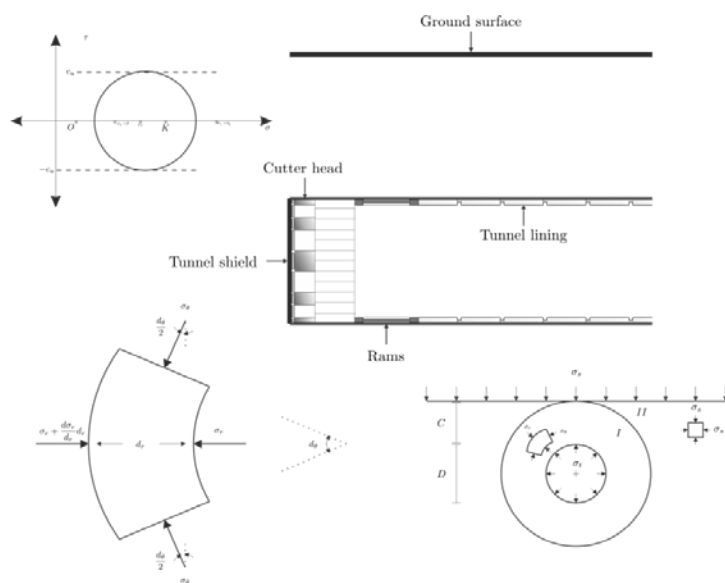


ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ ΚΡΗΤΗΣ  
ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΟΡΥΚΤΩΝ ΠΟΡΩΝ

ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΗΣ ΕΥΣΤΑΘΕΙΑΣ ΟΡΟΦΗΣ ΚΑΙ ΜΕΤΩΠΟΥ ΑΒΑΘΩΝ ΣΗΡΑΓΓΩΝ ΣΕ  
ΜΑΛΑΚΟΥΣ ΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΥΣ



ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ  
ΓΙΩΡΓΟΣ Ν. ΒΟΥΤΣΑΣ

ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΗ ΕΠΙΤΡΟΠΗ:

Γ. ΕΞΑΔΑΚΤΥΛΟΣ, ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ (ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ)

Ζ. ΑΓΙΟΥΤΑΝΤΗΣ, ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ

Ε. ΣΤΕΙΑΚΑΚΗΣ, ΕΠΙΚ. ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ

ΧΑΝΙΑ, ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΣ 2014

Οι απόψεις και τα συμπεράσματα που περιέχονται σε αυτό το έγγραφο, εκφράζουν το συγγραφέα και δεν πρέπει να ερμηνευτεί ότι αντιπροσωπεύουν τις επίσημες θέσεις των εξεταστών.

αφιερώνεται

στην οικογένειά μου

Γ.Β.

## Περίληψη

Ένα από τα μεγαλύτερα προβλήματα που μπορεί να προκύψουν κατά την φάση της διάνοιξης και κατασκευής αβαθών σιράγγων είναι η αστοχία της οροφής ή/και του μετώπου εκσκαφής. Η κατασκευή αβαθών σιράγγων είναι πολύ διαφορετική σε σχέση με τις επιφανειακές γεωτεχνικές κατασκευές, όπου μετά από την ολοκλήρωση της κατασκευής με την εμφάνιση πεπερασμένων συνήθως καθιζήσεων (που είναι αναγκαίες για την παραλαβή των φορτίων), επέρχεται φυσική ισορροπία δυνάμεων μεταξύ της κατασκευής και του εδάφους. Στις υπόγειες κατασκευές γίνεται έντονη διαταραχή της υπάρχουσας ισορροπίας που οφείλεται κυρίως στην αφαίρεση εδαφικών μαζών και την δημιουργία ενός τρισδιάστατου κενού. Συνεπώς, μια πολύ σημαντική εργασία των μηχανικών κατά την τεχνική μελέτη ενός υπόγειου έργου, είναι η διερεύνηση του Αριθμού Ευστάθειας της σήραγγας έναντι αστοχιών οροφής ή μετώπου.

Στόχος της παρούσας Διπλωματικής Εργασίας είναι να βρεθούν αναλυτικά οι λύσεις του φορτίου υποστήριξης για την αποφυγή της κατάρρευσης της οροφής κυκλικής σήραγγας με βάση τους μηχανισμούς κατάρρευσης που προέκυψαν από αναλογικά πειράματα σε μαλακή άργιλο στο Πανεπιστήμιο του Cambridge τη δεκαετία του '80. Το υπερκείμενο της σήραγγας γεωϋλικό θεωρείται ομοιογενές, με μοναδιαίο βάρος  $\gamma$  και συνοχή  $c_u$  σε αστράγγιστες συνθήκες (undrained shear strength). Οι αναλύσεις γίνονται σε συνθήκες επίπεδης παραμόρφωσης.

Εξετάζονται τέσσερις δυνατοί μηχανισμοί κατάρρευσης της σήραγγας με το Πάνω Οριακό Θεώρημα (Π.Ο.Θ.) της θεωρίας της Πλαστικότητας και βρίσκονται οι αναλυτικές λύσεις του αριθμού ευστάθειας γι' αυτές τις περιπτώσεις. Επειδή ο υπολογισμός του ελάχιστου αριθμού ευστάθειας είναι πρόβλημα ελαχιστοποίησης, δημιουργήθηκαν αρχεία Excel™ στα οποία γίνονται οι υπολογισμοί. Οι λύσεις αυτές συγκρίνονται με την αναλυτική λύση για το ίδιο πρόβλημα που προσδιορίστηκε με εφαρμογή του Κάτω Οριακού Θεωρήματος (Κ.Ο.Θ.) και εξάγονται ανάλογα συμπεράσματα.

# Πρόλογος

Στόχος της παρούσας Διπλωματικής Εργασίας, που έγινε στα πλαίσια του προγράμματος σπουδών της Σχολής Μηχανικών Ορυκτών Πόρων του Πολυτεχνείου Κρήτης, είναι ο αναλυτικός υπολογισμός της πίεσης υποστήριξης της οροφής αβαθούς σήραγγας σε μαλακούς σχηματισμούς για να μην υπάρχει κίνδυνος κατάρρευσης αυτής. Βασίζεται σε πιθανούς μηχανισμούς κατάρρευσης της οροφής και του μετώπου που παρατηρήθηκαν σε αναλογικά πειράματα από προηγούμενους ερευνητές. Η αναλυτική μέθοδος που παρουσιάζεται βασίζεται στο Πάνω Οριακό Θεώρημα (Π.Ο.Θ.) της Μαθηματικής Θεωρίας της Πλαστικότητας. Εξετάζονται τέσσερεις δυνατοί μηχανισμοί κατάρρευσης της σήραγγας και βρίσκονται οι αναλυτικές λύσεις του αριθμού ευστάθειας γι' αυτές τις περιπτώσεις. Επειδή ο υπολογισμός του ελάχιστου αριθμού ευστάθειας είναι μη γραμμικό πρόβλημα ελαχιστοποίησης οι υπολογισμοί έγιναν με τη βοήθεια υπολογιστή. Οι λύσεις αυτές συγκρίνονται με την αναλυτική λύση για το ίδιο πρόβλημα που προσδιορίστηκε με εφαρμογή του Κάτω Οριακού Θεωρήματος (ΚΟΘ) και εξάγονται ανάλογα συμπεράσματα.

Στο σημείο αυτό θα ήθελα να εκφράσω τις θερμές ευχαριστίες μου σε όλους όσους με βοήθησαν και συνέβαλλαν στην ολοκλήρωση της εργασίας αυτής και πρώτα από όλους στον επιβλέποντα καθηγητή μου κ. Εξαδάκτυλο που για την επιλογή του θέματος, για την πολύ ευχάριστη συνεργασία που είχαμε και για τις γνώσεις που με βοήθησε να αποκομίσω αυτό το διάστημα. Επιπλέον, ευχαριστίες οφείλω στα μέλη του εργαστηρίου Μελέτης και Σχεδιασμού Εκμεταλλεύσεων και κυρίως στον Δρ. Π. Λιόλιο για τις ώρες που μου αφιέρωσε και τα πολύτιμα πράγματα που μου έδειξε. Επίσης, ευχαριστώ θερμά τους καθηγητές κ. Αγιουτάντη και κ. Στειακάκη για τον χρόνο που αφιέρωσαν στη διόρθωση της παρούσας εργασίας.

Συνεχίζοντας, μεγάλο ευχαριστώ στην οικογένειά μου, για την πολύτιμη στήριξή τους όλα αυτά τα χρόνια συμβάλλοντας καθοριστικά στην εξέλιξη μου.

Τέλος, ευχαριστώ την κοπέλα μου Κυριακή και τους φίλους μου Αλέξανδρο, Βασίλη, Γιάννη, Δημήτρη, Εβίνα, Θανάση, Μανώλη, Μαρία, Νίκο, Στέλιο, Στέλιο, Τάκη και Χρόνη για την υπομονή, τη βοήθεια και τη στήριξη που μου πρόσφεραν σε όλη τη διάρκεια της εκπόνησης της παρούσας εργασίας, αλλά και σε όλη τη διάρκεια των σπουδών μου.

Χανιά, Σεπτέμβρης 2014

Βουτσάς Γιώργος

# Περιεχόμενα

<b>Περίληψη</b>	<b>v</b>
<b>Πρόλογος</b>	<b>vii</b>
<b>Κατάλογος Σχημάτων και Πινάκων</b>	<b>xi</b>
<b>1. Εισαγωγή</b>	<b>1</b>
1.1. Μελέτη αστοχίας αβαθών σηράγγων .....	1
1.2. Διάνοιξη αβαθών σηράγγων σε μαλακούς σχηματισμούς.....	1
<b>2. Οριακή ανάλυση</b>	<b>5</b>
2.1. Βασικές έννοιες – Νόμοι διαρροής και πλαστικής ροής .....	5
2.2. Επιφάνεια διαρροής ή αντοχής και επιφάνεια πλαστικού δυναμικού .....	6
2.2.1. Κριτήρια φόρτισης και αποφόρτισης .....	7
2.2.2. Νόμος πλαστικής ροής .....	9
2.2.3. Νόμος πλαστικής ροής που συναρτάται με το κριτήριο Tresca.....	11
2.3. Πλαστικό έργο .....	14
2.3.1. Νόμος πλαστικής ροής που συναρτάται με το κριτήριο Mohr – Coulomb.....	16
2.3.2. Στοιχειώδες πλαστικό έργο παραμόρφωσης .....	22
2.4. Τασική όδευση.....	22
2.5. Θεωρήματα της Οριακής Ανάλυσης.....	25
<b>3. Κάτω Οριακό Θεώρημα</b>	<b>29</b>
3.1. Η λύση του Κ.Ο.Θ. για το φορτίο υποστήριξης αβαθούς σήραγγας.....	29
3.1.1. Λύση Κ.Ο.Θ. για το φορτίο υποστήριξης της οροφής της σήραγγας .....	31
3.1.2. Λύση Κ.Ο.Θ. για το φορτίο υποστήριξης του μετώπου της σήραγγας .....	34
3.2. Αριθμός ευστάθειας γεωκατασκευών.....	35
<b>4. Πάνω Οριακό Θεώρημα</b>	<b>39</b>
4.1. Εισαγωγή .....	39
4.2. Μηχανισμός αστοχίας της οροφής της σήραγγας Α.....	40
4.3. Μηχανισμός αστοχίας της οροφής της σήραγγας Β.....	44

4.4. Μηχανισμός αστοχίας της οροφής της σήραγγας Γ.....	49
4.5. Μηχανισμός αστοχίας της οροφής της σήραγγας Δ.....	53
4.6. Μηχανισμός αστοχίας του μετώπου της σήραγγας .....	58
<b>5. Συμπεράσματα και προτάσεις</b> .....	<b>63</b>
5.1. Συμπεράσματα .....	63
5.2. Προτάσεις .....	67
<b>Βιβλιογραφία και αναφορές</b> .....	<b>69</b>

## Κατάλογος Σχημάτων

1.1 Κατασκευή αβαθούς σήραγγας με TBM και ενεργητικό σύστημα υποστήριξης του μετώπου και της οροφής .....	2
1.2 Εξιδανίκευση του μετώπου της σήραγγας .....	3
1.3 Μοντέλο επίπεδης παραμόρφωσης για την μελέτη της ευστάθειας της οροφής.....	4
2.1 Υπόθεση αστοχίας Mohr-Coulomb.....	5
2.2 Η έννοια της επιφάνειας διαρροής $F(\sigma_{ij})=0$ και της επιφάνειας του πλαστικού δυναμικού $Q(\sigma_{ij})=0$ στο χώρο των τάσεων.....	7
2.3 Επιφάνεια διαρροής ή αστοχίας στον υπερχώρο των τάσεων.....	8
2.4 Διάγραμμα φόρτισης-αποφόρτισης ελαστοπλαστικού υλικού στο επίπεδο $\sigma$ - $\epsilon$ .....	9
2.5 Γεωμετρική αναπαράσταση της επιφάνειας διαρροής και του συνηρημένου νόμου διαρροής .....	10
2.6 Γεωμετρική ερμηνεία συνθήκης της ομοαξονικότητας των τάσεων-παραμορφώσεων.....	11
2.7 Το κριτήριο Tresca στα επίπεδα $(\tau, \sigma)$ και $(d\gamma, d\epsilon)$ .....	11
2.8 (α) Εξάγωνο του Tresca, πάνω στο αποκλίνον επίπεδο .....	12
(β) η κορυφή A ως όριο μιας λείας (smooth) καμπύλης .....	13
2.9 Απλή κατακόρυφη θλίψη με αποτέλεσμα πλευρικής διαστολής .....	14
2.10 Απλή διατμητική παραμόρφωση.....	15
2.11 Σχετική οριζόντια ολίσθηση άκαμπτων σωμάτων πάνω σε λεπτή λωρίδα .....	15
2.12 Κριτήριο M-C στο υδροστατικό επίπεδο τάσεων, τροπών .....	17
2.13 Κριτήριο M – C στο αποκλίνον επίπεδο .....	18
2.14 (α) Απλή διατμητική τροπή.....	20
(β) Κύκλος του Mohr .....	20
2.15 Σχετική ολίσθηση άκαμπτων σωμάτων πάνω σε λεπτή λωρίδα .....	21
2.16 Γραφική παράσταση της συνθήκης διαρροής και του νόμου πλαστικής ροής στο επίπεδο των τάσεων (πλαγιότητα πλαστικών παραμορφώσεων και επιφάνειας διαρροής) .....	23
2.17 Συνθήκη διαρροής και νόμος πλαστικής ροής για συνεκτικό υλικό με καθετότητα των πλαστικών παραμορφώσεων στην επιφάνεια διαρροής στα επίπεδα $(\tau, \sigma)$ & $(d\gamma, d\epsilon)$ .....	24
2.18 (α) Καταστατική σχέση ισοδύναμης τάσης με την ισοδύναμη παραμόρφωση του απολύτως στερεού και ιδεατού πλαστικού γεωυλικού ( $k$ = όριο διαρροής).....	26
(β) Γεωμετρική απεικόνιση στο υδροστατικό επίπεδο του συνηρημένου νόμου διαρροής για ένα γεωυλικό με συνοχή και τριβή.....	27

2.19 Σχέση των προβλέψεων των οριακών θεωρημάτων της θεωρίας Πλαστικότητας.....	28
3.1 (α) Πρόσοψη.....	29
(β) Μηκοτομή αβαθούς σήραγγας.....	30
3.2 Κυλινδρική σήραγγα μεγάλου μήκους (επίπεδη παραμόρφωση).....	31
3.3 Στοιχείο για την ισορροπία των τάσεων κατά την ακτινική κατεύθυνση.....	32
3.4 Κριτήριο διαρροής Tresca στο επίπεδο ( $\sigma$ , $\tau$ ).....	33
3.5 Σχεδιάγραμμα του Κ.Ο.Θ. για την πίεση υποστήριξης του μετώπου της εκσκαφής .....	35
4.1 (α) Πάνω οριακό θεώρημα μηχανισμός Α.....	38
(β) Οδογράφος για τον Μηχανισμό Α .....	39
4.2 Διάγραμμα $N_{min} - C/D$ για διάφορες τιμές του $\gamma D/c_u$ στον μηχανισμό Α.....	41
4.3 (α) Πάνω οριακό θεώρημα μηχανισμός Β.....	42
(β) Οδογράφος για τον Μηχανισμό Β .....	43
4.4 Υπολογισμός του ολοκληρώματος Ι κυκλικής σήραγγας με εσωτερική πίεση.....	43
4.5 Διάγραμμα $N_{min} - C/D$ για διάφορες τιμές του $\gamma D/c_u$ στον μηχανισμό Β .....	46
4.6 (α) Πάνω οριακό θεώρημα μηχανισμός Γ .....	47
(β) Οδογράφος για τον Μηχανισμό Γ.....	48
4.7 Διάγραμμα $N_{min} - C/D$ για διάφορες τιμές του $\gamma D/c_u$ στον μηχανισμό Γ .....	51
4.8 (α) Πάνω οριακό θεώρημα μηχανισμός Δ.....	52
(β) Οδογράφος για τον Μηχανισμό Δ .....	52
4.9 Διάγραμμα $N_{min} - C/D$ για διάφορες τιμές του $\gamma D/c_u$ στον μηχανισμό Δ .....	56
4.10 (α) Πάνω οριακό θεώρημα μηχανισμού αστοχίας του μετώπου της σήραγγας .....	59
(β) Οδογράφος για τον μηχανισμό αστοχίας του μετώπου της σήραγγας.....	59
4.11 Διάγραμμα $N_{min} - C/D$ για $\gamma D/c_u = 0$ στον μηχανισμό αστοχίας του μετώπου της σήραγγας.....	62
5.1 Διάγραμμα $N_{min} - C/D$ για διάφορους μηχανισμό Π.Ο.Θ. και Κ.Ο.Θ. και $\gamma D/c_u = 0$ .....	64
5.2 Διάγραμμα $N_{min} - C/D$ για διάφορους μηχανισμό Π.Ο.Θ. και Κ.Ο.Θ. και $\gamma D/c_u = 1$ .....	65
5.3 Διάγραμμα $N_{min} - C/D$ για διάφορους μηχανισμό Π.Ο.Θ. και Κ.Ο.Θ. και $\gamma D/c_u = 2$ .....	65
5.4 Διάγραμμα $N_{min} - C/D$ για διάφορους μηχανισμό Π.Ο.Θ. και Κ.Ο.Θ. και $\gamma D/c_u = 0$ .....	66
5.5 Διάγραμμα $N_{min} - C/D$ για το μηχανισμό αστοχίας του μετώπου της σήραγγας του Π.Ο.Θ. και του Κ.Ο.Θ. και $\gamma D/c_u = 0$ .....	67

## Κατάλογος Πινάκων

4.1	Μικρότερος Αριθμός Ευστάθειας $N$ και η αντίστοιχη γωνία στην οποία εμφανίζεται, για διάφορες περιπτώσεις του $\gamma D/cu$ και του $C/D$ .....	41
4.2	Μικρότερος Αριθμός Ευστάθειας $N$ και η αντίστοιχη γωνία στην οποία εμφανίζεται, για διάφορες περιπτώσεις του $\gamma D/cu$ και του $C/D$ .....	46
4.3	Μικρότερος Αριθμός Ευστάθειας $N$ και τις αντίστοιχες γωνίες στις οποίες εμφανίζεται, για διάφορες περιπτώσεις του $\gamma D/cu$ και του $C/D$ .....	50
4.4	Μικρότερος Αριθμός Ευστάθειας $N$ και τις αντίστοιχες γωνίες στις οποίες εμφανίζεται, για διάφορες περιπτώσεις του $\gamma D/cu$ και του $C/D$ .....	55
4.5	Μικρότερος Αριθμός Ευστάθειας $N$ και τις αντίστοιχες γωνίες στις οποίες εμφανίζεται, για $\gamma D/cu = 0$ και διάφορες περιπτώσεις του $C/D$ .....	61

# Κεφάλαιο 1

## Εισαγωγή

### 1.1 Μελέτη αστοχίας αβαθών σιηράγγων

Ένα από τα μεγαλύτερα προβλήματα που μπορεί να προκύψουν κατά την φάση της κατασκευής αβαθών σιηράγγων είναι η αστοχία της οροφής ή του μετώπου εκσκαφής. Η κατασκευή αβαθών σιηράγγων είναι πολύ διαφορετική σε σχέση με τις επιφανειακές γεωτεχνικές κατασκευές, όπου μετά από την ολοκλήρωση της κατασκευής και με την εμφάνιση πεπερασμένων συνήθως καθιζήσεων, που είναι αναγκαίες για την παραλαβή των φορτίων, επέρχεται φυσική ισορροπία δυνάμεων, μεταξύ της κατασκευής και του εδάφους. Στις υπόγειες κατασκευές γίνεται έντονη διαταραχή της υπάρχουσας ισορροπίας, που οφείλεται κυρίως στην αφαίρεση εδαφικών μαζών και την δημιουργία ενός τρισδιάστατου κενού.

Συνεπώς, μια πολύ σημαντική εργασία των μηχανικών κατά την τεχνική μελέτη ενός υπόγειου έργου, είναι η διερεύνηση του συντελεστή ευστάθειας της σιηραγγας έναντι αστοχιών της οροφής ή του μετώπου. Πιο συγκεκριμένα, η μελέτη της ευστάθειας των υπογείων ανοιγμάτων μπορεί να γίνει με διάφορες μεθόδους, όπως:

1. Αναλυτικές μαθηματικές μεθόδους συνήθως στα πλαίσια της Μαθηματικής Θεωρίας Πλαστικότητας.
2. Αριθμητικές μεθόδους, όπως πεπερασμένα στοιχεία και πεπερασμένες διαφορές, συνοριακά στοιχεία και διακριτά στοιχεία.
3. Με τη χρήση αναλογικών μοντέλων στο εργαστήριο.
4. Εμπειρικές μεθόδους, όπως η μέθοδος GSI (Geological Strength Index) που προτάθηκε από τον E. Hoek.
5. Παρατηρητικές μεθόδους (Observational Methods) που εφαρμόζονται συνήθως στη μέθοδο NATM.
6. Συνδυασμοί των ανωτέρω μεθόδων.

### 1.2 Διάνοιξη αβαθών σιηράγγων σε μαλακούς σχηματισμούς

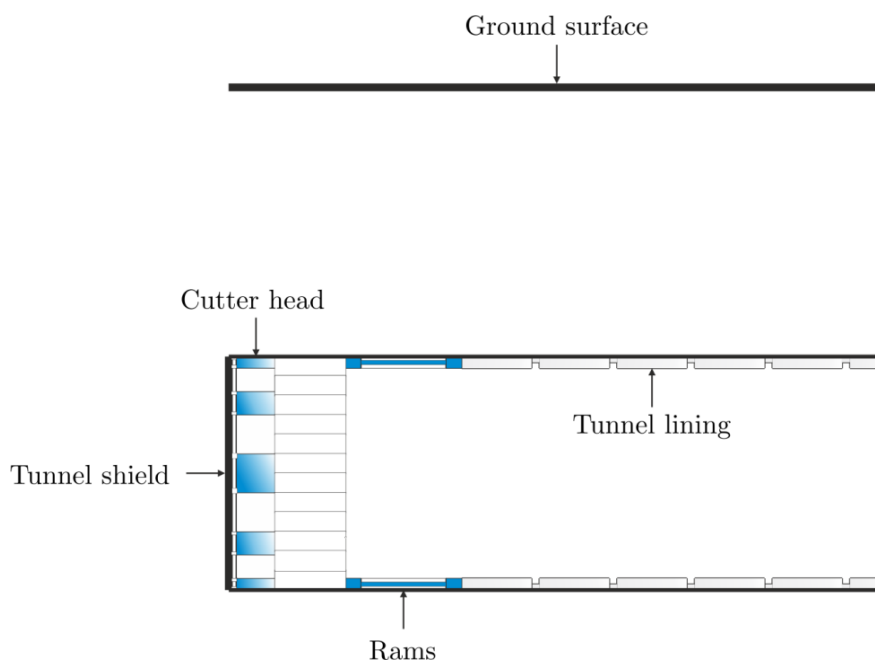
Σήμερα χρησιμοποιούνται πολλοί τρόποι διάνοιξης αβαθών σιηράγγων. Οι πιο γνωστοί και οι πιο διαδεδομένοι από αυτούς είναι οι ακόλουθοι:

- Η μέθοδος εκσκαφής και επανεπίχωσης (Cut and Cover),

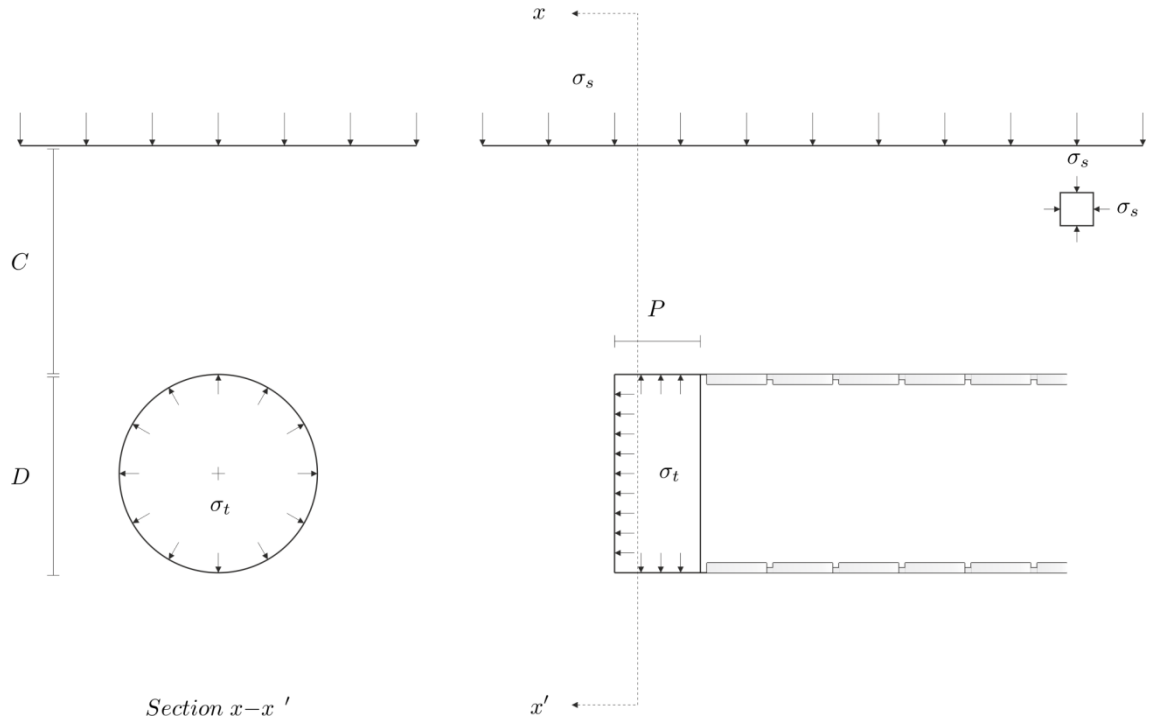
- Η τμηματική μέθοδος, που πολλές φορές αποκαλείται και NATM (New Austrian Tunneling Method),
- Η μέθοδος με μηχανήματα ολομέτωπης κοπής TBM με ασπίδα (Shield Tunnel Boring Machines) (σχήμα 1.1).

Πιο συγκεκριμένα, οι αβαθείς σήραγγες σε μαλακούς εδαφικούς σχηματισμούς κατασκευάζονται με TBM, που εφαρμόζουν πίεση υποστήριξης του μετώπου, σε κάποια απόσταση πίσω από το μέτωπο και στην οροφή. Η πίεση αυτή ασκείται για την εξισορρόπηση της εδαφικής και υδροστατικής πίεσης και προέρχεται είτε από εδαφικό πολφό και αιώρημα αργίλου ή μπετονίτη (slurry), είτε από πεπιεσμένο αέρα. Ένα βασικό ερώτημα που πρέπει να απαντηθεί είναι αν χρειάζεται και πόση πρέπει να είναι η ελάχιστη πίεση που πρέπει να εξασκηθεί στο μέτωπο και στην οροφή σήραγγας για να διασφαλισθεί η ευστάθεια της.

Η μέθοδος κατασκευής αβαθούς κυκλικής σήραγγας διαμέτρου  $D$  σε βάθος  $C$  κάτω από την επιφάνεια του εδάφους με την μέθοδο ασπίδας φαίνεται στο (σχήμα 1.2). Η περιστρεφόμενη με μικρή γωνιακή ταχύτητα κοπτική κεφαλή του TBM πιέζεται επί του μετώπου, μέσω της δράσης των εμβόλων ώθησης επί των στοιχείων επένδυσης και κάτω από την προστασία του ουραίου τμήματος της ασπίδας. Τα στοιχεία επένδυσης έχουν τοποθετηθεί στο προηγούμενο βήμα εκσκαφής μήκους  $P$ . Η ασπίδα περιβάλλει ένα θάλαμο εντός του οποίου δρα ρευστό το οποίο ασκεί φορτίο  $\sigma_t$  στο μέτωπο και στην οροφή. Αυτό συμβαίνει για να εξασφαλισθεί η ευστάθειά τους από το βάρος των υπερκειμένων και την επιφανειακή πίεση της ανωδομής  $\sigma_s$ . Εφόσον προχωρήσει η σήραγγα ένα ακόμα βήμα, τότε πίσω από το μέτωπο τοποθετούνται σε δεύτερη φάση οι προκατασκευασμένοι δακτύλιοι επένδυσης σκυροδέματος.



Σχήμα 1.1: Κατασκευή αβαθούς σήραγγας με TBM και ενεργητικό σύστημα υποστήριξης του μετώπου και της οροφής.



Σχήμα 1.2: Εξιδανίκευση του μετώπου της σήραγγας.

Στόχος της παρούσης εργασίας είναι να βρεθούν αναλυτικά οι λύσεις του φορτίου υποστήριξης  $\sigma_i$  για την αποφυγή της κατάρρευσης της οροφής και του μετώπου της σήραγγας με βάση τους μηχανισμούς κατάρρευσης που προέκυψαν από αναλογικά πειράματα σε μαλακή άργιλο στο Πανεπιστήμιο του Cambridge και παρουσιάστηκαν από τους Davis E.H. et al. (1980). Το υπερκείμενο της σήραγγας γεωυλικό θεωρείται ομοιογενές, με μοναδιαίο βάρος  $\gamma$  και συνοχή  $c_u$ , σε αστράγγιστες συνθήκες (untrained shear strength) (σχήμα 1.3). Το πρόβλημα αυτό διέπεται από τις ακόλουθες αδιάστατες μεταβλητές:

1. Τον αριθμό ευστάθειας της σήραγγας:

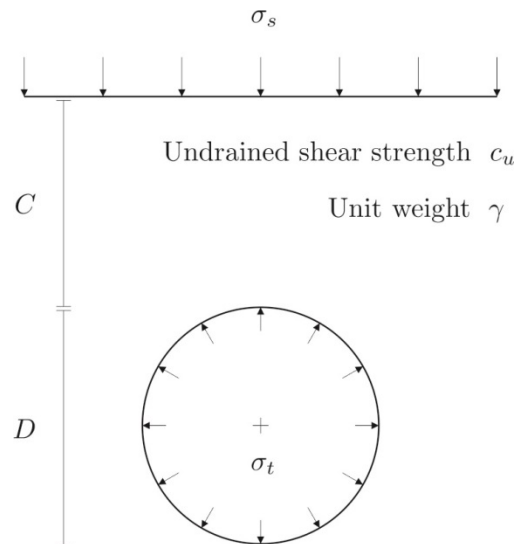
$$N = \frac{\sigma_s - \sigma_t}{c_u} \quad (1.1)$$

2. Τον λόγο ύψους των υπερκειμένων προς τη διάμετρο της σήραγγας:

$$\lambda = \frac{C}{D} \quad (1.2)$$

3. Το αδιάστατο μοναδιαίο βάρος των υπερκειμένων:

$$\xi = \frac{\gamma D}{c_u} \quad (1.3)$$



Σχήμα 1.3: Μοντέλο επίπεδης παραμόρφωσης για την μελέτη της ευστάθειας της οροφής (Davis E.H. et al. 1980).

Οι λύσεις αυτές βρέθηκαν με την εφαρμογή της Οριακής Ανάλυσης της Μαθηματικής Θεωρίας της Πλαστικότητας που παρουσιάζεται στο Κεφάλαιο 3. Στο Κεφάλαιο 4 παρουσιάζονται τα βήματα και οι λύσεις για τους τέσσερις υπό μελέτη μηχανισμούς κατάρρευσης και παρουσιάζονται τα αποτελέσματα. Τέλος, στο Κεφάλαιο 5 παρουσιάζονται τα συμπεράσματα και οι προτάσεις της παρούσας Διπλωματικής Εργασίας.

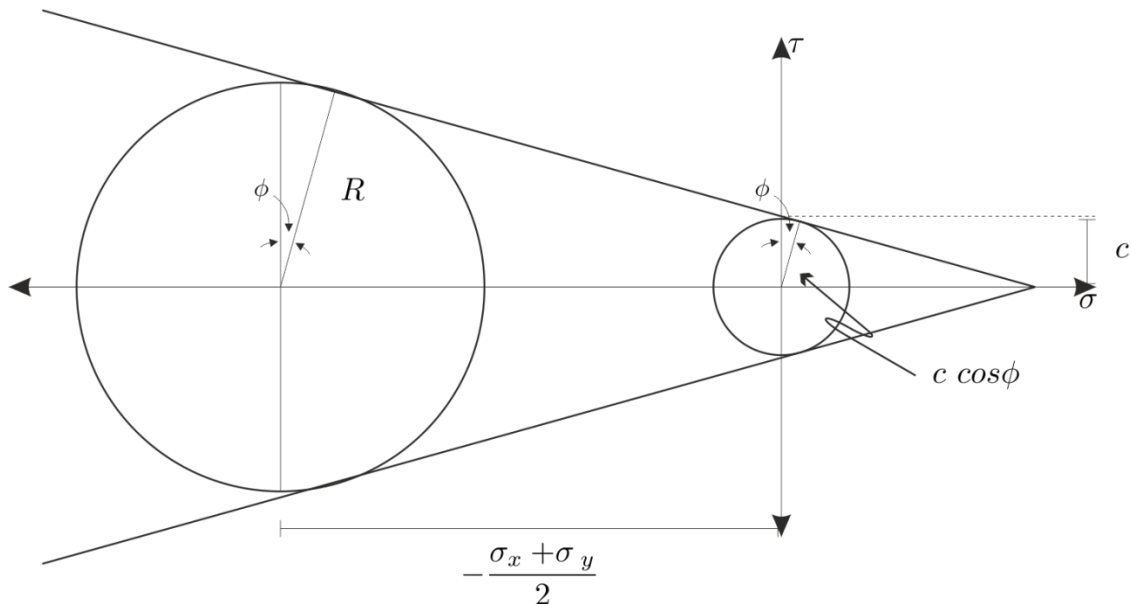
## Κεφάλαιο 2

### Οριακή ανάλυση

#### 2.1 Βασικές έννοιες – Νόμοι διαρροής και πλαστικής ροής

Τα προβλήματα ευστάθειας διαφόρων τύπων γεωτεχνικών έργων, όπως πρανή, θεμελιώσεις, τοίχοι αντιστήριξης και υπόγεια έργα, πολλές φορές αντιμετωπίζονται με τη βοήθεια της Μαθηματικής Θεωρίας της Πλαστικότητας. Το έδαφος ή το πέτρωμα αντικαθίσταται από ένα ιδεατό μοντέλο συνεχούς υλικού που συμπεριφέρεται ελαστικά μέχρι την εκδήλωση διαρροής ή ολίσθησης. Η διατμητική τάση που απαιτείται για την ολίσθηση θεωρείται ότι εξαρτάται από τη συνοχή του γεωυλικού  $c$  και από την ορθή πίεση που εξασκείται πάνω σ' αυτή με γραμμικό τρόπο. Η τελευταία αποδίδεται, με τη βοήθεια της έννοιας της γωνίας εσωτερικής τριβής  $\phi$  όπως φαίνεται στο σχήμα 2.1 όπου αποτυπώνεται η υπόθεση αστοχίας Mohr-Coulomb [Coulomb, 1776; Mohr, 1900].

$$R = c \cos \phi - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \sin \phi \quad (2.1)$$



Σχήμα 2.1: Υπόθεση αστοχίας Mohr-Coulomb.

Το μοντέλο αστοχίας, της μέγιστης διατμητικής τάσης, των Mohr-Coulomb (1900) εκφυλίζεται στο μοντέλο του Tresca (1864), στην περίπτωση της μηδενικής ή αμελητέας γωνίας εσωτερικής τριβής του γεωϋλικού. Το μοντέλο αυτό ακολουθούν κατά προσέγγιση για παράδειγμα οι μαλακές άργιλοι σε συνθήκες αστράγγιστης φόρτισης.

Στις επόμενες παραγράφους εκτίθενται περιληπτικά οι βασικές έννοιες της Ιδεατής Θεωρίας της Πλαστικότητας και κυρίως ο υπολογισμός του πλαστικού έργου που θα χρησιμοποιηθεί εκτενώς στο κεφάλαιο 4 για την εκτίμηση του αριθμού ευστάθειας της αβαθούς σήραγγας με το Πάνω Οριακό Θεώρημα.

## 2.2 Επιφάνεια διαρροής ή αντοχής και επιφάνεια πλαστικού δυναμικού

Η επιφάνεια διαρροής (yield surface)  $F$  καθορίζει την οριακή κατάσταση μέχρι την οποία το υλικό συμπεριφέρεται ελαστικά, ενώ το πλαστικό δυναμικό (plastic potential)  $Q$  καθορίζει το πλαστικό τμήμα της παραμόρφωσης [π.χ. Chen and Han, 1988; Vardoulakis and Sulem, 1995; Hill, 1998]. Τα δυο μεγέθη εκφράζονται μαθηματικά, ως εξής (σχήμα 2.2):

$$F = F(\sigma_{ij}, h) \quad (2.2)$$

και

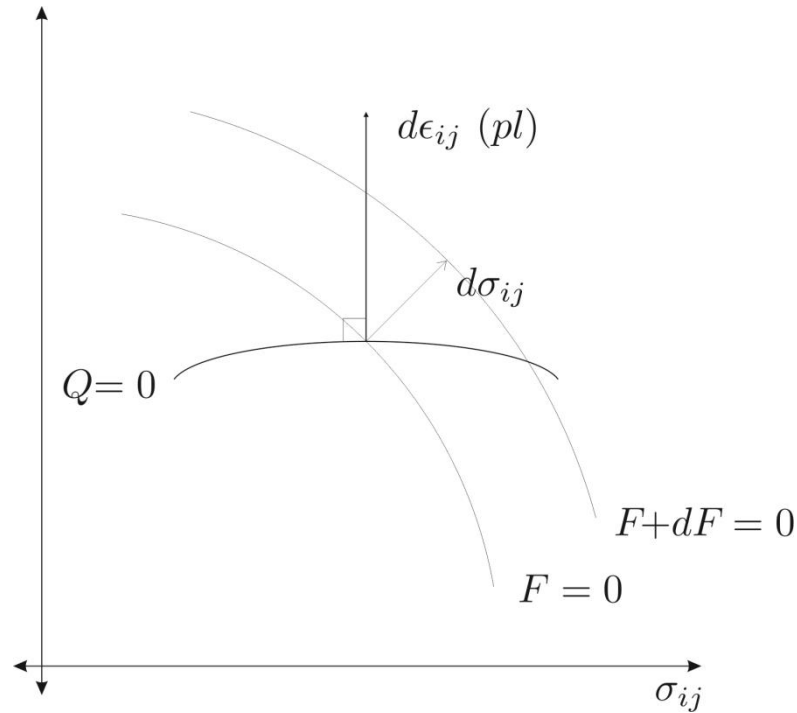
$$Q = Q(\sigma_{ij}, h) \quad (2.3)$$

όπου:

$\sigma_{ij}$  = τανυστής τάσης.

$h$  = παράγοντας «κράτυνσης» (hardening).

Ο παράγοντας «κράτυνσης» (hardening) ή μέτρο της πλαστικής παραμόρφωσης, εμπεριέχει μεταβλητές κατάστασης (state variables) που εισάγονται στη θεωρία για να επιτρέψουν στα μοντέλα να περιγράψουν την πολυπλοκότητα της ανελαστικής συμπεριφοράς των γεωλογικών υλικών ήτοι την αύξηση του ορίου διαρροής με την πλαστική παραμόρφωση. Στην απλούστερη εκδοχή ενός μοντέλου πλαστικότητας που αποκαλείται «ιδεατή πλαστικότητα», η επιφάνεια διαρροής (yield surface), δρα ως οριακή επιφάνεια και δεν υπάρχουν παράγοντες κράτυνσης, συνεπώς το μοντέλο δεν εξελίσσεται προϊούσης της πλαστικής παραμόρφωσης του υλικού.



Σχήμα 2.2: Η έννοια της επιφάνειας διαρροής  $F(\sigma_{ij})=0$  και της επιφάνειας του πλαστικού δυναμικού  $Q(\sigma_{ij})=0$  στο χώρο των τάσεων.

Στη συνέχεια, θα θεωρηθεί ότι το γεωλογικό υλικό συμπεριφέρεται ως ιδεατά πλαστικό υλικό, δηλαδή  $h=0$  και θα εξεταστεί αν οι προβλέψεις της θεωρίας έχουν σχέση με τα πραγματικά αποτελέσματα.

### 2.2.1 Κριτήρια φόρτισης και αποφόρτισης

Ως κριτήριο φόρτισης αποκαλείται η «συνθήκη συνέπειας του Prager» (consistency criterion) της ιδεατής πλαστικότητας και διατυπώνεται ως εξής (σχήμα 2.2 & 2.3):

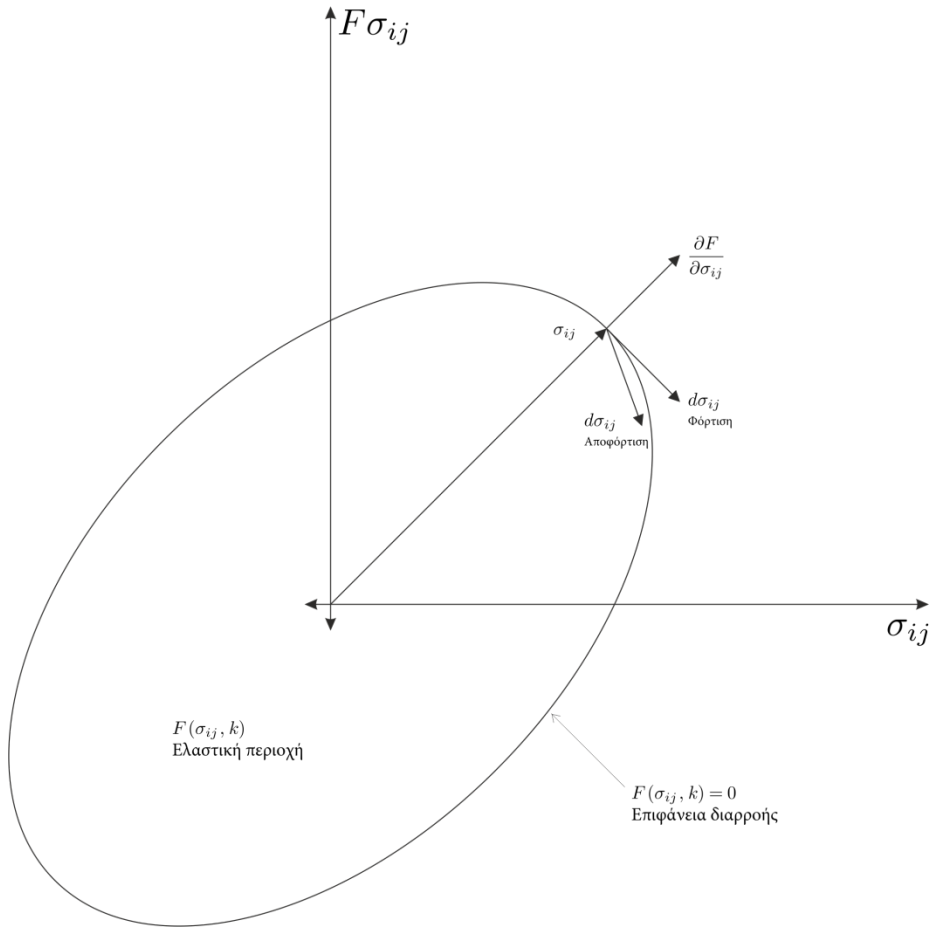
$$F(\sigma_{ij}, k_1, k_2, \dots) = 0 \quad dF = \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} = 0 \quad (2.4)$$

όπου

$k_1, k_2, \dots$  = συμβολίζουν τις ιδιότητες αντοχής του γεωλογικού και είναι θετικές ποσότητες.

Το κριτήριο αποφόρτισης διατυπώνεται ως εξής:

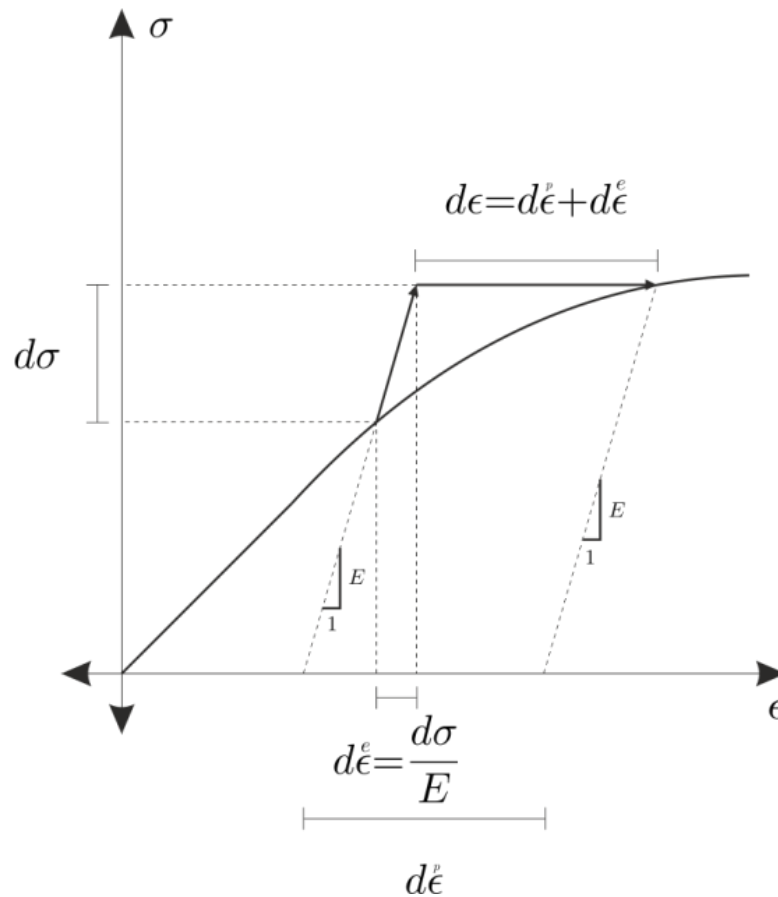
$$F(\sigma_{ij}, k) = 0 \quad dF < 0 \quad (2.5)$$



Σχήμα 2.3: Επιφάνεια διαρροής ή αστοχίας στον υπερχώρο των τάσεων.

Επίσης πρέπει να σημειωθεί ότι το μέγεθος των τροπών<sup>1</sup> δεν έχει όριο κατά την πλαστική διαρροή και συμβολίζεται  $D_{ij} = \dot{\varepsilon}_{ij}$  ή σκέτα  $D_{ij} = d\varepsilon_{ij}^p$  αν ο χρόνος δεν παίζει ρόλο. Ως παραδοχή θεωρείται, πως  $d\varepsilon_{ij} = d\varepsilon_{ij}^e + d\varepsilon_{ij}^p$  (Αρχή διαχωρισμού των τροπών) όπως φαίνεται στο (σχήμα 2.4), και όπου οι ελαστικές τροπές δίνονται από τον νόμο του Hooke:  $d\varepsilon_{ij}^e = S_{ijkl}\sigma_{kl}$ .

<sup>1</sup> Τροπές είναι οι ανηγμένες παραμορφώσεις κατά Μυλωνά.



Σχήμα 2.4: Διάγραμμα φόρτισης-αποφόρτισης ελαστοπλαστικού υλικού στο επίπεδο  $\sigma$ - $\epsilon$ .

### 2.2.2 Νόμος πλαστικής ροής

Νόμος πλαστικής ροής ονομάζεται το πλαστικό δυναμικό (plastic potential)  $g$  που καθορίζει το πλαστικό τμήμα της παραμόρφωσης (σχήμα 2.2).

$$d\epsilon_{ij}^p = \lambda \frac{\partial Q}{\partial \sigma_{ij}}, \quad \lambda > 0 \quad (2.6)$$

όπου:

$Q(\sigma_{ij}) = (ct)$  = είναι η επιφάνεια στον  $\sigma_{ij}$  χώρο και ονομάζεται πλαστικό δυναμικό.

$\partial Q / \partial \sigma_{ij}$  = βαθμίδα (gradient) της επιφάνειας  $g=(ct)$ , που είναι διάνυσμα κάθετο στην επιφάνεια  $g=(ct)$  στο σημείο  $\sigma_{ij}$ .

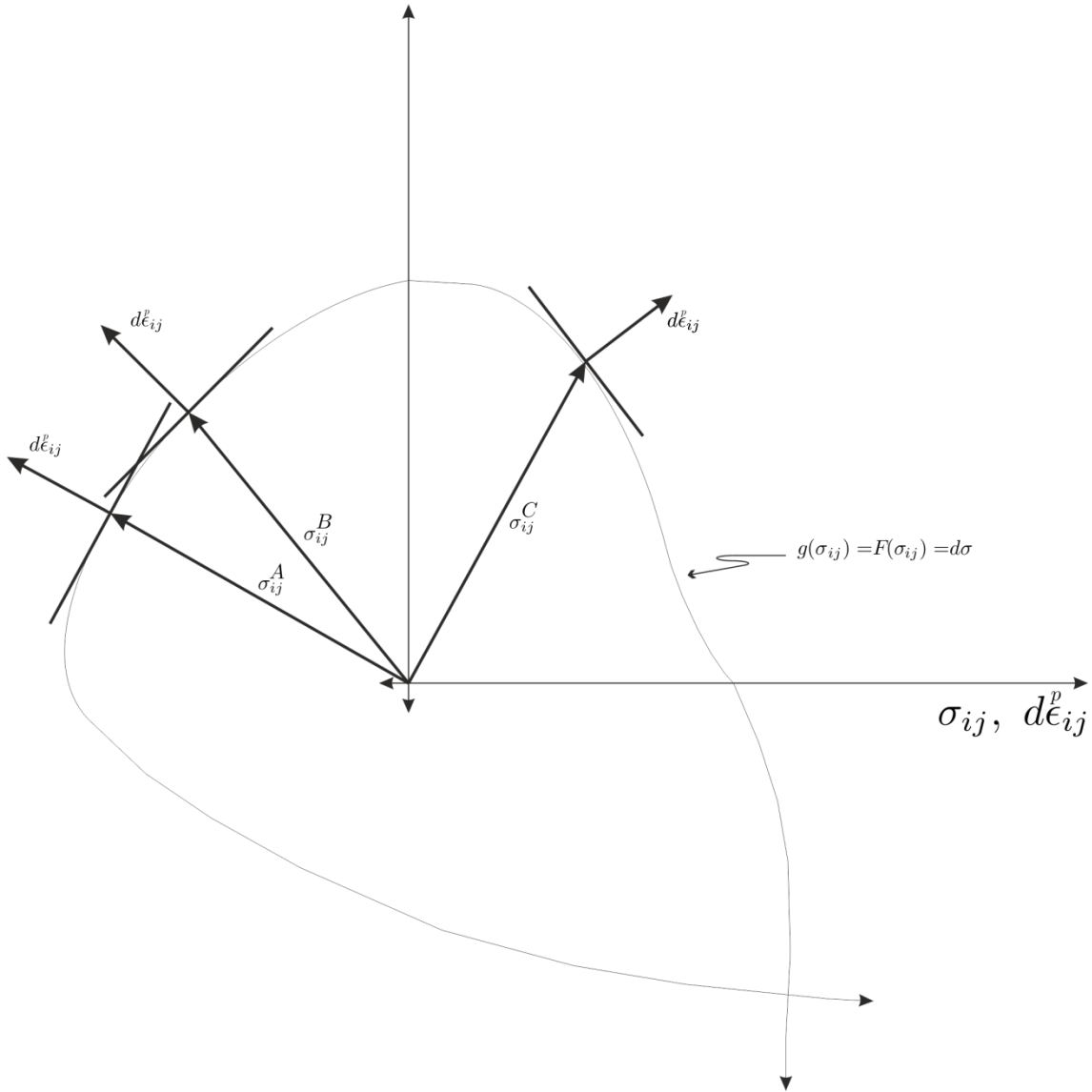
$\lambda$  = πολλαπλασιαστικός παράγοντας (πάντα μεγαλύτερος του μηδενός όταν συμβαίνουν πλαστικές παραμορφώσεις).

$Q = F$  = Συνηρημένος νόμος της πλαστικής ροής (associated flow rule).

Αν ισχύει ο συνηρημένος νόμος της πλαστικής ροής που γεωμετρικά παρίσταται στο (σχήμα 2.5), τότε:

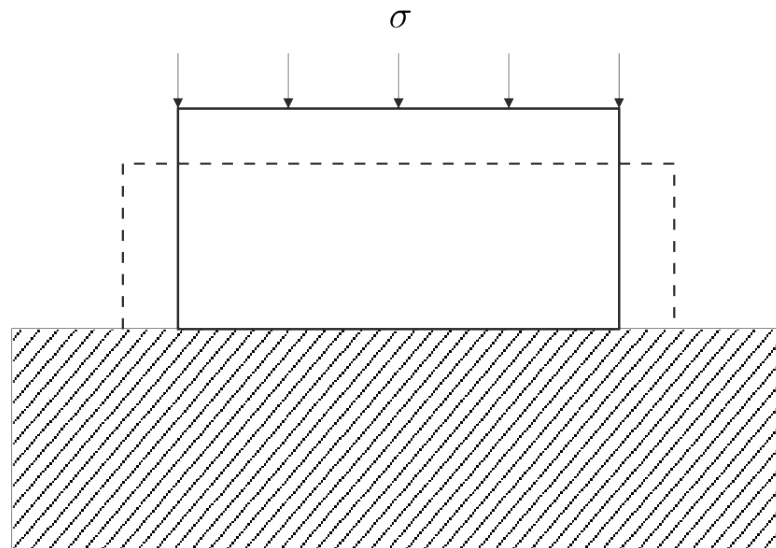
1. το έργο που δαπανάται για πλαστικές παραμορφώσεις δεν επανακτάται,

2. δίνει μοναδική λύση σε προβλήματα συνοριακών τιμών,
3. δίνει τη δυνατότητα γενίκευσης των εξισώσεων της πλαστικότητας για πολύπλοκα κριτήρια αστοχίας.



Σχήμα 2.5: Γεωμετρική αναπαράσταση της επιφάνειας διαρροής και του συνηρημένου νόμου διαρροής.

Ως παραδοχή θεωρείται ότι για ισότροπα υλικά οι κατευθύνσεις των κυρίων τροπών ( $\epsilon_1$ ,  $\epsilon_2$ ,  $\epsilon_3$ ) συμπίπτουν με τις κατευθύνσεις των κυρίων τάσεων ( $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$ ,  $\sigma_3$ ). Αυτή ονομάζεται συνθήκη «ομοαξονικότητας» (co-axiality condition). Για παράδειγμα, οι έδρες ενός ορθογωνικού σώματος που υποβάλλεται σε μονοαξονική θλίψη θα παραμείνουν κάθετες, όπως φαίνεται και στο (σχήμα 2.6).

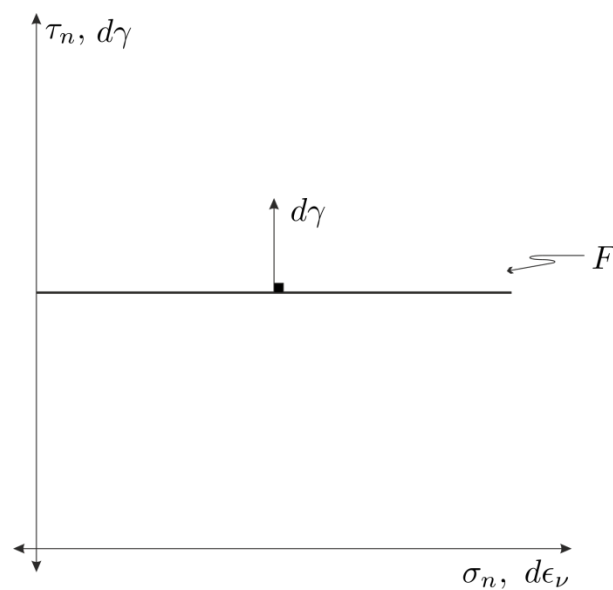


Σχήμα 2.6: Γεωμετρική ερμηνεία της συνθήκης της ομοαξονικότητας των τάσεων-παραμορφώσεων.

### 2.2.3 Νόμος πλαστικής ροής που συναρτάται με το κριτήριο Tresca

Το μοντέλο αστοχίας του Tresca [Tresca, 1864] μπορεί να γραφτεί ως εξής:

$$F = \sigma_1 - \sigma_3 - 2c \quad (\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3) \quad (2.7)$$

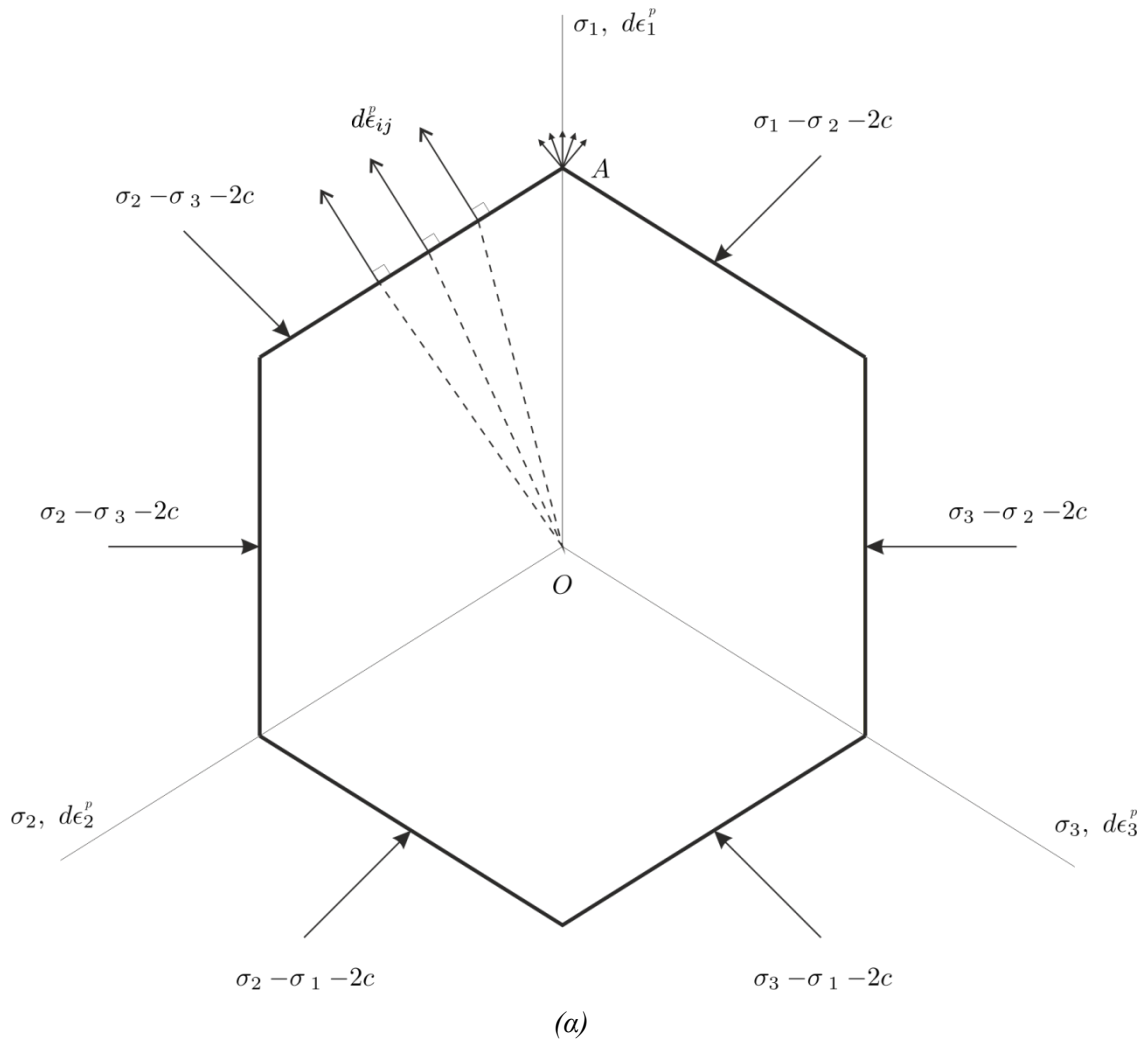


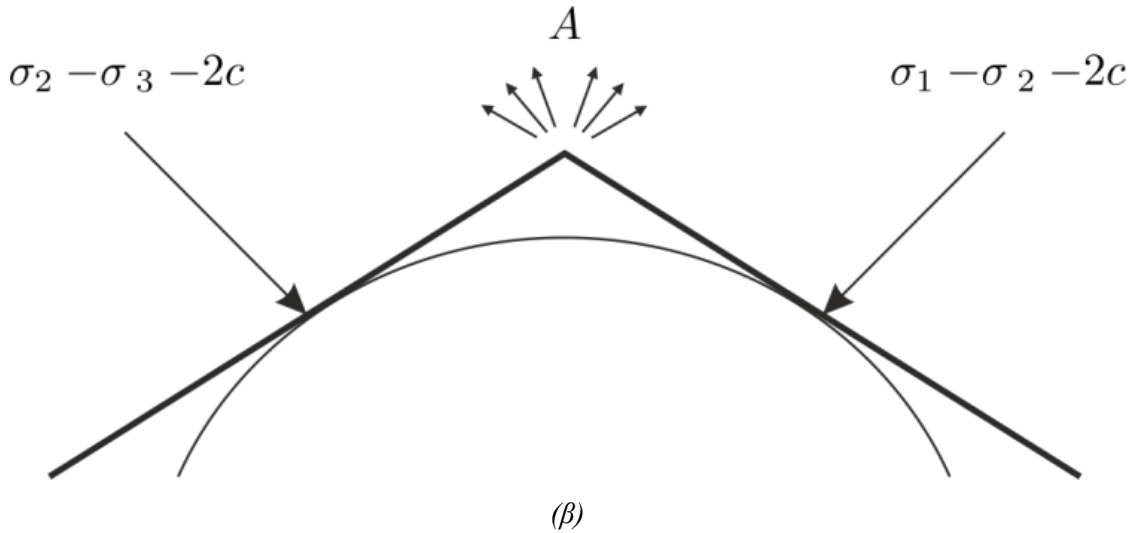
Σχήμα 2.7: Το κριτήριο Tresca στα επίπεδα  $(\tau, \sigma)$  και  $(d\gamma, d\epsilon_v)$ .

Ο νόμος της πλαστικής ροής, σύμφωνα με το παραπάνω (σχήμα 2.7) λαμβάνει την ακόλουθη μορφή:

$$\left. \begin{aligned} d\varepsilon_1^p &= d\lambda \frac{\partial F}{\partial \sigma_1} = d\lambda \\ d\varepsilon_2^p &= d\lambda \frac{\partial F}{\partial \sigma_2} = 0 \\ d\varepsilon_3^p &= d\lambda \frac{\partial F}{\partial \sigma_3} = -d\lambda \end{aligned} \right\} \Rightarrow d\varepsilon_V^p = d\varepsilon_1^p + d\varepsilon_3^p = 0 \quad \left( \text{Συνθήκη μη - συμπιεστότητας ή ισόχωρης παραμόρφωσης} \right)$$

(2.8)





Σχήμα 2.8: (α) Εξάγωνο του Tresca, πάνω στο αποκλίνον επίπεδο και (β) η κορυφή A ως όριο μιας λείας (smooth) καμπύλης.

Ως ειδική περίπτωση θεωρείται όταν η εντατική κατάσταση βρίσκεται σε κάποια κορυφή του εξαγώνου, δηλαδή  $\sigma_1 > \sigma_2 = \sigma_3$  (σχήμα 2.8 β). Σ' αυτή την περίπτωση, η διατμητική ολίσθηση μπορεί να λάβει χώρα σε δύο πιθανά επίπεδα μέγιστης διατμητικής τάσης (το A είναι το σημείο ιδιομορφίας).

1.  $\sigma_{max} = \sigma_1, \sigma_{min} = \sigma_3$   
 $(d\varepsilon_1^p, d\varepsilon_2^p, d\varepsilon_3^p) = d\lambda(1, 0, -1) \quad d\lambda \geq 0$
2.  $\sigma_{max} = \sigma_1, \sigma_{min} = \sigma_2$   
 $\sigma_1 - \sigma_2 = 2c$   
 $(d\varepsilon_1^p, d\varepsilon_2^p, d\varepsilon_3^p) = d\mu(1, -1, 0) \quad d\mu \geq 0$

Ως παραδοχή θεωρείται πως  $(d\varepsilon_1^p, d\varepsilon_2^p, d\varepsilon_3^p) = d\lambda(1, 0, -1) + d\mu(1, -1, 0)$  για  $d\lambda, d\mu \geq 0$ .

Γενικά, σε ιδιόμορφα σημεία ισχύει πως:

$$d\varepsilon_{ij}^p = \sum_{k=1}^m d\lambda_k \frac{\partial F_k}{\partial \varepsilon_{ij}} \quad (2.9)$$

Συνεπώς η κατεύθυνση του διανύσματος προσαύξησης πλαστικής τροπής δεν μπορεί να προσδιορισθεί με μοναδικό τρόπο.

### 2.3 Πλαστικό έργο

Μπορεί να αποδειχθεί ότι η προσαύξηση του πλαστικού έργου  $\dot{D}$  ανά μονάδα όγκου που δαπανάται κατά την πλαστική παραμόρφωση προσδιορίζεται πάντα με μοναδικό τρόπο [Chen and Han, 1988], ως εξής:

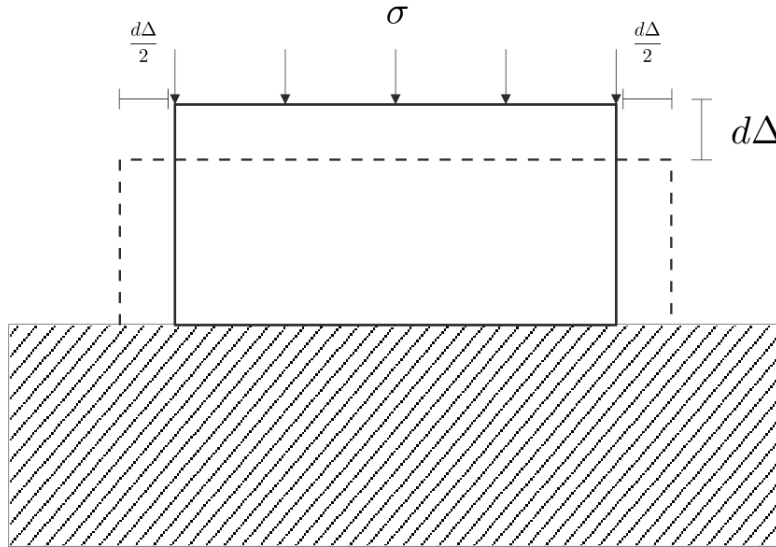
$$\dot{D} = \sigma_1 d\varepsilon_1^p + \sigma_2 d\varepsilon_2^p + \sigma_3 d\varepsilon_3^p = 2 c \max|d\varepsilon^p| \quad (2.10)$$

όπου:

$\max|d\varepsilon^p| =$  είναι η απόλυτη τιμή της αριθμητικά μεγαλύτερης συνιστώσας του διανύσματος της πλαστικής προσαύξησης της τροπής.

Για παράδειγμα, παρακάτω φαίνεται σχηματικά και αριθμητικά η συμπεριφορά ενός υλικού Tresca στο οποίο υπάρχει διατήρηση του όγκου (ισόχωρη παραμόρφωση) κατά την πλαστική διαρροή. Οι τρεις περιπτώσεις καταπόνησης, είναι:

1. Ομογενής θλίψη (κατακόρυφη συστολή και οριζόντια διαστολή)



Σχήμα 2.9: Απλή κατακόρυφη θλίψη με αποτέλεσμα πλευρικής διαστολής.

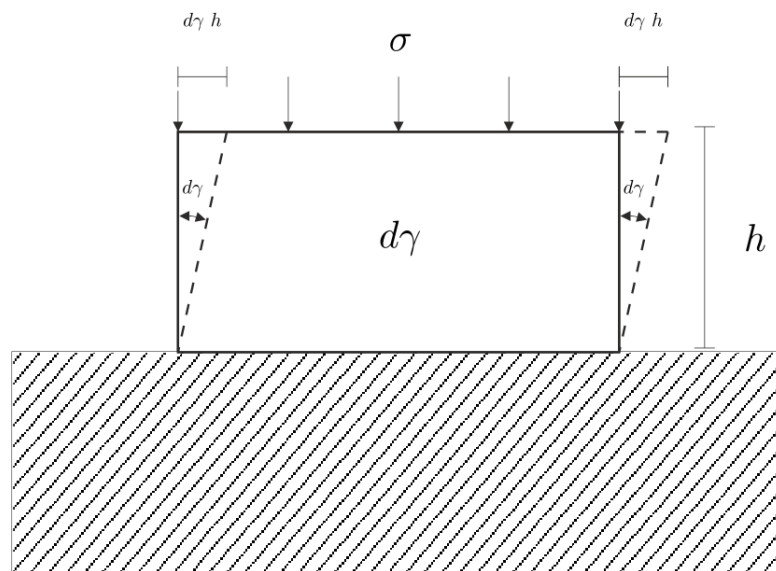
$$d\varepsilon_y = d\varepsilon \Rightarrow d\varepsilon_x = -d\varepsilon \quad \mu\epsilon \quad \sigma_y = \sigma_1, \sigma_x = \sigma_3 \quad (2.11)$$

$$\dot{D} = \sigma_y d\varepsilon - \sigma_x d\varepsilon = (\sigma_1 - \sigma_3) d\varepsilon = 2 c d\varepsilon \quad (2.12)$$

Όπου οι θλιπτικές τροπές είναι θετικοί αριθμοί, που βρίσκεται σε συμφωνία με το παραπάνω θεώρημα (σχήμα 2.10).

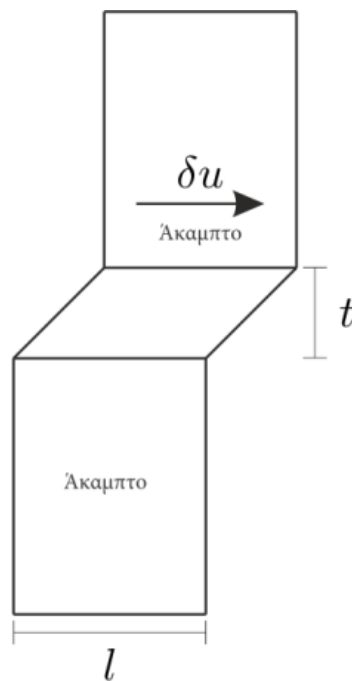
2. Ομογενής διάτμηση

$$\dot{D} = c \, d\gamma \quad (2.13)$$



Σχήμα 2.10: Απλή διατμητική παραμόρφωση.

3. Άκαμπτο ογκοτεμάχιο το οποίο ολισθαίνει επί της λεπτής ζώνης ολίσθησης



Σχήμα 2.11: Σχετική οριζόντια ολίσθηση άκαμπτων σωμάτων πάνω σε λεπτή λωρίδα.

Εντός της ζώνης διάτμησης η διατμητική τροπή είναι ομοιογενής, συνεπώς:

$$d\gamma = \frac{du}{t} \quad (2.14)$$

Όπου:

$du \approx \delta u = \eta$  διατμητική μετατόπιση.

$t = \text{το πάχος της ζώνης διάτμησης.}$

Επίσης το πλαστικό έργο δίνεται από τη σχέση:

$$\dot{D} = c \, d\gamma \, t \quad (2.15)$$

όπου:

$d\gamma = \eta$  προσαύξηση της μέγιστης διατμητικής παραμόρφωσης ( $\gamma = 2\varepsilon_{xy}$ ).

Άρα ο ρυθμός πλαστικού έργου είναι ανεξάρτητος του πάχους της ζώνης διάτμησης. Επίσης, για  $t \rightarrow 1$  τα δύο άκαμπτα σώματα βρίσκονται σε επαφή.

### 2.3.1 Νόμος πλαστικής ροής που συναρτάται με το κριτήριο του Mohr – Coulomb (M-C)

Το κριτήριο διαρροής M-C στον κλάδο AB (σχήμα 2.12) έχει την εξής μορφή:

$$F = \sigma_1(1 - \sin \varphi) - \sigma_3(1 + \sin \varphi) - 2c \cos \varphi = 0 \quad (2.16)$$

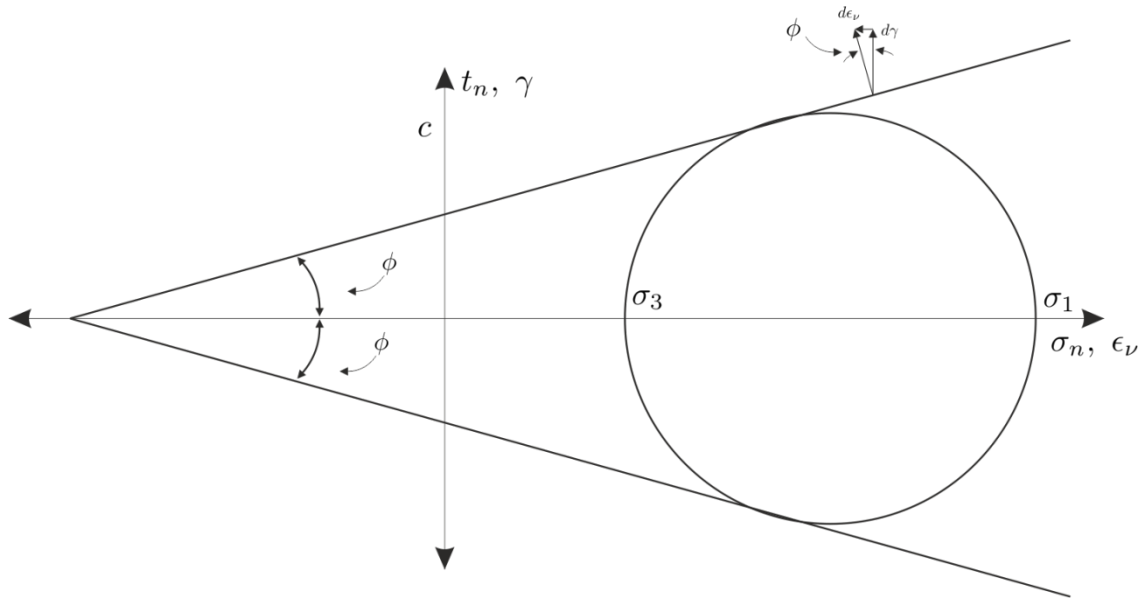
όπου:

$c, \varphi = \text{συνοχή και γωνία εσωτερικής τριβής αντιστοίχως του γεωυλικού.}$

Σύμφωνα με τα παραπάνω, ο νόμος πλαστικής ροής παίρνει την εξής μορφή:

$$\left. \begin{aligned} d\varepsilon_1^P &= d\lambda \times (1 - \sin \varphi) \\ d\varepsilon_3^P &= -d\lambda \times (1 + \sin \varphi) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{d\varepsilon_1^P}{d\varepsilon_3^P} = -\frac{1 - \sin \varphi}{1 + \sin \varphi} = -\tan^2 \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right) \quad (2.17)$$

Στη συνέχεια παρουσιάζεται η προβολή του κριτηρίου M-C στο υδροστατικό επίπεδο (σχήμα 2.12).



Σχήμα 2.12: Κριτήριο M-C στο υδροστατικό επίπεδο τάσεων, τροπών.

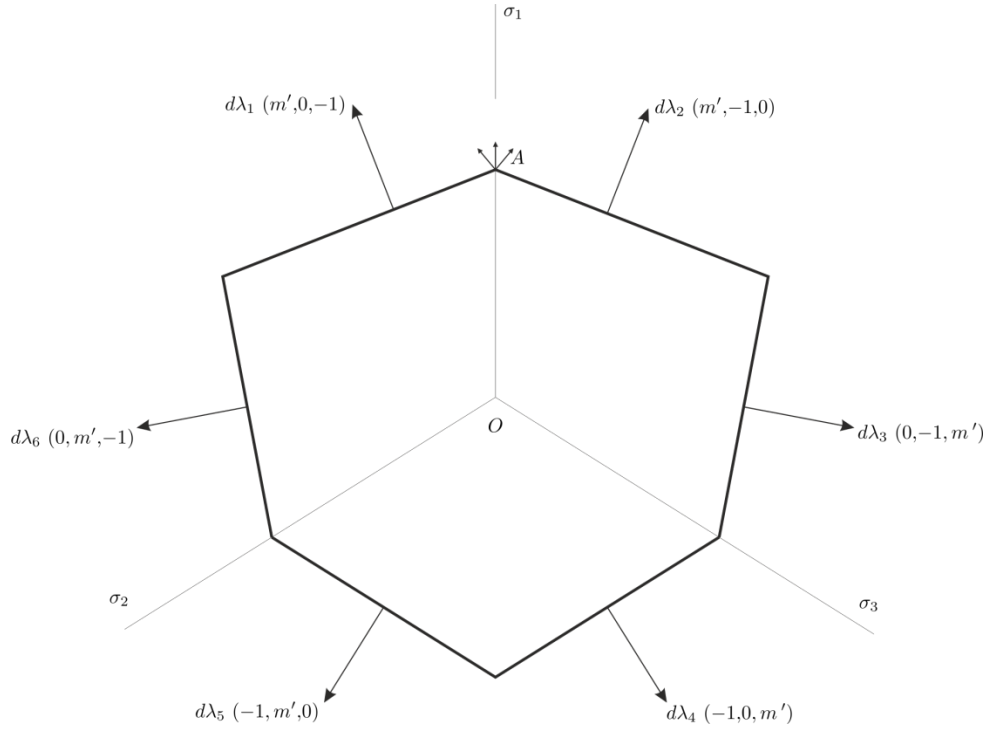
Επίσης, ο νόμος της πλαστικής ροής μπορεί να πάρει και την μορφή:

$$d\varepsilon_1^p = -d\varepsilon_3^p \tan^2 \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right) \quad (2.18)$$

Για  $\varphi = 0 \Rightarrow d\varepsilon_1 + d\varepsilon_3 = 0$  (Υλικό Tresca).

Η προβολή του κριτηρίου M-C στο αποκλίνον επίπεδο έχει τη μορφή ακανόνιστου εξαγώνου (σχήμα 2.13). Η διάσταση  $m'$  προκύπτει από τον εξής τύπο:

$$m' = \frac{1 - \sin \varphi}{1 + \sin \varphi} = \frac{1}{m} \quad (2.19)$$



Σχήμα 2.13: Κριτήριο  $M - C$  στο αποκλίνον επίπεδο.

Το πλαστικό έργο ανά μονάδα όγκου, εξ' ορισμού υπολογίζεται με βάση τη σχέση [2.10]. Στην περίπτωση όπου σε ένα σημείο επί του κλάδου  $AB$ , έχουμε  $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ , ισχύει ότι:

$$d\varepsilon_1^p = m' d\lambda, d\varepsilon_2^p = 0, d\varepsilon_3^p = -d\lambda \quad (d\lambda \geq 0) \quad (2.20)$$

$$\sigma_1 m' - \sigma_3 = \frac{2c \cos \varphi}{1 + \sin \varphi} = f'_t, m' = \frac{f'_t}{f'_c} \leq 1 \quad (2.21)$$

$$\dot{D} = (\sigma_1 m' - \sigma_3) d\lambda = \frac{2c \cos \varphi}{1 + \sin \varphi} d\lambda = f'_t d\lambda \quad (2.22)$$

Επίσης, η μεταβολή της διαστολικής πλαστικής παραμόρφωσης (με σύμβαση πρόσημου ότι οι θλιπτικές τροπές είναι θετικοί αριθμοί), είναι:

$$\dot{D} = \sigma_1 d\varepsilon_1^p + \sigma_2 d\varepsilon_2^p + \sigma_3 d\varepsilon_3^p = (m' - 1) d\lambda \quad (d\lambda \geq 0) \quad (2.23)$$

Άρα το υλικό  $M - C$  με βάση το συνηρημένο νόμο της διαρροής παρουσιάζει πάντα διαστολή εκτός από την περίπτωση που  $m'=1$  ή  $\varphi'=0$ , δηλαδή έχουμε υλικό Tresca.

Για παράδειγμα, παρακάτω φαίνεται αριθμητικά η συμπεριφορά ενός υλικού με συνοχή  $c$  και γωνία τριβής  $\varphi$ , σε τρεις περιπτώσεις καταπόνησης:

1. Υπολογισμός πλαστικού έργου ομογενής θλίψης

$$dD = \sigma_x d\varepsilon_x + \sigma_y d\varepsilon_y = \sigma_1 d\varepsilon_1 + \sigma_3 d\varepsilon_3, \quad d\varepsilon_1 = d\varepsilon \quad (2.24)$$

$$d\varepsilon_3 = -d\varepsilon \tan^2 \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) \quad (2.25)$$

Άρα η πλευρική τροπή είναι με αντίθετο πρόσημο και μεγαλύτερη κατά απόλυτη τιμή από την κατακόρυφη τροπή. Επομένως συνάγουμε την έκφραση για τη μεταβολή του πλαστικού έργου και συνεπώς από τις εξισώσεις [2.24] και [2.25], έχουμε:

$$dD = \left[ \sigma_1 - \tan^2 \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) \right] d\varepsilon \quad (2.26)$$

Αλλά η ικανοποίηση του κριτηρίου αστοχίας απαιτεί:

$$\sigma_1 - \sigma_3 \tan^2 \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) = 2 c \tan^2 \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) \quad (2.27)$$

Συνεπώς, έχουμε:

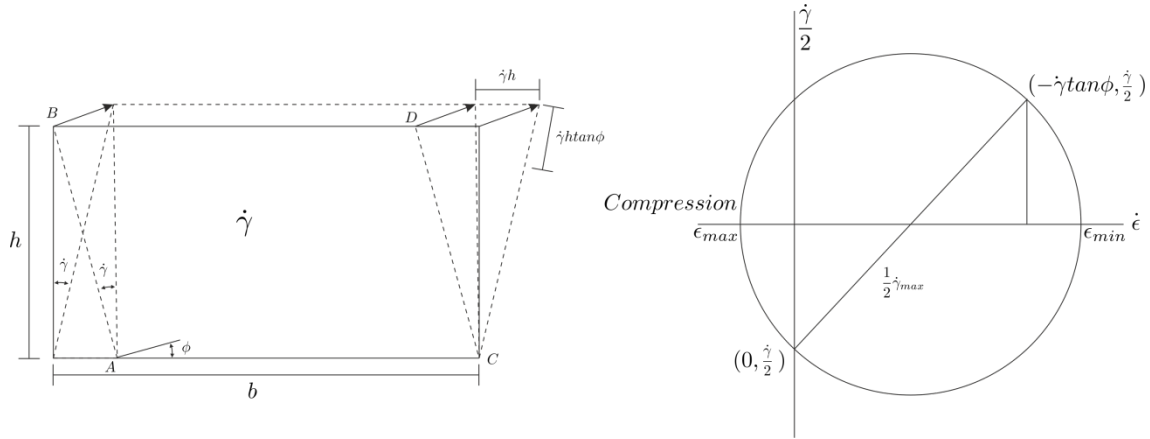
$$dD = 2 c \tan^2 \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) d\varepsilon = \frac{2 c \cos \varphi}{1 - \sin \varphi} d\varepsilon \quad (2.28)$$

Επίσης, έχουμε:

$$d\Delta = h d\varepsilon \quad (2.29)$$

$$d\delta = -b d\varepsilon \tan^2 \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) \quad (2.30)$$

## 2. Απλή ομογενής διάτμηση



Σχήμα 2.14: (α) Απλή διατμητική τροπή, (β) Κύκλος του Mohr [Chen, 1975].

Η απλή διατμητική τροπή  $d\gamma$  συνοδεύεται από κατακόρυφη πλαστική τροπή  $d\gamma \tan \phi$ . Άρα, έχουμε:

$$dD = \tau d\gamma - \sigma d\gamma \tan \phi = (\tau - \sigma \tan \phi) d\gamma \quad (2.31)$$

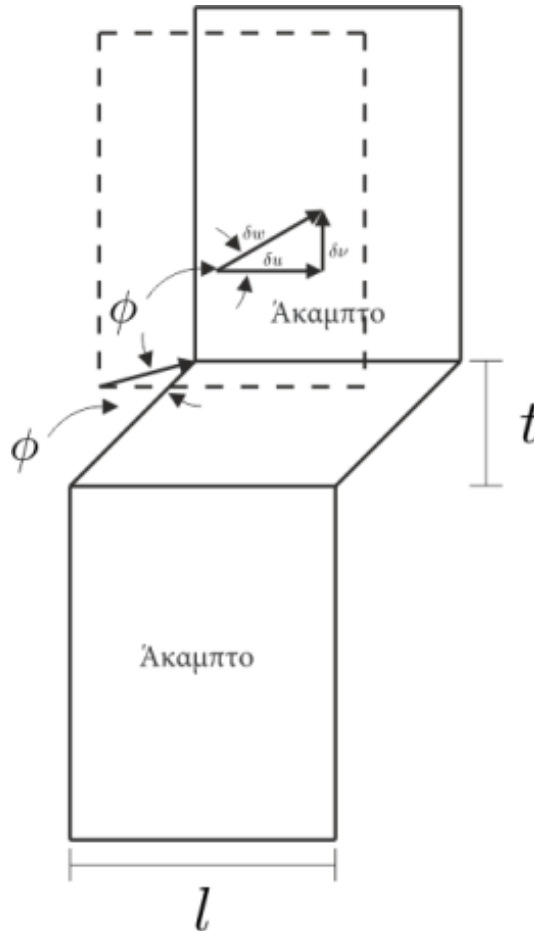
Αλλά, εξαιτίας της διαστολής του όγκου που πάντα συνοδεύει την πλαστική διατμητική παραμόρφωση (βλ. κύκλο του Mohr), έχουμε:

$$\tau = c + \sigma \tan \phi \quad (2.32)$$

$$\xrightarrow{(2.31), (2.32)} dD = c d\gamma \quad (2.33)$$

$$d\gamma = d\gamma_{max} \cos \phi \quad (2.34)$$

## 3. Άκαμπτα τεμάχια που ολισθαίνουν επί της λεπτής διεπιφάνειας



Σχήμα 2.15: Σχετική ολίσθηση άκαμπτων σωμάτων πάνω σε λεπτή λωρίδα.

Μπορεί να υπολογιστεί η απειροστική μεταβολή του πλαστικού έργου, ως εξής:

$$dD = (\tau d\gamma - \sigma d\varepsilon)V = (\tau d\gamma - \sigma d\varepsilon)t = \tau \delta u - \sigma \delta v \Leftrightarrow$$

$$dD = \delta u (\tau - \sigma \tan \varphi) = \sigma \delta u \quad (2.35)$$

όπου:

$V$  = όγκος της ζώνης  $t$ .

$$d\gamma = \frac{\delta u}{t}$$

$$d\varepsilon = \frac{\delta v}{t}$$

Συνεπώς, το πάχος  $t$  της διατμητικής ζώνης μπορεί να είναι μηδέν.

### 2.3.2 Στοιχειώδες πλαστικό έργο παραμόρφωσης

Ένας απλός τρόπος να συσχετισθεί η πλαστική διαρροή με την πλαστική ροή είναι μέσω της έκφρασης για το στοιχειώδες πλαστικό έργο παραμόρφωσης, το οποίο υποθέτουμε ότι αναλύεται εξ' ολοκλήρου σε θερμότητα.

$$\dot{w}^p = \sigma_{ij} D_{ij}^p = p \dot{\varepsilon}_v^p + T \dot{g}^p \quad (2.36)$$

όπου:

$\dot{D} = dD$  (το έχουμε θέσει).

$p = \sigma_{kk}/3, \dots$

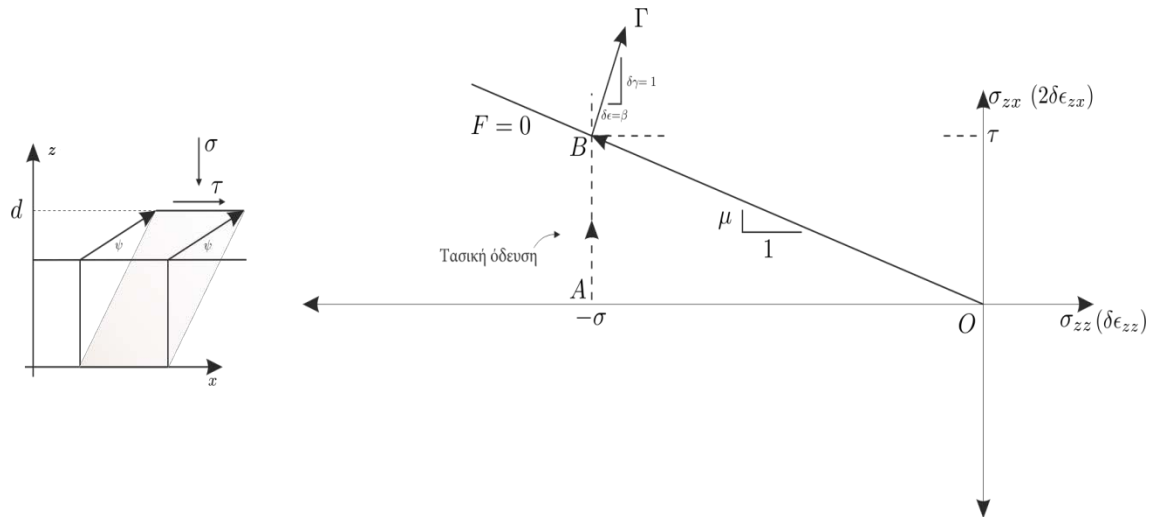
$D_{ij}^p$  = ρυθμός παραμορφώσεως που είναι το συμμετρικό μέρος της βαθμίδας της ταχύτητας.

$T$  = η 2η αναλλοίωτος του αποκλίνοντος του τανυστή των τάσεων.

Εκτός από την εσωτερική τριβή τα γεωϋλικά εμφανίζουν και πλαστική διασταλτικότητα η οποία θεωρείται ως ένας εσωτερικός περιορισμός μεταξύ του ρυθμού της πλαστικής παραμόρφωσης του όγκου  $p \dot{\varepsilon}_v^p = D_{kk}^p$  και του ρυθμού της πλαστικής διατμητικής παραμόρφωσης  $\dot{g}^p$ .

## 2.4 Τασική όδευση

Μέσα στα πλαίσια της Μαθηματικής Θεωρίας της Πλαστικότητας θα παρασταθεί γεωμετρικά την συνθήκη διαρροής των Mohr-Coulomb και τον νόμο πλαστικής ροής στο ίδιο διάγραμμα, στο επίπεδο των τάσεων  $(\sigma_{zz}, \sigma_{xz})$ .



Σχήμα 2.16: Γραφική παράσταση της συνθήκης διαρροής και του νόμου πλαστικής ροής στο επίπεδο των τάσεων (πλαγιότητα πλαστικών παραμορφώσεων και επιφάνειας διαρροής).

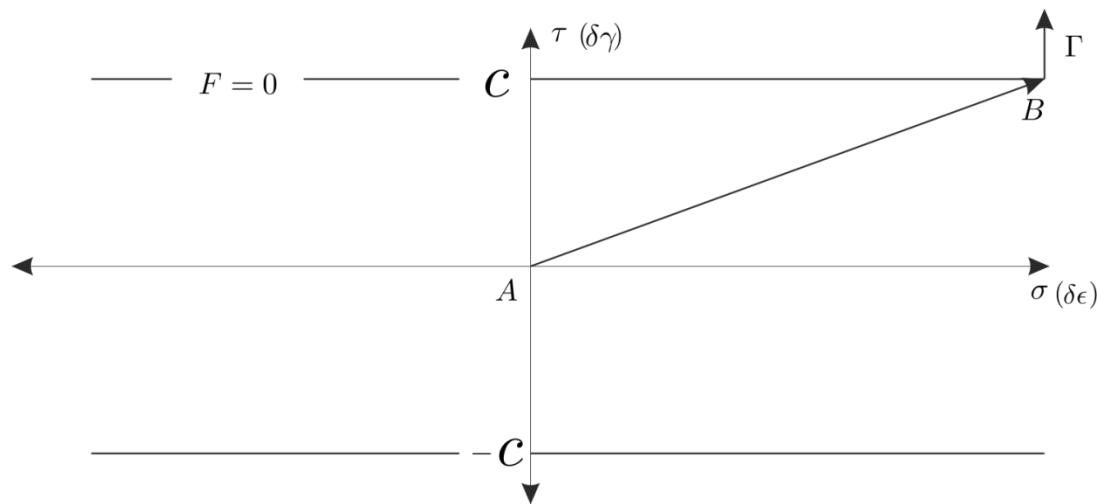
Σύμφωνα με το σχετικό διάγραμμα κάνουμε τις εξής διαπιστώσεις:

1. Κατά την υλοποίηση του πειράματος απ' ευθείας διατμήσεως οι τάσεις ακολουθούν την αμιγώς διατμητική "τασική οδευση" (stress path) AB, αφού η ορθή τάση παραμένει (σε καλή προσέγγιση) σταθερή.
2. Η εκάστοτε εντατική κατάσταση στο επίπεδο αστοχίας παρίσταται στο διάγραμμα αυτό από το διάνυσμα  $\overrightarrow{OB}$ , που έχει κλίση ίση προς την ενεργοποιημένη τριβή,  $\mu = \tan \phi$  (άρα βρίσκεται πάνω στην αντίστοιχη επιφάνεια διαρροής,  $F = 0$ ).
3. Ο νόμος της πλαστικής ροής παρίσταται γεωμετρικά με το διάνυσμα  $\overrightarrow{BF}$ , το οποίο προσαρτάται στο εκάστοτε σημείο της τασικής οδεύσεως, στο σημείο B, εν προκειμένω. Η αντίστροφη κλίση του διανύσματος του ρυθμού της πλαστικής παραμορφώσεως ισούται με την ενεργοποιημένη διασταλτικότητα στο εν λόγω σημείο,  $\beta = \tan \psi$ . Άρα οι συνιστώσες του διανύσματος αυτού στο εν λόγω σύστημα είναι ανάλογες προς τον ρυθμό πλαστικής παραμορφώσεως του όγκου και του σχήματος, αντιστοίχως.

Αυτή η απεικόνιση είναι εν προκειμένω ιδιαίτερα χρήσιμη, αφού τα εμπλεκόμενα στατικά και κινηματικά μεγέθη είναι ενεργειακά συζυγή σύμφωνα με την εξίσωση [2.36]. Αυτό σημαίνει ότι το εσωτερικό γινόμενο του διανύσματος των τάσεων  $\overrightarrow{OB}$  με το διάνυσμα του ρυθμού πλαστικής παραμορφώσεως  $\overrightarrow{BF}$  αποδίδει το έργο του ρυθμού πλαστικής παραμορφώσεως, ως εξής:

$$\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{BF} = \tau \delta \gamma - \sigma \delta \varepsilon = \frac{1}{d} \delta D \quad (2.37)$$

Ειδικότερα τονίζεται στο σημείο αυτό ότι η καταστατική ανισότητα μεταξύ γωνίας διασταλτικότητας και τριβής  $\psi \leq \phi$ , σημαίνει γεωμετρικά ότι το διάνυσμα του ρυθμού της πλαστικής παραμορφώσεως  $\overrightarrow{BT}$  δεν είναι κάθετο πάνω στην αντίστοιχη επιφάνεια διαρροής, OB. Αυτή είναι μία σημαντική διαφορά της θεωρίας πλαστικότητας των μη συνεκτικών γεωυλικών από την αντίστοιχη θεωρία των όλκιμων μετάλλων ή άλλων συνεκτικών υλικών, όπως οι άργιλοι κάτω από κατάλληλες συνθήκες. Στις περιπτώσεις αυτές το υλικό εμφανίζει διατμητική αντοχή C (συνεκτικότητα), που είναι ανεξάρτητη από την ορθή τάση στο επίπεδο αστοχίας και η παραμόρφωσή του υλικού είναι ισόχωρη.



Σχήμα 2.17: Συνθήκη διαρροής και νόμος πλαστικής ροής για συνεκτικό υλικό με καθετότητα των πλαστικών παραμορφώσεων στην επιφάνεια διαρροής στα επίπεδα  $(\tau, \sigma)$  &  $(\delta\gamma, \delta\epsilon)$ .

Στην περίπτωση των συνεκτικών υλικών ισχύει η λεγόμενη συνθήκη καθετότητας (normality condition), δηλαδή το διάνυσμα πλαστικής ροής ( $\delta\epsilon = 0$ ) είναι κάθετο στην αντίστοιχη επιφάνεια διαρροής,  $F = |\tau| - c = 0$ . Η συνθήκη καθετότητας με τη σειρά της αποτελεί τη βάση για την απόδειξη μιας σειράς γενικών προτάσεων, χρήσιμων για την ασφαλή εκτίμηση των άνω και κάτω φραγμάτων του φορτίου καταρρεύσεως μιας κατασκευής. Στην περίπτωση όμως που δεν ισχύει η συνθήκη καθετότητας τα σχετικά θεωρήματα των άνω και κάτω φράγματος δεν ισχύουν, και ως εκ τούτου υπάρχει αβεβαιότητα όσον αφορά την πρακτική αξία ενός υπολογισμού σε σχέση με το φορτίο καταρρεύσεως της γεωκατασκευής. Η αδυναμία αυτή της θεωρίας πλαστικότητας των γεωυλικών αντανακλάται σε πολλές πρακτικές εφαρμογές, όπου δεν μπορούμε να εξασφαλίσουμε εκ των προτέρων την ποιότητα και αξία των θεωρητικών μας προβλέψεων και καθιστούν την πειραματική εξακρίβωση καθώς και την παρατήρηση στο πεδίο απολύτως αναγκαία.

## 2.5 Θεωρήματα της Οριακής Ανάλυσης

Μια πλήρης λύση ενός συννοριακού προβλήματος της γεωμηχανικής μπορεί να βρεθεί αν ικανοποιούνται ταυτόχρονα οι εξής προϋποθέσεις:

1. Η ισορροπία των τάσεων ( $\sigma$ ),
2. Η συμβατότητα των τροπών ( $\epsilon$ ),
3. Η καταστατική σχέση  $\sigma - \epsilon$  στην ελαστική περιοχή με τον γενικευμένο νόμο του Hooke,
4. Η συνθήκη κανονικότητας,
5. Το κριτήριο αστοχίας.

Παρ' όλα αυτά η πλήρης ελαστικό-πλαστική λύση ενός προβλήματος της γεωμηχανικής απαιτεί χρόνο και κόστος υπολογισμών, που σε πολλές περιπτώσεις γεωτεχνικών προβλημάτων θεωρείται υπερβολικό, με δεδομένη την αβεβαιότητα της εκτίμησης των υπεισερχομένων γεωτεχνικών παραμέτρων.

Σε αυτές τις περιπτώσεις μια προσεγγιστική λύση ενός προβλήματος ευστάθειας κοντά στην περιοχή της αστοχίας, η οποία μπορεί να βρεθεί εύκολα και γρήγορα, είναι συνήθως επιθυμητή από τον γεωτεχνικό μηχανικό. Γι' αυτό το σκοπό μπορεί να εφαρμοσθούν τα θεωρήματα του Κάτω και Άνω Ορίου του φορτίου αστοχίας (ή φέρουσας ικανότητας) τα οποία προκύπτουν απ' την Θεωρία Πλαστικότητας [Chen, 1975; Chen and Han, 1988]. Τα όρια αυτά είναι πολλές φορές πολύ κοντά το ένα στο άλλο και σε μερικές περιπτώσεις συμπίπτουν αποδίδοντας έτσι το πραγματικό φορτίο αστοχίας της μάζας του εδάφους ή του πετρώματος.

Στην πραγματικότητα τα θεωρήματα του κάτω και πάνω ορίου αντιπροσωπεύουν δύο διαφορετικές προσεγγίσεις «ισορροπίας» και «γεωμετρίας», αντίστοιχα. Και οι δύο μέθοδοι βασίζονται στην παραδοχή, έτσι ώστε το κάτω φράγμα της φέρουσας ικανότητας ή φορτίου αστοχίας μπορεί να προκύψει μόνο ικανοποιώντας (α) τις εξισώσεις ισορροπίας των τάσεων και (β) το κριτήριο αστοχίας, Δηλαδή:

1. ότι το γεωυλικό υφίσταται μικρές παραμορφώσεις μέχρι την αστοχία και προσεγγιστικά συμπεριφέρεται ως «άκαμπτο και τέλεια πλαστικό» υλικό (σχήμα 2.1α),
2. υπακούει τον «συναρτημένο νόμο ροής» (σχήμα 2.1β).

Η απλούστερη προσομοίωση πλαστικού υλικού είναι εκείνη του ισότροπου, ασυμπίεστου, ιδεατά πλαστικού και απολύτως στερεού υλικού. Η προσομοίωση αυτή προτείνεται για την προσεγγιστική και περιγραφή της μηχανικής συμπεριφοράς εύπλαστων αργίλων. Η εξιδανικευμένη συμπεριφορά ενός ιδεατά πλαστικού υλικού παρίσταται γραφικά με την αντίστοιχη καμπύλη ισοδύναμης τάσεως - ισοδύναμης τροπής (σχήμα 2.16). Οι ελαστικές τροπές θεωρούνται συνήθως αμελητέες, οπότε ο κλάδος αρχικής φορτίσεως OA και όλοι οι κλάδοι αποφορτίσεως-επαναφορτίσεως είναι κατακόρυφες ευθείες όπως η ευθεία ΓΔ. Ο κλάδος φορτίσεως AB

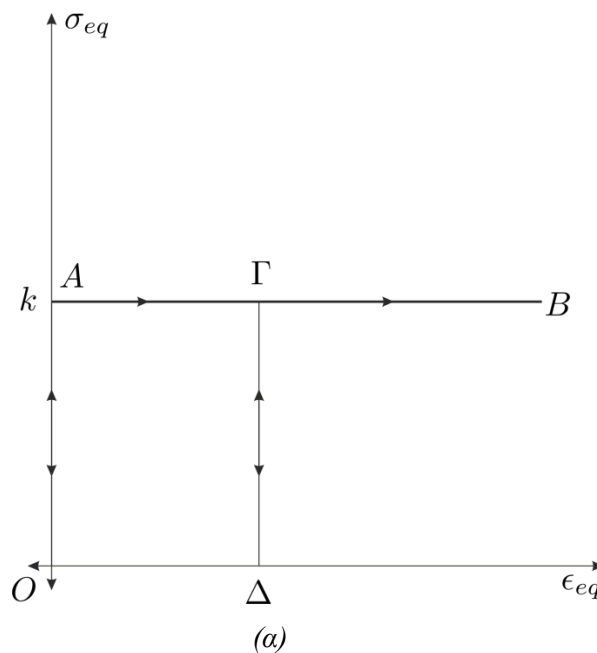
προσεγγίζεται με μια ευθεία παράλληλη προς τον άξονα  $\epsilon_{eq}$  η οποία και τέμνει τον άξονα  $\sigma_{eq}$  στο σημείο  $k$ , που αντιστοιχεί στην ισοδύναμη τάση διαρροής του υλικού. Παρατηρούμε ότι στην περίπτωση που το υλικό διαρρέει, ενώ η τάση ικανοποιεί την παραπάνω συνθήκη διαρροής του υλικού, οι τροπές είναι γενικώς απροσδιόριστες.

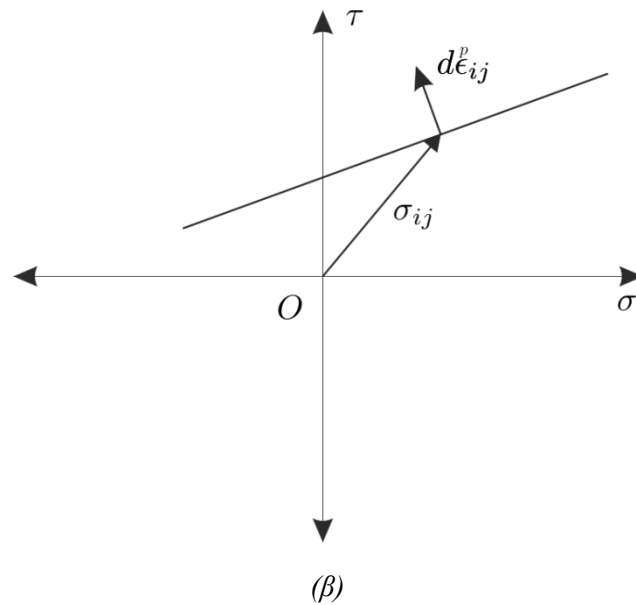
Το θεώρημα του Κάτω Ορίου - ή συντομογραφικά Κ.Ο.Θ.- διατυπώνεται ως εξής:

*Αν υπάρχει ομάδα εξωτερικών δυνάμεων για την οποία η κατανομή των τάσεων, εντός του σώματος, ευρίσκεται σε ισορροπία και δεν υπερβαίνει το κριτήριο αστοχίας (ή διαρροής) τότε οι δυνάμεις αυτές μπορούν να αναληφθούν ασφαλώς από την μάζα του γεωυλικού και επομένως αναπαριστούν το κάτω φράγμα του πραγματικού φορτίου αστοχίας.*

Το θεώρημα του Πάνω Ορίου ή συντομογραφικά Π.Ο.Θ. διατυπώνεται ως εξής:

*Αν για οποιοδήποτε συμβατό κινηματικό μηχανισμό αστοχίας του γεωυλικού που ικανοποιεί τις συνοριακές συνθήκες μετατόπισης τότε εξισώνοντας το ρυθμό παραγωγής του έργου των εξωτερικών δυνάμεων με το ρυθμό της κατανάλωσης έργου λόγω αστοχίας του γεωυλικού, το φορτίο αυτό είναι μεγαλύτερο ή ίσο με το πραγματικό φορτίο της αστοχίας.*



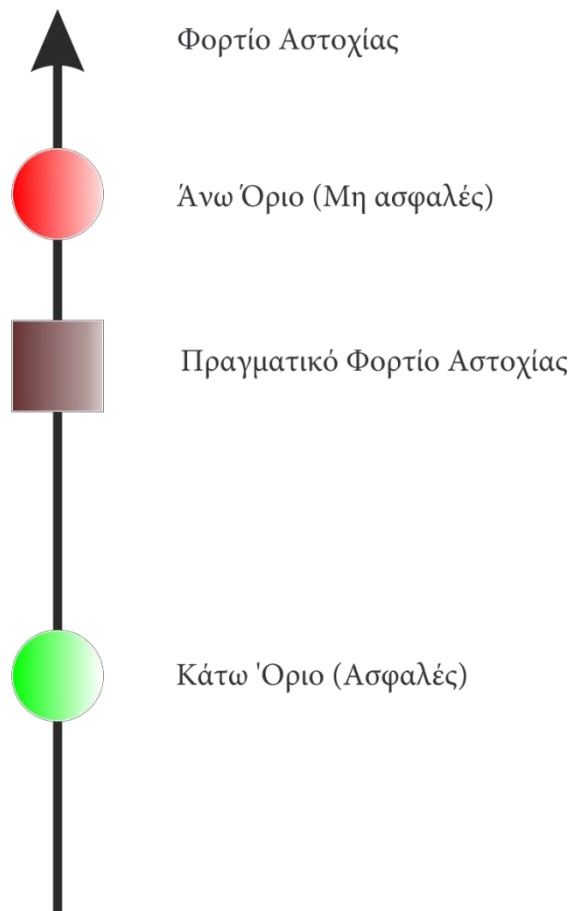


Σχήμα 2.18: (α) Καταστατική σχέση ισοδύναμης τάσης με την ισοδύναμη παραμόρφωση του απολύτως στερεού και ιδεατού πλαστικού γεωυλικού ( $k = \text{όριο διαρροής}$ ), (β) Γεωμετρική απεικόνιση στο υδροστατικό επίπεδο του συντηρημένου νόμου διαρροής για ένα γεωϋλικό με συνοχή και τριβή.

Όπως έχει γίνει κατανοητό το Π.Ο.Θ. δίνει μεγαλύτερες τιμές του φορτίου κατάρρευσης μιας γεωκατασκευής από το Κ.Ο.Θ.. Το πραγματικό φορτίο κατάρρευσης βρίσκεται ανάμεσα στις δύο λύσεις. Γι' αυτό το σκοπό οι λύσεις των μηχανισμών κατάρρευσης που παρουσιάζονται στο κεφάλαιο 3 θα συγκριθούν με την αναλυτική λύση που προβλέπει το Κ.Ο.Θ. για το ίδιο πρόβλημα που τέθηκε στο (σχήμα 1.2).

Τα δύο θεωρήματα Κ.Ο.Θ. και Π.Ο.Θ. υπολογίζουν το κάτω όριο του φορτίου κατάρρευσης και το πάνω όριο αντίστοιχα. Εφόσον το άγνωστο φορτίο στην περίπτωση μας είναι η ασκούμενη πίεση υποστήριξης επί του μετώπου,  $\sigma_v$ , θα έχει αρνητικό πρόσημο από το φορτίο κατάρρευσης των δύο θεωρημάτων. Άρα το Κ.Ο.Θ. που δίνει το κατώτερο φορτίο κατάρρευσης θα δίνει το ανώτερο φορτίο υποστύλωσης (εφόσον το δεύτερο είναι το αρνητικό του πρώτου) και επομένως δίνει ασφαλέστερη εκτίμηση από το Π.Ο.Θ. (σχήμα 2.19).

## Οριακά Θεωρήματα Πλαστικότητας



Σχήμα 2.19: Η σχέση μεταξύ των προβλέψεων των οριακών θεωρημάτων της θεωρίας Πλαστικότητας.

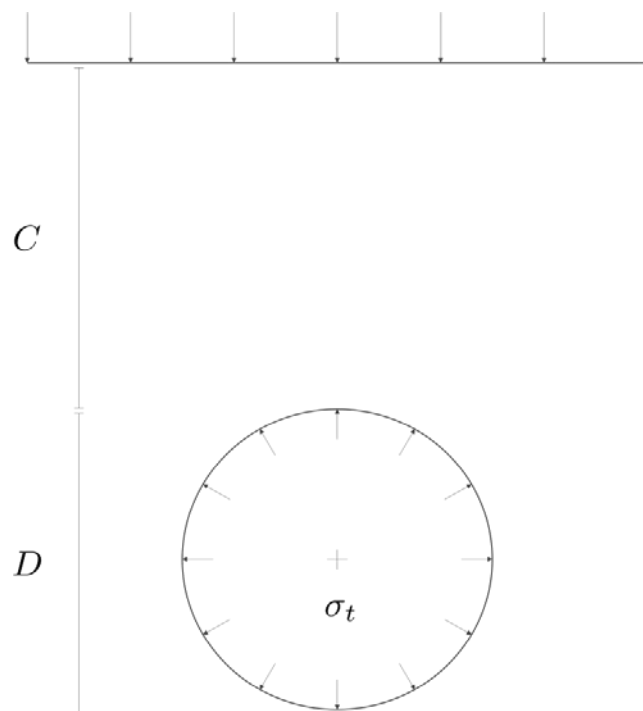
## Κεφάλαιο 3

### Κάτω Οριακό Θεώρημα (Κ.Ο.Θ.)

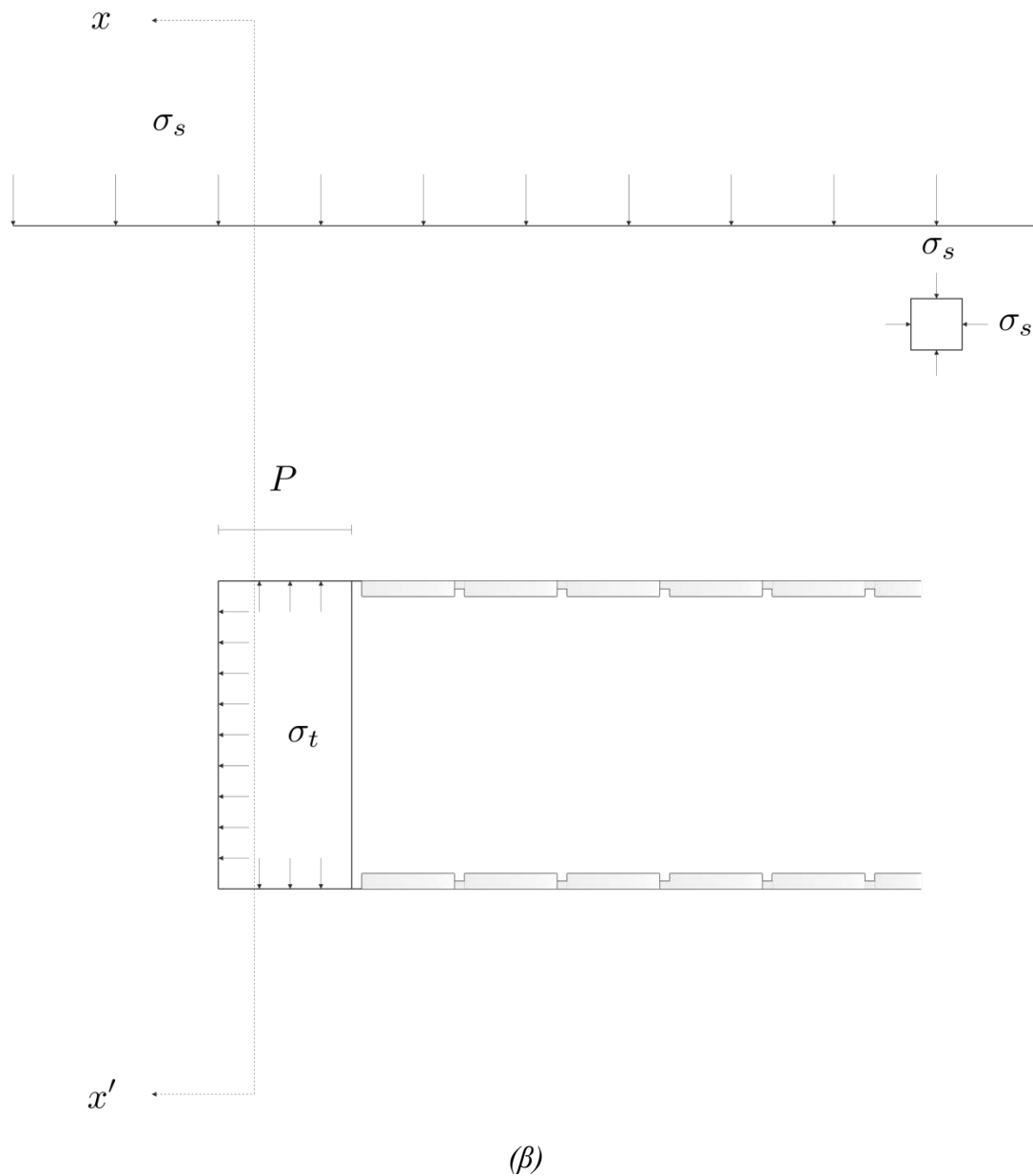
#### 3.1 Η λύση του Κ.Ο.Θ. για το φορτίο υποστήριξης αβαθούς σήραγγας

Για τη λύση του προβλήματος (σχήμα 3.1) κάνουμε τις εξής παραδοχές:

1. Αστράγγιστες συνθήκες (undrained conditions).
2. Γεωλίκo με αστράγγιστη διατμητική αντοχή  $c_u$ , γωνία εσωτερικής τριβής  $\phi = 0$  (undrained conditions).
3. Ισχύει ο κανόνας της καθετότητας που σημαίνει ότι οι πλαστικές παραμορφώσεις είναι ισόχωρες ( $\phi = \psi$ ) συνεπώς  $d\epsilon_v^p = 0$ . Επίσης οι ελαστικές παραμορφώσεις είναι μηδέν, δηλαδή  $d\epsilon_v^e = 0$ .
4. Η  $c_u$  του γεωλίκου δεν μεταβάλλεται με το βάθος.



*Section  $x-x'$*   
(α)



Σχήμα 3.1: (α) Πρόσοψη και (β) Μηκοτομή αβαθούς σήραγγας

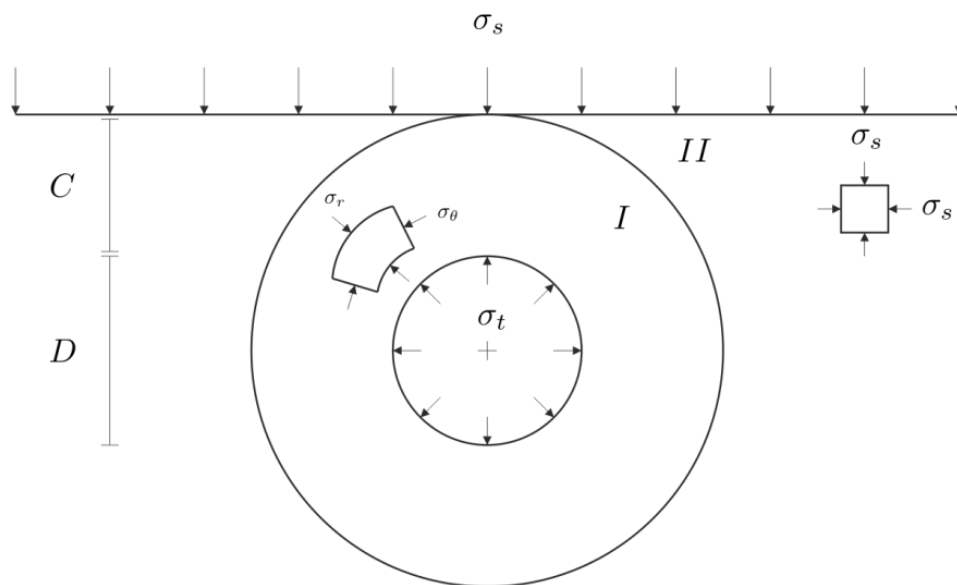
Στις αβαθείς σήραγγες χρησιμοποιείται ο όρος «παράγοντας απώλειας όγκου» (volume loss factor) που απλά είναι ο λόγος του εμβαδού που περικλείεται μεταξύ της γραμμής καθίζησης του εδάφους στην επιφάνεια με την οριζόντια, διαιρούμενου με το εμβαδόν που περικλείεται από την συρρικνωμένη σήραγγα και το αρχικό κυκλικό σύνορο. Αν ο διαιρέτης και ο διαιρετέος πολλαπλασιασθεί με 1 m κατά τον άξονα τότε ο λόγος των εμβαδών είναι λόγος όγκων. Αν όμως η παραμόρφωση και η ελαστική και η πλαστική είναι ισόχωρη (παραμόρφωση = ελαστική + πλαστική παραμόρφωση), τότε ο όγκος που χάνεται στην επιφάνεια είναι ίσος με τον όγκο που χάνεται στη σήραγγα, άρα βγαίνει κοινός παράγοντας στην έκφραση  $(\sigma_s - \sigma_t) \cdot \text{Volume} = \text{με}$

το πλαστικό έργο των εξωτερικών δυνάμεων. Στο σημείο αυτό πρέπει να επισημανθεί ότι για να είναι ισόχωρη η ελαστική παραμόρφωση πρέπει είτε ο λόγος Poisson = 0.5, είτε να αγνοηθούν εξαρχής οι ελαστικές παραμορφώσεις όπως γίνεται στην ιδεατή πλαστικότητα, άρα και στην περίπτωση μας εφόσον στο Κεφάλαιο 2 λέμε ότι θεωρούμε αμελητέες τις ελαστικές παραμορφώσεις. Τέλος και οι πλαστικές παραμορφώσεις στην περίπτωση που μελετάται είναι ισόχωρες εφόσον έχει θεωρηθεί ότι το γεωυλικό είναι άργιλο, που ακολουθεί τον νόμο του Tresca.

Όπως λέμε στο Κεφάλαιο 1 στη φάση του σχεδιασμού μιας σήραγγας σε μαλακό έδαφος (π.χ. αργιλικό με την ευρεία έννοια) θέλουμε να ξέρουμε την πίεση του ρευστού (slurry) ή πεπιεσμένου αέρα (TBM) ή του εδαφικού πολφού (EPB) που πρέπει να εξασκείται στα τοιχώματα και στο μέτωπο της σήραγγας για να μην καταπέσει η σήραγγα και τα υπερκείμενα. Αυτό το φορτίο είναι το  $\sigma_t$ .

Συνεπώς, ζητείται το φορτίο επί της σήραγγας  $\sigma_t$  που είναι ικανό να διατηρήσει την ευστάθεια του μετώπου για διάφορες τιμές των παραμέτρων ( $D$ ,  $C$ ,  $P$ ,  $\sigma_s$ ,  $\gamma$ ). Είναι βολικό η λύση του προβλήματος να γίνει με τη βοήθεια των αδιάστατων μεταβλητών  $\frac{C}{D}$ ,  $\frac{P}{D}$ ,  $\frac{\sigma_s}{c_u}$ ,  $\frac{\sigma_t}{c_u}$ , και  $\frac{\gamma D}{c_u}$  που μπορούν να βρεθούν με εφαρμογή της διαστασιολογικής ανάλυσης (π.χ. θεώρημα  $\Pi$  του Buckingham). Το πρόβλημα συνίσταται στην εύρεση της ποσότητας  $\frac{(\sigma_s - \sigma_t)}{c_u}$  για την οριακή ευστάθεια της σήραγγας, συναρτήσει των αδιάστατων μεταβλητών  $\frac{C}{D}$ ,  $\frac{P}{D}$ ,  $\frac{\sigma_s}{c_u}$ ,  $\frac{\sigma_t}{c_u}$ , και  $\frac{\gamma D}{c_u}$  του προβλήματος.

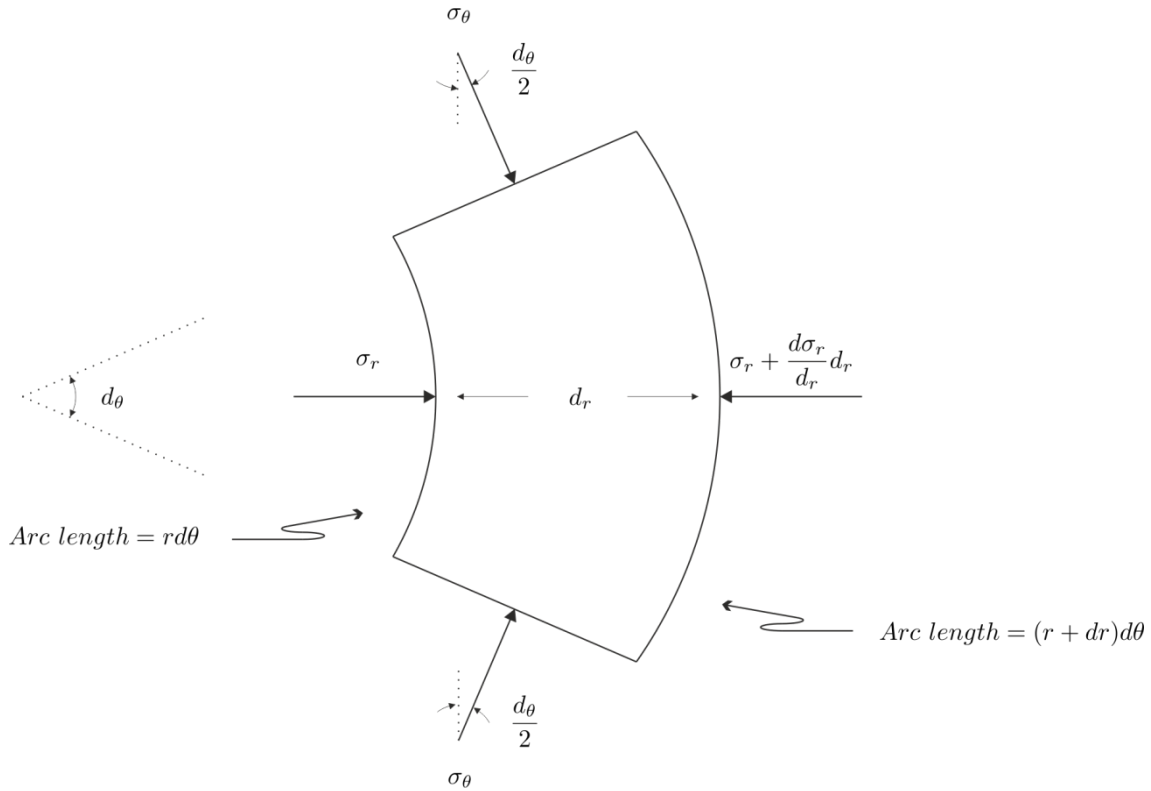
### 3.1.1 Λύση Κ.Ο.Θ. για το φορτίο υποστήριξης της οροφής της σήραγγας



Σχήμα 3.2: Κυλινδρική σήραγγα μεγάλου μήκους (επίπεδη παραμόρφωση).

Η λύση κάτω φράγματος (Κ.Ο.Θ.) της σήραγγας βρίσκεται με την παραδοχή του εντατικού πεδίου που φαίνεται στο (σχήμα 3.2), για συνθήκες επίπεδης παραμόρφωσης ( $P/D$  μεγάλο). Πιο συγκεκριμένα, λύση για την ισορροπία των τάσεων του προβλήματος που φαίνεται στο (σχήμα 3.2,β), προκύπτει με τον ακόλουθο τρόπο. Όπως φαίνεται στο (σχήμα 3.3) η ισορροπία των δυνάμεων του αξονομετρικού προβλήματος με την απουσία των καθολικών δυνάμεων βαρύτητας  $\frac{\gamma D}{c_u} \approx 0$ , για μία ακτινική διεύθυνση, έχει ως εξής:

$$\sigma_r (r d\theta) - \left( \sigma_r + \frac{d\sigma_r}{dr} dr \right) (r + dr) + 2 \sigma_\theta \left( \sin \frac{d\theta}{2} \right) dr = 0 \quad (3.1)$$



Σχήμα 3.3: Στοιχείο για την ισορροπία των τάσεων κατά την ακτινική κατεύθυνση.

Σύμφωνα με προσεγγίσεις, ισχύει:

$$\sin \frac{d\theta}{2} \approx \frac{d\theta}{2}, \quad dr^2 d\theta \approx 0 \quad (3.2)$$

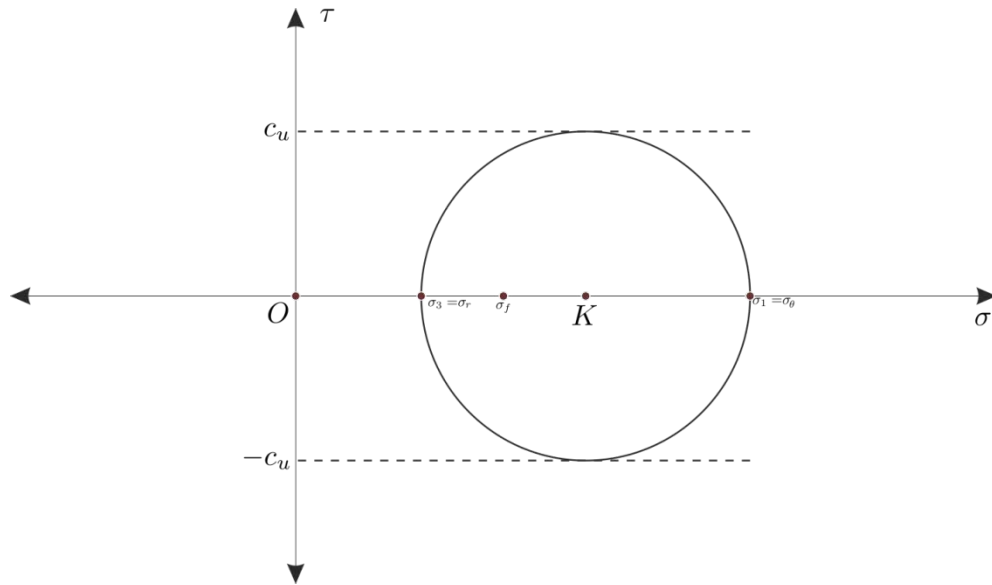
Στη συνέχεια από τις εξισώσεις [3.1], [3.2] προκύπτει:

$$\sigma_r r d\theta - r d\theta \sigma_r - \sigma_r dr d\theta - d\sigma_r r d\theta + 2 \sigma_\theta \frac{d\theta}{2} dr = 0 \quad (3.3)$$

$$\stackrel{(3.3)}{\implies} \frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{1}{r} (\sigma_r - \sigma_\theta) = 0 \quad (3.4)$$

Κατόπιν βάσει του κριτηρίου αστοχίας Tresca στην περιοχή (I) όπως φαίνεται στο (σχήμα 3.4) θα ισχύει:

$$\sigma_\theta = \sigma_r + 2c_u \quad (3.5)$$



Σχήμα 3.4: Κριτήριο διαρροής Tresca στο επίπεδο  $(\sigma, \tau)$ .

Αντικαθιστώντας τις εξισώσεις [3.4], [3.5], προκύπτει ότι:

$$\frac{d\sigma_r}{dr} = \frac{2c_u}{r} \quad (3.6)$$

ή

$$d\sigma_r = 2 c_u \frac{dr}{r} \Rightarrow \sigma = 2 c_u \ln r + K \quad (3.7)$$

Όπου:

$K$  = σταθερά ολοκλήρωσης που υπολογίζεται από την παρακάτω συνοριακή συνθήκη για  $r = \frac{D}{2}$ .

$$\sigma_r = \sigma_t \quad (3.8)$$

Από τις εξισώσεις [3.7], [3.8], προκύπτει:

$$K = \sigma_t - 2 c_u \ln \frac{D}{2} \quad (3.9)$$

Και τελικώς, προκύπτει:

$$\sigma_r = \sigma_t + 2 c_u \ln \frac{2 r}{D} \quad (3.10)$$

Άρα το εντατικό πεδίο στη ζώνη διαρροής (I) δίνεται από τις εξής σχέσεις:

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_r = \sigma_t + 2c_u \ln \frac{2r}{D}, \\ \sigma_\theta = \sigma_t + 2c_u, \\ \tau_{r\theta} = 0 \end{array} \right\} \quad (3.11)$$

Όπως θεωρήθηκε το εντατικό πεδίο στην περιοχή (II) είναι ισότροπο  $\sigma_s$  το οποίο μπορεί να βρεθεί από την συνέχεια της ακτινικής τάσης  $\sigma_r$  στο  $r = C + \frac{D}{2}$ , δηλαδή  $\sigma_r = \sigma_s$ . Άρα η τελική αναλυτική λύση παίρνει τη μορφή:

$$\sigma_s = \sigma_t + 2 c_u \ln \left( 1 + \frac{2 C}{D} \right) \quad (3.12)$$

### 3.1.2 Λύση Κ.Ο.Θ. για το φορτίο υποστήριξης του μετώπου της σήραγγας

Το Κ.Ο.Θ. δίνει μία απλή αλλά πολύ συντηρητική εκτίμηση του απαραίτητου φορτίου υποστήριξης  $\sigma_i$  στο μέτωπο της εκσκαφής, για το εντατικό πεδίο που φαίνεται στο (σχήμα 3.5). Αρχικά εξετάζεται η περίπτωση για  $\gamma = 0$ . Εντός της σφαιρικής ζώνης (ακτίνα  $r = C + \frac{D}{2}$ ) γύρω από την εκσκαφή θεωρείται πως πληρούνται οι οριακές συνθήκες (εξίσωση 3.5).



Επίσης να σημειωθεί ότι αν γνωρίζουμε τον  $N$  μπορεί να βρεθεί η τιμή του φορτίου υποστήριξης  $\sigma_t$ .

Ο αριθμός ευστάθειας βγαίνει κατευθείαν από το κάτω φράγμα Κ.Ο.Θ. της αβαθούς σήραγγας που εξετάστηκε σ' αυτή τη παράγραφο μπορεί να βρεθεί ως εξής:

$$N_{heading} = \frac{\sigma_s - \sigma_t}{c_u} = 2 \ln \left( 1 + \frac{2C}{D} \right) \quad (3.16)$$

$$N_{face} = \frac{\sigma_s - \sigma_t}{c_u} = 4 \ln \left( 1 + \frac{2C}{D} \right) \quad (3.17)$$

Ο αριθμός  $N$  αντιπροσωπεύει την λύση του κάτω φράγματος Κ.Ο.Θ. του υπόψη προβλήματος. Παρατηρούμε ότι η επίδραση των επιφανειακών τάσεων  $\sigma_s$  και το φορτίο υποστήριξης του τοιχώματος της σήραγγας  $\sigma_t$  μπορεί να εκφραστεί με μια μόνο παράμετρο  $N$ . Ο λόγος για αυτό είναι ότι η αστράγγιστη διατμητική αντοχή  $c_u$  είναι ανεξάρτητη από την ολική μέση ορθή τάση (σχήμα 3.4). Άρα η πρόσθεση ενός οποιουδήποτε ισότροπου πεδίου τάσεων παράγει μια άλλη δυνατή λύση του προβλήματος. Επίσης επειδή οι πλαστικές παραμορφώσεις είναι ισόχωρες τότε η επιφάνεια που χάνεται στην περιοχή πάνω από το υπόγεια άνοιγμα λόγω καθίζησης είναι ίση με την επιφάνεια που χάνεται στη σήραγγα. Συνεπώς το έργο της  $\sigma_s$  και της  $\sigma_t$  βρίσκεται αν πολλαπλασιάσουμε αυτές τις ποσότητες με την ίδια επιφάνεια που βγαίνει κοινός παράγοντας.

Οι Davis et al (1980) στη σελίδα 398 και στη τελευταία παράγραφο αναφέρουν ότι οι Broms & Bennermark (1967) μετά από αναλογικά πειράματα εξόλκωσης αργίλου από σήραγγες όρισαν τον Λόγο Ευστάθειας  $N'$ , ως εξής:

$$N' = \frac{[\sigma_s - \sigma_t + \gamma \left( C + \frac{D}{2} \right)]}{c_u} \quad (3.18)$$

Ο αριθμός αυτός εκφράζει το πηλίκο της συνολικής τάσης των υπερκειμένων πριν την διάνοιξη της σήραγγας και μέχρι τον άξονα αυτής προς το έργο των εσωτερικών δυνάμεων. Αν ο  $N' > \alpha$  τότε έχουμε αστάθεια και κατάρρευση της σήραγγας, αν  $N' = \alpha$  τότε οριακή ισορροπία και αν  $N' < \alpha$  ευστάθεια. Οι ίδιοι ερευνητές όρισαν εμπειρικά ως ασφαλή εκτίμηση του  $\alpha = 6$ .

Επίσης, οι Davis et al θέτουν το εξής πρωτόλειο ερώτημα: Αν σχεδιάσουμε το φορτίο  $\sigma_t$  ίσο με την υδροστατική πίεση των πόρων στο μέτωπο τότε θα πάρουμε  $N = 0$  αλλά αυτό δεν είναι ασφαλές για τους εργαζόμενους που θα εργάζονται σε συνθήκες υψηλής πίεσης (π.χ. πεπιεσμένου αέρα). Γι' αυτό το λόγο θέλουμε ένα μοντέλο για να υπολογίσουμε το ελάχιστο φορτίο  $\sigma_t$  ώστε να μην έχουμε το παραπάνω ρίσκο αλλά και να μην αστοχήσει η σήραγγα.

Στο κεφάλαιο 5 θα συγκριθούν οι λύσεις Π.Ο.Θ. για το ίδιο πρόβλημα με την παραπάνω

λύση του Κ.Ο.Θ. για τέσσερεις μηχανισμούς κατάρρευσης που όπως αναφέρθηκε βρέθηκαν από τα αναλογικά πειράματα του Πανεπιστημίου του Cambridge.

## Κεφάλαιο 4

### Πάνω Οριακό Θεώρημα (Π.Ο.Θ.)

#### 4.1 Εισαγωγή

Ένας «δυνατός» ή «πιθανός» κινηματικός μηχανισμός χαρακτηρίζεται από τις σχετικές πλαστικές μετακινήσεις των στερεών σωμάτων που τον αποτελούν και οι οποίες έχουν γίνει σε χρόνο  $\delta t$ . Έστω ότι το δυνατό (virtual) έργο που παράγεται από τις εξωτερικές δυνάμεις  $\delta A$  κατά το χρονικό διάστημα  $\delta t$  που αυτές επενεργούν στο υπό κατάρρευση σώμα. Επίσης έστω  $\delta D$  να συμβολίζει το έργο που αναλύσκεται στις ολισθήσεις εντός των ζωνών διάτμησης του μηχανισμού την στιγμή της οριακής κατάστασης ισορροπίας. Τότε η διατήρηση της ενέργειας απαιτεί:

$$\delta A - \delta D = \delta K \quad (4.1)$$

όπου:

$\delta K$  = η κινητική ενέργεια των σωμάτων που ολισθαίνουν.

Βασιζόμενοι στα ανωτέρω μπορούμε να ορίσουμε ως εξής τον συντελεστή ασφαλείας μιας γεωκατασκευής για κάποιο πιθανό τρόπο κατάρρευσης:

$$SF = \frac{\delta D}{\delta A} \quad (4.2)$$

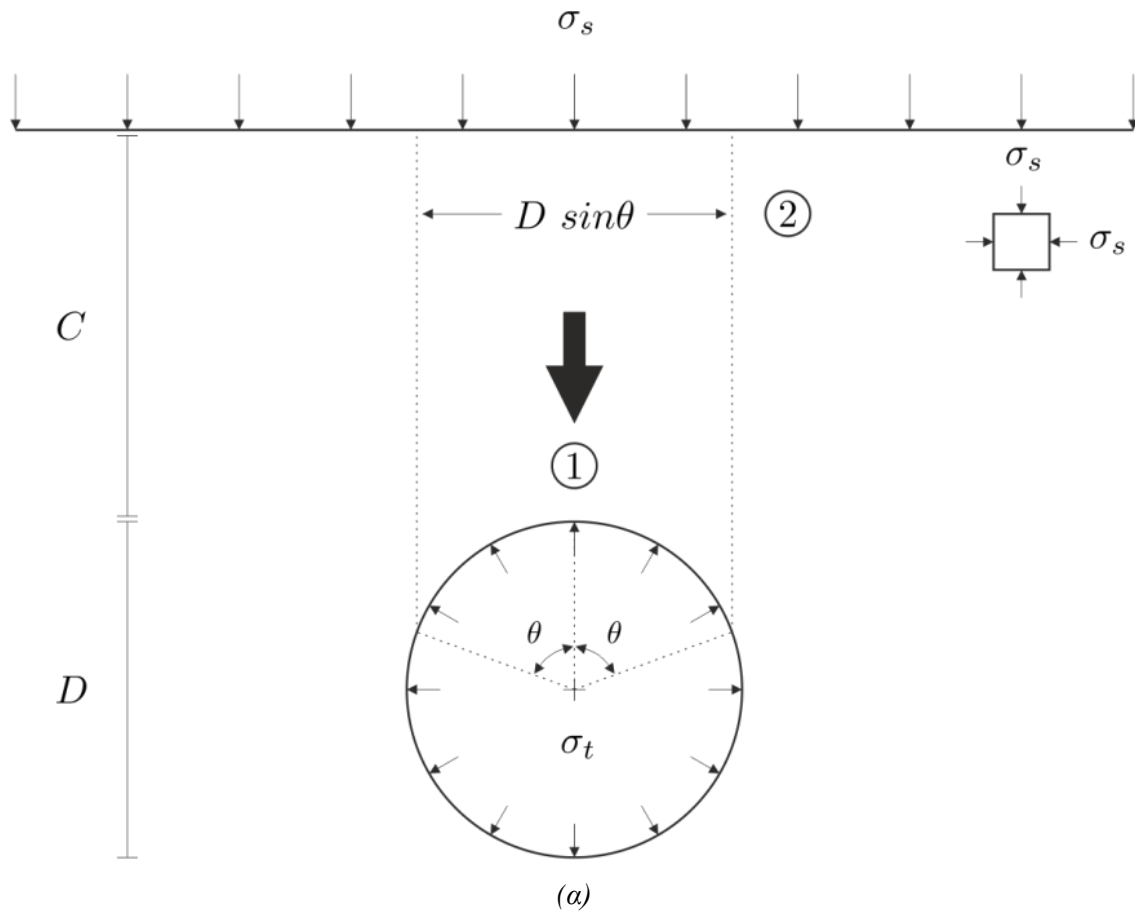
Τότε μπορούν να διακριθούν οι εξής τρεις περιπτώσεις:

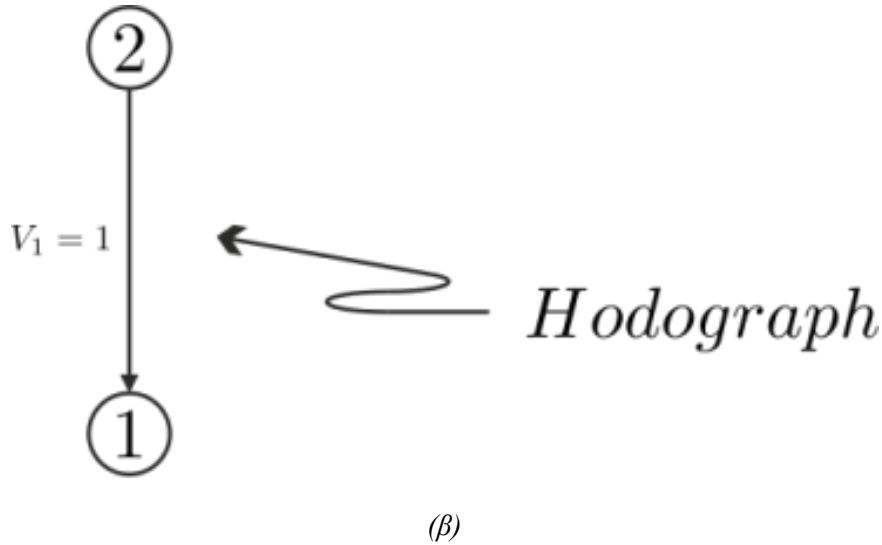
1.  $SF = 1$  ( $\delta K = 0$ ), που σημαίνει ότι οι εξωτερικές δυνάμεις παράγουν οριακή ισορροπία παντού εντός του κινηματικού μηχανισμού και τότε λέμε ότι έχουμε κατάσταση έναρξης της αστοχίας.
2.  $SF > 1$  ( $\delta K < 0$ ), που σημαίνει ότι οι εξωτερικές δυνάμεις δεν μπορούν να προκαλέσουν αστοχία εντός της περιοχής του κινηματικού μηχανισμού και η γεωκατασκευή είναι ευσταθής.
3.  $SF < 1$  ( $\delta K > 0$ ), που σημαίνει ότι οι εξωτερικές δυνάμεις δεν μπορούν να εξισορροπηθούν από τις εσωτερικές δυνάμεις και έτσι η γεωκατασκευή θα αστοχήσει με δυναμικό τρόπο.

Στη συνέχεια οι κινηματικοί μηχανισμοί της οροφής και των υπερκειμένων αβαθούς σήραγγας θα μελετηθούν όχι χρησιμοποιώντας την έννοια του SF αλλά του αριθμού ευστάθειας  $N$  που έχει ορισθεί στο Κεφάλαιο 3.

#### 4.2 Μηχανισμός αστοχίας της οροφής της σήραγγας A

Ο μηχανισμός A είναι ένας απλός μηχανισμός αστοχίας, της οροφής της σήραγγας και χαρακτηρίζεται από μια μεταβλητή, την γωνία  $\theta$ . Ο συγκεκριμένος κινηματικός μηχανισμός, όπως και οι επόμενοι που μελετώνται, προέρχεται από αναλογικά πειράματα που διεξήχθησαν στο Πανεπιστήμιο του Cambridge [Cairncross, 1973].





Σχήμα 4.1: (α) Πάνω οριακό θεώρημα μηχανισμού Α, (β) Οδογράφος για τον Μηχανισμό Α.

Για να βρεθεί το κρίσιμο φορτίο στο οποίο αστοχεί η σήραγγα και κατά συνέπεια ο Α-ριθμός Ευστάθειας  $N$ , πρέπει να βρεθεί μία σχέση της διαφοράς  $(\sigma_s - \sigma_t)$ , συναρτήσεως της γωνίας  $\theta$ . Στη συνέχεια, πρέπει να ελαχιστοποιηθεί η τιμή της διαφοράς  $(\sigma_s - \sigma_t)$ , σε σχέση με τη μεταβολή της γωνίας  $\theta$  ( $\frac{dN}{d\theta} = 0$ ).

Για την εύρεση των έργων των στερεών σωμάτων, θα χρησιμοποιηθεί η οδογράφος. Η οδογράφος είναι ένα διάγραμμα των διανυσμάτων των σχετικών ταχυτήτων μεταξύ των στερεών σωμάτων ενός μηχανισμού αστοχίας. Συγκεκριμένα στον μηχανισμό Α η οδογράφος για το σημεία 1 και 2, είναι όπως φαίνεται στο (σχήμα 4.1β). Το σημείο 2 είναι ένα σταθερό σημείο εκτός της περιοχής της αστοχίας και το σημείο 1 είναι ένα σημείο στο στερεό σώμα που καταπίπτει. Το δυνατό έργο των εξωτερικών δυνάμεων για την κίνηση του σώματος 1 υπολογίζεται, ως εξής:

$$\begin{aligned} \dot{A} &= \sigma_s(D \sin \theta) - \sigma_t(D \sin \theta) + W \xleftrightarrow{(V_1=1)} \\ \dot{A} &= (\sigma_s - \sigma_t)D \sin \theta + \left[ CD \sin \theta + D \sin \theta \frac{D}{2} (1 - \cos \theta) + \frac{D}{2} \sin \theta \frac{D}{2} \cos \theta - \frac{\pi D^2}{2} \frac{\theta}{360^\circ} \right] \gamma \end{aligned} \quad (4.3)$$

όπου η γωνία  $\theta$  μετριέται σε μοίρες.

Στη συνέχεια διαιρούνται και τα δύο μέλη της σχέσης [4.3] με  $c_u D$  και προκύπτει η εξής σχέση:

$$\frac{\dot{A}}{c_u D} = \frac{(\sigma_s - \sigma_t)}{c_u} \sin \theta + \frac{\gamma D}{c_u} \left[ \frac{C}{D} \sin \theta + \frac{(1 - \cos \theta)}{2} \sin \theta + \frac{\cos \theta}{2} \sin \theta - \frac{\pi}{2} \frac{\theta}{360^\circ} \right] \quad (4.4)$$

Επίσης, υπολογίζεται η ενέργεια που αναλίσκεται για τη δημιουργία των ζωνών ολίσθησης μεταξύ των σωμάτων 1-2  $D_w$ , σύμφωνα με το κεφάλαιο 2, ως εξής:

$$\dot{D} = 2c_u \left( C + \frac{D}{2}(1 - \cos \theta) \right), \quad (V_1 = 1) \quad (4.5)$$

Στη συνέχεια διαιρούνται και τα δύο μέλη της σχέσης [4.5] με  $c_u D$  και προκύπτει η εξής σχέση:

$$\frac{\dot{D}}{c_u D} = 2 \frac{C}{D} + 1 - \cos \theta \quad (4.6)$$

Κατά την οριακή ισορροπία θα πρέπει τα δύο αυτά έργα να εξισώνονται:

$$\begin{aligned} \dot{A} = \dot{D} &\Leftrightarrow \frac{\dot{A}}{c_u D} = \frac{\dot{D}}{c_u D} \xrightarrow{(4.4), (4.6)} \\ \frac{(\sigma_s - \sigma_t)}{c_u} D \sin \theta + \frac{\gamma}{c_u} \left[ DC \sin \theta + D \sin \theta \frac{D}{2}(1 - \cos \theta) + \frac{D \sin \theta}{2} \frac{D \cos \theta}{2} - \frac{\pi D^2}{2} \frac{\theta}{360^\circ} \right] &= \\ &= 2 \frac{C}{D} + (1 - \cos \theta) \Leftrightarrow \\ \frac{(\sigma_s - \sigma_t)}{c_u} &= \frac{2 \frac{C}{D} + (1 - \cos \theta) - \frac{\gamma D}{c_u} \left[ \frac{C}{D} \sin \theta + \frac{1}{2}(1 - \cos \theta) \sin \theta + \frac{\cos \theta}{2} \sin \theta - \frac{\pi}{2} \frac{\theta}{360^\circ} \right]}{\sin \theta} \end{aligned} \quad (4.7)$$

Η σχέση [4.7] για λόγους ευκολίας μετασχηματίζεται ως εξής:

$$\frac{(\sigma_s - \sigma_t)}{c_u} = \frac{K - H}{\sin \theta} \quad (4.8)$$

όπου

$$K = 2 \frac{C}{D} + (1 - \cos \theta) \quad (4.9)$$

$$H = \frac{\gamma D}{c_u} \left[ \frac{C}{D} \sin \theta + \frac{1}{2}(1 - \cos \theta) \sin \theta + \frac{\cos \theta}{2} \sin \theta - \frac{\pi}{2} \frac{\theta}{360^\circ} \right] \quad (4.10)$$

Συνεπώς, μπορεί να θεωρηθεί ότι σύμφωνα με τη λύση του Π.Ο.Θ. του μηχανισμού Α, ο Αριθμός Ευστάθειας Ν, είναι:

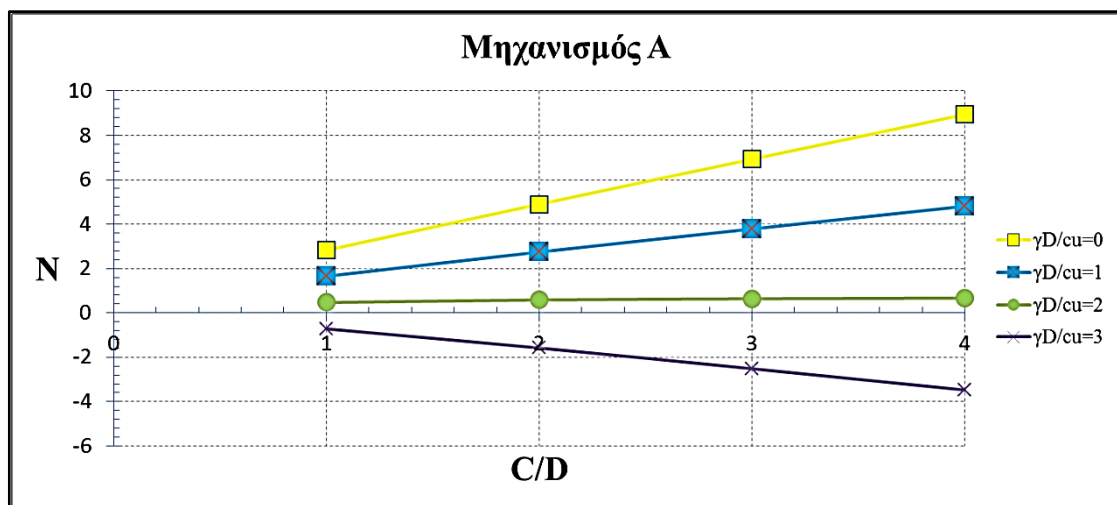
$$N = \frac{(\sigma_s - \sigma_t)}{c_u} = \frac{K - H}{\sin \theta} \quad (4.11)$$

Ακολουθώντας, με βάση την εξίσωση [4.11] βρέθηκε ο Αριθμός Ευστάθειας  $N$  για διάφορες τιμές του  $\frac{\gamma D}{c_u}$ , του  $\frac{C}{D}$  και της γωνίας  $\theta$ . Τα αποτελέσματα της μοντελοποίησης του μηχανισμού Α συνοψίζονται στον παρακάτω πίνακα 4.1.

Πίνακας 4.1: Μικρότερος Αριθμός Ευστάθειας  $N$  και η αντίστοιχη γωνία στην οποία εμφανίζεται, για διάφορες περιπτώσεις του  $\gamma D/c_u$  και του  $C/D$  (οι γωνίες είναι σε μοίρες).

C/D	$\gamma D/c_u=0$		$\gamma D/c_u=1$		$\gamma D/c_u=2$		$\gamma D/c_u=3$	
	N	$\theta$	N	$\theta$	N	$\theta$	N	$\theta$
1	2,8	71	1,7	68	0,5	66	-0,7	64
2	4,9	78	2,7	77	0,6	75	-1,6	73
3	6,9	82	3,8	80	0,6	79	-2,5	78
4	8,9	84	4,8	82	0,7	81	-3,5	80

Σύμφωνα με τον παραπάνω πίνακα 4.1 προκύπτει το παρακάτω διάγραμμα, στο οποίο παρουσιάζεται γραφικά η μεταβολή του Αριθμού Ευστάθειας  $N$ , σε σχέση με τη μεταβολή του λόγου  $C/D$  για διάφορα  $\gamma D/c_u$ .



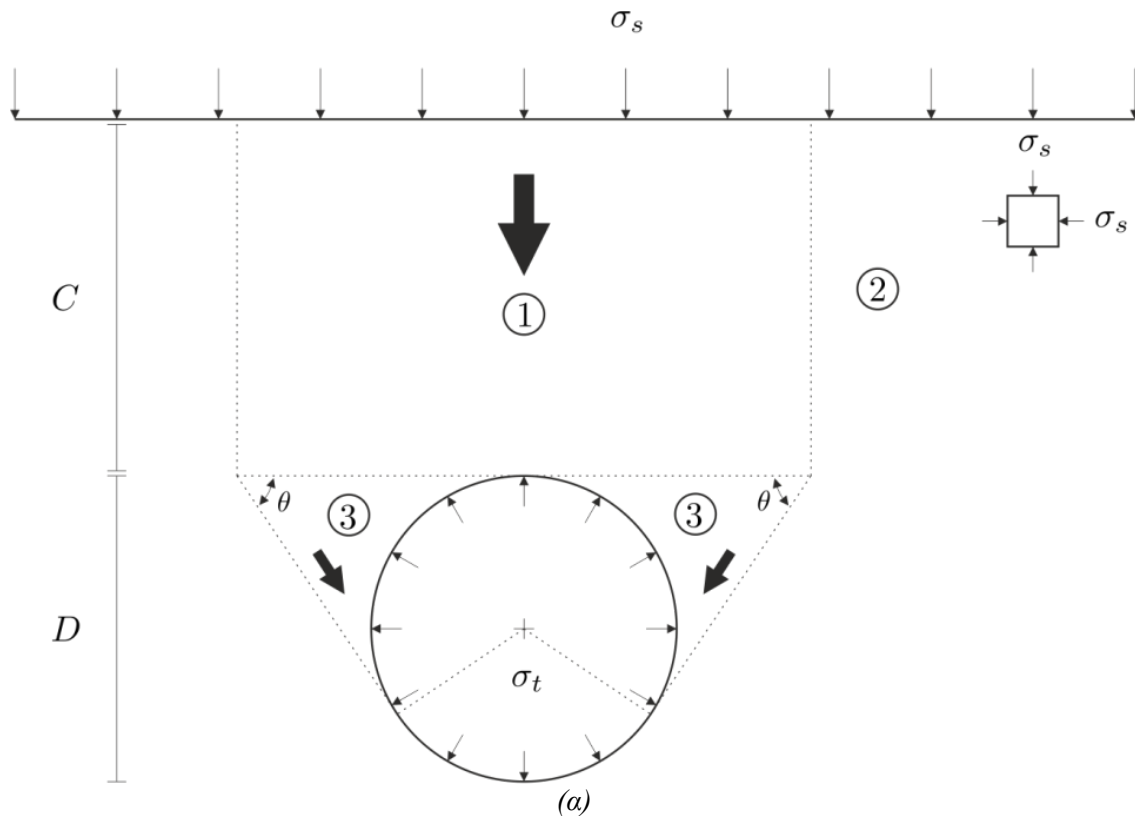
Σχήμα 4.2: Διάγραμμα  $N_{min} - C/D$  για διάφορες τιμές του  $\gamma D/c_u$  στον μηχανισμό Α.

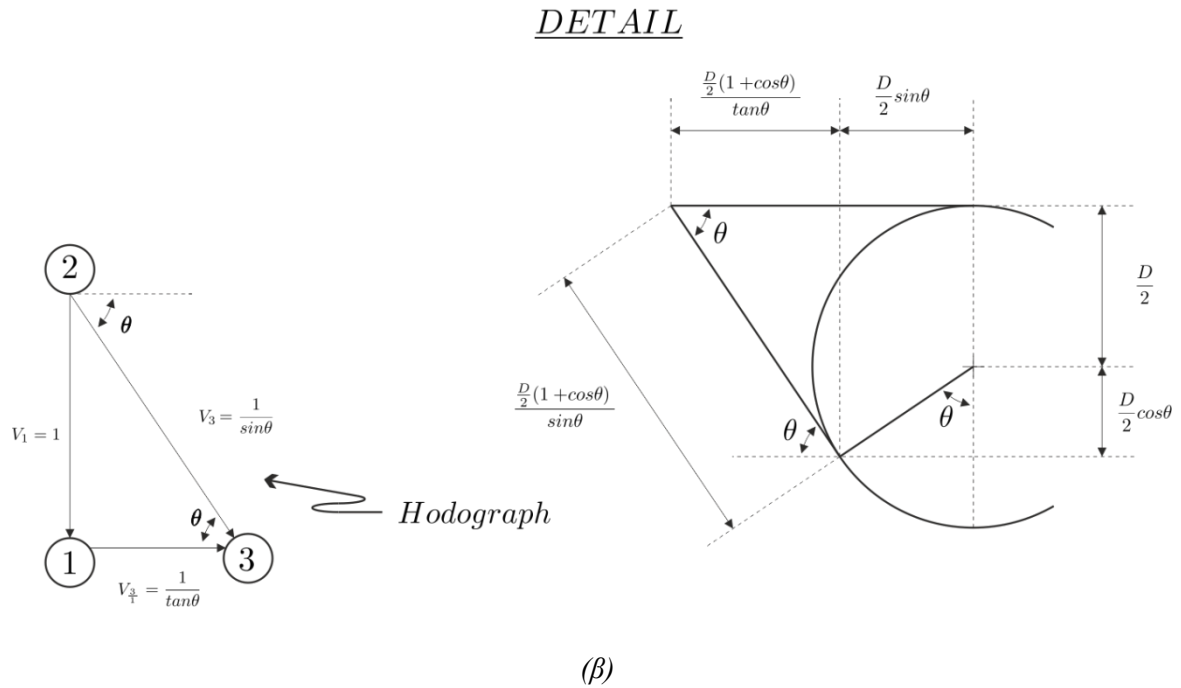
Από το διάγραμμα (σχήμα 4.2), αρχικά παρατηρείται ότι όλες οι καμπύλες είναι μονότονες. Παρακάτω φαίνεται η εξάρτηση του  $N$  για το μηχανισμό Α από τις αδιάστατες μεταβλητές  $C/D$  και  $\gamma D/c_u$ , δηλαδή αν κρατηθεί σταθερός ο λόγος  $\gamma D/c_u$ , σε μικρές τιμές (δηλ.  $\gamma D/c_u = 0$ ,  $\gamma D/c_u = 1$  ακόμα και  $\gamma D/c_u = 2$ ), ο  $N$  αυξάνει με την αύξηση του λόγου  $C/D$ . Αυτό σημαίνει ότι για μικρά βάρη των υπερκειμένων και όσο αυξάνεται το βάθος της σήραγγας  $C$ , μειώνεται το απαιτούμενο φορτίο υποστήριξης  $\sigma_b$  στο εσωτερικό του ανοίγματος. Αντιθέτως, είναι εμφανές στο παραπάνω διάγραμμα, ότι για  $\gamma D/c_u = 3$  ο αριθμός ευστάθειας παίρνει αρνητικές τιμές και μειώνεται συναρτήσει της αύξησης του λόγου  $C/D$ , δηλαδή για μεγάλο βάρος υπερκειμένων

χρειάζεται αύξηση του φορτίου υποστήριξης  $\sigma_i$  όσο μεγαλώνει το βάθος  $C$  του ανοίγματος. Τέλος, όσον αφορά το πρόσημο του Αριθμού Ευστάθειας  $N$  μπορεί να ερμηνευτεί ότι για θετικές τιμές του  $N$  το φορτίο υποστήριξης  $\sigma_i$  πρέπει να είναι μικρότερο της κατακόρυφης τάσης της επιφανείας  $\sigma_s$ , ενώ για αρνητικές τιμές του  $N$  το φορτίο υποστήριξης  $\sigma_i$  πρέπει να είναι μεγαλύτερο της κατακόρυφης τάσης της επιφανείας  $\sigma_s$ .

#### 4.3 Μηχανισμός αστοχίας της οροφής της σήραγγας B

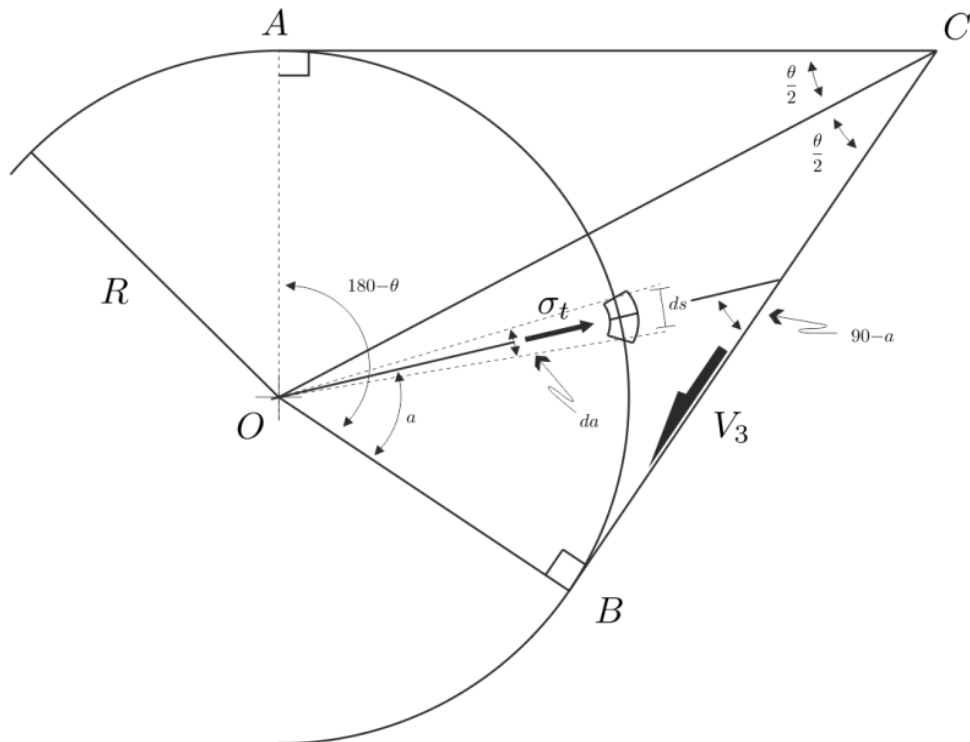
Ο μηχανισμός B είναι επίσης ένας απλός μηχανισμός αστοχίας, της οροφής και των πλευρικών σφηνών της σήραγγας, ο οποίος χαρακτηρίζεται από μία μεταβλητή, την γωνία  $\theta$ . Ο συγκεκριμένος κινηματικός μηχανισμός προέρχεται και αυτός από πειράματα στο Πανεπιστήμιο του Cambridge [Mair, 1979].





Σχήμα 4.3: (α) Πάνω οριακό θεώρημα μηχανισμός B, (β) Οδογράφος για τον Μηχανισμό B.

Για να βρεθεί το κρίσιμο φορτίο στο οποίο αστοχεί η σήραγγα και κατά συνέπεια ο Αριθμός Ευστάθειας N, πρέπει να βρεθεί μία σχέση της διαφοράς ( $\sigma_s - \sigma_t$ ), συναρτήσει της γωνίας  $\theta$ . Στη συνέχεια, πρέπει να ελαχιστοποιηθεί η τιμή της διαφοράς ( $\sigma_s - \sigma_t$ ), σε σχέση με τη μεταβολή της γωνίας  $\theta$  ( $\frac{dN}{d\theta} = 0$ ).



Σχήμα 4.4: Υπολογισμός του ολοκληρώματος I σε κυκλική σήραγγα με εσωτερική πίεση.

Αρχικά υπολογίζεται το ολοκλήρωμα I για ένα στοιχείο στην περίμετρο του ανοίγματος, έτσι ώστε να βρεθεί το έργο του φορτίου υποστήριξης του τόξου AB που ανήκει στις πλευρικές σφήνες που αστοχούν (σχήμα 4.4).

$$\begin{aligned}
 I &= - \int_0^{180^\circ-\theta} \sigma_t ds V_3 \cos(90^\circ - \alpha) = \int_0^{180^\circ-\theta} \sigma_t R da \frac{1}{\sin \theta} \sin \alpha = \\
 &= - \frac{R \sigma_t}{\sin \theta} \int_0^{180^\circ-\theta} \sin \alpha da = - \frac{R \sigma_t}{\sin \theta} [-\cos \theta]_0^{180^\circ} = \\
 &= - \frac{R \sigma_t}{\sin \theta} (1 + \cos \theta) = -R \sigma_t \cot\left(\frac{\theta}{2}\right)
 \end{aligned} \tag{4.12}$$

Στη συνέχεια σύμφωνα με το (σχήμα 4.4) υπολογίζεται το έργο των εξωτερικών δυνάμεων, ως εξής:

$$\dot{A} = \sigma_s 2 (AC) V_1 + W_1 V_1 + 2 I + 2 W_3 V_3 \sin \theta \tag{4.13}$$

όπου:

$$AC = R \cot \frac{\theta}{2} \tag{4.14}$$

$$I = - \int_0^{\pi-\theta} \sigma_t ds V_3 \cos(90^\circ - \alpha) \tag{4.15}$$

$$W_3 = \text{βάρος σώματος 3} = 2 \left[ \frac{1}{2} R (AC) \gamma - \frac{1}{2} R^2 \left( \frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{2} \right) \gamma \right] = R^2 \gamma \left( \frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{2} + \cot \frac{\theta}{2} \right) \tag{4.16}$$

$$W_1 = \text{βάρος σώματος 1} = \gamma H 2 (AC) = 2 \gamma H R \cot \frac{\theta}{2} = \gamma H D \cot \frac{\theta}{2} \tag{4.17}$$

Άρα από τις εξισώσεις [4.14], [4.15], [4.16], [4.17], η εξίσωση [4.13] παίρνει τη μορφή:

$$\begin{aligned}
 \dot{A} &= \sigma_s D \cot \frac{\theta}{2} + \gamma H D \cot \frac{\theta}{2} - \sigma_t D \cot \frac{\theta}{2} + \frac{1}{2} \gamma D^2 \left( \frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{2} + \cot \frac{\theta}{2} \right) = \\
 &= (\sigma_s - \sigma_t) D \cot \frac{\theta}{2} + \gamma D^2 \left[ \lambda \cot \frac{\theta}{2} + \frac{1}{2} \left( \frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{2} + \cot \frac{\theta}{2} \right) \right] \Leftrightarrow
 \end{aligned}$$

$$\dot{A} = D c_u \left\{ N \cot \frac{\theta}{2} + \xi \left[ \left( \lambda + \frac{1}{2} \right) \cot \frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{4} \right] \right\} \quad (4.18)$$

Στη συνέχεια υπολογίζεται η ισχύς που αναλύσκεται για τη δημιουργία των ζωνών ολίσθησης μεταξύ των σωμάτων 1-2 και 2-3  $\dot{D}_w$ , ως εξής:

$$\dot{D} = 2 c_u (CD) V_1 + 2 c_u (CB) V_3 + 2 c_u (AC) V_{31} \quad (4.19)$$

όπου

$$CD = H \quad (4.20)$$

$$CB = R \cot \frac{\theta}{2} \quad (4.21)$$

Από (σχήμα 4.3β) και τις εξισώσεις [4.20], [4.21], η εξίσωση [4.19] παίρνει τη μορφή:

$$\begin{aligned} &= 2 c_u H + 2 c_u R \cot \frac{\theta}{2} \frac{1}{\sin \theta} + 2 c_u R \cot \frac{\theta}{2} \cot \theta = \\ &= 2 c_u \lambda D + c_u D \frac{\cot \frac{\theta}{2}}{\sin \theta} + c_u D \cot \frac{\theta}{2} \cot \theta \Leftrightarrow \\ \dot{D} &= c_u D \left( 2 \lambda + \cot \frac{\theta}{2} \frac{1 + \cos \theta}{\sin \theta} \right) = c_u D \left( 2 \lambda + \cot^2 \frac{\theta}{2} \right) \end{aligned} \quad (4.22)$$

Κατά την οριακή ισορροπία θα πρέπει τα δύο αυτά έργα να εξισώνονται:

$$\begin{aligned} \dot{D} &= \dot{A} \xLeftrightarrow{(4.18),(4.22)} \\ N \cot \frac{\theta}{2} + \xi \left[ \left( \lambda + \frac{1}{2} \right) \cot \frac{\theta}{2} - \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{4} \right) \right] &= 2 \lambda + \cot^2 \frac{\theta}{2} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow N &= \cot \frac{\theta}{2} + \left[ 2 \lambda + \xi \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{4} \right) \right] \tan \frac{\theta}{2} - \xi \left( \lambda + \frac{1}{2} \right) \end{aligned} \quad (4.23)$$

Συνεπώς, μπορεί να θεωρηθεί ότι σύμφωνα με τη λύση του Π.Ο.Θ. για το πεδίο των τάσεων στον μηχανισμό Β, ο Αριθμός Ευστάθειας Ν, είναι:

$$N = \frac{(\sigma_s - \sigma_t)}{c_u} = \cot \frac{\theta}{2} + \left[ 2 \lambda + \xi \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{4} \right) \right] \tan \frac{\theta}{2} - \xi \left( \lambda + \frac{1}{2} \right) \quad (4.24)$$

Τέλος, για την ελαχιστοποίηση του  $N$  απαιτείται  $\frac{dN}{d\theta} = 0$ :

$$-\frac{1}{\sin^2 \frac{\theta}{2}} + \left[ 2\lambda + \xi \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{4} \right) \right] \frac{1}{\cos^2 \frac{\theta}{2}} - \frac{\xi}{4} \tan \frac{\theta}{2} = 0 \quad (4.25)$$

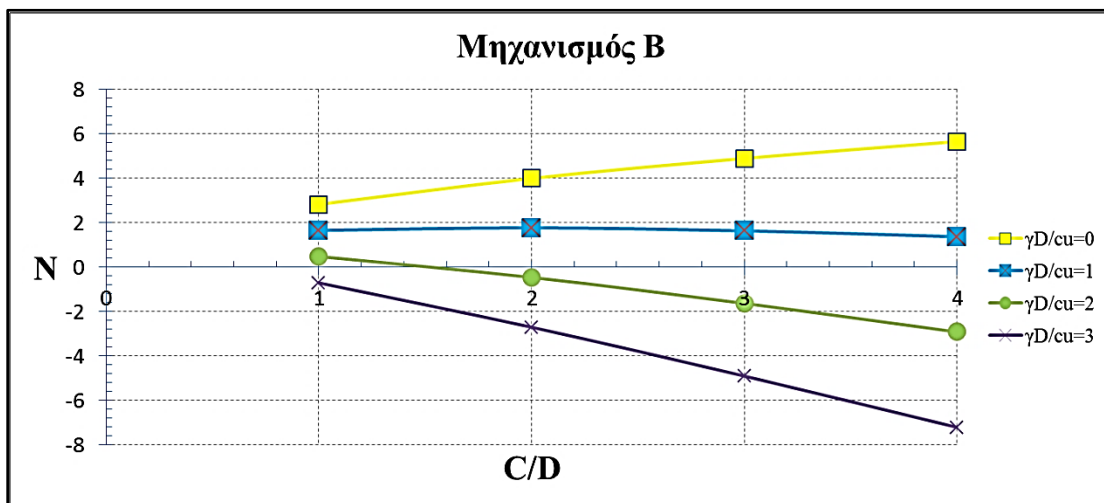
$$\stackrel{(4.25)}{\implies} F(\lambda, \xi, \theta) = -1 + \left[ 2\lambda + \xi \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{4} \right) \right] \tan^2 \frac{\theta}{2} - \frac{\xi}{4} \tan \frac{\theta}{2} \sin^2 \frac{\theta}{2} = 0 \quad (4.26)$$

Ακολουθώντας, με βάση την εξίσωση [4.24] μελετήθηκε ο Αριθμός Ευστάθειας  $N$  για τιμές του  $\frac{\gamma D}{c_u}$ , του  $\frac{C}{D}$  και της γωνίας  $\theta$ . Τα αποτελέσματα της μοντελοποίησης του μηχανισμού Β συνοψίζονται στον πίνακα 4.2.

Πίνακας 4.2: Μικρότερος Αριθμός Ευστάθειας  $N$  και η αντίστοιχη γωνία στην οποία εμφανίζεται, για διάφορες περιπτώσεις του  $\gamma D/c_u$  και του  $C/D$  (οι γωνίες είναι σε μοίρες).

C/D	$\gamma D/c_u=0$		$\gamma D/c_u=1$		$\gamma D/c_u=2$		$\gamma D/c_u=3$	
	N	$\theta$	N	$\theta$	N	$\theta$	N	$\theta$
1	2,8	71	1,7	67	0,5	64	-0,7	61
2	4,0	53	1,8	51	-0,5	49	-2,7	47
3	4,9	44	1,6	43	-1,6	42	-4,9	41
4	5,7	39	1,4	38	-2,9	37	-7,2	36

Από τον παραπάνω πίνακα 4.2 προκύπτει το παρακάτω διάγραμμα, στο οποίο παρουσιάζεται γραφικά η μεταβολή του Αριθμού Ευστάθειας  $N$ , σε σχέση με τη μεταβολή του λόγου  $C/D$  για διάφορα  $\gamma D/c_u$ .



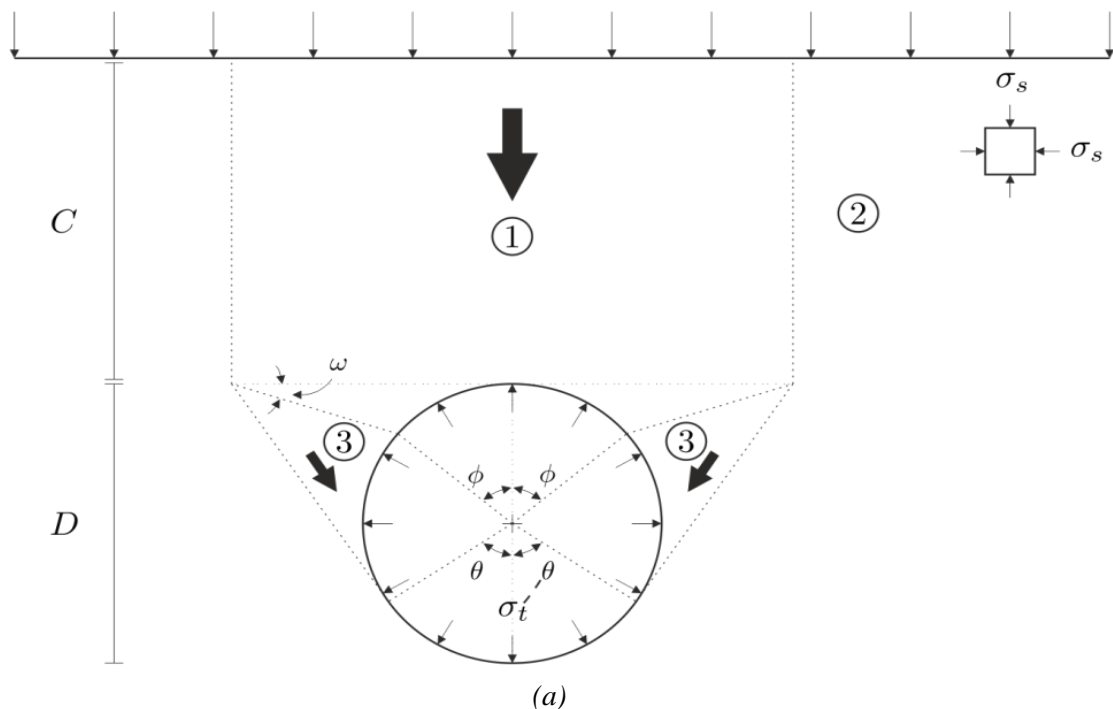
Σχήμα 4.5: Διάγραμμα  $N_{min} - C/D$  για διάφορες τιμές του  $\gamma D/c_u$  στον μηχανισμό Β.

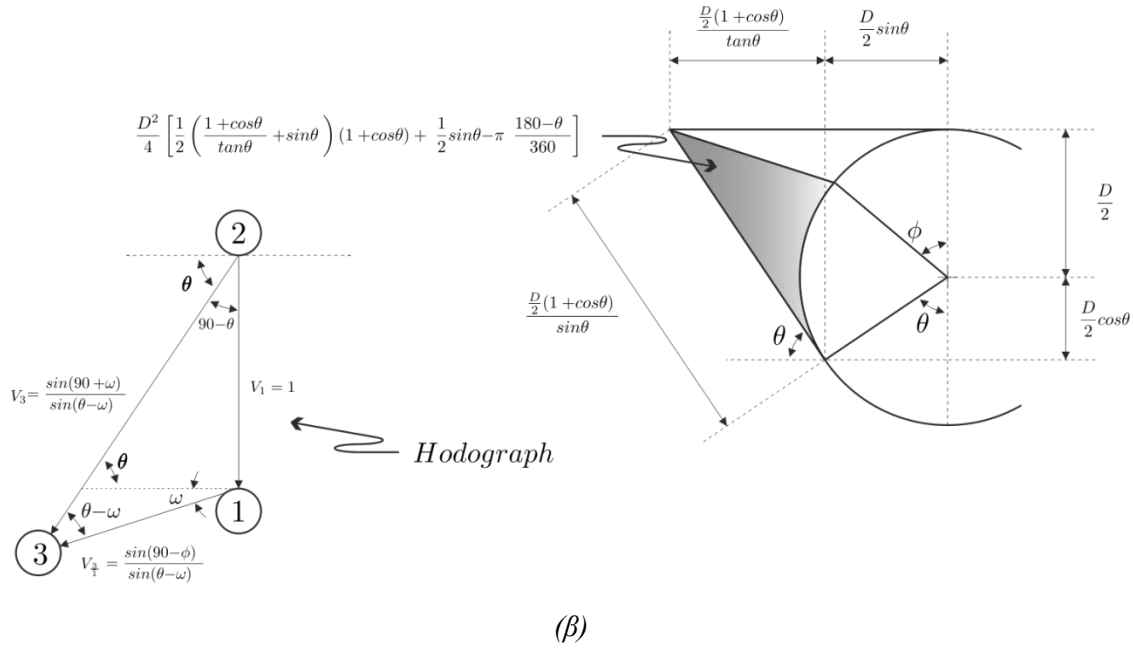
Από το διάγραμμα (σχήμα 4.5), αρχικά παρατηρείται ότι όλες οι καμπύλες είναι μονότονες ή με μικρή απόκλιση από τη μονοτονία ( $\gamma D/c_u = 1$ ). Επίσης, προκύπτει ότι για  $\gamma D/c_u = 0$ , ο  $N$  αυξάνει με την αύξηση του λόγου  $C/D$ . Αυτό σημαίνει ότι για πολύ μικρό ή καθόλου βάρος των υπερκειμένων και όσο αυξάνεται το βάθος της σήραγγας  $C$ , μειώνεται το απαιτούμενο φορτίο υποστήριξης  $\sigma_t$  στο εσωτερικό του ανοίγματος. Αντιθέτως, είναι εμφανές στο παραπάνω διάγραμμα, ότι αν κρατηθεί σταθερός ο λόγος  $\gamma D/c_u$ , σε τιμές μεγαλύτερες του μηδέν (δηλ.  $\gamma D/c_u = 1$ ,  $\gamma D/c_u = 2$  και  $\gamma D/c_u = 3$ ) ο αριθμός ευστάθειας μειώνεται συναρτήσει της αύξησης του λόγου  $C/D$ , δηλαδή για περιπτώσεις με βάρος υπερκειμένων χρειάζεται αύξηση του φορτίου υποστήριξης  $\sigma_t$  όσο μεγαλώνει το βάθος  $C$  του ανοίγματος. Τέλος, όσον αφορά το πρόσημο του Αριθμού Ευστάθειας  $N$  παρατηρείται ότι για  $\gamma D/c_u = 2$  και  $\gamma D/c_u = 3$  ο  $N$  παίρνει κυρίως αρνητικές τιμές, που σημαίνει ότι το φορτίο υποστήριξης  $\sigma_t$  πρέπει να είναι μεγαλύτερο της κατακόρυφης τάσης της επιφανείας  $\sigma_s$  ενώ για  $\gamma D/c_u = 0$  και  $\gamma D/c_u = 1$  ο  $N$  παίρνει θετικές τιμές, δηλαδή το φορτίο υποστήριξης  $\sigma_t$  πρέπει να είναι μικρότερο της κατακόρυφης τάσης της επιφανείας  $\sigma_s$ .

#### 4.4 Μηχανισμός αστοχίας της οροφής της σήραγγας $\Gamma$

Ο μηχανισμός  $\Gamma$  είναι μηχανισμός αστοχίας, της οροφής (1) και των πλευρικών σφηνών (3) της σήραγγας, ο οποίος χαρακτηρίζεται από τρεις μεταβλητές, τις γωνίες  $\theta$ ,  $\phi$  και  $\omega$ . Επί της ουσίας, στην περίπτωση αυτή οι μεταβλητές γωνίες είναι δύο, διότι η γωνία  $\omega$  υπολογίζεται συναρτήσει των γωνιών  $\theta$  και  $\phi$ , ως εξής:

$$\tan \omega = \frac{1 - \cos \phi}{\frac{1 + \cos \theta}{\tan \theta} + \sin \theta - \sin \phi} \quad (4.27)$$



DETAIL

Σχήμα 4.6: (α) Πάνω οριακό θεώρημα μηχανισμός Γ, (β) Οδογράφος για τον Μηχανισμό Γ.

Για να βρεθεί το κρίσιμο φορτίο στο οποίο αστοχεί η σήραγγα και κατά συνέπεια ο Αριθμός Ευστάθειας  $N$ , πρέπει να βρεθεί μία σχέση της διαφοράς  $(\sigma_s - \sigma_t)$ , συναρτήσει των γωνιών  $\theta$ ,  $\phi$  και  $\omega$ . Στη συνέχεια, πρέπει να ελαχιστοποιηθεί η τιμή της διαφοράς  $(\sigma_s - \sigma_t)$ , σε σχέση με τη μεταβολή των γωνιών  $\theta$  και  $\phi$ .

Αρχικά θεωρείται η οδογράφος για το σημεία 1, 2 και 3, όπως φαίνεται στο (σχήμα 4.6β). Το σημείο 2 είναι ένα σταθερό σημείο έξω από την περιοχή της αστοχίας ενώ τα σημεία 1 και 3 είναι πάνω στα σώματα 1 και 3 που αστοχούν. Το δυνατό έργο των εξωτερικών δυνάμεων υπολογίζεται, ως εξής:

$$\begin{aligned} \dot{A} &= \sigma_s \left( \frac{D}{2} \frac{1 + \cos \theta}{\tan \theta} + \frac{D}{2} \sin \theta \right) - \sigma_t \left( \frac{D}{2} \frac{1 + \cos \theta}{\tan \theta} + \frac{D}{2} \sin \theta \right) + W \stackrel{(V_1=1)}{\Longleftrightarrow} \\ \dot{A} &= (\sigma_s - \sigma_t) D \left( \frac{1 + \cos \theta}{\tan \theta} + \sin \theta \right) + \\ &+ \left[ CD \left( \frac{1 + \cos \theta}{\tan \theta} + \sin \theta \right) + \frac{D^2}{2} \left( \frac{1 + \cos \theta}{\tan \theta} + \sin \theta \right) \frac{1 + \cos \theta}{2} + \frac{D^2 \sin \theta}{2} - \frac{\pi D^2}{2} \frac{180 - \theta}{360} \right] \gamma \end{aligned} \quad (4.28)$$

Στη συνέχεια διαιρούνται και τα δύο μέλη της σχέσης [4.28] με  $c_u D$  και προκύπτει η εξής σχέση:

$$\begin{aligned} \frac{\dot{A}}{c_u D} = & \frac{(\sigma_s - \sigma_t)}{c_u} \left( \frac{1 + \cos \theta}{\tan \theta} + \sin \theta \right) + \\ & + \frac{\gamma D}{c_u} \left[ \frac{C}{D} \left( \frac{1 + \cos \theta}{\tan \theta} + \sin \theta \right) + \left( \frac{1 + \cos \theta}{\tan \theta} + \sin \theta \right) \frac{1 + \cos \theta}{2} + \frac{\sin \theta}{2} - \pi \frac{180 - \theta}{360} \right] \end{aligned} \quad (4.29)$$

Επίσης υπολογίζεται η ενέργεια που αναλίσκεται για τη δημιουργία των ζωνών ολίσθησης μεταξύ των σωμάτων 1-2, 2-3 και 1-3  $D_w$ , ως εξής:

$$\dot{D} = 2c_u \left[ C + \frac{D}{2} \frac{(1 + \cos \theta) \sin(90 + \omega)}{\sin \theta \sin(\theta - \omega)} + \frac{D}{2} \frac{(1 - \cos \theta) \sin(90 - \omega)}{\sin \omega \sin(\theta - \omega)} \right], \quad (V_1 = 1) \quad (4.30)$$

Στη συνέχεια διαιρούνται και τα δύο μέλη της σχέσης [4.30] με  $c_u D$  και προκύπτει η εξής σχέση:

$$\frac{\dot{D}}{c_u D} = 2 \frac{C}{D} + \frac{(1 + \cos \theta) \sin(90 + \omega)}{\sin \theta \sin(\theta - \omega)} + \frac{(1 - \cos \theta) \sin(90 - \omega)}{\sin \omega \sin(\theta - \omega)} \quad (4.31)$$

Κατά την οριακή ισορροπία θα πρέπει τα δύο αυτά έργα να εξισώνονται:

$$\begin{aligned} \dot{A} = \dot{D} & \Leftrightarrow \frac{\dot{A}}{c_u D} = \frac{\dot{D}}{c_u D} \xLeftrightarrow{(4.29),(4.31)} \\ & \frac{(\sigma_s - \sigma_t)}{c_u} \left( \frac{1 + \cos \theta}{\tan \theta} + \sin \theta \right) + \\ & + \frac{\gamma D}{c_u} \left[ \frac{C}{D} \left( \frac{1 + \cos \theta}{\tan \theta} + \sin \theta \right) + \left( \frac{1 + \cos \theta}{\tan \theta} + \sin \theta \right) \frac{1 + \cos \theta}{2} + \frac{\sin \theta}{2} - \pi \frac{180 - \theta}{360} \right] = \\ & = 2 \frac{C}{D} + \frac{(1 + \cos \theta) \sin(90 + \omega)}{\sin \theta \sin(\theta - \omega)} + \frac{(1 - \cos \theta) \sin(90 - \omega)}{\sin \omega \sin(\theta - \omega)} \Leftrightarrow \\ \frac{(\sigma_s - \sigma_t)}{c_u} & = \frac{2 \frac{C}{D} + \frac{(1 + \cos \theta) \sin(90 + \omega)}{\sin \theta \sin(\theta - \omega)} + \frac{(1 - \cos \theta) \sin(90 - \omega)}{\sin \omega \sin(\theta - \omega)}}{\frac{1 + \cos \theta}{\tan \theta} + \sin \theta} - \\ & - \frac{\frac{\gamma D}{c_u} \left[ \frac{C}{D} \left( \frac{1 + \cos \theta}{\tan \theta} + \sin \theta \right) + \left( \frac{1 + \cos \theta}{\tan \theta} + \sin \theta \right) \frac{1 + \cos \theta}{2} + \frac{\sin \theta}{2} - \pi \frac{180 - \theta}{360} \right]}{\frac{1 + \cos \theta}{\tan \theta} + \sin \theta} \end{aligned} \quad (4.32)$$

Η σχέση [4.32] για λόγους ευκολίας μετασχηματίζεται ως εξής:

$$\frac{(\sigma_s - \sigma_t)}{c_u} = \frac{K - H}{\frac{1 + \cos \theta}{\tan \theta} + \sin \theta} \quad (4.33)$$

όπου

$$K = 2 \frac{C}{D} + \frac{(1 + \cos \theta) \sin(90 + \omega)}{\sin \theta \sin(\theta - \omega)} + \frac{(1 - \cos \theta) \sin(90 - \omega)}{\sin \omega \sin(\theta - \omega)} \quad (4.34)$$

$$H = \frac{\gamma D}{c_u} \left[ \frac{C}{D} \left( \frac{1 + \cos \theta}{\tan \theta} + \sin \theta \right) + \left( \frac{1 + \cos \theta}{\tan \theta} + \sin \theta \right) \frac{1 + \cos \theta}{2} + \frac{\sin \theta}{2} - \pi \frac{180 - \theta}{360} \right] \quad (4.35)$$

Συνεπώς, μπορεί να θεωρηθεί ότι σύμφωνα με τη λύση του Π.Ο.Θ. του μηχανισμού Γ, ο Αριθμός Ευστάθειας N, είναι:

$$N = \frac{(\sigma_s - \sigma_t)}{c_u} = \frac{K - H}{\frac{1 + \cos \theta}{\tan \theta} + \sin \theta} \quad (4.36)$$

Ακολουθώντας, με βάση την εξίσωση [4.36], μέσα από ελαχιστοποίηση στο περιβάλλον MatLab, βρέθηκε ο Αριθμός Ευστάθειας N για διάφορες τιμές του  $\frac{\gamma D}{c_u}$ , του  $\frac{C}{D}$  και διάφορες τιμές των γωνιών  $\theta$ ,  $\varphi$  και  $\omega$ . Τα αποτελέσματα της μοντελοποίησης του μηχανισμού Γ συνοψίζονται στον πίνακα 4.3.

Πίνακας 4.3: Μικρότερος Αριθμός Ευστάθειας N και τις αντίστοιχες γωνίες στις οποίες εμφανίζεται, για διάφορες περιπτώσεις του  $\gamma D/c_u$  και του  $C/D$  (οι γωνίες είναι σε μοίρες).

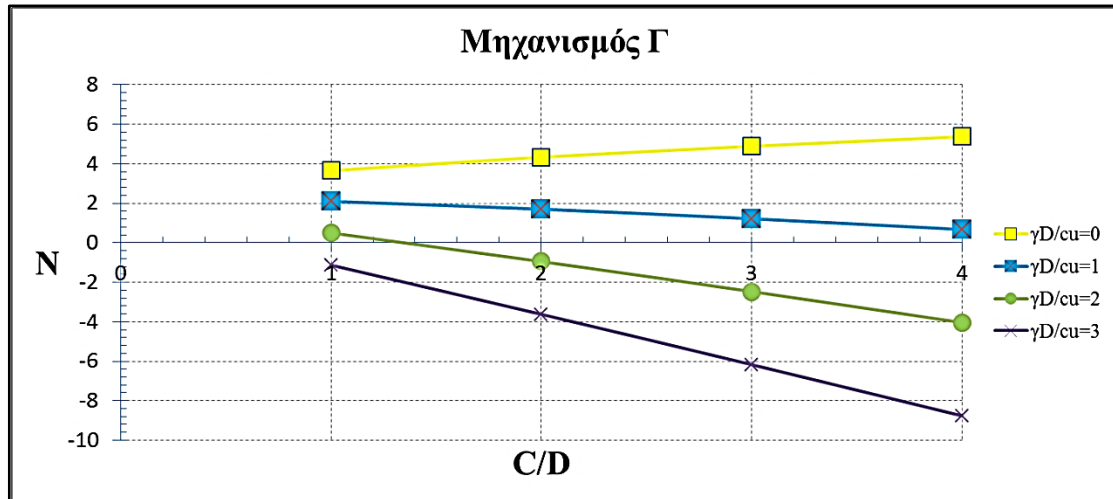
(α)

C/D	$\gamma D/c_u=0$				$\gamma D/c_u=1$			
	N	$\theta$	$\varphi$	$\omega$	N	$\theta$	$\varphi$	$\omega$
1	3,7	42	52	12	2,1	37	51	10
2	4,3	34	50	8	1,7	31	49	7
3	4,9	29	48	6	1,2	27	47	5
4	5,4	26	46	5	0,7	24	46	4

(β)

C/D	$\gamma D/c_u=2$				$\gamma D/c_u=3$			
	N	$\theta$	$\varphi$	$\omega$	N	$\theta$	$\varphi$	$\omega$
1	0,5	34	50	8	-1,1	31	49	7
2	-0,9	29	48	6	-3,6	27	47	5
3	-2,5	25	46	5	-6,2	24	45	4
4	-4,0	24	45	4	-8,8	22	44	4

Από τον παραπάνω πίνακα 4.3 προκύπτει το παρακάτω διάγραμμα, στο οποίο παρουσιάζεται γραφικά η μεταβολή του Αριθμός Ευστάθειας  $N$ , σε σχέση με τη μεταβολή του λόγου  $C/D$  για διάφορα  $\gamma D/c_u$ .

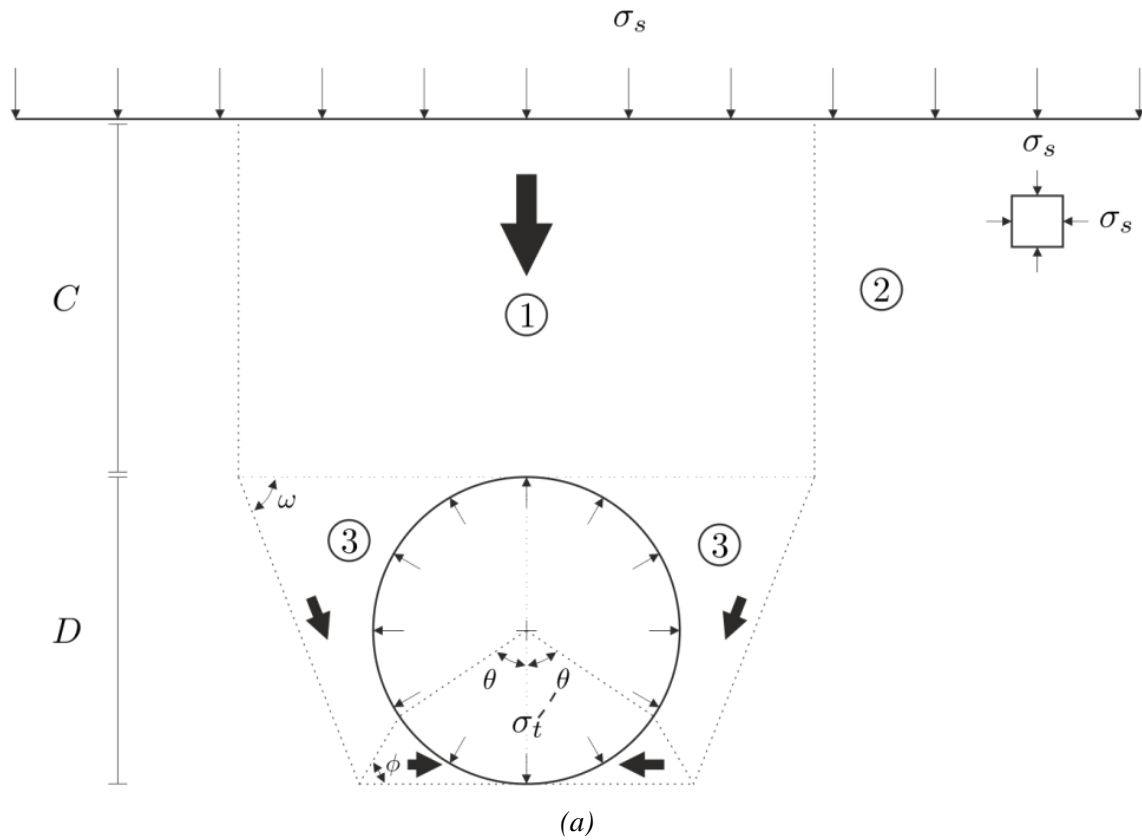
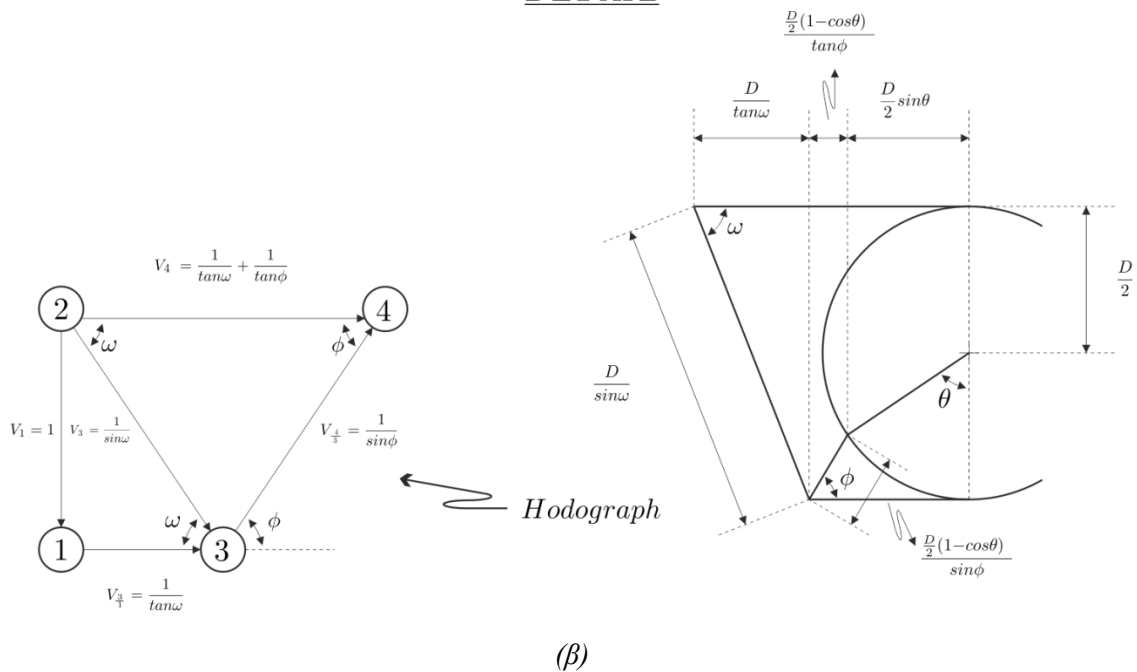


Σχήμα 4.7: Διάγραμμα  $N_{min} - C/D$  για διάφορες τιμές του  $\gamma D/c_u$  στον μηχανισμό  $\Gamma$ .

Από το διάγραμμα (σχήμα 4.7), αρχικά παρατηρείται ότι όλες οι καμπύλες είναι μονότονες. Επίσης, προκύπτει ότι για  $\gamma D/c_u = 0$ , ο  $N$  αυξάνει με την αύξηση του λόγο  $C/D$ . Αυτό σημαίνει ότι για πολύ μικρό ή καθόλου βάρος των υπερκειμένων και όσο αυξάνεται το βάθος της σήραγγας  $C$ , μειώνεται η απαιτούμενο φορτίο υποστήριξης  $\sigma_i$  στο εσωτερικό του ανοίγματος. Αντιθέτως, είναι εμφανές στο παραπάνω διάγραμμα, ότι αν κρατηθεί σταθερός ο λόγος  $\gamma D/c_u$ , σε τιμές μεγαλύτερες του μηδέν (δηλ.  $\gamma D/c_u = 1$ ,  $\gamma D/c_u = 2$  και  $\gamma D/c_u = 3$ ) ο αριθμός ευστάθειας μειώνεται συναρτήσει της αύξησης του λόγου  $C/D$ , δηλαδή για περιπτώσεις με βάρος υπερκειμένων χρειάζεται αύξηση του φορτίου υποστήριξης  $\sigma_i$  όσο μεγαλώνει το βάθος  $C$  του ανοίγματος. Τέλος, όσον αφορά το πρόσημο του Αριθμού Ευστάθειας  $N$  παρατηρείται ότι για  $\gamma D/c_u = 2$  και  $\gamma D/c_u = 3$  ο  $N$  παίρνει κυρίως αρνητικές τιμές, που σημαίνει ότι το φορτίο υποστήριξης  $\sigma_i$  πρέπει να είναι μεγαλύτερο της κατακόρυφης τάσης της επιφανείας  $\sigma_s$  ενώ για  $\gamma D/c_u = 0$  και  $\gamma D/c_u = 1$  ο  $N$  παίρνει θετικές τιμές, δηλαδή το φορτίο υποστήριξης  $\sigma_i$  πρέπει να είναι μικρότερο της κατακόρυφης τάσης της επιφανείας  $\sigma_s$ .

#### 4.5 Μηχανισμός αστοχίας της οροφής της σήραγγας $\Delta$

Ο μηχανισμός  $\Delta$  είναι κινηματικός μηχανισμός αστοχία, της οροφής, των πλευρικών σφηνών και της βάσης της σήραγγας, ο οποίος χαρακτηρίζεται από μία τρεις μεταβλητές τις γωνίες  $\theta$ ,  $\varphi$  και  $\omega$ .

DETAIL

Σχήμα 4.8: (α) Πάνω οριακό θεώρημα μηχανισμός Δ, (β) Οδογράφος για τον Μηχανισμό Δ.

Για να βρεθεί το κρίσιμο φορτίο στο οποίο αστοχεί η σήραγγα και κατά συνέπεια ο Αριθμός Ευστάθειας  $N$ , πρέπει να βρεθεί μία σχέση της διαφοράς  $(\sigma_s - \sigma_t)$ , συναρτήσει των γωνιών

$\theta$ ,  $\varphi$  και  $\omega$ . Στη συνέχεια, πρέπει να ελαχιστοποιηθεί η τιμή της διαφοράς ( $\sigma_s - \sigma_t$ ), σε σχέση με τη μεταβολή των γωνιών  $\theta$ ,  $\varphi$  και  $\omega$ .

Αρχικά θεωρείται η οδογράφος για το σημεία 1, 2, 3 και 4, όπως φαίνεται στο (σχήμα 4.8). Το σημείο 2 είναι ένα σταθερό σημείο έξω από την περιοχή της αστοχίας και τα σημεία 1, 3 και 4 είναι σημεία στα στερεά σώματα που καταπίπτουν. Το δυνατό έργο των εξωτερικών δυνάμεων στο άκαμπτο σώμα 1 υπολογίζεται, ως εξής:

$$\begin{aligned} \dot{A} &= \sigma_s \left( \frac{D}{2} \frac{1 - \cos \theta}{\tan \varphi} + \frac{D}{2} \sin \theta + D \frac{1}{\tan \omega} \right) - \sigma_t \left( \frac{D}{2} \frac{1 - \cos \theta}{\tan \varphi} + \frac{D}{2} \sin \theta + D \frac{1}{\tan \omega} \right) + W \stackrel{(V_1=1)}{\Longleftrightarrow} \\ \dot{A} &= (\sigma_s - \sigma_t) D \left( \frac{1 - \cos \theta}{\tan \varphi} + \sin \theta + \frac{2}{\tan \omega} \right) + \\ &+ \left[ CD \left( \frac{1 - \cos \theta}{\tan \varphi} + \sin \theta + \frac{2}{\tan \omega} \right) + \frac{D^2}{2} \left( \frac{1 - \cos \theta}{\tan \varphi} + \sin \theta + \frac{2}{\tan \omega} \right) \right] \gamma - \\ &- \left[ \left( \frac{D}{2} \frac{1 - \cos \theta}{\tan \varphi} + D \sin \theta \right) \frac{D}{2} (1 - \cos \theta) + \frac{D}{2} \cos \theta \frac{D}{2} \sin \theta + \frac{\pi D^2}{2} \frac{180 - \theta}{360} \right] \gamma \quad (4.37) \end{aligned}$$

Στη συνέχεια διαιρούνται και τα δύο μέλη της σχέσης [4.37] με  $c_u D$  και προκύπτει η εξής σχέση:

$$\begin{aligned} \frac{\dot{A}}{c_u D} &= \frac{(\sigma_s - \sigma_t)}{c_u} \left( \frac{1 - \cos \theta}{\tan \varphi} + \sin \theta + \frac{2}{\tan \omega} \right) + \\ &+ \frac{\gamma D}{c_u} \left[ 2 \frac{C}{D} \left( \frac{1 - \cos \theta}{\tan \varphi} + \sin \theta + \frac{2}{\tan \omega} \right) + \left( \frac{1 - \cos \theta}{\tan \varphi} + \sin \theta + \frac{2}{\tan \omega} \right) \right] - \\ &- \frac{\gamma D}{c_u} \left[ \left( \frac{1 - \cos \theta}{2 \tan \varphi} + \sin \theta \right) \frac{(1 - \cos \theta)}{2} + \pi \frac{180 - \theta}{360} \right] \quad (4.38) \end{aligned}$$

Επίσης υπολογίζεται η ενέργεια που αναλίσκεται για τη δημιουργία των ζωνών ολίσθησης  $D_w$ , ως εξής:

$$\begin{aligned} \dot{D} &= 2c_u \left[ C + \left( \frac{D}{2} \frac{1 - \cos \theta}{\tan \varphi} + \frac{D}{2} \sin \theta + D \frac{1}{\tan \omega} \right) \frac{1}{\tan \omega} + \frac{D}{\sin \omega} \frac{1}{\sin \omega} + \frac{D}{2} \frac{1 - \cos \theta}{\sin \varphi} \frac{1}{\sin \varphi} \right] + \\ &+ 2c_u \left[ C \left( \frac{D}{2} \frac{1 - \cos \theta}{\tan \varphi} + \frac{D}{2} \sin \theta \right) \left( \frac{1}{\tan \varphi} + \frac{1}{\tan \omega} \right) \right] \stackrel{(V_1=1)}{\Longleftrightarrow} \quad (4.39) \end{aligned}$$

Στη συνέχεια διαιρούνται και τα δύο μέλη της σχέσης [4.39] με  $c_u D$  και προκύπτει η εξής σχέση:

$$\frac{\dot{D}}{c_u D} = 2 \frac{C}{D} + \left( \frac{1 - \cos \theta}{\tan \varphi} + \sin \theta + \frac{2}{\tan \omega} \right) \frac{1}{\tan \omega} + \frac{2}{\sin^2 \omega} + \frac{1 - \cos \theta}{\sin^2 \varphi} +$$

$$+ \left( \frac{1 - \cos \theta}{\tan \varphi} + \sin \theta \right) \left( \frac{1}{\tan \varphi} + \frac{1}{\tan \omega} \right) \quad (4.40)$$

Κατά την οριακή ισορροπία θα πρέπει τα δύο αυτά έργα να εξισώνονται:

$$\begin{aligned} \dot{A} = \dot{D} &\Leftrightarrow \frac{\dot{A}}{c_u D} = \frac{\dot{D}}{c_u D} \xLeftrightarrow{(4.38), (4.40)} \\ \frac{(\sigma_s - \sigma_t)}{c_u} &\left( \frac{1 - \cos \theta}{\tan \varphi} + \sin \theta + \frac{2}{\tan \omega} \right) + \\ &+ \frac{\gamma D}{c_u} \left[ 2 \frac{C}{D} \left( \frac{1 - \cos \theta}{\tan \varphi} + \sin \theta + \frac{2}{\tan \omega} \right) + \left( \frac{1 - \cos \theta}{\tan \varphi} + \sin \theta + \frac{2}{\tan \omega} \right) \right] - \\ &- \frac{\gamma D}{c_u} \left[ \left( \frac{1 - \cos \theta}{2 \tan \varphi} + \sin \theta \right) \frac{(1 - \cos \theta)}{2} + \pi \frac{180 - \theta}{360} \right] = \\ &= 2 \frac{C}{D} + \left( \frac{1 - \cos \theta}{\tan \varphi} + \sin \theta + \frac{2}{\tan \omega} \right) \frac{1}{\tan \omega} + \frac{2}{\sin^2 \omega} + \frac{1 - \cos \theta}{\sin^2 \varphi} + \\ &+ \left( \frac{1 - \cos \theta}{\tan \varphi} + \sin \theta \right) \left( \frac{1}{\tan \varphi} + \frac{1}{\tan \omega} \right) \Leftrightarrow \\ \frac{(\sigma_s - \sigma_t)}{c_u} &= \frac{2 \frac{C}{D} + \left( \frac{1 - \cos \theta}{\tan \varphi} + \sin \theta + \frac{2}{\tan \omega} \right) \frac{1}{\tan \omega} + \frac{2}{\sin^2 \omega}}{\frac{1 - \cos \theta}{\tan \varphi} + \sin \theta + \frac{2}{\tan \omega}} + \\ &+ \frac{\frac{1 - \cos \theta}{\sin^2 \varphi} + \left( \frac{1 - \cos \theta}{\tan \varphi} + \sin \theta \right) \left( \frac{1}{\tan \varphi} + \frac{1}{\tan \omega} \right)}{\frac{1 - \cos \theta}{\tan \varphi} + \sin \theta + \frac{2}{\tan \omega}} - \\ &- \frac{\frac{\gamma D}{c_u} \left[ 2 \frac{C}{D} \left( \frac{1 - \cos \theta}{\tan \varphi} + \sin \theta + \frac{2}{\tan \omega} \right) + \left( \frac{1 - \cos \theta}{\tan \varphi} + \sin \theta + \frac{2}{\tan \omega} \right) \right]}{\frac{1 - \cos \theta}{\tan \varphi} + \sin \theta + \frac{2}{\tan \omega}} - \\ &- \frac{\frac{\gamma D}{c_u} \left[ \left( \frac{1 - \cos \theta}{2 \tan \varphi} + \sin \theta \right) \frac{(1 - \cos \theta)}{2} + \pi \frac{180 - \theta}{360} \right]}{\frac{1 - \cos \theta}{\tan \varphi} + \sin \theta + \frac{2}{\tan \omega}} \quad (4.41) \end{aligned}$$

Η σχέση [4.41] για λόγους ευκολίας μετασχηματίζεται ως εξής:

$$\frac{(\sigma_s - \sigma_t)}{c_u} = \frac{K - H}{\frac{1 - \cos \theta}{\tan \varphi} + \sin \theta + \frac{2}{\tan \omega}} \quad (4.42)$$

όπου:

$$\begin{aligned} K = 2 \frac{C}{D} + \left( \frac{1 - \cos \theta}{\tan \varphi} + \sin \theta + \frac{2}{\tan \omega} \right) \frac{1}{\tan \omega} + \frac{2}{\sin^2 \omega} + \frac{1 - \cos \theta}{\sin^2 \varphi} + \\ + \left( \frac{1 - \cos \theta}{\tan \varphi} + \sin \theta \right) \left( \frac{1}{\tan \varphi} + \frac{1}{\tan \omega} \right) \quad (4.43) \end{aligned}$$

$$H = \frac{\gamma D}{c_u} \left[ 2 \frac{C}{D} \left( \frac{1 - \cos \theta}{\tan \varphi} + \sin \theta + \frac{2}{\tan \omega} \right) + \left( \frac{1 - \cos \theta}{\tan \varphi} + \sin \theta + \frac{2}{\tan \omega} \right) \right] - \frac{\gamma D}{c_u} \left[ \left( \frac{1 - \cos \theta}{2 \tan \varphi} + \sin \theta \right) \frac{(1 - \cos \theta)}{2} + \pi \frac{180 - \theta}{360} \right] \quad (4.44)$$

Συνεπώς, μπορεί να θεωρηθεί ότι σύμφωνα με τη λύση του Π.Ο.Θ. του μηχανισμού Δ, ο Αριθμός Ευστάθειας N, είναι:

$$N = \frac{(\sigma_s - \sigma_t)}{c_u} = \frac{K - H}{\frac{1 - \cos \theta}{\tan \varphi} + \sin \theta + \frac{2}{\tan \omega}} \quad (4.45)$$

Ακολουθώντας, με βάση την εξίσωση [4.45] βρέθηκε ο Αριθμός Ευστάθειας N για διάφορες τιμές του  $\frac{\gamma D}{c_u}$ , του  $\frac{C}{D}$  και των γωνιών θ, φ και ω. Τα αποτελέσματα της μοντελοποίησης του μηχανισμού Δ συνοψίζονται στον παρακάτω πίνακα.

Πίνακας 4.4: Μικρότερος Αριθμός Ευστάθειας N και τις αντίστοιχες γωνίες στις οποίες εμφανίζεται, για διάφορες περιπτώσεις του  $\gamma D/c_u$  και του  $C/D$  (οι γωνίες είναι σε μοίρες).

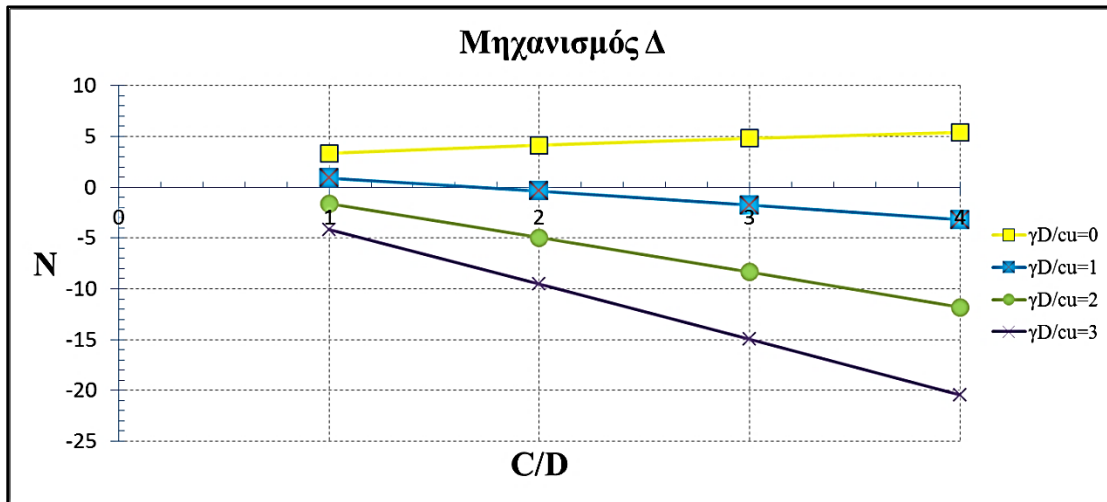
(α)

C/D	$\gamma D/c_u=0$				$\gamma D/c_u=1$			
	N	θ	φ	ω	N	θ	φ	ω
1	3,4	73	77	61	0,9	74	76	55
2	4,2	85	67	55	-0,4	82	68	51
3	4,8	94	60	51	-1,7	89	62	47
4	5,4	100	55	48	-3,2	95	57	44

(β)

C/D	$\gamma D/c_u=2$				$\gamma D/c_u=3$			
	N	θ	φ	ω	N	θ	φ	ω
1	-1,6	74	75	51	-4,2	73	74	47
2	-4,9	80	68	47	-9,5	78	69	44
3	-8,3	85	63	44	-15,0	82	64	41
4	-11,8	90	59	41	-20,4	86	60	39

Από τον παραπάνω πίνακα 4.4 προκύπτει το παρακάτω διάγραμμα, στο οποίο παρουσιάζεται γραφικά η μεταβολή του Αριθμού Ευστάθειας N, σε σχέση με τη μεταβολή του λόγου C/D για διάφορα  $\gamma D/c_u$ .



Σχήμα 4.9: Διάγραμμα  $N_{min} - C/D$  για διάφορες τιμές του  $\gamma D/c_u$  στον μηχανισμό Δ.

Από το διάγραμμα (σχήμα 4.9), αρχικά παρατηρείται ότι όλες οι καμπύλες είναι μονότονες. Επίσης, προκύπτει ότι για  $\gamma D/c_u = 0$ , ο  $N$  αυξάνει με την αύξηση του λόγου  $C/D$ . Αυτό σημαίνει ότι για πολύ μικρό ή καθόλου βάρος των υπερκειμένων και όσο αυξάνεται το βάθος της σήραγγας  $C$ , μειώνεται η απαιτούμενο φορτίο υποστήριξης  $\sigma_i$  στο εσωτερικό του ανοίγματος. Αντιθέτως, είναι εμφανές στο παραπάνω διάγραμμα, ότι αν κρατηθεί σταθερός ο λόγος  $\gamma D/c_u$ , σε τιμές μεγαλύτερες του μηδέν (δηλ.  $\gamma D/c_u = 1$ ,  $\gamma D/c_u = 2$  και  $\gamma D/c_u = 3$ ) ο αριθμός ευστάθειας μειώνεται συναρτήσει της αύξησης του λόγου  $C/D$ , δηλαδή για περιπτώσεις με βάρος υπερκειμένων χρειάζεται αύξηση του φορτίου υποστήριξης  $\sigma_i$  όσο μεγαλώνει το βάθος  $C$  του ανοίγματος. Τέλος, όσον αφορά το πρόσημο του Αριθμού Ευστάθειας  $N$  παρατηρείται ότι για  $\gamma D/c_u = 1$ ,  $\gamma D/c_u = 2$  και  $\gamma D/c_u = 3$  ο  $N$  παίρνει κυρίως αρνητικές τιμές, που σημαίνει ότι το φορτίο υποστήριξης  $\sigma_i$  πρέπει να είναι μεγαλύτερο της κατακόρυφης τάσης της επιφανείας  $\sigma_s$  ενώ για  $\gamma D/c_u = 0$  ο  $N$  παίρνει θετικές τιμές, δηλαδή το φορτίο υποστήριξης  $\sigma_i$  πρέπει να είναι μικρότερο της κατακόρυφης τάσης της επιφανείας  $\sigma_s$ .

#### 4.6 Μηχανισμός αστοχίας του μετώπου της σήραγγας

Ο συγκεκριμένος μηχανισμός, είναι κινηματικός μηχανισμός αστοχία, του μετώπου της σήραγγας, ο οποίος χαρακτηρίζεται από μία δυο μεταβλητές τις γωνίες  $\theta$  και  $\varphi$ . Για να βρεθεί το κρίσιμο φορτίο στο οποίο αστοχεί η σήραγγα και κατά συνέπεια ο Αριθμός Ευστάθειας  $N$ , πρέπει να βρεθεί μία σχέση της διαφοράς  $(\sigma_s - \sigma_i)$ , συναρτήσει των γωνιών  $\theta$  και  $\varphi$ , για  $\gamma = 0$ . Στη συνέχεια, πρέπει να ελαχιστοποιηθεί η τιμή της διαφοράς  $(\sigma_s - \sigma_i)$ , σε σχέση με τη μεταβολή των γωνιών  $\theta$  και  $\varphi$ .



Στη συνέχεια διαιρούνται και τα δύο μέλη της σχέσης [4.46] με  $c_u D$  και προκύπτει η εξής σχέση:

$$\frac{\dot{A}}{c_u D} = \frac{(\sigma_s - \sigma_t)}{c_u} \left( \frac{\sin \varphi}{\sin(180 - \varphi - \theta)} \right) \quad (4.47)$$

Επίσης υπολογίζεται η ενέργεια που αναλύσκεται για τη δημιουργία των ζωνών ολίσθησης  $D_w$ , ως εξής:

$$\begin{aligned} \dot{D} = c_u \left[ \left( \frac{C}{\cos(90 - \theta)} + \frac{C + D - \frac{\sin \theta \cos \varphi}{\sin(180 - \theta - \varphi)}}{\cos(90 - \theta)} \right) \right. \\ \left. + \frac{D \frac{\sin \theta}{\sin(180 - \theta - \varphi)}}{\cos(\varphi + \theta - 90)} + D \frac{\sin \varphi \tan(\varphi + \theta - 90)}{\sin(180 - \theta - \varphi)} \right] \end{aligned} \quad (4.48)$$

Στη συνέχεια διαιρούνται και τα δύο μέλη της σχέσης [4.48] με  $c_u D$  και προκύπτει η εξής σχέση:

$$\begin{aligned} \frac{\dot{D}}{c_u D} = 2 \frac{C}{D} + \frac{1}{\cos(90 - \theta)} - \frac{\frac{\sin \theta \cos \varphi}{\sin(180 - \theta - \varphi)}}{\cos(90 - \theta)} \\ + \frac{\frac{\sin \theta}{\sin(180 - \theta - \varphi)}}{\cos(\varphi + \theta - 90)} + \frac{\sin \varphi \tan(\varphi + \theta - 90)}{\sin(180 - \theta - \varphi)} \end{aligned} \quad (4.49)$$

Κατά την οριακή ισορροπία θα πρέπει τα δύο αυτά έργα να εξισώνονται:

$$\begin{aligned} \dot{A} = \dot{D} \Leftrightarrow \frac{\dot{A}}{c_u D} &= \frac{\dot{D}}{c_u D} \xrightarrow{(4.47), (4.49)} \\ \frac{(\sigma_s - \sigma_t)}{c_u} \left( \frac{\sin \varphi}{\sin(180 - \varphi - \theta)} \right) &= \\ &= 2 \frac{C}{D} + \frac{1}{\cos(90 - \theta)} - \frac{\frac{\sin \theta \cos \varphi}{\sin(180 - \theta - \varphi)}}{\cos(90 - \theta)} + \frac{\frac{\sin \theta}{\sin(180 - \theta - \varphi)}}{\cos(\varphi + \theta - 90)} + \frac{\sin \varphi \tan(\varphi + \theta - 90)}{\sin(180 - \theta - \varphi)} \\ \frac{(\sigma_s - \sigma_t)}{c_u} &= \frac{2 \frac{C}{D} + \frac{1}{\cos(90 - \theta)} + \frac{\frac{\sin \theta}{\sin(180 - \theta - \varphi)}}{\cos(\varphi + \theta - 90)} - \frac{\frac{\sin \theta \cos \varphi}{\sin(180 - \theta - \varphi)}}{\cos(90 - \theta)} + \frac{\sin \varphi \tan(\varphi + \theta - 90)}{\sin(180 - \theta - \varphi)}}{\frac{\sin \varphi}{\sin(180 - \varphi - \theta)}} \end{aligned} \quad (4.50)$$

Η σχέση [4.50] για λόγους ευκολίας μετασχηματίζεται ως εξής:

$$\frac{(\sigma_s - \sigma_t)}{c_u} = \frac{K - H}{\frac{\sin \varphi}{\sin(180 - \varphi - \theta)}} \quad (4.51)$$

όπου:

$$K = 2 \frac{C}{D} + \frac{1}{\cos(90 - \theta)} + \frac{\sin \theta}{\frac{\sin(180 - \theta - \varphi)}{\cos(\varphi + \theta - 90)}} \quad (4.52)$$

$$H = \frac{\frac{\sin \theta \cos \varphi}{\sin(180 - \theta - \varphi)}}{\cos(90 - \theta)} + \frac{\sin \varphi \tan(\varphi + \theta - 90)}{\sin(180 - \theta - \varphi)} \quad (4.53)$$

Συνεπώς, μπορεί να θεωρηθεί ότι σύμφωνα με τη λύση του Π.Ο.Θ. του μηχανισμό αστοχίας του μετώπου της σήραγγας, ο Αριθμός Ευστάθειας  $N$ , είναι:

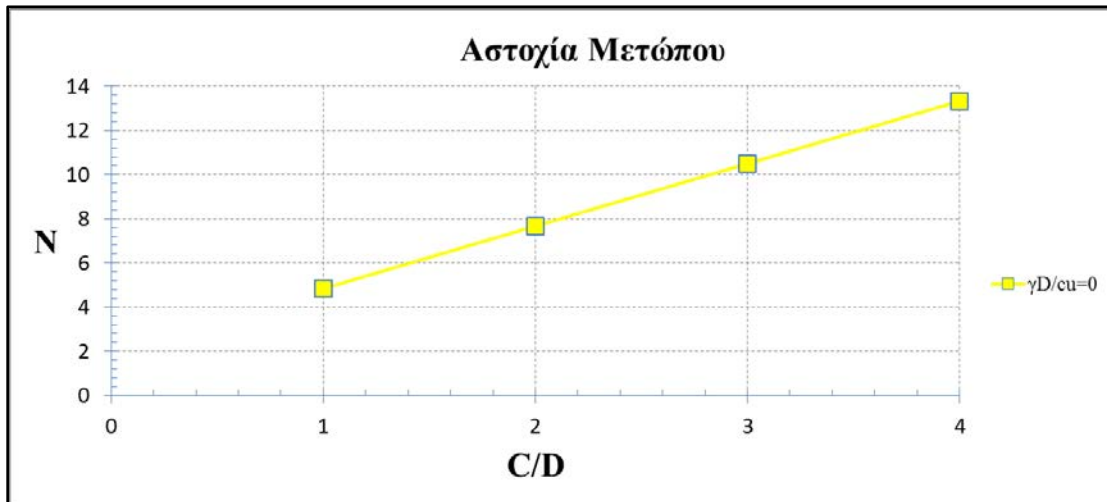
$$N = \frac{(\sigma_s - \sigma_t)}{c_u} = \frac{K - H}{\frac{\sin \varphi}{\sin(180 - \varphi - \theta)}} \quad (4.54)$$

Ακολουθώντας, με βάση την εξίσωση [4.54] βρέθηκε ο Αριθμός Ευστάθειας  $N$  για διάφορες τιμές του  $\frac{\gamma D}{c_u}$ , του  $\frac{C}{D}$  και των γωνιών  $\theta$ ,  $\varphi$  και  $\omega$ . Τα αποτελέσματα της μοντελοποίησης του μηχανισμού  $\Delta$  συνοψίζονται στον παρακάτω πίνακα.

Πίνακας 4.5: Μικρότερος Αριθμός Ευστάθειας  $N$  και τις αντίστοιχες γωνίες στις οποίες εμφανίζεται, για  $\gamma D/c_u = 0$  και διάφορες περιπτώσεις του  $C/D$ .

C/D	$\gamma D/c_u=0$		
	N	$\theta$	$\varphi$
1	4,5	44,9	44,9
2	7,7	44,9	44,9
3	10,5	44,9	44,9
4	13,3	44,9	44,9

Από τον παραπάνω πίνακα 4.5 προκύπτει το παρακάτω διάγραμμα, στο οποίο παρουσιάζεται γραφικά η μεταβολή του Αριθμού Ευστάθειας  $N$ , σε σχέση με τη μεταβολή του λόγου  $C/D$  για  $\gamma D/c_u = 0$ .



Σχήμα 4.11: Διάγραμμα  $N_{min} - C/D$  για  $\gamma D/c_u = 0$  στον μηχανισμό αστοχίας του μετώπου της σήραγγας.

Από το διάγραμμα (σχήμα 4.11), παρατηρείται ότι η καμπύλη είναι μονότονη. Επίσης, προκύπτει ότι για  $\gamma D/c_u = 0$ , ο  $N$  αυξάνει με την αύξηση του λόγου  $C/D$ . Αυτό σημαίνει ότι για πολύ μικρό ή καθόλου βάρος των υπερκειμένων και όσο αυξάνεται το βάθος της σήραγγας  $C$ , μειώνεται η απαιτούμενο φορτίο υποστήριξης  $\sigma_b$  στο εσωτερικό του ανοίγματος.

## Κεφάλαιο 5

### Συμπεράσματα και προτάσεις

#### 5.1 Συμπεράσματα

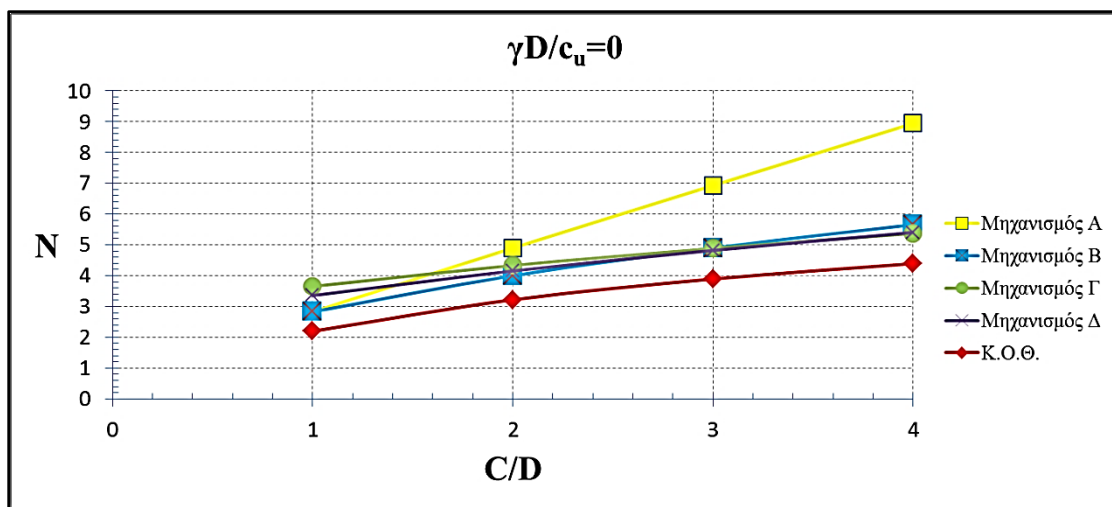
Στην παρούσα Διπλωματική Εργασία παρουσιάστηκαν οι αναλυτικές οι λύσεις του φορτίου υποστήριξης για την αποφυγή της κατάρρευσης της οροφής κυκλικής σήραγγας με βάση τους μηχανισμούς κατάρρευσης που προέκυψαν από αναλογικά πειράματα σε μαλακή άργιλο στο Πανεπιστήμιο του Cambridge τη δεκαετία του '80. Το υπερκείμενο της σήραγγας γεωϋλικό θεωρήθηκε ομοιογενές, με μοναδιαίο βάρος  $\gamma$  και αστράγγιστη διατμητική αντοχή  $c_u$  (undrained shear strength).

Όπως λέμε στο Κεφάλαιο 1 στη φάση του σχεδιασμού μιας σήραγγας σε μαλακούς σχηματισμούς (π.χ. άργιλο) θέλουμε να ξέρουμε την πίεση του ρευστού (slurry) ή του πεπιεσμένου αέρα (TBM) ή του εδαφικού πολφού (EPB) που πρέπει να εξασκείται στα τοιχώματα και στο μέτωπο του ανοίγματος για να μην αστοχήσει η σήραγγα και καταπέσουν τα υπερκείμενα. Αυτό το φορτίο ονομάζεται φορτίο υποστήριξης  $\sigma_i$  και μπορούμε να το βρούμε αν ξέρουμε τον Αριθμό Ευστάθειας  $N$  που ορίστηκε στο Κεφάλαιο 3 ως ο λόγος  $(\sigma_s - \sigma_i)/c_u$ . Ο αριθμός αυτός εκφράζει το πηλίκο της συνολικής τάσης των υπερκειμένων πριν την διάνοιξη της σήραγγας προς το έργο των εσωτερικών δυνάμεων. Επί της ουσίας με τη χρήση του Αριθμού Ευστάθειας  $N$  μπορεί να προσδιοριστεί το φορτίο υποστήριξης  $\sigma_i$  που πρέπει να εφαρμοστεί στο μέτωπο και την οροφή της σήραγγας κατά τη διαδικασία της διάνοιξης του ανοίγματος.

Οι Davis et al έθεσαν το πρόβλημα ότι αν σχεδιαστεί το φορτίο υποστήριξης  $\sigma_i$  ίση με την υδροστατική πίεση των πόρων στο μέτωπο τότε θα πάρουμε  $N=0$  αλλά αυτό δεν είναι ασφαλές για τους ανθρώπους που θα εργάζονται σε συνθήκες υψηλής πίεσης. Γι' αυτό το λόγο θέλουμε ένα μοντέλο για να υπολογιστεί το ελάχιστο φορτίο  $\sigma_i$  ώστε να μην υπάρχει το παραπάνω ρίσκο αλλά και να μην αστοχήσει η σήραγγα.

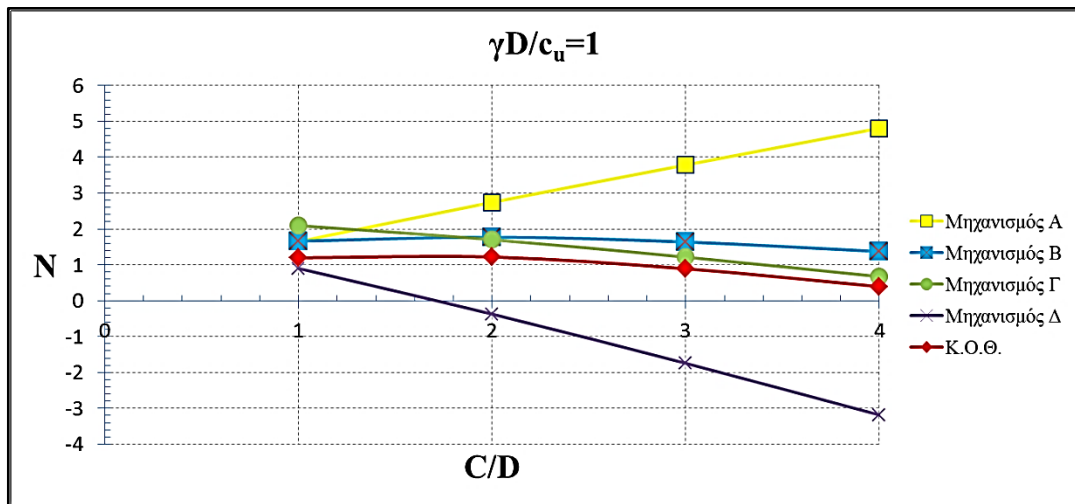
Τα δύο θεωρήματα του Κ.Ο.Θ. και του Π.Ο.Θ. μπορούν να χρησιμοποιηθούν για τον υπολογισμό του κάτω ορίου του φορτίου κατάρρευσης και του πάνω ορίου αντίστοιχα. Εφόσον το άγνωστο φορτίο στη συγκεκριμένη περίπτωση είναι το ασκούμενο φορτίο υποστήριξης επί του μετώπου  $\sigma_i$ , θα έχει αρνητικό πρόσημο από το φορτίο κατάρρευσης των δύο θεωρημάτων. Άρα το Κ.Ο.Θ. που δίνει το κατώτερο φορτίο κατάρρευσης θα δίνει το ανώτερο φορτίο υπο-

στήριξης (εφόσον το δεύτερο είναι το αρνητικό του πρώτου) και συνεπώς δίνει ασφαλέστερη εκτίμηση από το Π.Ο.Θ.. Αυτό φαίνεται και στα παρακάτω διαγράμματα. Αρχικά εξετάστηκαν τέσσερεις κινηματικοί μηχανισμοί κατάρρευσης της σήραγγας με το Π.Ο.Θ. της θεωρίας της Πλαστικότητας, βρέθηκαν οι αναλυτικές λύσεις του Αριθμού Ευστάθειας γι' αυτές τις περιπτώσεις και δημιουργήθηκαν αρχεία Excel™ στα οποία παρουσιάζονται τα διαγράμματα των αποτελεσμάτων που προέκυψαν από την ελαχιστοποίηση του  $N$  σε περιβάλλον Matlab, για διάφορες περιπτώσεις. Οι λύσεις αυτές συγκρίνονται στα παρακάτω διαγράμματα με την αναλυτική λύση για το ίδιο πρόβλημα που προσδιορίστηκε με εφαρμογή του Κ.Ο.Θ. και εξάγονται τα ανάλογα συμπεράσματα.



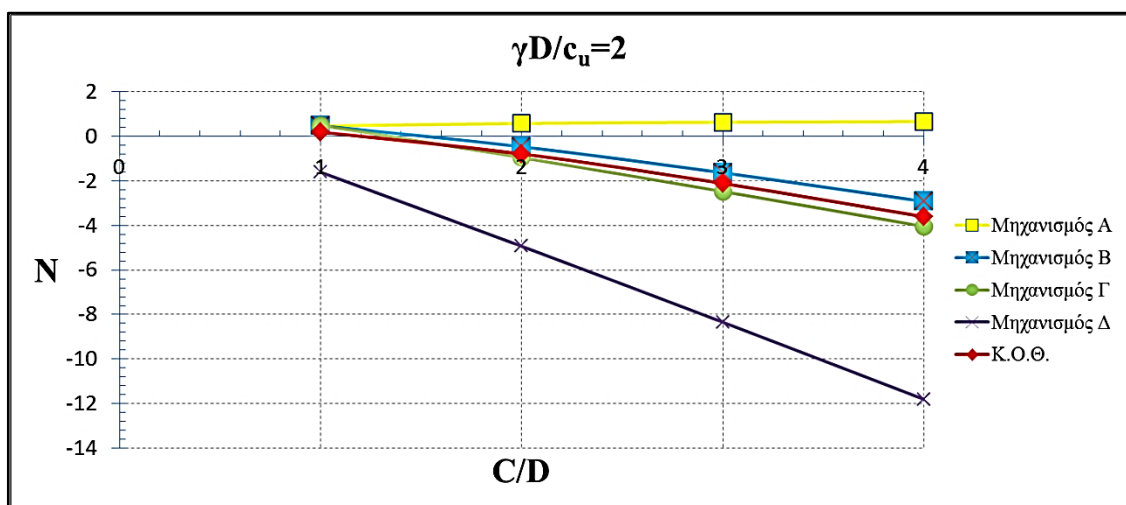
Σχήμα 5.1: Διάγραμμα  $N_{min} - C/D$  για διάφορους μηχανισμούς του Π.Ο.Θ. και του Κ.Ο.Θ. και  $\gamma D/c_u = 0$ .

Στο διάγραμμα (σχήμα 5.1), όπου απεικονίζονται γραφικά όλοι οι μηχανισμοί για  $\gamma D/c_u = 0$ , παρουσιάζεται ο  $N$  να αυξάνει με την αύξηση του λόγου  $C/D$  και να παίρνει θετικές τιμές σε όλες τις περιπτώσεις. Αυτό σημαίνει ότι για πολύ μικρό ή καθόλου βάρος των υπερκειμένων και όσο αυξάνεται το βάθος της σήραγγας  $C$ , μειώνεται το απαιτούμενο φορτίο υποστήριξης  $\sigma_v$  στο εσωτερικό του ανοίγματος και είναι σταθερά μικρότερη από την κατακόρυφη τάση της επιφανείας  $\sigma_s$ . Επίσης, είναι εμφανές ότι το Κ.Ο.Θ. δίνει χαμηλότερες τιμές του  $N$  σε σύγκριση με όλους τους μηχανισμούς που εξετάστηκαν με το Π.Ο.Θ..



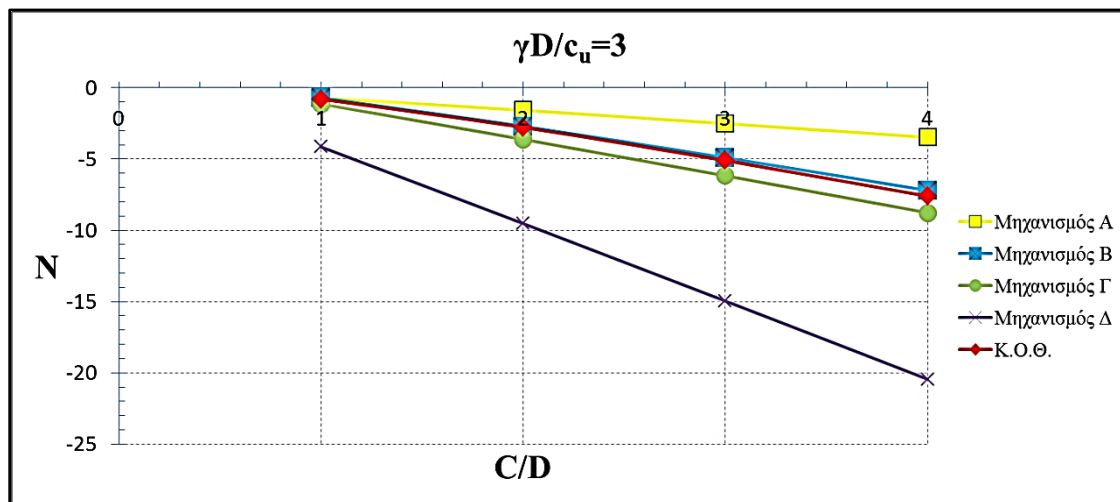
Σχήμα 5.2: Διάγραμμα  $N_{min} - C/D$  για διάφορους μηχανισμό του Π.Ο.Θ. και του Κ.Ο.Θ. και  $\gamma D/c_u = 1$ .

Στο διάγραμμα (σχήμα 5.2), όπου απεικονίζονται γραφικά όλοι οι μηχανισμοί για  $\gamma D/c_u = 1$ , παρουσιάζεται ο  $N$  να μειώνει με την αύξηση του λόγο  $C/D$  για τους τρεις μηχανισμούς Β, Γ και Δ του Π.Ο.Θ. και για το Κ.Ο.Θ.. Δείχνει να αυξάνει με την αύξηση του λόγο  $C/D$  για τον μηχανισμό Α του Π.Ο.Θ.. Αυτό σημαίνει ότι για  $\gamma D/c_u = 1$  και όσο αυξάνεται το βάθος της σήραγγας  $C$ , αυξάνεται το απαιτούμενο φορτίο υποστήριξης  $\sigma_u$  στο εσωτερικό του ανοίγματος, ενώ στον μηχανισμό Α ισχύει το αντίθετο. Επίσης, παίρνει θετικές τιμές σε όλες τις περιπτώσεις για τους τρεις μηχανισμούς Α, Β και Γ του Π.Ο.Θ. και για το Κ.Ο.Θ., ενώ παίρνει αρνητικές τιμές για τον μηχανισμό Δ του Π.Ο.Θ.. Τέλος, είναι εμφανές ότι το Κ.Ο.Θ. δίνει χαμηλότερες τιμές του  $N$  σε σύγκριση με όλους τους μηχανισμούς που εξετάστηκαν με το Π.Ο.Θ., εκτός του μηχανισμού Δ.



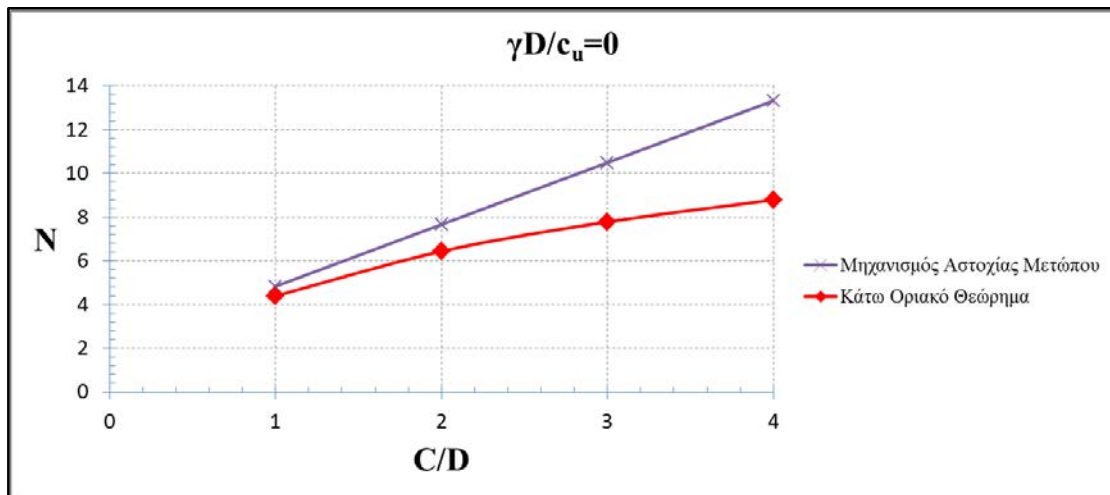
Σχήμα 5.3: Διάγραμμα  $N_{min} - C/D$  για διάφορους μηχανισμό του Π.Ο.Θ. και του Κ.Ο.Θ. και  $\gamma D/c_u = 2$ .

Στο διάγραμμα (σχήμα 5.3), όπου απεικονίζονται γραφικά όλοι οι μηχανισμοί για  $\gamma D/c_u = 2$ , παρουσιάζεται ο  $N$  να μειώνει με την αύξηση του λόγου  $C/D$  για τους τρεις μηχανισμούς Β, Γ και Δ του Π.Ο.Θ. και για το Κ.Ο.Θ.. Δείχνει να αυξάνει με την αύξηση του λόγου  $C/D$  για τον μηχανισμό Α του Π.Ο.Θ.. Αυτό σημαίνει ότι για  $\gamma D/c_u = 2$  και όσο αυξάνεται το βάθος της σήραγγας  $C$ , αυξάνεται το απαιτούμενο φορτίο υποστήριξης  $\sigma_b$  στο εσωτερικό του ανοίγματος, ενώ στον μηχανισμό Α ισχύει το αντίθετο. Επίσης, ο  $N$  παίρνει αρνητικές τιμές σε όλες τις περιπτώσεις για τους τρεις μηχανισμούς Β, Γ και Δ του Π.Ο.Θ. και για το Κ.Ο.Θ., ενώ παίρνει θετικές τιμές για τον μηχανισμό Α του Π.Ο.Θ.. Τέλος, είναι εμφανές ότι τα αποτελέσματα του Κ.Ο.Θ. δίνουν πολύ κοντινές τιμές του  $N$  με τους μηχανισμούς Β και Γ σε αντίθεση με τους δύο άλλους μηχανισμούς.



Σχήμα 5.4: Διάγραμμα  $N_{min} - C/D$  για διάφορους μηχανισμούς του Π.Ο.Θ. και του Κ.Ο.Θ. και  $\gamma D/c_u = 3$ .

Στο διάγραμμα (σχήμα 5.4), όπου απεικονίζονται γραφικά όλοι οι μηχανισμοί για  $\gamma D/c_u = 3$ , παρουσιάζεται ο  $N$  να μειώνει με την αύξηση του λόγου  $C/D$  και να παίρνει αρνητικές τιμές σε όλες τις περιπτώσεις. Αυτό σημαίνει ότι για πολύ μεγάλο βάρος των υπερκειμένων και όσο αυξάνεται το βάθος της σήραγγας  $C$ , αυξάνεται το απαιτούμενο φορτίο υποστήριξης  $\sigma_b$  στο εσωτερικό του ανοίγματος και είναι σταθερά μεγαλύτερη από την κατακόρυφη τάση της επιφανείας  $\sigma_s$ . Τέλος, είναι εμφανές ότι τα αποτελέσματα του Κ.Ο.Θ. δίνουν πολύ κοντινές τιμές του  $N$  με τους μηχανισμούς Β και Γ σε αντίθεση με τους δύο άλλους μηχανισμούς.



Σχήμα 5.5: Διάγραμμα  $N_{min} - C/D$  για το μηχανισμό αστοχίας του μετώπου της σήραγγας του Π.Ο.Θ. και του Κ.Ο.Θ. και  $\gamma D/c_u = 0$ .

Στο διάγραμμα (σχήμα 5.5), όπου απεικονίζονται γραφικά ο μηχανισμός αστοχίας του μετώπου της σήραγγας για  $\gamma D/c_u = 0$ , παρουσιάζεται να αυξάνει με την αύξηση του λόγο  $C/D$  και να παίρνει θετικές τιμές σε όλες τις περιπτώσεις. Αυτό σημαίνει ότι για πολύ μικρό ή καθόλου βάρος των υπερκειμένων και όσο αυξάνεται το βάθος της σήραγγας  $C$ , μειώνεται το απαιτούμενο φορτίο υποστήριξης  $\sigma_i$  στο εσωτερικό του ανοίγματος και είναι σταθερά μικρότερη από την κατακόρυφη τάση της επιφανείας  $\sigma_s$ . Επίσης, είναι εμφανές ότι το Κ.Ο.Θ. δίνει χαμηλότερες τιμές του  $N$  σε σύγκριση με τον μηχανισμό που εξετάστηκε με το Π.Ο.Θ..

Συνοψίζοντας, προκύπτει ότι οι μηχανισμοί Β, Γ και το Κ.Ο.Θ. περικλείουν το απαιτούμενο φορτίο υποστήριξης  $\sigma_i$  ικανοποιητικά. Άρα οι δύο αυτή μηχανισμοί είναι πολύ κοντά στην αναλυτική λύση. Ο μηχανισμός Δ θα δίνει πάντα πολύ μεγάλο φορτίο υποστήριξης με αποτέλεσμα να είναι εκτός πραγματικότητας, διότι δεν είναι ασφαλές για τους ανθρώπους που θα εργάζονται σε συνθήκες υψηλής πίεσης.

## 5.2 Προτάσεις

Από τη διερεύνηση των κινηματικών μηχανισμών αστοχίας της οροφής αβαθούς σήραγγας σε μαλακούς σχηματισμούς με το Πάνω Οριακό Θεώρημα και το Κάτω Οριακό Θεώρημα προέκυψαν διάφορα ερωτήματα που χρειάζονται περαιτέρω διερεύνηση.

Όσον αφορά τους κινηματικούς μηχανισμούς του Π.Ο.Θ. υπάρχουν διάφορα θέματα που απαιτούν περαιτέρω μελέτη. Μερικά από αυτά συνοψίζονται παρακάτω:

1. Να συνεχισθεί η μελέτη και για μηχανισμούς αστάθειας του μετώπου όπως έγινε για την οροφή.

2. Να γίνουν οι ίδιες αναλύσεις για την γενικότερη περίπτωση των γεωυλικών με συνοχή και γωνία τριβής (Mohr-Coulomb)
3. Επίσης, προτείνεται η διερεύνηση των κινηματικών μηχανισμών που προκύπτουν σε περίπτωση που έχουμε δύο δίδυμες σήραγγες και η παραγωγή των αντίστοιχων αναλυτικών λύσεων.

## Βιβλιογραφία

- A. M. Cairncross. Deformations around model tunnels in stiff clay. *PhD Thesis Cambridge University*, 1973.
- C. A. Coulomb. Essai sur une application des regles des maximis et minimis a quelques problemes de statique, relatifs a l'architecture. *Mem. Acad. Roy. Sci.*, 7:343-382, 1776.
- A. C. Chen and W. F. Chen. Constitutive relations for concrete. *J. Eng. Mech. Div.*, ASCE, 101:465-481, 1975.
- W. F. Chen and D. J. Han. *Plasticity for structural engineers*. Springer-Verlag, New York, 1988.
- E. H. Davis, et al. The stability of shallow tunnels and underground opening in cohesive material. *Geotechnique* 30, 4:397-416, 1980.
- R. Hill. *The mathematical theory of plasticity*. Oxford Classics Series. Oxford University Press, New York, 1998.
- R. Mair. Centrifugal modeling of tunnel construction in soft clay. *PhD Thesis Cambridge University*, 1980.
- O. Mohr. Welche umstande bedingen die elastizitatsgrenze und den bruch eines materials? *Z. Ver. Dtsch. Ing.*, 44:1524-1530, 1900.
- H. Tresca. Memoire sur l'ecoulement des corps solides soumis a de fortes pressions. *C.R. Acad. Sci. Paris*, 59:754-758, 1864.
- I. Vardoulakis and J. Sulem. *Bifurcation analysis in geomechanics*. Blackie Academic & Professional, London, 1995.
- D. Kolymbas. *Tunnelling and Tunnel Mechanics*. Springer, 2005.



ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ ΚΡΗΤΗΣ  
TECHNICAL UNIVERISTY OF CRETE