



ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΠΑΡΑΓΩΓΗΣ & ΔΙΟΙΚΗΣΗΣ

Εργαστήριο Υπολογιστικής Μηχανικής & Βελτιστοποίησης

Διπλωματική εργασία:

«Δυναμική απόκριση πλακών και επιρροή της αποκόλλησης»

Τσιγουρή Αμφιθέα

A.M. 2011010048

Επιβλέπων καθηγητής: Σταυρουλάκης Γεώργιος

Ευχαριστίες

Για την υλοποίηση της παρούσας διπλωματικής εργασίας θα ήθελα να ευχαριστήσω τον κ. Γεώργιο Σταυρουλάκη, καθηγητή του τμήματος Παραγωγής και Διοίκησης, ο οποίος επέβλεπε την εργασία καθ' όλη τη διάρκειά της.

Επίσης, θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον κ. Γεώργιο Ταϊρίδη, διδάκτορα του Πολυτεχνείου Κρήτης, για την προθυμία του και για το χρόνο που αφιέρωσε στην επίλυση των αποριών μου.

Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω την οικογένειά μου και τους φίλους μου για την στήριξή τους όλα αυτά τα χρόνια.

Πίνακας Περιεχομένων

ΠΕΡΙΛΗΨΗ	3
1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ	4
2 ΔΥΝΑΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ.....	5
2.1 Τι είναι δυναμικό σύστημα	5
2.2 Εξισώσεις κίνησης	5
2.3 Ιδιομορφική ανάλυση	7
2.3.1 Ιδιοσυχνότητες-Ιδιοτιμές	7
2.3.2 Ιδιοδιανύσματα- Ιδιομορφές.....	8
3 ΣΥΝΘΕΤΕΣ ΚΑΤΑΣΚΕΥΕΣ	10
3.1 Σύνθετες ευφυείς κατασκευές με πιεζοηλεκτρικά υλικά.....	10
3.2 Πιεζοηλεκτρικά υλικά	10
3.3 Πεπερασμένα στοιχεία.....	11
3.3.1 Η ιστορία της μεθόδου	11
3.3.2 Η μέθοδος πεπερασμένων στοιχείων.....	11
3.4 Θεωρία αποκόλλησης	15
3.4.1 Περιγραφή του μοντέλου αποκόλλησης	15
4 ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ.....	16
4.1 Το μοντέλο που χρησιμοποιήσαμε	17
4.2 Αριθμητικά αποτελέσματα.....	20
4.2.1 Περίπτωση χωρίς αποκόλληση	20
4.2.2 Περίπτωση μικρής αποκόλλησης.....	22
4.2.3 Περίπτωση εκτεταμένης αποκόλλησης.	25
4.2.4 Περίπτωση μεγάλης αποκόλλησης στοιχείων τα οποία σχηματίζουν τετράπλευρο..	27
5 ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ.....	30
6 ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ	31

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στην παρούσα διπλωματική εργασία μελετάται η δυναμική απόκριση ενός δυναμικού συστήματος υπό συνθήκες αποκόλλησης. Το μηχανικό μοντέλο το οποίο εξετάζεται αποτελείται από σύνθετη πλάκα, της οποίας το κάτω και άνω στρώμα είναι πιεζοηλεκτρικά ελάσματα τα οποία έχουν ενσωματωθεί με κατάλληλη χρήση συγκολλητικού υλικού. Η πλάκα είναι πακτωμένη και από τις τέσσερις πλευρές της, και διακριτοποιείται με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων. Οι προσομοιώσεις έγιναν με τη χρήση αλγόριθμου ολοκλήρωσης στο περιβάλλον της Matlab.

1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Το μηχανικό μοντέλο που εξετάσαμε αποτελείται από μία σύνθετη πλάκα η οποία είναι πακτωμένη και από τις τέσσερις πλευρές της. Θεωρήσαμε ένα στρωματομόρφο μοντέλο σύνθετης πλάκας με συγκολλητικό υλικό, του οποίου η μέση στρώση κατασκευάστηκε από ελαστικό πυρήνα στον οποίο προσαρμόστηκαν άνωθεν και κάτωθεν πιεζοηλεκτρικά ελάσματα. Η κατασκευή διακριτοποιήθηκε με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων.

Σκοπός της εργασίας είναι η εκτίμηση της επιρροής της αποκόλλησης. Η εκτίμηση αυτή έγινε με χρήση εργαλείων ιδιομορφικής ανάλυσης. Δηλαδή υπολογίστηκαν οι ιδιοτιμές και οι ιδιομορφές για το μοντέλο χωρίς αποκόλληση και κατόπιν για περιπτώσεις μικρής και πιο εκτεταμένης αποκόλλησης.

Το μηχανικό μοντέλο που πραγματοποιήθηκαν τα πειράματα της εργασίας κατασκευάστηκε από την κ. Γεωργία Φουτζιτζή, καθηγήτρια στο ΤΕΙ Ηπείρου. Τροποποιώντας σε μικρό βαθμό τις παραμέτρους του μοντέλου προσομοιώθηκε το μοντέλο που εξετάζουμε. Το προγραμματιστικό περιβάλλον που υλοποιήθηκαν τα πειράματα είναι το αυτό της Matlab.

Η παρούσα εργασία έγινε υπό την επίβλεψη και την καθοδήγηση του καθηγητή του τμήματος Μηχανικών Παραγωγής και Διοίκησης του Πολυτεχνείου Κρήτης κ. Γεώργιου Σταυρουλάκη.

2 ΔΥΝΑΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

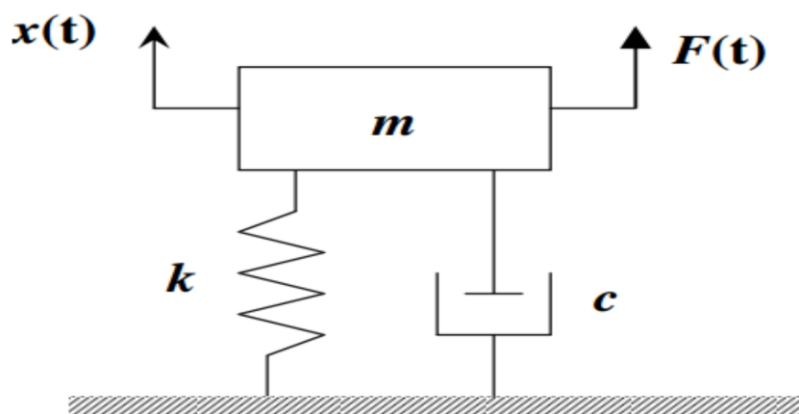
2.1 Τι είναι δυναμικό σύστημα

Με τον όρο δυναμικό σύστημα εννοούμε κάθε σύστημα, φυσικό, χημικό, βιολογικό, οικονομικό, οικολογικό, κλπ, που εξελίσσεται με την πάροδο του χρόνου. Η κατάσταση ενός δυναμικού συστήματος χαρακτηρίζεται, κάθε χρονική στιγμή, από ένα πεπερασμένο ή άπειρο πλήθος παραμέτρων και το σύνολο των εφικτών καταστάσεων ορίζει τον πεπερασμένης ή άπειρης διάστασης χώρο καταστάσεων [1].

2.2 Εξισώσεις κίνησης

Σε αυτήν την ενότητα θα αναλύσουμε ένα δυναμικό σύστημα ταλάντωσης. Το σύστημα αποτελείται από ένα ελατήριο, μία μάζα και έναν αποσβεστήρα (Σχήμα 1).

Ο τρόπος με τον οποίο το σύστημα εκτελεί ανεξάρτητες κινήσεις ορίζεται από τους βαθμούς ελευθερίας του. Το συγκεκριμένο παράδειγμα, για καλύτερη κατανόηση των ταλαντώσεων, έχει ένα βαθμό ελευθερίας [2].



Σχήμα 1: Δυναμικό Σύστημα ενός Βαθμού Ελευθερίας

Στο παραπάνω σχήμα έχουν χρησιμοποιηθεί οι συμβολισμοί:

m : μάζα

k : ελατήριο

c : αποσβεστήρας

$x(t)$: απόκριση συστήματος, χρονικά μεταβαλλόμενη

$F(t)$: εξωτερική διέγερση συστήματος, χρονικά μεταβαλλόμενη

Θεωρούμε το κάτω άκρο των στοιχείων ελαστικότητας και απόσβεσης (k, c) προσδεμένο σε ακίνητη και απαραμόρφωτη οριζόντια επιφάνεια, και το άνω άκρο τους συνδεδεμένο με μάζα m . Χαρακτηρίζουμε το σύστημα ενός Βαθμού Ελευθερίας διότι το κινηματικό μέγεθος του

συστήματος είναι η κοινή μετατόπιση του κέντρου μάζας και των άνω άκρων των k, c .

Διευκρινίζεται ότι η βαρύτητα αποτελεί μόνιμη στατική φόρτιση τη οποία δεν λαμβάνουμε υπόψη. Αυτό συμβαίνει διότι θέτουμε ως αρχή της μετατόπισης την παραμορφωμένη από το βάρος κατάσταση ισορροπίας.

Τις φυσικές ιδιότητες του συστήματος τις χαρακτηρίζουν τα φυσικά του στοιχεία. Στο συγκεκριμένο δυναμικό σύστημα ορίζονται τρία φυσικά στοιχεία (μάζα, απόσβεση, ελαστικότητα).

- Μάζα m

Η μάζα χαρακτηρίζει την αδράνεια του σώματος και έχει ως αποτέλεσμα την ανάπτυξη αδρανειακών δυνάμεων σύμφωνα με την εξίσωση 1:

$$F_m = m\ddot{x} \quad (1)$$

Δηλαδή, η αδρανειακή δύναμη μιας μάζας m είναι ανάλογη της επιτάχυνσης της με σταθερά αναλογίας την ίδια τη μάζα m .

- Απόσβεση c :

Απόσβεση ονομάζεται η μείωση του πλάτους μιας ταλάντωσης, λόγω της τριβής. Το φαινόμενο οφείλεται στην απώλεια ενέργειας από το ταλαντευόμενο σύστημα προς το περιβάλλον. Ορίζεται από την εξίσωση 2:

$$F_c = c\dot{x} \quad (2)$$

Το c ονομάζεται σταθερά απόσβεσης και η εξίσωση δηλώνει ότι η δύναμη απόσβεσης είναι ανάλογη της σχετικής ταχύτητας \dot{x} , με σταθερή αναλογία την ποσότητα c .

- Ελατήριο σταθεράς k :

Η σταθερά k εκφράζει την σκληρότητα ενός ελατηρίου (στοιχείο ελαστικότητας - παραμορφωσιμότητας) και εξαρτάται από τα φυσικά χαρακτηριστικά του (μήκος, πάχος σύρματος, διάμετρο σπειρών, υλικό και θερμοκρασία και την απόσταση μεταξύ των σπειρών, το λεγόμενο «βήμα»).

Η μεταβολή του μήκους του ελατηρίου κατά x προκαλεί εμφάνιση ελαστικής δύναμης η οποία είναι ανάλογη της μετατόπισης x με σταθερά αναλογίας την ποσότητα k , και περιγράφεται από την εξίσωση 3.

$$F_k = kx \quad (3)$$

Στον παρακάτω πίνακα παρουσιάζεται μία σύνοψη των παραπάνω μεγεθών:

Πίνακας 1: Φυσικά στοιχεία συστήματος

Στοιχείο	Φυσική σημασία	Αναπτυσσόμενες δυνάμεις	Εξίσωση
M	Αδράνεια Συστήματος	Αδρανειακές	$F_m = m \ddot{x}$
C	Καταστροφή Ενέργειας	Απόσβεσης	$F_c = c \dot{x}$
K	Παραμορφωσιμότητα	Ελαστικές	$F_k = k x$

Τα τρία αυτά στοιχεία είναι συνδεδεμένα μεταξύ τους από τη δυναμική ισορροπία του συστήματος και προκύπτει ότι το σύνολο των εσωτερικών δυνάμεων θα είναι αλγεβρικά ίσο προς την εξωτερική ασκούμενη δύναμη (εξωτερική διέγερση), σύμφωνα με την εξίσωση ισορροπίας:

$$F_k + F_c + F_m = f(t) \quad (4)$$

Αντικαθιστώντας στην εξ.(4) τις εσωτερικές δυνάμεις με τις εξ.(1,2,3) προκύπτει:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f(t) \quad (5)$$

Η εξίσωση (5) είναι μία Γραμμική Διαφορική Εξίσωση δευτέρας τάξεως η οποία περιγράφει την κίνηση του συστήματος. Η επίλυση της εξίσωσης αυτής θα μας δείξει πως θα αποκριθεί το σύστημα μας.

2.3 Ιδιομορφική ανάλυση

Στο κεφάλαιο που ακολουθεί θα γίνει μία κατά τον δυνατόν αναλυτική επισκόπηση των ιδιομορφών και των ιδιοσυχνοτήτων ενός συστήματος. Οι έννοιες αυτές παίζουν πολύ σημαντικό ρόλο στην δυναμική ανάλυση των κατασκευών, δηλαδή στην εσωτερική τους ταλάντωση και συμπεριφορά, η οποία λαμβάνει χώρα χωρίς την επιβολή εξωτερικών δυνάμεων ή αρχικών συνθηκών. Οι ιδιοσυχνότητες και οι ιδιομορφές ενός δυναμικού συστήματος είναι τόσες στον αριθμό όσοι είναι και οι βαθμοί ελευθερίας του και υπολογίζονται με χρήση των μητρώων μάζας και δυσκαμψίας της κατασκευής.

2.3.1 Ιδιοσυχνότητες-Ιδιοτιμές

Ιδιοσυχνότητα ορίζεται η συχνότητα εκείνη κατά την οποία το σύστημα απορροφά την μέγιστη ενέργεια και αποτελεί σημείο συντονισμού της κατασκευής. Συμβολίζεται με ω και χαρακτηρίζει την ταλάντωση ενός συστήματος στο οποίο ασκούνται μόνο συντηρητικές δυνάμεις, δηλαδή δυνάμεις των οποίων το έργο είναι μηδενικό. Η κυκλική ιδιοσυχνότητα ενός συστήματος εκφράζεται σε rad/sec και για μονοβάθμια συστήματα (ταλαντωτές) δίνεται από τη σχέση (6):

$$\omega^2 = \lambda = k/m \quad (6)$$

Όπου k η σταθερά ελατηρίου και m η μάζα του συστήματος.

Η συχνότητα εκφρασμένη σε (Hz) δίνεται ως:

$$f = \omega/2\pi$$

Για μικρές ταλαντώσεις οι ιδιοτιμές υπολογίζονται από τα μητρώα μάζας m και δυσκαμψίας K μητρώο της μορφής:

$$M\ddot{u}(t) - Ku(t) = 0 \quad (7)$$

Η εξίσωση είναι της μορφής $u(t)=a f(t)$ όπου a το άγνωστο και ανεξαρτήτου χρόνου διάνυσμα μετακινήσεων, και $f(t)$ η κοινή-άγνωστη χρονική συνάρτηση όλων των μετακινήσεων.

Από τις (6), (7), προκύπτει η εξίσωση:

$$K - \lambda M = 0 \quad (8)$$

Λύση αυτής: η προφανής $a=0$, ή η ορίζουσα.

$$\det(K-\lambda M)=0$$

Η λύση της ορίζουσας επιστρέφει τις τιμές των ιδιοτιμών λ .

Για κάθε λ που επιστρέφει η ορίζουσα αντιστοιχεί ένας πίνακας μετακινήσεων a_i όπου a καλείται ιδιοδιάνυσμα του προβλήματος ιδιοτιμής. Για τον υπολογισμό του a_i γίνεται κανονικοποίηση από την οποία προκύπτουν τα ιδιοδιανύσματα ϕ_i .

$$\phi_i = c_i a_i$$

όπου c_i αυθαίρετη σταθερά.

Θεωρούμε ότι το σύστημα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με διάνυσμα μετακινήσεων ημιτονοειδή συνάρτηση του χρόνου:

$$U = \varphi \sin \omega t \quad (9)$$

όπου ω η γωνιακή ταχύτητα και ϕ τα ιδιοδιανύσματα.

Από τις (6), (8) προκύπτει:

$$(K - \lambda M)\varphi = 0 \quad (10)$$

Λύση της παραπάνω η προφανής $\phi=0$, ή η ορίζουσα μηδέν

$$\det(K-\lambda M)=0$$

Με λύση $\omega_i^2 = \lambda_i$, όπου i ο αριθμός των ιδιοτιμών και των βαθμών ελευθερίας [3].

2.3.2 Ιδιοδιανύσματα- Ιδιομορφές

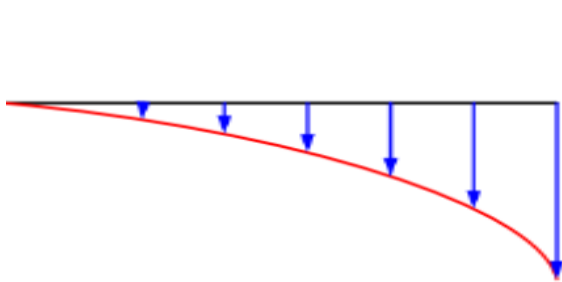
Τα ιδιοδιανύσματα είναι μία έννοια η οποία υποδεικνύει τον τρόπο ταλάντωσης ενός μηχανικού συστήματος. Μέσω των ιδιοδιανυσμάτων παίρνουμε πληροφορίες για την παραμόρφωση και την μετακίνηση του συστήματος. Συμβολίζονται με ϕ_i και υπολογίζονται από την εξίσωση (10):

$$(-\omega^2 M + K)\varphi = 0$$

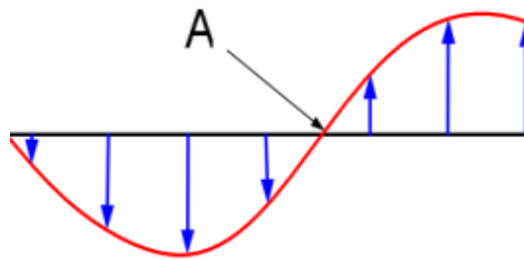
όπου M και K τα μητρώα μάζας και δυσκαμψίας,
 ω η κυκλική ιδιοσυχνότητα,
και φ τα ιδιοδιανύσματα.

Στις τεχνολογικές εφαρμογές υπολογίζονται μόνο οι 5-20 πρώτες ιδιομορφές για δύο λόγους. Πρώτον, επειδή οι δυνάμεις διέγερσης στη φύση διεγείρουν μόνο τις χαμηλές, δηλαδή τις πρώτες ιδιοσυχνότητες της κατασκευής, καθώς και δεύτερον επειδή οι αδρανειακές δυνάμεις έχουν μικρότερη επιρροή στη δυναμική του συστήματος όσο αυξάνεται η συχνότητα διέγερσης.

Παρακάτω φαίνονται οι δύο πρώτες ιδιομορφές μίας δοκού:



Σχήμα 2: Πρώτη Ιδιομορφή δοκού



Σχήμα 3: Δεύτερη Ιδιομορφή δοκού

Η ιδιομορφική ανάλυση είναι ιδιαίτερα χρήσιμη καθώς μας δίνει χρήσιμες πληροφορίες για την συμπεριφορά του δυναμικού συστήματος. Εκτός από τη μορφή της ταλάντωσης μας δείχνει και κάποια κρίσιμα σημεία (δεσμούς) της κατασκευής. Για παράδειγμα αν διεγείρουμε στο σημείο A σύμφωνα με τον δεύτερο τρόπο ταλάντωσης, δηλαδή σύμφωνα με την δεύτερη ιδιομορφή, δεν θα πάρουμε καμία πληροφορία για την ταλάντωση του συστήματος καθώς το σημείο αυτό είναι σημείο δεσμού [4].

3 ΣΥΝΘΕΤΕΣ ΚΑΤΑΣΚΕΥΕΣ

3.1 Σύνθετες ευφυείς κατασκευές με πιεζοηλεκτρικά υλικά

Το σύστημα το οποίο καλούμαστε να εξετάσουμε στη παρούσα διπλωματική εργασία είναι ένα μοντέλο σύνθετης πλάκας της οποίας το άνω και κάτω στρώμα αποτελείται από πιεζοηλεκτρικά υλικά. Το άνω στρώμα χρησιμοποιείται ως διεγέρτης και το κάτω στρώμα ως αισθητήρας.

3.2 Πιεζοηλεκτρικά υλικά

Το πιεζοηλεκτρικό φαινόμενο ανακαλύφθηκε το 1880 από τον Γάλλο φυσικό Πιερ Κιουρί. Οφείλεται στην πόλωση των μορίων του διηλεκτρικού (μονωτικού), δηλαδή στη μετάθεση των κέντρων βάρους των θετικών και αρνητικών φορτίων. Βάσει αυτού του φαινομένου, κάποια υλικά, κυρίως κρυσταλλικά αλλά και κεραμικά, παρουσιάζουν την ιδιότητα μετατροπής μιας φυσικής φόρτισης σε ηλεκτρικό ρεύμα και το αντίστροφο. Ειδικότερα, στα συγκεκριμένα υλικά ασκούνται καμπτικές ροπές ή φορτίσεις οι οποίες προκαλούν ταλαντώσεις, παράγοντας ηλεκτρικό ρεύμα ή αντίστροφα. Στην παρούσα διπλωματική εργασία θα ασχοληθούμε με την εφαρμογή τάσης ρεύματος σε πιεζοηλεκτρικά υλικά ώστε να προκαλέσουμε φορτίσεις (δυνάμεις ελέγχου).

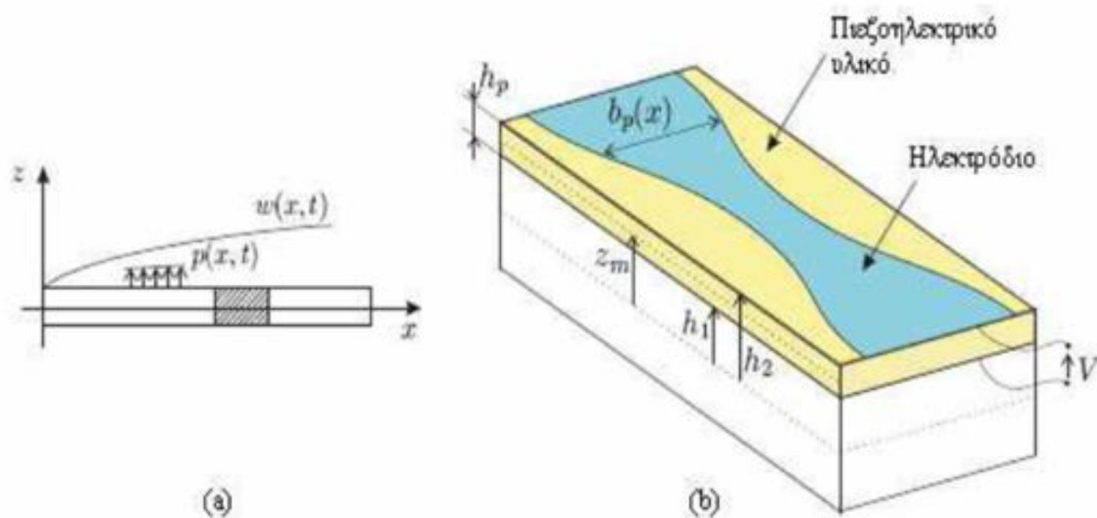
Ο πιεζοηλεκτρισμός, οφείλεται στην κρυσταλλική δομή του υλικού όπου παρουσιάζονται ασυμμετρίες και προκαλείται από τη μεταφορά ελευθέρων ηλεκτρονίων στα άκρα του κρυσταλλικού πλέγματος. Μερικά πιεζοηλεκτρικά υλικά είναι ο χαλαζίας (SiO_2), το αλάτι Rochelle, το θειικό λίθιο (Li_2SO_4), αλλά και τα πιο γνωστά όπως το PZT και το PVDF. Στην εργασία θα θεωρήσουμε ως καταλληλότερο το PZT, Lead Zirconate Titanate.

Στην καθημερινότητα, το φαινόμενο του πιεζοηλεκτρισμού το συναντάμε στους σταθεροποιητές της συχνότητας πομπών βραχέων και υπερβραχέων κυμάτων, στα ηλεκτρονικά χρονόμετρα χαλαζία μεγάλης ακρίβειας, στα πιεζοηλεκτρικά ακουστικά και στα μικρόφωνα όπου τα ηλεκτρικά κύματα μετατρέπονται σε ηχητικά και αντίστροφα και τέλος στις βελόνες των πικάπ για την μετατροπή των χαράξεων δίσκων σε ηλεκτρικό ρεύμα. Ήδη έχουν τοποθετηθεί σε τμήμα δρόμου του Ισραήλ πλάκες πιεζοηλεκτρισμού κάτω από το οδόστρωμα ώστε να μπορούν να μετατρέπουν σε ηλεκτρισμό την ενέργεια από τα διερχόμενα αυτοκίνητα, τα οποία πιέζουν τις πλάκες. Το έργο μάλιστα πρόκειται να επεκταθεί σε μήκος ενός χιλιομέτρου ώστε να παράγονται περίπου 200 κιλοβατώρες για κάθε λωρίδα κυκλοφορίας.

Μία συνήθης χρήση των πιεζοηλεκτρικών υλικών είναι στη δημιουργία διαφόρων τύπων ελασμάτων. Ακολουθεί η εικόνα μίας πλάκας στην οποία έχουν συγκολληθεί με κατάλληλη μέθοδο ελάσματα πιεζοηλεκτρικών υλικών, δημιουργώντας ένα ενιαίο σύστημα. Το πάχος του πιεζοηλεκτρικού υλικού είναι h_p και το έλασμα είναι πολωμένο κατά άξονα z . Υπάρχουν λοιπόν δύο ηλεκτρόδια μεταβλητού πάχους $b_p(x)$, ένα στη μία και ένα στην άλλη πλευρά, με συνέπεια τη διαφορά δυναμικού ΔU . Ελέγχοντας αυτή τη διαφορά δυναμικού δημιουργούμε ένα ηλεκτρικό πεδίο, στο οποίο εμπεριέχεται το πιεζοηλεκτρικό υλικό, και καθορίζει το μέγεθος των δυνάμεων τις οποίες θα ασκήσει στο έλασμα και να προσδιορίσει τις μετακινήσεις στον άξονα z .

Στις εφαρμογές συστημάτων με πιεζοηλεκτρικά υλικά ο στόχος είναι η μείωση των φαινομένων

κάμψης. Η διαδικασία προκύπτει λόγω της θεωρίας του φαινομένου, όπου το ηλεκτρικό ρεύμα το οποίο διαρρέει το υλικό έχει ως αποτέλεσμα καμπτικές ροπές. Η χρήση των ροπών αυτών λειτουργεί για την εξισορρόπηση του συστήματος [4].



Σχήμα 4: Πιεζοηλεκτρική δοκός

3.3 Πεπερασμένα στοιχεία

3.3.1 Η ιστορία της μεθόδου

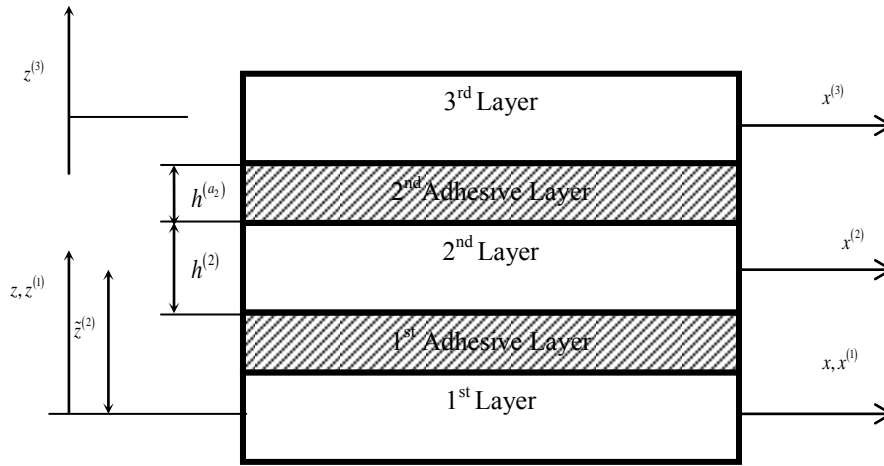
Η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων αναπτύχθηκε για πρώτη φορά το 1909 από τον Γερμανό μαθηματικό Ritz και συνεχίστηκε από τον Ρώσο μαθηματικό Galerkin. Λόγω απουσίας του ηλεκτρονικού υπολογιστή η διάδοση και η ανάπτυξη της μεθόδου καθυστέρησε και παρέμεινε στάσιμη για πολλά χρόνια. Η ανάγκη εφαρμογής της μεθόδου γεννήθηκε στην αεροναυπηγική με σκοπό την επίλυση δύσκολων προβλημάτων για την κατασκευή αεροσκαφών. Το 1941 ο Hrenikoff εισήγαγε τη μέθοδο του πλαισίου (framework method) όπου αντικαθιστά ένα επίπεδο ελαστικό μέσο με ένα ισοδύναμο σύστημα ράβδων και δοκών. Το 1943 ο μαθηματικός Courant έλυσε το πρόβλημα στρέψης μέσω της μεθόδου Rayleigh-Ritz. Το 1956 οι Αμερικανοί Turner, Clough, Martin και Top υπολόγισαν το μητρώο δυσκαμψίας της ράβδου και άλλων στοιχείων. Το 1960 ο Clough καθηγητής του πανεπιστημίου Berkeley της Καλιφόρνια της Αμερικής χρησιμοποίησε για πρώτη φορά το όνομα 'Πεπερασμένα στοιχεία' (Finite elements). Το 1967 οι Zienkiewicz και Chung έγραψαν το πρώτο βιβλίο των πεπερασμένων στοιχείων [5].

3.3.2 Η μέθοδος πεπερασμένων στοιχείων

Θεωρούμε όπως προαναφέρθηκε, ότι η σύνθετη πλάκα τριών στρωμάτων θεωρείται ενιαία, σε μορφή sandwich. Μία πιο ακριβής και αποτελεσματική θεωρία για την διερεύνηση της δυναμικής των έξυπνων κατασκευών βασίζεται στην στρωματομόρφη θεωρία (layerwise theory), λαμβάνοντας υπόψη την ευελιξία του συγκολλητικού στρώματος. Η στρωματομόρφη θεωρία η οποία χρησιμοποιείται για την προσομοίωση της δυναμικής συμπεριφοράς των έξυπνων κατασκευών δίνει μια ακριβή μοντελοποίηση της δυναμικής συμπεριφοράς των κατασκευών μεγάλου πάχους, πολλών στρώσεων διαφορετικών ιδιοτήτων το καθένα. Επίσης, η θεωρία αυτή παρέχει τη δυνατότητα μελέτης προβλημάτων αποκόλλησης μεταξύ των στρωμάτων.

Να αναφερθεί πως βάση της θεωρίας τα μοντέλα λαμβάνουν υπόψιν το συγκολλητικό στρώμα, καθώς αυτό δεν έχει αμελητέο πάχος σε σχέση με το πάχος των πιεζοηλεκτρικών υλικών, με συνέπεια να επηρεάζουν τη μηχανική συμπεριφορά της κατασκευής και τη διαδικασία ελέγχου [6].

Στο παρακάτω σχήμα 5 βλέπουμε την πλάκα που εξετάσαμε:



Σχήμα 5: Στρωματομόρφοη πλάκα

Όπου L σημειώνεται το μήκος, b το πλάτος και h το πάχος της κάθε πλάκας.

Για ευκολία όλες οι μη-συγκολλητικές στρώσεις θα θεωρούνται πιεζοηλεκτρικές στρώσεις.

Χρησιμοποιώντας τη θεωρία πλακών Mindlin, οι μετατοπίσεις των μη-συγκολλητικών επιπέδων δίνονται στην εξίσωση 11:

$$\begin{aligned} u_1^{(i)}(x^{(i)}, y^{(i)}, z^{(i)}, t) &= u^{(i)}(x^{(i)}, y^{(i)}, t) - z^{(i)} \theta_x^{(i)}(x^{(i)}, y^{(i)}, t) \\ u_2^{(i)}(x^{(i)}, y^{(i)}, z^{(i)}, t) &= v^{(i)}(x^{(i)}, y^{(i)}, t) - z^{(i)} \theta_y^{(i)}(x^{(i)}, y^{(i)}, t) \\ u_3^{(i)}(x^{(i)}, y^{(i)}, z^{(i)}, t) &= w^{(i)}(x^{(i)}, y^{(i)}, t) \end{aligned} \quad (11)$$

όπου $u^{(i)}, v^{(i)}$ και $w^{(i)}$ οι τρεις παραμορφώσεις του μεσαίου επιπέδου του i -οστού στρώματος, και $\theta_x^{(i)}, \theta_y^{(i)}$ οι γωνίες περιστροφής της κάθετης προς το μέσο επίπεδο γύρω από τους άξονες x και y .

Οι συντεταγμένες κάθε στρώματος $(x^{(i)}, y^{(i)}, z^{(i)})$ μπορούν να αντικατασταθούν από ένα κοινό σύστημα συντεταγμένων (x, y, z) , διότι και τα τρία στρώματα είναι παράλληλα μεταξύ τους.

Οι μετατοπίσεις των στοιχείων γράφονται:

$$\begin{aligned} u_1^{(i)}(x, y, z, t) &= u^{(i)}(x, y, t) - \left(z - \tilde{z}^{(i)}\right) \theta_x^{(i)}(x, y, t) \\ u_2^{(i)}(x, y, z, t) &= v^{(i)}(x, y, t) - \left(z - \tilde{z}^{(i)}\right) \theta_y^{(i)}(x, y, t) \\ u_3^{(i)}(x, y, z, t) &= w^{(i)}(x, y, t) \end{aligned} \quad (12)$$

όπου $\tilde{z}^{(i)}$ το πάχος του i-οστού στρώματος.

Στη συνέχεια υπολογίζεται για κάθε στρώμα οι τροπές κάμψης (bending) και διάτμησης (shear):

$$\left\{ \varepsilon_b^{(i)} \right\} = \left\{ \varepsilon_{0b}^{(i)} \right\} + (z - \tilde{z}^{(i)}) \left\{ \kappa^{(i)} \right\}, \quad \left\{ \varepsilon_s^{(i)} \right\} = \left\{ \varepsilon_{0s}^{(i)} \right\} \quad (13)$$

όπου

$$\left\{ \varepsilon_b^{(i)} \right\} = \left\{ \varepsilon_{xx}^{(i)}, \varepsilon_{yy}^{(i)}, \gamma_{xy}^{(i)} \right\}^T, \quad \left\{ \varepsilon_s^{(i)} \right\} = \left\{ \gamma_{yz}^{(i)}, \gamma_{xz}^{(i)} \right\}^T, \quad \left\{ \varepsilon_{0b}^{(i)} \right\} = \left\{ \frac{\partial u^{(i)}}{\partial x}, \frac{\partial v^{(i)}}{\partial y}, \frac{\partial u^{(i)}}{\partial y} + \frac{\partial v^{(i)}}{\partial x} \right\}^T, \quad (14)$$

$$\left\{ \kappa^{(i)} \right\} = \left\{ -\frac{\partial \theta_x^{(i)}}{\partial x}, -\frac{\partial \theta_y^{(i)}}{\partial y}, -\left(\frac{\partial \theta_x^{(i)}}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y^{(i)}}{\partial x} \right) \right\}^T, \quad \left\{ \varepsilon_{0s}^{(i)} \right\} = \left\{ \frac{\partial w^{(i)}}{\partial y} - \theta_y^{(i)}, \frac{\partial w^{(i)}}{\partial x} - \theta_x^{(i)} \right\}^T$$

Αντικαθιστώντας στην εξίσωση 13:

$$\left\{ \varepsilon_b^{(i)} \right\} = \left[L_b^{(i)}(z) \right] \left\{ u^{(-i)} \right\}, \quad \left\{ \varepsilon_s^{(i)} \right\} = \left[L_s^{(i)}(z) \right] \left\{ u^{(-i)} \right\} \quad (15)$$

όπου $\left\{ u^{(-i)} \right\} = \left\{ u^{(i)}, v^{(i)}, w^{(i)}, \theta_x^{(i)}, \theta_y^{(i)} \right\}^T$ το γενικευμένο διάστημα μετατοπίσεων, και

$$\left[L_b^{(i)}(z) \right] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & -(z - \tilde{z}^{(i)}) \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 0 & -(z - \tilde{z}^{(i)}) \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & -(z - \tilde{z}^{(i)}) \frac{\partial}{\partial y} & -(z - \tilde{z}^{(i)}) \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}, \quad \left[L_s^{(i)}(z) \right] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (16)$$

Το ηλεκτρικό δυναμικό $\Phi^{(i)}$ εκφράζει το ηλεκτρικό πεδίο $\left\{ E^{(i)} \right\}$ του κάθε στρώματος:

$$\left\{ E^{(i)}(x, y, z, t) \right\} = \left\{ \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right\}^T \Phi^{(i)}(x, y, z, t) \quad (17)$$

Στη συνέχεια θεωρούμε ότι το ηλεκτρικό δυναμικό $\Phi^{(i)}$ είναι γραμμικά κατανεμημένο κατά μήκος του πιεζοηλεκτρικού υλικού, επομένως:

$$\Phi^{(i)}(x, y, z, t) = \frac{z - \tilde{z}^{(i)}}{h^{(i)}} \phi^{(i)}(x, y, t) \quad (18)$$

όπου $h^{(i)}$ το πάχος του i-οστού πιεζοηλεκτρικού στρώματος

και $\phi^{(i)}$ το ηλεκτρικό δυναμικό στο μέσον επίπεδο του i-οστού στρώματος.

Από τις (17) και (18) το ηλεκτρικό πεδίο $\left\{ E^{(i)} \right\}$ μπορεί να γραφτεί ως

$$\{E^{(i)}\} = -[L_E^{(i)}(z)]\phi^{(i)} \quad (19)$$

όπου

$$[L_E^{(i)}(z)] = \left\{ \frac{z - \bar{z}^{(i)}}{h^{(i)}} \frac{\partial}{\partial x}, \frac{z - \bar{z}^{(i)}}{h^{(i)}} \frac{\partial}{\partial y}, \frac{1}{h^{(i)}} \right\}^T$$

Έστω ότι $\phi^{(i)}(x, y, t) = \Phi_0$ σταθερό,
προκύπτει:

$$[L_E^{(i)}(z)] = \left\{ 0, 0, \frac{1}{h^{(i)}} \right\}^T$$

Για μεγαλύτερη απλοποίηση, στον αλγόριθμο όλα τα μη συγκολλημένα επίπεδα θεωρούνται πιεζοηλεκτρικά. Η γραμμική εξίσωση για κάθε στρώμα πλέον γράφεται ως εξής:

$$\begin{aligned} \{\sigma^{(i)}\} &= [Q^{(i)}]\{\varepsilon^{(i)}\} - [e^{(i)}]^T \{E^{(i)}\}, \\ \{D^{(i)}\} &= [e^{(i)}]\{\varepsilon^{(i)}\} + [\xi^{(i)}]\{E^{(i)}\}, \end{aligned} \quad (20)$$

όπου $\{\sigma\}$ η τάση,

$\{\varepsilon\}$ ο τανυστής τροπής,

$\{D\}$ η ηλεκτρική μετατόπιση,

$\{E\}$ το ηλεκτρικό πεδίο,

$[Q]$ ο πίνακας ελαστικής δυσκαμψίας,

$[e]$ ο πίνακας πιεζοηλεκτρικού

και $[\xi]$ ο πίνακας διαπερατότητας.

Το πιεζοηλεκτρικό υλικό θεωρείται ορθότροπο.

Όταν πλέον διαχωριστούν οι διατμητικές με τις καμπτικές τιμές, η εξίσωση (20) γίνεται:

$$\begin{aligned} \{\sigma_b^{(i)}\} &= [Q_b^{(i)}]\{\varepsilon_b^{(i)}\} - [e_b^{(i)}]^T \{E^{(i)}\}, \\ \{\sigma_s^{(i)}\} &= [Q_s^{(i)}]\{\varepsilon_s^{(i)}\} - [e_s^{(i)}]^T \{E^{(i)}\}, \\ \{D^{(i)}\} &= [e_b^{(i)}]\{\varepsilon_b^{(i)}\} + [e_s^{(i)}]\{\varepsilon_s^{(i)}\} + [\xi^{(i)}]\{E^{(i)}\}, \end{aligned} \quad (21)$$

όπου $\{\sigma_b^{(i)}\} = \{\sigma_{xx}^{(i)}, \sigma_{yy}^{(i)}, \tau_{xy}^{(i)}\}^T$, $\{\sigma_s^{(i)}\} = \{\tau_{yz}^{(i)}, \tau_{xz}^{(i)}\}^T$ και

$$[Q_b^{(i)}] = \begin{bmatrix} Q_{11}^{(i)} & Q_{12}^{(i)} & 0 \\ Q_{21}^{(i)} & Q_{22}^{(i)} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66}^{(i)} \end{bmatrix} \quad [Q_s^{(i)}] = \begin{bmatrix} Q_{44}^{(i)} & 0 \\ 0 & Q_{55}^{(i)} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} e_b^{(i)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ e_{31}^{(i)} & e_{32}^{(i)} & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} e_s^{(i)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & e_{15}^{(i)} \\ e_{24}^{(i)} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \xi^{(i)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi_{11}^{(i)} & 0 & 0 \\ 0 & \xi_{22}^{(i)} & 0 \\ 0 & 0 & \xi_{33}^{(i)} \end{bmatrix}$$

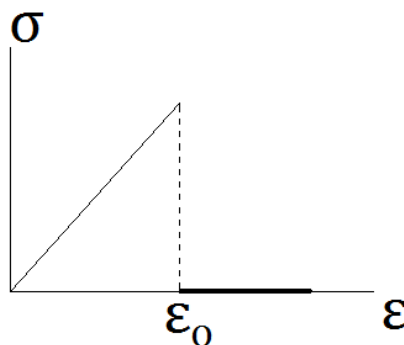
3.4 Θεωρία αποκόλλησης

Η πλάκα που εξετάζουμε στην παρούσα διπλωματική εργασία αποτελείται από τρία διακριτά στρώματα. Το επάνω και το κάτω στρώμα προσομοιώνουν την συμπεριφορά πιεζοηλεκτρικών υλικών που λειτουργούν ως διεγέρτης και αισθητήρας αντίστοιχα, τα οποία προσδίδουν την έξυπνη συμπεριφορά. Μεταξύ των δύο διεπιφανειών του άνω και κάτω στρώματος τοποθετείται μία στρώση συγκολλητικού υλικού μη αμελητέου πάχους, η οποία μας επιτρέπει να μελετήσουμε περιπτώσεις αστοχιών, όπως είναι για παράδειγμα η αποκόλληση.

3.4.1 Περιγραφή του μοντέλου αποκόλλησης

Αποκόλληση καλείται το φαινόμενο αστοχίας σύνθετων υλικών, δηλαδή υλικών που χρησιμοποιούνται σε σύνθετες κατασκευές. Το φαινόμενο αυτό οφείλεται σε επαναλαμβανόμενες καταπονήσεις των δομών και μπορεί να οδηγήσει σε διαχωρισμό, δηλαδή αλλαγές της μορφολογίας και των χαρακτηριστικών ενός μηχανικού συστήματος προκαλώντας προβλήματα κόπωσης υλικού. Κατά την αποκόλληση σε ευφυείς κατασκευές μπορεί να αποκολληθεί τόσο το στρώμα του αισθητήρα, όσο και το στρώμα του διεγέρτη σε μικρό ή πιο εκτεταμένο βαθμό. Σκοπός της παρούσας εργασίας είναι η εισαγωγή μη-γραμμικού νόμου αποκόλλησης στο υπάρχον σύνθετο πιεζοηλεκτρικό μοντέλο πεπερασμένων στοιχείων.

Για την προσομοίωση του φαινομένου αποκόλλησης εφαρμόζουμε μη-γραμμικό νόμο τάσης-τροπής. Βάσει του μη-γραμμικού νόμου επιτρέπεται η τροποποίηση προϋπαρχόντων μητρώων ακαμψίας μίας κατασκευής για την προσομοίωση τόσο στατικών όσο και δυναμικών προβλημάτων. Αυτό επιτυγχάνεται όταν για κάθε πεπερασμένο στοιχείο υπολογίσουμε την τροπή ϵ . Η τροπή ϵ (βλ. Σχήμα 6) εξαρτάται από την κατακόρυφη μετατόπιση των στρωμάτων και το πάχος του συγκολλητικού υλικού:



Σχήμα 6: Διάγραμμα Τάσης-Τροπής με βάση τον κανονισμό αποκόλλησης

Η μέση τροπή ϵ_{zz} σε περίπτωση αστοχίας του συγκολλητικού υλικού δίνεται από την παρακάτω σχέση:

$$\varepsilon_{zz}^{(a_i)} = \frac{w^{(i+1)} - w^{(i)}}{h^{(a_i)}} \quad (22)$$

όπου w η κατακόρυφη μετατόπιση των στρωμάτων,
και $h^{(a)}$ το πάχος του συγκολλητικού υλικού.

Εάν η τροπή ε είναι μικρότερη του ορίου διαρροής ε_0 , τότε δεν συμβαίνει αποκόλληση στο εν λόγω στοιχείο. Εάν η τροπή ε είναι μεγαλύτερη του ορίου ε_0 , τότε πραγματοποιείται αποκόλληση [6].

Για την εφαρμογή του μη-γραμμικού νόμου αποκόλλησης εφαρμόζεται στον κώδικα η επαυξητική-επαναληπτική μέθοδος Newton-Raphson.

Πίνακας 2: Ο αλγόριθμος της επαναληπτικής μεθόδου Newton-Raphson

Έναρξη επαυξητικού βήματος
Επιβολή φορτίου
Έναρξη επαναλήψεων
Βρόχος (loop) στο σύνολο των στοιχείων
- Υπολογισμός της μέσης τροπής κάθε στοιχείου
- Σύγκριση με τροπή διαρροής ε_0
- Μόρφωση κατάλληλα του εφαπτομενικού μητρώου ακαμψίας στοιχείου και φορέα
- Μόρφωση διανύσματος εσωτερικών δυνάμεων
Επίλυση εξισώσεων ισορροπίας, εύρεση επαυξητικών και καθολικών μετατοπίσεων
Έλεγχος σφάλματος και συνέχιση της επανάληψης ή συνέχιση του επαυξητικού βήματος

Αξίζει να σημειωθεί ότι το υπό μελέτη πιεζοηλεκτρικό μοντέλο της πλάκας μπορεί να υποστηρίξει την παραπάνω επαναληπτική διαδικασία εύρεσης του εφαπτομενικού μητρώου δυσκαμψίας της κατασκευής με κατάλληλη τροποποίηση του αρχικού μητρώου.

Επίσης, το συγκεκριμένο μοντέλο μπορεί να υποστηρίξει διαφορετικά σενάρια αποκόλλησης και πιο συγκεκριμένα:

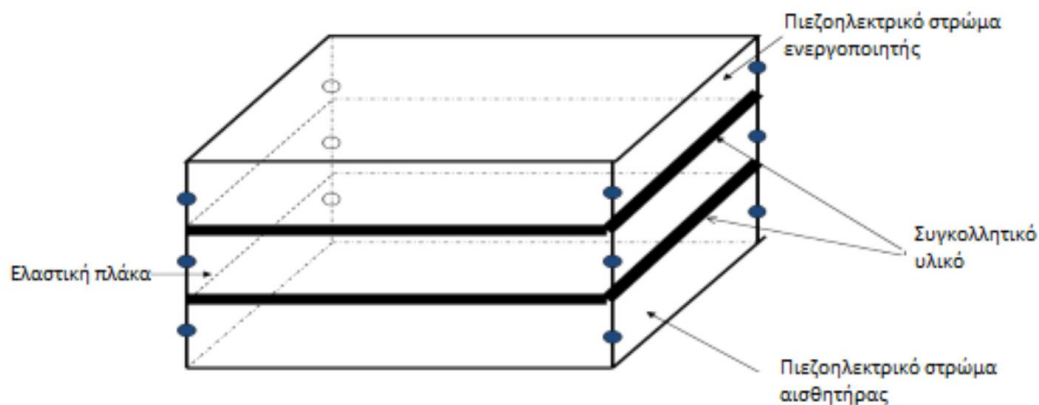
- α) Αποκόλληση μόνο του άνω στρώματος
- β) Αποκόλληση μόνο του κάτω στρώματος
- γ) Αποκόλληση ταυτόχρονα του άνω και του κάτω στρώματος

4 ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

4.1 Το μοντέλο που χρησιμοποιήσαμε

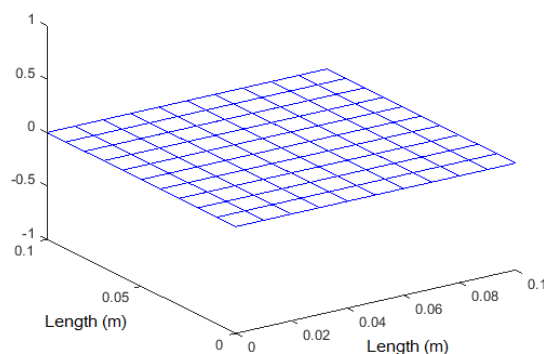
Σκοπός της διερεύνησης που έγινε στο πλαίσιο της παρούσας διπλωματικής εργασίας είναι η επιρροή της αποκόλλησης στο δυναμικό μοντέλο μιας σύνθετης πλάκας. Προκειμένου να περιγράψουμε το φαινόμενο της αποκόλλησης θεωρήσαμε ένα στρωματόμορφο μοντέλο σύνθετης πλάκας με συγκολλητικό υλικό.

Η σύνθετη πλάκα αποτελείται από έναν ελαστικό πυρήνα ο οποίος είναι κατασκευασμένος από το υλικό ανθρακονήματος T300/976 Toray Carbon Fibers. Όπως φαίνεται στο σχήμα 7, με χρήση κατάλληλου συγκολλητικού υλικού άνωθεν και κάτωθεν του ελαστικού μέρους της πλάκας προσαρμόστηκαν δύο στρώματα πιεζοηλεκτρικού υλικού. Το άνω στρώμα λειτουργεί ως διεγέρτης και το κάτω ως αισθητήρας.



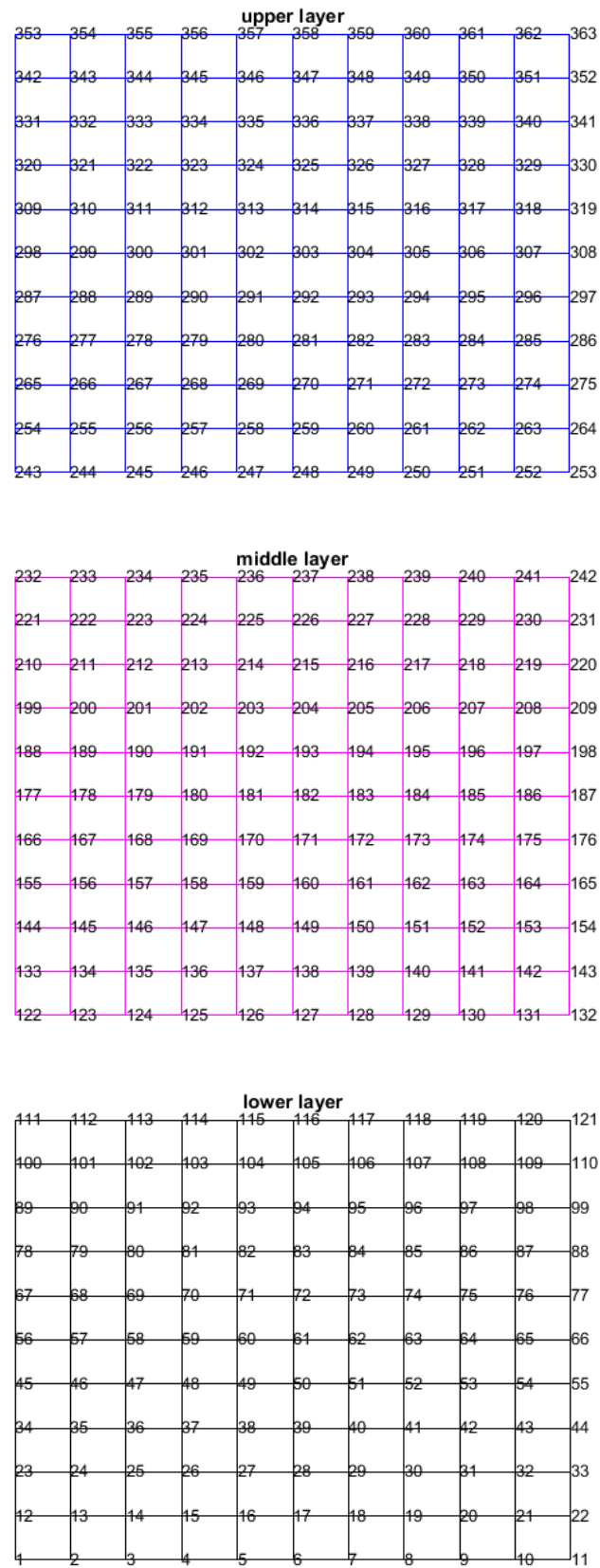
Σχήμα 7: Πεπερασμένο στοιχείο σύνθετης ευφυούς στρωματόμορφης πλάκας τριών στρωμάτων με συγκολλητικό υλικό

Η διακριτοποίηση της κατασκευής έγινε με την μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων. Συγκεκριμένα, χρησιμοποιήθηκαν ορθογωνικά, ισοπαραμετρικά πεπερασμένα στοιχεία 12 κόμβων (4 κόμβων ανά στρώμα) με πέντε βαθμούς ελευθερίας το καθένα (3 μεταφορικούς στις διευθύνσεις x , y , z και 2 στροφικούς γύρω από τους άξονες x και y). Συγκεκριμένα, ο φορέας διαιρέθηκε σε $10 \times 10 = 100$ τετραγωνικά πεπερασμένα στοιχεία, οδηγώντας σε ένα σύστημα 363 κόμβων συνολικά. Οι συνολικοί βαθμοί ελευθερίας του συστήματος είναι $363 \times 5 = 1815$. Όμως, από τις συνθήκες στήριξης (πάκτωση) δεν λαμβάνουμε υπόψιν τους $40 \times 3 = 120$ ακριανούς κόμβους οι οποίοι με τη σειρά τους έχουν $120 \times 5 = 600$ βαθμούς ελευθερίας, οπότε το τελικό σύστημά μας έχει 1215 ενεργούς βαθμούς ελευθερίας. Στην παρούσα διπλωματική εργασία θα μας απασχολήσει μόνο η μετατόπιση κατά τον άξονα z , δηλαδή ο τρίτος από τους πέντε βαθμούς ελευθερίας κάθε κόμβου. Το πλέγμα της διακριτοποίησης φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα:



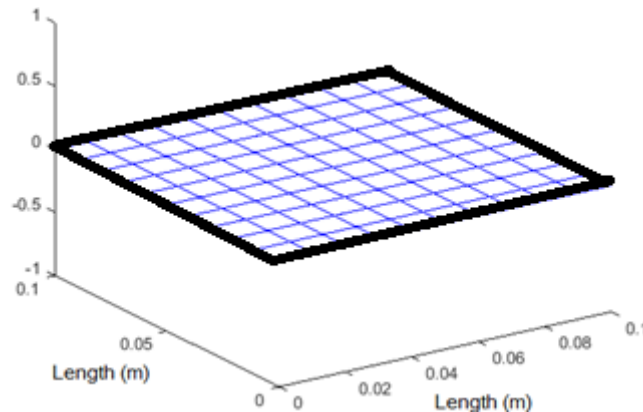
Σχήμα 8: Διακριτοποιημένη πλάκα με τη μέθοδο πεπερασμένων στοιχείων

Η αρίθμηση των κόμβων για τα τρία στρώματα της κατασκευής φαίνεται στο σχήμα 9:



Σχήμα 9: Αρίθμηση των κόμβων για κάθε στρώση

Η πλάκα είναι τετραγωνικού σχήματος με μήκος πλευράς 0.1m. Η κατασκευή είναι πακτωμένη και στις τέσσερις πλευρές της. Αυτό πραγματοποιήθηκε με μηδενισμό όλων των βαθμών ελευθερίας των ακραίων κόμβων, δηλαδή των κόμβων 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 22, 13, 33, 34, 44, 45, 55, 56, 66, 67, 77, 78, 88, 89, 99, 100, 110, 111, 112, 113, 114, 115, 116, 117, 118, 119, 120 και 121 για τη πρώτη στρώση, 121, 122, 123, 124, 125, 126, 127, 128, 129, 130, 131, 132, 133, 144, 145, 154, 155, 165, 166, 176, 177, 187, 188, 198, 199, 209, 210, 220, 221, 231, 232, 233, 234, 235, 236, 237, 238, 239, 240, 241 και 242 για τη δεύτερη στρώση και 243, 244, 245, 246, 247, 248, 249, 250, 251, 252, 253, 264, 265, 275, 276, 286, 287, 297, 298, 308, 309, 319, 320, 330, 331, 341, 342, 352, 353, 354, 355, 356, 357, 358, 359, 360, 361, 362, 363 για την τρίτη στρώση όπως φαίνεται στο σχήμα 10:



Σχήμα 10: Διακριτοποιημένη πλάκα πακτωμένη και στις τέσσερις πλευρές της

Η φόρτιση της κατασκευής γίνεται με την επιβολή εξωτερικής στατικής δύναμης ίσης με -0.01N στον κάθετο άξονα z. Η δύναμη αυτή ασκείται στους ελεύθερους κόμβους της σύνθετης πλάκας, δηλαδή σε όλους εκτός εκείνων όπου η πλάκα είναι πακτωμένη.

Επομένως, το μοντέλο της σύνθετης πλάκας που μελετάμε είναι ένα σύστημα πολλών βαθμών ελευθερίας, το οποίο δεν χαρακτηρίζεται πλέον από μία μάζα, μία απόσβεση, και μία σταθερά ελαστικότητας, όπως στον μονοβάθμιο ταλαντωτή, αλλά από μητρώα μεγέθους αντίστοιχου του αριθμού των βαθμών ελευθερίας. Έτσι οι εξισώσεις της κίνησης θα έχουν πλέον την μορφή:

$$[M]\{\ddot{x}\} + [C]\{\dot{x}\} + [K]\{x\} = \{F\} \quad (23)$$

όπου:

M: μητρώο μάζας

C: μητρώο απόσβεσης

K: μητρώο δυσκαμψίας

F: διάνυσμα εξωτερικής δύναμης

x: διάνυσμα μετατοπίσεως

\dot{x} : διάνυσμα ταχυτήτων

\ddot{x} : διάνυσμα επιταχύνσεων

Οι υλικές σταθερές των τριών υλικών (του εποξικού γραφίτη, του συγκολλητικού υλικού και του πιεζοηλεκτρικού υλικού) φαίνονται στον παρακάτω πίνακα [9]:

Πίνακας 3: Ιδιότητες των τριών υλικών

Property	Graphite/epoxy	Adhesive	Piezoceramic
E1 (GPa)	130	1.78	59
E2 (GPa)	9.6	1.78	59
G12 (GPa)	4.8	-	-
G23 (GPa)	3.2	-	-
ν_{12}	0.31	0.3	0.34
ρ (kg/m ³)	1570	1050	7400
$d_{31}=d_{32}$ (m/V)	-	-	- 260·10 ⁻¹²
Ply thickness (mm)	0.1	0.05	0.2

4.2 Αριθμητικά αποτελέσματα

Στο κεφάλαιο αυτό θα δούμε και θα αναλύσουμε τα αποτελέσματα της ιδιομορφικής ανάλυσης για τέσσερις διαφορετικές περιπτώσεις μοντέλων.:

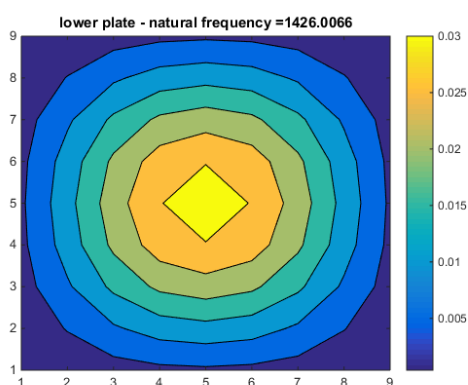
- χωρίς αποκόλληση
- με μικρή αποκόλληση στοιχείων στη σειρά, τριών στοιχείων
- με μεγάλη αποκόλληση στοιχείων σε σειρά, εννέα στοιχείων
- αποκόλληση έξι στοιχείων τα οποία σχηματίζουν τετράπλευρο

Αξίζει να σημειωθεί ότι σε όλες τις περιπτώσεις αποκόλλησης αυτή θεωρήθηκε ότι εμφανίστηκε μεταξύ του μεσαίου και του κατώτερου στρώματος.

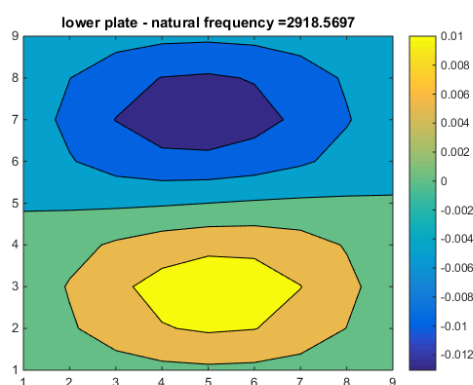
4.2.1 Περίπτωση χωρίς αποκόλληση

Αρχικά, θα δούμε τις 10 πρώτες ιδιομορφές και τις αντίστοιχες ιδιοσυχνότητες για την περίπτωση στην οποία δεν συμβαίνει αποκόλληση στο μοντέλο (σχήμα 10-19).

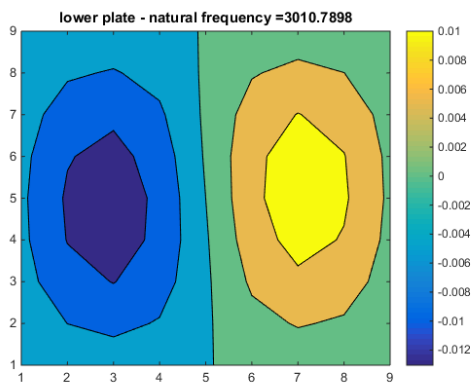
Να σημειωθεί ότι παρουσιάζονται μόνο οι ιδιομορφές του κάτω στρώματος. Αυτό συμβαίνει διότι και στα τρία στρώματα οι ιδιομορφές και οι ιδιοσυχνότητες είναι οι ίδιες. Επιπροσθέτως, θετική μετακίνηση ορίζουμε τη βύθιση των κόμβων.



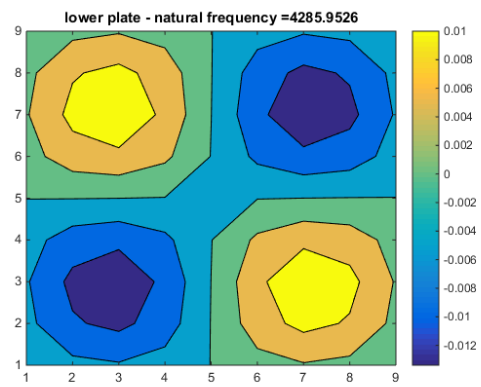
Σχήμα 11: Πρώτη Ιδιομορφή



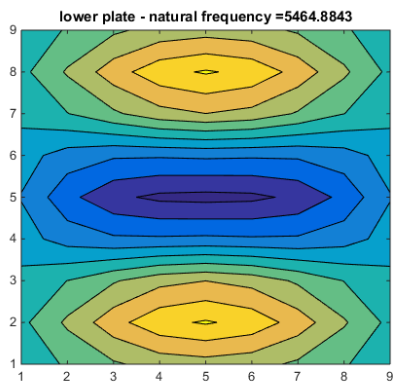
Σχήμα 12: Δεύτερη Ιδιομορφή



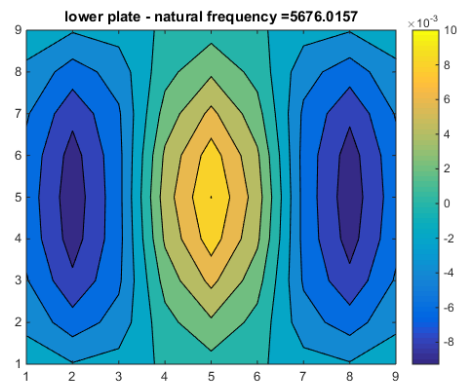
Σχήμα 13: Τρίτη Ιδιομορφή



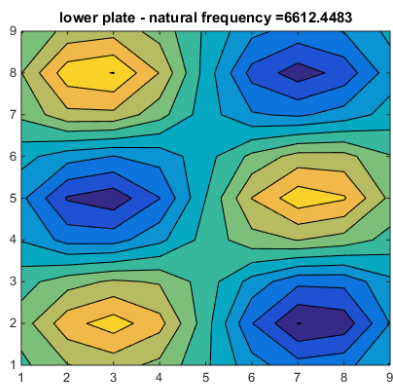
Σχήμα 14: Τέταρτη Ιδιομορφή



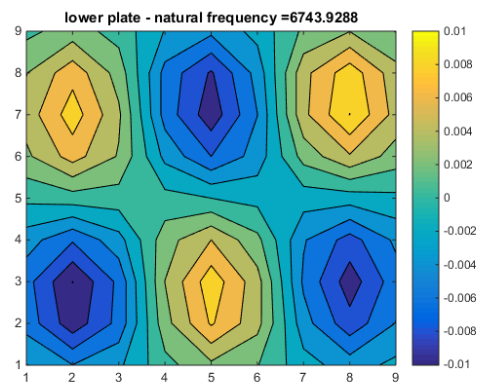
Σχήμα 15: Πέμπτη Ιδιομορφή



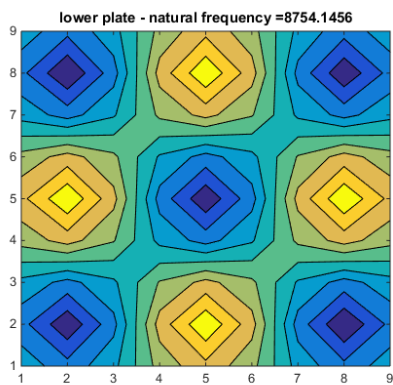
Σχήμα 16: Έκτη Ιδιομορφή



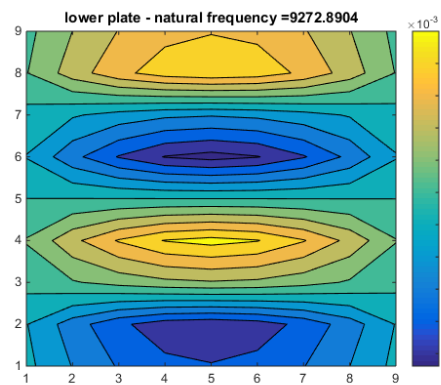
Σχήμα 17: Έβδομη Ιδιομορφή



Σχήμα 18: Όγδοη Ιδιομορφή



Σχήμα 19: Ένατη Ιδιομορφή



Σχήμα 20: Δέκατη Ιδιομορφή

Στις ιδιομορφές, παρατηρείται μικρή διαφοροποίηση της κλίμακας μετακινήσεων των κόμβων της κατασκευής. Συγκεκριμένα, για την περίπτωση που δεν υπάρχει αποκόλληση, η μετατόπιση των κόμβων κυμαίνεται από 30×10^{-3} m έως -12×10^{-3} m. Η πρώτη ιδιομορφή παρουσιάζει υψηλότερη βύθιση της τάξης του 30×10^{-3} m, και έχει μόνο μετατοπίσεις κατά την θετική φορά του άξονα z. Η δέκατη ιδιομορφή της κατασκευής παρουσιάζει την μικρότερη κλίμακα μετατόπισης.

Όπως αναφέρθηκε στο κεφάλαιο 2, οι ιδιοσυχνότητες και οι ιδιοτιμές ενός συστήματος σχετίζονται μεταξύ τους σύμφωνα με την μαθηματική σχέση:

$$\omega_i^2 = \lambda_i$$

Επομένως αν βρούμε την διαφοροποίηση των ιδιοτιμών, μπορούμε να εκτιμήσουμε και την αντίστοιχη διαφοροποίηση των ιδιοσυχνοτήτων.

Στη συνέχεια, αναφέρονται οι ιδιοτιμές της πλάκας. Οι πέντε πρώτες ιδιοτιμές του μοντέλου χωρίς αποκόλληση είναι οι εξής:

1.426006557343941e+03

2.918569675817060e+03

3.010789753259033e+03

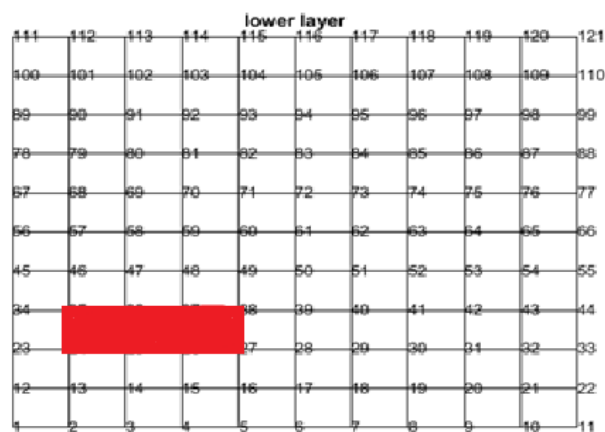
4.285952550388875e+03

5.464884287388638e+03

Αναφέρουμε ενδεικτικά μόνο τις πέντε πρώτες ιδιοτιμές της πλάκας. Αυτό συμβαίνει, όπως αναφέραμε στο κεφάλαιο 2, διότι οι χαμηλές – πρώτες ιδιοτιμές ενός συστήματος είναι πιο κρίσιμες από τις υπόλοιπες.

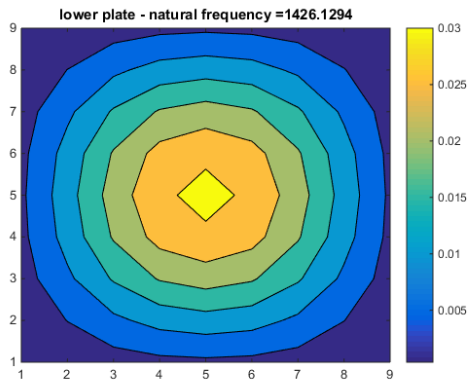
4.2.2 Περίπτωση μικρής αποκόλλησης.

Σε αυτή την περίπτωση ορίσαμε αποκόλληση τριών συναπτών στοιχείων της διακριτοποιημένης πλάκας όπως φαίνεται στο σχήμα .Συγκεκριμένα, η πλάκα παρουσιάζει αποκόλληση των στοιχείων 24, 25, 26.

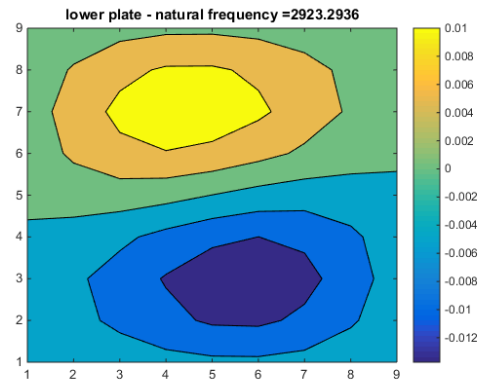


Σχήμα 21: Πλέγμα μοντέλου μικρής αποκόλλησης στοιχείων

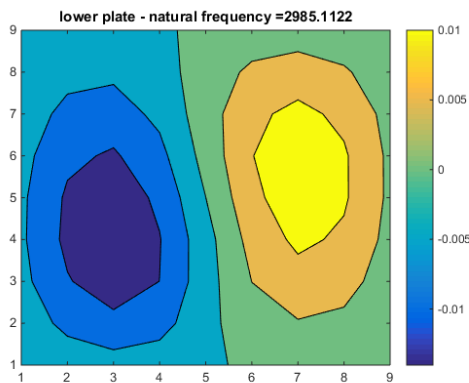
Στη συνέχεια, παρατίθενται οι δέκα πρώτες ιδιομορφές και οι αντίστοιχες ιδιοσυχνότητες την πλάκας (σχήμα 22-31).



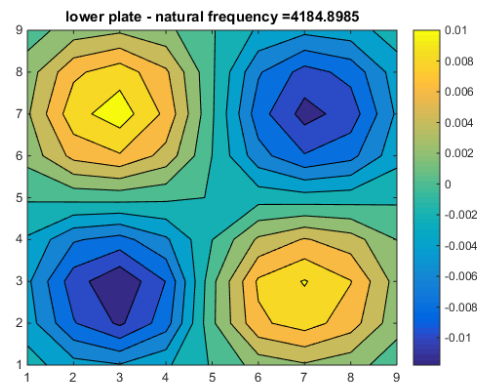
Σχήμα 22: Πρώτη Ιδιομορφή



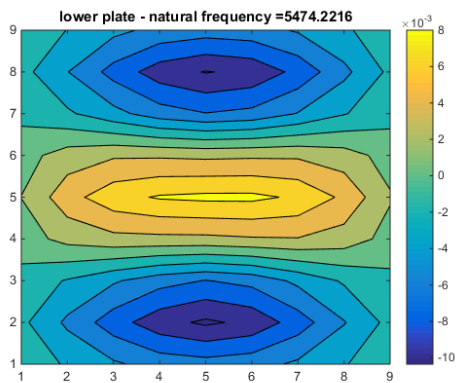
Σχήμα 23: Δεύτερη Ιδιομορφή



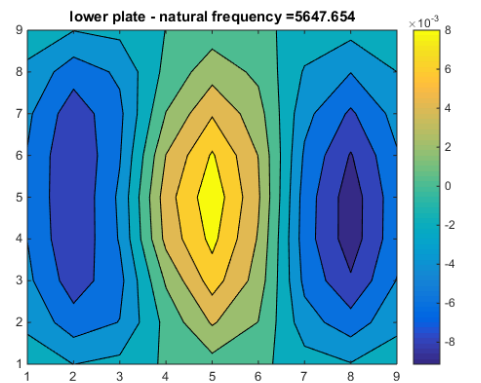
Σχήμα 24: Τρίτη Ιδιομορφή



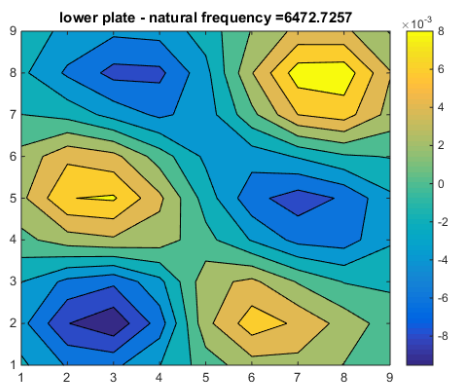
Σχήμα 25: Τέταρτη Ιδιομορφή



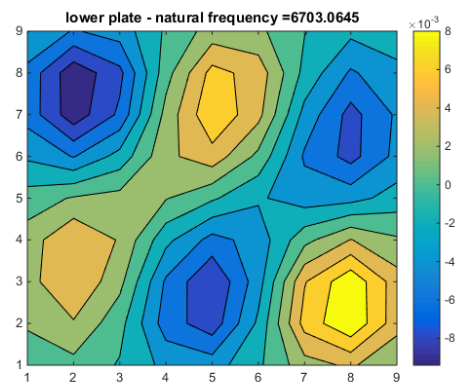
Σχήμα 26: Πέμπτη Ιδιομορφή



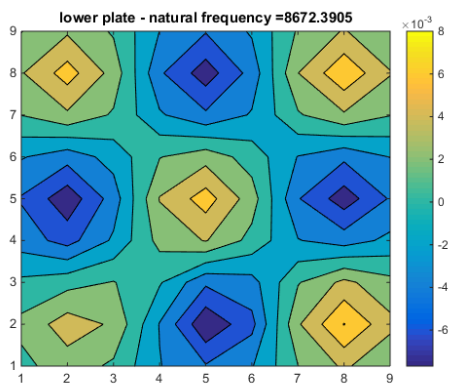
Σχήμα 27: Έκτη Ιδιομορφή



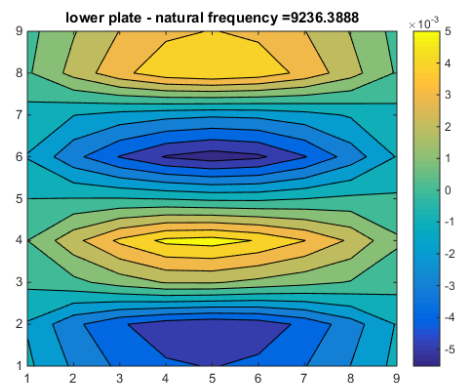
Σχήμα 28: Έβδομη Ιδιομορφή



Σχήμα 29: Όγδοη Ιδιομορφή



Σχήμα 30: Ένατη Ιδιομορφή



Σχήμα 31: Δέκατη Ιδιομορφή

Στην περίπτωση όπου η πλάκα υποστεί αποκόλληση τριών στοιχείων, βλέπουμε ότι οι ιδιομορφές της παρουσιάζουν μικρή διαφοροποίηση τόσο στην μορφή όσο και στις μετακινήσεις. Η κλίμακα μετατοπίσεων κυμαίνεται από $30 \times 10^{-3} \text{ m}$ έως $-12 \times 10^{-3} \text{ m}$.

Όπως ήταν αναμενόμενο, οι ιδιοσυχνότητες διαφοροποιούνται σε αυτήν την περίπτωση. Βλέπουμε αύξηση των δύο πρώτων ιδιοσυχνοτήτων της τάξης του 0,1228 Hz και 4,7239 Hz αντίστοιχα. Αύξηση στην τιμή της ιδιοσυχνότητας παρατηρείται και στην πέμπτη ιδιομορφή, ενώ για τις υπόλοιπες εφτά βλέπουμε μείωση της τιμής των ιδιοσυχνοτήτων, με διαφορές κατά μέσο όρο 64,848 Hz.

Οι πέντε ιδιοτιμές του μοντέλου στην περίπτωση αποκόλλησης των 24, 25, 26 στοιχείων είναι οι εξής:

1.426129355772948e+03
 2.923293606328307e+03
 2.985112228610255e+03
 4.184898523794418e+03
 5.474221628081314e+03

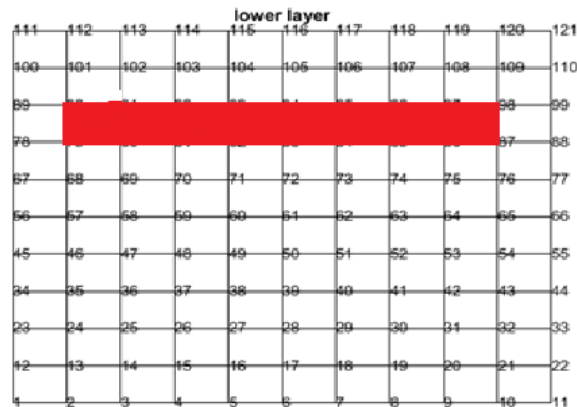
Συγκρίνοντας τις ιδιοτιμές της συγκεκριμένης περίπτωσης σε σχέση με αυτές της περίπτωσης χωρίς αποκόλλησης παρατηρείται απόκλιση. Η απόκλιση αυτή εκφρασμένη επί τοις εκατό ορίζεται:

1. 0,0086% αύξηση της πρώτης Ιδιοτιμής

2. 0,16% αύξηση της δεύτερης Ιδιοτιμής
3. 0,852% μείωση της τρίτης Ιδιοτιμής
4. 2,35% μείωση της τέταρτης Ιδιοτιμής
5. 0,17% αύξηση της πέμπτης Ιδιοτιμής

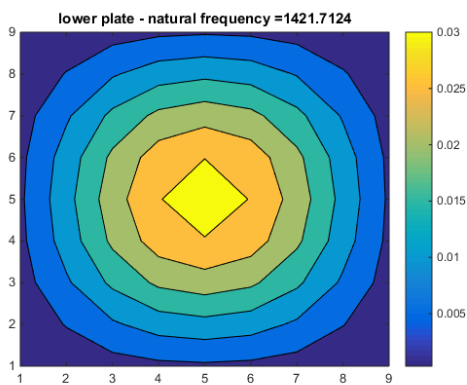
4.2.3 Περίπτωση εκτεταμένης αποκόλλησης.

Η περίπτωση την οποία θα εξετάσουμε στην συνέχεια είναι αυτή μεγάλης αποκόλλησης. Πιο συγκεκριμένα θεωρούμε ότι αποκολλώνται από την πλάκα εννέα στοιχεία, τα 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86 και 87, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.

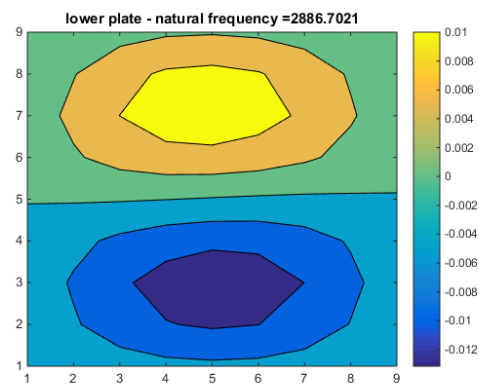


Σχήμα 32: Διακριτοποιημένο μοντέλο μεγάλης αποκόλλησης στοιχείων

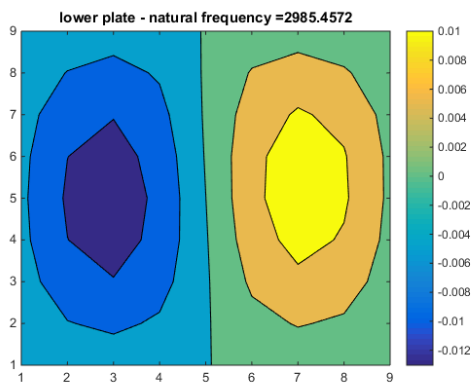
Στα σχήματα τα οποία ακολουθούν βλέπουμε τις δέκα πρώτες ιδιομορφές – ιδιοσυχνότητες της πλάκας στην συγκεκριμένη περίπτωση (σχήματα 33-42).



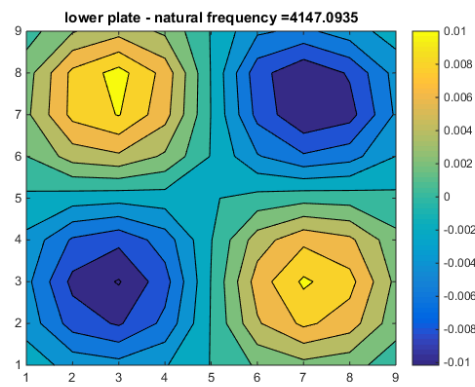
Σχήμα 33: Πρώτη Ιδιομορφή



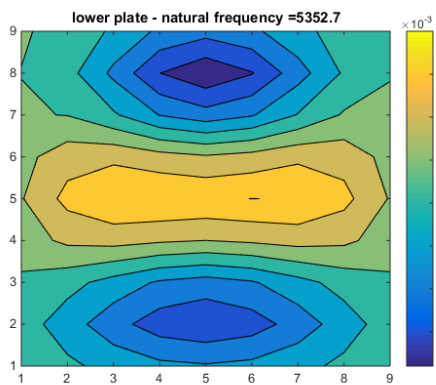
Σχήμα 34: Δεύτερη Ιδιομορφή



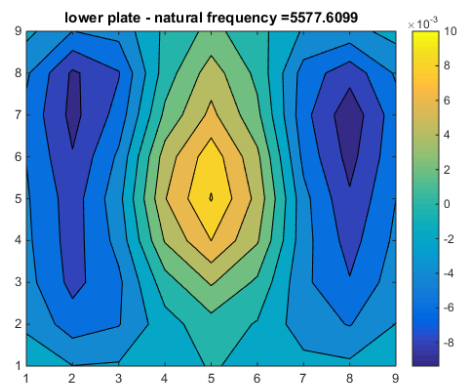
Σχήμα 35: Τρίτη Ιδιομορφή



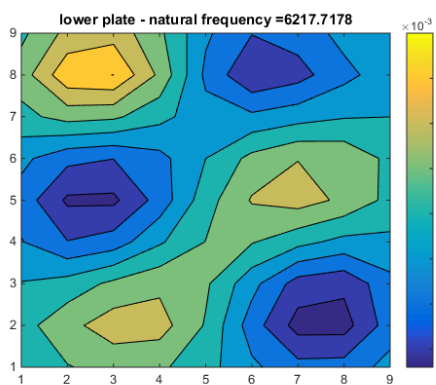
Σχήμα 36: Τέταρτη Ιδιομορφή



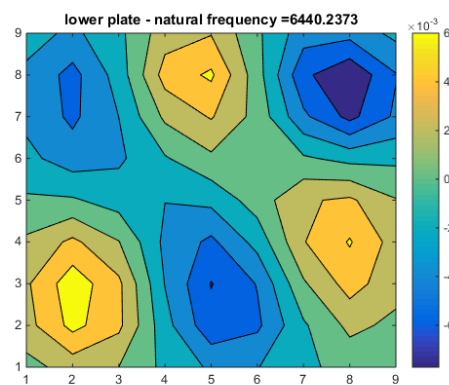
Σχήμα 37: Πέμπτη Ιδιομορφή



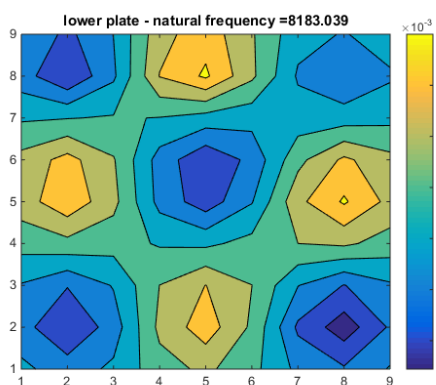
Σχήμα 38: Έκτη Ιδιομορφή



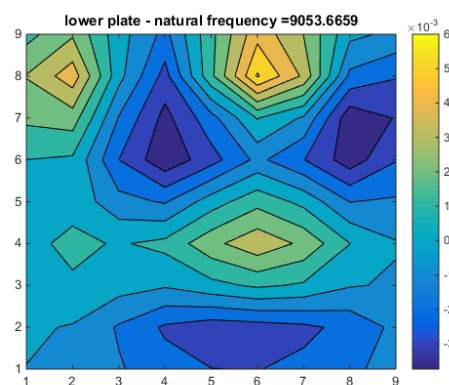
Σχήμα 39: Έβδομη Ιδιομορφή



Σχήμα 40: Όγδοη Ιδιομορφή



Σχήμα 41: Ένατη Ιδιομορφή



Σχήμα 42: Δέκατη Ιδιομορφή

Παρατηρούμε ότι στην περίπτωση της μεγάλης αποκόλλησης οι τιμές των ιδιοσυχνοτήτων είναι

μικρότερες από αυτές της περίπτωσης χωρίς αποκόλληση. Η διαφορά τους για κάθε ιδιομορφή είναι διαφορετική με μέσο όρο όλων 189,96967 Hz.

Από τις παραπάνω ιδιομορφές συμπεραίνουμε ότι οι τέσσερις πρώτες ιδιομορφές αλλά και η έκτη ακολουθούν ίδια κλίμακα μετατόπισης των κόμβων με πανομοιότυπους αντιδιαμετρικούς κυματισμούς. Από την έβδομη έως τη δέκατη ιδιομορφή, καθώς και την πέμπτη βλέπουμε διαφοροποίηση στο σχηματισμό της πλάκας αλλά και στην κλίμακα της μετακίνησης τουλάχιστον 2mm έως 4mm.

Οι πέντε ιδιοτιμές του μοντέλου σε αυτήν την περίπτωση είναι οι εξής:

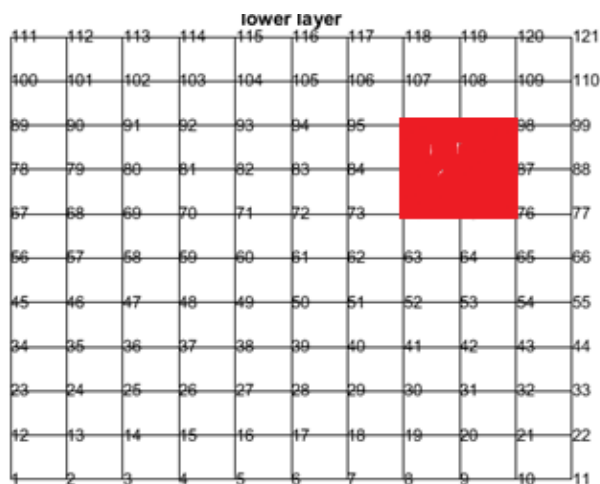
1.421712394590458e+03
2.886702121222109e+03
2.985457223762258e+03
4.147093539143987e+03
5.352700008198847e+03

Συγκρίνοντας τις ιδιοτιμές της περίπτωσης μεγάλης αποκόλλησης σε σχέση με αυτές της περίπτωσης χωρίς αποκόλλησης παρατηρείται μείωση των τιμών. Αυτή εκφράζεται επί τοις εκατό:

1. 0,12% η πρώτη ιδιοτιμή
2. 1,09% η δεύτερη
3. 0,84% η τρίτη
4. 3,23% η τέταρτη
5. 2,05% η Πέμπτη

4.2.4 Περίπτωση μεγάλης αποκόλλησης στοιχείων τα οποία σχηματίζουν τετράπλευρο.

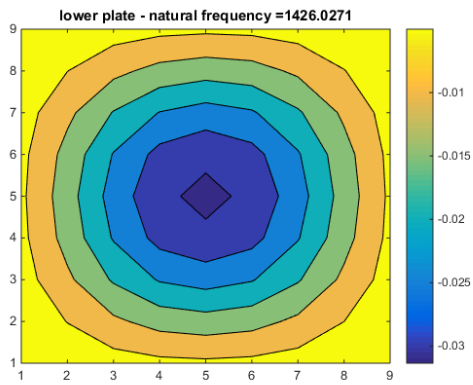
Στην τελευταία περίπτωση την οποία θα εξετάσουμε στην παρούσα διπλωματική εργασία αποκολλήσαμε έξι στοιχεία της πλάκας, τα οποία σχηματίζουν τετράπλευρο. Τα στοιχεία που αποκολλήθηκαν είναι τα: 74, 75, 76 και 85, 86, 87.



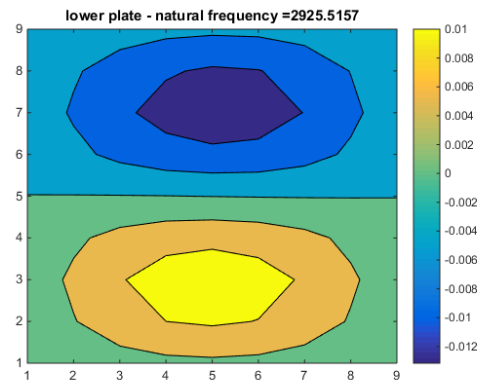
Σχήμα 43: Διακριτοποιημένο μοντέλο με τετραγωνική αποκόλληση στοιχείων

Οι δέκα πρώτες ιδιομορφές και ιδιοσυχνότητες της περίπτωσης αυτής δίνονται στα ακόλουθα

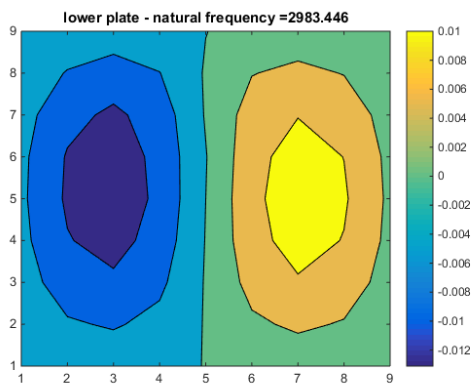
σχήματα (44 - 53).



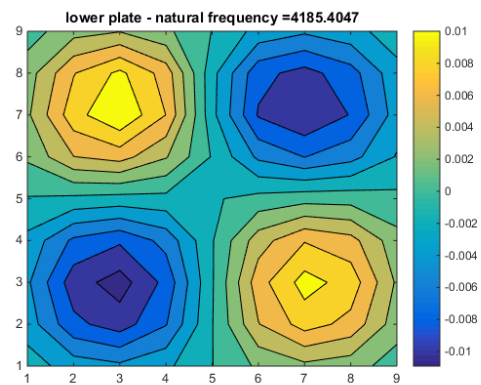
Σχήμα 44: Πρώτη Ιδιομορφή



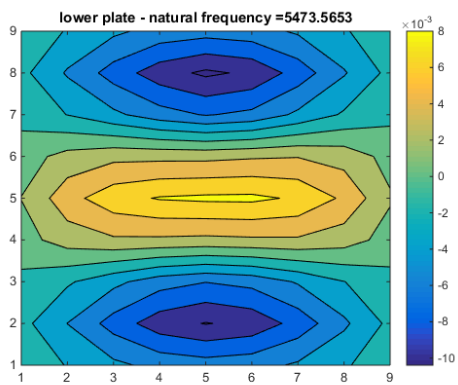
Σχήμα 45: Δεύτερη Ιδιομορφή



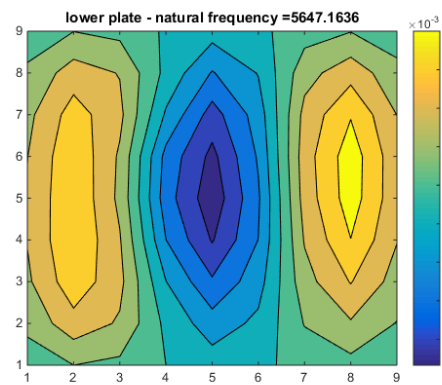
Σχήμα 46: Τρίτη Ιδιομορφή



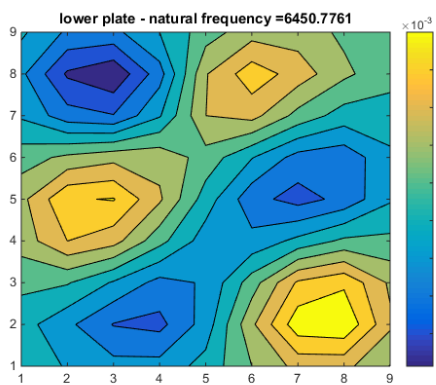
Σχήμα 47: Τέταρτη Ιδιομορφή



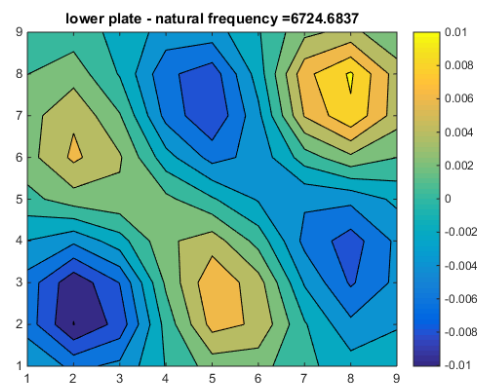
Σχήμα 48: Πέμπτη Ιδιομορφή



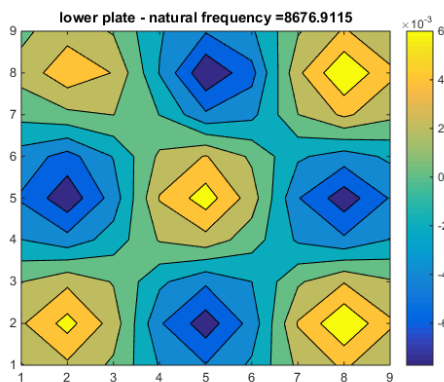
Σχήμα 49: Έκτη Ιδιομορφή



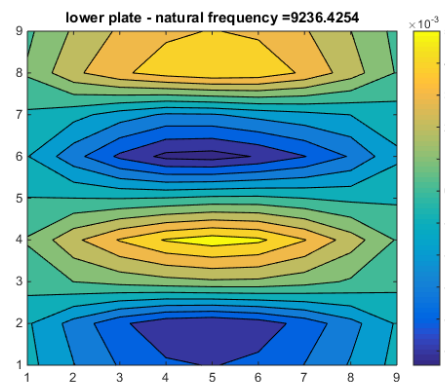
Σχήμα 50: Έβδομη Ιδιομορφή



Σχήμα 51: Όγδοη Ιδιομορφή



Σχήμα 52: Ένατη Ιδιομορφή



Σχήμα 53: Δέκατη Ιδιομορφή

Σε αυτό το μοντέλο παρατηρούμε αύξηση της πρώτης, δεύτερης και πέμπτης ιδιοσυχνότητας σε σχέση με τις αντίστοιχες ιδιομορφές της πλάκας χωρίς αποκόλληση. Οι διαφορές τους είναι μικρές με τιμές 0,0205 Hz η πρώτη, 6,946 Hz η δεύτερη και 8,681 Hz η τρίτη. Οι υπόλοιπες επτά ιδιοσυχνότητες της πλάκας η οποία έχει υποστεί αποκόλληση είναι μικρότερες κατά μέσο όρο 64,484 Hz.

Επίσης, να αναφέρουμε ότι η πλάκα μετατοπίζεται αλγεβρικά το ίδιο αλλά με αντίθετη φορά στην πρώτη ιδιομορφή σε αυτήν την περίπτωση, συγκριτικά πάντα με την περίπτωση μοντέλου χωρίς αποκόλληση. Οι υπόλοιπες ιδιομορφές παρουσιάζουν μικρή απόκλιση στην κλίμακα μετακινήσεων ορισμένων ιδιομορφών. Συγκεκριμένα, βλέπουμε ότι η πλάκα υψώνεται και βυθίζεται κατά δύο περίπου χιλιοστά περισσότερο στην πέμπτη, έκτη, έβδομη και ένατη ιδιομορφή. Τέλος, παρατηρούμε ότι οι έξι πρώτες ιδιομορφές είναι σχεδόν ίδιας μορφής με αντίθετες μετακινήσεις ενώ η έβδομη, η όγδοη και η ένατη ιδιομορφή διαφοροποιούνται σε αυτήν την περίπτωση.

Οι πέντε πρώτες ιδιοτιμές του μοντέλου είναι οι εξής:

1.379983275468828e+03
 2.795223149681334e+03
 2.913867414402994e+03
 3.979372793565023e+03
 5.382175768135980e+03

Συγκρίνοντας τις ιδιοτιμές της συγκεκριμένης περίπτωσης σε σχέση με αυτές της περίπτωσης χωρίς αποκόλληση παρατηρείται κάποια απόκλιση. Η απόκλιση αυτή εκφρασμένη επί τοις εκατό για τις πέντε πρώτες ιδιοτιμές προκύπτει ως:

1. 3,22%
2. 4,22%
3. 3,21%
4. 7,15%
5. 1,51%

5 ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Στην παρούσα διπλωματική εργασία πραγματοποιήθηκε ιδιομορφική ανάλυση ενός μοντέλου πλάκας τριών στρωμάτων για τέσσερις διαφορετικές περιπτώσεις με στόχο την μελέτη της επιρροής της αποκόλλησης στοιχείων στα δομικά χαρακτηριστικά της κατασκευής. Από τα στοιχεία που μόλις εξετάσαμε, δηλαδή τις δέκα πρώτες ιδιομορφές και τις πέντε πρώτες ιδιοτιμές του συστήματος, παρατηρούμε πώς επηρεάζεται δυναμικά η απόκριση ενός συστήματος με αποκόλληση κάποιων στοιχείων του. Τα δεδομένα αυτά είναι πολύ χρήσιμα καθώς μας βοηθούν στον έλεγχο των ταλαντώσεων ενός μοντέλου, μας παρέχουν πληροφορίες για την δομική ακεραιότητα και τις ατέλειες ενός συστήματος, και μας δείχνουν τα σημεία συντονισμού μίας κατασκευής.

Συγκεκριμένα, οι ιδιομορφές και οι ιδιοσυχνότητες του μοντέλου υπολογίστηκαν με τη βοήθεια του εμπορικού λογισμικού της Matlab. Συγκεκριμένα, χρησιμοποιήθηκε η εντολή `eig`, η οποία λαμβάνει ως όρισμα τα μητρώα μάζας και δυσκαμψίας και επιστρέφει ένα διαγώνιο πίνακα `val` ο οποίος περιέχει στην κύριο διαγώνιό του τις ιδιοτιμές του συστήματος και έναν πίνακα `vec` με τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα.

Ένα πρόβλημα το οποίο αντιμετωπίστηκε στο πλαίσιο της παρούσας εργασίας ήταν η ταξινόμηση των ιδιοτιμών και ιδιομορφών της κατασκευής. Πιο συγκεκριμένα, η έξοδος της εντολής `eig` δεν είναι σε αξιοποιήσιμη μορφή, καθώς τα αποτελέσματα για τα λ και ϕ δεν είναι ταξινομημένα κατά αύξουσα σειρά. Το πρόβλημα αυτό αντιμετωπίστηκε με χρήση της εντολής `sort` στο λογισμικό της Matlab. Αρχικά ταξινομήθηκαν οι ιδιοτιμές και κατόπιν, βάσει των αρχικών θέσεων τους, εντοπίστηκαν και ταξινομήθηκαν κατά αύξουσα σειρά και οι αντίστοιχες ιδιομορφές.

6 ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- [1] Σ. Πνευματικός, Δυναμικά Συστήματα, Πανεπιστήμιο Πάτρας, Τμήμα Μαθηματικών, 2010-2011
- [2] Βενετσάνος, Αντωνιάδης, Εργαστήριο Δυναμικής και Κατασκευών, ΕΜΠ, Σχολή Μηχανολόγων Μηχανικών, 2010-2011
- [3] Γεράσιμος Πανιεράκης, Εφαρμογή ασαφούς ελέγχου για των περιορισμό των ταλαντώσεων σε αμφίπακτη πλάκα, Διπλωματική εργασία, Πολυτεχνείο Κρήτης, 2016
- [4] Γεώργιος Ταϊρίδης, Optimal design of smart structures with intelligent control, Διδακτορική Διατριβή, Πολυτεχνείο Κρήτης, 2016
- [5] Δημήτρης Κομνηνός, Εφαρμογές πεπερασμένων στοιχείων στη επίλυση προβλημάτων με χρήση του προγράμματος ANSYS, Διπλωματική εργασία, ΤΕΙ Σερρών, Τμήμα Μηχανολογίας, 2008
- [6] Παναγιώτης Κουτσιανίτης, Έλεγχος σύνθετης πλάκας με πιεζοηλεκτρικά υλικά σε συνθήκες αποκόλλησης, Μεταπτυχιακή Διατριβή, Πολυτεχνείο Κρήτης, 2016