

ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΠΑΡΑΓΩΓΗΣ ΚΑΙ
ΔΙΟΙΚΗΣΗΣ



ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ
ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ ΤΟΥ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΟΣ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ
ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ SOFEA ΣΕ ΠΕΡΙΒΑΛΛΟΝ MATLAB

ΠΑΓΑΝΗΣ ΕΥΣΤΑΘΙΟΣ

ΑΜ: 2005010017

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: ΣΤΑΥΡΟΥΛΑΚΗΣ ΓΕΩΡΓΙΟΣ

ΧΑΝΙΑ 2014

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Κεφ.1: Εισαγωγή.....	5
1.1.Η μέθοδος των Πεπερασμένων Στοιχείων.....	5
1.2.Βασικές έννοιες της μεθόδου.....	6
1.3.Η εργαλειοθήκη Sofea.....	9
1.4.Απαιτήσεις συστήματος.....	10
1.5.Εγκατάσταση του προγράμματος.....	10
1.6.Μαθήματα σχετικά με τον κώδικα.....	11
1.7.Γκάμα παραδειγμάτων.....	12
Κεφ2: Το πρόγραμμα Sofea σε καλώδιο με φορτίο.....	13
2.1.Καλώδια με φορτίο.....	13
2.2.Εφαρμογή του sofesa σε καλώδια με φορτίο.....	16
2.2.1.Παράδειγμα με κατανεμημένο φορτίο.....	16
2.2.2.Παράδειγμα με συγκεντρωμένο φορτίο.....	22
Κεφ3: Το πρόγραμμα Sofea στη μετάδοση θερμότητας.....	24
3.1.Θερμότητα και μεταφορά θερμότητας.....	24
3.1.1.Αγωγή.....	25
3.1.2.Συναγωγή.....	26
3.1.3.Ακτινοβολία.....	27
3.2.ΜΠΣ και μεταφορά θερμότητας.....	28
3.3.Εφαρμογή Sofesa στη μετάδοση θερμότητας.....	29
3.3.1.Το παράδειγμα “lshape1”	29

3.3.2.Το παράδειγμα “squareinsquare”	35
3.3.3.Το παράδειγμα “shrinkfit”	40
Κεφ4: Το πρόγραμμα sofea και η ανάλυση των τάσεων.....	46
4.1.Μηχανική και ανάλυση των τάσεων.....	46
4.2.Εφαρμογή sofea σε παραδείγματα ανάλυσης τάσεων.....	50
4.2.1.Τάσεις σε ελλειπτική μεμβράνη.....	50
4.2.2.Τάσεις σε κύλινδρο υπό εγκάρσια δύναμη.....	53
Βιβλιογραφία.....	58

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

1.1 Η Μέθοδος των Πεπερασμένων Στοιχείων

Η αναλυτική λύση των εξισώσεων με τις οποίες περιγράφονται τα διάφορα τεχνικά θέματα είναι δυνατή μόνο σε ειδικές περιπτώσεις, όπου οι καταπονήσεις και τα γεωμετρικά σχήματα είναι πάρα πολύ απλά. Όμως υπήρχε η ανάγκη να λυθούν και πιο σύνθετα προβλήματα και γι' αυτό το λόγο αναπτύχθηκαν διάφορες προσεγγιστικές μέθοδοι. Μια τέτοια μέθοδος είναι και η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων.

Αυτή η μέθοδος είναι μεν προσεγγιστική, αλλά μπορεί να δώσει αξιόπιστα αποτελέσματα και έχει το πλεονέκτημα ότι μπορεί να εφαρμοστεί σε όλα τα προβλήματα. Το μειονέκτημά της είναι οι αυξανόμενες απαιτήσεις σε υπολογιστική ισχύ, ιδίως όταν εφαρμόζεται σε σύνθετα μοντέλα. Αυτό όμως το μειονέκτημα ξεπεράστηκε τα τελευταία χρόνια χάρη στη ραγδαία ανάπτυξη των ηλεκτρονικών υπολογιστών. Η επιτυχία αυτής της μεθόδου ήταν τόσο μεγάλη, που ακόμα και σήμερα χρησιμοποιείται στην έρευνα και στην βιομηχανία για τον υπολογισμό και τη μελέτη διάφορων κατασκευών.

Η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων αποτελεί ισχυρό εργαλείο στη μελέτη των κατασκευών και βρίσκει μεγάλο αριθμό εφαρμογών. Στο πεδίο της ανάλυσης μπορεί να χρησιμοποιηθεί όχι μόνο στο (συμβατικό) ελαστικό πεδίο (θεωρία μικρών μετατοπίσεων) αλλά και για μη-γραμμικά προβλήματα, λυγισμό, δυναμική συμπεριφορά κ.ά. Η μέθοδος χρησιμοποιείται γενικότερα σε προβλήματα που επιδέχονται μεταβολική διαπίστωση στη μηχανική των συνεχών μέσων.

Το χαρακτηριστικό της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων είναι η χρήση δισδιάστατων και τρισδιάστατων στοιχείων για την προσομοίωση συνεχών μέσων. Μια από τις πρώτες δημοσιεύσεις στις οποίες παρουσιάστηκε η ιδέα αυτή είναι των Turner, Clough, Martin και Torp (1956), ορισμένα όμως χαρακτηριστικά της είχαν ήδη περιγραφεί από τους Courant (1943), Hrenikoff (1941), Mc Henry (1943) και άλλους. Τα πρώτα πεπερασμένα στοιχεία χρησιμοποιήθηκαν σε προβλήματα επίπεδης εντατικής κατάστασης, αργότερα όμως διατυπώθηκαν στοιχεία και για τρισδιάστατα στερεά, ελάσματα υπό κάμψη, παχιά κελύφη και άλλες μορφές κατασκευών. Μετά την καθιέρωσή τους στη γραμμική ελαστική περιοχή εφαρμόστηκαν και σε δυσκολότερα προβλήματα όπως η δυναμική συμπεριφορά, ο λυγισμός και η μη γραμμική απόκριση και συμπεριφορά του υλικού. Για να επιλυθούν δε προβλήματα με μη γραμμική συμπεριφορά του υλικού απαιτείται επαναληπτική διαδικασία. Στις αρχές της δεκαετίας του 1960 αναγνωρίστηκε ότι η μέθοδος αποτελεί συγκεκριμένη μορφή της μεθόδου Ritz και το 1964 οι Zienkiewicz και Cheung έδειξαν ότι μπορεί να εφαρμοστεί σε όλα τα προβλήματα πεδίου που έχουν μεταβολική διατύπωση. Για προβλήματα κατασκευών υπάρχει τώρα ένας ικανός αριθμός προγραμμάτων γενικής χρήσης και το γεγονός αυτό σε συνάρτηση με τις δυνατότητες της μεθόδου έχει οδηγήσει στη ραγδαία εξέλιξη και χρήση της τα τελευταία χρόνια.

1.2 Βασικές έννοιες της μεθόδου

Η βασική έννοια της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων είναι η δυνατότητα προσομοίωσης της πραγματικής κατασκευής με συστατικά στοιχεία τα οποία συνδέονται σε ένα πεπερασμένο αριθμό κόμβων. Η μεθοδολογία αυτή αποτελεί φυσιολογική προσομοίωση των πλαισίων, καθώς αυτά αποτελούνται από δοκούς που είναι

συνδεδεμένες στα άκρα τους. Σε μία συνεχή όμως κατασκευή δεν υπάρχουν φυσικοί διαχωρισμοί και συνεπώς απαιτείται να γίνει τεχνητός διαχωρισμός σε στοιχεία, τα οποία να συνδέονται κατά μήκος των άκρων (πλευρών) τους. Τα τεχνητά αυτά στοιχεία, ή πεπερασμένα στοιχεία είναι συνήθως τετράπλευρα ή τριγωνικά και οι κόμβοι συνήθως βρίσκονται στα άκρα. Η απαιτούμενη προσομοίωση της κατασκευής επιτυγχάνεται με ένα πεπερασμένο αριθμό διακριτών μεταβλητών. Οι μεταβλητές αυτές είναι οι μετατοπίσεις των κόμβων και σε ορισμένες περιπτώσεις και οι παράγωγοί τους. Εάν περιλαμβάνονται και οι παράγωγοι γίνεται λόγος για βαθμούς ελευθερίας αντί για μετατοπίσεις κόμβων. Οι μετατοπίσεις στο εσωτερικό των στοιχείων πρέπει να είναι συμβατές με τις μετατοπίσεις των κόμβων και όλες οι αλληλεπιδράσεις των στοιχείων εκφράζονται σε σχέση με τις κομβικές μετατοπίσεις.

Με αυτό τον τρόπο οι μόνοι άγνωστοι είναι οι μετατοπίσεις στους κόμβους και το πρόβλημα μετατρέπεται από συνεχές σε διακριτό. Παρ' όλο που μπορεί να υπάρχει μεγάλος αριθμός κομβικών μετατοπίσεων ο Αριθμός τους είναι πεπερασμένος. Το πρόβλημα εκφράζεται τότε ως σύνολο (σύστημα) γραμμικών εξισώσεων οι οποίες επιλύονται με αριθμητικές μεθόδους. Για να επιλυθεί ακριβής λύση ενός συγκεκριμένου προβλήματος στη διακριτοποιημένη μορφή του, θα πρέπει να ικανοποιούνται οι συνθήκες ισορροπίας και γεωμετρικής συμβατότητας στο εσωτερικό των στοιχείων αλλά και στα σύνορά τους.

Για παράδειγμα, σε μια συνεχή κατασκευή όπως ένα έλασμα, ισχύει συνέχεια των μετατοπίσεων στα κοινά όρια των στοιχείων, δεν επαρκεί να ικανοποιείται η συνθήκη της συνέχειας των μετατοπίσεων στους κόμβους και μόνο. Εάν δηλαδή δεν διατυπωθούν περιορισμοί στις μετατοπίσεις κατά μήκος των ορίων των στοιχείων το θεωρητικό μοντέλο της κατασκευής θα είναι περισσότερο εύκαμπτο επειδή θα δημιουργηθούν κενά. Ένας τρόπος να περιοριστεί το σφάλμα είναι να χρησιμοποιηθούν μικρότερα και περισσότερα σημεία στα οποία θα ικανοποιείται η συμβατότητα.

Βέβαια μια διακριτή προσομοίωση δεν μπορεί να αποδώσει με απόλυτη ακρίβεια την συμπεριφορά ενός συνεχούς μέσου,

ανεξαρτήτως του αριθμού των διακριτών μεταβλητών που χρησιμοποιούνται. Υπάρχει δηλαδή πάντοτε ένα σφάλμα, το οποίο όμως μπορεί να περιοριστεί και να γίνει αμελητέο και τοπικό με σωστή επιλογή των ιδιοτήτων των στοιχείων και κατάλληλη διακριτοποίηση. Ο περιορισμός των ιδιοτήτων των στοιχείων αποτελεί ένα από τα βασικότερα στάδια διατύπωσης μιας λύσης. Θα πρέπει τότε να γίνεται αυτό έτσι ώστε να ικανοποιούνται επαρκώς οι συνθήκες συμβιβαστότητας χωρίς να χρειαστεί να γίνει χρήση υπερβολικά μικρών στοιχείων. Η συμπεριφορά δε των στοιχείων αυτών καθορίζεται από συναρτήσεις οι οποίες ορίζουν τον τρόπο μεταβολής των τάσεων ή των μετατοπίσεων στο εσωτερικό τους. Με άλλα λόγια, προκαθορίζεται ο τρόπος συμπεριφοράς των διαφόρων μεταβλητών. Το αποτέλεσμα είναι ότι παρ' όλο που οι συνθήκες ισορροπίας και συμβιβαστικότητας ικανοποιούνται μόνο στους κόμβους, η προδιαγεγραμμένη συμπεριφορά στο εσωτερικό κάθε στοιχείου εξασφαλίζει ότι η συμβιβαστικότητα ικανοποιείται επαρκώς στο εσωτερικό και στα σύνορά τους.

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι απαιτείται προσοχή κατά την διακριτοποίηση της κατασκευής, καθώς επίσης και κατά την επιλογή της συνάρτησης που περιγράφει τη συμπεριφορά στο εσωτερικό κάθε στοιχείου. Ευνόητο είναι ότι μαζί με τη χρήση μεγαλύτερη αριθμού στοιχείων αυξάνεται και ο χρόνος υπολογισμού και το κόστος. Σε πολλές περιπτώσεις η βαθμιαία μεταβολή του μεγέθους των στοιχείων χρησιμοποιείται για να αποκτηθεί ακριβέστερη εικόνα της τοπικής συμπεριφοράς (σε συγκεντρώσεις τάσεων, σε ανοίγματα, κοντά σε σημείο εφαρμογής του εξωτερικού φορτίου κλπ.) Η βαθμιαία μεταβολή του μεγέθους των στοιχείων είναι ένας εφικτός τρόπος ελάττωσης του κόστους χωρίς να μειωθεί η ακρίβεια της λύσης του προβλήματος. Λόγω της μεγάλης ποικιλίας κατασκευών και φορτίσεων δεν είναι δυνατό να δοθεί γενικός κανόνας σχετικά με τον αριθμό ή το μέγεθος των στοιχείων ή τον τρόπο διακριτοποίησης που απαιτούνται για επαρκή ακρίβεια κι έτσι ανάλογα την περίπτωση ο τρόπος διακριτοποίησης πρέπει να βασίζεται στην εμπειρία συμπεριφοράς και μελέτης παρόμοιων κατασκευών.

Τα πλεονεκτήματα της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων έναντι των περισσοτέρων μεθόδων αριθμητικής ανάλυσης είναι :

- Καθολικότητα : Η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων μπορεί να εφαρμοστεί σε ευρεία γκάμα προβλημάτων όπως μετάδοση θερμότητας, ανάλυσης τάσεων, καλώδια με συγκεντρωμένα φορτία, προβλήματα στρέψης κ.α.
- Δεν υπάρχει περιορισμός στη γεωμετρία του προβλήματος
- Οι περιορισμοί και το φορτίο μπορούν να εφαρμοστούν σε κάθε τμήμα της κατασκευής
- Οι ιδιότητες των υλικών μπορούν να αλλάξουν από το ένα στοιχείο στο άλλο
- Διαφορετικά στοιχεία (σε συμπεριφορά και μαθηματική απεικόνιση) μπορούν να συνδυαστούν στο ίδιο μοντέλο
- Η διαδικασία προσέγγισης μπορεί εύκολα να βελτιωθεί με τη διαβάθμιση του πλέγματος των ΠΣ

Στη βιομηχανία η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων χρησιμοποιείται κυρίως στις φάσεις ανάλυσης και βελτιστοποίησης των δοκιμαστικών μοντέλων καθώς και να προσομοιωθούν σχέδια που δεν είναι κατάλληλα για δοκιμές, με τα ακόλουθα στάδια :

- Καθορισμός του προβλήματος
- Καθορισμός των κατάλληλων μαθηματικών μοντέλων
- Διακριτοποίηση του μοντέλου
- Χρήση του κατάλληλου λογισμικού για την επίλυση του προβλήματος
- Ανάλυση, εκτίμηση αποτελεσμάτων και επαναπροσδιορισμός μοντέλου αν χρειαστεί.

1.3 Η Εργαλειοθήκη του Matlab Sofea

Η εργαλειοθήκη Sofea δημιουργήθηκε το 2005 από τον Petr Krysl με σκοπό να επιλύει προβλήματα με τη μέθοδο των

πεπερασμένων στοιχείων. Γενικά έχει τη δυνατότητα να επιλύει προβλήματα που αφορούν:

1. Καλώδια με φορτίο
2. Θερμική διάχυση
3. Θερμική συναγωγή
4. Σώματα με υφιστάμενη τάση σε μία, δύο και τρεις διαστάσεις

1.4 Απαιτήσεις συστήματος για χρήση της εργαλειοθήκης Sofea

Η εργαλειοθήκη Sofea δεν έχει σημαντικές απαιτήσεις. Δύναται να λειτουργήσει σε περιβάλλον Windows, Linux , Solaris και Mac, που να μπορούν να λειτουργήσουν τη Matlab έκδοση 7.5 (2007b) και μεταγενέστερη, καθώς και το Microsoft office για να μπορεί να λειτουργήσει το Matlab notebook. Οι περισσότεροι σύγχρονοι Η/Υ είναι ικανοί να τη λειτουργήσουν χωρίς ιδιαίτερη δυσκολία.

1.5 Εγκατάσταση του προγράμματος

Η εγκατάσταση της εργαλειοθήκης sofesa δεν απαιτεί κάποιου είδους εγκατάστασης στον Η/Υ. Από την ιστοσελίδα

http://hogwarts.ucsd.edu/~pkrysl/sofea/sofea_publish.html

Είναι διαθέσιμο το αναλυτικό εγχειρίδιο χρήσης του sofea (A Pragmatic Introduction to the Finite Element Method for Thermal and Stress Analysis with the Matlab toolbox Sofea) και ο φάκελος της εργαλειοθήκης. Το φάκελο αυτόν, απλά αρκεί να τον αντιγράψουμε στο φάκελο “toolbox” στο φάκελο της Matlab που έχουμε εγκαταστήσει στον υπολογιστή μας, και το πρόγραμμα μπορεί να ξεκινήσει και από τα toolbox μέσα από τη Matlab είτε από το αρχείο start.bat που υπάρχει στο φάκελο της εργαλειοθήκης. Ο φάκελος περιλαμβάνει μεταξύ άλλων:

1. Μαθήματα σχετικά με τον κώδικα
2. Ευρεία γκάμα παραδειγμάτων
3. Κώδικες πλεγμάτων

1.6 Μαθήματα σχετικά με τον κώδικα

Περιέχονται τα κομμάτια του κώδικα της εργαλειοθήκης με την περιγραφή τους και την χρησιμότητά τους. Ο χρήστης έχει τη δυνατότητα να εξερευνήσει το πρόγραμμα σε όλη τη γκάμα του. Έχει οδηγίες και περιγραφές για τα τμήματα εργασίας όσο αφορά τη χρήση του προγράμματος:

- Δημιουργία κόμβων και τμημάτων τους
- Δημιουργία σχήματος πλεγμάτων
- Διαμόρφωση των γραφικών για το πρόβλημα
- Τρόπο επιλογής υλικών που επιθυμούμε
- Διαμόρφωση φορτίων στους κόμβους
- Δημιουργία πινάκων για φορτίσεις 1D, 2D, 3D
- Αποθήκευση διαφόρων ιδιοτήτων των στοιχείων (πχ ακαμψία, μάζα)

1.7 Γκάμα Παραδειγμάτων

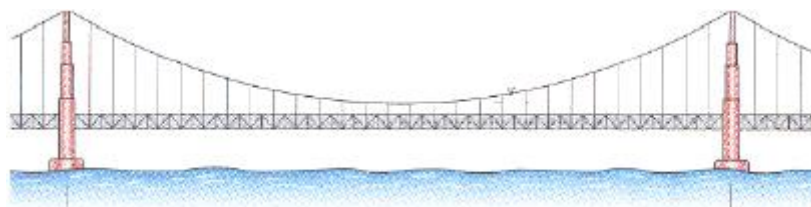
Όπως θα δούμε κάποια από αυτά στη συνέχεια, ο φάκελος του προγράμματος περιέχει αρκετά παραδείγματα για να κατατοπιστεί ο χρήστης, να κατανοήσει τη λειτουργία του και να εξερευνήσει όλες τις δυνατότητες του προγράμματος. Περιέχει :

- 34 παραδείγματα μετάδοσης θερμότητας
- 10 καλωδίου με φορτίο
- 3 παραδείγματα εφαρμογής φορτίου σε 1-Δ
- 21 εφαρμογές φορτίου σε 2-Δ
- 11 εφαρμογές φορτίου σε 3-Δ
- 12 παραδείγματα πλεγμάτων
- 4 παραδείγματα θερμικής-μηχανικής μεταβολή

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΤΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ SOFEA ΣΕ ΚΑΛΩΔΙΟ ΜΕ ΦΟΡΤΙΟ

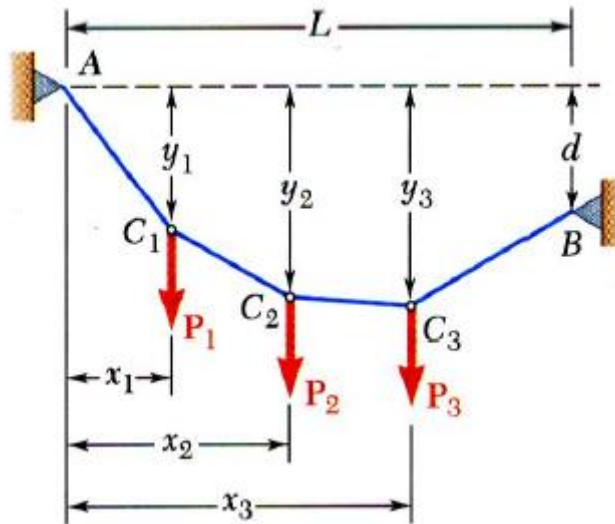
2.1 Καλώδια με φορτίο



Εικόνα 2.1

Τα καλώδια εφαρμόζονται σαν δομικά στοιχεία σε περιπτώσεις όπως κρεμαστές γέφυρες, γραμμές μεταφοράς ηλεκτρικής ενέργειας, στήριξη ψηλών πύργων. Αντιλαμβανόμαστε ότι είναι αναγκαίο το καλώδιο να συγκρατεί τις όποιες δυνάμεις, διαμήκεις και εγκάρσιες ασκούνται σε αυτό. Έτσι σκοπός της ανάλυσης μιας περίπτωσης καλωδίου με συγκεντρωμένο φορτίο είναι να προσδιορίσουμε την τελική μορφή του καλωδίου αφού έχουν ασκηθεί οι όποιες τάσεις σε αυτό.

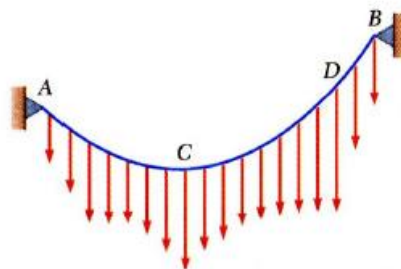
Στην εικόνα 2.2 βλέπουμε ένα παράδειγμα καλωδίου με ασκούμενα 3 συγκεντρωμένα φορτία P_1, P_2, P_3 στα σημεία C_1, C_2, C_3 αντίστοιχα.



Εικόνα 2.2

Στην περίπτωση αυτή, των συγκεντρωμένων φορτίων για την ανάλυση του προβλήματος είναι δοσμένες οι κατακόρυφες γραμμές εφαρμογής των φορτίων, το βάρος του καλωδίου θεωρείται αμελητέο, το καλώδιο είναι εύκαμπτο (η αντοχή σε κάμψη είναι μικρή) και τμήματα του καλωδίου μεταξύ των φορτίων μπορούν να αντιμετωπιστούν σαν μέλη δύο δυνάμεων.

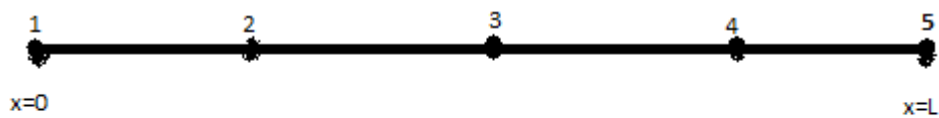
Στην εικόνα 2.3 βλέπουμε καλώδιο με κατανεμημένο φορτίο :



Εικόνα 2.3

Στην περίπτωση αυτή , του κατανεμημένου φορτίου (όπως το παράδειγμα εφαρμογής στο sofea που θα δούμε πιο κάτω) το καλώδιο οδηγείται σε καμπύλη μορφή και η εσωτερική δύναμη του καλωδίου είναι μια εφελκυστική δύναμη με διεύθυνση εφαπτόμενη στην καμπύλη.

Χρησιμοποιώντας την μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων, χωρίζουμε το καλώδιο σε υποδιαστήματα –τα πεπερασμένα στοιχεία- τα οποία ενώνονται στους κόμβους, δημιουργώντας έτσι το πλέγμα των πεπερασμένων στοιχείων. Μετά την μοντελοποίηση αυτή, το καλώδιο, θα είναι έτσι (με τέσσερα υποδιαστήματα και πέντε κόμβους) :



Εικόνα 2.4

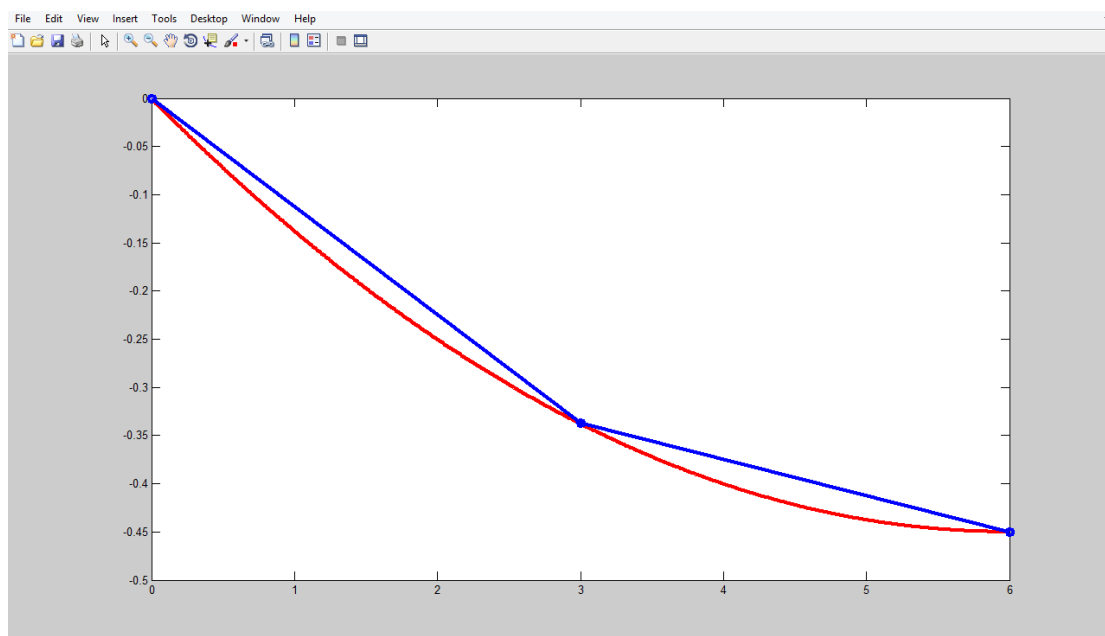
Με την εκχώρηση των τιμών που μας ενδιαφέρουν όσο αφορά στο πλήθος των κόμβων, την δύναμη, το μήκος το πρόγραμμα sofea είναι κατάλληλο να μας παρέχει γραφικά την αναλυτική λύση και την γραμμική της παρεμβολή σε δυσδιάστατο σύστημα συντεταγμένων .

2.2 Εφαρμογή του sofea σε καλώδια με φορτίο

2.2.1 Παράδειγμα με κατανεμημένο φορτίο

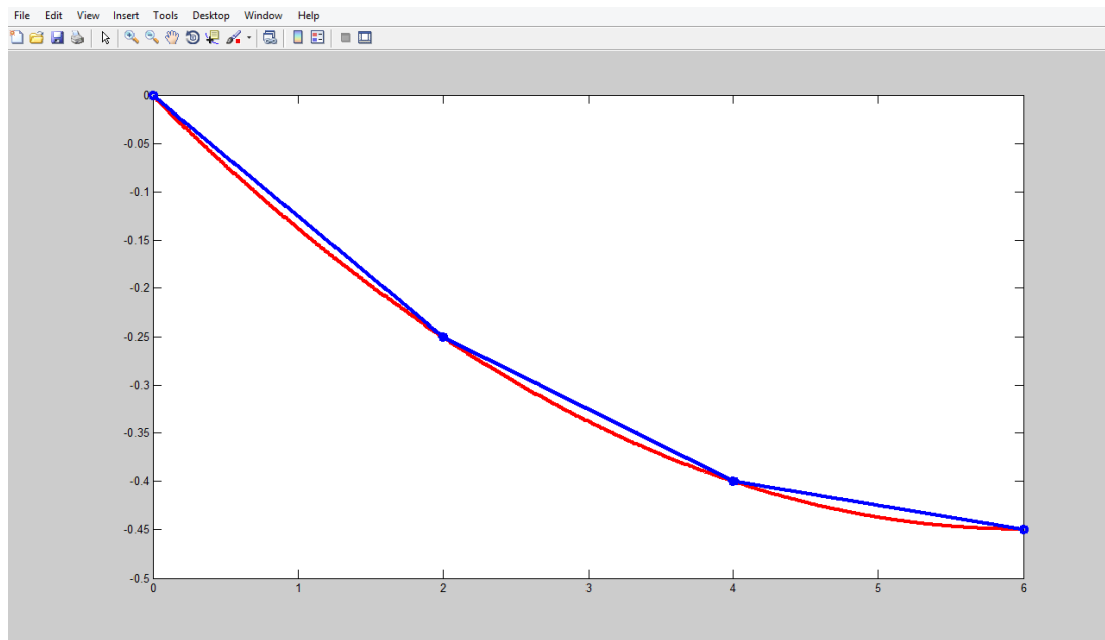
Θα πάρουμε το παράδειγμα «w1» για καλώδιο υπό φόρτιση. Το αριστερό άκρο θεωρείται σταθερό. Το δεξί μπορεί να κινηθεί μόνο στον κάθετο άξονα.

Έτσι λοιπόν, με μήκος $L=6\text{ m}$, δύο πεπερασμένα στοιχεία, και -0.1 N/m εφαρμοζόμενη δύναμη :



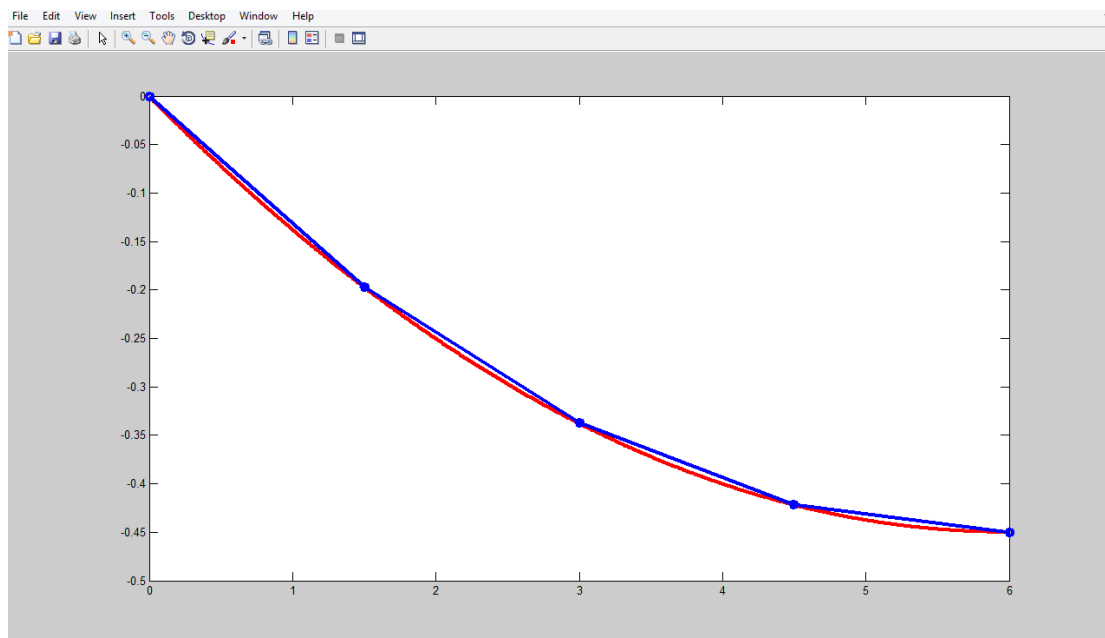
Εικόνα 2.4

Στο ίδιο μήκος με τρία στοιχεία :



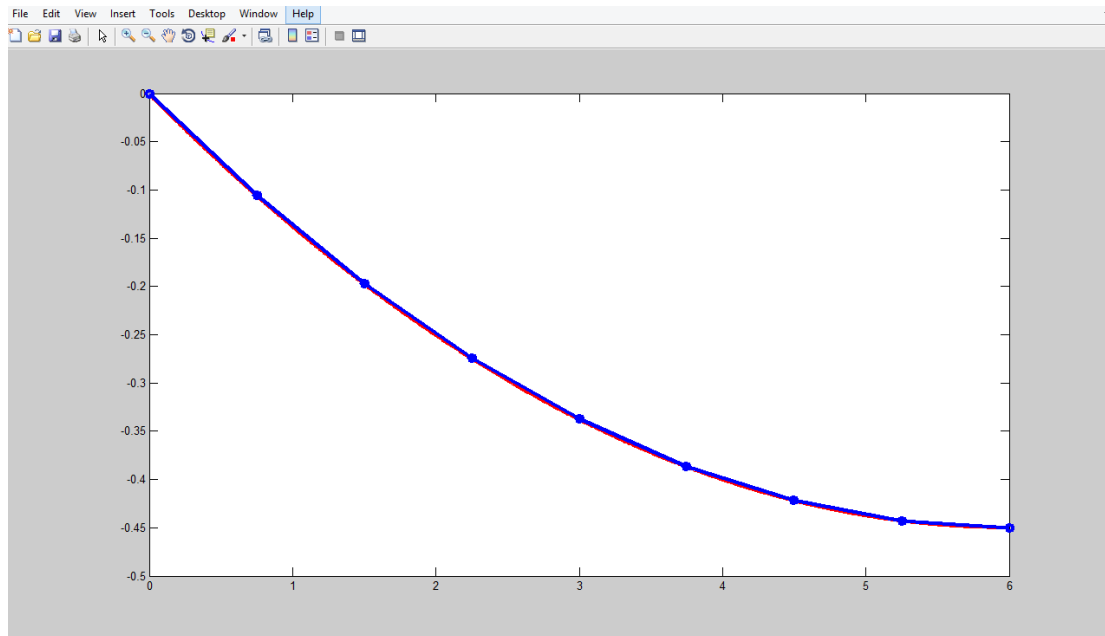
Εικόνα 2.5

Στο ίδιο μήκος, με τα διπλάσια στοιχεία (τέσσερα αντί 2) :



Εικόνα 2.6

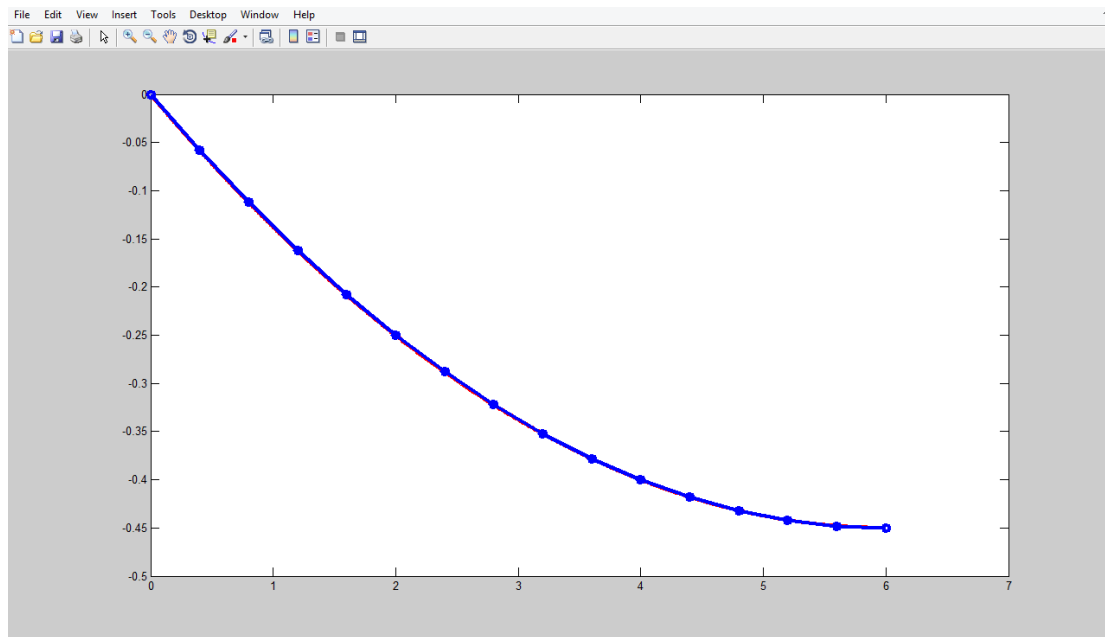
Βλέπουμε ήδη πως βελτιώθηκε η ανάλυση με μεγαλύτερο αριθμό πεπερασμένων στοιχείων: Ήδη με τα διπλάσια των προκαθορισμένων τιμών του προγράμματος έγινε αρκετά πιο προσδιοριστική και κατατοπιστική. Έτσι, με 8 στοιχεία :



Εικόνα 2.7

Βλέπουμε ότι η γραμμική παρεμβολή σχεδόν ταυτίζεται με την κανονική παραμόρφωση, κάνοντας έτσι τα αποτελέσματα της γραμμικής παρεμβολής να έχουν μικρότερη απόκλιση από την πραγματικότητα, σε αντίθεση με την πρώτη περίπτωση των 2 στοιχείων που θα είχαμε μεγαλύτερη απόκλιση.

Αυτό βέβαια σημαίνει περισσότερους υπολογισμούς, άρα και περισσότερο ζητούμενο χρόνο. Έτσι πρέπει η επιλογή του αριθμού των κόμβων να συνδυάζει τόσο ακριβή προσέγγιση της λύσης όσο και λιγότερους περαιτέρω υπολογισμούς. Για παράδειγμα, με 15 στοιχεία :

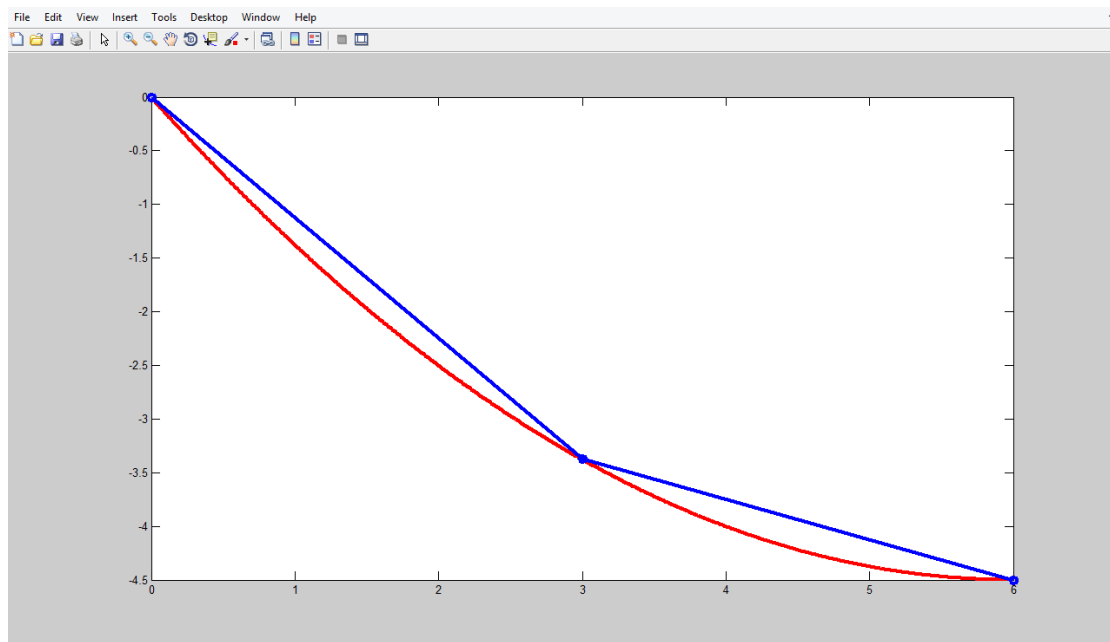


Εικόνα 2.8

Βλέπουμε ότι η γραμμική παρεμβολή πέφτει σχεδόν πάνω στην κανονική λύση, αρά 15 στοιχεία απαιτούν παραπάνω υπολογισμούς για δεκτή λύση. Από πλευράς προσέγγισης της λύσης βλέπουμε ότι είναι βέλτιστο να χρησιμοποιούμε πολλά στοιχεία, αν όμως μας ενδιαφέρει και το κόστος των υπολογισμών, προφανώς επιλέγουμε να σταθμίσουμε τον αριθμό των στοιχείων.

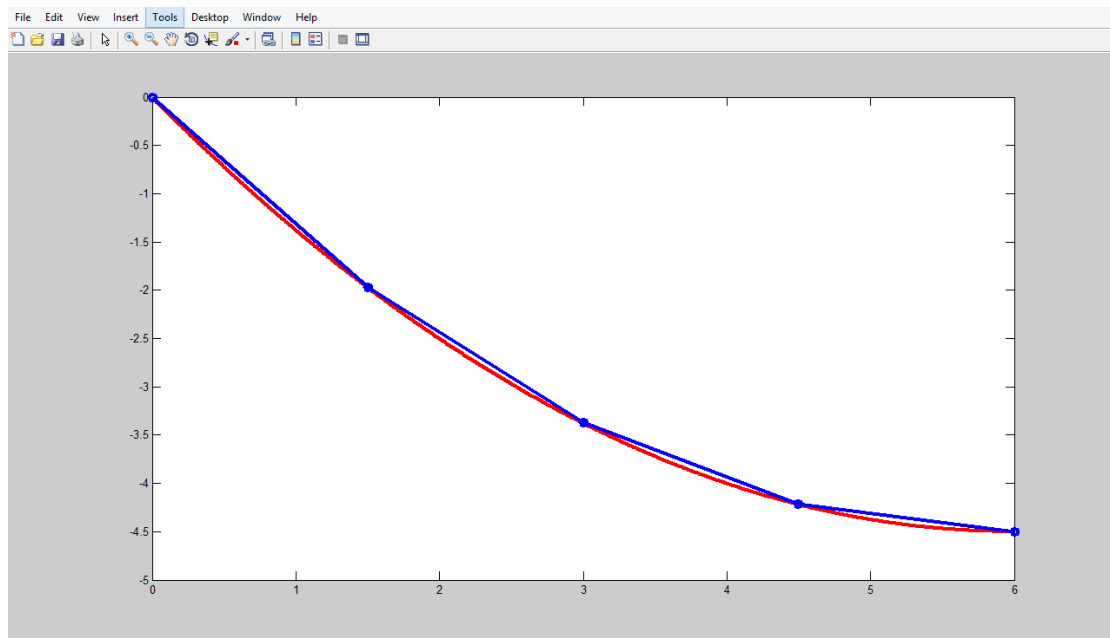
Ακολουθούν περαιτέρω παραδείγματα

Μήκος 6m, $q=-1\text{N/m}$, $n=2$ (# στοιχείων) :



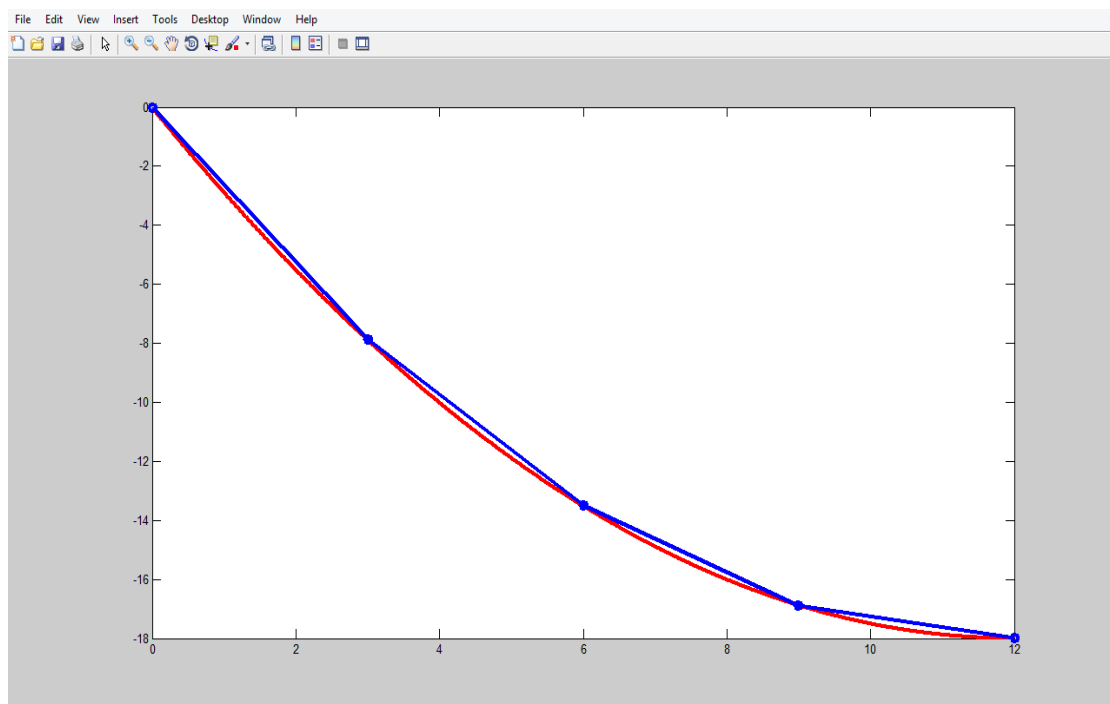
Εικόνα 2.9

Μήκος 6m, $q=-1\text{N/m}$, $n=4$:



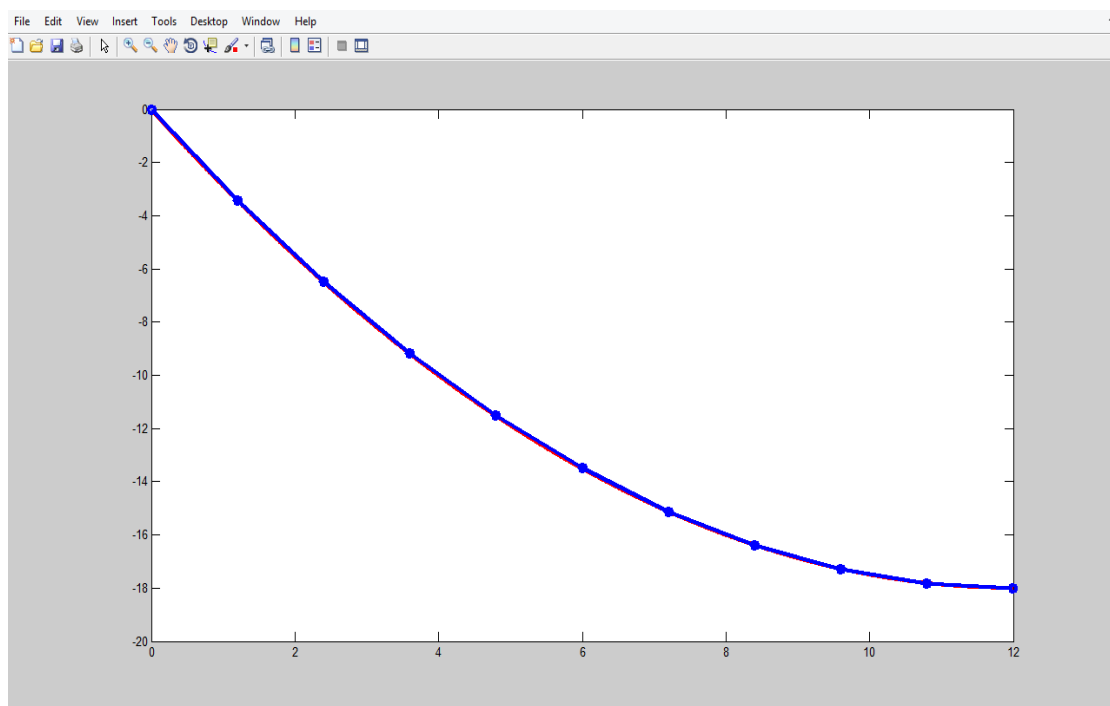
Εικόνα 2.10

Μήκος 12m, $q=-1$ N/m, $n=4$:



Εικόνα 2.11

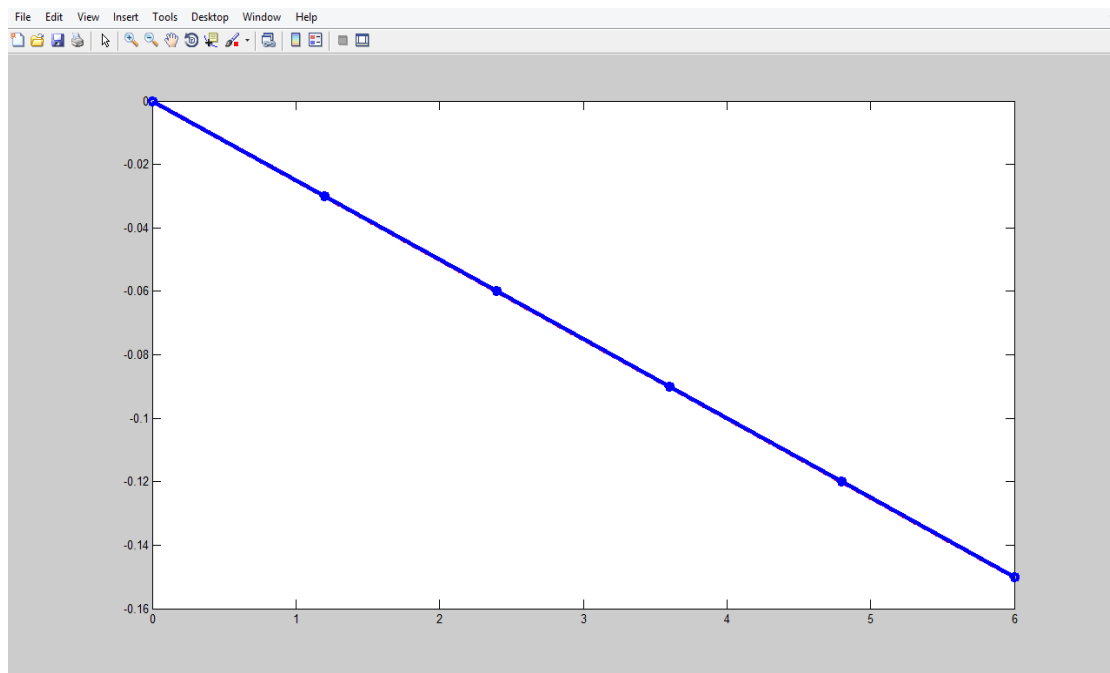
Μήκος 12m, $q=-1$ N/m, $n=10$:



Εικόνα 2.12

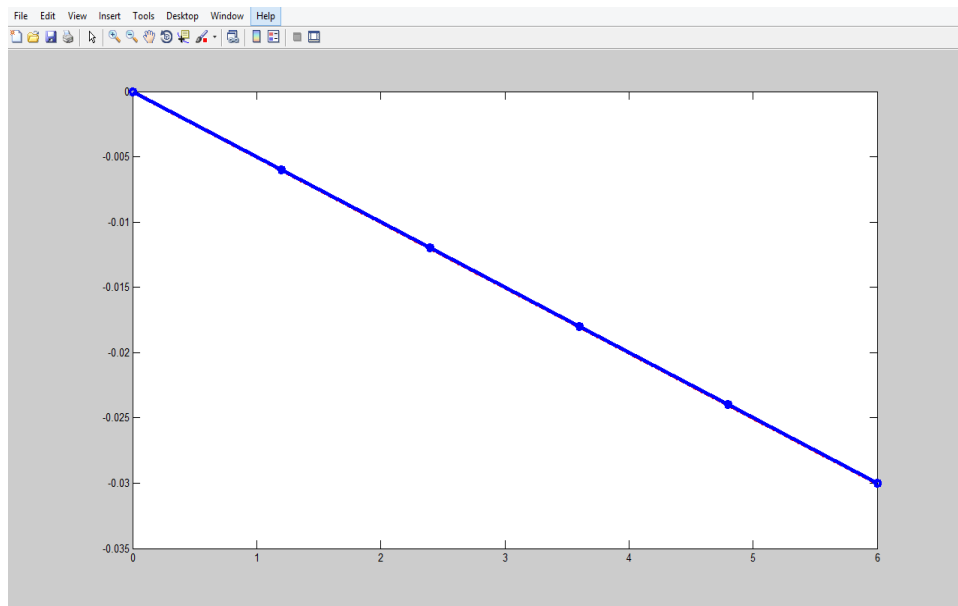
2.2.2 Παράδειγμα με συγκεντρωμένο φορτίο

Χρησιμοποιώντας το παράδειγμα “w2” μπορεί ο χρήστης να προσδιορίσει λύσεις με συγκεντρωμένο φορτίο στο δεξί άκρο του καλωδίου. Έτσι, για ίδιο μήκος, φόρτιση και αριθμό στοιχείων με πριν αλλά τη φόρτιση συγκεντρωμένη στο δεξί άκρο (Μήκος 6m, $q=-0.01$ N, $n=5$) :



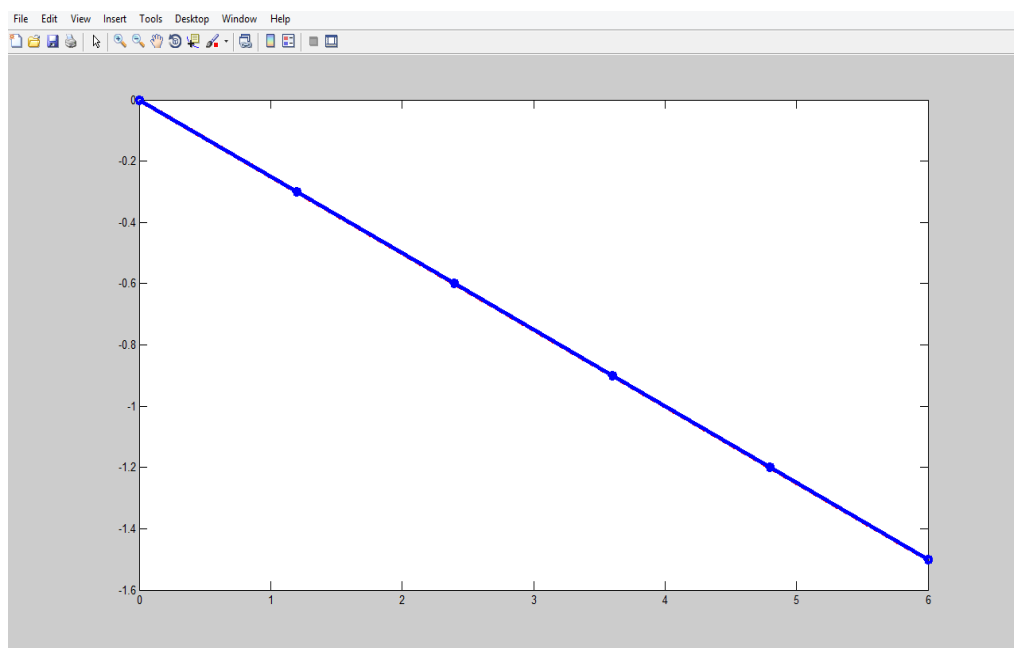
Εικόνα 2.13

Στο ίδιο μήκος, ίδιο αριθμό πεπερασμένων στοιχείων και διπλάσια φόρτιση ($q=-0.02$ N/m) :



Εικόνα 2.14

Τέλος στο ίδιο μήκος ($L=6m$) με ίδιο αριθμό πεπερασμένων στοιχείων και $q=-1 \text{ N}$:



Εικόνα 2.15

Στην περίπτωση αυτή, βλέπουμε πως του ότι το καλώδιο παραμένει σε ευθεία και δεν καμπυλώνει, η ανάλυση γίνεται εύκολη και ακριβής με λίγα στοιχεία.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

ΤΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ SOFEA ΣΤΗ ΜΕΤΑΔΟΣΗ ΘΕΡΜΟΤΗΤΑΣ

3.1 Θερμότητα και μεταφορά θερμότητας

Η θερμότητα ορίζεται ως η μορφή ενέργειας που μεταδίδεται μέσα από το όριο ενός θερμοδυναμικού συστήματος συγκεκριμένης θερμοκρασίας προς ένα άλλο σύστημα – ή στο περιβάλλον- που βρίσκεται σε χαμηλότερη θερμοκρασία, λόγω ακριβώς αυτής της θερμοκρασιακής διαφοράς των δύο συστημάτων.

Η θερμότητα μεταδίδεται πάντα από σύστημα μεγαλύτερης προς σύστημα χαμηλότερης θερμοκρασίας. Η μοναδική αιτία αυτής της μεταφοράς ενέργειας είναι η διαφορά θερμοκρασίας. Η θερμότητα μπορεί να οριστεί μόνο στα όρια του συστήματος, κατά τη διαδικασία της μεταφοράς της από ένα σύστημα σε ένα άλλο και για όσο χρόνο διαρκεί η μεταφορά.

Μετάδοση θερμότητας είναι η μεταφορά ενέργειας λόγω θερμοκρασιακής διαφοράς.

Έτσι όταν υπάρχει θερμοκρασιακή διαφορά μεταξύ δύο εργαζόμενων μέσων ή δύο συστημάτων παρατηρείται μετάδοση θερμότητας από το θερμότερο προς το ψυχρότερο. Υπάρχουν τρεις διαφορετικοί μηχανισμοί με τους οποίους γίνεται αυτή η μεταφορά ενέργειας. Ο πρώτος μηχανισμός αναφέρεται σε ακίνητο μέσο (στερεό, υγρό ή αέριο) και ονομάζεται αγωγή. Ο δεύτερος μηχανισμός αναφέρεται σε μετάδοση θερμότητας μεταξύ μιας στερεής επιφάνειας και ενός κινούμενου ρευστού και ονομάζεται συναγωγή. Ο τρίτος μηχανισμός στηρίζεται στο γεγονός ότι κάθε σώμα πεπερασμένης

θερμοκρασίας εκπέμπει ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία. Έτσι μεταξύ δύο σωμάτων διαφορετικής θερμοκρασίας θα υπάρχει μετάδοση θερμότητας, χωρίς την ανάγκη παρουσίας κάποιου ενδιάμεσου σώματος, με την εφαρμογή του τρίτου μηχανισμού, της θερμικής ακτινοβολίας.

3.1.1 Αγωγή

Στην αγωγή έχουμε μεταφορά ενέργειας από σωματίδια μεγαλύτερης ενέργειας σε σωματίδια χαμηλότερης ενέργειας ενός υλικού, λόγω αλληλεπιδράσεων μεταξύ των σωματιδίων. Όταν δύο σώματα, ή σωματίδια, με διαφορετικές θερμοκρασίες έλθουν σε άμεση επαφή, πραγματοποιείται μετάδοση θερμότητας από το θερμότερο προς το ψυχρότερο. Η θερμοκρασία είναι μέτρο κινητικής ενέργειας της τυχαίας κίνησης των μορίων ενός σώματος. Αύξηση της θερμοκρασίας σημαίνει αύξηση της κινητικής ενέργειας. Τα μόρια περιοχής μεγάλης θερμοκρασίας συγκρούονται με τα γειτονικά τους, μικρότερης θερμοκρασίας και μεταφέρουν σε αυτά ένα μέρος της κινητικής τους ενέργειας. Ο μηχανισμός αυτός μετάδοσης ενέργειας ονομάζεται αγωγή θερμότητας. Αποτελεί το μηχανισμό μετάδοσης θερμότητας στα στερεά σώματα. Στα μέταλλα συμβάλλουν στην αγωγή θερμότητας και τα ελεύθερα ηλεκτρόνια. Μαθηματικά η μετάδοση θερμότητας με αγωγή περιγράφεται από τον εμπειρικό νόμο Fourier σύμφωνα με τον οποίο : Η πυκνότητα θερμορροής, q [W/m^2], που οφείλεται στην αγωγή θερμότητας είναι ανάλογη και αντιθέτου πρόσημου προς την κλίση της θερμοκρασίας. Αν k ο συντελεστής αναλογίας, τότε για μονοδιάστατο πρόβλημα: $q = -k \cdot dT/dx$. Η σταθερά αναλογίας k , ονομάζεται τηςτελεστής θερμικής αγωγιμότητας, έχει διαστάσεις $W/(m \cdot K)$ και είναι χαρακτηριστικό του υλικού.

3.1.2 Συναγωγή

Η μετάδοση θερμότητας με συναγωγή είναι σύνθεση δύο μηχανισμών. Εκτός από τη μεταφορά ενέργειας με αγωγή μεταξύ των μορίων έχουμε και μεταφορά ενέργειας λόγω της μακροσκοπικής κίνησης του ρευστού. Ας θεωρήσουμε ένα τυπικό πρόβλημα ψύξης με συναγωγή. Έστω θερμό σώμα θερμοκρασίας T_1 που γύρω του ρέει ψυχρό ρευστό θερμοκρασίας T_2 . Το ρευστό που βρίσκεται σε επαφή με την επιφάνεια του σώματος σχηματίζει ένα λεπτό στρώμα το οποίο ονομάζεται οριακό στρώμα. Θερμότητα μεταφέρεται με αγωγή στο οριακό αυτό στρώμα και στη συνέχεια έχουμε, λόγω της κίνησης του ρευστού μεταφορά μάζας-ενέργειας από το λεπτό οριακό στρώμα στην υπόλοιπη μάζα του ρευστού όπου η ενέργεια διαχέεται με το μηχανισμό της αγωγής. Ανάλογα με τη ροή του ρευστού, η συναγωγή διακρίνεται σε:

- Εξαναγκασμένη συναγωγή, αν η ροή προκαλείται από εξωτερικά μέσα(π.χ. ανεμιστήρες, αντλίες κλπ)
- Ελεύθερη (ή φυσική) συναγωγή, όταν η ροή προκαλείται από τις δυνάμεις άνωσης που οφείλονται στις διαφορές πυκνότητας λόγω των θερμοκρασιακών διαφορών στο ρευστό
- Συνδυασμένη συναγωγή, όταν συνυπάρχουν και οι δύο προηγούμενες μορφές. Αυτό συμβαίνει όταν η ταχύτητα του ρευστού, λόγω της εξαναγκασμένης κυκλοφορίας, είναι μικρή, ενώ οι δυνάμεις της άνωσης μεγάλες.

Ανεξάρτητα από τον τύπο της συναγωγής, αυτή περιγράφεται μαθηματικά από τον νόμο ψύξης του Newton $q=h(T_1-T_2)$. Η πυκνότητα θερμοροής, q δηλαδή, είναι ανάλογη της διαφοράς θερμοκρασιών επιφάνειας T_1 και ρευστού T_2 . Ο συντελεστής, αναλογίας h ονομάζεται συντελεστής συναγωγής και έχει

διαστάσεις $W/(m^2K)$. Ο συντελεστής αυτός εμπεριέχει όλες τις παραμέτρους που επηρεάζουν την συναγωγή.

3.1.3 Ακτινοβολία

Όλα τα σώματα σε θερμοκρασία μεγαλύτερη από τη θερμοκρασία του απόλυτου μηδενός (0 K) εκπέμπουν ενέργεια υπό μορφή ακτινοβολίας. Η ενέργεια που ακτινοβολείται μπορεί να θεωρηθεί ότι μεταφέρεται με ηλεκτρομαγνητικά κύματα, σύμφωνα με την κλασική ηλεκτρομαγνητική θεωρία, ή από φωτόνια (φορείς μεταφοράς ενέργειας) σύμφωνα με την κβαντομηχανική. Συνήθως για την εξήγηση των φαινομένων της ακτινοβολίας ακολουθείται η ηλεκτρομαγνητική θεωρία. Η ένταση της ροής ενέργειας που εκπέμπεται εξαρτάται από τη θερμοκρασία του σώματος και τη φύση της επιφάνειάς του. Σε αντίθεση με τη αγωγή και τη συναγωγή όπου για τη μεταφορά της ενέργειας απαιτείται η ύπαρξη μέσου, στην ακτινοβολία κάτι τέτοιο δεν απαιτείται. Στο κενό μάλιστα η ακτινοβολία μεταφέρεται πιο αποτελεσματικά.

Η μέγιστη πυκνότητα θερμορροής εκπέμπεται από ιδεατό σώμα που ονομάζεται μέλαν σώμα και δίνεται από το νόμο των Stefan-Boltzmann :

$$q = \sigma T^4$$

όπου T [K] είναι η απόλυτη θερμοκρασία του σώματος και σ είναι η σταθερά των Stefan-Boltzmann ($\sigma = 5,67 \times 10^{-8} \text{ W/m}^2\text{K}^4$).

Η θερμοροή που εκπέμπεται από το πραγματικό σώμα δίνεται από τη σχέση:

$$Q = \epsilon \sigma T^4$$

Όπου ϵ ο συντελεστής εκπομπής ($0 < \epsilon < 1$).

Αντίστροφα, η ακτινοβολία που απορροφά ένα σώμα από την ακτινοβολία των σωμάτων που το περιβάλλουν είναι :

$$q_{\infty} = \alpha q_{in}$$

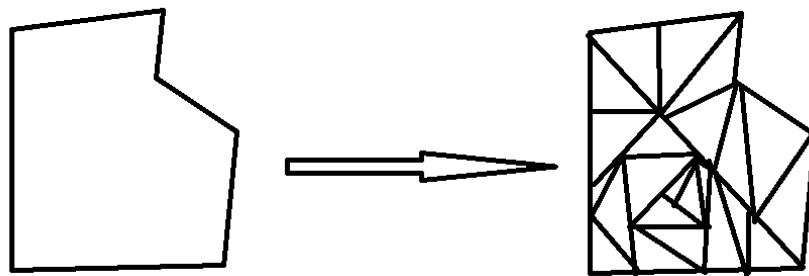
όπου α ο συντελεστής απορρόφησης ($0 < \alpha < 1$).

Συχνά η ακτινοβολούμενη θερμότητα από ψυχρά σώματα μπορεί να αγνοηθεί συγκρινόμενη με την αγωγή και τη συναγωγή. Οι διαδικασίες όμως μεταφοράς θερμότητας που λαμβάνουν χώρα σε υψηλές θερμοκρασίες περικλείουν σημαντικό ποσοστό ακτινοβολίας.

3.2 Μέθοδος Πεπερασμένων στοιχείων και Μεταφορά Θερμότητας

Στην περίπτωση της μετάδοσης θερμότητας τα πεπερασμένα στοιχεία είναι διαδοχικά τμήματα της επιφάνειας του αντικειμένου που εξετάζουμε, συνδεδεμένα με κόμβους. Στη διακριτοποίηση αυτή του προβλήματος, πρέπει πάντοτε να τοποθετούνται κόμβοι στα όρια του φυσικού σώματος και στα σύνορα όπου έχουμε διαφορετικά υλικά ή κενά. Εφόσον θέλουμε να βρούμε την κατανομή της μεταβλητής μέσα στο σώμα, γι αυτό θεωρούμε ότι η κατανομή της μεταβλητής αυτής μπορεί να προσεγγιστεί από μια απλή συνάρτηση για κάθε πεπερασμένο στοιχείο, που δεν είναι τίποτα άλλο παρά μια συνάρτηση των τιμών της μεταβλητής που μελετάμε στους κόμβους του στοιχείου. Με αυτόν τον τρόπο συγκεντρώνουμε ένα πλήθος εξισώσεων, μετά από την εφαρμογή σε κάθε στοιχείο, με αγνώστους τις τιμές της μεταβλητής στους κόμβους των στοιχείων. Εφαρμόζοντας τις οριακές συνθήκες του φυσικού προβλήματος (πχ γνωστές θερμοκρασίες σε εξωτερικές επιφάνειες) το σύστημα των εξισώσεων μπορεί να λυθεί και να βρεθεί τελικά η κατανομή της μεταβλητής μέσα στο σώμα. Συνήθως επιλέγουμε τα πεπερασμένα στοιχεία να έχουν τριγωνικό σχήμα και οι κορυφές τους είναι οι κόμβοι.

Ακολουθεί παράδειγμα διακριτοποίησης ενός σώματος σε τριγωνικά πεπερασμένα στοιχεία :



Εικόνα 3.1

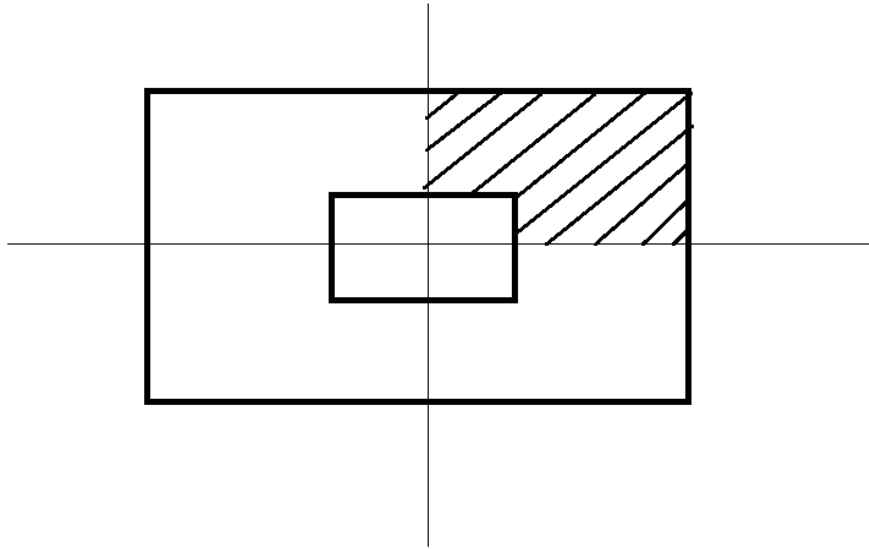
Βλέπουμε στην εικόνα 3.1 ένα παράδειγμα διακριτοποίησης μιας τυχαίας επιφάνειας σε πολλά τριγωνικά μέρη (τα πεπερασμένα στοιχεία). Όσο αυξάνεται ο αριθμός των στοιχείων αυτών βελτιώνεται η ακρίβεια των υπολογισμών εις βάρος όμως του υπολογιστικού κόστους.

3.3 Εφαρμογή Sofea Στη Μετάδοση Θερμότητας

3.3.1 Το παράδειγμα lshape1

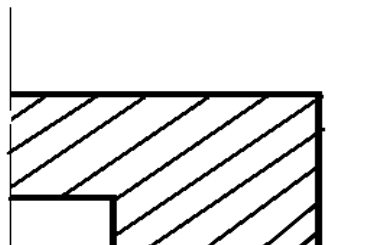
Ως πρώτο παράδειγμα, θα πάρουμε έναν τετραγωνικό σωλήνα ισотροπικού υλικού με παχύ τοίχωμα (εικόνα 3.1). Θεωρούμε εξωτερική θερμοκρασία ίση με 0 και την εσωτερική επιφάνεια πλήρως μονωμένη. Για ευκολία θα αναλύσουμε το $\frac{1}{4}$ του σωλήνα θεωρώντας άξονες συμμετρίας και οριζόντιο και κάθετο όπως επίσης και ότι δεν έχουμε

μεταφορά θερμότητας από τα επίπεδα συμμετρίας που δημιουργούνται.



Εικόνα 3.2

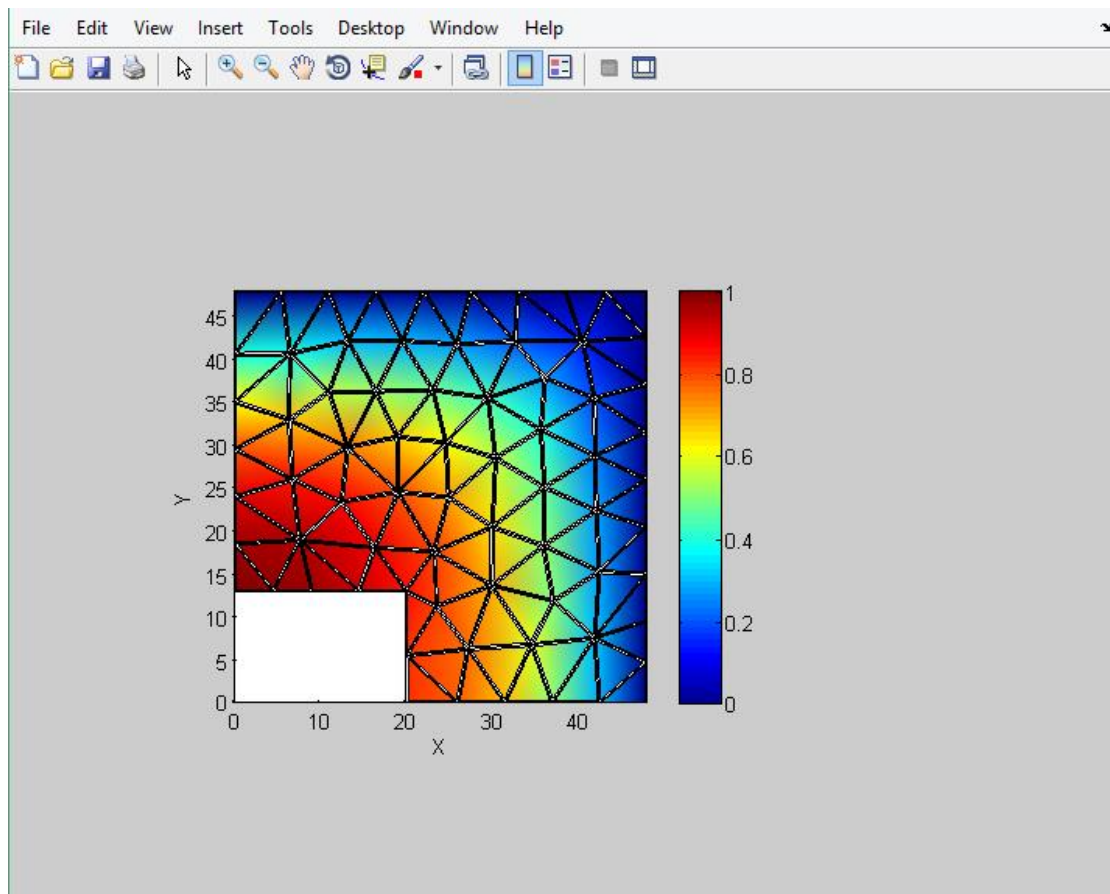
Επίσης θεωρούμε ότι υπάρχει κατανεμημένη πηγή θερμότητας πάνω στο υλικό. Η επιφάνεια μελέτης μας γίνεται :



Εικόνα 3.3

Με τη βοήθεια του *sofea*, το τμήμα αυτό χωρίζεται σε τριγωνικές επιφάνειες (τα πεπερασμένα στοιχεία) καθώς και στους απαραίτητους κόμβους (λόγω σχήματος τουλάχιστον 6, όσες και οι γωνίες).

Έτσι, για πυκνότητα θερμορροής ίση με $q=0.011 \text{ q [W/m}^2\text{]}$:

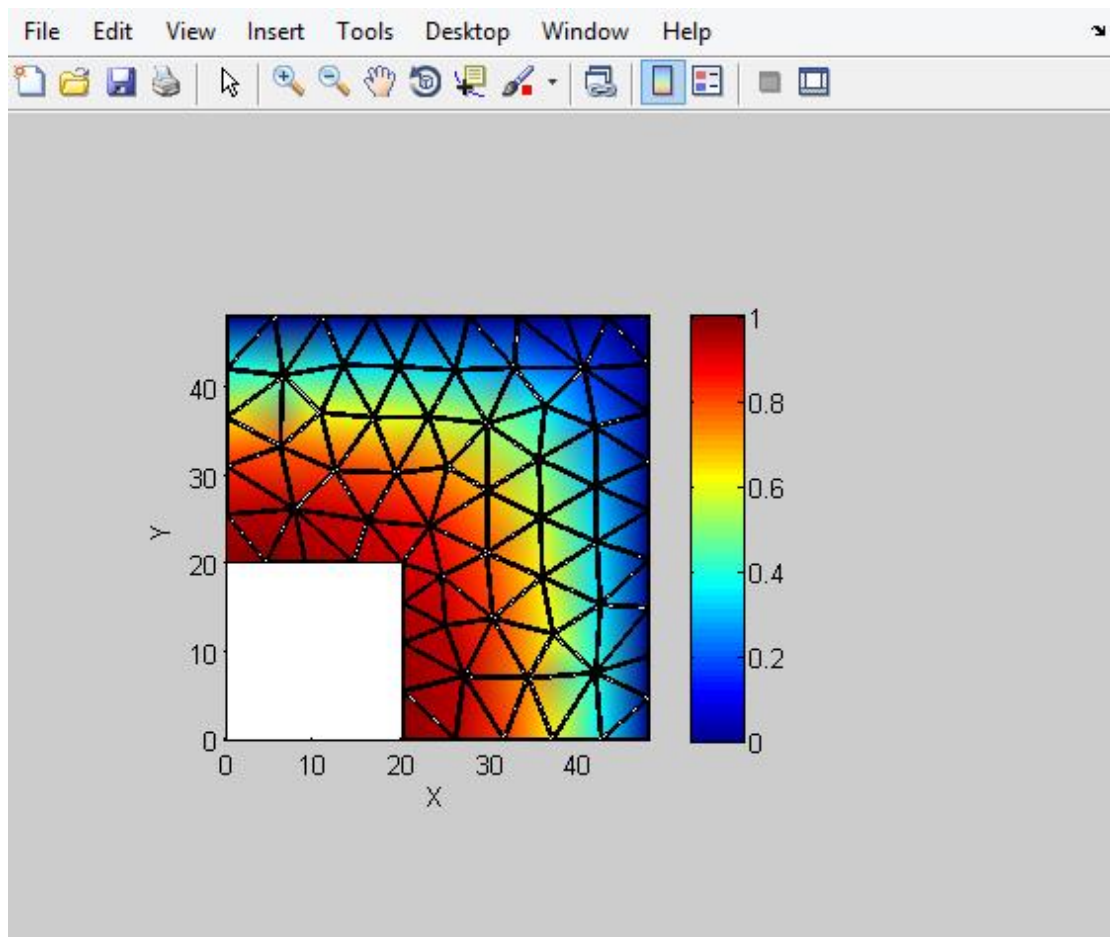


Εικόνα 3.4

Βλέπουμε γραφικά ότι υπάρχει μεγαλύτερη συγκέντρωση θερμότητας στα στοιχεία κοντά στην επιφάνεια που υπάρχει θερμότητα, ενώ τα στοιχεία που βρίσκονται στην εξωτερική πλευρά του σωλήνα παραμένουν σε μηδενική θερμοκρασία. Έτσι ο χρήστης έχει τη δυνατότητα να δει γραφικά την διάχυση της θερμότητας στο τοίχωμα.

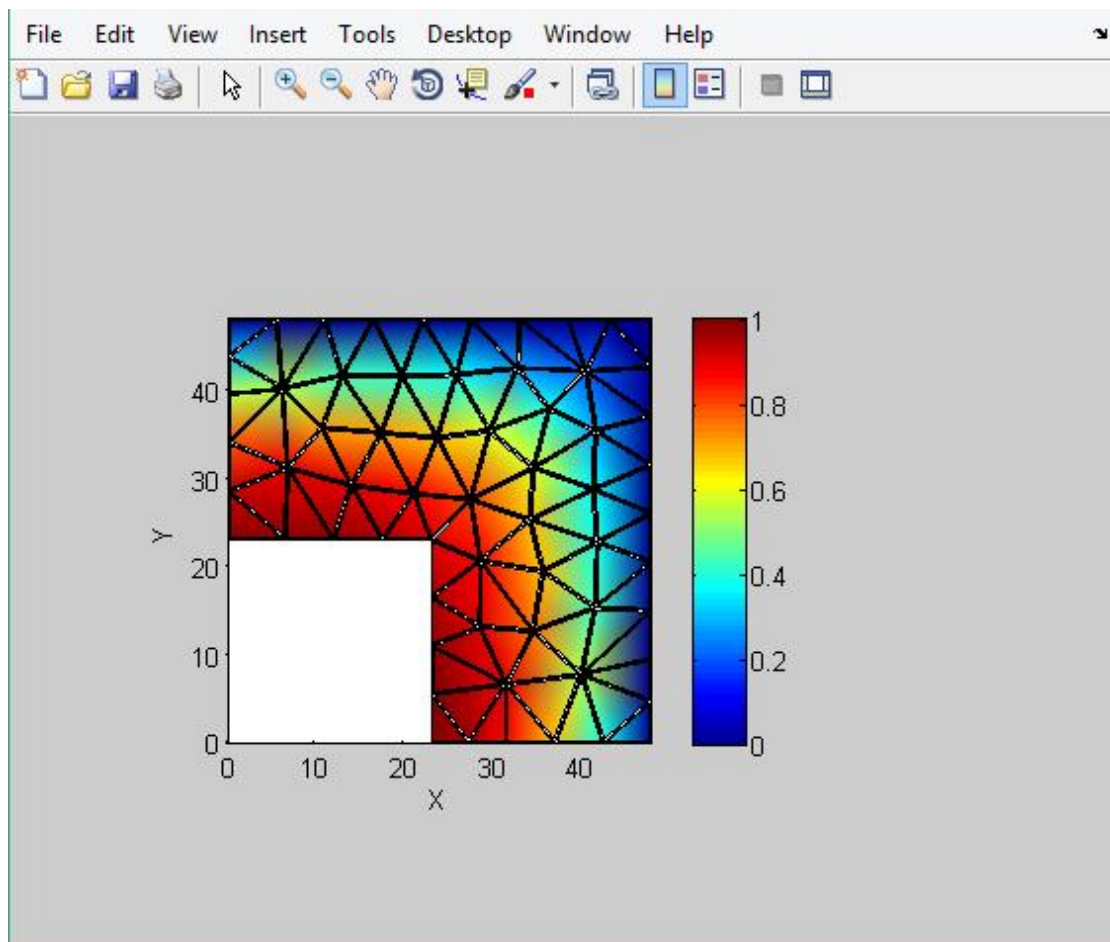
Στο παράδειγμα αυτό μπορούμε να αλλάξουμε και τις διαστάσεις του τοιχώματος, προσαρμόζοντάς το στις διαθέσιμες επιλογές του χρήστη. Αν για παράδειγμα ζητούμενο είναι να επιλεγεί σωλήνας με το λεπτότερο τοίχωμα για ελαχιστοποίηση του κόστους, με κατάλληλη αλλαγή δεδομένων στον κώδικα μπορεί να πάρει περιπτώσεις ώστε να καταλήξει στην βέλτιστη. Το πάχος του παραδείγματος είναι 0.35 m στον κατακόρυφο άξονα και 0.28 m στον οριζόντιο. Ακολουθούν παραδείγματα διαφορετικού πάχους.

Για $D_1=0.28$ m στον κατακόρυφο και $D_2= 0.28$ m στον οριζόντιο :



Εικόνα 3.5

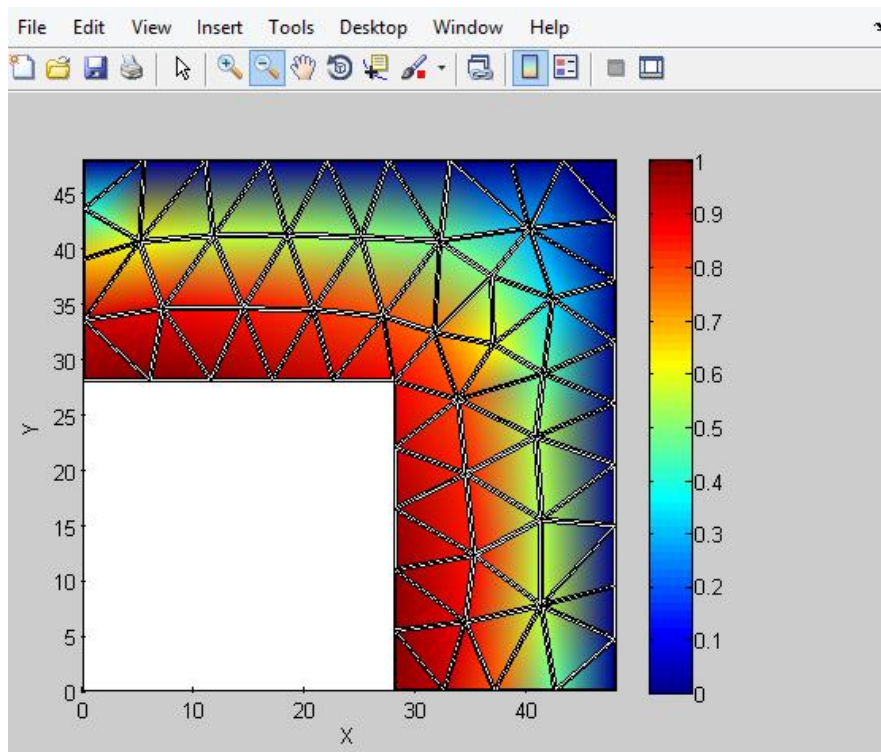
Για $D_1=0.25\text{ m}$ και $D_2=0.25\text{ m}$:



Εικόνα 3.6

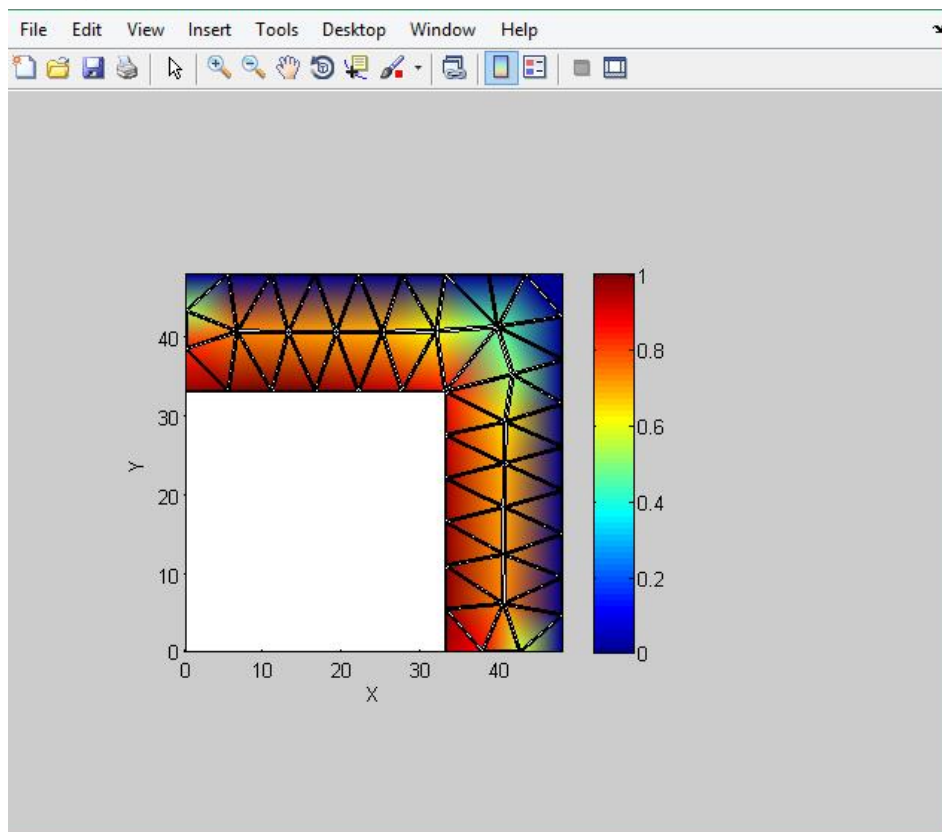
Παρατηρούμε ότι όσο στενεύουμε το πάχος, βλέπουμε αύξηση της διάχυσης της θερμότητας στα στοιχεία που βρίσκονται κοντά στην εξωτερική πλευρά του τοιχώματος.

Για $D_1=0.2\text{ m}$ και $D_2=0.2\text{ m}$ βλέπουμε στην εικόνα 3.7 ότι τα εξωτερικά στοιχεία, στην εξωτερική τους πλευρά οριακά κρατούνται σε μηδενική θερμοκρασία :



Εικόνα 3.7

Έτσι για $D1=0.15\text{ m}$ και $D2=0.15\text{ m}$:

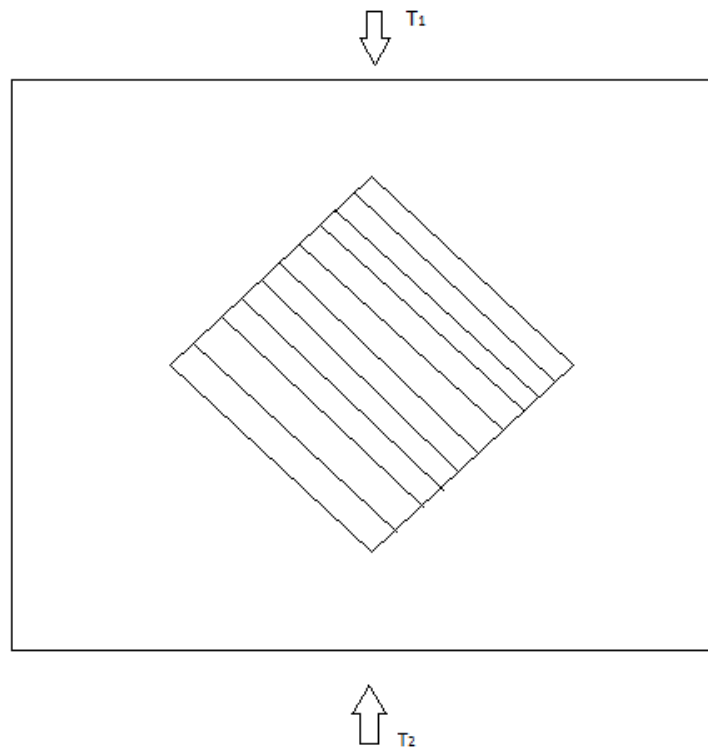


Εικόνα 3.8

Βλέπουμε ότι η εξωτερική πλευρά του τοιχώματος έχει μεγαλύτερη θερμοκρασία από το 0. Έτσι, δεδομένου ότι η εξωτερική πλευρά θα πρέπει να διατηρείται σε μηδενική θερμοκρασία, το πάχος του τοιχώματος του σωλήνα θα πρέπει να είναι μεγαλύτερο των 15 cm. Από τις περιπτώσεις που είδαμε, και με τη δεδομένη διάχυση θερμότητας, βέλτιστη περίπτωση είναι αυτή των 20 cm πάχος. Εξασφαλίζει τη μηδενική θερμοκρασία στο εξωτερικό τοίχωμα με τη χρήση του λιγότερου υλικού προς ελαχιστοποίηση του κόστους.

3.3.2 Το παράδειγμα “squareinsquare”

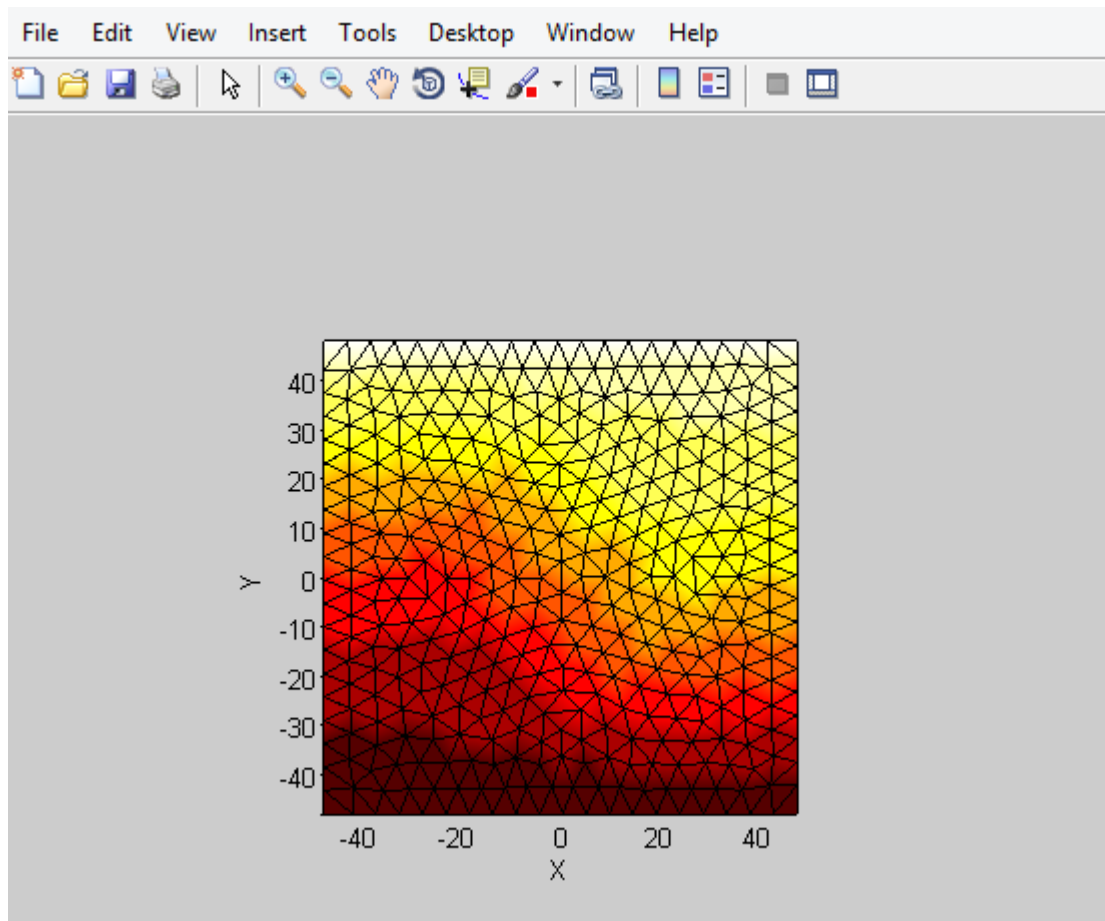
Θα εξετάσουμε ένα παράδειγμα ορθοτροπικού υλικού μέσα σε ισοτροπικό υλικό. Έτσι έχουμε ένα τετράγωνο ισοτροπικού υλικού και μέσα του είναι ένας ρόμβος ο οποίος στην περίπτωσή μας είναι ένα πολυμερές που έχει ανθρακωνήματα (εικόνα 3.9) . Κατά μήκος των ανθρακωνυμάτων επιτυγχάνεται καλή θερμική συναγωγή. Κατά μήκος όμως του υπόλοιπου υλικού, του πολυμερούς, όχι. Επίσης θεωρούμε τη δεξιά και την αριστερή πλευρά του τετραγώνου μονομένες, ενώ στην πάνω και στην κάτω πλευρά έχουμε 2 διαφορετικές θερμοκρασίες $T_1 < T_2$.



Εικόνα 3.9

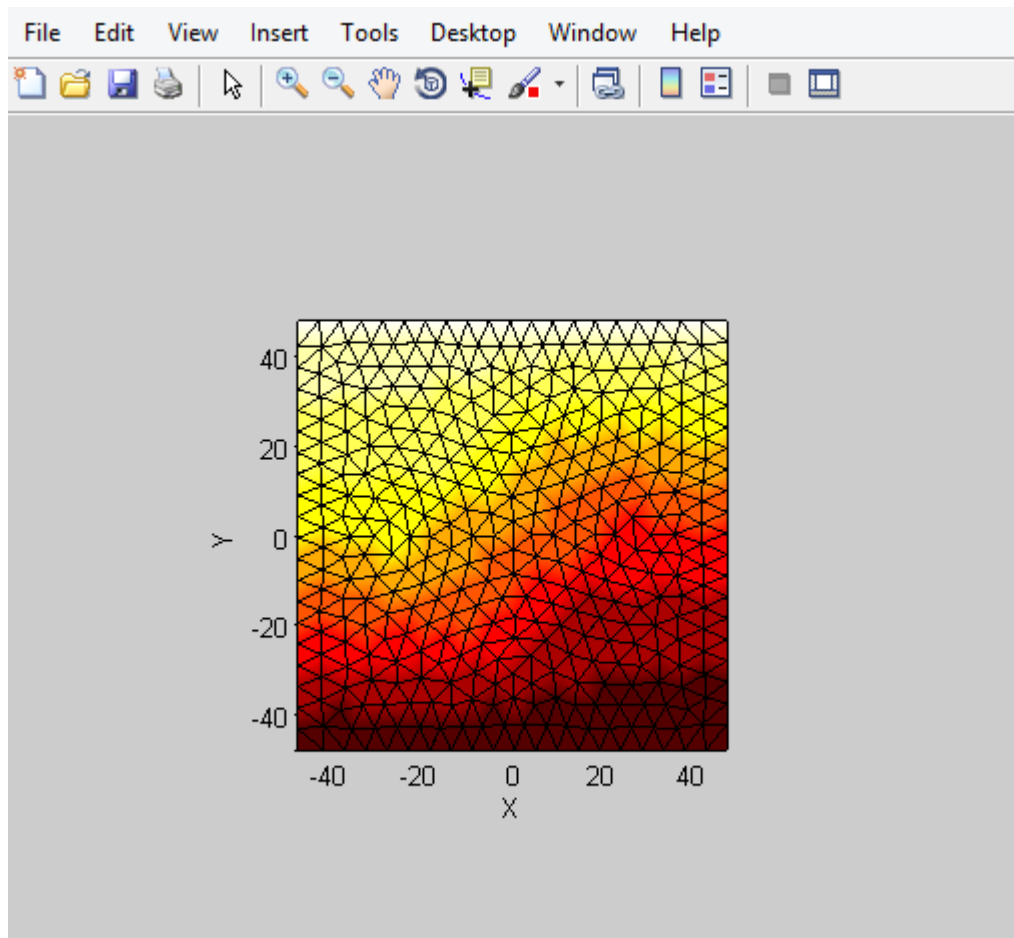
Κάνοντας εφαρμογή στο sofa, θα μας βγάλει γραφικά το θερμοκρασιακό πεδίο. Θα διακρίνουμε ότι κατά μήκος των ανθρακωνημάτων να επιτυγχάνεται η θερμική συναγωγή, ενώ κάθετα σε αυτές, καθώς παρεμβάλλεται το πολυμερές, να διακρίνουμε συμπεριφορά θερμικής μόνωσης (εικόνα 3.10). Παρατηρούμε ότι η θερμοκρασία T_2 διατηρείται σε στοιχεία πιο ψηλά στο κάτω αριστερό άκρο απ' ότι στο κάτω δεξιά. Αυτό οφείλεται στο ότι κάτω αριστερά η θερμότητα συναντά στοιχεία του πολυμερούς, κάνοντας τη συναγωγή πιο έντονη στο υπόλοιπο μέρος του ισοτροπικού τετραγώνου στα

αριστερά. Το αντίστοιχο συμβαίνει και στο πάνω μέρος του τετραγώνου. Αντίθετα, παρατηρούμε ότι γίνεται καλύτερη συναγωγή κατά μήκος των ανθρακωνυμάτων (από πάνω αριστερά προς κάτω δεξιά).



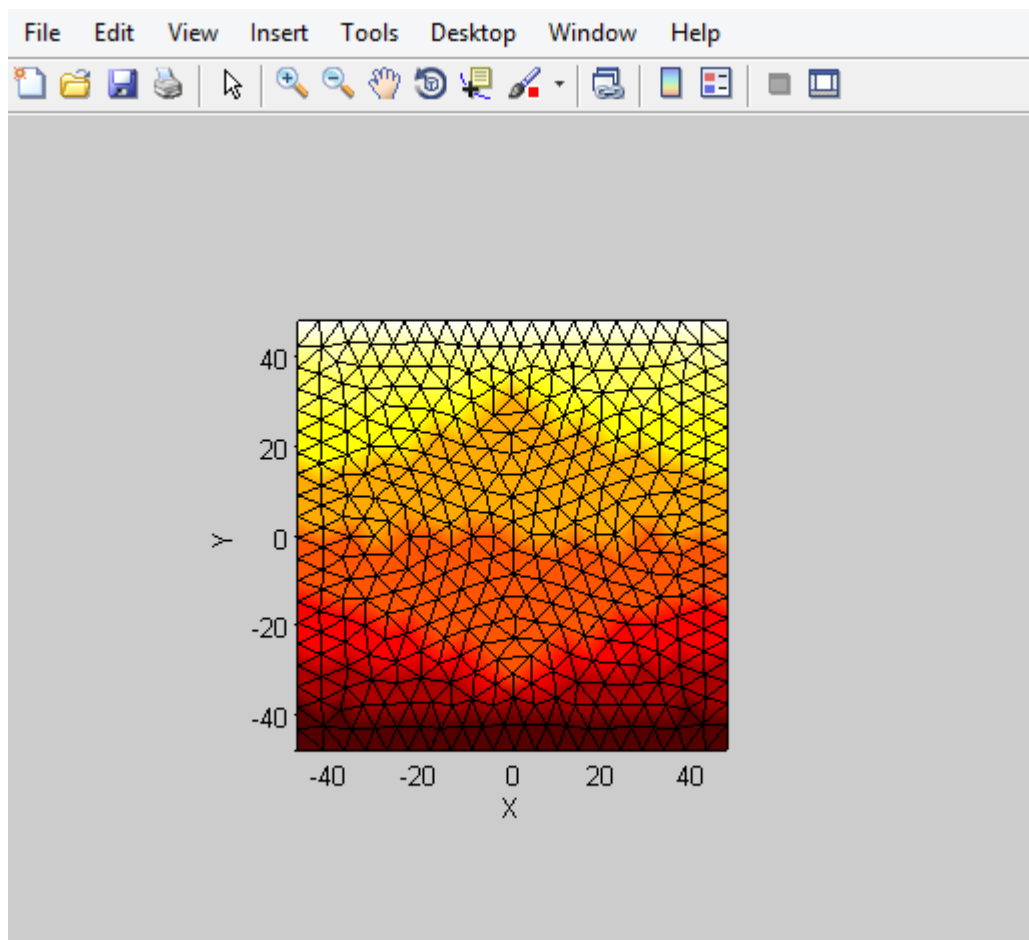
Εικόνα 3.10

Το αντίστροφο θα συμβεί αν τα ανθρακωνύματα είχαν φορά από πάνω δεξιά προς κάτω αριστερά (εικόνα 3.11) :



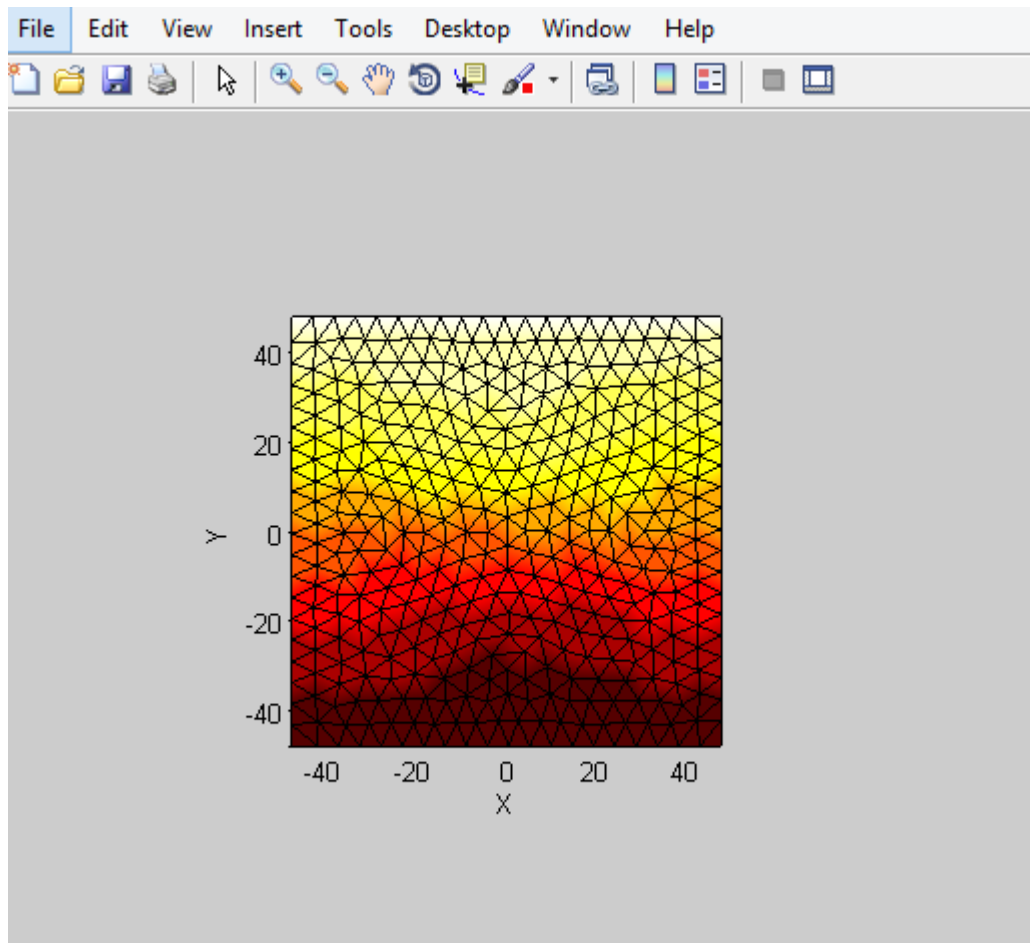
Εικόνα 3.11

Αν στρέψουμε τον ρόμβο 90 μοίρες δεξιόστροφα θα παρατηρήσουμε πως στο κέντρο του τετραγώνου έχουμε καλύτερη συναγωγή σε όλο το πλάτος του τετραγώνου, σαν να μην υπάρχει ο ορθοτροπικός πίνακας στο κέντρο (εικόνα 3.12). Αυτό οφείλεται στο ότι πλέον τα ανθρακωνήματα είναι παράλληλα με τη ροή θερμότητας από κάτω προς τα πάνω ($T_2 > T_1$) διευκολύνοντας έτσι τη θερμική διάχυση, κάνοντας τα μέρη του πολυμερούς να μην έχουν πρακτικά καμία επίδραση και να μην εμποδίζουν την διάχυση της θερμότητας.



Εικόνα 3.12

Τέλος, αν τα ανθρακωνύματα έχουν φορά από αριστερά προς δεξιά (εικόνα 3.13) θα παρατηρήσουμε ότι στο κέντρο διατηρείται η θερμοκρασία ενώ στα άκρα γίνεται ομαλή διάχυση :



Εικόνα 3.13

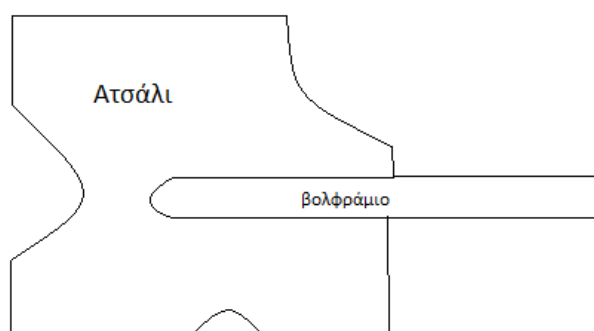
Αυτό συμβαίνει διότι στο κέντρο συναντάται κάθετα το υλικό του πολυμερούς, κάνοντας έτσι τα στοιχεία εκεί να διατηρούν τη θερμοκρασία τους λόγω μειωμένης θερμικής συναγωγής.

3.3.3 Το Παράδειγμα “shrinkfit” .

Το πρόγραμμα sofea έχει τη δυνατότητα να λύνει προβλήματα διάχυσης θερμότητας ως προς χρόνο. Έτσι ο χρήστης μπορεί να εξετάσει αν επιτυγχάνεται η ψύξη ενός υλικού στα χρονικά πλαίσια που

επιθυμεί ή που είναι αναγκασμένος να γίνει η ψύξη, συναρτήση δεδομένων θερμοκρασιών του θερμού σώματος και του ψυχρού.

Στο παράδειγμα που θα δούμε, έχουμε μια διάταξη από ατσάλι (θερμοκρασίας 84°C) και βολφράμιο (θερμοκρασίας -10°C) (εικόνα 3.14).



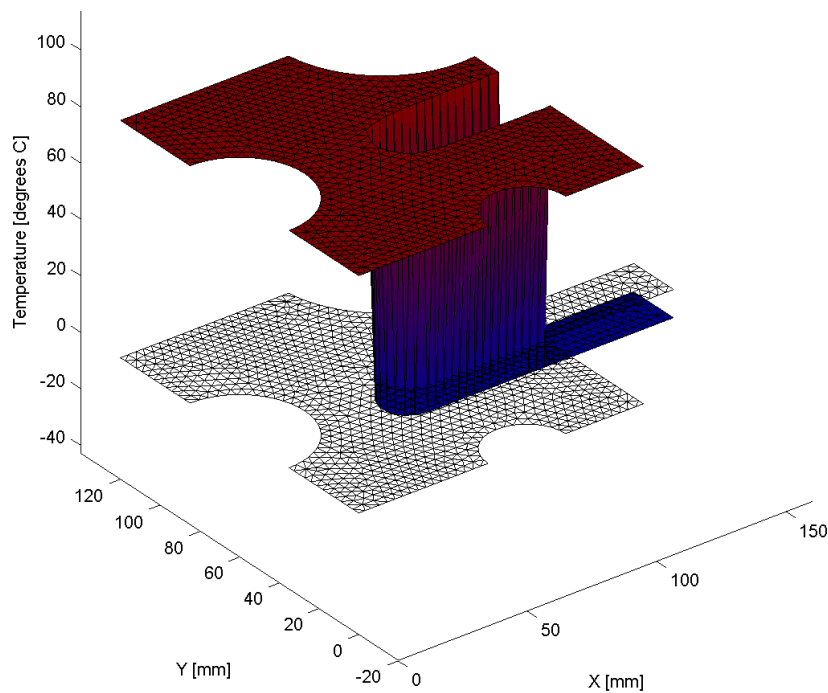
Εικόνα 3.14

Το ζητούμενο είναι να δούμε σε πόσο χρόνο η θερμοκρασία του ατσαλιού θα πέσει κάτω από 70°C , όπου είναι ο κατασκευαστικός περιορισμός ώστε να επιτευχθεί σωστή συναρμολόγηση των δύο σωμάτων μέσω της ψύξης και συρρίκνωσης του ατσαλιού.

Με τα δεδομένα αυτά, το πρόγραμμα *sofea* κάνει τους αντίστοιχους υπολογισμούς, και παρέχει τρισδιάστατη απεικόνιση συναρτήση μήκους-πλάτους και θερμοκρασίας (θεωρούμε το πάχος αμελητέο). Την απεικόνιση αυτή επίσης την παρέχει με χρονικό βήμα (στην περίπτωσή μας ανά 2,5 δευτερόλεπτα) ώστε ο χρήστης να έχει

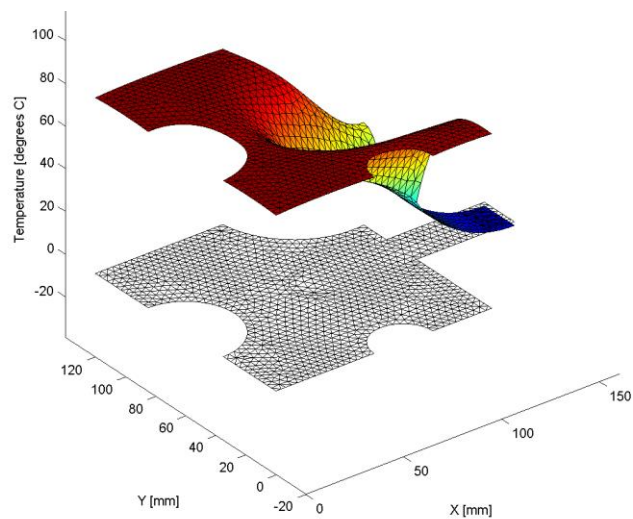
εικόνα της όλης διαδικασίας, της ταχύτητας ψύξης. Για διευκόλυνση και συντομία θα δούμε τη θερμοκρασιακή μεταβολή των σωμάτων στα 0, 10, 25, 50, 75, 100 δευτερόλεπτα. Στα 100 το πρόγραμμα υπολογίζει ότι επιτυγχάνεται η θερμοκρασιακή μεταβολή του ατσαλιού από τους 84 °C στους 70 °C.

Έτσι, αρχικά το ατσάλι είναι σε 84 °C και το βολφράμιο σε -10 °C :



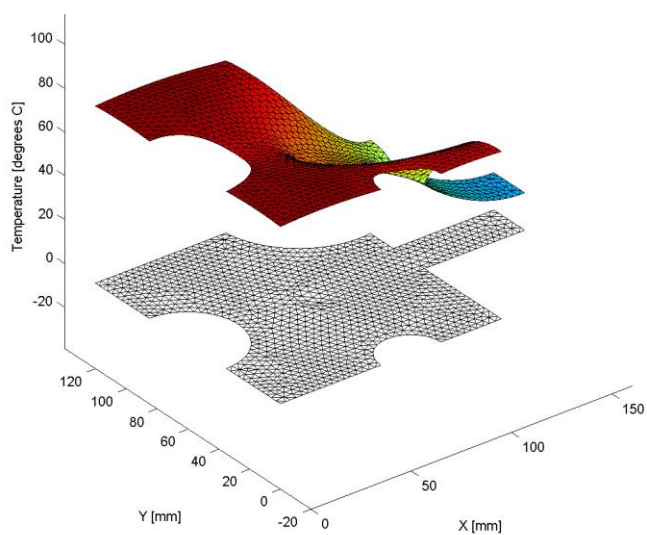
Εικόνα 3.15

Στα 10 sec βλέπουμε η θερμοκρασία του ατσαλιού έχει πέσει στους 83-82 °C και του βολφραμίου έχει ανέβει περίπου στους -5 °C :



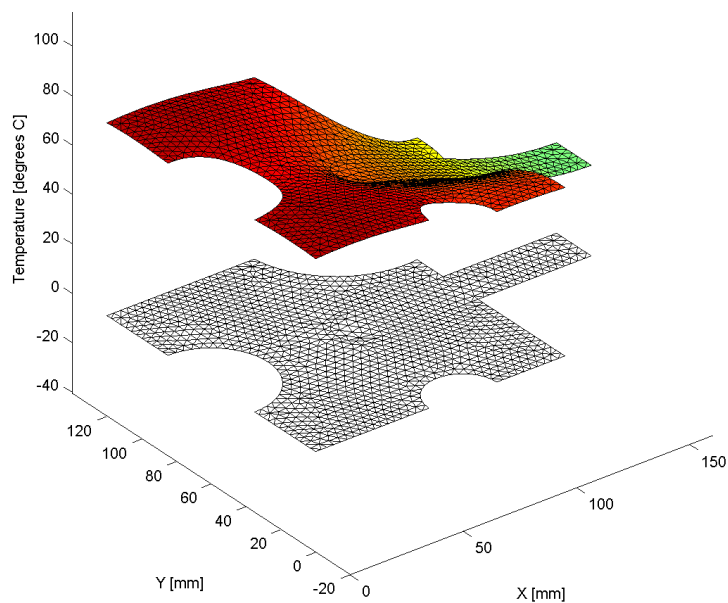
Εικόνα 3.16

Στα 25 sec (θερμοκρασία ατσαλιού περίπου 81 °C και βολφραμίου περίπου 15 °C) :



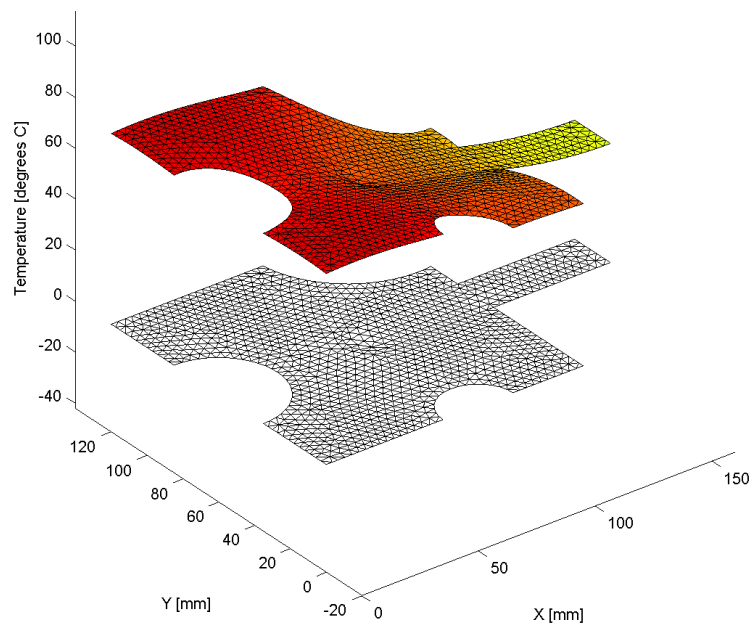
Εικόνα 3.17

Στα 50 sec (θερμοκρασία ατσαλιού περίπου 80 °C και βολφραμίου 35 °C) :



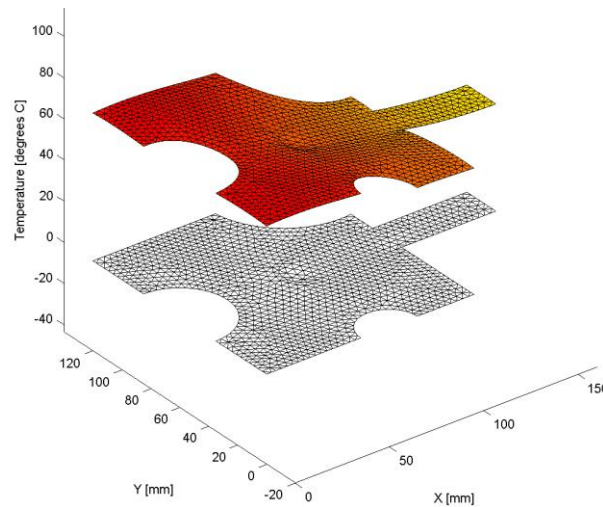
Εικόνα 3.18

Στα 75 sec (θερμοκρασία ατσαλιού περίπου 75 °C και βολφραμίου 45 °C):



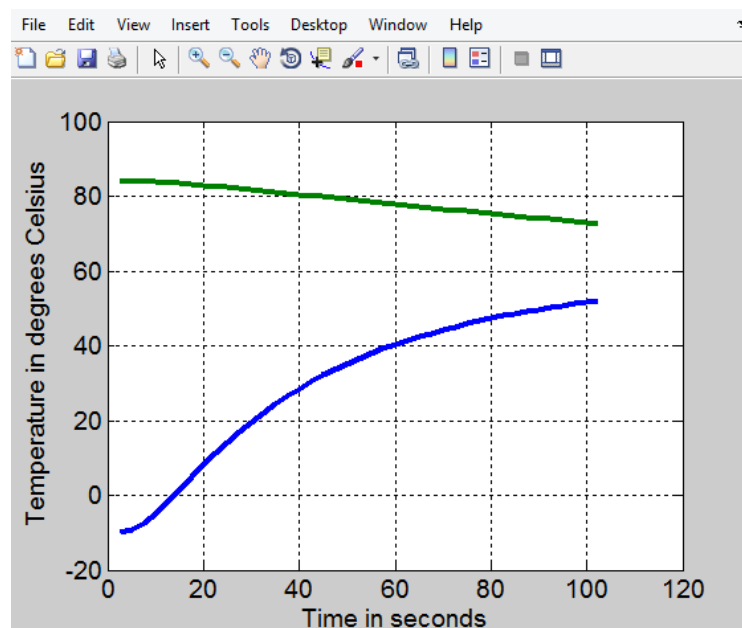
Εικόνα 3.19

Και τέλος στα 100 sec (θερμοκρασία ατσαλιού 70 °C και βολφραμίου 50 °C):



Εικόνα 3.20

Επίσης το πρόγραμμα μέσω του παραδείγματος αυτού εξάγει και γραφικά την θερμοκρασιακή μεταβολή των δύο σωμάτων συναρτήση του χρόνου (με πράσινο η θερμοκρασία του ατσαλιού και με μπλε αυτή του βολφραμίου) :

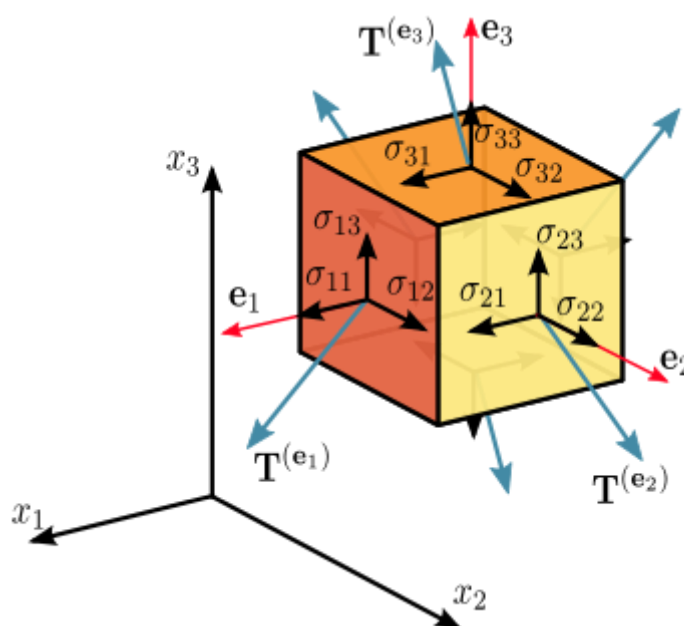


Εικόνα 3.2

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

ΤΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ SOFEA ΚΑΙ Η ΑΝΑΛΥΣΗ ΤΩΝ ΤΑΣΕΩΝ

4.1 Μηχανική και ανάλυση των τάσεων

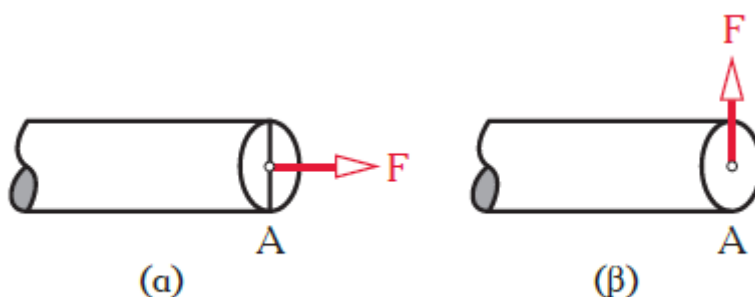


Εικόνα 4.1

Η ανάλυση των τάσεων σε ένα σώμα είναι ένα από τα κύρια αντικείμενα του κλάδου της Μηχανικής. Η ανάλυση των παραμορφώσεων, των τάσεων που δημιουργούνται μέσα σε ένα σώμα, ένα δικτύωμα, μία συναρμολόγηση και γενικότερα της αντοχής του κάθε υλικού αποτελούσε πάντα σημαντική προτεραιότητα ώστε να καθοριστούν οι επιλογές των υλικών σύμφωνα με τις απαιτούμενες ιδιότητες, η ποσότητά τους σύμφωνα πάντα και με το κόστος τους. Μας επιτρέπει η ανάλυση αυτή να κατανοήσουμε τις επιπτώσεις από ενδεχόμενες δυνάμεις υφιστάμενες στο εξεταζόμενο σώμα κι έτσι

επιλέγοντας τα κατάλληλα υλικά , μέγεθος και σχήμα να αποτρέψουμε τυχούσες αστοχίες υλικού στην κατασκευή ή συναρμολόγησή μας.

Κάθε σώμα αποτελείται από μόρια τα οποία έλκονται μεταξύ τους, με αποτέλεσμα να μένουν ενωμένα απαρτίζοντας ένα σώμα. Αν σε ένα σώμα ενεργήσει μία εξωτερική δύναμη, τότε τα μόρια του σώματος αναπτύσσουν εσωτερικές δυνάμεις. Τάση ονομάζεται η συνισταμένη των εσωτερικών δυνάμεων που αναπτύσσουν τα μόρια ενός σώματος ανά μονάδα επιφάνειάς του, όταν στο σώμα ενεργούν εξωτερικές δυνάμεις. Θεωρούμε ότι οι εσωτερικές δυνάμεις είναι ομοιόμορφα κατανομημένες στις εξεταζόμενες επιφάνειες. Από τις διάφορες επιφάνειες που μπορεί να μελετήσει κάποιος σε ένα σώμα, ιδιαίτερο ενδιαφέρον για την αντοχή των υλικών έχουν οι διατομές του. Με κριτήριο τη διεύθυνση των δυνάμεων ως προς τις διατομές στις οποίες ενεργούν οι τάσεις διακρίνονται σε ορθές (εικόνα 4.2.α) και διατμητικές(εικόνα 4.2.β) ή πλάγιες ή εγκάρσιες.



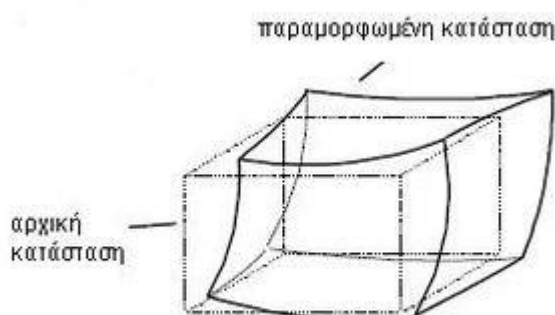
Εικόνα 4.2

Η τάση είναι δύναμη ανά μονάδα επιφάνειας : $\sigma = F/A$ [N/m^2 , Pa]

Λόγω υφιστάμενης δύναμης σε ένα σώμα, και κατά συνέπεια των τάσεων που αναπτύσσονται σε αυτό, αλλάζει η μορφή τους και λέμε ότι παραμορφώνεται. Αλλαγή της μορφής ενός σώματος σημαίνει να αυξηθεί ή να μειωθεί το μήκος ή γενικά μία διάστασή του, να στραφεί,

να καμπυλωθεί, γενικότερα να αλλάξει το σχήμα του. Η αλλαγή αυτή ονομάζεται παραμόρφωση.

Παραμόρφωση παθαίνουν όλα τα στερεά σώματα, όσο μικρή κι αν είναι η δύναμη που εφαρμόζεται σε αυτά. Στερεό σώμα που να μην παραμορφώνεται δεν υπάρχει. Σε κάποια υλικά η παραμόρφωση δεν διακρίνεται με γυμνό μάτι και δεν μπορεί να μετρηθεί με τα συνηθισμένα μέσα. Ωστόσο, η αδυναμία παρατηρήσεως της παραμορφώσεως δεν σημαίνει ότι αυτή δεν υπάρχει, υπάρχει και μάλιστα μπορούμε να την μετρήσουμε με χρήση ειδικών για το σκοπό αυτό οργάνων ακριβείας. Για παράδειγμα, η παραμόρφωση σωμάτων κατασκευασμένων από λάστιχο είναι εμφανής με το μάτι. Αντίθετα, η παραμόρφωση σωμάτων κατασκευασμένων από χάλυβα ή από άλλο σκληρό υλικό διακρίνεται μόνο με τη χρήση ειδικών οργάνων ακριβείας.



Εικόνα 4.3. Αρχική και τελική κατάσταση κύβου έπειτα από εφαρμογή δυνάμεων

Ο βαθμός παραμορφώσεως ενός σώματος εξαρτάται από τους εξής παράγοντες :

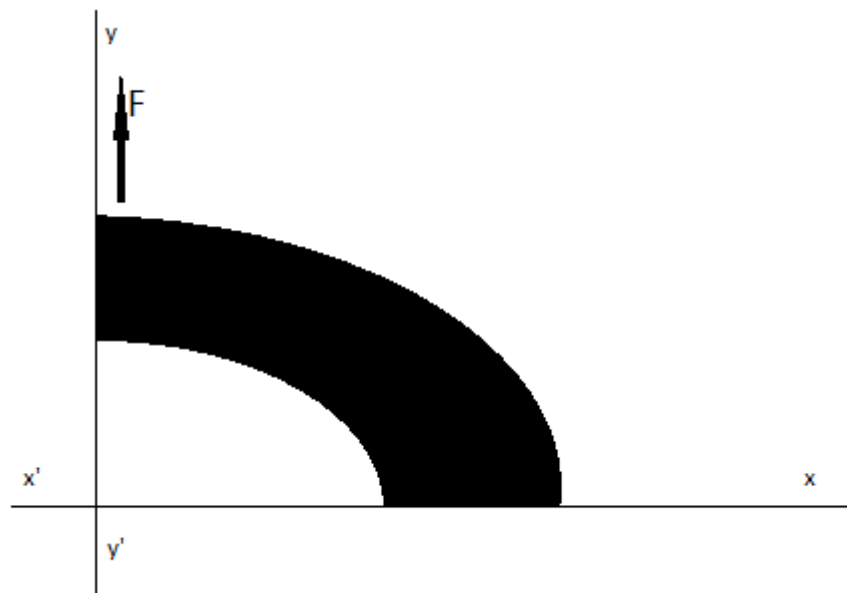
1. Το είδος του υλικού του σώματος : Δυο σώματα των ίδιων διαστάσεων στα οποία ασκούνται οι ίδιες ακριβώς δυνάμεις και με τον ίδιο τρόπο παραμορφώνονται διαφορετικά ανάλογα από το υλικό που είναι κατασκευασμένα

2. Τις διαστάσεις του σώματος : Δύο σώματα από το ίδιο υλικό, στα οποία ασκούνται οι ίδιες ακριβώς δυνάμεις και με τον ίδιο τρόπο, παραμορφώνονται διαφορετικά ανάλογα με τις διαστάσεις τους (για παράδειγμα μια πιο χοντρή ράβδος παραμορφώνεται λιγότερο από μία πιο λεπτή ίδιου υλικού).
3. Το μέγεθος των εφαρμοζόμενων δυνάμεων : Δύο σώματα ίδιων διαστάσεων, από το ίδιο υλικό, στα οποία ασκούνται με τον ίδιο τρόπο διαφορετικές δυνάμεις, παραμορφώνονται διαφορετικά.
4. Τη μορφή της διατομής : Δύο σώματα από το ίδιο υλικό, στα οποία ασκούνται οι ίδιες ακριβώς δυνάμεις με τον ίδιο ακριβώς τρόπο, αλλά έχουν διαφορετική μορφή διατομής, παρουσιάζουν διαφορετική παραμόρφωση.
5. Τον προσανατολισμό της διατομής σε σχέση με τη διεύθυνση του φορτίου : Δύο σώματα με την ίδια διατομή, από το ίδιο υλικό, στα οποία ασκούνται οι ίδιες ακριβώς δυνάμεις, αλλά με διαφορετικό προσανατολισμό ως προς τη διατομή, παρουσιάζουν διαφορετική παραμόρφωση ανάλογα από τον τρόπο τοποθέτησης της διατομής σε σχέση με τη διεύθυνση της δύναμης: Δυνάμεις που ασκούνται κάθετα στη διατομή της ράβδου προκαλούν μεταβολή του μήκους της ενώ αν ασκούνται παράλληλα τείνουν να την κόψουν.
6. Τον τρόπο στηρίξεως του σώματος : Δύο σώματα ίδιων διαστάσεων, από το ίδιο υλικό, στα οποία ασκούνται οι ίδιες ακριβώς δυνάμεις με τον ίδιο τρόπο έχουν διαφορετική παραμόρφωση αν στερεώνονται διαφορετικά.
7. Το μέγεθος της θερμοκρασιακής μεταβολής : Δύο σώματα ίδιων διαστάσεων, από το ίδιο υλικό, στα οποία ασκούνται οι ίδιες δυνάμεις με τον ίδιο τρόπο, αν βρίσκονται σε διαφορετική θερμοκρασιακή κατάσταση παρουσιάζουν διαφορετική παραμόρφωση.

4.2 Εφαρμογή του Sofea Σε Παραδείγματα Ανάλυσης Τάσεων

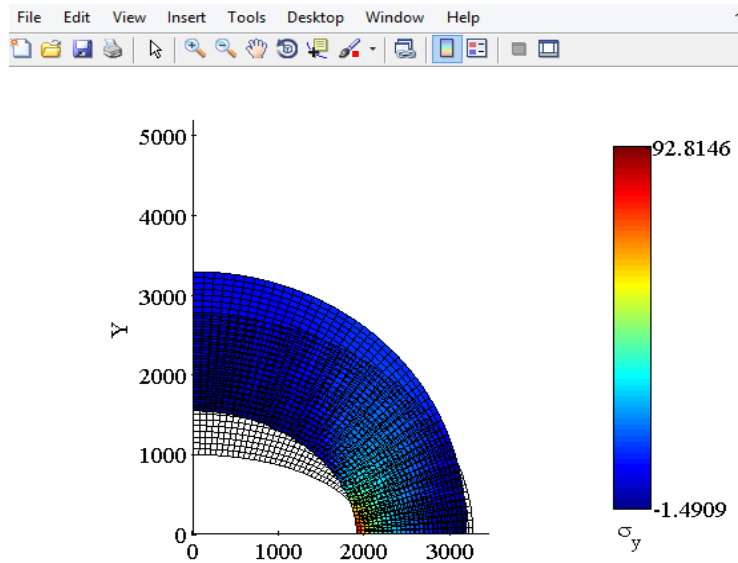
4.2.1 Τάσεις Σε ελλειπτική μεμβράνη

Θα δούμε σε δύο άξονες πως επιδρούν οι τάσεις και πως παραμορφώνουν μία ελλειπτική μεμβράνη με τη δύναμη ασκούμενη προς τα έξω. Για διευκόλυνση, θα δούμε την παραμόρφωση στο $\frac{1}{4}$ της μεμβάνης με τον άξονα y ως άξονα συμμετρίας και τη μεμβράνη πακτωμένη στον άξονα x '.



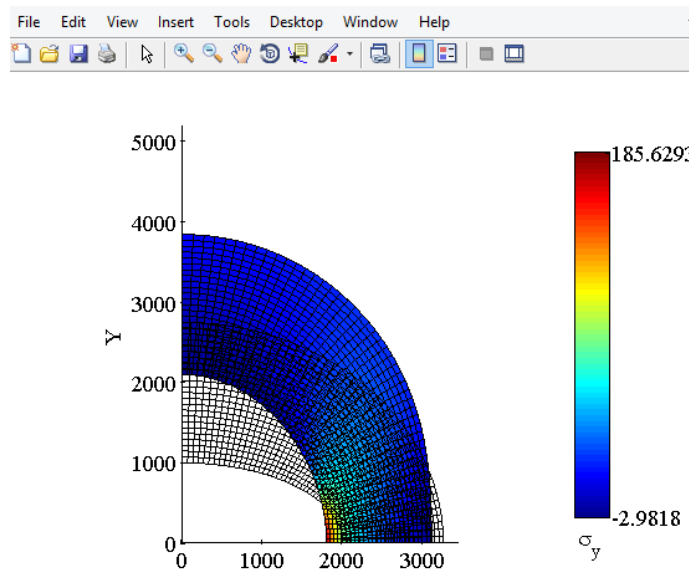
Εικόνα 4.4

Εφάρμοζοντας πίεση 10 MPa προς τα έξω (με 24 στοιχεία εγκάρσια της μεμβράνης) :



Εικόνα 4.5

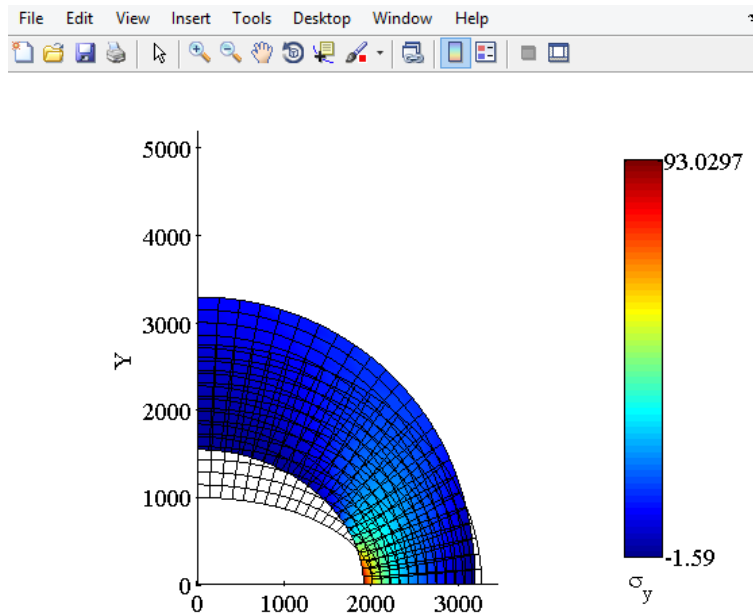
Βλέπουμε και με τη βοήθεια της κλίμακας δεξιά τις τάσεις που εφαρμόζονται σε όλο το σώμα της μεμβράνης. Επίσης παρατηρούμε ότι το sofa δείχνει στο γράφημα και την αρχική και την τελική θέση του σώματός της, δείχνοντας έτσι την παραμόρφωση (τα κενά στοιχεία δείχνουν την αρχική). Είναι προφανές ότι χρησιμοποιώντας πολλά στοιχεία κερδίζουμε σε λεπτομέρεια αλλά αυξάνουμε το υπολογιστικό κόστος. Με 20 MPa και 24 στοιχεία:



Εικόνα 4.6

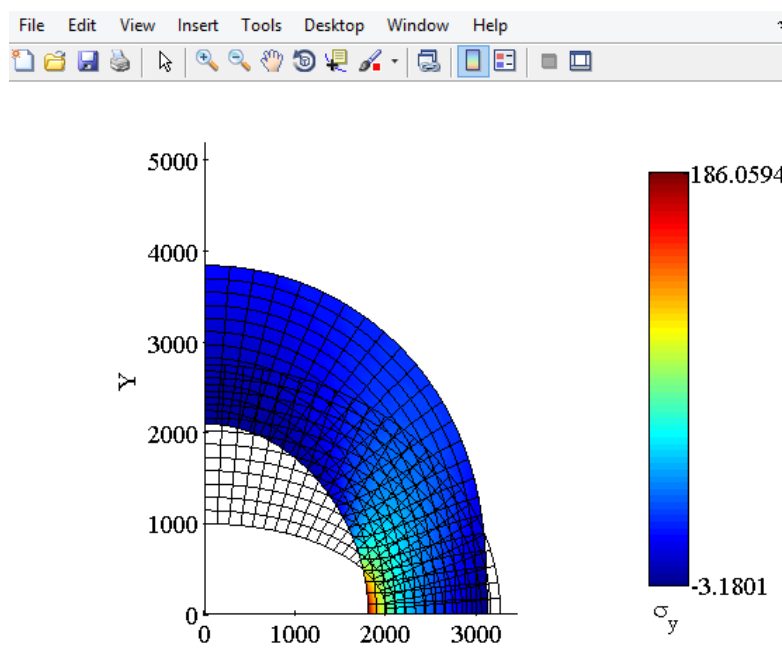
Βλέπουμε την επίδραση της διπλάσιας τάσης πάνω στη μεμβράνη, πόσο παράπανω παραμορφώθηκε.

Επίσης, με την αρχική πίεση και τα μισά στοιχεία (12) :



Εικόνα 4.7

Και τέλος στα 20 MPa και με 12 στοιχεία :

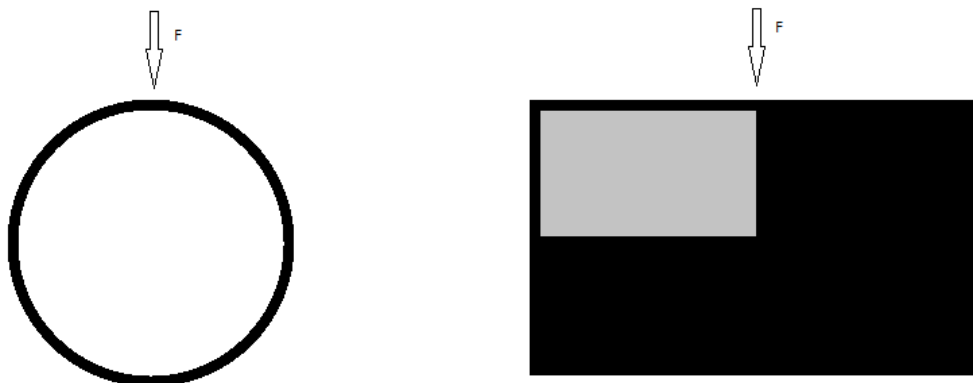


Εικόνα 4.8

Έτσι ανάλογα με τις προτιμήσεις και τις απαιτήσεις του χρήστη, μπορεί να χρησιμοποιήσει την ποσότητα των πεπερασμένων στοιχείων καθώς και την τυχόν υφιστάμενη πίεση ώστε να εξασφαλίσει την μη παραμόρφωση της μεμβράνης, χρησιμοποιώντας και το κατάλληλο υλικό.

4.2.2 Τάσεις Σε Κύλινδρο υπό Εγκάρσια Δύναμη

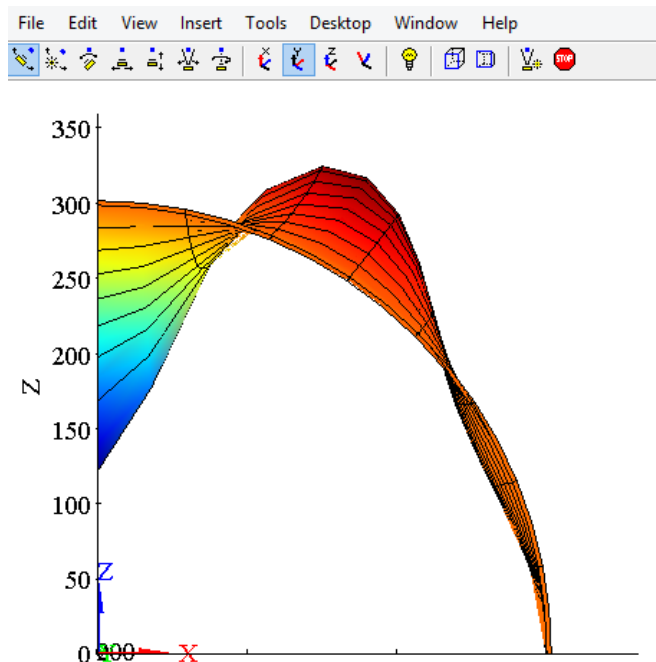
Επιπροσθέτως του προηγούμενου δισδιάστατου παραδείγματος, το *sofea* έχει τη δυνατότητα να λύνει προβλήματα ανάλυσης τάσεως και σε τρισδιάστατο πεδίο: δοκοί στο χώρο με υφιστάμενες δυνάμεις, στρέψη σε κύλινδρο, δύναμη υφιστάμενη στο εξωτερικό του κυλίνδρου. Θα δούμε την Τρίτη περίπτωση σε ένα παράδειγμα, όπου εφαρμόζουμε δύναμη στο πάνω μέρος, στη μέση του κυλίνδρου, ο οποίος δεν είναι συμπαγής (εικόνα 4.9). Έτσι θα δούμε την παραμόρφωσή του περιβλήματός του, σε συνάρτηση και με του πάχους του.



Εικόνα 4.9. Πρόοψη του Κυλίνδρου και αριστερή πλάγια όψη

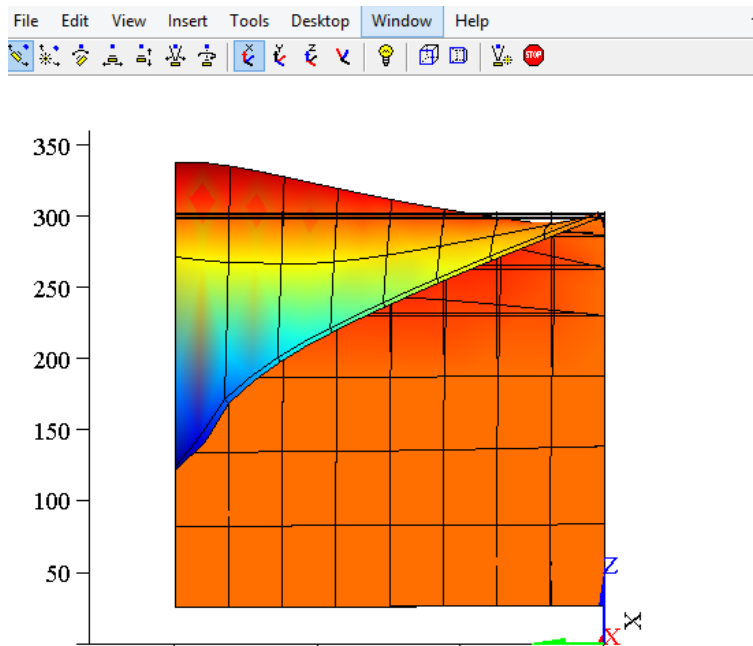
Λόγω συμμετρίας θα πάρουμε το 1/8 του κυλίνδρου (το γκρι κομμάτι στην εικόνα 4.9)

Με τα αρχικοποιημένα δεδομένα του sofea ($R=300$ και μήκος κυλίνδρου $L=600$, πάχος περιβλήματος $t=3.0$), μας δίνει γραφικά (βλέποντας την πρόοψη του κυλίνδρου όπως στην εικόνα 4.9) :



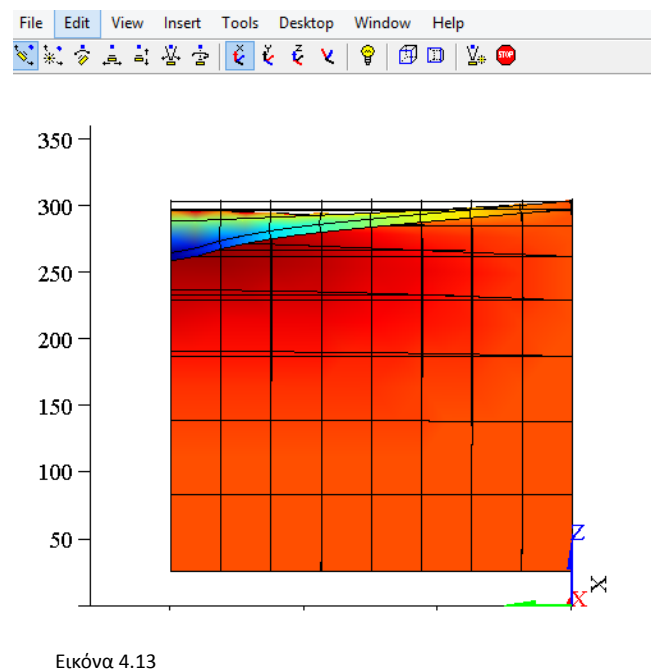
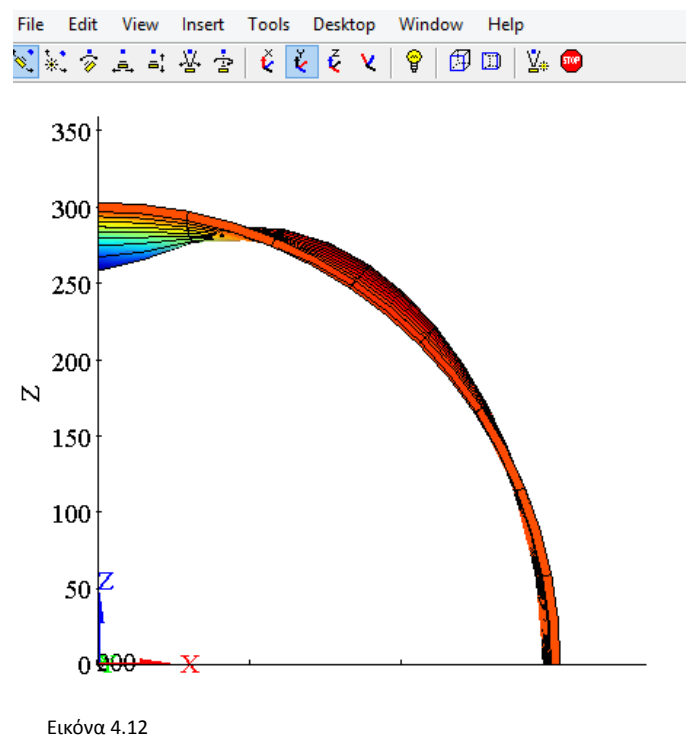
Εικόνα 4.10

Κοιτάζοντας το υπό εξέταση κομμάτι από το εσωτερικό του κυλίνδρου :

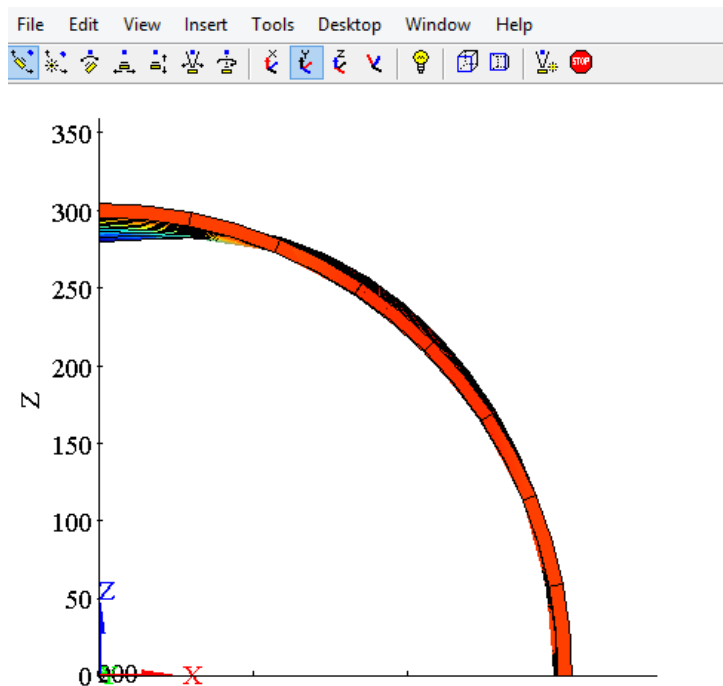


Εικόνα 4.11

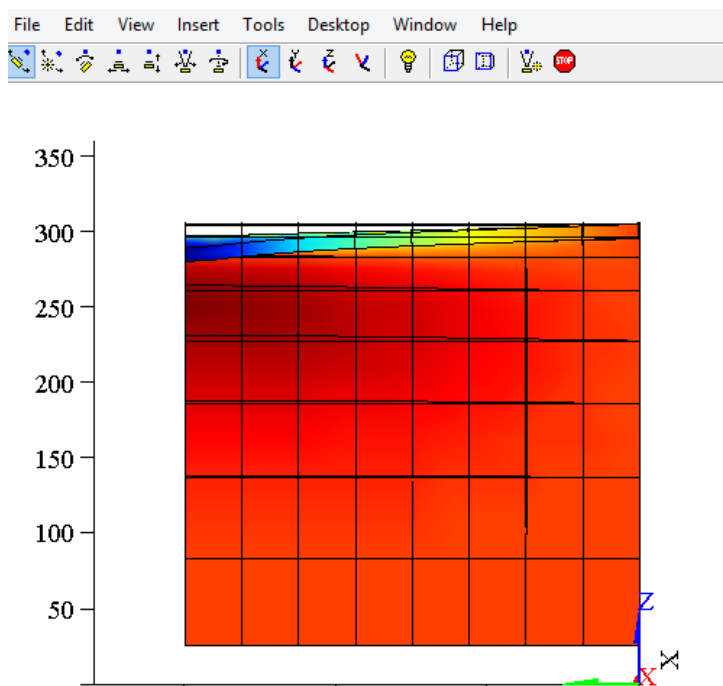
Με διπλάσιο πάχος(εικόνες 4.12 και 4.13 κατ' αντιστοιχία των 4.10 και 4.11) :



Βλέπουμε ότι η παραμόρφωση μειώθηκε αισθητά διπλασιάζοντας το πάχος του φλοιού του κυλίνδρου. Έτσι αν το τριπλασιάσουμε σε σχέση με το αρχικό:



Εικόνα 4.14



Εικόνα 4.15

Παρατηρούμε ότι με τριπλάσιο πάχος στο περίβλημα, σε αντίθεση με την αρχική παραμόρφωση που ήταν πολύ μεγάλη, πλέον η τελική είναι αρκετά μικρή. Έτσι ανάλογα με τις απαιτήσεις του χρήστη και την οικονομική διαθεσιμότητα για τα υλικά μπορεί να εξετάσει διάφορες περιπτώσεις πάχους σε συνδυασμό με την υφιστάμενη δύναμη ώστε να καταλήξει στη βέλτιστη επιλογή.

BIBΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1.Petr Krysl “A Pragmatic Introduction to the Finite Element Method for Thermal and Stress Analysis with the Matlab toolbox Sofea”

2.Ferdinand P.Beer,E. Russell Johnston JR,David Mazurek,Elliot R.Eisenberg “Vector Mechanics for Engineers: Statics»

3.Ευριπίδης Παπαμίχος, Νίκος Χ. Χαραλαμπίκης «Αντοχή των Υλικών»

4.Θεόδωρος Σαμαράς «Εισαγωγή Στην Ανάλυση Πεπερασμένων Στοιχείων»

5.Νικόλαος Δανιάς «Ελαστοδυναμική Ανάλυση Μηχανισμών Με Τη Μέθοδο Των Πεπερασμένων Στοιχείων», Μεταπτυχιακή Εργασία

6.Κελίρης Χριστόδουλος «Μετάδοση Θερμότητας Σε Ανομοιογενές Υλικό Με Χρήση Πεπερασμένων Στοιχείων», Διπλωματική Εργασία