



ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ ΚΡΗΤΗΣ

ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΠΕΡΙΒΑΛΛΟΝΤΟΣ

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ

ΠΕΡΙΒΑΛΛΟΝΤΙΚΗ ΚΑΙ ΥΓΕΙΟΝΟΜΙΚΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ:

Διαχείριση υπόγειου υδροφορέα με χρήση
Γεωστατιστικών μεθόδων και Ασαφούς Λογικής

ΠΑΝΑΓΙΩΤΑ Γ. ΘΕΟΔΩΡΙΔΟΥ

Μαθηματικός

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ:

Γεώργιος Π. Καρατζάς

Χανιά, 2015

Η παρούσα διπλωματική εργασία εκπονήθηκε ως μέρος των απαιτήσεων για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης «Περιβαλλοντική και Υγειονομική Μηχανική», Σχολή Μηχανικών Περιβάλλοντος, Πολυτεχνείο Κρήτης.

Εξεταστική Επιτροπή

Γεώργιος Καρατζάς, Καθηγητής (επιβλέπων)

Ευάγγελος Διαμαντόπουλος, Καθηγητής

Εμμανουήλ Βαρουχάκης, Διδάκτωρ

Στον Πάρη μου.

*Κάποια μέρα, κοιτάζοντας πίσω
τα χρόνια που αγωνίστηκες
θα σου φαίνονται τα πιο ωραία.*

Sigmund Freud

Πρόλογος

Κατά τη διάρκεια μιας εκ των ερευνητικών διαλέξεων που προσφέρονται στους φοιτητές του Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών «Περιβαλλοντική και Υγειονομική Μηχανική», είχα την τύχη να παρακολουθήσω μια ολοκληρώμενη επιστημονική μελέτη με χρήση Γεωστατιστικών μεθόδων από τον Δρ Εμμανουήλ Βαρουχάκη. Ωστόσο, ο Κοσμήτορας και Καθηγητής της Σχολής Μηχανικών Περιβάλλοντος, Γεώργιος Καρατζάς μου έδωσε την ευκαιρία να ασχοληθώ η ίδια με τον τομέα της Γεωστατιστικής, αξιοποιώντας ταυτόχρονα το μαθηματικό μου υπόβαθρο.

Νιώθω την ανάγκη λοιπόν να ευχαριστήσω θερμά τον κ. Καρατζά τόσο για την εμπιστοσύνη που επέδειξε στο πρόσωπό μου αναθέτοντάς μου ένα ιδιαίτερα ενδιαφέρον θέμα προς διερεύνηση όσο και για την καθοδήγηση και την επίβλεψή του κατά τη διάρκεια της έρευνάς μου.

Ιδιαίτερες ευχαριστίες οφείλω στον Δρ. Εμμανουήλ Βαρουχάκη για τις συμβουλές, την άψογη συνεργασία και την πολύτιμη βοήθεια που μου προσέφερε κατά την εκπόνηση της διατριβής μου. Χωρίς τη συμβολή του η ολοκλήρωσή της θα ήταν αδύνατη.

Ευχαριστώ επίσης τον Καθηγητή Ευάγγελο Διαμαντόπουλο τόσο για τη συμμετοχή του στην τριμελή επιτροπή όσο και για τις γνώσεις που απέκτησα μέσα από τα μεταπτυχιακά του μαθήματα.

Θέλω επίσης να εκφράσω την ευγνωμοσύνη μου στη Δρ. Ευδοκία Ταπόγλου και στον Δρ. Νεκτάριο Κουργιαλά, μεταδιδακτορικοί ερευνητές της Σχολής Μηχανικών Περιβάλλοντος, για την καθοδήγηση τους στην Ασαφή Λογική και στα Γεωγραφικά Συστήματα Πληροφοριών, αντίστοιχα.

Ένα μεγάλο ευχαριστώ χρωστάω στο προσωπικό της Διεύθυνσης Υδάτων Ανατολικής Μακεδονίας - Θράκης αλλά και της Διεύθυνσης Περιβάλλοντος και Χωρικού Σχεδιασμού Περιφερειακής Ενότητας Δράμας για την παραχώρηση υδρογεωλογικών δεδομένων που αφορούν την περιοχή μελέτης στο νομό Δράμας.

Οι γονείς μου, Γεώργιος και Αγγελική, ο αδερφός μου Στάθης, ο παππούς μου Ευστάθιος και οι φίλοι μου έπαιξαν καταλυτικό ρόλο κατά τη διάρκεια των σπουδών μου, καθώς ήταν πάντα εκεί για να με εμπυχώνουν και να με στηρίζουν στις δύσκολες στιγμές. Συνεπώς δεν θα μπορούσα παρά να τους ευχαριστήσω από καρδιάς.

Η αιτία για τη συνέχιση των σπουδών μου σε μεταπτυχιακό επίπεδο και για την ολοκλήρωση αυτών υπήρξε ο καλός μου, Πάρης Στρατής. Με την υπομονή, την ψυχολογική αλλά και επιστημονική του υποστήριξη με βοήθησε να φτάσω ως το τέλος. Συνεπώς το μεγαλύτερο μου ευχαριστώ το οφείλω στον Πάρη μου, στον οποίο και αφιερώνω την παρούσα διατριβή.

Χανιά, 2015

Παναγιώτα Γ. Θεοδωρίδου

Περιεχόμενα

Πρόλογος	i
Περιεχόμενα	iii
Κατάλογος Σχημάτων	v
Κατάλογος Πινάκων	ix
Περίληψη	xiii
Abstract	xvii
1 Θεωρητικό υπόβαθρο	19
1.1 Γεωστατιστική	19
1.2 Τυχαία Πεδία	21
1.3 Βασικές έννοιες τυχαίων πεδίων	23
1.4 Μέση τιμή	24
1.5 Διασπορά	26
1.6 Συνάρτηση συνδιασποράς	27
1.7 Στατιστική ομοιογένεια	28
1.8 Στατιστική ισοτροπία	29
1.9 Χωρική εξάρτηση	30
1.10 Ασαφής Λογική	33
1.11 Προσδιορισμός ημιβαριογράμματος	36
1.12 Μοντέλα ημιβαριογράμματος	40
1.13 Σπαρτιάτικο Μοντέλο	42
1.14 Χωρική εκτίμηση	47
2 Γεωστατιστική ανάλυση τυχαίου πεδίου	49
2.1 Διερευνητική στατιστική ανάλυση	50
2.2 Δημιουργία Ασαφούς Συστήματος	52
2.3 Προσδιορισμός προτύπου χωρικής συνέχειας	55
2.3.1 Απόσταση μεταξύ σημείων παρατήρησης και εκτίμησης	56
2.3.2 Επιλογή βέλτιστου ημιβαριογράμματος	57
2.4 Διαδικασία εκτίμησης	59
2.4.1 Μέθοδος εκτίμησης Kriging	60

2.4.2	Διαφορετικές τεχνικές Kriging	62
2.4.3	Επαλήθευση του χωρικού μοντέλου	66
2.5	Διάγραμμα ροής διαδικασιών	67
3	Ανάλυση επικινδυνότητας ρύπου στην περιοχή ενδιαφέροντος	69
3.1	Περιγραφή της περιοχής μελέτης	69
3.2	Ανάλυση επικινδυνότητας ρύπου	72
4	Χωρική εκτίμηση της στάθμης του υπόγειου υδροφορέα	81
4.1	Στατιστικός έλεγχος δείγματος	81
4.2	Χωρική εκτίμηση με το αυθεντικό σύνολο δεδομένων	84
4.3	Γεωστατιστική ανάλυση με χρήση Ασαφούς Συστήματος	92
4.4	Βελτίωση της εκτίμησης Kriging με μετασχηματισμό των δεδομένων . .	101
4.4.1	Μετασχηματισμός Box-Cox	101
4.4.2	Χωρική ανάλυση με τα μετασχηματισμένα δεδομένα	102
5	Συμπεράσματα	111
	Βιβλιογραφία	113
	Αλφαβητικό ευρετήριο	117

Κατάλογος Σχημάτων

1.1	Γράφημα τάσης μεγάλης εμβέλειας [1].	25
1.2	Γράφημα συνημιτόνου με εκθετικά μειούμενο πλάτος διακύμανσης [1]. .	26
1.3	Συναρτήσεις συμμετοχής. Τριγωνική (επάνω) και τραπεζοειδής (κάτω).	36
1.4	Παρουσίαση χαρακτηριστικών στοιχείων ημιβαριογράμματος [1].	39
2.1	Ασαφοποίηση. Ο βαθμός συμμετοχής της τιμής v στο LS_1 ισούται με μ_{1A} , στο LS_2 με μ_{2A} και στο LS_3 με 0.	53
2.2	Συνάνθροιση. Τα συμπεράσματα τριών κανόνων (R_1, R_2, R_3) συνδυάζονται σε ένα ασαφές σύνολο.	54
2.3	Αποασαφοποίηση. Υπολογίζεται η αριθμητική τιμή n ενός ασαφούς συνόλου με τη βοήθεια του κέντρου μάζας.	55
2.4	Διάγραμμα ροής διαδικασιών μιας ολοκληρωμένης γεωστατιστικής ανάλυσης.	68
3.1	Τα 14 Υδατικά Διαμερίσματα της Ελλάδας και το Υ.Δ. Ανατολικής Μακεδονίας (GR11) [4].	70
3.2	Η περιοχή μελέτης και η θέση της στο Υ.Δ. Ανατολικής Μακεδονίας. .	71
3.3	Γραφική παράσταση του Γκαουσιανού μοντέλου και του πειραματικού ημιβαριογράμματος, όταν εφαρμόζεται η Ευκλείδεια απόσταση (εκτιμώμενες παράμετροι: $\sigma_z^2 = 0.077, \xi = 0.028$).	76
3.4	Γραφική παράσταση του Γκαουσιανού μοντέλου και του πειραματικού ημιβαριογράμματος, όταν εφαρμόζεται η απόσταση Minkowski, για $p=3$ (εκτιμώμενες παράμετροι: $\sigma_z^2 = 0.077, \xi = 0.073$).	76
3.5	Γραφική παράσταση του Σφαιρικού μοντέλου και του πειραματικού ημιβαριογράμματος, όταν εφαρμόζεται η απόσταση Manhattan (εκτιμώμενες παράμετροι: $\sigma_z^2 = 0.079, \xi = 0.082$).	77
3.6	Γραφική παράσταση του Σφαιρικού μοντέλου και του πειραματικού ημιβαριογράμματος, όταν εφαρμόζεται η απόσταση Canberra, (εκτιμώμενες παράμετροι: $\sigma_z^2 = 0.061, \xi = 0.096$).	77
3.7	Γραφική παράσταση του Γκαουσιανού μοντέλου και του πειραματικού ημιβαριογράμματος, όταν εφαρμόζεται η απόσταση Bray-Curtis (εκτιμώμενες παράμετροι: $\sigma_z^2 = 0.070, \xi = 0.016$).	77
3.8	Χάρτης ισοϋψών καμπυλών της εκτιμώμενης πιθανότητας η συγκέντρωση των Νιτρικών αλάτων να υπερβαίνει τα 50 mg/l στην περιοχή μελέτης. .	79
3.9	Χάρτης ισοϋψών καμπυλών της αβεβαιότητας της εκτίμησης με την τεχνική Kriging Δεικτών στην περιοχή μελέτης.	80

4.1	Χωρική κατανομή των 250 πηγαδιών στην επιφάνεια του υδροφορέα. . .	82
4.2	Διάγραμμα πιθανοτήτων των υδραυλικών υψών στην περιοχή μελέτης. .	83
4.3	Ιστόγραμμα υδραυλικών υψών σε σύγκριση με την Κανονική κατανομή.	83
4.4	Γραφική παράσταση του Δυναμονομικού μοντέλου και του πειραματικού ημιβαριογράμματος, όταν χρησιμοποιείται η Ευκλείδεια απόσταση (εκτιμώμενες παράμετροι: $c = 11.54, H = 0.12$).	87
4.5	Γραφική παράσταση του Δυναμονομικού μοντέλου και του πειραματικού ημιβαριογράμματος, όταν χρησιμοποιείται η απόσταση Minkowski, για $p=3$ (εκτιμώμενες παράμετροι: $c = 10.72, H = 0.11$).	87
4.6	Γραφική παράσταση του Δυναμονομικού μοντέλου και του πειραματικού ημιβαριογράμματος, όταν χρησιμοποιείται η απόσταση Manhattan (εκτιμώμενες παράμετροι: $c = 12.06, H = 0.15$).	87
4.7	Γραφική παράσταση του Δυναμονομικού μοντέλου και του πειραματικού ημιβαριογράμματος, όταν χρησιμοποιείται η απόσταση Canberra (εκτιμώμενες παράμετροι: $c = 15.37, H = 0.22$).	87
4.8	Γραφική παράσταση του Δυναμονομικού μοντέλου και του πειραματικού ημιβαριογράμματος, όταν χρησιμοποιείται η απόσταση Bray-Curtis (εκτιμώμενες παράμετροι: $c = 24.59, H = 0.22$).	88
4.9	Χάρτης ισοϋψών χαμπυλών της στάθμης του υπόγειου υδροφορέα στην περιοχή μελέτης. Οι κόκκινοι κύκλοι υποδεικνύουν τις θέσεις των 250 γεωτρήσεων.	90
4.10	Χάρτης ισοϋψών χαμπυλών της OK τυπικής απόκλισης για τη στάθμη του υπόγειου υδροφορέα στην περιοχή μελέτης. Οι μπλε κύκλοι υποδεικνύουν τις θέσεις των 250 γεωτρήσεων.	91
4.11	Συναρτήσεις συμμετοχής για τις τιμές των αποστάσεων μεταξύ των σημείων παρατήρησης και εκτίμησης.	93
4.12	Συναρτήσεις συμμετοχής για τις τιμές των υδραυλικών υψών σε κάθε σημείο του δείγματος.	93
4.13	Πιθανότητα (ποσοστό %) μια γεώτρηση να είναι ένας «καλός» γείτονας για το εκάστοτε σημείο εκτίμησης.	95
4.14	Γραφική παράσταση του Γκαουσιανού μοντέλου και του πειραματικού ημιβαριογράμματος, για το πρώτο σύνολο δεδομένων (εκτιμώμενες παράμετροι: $\sigma_z^2 = 1.321, \xi = 0.006$).	97
4.15	Γραφική παράσταση του Γκαουσιανού μοντέλου και του πειραματικού ημιβαριογράμματος, για το δεύτερο σύνολο δεδομένων (εκτιμώμενες παράμετροι: $\sigma_z^2 = 1.009, \xi = 0.006$).	97
4.16	Γραφική παράσταση του Γκαουσιανού μοντέλου και του πειραματικού ημιβαριογράμματος, για το τρίτο σύνολο δεδομένων (εκτιμώμενες παράμετροι: $\sigma_z^2 = 0.809, \xi = 0.006$).	98

4.17	Γραφική παράσταση του Γκαουσιανού μοντέλου και του πειραματικού ημιβαριογράμματος, για το τέταρτο σύνολο δεδομένων (εκτιμώμενες παράμετροι: $\sigma_z^2 = 0.936$, $\xi = 0.006$).	98
4.18	Χάρτης ισοϋψών καμπυλών της εκτιμώμενης στάθμης του υπόγειου υδροφορέα στην περιοχή μελέτης, όταν εφαρμόζεται ένα Σύστημα Ασαφούς Λογικής. Οι κόκκινοι κύκλοι υποδεικνύουν τις θέσεις των 250 γεωτρήσεων.	99
4.19	Χάρτης ισοϋψών καμπυλών της OK τυπικής απόκλισης σε συνδυασμό με ένα Ασαφές Σύστημα για τη στάθμη του υπόγειου υδροφορέα στην περιοχή μελέτης. Οι μπλε κύκλοι υποδεικνύουν τις θέσεις των 250 γεωτρήσεων.	100
4.20	Διάγραμμα πιθανοτήτων των μετασχηματισμένων υδραυλικών υψών στην περιοχή μελέτης.	102
4.21	Ιστογράμμα των μετασχηματισμένων υδραυλικών υψών σε σύγκριση με την Κανονική κατανομή.	103
4.22	Γραφική παράσταση του Δυναμονομικού μοντέλου και του πειραματικού ημιβαριογράμματος των μετασχηματισμένων δεδομένων (Ευκλείδεια απόσταση, $c = 0.32$, $H = 0.16$).	105
4.23	Γραφική παράσταση του Δυναμονομικού μοντέλου και του πειραματικού ημιβαριογράμματος των μετασχηματισμένων δεδομένων (απόσταση Minkowski, για $p=3$, $c = 0.32$, $H = 0.15$).	105
4.24	Γραφική παράσταση του Δυναμονομικού μοντέλου και του πειραματικού ημιβαριογράμματος των μετασχηματισμένων δεδομένων (απόσταση Manhattan, $c = 0.34$, $H = 0.18$).	106
4.25	Γραφική παράσταση του Δυναμονομικού μοντέλου και του πειραματικού ημιβαριογράμματος των μετασχηματισμένων δεδομένων (απόσταση Canberra, $c = 0.38$, $H = 0.19$).	106
4.26	Γραφική παράσταση του Δυναμονομικού μοντέλου και του πειραματικού ημιβαριογράμματος των μετασχηματισμένων δεδομένων (απόσταση Bray-Curtis, $c = 0.63$, $H = 0.22$).	106
4.27	Χάρτης ισοϋψών καμπυλών της εκτιμώμενης στάθμης του υπόγειου υδροφορέα στην περιοχή μελέτης, όταν τα δεδομένα κανονικοποιούνται με τη μέθοδο Box-Cox. Οι κόκκινοι κύκλοι υποδεικνύουν τις θέσεις των 250 γεωτρήσεων.	108
4.28	Χάρτης ισοϋψών καμπυλών της OK τυπικής απόκλισης για τη στάθμη του υπόγειου υδροφορέα στην περιοχή μελέτης, όταν τα δεδομένα κανονικοποιούνται με τη μέθοδο Box-Cox. Οι μπλε κύκλοι υποδεικνύουν τις θέσεις των 250 γεωτρήσεων.	109

ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗ ΥΠΟΓΕΙΟΥ ΤΑΡΟΦΟΡΕΑ
ΜΕ ΧΡΗΣΗ ΓΕΩΣΤΑΤΙΣΤΙΚΩΝ ΜΕΘΟΔΩΝ ΚΑΙ ΑΣΑΦΟΥΣ ΛΟΓΙΚΗΣ

Κατάλογος Πινάκων

2.1	Τελεστές Mamdani [31], [29].	53
3.1	Τιμές των τριών κριτηρίων για κάθε θεωρητικό πρότυπο όταν χρησιμοποιείται η Ευκλείδεια απόσταση.	74
3.2	Τιμές των τριών κριτηρίων για κάθε θεωρητικό πρότυπο όταν χρησιμοποιείται η απόσταση Minkowski ($p=3$).	74
3.3	Τιμές των τριών κριτηρίων για κάθε θεωρητικό πρότυπο όταν χρησιμοποιείται η απόσταση Manhattan.	74
3.4	Τιμές των τριών κριτηρίων για κάθε θεωρητικό πρότυπο όταν χρησιμοποιείται η απόσταση Canberra.	74
3.5	Τιμές των τριών κριτηρίων για κάθε θεωρητικό πρότυπο όταν χρησιμοποιείται η απόσταση Bray-Curtis.	75
3.6	Παράμετροι του Γκαουσιανού μοντέλου όπως αυτές προσδιορίζονται χρησιμοποιώντας διαδοχικά τις αποστάσεις Ευκλείδεια, Minkowski, Bray-Curtis.	76
3.7	Παράμετροι του Σφαιρικού μοντέλου όπως αυτές προσδιορίζονται χρησιμοποιώντας διαδοχικά τις αποστάσεις Manhattan και Canberra.	76
3.8	Τιμές που λαμβάνουν τα τρία κριτήρια για το βέλτιστο θεωρητικό πρότυπο που αντιστοιχεί σε κάθε τύπο απόστασης.	78
4.1	Στατιστικά μεγέθη των υπό εξέταση υδραυλικών υψών.	81
4.2	Πίνακας των τιμών που λαμβάνουν τα κριτήρια για κάθε θεωρητικό μοντέλο όταν χρησιμοποιείται η Ευκλείδεια απόσταση.	85
4.3	Πίνακας των τιμών που λαμβάνουν τα κριτήρια για κάθε θεωρητικό μοντέλο όταν χρησιμοποιείται η απόσταση Minkowski (για $p=3$).	85
4.4	Πίνακας των τιμών που λαμβάνουν τα κριτήρια για κάθε θεωρητικό μοντέλο όταν χρησιμοποιείται η απόσταση Manhattan.	85
4.5	Πίνακας των τιμών που λαμβάνουν τα κριτήρια για κάθε θεωρητικό μοντέλο όταν χρησιμοποιείται η απόσταση Canberra.	85
4.6	Πίνακας των τιμών που λαμβάνουν τα κριτήρια για κάθε θεωρητικό μοντέλο όταν χρησιμοποιείται η απόσταση Bray-Curtis.	85
4.7	Παράμετροι του Δυναμονομικού μοντέλου όπως αυτές προσδιορίζονται χρησιμοποιώντας κάθε φορά ένα διαφορετικό μέτρο απόστασης.	86

4.8	Στατιστικά μέτρα της διασταυρωμένης επιβεβαίωσης που υλοποιείται για την επαλήθευση του χωρικού μοντέλου με βάση το βέλτιστο ημιβαριόγραμμα (Δυναμονομικό). Η διαδικασία εφαρμόζεται για όλους τους τύπους αποστάσεων.	89
4.9	Τιμές των τριών κριτηρίων και του Μέσου Απολύτου Σφάλματος για κάθε τύπο απόστασης, για το Δυναμονομικό μοντέλο.	89
4.10	Το σύνολο των κανόνων που χρησιμοποιούνται στο Σύστημα Ασαφούς Λογικής για το χαρακτηρισμό μιας γεώτρησης ως «καλή», «επαρκής» ή «κακή» επιλογή για να συμπεριληφθεί στη γειτονιά εκτίμησης γύρω από κάποιο σημείο πρόβλεψης.	94
4.11	Τιμές των τριών κριτηρίων για κάθε θεωρητικό πρότυπο, για το πρώτο σύνολο δεδομένων.	96
4.12	Τιμές των τριών κριτηρίων για κάθε θεωρητικό πρότυπο, για το δεύτερο σύνολο δεδομένων.	96
4.13	Τιμές των τριών κριτηρίων για κάθε θεωρητικό πρότυπο, για το τρίτο σύνολο δεδομένων.	96
4.14	Τιμές των τριών κριτηρίων για κάθε θεωρητικό πρότυπο, για το τέταρτο σύνολο δεδομένων.	96
4.15	Παράμετροι του Γκαουσιανού μοντέλου όταν αυτό προσαρμόζεται στο πειραματικό ημιβαριόγραμμα κάθε συνόλου δεδομένων που αντιστοιχεί σε ένα διαφορετικό σημείο εκτίμησης.	97
4.16	Στατιστικά μέτρα της διασταυρωμένης επιβεβαίωσης που υλοποιείται για την επαλήθευση του γεωστατιστικού μοντέλου με βάση το Γκαουσιανό ημιβαριόγραμμα, για το σύνολο των 250 γεωτρήσεων, χρησιμοποιώντας διαδοχικά κάθε ένα από τα 4 σετ παραμέτρων του Πίνακα 4.15.	99
4.17	Τιμές των κριτηρίων για κάθε θεωρητικό μοντέλο που προσομοιώνει τα μετασχηματισμένα δεδομένα όταν εφαρμόζεται η Ευκλείδεια απόσταση. .	103
4.18	Τιμές των κριτηρίων για κάθε θεωρητικό μοντέλο που προσομοιώνει τα μετασχηματισμένα δεδομένα όταν εφαρμόζεται η απόσταση Minkowski ($p=3$).	103
4.19	Τιμές των κριτηρίων για κάθε θεωρητικό μοντέλο που προσομοιώνει τα μετασχηματισμένα δεδομένα όταν εφαρμόζεται η απόσταση Manhattan. .	104
4.20	Τιμές των κριτηρίων για κάθε θεωρητικό μοντέλο που προσομοιώνει τα μετασχηματισμένα δεδομένα όταν εφαρμόζεται η απόσταση Canberra. .	104
4.21	Τιμές των κριτηρίων για κάθε θεωρητικό μοντέλο που προσομοιώνει τα μετασχηματισμένα δεδομένα όταν εφαρμόζεται η απόσταση Bray-Curtis. .	104
4.22	Εκτιμώμενες παράμετροι του Δυναμονομικού μοντέλου που προσομοιώνει τα μετασχηματισμένα δεδομένα, εφαρμόζοντας διαδοχικά ένα διαφορετικό μέτρο απόστασης.	105

4.23 Στατιστικά μέτρα της διασταυρωμένης επιβεβαίωσης που υλοποιείται για την επαλήθευση του χωρικού μοντέλου των μετασχηματισμένων δεδομένων με βάση το Δυναμονομικό πρότυπο. Η διαδικασία εφαρμόζεται για όλους τους τύπους αποστάσεων.	107
4.24 Τιμές των τριών κριτηρίων και του Μέσου Απολύτου Σφάλματος για κάθε τύπο απόστασης, όταν τα μετασχηματισμένα δεδομένα προσομοιώνονται από το Δυναμονομικό μοντέλο.	107

ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗ ΥΠΟΓΕΙΟΥ ΤΑΡΟΦΟΡΕΑ
ΜΕ ΧΡΗΣΗ ΓΕΩΣΤΑΤΙΣΤΙΚΩΝ ΜΕΘΟΔΩΝ ΚΑΙ ΑΣΑΦΟΥΣ ΛΟΓΙΚΗΣ

Περίληψη

Η στάθμη των υπογείων υδάτων και η συγκέντρωση ρύπων σε αυτά αποτελούν σημαντικές παραμέτρους για την ορθή διαχείριση ενός υδροφορέα. Συχνά, διάφορες γεωστατιστικές μέθοδοι χρησιμοποιούνται για τη χαρτογράφηση της ελεύθερης επιφάνειας ενός υδροφορέα ή για τον προσδιορισμό του κινδύνου μιας περιβαλλοντικής μόλυνσης. Στη γεωστατιστική ανάλυση κατά την οποία εφαρμόζονται τεχνικές Kriging, είναι πολύ σημαντική η επιλογή του καλύτερου μοντέλου ημιβαριογράμματος για τη βέλτιστη απόδοση της μεθόδου.

Στην παρούσα εργασία γίνεται σύγκριση τριών διαφορετικών κριτηρίων για τον προσδιορισμό του θεωρητικού ημιβαριογράμματος με βάση το αντίστοιχο πειραματικό: της μεθόδου των Ελαχίστων Τετραγώνων, του κριτηρίου Akaike και του δείκτη Cressie. Επιπλέον, εφαρμόζονται πέντε διαφορετικοί τύποι αποστάσεων (Euclidean, Minkowski, Manhattan, Canberra, Bray-Curtis) για τον υπολογισμό της απόστασης μεταξύ των σημείων παρατήρησης και εκτίμησης. Η διαδικασία αυτή επηρεάζει τόσο τον προσδιορισμό του προτύπου ημιβαριογράμματος όσο και τη μεθοδολογία εκτίμησης Kriging. Η διασταυρωμένη επιβεβαίωση στα πλαίσια της μεθόδου του Κανονικού Kriging εφαρμόζεται χρησιμοποιώντας διαδοχικά κάθε έναν από τους παραπάνω τύπους απόστασης. Η χωρική εξάρτηση των σημείων παρατήρησης στα υπό εξέταση δεδομένα ερευνάται με την εφαρμογή των κλασικών γεωστατιστικών προτύπων και του Σπαρτιάτικου μοντέλου. Η γεωστατιστική ανάλυση πραγματοποιείται τόσο για την εκτίμηση των υδραυλικών υψών του υδροφορέα όσο και για την αξιολόγηση του κινδύνου αυξημένης παρουσίας Νιτρικών αλάτων σε αυτόν.

Στη συνέχεια, εφαρμόζεται ένα Σύστημα Ασαφούς Λογικής με στόχο να καθοριστούν οι κατάλληλοι γείτονες για κάθε σημείο εκτίμησης που χρησιμοποιείται στον αλγόριθμο Kriging. Τα δύο κριτήρια που χρησιμοποιούνται κατά τη διαδικασία της Ασαφούς Λογικής είναι η Ευκλείδεια απόσταση μεταξύ των σημείων παρατήρησης και εκτίμησης και η τιμή της στάθμης σε κάθε σημείο παρατήρησης. Τα σημεία εκείνα που βρίσκονται σε κοντινή απόσταση από κάθε σημείο εκτίμησης και η στάθμη των οποίων χαρακτηρίζεται ως μικρή θεωρούνται ως βέλτιστα για να συμπεριληφθούν στη διαδικασία του Κανονικού Kriging. Υπολογίζονται έτσι οι κατάλληλες παράμετροι που θα χρησιμοποιηθούν κατά τη χαρτογράφηση και με τη βοήθειά τους θα περιοριστεί όσο το δυνατόν περισσότερο η αβεβαιότητα της εκτίμησης.

Η προτεινόμενη συγκριτική ανάλυση υλοποιείται για ένα σύνολο δεδομένων αποτελούμενο από 250 μετρήσεις υδραυλικών υψών, κατανεμημένες σε έναν αλλουβιακό υδροφόρα έκτασης 210 km^2 . Η περιοχή μελέτης βρίσκεται στην Περιφερειακή Ενότητα Δράμας. Η συγκεκριμένη περιοχή επελέγη λόγω της διαθεσιμότητας υδρογεωλογικών δεδομένων και της γεωλογικής της ομοιογένειας.

Σύμφωνα με την ανάλυση επικινδυνότητας που πραγματοποιήθηκε η πιθανότητα αυξημένης συγκέντρωσης Νιτρικών αλάτων στα υπόγεια ύδατα του υδροφόρα φαίνεται να είναι πολύ μικρή. Η αποδοτικότητα της εκτίμησης χαρακτηρίζεται αρκετά καλή, δεδομένου ότι βασίζεται σε 56 πειραματικές μετρήσεις μόνο.

Η ανάλυση έδειξε ότι, σύμφωνα και με τους τρεις δείκτες που προαναφέρθηκαν, το Δυναμονομικό μοντέλο παρέχει τη βέλτιστη προσαρμογή στο πειραματικό ημιβαρίογραμμα. Ο συνδυασμός του με την απόσταση Manhattan και τον μετασχηματισμό των δεδομένων με τη μέθοδο Box-Cox παρέχει αρκετά ακριβή αποτελέσματα στα πλαίσια της διασταυρωμένης επιβεβαίωσης, σχεδόν ίδια με τα αντίστοιχα που προκύπτουν όταν εφαρμόζεται η Ευκλείδεια μετρική. Η προαναφερθείσα προσέγγιση για το συγκεκριμένο

σύνολο δεδομένων στα πλαίσια του Κανονικού Kriging βελτιώνει την αποδοτικότητα της εκτίμησης σε σύγκριση με την κλασική Ευκλείδεια απόσταση.

Εφαρμόζοντας το Σύστημα Ασαφούς Λογικής προκύπτει ότι το Γκαουσιανό μοντέλο παρέχει την καλύτερη προσαρμογή στα πειραματικά δεδομένα. Κατασκευάζοντας τους χάρτες της χωρικής μεταβλητότητας των υδραυλικών υψών και της αβεβαιότητας της εκτίμησης με τις διαφορετικές προσεγγίσεις, έτσι ώστε να υποδειχθούν οι διαφορές, η αποδοτικότητα της πρόβλεψης βελτιώνεται αισθητά συγκριτικά με την κλασική μέθοδο Kriging, όπως ήταν αναμενόμενο.

Abstract

The groundwater level and the concentration of a pollutant are two important parameters for the proper management of an aquifer. Geostatistical methods are often employed to map the free surface of an aquifer or the risk assessment of environmental pollution. In geostatistical analysis using Kriging techniques the selection of the optimal variogram model is very important for the optimal method performance.

This work compares three different criteria to assess the theoretical variogram that fits to the experimental one: the Least Squares method, the Akaike Information Criterion and the Cressie's Indicator. Moreover, five different distance functions (Euclidean, Minkowski, Manhattan, Canberra, Bray-Curtis) are applied to calculate the distance between the observation and the prediction points. This process affects both the variogram calculation and the Kriging estimator. Cross validation analysis in terms of Ordinary Kriging is applied by using sequentially a different distance metric. The spatial dependence of the observations in the tested dataset is studied by fitting classical variogram models and the Spartan model. The geostatistical analysis is performed both for the estimation of hydraulic heads and the assessment of the possible risk related to the presence of NO_3^- at the aquifer.

Then, a Fuzzy Logic System is applied in order to define the appropriate neighbors for each estimation point used in the Kriging algorithm. The two criteria used during the Fuzzy Logic process are the Euclidean distance between observation and estimation points and the groundwater level value at each observation point. Those points which are within close distance from each estimation point and the groundwater level is characterized as small are considered as the optimal for inclusion in the Ordinary

Kriging process. In that way, the appropriate parameter values which are going to be used during the mapping process are calculated, in order to limit as much as possible the prediction uncertainty.

According to the risk analysis performed for the aquifer, the probability of increased concentration of NO_3^- at the aquifer's groundwater is small enough. Even though the prediction depends only on 56 measurements, the efficient of the estimation can be characterized as good.

The proposed comparison analysis is performed for a data set of two hundred fifty hydraulic head measurements distributed over an alluvial aquifer that covers an area of 210 km^2 . The study area is located in the Prefecture of Drama, which belongs to the Water District of East Macedonia (Greece). This area was selected in terms of hydro-geological data availability and geological homogeneity.

The analysis showed that, according to the three indicators presented above, the Power-law model provides the best fit to the experimental variogram. The combination of Power-law model and the Manhattan distance metric using the Box-Cox transformed data provides, in terms of cross validation, considerably accurate results similar to those obtained after Euclidean metric is applied. The aforementioned approach for the specific dataset in terms of the Ordinary Kriging method improves the prediction efficiency in comparison to the classical Euclidean distance metric.

The implementation of the Fuzzy Logic System suggests that the Gaussian model provides the best simulation to the experimental data. Constructing the maps of spatial variability of hydraulic heads and of prediction uncertainty with the different approaches in order to indicate the differences, the efficiency of prediction is improved significantly compared to the classical method Kriging, as expected.

Κεφάλαιο 1

Θεωρητικό υπόβαθρο

1.1 Γεωστατιστική

Η Γεωστατιστική, μια επιστήμη που αναπτύσσεται ταχύτατα τις τελευταίες τρεις δεκαετίες, περιλαμβάνει εφαρμογές που σχετίζονται άμεσα με τον εντοπισμό περιβαλλοντικών ρύπων και ορυκτών πόρων, ενώ διευρύνει ταυτόχρονα το πεδίο εφαρμογών της. Οι κατανομές με τις οποίες ασχολείται η συγκεκριμένη επιστήμη βασίζονται στα χαρακτηριστικά της χωρικής εξάρτησης. Στόχος της γεωστατιστικής ανάλυσης είναι ο προσδιορισμός της χωρικής κατανομής μεταβλητών σε σημεία μιας περιοχής όπου δεν είναι γνωστές, καθώς συνήθως χαρακτηρίζουν μεγέθη με οικονομική ή περιβαλλοντική σημασία [6].

Χαρακτηριστικό των κλασικών γεωστατιστικών μεθόδων είναι οι ισχυροί μαθηματικοί περιορισμοί ως προς την εφαρμογή τους. Συνέπεια της μη ικανοποίησης των περιορισμών αυτών από το πειραματικό δείγμα του υπό μελέτη φαινομένου είναι το υψηλό ποσοστό σφάλματος της χωρικής εκτίμησης των μεταβλητών [17].

Ένα σύνολο στατιστικών τεχνικών που περιλαμβάνονται στη Γεωστατιστική και αφορούν σε τυχαίες μεταβλητές που μεταβάλλονται στο χώρο (τυχαία πεδία), βασίζονται στην υπόθεση ότι η χωρική διακύμανση της μεταβλητής έχει τυχαίο χαρακτήρα. Για το λόγο αυτό χρησιμοποιούνται στατιστικές μεθοδολογίες (π.χ. μέση τιμή, διασπορά κ.α.) για οποιαδήποτε εκτίμηση απορρέει από τις σημειακές μετρήσεις της μεταβλητής.

Αναλυτικότερα, η Γεωστατιστική στηρίζεται στην μαθηματική έννοια του τυχαίου πεδίου, συνεπώς έχει κοινά σημεία τόσο με τη Θεωρία Πιθανοτήτων όσο και με τη Στατιστική. Αφενός η Θεωρία Πιθανοτήτων ασχολείται με τις τυχαίες μεταβλητές και

τους νόμους και τις ιδιότητες που τις διέπουν αφετέρου η Στατιστική εξετάζει όλες εκείνες τις μεθόδους που προσδιορίζουν τις παραμέτρους οι οποίες χαρακτηρίζουν τις τυχαίες μεταβλητές βάσει των δεδομένων. Συνεπώς, η Θεωρία των Τυχαίων Πεδίων είναι μια γενίκευση της Θεωρίας Πιθανοτήτων με εφαρμογή σε τυχαίες μεταβλητές με χωρική εξάρτηση.

Σκοπός της Γεωστατιστικής είναι η εκτίμηση των στατιστικών παραμέτρων που προσδιορίζουν τη χωρική κατανομή βάσει του υπάρχοντος δείγματος (π.χ. τιμή συγκέντρωσης) αλλά και η συμβολή των παραμέτρων αυτών στην εκτίμηση των συγκεντρώσεων σε σημεία που δεν υπάρχουν μετρήσεις [6].

Η επιστήμη της Γεωστατιστικής αναπτύχθηκε από στατιστικούς επιστήμονες, μηχανικούς μεταλλείων ή πετρελαίων, κατά την προσπάθειά τους να εκτιμήσουν φυσικά μεγέθη σε σημεία όπου δεν υπήρχαν μετρήσεις. Αν και στην αρχή οι κύριες επιστήμες στις οποίες εφαρμόστηκαν οι γεωστατιστικές μέθοδοι ήταν η Γεωλογία, η Υδρολογία και η Μεταλλειολογία, με την πάροδο των χρόνων χρησιμοποιήθηκαν ευρέως και σε άλλα επιστημονικά και τεχνολογικά πεδία. Ορισμένες από τις εφαρμογές όπου χρησιμοποιείται σήμερα η Γεωστατιστική είναι οι εξής [1]:

- Η έρευνα κοιτασμάτων (π.χ. εκτίμηση έκτασης, βάθος και ποσοτικοποίηση συνολικής περιεκτικότητας κοιτάσματος).
- Η ωκεανογραφία (π.χ. χαρτογράφηση βυθού, ανάλυση κυματισμών).
- Η μορφολογική ανάλυση φυσικών και τεχνολογικών ανομοιογενών (π.χ. πορώδων) υλικών.
- Η χαρτογράφηση και απεικόνιση συγκεντρώσεων ρυπαντών σε διάφορα περιβαλλοντικά μέσα (αέρας, υπέδαφος, επιφανειακοί-υπόγειοι υδατικοί πόροι).

- Ο χαρακτηρισμός της ποιότητας βιομηχανικών προϊόντων (π.χ. προϊόντα χαρτιού, υλικά υψηλής τεχνολογίας όπως ημιαγωγοί).
- Η τοπογραφική ανάλυση και τα γεωγραφικά συστήματα πληροφοριών (GIS).
- Η ανάλυση βροχοπτώσεων σε περιοχές με λίγους βροχομετρικούς σταθμούς.
- Ο προσδιορισμός γεωλογικών και υδρογεωλογικών δεδομένων (π.χ. τύπος υπεδάφους, υδραυλική αγωγιμότητα, πορώδες, αποθηκευτικότητα, εξατμισοδιαπνοή, υδραυλικό ύψος).
- Η εκτίμηση του περιβαλλοντικού κινδύνου και του κινδύνου για την ανθρώπινη υγεία (π.χ. εκτίμηση της περιεκτικότητας των ρυπαντών σε ελεγχόμενη περιοχή, προσδιορισμός των πιθανοτήτων υπέρβασης ορίων).

Για τον προσδιορισμό της χωρικής εξάρτησης των τυχαίων μεταβλητών που χαρακτηρίζουν μεγέθη με οικονομική ή περιβαλλοντική σημασία χρησιμοποιούνται διάφορες τεχνικές. Οι πιο διαδεδομένες από αυτές ονομάζονται *Kriging*. Ωστόσο, λόγω των ισχυρών μαθηματικών περιορισμών που τις διέπουν είναι επιθυμητή η ανάπτυξη και άλλων νέων μεθόδων γεωστατιστικής ανάλυσης ώστε να υπάρχουν εναλλακτικές προτάσεις.

1.2 Τυχαία Πεδία

Με τον όρο «τυχαίο πεδίο» περιγράφεται ένα σύνολο τυχαίων μεταβλητών που χρησιμοποιούνται για τη χωροχρονική μεταβολή του σχετικού φυσικού μεγέθους (π.χ. τιμές συγκεντρώσεων ρύπων). Ένα τυχαίο πεδίο χωρίς σαφή μαθηματική έκφραση (σε αντίθεση με τις συναρτήσεις που έχουν κάποια συγκεκριμένη μαθηματική έκφραση π.χ. $f(x)=\cos(x)$) αντιπροσωπεύει ένα σύνολο δυνατών καταστάσεων.

Κάθε κατάσταση αποτελεί ένα δείγμα του πεδίου και χαρακτηρίζεται από μια πιθανότητα πραγματοποίησης η οποία καθορίζεται από την πολυδιάστατη Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας (ΣΠΠ) του πεδίου. Συνεπώς, ένα τυχαίο πεδίο μπορεί να θεωρηθεί ως μια πολυδιάστατη τυχαία μεταβλητή. Οι ιδιαίτερες μαθηματικές ιδιότητες των τυχαίων πεδίων που προκύπτουν από την αλληλεξάρτηση των φυσικών μεγεθών σε διαφορετικά σημεία του χώρου τα διακρίνουν από ένα σύνολο ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών .

Υπάρχουν διάφορες κατηγορίες τυχαίων πεδίων, ανάλογα με τις τιμές που λαμβάνουν. Ένα πεδίο διακριτών τιμών λαμβάνει τιμές μόνο από ένα μετρήσιμο σύνολο αριθμών. Αντίθετα, όταν οι τιμές του πεδίου προέρχονται από ένα συνεχές διάστημα πραγματικών αριθμών το πεδίο ονομάζεται συνεχές. Αν η μεταβολή ορίζεται σε ένα συνεχή χώρο, όπως π.χ. στα φυσικά πεδία, δημιουργείται ένα πεδίο συνεχούς χώρου ενώ όταν ορίζεται στις θέσεις ενός πλέγματος (καννάβου) ονομάζεται πλεγματοειδές πεδίο.

Λόγω της συμμετρίας του πλέγματος η χρήση αριθμητικών μεθόδων (μετασχηματισμοί Fourier) καθιστά αναγκαία τα πλεγματοειδή πεδία τόσο σε υπολογιστικές (π.χ. προσομοίωση κατανομής ρυπαντών σε υδροφόρο ορίζοντα) όσο και σε θεωρητικές μελέτες. Ταυτόχρονα, βοηθούν στη σύγκριση των επιδόσεων γεωστατιστικών μεθόδων.

Στην περίπτωση ενός ανομοιογενούς δικτύου σημείων δειγματοληψίας η κατανομή των σημείων στο χώρο δεν έχει απαραίτητα τη συμμετρία ενός κανονικού πλέγματος. Στην περίπτωση που υπάρχει άτακτο πλέγμα (disordered lattice) ή η κατανομή είναι εξωπλεγματοειδής (off lattice), απαιτούνται γεωστατιστικές μέθοδοι που να λειτουργούν ικανοποιητικά με τους περιορισμούς της εκάστοτε χωρικής κατανομής. Η εκτίμηση ή η προσομοίωση της διαδικασίας γίνεται πάνω σε ένα πλεγματοειδές υπόβαθρο όταν η κατανομή των δεδομένων είναι εξωπλεγματοειδής.

Η *τυχειότητα* και η *αλληλεξάρτηση* των τιμών φυσικών μεγεθών είναι δύο επιπλέον βασικές έννοιες του τυχαίου πεδίου. Η τυχειότητα αναφέρεται σε φαινόμενα κατά τα

οποία η απόλυτη ακρίβεια μια κατάστασης είναι αδύνατη λόγω διαφόρων περιορισμών που προέρχονται από την μεταβλητότητα των μεγεθών στο χώρο και την αβεβαιότητα που προκύπτει από τον περιορισμένο αριθμό μετρήσεων. Οι πιθανότητες εμφάνισης κάθε κατάστασης (και συνεπώς το αποτέλεσμα) σε τέτοιες περιπτώσεις καθορίζεται από μια συνάρτηση κατανομής πιθανότητας.

Η αλληλεξάρτηση (χωρική εξάρτηση) περιγράφει την εξάρτηση των τιμών του πεδίου σε διαφορετικά σημεία του χώρου μεταξύ τους και είναι το ιδιαίτερο γνώρισμα των τυχαίων πεδίων. Η πιθανότητα παρατήρησης μια τιμής σε ένα σημείο εξαρτάται από τις τιμές στα γειτονικά σημεία, συνέπεια της κατανομής πιθανότητας του πεδίου που περιέχει συσχετίσεις μεταξύ διαφορετικών σημείων [5].

1.3 Βασικές έννοιες τυχαίων πεδίων

Ένα τυχαίο πεδίο συμβολίζεται ως $Z(s)$, όπου s ένα διάνυσμα θέσης, $s = (x, y)$. Ως $Z(s)$ περιγράφεται το σύνολο των δυνατών καταστάσεων του πεδίου, ενώ ως $z(s)$ συμβολίζονται οι τιμές που αντιστοιχούν σε μια κατάσταση. Η ΣΠΠ του πεδίου παριστάνεται ως $f_z[z(s)]$. Το όρισμα της συνάρτησης είναι οι τιμές του πεδίου (π.χ. συγκεντρώσεις ρύπων) και ο δείκτης Z το πεδίο.

Η παρακάτω εξίσωση περιγράφει μια ΣΠΠ που αντιστοιχεί σε τυχαίο πεδίο κανονικής κατανομής:

$$f_z[z(s)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_z} \exp \left[-\frac{(z(s) - m'_z(s))^2}{2\sigma_z^2} \right]. \quad (1.1)$$

Η ΣΠΠ τυχαίου πεδίου περιέχει τιμές σε όλο το χώρο όπου ορίζεται το πεδίο. Άρα αποτελεί κοινή ΣΠΠ για ένα οποιοδήποτε πλήθος σημείων. Με τον όρο μονοδιάστατη ή σημειακή ΣΠΠ περιγράφονται οι δυνατές καταστάσεις του τυχαίου πεδίου σε ένα

συγκεκριμένο σημείο. Στην περίπτωση που το πεδίο είναι ανομοιογενές δύναται η μονοδιάστατη ΣΠΠ να αλλάζει από σημείο σε σημείο. Αντίστοιχα, η δισδιάστατη ΣΠΠ εκφράζει την αλληλεξάρτηση των δυνατών καταστάσεων μεταξύ δύο σημείων και η πολυδιάστατη περιγράφει την αλληλεξάρτηση των δυνατών καταστάσεων για N σημεία.

Οι στατιστικές ροπές είναι εξίσου σημαντικές συναρτήσεις που δίνουν πληροφορίες σχετικά με τις ιδιότητες ενός τυχαίου πεδίου. Πρόκειται για αιτιοκρατικές συναρτήσεις που αντιπροσωπεύουν μέσες τιμές, ως προς όλες τις δυνατές καταστάσεις. Ουσιαστικά οι ροπές χαμηλών τάξεων (μέχρι δεύτερης τάξης) είναι οι πρακτικά χρήσιμες, όπως η μέση τιμή, η διασπορά, η συνάρτηση συνδιασποράς και το ημιβαριόγραμμα [5].

1.4 Μέση τιμή

Η μέση τιμή ενός τυχαίου πεδίου περιγράφει τις τάσεις μεγάλης εμβέλειας στο πεδίο. Περιγράφεται από τη σχέση $m'_z(s) = E[Z(s)]$, όπου το σύμβολο $E[Z(s)]$ δηλώνει τη μέση τιμή υπολογισμένη ως προς το σύνολο των καταστάσεων του πεδίου. Δηλαδή:

$$E[Z(s)] = \int dz f_z(z; s) z \quad (1.2)$$

όπου z οι τιμές που αντιστοιχούν σε μια κατάσταση.

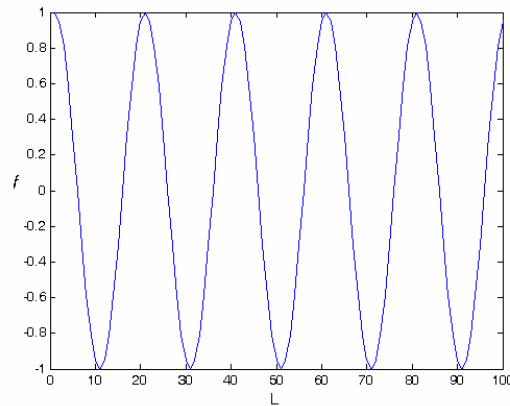
Ανάλογα με τις τιμές που παίρνει το πεδίο, δηλαδή το χώρο στον οποίο ορίζεται καθορίζονται και τα όρια του ολοκληρώματος. Αν το πεδίο λαμβάνει όλες τις αρνητικές και τις θετικές τιμές το ολοκλήρωμα ορίζεται από το $-\infty$ ως το $+\infty$, ενώ αν παίρνει μόνο θετικές τιμές το ολοκλήρωμα κυμαίνεται από το 0 ως το $+\infty$. Αντίστοιχα αν οι τιμές του πεδίου περιορίζονται σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$ το ολοκλήρωμα υπολογίζεται σε αυτό το διάστημα.

Σύμφωνα με την εξίσωση 1.2, η μέση τιμή μπορεί να εξαρτάται από τη θέση s ,

συνέπεια πιθανής εξάρτησης της μονοδιάστατης ΣΠΠ από τη θέση. Αν η ΣΠΠ δεν είναι γνωστή εκ των προτέρων, η μέση τιμή εκτιμάται από το δείγμα με στατιστικές μεθόδους, για παράδειγμα από το μέσο όρο των τιμών που περιλαμβάνονται στο δείγμα [5]:

$$\hat{m}'_z(s) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N z_i(s). \quad (1.3)$$

Στο Σχήμα 1.1 παρουσιάζεται η τάση μιας τυχαίας μεταβλητής που δίνεται από τη συνάρτηση $f = \cos(2\pi L/20)$ και ορίζεται σε διάστημα $[0, L]$, όπου $L=100$:



Σχήμα 1.1: Γράφημα τάσης μεγάλης εμβέλειας [1].

Η μέση τιμή $m'_z(s)$ μπορεί να προσδιοριστεί από πρότυπες συναρτήσεις, γενικής και τοπικής εξάρτησης. Στην περίπτωση προτύπου γενικής εξάρτησης η μεταβολή σε όλη την περιοχή περιγράφεται από μια μοναδική μαθηματική σχέση. Τέτοια πρότυπα εξάρτησης είναι η γραμμική, η πολυωνυμική ή η περιοδική εξάρτηση. Δύναται επίσης να συνυπάρχουν δύο ή περισσότερα πρότυπα, π.χ. ένα πολυωνυμικό και ένα περιοδικό.

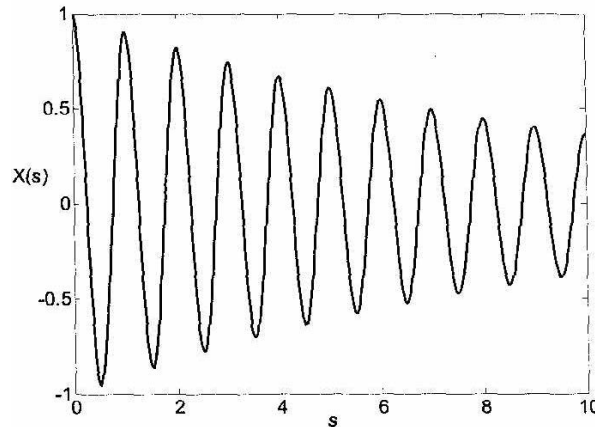
Όταν δεν επαρκούν τα πρότυπα γενικής εξάρτησης για τον ακριβή προσδιορισμό των τάσεων, επιλέγονται τοπικές συναρτήσεις εξάρτησης (π.χ. τοπικά πολυώνυμα). Τέτοιες μορφές εξάρτησης χρησιμοποιούνται στο μοντέλο της τοπικά ζυγισμένης παλινδρόμησης [5].

1.5 Διασπορά

Η διασπορά ενός τυχαίου πεδίου ορίζεται ως η μέση τιμή του τετραγώνου της διακύμανσης, όπως περιγράφεται από την παρακάτω εξίσωση:

$$\sigma_z^2(s) \equiv E[\{Z(s) - m'_z(s)\}^2] = E[\tilde{Z}^2(s)]. \quad (1.4)$$

Αν το πεδίο είναι στατιστικά ομοιογενές διατηρείται σταθερή. Διαφορετικά μπορεί να μεταβάλλεται από σημείο σε σημείο. Αυτό σημαίνει ότι οι διακυμάνσεις του πεδίου αλλάζουν μέγεθος μέσα στο χώρο. Στο Σχήμα 1.2 φαίνεται το γράφημα μιας απλής συνάρτησης (όχι τυχαίου πεδίου), της οποίας το πλάτος διακύμανσης αλλάζει. Η μεταβολή των διακυμάνσεων δεν είναι εξίσου κανονική και δεν είναι πάντοτε ορατή με απλή επισκόπηση όταν πρόκειται για τυχαίο πεδίο [1].



Σχήμα 1.2: Γράφημα συννημιτόνου με εκθετικά μειούμενο πλάτος διακύμανσης [1].

1.6 Συνάρτηση συνδιασποράς

Η *κεντρική συνάρτηση συνδιασποράς* ($K\Sigma\Sigma$) περιγράφει την ποσοτική εξάρτηση των διακυμάνσεων του τυχαίου πεδίου σε δύο διαφορετικά σημεία. Αποτελεί μια ιδιότητα των τυχαίων πεδίων που παρέχει χρήσιμες πληροφορίες και ορίζεται ως εξής:

$$c_z(s_1, s_2) \equiv E[\{Z(s_1) - m'_z(s_1)\}\{Z(s_2) - m'_z(s_2)\}]. \quad (1.5)$$

Το τυχαίο πεδίο $\tilde{Z}(s_1) \equiv Z(s_1) - m'_z(s_1)$ αντιστοιχεί στην διακύμανση του πεδίου $Z(s_1)$ γύρω από τη μέση τιμή στο σημείο s_1 . Η μέση τιμή του πεδίου διακύμανσης ισούται με 0, δηλαδή $E[\tilde{Z}(s_1)] = 0$. Σύμφωνα με τα προηγούμενα, η $K\Sigma\Sigma$ ισοδυναμεί με τη συνδιακύμανση, δηλαδή $c_z(s_1, s_2) = E[\tilde{Z}(s_1)\tilde{Z}(s_2)]$.

Όταν τα σημεία της συνάρτησης συνδιασποράς συμπίπτουν η τιμή της ισούται με τη διασπορά του πεδίου στο συγκεκριμένο σημείο, δηλαδή $c_z(s_1, s_1) = \sigma_z^2(s_1)$, ενώ όταν η απόσταση μεταξύ των σημείων μεγαλώνει η εξάρτηση των διακυμάνσεων μειώνεται.

Σε γεωστατιστικές αναλύσεις είναι βασική προϋπόθεση η ύπαρξη συνθηκών αποδοχής για τη συνάρτηση συνδιασποράς, καθώς η πειραματικά προσδιοριζόμενη χωρική εξάρτηση προσαρμόζεται σε ένα βέλτιστο πρότυπο, επιλεγμένο από ένα σύνολο αποδεκτών θεωρητικών μοντέλων (π.χ. Εκθετικό, Γκαουσιανό κ.λ.π.) [1].

Οι συνθήκες αποδοχής καθορίζονται από το θεώρημα του Bochner [10]. Η φασματική πυκνότητα ισχύος, μέσω της οποίας εκφράζεται το θεώρημα, δίνεται από τον μετασχηματισμό Fourier της συνάρτησης συνδιασποράς και ορίζεται από το παρακάτω ολοκλήρωμα:

$$\tilde{c}_z(\mathbf{k}) = \int d\mathbf{r} \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) c_z(\mathbf{r}) \quad (1.6)$$

όπου \mathbf{r} (συχνά συμβολίζεται ως h) το διάνυσμα απόστασης μεταξύ δύο σημείων (lag), $\int d\mathbf{r} = \int dx = \int dy$ και \mathbf{k} το διάνυσμα της χωρικής συχνότητας (κυματόνυσμα).

Για να είναι μια συνάρτηση συνδιασποράς $c_z(\mathbf{r})$ αποδεκτή πρέπει να ισχύουν οι παρακάτω τρεις συνθήκες:

- i. Να υπάρχει φασματική πυκνότητα ισχύος $\tilde{c}_z(\mathbf{k})$.
- ii. Η $\tilde{c}_z(\mathbf{k})$ να μην είναι αρνητική σε όλο το πεδίο συχνοτήτων.
- iii. Το ολοκλήρωμα της $\tilde{c}_z(\mathbf{k})$ σε όλο το πεδίο συχνοτήτων να είναι φραγμένο (δηλαδή να υπάρχει διασπορά).

Πρακτικά, ο μετασχηματισμός Fourier μιας συνάρτησης είναι εκείνος που βοηθάει στην εξακρίβωση της καταλληλότητας της συγκεκριμένης συνάρτησης ως πρότυπο συνδιασποράς [1].

1.7 Στατιστική ομοιογένεια

Η γεωστατιστική ανάλυση μπορεί να γίνει πιο αποτελεσματική όταν γίνονται κάποιες παραδοχές που περιορίζουν τις ιδιότητες ενός τυχαίου πεδίου. Μια από αυτές τις παραδοχές είναι και η *στατιστική ομοιογένεια*, διευρυμένη έννοια της κλασικής ομοιογένειας. Αν μια μεταβλητή έχει σταθερή τιμή στο χώρο, τότε η ιδιότητα είναι ομοιογενής. Ένα τυχαίο πεδίο χαρακτηρίζεται ως *στατιστικά ομοιογενές* όταν η μέση τιμή είναι σταθερή, η συνάρτησης συνδιασποράς ορίζεται και εξαρτάται αποκλειστικά από το διάνυσμα απόστασης $\mathbf{r} = s_1 - s_2$ μεταξύ δύο σημείων, $c_z(s_1, s_2) = c_z(\mathbf{r})$ και η διασπορά του πεδίου είναι επίσης σταθερή.

Κατά την ασθενή έννοια, η στατιστική ομοιογένεια ορίζεται σύμφωνα με τις παραπάνω προϋποθέσεις. Κατά την ισχυρή έννοια, ένα πεδίο χαρακτηρίζεται ως στατιστικά

ομοιογενές όταν η πολυδιάστατη ΣΠΠ για N σημεία (N : θετικός ακέραιος αριθμός) δεν μεταβάλλεται από μετασχηματισμούς οι οποίοι αλλάζουν τη θέση των αποστάσεων χωρίς να αλλάζουν τις μεταξύ τους αποστάσεις.

Ουσιαστικά, η έννοια της στατιστικής ομοιογένειας περιγράφει την κατάσταση εκείνη κατά την οποία οι στατιστικές ιδιότητες ενός τυχαίου πεδίου δεν εξαρτώνται από τις χωρικές συντεταγμένες των σημείων, άρα ούτε από το σύστημα αναφοράς. Συνεπώς, η στατιστική ομοιογένεια προϋποθέτει τη μη ύπαρξη συστηματικών τάσεων έτσι ώστε η μεταβολή των τιμών του πεδίου να μπορεί να αποδοθεί σε διακυμάνσεις γύρω από μια σταθερή στάθμη, η οποία ισούται με τη μέση τιμή [1].

1.8 Στατιστική ισοτροπία

Η στατιστική ισοτροπία είναι μια εξίσου σημαντική ιδιότητα των τυχαίων πεδίων, η οποία διευκολύνει τον προσδιορισμό της χωρικής εξάρτησης. Ένα στατιστικώς ομοιογενές πεδίο του οποίου η συνάρτηση συνδιασποράς εξαρτάται μόνο από το μέτρο (Ευκλείδεια απόσταση) αλλά όχι από την κατεύθυνση του διανύσματος απόστασης \mathbf{r} είναι ταυτόχρονα στατιστικά ισοτροπικό. Μια στατιστικώς ισοτροπική συνάρτηση συνδιασποράς είναι και στατιστικώς ομοιογενής, χωρίς αυτό να ισχύει αντίστροφα.

Η διασπορά $\sigma_z^2 = c_z(0)$ και το μήκος συσχέτισης ξ είναι οι δύο πιο σημαντικές παράμετροι των στατιστικά ισοτροπικών πεδίων, οι οποίες βοηθούν στον προσδιορισμό βασικών χαρακτηριστικών της συνάρτησης συνδιασποράς. Η μεν διασπορά αποτελεί μέτρο του πλάτους διακυμάνσεων του πεδίου, το δε μήκος συσχέτισης καθορίζει το διάστημα μέσα στο οποίο υπάρχει αλληλεξάρτηση. Ουσιαστικά, το μήκος συσχέτισης ορίζει την απόσταση μεταξύ δύο σημείων κατά την οποία υπάρχει αλληλεξάρτηση της τιμής του πεδίου [5].

1.9 Χωρική εξάρτηση

Η χωρική εξάρτηση μπορεί να μετρηθεί με διάφορους τρόπους. Το ημιβαριόγραμμα και η συνάρτηση συσχέτισης είναι δύο από αυτούς που συναντώνται πιο συχνά. Όταν η περιγραφόμενη εξάρτηση προκύπτει ως μέση τιμή από ένα μεγάλο αριθμό ζευγών και δεν χαρακτηρίζει ένα μεμονωμένο ζεύγος σημείων, τότε αυτό ορίζεται ως «στατιστική έννοια». Κατά τη στατιστική έννοια λοιπόν, τόσο το ημιβαριόγραμμα όσο και η συνάρτηση συσχέτισης περιγράφουν την εξάρτηση δύο σημείων στο χώρο και αναφέρονται σε ζεύγη σημείων. Συνεπώς, η τιμή τους εξαρτάται από την απόσταση μεταξύ των σημείων. Η συνάρτηση συσχέτισης για ένα τυχαίο πεδίο ορίζεται σύμφωνα με την παρακάτω εξίσωση:

$$\rho_z(\mathbf{r}) = \frac{c_z(\mathbf{r})}{\sigma_z^2} \quad (1.7)$$

όπου

$c_z(\mathbf{r})$: συνάρτηση συνδιασποράς

σ_z^2 : διασπορά.

Το ημιβαριόγραμμα ενός τυχαίου πεδίου υπολογίζεται ως εξής:

$$\gamma_z(\mathbf{s}, \mathbf{r}) = \frac{1}{2} E\{[Z(\mathbf{s} + \mathbf{r}) - Z(\mathbf{s})]^2\}. \quad (1.8)$$

Σύμφωνα με την παραπάνω εξίσωση, το ημιβαριόγραμμα ορίζεται σε σχέση με ένα ζεύγος σημείων με βάση τη μέση τιμή του τετραγώνου της διαφοράς $\delta Z(\mathbf{s}; \mathbf{r}) \equiv Z(\mathbf{s} + \mathbf{r}) - Z(\mathbf{s})$ όπου $\delta Z(\mathbf{s}; \mathbf{r})$ το βήμα της απόστασης \mathbf{r} .

Όταν ένα πεδίο είναι στατιστικά ομοιογενές το ημιβαριόγραμμα σχετίζεται άμεσα με τη συνάρτηση συνδιασποράς βάσει της εξίσωσης $\gamma_z(\mathbf{r}) = \sigma_z^2 - c_z(\mathbf{r})$, παρέχοντας

ουσιαστικά την ίδια πληροφορία. Στην περίπτωση που η διαφορά είναι στατιστικά ομοιογενής, το τυχαίο πεδίο ονομάζεται πεδίο με στατιστικά ομοιογενείς διαφορές, ενώ το ημιβαριόγραμμα $\gamma_z(\mathbf{r})$ εξαρτάται αποκλειστικά από την απόσταση \mathbf{r} . Αν το πεδίο είναι στατιστικά ομοιογενές τότε και οι διαφορές είναι στατιστικά ομοιογενείς $\delta Z(\mathbf{s}; \mathbf{r})$, χωρίς να συνεπάγεται το αντίστροφο [6].

Οι παράμετροι του ημιβαριογράμματος καθορίζουν τη χωρική εξάρτηση των τιμών του πεδίου σε δύο γειτονικά σημεία. Το ημιβαριόγραμμα είναι θετικά ημιορισμένο (δηλαδή $\gamma_z(\mathbf{r}) \geq 0$), καθώς προκύπτει με βάση τη μέση τιμή του τετραγώνου των διαφορών, χωρίς αυτό να σημαίνει πως κάθε θετικά ημιορισμένη συνάρτηση είναι και ημιβαριόγραμμα.

Σε στατιστικά ομοιογενή πεδία, αν η χωρική εξάρτηση είναι ισοτροπική, το ημιβαριόγραμμα προσδιορίζεται από δύο παραμέτρους: το όριο και το μήκος συσχέτισης (το οποίο καθορίζει την ακτίνα συσχέτισης). Λόγω της ιδιότητας $\gamma_z(\mathbf{r}) = \sigma_z^2 - c_z(\mathbf{r})$ και του ότι σε μεγάλες αποστάσεις η τιμή της συνάρτησης συνδιασποράς τείνει προς το μηδέν, η τιμή του ημιβαριογράμματος για αντίστοιχες αποστάσεις τείνει ασυμπτωτικά προς ένα όριο ίσο με τη διασπορά σ_z^2 του τυχαίου πεδίου.

Ελλείψει στατιστικής ομοιογένειας, παρατηρούνται τάσεις μεγάλης εμβέλειας ενώ το ημιβαριόγραμμα δεν προσεγγίζει κάποια τιμή ισορροπίας καθώς η απόσταση τείνει προς το άπειρο.

Όταν τα χαρακτηριστικά της συσχέτισης μεταβάλλονται σε διαφορετικές κατευθύνσεις στο χώρο, τότε η εξάρτηση χαρακτηρίζεται ως *ανισοτροπική*. Δύο είναι οι κύριοι τύποι ανισοτροπίας που συναντώνται: η γεωμετρική ανισοτροπία και η ανισοτροπία ζώνης. Κατά τη γεωμετρική ανισοτροπία το άνω φράγμα του ημιβαριογράμματος είναι ανεξάρτητο της κατεύθυνσης. Ωστόσο, η ταχύτητα προσέγγισης του φράγματος εξαρτάται από τη διεύθυνση. Τότε το ημιβαριόγραμμα εκφράζεται ως συνάρτηση $\gamma_z\left(\frac{r_1}{\xi_1}, \dots, \frac{r_d}{\xi_d}\right)$ των αδιάστατων $\frac{r_1}{\xi_1}, \dots, \frac{r_d}{\xi_d}$ όπου ξ_1, \dots, ξ_d είναι τα μήκη συσχέτισης στις αντίστοιχες διευθύνσεις.

Κατά την ανισοτροπία ζώνης το άνω φράγμα εξαρτάται από τη χωρική διεύθυνση. Τότε το ημιβαριόγραμμα εκφράζεται ως άθροισμα συνισταμένων, σύμφωνα με την παρακάτω εξίσωση:

$$\gamma_z(\mathbf{r}) = \gamma_{z,1}(r) + \gamma_{z,2}(\hat{\mathbf{r}}) \quad (1.9)$$

όπου η συνάρτηση $\gamma_{z,1}(r)$ με $r = \|\mathbf{r}\|$ περιγράφει μια ισοτροπική εξάρτηση ενώ η συνάρτηση $\gamma_{z,2}(\hat{\mathbf{r}})$ περιγράφει την ανισοτροπική εξάρτηση του άνω φράγματος από την κατεύθυνση του μοναδιαίου διανύσματος $\hat{\mathbf{r}}$ [6].

Στην περίπτωση γεωμετρικής ανισοτροπίας απαιτούνται περισσότερα από ένα μήκη συσχέτισης ξ_1, \dots, ξ_d με κάποια από αυτά αλλά όχι όλα να είναι ίσα μεταξύ τους. Συνεπώς, για να προσδιοριστεί η ανισοτροπία του ημιβαριογράμματος είναι αναγκαία η χρήση πρόσθετων παραμέτρων. Σε ένα χώρο δύο διαστάσεων αν ξ_x, ξ_y είναι τα μήκη συσχέτισης κατά μήκος των κυρίων αξόνων, οι ανισοτροπικές παράμετροι είναι δύο:

- i. Ο ανισοτροπικός λόγος $\rho_{y/x} \equiv \xi_y/\xi_x$.
- ii. Η γωνία προσανατολισμού η οποία καθορίζει τον προσανατολισμό των κύριων αξόνων ανισοτροπίας σε σχέση με το καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων.

Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων (r_x, r_y) στα οποία η τιμή του ημιβαριογράμματος είναι σταθερή είναι οι ισοϋψείς καμπύλες, οι οποίες μπορεί να έχουν μορφή έλλειψης όπως στο Εκθετικό ή το Γκαουσιανό μοντέλο. Τότε η γωνία προσανατολισμού είναι η γωνία που σχηματίζει ο μεγάλος άξονας της έλλειψης με τον μεγάλο άξονα του συστήματος συντεταγμένων.

Η συνάρτηση συσχέτισης περιγράφει την εξάρτηση των τιμών σε δύο διαφορετικά σημεία του χώρου. Κατά συνέπεια, όσο η αυξάνεται η απόσταση τόσο η εξάρτηση μειώνεται. Το ημιβαριόγραμμα μετρά τη διαφορά μεταξύ των διακυμάνσεων του πεδίου

συναρτήσει της απόστασης. Επομένως, όσο μεγαλώνει η απόσταση τόσο αυξάνονται και οι τιμές του ημιβαριογράμματος.

Για στατιστικά ομοιογενή πεδία το ημιβαριόγραμμα και η συνάρτηση συσχέτισης είναι δύο ισοδύναμες συναρτήσεις. Περιέχουν ουσιαστικά την ίδια πληροφορία, απλώς σε διαφορετική μορφή. Ενώ όμως το ημιβαριόγραμμα υπολογίζεται αποκλειστικά με βάση την απόσταση μεταξύ δύο σημείων, η συνάρτηση συσχέτισης δύναται κατά περίπτωση να εξαρτάται τόσο από την απόσταση όσο και από τις θέσεις των σημείων στο χώρο.

Το Εκθετικό, το Γκαουσιανό, το Σφαιρικό, το Γενικευμένο, το Δυναμονομικό ή Αλγεβρικό και το Φαινόμενο Πυρήνα ανήκουν στα ευρέως χρησιμοποιημένα μοντέλα ημιβαριογραμμάτων. Κατανομές που παρουσιάζουν απότομες χωρικές μεταβολές χαρακτηρίζονται από το Εκθετικό μοντέλο ενώ σε ομαλότερες αυξομειώσεις αντιστοιχεί το Γκαουσιανό. Όταν υπάρχει εξάρτηση με μακριά χωρική εμβέλεια χαρακτηρίζεται από το Αλγεβρικό μοντέλο ενώ στις μεταβολές που συντελούνται σε αποστάσεις μικρότερες από τη διακριτική ικανότητα αντιστοιχεί το Μοντέλο Πυρήνα [6].

1.10 Ασαφής Λογική

Όπως προαναφέρθηκε, το μήκος συσχέτισης ορίζει την απόσταση μεταξύ δύο σημείων κατά την οποία υπάρχει αλληλεξάρτηση της τιμής του πεδίου. Η ακτίνα συσχέτισης καθορίζεται από την ανάλυση του ημιβαριογράμματος. Όταν η ακτίνα της γειτονιάς υπερβαίνει σημαντικά την ακτίνα συσχέτισης χρησιμοποιούνται στη διαδικασία πρόβλεψης και μετρήσεις οι οποίες δεν έχουν σημαντική επίδραση στο σημείο εκτίμησης. Συνεπώς είναι καλύτερα να προτιμώνται μικρές γειτονιές ώστε αφενός να διακρίνονται ευκολότερα τοπικές μεταβολές της μέσης τιμής από γειτονιά σε γειτονιά αφετέρου να μειώνεται το αριθμητικό κόστος της διαδικασίας εκτίμησης [1].

Ένας τρόπος για να επιλεχθούν μικρότερες γειτονιές και να ληφθούν υπόψη μόνο τα δεδομένα εκείνα που έχουν αξιοσημείωτη επίδραση στο σημείο εκτίμησης είναι η χρήση ενός *Συστήματος Ασαφούς Λογικής*. Τα συστήματα αυτά παρέχουν μια ουσιαστική βελτίωση της συμβατικής λογικής, ενώ όταν συνδυάζονται με την τεχνική Kriging επιτυγχάνεται καλύτερη διαχείριση των δεδομένων κατά τη διάρκεια της μοντελοποίησης [8].

Με τον όρο *Ασαφής Λογική* περιγράφεται ένα μαθηματικό μοντέλο που συμμετέχει στην ανάλυση συνόλων τα στοιχεία των οποίων χαρακτηρίζονται από ένα βαθμό συμμετοχής στα αντίστοιχα σύνολα [8]. Τα σύνολα αυτά εισήχθησαν ως επέκταση της κλασικής έννοιας του συνόλου [32]. Σε ένα κλασικό σύνολο A το αν ανήκει ή δεν ανήκει ένα στοιχείο x του συνόλου αναφοράς ή σύμπαντος X στο A είναι απολύτως σαφές. Έτσι, τα στοιχεία του σύμπαντος X διαχωρίζονται σε δύο κατηγορίες: σε εκείνα που ανήκουν στο A και σε εκείνα που δεν ανήκουν στο A . Η μετάβαση από τη μια κατηγορία στην άλλη είναι απότομη και ξεκάθαρη. Ωστόσο, στην Ασαφή Συνολοθεωρία, ένα σύνολο δύναται να μην είναι δίτιμο αλλά πλειότιμο, χωρίς καθαρά όρια. Τότε η αλλαγή από την κατηγορία των στοιχείων του X που ανήκουν στο ασαφές σύνολο A σε εκείνη των στοιχείων του X που δεν ανήκουν στο A , δεν είναι απότομη και σαφής αλλά βαθμιαία και ασαφής. Ως εκ τούτου, η Ασαφής Συνολοθεωρία επεκτείνει την έννοια της χαρακτηριστικής συνάρτησης ενός κλασικού συνόλου A (ως προς σύνολο αναφοράς X), δηλαδή:

$$I_A : x \in X \rightarrow I_A(x) \in \{0, 1\} \quad (1.10)$$

στη συνάρτηση συμμετοχής (ή συγγένειας) ενός ασαφούς συνόλου A :

$$\mu_A : x \in X \rightarrow \mu_A(x) \in [0, 1] \quad (1.11)$$

όπου ο αριθμός $\mu_A(x) \in [0, 1]$ δηλώνει τον βαθμό συμμετοχής του στοιχείου $x \in X$ στο ασαφές σύνολο A του X .

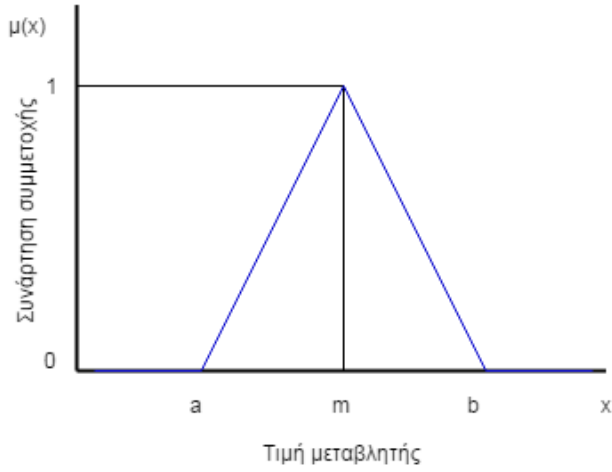
Δηλαδή:

$\mu_A(x) = 1$ σημαίνει ότι το x ανήκει ολοκληρωτικά στο A ,

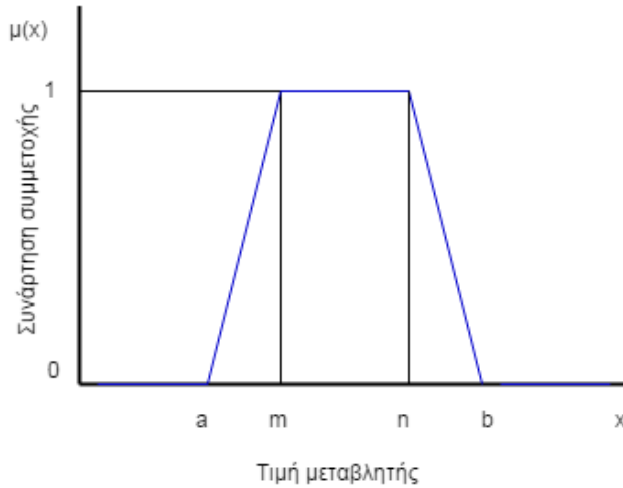
$\mu_A(x) = 0$ σημαίνει ότι το x δεν ανήκει καθόλου στο A ,

$0 < \mu_A(x) < 1$ σημαίνει ότι το x ανήκει κατά κάποιο βαθμό στο A .

Λόγω του βαθμού συμμετοχής $\mu_A(x)$, στα πλειότεμα σύνολα είναι δυνατόν ένα στοιχείο να μην παίρνει τιμές μόνο 0 ή 1 (όπως συμβαίνει στα κλασικά ή εναργή-crisp σύνολα), αλλά και τις ενδιάμεσες αυτών [9]. Ουσιαστικά, θα μπορούσαν τα ασαφή σύνολα να περιγραφούν ως μια ειδική οικογένεια εναργών (crisp) κλασικών συνόλων. Συνεπώς, μπορεί να επιτευχθεί μια ομαλή μετάβαση από την κατάσταση όπου ένα στοιχείο είναι μέλος του συνόλου A σε εκείνη όπου δεν είναι. Οι συναρτήσεις συμμετοχής που χρησιμοποιούνται συνήθως είναι τριγωνικής, τραπεζοειδούς (Σχήμα 1.3), Γκαουσιανής ή χαμπανοειδούς μορφής [2].



$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0, & x < a \quad \text{ή} \quad x > b \\ \frac{x-a}{m-a}, & a < x < m \\ \frac{b-x}{b-m}, & m < x < b \end{cases}$$



$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0, & x < a \quad \text{ή} \quad x > b \\ \frac{x-a}{m-a}, & a < x < m \\ 1, & m < x < n \\ \frac{b-x}{b-n}, & n < x < b \end{cases}$$

Σχήμα 1.3: Συναρτήσεις συμμετοχής. Τριγωνική (επάνω) και τραπεζοειδής (κάτω).

1.11 Προσδιορισμός ημιβαριογράμματος

Στην περίπτωση όπου τα δεδομένα περιορίζονται σε ένα μοναδικό δείγμα (π.χ. γεωγραφικά ή μεταλλευτικά κοιτάσματα) η εκτίμηση του πραγματικού ημιβαριογράμματος

επιχειρείται να γίνει με βάση αυτό το δείγμα. Η προσέγγιση αυτή είναι γνωστή ως *δευγματικό (ή πειραματικό) ημιβαριόγραμμα* και υπολογίζεται ως εξής:

$$\hat{\gamma}_z(\mathbf{r}_k) = \frac{1}{2N(\mathbf{r}_k)} \sum_{i,j=1}^{N(\mathbf{r}_k)} \left\{ [Z(\mathbf{s}_i) - Z(\mathbf{s}_j)]^2 \right\} \theta_{ij}(\mathbf{r}_k), \quad (k = 1, \dots, N_c) \quad (1.12)$$

$$\text{όπου } \theta_{ij}(\mathbf{r}_k) = \begin{cases} 1, & \mathbf{s}_i - \mathbf{s}_j \in B(\mathbf{r}_k) \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

- Οι διαφορετικές ομάδες (τάξεις) διανυσμάτων απόστασης ορίζονται από τη συνάρτηση τάξης $\theta_{ij}(\mathbf{r}_k)$ βάσει των διανυσμάτων που βρίσκονται σε μια κλειστή περιοχή $B(\mathbf{r}_k)$ γύρω από το διάνυσμα \mathbf{r}_k .
- Το πλήθος των ζευγών σημείων που περιέχονται μέσα στην τάξη $B(\mathbf{r}_k)$ εκφράζονται με τη μεταβλητή $N(\mathbf{r}_k)$.
- Το δειγματικό ημιβαριόγραμμα ορίζεται για ένα διακριτό και πεπερασμένο σύνολο αποστάσεων \mathbf{r}_k ($k = 1, \dots, N_c$), το πλήθος των οποίων είναι ίσο με το συνολικό αριθμό τάξεων N_c .

Ο υπολογισμός αυτός προσδιορίζει για κάθε \mathbf{r}_k μια τιμή του δειγματικού ημιβαριόγραμματος, λαμβάνοντας υπόψη τις διαφορές $[Z(\mathbf{s}_i) - Z(\mathbf{s}_j)]^2$ σε όλα τα ζεύγη σημείων, το διάνυσμα απόστασης των οποίων ανήκει στην περιοχή $B(\mathbf{r}_k)$. Όταν η μέση τιμή $E[Z(\mathbf{s}) - Z(\mathbf{s} + \mathbf{r}_k)]^2$ προσεγγίζεται με ακρίβεια από το μέσο όρο των διαφορών στην τάξη του \mathbf{r}_k το $\hat{\gamma}_z(\mathbf{r}_k)$ θεωρείται ως καλός εκτιμητής του $\gamma_z(\mathbf{r}_k)$.

Αυτό συμβαίνει όταν ικανοποιείται η εργοδική υπόθεση, μέσω της οποίας επιτυγχάνεται η εναλλαγή του στοχαστικού με τον δειγματικό μέσο [12]. Για να ισχύει η εργοδική ιδιότητα στον υπολογισμό του ημιβαριόγραμματος απαιτείται η εκπλήρωση κάποιων προϋποθέσεων: 1) το πεδίο διαφοράς $Z(\mathbf{s}) - Z(\mathbf{s} + \mathbf{r}_k)$ να είναι στατιστικά ομοιογενές, 2)

ο δειγματικός μέσος του τετραγώνου της διαφοράς να υπολογίζεται με καλή στατιστική ακρίβεια (δηλαδή να υπάρχει μεγάλο πλήθος ζευγών σε κάθε τάξη) και 3) να υπάρχει πυκνή προσέγγιση της μεταβολής του ημιβαριογράμματος συναρτήσει της απόστασης, κάτι που επιτυγχάνεται όταν ο αριθμός των τάξεων είναι αρκετά μεγάλος [6].

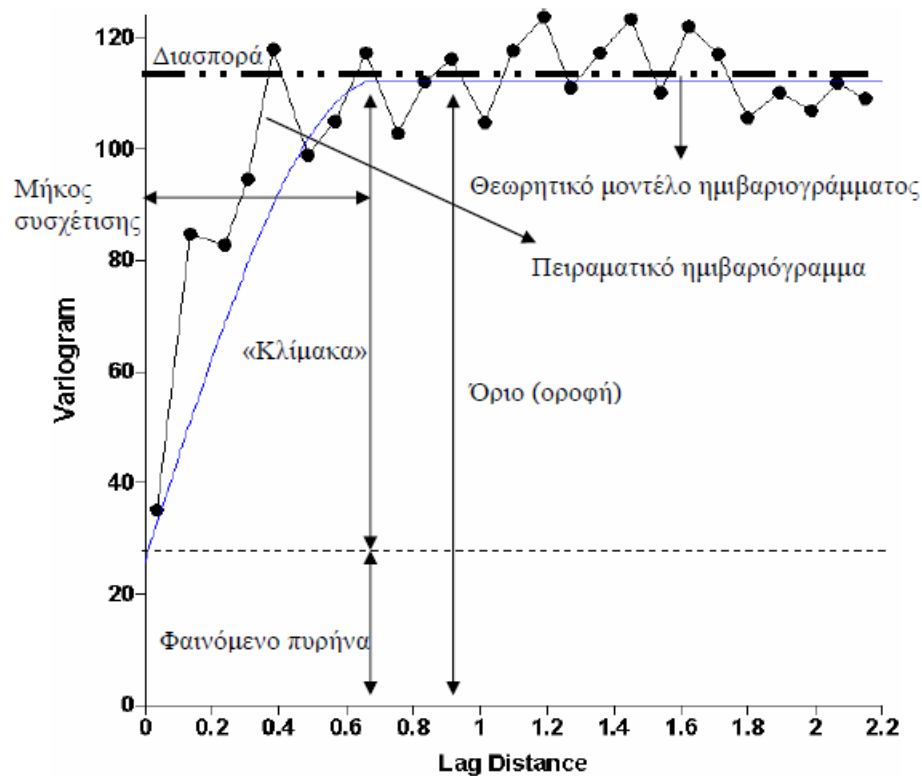
Μετά τον υπολογισμό του πειραματικού ημιβαριογράμματος, ακολουθεί η προσαρμογή του σε ένα θεωρητικό (π.χ. Εκθετικό, Γκαουσιανό). Για το σκοπό αυτό χρησιμοποιείται η αρχή των Ελαχίστων Τετραγώνων, μέσω της οποίας υπολογίζονται οι βέλτιστες παράμετροι ξ και σ_z^2 του θεωρητικού μοντέλου.

Το θεωρητικό πρότυπο βοηθάει στην εκτίμηση των τιμών του πεδίου σε σημεία όπου δεν είναι υπάρχουν μετρήσεις. Για να γίνει όμως αποδεκτό το ημιβαριόγραμμα και να χρησιμοποιηθεί στη γεωστατιστική ανάλυση, απαιτείται η εκπλήρωση κάποιων συνθηκών αποδοχής.

Στην ανισοτροπική χωρική εξάρτηση, το ημιβαριόγραμμα υπολογίζεται σε διάφορες κατευθύνσεις στο χώρο, έτσι ώστε να προσδιοριστούν οι κύριες κατευθύνσεις της ανισοτροπίας. Για το λόγο αυτό είναι αναγκαίος ο ορισμός τάξεων σε σχέση τόσο με το μέτρο όσο και με την κατεύθυνση του διανύσματος απόστασης. Για να περιλαμβάνει κάθε τάξη έναν ικανό αριθμό σημείων ορίζεται μια ανοχή ως προς το μέτρο $2\delta r$ και μια γωνιακή ανοχή ως προς την κατεύθυνση του διανύσματος $2\delta\phi$.

Ο υπολογισμός του ημιβαριογράμματος γίνεται συνήθως στις διευθύνσεις Βορράς - Νότος και Ανατολή-Δύση ενώ για τη γωνιακή ανοχή χρησιμοποιούνται οι τιμές 5° , 10° , 20° και 45° . Ωστόσο μέχρι σήμερα δεν υπάρχει απόλυτα ασφαλής ποσοτική μέθοδος ανίχνευσης και χαρακτηρισμού της ανισοτροπίας στις γεωστατιστικές μελέτες.

Στο Σχήμα 1.4 παρουσιάζονται τα χαρακτηριστικά ενός ημιβαριογράμματος τα οποία αναλύονται στη συνέχεια.



Σχήμα 1.4: Παρουσίαση χαρακτηριστικών στοιχείων ημιβαριόγραμματος [1].

- Μέσω του *φαινομένου πυρήνα* ποσοτικοποιείται η διασπορά του δειγματικού σφάλματος και η μικρής κλίμακας μεταβλητότητα, όπως η χωρική μεταβλητότητα που υπάρχει σε αποστάσεις μικρότερες από τις αποστάσεις μεταξύ σημείων του δείγματος.
- Η τιμή που πλησιάζει ασυμπτωτικά το δειγματικό ημιβαριόγραμμα δηλώνεται ως *όριο (οροφή)*.
- Η διαφορά της οροφής από το φαινόμενο πυρήνα η οποία υποδηλώνει τη μεταβλητότητα των συσχετισμένων διακυμάνσεων ορίζεται ως *κλίμακα (scale)*.

- Η απόσταση στην οποία η τιμή οροφής προσεγγίζεται πολύ καλά (π.χ. 95%-97%) από το ημιβαριόγραμμα ονομάζεται *μήκος συσχέτισης*.
- Η μέση τετραγωνική απόκλιση του δείγματος από τη μέση τιμή ισούται με τη *διασπορά*.
- Οι ομάδες των ζευγών με τις αντίστοιχες δειγματικές τιμές του ημιβαριογράμματος παρουσιάζονται από το *πειραματικό ημιβαριόγραμμα*.
- Το *θεωρητικό μοντέλο ημιβαριογράμματος* είναι η συνεχής θεωρητική καμπύλη η οποία προσαρμόζεται στο πειραματικό [1].

Αν δεν υπάρχουν διακριτές ανισοτροπίες, γίνεται εκτίμηση του πειραματικού ημιβαριογράμματος $\hat{\gamma}_z(\mathbf{r}_k)$, $\mathbf{r} = \mathbf{r}_k$, και στη συνέχεια προσαρμόζεται σε ένα θεωρητικό πρότυπο [30].

1.12 Μοντέλα ημιβαριογράμματος

Μετά τον υπολογισμό του πειραματικού ημιβαριογράμματος έπεται η προσαρμογή του σε ένα θεωρητικό. Τα πρότυπα που αναφέρονται στη συνέχεια ανήκουν στα κλασικά μοντέλα ημιβαριογράμματος [15],[23]:

$$\text{Εκθετικό : } \gamma_z(\mathbf{r}) = \sigma_z^2 \left[1 - \exp\left(-\frac{|\mathbf{r}|}{\xi}\right) \right] \quad (1.13)$$

$$\text{Γκαουσιανό : } \gamma_z(\mathbf{r}) = \sigma_z^2 \left[1 - \exp\left(-\frac{\mathbf{r}^2}{\xi}\right) \right] \quad (1.14)$$

$$\begin{aligned} \text{Σφαιρικό : } \gamma_z(\mathbf{r}) &= \sigma_z^2 \left[1.5|\mathbf{r}|/\xi - 0.5 \left(|\mathbf{r}|/\xi \right)^3 \right] \theta(\xi - |\mathbf{r}|) \\ \text{όπου } \begin{cases} \theta = 0, & \text{αν } \xi - |\mathbf{r}| < 0 \\ \theta = 1, & \text{αν } \xi - |\mathbf{r}| > 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (1.15)$$

$$\text{Δυναμονομικό : } \gamma_z(\mathbf{r}) = c|\mathbf{r}|^{2H}, \quad 0 < H < 1 \quad (1.16)$$

$$\text{Γραμμικό : } \gamma_z(\mathbf{r}) = c|\mathbf{r}| \quad (1.17)$$

όπου

σ_z^2 : η διασπορά

$|\mathbf{r}|$: η Ευκλείδεια νόρμα του διανύσματος απόστασης \mathbf{r} μεταξύ δύο σημείων

ξ : το μήκος συσχέτισης

c : η παράμετρος μορφής

H : ο εκθέτης Hurst.

Οι παραπάνω εξισώσεις απαιτούν για να επιτύχουν την ισοτροπία το πολύ δύο παραμέτρους: το *Εκθετικό*, το *Σφαιρικό* και το *Γκαουσιανό* μοντέλο χρειάζονται τη διασπορά και το μήκος συσχέτισης, το *Δυναμονομικό* απαιτεί την παράμετρο μορφής και τον εκθέτη Hurst ενώ το *Γραμμικό* μόνο την παράμετρο μορφής.

Ένα μοντέλο ημιβαριογράμματος το οποίο προσφέρει αυξημένη ευελιξία είναι το *Matérn* [26],[28], [27]. Η ιδιαιτερότητα αυτή του μοντέλου βασίζεται στην ύπαρξη της παραμέτρου ομαλότητας ν , $\nu > 0$. Η παράμετρος ν ελέγχει τη συνέχεια και τη διαφορισιμότητα ενός τυχαίου πεδίου καθώς και τη συμπεριφορά του $\gamma(\mathbf{r})$ σε μικρές αποστάσεις, η οποία έχει μεγαλύτερο αντίκτυπο στην παρεμβολή από ότι σε μεσαίες και μεγάλες αποστάσεις. Το μοντέλο Matérn ορίζεται ως εξής:

$$\gamma_z(\mathbf{r}) = \sigma_z^2 \left\{ 1 - \frac{2^{1-v}}{\Gamma(v)} \left(\frac{|\mathbf{r}|}{\xi} \right)^v K_v \left(\frac{|\mathbf{r}|}{\xi} \right) \right\} \quad (1.18)$$

όπου

σ_z^2 : η διασπορά

$|\mathbf{r}|$: η Ευκλείδεια νόρμα του διανύσματος απόστασης \mathbf{r} μεταξύ δύο σημείων

ξ : το μήκος συσχέτισης

v : η παράμετρος ομαλότητας

$\Gamma(\cdot)$: η συνάρτηση Γάμμα

$K_v(\cdot)$: η τροποποιημένη συνάρτηση Bessel δευτέρου είδους τάξης v .

Όταν $v=0.5$ το Matérn συμπίπτει με το Εκθετικό μοντέλο, ενώ όταν το v τείνει στο άπειρο συμπίπτει με το Γκαουσιανό πρότυπο [30].

1.13 Σπαρτιάτικο Μοντέλο

Τα Σπαρτιάτικα Τυχαία Πεδία (ΣΤΠ) είναι μια γεωστατιστική μέθοδος η οποία πλεονεκτηεί σε κάποια σημεία έναντι της κλασικής Γεωστατιστικής. Τα ΣΤΠ εφαρμόζονται τόσο στην αξιολόγηση του περιβαλλοντικού κινδύνου [13] όσο και στο ατμοσφαιρικό περιβάλλον [33]. Αποτελούν υποσύνολα των τυχαίων πεδίων Gibbs, εξοπλισμένα με έναν χονδροποιημένο πυρήνα που λειτουργεί ως φίλτρο διέλευσης χαμηλών συχνοτήτων για τις διακυμάνσεις. Ο όρος Σπαρτιάτικα υποδηλώνει παραμετρικά συμπαγείς οικογένειες μοντέλων που περιέχουν ένα μικρό αριθμό παραμέτρων. Αυτά τα τυχαία πεδία ορίζονται από τις φυσικά κινούμενες χωρικές αλληλεξαρτήσεις μεταξύ των τιμών του πεδίου.

Σε γενικές γραμμές, ένα Χωρικό Τυχαίο Πεδίο (ΧΤΠ) $Z(\mathbf{s})$ που αντιπροσωπεύει μετρήσεις μπορεί να εκφραστεί ως εξής:

$$Z(\mathbf{s}) = Z'(\mathbf{s}) + m_z(\mathbf{s}) + e(\mathbf{s}) \quad (1.19)$$

όπου

$e(\mathbf{s})$: η μηδενικής μέσης τιμής μέτρηση του θορύβου της διαδικασίας (θεωρείται ως ομογενής πάνω από την περιοχή ενδιαφέροντος)

$Z'(\mathbf{s})$: η συσχετισμένη διακύμανση ΧΤΠ

$m_z(\mathbf{s})$: η αιτιοκρατική συνάρτηση τάσης.

Η τάση είναι μια μη στατική συνιστώσα που αντιπροσωπεύει μεγάλης κλίμακας αιτιοκρατικές παραλλαγές οι οποίες αντιστοιχούν στο συνολικό μέσο όρο του ΣΤΠ.

$$m_z(\mathbf{s}) = E[Z'(\mathbf{s})] \quad (1.20)$$

Τα ΣΤΠ προσδιορίζονται από μια Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας (ΣΠΠ) στα πλαίσια ενός Χωρικού Τυχαίου Πεδίου (ΧΤΠ) $Z'(\mathbf{s})$. Η ΣΠΠ περιλαμβάνει όλες τις πληροφορίες σχετικά με τη χωρική εξάρτηση. Γενικότερα, η Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας ενός ΣΤΠ εκφράζεται ως εξής:

$$f_x[Z'(\mathbf{s})] = \mathcal{Z}^{-1} \exp\{-H[Z'(\mathbf{s})]\} \quad (1.21)$$

όπου

$\mathcal{Z} = \sum_{Z'(\mathbf{s})} \exp\{-H[Z'(\mathbf{s})]\}$: μια σταθερά κανονικοποίησης που εξασφαλίζει το βασικό θεώρημα της πιθανότητας (το άθροισμα των πιθανοτήτων ενός ΧΤΠ ισούται με 1)

$H[Z'(\mathbf{s})]$: ένα συναρτησιακό χωρικής εξάρτησης που εκφράζει τις αλληλεπιδράσεις των τιμών του τυχαίου πεδίου $Z'(\mathbf{s})$ μεταξύ διαφορετικών σημείων στο χώρο.

Συνεπώς, βάσει της παραπάνω εξίσωσης τα ΣΤΠ ανήκουν στην οικογένεια των τυχαίων πεδίων Gibbs [17]. Η ιδιότητα Gibbs προέρχεται από το γεγονός ότι η κοινή Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας των ΣΤΠ εκφράζεται στα πλαίσια ενός συναρτησιακού χωρικής εξάρτησης π.χ. $H[Z'(\mathbf{s})]$. Το συναρτησιακό αυτό περιέχει όρους με σαφή φυσική ερμηνεία, επιτρέποντας έτσι την εξαγωγή των παραμέτρων των μοντέλων με βάση την αντιστοιχία των ανάλογων περιορισμών του δείγματος με το σύνολο τιμών τους [18]. Οι ιδιότητες της χωρικής συνέχειας μπορούν να προσδιοριστούν χωρίς εκτίμηση του πειραματικού ημιβαριογράμματος.

Τα ΣΤΠ εισάγουν μια νέα κατηγορία των γενικευμένων συναρτήσεων συνδιασποράς, οι οποίες αποτελούνται από μια θετικά ορισμένη κατασκευή για ένα ρητά καθορισμένο εύρος των τιμών των παραμέτρων [17],[18]. Η διακύμανση, η κλίση και η καμπυλότητα του μοντέλου των ΣΤΠ εκφράζεται από ένα συναρτησιακό που περιλαμβάνει τα τετράγωνα της διακύμανσης, της κλίσης και της καμπυλότητας του πεδίου (εξίσωση 1.22). Η κατηγορία αυτή παρέχει συναρτήσεις συνδιασποράς με τέσσερις παραμέτρους που δίνουν μεγάλη ευελιξία. Μπορούν να χρησιμοποιηθούν για τη χωρική παρεμβολή με τις κλασικές μεθόδους Kriging καθώς και με τους νέους χωρικούς εκτιμητές [13],[19].

Στην παρούσα εργασία, χρησιμοποιείται η νέα τάξη συνάρτησης συνδιασποράς σε συνδυασμό με τη μέθοδο Kriging για χωρική παρεμβολή της στάθμης υπογείων υδάτων. Για τις εφαρμογές Kriging, η εκτίμηση της δομής της χωρικής μεταβολής (ημιβαριόγραμμα ή συνάρτηση συνδιασποράς) είναι ένα κρίσιμο βήμα.

Το προαναφερθέν συναρτησιακό, το οποίο καθορίζεται από τις παραμέτρους $\theta = \eta_0, \eta_1, \xi, k_m$, δίνεται από την παρακάτω εξίσωση :

$$H[Z'(\mathbf{s})] = \frac{1}{2\eta_0\xi^d} \int d\mathbf{s} \left[\{Z'(\mathbf{s})\}^2 + \eta_1\xi^2 \{\nabla Z'(\mathbf{s})\}^2 + \xi^4 \{\nabla^2 Z'(\mathbf{s})\}^2 \right] \quad (1.22)$$

όπου

η_0 : συντελεστής κλίμακας που προσδιορίζει το συνολικό μέγεθος των διακυμάνσεων στο χώρο (μονάδες μεταβλητής)

η_1 : συντελεστής μορφής που προσδιορίζει τη μορφή της συνάρτησης συνδιασποράς σε σχέση με τα ξ και k_m (αδιάστατος)

ξ : μήκος συσχέτισης που καθορίζει το εύρος της χωρικής εξάρτησης (μονάδες μήκους)

k_m : χωρική συχνότητα ή κυματόνισμα που καθορίζει το εύρος ζώνης της φασματικής πυκνότητας συνδιασποράς (μονάδες αντίστροφου μήκους).

Η οικογένεια των ΣΤΠ αποτελείται από συναρτήσεις τεσσάρων παραμέτρων. Η συνδιακύμανση των ΣΤΠ σε οποιαδήποτε διάσταση d εκφράζεται με τη βοήθεια της φασματικής πυκνότητας ως εξής:

$$C_z(\mathbf{r}; \boldsymbol{\theta}) = \frac{\eta_0 \xi \|\mathbf{r}\|^{1-d/2}}{(2\pi)^{d/2}} \int_0^{k_m} d\omega \frac{\omega^{d/2} J_{d/2-1}(\|\mathbf{r}\|\omega)}{1 + \eta_1 (\omega\xi)^2 + (\omega\xi)^4} \quad (1.23)$$

όπου

$J_{d/2-1}(x)$: συνάρτηση Bessel πρώτου είδους τάξης μηδέν

$\boldsymbol{\theta} = \eta_0, \eta_1, \xi, k_m$: οι τέσσερις παράμετροι του μοντέλου [30].

Το Σπαρτιάτικο ημιβαριόγραμμα περιγράφεται ως εξής:

$$\gamma_z(\mathbf{r}; \boldsymbol{\theta}) = C_z(0; \boldsymbol{\theta}) - C_z(\mathbf{r}; \boldsymbol{\theta}) \quad (1.24)$$

όπου

η_0 : συντελεστής κλίμακας που καθορίζει τη διασπορά

η_1 : συντελεστής μορφής που προσδιορίζει τη μορφή της συνάρτησης συνδιασποράς

σε σχέση με τα ξ και k_m

ξ : χαρακτηριστικό μήκος

k_m : οριακή τιμή του κυματανίσματος (όριο της ζώνης στο χώρο Fourier) [13].

Για $d = 1, 3$ η ρητή έκφραση για τη συνδιασπορά των ΣΤΠ τείνει να είναι ασυμπτωτική $k_m \rightarrow \infty$ [18].

Για $d = 3$, η συνδιασπορά των ΣΤΠ εκφράζεται ως εξής:

$$C_z(\mathbf{h}; \boldsymbol{\theta}) = \begin{cases} \frac{\eta_0 e^{-h\beta_2}}{2\pi\sqrt{|\eta_1^2-4|}} \left[\frac{\sin(h\beta_1)}{h\beta_1} \right], & \text{για } |\eta_1| < 2, \sigma_z^2 = \frac{\eta_0}{2\pi\sqrt{|\eta_1^2-4|}} \\ \frac{\eta_0 e^{-h}}{8\pi}, & \text{για } \eta_1 = 2, \sigma_z^2 = \frac{\eta_0}{8\pi} \\ \frac{\eta_0(e^{-h\omega_1} - e^{-h\omega_2})}{4\pi(\omega_2 - \omega_1)h\sqrt{|\eta_1^2-4|}}, & \text{για } \eta_1 > 2, \sigma_z^2 = \frac{\eta_0}{4\pi\sqrt{|\eta_1^2-4|}} \end{cases}, \quad (1.25)$$

$$\omega_{1,2} = (|\eta_1 \mp \Delta|/2)^{1/2}, \quad (1.26)$$

$$\beta_{1,2} = |2 \mp \eta_1|^{1/2}/2 \quad (1.27)$$

όπου

$\Delta = |\eta_1^2 - 4|^{1/2}$, $\omega_{1,2}$, β_2 : αδιάστατοι συντελεστές απόσβεσης

β_1 : αδιάστατο κυματάνισμα

ξ : χαρακτηριστικό μήκος

$\|\mathbf{h}\| = \|\mathbf{r}\|/\xi$: κανονικοποιημένο διάνυσμα απόστασης μεταξύ δύο σημείων όπου

$h = |\mathbf{h}|$ η Ευκλείδεια νόρμα του

σ_z^2 : διασπορά.

Όταν $\eta_1 = 2$ αναχτάται η εκθετική συνδιασπορά ενώ όταν $|\eta_1| < 2$ επιτυγχάνεται το προϊόν του εκθετικού και του hole-effect μοντέλου. Μια συνάρτηση συνδιασποράς που

επιτρέπεται στις τρεις διαστάσεις επιτρέπεται και σε δύο διαστάσεις. Συνεπώς, η εξίσωση 1.25 μπορεί να χρησιμοποιηθεί και σε δύο διαστάσεις, παρόλο που δεν αντιστοιχεί στο συναρτησιακό των δύο διαστάσεων [30].

1.14 Χωρική εκτίμηση

Η χωρική εκτίμηση και η προσομοίωση είναι δύο βασικές διαδικασίες της επιστήμης της Γεωστατιστικής, απόρροια της ανάγκης προσδιορισμού της χωρικής εξάρτησης, της τάσης και των διακυμάνσεων του πεδίου. Μέσω των διαδικασιών αυτών, επιτυγχάνεται η αναπαράσταση ενός τυχαίου πεδίου σε σημεία όπου δεν υπάρχουν μετρήσεις βάσει της διαθέσιμης γνώσης (π.χ. μετρήσεις σε γειτονικά σημεία, γεωλογικά δεδομένα κ.λ.π.). Οι άγνωστες τιμές προσδιορίζονται με στατιστικά πρότυπα χωρικής εξάρτησης (ημιβαριογράμματα) βάσει της συσχέτισης, ενώ ο ορισμός των στατιστικών περιορισμών εξαρτάται από τη διαθέσιμη γνώση. Το αποτέλεσμα της επανάληψης μιας διαδικασίας σε όλα τα σημεία του υπολογιστικού πλέγματος είναι η χαρτογράφηση μιας ολόκληρης περιοχής.

Με τον όρο χωρική εκτίμηση περιγράφονται όλες οι μαθηματικές διαδικασίες με τη βοήθεια των οποίων υπολογίζονται οι τιμές του πεδίου σε σημεία όπου δεν υπάρχουν ακριβείς μετρήσεις μιας ιδιότητας. Για το λόγο αυτό, επιβάλλεται η ύπαρξη ενός προτύπου χωρικής εξάρτησης, ώστε η τιμή της ιδιότητας να επηρεάζεται από τις γειτονικές τιμές του πεδίου. Μέσω της αλληλεξάρτησης αυτής γίνεται η εκτίμηση του πεδίου σε σημεία με άγνωστες τιμές βάσει των γνωστών γειτονικών μετρήσεων. Η χωρική εκτίμηση μπορεί να είναι τόσο σημειακή όσο και γενική. Στην πρώτη περίπτωση η τιμή του πεδίου αναφέρεται σε κάποιο συγκεκριμένο σημείο του χώρου ενώ στη δεύτερη η εκτίμηση αποσκοπεί στον υπολογισμό μιας χαρακτηριστικής τιμής που περιγράφει όλη την περιοχή [1].

Για τη χωρική εκτίμηση έχουν αναπτυχθεί διάφορες μέθοδοι οι οποίες βασίζονται σε παρόμοιες αρχές. Η κοινή ιδέα όλων είναι πως η τιμή στο σημείο εκτίμησης προκύπτει ως συνδυασμός, γραμμικός ή μη γραμμικός των γειτονικών τιμών, κατόπιν βελτιστοποίησης κάποιου στατιστικού μέτρου (π.χ. ελαχιστοποίηση σφάλματος εκτίμησης ή μεγιστοποίηση της πιθανότητας). Οι πιο διαδεδομένες μέθοδοι ονομάζονται *Kriging* και στηρίζονται στη γραμμική παρεμβολή σε συνδυασμό με την ελαχιστοποίηση του τετραγωνικού σφάλματος της εκτίμησης [15], [21], [7].

Αντίθετα, η διαδικασία προσομοίωσης στοχεύει στην αναπαραγωγή πολλών πιθανών καταστάσεων του πεδίου, οι οποίες είναι σύμφωνες με τους στατιστικούς περιορισμούς που απορρέουν από το πειραματικό δείγμα (π.χ. ίδια μέση τιμή, τυπική απόκλιση και ημιβαριόγραμμα με αυτό που υπολογίζεται βάσει των μετρήσεων). Συνεπώς, η προσομοίωση επιδιώκει τη δημιουργία πολλών εναλλακτικών σεναρίων, τα οποία βασίζονται στις υφιστάμενες μετρήσεις [1].

Κεφάλαιο 2

Γεωστατιστική ανάλυση τυχαίου πεδίου

Για την ολοκληρωμένη γεωστατιστική ανάλυση ενός τυχαίου πεδίου απαιτείται μια σειρά από διαδικασίες, οι οποίες συνοψίζονται στα εξής βήματα [6]:

- i. Διερευνητική στατιστική ανάλυση του δείγματος.
- ii. Προσδιορισμός προτύπου χωρικής συνέχειας.
- iii. Διαδικασία εκτίμησης.

Η διερευνητική στατιστική ανάλυση προηγείται όλων των διαδικασιών, καθώς βοηθάει στον προσδιορισμό των στατιστικών μεγεθών του δείγματος. Στη συνέχεια δύναται να χρησιμοποιηθεί ένα Σύστημα Ασαφούς Λογικής, ώστε να επιλεχθούν μικρότερες γειτονίες και να ληφθούν υπόψη μόνο τα δεδομένα που έχουν τη μεγαλύτερη επίδραση στο σημείο εκτίμησης. Σε περίπτωση που δεν χρησιμοποιηθεί ένα τέτοιο σύστημα, το βήμα αυτό παραλείπεται και ακολουθεί ο προσδιορισμός του προτύπου με το οποίο θα εκφραστεί η χωρική εξάρτηση των τιμών του πεδίου. Το τελευταίο στάδιο για να ολοκληρωθεί η γεωστατιστική ανάλυση είναι αυτό της εκτίμησης, στο οποίο γίνεται επαλήθευση του προτύπου χωρικής συνέχειας και η παραγωγή των χαρτών της εξεταζόμενης μεταβλητής. Οι διαδικασίες αυτές παρουσιάζονται αναλυτικότερα στη συνέχεια.

2.1 Διερευνητική στατιστική ανάλυση

Για την εφαρμογή του εκάστοτε γεωστατιστικού μοντέλου απαιτείται προηγουμένως να πραγματοποιηθεί *διερευνητικός στατιστικός έλεγχος* του δείγματος. Μέσα από την ανάλυση αυτή υπολογίζεται το ιστόγραμμα των τιμών της εξεταζόμενης μεταβλητής, η συνάρτηση κατανομής πιθανότητας (ταυτόχρονα γίνεται έλεγχος της κανονικότητας), ενώ προσδιορίζονται και μια σειρά παραμέτρων της κατανομής. Στην περίπτωση που το δείγμα δεν ακολουθεί την Κανονική κατανομή μπορεί να γίνει κάποιος μετασχηματισμός (π.χ. Box-Cox), ώστε να βελτιωθούν τα αποτελέσματα της πρόβλεψης.

Ένας τρόπος για να ελεγχθεί αν το δείγμα ακολουθεί κάποια συγκεκριμένη κατανομή είναι το κριτήριο *Kolmogorou-Smirnov* ($K - S$) [25], [21]. Πρόκειται για ένα μη - παραμετρικό τεστ που χρησιμοποιείται για τον έλεγχο καλής προσαρμογής ενός τυχαίου δείγματος (X_i) σε μία δεδομένη συνεχή κατανομή (F_0). Το κριτήριο $K - S$ βασίζεται στην διαφορά της εμπειρικής συνάρτησης κατανομής (ΕΣΚ) που προέρχεται από το δείγμα και της αναμενόμενης (F_0), υπό την μηδενική υπόθεση H_0 ότι το δείγμα προέρχεται από την κατανομή αναφοράς. Δηλαδή, υπό την H_0 η ΕΣΚ θα πρέπει να είναι πολύ «κοντά» στην F_0 , ενώ αν δεν ισχύει η H_0 αναμένεται σημαντική απόκλιση. Με βάση αυτόν τον συλλογισμό ορίζεται μια «απόσταση» (ή στατιστικό) μεταξύ των δυο κατανομών, η οποία όταν γίνεται «μεγάλη», απορρίπτεται η H_0 .

Στην προκειμένη περίπτωση η μηδενική υπόθεση H_0 είναι ότι τα δεδομένα ακολουθούν την Κανονική κατανομή. Τότε το τεστ εφαρμόζεται συγκρίνοντας τις κανονικοποιημένες τιμές, οι οποίες δίνονται από την εξίσωση 2.1, με την Κανονική κατανομή ($\hat{m}_z=0, \sigma_z=1$):

$$\frac{z_i - \hat{m}_z}{\sigma_z}. \quad (2.1)$$

Το στατιστικό που ορίζεται περιγράφεται ως εξής:

$$D = \max |F(z) - G(z)| \quad (2.2)$$

όπου

$F(z)$: η εμπειρική συνάρτηση κατανομής

$G(z)$: η εμπειρική συνάρτηση της Κανονικής κατανομής.

Αν το δείγμα προέρχεται από την Κανονική κατανομή, το D συγκλίνει στο 0. Ο έλεγχος αυτός μπορεί να γίνει και γραφικά, μέσω ενός διαγράμματος πιθανοτήτων (Normal Probability Plot) [30].

Στη συνέχεια, προσδιορίζονται οι εξής βασικές στατιστικές ιδιότητες του δείγματος:

z_{min} : ελάχιστη τιμή $z_{0.25}$: πρώτο τεταρτημόριο $z_{0.50}$: διάμεσος

m_z : μέση τιμή $z_{0.75}$: τρίτο τεταρτημόριο z_{max} : μέγιστη τιμή

$\hat{\sigma}_z$: τυπική απόκλιση \hat{s}_z : συντελεστής ασυμμετρίας \hat{k}_z : συντελεστής κύρτωσης

Ο συντελεστής ασυμμετρίας \hat{s}_z της κατανομής του δείγματος, ορίζεται με την βοήθεια της κεντρικής ροπής τρίτης τάξης ως εξής:

$$\hat{s}_z = \frac{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (z_i - \hat{m}_z)^3}{\hat{\sigma}_z^3} \quad (2.3)$$

ενώ ο συντελεστής κύρτωσης \hat{k}_z της κατανομής του δείγματος, ορίζεται με την βοήθεια της κεντρικής ροπής τέταρτης τάξης ως εξής:

$$\hat{k}_z = \frac{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (z_i - \hat{m}_z)^4}{\hat{\sigma}_z^4} \quad (2.4)$$

όπου

N : το άθροισμα των σημείων του δείγματος

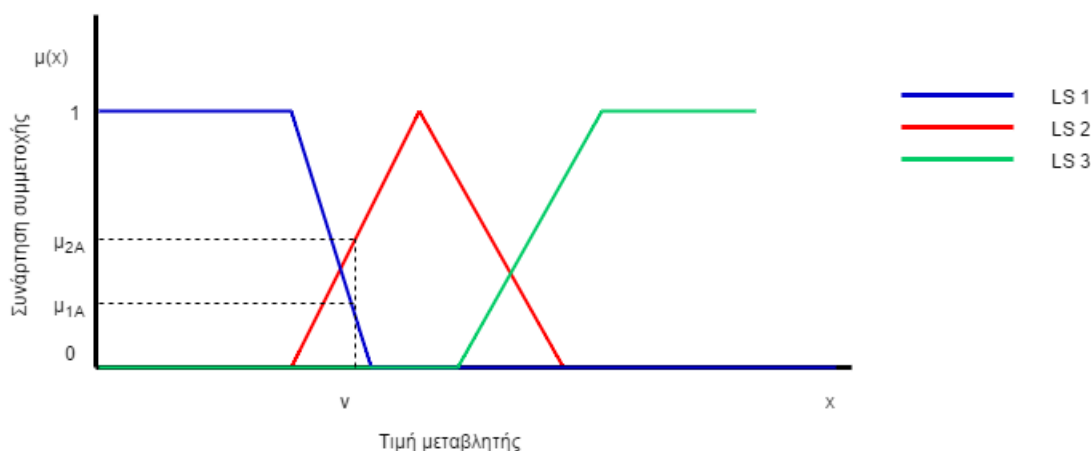
\hat{m}_z : η μέση τιμή του δείγματος [30].

2.2 Δημιουργία Ασαφούς Συστήματος

Όπως προαναφέρθηκε, όταν η ακτίνα της γειτονιάς είναι μεγαλύτερη από την ακτίνα συσχέτισης περιλαμβάνονται στη διαδικασία πρόβλεψης και τιμές οι οποίες δεν έχουν ιδιαίτερη επίδραση στο σημείο εκτίμησης, με αποτέλεσμα να αυξάνεται το αριθμητικό κόστος της εκτίμησης. Τα *Ασαφή Συστήματα* αποτελούν μια καλή λύση στο πρόβλημα αυτό, καθώς με τη βοήθειά τους μπορούν να δημιουργηθούν μικρές γειτονιές και έτσι αφενός να ελεγχθούν καλύτερα τα ποιοτικά χαρακτηριστικά του εξεταζόμενου συνόλου (π.χ. μέση τιμή) αφετέρου να συμπεριληφθούν μόνο οι μετρήσεις που είναι καθοριστικές για την πρόβλεψη.

Τα Συστήματα Ασαφούς Λογικής διαφοροποιούνται ανάλογα με τις μορφές που μπορεί να πάρει ένας κανόνας. Το πιο διαδεδομένο ασαφές μοντέλο είναι το μοντέλο Mamdani [24]. Για τη δημιουργία ενός αντίστοιχου Ασαφούς Συστήματος ακολουθούνται τα παρακάτω βήματα:

- i. *Ασαφοποίηση*. Με τη βοήθεια των συναρτήσεων συμμετοχής γίνεται καθορισμός του βαθμού με τον οποίο οι τιμές εισόδου (crisp data) του συστήματος ανήκουν σε κάθε ένα από τα ασαφή σύνολα [31]. Η αριθμητική τιμή κάθε παραμέτρου μετατρέπεται σε βαθμό συμμετοχής σε κάποιο από τα λεκτικά υποσύνολα (linguist subsets LS) του ασαφούς συνόλου (Σχήμα 2.1). Η ίδια διαδικασία ακολουθείται για όλες τις παραμέτρους ενώ ταυτόχρονα γίνεται συνδυασμός όλων των μεταβλητών για τη σύνταξη των ασαφών κανόνων [29], [3].



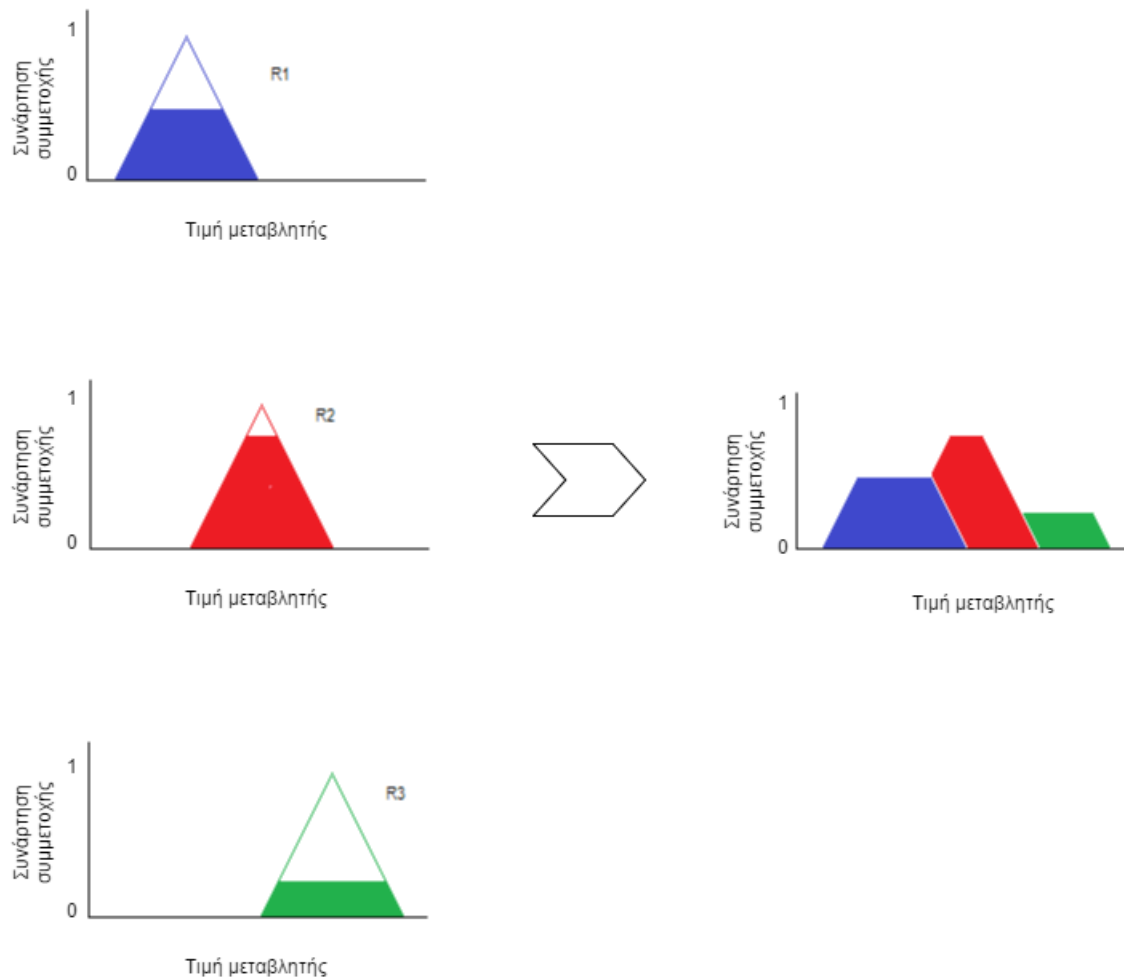
Σχήμα 2.1: Ασαφοποίηση. Ο βαθμός συμμετοχής της τιμής v στο LS_1 ισούται με μ_{1A} , στο LS_2 με μ_{2A} και στο LS_3 με 0.

- ii. *Αξιολόγηση κανόνων.* Τα ασαφοποιημένα δεδομένα εφαρμόζονται στα υποθετικά μέρη των κανόνων. Στην περίπτωση που συνυπάρχουν σε έναν κανόνα περισσότερες από μια υποθέσεις εξασφαλίζεται ένας αριθμός που αντιπροσωπεύει το αποτέλεσμα της εκτίμησης του μέρους της υπόθεσης με τη χρήση ασαφών τελεστών (ΚΑΙ και Ή). Στη συνέχεια ο αριθμός αυτός εφαρμόζεται στη συνάρτηση συμμετοχής του συμπεράσματος. Για την αξιολόγηση της διάζευξης των υποθετικών μερών των κανόνων οι τελεστές ΚΑΙ και Ή μεταφράζονται σύμφωνα με το ασαφές μοντέλο Mamdani (Πίνακας 2.1).

Τελεστής	Μαθηματική έκφραση
x ΚΑΙ y	$\min(x,y)$
x Ή y	$\max(x,y)$
όχι x	$1-x$

Πίνακας 2.1: Τελεστές Mamdani [31], [29].

- iii. *Συνάθροιση.* Τα συμπεράσματα όλων των κανόνων συναθροίζονται. Πιο συγκεκριμένα, οι συναρτήσεις συμμετοχής όλων των συμπερασμάτων συνδυάζονται σε ένα ασαφές σύνολο (Σχήμα 2.2).

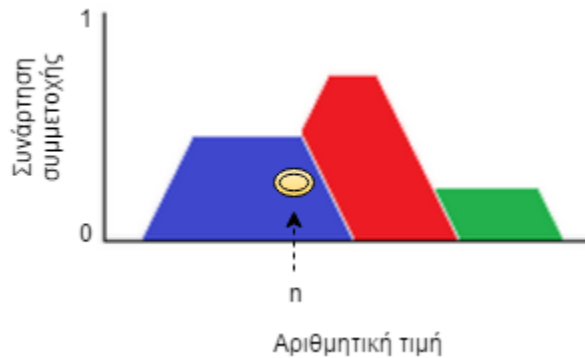


Σχήμα 2.2: Συνάθροιση. Τα συμπεράσματα τριών κανόνων (R_1, R_2, R_3) συνδυάζονται σε ένα ασαφές σύνολο.

iv. *Αποασαφοποίηση*. Το ασαφές σύνολο που προέκυψε από το στάδιο της συναθροίσεως μετατρέπεται σε μια αριθμητική τιμή (Σχήμα 2.3). Για την αποασαφοποίηση χρησιμοποιούνται διάφορες μέθοδοι αλλά η πιο δημοφιλής είναι εκείνη της κεντρικής τιμής ή κεντροειδής, η οποία μαθηματικά μπορεί να εκφραστεί με την εξίσωση του κέντρου μάζας [31]:

$$COG = \frac{\int p_i(x)xdx}{\int p_i(x)dx} \quad (2.5)$$

όπου $p_i(x)$ είναι η συναθροισμένη συνάρτηση συμμετοχής και x είναι η αριθμητική τιμή που προκύπτει από την αποασαφοποίηση.



Σχήμα 2.3: Αποασαφοποίηση. Υπολογίζεται η αριθμητική τιμή n ενός ασαφούς συνόλου με τη βοήθεια του κέντρου μάζας.

2.3 Προσδιορισμός προτύπου χωρικής συνέχειας

Μετά από τον στατιστικό έλεγχο έπεται ο προσδιορισμός του προτύπου χωρικής συνέχειας. Η διαδικασία αυτή περιλαμβάνει κάποια στάδια. Τα σημαντικότερα από αυτά είναι τα εξής:

- i. Υπολογισμός του πειραματικού ημιβαριογράμματος.
- ii. Προσαρμογή του πειραματικού προτύπου σε διάφορα θεωρητικά μοντέλα.
- iii. Επιλογή του βέλτιστου θεωρητικού μοντέλου.
- iv. Προσδιορισμός των παραμέτρων του ημιβαριογράμματος (π.χ. χαρακτηριστικό μήκος) [6].

2.3.1 Απόσταση μεταξύ σημείων παρατήρησης και εκτίμησης

Βασικό ρόλο τόσο στον προσδιορισμό της χωρικής συνέχειας όσο και στην διαδικασία εκτίμησης παίζει ο υπολογισμός της απόστασης μεταξύ των σημείων παρατήρησης και πρόβλεψης. Συνήθως, στη Γεωστατιστική η χωρική συνδιακύμανση μεταξύ των σημείων δειγματοληψίας προσδιορίζεται με βάση την *Ευκλείδεια απόσταση* (Euclidean). Η προσέγγιση αυτή είναι απόρροια της παραδοχής ότι τα στοιχεία του δείγματος είναι ομοιόμορφα κατανεμημένα στο χώρο. Ωστόσο, τα φυσικά ή βιολογικά χαρακτηριστικά του υπό εξέταση δείγματος (π.χ. κλίση του εδάφους), συχνά δημιουργούν εμπόδια στη σωστή αναπαράσταση της χωρικής κατανομής. Τέτοια προβλήματα είναι κοινά κατά την προσομοίωση παράκτιου περιβάλλοντος ή δικτύων απορροής ποταμών (δηλαδή ετερογενή πεδία). Η παράβλεψη των εμποδίων αυτών μπορεί να οδηγήσει σε ανακριβή αναπαραγωγή της δομής της χωρικής συσχέτισης [16].

Στην παρούσα εργασία γίνεται χρήση πέντε διαφορετικών Ευκλείδειων και μη - Ευκλείδειων μέτρων, με στόχο τον υπολογισμό της απόστασης μεταξύ των σημείων παρατήρησης και εκτίμησης. Ο υπολογισμός αυτός επηρεάζει τόσο την επιλογή του βέλτιστου ημιβαριογράμματος όσο και την χωρική εκτίμηση με τη μέθοδο Kriging.

Οι αποστάσεις που χρησιμοποιήθηκαν στις διαδικασίες αυτές περιγράφονται από τις παρακάτω εξισώσεις:

$$\text{Manhattan :} \quad d_1 = \sum_{i=1}^n |u_i - v_i| \quad (2.6)$$

$$\text{Euclidean :} \quad d_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n (u_i - v_i)^2} \quad (2.7)$$

$$\text{Minkowski :} \quad d_3 = \left(\sum_{i=1}^n |u_i - v_i|^p \right)^{1/p}, \text{ π.χ. } p = 3 \quad (2.8)$$

$$\text{Canberra :} \quad d_4 = \sum_{i=1}^n \frac{|u_i - v_i|}{|u_i| + |v_i|} \quad (2.9)$$

$$\text{Bray-Curtis :} \quad d_4 = \sum_{i=1}^n \frac{|u_i - v_i|}{|u_i + v_i|} \quad (2.10)$$

όπου

$$u := (u_1, u_2, \dots, u_n)$$

$$v := (v_1, v_2, \dots, v_n).$$

Αξίζει να σημειωθεί ότι κατά την εφαρμογή μη - Ευκλείδειων μετρικών απαιτείται μεγάλη προσοχή, καθώς δεν είναι σίγουρο ότι εξακολουθούν να ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις π.χ. της συνάρτησης συνδιασποράς ή του ημιβαριογράμματος.

2.3.2 Επιλογή βέλτιστου ημιβαριογράμματος

Η επιλογή του βέλτιστου θεωρητικού μοντέλου είναι ιδιαίτερα σημαντική στη γεωστατιστική ανάλυση. Είναι ξεκάθαρο πως όσο καλύτερη είναι η προσαρμογή του θεωρητικού

προτύπου στο πειραματικό τόσο πιο σωστός θα είναι ο υπολογισμός των παραμέτρων και κατά συνέπεια τα αποτελέσματα της πρόβλεψης.

Μέχρι σήμερα έχουν προταθεί αρκετά μοντέλα για την αξιολόγηση της προσαρμογής του ημιβαριογράμματος. Μεταξύ αυτών είναι η *Συνάρτηση Μέγιστης Πιθανοφάνειας* και η μέθοδος *Ελαχίστων Τετραγώνων*. Η πρώτη διαδικασία απαιτεί μια σειρά από παραδοχές που αφορούν την κατανομή ενώ η δεύτερη απαιτεί λιγότερες.

Για τις ανάγκες της συγκεκριμένης εργασίας γίνεται χρήση και σύγκριση μεταξύ τριών διαφορετικών κριτηρίων για την επιλογή του καλύτερου θεωρητικού προτύπου.

Για τον έλεγχο αυτό επιλέχθηκαν τρία κριτήρια: η μέθοδος *Ελαχίστων Τετραγώνων* (*RSS*), το κριτήριο *Akaike* (*I_{AIC}*) και ο δείκτης *Cressie* (*I_C*). Τα κριτήρια αυτά περιγράφονται αντίστοιχα από τις παρακάτω εξισώσεις [20]:

$$RSS = \sum_{i=1}^n [\gamma(h_i) - \gamma^*(h_i)]^2 \quad (2.11)$$

$$I_{AIC} = n \ln \left(\frac{\sum_{i=1}^n [\gamma(h_i) - \gamma^*(h_i)]^2}{n} \right) + 2\mu \quad (2.12)$$

$$I_C = \sum_{i=1}^n \frac{N(h_i)}{[\gamma^*(h_i)]^2} [\gamma^*(h_i) - \gamma(h_i)]^2 \quad (2.13)$$

όπου

$\gamma(h_i)$: η τιμή του πειραματικού ημιβαριογράμματος στο i -οστο lag

$\gamma^*(h_i)$: η τιμή του θεωρητικού ημιβαριογράμματος στο i -οστο lag

$N(h_i)$: ο αριθμός των ζευγών για κάθε lag h_i

n : ο αριθμός των lag

μ : ο αριθμός των παραμέτρων του μοντέλου.

Ως βέλτιστο ημιβαριόγραμμα επιλέγεται εκείνο που λαμβάνει τη μικρότερη τιμή σε κάθε ένα από τα παραπάνω κριτήρια ή στην πλειοψηφία αυτών (δηλαδή στους δυο από τους τρεις δείκτες).

2.4 Διαδικασία εκτίμησης

Για να ολοκληρωθεί η γεωστατιστική ανάλυση ενός τυχαίου πεδίου απαιτείται η διαδικασία της εκτίμησης, τα κυριότερα σημεία της οποίας είναι τα παρακάτω [6]:

- i. Επιλογή πλέγματος.
- ii. Επιλογή κατάλληλης μεθόδου εκτίμησης.
- iii. Επαλήθευση του προτύπου χωρικής συνέχειας και υπολογισμός του Μέσου Απολύτου του Σφάλματος.
- iv. Παραγωγή χαρτών της εξεταζόμενης μεταβλητής και του σφάλματος εκτίμησης.
- v. Ανάλυση των αποτελεσμάτων και εξαγωγή συμπερασμάτων [6].

Αφού έχει γίνει επιλογή κατάλληλου πλέγματος, καθορίζεται ο συγκεκριμένος τύπος Kriging που θα υλοποιηθεί για την εκτίμηση της υπό εξέτασης μεταβλητής. Έπειτα, γίνεται η επαλήθευση του χωρικού μοντέλου. Η πιο δημοφιλής μέθοδος για επαλήθευση είναι αυτή της διασταυρωμένης επιβεβαίωσης (leave-one-out Cross Validation). Στο τελευταίο βήμα της διαδικασίας της εκτίμησης αναπαράγονται οι χάρτες των εκτιμώμενων τιμών της μεταβλητής στα σημεία του πλέγματος και της αβεβαιότητας της εκτίμησης, ενώ ακολουθεί η ανάλυση των αποτελεσμάτων. Οι κυριότερες από τις προαναφερθείσες διαδικασίες αναλύονται παρακάτω.

2.4.1 Μέθοδος εκτίμησης Kriging

Η χωρική παρεμβολή είναι μια διαδικασία εκτίμησης των τιμών μιας μεταβλητής σε σημεία του πεδίου όπου δεν υπάρχουν μετρήσεις χρησιμοποιώντας γνωστές τιμές σε άλλες θέσεις μέσα στο ίδιο πεδίο. Οι μέθοδοι παρεμβολής είναι είτε αιτιοκρατικές είτε στοχαστικές. Οι μεν αιτιοκρατικές δεν παρέχουν πληροφορίες σχετικά με το πιθανό σφάλμα εκτίμησης οι δε στοχαστικές προσφέρουν πιθανοθεωρητική εκτίμηση (π.χ. τη διακύμανση των εκτιμήσεων). Στις αιτιοκρατικές τεχνικές παρεμβολής τα σταθμισμένα βάρη για κάθε τιμή του δείγματος εξαρτώνται μόνο από την απόσταση μεταξύ του σημείου του δείγματος και του σημείου παρεμβολής. Στις στοχαστικές τεχνικές το σύνολο των δεδομένων αντιμετωπίζεται ως μια στοχαστική διαδικασία ενώ τα βάρη κατανέμονται με βάση τη χωρική συσχέτιση των τιμών σε γειτονικά σημεία. Η πιο δημοφιλής στοχαστική τεχνική στην επιστήμη της Γεωστατιστικής είναι η μέθοδος *Kriging* [22].

Για την εφαρμογή της μεθόδου Kriging χρειάζεται να καθοριστεί αρχικά το χωρικό τυχαίο πεδίο στο οποίο λαμβάνει χώρα. Έστω, λοιπόν, το τυχαίο πεδίο $Z(\mathbf{s}, \omega)$ όπου το ω είναι ο δείκτης κατάστασης με τη βοήθεια του οποίου υποδηλώνεται ότι το $Z(\mathbf{s}, \omega)$ είναι μια επιλογή από ένα σύνολο πιθανών καταστάσεων. Ο δειγματικός χώρος των σημείων παρατήρησης ορίζεται ως $Z(\mathbf{s} \in S)$, όπου S το σύνολο N σημείων του δείγματος. Αντίστοιχα, ο δειγματικός χώρος των σημείων εκτίμησης συμβολίζεται ως $Z(\mathbf{s} \in P)$, όπου P το σύνολο των σημείων εκτίμησης που βρίσκονται πάνω σε ένα πλέγμα το οποίο καλύπτει την περιοχή μελέτης. Αν \mathbf{s}_i , $i \in [1, N]$ τα σημεία παρατήρησης και $\mathbf{s}_0 \neq \mathbf{s}_i$ τυχαίο σημείο εκτίμησης που ανήκει στο κυρτό πολύγωνο του δειγματικού πεδίου, τότε οι πειραματικές τιμές της εξεταζόμενης μεταβλητής συμβολίζονται ως $z(\mathbf{s}_i)$ και η εκτιμώμενη τιμή στο σημείο \mathbf{s}_0 παριστάνεται ως $\hat{z}(\mathbf{s}_0)$, αντίστοιχα. Αξίζει να σημειωθεί ότι για τις ανάγκες της χαρτογράφησης θεωρείται ότι το σημείο \mathbf{s}_0 μετακινείται διαδοχικά σε όλους τους κόμβους του πλεγματοειδούς πεδίου [30].

Τότε, η εκτιμώμενη τιμή της εξεταζόμενης μεταβλητής στο σημείο s_0 υπολογίζεται σύμφωνα με τον εξής γραμμικό συνδυασμό:

$$\hat{z}(\mathbf{s}_0) = \sum_{\{i: \mathbf{s}_i \in N_0\}} \lambda_i z(\mathbf{s}_i) \quad (2.14)$$

όπου

N_0 : το σύνολο των σημείων στη γειτονιά αναζήτησης γύρω από το \mathbf{s}_0

λ_i : τα γραμμικά βάρη της εκτίμησης

$z(\mathbf{s}_i)$: οι πειραματικές τιμές της εξεταζόμενης μεταβλητής στα σημεία \mathbf{s}_i .

Η γειτονιά αναζήτησης γύρω από το \mathbf{s}_0 επιλέγεται είτε εμπειρικά με στόχο να βελτιστοποιηθούν τα αποτελέσματα της διασταυρωμένης επιβεβαίωσης είτε με βάση κάποιο Σύστημα Ασαφούς Λογικής.

Η διαφορά μεταξύ της εκτιμώμενης τιμής $\hat{z}(\mathbf{s}_0)$ και της πραγματικής τιμής $z(\mathbf{s}_0)$ είναι το σφάλμα εκτίμησης:

$$\varepsilon(\mathbf{s}_0) = \hat{z}(\mathbf{s}_0) - z(\mathbf{s}_0) = \sum_{\{i: \mathbf{s}_i \in N_0\}} \lambda_i z(\mathbf{s}_i) - z(\mathbf{s}_0) \quad (2.15)$$

Η μέθοδος Kriging χαρακτηρίζεται ως *Βέλτιστη Γραμμική Αμερόληπτη Εκτιμήτρια* (Best Linear Unbiased Estimator-BLUE) [21]. Η εκτιμήτρια Kriging είναι μια σταθμισμένη γραμμική συνάρτηση των δεδομένων. Τα γραμμικά βάρη ορίζονται υπό συνθήκη αμεροληψίας (δηλαδή μηδενική μέση τιμή του σφάλματος εκτίμησης) (εξίσωση 2.16) και από την ελαχιστοποίηση της διασποράς του σφάλματος εκτίμησης (εξίσωση 2.17):

$$E[\hat{z}(\mathbf{s}_0) - z(\mathbf{s}_0)] = 0 \quad (2.16)$$

$$\sigma_E^2(\mathbf{s}_0) = E\left[\left(\hat{z}(\mathbf{s}_0) - z(\mathbf{s}_0)\right)^2\right]. \quad (2.17)$$

Το σύστημα γραμμικών εξισώσεων που προκύπτει επιλύεται ώστε να προσδιορισθούν τα βάρη της εκτιμήτριας. Για την επίλυσή του χρησιμοποιούνται ως γνωστά στοιχεία τα δεδομένα (δηλαδή οι τιμές του πεδίου στα σημεία παρατήρησης) και οι τιμές της συνάρτησης συνδιασποράς ή του ημιβαριογράμματος τόσο στις αποστάσεις που αντιστοιχούν στα ζεύγη των γνωστών σημείων όσο και σε εκείνες που αντιστοιχούν στα ζεύγη που περιλαμβάνουν ένα σημείο παρατήρησης και τη θέση εκτίμησης [15].

Η πρακτική εφαρμογή της μεθόδου Kriging βασίζεται στις εξής παραδοχές:

- i. Το τυχαίο πεδίο δύναται να αναλυθεί σε δυο συνιστώσες, μια που εκφράζει την τάση (μια αργά μεταβαλλόμενη εξάρτηση) ή μια περιοδική μεταβολή και μια που εκφράζει τη διακύμανση του πεδίου γύρω από την τάση.
- ii. Η διακύμανση περιγράφεται από ένα στατιστικά ομοιογενές πεδίο μηδενικής μέσης τιμής, ώστε η συνάρτηση συνδιασποράς και το ημιβαριόγραμμα να εξαρτώνται αποκλειστικά από την απόσταση μεταξύ των σημείων.
- iii. Η εκτίμηση που βασίζεται στην ελαχιστοποίηση της διασποράς του σφάλματος είναι ακριβής αν η συνάρτηση κατανομής πιθανότητας είναι συμμετρική και κατά προτίμηση Γκαουσιανή [1].

2.4.2 Διαφορετικές τεχνικές Kriging

Για την χωρική εκτίμηση με τη μέθοδο Kriging έχουν αναπτυχθεί έως σήμερα διαφορετικές τεχνικές. Οι κυριότερες από αυτές είναι οι εξής:

- *Απλό Kriging* (Simple Kriging-SK): Εφαρμόζεται όταν η μέση τιμή του πεδίου είναι γνωστή και διατηρείται σταθερή σε όλο το τυχαίο πεδίο.
- *Κανονικό Kriging* (Ordinary Kriging-OK): Εφαρμόζεται όταν η μέση τιμή του πεδίου διατηρείται σταθερή στη γειτονιά αναζήτησης του σημείου εκτίμησης \mathbf{s}_0 αλλά η τιμή $m_z(\mathbf{s})$ μπορεί να μεταβάλλεται από γειτονιά σε γειτονιά. Σε αυτήν την περίπτωση θεωρείται ότι το $m_z(\mathbf{s}_0)$ είναι άγνωστο.
- *Καθολικό Kriging* (Universal Kriging-UK): Εφαρμόζεται όταν η μέση τιμή του πεδίου αλλάζει εντός της γειτονιάς του σημείου εκτίμησης. Τότε, χρησιμοποιείται ένα πρότυπο τάσης ως γραμμικός συνδυασμός γνωστών συναρτήσεων (π.χ. περιοδικών συναρτήσεων και πολυωνύμων).
- *Kriging Δεικτών* (Indicator Kriging-IK): Χρησιμοποιείται όταν η συνάρτηση κατανομής είναι έντονα ασύμμετρη με σημαντική πυκνότητα πιθανότητας στις υψηλές τιμές και δεν δύναται να εφαρμοστεί το κανονικό ή έστω το λογαριθμοκανονικό πρότυπο πιθανότητας. Με το Kriging δεικτών υπολογίζεται η πιθανότητα η τοπική τιμή να υπερβαίνει ένα καθορισμένο όριο. Με την επανάληψη της διαδικασίας για πολλαπλές τιμές του ορίου (Multiple Indicator Kriging) δύναται να προσδιοριστεί η αθροιστική κατανομή πιθανότητας.
- *Συνδυαστικό Kriging* (CoKriging): Εφαρμόζεται ώστε να συμπεριληφθούν στη διαδικασία εκτίμησης ιδιότητες συσχετισμένες με τις εκτιμώμενες μεταβλητές. Συνεπώς, οι εξισώσεις του Συνδυαστικού Kriging περιλαμβάνουν και τη διασταυρωμένη συνάρτηση συμμεταβολής των μεταβλητών [6].

Στην παρούσα εργασία η γεωστατιστική ανάλυση της στάθμης στην περιοχή μελέτης υλοποιήθηκε με την τεχνική του Κανονικού Kriging . Χάρη στην ιδιότητα της σταθερής

μέσης τιμής του πεδίου στη γειτονιά αναζήτησης του σημείου εκτίμησης \mathbf{s}_0 , η μέθοδος αυτή προσφέρει μια σχετικά εύκολη χωρική εκτίμηση. Χρησιμοποιώντας την βασική εξίσωση του Kriging, η εκτίμηση με τη μέθοδο OK δίνεται από τις παρακάτω εξισώσεις:

$$\hat{z}(\mathbf{s}_0) = \sum_{\{i: \mathbf{s}_i \in N_0\}} \lambda_i z(\mathbf{s}_i) \quad (2.18)$$

$$\sum_{\{i: \mathbf{s}_i \in N_0\}} \lambda_i = 1 \quad (2.19)$$

Τα βάρη λ_i , τα οποία εξαρτώνται από το μοντέλο ημιβαριογράμματος $\gamma_z(\mathbf{r})$, υπολογίζονται ελαχιστοποιώντας το μέσο τετραγωνικό σφάλμα υπό τη συνθήκη αμεροληψίας, η οποία εδώ εκφράζεται από την εξίσωση 2.19. Συνεπώς, για τον υπολογισμό των βαρών απαιτείται η επίλυση του $(N_0 + 1) \times (N_0 + 1)$ συστήματος γραμμικών εξισώσεων:

$$\sum_{\{i: \mathbf{s}_i \in N_0\}} \lambda_i \gamma_z(\mathbf{s}_i, \mathbf{s}_j) + \mu = \gamma_z(\mathbf{s}_j, \mathbf{s}_0), \quad j = 1, \dots, N_0 \quad (2.20)$$

$$\sum_{\{i: \mathbf{s}_i \in N_0\}} \lambda_i = 1 \quad (2.21)$$

όπου

N_0 : το σύνολο των σημείων στη γειτονιά αναζήτησης γύρω από το \mathbf{s}_0

$\gamma_z(\mathbf{s}_i, \mathbf{s}_j)$: το ημιβαριόγραμμα μεταξύ των δύο σημείων του δείγματος \mathbf{s}_i και \mathbf{s}_j

$\gamma_z(\mathbf{s}_j, \mathbf{s}_0)$: το ημιβαριόγραμμα μεταξύ του σημείου \mathbf{s}_j του δείγματος και του σημείου εκτίμησης \mathbf{s}_0

μ : ο πολλαπλασιαστής Lagrange που επιβάλλει τη συνθήκη αμεροληψίας.

Το Kriging προσφέρει επίσης τη δυνατότητα εκτίμησης της διασποράς του σφάλματος. Στο Κανονικό Kriging, η διασπορά του σφάλματος έχει τα παρακάτω χαρακτηριστικά:

- i. Εξαρτάται από το μοντέλο ημιβαριογράμματος. Η ακρίβεια της εκτίμησης εξαρτάται από την πολυπλοκότητα της χωρικής μεταβλητότητας του τυχαίου πεδίου, όπως διαμορφώθηκε από το ημιβαριόγραμμα.
- ii. Εξαρτάται από τη διαμόρφωση των δεδομένων και τις εκτιμώμενες αποστάσεις τους από το σημείο \mathbf{s}_0 .
- iii. Είναι ανεξάρτητη από τις τιμές των δεδομένων.
- iv. Είναι ίση με το 0 στα σημεία των δεδομένων και αυξάνεται μακριά από αυτά, ενώ μεγιστοποιείται στα σημεία εκτός του πεδίου παρεμβολής [21].

Συνεπώς η διασπορά του σφάλματος

$$\sigma_E^2(\mathbf{s}_0) = E\left[\left(\hat{z}(\mathbf{s}_0) - z(\mathbf{s}_0)\right)^2\right] \quad (2.22)$$

για το OK, με βάση τον πολλαπλασιαστή Lagrange μ , μετασχηματίζεται ως εξής:

$$\sigma_E^2(\mathbf{s}_0) = \sum_{\{i: \mathbf{s}_i \in N_0\}} \lambda_i \gamma_z(\mathbf{s}_i, \mathbf{s}_0) + \mu. \quad (2.23)$$

Δηλαδή, η διασπορά στο OK ορίζεται ως ο σταθμισμένος μέσος όρος των ημιβαριογραμμάτων από το νέο σημείο \mathbf{s}_0 σε όλα βαθμονομημένα σημεία \mathbf{s}_j , συν τον πολλαπλασιαστή Lagrange [30].

2.4.3 Επαλήθευση του χωρικού μοντέλου

Για την επαλήθευση του προτύπου χωρικής συνέχειας έχει επικρατήσει η μέθοδος της διασταυρωμένης επιβεβαίωσης (leave-one-out Cross Validation). Στη διαδικασία αυτή ένα δεδομένο κάθε φορά εξαιρείται από το σύνολο S και η τιμή του εκτιμάται με βάση τα εναπομείναντα $N - 1$ δεδομένα. Οι τιμές που εκτιμήθηκαν με τη μέθοδο της παρεμβολής συγκρίνονται με τις αντίστοιχες πειραματικές τιμές και αξιολογούνται με βάση τα στατιστικά μέτρα που αναφέρονται παρακάτω [30].

Μέσο Απόλυτο Σφάλμα (Mean Absolute Error-MAE):

$$\varepsilon_{MA} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |\hat{z}(\mathbf{s}_i) - z(\mathbf{s}_i)| \quad (2.24)$$

BIAS:

$$\varepsilon_{BIAS} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \hat{z}(\mathbf{s}_i) - z(\mathbf{s}_i) \quad (2.25)$$

Μέσο Σχετικό Απόλυτο Σφάλμα (Mean Absolute Relative Error-MARE):

$$\varepsilon_{MAR} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left| \frac{\hat{z}(\mathbf{s}_i) - z(\mathbf{s}_i)}{z(\mathbf{s}_i)} \right| \quad (2.26)$$

Τετραγωνική Ρίζα Μέσου Σχετικού Τετραγωνικού Σφάλματος (Root Mean Square Error-RMSE):

$$\varepsilon_{RMS} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N [\hat{z}(\mathbf{s}_i) - z(\mathbf{s}_i)]^2} \quad (2.27)$$

Γραμμικός Συντελεστής Συσχέτισης (*Linear Correlation Coefficient*- R^2):

$$R = \frac{\sum_{i=1}^N [z(\mathbf{s}_i) - \overline{z(\mathbf{s}_i)}] [\hat{z}(\mathbf{s}_i) - \overline{\hat{z}(\mathbf{s}_i)}]}{\sqrt{\sum_{i=1}^N [z(\mathbf{s}_i) - \overline{z(\mathbf{s}_i)}]^2} \sqrt{\sum_{i=1}^N [\hat{z}(\mathbf{s}_i) - \overline{\hat{z}(\mathbf{s}_i)}]^2}} \quad (2.28)$$

όπου

$z(\mathbf{s}_i)$: η πειραματική τιμή της εξεταζόμενης μεταβλητής στο σημείο \mathbf{s}_i

$\hat{z}(\mathbf{s}_i)$: η εκτιμώμενη τιμή της εξεταζόμενης μεταβλητής στο σημείο \mathbf{s}_i

$\overline{z(\mathbf{s}_i)}$: ο δειγματικός μέσος όρος των πειραματικών δεδομένων

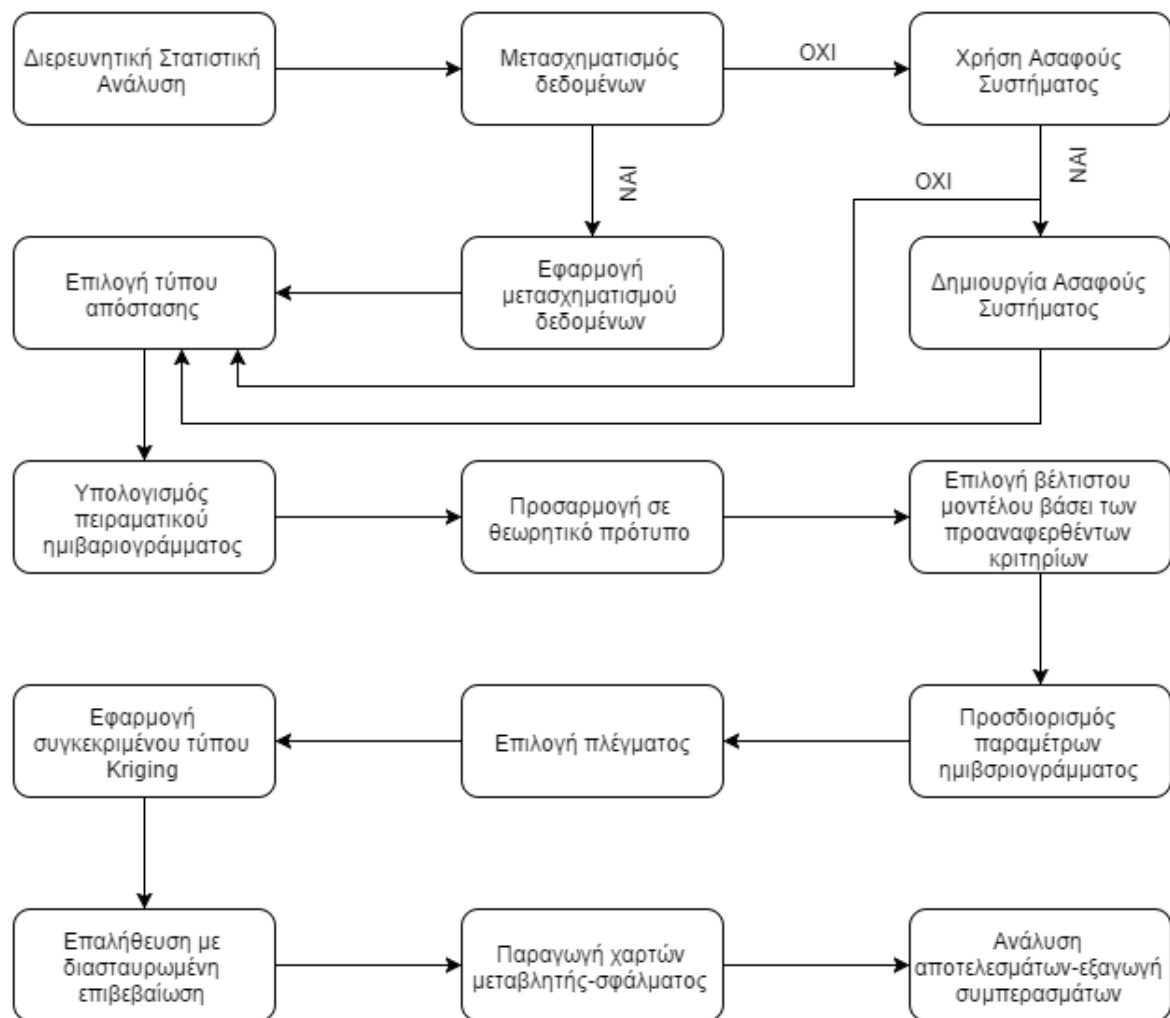
$\overline{\hat{z}(\mathbf{s}_i)}$: ο δειγματικός μέσος όρος των εκτιμώμενων τιμών

N : το πλήθος των σημείων παρατήρησης.

Κατά τη σύγκριση μεταξύ δύο ή περισσότερων μοντέλων, θεωρείται πως την καλύτερη προσαρμογή κάνει το πρότυπο το οποίο παρουσιάζει τη μικρότερη τιμή του Μέσου Απολύτου Σφάλματος (MAE) από όλα τα μοντέλα.

2.5 Διάγραμμα ροής διαδικασιών

Συνοψίζοντας τις παραπάνω διαδικασίες μιας ολοκληρωμένης γεωστατιστικής ανάλυσης, δημιουργήθηκε ένα διάγραμμα ροής. Σε αυτό φαίνονται συνοπτικά τα βήματα που πρέπει να γίνουν για τον υπολογισμό μιας μεταβλητής σε σημεία ενός τυχαίου πεδίου όπου δεν υπάρχουν μετρήσεις, καθώς και η σειρά με την οποία εκτελούνται (Σχήμα 2.4).



Σχήμα 2.4: Διάγραμμα ροής διαδικασιών μιας ολοκληρωμένης γεωστατιστικής ανάλυσης.

Κεφάλαιο 3

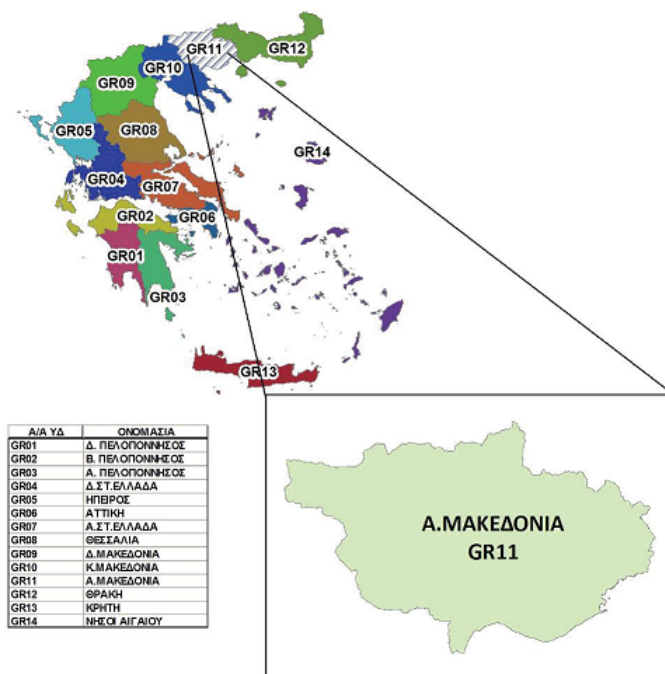
Ανάλυση επικινδυνότητας ρύπου στην περιοχή ενδιαφέροντος

3.1 Περιγραφή της περιοχής μελέτης

Η περιοχή μελέτης βρίσκεται στην Περιφερειακή Ενότητα Δράμας, η οποία ανήκει στο Υδατικό Διαμέρισμα (Υ.Δ.) Ανατολικής Μακεδονίας (GR11), η συνολική έκταση του οποίου ανέρχεται στα 7.320 km^2 (Σχήμα 3.1). Το Υ.Δ. είναι κατά το μεγαλύτερο μέρος πεδινό και κατά το μικρότερο τμήμα του ορεινό και ημιορεινό, με τις πεδιάδες των Σερρών και της Δράμας να αποτελούν το μεγαλύτερο τμήμα του διαμερίσματος.

Το κλίμα του Υ.Δ. χαρακτηρίζεται ως ημιηπειρώτικο. Η μέση ετήσια θερμοκρασία κυμαίνεται από 14.5° C ως 16.0° C ενώ το ετήσιο θερμομετρικό εύρος ξεπερνά τους 21.0° C . Οι χειμώνες είναι αρκετά κρύοι ενώ τα καλοκαίρια πολύ θερμά. Ο πιο ψυχρός μήνας του έτους είναι ο Ιανουάριος και ο πιο θερμός ο Ιούλιος. Η ετήσια βροχόπτωση στο πεδινό τμήμα του Υ.Δ. κυμαίνεται μεταξύ 508 mm και 576 mm, με τις περισσότερες βροχές να πέφτουν κατά τη χειμερινή και την εαρινή περίοδο. Συχνές χιονοπτώσεις εμφανίζονται από Σεπτέμβριο ως Απρίλιο ενώ οι χαλαζοπτώσεις είναι σπάνιες.

Το Υ.Δ. Ανατολικής Μακεδονίας περιλαμβάνει μία λεκάνη απορροής, αυτή του Στρυμόνα (GR06) με μέσο υψόμετρο 403 m. Οι κύριοι ποταμοί του Υ.Δ. είναι ο Στρυμόνας και ο παραπόταμός του Αγγίτης, ενώ περιλαμβάνει δύο λίμνες (τεχνητές), την τεχνητή λίμνη Λευκογείων και την Κερκίνη, οι οποίες χρησιμοποιούνται κυρίως για άρδευση, με την τελευταία να έχει εξελιχθεί ταυτόχρονα σε διεθνούς εμβέλειας υδροβιότοπο.



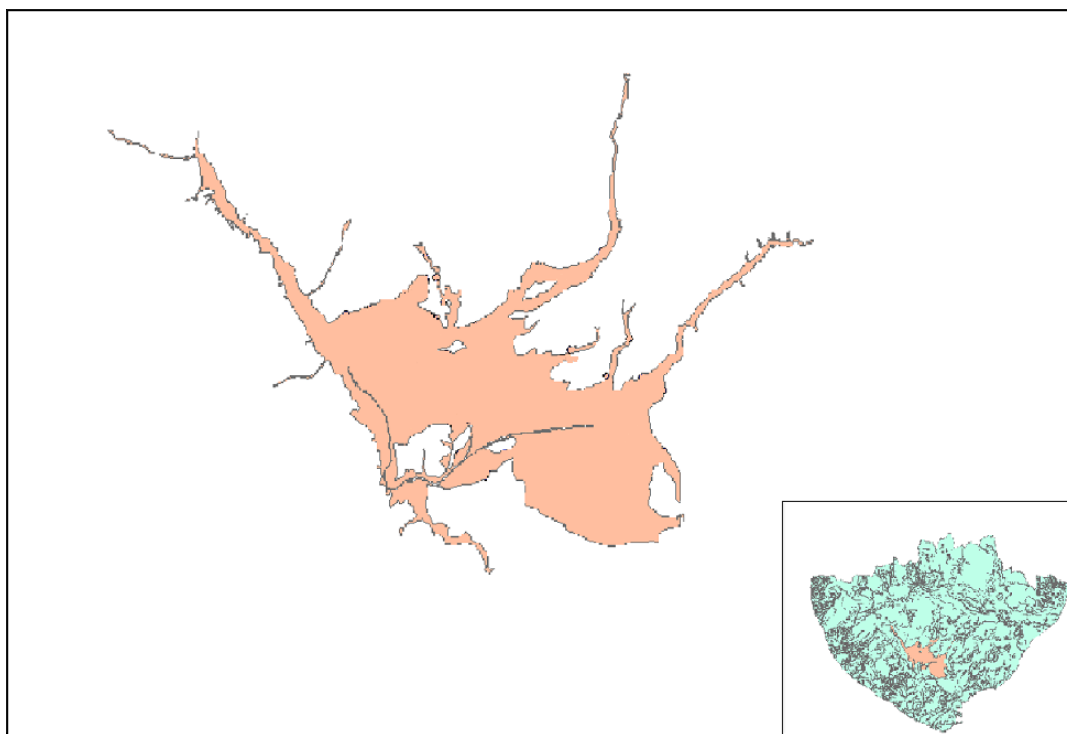
Σχήμα 3.1: Τα 14 Υδατικά Διαμερίσματα της Ελλάδας και το Υ.Δ. Ανατολικής Μακεδονίας (GR11) [4].

Γεωλογικά, το Υ.Δ. χαρακτηρίζεται από την ύπαρξη δύο μεγάλων γεωτεκτονικών ζωνών: τη Σερβομακεδονική μάζα και τη μάζα Ροδόπης. Οι δύο ζώνες αποτελούν ένα πολυσύνθετο τεκτονικό πεδίο στο οποίο συναντώνται ιζηματογενείς φάσεις ποτάμιου, ποταμοχειμάρριου ως λιμναίου παλαιοπεριβάλλοντος πάνω σε ένα αλπικής ηλικίας κρυσταλλικό υπόβαθρο. Στο πολυμεταμορφωμένο κρυσταλλικό υπόβαθρο διεισδύουν πυριγενή πετρώματα.

Οι υδροφόροι ορίζοντες που αναπτύσσονται στο Υ.Δ. Ανατολικής Μακεδονίας χωρίζονται σε δυο μεγάλες κατηγορίες: στους προσχωματικούς υδροφόρους των κοκκωδών σχηματισμών και στους καρστικούς υδροφόρους των ανθρακικών πετρωμάτων. Επιπλέον, μικρότερη κατηγορία συνιστούν οι υδροφόροι των ανθρακικών πετρωμάτων του νεογενούς και των ημιπερατών πετρωμάτων του αλπικού υποβάθρου.

Η κυριότερη χρήση του νερού στο Υ.Δ. είναι η αρδευτική (92%) ενώ το υπόλοιπο 8% κατανέμεται ως εξής: 5.3% για ύδρευση, 0.1% για τουρισμό, 2% για τη βιομηχανία και 0.6 για την κτηνοτροφία [4].

Η περιοχή στην οποία λαμβάνει χώρα η προτεινόμενη συγκριτική ανάλυση έχει έκταση 210 km^2 . Ο υπόγειος υδροφόρεας, ο οποίος καλύπτεται κυρίως από αλλουβιακές αποθέσεις, βρίσκεται κάτω από τμήματα των περιοχών Προσοτσάνης, Δράμας και Δοξάτου (Σχήμα 3.2).



Σχήμα 3.2: Η περιοχή μελέτης και η θέση της στο Υ.Δ. Ανατολικής Μακεδονίας.

Η χαρτογράφηση της περιοχής μελέτης και της χωρικής κατανομής των γεωτρήσεων υλοποιείται στο Γεωγραφικό Σύστημα Πληροφοριών ArcGis και ειδικότερα στο ArcMap. Για την ολοκληρωμένη διαχείριση του υπόγειου υδροφόρεα αναπτύσσονται κώδικες στη γλώσσα προγραμματισμού Matlab[®], σε περιβάλλον Windows.

3.2 Ανάλυση επικινδυνότητας ρύπου

Για τον υπόγειο υδροφόρεα στην περιοχή μελέτης τα διαθέσιμα δεδομένα αφορούν τόσο το ύψος της στάθμης των υπογείων υδάτων όσο και τη συγκέντρωση ρύπων σε κάποιες από τις γεωτρήσεις. Ειδικότερα για τους ρύπους, για το σύνολο των 250 γεωτρήσεων παρέχεται πληροφορία για την περιεκτικότητα Νιτρικών αλάτων (NO_3^-) σε 56 από αυτές. Το όριο ασφαλείας των 50 mg/l που έχει θεσπιστεί από την Ευρωπαϊκή νομοθεσία ξεπερνούν οι 6 από τις 56 γεωτρήσεις.

Για την ολοκληρωμένη διαχείριση του υπόγειου υδροφόρεα κρίνεται αναγκαίο να προσδιοριστεί ο κίνδυνος που σχετίζεται με την συγκέντρωση των Νιτρικών αλάτων σε αυτόν. Η αυξημένη περιεκτικότητα NO_3^- άνω του ορίου των 50 mg/l θα μπορούσε να οδηγήσει σε σοβαρό πρόβλημα της διαθεσιμότητας των υπογείων υδάτων του υδροφόρεα.

Για την εκτίμηση της επικινδυνότητας της συγκέντρωσης Νιτρικών αλάτων στην περιοχή μελέτης χρησιμοποιείται η τεχνική του *Kriging Δεικτών* (IK). Το IK έχει χρησιμοποιηθεί ευρέως για την ανάλυση επικινδυνότητας περιεκτικότητας ρύπων στο έδαφος και στα υπόγεια ύδατα, με στόχο την πρόληψη ή/και την αποκατάσταση των αντίστοιχων εγκαταστάσεων. Με το IK δύναται να εκτιμηθεί η πιθανότητα μιας μεταβλητής να υπερβαίνει μια κρίσιμη τιμή ή να βρίσκεται κάτω από αυτή.

Το IK χρησιμεύει στον προσδιορισμό της δεσμευμένης πιθανότητας σε σημεία που δεν συμπεριλαμβάνονται στο δείγμα, βασιζόμενο στη δομή της χωρικής εξάρτησης των μετασχηματισμένων δεδομένων με μια δίτιμη μεταβλητή (π.χ. 0 και 1). Το Kriging Δεικτών λειτουργεί όπως το Κανονικό Kriging (η βασική αλλαγή είναι η επιλογή μιας κρίσιμης τιμής) με μοναδική εξαίρεση ότι οι χάρτες που προκύπτουν έχουν τιμές αναφοράς μεταξύ 0 και 1, εκφράζοντας έτσι την πιθανότητα να συμβεί μια κατάσταση.

Η μέθοδος αυτή δεν απαιτεί να γίνουν παραδοχές σχετικά με την κατανομή των μεταβλητών, ενώ λαμβάνει υπόψη σε μεγάλο βαθμό την αβεβαιότητα των δεδομένων. Για την υλοποίησή της είναι απαραίτητη η μετατροπή των δεδομένων από συνεχή σε μια δυαδική μορφή, με βάση την κρίσιμη τιμή που θεσπίζεται. Με τον τρόπο αυτό επιτυγχάνεται ο χειρισμός ακραίων τιμών. Η κρίσιμη τιμή μπορεί να είναι είτε ένα εκατοστημόριο των δεδομένων είτε μια προκαθορισμένη τιμή ιδιαίτερης σημασίας για το υπό εξέταση πρόβλημα [21]. Συνεπώς, τα δεδομένα εκείνα που η τιμή τους ξεπερνάει την κρίσιμη τιμή λαμβάνουν την τιμή 1 ενώ τα υπόλοιπα λαμβάνουν την τιμή 0 (εξίσωση 3.1):

$$I_{z(s) \geq z'} = \begin{cases} 1, & z(s) \geq z' \\ 0, & otherwise \end{cases} \quad (3.1)$$

όπου

$I_{z(s) \geq z'}$: μια δίτιμη μεταβλητή

$z(s)$: η πειραματική τιμή

z' : η κρίσιμη τιμή.

Στην παρούσα μελέτη το Kriging Δεικτών εφαρμόζεται για την εκτίμηση της πιθανότητας η συγκέντρωση των Νιτρικών αλάτων να υπερβαίνει το όριο ασφαλείας των 50 mg/l. Συνεπώς, η κρίσιμη τιμή z' που καθορίζεται ισούται με 50 mg/l. Η περιεκτικότητα για κάθε μια από τις 6 γεωτρήσεις που υπερβαίνουν ή ισούνται με τα 50 mg/l λαμβάνει την τιμή 1 ενώ των υπολοίπων 50 λαμβάνει την τιμή 0.

Κατόπιν, έπεται ο προσδιορισμός του χωρικού προτύπου. Η απόσταση μεταξύ των σημείων παρατήρησης και εκτίμησης υπολογίζεται με τις μετρικές που παρουσιάζονται στην υποενότητα 2.3.1. Η εφαρμογή των διαφορετικών τύπων βοηθά να διερευνηθεί αν το θεωρητικό πρότυπο που επιλέγεται όταν χρησιμοποιείται η Ευκλείδεια απόσταση εξακολουθεί να είναι το βέλτιστο όταν οι αποστάσεις υπολογίζονται με κάποια άλλη μετρική.

Εν συνεχεία, το πειραματικό ημιβαριόγραμμα που προσδιορίζεται εφαρμόζοντας διαδοχικά ένα διαφορετικό μέτρο απόστασης, προσαρμόζεται σε διάφορα θεωρητικά πρότυπα. Στην παρούσα εργασία χρησιμοποιούνται τα εξής μοντέλα: Εκθετικό, Γκαουσιανό, Σφαιρικό, Δυναμονομικό, Γραμμικό, Matérn, Σπαρτιάτικο. Για την επιλογή του βέλτιστου ημιβαριογράμματος αναπτύσσονται τα κριτήρια Akaike, Cressie και η μέθοδος Ελαχίστων Τετραγώνων. Οι πίνακες για κάθε τύπο απόστασης παρουσιάζονται παρακάτω, ενώ τονίζονται οι βέλτιστες τιμές για κάθε κριτήριο επιλογής ημιβαριογράμματος.

Μοντέλο	RSS	I_{AIC}	I_C
Εκθετικό	0.005	-80.07	156.31
Γκαουσιανό	0.004	-83.22	140.69
Σφαιρικό	0.004	-82.29	143.03
Δυναμονομικό	0.007	-77.86	187.99
Γραμμικό	0.011	-73.71	840.03
Matérn	0.007	-75.04	213.59
Σπαρτιάτικο	0.005	-78.35	152.82

Πίνακας 3.1: Τιμές των τριών κριτηρίων για κάθε θεωρητικό πρότυπο όταν χρησιμοποιείται η Ευκλείδεια απόσταση.

Μοντέλο	RSS	I_{AIC}	I_C
Εκθετικό	0.007	-76.83	172.67
Γκαουσιανό	0.006	-79.21	156.53
Σφαιρικό	0.006	-78.71	156.59
Δυναμονομικό	0.009	-74.39	225.34
Γραμμικό	0.015	-70.40	$1.20 * 10^3$
Matérn	0.012	-68.67	456.54
Σπαρτιάτικο	0.007	-75.15	168.17

Πίνακας 3.2: Τιμές των τριών κριτηρίων για κάθε θεωρητικό πρότυπο όταν χρησιμοποιείται η απόσταση Minkowski ($p=3$).

Μοντέλο	RSS	I_{AIC}	I_C
Εκθετικό	0.003	-87.67	56.32
Γκαουσιανό	0.003	-88.37	86.73
Σφαιρικό	0.003	-88.11	51.89
Δυναμονομικό	0.003	-87.34	78.62
Γραμμικό	0.007	-79.31	645.99
Matérn	0.003	-85.53	69.78
Σπαρτιάτικο	0.003	-85.37	56.68

Πίνακας 3.3: Τιμές των τριών κριτηρίων για κάθε θεωρητικό πρότυπο όταν χρησιμοποιείται η απόσταση Manhattan.

Μοντέλο	RSS	I_{AIC}	I_C
Εκθετικό	0.002	-94.51	60.91
Γκαουσιανό	0.002	-94.93	94.86
Σφαιρικό	0.002	-94.66	59.96
Δυναμονομικό	0.002	-94.58	83.44
Γραμμικό	0.004	-85.59	769.61
Matérn	0.002	-92.59	83.44
Σπαρτιάτικο	0.002	-92.62	63.51

Πίνακας 3.4: Τιμές των τριών κριτηρίων για κάθε θεωρητικό πρότυπο όταν χρησιμοποιείται η απόσταση Canberra.

Μοντέλο	RSS	I_{AIC}	I_C
Εκθετικό	0.002	-90.06	96.18
Γκαουσιανό	0.002	-90.48	78.67
Σφαιρικό	0.002	-89.65	102.50
Δυναμονομικό	0.002	-89.75	111.68
Γραμμικό	0.007	-79.82	$1.30 * 10^3$
Matérn	0.003	-84.29	174.12
Σπαρτιάτικο	0.002	-87.49	99.20

Πίνακας 3.5: Τιμές των τριών κριτηρίων για κάθε θεωρητικό πρότυπο όταν χρησιμοποιείται η απόσταση Bray-Curtis.

Στους Πίνακες 3.1 και 3.2 μπορεί να παρατηρηθεί ότι, σύμφωνα με τα τρία κριτήρια προσαρμογής ημιβαριογράμματος, το θεωρητικό μοντέλο που προσομοιώνει καλύτερα τα πειραματικά δεδομένα όταν εφαρμόζονται η Ευκλείδεια και η Minkowski απόσταση αντίστοιχα, είναι το Γκαουσιανό. Ωστόσο, όταν η απόσταση υπολογίζεται με τις μετρικές Manhattan και Canberra, κάτι τέτοιο φαίνεται να μην ισχύει. Στις δύο αυτές περιπτώσεις, η τιμή που παίρνει ο δείκτης Cressie παίζει καθοριστικό ρόλο καθώς τόσο τα Ελάχιστα Τετράγωνα όσο και το κριτήριο Akaike δεν παρουσιάζουν σημαντικές αποκλίσεις μεταξύ των διαφορετικών θεωρητικών προτύπων. Συνεπώς, όταν εφαρμόζονται τα μέτρα απόστασης Manhattan και Canberra από τη διαδικασία προκρίνεται το Σφαιρικό μοντέλο. Αντίθετα, όταν χρησιμοποιείται η μετρική Bray-Curtis, η βέλτιστη προσαρμογή του θεωρητικού στο πειραματικό ημιβαριόγραμμα γίνεται από το Γκαουσιανό μοντέλο.

Κατά συνέπεια, για τις αποστάσεις Ευκλείδεια, Minkowski και Bray-Curtis προσδιορίζονται η μορφή και οι παράμετροι του Γκαουσιανού μοντέλου ενώ για τις αποστάσεις Manhattan και Canberra του Σφαιρικού μοντέλου. Οι αντίστοιχες τιμές φαίνονται στους Πίνακες 3.6 και 3.7.

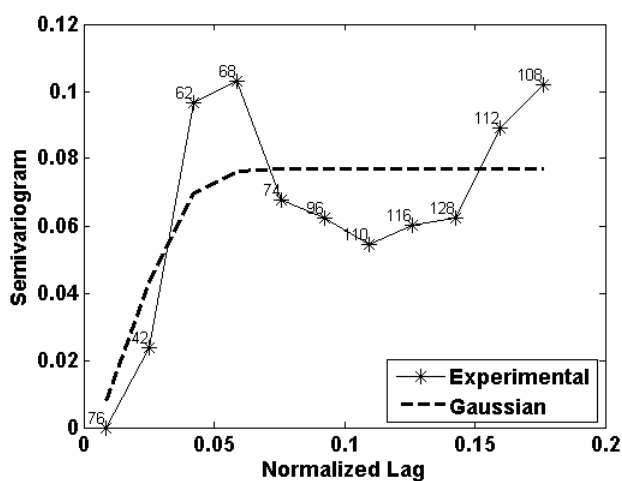
Απόσταση	Όριο	Μήκος συσχέτισης
Ευκλείδεια	0.077	0.028
Minkowski	0.073	0.022
Bray-Curtis	0.070	0.016

Πίνακας 3.6: Παράμετροι του Γκαουσιανού μοντέλου όπως αυτές προσδιορίζονται χρησιμοποιώντας διαδοχικά τις αποστάσεις Ευκλείδεια, Minkowski, Bray-Curtis.

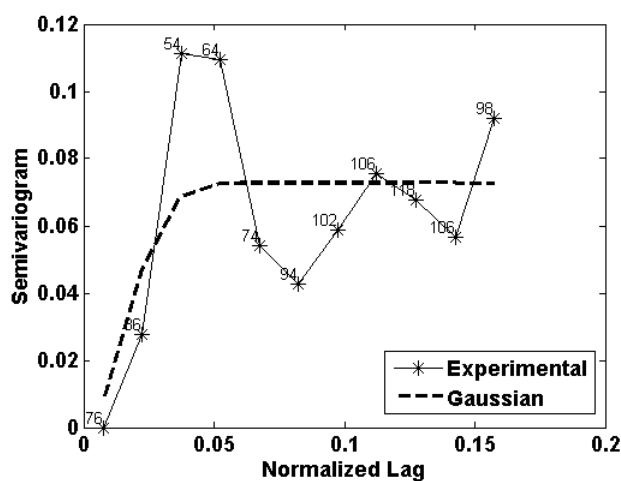
Απόσταση	Όριο	Μήκος συσχέτισης
Manhattan	0.079	0.082
Canberra	0.061	0.096

Πίνακας 3.7: Παράμετροι του Σφαιρικού μοντέλου όπως αυτές προσδιορίζονται χρησιμοποιώντας διαδοχικά τις αποστάσεις Manhattan και Canberra.

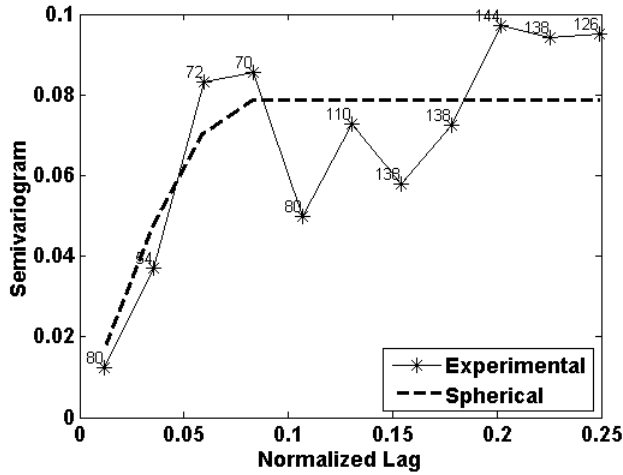
Η προσαρμογή του Γκαουσιανού μοντέλου στο πειραματικό ημιβαριόγραμμα για κάθε μια από τις αποστάσεις Ευκλείδεια, Minkowski, Bray-Curtis περιγράφεται αντίστοιχα στα Σχήματα 3.3, 3.4, 3.7 ενώ του Σφαιρικού μοντέλου για τις αποστάσεις Manhattan και Canberra στα Σχήματα 3.5 και 3.6, αντιστοίχως. Σε κάθε γραφική παράσταση φαίνεται επίσης ο αριθμός των ζευγών που χρησιμοποιούνται σε κάθε lag.



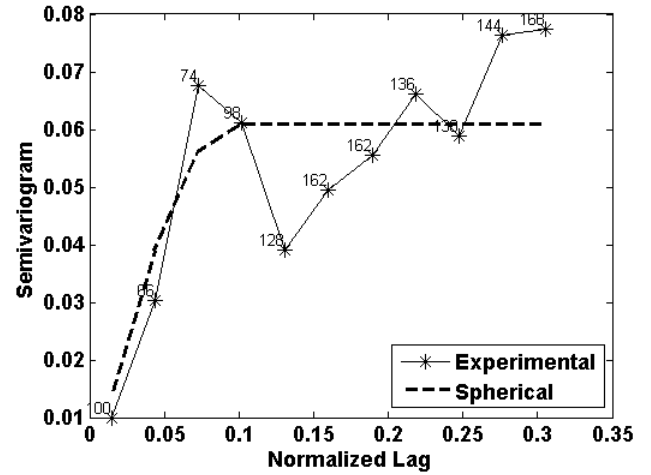
Σχήμα 3.3: Γραφική παράσταση του Γκαουσιανού μοντέλου και του πειραματικού ημιβαριογράμματος, όταν εφαρμόζεται η Ευκλείδεια απόσταση (εκτιμώμενες παράμετροι: $\sigma_z^2 = 0.077, \xi = 0.028$).



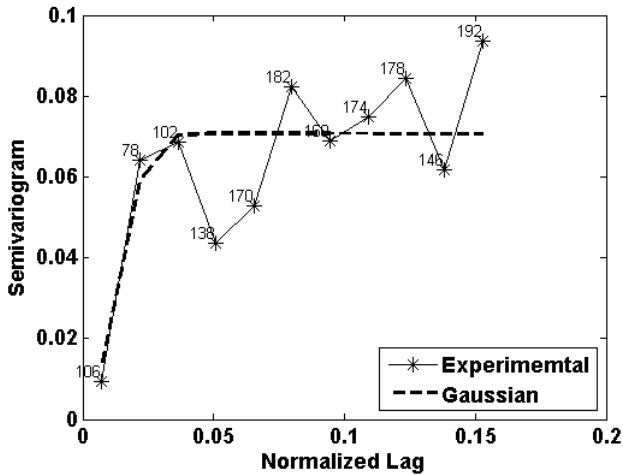
Σχήμα 3.4: Γραφική παράσταση του Γκαουσιανού μοντέλου και του πειραματικού ημιβαριογράμματος, όταν εφαρμόζεται η απόσταση Minkowski, για $p=3$ (εκτιμώμενες παράμετροι: $\sigma_z^2 = 0.077, \xi = 0.073$).



Σχήμα 3.5: Γραφική παράσταση του Σφαιρικού μοντέλου και του πειραματικού ημιβαριογράμματος, όταν εφαρμόζεται η απόσταση Manhattan (εκτιμώμενες παράμετροι: $\sigma_z^2 = 0.079$, $\xi = 0.082$).



Σχήμα 3.6: Γραφική παράσταση του Σφαιρικού μοντέλου και του πειραματικού ημιβαριογράμματος, όταν εφαρμόζεται η απόσταση Canberra, (εκτιμώμενες παράμετροι: $\sigma_z^2 = 0.061$, $\xi = 0.096$).



Σχήμα 3.7: Γραφική παράσταση του Γκαουσιανού μοντέλου και του πειραματικού ημιβαριογράμματος, όταν εφαρμόζεται η απόσταση Bray-Curtis (εκτιμώμενες παράμετροι: $\sigma_z^2 = 0.070$, $\xi = 0.016$).

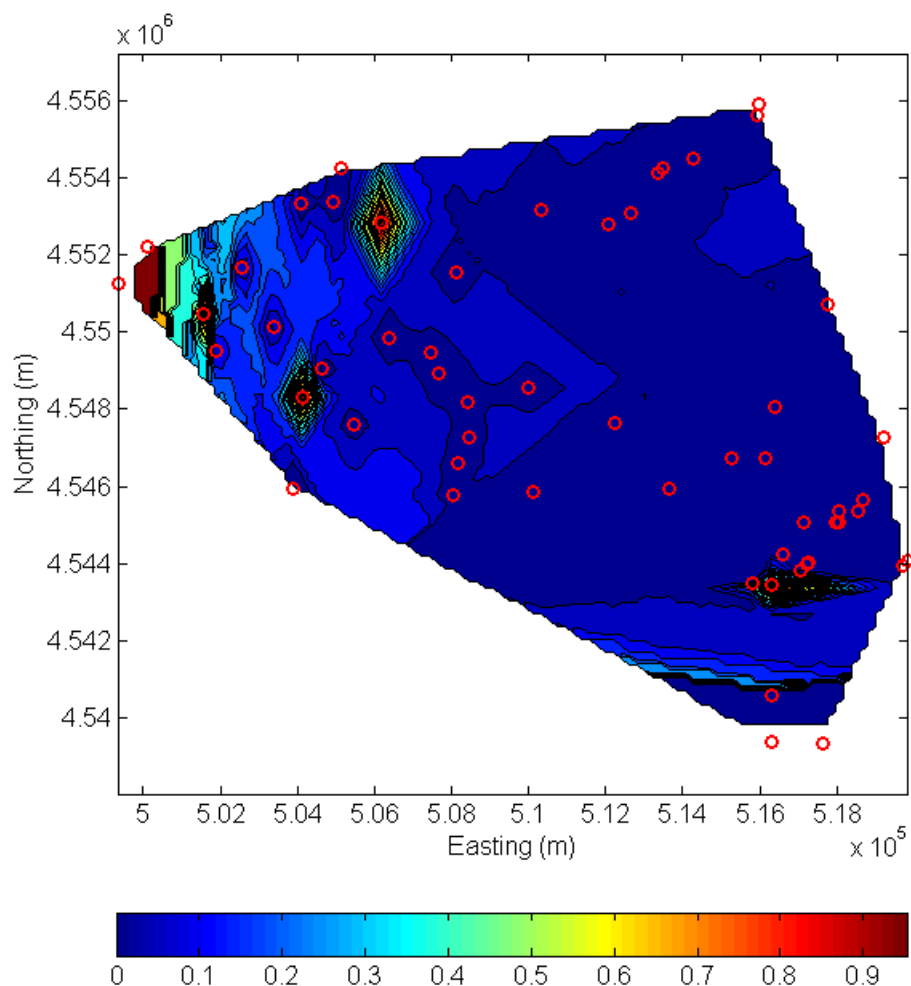
Στον Πίνακα 3.8 φαίνονται τα αποτελέσματα της σύγκρισης μεταξύ των τιμών που λαμβάνουν τα κριτήρια RSS, I_{AIC} και I_C όταν εφαρμόζονται οι πέντε αποστάσεις σε συνδυασμό με το βέλτιστο χωρικό μοντέλο που αντιστοιχεί σε κάθε μια από αυτές, όπως αυτό προσδιορίστηκε παραπάνω.

Απόσταση	Μοντέλο	RSS	I_{AIC}	I_C
Ευκλείδεια	Γκαουσιανό	0.004	-83.22	140.69
Minkowski	Γκαουσιανό	0.006	-79.21	156.53
Manhattan	Σφαιρικό	0.003	-88.11	51.89
Canberra	Σφαιρικό	0.002	-94.66	59.96
Bray-Curtis	Γκαουσιανό	0.002	-90.48	78.67

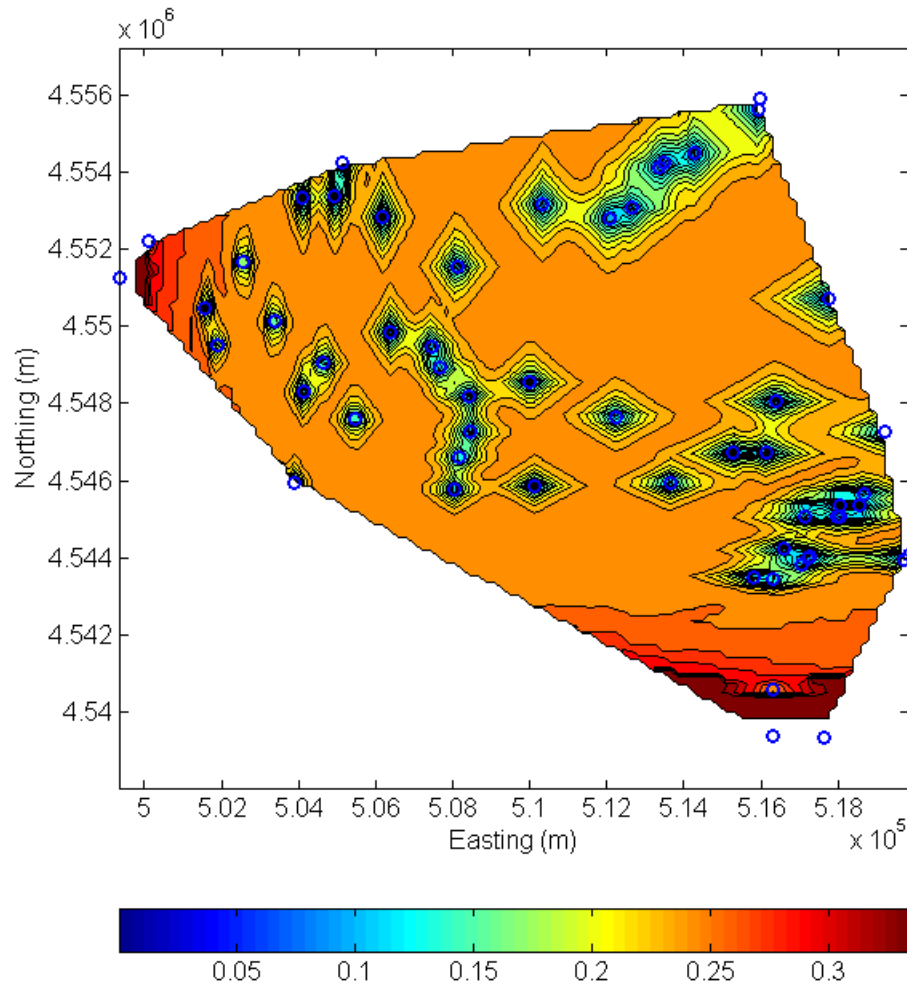
Πίνακας 3.8: Τιμές που λαμβάνουν τα τρία κριτήρια για το βέλτιστο θεωρητικό πρότυπο που αντιστοιχεί σε κάθε τύπο απόστασης.

Σύμφωνα με τον παραπάνω πίνακα, είναι εμφανές ότι δύο από τα τρία κριτήρια (RSS και I_{AIC}) παίρνουν τις μικρότερες τιμές τους όταν συνδυάζονται η απόσταση Canberra με το Σφαιρικό μοντέλο. Συνεπώς, η χαρτογράφηση της πιθανότητας η συγκέντρωση των Νιτρικών αλάτων να υπερβαίνει την κρίσιμη τιμή των 50 mg/l και της αβεβαιότητας της εκτίμησης, σε πλέγμα 100×100 , στα πλαίσια του Kriging Δεικτών, υλοποιείται χρησιμοποιώντας τις παραμέτρους του Σφαιρικού μοντέλου που προκύπτουν από τον συνδυασμό αυτόν (Πίνακας 3.7).

Οι δύο χάρτες παρουσιάζονται στα Σχήματα 3.8 και 3.9, ενώ τονίζονται σε αυτά με κόκκινους και μπλε κύκλους αντίστοιχα οι 56 γεωτρήσεις του δείγματος, οι οποίες αφορούν την περιεκτικότητα των Νιτρικών αλάτων.



Σχήμα 3.8: Χάρτης ισοϋψών καμπυλών της εκτιμώμενης πιθανότητας η συγκέντρωση των Νιτρικών αλάτων να υπερβαίνει τα 50 mg/l στην περιοχή μελέτης.



Σχήμα 3.9: Χάρτης ισοϋψών καμπυλών της αβεβαιότητας της εκτίμησης με την τεχνική Kriging Δεικτών στην περιοχή μελέτης.

Παρατηρώντας τα παραπάνω σχήματα, είναι φανερό πως η πιθανότητα εμφάνισης κινδύνου στην περιοχή μελέτης που αφορά την παρουσία NO_3^- είναι πολύ χαμηλή. Η τυπική απόκλιση του ΙΚ για την πιθανότητα αυξημένης συγκέντρωσης Νιτρικών αλάτων στην περιοχή είναι πολύ μικρή, γεγονός που υποδεικνύει ότι δεν συντρέχει λόγος ανησυχίας για τα υπόγεια ύδατα του συγκεκριμένου υδροφορέα.

Κεφάλαιο 4

Χωρική εκτίμηση της στάθμης του υπόγειου υδροφορέα

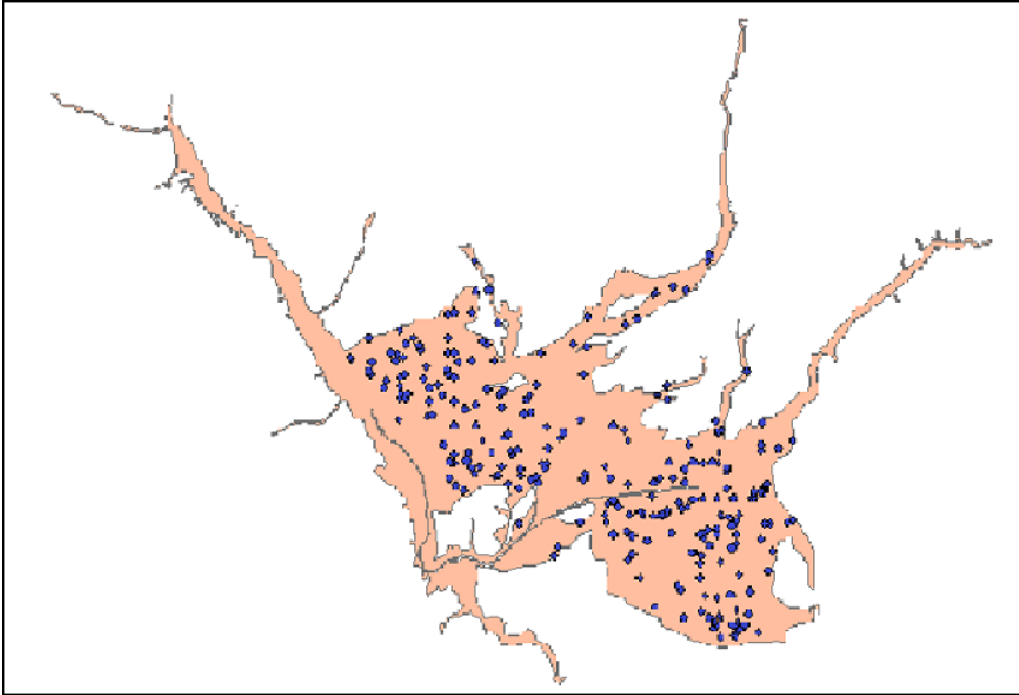
4.1 Στατιστικός έλεγχος δείγματος

Αφού ολοκληρωθεί η ανάλυση επικινδυνότητας ρύπου στην περιοχή μελέτης, έπεται η χωρική εκτίμηση της στάθμης του υπόγειου υδροφορέα. Η γεωστατιστική ανάλυση πραγματοποιείται για ένα σύνολο δεδομένων αποτελούμενο από 250 μετρήσεις υδραυλικών υψών. Η κατανομή τους στο χώρο φαίνεται στο Σχήμα 4.1.

Όπως προαναφέρθηκε στην ενότητα 2.1, πριν από κάθε γεωστατιστική ανάλυση είναι απαραίτητη η διερευνητική στατιστική ανάλυση του δείγματος, ώστε να προσδιοριστούν τα στατιστικά μέτρα που το χαρακτηρίζουν. Οι τιμές των μέτρων αυτών για το σύνολο των 250 υδραυλικών υψών στην περιοχή μελέτης φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

z_{min}	$z_{0.25}$	$z_{0.50}$	m_z	$z_{0.75}$	z_{max}	$\hat{\sigma}_z$	\hat{s}_z	\hat{k}_z
0.9	2.5	4	5.21	7.6	22	3.76	1.58	6.04
masl	masl	masl	masl	masl	masl	masl	-	-

Πίνακας 4.1: Στατιστικά μεγέθη των υπό εξέταση υδραυλικών υψών.

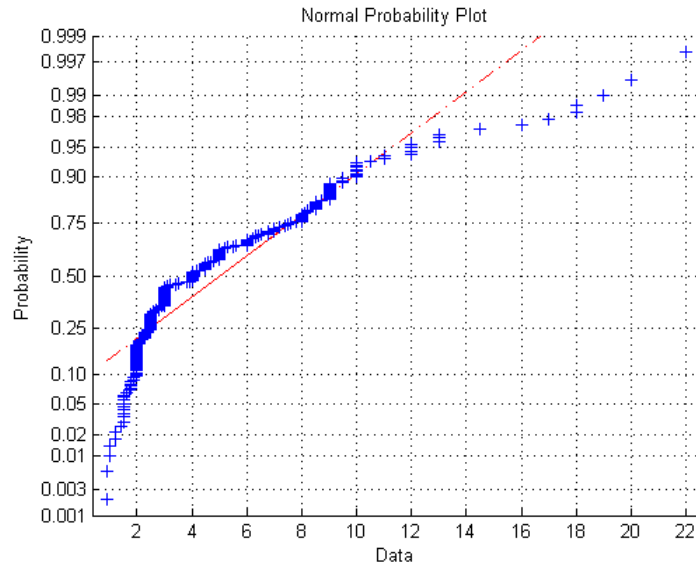


Σχήμα 4.1: Χωρική κατανομή των 250 πηγαδιών στην επιφάνεια του υδροφορέα.

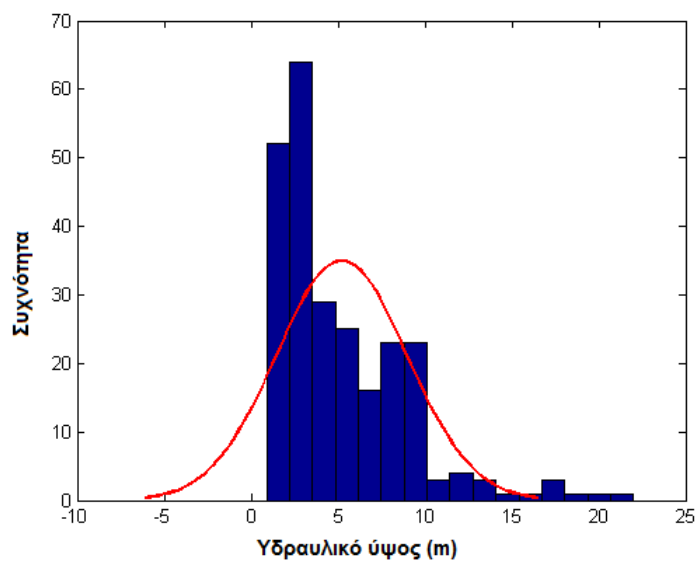
Παρατηρείται ωστόσο ότι τόσο η ασυμμετρία (\hat{s}_z) όσο και η κύρτωση (\hat{k}_z) του δείγματος διαφέρουν αρκετά από τα αντίστοιχα στατιστικά της Κανονικής κατανομής ($\hat{s}_z = 0, \hat{s}_z = 3$).

Η μη-κανονικότητα των δεδομένων μπορεί να παρατηρηθεί και γραφικά από το διάγραμμα πιθανοτήτων των υδραυλικών υψών (Σχήμα 4.2).

Η συχνότητα εμφάνισης των μετρήσεων του δείγματος στα αντίστοιχα διαστήματα υδραυλικών υψών σε σύγκριση με την κανονική κατανομή δίνεται από το ιστόγραμμα που παρουσιάζεται στη συνέχεια (Σχήμα 4.3).



Σχήμα 4.2: Διάγραμμα πιθανοτήτων των υδραυλικών υψών στην περιοχή μελέτης.



Σχήμα 4.3: Ιστογράμμα υδραυλικών υψών σε σύγκριση με την Κανονική κατανομή.

Για τις ανάγκες της παρούσας εργασίας, εφαρμόζονται τρεις διαφορετικές τεχνικές χωρικής ανάλυσης:

- i. Ο προσδιορισμός της στάθμης του υδροφορέα με βάση το αυθεντικό σύνολο δεδομένων.
- ii. Η γεωστατιστική ανάλυση της περιοχής μελέτης με χρήση Ασαφούς Συστήματος.
- iii. Η χωρική εκτίμηση της στάθμης του υδροφορέα μετασχηματίζοντας τα αυθεντικά δεδομένα με τη μέθοδο *Box-Cox*.

4.2 Χωρική εκτίμηση με το αυθεντικό σύνολο δεδομένων

Ακολουθώντας το Σχήμα 2.4, η διαδικασία που έπεται της διερευνητικής στατιστικής ανάλυσης, εφόσον τα δεδομένα δεν μετασχηματίζονται και δεν χρησιμοποιείται κάποιο Σύστημα Ασαφούς Λογικής, είναι ο προσδιορισμός του προτύπου χωρικής συνέχειας. Οι αποστάσεις μεταξύ των σημείων παρατήρησης και εκτίμησης υπολογίζονται με τις μετρικές Ευκλείδεια, Minkowski, Manhattan, Canberra και Bray-Curtis.

Στη συνέχεια υπολογίζεται το πειραματικό ημιβαριόγραμμα των υδραυλικών υψών, εφαρμόζοντας κάθε φορά, διαδοχικά, ένα διαφορετικό μέτρο απόστασης. Το κάθε πειραματικό μοντέλο προσαρμόζεται σε διάφορα θεωρητικά. Τα μοντέλα που χρησιμοποιούνται σε αυτήν την περίπτωση, όπως και στην ενότητα 3.2 είναι τα εξής: Εκθετικό, Γκαουσιανό, Σφαιρικό, Δυναμονομικό, Γραμμικό, Matérn, Σπαρτάτικο. Για την επιλογή του βέλτιστου μοντέλου αναπτύσσονται και εδώ τα τρία κριτήρια: Akaike, Cressie, Ελάχιστα Τετράγωνα. Οι αντίστοιχοι πίνακες για κάθε τύπο απόστασης παρουσιάζονται στη συνέχεια. Δίνονται με έμφαση οι μικρότερες τιμές των δεικτών σε κάθε πίνακα.

ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗ ΥΠΟΓΕΙΟΥ ΤΑΡΟΦΟΡΕΑ
ΜΕ ΧΡΗΣΗ ΓΕΩΣΤΑΤΙΣΤΙΚΩΝ ΜΕΘΟΔΩΝ ΚΑΙ ΑΣΑΦΟΥΣ ΛΟΓΙΚΗΣ

Μοντέλο	RSS	I_{AIC}	I_C
Εκθετικό	13.25	6.05	636.61
Γκαουσιανό	12.95	5.79	622.18
Σφαιρικό	12.35	5.27	641.59
Δυναμονομικό	9.74	2.67	413.95
Γραμμικό	54.98	19.70	$2.81 * 10^4$
Matérn	14.42	8.98	675.30
Σπαρτιάτικο	48.57	22.34	$2.06 * 10^4$

Πίνακας 4.2: Πίνακας των τιμών που λαμβάνουν τα κριτήρια για κάθε θεωρητικό μοντέλο όταν χρησιμοποιείται η Ευκλείδεια απόσταση.

Μοντέλο	RSS	I_{AIC}	I_C
Εκθετικό	12.48	5.70	720.52
Γκαουσιανό	14.76	7.23	869.06
Σφαιρικό	14.72	7.20	855.08
Δυναμονομικό	5.45	-3.72	276.65
Γραμμικό	47.64	18.12	$3.06 * 10^4$
Matérn	6.97	0.97	363.07
Σπαρτιάτικο	12.70	7.58	727.94

Πίνακας 4.4: Πίνακας των τιμών που λαμβάνουν τα κριτήρια για κάθε θεωρητικό μοντέλο όταν χρησιμοποιείται η απόσταση Manhattan.

Μοντέλο	RSS	I_{AIC}	I_C
Εκθετικό	16.93	8.75	$3.78 * 10^3$
Γκαουσιανό	43.27	19.07	$1.96 * 10^5$
Σφαιρικό	25.23	13.13	$1.26 * 10^4$
Δυναμονομικό	6.24	-2.23	382.05
Γραμμικό	39.07	15.94	$2.85 * 10^4$
Matérn	12.03	6.98	$2.03 * 10^4$
Σπαρτιάτικο	26.34	15.60	$1.23 * 10^4$

Πίνακας 4.6: Πίνακας των τιμών που λαμβάνουν τα κριτήρια για κάθε θεωρητικό μοντέλο όταν χρησιμοποιείται η απόσταση Bray-Curtis.

Μοντέλο	RSS	I_{AIC}	I_C
Εκθετικό	11.92	4.88	539.05
Γκαουσιανό	13.39	6.16	668.89
Σφαιρικό	10.58	3.57	517.58
Δυναμονομικό	10.87	3.87	425.58
Γραμμικό	62.28	21.07	$2.92 * 10^4$
Matérn	14.22	8.83	635.77
Σπαρτιάτικο	55.72	23.85	$2.16 * 10^4$

Πίνακας 4.3: Πίνακας των τιμών που λαμβάνουν τα κριτήρια για κάθε θεωρητικό μοντέλο όταν χρησιμοποιείται η απόσταση Minkowski (για $p=3$).

Μοντέλο	RSS	I_{AIC}	I_C
Εκθετικό	28.94	14.64	$3.17 * 10^3$
Γκαουσιανό	37.76	17.57	$1.61 * 10^3$
Σφαιρικό	42.89	18.97	$1.59 * 10^4$
Δυναμονομικό	11.98	4.94	460.71
Γραμμικό	55.40	19.78	$3.59 * 10^4$
Matérn	15.56	9.82	653.77
Σπαρτιάτικο	28.56	16.50	$2.73 * 10^3$

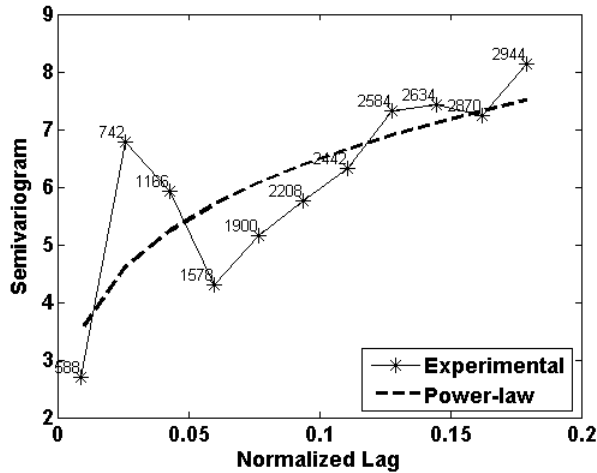
Πίνακας 4.5: Πίνακας των τιμών που λαμβάνουν τα κριτήρια για κάθε θεωρητικό μοντέλο όταν χρησιμοποιείται η απόσταση Canberra.

Από τους παραπάνω πίνακες διακρίνεται πως και τα τρία κριτήρια προκρίνουν το Δυναμονομικό μοντέλο ως βέλτιστο. Μοναδική εξαίρεση αποτελεί η περίπτωση στην οποία χρησιμοποιείται η απόσταση Minkowski. Στην περίπτωση αυτή, σύμφωνα με τη μέθοδο των Ελαχίστων Τετραγώνων και το κριτήριο Akaike το Σφαιρικό μοντέλο φαίνεται να είναι το βέλτιστο ενώ ο δείκτης Cressie προκρίνει το Δυναμονομικό. Ωστόσο, η διαφορά μεταξύ των τιμών των αντίστοιχων δεικτών του Σφαιρικού και του Δυναμονομικού μοντέλου μπορεί να χαρακτηριστεί ως αμελητέα και τελικά να επιλεγεί το Δυναμονομικό πρότυπο ως βέλτιστο και σε αυτήν την περίπτωση. Έτσι, σε όλες τις περιπτώσεις το πειραματικό ημιβαριόγραμμα προσομοιώνεται τελικά από το Δυναμονομικό μοντέλο. Οι εκτιμώμενες τιμές των παραμέτρων του μοντέλου φαίνονται στον Πίνακα 4.7.

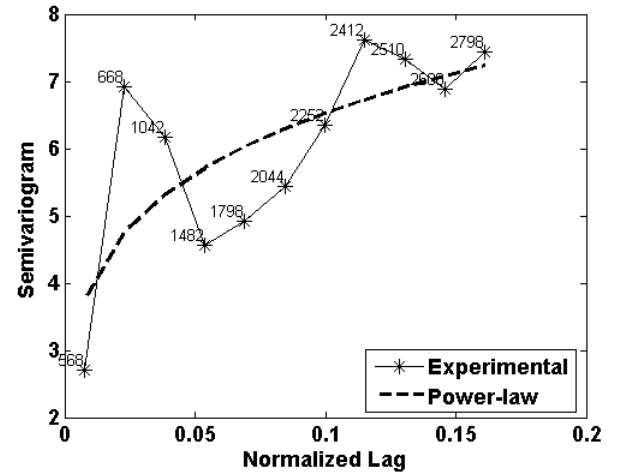
Απόσταση	Παράμετρος μορφής	Εκθέτης Hurst
Ευκλείδεια	11.54	0.12
Minkowski	10.72	0.11
Manhattan	12.06	0.15
Canberra	15.37	0.17
Bray-Curtis	24.59	0.22

Πίνακας 4.7: Παράμετροι του Δυναμονομικού μοντέλου όπως αυτές προσδιορίζονται χρησιμοποιώντας κάθε φορά ένα διαφορετικό μέτρο απόστασης.

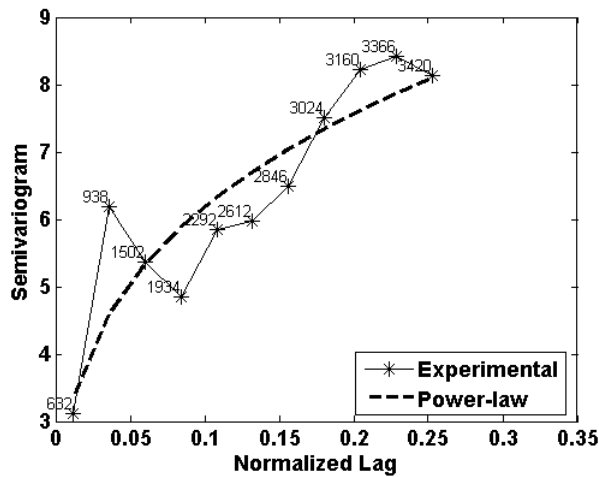
Η προσαρμογή του Δυναμονομικού μοντέλου στο πειραματικό ημιβαριόγραμμα, καθώς και ο αριθμός των ζευγών που χρησιμοποιούνται σε κάθε lag, για κάθε μια από τις πέντε αποστάσεις, φαίνονται στα παρακάτω διαγράμματα:



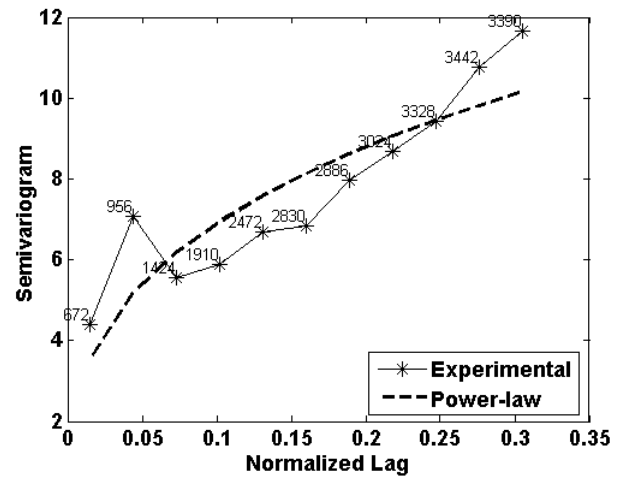
Σχήμα 4.4: Γραφική παράσταση του Δυναμονομικού μοντέλου και του πειραματικού ημιβαριογράμματος, όταν χρησιμοποιείται η Ευκλείδεια απόσταση (εκτιμώμενες παράμετροι: $c = 11.54$, $H = 0.12$).



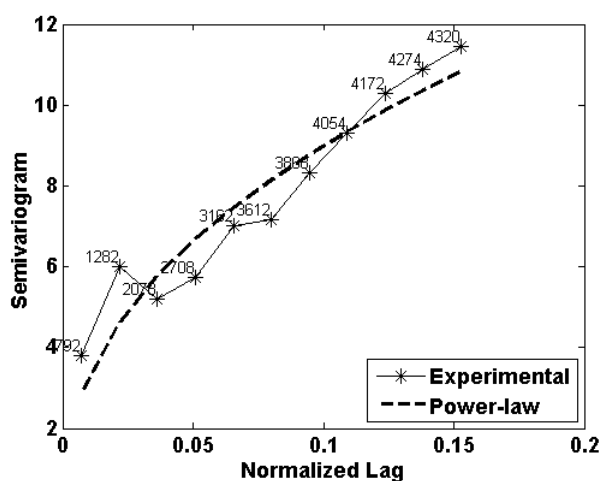
Σχήμα 4.5: Γραφική παράσταση του Δυναμονομικού μοντέλου και του πειραματικού ημιβαριογράμματος, όταν χρησιμοποιείται η απόσταση Minkowski, για $p=3$ (εκτιμώμενες παράμετροι: $c = 10.72$, $H = 0.11$).



Σχήμα 4.6: Γραφική παράσταση του Δυναμονομικού μοντέλου και του πειραματικού ημιβαριογράμματος, όταν χρησιμοποιείται η απόσταση Manhattan (εκτιμώμενες παράμετροι: $c = 12.06$, $H = 0.15$).



Σχήμα 4.7: Γραφική παράσταση του Δυναμονομικού μοντέλου και του πειραματικού ημιβαριογράμματος, όταν χρησιμοποιείται η απόσταση Canberra (εκτιμώμενες παράμετροι: $c = 15.37$, $H = 0.22$).



Σχήμα 4.8: Γραφική παράσταση του Δυναμονομικού μοντέλου και του πειραματικού ημιβαριογράμματος, όταν χρησιμοποιείται η απόσταση Bray-Curtis (εκτιμώμενες παράμετροι: $c = 24.59$, $H = 0.22$).

Για τη χωρική εκτίμηση της στάθμης σε όλο τον υπόγειο υδροφόρο με βάση το σύνολο των 250 υδραυλικών υψών χρησιμοποιείται η μέθοδος του Κανονικού Kriging σε πλέγμα 100×100 . Για την επαλήθευση του χωρικού μοντέλου ακολουθείται η μέθοδος της διασταυρωμένης επιβεβαίωσης. Τα στατιστικά μέτρα που διερευνώνται, όπως αυτά παρουσιάστηκαν στην υποενότητα 2.4.3, όταν χρησιμοποιείται καθένα από τα πέντε διαφορετικά μέτρα απόστασης, για το βέλτιστο θεωρητικό πρότυπο (Δυναμονομικό), παρουσιάζονται στον Πίνακα 4.8.

Στον Πίνακα 4.9 φαίνονται συγκεντρωτικά οι τιμές που λαμβάνουν τα Ελάχιστα Τετράγωνα, τα κριτήρια Akaike και Cressie και το Μέσο Απόλυτο Σφάλμα (MAE) όταν το θεωρητικό ημιβαριόγραμμα προσομοιώνεται από το Δυναμονομικό μοντέλο, για κάθε μια από τις πέντε αποστάσεις. Τονίζονται οι βέλτιστες τιμές.

Απόσταση	MAE masl	BIAS masl	MARE -	RMSE masl	R -
Ευκλείδεια	1.68	-0.04	0.42	2.65	0.71
Minkowski	1.68	-0.04	0.42	2.64	0.71
Manhattan	1.70	-0.03	0.43	2.67	0.70
Canberra	1.78	-0.02	0.45	2.73	0.69
Bray-Curtis	1.73	-0.04	0.43	2.73	0.69

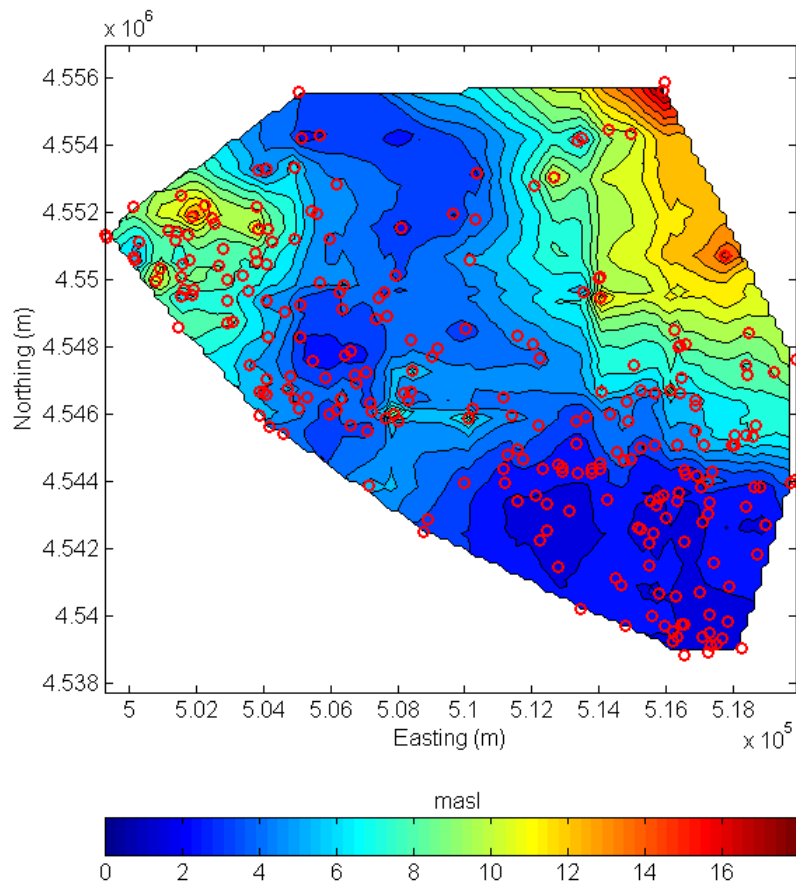
Πίνακας 4.8: Στατιστικά μέτρα της διασταυρωμένης επιβεβαίωσης που υλοποιείται για την επαλήθευση του χωρικού μοντέλου με βάση το βέλτιστο ημιβαριόγραμμα (Δυναμονομικό). Η διαδικασία εφαρμόζεται για όλους τους τύπους αποστάσεων.

Απόσταση	RSS -	I_{AIC} -	I_C -	MAE masl
Ευκλείδεια	9.74	2.67	413.95	1.68
Minkowski	10.87	3.87	425.58	1.68
Manhattan	5.45	-3.72	276.65	1.70
Canberra	11.98	4.94	460.71	1.78
Bray-Curtis	6.24	-2.23	382.05	1.73

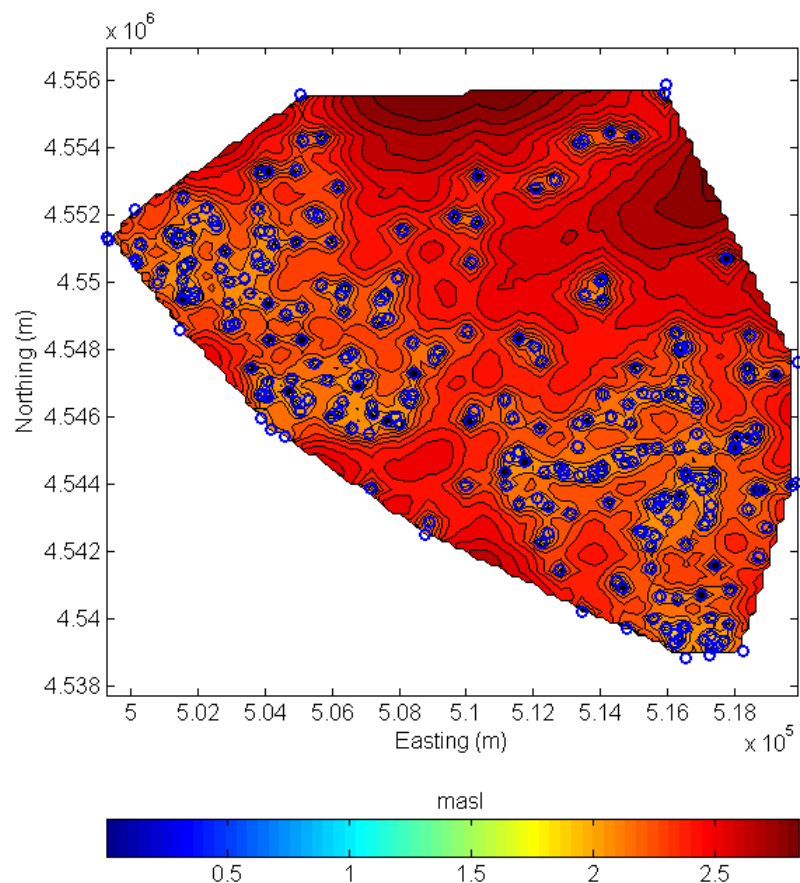
Πίνακας 4.9: Τιμές των τριών κριτηρίων και του Μέσου Απολύτου Σφάλματος για κάθε τύπο απόστασης, για το Δυναμονομικό μοντέλο.

Είναι εμφανές πως και οι τρεις δείκτες επιβεβαιώνουν ότι το Δυναμονομικό μοντέλο, (το οποίο έχει επιλεγεί ως βέλτιστο από τις επιμέρους διαδικασίες για κάθε τύπο απόστασης) προσεγγίζει καλύτερα το πειραματικό ημιβαριόγραμμα όταν χρησιμοποιείται η απόσταση Manhattan. Σύμφωνα με τη διασταυρωμένη επιβεβαίωση, που υλοποιείται στα πλαίσια του Κανονικού Kriging, ο συνδυασμός του Δυναμονομικού μοντέλου με την απόσταση Manhattan προσομοιώνει πολύ καλά τα δεδομένα καθώς η τιμή του Μέσου Απολύτου Σφάλματος (MAE) σε αυτήν την περίπτωση (1.68) βρίσκεται πολύ κοντά στην αντίστοιχη τιμή όταν η απόσταση υπολογίζεται με την Ευκλείδεια μετρική (1.70).

Το επόμενο βήμα, μετά την επαλήθευση του χωρικού μοντέλου είναι η χαρτογράφηση της στάθμης των υπογείων υδάτων στην περιοχή μελέτης και η αποτύπωση του σφάλματος εκτίμησης. Οι δυο χάρτες κατασκευάζονται με τη βοήθεια του Δυναμονομικού μοντέλου ($c=12.06$, $H=0.15$), όταν η απόσταση των σημείων παρατήρησης και πρόβλεψης υπολογίζεται με τον τύπο Manhattan. Το Σχήμα 4.9 περιγράφει την εκτιμώμενη χωρική μεταβλητότητα των υδραυλικών υψών στον υπόγειο υδροφόρα ενώ στο Σχήμα 4.10 παρουσιάζεται η τυπική απόκλιση της στάθμης στα πλαίσια του Κανονικού Kriging.



Σχήμα 4.9: Χάρτης ισοϒψών καμπυλών της στάθμης του υπόγειου υδροφορέα στην περιοχή μελέτης. Οι κόκκινοι κύκλοι υποδεικνύουν τις θέσεις των 250 γεωτρήσεων.



Σχήμα 4.10: Χάρτης ισοϋψών καμπυλών της OK τυπικής απόκλισης για τη στάθμη του υπόγειου υδροφορέα στην περιοχή μελέτης. Οι μπλε κύκλοι υποδεικνύουν τις θέσεις των 250 γεωτρήσεων.

Σύμφωνα με τα αποτελέσματα που προέκυψαν από τη χαρτογράφηση της χωρικής εκτίμησης υδραυλικών υψών (Σχήμα 4.9) η στάθμη στον υπόγειο υδροφορέα δεν αναμένεται να ξεπεράσει την μέγιστη τιμή του δείγματος (22 masl). Ωστόσο, η αβεβαιότητα της εκτίμησης φαίνεται να είναι σχετικά μεγάλη, ιδιαίτερα στα σημεία του υδροφορέα όπου υπάρχουν λίγα δεδομένα μετρήσεων (Σχήμα 4.10). Αυτό μπορεί να συμβαίνει είτε γιατί στην διαδικασία της εκτίμησης συμπεριλαμβάνονται και δεδομένα που δεν έχουν ουσιαστική επίδραση στο εκάστοτε σημείο πρόβλεψης είτε λόγω της μη-κανονικότητας του δείγματος. Οι δυο αυτές περιπτώσεις διερευνώνται στις ενότητες 4.3 και 4.4.

4.3 Γεωστατιστική ανάλυση με χρήση Ασαφούς Συστήματος

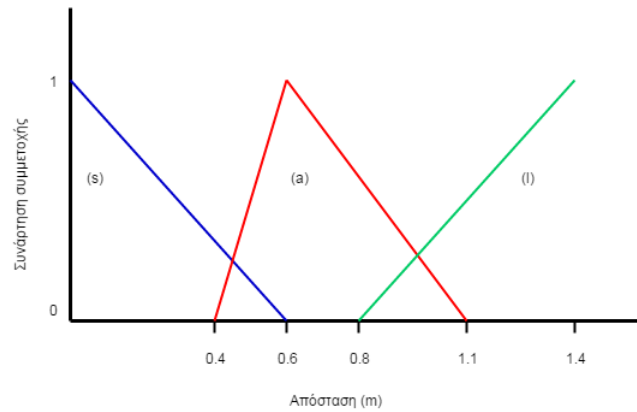
Με τη χρήση ενός Συστήματος Ασαφούς Λογικής δύναται να δημιουργηθούν μικρές γειτονιές γύρω από κάποιο σημείο εκτίμησης, ώστε να συμπεριληφθούν στη διαδικασία Kriging μόνο οι μετρήσεις που έχουν πραγματικά σημαντική επίδραση στο σημείο αυτό. Με τον τρόπο αυτό αναμένεται να βελτιωθεί η αποδοτικότητα της πρόβλεψης.

Στην παρούσα εργασία συνδυάζονται δύο παράμετροι για τη δημιουργία του Ασαφούς Συστήματος: η απόσταση των σημείων παρατήρησης από τα σημεία εκτίμησης (αν και θα μπορούσε να υλοποιηθεί για κάθε τύπο απόστασης, για λόγους απλοποίησης χρησιμοποιείται η Ευκλείδεια) και η τιμή του υδραυλικού ύψους σε κάθε σημείο του δείγματος. Από τον στατιστικό έλεγχο που προηγήθηκε, παρατηρείται το εξής: η μέση τιμή του δείγματος (m_z) ισούται με 5.21 masl ενώ το 75% των υδραυλικών κεφαλών έχει μέση τιμή 7.6 masl. Συνεπώς, κρίνεται αναγκαίο να συμπεριληφθούν στην εκτίμηση μόνο τα σημεία που έχουν μικρή τιμή στάθμης αλλά είναι και πιο κοντά στο κάθε σημείο εκτίμησης, δημιουργώντας έτσι τους κατάλληλους γείτονες για κάθε ένα από αυτά.

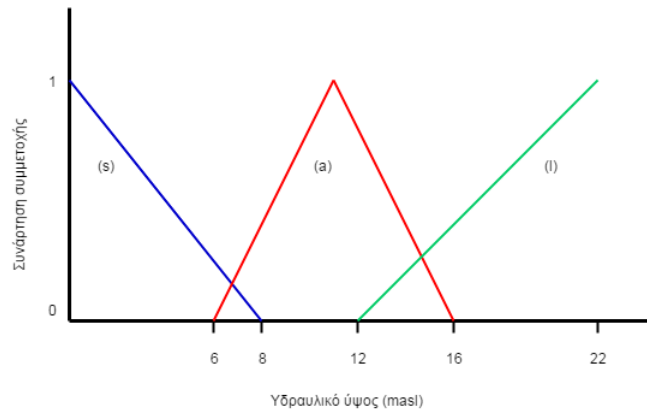
Σύμφωνα με το Σχήμα 2.4, αφού ολοκληρωθεί ο στατιστικός έλεγχος και τα δεδομένα δεν υπόκεινται σε κάποιον μετασχηματισμό, μπορεί να δημιουργηθεί ένα Ασαφές Σύστημα. Αρχικά, είναι αναγκαίο να επιλεγούν τα σημεία εκτίμησης. Στην παρούσα εργασία επιλέγονται 4 σημεία, με βάση τα στατιστικά μέτρα του δείγματος. Το υδραυλικό ύψος των σημείων πρόβλεψης p_1 , p_2 , p_3 , p_4 ισούται αντίστοιχα με 4 masl, 18 masl, 5 masl, 2.3 masl.

Για τη δημιουργία του Ασαφούς Συστήματος ακολουθείται η προβλεπόμενη διαδικασία, όπως αυτή περιγράφεται στην ενότητα 2.2. Αρχικά, στο στάδιο της ασαφοποίησης, καθορίζονται οι συναρτήσεις συμμετοχής για τις δύο παραμέτρους. Τόσο η απόσταση των σημείων παρατήρησης από τα σημεία εκτίμησης όσο και η τιμή του υδραυλικού ύψους

χωρίζονται σε τρεις κατηγορίες: μικρή, μεσαία και μεγάλη. Οι αντίστοιχες συναρτήσεις συμμετοχής $\mu_{1s}(x)$, $\mu_{1a}(x)$, $\mu_{1l}(x)$ που αφορούν την απόσταση φαίνονται στο Σχήμα 4.11 ενώ οι συναρτήσεις συμμετοχής της στάθμης $\mu_{2s}(x)$, $\mu_{2a}(x)$, $\mu_{2l}(x)$ περιγράφονται στο Σχήμα 4.12.



Σχήμα 4.11: Συναρτήσεις συμμετοχής για τις τιμές των αποστάσεων μεταξύ των σημείων παρατήρησης και εκτίμησης.



Σχήμα 4.12: Συναρτήσεις συμμετοχής για τις τιμές των υδραυλικών υψών σε κάθε σημείο του δείγματος.

Στη συνέχεια, ορίζεται ένα σύνολο κατάλληλων κανόνων με στόχο να προσδιοριστεί η πιθανότητα μια γεώτρησης να είναι «καλή» ($p_g(x)$), «επαρκής» ($p_a(x)$) ή «κακή» ($p_b(x)$) επιλογή για να συμπεριληφθεί στη γειτονιά καθενός από τα 4 σημεία εκτίμησης. Οι τελεστές ΚΑΙ και Ή μεταφράζονται σύμφωνα με το μοντέλο Mamdani (Πίνακας 2.1).

Κανόνας 1. Αν η απόσταση της γεώτρησης από το $p_i, i \in [1, 4]$ σημείο εκτίμησης είναι μικρή **και** η τιμή του υδραυλικού ύψους σε αυτή είναι επίσης μικρή τότε η γεώτρηση αυτή χαρακτηρίζεται ως «καλή» επιλογή για να συμπεριληφθεί στη γειτονιά εκτίμησης γύρω από το σημείο p_i . ($p_g(x) = \mu_{1s \cap 2s}(x) = \text{minimum}\{\mu_{1s}(x), \mu_{2s}(x)\}$)

Κανόνας 2. Αν η απόσταση της γεώτρησης από το $p_i, i \in [1, 4]$ σημείο εκτίμησης είναι μεσαία **ή** η τιμή του υδραυλικού ύψους σε αυτή είναι μεσαία τότε η γεώτρηση αυτή χαρακτηρίζεται ως «επαρκής» επιλογή για να συμπεριληφθεί στη γειτονιά εκτίμησης γύρω από το σημείο p_i . ($p_a(x) = \mu_{1a \cup 2a}(x) = \text{maximum}\{\mu_{1a}(x), \mu_{2a}(x)\}$)

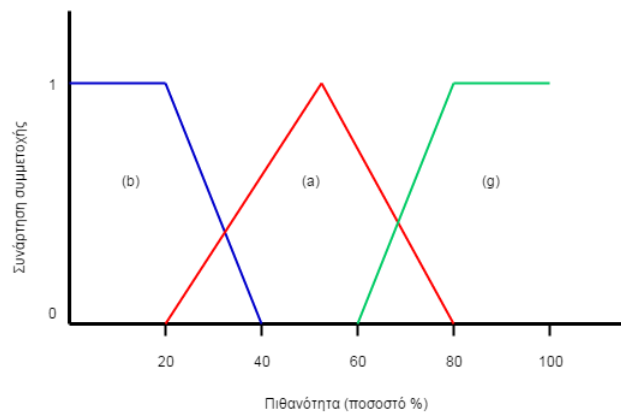
Κανόνας 3. Αν η απόσταση της γεώτρησης από το $p_i, i \in [1, 4]$ σημείο εκτίμησης είναι μεγάλη **ή** η τιμή του υδραυλικού ύψους σε αυτή είναι μεγάλη τότε η γεώτρηση αυτή χαρακτηρίζεται ως «κακή» επιλογή για να συμπεριληφθεί στη γειτονιά εκτίμησης γύρω από το σημείο p_i . ($p_b(x) = \mu_{1b \cup 2b}(x) = \text{maximum}\{\mu_{1b}(x), \mu_{2b}(x)\}$)

Οι τρεις κανόνες συνοψίζονται στον Πίνακα 4.10.

		Στάθμη		
		Μικρή	Μεσαία	Μεγάλη
Απόσταση	Μικρή	Καλή	Επαρκής	Κακή
	Μεσαία	Επαρκής	Επαρκής	Κακή
	Μεγάλη	Κακή	Κακή	Κακή

Πίνακας 4.10: Το σύνολο των κανόνων που χρησιμοποιούνται στο Σύστημα Ασαφούς Λογικής για το χαρακτηρισμό μιας γεώτρησης ως «καλή», «επαρκής» ή «κακή» επιλογή για να συμπεριληφθεί στη γειτονιά εκτίμησης γύρω από κάποιο σημείο πρόβλεψης.

Το επόμενο βήμα είναι η συνάνθροιση των συμπερασμάτων που προκύπτουν από την εφαρμογή των παραπάνω κανόνων σε ένα ασαφές σύνολο. Για τη μετατροπή του ασαφούς αυτού συνόλου σε μια αριθμητική τιμή ακολουθείται η διαδικασία της αποασαφοποίησης. Για τον υπολογισμό της αριθμητικής τιμής, δηλαδή της πιθανότητας μια γεώτρηση να είναι ένας «καλός» γείτονας (Σχήμα 4.13) για το εκάστοτε σημείο εκτίμησης, χρησιμοποιείται η εξίσωση κέντρου μάζας (εξίσωση 2.5).



Σχήμα 4.13: Πιθανότητα (ποσοστό %) μια γεώτρηση να είναι ένας «καλός» γείτονας για το εκάστοτε σημείο εκτίμησης.

Αφού ολοκληρωθεί η δημιουργία του Ασαφούς Συστήματος, εκτιμώνται οι βέλτιστοι γείτονες για κάθε ένα από τα 4 σημεία πρόβλεψης. Στην γειτονιά εκτίμησης γύρω από κάθε σημείο συμπεριλαμβάνονται μόνο τα 30 σημεία παρατήρησης που έχουν την μεγαλύτερη πιθανότητα να είναι «καλοί» γείτονες. Προκύπτουν έτσι 4 διαφορετικά σύνολα δεδομένων, ένα για κάθε σημείο εκτίμησης. Στη συνέχεια υπολογίζεται διαδοχικά το πειραματικό ημιβαριόγραμμα για το κάθε δείγμα και προσαρμόζεται στα επτά θεωρητικά πρότυπα που έχουν προαναφερθεί. Η επιλογή του βέλτιστου μοντέλου για κάθε ένα από τα 4 σύνολα δεδομένων γίνεται με βάση τα κριτήρια RSS , I_{AIC} και I_C . Οι τιμές τους φαίνονται στους πίνακες που ακολουθούν.

ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗ ΥΠΟΓΕΙΟΥ ΤΑΡΟΦΟΡΕΑ
ΜΕ ΧΡΗΣΗ ΓΕΩΣΤΑΤΙΣΤΙΚΩΝ ΜΕΘΟΔΩΝ ΚΑΙ ΑΣΑΦΟΥΣ ΛΟΓΙΚΗΣ

Μοντέλο	RSS	I_{AIC}	I_C
Εκθετικό	1.94	-15.12	29.22
Γκαουσιανό	1.71	-16.47	19.67
Σφαιρικό	1.77	-16.08	22.07
Δυναμονομικό	2.57	11.99	40.15
Γραμμικό	7.24	-2.60	747.43
Matérn	2.57	9.99	40.19
Σπαρτιάτικο	1.95	-13.05	29.85

Πίνακας 4.11: Τιμές των τριών κριτηρίων για κάθε θεωρητικό πρότυπο, για το πρώτο σύνολο δεδομένων.

Μοντέλο	RSS	I_{AIC}	I_C
Εκθετικό	1.18	-20.54	67.85
Γκαουσιανό	1.01	-22.24	65.78
Σφαιρικό	1.05	-21.81	65.17
Δυναμονομικό	1.34	-19.15	73.75
Γραμμικό	2.21	-15.67	682.41
Matérn	1.34	-17.15	73.71
Σπαρτιάτικο	1.21	-18.27	66.72

Πίνακας 4.13: Τιμές των τριών κριτηρίων για κάθε θεωρητικό πρότυπο, για το τρίτο σύνολο δεδομένων.

Μοντέλο	RSS	I_{AIC}	I_C
Εκθετικό	0.71	-26.16	25.40
Γκαουσιανό	0.65	-27.12	21.57
Σφαιρικό	0.65	-27.15	21.84
Δυναμονομικό	0.75	-25.51	28.36
Γραμμικό	2.39	-14.78	$1.80 \cdot 10^3$
Matérn	0.75	-23.51	28.33
Σπαρτιάτικο	0.70	-24.23	25.18

Πίνακας 4.12: Τιμές των τριών κριτηρίων για κάθε θεωρητικό πρότυπο, για το δεύτερο σύνολο δεδομένων.

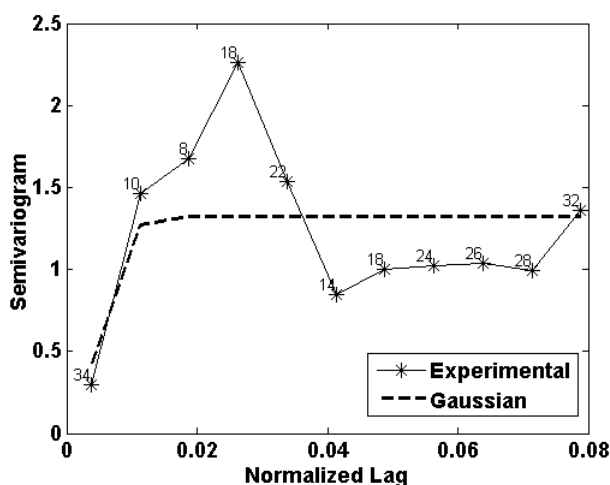
Μοντέλο	RSS	I_{AIC}	I_C
Εκθετικό	1.36	-19.00	55.20
Γκαουσιανό	1.10	-21.32	52.45
Σφαιρικό	1.16	-20.78	52.48
Δυναμονομικό	1.64	-16.96	58.81
Γραμμικό	3.20	-11.60	657.82
Matérn	1.64	-14.96	58.97
Σπαρτιάτικο	1.37	-16.90	59.63

Πίνακας 4.14: Τιμές των τριών κριτηρίων για κάθε θεωρητικό πρότυπο, για το τέταρτο σύνολο δεδομένων.

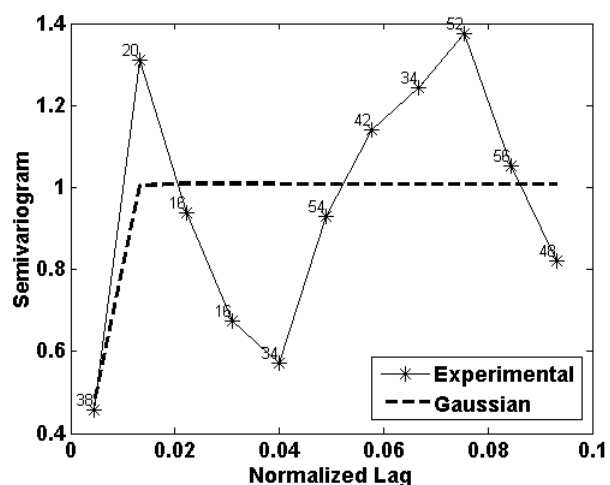
Και για τα 4 σύνολα δεδομένων που αφορούν τη γειτονιά γύρω από κάθε σημείο εκτίμησης το Γκαουσιανό μοντέλο φαίνεται να προσαρμόζει καλύτερα τις πειραματικές τιμές, σύμφωνα με την πλειοψηφία των κριτηρίων επιλογής ημιβαριογράμματος. Συνεπώς, προσδιορίζονται οι παράμετροι του Γκαουσιανού μοντέλου σε όλες τις περιπτώσεις, καθώς και οι αντίστοιχες γραφικές παραστάσεις. Ο σχετικός πίνακας και τα σχήματα παρουσιάζονται στη συνέχεια.

Σημείο εκτίμησης	Όριο	Μήκος συσχέτισης
p_1	1.321	0.006
p_2	1.009	0.006
p_3	0.809	0.006
p_4	0.936	0.005

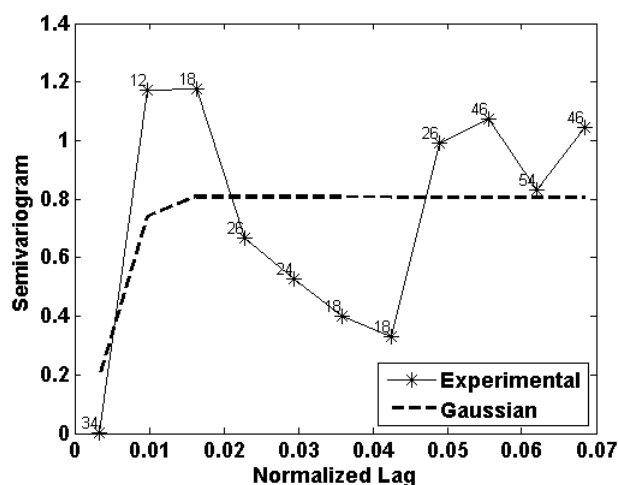
Πίνακας 4.15: Παράμετροι του Γκαουσιανού μοντέλου όταν αυτό προσαρμόζεται στο πειραματικό ημιβαριόγραμμα κάθε συνόλου δεδομένων που αντιστοιχεί σε ένα διαφορετικό σημείο εκτίμησης.



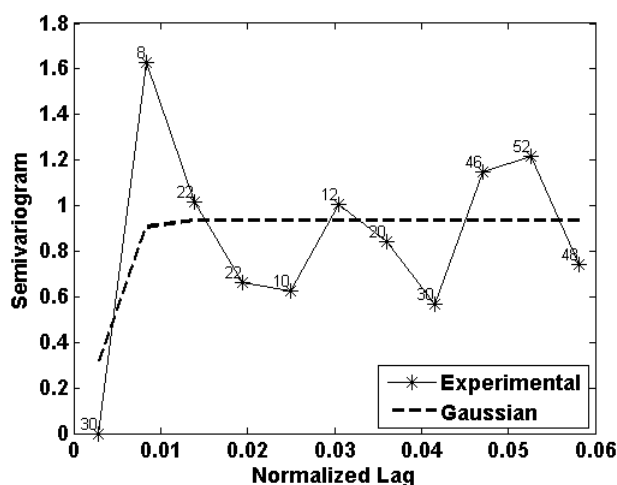
Σχήμα 4.14: Γραφική παράσταση του Γκαουσιανού μοντέλου και του πειραματικού ημιβαριογράμματος, για το πρώτο σύνολο δεδομένων (εκτιμώμενες παράμετροι: $\sigma_z^2 = 1.321$, $\xi = 0.006$).



Σχήμα 4.15: Γραφική παράσταση του Γκαουσιανού μοντέλου και του πειραματικού ημιβαριογράμματος, για το δεύτερο σύνολο δεδομένων (εκτιμώμενες παράμετροι: $\sigma_z^2 = 1.009$, $\xi = 0.006$).



Σχήμα 4.16: Γραφική παράσταση του Γκαουσιανού μοντέλου και του πειραματικού ημιβαριογράμματος, για το τρίτο σύνολο δεδομένων (εκτιμώμενες παράμετροι: $\sigma_z^2 = 0.809$, $\xi = 0.006$).

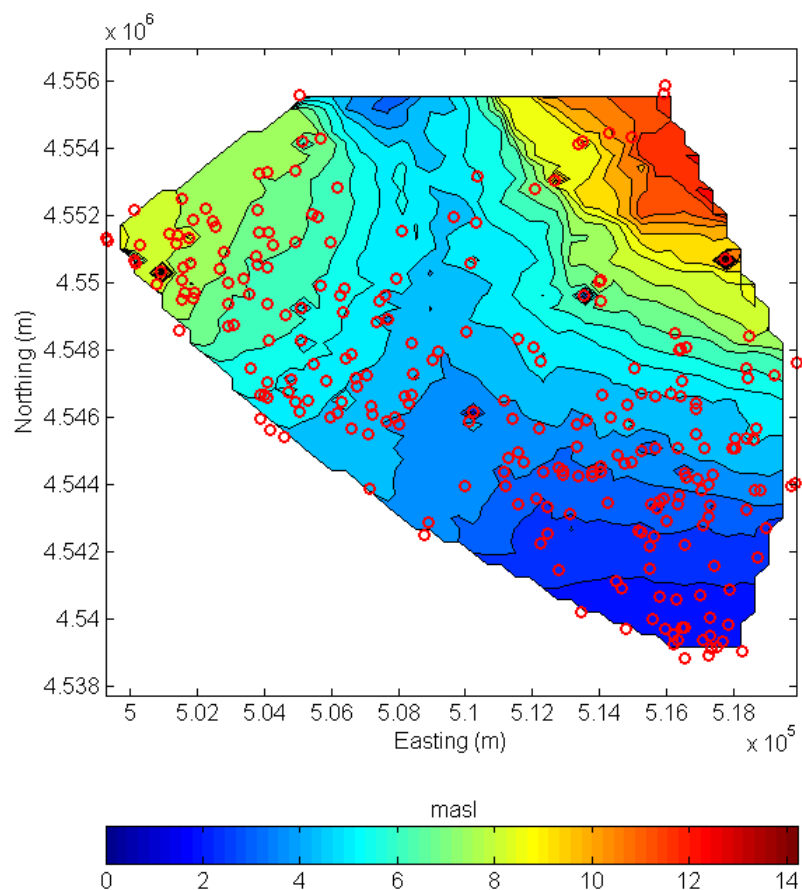


Σχήμα 4.17: Γραφική παράσταση του Γκαουσιανού μοντέλου και του πειραματικού ημιβαριογράμματος, για το τέταρτο σύνολο δεδομένων (εκτιμώμενες παράμετροι: $\sigma_z^2 = 0.936$, $\xi = 0.006$).

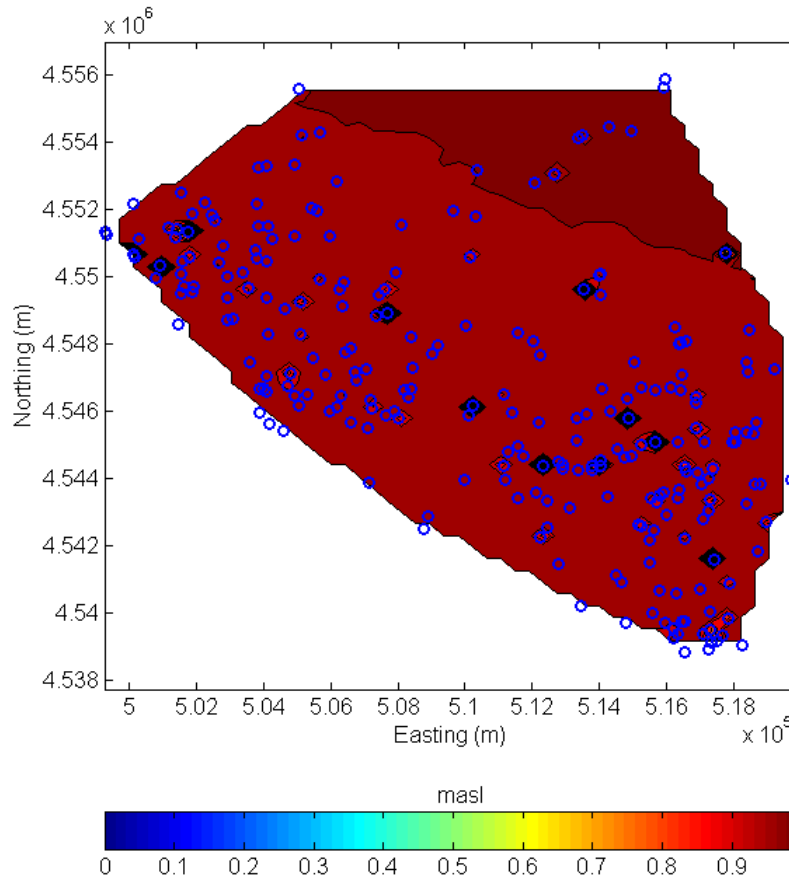
Παρατηρώντας τη μορφή που παίρνει το Γκαουσιανό μοντέλο όταν προσομοιώνει το κάθε σύνολο δεδομένων ξεχωριστά, μπορεί να ειπωθεί πως η γραφική του παράσταση είναι λίγο πιο «ομαλή» στο Σχήμα 4.17. Επιπλέον, οι τιμές των παραμέτρων του μοντέλου είναι σχετικά πολύ κοντά και για τα 4 δείγματα. Συνεπώς, η χαρτογράφηση της χωρικής μεταβλητότητας των υδραυλικών υψών και της αβεβαιότητας της πρόβλεψης, μπορεί να υλοποιηθεί με οποιοδήποτε από τα 4 σετ παραμέτρων του Πίνακα 4.15. Την άποψη αυτή ενισχύουν τα σχεδόν πανομοιότυπα αποτελέσματα της διασταυρωμένης επιβεβαίωσης για τον έλεγχο της ακρίβειας του γεωστατιστικού μοντέλου, για το σύνολο των 250 γεωτρήσεων, χρησιμοποιώντας διαδοχικά κάθε ένα από τα 4 σετ παραμέτρων του Πίνακα 4.15 (Πίνακας 4.16). Ως εκ τούτου, η χαρτογράφηση επιλέγεται να υλοποιηθεί με βάση τις εκτιμώμενες παραμέτρους του Γκαουσιανού μοντέλου που προσομοιώνει το τελευταίο σύνολο δεδομένων. Το πλέγμα που επιλέγεται είναι 50×50 . Οι δυο χάρτες παρουσιάζονται στα Σχήματα 4.18 και 4.19, αντίστοιχα.

Σημείο εκτίμησης	MAE masl	BIAS masl	MARE -	RMSE masl	R -
p_1	1.9537	-0.1062	0.5021	2.8800	0.6514
p_2	1.9517	-0.1049	0.5035	2.8706	0.6564
p_3	1.9531	-0.1061	0.5023	2.8777	0.6526
p_4	1.9566	-0.1031	0.5061	2.8713	0.6571

Πίνακας 4.16: Στατιστικά μέτρα της διασταυρωμένης επιβεβαίωσης που υλοποιείται για την επαλήθευση του γεωστατιστικού μοντέλου με βάση το Γκαουσιανό ημιβαριόγραμμα, για το σύνολο των 250 γεωτρήσεων, χρησιμοποιώντας διαδοχικά κάθε ένα από τα 4 σετ παραμέτρων του Πίνακα 4.15.



Σχήμα 4.18: Χάρτης ισοϋψών καμπυλών της εκτιμώμενης στάθμης του υπόγειου υδροφόρου στην περιοχή μελέτης, όταν εφαρμόζεται ένα Σύστημα Ασαφούς Λογικής. Οι κόκκινοι κύκλοι υποδεικνύουν τις θέσεις των 250 γεωτρήσεων.



Σχήμα 4.19: Χάρτης ισοϋψών καμπυλών της OK τυπικής απόκλισης σε συνδυασμό με ένα Ασαφές Σύστημα για τη στάθμη του υπόγειου υδροφορέα στην περιοχή μελέτης. Οι μπλε κύκλοι υποδεικνύουν τις θέσεις των 250 γεωτρήσεων.

Με τη συγκεκριμένη μέθοδο χωρικής ανάλυσης η στάθμη του υπόγειου υδροφορέα στο μεγαλύτερο μέρος της έκτασής του φαίνεται να κυμαίνεται γύρω από τη μέση τιμή του αρχικού δείγματος (5.21 masl). Ωστόσο, από τον χάρτη της τυπικής απόκλισης γίνεται ξεκάθαρο πως καθορίζοντας μικρότερες γειτονιές εκτίμησης γύρω από κάποιο σημείο πρόβλεψης, στα πλαίσια του Κανονικού Kriging, η αποδοτικότητα της πρόβλεψης βελτιώνεται αισθητά σε σχέση με την κλασική γεωστατιστική ανάλυση.

4.4 Βελτίωση της εκτίμησης Kriging με μετασχηματισμό των δεδομένων

Η διερευνητική στατιστική ανάλυση του συνόλου των 250 γεωτρήσεων που παρουσιάζεται στην ενότητα 4.1 προσδιορίζει τη ασυμμετρία (\hat{s}_z) και την κύρτωση (\hat{k}_z) του δείγματος. Οι τιμές που λαμβάνουν οι δυο συντελεστές είναι 1.58 και 6.04 αντίστοιχα. Η μη-κανονικότητα των δεδομένων είναι πιθανόν να ευθύνεται για την υψηλή αβεβαιότητα της εκτίμησης όταν αυτή πραγματοποιείται με την αυθεντικό σύνολο δεδομένων (ενότητα 4.2). Η εξομάλυνση της τυπικής απόκλισης μπορεί να επιτευχθεί με την μετατροπή των δειγματικών τιμών σε στοιχεία Κανονικής κατανομής.

4.4.1 Μετασχηματισμός Box-Cox

Η μέθοδος *Box-Cox* (BC) [11] χρησιμοποιείται ευρέως για τον μετασχηματισμό των δεδομένων σε σχεδόν Γκαουσιανή κατανομή. Ο μετασχηματισμός ορίζεται μόνο για δεδομένα με θετικές τιμές μέσω της εξίσωσης 4.1:

$$y := g_{BC}(z; k) = \begin{cases} \frac{(z^k - 1)}{k}, & k \neq 0 \\ \log(z), & k = 0 \end{cases} \quad (4.1)$$

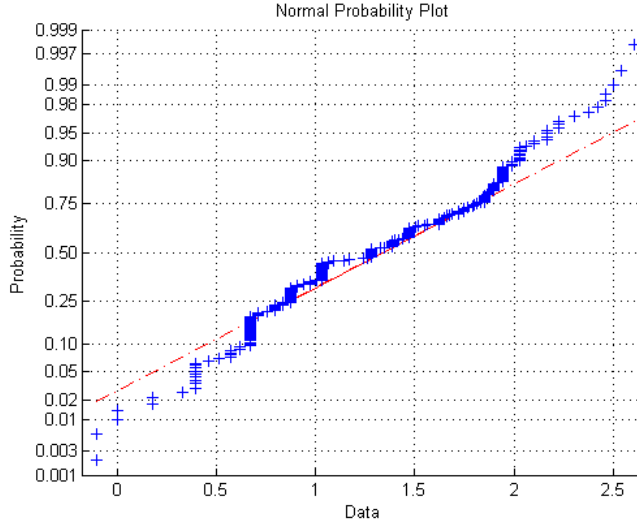
Δοθέντος ενός διανύσματος παρατηρούμενων τιμών $\mathbf{z}^T = (z_1, \dots, z_N)$, η βέλτιστη τιμή που λαμβάνει ο εκθέτης k , που οδηγεί στον καλύτερη προσαρμογή του διανύσματος $y^T = (g_k(z_1), \dots, g_k(z_N))$ σε Γκαουσιανή κατανομή, μπορεί να προσδιοριστεί με τη μέθοδο της Μέγιστης Πιθανοφάνειας. Πιο συγκεκριμένα, ο εκθέτης k εκτιμάται μεγιστοποιώντας το λογάριθμο της Συνάρτησης Μέγιστης Πιθανοφάνειας:

$$f(\mathbf{z}; k) = -\frac{N}{2} \ln \left[\sum_{i=1}^N \frac{(g_{BC}(z_i; k) - \bar{g}_{BC}(\mathbf{z}; k))^2}{N} \right] + (k - 1) \sum_{i=1}^N \ln(z_i) \quad (4.2)$$

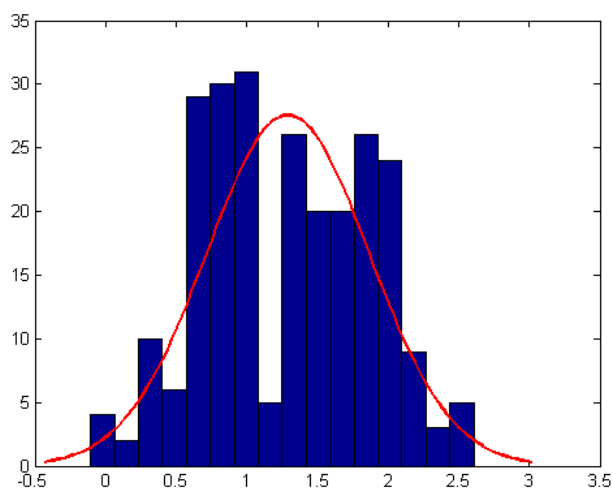
όπου $\bar{g}_{BC}(\mathbf{z}; k) = \frac{1}{N} \left[\sum_{i=1}^N (g_{BC}(z_i; k)) \right]$ είναι ο αριθμητικός μέσος όρος των μετασχηματισμένων δεδομένων ενώ το άθροισμα των τετραγώνων $\left[\sum_{i=1}^N \frac{(g_{BC}(z_i; k) - \bar{g}_{BC}(\mathbf{z}; k))^2}{N} \right]$ δηλώνει τη διακύμανση των μετασχηματισμένων δεδομένων [30].

4.4.2 Χωρική ανάλυση με τα μετασχηματισμένα δεδομένα

Αφού ολοκληρωθεί ο μετασχηματισμός των δεδομένων με τη μέθοδο Box-Cox, η ασυμμετρία του δείγματος βελτιώνεται από 1.58 σε 0.02 και η κύρτωση από 6.04 σε 2.22. Τα δεδομένα είναι πια πολύ πιο κοντά στην Κανονική κατανομή, όπως φαίνεται στα Σχήματα 4.20 και 4.21.



Σχήμα 4.20: Διάγραμμα πιθανοτήτων των μετασχηματισμένων υδραυλικών υψών στην περιοχή μελέτης.



Σχήμα 4.21: Ιστόγραμμα των μετασχηματισμένων υδραυλικών υψών σε σύγκριση με την Κανονική κατανομή.

Κατόπιν, ακολουθείται η γνωστή διαδικασία γεωστατιστικής ανάλυσης όπως αυτή περιγράφεται στο Σχήμα 2.4. Τα αποτελέσματα για τα επιμέρους βήματα παρουσιάζονται παρακάτω.

Μοντέλο	RSS	I_{AIC}	I_C
Εκθετικό	0.0041	-82.87	476.60
Γκαουσιανό	0.0069	-77.09	636.69
Σφαιρικό	0.0064	-77.97	588.70
Δυναμονομικό	0.0013	-95.41	108.03
Γραμμικό	0.0217	-66.51	$2.02 * 10^4$
Matérn	0.0013	-93.27	109.32
Σπαρτιάτικο	0.0043	-80.29	519.33

Πίνακας 4.17: Τιμές των κριτηρίων για κάθε θεωρητικό μοντέλο που προσομοιώνει τα μετασχηματισμένα δεδομένα όταν εφαρμόζεται η Ευκλείδεια απόσταση.

Μοντέλο	RSS	I_{AIC}	I_C
Εκθετικό	0.0046	-81.59	443.79
Γκαουσιανό	0.0067	-77.48	575.93
Σφαιρικό	0.0063	-78.11	545.74
Δυναμονομικό	0.0019	-91.23	150.99
Γραμμικό	0.0229	-65.94	$2.01 * 10^4$
Matérn	0.0020	-88.65	162.05
Σπαρτιάτικο	0.0046	-79.63	397.86

Πίνακας 4.18: Τιμές των κριτηρίων για κάθε θεωρητικό μοντέλο που προσομοιώνει τα μετασχηματισμένα δεδομένα όταν εφαρμόζεται η απόσταση Minkowski ($p=3$).

ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗ ΥΠΟΓΕΙΟΥ ΤΑΡΟΦΟΡΕΑ
ΜΕ ΧΡΗΣΗ ΓΕΩΣΤΑΤΙΣΤΙΚΩΝ ΜΕΘΟΔΩΝ ΚΑΙ ΑΣΑΦΟΥΣ ΛΟΓΙΚΗΣ

Μοντέλο	RSS	I_{AIC}	I_C
Εκθετικό	0.0052	-80.31	$1.07 * 10^3$
Γκαουσιανό	0.0112	-71.77	$1.07 * 10^3$
Σφαιρικό	0.0095	-73.62	$2.75 * 10^3$
Δυναμονομικό	0.0013	-95.63	118.30
Γραμμικό	0.0202	-67.31	$2.23 * 10^4$
Matérn	0.0014	-92.73	126.64
Σπαρτιάτικο	0.0049	-78.91	745.06

Πίνακας 4.19: Τιμές των κριτηρίων για κάθε θεωρητικό μοντέλο που προσομοιώνει τα μετασχηματισμένα δεδομένα όταν εφαρμόζεται η απόσταση Manhattan.

Μοντέλο	RSS	I_{AIC}	I_C
Εκθετικό	0.0093	-73.85	$1.78 * 10^3$
Γκαουσιανό	0.0185	-66.29	$1.30 * 10^3$
Σφαιρικό	0.0162	-67.73	$6.56 * 10^3$
Δυναμονομικό	0.0027	-87.34	190.08
Γραμμικό	0.0269	-64.15	$2.53 * 10^4$
Matérn	0.0031	-83.83	19.39
Σπαρτιάτικο	0.0098	-71.30	$2.13 * 10^3$

Πίνακας 4.20: Τιμές των κριτηρίων για κάθε θεωρητικό μοντέλο που προσομοιώνει τα μετασχηματισμένα δεδομένα όταν εφαρμόζεται η απόσταση Canberra.

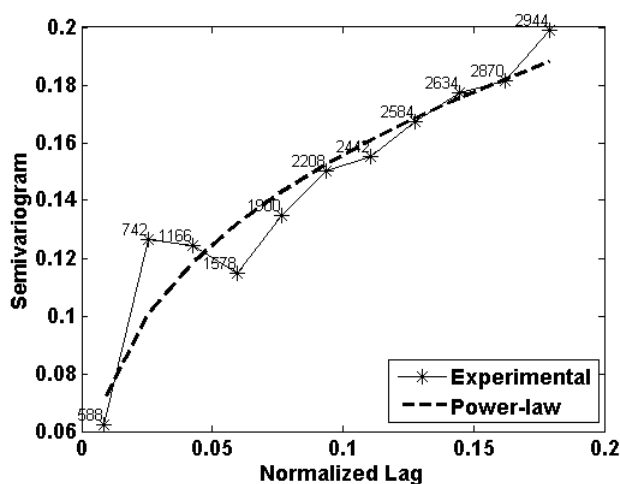
Μοντέλο	RSS	I_{AIC}	I_C
Εκθετικό	0.0080	-75.43	$2.68 * 10^3$
Γκαουσιανό	0.0231	-63.82	$1.07 * 10^5$
Σφαιρικό	0.0132	-69.95	$9.49 * 10^3$
Δυναμονομικό	0.0024	-88.67	233.85
Γραμμικό	0.0222	-66.26	$2.32 * 10^4$
Matérn	0.0115	-69.53	$5.87 * 10^3$
Σπαρτιάτικο	0.0083	-73.12	$2.78 * 10^3$

Πίνακας 4.21: Τιμές των κριτηρίων για κάθε θεωρητικό μοντέλο που προσομοιώνει τα μετασχηματισμένα δεδομένα όταν εφαρμόζεται η απόσταση Bray-Curtis.

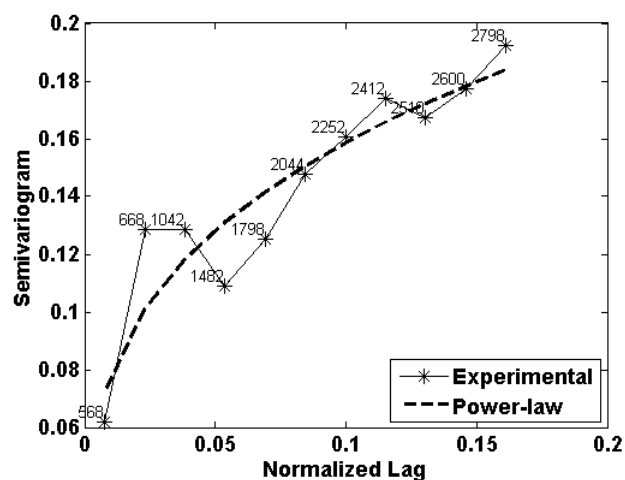
Το πειραματικό ημιβαριόγραμμα των μετασχηματισμένων δεδομένων προσαρμόζεται καλύτερα από το Δυναμονομικό μοντέλο, όπως αποδεικνύεται από τους παραπάνω πίνακες, ανεξαρτήτως του τύπου απόστασης που χρησιμοποιείται. Ακολουθούν οι εκτιμώμενες παράμετροι του μοντέλου και οι αντίστοιχες γραφικές παραστάσεις, όταν η απόσταση υπολογίζεται διαδοχικά με μια διαφορετική μετρική.

Απόσταση	Παράμετρος μορφής	Εκθέτης Hurst
Ευκλείδεια	0.32	0.16
Minkowski	0.32	0.15
Manhattan	0.34	0.18
Canberra	0.38	0.19
Bray-Curtis	0.63	0.22

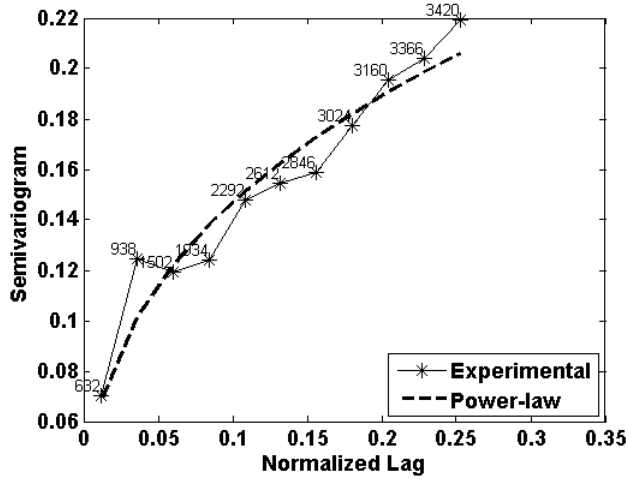
Πίνακας 4.22: Εκτιμώμενες παράμετροι του Δυναμονομικού μοντέλου που προσομοιώνει τα μετασχηματισμένα δεδομένα, εφαρμόζοντας διαδοχικά ένα διαφορετικό μέτρο απόστασης.



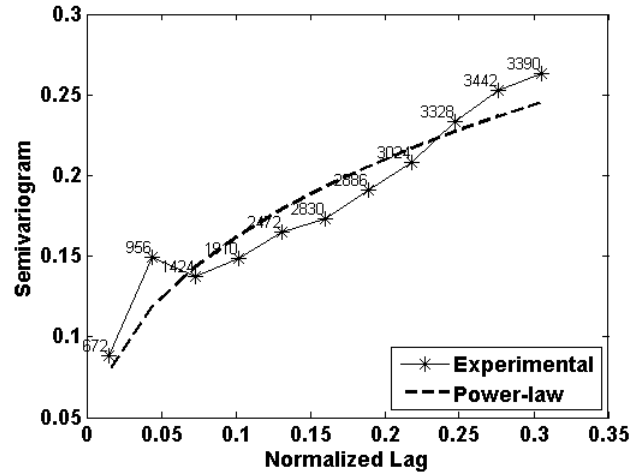
Σχήμα 4.22: Γραφική παράσταση του Δυναμονομικού μοντέλου και του πειραματικού ημιβαριογράμματος των μετασχηματισμένων δεδομένων (Ευκλείδεια απόσταση, $c = 0.32$, $H = 0.16$).



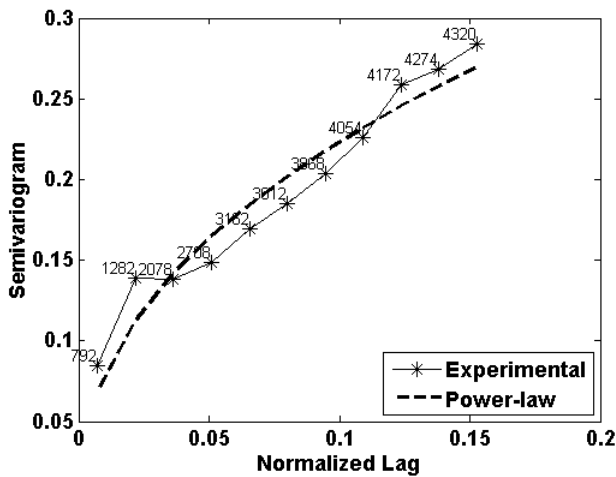
Σχήμα 4.23: Γραφική παράσταση του Δυναμονομικού μοντέλου και του πειραματικού ημιβαριογράμματος των μετασχηματισμένων δεδομένων (απόσταση Minkowski, για $p=3$, $c = 0.32$, $H = 0.15$).



Σχήμα 4.24: Γραφική παράσταση του Δυναμονομικού μοντέλου και του πειραματικού ημιβαριογράμματος των μετασχηματισμένων δεδομένων (απόσταση Manhattan, $c = 0.34$, $H = 0.18$).



Σχήμα 4.25: Γραφική παράσταση του Δυναμονομικού μοντέλου και του πειραματικού ημιβαριογράμματος των μετασχηματισμένων δεδομένων (απόσταση Canberra, $c = 0.38$, $H = 0.19$).



Σχήμα 4.26: Γραφική παράσταση του Δυναμονομικού μοντέλου και του πειραματικού ημιβαριογράμματος των μετασχηματισμένων δεδομένων (απόσταση Bray-Curtis, $c = 0.63$, $H = 0.22$).

Στον Πίνακα 4.23 παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της διασταυρωμένης επιβεβαίωσης για την επαλήθευση του χωρικού μοντέλου, και για τις πέντε αποστάσεις, ενώ στον Πίνακα 4.24 φαίνονται συγκεντρωτικά οι τιμές των τριών κριτηρίων και του MAE.

Απόσταση	MAE masl	BIAS masl	MARE -	RMSE masl	R -
Ευκλείδεια	1.67	-0.53	0.37	2.70	0.71
Minkowski	1.67	-0.54	0.36	2.69	0.71
Manhattan	1.69	-0.52	0.38	2.71	0.71
Canberra	1.75	-0.53	0.39	2.75	0.70
Bray-Curtis	1.70	-0.50	0.38	2.70	0.71

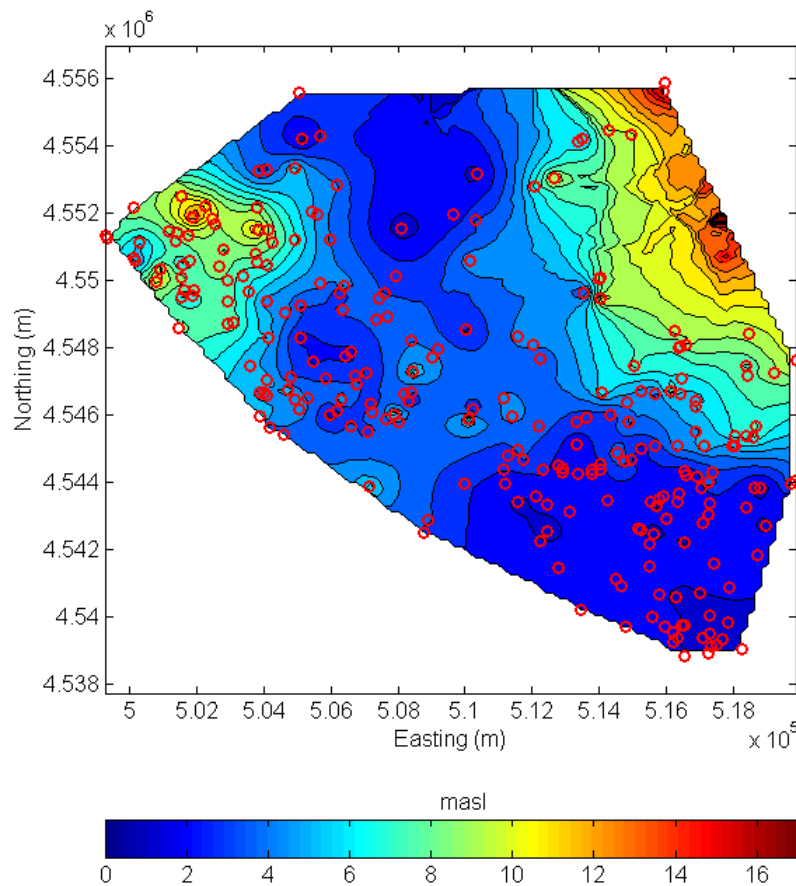
Πίνακας 4.23: Στατιστικά μέτρα της διασταυρωμένης επιβεβαίωσης που υλοποιείται για την επαλήθευση του χωρικού μοντέλου των μετασχηματισμένων δεδομένων με βάση το Δυναμονομικό πρότυπο. Η διαδικασία εφαρμόζεται για όλους τους τύπους αποστάσεων.

Απόσταση	RSS -	I_{AIC} -	I_C -	MAE masl
Ευκλείδεια	0.0013	-95.41	108.03	1.67
Minkowski	0.0019	-91.23	150.99	1.67
Manhattan	0.0013	-95.63	118.30	1.69
Canberra	0.0027	-87.34	190.08	1.75
Bray-Curtis	0.0024	-88.67	233.85	1.70

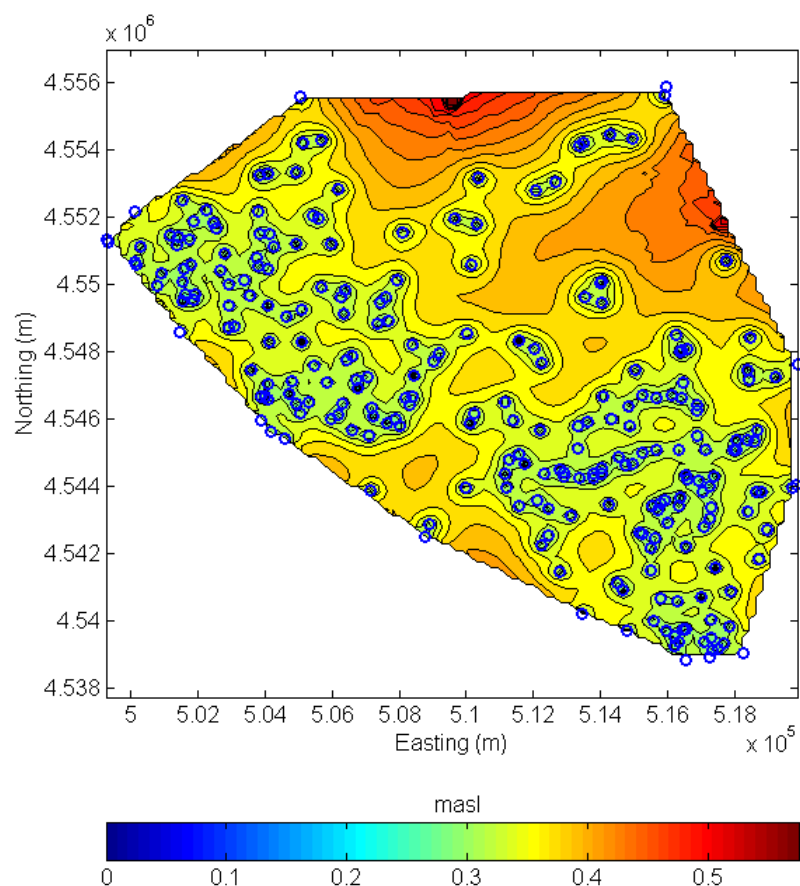
Πίνακας 4.24: Τιμές των τριών κριτηρίων και του Μέσου Απολύτου Σφάλματος για κάθε τύπο απόστασης, όταν τα μετασχηματισμένα δεδομένα προσομοιώνονται από το Δυναμονομικό μοντέλο.

Ο συνδυασμός της απόστασης Manhattan με το Δυναμονομικό μοντέλο προκρίνεται από τις ανωτέρω διαδικασίες ως βέλτιστος για τη χωρική εκτίμηση της στάθμης του υπόγειου υδροφόρου, όταν τα δεδομένα έχουν υποστεί τον μετασχηματισμό Box-Cox. Τα αποτελέσματα της διασταυρωμένης επιβεβαίωσης που πραγματοποιείται για την αξιολόγηση του συγκεκριμένου χωρικού μοντέλου, είναι παρόμοια με τα αντίστοιχα όταν

εφαρμόζεται η Ευκλείδεια απόσταση. Συνεπώς, οι χάρτες ισοϋψών καμπυλών των υδραυλικών κεφαλών (Σχήμα 4.27) και της ΟΚ τυπικής απόκλισης (Σχήμα 4.28), για ένα πλέγμα 100×100 , κατασκευάζονται με βάση τις παραμέτρους $c = 0.34$ και $H = 0.18$.



Σχήμα 4.27: Χάρτης ισοϋψών καμπυλών της εκτιμώμενης στάθμης του υπόγειου υδροφορέα στην περιοχή μελέτης, όταν τα δεδομένα κανονικοποιούνται με τη μέθοδο Box-Cox. Οι κόκκινοι κύκλοι υποδεικνύουν τις θέσεις των 250 γεωτρήσεων.



Σχήμα 4.28: Χάρτης ισοϋψών καμπυλών της OK τυπικής απόκλισης για τη στάθμη του υπόγειου υδροφορέα στην περιοχή μελέτης, όταν τα δεδομένα κανονικοποιούνται με τη μέθοδο Box-Cox. Οι μπλε κύκλοι υποδεικνύουν τις θέσεις των 250 γεωτρήσεων.

Αν και το εκτιμώμενο υδραυλικό ύψος του υδροφορέα δεν φαίνεται να επηρεάζεται από τον μετασχηματισμό των δεδομένων, εντούτοις ο χάρτης της τυπικής απόκλισης διαφοροποιείται αρκετά και μάλιστα θετικά από τον αντίστοιχο χάρτη του Σχήματος 4.10.

Κεφάλαιο 5

Συμπεράσματα

Συνοψίζοντας τις διαδικασίες ανάλυσης επικινδυνότητας ρύπου και γεωστατιστικής ανάλυσης της στάθμης του υπόγειου υδροφορέα στην Περιφέρεια Δράμας, εξάγονται τα παρακάτω συμπεράσματα:

- Αν και τα διαθέσιμα δεδομένα για την συγκέντρωση των Νιτρικών αλάτων στην περιοχή μελέτης αφορούν μόνο τις 56 από τις συνολικά 250 γεωτρήσεις, η αβεβαιότητα της εκτίμησης με την τεχνική Kriging Δεικτών είναι πολύ μικρή. Ωστόσο αυτό θα μπορούσε να εξηγηθεί λόγω της χωρικής κατανομής αυτών των 56 γεωτρήσεων σχεδόν σε όλη την επιφάνεια του υδροφορέα και όχι μόνο σε μια οριοθετημένη περιοχή του.
- Όσον αφορά την εφαρμογή των διαφορετικών τύπων αποστάσεων, εκ του αποτελέσματος αποδεικνύεται ότι η Ευκλείδεια μετρική δεν υπολογίζει με αρκετή ακρίβεια τις αποστάσεις μεταξύ των σημείων παρατήρησης και εκτίμησης όπως το μέτρο Manhattan. Αυτό μπορεί να συμβαίνει λόγω των φυσικών χαρακτηριστικών του υπόγειου υδροφορέα (π.χ. σύνθεση του υδροφορέα). Η μετρική Manhattan έχει την ιδιότητα να υπολογίζει την απόσταση μεταξύ δύο σημείων κατά μήκος των αξόνων x και y όταν αυτοί σχηματίζουν ορθή γωνία. Η απόσταση ωστόσο αλλάζει όταν αλλάζει και ο προσανατολισμός των αξόνων, κάτι που δεν συμβαίνει με το Ευκλείδειο μέτρο. Λόγω αυτής της ιδιαιτερότητας, μπορούν πιο εύκολα να προσδιοριστούν οι αποστάσεις με τον τύπο Manhattan όταν υπάρχει κάποια κλίση π.χ. λόγω παρουσίας πετρωμάτων. Αξίζει ωστόσο να σημειωθεί ότι αυτό δεν

είναι απαραίτητο ότι συμβαίνει σε κάθε σύνολο δεδομένων, αλλά εξαρτάται από τα χαρακτηριστικά του εξεταζόμενου συστήματος.

- Τα δύο επιπλέον κριτήρια επιλογής βέλτιστου θεωρητικού μοντέλου, Akaike και Cressie που αναπτύσσονται στην παρούσα εργασία παρέχουν τη δυνατότητα επικύρωσης των μέχρι σήμερα ευρέως χρησιμοποιούμενων για τον ίδιο σκοπό, Ελαχίστων Τετραγώνων. Καθορίζεται έτσι, δίχως αμφιβολία το μοντέλο εκείνο που προσομοιώνει καλύτερα το πειραματικό ημιβαριόγραμμα. Το γεγονός ότι και τα τρία κριτήρια επιβεβαιώνουν κάθε φορά το ίδιο πρότυπο, με ελάχιστες εξαιρέσεις όπου οι αποκλίσεις μπορούν να θεωρηθούν αμελητέες, καθιστά την εκάστοτε χωρική παρεμβολή ακόμη πιο αξιόπιστη.
- Συγκρίνοντας τη χωρική εκτίμηση των υδραυλικών υψών στην περιοχή μελέτης που πραγματοποιείται με το αυθεντικό σύνολο δεδομένων, με χρήση Συστήματος Ασαφούς Λογικής και με κανονικοποίηση του δείγματος συμπεραίνεται ότι η βέλτιστη χωρική ανάλυση επιτυγχάνεται με τον μετασχηματισμό των δεδομένων. Η αποδοτικότητα της πρόβλεψης βελτιώνεται σημαντικά κατά την εφαρμογή της συγκεκριμένης μεθόδου, ακόμη και γύρω από τα σημεία όπου δεν υπάρχουν αρκετές μετρήσεις. Ωστόσο και με το Σύστημα Ασαφούς Λογικής μειώνεται περίπου στο 1/3 η αβεβαιότητα της πρόβλεψης σε σύγκριση με την κλασική γεωστατιστική μέθοδο.
- Το συνολικό συμπέρασμα της παρούσας εργασίας είναι πως τόσο το εκτιμώμενο επίπεδο της στάθμης στην περιοχή μελέτης όσο και η συγκέντρωση Νιτρικών αλάτων δεν αποτελούν απειλή για την ποιότητα και την ποσότητα των υπογείων υδάτων του υδροφορέα.

Βιβλιογραφία

- [1] Βαρουχάκης Ε., *Εφαρμογή της μεθόδου των Σπαρτιάτικων Τυχαίων Πεδίων στη γεωστατιστική ανάλυση της χωρικής κατανομής περιβαλλοντικών ρύπων*, Σχολή Μηχανικών Ορυκτών Πόρων, Πολυτεχνείο Κρήτης, Χανιά, 2005.
- [2] Θεοδώρου Γ., *Εισαγωγή στην Ασαφή Λογική*, Εκδόσεις Τζιόλα, Θεσσαλονίκη, 2010.
- [3] Νούση Ε., *Μεθοδολογικό πλαίσιο για τη χρήση μεθόδων έρευνας στη λογική της ασάφειας*, Σχολή Αγρονόμων και Τοπογράφων Μηχανικών, Εθνικό Μετσόβειο Πολυτεχνείο, Αθήνα, 2007.
- [4] *Σχέδιο διαχείρισης των Λεκανών Απορροής Ποταμών του Υδατικού Διαμερίσματος Ανατολικής Μακεδονίας (GR11)*, Υπουργείο Περιβάλλοντος, Ενέργειας και Κλιματικής Αλλαγής, Ειδική Γραμματεία Υδάτων, Αθήνα, 2013.
- [5] Χριστόπουλος Δ., *Μεταπτυχιακές Σημειώσεις Ανάλυσης Δεδομένων*, Σχολή Μηχανικών Ορυκτών Πόρων, Πολυτεχνείο Κρήτης, Χανιά, 2004α.
- [6] Χριστόπουλος Δ., *Πανεπιστημιακές Σημειώσεις Εισαγωγή στην έρευνα κοιτασμάτων*, Σχολή Μηχανικών Ορυκτών Πόρων, Πολυτεχνείο Κρήτης, Χανιά, 2004β.
- [7] Χριστόπουλος Δ., *Πανεπιστημιακές Σημειώσεις Εισαγωγή στη Γεωστατιστική*, Σχολή Μηχανικών Ορυκτών Πόρων, Πολυτεχνείο Κρήτης, Χανιά, 2003.
- [8] Ahmed M., *The Use of Fuzzy Logic and Geostatistical Techniques for Spatialization of Soil Texture in Part of Kano Close Settled Zone Kano State, Nigeria*, International Journal of Agriculture, Forestry and Fisheries, 3 (3), 115-122, 2015.

- [9] Bai Y., Zhuang H. & Wang D., *Advanced Fuzzy Logic Technologies in Industrial Applications*, Springer, 2006.
- [10] Bochner S., *Lectures on Fourier integrals*, Princeton, NJ: Princeton University Press, 1959.
- [11] Box G. E. P. & Cox D. R., *An analysis of transformations*, Journal of the Royal Statistical Society, Ser. B 26 (2), 211-252, 1964.
- [12] Christakos G. & Hristopulos D. T., *Spatiotemporal Environmental Modelling*, Kluwer Academic Publishers, Boston, 1998.
- [13] Elogne S., Hristopulos D. & Varouchakis E., *An application of Spartan spatial random fields un environmemtal mapping: Focus on automatic mapping capabilities*, Stochastic Environmental Research and Risk Assessment, 22 (5), 633-646, 2008.
- [14] Gomes H. M., *Fuzzy logic for structural system control*, Latin American Journal of Solids and Structures, 9 (1), 111-129, 2012.
- [15] Goovaerts P., *Geostatistics for natural resources evaluation*, New York: Oxford University Press, 1997.
- [16] Jensen O. P., Christman M. C. & Miller T. J. , *Landscape-based geostatistics: a case study of the distribution of blue crab in Chesapeake Bay*, Environmetrics, 17, 605-621, 2006.
- [17] Hristopulos D. T., *Spartan Gibbs random field models for Geostatistical applications*, SLAM Journal on Scientific Computing, 24(6), 2125-2162, 2003.

- [18] Hristopulos D. T. & Elogne S. N., *Analytic properties and covariance functions for a new class of generalized Gibbs random fields*, IEEE Transactions on Information Theory, 53 (12), 4667-4467, 2007.
- [19] Hristopulos D. T. & Elogne S. N., *Computationally efficient spatial interpolators based on spartan spatial random fields*, IEEE Transactions on Signal Processing, 57 (9), 3475-3487, 2009.
- [20] Kanevski M. & Maignan M. *Analysis and Modelling of Spatial Environmental Data*, EPFL Press, Lausanne, 2004.
- [21] Kitanidis P. K., *Introduction to geostatistics*, Cambridge: University Press, 1997.
- [22] Krige D. G., *A statistical approach to some basic mine valuation problems on the Witwatersrand*, Journal of the Chemical, Metalurgical and Mining Society of South Africa, 119-139, 1951.
- [23] Lantuejoul C., *Geostatistical simulation*, New York:Springer, 2002.
- [24] Mamdani E. H., *Application of Fuzzy Algorithms for Control of Simple Dynamic Plant*, IEEE, 121 (12), 1585-1588, 1974.
- [25] Massey Jr. F. J., *The Kolmogorov-Smirnov test for goodness of fit*, Journal of the American statistical Association, 46 (253), 68-78, 1951.
- [26] Matérn B., *Spatial variation*, Meddelanden fran Statens Skogsforsknings-institut, 49 (5), 1-144, 1960.
- [27] Pardo-Iguzquiza E. & Chica-Olmo M., *Geostatistics with the Matérn semivariogram model: A library of computer programs for inference,kriging and simulation*, Computers & Geosciences, 34 (9), 1073-1079, 2008.

- [28] Stein M.L., *Interpolation of Spatial Data: Some theory for kriging*, New York: Springer, 1999.
- [29] Tapoglou E., *Predicting Spatial and Temporal changes in groundwater levels using Artificial Neural Networks and Geostatistical methods*, School of Environmental Engineering, Technical University of Crete, Chania, 2015.
- [30] Varouchakis E.A., *Geostatistical Analysis and Space-Time Models of Aquifer Levels: Application to Mires Hydrological Basin in the Prefecture of Crete*, School of Mineral Resources Engineering, Technical University of Crete, Chania, 2012.
- [31] Vrucias B. L., Course notes on *Fuzzy Logic*, Department of Computing, University of Surrey, Guildford, 2006.
- [32] Zadeh L. A., *Fuzzy sets*, Information and Control, 8 (3), 338-353, 1965.
- [33] Žukovič M. & Hristopulos D. T. , *Environmental time series interpolation based on Spartan random processes*, Atmospheric Environment, 42 (33), 7669-7678, 2008.

Αλφαβητικό ευρετήριο

- Akaike, 58
Cressie, 58
Kriging, 60
Kriging Δεικτών, 72
αλληλεξάρτηση, 22
απόσταση
 Bray-Curtis, 57
 Canberra, 57
 Euclidean, 57
 Manhattan, 57
 Minkowski, 57
αποασαφοποίηση, 55
Ασαφής Λογική, 34
ασαφοποίηση, 52
αξιολόγηση κανόνων, 53
βαθμός συμμετοχής, 35
Βοξ-δξ, 101
διασπορά, 26
διασταυρωμένη επιβεβαίωση, 66
Ελάχιστα Τετράγωνα, 58
εξάρτηση
 ανισοτροπική, 31
 χωρική, 30
Γεωστατιστική, 19
ημιβαριόγραμμα, 30
 Matérn, 41
 δειγματικό, 37
 Δυναμονομικό, 40
 Εκθετικό, 40
 Γκαουσιανό, 40
 Γραμμικό, 40
 πειραματικό, 37
 Σφαιρικό, 40
κέντρο μάζας, 55
Κανονικό Kriging, 63
μέση τιμή, 24
μήκος συσχέτισης, 29
πεδίο
 Σπαρτιάτικο, 42
 στατιστικά
 ισοτροπικό, 29

ομοιογενές, 28	συμμετοχής, 35
τυχαίο, 21	συνδιασποράς, 27
προσομοίωση, 48	συσχέτισης, 30
χωρική εκτίμηση, 47	συναρτησιακό, 44
Σύστημα Ασαφούς Λογικής, 34	συντελεστής
συνάθροιση, 53	αsymμετρίας, 51
συνάρτηση	κύρτωσης, 51
	τυχαιότητα, 22