

ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΟΡΥΚΤΩΝ ΠΟΡΩΝ
ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΜΕΛΕΤΗΣ ΚΑΙ ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΥ ΕΚΜΕΤΑΛΛΕΥΣΕΩΝ

**ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΑΣΕΩΝ ΚΑΙ ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΕΩΝ ΣΕ ΥΠΟΓΕΙΑ
ΑΝΟΙΓΜΑΤΑ ΜΕ ΤΗΝ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΜΕΘΟΔΟ ΤΩΝ
ΑΣΥΝΕΧΩΝ ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΕΩΝ ΣΤΙΣ ΤΡΕΙΣ ΔΙΑΣΤΑΣΕΙΣ**

Διπλωματική Εργασία

Σταντζούρης Δημήτρης

ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΗ ΕΠΙΤΡΟΠΗ:

Γεώργιος Εξαδάκτυλος, Καθηγητής (επιβλέπων)

Ζαχαρίας Αγιουτάντης, Καθηγητής

Κωνσταντίνος Προβιδάκης, Καθηγητής, Κοσμήτορας

Χανιά, 2014

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η παρούσα διπλωματική εργασία έχει ως αντικείμενο την μελέτη της εντατικής και παραμορφωσιακής κατάστασης των στοιχείων, επάνω και γύρω από τα σύνορα διαφόρων υπογείων ανοιγμάτων εντός συνεχούς και μη μέσου, με την αριθμητική μέθοδο των ασυνεχών μετατοπίσεων.

Η πρόβλεψη της μεταβολής του πεδίου των τάσεων και των μετατοπίσεων που προκαλούνται από υπόγειες εκμεταλλεύσεις και σήραγγες είναι αναγκαία κατά τον σχεδιασμό οποιουδήποτε υπόγειου έργου.

Η ανάλυση του προβλήματος, έγινε με τη χρήση της αριθμητικής μεθόδου των συνοριακών στοιχείων, και συγκεκριμένα με την μέθοδο των ασυνεχών μετατοπίσεων για ελαστικό και ισότροπο μέσο, στις τρεις διαστάσεις. Για τον σκοπό αυτό, χρησιμοποιήθηκε ο ήδη υπάρχοντας στην βιβλιογραφία αλγόριθμος 'TWODD' (Crouch and Starfield, 1990) ο οποίος λύνει προβλήματα στις δύο διαστάσεις.

Με βάση αυτόν κατασκευάστηκαν:

- Κώδικας στο υπολογιστικό πακέτο MATLAB
- Τροποποιημένος κώδικας για επίλυση στις τρεις διαστάσεις με επίπεδα τριγωνικά στοιχεία (Kuriyama and Mizuta, 1993)
- Επιπρόσθετος κώδικας για την διόρθωση των εφαπτομενικών τάσεων
- Κώδικας για τον υπολογισμό των τάσεων και των μετατοπίσεων σε οποιοδήποτε σημείο επάνω και γύρω από τα σύνορα
- Κώδικας για την παρουσίαση των αποτελεσμάτων σε μορφή διαγραμμάτων και πολυχρωματικών επιφανειών

Η δέσμη προγραμμάτων που δημιουργήθηκε, μπορεί να αποτελέσει χρήσιμο εργαλείο για το σχεδιασμό υπογείων έργων σε γραμμικά ελαστικά πετρώματα και για την ανάδρομη ανάλυση επί τόπου μετρήσεων παραμορφώσεων ή τάσεων σε υπόγειες εκμεταλλεύσεις

Περιεχόμενα

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ.....	1
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2. ΕΠΙΛΥΣΗ ΕΛΑΣΤΙΚΩΝ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ ΣΤΙΣ ΤΡΕΙΣ ΔΙΑΣΤΑΣΕΙΣ ΤΟΥ ΧΩΡΟΥ ΜΕ ΤΗΝ ΜΕΘΟΔΟ ΤΩΝ ΑΣΥΝΕΧΩΝ ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΕΩΝ	6
2.1 Συντελεστές Επίδρασης	7
2.2 Η Συνάρτηση Επίδρασης για Επίπεδα Τριγωνικά Στοιχεία	8
2.3 Διακριτοποίηση του Συνόρου	10
2.4 Συνοριακές Συνθήκες - Σύστημα Επίλυσης.....	11
2.5 Διόρθωση εφαπτομενικών τάσεων.....	14
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3. ΚΩΔΙΚΑΣ ΤΗΣ MATLAB	18
3.1 Γενικές πληροφορίες για την λειτουργία του κώδικα.....	18
3.2 Διάγραμμα ροής.....	18
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4. ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΤΟΥ ΚΩΔΙΚΑ ΜΕ ΑΝΑΛΥΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ	22
4.1 Ρωγμή κυκλικού σχήματος	22
4.2 Σφαιρική κοιλότητα.....	26
4.2.1 Υδροστατική φόρτιση	28
4.2.2 Σύγκλιση των λύσεων της μεθόδου.....	31
4.2.3 Μονοαξονική φόρτιση	32
4.3 Κυκλική επιμήκης σήραγγα.....	35
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5. ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΑΣΕΩΝ ΚΑΙ ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΕΩΝ ΣΕ ΥΠΟΓΕΙΟ ΘΑΛΑΜΟ.....	42
5.1 Σχεδιασμός θαλάμου κατά τα βήματα της εκμετάλλευσης και διακριτοποίησή του σε συνεχές μέσο	42
5.2 Μεταβολές τάσεων και μετατοπίσεων με την αύξηση του ύψους	44
5.2.1 Μετατοπίσεις	44
5.2.2 Τάσεις.....	46
5.3 Σχεδιασμός θαλάμου κατά τη μέσο στάδιο εκμετάλλευσης και διακριτοποίησή του σε ασυνεχές μέσο	50
5.4 Μεταβολές μετατοπίσεων και τάσεων μετά την προσθήκη του ρήγματος.....	51
5.4.1 Μετατοπίσεις	51
5.4.2 Τάσεις.....	52
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6 ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ-ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ	54
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ	56
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α	57

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Ο στόχος της παρούσας διπλωματικής είναι η δημιουργία υπολογιστικού κώδικα για την εκτίμηση των τάσεων και των μετατοπίσεων κατά την διάνοιξη υπόγειων ανοιγμάτων. Τα κύρια χαρακτηριστικά του κώδικα (αλγόριθμου) πρέπει να είναι:

- Ανάλυση σε τρεις διαστάσεις
- Γρήγορη επίλυση
- Ακριβείς λύσεις
- Επίλυση ανοιγμάτων σε συνεχές μέσο αλλά και ανοιγμάτων σε μέσο με μικρό πλήθος ασυνεχειών

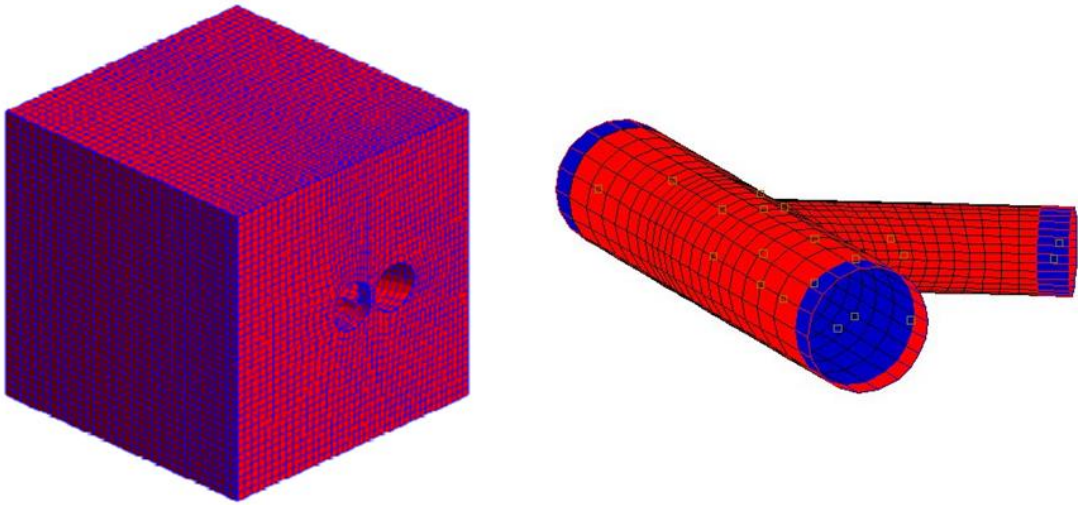
Οι αναλυτικές ή κλειστές λύσεις ιδιαίτερα στην περίπτωση των τριών διαστάσεων, είτε δεν μπορούν να βρεθούν, είτε είναι πολύπλοκες και συνήθως δίνονται με την μορφή ολοκληρωμάτων ή απειροσειρών που στην συνέχεια πρέπει να επιλυθούν αριθμητικά. Γι' αυτό τον λόγο οι υπολογιστικές μέθοδοι για την επίλυση τρισδιάστατων προβλημάτων της Μηχανικής αναπτύσσονται ραγδαία. Η διάδοση και εφαρμογή αυτών των μεθόδων έχει βοηθήσει πολύ την μελέτη πολλών περίπλοκων προβλημάτων της Μηχανικής και ιδιαίτερα την περίπτωση της Βραχομηχανικής, όπου η πρόβλεψη της εντατικοπαράμορφωσης κατάστασης του πετρώματος γύρω από τις εκσκαφές καθώς προχωράει η εκμετάλλευση είναι απαραίτητη για την ασφάλεια και το κόστος μιας εκμετάλλευσης ή ενός υπογείου έργου γενικότερα.

Οι πιο γνωστές από τις αριθμητικές μεθόδους που χρησιμοποιούνται για την επίλυση προβλημάτων της Γεωμηχανικής είναι:

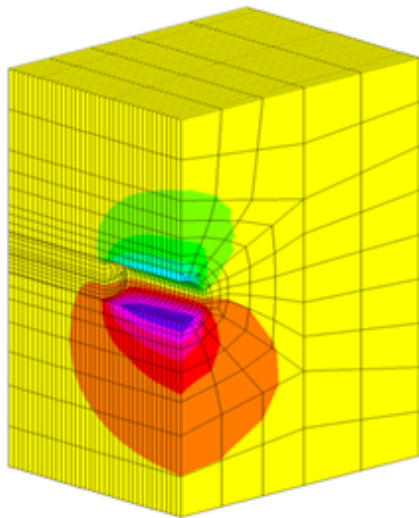
- Η Μέθοδος των Πεπερασμένων Στοιχείων (ΜΠΣ)
- Η Μέθοδος των Πεπερασμένων Διαφορών (ΜΠΔ)
- Η Μέθοδος των Συνοριακών Στοιχείων (ΜΣΣ)
- Μέθοδοι Διακριτών Στοιχείων
- Υβριδικές Μέθοδοι

Τα πεπερασμένα στοιχεία χρησιμοποιούνται τα 30 τελευταία χρόνια για την ανάλυση πραγματικών προβλημάτων της Μηχανικής του Παραμορφώσιμου Στερεού Σώματος δίνοντας αξιόπιστα αποτελέσματα. Παρ' όλα αυτά υπάρχουν αρκετά προβλήματα όπως ([Katsikadelis, 2002](#)):

- Απαιτείται ο διαχωρισμός όλου του χώρου σε στοιχεία (βλ. Σχ. 1.1) και κατά συνέπεια δημιουργείται ένα μεγάλο σύστημα αλγεβρικών εξισώσεων για επίλυση (βλ. Σχ. 1.2).
- Η επιλογή και επίτευξη της κατάλληλης γεωμετρίας απαιτεί πολύ μεγάλη προσπάθεια και χρόνο, ιδιαίτερα σε περίπλοκες γεωμετρίες, όπως για παράδειγμα η ύπαρξη ανοιγμάτων και ασυνεχειών.
- Για προβλήματα μέσα σε άπειρο ή ημιάπειρο μέσο (βλ. Σχ. 1.2 και 1.3 αντίστοιχα) απαιτείται η δημιουργία περιγράμματος το οποίο να περιγράφει το άπειρο σώμα. Η επιλογή της απόστασης του από το σύνορο είναι μια επιπλέον παράμετρος που επηρεάζει την αξιοπιστία των αποτελεσμάτων.

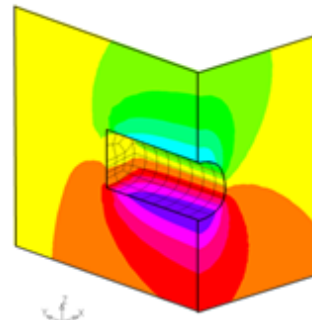


Σχ. 1.1: Αριθμητικές μέθοδοι διακριτοποίησης όλου του χώρου (αριστερά) και μόνο των συνόρων (δεξιά)



FEM

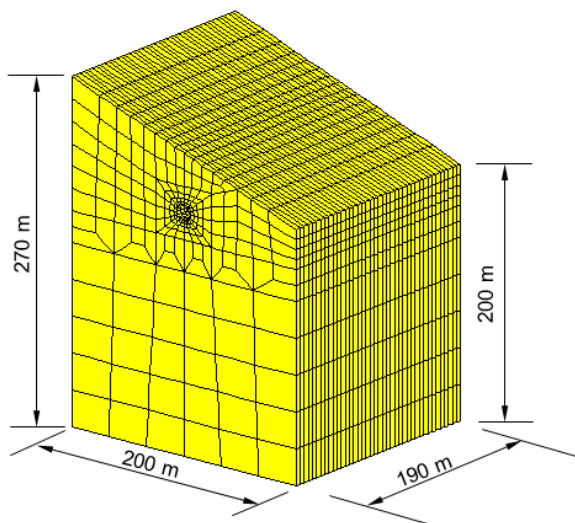
10.000 elements
110.000 unknowns
220 MB Data for results



BEM

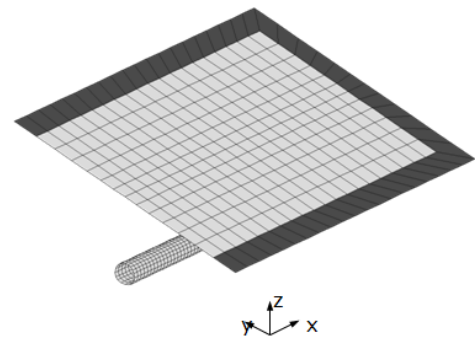
120 elements (1,2 % of FEM)
1203 unknowns (1,1 % of FEM)
0.4 MB Data for results

Σχ. 1.2: Σύγκριση των δύο τύπων μεθόδων για επίλυση προβλήματος υπόγειου ανοίγματος σε ισότροπη βραχώμαζα απείρων διαστάσεων



FEM

9 200 elements



BEM:

2 200 elements

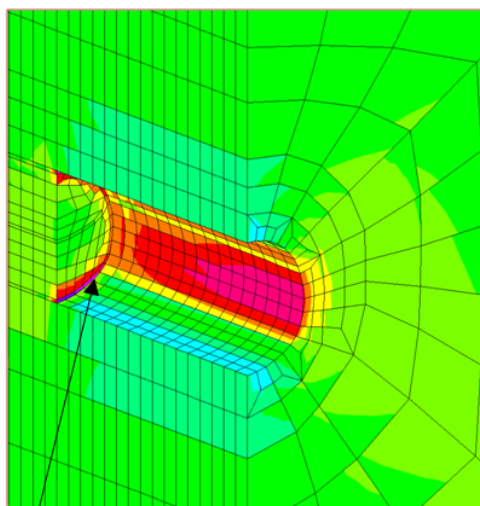
Σχ. 1.3: Σύγκριση των δύο τύπων μεθόδων για επίλυση προβλήματος υπόγειου ανοίγματος σε ισότροπη βραχώμαζα κοντά σε ελεύθερη επιφάνεια

Για την αντιμετώπιση αυτών των προβλημάτων τα τελευταία χρόνια έχει αναπτυχθεί η τεχνική των Συνοριακών Στοιχείων τα οποία παρουσιάζουν τα κάτωθι συγκριτικά πλεονεκτήματα έναντι των πεπερασμένων στοιχείων:

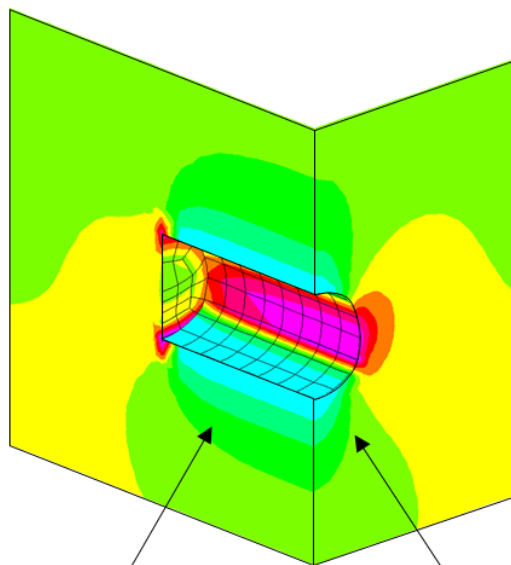
- Η διακριτοποίηση χρειάζεται να γίνει μόνο στα σύνορα (βλ. [Σχ. 1.1](#)), οπότε η τάξη του προβλήματος μειώνεται κατά μία, καθώς στις δύο διαστάσεις η διακριτοποίηση γίνεται με γραμμικά στοιχεία ενώ στα πεπερασμένα απαιτούνται τριγωνικά, τετράπλευρα ή πολυγωνικά. Αντιστοίχως στις τρεις διαστάσεις απαιτούνται τριγωνικά ή τετράπλευρα στοιχεία, ενώ με τα πεπερασμένα στοιχεία απαιτούνται τετράεδρα ή εξάεδρα στοιχεία. Άρα το σύστημα που απαιτείται να επιλυθεί στην περίπτωση των συνοριακών στοιχείων είναι κατά πολύ μικρότερο, που συνεπάγεται οι ανάγκες σε υπολογιστική μνήμη και χρόνο να είναι κατά πολύ μικρότερες.
- Ένα ακόμα πλεονέκτημα είναι του ότι η λύση (και οι παράγωγοί της), μπορεί να βρεθεί σε οποιοδήποτε σημείο του σώματος και οποιαδήποτε χρονική στιγμή, στα προβλήματα που περιλαμβάνουν και την παράμετρο του χρόνου. Αυτό γίνεται λόγω του ότι η έκφραση που προκύπτει από την επίλυση της διαφορικής εξίσωσης είναι μια συνεχής μαθηματική έκφραση, η οποία μπορεί να παραγωγιθεί όπως κάθε μαθηματική συνάρτηση. Αυτό είναι αδύνατο στα πεπερασμένα στοιχεία όπου η λύση υπολογίζεται σε συγκεκριμένα σημεία του σώματος όπου βρίσκονται οι κόμβοι των στοιχείων (βλ. [Σχ. 1.4](#))

Απ' την άλλη πλευρά τα μειονεκτήματα των συνοριακών στοιχείων είναι:

- Για να μπορεί να εφαρμοσθεί η μέθοδος πρέπει να υπάρχει ή να μπορεί να υπολογισθεί η καλούμενη θεμελιώδης λύση (συνάρτηση Green).
- Παρόλο που οι πίνακες που προκύπτουν με τις μεθόδους συνοριακών στοιχείων είναι μικρότεροι, δεν περιλαμβάνουν συμμετρία και είναι πλήρεις. Σε αντίθεση οι πίνακες των πεπερασμένων στοιχείων είναι συμμετρικοί με πολλούς μηδενικούς όρους, πράγμα που διευκολύνει την επίλυση του συστήματος των αλγεβρικών εξισώσεων (βλ. [Σχ. 1.5](#)).

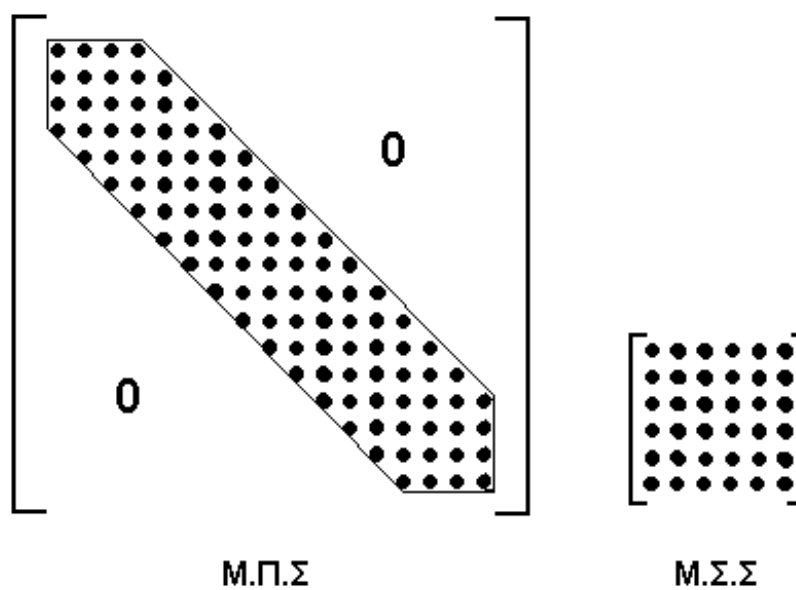


Mesh dependency of results
(non-smooth contours)



Dummy planes (no mesh)

Σχ. 1.4: Σύγκριση της ποιότητας των αποτελεσμάτων με τη χρήση της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων (αριστερά) και των συνοριακών στοιχείων (δεξιά).



Σχ. 1.5: Πίνακες συντελεστών επίδρασης για την μέθοδο των πεπερασμένων (αριστερά) και των συνοριακών στοιχείων (δεξιά) (*Katsikadelis, 2002*)

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2. ΕΠΙΛΥΣΗ ΕΛΑΣΤΙΚΩΝ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ ΣΤΙΣ ΤΡΕΙΣ ΔΙΑΣΤΑΣΕΙΣ ΤΟΥ ΧΩΡΟΥ ΜΕ ΤΗΝ ΜΕΘΟΔΟ ΤΩΝ ΑΣΥΝΕΧΩΝ ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΕΩΝ

Στο ευθύγραμμο τμήμα του Σχ. 2.1 φαίνεται ευθύγραμμη ρωγμή η οποία θεωρητικά αποτελείται από δύο επιφάνειες. Σε όλο το άπειρο μέσο οι μετατοπίσεις είναι συνεχείς εκτός στο γραμμικό τμήμα όπου οι δυο επιφάνειες μετακινούνται ξεχωριστά (βλ. Σχ. 2.2).

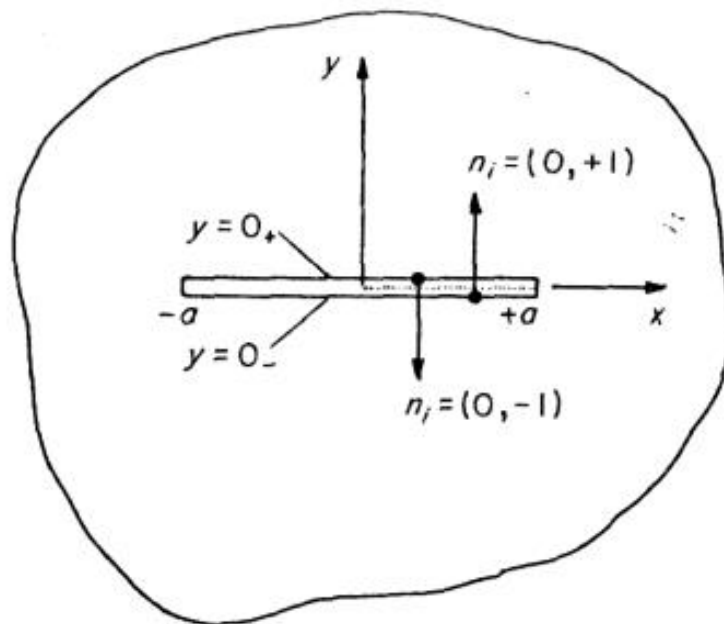
Ως ασυνεχή μετατόπιση ορίζεται η σχετική μετατόπιση των δυο επιφανειών της ρωγμής και δίδεται από την εξής σχέση (Crouch and Starfield, 1990):

$$D_i = u_i^- - u_i^+ \quad (1)$$

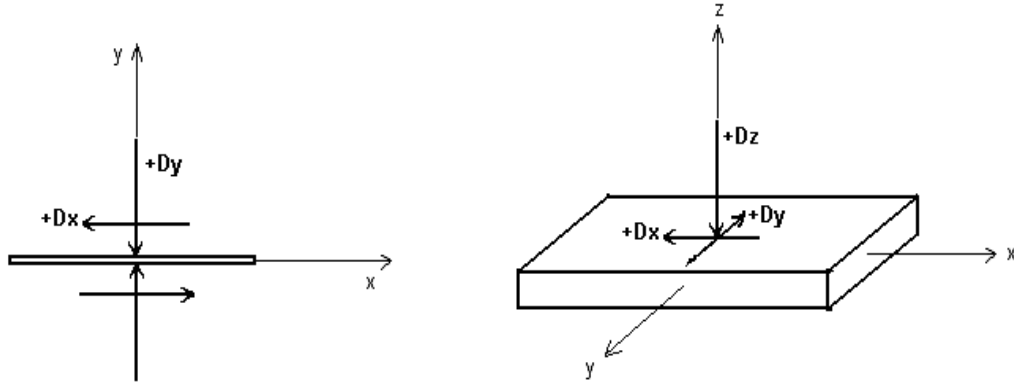
όπου:

$i \equiv x, y$,για τις δύο διαστάσεις

$i \equiv x, y, z$, για τις τρεις διαστάσεις



Σχ. 2.1: Ασυνέχεια μετατόπισης (εξάρμωση ή ρωγμή) εντός άπειρου ελαστικού μέσου



Σχ. 2.2: Συνιστώσες ασυνεχούς μετατόπισης στις δύο (αριστερά) και τις τρεις διαστάσεις (δεξιά)

Οι μετατοπίσεις είναι θετικές στην θετική διεύθυνση των αξόνων των συντεταγμένων. Από τον ορισμό η ασυνεχής μετατόπιση κάθετα στην ασυνέχεια είναι θετική όταν οι δύο πλευρές της ρωγμής επικαλύπτονται. Κάτι τέτοιο όμως δεν έχει φυσική ερμηνεία, πράγμα που μπορεί να ξεπεραστεί θεωρώντας ότι η ρωγμή έχει ένα πεπερασμένο πάχος (μικρό σε σχέση με το μήκος της) και πάντως μεγαλύτερο από το μέγεθος της συνιστώσας της ασυνεχούς της Dz .

2.1 Συντελεστές Επίδρασης

Οι συντελεστές επίδρασης, από την εφαρμογή σταθερών ασυνεχών μετατοπίσεων (Dx, Dy, Dz) επάνω στο τοπικό σύστημα οποιουδήποτε σημείου του συνόρου ενός ανοίγματος, μέσα σε ένα ισότροπο ομογενές ελαστικό σώμα, δίδονται από τις ακόλουθες εξισώσεις (Kuriyama and Mizuta, 1993, Li *et al*, 2001, Shou *et al*, 1997):

Για τις μετατοπίσεις:

$$\begin{aligned}
 u_x &= \frac{1}{8\pi(1-\nu)} \{ [2(1-\nu)f_{,z} - zf_{,xx}]D_x - zf_{,xy}D_y - [(1-2\nu)f_{,x} + zf_{,xz}]D_z \} \\
 u_y &= \frac{1}{8\pi(1-\nu)} \{ -zf_{,xy}D_x + [2(1-\nu)f_{,z} - zf_{,yy}]D_y \\
 &\quad - [(1-2\nu)f_{,y} + zf_{,yz}]D_z \} \\
 u_z &= \frac{1}{8\pi(1-\nu)} \{ [(1-2\nu)f_{,x} - zf_{,xz}]D_x + [(1-2\nu)f_{,y} - zf_{,yz}]D_y \\
 &\quad - [2(1-\nu)f_{,z} + zf_{,zz}]D_z \}
 \end{aligned} \tag{2}$$

και για τις τάσεις:

$$\begin{aligned}
\sigma_x &= \frac{G}{4\pi(1-\nu)} \{ [2f_{,xz} - zf_{,xxx}]D_x + [2\nu f_{,yz} - zf_{,xxy}]D_y \\
&\quad + [f_{,zz} + (1-2\nu)f_{,yy} - zf_{,xxz}]D_z \} \\
\sigma_y &= \frac{G}{4\pi(1-\nu)} \{ [2\nu f_{,yz} - zf_{,xyy}]D_x + [2f_{,yz} - zf_{,yyy}]D_y \\
&\quad + [f_{,zz} + (1-2\nu)f_{,xx} - zf_{,yyz}]D_z \} \\
\sigma_z &= \frac{G}{4\pi(1-\nu)} \{ -zf_{,xzz}D_x - zf_{,yzz}D_y + [f_{,zz} - zf_{,zzz}]D_z \} \\
\tau_{xy} &= \frac{G}{4\pi(1-\nu)} \{ [(1-\nu)f_{,yz} - zf_{,xxy}]D_x + [(1-\nu)f_{,xz} - zf_{,xyy}]D_y \\
&\quad - [(1-2\nu)f_{,xy} + zf_{,xyz}]D_z \} \\
\tau_{xz} &= \frac{G}{4\pi(1-\nu)} \{ [f_{,zz} + \nu f_{,yy} - zf_{,xxz}]D_x - [\nu f_{,xy} + zf_{,xyz}]D_y - zf_{,xzz}D_z \} \\
\tau_{yz} &= \frac{G}{4\pi(1-\nu)} \{ -[\nu f_{,xy} + zf_{,xyz}]D_x + [f_{,zz} + \nu f_{,xx} - zf_{,yyz}]D_y - zf_{,yzz}D_z \}
\end{aligned} \tag{3}$$

όπου G το μέτρο διάτμησης και ν ο λόγος του Poisson.

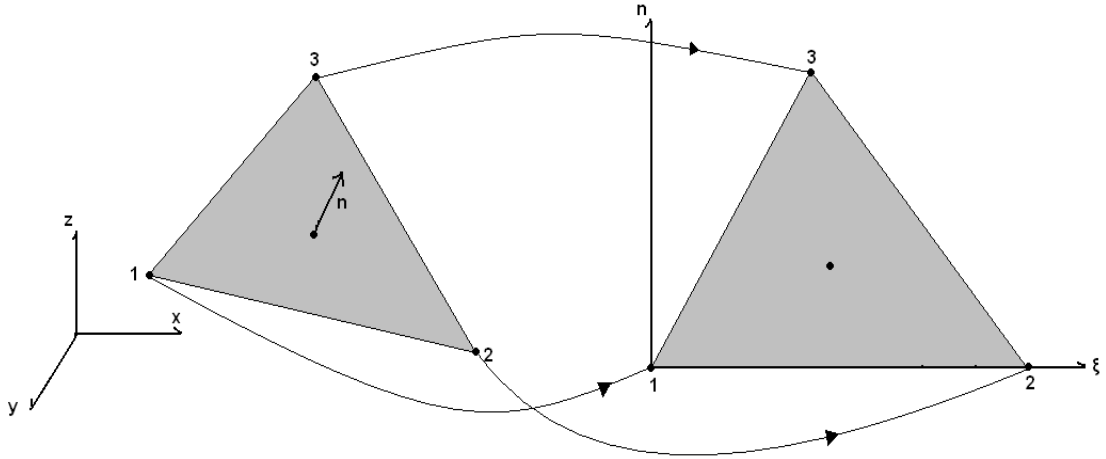
2.2 Η Συνάρτηση Επίδρασης για Επίπεδα Τριγωνικά Στοιχεία

Με την χρήση τριγωνικών στοιχείων, περίπλοκες γεωμετρίες συνόρων μπορούν να προσεγγισθούν με μεγάλη ακρίβεια με σχετικά μικρό αριθμό στοιχείων σε αντίθεση με τα τετράπλευρα στοιχεία. Οι τύποι τριγωνικών στοιχείων που μπορούν να χρησιμοποιηθούν είναι, καμπυλωτά εξακομβικά, επίπεδα εξακομβικά και επίπεδα τρικομβικά στοιχεία.

Η περίπτωση των τριγωνικών τρικομβικών στοιχείων είναι η απλούστερη περίπτωση από πλευράς εξισώσεων. Έτσι η συνάρτηση επίδρασης f της οποίας οι παράγωγοι χρησιμοποιούνται στις Εξ. (2) και (3), υπολογίζεται από την ολοκλήρωση της συνάρτησης Green $1/r$ στις τρεις διαστάσεις επάνω στο τριγωνικό στοιχείο έναντι τυχαίου σημείου $P \equiv (x, y, z)$ και δίδεται από την εξίσωση:

$$f(x, y, z) = \iint_T \frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-n)^2 + z^2}} d\xi dn \tag{4}$$

Για την επίλυση του ολοκληρώματος της Εξ. (4), οι συντεταγμένες του τριγωνικού στοιχείου πρέπει να μετασχηματισθούν στις τοπικές συντεταγμένες, όπου ο νέος άξονας z να είναι κάθετος στο επίπεδο του στοιχείου (βλ. Σχ. 2.3).



Σχ. 2.3: Μετασχηματισμός στις τοπικές συντεταγμένες του στοιχείου

Η έκφραση της συνάρτησης f που προκύπτει από το ολοκλήρωμα της Εξ. (4), δίδεται ανάλογα με την θέση των τριών πλευρών του τριγώνου $i = 1, 2, 3$, που σχηματίζονται μεταξύ των κόμβων i και $i + 1$ (Kuriyama and Mizuta, 1993), ως εξής:

$$f(x, y, z) = \begin{cases} \sum_{i=1}^3 \frac{M_i}{L_i} \{ \ln(B_i + r_{i+1}) - \ln(A_i + r_i) \}, & \text{όταν } x_i = x_{i+1} \\ \sum_{i=1}^3 \frac{M_i}{L_i} \{ \ln(B_i + r_{i+1}) - \ln(A_i + r_i) \} \\ + 2 \sum_{i=1}^3 z \left\{ \tan^{-1} \left(\frac{z}{sb_i} \right) - \tan^{-1} \left(\frac{z}{sa_i} \right) \right\}, & \text{όταν } x_i \neq x_{i+1} \end{cases} \quad (5)$$

όπου

$r_i = |PP_i| = \sqrt{(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2 + z^2}$, η απόσταση του σημείου P από τον κόμβο P_i

$L_i = |P_{i+1}P_i| = \sqrt{(x_i - x_{i+1})^2 + (y_i - y_{i+1})^2}$, το μήκος της πλευράς i του τριγώνου

$$M_i = x(y_i - y_{i+1}) + y(x_{i+1} - x_i) + (x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i),$$

$$A_i = \frac{1}{L_i} [x(x_i - x_{i+1}) + y(y_i - y_{i+1}) + x_i(x_{i+1} - x_i) + y_i(y_{i+1} - y_i)],$$

$$B_i = \frac{1}{L_i} [x(x_i - x_{i+1}) + y(y_i - y_{i+1}) + x_{i+1}(x_{i+1} - x_i) + y_{i+1}(y_{i+1} - y_i)],$$

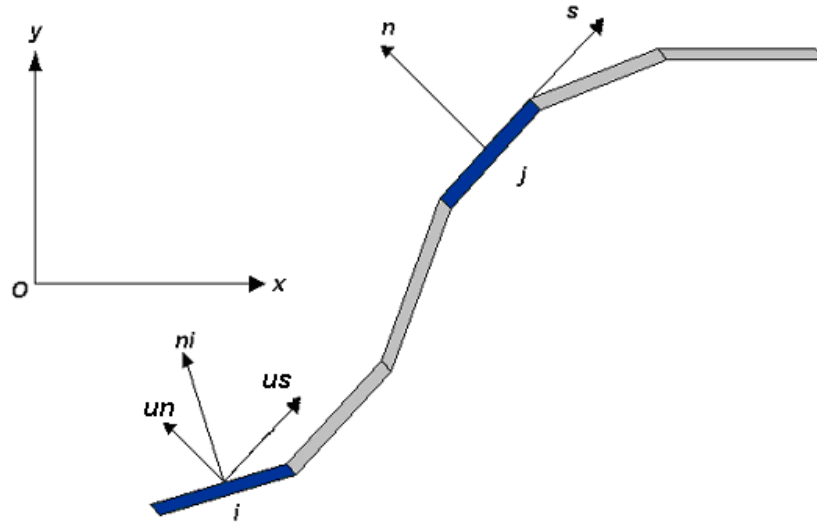
$$sa_i = \frac{L_i}{(x_{i+1}-x_i)} \left\{ y_i - y + A_i + \left(\frac{y_{i+1}-y_i}{L_i} + 1 \right) r_i \right\} \text{ και}$$

$$sb_i = \frac{L_i}{(x_{i+1}-x_i)} \left\{ y_{i+1} - y + B_i + \left(\frac{y_{i+1}-y_i}{L_i} + 1 \right) r_{i+1} \right\}$$

2.3 Διακριτοποίηση του Συνόρου

Στις προηγούμενες σχέσεις οι τάσεις και οι μετατοπίσεις υπολογίζονται σε τυχαίο σημείο του σώματος στην περίπτωση που σε τριγωνική επίπεδη ασυνέχεια επιβληθούν ως συνοριακές συνθήκες σταθερές ασυνεχείς μετατοπίσεις.

Στην περίπτωση που ένα γεωμετρικό σύνορο χωριστεί σε N τριγωνικά στοιχεία στα οποία ασκούνται ασυνεχείς μετατοπίσεις $D_i|_{i=1:N}$ και i, j δυο τυχαία στοιχεία του συνόρου, τότε η επίδραση του στοιχείου¹ j πάνω στο στοιχείο i , υπολογίζεται με βάση τις Εξ. (2) και (3), με τους συντελεστές επίδρασης να αναφέρονται στο σύστημα συντεταγμένων του j στοιχείου, όπως φαίνεται για την περίπτωση των δύο διαστάσεων στο Σχ. 2.4. Γι' αυτό το λόγο χρειάζεται ο μετασχηματισμός των συντεταγμένων στο τοπικό σύστημα αναφοράς του στοιχείου i .



Σχήμα 2.4: Επίδραση του στοιχείου j στο στοιχείο i .

¹ Οι επιδράσεις υπολογίζονται επάνω στο κέντρο βάρους των τριγωνικών στοιχείων.

Για τον υπολογισμό της συνολικής επίδρασης πρέπει να προστεθούν οι επιδράσεις και των N στοιχείων στο στοιχείο i , εφόσον μετασχηματιστούν στο τοπικό σύστημα συντεταγμένων του. Οι εκφράσεις που ισχύουν για τις τάσεις και τις μετατοπίσεις, παρουσιάζονται στις Εξ. (6) & (7):

$$\left. \begin{aligned} u_{s1}^i &= \sum_{j=1}^N A_{s1s1}^{ij} D_{s1}^j + \sum_{j=1}^N A_{s1s2}^{ij} D_{s2}^j + \sum_{j=1}^N A_{s1n}^{ij} D_n^j \\ u_{s2}^i &= \sum_{j=1}^N A_{s2s1}^{ij} D_{s1}^j + \sum_{j=1}^N A_{s2s2}^{ij} D_{s2}^j + \sum_{j=1}^N A_{s2n}^{ij} D_n^j \\ u_n^i &= \sum_{j=1}^N A_{ns1}^{ij} D_{s1}^j + \sum_{j=1}^N A_{ns2}^{ij} D_{s2}^j + \sum_{j=1}^N A_{nn}^{ij} D_n^j \end{aligned} \right\} i = 1:N \quad (6)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{s1}^i &= \sum_{j=1}^N B_{s1s1}^{ij} D_{s1}^j + \sum_{j=1}^N B_{s1s2}^{ij} D_{s2}^j + \sum_{j=1}^N B_{s1n}^{ij} D_n^j \\ \sigma_{s2}^i &= \sum_{j=1}^N B_{s2s1}^{ij} D_{s1}^j + \sum_{j=1}^N B_{s2s2}^{ij} D_{s2}^j + \sum_{j=1}^N B_{s2n}^{ij} D_n^j \\ \sigma_n^i &= \sum_{j=1}^N B_{ns1}^{ij} D_{s1}^j + \sum_{j=1}^N B_{ns2}^{ij} D_{s2}^j + \sum_{j=1}^N B_{nn}^{ij} D_n^j \end{aligned} \right\} i = 1:N \quad (7)$$

όπου A οι συντελεστές επίδρασης των μετατοπίσεων που προκύπτουν από την Εξ. (2), ενώ B οι συντελεστές επίδρασης των τάσεων που προκύπτουν από την Εξ. (3).

2.4 Συνοριακές Συνθήκες - Σύστημα Επίλυσης

Εάν είναι γνωστές είτε οι μετατοπίσεις, είτε οι τάσεις ξεχωριστά ή σε συνδυασμό στα σύνορα τότε οι ασυνεχείς μετατοπίσεις μπορούν να προσδιορισθούν από την επίλυση του γραμμικού αλγεβρικού συστήματος $3N$ αγνώστων και $3N$ εξισώσεων εισάγοντας τις αντίστοιχες συνοριακές συνθήκες (Εξ. (8), (9) και (10)) στις Εξ. (6) και/ή (7), για κάθε στοιχείο του συνόρου.

Η αριθμητική μέθοδος που περιγράφηκε παραπάνω είναι των σταθερών ασυνεχών μετατοπίσεων. Οι γνωστές μεταβλητές στα σύνορα αποτελούν τις συνοριακές συνθήκες του προβλήματος και χωρίζονται στους εξής τρεις τύπους:

➤ **Συνοριακές συνθήκες τύπου Dirichlet (ή πρώτου τύπου):**

Στην περίπτωση αυτή προσδιορίζεται η ζητούμενη παράμετρος η οποία είναι η μετατόπιση. Η σχέση που ισχύει σε αυτήν την περίπτωση προκύπτει από την Εξ. (7) αντικαθιστώντας τις συνοριακές τιμές για τις μετατοπίσεις:

$$\left[\begin{pmatrix} i \\ u_{s1} \end{pmatrix}_0, \begin{pmatrix} i \\ u_{s2} \end{pmatrix}_0, \begin{pmatrix} i \\ u_n \end{pmatrix}_0 \right] \quad (8)$$

➤ **Συνοριακές συνθήκες τύπου Neumann (ή δεύτερου τύπου):**

Στης συνοριακές συνθήκες αυτού του τύπου προσδιορίζεται η παράγωγος του ζητούμενου μεγέθους που εκφράζεται από το διάνυσμα της τάσης στο επίπεδο του στοιχείου i .

$$\left[\begin{pmatrix} i \\ \sigma_{s1} \end{pmatrix}_0, \begin{pmatrix} i \\ \sigma_{s2} \end{pmatrix}_0, \begin{pmatrix} i \\ \sigma_n \end{pmatrix}_0 \right] \quad (9)$$

➤ **Μικτές συνοριακές συνθήκες (ή τρίτου τύπου):**

Τέλος στην περίπτωση που στα σύνορα καθορίζονται ταυτόχρονα συνιστώσες των μετατοπίσεων και των τάσεων, οι εξής έξι συνδυασμοί συνοριακών συνθηκών οι οποίες μπορούν να δοθούν είναι οι εξής:

$$\begin{aligned} & \left[\begin{pmatrix} i \\ u_{s1} \end{pmatrix}_0, \begin{pmatrix} i \\ \sigma_{s2} \end{pmatrix}_0, \begin{pmatrix} i \\ \sigma_n \end{pmatrix}_0 \right], \left[\begin{pmatrix} i \\ \sigma_{s1} \end{pmatrix}_0, \begin{pmatrix} i \\ u_{s2} \end{pmatrix}_0, \begin{pmatrix} i \\ \sigma_n \end{pmatrix}_0 \right], \left[\begin{pmatrix} i \\ \sigma_{s1} \end{pmatrix}_0, \begin{pmatrix} i \\ \sigma_{s2} \end{pmatrix}_0, \begin{pmatrix} i \\ u_n \end{pmatrix}_0 \right] \\ & \left[\begin{pmatrix} i \\ u_{s1} \end{pmatrix}_0, \begin{pmatrix} i \\ u_{s2} \end{pmatrix}_0, \begin{pmatrix} i \\ \sigma_n \end{pmatrix}_0 \right], \left[\begin{pmatrix} i \\ \sigma_{s1} \end{pmatrix}_0, \begin{pmatrix} i \\ u_{s2} \end{pmatrix}_0, \begin{pmatrix} i \\ u_n \end{pmatrix}_0 \right], \left[\begin{pmatrix} i \\ u_{s1} \end{pmatrix}_0, \begin{pmatrix} i \\ \sigma_{s2} \end{pmatrix}_0, \begin{pmatrix} i \\ u_n \end{pmatrix}_0 \right] \end{aligned} \quad (10)$$

είναι οι αντίστοιχοι συντελεστές επίδρασης των Εξ. (6) ή (7).

Η λύση μπορεί να επεκταθεί σε όλο το μέσο με την χρήση των Εξ.(6) & (7). Ειδικά για την εκτίμηση των μετατοπίσεων στα επίπεδα των στοιχείων διακρίνονται τρεις περιπτώσεις (Crouch and Starfield, 1990):

1) Το σημείο $(x, y, 0)$ είναι εκτός του τριγωνικού στοιχείου,

$$\begin{aligned} u_x &= \frac{1}{8\pi(1-\nu)} \{ -[(1-2\nu)f_x]D_z \} \\ u_y &= \frac{1}{8\pi(1-\nu)} \{ -[(1-2\nu)f_y]D_z \} \\ u_z &= \frac{1}{8\pi(1-\nu)} \{ [(1-2\nu)f_x]D_x + [(1-2\nu)f_y]D_y \} \end{aligned} \quad (11)$$

2) το σημείο $(x, y, z = 0^-)$ είναι εντός του τριγωνικού στοιχείου,

$$\begin{aligned} u_x^- &= \frac{1}{2}D_x + \frac{1}{8\pi(1-\nu)}\{-(1-2\nu)f_x\}D_z\} \\ u_y^- &= \frac{1}{2}D_y + \frac{1}{8\pi(1-\nu)}\{-(1-2\nu)f_y\}D_z\} \\ u_z^- &= \frac{1}{2}D_z + \frac{1}{8\pi(1-\nu)}\{(1-2\nu)f_x\}D_x + \{(1-2\nu)f_y\}D_y\} \end{aligned} \quad (12)$$

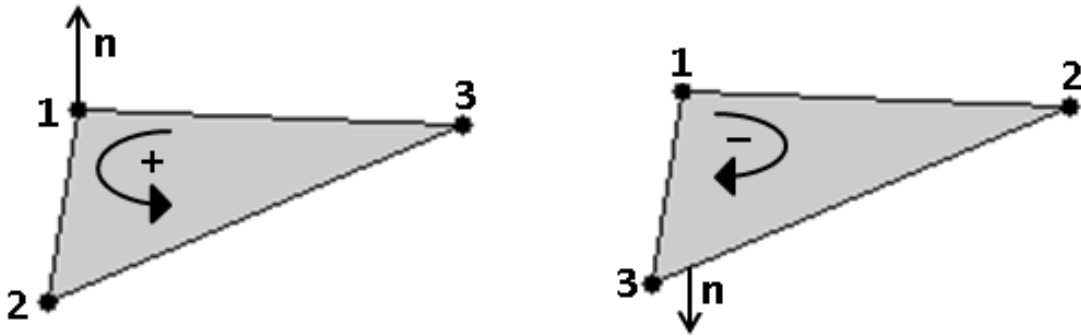
3) το σημείο $(x, y, z = 0^+)$ είναι εντός του τριγωνικού στοιχείου.

$$\begin{aligned} u_x^+ &= -\frac{1}{2}D_x + \frac{1}{8\pi(1-\nu)}\{-(1-2\nu)f_x\}D_z\} \\ u_y^+ &= -\frac{1}{2}D_y + \frac{1}{8\pi(1-\nu)}\{-(1-2\nu)f_y\}D_z\} \\ u_z^+ &= -\frac{1}{2}D_z + \frac{1}{8\pi(1-\nu)}\{(1-2\nu)f_x\}D_x + \{(1-2\nu)f_y\}D_y\} \end{aligned} \quad (13)$$

Από τις παραπάνω σχέσεις προκύπτει ότι οι συνοριακές συνθήκες στην μέθοδο των ασυνεχών μετατοπίσεων μπορούν να δίνονται είτε στην αρνητική, είτε στην θετική πλευρά του στοιχείου. Στην περίπτωση της εργασίας αυτής, έχει επιλεγεί η αρνητική πλευρά των στοιχείων για την επιβολή των συνοριακών. Οι αντίστοιχες τιμές για τις μετατοπίσεις στην θετική πλευρά του στοιχείου βρίσκονται από τον ορισμό των ασυνεχών μετατοπίσεων (Εξ. (1)):

$$u_i^+ = u_i^- - D_i \quad (14)$$

Η αρνητική πλευρά ενός τριγωνικού στοιχείου ορίζεται από την φορά που σχηματίζουν οι κόμβοι του (βλ. Σχ. 2.5). Ενώ για να είναι δυνατή η αξιολόγηση των αποτελεσμάτων αλλά και της ορθής επιβολής των συνοριακών συνθηκών, η φορά των τριγωνικών στοιχείων που απαρτίζουν ένα σύνορο, πρέπει να είναι ενιαία.



Σχ. 2.5: Ορισμός της θετικής και αρνητικής επιφάνειας του τριγώνου ανάλογα με την φορά των κόμβων του

2.5 Διόρθωση εφαπτομενικών τάσεων

Οι εφαπτομενικές τάσεις ($\sigma_{t1} = \sigma_x, \sigma_{t2} = \sigma_y$) επάνω στο σύνορο είναι ασυνεχείς (η τιμή στην θετική διαφέρει από την τιμή στην αρνητική επιφάνεια του τριγωνικού στοιχείου), ενώ η μέθοδος των ασυνεχών μετατοπίσεων τις δίδει ως συνεχείς. Για το λόγο αυτό χρειάζεται να γίνει μια διόρθωση στις τάσεις.

Από τον νόμο του Hooke για τις επιφανειακές τάσεις στις τρεις διαστάσεις προκύπτουν οι παρακάτω εξισώσεις (Timoshenko and Goodier, 1970) :

$$\begin{aligned}\sigma_x &= 2Ge_x + \lambda(e_x + e_y + e_z) \\ \sigma_y &= 2Ge_y + \lambda(e_x + e_y + e_z) \\ \sigma_z &= 2Ge_z + \lambda(e_x + e_y + e_z)\end{aligned}\tag{15}$$

όπου λ η σταθερά του Lamé.

$$\lambda = \frac{2\nu G}{1 - 2\nu}$$

Λύνοντας την τρίτη εξίσωση ως προς e_z και αντικαθιστώντας την στις άλλες δύο, προκύπτουν οι παρακάτω :

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{2G(\nu e_y + e_x)}{1 - \nu} - \frac{\nu \sigma_z}{1 - \nu} \\ \sigma_y &= \frac{2G(e_y + \nu e_x)}{1 - \nu} - \frac{\nu \sigma_z}{1 - \nu}\end{aligned}\tag{16}$$

Από τις εξισώσεις αυτές είναι εύκολο να υπολογιστούν οι εφαπτομενικές τάσεις για την θετική και την αρνητική πλευρά του κάθε στοιχείου:

$$\begin{aligned}\sigma_x^+ &= \frac{2G(\nu e_y^+ + e_x^+)}{1-\nu} - \frac{\nu\sigma_z^+}{1-\nu} \\ \sigma_x^- &= \frac{2G(\nu e_y^- + e_x^-)}{1-\nu} - \frac{\nu\sigma_z^-}{1-\nu} \\ \sigma_y^+ &= \frac{2G(e_y^+ + \nu e_x^+)}{1-\nu} - \frac{\nu\sigma_z^+}{1-\nu} \\ \sigma_y^- &= \frac{2G(e_y^- + \nu e_x^-)}{1-\nu} - \frac{\nu\sigma_z^-}{1-\nu}\end{aligned}\quad (17)$$

όπου, χρησιμοποιώντας τους ορισμούς $e_x^+ = \partial u_x^+ / \partial x$, $e_x^- = \partial u_x^- / \partial x$, $e_y^+ = \partial u_y^+ / \partial y$, $e_y^- = \partial u_y^- / \partial y$ προκύπτουν :

$$\begin{aligned}\sigma_x^+ &= \frac{2G(\nu (\partial u_y^+ / \partial y) + \partial u_x^+ / \partial x)}{1-\nu} - \frac{\nu\sigma_z^+}{1-\nu} \\ \sigma_x^- &= \frac{2G(\nu (\partial u_y^- / \partial y) + \partial u_x^- / \partial x)}{1-\nu} - \frac{\nu\sigma_z^-}{1-\nu} \\ \sigma_y^+ &= \frac{2G(\partial u_y^+ / \partial y + \nu (\partial u_x^+ / \partial x))}{1-\nu} - \frac{\nu\sigma_z^+}{1-\nu} \\ \sigma_y^- &= \frac{2G(\partial u_y^- / \partial y + \nu (\partial u_x^- / \partial x))}{1-\nu} - \frac{\nu\sigma_z^-}{1-\nu}\end{aligned}\quad (18)$$

Οι τάσεις σ_z^+ και σ_z^- είναι ίσες σε όλα τα στοιχεία επάνω στα σύνορα οπότε το μόνο που μένει είναι να υπολογιστούν οι παράγωγοι των μετατοπίσεων $u_x^{-,+}$ και $u_y^{-,+}$. Σημειώνεται ότι οι εξισώσεις των ασυνεχών όρων για τις εφαπτομενικές τάσεις είναι :

$$\begin{aligned}\sigma_x^- - \sigma_x^+ &= \frac{2G}{1-\nu} \left[\left(\frac{\partial u_x^-}{\partial x} - \frac{\partial u_x^+}{\partial x} \right) + \nu \left(\frac{\partial u_y^-}{\partial y} - \frac{\partial u_y^+}{\partial y} \right) \right] \\ \sigma_y^- - \sigma_y^+ &= \frac{2G}{1-\nu} \left[\left(\frac{\partial u_y^-}{\partial y} - \frac{\partial u_y^+}{\partial y} \right) + \nu \left(\frac{\partial u_x^-}{\partial x} - \frac{\partial u_x^+}{\partial x} \right) \right]\end{aligned}\quad (19)$$

ή, χρησιμοποιώντας τον ορισμό $D_i = u_i^- - u_i^+$ οι σχέσεις απλοποιούνται σε :

$$\begin{aligned}\sigma_x^- - \sigma_x^+ &= \frac{2G}{1-\nu} \left[\frac{\partial D_x}{\partial \bar{x}} + \nu \frac{\partial D_y}{\partial \bar{y}} \right] \\ \sigma_y^- - \sigma_y^+ &= \frac{2G}{1-\nu} \left[\frac{\partial D_y}{\partial \bar{y}} + \nu \frac{\partial D_x}{\partial \bar{x}} \right]\end{aligned}\quad (20)$$

Ο υπολογισμός των παραγώγων θα γίνει αριθμητικά με την μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων. Στη μέθοδο αυτή το πεπερασμένο τριγωνικό στοιχείο, δημιουργείται από τα τρία κέντρα βάρους των γειτονικών τριγώνων του υπό

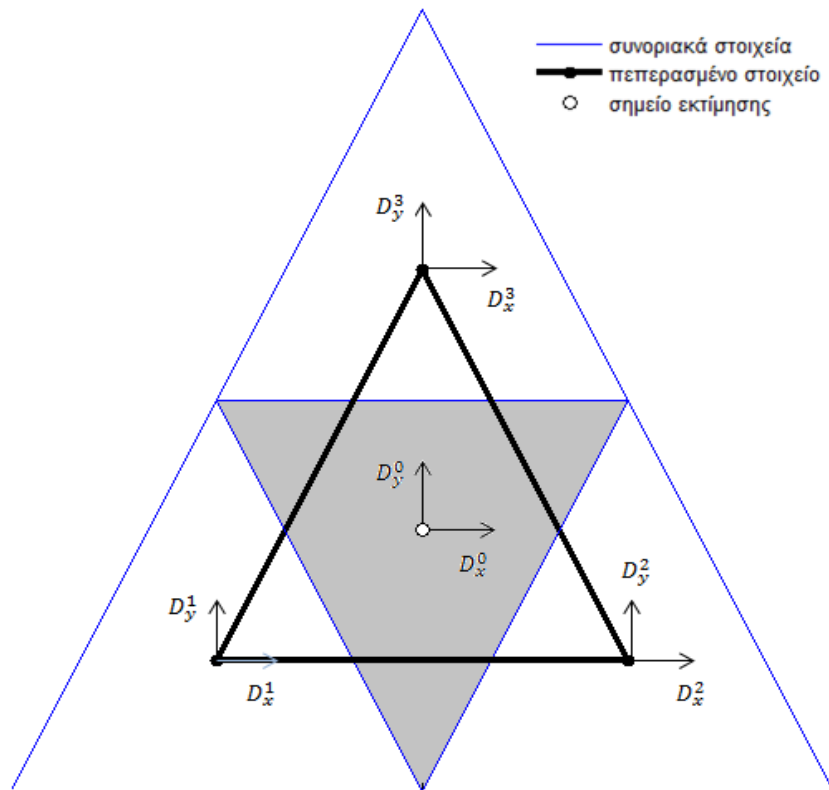
εξέταση συνοριακού στοιχείου (βλ Σχ. 2.6). Όπου η συνάρτηση μορφής που χρησιμοποιείται για το τριγωνικό στοιχείο είναι γραμμική. Η εκτίμηση των παραγώγων εντός του τριγώνου δίνεται από την ακόλουθη σχέση :

$$\begin{aligned}\frac{\partial D_x(x, y)}{\partial x} &= \sum_{i=1}^3 \frac{\partial N_i(x, y)}{\partial x} \cdot D_x^i \\ \frac{\partial D_y(x, y)}{\partial y} &= \sum_{i=1}^3 \frac{\partial N_i(x, y)}{\partial y} \cdot D_y^i\end{aligned}\quad (21)$$

όπου N_i η συνάρτηση μορφής:

$$\begin{aligned}N_1(x, y) &= \frac{x(y_2 - y_3) - y(x_2 - x_3) + x_2 y_3 - x_3 y_2}{x_1(y_2 - y_3) - y_1(x_2 - x_3) + x_2 y_3 - x_3 y_2} \\ N_2(x, y) &= \frac{x(y_3 - y_1) - y(x_3 - x_1) + x_3 y_1 - x_1 y_3}{x_1(y_3 - y_1) - y_1(x_3 - x_1) + x_3 y_1 - x_1 y_3} \\ N_3(x, y) &= \frac{x(y_1 - y_2) - y(x_1 - x_2) + x_1 y_2 - x_2 y_1}{x_1(y_1 - y_2) - y_1(x_1 - x_2) + x_1 y_2 - x_2 y_1}\end{aligned}\quad (22)$$

Σε μη συνεπίπεδα τρίγωνα λαμβάνεται υπόψη και το κέντρο βάρους του προς εξέταση στοιχείου ώστε οι συναρτήσεις μορφής να συμπεριλαμβάνουν και τη συντεταγμένη z.



Σχ. 2.6: Δημιουργία πεπερασμένου στοιχείου μέσω των γειτονικών

Η διόρθωση για τις δύο εφαπτομενικές τάσεις στην αρνητική επιφάνεια είναι η εξής:

$$\begin{aligned}\sigma_x^- &= \sigma_x + \frac{1}{2}(\sigma_x^- - \sigma_x^+) \\ \sigma_y^- &= \sigma_x + \frac{1}{2}(\sigma_y^- - \sigma_y^+)\end{aligned}\tag{23}$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3. ΚΩΔΙΚΑΣ ΤΗΣ MATLAB

Για το παρόν πρόβλημα δημιουργήθηκε υπολογιστικός κώδικας με την χρήση του μαθηματικού προγράμματος Matlab. Κατά την διάρκεια της διεξαγωγής των διαφόρων υπολογισμών παρουσιάστηκαν διάφορα προβλήματα τα οποία αντιμετωπίστηκαν με διάφορες τροποποιήσεις που έγιναν στον κώδικα. Επίσης προστέθηκε και η διόρθωση των εφαπτομενικών τάσεων για πιο σωστή διεξαγωγή των αποτελεσμάτων των τάσεων. Η λειτουργία του κώδικα καθώς και τα διαγράμματα ροής τα οποία αυτός ακολουθεί παρουσιάζονται στα ακόλουθα υποκεφάλαια.

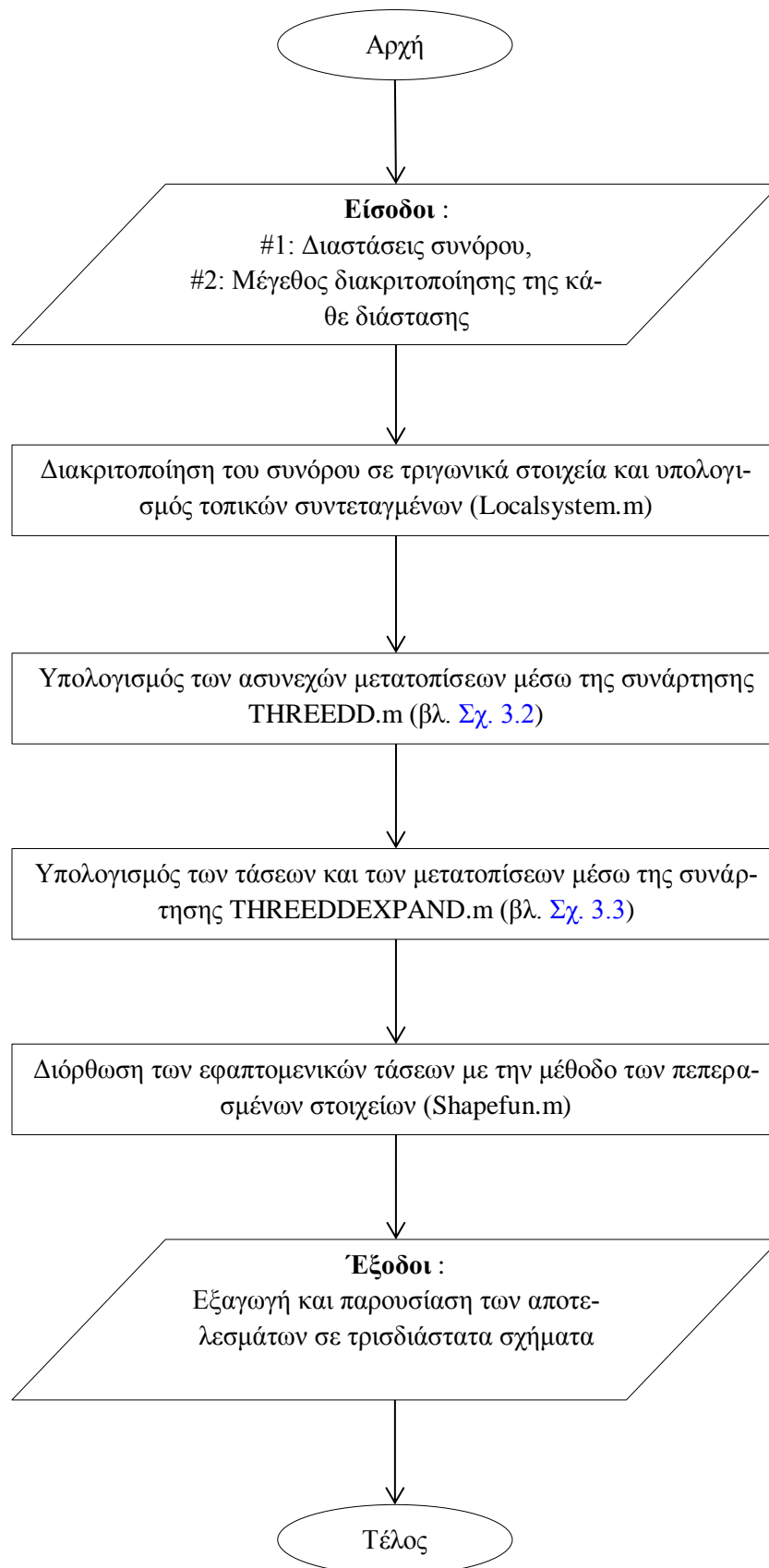
3.1 Γενικές πληροφορίες για την λειτουργία του κώδικα

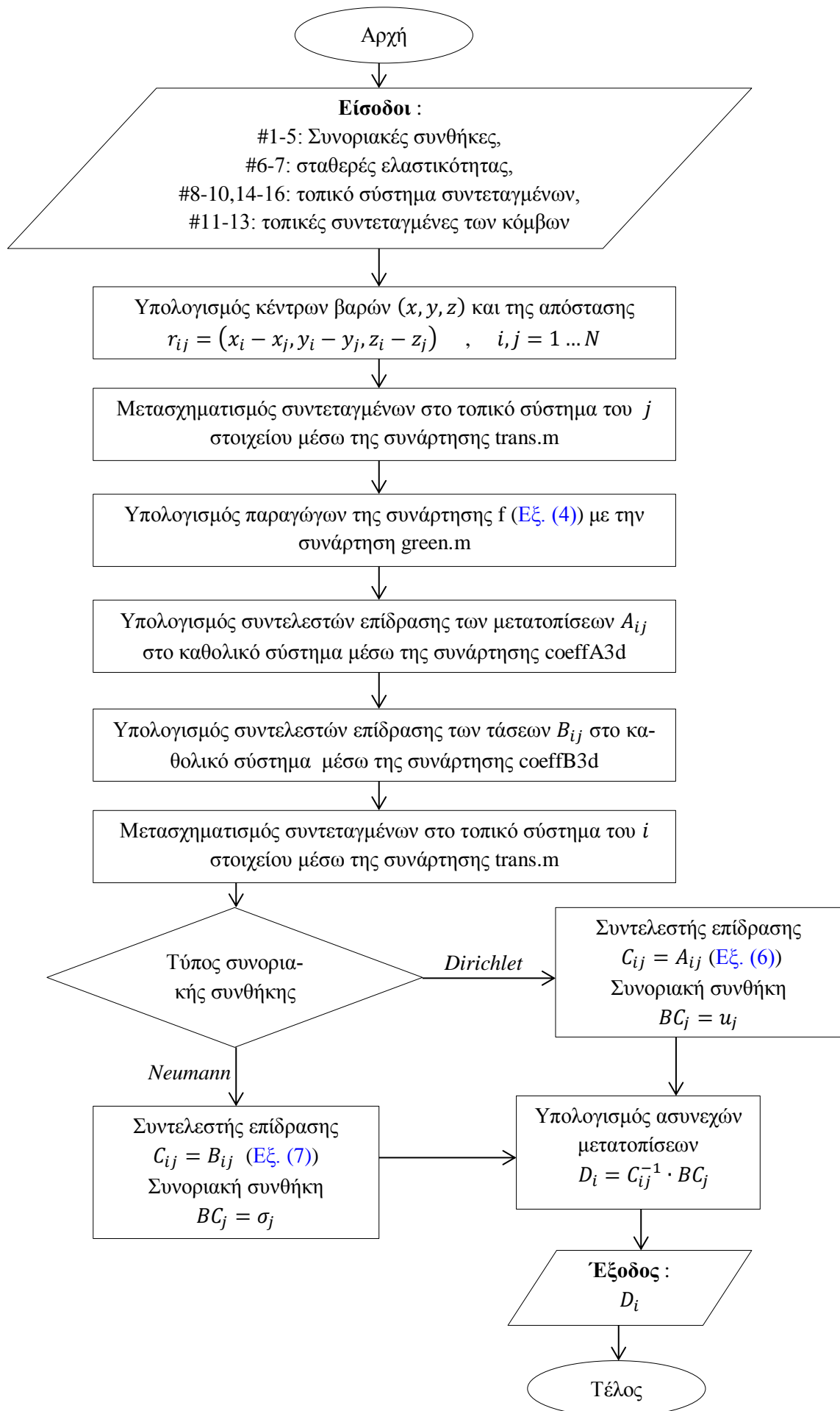
Ο κώδικας ακολουθάει κάποια βασικά βήματα για την επίλυση του παρόντος προβλήματος καθώς και για προβλήματα παρόμοια με αυτό. Τα βήματα αυτά είναι τα ακόλουθα :

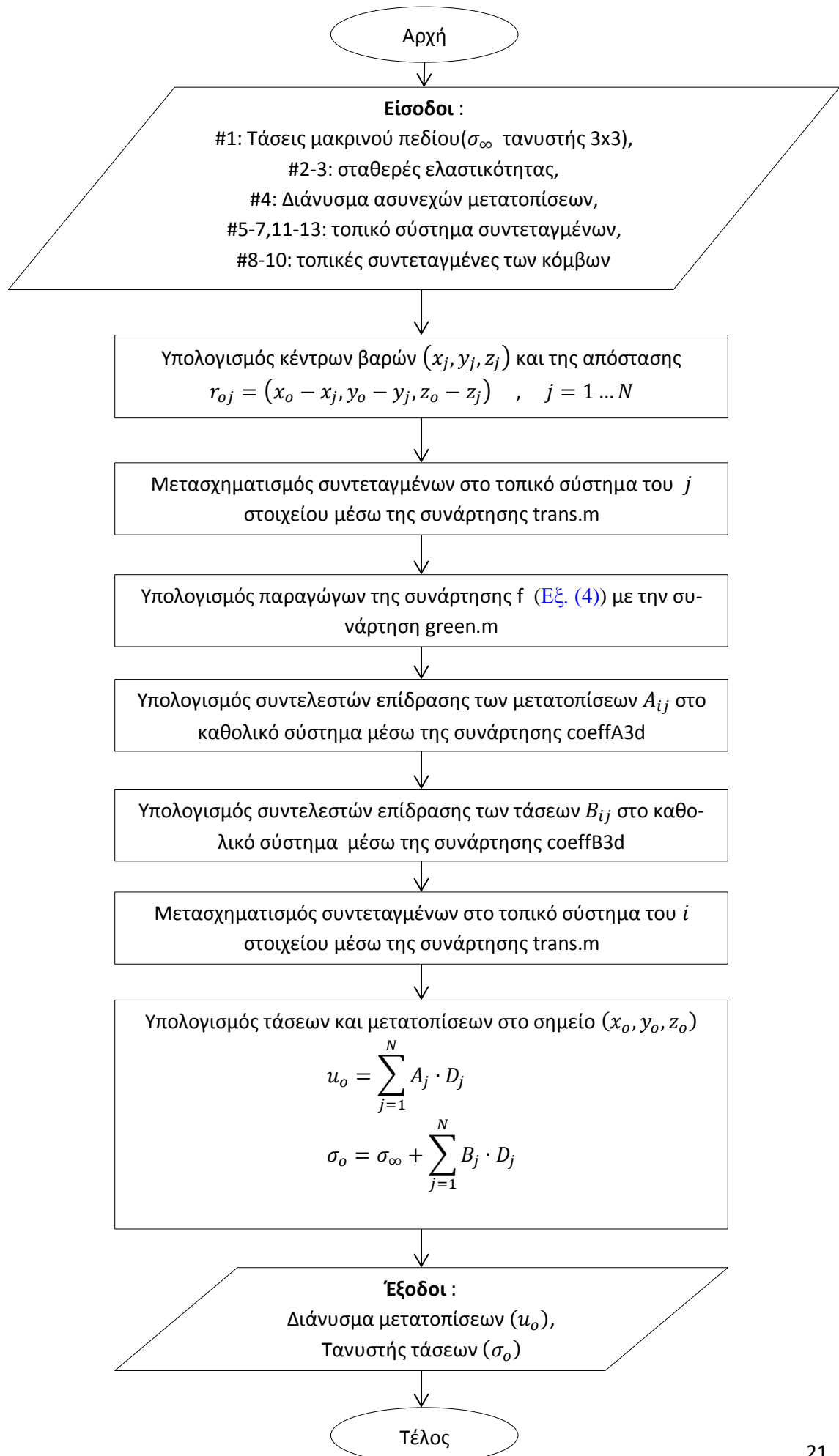
- Δημιουργία του συνόρου του προς μελέτη ανοίγματος
- Διακριτοποίηση του συνόρου σε τριγωνικά επίπεδα στοιχεία
- Υπολογισμός των κέντρων βαρών των τριγωνικών στοιχείων (καθώς οι τάσεις και οι μετατοπίσεις υπολογίζονται στο κέντρο του κάθε τριγώνου)
- Υπολογισμός των παραγώγων της συνάρτησης Green (Εξ. (6)) στο τοπικό σύστημα συντεταγμένων του κάθε στοιχείου
- Υπολογισμός των συντελεστών τάσεων και μετατοπίσεων στο καθολικό σύστημα των συντεταγμένων
- Επαναφορά των συντελεστών στις τοπικές συντεταγμένες του κάθε στοιχείου και υπολογισμός των ασυνεχών μετατοπίσεων με βάση την συνοριακή συνθήκη που έχει επιλεγεί (Dirichlet ή Neumann)
- Υπολογισμός των τάσεων και των μετατοπίσεων του κάθε τριγωνικού στοιχείου
- Διόρθωση των εφαπτομενικών τάσεων
- Παρουσίαση των αποτελεσμάτων του συνολικού συνόρου

3.2 Διάγραμμα ροής

Τα βήματα που αναπτύχθηκαν παραπάνω, παρουσιάζονται στα Σχ. 3.1-3.3, σε μορφή διαγράμματος ροής.







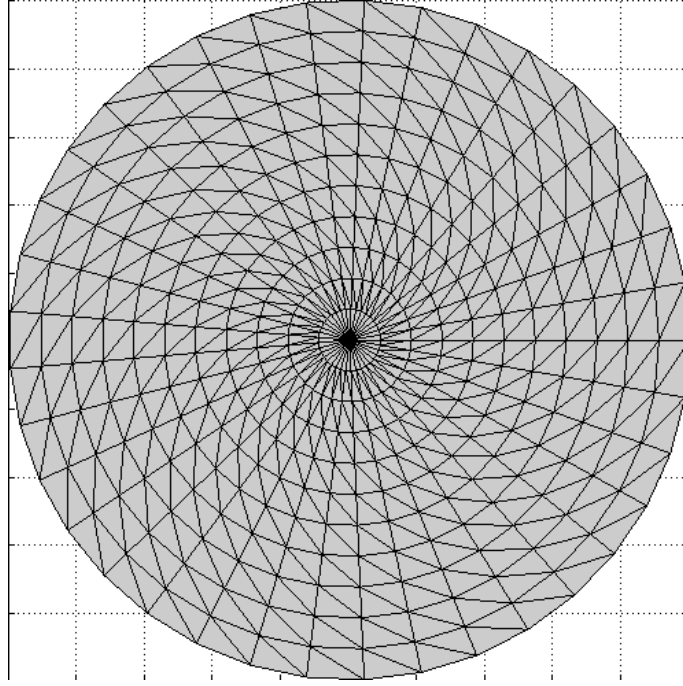
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4. ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΤΟΥ ΚΩΔΙΚΑ ΜΕ ΑΝΑΛΥΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

Για να παρουσιασθούν οι δυνατότητες του υπολογιστικού κώδικα που δημιουργήθηκε και για να εξακριβωθεί η ακρίβεια της μεθόδου ανάλογα με τον αριθμό των στοιχείων που χρησιμοποιούνται, γίνεται σύγκριση με προβλήματα όπου έχουν προηγουμένως βρεθεί λύσεις κλειστής μορφής. Αυτά τα προβλήματα είναι:

- Το πρόβλημα κυκλικής ρωγμής με ομοιόμορφη εσωτερική πίεση,
- το πρόβλημα σφαιρικής κοιλότητας, σε ισότροπο και ανισότροπο εντατικό πεδίο
- της επιμήκους σήραγγας κυκλικής διατομής

4.1 Ρωγμή κυκλικού σχήματος

Στην περίπτωση αυτή όλα τα στοιχεία βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο. Σε τέτοιες περιπτώσεις ιδιαίτερη προσοχή πρέπει να δίνεται στην διακριτοποίηση, έτσι ώστε το κέντρο βάρους κάποιου από των στοιχείων να μην συμπίπτει στην ίδια ευθεία με την προέκταση πλευράς κάποιου άλλου στοιχείου. Αυτό είναι εύκολο να επιτευχθεί στην συγκεκριμένη περίπτωση με τον διαχωρισμό του συνόρου σε τριγωνικά στοιχεία, τοποθετημένων σε ομόκεντρους κύκλους όπως φαίνεται στο Σχ. 4.1. Λαμβάνεται υπόψη ότι για καλύτερα αποτελέσματα, η διακριτοποίηση πρέπει να πλησιάζει την κυκλική μορφή και ο λόγος οποιονδήποτε δύο πλευρών των τριγωνικών στοιχείων θα πρέπει να είναι μεταξύ, του ένα και δύο ($1 < \alpha/\beta < 2$).



Σχ. 4.1: Διακριτοποίηση του συνόρου

Οι συνοριακές συνθήκες του προβλήματος της κυκλικής ρωγμής, οι πα-
ρειές της οποίας υποβάλλονται σε ομοιόμορφη πίεση, είναι οι εξής:

$$\begin{aligned}\sigma_{rz} &= 0, & -\infty < r < \infty, z = 0 \\ \sigma_{zz} &= -p_0, & 0 < r < c, z = 0 \\ u_z &= 0, & r \geq 0, z = 0\end{aligned}\quad (24)$$

όπου c η ακτίνα της κυκλικής ρωγμής.

Επιπροσθέτως οι τάσεις και οι μετατοπίσεις σε άπειρη απόσταση από το
σύνορο πρέπει να τείνουν στο μηδέν (συνθήκη ακτινοβολίας). Το συγκεκριμένο
πρόβλημα έχει λυθεί σε κλειστή μορφή. Οι μετατοπίσεις και οι τάσεις επάνω στο
σύνορο δίνονται από τις παρακάτω αναλυτικές σχέσεις ([Kuriyama and Mizuta, 1993](#), [Sneddon and Lowengrub, 1969](#)):

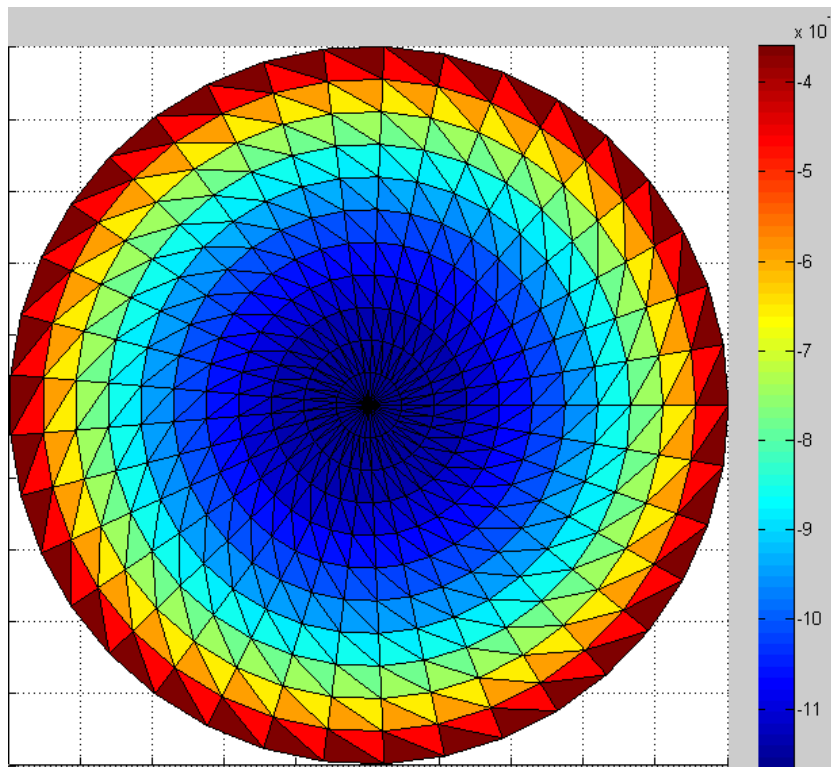
$$\begin{aligned}D_z(\rho, 0) &= 4cp_0 \frac{1-\nu}{\pi G} \sqrt{1-\rho^2}, & \rho \leq 1 \\ \sigma_z &= -p_0 \\ \sigma_r = \sigma_\theta &= -\left(\nu + \frac{1}{2}\right)p_0, & \rho < 1\end{aligned}\quad (25)$$

όπου $\rho = r/R$, απόσταση του προς μελέτη σημείου από το κέντρο της ρωγμής
προς την ακτίνα της ρωγμής.

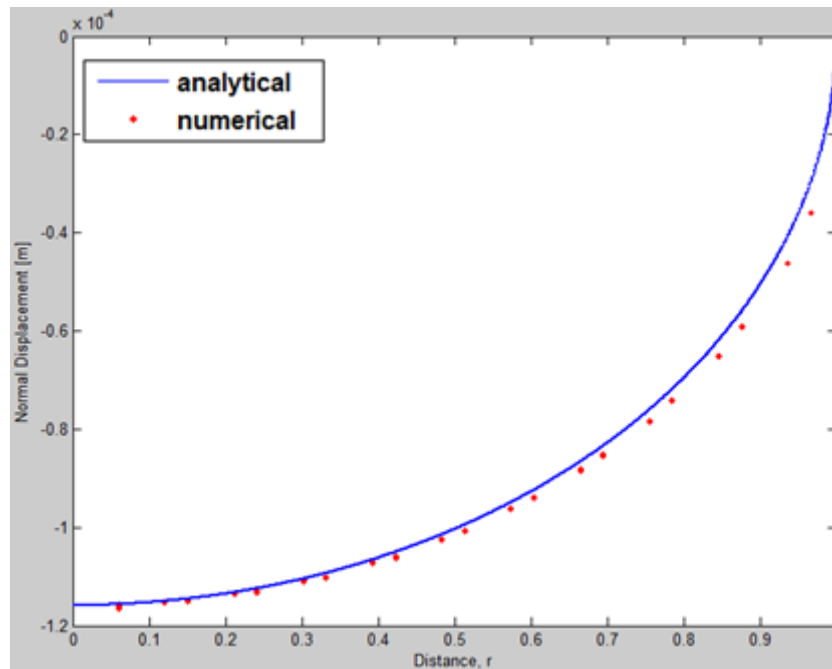
Οι αντίστοιχες σχέσεις για την περίπτωση του συγκεκριμένου προβλήματος, που έχουν βρεθεί από τον Fabrikant είναι (Karapetian, 1993):

$$\begin{aligned}\sigma_r &= p_0 + 2 \frac{p_0}{\pi} \left\{ \frac{1}{\sqrt{\rho^2 - 1}} \left[\nu \left(1 - \frac{1}{\rho^2} \right) + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{\rho^2} \right) \right] - \left(\nu + \frac{1}{2} \right) \sin^{-1} \left(\frac{1}{\rho} \right) \right\} \\ \sigma_\theta &= p_0 + 2 \frac{p_0}{\pi} \left\{ \frac{1}{\sqrt{\rho^2 - 1}} \left[\nu \left(1 + \frac{1}{\rho^2} \right) + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\rho^2} \right) \right] - \left(\nu + \frac{1}{2} \right) \sin^{-1} \left(\frac{1}{\rho} \right) \right\}\end{aligned}\quad (26)$$

Παρακάτω γίνεται η σύγκριση των αποτελεσμάτων που προκύπτουν από την αριθμητική επίλυση με την αναλυτική λύση που δίδεται από τις Εξ. (25) και (26). Για το υλικό που περιβάλλει την ρωγμή, έχει θεωρηθεί μέτρο ελαστικότητας 20 GPa και λόγος Poisson 0.3 Στο Σχ. 4.2 παρουσιάζεται η κατανομή της ασυνεχούς μετατόπισης στο επίπεδο της ρωγμής για την περίπτωση των 777 στοιχείων, ενώ στο Σχ. 4.3 γίνεται σύγκριση με την εξίσωση (25).



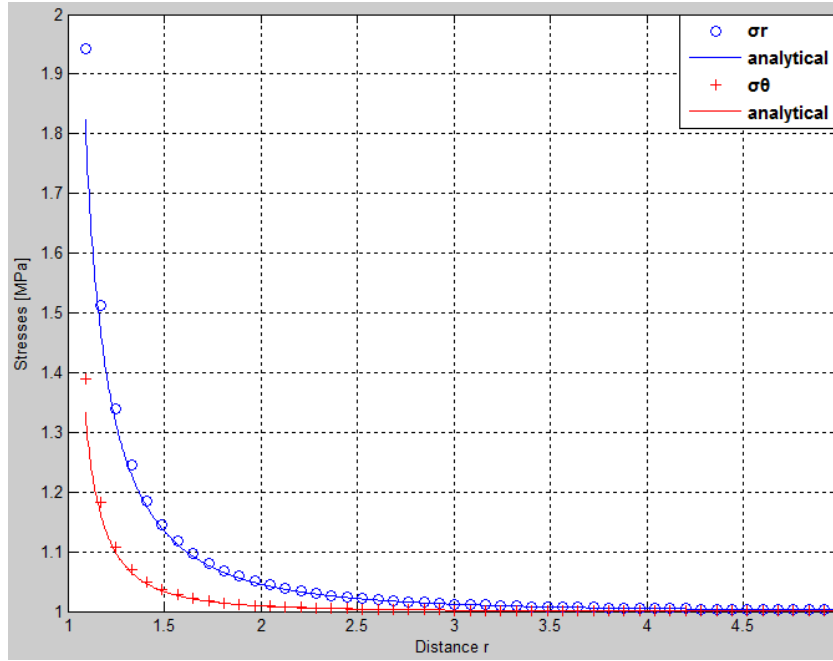
Σχ. 4.2: Κατανομή ασυνεχούς μετατόπισης



Σχ. 4.3: Σύγκριση της ασυνεχούς μετατόπισης με την αναλυτική λύση

Στην περίπτωση της ρωγμής μέσα σε άπειρο μέσο στην οποία επιβάλλεται ομοιόμορφη φόρτιση στο εσωτερικό της, η αριθμητική λύση συμπίπτει ικανοποιητικά με την αναλυτική λύση. Η χρωματική κλίμακα που φαίνεται στο [Σχ. 4.2](#) είναι ανάλογη των μονάδων της ακτίνας που έχει δοθεί (π.χ. άμα η ακτίνα της ρωγμής είναι σε μέτρα τότε και η ασυνεχής μετατόπιση είναι σε μέτρα)

Στην συνέχεια διερευνάται η ακρίβεια των αποτελεσμάτων της υπολογιστικής μεθόδου εκτός του συνόρου της κυκλικής ρωγμής. Συγκεκριμένα στα σχήματα που ακολουθούν παρουσιάζονται οι τάσεις που προκύπτουν από την αριθμητική επίλυση με την χρήση 777 στοιχείων, έξω από την ρωγμή αλλά επί του επιπέδου της.



Σχ. 4.4: Σύγκριση των αριθμητικών τάσεων με τις αναλυτικές λύσεις του Fabrikant

Παρατηρείται ότι τα αποτελέσματα της αριθμητικής επίλυσης ακολουθούν τις αναλυτικές λύσεις των εξισώσεων του Fabrikant.

4.2 Σφαιρική κοιλότητα

Αναλυτικές σχέσεις για το σφαιρικό άνοιγμα έχουν βρεθεί για δύο περιπτώσεις:

- Στην περίπτωση μονοαξονικής φορτίσεως στο άπειρο ([Kuriyama and Mizuta, 1993](#), [Yacoub, 1999](#)):

$$u_r = \frac{p_z}{2G} \frac{R}{2(7-5\nu)} \beta^2 [-6 + 5\nu + 5(5-4\nu)\cos^2\theta + 3\beta^2(1-3\cos^2\theta)] \quad (27)$$

$$\begin{aligned} \sigma_z = \sigma_{rr} &= p_z \left[\frac{6\beta^3(1-\beta^2)(3\cos^2\theta - 2)}{7-5\nu} + (1-\beta^3)\sin^2\theta \right] \\ \sigma_{\theta\theta} &= p_z \left[\frac{3\beta^3(3+7\beta^2)\cos^2\theta - 4(1+\beta^2)}{2(7-5\nu)} + (1-\beta^3)\cos^2\theta + \frac{3}{2}\beta^3 \right] \\ \sigma_{\phi\phi} &= p_z \left[\frac{3\beta^3(9+5\beta^2)\cos^2\theta - 4(1+\beta^2)}{2(7-5\nu)} - \frac{3}{2}\beta^3\cos^2\theta \right] \end{aligned} \quad (28)$$

όπου R η ακτίνα του ανοίγματος,

$$\beta = R/r,$$

r η απόσταση από το κέντρο του ανοίγματος

και θ η γωνία από το xy επίπεδο

- Για υδροστατική φόρτιση στο άπειρο (Kuriyama and Mizuta, 1993):

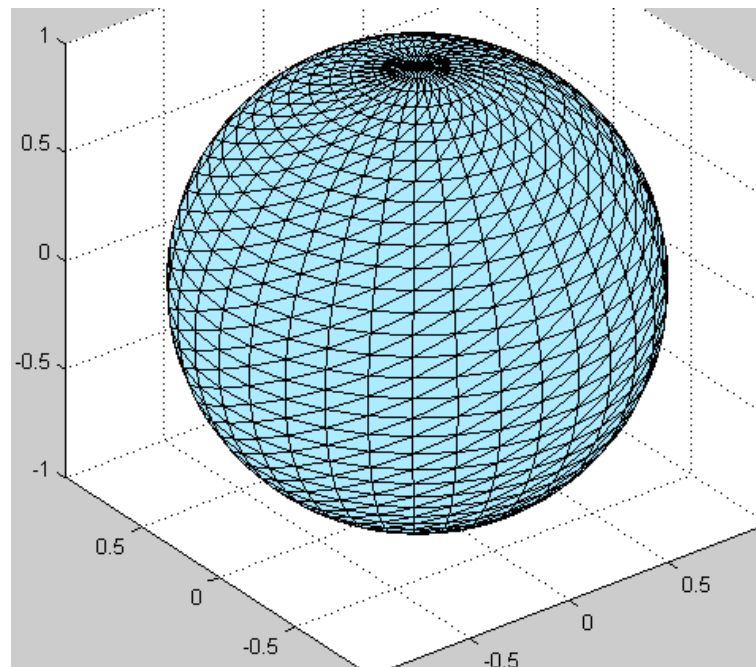
$$u_r = \frac{p_0}{4G} \beta^2 \quad (29)$$

ενώ οι τάσεις στην συγκεκριμένη περίπτωση είναι (Yacoub, 1999):

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= p_0[1 - \beta^3] \\ \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\varphi\varphi} &= p_0 \left[1 + \frac{1}{2} \beta^3 \right] \end{aligned} \quad (30)$$

Στις περίπτωση της υδροστατικής φορτίσεως οι τάσεις και οι μετατοπίσεις είναι ανεξάρτητες από την γωνία θ και ο λόγος του Poisson δεν επηρεάζει τα αποτελέσματα, σε αντίθεση με την περίπτωση μονοαξονικής φορτίσεως.

Το σφαιρικό σύνολο ακτίνας ενός μέτρου προσεγγίζεται με πολύεδρο που αποτελείται από 2382 τριγωνικά στοιχεία (Σχ. 4.5):

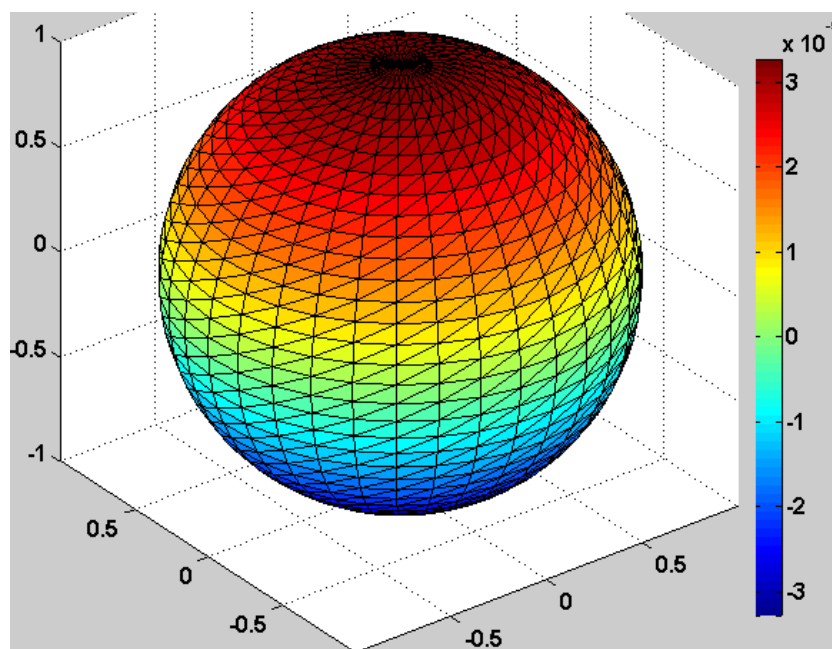


Σχ. 4.5: Διακριτοποίηση του συνόρου της σφαίρας

Η φορά των τριγώνων πρέπει να είναι τέτοια, ώστε τα κάθετα διανύσματα τους να κατευθύνονται προς το εσωτερικού ανοίγματος, εφόσον οι συνοριακές συνθήκες, όπως προαναφέρθηκε, επιβάλλονται στην αρνητική επιφάνεια των τριγώνων. Επίσης σε τέτοιου είδους προβλήματα κλειστών συνόρων, όπως είναι η περίπτωση της σφαιρικής κοιλότητας, χρειάζεται η δημιουργία δύο επιπλέον τριγωνικών στοιχείων με διαφορετικό προσανατολισμό στο εσωτερικό του έγκοιλου. Στα δύο αυτά στοιχεία εφαρμόζονται μηδενικές μετατοπίσεις, ώστε η εσωτερική περιοχή να σταθεροποιηθεί και να μην επηρεάζει τα αποτελέσματα της εξωτερικής περιοχής (Crouch and Starfield, 1990). Η ύπαρξη των στοιχείων δεν επηρεάζει τα αποτελέσματα εφόσον δεν δημιουργηθούν κοντά στα σύνορα.

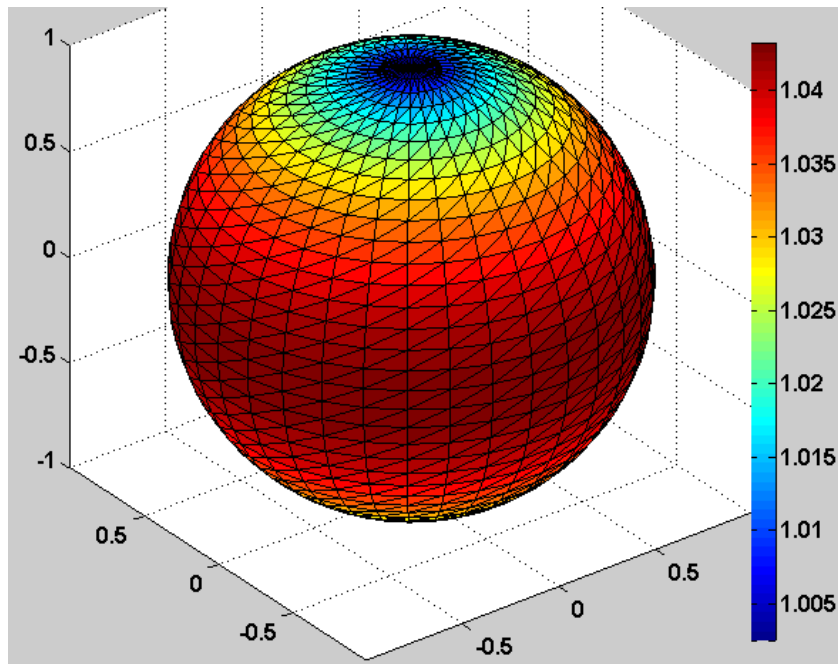
4.2.1 Υδροστατική φόρτιση

Στο συγκεκριμένο πρόβλημα οι ασυνεχείς μετατοπίσεις δεν έχουν κανένα φυσικό νόημα, παρόλ' αυτά χρησιμοποιούνται όπως και πριν για την εύρεση των τάσεων και των μετατοπίσεων στα σύνορα, όπου η μετατόπιση στα σύνορα περιγράφεται από τον όρο u_z^- . Ενδεικτικά παρουσιάζεται το διάγραμμα των μετατοπίσεων για υδροστατική φόρτιση 1MPa με μέτρο ελαστικότητας 20 GPa και λόγο Poisson 0.3 :



Σχ. 4.6: Μετατοπίσεις u_z^- ως προς το τοπικό σύστημα συντεταγμένων

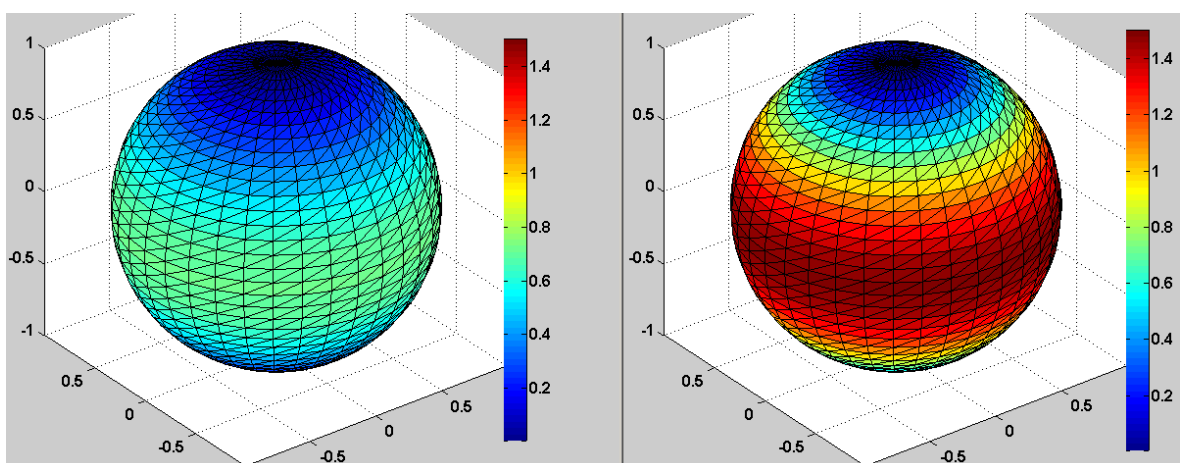
Η κλίμακα είναι ανάλογη της ακτίνας που έχει δοθεί, αν έχει δοθεί ,δηλαδή, σε μέτρα, τότε και η κλίμακα είναι σε μέτρα. Στο επόμενο σχήμα (Σχ. 4.7) παρουσιάζεται η απόκλιση που έχει η υπολογιζόμενη μετατόπιση σε σχέση με αυτήν της αναλυτικής λύσης, ως ο λόγος της αριθμητικής προς την αναλυτική:



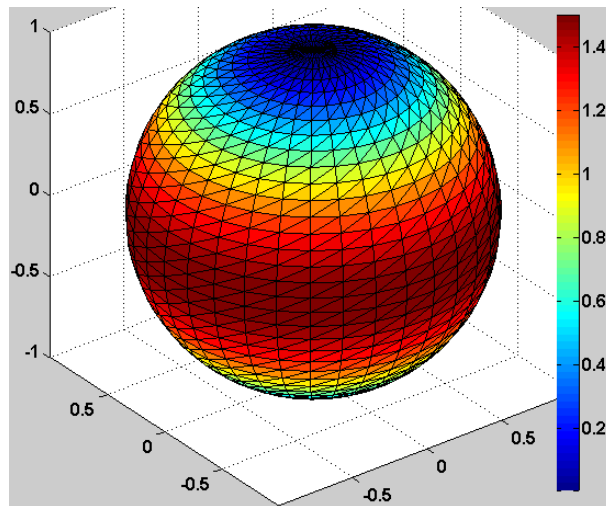
Σχ. 4.7: Απόκλιση μετατοπίσεων από την αναλυτική λύση

Όπως και είναι αναμενόμενο, παρατηρείται μικρότερη απόκλιση στους ‘πόλους’ (πάνω και κάτω) σε σχέση με την υπόλοιπη σφαίρα, διότι υπάρχει μεγαλύτερη διακριτοποίηση σε αυτούς.

Τα παρακάτω σχήματα (Σχ. 4.8 και Σχ. 4.9) των τάσεων, παρουσιάζουν την υπολογισμένη τάση σ_z επάνω στα σύνορα πριν την διόρθωση των εφαπτομενικών τάσεων και μετά την διόρθωση, σε σύγκριση με την αναλυτική λύση (οι τάσεις παρουσιάζονται στην χρωματική κλίμακα των αναλυτικών λύσεων για πιο εύκολη σύγκριση των αποτελεσμάτων):



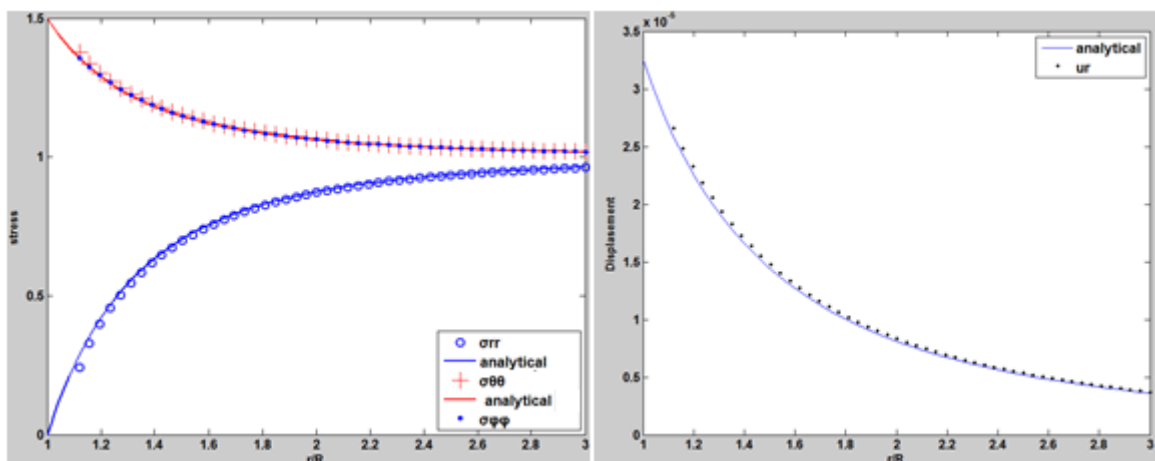
Σχήμα 4.8: Η τάση σ_z πριν (αριστερά) και μετά (δεξιά) την διόρθωση των εφαπτομενικών



Σχήμα 4.9: Η αναλυτική λύση της τάση σ_z στο τοπικό σύστημα του κάθε τριγωνικού στοιχείου

Οι μονάδες της κλίμακας εξαρτώνται από τις μονάδες της φόρτισης που ασκείται στο άνοιγμα. Από τα παραπάνω σχήματα φαίνεται ότι η υπολογισμένη λύση πλησιάζει αρκετά την αναλυτική (0-1,5MPa για υδροστατική φόρτιση 1MPa). Τυχόν αποκλίσεις που μπορεί να έχει η διορθωμένη τάση από την αναλυτική της λύση οφείλονται σε αριθμητικά σφάλματα λόγω της διακριτοποίησης ή των στροφών των τριγώνων. Όσο πιο πυκνή η διακριτοποίηση τόσο πιο πολύ πλησιάζουν τα αποτελέσματα, στην αναλυτική λύση.

Γίνεται, επίσης, σύγκριση των υπολογιστικών τάσεων και μετατοπίσεων με τις αναλυτικές σχέσεις στην περιοχή γύρω από την σφαίρα:

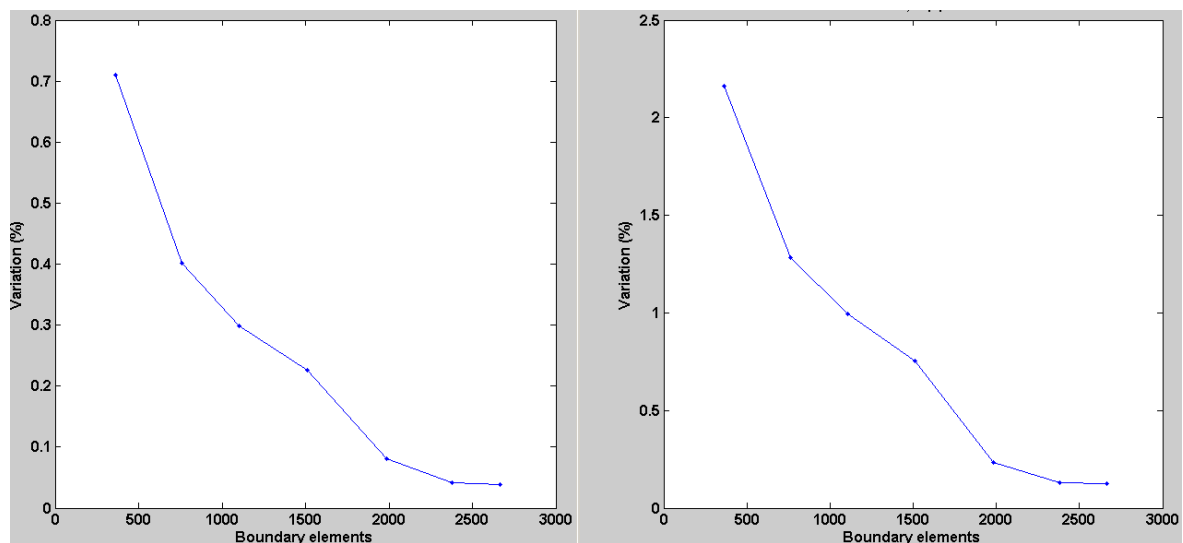


Σχήμα 4.10: Σύγκριση των τάσεων (αριστερά) και της κατακόρυφης μετατόπισης (δεξιά) με τις αναλυτικές λύσεις

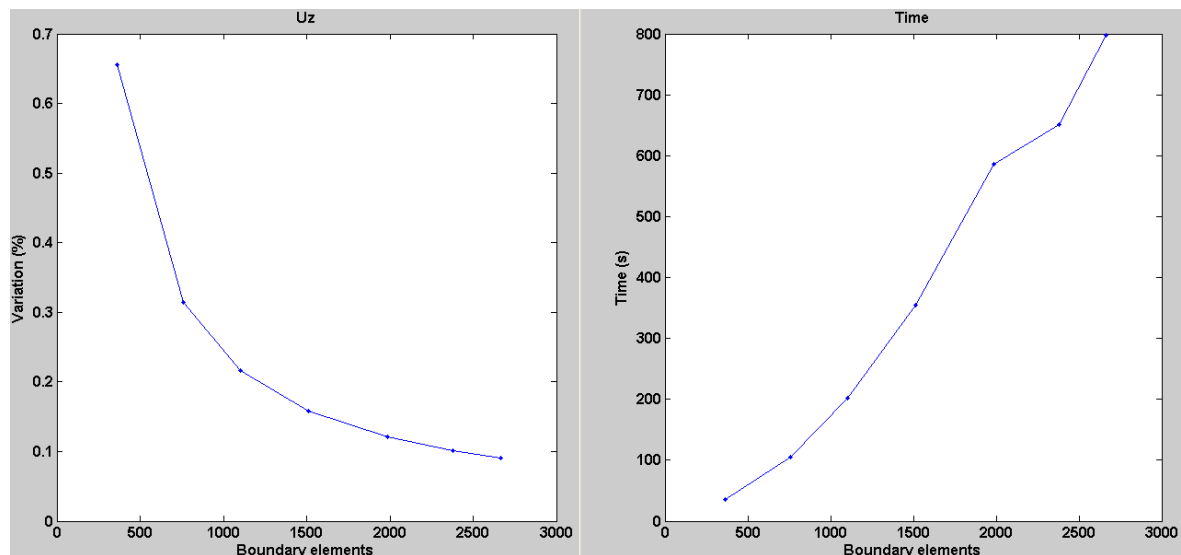
Οι αποκλίσεις που παρουσιάζονται σε πολύ κοντινές αποστάσεις στο έγκοιλο (βλ. Σχ. 4.10), οφείλονται στο ότι δεν λαμβάνονται υπόψη στις μετρήσεις οι διορθώσεις που έχουν γίνει στις εφαπτομενικές τάσεις με αποτέλεσμα οι τιμές να τείνουν προς τις μη διορθωμένες τάσεις. Φαίνεται επίσης ότι όσο πιο μακριά από το έγκοιλο είναι το σημείο μελέτης, τόσο πιο πολύ τείνουν οι τάσεις στο σημείο προς τις τάσεις μακρινού πεδίου. Σημειώνεται ότι όσο μεγαλύτερη διακριτοποίηση έχει γίνει στα σύνορα, τόσο μικρότερη η απόσταση που εμφανίζονται αποκλίσεις.

4.2.2 Σύγκλιση των λύσεων της μεθόδου

Για τον προσδιορισμό της σύγκλισης των λύσεων της μεθόδου των ασυνεχών μετατοπίσεων (DDM), υπολογίζεται η απόκλιση των αριθμητικών λύσεων της σ_z και της u_z από τις αναλυτικές σχέσεις. Χρησιμοποιούνται επτά διακριτοποιήσεις από τα 360 στοιχεία μέχρι τα 2660 με βήμα ~383 στοιχεία. (Σημειώνεται ότι οι μετρήσεις έγιναν για υδροστατική φόρτιση και επάνω στα σύνορα του έγκοιλου με τις διορθωμένες τάσεις)



Σχήμα 4.11: Διαγράμματα απόκλισης των τάσεων (σ_z (αριστερά) και σ_x, σ_y (δεξιά))

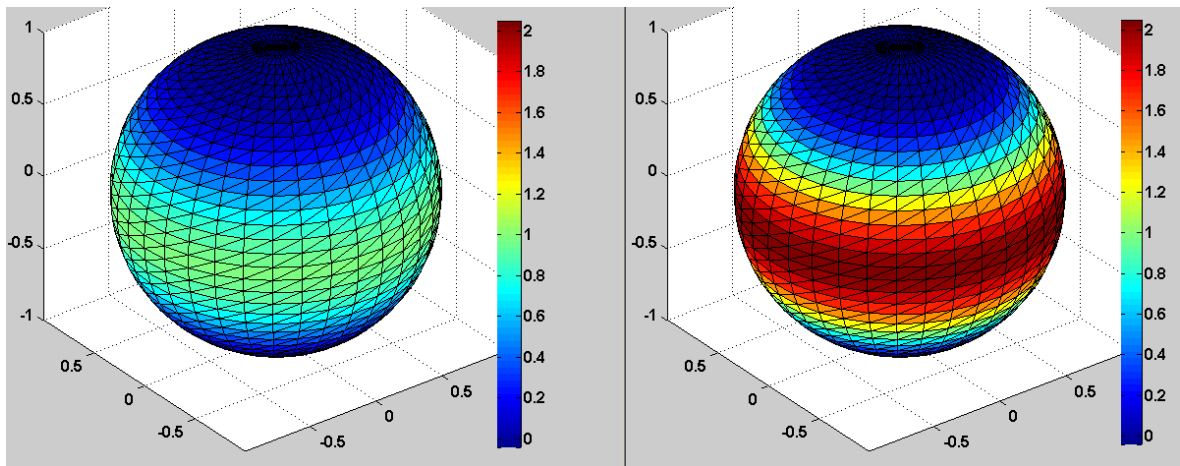


Σχήμα 4.12: Διαγράμματα απόκλισης κατακόρυφης μετατόπισης (αριστερά) από τις αναλυτικές λύσεις και ο χρόνος των υπολογισμών (δεξιά) σε σχέση με τα στοιχεία που χρησιμοποιήθηκαν

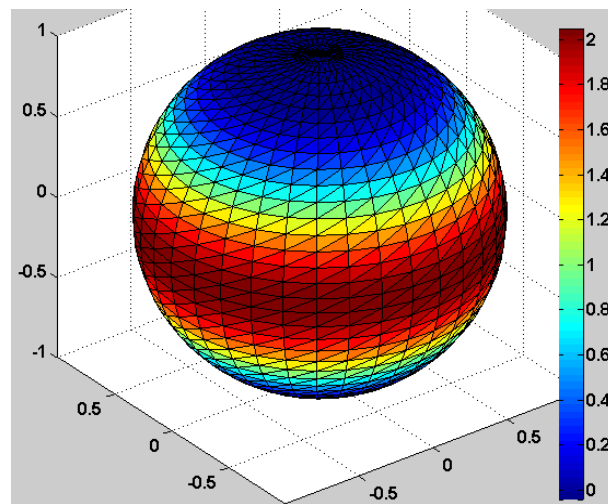
Όπως φαίνεται από τα Σχ. 4.11 και 4.12, όσο περισσότερα στοιχεία, τόσο μεγαλύτερη ακρίβεια έχουν οι αριθμητικές λύσεις. παρουσιάζεται μια απότομη μείωση της απόκλισης μέχρι τα 700 στοιχεία και από κει και πέρα αρχίζει και σταθεροποιείται. Πιο συγκεκριμένα, η σ_z και η μετατόπιση u_z τείνει σε απόκλιση μικρότερη του 0,1% στα 2660 ενώ οι άλλες δύο τάσεις τείνουν προς το 0,1%. Επίσης ο χρόνος που χρειάζεται η μέθοδος ανάλογα με τον αριθμό των στοιχείων που χρησιμοποιούνται, φαίνεται ότι έχει μια σχετικά γραμμική αύξηση όσο αυξάνονται τα στοιχεία. Σημειώνεται βέβαια ότι ο χρόνος εξαρτάται από το μηχάνημα το οποίο χρησιμοποιείται. Με ένα καλύτερο μηχάνημα ο χρόνος των πράξεων μπορεί να πέσει στο μισό ή ακόμα και πολύ λιγότερο. Παρ' όλα αυτά ότι μηχάνημα και να χρησιμοποιηθεί, φαίνεται ότι όσο μεγαλύτερη ακρίβεια θέλει κάποιος στα αποτελέσματά του, τόσο περισσότερο χρόνο θα χρειαστεί για τον υπολογισμό τους.

4.2.3 Μονοαξονική φόρτιση

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει η περίπτωση μονοαξονικού πεδίου φορτίσεως, όπου οι τάσεις και οι μετατοπίσεις δεν κατανέμονται συμμετρικά, αλλά εξαρτώνται από την γωνία και από τον άξονα της φόρτισης. Τα παρακάτω σχήματα (Σχ. 4.13 και 4.14) παρουσιάζουν την σύγκριση της υπολογιζόμενης τάση σ_z , πριν και μετά την διόρθωση, με την αναλυτική της λύση ως προς το καθολικό σύστημα συντεταγμένων του κάθε στοιχείου (οι τάσεις παρουσιάζονται πάλι με την χρωματική κλίμακα της αναλυτικής λύσης για πιο εύκολη σύγκριση των αποτελεσμάτων).



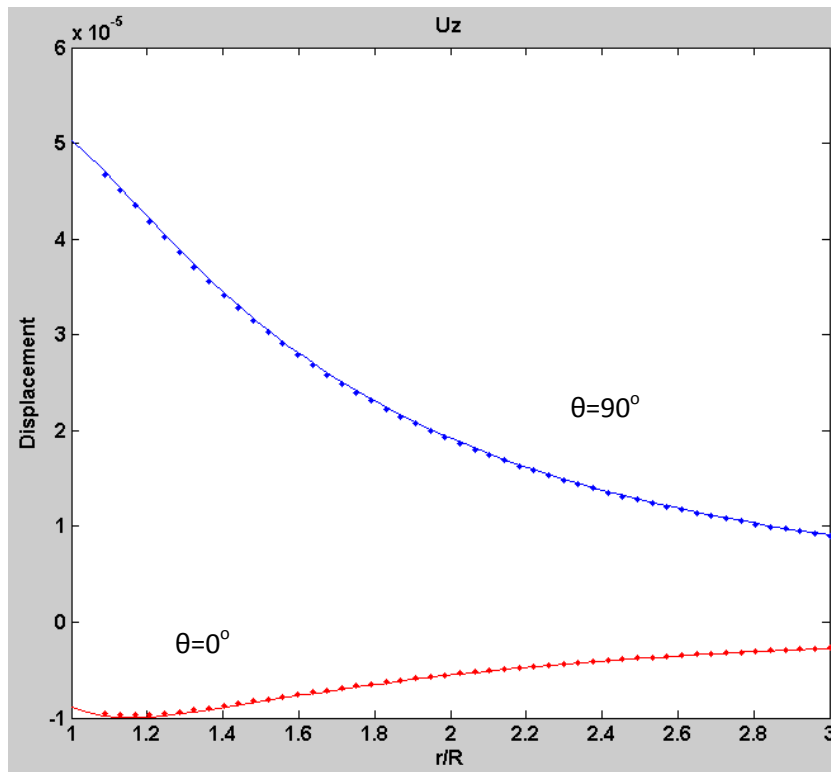
Σχ. 4.13: Η τάση σ_z πριν (αριστερά) και μετά (δεξιά) την διόρθωση των εφαπτομενικών στο τοπικό σύστημα συντεταγμένων



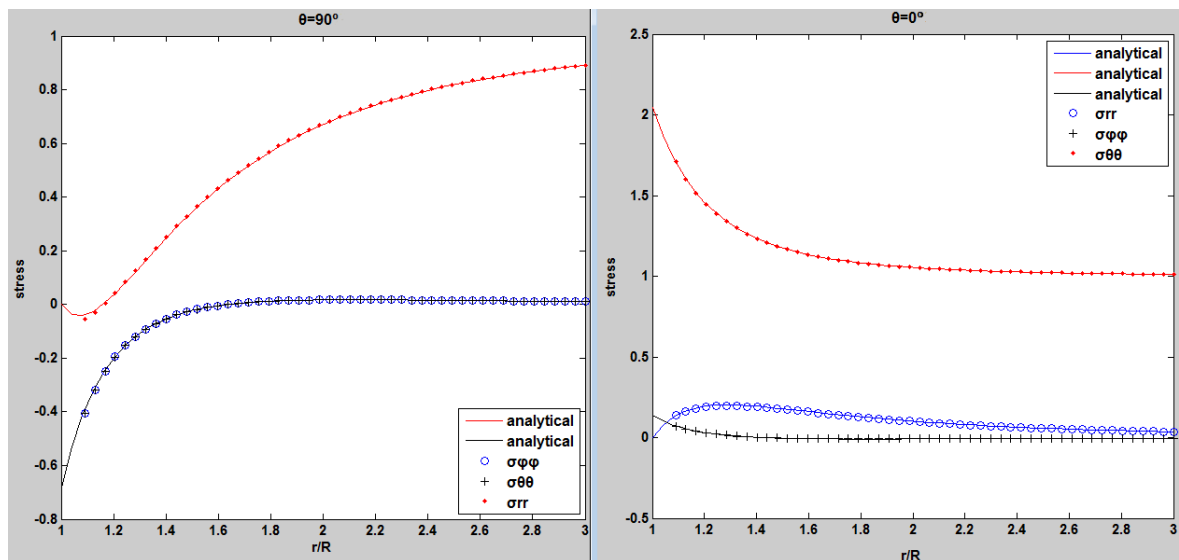
Σχ. 4.14: Η αναλυτική λύση της τάση σ_z στο τοπικό σύστημα του κάθε τριγωνικού στοιχείου

Παρατηρείται ότι και για μονοαξονική φόρτιση οι διορθωμένες αριθμητικές τάσεις πλησιάζουν ικανοποιητικά τις τάσεις των αναλυτικών λύσεων (από 0-2 MPa για μονοαξονική φόρτιση 1MPa).

Παρακάτω παρουσιάζονται οι συγκρίσεις τάσεων και μετατοπίσεων για την περιοχή γύρω από το έγκοιλο για 90° κλίση και για 0° (Σχ. 4.15 και 4.16).



Σχ. 4.15: Μετατοπίσεις αριθμητικών και αναλυτικών λύσεων για 0° και 90°



Σχ. 4.16: Τάσεις αριθμητικών και αναλυτικών λύσεων για 0° (δεξιά) και 90° (αριστερά)

Συγκρίνοντας τις δύο παραπάνω περιπτώσεις προκύπτει ότι η κατανομή των τάσεων γύρω από σφαιρικό έγκοιλο, επηρεάζεται σημαντικά από τις τάσεις μακρινού πεδίου (προϋπάρχουσες τάσεις). Στην περίπτωση της μονοαξονικής φορτίσεως προκύπτει ότι οι τάσεις είναι μεγαλύτερες γύρω από το άνοιγμα σε διεύθυνση κάθετη με τον άξονα της φορτίσεως, ενώ παράλληλα στην κορυφή του ανοίγματος οι εφαπτομενικές τάσεις λαμβάνουν αρνητική τιμή πράγμα που

σημαίνει ότι εάν το μονοαξονικό πεδίο είναι θλιπτικό τότε εμφανίζεται εφελκυσμός (και το αντίστροφο) στην διεύθυνση αυτή.

Τέλος από την σύγκριση των αποτελεσμάτων προκύπτει ότι η μέθοδος παρουσιάζει αρκετά ικανοποιητικά αποτελέσματα και στα σύνορα του ανοίγματος αλλά και στην περιοχή γύρω από αυτό, για την συγκεκριμένη διακριτοποίηση που χρησιμοποιήθηκε και για τις δυο περιπτώσεις. Άρα η συγκεκριμένη διακριτοποίηση είναι ικανοποιητική και για τις δυο περιπτώσεις. Πρέπει να σημειωθεί ότι η διακριτοποίηση επιλέγεται εκτός από την γεωμετρία, και από την φόρτιση, έτσι σε περιοχές που αναμένονται υψηλές συγκεντρώσεις τάσεων απαιτείται λεπτομερέστερη διακριτοποίηση ώστε οι απότομες μεταβολές να μπορέσουν να προσεγγιστούν. Η διακριτοποίηση που χρησιμοποιήθηκε ήταν αρκετά λεπτομερής οπότε τα αποτελέσματα συμπίπτουν με τις αναλυτικές λύσεις ακόμα και στην περίπτωση της μονοαξονικής φόρτισης.

4.3 Κυκλική επιμήκης σήραγγα

Για την περίπτωση επιμήκους κυκλικής σήραγγας, όπου το μήκος της είναι κατά πολύ μεγαλύτερο από την ακτίνα της, μπορούν να χρησιμοποιηθούν οι σχέσεις του Kirsch που έχουν βρεθεί για την περίπτωση των δύο διαστάσεων. Οι σχέσεις αυτές, παρουσιάζεται παρακάτω, ότι ικανοποιούνται στο συγκεκριμένο πρόβλημα μακριά από τα άκρα της σήραγγας, δηλαδή προς το μέσο της σήραγγας εμφανίζονται καλύτερα αποτελέσματα, ενώ οι εκφράσεις τους είναι (Jaeger and Cook, 1976):

$$\begin{aligned}\sigma_r &= \left[\frac{\sigma_h + \sigma_v}{2} \right] \left[1 - \frac{a^2}{r^2} \right] + \left[\frac{\sigma_h - \sigma_v}{2} \right] \left[1 - \frac{4a^2}{r^2} + \frac{3a^4}{r^4} \right] \cos 2\theta \\ \sigma_\theta &= \left[\frac{\sigma_h + \sigma_v}{2} \right] \left[1 + \frac{a^2}{r^2} \right] - \left[\frac{\sigma_h - \sigma_v}{2} \right] \left[1 + \frac{3a^4}{r^4} \right] \cos 2\theta \\ \tau_{r\theta} &= \left[\frac{\sigma_h - \sigma_v}{2} \right] \left[1 - \frac{2a^2}{r^2} - \frac{3a^4}{r^4} \right] \sin 2\theta\end{aligned}\quad (31)$$

όπου:

σ_v η κατακόρυφη τάση

σ_h η οριζόντια τάση

a η ακτίνα του ανοίγματος

r η απόσταση από το κέντρο του ανοίγματος

θ η γωνία από τον άξονα x

Όσον αφορά τις μετατοπίσεις οι σχέσεις που ισχύουν είναι:

$$\begin{aligned} u_r &= \frac{\sigma_h + \sigma_v}{4G} \frac{\alpha^2}{r} + \frac{\sigma_h - \sigma_v}{4G} \frac{\alpha^2}{r} \left[4(1 - \nu) - \frac{\alpha^2}{r^2} \right] \cos 2\theta \\ u_\theta &= \frac{\sigma_h - \sigma_v}{4G} \frac{\alpha^2}{r} \left[2(1 - 2\nu) + \frac{\alpha^2}{r^2} \right] \sin 2\theta \end{aligned} \quad (32)$$

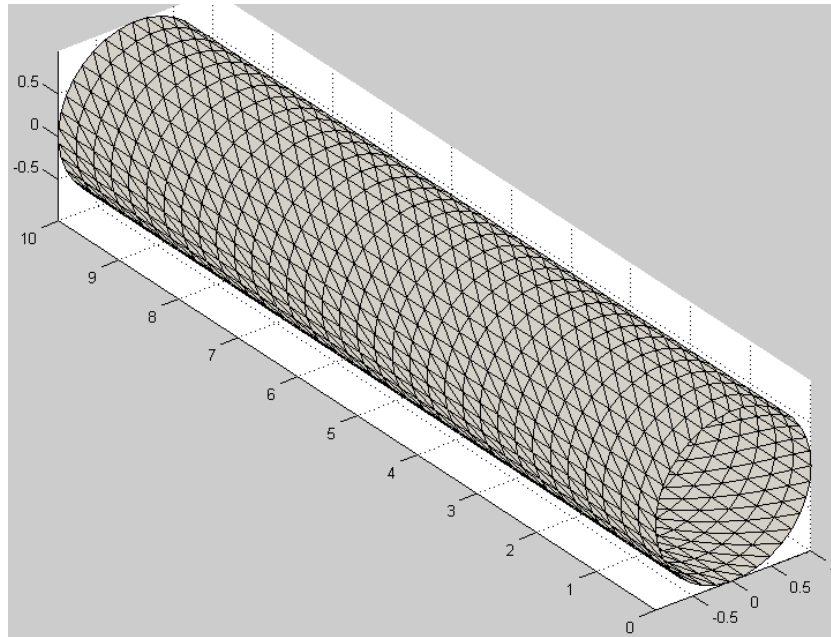
όπου G το μέτρο διάτμησης και ν ο λόγος Poisson.

Οι λεπτομέρειες της σήραγγας που θα μελετηθεί στην συγκεκριμένη περίπτωση παρουσιάζονται στον [Πίνακα 4.1](#):

Πίνακας 4.1: Παράμετροι Αριθμητικής Επίλυσης της Σήραγγας

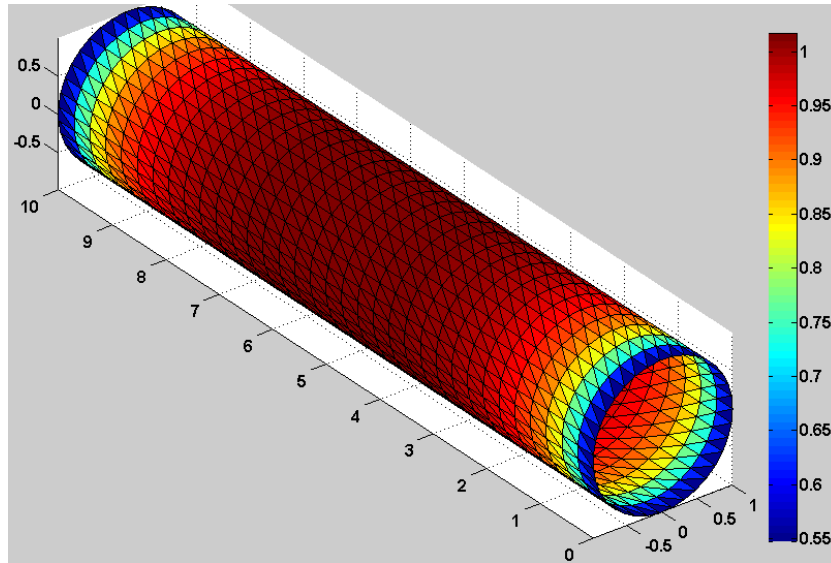
Διαστάσεις	$\alpha = 1m$
	$L = 10m$
Παράμετροι του Υλικού	$E = 20000 MPa$
	$\nu = 0.3$
Φόρτιση Υδροστατική	$p_o = 1MPa$
Αριθμός Στοιχείων	2380

Η διακριτοποίηση που χρησιμοποιήθηκε για τον υπολογισμό τάσεων και μετατοπίσεων στα σύνορα τη σήραγγας είναι αυτή που φαίνεται στο [Σχ. 4.17](#).



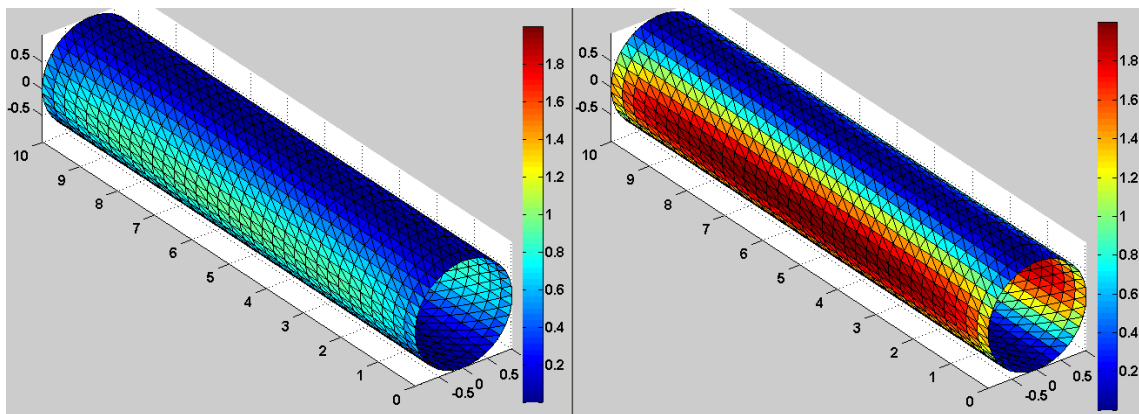
Σχ. 4.17: Διακριτοποίηση του συνόρου της επιμήκους σήραγγας

Στο [Σχ. 4.18](#) φαίνεται ο λόγος των αριθμητικών κάθετων μετατοπίσεων u_r προς αυτές της αναλυτικής λύσης για υδροστατική φόρτιση. Από το διάγραμμα αυτό παρατηρείται ότι οι μετατοπίσεις σταθεροποιούνται από τα άκρα προς το κέντρο. Πιο συγκεκριμένα, στα άκρα οι αριθμητικές μετατοπίσεις είναι μόλις στο 55% των αναλυτικών, ενώ στο κέντρο φτάνουν να είναι ίδιες. Με βάση αυτό επιλέγεται το κέντρο της σήραγγας για την σύγκριση με τις λύσεις του Kirsch για τις τάσεις, επάνω αλλά και γύρω από τα σύνορα της σήραγγας. Τα αποτελέσματα όσο πιο κοντά στα άκρα τόσο αποκλίνουν από τις λύσεις αυτές. Αυτό συμβαίνει διότι οι υπολογιστικές λύσεις χρειάζονται γειτονικά στοιχεία για να δώσουν πιο σωστά αποτελέσματα.

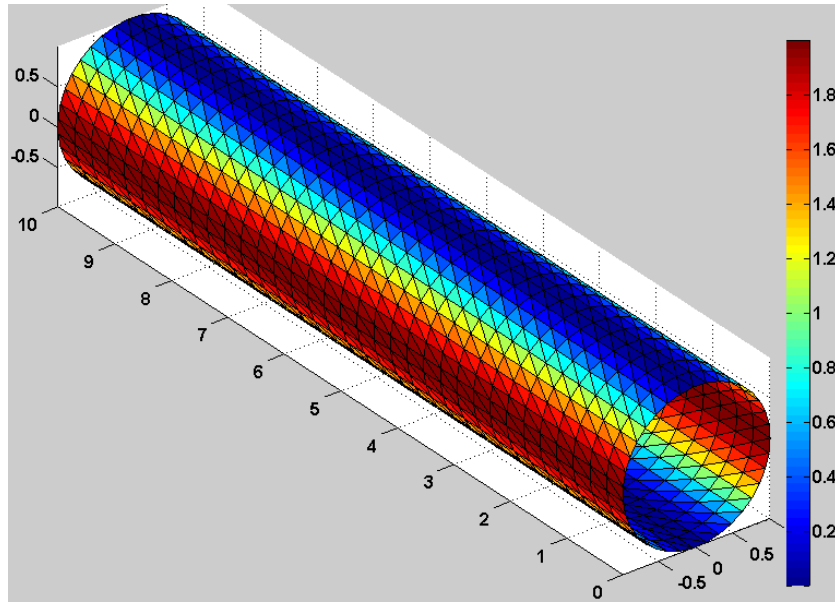


Σχ. 4.18: Απόκλιση μετατόπισης από την αναλυτική λύση

Στα Σχ. 4.19 και 4.20 γίνεται σύγκριση της τάσης σ_z στα σύνορα πριν και μετά την διόρθωση των εφαπτομενικών τάσεων για υδροστατική φόρτιση ενός MPa (χρησιμοποιείται η χρωματική κλίμακα της αναλυτικής λύσης για πιο εύκολη σύγκριση των αποτελεσμάτων).



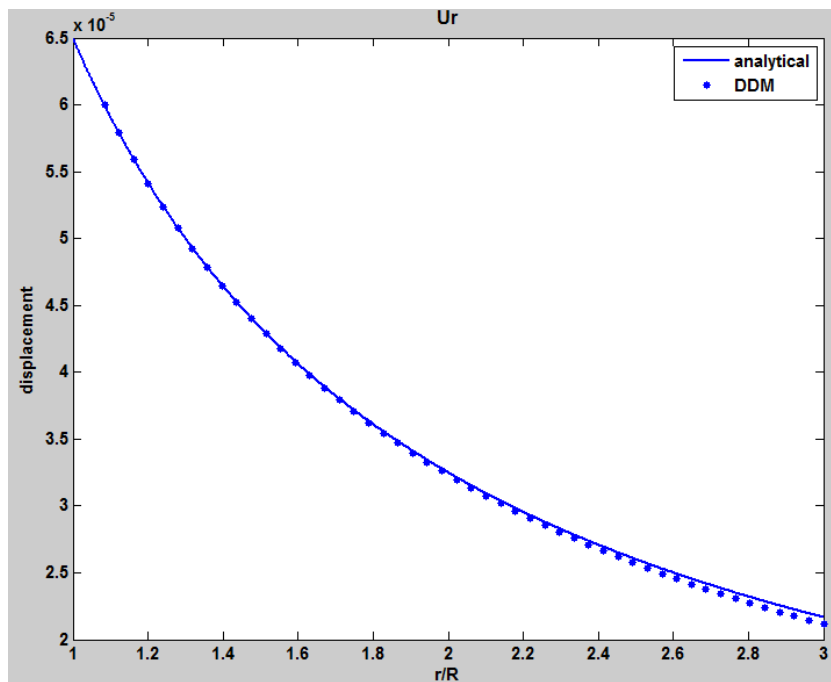
Σχ. 4.19: Η τάση σ_z πριν (αριστερά) και μετά (δεξιά) την διόρθωση των εφαπτομενικών



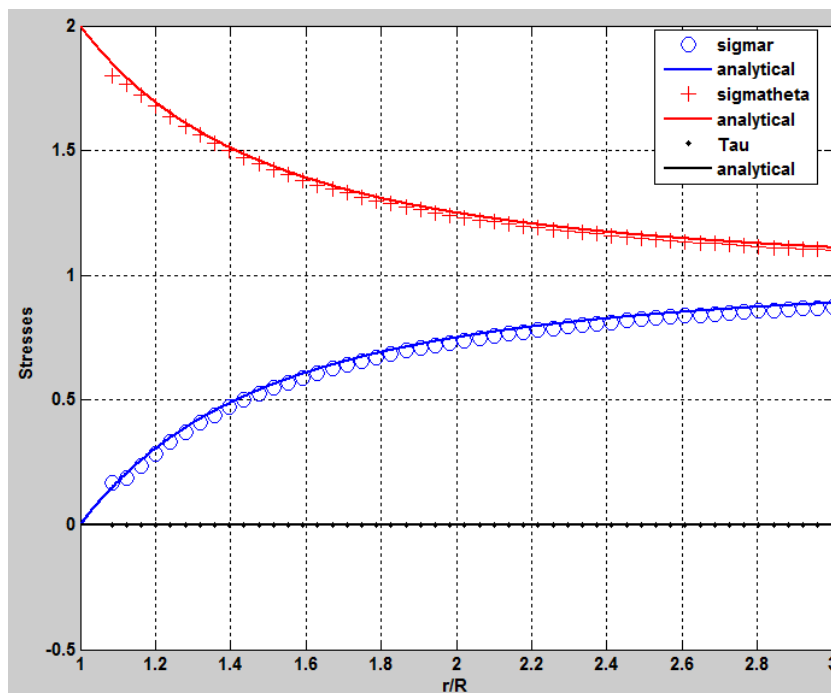
Σχ. 4.20: Η αναλυτική λύση της τάσης σ_z

Παρατηρείται ότι το εύρος των τιμών της τάσης σ_z μετά την διόρθωση, πλησιάζουν αυτό της αναλυτικής λύσης. Παρατηρείται επίσης, ότι και στις τάσεις παρουσιάζεται απόκλιση στις άκρες και τα αποτελέσματα πλησιάζουν την αναλυτική λύση στο κέντρο. Όπως ειπώθηκε και στην περίπτωση της σφαίρας, μεγαλύτερη διακριτοποίηση μπορεί να διορθώσει το πρόβλημα. Φαίνεται επίσης αυτό που αναφέρθηκε και προηγουμένως, ότι στα άκρα έχουμε απόκλιση των αποτελεσμάτων.

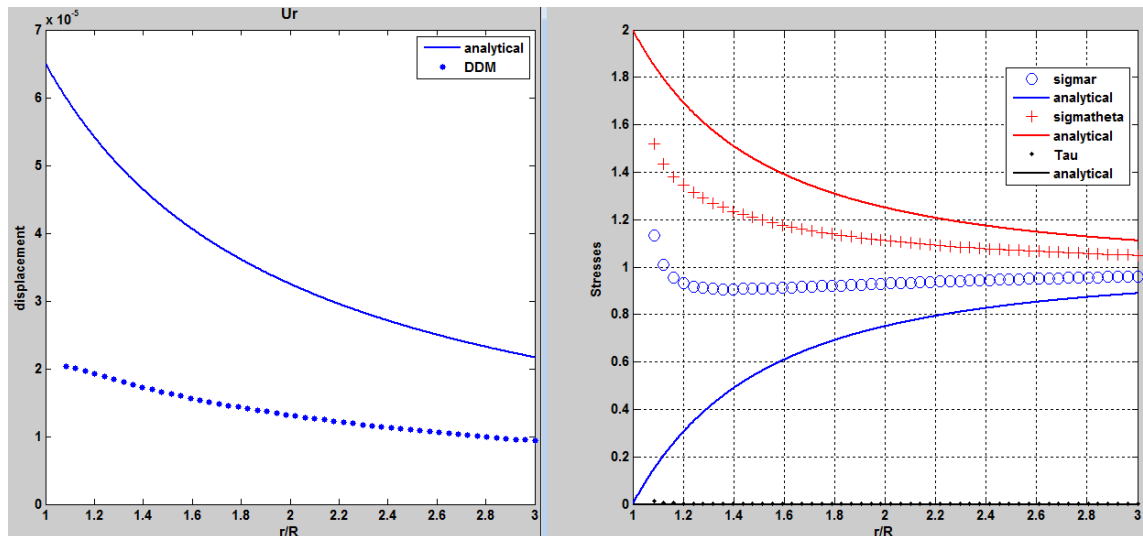
Στα Σχ. 4.21 και 4.22, τα αποτελέσματα που λαμβάνονται από την μέθοδο των ασυνεχών μετατοπίσεων (DDM) για την περιοχή γύρω από την σήραγγα ταιριάζουν με ικανοποιητική ακρίβεια, στο κέντρο της σήραγγας, με αυτά των αναλυτικών Εξ. (31) και Εξ. (32).



Σχ. 4.21: Σύγκριση u_r με την αναλυτική γύρω από τα σύνορα και στο κέντρο της σήραγγας



Σχ. 4.22: Σύγκριση τάσεων με τις αναλυτικές τους λύσεις γύρω από τα σύνορα, στο κέντρο της σήραγγας



Σχ. 4.23: Σύγκριση μετατόπισης (αριστερά) και τάσεων (δεξιά) με τις αναλυτικές τους λύσεις, γύρω από τα σύνορα, στις άκρες τις στοάς

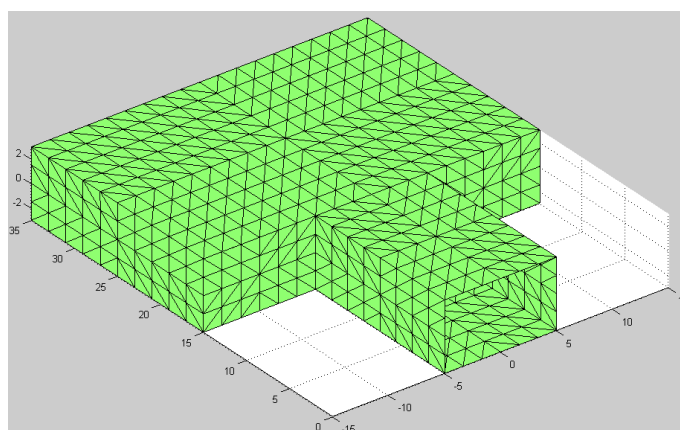
Αντιθέτως οι αριθμητικές λύσεις, παρουσιάζουν αποκλίσεις από τις λύσεις του Kirsch κοντά στα άκρα της σήραγγας. Από το [Σχ. 4.23](#) αποδεικνύεται ξανά ότι καλύτερα να λαμβάνονται τα αποτελέσματα των υπολογισμών για το κέντρο της σήραγγας και να αγνοούνται τα άκρα της.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5. ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΑΣΕΩΝ ΚΑΙ ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΕΩΝ ΣΕ ΥΠΟΓΕΙΟ ΘΑΛΑΜΟ

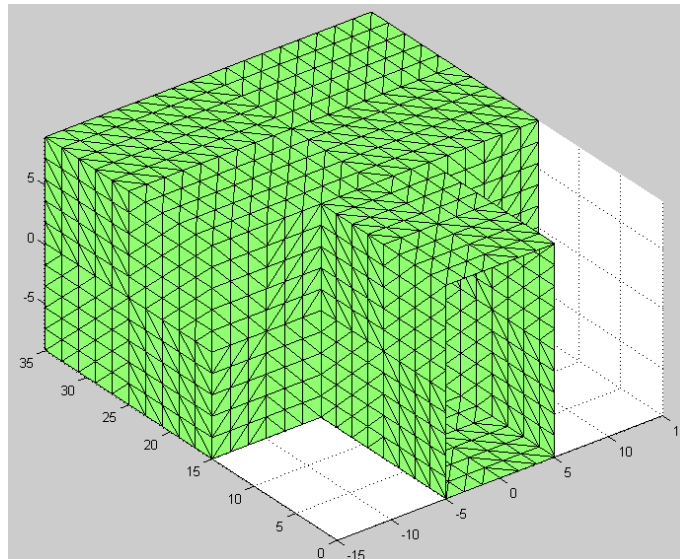
Στο προηγούμενο κεφάλαιο αποδείχτηκε ότι ο κώδικας φέρει ικανοποιητικά αποτελέσματα. Σε αυτό το κεφάλαιο θα δοκιμαστεί επάνω σε ένα λίγο πιο ρεαλιστικό σχήμα. Το σχήμα αυτό είναι ένας θάλαμος με μία στοά προσπέλασης σε ένα θεωρητικό κοίτασμα. Το πρόβλημα θα λυθεί για διάφορα ύψη του θαλάμου κατά τη διάρκεια της εξόρυξης, για την παρατήρηση των μεταβολών στις μετατοπίσεις και στις τάσεις στην οροφή, στο πάτωμα και στα τοιχώματα του θαλάμου. Λαμβάνεται υπόψη ότι το πέτρωμα θεωρείται συνεχές χωρίς ρωγμές ή ασυνέχειες.

5.1 Σχεδιασμός θαλάμου κατά τα βήματα της εκμετάλλευσης και διακριτοποίησή του σε συνεχές μέσο

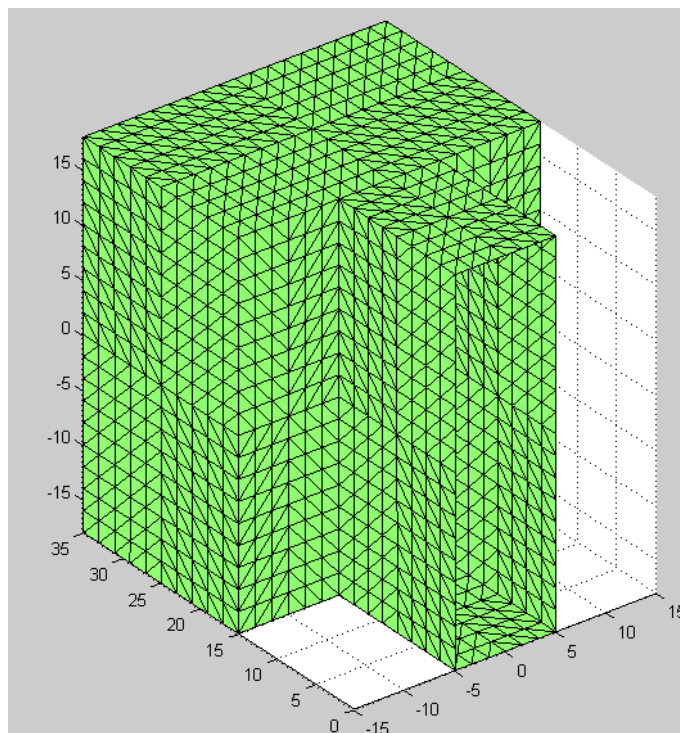
Η στοά προσπέλασης έχει διαστάσεις 10m πλάτος και 15m μήκος και ο θάλαμος έχει 30m πλάτος και 20m μήκος. Τα στάδια της εκμετάλλευσης τα οποία θα μελετηθούν είναι, για αρχική εκμετάλλευση έξι μέτρων ύψους και στην συνέχεια για ακόμα πέντε στάδια της εκμετάλλευσης έξι μέτρων ύψους το καθένα, φτάνοντας σε τελικό ύψος των 36m. Η διακριτοποίηση των τριγωνικών στοιχείων του συνόρου της κάθε πλευράς είναι σε μορφή χιαστή και ο αριθμός των τετραγωνικών στοιχείων είναι κατά προτίμηση ζυγός, για ομοιόμορφη εξαγωγή των αποτελεσμάτων. Η πλευρά του κάθε τετραγωνικού στοιχείου είναι περίπου δύο μέτρα. Σημειώνεται επίσης ότι οι οριζόντιες και οι κάθετες γραμμές που έχουν σχεδιαστεί σε κάθε πλευρά, έχουν μία μικρή κλίση, για την αποφυγή απειρισμών. Στα Σχ. 5.1-5.3 φαίνονται τρία από τα έξι στάδια της εκμετάλλευσης.



Σχ. 5.1: Αρχικό στάδιο εκμετάλλευσης



Σχ. 5.2: Μέσο στάδιο εκμετάλλευσης



Σχ. 5.3: Τελικό στάδιο εκμετάλλευσης

5.2 Μεταβολές τάσεων και μετατοπίσεων με την αύξηση του ύψους

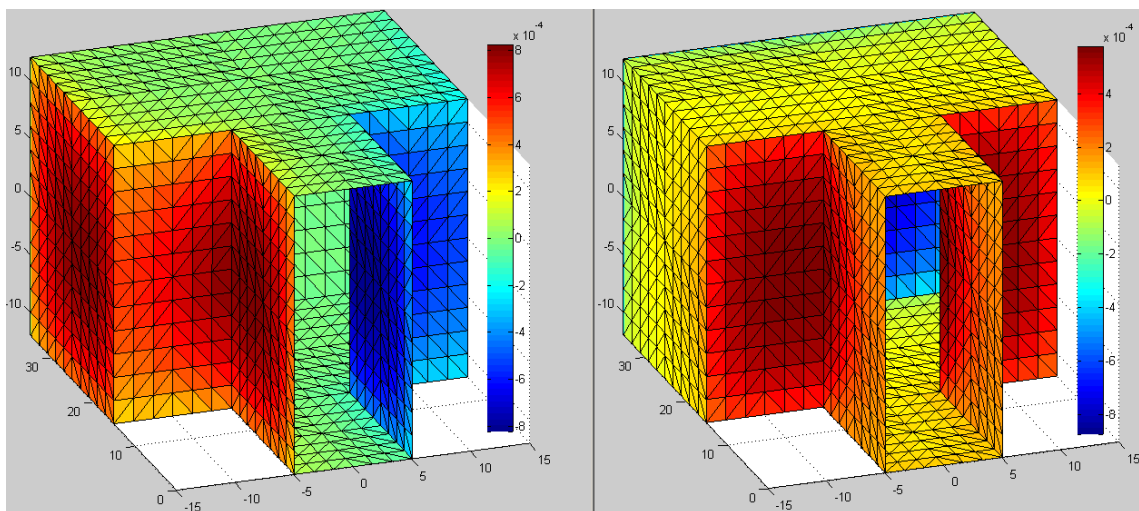
Για τον υπολογισμό των τάσεων και των μετατοπίσεων χρησιμοποιήθηκαν οι παρακάτω παράμετροι υλικού:

- Μέτρο ελαστικότητας $E = 20 \text{ GPa}$
- Λόγος Poisson $\nu = 0.3$
- Θλιπτική υδροστατική φόρτιση μακρινού πεδίου $P = 1 \text{ MPa}$

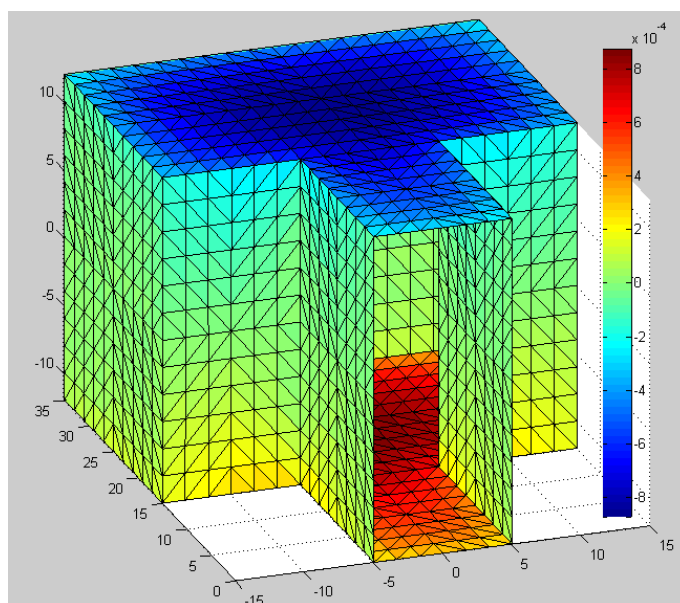
Θεωρείται θλιπτική υδροστατική φόρτιση, διότι ο θάλαμος είναι σε μεγάλο βάθος οπότε η σ_x και η σ_y τείνουν να γίνουν ίσες με την σ_z .

5.2.1 Μετατοπίσεις

Για τις μετατοπίσεις αναμένεται να υπάρχει μεγάλη μετατόπιση στα μέσα των πλευρών και μικρότερη προς τις γωνίες. Σε γενικές γραμμές για όλα τα ύψη η κατανομή των μετατοπίσεων είναι ίδια. Για το λόγο αυτό, παρουσιάζονται στη συνέχεια μόνο οι μετατοπίσεις για την μέση εκμετάλλευση και τα διαγράμματα της μέγιστης μετατόπισης της κάθε πλευράς σε σχέση με το ύψος.



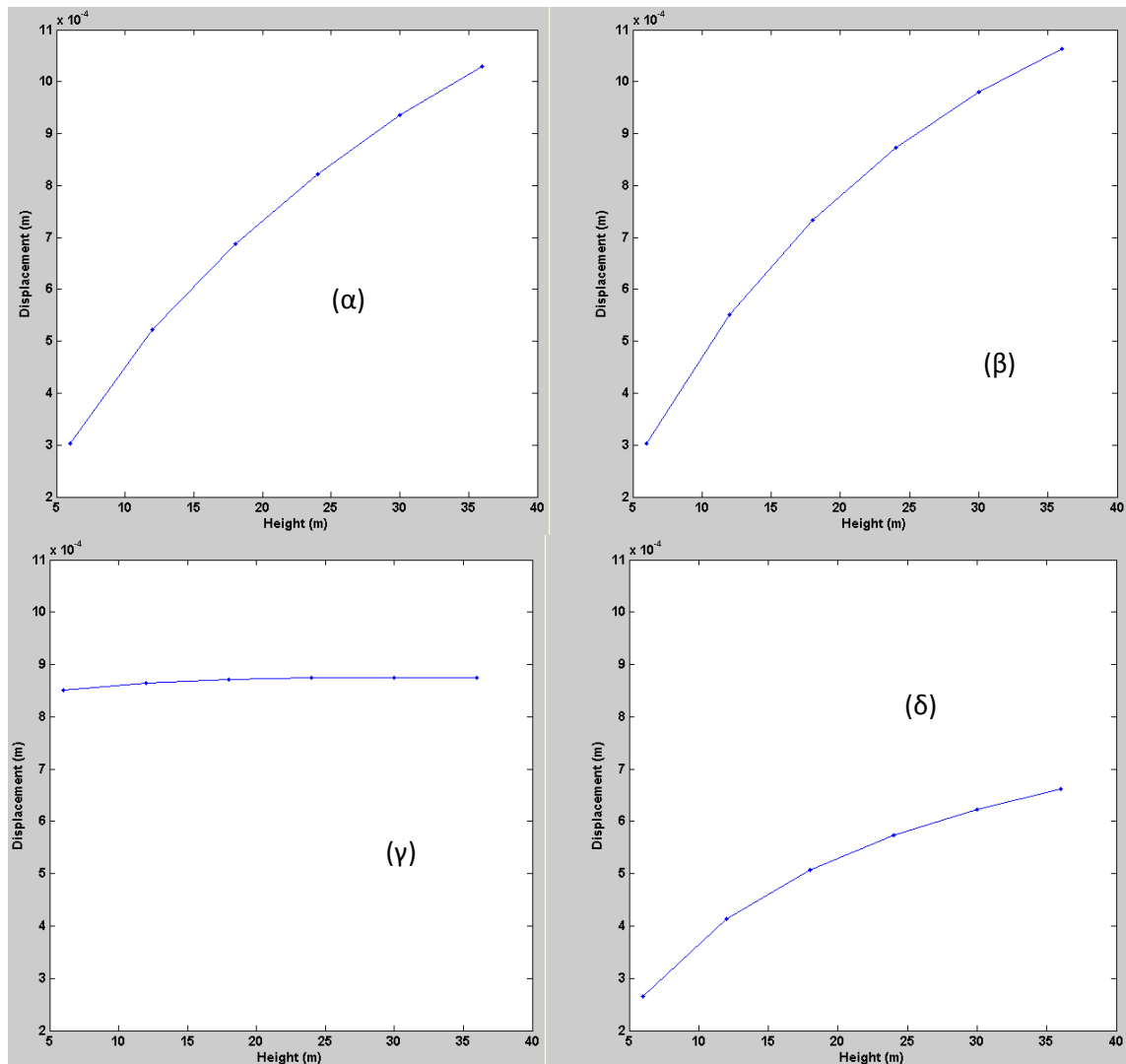
Σχ. 5.4: Αριστερά η μετατόπιση u_x και δεξιά η μετατόπιση u_y



Σχ. 5.5: Μετατόπιση u_z

Όπως είναι αναμενόμενο φαίνεται ότι στα κέντρα των πλευρών έχουμε μεγαλύτερες μετατοπίσεις σε σχέση με τις γωνίες. Στις δυο μπροστινές πλευρές του θαλάμου (βλ. Σχ. 5.4) όμως, παρατηρείται ότι οι μέγιστες μετατοπίσεις εμφανίζονται στο κέντρο προς την γωνία, στα σημεία που ακουμπάνε με τις πλευρές της στοάς. Αυτό οφείλεται στο ότι λαμβάνεται σαν πλευρά η μπροστινή πλευρά μαζί με την εφαιπτόμενη σε αυτήν πλευρά της στοάς. Αυτό οδηγεί στη μεταβολή του κέντρου της μπροστινής πλευράς, προς το κέντρο της συνολικής αυτής πλευράς. Επίσης, η μέγιστη τιμή της μετατόπισης των πλευρών αυτών είναι μικρότερη από τις άλλες διότι έχουν μικρότερες διαστάσεις από τις άλλες πλευρές

Στη συνέχεια παρουσιάζονται τα διαγράμματα της απόλυτης μέγιστης μετατόπισης σε σχέση με το ύψος. Οι πλευρές που έχουν τις ίδιες διαστάσεις (πάνω - κάτω και δεξιά - αριστερά) παρουσιάζονται στο ίδιο διάγραμμα διότι η μόνη τους διαφορά είναι ότι της μιας είναι αρνητικές οι τιμές και της άλλης θετικές. Το πια πλευρά θα έχει αρνητική η θετική μετατόπιση εξαρτάται από το αν επιβάλλεται θλίψη η εφελκυσμός στις πλευρές του θαλάμου.



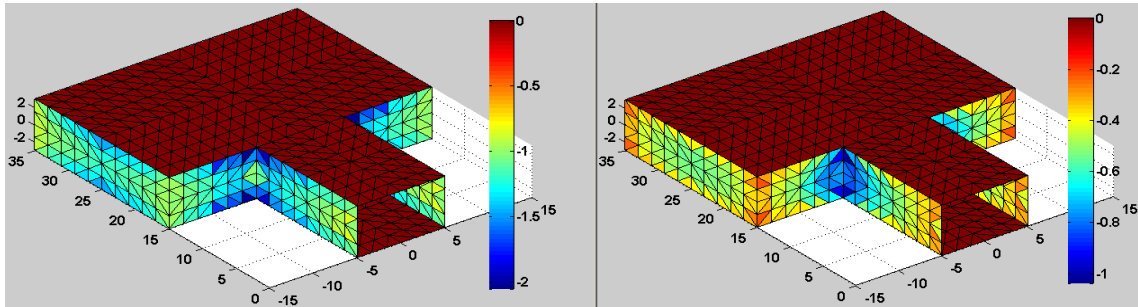
Σχ. 5.6: Η μεταβολή των μέγιστων μετατοπίσεων στις πλευρές αριστερά-δεξιά (α), πίσω (β), πάνω-κάτω (γ) και μπροστά (δ) σε σχέση με την μεταβολή του ύψους

Όπως αναμένεται, παρατηρείται αύξηση της μετατόπισης σε σχέση με το βάθος σε όλες τις πλευρές εκτός από τις πάνω-κάτω στις οποίες η μεταβολή είναι πάρα πολύ μικρή. Αυτό οφείλεται στο ότι η μετατόπιση επηρεάζεται κατά κύριο λόγο από το εμβαδόν της πλευράς, οπότε αυξάνοντας το ύψος μεταβάλλεται το εμβαδόν μόνο στις γύρω πλευρές και όχι στις πάνω-κάτω. Το ότι η μετατόπιση επηρεάζεται κυρίως από το εμβαδόν, φαίνεται επίσης και από την μεταβολή της μετατόπισης των δύο μπροστινών πλευρών, οι οποίες έχουν μικρότερο εμβαδόν το οποίο οδηγεί σε μικρότερη μετατόπιση.

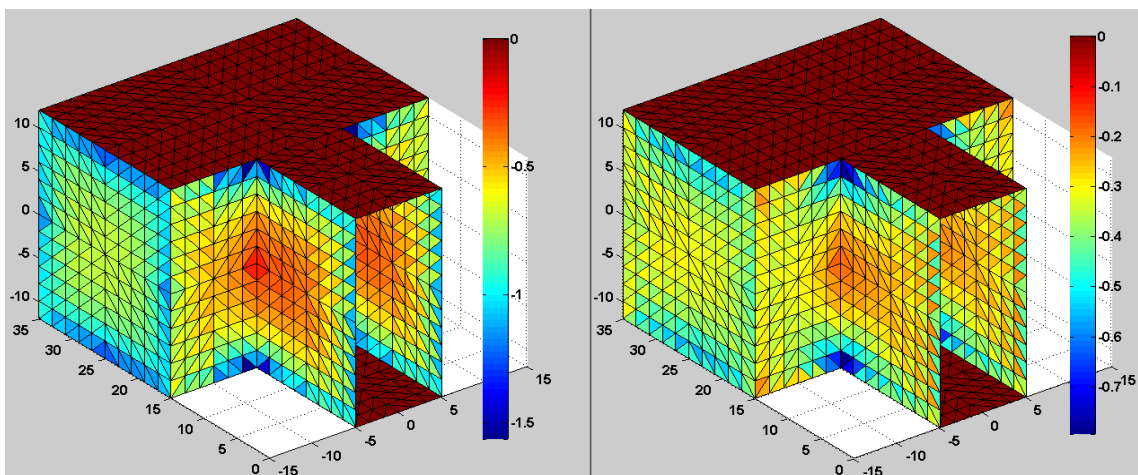
5.2.2 Τάσεις

Για τις τάσεις θα παρουσιαστούν για παρατηρήσεις και σχόλια μόνο το αρχικό, το μέσο και το τελικό στάδιο της σ_z πριν και μετά την διόρθωση των ε-

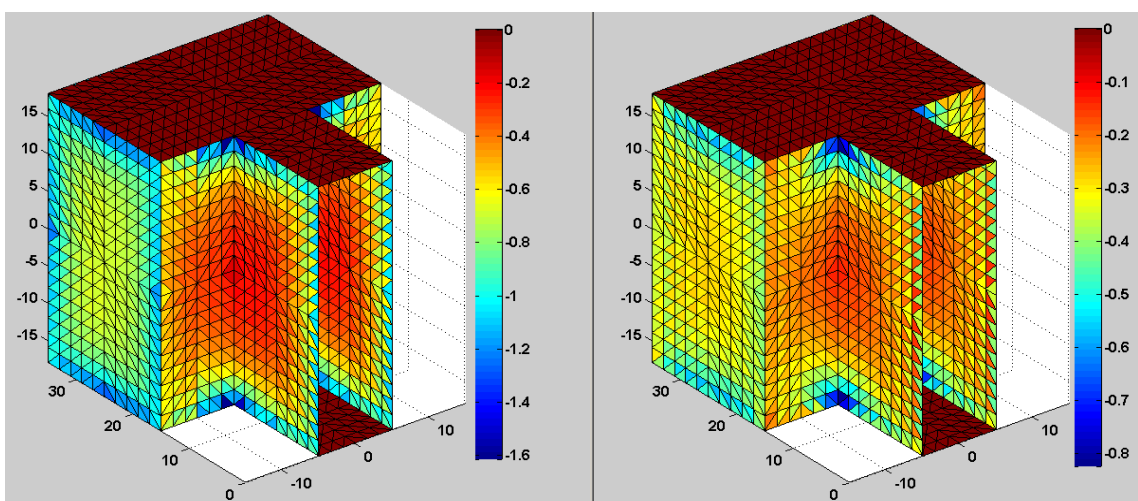
φαπτομενικών τάσεων και το αρχικό, το μέσο και το τελικό στάδιο της σ_y μετά την διόρθωση. Η σ_x παρουσιάζει παρόμοιες μεταβολές με την σ_y οπότε δεν χρειάζεται να παρουσιασθεί για σχολιασμό. Τα υπόλοιπα μπορούν να βρεθούν στο [Παράρτημα Α](#).



Σχ. 5.7: Η κατανομή των τάσεων σ_z πριν (δεξιά) και μετά (αριστερά) την διόρθωση των εφαπτομενικών στο αρχικό



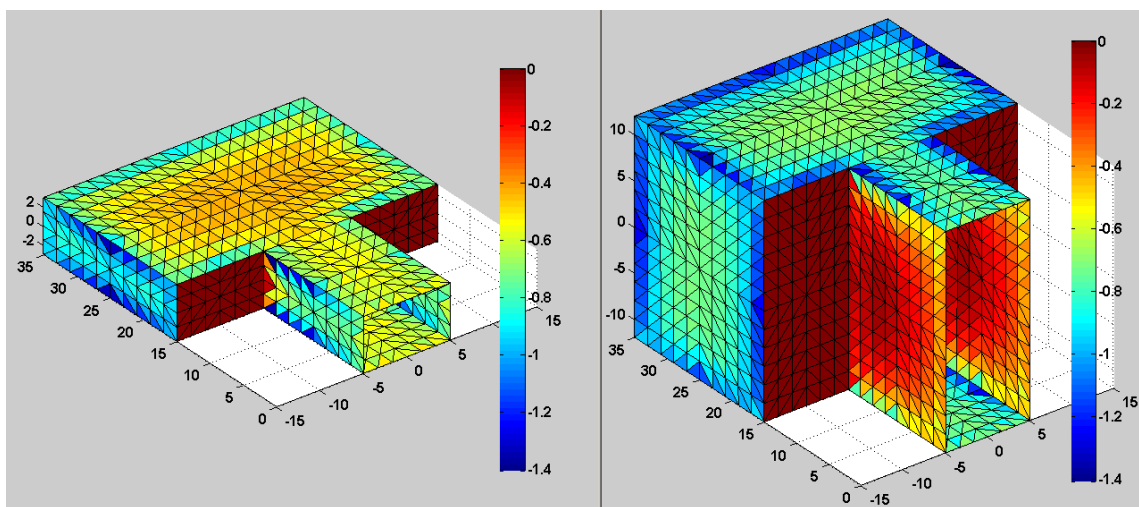
Σχ. 5.8: Η κατανομή των τάσεων σ_z πριν (δεξιά) και μετά (αριστερά) την διόρθωση των εφαπτομενικών στο μέσο στάδιο



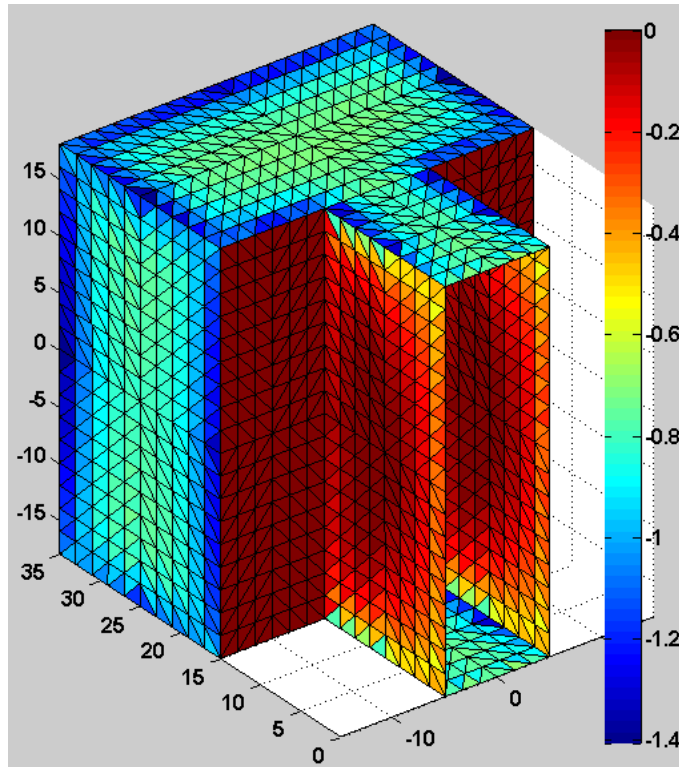
Σχ. 5.9: Η κατανομή των τάσεων σ_z πριν (δεξιά) και μετά (αριστερά) την διόρθωση των εφαπτομενικών στο τελικό στάδιο εκμετάλλευσης

Από τα Σχ. 5.7-9 παρατηρείται ότι μετά την διόρθωση των εφαπτομενικών, οι τάσεις διπλασιάζονται. Το μέγιστο μέγεθος των τάσεων φαίνεται να αλλάζει με το ύψος. Αυτό οφείλεται στο ότι οι τάσεις μοιράζονται στην πλευρά καθώς αυτή μεγαλώνει οπότε μειώνονται από τις γωνίες. Φαίνεται ακόμα, όπως είναι και αναμενόμενο, ότι στις γωνίες έχουμε μεγαλύτερες τιμές τάσεων σε σχέση με τα κέντρα των πλευρών. Αυτό διακρίνεται ακόμα καλύτερα μετά την διόρθωση των εφαπτομενικών. Στις δύο μπροστινές πλευρές, παρατηρούνται στο εσωτερικό οι ελάχιστες τάσεις, στα σημεία που εφάπτεται με τις πλευρές τις στοάς. Στο ίδιο σημείο παρατηρήθηκε και η μέγιστη μετατόπιση στις πλευρές αυτές, το οποίο είναι λογικό αφού στα σημεία με μικρές τάσεις αναμένονται οι μέγιστες μετατοπίσεις. Τέλος, συγκρίνοντας τις μετατοπίσεις (Σχ. 5.4) με τις τάσεις στη μέση εκμετάλλευση (Σχ. 5.8), φαίνεται, όπως είναι αναμενόμενο, ότι εκεί που εμφανίζονται οι ελάχιστες τάσεις σε κάθε πλευρά, εμφανίζονται και οι μέγιστες μετατοπίσεις.

Στη συνέχεια παρουσιάζεται και η σ_y για τον σχολιασμό και της επάνω πλευράς κατά την αύξηση του ύψους. Τα αποτελέσματα παρουσιάζονται στην ίδια χρωματική κλίμακα για να συγκριθούν πιο εύκολα.



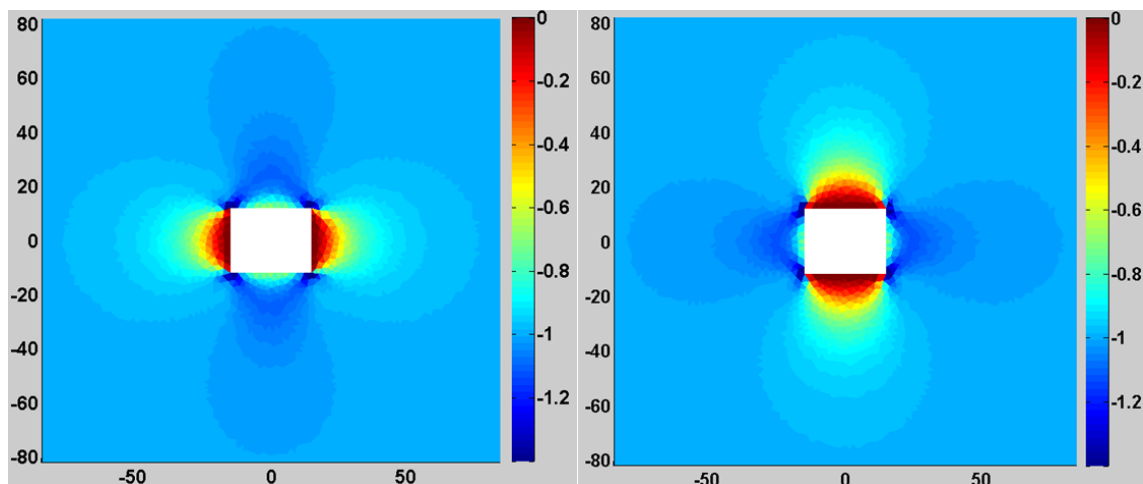
Σχήμα 5.10: Οι τάσεις σ_y στο αρχικό (αριστερά) και μέσο στάδιο (δεξιά) εκμετάλλευσης



Σχήμα 5.11: Οι τάσεις σ_y στο τελικό στάδιο εκμετάλλευσης

Στα [Σχ. 5.10](#) και [5.11](#) παρατηρείται μία αύξηση των σ_y τάσεων στις πλευρές του θαλάμου κατά την αύξηση του ύψους.

Στη συνέχεια παρουσιάζονται οι μεταβολές της τάσης σ_x και της τάσης σ_z μέχρι απόσταση 15 μέτρων γύρω από τον θάλαμο, στο κέντρο του θαλάμου. η σ_y δεν παρουσιάζεται, διότι δεν επηρεάζει τις τάσεις γύρω από το θάλαμο σε αυτήν την κατεύθυνση του θαλάμου.



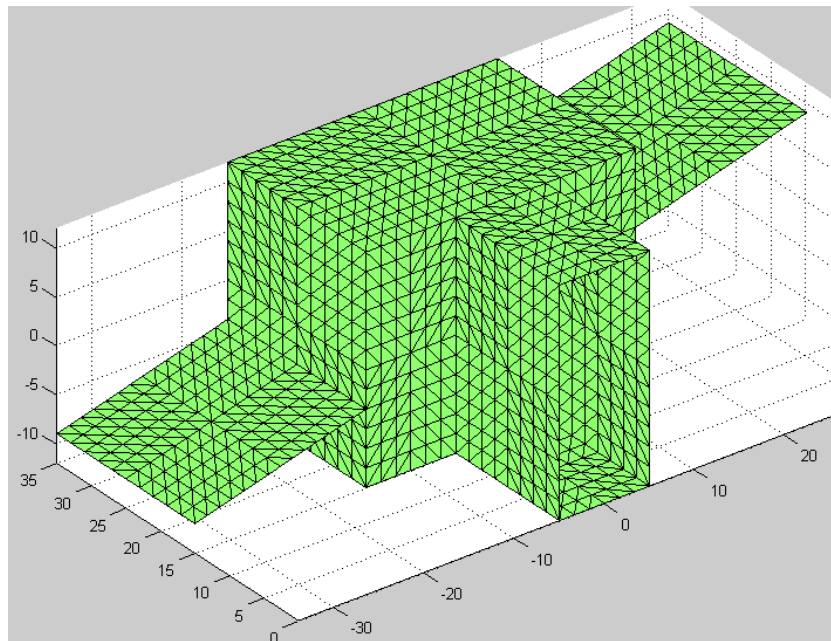
Σχ. 5.12: Η κατανομή της τάσης σ_x (αριστερά) και της σ_z (δεξιά) γύρω από τα σύνορα

Από το [Σχ. 5.12](#) φαίνεται ότι οι τάσεις τείνουν να μηδενιστούν κοντά στα σύνορα στις πλευρές στις οποίες ασκούνται κάθετα και τείνουν προς τις τάσεις του μακρινού πεδίου όσο απομακρύνονται από το θάλαμο. Παρατηρείται επίσης

ότι κοντά στις γωνίες εμφανίζονται και οι μέγιστες τάσεις όπως ακριβώς δηλαδή συμβαίνει και με τις τάσεις επάνω στο θάλαμο.

5.3 Σχεδιασμός θαλάμου κατά τη μέσο στάδιο εκμετάλλευσης και διακριτοποίησή του σε ασυνεχές μέσο

Αφού τα αποτελέσματα που έδωσε η μέθοδος στα σύνορα του θαλάμου, για πέτρωμα χωρίς ασυνέχειες φάνηκαν λογικά, αποφασίζεται να δοκιμαστεί και για μία ακόμα πιο ρεαλιστική περίπτωση. Προστίθεται ένα ρήγμα από την μία μεριά του θαλάμου μέχρι την άλλη το οποίο έχει μια μικρή κλίση. Σημειώνεται ότι οι πλευρές των τριγωνικών στοιχείων του ρήγματος που εφάπτονται με το σύνορο του θαλάμου, θα πρέπει να εφάπτονται επάνω σε πλευρές τριγωνικών στοιχείων της διακριτοποίησης του συνόρου. Αυτό γίνεται διότι άμα πέσει κάποια πλευρά τριγώνου επάνω στο κέντρο βάρους ενός στοιχείου, θα προκαλέσει απειρισμό στο στοιχείο αυτό. Το νέο σχήμα που προκύπτει, μετά την διακριτοποίησή του, φαίνεται στο Σχ. 5.13.



Σχ. 5.13: Διακριτοποίηση του συνόρου και του ρήγματος

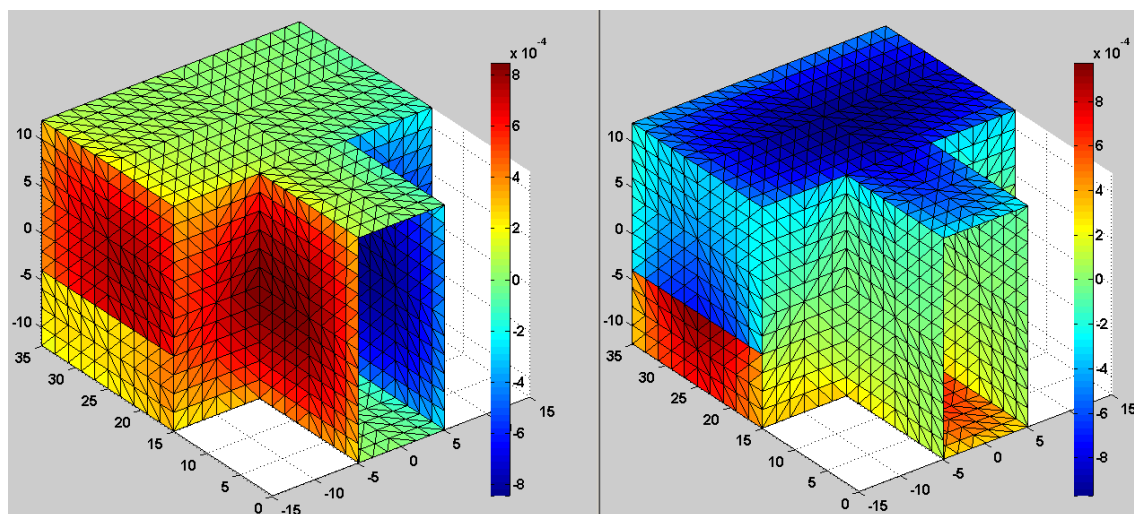
5.4 Μεταβολές μετατοπίσεων και τάσεων μετά την προσθήκη του ρήγματος

Χρησιμοποιούνται οι ίδιες παράμετροι που χρησιμοποιήθηκαν και στην περίπτωση του συνεχούς μέσου, έτσι ώστε να είναι δυνατή η σύγκριση των δύο περιπτώσεων. Το ρήγμα κανονικά πρέπει να είναι απείρου μήκους σε σχέση με το θάλαμο, αλλά λόγω του ότι υπάρχει περιορισμός στα στοιχεία που μπορούν να υπολογιστούν με το μηχάνημα το οποίο χρησιμοποιείται, θεωρούνται περιορισμένου μήκους. Για το λόγο αυτό επειδή τα αποτελέσματα επάνω στα ρήγματα δεν είναι αντιπροσωπευτικά, θα αφαιρεθούν από τα σχήματα για να υπάρχει καλύτερη οπτική του θαλάμου.

5.4.1 Μετατοπίσεις

Παρουσιάζονται στο Σχ. 5.14 οι μετατοπίσεις u_z και u_x . Η u_y παρουσιάζει πολύ μικρές μεταβολές οπότε δεν υπάρχει λόγος να παρουσιαστεί και να σχολιαστεί.

Παρατηρείται στη u_x ότι μετά την προσθήκη του ρήγματος, οι μετατοπίσεις μειώνονται ελαφρά στο πάνω κομμάτι της πλευράς και μειώνονται αισθητά στο κάτω κομμάτι της. Η μείωση αυτή οφείλεται στο ότι το ρήγμα λειτουργεί σαν πλευρά, με αποτέλεσμα να χωρίζει την πλευρά του θαλάμου σε δύο μικρότερες, άρα έχοντας μικρότερες διαστάσεις ως πλευρά, θα έχει και μικρότερες κάθετες μετατοπίσεις. Στην u_z από την άλλη, παρατηρείται μία αύξηση στο σημείο του ρήγματος. Πιο συγκεκριμένα από την πάνω μεριά του ρήγματος φαίνονται αρνητικές μετατοπίσεις και από την κάτω μεριά θετικές. Όπως αναφέρθηκε και

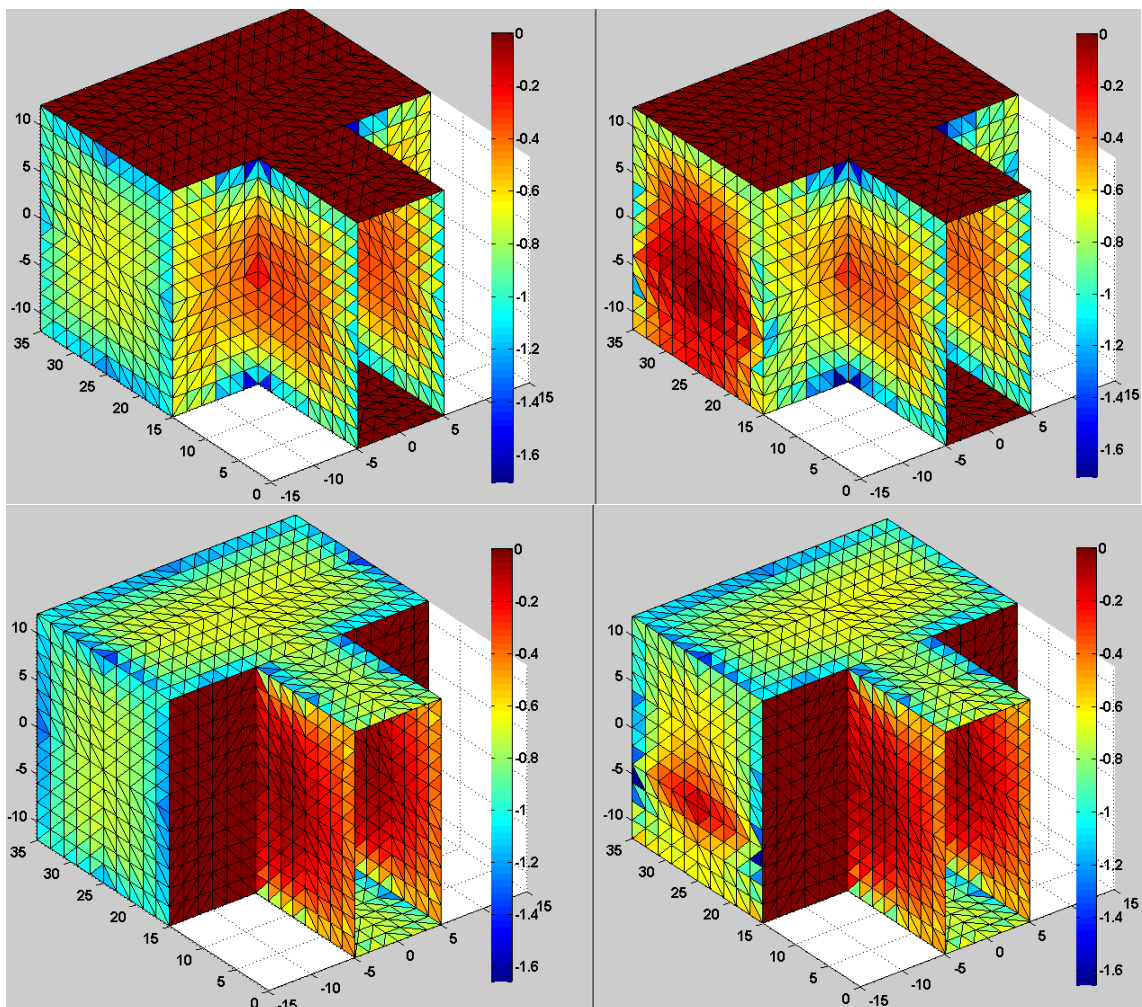


Σχ. 5.14: Μετατοπίσεις u_x (αριστερά) και u_z (δεξιά) μετά την προσθήκη ρήγματος

προηγουμένως, αφού το ρήγμα λειτουργεί σαν πλευρά, δημιουργούνται σε εκείνα τα σημεία ανάποδες γωνίες, όπως στην περίπτωση των μπροστινών πλευρών. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα ότι οι μετατοπίσεις που ασκούνται πάνω στο ρήγμα, να ασκούνται προς το κέντρο της γωνίας που σχηματίζει το ρήγμα με την πλευρά, επηρεάζοντας έτσι και την εφαπτόμενη πλευρά, εμφανίζοντας τις αυξήσεις αυτές. Σημειώνεται ότι από την άλλη πλευρά του θαλάμου συμβαίνει ακριβώς το ίδιο αλλά αντίστροφη αναλογία.

5.4.2 Τάσεις

Για τις τάσεις θα παρουσιασθούν οι σ_y και η σ_z μόνο, διότι η σ_x είναι μηδενική στο επίπεδο που είναι το ρήγμα οπότε δεν παρουσιάζονται σημαντικές αλλαγές. Η χρωματική κλίμακα των τάσεων έχει γίνει η ίδια πριν και μετά την προσθήκη του ρήγματος, για να μπορούν να συγκριθούν πιο εύκολα.



Σχ. 5.15: Οι τάσεις σ_z (πάνω) και σ_y (κάτω), πριν (αριστερά) και μετά (δεξιά) την προσθήκη του ρήγματος.

Από το [Σχ. 5.15](#), φαίνεται ότι η πλευρά που έχει το ρήγμα, συμπεριφέρεται για την σ_z όπως συμπεριφέρεται η πλευρά της στοάς για την σ_y (ή η μπροστινή πλευρά για την σ_x που φαίνεται στο [Παράρτημα Α](#)) και αντίστοιχα για την σ_y , όπως η μπροστινή πλευρά για την σ_z . Επιβεβαιώνονται δηλαδή αυτά που ειπώθηκαν για το ρήγμα στις μετατοπίσεις. Το ρήγμα λειτουργεί ως μια πλευρά, προκαλώντας τις μεταβολές που θα προκαλούσε οποιοδήποτε άνοιγμα ή στοά στην θέση του.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6 ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ-ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ

Τα συμπεράσματα αλλά και οι παρατηρήσεις που προέκυψαν από την εξέταση των παραπάνω περιπτώσεων είναι:

- Από την σύγκριση των λύσεων του προγράμματος με τις λύσεις κλειστής μορφής που έχουν υπολογισθεί από διάφορους μελετητές, προκύπτει ότι η αριθμητική μέθοδος των ασυνεχών μετατοπίσεων παρουσιάζει αρκετά ικανοποιητικά αποτελέσματα για όλες τις εξεταζόμενες περιπτώσεις. Ενώ για την προσέγγιση των αναλυτικών λύσεων, απαιτείται η χρήση σχετικά μικρού αριθμού στοιχείων. Πρέπει να αναφερθεί ότι αντίστοιχης ακρίβειας προσεγγίσεις με την χρήση πεπερασμένων στοιχείων απαιτεί αρκετά μεγαλύτερο αριθμό στοιχείων και μεγαλύτερο χρόνο.
- Επίσης όπως ισχύει σε όλες τις αριθμητικές μεθόδους, παρατηρήθηκε ότι με την αύξηση του αριθμού των στοιχείων η αριθμητική λύση συγκλίνει στην αναλυτική. Έτσι η επιλογή του αριθμού των στοιχείων που απαιτείται σε ένα πρόβλημα εξαρτάται άμεσα από την ακρίβεια που επιθυμείται.
- Για την περίπτωση όπου στα σύνορα υπάρχουν απότομες αλλαγές γεωμετρίας (π.χ. γωνίες) ή περιοχές που υπάρχουν συγκεντρώσεις τάσεων, τότε στις περιοχές αυτές χρειάζεται λεπτομερέστερη διακριτοποίηση. Με τον τρόπο αυτό αποφεύγεται η χρήση υπέρμετρου αριθμού στοιχείων, όπου η ακρίβεια που επιτυγχάνεται είναι παρόμοια.
- Η διακριτοποίηση συνόρων, όπου υπάρχουν στοιχεία που βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο, πρέπει να γίνεται προσεκτικά έτσι ώστε τα κέντρα βάρους να μην ανήκουν σε καμιά από τις ευθείες που ορίζονται από τις πλευρές των τριγωνικών στοιχείων του ίδιου επιπέδου.
- Σε περίπτωση που τέτοια διακριτοποίηση είναι αδύνατη η πολύ δύσκολος, όπως στην περίπτωση της ρωγμής κυκλικού ανοίγματος, μπορούν να προστεθούν δύο τυχαίες πολύ μικρές τιμές (της τάξεως του 10^{-5} επί την πλευρά του τριγώνου) σε δύο από τους κόμβους των τριγωνικών στοιχείων. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα τα τριγωνικά στοιχεία να έχουν μια ελαφριά κλίση, αποφεύγοντας απειρισμούς, χωρίς να υπάρχει μεγάλη απόκλιση στα αποτελέσματα.
- Όμοιο πρόβλημα παρουσιάζεται στην περίπτωση που επιχειρηθεί η εύρεση λύσης σε προέκταση κάποιας πλευράς ή στην κατακόρυφη ευθεία επάνω από τους κόμβους του τριγωνικού στοιχείου. Το πρόβλημα αυτό αντιμετωπίζεται εύκολα εάν η λύση αναζητηθεί σε πάρα πολύ μικρή απόσταση από την νοητή προέκταση της πλευράς του τριγώνου.
- Ακόμη θα πρέπει να λαμβάνεται ως πρώτη πλευρά, η ίδια πλευρά σε όλα τα τριγωνικά στοιχεία. Στην περίπτωση δηλαδή ορθογώνιων σχετικά τριγωνικών στοιχείων, αν ληφθεί ως πρώτη πλευρά η υποτείνουσα σε ένα στοιχείο, θα πρέπει να ληφθεί η υποτείνουσα σε όλα τα τριγωνικά στοιχεία. Αυτό γίνεται για την μείωση των σφαλμάτων κατά την στρέψη των τριγώνων από το ένα σύστημα στο άλλο.
- Στην περίπτωση όπου υπάρχουν κλειστά σύνορα όπως το σφαιρικό έγκοιλο, χρειάζεται η δημιουργία επιπλέον στοιχείων στο εσωτερικό του περιγράμματος ώστε να σταθεροποιηθεί η εσωτερική περιοχή και έτσι να μην επηρεάζει τα αποτελέσματα στην εξωτερική περιοχή.

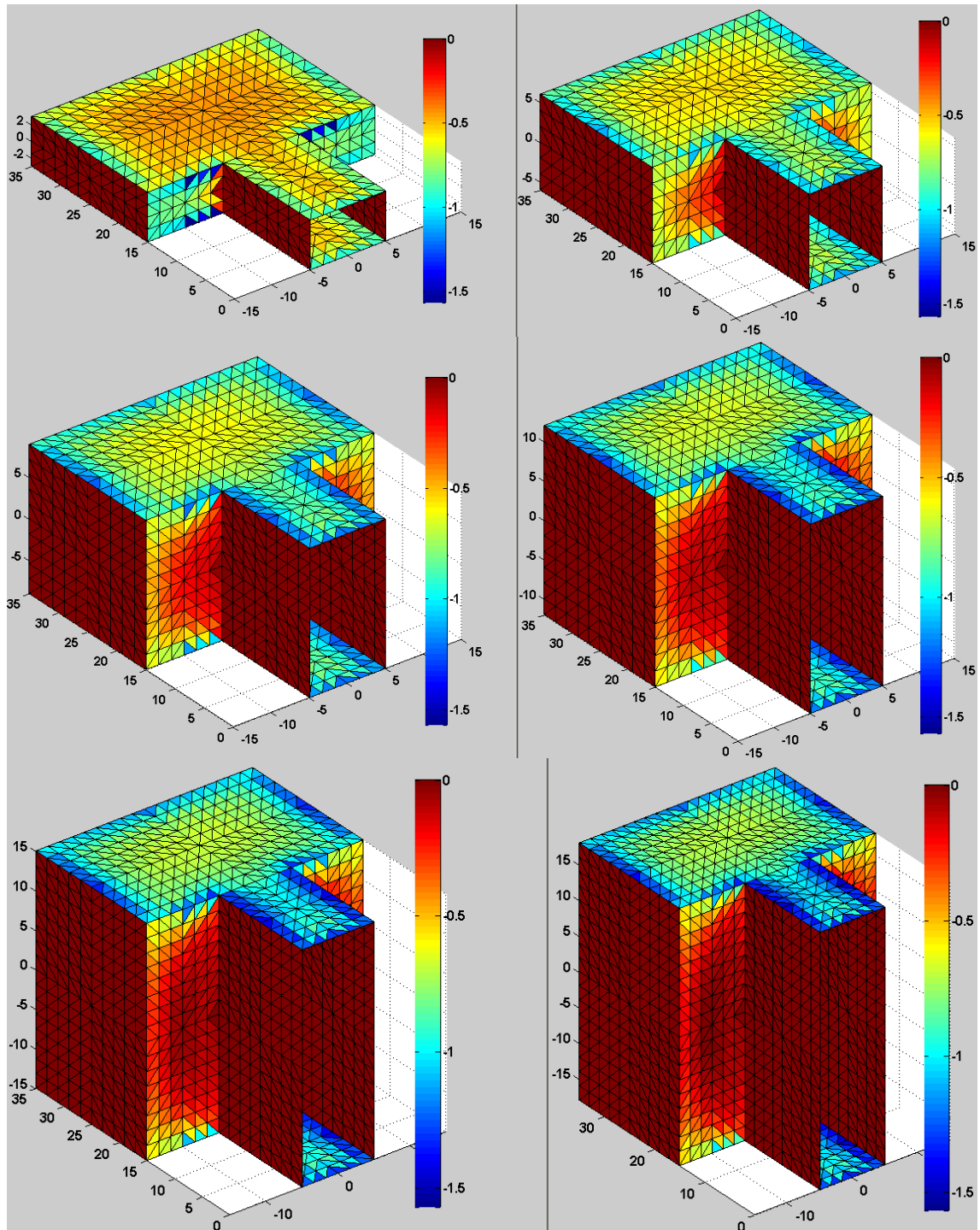
- Σημειώνεται ακόμη για το σφαιρικό έγκοιλο, ότι για την έτοιμη διακριτοποίηση που χρησιμοποιήθηκε, σε μεγάλο αριθμό στοιχείων, τα τριγωνικά στοιχεία στους πόλους αποκτούν πολύ μικρές διαστάσεις με αποτέλεσμα να εμφανίζονται προβλήματα στις τιμές των εκτιμήσεων. Αυτό μπορεί να αποφευχθεί χρησιμοποιώντας ειδική διακριτοποίηση σε αυτούς.
- Αξίζει επίσης να αναφερθεί ότι στις πλευρές καθώς και στους κόμβους των τριγωνικών στοιχείων οι λύσεις είναι ιδιόμορφες, όπου οι τάσεις απειρίζονται. Απ' αυτό συνεπάγεται, ότι οι λύσεις κοντά σε αυτές τις περιοχές για τις τάσεις να είναι μεγαλύτερες από τις αναμενόμενες. Η απόσταση όπου οι τάσεις υπερεκτιμούνται είναι ανάλογη με το μέγεθος των τριγωνικών στοιχείων.
- Από τα παραπάνω προκύπτει ότι οι λύσεις πρέπει να αναζητούνται σε απόσταση, από τους κόμβους ή τις πλευρές του συνόρου, που καθορίζεται από το μέγεθος των στοιχείων. Επίσης πρέπει να υπάρχει ομαλή μετάβαση μεταξύ των διαφόρων μεγεθών τριγωνικών στοιχείων. Έτσι για παράδειγμα, σε μια διακριτοποίηση στην οποία ένα στοιχείο διαδέχεται ένα πενταπλάσιο από αυτό στοιχείο, τότε το πιθανότερο είναι, οι λύσεις που θα προκύψουν να παρουσιάζουν αριθμητική αστάθεια στις περιοχές αυτές.
- Τα αποτελέσματα του θαλάμου, έχουν σχολιαστεί με βάση την λογική και την ομοιομορφία που παρουσιάζουν. Η ορθότητα των αποτελεσμάτων θεωρείται σωστή διότι ο κώδικας έδωσε ορθές λύσεις σε γνωστά προβλήματα.

BIBΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

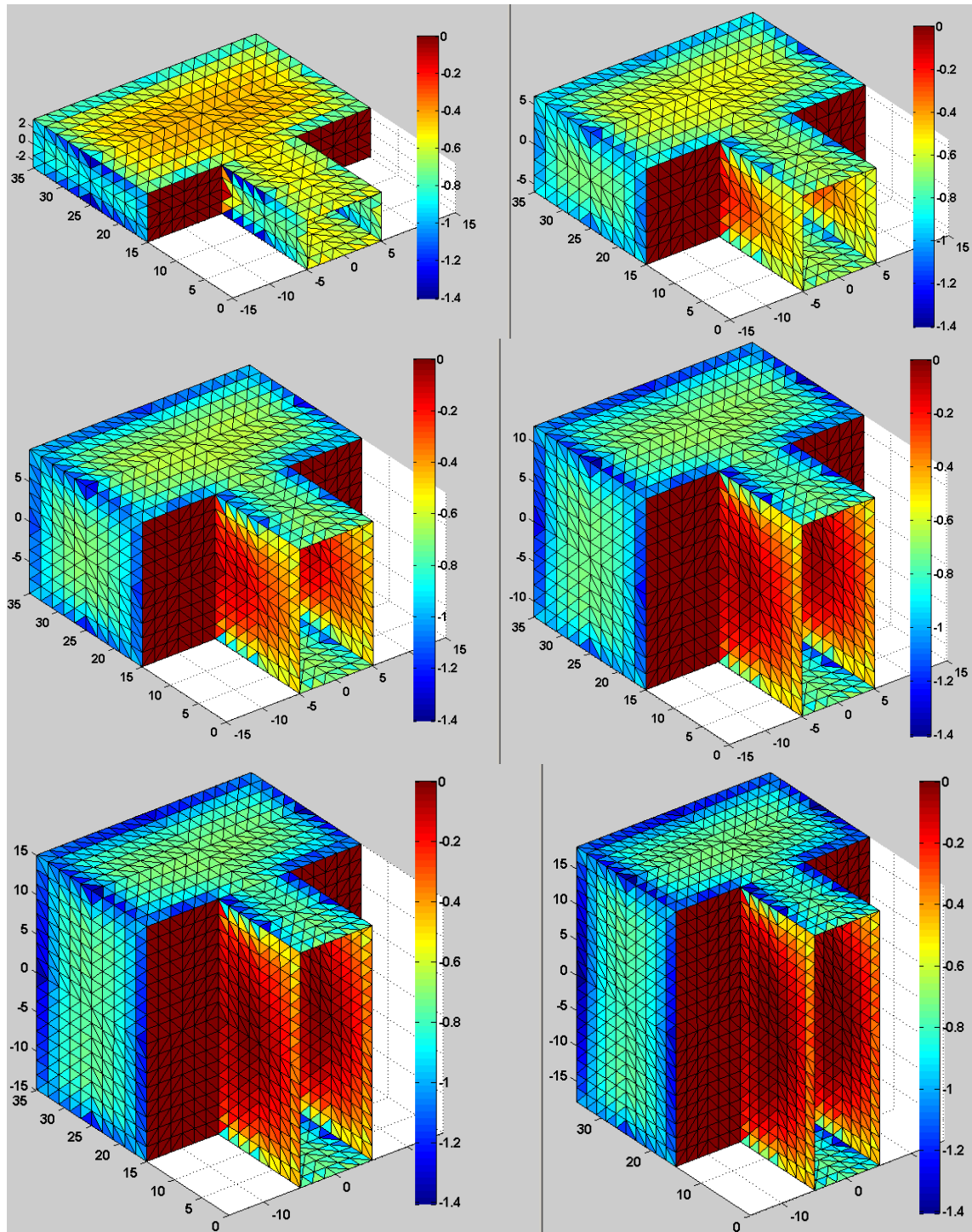
1. Crouch, S. and A.M. Starfield (1990). "Boundary Element Methods in Solid Mechanics". George Allen & Unwin, London.
2. Fabrikant, V.I. (1989). "Applications of Potential Theory in Mechanics: Selection of New Results". Kluwer Academic, Dordrecht Netherlands.
3. Karapetian, E.N. (1993). "The Elastic Field of Internal Circular Crack Subjected to a Linear Normal Loading. Engineering Fracture Mechanics". Vol. 45, No 5, pp 575-586.
4. Katsikadelis, J.T. (2002). "Boundary Elements. Theory and Applications". Elsevier, Amsterdam.
5. Kuriyama, K. and Y. Mizuta (1993). "Three Dimensional Elastic Analysis by the Displacement Discontinuity Method with Boundary Division into Triangular Leaf Elements". Int. J. Rock Mech. Min. Sci., Vol. 30, No 2, pp 111-123.
6. Shou, K.J., E. Siebrits and S.L. Crouch, (1997). "Technical Note: A Higher Order Displacement Discontinuity Method for Three Dimensional Elastostatic Problems". Int. J. Rock Mech. Min. Sci., Vol 34, No 2, pp 317-322.
7. Timoshenko, S.P. and J.N. Goodier (1970). "Theory of Elasticity". McGraw-Hill Book Company, New York. Third Edition.
8. Yacoub, T. (1999). "Three Dimensional Analysis of Lenticular Ore Bodies Using Displacement Discontinuity Elements". Ph.D thesis, Department of Civil Engineering, University of Toronto.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α

Α.1) Τάση σ_x κατά την αύξηση του ύψους



A.2) Τάση σ_y κατά την αύξηση του ύψους



A.3) Τάση σ_z κατά την αύξηση του ύψους

