

ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
ΓΕΝΙΚΟ ΤΜΗΜΑ



ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΕΣ ΕΠΙΣΤΗΜΕΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟΥ ΔΙΠΛΩΜΑΤΟΣ ΕΙΔΙΚΕΥΣΗΣ
ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ : «ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΑ ΚΑΙ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ»

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΕΠΙΛΥΣΗ ΤΩΝ ΔΙΔΙΑΣΤΑΤΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ
ΡΗΧΩΝ ΥΔΑΤΩΝ ΣΕ ΠΑΡΑΛΛΗΛΕΣ ΑΡΧΙΤΕΚΤΟΝΙΚΕΣ
ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΩΝ ΜΕ ΕΠΙΤΑΧΥΝΤΕΣ

ΔΗΜΗΤΡΙΟΣ Η. ΜΠΟΜΠΟΛΑΚΗΣ

Επιβλέπων : Αν. Καθηγητής **Ανάργυρος Δελής**

ΧΑΝΙΑ , 2014

Η διατριβή αυτή εξετάστηκε επιτυχώς από τη παρακάτω Τριμελή Επιτροπή

- Αν. Καθηγητή Ανάργυρο Δελή (επιβλέπων)
- Αν. Καθηγητή Ιωάννη Νικολό
- Επικ. Καθηγητή Εμμανουήλ Μαθιουδάκη

η οποία ορίστηκε κατά τη 369^η /4-12-2013 συνεδρίαση της Συγκλήτου του Πολυτεχνείου Κρήτης.

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω όλους όσους με βοήθησαν κατά την διάρκεια των σπουδών μου, αλλά και με στήριξαν στην ολοκλήρωση αυτής της διατριβής.

Ιδιαίτερα ευχαριστώ τους συμβούλους μου καθηγητές, τον Αν. Καθηγητή Ανάργυρο Δελή και τον Αν. Καθηγητή Εμμανουήλ Μαθιουδάκη για την επιστημονική καθοδήγηση που μου πρόσφεραν καθώς και τον Αν. Καθηγητή Ιωάννη Νικολό για την συμμετοχή του στην τριμελή επιτροπή.

Επίσης θα ήθελα να ευχαριστήσω τον Διευθυντή του Εργαστηρίου Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Ηλεκτρονικών Υπολογιστών (ΕΕΜΗΥ) Καθηγητή Ιωάννη Σαριδάκη για την παραχώρηση της πρόσβασης στα υπολογιστικά συστήματα του εργαστηρίου.

Επίσης, ευχαριστώ τους συμφοιτητές μου στο Μεταπτυχιακό Πρόγραμμα Σπουδών Νικόλαο Βιλανάκη και Νίκη Χαραλαμπάκη για τις ιδιαίτερες στιγμές που περάσαμε μαζί κατά την διάρκεια των σπουδών μας.

Τέλος, ευχαριστώ την οικογένειά μου για την ηθική υποστήριξη που μου παρείχε καθ'ολη την διάρκεια των σπουδών μου.

Περίληψη

Αρχικός σκοπός της παρούσας εργασίας είναι να δημιουργήσουμε μία μέθοδο η οποία θα προσομοιώνει φαινόμενα ροής υδάτων σε συγκεκριμένο χωρίο. Οι εξισώσεις ρηχών υδάτων διακριτοποιημένες με τη μέθοδο των πεπερασμένων όγκων μπορούν να κατασκευάζουν ένα αριθμητικό σχήμα ικανό να προσομοιώσει τέτοια φαινόμενα. Για την επίλυση του προβλήματος Riemann που εμφανίζεται στο μέτωπο κάθε κελιού του πλέγματος εφαρμόζουμε τον προσεγγιστικό επιλύτη του Roe, ενώ διάφορες μετατροπές εφαρμόζονται ώστε το αριθμητικό σχήμα να αποκτήσει συγκεκριμένες ιδιότητες για πετύχουμε μία ρεαλιστική προσομοίωση των φαινομένων. Εφαρμόσαμε το αριθμητικό σχήμα σε πλέγματα μεγαλύτερων διαστάσεων με σκοπό την εξαγωγή ποιοτικότερων αποτελεσμάτων, όμως η ραγδαία αύξηση του χρόνου εκτέλεσης σε αυτές τις εφαρμογές μας ανάγκασαν να διερευνήσουμε τρόπους επιτάχυνσης του αριθμητικού σχήματος. Μετατρέψαμε το αριθμητικό σχήμα ώστε να εφαρμόζεται το πρότυπο OpenMP το οποίο εκμεταλλεύεται πολυεπεξεργαστικά συστήματα υπολογισμών και απέδωσε μειωμένους χρόνους εκτέλεσης. Το ίδιο, αλλά με πολύ καλύτερα αποτελέσματα, απέδωσε και η δεύτερη μετατροπή του αριθμητικού σχήματος ώστε να εφαρμόζεται το πρότυπο OpenACC το οποίο εκμεταλλεύεται συστήματα με επιταχυντή (κάρτα γραφικών). Το άμεσο αριθμητικό σχήμα που αναπτύξαμε εφαρμόζοντας το πρότυπο OpenACC αποδίδει τόσο συρρικνωμένους χρόνους εκτέλεσης που επιτρέπει την ποιοτική προσομοίωση φαινομένων ροής υδάτων σε πραγματικό χρόνο.

Περιεχόμενα

Ευχαριστίες	i
Περίληψη	iii
1 Εισαγωγή	1
2 Εξισώσεις ρηχών υδάτων στη μία χωρική διάσταση	5
2.1 Διατήρηση μάζας	6
2.2 Διατήρηση ορμής	7
2.3 Πρόβλημα Riemann	10
2.4 Η συνθήκη Rankine-Hugoniot	11
2.5 Επέκταση στις 2 χωρικές διαστάσεις	12
3 Αριθμητικό σχήμα	15
3.1 Μέθοδος πεπερασμένων όγκων	15
3.2 Μέθοδοι τύπου Godunov	16
3.3 Ο προσεγγιστικός επιλυτής Riemann του Roe	17
3.3.1 F-wave παρουσίαση της μεθόδου	20
3.3.2 Πηγαίοι όροι	21
3.3.3 CFL συνθήκη	23
3.3.4 Εντροπική διόρθωση (Entropy Fix)	24
3.3.5 C-ιδιότητα	25
3.4 Αντιμετώπιση στεγανών	26

3.4.1	C-ιδιότητα σε υγρο/στεγανο κατάσταση	26
3.4.2	Διόρθωση	27
3.5	Αριθμητικά σχήματα υψηλότερης τάξης	28
3.5.1	Flux-Limiting	28
3.5.2	Αριθμητικές ροές υψηλής ανάλυσης	29
3.5.3	Πηγαίοι όροι υψηλής ανάλυσης	30
3.6	Συνοριακές συνθήκες	31
3.7	Επέκταση στις 2 διαστάσεις	33
3.7.1	Αριθμητικό σχήμα	33
3.7.2	Ο προσεγγιστικός επιλύτης Riemann του Roe σε δύο διαστάσεις . .	34
3.7.3	Αριθμητικές ροές και πηγαίοι όροι υψηλής ανάλυσης	37
3.7.4	C -ιδιότητα στις δύο διαστάσεις	39
3.7.5	Αντιμετώπιση εμφάνισης στεγανών	39
4	Παράλληλος αλγόριθμος	43
4.1	Το πρότυπο OpenMP	43
4.2	Το πρότυπο OpenACC	48
5	Προβλήματα σε 2 διαστάσεις	57
5.1	Κατάρρευση κυκλικού φράγματος	58
5.2	Κατάρρευση φράγματος σε κανάλι με τοπογραφία και τριβή	61
5.3	Φράγμα Malpasset	69
6	Συμπεράσματα	85

Κατάλογος Σχημάτων

2.1	Ροή σε ελεύθερο σύνορο υπό την επίδραση της βαρύτητας	5
3.1	Πλέγμα διακριτοποίησης στις 2 διαστάσεις	34
5.1	Βάθος νερού σε κυκλική κατάρρευση φράγματος στα 0.4 (αριστερά) και 0.7 δευτερόλεπτα (δεξιά).	59
5.2	Βάθος νερού σε κυκλική κατάρρευση φράγματος στα 1.4 δευτερόλεπτα σε πλάγια (αριστερά) και κάτω όψη (δεξιά).	59
5.3	Βάθος νερού σε κυκλική κατάρρευση φράγματος στα 3.5 δευτερόλεπτα σε πάνω όψη (αριστερά) και σε κάτω όψη (δεξιά).	60
5.4	Βάθος νερού σε κυκλική κατάρρευση φράγματος στα 4.7 δευτερόλεπτα σε πάνω όψη (αριστερά) και σε κάτω όψη (δεξιά).	60
5.5	Αρχικές συνθήκες (αριστερά) και εξέλιξη της ροής του νερού σε χρόνο $t = 2$ δευτερόλεπτα	61
5.6	Εξέλιξη της ροής του νερού σε χρόνο $t = 5$ δευτερόλεπτα (αριστερά) και σε χρόνο $t = 10$ δευτερόλεπτα.	62
5.7	Εξέλιξη της ροής του νερού σε χρόνο $t = 20$ δευτερόλεπτα (αριστερά) και σε χρόνο $t = 30$ δευτερόλεπτα.	62
5.8	Εξέλιξη της ροής του νερού σε χρόνο $t = 40$ δευτερόλεπτα (αριστερά) και σε χρόνο $t = 50$ δευτερόλεπτα.	62
5.9	Εξέλιξη της ροής του νερού σε χρόνο $t = 600$ δευτερόλεπτα.	63
5.10	Εξέλιξη της ροής του νερού σε χρόνο $t = 8,5$ δευτερόλεπτα σε πλέγμα 50×75	64

5.11	Εξέλιξη της ροής του νερού σε χρόνο $t = 8,5$ δευτερόλεπτα σε πλέγμα 100×150 .	64
5.12	Εξέλιξη της ροής του νερού σε χρόνο $t = 8,5$ δευτερόλεπτα σε πλέγμα 200×300 .	65
5.13	Εξέλιξη της ροής του νερού σε χρόνο $t = 8,5$ δευτερόλεπτα σε πλέγμα 300×450 .	65
5.14	Το speedup σε πλέγμα διαστάσεων 50×75 (αριστερά) και 100×150 (δεξιά).	67
5.15	Το speedup σε πλέγμα διαστάσεων 200×300 (αριστερά) και 300×450 (δεξιά).	67
5.16	Το speedup σε πλέγμα διαστάσεων 500×750 (αριστερά) και 1000×1500 (δεξιά).	68
5.17	Ακανόνιστο πλέγμα των υπομετρικών δεδομένων και τοπογραφία σε τρία διαφορετικά πλέγματα.	71
5.18	Αρχικές συνθήκες φράγμα Malpasset.	72
5.19	Η εξέλιξη της ροής στα 100 δευτερόλεπτα(πάνω) και στα 200 δευτερόλεπτα(κάτω).	73
5.20	Η εξέλιξη της ροής στα 400 δευτερόλεπτα(πάνω) και στα 800 δευτερόλεπτα(κάτω).	74
5.21	Η εξέλιξη της ροής στα 1200 δευτερόλεπτα (πάνω) και στα 1600 δευτερόλεπτα(κάτω).	75
5.22	Η εξέλιξη της ροής στα 2000 δευτερόλεπτα.	76
5.23	Σύγκριση αριθμητικών αποτελεσμάτων σε πυκνό πλέγμα (1100×400) με διάφορα δεδομένα από τα αποτελέσματα της πλυμμέρας.	77
5.24	Σύγκριση αριθμητικών αποτελεσμάτων με τις μετρήσεις της αστυνομίας σε 4 διαφορετικά πλέγματα:	79
5.25	Σύγκριση αριθμητικών αποτελεσμάτων με τα δεδομένα από την φυσική προσομοίωση για την μεγιστη ελεύθερη επιφάνεια σε 4 διαφορετικά πλέγματα:	80
5.26	Σύγκριση αριθμητικών αποτελεσμάτων με τα δεδομένα από την φυσική αναπαράσταση για τον χρόνο άφιξης της ροής σε 4 διαφορετικά πλέγματα :	81
5.27	Το speedup σε πλέγμα διαστάσεων 150×60 (αριστερά) και 280×120 (δεξιά).	82
5.28	Το speedup σε πλέγμα διαστάσεων 480×150 (αριστερά) και 650×200 (δεξιά).	83
5.29	Το speedup σε πλέγμα διαστάσεων 1100×400 (αριστερά) και 2005×900 (δεξιά).	83

Κατάλογος Πινάκων

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

Η προσομοίωση φυσικών φαινομένων όπως πλημμύρες, κατάρρευση φραγμάτων και γενικότερα ροές υδάτων είναι ένας τομέας με μεγάλο επιστημονικό, πρακτικό και οικονομικό ενδιαφέρον. Σύμφωνα με το ClimateCost project [18] εκτιμάται ότι χωρίς κάποια βελτίωση στις υπάρχουσες εγκαταστάσεις θα προκληθούν καταστροφές αξίας 46 δισεκατομμύρια ευρώ κάθε χρόνο μέχρι το 2050 από τέτοιου είδους φαινόμενα. Η επικρατούσα άποψη για να αντιμετωπιστούν αυτές οι καταστροφές είναι να επενδυθούν χρήματα στην πρόβλεψη, προετοιμασία και αντιμετώπιση τέτοιων φαινομένων και όχι στην δαπανηρή επανακατασκευή εγκαταστάσεων. Οπότε είναι αναγκαίο να φτιαχτεί ένα ακριβές μοντέλο με μικρό υπολογιστικό κόστος το οποίο θα προσομοιώνει τέτοια φαινόμενα.

Οι εξισώσεις ρηχών υδάτων στις δύο χωρικές διαστάσεις χρησιμοποιούνται για να προσομοιώσουν τέτοια φαινόμενα με αρκετά καλή ακρίβεια. Οι εξισώσεις αυτές αποτελούνται από ένα σύστημα διαφορικών εξισώσεων με αρχικές και συνοριακές συνθήκες. Για τη διακριτοποίηση των εξισώσεων θα χρειαστούμε και ένα κατάλληλο αριθμητικό σχήμα. Διάφορες μέθοδοι διακριτοποίησης των εξισώσεων έχουν χρησιμοποιηθεί όπως πεπερασμένες διαφορές, πεπερασμένα στοιχεία ενώ τα τελευταία χρόνια ιδιαίτερα δημοφιλής είναι οι μέθοδοι πεπερασμένων όγκων. Στη παρούσα εργασία θα χρησιμοποιηθεί μια μέθοδος των πεπερασμένων όγκων τύπου upwind η οποία βασίζεται στην φιλοσοφία της μεθόδου του Godunov [4], η οποία διατηρεί τις συνολικές ποσότητες της μάζας και της ορμής σταθερές και υπολογίζει σωστά τις όποιες ασυνέχειες εμφανιστούν στη λύση

(shock capturing), ως προς την ταχύτητα και τη θέση τους, κάτι στο οποίο αποτυγχάνουν πολλές άλλες μέθοδοι. Η μέθοδος του Godunov υπολογίζει τοπικά την ακριβή λύση του προβλήματος Riemann μετατρέποντας το αριθμητικό σχήμα αρκετά πολύπλοκο στην υλοποίηση του και με μεγάλο υπολογιστικό κόστος. Μια εξέλιξη αυτής της μεθόδου, η οποία και χρησιμοποιείται στην παρούσα εργασία, είναι ο προσεγγιστικός επιλύτης Riemann του Roe [5]. Ο συγκεκριμένος επιλύτης ορίζει τοπικά προσεγγιστικές λύσεις για το πρόβλημα Riemann χωρίς να το επιλύει.

Για την προσομοίωση υδάτινων ροών πάνω σε τυχαία ακανόνιστη τοπογραφία πρέπει το αριθμητικό σχήμα να επεκταθεί έτσι ώστε να ικανοποιεί συγκεκριμένες περιπτώσεις.

- Εντροπική διόρθωση
- Αντιμετώπιση υγρών/στεγανών καταστάσεων
- Ισορροπία σε στάσιμες καταστάσεις (να ικανοποιείται η C ιδιότητα)
- Υψηλής ανάλυσης ροές και πηγαίοι όροι
- Ορισμός των συνοριακών τιμών

Αριθμητικά σχήματα πεπερασμένων όγκων, ειδικά αν χρησιμοποιήσουμε αριθμητικές ροές και πηγαίους όρους υψηλής ανάλυσης, χαρακτηρίζονται από ένα σχετικά μεγάλο υπολογιστικό κόστος, το οποίο θα αυξηθεί αν θέλουμε να πραγματοποιήσουμε μια προσομοίωση ενός μεγάλο χωρίου με πυκνό πλέγμα. Στόχος της παρούσας της εργασίας είναι να συρρικνώσουμε το υπολογιστικό κόστος στην εφαρμογή του αριθμητικού σχήματος.

Για να πετύχουμε μείωση του υπολογιστικού κόστους πρέπει να ανεξαρτητοποιήσουμε τις διεργασίες στο αριθμητικό μας σχήμα και να αναθέσουμε στον υπολογιστή να τις πραγματοποιήσει παράλληλα. Ένας τρόπος να το εφαρμόσουμε είναι με το πρότυπο OpenMP στο οποίο ένας πολυεπεξεργαστικός υπολογιστής αναθέτει στους επεξεργαστές να εκτελέσουν παράλληλα τις διεργασίες του αριθμητικού σχήματος. Το συγκεκριμένο

πρότυπο χαρακτηρίζεται από το μικρό πλήθος υπολογιστικών νημάτων αλλά με αρκετή υπολογιστική ισχύ.

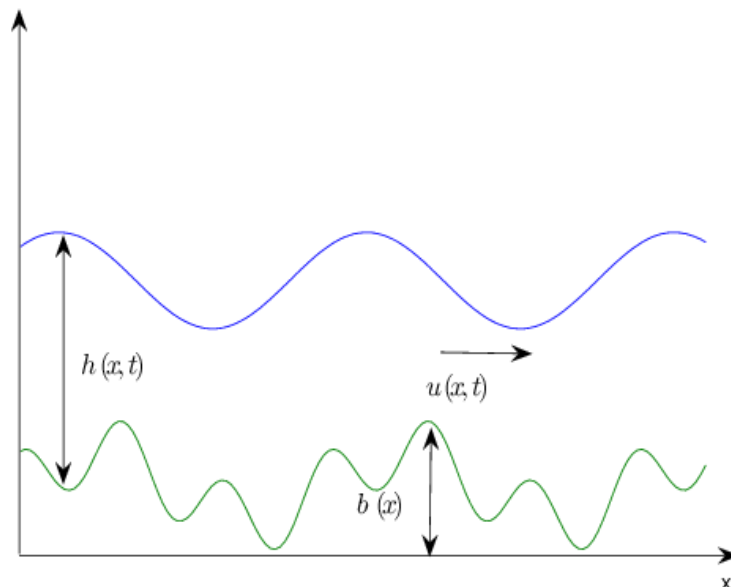
Σε αυτή την εργασία εκμεταλλευόμαστε την σχετικά πρόσφατη τεχνολογία της κάρτας γραφικών (Graphics Processing Unit ή GPU) στην οποία μπορούμε να πραγματοποιήσουμε υψηλής απόδοσης υπολογισμούς σε έναν προσωπικό υπολογιστή. Οι πρώτες κάρτες γραφικών ήταν μη-προγραμματιζόμενες με ξεχωριστούς υπολογιστικούς πυρήνες και σχεδιάστηκαν για την επεξεργασία πολύπλοκων τρισδιάστατων γραφικών. Η επεξεργασία γινόταν με μία συγκεκριμένη διαδικασία όπου η ίδια εντολή εκτελείται παράλληλα πάνω σε διαφορετικά δεδομένα γραφικών. Στη συνέχεια σχεδιάστηκαν κάρτες γραφικών με αρκετά μεγάλο αριθμό υπολογιστικών πυρήνων που ενεργούσαν παράλληλα και ανεξάρτητα μεταξύ τους βελτιώνοντας συνεχώς τη ταχύτητα επεξεργασίας των γραφικών και την απόδοσή τους στην οθόνη. Η ροή επεξεργασίας των γραφικών δεν διαφέρει με την ροή δεδομένων σε ένα αλγόριθμο επαναλαμβανόμενων επαναλήψεων οπότε θα μπορούσε μια κάρτα γραφικών να χρησιμοποιηθεί σε υψηλής απόδοσης υπολογισμούς. Για να εφαρμοστεί σε ένα πρόβλημα έπρεπε το πρόβλημα να διαμορφωθεί σε πρόβλημα αναπαράστασης γραφικών κάτι που χρειαζόταν άριστη γνώση του τρόπου λειτουργίας της κάρτας γραφικών [21]. Τα τελευταία χρόνια αναπτύχθηκαν γλώσσες προγραμματισμού και προγραμματιστικά περιβάλλοντα πάνω σε ετερογενή συστήματα CPU-GPU όπου είναι πιο βατή η ανάπτυξη μιας τέτοιας εφαρμογής.

Στη παρούσα εργασία μέσω της γλώσσας προγραμματισμού Fortran και του προτύπου OpenACC [22] θα εκμεταλλευτούμε την κάρτα γραφικών του συστήματος ώστε να εκτελέσει τις παράλληλες διεργασίες του αριθμητικού σχήματος και να συρρικνώσει το υπολογιστικό κόστος.

Κεφάλαιο 2

Εξισώσεις ρηχών υδάτων στη μία χωρική διάσταση

Οι εξισώσεις ρηχών υδάτων αποτελούν ένα σύστημα μη γραμμικών υπερβολικών μερικών διαφορικών εξισώσεων που περιγράφουν τη μεταβολή στο χρόνο του βάθους του ρευστού και της οριζόντιας ορμής της ροής (σε μέσες τιμές). Παράγονται από τους νόμους διατήρησης της μάζας και της ορμής. Για να εξάγουμε τις εξισώσεις στην μία διάσταση θεωρούμε το ρευστό σε ένα κανάλι μοναδιαίου πλάτους και υποθέτουμε ότι η κατακόρυφη ταχύτητα του ρευστού είναι ασήμαντη και η οριζόντια ταχύτητα $u(x, t)$ είναι σταθερή σε κάθε διατομή του καναλιού (σχήμα 2).



Σχήμα 2.1: Ροή σε ελεύθερο σύνορο υπό την επίδραση της βαρύτητας

2.1 Διατήρηση μάζας

Θεωρούμε ότι το ρευστό είναι ασυμπίεστο, δηλαδή η πυκνότητά του, ρ , είναι σταθερή. Αντίθετα επιτρέπουμε το βάθος του νερού h να αυξομειώνεται και είναι μια άγνωστη ποσότητα που θέλουμε να καθορίσουμε. Στην περιοχή $[x_1, x_2]$ μπορούμε να καθορίσουμε ότι,

ρυθμός μεταβολής μάζας = καθαρό ποσό όγκου ροής που διέρχεται από την περιοχή x_1, x_2 .

Η συνολική μάζα ανάμεσα σε δύο σημεία x_1, x_2 του σχήματος (2.1.1) είναι :

$$\int_{x_1}^{x_2} \rho h(x, t) dx.$$

Άρα ο ρυθμός μεταβολής της μάζας στο χρόνο t δίνεται ως

$$\frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} \rho h(x, t) dx.$$

Ο όγκος της ροής (mass flux) βρίσκεται ολοκληρώνοντας την πυκνότητα της ορμής κατακόρυφα, δηλαδή

$$\int_B^{h+b} \rho u(x, t) dy = \rho u(x, t) \int_b^{h+b} dy = \rho u(x, t) h(x, t).$$

Συνεπώς, ο συνολικός όγκος ροής που διέρχεται από την περιοχή x_1 είναι $(\rho u h)|_{x_1}$ και από την περιοχή x_2 είναι $(\rho u h)|_{x_2}$. Επομένως η ολοκληρωτική μορφή του νόμου διατήρησης της μάζας θα είναι

$$\frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} h(x, t) dx = (uh)|_{x_1} - (uh)|_{x_2}. \quad (2.1)$$

Ολοκληρώνοντας την παραπάνω σχέση ως προς το χρόνο t , στο χρονικό διάστημα

$[t, t + \Delta t]$

$$\int_t^{t+\Delta t} \frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} h dx + (uh)|_{x_1}^{x_2} dt = 0$$

και θεωρώντας ότι οι συναρτήσεις $h(x, t)$ και $u(x, t)$ είναι παραγωγίσιμες βρίσκουμε

$$\int_t^{t+\Delta t} \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(uh)}{\partial x} dx dt = 0,$$

οπότε η διαφορική μορφή της διατήρησης της μάζας είναι

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(uh)}{\partial x} = 0. \quad (2.2)$$

2.2 Διατήρηση ορμής

Από τον δεύτερο νόμο του Newton προκύπτει η διατήρηση της ορμής, δηλαδή στην περιοχή $[x_1, x_2]$ πρέπει να ισχύει ότι

ρυθμός μεταβολής ορμής = εφορμόσιμη δύναμη,

στην κατεύθυνση x (εφόσον αναφερόμαστε στη μια διάσταση). Ο ρυθμός μεταβολής της ορμής είναι η ολική παράγωγος της ταχύτητας δηλαδή :

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} \int_{x_1}^{x_2} \int_h^{h+b} \rho u dy dx = \\ \frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} \rho h u dx + (\rho h u^2)|_{x_2} - (\rho h u^2)|_{x_1}. \end{aligned}$$

Επίσης η δύναμη που εφαρμόζεται στην κατεύθυνση x είναι το άθροισμα της δύναμης που δημιουργείτε λόγω της πίεσης που ασκείται από τα άκρα και της δύναμης της πίεσης από τον πυθμένα.

Η δύναμη της πίεσης από τα άκρα είναι:

$$g \left[\int_b^{h+b} \rho(y - h - b) dy \right]_{x_1}^{x_2} = \left[-\frac{1}{2} g \rho h^2 \right]_{x_1}^{x_2},$$

η δύναμη της πίεσης από τον πυθμένα είναι :

$$-g \int_{x_1}^{x_2} \rho h \frac{db}{dx} dx,$$

άρα η συνολική δύναμη που εφαρμόζεται στην κατεύθυνση του x είναι:

$$\left[-\frac{1}{2}g\rho h^2\right]_{x_1}^{x_2} - g \int_{x_1}^{x_2} \rho h \frac{db}{dx} dx,$$

όπου g είναι η επιτάχυνση της βαρύτητας. Συνεπώς, η ολοκληρωτική μορφή διατήρησης της ορμής έχει την μορφή:

$$\frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} hu \, dx + (hu^2)_{x_2} - (hu^2)_{x_1} = \left[-\frac{1}{2}gh^2\right]_{x_1}^{x_2} - g \int_{x_1}^{x_2} h \frac{db}{dx} dx. \quad (2.3)$$

Υποθέτοντας ότι οι μεταβλητές $h(x, t)$ και $u(x, t)$ είναι παραγωγίσιμες και ακολουθώντας την ίδια διαδικασία που εφαρμόστηκε για την διατήρηση της μάζας παίρνουμε την διαφορική μορφή της διατήρησης της ορμής,

$$\frac{\partial(hu)}{\partial t} + \frac{\partial(hu^2 + \frac{1}{2}gh^2)}{\partial x} = -ghb_x. \quad (2.4)$$

Συνολικά μπορούμε να γράψουμε

$$\frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} \mathbf{q}(x, t) \, dx + \mathbf{f}(\mathbf{q}(x_2, t)) - \mathbf{f}(\mathbf{q}(x_1, t)) = \int_{x_1}^{x_2} \mathbf{R} \, dx \quad (2.5)$$

για την ολοκληρωτική μορφή και

$$\mathbf{q}_t + \mathbf{f}(\mathbf{q})_x = \mathbf{R} \quad (2.6)$$

για την διαφορική, όπου

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} h \\ hu \end{bmatrix}, \mathbf{f} = \begin{bmatrix} hu \\ hu^2 + \frac{1}{2}gh^2 \end{bmatrix}, \mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0 \\ -ghb_x \end{bmatrix}.$$

Στην περίπτωση της ύπαρξης τριβής ο πηγαιός όρος διαφοροποιείται και παίρνει την μορφή

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0 \\ -ghb_x - ghS_f \end{bmatrix},$$

όπου S_f αναπαριστά την δύναμη της τριβής και μπορεί να υπολογιστεί χρησιμοποιώντας την σχέση

$$S_f = n_m^2 \frac{u|u|}{h^{4/3}},$$

όπου n_m είναι ο συντελεστής του Manning και λαμβάνει συνήθως εμπειρικές τιμές της τάξης 10^{-2} . Ο όρος τριβής είναι άκαμπτος όρος.

Το σύστημα των μερικών διαφορικών εξισώσεων είναι υπερβολικό εφόσον ο Ιακωβιανός πίνακας του συστήματος $\mathbf{f}'(\mathbf{q})$ είναι διαγωνιοποιήσιμος με πραγματικές ιδιοτιμές. Για τις εξισώσεις ρηχών υδάτων ο Ιακωβιανός πίνακας είναι

$$\mathbf{f}'(\mathbf{q}) = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{q}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -u^2 + gh & 2u \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

και έχει ιδιοτιμές $\lambda_1 = u - c$, $\lambda_2 = u + c$ οι οποίες είναι πραγματικές, με $c = \sqrt{gh}$ να είναι η σχετική ταχύτητα κύματος - ρευστού. Τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα είναι

$$\mathbf{r}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ u - c \end{bmatrix}, \quad \mathbf{r}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ u + c \end{bmatrix}. \quad (2.8)$$

Άρα το σύστημα των (2.2) (2.4) είναι υπερβολικό. Στην περίπτωση όμως της εμφάνισης στεγανού, η οποία μελετάται στην παράγραφο 2.4 η μια από τις δύο ιδιοτιμές (ανάλογα την πλευρά στην οποία εμφανίζεται το στεγανό) μηδενίζεται. Ως αποτέλεσμα αυτού είναι το σύστημα να χάνει την υπερβολικότητά του.

Παρατηρούμε ότι οι ιδιοτιμές λ_1, λ_2 μπορούν να λάβουν οποιοδήποτε πρόσημο, εξαρτώμενες από την ταχύτητα u σε σχέση με το c . Στην θεωρία ρηχών υδάτων ο αριθμός

$$Fr = \frac{|u|}{c}$$

ονομάζεται **αριθμός του Froude**. Όταν $Fr > 1$ η ροή ονομάζεται υπερκρίσιμη ενώ όταν $Fr < 1$ ονομάζεται υποκρίσιμη. Στην περίπτωση όπου η ροή είναι υποκρίσιμη, $Fr < 1 \Rightarrow |u| < c$, γνωρίζουμε ότι η ποσότητα c περιέχει την βαρυτική δύναμη και στην προκειμένη περίπτωση οι δυνάμεις βαρύτητας υπερिशύουν των δυνάμεων αδράνειας. Παρατηρώντας τις ιδιοτιμές $\lambda_1 = u - c$, $\lambda_2 = u + c$ βλέπουμε ότι $\lambda_1 < 0$ ενώ η δεύτερη ιδιοτιμή μπορεί να λάβει οποιοδήποτε πρόσημο. Άρα η φυσική πληροφορία διαδίδεται και προς τις δύο κατευθύνσεις. Στην υπερκρίσιμη ροή $Fr > 1 \Rightarrow |u| > c$, οι δυνάμεις αδράνειας υπερिशύουν αυτών της βαρύτητας, ενώ οι ιδιοτιμές έχουν πάντα το ίδιο πρόσημο, άρα η φυσική πληροφορία ροής διαδίδεται προς μια κατεύθυνση.

2.3 Πρόβλημα Riemann

Το βασικό πρόβλημα που χρησιμοποιείται στην κατασκευή αριθμητικών μεθόδων για συστήματα υπερβολικού τύπου είναι το πρόβλημα Riemann το οποίο προκύπτει θεωρώντας τον ομογενή νόμο διατήρησης με συγκεκριμένες αρχικές συνθήκες,

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_t + \mathbf{f}(\mathbf{q})_x &= 0, \\ \mathbf{q}(x, 0) &= \begin{cases} \mathbf{q}_l & \text{αν } x < 0 \\ \mathbf{q}_r & \text{αν } x > 0 \end{cases}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Εδώ θεωρούμε τον νόμο διατήρησης μιας διάστασης (2.6) χωρίς πηγαίο όρο, με αρχικές συνθήκες

$$\mathbf{q}_l = \begin{bmatrix} h_l \\ h_l u_l \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q}_r = \begin{bmatrix} h_r \\ h_r u_r \end{bmatrix}.$$

Υπάρχουν τέσσερις δυνατές λύσεις που μπορούν να προκύψουν κατά την επίλυση του προβλήματος Riemann, [2], [3]. Κάθε περίπτωση αποτελείται από δύο κύματα

- (1) κύμα αραίωσης - shock (κρουστικό κύμα),
- (2) shock - κύμα αραίωσης,
- (3) κύμα αραίωσης - κύμα αραίωσης,
- (4) shock - shock

Η λύση ενός υπερβολικού συστήματος m εξισώσεων αποτελείται από m κύματα τα οποία κινούνται με διαφορετικές ταχύτητες και παρατηρούμε επαλληλία αυτών. Στην μη γραμμική περίπτωση τα κύματα αλληλεπιδρούν μεταξύ τους και επίσης παραμορφώνονται ξεχωριστά, οδηγώντας έτσι σε προβλήματα τα οποία είναι πολύ δύσκολο ή δεν μπορούν να λυθούν αναλυτικά. Για τις εξισώσεις ρηχών υδάτων σε μια διάσταση, η λύση του προβλήματος Riemann αποτελείται από δύο κύματα (οποιοδήποτε συνδυασμό κύματων αραίωσης και κυμάτων τύπου shock. Τα κύματα αυτά διαδίδονται με ταχύτητα

λ_1 για το αριστερό και λ_2 για το δεξί τα οποία ονομάζονται 1-κύμα και 2-κύμα αντίστοιχα. Λύνοντας το παραπάνω πρόβλημα προκύπτουν δύο οικογένειες καμπυλών πάνω στις οποίες η λύση απλοποιείται και ισχύει ότι $dx/dt = \lambda_1$ για την πρώτη οικογένεια και $dx/dt = \lambda_2$ για την δεύτερη οικογένεια των χαρακτηριστικών καμπυλών [2].

2.4 Η συνθήκη Rankine-Hugoniot

Στην προηγούμενη ενότητα αναφέρθηκε ότι η ολοκληρωτική μορφή των νόμων διατήρησης (2.5) επιδέχεται ασυνέχειες στη λύση ή αλλιώς shocks. Για να εξάγουμε την διαφορική μορφή τους υποθέσαμε ομαλότητα της λύσης. Εφόσον οι μερικές διαφορικές εξισώσεις περιέχουν παραγώγους οι οποίες δεν ορίζονται σε μια ασυνέχεια, θα πρέπει η λύση κατά μήκος μίας ασυνέχειας να ικανοποιεί την πιο θεμελιώδη μορφή του νόμου διατήρησης, την ολοκληρωτική. Έστω μια ασυνέχεια η οποία διαδίδεται με ταχύτητα s και κινείται όπως στο σχήμα (2.3.1) όπου έχουμε εστιάσει σε μια μικρή περιοχή γύρο από την ασυνέχεια $[x_1, x_1 + \Delta x]$ και σε ένα μικρό χρονικό διάστημα $[t_1, t_1 + \Delta t]$ όπου η ταχύτητα διάδοσης της ασυνέχειας είναι ουσιαστικά σταθερή. Η περιοχή $[x_1, x_1 + \Delta x] \times [t_1, t_1 + \Delta t]$ χωρίζεται από το shock σε δύο περιοχές όπου σε κάθε μια η λύση q είναι σταθερή με τιμές q_l, q_r . Εφαρμόζοντας την (2.5) έχουμε :

$$\int_{x_1}^{x_1+\Delta x} q(x, t_1 + \Delta t) dx - \int_{x_1}^{x_1+\Delta x} q(x, t_1) dx = \int_{t_1}^{t_1+\Delta t} f(q(x_1, t)) dt - \int_{t_1}^{t_1+\Delta t} f(q(x_1 + \Delta x, t)) dt$$

και εφόσον η q είναι ουσιαστικά σταθερή κατά μήκος κάθε ακμής η παραπάνω εξίσωση παίρνει την μορφή

$$\Delta x q_r - \Delta x q_l = \Delta t f(q_l) - \Delta t f(q_r) + O(\Delta t^2) \quad (2.10)$$

Αν η ταχύτητα του shock είναι s , τότε $\Delta x = -s\Delta t$ για ($s < 0$). Χρησιμοποιώντας αυτή τη σχέση διαιρώντας με $-\Delta t$ και παίρνοντας $\Delta t \rightarrow 0$ λαμβάνουμε τη συνθήκη

$$s(q_r - q_l) = f(q_r) - f(q_l) \quad (2.11)$$

η οποία καλείται συνθήκη Rankine - Hugoniot. Η λύση η οποία ικανοποιεί την ολοκληρωτική μορφή, άρα και την διαφορική όταν είναι ομαλή και ικανοποιεί την συνθήκη Rankine - Hugoniot κατά μήκος της ασυνέχειας ονομάζεται ασθενής λύση του νόμου διατήρησης όπως ορίστηκε και στο κεφάλαιο 2.1. Επιτρέποντας ασυνεχείς λύσεις οι οποίες ικανοποιούν την (2.5), η μοναδικότητα της λύσης δεν εξασφαλίζεται πάντα και συχνά άλλες συνθήκες πρέπει να προστεθούν. Αυτές βασίζονται κυρίως σε φυσικές παρατηρήσεις και παίρνουν την μορφή εντροπικής συνάρτησης.

2.5 Επέκταση στις 2 χωρικές διαστάσεις

Στις δύο διαστάσεις η διαφορική μορφή των εξισώσεων ρηχών υδάτων με πηγαίο όρο την τοπογραφία και την τριβή έχουν την εξής μορφή

$$\mathbf{q}_t + \mathbf{f}(\mathbf{q})_x + \mathbf{g}(\mathbf{q})_y = \mathbf{R}(\mathbf{q}, x, y) + \mathbf{S}(\mathbf{q}, x, y) \quad (2.12)$$

όπου

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} h \\ hu \\ hv \end{bmatrix}, \mathbf{f}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} hu \\ hu^2 + \frac{1}{2}gh^2 \\ huv \end{bmatrix}, \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} hv \\ huv \\ hv^2 + \frac{1}{2}gh^2 \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

με το διάνυσμα $[u, v]^T$ να είναι το πεδίο ταχυτήτων. Για τον πηγαίο όρο ισχύει $\mathbf{R} = \mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_2$ με

$$\mathbf{R}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -ghb_x(x, y) \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{R}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -ghb_y(x, y) \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

και για την τριβή

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 0 \\ -ghS_f^x \\ -ghS_f^y \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

με S_f^x αναπαριστά την δύναμη της τριβής ως προς την x κατεύθυνση και S_f^y προς την y κατεύθυνση και υπολογίζονται από τις σχέσεις

$$S_f^x = n_m^2 u \sqrt{u^2 + v^2} h^{-\frac{4}{3}} \quad \text{και} \quad S_f^y = n_m^2 v \sqrt{u^2 + v^2} h^{-\frac{4}{3}} \quad (2.16)$$

όπου n_m είναι ο συντελεστής του Manning.

Στις δύο διαστάσεις θα έχουμε δύο Ιακωβιανούς πίνακες οι οποίοι θα έχουν την μορφή

$$\mathbf{f}'(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ c^2 - u^2 & 2u & 0 \\ -uv & u & v \end{bmatrix}, \mathbf{g}'(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -uv & v & u \\ c^2 - v^2 & 0 & 2v \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

Οι ιδιοτιμές των δύο πινάκων δίνονται αντίστοιχα από

$$\lambda_1^F = u - c, \lambda_2^F = u, \lambda_3^F = u + c \quad (2.18)$$

και

$$\lambda_1^G = v - c, \lambda_2^G = v, \lambda_3^G = v + c \quad (2.19)$$

Τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα \mathbf{A} είναι

$$\mathbf{r}_1^F = \begin{bmatrix} 1 \\ u - c \\ v \end{bmatrix}, \mathbf{r}_2^F = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ c \end{bmatrix}, \mathbf{r}_3^F = \begin{bmatrix} 1 \\ u + c \\ v \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

και του πίνακα \mathbf{B} είναι

$$\mathbf{r}_1^G = \begin{bmatrix} 1 \\ u \\ v - c \end{bmatrix}, \mathbf{r}_2^G = \begin{bmatrix} 0 \\ -c \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{r}_3^G = \begin{bmatrix} 1 \\ u \\ v + c \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

Κεφάλαιο 3

Αριθμητικό σχήμα

3.1 Μέθοδος πεπερασμένων όγκων

Στη παρούσα ενότητα θα αναλύσουμε το αριθμητικό σχήμα που χρησιμοποιήθηκε για την επίλυση των εξισώσεων ρηχών υδάτων στη μία διάσταση. Πρέπει να γίνει κατάλληλη επιλογή μεθόδους καθώς η χρήση μιας τυχαίας μπορεί να εμφανίσει ταλαντώσεις κοντά στις ασυνέχειες ή στη διάδοσή τους με λανθασμένη ταχύτητα. Οπότε θέλουμε μια μέθοδο που να υπολογίζει σωστά τη θέση και την ταχύτητα των ασυνεχειών (shock capturing). Η μέθοδος που χρησιμοποιήθηκε στην παρούσα εργασία είναι μέθοδος πεπερασμένων όγκων, με την αριθμητική λύση να προσεγγίζει την μέση τιμή της ακριβούς λύσης σε κάθε διακριτό κελί, η οποία χειρίζεται κατάλληλα την εμφάνιση ασυνεχειών. Ακόμα και αν η μέθοδος υπολογίζει σωστά την θέση και την ταχύτητα των ασυνεχειών υπάρχει περίπτωση να συγκλίνει σε μια εντελώς λάθος λύση. Γι' αυτό θα θέσουμε μια απλή συνθήκη ώστε να μην συγκλίνει σε μια λανθασμένη λύση. Η συνθήκη είναι η μέθοδος μας να είναι συντηρητική.

$$\frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} \mathbf{q}(x, t) dx = -[\mathbf{f}(\mathbf{q}(x_2, t)) - \mathbf{f}(\mathbf{q}(x_1, t))].$$

Ορίζοντας μια διαμέριση στο χώρο $\Delta = \{x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n\}$ με χωρικό βήμα Δx , δηλαδή $x_{i+1} = x_i + \Delta x$, εφαρμόζοντας την παραπάνω σχέση στο υπολογιστικό κελί $C_i = [x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}]$, με $x_{i\pm\frac{1}{2}} = x_i \pm \frac{1}{2}\Delta x$ και ολοκληρώνοντας στο χρονικό διάστημα $\tau^n =$

$[t^n, t^{n+1}]$ με χρονικό βήμα $\Delta t^n = t^{n+1} - t^n$ παίρνουμε

$$\int_{C_i} \mathbf{q}(x, t^{n+1}) dx = \int_{C_i} \mathbf{q}(x, t^n) dx - \int_{\tau^n} [\mathbf{f}(\mathbf{q}(x_{i+\frac{1}{2}}, t)) - \mathbf{f}(\mathbf{q}(x_{i-\frac{1}{2}}, t))] dt,$$

το οποίο γράφεται

$$\mathbf{Q}_i^{n+1} = \mathbf{Q}_i^n - \frac{\Delta t^n}{\Delta x} [\mathbf{F}_{i+\frac{1}{2}}^n - \mathbf{F}_{i-\frac{1}{2}}^n], \quad (3.1)$$

όπου

$$\mathbf{Q}_i^n = \frac{1}{\Delta x} \int_{C_i} \mathbf{q}(x, t^n) dx \quad (3.2)$$

είναι ο μέσος όρος της λύσης σε κάθε χωρικό κελί τη χρονική στιγμή t^n και

$$\mathbf{F}_{i\pm\frac{1}{2}}^n = \frac{1}{\Delta t^n} \int_{\tau^n} \mathbf{f}(\mathbf{q}(x_{i\pm\frac{1}{2}})) dt \quad (3.3)$$

είναι ο χρονικός μέσος όρος της ροής στα σύνορα του κελιού στο χρονικό διάστημα τ^n . Παρατηρώντας την σχέση (3.1) συμπεραίνουμε ότι για τον υπολογισμό της τιμής \mathbf{Q}_i^{n+1} χρησιμοποιούνται μόνο τιμές του προηγούμενου χρονικού βήματος, οπότε είναι μια άμεση μέθοδος. Παρατηρούμε ότι αθροίζοντας τη λύση σε όλο το διάστημα υπολογισμού $[\alpha, \beta]$, η λύση αλλάζει μόνο λόγω της διαφοράς της ροής στα άκρα του διαστήματος (σύνορο).

$$\Delta x \sum_{i=1}^N \mathbf{Q}_i^{n+1} = \Delta x \sum_{i=1}^N \mathbf{Q}_i^n + \frac{\Delta t^n}{\Delta x} (\mathbf{F}_{N+1/2}^n - \mathbf{F}_{N-1/2}^n).$$

Οι παραπάνω μέθοδοι ονομάζονται συντηρητικές και συγκλίνουν σωστά στην ασθενή λύση, ενώ μια μέθοδος η οποία εξάγεται από την διαφορική μορφή των νόμων διατήρησης συχνά αποτυγχάνει στην σωστή σύγκλιση [2].

3.2 Μέθοδοι τύπου Godunov

Χρησιμοποιώντας μια μέθοδο της μορφής (3.1) απαιτείται μια κατάλληλα επιλεγμένη αριθμητική ροή (3.3). Αναφέρεται εδώ η μέθοδος του Godunov [4], που παράγει μια

κλάση μεθόδων που αντιμετωπίζει επιτυχώς τις αριθμητικές δυσκολίες των υπερβολικών νόμων διατήρησης. Οι μέθοδοι τύπου Godunov είναι τύπου upwind μέθοδοι οι οποίες λύνουν ένα πρόβλημα Riemann

$$\mathbf{q}_t + \mathbf{f}'(\mathbf{q})\mathbf{q}_x = 0$$

$$\mathbf{q}(x, 0) = \begin{cases} \mathbf{q}_l & , x < 0 \\ \mathbf{q}_r & , x > 0 \end{cases} \quad (3.4)$$

σε κάθε άκρο των χωρικών κελιών $x_{i\pm\frac{1}{2}}$ για κάθε χρονικό βήμα. Υποθέτοντας ότι η λύση μας είναι κατά τμήματα σταθερή, έχοντας την τιμή \mathbf{Q}_i σε κάθε υπολογιστικό κελί, βλέπουμε τη σχέση με το πρόβλημα Riemann. Στο σημείο $x_{i-\frac{1}{2}}$ υπάρχει ασυνέχεια με $\mathbf{q}_l = \mathbf{Q}_{i-1}$ και $\mathbf{q}_r = \mathbf{Q}_i$. Στην μέθοδο του Godunov οι αριθμητικές ροές που χρησιμοποιούνται στο σχήμα (3.1) βρίσκονται αποτιμώντας την πραγματική συνάρτηση ροής στην λύση του προβλήματος Riemann (2.9) στο $x_{i-\frac{1}{2}}$ με αρχικές συνθήκες

$$\mathbf{q}(x, t^n) = \begin{cases} \mathbf{Q}_{i-1}^n & x < x_{i-\frac{1}{2}} \\ \mathbf{Q}_i^n & x > x_{i-\frac{1}{2}} \end{cases} . \quad (3.5)$$

Οι λύσεις που προκύπτουν από ένα πρόβλημα Riemann για τις εξισώσεις ρηχών υδάτων είναι είτε shocks, είτε κύματα αραιώσης (rarefactions), είτε και τα δύο, και η μορφή της λύσης εξαρτάται από τα αρχικά δεδομένα q_l, q_r . Στο τέλος κάθε χρονικού βήματος τα δεδομένα συντίθενται και η διαδικασία επαναλαμβάνεται.

3.3 Ο προσεγγιστικός επιλυτής Riemann του Roe

Από την μέθοδο του Godunov απαιτείται η ακριβής επίλυση ενός Riemann μεμονωμένα σε κάθε χωρικό κελί προβλήματος, το οποίο έχει μεγάλο υπολογιστικό κόστος σε μη γραμμικά συστήματα υπερβολικών διαφορικών εξισώσεων. Για να υπολογίσουμε την αριθμητική ροή στο σημείο $x_{i-1/2}$ χρησιμοποιείται μόνο η λύση του σημείου $x_{i-1/2}$, επομένως είναι περιττό να υπολογίσουμε την ολική λύση του προβλήματος Riemann. Συνήθως είναι πιο αποτελεσματικό να χρησιμοποιήσουμε μια προσεγγιστική επίλυση

του προβλήματος Riemann για την εύρεση της αριθμητικής ροής $\mathbf{F}_{i-1/2}$. Στη παρούσα διατριβή χρησιμοποιήθηκε ο επιλύτης του Roe [5]. Ο επιλύτης του Roe για να υπολογίσει την τιμή της $\mathbf{q}(x, t)$ χρησιμοποιήσει ένα γραμμικοποιημένο σύστημα νόμων διατήρησης σταθερών συντελεστών. Αυτό το πετυχαίνει αντικαθιστώντας τον μη γραμμικό Ιακωβιανό πίνακα $\mathbf{f}'(\mathbf{q})$ με ένα σταθερό, διαγωνιοποιήσιμο $\mathbf{f}'(\mathbf{q}) = \hat{\mathbf{A}}$, όπου $\mathbf{f}'(\mathbf{q}) = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{q}}$. Ο πίνακας $\hat{\mathbf{A}}$ ονομάζεται πίνακας του Roe ,ο οποίος είναι ένα τροποποιημένο σύστημα νόμων διατήρησης, και επιλέγεται να ικανοποιεί τους παρακάτω περιορισμούς.

$$[1] \quad \hat{\mathbf{A}}_{i-1/2}(\mathbf{Q}_i - \mathbf{Q}_{i-1}) = \mathbf{f}(\mathbf{Q}_i) - \mathbf{f}(\mathbf{Q}_{i-1}),$$

$$[2] \quad \hat{\mathbf{A}}_{i-1/2} \text{ είναι διαγωνιοποιήσιμος με πραγματικές ιδιοτιμές,}$$

$$[3] \quad \hat{\mathbf{A}}_{i-1/2} \rightarrow \mathbf{f}'(\mathbf{q}) \text{ ομοιόμορφα καθώς } \mathbf{Q}_{i-1}, \mathbf{Q}_i \rightarrow \mathbf{q},$$

για $\hat{\mathbf{A}}_{i-1/2} = \hat{\mathbf{A}}(\mathbf{Q}_{i-1}, \mathbf{Q}_i)$.

Με αυτούς τους περιορισμούς η μέθοδος ικανοποιεί όλες τις απαιτήσεις που προαναφέραμε. Αν ανάμεσα τα $\mathbf{Q}_i, \mathbf{Q}_{i-1}$ συνδέονται με ένα shock τότε από τον περιορισμό [1] έχουμε ότι

$$\hat{\mathbf{A}}_{i-1/2}(\mathbf{q}_r - \mathbf{q}_l) = \mathbf{f}(\mathbf{q}_r) - \mathbf{f}(\mathbf{q}_l)$$

τώρα αφού ικανοποιείται η συνθήκη Rankine-Hugoniot ισχύει ότι

$$\mathbf{f}(\mathbf{q}_r) - \mathbf{f}(\mathbf{q}_l) = s(\mathbf{q}_r - \mathbf{q}_l)$$

και καταλήγουμε στην σχέση

$$\hat{\mathbf{A}}_{i-1/2}(\mathbf{q}_r - \mathbf{q}_l) = \mathbf{f}(\mathbf{q}_r) - \mathbf{f}(\mathbf{q}_l) = s(\mathbf{q}_r - \mathbf{q}_l),$$

δηλαδή πρέπει $\mathbf{q}_r - \mathbf{q}_l$ να είναι ιδιοδιάνυσμα του $\hat{\mathbf{A}}$ με ιδιοτιμή s . Οπότε θα πάρουμε σαν προσεγγιστική λύση μια ασυνέχεια η οποία διαδίδεται με ταχύτητα s . Με τον περιορισμό [2] αφού ο πίνακας \mathbf{A} είναι διαγωνιοποιήσιμος γράφεται στη εξής μορφή.

$$\mathbf{A} = \mathbf{X}\mathbf{\Lambda}\mathbf{X}^{-1},$$

όπου $\mathbf{\Lambda} = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_m)$ ο πίνακας των ιδιοτιμών και $\mathbf{X} = [\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_m]$ ο πίνακας των ιδιοδιανυσμάτων. Για να επιλυθεί ένα γραμμικό πρόβλημα, αρχικά χωρίς τον πηγαίο όρο ($\mathbf{R} = 0$), αρκεί να επιλυθεί για τις χαρακτηριστικές μεταβλητές, δηλαδή θέτουμε $\mathbf{w} = \mathbf{X}^{-1}\mathbf{q}$ οπότε

$$\begin{aligned}\mathbf{q}_t + \mathbf{A}\mathbf{q}_x &= 0 \Rightarrow \\ \mathbf{X}^{-1}\mathbf{q}_t + \mathbf{\Lambda}\mathbf{X}^{-1}\mathbf{q}_x &= 0 \Rightarrow \\ \mathbf{w}_t + \mathbf{\Lambda}\mathbf{w}_x &= 0\end{aligned}\tag{3.6}$$

όπου \mathbf{w} είναι το διάνυσμα των λεγόμενων χαρακτηριστικών μεταβλητών. Εφόσον ο $\mathbf{\Lambda}$ είναι διαγώνιος η (3.6) είναι ένα σύστημα m βαθμωτών εξισώσεων μεταφοράς,

$$(w_p)_t + \lambda_p(w_p)_x = 0, \quad p = 1, \dots, m\tag{3.7}$$

το οποίο σύστημα είναι επιλύσιμο. Άρα ο περιορισμός [2] μας εγγυάται ότι το πρόβλημα $\mathbf{q}_t + \hat{\mathbf{A}}\mathbf{q}_x = 0$ είναι επιλύσιμο και υπερβολικό. Τέλος ο περιορισμός [3] εγγυάται τη συνέπεια, δηλαδή ότι η μέθοδος δίνει τη σωστή λύση σε ομαλές περιοχές.

Για τις εξισώσεις ρηχών υδάτων μιας διάστασης ο πίνακας $\hat{\mathbf{A}}$ μπορεί να υπολογιστεί [2],[3] και είναι απλά ο Ιακωβιανός πίνακας (2.7) αποτιμημένος στις μέσες τιμές

$$\hat{h}_{i-1/2} = \frac{h_i + h_{i-1}}{2}, \quad \hat{u}_{i-1/2} = \frac{u_{i-1}\sqrt{gh_{i-1}} + u_i\sqrt{gh_i}}{\sqrt{gh_{i-1}} + \sqrt{gh_i}}.\tag{3.8}$$

Οι προσεγγιστικές ιδιοτιμές είναι

$$(\hat{\lambda}_1)_{i-1/2} = \hat{u}_{i-1/2} - \sqrt{g\hat{h}_{i-1/2}}, \quad (\hat{\lambda}_2)_{i-1/2} = \hat{u}_{i-1/2} + \sqrt{g\hat{h}_{i-1/2}},\tag{3.9}$$

με τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα

$$\hat{\mathbf{r}}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ \hat{u} - \hat{c} \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{r}}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ \hat{u} + \hat{c} \end{bmatrix},\tag{3.10}$$

όπου $\hat{c} = \sqrt{g\frac{h_i+h_{i-1}}{2}}$. Τις αριθμητικές ροές τις υπολογίζουμε από τους τύπους

$$\mathbf{F}_{i-1/2}^n = \hat{\mathbf{A}}\mathbf{Q}_i^n - \hat{\mathbf{A}}^+(\mathbf{Q}_i^n - \mathbf{Q}_{i-1}^n),\tag{3.11}$$

$$\mathbf{F}_{i+1/2}^n = \hat{\mathbf{A}}\mathbf{Q}_i^n + \hat{\mathbf{A}}^-(\mathbf{Q}_{i+1}^n - \mathbf{Q}_i^n),\tag{3.12}$$

ή αλλιώς μπορούμε να γράψουμε

$$\mathbf{F}_{i-1/2}^n = \frac{1}{2}[\mathbf{f}(\mathbf{Q}_{i-1}) + \mathbf{f}(\mathbf{Q}_i)] - \frac{1}{2}|\hat{\mathbf{A}}|(\mathbf{Q}_i - \mathbf{Q}_{i-1}), \quad (3.13)$$

με $|\hat{\mathbf{A}}| = \hat{\mathbf{A}}^+ - \hat{\mathbf{A}}^-$, όπου $\hat{\mathbf{A}}^+ = \hat{\mathbf{X}} \text{diag}(\hat{\lambda}_p^+) \hat{\mathbf{X}}^{-1}$ και $\hat{\mathbf{A}}^- = \hat{\mathbf{X}} \text{diag}(\hat{\lambda}_p^-) \hat{\mathbf{X}}^{-1}$ με $\hat{\mathbf{X}} = [\hat{\mathbf{r}}_1, \dots, \hat{\mathbf{r}}_p]$.

3.3.1 F-wave παρουσίαση της μεθόδου

Θα γράψουμε την παραπάνω μέθοδο με διαφορετικό τρόπο ο οποίος θα μας βοηθήσει να βρούμε τις εξισώσεις για τους πηγαίους όρους που θα αναφέρουμε στο επόμενο κεφάλαιο. Μια ασυνέχεια γράφεται ως

$$\mathbf{Q}_i - \mathbf{Q}_{i-1} = \sum_{p=1}^m (\mathbf{w}_p)_{i-1/2}$$

είτε βρισκόμαστε σε ένα γραμμικό πρόβλημα είτε σε ένα μη γραμμικό το οποίο μετατρέψαμε, με τη βοήθεια του πίνακα του Roe, σε τοπικά γραμμικό. Από την παραπάνω σχέση αν εκφράσουμε το $\Delta \mathbf{Q}_{i-1/2} = \mathbf{Q}_i - \mathbf{Q}_{i-1}$ σε γραμμικό συνδιασμό των ιδιοδιανυσμάτων του πίνακα τότε θα πάρουμε ότι $(\mathbf{w}_p)_{i-1/2} = (\hat{\alpha}_p)_{i-1/2} (\hat{\mathbf{r}}_p)_{i-1/2}$ με τα $(\hat{\alpha}_p)_{i-1/2}$ να προκύπτουν από τις λύσεις του συστήματος $\hat{\alpha}_{i-1/2} = \hat{\mathbf{X}}^{-1} \Delta \mathbf{Q}_{i-1/2}$. Το ίδιο μπορούμε να κάνουμε με την ασυνέχεια $\mathbf{f}(\mathbf{Q})$ και να την γράψουμε ως εξής

$$\mathbf{f}(\mathbf{Q}_i) - \mathbf{f}(\mathbf{Q}_{i-1}) = \sum_{p=1}^m (\beta_p)_{i-1/2} (\mathbf{r}_p)_{i-1/2} \equiv \sum_{p=1}^m (\mathbf{z}_p)_{i-1/2}$$

Από τον περιορισμό [1] έχουμε ότι

$$\mathbf{f}(\mathbf{Q}_i) - \mathbf{f}(\mathbf{Q}_{i-1}) = \hat{\mathbf{A}}_{i-1/2} (\mathbf{Q}_i - \mathbf{Q}_{i-1}) = \sum_{p=1}^m (\hat{\lambda}_p \mathbf{w}_p)_{i-1/2} = \sum_{p=1}^m (\mathbf{z}_p)_{i-1/2}.$$

οπότε βγάζουμε το συμπέρασμα ότι $(\mathbf{z}_p)_{i-1/2} = (\hat{\lambda}_p \mathbf{w}_p)_{i-1/2}$. Τα διανύσματα \mathbf{z}_p ονομάζονται f -κύματα. Επίσης για τους γραμμικοποιημένους επιλυτές Riemann θα ισχύει ότι :

$$(\mathbf{z}_p)_{i-1/2} = \text{sgn}((\hat{\lambda}_p)_{i-1/2}) |(\hat{\lambda}_p)_{i-1/2}| (\mathbf{w}_p)_{i-1/2}$$

και από την (3.18) θα ισχύει ότι

$$\begin{aligned}
\mathbf{F}_{i-1/2}^n &= \mathbf{f}(\mathbf{Q}_i) - \sum_{p=1}^m (\hat{\alpha}_p \hat{\lambda}_p^+ \hat{\mathbf{r}}_p)_{i-1/2} \\
&= \mathbf{f}(\mathbf{Q}_i) - \sum_{p=1}^m \frac{1}{2} \left(1 + \text{sgn}((\hat{\lambda}_p)_{i-1/2}) \right) |(\hat{\lambda}_p)_{i-1/2}| (\mathbf{w}_p)_{i-1/2} \\
&= \mathbf{f}(\mathbf{Q}_i) - \sum_{p=1}^m \left(1 + \text{sgn}((\hat{\lambda}_p)_{i-1/2}) \right) (\mathbf{z}_p)_{i-1/2},
\end{aligned} \tag{3.14}$$

ή αλλιώς από την (3.20) μπορούμε να γράψουμε

$$\begin{aligned}
\mathbf{F}_{i-1/2}^n &= \frac{1}{2} (\mathbf{F}_{i-1}^n + \mathbf{F}_i^n) - \frac{1}{2} \sum_{p=1}^m \left[|\hat{\lambda}_p| \hat{\alpha}_p \hat{\mathbf{r}}_p \right]_{i-1/2} \\
&= \frac{1}{2} (\mathbf{F}_{i-1}^n + \mathbf{F}_i^n) - \frac{1}{2} \sum_{p=1}^m \text{sgn}((\hat{\lambda}_p)_{i-1/2}) (\mathbf{z}_p)_{i-1/2}.
\end{aligned} \tag{3.15}$$

3.3.2 Πηγαίοι όροι

Στα περισσότερα πραγματικά προβλήματα υπάρχει και η τοπογραφία του βυθού, η οποία ουσιαστικά προσθέτει πηγαίους όρους στις εξισώσεις των ρηχών υδάτων. δηλαδή το ομογενές γραμμικό πρόβλημα που είχαμε $\mathbf{q}_t + \mathbf{f}(\mathbf{q})_x = 0$ μετατρέπεται στο εξής μη-ομογενές γραμμικό πρόβλημα

$$\mathbf{q}_t + \mathbf{f}(\mathbf{q})_x = \mathbf{R}(\mathbf{q}).$$

Όπως με τις αριθμητικές ροές πρέπει να είμαστε προσεκτικοί πως θα διακριτοποιήσουμε τον πηγαίο όρο καθώς μπορεί να εμφανιστούν αριθμητικών ταλαντώσεων. Η διακριτοποίηση που εφαρμόσουμε είναι μια Upwind προσέγγιση δηλαδή

$$\mathbf{R}_i^n \approx \frac{\Delta x}{2} \left(\mathbf{R}_{i+1/2}^- + \mathbf{R}_{i-1/2}^+ \right).$$

Για να υπολογίσουμε τον αριθμητικό πηγαίο όρο προβάλλουμε τον πηγαίο όρο στα ιδιοδιανύσματα του πίνακα του Roe [1] και λαμβάνουμε τις upwind προσεγγίσεις με

$$\mathbf{R}_i = \mathbf{R}_{i-1/2}^+ + \mathbf{R}_{i+1/2}^- \text{ όπου}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{i-1/2}^+ &= \hat{\mathbf{A}}^+ \hat{\mathbf{A}}^{-1} \mathbf{R}_{i-1/2} \\ &= \frac{1}{2}(\hat{\mathbf{A}} + |\hat{\mathbf{A}}|)\hat{\mathbf{A}}^{-1} \mathbf{R}_{i-1/2} \\ &= \frac{1}{2}(\mathbf{I} + |\hat{\mathbf{A}}|\hat{\mathbf{A}}^{-1}) \mathbf{R}_{i-1/2} \\ &= \frac{1}{2}(\hat{\mathbf{X}}(\mathbf{I} + \hat{\mathbf{A}}^{-1}|\hat{\mathbf{A}}|)\hat{\mathbf{X}}^{-1}) \mathbf{R}_{i-1/2} \end{aligned} \quad (3.16)$$

και

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{i+1/2}^- &= \frac{1}{2}(\mathbf{I} - |\hat{\mathbf{A}}|\hat{\mathbf{A}}^{-1}) \mathbf{R}_{i+1/2} \\ &= \frac{1}{2}(\hat{\mathbf{X}}(\mathbf{I} - \hat{\mathbf{A}}^{-1}|\hat{\mathbf{A}}|)\hat{\mathbf{X}}^{-1}) \mathbf{R}_{i+1/2} \end{aligned} \quad (3.17)$$

Αν εφαρμόσουμε τον f -κύματα τρόπο γραφής που είδαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο και προσθέσουμε τον πηγαίο όρο παίρνουμε την μορφή

$$\mathbf{f}(\mathbf{Q}_i) - \mathbf{f}(\mathbf{Q}_{i-1}) - \Delta x \mathbf{R}_{i-1/2} = \sum_{p=1}^m (\mathbf{z}_p)_{i-1/2} \quad (3.18)$$

και θεωρούμε ότι $\mathbf{R}_{i-1/2}$ είναι μια διακριτοποίηση του πηγαίου όρου. Εφόσον ο πίνακας $\mathbf{A}_{i-1/2}$ ικανοποιεί την συνθήκη του Roe γνωρίζουμε ότι $(\mathbf{z}_p)_{i-1/2} = (\hat{\lambda}_p \mathbf{W}_p)_{i-1/2} = (\beta_p \mathbf{r}_p)_{i-1/2}$. Η (3.16) γράφεται

$$\mathbf{R}_{i-1/2} = \frac{1}{\Delta x} \sum_{p=1}^m \hat{\beta}_p \mathbf{r}_{p,i-1/2}, \quad (3.19)$$

και βρίσκουμε τα βάρη β λύνοντας το σύστημα $\hat{\boldsymbol{\beta}} = \hat{\mathbf{X}}^{-1} \mathbf{R}$, οπότε λαμβάνουμε

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\hat{c}\Delta b}{2}, \quad \hat{\beta}_2 = -\frac{\hat{c}\Delta b}{2}. \quad (3.20)$$

Για τις εξισώσεις ρηχών υδάτων προκύπτει ότι

$$\mathbf{R}_{i-1/2} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2}g(h_i + h_{i-1})(b_i - b_{i-1}) \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

Με αντικατάσταση του (3.21) στην (3.16) και (3.17) και εκτελώντας τις πράξεις προκύπτει ότι

$$\mathbf{R}_{i-1/2}^+ = \frac{1}{2} \sum_{p=1}^m \left[\hat{\beta}_p \hat{r}_p (1 + \text{sgn}(\hat{\lambda}_p)) \right]_{i-1/2}, \quad (3.22)$$

$$\mathbf{R}_{i+1/2}^- = \frac{1}{2} \sum_{p=1}^m \left[\hat{\beta}_p \hat{r}_p (1 - \text{sgn}(\hat{\lambda}_p)) \right]_{i+1/2}. \quad (3.23)$$

Στα φυσικά προβλήματα όμως υπάρχει και η τριβή, την οποία θα συμπεριλάβουμε στο αριθμητικό μας σχήμα απλά προσθέτοντας άλλον ένα πηγαίο όρο μαζί με τον όρο της τοπογραφίας.

$$S = \begin{bmatrix} 0 \\ -ghS_f \end{bmatrix}$$

τον οποίο και διακριτοποιούμε σημειακά, με έμμεσο ή ημί-άμεσο τρόπο, για να αποφευχθούν οι ταλαντώσεις όταν ο συντελεστής τριβής είναι μεγάλος, λόγω της έλλειψης χωρικών παραγώγων στον όρο. Άρα μπορούμε να γράψουμε το σχήμα ως εξής.

$$\mathbf{Q}_i^{n+1} = \frac{\mathbf{Q}_i^n - (\Delta t^n / \Delta x)(\mathbf{F}_{i+1/2}^n - \mathbf{F}_{i-1/2}^n) - (\Delta t^n / \Delta x)\mathbf{R}_i - (\Delta t^n / \Delta x)\mathbf{S}_i}{1 - (1 - \theta)(\Delta t / \Delta x)\mathbf{S}_i / \mathbf{Q}_i^n} \quad (3.24)$$

όπου το θ είναι ο βαθμός αμεσότητας για τον όρο της τριβής: $\theta = 1$ αντιστοιχεί σε μια εντελώς έμμεση χρήση ενώ $\theta = 0$ σε μια εντελώς άμεση [6].

3.3.3 CFL συνθήκη

Η CFL συνθήκη είναι μια αναγκαία συνθήκη ευστάθειας η οποία πρέπει να ικανοποιείται από όλες τις μεθόδους πεπερασμένων όγκων ή πεπερασμένων διαφορών έτσι ώστε να είναι ευσταθείς και να συγκλίνουν στην ακριβή λύση καθώς πυκνώνουμε το πλέγμα. Σε αυτές τις μεθόδους υπάρχει πεδίο εξάρτησης, δηλαδή για να υπολογίσουμε την λύση σε μια θέση (X, T) εξαρτάται από κάποιες άλλες αρχικές τιμές. Το σύνολο αυτών των αρχικών τιμών που επηρεάζουν την τιμή της λύσης μας στο σημείο (X, T) είναι το πεδίο εξάρτησης του σημείου (X, T) . Η μέθοδος που χρησιμοποιούμε για τον υπολογισμό του \mathbf{Q}_i^{n+1} χρειάζονται τα σημεία $\mathbf{Q}_{i-1}^n, \mathbf{Q}_i^n, \mathbf{Q}_{i+1}^n$.

Για την CFL συνθήκη ισχύει ότι μια αριθμητική μέθοδος συγκλίνει μόνο εάν το αριθμητικό πεδίο εξάρτησης περιέχει το πραγματικό πεδίο εξάρτησης της μερικής διαφορικής εξίσωσης, τουλάχιστον στο όριο καθώς Δt και Δx τείνουν στο μηδέν.

Όποτε προκύπτει η σχέση

$$\nu = \frac{\Delta t^n}{\Delta x} \max |\lambda_p^n| \leq 1 \quad (3.25)$$

Ο αριθμός ν ονομάζεται αριθμός CFL ή αριθμός Courant. Συνεπώς, δοσμένου του αριθμού Courant μπορούμε να καθορίσουμε το χρονικό βήμα Δt^n από τη σχέση (3.25). Πρέπει να τονιστεί ότι η συνθήκη CFL είναι αναγκαία συνθήκη για ευστάθεια (και άρα για σύγκλιση) αλλά δεν είναι ικανή.

Στα [2],[7] μπορούμε να βρούμε ανάλυση για την ευστάθεια και την συνέπεια μιας μεθόδου πεπερασμένων όγκων.

3.3.4 Εντροπική διόρθωση (Entropy Fix)

Η γενική μορφή της αριθμητικής μεθόδου μας επιτρέπει να εμφανιστούν ασυνέχειες στη λύση μας, αλλά δεν μας εξασφαλίζει ότι η λύση που θα πάρουμε θα είναι φυσικά σωστή(εντροπική), καθώς μπορούμε να έχουμε πολλές διαφορετικές ασθενής λύσεις. Άρα κάποια από αυτές τις ασθενές λύσεις να παραβιάζει τις συνθήκες εντροπίας. Οπότε πρέπει στο αριθμητικό σχήμα να εφαρμόσουμε εντροπική διόρθωση. Τη διόρθωση θα την εφαρμόσουμε όταν λύνουμε το πρόβλημα Riemann σε μέτωπο κελιού που είναι υπερηχητικό κύμα αραίωσης.

υπερηχητικό κύμα αραίωσης ένα κύμα αραίωσης για το οποίο ισχύει $\lambda_p < 0$ στα αριστερά του κύματος και $\lambda_p > 0$ στα δεξιά του κύματος. Η δομή αυτού του κύματος έχει το χαρακτηριστικό ότι επικαλύπτει το μέτωπο του κελιού.

Για να εντοπίσουμε αν σε κάποιο μέτωπο κελιού υπάρχει υπερηχητικό κύμα αραίωσης είναι να ελέγξουμε το όρο ιξώδους $\mathbf{F}_{i-1/2}$ είναι πολύ μικρός. Σ αυτήν την περίπτωση η ιδιοτιμή $\hat{\lambda}_{i-1/2}^p$ επίσης θα είναι κοντά στο μηδέν. Οπότε εφαρμόζοντας εντροπική διόρθωση τροποποιώντας την αριθμητική ροή σε αυτό το μέτωπο πετυχαίνουμε την αύξηση του ιξώδους. Η διόρθωση αυτή ονομάζεται διόρθωση εντροπίας του Harten [8] όπου αναδιατυπώνονται οι ιδιοτιμές χωρίς ποτέ να πλησιάζουν κοντά στο μηδέν. Η τροποποίηση

που κάνουμε στο αριθμητικό μας σχήμα είναι να αντικαταστήσουμε τις ιδιοτιμές $|\hat{\lambda}_{i-1/2}^p|$ με τις τιμές $\phi_\delta(\hat{\lambda}_{i-1/2}^p)$ όπου $\phi_\delta(\lambda)$ για ένα καθορισμένο αριθμό δ είναι η συνάρτηση:

$$\phi_\delta(\lambda) = \begin{cases} |\lambda| & , |\lambda| \geq \delta \\ \frac{\lambda^2 + \delta^2}{2\delta} & , |\lambda| < \delta \end{cases} \quad (3.26)$$

Ο αριθμός δ μπορεί να υπολογιστεί [9] σύμφωνα με τον παρακάτω τρόπο.

$$\begin{aligned} \delta_{i+1/2} &= \max [0, \hat{\lambda}_{i+1/2} - \lambda_i, \lambda_{i+1} - \hat{\lambda}_{i+1/2}], \\ \delta_{i-1/2} &= \max [0, \hat{\lambda}_{i-1/2} - \lambda_{i-1}, \lambda_i - \hat{\lambda}_{i-1/2}]. \end{aligned}$$

3.3.5 C-ιδιότητα

Η C -ιδιότητα είναι η μέθοδος μας να κρατάει την ισορροπία σε κατάσταση ηρεμίας. Δηλαδή θα έχουμε το πρόβλημα

$$u(x, t) = 0 \quad \kappa α ι \quad h(x, t) = D - b(x, t).$$

Για την συγκεκριμένη κατάσταση ηρεμίας $\mathbf{q}_t = 0$, η συνάρτηση ροής και ο πηγαίος όρος βρίσκονται σε ισορροπία.

$$\mathbf{f}(\mathbf{q})_x = \mathbf{R}$$

Άρα για να θεωρήσουμε ένα αριθμητικό σχήμα ακριβές θα πρέπει να κρατάει ισορροπία ανάμεσα στην αριθμητική ροή και την προσέγγιση του πηγαίου όρου.

$$\mathbf{F}_{i+1/2} - \mathbf{F}_{i-1/2} = \mathbf{R}_i$$

Εάν το αριθμητικό σχήμα δεν ικανοποιεί την C -ιδιότητα τότε μπορεί να προκύψουν ταλαντώσεις στα αριθμητικά αποτελέσματα. Για να αποδείξουμε ότι ένα αριθμητικό σχήμα ικανοποιεί την C -ιδιότητα πρέπει να αποδείξουμε ότι ισχύουν οι σχέσεις

$$\mathbf{A}_{i+1/2}(\hat{\mathbf{Q}}_{i+1} - \hat{\mathbf{Q}}_i) = \mathbf{F}(\hat{\mathbf{Q}}_{i+1}) - \mathbf{F}(\hat{\mathbf{Q}}_i), \quad (3.27)$$

$$\mathbf{A}_{i+1/2}(\hat{\mathbf{Q}}_{i+1} - \hat{\mathbf{Q}}_i) = \mathbf{R}_{i+1/2}, \quad (3.28)$$

σύμφωνα με το [10].

Για το αριθμητικό σχήμα του Roe θα αποδείξουμε τις παραπάνω σχέσεις για τον τροποποιημένο πίνακα του Roe, δηλαδή $\mathbf{A}_{i+1/2} = \hat{\mathbf{A}}_{i+1/2}$ και με $\hat{\mathbf{Q}}_i$ τη λύση για το πρόβλημα σε ισορροπία. Από τον περιορισμό [1] του πίνακα Roe έχουμε

$$\hat{\mathbf{A}}_{i+1/2}(\hat{\mathbf{Q}}_{i+1} - \hat{\mathbf{Q}}_i) = \mathbf{F}(\hat{\mathbf{Q}}_{i+1}) - \mathbf{F}(\hat{\mathbf{Q}}_i),$$

άρα η πρώτη σχέση ισχύει, αρκεί να αποδείξουμε την δεύτερη σχέση

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{A}}_{i+1/2}(\hat{\mathbf{Q}}_{i+1} - \hat{\mathbf{Q}}_i) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -(\hat{u}_{i+1/2})^2 + (\hat{c}_{i+1/2})^2 & \hat{u}_{i+1/2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \hat{h}_{i+1/2} \\ \Delta(\hat{h}\hat{u})_{i+1/2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ (\hat{c}_{i+1/2})^2(\hat{h}_{i+1} - \hat{h}_i) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ (\hat{c}_{i+1/2})^2(D - b_{i+1} - D + b_i) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ -(\hat{c}_{i+1/2})^2(\hat{b}_{i+1} - \hat{b}_i) \end{bmatrix} = \mathbf{R}_{i+1/2}. \end{aligned}$$

Το σχήμα του Roe ικανοποιεί την C -ιδιότητα δηλαδή κρατάει ισορροπία ανάμεσα στην αριθμητική ροή και την προσέγγιση του πηγαίου όρου. Αν όμως σε κάποιο κελί εμφανίζεται στεγανό ο προσεγγιστικός επιλυτής Riemann του Roe αποτυγχάνει στον υπολογισμό και παρουσιάζεται αρνητικό βάθος στο υπολογιστικό κελί όπου υπάρχει στεγανό [2]. Σε αυτή την περίπτωση πρέπει να γίνει ιδιαίτερος χειρισμός ώστε να ικανοποιείται η C -ιδιότητα.

3.4 Αντιμετώπιση στεγανών

3.4.1 C -ιδιότητα σε υγρο/στεγανο κατάσταση

Στη προηγούμενη ενότητα είδαμε πως ο επιλυτής του Roe ικανοποιεί την C -ιδιότητα άμα δεν έχουμε καθόλου στεγανά στο χωρίο μας. Τώρα θα κάνουμε μια επέκταση στο αριθμητικό σχήμα ώστε να ικανοποιεί C -ιδιότητα και με την εμφάνιση στεγανών. Αν θεωρήσουμε το κελί I_i υγρο και δίπλα σε αυτό ένα στεγανό I_{i+1} τότε έχουμε

$$\mathbf{A}_{i+1/2}(\mathbf{Q}_{i+1} - \mathbf{Q}_i) = \begin{bmatrix} 0 \\ (c_{i+1/2}^n)^2(h_{i+1}^n - h_i^n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ (c_{i+1/2}^n)^2(b(x_i) - D) \end{bmatrix} \neq \mathbf{P}_{i+1/2}.$$

Η τροποποίηση η οποία γίνεται στον πηγαίο όρο έτσι ώστε να υπερβούμε το παραπάνω πρόβλημα είναι η εξής [10]:

$$\mathbf{R}_{i+1/2} = \begin{cases} \begin{bmatrix} 0 \\ -(c_{i+1/2}^n)^2 h_i^n \end{bmatrix} & , \text{αν } h_i^n < b(x_{i+1}) - b(x_i), \\ \begin{bmatrix} 0 \\ (c_{i+1/2}^n)^2 h_{i+1}^n \end{bmatrix} & , \text{αν } h_{i+1}^n < b(x_i) - b(x_{i+1}), \\ \begin{bmatrix} 0 \\ -(c_{i+1/2}^n)^2 (b(x_{i+1}) - b(x_i)) \end{bmatrix} & , \text{αλλιώς} \end{cases} \quad (3.29)$$

Όταν ο βυθός αναδύεται σε ένα κελί, ο πηγαίος όρος επαναπροσδιορίζεται στο κελί όπου υπάρχει στεγανό έτσι ώστε να αποφευχθεί η εμφάνιση πλαστών δυνάμεων πίεσης. Με την παραπάνω αντιμετώπιση ο επιλυτής του Roe κρατάει ισορροπία και στην περίπτωση εμφάνισης στεγανών.

3.4.2 Διόρθωση

Η C-ιδιότητα ιδιότητα πλέον ικανοποιείται αλλά σε περίπτωση που το ρευστό έχει κίνηση ($u \neq 0$) τότε το ρευστό υπάρχει περίπτωση να κάνει υπερπήδηση όταν συναντάει κάποιο στεγανό λόγω της τροποποίησης που κάναμε στη προηγούμενη ενότητα. Χρειαζόμαστε μια ακόμα τροποποίηση ώστε να αποφύγουμε τέτοιες τις περιπτώσεις. Έστω ότι το κελί I_i υγρό και δίπλα σε αυτό ένα στεγανό I_{i+1} και το ρευστό έχει ταχύτητα. Όποτε έχουμε

$$\mathbf{Q}_{i+1}^n = [0, 0]^T$$

Ακολουθούμε την εξής διαδικασία

- υπολογίζουμε τον τροποποιημένο πηγαίο όρο
- ορίζουμε μια νέα παροδική κατάσταση $\hat{\mathbf{Q}}_i^n$ ως

$$\hat{\mathbf{Q}}_i^n = \begin{bmatrix} h_i^n \\ 0 \end{bmatrix}$$

- υπολογίζουμε τα Q_i^{n+1} και Q_{i+1}^{n+1} με τις αριθμητικές ροές και τους τροποποιημένους πηγαίους όρους αποτιμημένους στις καταστάσεις \hat{Q}_i^n, Q_{i+1}^n

Με τον ίδιο τρόπο διορθώνουμε το αριθμητικό σχήμα αν το κελί I_i είναι στεγανό και δίπλα σε αυτό ένα υγρό I_{i+1} . Αν δεν έχουμε κάπου στεγανό, είτε από τις αρχικές συνθήκες είτε αναδυθεί από τη κίνηση του ρευστού, τότε δεν θα υπάρχει σε κανένα μέτωπο κατάσταση υγρο/στεγανό και δεν πραγματοποιούμε καμία διόρθωση.

3.5 Αριθμητικά σχήματα υψηλότερης τάξης

Για το αριθμητικό σχήμα χρησιμοποιήσαμε μια Upwind διακριτοποίηση που είναι πρώτης τάξης, υπολογίζει τις ασυνέχειες αλλά παρουσιάζει αριθμητική διάχυση στις ομαλές λύσεις. Αν χρησιμοποιήσουμε ένα σχήμα δεύτερης τάξης, για παράδειγμα το κλασικό σχήμα των Lax-Wendroff, δεν εμγανίζει αριθμητική διάχυση στις ομαλές λύσεις αλλά παρουσιάζει αριθμητική διασπορά [2],[3] στις ασυνέχειες. Γι' αυτόν τον λόγο θα φτιάξουμε ένα σχήμα το οποίο θα είναι δεύτερης τάξης για τις ομαλές λύσεις και πρώτης τάξης για τις ασυνέχειες. Αυτά τα σχήματα ονομάζονται σχήματα υψηλής ανάλυσης (high resolution).

3.5.1 Flux-Limiting

Για να φτιάξουμε ένα σχήμα υψηλής ανάλυσης θα χρησιμοποιήσουμε τους οριοθέτες ροής (flux - limiting). Σε αυτές τις μεθόδους κατασκευάζουμε αριθμητικές ροές που αποτελούνται και από ροή πρώτης τάξης και από ροή δεύτερης τάξης. Δηλαδή θα έχουνε την μορφή

$$f_{i+1/2}^{HO} = f_{i+1/2}^{FO} + \Phi_{i+1/2}^n (f_{i+1/2}^{SO} - f_{i+1/2}^{FO}), \quad (3.30)$$

όπου $f_{i+1/2}^{SO}$ είναι μια αριθμητική ροή δεύτερης τάξης, $f_{i+1/2}^{FO}$ είναι μια αριθμητική ροή πρώτης τάξης και $\Phi_{i+1/2}^n$ είναι ένας κατάλληλος οριοθέτης. Ο οριοθέτης θα λαμβάνει τιμή μηδέν άμα βρισκόμαστε σε ένα μέτωπο με ασυνέχεια, οπότε θα έχουμε ροή πρώτης

τάξης, και την τιμή ένα όταν βρισκόμαστε σε ομαλά μέτωπα, τότε θα έχουμε δεύτερης τάξης ροή.

Ένας τρόπος να ορίσουμε τον οριοθέτη $\Phi_{i+1/2}^n$ είναι με το λόγο των διαδοχικών κλήσεων

$$\theta_{i+1/2}^n = \frac{q_{I+1}^n - q_I^n}{q_{i+1}^n - q_i^n}, \quad I = i - \text{sgn}(\lambda_{i+1/2}^n) \quad (3.31)$$

όπου λ είναι η ταχύτητα του κύματος. Άρα διαλέγουμε η συνάρτηση $\Phi_{i+1/2}^n$ να είναι συνάρτηση του θ . Δηλαδή $\Phi_{i+1/2}^n = \Phi(\theta_{i+1/2}^n)$. Μερικοί από τους οριοθέτες Φ που μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε είναι:

Flux-limiter	$\Phi(\theta)$
Minmod	$\max(0, \min(1, \theta))$
Roe's Superbee	$\max(0, \min(2\theta, 1), \min(\theta, 2))$
van Leer	$\frac{ \theta + \theta}{1 + \theta }$
van Albada	$\frac{\theta^2 + \theta}{1 + \theta^2}$

Πίνακας 3.1

3.5.2 Αριθμητικές ροές υψηλής ανάλυσης

Στην περίπτωση που θέλουμε να κατασκευάσουμε ένα υψηλής ανάλυσης σχήμα για ένα σύστημα ακολουθούμε την ίδια διαδικασία που είδαμε και στην βαθμωτή περίπτωση κατασκευάζοντας αριθμητική ροή της μορφής:

$$\mathbf{F}_{i+1/2}^{HO} = \mathbf{F}_{i+1/2}^{FO} + \Phi_{i+1/2}^n (\mathbf{F}_{i+1/2}^{SO} - \mathbf{F}_{i+1/2}^{FO}). \quad (3.32)$$

Για ροή δεύτερης τάξης θα χρησιμοποιήσουμε το σχήμα των Lax -Wendroff, με αριθμητική ροή:

$$\mathbf{F}_{i-1/2} = \frac{1}{2}(\mathbf{I} - \frac{\Delta t}{\Delta x} |\mathbf{A}|) |\mathbf{A}| \Delta \mathbf{Q}_{i-1/2}.$$

Στη συνέχεια θέτοντας όπου $\mathbf{A} = \hat{\mathbf{A}}$ και χρησιμοποιώντας για τους όρους πρώτης τάξης την ροή του Roe (3.13), μπορούμε να υπολογίσουμε από την (3.32) την αριθμητική ροή υψηλής ανάλυσης

$$\mathbf{F}_{i+1/2}^n = \frac{1}{2}(\mathbf{F}_{i+1}^n + \mathbf{F}_i^n) - \frac{1}{2}(\mathbf{X}|\mathbf{A}|\mathbf{L}\mathbf{X}^{-1})_{i+1/2}^n \Delta \mathbf{Q}_{i+1/2}^n, \quad (3.33)$$

όπου

$$\mathbf{\Lambda} = \text{diag}\left(1 - \Phi(\hat{\theta}_p)\left(1 - \frac{\Delta t}{\Delta x}|\hat{\lambda}_p|\right)\right).$$

ή μπορούμε να την γράψουμε στην μορφή f -κυμάτων

$$\mathbf{F}_{i+1/2}^n = \frac{1}{2}(\mathbf{F}_{i+1}^n + \mathbf{F}_i^n) - \frac{1}{2} \sum_{p=1}^m \left[\hat{\alpha}_p |\hat{\lambda}_p| (1 - \Phi(\hat{\theta}_p)(1 - |\hat{\nu}_p|)) \hat{\mathbf{r}}_p \right]_{i+1/2} \quad (3.34)$$

όπου

$$\hat{\theta}_p = \frac{(\hat{\alpha}_p)_{I+1/2}}{(\hat{\alpha}_p)_{i+1/2}}, \quad I = \begin{cases} i-1 & \hat{\lambda}_p > 0 \\ i+1 & \hat{\lambda}_p < 0 \end{cases}, \quad \hat{\nu}_p = \frac{\Delta t}{\Delta x} \hat{\lambda}_p.$$

Ο λόγος $\hat{\theta}_p = \frac{(\hat{\alpha}_p)_{I+1/2}}{(\hat{\alpha}_p)_{i+1/2}}$ είναι η μεταβλητή από την οποία εξαρτάται ο οριοθέτης και ονομάζεται μέτρο της ομαλότητας των δεδομένων κοντά στο μέτωπο $x_{i+1/2}$. Όταν τα δεδομένα είναι ομαλά περιμένουμε $\theta_{i+1/2}^n \approx 1$ ενώ κοντά σε ασυνέχεια το $\theta_{i+1/2}^n$ θα είναι μακριά από το 1. Η ομαλότητα των δεδομένων πρέπει να ικανοποιεί τους περιορισμούς που θέσαμε προηγουμένως για τον οριοθέτη. Όταν τα δεδομένα είναι ομαλά η ομαλότητα των δεδομένων θα πάρει την τιμή 1 ($\theta = 1$) και ο οριοθέτης θα πάρει την τιμή 1 ($\phi(\theta) = 1$) κάνοντας τις πράξεις στην (2.34) καταλήγουμε στο Lax - Wendroff σχήμα που είναι δεύτερης τάξης. Αν έχουμε ασυνέχεια τότε η ομαλότητα των δεδομένων θα πάρει την τιμή μηδέν ($\theta = 0$) και ο οριοθέτης θα πάρει την τιμή 0 ($\phi(\theta) = 0$) και κάνοντας τις πράξεις στην (2.34) καταλήγουμε σε ένα upwind σχήμα. Οπότε η ομαλότητα των δεδομένων είναι καλώς ορισμένη, ενώ για οριοθέτη θα χρησιμοποιήσουμε κάποιον από τον πίνακα (3.1)

3.5.3 Πηγαίοι όροι υψηλής ανάλυσης

Για να ικανοποιείται η C ιδιότητα πρέπει να ισορροπούν οι αριθμητικές ροές με τον πηγαίο όρο. Όποτε πρέπει κατασκευάσουμε και τους πηγαίους σε υψηλή ανάλυση [11]. δηλαδή

$$\mathbf{R}_i = \mathbf{R}_{i+1/2}^{HO} + \mathbf{R}_{i-1/2}^{HO}$$

όπου

$$\mathbf{R}_{i+1/2}^{HO} = \mathbf{R}_{i+1/2}^{FO} + \Phi(\mathbf{R}_{i+1/2}^{SO} - \mathbf{R}_{i+1/2}^{FO})$$

Ομοίως θα πάρουμε για την προσέγγιση δεύτερης τάξης μια Lax-Wendroff αριθμητική ροή,

$$\mathbf{R}_{i+1/2}^{SO} = \frac{1}{2} \left[\mathbf{X}(\mathbf{I} - \frac{\Delta t}{\Delta x} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{A}^2) \mathbf{X}^{-1} \mathbf{R} \right]_{i+1/2}$$

Άρα προκύπτει ότι

$$\mathbf{R}_{i+1/2}^{\pm} = \frac{1}{2} \left[\hat{\mathbf{X}}(\mathbf{I} \pm \hat{\mathbf{A}}^{-1} |\hat{\mathbf{A}}| \hat{\mathbf{A}}) \mathbf{X}^{-1} \mathbf{P} \right]_{i+1/2}$$

ή σε μορφή f -κυμάτων

$$\mathbf{R}_{i+1/2}^{\pm} = \frac{1}{2} \sum_{p=1}^m \left[\hat{\beta}_p \hat{\mathbf{r}}_p (1 \pm \text{sgn}(\hat{\lambda}_p) (1 - \Phi(\hat{\theta}_p) (1 - |\hat{\nu}_p|))) \right]_{i+1/2} \quad (3.35)$$

3.6 Συνοριακές συνθήκες

Με την μέθοδο του Roe μπορούμε να υπολογίσουμε την μέση λύση σε κάθε υπολογιστικό κελί \mathbf{Q}_i^{n+1} αρκεί να γνωρίζουμε τη λύση του προηγούμενου χρονικού βήματος στο κελί \mathbf{Q}_i^n και στα γειτονικά κελιά πρέπει να γνωρίζουμε τις αριθμητικές ροές $\mathbf{F}_{i-1/2}^n$ και $\mathbf{F}_{i+1/2}^n$, τις οποίες μπορούμε να υπολογίσουμε αν ξέρουμε τις λύσεις \mathbf{Q}_{i-1}^{n+1} , \mathbf{Q}_{i+1}^{n+1} σε αυτά τα κελιά. Στα σύνορα του χωρίου μας, δηλαδή στο πρώτο και στο τελευταίο υπολογιστικό κελί, δεν έχουμε την απαιτούμενη γειτονική πληροφορία. Είναι αναγκαίο να κατασκευαστούν κάποια *φανταστικά κελιά* [7] στα οποία πρέπει να υπολογιστεί η λύση του προηγούμενου χρονικού βήματος. Η τιμή της λύσης στα φανταστικά κελιά θα δημιουργηθεί από τις φυσικές συνοριακές συνθήκες του προβλήματος.

Για το σχήμα του Roe χρειαζόμαστε ένα γειτονικό κελί από κάθε κατεύθυνση για να υπολογίσουμε την νέα μέση λύση οπότε το φυσικό χωρίο του προβλήματος θα επεκταθεί μια θέση από το αριστερό σύνορο και μια θέση από το δεξί. Αν χρησιμοποιήσουμε την flux-limiter μέθοδο χρειαζόμαστε δυο γειτονικά κελιά για να υπολογίσουμε τις ροές υψηλής ανάλυσης, αυτό σημαίνει ότι το φυσικό χωρίο θα επεκταθεί δύο θέσεις από το αριστερό σύνορο και δύο θέσεις από το δεξί.

Η τιμή που θα έχουν τα φανταστικά κελιά εξαρτάται από τις φυσικές συνοριακές συνθήκες που έχει το φυσικό πρόβλημα που επιλύεται. Στην παρούσα εργασία οι συνορια-

κές τιμές που εφαρμόζονται είναι είτε συνοριακές συνθήκες ανάκλασης είτε συνοριακές συνθήκες ελεύθερης ροής.

Συνοριακές συνθήκες ανάκλασης η τιμή της λύσης στα φανταστικά κελιά είναι ίδιες με αυτή του εσωτερικού κελιού, οπότε αν θεωρήσουμε χωρίο $[a, b]$ με Δx διαμέριση έχουμε

$$Q_{a-\Delta x}^n = Q_a^n, \quad Q_{b+\Delta x}^n = Q_b^n$$

με ένα φανταστικό κελί σε κάθε σύνορο του χωρίου και

$$Q_{a-2\Delta x}^n = Q_{a-\Delta x}^n = Q_a^n, \quad Q_{b+2\Delta x}^n = Q_{b+\Delta x}^n = Q_b^n$$

με δύο φανταστικά κελιά σε κάθε σύνορο.

συνοριακές συνθήκες ελεύθερης ροής θεωρούμε ότι το κύμα ανακλάται πάνω στο σύνορο σαν να βρίσκεται σε στερεό τοίχο, οπότε η αντιμετώπιση που θα έχει είναι το ύψος του κύματος να μείνει σταθερό και η ταχύτητά του να γίνει αντίθετη. Δηλαδή σε ένα χωρίο $[a, b]$ με Δx διαμέριση και ένα φανταστικό κελί σε κάθε σύνορο του χωρίου ορίζεται η τιμή των λύσεων $Q_{a-\Delta x}^n, Q_{b+\Delta x}^n$ ως

$$h_{a-\Delta x}^n = h_a^n \quad \text{και} \quad (hu)_{a-\Delta x}^n = -(hu)_a^n,$$

$$h_{b+\Delta x}^n = h_b^n \quad \text{και} \quad (hu)_{b+\Delta x}^n = -(hu)_b^n$$

ενώ στο ίδιο χωρίο με δύο φανταστικά κελιά σε κάθε σύνορο ορίζεται η τιμή των λύσεων

$$Q_{a-\Delta x}^n, Q_{a-2\Delta x}^n, Q_{b+\Delta x}^n \quad \text{και} \quad Q_{b+2\Delta x}^n \quad \text{ως}$$

$$h_{a-2\Delta x}^n = h_{a-\Delta x}^n = h_a^n \quad \text{και} \quad (hu)_{a-2\Delta x}^n = (hu)_{a-\Delta x}^n = -(hu)_a^n,$$

$$h_{b+2\Delta x}^n = h_{b+\Delta x}^n = h_b^n \quad \text{και} \quad (hu)_{b+2\Delta x}^n = (hu)_{b+\Delta x}^n = -(hu)_b^n.$$

3.7 Επέκταση στις 2 διαστάσεις

3.7.1 Αριθμητικό σχήμα

Θα επεκτείνουμε το αριθμητικό σχήμα στις δυο διαστάσεις, όπου πλέον το υπολογιστικό κελί θα είναι ορθογώνιο. Αν θεωρήσουμε το κελί να είναι το $C_{i,j}$ με διαστάσεις $[x_{i-1/2}, x_{i+1/2}] \times [y_{i-1/2}, y_{i+1/2}]$ με χωρικό βήμα Δx (προς τον άξονα x) δηλαδή $x_{i+1,j} = x_{i,j} + \Delta x$ και χωρικό βήμα Δy (προς τον άξονα y) δηλαδή $y_{i,j+1} = y_{i,j} + \Delta y$ και ολοκληρώσουμε στο χρονικό διάστημα $\tau^n = [t^n, t^{n+1}]$ με χρονικό βήμα $\Delta t^n = t^{n+1} - t^n$ θα πάρουμε την εξής μορφή

$$\begin{aligned} \int_{C_{i,j}} \mathbf{q}(x, y, t^{n+1}) dx = \int_{C_{i,j}} \mathbf{q}(x, y, t^n) dx dy - \int_{\tau^n} [\mathbf{f}(\mathbf{q}(x_{i+\frac{1}{2}}, y, t)) - \mathbf{f}(\mathbf{q}(x_{i-\frac{1}{2}}, y, t))] dt \\ - \int_{\tau^n} [\mathbf{f}(\mathbf{q}(x, y_{j+\frac{1}{2}}, t)) - \mathbf{f}(\mathbf{q}(x, y_{j-\frac{1}{2}}, t))] dt \end{aligned} \quad (3.36)$$

το οποίο γράφεται

$$\mathbf{Q}_{i,j}^{n+1} = \mathbf{Q}_{i,j}^n - \frac{\Delta t^n}{\Delta x} [\mathbf{F}_{i+1/2,j}^n - \mathbf{F}_{i-1/2,j}^n] - \frac{\Delta t^n}{\Delta y} [\mathbf{G}_{i,j+1/2}^n - \mathbf{G}_{i,j-1/2}^n] \quad (3.37)$$

όπου

$$\mathbf{Q}_{i,j}^n = \frac{1}{\Delta x \Delta y} \int_{C_{i,j}} \mathbf{q}(x, y, t^n) dx dy \quad (3.38)$$

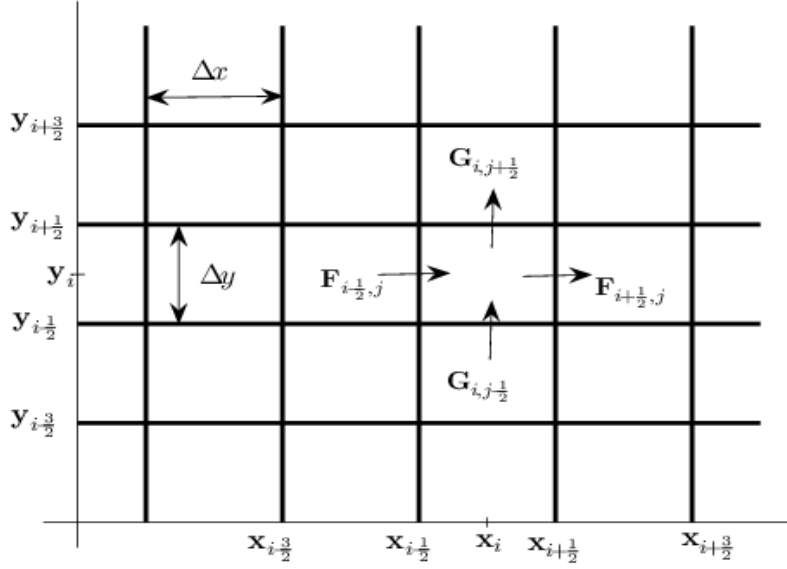
είναι ο μέσος όρος της λύσης σε κάθε χωρικό κελί τη χρονική στιγμή t^n και

$$\mathbf{F}_{i\pm\frac{1}{2},j}^n = \frac{1}{\Delta t^n} \int_{\tau^n} \mathbf{f}(\mathbf{q}(x_{i\pm\frac{1}{2}}, y)) dt \quad (3.39)$$

είναι ο χρονικός μέσος όρος της ροής ως προς την διεύθυνση του άξονα x και

$$\mathbf{G}_{i,j\pm\frac{1}{2}}^n = \frac{1}{\Delta t^n} \int_{\tau^n} \mathbf{f}(\mathbf{q}(x, y_{i\pm\frac{1}{2}})) dt \quad (3.40)$$

είναι ο χρονικός μέσος όρος της ροής ως προς την διεύθυνση του άξονα y στο χρονικό διάστημα τ^n .



Σχήμα 3.1: Πλέγμα διακριτοποίησης στις 2 διαστάσεις .

3.7.2 Ο προσεγγιστικός επιλύτης Riemann του Roe σε δύο διαστάσεις

Θα εργαστούμε παρόμοια με την μια διάσταση. Δηλαδή θα λύσουμε ένα τροποποιημένο σύστημα νόμων διατήρησης το οποίο θα είναι σταθερό και διαγωνοποιήσιμο. Άρα θα αντικαταστήσουμε τους Ιακωβιανούς πίνακες $\mathbf{f}'(\mathbf{q})$ και $\mathbf{g}'(\mathbf{q})$ με τους $\hat{\mathbf{A}}$ και $\hat{\mathbf{B}}$ αντίστοιχα. Οπότε έχουμε $\mathbf{f}(\mathbf{q}) = \hat{\mathbf{A}}\mathbf{q}$ και $\mathbf{g}(\mathbf{q}) = \hat{\mathbf{B}}\mathbf{q}$ και για τους πίνακες $\hat{\mathbf{A}}$ και $\hat{\mathbf{B}}$ θέτουμε τους περιορισμούς

$$[1] \quad \hat{\mathbf{A}}_{i-1/2,j}(\mathbf{Q}_{i,j} - \mathbf{Q}_{i-1,j}) = \mathbf{f}(\mathbf{Q}_{i,j}) - \mathbf{f}(\mathbf{Q}_{i-1,j})$$

$$[2] \quad \hat{\mathbf{A}}_{i-1/2,j} \text{ είναι διαγωνιοποιήσιμος με πραγματικές ιδιοτιμές}$$

$$[3] \quad \hat{\mathbf{A}}_{i-1/2,j} \rightarrow \mathbf{f}'(\mathbf{q}) \text{ ομοιόμορφα καθώς } \mathbf{Q}_{i-1,j}, \mathbf{Q}_{i,j} \rightarrow \mathbf{q},$$

$$[4] \quad \hat{\mathbf{B}}_{i,j-1/2}(\mathbf{Q}_{i,j} - \mathbf{Q}_{i,j-1}) = \mathbf{g}(\mathbf{Q}_{i,j}) - \mathbf{g}(\mathbf{Q}_{i,j-1})$$

$$[5] \quad \hat{\mathbf{B}}_{i,j-1/2} \text{ είναι διαγωνιοποιήσιμος με πραγματικές ιδιοτιμές}$$

$$[6] \quad \hat{\mathbf{B}}_{i,j-1/2} \rightarrow \mathbf{g}'(\mathbf{q}) \text{ ομοιόμορφα καθώς } \mathbf{Q}_{i,j-1}, \mathbf{Q}_{i,j} \rightarrow \mathbf{q},$$

για $\hat{\mathbf{A}}_{i-1/2,j} = \hat{\mathbf{A}}(\mathbf{Q}_{i-1,j}, \mathbf{Q}_{i,j})$. και $\hat{\mathbf{B}}_{i,j-1/2} = \hat{\mathbf{B}}(\mathbf{Q}_{i,j-1}, \mathbf{Q}_{i,j})$.

Για τις εξισώσεις ρηχών υδάτων χρησιμοποιούμε τους Ιακωβιανούς πίνακες υπολογισμένους στις μέσες τιμές

$$\hat{u}_{i\pm 1/2,j} = \frac{\sqrt{h_{i\pm 1,j}}u_{i\pm 1,j} + \sqrt{h_{i,j}}u_{i,j}}{\sqrt{h_{i\pm 1,j}} + \sqrt{h_{i,j}}}, \hat{v}_{i,j\pm 1/2} = \frac{\sqrt{h_{i,j\pm 1}}v_{i,j\pm 1} + \sqrt{h_{i,j}}v_{i,j}}{\sqrt{h_{i,j\pm 1}} + \sqrt{h_{i,j}}} \quad (3.41)$$

και

$$\hat{h}_{i\pm 1/2,j} = \frac{1}{2}(h_{i\pm 1,j} + h_{i,j}), \hat{h}_{i,j\pm 1/2} = \frac{1}{2}(h_{i,j\pm 1} + h_{i,j}) \quad (3.42)$$

Τώρα πρέπει να υπολογιστούν οι προσεγγιστικές ιδιοτιμές που αντιστοιχούν στους πίνακες \mathbf{A} και \mathbf{B}

$$\hat{\lambda}_1^F = \hat{u} - \hat{c}, \quad \hat{\lambda}_2^F = \hat{u}, \quad \hat{\lambda}_3^F = \hat{u} + \hat{c} \quad (3.43)$$

και

$$\hat{\lambda}_1^G = \hat{v} - \hat{c}, \quad \hat{\lambda}_2^G = \hat{v}, \quad \hat{\lambda}_3^G = \hat{v} + \hat{c} \quad (3.44)$$

με τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα

$$\hat{\mathbf{r}}_1^F = \begin{bmatrix} 1 \\ \hat{u} - \hat{c} \\ \hat{v} \end{bmatrix}, \hat{\mathbf{r}}_2^F = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \hat{\mathbf{r}}_3^F = \begin{bmatrix} 1 \\ \hat{u} + \hat{c} \\ \hat{v} \end{bmatrix} \quad (3.45)$$

και του πίνακα \mathbf{B} είναι

$$\hat{\mathbf{r}}_1^G = \begin{bmatrix} 1 \\ \hat{u} \\ \hat{v} - \hat{c} \end{bmatrix}, \hat{\mathbf{r}}_2^G = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \hat{\mathbf{r}}_3^G = \begin{bmatrix} 1 \\ \hat{u} \\ \hat{v} + \hat{c} \end{bmatrix} \quad (3.46)$$

με $\hat{c} = \sqrt{g\hat{h}}$. Οι αριθμητικές ροές είναι

$$\mathbf{F}_{i+1/2,j}^n = \frac{1}{2}(\mathbf{F}_{i+1,j}^n + \mathbf{F}_{i,j}^n) - \frac{1}{2} \sum_{p=1}^m \left[\hat{\alpha}_p^F |\hat{\lambda}_p^F| \hat{\mathbf{r}}_p^F \right]_{i+1/2,j}^n \quad (3.47)$$

$$\mathbf{G}_{i,j+1/2}^n = \frac{1}{2}(\mathbf{G}_{i,j+1}^n + \mathbf{G}_{i,j}^n) - \frac{1}{2} \sum_{p=1}^m \left[\hat{\alpha}_p^G |\hat{\lambda}_p^G| \hat{\mathbf{r}}_p^G \right]_{i,j+1/2}^n \quad (3.48)$$

στις οποίες τα $\hat{\alpha}_p^F$ είναι

$$(\hat{\alpha}_{1,3}^F)_{i+1/2,j} = \frac{1}{2}\Delta_{i+1/2,j}h \pm \frac{1}{2\hat{c}_{i+1/2,j}}(\hat{u}_{i+1/2,j}\Delta_{i+1/2,j}h - \Delta_{i+1/2,j}(uh)) \quad (3.49)$$

$$(\hat{\alpha}_2^F)_{i+1/2,j} = \frac{1}{\hat{c}_{i+1/2,j}}(\Delta_{i+1/2,j}(vh) - \hat{v}_{i+1/2,j}\Delta_{i+1/2,j}h) \quad (3.50)$$

και τα $\hat{\alpha}_p^G$ είναι

$$(\hat{\alpha}_{1,3}^G)_{i,j+1/2} = \frac{1}{2}\Delta_{i,j+1/2}h \pm \frac{1}{2\hat{c}_{i,j+1/2}}(\hat{v}_{i,j+1/2}\Delta_{i,j+1/2}h - \Delta_{i,j+1/2}(vh)) \quad (3.51)$$

$$(\hat{\alpha}_2^G)_{i,j+1/2} = \frac{1}{\hat{c}_{i,j+1/2}}(\Delta_{i,j+1/2}(uh) - \hat{u}_{i,j+1/2}\Delta_{i,j+1/2}h) \quad (3.52)$$

Η *CFL* συνθήκη στις δύο διαστάσεις μας δίνει τον υπολογισμό του χρονικού βήματος

$$\Delta t^n = \frac{\min\{\Delta x, \Delta y\}C_r}{\max_{i,j}\{\sqrt{u_{ij}^2 + v_{ij}^2} + c_{ij}\}} \quad (3.53)$$

Πηγαίοι όροι

Για την προσέγγιση του πηγαίου όρου διακριτοποιούμε χωριστά στις δύο χωρικές διαστάσεις, δηλαδή $\mathbf{R} = \mathbf{R}^1 + \mathbf{R}^2$. Προβάλουμε τον όρο \mathbf{R}^1 στα ιδιοδιανύσματα του πίνακα $\hat{\mathbf{A}}$ και τον όρο \mathbf{R}^2 στα ιδιοδιανύσματα του πίνακα $\hat{\mathbf{B}}$ έτσι ώστε να λάβουμε:

$$\mathbf{R}_{i,j}^1 = \mathbf{R}_{i+1/2,j}^{1-} + \mathbf{R}_{i-1/2,j}^{1+}, \quad \mathbf{R}_{i,j}^2 = \mathbf{R}_{i,j+1/2}^{2-} + \mathbf{R}_{i,j-1/2}^{2+} \quad (3.54)$$

όπου

$$\mathbf{R}_{i+1/2,j}^{1\pm} = \frac{1}{2} \sum_{p=1}^m \left[\hat{\beta}_p^F \hat{\mathbf{r}}_p^F (1 \pm \text{sgn}(\hat{\lambda}_p^F)) \right]_{i+1/2,j} \quad (3.55)$$

$$\mathbf{R}_{i,j+1/2}^{2\pm} = \frac{1}{2} \sum_{p=1}^m \left[\hat{\beta}_p^G \hat{\mathbf{r}}_p^G (1 \pm \text{sgn}(\hat{\lambda}_p^G)) \right]_{i,j+1/2} \quad (3.56)$$

και οι τιμές β_p είναι οι συντελεστές που προκύπτουν όταν προβάλουμε τον πηγαίο όρο πάνω στα ιδιοδιανύσματα του πίνακα του Roe. Οπότε παίρνουμε τους συντελεστές:

$$\beta_1^F = \frac{\hat{c}\Delta\mathbf{b}}{2}, \quad \beta_2^F = 0, \quad \beta_3^F = -\frac{\hat{c}\Delta\mathbf{b}}{2} \quad (3.57)$$

όπου $\Delta b = b_{i+1,j} - b_{i,j}$ και

$$\beta_1^G = \frac{\hat{c}\Delta \mathbf{b}}{2}, \quad \beta_2^G = 0, \quad \beta_3^G = -\frac{\hat{c}\Delta \mathbf{b}}{2} \quad (3.58)$$

όπου $\Delta b = b_{i,j+1} - b_{i,j}$. Άμα συμπεριλάβουμε στο σχήμα μας την τριβή, δηλαδή στον πηγαίο όρο προστίθεται και ο όρος τριβής $\mathbf{S} = \mathbf{S}^1 + \mathbf{S}^2$ με

$$\mathbf{S}^1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -ghS_f \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{S}^2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -ghS_g \end{bmatrix} \quad (3.59)$$

και τα S_f, S_g δίνονται στον τύπο (1.5) και τον διακριτοποιούμε σημειακά. Τελικά το σχήμα μπορεί να γραφτεί στην εξής μορφή:

$$Q_{i,j}^{n+1} = \frac{Q_{i,j}^n - \frac{\Delta t^n}{\Delta x} [\Delta \mathbf{F} + (\mathbf{R}_{i,j}^1)^n] - \frac{\Delta t^n}{\Delta y} [\Delta \mathbf{G} + (\mathbf{R}_{i,j}^2)^n] - \Delta t^n \theta \mathbf{S}_{i,j}^n}{1 - (1 - \theta) \Delta t^n \frac{\mathbf{S}_{i,j}^n}{Q_{i,j}^n}} \quad (3.60)$$

με $\Delta \mathbf{F} = \mathbf{F}_{i+1/2,j}^n - \mathbf{F}_{i-1/2,j}^n$ και $\Delta \mathbf{G} = \mathbf{G}_{i,j+1/2}^n - \mathbf{G}_{i,j-1/2}^n$ όπου το θ είναι ο βαθμός αμεσότητας για τον όρο της τριβής: $\theta = 1$ αντιστοιχεί σε μια εντελώς έμμεση χρήση ενώ $\theta = 0$ σε μια εντελώς άμεση.

3.7.3 Αριθμητικές ροές και πηγαίοι όροι υψηλής ανάλυσης

Ακολουθώντας την διαδικασία που εφαρμοσθηκε στην μία διάσταση θα κατασκευάσουμε αριθμητικές ροές που θα αποτελούνται από ροή πρώτης και δεύτερης τάξης, αρα οι ροές θα είναι της μορφής

$$\mathbf{F}_{i+1/2,j}^{HO} = \mathbf{F}_{i+1/2,j}^{FO} + (\Phi_{i+1/2,j}^n)^F (\mathbf{F}_{i+1/2,j}^{SO} - \mathbf{F}_{i+1/2,j}^{FO}). \quad (3.61)$$

$$\mathbf{G}_{i,j+1/2}^{HO} = \mathbf{G}_{i,j+1/2}^{FO} + (\Phi_{i,j+1/2}^n)^G (\mathbf{G}_{i,j+1/2}^{SO} - \mathbf{G}_{i,j+1/2}^{FO}). \quad (3.62)$$

στις οποίες για ροή πρώτης τάξης θα χρησιμοποιήσουμε τις upwind ροές του Roe και για δεύτερης τάξης της ροές των Lax-wendroff όπως

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{i-1/2,j} &= \frac{1}{2} \left(\mathbf{I} - \frac{\Delta t}{\Delta x} |\mathbf{A}| \right) |\mathbf{A}| \Delta \mathbf{Q}_{i-1/2,j} \\ \mathbf{G}_{i,j-1/2} &= \frac{1}{2} \left(\mathbf{I} - \frac{\Delta t}{\Delta x} |\mathbf{B}| \right) |\mathbf{B}| \Delta \mathbf{Q}_{i,j-1/2} \end{aligned}$$

οπότε καταλήγουμε στο ροές υψηλής ανάλυσης

$$\mathbf{F}_{i+1/2,j}^n = \frac{1}{2}(\mathbf{F}_{i+1,j}^n + \mathbf{F}_{i,j}^n) - \frac{1}{2} \sum_{p=1}^m \left[\hat{\alpha}_p^F |\hat{\lambda}_p^F| (1 - \Phi(\theta_p^F)(1 - |\mathbf{v}_p^F|)) \hat{\mathbf{r}}_p^F \right]_{i+1/2,j}^n \quad (3.63)$$

$$\mathbf{G}_{i,j+1/2}^n = \frac{1}{2}(\mathbf{G}_{i,j+1}^n + \mathbf{G}_{i,j}^n) - \frac{1}{2} \sum_{p=1}^m \left[\hat{\alpha}_p^G |\hat{\lambda}_p^G| (1 - \Phi(\theta_p^G)(1 - |\mathbf{v}_p^G|)) \hat{\mathbf{r}}_p^G \right]_{i,j+1/2}^n \quad (3.64)$$

με $\hat{\theta}_p^F$ το μέτρο ομαλότητας δεδομένων στο μέτωπο $x_{i+1/2,j}$ και $\hat{\theta}_p^G$ το μέτρο ομαλότητας στο μέτωπο $x_{i,j+1/2}$ υπολογίζονται από τους τύπους

$$\theta_p^F = \frac{(\hat{\alpha}_p^F)_{I+1/2,j}}{(\hat{\alpha}_p^F)_{i+1/2,j}}, \quad I = \begin{cases} i-1 & \text{αν } \hat{\lambda}_p^F > 0 \\ i+1 & \text{αν } \hat{\lambda}_p^F < 0 \end{cases} \quad \hat{\nu}_p^F = \frac{\Delta t}{\Delta x} \hat{\lambda}_p^F \quad (3.65)$$

$$\theta_p^G = \frac{(\hat{\alpha}_p^G)_{i,J+1/2}}{(\hat{\alpha}_p^G)_{i,j+1/2}}, \quad J = \begin{cases} j-1 & \text{αν } \hat{\lambda}_p^G > 0 \\ j+1 & \text{αν } \hat{\lambda}_p^G < 0 \end{cases} \quad \hat{\nu}_p^G = \frac{\Delta t}{\Delta x} \hat{\lambda}_p^G \quad (3.66)$$

Τον οριοθέτη τον επιλέγουμε πάλι από τον πίνακα(3.1). Για τον πηγαίο όρο πρέπει να υπάρχει ισορροπία με τις αριθμητικές ροές.

$$\mathbf{R}_{i,j}^1 = \mathbf{R}_{i+1/2,j}^{1,HO} + \mathbf{R}_{i-1/2,j}^{1,HO}$$

$$\mathbf{R}_{i,j}^2 = \mathbf{R}_{i,j+1/2}^{2,HO} + \mathbf{R}_{i,j-1/2}^{2,HO}$$

με

$$\mathbf{R}_{i+1/2,j}^{1,HO} = \mathbf{R}_{i+1/2,j}^{1,FO} + \Phi^F(\mathbf{R}_{i+1/2,j}^{1,SO} - \mathbf{R}_{i+1/2,j}^{1,FO})$$

$$\mathbf{R}_{i,j+1/2}^{2,HO} = \mathbf{R}_{i,j+1/2}^{2,FO} + \Phi^G(\mathbf{R}_{i,j+1/2}^{2,SO} - \mathbf{R}_{i,j+1/2}^{2,FO})$$

Ομοίως θα πάρουμε για την προσέγγιση δεύτερης τάξης μια Lax-Wendroff αριθμητική προσέγγιση για τους πηγαίους όρους,

$$\mathbf{R}_{i+1/2,j}^{1,SO} = \frac{1}{2} \left[\hat{\mathbf{X}}^F (\mathbf{I} - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\hat{\Lambda}^F)^{-1} (\hat{\Lambda}^F)^2) (\hat{\mathbf{X}}^F)^{-1} \mathbf{R}^1 \right]_{i+1/2,j}$$

$$\mathbf{R}_{i,j+1/2}^{2,SO} = \frac{1}{2} \left[\hat{\mathbf{X}}^G (\mathbf{I} - \frac{\Delta t}{\Delta y} (\hat{\Lambda}^G)^{-1} (\hat{\Lambda}^G)^2) (\hat{\mathbf{X}}^G)^{-1} \mathbf{R}^2 \right]_{i,j+1/2}$$

Με αυτές τις εξισώσεις κατασκευάζουμε τους πηγαίους όρους υψηλής ανάλυσης

$$\mathbf{R}_{i+1/2,j}^{1\pm} = \frac{1}{2} \sum_{p=1}^m \left[\hat{\beta}_p^F \hat{\mathbf{r}}_p^F (1 \pm \operatorname{sgn}(\hat{\lambda}_p^F) (1 - \Phi_p^F (1 - |\hat{\nu}_p^F|))) \right]_{i+1/2,j} \quad (3.67)$$

$$\mathbf{R}_{i,j+1/2}^{2\pm} = \frac{1}{2} \sum_{p=1}^m \left[\hat{\beta}_p^G \hat{\mathbf{r}}_p^G (1 \pm \operatorname{sgn}(\hat{\lambda}_p^G) (1 - \Phi_p^G (1 - |\hat{\nu}_p^G|))) \right]_{i,j+1/2} \quad (3.68)$$

3.7.4 C-ιδιότητα στις δύο διαστάσεις

Η C -ιδιότητα πρέπει να επεκταθεί στις 2 διαστάσεις. Θεωρώντας τις εξισώσεις ρηχών υδάτων σε κατάσταση ηρεμίας, δηλαδή

$$u(x, y, t) \equiv 0, v(x, y, t) \equiv 0 \quad \text{και} \quad h(x, y, t) = D - b \quad \forall (x, y, t) \quad (3.69)$$

οι συναρτήσεις αριθμητικής ροής ισορροπούν $\mathbf{f}(q)_x = \mathbf{R}^1$ και $\mathbf{g}(q)_y = \mathbf{R}^2$. Για να λάβουμε την παραπάνω συνθήκη αριθμητικά το σχήμα πρέπει να ισορροπεί τις αριθμητικές ροές με τις προσεγγίσεις των πηγαίων όρων

$$\mathbf{F}_{i+1/2,j} - \mathbf{F}_{i-1/2,j} = \mathbf{R}_{i,j}^1 \quad \text{και} \quad \mathbf{G}_{i,j+1/2} - \mathbf{G}_{i,j-1/2} = \mathbf{R}_{i,j}^2 \quad (3.70)$$

3.7.5 Αντιμετώπιση εμφάνισης στεγανών

C-ιδιότητα

Ο επιλύτης Roe αποτυγχάνει κατά την εμφάνιση στεγανών στο βυθό και έτσι χρειάζεται ειδικός χειρισμός. Αρχικά θα μελετήσουμε την περίπτωση της σταθερής κατάστασης με εμφάνιση στεγανών, έτσι επεκτείνουμε την τροποποίηση του πηγαίου όρου στις δύο διαστάσεις ώστε να ισχύει η γενικότερη μορφή της C -ιδιότητας. Δηλαδή ένα αριθμητικό σχήμα στις δύο διαστάσεις λέμε ότι ικανοποιεί την γενικευμένη μορφή της C -ιδιότητας εάν λύνει ακριβώς τις σταθερές καταστάσεις

$$u \equiv 0, v \equiv 0, \quad h(x, y) = \begin{cases} D - b(x, y) & \text{αν } b < D \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases} \quad (3.71)$$

με D σταθερά. Αυτή η λύση παριστάνει στάσιμη ροή όταν $D(x, y) < D$ και στεγανό οπουδήποτε αλλού. Στη συνέχεια κατασκευάζουμε την διακριτοποίηση στον πηγαίο όρο επεκτείνοντας την στρατηγική της μίας διάστασης.

$$\mathbf{R}_{i+1/2,j}^n = \begin{cases} \begin{bmatrix} 0 \\ -(c_{i+1/2,j}^n)^2 h_{i,j}^n \\ 0 \end{bmatrix} & \text{αν } h_{i,j}^n < B(x_{i+1}, y_i) - B(x_i, y_i) \\ \begin{bmatrix} 0 \\ (c_{i+1/2,j}^n)^2 h_{i+1,j}^n \\ 0 \end{bmatrix} & \text{αν } h_{i+1,j}^n < B(x_i, y_i) - B(x_{i+1}, y_i) \\ \begin{bmatrix} 0 \\ -(c_{i+1/2,j}^n)^2 B(x_{i+1}, y_i) - B(x_i, y_i) \\ 0 \end{bmatrix} & \text{σε αλλη περίπτωση} \end{cases} \quad (3.72)$$

και

$$\mathbf{R}_{i,j+1/2}^n = \begin{cases} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -(c_{i,j+1/2}^n)^2 h_{i,j}^n \end{bmatrix} & \text{αν } h_{i,j}^n < B(x_i, y_{i+1}) - B(x_i, y_i) \\ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ (c_{i,j+1/2}^n)^2 h_{i+1,j}^n \end{bmatrix} & \text{αν } h_{i+1,j}^n < B(x_i, y_i) - B(x_i, y_{i+1}) \\ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -(c_{i,j+1/2}^n)^2 B(x_i, y_{i+1}) - B(x_i, y_i) \end{bmatrix} & \text{σε αλλη περίπτωση} \end{cases} \quad (3.73)$$

Διόρθωση

Στο προηγούμενο κεφάλαιο καταφέραμε να κρατάμε την ισορροπία και με εμφάνιση στεγανών αλλά σε στάσιμες καταστάσεις. Σε καταστάσεις που έχουμε κίνηση του ρευστού πρέπει να κάνουμε διορθώσεις όπως στην μία διάσταση. Πιο συγκεκριμένα ακολουθούμε

την παρακάτω διαδικασία. Ας υποθέσουμε ότι βρισκόμαστε στο κελί $C_{i,j}$

- Υπολογίζουμε τον τροποποιημένο πηγαίο όρο
- Ελέγχουμε τα διπλανά κελιά $C_{i+1,j}, C_{i-1,j}, C_{i,j+1}, C_{i,j-1}$ αν έχουμε σχέση υγρού/στεγανού
 - Στην περίπτωση της ύπαρξης σχέσης υγρού/στεγανού στην κατεύθυνση του άξονα των x (έστω το κελί $C_{i+1,j}$) θεωρούμε μια νέα παροδική κατάσταση

$$\hat{\mathbf{Q}}_{i,j}^n = \begin{bmatrix} h_{i,j}^n \\ 0 \\ h_{i,j}^n v_{i,j}^n \end{bmatrix} \quad (3.74)$$

- * Υπολογίζουμε την αριθμητική ροή $\mathbf{F}_{i+1/2,j}^n$ και τους πηγαίους όρους $\mathbf{R}_{i+1/2,j}^{1\pm}$ στις καταστάσεις $\hat{\mathbf{Q}}_{i,j}^n, \hat{\mathbf{Q}}_{i+1,j}^n$
- * Ξαναδίνουμε στο $\mathbf{Q}_{i,j}^n$ την τιμή που είχε πριν από την αλλαγή
- Στην περίπτωση της ύπαρξης σχέσης υγρού/στεγανού στην κατεύθυνση του άξονα των y (έστω το κελί $C_{i,j+1}$) θεωρούμε μια νέα παροδική κατάσταση

$$\hat{\mathbf{Q}}_{i,j}^n = \begin{bmatrix} h_{i,j}^n \\ h_{i,j}^n u_{i,j}^n \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.75)$$

- * Υπολογίζουμε την αριθμητική ροή $\mathbf{G}_{i,j+1/2}^n$ και τους πηγαίους όρους $\mathbf{R}_{i,j+1/2}^{2\pm}$ στις καταστάσεις $\hat{\mathbf{Q}}_{i,j}^n, \hat{\mathbf{Q}}_{i,j+1}^n$
- * Ξαναδίνουμε στο $\mathbf{Q}_{i,j}^n$ την τιμή που είχε πριν από την αλλαγή
- Υπολογίζουμε την νέα τιμή $\mathbf{Q}_{i,j}^{n+1}$

Η διαδικασία είναι παρόμοια αν έχουμε μια σχέση στεγανό/υγρό. Με την παραπάνω διαδικασία η λύση σε κάθε σχέση υγρο/στεγανό θεωρείται να είναι αντίστοιχη με αυτή στις στάσιμες καταστάσεις και μετά , προκειμένου να υπολογίσουμε το $\mathbf{Q}_{i,j}^{n+1}$, οι αριθμητικές ροές αντιστοιχούν σε αυτή την προσεγγιστική λύση στο κελί που χρησιμοποιήθηκαν. Με αυτό το τρόπο το μέτωπο του κύματος θα προχωράει μόνο αν η κλίση του υγρού θα είναι μεγαλύτερη από την κλίση του πηγαίου όρου στα δύο κελιά.

Κεφάλαιο 4

Παράλληλος αλγόριθμος

Η αριθμητική μέθοδος η οποία περιγράφηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο διαθέτει αρκετές παράλληλες ιδιότητες, με συνέπεια να είναι εφικτή η κατασκευή αποδοτικού παράλληλου αλγορίθμου για σύγχρονες πολυεπεξεργαστικές αρχιτεκτονικές υπολογισμών. Το κεφάλαιο αυτό περιγράφει την κατασκευή αλγορίθμου για αρχιτεκτονικές κοινής μνήμης οι οποίες μπορούν να διαθέτουν μεγάλο πλήθος υπολογιστικών πυρήνων με μικρή υπολογιστική ισχύ για τον καθένα ή μικρό πλήθος αλλά με μεγάλη υπολογιστική ισχύ. Στην πρώτη κατηγορία ανήκουν τα υποσυστήματα επιτάχυνσης υπολογισμών όπως τα γραφικά υποσυστήματα (GPUs), ενώ στη δεύτερη κατηγορία τα πολυεπεξεργαστικά συστήματα πολλαπλών πυρήνων. Η ανάπτυξη εφαρμογών για την πρώτη κατηγορία μπορεί να γίνει με τη χρήση του προτύπου OpenACC, ενώ για την δεύτερη με το πρότυπο OpenMP. Στη συνέχεια ακολουθεί ο σχεδιασμός των αντίστοιχων αλγορίθμων για κάθε αρχιτεκτονική μετά από μια σύντομη περιγραφή του προτύπου υλοποίησης τους.

4.1 Το πρότυπο OpenMP

Το πρότυπο OpenMP (Open specifications for Multiprocessing) είναι ένα API που επιτρέπει την ανάπτυξη εφαρμογών σε αρχιτεκτονικές κοινής μνήμης με τη χρήση των γλωσσών προγραμματισμού C, C++ και Fortran. Κάνοντας χρήση πολλαπλών υπολογιστικών νημάτων, κάθε αλλαγή που προκαλείται στις διευθύνσεις της μνήμης από έναν επεξεργαστή είναι άμεσα διαθέσιμη από τους υπόλοιπους υπολογιστικούς πυρήνες.

Μια εφαρμογή η οποία έχει αναπτυχθεί με τη χρήση του πρότυπου OpenMP αρχικά εκτελείται σειριακά μέσω ενός κυρίαρχου υπολογιστικού νήματος (master thread) ως την επόμενη οδηγία της παράλληλης εκτέλεσης, όπου το master thread θα δημιουργήσει μια ομάδα από επεξεργαστικά νήματα τα οποία θα εκτελέσουν παράλληλα τις εντολές που βρίσκονται μέσα σε αυτήν την οδηγία. Το master thread αποτελεί και αυτό μέλος της ομάδας των υπολογιστικών νημάτων και έχει επιπρόσθετα την επίβλεψη της συνολικής διαδικασίας.

Όπως προαναφέρθηκε τα επεξεργαστικά νήματα έχουν άμεσα διαθέσιμες τις αλλαγές της κοινής μνήμης που προκαλούν τα υπόλοιπα επεξεργαστικά νήματα. Είναι πιθανό κάποιες μεταβλητές να χρησιμοποιηθούν αποκλειστικά από κάποιους υπολογιστικούς πυρήνες και η χρήση τους από τους υπόλοιπους να οδηγήσει σε λάθος υπολογισμούς. Γι' αυτό χρειάζεται να ορίσουμε σε κάθε παραλληλοποιήσιμο τμήμα του αλγορίθμου ποιες μεταβλητές θα είναι κοινής (shared) χρήσης, δηλαδή προσβάσιμες από όλα τα επεξεργαστικά νήματα ή αποκλειστικής (private) χρήσης, δηλαδή κάθε επεξεργαστικό νήμα θα διαθέτει δικό του αντίγραφο. Οι μεταβλητές που δεν θα οριστούν με κάποιο τρόπο θεωρούνται ότι είναι κοινής χρήσης (shared).

Η βασικότερη οδηγία OpenMP η οποία χρησιμοποιήθηκε στην παρούσα εργασία είναι αυτή της **\$omp parallel**. Σε αυτήν ο master thread δημιουργεί την ομάδα των επεξεργαστικών νημάτων που θα εκτελέσουν παράλληλα τις εντολές που βρίσκονται στην εμβέλεια αυτής της οδηγίας. Η αρίθμηση των επεξεργαστικών νημάτων ξεκινάει από το 0 που είναι ο master thread έως τον αριθμό $N - 1$ για N συνολικά επεξεργαστικά νήματα που αποτελούν την υπολογιστική ομάδα. Η σύνταξη αυτής της οδηγίας για την γλώσσα προγραμματισμού Fortran είναι:

```
$ omp parallel clause1(var1,var2,...), clause2(var3,...), ...  
...  
κώδικας  
...
```



```
$ end parallel
```

Μια βασική οδηγία που χρησιμοποιείται για την παράλληλη εκτέλεση επαναληπτικών διαδικασιών είναι η οδηγία **\$omp do**, η οποία υποδεικνύει ότι ο βρόγχος που ακολουθεί πρέπει να εκτελεστεί παράλληλα από τα διαθέσιμα επεξεργαστικά νήματα . Συντάσσεται ως εξής

```
$ omp do clause1(var1,var2,...), clause2(var3,...), ...
```

```
...
```

κώδικας

```
...
```

```
$ end do
```

Στην υλοποίηση του αριθμητικού σχήματος επίλυσης των εξισώσεων ρηχών υδάτων ο κώδικας αποτελείται από αρκετές ανεξάρτητες διεργασίες οι οποίες μπορούν να εκτελεστούν παράλληλα. Κάποιες διαδικασίες όμως θα πρέπει να εκτελεστούν με συγκεκριμένη σειρά,θα πρέπει να ταξινομηθούν σωστά, ώστε η καθεμία από αυτές να έχει τα σωστά δεδομένα.

Στη συνέχεια εμφανίζεται ο αλγόριθμος του Roe για πολυεπεξεργαστικές αρχιτεκτονικές οι οποίες διαθέτουν μικρό πλήθος υπολογιστικών πυρήνων με σημαντική υπολογιστική ισχύ. Ο αλγόριθμος έχει περιγραφεί με την χρήση των κατάλληλων OpenMP οδηγιών, και έχει την μορφή

Παράλληλος αλγόριθμος Roe με χρήση OpenMP.

```
$OMP PARALLEL DEFAULT(SHARED)
```

```
create initial conditions
```

```
$OMP END PARALLEL
```

```
do while (time < tfinal)
```

```

$OMP PARALLEL DEFAULT(SHARED)

  apply boundary conditions

$OMP END PARALLEL

$OMP PARALLEL DEFAULT(SHARED) PRIVATE(uaver, vaver, haver, c)

do i = -5, imax + 5
  do j = -5 , jmax + 5
    if ( (i,j) cell has a wet/dry or
      dry/wet relation with neighbors cells ) then
      treat u,v
      compute uaver,vaver
      revert u,v
    else
      compute uaver, vaver
    endif
    compute eigenvalues,eigenvectors
    if ( (i,j) cell has a wet/dry or
      dry/wet relation with neighbors cells ) then
      treat u,v
      compute a
      revert u,v
    else
      compute a
    endif
    if ( (i,j) cell has a wet/dry or
      dry/wet relation with neighbors cells ) then
      treat B
      compute b

```

```

    revert B
else
    compute b
endif
enddo
enddo

$OMP END PARALLEL

$OMP PARALLEL DEFAULT(SHARED) PRIVATE(indices, thetas )
do i = -5, imax + 5
do j = -5 , jmax + 5
    compute n, indices, thetas, phi
    compute R1+, R1-, R2+, R2-
enddo
enddo

$OMP END PARALLEL

$OMP PARALLEL DEFAULT(SHARED)
do i = -5, imax + 5
do j = -5 , jmax + 5
    compute R1, R2
    if ( (i,j) cell has a wet/dry or
        dry/wet relation with neighbors cells ) then
        treat u,v
        compute F, G
        revert u, v
    else
        compute F, G
    endif

```

```

        enddo
    enddo

$OMP END PARALLEL

$OMP PARALLEL DEFAULT(SHARED)

do i = -5, imax + 5
    do j = -5 , jmax + 5

        compute Q

        compute h , u , v

    enddo
enddo

$OMP END PARALLEL

$OMP DO

do i = -5, imax + 5
    do j = -5 , jmax + 5

        compute max_eigenvalue

    enddo
enddo

$END DO

$OMP END PARALLEL

compute time_step

enddo

apply boundary conditions

write results

```

4.2 Το πρότυπο OpenACC

Το πρότυπο OpenACC είναι ένα API(Application Programming Interface), μέσω του οποίου είναι δυνατή η εκτέλεση μέρους του αλγορίθμου από τον κεντρικό επεξεργαστή

σε μία ή σε περισσότερες συσκευές επιτάχυνσης υπολογισμών (accelerator devices). Επιταχυντής θεωρούμε οποιαδήποτε υποσύστημα εκτέλεσης υπολογισμών. Σε αυτήν την διατριβή ως τέτοιο υποσύστημα χρησιμοποιήθηκαν κάρτες γραφικών υποσυστημάτων (GPUs).

Η χρήση του προτύπου OpenACC στην ανάπτυξη μιας εφαρμογής περιλαμβάνει τη συμμετοχή του κεντρικού επεξεργαστή(CPU) ο οποίος έχει τη καθοδήγηση και τον κύριο της εκτέλεσης της εφαρμογής ενώ οι διεργασίες με μεγάλο υπολογιστικό κόστος και παράλληλες ιδιότητες ανατίθενται για εκτέλεση στην GPU. Ειδικότερα ο (CPU) θα αναλάβει να :

- Αντιστοιχεί θέσεις στη μνήμη του με ανάλογες της GPU για τα δεδομένα των υπολογισμών
- Διαχειρίζεται τη μεταφορά των δεδομένων της μνήμης μεταξύ CPU και GPU
- Επιβλέπει τη διεξαγωγή των διεργασιών της GPU

Η GPU εκτελεί τις παράλληλες διαδικασίες κι έτσι βρόγχοι εργασίας αντιστοιχίζονται σε κατάλληλα νήματα υπολογισμών(GPU threads), τα οποία αναλαμβάνουν την διεξαγωγή των αριθμητικών πράξεων.

Το πρότυπο OpenACC μπορεί να χρησιμοποιηθεί στις γλώσσες προγραμματισμού όπως C, C++ και Fortran, στην παρούσα διατριβή έχει χρησιμοποιηθεί η γλώσσα Fortran. Οι ανάλογες οδηγίες που χρησιμοποιήθηκαν σε αυτήν την εργασία μπορεί να θεωρηθεί ότι ανήκουν στις τρεις παρακάτω κατηγορίες :

- βασικές (construct directives)
- δεδομένων (execution directives)
- εκτέλεσης (data directives)

Όλες οι οδηγίες δέχονται συγκεκριμένους όρους (clauses) με προαιρετικά ορίσματα, οι οποίοι δίνουν συγκεκριμένες κατευθύνσεις μεταγλώττισης προς τον μεταφραστή (compiler). Τα ορίσματα των όρων μπορεί να είναι μεταβλητές, πίνακες, διανύσματα ή σταθερές.

Βασικές οδηγίες

Η **!\$acc kernels** είναι μια οδηγία, η οποία ορίζει ένα τμήμα του αλγορίθμου που θα εκτελεστεί από παράλληλες διαδικασίες στην GPU. Στην έναρξη της οδηγίας δημιουργείται ένας συγκεκριμένος αριθμός ομάδων (gangs) από υπολογιστικά νήματα και όλοι οι βρόγχοι εργασίας εκτελούνται παράλληλα από αυτές τις ομάδες διαδοχικά. Οι όροι της **!\$acc kernels** οδηγίας μπορεί να είναι όροι δεδομένων, ασύγχρονης εκτέλεσης, επιλογής του αριθμού των threads, κ.α. Η σύνταξή της είναι η εξής

```
!$acc kernels clause1(var1,var2,...), clause2(var3,...), ...  
...
```

κώδικας

```
...  
!$acc end kernels
```

Οδηγίες δεδομένων

!\$acc data είναι μια οδηγία η οποία ορίζει μια περιοχή διαδικασιών του αλγορίθμου η οποία περιλαμβάνει τη παράλληλη διεξαγωγή υπολογισμών από τη GPU με συγκεκριμένα δεδομένα. Αρχικά τα δεδομένα από τη μνήμη του επεξεργαστή (CPU) στη μνήμη της GPU (host to device transfer), ενώ στο τέλος της θα γίνει η αντίστροφη μεταφορά δεδομένων (device to host transfer). Η σύνταξη της είναι

```
!$acc data clause1(var1,var2,...), clause2(var3,...), ...  
...
```

κώδικας

...

```
!$acc end data
```

και η χρήση της συνοδεύεται από όρους, οι οποίοι καθορίζουν το τρόπο μεταφοράς των δεδομένων. Οι όροι που χρειάστηκαν για την υλοποίηση της παρούσας εργασίας είναι ο **copyin (var1,var2,...)** όρος, ο οποίος στέλνει τα δεδομένα που αναγράφονται μέσα στο όρισμα στην GPU. Αντίθετα ο **copy (var1,var2,...)** όρος στέλνει τα δεδομένα που αναγράφονται μέσα στον όρο στην GPU, αλλά αυτά θα επιστρέψουν στην μνήμη του CPU με την ολοκλήρωση της οδηγίας !\$acc data. Ο όρος **copyout (var1,var2,...)** στέλνει τα δεδομένα του ορίσματος από την μνήμη της GPU σε αυτή της CPU με την ολοκλήρωση της οδηγίας. Ο **create(var1,var2,...)** όρος δεν πραγματοποιεί μεταφορά δεδομένων ανάμεσα σε GPU και CPU αλλά ο CPU δεσμεύει θέσεις μνήμης στην GPU για τα δεδομένα που περιέχονται ως όρισμα.

Οδηγία εκτέλεσης

!\$acc loop είναι η κυριότερη οδηγία εκτέλεσης επαναληπτικών παράλληλων διαδικασιών και προηγείται κάθε τέτοιου βρόγχου. Είναι μια οδηγία η οποία θα πρέπει να βρίσκεται εντός της βασικής οδηγίας !\$acc kernels. Οι όροι που ακολουθούν την οδηγία !\$acc loop θα καθορίσουν τον τρόπο που θα εκτελεστεί ο βρόγχος. Η σύνταξή της είναι

```
!$acc loop  clause1(var1,var2,...), clause2(var3,...), ...
```

...

κώδικας

και ο κυριότερος όρος είναι ο **gang []** όρος που ορίζει τον αριθμό των ομάδων από υπολογιστικά νήματα που θα υλοποιήσουν τον βρόγχο. Ο προαιρετικός **vector []** όρος ορίζει τον αριθμό νημάτων κάθε ομάδας. Ο **independent** όρος ενημερώνει τον μεταγλωττιστή compiler ότι οι επαναλήψεις εντός του βρόγχου διαθέτουν ανεξάρτητες μεταβλητές. Τέλος ο **private []** όρος υποδεικνύει τη χρήση αποκλειστικών τοπικών μεταβλητών κάθε παράλληλης διαδικασίας του βρόγχου επαναλήψεων.

Στη συνέχεια παρουσιάζεται ο αλγόριθμος του αριθμητικού σχήματος Roe με χρήση οδηγιών του προτύπου OpenACC για αρχιτεκτονικές υπολογισμών οι οποίες περιλαμβάνουν επιταχυντή υπολογισμών.

Παράλληλος αλγόριθμος Roe με χρήση OpenACC

```
create initial conditions
call acc_init(acc_device_nvidia)
!$acc data copy( B[], h[], u[], v[] )
!$acc data create ( eigenvalues[], eigenvectors[], a[], b[], R1+[],
!$acc& R1-[], R2+[], R2-[], R1[], R2[], phi[], n[], F[], G[], Q[] )
do while (time < tfinal)
!$acc kernels
!$acc loop independent
do i = -5 , imax +5
!$acc loop
do j = -5 , jmax +5
    apply boundary conditions
enddo
enddo
!$acc end kernels
!$acc kernels
!$acc loop independent
do i = -5 , imax +5
!$acc loop private( uaver, vaver, haver, c )
do j = -5 , jmax +5
    if ( (i,j) cell has a wet/dry or
        dry/wet relation with neighbors cells ) then
        treat u[], v[]
```



```

compute uaver,vaver
revert u[] ,v[]

else

compute uaver, vaver

endif

compute eigenvalues[] ,eigenvectors[]

if ( (i,j)  cell has a wet/dry or
        dry/wet relation with neighbors cells ) then

treat u[] ,v[]

compute a[]

revert u[] ,v[]

else

compute a[]

endif

if ( (i,j)  cell has a wet/dry or
        dry/wet relation with neighbors cells ) then

treat B[]

compute b[]

revert B[]

else

compute b[]

endif

enddo

enddo

!$acc end kernels

!$acc kernels

!$acc loop independent

```

```

do i = -5 , imax +5
!$acc loop private( indices, thetas )
    do j = -5 , jmax + 5
        compute n[], indices, thetas, phi[]
        compute R1+[], R1-[], R2+[], R2-[]
    enddo
enddo

!$acc end kernels

!$acc kernels

!$acc loop independent
do i = -5 , imax +5
!$acc loop
    do j = -5 , jmax + 5
        compute R1[], R2[]
        if ( (i,j)  cell has a wet/dry or
                dry/wet relation with neighbors cells ) then
            treat u[] ,v[]
            compute F[], G[]
            revert u[], v[]
        else
            compute F[], G[]
        endif
    enddo
enddo

!$acc end kernels

!$acc kernels

!$acc loop independent

```

```

do i = -5, imax + 5
!$acc loop
    do j = -5 , jmax + 5
        compute Q[]
        compute h[], u[], v[]
    enddo
enddo

!$acc end kernels

!$acc kernels

!$acc loop
do i = -5, imax + 5
!$acc loop
    do j = -5 , jmax + 5
        compute max_eigenvalue
    enddo
enddo

!$acc end kernels

compute time_step
enddo

!$acc end data

apply boundary conditions
write results

```

Το επόμενο κεφάλαιο παρουσιάζει την μελέτη της απόδοσης του παραπάνω αλγορίθμου σε πολυεπεξεργαστικές αρχιτεκτονικές υπολογισμών με χρήση ή όχι επιταχυντών.

Κεφάλαιο 5

Προβλήματα σε 2 διαστάσεις

Σε αυτό το κεφάλαιο θα εφαρμόσουμε το αριθμητικό μας σχήμα σε τρία διαφορετικά φυσικά προβλήματα. Αρχικά θα ελέγξουμε την απόδοση του σχήματος του Roe παραθέτοντας μερικά στιγμιότυπα από την εξέλιξη των προβλημάτων και θα παρατηρήσουμε αν υπάρχει φυσική εξέλιξη των φαινομένων. Στη συνέχεια θα επαναλάβουμε τα προβλήματα αλλά αυτή τη φορά σε πιο πυκνά πλέγματα και θα ελέγξουμε αν υπάρχει βελτίωση στα αριθμητικά αποτελέσματα. Τέλος θα εκτελέσουμε την μέθοδο σε πολυεπεξεργαστικές αρχιτεκτονικές υπολογισμών με χρήση του προτύπου OpenMP και σε αρχιτεκτονικές υπολογισμών με επιταχυντή με χρήση του πρότυπου OpenACC και θα παρατηρήσουμε πόσο πιο υπολογιστικά αποδοτική γίνεται η μέθοδος.

Το πρώτο πρόβλημα είναι μια κυκλική κατάρρευση φράγματος [23] το οποίο είναι ένα καθαρά δοκιμαστικό πρόβλημα και σκοπό έχει τον έλεγχο της μεθόδου του Roe συγκρίνοντας την με άλλες μεθόδους που εφαρμόστηκαν στο [3]. Λόγω της απλότητας του προβλήματος (χωρίς πηγαίους όρους και χωρίς εμφάνιση στεγανών) η εφαρμογή του σε πιο πυκνά πλέγματα δε θα επιφέρει κάποια βελτίωση, καθώς και η εφαρμογή του σε πολυεπεξεργαστικές αρχιτεκτονικές υπολογισμών δεν έχει κάποιο ενδιαφέρον. Η κατάρρευση φράγματος σε κανάλι με τοπογραφία και τριβή [24] είναι το δεύτερο πρόβλημα το οποίο είναι πιο ρεαλιστικό φυσικό πρόβλημα και θα εφαρμοστεί σε πυκνότερα πλέγματα για να ελέγχει για βελτίωση της ακρίβειας. Ακόμα θα εφαρμοστεί σε πολυεπεξεργαστικές αρχιτεκτονικές υπολογισμών για πιο αποδοτικό υπολογισμό της ολοκλήρωσης του

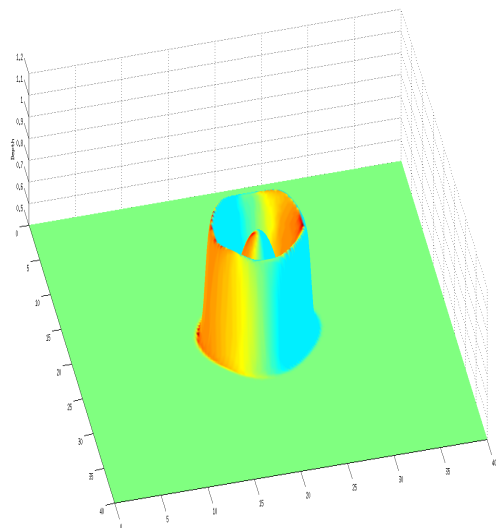
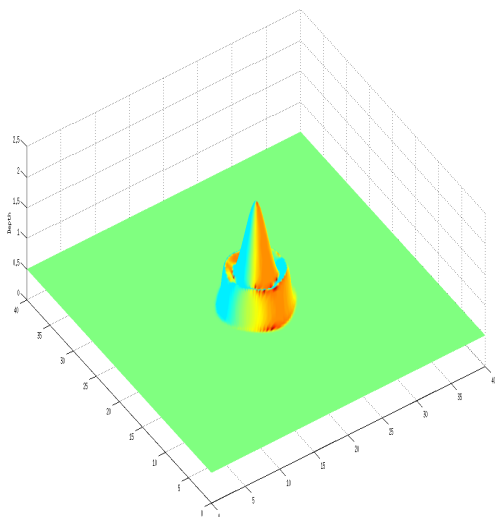
φαινομένου, δηλαδή μέχρι να επέλθει ηρεμία. Το τελευταίο και κύριο πρόβλημα που εφαρμόζεται είναι η κατάρρευση του φράγματος του Malpasset [12],[14],[16],[17]. Είναι πραγματικό γεγονός στο οποίο διαθέτουμε πραγματικά αποτελέσματα για να ελέγξουμε την απόδοση του σχήματος του Roe καθώς και την βελτίωση τους εφαρμόζοντας την μέθοδο σε πυκνότερα πλέγματα. Η χρησιμοποίηση των πολυεπεξεργαστικών αρχιτεκτονικών υπολογισμών είναι αναγκαία καθώς η υψηλής ακρίβειας ροές και πηγαίοι όροι που εφαρμόζονται έχουν υψηλές υπολογιστικές απαιτήσεις. Οι υπολογιστικές απαιτήσεις αυξάνονται υπερβολικά όταν εφαρμόσουμε πυκνότερα πλέγματα.

5.1 Κατάρρευση κυκλικού φράγματος

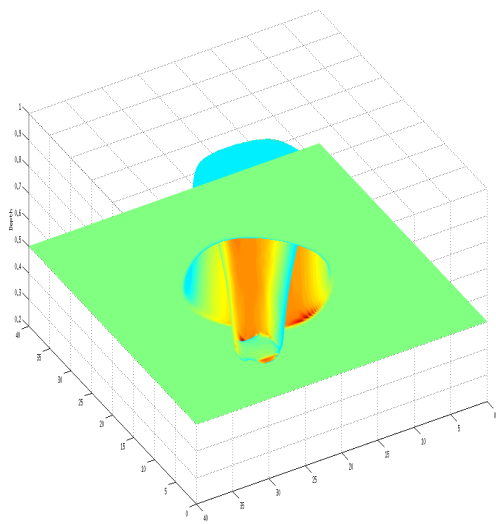
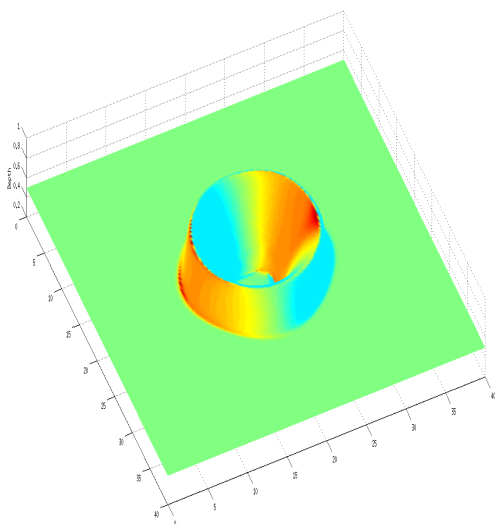
Αυτό ένα δοκιμαστικό πρόβλημα που σκοπό έχει να συγκρίνει την απόδοση του σχήματος Roe με άλλες καλώς ορισμένες μεθόδους που υπάρχουν στο [3], έτσι ώστε να μελετηθεί η διάδοση του κύματος χωρίς την ύπαρξη πηγαίου όρου ούτε στεγανών.

Θεωρούμε ένα κυκλικό φράγμα με ακτίνα 2.5 μέτρα στο κέντρο ενός τετράγωνου χωρίου με πλευρά 40 μέτρα, το φράγμα έχει 2.5 μέτρα ύψος ενώ εκτός του φράγματος το ύψος του νερού είναι στα 0.5 μέτρα. Έχουμε ορίσει ανακλαστικές συνοριακές συνθήκες αν και το συγκεκριμένο πρόβλημα το μελετάμε μέχρι να προσεγγίσει το σύνορο του χωρίου. Το πλέγμα που χρησιμοποιήθηκε είναι 200×200 και η συνθήκη CFL έχει οριστεί στη τιμή 0.4.

Στο σχήμα 5.1 , στο οποίο στα αριστερά διακρίνουμε το βάθος του νερού στα 0.4 δευτερόλεπτα , παρατηρούμε μια κυκλική ασυνέχεια να διαδίδεται προς τα έξω και παράλληλα μια κυκλική αραίωση προς το εσωτερικό του κύματος η οποία σχεδόν έχει φτάσει το κέντρο του φράγματος. Στα 0.7 δευτερόλεπτα (στο σχήμα 5.1 στα δεξιά) η κυκλική αραίωση έχει ήδη κατάρρευση στο κέντρο του φράγματος με αποτέλεσμα να δημιουργήσει μια έντονη πτώση του βάθους ακριβώς στο κέντρο του φράγματος. Στο σχήμα 5.2 παρουσιάζεται το βάθος του νερού στα 1.4 δευτερόλεπτα. Εδώ η κυκλική ασυνέχεια έχει διαδοθεί περισσότερο προς τα έξω και η ανακλώμενη εσωτερική αραίωση

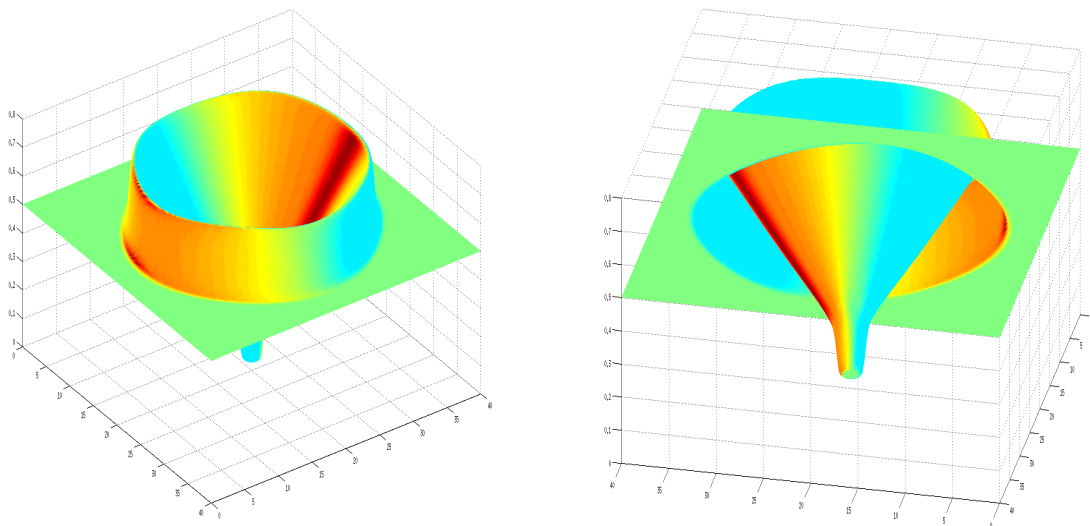


Σχήμα 5.1: Βάθος νερού σε κυκλική κατάρρευση φράγματος στα 0.4 (αριστερά) και 0.7 δευτερόλεπτα (δεξιά).

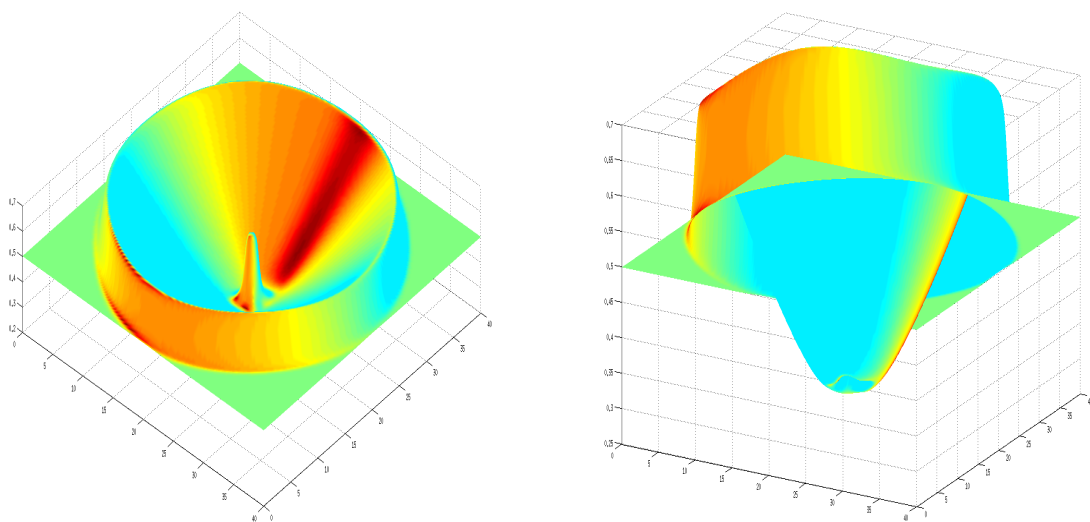


Σχήμα 5.2: Βάθος νερού σε κυκλική κατάρρευση φράγματος στα 1.4 δευτερόλεπτα σε πλάγια (αριστερά) και κάτω όψη (δεξιά).

έχει εξαπλωθεί σε αρκετά μεγάλο βαθμό με αποτέλεσμα η ελεύθερη επιφάνεια έχει πέσει κάτω από το αρχικό βάθος του νερού έξω από το φράγμα (0.5 μέτρα), δημιουργώντας μια δεύτερη κυκλική ασυνέχεια χαμηλότερα από αυτό το βάθος όπως φαίνεται στην κάτοψη του σχήματος 5.2 στα δεξιά. Στο σχήμα 5.3 παρουσιάζεται η πάνω και η κάτω όψη



Σχήμα 5.3: Βάθος νερού σε κυκλική κατάρρευση φράγματος στα 3.5 δευτερόλεπτα σε πάνω όψη (αριστερά) και σε κάτω όψη (δεξιά).



Σχήμα 5.4: Βάθος νερού σε κυκλική κατάρρευση φράγματος στα 4.7 δευτερόλεπτα σε πάνω όψη (αριστερά) και σε κάτω όψη (δεξιά).

του βάθους του νερού στα 3.5 δευτερόλεπτα , όπου η αρχική ασυνέχεια συνεχίζει να επεκτείνεται προς το σύνορο του χωρίου και η δεύτερη ασυνέχεια διαδίδεται προς το κέντρο . Στο τελευταίο γράφημα (σχήμα 5.4) παρουσιάζεται η πάνω και η κάτω όψη του βάθους του νερού στα 4.7 δευτερόλεπτα , στο οποίο μόλις έχει καταρρεύσει το δεύτερο

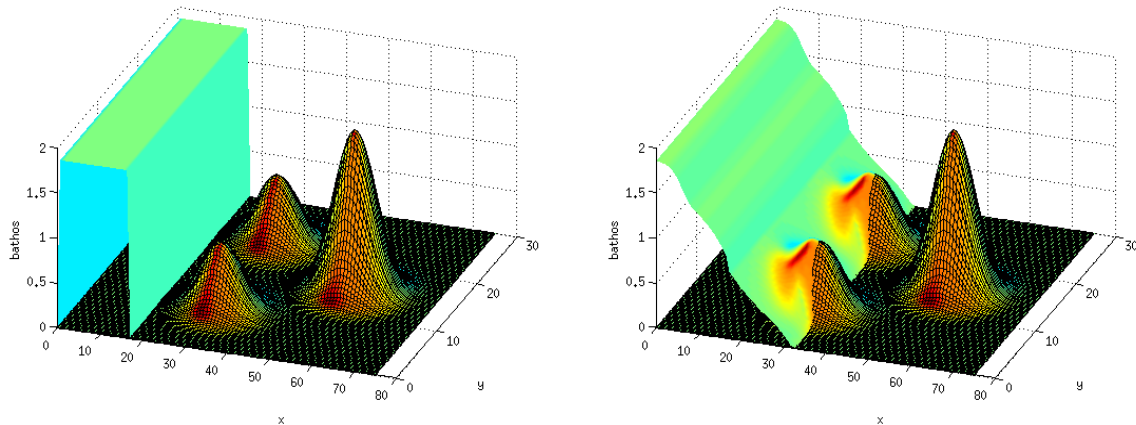
σοκ στο κέντρο του χωρίου μας και αρχίζει να διαδίδεται προς τα έξω.

Όλα τα αποτελέσματα που παρουσιάζονται στα σχήματα 5.1 έως 5.4 συμφωνούν πλήρως με τα αποτελέσματα που παρουσιάζονται στο [3] όπου το συγκεκριμένο πρόβλημα έχει μελετηθεί λεπτομερειακά.

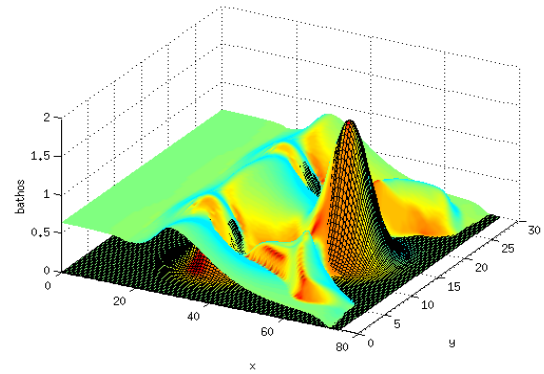
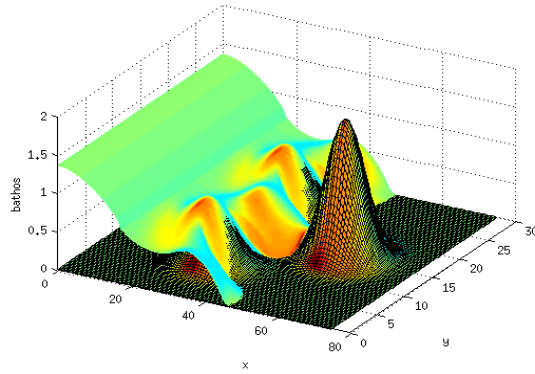
5.2 Κατάρρευση φράγματος σε κανάλι με τοπογραφία και τριβή

Σε αυτό το πρόβλημα ελέγχεται η απόδοση του σχήματος του Roe στον υπολογισμό σε πιο ρεαλιστικών καταστάσεων. Το πρόβλημα αυτό αποτελείται από ένα κανάλι μήκους 75 μέτρων και 30 μέτρων πλάτους, στο οποίο κανάλι στην αρχή του τοποθετείται ένα φράγμα μήκους 16 μέτρων και πλάτους 30 μέτρων ενώ το βάθος του νερού ορίζεται στα 1,875 μέτρα. Το υπόλοιπο κανάλι θεωρείται στεγανό ενώ είναι τοποθετημένα 3 βουνά, τα 2 είναι ισοϋψείς και βρίσκονται σε διπλανές τοποθεσίες ενώ το τρίτο είναι το πιο απομακρυσμένο και πιο ψηλό. Η τοπογραφία δίνεται από τον παρακάτω τύπο.

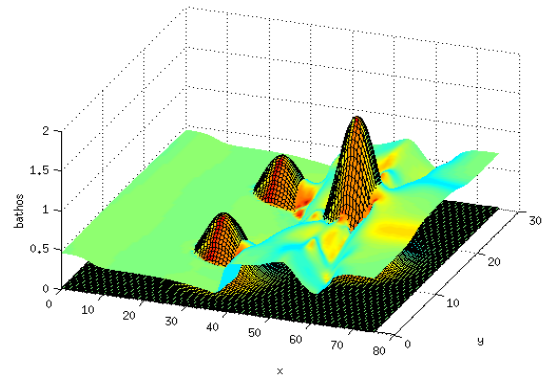
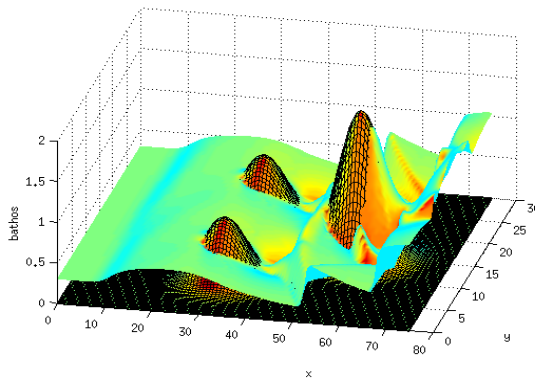
$$B(x, y) = \max[0, 0.75e^{-(0.15(x-30))^2 - (0.375(y-22))^2}, 0.75e^{-(0.15(x-30))^2 - (0.375(y-8))^2}, 1.8e^{-(0.15(x-55))^2 - (0.375(y-15))^2}] \quad (5.1)$$



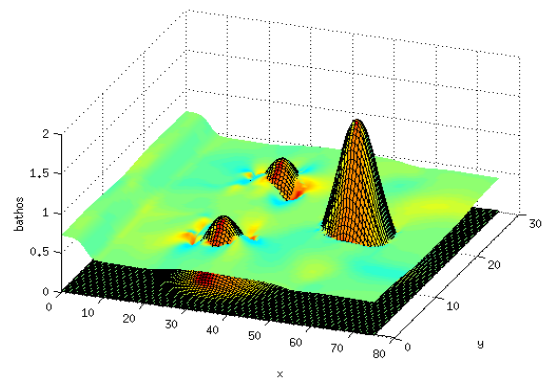
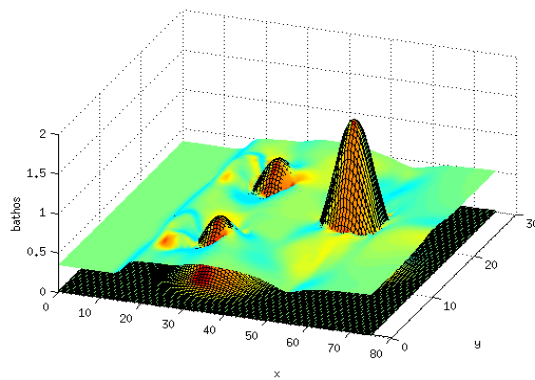
Σχήμα 5.5: Αρχικές συνθήκες (αριστερά) και εξέλιξη της ροής του νερού σε χρόνο $t = 2$ δευτερόλεπτα



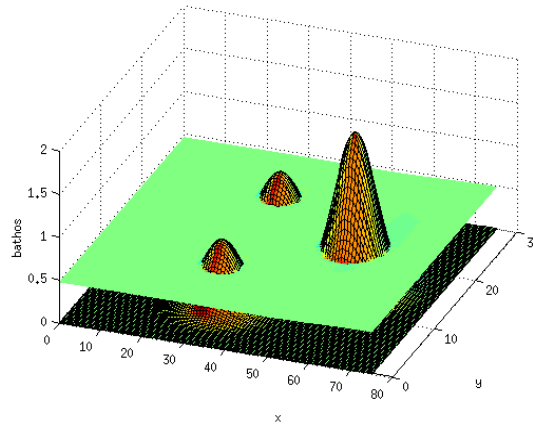
Σχήμα 5.6: Εξέλιξη της ροής του νερού σε χρόνο $t = 5$ δευτερόλεπτα (αριστερά) και σε χρόνο $t = 10$ δευτερόλεπτα.



Σχήμα 5.7: Εξέλιξη της ροής του νερού σε χρόνο $t = 20$ δευτερόλεπτα (αριστερά) και σε χρόνο $t = 30$ δευτερόλεπτα.



Σχήμα 5.8: Εξέλιξη της ροής του νερού σε χρόνο $t = 40$ δευτερόλεπτα (αριστερά) και σε χρόνο $t = 50$ δευτερόλεπτα.

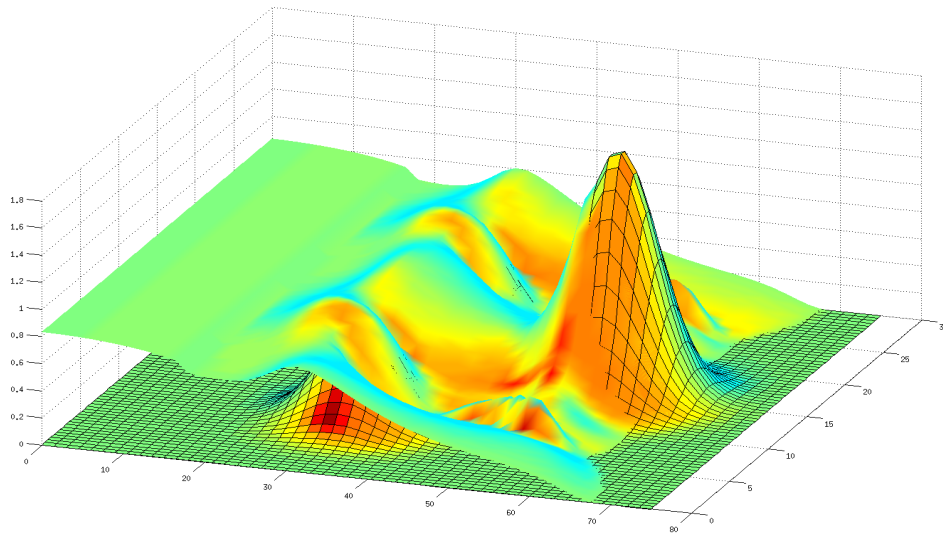


Σχήμα 5.9: Εξέλιξη της ροής του νερού σε χρόνο $t = 600$ δευτερόλεπτα.

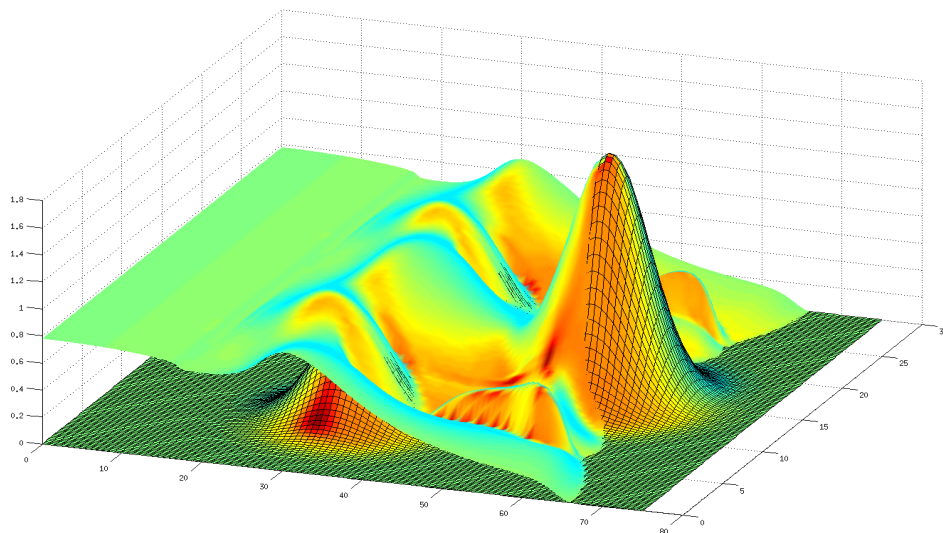
Το νερό μέσα στο φράγμα θεωρείται ακίνητο, δηλαδή οι ταχύτητες και προς τις δύο κατευθύνσεις είναι μηδέν. Οι συνοριακές συνθήκες είναι ανακλαστικές και ο αριθμός Manning που χρησιμοποιήθηκε σε αυτό το πρόβλημα είναι 0.0018. Στα σχήματα 5.5 μέχρι 5.9 απεικονίζονται εννέα διαφορετικά στιγμιότυπα καθώς εξελίσσεται το φαινόμενο. Αρχικά στο σχήμα 5.5 βλέπουμε την γέννηση του προβλήματος (αρχικές συνθήκες) και στη συνέχεια την εξέλιξή του μέχρι τα εξακόσια δευτερόλεπτα που θα επέλθει ηρεμία (κατάσταση ηρεμίας). Από την εξέλιξη του φαινομένου παρατηρούμε τα μικρότερα βουνά να σκεπάζονται τελείως κατά την εξάπλωση του κύματος ενώ στο ψηλότερο βουνό κάποια σημεία παραμένουν στεγανά συνεχώς. Η σύγκρουση του νερού με το βουνό και στη συνέχεια με το τοίχος του συνόρου έχουν την αναμενόμενη φυσική συμπεριφορά. Στην εξέλιξη του χρόνου παρατηρείται γένεση στεγανών στα μικρότερα τα οποία θα παραμείνουν μέχρι να φτάσουμε στην κατάσταση ισορροπίας.

Εφαρμογή σε πυκνότερα πλέγματα. Τα παραπάνω αριθμητικά αποτελέσματα τα λάβαμε από την εφαρμογή του αριθμητικού σχήματος σε πλέγμα διαστάσεων 50×75 . Στη συνέχεια θα εφαρμόσουμε το ίδιο πρόβλημα σε πυκνότερα πλέγματα και θα προσπαθήσουμε να παρατηρήσουμε αλλαγές που θα παρουσιαστούν στην εξέλιξη του φαινομένου. Εδώ πρέπει να θυμίσουμε ότι δεν έχουμε την ακριβή λύση του προβλήματος για να

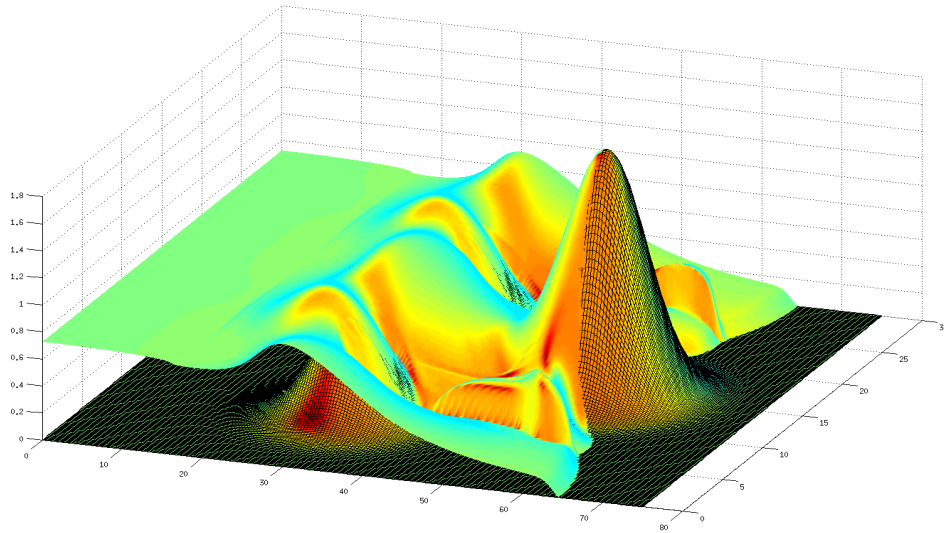
υπολογίσουμε το σφάλμα που θα δίνει κάθε σφάλμα και αν αυτό μικραίνει καθώς το πλέγμα πυκνώνει. Οπότε οι τυχόν βελτιώσεις θα πρέπει να τις παρατηρήσουμε από τα γραφήματα.



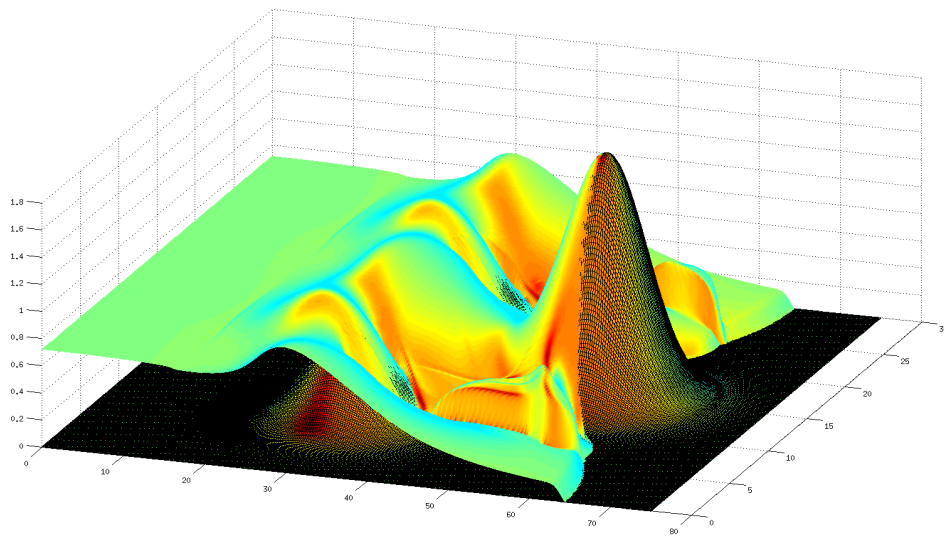
Σχήμα 5.10: Εξέλιξη της ροής του νερού σε χρόνο $t = 8,5$ δευτερόλεπτα σε πλέγμα 50×75 .



Σχήμα 5.11: Εξέλιξη της ροής του νερού σε χρόνο $t = 8,5$ δευτερόλεπτα σε πλέγμα 100×150 .



Σχήμα 5.12: Εξέλιξη της ροής του νερού σε χρόνο $t = 8,5$ δευτερόλεπτα σε πλέγμα 200×300 .



Σχήμα 5.13: Εξέλιξη της ροής του νερού σε χρόνο $t = 8,5$ δευτερόλεπτα σε πλέγμα 300×450 .

Τα σχήματα 5.11, 5.12, 5.13 απεικονίζουν και τα τρία το ίδιο στιγμιότυπο σε διαφορετικά πλέγματα ενώ στο σχήμα 5.10 είναι το αρχικό μας πλέγμα. Συγκρίνοντας τα σχήματα 5.10, 5.11 παρατηρούμε μια πιο λεπτομερής αποτύπωση του συγκεκριμένου στιγμιότυπου στην οποία φαίνονται πιο καθαρά τα αριθμητικά αποτελέσματα. Στη περιο-

χή των δύο χαμηλότερων βουνών δημιουργείτε γέννεση στεγανών περιοχών κάτι το οποίο μόλις που διακρίνεται στο αραιό πλέγμα ενώ στο πυκνότερο πλέγμα διακρίνονται καλύτερα οι διαστάσεις αυτής της περιοχής. Το κύμα που έχει προσκρούσει στο ψηλότερο βουνό αρχίζει να διαδίδεται περιμετρικά του βουνού δημιουργώντας κάποιες ασυνέχειες, στο αραιό πλέγμα οι ασυνέχειες μόλις που διακρίνονται και το μέτωπο του κύματος φαίνεται να έχει σχεδόν προσπεράσει τη θέση του βουνού. Στο πυκνό πλέγμα οι ασυνέχειες διακρίνονται καλύτερα καθώς και το μέτωπο του κύματος φαίνεται σε σωστότερη θέση.

Αν συγκρίνουμε τα σχήματα 5.11, 5.12, 5.13 παρατηρούμε τις ίδιες αλλαγές απλά η βελτίωση των αποτελεσμάτων δεν είναι τόσο σημαντική. Το αριθμητικό σχήμα εφαρμόστηκε και σε πυκνότερα πλέγματα (500×750 και 1000×1500) με τα αριθμητικά αποτελέσματα στο συγκεκριμένο στιγμιότυπο σχεδόν να μην παρουσιάζουν κάποια βελτίωση από τα αποτελέσματα που εμφανίζονται στο σχήμα 5.13.

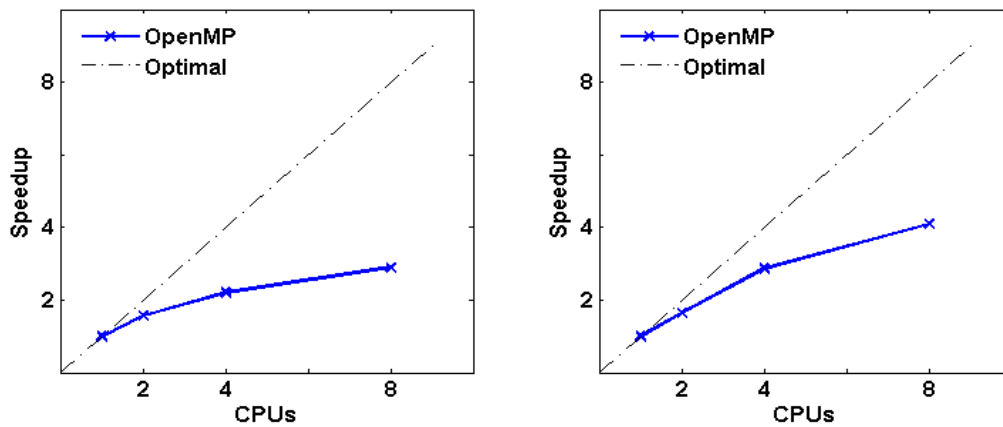
Για το συγκεκριμένο πρόβλημα μπορούμε να πούμε ότι ένα πλέγμα της τάξης του 300×450 μας αποδίδει μια ικανοποιητική προσομοίωση του φαινομένου και η χρησιμοποίηση πιο πυκνού πλέγματος δε θα βελτιώσει ιδιαίτερα τα αποτελέσματά μας.

Πολυεπεξεργαστικές αρχιτεκτονικές υπολογισμών Η εφαρμογή του αριθμητικού σχήματος σε πιο πυκνά πλέγματα έχει σαν αποτέλεσμα να γίνεται υπολογιστικά πιο απαιτητικό. Θα χρησιμοποιήσουμε πολυεπεξεργαστικές αρχιτεκτονικές υπολογισμών για να μειώσουμε το χρόνο εκτέλεσης της συγκεκριμένης εφαρμογής σε διάφορα μεγέθη πλέγματος. Αρχικά θα εφαρμόσουμε το πρότυπο OpenMP και θα υπολογίσουμε την απόδοση που θα επιφέρει στο χρόνο εκτέλεσης του αριθμητικού σχήματος σε σχέση με την σειριακή εκτέλεση. Το πρότυπο θα το εφαρμόσουμε με δυο, τέσσερις και οχτώ υπολογιστικούς πυρήνες και για τον υπολογισμό της απόδοσης του προτύπου θα υπολογίσουμε την επιτάχυνση (speedup) που δημιουργείτε στο χρόνο εκτέλεσης της εφαρμογής με τον τύπο [25]

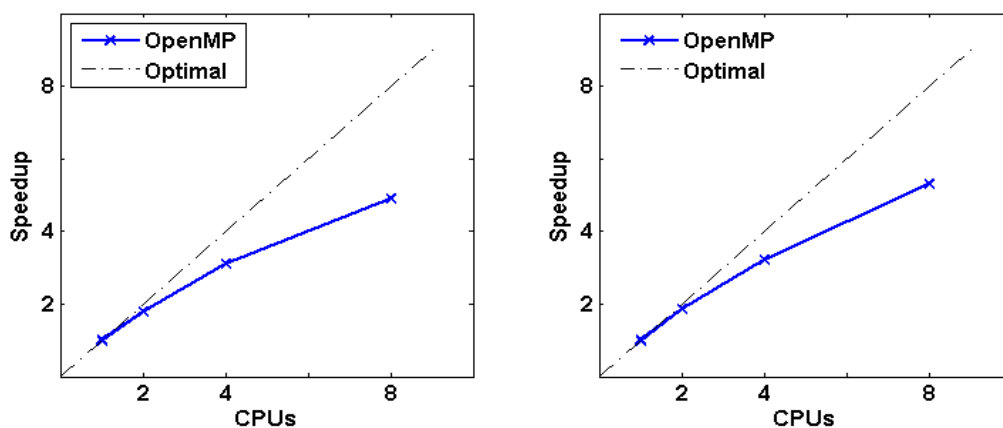
$$speedup = \frac{\text{απαιτούμενος χρόνος για έναν επεξεργαστή}}{\text{απαιτούμενος χρόνος για } n \text{ επεξεργαστές}}$$

μεγεθος πλέγματος	χρόνος εκτέλεσης OpenMP				χρονικό σιγμιότυπο
	1 CPU	2 CPUs	3 CPUs	4 CPUs	
50 × 75	64.58	40.91	29.13	22.24	600
100 × 150	522.35	316.97	181.57	125.80	600
200 × 300	279.11	162.04	93.18	56.94	10
300 × 450	699.52	402.5	229.9	140.18	10
500 × 750	2043.26	1106.64	632.57	503.54	5
1000 × 1500	16261.29	8934.77	4336.34	3871.73	5

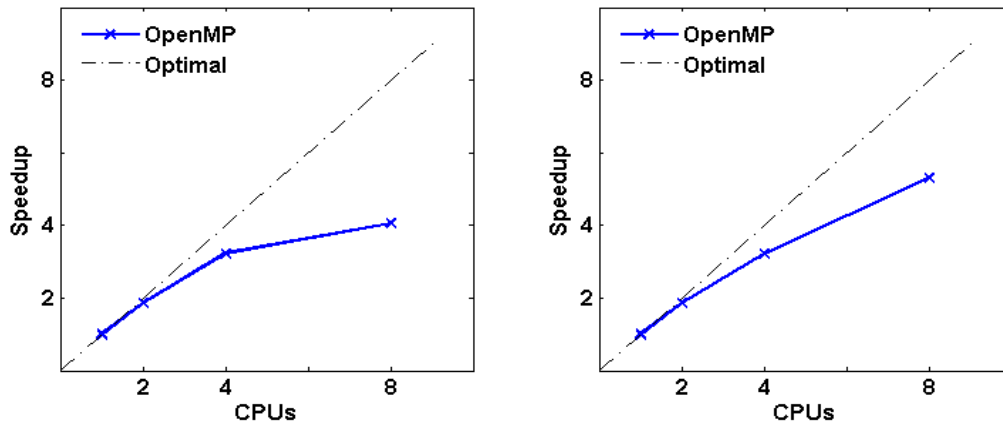
Πίνακας 5.1: Χρόνος εκτέλεσης της εφαρμογής σε 6 διαφορετικά πλέγματα με το πρότυπο OpenMP



Σχήμα 5.14: Το speedup σε πλέγμα διαστάσεων 50 × 75 (αριστερά) και 100 × 150 (δεξιά).



Σχήμα 5.15: Το speedup σε πλέγμα διαστάσεων 200 × 300 (αριστερά) και 300 × 450 (δεξιά).



Σχήμα 5.16: Το speedup σε πλέγμα διαστάσεων 500×750 (αριστερά) και 1000×1500 (δεξιά).

Στα γραφήματα 5.14, 5.15, 5.16 εμφανίζεται η επιτάχυνση (speedup) που προκύπτει με τη χρήση του πρότυπου OpenMP. Καλύτερες επιταχύνσεις επιτυγχάνονται για πυκνά πλέγματα, όπου οι υπολογισμοί είναι περισσότεροι, με συνέπεια η παραλληλοποίηση της μεθόδου να είναι αποδοτικότερη. Σε αυτό συμβάλει και το γεγονός ότι είναι μικρό το κόστος επικοινωνίας και συγχρονισμού σε σχέση με το υπολογιστικό.

Αρχιτεκτονικές υπολογισμών με επιταχυντή Θα υλοποιήσουμε τη μέθοδο για τα ίδια πλέγματα και τα ίδια χρονικά στιγμιότυπα κάνοντας χρήση του προτύπου OpenACC για αρχιτεκτονικές υπολογισμών με επιταχυντή. Θα υπολογίσουμε την απόδοση της συγκεκριμένης υλοποίησης υπολογίζοντας την επιτάχυνση των εφαρμογών. Τα αποτελέσματα των μετρήσεων εμφανίζονται στον παρακάτω πίνακα (πίνακας 5.2).

πλέγμα	στιγμιότυπο	σειριακή εκτέλεση	εκτέλεση OpenACC	Speedup
50×75	600	64.58	6.03	10.70
100×150	600	522.35	23.85	21.90
200×300	10	279.11	5.48	50.91
300×450	10	699.52	13.64	51.28
500×750	5	2043.26	35.25	57.96
1000×1500	5	16261.29	277.26	58.64

Πίνακας 5.2: Χρόνος εκτέλεσης της εφαρμογής σε 6 διαφορετικά πλέγματα με το πρότυπο OpenACC.

Όπως προκύπτει από το υπολογισμό των επιταχύνσεων (speedup), οι οποίες κλιμακώ-

νονται όσο αυξάνει το υπολογιστικό κόστος μεταξύ περίπου 10 και 60, ο παράλληλος αλγόριθμος της μεθόδου που παρουσιάστηκε εκμεταλλεύεται σε ικανοποιητικό επίπεδο τις υπολογιστικές δυνατότητες της κάρτας γραφικών.

5.3 Φράγμα Malpasset

Η κατάρρευση του φράγματος του Malpasset συχνά χρησιμοποιείται σαν τεστ-δοκιμής για shock-capturing μοντέλο υδραυλικής. Το φράγμα του Malpasset βρίσκεται στη Γαλλία και κατέρρευσε το 1959 ενώ βρισκόταν στην μέγιστη χωρητικότητά του ($55.100m^3$) προκαλώντας πάνω από 400 θανάτους. Για τα δεδομένα της τοπογραφία της περιοχής χρησιμοποιήθηκαν χάρτες ενώ δεδομένα για τα αποτελέσματα της πλημμύρας του καναλιού αντλήθηκαν από μετρήσεις που έκανε η αστυνομία μετά το συμβάν καθώς και από φυσική αναπαράσταση κλίμακας 1 : 400 που πραγματοποιήθηκε σε εργαστήριο. Τα δεδομένα από την αστυνομία είναι ο χρόνος που μεσολάβησε μέχρι να οθήσουν οι ηλεκτρικοί μετασχηματιστές της περιοχής (transformers arrival time) και το μέγιστο ύψος νερού από σημάδια σε τοίχους (police surveyed points). Από την φυσική αναπαράσταση της πλημμύρας υπολόγισαν σε άλλες τοποθεσίες τον χρόνο άφιξης του νερού (physical model arrival time) καθώς και το μέγιστο ύψος νερού (physical model maximum surface).

Δημιουργία τοπογραφίας Για να δημιουργήσουμε το παραπάνω πρόβλημα πρώτα θα κατασκευάσουμε την τοπογραφία $B_{i,j}$ σε όλα τα κελιά του πλέγματος με βάση τα υψομετρικά δεδομένα από χάρτες. Το πλέγμα του αριθμητικού σχήματος είναι κανονικό, δηλαδή αποτελείται από ορθογώνια παραλληλόγραμμα, ενώ τα υψομετρικά δεδομένα του φράγματος και της κοιλάδας αποτελούνται από ένα ακανόνιστο πλέγμα περίπου 13000 σημείων, το οποίο αντιστοιχεί σε περιοχή διαστάσεων $18,5 \text{ χλμ} \times 10 \text{ χλμ}$.

Για να κατασκευάσουμε την τοπογραφία του προβλήματος θα χρειαστεί από το ακανόνιστο πλέγμα των υψομετρικών δεδομένων να κάνουμε παρεμβολή στο κανονικοποιη-

μένο πλέγμα του αριθμητικού σχήματος. Η παρεμβολή που χρησιμοποιήθηκε (Inverse Distance Weighting [26]) είναι μία παρεμβολή με συνάρτηση βάρους που βασίζεται στην απόσταση τεσσάρων σημείων, δηλαδή για κάθε κελί του υπολογιστικού πλέγματος θα πάρουμε πληροφορία από τα τέσσερα πλησιέστερα σημεία από το αρχικό ακανόνιστο πλέγμα. Εδώ πρέπει να ορίσουμε την μέγιστη απόσταση που μπορεί να θεωρηθεί σαν πλησιέστερη καθώς για κάποια υπολογιστικά κελιά τα πλησιέστερα σημεία από το ακανόνιστο πλέγμα είναι αρκετά μέτρα μακριά. Από το σχήμα φαίνεται πως το ακανόνιστο πλέγμα σε κάποιες περιοχές είναι πιο πυκνό από άλλες, οπότε η μέγιστη απόσταση πρέπει να μεταβάλλεται ανάλογα σε ποιο υπολογιστικό κελί βρισκόμαστε έτσι ώστε τα κελιά που βρίσκονται στη κοιλάδα να έχουν τέσσερα πλησιέστερα σημεία και να μην δημιουργηθούν ασυνέχειες εσωτερικά της κοιλάδας.

Η μέγιστη απόσταση παίρνει διαφορετική τιμή σε τέσσερις περιοχές του ακανόνιστου πλέγματος, την περιοχή του φράγματος με μέγιστη απόσταση τα 70 μέτρα, την περιοχή της άνω κοιλάδας με μέγιστη απόσταση τα 90 μέτρα, την περιοχή της μεσαίας κοιλάδας με μέγιστη απόσταση τα 150 μέτρα και την περιοχή της κάτω κοιλάδας με την μέγιστη απόσταση να ορίζεται στα 300 μέτρα.

Η συνάρτηση που χρησιμοποιήθηκε για την παρεμβολή είναι η παρακάτω

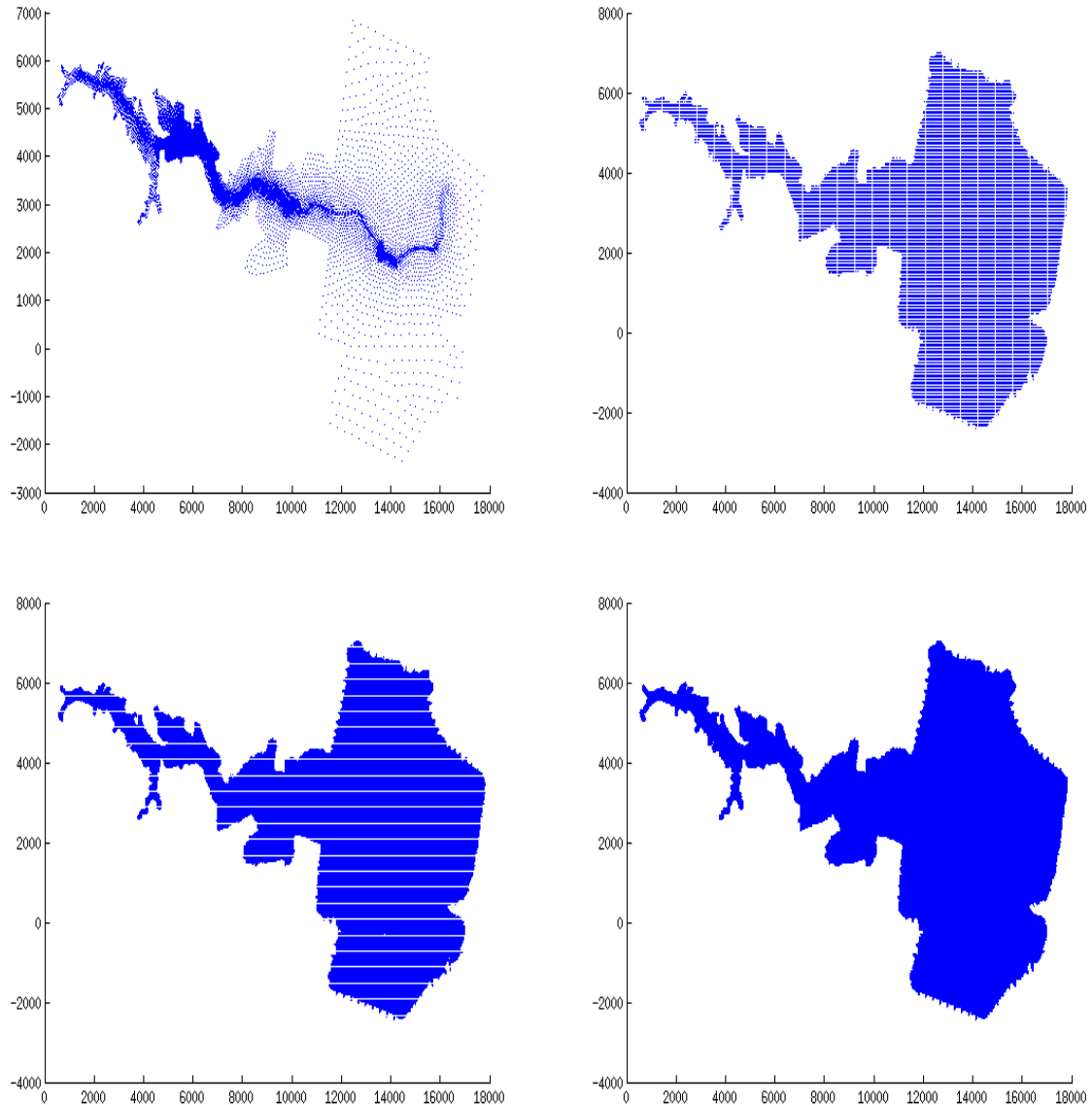
$$B_{i,j} = \sum_{k=1}^4 w_k b_k \quad (5.2)$$

όπου b_k είναι οι υψομετρικές τιμές της τοπογραφίας από τα 4 πλησιέστερα σημεία και w_k είναι η συνάρτηση βάρους η οποία δίνεται παρακάτω

$$w_k = \frac{\left(\frac{R-r_k}{Rr_k}\right)^2}{\sum_{l=1}^4 \left(\frac{R-r_l}{Rr_l}\right)^2} \quad (5.3)$$

R είναι η μέγιστη απόσταση που μπορεί να θεωρηθεί ως πλησιέστερη και r_k είναι η απόσταση που έχουν τα 4 σημεία του ακανόνιστου πλέγματος από τη θέση (i, j) του κανονικοποιημένου πλέγματος. Αυτή η συνάρτηση βάρους είναι μια συνάρτηση της Ευκλείδειας απόστασης και είναι ακτινικά συμμετρική με καθένα σημείο από τα 4 του ακανόνιστου πλέγματος. Σαν αποτέλεσμα η επιφάνεια που δημιουργείται από την πα-

ρεμβολή είναι σχεδόν συμμετρική με την πραγματική τοπογραφία και κάθε σημείο της επιφάνειας τείνει στη μέση τιμή των τεσσάρων σημείων που χρησιμοποίησε από το ακανόνιστο πλέγμα.



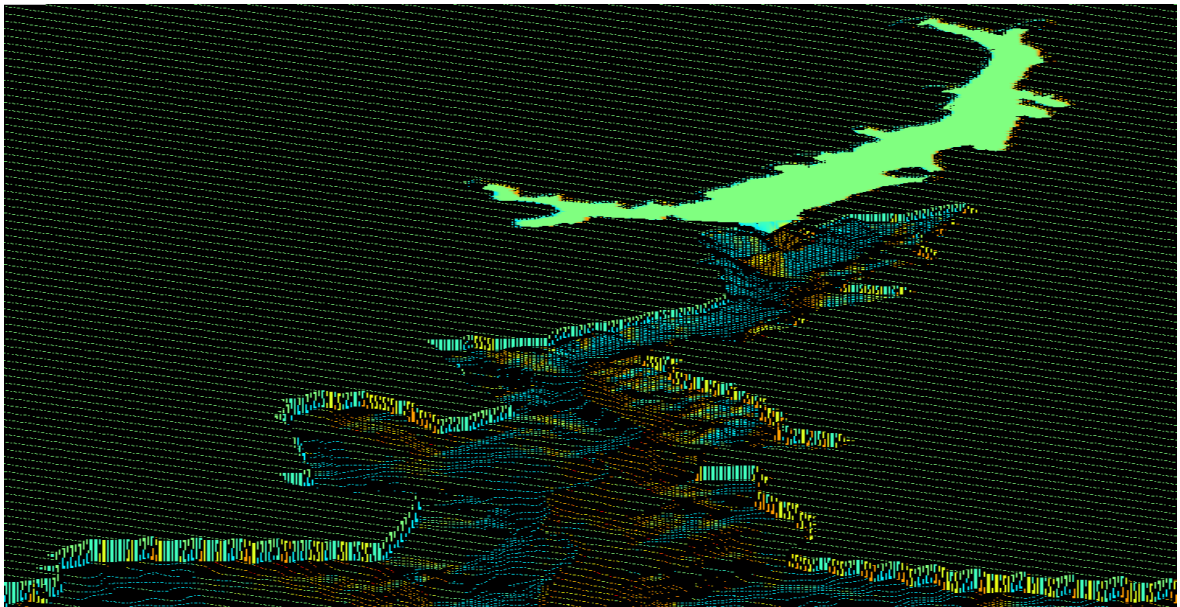
Σχήμα 5.17: Ακανόνιστο πλέγμα των υψομετρικών δεδομένων και τοπογραφία σε τρία διαφορετικά πλέγματα.

Στα παραπάνω γραφήματα (σχήμα 5.17) παρατηρούμε τα αποτελέσματα της παρεμβολής σε τρία διαφορετικά πλέγματα (480×150 , 650×200 , 1100×400) τα οποία είναι ικανοποιητικά καθώς δεν υπάρχουν ασυνέχειες στο εσωτερικό του κανονικοποιημένο

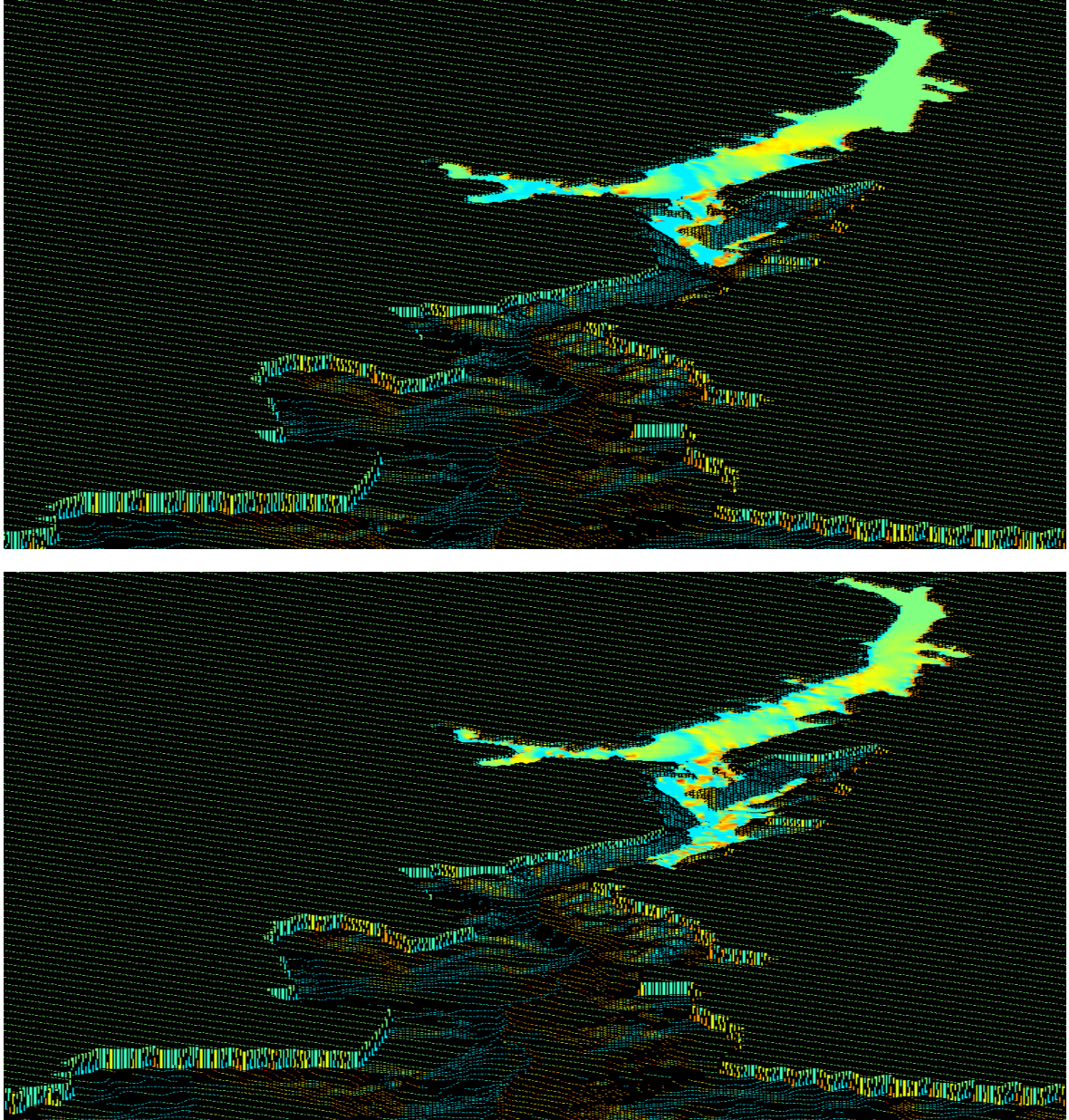
αριθμητικό πλέγμα. Ορισμένα κελιά είναι πολύ απομακρυσμένα από σημεία του ακανόνιστου πλέγματος, σαν αποτέλεσμα να μην έχουν τέσσερα πλησιέστερα σημεία. Γιαυτά τα σημεία ορίζουμε την τιμή της τοπογραφίας $B_{i,j}$ να παίρνει την σταθερή τιμή 105 μέτρα.

Αρχικές συνθήκες και συνοριακές συνθήκες Αρχικές συνθήκες στο προβλήματα για το ύψος του νερού $h_{i,j}$ έχουμε τιμές μόνο για την περιοχή εσωτερικά του φράγματος ενώ οπουδήποτε αλλού το ύψος του νερού $h_{i,j}$ θεωρείται μηδέν. Σύμφωνα με τα δεδομένα το φράγμα μπορεί να θεωρηθεί σαν μια ευθεία γραμμή που περνάει από τα σημεία (4701,4143) και (4655,4392) του πλέγματος οπότε στα κελιά πάνω από την ευθεία θα ορίσουμε τιμές για το ύψος του νερού με βάση την ελεύθερη επιφάνεια $h_{i,j} + B_{i,j}$ να είναι τα 100 μέτρα, δηλαδή $h_{i,j} = 100 - B_{i,j}$. Οι αρχικές συνθήκες για τις ταχύτητες προς τις δύο κατευθύνσεις $u_{i,j}, v_{i,j}$ είναι παντού μηδέν καθώς εντός του φράγματος το νερό θεωρείτο ακίνητο ενώ εκτός από αυτό είναι παντού στεγανά.

Οι συνοριακές συνθήκες του προβλήματος είναι ελεύθερης ροής αν και η πλημμύρα δεν θα φτάσει ποτέ στο σύνορο του χωρίου, εκτός από ένα μικρο κομμάτι που υπάρχει θάλασσα.

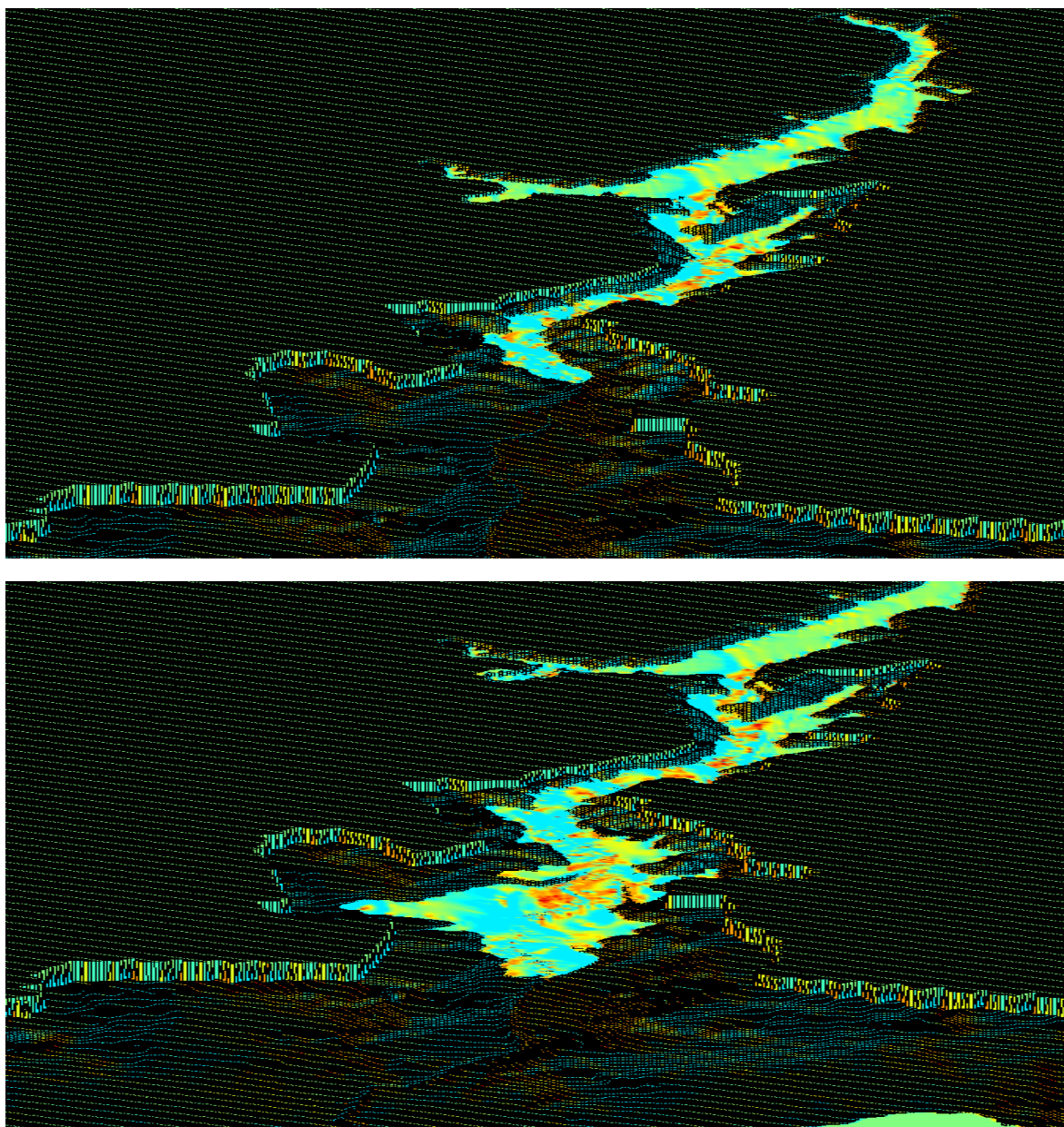


Σχήμα 5.18: Αρχικές συνθήκες φράγμα Malpasset.



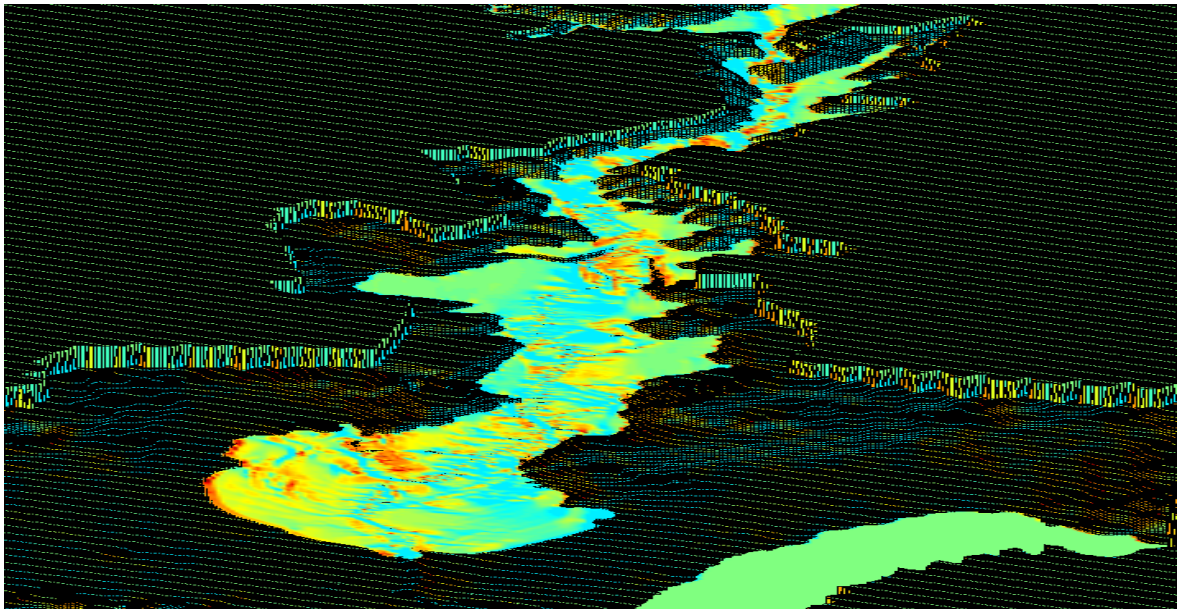
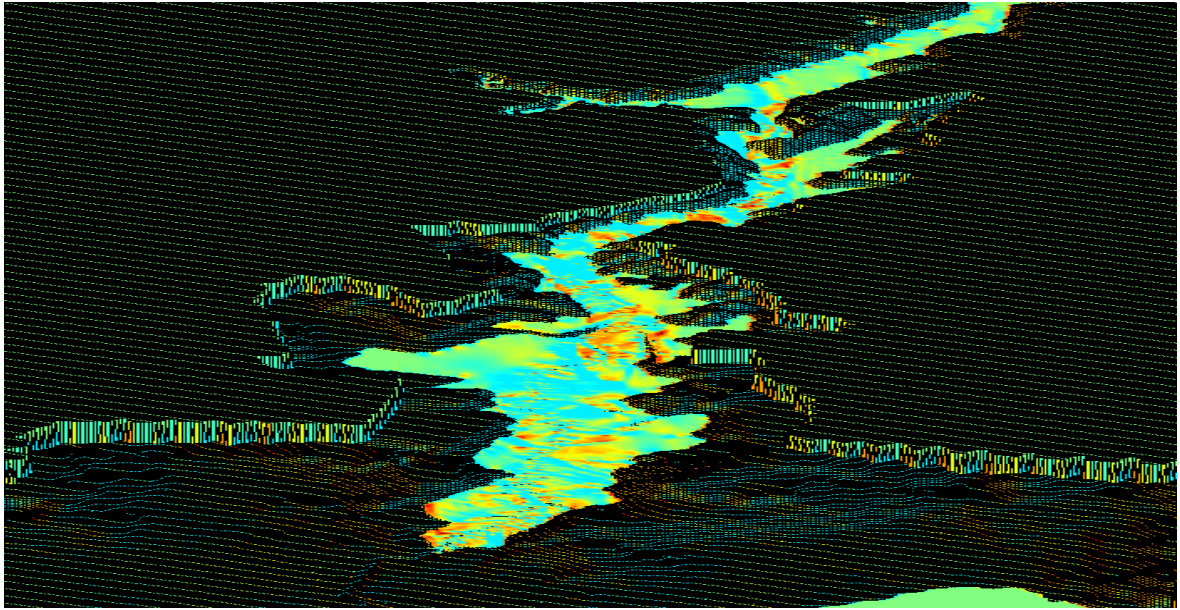
Σχήμα 5.19: Η εξέλιξη της ροής στα 100 δευτερόλεπτα(πάνω) και στα 200 δευτερόλεπτα(κάτω).

Απόδοση σχήματος Roe Τα σχήματα 5.18 - 5.22 απεικονίζουν σε οχτώ διαδοχικά στιγμιότυπα την εξέλιξη της ροής της πλημμύρας με βάση την ελεύθερη επιφάνεια $h_{i,j} + B_{i,j}$ πάνω από τη τοπογραφία $B_{i,j}$. Τα χρονικά στιγμιότυπα ξεκινάνε από χρόνο $t = 0$ δευτερόλεπτα (σχήμα 5.18), όπου παρατηρούμε τις αρχικές συνθήκες του προβλήματος με όλη η μάζα του νερού να βρίσκεται εντός του φράγματος, και τελειώνουν στο χρόνο $t = 2000$ δευτερόλεπτα (σχήμα 5.22) όπου η πλημμύρα έχει φτάσει στην θάλασσα. Η



Σχήμα 5.20: Η εξέλιξη της ροής στα 400 δευτερόλεπτα(πάνω) και στα 800 δευτερόλεπτα(κάτω).

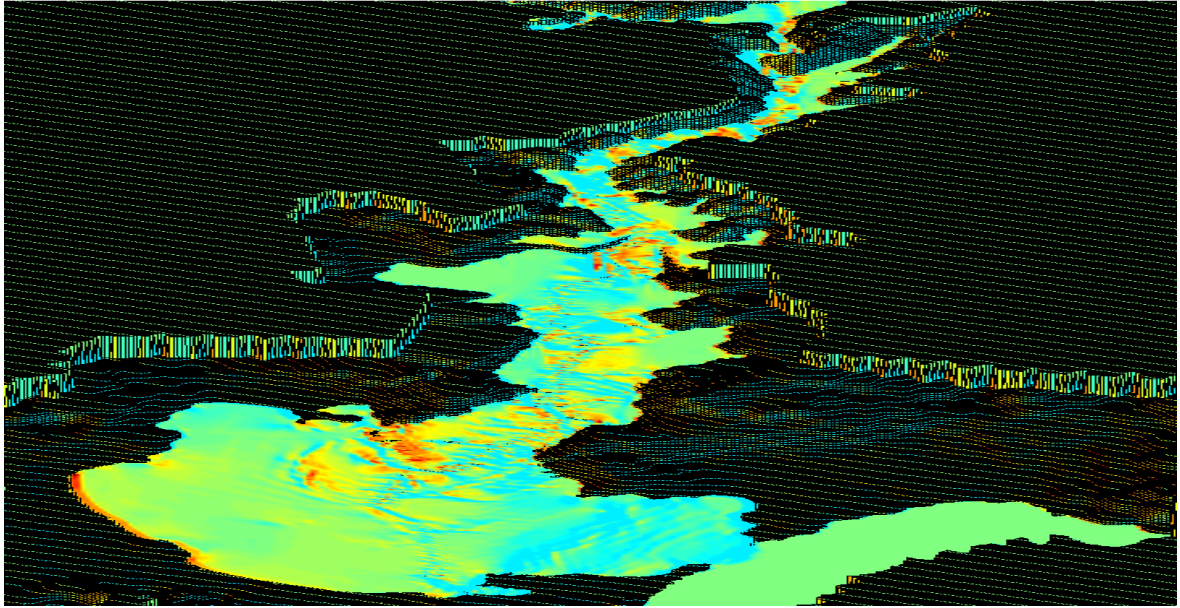
εξέλιξη της συνολικής έκτασης της πλημμύρας είναι φυσιολογική. Η ροή του νερού είναι ραγδαία στην απότομη και στενή περιοχή μπροστά από το φράγμα (σχήμα 5.19) ενώ όταν η πλημμύρα φτάνει στην επίπεδη περιοχή (σχήμα 5.21), πριν φτάσει στην θάλασσα, το μέτωπο του κύματος απλώνεται στην αχανή περιοχή της κοιλάδας. Καθώς η ροή εξελίσσεται η ελεύθερη επιφάνεια μέσα στο φράγμα ελαττώνεται αρκετά στα 30 πρώτα λεπτά από την κατάρρευση του φράγματος.



Σχήμα 5.21: Η εξέλιξη της ροής στα 1200 δευτερόλεπτα (πάνω) και στα 1600 δευτερόλεπτα(κάτω).

Στο σχήμα 5.23 παρατηρούμε τα αποτελέσματα του σχήματος Roe σε σύγκριση με τα πραγματικά δεδομένα (μετρήσεις της αστυνομίας) και με τα δεδομένα από το μοντελοποιημένο πείραμα που πραγματοποιήθηκε. Τα δεδομένα που έχουμε είναι

- ο χρόνος άφιξης του κύματος στους ηλεκτρικούς μετασχηματιστές (σχήμα 5.23 πάνω αριστερά)

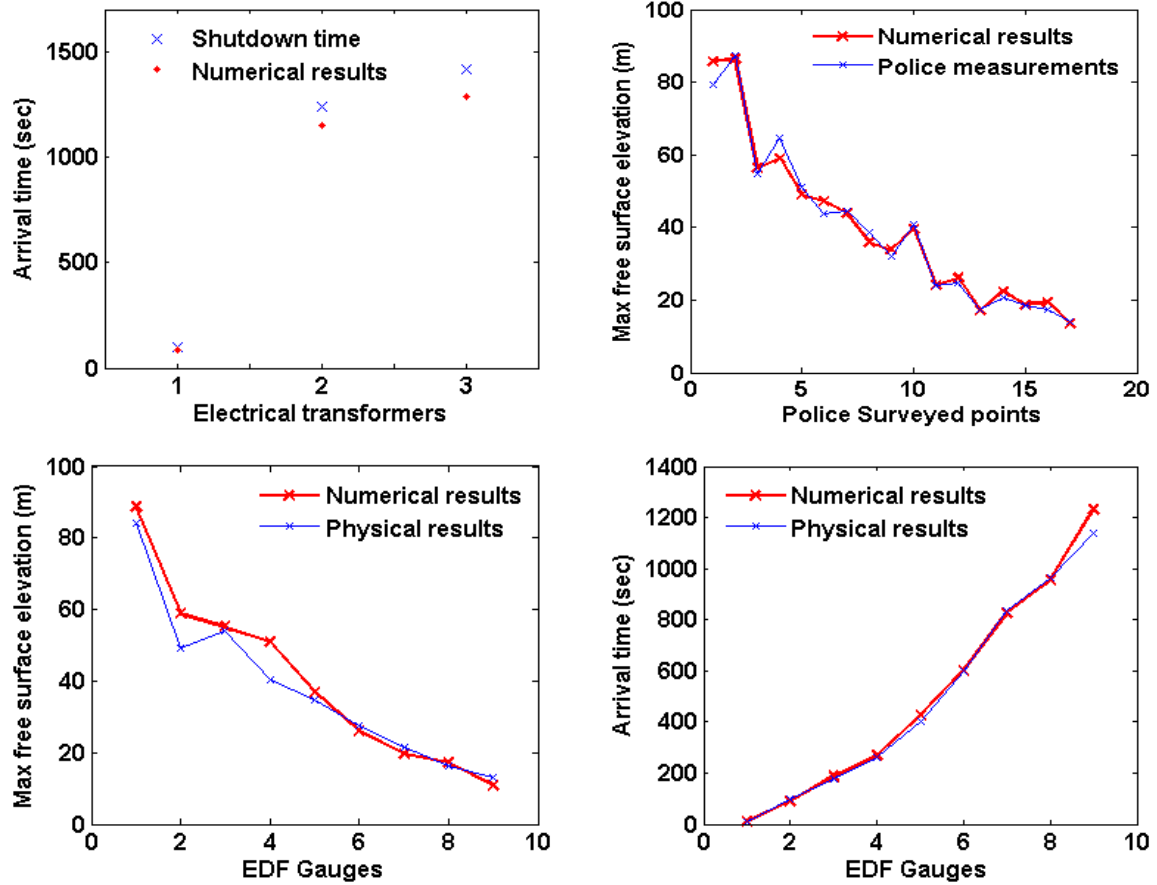


Σχήμα 5.22: Η εξέλιξη της ροής στα 2000 δευτερόλεπτα.

- η μέγιστη ελεύθερη επιφάνεια $h_{i,j} + B_{i,j}$ σε σημεία που μετρήθηκαν από την αστυνομία (σχήμα 5.23 πάνω δεξιά)
- η μέγιστη ελεύθερη επιφάνεια $h_{i,j} + B_{i,j}$ σε σημεία από το μοντελοποιημένο πείραμα (σχήμα 5.23 κάτω αριστερά)
- ο χρόνος άφιξης του κύματος σε σημεία από το μοντελοποιημένο πείραμα (σχήμα 5.23 κάτω δεξιά)

Στην επίλυση για την εύρεση του χρόνου άφιξης σε κάποιο σημείο θεωρούμε ότι το κύμα έχει προσεγγίσει σε αυτό όταν το ύψος του νερού ξεπεράσει τα 0.5 μέτρα.

Τα αριθμητικά αποτελέσματα της μεθόδου Roe στον υπολογισμό της μέγιστης ελεύθερης επιφάνειας συμφωνούν με τις μετρήσεις της αστυνομίας σε αρκετά από τα 17 διαφορετικά σημεία (σχήμα 5.23 πάνω δεξιά), σε κάποια σημεία όμως η προσέγγιση είναι μέτρια. Αυτό το λάθος στην προσέγγιση των αποτελεσμάτων συμβαίνει σε σημεία της περιοχής μπροστά από το φράγμα, όπου η τοπογραφία είναι στενή και απότομη. Όταν περάσει το μέτωπο του νερού από αυτά τα σημεία θα υπολογιστούν λύσεις με χαμηλό ύψος νερού $h_{i,j}$ και μεγάλες ταχύτητες $u_{i,j}, v_{i,j}$. Τις συγκεκριμένες λύσεις το αριθμητικό



Σχήμα 5.23: Σύγκριση αριθμητικών αποτελεσμάτων σε πυκνό πλέγμα (1100×400) με διάφορα δεδομένα από τα αποτελέσματα της πλυμμέρας.

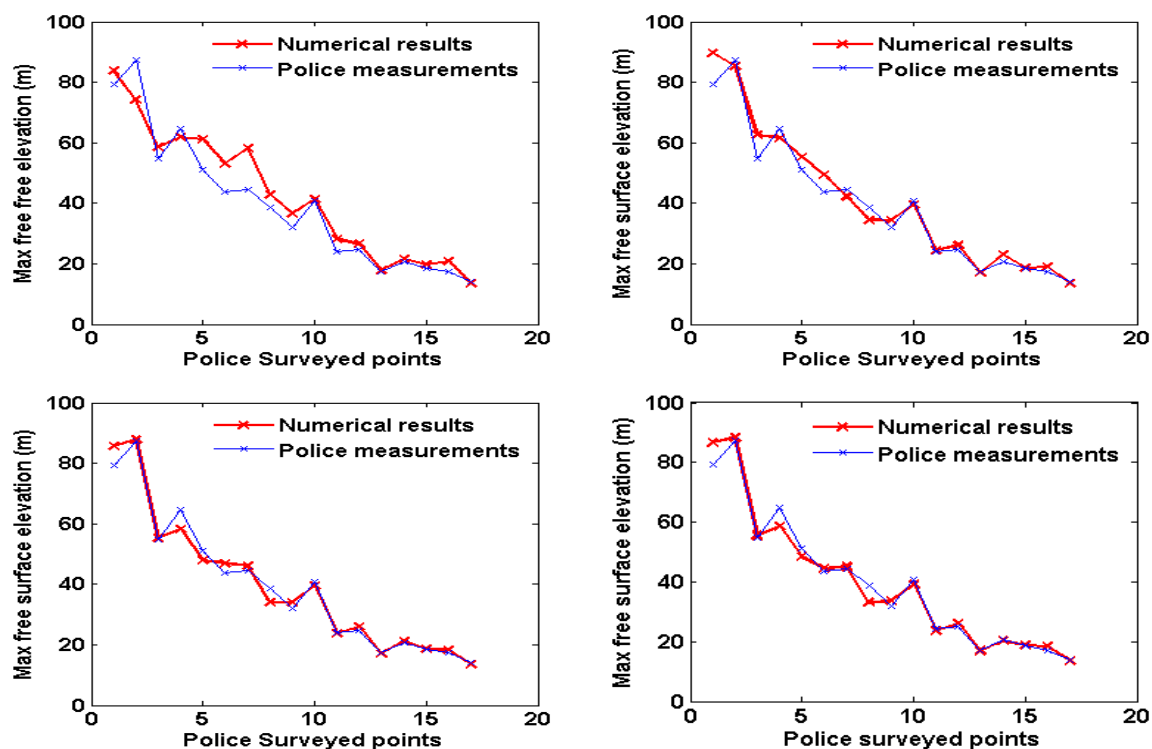
σχήμα αποτυγχάνει να τις υπολογίσει με ακρίβεια. Το πρόβλημα αυτό μπορεί να διορθωθεί μέχρι κάποιο βαθμό αλλάζοντας κάποιους παραμέτρους στο αριθμητικό σχήμα αλλά δε μπορούμε να το εξαλείψουμε καθώς το σχήμα μας είναι προσεγγιστικό.

Πρέπει να σημειωθεί ότι τα υψομετρικά δεδομένα που χρησιμοποιούμε για να κατασκευάσουμε τη τοπογραφία $B_{i,j}$ χρησιμοποιήθηκαν χάρτες του 1931 καθώς μετά την πλημμύρα η περιοχή είχε υποστεί δραματικές αλλαγές. Αυτό μπορεί να δικαιολογήσει το ότι σε κάποια σημεία δεν συμφωνούν το ύψος της τοπογραφίας με την υπολογισμένη ελεύθερη επιφάνεια. Για παράδειγμα σε τέσσερα σημεία στην επίπεδη κοιλάδα (13, 14, 16, 17) οι μετρήσεις της αστυνομίας για την ελεύθερη επιφάνεια $h_{i,j} + B_{i,j}$ είναι μικρότερη από την υπολογισμένη τοπογραφία $B_{i,j}$. Σαν αποτέλεσμα, κάποιες περιοχές

που είναι πλημμυρισμένες το αριθμητικό σχήμα να τις υπολογίζει στεγανές. Αυτές οι "α-στοχίες" μπορούμε να τις θεωρήσουμε αποδεκτές λαμβάνοντας υπ' όψιν την περιορισμένη ακρίβεια που έχουμε στα δεδομένα μας.

Τα αποτελέσματα της μεθόδου προσεγγίζουν αρκετά τα αποτελέσματα του μοντελοποιημένου πειράματος που έγινε με 1 : 400 κλίμακα. Η συμπεριφορά της μεθόδου όσον αφορά την ελεύθερη επιφάνεια είναι παραπλήσια με το φυσικό μοντέλο (εκτός το σημείο 4), ενώ οι χρόνοι άφιξης του κύματος συμφωνούν αρκετά με αυτούς του φυσικού μοντέλου. Απόκλιση στα αποτελέσματα υπάρχει αλλά θα πρέπει να σκεφτούμε πως η μοντελοποίηση του προβλήματος θα αλλοιώσει τη διάδοση του κύματος κυρίως λόγω της κλιμάκωσης της τραχύτητας του εδάφους στο φυσικό μοντέλο σε σχέση με το αληθινό συμβάν.

Εφαρμογή σε πυκνότερα πλέγματα. Θα εφαρμόσουμε το αριθμητικό σχήμα σε πιο πυκνά πλέγματα και θα ελέγξουμε αν πετυχαίνουμε πιο ακριβείς αριθμητικά αποτελέσματα. Θα ελέγξουμε τα αριθμητικά αποτελέσματα ,που παράγονται από τα διαφορετικά πλέγματα που εφαρμόζουμε, με τις μετρήσεις της αστυνομίας σε συγκεκριμένες τοποθεσίες. Στα σχήματα :: και 5.24 εμφανίζονται τα αριθμητικά αποτελέσματα μαζί με τις μετρήσεις της αστυνομίας σε πέντε διαφορετικά πλέγματα. Παρατηρείτε ότι στο 150×60 πλέγμα (σχήμα 5.24 πάνω αριστερά) το αριθμητικό σχήμα αποτυγχάνει να αποδώσει ακριβείς αποτελέσματα κυρίως στα σημεία 2 έως 12 τα οποία σημεία βρίσκονται στη περιοχή απότομη και στενή περιοχή ενώ τα σημεία που βρίσκονται στη πιο ανοιχτή και επίπεδη περιοχή(12 έως 17) προσεγγίζονται καλύτερα. Στο πλέγμα 280×120 (σχήμα 5.24 πάνω δεξιά) τα αριθμητικά αποτελέσματα βελτιώνονται αισθητά από το προηγούμενο πλέγμα αλλά και αυτά δεν συμφωνούν με τις μετρήσεις της αστυνομίας, πιο συγκεκριμένα τα σημεία 3 έως 9 δεν υπολογιστεί σωστά ενώ τα υπόλοιπα αρχίζουν να προσεγγίζουν τις μετρήσεις. Στο πλέγμα 480×150 (σχήμα 5.24 κάτω αριστερά) η ακρίβεια των αριθμητικών αποτελεσμάτων βελτιώθηκε και μπορούμε να θεωρήσουμε ότι στο συγκεκριμένο

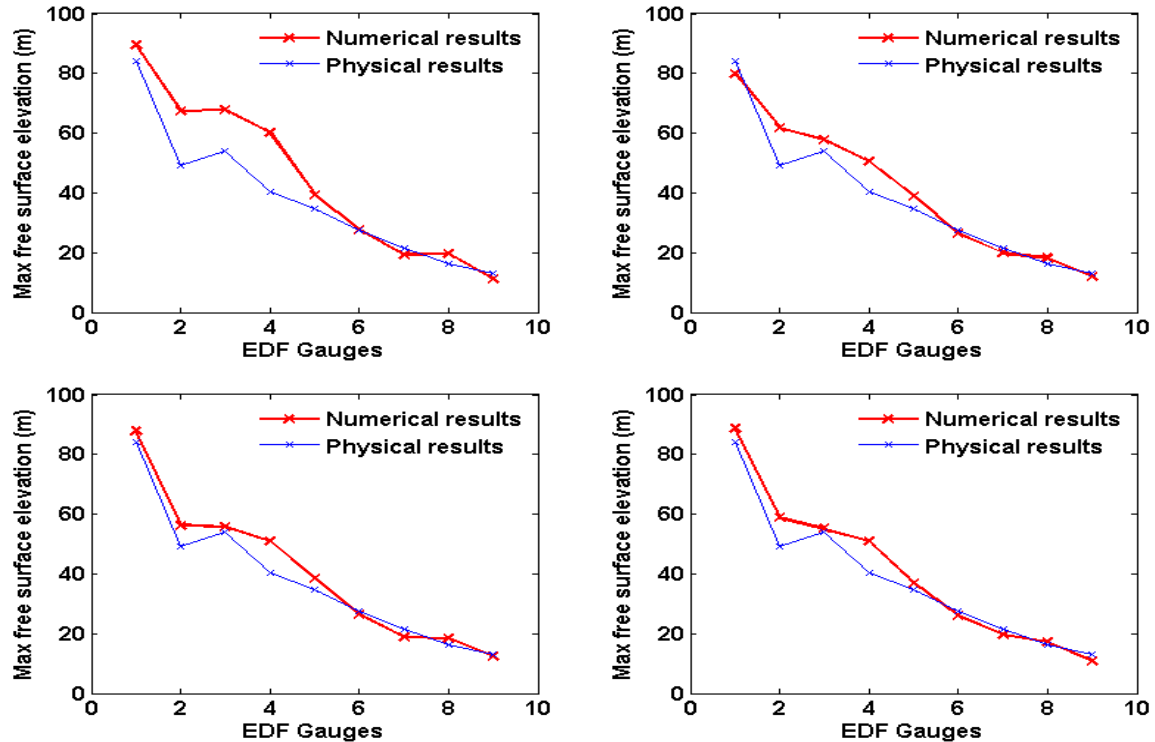


Σχήμα 5.24: Σύγκριση αριθμητικών αποτελεσμάτων με τις μετρήσεις της αστυνομίας σε 4 διαφορετικά πλέγματα:

- πλέγμα 150×60 πάνω αριστερά
- πλέγμα 280×120 πάνω δεξιά
- πλέγμα 650×200 κάτω αριστερά
- πλέγμα 1100×400 κάτω δεξιά

πλέγμα το αριθμητικό σχήμα αποδίδει αποτελέσματα που συμφωνούν με τις μετρήσεις. Καθώς το πλέγμα πυκνώνει περισσότερο (σχήμα 5.24 κάτω αριστερά) η βελτίωση των αριθμητικών αποτελεσμάτων ποικίλει ανάλογα το σημείο. Σε κάποια σημεία δεν υπάρχει καμία βελτίωση οπότε το αριθμητικό σχήμα αποτυγχάνει να τα υπολογίσει ανεξάρτητα το πλέγμα που χρησιμοποιήθηκε, ενώ σε κάποια άλλα σημεία υπάρχει μια μικρή βελτίωση. Παρόμοια συμπεριφορά παρατηρείτε αν συγκρίνουμε τα αριθμητικά αποτελέσματα με τα αποτελέσματα από τη φυσική μοντελοποίηση του προβλήματος. Από το σχήμα 5.25 παρατηρούμε τα αριθμητικά αποτελέσματα στο αραιό πλέγμα να μην συμφωνούν με τα

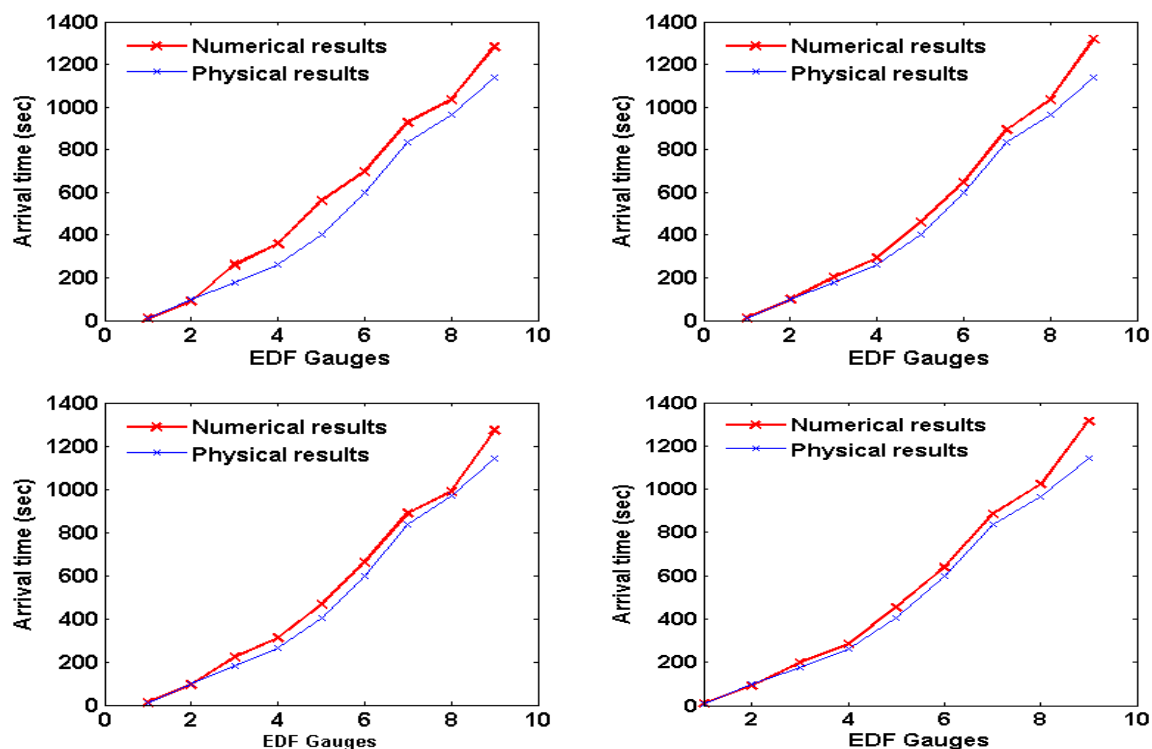
δεδομένα. Καθώς το πλέγμα πυκνώνει τα αποτελέσματα βελτιώνονται και το αριθμητικό σχήμα αποδίδει ποιοτικά αποτελέσματα σε πλέγμα διάστασης 480×150 , το οποίο δεν είναι ιδιαίτερα πυκνό. Στο σχήμα 5.26 παρατηρούμε σύγκριση των αριθμητικών αποτε-



Σχήμα 5.25: Σύγκριση αριθμητικών αποτελεσμάτων με τα δεδομένα από την φυσική προσο-
μοίωση για την μεγιστη ελεύθερη επιφάνεια σε 4 διαφορετικά πλέγματα :

- πλέγμα 150×60 πάνω αριστερά
- πλέγμα 280×120 πάνω δεξιά
- πλέγμα 650×200 κάτω αριστερά
- πλέγμα 1100×400 κάτω δεξιά

λεσμάτων για το χρόνο άφιξης της πλημμύρας σε συγκεκριμένα σημεία με τα δεδομένα από τη φυσική προσομοίωση. Στο συγκεκριμένο γράφημα ελέγχουμε τη ταχύτητα της ροής η οποία δεν επηρεάζεται ιδιαίτερα από τις διαστάσεις του πλέγματος, αν εξαιρέ-
σουμε το αραιό πλέγμα το οποίο αποτυγχάνει να αποδώσει ποιοτικά αποτελέσματα. Στο
συγκεκριμένο πρόβλημα από την παρατήρηση των αποτελεσμάτων μπορεί να θεωρηθεί



Σχήμα 5.26: Σύγκριση αριθμητικών αποτελεσμάτων με τα δεδομένα από την φυσική αναπαράσταση για τον χρόνο άφιξης της ροής σε 4 διαφορετικά πλέγματα :

- πλέγμα 150×60 πάνω αριστερά
- πλέγμα 280×120 πάνω δεξιά
- πλέγμα 650×200 κάτω αριστερά
- πλέγμα 1100×400 κάτω δεξιά

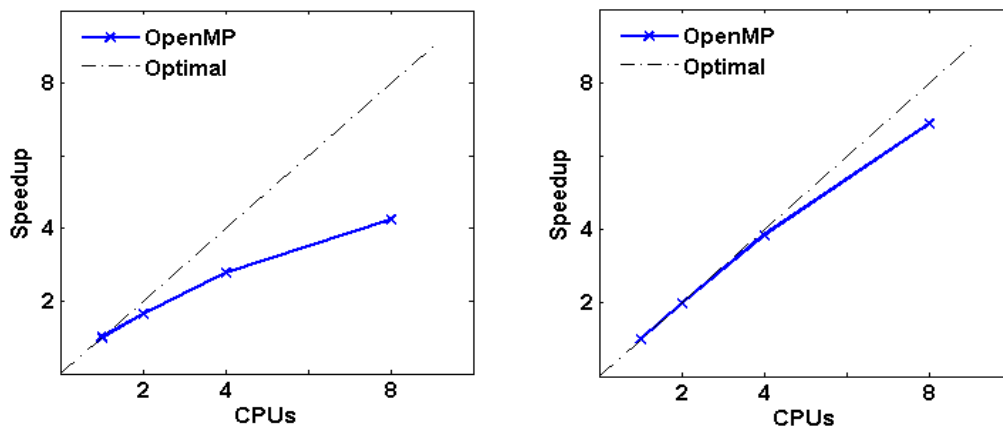
ότι το πλέγμα τάξης 1100×440 αποδίδει αρκετά ποιοτική προσομοίωση του φαινομένου και η χρησιμοποίηση πιο πυκνού πλέγματος δε θα βελτιώσει ιδιαίτερα τα αριθμητικά αποτελέσματα.

Πολυεπεξεργαστικές αρχιτεκτονικές υπολογισμών Η εφαρμογή του αριθμητικού σχήματος σε πιο πυκνά πλέγματα η μέθοδος γίνεται αρκετά υπολογιστικά απαιτητική. Σκοπός είναι να μειώσουμε το χρόνο εκτέλεσης της εφαρμογής εκμεταλλευόμενοι τις πολυεπεξεργαστικές αρχιτεκτονικές υπολογισμών. Θα εργαστούμε όπως στο πρόβλη-

μα 2 και θα εφαρμόσουμε το το πρότυπο OpenMP υπολογίζοντας την απόδοση που θα επιφέρει στο χρόνο εκτέλεσης του αριθμητικού σχήματος σε σχέση με το σειριακό χρόνο εκτέλεσης. Το πρότυπο θα το εφαρμόσουμε με δυο, τέσσερις και οχτώ υπολογιστικούς πυρήνες και για τον υπολογισμό της απόδοσης του προτύπου θα υπολογίσουμε την επιτάχυνση (speedup) που δημιουργείτε στο χρόνο εκτέλεσης της εφαρμογής. Τα αποτελέσματα των μετρήσεων εμφανίζονται στο παρακάτω πίνακα (πίνακας 5.3)

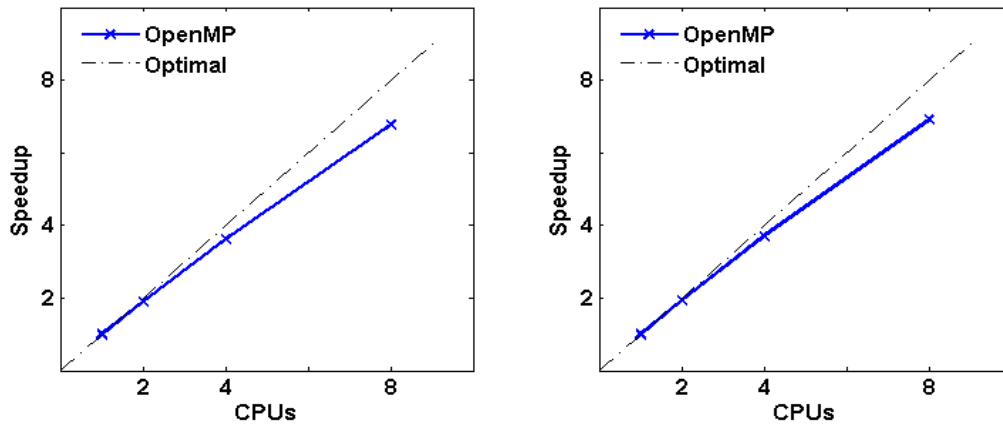
μεγεθος πλέγματος	χρόνος εκτέλεσης OpenACC				χρονικό στιγμιότυπο
	1 CPU	2 CPUs	3 CPUs	4 CPUs	
150 × 60	10.45	6.36	3.74	2.45	2000
280 × 120	186.17	92.99	48.25	26.99	2000
480 × 150	603.42	316.63	166.15	89.10	2000
650 × 200	699.52	402.5	424,33	225.90	2000
1100 × 400	10953.95	5673.7	2903.18	1555.72	2000
2005 × 900	103706.32	51335.08	28273.78	19246.37	2000

Πίνακας 5.3: Χρόνος εκτέλεσης της εφαρμογής σε 6 διαφορετικά πλέγματα με το πρότυπο OpenMP.

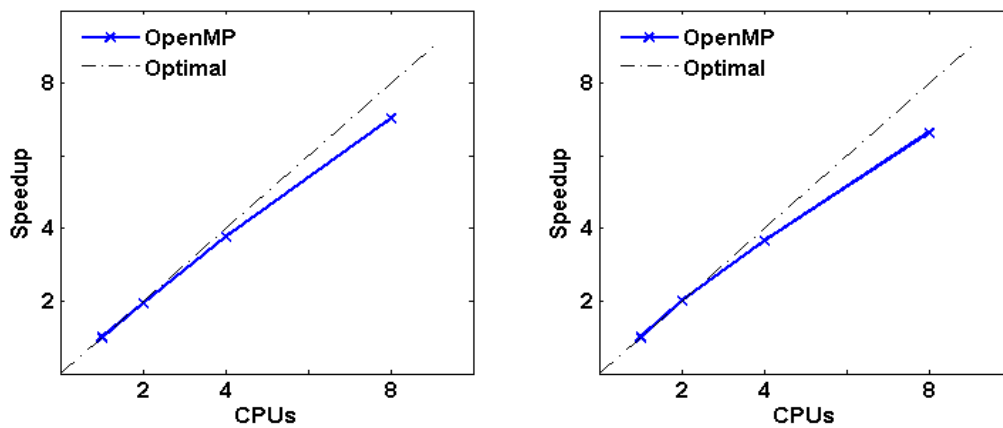


Σχήμα 5.27: Το speedup σε πλέγμα διαστάσεων 150 × 60 (αριστερά) και 280 × 120 (δεξιά).

Στα σχήματα 5.27 , 5.28 και 5.29 εμφανίζεται η επιτάχυνση speedup που προκύπτει με τη χρήση του πρότυπου OpenMP. Έχουμε παρόμοια συμπεριφορά με το πρόβλημα



Σχήμα 5.28: Το speedup σε πλέγμα διαστάσεων 480×150 (αριστερά) και 650×200 (δεξιά).



Σχήμα 5.29: Το speedup σε πλέγμα διαστάσεων 1100×400 (αριστερά) και 2005×900 (δεξιά).

2 όπου καλύτερες επιταχύνσεις επιτυγχάνονται σε πυκνά πλέγματα στις οποίες έχουμε μεγάλο υπολογιστικό κόστος σε σχέση με το κόστος επικοινωνίας και συγχρονισμού.

Αρχιτεκτονικές υπολογισμών με επιταχυντή Θα υλοποιήσουμε τη μέθοδο για τα ίδια πλέγματα και τα ίδια χρονικά στιγμιότυπα κάνοντας χρήση του προτύπου OpenACC για αρχιτεκτονικές υπολογισμών με επιταχυντή. Θα υπολογίσουμε την απόδοση της συγκεκριμένης υλοποίησης υπολογίζοντας την επιτάχυνση των εφαρμογών. Τα αποτελέσματα των μετρήσεων εμφανίζονται στον παρακάτω πίνακα (πίνακας 5.2).

πλέγμα	στιγμιότυπο	σειριακή εκτέλεση	εκτέλεση OpenACC	Speedup
150×60	2000	10.45	1.15	9.03
280×120	2000	186.17	4.2	43.6
480×150	2000	603.42	13.02	46.34
650×200	2000	1574.09	31.56	49.87
1100×400	2000	10953.95	184.03	59.52
2005×900	2000	103706.07	1212.84	85.50

Πίνακας 5.2: Χρόνος εκτέλεσης της εφαρμογής σε 6 διαφορετικά πλέγματα με το πρότυπο OpenACC.

Από τον υπολογισμό των επιταχύνσεων speedup βλέπουμε ότι τα δύο πρότυπα έχουν την παρόμοια συμπεριφορά, δηλαδή σε πιο πυκνά πλέγματα αποδίδουν καλύτερες επιταχύνσεις. Το πρότυπο OpenACC ,όμως , αποδίδει πολύ μεγαλύτερες επιταχύνσεις οι οποίες ξεκινάνε από 9.03 για το 150×60 πλέγμα και φτάνει την τιμή 85.50 για το 2005×900 πλέγμα.

Κεφάλαιο 6

Συμπεράσματα

Στη παρούσα εργασία αναπτύξαμε μια μέθοδο η οποία επιλύει αριθμητικά τις εξισώσεις ρηχών υδάτων, και στόχο έχει την προσομοίωση φυσικών φαινομένων όπως καταρρεύσεις φραγμάτων, ροή υδάτων μέσα σε κανάλι και γενικότερα οποιαδήποτε ροή υγρού στην οποία θα έχουμε αρχικές και συνοριακές συνθήκες. Για το αριθμητικό σχήμα χρησιμοποιήσαμε τον προσεγγιστικό επιλυτή Riemann του Roe και κάναμε κατάλληλες διορθώσεις, όπου αυτές απαιτούνταν, για να δημιουργήσουμε ένα αριθμητικό σχήμα με συγκεκριμένα χαρακτηριστικά. Ειδικότερα να έχουμε ισορροπία μεταξύ των ροών και των πηγαίων όρων σε στάσιμα προβλήματα, η οποία να μην χαλάει σε στάσιμα προβλήματα με στεγανά. Να επιλέγουμε την ασθενής λύση η οποία θα διατηρεί σταθερά το συνολικό όγκο και ορμή του προβλήματος. Ακόμα να υπολογίζει υψηλής ακρίβειας ροές και πηγαίους όρους και τέλος να αντιμετωπίζει σωστά την εμφάνιση στεγανών.

Εφαρμόσαμε το αριθμητικό σχήμα σε φυσικά προβλήματα δύο διαστάσεων όπου παράχθηκαν διάφορα χρονικά στιγμιότυπα τα οποία παρουσιάζουν μια ικανοποιητική προσομοίωση των φαινομένων. Ειδικότερα στο πρόβλημα της κατάρρευσης του φράγματος Malpasset, στο οποίο διαθέταμε διάφορα δεδομένα από τα αποτελέσματα της πλημμύρας, τα αριθμητικά αποτελέσματα συμφωνούν με τα δεδομένα αυτά. Τα αριθμητικά αποτελέσματα των άλλων προβλημάτων ελέγχθηκαν με αποτελέσματα που παράχθηκαν με άλλους μεθόδους.

Τα αριθμητικά αποτελέσματα μεταβάλλονται, ως προς την ποιότητά τους, ανάλογα το

πλέγμα που χρησιμοποιούμε στην εφαρμογή του. Παρατηρήθηκε σε αραιά πλέγματα το αριθμητικό σχήμα σχεδόν αποτυγχάνει να αποδώσει σωστά αποτελέσματα, ενώ καθώς το πλέγμα πυκνώνει τα αποτελέσματα γίνονται πιο ακριβείς. Η βελτίωση των αποτελεσμάτων παρατηρήθηκε είτε συγκρίνοντας γραφήματα από διαφορετικά πλέγματα στο ίδιο χρονικό στιγμιότυπο στα προβλήματα είτε συγκρίνοντας τα αριθμητικά αποτελέσματα με πραγματικά δεδομένα από το αποτέλεσμα του φαινομένου.

Η αύξηση των διαστάσεων του πλέγματος δημιουργεί και μικρότερα χωρικά βήματα $\Delta x, \Delta y$ με τα οποία είναι ανάλογο το χρονικό βήμα Δt , σαν αποτέλεσμα να ελαττώνεται και αυτό. Το υπολογιστικό κόστος της εφαρμογής του αριθμητικού σχήματος σε πυκνά πλέγματα γίνεται αρκετά μεγάλο καθώς θα χρειαστούν περισσότερα χρονικά βήματα να εκτελεστούν για να δημιουργηθεί η επιθυμητή χρονική λύση και σε κάθε χρονικό βήμα χρειάζονται να γίνουν περισσότεροι υπολογισμοί. Το γεγονός αυτό μας αποτρέπει να εφαρμόσουμε σε πολύ πυκνά πλέγματα το αριθμητικό σχήμα χωρίς κάποια μετατροπή ώστε να επιταχυνθεί ο χρόνος εκτέλεσης της εφαρμογής.

Για πιο αποδοτικό αριθμητικό σχήμα το μετατρέψαμε ώστε να εφαρμόζεται το πρότυπο OpenMP. Το συγκεκριμένο πρότυπο εκμεταλλεύεται τις πολυεπεξεργαστικές αρχιτεκτονικές υπολογισμών όπου εφαρμόστηκε σε σύστημα με δύο, τέσσερις και οχτώ επεξεργαστές. Τα αποτελέσματα στο σύστημα των δύο επεξεργαστών έδωσε σχεδόν σε όλα τα προβλήματα που εκτελέσαμε μια ιδανική απόδοση στο χρόνο εκτέλεσης, δηλαδή σχεδόν υποδιπλασίασε το χρόνο εκτέλεσης. Το σύστημα τεσσάρων επεξεργαστών στα ίδια προβλήματα έδωσε απόδοση στο χρόνο εκτέλεσης περίπου στο τρία ενώ το τελευταίο σύστημα των οχτώ επεξεργαστών μια απόδοση γύρω στο πέντε. Οι αποδόσεις αυτές παρατηρήθηκαν όταν εφαρμόσαμε το αριθμητικό σχήμα σε πυκνά πλέγματα ενώ σε αραιά πλέγματα οι αποδόσεις ήταν χαμηλότερες. Αυτή η συμπεριφορά είναι αναμενόμενη καθώς σε αραιά πλέγματα ο χρόνος επικοινωνίας και συγχρονισμού των επεξεργαστών είναι μεγάλος σε σχέση με τον χρόνο εκτέλεσης των υπολογισμών.

Μια δεύτερη μετατροπή στο αριθμητικό σχήμα επέτρεψε να μπορεί να εφαρμοστεί το

πρότυπο OpenACC. Το συγκεκριμένο πρότυπο εκμεταλλεύεται τις αρχιτεκτονικές υπολογισμών με επιταχυντή και εφαρμόστηκε σε σύστημα με κάρτα γραφικών τύπου Tesla M2070. Οι αποδόσεις που δημιουργήθηκαν στο χρόνο εκτέλεσης του αριθμητικού σχήματος ήταν αρκετά μεγάλες συγκρίνοντας με τις αποδόσεις του άλλου προτύπου. Οι τιμές που πήραμε στην επιτάχυνση του χρόνου εκτέλεσης ήταν κοντά στο δέκα για τα αραιά πλέγματα, ενώ στα πυκνά πλέγματα απέδωσε επιταχύνσεις μεταξύ του πενήντα και εξήντα. Αξιοσημείωτη επιτάχυνση της τάξης του ογδόντα πέντε επιτεύχθηκε σε πλέγμα περίπου 1,8 εκατομμυρίων κελιών στο πρόβλημα της κατάρρευσης του φράγματος Malpasset.

Το αριθμητικό σχήμα είναι άμεσο, δηλαδή για τον υπολογισμό της καινούργιας λύσης χρειάζεται δεδομένα μόνο από το προηγούμενο χρονικό βήμα. Αυτή η αμεσότητα, η οποία δεν επηρεάζεται με την μετατροπή του αριθμητικού σχήματος ώστε να εφαρμοστεί το πρότυπο OpenACC, μας επιτρέπει να εκτελεστούν όλοι οι υπολογισμοί στην κάρτα γραφικών. Ο κεντρικός επεξεργαστής θα δημιουργήσει τις αρχικές συνθήκες του προβλήματος τις οποίες θα μεταφέρει στην κάρτα γραφικών. Στη συνέχεια η κάρτα γραφικών θα εκτελέσει όλους τους υπολογισμούς και ο κεντρικός επεξεργαστής μόνο θα ελέγχει αν προσεγγίσαμε την τελική χρονική στιγμή, ουσιαστικά ελέγχει το κριτήριο τερματισμού. Στο τέλος θα λάβει την τελική λύση από την κάρτα γραφικών. Η πολύ μικρή συμμετοχή του κεντρικού επεξεργαστή και η μικρή επικοινωνία με την κάρτα γραφικών έχουν σαν αποτέλεσμα τις αρκετά ικανοποιητικές αποδόσεις που επιτεύχθηκαν με το πρότυπο OpenACC.

Βιβλιογραφία

- [1] P. Brufau, P. Vazquez-Cendón, and M.E. Gracia-Navarro, "A numerical model for the flooding and drying of irregular domain", *J. Numer. Meth. Fluids*, 39:249, 2002
- [2] R.J LeVeque, "Finite Volume Methods for Hyperbolic Problems", *Cambridge University Press*, 2002
- [3] E.F. Toro, "Shock-Capturing Methods for Free-Surface Shallow Flows", *John Wiley and Sons Ltd*, 2001
- [4] S.K. Godunov, "Finite Difference Methods for the Computation of Discontinuous Solutions of the Equations of Fluid Dynamics", *Math. Sb*, 47:271, 1959
- [5] P.L. Roe, "Approximate Riemann Solvers, Parameter Vectors, and Difference Schemes", *J. Computational Physics*, 43:357, 1981
- [6] P. Brufau, P. Vazquez-Cendón, and M.E. Gracia-Navarro, "Zero mas error using unsteady wetting-drying coditions in shallow flows over dry irregular topography", *International Journal for Numerical Methods In Fluids*, 45:1047, 2004
- [7] R.J LeVeque, "Numerical Methods for Conservation Laws", *Birkhauser*, 1992
- [8] A. Harten, "High resolution schemesfor hyperbolic conservation laws", *Journal of Computational Physics*, 49:1, 1983
- [9] A.I. Delis and C.P. Skeels, "TVD Schemes for Open Channel Flow", 26:791, 1998

- [10] M.J. Castro, A.M Ferreiro, J.A García-Rodríguez ,J.M González-Vida, J. Macías, C. Paréz and M. Elena Vazquez-Cendón, "The Numerical Treatment of Wet/Dry Fronts in Shallow Flows: Application to One-Layer and Two-Layer Systems", *1st IC-EpsMsO*, 2005
- [11] M.E Hubbart and P. Garcia-Navarro, "Flux Difference Splitting and the Balancing of Source Terms and Flux Gradients", *Journal of Computational Physics*, 23:1049, 1994
- [12] F. Alcurdo and E. Gil, "The Malpasset dam break case study", *University of Zaragoza*
- [13] Luke S. Smith and Qiuhua Liang, "Towards a generalised GPU/CPU shallow-flow modelling tool", *School of Civil Engineering and Geosciences, Newcastle University*, 2013
- [14] R. Vacondio, A. Dal Palu and P. Mignosa, "GPU-enhanced Finite Volume Shallow Water solver for fast flood simulations", *Environmental Modeling and Software*, 2014
- [15] A. R. Brodtkorb, M. L. Sztra and M. Altinakar, "Efficient shallow water simulations on GPUs: Implementation, visualization, verification, and validation", *Computers and Fluids*, 2012
- [16] A. R. Brodtkorb and M. L. Sztra, "Explicit shallow water simulations on GPUs: guidelines and best practices", *University of Illinois at Urbana-Champaign*, 2012
- [17] A. R. Brodtkorb and M. L. Sztra, "GPUs for Shallow Water Simulations", 2012
- [18] L. Feyen and P. Watkiss, "The Climatecost Project.final report.", *Stockholm Environment Institute, Sweden*, 2011
- [19] M. L. Sztra, "Shallow Water Simulations on Graphics Hardware", 2014

- [20] Z. Shanghong, X. Zhongxi, Y. Rui and J. Xiaoming, "Parallel computation of a dam-break flow model using OpenMP on a multi-core computer", *Journal of Hydrology*, 2014
- [21] X. Trompoukis, "Numerical Solution of AerodynamicAeroelastic Problems on Graphics Processing Units", NTUA, Athens,
- [22] <http://www.openaccstandard.org>
- [23] A.I. Dellis and Th. Katsaounis, "Numerical solutions of the two-dimensional shallow water equations by the application of relaxation methods", *Applied Mathematical Modeling*, 754-783, 2005
- [24] A.I. Dellis, M. Kazolea and N. A. Kampanis, " A robust high-resolution finite volume scheme for the simulation of long waves over complex domains", *INTERNATIONAL JOURNAL FOR NUMERICAL METHODS IN FLUIDS*, 2007
- [25] V. Kumar, A. Grama, A. Gupta and G. Karypis, "Introducion to Parallel Computing:Design and Analysis of Algorithms", Benjamon Cummings Inc, 1994
- [26] D. Shepard, "A two-dimensional interpolation function for irregularly-spaced data", *ACM National Conference*, 517-524, 1968