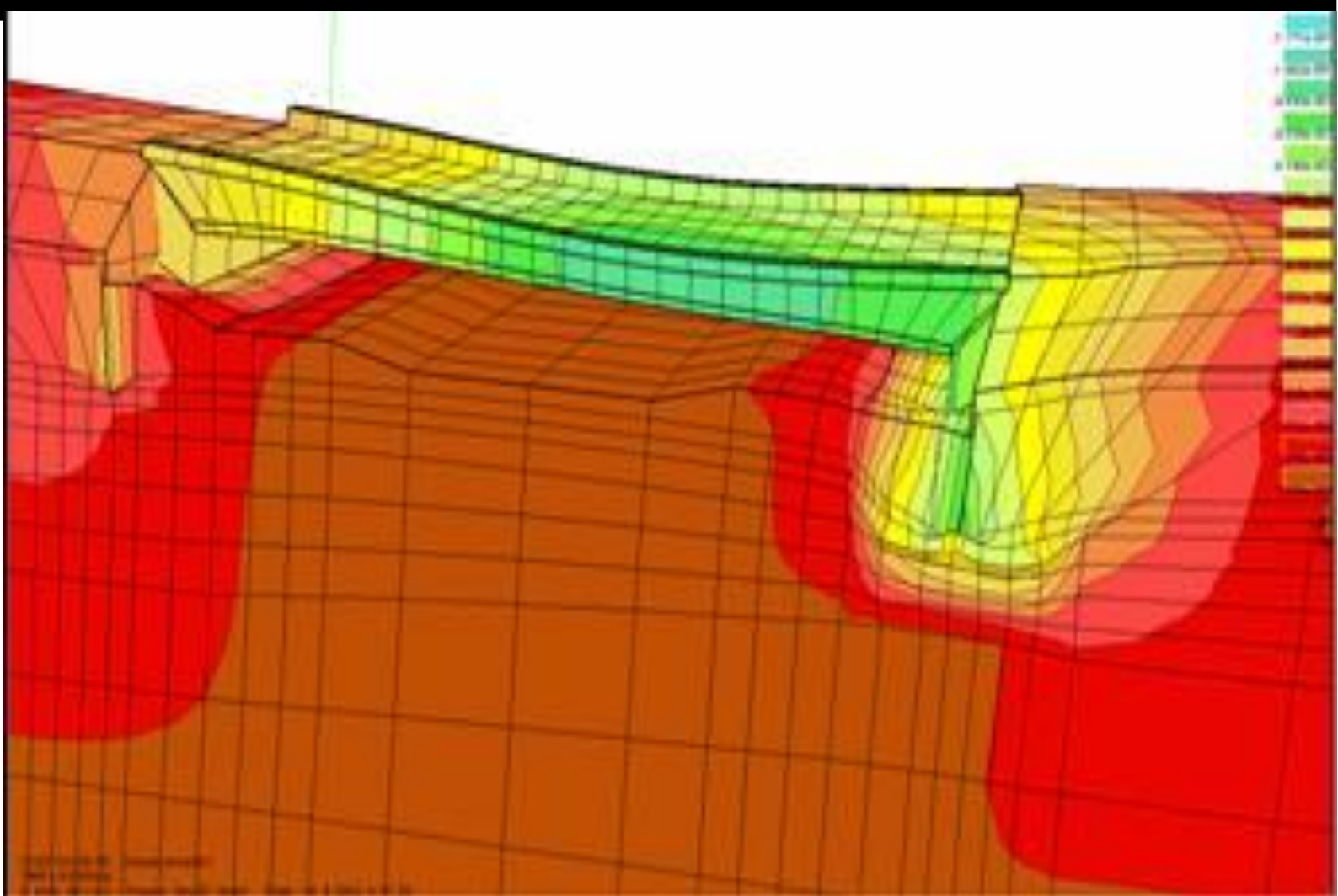


Πολυτεχνείο Κρήτης

Τμήμα Μηχανικών Παραγωγής και Διοίκησης

Σεπτέμβριος 2014

Προσομοίωση γέφυρας με ενσωματωμένους οπτικούς αισθητήρες και ανάλυση της δομικής ακεραιότητάς της.



ΕΛΕΥΘΕΡΙΟΣ Ι. ΤΣΟΥΛΚΑΣ

A.M : 2007010055

Επιβλέπων : Γεώργιος Σταυρουλάκης

Περιεχόμενα

ΠΡΟΛΟΓΟΣ	3
ΕΙΣΑΓΩΓΗ	4
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1	6
ΙΣΤΟΡΙΚΗ ΑΝΑΔΡΟΜΗ.....	6
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2	7
ΘΕΜΕΛΙΩΔΕΙΣ ΕΝΝΟΙΕΣ	7
1. ΤΑΣΕΙΣ ΚΑΙ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑ.....	7
2. ΣΥΝΟΡΙΑΚΕΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ	9
3. ΣΧΕΣΕΙΣ ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΗΣ – ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΗΣ.....	9
4. ΣΧΕΣΕΙΣ ΤΑΣΗΣ – ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΗΣ	11
5. ΕΠΙΔΡΑΣΕΙΣ ΘΕΡΜΟΚΡΑΣΙΑΣ	12
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3	14
ΔΙΣΔΙΑΣΤΑΤΑ ΙΣΟΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ.....	14
ΤΟ ΤΕΤΡΑΠΛΕΥΡΟ ΤΕΣΣΑΡΩΝ ΚΟΜΒΩΝ	14
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4	21
ΜΕΘΟΔΟΣ ΕΠΙΛΥΣΗΣ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ	21
ΔΟΚΙΜΕΣ.....	22
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5	52
ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ	52
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6	53
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ	53

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Η μελέτη μιας μεγάλης κατασκευής είναι μια δύσκολη και απαιτητική διαδικασία αλλά ταυτόχρονα απαραίτητη για την σωστή χρήση, λειτουργία και συντήρησή της. Κατασκευές όπως μια οικοδομή, ένα πλοίο ή, όπως σε αυτή την εργασία μια γέφυρα, είναι μεγάλες και αρκετά περίπλοκες συνεπώς η μελέτη τους είναι δύσκολα πραγματοποιήσιμη. Για το λόγο αυτό διαιρούμε την κατασκευή σε απλά γεωμετρικά σχήματα, τα οποία ονομάζονται πεπερασμένα στοιχεία (finite elements). Ειδικότερα, θα προσομοιώσουμε και θα εξετάσουμε την δομική ακεραιότητα μίας γέφυρας κατασκευασμένης από οπλισμένο σκυρόδεμα C 40/50, η οποία θα δέχεται διάφορες φορτίσεις. Στην γέφυρα θα ενσωματωθούν οπτικοί αισθητήρες οι οποίοι θα βοηθήσουν στην ακριβέστερη μέτρηση των παραμορφώσεων που θα προκαλούνται από τις παραπάνω φορτίσεις.

Η παρούσα εργασία βασίζεται στην μεταπτυχιακή εργασία της κα. Ζαχαρένιας Μαρκάκη καθώς και στην μελέτη του κ. Σταυρουλάκη Γεωργίου από την οποία προέρχεται ο αρχικός κώδικας ο οποίος προσομοιώνει σε περιβάλλον Matlab ένα τετράπλευρο ορθογώνιο σχήμα χωρισμένο σε πεπερασμένα στοιχεία, με διακριτοποίηση επιλεγμένη από τον χρήστη, και το οποίο για συγκεκριμένες φορτίσεις δίνει τις εκάστοτε παραμορφώσεις των πλευρών. Με την κατάλληλη επεξεργασία του κώδικα προσομοιώνουμε πλέον μία γέφυρα αποτελούμενη από τρία κομμάτια, ένα κεκλιμένο άνω, ένα ορθογώνιο και ένα κεκλιμένο κάτω, ενωμένα μεταξύ τους τα οποία μελετάμε ως ένα σχήμα πλέον με κοινό μητρώο δυσκαμψίας. Έπειτα ενσωματώνουμε με κατάλληλο κώδικα οπτικούς αισθητήρες οι οποίοι περνάν από συγκεκριμένους κόμβους. Τέλος, εφαρμόζοντας διάφορες περιπτώσεις φορτίσεως, καταλήγουμε σε συμπεράσματα σχετικά με την παραμόρφωση των οπτικών ινών και κατά επέκταση της ίδιας της γέφυρας.

3

Η διάρθρωση της παρούσης διπλωματικής εργασίας έχει την εξής δομή. Αρχικά, γίνεται αναφορά στην μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων και στο πλέγμα αισθητήρων οπτικών ινών που χρησιμοποιούνται και έπειτα στο Κεφάλαιο 1 μια σύντομη ιστορική αναδρομή των παραπάνω. Στο Κεφάλαιο 2 παρουσιάζονται αναλυτικά οι θεμελιώδεις έννοιες των πεπερασμένων στοιχείων. Στο Κεφάλαιο 3 παρουσιάζεται η θεωρία των ισοπλεύρων ισοπαραμετρικών στοιχείων, όπως είναι τα τετράπλευρα τεσσάρων κόμβων. Στο Κεφάλαιο 4 αναλύεται η διαδικασία που ακολουθήθηκε και παρουσιάζονται οι δοκιμές που έγιναν καθώς και τα αποτελέσματα που εξήχθησαν από τις προσομοιώσεις. Στο Κεφάλαιο 5 εκτίθενται τα συμπεράσματα και τέλος η εργασία ολοκληρώνεται στο Κεφάλαιο 6 με την παράθεση της σχετικής βιβλιογραφίας.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η **Μέθοδος Πεπερασμένων Στοιχείων** αποτελεί πλέον ένα ισχυρό εργαλείο για την αριθμητική επίλυση ενός μεγάλου φάσματος προβλημάτων μηχανικού. Οι εφαρμογές εκτείνονται από την παραμόρφωση και ανάλυση τάσεων σε αυτοκίνητα, αεροπλάνα, κτίρια και γέφυρες μέχρι την ανάλυση πεδίων ροής θερμότητας, ροής υγρών, μαγνητικής ροής, υπόγειας ροής και άλλων προβλημάτων ροής. Με τις εξελίξεις στην τεχνολογία των Η/Υ και των συστημάτων CAD, σύνθετα προβλήματα μπορούν να μοντελοποιηθούν πολύ εύκολα. Διάφορες εναλλακτικές συνθέσεις μπορούν να δοκιμαστούν σε έναν Η/Υ πριν κατασκευαστεί το πρώτο πρωτότυπό τους. Στην Μέθοδο Πεπερασμένων Στοιχείων, μια περίπλοκη περιοχή, η οποία ορίζει ένα συνεχές, διακριτοποιείται σε απλά γεωμετρικά σχήματα, τα οποία ονομάζονται πεπερασμένα στοιχεία (finite elements). Οι ιδιότητες υλικών και οι διέπουσες σχέσεις θεωρούνται πάνω σε αυτά τα στοιχεία και εκφράζονται σε όρους των άγνωστων τιμών στις γωνίες των στοιχείων. Μια διαδικασία σύνθεσης, η οποία καταλλήλως θεωρεί τα φορτία και τους περιορισμούς, έχει ως αποτέλεσμα ένα σύνολο εξισώσεων. Η λύση αυτών των εξισώσεων δίνει την κατά προσέγγιση συμπεριφορά του συνεχούς.

Ένας **αισθητήρας οπτικής ίνας** είναι ένας αισθητήρας που χρησιμοποιεί οπτική ίνα είτε ως αισθητήριο στοιχείο ("ενδογενείς αισθητήρες»), ή ως μέσο μετεγκατάστασης σημάτων από ένα απομακρυσμένο αισθητήρα προς τα ηλεκτρονικά που επεξεργάζονται τα σήματα («εξωγενείς αισθητήρες»). Οι ίνες έχουν πολλές χρήσεις στην τηλεπισκόπηση. Ανάλογα με την εφαρμογή, οι ίνες μπορούν να χρησιμοποιηθούν λόγω του μικρού μεγέθους τους, είτε επειδή δεν απαιτείται ηλεκτρική ισχύς στην απομακρυσμένη θέση, ή επειδή μπορούν να συμπλέκονται πολλοί αισθητήρες κατά μήκος μιας ίνας με χρήση μετατόπισης μήκους κύματος φωτός για κάθε αισθητήρα, ή για την ανίχνευση της χρονικής καθυστέρησης όπως το φως περνά κατά μήκος της ίνας μέσα από κάθε αισθητήρα.

Οι αισθητήρες οπτικών ινών έχουν επίσης «ανοσία» σε ηλεκτρομαγνητικές παρεμβολές, και δεν άγουν την ηλεκτρική ενέργεια, ώστε να μπορούν να χρησιμοποιηθούν σε χώρους όπου υπάρχει ηλεκτρικό ρεύμα υψηλής τάσης ή εύφλεκτα υλικά, όπως τα καύσιμα αεριοποιημένων. Αισθητήρες οπτικών ινών μπορούν να σχεδιαστούν για να αντέχουν σε υψηλές θερμοκρασίες.

Οι οπτικές ίνες μπορούν να χρησιμοποιηθούν ως αισθητήρες για τη μέτρηση τάσης, της θερμοκρασίας, της πίεσης και άλλων ποσοτήτων τροποποιώντας μια ίνα έτσι ώστε η ποσότητα που πρέπει να μετρηθεί ρυθμίζει την ένταση, τη φάση, τη πόλωση, το μήκος κύματος ή διέλευσης χρόνου του φωτός στην ίνα. Αισθητήρες που μεταβάλλεται η ένταση του φωτός είναι οι απλούστεροι, δεδομένου ότι απαιτούνται μόνο μια απλή πηγή και ο ανιχνευτής. Ένα ιδιαίτερα χρήσιμο χαρακτηριστικό των εγγενών αισθητήρων οπτικών ινών είναι ότι μπορούν, εάν απαιτείται, να παρέχουν κατανεμημένη αίσθηση σε πολύ μεγάλες αποστάσεις. Αισθητήρες οπτικών ινών έχουν αναπτυχθεί για τη μέτρηση της θερμοκρασίας και της τάσεως ταυτόχρονα με πολύ υψηλή ακρίβεια χρησιμοποιώντας πλέγματα ινών Bragg. Αυτό είναι ιδιαίτερα χρήσιμο για την απόκτηση πληροφοριών από μικρές σύνθετες δομές.

Ένα **πλέγμα ιών Bragg (FBG)** είναι ένας τύπος κατανεμημένων ανακλαστήρων Bragg που κατασκευάζεται σε ένα μικρό τμήμα της οπτικής ίνας που αντανακλά συγκεκριμένα μήκη κύματος του φωτός και μεταδίδει όλα τα άλλα. Αυτό επιτυγχάνεται με τη δημιουργία μιας περιοδικής μεταβολής στον δείκτη διάθλασης του πυρήνα της ίνας, το οποίο παράγει ένα μήκος κύματος ειδικού διηλεκτρικού καθρέφτη. Ένα πλέγμα ιών Bragg μπορεί συνεπώς να χρησιμοποιηθεί ως ένα ενσωματωμένο οπτικό φίλτρο για να εμποδίσει ορισμένα μήκη κύματος, ή ως ένας ανακλαστήρας συγκεκριμένου μήκους κύματος.

Τα Fiber Bragg πλέγματα δημιουργούνται "εγγράφοντας" τη συστηματική (περιοδική ή απεριοδική) μεταβολή του δείκτη διάθλασης στον πυρήνα ενός ειδικού τύπου οπτικής ίνας με μία πηγή έντονης υπεριώδους ακτινοβολίας (UV), όπως ένα λέιζερ UV. Δύο είναι οι κύριες διαδικασίες που χρησιμοποιούνται : παρεμβολής και συγκάλυψης. Η μέθοδος που προτιμάται εξαρτάται από τον τύπο του πλέγματος που πρόκειται να κατασκευαστεί. Κανονικά μία ίνα πρόσμιξης γερμανίου - σιλικόνης χρησιμοποιείται στην κατασκευή των πλεγμάτων ιών Bragg. Οι ίνες ενισχυμένες από γερμάνιο είναι φωτοευαίσθητες, πράγμα που σημαίνει ότι ο δείκτης διάθλασης του πυρήνα αλλάζει με την έκθεση σε υπεριώδες φως. Το ποσό της μεταβολής εξαρτάται από την ένταση και τη διάρκεια της έκθεσης, καθώς και την φωτοευαισθησία της ίνας. Για να γράψετε ένα πλέγμα ιών Bragg με υψηλή ανακλαστικότητα άμεσα στην ίνα, το επίπεδο της πρόσμιξης με γερμάνιο πρέπει να είναι υψηλό. Ωστόσο, κατ' αποκοπή ίνες μπορούν να χρησιμοποιηθούν εάν η φωτοευαισθησία ενισχύεται με προ-εμβάπτιση της ίνας σε υδρογόνο. Πιο πρόσφατα, πλέγματα ιών Bragg έχουν επίσης εγγραφεί σε ίνες πολυμερούς.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΙΣΤΟΡΙΚΗ ΑΝΑΔΡΟΜΗ

Οι βασικές ιδέες της Μεθόδου Πεπερασμένων Στοιχείων προήλθαν από τις εξελίξεις στη δομική ανάλυση αεροσκαφών. Το 1941, ο Hrenikoff παρουσίασε μια λύση προβλημάτων ελαστικότητας με την χρήση της «μεθόδου δικτυωμάτων». Το 1943 δημοσιεύτηκε μια εργασία του Courant, όπου χρησιμοποιούσε κατά τμήματα πολυωνυμική παρεμβολή σε τριγωνικές υπο περιοχές για να μοντελοποιήσει προβλήματα στρέψης. Οι Turner και οι άλλοι, δημιούργησαν μητρώα ακαμψίας για δικτυώματα, δοκούς και άλλα στοιχεία, και παρουσίασαν τα ευρήματά τους το 1965. Ο όρος *πεπερασμένα στοιχεία* πρωτοεμφανίστηκε και χρησιμοποιήθηκε από τον Clough το 1960. Στις αρχές της δεκαετίας του 1960, οι μηχανικοί χρησιμοποίησαν τη μέθοδο για να δώσουν προσεγγιστικές λύσεις σε προβλήματα ανάλυσης τάσεων, ροής ρευστών, μεταφοράς θερμότητας και άλλων τομέων. Ο Argyris, το 1955, σε ένα βιβλίο για θεωρήματα ενέργειας και μητρικές μεθόδους, έθεσε τα θέματα για μελλοντική ανάπτυξη στις μελέτες των πεπερασμένων στοιχείων. Το πρώτο βιβλίο για πεπερασμένα στοιχεία των Zienkiewicz και Chung κυκλοφόρησε το 1967. Στα τέλη της δεκαετίας του 1970, η ανάλυση των πεπερασμένων στοιχείων εφαρμόστηκε σε μη γραμμικά προβλήματα και μεγάλες παραμορφώσεις. Το βιβλίο του Oden για τα μη γραμμικά συνεχή εμφανίστηκε το 1972. Οι μαθηματικές βάσεις τέθηκαν στην δεκαετία του 1970 και περιλαμβάνουν την ανάπτυξη νέων στοιχείων, μελέτες σύγκλισης και άλλους σχετικούς τομείς.

Σήμερα, οι εξελίξεις στους μεγάλους Η/Υ και η διαθεσιμότητα μικροϋπολογιστών έχουν φέρει την μέθοδο αυτή στη διάθεση σπουδαστών και μηχανικών που εργάζονται σε μικρές βιομηχανίες.

Το πρώτο πλέγμα ινών Bragg κατασκευάστηκε από τον Ken Hill το 1978. Αρχικά, τα πλέγματα κατασκευάζονταν χρησιμοποιώντας ένα ορατό λέιζερ που διαδίδεται κατά μήκος του πυρήνα της ίνας. Το 1989, ο Gerald Meltz και οι συνεργάτες του έδειξαν την πολύ πιο ευέλικτη εγκάρσια τεχνική ολογραφική επιγραφή όπου ο φωτισμός λέιζερ προήλθε από την πλευρά της ίνας. Η τεχνική αυτή χρησιμοποιεί το μοτίβο παρεμβολής του υπεριώδους φωτός λέιζερ για να δημιουργήσει την περιοδική δομή του πλέγματος ινών Bragg.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΘΕΜΕΛΙΩΔΕΙΣ ΕΝΝΟΙΕΣ

1.ΤΑΣΕΙΣ ΚΑΙ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑ

Ένα σώμα 3 διαστάσεων καταλαμβάνει όγκο V με επιφάνεια S , όπως φαίνεται στο σχήμα 1.1. Τα σημεία στο σώμα προσδιορίζονται με συντεταγμένες x, y, z . Το σύνορο περιορίζεται σε κάποια περιοχή όπου ορίζεται η μετατόπιση. Σε μέρος του συνόρου εφαρμόζεται μια δύναμη η οποία κατανέμεται ανά μονάδα επιφάνειας T , και η οποία καλείται εφελκυσμός. Το σώμα παραμορφώνεται κάτω από την επίδραση αυτής της δύναμης.

Η παραμόρφωση του σημείου $\mathbf{x} (= [x, y, z]^T)$ δίνεται με τις τρεις συνιστώσες της μετατόπισης: $\mathbf{u} = [u, v, w]^T$ (2.1)

Η κατανεμημένη δύναμη ανά μονάδα όγκου είναι το διάνυσμα \mathbf{f} το οποίο δίνεται από

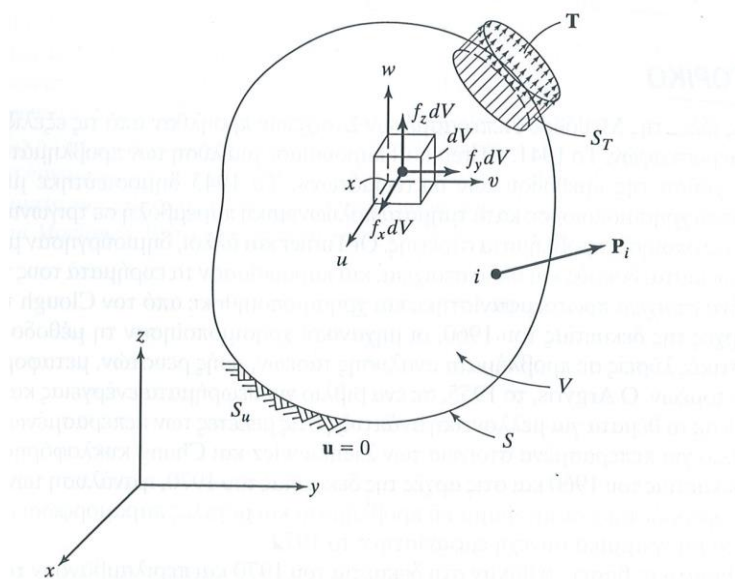
$$\mathbf{f} = [f_x, f_y, f_z]^T \quad (2.2)$$

Ο επιφανειακός εφελκυσμός \mathbf{T} μπορεί να δοθεί με τις τιμές των συνιστωσών στα σημεία της επιφάνειας:

$$\mathbf{T} = [T_x, T_y, T_z]^T \quad (2.3)$$

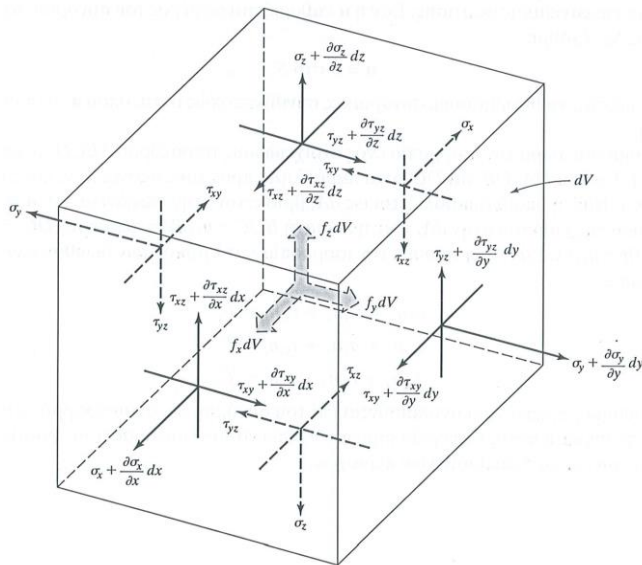
Ένα φορτίο \mathbf{P} το οποίο ενεργεί στο σημείο i παριστάνεται με τις τρεις συνιστώσες

$$\mathbf{P}_i = [P_x, P_y, P_z]^T_i \quad (2.4)$$



Σχήμα 1.1 Σώμα 3 διαστάσεων

Οι τάσεις οι οποίες ενεργούν στο στοιχειώδη όγκο dV δίνονται στο σχήμα 1.2. Όταν ο όγκος dV συρρικνώνεται σε ένα σημείο ο τανυστής τάσης παριστάνεται με την τοποθέτηση των συνιστωσών του σε ένα (3×3) συμμετρικό μητρώο.



Σχήμα 1.2 Ισορροπία στοιχειώδους όγκου

Η τάση, όμως, παριστάνεται με τις έξι ανεξάρτητες συνιστώσες, όπως

$$\sigma = [\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{yz}, \tau_{xz}, \tau_{xy}]^T \quad (2.5)$$

8

Όπου οι $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ είναι οι κάθετες τάσεις και $\tau_{yz}, \tau_{xz}, \tau_{xy}$ είναι οι διατμητικές τάσεις. Ας θεωρήσουμε την ισορροπία του στοιχειώδους όγκου, όπως υποδεικνύεται στο Σχήμα 1.2. Πρώτα, υπολογίζουμε τις δυνάμεις στις επιφάνειες, πολλαπλασιάζοντας τις τάσεις με τις αντίστοιχες επιφάνειες. Γράφοντας $\Sigma F_x = 0, \Sigma F_y = 0$ και $\Sigma F_z = 0$ και αναγνωρίζοντας $dV = d_x d_y d_z$, παίρνουμε τις εξισώσεις ισορροπίας

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + f_x = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + f_y = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + f_z = 0$$

(2.6)

2. ΣΥΝΟΡΙΑΚΕΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ

Παρατηρώντας το Σχήμα 1.1, διαπιστώνουμε ότι υπάρχουν συνοριακές συνθήκες μετατόπισης και συνθήκες επιφανειακής φόρτισης. Εάν η \mathbf{u} καθορίζεται σε μέρος του συνόρου, το οποίο συμβολίζεται ως S_u , έχουμε

$$\mathbf{u} = \mathbf{0} \text{ στο } S_u \quad (2.7)$$

Μπορούμε, επίσης, να θεωρήσουμε συνοριακές συνθήκες όπως $\mathbf{u} = \mathbf{a}$, όπου \mathbf{a} είναι μια δεδομένη μετατόπιση.

Ας θεωρήσουμε τώρα την ισορροπία ενός στοιχειώδους τετραέδρου ABCD, το οποίο δίνεται στο Σχήμα 1.3, όπου DA, DB, DC είναι παράλληλα προς τους άξονες x , y , z αντίστοιχα, και η περιοχή ABC, η οποία συμβολίζεται ως da , βρίσκεται στην επιφάνεια. Αν $\mathbf{n} = [n_x, n_y, n_z]^T$ είναι η μονάδα της καθέτου στην da , τότε η περιοχή $BDC = n_x da$ και η περιοχή $ADC = n_y da$ και η περιοχή $ADB = n_z da$. Εάν θεωρήσουμε την ισορροπία κατά μήκος των διευθύνσεων των τριών αξόνων έχουμε

$$\begin{aligned} \sigma_x n_x + \tau_{xy} n_y + \tau_{xz} n_z &= T_x \\ \tau_{xy} n_x + \sigma_y n_y + \tau_{yz} n_z &= T_y \\ \tau_{xz} n_x + \tau_{yz} n_y + \sigma_z n_z &= T_z \end{aligned} \quad (2.8)$$

Αυτές οι συνθήκες πρέπει να ικανοποιούνται επί του συνόρου S_T , όπου εφαρμόζεται ο εφελκυσμός. Στην περιγραφή αυτή, τα φορτία σημείου πρέπει να τα χειριζόμαστε ως φορτία κατανεμημένα επί μικρών, αλλά πεπερασμένων περιοχών.

3. ΣΧΕΣΕΙΣ ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΗΣ – ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΗΣ

Αναπαριστούμε τις παραμορφώσεις ως ένα διάνυσμα, το οποίο αντιστοιχεί στις τάσεις της εξίσωσης 2.5,

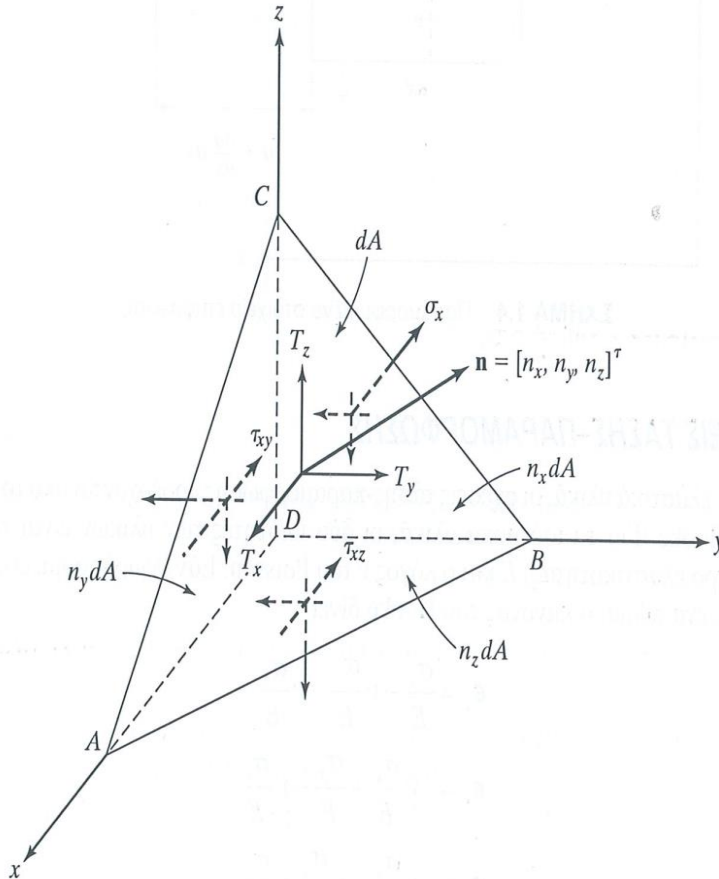
$$\boldsymbol{\epsilon} = [\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z, \gamma_{yz}, \gamma_{xz}, \gamma_{xy}]^T \quad (2.9)$$

Όπου $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$ είναι οι κάθετες παραμορφώσεις και $\gamma_{yz}, \gamma_{xz}, \gamma_{xy}$, οι διατμητικές παραμορφώσεις.

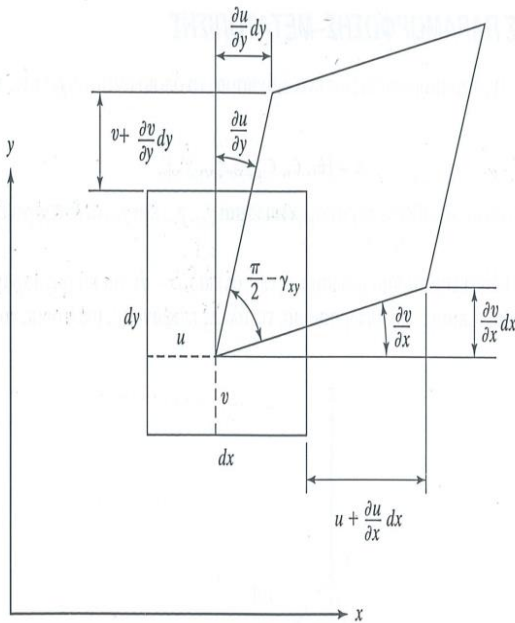
Το σχήμα 1.4 δίνει την παραμόρφωση της επιφάνειας $dx-dy$ για μικρές παραμορφώσεις, τις οποίες εξετάζουμε. Επίσης, εάν θεωρήσουμε τις άλλες επιφάνειες, μπορούμε να γράψουμε

$$\epsilon = \left[\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial w}{\partial z}, \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right]^T \quad (2.10)$$

Αυτές οι σχέσεις παραμόρφωσης ισχύουν για μικρές παραμορφώσεις.



Σχήμα 1.3 Ένας στοιχειώδης όγκος στην επιφάνεια



Σχήμα 1.4 Παραμορφωμένο στοιχείο επιφάνειας

4. ΣΧΕΣΕΙΣ ΤΑΣΗΣ – ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΗΣ

Στα γραμμικά ελαστικά υλικά, οι σχέσεις τάσης παραμόρφωσης προέρχονται από το γενικευμένο κανόνα του Hooke. Για τα ισότροπα υλικά, οι δυο ιδιότητες των υλικών είναι το μέτρο ελαστικότητας E και ο λόγος ν του Poisson. Εάν θεωρήσουμε ένα στοιχειώδη κύβο μέσα σε ένα σώμα, ο κανόνας του Hooke δίνει

$$\epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \nu \frac{\sigma_y}{E} - \nu \frac{\sigma_z}{E}$$

$$\epsilon_y = -\nu \frac{\sigma_x}{E} + \frac{\sigma_y}{E} - \nu \frac{\sigma_z}{E}$$

$$\epsilon_z = -\nu \frac{\sigma_x}{E} - \nu \frac{\sigma_y}{E} + \frac{\sigma_z}{E}$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}$$

(2.11)

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (2.12)$$

Το μέτρο διάτμησης, G , δίνεται από

Από τις σχέσεις (2.11) του κανόνα του Hooke, βλέπουμε ότι

$$\epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z = \frac{(1-2\nu)}{E}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \quad (2.13)$$

Αντικαθιστώντας για $(\sigma_y + \sigma_z)$ κ.λπ. στις εξισώσεις (2.11), έχουμε τις αντίστροφες σχέσεις

$$\sigma = D\epsilon \quad (2.14)$$

D είναι το συμμετρικό μητρώο (6×6) το οποίο δίνεται από τον τύπο

$$D = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5-\nu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5-\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5-\nu \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

5. ΕΠΙΔΡΑΣΕΙΣ ΘΕΡΜΟΚΡΑΣΙΑΣ

Εάν η αύξηση της θερμοκρασίας ΔT (x, y, z) σε σχέση με την αρχική κατάσταση είναι γνωστή, τότε η συνδεδεμένη παραμόρφωση μπορεί να μελετηθεί εύκολα. Για ισότροπα υλικά, η αύξηση της θερμοκρασίας ΔT προκαλεί ομοιόμορφη παραμόρφωση, η οποία εξαρτάται από τον συντελεστή γραμμικής διαστολής α του υλικού. Το α , το οποίο αντιπροσωπεύει τη μεταβολή του μήκους ανά μονάδα αύξησης της θερμοκρασίας, θεωρείται ότι είναι σταθερό εντός του εύρους μεταβολής θερμοκρασίας. Επίσης, αυτή η παραμόρφωση δεν προκαλεί τάσεις όταν το σχήμα είναι ελεύθερο να παραμορφωθεί. Η θερμοκρασιακή παραμόρφωση παριστάνεται ως αρχική παραμόρφωση :

$$\epsilon_0 = [\alpha\Delta T, \alpha\Delta T, \alpha\Delta T, 0, 0, 0]^T \quad (2.20)$$

Οι σχέσεις τάσης – παραμόρφωσης τότε γίνονται

$$\sigma = D(\epsilon - \epsilon_0) \quad (2.21)$$

Στην **επίπεδη τάση** έχουμε

$$\epsilon_0 = [\alpha \Delta T, \alpha \Delta T, 0]^T \quad (2.22)$$

Στην **επίπεδη παραμόρφωση**, ο περιορισμός $\epsilon_z = 0$ έχει ως αποτέλεσμα ένα διαφορετικό ϵ_0

$$\epsilon_0 = (1 + \nu)[\alpha \Delta T, \alpha \Delta T, 0]^T \quad (2.23)$$

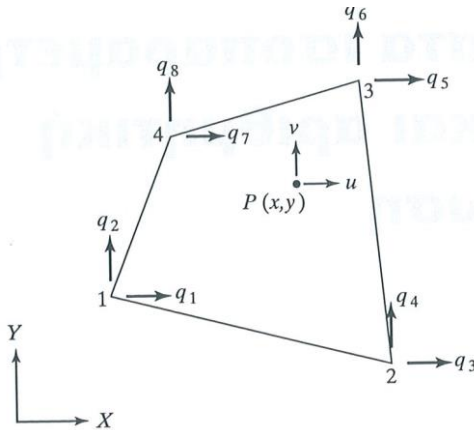
Στην **επίπεδη τάση** και **επίπεδη παραμόρφωση**, σημειώνεται ότι $\sigma = [\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}]^T$ και $\epsilon = [\epsilon_x, \epsilon_y, \gamma_{xy}]^T$ και ότι τα μητρώα **D** δίνονται από τις εξισώσεις 2.18 και 2.19 αντίστοιχα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

ΔΙΣΔΙΑΣΤΑΤΑ ΙΣΟΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ

ΤΟ ΤΕΤΡΑΠΛΕΥΡΟ ΤΕΣΣΑΡΩΝ ΚΟΜΒΩΝ

Θεωρήστε γενικό τετράπλευρο στοιχείο του σχήματος 1.5. Αριθμούμε *αριστερόστροφα* τους τοπικούς κόμβους 1, 2, 3 και 4 όπως φαίνεται στο σχήμα, ενώ (x_i, y_i) είναι οι συντεταγμένες του κόμβου i . το διάνυσμα $\mathbf{q} = [q_1, q_2, \dots, q_8]^T$ συμβολίζει το διάνυσμα μετατόπισης στοιχείου. Η μετατόπιση ενός εσωτερικού σημείου P με συντεταγμένες (x, y) αναπαρίσταται ως $\mathbf{u} = [u(x, y), v(x, y)]^T$.



Σχήμα 1.5 Τετράπλευρο στοιχείο τεσσάρων κόμβων

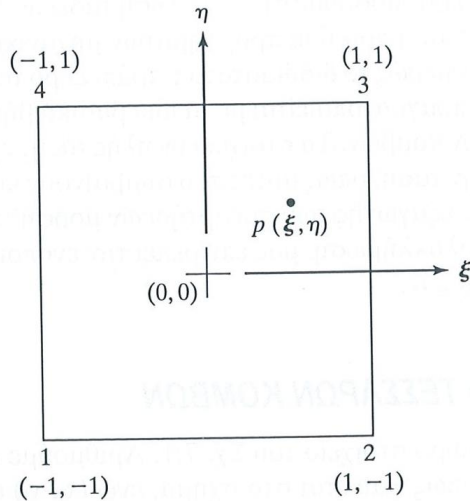
14

ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΜΟΡΦΗΣ

Αρχικά αναπτύσσουμε τις συναρτήσεις μορφής σε ένα πρωτότυπο στοιχείο όπως στο σχήμα 1.6. Το πρωτότυπο στοιχείο έχει τετράγωνο σχήμα και το ορίζουμε σε συντεταγμένες ξ, η (ή φυσικές συντεταγμένες). Ορίζουμε τις συναρτήσεις μορφής Lagrange όπου $i = 1, 2, 3$, και 4, έτσι ώστε το N_i να ισούται με την μονάδα στον κόμβο i και με μηδέν στους υπόλοιπους κόμβους. Συγκεκριμένα, ας θεωρήσουμε τον ορισμό του N_i :

$$\begin{aligned} N_1 &= 1 \text{ στον κόμβο } 1 \\ &= 0 \text{ στους κόμβους } 2, 3 \text{ και } 4 \end{aligned}$$

(3.1)



Σχήμα 1.6 Το τετράπλευρο στοιχείο στον χώρο ξ, η (πρότυπο στοιχείο)

Τώρα, η απαίτηση ότι $N_1 = 0$ στους κόμβους 2, 3 και 4, ισοδυναμεί με την απαίτηση ότι $N_1 = 0$ στα άκρα και $\xi = +1$ και $\eta = +1$ (σχήμα 1.6). Επομένως, το N_1 πρέπει να είναι της μορφής

$$N_1 = c(1 - \xi)(1 - \eta) \quad (3.2) \text{ όπου το } c \text{ είναι κάποια σταθερά. Προσδιορίζουμε τη}$$

σταθερά από τη συνθήκη $N_1 = 1$ στον κόμβο 1. Εφόσον $\xi = -1$ και $\eta = -1$ στον κόμβο 1 έχουμε

$$1 = c(2)(2) \quad (3.3) \text{ που δίνει } c = 1/4. \text{ Επομένως, } N_1 = 1/4(1 - \xi)(1 - \eta) \quad (3.4)$$

Μπορούμε να γράψουμε τις 4 συναρτήσεις μορφής ως

$$\begin{aligned} N_1 &= 1/4(1 - \xi)(1 - \eta) \\ N_2 &= 1/4(1 + \xi)(1 - \eta) \\ N_3 &= 1/4(1 + \xi)(1 + \eta) \\ N_4 &= 1/4(1 - \xi)(1 + \eta) \end{aligned} \quad (3.5)$$

Η συμπυκνωμένη μορφή των εξισώσεων 3.5 που ακολουθεί είναι χρήσιμη στην περίπτωση εφαρμογής σε πρόγραμμα ηλεκτρονικού υπολογιστή.

$$N_i = 1/4(1 + \xi\xi_i)(1 + \eta\eta_i) \quad (3.6)$$

Όπου (ξ_i, η_i) είναι οι συντεταγμένες του κόμβου i .

Εκφράζουμε το πεδίο μετατόπισης μέσα στο στοιχείο συναρτήσει των κομβικών τιμών.

Επομένως, αν το $\dot{\mathbf{u}} = [u, v]^T$ αναπαριστά τις συνιστώσες μετατόπισης ενός σημείου με συντεταγμένες (ξ, η) και το \mathbf{q} , διαστάσεων (8×1) , είναι το διάνυσμα μετατόπισης στοιχείου, τότε

$$\begin{aligned} u &= N_1 q_1 + N_2 q_3 + N_3 q_5 + N_4 q_7 \\ v &= N_1 q_2 + N_2 q_4 + N_3 q_6 + N_4 q_8 \end{aligned} \quad (3.7 \alpha)$$

Που μπορεί να γραφεί σε μορφή μητρώου ως

$$\mathbf{u} = \mathbf{N} \mathbf{q} \quad (3.7 \beta)$$

όπου

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

Σε ισοπαραμετρική μορφοποίηση, χρησιμοποιούμε τις ίδιες συναρτήσεις μορφής N_i για να εκφράσουμε τις συντεταγμένες ενός σημείου μέσα στο στοιχείο ως προς τις κομβικές συντεταγμένες. Άρα,

$$\begin{aligned} x &= N_1 x_1 + N_2 x_2 + N_3 x_3 + N_4 x_4 \\ y &= N_1 y_1 + N_2 y_2 + N_3 y_3 + N_4 y_4 \end{aligned} \quad (3.9)$$

Επομένως, πρέπει να εκφράσουμε τις παραγώγους μιας συνάρτησης σε συντεταγμένες x, y ως προς τις παραγώγους της σε συντεταγμένες ξ, η . Αυτό γίνεται ως εξής : Από τις εξισώσεις

3.9, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι μια συνάρτηση $f = f(x, y)$ είναι πλεγμένη συνάρτηση του ξ και του η . Δηλαδή, $f = f[x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)]$. Χρησιμοποιώντας τον κανόνα παραγώγιση σύνθετων συναρτήσεων,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \xi} &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial f}{\partial \eta} &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{aligned} \quad (3.10)$$

Ή

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial f}{\partial \xi} \\ \frac{\partial f}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \mathbf{J} \begin{Bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (3.11)$$

Όπου \mathbf{J} είναι το Ιακωβιανό μητρώο.

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

Από τις εξισώσεις 3.5 και 3.9 έχουμε

$$\mathbf{J} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -(1-\eta)x_1 + (1-\eta)x_2 + (1+\eta)x_3 - (1+\eta)x_4 & -(1-\eta)y_1 + (1-\eta)y_2 + (1+\eta)y_3 - (1+\eta)y_4 \\ -(1-\xi)x_1 - (1+\xi)x_2 + (1+\xi)x_3 + (1-\xi)x_4 & -(1-\xi)y_1 - (1+\xi)y_2 + (1+\xi)y_3 + (1-\xi)y_4 \end{bmatrix} \quad (3.13 \alpha)$$

$$\equiv \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{bmatrix} \quad (3.13 \beta)$$

Αντιστρέφουμε την εξίσωση 3.11

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{Bmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial f}{\partial \xi} \\ \frac{\partial f}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \quad (3.14 \alpha)$$

Ή

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{Bmatrix} = \frac{1}{\det \mathbf{J}} \begin{bmatrix} J_{22} & -J_{12} \\ -J_{21} & J_{11} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial f}{\partial \xi} \\ \frac{\partial f}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \quad (3.14 \beta)$$

Θα χρησιμοποιήσουμε αυτές τις εκφράσεις στη δημιουργία του μητρώου ακαμψίας στοιχείου. Ένα πρόσθετο αποτέλεσμα που θα χρειαστούμε είναι η σχέση

$$dx dy = \det \mathbf{J} d\xi d\eta \quad (3.15)$$

ΜΗΤΡΩΟ ΑΚΑΜΨΙΑΣ ΣΤΟΙΧΕΙΟΥ

Το μητρώο ακαμψίας για το τετράπλευρο στοιχείο προκύπτει από την ενέργεια

$$U = \int_V \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\epsilon} dV \quad (3.16) \text{ ή}$$

$$U = \sum_e t_e \int_e \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\epsilon} dA \quad (3.17) \text{ όπου } t_e \text{ είναι το πάχος του στοιχείου } e.$$

Οι σχέσεις παραμόρφωσης – μετατόπισης είναι

$$\boldsymbol{\epsilon} = \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad (3.18)$$

Θεωρώντας ότι $f = u$ στην εξίσωση 3.14 β, έχουμε

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \end{Bmatrix} = \frac{1}{\det \mathbf{J}} \begin{bmatrix} J_{22} & -J_{12} \\ -J_{21} & J_{11} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \quad (3.19 \alpha)$$

Παρόμοια,

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \end{Bmatrix} = \frac{1}{\det \mathbf{J}} \begin{bmatrix} J_{22} & -J_{12} \\ -J_{21} & J_{11} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial v}{\partial \xi} \\ \frac{\partial v}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \quad (3.19 \beta)$$

Οι εξισώσεις 3.18 και 3.19 α, β δίνουν

$$\boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{A} \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} \\ \frac{\partial v}{\partial \xi} \\ \frac{\partial v}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \quad (3.20)$$

Όπου το \mathbf{A} δίνεται από την

$$\mathbf{A} = \frac{1}{\det \mathbf{J}} \begin{bmatrix} J_{22} & -J_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -J_{21} & J_{11} \\ -J_{21} & J_{11} & J_{22} & -J_{12} \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

Τώρα, από τις εξισώσεις παρεμβολής 7.7 α, έχουμε

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} \\ \frac{\partial v}{\partial \xi} \\ \frac{\partial v}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \mathbf{G}\mathbf{q} \quad (3.22)$$

Όπου

$$\mathbf{G} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -(1-\eta) & 0 & (1-\eta) & 0 & (1+\eta) & 0 & -(1+\eta) & 0 \\ -(1-\xi) & 0 & -(1+\xi) & 0 & (1+\xi) & 0 & (1-\xi) & 0 \\ 0 & -(1-\eta) & 0 & (1-\eta) & 0 & (1+\eta) & 0 & -(1+\eta) \\ 0 & -(1-\xi) & 0 & -(1+\xi) & 0 & (1+\xi) & 0 & (1-\xi) \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

Οι εξισώσεις 3.20 και 3.22 τώρα δίνουν

$$\boxed{\boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{B}\mathbf{q}} \quad (3.24)$$

19

$$\text{Όπου } \mathbf{B} = \mathbf{A}\mathbf{G} \quad (3.25)$$

Η σχέση $\boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{B}\mathbf{q}$ είναι το επιθυμητό αποτέλεσμα. Η παραμόρφωση στο στοιχείο εκφράζεται

ως προς την κομβική μετατόπιση. Η τάση δίνεται τώρα από την $\boxed{\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\mathbf{B}\mathbf{q}} \quad (3.26)$ όπου \mathbf{D} είναι ένα (3×3) μητρώο υλικού. Η ενέργεια παραμόρφωσης στην εξίσωση 3.17 γίνεται

$$U = \sum_e \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \left[t_e \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \det \mathbf{J} d\xi d\eta \right] \mathbf{q} \quad (3.27 \alpha)$$

$$= \sum_e \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{k}^e \mathbf{q} \quad (3.27 \beta)$$

Όπου

$$\boxed{\mathbf{k}^e = t_e \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \det \mathbf{J} d\xi d\eta} \quad (3.28)$$

είναι το μητρώο ακαμψίας στοιχείου (8×8) .

ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ ΔΥΝΑΜΗΣ ΣΤΟΙΧΕΙΟΥ

Δύναμη σώματος Η δύναμη σώματος, η οποία είναι κατανεμημένη δύναμη ανά μονάδα όγκου, συμβάλει στο διάνυσμα ολικού φορτίου F . Μπορούμε να προσδιορίσουμε αυτή τη συμβολή αν εξετάσουμε τον όρο δύναμης σώματος στην έκφραση δυναμικής ενέργειας

$$\int_V \mathbf{u}^T \mathbf{f} dV \quad (3.29).$$

Χρησιμοποιώντας το $\mathbf{u} = \mathbf{N}\mathbf{q}$, και χειριζόμενοι τη δύναμη σώματος $\mathbf{f} = [f_x, f_y]^T$ ως σταθερά στο εσωτερικό κάθε στοιχείου, παίρνουμε

$$\int_V \mathbf{u}^T \mathbf{f} dV = \sum_e \mathbf{q}^T \mathbf{f}^e \quad (3.30) \text{ όπου το } (8 \times 1) \text{ διάνυσμα δύναμης στοιχείου δίνεται από την}$$

$$\mathbf{f}^e = t_e \left[\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{N}^T \det \mathbf{J} d\xi d\eta \right] \begin{Bmatrix} f_x \\ f_y \end{Bmatrix} \quad (3.31)$$

Και σε αυτή την περίπτωση, όπως και στο μητρώο ακαμψίας, πρέπει να υπολογίσουμε το διάνυσμα δύναμης σώματος με αριθμητική ολοκλήρωση.

20

Δύναμη εφελκυσμού Ας υποθέσουμε ότι στην πλευρά 2-3 του τετράπλευρου στοιχείου εφαρμόζεται μια σταθερή δύναμη εφελκυσμού $\mathbf{T} = [T_x, T_y]^T$ (δύναμη ανά μονάδα εμβαδού). Κατά μήκος της πλευράς, έχουμε $\xi = 1$. Αν χρησιμοποιήσουμε τις συναρτήσεις μορφής που δίνονται στην εξίσωση 3.5, γίνεται $N_1 = N_4 = 0, N_2 = (1 - \eta)/2$ και $N_3 = (1 + \eta)/2$. Σημειώστε ότι οι συναρτήσεις μορφής είναι γραμμικές συναρτήσεις κατά μήκος των πλευρών. Επομένως, από το δυναμικό, το διάνυσμα φορτίου εφελκυσμού στοιχείου δίνεται άμεσα από την

$$\mathbf{T}^e = \frac{t_e \ell_{2-3}}{2} [0 \quad 0 \quad T_x \quad T_y \quad T_x \quad T_y \quad 0 \quad 0]^T \quad (3.32) \text{ όπου το } \ell_{2-3} = \text{μήκος της}$$

πλευράς 2-3. Για μεταβαλλόμενα κατανεμημένα φορτία, μπορούμε να εκφράσουμε τα T_x και T_y ως προς τους κόμβους 2 και 3 χρησιμοποιώντας συναρτήσεις μορφής. Σε αυτή την περίπτωση μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε αριθμητική ολοκλήρωση. Τέλος, εξετάζουμε τα φορτία σημείου με τον συνηθισμένο τρόπο, λαμβάνοντας ένα δομικό κόμβο σε κάθε τέτοιο σημείο και, απλώς, προσθέτοντας το διάνυσμα ολικού φορτίου F .

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

ΜΕΘΟΔΟΣ ΕΠΙΛΥΣΗΣ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ

Σε αυτό το κεφάλαιο γίνεται περιγραφή της μεθόδου επίλυσης του προβλήματος το οποίο πραγματεύεται η παρούσα διπλωματική εργασία. Η λύση του προβλήματος επιχειρείται μέσω της χρήσης πεπερασμένων στοιχείων στην προσπάθεια να βρεθεί μια σχέση της εκάστοτε φόρτισης με την παραμόρφωση του σχήματος και τις μετρήσεις των οπτικών αισθητήρων.

Αρχικά γίνεται η κατασκευή της γέφυρας σε περιβάλλον Matlab. Η γέφυρα αποτελείται από τρία κομμάτια, τα δύο κεκλιμένα και το άλλο οριζόντιο, τα οποία ενώνονται μεταξύ τους ώστε να επιτευχθεί η μορφή της. Ξεκινώντας, ορίζουμε το ολικό μήκος της γέφυρας το οποίο είναι $l_x = 200$ m και το ολικό ύψος το οποίο μπορεί να φτάσει το σχήμα $l_y = 100$ m (η γέφυρα θα φτάσει τελικά μέχρι τα 20 m αλλά αυτό είναι το μέγιστο όριο του σχήματος). Στη συνέχεια θα ορίσουμε την διακριτοποίηση που θα χρησιμοποιήσουμε και η οποία στην μελέτη αυτή είναι $i_x = 9$, $i_y = 27$, δηλαδή το σχήμα της γέφυρας θα χωριστεί σε 9 οριζόντια και 27 κάθετα κομμάτια από το οποίο προκύπτουν 280 κόμβοι και 243 πεπερασμένα στοιχεία. Αυτό που γίνεται μετά είναι ο ορισμός των χ και ψ συντεταγμένων κάθε κόμβου τα οποία κατασκευάζονται και αποθηκεύονται στους πίνακες $xnode$, $ynode$. Στη συνέχεια μέσω του πίνακα $cnct$ ο κάθε κόμβος ενώνεται με τον διπλανό του, τον πάνω του και τον διπλανό του πάνω του ώστε να δημιουργηθούν τα πεπερασμένα στοιχεία τα οποία ενωμένα μεταξύ τους σχηματίζουν το σχήμα της γέφυρας.

21

Στη συνέχεια ορίζουμε το μέτρο ελαστικότητας του υλικού που είναι φτιαγμένη η γέφυρα και το οποίο εδώ είναι οπλισμένο σκυρόδεμα C 40/50 με μέτρο ελαστικότητας $E = 35$ GPa, το πάχος της κάθε πλάκας $t = 1$ m και το κλάσμα Poisson $\nu = 0.1$. Έπειτα, ορίζουμε τις πλευρές της γέφυρας, πάνω πλευρά, κάτω πλευρά δεξιά πλευρά, αριστερή πλευρά, και τις αποθηκεύουμε στους πίνακες $indexside$, $indexbside$, $indexrside$ και $indexlside$ αντίστοιχα. Ορίζουμε την δεξιά και την αριστερή πλευρά ως σταθερές, δηλαδή εκεί θα στηρίζεται η γέφυρα, και θα φορτίζουμε με δυνάμεις την πάνω πλευρά. Μετά δημιουργούμε τους πίνακες K_{total} που είναι το μητρώο δυσκαμψίας του σχήματος, F_{total} στον οποίο αποθηκεύονται τα μέτρα των φορτίσεων και οι κόμβοι πάνω στους οποίους ασκούνται και U_{total} τα στοιχεία του οποίου εκφράζουν την μετατόπιση του κάθε κόμβου. Χρησιμοποιώντας τη σχέση $U_{total} = K_{total} / F_{total}$ υπολογίζω τη μετατόπιση αυτή.

Αυτό που μένει είναι να εισαχθούν στο σχήμα οι δύο οπτικοί αισθητήρες (Bragg sensors). Μέσω του script `func.m` δημιουργούμε τις global variables a , $a1$, $a2$, b , $b1$, $b2$. Στις a , b αποθηκεύονται οι κόμβοι από τους οποίους περνάνε με την σειρά οι δύο αισθητήρες αντίστοιχα. Τα $a1$, $b1$ δίνουν τις αποστάσεις μεταξύ των κόμβων που περνούν οι αισθητήρες και, τέλος, τα $a2$, $b2$ δίνουν την μετατόπιση του κάθε κόμβου απ τον οποίο περνούν οι αισθητήρες, δηλαδή μας δείχνουν την παραμόρφωση του κάθε κόμβου με ακρίβεια.

Ακολουθούν παραδείγματα δοκιμών διαφόρων φορτίσεων ώστε να μελετηθούν τα αποτελέσματα των οπτικών αισθητήρων.

ΔΟΚΙΜΕΣ

(1) Μέτρο ελαστικότητας 35 Gra, φόρτιση στον άξονα $\chi = 200.000 \text{ N}$ και στον άξονα $\psi = (-) 1.000.000 \text{ N}$, σε όλους τους κόμβους της πάνω πλευράς.

Οι οπτικοί αισθητήρες περνούν από τους κόμβους :

a : [1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28]

b : [20 48 76 104 132 160 188 216 244 272]

Οι αποστάσεις μεταξύ των κόμβων είναι :

a1:

5, 55666655557777	5, 55666655557777	5, 55666655557777	5, 55666655557777
5, 55666655557777	5, 55666655557777	5, 55666655557777	5, 55666655557777
5, 55666655557777	11, 11111111111111	11, 11111111111111	11, 11111111111111
11, 11111111111111	11, 11111111111111	11, 11111111111111	11, 11111111111111
11, 11111111111111	11, 11111111111111	5, 55666655557776	5, 55666655557779
5, 55666655557776	5, 55666655557779	5, 55666655557776	5, 55666655557776
5, 55666655557779	5, 55666655557779	5, 55666655557776	0

b1:

1, 11111111111111	1, 11111111111111	1, 11111111111111	1, 11111111111111
1, 11111111111111	1, 11111111111111	1, 11111111111112	1, 11111111111111
1, 11111111111111	0		

22

Η φόρτιση που ασκείται είναι :

Κόμβοι	Φόρτιση στον άξονα χ	Φόρτιση στον άξονα ψ
253	200000	-1000000
254	200000	-1000000
255	200000	-1000000
256	200000	-1000000
257	200000	-1000000
258	200000	-1000000
259	200000	-1000000
260	200000	-1000000
261	200000	-1000000
262	200000	-1000000
263	200000	-1000000
264	200000	-1000000
265	200000	-1000000
266	200000	-1000000
267	200000	-1000000
268	200000	-1000000
269	200000	-1000000
270	200000	-1000000

271	200000	-1000000
272	200000	-1000000
273	200000	-1000000
274	200000	-1000000
275	200000	-1000000
276	200000	-1000000
277	200000	-1000000
278	200000	-1000000
279	200000	-1000000
280	200000	-1000000

Οι μετατοπίσεις των κόμβων είναι :

a2:

-0,000353144269972469	-0,000264913070765385	-0,000210870722895202	-0,000162175841389456
-0,000122086584615244	-9,07875975085651e-05	-6,83651639342650e-05	-5,48283732005391e-05
-5,12051184011170e-05	-3,18455190082811e-05	9,34504024103603e-06	3,75927784081409e-05
5,37452076604121e-05	5,76820568471844e-05	4,94318058302528e-05	2,89346936090016e-05
-3,57983492750113e-06	-4,89379605143662e-05	-7,63708511977921e-05	-7,69753291916573e-05
-8,83501123860978e-05	-0,000107502914289760	-0,000134870813862081	-0,000170368756962692
-0,000213879189299340	-0,000261956747259602	-0,000341561855846073	0

23

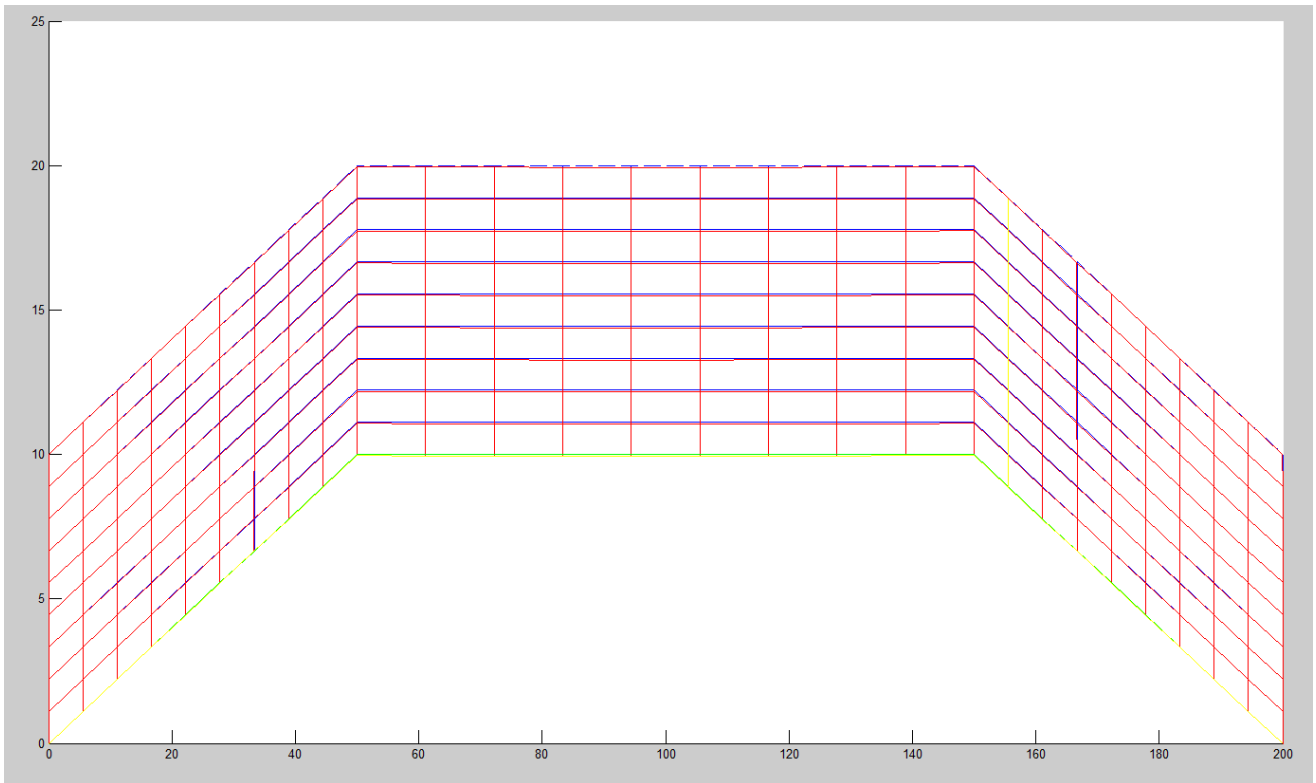
b2:

7,56706581995012e06	6,83612573895010e06	6,23654174604702e06	5,71742213574528e06
5,23247138461616e06	4,74109571228781e06	4,20435748437956e06	3,58317029215677e06
2,82819011237010e06	0		

Στις παρακάτω εικόνες φαίνεται η παραμόρφωση της γέφυρας και των οπτικών ινών.

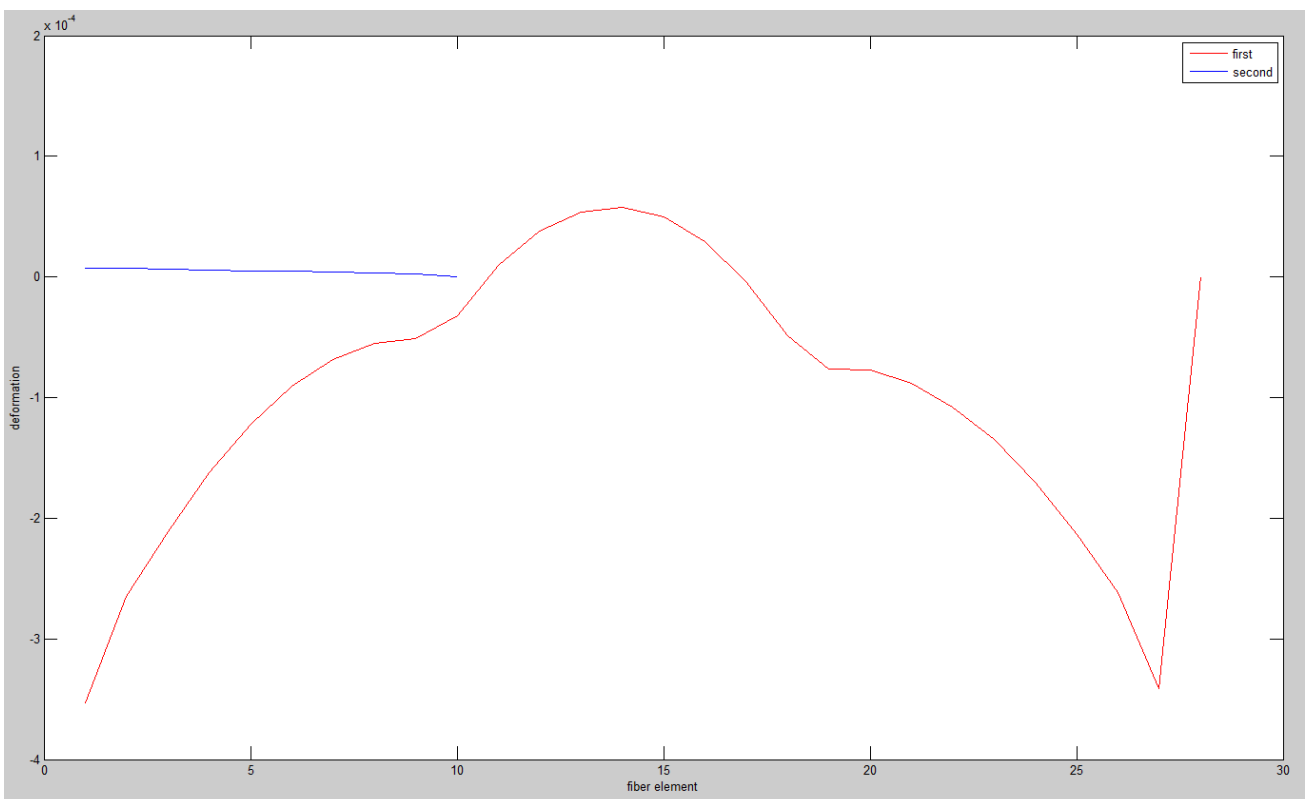
Με μπλε χρώμα σχεδιάζεται η γέφυρα, με κόκκινο η παραμόρφωσή της, με πράσινο οι οπτικές ίνες και με κίτρινο η παραμόρφωσή τους.

Η παραμόρφωση της γέφυρας είναι :



Η παραμόρφωση των οπτικών ινών είναι :

24



(2) Μέτρο ελαστικότητας 35 Gra, μεγαλύτερη φόρτιση στον άξονα $\chi = 2.000.000$ N και στον άξονα $\psi = (-) 10.000.000$ N, σε όλους τους κόμβους της πάνω πλευράς.

Οι οπτικοί αισθητήρες περνούν από τους κόμβους :

a : [1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28]

b : [20 48 76 104 132 160 188 216 244 272]

Οι αποστάσεις μεταξύ των κόμβων είναι :

a1:

5, 55666655557777	5, 55666655557777	5, 55666655557777	5, 55666655557777
5, 55666655557777	5, 55666655557777	5, 55666655557777	5, 55666655557777
5, 55666655557777	11, 11111111111111	11, 11111111111111	11, 11111111111111
11, 11111111111111	11, 11111111111111	11, 11111111111111	11, 11111111111111
11, 11111111111111	11, 11111111111111	5, 55666655557776	5, 55666655557779
5, 55666655557776	5, 55666655557779	5, 55666655557776	5, 55666655557776
5, 55666655557779	5, 55666655557779	5, 55666655557776	0

b1:

1, 11111111111111	1, 11111111111111	1, 11111111111111	1, 11111111111111
1, 11111111111111	1, 11111111111111	1, 11111111111112	1, 11111111111111
1, 11111111111111	0		

25

Η φόρτιση που ασκείται είναι :

Κόμβοι	Φόρτιση στον άξονα χ	Φόρτιση στον άξονα ψ
253	2000000	-10000000
254	2000000	-10000000
255	2000000	-10000000
256	2000000	-10000000
257	2000000	-10000000
258	2000000	-10000000
259	2000000	-10000000
260	2000000	-10000000
261	2000000	-10000000
262	2000000	-10000000
263	2000000	-10000000
264	2000000	-10000000
265	2000000	-10000000
266	2000000	-10000000
267	2000000	-10000000
268	2000000	-10000000
269	2000000	-10000000
270	2000000	-10000000
271	2000000	-10000000
272	2000000	-10000000
273	2000000	-10000000

274	2000000	-10000000
275	2000000	-10000000
276	2000000	-10000000
277	2000000	-10000000
278	2000000	-10000000
279	2000000	-10000000
280	2000000	-10000000

Οι μετατοπίσεις των κόμβων είναι :

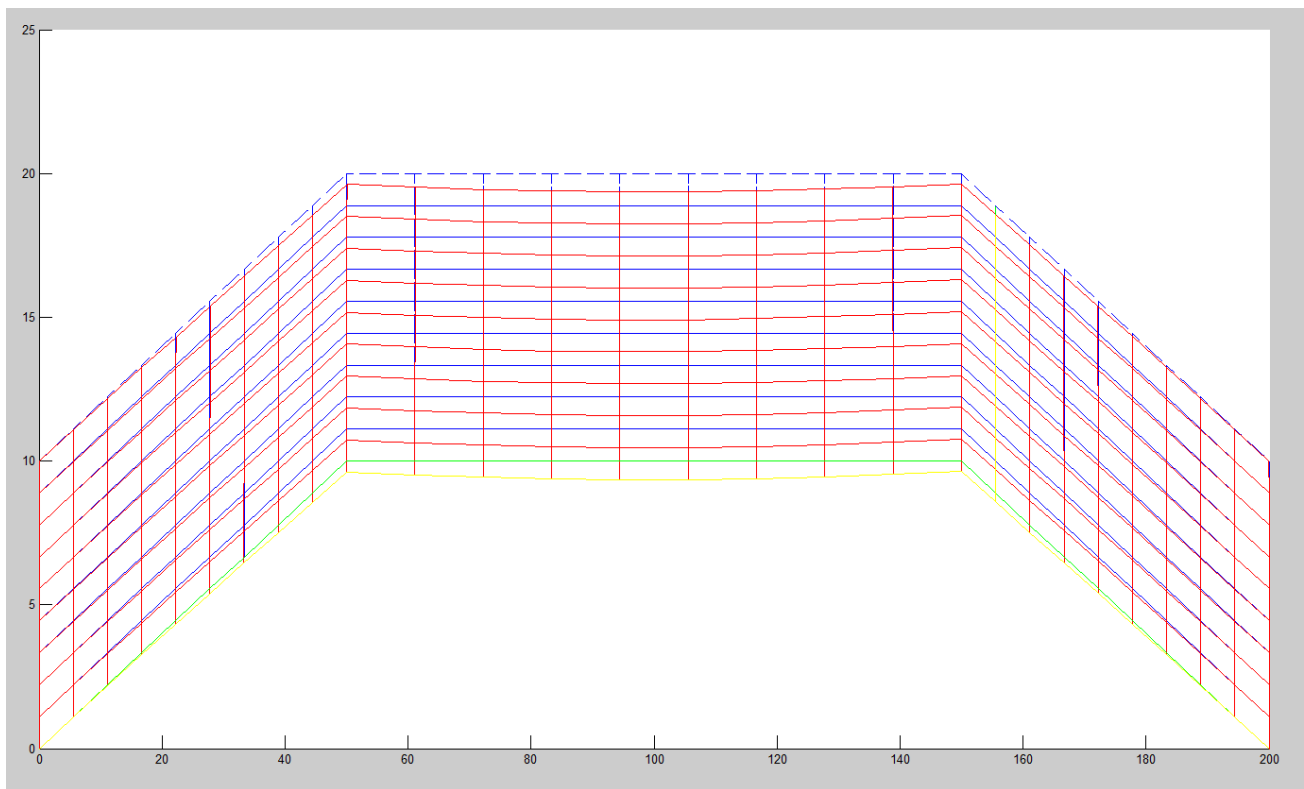
a2:

-0, 00353144269972468	-0, 00264913070765385	-0, 00210870722895202	-0, 00162175841389457
-0, 00122086584615243	-0, 000907875975085692	-0, 000683651639342696	-0, 000548283732
-0, 000512051184011165	-0, 000318455190082808	9, 34504024104029e-05	0,000375927784081356
0, 000537452076604077	0,00576820568471918	0,0004943180583025410,	000289346936089972
-3, 57983492749953e-05	-0, 000489379605143636	-0, 000763708511977950	-0,000769753291916566
-0, 000883501123860977	-0, 00107502914289762	-0, 00134870813862081	-0, 00170368756962692
-0, 00213879189299341	-0, 00261956747259602	-0, 00341561855846072	0

b2:

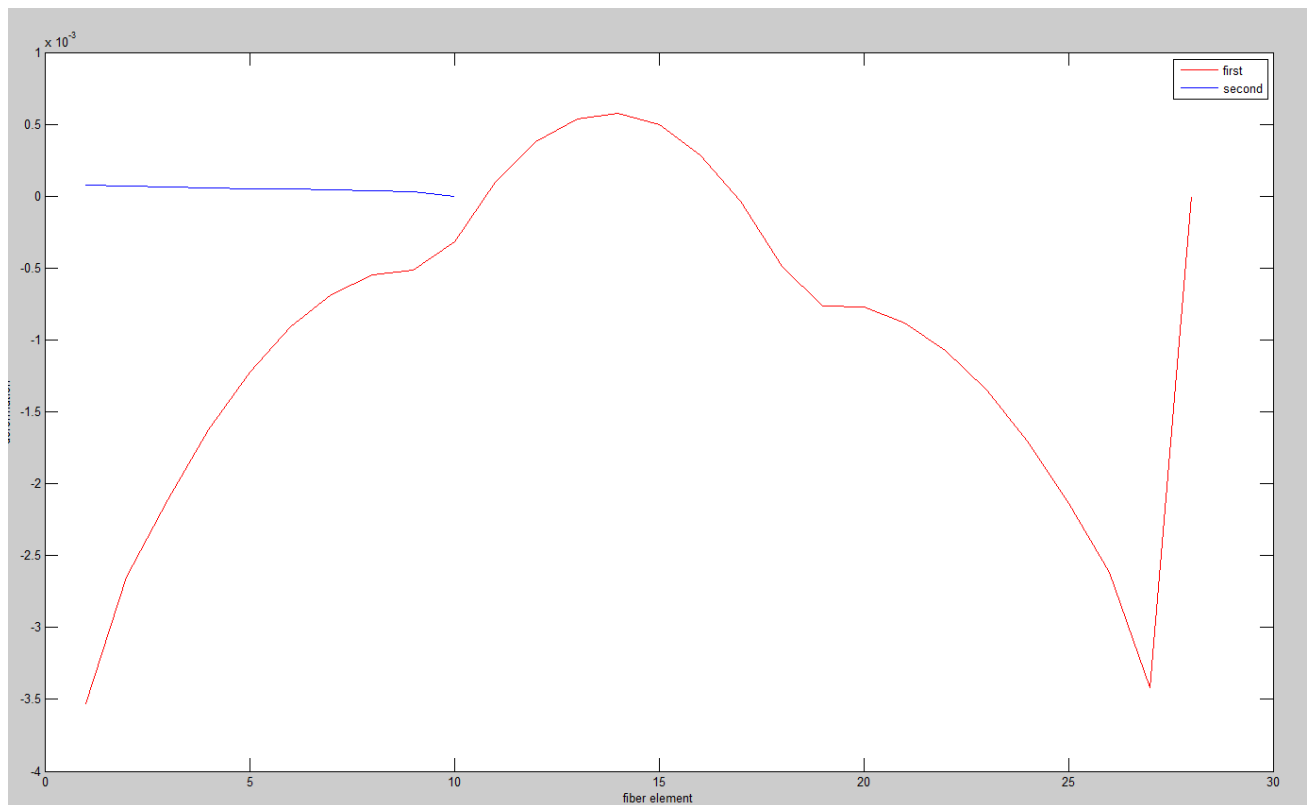
7, 56706581994665e-05	6, 83612573891818e-05	6, 23654174607963e-05	5, 71742213574805e-05
5,23247138460298e-05	4, 74109571232390e-05	4, 20435748438303e-05	3, 58317029215399e-05
2,82819011235830e-05	0		

Η παραμόρφωση της γέφυρας είναι :



Η παραμόρφωση των οπτικών ινών είναι :

27



(3) Μέτρο ελαστικότητας 35 Gra, πολύ μεγάλη φόρτιση στον άξονα $\chi = 20.000.000$ N και στον άξονα $\psi = (-) 100.000.000$ N, σε όλους τους κόμβους της πάνω πλευράς.

Οι οπτικοί αισθητήρες περνούν από τους κόμβους :

a : [1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28]

b : [20 48 76 104 132 160 188 216 244 272]

Οι αποστάσεις μεταξύ των κόμβων είναι :

a1:

5, 55666655557777	5, 55666655557777	5, 55666655557777	5, 55666655557777
5, 55666655557777	5, 55666655557777	5, 55666655557777	5, 55666655557777
5, 55666655557777	11, 11111111111111	11, 11111111111111	11, 11111111111111
11, 11111111111111	11, 11111111111111	11, 11111111111111	11, 11111111111111
11, 11111111111111	11, 11111111111111	5, 55666655557776	5, 55666655557779
5, 55666655557776	5, 55666655557779	5, 55666655557776	5, 55666655557776
5, 55666655557779	5, 55666655557779	5, 55666655557776	0

b1:

1, 11111111111111	1, 11111111111111	1, 11111111111111	1, 11111111111111
1, 11111111111111	1, 11111111111111	1, 11111111111112	1, 11111111111111
1, 11111111111111	0		

Η φόρτιση που ασκείται είναι :

Κόμβοι	Φόρτιση στον άξονα χ	Φόρτιση στον άξονα ψ
253	20000000	-100000000
254	20000000	-100000000
255	20000000	-100000000
256	20000000	-100000000
257	20000000	-100000000
258	20000000	-100000000
259	20000000	-100000000
260	20000000	-100000000
261	20000000	-100000000
262	20000000	-100000000
263	20000000	-100000000
264	20000000	-100000000
265	20000000	-100000000
266	20000000	-100000000
267	20000000	-100000000
268	20000000	-100000000
269	20000000	-100000000
270	20000000	-100000000
271	20000000	-100000000
272	20000000	-100000000
273	20000000	-100000000

274	20000000	-100000000
275	20000000	-100000000
276	20000000	-100000000
277	20000000	-100000000
278	20000000	-100000000
279	20000000	-100000000
280	20000000	-100000000

Οι μετατοπίσεις των κόμβων είναι :

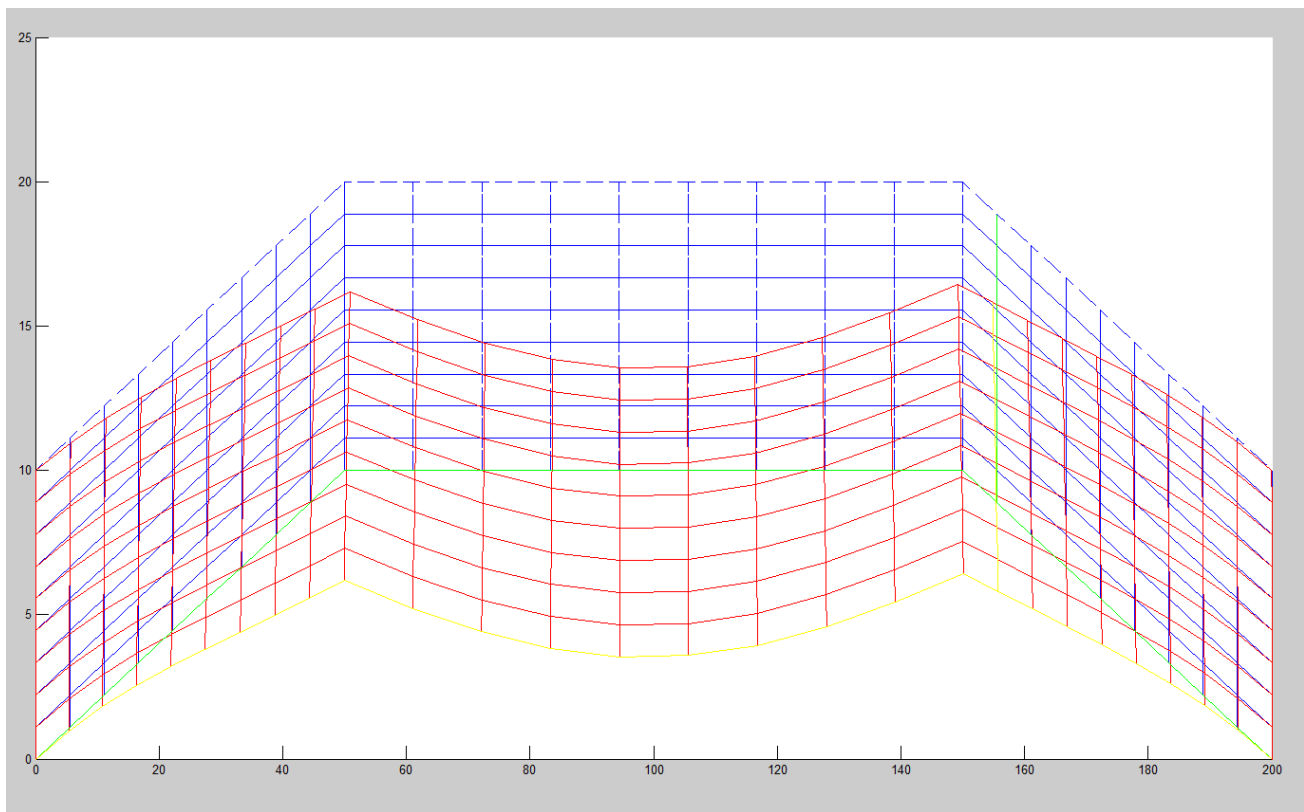
a2:

0,0353144269972473	-0,0122086584615244	-0,00512051184011108	,00537452076604073
-0,0264913070765388	-0,00907875975085649	-0,00318455190082819	0,00576820568471894
-0,0210870722895204	-0,00683651639342654	0,000934504024103660	0,00494318058302550
-0,0162175841389458	-0,00548283732005403	0,00375927784081393	0,00289346936090017
-0,000357983492750288	-0,00883501123861020	-0,0213879189299340	
-0,00489379605143704	-0,0107502914289760	-0,0261956747259602	
-0,00763708511977869	-0,0134870813862080	-0,0341561855846073	
-0,00769753291916590	-0,0170368756962693	0	

b2 :

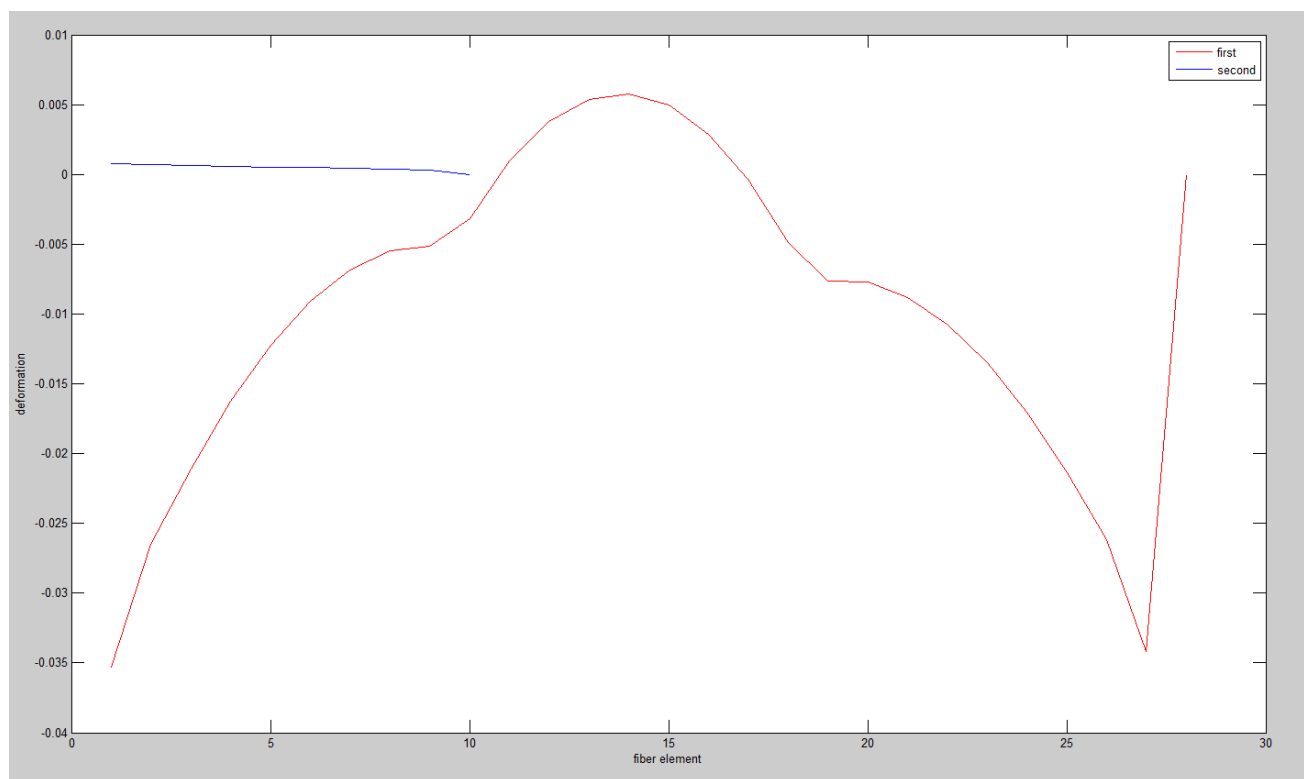
0,000756706581995997	0,000683612573892928	0,000623654174608296	0,000571742213574916
0,000523247138460631	0,000474109571232168	0,000420435748438303	0,000358317029216065
0,000282819011236496	0		

Η παραμόρφωση της γέφυρας είναι :



30

Η παραμόρφωση των οπτικών ινών είναι :



(4) Κατεστραμμένο πεπερασμένο στοιχείο, δηλαδή μέτρο ελαστικότητας 0, 4 του αρχικού (14 Gra), φόρτιση στον άξονα $\chi = 200.000 \text{ N}$ και στον άξονα $\psi = (-) 1.000.000 \text{ N}$, σε όλους τους κόμβους της πάνω πλευράς.

Οι οπτικοί αισθητήρες περνούν από τους κόμβους :

a : [1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28]

b : [20 48 76 104 132 160 188 216 244 272]

Οι αποστάσεις μεταξύ των κόμβων είναι :

a1:

5, 55666655557777	5, 55666655557777	5, 55666655557777	5, 55666655557777
5, 55666655557777	5, 55666655557777	5, 55666655557777	5, 55666655557777
5, 55666655557777	11, 11111111111111	11, 11111111111111	11, 11111111111111
11, 11111111111111	11, 11111111111111	11, 11111111111111	11, 11111111111111
11, 11111111111111	11, 11111111111111	5, 55666655557776	5, 55666655557779
5, 55666655557776	5, 55666655557779	5, 55666655557776	5, 55666655557776
5, 55666655557779	5, 55666655557779	5, 55666655557776	0

b1:

1, 11111111111111	1, 11111111111111	1, 11111111111111	1, 11111111111111
1, 11111111111111	1, 11111111111111	1, 11111111111112	1, 11111111111111
1, 11111111111111	0		

31

Η φόρτιση που ασκείται είναι :

Κόμβοι	Φόρτιση στον άξονα χ	Φόρτιση στον άξονα ψ
253	200000	-1000000
254	200000	-1000000
255	200000	-1000000
256	200000	-1000000
257	200000	-1000000
258	200000	-1000000
259	200000	-1000000
260	200000	-1000000
261	200000	-1000000
262	200000	-1000000
263	200000	-1000000
264	200000	-1000000
265	200000	-1000000
266	200000	-1000000
267	200000	-1000000
268	200000	-1000000
269	200000	-1000000
270	200000	-1000000

271	200000	-1000000
272	200000	-1000000
273	200000	-1000000
274	200000	-1000000
275	200000	-1000000
276	200000	-1000000
277	200000	-1000000
278	200000	-1000000
279	200000	-1000000
280	200000	-1000000

Οι μετατοπίσεις των κόμβων είναι :

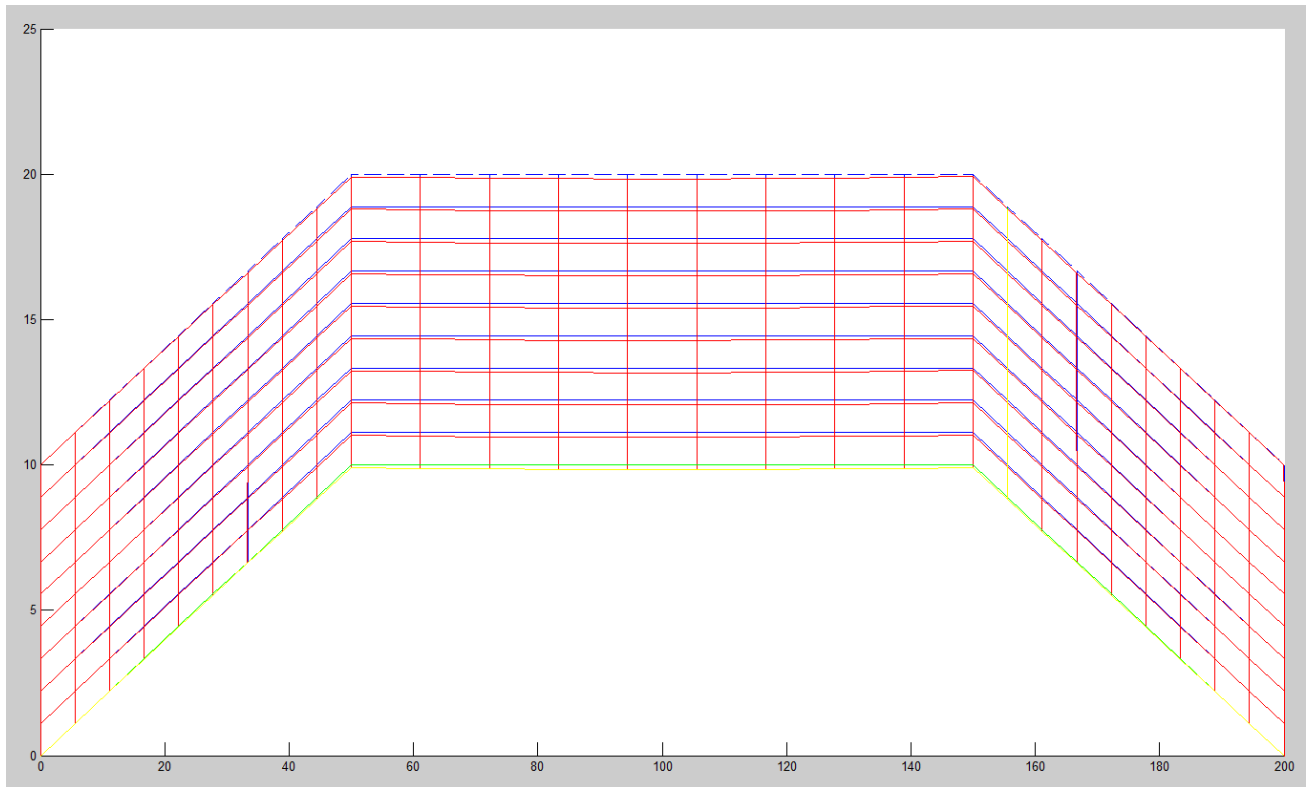
a2:

-0,000882860674926513	-0,000662282676909621	-0,000527176807234698	-0, 000405439603470893
-0,000305216461535904	-0,000226968993769759	-0,000170912909834484	-0, 000137070933000522
-0,000128012796002239	-7,96137975204291e-05	2,33626006022732e-05	9,39819460195157e-05
0,000134363019149766	0,000144205142116595	0,000123579514574550	7,23367340218586e-05
-8,94958731863081e-06	-0,000122344901284789	-0,000190927127992582	-0,00019243832297727
-0,000220875280963288	-0,000268757285722327	-0,000337177034652966	-0,000425921892404325
-0,000534697973245721	-0,000654891868146181	-0,000853904639612020	0

b2:

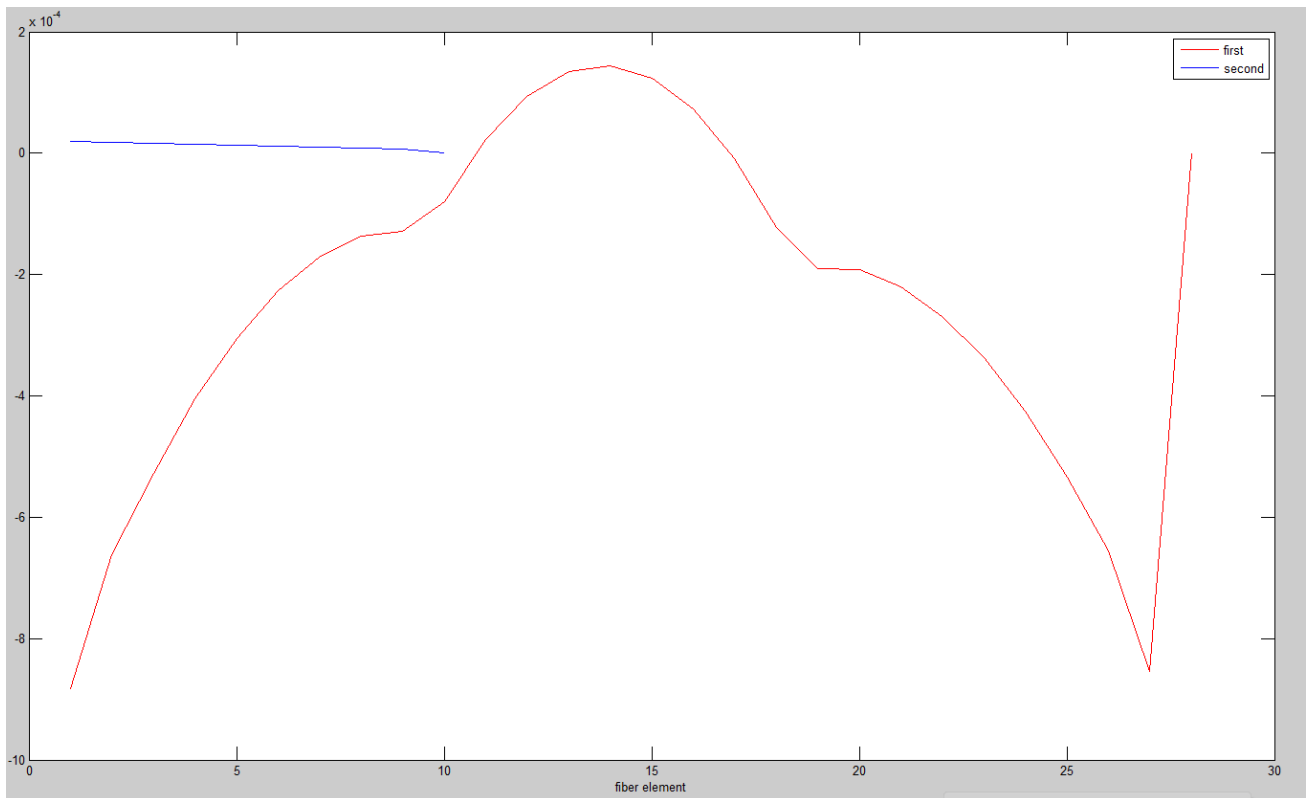
1, 89176645496585e-05	1, 70903143471983e-05	1, 55913543650048e-05	1, 42935553392452e-05
1, 30811784614103e-05	1, 18527392806432e-05	1, 05108937108743e-05	8, 95792573038498e-06
7, 07047528090963e-06	0		

Η παραμόρφωση της γέφυρας είναι :



Η παραμόρφωση των οπτικών ινών είναι :

33



(5)Μέτρο ελαστικότητας 35 Gra, μεγάλη φόρτιση στον άξονα $\chi = 2.000.000$ N και στον άξονα $\psi = (-) 10.000.000$ N, μόνο στο πρώτο κομμάτι της πάνω πλευράς.

Οι οπτικοί αισθητήρες περνούν από τους κόμβους :

a : [1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28]

b : [20 48 76 104 132 160 188 216 244 272]

Οι αποστάσεις μεταξύ των κόμβων είναι :

a1:

5, 55666655557777	5, 55666655557777	5, 55666655557777	5, 55666655557777
5, 55666655557777	5, 55666655557777	5, 55666655557777	5, 55666655557777
5, 55666655557777	11, 11111111111111	11, 11111111111111	11, 11111111111111
11, 11111111111111	11, 11111111111111	11, 11111111111111	11, 11111111111111
11, 11111111111111	11, 11111111111111	5, 55666655557776	5, 55666655557779
5, 55666655557776	5, 55666655557779	5, 55666655557776	5, 55666655557776
5, 55666655557779	5, 55666655557779	5, 55666655557776	0

b1:

1, 11111111111111	1, 11111111111111	1, 11111111111111	1, 11111111111111
1, 11111111111111	1, 11111111111111	1, 11111111111112	1, 11111111111111
1, 11111111111111	0		

Η φόρτιση που ασκείται είναι :

Κόμβοι	Φόρτιση στον άξονα χ	Φόρτιση στον άξονα ψ
253	2000000	-10000000
254	2000000	-10000000
255	2000000	-10000000
256	2000000	-10000000
257	2000000	-10000000
258	2000000	-10000000
259	2000000	-10000000
260	2000000	-10000000
261	2000000	-10000000
262	0	0
263	0	0
264	0	0
265	0	0
266	0	0
267	0	0
268	0	0
269	0	0
270	0	0
271	0	0

272	0	0
273	0	0
274	0	0
275	0	0
276	0	0
277	0	0
278	0	0
279	0	0
280	0	0

Οι μετατοπίσεις των κόμβων είναι :

a2:

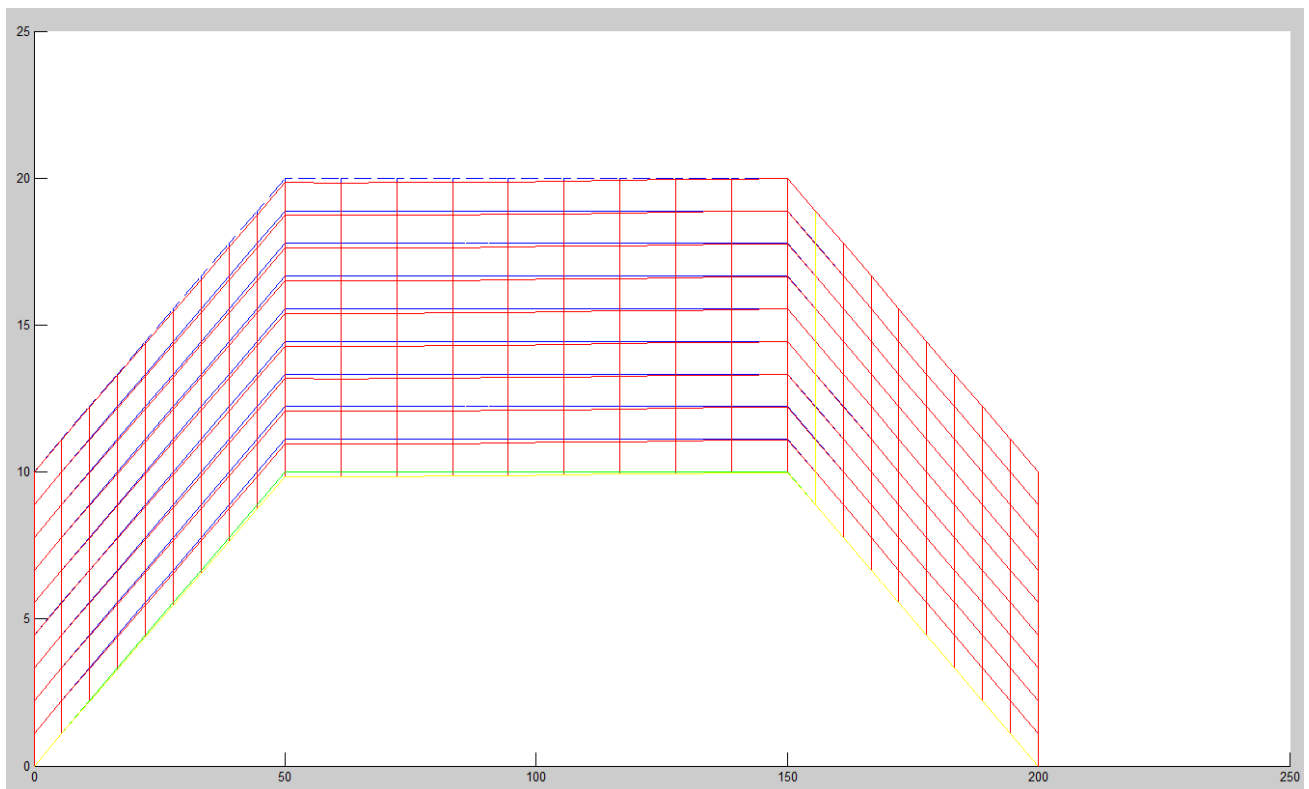
-0, 00194712626891256	-0, 00117990792223340	-0, 000688542256688304	-0, 000267434501032552
6, 80417382588681e-05	0, 000315832951319598	0, 000475640146296019	0,000535203319610950
0, 000545230803243583	0, 000262740435747016	0, 000188759161347116	0,000108101309547697
2, 68390614442107e-05	-5, 39845102470772e-05	-0, 000134782982256333	-0,000216235250861516
-0, 000295741547111807	-0, 000375781851624083	-0, 000512349191720469	-0,000440700514013873
-0, 000401489407629214	-0, 000354645638357055	-0, 000308066131783148	-0,000261708945196463
-0, 000216016661578422	-0, 000167627983722064	-0, 000111259745312327	0

35

b2:

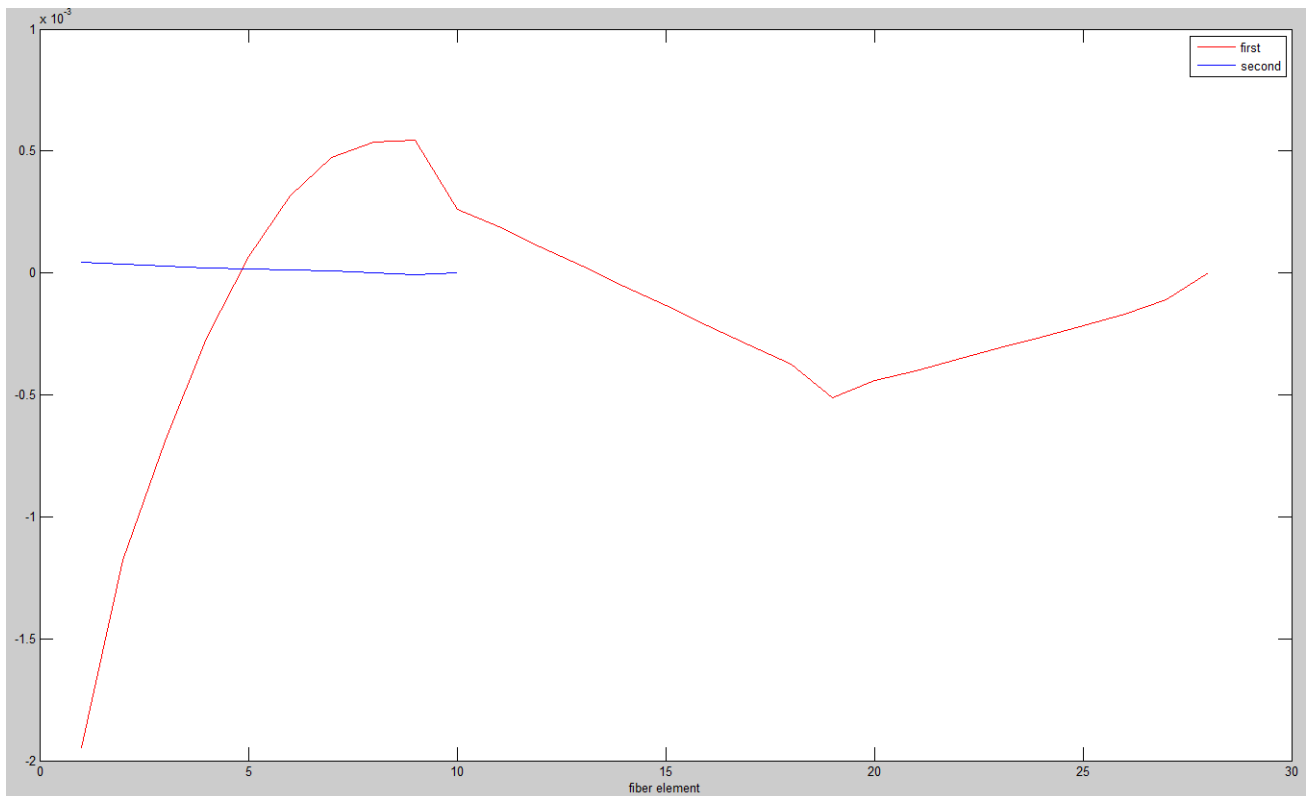
3, 54098643367676e-05	2, 69558489269759e-05	2, 10703683691877e-05	1, 68300380076376e-05
1, 34992987159653e-05	1, 04164704282368e-05	6, 86651215605441e-06	1, 93334255803395e-06
-5, 67387370251694e-06	0		

Η παραμόρφωση της γέφυρας είναι :



Η παραμόρφωση των οπτικών ινών είναι :

36



(6) Μέτρο ελαστικότητας 35 Gra, μεγάλη φόρτιση στον άξονα $\chi = 2.000.000$ N και στον άξονα $\psi = (-) 10.000.000$ N, μόνο στο δεύτερο κομμάτι της πάνω πλευράς.

Οι οπτικοί αισθητήρες περνούν από τους κόμβους :

a : [1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28]

b : [20 48 76 104 132 160 188 216 244 272]

Οι αποστάσεις μεταξύ των κόμβων είναι :

a1:

5, 55666655557777	5, 55666655557777	5, 55666655557777	5, 55666655557777
5, 55666655557777	5, 55666655557777	5, 55666655557777	5, 55666655557777
5, 55666655557777	11, 11111111111111	11, 11111111111111	11, 11111111111111
11, 11111111111111	11, 11111111111111	11, 11111111111111	11, 11111111111111
11, 11111111111111	11, 11111111111111	5, 55666655557776	5, 55666655557779
5, 55666655557776	5, 55666655557779	5, 55666655557776	5, 55666655557776
5, 55666655557779	5, 55666655557779	5, 55666655557776	0

b1:

1, 11111111111111	1, 11111111111111	1, 11111111111111	1, 11111111111111
1, 11111111111111	1, 11111111111111	1, 11111111111112	1, 11111111111111
1, 11111111111111	0		

37

Η φόρτιση που ασκείται είναι :

Κόμβοι	Φόρτιση στον άξονα χ	Φόρτιση στον άξονα ψ
253	0	0
254	0	0
255	0	0
256	0	0
257	0	0
258	0	0
259	0	0
260	0	0
261	0	0
262	2000000	-10000000
263	2000000	-10000000
264	2000000	-10000000
265	2000000	-10000000
266	2000000	-10000000
267	2000000	-10000000
268	2000000	-10000000
269	2000000	-10000000
270	2000000	-10000000
271	0	0
272	0	0
273	0	0

274	0	0
275	0	0
276	0	0
277	0	0
278	0	0
279	0	0
280	0	0

Οι μετατοπίσεις των κόμβων είναι :

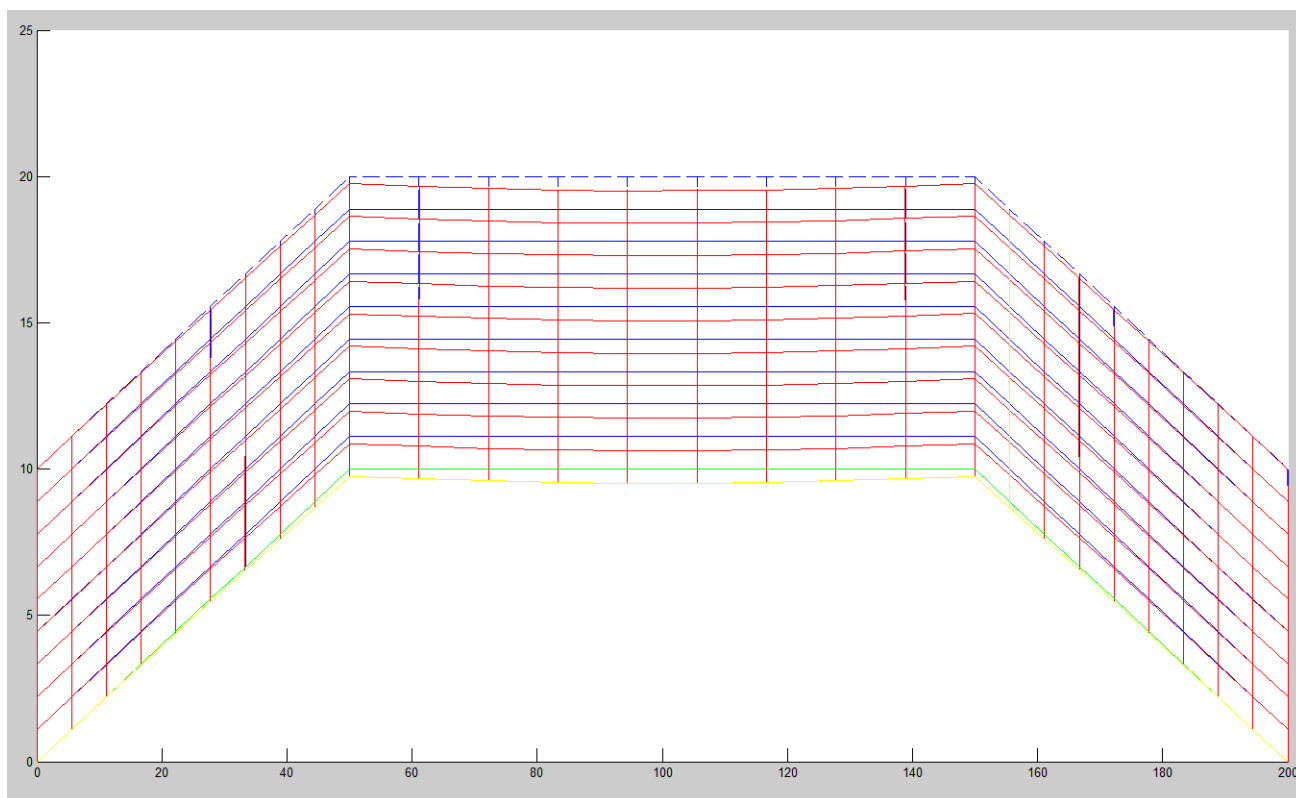
a2:

-0, 00180871832695340	-0, 00159117810405908	-0,00146501387706647	-0, 00132108426818263
-0, 00117692899552812	-0, 00103290631933802	-0,000889330892214503	-0, 000739871782451006
-0, 000609448793200849	-0, 000260415780988062	0,000160038190580924	0, 000452664989429449
0, 000625251898135981	0, 000675361211079060	0,000603668483062985	0,000409368416557669
9, 52743766950653e-05	-0,000345901792055388	-0,0007177119781069	-0,000827751483442
-0, 000967007164413505	-0, 00109911404378097	-0,00123151062095479	-0, 00136409908448719
-0, 00149672019849005	-0, 00161076688600639	-0,00181269369859520	0

b2:

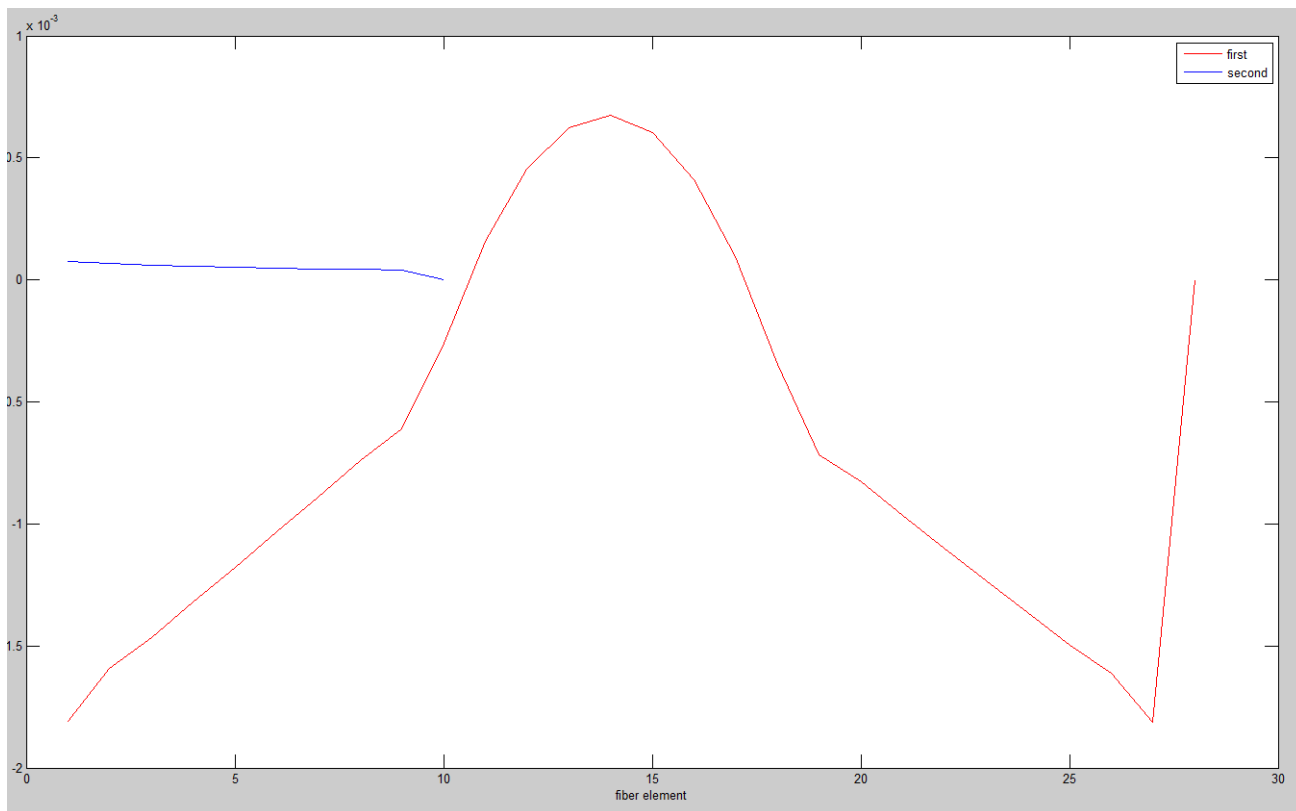
8, 50896539647812e-05	7, 10850294070305e-05	6, 14418600220208e-05	5, 45392567387333e-05
4, 90142939086054e-05	4, 35989800181554e-05	3, 69220152020840e-05	2, 72875252237399e-05
1, 23809986876940e-05	0		

Η παραμόρφωση της γέφυρας είναι :



Η παραμόρφωση των οπτικών ινών είναι :

39



(7) Μέτρο ελαστικότητας 35 Gra, μεγάλη φόρτιση στον άξονα $\chi = 2.000.000$ N και στον άξονα $\psi = (-) 10.000.000$ N, μόνο στο τελευταίο κομμάτι της πάνω πλευράς.

Οι οπτικοί αισθητήρες περνούν από τους κόμβους :

a : [1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28]

b : [20 48 76 104 132 160 188 216 244 272]

Οι αποστάσεις μεταξύ των κόμβων είναι :

a1:

5, 55666655557777	5, 55666655557777	5, 55666655557777	5, 55666655557777
5, 55666655557777	5, 55666655557777	5, 55666655557777	5, 55666655557777
5, 55666655557777	11, 11111111111111	11, 11111111111111	11, 11111111111111
11, 11111111111111	11, 11111111111111	11, 11111111111111	11, 11111111111111
11, 11111111111111	11, 11111111111111	5, 55666655557776	5, 55666655557779
5, 55666655557776	5, 55666655557779	5, 55666655557776	5, 55666655557776
5, 55666655557779	5, 55666655557779	5, 55666655557776	0

b1:

1, 11111111111111	1, 11111111111111	1, 11111111111111	1, 11111111111111
1, 11111111111111	1, 11111111111111	1, 11111111111112	1, 11111111111111
1, 11111111111111	0		

40

Η φόρτιση που ασκείται είναι :

Κόμβοι	Φόρτιση στον άξονα χ	Φόρτιση στον άξονα ψ
253	0	0
254	0	0
255	0	0
256	0	0
257	0	0
258	0	0
259	0	0
260	0	0
261	0	0
262	0	0
263	0	0
264	0	0
265	0	0
266	0	0
267	0	0
268	0	0
269	0	0
270	0	0
271	2000000	-10000000
272	2000000	-10000000
273	2000000	-10000000

274	2000000	-10000000
275	2000000	-10000000
276	2000000	-10000000
277	2000000	-10000000
278	2000000	-10000000
279	2000000	-10000000
280	2000000	-10000000

Οι μετατοπίσεις των κόμβων είναι :

a2:

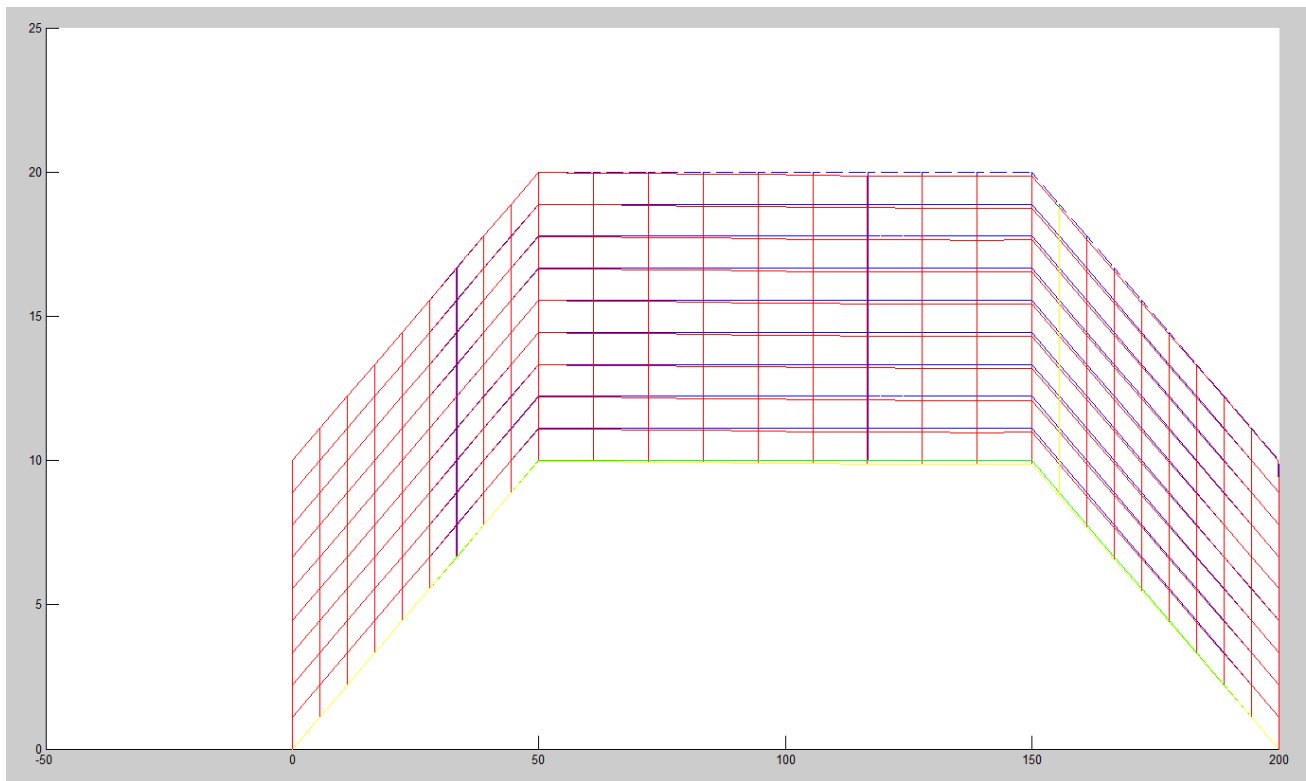
-0,000104813554809665	-0,000148347623322297	-0,000186312563979356	-0,000222016153190759
-0,000258239465334086	-0,000294641768498814	-0,000331262596310969	-0,000361646077439245
-0,000418490963605415	-0,000305429223841306	-0,000239068116043878	-0,000173116774917198
-0,000105574827511326	-3,85778266487533e-05	2,84650509757200e-05	9,58835015878678e-05
0,000162259668288991	0,000226399597128858	0,000472868220983106	0,000466025890731355
0,000411386769575560	0,000264951835419481	3,72688743174510e-05	-0,000271406881307952
-0,000659446899210822	-0,00111104764645208	-0,00181683252662596	0

b2:

41

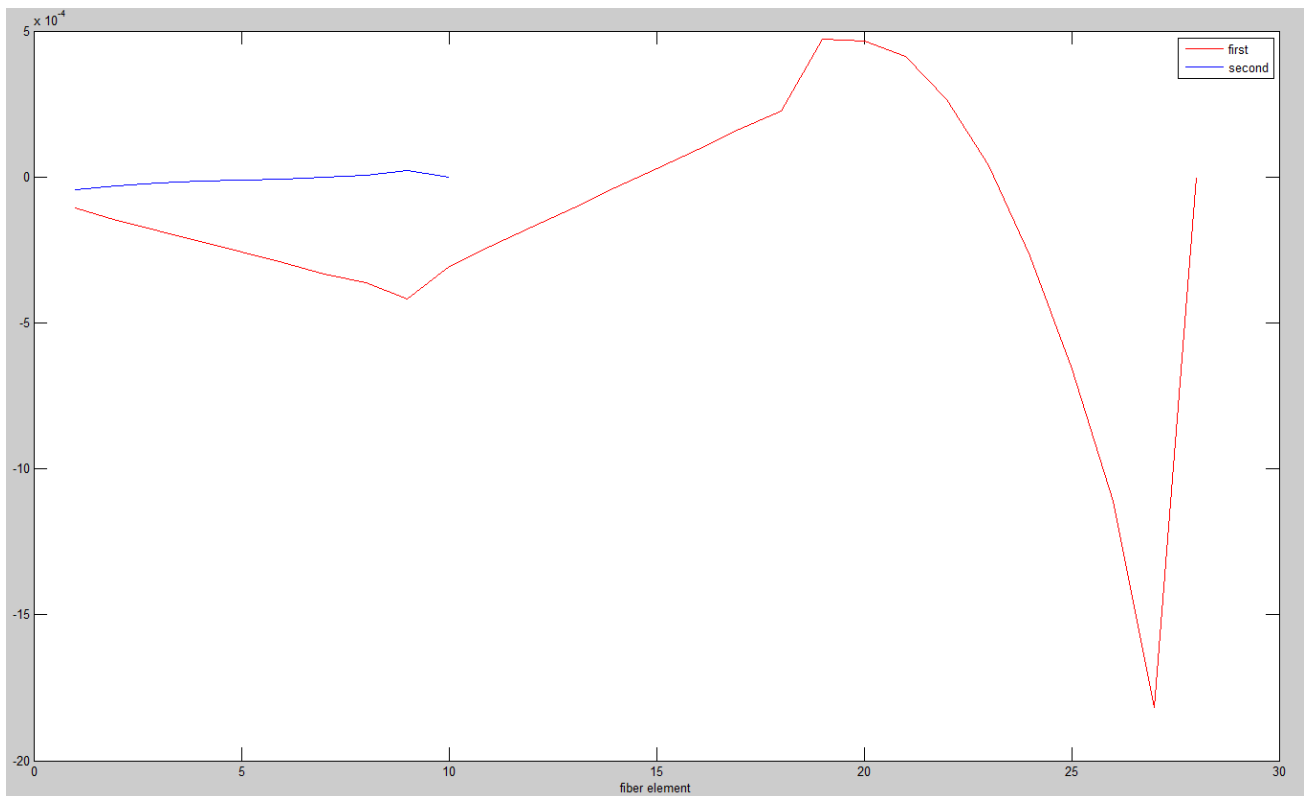
-4,48288601020281e-05	-2,96796209446338e-05	-2,01468109303910e-05	-1,41950733890118e-05
-1,01888787785027e-05	-6,60449332338951e-06	-1,74495251420446e-06	6,61083513983631e-06
2,15747761385525e-05	0		

Η παραμόρφωση της γέφυρας είναι :



Η παραμόρφωση των οπτικών ινών είναι :

42



(8) Κατεστραμμένο πεπερασμένο στοιχείο, δηλαδή μέτρο ελαστικότητας 0, 4 του αρχικού (14 Gra), φόρτιση στον άξονα $\chi = 2.000.000$ N και στον άξονα $\psi = (-) 10.000.000$ N, σε όλους τους κόμβους της πάνω πλευράς.

Οι οπτικοί αισθητήρες περνούν από τους κόμβους :

a : [1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28]

b : [20 48 76 104 132 160 188 216 244 272]

Οι αποστάσεις μεταξύ των κόμβων είναι :

a1:

5, 55666655557777	5, 55666655557777	5, 55666655557777	5, 55666655557777
5, 55666655557777	5, 55666655557777	5, 55666655557777	5, 55666655557777
5, 55666655557777	11, 11111111111111	11, 11111111111111	11, 11111111111111
11, 11111111111111	11, 11111111111111	11, 11111111111111	11, 11111111111111
11, 11111111111111	11, 11111111111111	5, 55666655557776	5, 55666655557779
5, 55666655557776	5, 55666655557779	5, 55666655557776	5, 55666655557776
5, 55666655557779	5, 55666655557779	5, 55666655557776	0

b1:

1, 11111111111111	1, 11111111111111	1, 11111111111111	1, 11111111111111
1, 11111111111111	1, 11111111111111	1, 11111111111112	1, 11111111111111
1, 11111111111111	0		

43

Η φόρτιση που ασκείται είναι :

Κόμβοι	Φόρτιση στον άξονα χ	Φόρτιση στον άξονα ψ
253	200000	-1000000
254	200000	-1000000
255	200000	-1000000
256	200000	-1000000
257	200000	-1000000
258	200000	-1000000
259	200000	-1000000
260	200000	-1000000
261	200000	-1000000
262	200000	-1000000
263	200000	-1000000
264	200000	-1000000
265	200000	-1000000
266	200000	-1000000
267	200000	-1000000
268	200000	-1000000
269	200000	-1000000
270	200000	-1000000

271	200000	-1000000
272	200000	-1000000
273	200000	-1000000
274	200000	-1000000
275	200000	-1000000
276	200000	-1000000
277	200000	-1000000
278	200000	-1000000
279	200000	-1000000
280	200000	-1000000

Οι μετατοπίσεις των κόμβων είναι :

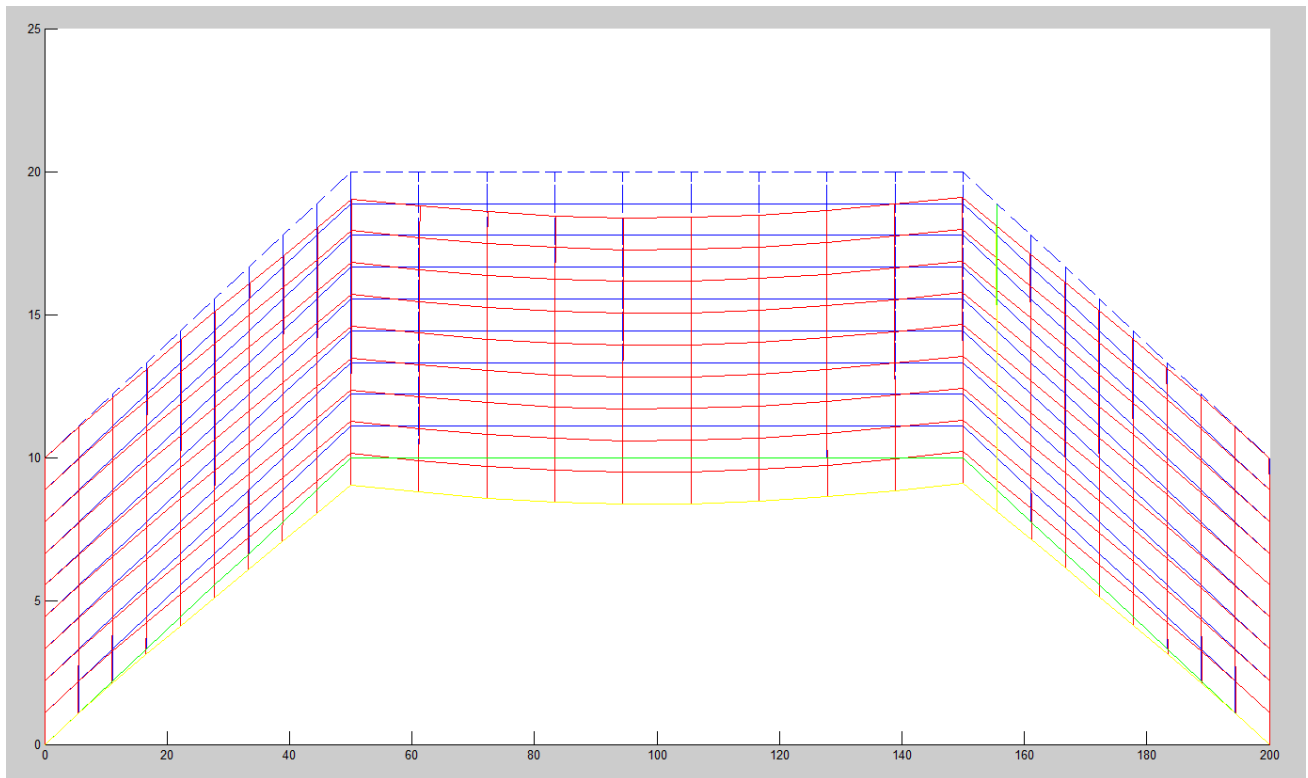
a2:

-0, 00882860674926512 -0, 00662282676909621-0, 00527176807234694 -0, 00405439603470892	
-0, 00305216461535912 -0, 00226968993769764-0, 00170912909834473 -0, 00137070933000518	
-0, 00128012796002252 -0, 000796137975204257 0, 0002336260060229000, 000939819460194965	
0, 00134363019149769 0, 001442051421166090, 001235795145745430, 000723367340218494	44
-8, 94958731863568e-05-0, 00122344901284782-0, 00190927127992590-0, 00192438322977269	
-0, 00220875280963286 -0, 00268757285722325-0, 00337177034652963 -0, 00425921892404324	
-0, 00534697973245720 -0, 00654891868146179-0, 008539046396120190	

b2:

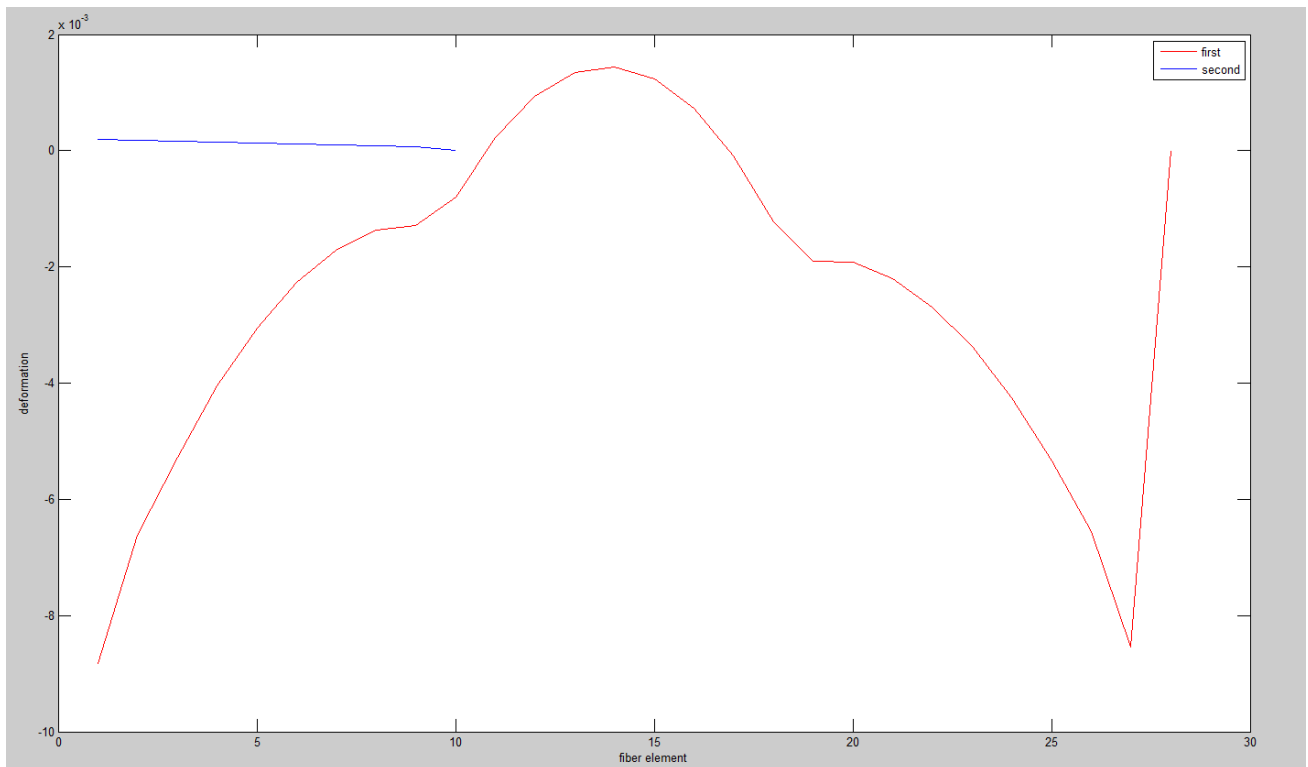
0 000189176645496779	0, 000170903143471345	0,000155913543650742	0,00014293553392619
0,000130811784613714	0,000118527392807376	0,000105108937109021	8, 95792573037943e-05
7, 07047528087909e-05	0		

Η παραμόρφωση της γέφυρας είναι :



Η παραμόρφωση των οπτικών ινών είναι :

45



(9) Μέτρο ελαστικότητας 35 Gra, φόρτιση στον άξονα $\chi = 200.000$ N και στον άξονα $\psi = (-) 1.000.000$ N, στο πρώτο κομμάτι της πάνω πλευράς, φόρτιση στον άξονα $\chi = 2.000.000$ N και στον άξονα $\psi = (-) 10.000.000$ N, στο δεύτερο κομμάτι της πάνω πλευράς, φόρτιση στον άξονα $\chi = 20.000.000$ N και στον άξονα $\psi = (-) 100.000.000$ N, στο τρίτο κομμάτι της πάνω πλευράς,

Οι οπτικοί αισθητήρες περνούν από τους κόμβους :

a : [1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28]

b : [20 48 76 104 132 160 188 216 244 272]

Οι αποστάσεις μεταξύ των κόμβων είναι :

a1:

5, 55666655557777	5, 55666655557777	5, 55666655557777	5, 55666655557777
5, 55666655557777	5, 55666655557777	5, 55666655557777	5, 55666655557777
5, 55666655557777	11, 11111111111111	11, 11111111111111	11, 11111111111111
11, 11111111111111	11, 11111111111111	11, 11111111111111	11, 11111111111111
11, 11111111111111	11, 11111111111111	5, 55666655557776	5, 55666655557779
5, 55666655557776	5, 55666655557779	5, 55666655557776	5, 55666655557776
5, 55666655557779	5, 55666655557779	5, 55666655557776	0

b1:

1, 11111111111111	1, 11111111111111	1, 11111111111111	1, 11111111111111
1, 11111111111111	1, 11111111111111	1, 11111111111112	1, 11111111111111
1, 11111111111111	0		

46

Η φόρτιση που ασκείται είναι :

Κόμβοι	Φόρτιση στον άξονα χ	Φόρτιση στον άξονα ψ
253	200000	-1000000
254	200000	-1000000
255	200000	-1000000
256	200000	-1000000
257	200000	-1000000
258	200000	-1000000
259	200000	-1000000
260	200000	-1000000
261	200000	-1000000
262	2000000	-10000000
263	2000000	-10000000
264	2000000	-10000000
265	2000000	-10000000
266	2000000	-10000000
267	2000000	-10000000
268	2000000	-10000000
269	2000000	-10000000

270	2000000	-10000000
271	20000000	-100000000
272	20000000	-100000000
273	20000000	-100000000
274	20000000	-100000000
275	20000000	-100000000
276	20000000	-100000000
277	20000000	-100000000
278	20000000	-100000000
279	20000000	-100000000
280	20000000	-100000000

Οι μετατοπίσεις των κόμβων είναι :

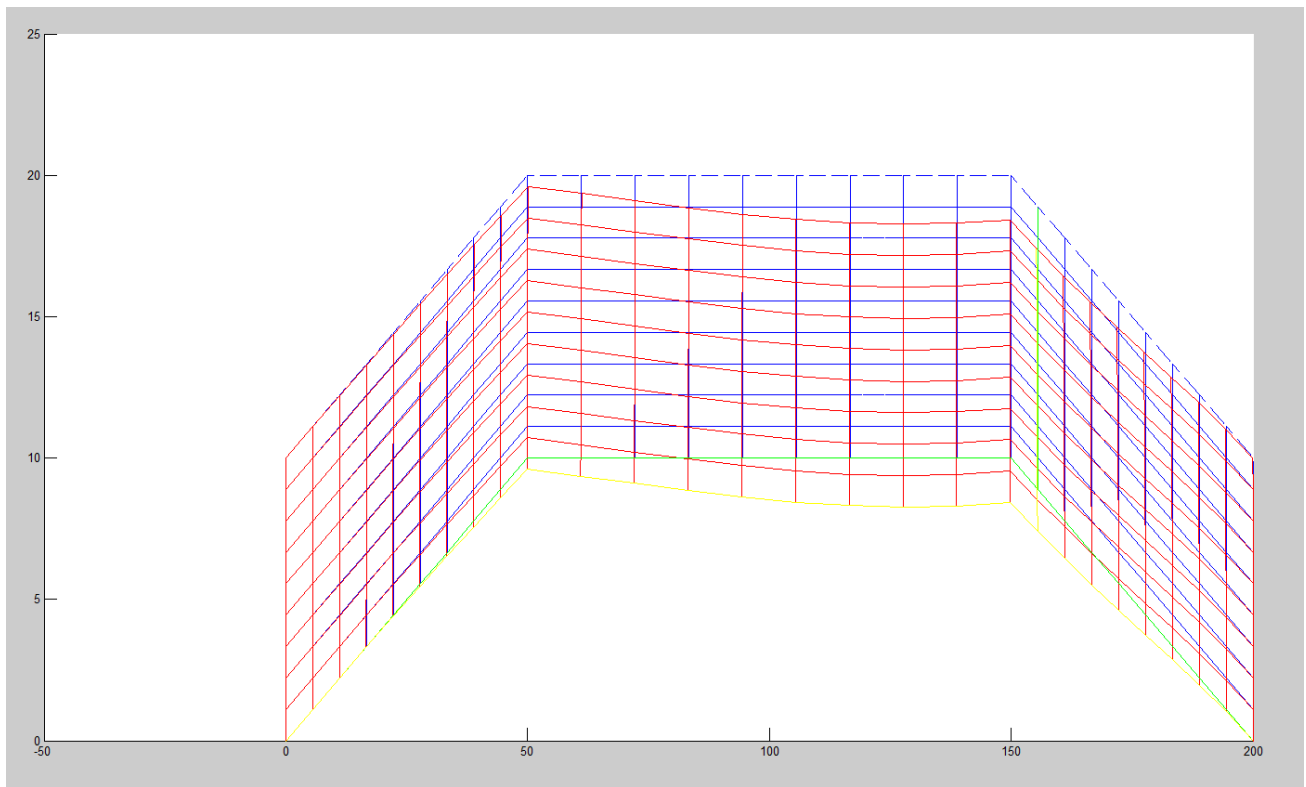
a2:

-0, 00298558765199556	-0, 00312512989172345	-0, 00332647866640857	-0, 00349535707037732
-0, 00367768291853563	-0, 00387065399055026	-0, 00407501946184623	-0, 00422253429201500
-0, 00465351408912100	-0, 00322624582563290	-0, 00216616057319028	-0, 00123803150262655
-0, 000414618657078859	0, 000281073941405620	0, 000855336428612588	0, 00131097224710617
0, 00163568474540472	0, 00181220819361012	0, 00384951768811278	0, 00373015185834693
0, 00309566119021641	0, 00155187635147435	-0, 000805109306441072	-0, 00397217311615819
-0, 00793316223927054	-0, 0125136518222219	-0, 0197035267343647	0

b2:

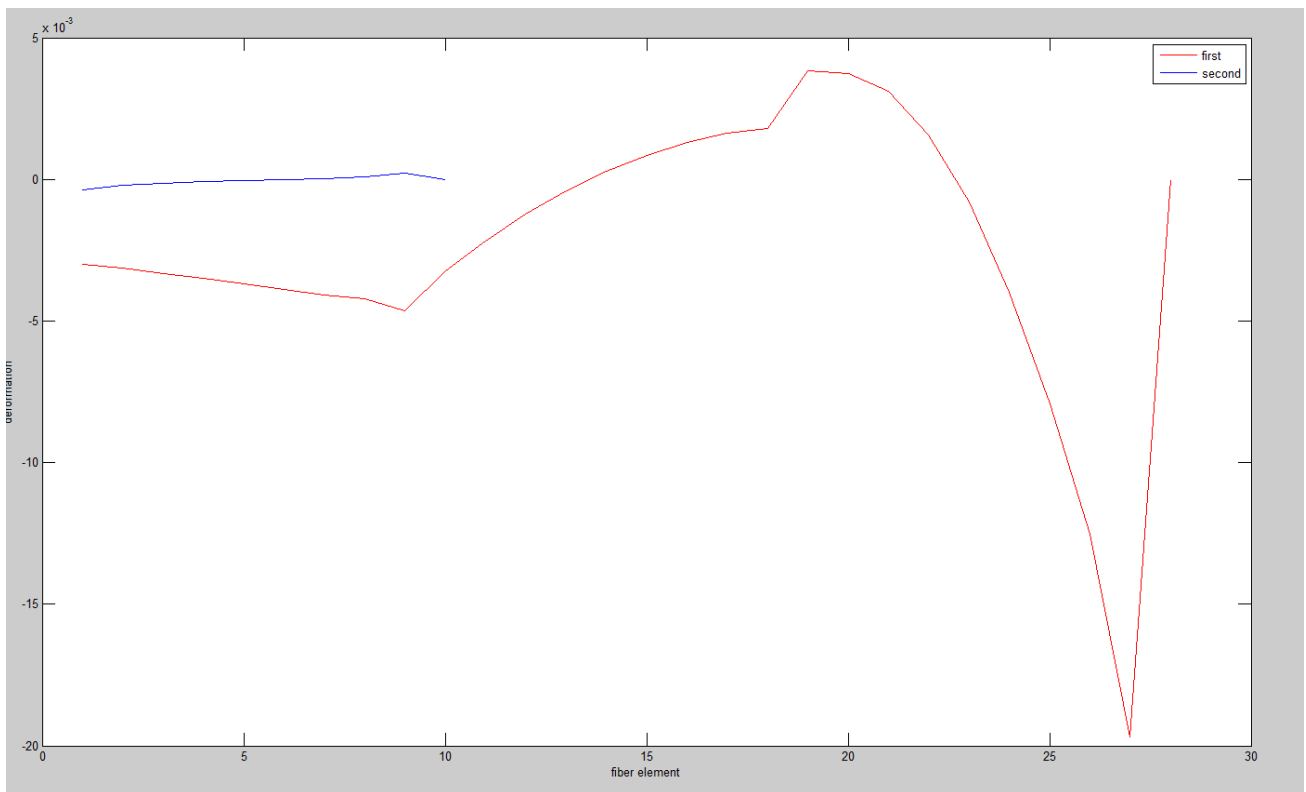
-0, 000359657960622208	-0, 000223015595146371	-0, 000137919212445327	-8, 57284733510890e-05
-5, 15245640038145e-05	-2, 14043061737015e-05	2, 01591412756206e-05	9, 35892108779854e-05
0, 000227561372702521	0		

Η παραμόρφωση της γέφυρας είναι :



Η παραμόρφωση των οπτικών ινών είναι :

48



(10) Μέτρο ελαστικότητας 35 Gpa, φόρτιση στον άξονα $\psi = (-)200.000$ N και στον άξονα $\chi = 1.000.000$ N, στο πρώτο κομμάτι της πάνω πλευράς, φόρτιση στον άξονα $\psi = (-)2.000.000$ N και στον άξονα $\chi = 10.000.000$ N, στο δεύτερο κομμάτι της πάνω πλευράς, φόρτιση στον άξονα $\psi = (-) 20.000.000$ N και στον άξονα $\chi = 100.000.000$ N, στο τρίτο κομμάτι της πάνω πλευράς,

Οι οπτικοί αισθητήρες περνούν από τους κόμβους :

a : [1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28]

b : [20 48 76 104 132 160 188 216 244 272]

Οι αποστάσεις μεταξύ των κόμβων είναι :

a1:

5, 55666655557777	5, 55666655557777	5, 55666655557777	5, 55666655557777
5, 55666655557777	5, 55666655557777	5, 55666655557777	5, 55666655557777
5, 55666655557777	11, 11111111111111	11, 11111111111111	11, 11111111111111
11, 11111111111111	11, 11111111111111	11, 11111111111111	11, 11111111111111
11, 11111111111111	11, 11111111111111	5, 55666655557776	5, 55666655557779
5, 55666655557776	5, 55666655557779	5, 55666655557776	5, 55666655557776
5, 55666655557779	5, 55666655557779	5, 55666655557776	0

b1:

1, 11111111111111	1, 11111111111111	1, 11111111111111	1, 11111111111111
1, 11111111111111	1, 11111111111111	1, 11111111111112	1, 11111111111111
1, 11111111111111	0		

49

Η φόρτιση που ασκείται είναι :

Κόμβοι	Φόρτιση στον άξονα ψ	Φόρτιση στον άξονα χ
253	-200000	1000000
254	-200000	1000000
255	-200000	1000000
256	-200000	1000000
257	-200000	1000000
258	-200000	1000000
259	-200000	1000000
260	-200000	1000000
261	-200000	1000000
262	-2000000	10000000
263	-2000000	10000000
264	-2000000	10000000
265	-2000000	10000000
266	-2000000	10000000
267	-2000000	10000000
268	-2000000	10000000

269	-2000000	10000000
270	-2000000	10000000
271	-20000000	100000000
272	-20000000	100000000
273	-20000000	100000000
274	-20000000	100000000
275	-20000000	100000000
276	-20000000	100000000
277	-20000000	100000000
278	-20000000	100000000
279	-20000000	100000000
280	-20000000	100000000

Οι μετατοπίσεις των κόμβων είναι :

a2:

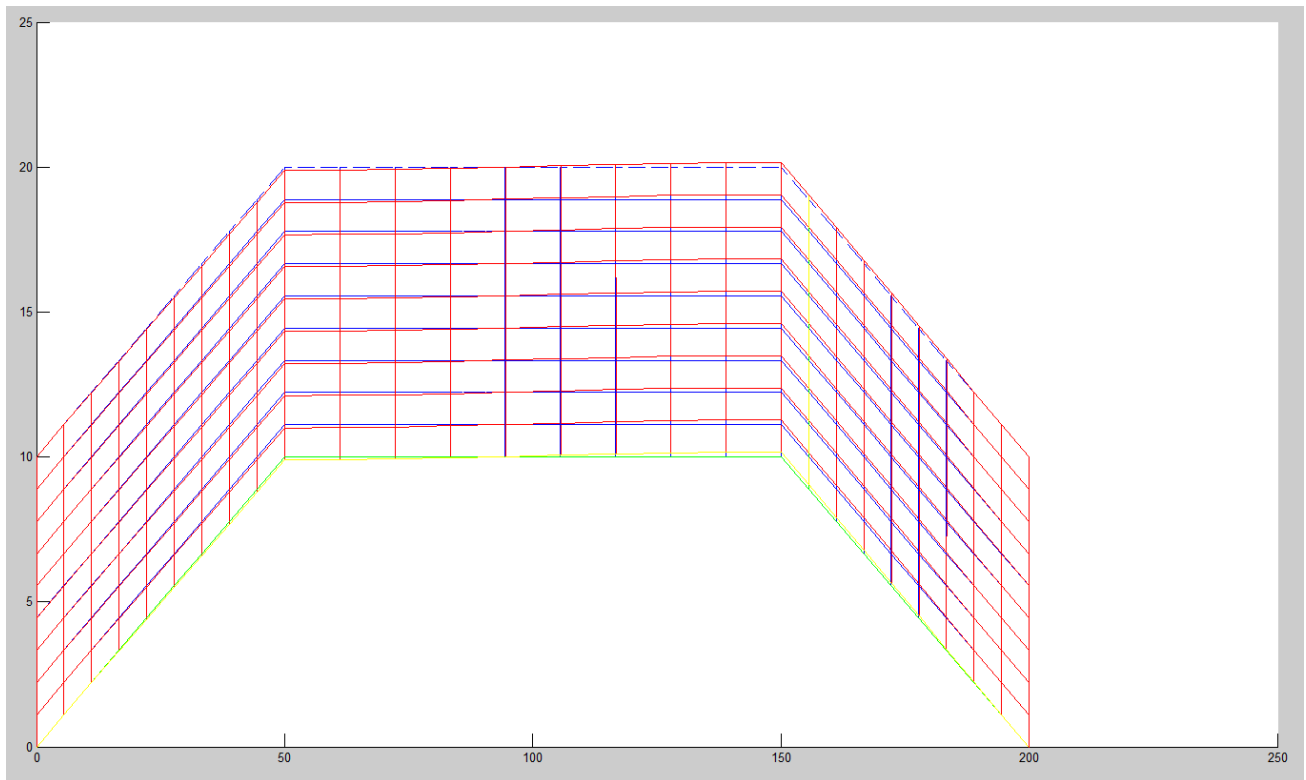
-0,000471547600505705	-0,000143793878624593	0,000100905232385987	0,000338347197059565
0,000575635264854912	0,000810352283409573	0,00104193167984636	0,00124683905865475
0,00155894313207189	0,00122682724357796	0,00106554946971365	0,000878937579522109
0,000662342638603595	0,000423129667278435	0,000160064902224788	-0,000128619439026494
-0,000451723170216117	-0,000705951066574808	-0,00122904384191822	-0,00113893179748683
-0,00112408763851982	-0,00108455038842681	-0,00104619983220827	-0,00100938870769358
-0,000981489436093264	-0,000914836920835694	-0,000842839368105470	0

50

b2:

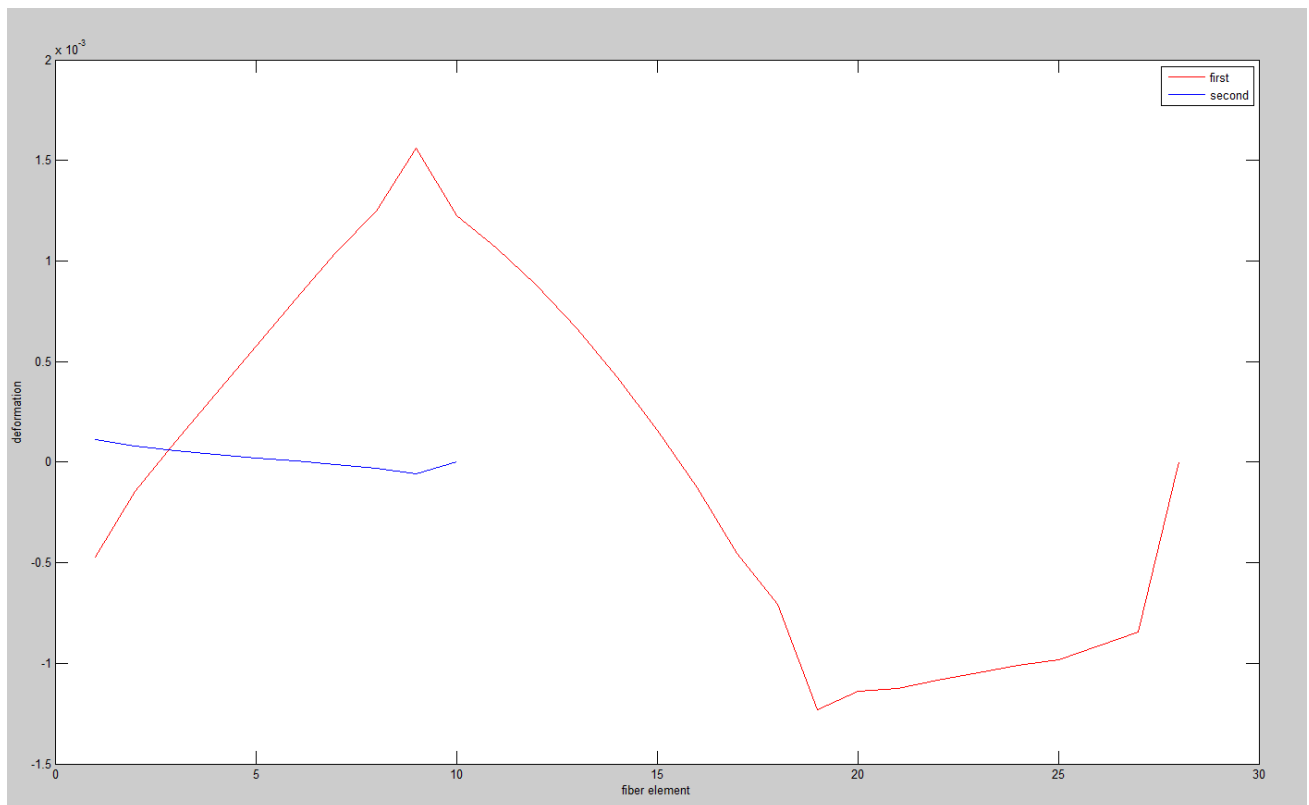
0,000113629163331380	7,97782900637258e-05	5,56192594258488e-05	3,71252838058668e-05
2,13064235532469e-05	5,80693488341795e-06	-1,14437835032342e-05	-3,25726113495348e-05
-5,97916988979150e-05	0		

Η παραμόρφωση της γέφυρας είναι :



Η παραμόρφωση των οπτικών ινών είναι :

51



ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Απ' όσα εξετάσθηκαν παραπάνω προκύπτει το συμπέρασμα πως η παραμόρφωση μιας γέφυρας, η οποία προσομοιώθηκε με χρήση κατάλληλου λογισμικού (MatLab) και τη χρήση πεπερασμένων στοιχείων είναι εφικτό να προβλεφθεί. Επιπλέον είναι εφικτό να εξετασθεί και το αντίστροφο πρόβλημα . Διαπιστώθηκε πως με τη πρόσθετη χρήση οπτικών αισθητήρων στα σημεία που επιλέξαμε τα αποτελέσματα των μετρήσεων τους είναι πολύ κοντά σε αυτά που περιμέναμε λόγω της εκάστοτε φόρτισης και του μέτρου ελαστικότητας του υλικού .

Ένα σημαντικό συμπέρασμα το οποίο προέκυψε κατά την διαδικασία των προσομοιώσεων είναι ότι όσο μεγαλύτερη είναι η φόρτιση που ασκείται στην γέφυρα, τόσο στο διαμήκη όσο και στον εγκάρσιο άξονα της, τόσο μεγαλύτερες είναι και οι παραμορφώσεις που μας επέστρεφαν τα όργανα ελέγχου (οπτικοί αισθητήρες).

Η γέφυρα η οποία εξετάσθηκε στη παρούσα διπλωματική εργασία όπως έχει προαναφερθεί και σε παραπάνω κεφάλαιο, στηρίζεται στην αριστερή και δεξιά πλευρά της. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα να είναι πιο ευάλωτη σε (μεγάλες) κάθετες φορτίσεις ενώ να παρουσιάζει μεγάλη ανοχή σε διαμήκεις φορτίσεις. Αυτό μπορεί εύκολα να διαπιστωθεί κοιτώντας τους πίνακες και τα σχήματα του Κεφαλαίου 4, που αφορούν τις παραμορφώσεις των οπτικών αισθητήρων.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. Introduction to Finite Elements in Engineering 3rd Edition, Tirupathi R. Chandrupatla & Ashok D. Belegundu.
2. Wikipedia, θεωρία των Πεπερασμένων Στοιχείων καθώς και των αισθητήρων οπτικών ινών.
3. Παλαιότερες Διπλωματικές Εργασίες φοιτητών:
 - «Προσομοίωση αισθητήρων που χρησιμοποιούν laser (Bragg Sensors) ενσωματωμένους σε ελαστικούς φορείς με τη μέθοδο των Πεπερασμένων Στοιχείων», της κυρίας Ζαχαρένιας Μαρκάκη.