle - |1\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2^{3+1}}} (|000\rangle + |001\rangle + \dots + (-1)|101\rangle + |111\rangle)(|0\rangle - |1\rangle)$$

Βήμα 3ο: (πρώτο βήμα στο G) - (ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΕΞΗΓΗΣΗ)

Θα αναφέρουμε τώρα μια γεωμετρική εξήγηση για το τι ακριβώς κάνει το μαντείο O



Στην ουσία αυτό που κάνει το μαντείο είναι να περιστρέφει το αρχικό διάνυσμα ψ_s στο n -διάστατου χώρου Hilbert μέχρι να "φτάσει" στο συμμετρικό του διάνυσμα ως προς το υπερεπίπεδο που είναι ορθογώνιο στο διάνυσμα $|\alpha\rangle$ που ψάχνουμε.

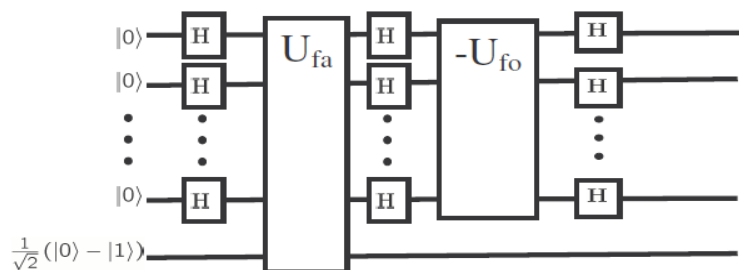
Βήμα 4ο: (Δεύτερο βήμα στο μετασχηματισμό G)

Εφαρμόζουμε n παράλληλες Hadamard στα πρώτα n κβαντοδυφία (δηλαδή τον μετασχηματισμό Walsh-Hadamard)

$$(2.33) \quad H(U_{fa}|\psi_s\rangle)$$

Βήμα 5ο: (Τρίτο βήμα στο μετασχηματισμό G). Εφαρμόζουμε το μετασχηματισμό $Z = -U_{f0}$ στα πρώτα n κβαντοδυφία:

$$(2.34) \quad -HU_{f0}H(U_{fa}|\psi_s\rangle)$$



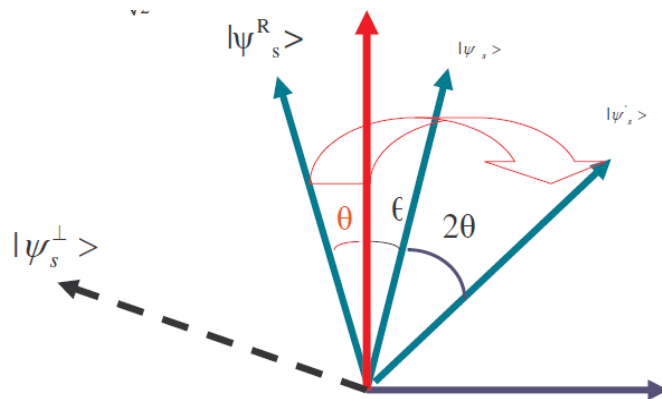
Τι κάνει ο $-U_{f0}$; Αλλάζει τα πρόσημα σε όλες τις καταστάσεις εκτός από τη $|x\rangle = |0\rangle$. Παράδειγμα για 3 κβαντοδυφία:

$$(2.35) \quad -U_{f0} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} -U_{f0}|000\rangle &= |000\rangle, / \\ -U_{f0}|001\rangle &= -|001\rangle \end{aligned}$$

Τι κάνει ο $-HU_{f0}H$; (Γεωμετρική εξήγηση)

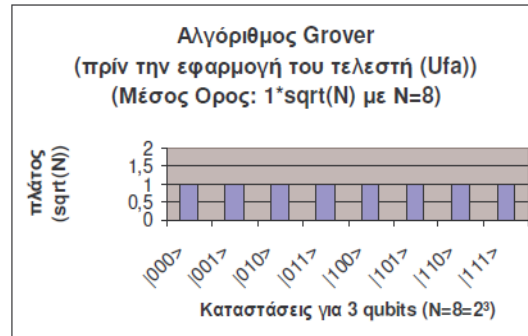
Ο μετασχηματισμός $-HU_{f0}H$ αντιστοιχεί σε περιστροφή του διανύσματος $|\psi_s^R\rangle$ μέχρι να φτάσει στο συμμετρικό του ως προς ένα υπερεπίπεδο που είναι ορθογώνιο στο $|\psi_s^\perp\rangle$ (το διάνυσμα που είναι κάθετο στο $|\psi_s\rangle$).

$$(2.36) \quad \sin\theta = \langle\alpha|\psi_s\rangle = \frac{1}{\sqrt{2^n}}$$

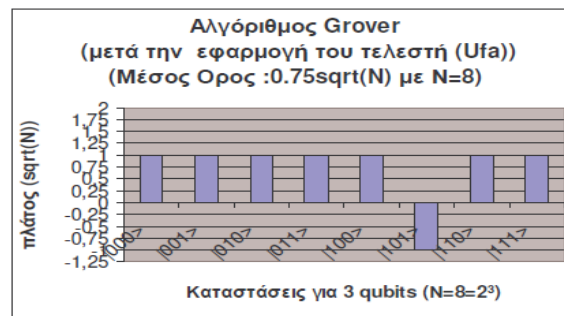


Τελικά έχουμε μια περιστροφή $R_s R_a = (-H U_{f0} H)(U_{fa})$ του αρχικού $|\psi_s\rangle$ διανύσματος κατά 2θ έτσι ώστε να "πλησιάσει" το ζητούμενο $|\alpha\rangle$. Ο στόχος είναι να εκτελεσθεί η περιστροφή $R_s R_a$ τόσες φορές όσες χρειάζεται έτσι ώστε το $|\psi_s\rangle$ να πλησιάσει όσο γίνεται πιο κοντά το $|\alpha\rangle$.

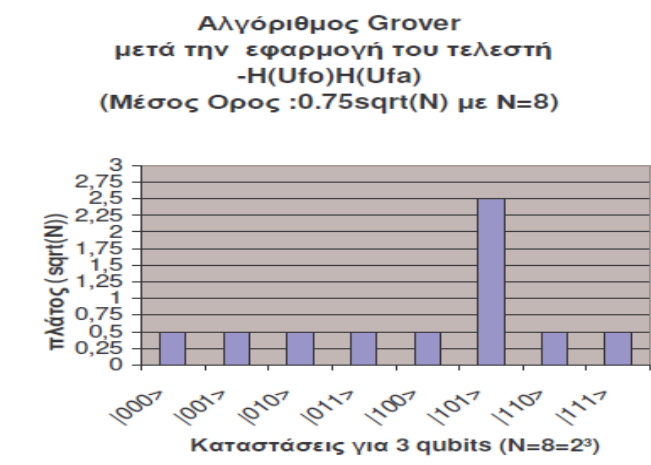
Στην ουσία αυτό που κάνει είναι να αντιστρέφει όλες τις καταστάσεις γύρω από το μέσο όρο. Ο μέσος όρος αρχικά είναι $\frac{1}{\sqrt{2^n}} = \frac{1}{\sqrt{N}}$. Στο παράδειγμα για $n=3$ έχουμε μέσο όρο $\frac{1}{\sqrt{2^3}} = \frac{1}{\sqrt{8}}$.



Μετά την εφαρμογή του τελεστή U_{fa} όπως είπαμε το διάνυσμα που ψάχνουμε αλλάζει πρόσημο άρα ο συντελεστής του από +1 γίνεται -1, άρα αλλάζει ο μέσος όρος των συντελεστών των διανυσμάτων. Στο παράδειγμά μας από $\frac{1}{\sqrt{2^3}} = \frac{1}{\sqrt{8}}$ γίνεται $\frac{0,75}{\sqrt{2^3}} = \frac{0,75}{\sqrt{8}}$.



Με την εφαρμογή του τελεστή $-H U_{fo} H$ έχουμε αντιστροφή ως προς το μέσο όρο. Δηλαδή ο συντελεστής κάθε διανύσματος γίνεται από α_n , σε $2\bar{\alpha} - \alpha_n$. Παράδειγμα για $n=3$ όλοι οι συντελεστές των διανυσμάτων εκτός αυτού που ψάχνουμε θα αλλάξουν τιμή και από $\frac{1}{\sqrt{2^3}} = \frac{1}{\sqrt{8}}$ θα γίνουν $\frac{0.5}{\sqrt{2^3}} = \frac{0.5}{\sqrt{8}}$ αφού ο $\bar{\alpha}$ είναι $\frac{0,75}{\sqrt{2^3}} = \frac{0,75}{\sqrt{8}}$. Από την άλλη ο συντελεστής του διανύσματος που ψάχνουμε θα γίνει από $-\frac{1}{\sqrt{2^3}} = -\frac{1}{\sqrt{8}}$ σε $\frac{2.5}{\sqrt{2^3}} = \frac{2.5}{\sqrt{8}}$.



Γιατί όμως γίνεται αντιστροφή ως προς το μέσο όρο;

$$(2.37) \quad HZH = H(2|0\rangle\langle 0| - I)H = 2H|0\rangle\langle 0|H - HIH = 2|\psi\rangle\langle\psi| - I$$

(2.38)

$$(2.39) \quad \text{Αρα } HZH|\alpha\rangle = (2|\psi\rangle\langle\psi| - I)|\alpha\rangle = (2|\psi\rangle\langle\psi| - I) \sum_n a_n |n\rangle = (\sum_n 2\bar{a} - a_n)|n\rangle$$

Grover Iterate

$$HZH = 2|\psi\rangle\langle\psi| - I$$

$$(|\psi\rangle\langle\psi|)|\alpha\rangle = \frac{1}{N} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sum \alpha_n}{N} \\ \frac{\sum \alpha_n}{N} \\ \frac{\sum \alpha_n}{N} \\ \vdots \\ \frac{\sum \alpha_n}{N} \end{bmatrix}$$

Γραμμικός τελεστής $|\psi\rangle\langle\psi|$

Ο γραμμικός τελεστής $|\psi\rangle\langle\psi|$ απεικονίζει το διάνυσμα ϕ στην προβολή του ϕ πάνω στο διάνυσμα ψ , γι' αυτό και λέγεται τελεστής προβολής. Δηλαδή:

$$(2.40) \quad |\psi\rangle\langle\psi|\phi\rangle = \langle\psi|\phi\rangle|\psi\rangle$$

Επίσης εάν έχουμε τον τελεστή $|\theta\rangle\langle\psi|$ τότε ισχύει:

$$(2.41) \quad |\theta\rangle\langle\psi|\phi\rangle = \langle\psi|\phi\rangle|\theta\rangle$$

Δηλαδή απεικονίζει το διάνυσμα ϕ στην προβολή του ϕ πάνω στο διάνυσμα θ .

Πόσες φορές θα επαναλάβουμε την περιστροφή $R_S R_A$;

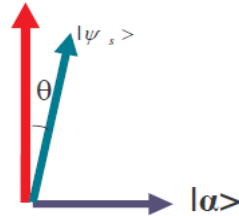
(ή το μετασχηματισμό G)

Θεωρείστε το αρχικό διάνυσμα $|\psi_S\rangle$ το οποίο αρχικά βρίσκεται στο επίπεδο των διανυσμάτων $|\alpha\rangle$ και $|\alpha^\perp\rangle$ με τη γωνία των $|\psi_S\rangle$ και $|\alpha^\perp\rangle$ ίση με θ . Αυτό σημαίνει ότι μπορούμε να γράψουμε το $|\psi_S\rangle$ ως γραμμικό συνδυασμό των $|\alpha\rangle$ και $|\alpha^\perp\rangle$ έτσι ώστε:

$$(2.42) \quad |\psi_S\rangle = \cos\theta|\alpha^\perp\rangle + \sin\theta|\alpha\rangle$$

Μετά από k επαναλήψεις των $R_S R_a = (-H U_{f_0} H)(U_{f_a})$ η κατάσταση μας γίνεται:

$$(2.43) \quad (R_S R_a)^k |\psi_S\rangle = -(H U_{f_0} H)(U_{f_a})$$



Παρατηρείστε ότι εάν $\cos(2k+1)\theta=0$, $\sin(2k+1)\theta=1$ τότε:

$$(2.44) \quad (R_S R_a)^k |\psi_S\rangle = |\alpha\rangle$$

άρα η λύση θα είναι ο πιο κοντινός ακέραιος k για τον οποίο η γωνία $(2k+1)\theta=\pi/2$.

$$(2.45) \quad k = \left\lceil \frac{\pi}{4\theta} - \frac{1}{2} \right\rceil_{near\ integer}$$

Επειδή: $\sin\theta = \langle \alpha | \psi_S \rangle = \frac{1}{\sqrt{2^n}} = \frac{1}{\sqrt{N}}$

και για N μεγάλο: $\sin\theta \approx \theta$, έχουμε:

$$(2.46) \quad k = \left\lceil \frac{\pi}{4\theta} - \frac{1}{2} \right\rceil_{near\ integer} = \left\lceil \frac{\pi}{4} \sqrt{N} - \frac{1}{2} \right\rceil_{near\ integer}$$

Τελικά χρειαζόμαστε $O(\sqrt{N})$ βήματα.

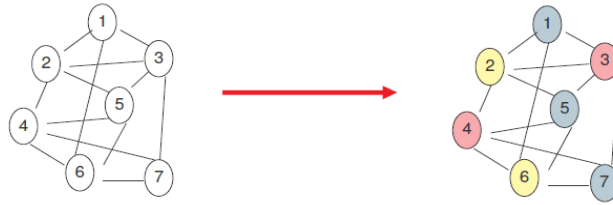
Τι άλλες εφαρμογές έχει ο αλγόριθμος του Grover;

Μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τη λύση NP-complete προβλημάτων, όπως για παράδειγμα το πρόβλημα χρωματισμού ενός γράφου ή το πρόβλημα του πλανόδιου πωλητή που θα αναφέρουμε παρακάτω.

Παράδειγμα 1: Το πρόβλημα χρωματισμού ενός γράφου (*The Graph Coloring Problem*)

Βάψτε κάθε κόμβο με ένα χρώμα έτσι ώστε κάθε ζευγάρι κόμβων που ενώνεται με μία ακμή να έχει διαφορετικό χρώμα.

Ποιος ο μικρότερος αριθμός χρωμάτων;



Στο παράδειγμά μας η απάντηση είναι **3**. Γενικά είναι NP-complete πρόβλημα.

Μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα μαντείο στο οποίο σαν είσοδο θα έχουμε όλες τις δυνατές περιπτώσεις χρωματισμού των κόμβων χρησιμοποιώντας ένα συγκεκριμένο αριθμό k χρωμάτων και το οποίο θα αναζητεί αν υπάρχει κάποιο "good coloring".

Παράδειγμα 2^ο: Το πρόβλημα του πλανόδιου πωλητή (**TSP problem**)

Δεδομένου ενός γράφου ο οποίος απεικονίζει χώρια- κόμβους τα οποία ενώνονται με συγκεκριμένες αποστάσεις- ακμές υπάρχει δρόμος που μπορεί να ακολουθήσει ένας πλανόδιος πωλητής έτσι ώστε να περάσει από όλα τα χωριά και να διανύσει απόσταση μικρότερη από k ;

Αν υπάρχουν N πόλεις θα χρειαστούμε κλασσικά $O(N!)$ βήματα ενώ χρησιμοποιώντας τον κβαντικό αλγόριθμο αναζήτησης του Grover θα χρειαστούμε $O(\sqrt{N!})$. Πάλι θα είναι εκθετικός ο χρόνος αλλά θα έχουμε μια επιτάχυνση τετραγωνικής ρίζας.

Ο αλγόριθμος Grover:

1. Χρησιμοποιείται για προβλήματα όπου δεν ξέρεις πολλά:
 - a. Μη ταξινομημένες βάσεις δεδομένων
 - b. NP-complete προβλήματα
2. βήματα ενώ ο κλασσικός αλγόριθμος χρειάζεται βήματα.

Ο αλγόριθμος Grover είναι βέλτιστος

Στο άρθρο των Bennett, Bernstein, Brassard, Vazirani αποδεικνύεται ότι ένα κβαντικό σύστημα απαιτεί τουλάχιστον $\Omega(\sqrt{N})$ βήματα για την εύρεση ενός αντικειμένου (χωρίς να υπάρχει καμία γνώση για τη δομή της βάσης δεδομένων).

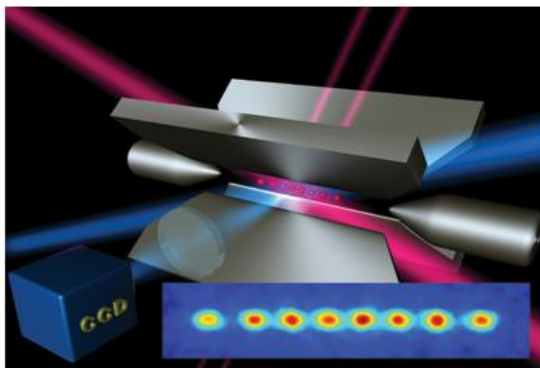
Κεφάλαιο 3ο

Κβαντικά υπεραγώγιμα κυκλώματα

3.1 Εισαγωγή

Στα προηγούμενα κεφάλαια περιγράψαμε την βασική μονάδα κβαντικής πληροφορίας το κβαντοδυφίο, μελετήσαμε τους μετασχηματισμούς που μπορούν να γίνουν πάνω σε αυτό και έπειτα αναλύσαμε διεξοδικά τους αλγορίθμους Deutsch και Grover με σκοπό την επίλυση συγκεκριμένων προβλημάτων. Στο κεφάλαιο αυτό θα μελετήσουμε το πως μπορούμε να κατασκευάσουμε πρακτικά ένα κβαντοδυφίο και πως όλα αυτά σχετίζονται με την ιδέα της δημιουργίας ενός κβαντικού υπολογιστή. Στην αναζήτηση του τρόπου κατασκευής ενός υπολογιστή που θα εκμεταλλεύεται τις αρχές της κβαντομηχανικής, ακολουθήθηκαν διαφορετικές προσεγγίσεις σε διαφορετικά κβαντικά συστήματα. Μερικά εξ' αυτών είναι τα συστήματα παγωμένων παγίδων ιόντων (ion-traps) [5], τα ψυχρά άτομα σε οπτικές παγίδες [6], τα συστήματα πυρηνικού μαγνητικού συντονισμού (NMR) [7], τα συστήματα στηριζόμενα στην κβαντική ηλεκτροδυναμική σε υπεραγώγιμα κυκλώματα (circuit QED) [8], τα συστήματα κβαντικής ηλεκτροδυναμικής σε κοιλότητες (cavity QED) [1] και τα συστήματα στερεάς κατάστασης [1]. Στο συγκεκριμένο κεφάλαιο θα γίνει εκτενέστερη αναφορά για την τελευταία περίπτωση των κβαντικών υπεραγώγιμων κυκλωμάτων, παρ' όλα αυτά για λόγους πληρότητας θα αναφέρουμε συνοπτικά τα βασικά χαρακτηριστικά των υπολοίπων προσεγγίσεων.

- Παγίδες ιόντων

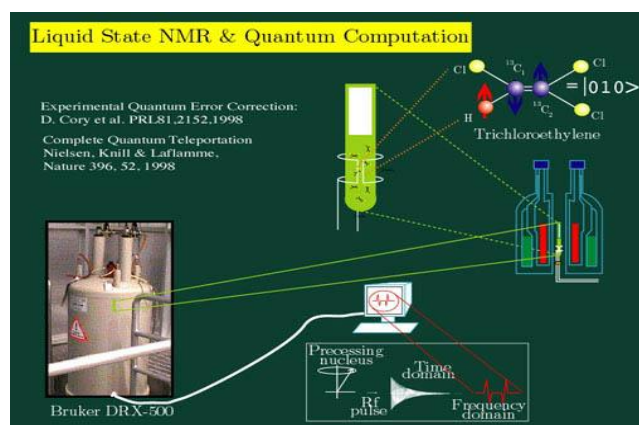


Εικόνα 3.1: Ηλεκτρομαγνητικές παγίδες που συγκρατούν τα ιόντα σε σειρά μέσα στο κενό [5].

Τα πειράματα με ατομικά ιόντα περιλαμβάνουν ηλεκτρομαγνητικές παγίδες, με σκοπό να συγκρατήσουν τα ιόντα σε σειρά μέσα στο κενό. Οι ιοντικές παγίδες έχουν μέγεθος 100 μικρά, Συγκεκριμένα ιόντα Καδμίου μπορούν να κινούνται μέσα στην παγίδα με την εφαρμογή ηλεκτρικών σημάτων στα ηλεκτρόδια [2]. Πρόσφατες προσεγγίσεις μπορούν να ενσωματώσουν μέχρι και 30 ιόντα. Ωστόσο η μείωση της ποιότητας της πεπλεγμένης κατάστασης με την αύξηση του αριθμού των ιόντων, φαίνεται να ήταν ένα από τα βασικά εμπόδια που παρατηρούνται σε αυτή την τεχνολογία υλοποίησης.

- **Τεχνολογία NMR**

Η τεχνολογία NMR έχει χρησιμοποιηθεί σε ιατρικές εφαρμογές και μία νέα προοπτική της τεχνολογίας αυτής βρίσκεται στους κβαντικούς υπολογιστές [3,4]. Η τεχνολογία αυτή έχει το πλεονέκτημα ότι μπορεί να χρησιμοποιηθεί σε θερμοκρασία δωματίου και έχει αποδειχθεί ότι είναι εύκολο να κατασκευαστεί με αυτή ένας πρότυπος κβαντικός επεξεργαστής των 2 ή 3 κβαντοδυφίων[7].



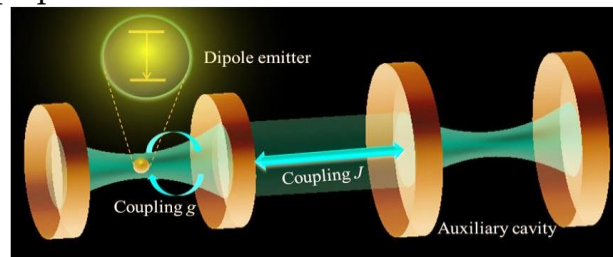
Εικόνα 3.2: Περιγραφή της τεχνολογίας NMR.

Η βασική ιδέα είναι ότι ένας κβαντικός επεξεργαστής είναι ένα μόριο που αποτελείται από δέκα άτομα. Κάθε κβαντοδυφίο αναπαριστάται με τον προσανατολισμό του σπιν του πυρήνα σε κάθε άτομο του μορίου. Ο αριθμός των κβαντοδυφίων ενός NMR κβαντικού υπολογιστή είναι ίσος με τον αριθμό των ατόμων σε κάθε μόριο.

Αυτή η τεχνολογία έχει αποδειχθεί ότι εύκολα μπορεί να σχεδιάσει NMR κβαντικά συστήματα με 2 ή 3 κβαντοδυφία. Τελευταία δημιουργήθηκε ένας υπολογιστής των 7-κβαντοδυφίων με τη χρήση ενός μορίου. Το μόριο αποτελείται από 7 πυρηνικά σπιν όπου το κάθε ένα από αυτά έχει τη δυνατότητα να αλληλεπιδρά με το υπόλοιπα. Οι αλληλεπιδράσεις αυτές είναι δυνατό να ανιχνευθούν με όργανα NMR. Η δυσκολία διαχωρισμού των κβαντοδυφίων σε ένα μόριο, λόγω των χημικών ιδιοτήτων, και η δυσκολία να αποσαφηνιστεί με ακρίβεια η αρχική κατάστασή τους, τελικά έδειξαν ότι είναι αδύνατο η τεχνολογία αυτή να χρησιμοποιηθεί για υπολογιστές με περισσότερα από 12 κβαντοδυφίων[8].

- **Cavity QED**

Ενδιαφέρουσα ερευνητική κατεύθυνση για την υλοποίηση κβαντικών υπολογισμών είναι αυτή με την χρήση κβαντικής ηλεκτροδυναμικής (cavity QED). Πιο συγκεκριμένα, η κβαντική ηλεκτροδυναμική (QED) είναι μία κβαντική θεωρία του ηλεκτρομαγνητισμού που περιγράφει τις αλληλεπιδράσεις των φωτονίων με την φορτισμένη ύλη. Θεωρεί ότι η ανάπτυξη των ηλεκτροδυναμικών δυνάμεων αποδίδεται στην εκπομπή και στην απορρόφηση εικονικών φωτονίων ως σωματίδια ανταλλαγής, τα οποία αντιπροσωπεύουν διαταραχές των ηλεκτρομαγνητικών πεδίων.



Εικόνα 3.3: Πειραματική διάταξη της τεχνολογίας Cavity QED στην περίπτωση των δυο κοιλοτήτων [1].

Συγκεκριμένα πρόκειται για ειδικά κατασκευασμένες μικρο-κοιλότητες μέσα στις οποίες μπορούν να παγιδευτούν μοναδικά φωτόνια τα οποία με την σειρά τους αλληλεπιδρούν με ένα και μόνο άτομο. Τέτοια συστήματα είναι οι συσκευές με τη βοήθεια των οποίων έχει γίνει εφικτή η πειραματική επιβεβαίωση μιας πληθώρας φαινομένων της Κβαντομηχανικής.

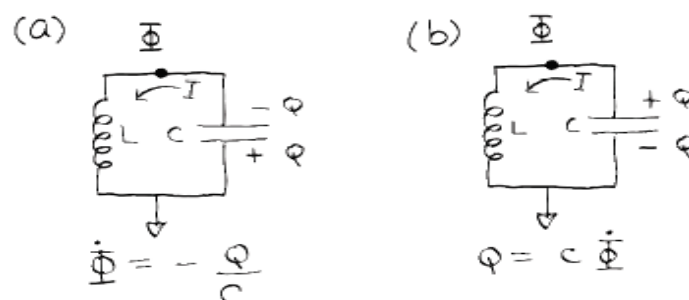
Η παραπάνω τεχνολογία έχει αποδειχθεί μια από τις επικρατέστερες. Ωστόσο υπάρχουν πάρα πολλοί περιορισμοί όπως η «αποσυμφώνηση» (decoherence), λόγω της αλληλεπίδρασης ενός συστήματος με το περιβάλλον του, που περιορίζει αυτά τα συστήματα από το να είναι ιδανικά για την υλοποίησή τους σε μεγάλη κλίμακα.

Έχοντας αναφέρει συνοπτικά κάποιες από τις τεχνολογίες που εφαρμόστηκαν σε κβαντικούς υπολογιστές, θα επικεντρωθούμε σε μία νέα προσέγγιση με το όνομα Κβαντική Ηλεκτροδυναμική σε κυκλώματα (circuit QED). Συγκεκριμένα θα αναφερθούμε σε κβαντικά υπεραγώγιμα κυκλώματα βασισμένα σε επαφές Josephson.

Κρίνεται σκόπιμο σε πρώτη φάση να μελετηθεί το πως επιτυγχάνεται η κβάντωση μέσα σε ένα απλό κύκλωμα LC και η θεωρία της υπεραγωγιμότητας. Αφού αναλυθούν όλα τα παραπάνω, θα είμαστε πλέον σε θέση να περιγράψουμε την επαφή Josephson και το SQUID (superconducting quantum interference device).

3.2 Κβάντωση ηλεκτρικών κυκλωμάτων

Στην ενότητα αυτή θα γίνει ανασκόπηση στη μεθοδολογία που ακολουθείτε για την κβάντωση ενός κυκλώματος LC [14,15]. Δυσ ακροδέκτες του κυκλώματος δημιουργούν κόμβους, περιέχοντας πυκνωτές και πηνία.



Σχήμα 3.4: Απλός ηλεκτρικός LC αρμονικός ταλαντωτής. α) Την θέση της γενικευμένης θέσης έχει πάρει η μεταβλητή Q και την θέση της συζυγής ορμής η Φ β) Την θέση των γενικευμένης θέσης έχει πάρει η μεταβλητή Φ και της συζυγής ορμής η μεταβλητή Q .

Χρησιμοποιώντας το φορτίο του πυκνωτή Q και το ρεύμα του πηνίου I η Λαγκραζιανή μπορεί να γραφεί:

$$(3.1) \quad L = \frac{1}{2}LI^2 - \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$$

και προσθέτοντας το νόμο διατήρησης του φορτίου $I = \dot{Q}$, η εξίσωση (2.1) μπορεί να πάρει την μορφή:

$$(3.2) \quad L = \frac{L}{2}\dot{Q}^2 - \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$$

η οποία καταλήγει στην εξίσωση κίνησης του Euler- Lagrange:

$$(3.3) \quad \ddot{Q} = -\Omega^2 Q$$

με συχνότητα ταλάντωσης να είναι:

$$(3.4) \quad \Omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Η συζυγής ορμή στο φορτίο είναι η ροή μέσα από το πηνίο:

$$(3.5) \quad \Phi = \frac{\delta L}{\delta \dot{Q}} = L\dot{Q} = LI$$

Έτσι η Χαμιλτονιανή μπορεί να γραφεί:

$$(3.6) \quad H = \Phi \dot{Q} - L = \frac{\Phi^2}{2L} + \frac{1}{2C} Q^2$$

και οι εξισώσεις κίνησης θα είναι τότε:

$$(3.7) \quad \dot{Q} = \frac{\partial H}{\partial \Phi} = \frac{\Phi}{L}$$

$$(3.8) \quad \dot{\Phi} = -\frac{\partial H}{\partial Q} = -\frac{Q}{C}$$

Η μετάβαση στην κβαντική θεωρία γίνεται μέσω της χρήσης της γνωστής μεταθετικής σχέσεως που ικανοποιούν οι παραπάνω μεταβλητές:

$$(3.9) \quad [\hat{\Phi}, \hat{Q}] = -i\hbar$$

μπορούμε επομένως να γράψουμε την Χαμιλτονιανή ως έχει:

$$(3.10) \quad H = \frac{\hbar\Omega}{2} \{a^\dagger a + a a^\dagger\} = \hbar\Omega \left\{ a^\dagger a + \frac{1}{2} \right\}$$

Οι τελεστές αναβίβασης και καταβίβασης θα δίνονται πλέον από τις σχέσεις:

$$(3.11) \quad a = i \frac{1}{\sqrt{2L\hbar\Omega}} \hat{\Phi} + \frac{1}{\sqrt{2C\hbar\Omega}} \hat{Q}$$

$$(3.12) \quad a^\dagger = -i \frac{1}{\sqrt{2L\hbar\Omega}} \hat{\Phi} + \frac{1}{\sqrt{2C\hbar\Omega}} \hat{Q}$$

οι οποίοι ικανοποιούν την μεταθετική σχέση:

$$(3.13) \quad [a, a^\dagger] = 1$$

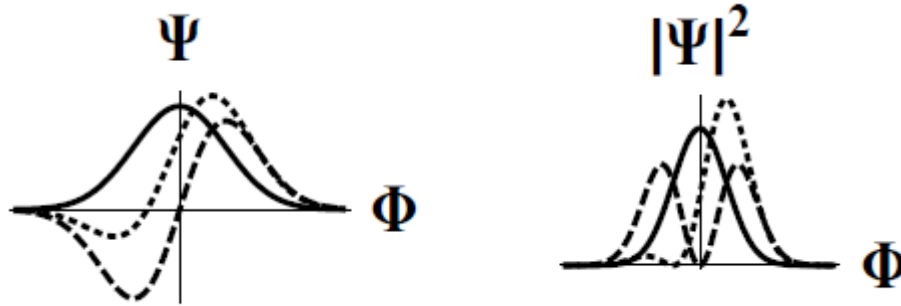
Η δράση των τελεστών αναβίβασης και καταβίβασης πάνω στις ιδιοκαταστάσεις $|n\rangle$ του ταλαντωτή είναι:

$$(3.14) \quad a|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle$$

$$(3.15) \quad a^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle$$

Πως όμως μπορούν να ερμηνευθούν οι διεγέρσεις των κβάντων σε αυτόν τον αρμονικό ταλαντωτή?

Μπορούμε να σκεφτούμε αυτές τις διεγέρσεις ως την ομαδική κίνηση των ηλεκτρονίων σε ένα σύρμα, ή μπορούμε να τις δούμε και ως φωτόνια στο ηλεκτρομαγνητικό πεδίο. Παρ' όλα αυτά είναι απόλυτα αποδεκτό να σκεφτούμε αυτές τις διεγέρσεις ως φωτόνια.



Σχήμα 3.5: Η κυματοσυνάρτηση του LC ταλαντωτή σε συνάρτηση με την μεταβλητή Φ . Η συμπαγής γραμμή απεικονίζει την θεμελιώδη στάθμη Ψ_0 . Η διακεκομμένη την πρώτη διεγερμένη κατάσταση Ψ_1 . Η διάστικτη αναπαριστά τον γραμμικό συνδυασμό της θεμελιώδους και της πρώτης διεγερμένης καταστάσεως $\frac{1}{\sqrt{2}}(\Psi_0 + \Psi_1)$.

Η κυματοσυνάρτηση για την κατάσταση του κενού είναι Γκαουσιανής μορφής, και αναπαριστάται στο (Σχήμα 2.2):

$$(3.16) \quad \Psi_0(\Phi) = \frac{1}{[2\pi\Phi_{ZPF}^2]^{1/4}} e^{-\frac{1}{4\Phi_{ZPF}^2}\Phi^2}$$

Εάν στην θεμελιώδη κατάσταση πραγματοποιηθεί μια ακριβής μέτρηση της ροής, η τιμή που θα προκύψει θα είναι τυχαία και θα έχει κατανομή πιθανότητας που θα δίνεται από την σχέση:

$$(3.17) \quad P(\Phi) = |\Psi_0(\Phi)|^2$$

Η πιο πιθανή τιμή για την ροή θα είναι η μηδενική. Αντίθετα στην πρώτη διεγερμένη κατάσταση, μηδενική τιμή δεν θα μπορούσε να μετρηθεί καθώς η κυματοσυνάρτηση εμφανίζει κόμβο εκεί:

$$(3.18) \quad \Psi_1(\Phi) = \frac{\Phi}{\Phi_{ZPF}} \frac{1}{[2\pi\Phi_{ZPF}^2]^{1/4}} e^{-\frac{1}{4\Phi_{ZPF}^2}\Phi^2}$$

Παρ' όλα αυτά, ο μέσος όρος για την ροή εξακολουθεί να είναι μηδέν. Αυτό συμβαίνει για οποιαδήποτε ιδιοκατάσταση του ταλαντωτή. Αντιθέτως, εάν ο αριθμός των φωτονίων είναι αβέβαιος, όπως στη κατάσταση υπέρθεσης, τότε το κέντρο της κατανομής πιθανότητας μετατοπίζεται μακριά από το μηδέν, όπως φαίνεται στο Σχήμα 2.2.

$$(3.19) \quad \Psi_+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(\Psi_0 + \Psi_1)$$

Η μέση τιμή της ροής είναι μη μηδενική.

Αυτές οι καταστάσεις υπέρθεσης, μεταξύ μηδενικού και ενός φωτονίου, δεν μπορούν να επιτευχθούν με απλό τρόπο καθώς παράγεται μία σύμφωνη υπέρθεση σε όλες τις καταστάσεις Fock. Ωστόσο, έχει παρατηρηθεί πειραματικά σε ένα δικαταστασιακό σύστημα [14], εφαρμόζοντας ελεγχόμενους παλμούς προκειμένου να τεθεί σε υπέρθεση μεταξύ της θεμελιώδους στάθμης $|0\rangle$ και της διεγερμένης $|1\rangle$, να εκτελεί *αυθόρμητη εκπομπή*:

$$(3.20) \quad |\psi_{initial}\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$$

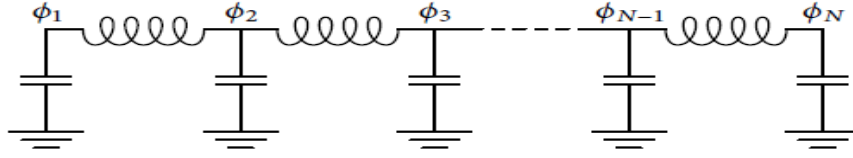
Αυτό έχει ως αποτέλεσμα το κβαντοδυφίο να παραμένει στη θεμελιώδη κατάσταση και το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο να βρίσκεται σε μία κατάσταση υπέρθεσης μεταξύ μηδενικού και ενός φωτονίου με συντελεστές α και β :

$$(3.21) \quad |\psi_{final}\rangle = |g\rangle[\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle]$$

Αυτός ο χειρισμός σχεδιάζει ένα ακίνητο κβαντοδυφίο πάνω σε ένα "ιπτάμενο" κβαντοδυφίο " (το φωτόνιο) και είναι ένα ουσιαστικό βήμα για την μετάδοση της κβαντικής πληροφορίας μέσω των φωτονίων [14].

3.2.1 Γραμμές μετάδοσης και ανοιχτά κυκλώματα

Στην παραπάνω ενότητα περιγράψαμε κυκλώματα LC μέσα στα οποία υπάρχουν μόνο δύο στοιχεία (ένας πυκνωτής και ένα πηνίο). Στην ενότητα αυτή θα προσεγγίσουμε την περίπτωση που σε ένα κύκλωμα υπάρχει ένας άπειρος αριθμός ταλαντωτών LC δημιουργώντας με αυτό τον τρόπο μια μορφή αλυσίδας. Στην πραγματικότητα πρόκειται για μία γραμμή μετάδοσης μήκους d , με χωρητικότητα ανά μονάδα μήκους c και αυτεπαγωγή ανά μονάδα μήκους l , (Σχήμα 2.3).



Σχήμα 3.6: Το παραπάνω σχήμα απεικονίζει τη γραμμή μετάδοσης για ένα ανοικτό κύκλωμα, αναπαριστώντας το ως μια αλυσίδα αποτελούμενη από LC ταλαντωτές.

Υποθέτοντας ότι δεν υπάρχουν εξωτερικές εφαρμόσιμες ροές, η Λαγκρασσιανή είναι:

$$(3.22) \quad L(\phi_1, \dot{\phi}_1, \dots, \phi_N, \dot{\phi}_N) = \sum_{i=1}^N \frac{\Delta C \dot{\phi}_i^2}{2} - \sum_{i=1}^{N-1} \frac{(\phi_{i+1} - \phi_i)^2}{2\Delta L}$$

με $\Delta C = \frac{cd}{N}$, $\Delta L = \frac{ld}{N}$. Για το όριο $N \rightarrow \infty$ έχουμε το ολοκλήρωμα

$$(3.23) \quad L[\varphi(x, t), \dot{\varphi}(x, t)] = \int_0^d \frac{c\dot{\varphi}(x, t)^2}{2} - \frac{1}{2l} \left(\frac{\partial \varphi(x, t)}{\partial x} \right)^2 dx$$

Η εξίσωση του Euler-Langrange για $\varphi(x, t)$ είναι:

$$(3.24) \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 0$$

όπου $v = \frac{1}{\sqrt{lc}}$ που είναι η ταχύτητα του κύματος. Η λύση που προκύπτει είναι:

$$(3.25) \quad \varphi(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(k_n x + a_n) \cos(k_n v t + \beta_n)$$

όπου A_n , k_n και β_n εξαρτώνται από τις οριακές συνθήκες.

Για την περίπτωση ενός ανοιχτού κυκλώματος οι οριακές συνθήκες στις θέσεις $x = 0$ και $x = d$, όπως φαίνεται στο σχήμα, είναι:

$$(3.26) \quad \left. \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right|_{x=0} = \left. \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right|_{x=d} = 0$$

οι οποίες δίνουν $a_n = 0$, $k_n = n\pi/d$. (Αν και β_n θα προσδιοριστούν από την αρχική συνθήκη). Τοποθετώντας την 2.24 στην 2.22 και ολοκληρώνοντας

$$(3.27) \quad L(\phi_1, \dot{\phi}_1, \dots) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n \dot{\phi}_n^2}{2} - \frac{\phi_n^2}{2L_n}$$

όπου $\Phi_n(t) = A_n \cos(k_n vt + \beta_n)$ διατηρεί την χρονική εξάρτηση της λύσης. Αυτή είναι η Λαγκρασσιανή που προκύπτει για ένα κύκλωμα που αποτελείται από ανεξάρτητους LC ταλαντωτές. Οι ταλαντωτές LC έχουν χωρητικότητα $C_n = cd/2$, αυτεπαγωγή $L_n = 2dl/n^2\pi^2$ και συχνότητα συντονισμού $\omega_n = n\pi/d$. Η Χαμιλτονιανή για τη παραπάνω γραμμή μετάδοσης είναι:

$$(3.28) \quad H = \hbar \sum_n \omega_n \left(a_n^\dagger a_n + \frac{1}{2} \right)$$

Η παραπάνω Χαμιλτονιανή περιλαμβάνει όλους τους τρόπους δόνησης. Πολλές φορές μας ενδιαφέρει η συμπεριφορά της Χαμιλτονιανής για ένα συγκεκριμένο τρόπο δόνησης ω_n . Η Χαμιλτονιανή στη περίπτωση αυτή είναι:

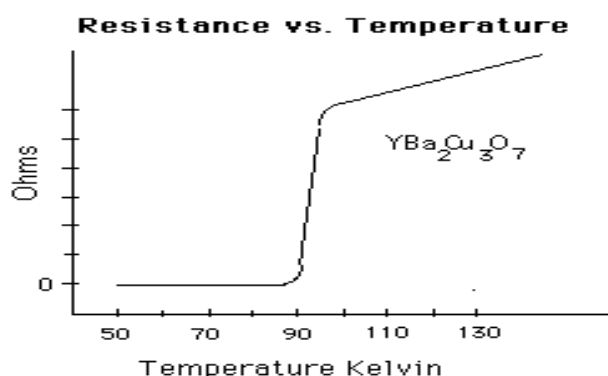
$$(3.29) \quad H = \hbar \omega_r \left(a^\dagger a + \frac{1}{2} \right)$$

όπου ω_r είναι η συχνότητα του αντίστοιχου τρόπου δόνησης, με τους αντίστοιχους τελεστές αναβίβασης και καταβίβασης a^\dagger και a .

3.3 Υπεραγωγιμότητα

Έχοντας παρουσιάσει την διαδικασία κβάντωσης ηλεκτρικών κυκλωμάτων LC, σε αυτήν την ενότητα θα μελετήσουμε την βασική φυσική των υπεραγωγών. Αυτό γιατί οι υπεραγωγοί θα αποτελέσουν τα βασικά υλικά υλοποίησης όλων των ηλεκτρικών στοιχείων στους κβαντικούς επεξεργαστές, λόγω της μηδενικής τους αντίστασης και των έντονων κβαντικών φαινομένων που παρουσιάζουν σε κατάλληλες κλίμακες.

Η υπεραγωγιμότητα είναι η κατάσταση κατά την οποία κάποια υλικά (συνήθως μέταλλα και κεραμικά) παρουσιάζουν μηδενική ειδική αντίσταση. Τα αντίστοιχα υλικά ονομάζονται υπεραγωγοί. Σε ένα υπεραγωγό οι συγκρούσεις μεταξύ των ατόμων και των ηλεκτρονίων ελαχιστοποιούνται με αποτέλεσμα το ηλεκτρικό ρεύμα να ρέει ανεπηρέαστο και χωρίς καμία δυσκολία. Η θερμοκρασία κάτω από την οποία ένα υλικό γίνεται υπεραγωγός λέγεται κρίσιμη (για μέταλλα κοντά στο απόλυτο μηδέν) [15].



Εικόνα 3.7: Γραφική παράσταση αντίστασης-θερμοκρασίας για το $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_7$

Τα ηλεκτρόνια είναι οι φυσικοί φορείς του ηλεκτρικού ρεύματος στους αγωγούς και οι σκεδάσεις τους στο κρυσταλλικό πλέγμα του αγωγού προκαλούν το "φρενάρισμα" των ηλεκτρονίων. Έτσι εμφανίζεται η ωμική αντίσταση. Οι σκεδάσεις των ηλεκτρονίων γίνονται στα άτομα του κρυστάλλου α) λόγω των πλεγματικών ατελειών (προσμίξεις, πλεγματικά κενά) β) λόγω της μη μηδενικής θερμοκρασίας του κρυστάλλου από την οποία τα άτομα ταλαντώνονται και καταλαμβάνουν μεγαλύτερο χώρο (μικρότερος ελεύθερος χώρος διέλευσης των ηλεκτρονίων).

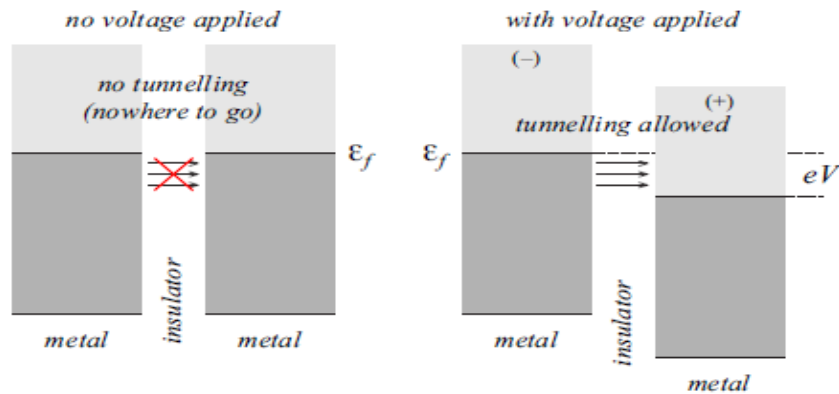
Επιπλέον τα ηλεκτρόνια, όπως είναι γνωστό, είναι φερμιόνια (σπιν $1/2$) και παραμένουν πάντα διακριτά σωματίδια. Σύμφωνα με την απαγορευτική αρχή του Pauli απαγορεύεται να καταλάβουν τις ίδιες κβαντικές καταστάσεις. Κατά συνέπεια, τα ηλεκτρόνια γεμίζουν τις διαθέσιμες καταστάσεις μέχρις ότου φθάσουν στην ενέργεια Fermi. Στο σημείο αυτό, όλα τα ηλεκτρόνια έχουν χρησιμοποιηθεί.

Στην υπεραγωγιμότητα τα άτομα στον κρύσταλλο δεν ταλαντώνονται πλέον έντονα λόγω της χαμηλής θερμοκρασίας και τα πλεγματικά κενά κλείνουν. Δεν είναι όμως η αναγκαία και ικανή συνθήκη για την εμφάνιση υπεραγωγιμότητας. Υπάρχουν διάφοροι μηχανισμοί που δίνουν υπεραγώγιμες ιδιότητες στον συνδυασμό πλέγματος-ηλεκτρονίου. Ένας από αυτούς είναι τα Cooper pairs. Πρόκειται για ζεύγη ηλεκτρονίων με αντίθετο σπιν, που δημιουργούν έτσι ένα μποζονικό "μόριο" με σπιν 0 [16].

Συγκεκριμένα μπορούμε να φανταστούμε τα ηλεκτρόνια σαν να είναι δεμένα με τέτοιο τρόπο που δεν αφήνει το ένα το άλλο να "χτυπήσει" πάνω στο κρυσταλλικό πλέγμα. Αυτό έχει ως συνέπεια την ελαχιστοποίηση των σκεδάσεων στο πλέγμα και κατά συνέπεια τον μηδενισμό της ωμικής αντίστασης. Τα Cooper pairs, αφού δημιουργηθούν καταλαμβάνουν την κατάσταση χαμηλότερης δυνατής ενέργειας του υπεραγωγού δημιουργώντας ένα συμπύκνωμα. Πλέον δεν υπάρχουν ασύζευκτα ηλεκτρόνια αλλά υπάρχουν ζώνες που δεν έχουν καταληφθεί και μπορούν να συμμετάσχουν τις διαδικασίες αγωγιμότητας (conduction). Εν γένει από την θεμελιώδη στάθμη στην διεγερμένη στάθμη υπάρχει ένα χαρακτηριστικό ενεργειακό χάσμα το οποίο πρέπει να ξεπεραστεί προκειμένου το Cooper pair να διαχωριστεί σε δυο επιμέρους ηλεκτρόνια και έπειτα να μεταβούν σε μια ανώτερη στάθμη.

Πώς όμως ταξιδεύουν τα ηλεκτρόνια και τα Cooper pairs?

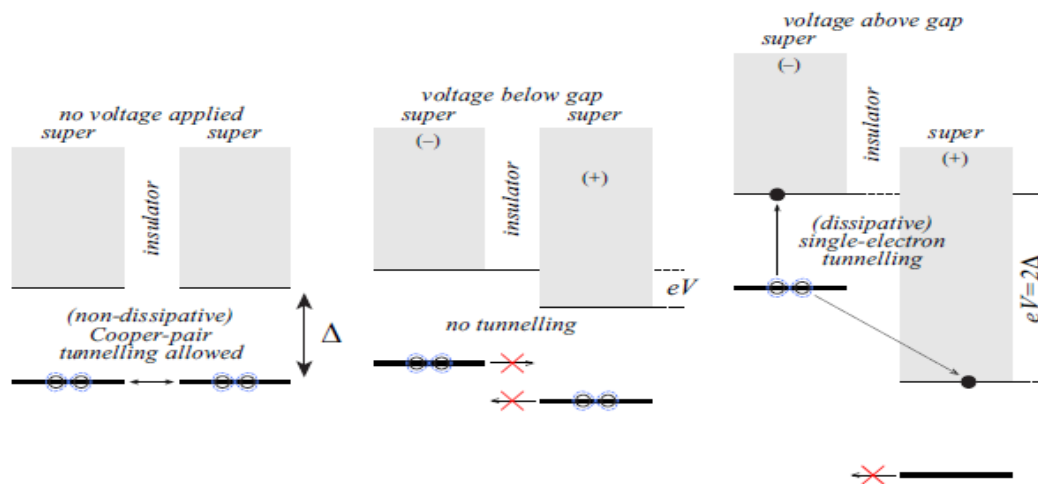
Η μηδενική αντίσταση των υπεραγωγών αποτελεί μια μακροσκοπική ιδιότητά τους. Θα εστιάσουμε τώρα στις μικροσκοπικές ή κβαντικές ιδιότητες των υπεραγωγών και συγκεκριμένα στο φαινόμενο σήραγγας. Το *φαινόμενο σήραγγας* είναι από τα πιο ενδιαφέροντα κομμάτια της κβαντικής φυσικής και παίζει καίριο ρόλο στα ηλεκτρονικά κβαντικά κυκλώματα.



Σχήμα 3.8: Το "ταξίδι" των ηλεκτρονίων σε ένα κανονικό μέταλλο [16].

Το φαινόμενο σήραγγας προκύπτει από την κυματική φύση των ηλεκτρονίων και είναι το φαινόμενο χάρη στο οποίο σωματίδια μπορούν να υπερπηδήσουν φράγματα δυναμικού και να βρεθούν σε περιοχές απαγορευμένες από την κλασσική μηχανική. Οι βασικές αρχές πάνω στις οποίες βασίζεται το "ταξίδι" των ηλεκτρονίων δια μέσου του φράγματος είναι: α) Η διατήρηση της ενέργειας κατά την διάρκεια της διαδικασίας και επιπλέον θα πρέπει να υπάρχουν διαθέσιμες στάθμες από την άλλη πλευρά του φράγματος προκειμένου να μετακινηθούν τα ηλεκτρόνια.

Το "ταξίδι" των ηλεκτρονίων ξεκινά, όταν δύο αγώγιμα υλικά διαχωρίζονται από ένα λεπτό σε πάχος μονωτικό υλικό. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα την δημιουργία ενός φράγματος δυναμικού μεταξύ των αγώγιμων καταστάσεων των ηλεκτρονίων. Καθώς τα ηλεκτρόνια είναι κβαντικά σωματίδια, η κυματοσυνάρτησή τους εισχωρεί σε κάποια απόσταση μέσα στη μονωμένη περιοχή (σύμφωνα με την κλασσική θεωρία θα ήταν απαγορευτικό). Κάτω από κατάλληλες συνθήκες, η κυματοσυνάρτηση του ηλεκτρονίου εισχωρεί αρκετά μέσα στο φράγμα προκειμένου να δημιουργήσει μια αλληλοεπικάλυψη μεταξύ των δύο πλευρών του χάσματος. Γεγονός που συμβάλλει στη σύζευξη μεταξύ των διαφορετικών καταστάσεων. Με αυτό το τρόπο επιτρέπεται η μετακίνησή τους δια μέσου της απαγορευμένης περιοχής. Ωστόσο, κατά την διάρκεια του "ταξιδιού" των ηλεκτρονίων η ενέργεια διατηρείται γεγονός που επιτρέπει την πλάγια μετακίνηση των ηλεκτρονίων από την μία περιοχή στην άλλη.



Σχήμα 3.9: Το "ταξίδι" των ηλεκτρονίων σε ένα υπεραγωγό [16].

Στην περίπτωση ενός φράγματος που δημιουργείται λόγω του μονωτή μεταξύ δύο υπεραγωγών (Σχήμα 2.6) μπορούμε να διακρίνουμε τρεις περιπτώσεις όσο αφορά το ταξίδι των Cooper pairs δια μέσου του φράγματος:

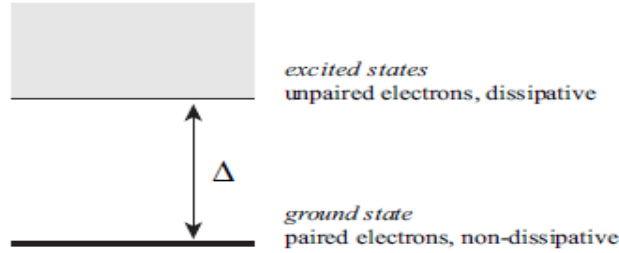
Στην περίπτωση που οι ηλεκτροδίοδοι είναι ισορροπημένοι (ίση τάση), είναι πιθανόν τα Cooper pairs να ταξιδέψουν εμπρός και πίσω της επαφής. Στην περίπτωση που εφαρμόσουμε τάση μικρής έντασης ($V < 2\Delta/e$), τα Cooper pairs δεν μπορούν να μεταπηδήσουν χωρίς να παραβιάσουν την διατήρηση της ενέργειας μεταξύ των δύο πλευρών του χάσματος. Γεγονός που οφείλεται στο ότι οι κβαντικές καταστάσεις αριστερά και δεξιά του φράγματος δεν είναι πλέον εκφυλισμένες. Τέλος εάν εφαρμόσουμε τάση μεγαλύτερης έντασης επιτυγχάνεται το "σπάσιμο" ενός Cooper pair και ένα μόνο ηλεκτρόνιο καταφέρνει να μεταπηδήσει στην άλλη πλευρά του χάσματος. Η τελευταία περίπτωση συνοδεύεται με απώλεια ενέργειας λόγω σκεδάσεων.

3.4 Κβαντική περιγραφή της επαφής Josephon

Στην ενότητα αυτή θα ασχοληθούμε με τη κβαντική συμπεριφορά της επαφής Josephson που περιγράψαμε παραπάνω, για ένα σύστημα απομονωμένο από το περιβάλλον (στο παράρτημα περιγράφεται και η ημικλασική περίπτωση). Θεωρούμε ότι το σύστημα βρίσκεται σε μηδενική θερμοκρασία και δίχως την ύπαρξη τάσεων. Δια μέσου της επαφής, τα φορτία μπορούν να ρέουν σε πακέτα των Cooper pairs και το συνολικό φορτίο θα δίνεται από την σχέση [14-16]:

$$(3.30) \quad Q(t) = -2eN(t).$$

Παρατηρούμε ότι η επαφή περιγράφεται σε σχέση με τον αριθμό των Cooper pairs.



Σχήμα 3.10: Ηλεκτρονική δομή ενός υπεραγωγού.

Για το λόγο αυτό ορίζουμε τον "τελεστής αρίθμησης" N . Ο συνολικός αριθμός των Cooper pairs που ταξιδεύουν κατά μήκος της επαφής είναι $N = N_L + N_R$. Μία χρήσιμη περιγραφή των χαμηλών ενεργειακών καταστάσεων είναι:

$$(3.31) \quad |m\rangle = |N_L - m, N_R + m\rangle$$

με m να προσδιορίζει τον αριθμό των ζευγών ηλεκτρονίων που ταξιδεύουν από την αριστερή προς την δεξιά πλευρά. Θεωρούμε ως "κατάσταση αναφοράς" την αριστερή πλευρά, στην οποία ο αριθμός των ζευγών ηλεκτρονίων που υπάρχουν είναι $N_{L(R)}$. Έτσι η Χαμιλτονιανή είναι:

$$(3.32) \quad H_T = -\frac{1}{2}E_J \sum_m \{|m\rangle\langle m+1| + |m+1\rangle\langle m|\}$$

Η παράμετρος E_J ονομάζεται *ενέργεια σύζευξης Josephson* και μας δείχνει την ικανότητα που έχουν τα Cooper pairs να ταξιδεύουν δια μέσου της επαφής.

Παρατηρούμε ότι η H_T προκαλεί άλλοτε αύξηση και άλλοτε μείωση κατά μία μονάδα, του αριθμού m κάθε φορά που ένα ζεύγος πηγαίνει προς τη δεξιά ή την αριστερή πλευρά της επαφής. Η (μη-κανονικοποιημένες) ιδιοσυναρτήσεις είναι επίπεδα κύματα και προσδιορίζονται από το διάνυσμα φ :

$$(3.33) \quad |\varphi\rangle = \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im\varphi} |m\rangle$$

και σύμφωνα με τον μετασχηματισμό Fourier θα έχουμε:

$$(3.34) \quad |m\rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-im\varphi} |\varphi\rangle d\varphi$$

Θεωρώντας ότι η μεταβλητή φ συμβολίζει την φάση, μπορούμε να ορίσουμε τον τελεστή:

$$(3.35) \quad e^{i\hat{\varphi}} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i\varphi'} |\varphi'\rangle \langle \varphi'| d\varphi'$$

Η δράση του τελεστή $e^{i\hat{\varphi}}$ πάνω στις καταστάσεις αρίθμησης είναι:

$$(3.36) \quad e^{i\hat{\varphi}} = \sum_m |m-1\rangle \langle m|$$

$$(3.37) \quad e^{-i\hat{\varphi}} = \sum_m |m\rangle \langle m-1|$$

Αντικαθιστώντας στην (Εξ. 3.32) τις εξισώσεις (Εξ. 3.36) και (Εξ. 3.37) μπορούμε να γράψουμε την Χαμιλτονιανή στην βάση των φάσεων ως εξής:

$$(3.38) \quad H_T = -\frac{1}{2} E_J \{e^{i\hat{\varphi}} + e^{-i\hat{\varphi}}\} = -E_J \cos \hat{\varphi}$$

Ωστόσο την κίνηση των Cooper pairs μπορούμε να τη φανταστούμε σαν ένα κυματοπακέτο που ταξιδεύει προς την αριστερή πλευρά πάνω σε ένα σφιχτά δεμένο πλέγμα. Ουσιαστικά πρόκειται για ένα "παλμό ρεύματος" που ταξιδεύει δια μέσου της επαφής. Η ταχύτητα του κυματοπακέτου είναι ανάλογη της παραγώγου της ενέργειας:

$$(3.39) \quad v_g(\varphi) = \frac{1}{\hbar} \frac{\partial}{\partial \varphi} [-E_J \cos \varphi]$$

έτσι το ρεύμα που ρέει στο πλέγμα θα δίνεται από:

$$(3.40) \quad I(\varphi) = 2ev_g(\varphi) = \frac{2e}{\hbar} E_J \sin \varphi$$

Το μέγιστο ρεύμα που μπορεί να παρατηρηθεί συμβαίνει όταν $\varphi = \pi/2$ και ονομάζεται *κρίσιμο ρεύμα*:

$$(3.41) \quad I_c = \frac{2e}{\hbar} E_J$$

Μπορούμε, επιπλέον, να προσεγγίσουμε την σχέση για το ρεύμα Josephson, ορίζοντας τον τελεστή \hat{n} να είναι ξανά ο τελεστής αρίθμησης για τα Cooper pairs:

$$(3.42) \quad \hat{n} \equiv \sum_m |m\rangle m \langle m|$$

Για το τελεστή του ρεύματος θα έχουμε:

$$(3.43) \quad \hat{I} \equiv 2e \frac{d\hat{n}}{dt} = 2e \frac{i}{\hbar} [H_T, \hat{n}] = -i \frac{e}{\hbar} E_J \sum_m \{ |m\rangle \langle m+1| - |m+1\rangle \langle m| \}$$

Αξίζει να σημειωθεί ότι η ιδιοσυνάρτηση του επίπεδου κύματος της ενέργειας είναι επίσης και ιδιοσυνάρτηση του τελεστή του ρεύματος ικανοποιώντας την σχέση:

$$(3.44) \quad \hat{I}|\varphi\rangle = I_c \sin \varphi |\varphi\rangle$$

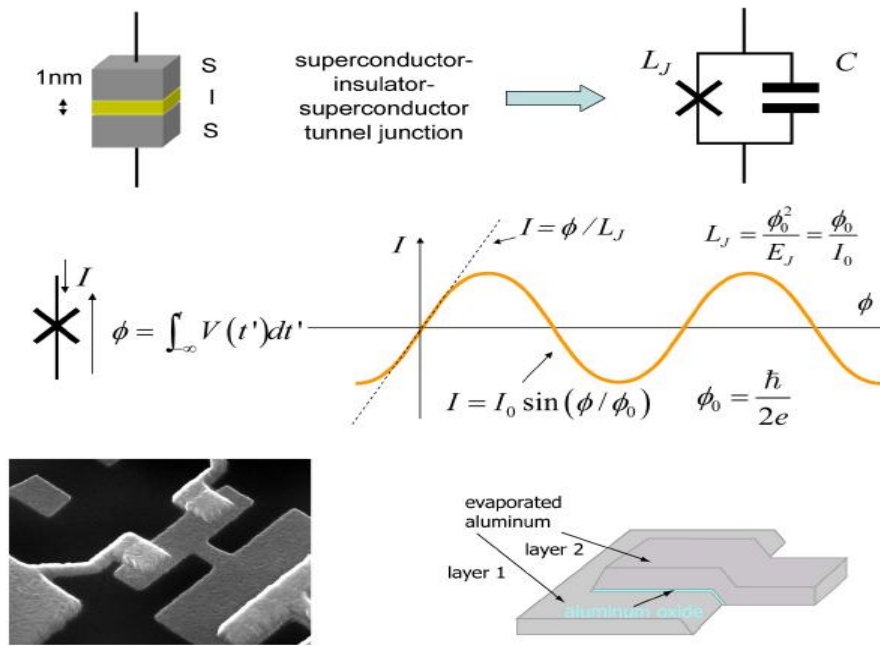
Στην περίπτωση που εφαρμόσουμε ένα σταθερό εξωτερικό ηλεκτρικό πεδίο, δηλαδή την εφαρμογή καθορισμένης τάσης V κατά μήκος της επαφής, προσθέτουμε στην Χαμιλτονιανή τον όρο:

$$(3.45) \quad U = -(2e)V\hat{n}$$

και η εξίσωση κίνησης της Χαμιλτονιανής καταλήγει στην περίφημη *σχέση Josephson*:

$$(3.46) \quad \hbar \partial_t \varphi = -\frac{\partial H}{\partial \hat{n}} = 2eV$$

Η (Εξίσωση 3.46) αποτελεί την δεύτερη σημαντική εξίσωση για την περιγραφή του φαινομένου Josephson. Συγκεκριμένα μας δείχνει ότι η τάση στην επαφή Josephson είναι ανάλογη της χρονικής παραγώγου της διαφοράς φάσης. Με την εφαρμογή μιας σταθερής τάσης V_{DC} στα άκρα της επαφής, η φάση θα μεταβάλλεται γραμμικά με τον χρόνο.



Σχήμα 3.11: (Πάνω αριστερά) Μια επαφή Josephson ως ένα λεπτό στρώμα από κάποιο μονωτικό ανάμεσα σε δύο υπεραγώγιμα ηλεκτρόδια. (Πάνω δεξιά) Το αντίστοιχο κύκλωμα. (Μέσο) ΤΗ μη γραμμική σχέση ρεύματος και τάσης της επαφής Josephson. (Κάτω): Φωτογραφία από SEM και απεικόνιση μιας επαφής.

Ωστόσο η dc τάση στα άκρα της επαφής Josephson είναι ο ρυθμός των κβάντων ροής που μεταφέρονται στην επαφή. Ισοδύναμα, η λύση που προκύπτει από την εξίσωση του Schrödinger είναι:

$$(3.47) \quad |\Psi(t)\rangle = e^{\frac{i}{\hbar} E_J \int_0^t d\tau \cos \varphi(\tau)} |\varphi(t)\rangle$$

όπου

$$(3.48) \quad \varphi(t) = \varphi(0) + \frac{2e}{\hbar} V t$$

Το ρεύμα θα είναι ένα εναλλασσόμενο ρεύμα πλάτους I_c

$$(3.49) \quad \langle \hat{I}(t) \rangle = I_c \sin(\varphi(0) + \omega t)$$

και συχνότητας:

$$\omega = \frac{2e}{\hbar} V$$

Η σχέση μας δίνει το ac φαινόμενο Josephson και μας δείχνει ότι η επαφή μπορεί να λειτουργήσει σαν τέλειος μετατροπέας τάσης σε συχνότητα.

Η σταθερά $\frac{2e}{h}$ είναι η μαγνητική ροή των κβάντων, το αντίστροφο της οποίας είναι η σταθερά Josephson:

$$(3.50) \quad \frac{2e}{h} \approx \frac{483,597891 \text{ MHz}}{m} \mu\text{Volt}$$

Ο πιο συνηθισμένος τρόπος για την κατασκευή μιας επαφής Josephson, σε ένα υπεραγώγιμο κύκλωμα, περιλαμβάνει την τοποθέτηση δύο υπεραγώγιμων ηλεκτροδίων πάνω στο τσιπ ως εξής: αρχικά οξειδώνουμε την επιφάνεια του πρώτου ηλεκτροδίου δημιουργώντας ένα μονωμένο στρώμα από οξείδιο του αλουμινίου και στη συνέχεια τοποθετούμε σε τέτοια θέση το δεύτερο ηλεκτρόδιο προκειμένου να αλληλεπικαλύπτει μερικώς το πρώτο [15,16].

Το φράγμα δυναμικού που δημιουργείται από την αλληλεπικαλυπτόμενη περιοχή. Με τον τρόπο αυτόν τα Cooper pairs είναι ικανά να ταξιδεύουν, δια μέσου του οξειδωμένου στρώματος, από το ένα ηλεκτρόδιο στο άλλο. Αυτό που απομένει προκειμένου να περιγράψουμε σωστά τη πραγματική συμπεριφορά της επαφής είναι η προσθήκη της χωρητικότητάς της. Η νέα Χαμιλτονιανή που θα προκύψει είναι:

$$(3.51) \quad H = \frac{\hat{Q}^2}{2C} - E_J \cos\left(\frac{2\pi\hat{\Phi}}{\Phi_0}\right)$$

Έτσι η ρεαλιστική επαφή Josephson, ορίζεται από δύο παραμέτρους την ενέργεια σύζευξης, E_J , και την χωρητικότητα της επαφής, C_J .

Η χωρητικότητα της επαφής μπορεί να γραφεί ως ενέργεια του πυκνωτή, $E_C = \frac{(2e)^2}{2C_J}$, $q2/c$ και είναι η ενέργεια που χρειάζεται για να αποθηκεύσουμε ένα Cooper pair. Αναπτύσσοντας στην παραπάνω εξίσωση τον όρο του συνημίτονου σε σειρά Taylor, έχουμε:

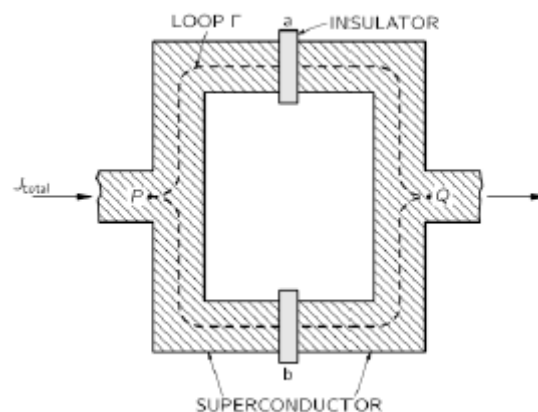
$$(3.52)$$

$$H = \frac{\hat{Q}^2}{2C} - \frac{E_J(2\pi)^2}{2\hat{\Phi}_0^2} \hat{\Phi}^2$$

Συγκρίνοντας αυτή την εξίσωση με την Χαμιλτονιανή για τον κβαντικό LC ταλαντωτή, παρατηρούμε από τον τελευταίο όρο ότι το tunneling element συμπεριφέρεται σαν ένας γραμμικό πηνίο με αυτεπαγωγή $L_{J0} = \frac{\Phi_0^2}{4\pi^2 E_J}$. (Στην πραγματικότητα εάν αναπτύξουμε την σειρά σε περισσότερους όρους θα παρατηρήσουμε ότι το tunnel element είναι ένα μη γραμμικό πηνίο). Κατά συνέπεια, μια πραγματική επαφή Josephson μπορεί κατά προσέγγιση να αναπαρασταθεί με ένα πυκνωτή παράλληλα τοποθετημένο με ένα μη-γραμμικό πηνίο με resonant συχνότητα $\omega_J = \frac{1}{\sqrt{C_J L_J}}$.

3.5 SQUID (Superconducting Quantum Interference Device)

Στις προηγούμενες ενότητες του κεφαλαίου περιέγραψα την επαφή Josephson και υπολογίστηκε το ρεύμα που περνά μέσα από την επαφή και τη διαφορά φάσης. Στην ενότητα αυτή θα περιγράψω μια νέα συσκευή που λειτουργεί μέσω του φαινομένου Josephson. Είναι το γνωστό SQUID (superconducting quantum interference device) που στην πραγματικότητα πρόκειται για ένα πολύ ευαίσθητο μαγνητόμετρο.[2]



Σχήμα 3.12: Πρότυπη μορφή της συσκευής SQUID.

Το DC SQUID αποτελείται από ένα κλειστό υπεραγώγιμο βρόχο στον οποίο παρεμβάλλονται δυο επαφές Josephson. Στη συνέχεια θα μελετήσουμε τη συμβολή ανάμεσα σε δύο επαφές η οποία οφείλεται στη διαφορά φάσης μεταξύ ρευμάτων που διαδίδονται μέσω δύο διαφορετικών διαδρομών.

Στο παραπάνω σχήμα έχουμε δυο επαφές συνδεδεμένες παράλληλα. Οι απολήξεις τους P και Q είναι συνδεδεμένες με ηλεκτρικά όργανα που μετρούν τη ροή ρεύματος.

Συγκεκριμένα, έστω J_{total} το συνολικό ρεύμα των δύο επαφών με J_a και J_b και οι αντίστοιχες φάσεις τους είναι δ_a και δ_b . Η διαφορά φάσης των κυματοσυναρτήσεων ανάμεσα στα σημεία P και Q θα πρέπει να είναι ίδια άσχετα με το αν ακολουθήσουμε τη μία ή την άλλη διαδρομή. Έχουμε λοιπόν πως κατά μήκος της επαφής α η διαφορά φάσης ανάμεσα στα P και Q είναι ίση με την τιμή της παραμέτρου δ_a προσαυξημένη κατά την τιμή του επικαμπύλιου ολοκληρώματος του διανυσματικού δυναμικού κατά μήκος της επάνω διαδρομής.

$$\Delta Phase_{P \rightarrow Q} = \delta_a + 2 \frac{q_e}{\hbar} \oint_{upper} A ds$$

Με τον ίδιο ακριβώς τρόπο η μεταβολή στη φάση από το Q στο P είναι:

$$\Delta Phase_{P \rightarrow Q} = \delta_b + 2 \frac{q_e}{\hbar} \oint_{lower} A ds$$

Αυτές οι δύο ποσότητες όπως προείπαμε είναι ίσες μεταξύ τους, οπότε με μια αφαίρεση κατά μέλη προκύπτει ότι:

$$\delta_b - \delta_a = 2 \frac{q_e}{\hbar} \oint_{\Gamma} A ds$$

Αλλά γνωρίζουμε πως το παραπάνω ολοκλήρωμα υπολογίζει τη μαγνητική ροή που περνά μέσα από τον βρόγχο. Άρα λοιπόν η διαφορά φάσης γίνεται:

$$\delta_b - \delta_a = 2 \frac{q_e}{\hbar} \Phi$$

Βλέπουμε λοιπόν ότι μπορούμε να ελέγξουμε τη διαφορά φάσης μεταβάλλοντας το μαγνητικό πεδίο στο κύκλωμα. Προσαρμόζοντας κατάλληλα αυτή τη διαφορά φάσης μπορούμε να δούμε αν το συνολικό ρεύμα δείχνει κάποια συμβολή. Το συνολικό ρεύμα δίνεται από τον τύπο:

$$J_{total} = J_o \left\{ \sin \left(\delta_o - \frac{q_e}{\hbar} \Phi \right) + \sin \left(\delta_o + \frac{q_e}{\hbar} \Phi \right) \right\} = 2J_o \sin \delta_o \cos \frac{q_e}{\hbar} \Phi$$

με δ_o μια σταθερά που δεν μπορούμε να μετρήσουμε. Γνωρίζουμε όμως πως το $\sin \delta_o$ δεν μπορεί να γίνει ποτέ μεγαλύτερο της μονάδας, άρα λοιπόν για μια δεδομένη μαγνητική ροή Φ το μέγιστο ρεύμα δίνεται από τη σχέση:

$$J_{max} = 2J_o \left| \cos \frac{q_e}{\hbar} \Phi \right|$$

Το μέγιστο θα μεταβάλλεται με τη ροή Φ και το ίδιο μεγιστοποιείται κάθε φορά που η ροή θα είναι:

$$\Phi = n \frac{\pi \hbar}{q_e}$$

όπου n κάποιος ακέραιος αριθμός. Το SQUID χρησιμεύει στην δημιουργία κβαντοδυσφίου ροής αλλά και στις μετρήσεις όπως θα δούμε παρακάτω.

Κεφάλαιο 4ο

Υλοποίηση κβαντικών υπολογισμών σε υπεραγώγιμα κβαντικά κυκλώματα

4.1 Υλοποίηση ενός υπεραγώγιμου κβαντοδυφίου

Σε αυτό το κεφάλαιο θα μελετήσουμε υπεραγώγιμες κυκλωματικές διατάξεις που υλοποιούν πραγματικά κβαντοδυφία.

Τα υπεραγώγιμα κβαντοδυφία είναι κυκλώματα βασισμένα σε επαφές Josephson. Για να μελετήσουμε τα βασικά χαρακτηριστικά των κυκλωμάτων βασικό ρόλο παίζει ο λόγος μεταξύ της ενέργειας Josephson E_J και της ενέργειας του πυκνωτή E_C . Έτσι προκύπτουν τρία βασικά είδη υπεραγώγιμων κβαντοδυφίων: το κβαντοδυφίο φορτίου, ροής και φάσης. Ωστόσο, υπάρχουν και πιο "εξελιγμένα" είδη υπεραγώγιμων κβαντοδυφίων όπως το *quantronium*, το *fluxonium*, το *transmon* και το υβριδικό (hybrid) κβαντοδυφίο [14-21]. Εμείς εδώ θα εστιάσουμε στο κβαντοδυφίο φορτίου και θα αναφέρουμε συνοπτικά τις βασικές ιδιότητες των υπολοίπων

Για να μπορέσει ένα κβαντικό υπεραγώγιμο κύκλωμα να λειτουργήσει ως κβαντοδυφίο χρειάζεται να μπορούμε να ξεχωρίσουμε και να επεξεργαστούμε κβαντικά δυο ενεργειακές καταστάσεις του όπως περιγράψαμε στα προηγούμενα κεφάλαια. Επιπλέον, είναι απαραίτητο να μπορούν να γίνουν μετρήσεις στο χρόνο προκειμένου να καθοριστεί η δυναμική συμπεριφορά του κβαντοδυφίου. Η επεξεργασία του υπεραγώγιμου κβαντοδυφίου γίνεται με την εφαρμογή εξωτερικών ηλεκτρικών παλμών στο κύκλωμα.

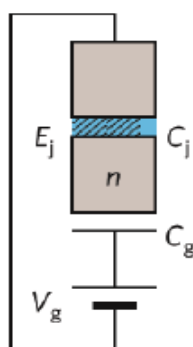
Τα υπεραγώγιμα κβαντοδυφία χαρακτηρίζονται από δύο χρονικές παραμέτρους. Ο χρόνος T_1 που είναι ο χρόνος που μπορεί να διατηρηθεί το κβαντοδυφίο στη διεγερμένη κατάσταση $|1\rangle$ προτού πέσει στη θεμελιώδη κατάσταση $|0\rangle$. Ο δεύτερος χρόνος είναι ο T_2 και αφορά την απώλεια συμφωνίας φάση σε μια κβαντική υπέρθεση. Το σύννηθες πρόβλημα στην υλοποίηση κβαντικών αλγορίθμων, μεγάλης κλίμακας, είναι οι πολύ μικροί χρόνοι T_1 και T_2 . Οι αιτίες συνήθως είναι και εξωτερικές και εσωτερικές. Στις εξωτερικές αιτίες περιλαμβάνονται οι θόρυβοι που δημιουργούνται από τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα του περιβάλλοντος χώρου, όπως για παράδειγμα τα ραδιοκύματα. Στις εσωτερικές αιτίες περιλαμβάνονται οι μεταβολές στη συνοχή ενός κβαντοδυφίου από θόρυβο χαμηλής συχνότητας $1/f$.

Ακολουθεί ο πίνακας με τους μέγιστους χρόνους που έχουν παρατηρηθεί πειραματικά για τα T_1 και το T_2 :

Highest reported values of T_1 and T_2		
Qubit	T_1 (μ s)	T_2 (μ s)
Charge	2.0	2.0
Flux	4.6	9.6
Phase	0.5	0.5

Στη συνέχεια περιγράφουμε συνοπτικά τα τρία βασικά υπεραγώγιμα κβαντοδυφία, τα κυκλώματα που τα υλοποιούν και τα χαρακτηριστικά τους:

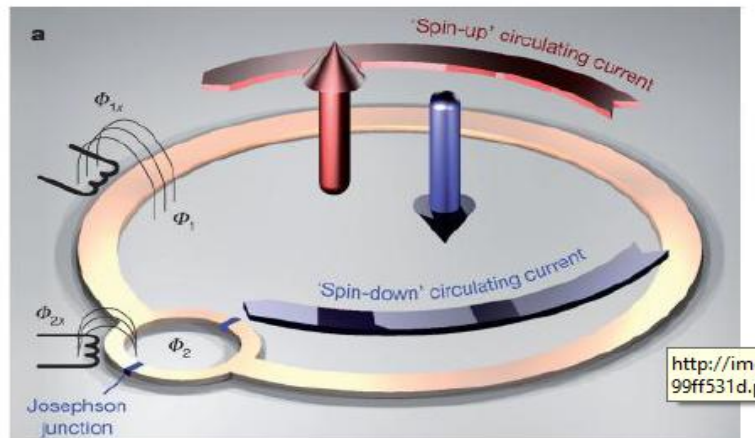
- **Charge Qubit:** Το κύκλωμα που το υλοποιεί είναι ένα απομονωμένο Cooper-Pair-Box συνδεδεμένο σε σειρά με έναν πυκνωτή και μια πηγή όπως φαίνεται στο σχήμα που ακολουθεί. Το Cooper-pair box είναι ένα υπεραγώγιμο κύκλωμα στο οποίο μια υπεραγώγιμη νησίδα, μικροσκοπικών διαστάσεων, είναι σε επαφή με μια δεξαμενή από Cooper pairs, μέσω μιας κατάλληλης επαφής με χωρητικότητα C_J και ενέργεια Josephson E_J .



Σχήμα 4.1 :Απλή αναπαράσταση κβαντοδυφίου φορτίου που σχηματίζεται από ένα υπεραγώγιμο κιβώτιο.

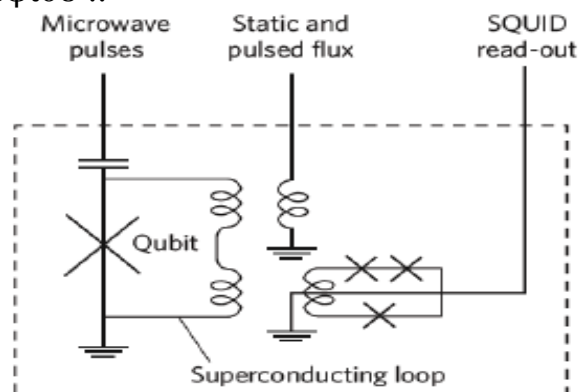
- **Flux Qubit:** αποτελείται από έναν υπεραγώγιμο βρόγχο που διακόπτεται από μια ή τρεις επαφές Josephson. Και οι δυο παραλλαγές λειτουργούν παρόμοια. Εδώ θα εστιάσουμε την προσοχή μας στην εκδοχή με τις τρεις επαφές. Σε αυτή την εκδοχή η μια επαφή καλύπτει μικρότερη επιφάνεια από τις άλλες δύο με αποτέλεσμα και το ρεύμα που τη διαρρέει να παίρνει μικρότερη κρίσιμη τιμή και να αυξάνεται η αυτεπαγωγή του κυκλώματος. Η μικρή επαφή έχει συνήθως μεγαλύτερο λόγο E_J/E_C , με τιμή κοντά στο 50.

Οι δυο κβαντικές καταστάσεις του κβαντοδυφίου είναι η μαγνητική ροή με κατεύθυνση $|\uparrow\rangle$ και η μαγνητική ροή με κατεύθυνση $|\downarrow\rangle$ που καθορίζεται από το αν η φορά του ρεύματος που ρέει τον υπεραγώγιμο βρόγχο έχει κατεύθυνση τη φορά του ρολογιού ή την αντίθετη.



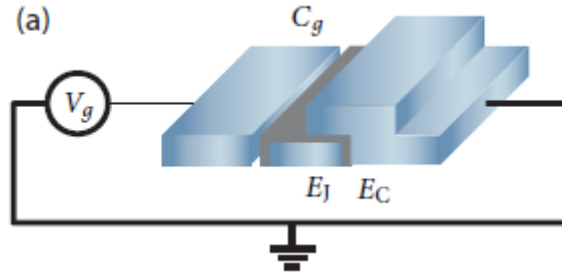
Σχήμα 4.2: Απλοποιημένη σχηματική αναπαράσταση ενός υπεραγώγιμου κβαντοδυφίου ροής που ενεργεί ως κβαντικό σπιν. Τα ρεύματα που ρέουν στο βρόχο του κβαντοδυφίου αυξάνουν την εσωτερική ροή, δημιουργώντας δυο ξεχωριστές καταστάσεις σπιν που μπορούν να υπάρχουν σε μια υπέρθεση.

- **Phase Qubit:** η επαφή Josephson είναι ενσωματωμένη σε έναν υπεραγώγιμο βρόγχο και βρίσκεται σε επαγωγική επαφή με ένα SQUID που χρησιμοποιείται για την ανάγνωση της κατάστασης του κβαντοδυφίου ..



Σχήμα 4.3: Απλοποιημένη σχηματική αναπαράσταση ενός υπεραγώγιμου κβαντοδυφίου φάσης.

4.2 Ανάλυση των ιδιοτήτων του Cooper pair box



Σχήμα 4.4 : Απλή αναπαράσταση του Cooper- pair box (CPB)

Σε αυτή την ενότητα θα μελετήσουμε σε περισσότερη λεπτομέρεια το βασικότερο στοιχείο υπεραγωγίων κβαντοδυφίων το Cooper-pair box (CPB). Το Cooper-pair box όπως είπαμε παραπάνω είναι ένα υπεραγωγίμο κύκλωμα στο οποίο μια υπεραγωγίμη νησίδα, μικροσκοπικών διαστάσεων, είναι σε επαφή με μια δεξαμενή από Cooper pairs, μέσω μιας κατάλληλης επαφής με χωρητικότητα C_g και ενέργεια Josephson E_J . Η Χαμιλτονιανή του CPB είναι ίδια με εκείνη που βρήκαμε για την απομονωμένη επαφή Josephson:

$$(4.1) \quad H = \frac{\hat{Q}^2}{2C_J} - E_J \cos\left(\frac{2\pi\hat{\Phi}}{\Phi_0}\right)$$

όπου οι μεταβλητές Φ και Q ικανοποιούν την μεταθετική σχέση $[\Phi, Q] = i\hbar$. Μπορούμε να ξαναγράψουμε την Χαμιλτονιανή σε μια πιο απλή μορφή χρησιμοποιώντας διαφορετικές μεταβλητές με τους τελεστές αριθμησης και φάσης:

$$(4.2) \quad Q = 2e\hat{N} \text{ και } \Phi = \varphi_0 \varphi$$

έχουμε:

$$(4.3) \quad H = E_C \hat{N}^2 - E_J \cos \hat{\varphi}$$

όπου $E_C = \frac{2e^2}{2C_J}$ είναι οι ενέργεια φόρτισης (charging energy) και οι τελεστές N και φ ικανοποιούν την μεταθετική σχέση $[\varphi, N] = i\hbar$. Αξίζει να διευκρινιστεί ότι η ενέργεια φόρτισης E_C είναι η ενέργεια που χρειάζεται προκειμένου να προστεθεί ένα Cooper pair μέσα στο CPB. Η ενέργεια E_J αναφέρεται στην ενέργεια που χρειάζεται προκειμένου ένα ζεύγος να καταφέρει να διασχίσει την επαφή.

**Με ποιο τρόπο όμως καταφέρνουμε να ελέγξουμε ένα
κβαντοδυφίο?**

Δημιουργώντας μια "νησίδα" υπεραγωγίμου υλικού ο αριθμός των ηλεκτρονίων, n , στη νησίδα μπορεί να ελεγχθεί με την εφαρμογή μιας τάσης πύλης V_g (Σχήμα 4.4). Αν και υπάρχουν δισεκατομμύρια Cooper pairs που σχηματίζουν μια μακροσκοπική κβαντική κατάσταση, η οποία μπορεί να περιγραφεί μαθηματικά με μια κυματοσυνάρτηση, η προσθήκη ενός επιπλέον μεμονωμένου ηλεκτρονίου μπορεί να επιφέρει μεγάλες διαφορές στο σύστημα. Χρησιμοποιώντας ένα ηλεκτρόδιο πύλης τα Cooper pairs μπορούν να προστεθούν ή να αφαιρεθούν ένα προς ένα. Με τη ρύθμιση της τάσης πόλωσης σε μια συγκεκριμένη τιμή, η νησίδα εισέρχεται σε μια κατάσταση όπου είναι εξίσου πιθανό να υπάρχει άρτιος αριθμός ή περιττός αριθμός Cooper pairs. Η περίπτωση όπου ένα επιπλέον μπορεί να υπάρχει ή να μην υπάρχει αντιστοιχεί σε δυο διακριτές καταστάσεις, οι οποίες μπορούν να αποτελέσουν τη βάση της λειτουργίας ενός κβαντοδυφίου. Η Χαμιλτονιανή είναι επομένως:

$$H = \frac{(\hat{Q} - Q_g)^2}{2C_\Sigma} - E_J \cos\left(\frac{2\pi\hat{\Phi}}{\Phi_0}\right) \quad (4.4) \quad = E_C(\hat{N} - N_g)^2 - E_J \cos(\hat{\varphi})$$

όπου $C_\Sigma = C_g + C_J$ να είναι η συνολική χωρητικότητα, $N_g = Q_g/2e$ και $(Q - Q_g)$ το φορτίο που παρέμεινε στο "νησί".

Για να μελετήσουμε το σύστημα, θα πρέπει να υπολογίσουμε τις ιδιοκαταστάσεις της ενέργειας $|E\rangle$ που προκύπτουν από την εξίσωση ιδιοτιμών της ενέργειας $H|E\rangle = E|E\rangle$. Η Χαμιλτονιανή στη βάση των Cooper pairs χρησιμοποιώντας τον ορισμό $\hat{N} = \sum_N N|N\rangle\langle N|$ και $I = \sum_N |N\rangle\langle N|$, θα είναι :

$$(4.5) \quad H = E_C \sum_N (N - N_g)^2 |N\rangle\langle N| - \frac{E_J}{2} \sum_N |N\rangle\langle N+1| + |N+1\rangle\langle N|$$

Ανάλογα την τιμή του λόγου της ενέργειας σύζευξης προς την ενέργεια φόρτισης, $\frac{E_J}{E_C}$, διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

4.2.1 Περίπτωση μηδενικής σύζευξης $E_J = 0$

Ξεκινώντας από την περίπτωση που δεν υπάρχει καθόλου σύζευξη, $E_J = 0$, η Χαμιλτονιανή είναι:

$$(4.6) \quad H = E_C \sum_N (N - N_g)^2 |N\rangle\langle N|$$

Είναι φανερό ότι η H είναι σε διαγωνοποιημένη μορφή, το οποίο σημαίνει ότι οι καταστάσεις $|N\rangle$, είναι επίσης και ιδιοκαταστάσεις της ενέργειας για αυτό το σύστημα. Μπορούμε να γράψουμε τις ιδιοκαταστάσεις ως $|E_N\rangle = |N\rangle$ με ιδιοενέργεια $E_N = E_C (N - N_g)^2$. Εάν σχεδιάσουμε τις ιδιοενέργειες ως συνάρτηση της εξωτερικής τάσης, θα δούμε ότι έχουν παραβολική μορφή. Σε χαμηλές τιμές ενεργειών, οι περιοχές που διασταυρώνονται οι ιδιοενέργειες είναι:

$$(4.7) \quad N = N_g \Rightarrow E_N = 0$$

$$(4.8) \quad N_g = N \pm \frac{1}{2} \Rightarrow E_N = \frac{E_C}{4}$$

$$(4.9) \quad N_g = N \pm 1 \Rightarrow E_N = E_C$$

$$(4.10) \quad N_g = N \pm \frac{3}{2} \Rightarrow E_N = \frac{9E_C}{4}$$

Καθώς δεν υπάρχει καθόλου σύζευξη σε αυτή την περίπτωση, η μετάβαση μεταξύ διαφορετικών ιδιοκαταστάσεων μπορεί να προκληθεί μόνο από την απορρόφηση ή την εκπομπή φωτονίων μικροκυματικής ακτινοβολίας. Τα παραπάνω αποτελέσματα αποδεικνύουν την ύπαρξη δυο σημαντικών σημείων στο διάγραμμα ενεργειών σε σχέση με το φορτίο της εξωτερικής πηγής N_g και έτσι ορίζονται δύο θεμελιώδεις διαφορετικές περιοχές στο CPB.

Θεμελιώδη κατάσταση: Για $N_g = N$, υπάρχει ένα κατώτατο επίπεδο ενέργειας ($E_N = 0$) και δύο καταστάσεις με υψηλότερη ενέργεια ($E_{N\pm 1} = E_C$). Στην περίπτωση αυτή η θεμελιώδη κατάσταση είναι εμφανώς διαχωρισμένη από τα επόμενα επίπεδα επιτρέπει καλή προετοιμασία των καταστάσεων.

Qubit system: Σε αντίθεση, στην περίπτωση $N_g = N + \frac{1}{2}$, υπάρχουν δυο εκφυλισμένες στάθμες για τα χαμηλότερα επίπεδα ενέργειας ($E_N = E_{N+1} = \frac{E_C}{4}$), ενώ τα επόμενα υψηλότερα επίπεδα ενέργειας βρίσκονται πολύ υψηλότερα σε ($E_{N-1} = E_{N+2} = \frac{9E_C}{4}$).

Επομένως έχουμε επίπεδα που βρίσκονται κοντά ενεργειακά και είναι εμφανώς διαχωρίσιμα από τα υπόλοιπα, δημιουργώντας έτσι ένα καλό qubit system.

4.2.2 Περιοχή μικρής σύζευξης - $E_J \ll E_C$

Για μικρό E_J , η επαφή μπορεί να δράσει ως μια μικρή διαταραχή. Ήτοι, στην περιοχή μικρής σύζευξης, οι ιδιοκαταστάσεις της ενέργειας φαίνονται οι ίδιες με την περίπτωση $E_J = 0$. Καθώς η E_J είναι μικρή, η σύζευξη θα έχει συγκεκριμένη επίδραση στις περιοχές που οι ιδιοκαταστάσεις έχουν περίπου την ίδια ενέργεια. Θα επικεντρώσουμε τώρα την προσοχή μας στην περίπτωση του δικαταστασιακού συστήματος θεωρώντας επίσης ότι $N_g = N + \frac{1}{2} + \Delta_g$. Καθώς η ενέργεια είναι περιοδική συνάρτηση του N_g , μπορούμε να ορίσουμε για απλοποίηση $N = 0$. Θεωρώντας Δ_g να είναι αρκετά μικρό, υπάρχουν δυο καταστάσεις χαμηλής ενέργειας $\{|0\rangle \text{ και } |1\rangle\}$ και όλα τα υπόλοιπα επίπεδα έχουν πολύ υψηλότερη ενέργεια (το λιγότερο 9 φορές την τιμή της $E_{0,1}$). Μπορούμε λοιπόν να θεωρήσουμε ότι τα μεγαλύτερα ενεργειακά επίπεδα παίζουν αμελητέο ρόλο στην δυναμική του συστήματος και μπορούν να αγνοηθούν από τους υπολογισμούς μας. Αυτή ονομάζεται "δυο επιπέδων προσέγγιση".

Κάνοντας αντικαταστάσεις $N_g = \frac{1}{2} + \Delta_g$ και απορρίπτοντας κάθε όρο της Χαμιλτονιανής ο οποίος περιλαμβάνει καταστάσεις άλλες από τις $|0\rangle$ και $|1\rangle$, παίρνουμε την παρακάτω μορφή για την Χαμιλτονιανή του δικαταστασιακού συστήματος:

$$\begin{aligned}
 H &= E_C \left(\frac{1}{2} + \Delta_g \right)^2 |0\rangle\langle 0| + E_C \left(\frac{1}{2} - \Delta_g \right)^2 |1\rangle\langle 1| - \frac{E_J}{2} (|0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0|) \\
 &= E_C \left(\frac{1}{4} + \Delta_g^2 \right) (|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|) + E_C \Delta_g (|0\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 1|) - \frac{E_J}{2} (|0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0|) \\
 (4.11) \quad &= E_C \left(\frac{1}{4} + \Delta_g^2 \right) I + E_C \Delta_g \sigma_z - \frac{E_J}{2} \sigma_x
 \end{aligned}$$

Απαλείφοντας το πρώτο όρο, οδηγούμαστε την τελική μορφή της Χαμιλτονιανής για το δικαταστασιακό σύστημα:

$$(4.12) \quad H = E_C \Delta_g \sigma_z - \frac{E_J}{2} \sigma_x$$

$$(4.13) \quad = \begin{bmatrix} E_C \Delta_g & -\frac{E_J}{2} \\ -\frac{E_J}{2} & -E_C \Delta_g \end{bmatrix}$$

η οποία χαρακτηρίζεται από δύο κλίμακες ενεργειών την $E_C \Delta_g$ και την $\frac{E_J}{2}$.

- **Περίπτωση 1η:** $E_C \Delta_g \gg \frac{E_J}{2}$ - Όταν το Δ_g είναι αρκετά μεγάλο, η Χαμιλτονιανή παραμένει προσεγγιστικά διαγωνοποιημένη, επομένως οι ιδιοκαταστάσεις της ενέργειας παραμένουν οι $|0\rangle$ και $|1\rangle$, ακριβώς όπως είναι και στην περίπτωση $E_J = 0$.
- **Περίπτωση 2η:** Στην περίπτωση όπου το $\Delta_g = 0$ η Χαμιλτονιανή δεν είναι διαγωνοποιημένη και είναι της μορφής:

$$(4.14) \quad H = -\left(\frac{E_J}{2}\right) \sigma_x$$

Αλλά τα ιδιοδιανύσματα για το πίνακα του Pauli σ_x είναι $|\lambda_{\pm}\rangle = |\pm\rangle$, με ιδιοτιμές $\lambda_{\pm} = \pm 1$. Επειδή η Χαμιλτονιανή είναι ανάλογη του σ_x , οι ιδιοκαταστάσεις θα είναι επίσης οι $|E_{\pm}\rangle = |\pm\rangle$, με οι ιδιοενέργειες που θα αντιστοιχούν στις τιμές $E_{\pm} = -\left(\frac{E_J}{2}\right)(\pm 1) = \mp \frac{E_J}{2}$.

Αυτό που παρατηρούμε στην περίπτωση αυτή είναι ότι υπάρχει ενεργειακό χάσμα μεταξύ των δυο ιδιοκαταστάσεων, ίσο με την τιμή $\Delta E = E_J$, και είναι αποτέλεσμα της αλληλοεπικάλυψης. Οι ιδιοκαταστάσεις παύουν πλέον να είναι εκφυλισμένες. Ωστόσο το μέγεθος του διαχωρισμού των ιδιοενεργειών είναι ανάλογο της ισχύς της αλληλοεπικάλυψης.

Επίσης, οι ιδιοκαταστάσεις δεν καθορίζονται πλέον από μια καλώς ορισμένη τιμή N , αλλά αποτελούν συμμετρικές και αντισυμμετρικές καταστάσεις υπέρθεσης.

- **Περίπτωση 3^η:** $E_C \Delta_g \lesssim \frac{E_J}{2}$ - Η περίπτωση αυτή αποτελεί την πιο γενική μορφή προσέγγιση ενός δικαταστασιακού συστήματος. Για να γίνει η επίλυσή της, θα πρέπει να υπολογίσουμε τις ιδιοενέργειες της Χαμιλτονιανής 4.11 χρησιμοποιώντας τη προσέγγιση:

$$(4.15) \quad H|E\rangle = E|E\rangle$$

$$(4.16) \quad (H - EI)|E\rangle = 0$$

Για να λυθεί η παραπάνω εξίσωση πρέπει να κάνουμε χρήση της ορίζουσας. Για το λόγο αυτό έχουμε:

$$(4.17) \quad 0 = \det \begin{pmatrix} E_C \Delta_g - E & -\frac{E_J}{2} \\ -\frac{E_J}{2} & -E_C \Delta_g - E \end{pmatrix}$$

$$(4.18) \quad = -(E_C \Delta_g - E)(E_C \Delta_g + E) - \frac{E_J^2}{4}$$

$$(4.19) \quad = E^2 - \left(E_C^2 \Delta_g^2 + \frac{E_J^2}{4} \right)$$

$$(4.20) \quad \Rightarrow E = \pm \sqrt{E_C^2 \Delta_g^2 + \frac{E_J^2}{4}}$$

$$(4.21) \quad = \pm \frac{E_J}{2} \sqrt{\frac{4E_C^2 \Delta_g^2}{E_J^2} + 1}$$

Από τις παραπάνω τιμές μπορεί να υπολογιστεί η απόκλιση ενέργειας:

$$(4.22) \quad \Delta E = E_J \sqrt{\frac{4E_C^2 \Delta_g^2}{E_J^2} + 1}$$

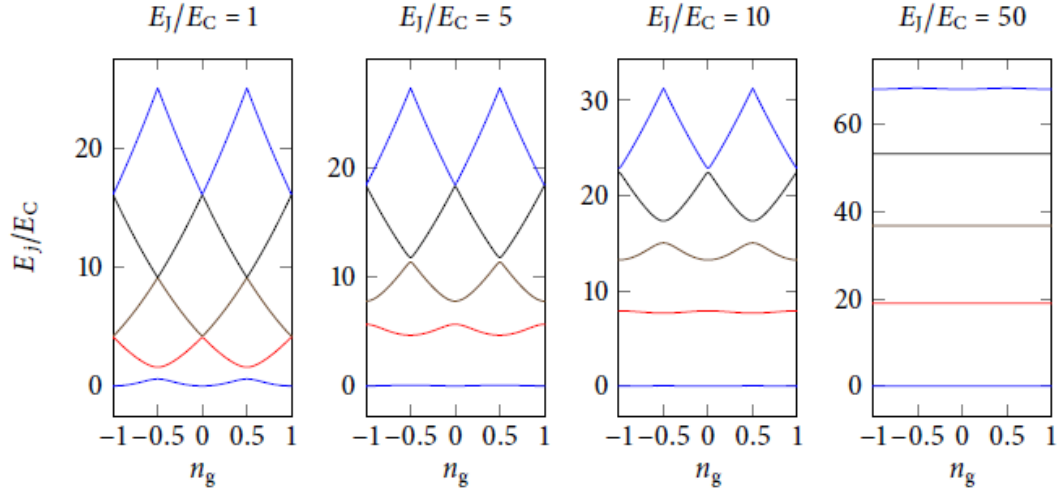
Παρατηρούμε ότι το $\Delta E \geq E_J$ για όλες τις τιμές του Δ_g . Γεγονός που μας δείχνει ότι το ενεργειακό χάσμα, στο σημείο $\Delta_g = 0$, εμφανίζει τη μικρότερη τιμή. Παρατηρούνται δυο ενεργειακές περιοχές με βάση τις παρακάτω εξισώσεις:

$$(4.23) \quad \frac{4E_C^2 \Delta_g^2}{E_J^2} \ll 1 \Rightarrow \Delta E \approx E_J \left(1 + \frac{2E_C^2 \Delta_g^2}{E_J^2} \right)$$

$$(4.24) \quad = E_J + O(\Delta_g^2)$$

$$(4.25) \quad \frac{4E_C^2 \Delta_g^2}{E_J^2} \gg 1 \Rightarrow \Delta E \approx E_J \frac{2E_C \Delta_g}{E_J}$$

$$(4.26) \quad = 2E_C \Delta_g$$



Σχήμα 4.5: Διασπορά φορτίου. Οι ενέργειες των 5 χαμηλότερων επιπέδων, που αντιστοιχούν στην Χαμιλτονιανή της Εξίσωσης 4.4, στην μονάδα της ενέργειας φόρτισης E_C . Για την χαμηλή τιμή της αναλογίας $\frac{E_J}{E_C}$, βρισκόμαστε στην περιοχή του CPB, και οι ενέργειες είναι παραβολικές συναρτήσεις του N_g , με σημεία όπου δεν υπάρχει σύζευξη. Το σύστημα προετοιμάστηκε ως ένα δικαταστασιακό σύστημα με $N_g = \pm 0.5$ και με τα ενεργειακά επίπεδα να παραμένουν αδρανείς στις διακυμάνσεις του φορτίου. Καθώς η κλίμακα $\frac{E_J}{E_C}$, μεγαλώνει τα επίπεδα γίνονται με εκθετικό ρυθμό επίπεδα, έχοντας πλέον εισχωρήσει στην *transmon regime*.

Η πρώτη εξίσωση μας λέει ότι το ενεργειακό χάσμα είναι ανεξάρτητο από το N_g . Ωστόσο δεν παύει να ισχύει η ανίσωση $E_J \ll E_C$, παρόλο που βρισκόμαστε στην περιοχή $\frac{4E_C^2 \Delta_g^2}{E_J^2} \ll 1$. Για να γίνει κατανοητή η σημασία του αποτελέσματος της περίπτωσης $\frac{4E_C^2 \Delta_g^2}{E_J^2} \gg 1$, θα πρέπει να γίνει μια συσχέτιση με την περίπτωση $E_J = 0$:

$$(4.27) \quad \Delta E = E_0 - E_1 = E_C \left(0 - \left[\frac{1}{2} + \Delta_g \right] \right)^2 - E_C \left(1 - \left[\frac{1}{2} + \Delta_g \right] \right)^2$$

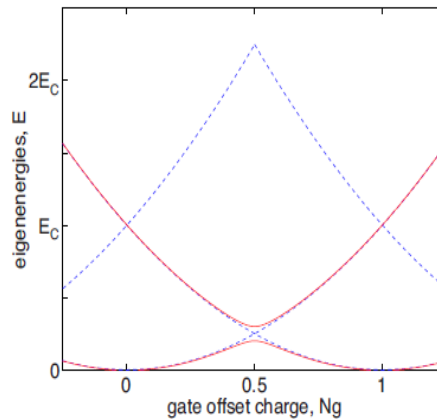
$$(4.28) \quad = E_C \left[\frac{1}{2} + \Delta_g \right]^2 - E_C \left[\frac{1}{2} + \Delta_g \right]^2$$

$$(4.29) \quad = E_C \left(2 \times 2 \frac{1}{2} \Delta_g \right)$$

$$(4.30) \quad = 2E_C \Delta_g$$

Παρατηρούμε ότι τα αποτελέσματα που αντιστοιχούν στην περίπτωση $\frac{4E_C^2 \Delta_g^2}{E_J^2} \gg 1$, είναι τα ίδια με εκείνα της περίπτωσης $E_J = 0$.

Είχαμε τονίσει και νωρίτερα ότι, όταν το E_J είναι μικρό, η αλληλοεπικάλυψη είναι αποτελεσματική μόνο στο σημείο όπου διασταυρώνονται οι κυματοσυναρτήσεις. Γεγονός που μας οδηγεί στο συμπέρασμα, ότι ο όρος $\frac{4E_C^2 \Delta_g^2}{E_J^2} \approx 1$ ορίζει το σημείο διασταύρωσης μεταξύ της συζευγμένης και ασύζευκτης περιοχής για τις ιδιοκαταστάσεις.



Σχήμα 4.6: Συμπεριφορά των ιδιοενεργειών σε ένα CPB κβαντοδυφίο φορτίου στην περιοχή $E_J \ll E_C$ [15]

Η θέση στην οποία οι ιδιοενέργειες διασταυρώνονται είναι:

$$(4.31) \quad \Delta_g \sim \frac{(E_J/2)}{E_C}$$

Το συμπέρασμα είναι ότι στο σημείο που διασταυρώνονται οι κυματοσυναρτήσεις το ενεργειακό χάσμα ορίζεται από τη σύζευξη E_J και το εύρος της αλληλεπικαλυπτόμενης περιοχής ορίζεται από το λόγο του E_J με το E_C . Οι ιδιοενέργειες που αντιστοιχούν στην εξίσωση 4.4 είναι:

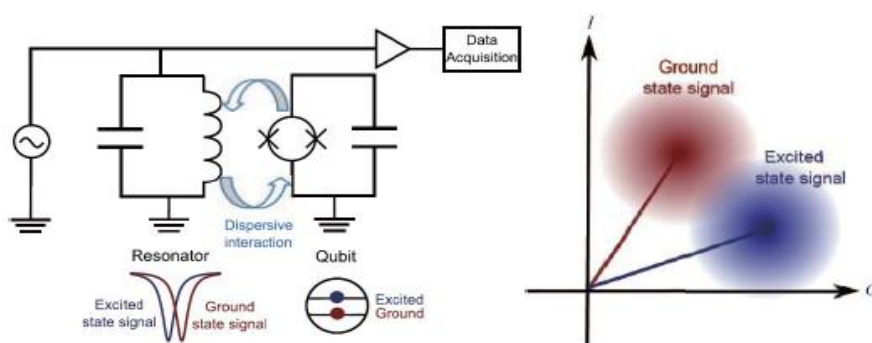
$$(4.32) \quad E = E_C \left(\frac{1}{4} + \Delta_g^2 \right) \pm \sqrt{E_C^2 \Delta_g^2 + \frac{E_J^2}{4}}$$

και οι απεικόνιση αυτών εμφανίζεται στο (Σχήμα 2.9). Η περιοχή γύρω από το σημείο που διασταυρώνονται οι κυματοσυναρτήσεις, $E_J = 0$, ονομάζεται "απαγορευμένο σημείο".

4.3 Μέτρηση του υπεραγώγιμου κβαντοδυφίου

Η μέτρηση της κατάστασης που βρίσκεται ένα κβαντοδυφίο είναι κρίσιμης σημασίας για τον κβαντικό υπολογισμό. Οι βασικές απαιτήσεις είναι η μέτρηση να γίνεται με μεγάλη πιστότητα, μεγάλη ταχύτητα και να μην οδηγεί σε χαλάρωση της συνοχής του κβαντοδυφίου (decoherence). Η ταυτόχρονη ικανοποίηση και των τριών αυτών απαιτήσεων είναι πολύ δύσκολη και βρίσκεται στο επίκεντρο του επιστημονικού ενδιαφέροντος για το συγκεκριμένο τομέα.

Όπως φαίνεται και στο κύκλωμα που ακολουθεί, η αρχή της διασποράς στην ανάγνωση βασίζεται στο γεγονός πως υπάρχει μια αντιστοιχία στη συχνότητα του κυκλώματος (Resonator) με αυτή του κβαντοδυφίου[11]. Έτσι καθορίζουμε πότε το κβαντοδυφίο βρίσκεται στην κατάσταση $|0\rangle$ και πότε στην πρώτη διεγερμένη $|1\rangle$. Δηλαδή διαβάζοντας τη συχνότητα βρίσκουμε την κατάσταση.



Εκφράζουμε το κβαντοδυφίο ως ένα μιγαδικό αριθμό $I+iQ$ και με επαναλαμβανόμενες μετρήσεις βρίσκουμε πότε το κβαντοδυφίο βρέθηκε στην μία ή στην άλλη κατάσταση.

Ο προσδιορισμός των καταστάσεων γίνεται με στατιστικούς όρους. Υπάρχει η μέση τιμή και η διασπορά, αλλά και σφάλμα λόγω θορύβου. Άρα η επιτυχία μας εξαρτάται από το λόγο $\text{signal}/\text{noise}$. Για να αυξήσουμε αυτό το λόγο αρκεί να πάρουμε επαναλαμβανόμενα μετρήσεις σε ένα μικρό χρονικό διάστημα. Με έναν αριθμό μετρήσεων κοντά στο $5 \cdot 10^4$ μπορούμε να πετύχουμε λόγο κοντά στο 25. Οι επαναλαμβανόμενες όμως μετρήσεις έχουν ως άμεσο αποτέλεσμα την καθυστέρηση στην ανάγνωση του αποτελέσματος. Πρέπει λοιπόν να αποδεχθούμε είτε τη μειωμένη ταχύτητα είτε μια μικρότερη ακρίβεια στο αποτέλεσμά μας.

4.4 Σύζευξη υπεραγωγίων κβαντοδυφίων και υλοποίηση πυλών δυο κβαντοδυφίων

Έχοντας μελετήσει, στα προηγούμενα εδάφια του κεφαλαίου, τα υπεραγωγία κβαντοδυφία φορτίου και έχοντας δει τον τρόπο που μπορούμε να δημιουργήσουμε ένα κβαντοδυφίο θα συνεχίσουμε την μελέτη μας, στο πως μπορούμε να επιτύχουμε σύζευξη μεταξύ των αυτών. Πριν κάνουμε το παραπάνω θα περιγράψουμε σε πρώτη φάση την υλοποίηση κβαντικών πυλών που δρουν σε δύο κβαντοδυφία σπιν.

4.4.1 Υλοποίηση πυλών σε αλληλεπιδρώντα κβαντοδυφία σπιν.

➤ Πύλη $i\text{SWAP}$ και $\sqrt{i\text{SWAP}}$ πύλες

Μία μορφή αλληλεπίδρασης που εμφανίζεται αρκετά συχνά σε κβαντικά συστήματα είναι η XY ή εγκάρσια σύζευξη σπιν με σπιν. Η σχετική Χαμιλτονιανή αλληλεπίδρασης είναι:

$$(4.33) \quad H_{1,2}^{XY} = \frac{E_{1,2}^{XY}}{4} (\sigma_x^{(1)} \sigma_x^{(2)} + \sigma_y^{(1)} \sigma_y^{(2)})$$

και συχνά αναγράφεται με όρους των τελεστών αναβίβασης και καταβίβασης ως:

$$(4.34) \quad H_{1,2}^{XY} = \frac{E_{1,2}^{XY}}{4} (\sigma_+^{(1)} \sigma_-^{(2)} + \sigma_-^{(1)} \sigma_+^{(2)})$$

Αυτός ο τύπος σύζευξης μπορεί να εμφανιστεί σε quantum dot spin [17]] και σε υπεραγωγία κβαντοδυφία, όπως θα συζητήσουμε παρακάτω.

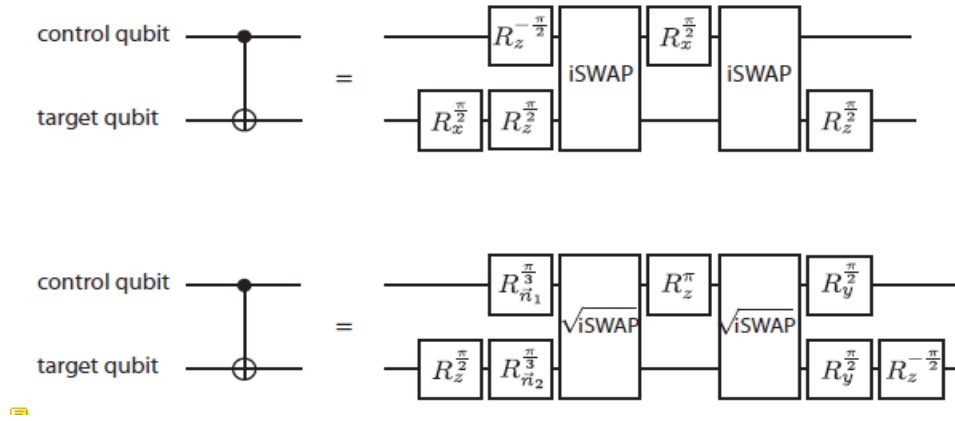
Η υλοποίηση της $c\text{NOT}$ με την παραπάνω Χαμιλτονιανή δεν είναι άμεση με απλή χρονική εξέλιξη. Αντιθέτως, είναι πιο βολικό να δημιουργήσουμε τις $i\text{SWAP}$ και $\sqrt{i\text{SWAP}}$ θέτοντας σε λειτουργία την XY αλληλεπίδραση για χρόνο $t = \hbar\pi/E_{1,2}^{XY}$, ο τελεστής της $i\text{SWAP}$ είναι:

$$(4.35) \quad U_{i\text{SWAP}} = \exp \left[-i H_{1,2}^{XY} \frac{\pi}{E_{1,2}^{XY}} \right] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Επιπλέον, εάν χρησιμοποιηθούν δυο i SWAP πύλες, θα έχουμε:

$$(4.36) \quad U_{cNOT} = \left[\mathbb{1}^{(1)} \oplus R_x^{(2)} \left(\frac{\pi}{2} \right) \right] \left[R_z^{(1)} \left(-\frac{\pi}{2} \right) \oplus R_z^{(1)} \left(\frac{\pi}{2} \right) \right] U_{iSWAP} \left[R_x^{(1)} \left(\pi/2 \right) \oplus \mathbb{1}^{(2)} \right] U_{iSWAP} \left[\mathbb{1}^{(1)} \oplus R_z^{(2)} \left(\frac{\pi}{2} \right) \right]$$

το οποίο φαίνεται στο κβαντικό κύκλωμα του Σχήματος 4.7.



Σχήμα 4.7 Σχεδιασμός κυκλώματος για την κατασκευή της $cNOT$ από την $iSWAP$ ή από την \sqrt{iSWAP} πύλη, Όταν η αλληλεπίδραση XY είναι εφικτή (και όχι η ZZ), τότε υλοποιούνται πρώτα οι πύλες $iSWAP$ και η \sqrt{iSWAP} και μετά με τοπικούς μετασχηματισμούς μπορεί να δημιουργηθεί η $cNOT$.

Παρόμοια, η ίδια XY αλληλεπίδραση μπορεί να τεθεί σε λειτουργία για το μισό χρόνο $t = \hbar\pi/2E_{1,2}^{XY}$, η οποία δίνει την \sqrt{iSWAP} πύλη:

$$(4.37) \quad U_{\sqrt{iSWAP}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & i\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & i\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Εάν παίρνουμε δύο \sqrt{iSWAP} πύλες για να κατασκευάσουμε μία $cNOT$ πύλη με δυο περιστροφές του κβαντοδυσφίου

$$(4.38) \quad U_{cNOT} = e^{\frac{i\pi}{4} R_z^{(2)}} \left(\frac{\pi}{2} \right) R_{\vec{n}_1}^{(1)} \left(\frac{\pi}{3} \right) R_{\vec{n}_2}^{(2)} \left(\frac{\pi}{3} \right) \sqrt{iSWAP} R_z^{(1)}(\pi) \sqrt{iSWAP} [R_y^{(1)}(\pi/2) \oplus R_y^{(2)}(\pi/2)] R_z^{(2)}(-\pi/2)$$

όπου: $\vec{n}_1 = (1,1,-1)/\sqrt{3}$ και $\vec{n}_2 = (-1,1,1)/\sqrt{3}$.

Η κατασκευή της cNOT σε όρους της \sqrt{iSWAP} και της $iSWAP$ μπορεί να χρειαστεί αρκετό χρόνο προκειμένου να προετοιμαστούν οι μη τοπικοί τελεστές και οι σχετικές αλληλεπιδράσεις. Η περιστροφή ενός κβαντοδυφίου είναι συνήθως ευκολότερη. Ο χρόνος που χρειάζεται προκειμένου να προετοιμαστεί κάποια από τις δυο πύλες εξαρτάται από την ικανότητα να θέτουμε με πολύ γρήγορο ρυθμό την αλληλεπίδραση σε λειτουργία (ή και όχι).

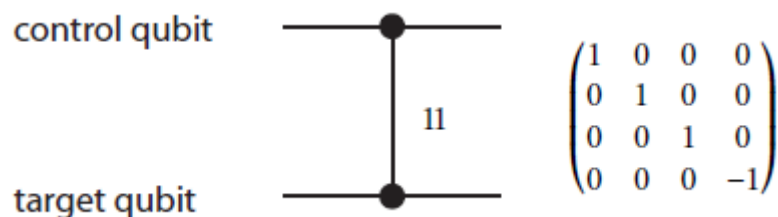
➤ **Υλοποίηση κβαντικής πύλης ελεγχόμενης μετατόπισης φάσης.**

Μία ιδιαίτερη αλληλεπίδραση που εμφανίζεται σε πολλές πειραματικές δομές, όπως είναι ο πυρηνικός μαγνητικός συντονισμός (NMR) και τα υπεραγώγιμα κβαντοδυφία, είναι η ZZ -αλληλεπίδραση. Στην περίπτωση αυτή η Χαμιλτονιανή αλληλεπίδρασης που υπάρχει μεταξύ των δυο κβαντοδυφίων είναι:

$$(4.39) \quad H_{1,2}^{ZZ} = \frac{E_{1,2}^{ZZ}}{4} \sigma_Z^{(1)} \otimes \sigma_Z^{(2)}$$

Αυτή η αλληλεπίδραση δημιουργεί το μοναδιαίο μετασχηματισμό μέσω της χρονικής εξέλιξης που δίνεται από την σχέση:

$$(4.40) \quad U_{1,2}^{ZZ} = \exp [-iH_{1,2}^{ZZ}t].$$



Σχήμα 4.8: Κυκλωματική αναπαράσταση της πύλης c -Phase. Η c -Phase πύλη συχνά αναγράφεται και ως $cU_{i,j}$. Και τα δύο κβαντοδυφία στην περίπτωση αυτή συμβολίζονται με ένα μαυρισμένο κύκλο, και η υπολογιστική βάση η οποία ανεβάζει την -1 φάση γράφεται ως ij . Στην περίπτωση αυτή έχουμε $ij=11$.

Αν θέσουμε σε λειτουργία την αλληλεπίδραση για χρόνο $t = \hbar\pi/E_{1,2}^{ZZ}$ τότε ο αντίστοιχος μετασχηματισμός θα είναι:

$$(4.41) \quad U_{1,2}^{ZZ} = \exp [i\pi/4] \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Αυτός ο μοναδιαίος τελεστής μπορεί να συνδυαστεί με την περιστροφή γύρω από τον άξονα z του κάθε κβαντοδυφίου, $R_z^{(1)}(-\frac{\pi}{2})$ και $R_z^{(2)}(\frac{\pi}{2})$ και έτσι καταλήγουμε στην πύλη c -Phase:

$$(4.42) \quad cU_{1,1} = \left[R_z^{(i)}(-\frac{\pi}{2}) \otimes R_z^{(j)}(-\frac{\pi}{2}) \right] U_{i,j}^{ZZ} = \exp \left[\frac{i\pi}{4} \right] \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Συγκεκριμένα η πύλη c -Phase αντιστοιχεί σε μετατόπιση της φάσης κατά π προς την διεγερμένη κατάσταση του κβαντοδυφίου στόχος, όταν το κβαντοδυφίο ελέγχου βρίσκεται στην διεγερμένη κατάσταση $|1\rangle$. Χρησιμοποιώντας την περιστροφή γύρω από τον άξονα z για κάθε κβαντοδυφίο, μπορούμε να δημιουργήσουμε οποιαδήποτε άλλη c -Phase πύλη θέλουμε:

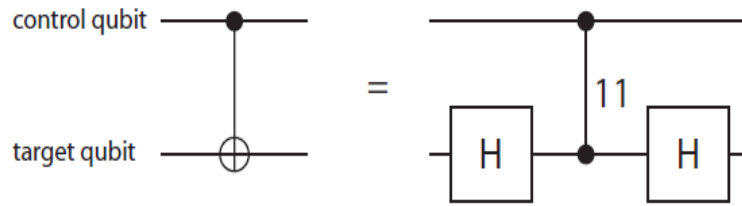
$$(4.43) \quad cU_{1,0} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad cU_{0,1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$(4.44) \quad cU_{0,0} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Η πύλη c NOT και η πύλη c -Phase συνδέονται στενά, με την κύρια διαφορά τους να έγκειται στην κατά μία περιστροφή ενός κβαντοδυφίου. Η πύλη c NOT μπορεί να δημιουργηθεί (Σχήμα 4.9) από την πύλη c -Phase χρησιμοποιώντας την πύλη Hadamard πάνω στο κβαντοδυφίο στόχος:

$$(4.45) \quad U_{cNOT} = H^{(2)} cU_{11} H^{(2)}$$

Ως εκ τούτου, αν και αρκετοί κβαντικοί αλγόριθμοι έχουν γραφτεί με όρους του τελεστή c NOT, δεν είναι δύσκολο να μετατραπούν αυτές οι ακολουθίες σε όρους της c -Phase.

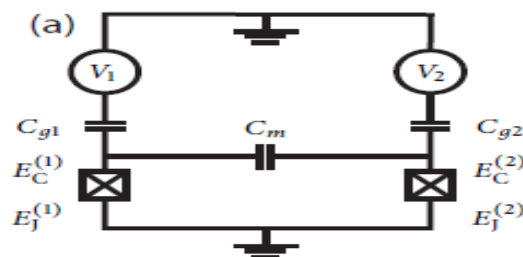


Σχήμα 4.9: Κυκλώματα που αναπαριστούν μία *cNOT* και μία *c-Phase* πύλη. Η *cNOT* πύλη μπορεί αρκετά εύκολα να δημιουργηθεί από την *c-Phase* πύλη, δρώντας μία πύλη *Hadamard* στο κβαντοδυφίο στόχος πριν και μετά.

Παραδείγματα θα βρεθούν στις έρευνες του Grover και στον αλγόριθμο Deutsch-Jozsa, όπου και θα συζητήσουμε αργότερα. Συγκεκριμένα αναφέρουν την πύλη *c-Phase* ως μια περισσότερη φυσική και αποτελεσματική πύλη εν συγκρίσει με την *cNOT*. [6]

4.4.2 Αλληλεπίδραση κβαντοδυφίων μέσω σύζευξης με πυκνωτή.

Ένας τρόπος να γίνει σύζευξη μεταξύ δυο κβαντοδυφίων φορτίου, τα οποία έχουν ενέργειες Josephson E_{J1} και E_{J2} και ενέργειες φορτίου E_{C1} και E_{C2} , είναι να συνδεθεί μεταξύ τους ένας πυκνωτής με χωρητικότητα C_m (Σχήμα 4.9).



Σχήμα 4.10: Κυκλωματικές διατάξεις αναπαράστασης της σύζευξης μεταξύ των κβαντοδυφίων φορτίου. α) Τα δυο CPB κυκλώματα ενώνονται μεταξύ τους μέσω πυκνωτή χωρητικότητα C_m .

Η Χαμιλτονιανή για την σύζευξη μεταξύ των δύο κβαντοδυφίων είναι:

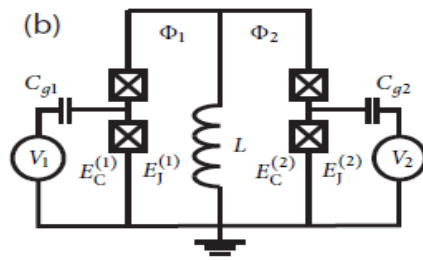
$$(4.46) \quad H = \begin{pmatrix} E_{00} & -\frac{1}{2}E_{J1} & -\frac{1}{2}E_{J2} & 0 \\ -\frac{1}{2}E_{J1} & E_{10} & 0 & -\frac{1}{2}E_{J2} \\ -\frac{1}{2}E_{J2} & 0 & E_{01} & -\frac{1}{2}E_{J1} \\ 0 & -\frac{1}{2}E_{J2} & -\frac{1}{2}E_{J1} & E_{11} \end{pmatrix}$$

με: $E_{n_1 n_2} = E_{C1} (n_{g1} - n_1)^2 + E_{C2} (n_{g2} - n_2)^2 + E_m (n_{g1} - n_1)(n_{g2} - n_2)$. Τα n_1 και n_2 είναι ο αριθμός των Cooper pairs στα δύο CPB και τα n_{g1} και n_{g2} είναι οι πύλες φορτίων. Η ενέργεια χωρητικότητας δίνεται από την σχέση:

$$(4.47) \quad E_m = \frac{4e^2 C_m}{(C_{\Sigma 1} C_{\Sigma 2} - C_m^2)}$$

Οι τέσσερις καταστάσεις που χρησιμοποιούνται ως υπολογιστική βάση είναι οι $|n_1, n_2\rangle$ με $n_1, n_2 \in 0,1$. Αυτός ο τύπος αλληλεπίδρασης που χρησιμοποιεί μια γραμμική χωρητικότητα, μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την προετοιμασία ενός τελεστή ελέγχου όπως είναι η πύλη cNOT. Τα διαγώνια στοιχεία της Χαμιλτονιανής (εξίσωση 4.47) μας δείχνουν την παρουσία μια πύλης ελέγχου ZZ. Ο τελεστής ελέγχου αυτό που επιτυγχάνει είναι την μετατροπή της $|0,0\rangle$ στην $|0,1\rangle$ κατάσταση αλλά δεν καταφέρνει την ίδια μετατροπή για τις καταστάσεις $|1,0\rangle$ στις $|1,1\rangle$.

4.4.3 Αλληλεπίδραση κβαντοδυφίων μέσω σύζευξης με πηνίο.



Σχήμα 4.11: Κυκλωματικές διατάξεις αναπαράστασης της σύζευξης μεταξύ των κβαντοδυφίων φορτίου. b) Τα δυο CPB κυκλώματα ενώνονται μεταξύ τους μέσω πηνίου με αυτεπαγωγή L

Ένας άλλος τρόπος για την επίτευξη σύζευξης μεταξύ των κβαντοδυφίων φορτίου είναι μέσω ενός πηνίου μεταξύ των δύο κβαντοδυφίων. Το πηνίο, με αυτεπαγωγή L , και η χωρητικότητα των κβαντοδυφίων φορτίου θα συζευχθούν με τέτοιο τρόπο που θα δημιουργήσουν ένα γενικευμένο κύκλωμα LC.

Θέτοντας στο βρόγχο του δεύτερο κβαντοδυφίου (Σχήμα 4.10) να υπάρχει ροή $\Phi_2 = \frac{\Phi_0}{2}$ και gate voltage $V_2 = \frac{(2n_{g2}+1)e}{C_{g2}}$ το κβαντοδυφίο στην αριστερή μεριά μπορεί να περιγραφεί από τη Χαμιλτονιανή:

$$(4.48) \quad H = \frac{1}{2}E_{C1}(1 - n_{g1})\sigma_z^{(1)} - E_{J1}(\Phi_1, \tilde{\Phi}, L)\sigma_x^{(1)}$$

με $n_{g1} = \frac{C_{g1}V_{g1}}{e}$ και η ενέργεια Josephson να μπορεί να ελεγχθεί μέσω της εξωτερικής ροής στη κοινή αυτεπαγωγή $\tilde{\Phi}$ και μέσω της τοπικής ροής Φ_1 . Στην περίπτωση που υπάρχει μια ροή διαφορετική της $\frac{\Phi_0}{2}$ δημιουργείται μια ξεχωριστή αλληλεπίδραση μεταξύ των δυο κβαντοδυφίων. Λόγο της ύπαρξης ρεύματος ίσου με: $I = I_1 + I_2$ στο κοινό πηνίο υπάρχει σύζευξη που δίνεται από τη Χαμιλτονιανή:

$$(4.49) \quad H = \frac{1}{2}L(I_1 + I_2)^2,$$

με το ρεύμα που ρέει το κάθε βρόγχο του CPB:

$$(4.50) \quad I_{1(2)} = 2I_{C1(2)}\cos\varphi_{1(2)}\sin\left(\pi\frac{\Phi_1+\Phi_2+L(I_1+I_2)}{\Phi_0}\right)$$

Κανονίζοντας το φορτίο της εξωτερικής πύλης έτσι ώστε τα δυο επίπεδα φορτίων να είναι εκφυλισμένα στο $n_{g1} = n_{g2} = 1/2$ για το κάθε κβαντοδυφίο, η παραπάνω Χαμιλτονιανή μπορεί να αντιστοιχηθεί σε μια Χαμιλτονιανή ως εξής:

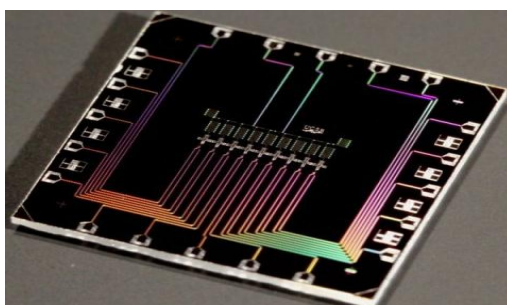
$$(4.51) \quad H = -E_{J1}\sigma_z^{(1)} - E_{J2}\sigma_z^{(2)} + P\sigma_z^{(1)}\sigma_z^{(2)}$$

Με την παραπάνω Χαμιλτονιανή μπορεί να υλοποιηθεί, όπως δείξαμε παραπάνω, οποιαδήποτε πύλη δυο κβαντοδυφίων.

Επίλογος

Στην παρούσα εργασία μελετήσαμε την υλοποίηση κβαντικών υπολογισμών σε κβαντικά υπεραγώγιμα κυκλώματα. Ξεκινήσαμε με μια ανασκόπηση των βασικών στοιχείων της Κβαντικής Θεωρίας Επεξεργασίας της Πληροφορίας. Αναλύσαμε τις έννοιες των κβαντοδυφίων, των κβαντικών πυλών και κάναμε μια ανασκόπηση σε κάποιους από τους βασικούς κβαντικούς αλγορίθμους. Κατόπιν παρουσιάσαμε τις σύγχρονες τεχνολογίες υλοποίησης βασισμένες σε διαφορετικά συστήματα, από ιόντα, NMR μέχρι και φωτόνια σε συστήματα cavity QED. Στην συνέχεια περιγράψαμε αναλυτικά την κβάντωση ηλεκτρικών κυκλωμάτων, τα βασικά στοιχεία της θεωρίας της υπεραγωγιμότητας όπως και της φυσικής των επαφών Josephson. Για την περίπτωση του κβαντοδυφίου φορτίου, γνωστά και ως Cooper pair box, μελετήσαμε αναλυτικά όλες τις περιοχές λειτουργίας τους. Σε συνάρτηση με τις απαιτήσεις για την δημιουργία αποτελεσματικών κβαντικών πυλών σε δύο bits, περιγράψαμε τις βέλτιστες περιοχές υλοποίησης σε διαφορετικές περιπτώσεις σύζευξης διεξοδικά.

Τα κβαντικά κυκλώματα από επαφές Josephson έχουν αποδειχθεί ως ιδανικά στοιχεία δημιουργίας κβαντοδυφίων με μεγάλους χρόνους διατήρησης της απαραίτητης συμφωνίας φάσης. Οι τελευταίες αναφορές από κορυφαίες ερευνητικές ομάδες και σε μεγάλα ερευνητικά ιδρύματα του εξωτερικού αλλά και σε εταιρείες με ενδιαφέρον στις κβαντικές τεχνολογίες όπως η Google, η Microsoft και άλλες δείχνουν ότι η κατασκευή ενός λειτουργικού υπεραγώγιμου κβαντικού επεξεργαστή δεν είναι μακριά.



Το τελευταίο κβαντικό τσιπάκι της Google αποτελείόμενο από 9 πλήρως λειτουργικά υπεραγώγιμα κβαντοδυφία Xmon. Με 50 λειτουργικά κβαντοδυφία μπορούν να τρέξουν κβαντικές διεργασίες που είναι αδύνατο να προσομοιωθούν σε οποιοδήποτε κλασσικό υπερυπολογιστή[1].

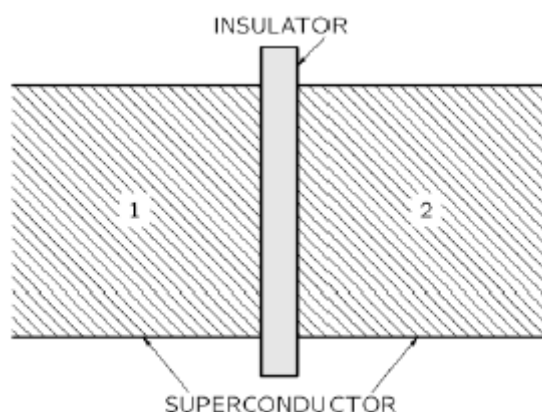
Παράρτημα

Ημικλασική περιγραφή επαφής Josephson

Η ποσοτική περιγραφή της επαφής που περιγράψαμε, ανακαλύφθηκε από τον Josephson, και μπορεί να περιγραφεί από τις ακόλουθες εξισώσεις:

$$(3.1) \quad i\hbar \frac{\partial \psi_1}{\partial t} = U_1 \psi_1 + K \psi_2$$

$$(3.2) \quad i\hbar \frac{\partial \psi_2}{\partial t} = U_2 \psi_2 + K \psi_1$$



Με ψ_1 και ψ_2 να αποτελούν το πλάτος εύρεσης του ηλεκτρονίου στις πλευρές 1 και 2 αντίστοιχα. Τα πλάτη αυτά δίνονται από τις σχέσεις:

$$(3.3) \quad \begin{aligned} \psi_1 &= \sqrt{n_1} e^{i\theta_1} \\ \psi_2 &= \sqrt{n_2} e^{i\theta_2} \end{aligned}$$

Τα θ_1 και θ_2 είναι οι φάσεις στις δύο πλευρές ενώ ρ_1 και ρ_2 είναι οι πυκνότητες φορτίου των ηλεκτρονίων στο υπεραγώγιμο υλικό.

Η σταθερά K που εμφανίζεται στις δυο εξισώσεις, αποτελεί την χαρακτηριστική ιδιότητα της επαφής. Συγκεκριμένα δηλώνει τη σύζευξη ανάμεσα στις δύο πλευρές της επαφής, γεγονός που μπορεί να φανερώσει και την ύπαρξη διαρροής από τη μία πλευρά στην άλλη.

Αν οι δυο πλευρές της επαφής είναι πανομοιότυπες, τότε το U_1 θα είναι ίσο με το U_2 και μπορούμε να το παραλείψουμε. Αλλά υποθέτουμε πως συνδέουμε τις δυο υπεραγώγιμες περιοχές με μια μπαταρία έτσι ώστε να υπάρχει μια διαφορά δυναμικού V δια μέσου της επαφής.

Στην περίπτωση αυτή θα ισχύει ότι $U_1 - U_2 = qV$ και οι παραπάνω εξισώσεις θα πάρουν τη μορφή:

$$(3.4) \quad i\hbar \frac{\partial \psi_1}{\partial t} = \frac{qV}{2} \psi_1 + K\psi_2$$

$$(3.5) \quad i\hbar \frac{\partial \psi_2}{\partial t} = -\frac{qV}{2} \psi_2 + K\psi_1$$

Στις εξισώσεις αντικαθιστούμε τα ψ_1 και ψ_2 με:

$$(3.6) \quad \psi_1 = \sqrt{\rho_1} e^{i\theta_1}$$

$$(3.7) \quad \psi_2 = \sqrt{\rho_2} e^{i\theta_2}$$

Ωστόσο γνωρίζουμε πως είναι περίπου ίσες, επομένως αρκεί να αντικαταστήσουμε τη πυκνότητα φορτίου των ηλεκτρονίων με ρ_0 . Θέτουμε με δ τη διαφορά φάσης $\theta_1 - \theta_2$. Από τη λύση των εξισώσεων προκύπτει ότι:

$$(3.8) \quad \dot{\theta}_1 = -\frac{1}{\hbar} K \sqrt{\frac{\rho_2}{\rho_1}} \cos \delta - \frac{qV}{2\hbar}$$

$$(3.9) \quad \dot{\theta}_2 = -\frac{1}{\hbar} K \sqrt{\frac{\rho_1}{\rho_2}} \cos \delta + \frac{qV}{2\hbar}$$

Από όπου παίρνουμε πως:

$$(3.10) \quad \dot{\delta} = \dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1 = \frac{qV}{\hbar}$$

και η διαφορά φάσης βρίσκεται με ολοκλήρωση των δύο μελών:

$$(3.11) \quad \delta(t) = \delta_0 + \frac{q}{\hbar} \int V(t) dt$$

Από την αντικατάσταση όμως προκύπτουν και οι εξισώσεις:

$$(3.12) \quad \dot{\rho}_1 = +\frac{2}{\hbar} K \sqrt{\rho_2 \rho_1} \sin \delta$$

$$(3.13) \quad \dot{\rho}_2 = -\frac{2}{\hbar} K \sqrt{\rho_2 \rho_1} \sin \delta$$

και παίρνουμε ότι το ρεύμα Josephson είναι:

$$J = J_0 \sin \delta$$

με: $\frac{2K\rho_0}{\hbar} = J_0$

Η εξίσωση στην οποία καταλήξαμε για το ρεύμα Josephson αποτελεί μία από τις βασικές εξισώσεις προκειμένου να περιγραφεί το dc φαινόμενο Josephson. Συγκεκριμένα μας δείχνει ότι το dc ρεύμα στην επαφή εξαρτάται από την διαφορά φάσης, δ , ανάμεσα στους δύο υπεραγωγούς. Το κρίσιμο ρεύμα, J_0 , είναι το μέγιστο ρεύμα που μπορεί να αντέξει μία επαφή Josephson, χωρίς να εμφανιστεί τάση. Όσο η τιμή του ρεύματος στην επαφή είναι κάτω της κρίσιμης θα υπάρχει μηδενική αντίσταση και απουσία τάσης.

Βιβλιογραφία

- [1]. Nielsen, M.A. and I.L. Chuang: Quantum Computation and Quantum Information: 10th Anniversary Edition. Cambridge University Press, 2010.
- [2]. N. D. Mermin, Quantum Computer Science. Cambridge University Press, Cambridge, 2007.
- [3]. Trachanas, Stefanos: Quantum Mechanics II. Crete University University Heraklio, Greece, 2008.
- [4]. MacMahon, D.: Quantum Computing Explained. Wiley, 2007.
- [5]. Poyatos J.F., Cirac J.I., Zoller P. (2000), From Classical to Quantum Computers. Quantum Computations with Trapped Ions, *Physica Scripta T* 86, pp. 72-75.
- [6]. Cold Atom, Ultracold quantum gases in optical lattices”. *Nature Physics* 1, 23 - 30 (2005)
- [7]. Jones J. A., Mosca M., & Hansen R. H., Implementation of a quantum search algorithm on a quantum computer, *Nature*, vol. 393, pp. 344-346, 1998. (NMR)
- [8]. A. Blais, R.-S. Huang, A. Wallraff, S. M. Girvin, and R. J. Schoelkopf, “Cavity quantum electrodynamics for superconducting electrical circuits: an architecture for quantum computation,” *Phys. Rev. A* 69, 062320 (2004).
- [9]. Ian Glendinning, The Bloch Sphere, February 16, 2005
- [10]. Shor, P.W.: Polynomial-Time Algorithms for Prime Factotization and Discrete Logarithms on a Quantum Computer.
- [11]. D. Deutsch, Quantum theory, the Church-Turing principle and the universal quantum computer, *Proc. Roy. Soc. London Ser. A*, 400 (1985) 96-117.
- [12]. Grover L. K., A fast quantum mechanical algorithm for database search, *Proceedings of the 28th Annual ACM Symposium on the Theory of Computing*, pp. 212-219, 1996.
- [13]. D. Deutsch and R. Jozsa (1992), Rapid solution of the problems by quantum computation, *Proc. Roy. Soc. London. A*, 439, pp. 669-677
- [14]. M. Devoret. *Quantum Fluctuations*.
- [15]. S. Girvin, Les Houches lectures, July 2011.
- [16]. N.K. Langford, Circuit QED lecture notes, University of London
- [17]. D. Loss and D. P. DiVincenzo, “Quantum computation with quantum dots,” *Phys. Rev. A* 57, 120 (1998).

- [18]. LN Cooper, Bound electron pairs in a degenerate Fermi gas, *Physical Review* 104,1189 (1956)
- [19]. John Clarke and Frank K. Wilhelm. Superconducting quantum bits. *Nature*, 453:1031–1042, 2008.
- [20]. Jens Koch, Terri M. Yu, Jay Gambetta, A. A. Houck, D. I. Schuster, J. Majer, Alexandre Blais, M. H. Devoret, S. M. Girvin, and R. J. Schoelkopf. Charge-insensitive qubit design derived from the Cooper pair box. *Phys. Rev. A*, 76:042319, 2007.
- [21]. L. S. Bishop, Circuit quantum electrodynamics. PhD thesis, Yale University, 2010.