

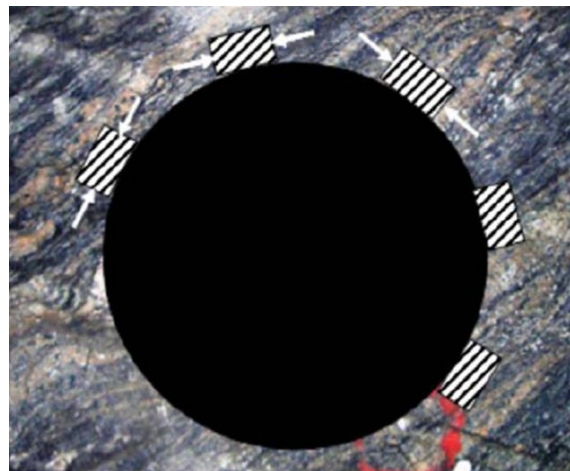


**Πολυτεχνείο Κρήτης**  
**Τμήμα Μηχανικών Ορυκτών Πόρων**

**Διπλωματική εργασία**

Καλαμάρας Χρήστος

**Ευστάθεια βαθέων γεωτρήσεων σε ανισότροπα  
πετρώματα**



**Εξεταστική επιτροπή:**

Εξαδάκτυλος Γεώργιος, Καθηγητής (επιβλέπων)

Στειακάκης Εμμανουήλ, Επίκουρος Καθηγητής

Λιόλιος Παντελής, Διδάκτορας

**ΧΑΝΙΑ, 2015**

Οι απόψεις και τα συμπεράσματα που περιέχονται σε αυτό το έγγραφο, εκφράζουν τον συγγραφέα και δεν πρέπει να ερμηνευτεί ότι αντιπροσωπεύουν τις επίσημες θέσεις των εξεταστών.

## **Ευχαριστίες**

Η εκπόνηση της παρούσας διπλωματικής εργασίας έγινε στο πλαίσιο της ολοκλήρωσης των σπουδών μου στο τμήμα Μηχανικών Ορυκτών Πόρων του Πολυτεχνείου Κρήτης. Σε αυτό το σημείο θα ήθελα να εκφράσω τις θερμές μου ευχαριστίες στον Καθηγητή μου κ. Εξαδάκτυλο Γεώργιο, για την πολύτιμη βοήθειά του καθ' όλη τη διάρκεια εκπόνησης της εργασίας. Ακόμη ένα ειλικρινές ευχαριστώ τον Δρ. Λιόλιο Παντελή, για την άψογη συνεργασία, το χρόνο και τη βοήθεια που μου διέθεσε στα διάφορα στάδια της εργασίας. Επιπροσθέτως θα ήθελα να ευχαριστήσω και τον Επίκουρο Καθηγητή κ. Στειακάκη Εμμανουήλ, για τη συμμετοχή του στην εξεταστική επιτροπή, καθώς και για τελικό έλεγχο και τις σημαντικές παρατηρήσεις που έκανε επί της εργασίας. Τέλος, θα ήθελα να εκφράσω την ευγνωμοσύνη μου, στην οικογένειά μου, η οποία με στήριξε και στάθηκε δίπλα μου, καθ' όλη τη διάρκεια των σπουδών μου.

## Περίληψη

Σκοπός της παρούσας διπλωματικής, είναι η κατανόηση των βασικών αρχών και παραμέτρων που επηρεάζουν την ευστάθεια των βαθέων γεωτρήσεων, υδρογονανθράκων, οι οποίες πραγματοποιούνται σε ανισότροπα πετρώματα.

Η εργασία επικεντρώνεται στην ειδική περίπτωση ενός εγκαρσίως ισότροπου μέσου και στην ανάλυση των τάσεων που δημιουργούνται στα σύνορα του κυκλικού ανοίγματος, λόγω επίδρασης εξωτερικών δυνάμεων σε αυτό. Επίσης παρουσιάζεται το κριτήριο και οι τρόποι αστοχίας της οπής, πριν τη διαδικασία σωλήνωσης και τσιμέντωσης των τοιχωμάτων, κατά την περίοδο που αυτά συγκρατούνται μόνο από την πίεση που δέχονται από τη ροή πολφού, εντός της στήλης γεωτρήσεως. Ιδιαίτερη έμφαση δίνεται στις μηχανικές ιδιότητες του πετρώματος, στο οποίο εκτελείται η γεώτρηση όπως επίσης και στη γωνία διεύθυνσης της ανισοτροπίας.

Τα δεδομένα τα οποία χρησιμοποιήθηκαν, ελήφθησαν από βιβλιογραφικές αναφορές τυπικών τιμών ελαστικότητας σχιστολιθικών πετρωμάτων. Τα αποτελέσματα των αναλύσεων των τάσεων, που εφαρμόζονται περιμετρικά της οπής της γεώτρησης, αποδόθηκαν με τη βοήθεια διαγραμμάτων, με τη χρήση των προγραμμάτων MATLAB και Excel.

Σύμφωνα με τα τελικά αποτελέσματα, συμπεραίνεται ότι η διάνοιξη γεωτρήσεων σε εγκαρσίως ισότροπα πετρώματα, παρουσιάζει δυσκολίες λόγω συγκέντρωσης, πολύ υψηλών τιμών τάσεων στα τοιχώματα της οπής. Τα προβλήματα ευστάθειας μπορούν να καταπολεμηθούν με τη χρήση ροής πολφού εντός της διατρητικής στήλης. Με αυτό τον τρόπο δημιουργούνται εφαιπτομενικές τάσεις, αντίθετες αυτών που δέχεται η οπή της γεώτρησης, με αποτέλεσμα τη μείωση των συνολικών τιμών τάσεων, σε βαθμό ώστε να εξυπηρετούνται τα όρια που θέτουν τα κριτήρια αστοχίας του πετρώματος.

# Περιεχόμενα

<b>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1</b>	7
<b>1. Εισαγωγή</b>	7
1.1 Περί κυκλικών ανοιγμάτων	7
1.2 Βασικές αρχές γεωτρήσεων	8
1.3 Διανοίξεις γεωτρήσεων και γεωτρήσεις υπό γωνία	9
1.4 Μηχανικοί τρόποι αστοχίας γεωτρήσεων	10
1.5 Τρόποι αστοχίας της οπής σε ανίσοτροπο μέσο	16
<b>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2</b>	17
<b>2. Θεωρία της ελαστικότητας</b>	17
2.1 Ορισμός Ελαστικότητας	17
2.2 Τανυστές	17
2.2.1 Τανυστής Τάσης	18
2.2.2 Τανυστής τροπών	21
2.3 Γενικευμένος νόμος του Hooke	21
2.4 Κυκλικά ανοίγματα: Εξισώσεις Kirsch	25
2.4.1 Εξισώσεις σε συνεχές, ομογενές, ισότροπο και γραμμικά ελαστικό υλικό	25
2.4.2 Κατανομή τάσεων σε κυκλικά ανοίγματα	28
2.5 Θεωρία ανισότροπου μέσου κατά Lekhnitskii	34
2.5.1 Εξισώσεις σε εγκαρσίως ισότροπο μέσο	34
2.5.2 Ειδικές περιπτώσεις φόρτισης	42
2.5.3 Συμπεριφορά των τάσεων στα σύνορα κυκλικού ανοίγματος	46
<b>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3</b>	50
<b>3. Κριτήρια και τρόποι αστοχίας πετρωμάτων</b>	50
3.1 Γενικά	50
3.2 Τρόποι αστοχίας των πετρωμάτων	51
3.3 Κριτήριο αστοχίας: Θεωρία Coulomb	53
3.4 Επίδραση της πίεσης πολφού (mud pressure), στο κριτήριο αστοχίας	56
<b>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4</b>	59
<b>4. Συμπεράσματα-Προτάσεις</b>	59
4.1 Συμπεράσματα	59
4.2 Προτάσεις για περαιτέρω έρευνα	59
<b>Βιβλιογραφία</b>	61



# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

## 1. Εισαγωγή

### 1.1 Περί κυκλικών ανοιγμάτων

Η ευστάθεια των κυκλικών ανοιγμάτων είναι ένα κοινό πρόβλημα για πολλούς τομείς μηχανικής, όπως η γεωτεχνική μηχανική (βραχομηχανική και εδαφομηχανική) και η μηχανική πετρελαίου. Η εργασία αυτή επικεντρώνεται στον τομέα της μηχανικής πετρελαίου και την ευστάθεια των βαθέων γεωτρήσεων σε ανισότροπα πετρώματα.

Η κατανόηση των μηχανικών ιδιοτήτων της περιοχής που περιβάλλει την οπή γύρω από μία βαθειά γεώτρηση έγινε από το Westergaard το (1940), οποίος και προέβλεψε την ύπαρξη μίας πλαστικής κατάστασης γύρω από αυτή, βασισμένος στην αρχή των ενεργών τάσεων του Terzaghi (1936). Η θεωρία του Westergaard αναπτύχθηκε περαιτέρω από τον Biot (1956), ο οποίος και εξήγησε τον ακριβή ρόλο των πιέσεων των πόρων και της ροής των ρευστών εντός των σχηματισμών που θα τοποθετηθεί η γεώτρηση. Κατά τη διαδικασία της διάτρησης, αλλά και της γενικής παρουσίας της γεώτρησης, οι γεωλογικοί σχηματισμοί διαταράσσονται. Αυτή η διαταραχή μπορεί να θεωρηθεί ως ένα προσεκτικά ελεγχόμενο πείραμα που ως σκοπό έχει τη συγκέντρωση απ ευθείας μετρήσεων πεδίου. Τέτοιου τύπου μετρήσεις μπορούν να αποδώσουν τις τάσεις που απελευθερώνονται κατά τη διάτρηση. Ακολουθώντας και λόγο της ύπαρξης της γεώτρησης, συλλέγονται στοιχεία τα οποία προκύπτουν από τη δημιουργία του πεδίου συγκέντρωσης τάσεων γύρω από αυτή. Ποικίλες άλλες μετρήσεις λ.χ jacking test, τεστ μικροϋδραυλικής αστοχίας, παρέχουν επιπλέον πληροφορίες του χημισμού των ρευστών, όπως επίσης και των ιδιοτήτων του σχηματισμού και της κατάστασης των τάσεων σε αυτούς. Η ευστάθεια των βαθέων γεωτρήσεων μπορεί να χωριστεί σε τέσσερις επιμέρους κατηγορίες, βάση του μηχανισμού που προκαλεί την αστοχία και είναι οι εξής:

- a) αστοχία λόγω προϋπαρχόντων συνθηκών του σχηματισμού ή της γεώτρησης π.χ ασυνέχειες πετρώματος, έλλειψη τσιμέντωσης των τοιχωμάτων της γεώτρησης
- b) αστοχία λόγω εισαγωγής ενός πεδίου συγκέντρωσης τάσεων πχ διάτμηση λόγω παρουσίας γειτονικών ανοιγμάτων
- c) αστοχία λόγω ακούσιας εισαγωγής επιπλέον τάσεων πχ διαφυγή ρευστού στο σχηματισμό
- d) αστοχία λόγω βίαιης αναταραχής και επιβολής φορτίου στο πέτρωμα πχ σεισμοί

Η U.S. National Committee for Rock Mechanics (1993) αναφέρει ότι, ο όρος αστοχία έχει δύο διαφορετικές έννοιες. Σημαίνει ταυτοχρόνως αποτυχία από τον τελικό στόχο που έχει θεσπίσει ο μηχανικός, όπως επίσης και ένα ερώτημα που χρίζει ερμηνείας κατά τη διαδικασία της μελέτης του έργου. Αξίζει να σημειωθεί ότι οι μηχανικοί γεωτρήσεων, δείχνουν μεγαλύτερο ενδιαφέρον στο να κατασκευαστεί μία γεώτρηση με ασφάλεια, όσον αφορά το θέμα της ευστάθειας και αυτό να γίνει σε μικρό χρονικό διάστημα. Παρόλα αυτά, ίσως να μην υπάρχει τόσο μεγάλη απαίτηση στο να είναι η γεώτρηση 'intact', ακόμη και αν αυτό σημαίνει ότι η τσιμέντωση αυτής δεν θα είναι η καλύτερη δυνατή. Αυτό συμβαίνει, εν αντιθέσει με όσους μηχανικούς είναι υπεύθυνοι για τη συγκέντρωση των στοιχείων που διέπουν τον ταμιευτήρα (Loggers-Reservoir engineers) , διότι μία 'intact' γεώτρηση προσφέρει πιο ακριβή δεδομένα και ως εκ τούτου μία καλύτερη αξιολόγηση των ιδιοτήτων του ταμιευτήρα.

## 1.2 Βασικές αρχές γεωτρήσεων

Για να μπορέσουν να κατανοηθούν καλύτερα τα προβλήματα μηχανικής που δημιουργούνται κατά τη διαδικασία κατασκευής μίας γεώτρησης υδρογονανθράκων, θα πρέπει πρώτα να δοθεί ο ορισμός της έννοιας, της γεώτρησης.

Βάση του ορισμού που έχει αποδώσει η U.S. National Committee for Rock Mechanics (1993) ως γεώτρηση ορίζεται, ένα φρέαρ σχετικά μικρής διαμέτρου, το οποίο ορύσσεται καθέτως, υπό γωνία, είτε οριζοντίως στο έδαφος και σκοπό έχει τη γεωλογική μελέτη των σχηματισμών του υπεδάφους, την εξαγωγή ρευστών από κάποιο συγκεκριμένο στρώμα αυτού, ή την υπόγεια αποθήκευση ανεπιθύμητων ουσιών. Συγκεκριμένα, αναφέρεται από την U.S. National Committee for Rock Mechanics (1993) πως, πριν τη διαδικασία διάνοιξης της γεώτρησης θα πρέπει να έχει γίνει μία αναλυτική μελέτη-σεισμική ανάλυση και των σχηματισμών που αναμένονται μέχρι τον ταμιευτήρα. Ο προσδιορισμός του βάθους της όρυξης είναι απαραίτητος, διότι η γεώτρηση θα ξεκινήσει με μία μέγιστη διάμετρο στην επιφάνεια και όσο αυτή θα βαθαίνει, η διάμετρος θα ελαττώνεται. Το αποτέλεσμα αυτής της διαφοροποίησης-συνεχής ελάττωσης της διαμέτρου της στήλης, είναι πως το τελικό σχήμα αυτής δε θα είναι κυλινδρικό, αλλά ένας ανεστραμμένος κόλουρος κώνος. Αυτή η διαφοροποίηση της διαμέτρου της γεώτρησης από την επιφάνεια έως τον ταμιευτήρα, γίνεται για να προβλεφθεί η αστοχία των τοιχωμάτων του φρέατος. Κατά το πρώτο στάδιο της όρυξης, οι τάσεις που δέχεται η κυλινδρική οπή της γεώτρησης, από τα γύρω στρώματα, θα πρέπει να αντισταθμιστούν με αντίθετης διεύθυνσης τάσεις για να αποφευχθεί τυχόν αστοχία στα τοιχώματα αυτής. Ο τρόπος με τον οποίο επιτυγχάνεται αυτό, είναι η κυκλοφορία πολφού(λάσπης) εντός της διατρητικής στήλης, πυκνότητας που μεταβάλλεται κάθε φορά, ανάλογα με το βάθος της γεώτρησης. Ο πολφός που



χρησιμοποιείται κατά κόρον, έχει αργιλική σύσταση και το ειδικό του βάρος μπορεί να μεταβληθεί ανάλογα με την περιεκτικότητά του σε μπετονίτη.

Σε αυτό το σημείο θα πρέπει να αναφερθεί η σημαντικότητα του σωστού υπολογισμού των υφιστάμενων τάσεων που δέχεται η γεώτρηση. Τυχόν εσφαλμένοι υπολογισμοί μπορούν να προκαλέσουν κατάρρευση των τοιχωμάτων της γεώτρησης. Αυτό μπορεί να συμβεί λόγω μεγάλης πυκνότητας του πολφού εντός της στήλης, που ως αποτέλεσμα έχει την διαρροή ρευστού στο γύρω σχηματισμό(αστοχία τοιχωμάτων). Επίσης ανάπτυξη φορτίου τάσεων, στα τοιχώματα τις γεώτρησης, μεγαλύτερου από αυτό που μπορεί να δεχτεί το πέτρωμα, μπορεί να προκαλέσει κατάρρευση της στήλης. Όταν η γεώτρηση φτάσει στο επιθυμητό βάθος το κοπτικό άκρο ανασηκώνεται και μένει η στήλη με τον πολφό. Στη συνέχεια τοποθετούνται σωλήνες εντός της διατρητικής στήλης, οι οποίες έχουν λίγο μικρότερη διάμετρο από αυτή. Στο διάκενο μεταξύ στήλης και σωληνώσεων εισχωρείται σκυρόδεμα. Η διαδικασία αυτή της σωλήνωσης και τσιμέντωσης της γεώτρησης γίνεται για:

- i. τη συγκράτηση των τοιχωμάτων
- ii. την έμφραξη των ρωγμών στα τοιχώματα της γεώτρησης
- iii. την καλύτερη κυκλοφορία των ρευστών

Μετά το πέρας του πρώτου σταδίου, καθελκύεται το κοπτικό άκρο, μικρότερης διαμέτρου από το πρώτο και η διαδικασία της διάτρησης συνεχίζεται με τον ίδιο ακριβώς τρόπο, μέχρις ότου η στήλη φτάσει στον ταμιευτήρα. Από κει και έπειτα γίνονται οι απαραίτητες μετρήσεις για να γίνει γνωστό αν ο ταμιευτήρας είναι εκμεταλλεύσιμος ή όχι. Αν είναι, ξεκινάει η διαδικασία παραγωγής, ειδάλλως η γεώτρηση σφραγίζεται και εγκαταλείπεται.

### **1.3 Διανοίξεις γεωτρήσεων και γεωτρήσεις υπό γωνία**

Όπως αναφέρει ο Michael B. Burton (1987), στις τις διανοίξεις γεωτρήσεων για τη διαπίστωση της παρουσίας κοιτασμάτων πετρελαίου και στη συνέχεια για την άντλησή του, εφαρμόζεται κατά κανόνα η περιστροφική μέθοδος όρυξης γεώτρησης. Βασική της αρχή είναι η διάρρηξη και ο θρυμματισμός των υπερκείμενων πετρωμάτων με τη βοήθεια ενός περιστρεφόμενου γεωτρήπανου που φέρει οδοντωτούς τροχούς ή αδαμάντινες προσμείξεις, ώστε να αυξάνεται η σκαπτική του ικανότητα. Εξέχουσα θέση στη σύγχρονη γεωτρητική τεχνική αποτελεί η διάνοιξη οριζόντιων φρεάτων σε μεγάλα σχετικά βάθη, που επιτεύχθηκε για πρώτη φορά το 1983. Σύμφωνα με την τεχνική αυτή, η γεώτρηση αρχικά προχωρεί κατακόρυφα έως το σημείο που έχει επιλεχθεί για να αρχίσει η εκτροπή. Εκεί τοποθετούνται ειδικές σφήνες που προκαλούν την πλαγιοδρόμηση του τρυπανιού με μικρές στην αρχή κλίσεις ως προς την κατακόρυφο, που γίνονται βαθμιαία μεγαλύτερες όσο προσεγγίζεται η νοητή γραμμή που συνδέει την κατακόρυφο με το κοίτασμα. Η πορεία του τρυπανιού ελέγχεται συνεχώς είτε με

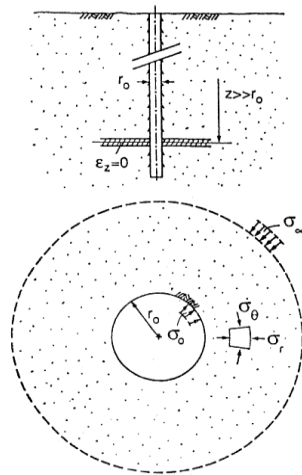
ειδικά όργανα που προωθούνται μέσα στο όρυγμα είτε με Ασύρματες Συσκευές Καταγραφών. Μόλις ολοκληρωθεί η διάνοιξη της καμπύλης, το γεωτρητικό σύστημα ανασύρεται στην επιφάνεια και στο χαμηλότερό του τμήμα προσαρμόζεται ένας σταθερός και ευθύς άξονας, ο οποίος φέρει το τρυπάνι, τους σωλήνες βάρους και τους δακτύλιους στήριξης. Η γεώτρηση συνεχίζεται σε οριζόντια πλέον διεύθυνση έως ότου το γεωτρύπανο έλθει σε επαφή με το κοίτασμα. Οι οριζόντιες γεωτρήσεις άνοιξαν νέες προοπτικές στην εξόρυξη του πετρελαίου, καθώς αξιοποιήθηκαν πολλά κοιτάσματα που θεωρούνταν μη εκμεταλλεύσιμα λόγω των ιδιόμορφων γεωλογικών και φυσικών χαρακτηριστικών τους, όπως π.χ. το κοίτασμα Rospo Mare της Αδριατικής κοντά στην Πεσκάρα της Ιταλίας και το Brudhoe στη Βόρεια Αλάσκα.

#### 1.4 Μηχανικοί τρόποι αστοχίας γεωτρήσεων

Ο Guenot (1989) αναφέρει ότι, λόγω της δράσης σημαντικών γεωστατικών, θερμικών και τεκτονικών δυνάμεων που συναντώνται σε πολύ μεγάλα βάθη, οι βαθιές γεωτρήσεις υποφέρουν από πολύ σοβαρές καταπονήσεις και μπορούν να υποστούν θραύση, απολέπιση (exfoliation) και να κινδυνεύσει η ευστάθειά τους. Αυτοί οι τύποι αστοχίας επηρεάζουν τη διαδικασία της διάτρησης και μπορεί να τεθεί σε κίνδυνο μέχρι και η παραγωγική διαδικασία. Κάθε χρόνο προβλήματα ευστάθειας γεωτρήσεων κοστίζουν στις πετρελαϊκές εταιρίες περίπου έξι δισεκατομμύρια δολάρια(6,000,000,000\$).

Πριν ξεκινήσει η διαδικασία της διάτρησης, οι οριζόντιες και κατακόρυφες τάσεις του σχηματισμού-βραχώμαζας, βρίσκονται σε ισορροπία. Κατά τη διάρκεια της όρυξης, η ισορροπία αυτή παύει να υφίσταται και η καταπόνηση του συστήματος επιδεινώνεται με την εισχώρηση, ξένων για το σχηματισμό, ρευστών λόγω της γεώτρησης *Guenot* (1989) . Η επίδραση των ρευστών στη βραχώμαζα μπορεί να προκαλέσει πιθανή αστάθεια της στήλης. Για να γίνει σωστή εκτίμηση της ευστάθειας της γεώτρησης θα πρέπει να ληφθούν υπ' όψιν κάποια δεδομένα πεδίου, όπως:

- a) Υπολογισμός των επιτόπου τάσεων στο πεδίο
- b) Πίεση πόρων
- c) Μηχανικές ιδιότητες της βραχώμαζας
- d) Χημισμός των ρευστών διάτρησης και του σχηματισμού



**Σχ. 1** κατανομή των τάσεων  
περιμετρικά της οπής

Το βασικό πρόβλημα των βαθέων γεωτρήσεων έγκειται στο ότι το αρχικό κυκλικό άνοιγμα υποβάλλεται σε μεταβαλλόμενες συνθήκες πίεσης, θερμοκρασίας και ροής ρευστών και υποστηρίζεται περισσότερο ή λιγότερο αποτελεσματικά, ανάλογα με το αν το υγρό εισχωρεί στο βράχο κατά τη διάρκεια της γεώτρησης. Στη συνέχεια η γεώτρηση εγκιβωτίζεται με ένα χαλύβδινο περίβλημα, το οποίο μπορεί να αποτελέσει αντικείμενο των παραμορφώσεων και να προκληθεί βλάβη. Αστοχία της βραχόμαζας μπορεί να προκαλέσει, κατάρρευση των τοιχωμάτων της γεώτρησης.

Η καταπόνηση του πετρώματος κατά τη διαδικασία όρυξης της γεώτρησης, είναι ένας πολύ σημαντικός παράγοντας ο οποίος θα πρέπει να ληφθεί και αυτός υπ' όψιν του υπεύθυνου μηχανικού. Παρ' όλα αυτά, η θραύση της βραχόμαζας μπορεί να συμβεί πολύ πριν το μέτωπο της γεώτρησης φτάσει στο σημείο. Ο μηχανισμός αυτός που πραγματοποιεί τη θραύση, πρέπει να προβλεφθεί κατά τη διάρκεια της μελέτης της πυρηνοληψίας. Από τη στιγμή που η γεώτρηση φτάσει στο σημείο που έχει αστοχήσει η βραχόμαζα, η κατάρρευσή της πρέπει να θεωρηθεί κάτι παραπάνω από σίγουρη. Αφού η πρόσβαση στο σημείο πριν συμβεί η αστοχία δεν είναι δυνατή, οι επιλογές για να αποτραπεί το συμβάν αυτό καθ' αυτό είναι περιορισμένες. Η αύξηση της πυκνότητας του πολφού, είναι ένας τρόπος που μπορεί να σταματήσει την κατάρρευση και να συγκρατήσει τα τοιχώματα της στήλης. Κατά τη διαδικασία της όρυξης, εναποτίθεται με διήθηση στα τοιχώματα ένα «mud cake» (ο πολφός δημιουργεί κρούστα γύρω και κατά μήκος της οπής της γεώτρησης), το οποίο τελικά διασφαλίζει την ευστάθεια λόγω των διαφορικών τάσεων που δέχεται η γεώτρηση. Θα πρέπει όμως να σημειωθεί ότι ένας πολύ σημαντικός παράγοντας στην όλη διαδικασία είναι και ο χρόνος που θα χρειαστεί για να δημιουργηθεί το «cake» στα τοιχώματα, όπως επίσης και ο ρυθμός διάτρησης. Στην περίπτωση μη σωστού υπολογισμού, υπάρχει πιθανότητα η στερεοποίηση του πολφού να μην είναι καθολική και λόγω αυτού, στα σημεία τα οποία δεν θα υπάρχει στερεοποίηση, οι διαφορικές τάσεις να υπερβούν τα

όρια θραύσης και να υπάρξει μέχρι και κατάρρευση της στήλης της γεώτρησης. Η αύξηση ή μείωση της πυκνότητας του πολφού επηρεάζει άμεσα το ρυθμό διάτρησης, όπως επίσης μπορεί να οδηγήσει σε απώλεια λάσπης στα γύρω στρώματα(αυξημένη πυκνότητα μπορεί να κάνει τη βραχώμαζα να αστοχήσει, λόγω των πιέσεων που δέχεται από το ρευστό εντός της γεώτρησης).

Οι παράγοντες που επηρεάζουν την ευστάθεια των γεωτρήσεων όπως αναφέρονται στην ιστοσελίδα, [http://petrowiki.org/Borehole\\_instability](http://petrowiki.org/Borehole_instability) μπορούν να κατηγοριοποιηθούν ως:

- i. Μηχανικοί παράγοντες (η αστοχία είναι αποτέλεσμα κυρίως υπέρβασης της μηχανικής αντοχής της βραχώμαζας (σχηματισμού) στην οποία εκτελείται η γεώτρηση)
- ii. Χημικοί παράγοντες (η αλληλεπίδραση μεταξύ των ρευστών εντός της γεώτρησης και του σχηματισμού μπορεί να προκαλέσουν αστοχία)
- iii. Παράγοντες διάβρωσης (προκαλούνται από την κυκλοφορία ρευστού στις σωληνώσεις)

Μπορούν να παρατηρηθούν τέσσερις διαφορετικοί τύποι αστοχίας φρέατος:

- Στένωση

Η στένωση της γεώτρησης, είναι μία διαδικασία εξαρτώμενη από το χρόνο και παρατηρείται σε σχιστολιθικούς σχηματισμούς λόγω πλαστικότητας. Παρατηρούνται συγκεκριμένα προβλήματα σε αυτού του τύπου την αστοχία(κατά την ανόρυξη), όπως:

- i. Αύξηση της ροπής και έλξης της στήλης
- ii. Αύξηση της πιθανότητας να κολλήσει ο αγωγός(σωλήνας) εντός του ορύγματος
- iii. Αύξηση της δυσκολίας της τοποθέτησης του πλαισίου γύρω από το όρυγμα

- Διεύρυνση

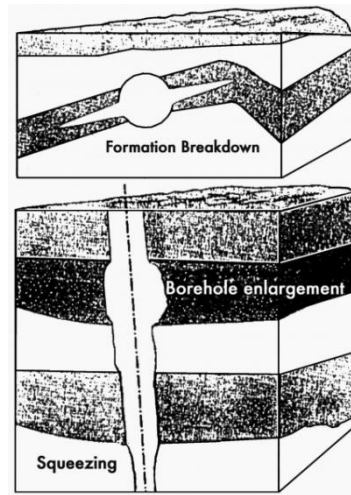
Κατά τη διαδικασία της διεύρυνσης, η διάμετρος της οπής της γεώτρησης γίνεται πολύ μεγαλύτερη από όσο προοριζόταν κατά το σχεδιασμό. Η αστοχία αυτή, είναι αποτέλεσμα.

- i. υδραυλικής διάβρωσης
- ii. μηχανικής απόξεσης που προκαλείται από την κεφαλή του γεωτρηπάνου
- iii. εγγενώς εκβάλτωση του σχιστολιθικού σχηματισμού (δημιουργία εγκοίλου από λάσπη περιμετρικά της στήλης)

προβλήματα τα οποία υποδηλώνουν αυτού του είδους την αστοχία μπορεί να είναι α) δυσκολία τσιμέντωσης της γεώτρησης, β) πιθανή παρέκκλιση της στήλης, γ )πιθανή αντιμετώπιση προβλημάτων κατά τη διαδικασία συλλογής των δεδομένων μέσω του Η/Υ.

- Θραύση(βραχώμαζας)

Κατά την όρυξη, οι πιέσεις που δημιουργεί ο πολφός στα τοιχώματα της στήλης, μπορεί να υπερβούν τη μέγιστη τιμή πιέσεων που μπορεί να δεχτεί ο σχηματισμός.



Σχ. 2 Τρόποι αστοχίας βραχώμαζας

- Κατάρρευση

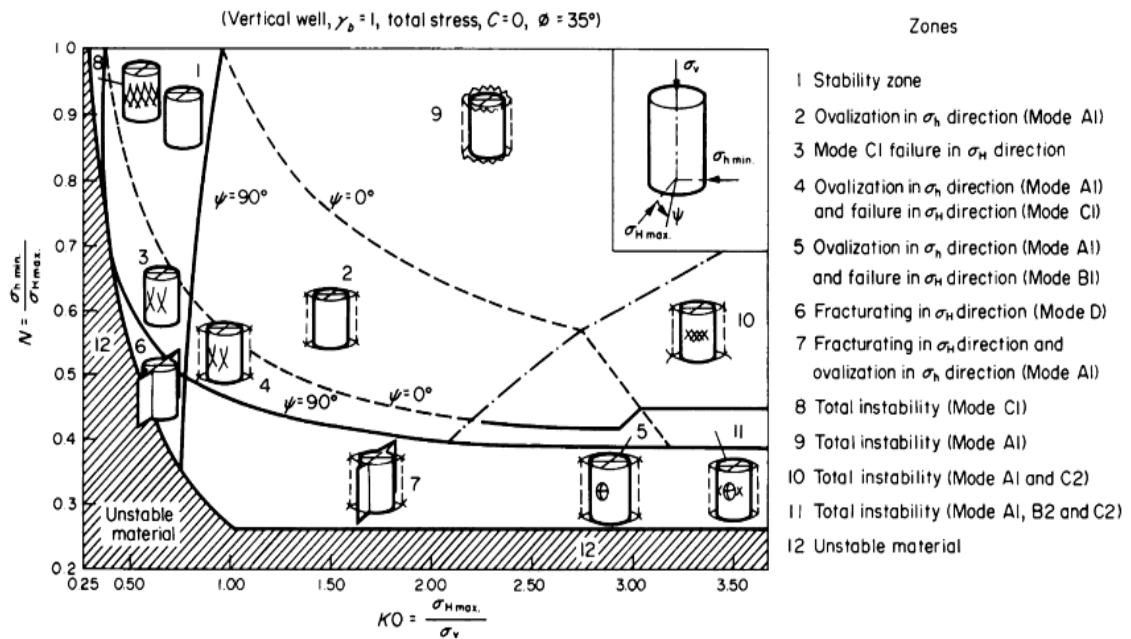
Αν η πυκνότητα του πολφού δεν είναι αρκετά υψηλή για να συγκρατήσει τα τοιχώματα της γεώτρησης, μπορεί να υπάρξει κατάρρευση η οποία είναι δυνατόν να προκαλέσει αδυναμία ανέλκυσης της διατρητικής στήλης, μέχρι και καθολική απώλεια της γεώτρησης.

Για φρέατα τα οποία έχουν ήδη υποστηριχθεί με σωληνώσεις και έχουν τσιμεντωθεί, παρατηρούνται οι εξής τύποι αστοχίας:

- κατάρρευση γεώτρησης, λόγω αστοχίας υποστήριξης. [Η όλη διαδικασία της διάτρησης και υποστήριξης μπορεί να έχει γίνει με επιτυχία, αλλά η βραχώμαζα είναι ικανή να δημιουργήσει τάσεις κόπωσης οι οποίες ως αποτέλεσμα έχουν, τη συστολή των σωληνώσεων και την τελική κατάρρευση της στήλης. Επίσης, μη σωστή τσιμεντώση μπορεί να οδηγήσει σε κατάρρευση του φρέατος, ενώ διατμητική αστοχία μπορεί να προκληθεί από μετακινήσεις βράχων οι οποίες είναι δυνατό να προκληθούν από τις μεταβολές στις πιέσεις των πόρων.]
- ανεπαρκής διασύνδεση των σωλήνων. [Ένας εκ των ρόλων που έχουν οι σωληνώσεις είναι να απομονώσουν διαφορετικού τύπου στρώματα το ένα από το άλλο. Μη επαρκής απομόνωση μπορεί να οδηγήσει σε εισχώρηση νερού στη γεώτρηση.]
- καταπόνηση σχηματισμού. [Η υπερβολική καταπόνηση που προκαλεί η στήλη στο σχηματισμό κατά τη διαδικασία, είτε της διάτρησης, είτε της ολοκλήρωσης, ή της εξέτασης και παραγωγής, μπορεί να οδηγήσει σε μείωση της παραγωγικότητας-επίδοσης της γεώτρησης.]

Έχει γίνει λοιπόν κατανοητό, ότι κύριο ρόλο στην ευστάθεια βαθέων γεωτρήσεων έχουν οι οριζόντιες και κατακόρυφες τάσεις που διέπουν το σχηματισμό. Επίσης, η κλίση-διεύθυνση του φρέατος, επηρεάζει και αυτή σε σημαντικό βαθμό την ευστάθεια. Σχετικά διαγράμματα τύπου αστοχίας της οπής της γεώτρησης, έχουν σχεδιαστεί και παρουσιάζονται παρακάτω για περιπτώσεις:

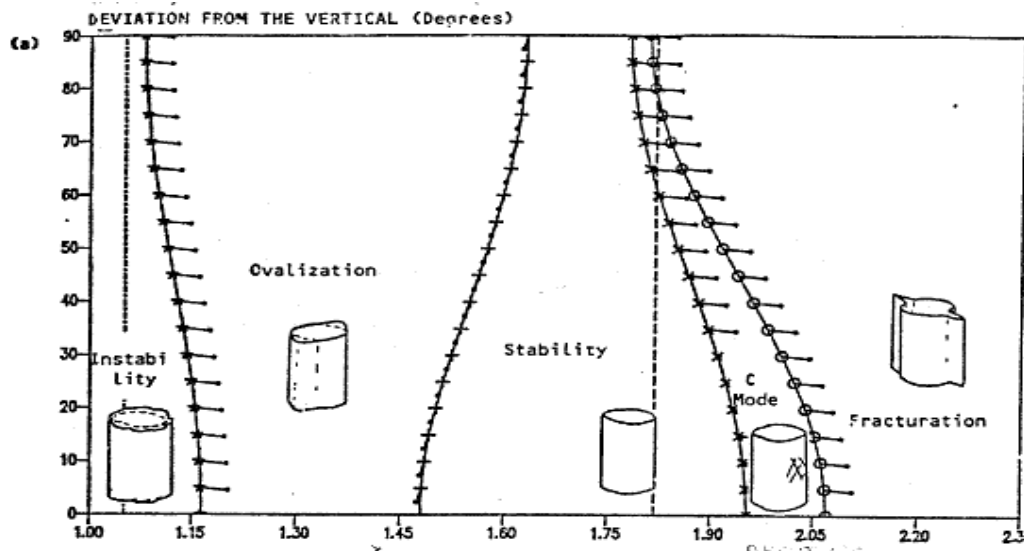
#### A. Ανισότροπου πετρώματος (Van Dyck)



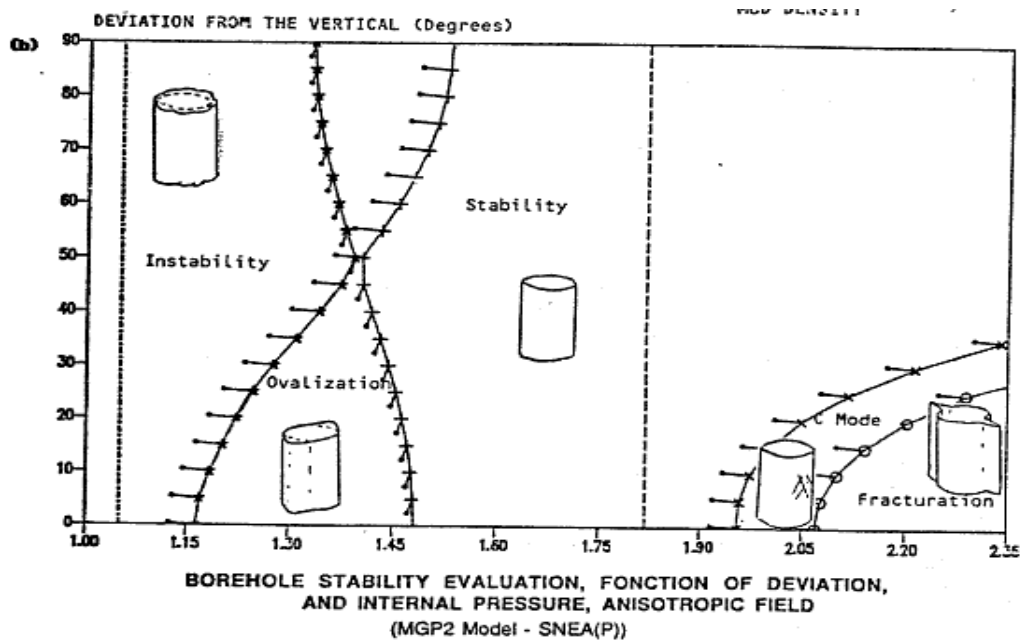
Σχ. 3 Ζώνες και τρόποι αστοχίας γεώτρησης

Στο παραπάνω διάγραμμα παριστάνονται όλα τα είδη και οι τρόποι αστοχίας *Van Dyck* (1975), για κατακόρυφη γεώτρηση σε ανισότροπο πέτρωμα, σε σχέση με τις τάσεις που δέχονται τα τοιχώματα της οπής.

#### B. Προσανατολισμού γεώτρησης



Σχ. 4 Παραμόρφωσης γεώτρησης



(a) : borehole azimuth in direction Q1

(b) : borehole azimuth in direction Q2

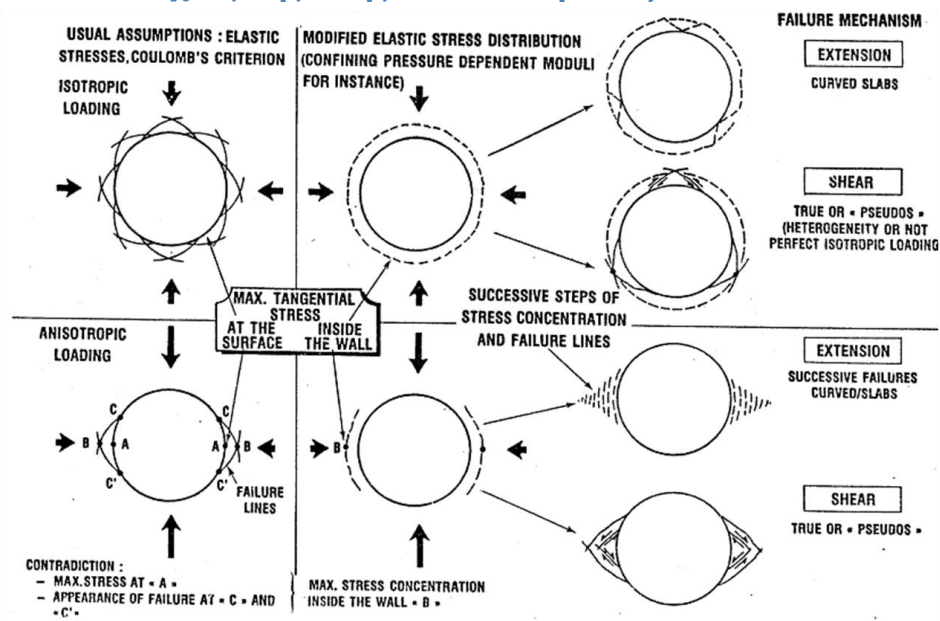
Marles :  $c = 7.3 \text{ MPa}$ ,  $\phi = 38^\circ$ ,  $\nu = 0.2$ . Effective stress calculation, good cake quality

In-situ stress:  $P = 2.6 \cdot 3500 = 91 \text{ MPa}$ ,  $Q1 (\sigma_H) = 0.9 P$ ,  $Q2 (\sigma_h) = 0.7 P$ ,  $AzQ1 = N100$

Σχ. 5 Παραμόρφωσης γεώτρησης

Τα παραπάνω διαγράμματα παρουσιάζουν την παραμόρφωση που παρατηρείται στην γεώτρηση, σε σχέση με τη γωνία που σχηματίζει με την κατακόρυφο ως προς την πυκνότητα του πολφού που ρέει εντός της στήλης. Τα διαγράμματα παρουσιάζουν δύο γεωτρήσεις με διαφορετικές αζιμουθιακές γωνίες (προσανατολισμός ως προς το βορά).

## 1.5 Τρόποι αστοχίας της οπής σε ανίσοτροπο μέσο



Σχ. 6 Τρόποι αστοχίας της οπής

Στο γράφημα το οποίο παραθέτει ο George Exadaktylos, παρατηρούνται τέσσερα βασικά είδη αστοχίας της οπής της γεώτρησης, όπου οι μέγιστες εφαιπτομενικές τάσεις συγκεντρώνονται, είτε εντός των τοιχωμάτων της οπής, είτε στα σύνορα αυτής. Η αστοχία θα προκύψει λόγω διάτμησης (shear failure), είτε λόγω υπερέκτασης των τοιχωμάτων (extension failure), με έξι διαφορετικές μορφές αστοχίας.



## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

### 2. Θεωρία της ελαστικότητας

#### 2.1 Ορισμός Ελαστικότητας

Ελαστικότητα είναι η ιδιότητα υλικών σωμάτων να επανέρχονται στο αρχικό τους σχήμα μετά από άσκηση εξωτερικής τάσης *Ζαχαρίας Γ. Αγιουτάντης* (2002). Ελαστικά είναι τα σώματα στα οποία αποκαθίσταται το αρχικό τους σχήμα όταν μηδενίζεται η τάση που εφαρμόζεται σ' αυτά ενώ πλαστικά είναι τα σώματα που η παραμόρφωση που έχουν δεχτεί παραμένει μόνιμα. Η ελαστικότητα των σωμάτων χαρακτηρίζεται από ένα φυσικό μέγεθος, γνωστό ως μέτρο ελαστικότητας ( $E$ ). Κάθε υλικό σώμα με την άσκηση τάσης, δηλαδή δύναμης ανά μονάδα διατομής, παραμορφώνεται. Για μικρές τάσεις η παραμόρφωση είναι ανάλογη της τάσης που εφαρμόζεται. Ο λόγος της τάσης προς την παραμόρφωση σε κάθε σώμα είναι σταθερός και ονομάζεται μέτρο ελαστικότητας. Το μέτρο ελαστικότητας εξαρτάται από το υλικό που παραμορφώνεται και την φύση της παραμόρφωσης. Υπάρχουν τρεις διαφορετικές κατηγορίες παραμόρφωσης που χαρακτηρίζονται από διαφορετικά μέτρα ελαστικότητας

- I. Η γραμμική παραμόρφωση που χαρακτηρίζεται από το μέτρο ελαστικότητας Young
- II. Η παραμόρφωση σχήματος που χαρακτηρίζεται από το μέτρο ελαστικότητας σχήματος (μέτρο διάτμησης)
- III. Η παραμόρφωση όγκου που χαρακτηρίζεται από το μέτρο ελαστικότητας όγκου.

Τα παραπάνω γίνονται περαιτέρω κατανοητά με την προσθήκη της έννοιας του τανυστή (τάσεων-τροπών).

#### 2.2 Τανυστές

Ο *Ζαχαρίας Γ. Αγιουτάντης* (2002) ορίζει τους τανυστές (tensors) ως γεωμετρικά αντικείμενα, που μπορούν να θεωρηθούν ως γενικευμένα διανύσματα. Περιγράφουν γραμμικές σχέσεις ανάμεσα σε διανύσματα, βαθμωτά μεγέθη και άλλους τανυστές. Βασικά παραδείγματα τέτοιων σχέσεων περιλαμβάνουν το εσωτερικό γινόμενο, το εξωτερικό γινόμενο και γραμμικούς μετασχηματισμούς. Τα διανύσματα και τα βαθμωτά μεγέθη είναι επίσης τανυστές. Ένας τανυστής μπορεί να απεικονιστεί σαν μία πολυδιάστατη διάταξη αριθμητικών τιμών. Η τάξη (ή βαθμός) ενός τανυστή είναι η διαστατικότητα της διάταξης που χρειάζεται για να τον απεικονίσει ή ισοδύναμα, ο αριθμός των δεικτών που χρειάζονται για να ονοματιστεί και να διαχωριστεί ένα στοιχείο αυτής της διάταξης. Στον τρισδιάστατο χώρο ένας τανυστής  $N$  τάξης έχει  $3^N$  όρους. Έτσι ένας τανυστής πρώτης ( $1^{η}$ ) τάξης

έχει 3 όρους, παριστάνει δηλαδή ένα διάνυσμα. Ένας δεύτερης(2<sup>ης</sup>) τάξης  $\alpha_{ij}$  έχει 9 όρους και παριστάνει ένα πίνακα 3x3 κ.ο.κ .

$$\alpha_{ij} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{bmatrix} \quad \text{σχέση (2.1)}$$

Εδώ θα πρέπει να σημειωθεί πώς ο τανυστής δεύτερης τάξης καλύπτει μερικούς ορισμούς της κλασικής θεωρίας ελαστικότητας (τανυστής τάσης, τανυστής παραμόρφωσης), καθώς επίσης και άλλα φυσικά μεγέθη όπως υδραυλική διαπερατότητα, κλπ. Επειδή εκφράζουν σχέση μεταξύ διανυσμάτων, οι ίδιοι οι τανυστές πρέπει να είναι ανεξάρτητοι της επιλογής ενός συγκεκριμένου συστήματος συντεταγμένων. Παίρνοντας ένα σύστημα συντεταγμένων αναφοράς και εφαρμόζοντας σε αυτό τον τανυστή, προκύπτει μία οργανωμένη πολυδιάστατη διάταξη που απεικονίζει τον τανυστή σε αυτό το σύστημα αναφοράς. Η ανεξαρτησία συστήματος συντεταγμένων ενός τανυστή παίρνει τότε τη μορφή ενός νόμου συναλλοίωτου μετασχηματισμού, που συσχετίζει τη διάταξη που υπολογίζεται στο ένα σύστημα με αυτήν που υπολογίζεται σε κάποιο άλλο. Αυτός ο μετασχηματισμός θεωρείται ότι δημιουργείται μέσα στην ιδέα του τανυστή σε ένα γεωμετρικό ή φυσικό χώρο και η ακριβής μορφή του μετασχηματισμού προσδιορίζει τον τύπο (ή σθένος) του τανυστή.

### 2.2.1 Τανυστής Τάσης

Οι δυνάμεις που μπορεί να δεχτεί ένα σώμα χωρίζονται σε, δυνάμεις επιφάνειας και δυνάμεις πεδίου. Για τον ορισμό της τάσης που εφαρμόζεται σε ένα σώμα, όπως αναφέρεται στην ιστοσελίδα <https://el.wikipedia.org/wiki/Τανυστής>, θεωρείται ένα συνεχές σώμα το οποίο βρίσκεται σε ισορροπία κάτω από την επίδραση ορισμένων εξωτερικών δυνάμεων. Σε τυχαίο επίπεδο, το οποίο τέμνει το σώμα και διέρχεται από ένα εσωτερικό του σημείου (έστω P), θεωρείται τυχαία επιφάνεια ΔΑ στο σημείο P του σώματος πάνω στο εν λόγω τυχαίο επίπεδο. Τέλος θα πρέπει οι εσωτερικές δυνάμεις του σώματος να είναι συνεχείς, αλλά όχι απαραίτητως του ίδιου μεγέθους. Ο προσανατολισμός της επιφάνειας ΔΑ μπορεί να παρασταθεί με ένα μοναδιαίο διάνυσμα κάθετο προς αυτή (έστω  $n_i$ ), το οποίο ορίζει και τον προσανατολισμό του θεωρούμενου επιπέδου. Αν σε αυτό το επίπεδο ασκηθεί δύναμη  $\Delta F_i$  τότε το διάνυσμα τάσης που αντιστοιχεί στην επιφάνεια AB (άρα και στο  $n_i$ ) θα έχει τη διεύθυνση της  $\Delta F_i$  και θα ορίζεται από τη σχέση όπως αποδίδεται από τον Ζαχαρία Αγιουτάντη (2002):

$$\sigma_i = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F_i}{\Delta A} = \frac{dF_i}{dA} \quad \text{σχέση (2.2)}$$

Οι μονάδες τάσης είναι ουσιαστικά μονάδες πίεσης και εκφράζονται σε Pa(N/m<sup>2</sup>) και στα πολλαπλάσιά του kPa, MPa, GPa όπως επίσης και σε μονάδες psi(lbf/in<sup>2</sup>).

Γίνεται λοιπόν κατανοητό ότι για την πλήρη απόδοση της εντατικής κατάστασης του σώματος γύρω από το σημείο P, απαιτούνται τρία διανύσματα τάσης που θα αντιστοιχούν σε κάθε μία από τις τρεις επιφάνειες [ΔA1,ΔA2,ΔA3]. Αν αυτές οι επιφάνειες σχηματίζουν μεταξύ τους ορθή γωνία, τότε και τα μοναδιαία διανύσματα που αντιστοιχούν σε αυτές θα είναι ορθογώνια μεταξύ τους. Τότε για κάθε επιφάνεια θα ισχύει από **σχέση(2.2)**:

$$\sigma_{1i} = \lim_{\Delta A_1 \rightarrow 0} \frac{\Delta F_i}{\Delta A_1} = \frac{dF_i}{dA_1} \quad (2.3)$$

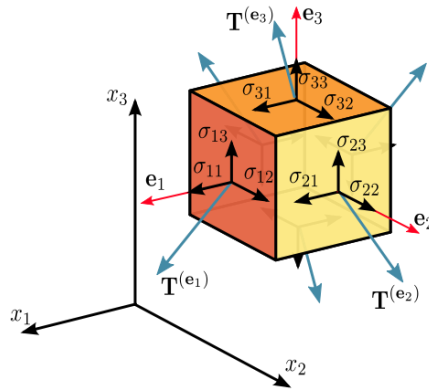
$$\sigma_{2i} = \lim_{\Delta A_2 \rightarrow 0} \frac{\Delta F_i}{\Delta A_2} = \frac{dF_i}{dA_2} \quad (2.4)$$

$$\sigma_{3i} = \lim_{\Delta A_3 \rightarrow 0} \frac{\Delta F_i}{\Delta A_3} = \frac{dF_i}{dA_3} \quad (2.5)$$

Αφού τα μοναδιαία διανύσματα είναι κάθετα μεταξύ τους (έστω n<sub>i</sub>, z<sub>i</sub>, k<sub>i</sub>) ορίζουν τους άξονες ενός καρτεσιανού συστήματος αναφοράς με τρεις ορθογώνιους άξονες, τότε κάθε διάνυσμα τάσης είναι δυνατόν να αναλυθεί σε τρεις συνιστώσες στο συγκεκριμένο σύστημα. Τα εννέα αυτά μεγέθη αποτελούν τον τανυστή τάσης σ<sub>ij</sub> σημείο P και η μορφή αυτού θα είναι:

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

Όπου σ<sub>x</sub>, σ<sub>y</sub>, σ<sub>z</sub> θεωρούνται ορθές τάσεις, ενώ οι υπόλοιπες συνιστώσες αναφέρονται ως διατμητικές.



**Σχ. 7** Σχηματική αναπαράσταση τανυστή τάσεων δεύτερης τάξης

Για τον τανυστή  $\sigma_{ij}$  που χαρακτηρίζει την εντατική κατάσταση στο σημείο P, αναφέρεται σε ένα τυχαίο ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων, διότι η αρχική επιφάνεια ΔΑ είχε τυχαία διεύθυνση  $n_i$ . Επομένως είναι δυνατόν με κατάλληλους μετασχηματισμούς να βρεθεί ένα νέο σύστημα ( $h'$ ) συντεταγμένων για το οποίο ο τανυστής  $\sigma_{ij}$  να μην έχει διατμητικές συνιστώσες και να αποτελείται μόνο από τις ορθές τάσεις, που στην περίπτωση αυτή ονομάζονται κύριες τάσεις και είναι παράλληλες ως προς τους άξονες του συστήματος ( $h'$ ), οι οποίοι ονομάζονται κύριοι άξονες και αποτελούν το κύριο σύστημα συντεταγμένων. Οι κύριες τάσεις συμβολίζονται ως,  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  και ορίζονται έτσι ώστε να ισχύει η παρακάτω ισότητα:

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_x & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3 \quad (2.8)$$

Για τις κύριες τάσεις ισχύει ότι, είναι ορθές και δεν έχουν διατμητικές συνιστώσες, όπως επίσης και ότι η εύρεση αυτών ισοδυναμεί με την εύρεση των ιδιοτιμών και ιδιοδιανυσμάτων του τανυστή τάσης. Αν ο τανυστής  $\sigma_{ij}$  υποδηλώνει τις τάσεις που αναφέρονται σε ένα σύνολο Καρτεσιανών αξόνων συντεταγμένων  $x, y, z$  τότε η εξίσωση κίνησης (ή ισορροπίας) είναι:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + F_i = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}, \quad \sigma_{ij} = \sigma_{ji} \quad (2.9)$$

Με  $\mathbf{F}_i$  να είναι η δύναμη του σώματος ανά μονάδα όγκου  $\mathbf{u}_i$  η μετατόπιση και  $\rho$  η πυκνότητα της μάζας. Τότε η συνιστώσα  $T_i$  της δύναμης, ανά μονάδα επιφάνειας που δρα στο επίπεδο  $\mathbf{n}_i$ , θα είναι:

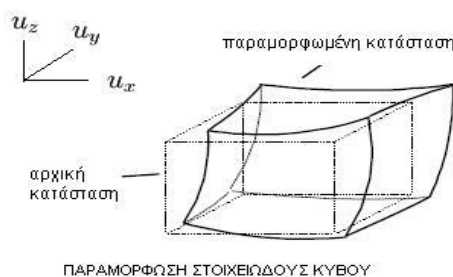
$$\mathbf{T}_i = \sigma_{ij} \mathbf{n}_i \quad (2.10)$$

### 2.2.2 Τανυστής τροπών

Οι εξισώσεις των τροπών, όπως αναφέρει ο Τσαμασφύρος (1991), δηλαδή των ανηγμένων παραμορφώσεων, προκύπτουν με χρήση διαφορικής ανάλυσης για τον στοιχειώδη κύβο όταν αυτός παραμορφωθεί. Αφορούν δηλαδή, τη γεωμετρία του παραμορφωμένου κύβου όταν αυτός θεωρηθεί πολύ μικρός. Ανηγμένη παραμόρφωση στη μία διάσταση σημαίνει παραμόρφωση διά το αρχικό μήκος (αδιάστατο μέγεθος). Στις τρεις διαστάσεις ονομάζονται τροπές και γενικά λαμβάνουν πιο πολύπλοκη έκφραση, ενώ ο τανυστής παίρνει τη μορφή:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(\mathbf{u}_{j,i} + \mathbf{u}_{i,j}) \quad (2.11)$$

[https://el.wikipedia.org/wiki/Θεωρία\\_ελαστικότητας](https://el.wikipedia.org/wiki/Θεωρία_ελαστικότητας)



Σχ. 8 παραμόρφωση στοιχειώδους κύβου

### 2.3 Γενικευμένος νόμος του Hooke

Η καταστατική εξίσωση ελαστικής συμπεριφοράς σε τρεις διαστάσεις δίνεται από το γενικευμένο νόμο του Hooke (generalized Hook's law), όπως αναφέρετε από τον Κανάρης Χ. Τσίγκανος (2004) και συνδέει τις τάσεις με τις παραμορφώσεις. Αποδίδεται από τη σχέση:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (2.12)$$

Με  $C_{ijkl}$  να είναι τανυστής τέταρτης τάξης που εξαρτάται από τις ελαστικές σταθερές του σώματος. Όταν υφίσταται συμμετρία των τανυστών  $\sigma_{ij}$  και  $\varepsilon_{ij}$ , από τους  $3^4=81$  όρους του τανυστή  $C_{ijkl}$ , μόνο 36 είναι διαφορετικοί *Κωνσταντίνος Ν. Κακλής* (2003). Εδώ θα πρέπει να σημειωθεί ότι η ελαστική συμπεριφορά ενός υλικού μπορεί να είναι γραμμική ή μη γραμμική. Αν θεωρηθεί ένα ισότροπο και ομογενές υλικό, οι 36 διαφορετικοί όροι του  $C_{ijkl}$ , θα μπορούσαν να εκφραστούν μόνο με τη χρήση δύο σταθερών ( $\lambda, \mu$ ), οι οποίες ονομάζονται σταθερές του Lamé. Προκύπτει λοιπόν ότι, οι σταθερές αυτές μπορούν να εκφραστούν συναρτήσει δύο άλλων μεγεθών, του λόγου του Poisson ( $\nu$ ) και του μέτρου ελαστικότητας Young ( $E$ ). Ο λόγος Poisson ορίζεται ως ο λόγος της εγκάρσιας προς την αξονική παραμόρφωση σε μονοαξονική καταπόνηση:

$$\nu = -\frac{\varepsilon_x}{\varepsilon_y} \quad (2.13)$$

Το μέτρο ελαστικότητας του Young ορίζεται ως τη γενική περίπτωση από την κλίση της καμπύλης τάσης-ανηγμένης παραμόρφωσης:

$$E = \frac{\delta \sigma}{\delta \varepsilon} \quad (2.14)$$

Για τη μελέτη των τάσεων και των τροπών σε ανισότροπα ελαστικά γεωϋλικά θα πρέπει να επιβληθούν συγκεκριμένοι περιορισμοί που εφαρμόζονται με τις εξής υποθέσεις, όπως αναφέρει ο *Κωνσταντίνος Ν. Κακλής* (2003).

- i. Το σώμα είναι συνεχές μέσο και οι τάσεις σε κάθε επίπεδο μέσα στο σώμα και στην επιφάνειά του ορίζονται, ως ο λόγος δύναμης προς επιφάνεια.
- ii. Η σχέση τάσης-τροπής είναι γραμμική, δηλαδή ισχύει ο νόμος του Hooke.
- iii. Οι αρχικές τάσεις, αυτές που προϋπάρχουν χωρίς τη δράση εξωτερικών φορτίων, αγνοούνται.

Για να προκύψουν οι σχέσεις τάσης-τροπής, πρέπει να επιλεγεί ένα μοντέλο που να απεικονίζει τις ελαστικές ιδιότητες του μέσου. Θεωρείται ότι οι συνιστώσες του τανυστή της τροπής είναι γραμμικές συναρτήσεις των συνιστωσών του τανυστή της

τάσης. Αυτές οι συναρτήσεις πρέπει να είναι ομοιογενείς αφού έχει υποτεθεί ότι η απουσία τάσεων έχει ως αποτέλεσμα οι τροπές να είναι μηδέν αλλά και το αντίστροφο.

Για τα σώματα που υπακούουν στο γενικευμένο νόμο του Hooke είναι δυνατόν να γίνει ο διαχωρισμός τους σε ομοιογενή-μη ομοιογενή και σε ισότροπα-μη ισότροπα.

- Ως ομοιογενή ορίζονται τα σώματα των οποίων οι ελαστικές ιδιότητες είναι ίδιες σε όλα τα σημεία του σώματος.
- Ως μη-ομοιογενή σώματα ορίζονται αυτά που, έχουν διαφορετικές ελαστικές ιδιότητες σε διαφορετικά σημεία.
- Ισότροπο σώμα ονομάζεται αυτό του οποίου οι ελαστικές ιδιότητες είναι ίδιες σε όλες τις διευθύνσεις σε συγκεκριμένο σημείο.
- Ανισότροπο ορίζεται το σώμα το οποίο έχει διαφορετικές ελαστικές ιδιότητες σε διαφορετικές διευθύνσεις σε συγκεκριμένο σημείο.

Για τη γενική περίπτωση του ανισότροπου και γραμμικώς ελαστικού, συνεχούς μέσου, ο αριθμός των ανεξάρτητων ελαστικών σταθερών είναι είκοσι ένας(21), ενώ κάθε συνιστώσα του τανυστή της τροπής είναι μία γραμμική συνάρτηση των έξι συνιστωσών του τανυστή τάσης, ενώ εισάγοντας νέα σύμβολα και θεωρώντας καρτεσιανό σύστημα αξόνων  $O(x,y,z)$  ο τανυστής-σύστημα εξισώσεων, παίρνει τη μορφή:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_{xx}} & \frac{-\nu_{yx}}{E_{xx}} & \frac{-\nu_{zx}}{E_{xx}} & \frac{\eta_{zy,x}}{E_{xx}} & \frac{\eta_{zx,x}}{E_{xx}} & \frac{\eta_{xy,x}}{E_{xx}} \\ \frac{-\nu_{xy}}{E_{yy}} & \frac{1}{E_{yy}} & \frac{-\nu_{zy}}{E_{yy}} & \frac{\eta_{yz,y}}{E_{yy}} & \frac{\eta_{zx,y}}{E_{yy}} & \frac{\eta_{xy,y}}{E_{yy}} \\ \frac{-\nu_{xz}}{E_{zz}} & \frac{-\nu_{yz}}{E_{zz}} & \frac{1}{E_{zz}} & \frac{\eta_{zy,z}}{E_{zz}} & \frac{\eta_{zx,z}}{E_{zz}} & \frac{\eta_{xy,z}}{E_{zz}} \\ \frac{\eta_{x,yz}}{G_{yz}} & \frac{\eta_{y,yz}}{G_{yz}} & \frac{\eta_{z,yz}}{G_{yz}} & \frac{1}{G_{yz}} & \frac{\mu_{zx,yz}}{G_{yz}} & \frac{\mu_{xy,yz}}{G_{yz}} \\ \frac{\eta_{x,zx}}{G_{xz}} & \frac{\eta_{y,zx}}{G_{xz}} & \frac{\eta_{z,zx}}{G_{xz}} & \frac{\mu_{zy,zx}}{G_{xz}} & \frac{1}{G_{xz}} & \frac{\mu_{xy,zx}}{G_{xz}} \\ \frac{\eta_{x,xy}}{G_{xy}} & \frac{\eta_{y,xy}}{G_{xy}} & \frac{\eta_{z,xy}}{G_{xy}} & \frac{\mu_{yz,xy}}{G_{xy}} & \frac{\mu_{zx,xy}}{G_{xy}} & \frac{1}{G_{xy}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}$$

- $E_{xx}, E_{yy}, E_{zz}$  ορίζονται τα μέτρα ελαστικότητας σε εφελκυσμό ή θλίψη στις διευθύνσεις  $x, y, z$ .
- $G_{xz}, G_{xy}, G_{yz}$  ορίζονται τα μέτρα διάτμησης για τα επίπεδα που είναι παράλληλα με τα επίπεδα συντεταγμένων που δείχνουν οι δείκτες.
- $\nu_{xz}, \nu_{xy}, \nu_{yz} \dots$  είναι οι λόγοι Poisson που χαρακτηρίζουν την έκταση ή τη βράχυνση στον άξονα του δεύτερου δείκτη, όταν στον άλλο άξονα του πρώτου δείκτη εφαρμόζεται εφελκυσμός ή θλίψη.

- $\mu_{zx,yz}, \dots, \mu_{xz,xy}$  χαρακτηρίζουν τη διάτμηση σε επίπεδα παράλληλα στα επίπεδα των συντεταγμένων που προέρχεται από διατμητική τάση που δρα σε άλλα επίπεδα των συντεταγμένων.
- $\eta_{zx,x}, \dots, \eta_{xy,z}$  χαρακτηρίζουν την επιμήκυνση στη διεύθυνση των αξόνων των συντεταγμένων που προέρχεται από διατμητική τάση που δρα στα επίπεδα των συντεταγμένων.
- $\eta_{x,yz}, \dots, \eta_{z,xy}$  εκφράζουν τη διάτμηση στα επίπεδα των συντεταγμένων λόγω της ορθής τάσης που δρα στη διεύθυνση των αξόνων συντεταγμένων.

Αν θεωρηθεί μέσο που έχει την ιδιότητα, ότι από όλα τα σημεία του να περνούν παράλληλα επίπεδα ελαστικής συμμετρίας στα οποία όλες οι διευθύνσεις είναι ελαστικά ισοδύναμες και ο άξονας z να είναι κάθετος στο επίπεδο ισοτροπίας, ενώ οι άξονες x,y να βρίσκονται στο επίπεδο αυτό, ο γενικευμένος νόμος του Hooke παίρνει τη μορφή:

$$\begin{bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \epsilon_{zz} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & \frac{-\nu}{E} & \frac{-\nu'}{E'} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu}{E} & \frac{1}{E} & \frac{-\nu'}{E'} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu'}{E'} & \frac{-\nu'}{E'} & \frac{1}{E'} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{E'} & \frac{1}{E'} & \frac{1}{E'} & \frac{G'}{G} & \frac{1}{G} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & \frac{1}{G} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}$$

Ο αριθμός των ανεξάρτητων σταθερών είναι πλέον πέντε(5) και το υλικό σώμα ορίζεται ως εγκαρσίως ισότροπο με:

- $E, E'$  μέτρο ελαστικότητας στο επίπεδο ισοτροπίας και σε επίπεδο κάθετο σε αυτό.
- $\nu, \nu'$  λόγος Poisson που χαρακτηρίζει την εγκάρσια βράχυνση στο επίπεδο ισοτροπίας όταν εφαρμόζεται εφελκυσμός σε αυτό το επίπεδο και σε διεύθυνση κάθετη στο επίπεδο αυτό.
- $G = \frac{E}{2(1+\nu)}, G'$  μέτρο διάτμησης στο επίπεδο ισοτροπίας και σε κάθε επίπεδο κάθετο σε αυτό

Για ισότροπο σώμα θα ισχύει ότι όλες οι διευθύνσεις είναι ελαστικά ισοδύναμες, τότε θέτοντας στον παραπάνω πίνακα  $E=E', \nu=\nu', G=G'=\frac{E}{2(1+\nu)}$ , αντιστοίχως ο γενικευμένος νόμος του Hooke που προκύπτει λαμβάνει τη μορφή:

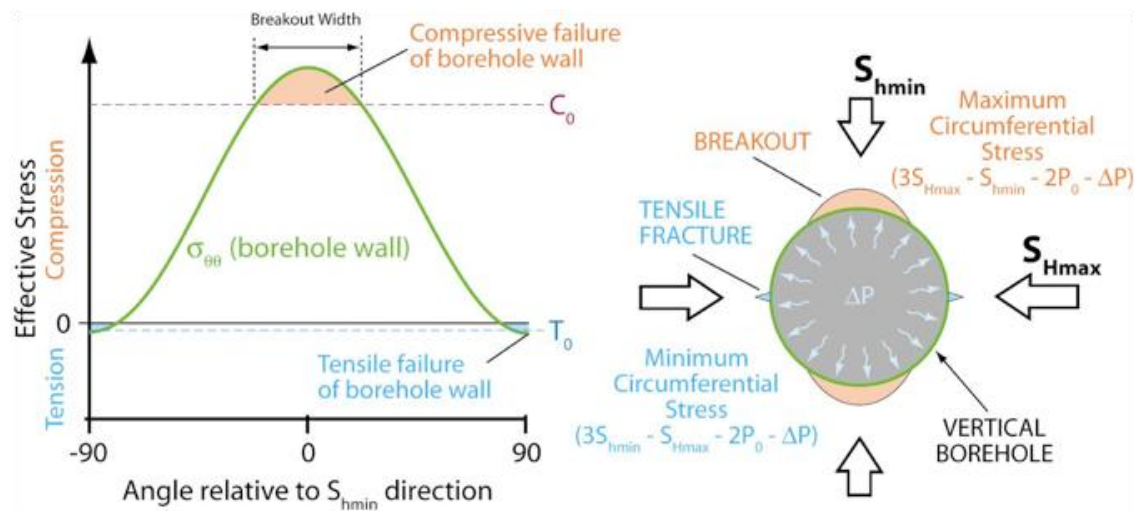


$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & \frac{1}{E} & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & \frac{1}{E} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{E} & \frac{1}{E} & \frac{1}{E} & \frac{1}{G} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}$$

## 2.4 Κυκλικά ανοίγματα: Εξισώσεις Kirsch

### 2.4.1 Εξισώσεις σε συνεχές, ομογενές, ισότροπο και γραμμικά ελαστικό υλικό

Κατά την όρυξη γεώτρησης, δημιουργείται κυκλικό άνοιγμα στα τοιχώματα του οποίου ασκούνται τάσεις, τόσο ακτινικές όσο και εφαπτομενικές όπως επίσης και τάσεις διάτμησης. Αυτές μπορούν να προκαλέσουν αστοχία στα τοιχώματα του ανοίγματος και εισχώρηση ρευστού (mud) στο πέτρωμα Guenot (1989).



Σχ. 9 Συγκέντρωση τάσεων γύρω από οπή γεωτρήσεως

Η κατανομή των τάσεων ( $\sigma_r$ :ακτινική,  $\sigma_\theta$ :εφαπτομενική,  $\tau_{r\theta}$ :διατμητική) γύρω από κυκλικό άνοιγμα στις δύο διαστάσεις (2D), έχουν αποδοθεί από το γερμανό μηχανικό Ernst Gustav Kirsch (1898), ο οποίος χρησιμοποίησε τις εξισώσεις του Airy (1838) όπως τις παραθέτει ο D.Roylance (2001). Σύμφωνα με τις εξισώσεις του Airy που εξηγούν τις μετατοπίσεις σε δύο διαστάσεις ισχύει:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (2.15)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial u}{\partial y} \quad (2.16)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \quad (2.17)$$

Από τη στιγμή που οι  $(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy})$  αφορούν μόνο δύο μετατοπίσεις  $(u, v)$  δεν είναι δυνατό να καθοριστούν αυθαίρετα, άρα θα πρέπει να υπάρχει μια σχέση μεταξύ των  $(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy})$ . Η σχέση που μπορεί να δοθεί για να συνδέσει τις τρεις μετατοπίσεις είναι η:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \quad (2.18)$$

Προκειμένου οι μετατοπίσεις να είναι διαφορίσιμες, πρέπει οι συναρτήσεις να είναι συνεχείς, το οποίο σημαίνει φυσικά ότι το σώμα πρέπει να παραμορφώνεται κατά συμβατό τρόπο, δηλαδή χωρίς την ανάπτυξη ρωγμών ή επικαλύψεων. Για το λόγο αυτό η εξίσωση **(2.18)** καλείται εξίσωση συμβατότητας ή εξίσωση συμβιβαστού των τροπών και εγγυάται ότι το σώμα είναι συνεχές μέσο. Η εξίσωση της συμβατότητας μπορεί να γραφεί συναρτήσει των τάσεων, υπενθυμίζοντας τις καταστατικές εξισώσεις για επίπεδη παραμόρφωση:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu \sigma_y) \quad (2.19)$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} (\sigma_y - \nu \sigma_x) \quad (2.20)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{G} \tau_{xy} = \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{xy} \quad (2.21)$$

Άρα ο γενικός τύπος παίρνει τη μορφή:

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} (\sigma_x - \nu \sigma_y) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\sigma_y - \nu \sigma_x) = 2(1+\nu) \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} \quad (2.22)$$

Επίσης θα πρέπει να ικανοποιούνται και οι εξισώσεις ισορροπίας στις δύο διαστάσεις:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0 \quad (2.23)$$

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = 0 \quad (2.24)$$

Χάριν απλούστευσης θα μπορούσε να θεωρηθεί εξίσωση ( $\phi$ ) η οποία υπακούει στις παραπάνω εξισώσεις και μπορεί να αποδώσει τις τάσεις:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \quad (2.25)$$

$$\sigma_y = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \quad (2.26)$$

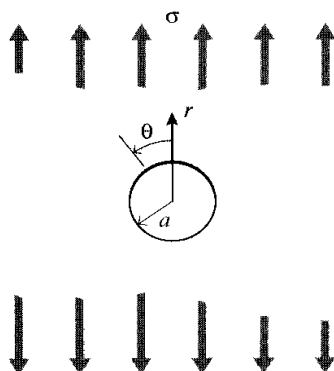
$$\tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial x} \quad (2.27)$$

Σύμφωνα με τη σχέση **(2.22)** και χρησιμοποιώντας τα  $(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy})$ , των παραπάνω εξισώσεων προκύπτει η μερική διαφορική εξίσωση:

$$\frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} + 4 \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \phi}{\partial y^4} \equiv \nabla^2 (\nabla^2 \phi) \equiv \nabla^4 \phi = 0 \quad (2.28)$$

### 2.4.2 Κατανομή τάσεων σε κυκλικά ανοίγματα

Οι εξισώσεις του Airy που καταγράφησαν παραπάνω, βοήθησαν τον Kirsch στο να μπορέσει να θεσπίσει μια νέα ομάδα εξισώσεων που είναι ικανές να παρουσιάσουν τις τάσεις που εφαρμόζονται σε οποιοδήποτε σημείο γύρω από ένα κυκλικό άνοιγμα *D.Roylance* (2001).



Σχ. 10 Εφαρμογή τάσεων σε οποιοδήποτε σημείο γύρω από κυκλικό άνοιγμα

Στη γενική περίπτωση της μονοαξονικής θλίψης της οπής (Σχ. 10) ισχύει ότι:

$$\nabla^4 \varphi = \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} \right) = 0 \quad (2.29)$$

Και οι εξισώσεις των τάσεων γύρω απ το κυκλικό άνοιγμα λαμβάνουν τη μορφή:

$$\sigma_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} \quad (2.30)$$

$$\sigma_\theta = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} \quad (2.31)$$

$$\tau_{r\theta} = -\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) \quad (2.32)$$

Πρέπει να βρεθεί εξίσωση  $\varphi(r, \theta)$  που να ικανοποιεί τις παραπάνω σχέσεις και να υπακούει στις συνθήκες ορίων του προβλήματος. Επίσης στα άκρα της οπής θα πρέπει να ισχύουν ότι:  $\sigma_r = \tau_{r\theta} = 0$  ,  $r = a$

Ενώ σε απόσταση  $r = +\infty$  από το άνοιγμα οι τάσεις θα παίρνουν τη μορφή

$$\sigma_r = \frac{\sigma}{2}(1 + \cos 2\theta) \quad (2.33)$$

$$\sigma_\theta = \frac{\sigma}{2}(1 - \cos 2\theta) \quad (2.34)$$

$$\tau_{r\theta} = \frac{\sigma}{2} \sin 2\theta \quad (2.35)$$

Αν δε ληφθεί υπόψη το (σ), στους παραπάνω τύπους τότε συμπεραίνουμε ότι οι συνήθεις τάσεις ποικίλλουν περιφερειακά της οπής βάση του ( $\cos 2\theta$ ). Ενώ οι διατμητικές τάσεις βάση του ( $\sin 2\theta$ ). Άρα μία αποδεκτή εξίσωση τάσης που να ικανοποιεί τα παραπάνω θα μπορούσε να γραφεί:

$$\varphi = f(r) \cos 2\theta \quad (2.36)$$

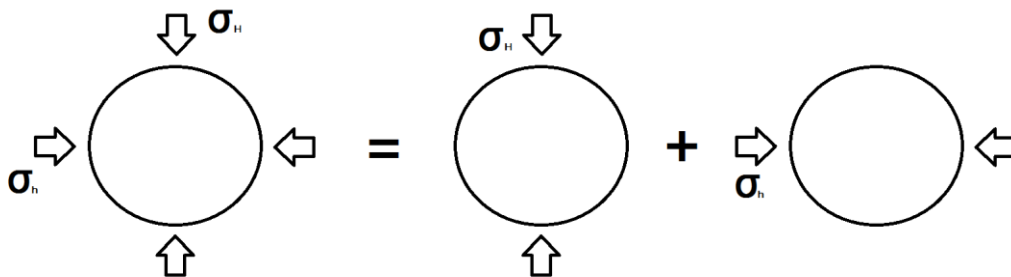
Η λύση της εξίσωσης (2.36), αποδίδει τις βασικές εξισώσεις τάσεων, σε οποιοδήποτε σημείο γύρω από την οπή της γεώτρησης, στην περίπτωση μονοαξονικής θλίψης.

$$\sigma_r = \frac{1}{2}\sigma \left[ 1 - \frac{R^2}{r^2} \right] - \frac{1}{2}\sigma \left[ 1 - 4\frac{R^2}{r^2} + 3\frac{R^4}{r^4} \right] \cos 2\theta \quad (2.37)$$

$$\sigma_\theta = \frac{1}{2}\sigma \left[ 1 + \frac{R^2}{r^2} \right] + \frac{1}{2}\sigma \left[ 1 + 3\frac{R^4}{r^4} \right] \cos 2\theta \quad (2.38)$$

$$\tau_{r\theta} = \frac{1}{2}\sigma \left[ 1 + 2\frac{R^2}{r^2} - 3\frac{R^4}{r^4} \right] \sin 2\theta \quad (2.39)$$

Στην ειδική περίπτωση που το κυκλικό άνοιγμα δέχεται πιέσεις από όλες τις πλευρές, ισχύει η αρχή της επαλληλίας:



Σχ. 11 Αρχή της επαλληλίας

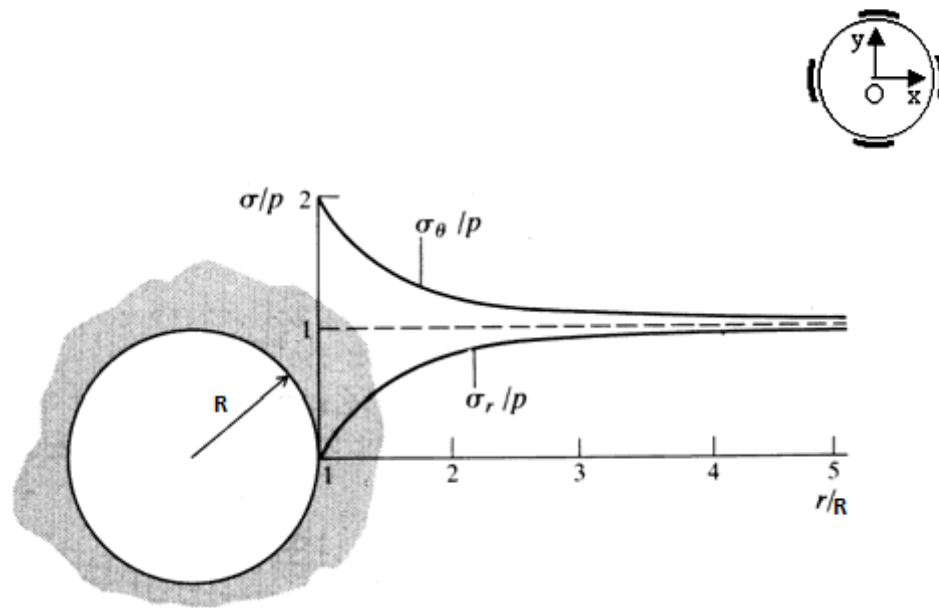
Άρα, για σημεία γύρω από το άνοιγμα οι εξισώσεις παίρνουν τη μορφή:

$$\sigma_r = \frac{1}{2}(\sigma_H + \sigma_h) \left[ 1 - \frac{R^2}{r^2} \right] - \frac{1}{2}(\sigma_H - \sigma_h) \left[ 1 - 4\frac{R^2}{r^2} + 3\frac{R^4}{r^4} \right] \cos 2\theta \quad (2.40)$$

$$\sigma_\theta = \frac{1}{2}(\sigma_H + \sigma_h) \left[ 1 + \frac{R^2}{r^2} \right] + \frac{1}{2}(\sigma_H - \sigma_h) \left[ 1 + 3\frac{R^4}{r^4} \right] \cos 2\theta \quad (2.41)$$

$$\tau_{r\theta} = \frac{1}{2}(\sigma_H - \sigma_h) \left[ 1 + 2\frac{R^2}{r^2} - 3\frac{R^4}{r^4} \right] \sin 2\theta \quad (2.42)$$

Ενώ η κατανομή των τάσεων ( $\sigma_\theta$ ,  $\sigma_r$ ) σε σχέση με την απόσταση από το κέντρο της οπής μπορεί να αποδοθεί γραφικά από το παρακάτω σχήμα.

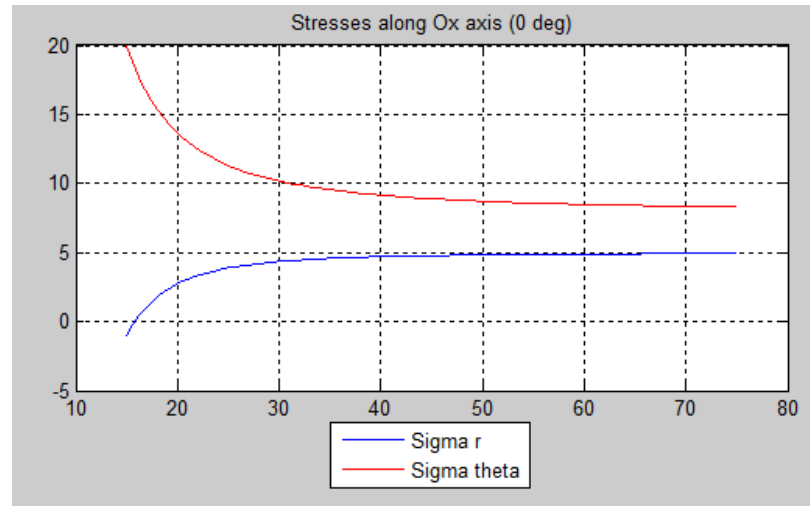


Σχ. 12 Συμπεριφορά τάσεων σε σχέση με την απόσταση από το κέντρο της οπής γεώτρηση

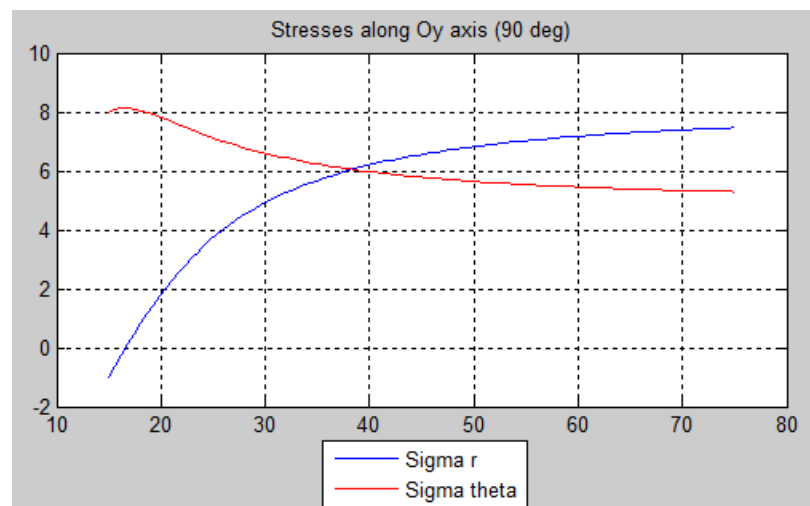
Από την παραπάνω γραφική παράσταση, γίνεται αντιληπτό πως η κατανομή τάσεων εφαπτομενικών και ακτινικών τάσεων, έχει άμεση σχέση με τις υπάρχουσες κατακόρυφες και οριζόντιες τάσεις που δέχεται το μέσο. Με τη βοήθεια του προγράμματος της Matlab και δημιουργώντας τον κώδικα που θα αποδίδει τις εξισώσεις του Kirsch. Τα διαγράμματα τα οποία προέκυψαν αποδίδουν την

κατανομή των τάσεων σε σημεία μακριά από το κυκλικό άνοιγμα, βάση των εξωτερικών τάσεων που δέχεται η οπή.

- Αν  $\sigma_H > \sigma_h$  τότε:



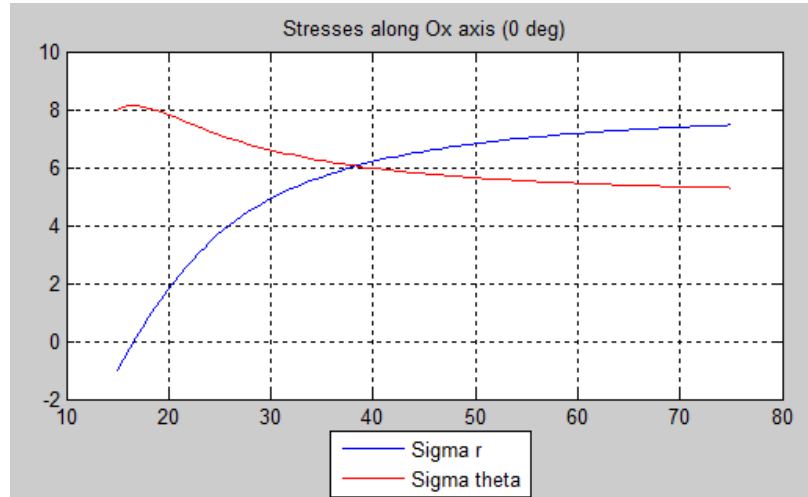
Σχ. 13 Συμπεριφορά τάσεων κατά τον άξονα  $x'x$  ( $0^\circ$ )



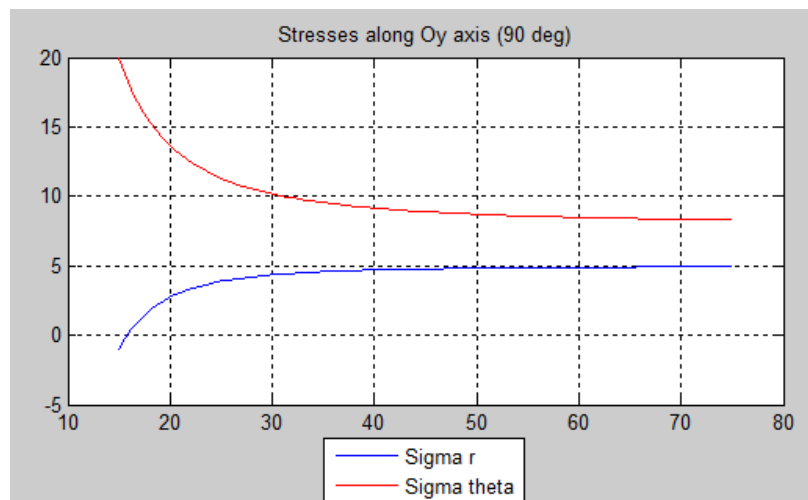
Σχ. 14 Συμπεριφορά τάσεων κατά τον άξονα  $y'y$  ( $90^\circ$ )

Οι τάσεις  $\sigma_\theta$  και  $\sigma_r$  συγκλίνουν στη τιμή την οποία ορίζει την εντατική κατάσταση του πετρώματος, πριν την διάνοιξη του κυκλικού ανοίγματος.

- Αν  $\sigma_H < \sigma_h$  τότε:



Σχ. 15 Συμπεριφορά τάσεων κατά τον άξονα  $x'x$  ( $0^\circ$ )



Σχ. 16 Συμπεριφορά τάσεων κατά τον άξονα  $y'y$  ( $90^\circ$ )

Θα πρέπει σε αυτό το σημείο να επισημανθεί ότι στην περίπτωση κατά την οποία εντός του κυκλικού ανοίγματος, υπάρχει παρουσία κάποιου ρευστού, λ.χ πολφού, η κατανομή των τάσεων αλλάζει. Το ρευστό προκαλεί πίεση( $P$ ) στα τοιχώματα της οπής η οποία ισούται με  $P = gh\rho$ .

- $g$  : επιτάχυνση της βαρύτητας
- $\rho$  : ειδικό βάρος ρευστού
- $h$  : βάθος οπής



Η πίεση αυτή προκαλεί τη δημιουργία περαιτέρω ακτινικών, εφαπτομενικών αλλά όχι διατμητικών τάσεων, των οποίων οι εξισώσεις ορίζονται ως εξής:

$$\sigma_r = P \frac{R^2}{r^2} \quad (2.43)$$

$$\sigma_\theta = -P \frac{R^2}{r^2} \quad (2.44)$$

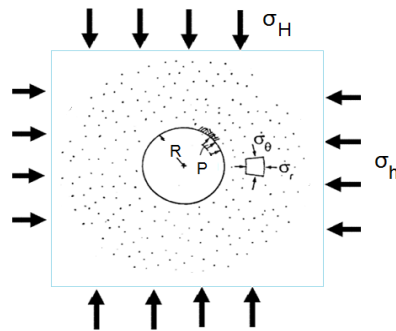
$$\tau_{r\theta} = 0 \quad (2.45)$$

Συμπερασματικά, θα μπορούσε να αποδοθεί η κατανομή των τάσεων γύρω από κυκλικό άνοιγμα, σε συγκεκριμένο βάθος με την παρουσία ρευστού εντός αυτού, ως εξής:

$$\sigma_r = \frac{1}{2}(\sigma_H + \sigma_h) \left[ 1 - \frac{R^2}{r^2} \right] - \frac{1}{2}(\sigma_H - \sigma_h) \left[ 1 - 4 \frac{R^2}{r^2} + 3 \frac{R^4}{r^4} \right] \cos 2\theta + P \frac{R^2}{r^2} \quad (2.46)$$

$$\sigma_\theta = \frac{1}{2}(\sigma_H + \sigma_h) \left[ 1 + \frac{R^2}{r^2} \right] + \frac{1}{2}(\sigma_H - \sigma_h) \left[ 1 + 3 \frac{R^4}{r^4} \right] \cos 2\theta - P \frac{R^2}{r^2} \quad (2.47)$$

$$\tau_{r\theta} = \frac{1}{2}(\sigma_H - \sigma_h) \left[ 1 + 2 \frac{R^2}{r^2} - 3 \frac{R^4}{r^4} \right] \sin 2\theta \quad (2.48)$$



**Σχ.17** Συμπεριφορά των τάσεων με την παρουσία εσωτερικής πίεσης P

## 2.5 Θεωρία ανισότροπου μέσου κατά Lekhinskii

### 2.5.1 Εξισώσεις σε εγκάρσιως ισότροπο μέσο

Οι εξισώσεις του Kirsch, δίνουν την κατανομή των τάσεων μέσα και γύρω, από κυκλικό άνοιγμα σε συνεχές, ομογενές και ισότροπο μέσο. Σε περιπτώσεις ανισοτροπίας, οι λύσεις αυτές δεν ισχύουν, διότι αυξάνεται ο αριθμός των μεταβλητών που θα πρέπει να ληφθούν υπ' όψιν.

Όπως έχει προαναφερθεί, βάση των νόμων του Hooke, ο τανυστής τροπών που εκφράζει ένα ανισότροπο μέσο, παίρνει τη μορφή:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} & \alpha_{15} & \alpha_{16} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} & \alpha_{25} & \alpha_{26} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{34} & \alpha_{35} & \alpha_{36} \\ \alpha_{41} & \alpha_{42} & \alpha_{43} & \alpha_{44} & \alpha_{45} & \alpha_{46} \\ \alpha_{51} & \alpha_{52} & \alpha_{53} & \alpha_{54} & \alpha_{55} & \alpha_{56} \\ \alpha_{61} & \alpha_{62} & \alpha_{63} & \alpha_{64} & \alpha_{65} & \alpha_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}$$

<http://minelab.mred.tuc.gr/courses/finish/30-rock-mechanics/568-exadaktylos-lecture-2>

Και σε πιο αναλυτική μορφή:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_{xx}} & \frac{-\nu_{yx}}{E_{xx}} & \frac{-\nu_{zx}}{E_{xx}} & \frac{\eta_{zy,x}}{E_{xx}} & \frac{\eta_{zx,x}}{E_{xx}} & \frac{\eta_{xy,x}}{E_{xx}} \\ \frac{-\nu_{xy}}{E_{yy}} & \frac{1}{E_{yy}} & \frac{-\nu_{zy}}{E_{yy}} & \frac{\eta_{yz,y}}{E_{yy}} & \frac{\eta_{zx,y}}{E_{yy}} & \frac{\eta_{xy,y}}{E_{yy}} \\ \frac{-\nu_{xz}}{E_{zz}} & \frac{-\nu_{yz}}{E_{zz}} & \frac{1}{E_{zz}} & \frac{\eta_{zy,z}}{E_{zz}} & \frac{\eta_{zx,z}}{E_{zz}} & \frac{\eta_{xy,z}}{E_{zz}} \\ \frac{\eta_{x,yz}}{G_{yz}} & \frac{\eta_{y,yz}}{G_{yz}} & \frac{\eta_{z,yz}}{G_{yz}} & \frac{1}{G_{yz}} & \frac{\mu_{zx,yz}}{G_{yz}} & \frac{\mu_{xy,yz}}{G_{yz}} \\ \frac{\eta_{x,zx}}{G_{yz}} & \frac{\eta_{y,zx}}{G_{yz}} & \frac{\eta_{z,zx}}{G_{yz}} & \frac{\mu_{zy,zx}}{G_{yz}} & \frac{1}{G_{yz}} & \frac{\mu_{xy,zx}}{G_{yz}} \\ \frac{G_{xz}}{\eta_{x,xy}} & \frac{G_{xz}}{\eta_{y,xy}} & \frac{G_{xz}}{\eta_{z,xy}} & \frac{G_{xz}}{\mu_{yz,xy}} & \frac{G_{xz}}{\mu_{zx,xy}} & \frac{G_{xz}}{1} \\ \frac{G_{xy}}{G_{xy}} & \frac{G_{xy}}{G_{xy}} & \frac{G_{xy}}{G_{xy}} & \frac{G_{xy}}{G_{xy}} & \frac{G_{xy}}{G_{xy}} & \frac{G_{xy}}{G_{xy}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}$$

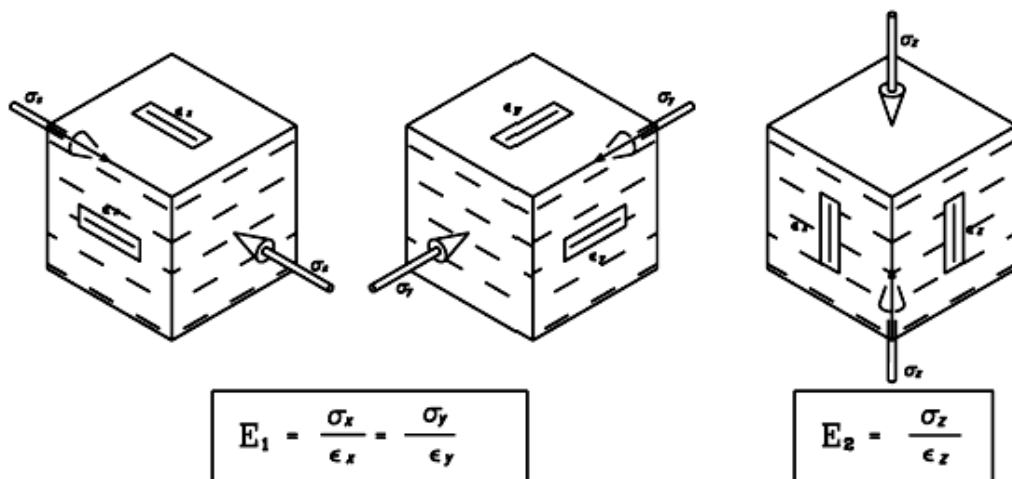
Στην περίπτωση αυτή παρατηρούνται ογδόντα μία (81) ελαστικές σταθερές. Αλλά μόνο είκοσι μία (21) από αυτές τις σταθερές είναι ανεξάρτητες.

Στην περίπτωση του εγκάρσιως ισότροπου μέσου, ο τανυστής παίρνει τη μορφή:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & \frac{-\nu}{E} & \frac{-\nu'}{E'} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu}{E} & \frac{1}{E} & \frac{-\nu'}{E'} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu'}{E'} & \frac{-\nu'}{E'} & \frac{1}{E'} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{E'} & \frac{1}{E'} & \frac{1}{E'} & \frac{1}{G'} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G'} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}$$

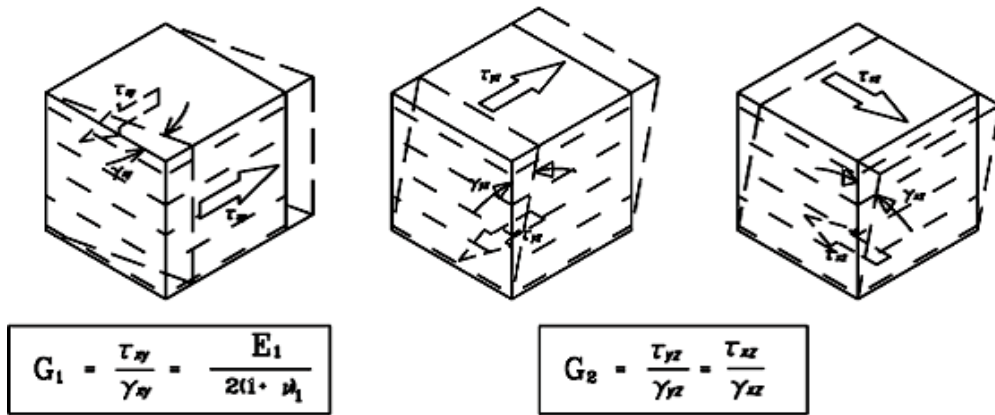
Όπως γίνεται εμφανές, για να γίνει περιγραφή ενός εγκάρσιως ισότροπου μέσου, χρειάζονται μόλις πέντε (5) ανεξάρτητες σταθερές ( $E$ ,  $E'$ ,  $\nu$ ,  $\nu'$ ,  $G$ ), με  $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$

Η φυσική σημασία κάθε μίας από τις παραπάνω πέντε σταθερές, αποδίδεται με τη βοήθεια των παρακάτω σχημάτων. Ενώ ο υπολογισμός των μέτρων τους υπολογίζεται εργαστηριακά με τη βοήθεια ηλεκτρικών μηχανομετρών.



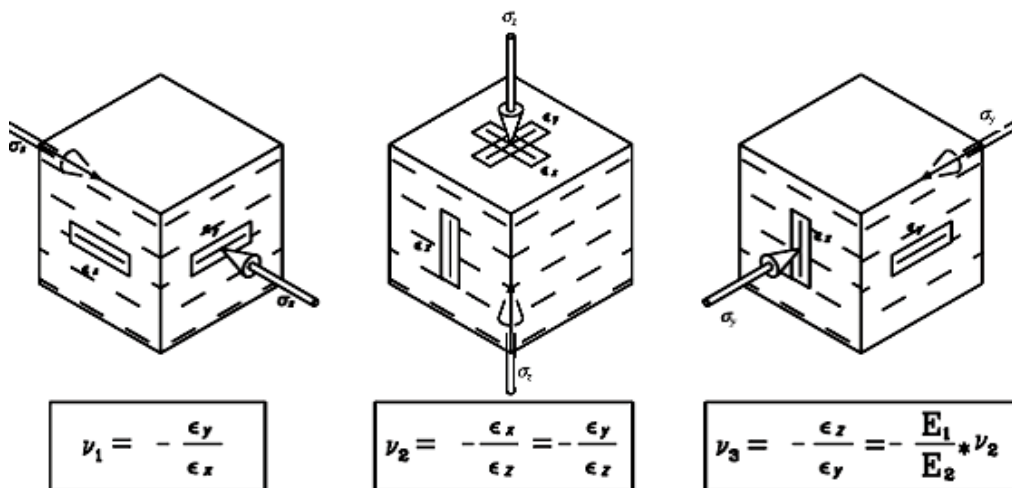
**Σχ.18** Καθορισμός ελαστικών σταθερών Young,  $E_1, E_2$ , σε εγκάρσιως ισότροπο μέσο

$$E = E_1 \text{ και } E' = E_2$$



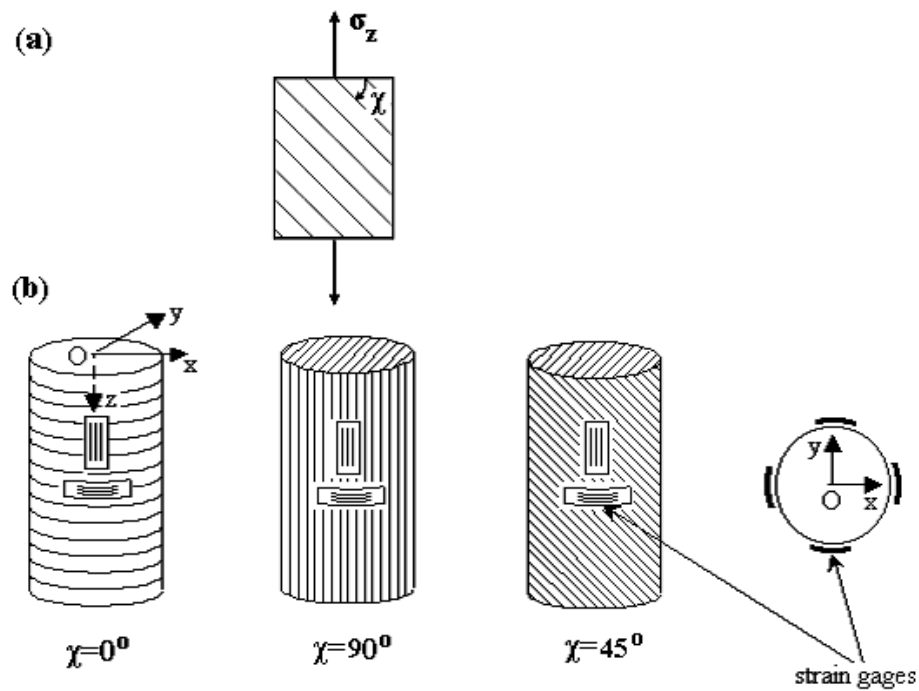
Σχ.19 Καθορισμός ελαστικών σταθερών G1, G2 για εγκάρσιως ισότροπο μέσο

$$G=G_1 \text{ και } G'=G_2$$



Σχ.20 Καθορισμός λόγου του Poisson ν1, ν2

$$\nu=\nu_1 \text{ και } \nu'=\nu_2$$



Σχ.21 Θέσεις εφαρμογής ηλεκτρικών μηχανομετρών

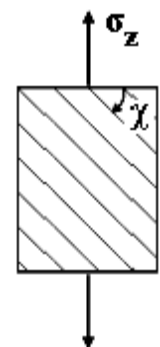
Χρησιμοποιώντας τη θεωρία της ελαστικότητας όπως εμφανίζεται στην ιστοσελίδα <http://minelab.mred.tuc.gr>, για ανισότροπο μέσο και θεωρώντας ομοιόμορφες τάσεις και παραμορφώσεις, για το παραπάνω δείγμα αξονοσυμμετρικού δοκιμίου, μπορούν να υπολογιστούν οι παραμορφώσεις ως εξής:

$$\varepsilon_z = \alpha_{22} \sigma_z \quad \text{και} \quad \varepsilon_r = \alpha_{12} \sigma_z \quad (2.49)$$

Όπου :

$$\alpha_{22} = \frac{(\cos x)^4}{E'} + \frac{(\sin x)^4}{E} + \frac{(\sin 2x)^2}{4} \left( \frac{1}{G'} - 2 \frac{\nu'}{E'} \right) \quad (2.50)$$

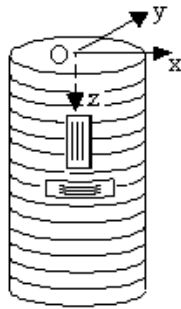
$$\alpha_{12} = \frac{-\nu' (\cos x)^2}{E'} - \frac{\nu (\sin x)^2}{E} \quad (2.51)$$



Σχ.22 Καθορισμός  $\sigma_z$

Οι μετατοπίσεις  $\varepsilon_z$  και  $\varepsilon_r$  επιτρέπουν να προσδιοριστούν τα :

- $E'$  και  $\nu'$  (για την περίπτωση του πρώτου δοκιμίου),



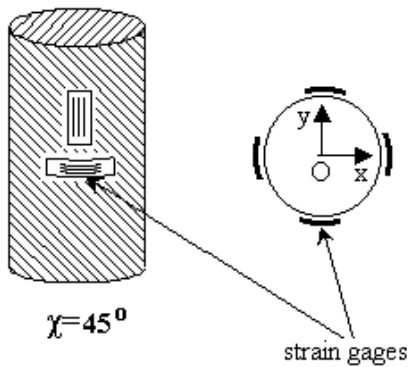
$$\chi=0^{\circ}$$

- $E$  και  $\nu$  (για την περίπτωση του δεύτερου δοκιμίου),

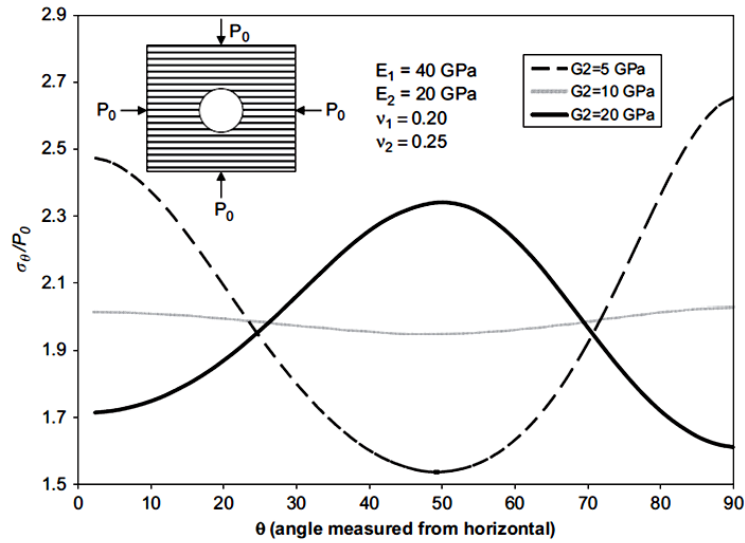


$$\chi=90^{\circ}$$

- Ενώ στο τρίτο δοκίμιο το  $\epsilon_z$  αντιστοιχεί στο  $G'$



Βάση των παραπάνω αποτελεσμάτων, είναι δυνατή η δημιουργία διαγράμματος το οποίο θα προσδιορίζει τις εφαπτομενικές τάσεις γύρω από μία γεώτρηση απείρου μήκους σε εγκαρσίως ισότροπο πέτρωμα για διάφορες τιμές του  $G'$ .



Σχ.23 Συμπεριφορά εφαπτωμενικών τάσεων περιμετρικά της οπής γεώτρησης σε ανισότροπο μέσο

Οι εξισώσεις που αφορούν την εντατική κατάσταση των τάσεων, γύρω από οπή σε ανισότροπο μέσο, αποδόθηκαν από το Ρώσο καθηγητή φυσικής και μαθηματικών Sergei Gheorgievich Lekhnitskii (1984). Η γενική λύση αναφέρεται σε ελλειπτικό άνοιγμα(οπή) [ $a \neq b$ ] όπου  $a, b$  οι δύο ημιάξονες της έλλειψης. Στην περίπτωση του κυκλικού ανοίγματος, το οποίο και απασχολεί την εν λόγω διπλωματική εργασία, θεωρούμε [ $a = b$ ]. Ο S.G.Lekhnitskii έλυσε τις βασικές εξισώσεις του Airy οι οποίες ικανοποιούν τις συνθήκες των τάσεων στα σύνορα του ανοίγματος, με τη βοήθεια των σειρών Fourier. Τα αποτελέσματα των λύσεων αυτών, παρουσιάζονται παρακάτω.

$$2\text{Re}[\Phi_1(z_1) + \Phi_2(z_2)] = \frac{P_y}{2h\pi}\theta + \alpha_0 + \sum_{m=1}^{\infty} (\alpha_m \sigma^m + \bar{\alpha}_m \sigma^{-m}) \quad (2.52)$$

$$2\text{Re}[\mu_1 \Phi_1(z_1) + \mu_2 \Phi_2(z_2)] = -\frac{P_y}{2h\pi}\theta + \beta_0 + \sum_{m=1}^{\infty} (\beta_m \sigma^m + \bar{\beta}_m \sigma^{-m}) \quad (2.53)$$

Όπου[ ( $\sigma = e^{i\theta}$ ) , ( $\alpha_m, \beta_m$  γνωστοί συντελεστές, γενικώς περίπλοκοι, που εξαρτώνται από την κατανομή των φορτίων στα άκρα του ανοίγματος) , ( $\bar{\alpha}_m, \bar{\beta}_m$  οι αντίστοιχες συζυγείς τιμές) , ( $\alpha_0, \beta_0$  αυθαίρετες σταθερές) ]

Οι τάσεις θα πρέπει να τείνουν στο μηδέν όσο απομακρυνόμαστε από το άνοιγμα, ενώ οι λύσεις λαμβάνονται από τις σχέσεις:

$$\Phi_1(z_1) = A_0 + A \ln \zeta_1 + \sum_m \frac{\bar{\beta}_m - \mu_2 \bar{\alpha}_m}{\mu_1 - \mu_1} \zeta_1^{-m} \quad (2.54)$$

$$\Phi_2(z_2) = B_0 + B \ln \zeta_2 + \sum_m \frac{\bar{\beta}_m - \mu_2 \bar{\alpha}_m}{\mu_1 - \mu_1} \zeta_2^{-m} \quad (2.55)$$

Για κυκλικό άνοιγμα [ $a = b = r$ ]

$$\zeta_1 = \frac{z_1 + \sqrt{z_1^2 - a^2 - \mu_1^2 b^2}}{a - i\mu_1 b} = \frac{z_1 + \sqrt{z_1^2 - r^2(1 - \mu_1^2)}}{r(1 - i\mu_1)} \quad (2.56)$$

$$\zeta_2 = \frac{z_2 + \sqrt{z_2^2 - a^2 - \mu_2^2 b^2}}{a - i\mu_2 b} = \frac{z_2 + \sqrt{z_2^2 - r^2(1 - \mu_2^2)}}{r(1 - i\mu_2)} \quad (2.57)$$

- $A_0, B_0$  : αυθαίρετες σταθερές
- $A, B$  : σταθερές που καθορίζονται από τις παρακάτω συναρτήσεις

$$A + B - \bar{A} - \bar{B} = \frac{P_y}{2hl\pi}, \quad (2.58)$$

$$\mu_1 A + \mu_2 B - \bar{\mu}_1 \bar{A} - \bar{\mu}_2 \bar{B} = -\frac{P_x}{2hi\pi}, \quad (2.59)$$

$$\mu_1^2 A + \mu_2^2 B - \bar{\mu}_1^2 \bar{A} - \bar{\mu}_2^2 \bar{B} = -\frac{P_x}{2hi\pi} \frac{\alpha_{16}}{\alpha_{11}} - \frac{P_y}{2hi\pi} \frac{\alpha_{12}}{\alpha_{11}}, \quad (2.60)$$

$$\mu_1^{-1} A + \mu_2^{-1} B - \bar{\mu}_1^{-1} \bar{A} - \bar{\mu}_2^{-1} \bar{B} = \frac{P_x}{2hi\pi} \frac{\alpha_{12}}{\alpha_{22}} + \frac{P_y}{2hi\pi} \frac{\alpha_{26}}{\alpha_{22}} \quad (2.61)$$

Λόγω της περιπλοκότητας των πράξεων δε θα συνεχιστεί περαιτέρω ανάλυση των  $A$  και  $B$ . Οι παράγωγοι των συναρτήσεων  $\Phi_1, \Phi_2$  σε κυκλικό άνοιγμα ισούνται με:



$$\begin{aligned}\Phi'_1(z_1) &= \frac{1}{\sqrt{z_1^2 - a^2 - \mu_1^2 b^2}} \left( A - \sum_{m=1}^{\infty} m \frac{\bar{\beta}_m - \mu_2 \bar{\alpha}_m}{\mu_1 - \mu_2} \zeta_1^2 \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{z_1^2 - r^2(1 - \mu_1^2)}} \left( A - \sum_{m=1}^{\infty} m \frac{\bar{\beta}_m - \mu_2 \bar{\alpha}_m}{\mu_1 - \mu_2} \zeta_1^2 \right),\end{aligned}\quad (2.62)$$

$$\begin{aligned}\Phi'_2(z_2) &= \frac{1}{\sqrt{z_2^2 - a^2 - \mu_2^2 b^2}} \left( B + \sum_{m=1}^{\infty} m \frac{\bar{\beta}_m - \mu_1 \bar{\alpha}_m}{\mu_1 - \mu_2} \zeta_2^2 \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{z_2^2 - r^2(1 - \mu_2^2)}} \left( B + \sum_{m=1}^{\infty} m \frac{\bar{\beta}_m - \mu_1 \bar{\alpha}_m}{\mu_1 - \mu_2} \zeta_2^2 \right),\end{aligned}\quad (2.63)$$

Και στα σύνορα του ανοίγματος οι εξισώσεις λαμβάνουν τη μορφή:

$$\Phi'_1 = \frac{1}{ir(\sin \theta - \mu_1 \cos \theta)} \left( A - \sum_{m=1}^{\infty} m \frac{\bar{\beta}_m - \mu_2 \bar{\alpha}_m}{\mu_1 - \mu_2} \sigma^{-m} \right) \quad (2.64)$$

$$\Phi'_2 = \frac{1}{ir(\sin \theta - \mu_1 \cos \theta)} \left( B + \sum_{m=1}^{\infty} m \frac{\bar{\beta}_m - \mu_1 \bar{\alpha}_m}{\mu_1 - \mu_2} \sigma^{-m} \right) \quad (2.65)$$

Η λύση του Lekhnitskii για την εφαπτομενική τάση ( $\sigma_\theta$ ) που δημιουργείται-ασκείται στα σύνορα κυκλικής οπής, για  $(\theta)$  να κυμαίνεται από  $(0 - 2\pi)$ , δίνεται από τον τύπο:

$$\begin{aligned}\sigma_\theta &= \frac{2}{r^2(\sin^2 \theta + \cos^2 \theta)} \\ Re \left\{ \frac{ir(\mu_1 \sin \theta + \cos \theta)^2}{r(\sin \theta - \mu_1 \cos \theta)} \left( -A + \sum_{m=1}^{\infty} m \frac{\bar{\beta}_m - \mu_2 \bar{\alpha}_m}{\mu_1 - \mu_2} \sigma^{-m} \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{ir(\mu_2 \sin \theta + \cos \theta)^2}{r(\sin \theta - \mu_2 \cos \theta)} \left( B + \sum_{m=1}^{\infty} m \frac{\bar{\beta}_m - \mu_1 \bar{\alpha}_m}{\mu_1 - \mu_2} \sigma^{-m} \right) \right\} \rightarrow\end{aligned}$$

$$\sigma_{\theta} = \frac{2}{r^2} \operatorname{Re} \left\{ \frac{i(\mu_1 \sin \theta + \cos \theta)^2}{(\sin \theta - \mu_1 \cos \theta)} \left( -A + \sum_{m=1}^{\infty} m \frac{\bar{\beta}_m - \mu_2 \bar{\alpha}_m}{\mu_1 - \mu_2} \sigma^{-m} \right) - \frac{i(\mu_2 \sin \theta + \cos \theta)^2}{(\sin \theta - \mu_2 \cos \theta)} \left( B + \sum_{m=1}^{\infty} m \frac{\bar{\beta}_m - \mu_1 \bar{\alpha}_m}{\mu_1 - \mu_2} \sigma^{-m} \right) \right\} \quad (2.66)$$

### 2.5.2 Ειδικές περιπτώσεις φόρτισης

Στις παρακάτω εξισώσεις Lekhnitskii (1984), αποδίδονται οι κατανομές των τάσεων, σε διαφορετικές περιπτώσεις φόρτισης, ενώ εκφράζονται μόνο οι συναρτήσεις  $\Phi_1, \Phi_2$ , οι συζυγείς τιμές  $\bar{\alpha}_m, \bar{\beta}_m$  και οι εφαπτομενική τάση  $\sigma_{\theta}$ , σε όλο το κυκλικό άνοιγμα και σε μεμονωμένα σημεία του. Για τις παρακάτω συναρτήσεις και εξισώσεις θα πρέπει να γίνουν οι εξής παραδοχές:

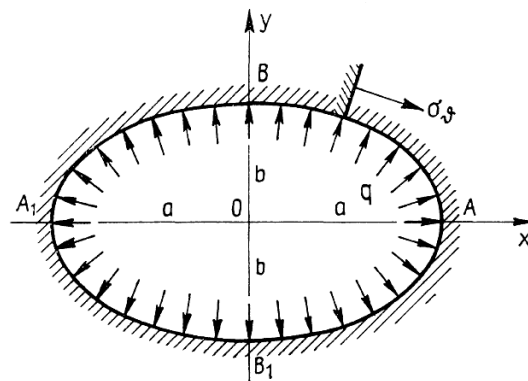
$$\mu_1 = \alpha + \beta_i, \quad \mu_2 = \gamma + \delta_i \quad (\beta > 0, \quad \delta > 0)$$

$$a = b = r$$

$$c = \frac{a}{b} = 1, \quad l^2 = a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta = r^2 \quad (2.67)$$

#### ΕΙΔΙΚΗ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 1.

**Η πίεση ασκείται ομοιόμορφα στα σύνορα του ανοίγματος**



Σχ. 24 Πίεση ασκείται ομοιόμορφα, εντός του ανοίγματος

$$\Phi_1(z_1) = \frac{\bar{\beta}_1 - \mu_2 \bar{\alpha}_1}{\mu_1 - \mu_2} \frac{1}{\zeta_1}, \quad \Phi_2(z_2) = -\frac{\bar{\beta}_1 - \mu_1 \bar{\alpha}_1}{\mu_1 - \mu_2} \frac{1}{\zeta_2} \quad (2.68)$$

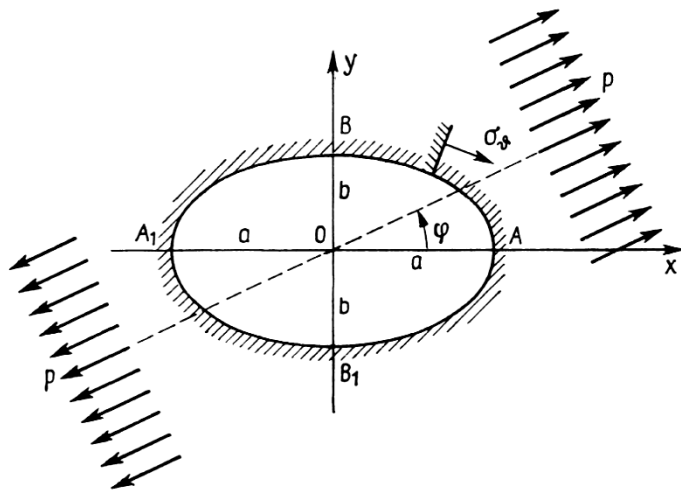
$$\bar{\alpha}_1 = -\frac{qa}{2} = -\frac{qr}{2}, \quad \bar{\beta}_1 = -\frac{qb_i}{2} = -\frac{qr_i}{2} \quad (2.69)$$

$$\sigma_\theta = qR \times$$

$$\left\{ \frac{e^{-\theta i} [\sin^3 \theta (\mu_1 \mu_2 - i\mu_1 - i\mu_2) + i \sin^2 \theta \cos \theta (\mu_1 \mu_2 - 2) + (2\mu_1 \mu_2 - 1) \sin \theta \cos^2 \theta + (\mu_1 + \mu_2 - i) \cos^3 \theta]}{(\sin \theta - \mu_1 \cos \theta)(\sin \theta - \mu_2 \cos \theta)} \right\} \quad (2.70)$$

## ΕΙΔΙΚΗ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 2.

### Εφελκισμός ή θλίψη της οπής



Σχ. 25 Πίεση από δυνάμεις που δρουν σε μεγάλη απόσταση από το άνοιγμα

Εξωτερικές δυνάμεις (**p**) που ασκούνται σε σημαντικά μεγάλη απόσταση από την οπή (θεωρητικά στο άπειρο), προκαλούν τον εφελκισμό αυτής, υπό γωνία (**φ**), σε σχέση με το μεγάλο άξονα (για έλλειψη). Δεν υπάρχουν εξωτερικές δυνάμεις στα σύνορα της οπής, ενώ στην περίπτωση αυτή οι συναρτήσεις **Φ<sub>1</sub>**, **Φ<sub>2</sub>**, παραμένουν ίδιες με αυτές στην πρώτη περίπτωση και :

$$\bar{\alpha}_1 = -\frac{p r \sin \varphi (\sin \varphi - i \cos \varphi)}{2}, \quad (2.71)$$

$$\bar{\beta}_1 = \frac{p r \cos \varphi (\sin \varphi - i \cos \varphi)}{2}, \quad (2.72)$$

**p**: εξωτερική δύναμη

Ενώ για **φ=0** :

$$\sigma_\theta = p \sin^2 \theta + p \operatorname{Re} \left\{ \frac{e^{-\theta i} [\sin^3 \theta (\mu_1 + \mu_2) + \sin^2 \theta \cos \theta (2 - \mu_1 \mu_2) + \cos^3 \theta]}{(\sin \theta - \mu_1 \cos \theta)(\sin \theta - \mu_2 \cos \theta)} \right\} \quad (2.73)$$

- 1) Αν στις παραπάνω σχέσεις γίνουν οι κατάλληλες αντικαταστάσεις των (**E<sub>1</sub>**, **E<sub>2</sub>**, **G<sub>2</sub>**, **v<sub>2</sub>**,) που αφορούν το μέσο στο οποίο βρίσκεται η οπή
- 2) και (**φ**, **P**, **σ<sub>n</sub>**, **σ<sub>v</sub>**) που αφορούν την εντατική κατάσταση γύρω και μέσα στο κυκλικό άνοιγμα

Με τη βοήθεια του προγράμματος της Matlab και δημιουργώντας τον κατάλληλο κώδικα που εμφανίζει τις μαθηματικές φόρμουλες που συνέταξε ο Lekhnitskii, παραθέτονται οι τελικές μορφές των τάσεων στα σύνορα γεώτρησης σε εγκάρσιως ισότροπο μέσο.

Σε κάθε περίπτωση οι συναρτήσεις θα πάρουν τη μορφή:

$$m = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{1 - v_1^2} \frac{E_1}{G_2} - \left( 2v_2 \frac{(1 - v_2)}{(1 - v_1^2)} \right) \right)$$

$$k = \frac{\left( \frac{E_1}{E_2} \right) - v_2^2}{(1 - v_1^2)}$$

$$\mu_1 = i\sqrt{m - \sqrt{m^2 - k}} \quad (2.74)$$

$$\mu_2 = i\sqrt{m + \sqrt{m^2 - k_2}} \quad (2.75)$$

$$n = -i(\mu_1 + \mu_2) \quad (2.76)$$

$$\begin{aligned} E_\theta &= \frac{1}{\sin^4 \theta \frac{1}{E_1} + \sin^2 \theta \cos^2 \theta \left( \frac{1}{G_2} - 2 \frac{v_2}{E_1} \right) + \cos^4 \theta \frac{1}{E_2}} = \\ &= \left[ \sin^4 \theta \frac{1}{E_1} + \sin^2 \theta \cos^2 \theta \left( \frac{1}{G_2} - 2 \frac{v_2}{E_1} \right) + \cos^4 \theta \frac{1}{E_2} \right]^{-1} \end{aligned} \quad (2.77)$$

Είναι δυνατόν πλέον, βάση των παραπάνω αποτελεσμάτων, να γίνει αντικατάσταση των σταθερών και των λοιπών παραμέτρων, στις αρχικές εξισώσεις του S.G.Lekhnitskii.

Οι εφαπτομενικές τάσεις που δημιουργούνται στα σύνορα του κυκλικού ανοίγματος μπορούν να υπολογιστούν ως εξής:

***i. Ομοιόμορφη πίεση στα σύνορα του ανοίγματος***

$$\sigma_{\theta 1} = -P \frac{E_\theta}{E_1} (\mu_1 \mu_2 + n(\sin^2 \theta - \mu_1 \mu_2 \cos^2 \theta) + (1 + \mu_1^2)(1 + \mu_2^2) \sin^2 \theta \cos^2 \theta) \quad (2.78)$$

ii. **Εφελκυσμός ή θλίψη της οπής**

$$\sigma_{\theta 2} = \sigma h \frac{E_{\theta}}{E_1} [(-\cos^2 \varphi + (-\mu_1 \mu_2 + n) \sin^2 \varphi)(-\mu_1 \mu_2) \cos^2 \theta + ((1 + n) \cos^2 \varphi + \mu_1 \mu_2 \sin^2 \varphi) \sin^2 \theta - n(1 + n - \mu_1 \mu_2) \sin \varphi \cos \varphi \sin \theta \cos \theta] \quad (2.79)$$

Για  $\varphi_2 = \varphi + \frac{\pi}{2}$  η  $\sigma_{\theta 3}$  :

$$\sigma_{\theta 3} = \sigma H \frac{E_{\theta}}{E_1} [(-\cos^2 \varphi_2 + (-\mu_1 \mu_2 + n) \sin^2 \varphi_2) \mu_1 \mu_2 \cos^2 \theta + ((1 + n) \cos^2 \varphi_2 + \mu_1 \mu_2 \sin^2 \varphi_2) \sin^2 \theta - n(1 + n - \mu_1 \mu_2) \sin \varphi_2 \cos \varphi_2 \sin \theta \cos \theta] \quad (2.80)$$

$$[(-\cos^2 \varphi_2 + (-\mu_1 \mu_2 + n) \sin^2 \varphi_2) \mu_1 \mu_2 \cos^2 \theta + ((1 + n) \cos^2 \varphi_2 + \mu_1 \mu_2 \sin^2 \varphi_2) \sin^2 \theta - n(1 + n - \mu_1 \mu_2) \sin \varphi_2 \cos \varphi_2 \sin \theta \cos \theta]$$

Άρα, σύμφωνα με την αρχή της υπέρθεσης, συμπεραίνεται ότι:

**Η εφαπτομενική τάση στα σύνορα κυκλικού ανοίγματος σε εγκάρσιως ισότροπο μέσο**, προκύπτει από το άθροισμα όλων των υπολοίπων εφαπτομενικών τάσεων.

$$\sigma_{\theta} = \sigma_{\theta 1} + \sigma_{\theta 2} + \sigma_{\theta 3} \quad (2.81)$$

### 2.5.3 Συμπεριφορά των τάσεων στα σύνορα κυκλικού ανοίγματος

Για να γίνει κατανοητή η διαφορά της συμπεριφοράς της ελαστικότητας μεταξύ ενός ανισότροπου και ενός ισότροπου πετρώματος και το πώς επηρεάζει αυτή, την κατανομή των τάσεων γύρω από κυκλικό άνοιγμα, παρουσιάζονται παρακάτω διαγράμματα στα οποία γίνεται σύγκριση των  $\sigma_{\theta}$  για συγκεκριμένες τιμές ελαστικότητας και λόγου Poisson (**E,ν,G** ισότροπο μέσο-εξισώσεις Kirsch) και (**E',ν',G'** ανισότροπο μέσο-εξισώσεις Lekhnitskii).

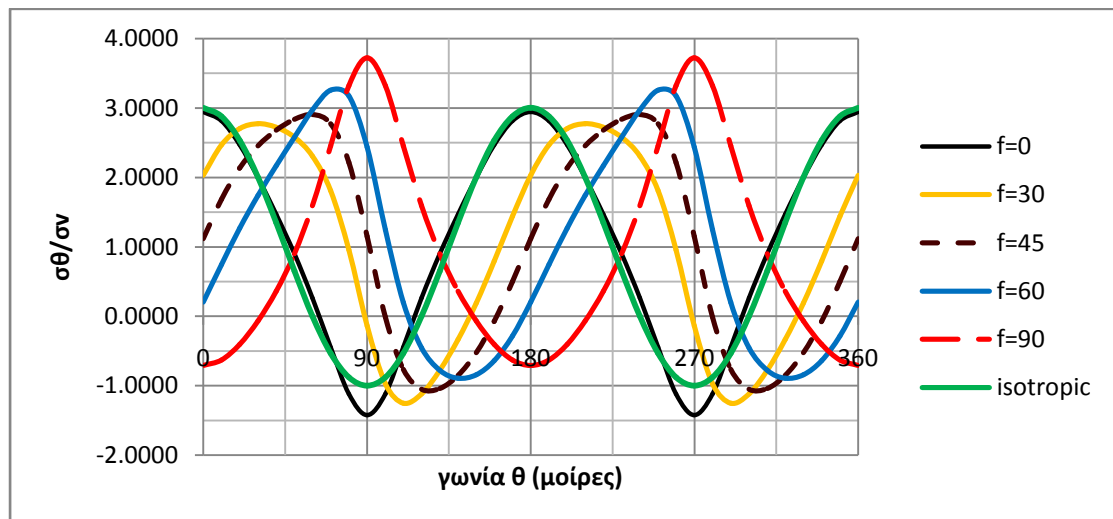
Τα διαγράμματα κατασκευάστηκαν με τη βοήθεια του προγράμματος Excel, βάση των εξισώσεων για εγκάρσιως ισότροπο μέσο.

Θεωρείται γεώτρηση για την οποία υπολογίζεται η κατανομή των τάσεων γύρω από την οπή, σε βάθος χιλίων μέτρων (1000m). Το περιβάλλον πέτρωμα στο οποίο πραγματοποιείται παρουσιάζει τα εξής χαρακτηριστικά:

- $E=30000 \text{ MPa}$
- $G=12500 \text{ MPa}$
- $\nu=0.2$
- $E'=15000 \text{ MPa}$
- $G'=6000 \text{ MPa}$
- $\nu'=0.25$

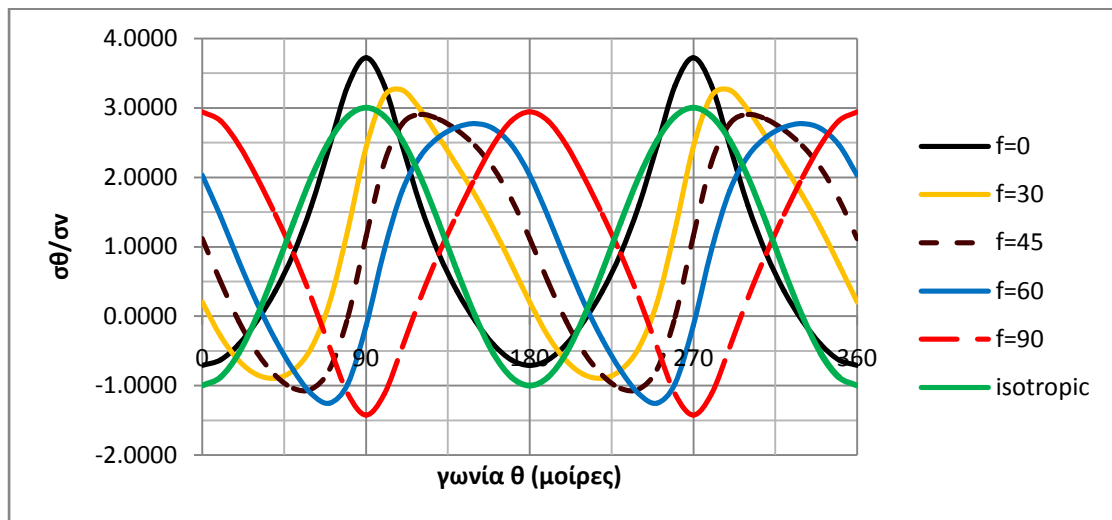
Οι εξωτερικές τάσεις που δέχεται το άνοιγμα είναι οι  $\sigma_H$ ,  $\sigma_h$  ενώ η κατανομή των εφαπτομενικών τάσεων στα σύνορα της γεώτρησης θα εξαρτάται και από τη γωνία( $\phi$ ) που σχηματίζει η ανισοτροπία ως προς τον άξονα που ορίζει η  $\sigma_h$ . Η συμπεριφορά των εφαπτομενικών τάσεων παρουσιάζεται στα παρακάτω διαγράμματα, όπως επίσης και οι αντίστοιχες τιμές για ισότροπο πέτρωμα.

1. Για  $\sigma_h < \sigma_H$  ( $\sigma_h=0$ )



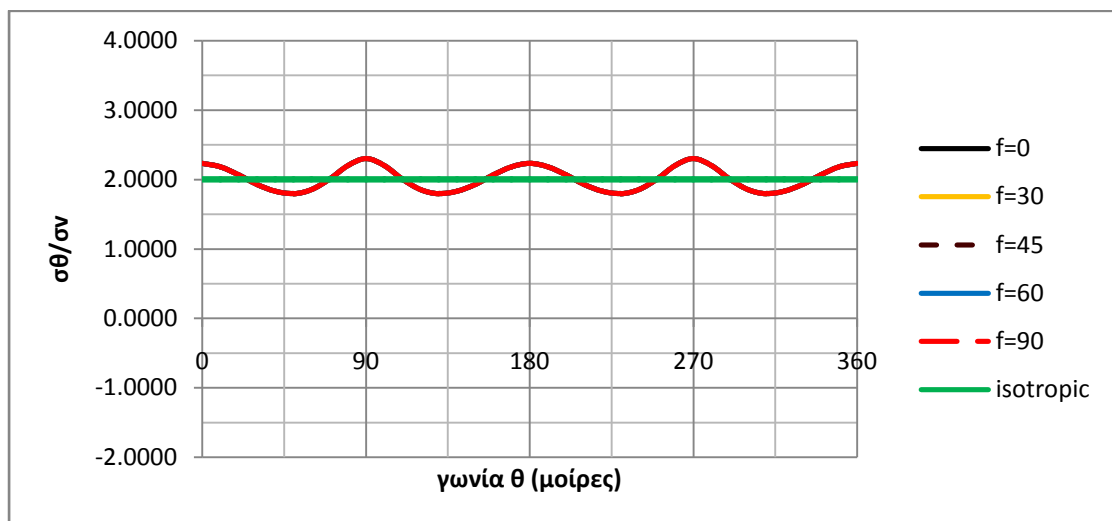
Πίνακας 1. Διάγραμμα λόγου τάσεων-γωνιών

2. Για  $\sigma_H > \sigma_h$  ( $\sigma_h=0$ ) ( $\phi_2=\phi+\pi/2$ )



Πίνακας 2. Διάγραμμα λόγου τάσεων-γωνιών

3. Για  $\sigma_H = \sigma_h$



Πίνακας 3. Διάγραμμα λόγου τάσεων-γωνιών

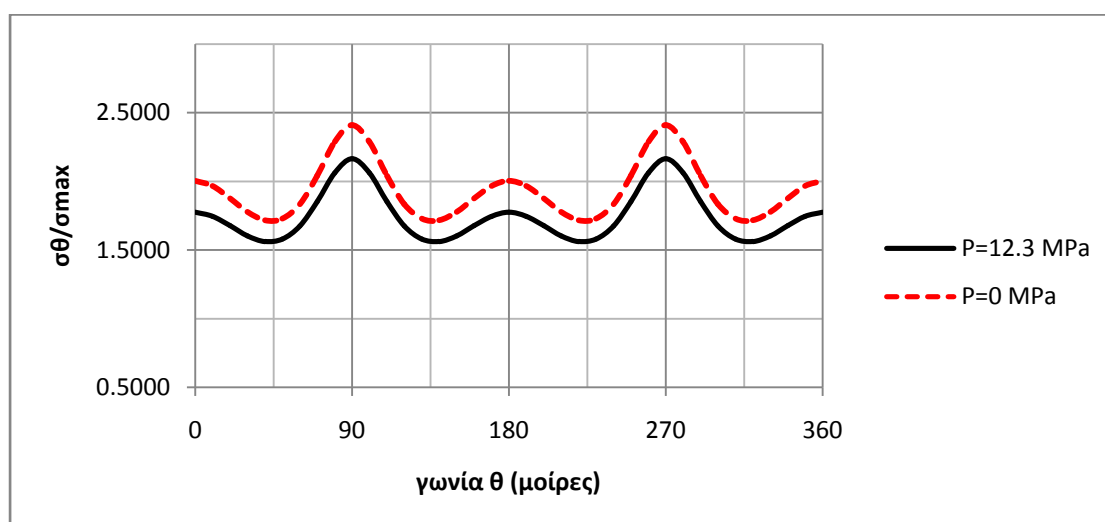
Γίνεται εμφανές ότι και στις τρεις περιπτώσεις, η γωνία ανισοτροπίας επηρεάζει πολύ σημαντικά την τιμή των εφαπτομενικών τάσεων που δρουν στα σύνορα του κυκλικού ανοίγματος. Στην περίπτωση της διαξονικής ισοτροπικής καταπόνησης, η γωνία ανισοτροπίας δεν επηρεάζει την κατανομή των τάσεων. Επίσης όπως παρατηρείται, όταν υπάρχει ισοτροπία, οι τάσεις ( $\sigma_\theta$ ) τείνουν να ακολουθούν καμπύλες των οποίων οι μέγιστες τιμές για τις περιπτώσεις γωνιών ανισοτροπίας



$\phi=90^\circ$  και  $\phi=0^\circ$   $\phi=30^\circ$ , είναι εμφανώς μικρότερες από αυτές των ανισότροπων πετρωμάτων. Ο μόνος τρόπος να μειωθούν οι τιμές των ( $\sigma_\theta$ ), είναι με τη χρήση πολφού η οποία σε μεγάλο βάθος λόγω του ειδικού της βάρους, δημιουργεί αντίρροπες εφαπτομενικές τάσεις με αυτές που δέχεται το πέτρωμα (εξωτερικές  $\sigma_h$ ,  $\sigma_H$ ) και με αυτόν τον τρόπο “συγκρατεί” τα τοιχώματα της γεώτρησης.

Για να γίνει όμως εμφανής και η σημαντικότητα της πίεσης του πολφού (mud pressure) και το κατά πόσο αυτή βοηθάει στη μείωση των εφαπτομενικών τάσεων, παρουσιάζεται το παρακάτω διάγραμμα για το οποίο θεωρείται:

- Βάθος γεώτρησης: 1000m
- Ειδικό βάρος λάσπης:  $1,25 \text{ g/cm}^3$
- Γωνία ανισοτροπίας:  $\phi=0^\circ$
- $\sigma_H = 0.92\sigma_h$
- Ελαστικές σταθερές είναι ίδιες, με αυτές των παραπάνω διαγραμμάτων



Πίνακας 4. Διάγραμμα λόγου τάσεων-γωνιών

Αυτή η έστω και μικρή διαφοροποίηση των τιμών της  $\sigma_\theta$ , που παρατηρείται με τη ύπαρξη λάσπης, μπορεί να βοηθήσει στην ευστάθεια της στήλης της γεώτρησης και την αποφυγή αστοχίας των τοιχωμάτων. Στο επόμενο κεφάλαιο γίνεται ακόμη πιο εμφανής η χρησιμότητα του πολφού και της πίεσης που δημιουργεί (mud pressure) στα τοιχώματα της γεώτρησης, για την μη κατάρρευση της διατρητικής στήλης.

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

### 3. Κριτήρια και τρόποι αστοχίας πετρωμάτων

#### 3.1 Γενικά

Στο κεφάλαιο αυτό, παρουσιάζονται οι διάφορες θεωρίες που περιγράφουν με μαθηματικό τρόπο τις συνθήκες αστοχίας ενός υλικού κάτω από δεδομένη εντατική και παραμορφωσιακή κατάσταση. Παρόλο που αυτές οι θεωρίες επιβεβαιώνονται μέσω πειραματικών δοκιμών, συνίσταται πάντοτε η χρήση συντελεστών ασφαλείας, σε κάθε περίπτωση που εφαρμόζονται τέτοια κριτήρια για τον υπολογισμό της σταθερότητας τεχνικών έργων.

Σύμφωνα με τον Ζαχαρία Αγιουτάντη (2001), η εντατική κατάσταση ενός υλικού μπορεί να αναχθεί σε μία μορφή τέτοια, ώστε να είναι δυνατή η σύγκριση με τα αντίστοιχα μεγέθη της αντοχής του υλικού. Στα πετρώματα τα κριτήρια αστοχίας εκφράζονται συναρτήσει των αντοχών ενός υλικού σε θλίψη, εφελκυσμό και διάτμηση. Όταν μια από αυτές τις παραμέτρους βρεθεί να έχει τιμή μικρότερη από την αντίστοιχη κατάσταση καταπόνησης, τότε θεωρείται ότι επέρχεται αστοχία του υλικού. Γενικότερα, η αντοχή σε εφελκυσμό των ψαθυρών υλικών, όπως είναι τα πετρώματα, είναι τουλάχιστον κατά μία τάξη μεγέθους μικρότερη από την αντοχή αυτών, σε μονοαξονική θλίψη. Η διαφορά αυτή αποδίδεται στην παρουσία μικρορωγμών, που έχουν τη δυνατότητα να μειώσουν την ενεργό διατομή σε δοκιμές εφελκυσμού, ενώ σε περιπτώσεις θλιπτικών δοκιμών δεν επηρεάζουν σημαντικά.

Κριτήρια και θεωρίες αστοχίας για ψαθυρά υλικά έχουν διατυπωθεί κατά το παρελθόν από τους:

- Coulomb
- Mohr
- Griffith
- Hoek-Brown

Όπως είναι προφανές τα κριτήρια αστοχίας επηρεάζονται σε μεγάλο βαθμό από το αν το πέτρωμα έχει κάποια ή κάποιες ασυνέχειες ή κάποιου είδους ανισοτροπία.

Στην ενότητα αυτή θα θεωρήσουμε ότι παρόλο που ένα εγκαρσίως ισότροπο πέτρωμα έχει διαφορετικές ελαστικές σταθερές από ότι ένα ισότροπο, στο θέμα της αστοχίας συμπεριφέρονται με τον ίδιο τρόπο. Άρα και τα κριτήρια αστοχίας τα οποία ισχύουν στην ισοτροπία, διέπουν και αυτά της ανισοτροπίας.

### 3.2 Τρόποι αστοχίας των πετρωμάτων

Στις περιπτώσεις όπου εξετάζεται το αποτέλεσμα της εφαρμογής πολυαξονικού εντατικού πεδίου, θεωρείται ότι επέρχεται αστοχία του υλικού, όταν πληρούται μία σχέση της μορφής, όπως αναφέρεται από τον Ζαχαρία Αγιουτάντη (2001):

$$\sigma_1 = f(\sigma_2, \sigma_3) \quad (3.1)$$

Κατά τη σχεδίαση ενός τεχνικού έργου η σωστή επιλογή του κριτηρίου αστοχίας είναι πολύ σημαντική, διότι η επιτρεπτή εντατική κατάσταση που προκύπτει από την επιλογή αυτή, καθορίζει και τα τεχνικά χαρακτηριστικά του έργου αυτού. Επίσης πολύ σημαντικός είναι και ο ρόλος των δυναμικών φορτίων τα οποία δέχεται ένα μέσο και που μπορούν να υπερβούν κατά μία τάξη μεγέθους τα τελικά στατικά φορτία ισορροπίας.

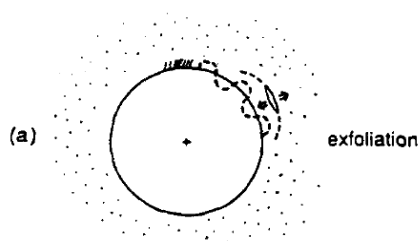
Κατά βάση, δύο είναι οι τρόποι αστοχίας των πετρωμάτων *Guenot* (1984)

- Αστοχία σε διάτμηση (shear failure)
- Αστοχία σε εφελκυσμό (tensile failure)

Τα δύο αυτά είδη αστοχίας είναι αποτέλεσμα είτε μεγάλων διατμητικών ή εφελκυστικών τάσεων που άμεσα δημιουργούν συνθήκες αστοχίας, είτε θλιπτικών τάσεων που εμμέσως δημιουργούν τις συνθήκες αυτές. Επί παραδείγματι, στις περιπτώσεις μονοαξονικών δοκιμών θλίψης, το πέτρωμα συνήθως αστοχεί σε διάτμηση κατά ένα ή και περισσότερα επίπεδα κεκλιμένα ως προς τον άξονα φόρτισης. Επίσης υπάρχουν περιπτώσεις για τις οποίες ο εδαφικός-υπεδαφικός σχηματισμός χαρακτηρίζεται από επίπεδα χαμηλής συνοχής(σχιστότητα, ανισοτροπία, διακλάσεις), είναι δυνατόν να αστοχήσει σε διάτμηση κατά μήκος των επιπέδων αδυναμίας, είτε σε εφελκυσμό όταν τα φορτία εφαρμόζονται παράλληλα προς τα επίπεδα αυτά.

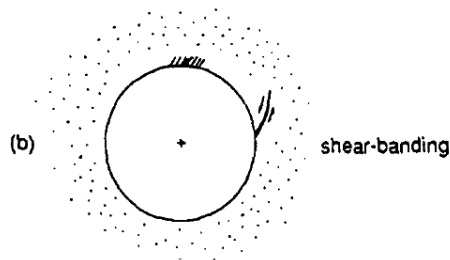
Για τις περιπτώσεις των κυκλικών ανοιγμάτων και ειδικότερα για εκείνες των βαθέων γεωτρήσεων υδρογονανθράκων, η αστοχία του πετρώματος θα επέλθει στα σύνορα της οπής και κατά βάση δύο είναι οι κυριότεροι τρόποι αστοχίας *Guenot* (1984):

1. Απολέπιση (exfoliation), όπου τα τοιχώματα της γεώτρησης αρχίζουν να “ξεφλουδίζουν”. Συνήθως συμβαίνει σε περιπτώσεις που η γεώτρηση είναι καθαρή και δεν υπάρχει ούτε νερό, ούτε λάσπη για τη συγκράτηση των τοιχωμάτων.



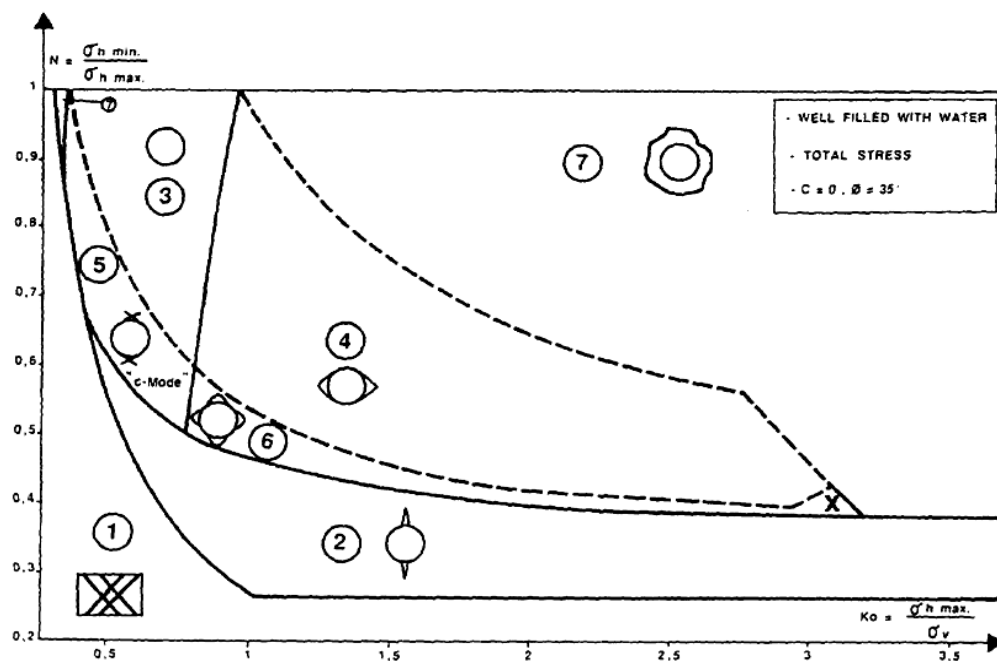
Σχ. 26 απολέπιση τοιχωμάτων

2. Σχισμός λόγω διάτμησης (shear banding), που μπορεί να οφείλεται είτε λόγω ασυνεχειών του πετρώματος, είτε λόγω πολύς μεγάλης εσωτερικής πίεσης λόγω λάσπης, που σε αυτή την περίπτωση το πέτρωμα αστοχεί και η λάσπη διαχέεται μέσα στο σχηματισμό (απώλεια ρευστού).



Σχ. 27 σχισμός τοιχώματος γεώτρησης

Στο παρακάτω διάγραμμα παρουσιάζονται από το Guenot (1984), συνολικά οι τρόποι με τους οποίους μπορεί να αστοχήσει γεώτρηση μεγάλου βάθους, η οποία εκτελείται σε ανισότροπο πέτρωμα, όπως επίσης και οι περιοχές που παραμένει ευσταθής. Όπως γίνεται εμφανές πολύ βασικό ρόλο στον τρόπο αστοχίας παίζουν οι εξωτερικές δυνάμεις που δέχεται η οπή  $\sigma_v, \sigma_{h \min}, \sigma_{h \max}$ . Επίσης για το διάγραμμα θα πρέπει να σημειωθεί ότι η γεώτρηση θεωρείται ότι είναι γεμάτη με νερό και όχι με κάποια αργιλικής σύστασης λάσπη.



Σχ. 28 Ζώνες ευστάθειας και τρόποι με τους οποίους μπορεί να αστοχήσει η οπή

### 3.3 Κριτήριο αστοχίας: Θεωρία Coulomb

Η παρατήρηση ότι σε ορισμένους σχηματισμούς υφίστανται δυνάμεις τριβής μεταξύ των κόκκων του υλικού, καθώς και γενικότερες δυνάμεις συνοχής, οδήγησαν στην ανάπτυξη της θεωρίας της εσωτερικής τριβής (internal friction theory) ή αλλιώς στη θεωρία της αστοχίας σε διάτμηση (shear failure theory), που διατυπώθηκε από τον Coulomb (1773) σύμφωνα με τον Ζαχαρία Αγιουτάντη (2001). Η θεωρία αυτή δίνει τη διατμητική αντοχή του υλικού σε επίπεδη επιφάνεια ολίσθησης και λαμβάνει χη μορφή:

$$|\tau| = S_0 + \mu\sigma \quad (3.2)$$

- $\tau$ = μέγιστη διατμητική τάση
- $\sigma$ = κάθετη τάση στο επίπεδο ολίσθησης/αστοχίας
- $S_0$ = συνοχή υλικού
- $\mu$ = συντελεστής εσωτερικής τριβής του υλικού,

όπου  $\mu = \tan \varphi$  ,  $\varphi$ = γωνία εσωτερικής τριβής του υλικού

Τον ορισμό, των όρων συνοχή-γωνία εσωτερικής τριβής τον απέδωσε ο Roberts (1977) και αναφέρει για τη **συνοχή** ότι: σε ένα συνεκτικό εδαφικό υλικό, η μέγιστη κλίση πρανούς είναι μεγαλύτερη από αυτή που καθορίζεται από τη φυσική γωνία απόθεσης. Οι επιπλέον δυνάμεις, που συμβάλουν στη συγκράτηση του υλικού, οφείλονται στη συνοχή του. Ενώ για τη **γωνία εσωτερική τριβής**: σε ένα συνεκτικό εδαφικό υλικό, για το οποίο ισχύει ( $S_0=0$ ) χαρακτηρίζεται από το ότι η μέγιστη κλίση πρανούς καθορίζεται από τις δυνάμεις τριβής των κόκκων και ισούται με τη γωνία φυσικής απόθεσης.

Συμπερασματικά να αναφέρει ο Ζαχαρίας Αγιουτάντης (2001), ότι ένα υλικό αστοχεί σε διάτμηση κατά ένα επίπεδο, όταν οι διατμητικές τάσεις που αναπτύσσονται, υπερβούν τη συνοχή του υλικού και την τάση που αναπτύσσεται λόγω τριβής, που εκφράζεται ως ποσοστό της κάθετης τάσης στο επίπεδο αυτό. Θα πρέπει να σημειωθεί επίσης ότι το πρόσημο της διατμητικής τάσης προσδιορίζει τη διεύθυνση ολίσθησης και επομένως χρησιμοποιείται το μέτρο αυτής στην παραπάνω εξίσωση. Το κριτήριο Coulomb είναι δυνατό να εφαρμοστεί σε ψαθυρά πετρώματα με την παραδοχή ότι η διατμητική αντοχή στο επίπεδο αστοχίας ενισχύεται από ένα παράγοντα τριβής (Roberts, 1977)-κριτήριο Coulomb για πετρώματα.

Το κριτήριο αστοχία Coulomb μπορεί να γραφεί και ως:

$$S_0 = |\tau| - \mu\sigma \rightarrow \quad (3.3)$$

$$S_0 = \frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)(\sin 2\theta - \mu \cos 2\theta) - \mu(\sigma_1 + \sigma_2)] \quad (3.4)$$

Επίσης γνωρίζουμε ότι:

$$\sin 2\theta = \frac{1}{\sqrt{\mu^2 + 1}}, \quad \cos 2\theta = \frac{-\mu}{\sqrt{\mu^2 + 1}} \quad (3.5)$$

Άρα προκύπτει ότι:

$$\sigma_1 [\sqrt{\mu^2 + 1} - \mu] - \sigma_2 [\sqrt{\mu^2 + 1} + \mu] = 2S_0 \quad (3.6)$$

Η εξίσωση αυτή παριστάνει μία ευθεία στο επίπεδο  $\sigma_1, \sigma_2$  και η οποία για  $\sigma_2=0$  δίνει την αντοχή σε μονοαξονική θλίψη και λαμβάνει τη μορφή:

$$\sigma_1 = 2S_0 [\sqrt{\mu^2 + 1} + \mu] = C_0 \quad (3.7)$$

Μία διαφορετική έκφραση του κριτηρίου αστοχίας επιτυγχάνεται με τον μετασχηματισμό

$$\alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \quad (3.8)$$

Και

$$\sqrt{\mu^2 + 1} + \mu = \frac{1}{\cos \varphi} + \tan \varphi = \tan \alpha \quad (3.9)$$

$$\sqrt{\mu^2 + 1} - \mu = \frac{1}{\cos \varphi} - \tan \varphi = \tan^2 \alpha \quad (3.10)$$

Με επιμέρους πολλαπλασιασμό της εξίσωσης (3.3) με  $\sqrt{\mu^2 + 1} + \mu$  προκύπτει ότι:

$$\sigma_1 - \sigma_2 [\sqrt{\mu^2 + 1} + \mu]^2 = 2S_0 [\sqrt{\mu^2 + 1} + \mu] \quad (3.11)$$

Επομένως:

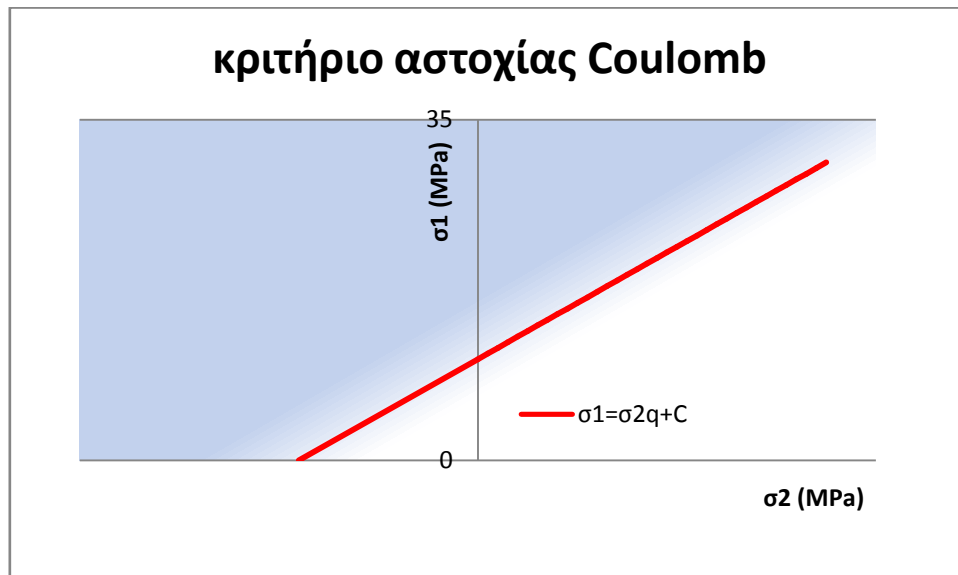
$$\sigma_1 = \sigma_2 \tan^2 \alpha + 2S_0 \tan \alpha \rightarrow$$

$$\sigma_1 = \sigma_2 \frac{1 + \sin \varphi}{1 - \sin \varphi} + 2S_0 \frac{\cos \varphi}{1 - \sin \varphi} \quad (3.12)$$

Η εξίσωση **(3.12)** δίνει την μέγιστη δυνατή τάση την οποία μπορεί να δεχτεί το πέτρωμα πριν αστοχήσει. Οπότε το κριτήριο αστοχίας Coulomb μπορεί να γραφεί και ως:

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \frac{1 + \sin \varphi}{1 - \sin \varphi} + 2S_0 \frac{\cos \varphi}{1 - \sin \varphi} \quad (3.13)$$

Το οποίο παριστάνει μία ευθεία μεταξύ των αξόνων  $\sigma_1, \sigma_2$  με την περιοχή κάτω από την ευθεία να είναι η ασφαλής περιοχή τάσεων.



**Πίνακας 5.** Το κριτήριο Coulomb σε άξονες  $\sigma_1, \sigma_2$

Για σημεία πάνω από τη γραμμή  $\sigma_1$ , σύμφωνα με το κριτήριο αστοχίας, το πέτρωμα αστοχεί.

### 3.4 Επίδραση της πίεσης πολφού (mud pressure), στο κριτήριο αστοχίας

Όπως έχει αναφερθεί και στο δεύτερο κεφάλαιο, η κατανομή των εφαπτομενικών τάσεων γύρω από κυκλικό άνοιγμα γεώτρησης μεγάλου βάθους, διαφέρει από ισότροπο σε ανισότροπο πέτρωμα. Αυτές οι τιμές των τάσεων είναι πολύ μεγαλύτερες σε εγκάρσιως ισότροπο μέσο και αυτό μπορεί να προκαλέσει κατάρρευση της στήλης της γεώτρησης. Για να καταπολεμηθεί αυτό το φαινόμενο χρησιμοποιείται λάσπη εντός της στήλης η οποία και δημιουργεί ακτινικές και εφαπτομενικές τάσεις, οι οποίες λόγω αντίθετης φοράς με αυτές που δημιουργούν οι εξωτερικές τάσεις μειώνουν την επίδραση των τελευταίων, στα τοιχώματα της γεώτρησης. Το κατά πόσο βοηθάει η πίεση της λάσπης στην ευστάθεια της γεώτρησης μπορεί να γίνει εμφανές με τη βοήθεια του παρακάτω παραδείγματος.

#### ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ:

Είναι προφανές ότι η ανισοτροπία ενός πετρώματος εκτός των ελαστικών του παραμέτρων, επηρεάζει και το κριτήριο αστοχίας, επί παραδείγματι, ένα πέτρωμα με ανισοτροπία είναι πιο εύκολο να αστοχήσει στο σημείο κοντά στην ασυνέχεια και σε μικρότερες τιμές τάσεων, απ' ό,τι ένα ομοιόμορφο και ισότροπο πέτρωμα. Βάση αυτού συμπεραίνεται, ότι είναι διαφορετικά τα κριτήρια αστοχίας σε ισότροπα και σε ανιότροπα πετρώματα και ότι τα τελευταία, θα δίνουν σίγουρα μικρότερες τιμές μέγιστων τάσεων απ' ό,τι αυτά των ισότροπων. Παρόλα αυτά, γίνονται δύο παραδοχές

1. χάριν απλούστευσης, ότι η ανισοτροπία ΔΕΝ επηρεάζει το κριτήριο αστοχίας του πετρώματος, άρα συμπεριφέρεται ως ισότροπο.
2. η ακτινική τάση που δέχονται τα τοιχώματα της γεώτρησης ακολουθεί το μοντέλο του Kirsch για ισότροπο, οπότε θεωρείται ίση με την εφαπτομενική τάση που ασκείται στα σύνορα λόγω εσωτερικής πίεσης, με αρνητικό πρόσημο, άρα  $\sigma_r = -\sigma_\theta$

Θεωρείται γεώτρηση βάθους χιλίων μέτρων (1000m) σε σχιστολιθικό ανισότροπο πέτρωμα και  $\sigma_h > \sigma_H$  (Για  $\sigma_h = 0.92 \sigma_H$ ). Με τις ελαστικές σταθερές να είναι οι εξής:

- $E = 30000 \text{ MPa}$
- $G = 12500 \text{ MPa}$
- $\nu = 0.2$
- $E' = 15000 \text{ MPa}$
- $G' = 6000 \text{ MPa}$
- $\nu' = 0.25$

και εσωτερική πίεση λόγω πολφού λάσπης, πυκνότητας ( $1,25 \text{ g/cm}^3$ ) ίση με:

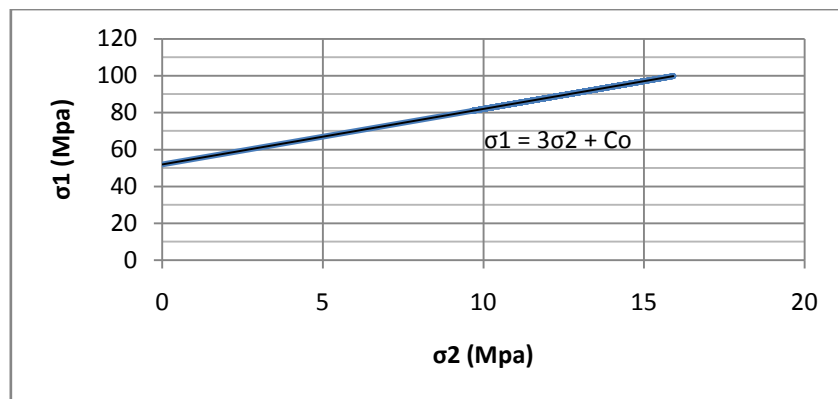


- $P=12.28 \text{ MPa}$

και

- $S_0=15 \text{ MPa}$
- $\phi=30^\circ$

Αν η ανισοτροπία σχηματίζει γωνία από την οριζόντια  $\sigma_v$  ( $f=0^\circ$ ) τότε το κριτήριο αστοχίας κατά Coulomb θα λάβει τη μορφή που παρουσιάζεται στο παρακάτω διάγραμμα (Excel):



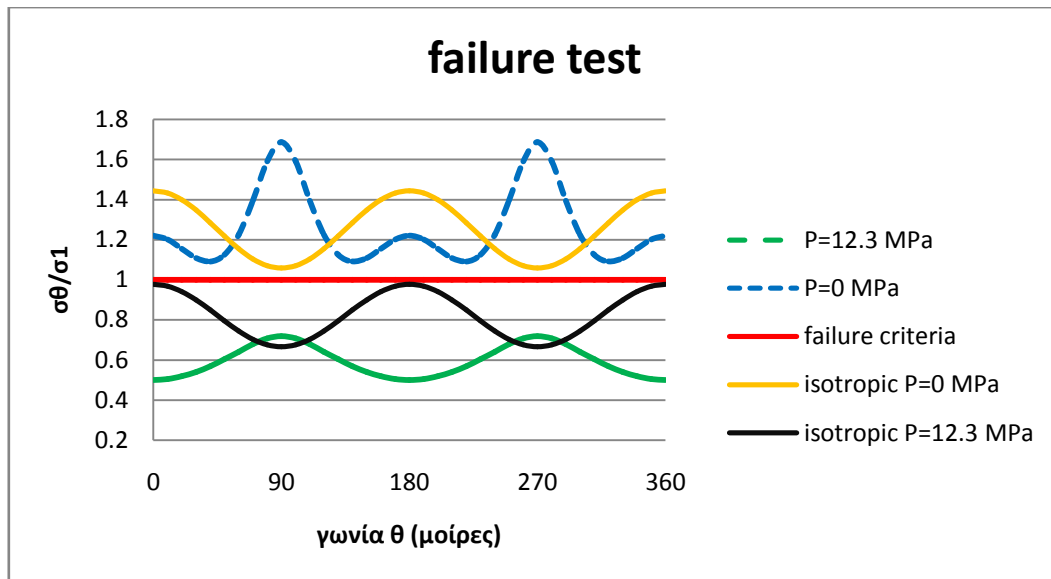
Πίνακας 6. Κριτήριο αστοχίας Coulomb

Ο λόγος της εφαπτομενικής τάσης, προς τις μέγιστες  $\sigma_1$  βάση του κριτηρίου αστοχίας, θα πρέπει σε κάθε περίπτωση να είναι μικρότερος της μονάδας, δηλαδή

$$\frac{\sigma_\theta}{\sigma_1} \leq 1$$

Βάση της παραπάνω σχέσης μπορεί να κατασκευαστεί το διάγραμμα  $(\sigma_\theta/\sigma_1, \theta)$ , για τις δύο περιπτώσεις, με ή χωρίς την ύπαρξη εσωτερική πίεσης (mud pressure) και επίσης παρουσιάζεται και η κατανομή των τάσεων σε ισότροπο μέσω.

Όπου  $0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$ .



**Πίνακας 7.** Κριτήριο αστοχίας σε ανισότροπο πέτρωμα με γωνία ανισοτροπίας  $\phi=0^\circ$ , με ή χωρίς τη χρήση πολφού

Για κάθε σημείο του διαγράμματος πάνω από τη γραμμή που ορίζει το κριτήριο αστοχίας, (παράλληλη γραμμή στον αριθμό 1), υπάρχει αστοχία του πετρώματος, άρα και αστοχία της γεώτρησης. Παρατηρείται λοιπόν, ότι στην περίπτωση που δεν υπάρχει εσωτερική πίεση, οι εφαπτομενικές τάσεις γύρω από την οπή υπερβαίνουν τις τιμές του κριτηρίου αστοχίας του πετρώματος, είτε αυτό είναι ανισότροπο, είτε ισότροπο. Αντιθέτως, αν υπάρχει εσωτερική πίεση στα τοιχώματα της γεώτρησης λόγω της ύπαρξης λάσπης, η καμπύλη που υποδηλώνει την κατανομή των τάσεων ως προς το κριτήριο αστοχίας βρίσκεται εξολοκλήρου κάτω από τη γραμμή που ορίζει η αστοχία. Σε αυτό το σημείο αποδεικνύεται και πρέπει να τονισθεί, η σημαντικότητα της παρουσίας πολφού εντός της στήλης γεώτρησης, σε περιπτώσεις που οι εξωτερικές τάσεις που δέχονται τα τοιχώματα της οπής ξεπερνούν τις τιμές των εκάστοτε κριτηρίων αστοχίας του πετρώματος.

Επιπροσθέτως θα πρέπει να αναφερθεί, ότι σε πολλές περιπτώσεις η παρουσία του πολφού μπορεί να είναι αυτή που θα προκαλέσει την αστοχία του πετρώματος, αν η πίεση που θα ασκηθεί στα τοιχώματα της γεώτρησης από αυτή, προκαλέσει σχισμό λόγω διάτμησης (shear banding). Σε κάθε περίπτωση θα πρέπει να γίνονται αναλυτικοί υπολογισμοί των τάσεων, που εφαρμόζονται στα σύνορα της γεώτρησης και ανάλογα με τα αποτελέσματα να αποφασίζεται η καλύτερη δυνατή μέθοδος διάνοιξής της, από τους υπεύθυνους μηχανικούς.

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

### 4. Συμπεράσματα-Προτάσεις

#### 4.1 Συμπεράσματα

Η ανισοτροπία των πετρωμάτων και των εδαφών, σε όλες τις τεχνικές κατασκευές, προκαλεί προβλήματα ευστάθειας, τα οποία καλούνται οι μηχανικοί να λύσουν. Στην περίπτωση όπου εκτελούνται γεωτρήσεις σε αυτά, όπως αποδείχθηκε στα προηγούμενα κεφάλαια, η κατανομή των τάσεων, που δέχεται περιμετρικά η οπή της γεώτρησης, αυξάνεται σε πολύ μεγάλο βαθμό. Αυτό συμβαίνει, καθότι οι ελαστικές παράμετροι του πετρώματος αλλάζουν σημαντικά, για διαφορετικές γωνίες γύρω από το άνοιγμα. Επίσης οι τιμές των εφαπτομενικών τάσεων επηρεάζονται από τη διεύθυνση της ανισοτροπίας και από τις τιμές των εξωτερικών δυνάμεων που δέχονται τα τοιχώματα της γεώτρησης. Αυτό έρχεται σε αντίθεση με το ισότροπο μέσο, για το οποίο οι τάσεις εξαρτώνται εξολοκλήρου από τις εξωτερικές δυνάμεις και οι παράμετροι της ελαστικότητας δεν παίζουν κανένα ρόλο στον υπολογισμό αυτών.

Η ευστάθεια των γεωτρήσεων που πραγματοποιούνται σε ανισότροπα πετρώματα, μειώνεται αισθητά, διότι ο συνδυασμός της σχιστότητας ή των ασυνεχιών του πετρώματος και των πολύ υψηλών τάσεων που δέχονται τα τοιχώματα, μπορούν να προκαλέσουν αστοχία. Για αυτό το λόγο είναι απαραίτητη η χρήση πολφού η οποία έχει τη δυνατότητα να συγκρατεί τη στήλη και να μειώνει τις τάσεις που ασκούνται σε αυτή. Η παρουσία ρευστού εντός της στήλης, δεν είναι πάντα απαραίτητη και δε θα πρέπει να θεωρείται -λανθασμένα- ότι η ευστάθεια επωφελείται από την ύπαρξη του πολφού. Σε πολλές περιπτώσεις η εσωτερική πίεση που δέχονται τα τοιχώματα της γεώτρησης είναι πολύ υψηλή και είναι αυτή που προκαλεί την αστοχία.

Εν κατακλείδι, η συμπεριφορά του πετρώματος καθορίζεται σε μεγάλο βαθμό, από την ανισοτροπία ή μη, αυτού. Η ανάλυση όλων των παραμέτρων που διέπουν την εντατική κατάσταση των πετρωμάτων, είναι αυτή που θα καθορίσει τον τρόπο, με τον οποίο θα εκτελεστεί και θα αναπτυχθεί μία βαθιά γεώτρηση.

#### 4.2 Προτάσεις για περαιτέρω έρευνα

Σύμφωνα με τα συμπεράσματα που αναφέρθηκαν στην παράγραφο 4.1 είναι δυνατόν να αναφερθούν και οι ακόλουθες προτάσεις για περαιτέρω έρευνα.

Αρχικά θα πρέπει να εξετασθεί πέραν του θεωρητικού, το κατά πόσων τα συγκεκριμένα αποτελέσματα εφαρμόζονται στην πράξη, με τη βοήθεια μετρήσεων πεδίου. Επιπροσθέτως, θα ήταν δυνατό να γίνει μία πλήρης ανάλυση όλων των

παραμέτρων που επηρεάζουν την ευστάθεια των γεωτρήσεων, η οποία θα αναφέρει και κριτήρια αστοχίας για ανισότροπα πετρώματα. Σε αυτό το σημείο θα πρέπει να τονιστεί η πολυπλοκότητα του ζητήματος αυτού, διότι οι παράγοντες και ο αριθμός των μεταβλητών που επηρεάζουν το κριτήριο αστοχίας αυξάνονται εκθετικά.

Ακόμη, σε μία μελλοντική έρευνα, θα μπορούσαν να χρησιμοποιηθούν πραγματικά δεδομένα γεωτρήσεων υδρογονανθράκων, οι οποίες έχουν εκτελεστεί σε ανισότροπα πετρώματα. Με αυτό τον τρόπο η εργασία θα είχε θεωρητική όπως και πρακτική σημασία και θα μπορούσε να γίνει σύγκριση των αποτελεσμάτων, θεωρητικών-πρακτικών.

Τέλος, κατά την εκτέλεση της διάνοιξης της γεώτρησης, εφαρμόζονται τάσεις στα υποκείμενα πετρώματα, είτε από το κοπτικό άκρο, είτε από την ταχύτητα περιστροφής του άκρου. Αυτό μπορεί να προκαλέσει αστοχία του πετρώματος και αποτυχία της διάτρησης. Η ανάλυση των τάσεων που εφαρμόζονται στη συγκεκριμένη περίπτωση μπορεί να γίνει αντικείμενο έρευνας κάποια άλλης εργασίας σε θεωρητικό αλλά και πρακτικό επίπεδο.

## Βιβλιογραφία

- [1] MODOS Lecture Exadaktylos Borehole stability
- [2] Στοιχεία Γεωμηχανικής Μηχανική Πετρωμάτων, Ζαχαρίας Γ. Αγιουτάντης (2002)
- [3] Χαρακτηρισμός ανισοτροπίας και αντοχής πετρωμάτων με τη δοκιμή αντιδιαμετρικής θλίψεως δίσκου, Κωνσταντίνος Ν. Κακλής (2003)
- [4] Στοιχεία θεωρίας ελαστικότητας, Τομέας Γεωφυσικής Α.Π.Θ pdf
- [5] Lecture note-8- Generalized Hook's Law, Gokhan Karagoz pdf
- [6] Lecture-8- Stress Analysis around Underground Openings, Geotechnical Engineering Practice & Design, Erik Eberhardt (2013)
- [7] S G Lekhnitskii-Anisotropic plates-Gordon and Breach Science Publishers (1984)
- [8] General Solution of the Stress Potential Function in Lekhnitskii's Elastic Theory for Anisotropic and Piezoelectric Materials, Zhuo-Cheng Ou (2007)
- [9] (Mechanics of elastic and inelastic solids 4) Robert G. Payton (auth.)-Elastic wave propagation in transversely isotropic media-Springer Netherlands (1983)
- [10] Mathematical Analysis in the Mechanics of Fracture James, R. Rice (1968)
- [11] Closed-Form Solutions, David Roylance (2001)
- [12] Stability Failure and Measurements of Boreholes and Other Circular Openings, U.S. National Committee for Rock Mechanics, Geotechnical Board, Commission on Engineering and Systems, National Research Council (1993)
- [13] An Overview of tunnel, underground excavation and boreholes collapse mechanisms, Dr. Vincent Maury (1990)
- [14] Importance of Anisotropy When Estimating and Measuring In Situ Stresses in Rock, B. Amadei (1996)
- [15] Borehole Breakouts and Stress Fields, Guenot (1989)
- [16] Elasticity of Transversely Isotropic Materials (Solid Mechanics and Its Applications)-Springer, Haojiang Ding, Weiqiu Chen, Ling Zhang (2006)
- [17] An Introduction to Continuum Mechanics, J.N. Reddy (2008)
- [18] [https://el.wikipedia.org/wiki/Τανυστής\\_τάσεω\\_Cauchy](https://el.wikipedia.org/wiki/Τανυστής_τάσεω_Cauchy)
- [19] Theory of Propagation of Elastic Waves in a Fluid-Saturated Porous Solid. I. Low-Frequency Range, Biot (1956)
- [20] The Twinned Gradient and Its Application to Determine the Effects of a Change of Poisson's Ratio Westergaard, (1940)
- [21] Stress Distribution in dry and in saturated sand above a yielding trap-doop Terzaghi, (1936)
- [22] Method and apparatus for lateral drilling in oil and gas wells Michael B. Burton, (1987)
- [23] Kirsch, 1898, Die Theorie der Elastizität und die Bedürfnisse der Festigkeitslehre. Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure
- [24] Μηχανική Παραμορφωσίμων Σωμάτων Ι, Γ.Ι. Τσαμασφύρος, 1991
- [25] [https://el.wikipedia.org/wiki/Θεωρία\\_ελαστικότητας](https://el.wikipedia.org/wiki/Θεωρία_ελαστικότητας)
- [26] Κανάρης Χ. Τσίγκανος (2004). Εισαγωγή στη Θεωρητική Μηχανική

- [27] <http://minelab.mred.tuc.gr/courses/finish/30-rock-mechanics/568-exadaktylos-lecture-2>
- [28] Van Dyke, Milton (1975) Perturbation Methods in Fluid Mechanics