

Πολυτεχνείο Κρήτης

Τμήμα Μηχανικών Ορυκτών Πόρων

Μεταπτυχιακή Εργασία

Υπολογισμός συντελεστή ευστάθειας πρανών με τη βοήθεια της Οριακής Ανάλυσης

Μπαραδάκης Ευπρέπιος

Μηχανικός Ορυκτών Πόρων

Επιτροπή

Γ. Εξαδάκτυλος, Καθηγητής (Επιβλέπων)

Ε. Στειακάκης, Επικ. Καθηγητής

Μ. Γαλετάκης, Αναπλ. Καθηγητής

ΧΑΝΙΑ, ΝΟΕΜΒΡΙΟΣ 2016

Οι απόψεις και τα συμπεράσματα που περιέχονται σε αυτό το έγγραφο, εκφράζουν τον συγγραφέα και δεν πρέπει να ερμηνευτεί ότι αντιπροσωπεύουν τις επίσημες θέσεις των εξεταστών.

Πίνακας Περιεχομένων

Πίνακας Περιεχομένων	3
Κατάλογος Σχημάτων	5
Κατάλογος Πινάκων	6
ΠΕΡΙΛΗΨΗ.....	7
ΕΙΣΑΓΩΓΗ	8
<u>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1:</u> Μέθοδοι Επίλυσης Προβλημάτων Ευστάθειας.....	9
1.1. Προσομοιώματα οριακής ισορροπίας	9
1.1.1. Πρανή μεγάλου μήκους με ομοιόμορφη κλίση	10
1.1.2. Πρανή περιορισμένου μήκους	11
1.1.3. Η μέθοδος Fellenius.....	14
1.1.4. Η απλοποιημένη μέθοδος Bishop	15
1.1.5. Η μέθοδος Taylor	15
1.1.6. Η απλοποιημένη μέθοδος Janbu	16
<u>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2:</u> Επίλυση Προβλημάτων Ευστάθειας με την Θεωρία της Πλαστικότητας.....	18
2.1. Θεώρηση Χρονικώς Ανεξάρτητης Συμπεριφοράς	19
2.2. Θεώρηση Ιδεατού Πλαστικού Υλικού	19
2.3. Καθορισμός Επιφάνειας διαρροής.....	20
2.4. Ελαστοπλαστικός διαχωρισμός της Τροπής.....	22
2.5. Νόμος της πλαστικής ροής.....	25
2.5.1. Νόμος πλαστικής ροής που συναρτάται με το κριτήριο Tresca.....	26
2.5.2. Νόμος πλαστικής ροής που συναρτάται με το κριτήριο Mohr – Coulomb	28
2.6. Πλαστικό έργο	30
<u>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3:</u> Μέθοδος Οριακής Ανάλυσης	38
3.1. Εφαρμογές του θεωρήματος του Κάτω Ορίου	41
3.1.1. Ευστάθεια κατακόρυφου πρανούς	41
3.2. Κινηματική μέθοδος σε προβλήματα ευστάθειας γεωκατασκευών.....	44
<u>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4:</u> Αλγόριθμος Επίλυσης της Ολίσθησης Επίπεδου Ομογενούς Πρανούς με την Μέθοδο του άνω Θεωρήματος της Οριακής Ανάλυσης.....	46
4.1. Εισαγωγή	46
4.2. Διακριτοποίηση	46
4.3. Εισαγωγή του συντελεστή ασφαλείας	47
4.4. Θεώρηση δισδιάστατης ανάλυσης	48
4.5. Οδογράφος.....	49
4.6. Υπολογισμός συντελεστή ασφαλείας	50
4.7. Κατάστρωση του προβλήματος	52
4.8. Αποτελέσματα	54
4.8.1. Μηχανισμός αστοχίας τριών σωμάτων	55
4.8.2. Μηχανισμός αστοχίας πέντε σωμάτων	56
4.8.3. Μηχανισμός αστοχίας επτά σωμάτων	56
4.8.4. Επίλυση με την μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων (Phase2 ver. 5)	57

4.8.5. Σύγκριση μεθόδων	59
4.8.6. Ανάδρομος υπολογισμός για μια τομή από την κατολίσθηση της Μαλακάσας.....	60
<u>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5:</u>	63
Συμπεράσματα – Προτάσεις.....	63
Βιβλιογραφία	64

Κατάλογος Σχημάτων

Σχήμα 1.1: Πρανές μεγάλου μήκους με υδατική ροή (Μ. Καββαδάς, Στοιχεία Εδαφομηχανικής, Ε.Μ.Π, Σεπτέμβριος 1996).....	11
Σχήμα 1.2: Μέθοδος των τομών. Τυπική τομή και ανάλυση δυνάμεων που επενεργούν σε κάθε τομή (Espinoza 1992).....	12
Σχήμα 1.3: Μέθοδος των λωρίδων (Bishop 1955).....	13
Σχήμα 1.4: Δυνάμεις σε μία λωρίδα (Espinoza 1992).....	14
Σχήμα 1.5: Συντελεστής ευστάθειας κατά Taylor.....	16
Σχήμα 1.6: Τιμές του n ως συνάρτηση του $\tan(\alpha)$ και $\tan(\phi_c) = \tan(\phi')/SF$, (Janbu 1973).....	17
Σχήμα 1.7: Μη κυκλική επιφάνεια αστοχίας – Δυνάμεις που ασκούνται σε μία τυπική λωρίδα (Janbu 1973)	17
Σχήμα 2.1: Περιοχές πλαστικής ροής κάτω από άκαμπτο αδρό θεμέλιο. Συνοχή εδάφους 500psf, γωνία εσωτερικής τριβής 20ο.....	18
Σχήμα 2.2: Διάγραμμα Τάσης – Τροπής ενός εδαφικού δοκιμίου	20
Σχήμα 2.3: Κριτήριο διαρροής υλικού για μια πολύποκη εντατική κατάσταση. Γεωμετρική παράσταση επιφάνειας διαρροής και συνηρημένου νόμου ροής (Chen W.E. 1975).....	21
Σχήμα 2.4: Απεικόνιση εντατικής κατάστασης με τον κύκλο του Mohr. Κριτήριο αστοχίας ή επιφάνεια διαρροής Coulomb.	22
Σχήμα 2.5: Εμφάνιση πλαστικής τροπής κατά την αποφόρτιση.	23
Σχήμα 2.6: Ελαστοπλαστικός διαχωρισμός της τροπής	24
Σχήμα 2.7: Γεωμετρική ερμηνεία της συνθήκης ομο-αξονικότητας τάσεων-παραμορφώσεων.	26
Σχήμα 2.8: Το κριτήριο Tresca στα επίπεδα (τ, σ) και ($d\gamma, d\epsilon$) δεχόμενοι την υπόθεση της «ομοαξονικότητας».....	26
Σχήμα 2.9: Εξάγωνο του Tresca, πάνω στο αποκλίνον επίπεδο.....	27
Σχήμα 2.10: Η κορυφή Α ως όριο μιας λείας (smooth) καμπύλης	27
Σχήμα 2.11: Κριτήριο M-C στο υδροστατικό επίπεδο τάσεων, τροπών.....	29
Σχήμα 2.12: Κριτήριο M – C στο αποκλίνον επίπεδο.	30
Σχήμα 2.13: Απλή κατακόρυφη θλίψη με αποτέλεσμα πλευρικής διαστολής.	31
Σχήμα 2.14: Απλή διατμητική παραμόρφωση	32
Σχήμα 2.15: Σχετική οριζόντια ολίσθηση άκαμπτων σωμάτων πάνω σε λεπτή λωρίδα.....	33
Σχήμα 2.16: Ομογενής παραμορφούμενες περιοχές σε υλικό Coulomb (α) Απλή διατμητική παραμόρφωση και (β) Κύκλος του Mohr(Chen, 1975, p. 69)	35
Σχήμα 2.17: Απλή διάτμηση με μεταβολή του πάχους ($\phi \neq 0$) (Chen, 1975, p. 56).....	36
Σχήμα 3.1: Τελείως πλαστικό υλικό που παραμορφώνεται σύμφωνα με το συνηρημένο νόμο πλαστικής ροής (associated flow rule) και συνθήκη καθετότητας.	40
Σχήμα 3.2: Η σχέση μεταξύ των προβλέψεων των οριακών θεωρημάτων της θεωρίας Πλαστικότητας.	41
Σχήμα 3.3: Λύση ισορροπίας κατακόρυφου πρανούς σε γεωυλικό που δεν μπορεί να παραλάβει εφελκυστικά φορτία.....	42
Σχήμα 3.4: Κύκλοι του Mohr και περιβάλλουσα αστοχίας του γεωυλικού με αποκοπή των εφελκυστικών τάσεων για το παράδειγμα του κατακόρυφου πρανούς. Οι θλιπτικές τάσεις λαμβάνονται θετικοί αριθμοί.	43
Σχήμα 4.1: Ομογενές πρανές με επιφάνεια ολίσθησης	47
Σχήμα 4.2: Αναπαράσταση πλαστικών ταχυτήτων σε μια επιφάνεια όταν ισχύει ο συνηρημένος νόμος ροής. Σε αυτή την περίπτωση το διάνυσμα της πλαστικής ταχύτητας έχει γωνία ϕ με την επιφάνεια και $\pi/2 - \phi$ με το κάθετο στην επιφάνεια επίπεδο. (Chen, Z. ., (2001)).....	48
Σχήμα 4.4.β: Διάγραμμα ροής αλγορίθμου εύρεσης συντελεστή ασφάλειας ομογενούς πρανούς	53

Σχήμα 4.5: Γεωμετρία ομογενούς πρανούς που ολισθαίνει σε κυκλική επιφάνεια ολίσθησης.	54
Σχήμα 4.6: Μηχανισμός αστοχίας τριών σωμάτων	55
Σχήμα 4.7: Μηχανισμός αστοχίας πέντε σωμάτων	56
Σχήμα 4.8: Μηχανισμός αστοχίας επτά σωμάτων	57
Σχήμα 4.9α: Διακριτοποίηση του «πρανούς σύγκρισης» με πεπερασμένα στοιχεία με το Phase2™. Εκτός από την επιφάνεια του πρανούς όλα τα άλλα σύνορα θεωρούνται ότι έχουν «πάκτωση».	58
Σχήμα 4.10β: Νεφόγραμμα της μέγιστης διατμητικής παραμόρφωσης και της μετατόπισης.	59
Σχήμα 4.11: Νεφόγραμμα των στοιχείων που αστόχησαν και της μετατόπισης.....	59
Σχήμα 4.12: Σχέση αριθμού διακριτοποίησης με τον συντελεστή ασφάλειας	60
Σχήμα 4.13:Χαρακτηριστική τομή κατολίσθησης Μαλακάσας από τις εργασίες Καβουνίδη, Σχοινιά.....	61

Κατάλογος Πινάκων

Πίνακας 3.1: Παραδοχές στατικής ισοροπίας στις μεθόδους οριακής ανάλυσης τομών.....	17
Πίνακας 6.1: Αποτελέσματα απο επίλυση σε περιβάλλον Slide ver. 5	54
Πίνακας 6.2: Αποτελέσματα αλγορίθμου για την περιοχή της Μαλακάσας.....	62

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στη συγκεκριμένη εργασία αναπτύσσεται αλγόριθμος υπολογισμού του συντελεστή ασφάλειας πρανούς με εφαρμογή της θεωρίας Οριακής Ανάλυσης της Ιδεατής Πλαστικότητας. Η προτεινόμενη μέθοδος είναι καλύτερη από τις μεθόδους Οριακής Ισορροπίας που δεν μπορούν να αποφύγουν τις παραδοχές για τις πλευρικές δυνάμεις μεταξύ των σωμάτων και συνεπώς και τα σφάλματα που σχετίζονται με αυτές τις παραδοχές. Κατ' αρχάς αναφέρονται οι βασικές αρχές της θεωρίας της Τέλειας Πλαστικότητας, και οι μέθοδοι που χρησιμοποιούν την υπόψη θεωρία. Στη συνέχεια γίνεται μια σύντομη περιγραφή αυτών των μεθόδων με ιδιαίτερη έμφαση στην μέθοδο Οριακής Ανάλυσης. Κατόπιν κατασκευάζεται αλγόριθμος επίλυσης ευστάθειας ενός ομογενούς και συνεχούς πρανούς με την μέθοδο Οριακής Ανάλυσης. Για την επαλήθευση της σωστής λειτουργίας του κώδικα που αναπτύχθηκε τα αποτελέσματα του συγκρίνονται με την επίλυση του ίδιου πρανούς από το λογισμικό πεπερασμένων στοιχείων Phase2® και το λογισμικό επίλυσης με Οριακή Ισορροπία Slide®. Τελικά εφαρμόζεται ο αλγόριθμος για την επίλυση της κατολίσθησης της Μαλακάσας το 1995.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Στην «Μηχανική του Παραμορφώσιμου Στερεού» υπάρχουν δύο τύποι προβλημάτων:

1. Τα Προβλήματα Ελαστικότητας
2. Τα Προβλήματα Ευστάθειας

Τα προβλήματα Ελαστικότητας πραγματεύονται την συμπεριφορά ενός υλικού όταν σε κανένα σημείο του η τάση δεν έχει ξεπεράσει κάποιο όριο, το όριο διαρροής του υλικού, και αντικειμενικός τους στόχος είναι η επίλυση προβλημάτων όπως η εύρεση παραμορφώσεων στο σύνορο του ανοίγματος μιας σήραγγας, η εύρεση τάσεων σε σημεία του εδάφους που βρίσκονται κάτω από ένα θεμέλιο ή πίσω από έναν τοίχο αντιστήριξης κλπ.

Τα προβλήματα Ευστάθειας πραγματεύονται με τις συνθήκες της οριστικής αστοχίας του υλικού, και αντικειμενικός τους στόχος είναι η εύρεση του φορτίου αστοχίας ενός γεωτεχνικού έργου. Προβλήματα παθητικής και ενεργητικής ώθησης, εύρεσης φέρουσας ικανότητας θεμελίου και ευστάθειας πρανών ανήκουν σε αυτή την κατηγορία.

Τα Προβλήματα Ελαστικότητας λύνονται με βάση τη θεωρία της Γραμμικής Ελαστικότητας η οποία βασίζεται στον νόμο του Hooke ο οποίος αποδίδει μια γραμμική σχέση μεταξύ τάσεων – τροπών. Η επίλυση με τη θεωρία της Γραμμικής Ελαστικότητας συνίσταται για περιπτώσεις μικρών τιμών των παραμορφώσεων.

Η επίλυση των Προβλημάτων Ευστάθειας βασίζεται στην θεωρία της τέλειας Πλαστικότητας η οποία δέχεται συνεχή παραμόρφωση για ένα σταθερό εντατικό πεδίο. Οι κυριότερες μέθοδοι που υλοποιούνται με βάση την παραπάνω θεωρία είναι:

1. Μέθοδοι οριακής ισορροπίας.
2. Μέθοδοι οριακής ανάλυσης.
3. Ελαστο-πλαστική επίλυση με πεπερασμένα στοιχεία.

Ένας ενδιάμεσος τύπος προβλημάτων που αποτελεί στην ουσία ένα ενδιάμεσο στάδιο μεταξύ των Προβλημάτων Ελαστικότητας και Ευστάθειας είναι τα προβλήματα *προοδευτικής αστοχίας* τα οποία πραγματεύονται με την μετάβαση του υλικού από ελαστικό σε πλαστικό δηλαδή από μια αρχικώς γραμμική ελαστική συμπεριφορά σε μια κατάσταση πλαστικής ροής.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1:

Μέθοδοι Επίλυσης Προβλημάτων Ευστάθειας

Η ανάλυση ευστάθειας πρανών λαμβάνει ευρεία προσοχή στην βιβλιογραφία εξαιτίας της πρακτική της σημασίας. Γενικά, υπάρχουν δύο βασικοί τύποι μεθόδων για την ανάλυση ευστάθειας πρανών, και άλλων γεωτεχνικών προβλημάτων ευστάθειας, η μέθοδος της οριακής ανάλυσης και η μέθοδος της οριακής ισορροπίας. Η μέθοδος της οριακής ανάλυσης μοντελοποιεί το έδαφος σαν τέλειο άκαμπτο πλαστικό υλικό που υπακούει έναν συσχετισμένο νόμο ροής. Δύο πλαστικά συνοριακά θεωρήματα άνω και κάτω ορίου μπορούν να αποδειχτούν με την θεώρηση της ιδεατής πλαστικής συμπεριφοράς του εδάφους (Drucker 1952) (W. Chen 1975). Τα συνοριακά θεωρήματα οριακής ανάλυσης είναι χρήσιμα όταν μπορούν να υπολογιστούν οι τιμές των φορτίων και με το άνω και με το κάτω όριο. Θεωρητικά η πραγματική τιμή βρίσκεται ανάμεσα στην τιμή του κάτω και του άνω ορίου.

1.1. Προσομοιώματα οριακής ισορροπίας

Οι μέθοδοι οριακής ισορροπίας βασίζονται στις εξισώσεις ισορροπίας των δυνάμεων και ροπών για μια προκαθορισμένη επιφάνεια ολίσθησης και ένα συγκεκριμένο μηχανισμό αστοχίας του πρανούς. Η εύρεση του συντελεστή ασφάλειας προκύπτει με την απομείωση της διατμητικής τάσης στην επιφάνειας ολίσθησης και στις διεπιφάνειες των διακριτών άκαμπτων σωμάτων (όπου υπάρχουν) που συνθέτουν την ολισθαίνουσα μάζα.

Η μέθοδος της οριακής ισορροπίας χρησιμοποιήθηκε παλαιότερα για πολλά χρόνια για την ανάλυση του προβλήματος ευστάθειας πρανών στην εδαφομηχανική. Αυτή η μέθοδος «δέχεται» ότι το έδαφος κατά την αστοχία του ακολουθεί το κριτήριο Mohr-Coulomb για μοντέλο εδάφους γραμμικά ελαστικό-τέλεια πλαστικό. Είναι καθαρά στατική μέθοδος με απλές παραδοχές και αγνοεί παντελώς τον πλαστικό (Sharma, Interactive slope analysis using Spencer's method. 1992) νόμο ροής του εδάφους. Συγκρινόμενη με την μέθοδο της οριακής ανάλυσης, έχει πιο απλές αρχές και διαδικασίες υπολογισμού. Ένα βασικό πλεονέκτημα αυτής της προσέγγισης είναι ότι προβλήματα με πολυστρωματικά εδάφη ή εδάφη με διαφοροποιήσεις των ιδιοτήτων τους και των φορτίσεων τους καθώς και εδάφη με προβλήματα διήθησης μπορούν να λυθούν εύκολα με την λύση των Sharma and Moudud (Sharma, Interactive slope analysis using Spencer's method. 1992) και Espinoza et. al (Espinoza 1992). Πολλές συγκρίσεις των μεθόδων οριακής ισορροπίας [(Whitman 1967); (Fredlund 1977); (Duncan 1980); Nash] δείχνουν ότι τεχνικές που ικανοποιούν όλες τις συνθήκες ισορροπίας στο σύνολο του μηχανισμού δίνουν παρόμοια αποτελέσματα. Μολονότι δεν ικανοποιεί όλες τις συνθήκες ισορροπίας στο σύνολο του μηχανισμού η απλοποιημένη μέθοδος του Bishop (Bishop 1955) δίνει παρόμοια αποτελέσματα. Εξαιτίας της απλότητάς της και της σχετικά καλής ακρίβειάς της, η μέθοδος τομών οριακής ισορροπίας που προτάθηκε από τον Bishop έχει χρησιμοποιηθεί ευρέως για τα προβλήματα ευστάθειας των πρανών για συνθήκες κορεσμένων και μη κορεσμένων εδαφών. Παρόλα αυτά, στην παραδοσιακή ανάλυση οριακής ισορροπίας, η ισορροπία δυνάμεων και ροπών όπως και το ευρέως χρησιμοποιούμενο κριτήριο αστοχίας Mohr-Coulomb δεν ικανοποιούνται ώστε να καταστήσουν την λύση καθορισμένη. Κάνοντας παραδοχές για τις δυνάμεις μεταξύ των τομών (κάνοντας παραδοχές για τις διευθύνσεις τους ή τις κατευθύνσεις τους) κάποιοι μελετητές καθορίζουν την λύση. Σύμφωνα με τον Espinoza et al (Espinoza 1992) οι παραδοχές που προτείνονται στην υπάρχουσα μέθοδος ανάλυσης της οριακής ισορροπίας μπορούν να ομαδοποιηθούν ως ακολούθως:

1. σε μεθόδους που έχουν την παραδοχή για την κατεύθυνση των συνολικών δυνάμεων μεταξύ των τομών
2. σε μεθόδους που έχουν την παραδοχή για την διεύθυνση της επιφάνειας αστοχίας μεταξύ των τομών
3. σε μεθόδους που έχουν παραδοχή για το σχήμα κατανομής των διατμητικών δυνάμεων

Διαφορετικές παραδοχές οδηγούν σε διαφορετικές κατανομές για τις δυνάμεις μεταξύ των τομών και του συντελεστή ασφαλείας, θέμα που μπορεί να δημιουργήσει μερικά πρακτικά προβλήματα. Ο μηχανικός που θα χρησιμοποιήσει αυτές τις μεθόδους θα πρέπει να έχει μια πλήρη κατανόηση των παραδοχών που χρησιμοποιούνται και των πρακτικών συνθηκών του προβλήματος ώστε να πετύχει την σωστή τιμή του συντελεστή ασφαλείας.

Πολλές από τις υπάρχουσες παραδοχές για τις δυνάμεις μεταξύ τομών δεν έχουν φυσικό ρεαλισμό και μερικές φορές τυχαίες παραδοχές για την κλίση των δυνάμεων και την διεύθυνση ή το σχήμα της κατανομής διατμητικών τάσεων της ανώτερης διεπιφάνειας μεταξύ των τομών υιοθετούνται για την ολοκλήρωση της ανάλυσης. Όπως ερευνήθηκε από τον Bishop, ο υπολογιζόμενος συντελεστής ασφαλείας στην ανάλυση ευστάθειας πρανών δεν διαφέρει σημαντικά με τις διαφοροποιήσεις των παραδοχών για τις δυνάμεις μεταξύ των διεπιφανειών των τομών.

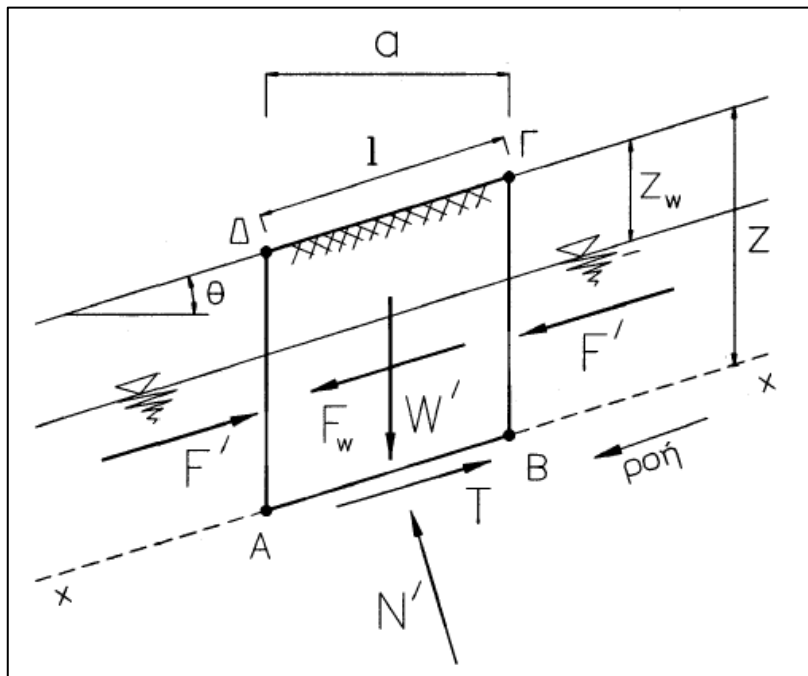
Εξάλλου μια ιδέα που συνεχώς γίνεται ευρύτερα αποδεκτή είναι ότι ο συντελεστής ασφαλείας είναι ευαίσθητος στις παραδοχές για την στατική δομή. Παρόλα αυτά, ο σκοπός των προβλημάτων για τα οποία παρουσιάζεται αυτή η ευαισθησία δεν είναι προφανής. Επιπλέον αρκετοί ερευνητές έχουν καταλήξει σε αντίθετα συμπεράσματα.

Για παράδειγμα, ο Don Leshchinsky (Leshchinsky 1990) επισημαίνει ότι μερικές φορές ο συντελεστής ασφαλείας που επιτυγχάνεται με ποικίλες παραλλαγές της στατικής δομής είναι σημαντικά χαμηλότερος από την μέθοδο Spencer, έτσι συμπέρανε ότι αυτός ο συντελεστής δεν είναι πάντα ευαίσθητος στις παραδοχές στατικής δομής. Η S. Yu (Yu. 1998) επίσης πιστεύει ότι η μέθοδος οριακής ισορροπίας μερικές φορές μπορεί να οδηγήσει σε σημαντικά λάθη, όταν στατικές ή κινηματικές παραδοχές παραβιάζονται στην μέθοδο.

Σε αυτό το σημείο θα κάνουμε μία σύντομη αναφορά στους ήδη υπάρχοντες μηχανισμούς αστοχίας πρανών, οι οποίοι χρησιμοποιούνται για την εύρεση του συντελεστή ασφαλείας, για δεδομένη γεωμετρία πρανούς.

1.1.1. Πρανή μεγάλου μήκους με ομοιόμορφη κλίση

Πρόκειται για περιπτώσεις κλιτύων κατά τις οποίες το μήκος τους είναι αρκετά μεγάλο έτσι ώστε να μπορούν να προσομοιωθούν ως απειρομήκεις. Στις περιπτώσεις αυτές το προσομοίωμα του πρανούς έχει τη μορφή που φαίνεται στο Σχ 1.1.



Σχήμα 1.1: Πρανές μεγάλου μήκους με υδατική ροή (Μ. Καββαδάς, Στοιχεία Εδαφομηχανικής, Ε.Μ.Π, Σεπτέμβριος 1996)

Ο συντελεστής ασφάλειας SF μιας τέτοιας περίπτωσης, όπου το εδαφικό υλικό έχει γωνία εσωτερικής τριβής ϕ , συνοχή c , ειδικό βάρος γ , και η πιθανή επιφάνεια αστοχίας είναι παράλληλη στην επιφάνεια του πρανούς, δίνεται από τη σχέση (Μ. Καββαδάς, Στοιχεία Εδαφομηχανικής, Ε.Μ.Π, Σεπτέμβριος 1996)

$$SF = \frac{\frac{c}{\cos^2 \theta} + (z(\gamma - \gamma_w) + Z_w \gamma_w) \tan \phi}{(z\gamma + Z_w \gamma_w) \tan \theta} \quad (1.1)$$

όπου

γ_w , ειδικό βάρος νερού

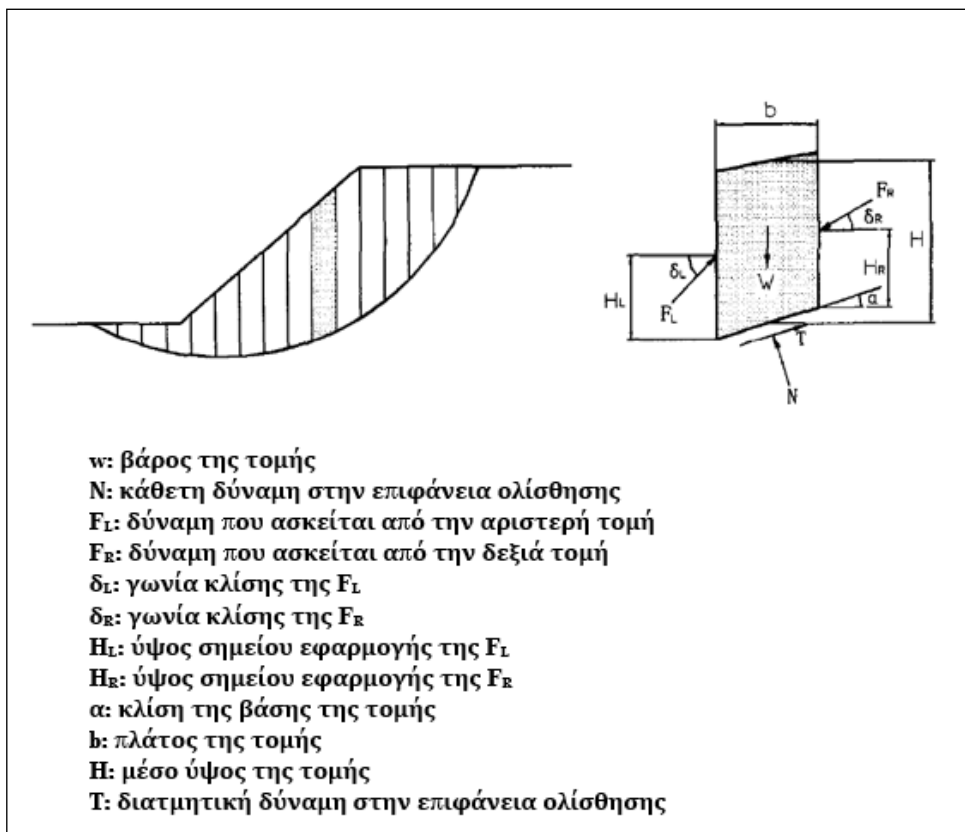
Z , βάθος ασταθούς ζώνης εδάφους

Z_w , βάθος νερού από την ελεύθερη επιφάνεια

θ , κλίση του πρανούς

1.1.2. Πρανή περιορισμένου μήκους

Για να κατανοήσουμε τον τρόπο εφαρμογής των παραδοσιακών μεθόδων οριακής ισορροπίας για τον καθορισμό της κατανομής των τάσεων γύρω από μια επιφάνεια ολίσθησης, πρέπει να μελετήσουμε τις δυνάμεις που δρουν σε μια τυπική τομή, όπως αυτές φαίνονται στο Σχ. 1.2.



Σχήμα 1.2: Μέθοδος των τομών. Τυπική τομή και ανάλυση δυνάμεων που επενεργούν σε κάθε τομή (Espinoza 1992)

Υποθέτουμε ότι υπάρχουν n τομές στο σύστημα που φαίνεται στο Σχ. 1.2. Γενικά, υπάρχουν $6n-2$ άγνωστοι. Είναι:

- 1 συντελεστής ασφαλείας
- n κάθετες δυνάμεις στην βάση των τομών
- n διευθύνσεις των κάθετων δυνάμεων
- n διατμητικές δυνάμεις στην βάση των τομών
- $n-1$ οριζόντιες δυνάμεις διεπιφανειών
- $n-1$ κάθετες δυνάμεις διεπιφανειών
- $n-1$ διευθύνσεις δυνάμεων των διεπιφανειών

Για κάθε τομή, μπορούν να καθορισθούν τέσσερις εξισώσεις, π.χ.,

- δύο εξισώσεις ισοροπίας δυνάμεων
- μια εξίσωση ισοροπίας ροπών
- μια εξίσωση κριτηρίου αστοχίας Mohr-Coulomb

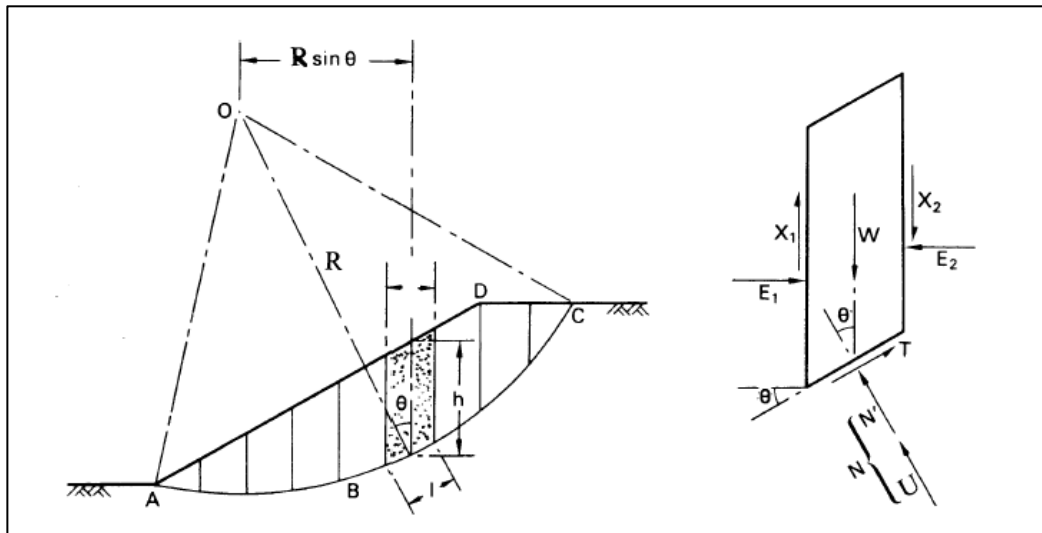
Για αυτό το λόγο, για μια ολισθαίνουσα μάζα με n τομές, $4n$ εξισώσεις μπορούν να δημιουργηθούν. Έτσι, $2n-2$ επιπλέον εξισώσεις χρειάζονται για την εύρεση όλων των αγνώστων. Είναι προφανές ότι το πρόβλημα είναι στατικά ακαθόριστο. Το πρόβλημα μπορεί να λυθεί μόνο κάνοντας κάποιες παραδοχές ώστε να μειώσουμε τον αριθμό των αγνώστων. Η ευρέως χρησιμοποιούμενη παραδοχή είναι ότι η κάθετη δύναμη στη βάση της τομής δρα στο μέσο οπότε μένουν $5n-2$ άγνωστοι.

Έτσι $2n-2$ παραδοχές χρειάζονται για τη λύση του προβλήματος. Η μέθοδος του Bishop αγνοεί την επίδραση των διατμητικών δυνάμεων των διεπιφανειών τείνοντας να χαρακτηριστεί λίγο

συντηρητική, αλλά στην ουσία χάνει σε μικρό βαθμό ακρίβεια. Οι Morgenstem και Price (Morgenstem 1967) δέχονται ότι οι εσωτερικές ενεργές διατμητικές δυνάμεις μπορούν να σχετισθούν με από μια τυχαία μαθηματική συνάρτηση $f(x)$ και έναν συντελεστή κλίμακας h . Αυτή η μέθοδος μπορεί να ικανοποιήσει ταυτόχρονα την ισορροπία δυνάμεων και ροπών. Παρόλα αυτά η συνάρτηση κατανομής $f(x)$ είναι τυχαία. Πέρα από αυτό, ακόμη και αν η συνάρτηση έχει επιλεγεί σωστά, υπάρχουν πολλά ζεύγη $f(x)$ και $A(h)$ που δίνουν λύσεις και θα πρέπει να αποφασίσουμε ποιο θα επιλεγεί. Ο Janbu (Janbu 1954) δέχεται ότι το ύψος της γραμμής δράσης (line of thrust) των δυνάμεων της διεπιφάνειας μπορεί να σχετισθεί με μια μαθηματική συνάρτηση $f(x)$ και έναν συντελεστή κλίμακας.

Από τις διάφορες μεθόδους της παραδοσιακής οριακής ισορροπίας, μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι όλες οι παραδοχές για τις δυνάμεις μεταξύ των διεπιφανειών έχουν μια τυχαία φύση, π.χ., στερούνται όλες φυσικού ρεαλισμού, πράγμα το οποίο οδηγεί σε μερικά λάθη όταν κάποιος χρησιμοποιεί αυτές τις μεθόδους για να υπολογίσει τον συντελεστή ασφαλείας.

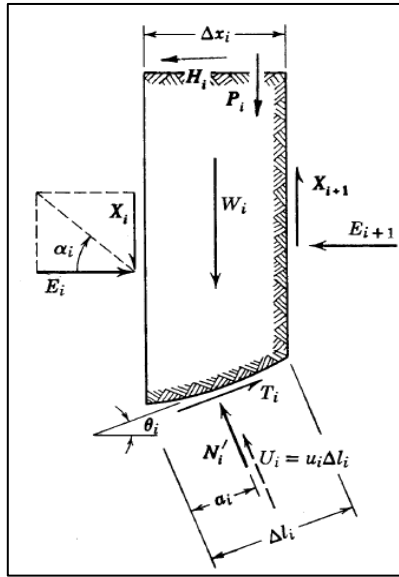
Στις περιπτώσεις κατά τις οποίες το κρίσιμο βάθος των επιπέδων αστοχίας Z δεν είναι πολύ μεγαλύτερο από το ύψος του πρανούς, έτσι ώστε να μπορούμε να θεωρήσουμε με καλή προσέγγιση ότι έχουμε την περίπτωση πρανών μεγάλου ύψους με ομοιόμορφη κλίση, η επιφάνεια αστοχίας δεν είναι παράλληλη στην επιφάνεια του εδάφους και θα πρέπει η ευστάθεια του πρανούς να μελετηθεί με μεθόδους που αφορούν πρανή περιορισμένου ύψους.



Σχήμα 1.3: Μέθοδος των λωρίδων (Bishop 1955).

Οι πιο συνηθισμένες μέθοδοι ανάλυσης με κυκλική επιφάνεια αστοχίας είναι οι μέθοδοι των λωρίδων. Κατά τις μεθόδους αυτές η εδαφική μάζα χωρίζεται σε κατακόρυφες λωρίδες. Ο συντελεστής ασφαλείας SF θεωρείται σταθερός σε όλες τις λωρίδες. Οι άγνωστοι του προβλήματος είναι για (n) λωρίδες:

- Οι πλήθους (n) ορθές ενεργές δυνάμεις (N'_i) στις βάσεις των λωρίδων.
- Οι πλήθους $(n-1)$ ορθές πλευρικές δυνάμεις (E_i) στις διεπιφάνειες μεταξύ των λωρίδων.
- Οι πλήθους $(n-1)$ γωνίες (α_i) , που επιτρέπουν τον υπολογισμό των διατμητικών πλευρικών δυνάμεων X_i .
- Ο άγνωστος συντελεστής ασφαλείας (F) , που επιτρέπει τον υπολογισμό των διατμητικών δυνάμεων (T_i) .



Σχήμα 1.4: Δυνάμεις σε μία λωρίδα (Espinoza 1992).

Δηλαδή, συνολικά οι άγνωστοι είναι $(3n-1)$ και οι διαθέσιμες εξισώσεις που διέπουν το πρόβλημα είναι $2n$ (εξισώσεις ισορροπίας δυνάμεων στους δύο άξονες) και μία εξίσωση ροπών της ολισθαίνουσας μάζας ως προς το κέντρο του κύκλου ολίσθησης. Συνολικά, δηλαδή έχουμε $(2n+1)$ εξισώσεις. Οι άγνωστοι του προβλήματος είναι $n-2$ περισσότεροι από τις εξισώσεις, έτσι χρειαζόμαστε επιπλέον παραδοχές για την επίλυση του προβλήματος.

Ο συντελεστής ασφάλειας SF, με βάση τα ανωτέρω, δίνεται από τη σχέση (Espinoza 1992).

$$SF = \frac{\sum_i (c_i \Delta \ell_i + N'_i \tan \phi_i)}{\sum_i (W_i + P_i) \sin \theta_i + \frac{1}{R} \sum_i H_i y_i} \quad (1.2)$$

Έτσι, εισάγοντας πρόσθετες ομάδες παραδοχών, προκειμένου να προσδιορίσουμε τις τιμές των N'_i , προκύπτει η αντίστοιχη τιμή του συντελεστή ασφάλειας SF. Παρακάτω αναφέρονται τρεις από τις πιο συνηθισμένες μεθόδους λωρίδων.

1.1.3. Η μέθοδος Fellenius

Η παραδοχή στη μέθοδο αυτή είναι ότι $\alpha_i = \theta_i$ στις $(n-1)$ διεπιφάνειες μεταξύ των λωρίδων, δηλαδή γίνονται $(n-1)$ παραδοχές, ενώ απαιτούνται $(n-2)$. Έτσι, δεν μπορούν να ικανοποιηθούν όλες οι εξισώσεις ισορροπίας, άρα και η λύση δεν είναι ακριβής.

Με βάση τις παραδοχές αυτές, η δύναμη N'_i σε κάθε λωρίδα προσδιορίζεται από την σχέση:

$$N'_i = (W_i + P_i) \cos \theta_i - H_i \sin \theta_i - u_i \Delta \ell_i \quad (1.3)$$

Έτσι, προσδιορίζονται οι τιμές των N'_i και από εκεί και η τιμή του συντελεστή ασφάλειας SF. Το σφάλμα στην εκτίμηση του συντελεστή ασφάλειας με τη μέθοδο αυτή είναι συνήθως της τάξης του 10-15% προς την πλευρά της ασφάλειας. Σε ορισμένες περιπτώσεις, όμως, μπορεί το σφάλμα να ξεπεράσει και το 50%, πάλι όμως προς την πλευρά της ασφάλειας δίνοντας τιμές του συντελεστή ασφάλειας μικρότερες από την πραγματική (Fellenius 1963).

1.1.4. Η απλοποιημένη μέθοδος Bishop

Κατά τη μέθοδο αυτή θεωρείται ότι $\alpha_i = 0$ στις (n-1) διεπιφάνειες μεταξύ των λωρίδων, δηλαδή, όμοια με πριν έχουμε περισσότερες παραδοχές από ότι χρειαζόμαστε, άρα εισάγουμε σφάλμα στον προσδιορισμό του συντελεστή ασφάλειας SF. Με βάση αυτήν την παραδοχή οι δυνάμεις N'_i προκύπτουν (Bishop 1955)

$$N'_i = \frac{(W_i + P_i) - u_i \Delta x_i - \frac{1}{F} c_i \Delta x_i \tan \theta_i}{\cos \theta_i \left(1 + \frac{1}{F} \tan \theta_i \tan \phi_i \right)} \quad (1.4)$$

Έτσι, προσδιορίζονται οι δυνάμεις N'_i και έπειτα ο συντελεστής ασφάλειας SF. Επειδή η σχέση (1.4) περιλαμβάνει τον συντελεστή ασφάλειας SF, η επίλυση απαιτεί δοκιμαστικές επαναλήψεις. Το πιθανό σφάλμα στην εκτίμηση του συντελεστή ασφάλειας, με την μέθοδο Bishop, είναι γενικά μικρότερο από το σφάλμα της μεθόδου Fellenious και πάλι όμως, προς την πλευρά της ασφάλειας.

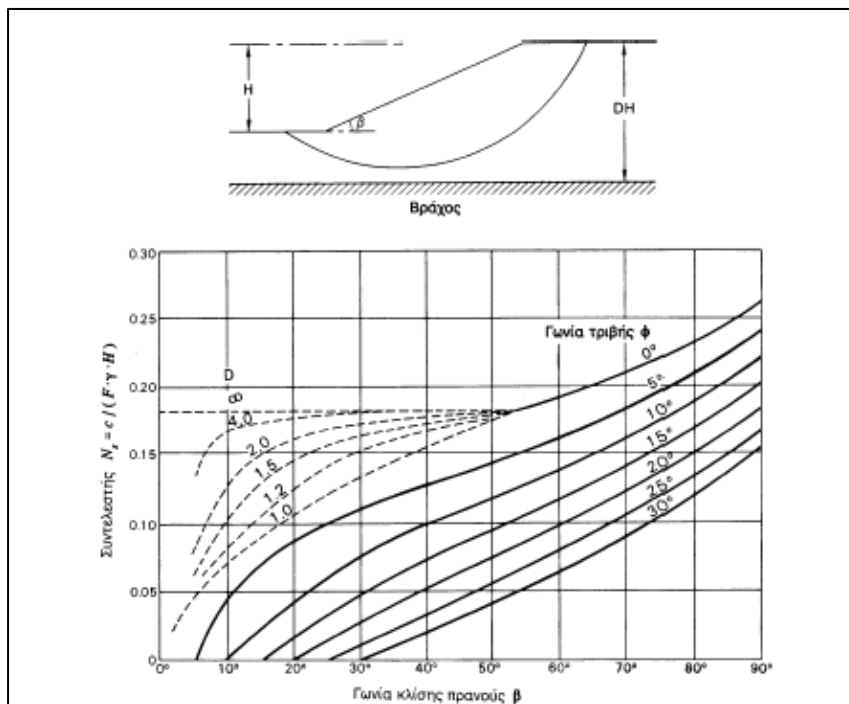
1.1.5. Η μέθοδος Taylor

Σύμφωνα με την μέθοδο αυτή, ο συντελεστής ασφάλειας SF προσδιορίζεται μέσω ενός νομογραφήματος (νομογράφημα Taylor), με το οποίο προσδιορίζεται ο συντελεστής ευστάθειας N_s . Ο συντελεστής ασφάλειας του πρανούς ορίζεται ως (Taylor, D. W., 1937)

$$SF = \frac{c}{N_s \gamma H} \quad (1.5)$$

και μπορεί να χρησιμοποιηθεί για ομοιόμορφα εδάφη χωρίς υδροφόρο ορίζοντα. Επίσης μπορεί να χρησιμοποιηθεί και για αστράγγιστες συνθήκες ($\phi = 0, c = c_u$).

Ο συντελεστής ασφάλειας SF που προσδιορίζεται παραπάνω αντιστοιχεί σε ένα κρίσιμο κύκλο ολίσθησης σύμφωνα με το Σχήμα 2.5.



Σχήμα 1.5: Συντελεστής ευστάθειας κατά Taylor.

1.1.6. Η απλοποιημένη μέθοδος Janbu

Ο Janbu (Janbu, Application of composite slip surface for stability analysis 1954) (Janbu 1973) ανέπτυξε μία μη κυκλική μέθοδο ανάλυσης ευστάθειας πρανών στην οποία εφαρμόζεται η εξίσωση ισορροπίας των δυνάμεων και όχι των ροπών. Όπως και στην μέθοδο Bishop, ο όρος ΔX αμελείται και ο συντελεστής ασφάλειας δίδεται από την κάτωθι εξίσωση, χρησιμοποιώντας επαναληπτική διαδικασία.

$$F_f = f_0 \left[\frac{\sum [c' + (p - u) \tan \phi'] / n_\alpha}{\sum p \tan \alpha} \right] \quad (1.6)$$

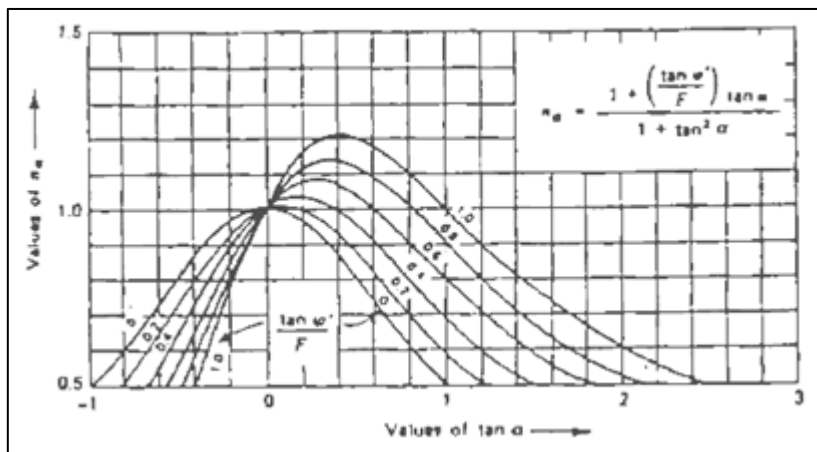
όπου

p η συνολική μέση κατακόρυφη πίεση στη βάση της λωρίδας

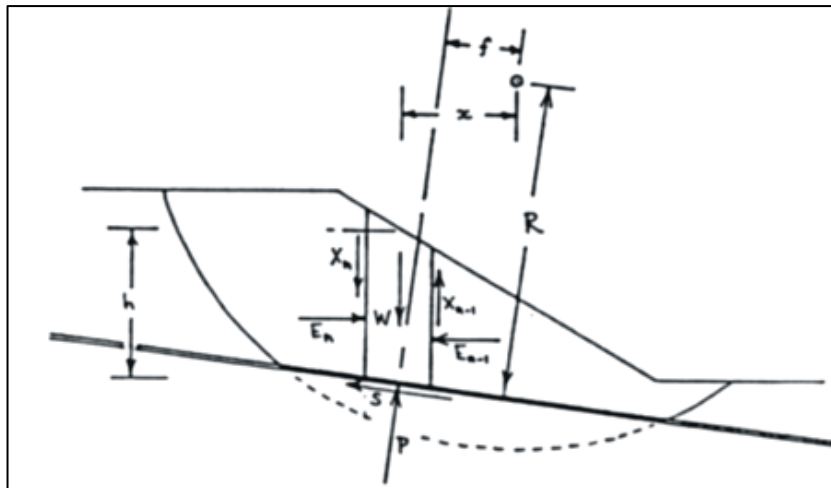
α η κλίση της βάσης της λωρίδας

$$n_\alpha = \left[1 + \frac{\tan \phi'}{F_f} \tan \alpha \right] \cos^2 \alpha \quad (1.7)$$

Ο συντελεστής f_0 είναι ένας συντελεστής εμπειρικής συσχέτισης που χρησιμοποιείται για να λάβει υπόψη του τις εσωτερικές δυνάμεις μεταξύ των λωρίδων. Εξαρτάται από την καμπυλότητα της επιφάνειας αστοχίας και από τις παραμέτρους του εδαφικού υλικού.



Σχήμα 1.6: Τιμές του n_α ως συνάρτηση του $\tan(\alpha)$ και $\tan(\phi_c) = \tan(\phi')/SF$, (Janbu 1973)



Σχήμα 1.7: Μη κυκλική επιφάνεια αστοχίας – Δυνάμεις που ασκούνται σε μία τυπική λωρίδα (Janbu 1973)

Στον κάτωθι πίνακα φαίνονται οι παραδοχές ως προς την ισορροπία δυνάμεων και ροπών που χρησιμοποιεί κάθε μέθοδος ισορροπίας που αναφέρθηκε παραπάνω.

Γενικά οι μέθοδοι οριακής ισορροπίας δίνουν μια καλή εκτίμηση για το ΣΑ αλλά παρουσιάζουν σφάλματα λόγω των εγγενών παραδοχών που περιέχουν για να υπολογιστούν οι δυνάμεις μεταξύ των σωμάτων της «αλυσίδας».

Πίνακας 1.1: Παραδοχές στατικής ισορροπίας στις μεθόδους οριακής ανάλυσης τομών

Μέθοδος	Ισορροπία Δυνάμεων		Ισορροπία Ροπών
	1η κατεύθυνση	2η κατεύθυνση	
Fellenius	Ναι	Όχι	Ναι
Απλοποιημένη Bishop	Ναι	Όχι	Ναι
Απλοποιημένη Janbu	Ναι	Ναι	Όχι
Spencer	Ναι	Ναι	Ναι

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2: Επίλυση Προβλημάτων Ευστάθειας με την Θεωρία της Πλαστικότητας

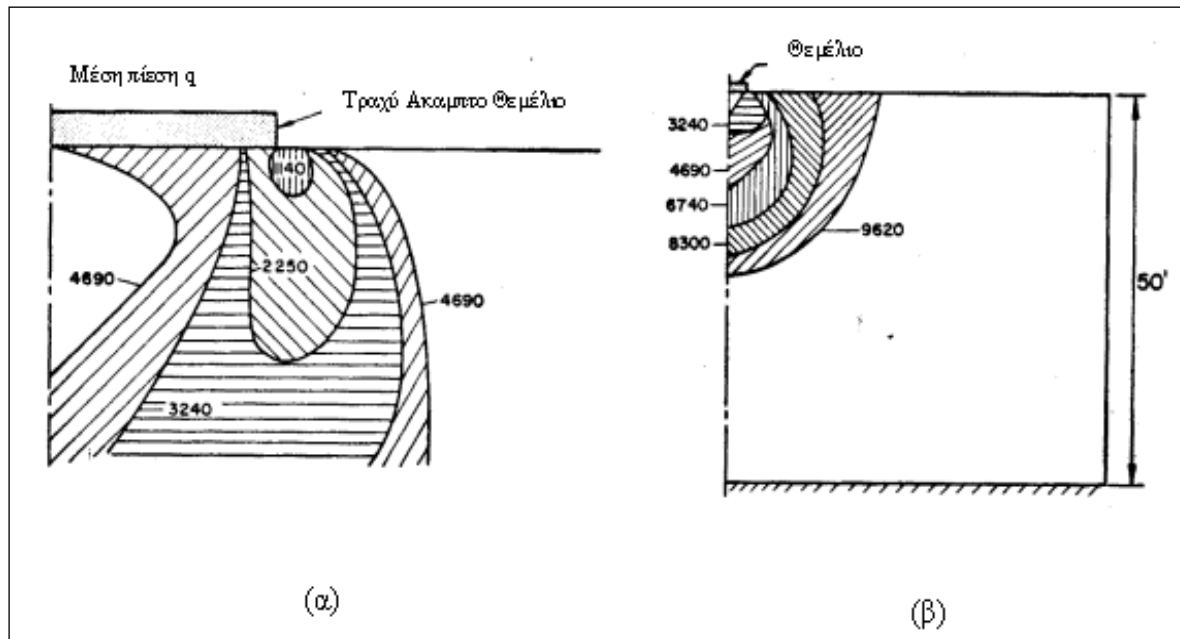
Η σχεδίαση ενός **γεωτεχνικού έργου** περιλαμβάνει δύο βασικά στάδια:

1. Τον καθορισμό της κατανομής των εσωτερικών δυνάμεων στα δομικά στοιχεία του έργου, τον καθορισμό δηλ. της κατανομής των τάσεων.

2. Τον καθορισμό της αντίδρασης του υλικού στην συγκεκριμένη εντατική κατάσταση.

Εφόσον η τάση είναι μικρότερη από κάποια καθορισμένη τιμή (όριο διαρροής του υλικού) η αντίδραση του υλικού είναι ελαστική, δηλ. η άρση των τάσεων έχει ως αποτέλεσμα την άρση των παραμορφώσεων (μη ύπαρξη παραμένουσας παραμόρφωσης). Εφόσον η τάση ξεπεράσει το όριο διαρροής το υλικό κατά την αποφόρτιση εμφανίζει παραμένουσες παραμορφώσεις και πλέον οι εξισώσεις ελαστικότητας δεν ισχύουν. Για τιμές του εντατικού πεδίου πάνω από το όριο διαρροής το υλικό παρουσιάζει μια συνεχή παραμόρφωση που μπορεί να οδηγήσει σε αστοχία της κατασκευής.

Η ανάλυση τέτοιων προβλημάτων βασίζεται στη θεωρία της Πλαστικότητας. Ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα μηχανισμού αστοχίας ενός γεωτεχνικού έργου (θεμέλιο) αποτελεί η εργασία του [Davidson \(1974\)](#).



Σχήμα 2.1: Περιοχές πλαστικής ροής κάτω από άκαμπτο αδρό θεμέλιο.
Συνοχή εδάφους 500psf, γωνία εσωτερικής τριβής 20ο.

Πρόκειται για περίπτωση στρώματος εδάφους το οποίο φορτίζεται από άκαμπτο θεμέλιο με τραχεία επιφάνεια επαφής. Η βάση του εδάφους θεωρείται επίσης άκαμπτη και τελείως τραχιά. Με την εφαρμογή πίεσης στο έδαφος από το θεμέλιο το έδαφος ξεκινά να αντιδρά με έναν καθαρά ελαστικό τρόπο. Θεωρητικά στις γωνίες του θεμελίου έχει ξεκινήσει πλαστική ροή εφόσον η ελαστική λύση στις γωνίες παρουσιάζει ιδιομορφία (πολύ μεγάλη συγκέντρωση τάσεων). Με την αύξηση του φορτίου οι τάσεις ξεπερνούν το όριο διαρροής του εδάφους και ξεκινούν να διαμορφώνονται περιοχές στις οποίες εμφανίζονται πλαστικές παραμορφώσεις. Όπως φαίνεται στο Σχ. 2.1 με την αύξηση του φορτίου επεκτείνονται οι περιοχές στις οποίες συμβαίνει πλαστική ροή. Σύμφωνα με την εργασία του Davidson η περιοχή πλαστικής ροής φθάνει στον άξονα συμμετρίας για φορτίο 0.15 MPa (3240 psi). Βέβαια αυτή η περιοχή

συγκρατείται από τις ελαστικές περιοχές που την περιβάλλουν. Αυτός ο τύπος ελαστοπλαστικής συμπεριφοράς ονομάζεται συγκρατημένη πλαστική ροή.

Με την αύξηση του φορτίου επεκτείνονται η περιοχή πλαστικής ροής όπως χαρακτηριστικά φαίνονται στο Σχ. 2.1, έως την πίεση των 0.46 MPa (9620 psi) κατά την οποία η πλαστική περιοχή έχει σημαντικό μέγεθος και το έδαφος πλέον συνεχίζει να παραμορφώνεται υπό σταθερή πίεση. Το φορτίο των 0.46 MPa (9620 psf) θεωρείται ως φορτίο αστοχίας του θεμελίου καθώς οποιαδήποτε αύξηση του όσο μικρή και αν είναι θα προκαλέσει την αστοχία του. Σε αυτό το σημείο οι εναπομείνουσες ελαστικές περιοχές του υλικού δεν επηρεάζουν την συμπεριφορά της κατασκευής.

Η λύση τέτοιων προβλημάτων κάνει χρήση της θεωρίας της Τέλειας (Ιδεατής) Πλαστικότητας. Η τεκμηρίωση ενός μοντέλου Ιδεατής Πλαστικότητας ακολουθεί τις εξής παραδοχές:

- Θεώρηση Χρονικώς Ανεξάρτητης Συμπεριφοράς.
- Θεώρηση Ιδεατού Πλαστικού Υλικού.
- Καθορισμός Επιφάνειας διαρροής.
- Ελαστοπλαστικός διαχωρισμός της Τροπής.
- Πλαστικός νόμος ροής.

2.1. Θεώρηση Χρονικώς Ανεξάρτητης Συμπεριφοράς

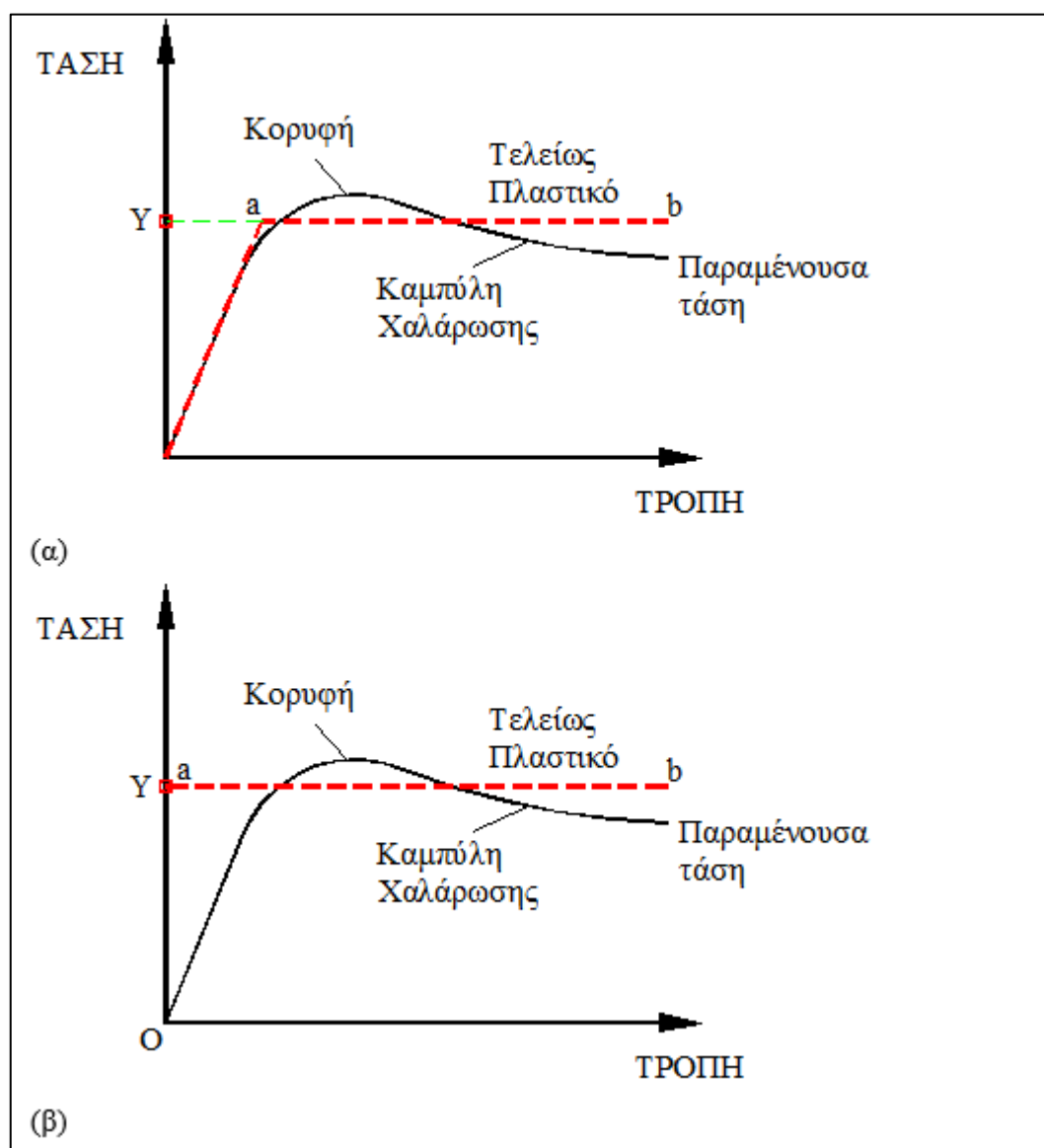
Στην παρούσα ανάλυση θα περιορισθούμε σε υλικά που συμπεριφέρονται με καλή προσέγγιση ως αμιγώς ανεξάρτητα της ταχύτητας παραμόρφωσης. Στην περίπτωση αυτή υποθέτουμε ότι οποιαδήποτε αλλαγή στην ταχύτητα φόρτισης, που αντιστοιχεί σε κάποιο μονοτόνως αύξοντα, τμηματικώς συνεχή μετασχηματισμό της χρονικής μεταβλητής, της μορφής,

$$t' = h(t) \quad h = \frac{dh}{dt} > 0 \quad (2.1)$$

αφήνει αναλλοίωτες τις καταστατικές εξισώσεις.

2.2. Θεώρηση Ιδεατού Πλαστικού Υλικού

Στο Σχ. 2.2 απεικονίζεται ένα τυπικό διάγραμμα τάσης – τροπής ενός εδαφικού υλικού. Για τα περισσότερα εδάφη η καμπύλη αυτή έχει ένα γραμμικό τμήμα που χαρακτηρίζει την γραμμικώς ελαστική συμπεριφορά του ακολουθούμενο από μια κορυφή (τάση αστοχίας) και στη συνέχεια μια χαλάρωση σε μια παραμένουσα τάση. Σε μια απλοποιημένη μελέτη της πλαστικής συμπεριφοράς ενός υλικού δεχόμαστε το υλικό είτε σαν ελαστικό – τελείως πλαστικό όπως φαίνεται στο Σχ. 2.2α από την καμπύλη Oab είτε αγνοώντας εντελώς την ελαστική περιοχή θεωρώντας ότι το υλικό ανταποκρίνεται σε μια συμπεριφορά άκαμπτου – τελείως πλαστικού όπως φαίνεται στο Σχ. 2.2β από την καμπύλη ab.



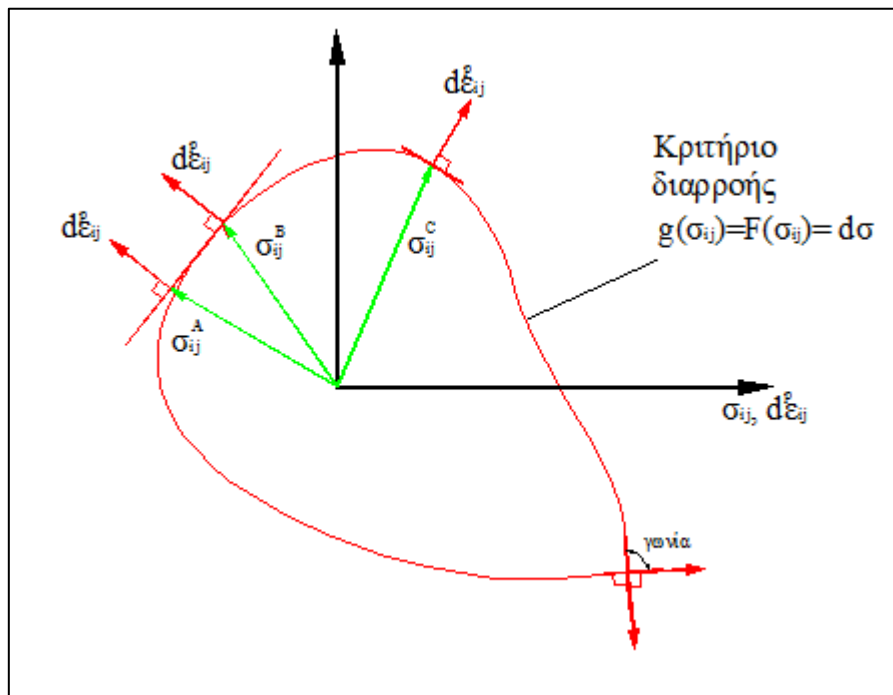
Σχήμα 2.2: Διάγραμμα Τάσης – Τροπής ενός εδαφικού δοκιμίου

Η παραπάνω υπόθεση αντιστοιχεί σε μια συμπεριφορά κατά την οποία για σταθερή εντατική κατάσταση το έδαφος παρουσιάζει μια συνεχή παραμόρφωση (πλαστική ροή). Έτσι το υλικό χαρακτηρίζεται από μια συμπεριφορά η οποία ονομάζεται ιδεατώς πλαστική ή τέλεια πλαστική. Η τάση διαρροής (Y βλ. Σχ.2.2) επιλέγεται σε ένα μέσο επίπεδο ενδιάμεσα από την τάση αστοχίας και την παραμένουσα τάση. Στα προβλήματα ευστάθειας αυτή η παραδοχή προσεγγίζει ικανοποιητικά την πραγματικότητα αφού η μέση μέγιστη διατμητική τάση σε όλη την επιφάνεια αστοχίας για ένα εδαφικό υλικό έχει τιμές μικρότερες από την τάση αστοχίας και μεγαλύτερες από την παραμένουσα τάση.

2.3. Καθορισμός Επιφάνειας διαρροής

Το διάγραμμα τάσης – τροπής που φαίνεται στο Σχ. 2.2 σχετίζεται με μια δοκιμή απλής διάτμησης. Είναι σημαντικό να μελετήσουμε την συμπεριφορά του εδάφους για μια πολύπλοκη εντατική κατάσταση (όπως φαίνεται και στο Σχ. 2.3) και συγκεκριμένα είναι απαραίτητο να

γνωρίζουμε την εντατική κατάσταση που προκαλεί την μετάβαση του υλικού από την ελαστική κατάσταση σε μια κατάσταση πλαστικής ροής. Αυτό το καθεστώς των τάσεων που οδηγεί το υλικό σε κατάσταση πλαστικής ροής ονομάζεται κριτήριο διαρροής (Συνθήκες Τέλειας Πλαστικότητας) και παριστάνεται γεωμετρικά με την καμπύλη του Σχ. 2.3.

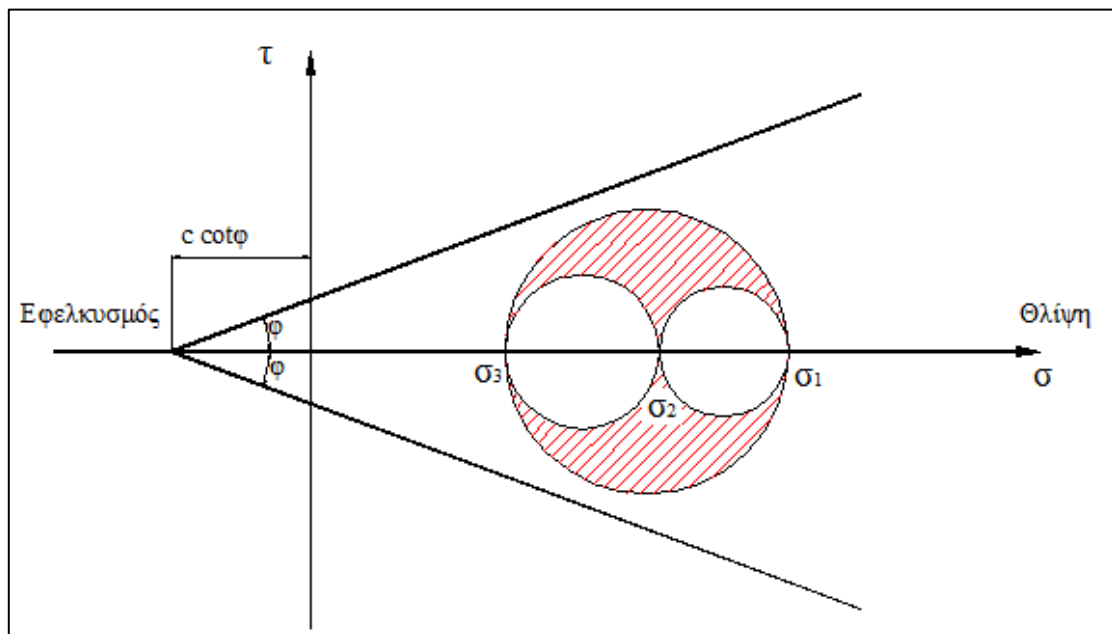


Σχήμα 2.3: Κριτήριο διαρροής υλικού για μια πολύποκη εντατική κατάσταση. Γεωμετρική παράσταση επιφάνειας διαρροής και συνηρημένου νόμου ροής (Chen W.E. 1975).

Γενικά δεχόμαστε ότι η πλαστική ροή λαμβάνει χώρα, όταν σε κάθε σημείο του εδαφικού υλικού η διατμητική τάση τ παίρνει την τιμή (ή μεγαλύτερη) που φαίνεται στην σχέση (2.2) όπου c, ϕ η συνοχή και γωνία εσωτερικής τριβής του εδάφους αντίστοιχα ενώ σ η ορθή τάση στο επίπεδο διάτμησης.

$$\tau = c + \sigma \tan \phi \quad (2.2)$$

Η παραπάνω εξίσωση προτάθηκε από τον [Coulomb \(1773\)](#). Οι παράμετροι του υλικού c, ϕ είναι χαρακτηριστικές παράμετροι που εκφράζουν την συνολική αντίσταση του εδαφικού υλικού στη διάτμηση.



Σχήμα 2.4: Απεικόνιση εντατικής κατάστασης με τον κύκλο του Mohr. Κριτήριο αστοχίας ή επιφάνεια διαρροής Coulomb.

Κάθε τρισδιάστατη εντατική κατάσταση μπορεί να απεικονισθεί από τον τανυστή των κυρίων τάσεων, οπότε η εξίσωση του Coulomb μπορεί να γραφεί συναρτήσει των κυρίων τάσεων ως εξής:

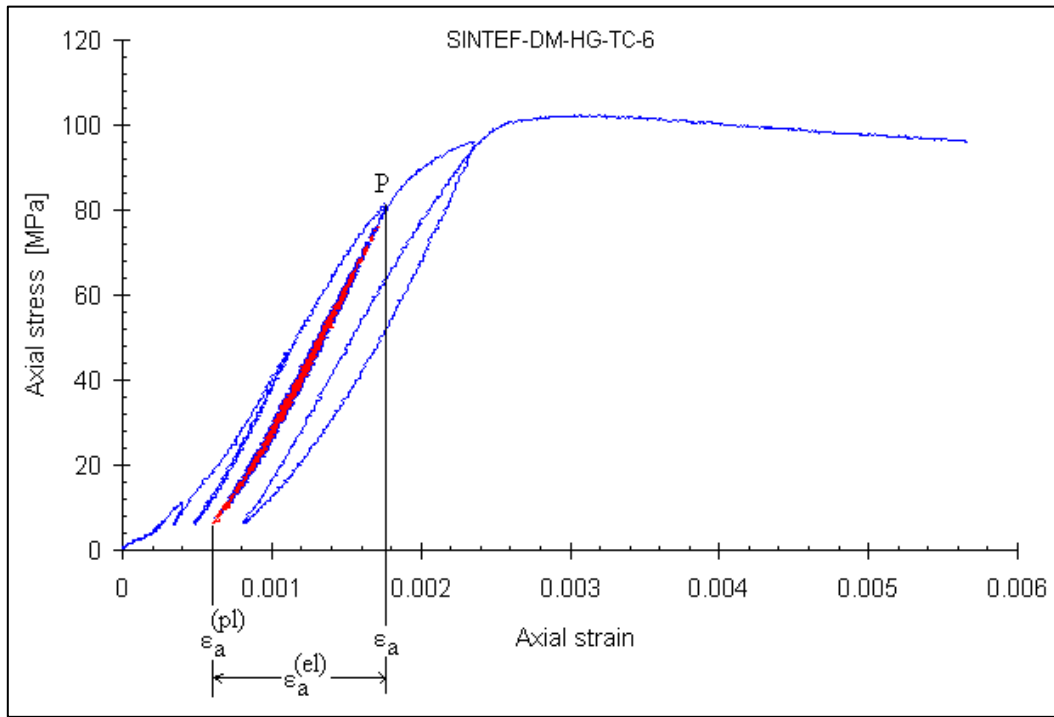
$$\sigma_1(1 - \sin \phi) - \sigma_3(1 + \sin \phi) - 2 \cdot c \cdot \cos \phi = 0 \quad (2.3)$$

Η απεικόνιση μιας τρισδιάστατης εντατικής κατάστασης είναι δυνατόν να επιτευχθεί χρησιμοποιώντας την έννοια του Mohr όπως φαίνεται στο Σχ. 2.4. Κάθε ζεύγος ορθής και διατμητικής τάσης που ασκείται σε κάθε επίπεδο σώματος βρίσκεται στην γραμμοσκιασμένη περιοχή του Σχ. 2.4. Στο ίδιο διάγραμμα φαίνεται και το κριτήριο αστοχίας του Coulomb. Η πλαστική ροή του εδάφους θα ξεκινήσει όταν και μόνο όταν ο μεγαλύτερος κύκλος αγγίξει το κριτήριο αστοχίας το οποίο για αυτό το λόγο είναι και επιφάνεια διαρροής F του υλικού και εκφράζεται από την σχέση.

$$F = \sigma_1(1 - \sin \phi) - \sigma_3(1 + \sin \phi) - 2 \cdot c \cdot \cos \phi = 0 \quad (2.4)$$

2.4. Ελαστοπλαστικός διαχωρισμός της Τροπής

Τα πετρώματα σπανίως συμπεριφέρονται σαν τέλεια ελαστικά υλικά. Ένα δοκίμιο δεν παρουσιάζει την ίδια συμπεριφορά μετά από την αποφόρτιση σε ένα σημείο A της καμπύλης αξονικής τάσης-αξονικής τροπής. Όταν φορτιστεί ξανά το δοκίμιο γενικώς ο κλάδος φόρτισης δεν θα ακολουθήσει τον κλάδο αποφόρτισης.



Σχήμα 2.5: Εμφάνιση πλαστικής τροπής κατά την αποφόρτιση.

Κατά την προσομοίωση θεωρείται ότι η πλαστική και η ελαστική τροπή είναι ξεχωριστές ποσότητες, έτσι ώστε ο τανυστής ε_{ij} μπορεί να εκφραστεί ως άθροισμα τους (αρχή διαχωριστικότητας):

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^e + \varepsilon_{ij}^p \quad (2.5)$$

Εφόσον στην πλαστικότητα δεν μπορεί να γίνει χρήση της πεπερασμένης τροπής εξαιτίας του γεγονότος ότι η συμπεριφορά των πραγματικών υλικών δεν εξαρτάται μόνο από την παρούσα τάση αλλά και από την ιστορία της φόρτισης που έχει υποστεί, χρησιμοποιείται ο ρυθμός της παραμόρφωσης:

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \dot{\varepsilon}_{ij}^{(el)} + \dot{\varepsilon}_{ij}^{(pl)} \quad (2.6)$$

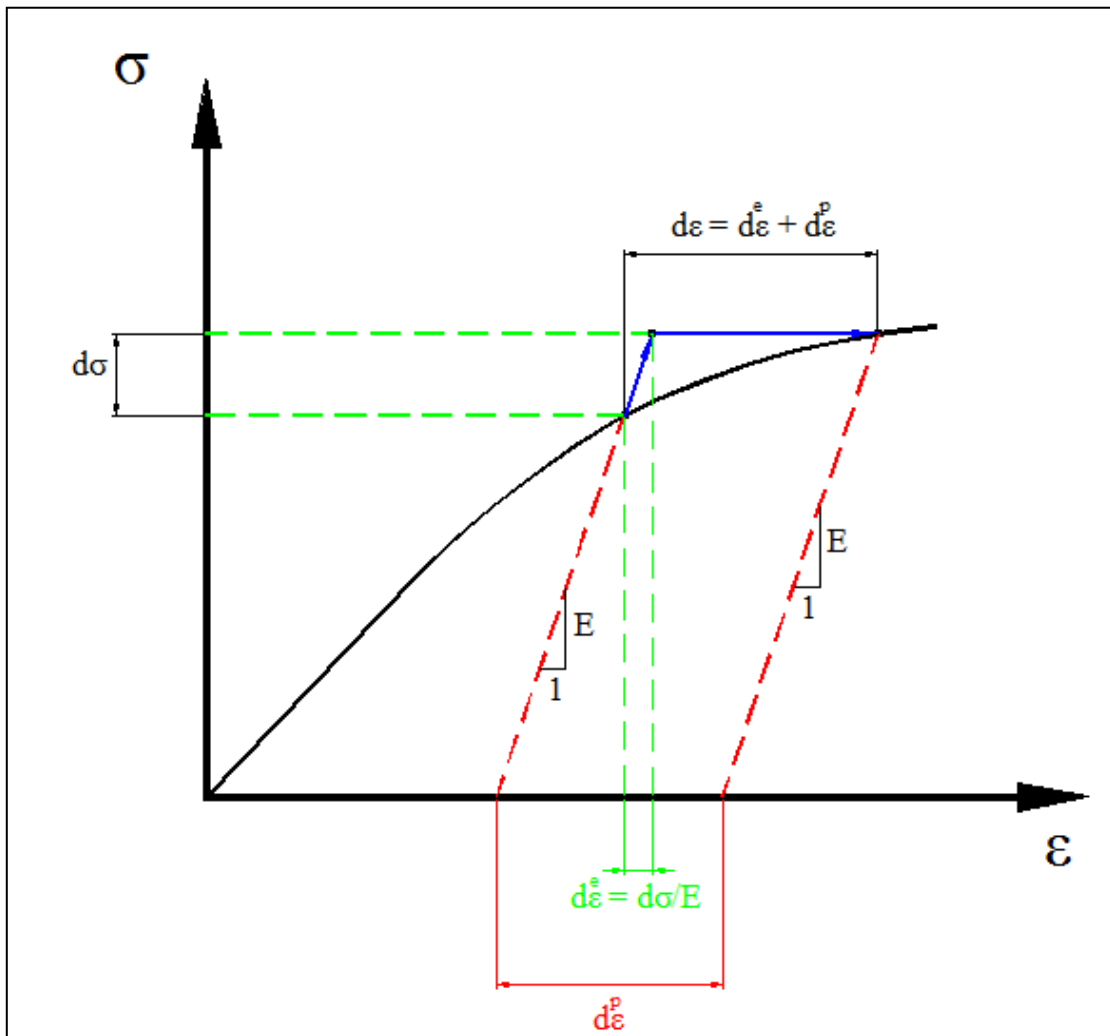
Για υλικά που είναι ανεξάρτητα από τον ρυθμό φόρτισης, αντί για το ρυθμό της παραμόρφωσης, μπορεί να χρησιμοποιηθεί η προσαύξηση της παραμόρφωσης.

$$\Delta \varepsilon_{ij} = \dot{\varepsilon}_{ij} \quad (2.7)$$

Επομένως από (2.6) και (2.7):

$$\Delta \varepsilon_{ij} = \Delta \varepsilon_{ij}^{(el)} + \Delta \varepsilon_{ij}^{(pl)} \quad (2.8)$$

Κάποιος μπορεί να απλοποιήσει την διαδικασία προσομοίωσης, παρεμβάλλοντας τις κατάλληλες ευθείες για κάθε κύκλο φόρτισης-αποφόρτισης στα διαγράμματα αξονικής τάσης-αξονικής τροπής, πλευρικής τροπής-αξονικής τροπής, η κλίση των οποίων δίνει τα μέτρα ελαστικότητας E , ν αντίστοιχα. Η αποτέμνουσα που ορίζεται από την γραμμή παρεμβολής των κύκλων αποφόρτισης-φόρτισης της καμπύλης αξονικής τάσης-αξονικής τροπής και από τον άξονα των τετμημένων, αποτελεί την πλαστική (παραμένουσα) αξονική τροπή ε_a^p .



Σχήμα 2.6: Ελαστοπλαστικός διαχωρισμός της τροπής

Οι προσαυξήσεις των ελαστικών τροπών βρίσκονται πολύ εύκολα αν γνωρίζουμε τις τάσεις από τον νόμο του Hooke.

$$\Delta \varepsilon_{ij}^{(el)} = C_{ijkl}^{-1} \Delta \sigma_{ij} \quad (2.9)$$

Στα θεωρήματα οριακής ανάλυσης λαμβάνοντας υπόψη το τέλεια πλαστικό μοντέλο δεν μας απασχολούν καθόλου οι ελαστικές τροπές και οι μεταβολές τους. Αντικειμενικός στόχος είναι ο προσδιορισμός του $\Delta \varepsilon_{ij}^{(pl)}$. Οι πλαστικές τροπές βρίσκονται από τον νόμο της πλαστικής ροής.

2.5. Νόμος της πλαστικής ροής

Στα πλαίσια της Θεωρίας Πλαστικότητας ο νόμος πλαστικής ροής που συνδέει τις πλαστικές παραμορφώσεις με τις τάσεις είναι ουσιαστικά ένας νόμος βαθμίδας που έχει τη μορφή:

$$d\varepsilon_{ij}^p = \lambda \cdot \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}}, \quad \lambda > 0 \quad (2.10)$$

όπου:

λ : πολλαπλασιαστικός παράγοντας (πάντα μεγαλύτερος του μηδενός όταν συμβαίνουν πλαστικές παραμορφώσεις και μηδέν όταν δεν συμβαίνουν)

$g(\sigma_{ij}) = (ct)$: πλαστικό δυναμικό (επιφάνεια στον σ_{ij} χώρο)

$\partial g / \partial \sigma_{ij}$: βαθμίδα (gradient) της επιφάνειας $g=(ct)$ που είναι διάνυσμα κάθετο στην επιφάνεια

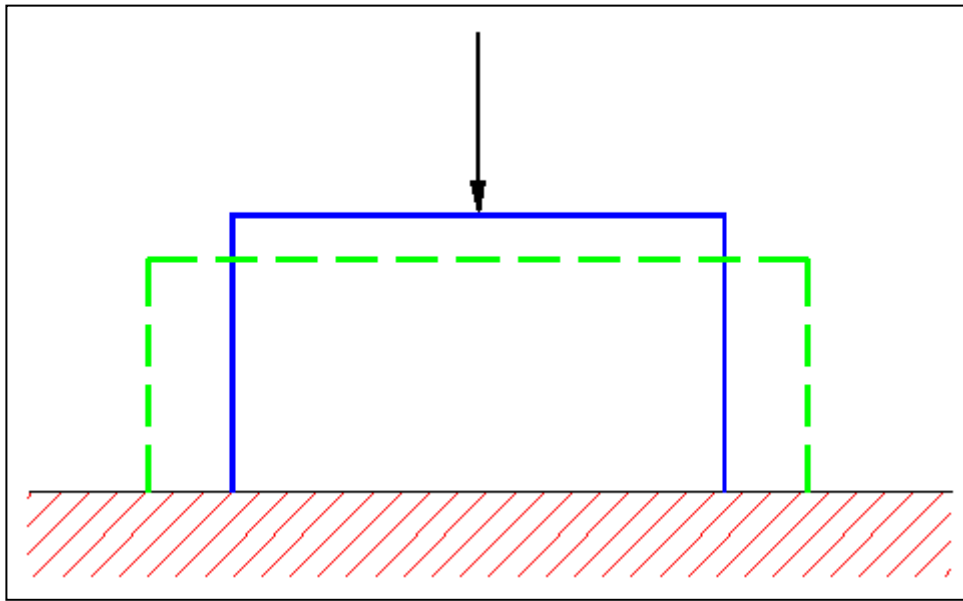
$g=(ct)$ στο σημείο σ_{ij}

$g = F$: συνηρητημένος νόμος πλαστικής ροής (associated flow rule)

Αν ισχύει ο συνηρητημένος νόμος πλαστικής ροής που γεωμετρικά παρίσταται στο Σχ. 2.3 τότε:

1. το έργο που δαπανάται για πλαστικές παραμορφώσεις δεν επανακτάται
2. δίνει μοναδική λύση σε προβλήματα συνοριακών τιμών
3. δίνει τη δυνατότητα γενίκευσης των εξισώσεων της πλαστικότητας για πολύπλοκα κριτήρια αστοχίας

Παραδοχή: Για ισότροπα υλικά οι κατευθύνσεις των κυρίων τροπών ($\dot{\varepsilon}_1, \dot{\varepsilon}_2, \dot{\varepsilon}_3$) συμπίπτουν με τις κατευθύνσεις των κυρίων τάσεων ($\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$). Αυτή ονομάζεται συνθήκη «ομοαξονικότητας» (co-axiality condition). Λ.χ. Οι έδρες ενός ορθογωνικού σώματος που υποβάλλεται σε μονοαξονική θλίψη θα παραμείνουν κάθετες μεταξύ των (Σχ. 2.8).

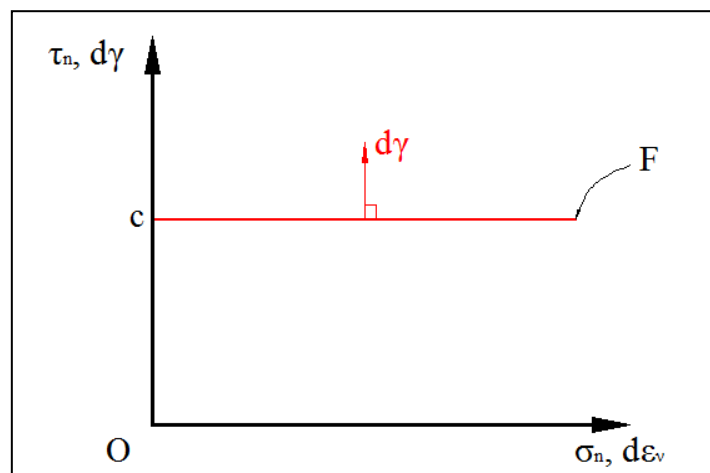


Σχήμα 2.7: Γεωμετρική ερμηνεία της συνθήκης ομο-αξονικότητας τάσεων-παραμορφώσεων.

2.5.1. Νόμος πλαστικής ροής που συναρτάται με το κριτήριο Tresca

Ο νόμος πλαστικής ροής που συναρτάται με το κριτήριο Tresca (Σχ. 2.9) έχει τη μορφή:

$$F = \sigma_1 - \sigma_3 - 2 \cdot c \quad (\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3) \quad (2.11)$$



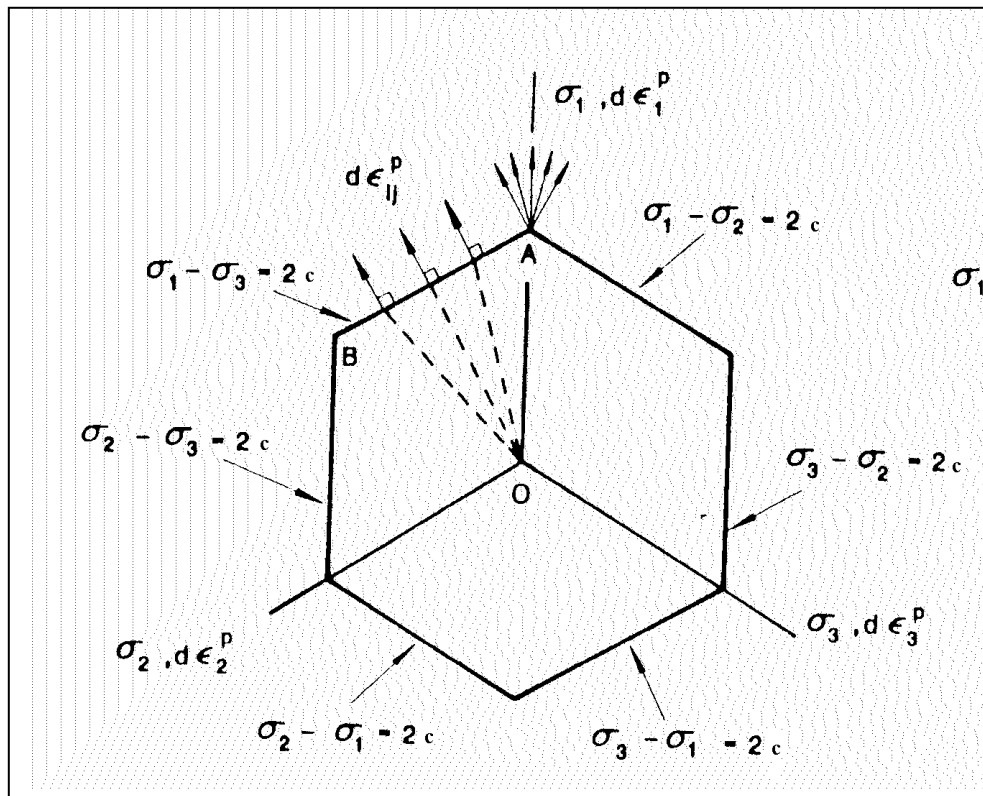
Σχήμα 2.8: Το κριτήριο Tresca στα επίπεδα (τ, σ) και $(d\gamma, d\epsilon_v)$ δεχόμενοι την υπόθεση της «ομοαξονικότητας».

Οι κύριες πλαστικές τροπές μπορούν να βρεθούν σε αυτήν την περίπτωση από τις σχέσεις:

$$\left. \begin{aligned} d\epsilon_1^p &= d\lambda \frac{\partial F}{\partial \sigma_1} = d\lambda \\ d\epsilon_2^p &= d\lambda \frac{\partial F}{\partial \sigma_2} = 0 \\ d\epsilon_3^p &= d\lambda \frac{\partial F}{\partial \sigma_3} = -d\lambda \end{aligned} \right\} \Rightarrow d\epsilon_v^p = d\epsilon_1^p + d\epsilon_3^p = 0 \quad (2.12)$$

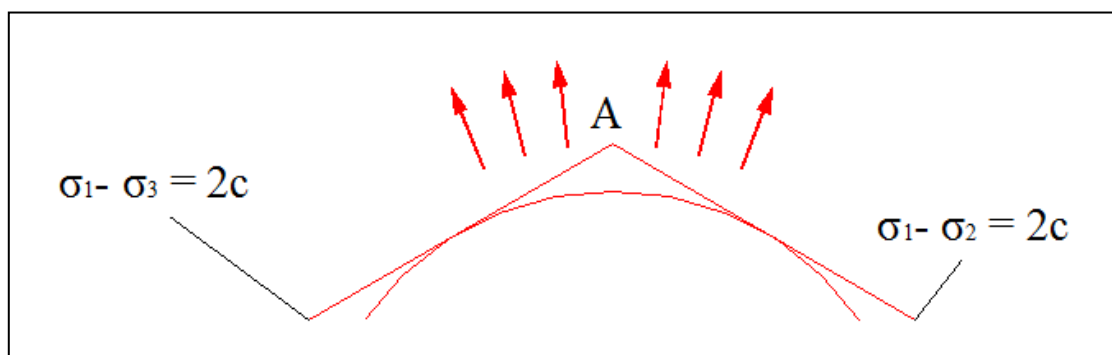
(Συνθήκη μη-συμπίεστότητας ή ισόχωρης παραμόρφωσης)

Το μοντέλο του Tresca στο αποκλίνον επίπεδο έχει τη μορφή κανονικού εξαγώνου όπως φαίνεται στο Σχ. 2.10.



Σχήμα 2.9: Εξαγώνο του Tresca, πάνω στο αποκλίνον επίπεδο

Στην ειδική περίπτωση που η εντατική κατάσταση βρίσκεται σε κορυφή του εξαγώνου ήτοι: $\sigma_1 > \sigma_2 = \sigma_3$ (βλ. Σχ. 2.11), η διατμητική ολίσθηση μπορεί να λάβει χώρα σε δύο πιθανά επίπεδα μέγιστης διατμητικής τάσης (το A είναι το σημείο ιδιομορφίας).



Σχήμα 2.10: Η κορυφή A ως όριο μιας λείας (smooth) καμπύλης

$$1. \quad \sigma_{\max} = \sigma_1, \sigma_{\min} = \sigma_3$$

$$\left(d\varepsilon_1^p, d\varepsilon_2^p, d\varepsilon_3^p \right) = d\lambda(1, 0, -1) \quad d\lambda \geq 0$$

$$2. \quad \sigma_{\max} = \sigma_1, \sigma_{\min} = \sigma_2$$

$$\sigma_1 - \sigma_2 = 2 \cdot c$$

$$\left(d\varepsilon_1^p, d\varepsilon_2^p, d\varepsilon_3^p \right) = d\mu(1, -1, 0) \quad d\mu \geq 0$$

Παραδοχή: $\left(d\varepsilon_1^p, d\varepsilon_2^p, d\varepsilon_3^p \right) = d\lambda(1, 0, -1) + d\mu(1, -1, 0) \quad \text{για } d\mu, d\lambda \geq 0$

Γενικά σε ιδιόμορφα σημεία:

$$d\varepsilon_{ij}^p = \sum_{k=1}^m d\lambda_k \frac{\partial F_k}{\partial \varepsilon_{ij}} \quad (2.13)$$

Συνεπώς η κατεύθυνση του διανύσματος προσαύξησης πλαστικής τροπής δεν μπορεί να προσδιορισθεί με μοναδικό τρόπο.

2.5.2. Νόμος πλαστικής ροής που συναρτάται με το κριτήριο Mohr – Coulomb

Το κριτήριο διαρροής M-C στον κλάδο AB (Σχ. 2.12) έχει τη μορφή:

$$F = \sigma_1(1 - \sin \phi) - \sigma_3(1 + \sin \phi) - 2 \cdot c \cdot \cos \phi = 0 \quad (2.14)$$

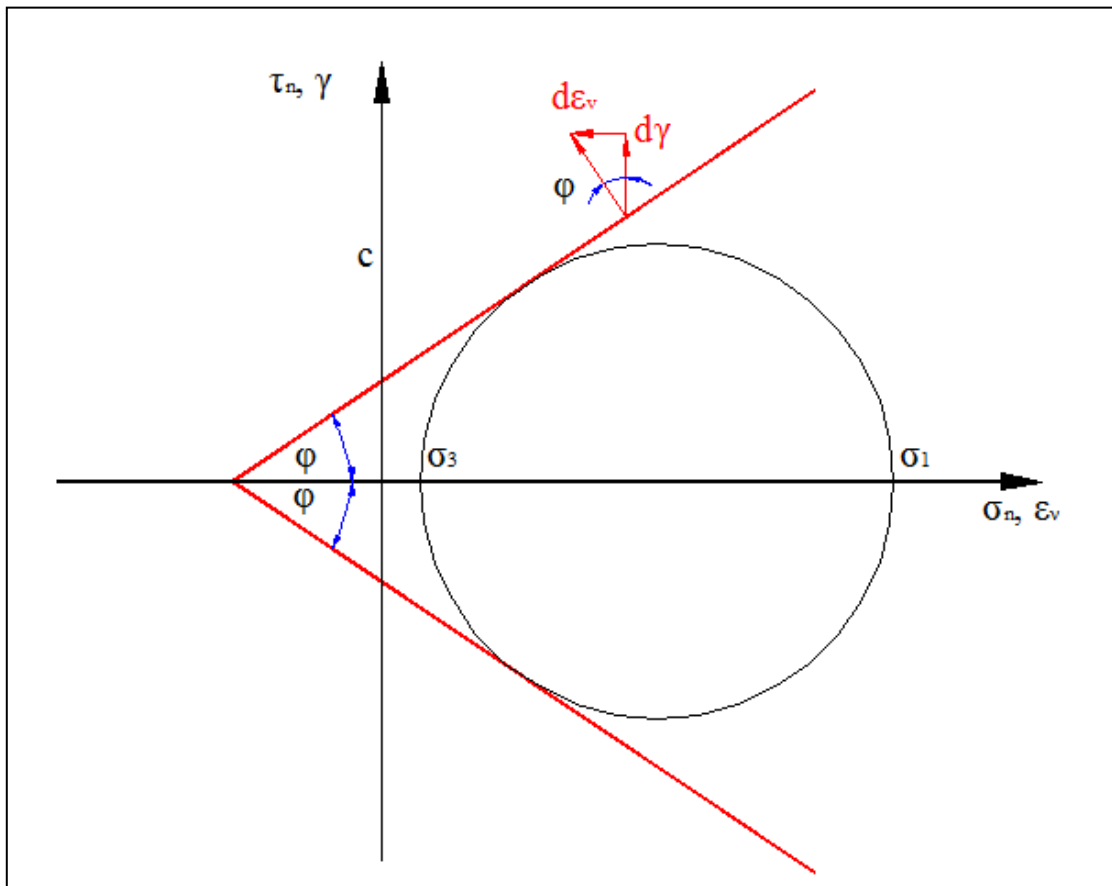
όπου:

c, ϕ : συνοχή και γωνία εσωτερικής τριβής αντιστοίχως του γεωυλικού.

Τελικά ο νόμος πλαστικής ροής παίρνει τη μορφή

$$\left. \begin{aligned} d\varepsilon_1^p &= d\lambda \cdot (1 - \sin \phi) \\ d\varepsilon_3^p &= -d\lambda \cdot (1 + \sin \phi) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{d\varepsilon_1^p}{d\varepsilon_3^p} = -\frac{1 - \sin \phi}{1 + \sin \phi} = -\tan^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2} \right) \quad (2.15)$$

Στο Σχ. 2.12 παρουσιάζεται η προβολή του κριτηρίου M-C στο υδροστατικό επίπεδο.



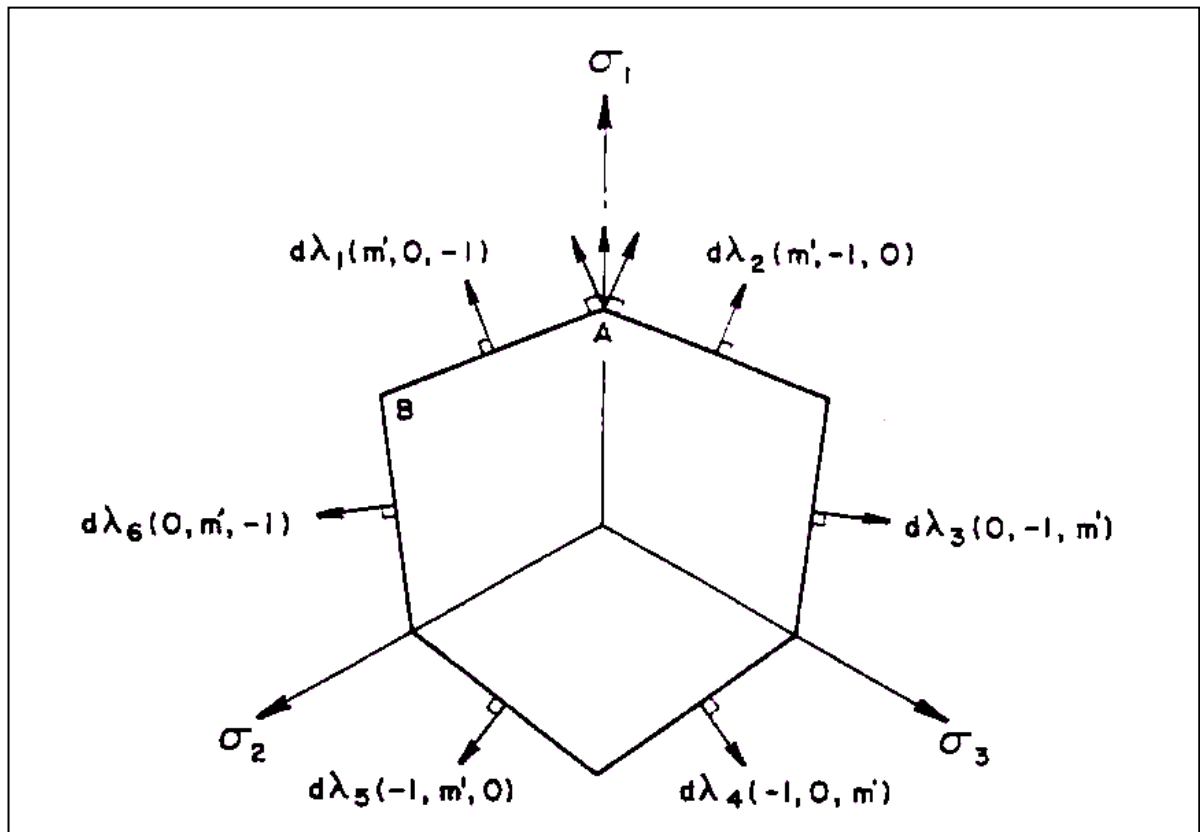
Σχήμα 2.11: Κριτήριο M-C στο υδροστατικό επίπεδο τάσεων, τροπών

Μαθηματικά περιγράφεται από την σχέση:

$$d\varepsilon_1^p = -d\varepsilon_3^p \tan^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2} \right) \quad (2.16)$$

όπου για $\phi = 0 \Rightarrow d\varepsilon_1 + d\varepsilon_3 = 0$ (υλικό Tresca).

Η προβολή του κριτηρίου M-C στο αποκλίνον επίπεδο έχει τη μορφή ακανόνιστου εξαγώνου (Σχ. 2.13).



Σχήμα 2.12: Κριτήριο M – C στο αποκλίνον επίπεδο.

Ισχύει:

$$m' = \frac{1 - \sin \phi}{1 + \sin \phi} = \frac{1}{m} \quad (2.17)$$

2.6. Πλαστικό έργο

Μπορεί να αποδειχθεί ότι η προσαύξηση του πλαστικού έργου \dot{D} ανά μονάδα όγκου που δαπανάται κατά την πλαστική παραμόρφωση προσδιορίζεται πάντα με μοναδικό τρόπο (Chen and Han, 1988)

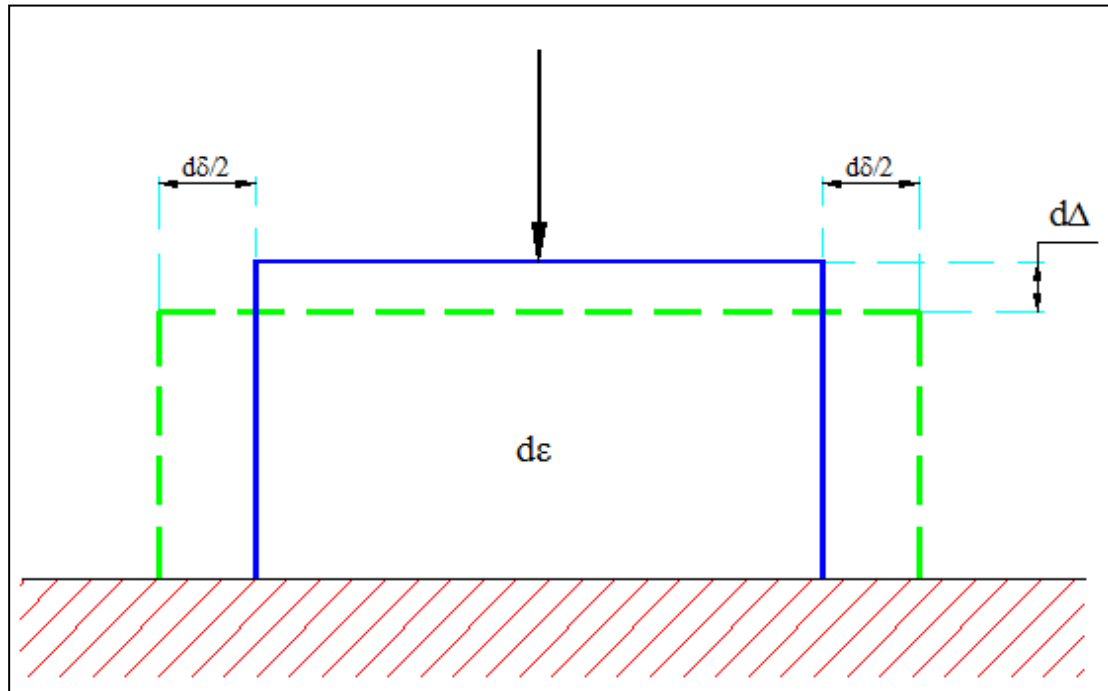
$$\dot{D} = \sigma_1 d\varepsilon_1^p + \sigma_2 d\varepsilon_2^p + \sigma_3 d\varepsilon_3^p = 2 \cdot c \cdot \max |d\varepsilon^p| \quad (2.22)$$

όπου $\max |d\epsilon^p|$ είναι η απόλυτη τιμή της αριθμητικά μεγαλύτερης συνιστώσας του διανύσματος πλαστικής προσαύξησης της τροπής.

Παραδείγματα:

(1) Υλικό Tresca με διατήρηση του όγκου (ισόχωρη παραμόρφωση) κατά την πλαστική διαρροή.

1. Ομογενής θλίψη (κατακόρυφη συστολή & οριζόντια διαστολή)



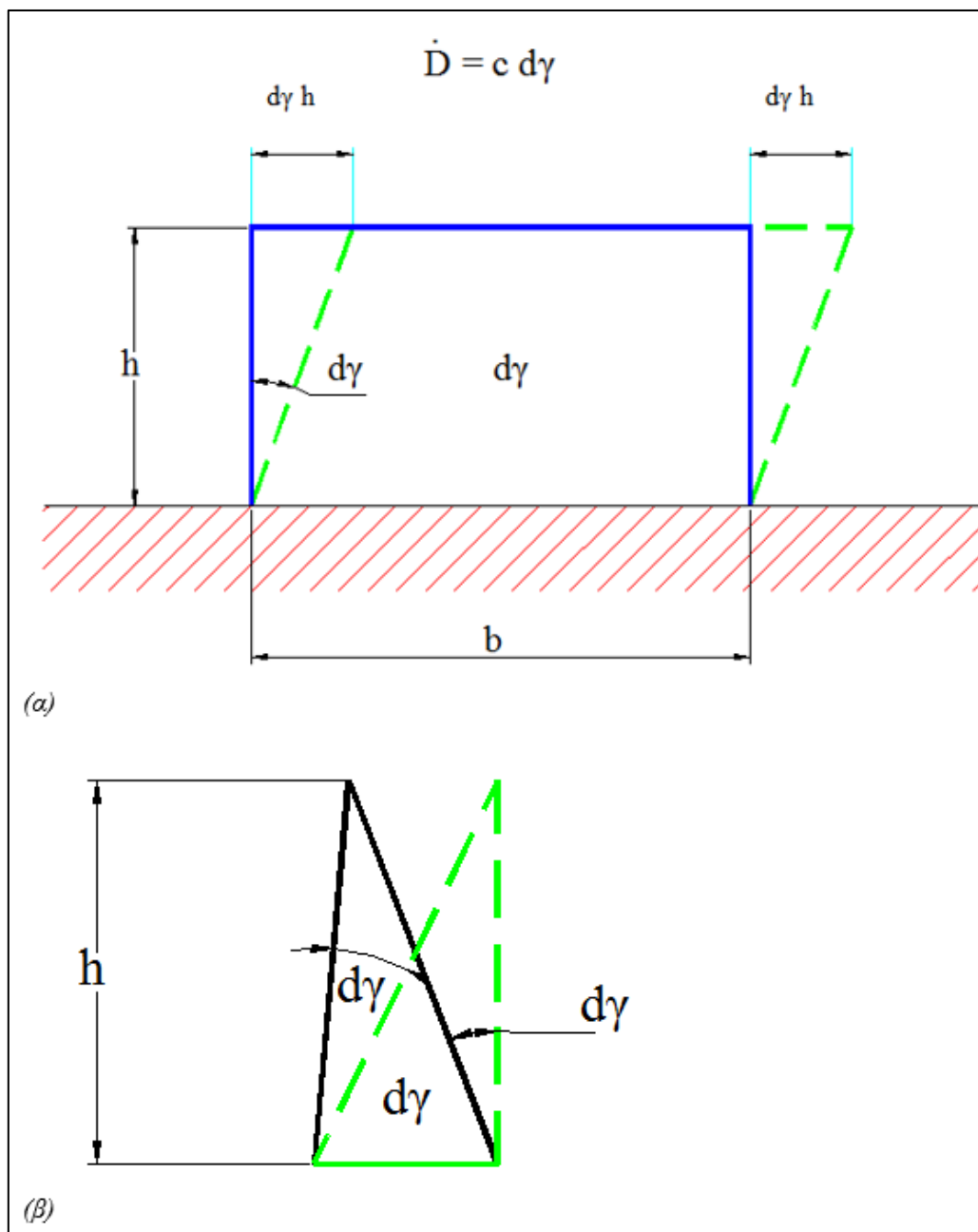
Σχήμα 2.13: Απλή κατακόρυφη θλίψη με αποτέλεσμα πλευρικής διαστολής.

$$d\epsilon_y = d\epsilon \Rightarrow d\epsilon_x = -d\epsilon \text{ και } \sigma_y = \sigma_1, \sigma_x = \sigma_3 \quad (2.23)$$

$$\dot{D} = \sigma_y d\epsilon - \sigma_x d\epsilon = (\sigma_1 - \sigma_3) d\epsilon = 2 \cdot c \cdot d\epsilon \quad (2.24)$$

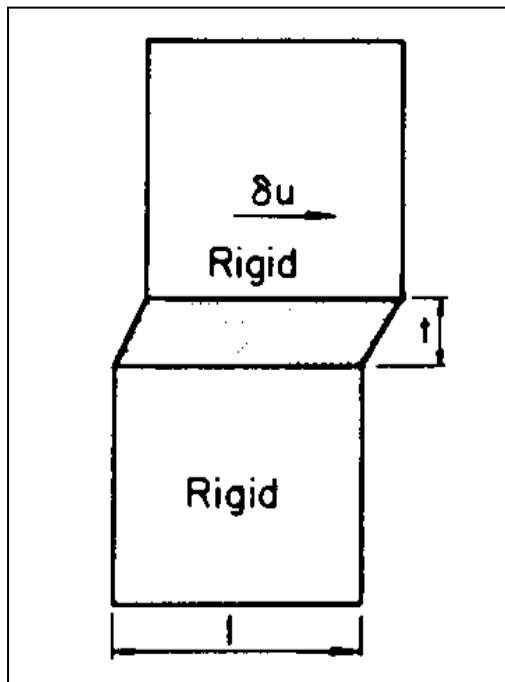
όπου οι θλιπτικές τροπές είναι θετικοί αριθμοί, που βρίσκεται σε συμφωνία με το θεώρημα (σχέση 2.22).

2. Ομογενής άμεση διάτμηση



Σχήμα 2.14: Απλή διατμητική παραμόρφωση

3. Άκαμπτο ογκοτεμάχιο που ολισθαίνει επί λεπτής ζώνης ολίσθησης (Υλικό Tresca)



Σχήμα 2.15: Σχετική οριζόντια ολίσθηση άκαμπτων σωμάτων πάνω σε λεπτή λωρίδα.

Εντός της ζώνης διάτμησης η διατμητική τροπή είναι ομοιογενής:

$$d\gamma = \frac{du}{t} \quad (2.25)$$

όπου $du \approx \delta u$ είναι η διατμητική μετατόπιση και t το πάχος της ζώνης διάτμησης.

Επίσης το πλαστικό έργο δίνεται από τη σχέση:

$$\dot{D} = c \cdot d\gamma \cdot t \quad (2.26)$$

όπου $d\gamma$ είναι η προσαύξηση της μέγιστης διατμητικής παραμόρφωσης ($\gamma = 2\varepsilon_{xy}$).

Άρα ο ρυθμός πλαστικού έργου είναι ανεξάρτητος του πάχους της ζώνης διάτμησης. Για $t \rightarrow 0$ τα δύο άκαμπτα σώματα βρίσκονται σε επαφή.

(2) Υλικό Mohr-Coulomb με συνοχή και γωνία τριβής (c, φ)

Εξ' ορισμού:

$$\dot{D} = \sigma_1 \cdot d\varepsilon_1^p + \sigma_2 \cdot d\varepsilon_2^p + \sigma_3 \cdot d\varepsilon_3^p \quad (2.18)$$

Στην περίπτωση που ισχύει $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ (σημείο επί του κλάδου AB) όπως φαίνεται στο Σχ.... έχουμε:

$$d\varepsilon_1^p = m' \cdot d\lambda, d\varepsilon_2^p = 0, d\varepsilon_3^p = -d\lambda \quad (d\lambda \geq 0) \quad (2.18)$$

$$\sigma_1 \cdot m' - \sigma_3 = \frac{2 \cdot c \cdot \cos \phi}{1 + \sin \phi} = f'_t, \quad m' = \frac{f'_t}{f'_c} \leq 1 \quad (2.19)$$

$$\dot{D} = (\sigma_1 \cdot m' - \sigma_3) \cdot d\lambda = \frac{2 \cdot c \cdot \cos \phi}{1 + \sin \phi} \cdot d\lambda = f'_t \cdot d\lambda \quad (2.20)$$

Επίσης η μεταβολή της διαστολικής πλαστικής παραμόρφωσης είναι:

$$d\varepsilon_V^p = d\varepsilon_1^p + d\varepsilon_2^p + d\varepsilon_3^p = (m' - 1) \cdot d\lambda \quad (d\lambda \geq 0) \quad (2.21)$$

(με σύμβαση προσήμου ότι οι θλιπτικές τροπές είναι θετικοί αριθμοί). Άρα το υλικό M – C με συνηρημένο νόμο διαρροής παρουσιάζει πάντα διαστολή εκτός από την περίπτωση $m' = 1$ ή $\phi' = 0$ (υλικό Tresca).

1. Υπολογισμός πλαστικού έργου κατά την ομογενή θλίψη

$$dD = \sigma_x \cdot d\varepsilon_x + \sigma_y \cdot d\varepsilon_y = \sigma_1 \cdot d\varepsilon_1 + \sigma_3 \cdot d\varepsilon_3, \quad d\varepsilon_1 = d\varepsilon$$

$$d\varepsilon_3 = -d\varepsilon \cdot \tan^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2} \right) \quad (2.22)$$

άρα η πλευρική τροπή είναι με αντίθετο πρόσημο και μεγαλύτερη κατά απόλυτη τιμή από την κατακόρυφη τροπή. Επομένως συνάγουμε την έκφραση για τη μεταβολή του πλαστικού έργου

$$dD = \left(\sigma_1 - \tan^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2} \right) \cdot \sigma_3 \right) d\varepsilon \quad (2.23)$$

Αλλά η ικανοποίηση του κριτηρίου αστοχίας απαιτεί:

$$\sigma_1 - \sigma_3 \cdot \tan^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2} \right) = 2 \cdot c \cdot \tan^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2} \right) \quad (2.24)$$

Συνεπώς

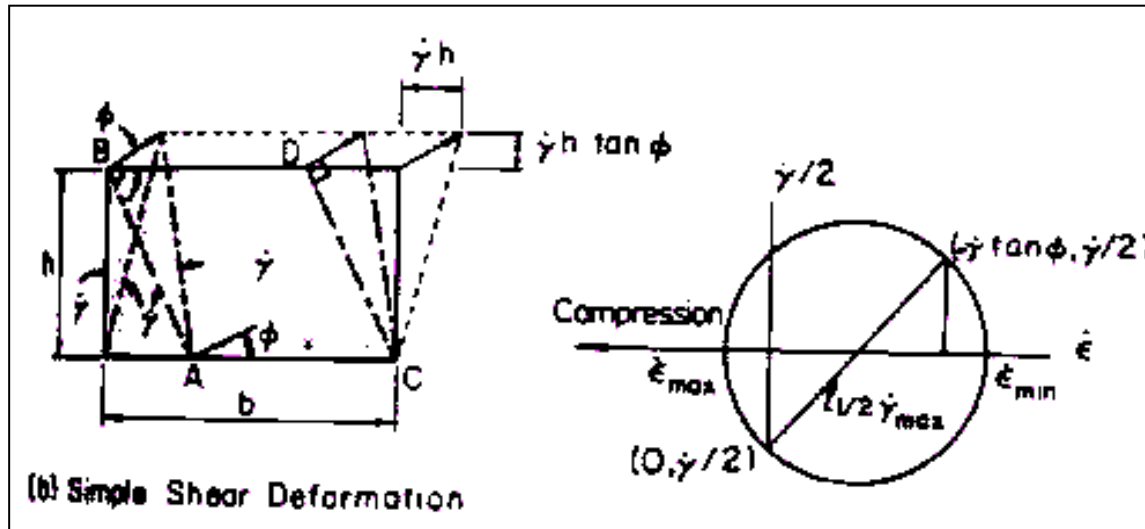
$$dD = 2 \cdot c \cdot \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2} \right) d\varepsilon = \frac{2 \cdot c \cdot \cos \phi}{1 - \sin \phi} d\varepsilon \quad (2.25)$$

Επίσης:

$$d\Delta = h \cdot d\epsilon$$

$$d\delta = -b \cdot d\epsilon \cdot \tan^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2} \right) \quad (2.26)$$

2. Απλή ομογενής διάτμηση υλικού Mohr-Coulomb (Σχ. 2.17)



Σχήμα 2.16: Ομογενής παραμορφούμενες περιοχές σε υλικό Coulomb (α) Απλή διατμητική παραμόρφωση και (β) Κύκλος του Mohr (Chen, 1975, p. 69)

Η διατμητική τροπή $d\gamma$ συνοδεύεται από κατακόρυφη πλαστική τροπή $d\gamma \tan \phi$ (βλ. Σχ 2.17α). Άρα

$$dD = \tau \cdot d\gamma - \sigma \cdot d\gamma \cdot \tan \phi = (\tau - \sigma \cdot \tan \phi) \cdot d\gamma \quad (2.27)$$

αλλά

$$\tau = c + \sigma \cdot \tan \phi \Rightarrow$$

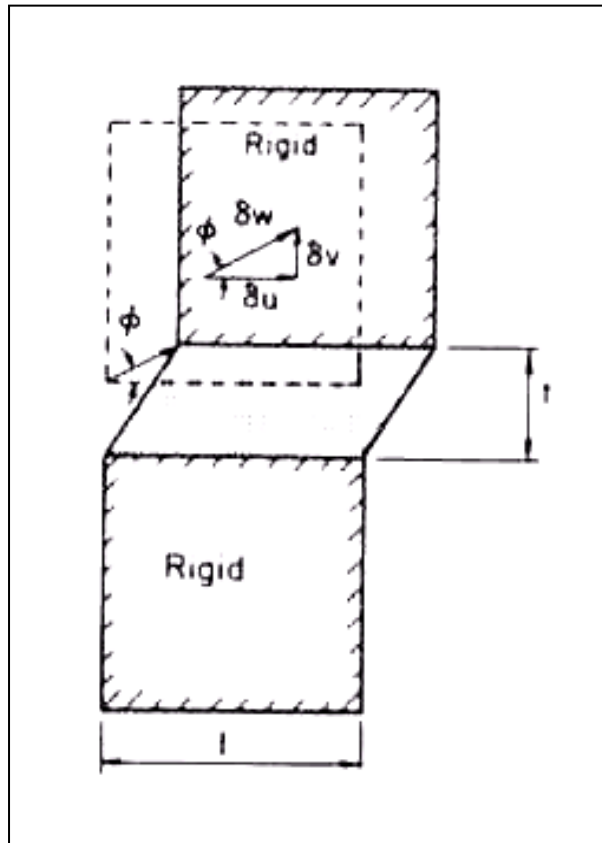
$$\Rightarrow dD = c \cdot d\gamma \quad (2.28)$$

όπου

$$d\gamma = d\gamma_{\max} \cdot \cos \phi \quad (2.29)$$

εξαιτίας της ογκικής διαστολής που πάντα συνοδεύει την πλαστική διατμητική παραμόρφωση (βλ. κύκλο του Mohr).

3. Άκαμπτα τεμάχια που ολισθαίνουν επί λεπτής διεπιφάνειας (ή διατμητικής ρωγμής)



Σχήμα 2.17: Απλή διάτμηση με μεταβολή του πάχους ($\phi \neq 0$) (Chen, 1975, p. 56).

- V : όγκος της ζώνης = t
- $d\gamma = \frac{\delta u}{t}$
- $d\varepsilon = \frac{\delta v}{t}$

Μπορούμε να υπολογίσουμε την απειροστική μεταβολή του πλαστικού έργου

$$\begin{aligned}
 dD &= (\tau \cdot d\gamma - \sigma \cdot d\varepsilon) \cdot V = \\
 &= (\tau \cdot d\gamma - \sigma \cdot d\varepsilon) \cdot t = \\
 &= \tau \cdot \delta u - \sigma \cdot \delta v \Rightarrow \\
 \Rightarrow dD &= \delta u \cdot (\tau - \sigma \cdot \tan \phi) \Rightarrow \\
 dD &= \sigma \cdot \delta u
 \end{aligned}
 \tag{2.30}$$

Άρα το πάχος t της διατμητικής ζώνης μπορεί να είναι μηδέν.

Ένας απλός τρόπος να συσχετισθεί η πλαστική διαρροή με την πλαστική ροή είναι μέσω της έκφρασης για το στοιχειώδες πλαστικό έργο παραμόρφωσης, το οποίο ειρήσθω εν παρόδω υποθέτουμε ότι αναλύσκεται εξ' ολοκλήρου σε θερμότητα,

$$\dot{D}^p = \sigma_{ij} \dot{D}_{ij}^p = p \dot{\varepsilon}_v^p + T \dot{g}^p
 \tag{2.31}$$

(όπου έχουμε θέσει $\dot{D}^p = dD$).

Επίσης $p = \sigma_{kk} / 3$, D_{ij}^p ρυθμός παραμορφώσεως είναι το συμμετρικό μέρος της βαθμίδας της ταχύτητας, και T η 2^η αναλλοίωτος του αποκλίνοντος τανυστή των τάσεων.

Εκτός από εσωτερική τριβή τα γεωυλικά εμφανίζουν και πλαστική διαστολικότητα η οποία θεωρείται ως ένας εσωτερικός περιορισμός μεταξύ του ρυθμού της πλαστικής ογκικής παραμόρφωσης $\dot{\epsilon}_v^p = D_{kk}^p$ και του ρυθμού της πλαστικής διατμητικής παραμόρφωσης \dot{g}^p .

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3:

Μέθοδος Οριακής Ανάλυσης

Ο υπολογισμός των παραμορφώσεων στην ελαστοπλαστική περιοχή απαιτεί να ικανοποιούνται τα παρακάτω κριτήρια:

- Η ισορροπία των τάσεων (σ)
- Η συμβατότητα των τροπών (ϵ)
- Η καταστατική σχέση $\sigma - \epsilon$ στην ελαστική περιοχή με τον γενικευμένο νόμο του Hooke
- Η συνθήκη κανονικότητας (normality condition)
- Το κριτήριο αστοχίας

Μια πλήρης λύση ενός συνοριακού προβλήματος της γεωμηχανικής μπορεί να βρεθεί αν ικανοποιούνται ταυτόχρονα τα παραπάνω κριτήρια. Παρόλα αυτά η πλήρης ελαστοπλαστική λύση ενός προβλήματος της γεωμηχανικής απαιτεί χρόνο και κόστος υπολογισμών που σε πολλές περιπτώσεις πρακτικών γεωτεχνικών προβλημάτων δεν είναι απαραίτητη με δεδομένη την αβεβαιότητα που συνήθως συνοδεύει την εκτίμηση των υπεισερχομένων γεωτεχνικών παραμέτρων. Σε αυτές τις περιπτώσεις μια προσεγγιστική λύση ενός προβλήματος ευστάθειας κοντά στην περιοχή της αστοχίας η οποία μπορεί να βρεθεί εύκολα και γρήγορα είναι συνήθως επιθυμητή από τον γεωτεχνικό μηχανικό. Γι' αυτό το σκοπό μπορεί να εφαρμοσθούν τα θεωρήματα του Κάτω και Άνω Ορίου του φορτίου αστοχίας ή κατάρρευσης (ή φέρουσας ικανότητας) τα οποία προκύπτουν απ' την Θεωρία Πλαστικότητας. Τα όρια αυτά είναι πολλές φορές πολύ κοντά το ένα στο άλλο και σε μερικές περιπτώσεις συμπίπτουν αποδίδοντας έτσι το πραγματικό φορτίο αστοχίας της μάζας του εδάφους ή του πετρώματος. Στην πραγματικότητα τα θεωρήματα του κάτω και άνω ορίου αντιπροσωπεύουν δύο διαφορετικές προσεγγίσεις "ισορροπίας" και "γεωμετρίας", αντίστοιχα. Και οι δύο μέθοδοι βασίζονται στις παραδοχές, έτσι ώστε το κάτω φράγμα της φέρουσας ικανότητας ή φορτίου αστοχίας μπορεί να προκύψει μόνο ικανοποιώντας (α) τις εξισώσεις ισορροπίας των τάσεων και (β) το κριτήριο αστοχίας, ήτοι:

1. ότι το γεωυλικό υφίσταται μικρές παραμορφώσεις μέχρι την αστοχία και προσεγγιστικά συμπεριφέρεται ως "άκαμπτο και τέλεια πλαστικό" υλικό (Σχ. 3.1α), και
2. υπακούει τον "συνηρητημένο νόμο ροής" (Σχ. 3.1β).

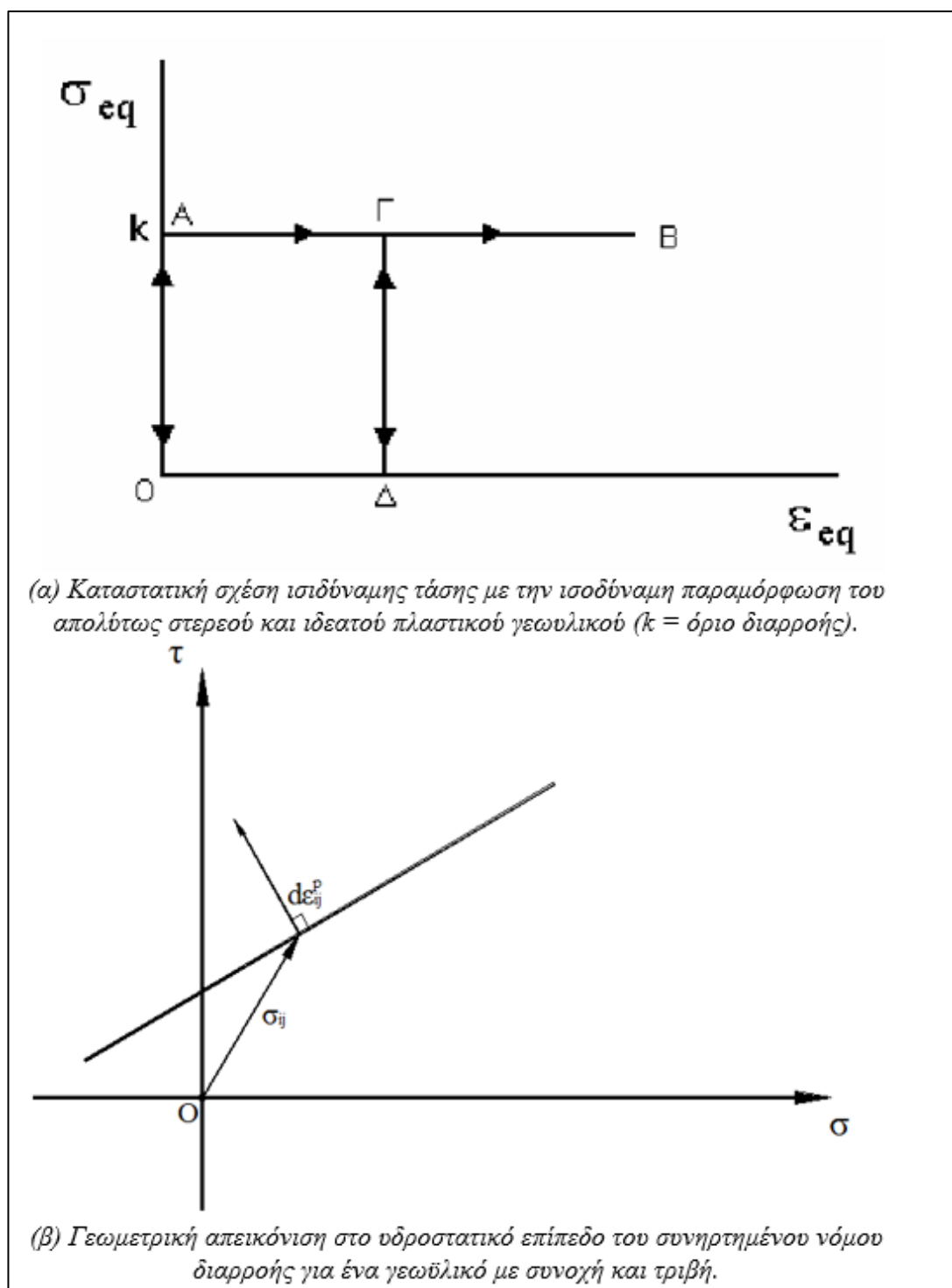
Το απλούστερο προσομοίωμα πλαστικού υλικού είναι εκείνο του ισότροπου, ασυμπίεστου, ιδεατά πλαστικού και απολύτως στερεού υλικού. Το προσομοίωμα αυτό προτείνεται για την προσεγγιστική περιγραφή της μηχανικής συμπεριφοράς εύπλαστων αργίλων⁸. Η εξιδανικευμένη συμπεριφορά ενός ιδεατά πλαστικού υλικού παρίσταται γραφικά με την αντίστοιχη καμπύλη ισοδύναμης τάσεως - ισοδύναμης τροπής (Σχ. 3.1α). Οι ελαστικές τροπές θεωρούνται συνήθως αμελητέες, οπότε ο κλάδος αρχικής φορτίσεως (ΟΑ) και όλοι οι κλάδοι αποφορτίσεως-επαναφορτίσεως είναι κατακόρυφες ευθείες όπως η ευθεία (ΓΔ). Ο κλάδος φορτίσεως (ΑΒ) προσεγγίζεται με μια ευθεία παράλληλη προς τον άξονα ϵ_{eq} η οποία και τέμνει τον άξονα σ_{seq} στο σημείο k , που αντιστοιχεί στην ισοδύναμη τάση διαρροής του υλικού. Παρατηρούμε ότι στην περίπτωση που το υλικό διαρρέει, ενώ η τάση ικανοποιεί την παραπάνω συνθήκη διαρροής του υλικού, οι τροπές είναι γενικώς απροσδιόριστες.

Το θεώρημα του Κάτω Ορίου - ή συντομογραφικά ΚΟΘ - μπορεί να διατυπωθεί ως εξής: *Αν υπάρχει ομάδα εξωτερικών δυνάμεων για την οποία η κατανομή των τάσεων ευρίσκεται σε ισορροπία και δεν υπερβαίνει το κριτήριο αστοχίας (ή διαρροής) τότε οι δυνάμεις αυτές μπορούν να αναληφθούν ασφαλώς από την μάζα του γεωυλικού και επομένως αναπαριστούν το κάτω φράγμα του πραγματικού φορτίου αστοχίας.*

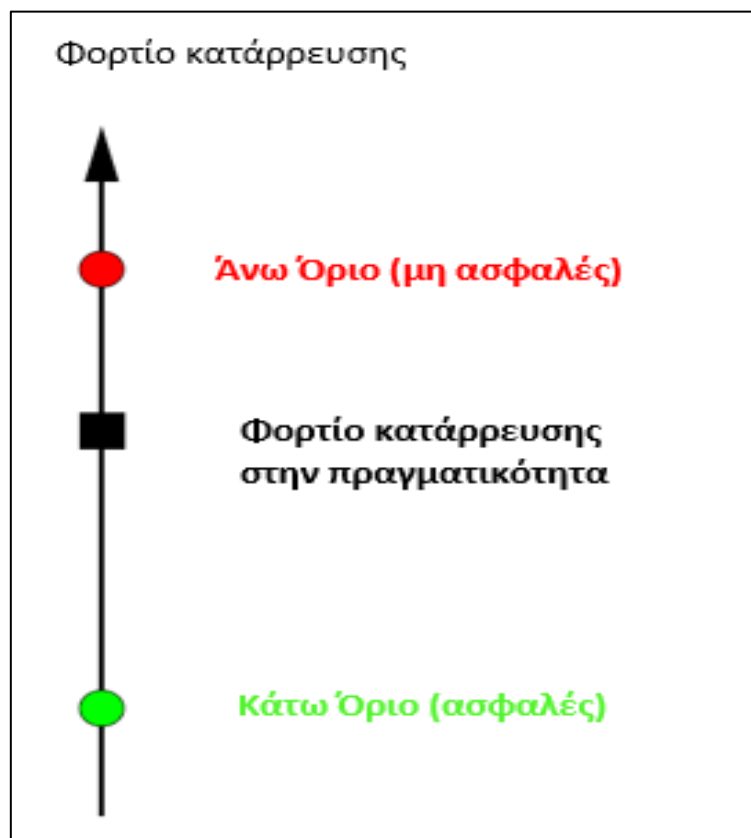
Το θεώρημα του Ανω Ορίου - ή συντομογραφικά ΠΟΘ - διατυπώνεται ως εξής: *Αν για οποιοσδήποτε συμβατό κινηματικό μηχανισμό αστοχίας του γεωυλικού που ικανοποιεί τις συνοριακές συνθήκες μετατόπισης εξισώνοντας το ρυθμό παραγωγής του έργου των εξωτερικών δυνάμεων με το ρυθμό της κατανάλωσης έργου λόγω αστοχίας του γεωυλικού, τότε το φορτίο αυτό είναι μεγαλύτερο ή ίσο με το πραγματικό φορτίο της αστοχίας.*

Το άνω φράγμα του φορτίου αστοχίας μπορεί να βρεθεί με την θεώρηση της οριακής ισορροπίας (limit equilibrium) της εσωτερικής και εξωτερικής ενέργειας που αντιστοιχούν στον “μηχανισμό” αστοχίας. Συνεπώς το φορτίο αστοχίας ενώ είναι μεγαλύτερο ή ίσο με το κάτω φράγμα εντούτοις είναι μικρότερο ή ίσο με το άνω φράγμα. Επομένως η λύση του κάτω φράγματος αποτελεί μια ασφαλή εκτίμηση της φέρουσας ικανότητας του εδάφους ή του πετρώματος.

Όπως έχει γίνει κατανοητό και φαίνεται στο Σχ. 3.2 το ΠΟΘ δίνει μεγαλύτερες τιμές του φορτίου κατάρρευσης μιας γεωκατασκευής από το ΚΟΘ. Το πραγματικό φορτίο κατάρρευσης βρίσκεται ανάμεσα στις δύο λύσεις. Γι’ αυτό το σκοπό οι λύσεις των μηχανισμών κατάρρευσης που παρουσιάζονται στο Κεφ. 2 θα συγκριθούν με την αναλυτική λύση που προβλέπει το ΚΟΘ για το ίδιο πρόβλημα που τέθηκε στο Σχ. 2.2.



Σχήμα 3.1: Τελείως πλαστικό υλικό που παραμορφώνεται σύμφωνα με το συντηρημένο νόμο πλαστικής ροής (associated flow rule) και συνθήκη καθετότητας.

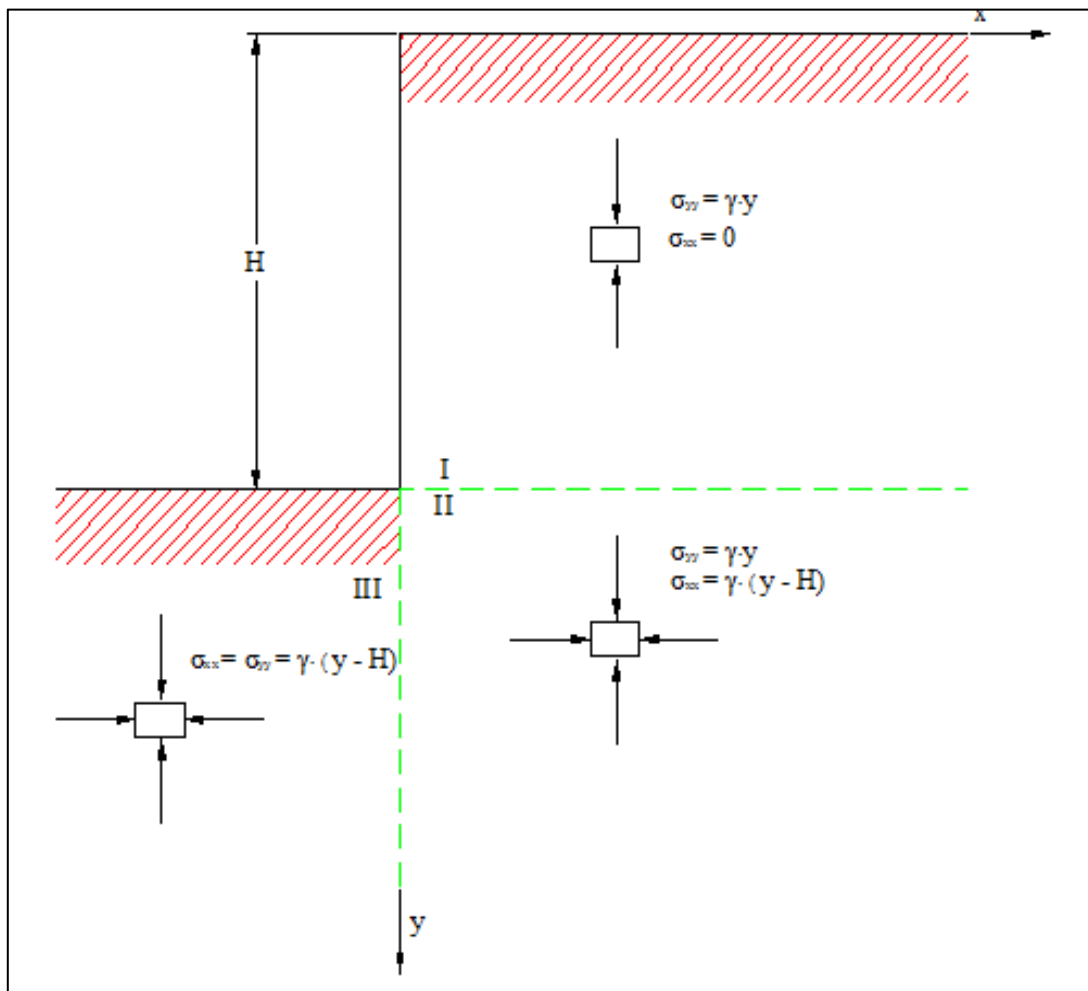


Σχήμα 3.2: Η σχέση μεταξύ των προβλέψεων των οριακών θεωρημάτων της θεωρίας Πλαστικότητας.

3.1. Εφαρμογές του θεωρήματος του Κάτω Ορίου

3.1.1. Ευστάθεια κατακόρυφου πρανούς

Ζητείται το κρίσιμο ύψος μετώπου κατακόρυφου πρανούς σε έδαφος που δεν μπορεί να παραλάβει εφελκυστικές τάσεις όπως φαίνεται στο Σχ. 3.3. Για την εφαρμογή του θεωρήματος του κάτω φράγματος κατασκευάζουμε ένα απλό «ασυνεχές» πεδίο τάσεων (με 2 γραμμές ασυνέχειας όπου ισχύουν ότι προαναφέρθηκε στην παράγραφο 2.2) το οποίο δεν παραβιάζει το κριτήριο αστοχίας.



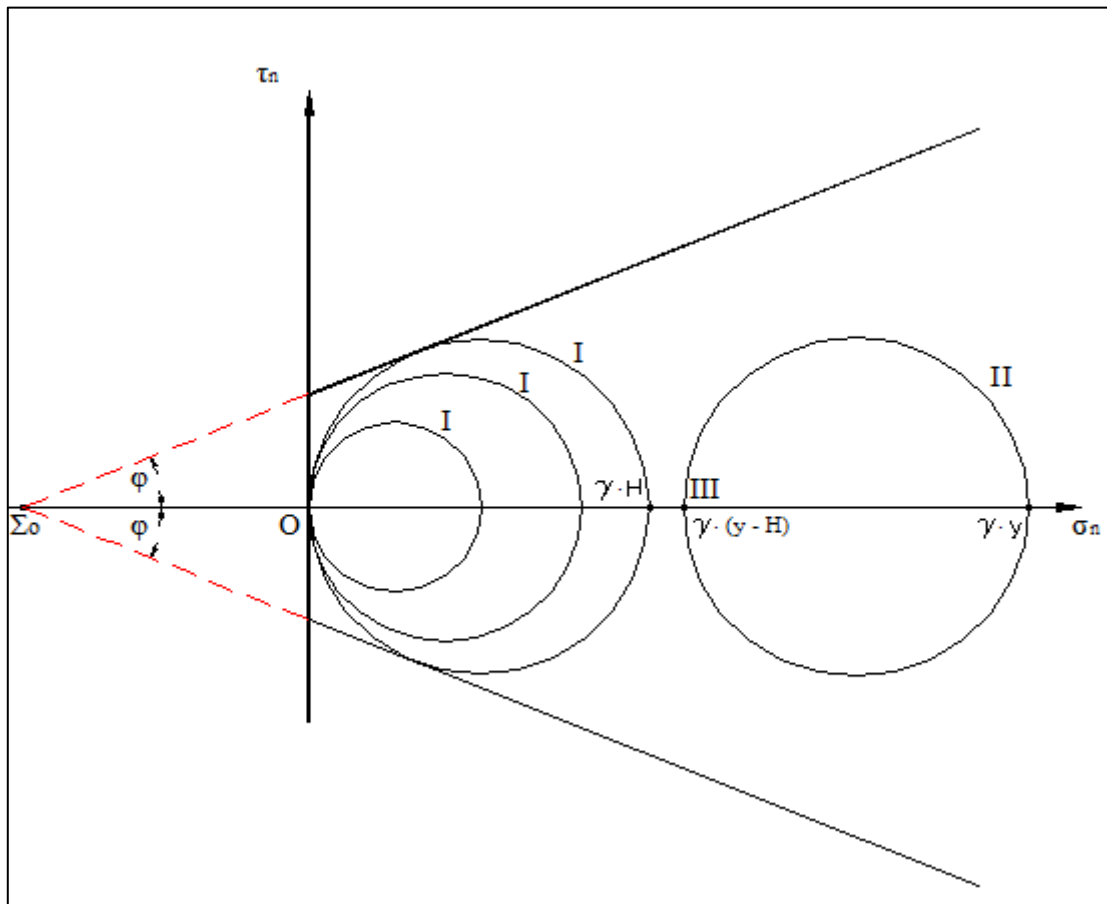
Σχήμα 3.3: Λύση ισορροπίας κατακόρυφου πρανούς σε γεωυλικό που δεν μπορεί να παραλάβει εφελκυστικά φορτία.

Το απλούστερο δυνατό πεδίο τάσεων ισορροπίας είναι αυτό που χαρακτηρίζεται από ένα οριζόντιο επίπεδο μεταξύ των ζωνών I, II στο οποίο η οριζόντια τάση σ_{xx} είναι ασυνεχής και ένα κατακόρυφο επίπεδο μεταξύ των ζωνών II, III στο οποίο η κατακόρυφη τάση σ_{yy} είναι ασυνεχής. Όπως φαίνεται στο Σχ.3.3 το εντατικό πεδίο στη ζώνη I είναι μονοαξονική θλίψη, στη ζώνη II είναι διαξονική θλίψη και στη ζώνη III είναι υδροστατική θλίψη. Το Σχ. 4.16 αποδίδει γραφικά τους κύκλους του Mohr σε κάθε ζώνη του πρανούς.

Αν υποθέσουμε ότι το κριτήριο αστοχίας του γεωυλικού είναι τύπου Mohr – Coulomb

$$\tau_n = c + \tan \phi \cdot \sigma_n, \quad \sigma_n \geq 0 \quad (3.1)$$

τότε η αστοχία του πρανούς θα εκδηλωθεί όταν ο κύκλος I με ακτίνα $R = \frac{\gamma \cdot H}{2}$ φθάσει τις περιβάλλουσες αστοχίας $\Sigma\sigma_1$ και $\Sigma\sigma_2$ (βλ. Σχ. 3.4).



Σχήμα 3.4: Κύκλοι του Mohr και περιβάλλουσα αστοχίας του γεωυλικού με αποκοπή των εφελκυστικών τάσεων για το παράδειγμα του κατακόρυφου πρανούς. Οι θλιπτικές τάσεις λαμβάνονται θετικοί αριθμοί.

Σύμφωνα με την συνθήκη αυτή και την γεωμετρία των κύκλων μπορούμε να βρούμε τη σχέση αστοχίας

$$R_f = \frac{c + \tan \phi \cdot R_f}{\sqrt{1 + \tan^2 \phi}} \Rightarrow R_f = c \cdot \cos \phi + \sin \phi \cdot R_f \quad (3.2)$$

όπου R_f = ακτίνα του εφαπτόμενου στην ευθεία του κριτηρίου αστοχίας κύκλου.

Εφόσον

$$R_f = \frac{\gamma \cdot H}{2}$$

τότε από την προηγούμενη σχέση (3.2) βρίσκουμε

$$\frac{1}{2} \cdot \gamma \cdot H_f = c \cdot \cos \phi + \frac{1}{2} \cdot \gamma \cdot H_f \cdot \sin \phi \quad (3.3)$$

όπου H_f = κρίσιμο ύψος του μετώπου

Εφόσον το παραπάνω ασυνεχές εντατικό πεδίο υπακούει στις εξισώσεις ισορροπίας, στις συνοριακές συνθήκες και δεν παραβιάζει το κριτήριο αστοχίας τότε σύμφωνα με το θεώρημα του

κάτω φράγματος της οριακής ανάλυσης η τιμή του H_f που υπολογίζεται από τη σχέση (3.3) αποτελεί κάτω φράγμα του κρίσιμου ύψους του πρανούς

$$H_f = \frac{2c}{\gamma} \cdot \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2}\right) \quad (3.4)$$

3.2. Κινηματική μέθοδος σε προβλήματα ευστάθειας

γεωκατασκευών

«Μηχανισμός αστοχίας» είναι το τμήμα του μέσου που υποβάλλεται σε κίνηση λόγω πλαστικής ροής υπό την επίδραση εξωτερικών φορτίων. Οι σχετικές μετατοπίσεις των στοιχείων του μηχανισμού αστοχίας κατά την διάρκεια της πλαστικής ροής για χρόνο dt αποδίδονται γεωμετρικά με την βοήθεια του οδογράφου. Ο κινηματικά αποδεκτός μηχανισμός αστοχίας αποτελείται συνήθως από κινηματική αλυσίδα στερεών σωμάτων που χωρίζονται μεταξύ τους με ζώνες διάτμησης ή ολίσθησης. Τα στερεά σώματα επιτρέπεται να ολισθαίνουν και να περιστρέφονται το ένα ως προς το άλλο χωρίς όμως να αλληλοεπικαλύπτονται ή να δημιουργούν κενά μεταξύ τους. Ο κινηματικά αποδεκτός μηχανισμός αστοχίας πρέπει επίσης να είναι συμβιβαστός με τις μετατοπίσεις στο σύνορο του σώματος. Τέλος, κατά τη διάρκεια της πλαστικής ροής, οι μεταβολές των πλαστικών τροπών στις ζώνες διάτμησης πρέπει να ικανοποιούν τον «συνηρημένο νόμο πλαστικής ροής».

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^p = \lambda \cdot \frac{\partial F(\sigma_{ij})}{\partial \sigma_{ij}} \quad (3.5)$$

όπου $F(\sigma_{ij})$ είναι η επιφάνεια διαρροής και λ σταθερά αναλογίας.

Σύμφωνα με το θεώρημα του άνω ορίου της οριακής ανάλυσης κάθε κινηματικά αποδεκτή λύση αποτελεί άνω όριο του φορτίου αστοχίας μιας κατασκευής. Όπως φαίνεται στο Σχ. 3.1β στο συνηρημένο νόμο πλαστικής διαρροής το διάνυσμα των πλαστικών τροπών $\dot{\varepsilon}^p$ είναι κάθετο στην επιφάνεια διαρροής F .

Η κινηματική μέθοδος βασίζεται στην «αρχή των δυνατών έργων» κατά την οποία το ολικό έργο A των εξωτερικών φορτίων που δρουν πάνω και μέσα στο μηχανισμό αστοχίας σε χρόνο dt , είναι ίσο με την ενέργεια D που δαπανάται στο μηχανισμό αστοχίας κατά την διάρκεια της πλαστικής παραμόρφωσης.

$$\dot{A} = \dot{D} \quad (3.6)$$

όπου

$$\dot{A} = \sum_{i=1}^n P_i \dot{u}_{p_i} + \sum_{i=1}^m b_i \dot{u}_{b_i} dV_i, \quad (3.7)$$

και

P_i = εξωτερικές δυνάμεις, u_{p_i} = αντίστοιχες ταχύτητες στην P_i - διεύθυνση, b_i = ειδικό βάρος σώματος, \dot{u}_{b_i} = αντίστοιχη ταχύτητα, dV_i = στοιχειώδης όγκος που δρά το b_i , n = αριθμός των εξωτερικών φορτίων και m = αριθμός των σωμάτων του μηχανισμού αστοχίας.

Η ενέργεια που δαπανάται στο μηχανισμό αστοχίας δίνεται από τη σχέση

$$\dot{D} = \int_V \sigma_{ij} \cdot \dot{\varepsilon}_{ij}^p dV \quad (3.8)$$

όπου η τάση σ_{ij} και η πλαστική τροπή $\dot{\varepsilon}_{ij}^p$ προσδιορίζονται από το κριτήριο (ή επιφάνεια) αστοχίας F και τον νόμο πλαστικής διαρροής, αντίστοιχα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4:

Αλγόριθμος Επίλυσης της Ολίσθησης Επίπεδου Ομογενούς Πρανούς με την Μέθοδο του άνω Θεωρήματος της Οριακής Ανάλυσης

4.1. Εισαγωγή

Στη συνέχεια παρουσιάζεται αναλυτική μέθοδος για τον υπολογισμό του ΣΑ πρανών που βασίζεται στη θεωρία της Οριακής Ανάλυσης που εκτέθηκε στο Κεφάλαιο 3. Η μέθοδος βασίζεται στις εξής παραδοχές:

1. Επίπεδη ανάλυση.
2. Ομοιογενές, ισότροπο γεωυλικό.
3. Στις παραδοχές των θεωρημάτων της Οριακής Ανάλυσης.

4.2. Διακριτοποίηση

Ένα πρανές με επιφάνεια ολίσθησης $\Gamma = AS_1S_2S_3...S_nC$ (Σχ. 4.1) θεωρούμε ότι βρίσκεται σε Οριακή Κατάσταση όταν σε όλη την μάζα του πρανούς $\Omega = CBAS_1S_2S_3...C$ (Σχ. 4.1) η εντατική κατάσταση του υλικού είναι στο όριο διαρροής. Με βάση την τεκμηρίωση που παρουσιάστηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο για το άνω Θεώρημα της Οριακής Ανάλυσης η ενέργεια που δαπανάται στην μάζα της κατολίσθησης ισούται με το έργο των εξωτερικών δυνάμεων που ενεργούν στην μάζα αυτή. Έτσι για ένα πρανές στο οποίο επιδρά μόνο το βάρος του W και όπου η τάση είναι σ_{ij} και ο ρυθμός μεταβολής πλαστικής τροπής είναι $\dot{\epsilon}_{ij}^p$ θα ισχύει (Chen, Z. ., 2001):

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij} \cdot \dot{\epsilon}_{ij}^p dv + \int_{\Gamma} dD = W \cdot V \quad (4.1)$$

Όπου dD , η ενέργεια που δαπανάται στο μηχανισμό αστοχίας

V , η πλαστική ταχύτητα ή ρυθμός πλαστικής μετατόπισης

Εφαρμόζουμε γραμμικό μηχανισμό ολίσθησης δηλ. η ολισθαίνουσα επιφάνεια αποτελείται από σύνολο ευθύγραμμων τμημάτων $AS_1, S_1S_2, ..., S_nC$ (Σχ. 4.1). Όπως φαίνεται στο Σχ. 4.1 το τμήμα ABC διακριτοποιείται με σημεία $k_1, k_2, k_3, ..., k_n$ ώστε να χωρισθεί η μελετούμενη εδαφική μάζα σε διακριτά τμήματα τα οποία θεωρούνται άκαμπτα – τέλεια πλαστικά. Τα ευθύγραμμα

τμήματα $k_i S_i$ ($i=1..n$) απεικονίζουν τις διατμητικές ζώνες ή ασυνέχειες που δημιουργούνται στη μάζα του εδαφικού υλικού κατά την αστοχία του και μπορεί να έχουν οποιαδήποτε κλίση προδίδοντας στην ουσία τον μηχανισμό κατάρρευσης του πρανούς.

Έτσι η σχέση 4.1 γίνεται (Chen, Z. ,. 2001):

$$\sum D_i + \sum D_{ij} = W_i \cdot V_i \quad (4.2)$$

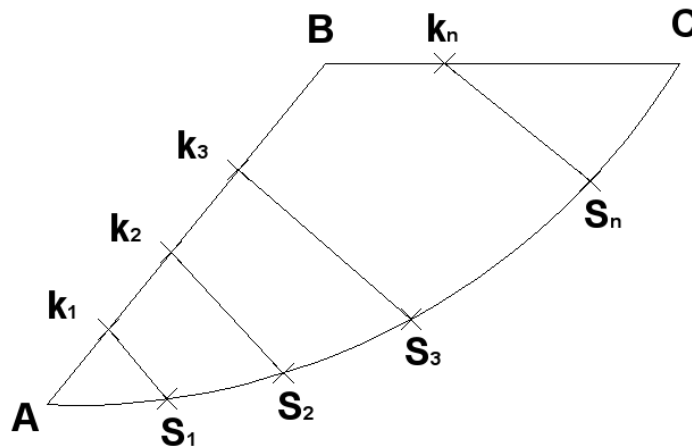
όπου $i, j = 1..n$

D_i η ενέργεια που δαπανάται στην επιφάνεια ολίσθησης

D_{ij} η ενέργεια που δαπανάται στις διεπιφάνειες $k_i S_i$ ($i=1..n$), βλ. Σχ. 4.1

W_i το βάρος κάθε διακριτού τεμαχίου

V_i η πλαστική ταχύτητα κάθε τεμαχίου



Σχήμα 4.1: Ομογενές πρανές με επιφάνεια ολίσθησης $AS_1S_2S_3...S_nC$

Η ισότητα του έργου των εξωτερικών δυνάμεων με την απώλεια ενέργειας στις διεπιφάνειες και στην επιφάνεια ολίσθησης θα ισχύει εφόσον φυσικά υπάρχει επιφάνεια ολίσθησης τέτοια ώστε το υλικό με δεδομένο μηχανισμό ξεκινά την μετακίνηση οπότε ο συντελεστής ασφάλειας εκείνη τη στιγμή είναι 1.

4.3. Εισαγωγή του συντελεστή ασφαλείας

Για την εισαγωγή του συντελεστή ασφαλείας στην εξίσωση 4.2 ακολουθούμε την μεθοδολογία απομείωσης διατμητικής αντοχής (reduction strength) κατά την οποία λαμβάνουμε τον συντελεστή ασφαλείας του πρανούς SF.

Ο συντελεστής ασφαλείας SF πρανούς ορίζεται σαν ο λόγος της διατμητικής αντοχής του υλικού προς την τιμή της διατμητικής τάσης κατά την οποία ξεκινά η αστοχία. Δηλαδή όπως παρατήρησε ο Duncan (1996) είναι ο αριθμός με τον οποίο αν διαιρέσουμε την πραγματική διατμητική τάση θα μας δώσει την διατμητική τάση κατά την οποία το πρανές θα αστοχήσει. Έτσι

$$\tau_{\kappa\rho\rho\rho\rho\rho} = \frac{\tau_{\pi\rho\rho\rho\rho\rho}}{SF} \quad (4.3)$$

και σύμφωνα με το κριτήριο του Coulomb

$$\tau_{\kappa\rho\rho\rho\rho\rho} = \frac{c + \tan \phi \cdot \sigma}{SF} \quad (4.4)$$

οπότε οι παράμετροι του υλικού c_e , ϕ_e για τις οποίες το πρηνές αστοχεί θα δίνονται από τις σχέσεις:

$$\phi_e = \arctan\left(\frac{\tan \phi}{SF}\right) \quad (4.5)$$

και

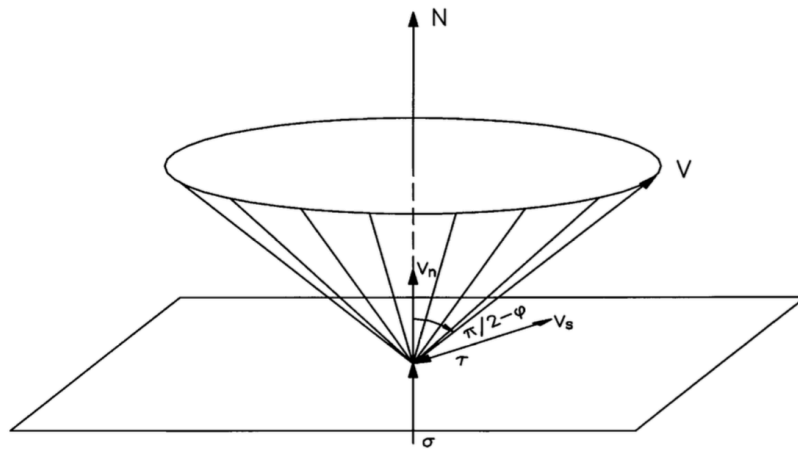
$$c_e = \frac{c}{SF} \quad (4.6)$$

Με βάση τις σχέσεις 4.5 και 4.6 η σχέση 4.2 μετασχηματίζεται ως εξής:

$$\sum D_i^* + \sum D_{ij}^* = W_i \cdot V_i \quad (4.7)$$

όπου με D_i^* , D_{ij}^* είναι η απώλεια ενέργειας στις διεπιφάνειες υπολογίζοντας πλέον την εντατική κατάσταση απομειωμένη με βάση τις σχέσεις 4.5 και 4.6.

4.4. Θεώρηση δισδιάστατης ανάλυσης



Σχήμα 4.2: Αναπαράσταση πλαστικών ταχυτήτων σε μια επιφάνεια όταν ισχύει ο συνηρημένος νόμος ροής. Σε αυτή την περίπτωση το διάνυσμα της πλαστικής ταχύτητας έχει γωνία ϕ με την επιφάνεια και $\pi/2 - \phi$ με το κάθετο στην επιφάνεια επίπεδο. (Chen, Z. ., (2001))

Για την σωστή μοντελοποίηση του προβλήματος είναι απαραίτητη η ύπαρξη αποδεκτού κινηματικού μηχανισμού. Η συγκεκριμένη επίλυση ΑΟΘ ακολουθεί το κριτήριο Mohr – Coulomb που μας δίνει την επιφάνεια διαρροής και εκφράζεται από τις σχέσεις 4.8α και 4.8β.

$$f(\tau, \sigma) = \tau - c_e - \sigma \cdot \tan \varphi_e = 0 \quad (4.8\alpha)$$

$$f(\tau, \sigma) = \tau - c'_e - (\sigma - u) \cdot \tan \varphi'_e = 0 \quad (4.8\beta)$$

όπου σ , τ η κάθετη και διατμητική συνιστώσα του διανύσματος της τάσης στο επίπεδο και u η πίεση πόρων. Η γωνία φ_e είναι η ανηγμένη με τον συντελεστή ασφαλείας γωνία εσωτερικής τριβής του υλικού όπως εκφράζεται με την σχέση 4.5 ενώ οι c'_e, φ'_e είναι η ανηγμένη ενεργός συνοχή και η ανηγμένη ενεργός γωνία εσωτερικής τριβής αντίστοιχα.

Για τον συνηρτημένο νόμο ροής η κάθετη και παράλληλη σε κάθε επίπεδο πλαστική ταχύτητα ακολουθεί την ακόλουθη σχέση:

$$\frac{V_n}{V_s} = \frac{\partial f / \partial \sigma}{\partial f / \partial \tau} = -\tan \varphi_e \quad (4.9)$$

όπου V_n , V_s η κάθετη και διατμητική συνιστώσα του διανύσματος της πλαστικής ταχύτητας στο επίπεδο (βλέπε Σχ. 4.2).

Συνεπώς το διάνυσμα της πλαστικής ταχύτητας σχηματίζει γωνία φ_e με το επίπεδο. Μια άλλη έκφραση του κριτηρίου Mohr – Coulomb δίνεται από την σχέση 2.24. Σε αυτή την έκφραση παρατηρούμε ότι το συγκεκριμένο κριτήριο μπορεί να εκφραστεί χωρίς την ενδιάμεση κύρια τάση. Αυτό αποκαλύπτει ότι στην ουσία η πλαστική ταχύτητα, η διατμητική τάση και η κάθετη τάση βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο. Αυτό μας επιτρέπει την επίλυση του προβλήματος σε δύο διαστάσεις. Μάλιστα το έργο που παράγεται στην επιφάνεια ολίσθησης από το εσωτερικό εντατικό πεδίο μπορεί να εκφραστεί χωρίς την παρουσία της ορθής και διατμητικής τάσης σύμφωνα με τη σχέση 4.10.

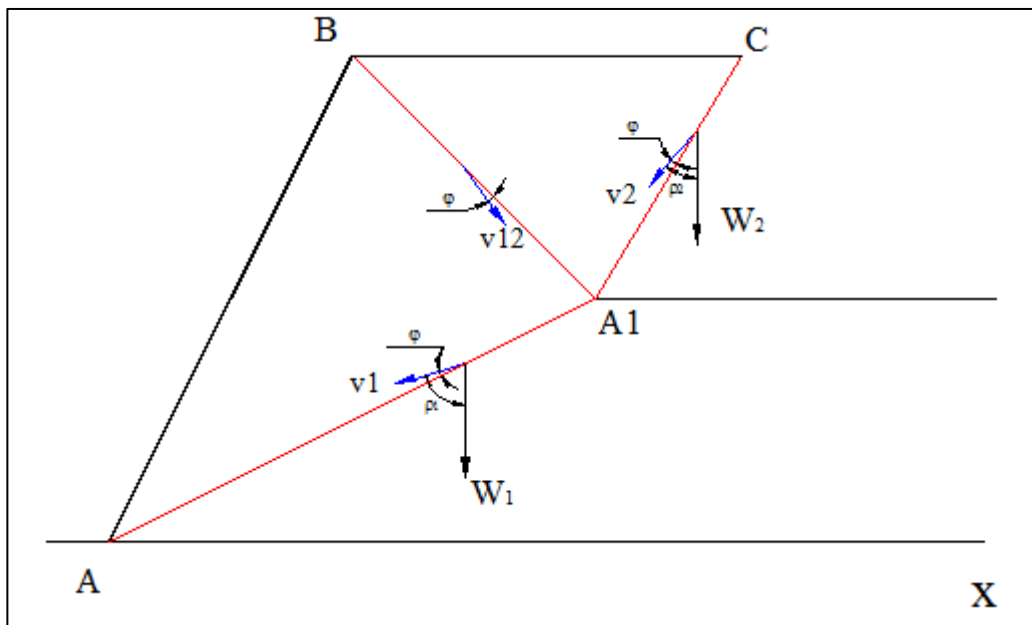
$$D = \tau \cdot V_s - \sigma \cdot V_n = (\tau \cdot \cos \phi_e + \sigma \cdot \sin \phi_e) \cdot V = c \cdot \cos \phi_e \cdot V \quad (4.10)$$

Ο όρος $c \cdot \cos \phi_e \cdot V$ είναι η ενέργεια που δαπανάται σε κάθε διεπιφάνεια.

4.5. Οδογράφος

Για την εφαρμογή του ΑΟΘ θα πρέπει να ικανοποιούνται:

- Οι συνοριακές συνθήκες για τις ταχύτητες
- Η ικανοποίηση συμβιβαστότητας πλαστικών τροπών – ταχυτήτων

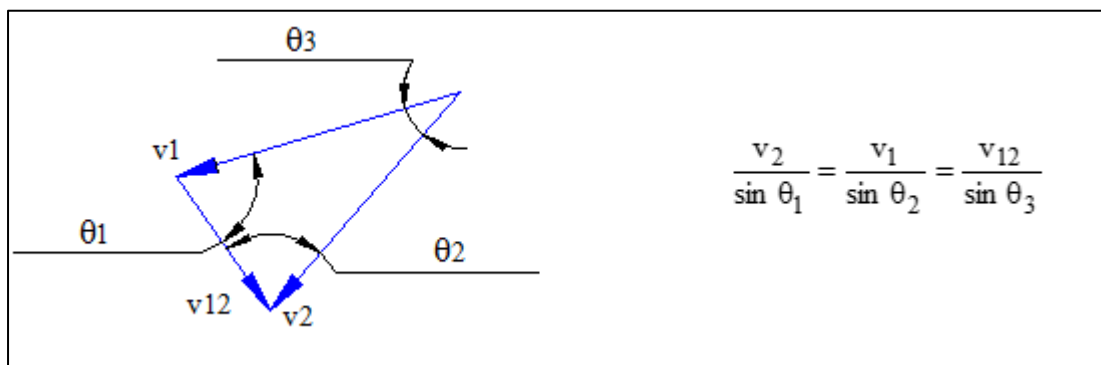


Σχήμα 4.3: Μηχανισμός αστοχίας πρανούς δύο διακριτών σωμάτων

Ορισμός: Οδογράφος ονομάζεται το σύστημα των διανυσμάτων των ταχυτήτων των στερεών σωμάτων ως προς ένα ακίνητο παρατηρητή και ως προς τα σώματα αυτά μεταξύ των.

Με τον οδογράφο μπορεί κάποιος να αντιληφθεί τις ταχύτητες των σωμάτων και τον τρόπο που κινούνται τα σώματα. Επίσης αποδίδει με εύκολο τρόπο την κατανόηση και τις φορές των εξασκούμενων δυνάμεων που αναπτύσσονται στο επίπεδο ολίσθησης και στις ασυνέχειες.

Η ικανοποίηση των συνοριακών συνθηκών των ταχυτήτων και της συμβιβαστότητας πλαστικών τροπών ταχυτήτων συνεπάγεται το «κλείσιμο» του οδογράφου. Στο ΑΟΘ δεχόμαστε ότι όλη η μάζα της κατολίσθησης βρίσκεται σε κατάσταση τελείως πλαστική. Αυτό έχει ως επακόλουθο την ανάγκη θεώρησης άκαμπτων σωμάτων που συνθέτουν τον μηχανισμό αστοχίας. Τα σώματα αυτά δεν μπορούν να «διεισδύσουν» μεταξύ τους αλλά ούτε και να «αποκολληθούν» ώστε να διασφαλίζεται το «κλείσιμο» του οδογράφου. Για την περίπτωση μηχανισμού αστοχίας δύο σωμάτων (Σχ. 4.3) ο οδογράφος τους φαίνεται στο Σχ. 4.4



Σχήμα 4.4: Οδογράφος του πρανούς δύο στερεών σωμάτων.

4.6. Υπολογισμός συντελεστού ασφαλείας

Κατά την στιγμή της αστοχίας του πρανούς το έργο που προσδίδεται από τις εξωτερικές δυνάμεις (βαρύτητα, βάρος ανωδομής, συρτικές δυνάμεις νερού, σεισμικά φορτία κ.λπ.) ισούται με την απώλεια ενέργειας στις επιφάνειες διάτμησης και την επιφάνεια ολίσθησης του εδάφους.

Για την περίπτωση μηχανισμού αστοχίας δύο διακριτών σωμάτων όπως φαίνεται στο Σχ. 4.3 έχουμε ότι για τη στιγμή της αστοχίας θα ισχύει:

$$AA_1 \cdot c \cdot \cos \phi \cdot v_1 + A_1C \cdot c \cdot \cos \phi \cdot v_2 + A_1B \cdot c \cdot \cos \phi \cdot v_{12} = W_1 \cdot v_1 \cdot \cos \rho_1 + W_2 \cdot v_2 \cdot \cos \rho_2 \quad (4.11)$$

όπου

c η συνοχή του υλικού

φ η γωνία εσωτερικής τριβής

v η πλαστική ταχύτητα δηλ. ο ρυθμός μεταβολής της μετατόπισης

W_i τα βάρη των τεμαχίων $i = 1..2$

ρ_i η γωνία που σχηματίζουν τα διανύσματα των βαρών W_i με τις πλαστικές ταχύτητες

Έχοντας τις συντεταγμένες των A, A₁, B, C υπολογίζουμε τις παραπάνω ποσότητες ως εξής:

- Τα μήκη AA₁, A₁C, A₁B από τον γνωστό τύπο: $\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$
- Οι πλαστικές ταχύτητες σύμφωνα με τον **συντηρημένο νόμο ροής** σχηματίζουν γωνία ϕ με τα ολισθαίνοντα επίπεδα και τις διεπιφάνειες οπότε υπολογίζονται με βάση τον κανόνα των ημιτόνων όπως φαίνεται στο Σχ.4.4, εκφράζονται συναρτήσει της v_1 και απαλείφονται από την (4.11).
- Το βάρος πχ W_1 είναι το μισό του μέτρου του εξωτερικού γινομένου του διανύσματος A₁A και του διανύσματος A₁B
- Οι τιμές των $\cos \rho_1$, $\cos \rho_2$ από το εσωτερικό γινόμενο των [0 –1] (μοναδιαίο του βάρους) με το μοναδιαίο διάνυσμα του v_i του οποίου το μέτρο είναι 1 ενώ το διάνυσμα καθορίζεται π.χ για το v_1 ως εξής: Γνωρίζω το $\vec{A_1A}$ από τις συντεταγμένες των σημείων. Το μοναδιαίο διάνυσμα v_1 προκύπτει από το εσωτερικό γινόμενο του μοναδιαίου $\frac{\vec{A_1A}}{|\vec{A_1A}|}$ με τον πίνακα στροφής $\begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix}$ κατά γωνία ϕ . Έτσι το εσωτερικό γινόμενο του μοναδιαίου v_1 με το [0 1] θα μας δώσει το $\cos \rho_1$.

Με βάση τις ανηγμένες τιμές της συνοχής και της γωνίας εσωτερικής τριβής η εξίσωση 4.11 εμπεριέχει τον συντελεστή ασφάλειας SF σαν άγνωστο. Η εξίσωση είναι μη-γραμμική προς SF και επιλύεται με αριθμητική μέθοδο. Οι περισσότεροι ερευνητές προτείνουν την μέθοδο των Newton – Raphson για την επίλυση της.

4.7. Κατάστρωση του προβλήματος

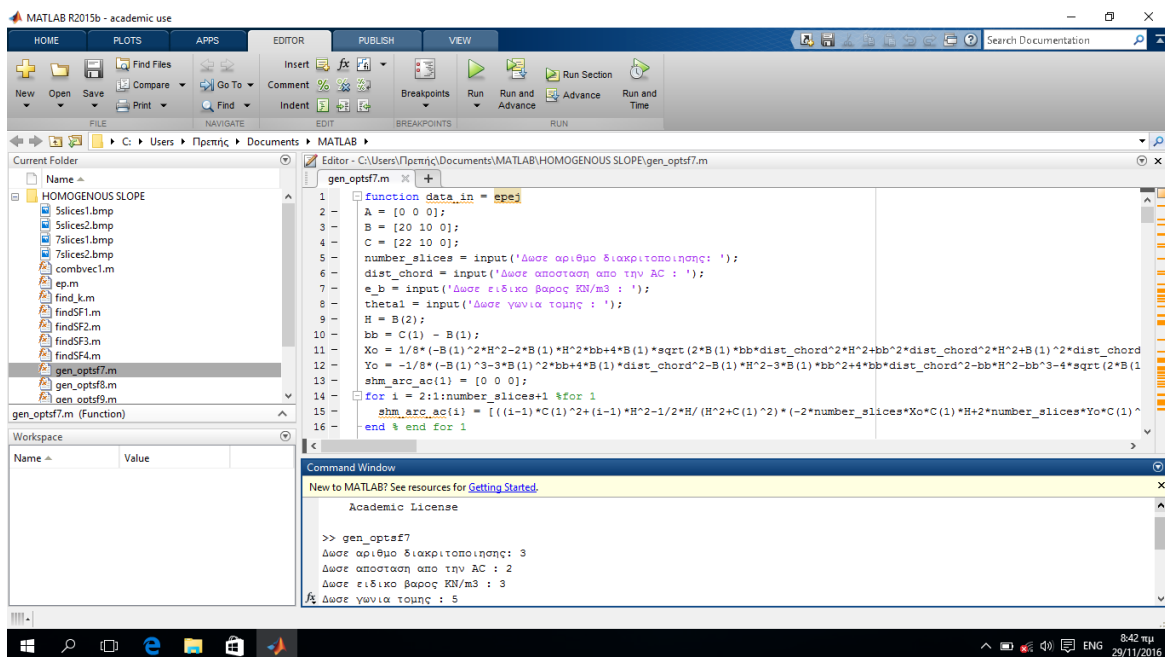
Για την επίλυση του γενικού προβλήματος για η διακριτά σώματα πρέπει να ακολουθήσουμε τα ακόλουθα βήματα:

1. Εισαγωγή γεωμετρίας επιφάνειας του πρανούς

Εισάγονται τα σημεία (π.χ. τα A, B, C Σχ. 4.3) με μορφή [x y] (όπου x,y οι συντεταγμένες κάθε σημείου) στο πρόγραμμα.

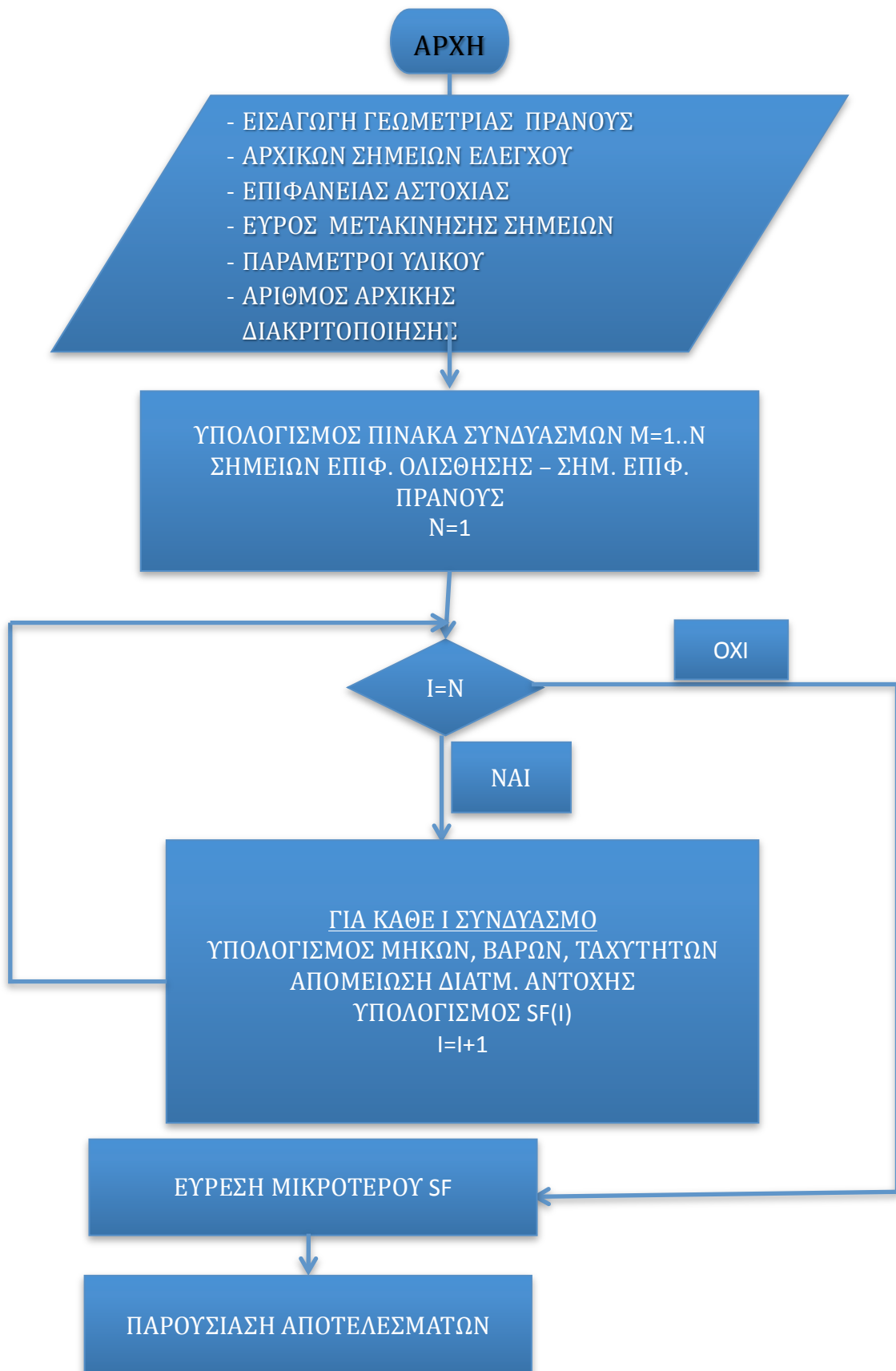
2. Επιλογή της πρώτης επιφάνειας ολίσθησης

Γνωρίζοντας τα σημεία A, B, C θεωρούμε τόξο με σημεία ελέγχου τα A, C και ένα τρίτο σημείο D που απέχει απόσταση d από το μέσο της AC. Η πρώτη απόσταση d δίνεται από τον χρήστη και στη συνέχεια το πρόγραμμα θα δοκιμάσει άλλα 10 τόξα με σημεία ελέγχου τα A, C, D όπου το D θα έχει απόσταση d η οποία θα αυξάνεται κατά 1 για 10 φορές.



Σχήμα 4.4.α: Εισαγωγή δεδομένων στο πρόγραμμα

3. Διακριτοποίηση επιφάνειας ολίσθησης (χρησιμοποιώντας το αντίστοιχο τόξο)
4. Διακριτοποίηση επιφάνειας πρανούς σε ανάλογα με την διακριτοποίηση επιφάνειας ολίσθησης σημεία
5. Υπολογισμός των μηκών, όγκων, πλαστικών ταχυτήτων για κάθε περίπτωση
6. Εύρεση του συντελεστή ασφάλειας με αριθμητική μέθοδο για δεδομένη διακριτοποίηση και κλίση των διεπιφανειών
7. Αλλαγή διακριτοποίησης, κλίσης διεπιφανειών και εύρεση συντελεστή ασφάλειας για κάθε δυνατή περίπτωση
8. Εύρεση του μικρότερου συντελεστή ασφάλειας



Σχήμα 4.3.β: Διάγραμμα ροής αλγορίθμου εύρεσης συντελεστή ασφάλειας ομογενούς πρανούς

4.8. Αποτελέσματα

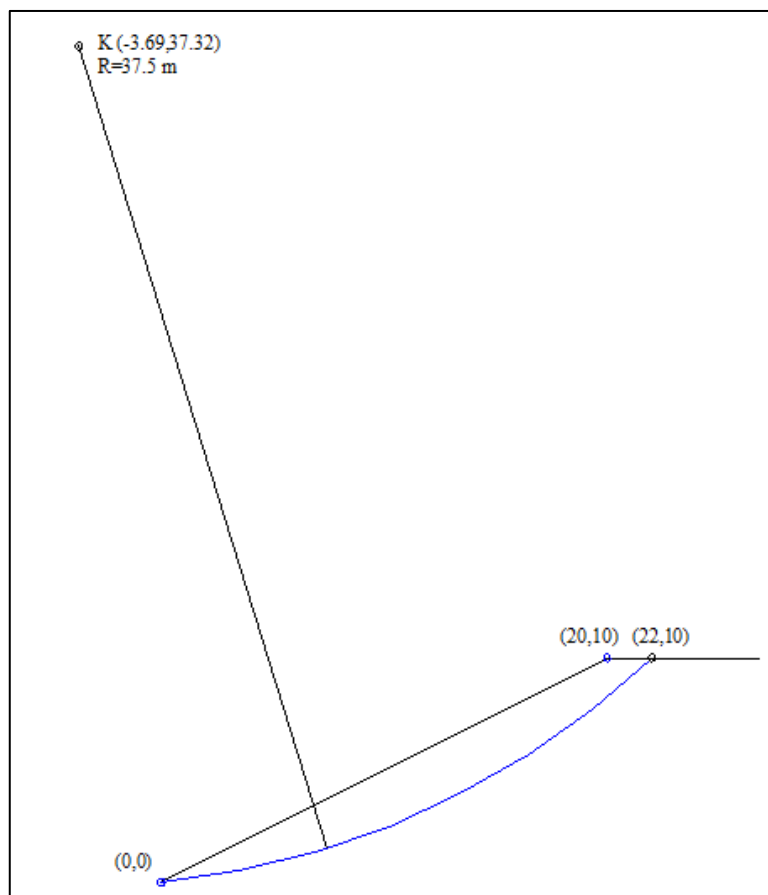
Με βάση τον παραπάνω αλγόριθμο κατασκευάστηκε πρόγραμμα με την βοήθεια του λογισμικού Matlab. Για την επαλήθευση της ορθής λειτουργίας του αλγορίθμου έγινε σύγκριση της εκτίμησης του ΣΑ δεδομένης κυκλικής αστοχίας πρανούς με αυτήν του εμπορικού κώδικα Slide ver. 5 (Rocscience Inc.) το οποίο χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό του ΣΑ επίπεδων πρανών με διάφορες μεθόδους οριακής ισορροπίας. Το πρόβλημα σύγκρισης είναι πρανές με τα εξής δεδομένα:

Συνοχή, $c = 3 \text{ kN} / \text{m}^2$

Γωνία εσωτερικής τριβής, $\phi = 19.6^\circ$

Ειδικό βάρος, $\gamma = 20.2 \text{ kN} / \text{m}^3$

Η γεωμετρία της επιφάνειας του πρανούς και της επιφάνειας ολίσθησης φαίνονται στο Σχ. 4.5.



Σχήμα 4.4: Γεωμετρία ομογενούς πρανούς που ολισθαίνει σε κυκλική επιφάνεια ολίσθησης.

Τα αποτελέσματα επίλυσης με το εν λόγω λογισμικό με 4 μεθόδους οριακής ανάλυσης παρουσιάζονται στον Πίνακα 4.1.

Πίνακας 4.1: Αποτελέσματα απο επίλυση σε περιβάλλον Slide ver. 5

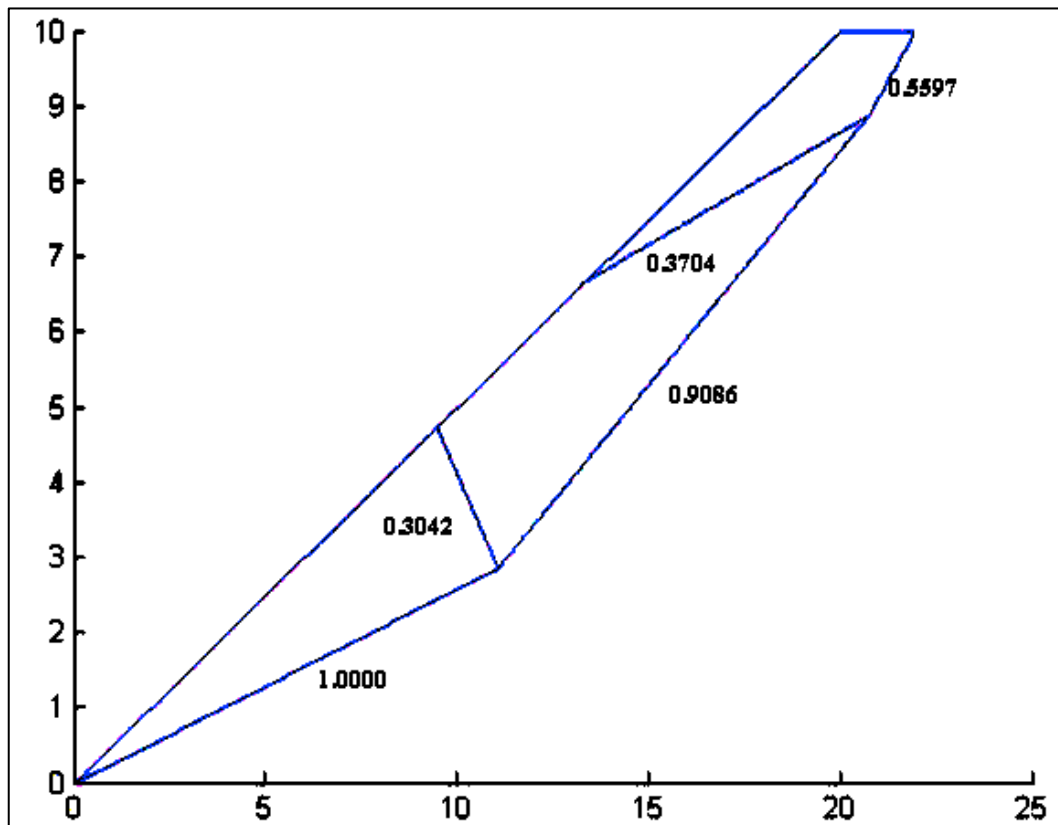
Μέθοδος	Συντελεστής Ασφαλείας
Bishop	0.987
Spencer	0.986
GLE	0.986
+Janbu Corrected	0.990

Τα ανωτέρω αποτελέσματα συγκρίνονται με τον προτεινόμενο αλγόριθμο για διαφορετικό αριθμό σωμάτων της κινηματικής αλυσίδας. Ο αλγόριθμος χρειάζεται τα όρια των συντεταγμένων που μπορεί να πάρει κάθε σημείο της επιφάνειας ολίσθησης. Στο συγκεκριμένο παράδειγμα τα σημεία της επιφάνειας ολίσθησης ανήκουν σε τόξο με δεδομένο κέντρο κύκλου και ακτίνα. Στην παρουσίαση των αποτελεσμάτων φαίνονται πάνω στα σχήματα οι κύριες και πλάγιες πλαστικές ταχύτητες (Βλ. Σχ.4.3) των διακριτών σωμάτων για τις οποίες κλείνει ο οδογράφος.

4.8.1. Μηχανισμός αστοχίας τριών σωμάτων

Χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο με έναν μηχανισμό 3 σωμάτων όπως φαίνεται στο Σχ. 4.6 έχουμε τα κάτωθι αποτελέσματα για τον συντελεστή ασφαλείας και τις ταχύτητες. Χρόνος επίλυσης 30 min (σε φορητό υπολογιστή Dell Intel Core i5-4300U 1.9 GHz, 3M cache με 8 GB RAM και Matlab R2015b).

Κύριες Ταχύτητες	1.0000	0.9086	0.5597
Πλάγιες Ταχύτητες	0.3042	0.3704	
SF	1.2880		

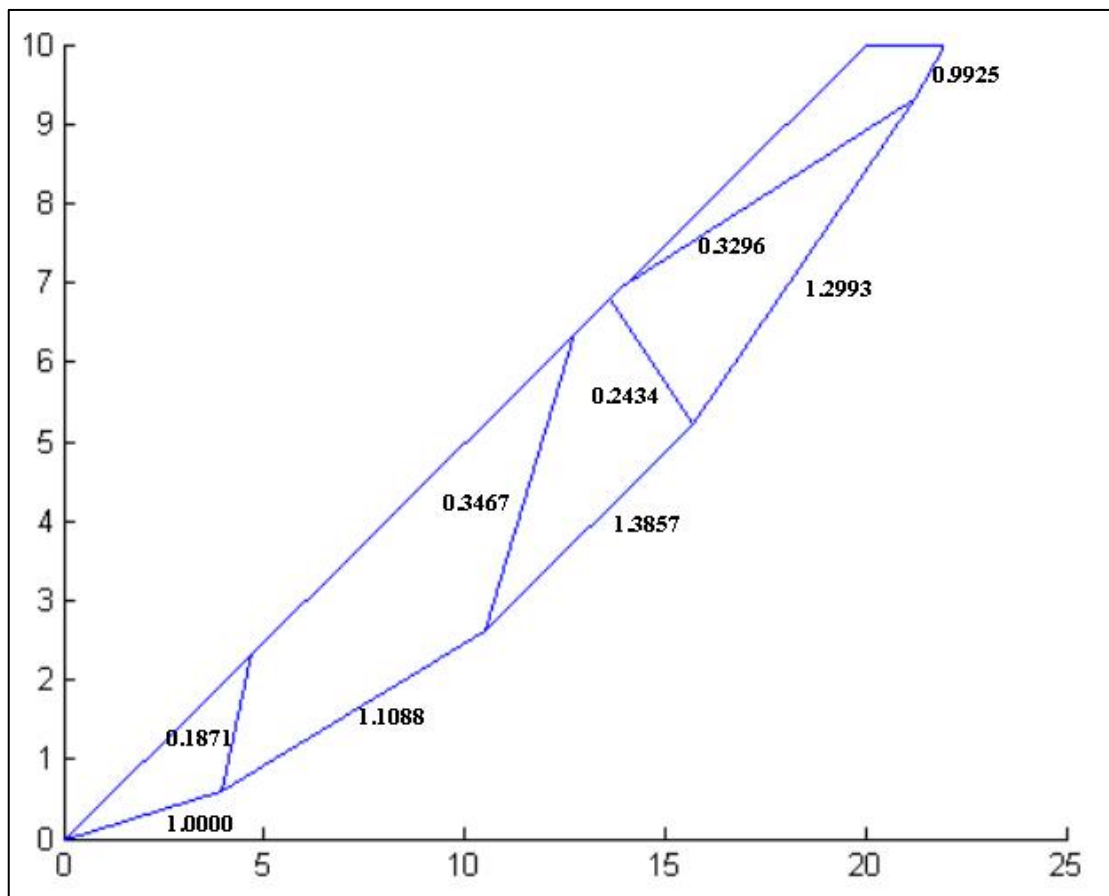


Σχήμα 4.5: Μηχανισμός αστοχίας τριών σωμάτων

4.8.2. Μηχανισμός αστοχίας πέντε σωμάτων

Στη συνέχεια χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο με έναν μηχανισμό 5 σωμάτων όπως φαίνεται στο Σχ. 4.7 έχουμε τα κάτωθι αποτελέσματα για τον συντελεστή ασφαλείας και τις ταχύτητες. Χρόνος επίλυσης 65 min.

Κύριες Ταχύτητες	1.0000	1.1088	1.3857	1.2993	0.9925
Πλάγιες Ταχύτητες	0.1871	0.3467	0.2434	0.3296	
SF	1.1082				

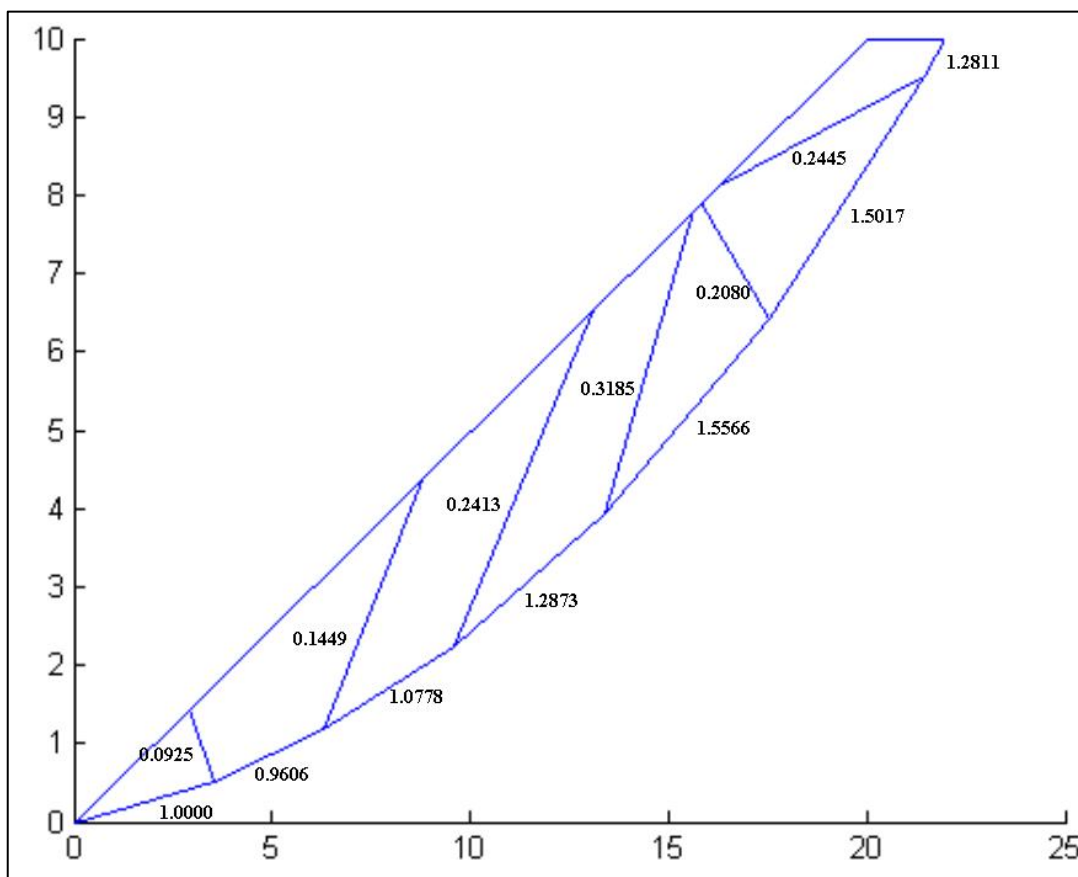


Σχήμα 4.6: Μηχανισμός αστοχίας πέντε σωμάτων

4.8.3. Μηχανισμός αστοχίας επτά σωμάτων

Τέλος ο αλγόριθμος με έναν μηχανισμό 7 σωμάτων όπως φαίνεται στο Σχ. 4.8 έδωσε τα κάτωθι αποτελέσματα για τον συντελεστή ασφαλείας και τις ταχύτητες. Χρόνος επίλυσης 120 min.

Κύριες Ταχύτητες	1.0000	0.9606	1.0778	1.2873	1.5566	1.5017	1.2811
Πλάγιες Ταχύτητες	0.0925	0.1449	0.2413	0.3185	0.2080	0.2445	
SF	1.0855						

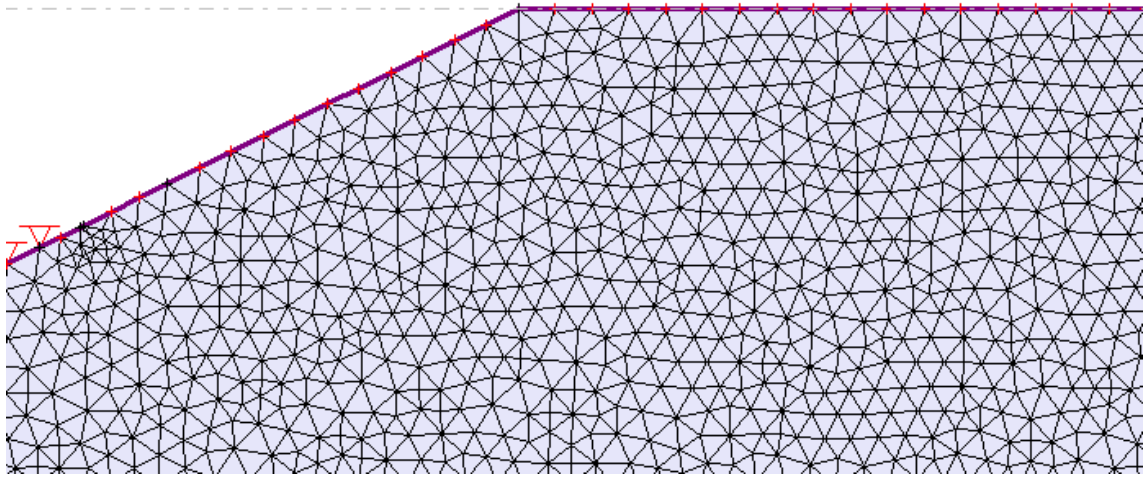


Σχήμα 4.7: Μηχανισμός αστοχίας επτά σωμάτων

Από τις ανωτέρω αναλύσεις με διαφορετικούς αριθμούς στερεών σωμάτων της κινηματικής αλυσίδας αστοχίας του πρανούς φαίνεται ότι όσο αυξάνει ο αριθμός των σωμάτων ο ΣΑ συγκλίνει σε μια τιμή γύρω στην τιμή 1.08 που είναι λίγο μεγαλύτερη από τις τιμές του ΣΑ που δίνουν οι μέθοδοι οριακής ισορροπίας που φαίνονται στον Πίν. 4.1.

4.8.4. Επίλυση με την μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων (Phase2 ver. 5)

Το ίδιο πρόβλημα (Σχ. 4.5) επιλύθηκε και με το λογισμικό πεπερασμένων στοιχείων (Phase2, Rocscience). Το πρόγραμμα χρησιμοποιεί την απομείωση διατμητικής τάσης για να εισάγει τον συντελεστή ασφαλείας. Η διακριτοποίηση του πρανούς φαίνεται στο Σχ. 4.9α. Ο ΣΑ απομειώνεται με μικρά βήματα μέχρι η αστοχία να φθάσει στο φρύδι του πρανού. Οι ιδιότητες στη δοκιμή της αστοχίας για τέλεια πλαστικό υλικό με συντηρημένο νόμο διαρροής φαίνεται στο Σχ. 4.9β. Οι ιδιότητες αυτές αντιστοιχούν σε ΣΑ=1.09, και η λύση που παρουσιάζεται φαίνεται στο Σχ. 4.9 με συντελεστή ασφαλείας 1.09. Η αστοχία φαίνεται στα Σχ. 4.9γ με τη μορφή της κατανομής της μέγιστης διατμητικής παραμόρφωσης και στο Σχ. 4.10 με τη μορφή στοιχείων που έφτασαν το όριο διαρροής.



Σχήμα 4.8α: Διακριτοποίηση του «πρανούς σύγκρισης» με πεπερασμένα στοιχεία με το Phase2™. Εκτός από την επιφάνεια του πρανούς όλα τα άλλα σύνορα θεωρούνται ότι έχουν «πάκτωση».

Define Material Properties

Material 1 | Material 2 | Material 3 | Material 4 | Material 5 | Material 6

Name: Material 1 Initial Element Loading: Field Stress & Body Force

Material Colour: Unit Weight (MN/m3): 0.027

Elastic Properties

Material Type: Isotropic

Young's Modulus (MPa): 20000 Poisson's Ratio: 0.2

E1 (MPa): 2000 E2 (MPa): 2000 Ez (MPa): 2000

ν_{12} : 0.2 ν_{13} : 0.2 ν_{23} : 0.2

Strength Parameters

Failure Criterion: Mohr Coulomb Material Type: Plastic

Tensile Strength (MPa): 0 Dilation Angle (deg): 20.2

Fric. Angle (peak) (deg): 18.1 Fric. Angle (resid) (deg): 18.1

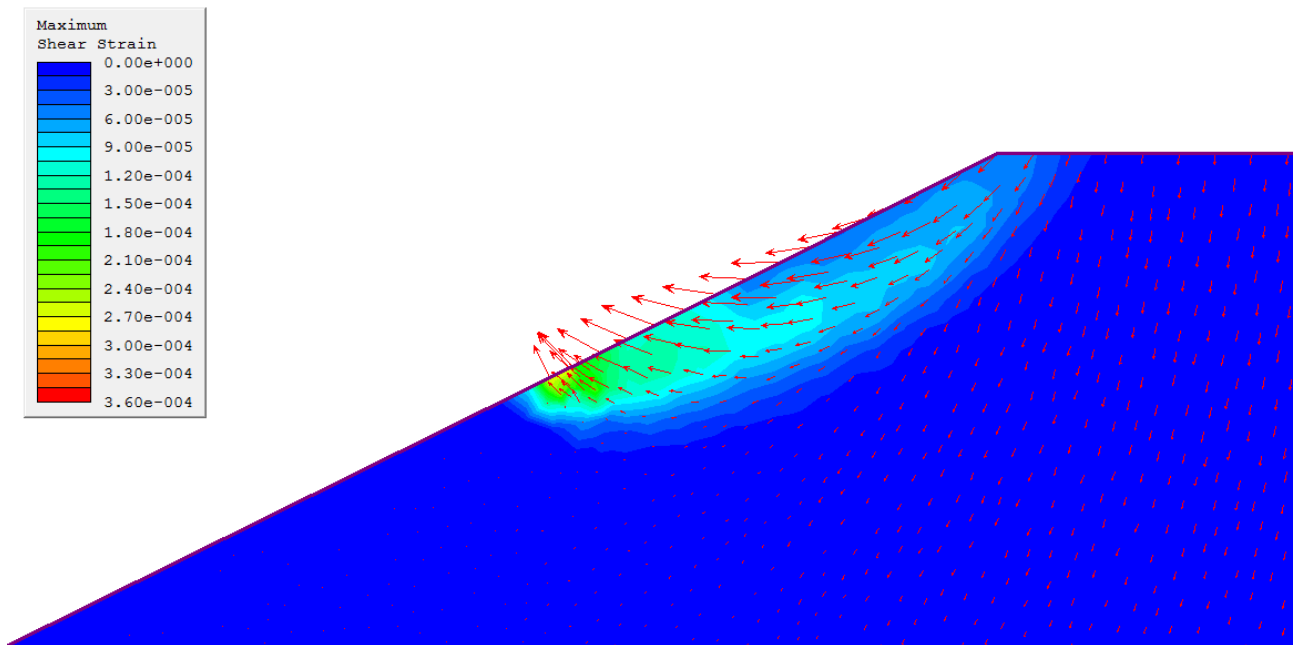
Cohesion (peak) (MPa): 0.00275 Cohesion (resid) (MPa): 0.00275

Stage Material Properties

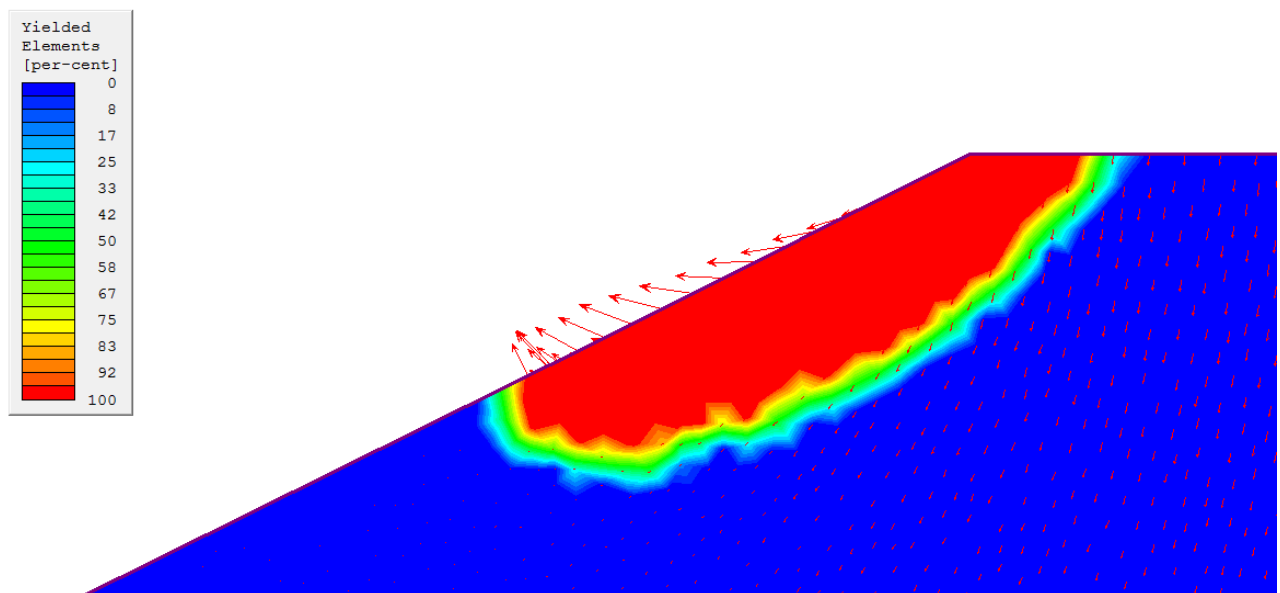
☐ Apply Factors Define Factors...

Copy To... OK Cancel

Σχ. 4.9β. Ιδιότητες του πρανούς στη δοκιμή που αστόχησε και η αστοχία έφθασε στο φρύδι του πρανούς. Οι τιμές συνοχής και γωνίας εσωτερικής τριβής που φαίνονται στο σχήμα είναι οι τελικές ανηγμένες με τον συντελεστή ασφάλειας.



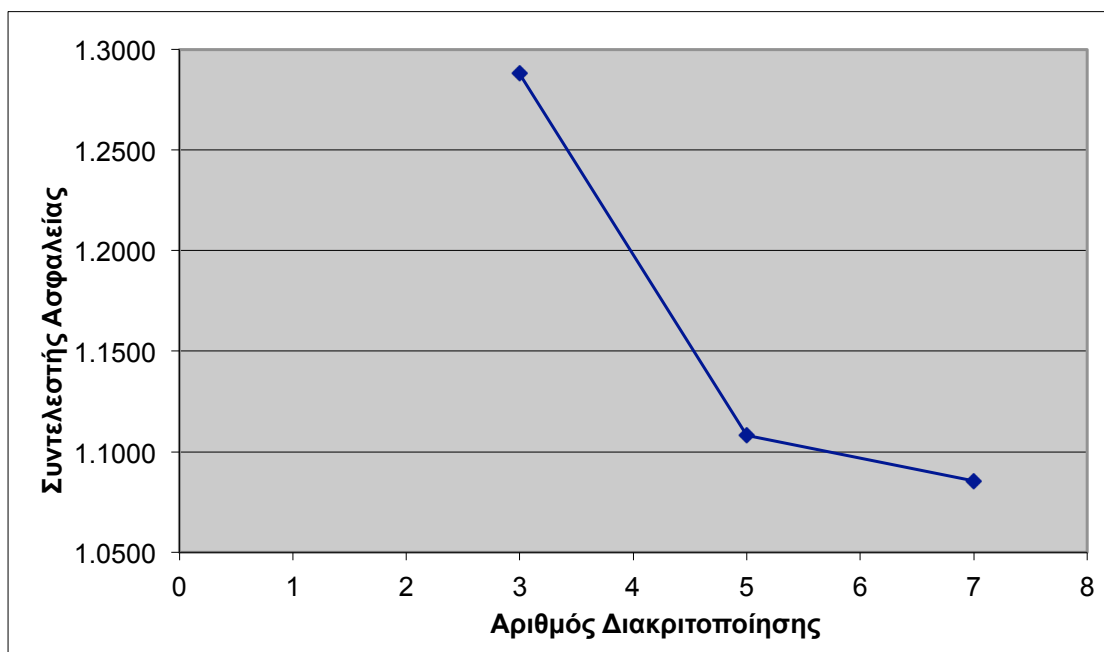
Σχήμα 4.9β: Νεφόγραμμα της μέγιστης διατμητικής παραμόρφωσης και της μετατόπισης.



Σχήμα 4.10: Νεφόγραμμα των στοιχείων που αστόχησαν και της μετατόπισης

4.8.5. Σύγκριση μεθόδων

Στο Σχ. 4.10 φαίνεται η τιμή του ΣΑ που εκτιμήθηκε με τον προτεινόμενο αλγόριθμο σε σχέση με τον αριθμό των στερεών σωμάτων διακριτοποίησης. Παρόλο που έχουμε λίγα σημεία φαίνεται ότι από έναν αριθμό και πάνω η διακριτοποίηση δεν μεταβάλλει αρκετά τον συντελεστή ασφαλείας.



Σχήμα 4.11: Σχέση αριθμού διακριτοποίησης με τον συντελεστή ασφαλείας

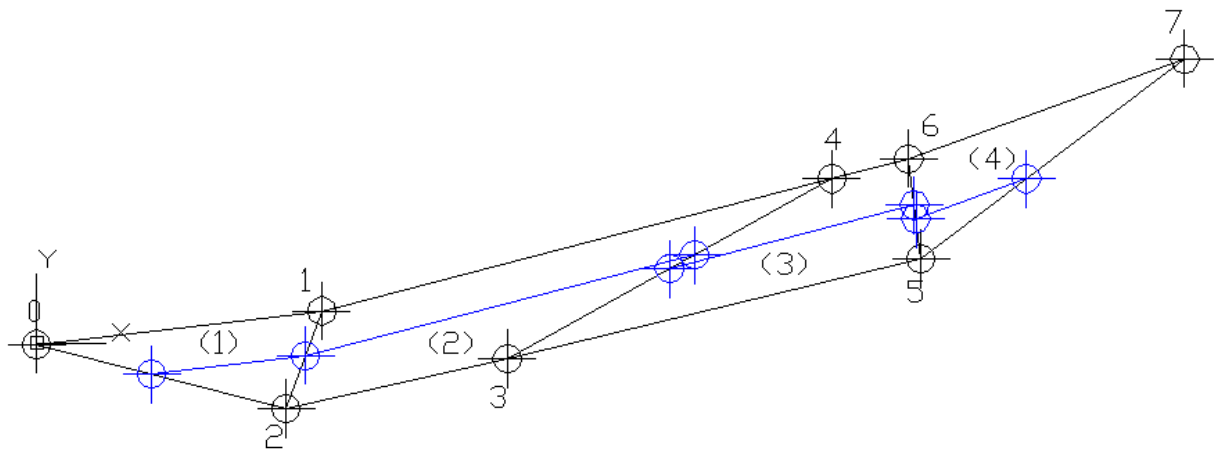
Ο αλγόριθμος που υλοποιήσαμε χρησιμοποιώντας το Θεώρημα του Άνω Ορίου δίνει σε σύγκριση με τις μεθόδους Οριακής Ισορροπίας λίγο μεγαλύτερο ΣΑ ενώ σε σύγκριση με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων δίνει κατά τι μικρότερο ΣΑ.

4.8.6. Ανάδρομος υπολογισμός για μια τομή από την κατολίσθηση της Μαλακάσας

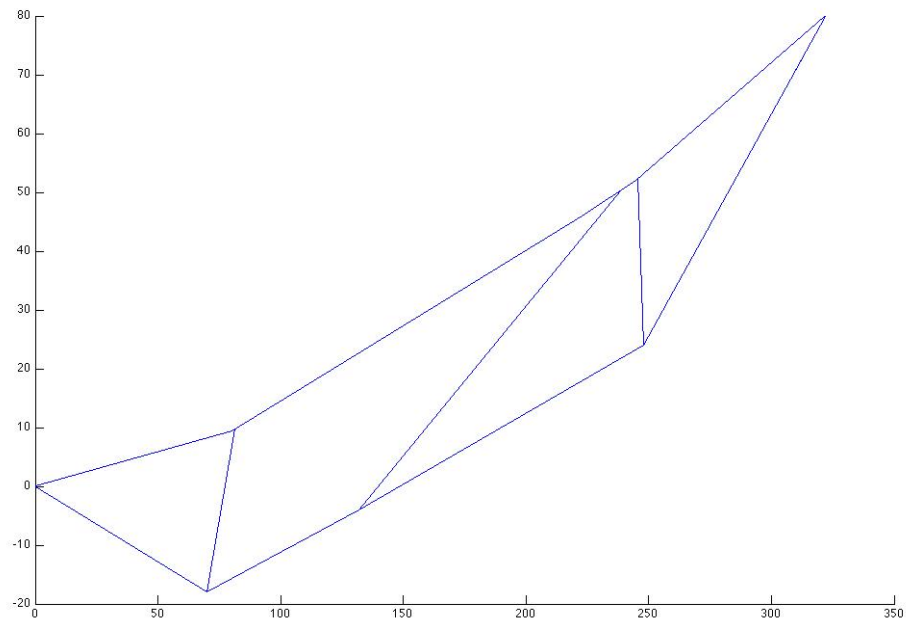
Στη συνέχεια χρησιμοποιούμε τον αλγόριθμο για να υπολογίσουμε τον συντελεστή ασφαλείας στην κατολίσθηση της Μαλακάσας. Βασιζόμενοι στην εργασία της Κ_ας Σχοινιά (Schoina, S. (1995) “Investigation of the Land- slide at Malakasa”, Greece, Volume I, II, MSc Diss., Imperial College.) αλλά και από την Μελέτη Ευστάθειας της Κατολίσθησης της Μαλακάσας του Καβουνίδη και Παντελίδη χρησιμοποιούμε μια χαρακτηριστική τομή της κατολίσθησης και εφαρμόζουμε τον αλγόριθμο. Στην περίπτωση μας λαμβάνουμε υπόψη και την παρουσία του νερού υπολογίζοντας το βάρος του. Η κατολίσθηση έγινε πάνω σε προ-διατμημένες επιφάνειες οι οποίες σε όλες τις προηγούμενες μελέτες όπως και εδώ θεωρούμε ότι χαρακτηρίζονται από μηδενική συνοχή και παραμένουσα γωνία τριβής. Ως δεδομένα για τον αλγόριθμο εκτός από την παραμένουσα γωνία τριβής $\phi = 15.65^\circ$ και την επιφάνεια του νερού δίνουμε και την επιφάνεια ολίσθησης. Στο Σχ. 4.12 φαίνεται ο μηχανισμός από την προηγούμενη εργασία της Σχοινιά ενώ στο Σχ. 4.13 φαίνεται ο βέλτιστος μηχανισμός (ο μηχανισμός με τον μικρότερο ΣΑ) που εξάχθηκε από τον προτεινόμενο αλγόριθμο.

Τομή S₁-S₁

$\varphi=15.65^\circ$ Συντελεστής ασφαλείας SF=1.004 (Καβουνίδης, SF=1.099)



Σχήμα 4.12:Χαρακτηριστική τομή κατολίσθησης Μαλακάσας από τις εργασίες Καβουνίδη, Σχοινιά.



Σχήμα 4.13:Μηχανισμός που μας έδωσε ο δικός μας αλγόριθμος

Τα αποτελέσματα για τον συντελεστή ασφαλείας όπως φαίνεται και στον παρακάτω πίνακα συμπίπτουν με τα αποτελέσματα των μελετών που έχουν γίνει. Η επιφάνεια αστοχίας δόθηκε σαν δεδομένη για το πρόγραμμα και διερευνήθηκαν όλες οι δυνατές κλίσεις των διεπιφανειών με βήμα μισού μέτρου. Τελικά ο αλγόριθμος έδωσε τον μικρότερο συντελεστή ασφαλείας με την τομή του Σχ. 4.13 που μοιάζει με την τομή του Σχ. 4.12.

Πίνακας 4.2: Αποτελέσματα αλγορίθμου για την περιοχή της Μαλακάσας

Βασικές Παράμετροι					
Ειδικό Βάρος Εδάφους	21.5 kN / m ³				
Ειδικό Βάρος Νερού	10 kN / m ³				
Συνοχή	0				
Γωνία Εσωτερικής Τριβής	15.65				
Αποτελέσματα					
Κύριες Ταχύτητες	1.0000	2.0289	2.1538	2.5146	
Πλάγιες Ταχύτητες	0.0000	1.2270	0.1287	1.0159	
SF	1.0261				

Σε ανάδρομες αναλύσεις πραγματικών κατολισθήσεων η λύση του δίνει και τον μηχανισμό αστοχίας του πρανούς. Μεγαλύτερος αριθμός διακριτοποίησης δίνει συντελεστή ασφάλειας πιο κοντά στην πραγματική τιμή αλλά δεν έχει ιδιαίτερο νόημα για ανάδρομες αναλύσεις όπου ο μηχανισμός κατολίσθησης είναι γνωστός και θα πρέπει η διακριτοποίηση μας να πλησιάζει τον μηχανισμό αυτό.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5:

Συμπεράσματα – Προτάσεις

Η επίλυση προβλημάτων κατολισθήσεων με το ΑΟΘ είναι μια εύχρηστη διαδικασία με αξιόπιστα αποτελέσματα. Επιπροσθέτως δεν χρειάζονται παραδοχές για τις δυνάμεις δράσης-αντίδρασης μεταξύ των διεπιφανειών των λωρίδων όπως γίνεται στις μεθόδους οριακής ισορροπίας. Οι μόνες παραδοχές που χρειάζονται είναι αυτές που αφορούν την εφαρμογή της θεωρίας που βασίζεται στο πρώτο θερμοδυναμικό αξίωμα. Επίσης η εφαρμογή με τον προτεινόμενο αλγόριθμο γίνεται ευκολότερα συγκριτικά με την ίδια εφαρμογή με αλγόριθμο πεπερασμένων στοιχείων.

Σε ότι αφορά τις απλές επιλύσεις ο αλγόριθμος δίνει λύσεις παρόμοιες με των μεθόδων οριακής ισορροπίας αλλά μας δίνει και μια φυσική εικόνα του μηχανισμού αστοχίας η οποία μπορεί να δώσει και μια ποιοτική εκτίμηση της λύσης. Αυτό φαίνεται καλύτερα όταν συγκρίνουμε τον μηχανισμό π.χ. των επτά σωμάτων με το Σχ. 4.10 της επίλυσης των πεπερασμένων από την σύγκριση των οποίων φαίνεται η ποιοτική ορθότητα της λύσης.

Εξάλλου ο κινηματικός μηχανισμός αστοχίας δίνει περιθώρια να εισάγουμε εξωτερικά φορτία όπως σεισμικά φορτία, συρτική δύναμη νερού κ.α.

Στην ανάδρομη ανάλυση της κατολίσθησης της Μαλακάσας η δισδιάστατη προσέγγιση που χρησιμοποιήθηκε θεωρείται ότι δίνει μικρότερο συντελεστή ασφαλείας αφού δεν λαμβάνονται υπόψη τα έργα που καταναλώνονται στις πλευρικές επιφάνειες.

Καταλήγοντας μπορούν να προταθούν οι ακόλουθες βελτιώσεις του αλγορίθμου:

- 1) Να ενσωματώσει και άλλα μοντέλα αστοχίας εκτός από το εξεταζόμενο εδώ μοντέλο των Mohr-Coulomb. Τέτοια μοντέλα είναι των Hoek-Brown, Tresca και Von Mises, που χρησιμοποιούνται στην Βραχομηχανική.
- 2) Να γίνει επέκταση του αλγορίθμου στις τρεις διαστάσεις.
- 3) Να γίνει μοντελοποίηση των συρτικών δυνάμεων του ύδατος.

Βιβλιογραφία

- Bishop, A. W. 1955. «The use of slip circle in the stability analysis of slopes.» *Geotechnique* 5 (1): 158.
- Chen, W.E. 1975. *Limit Analysis and soil plasticity*. Amsterdam, BV: Elsevier Science Publishers. 638.
- Chen, Z. , Wang, X., Haberfield,C. , Yin,J. ,Wang, Y. 2001. “A three-dimensional slope stability analysis method using the upper bound theorem: Part I: theory and methods.” *International Journal of Rock Mechanics & Mining Sciences* 38 (3): 369–378.
- Drucker, D.C. 1952. «Extended limit design theorems for continuous media.» *Quarterly J. Appl. Math.* 9 (4): p.381.
- Duncan, J. M., and Wright, S. J. 1980. «The accuracy of equilibrium methods of slope stability analysis.» *Engrg. Geology* 16 (1-2): 5.
- Espinoza, R. D., Repetto, P C. and Muhuntan, B. 1992. «General framework for stability analysis of slopes.» *Geotechnique* 42 (4): 603.
- Fellenius, W. 1963. «Calculation of the stability of earth slope.» *Trans. 2nd Congr. on Large Dams*. Washington D.C. p. 445.
- Fredlund, D. G., and Krahn, J. 1977. «Comparison of slope stability methods of analysis.» *Can. Geoth. J.* 14 (3): 429.
- Janbu, N. 1954. «Application of composite slip surface for stability analysis.» *European Conf. On Stability of Earth Slopes*. Stockholm. p. 43.
- . 1954. «Application of composite slip surface for stability analysis.» *Proc. of European Conf. on Stability of Earth Slopes*. Stockholm. 43.
- Janbu, N. 1973. «Slope stability computations.» Στο *Embankment Dam Engineering-Casagrande Volume*, του/της E. and Poulos, S. Hirschfield, p. 47. New York: John Wiley.
- Leshchinsky, D. 1990. «Slope stability analysis: generalized approach.» *J. of Geotech. Engrg.* (ASCE) 116 (5): 851.
- Morgenstern, N.R. & Price, V.W. (1965), „The Analysis of the Stability of General Slip Surfaces, *Geotechnique*, (15), 79-93.
- Rocscience Inc. 2003. Slide v5.0 – Two-Dimensional Limit-Equilibrium Analysis of Soil and Rock Slopes
- Rocscience Inc. 2005. Phase2 v5.0 – Two-Dimensional Finite Element Slope Stability Analysis.
- Sarma, S.K. 1979. «Stability analysis of embankments and slopes.» *Journal of Geotechnical Engineering ASCE* 105 (12): pp. 1511-1524.
- Sarma, S.K. 1979. «Stability analysis of embankments and slopes.» *Journal of Geotechnical Engineering ASCE* 105 (12): pp. 1511-1524.

- Sharma, S. , Moudud, A. 1992. «Interactive slope analysis using Spencer’s method.» *Proc. of a Specialty Conference on Stability and Performance of Slopes and Embankments-II*. ASCE. 506.
- . 1992. «Interactive slope analysis using Spencer’s method.» *Proc. of a Specialty Conference on Stability and Performance of Slopes and Embankments-II*. ASCE. 506.
- Schoina, S. (1995) “Investigation of the Land- slide at Malakasa”, Greece, Volume I, II, MSc Diss., Imperial College.
- Taylor, D. W. 1937. “Stability of Earth Slopes.” *Journal of Boston Society of Civil Engineers* 24 : 197–246.
- Whitman, R. W., and Bailey, W. A. 1967. «Use of computers for slope stability analysis.» *J. Soil Mech. and Found. Div.* 93 (4): 475.
- Yu., H. S. 1998. «Limit analysis versus limit equilibrium for slope stability.» *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering* (ASCE) 124 (1): 1.
- Καββαδάς, Μ. 1993. *Στοιχεία Εδαφομηχανικής*. Ε.Μ.Π.(400)
- Καβουνίδη, Η. Σωτηρόπουλου, Π. Βέττα, Π. Αυγερόπουλου, Π. Μαρίνου, *Η Κατολίσθηση της Μαλακάσας: Γενική παρουσίαση, Πρακτικά Τρίτου Πανελληνίου Συνεδρίου Γεωτεχνικής Μηχανικής, Τ.Ε.Ε. , Πάτρα, 1997: pp 226-236.*
- Π. Παντελίδη, Σ. Καβουνίδη, *Αναλύσεις Ευστάθειας Κατολίσθησης Μαλακάσας, Πρακτικά Τρίτου Πανελληνίου Συνεδρίου Γεωτεχνικής Μηχανικής, Τ.Ε.Ε. , Πάτρα, 1997:pp 236-246*