

ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
ΓΕΝΙΚΟ ΤΜΗΜΑ
Τομέας Μαθηματικών



ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ ΔΙΑΣΤΑΤΙΚΗΣ
ΕΛΑΤΤΩΣΗΣ ΔΙΜΕΡΩΝ
ΕΝΑΓΚΑΛΙΣΜΕΝΩΝ ΚΒΑΝΤΙΚΩΝ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ

ΑΝΔΡΟΥΛΙΔΑΚΗΣ ΙΩΑΝΝΗΣ

Διπλωματική Διατριβή Μεταπτυχιακού Διπλώματος
Ειδίκευσης

Επιβλέπων Καθηγητής: Αναπληρωτής Καθηγητής
Δημοσθένης Έλληνας

Χανιά
Σεπτέμβριος 2004

Ευχαριστίες

Καταρχάς θα ήθελα να ευχαριστήσω τον σύμβουλο καθηγητή μου, Αναπληρωτή καθηγητή Δημοσθένη Έλληνα ο οποίος μου παρείχε την άρτια επιστημονική καθοδήγηση για την ολοκλήρωση της παρούσας διατριβής.

Τους καθηγητές μου στο Γενικό Τμήμα και ιδιαίτερα τους κυρίους Ιωακείμ Γρυσπολάκη Καθηγητή και Ανάργυρο Δελλή Επίκουρο Καθηγητή, για την συμμετοχή τους στην τριμελή επιτροπή.

Τους συναδέλφους μου μεταπτυχιακούς φοιτητές για την ηθική συμπαράσταση που μου παρείχαν.

Τέλος ευχαριστώ τα μέλη της οικογενείας μου για την κάθε είδους βοήθεια κατά την διάρκεια των σπουδών μου.

Η εργασία αυτή υποβλήθηκε προς μερική εκπλήρωση των απαιτήσεων για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης (ΜΔΕ) του Πολυτεχνείου Κρήτης στο Γενικό Τμήμα, Τομέας Μαθηματικών.

Dimensional Reduction Algorithm for Entangled Bipartite Quantum Systems

ABSTRACT

This work deals with entangled bipartite states of finite dimensional quantum systems, and its main purpose is to build an iterative algorithm that performs a dimensional reduction in a bipartite state vector while retaining exactly its entanglement and optimally its probability distribution.

The reduction algorithm is mathematically based on the theory of low rank approximation of matrix analysis, and on the Cauchy interlasing theorem of matrix eigenvalues. It specifically consists of a preconditioning that is implemented locally by Alice or Bob on the bipartite state vector and produces iteratively a gap in the magnitudes of the singular eigenvalues of its associated reduced density matrix ρ . The resulting dimensionally reduced bipartite vectors retain the initial entanglement, expressed as the linearized form of the von Neumann quantum entropy of matrix ρ , and are further selected by ordering them with the partial order of majorization imposed upon their corresponding probability distributions.

The algorithm is next realized in terms of a quantum circuit which involves one and multiple qubits quantum gates locally activated by a number of users according to a quantum information theoretic protocol. Finally, the reduction algorithm is further extended to apply to entangled bipartite quantum systems described by convex combinations of their associated reduced density matrices.

Περίληψη

Σκοπός της παρούσας εργασίας είναι η κατασκευή επαναληπτικού αλγορίθμου για την διαστατική ελάττωση εναγκαλισμένων διμερών κβαντικών καταστάσεων πεπερασμένων διμερών κβαντικών συστημάτων, με ταυτόχρονη διατήρηση του εναγκαλισμού και τη μέγιστη προσέγγιση για την κατανομή πιθανότητας.

Ο αλγόριθμος μαθηματικά βασίζεται στο θεώρημα χαμηλής τάξης προσέγγισης πινάκων και στο θεώρημα Cauchy για τις ιδιοτιμές πίνακα. Ειδικότερα έχουμε τοπική επαναληπτική δράση που υλοποιείται στο χώρο του Bob ή της Alice ενός διμερούς καταστατικού διάνυσματος με αποτέλεσμα την διαδοχική παραγωγή σκαλοπατιού στις ιδιάζουσες τιμές του μειωμένου πίνακα πυκνότητας ρ . Το διαστατικά μειωμένο καταστατικό διάνυσμα που προκύπτει διατηρεί τον αρχικό εναγκαλισμό που εκφράζεται από την γραμμική κβαντική εντροπία Von Neumann του αντίστοιχου πίνακα πυκνότητας ρ ο οποίος επιλέγεται από ακολουθία πινάκων ρ με βάση το θεώρημα της κατίσχυσης για την μέγιστη προσέγγιση της κατανομής της πιθανότητας.

Στην συνέχεια ο αλγόριθμος πραγματοποιείται με κβαντικό κύκλωμα που περιλαμβάνει πύλες ενός και πολλαπλών qubit που ενεργούν τοπικά σε ένα αριθμό χρηστών και συμφωνούν με το πρωτόκολλο της κβαντικής θεωρίας πληροφορίας. Τέλος ο αλγόριθμος επεκτείνεται σε εναγκαλισμένα διμερή κβαντικά συστήματα που περιγράφονται από κυρτούς συνδυασμούς των μειωμένων πινάκων πυκνότητας που τα εκφράζουν.

Περιεχόμενα

1	ΚΒΑΝΤΙΚΗ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΑ	4
1.1	Εισαγωγή	4
1.1.1	Καταστατικά διανύσματα.	4
1.1.2	Τελεστές.	8
1.1.3	Πίνακας πυκνότητας	12
1.2	Κβαντική πληροφορία.	13
1.2.1	Κβαντικά bits (qubits)	14
1.2.2	Γεωμετρική ερμηνεία του qubit	15
1.2.3	Πολλαπλά qubits	16
1.2.4	Εντροπία Shannon	17
1.2.5	Εντροπία Von Neumann	18
1.3	Κβαντικός Εναγκαλισμός	20
1.3.1	Διμερή κβαντικά συστήματα.	20
1.3.2	Παραγοντοποιησιμότητα των χώρων Hilbert	21
1.3.3	Παραγοντοποιησιμότητα διανυσμάτων	22
1.3.4	Παραγοντοποιήσιμη βάση χώρου Hilbert	25
1.3.5	Εναγκαλισμός - Μέτρα εναγκαλισμού	28
1.3.6	Ιεραρχία ιχνών:	29
1.3.7	Ιεραρχία Concurrence	31
1.3.8	Εναγκαλισμός και εντροπία.	33
2	ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ	38
2.1	Διάσπαση SVD	38
2.1.1	Ορισμός της SVD.	38
2.1.2	Γεωμετρική ερμηνεία.	39
2.1.3	Προσεγγίσεις χαμηλής τάξης.	43
2.2	Εφαρμογές της SVD	45
2.2.1	Μηχανές αναζήτησης	46
2.2.2	Συμπίεση δεδομένων - Επεξεργασία εικόνας	48
2.3	Χρήσιμα θεωρήματα	50

3	ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ ΔΙΑΣΤΑΤΙΚΗΣ ΣΥΜΠΙΕΣΗΣ	53
3.1	Γενικά	53
3.1.1	Ο φορμαλισμός $ A\rangle\rangle$	54
3.2	Μελέτη συμπίεσης με επαναληπτική διαδικασία	57
3.2.1	Σχέσεις ιδιοτιμών πίνακα και υποπινάκων του	57
3.2.2	Κατασκευή πίνακα επανάληψης	58
3.2.3	Πρώτο βήμα του αλγορίθμου.	61
3.2.4	Τα επόμενα βήματα του αλγορίθμου.	66
3.2.5	Καθορισμός των f_k και g_k για την διαστατική συμπίεση.	70
3.2.6	Επιλογή των ιδανικών ζευγών (f_k, g_k)	72
3.2.7	Καμπύλες Lorenz	74
3.3	Εφαρμογή	76
3.4	Κβαντικό κύκλωμα	83
3.4.1	Κβαντικές πύλες	83
3.4.2	Κβαντικό κύκλωμα αλγόριθμου διαστατικής συμπίεσης	85
3.5	Πληθυσμιακό μοντέλο	89
3.6	Πίνακας G.W.Stewart	90
4	ΓΕΝΙΚΕΥΣΕΙΣ	92
4.1	Συμπίεση οικογένειας διμερών κβαντικών συστημάτων	92
4.2	Κυρτοί συνδυασμοί	94

Κατάλογος Σχημάτων

1.1	Εντροπία για σύστημα διάστασης 4.	34
1.2	Μεταβολή της εντροπίας για το $ \varphi\rangle$	36
1.3	Μεταβολή της εντροπίας για το $ b\rangle$	36
2.1	Μοναδιαίος κύκλος.	41
2.2	$\frac{x^2}{\sigma_1^2} + \frac{y^2}{\sigma_2^2} = 1$	41
2.3	Ζούληγμα του μοναδιαίου κύκλου.	42
3.1	Ιδιάζουσες τιμές πίνακα $ A\rangle\rangle$ και $ A_4\rangle\rangle$	68
3.2	Ιδιάζουσες τιμές πίνακα $ A\rangle\rangle$ και $ A_{12}\rangle\rangle$	68
3.3	Ιδιάζουσες τιμές πίνακα $ A\rangle\rangle$ και $ A_{25}\rangle\rangle$	69
3.4	Συναρτήσεις ίχνους ρ και ρ^2	74
3.5	Καμπύλες Lorenz	76
3.6	Καμπύλες ιχνών ρ και ρ^2	78
3.7	Καμπύλη διαφοράς ιχνών ρ και ρ^2	78
3.8	Καμπύλες Lorenz	79
3.9	Ιδιάζουσες τιμές πριν και μετά	80
3.10	Χρήση δεκαπέντε ιδιζουσών τιμών	81
3.11	Χρήση τριάντα τεσσάρων ιδιζουσών τιμών	82
3.12	Χρήση σαράντα ιδιζουσών τιμών	82
3.13	Μονόμπιτες κβαντικές πύλες.	84
3.14	Πύλη CNOT	85
3.15	Πύλη.	88
3.16	Συνολικό κύκλωμα.	88
3.17	Ιδιάζουσες τιμές πίνακα 100×100 για διάφορες τιμές του s	91

Κεφάλαιο 1

ΚΒΑΝΤΙΚΗ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΑ

1.1 Εισαγωγή

1.1.1 Καταστατικά διανύσματα.

Στην κλασική φυσική η κατάσταση ενός συστήματος προσδιορίζεται σε κάθε χρονική στιγμή από την γνώση φυσικών ποσοτήτων (φυσικών μεταβλητών) όπως διανύσματα θέσης, ορμής, και ταχύτητας των σωματιδίων που αποτελούν το σύστημα. Δεχόμαστε ότι όλες οι μεταβλητές μπορούν να μετρηθούν ταυτόχρονα με ακρίβεια. Δεν συμβαίνει όμως το ίδιο και στην κβαντική φυσική. Στην περίπτωση αυτή βασικό και διαφορετικό ρόλο έχει η διαδικασία μέτρησης.

Όταν μετράμε στην κβαντική φυσική μια μεταβλητή η κατάσταση του συστήματος αυτόματα μεταβάλλεται με τρόπο που δεν μπορούμε να γνωρίζουμε. Δεν μπορούμε λοιπόν να πούμε με βεβαιότητα για το πια θα είναι η κατάσταση του συστήματος μετά την μέτρηση. Η παραπάνω διαπίστωση σε συνδυασμό με την αρχή της αβεβαιότητας του Heisenberg δίνει την εξήγηση για την εισαγωγή της έννοιας της πιθανότητας στην κβαντική θεωρία. Είμαστε λοιπόν υποχρεωμένοι να εγκαταλείψουμε την κλασική παραδοχή ότι όλες οι μεταβλητές ενός συστήματος έχουν καθορισμένες τιμές για κάθε χρονική στιγμή. Έτσι η διαδικασία μέτρησης έχει ως εξής. Αρχικά κάνουμε μια μέτρηση ενός συνόλου μεταβλητών που μπορεί να μετρηθούν ταυτόχρονα. Σε μια μετέπειτα χρονική στιγμή κάνουμε μια νέα μέτρηση στο σύστημα το οποίο βρίσκεται στην ήδη γνωστή φυσική κατάσταση. Μετά την νέα μέτρηση το σύστημα θα βρεθεί σε μια καινούρια κατάσταση. Άρα πρέπει να υπάρχει ένα πλάτος πιθανότητας από το οποίο θα μπορεί να προκύπτει η καινούρια κατάσταση από την παλιά. Η κβαντική μηχανική προβλέπει μια στατιστική κατανομή για τα αποτελέσματα μιας τέτοιας μέτρησης.

Ο παρακάτω φορμαλισμός μας βοηθάει να κατανοήσουμε και να μελετήσουμε με καλύτερα τις προβλέψεις αυτές στην κβαντική μηχανική. Το σύνολο των

καταστάσεων ενός συστήματος θεωρούμε ότι απαρτίζει ένα χώρο κάθε σημείο του οποίου αντιστοιχεί σε μία κατάσταση του συστήματος. Όπως γνωρίζουμε η κατάσταση ενός συστήματος περιγράφεται από την κυματοσυνάρτηση που εν γένει είναι μία μιγαδική συνάρτηση. Έτσι ο χώρος για τον οποίο μιλάμε πρέπει να είναι ένας μιγαδικός διανυσματικός χώρος. Θα τον ονομάσουμε καταστατικό χώρο αφού περιέχει τα καταστατικά διανύσματα. Ένας τέτοιος χώρος είναι ένας χώρος Hilbert και θα τον συμβολίζουμε με \mathcal{H} . Για τα στοιχεία του χώρου αυτού θα χρησιμοποιήσουμε το συμβολισμό του τού Dirac δηλαδή τα διανύσματα του χώρου Hilbert θα τα ονομάζουμε Ket και θα τα συμβολίζουμε με $|\cdot\rangle$.

Ας δούμε λίγο καλύτερα τα στοιχεία του χώρου Hilbert και ποιο συγκεκριμένα μία ακτίνα (ray) δηλαδή την περιγραφή μίας κατάστασης ενός συστήματος ένα καταστατικό διάνυσμα.

Ορισμός.

Μία ακτίνα (ray) $|\tilde{\psi}\rangle$ σε ένα χώρο Hilbert

$$|\tilde{\psi}\rangle = \{e^{i\phi} |\psi\rangle : |\psi\rangle \in \mathcal{H} \quad \phi \in [0, 2\pi)\} \quad (1.1)$$

αποτελεί μία πλήρη περιγραφή του φυσικού μας συστήματος. Τα στοιχεία $|\psi\rangle$ και $e^{i\phi} |\psi\rangle$ βρίσκονται πάνω στην ίδια ακτίνα $|\tilde{\psi}\rangle$ συνεπώς περιγράφουν την ίδια φυσική κατάσταση. Άρα θα ήταν το ίδιο να μελετήσουμε το $|\psi\rangle$ ή το $e^{i\phi} |\psi\rangle$. Θα μας διευκόλυνε να επιλέξουμε για την μελέτη μας το $|\psi\rangle$.

Ο χώρος \mathcal{H} είναι διανυσματικός χώρος συνεπώς μπορούμε να μιλήσουμε για τον δυικό του. Ο δυικός του \mathcal{H} ορίζεται ως ο χώρος όλων των γραμμικών συναρτησοειδών

$$f(|\alpha\rangle) \text{ με } |\alpha\rangle \in \mathcal{H}$$

δηλαδή με πεδίο ορισμού το \mathcal{H} και πεδίο τιμών το σύνολο των μιγαδικών αριθμών \mathbb{C} . Τον χώρο αυτό τον ονομάζουμε δυικό του \mathcal{H} και τον συμβολίζουμε με \mathcal{H}^* . Τα στοιχεία αυτού του χώρου είναι διανύσματα και σύμφωνα με τον συμβολισμό του Dirac τα ονομάζουμε bra και τα συμβολίζουμε με $\langle\cdot|$. Ο δυικός χώρος του \mathcal{H} λέγεται και χώρος των bra. Παρατηρούμε ότι μπορούμε να ορίσουμε μία ένα προς ένα αντιστοιχία ανάμεσα στα στοιχεία του \mathcal{H} και του \mathcal{H}^* . Έτσι για κάθε ket αντιστοιχεί και ένα bra ενώ η σχέση που τα συνδέει είναι το ότι το bra αντιστοιχεί στο συζυγές ανάστροφο του ket.

Μερικές βασικές ιδιότητες που χαρακτηρίζουν ένα χώρο Hilbert και τα στοιχεία του αναφέρονται παρακάτω.

- Γραμμικότητα:

Για οποιαδήποτε διανύσματα $|\alpha\rangle$, $|\beta\rangle$ τού χώρου \mathcal{H} κάθε γραμμικός συνδυασμός

$$c_1 |\alpha\rangle + c_2 |\beta\rangle \quad \text{μέ} \quad c_1, c_2 \in \mathfrak{F}$$

αποτελεί ένα καλά ορισμένο διάνυσμα τού χώρου \mathcal{H}

- Ερμητιανό εσωτερικό γινόμενο:

Το εσωτερικό γινόμενο των $|\alpha\rangle$, $|\beta\rangle$ είναι ένας μιγαδικός αριθμός και παριστάνεται με το σύμβολο $\langle\alpha|\beta\rangle$ πού ονομάζεται braket. Ιδιότητες εσωτερικού γινομένου.

1. $\langle\alpha|\beta\rangle = \langle\beta|\alpha\rangle^*$
2. $\langle\alpha|\lambda\beta\rangle = \lambda\langle\alpha|\beta\rangle \quad \forall \lambda \in \mathfrak{F}$
3. $\langle\lambda\alpha|\beta\rangle = \lambda^*\langle\alpha|\beta\rangle \quad \forall \lambda \in \mathfrak{F}$
4. $\langle\alpha+\gamma|\beta\rangle = \langle\alpha|\beta\rangle + \langle\gamma|\beta\rangle$
5. $\langle\alpha|\beta+\gamma\rangle = \langle\alpha|\beta\rangle + \langle\alpha|\gamma\rangle$
6. $\langle\alpha|\alpha\rangle \geq 0$
7. $\langle\alpha|\alpha\rangle = 0 \Leftrightarrow |\alpha\rangle = 0$

Ο αριθμός $\langle\alpha|\alpha\rangle$ είναι πάντα μη αρνητικός και ονομάζεται νόρμα τού διανύσματος $|\alpha\rangle$ και η ρίζα του μήκος του $|\alpha\rangle$.

$$\sqrt{\langle\alpha|\alpha\rangle} = |\alpha|$$

- Καθετότητα διανυσμάτων:

Δύο διανύσματα $|\alpha\rangle$ και $|\beta\rangle$ τού χώρου \mathcal{H} ονομάζονται κάθετα αν και μόνον αν

$$\langle\alpha|\beta\rangle = 0$$

- Ορθογωνιότητα διανυσμάτων:

Ένα σύνολο διανυσμάτων $\{|\alpha_i\rangle\}$ τού χώρου \mathcal{H} με πεπετασμένο ή άπειρο πλήθος στοιχείων ονομάζεται ορθοκανονικό αν

$$\langle\alpha_i|\alpha_j\rangle = \delta_{ij} \quad \forall i, j$$

- Πληρότητα:

Ένα σύνολο διανυσμάτων $\{| \alpha_i \rangle\}$ τού χώρου \mathcal{H} ονομάζεται πλήρες αν κάθε διάνυσμα $| \chi \rangle$ τού χώρου \mathcal{H} μπορεί να γραφτεί σαν γραμμικός συνδυασμός όπως φαίνεται παρακάτω.

$$| \chi \rangle = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_i | \alpha_i \rangle$$

Τά μ_i είναι οι συνιστώσες τού $| \chi \rangle$ που αντιστοιχούν στα διανύσματα $| \alpha_i \rangle$ δηλαδή

$$\mu_i = \langle \alpha_i | \chi \rangle$$

- Βάση τού χώρου:

Ένα σύνολο διανυσμάτων $\{| e_i \rangle\}$ ονομάζεται ορθοκανονική βάση τού χώρου \mathcal{H} αν πληρεί ταυτόχρονα και την πληρότητα και την ορθοκανονικότητα δηλαδή

$$| \chi \rangle = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_i | e_i \rangle$$

Όμως οι δύο αυτοί χώροι των bra και των ket εφοδιασμένοι με όλες τις παραπάνω ιδιότητες δεν είναι ικανοί χωρίς κάποιες παραδοχές να μας περιγράψουν το κβαντικό μας σύστημα όπως εμείς θα επιθυμούσαμε. Στο σημείο αυτό κάνουν την παρουσία τους τα αξιώματα της κβαντικής θεωρίας. Το πρώτο αξίωμα είναι αυτό που κάνει την σύνδεση του φυσικού προβλήματος με τον χώρο Hilbert και συνεπώς με τα καταστατικά διανύσματα.

Αξίωμα 1

Η κβαντική κατάσταση:

Κάθε φυσική κατάσταση ενός κβαντικού συστήματος περιγράφεται από ένα κανονικοποιημένο διάνυσμα $| \psi \rangle$ τού χώρου \mathcal{H} . Το ότι τα διανύσματα $| \psi \rangle$ είναι κανονικοποιημένα εκφράζεται από την σχέση

$$\langle \psi | \psi \rangle = 1$$

Σύμφωνα με το παραπάνω αξίωμα κάθε φυσική κατάσταση ενός συστήματος περιγράφεται από ένα κανονικοποιημένο διάνυσμα ενώ εμείς χρησιμοποιούσαμε ένα γενικότερο στοιχείο του χώρου Hilbert \mathcal{H} για την περιγραφή της κατάστασης, εν γένει μη κανονικοποιημένο. Αξίζει λοιπόν να σημειώσουμε ότι ένα κανονικοποιημένο διάνυσμα πολλαπλασιασμένο με έναν μη μηδενικό μιγαδικό

αριθμό εκφράζει την ίδια φυσική κατάσταση με το κανονικοποιημένο. Με άλλα λόγια μια συγκεκριμένη κατάσταση ενός συστήματος δεν περιγράφεται από το κανονικοποιημένο καταστατικό διάνυσμα μόνο αλλά και από ολόκληρο τον υπό-χώρο που παράγει στον χώρο Hilbert \mathcal{H} που ανήκει. Για καλύτερη κατανόηση και αποφυγή συγχύσεων στην συνέχεια όταν αναφερόμαστε σε καταστατικά διανύσματα θα εννοούμε κανονικοποιημένα στοιχεία του χώρου \mathcal{H} .

Ιδιότητες.

1. Κάθε διάνυσμα $|\alpha\rangle$ με $|\alpha\rangle \in \mathcal{H}$ γράφεται σαν γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων της βάσης που παράγουν το χώρο \mathcal{H} . Δηλαδή

$$|\alpha\rangle = \sum_{i=1}^{\infty} c_i |b_i\rangle$$

όπου το σύνολο $\{|b_i\rangle\}$ αποτελεί μια βάση του χώρου \mathcal{H} .

2. Αρχή της υπέρθεσης των φυσικών καταστάσεων.

Έστω $|\alpha\rangle$ και $|\beta\rangle$ δύο κανονικοποιημένα καταστατικά διανύσματα γραμμικά ανεξάρτητα. Τότε οι γραμμικοί συνδυασμοί

$$|\phi\rangle = c_1 |\alpha\rangle + c_2 |\beta\rangle \text{ με } c_1, c_2 \in \mathbb{C}$$

δίνουν κανονικοποιημένα διανύσματα του \mathcal{H} δηλαδή περιγραφή άλλων φυσικών καταστάσεων του συστήματός μας.

1.1.2 Τελεστές.

Ορισμός τελεστή:

Έστω δυο χώροι με νόρμα X και Y . Μία απεικόνιση $T : X \rightarrow Y$ λέγεται γραμμικός τελεστής αν

$$T(ax_1 + bx_2) = aT(x_1) + bT(x_2)$$

Ο τελεστής T έχει πεδίο ορισμού το X και πεδίο τιμών το Y δρα λοιπόν σε στοιχεία του X και το αποτέλεσμα είναι στοιχεία του Y .

Στην περίπτωση της κβαντικής θεωρίας και των χώρων Hilbert τελεστής θα είναι ένας πίνακας που θα δρα πάνω σε στοιχεία του χώρου \mathcal{H} συνεπώς σε

καταστατικά διανύσματα και το αποτέλεσμα πρέπει να είναι στοιχείο του ίδιου χώρου \mathcal{H} δηλαδή περιγραφή μιας άλλης φυσικής κατάστασης του συστήματός μας. Άρα:

$$T|a\rangle = |b\rangle \quad \text{όπου} \quad |a\rangle, |b\rangle \in \mathcal{H}$$

Έτσι ο παραπάνω ορισμός μπορεί να πάρει την παρακάτω μορφή

Έστω χώρος Hilbert \mathcal{H} ο $T : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ λέγεται γραμμικός τελεστής αν

$$T\left(\sum_i c_i |a_i\rangle\right) = \sum_i c_i T|a_i\rangle \quad \text{όπου} \quad c_i \in \mathbb{C}$$

Σημαντικό είναι να σημειώσουμε ότι η δράση του τελεστή θα μας δώσει εν γένει διαφορετικά αποτελέσματα αν δράσει αριστερά ή δεξιά σε ένα καταστατικό διάνυσμα. Εύκολα βλέπουμε ότι η δράση από αριστερά σε ένα διάνυσμα θα μας δώσει διάνυσμα του ίδιου χώρου \mathcal{H} ενώ η δράση από δεξιά θα μας δώσει διάνυσμα του δυικού χώρου \mathcal{H}^* .

Βασικοί γραμμικοί τελεστές:

- Ο μηδενικός τελεστής O :

$$O|a\rangle = 0 \quad \forall \quad |a\rangle \in \mathcal{H}$$

- Ο ταυτοτικός τελεστής I :

$$I|a\rangle = |a\rangle \quad \forall \quad |a\rangle \in \mathcal{H}$$

- Ο αντίστροφος τελεστής T^{-1} :

$$T|a\rangle = |b\rangle \quad \text{τότε} \quad T^{-1}|b\rangle = |a\rangle \quad \forall \quad |a\rangle \in \mathcal{H}$$

Ο αντίστροφος τελεστής T^{-1} δρα αντίστροφα με συνέπεια να αναιρεί την δράση του T . Με την διαδοχική δράση λοιπών των T και T^{-1} οδηγούμαστε στον ταυτοτικό τελεστή αφού

$$TT^{-1} = T^{-1}T = I$$

- Κανονικός τελεστής :

Κανονικός είναι ο τελεστής που μετατίθεται με τον συζυγή ανάστροφο του

$$[T, T^\dagger] = TT^\dagger - T^\dagger T = 0$$

συνεπώς όταν ο μεταθέτης του τελεστή T και του T^\dagger είναι 0 τότε ο T είναι κανονικός τελεστής.

- Μοναδιακός (Unitary) τελεστής :
Ένας τελεστής U λέγεται μοναδιακός (Unitary) αν ο αντίστροφός του ταυτίζεται με τον συζυγή ανάστροφό του δηλαδή

$$U^{-1} = U^\dagger$$

Αυτή η κατηγορία τελεστών έχει κάποιες ιδιαίτερες ιδιότητες :

1. Το γινόμενο μοναδιακών τελεστών είναι μοναδιακός τελεστής.
2. Ο συζυγής τελεστής ενός μοναδιακού τελεστή ανήκει και αυτός στους μοναδιακούς.
3. Ο αντίστροφος ενός μοναδιακού τελεστή είναι και αυτός μοναδιακός.
4. Κάθε μοναδιακός τελεστής διατηρεί το εσωτερικό γινόμενο δηλαδή διατηρεί το μήκος των διανυσμάτων στα οποία δρα.

$$\| |a\rangle \| = \| U |a\rangle \|$$

5. Κάθε μοναδιακός τελεστής είναι κανονικός.

$$[U, U^\dagger] = UU^\dagger - U^\dagger U = 0$$

- Προβολικός τελεστής P :
Προβολικός είναι ο τελεστής που δρώντας σε ένα διάνυσμα που ανήκει σε κάποιο χώρο το προβάλλει σε έναν υπόχωρο του χώρου αυτού που παράγεται από κάποιο διάνυσμα βάσης του αρχικού χώρου. Ας είναι $|i\rangle$ το διάνυσμα βάσης. Τότε το εσωτερικό γινόμενο $\langle i | a \rangle$ θα αποτελεί το μήκος της συνιστώσας του $|a\rangle$ στην διεύθυνση του διανύσματος $|i\rangle$ και ο προβολικός τελεστής θα περιγράφεται από την σχέση

$$P = \langle i | i \rangle$$

. Στην γενική περίπτωση που έχουμε m διανύσματα βάσης και όχι ένα η έκφραση του προβολικού τελεστή έχει ως εξής

$$P = \sum_{i=1}^m \langle i | i \rangle$$

Ο παραπάνω τελεστής δρώντας σε ένα διάνυσμα το προβάλλει και συνεπώς το αναλύει σε m διανύσματα κάθε ένα από τα οποία βρίσκете στην διεύθυνση του αντίστοιχου διανύσματος βάσης.

Ιδιότητες των προβολικών τελεστών :

1. Για κάθε προβολικό τελεστή P ισχύει

$$P^2 = P$$

2. Κάθε προβολικός τελεστής έχει ιδιοτιμές 0 και 1.

- Ερμιτιανός τελεστής :

Για κάθε γραμμικό τελεστή T υπάρχει και ο συζυγής ανάστροφος τελεστής του που συμβολίζεται με T^\dagger . Όταν ισχύει

$$T^\dagger = T$$

τότε ο τελεστής ονομάζεται αυτοσυζυγής ή ερμιτιανός.

Ιδιότητες ερμιτιανών τελεστών:

1. Το άθροισμα δυο ερμιτιανών τελεστών είναι ερμιτιανός.
2. Το γινόμενο ερμιτιανών τελεστών είναι επίσης ερμιτιανός.
3. Οι ιδιοτιμές κάθε ερμιτιανού τελεστή είναι πραγματικοί αριθμοί.

Για την θεμελίωση της κβαντικής μηχανικής απαραίτητη είναι η χρήση των τελεστών. Η εισαγωγή τους στην κβαντική θεωρία γίνεται με το δεύτερο αξίωμα της κβαντομηχανικής.

Αξίωμα 2.

Κάθε παρατηρήσιμη μεταβλητή ενός συστήματος παριστάνεται από ένα τελεστή στο χώρο Hilbert \mathcal{H} .

Ο τελεστής αυτός δέχεται σύνολο ιδιοδιανυσμάτων $\{|a_i\rangle\}$ που σχηματίζουν μια ορθοκανονική βάση και αντιστοιχούν πραγματικές ιδιοτιμές $\{a_i\}$. Αντίστροφα κάθε τελεστής με τις παραπάνω ιδιότητες μπορεί να παριστάνει μια παρατηρήσιμη μεταβλητή.

Όλες οι ιδιότητες που απαιτεί το παραπάνω αξίωμα από ένα τελεστή παρατηρούμε ότι τις διαθέτει κάθε ερμιτιανός τελεστής. Είναι αναμενόμενο ότι στην κβαντομηχανική ο ρόλος και η παρουσία των ερμιτιανών τελεστών θα είναι έντονη και σημαντική.

Μερικά παραδείγματα κβαντικών τελεστών.

1. Τελεστής ορμής:

$$\hat{P} = -i\hbar\nabla$$

2. Τελεστής στροφορμής:

$$\hat{L} = -i\hbar r \times \nabla$$

3. Τελεστής κινητικής ενέργειας:

$$\hat{E}_k = -(\hbar^2/2m) \nabla^2$$

Συνδέθηκαν λοιπόν κάποιες μεταβλητές σε ένα κβαντικό σύστημα με τους κβαντικούς τελεστές και εκφράζονται απο αυτούς όπως φαίνεται παραπάνω. Συνεπώς η μελέτη μιας μεταβλητής ενός κβαντικού συστήματος θα μεταφέρεται στην μελέτη του τελεστή που την εκφράζει.

1.1.3 Πίνακας πυκνότητας

Έχουμε πει ότι μια κατάσταση ενός κβαντικού συστήματος εκφράζεται από μια ακτίνα (*Ray*) από την οποία προκύπτει και το καταστατικό διάνυσμα που την περιγράφει. Όμως ξέρουμε ότι ένα κβαντικό σύστημα μπορεί να βρίσκεται ταυτόχρονα σε περισσότερες από μία καταστάσεις με κάποια πιθανότητα για την κάθε μια απο αυτές. Συνεπώς το καταστατικό διάνυσμα από μόνο του δεν αρκεί για την βαθύτερη μελέτη του συστήματος. Για την περαιτέρω μελέτη παράλληλα με τα καταστατικά διανύσματα, εμφανίζεται και ο πίνακας πυκνότητας που αποτελεί ένα από τα βασικότερα μαθηματικά εργαλεία για τα κβαντικά συστήματα αφού περιέχει και την πληροφορία για την πιθανότητα που έχει το σύστημα να βρίσκεται σε κάθε δυνατή κατάσταση.

Έστω ένα κβαντικό σύστημα που περιγράφεται από ένα χώρο Hilbert \mathcal{H} και που μπορεί να βρίσκεται σε ένα σύνολο καταστάσεων ψ_i με πιθανότητα p_i για την αντίστοιχη κατάσταση

Ορίζουμε πίνακα πυκνότητας ρ του κβαντικού συστήματος που αναφέραμε παραπάνω με την εξίσωση που ακολουθεί

$$\rho = \sum_i p_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i| \quad (1.2)$$

Παρατηρούμε ότι μεταφέραμε την μελέτη μας απο τα καταστατικά διανύσματα στον πίνακα πυκνότητας και συνεπώς στο χώρο των τελεστών για τους οποίους το μαθηματικό υπόβαθρο είναι πολύ καλύτερο.

Όμως το καταστατικό διάνυσμα $|\psi_i\rangle$ μπορεί να πάρει την παρακάτω μορφή

$$|\psi_i\rangle = \sum_i a_i |\phi_i\rangle \quad (1.3)$$

όπου $\{|\phi_i\rangle\}_{i=1}^n$ είναι μια ορθοκανονική βάση του χώρου \mathcal{H} και n η διάστασή του. Τότε ο πίνακας πυκνότητας μπορεί να πάρει την παρακάτω μορφή

$$\rho = \begin{bmatrix} |a_1|^2 & a_1 \bar{a}_2 & a_1 \bar{a}_3 & \dots & \dots \\ a_2 \bar{a}_1 & |a_2|^2 & a_2 \bar{a}_3 & \dots & \dots \\ a_3 \bar{a}_1 & a_3 \bar{a}_2 & |a_3|^2 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

Θεώρημα : Ένας τελεστής ρ είναι τελεστής¹ πυκνότητας ενός συνόλου καταστάσεων $\{p_i, |\psi_i\rangle\}$ αν και μόνο αν ικανοποιεί τις παρακάτω ιδιότητες :

1. Είναι ερμητιανός, δηλαδή $\rho = \rho^\dagger$
2. Είναι θετικός, δηλαδή για οποιοδήποτε διάνυσμα $|\psi\rangle$ θα ισχύει $\langle \psi | \rho | \psi \rangle \geq 0$
3. $Tr\rho = 1$

Παρατηρήσεις :

- Για μια καθαρή κατάσταση $|\psi\rangle$ ενός κβαντικού συστήματος ο πίνακας πυκνότητας θα είναι

$$\rho = |\psi\rangle \langle \psi|$$

- Για τις καθαρές καταστάσεις ισχύει ότι $\rho^2 = \rho$ δηλαδή ο πίνακας πυκνότητας είναι προβολικός² τελεστής. Αυτό μπορεί να αποτελέσει και ένα κριτήριο για τις καθαρές καταστάσεις αφού για τις υπόλοιπες γνωρίζουμε ότι $\rho^2 \neq \rho$

1.2 Κβαντική πληροφορία.

Ας πούμε αρχικά λίγα λόγια για την κλασσική πληροφορία ώστε να κατανοήσουμε καλύτερα στην συνέχεια τις διαφορές και τα αίτια που κάνουν την κβαντική πληροφορία τόσο σημαντική και αντικείμενο μελέτης για πολλούς ερευνητές.

¹Οι όροι τελεστής πυκνότητας και πίνακας πυκνότητας είναι ισοδύναμοι.

²Αναμενόμενο αφού έχουμε δείξει ότι οι προβολικοί τελεστές έχουν ιδιοτιμές 0 και 1 άρα πράγματι το σύστημα θα βρίσκεται στην κατάσταση $|\psi\rangle$ με πιθανότητα ένα.

Στην κλασσική πληροφορία έχουμε το κλασσικό bit που μπορεί να πάρει αποκλειστικά και μόνο δυο τιμές $\{0, 1\}$. Το bit αποτελεί την αδιαίρετη μονάδα κλασσικής ψηφιακής πληροφορίας και είναι μια καθαρά μαθηματική έννοια η οποία γίνεται φορέας της κλασσικής πληροφορίας. Η προσομοίωση αυτή της πληροφορίας με το μαθηματικό μοντέλο του bit δηλαδή το $\{0, 1\}$ μας δίνει την δυνατότητα να επεξεργαστούμε να αποθηκεύσουμε και τελικά να διαδώσουμε πληροφορία αφού πλέον έχει μετατραπεί σε $\{0, 1\}$.

1.2.1 Κβαντικά bits (qubits)

Να περάσουμε τώρα στο χώρο της κβαντικής πληροφορίας. Θα ξεκινήσουμε με το πιο απλό μοντέλο κβαντικών συστημάτων συνεπώς το πιο απλό κβαντικό σύστημα. Η επέκταση σε πολύπλοκα κβαντικά συστήματα θα γίνει στην συνέχεια της παραγράφου. Ένα τέτοιο σύστημα είναι εκείνο που περιγράφεται από ένα χώρο Hilbert \mathcal{H} με διάσταση 2. Υποθέτουμε ότι μια ορθοκανονική βάση του χώρου \mathcal{H} είναι η μοναδιαία βάση. Συνεπώς κάθε διάνυσμα του χώρου \mathcal{H} θα γράφεται σαν γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων βάσης $|0\rangle$ και $|1\rangle$ όπως φαίνεται παρακάτω

$$|\Psi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle \quad (1.4)$$

όπου $a, b \in \mathbb{C}$ και πρέπει να ικανοποιούν την παρακάτω εξίσωση

$$\|a\|^2 + \|b\|^2 = 1 \quad (1.5)$$

έτσι ώστε το διάνυσμα $|\Psi\rangle$ να είναι κανονικοποιημένο και να περιγράφει μια κβαντική κατάσταση, να είναι ένα καταστατικό διάνυσμα [1].

Στο σημείο αυτό πρέπει να τονίσουμε ότι η κβαντική πληροφορία εκφράζεται από τις κβαντικές καταστάσεις και συνεπώς από τα καταστατικά διανύσματα. Το παραπάνω καταστατικό διάνυσμα $|\Psi\rangle$ του διδιάστατου κβαντικού συστήματος αποτελεί ένα μαθηματικό μέσο για την έκφραση της πληροφορίας.

Το παραπάνω μοντέλο του διδιάστατου συστήματος που περιγράψαμε είναι γνωστό σαν Quantum bit ή qubit.

Ορισμός: Ένα κβαντικό bit ή qubit είναι ένα κανονικοποιημένο διάνυσμα στο διδιάστατο χώρο \mathcal{H} . Η κανονικοποίηση εκφράζεται από την σχέση (1.5)

Στο σημείο αυτό γίνεται φανερό η σημαντική διαφορά ανάμεσα στο κλασσικό bit και το κβαντικό qubit. Το κλασσικό bit μπορεί να πάρει αποκλειστικά και μόνο τις τιμές $\{0, 1\}$ ενώ στην απέναντι όχθη το qubit μπορεί να πάρει τις τιμές όλων των ενδιάμεσων καταστάσεων. Αν μιλήσουμε λίγο πιο αφηρημένα

θα λέγαμε ότι μπορεί ταυτόχρονα να βρίσκεται στις καταστάσεις $|0\rangle$ και $|1\rangle$. Αυτό στην γλώσσα των υπολογιστών ονομάζεται παραλληλία και αποτελεί σημαντικό πλεονέκτημα για την ταχύτητα που μπορούν να γίνουν οι πράξεις σε ένα κβαντικό υπολογιστή.

Ερμηνεία των a και b

Ποια η σημασία των a και b που παρουσιάζονται στον τύπο (1.4). Είπαμε ότι το διάνυσμα $|\Psi\rangle$ μπορεί να πάρει οποιαδήποτε από τις άπειρες τιμές ανάμεσα στο $|0\rangle$ και το $|1\rangle$. Ο όρος ανάμεσα είναι αφηρημένος αφού δεν μας λέει τίποτα συγκεκριμένο για το $|\Psi\rangle$ απλά και μόνο για τις δυνατές τιμές που μπορεί να πάρει. Τίθεται το ερώτημα το πόσο συμμετέχει το κάθε ένα από τα διανύσματα βάσης $|0\rangle$ και $|1\rangle$ για την παραγωγή του $|\Psi\rangle$. Αυτή η πληροφορία πηγάζει από τα a και b . Ειδικότερα το $\|a\|^2$ μας πληροφορεί για το πόσο μετέχει το διάνυσμα $|0\rangle$ και το $\|b\|^2$ για το πόσο το διάνυσμα $|1\rangle$ στην παραγωγή του $|\Psi\rangle$. Απο την σχέση (1.5) φαίνεται ότι τα μέτρα των a και b στο τετράγωνο ικανοποιούν τις προϋποθέσεις για να εκφράζουν πιθανότητα. Έτσι εκφράζουν την πιθανότητα συμμετοχής των διανυσμάτων βάσης στην κατασκευή του $|\psi\rangle$. Καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι το $\|a\|^2$ είναι η πιθανότητα το σύστημα να βρίσκεται στην κατάσταση $|0\rangle$ και το $\|b\|^2$ η πιθανότητα το σύστημα να βρίσκεται στην κατάσταση $|1\rangle$.

1.2.2 Γεωμετρική ερμηνεία του qubit

Από τον ορισμό του qubit περνάμε αμέσως από ένα φυσικό σύστημα σε μια αφηρημένη μαθηματική οντότητα. Αυτό μας δίνει την δυνατότητα να μελετήσουμε διάφορες μαθηματικές έννοιες της οντότητας που θα μας βοηθήσουν να κατανοήσουμε καλύτερα τον όλο φορμαλισμό της κβαντικής θεωρίας. Μια τέτοια έννοια είναι αυτή της γεωμετρίας του qubit.

Η εξίσωση (1.4) και λόγω της (1.5) μπορεί να πάρει την παρακάτω μορφή

$$|\Psi\rangle = e^{i\gamma} \left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) |0\rangle + e^{i\phi} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) |1\rangle \right) \quad (1.6)$$

όπου $\theta, \phi, \gamma \in \mathbb{R}$.

Ο παράγοντας $e^{i\gamma}$ στην παραπάνω σχέση το μόνο που κάνει είναι να περιστρέφει το καταστατικό διάνυσμα $|\Psi\rangle$ χωρίς να μεταβάλει κάτι στην πληροφορία που περιέχει. Έτσι η παραπάνω εξίσωση μπορεί να πάρει την μορφή

$$|\Psi\rangle = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) |0\rangle + e^{i\phi} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) |1\rangle \quad (1.7)$$

Δεχόμαστε ότι οι σχέσεις (1.6) και (1.7) είναι ισοδύναμες και στην συνέχεια θα αναφερόμαστε με την σχέση (1.7).

Αν θεωρήσουμε τα θ και φ να είναι σφαιρικές συντεταγμένες τότε το διάνυσμα $|\Psi\rangle$ θα βρίσκεται πάνω στην μοναδιαία σφαίρα. Όμως το $|\Psi\rangle$ είναι ένα qubit συνεπώς τα qubits βρίσκονται πάνω στην μοναδιαία σφαίρα.

1.2.3 Πολλαπλά qubits

Είδαμε παραπάνω ότι για την περιγραφή ενός qubit χρειάστηκε ένας χώρος Hilbert \mathcal{H} . Αρκεί αυτός ο χώρος για την περιγραφή ενός διπλού τριπλού κτλ qubit. Η απάντηση είναι όχι. Για την περιγραφή ενός διπλού qubit χρειαζόμαστε ένα χώρο Hilbert \mathcal{H} με διάσταση δυο και το τανυστικό γινόμενο διανυσμάτων που συμβολίζεται με \otimes . Το αποτέλεσμα του τανυστικού γινομένου είναι να πολλαπλασιάζονται οι διαστάσεις των υποχώρων που παράγουν τα qubits. Έτσι τα διπλά qubits θα περιγράφονται από ένα χώρο διάστασης 4.

Έστω $|\chi\rangle$ και $|\psi\rangle$ τα δυο qubits με την παρακάτω ανάλυση

$$|\chi\rangle = a_1 |0\rangle + b_1 |1\rangle \quad (1.8)$$

$$|\psi\rangle = a_2 |0\rangle + b_2 |1\rangle \quad (1.9)$$

τότε το τανυστικό γινόμενο των $|\chi\rangle$ και $|\psi\rangle$ θα είναι

$$|\chi\rangle \otimes |\psi\rangle \equiv |\chi\psi\rangle \quad (1.10)$$

η αν το δούμε λίγο πιο αναλυτικά

$$|\chi\rangle \otimes |\psi\rangle = \begin{bmatrix} a_1 a_2 \\ a_1 b_2 \\ b_1 a_2 \\ b_1 b_2 \end{bmatrix} \quad (1.11)$$

όπου για τα a_1, a_2, b_1, b_2 πρέπει να ισχύει επόμενη σχέση

$$\|a_1 a_2\|^2 + \|a_1 b_2\|^2 + \|b_1 a_2\|^2 + \|b_1 b_2\|^2 = 1 \quad (1.12)$$

αφού και το $|\chi\rangle \otimes |\psi\rangle$ είναι ένα καταστατικό διάνυσμα.

Έστω $\mathcal{H}_{\chi\psi}$ ο χώρος που ανήκουν τα διπλά qubits και \mathcal{H}_χ και \mathcal{H}_ψ οι χώροι των $|\chi\rangle$ και $|\psi\rangle$ αντίστοιχα με διάσταση 2. Τότε ο χώρος $\mathcal{H}_{\chi\psi}$ θα παράγεται από το παρακάτω τανυστικό γινόμενο

$$\mathcal{H}_{\chi\psi} \equiv \mathcal{H}_\chi \otimes \mathcal{H}_\psi \quad (1.13)$$

Συνεπώς η βάση του χώρου που φιλοξενεί τα διπλά qubits παράγεται από τα διανύσματα που προκύπτουν από το τανυστικό γινόμενο των διανυσμάτων βάσης των δυο διδιάστατων χώρων.

Άρα για τα διπλά qubits θα έχω την παρακάτω βάση

$$\{|0\rangle \otimes |0\rangle, |0\rangle \otimes |1\rangle, |1\rangle \otimes |0\rangle, |1\rangle \otimes |1\rangle\} \quad (1.14)$$

και σε ποιο απλή μορφή θα έχω

$$\{|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle\} \quad (1.15)$$

Οι μορφές (1.14) και (1.15) για τα qubits είναι ισοδύναμες. Για λόγους απλότητας στην συνέχεια θα χρησιμοποιούμε την (1.15).

Με ανάλογο τρόπο μπορούμε να μιλήσουμε για την βάση 'τριπλών qubits' τριών qubit. Η βάση θα είναι η εξής

$$\{|000\rangle, |001\rangle, |010\rangle, |011\rangle, |100\rangle, |101\rangle, |110\rangle, |111\rangle\} \quad (1.16)$$

Γενικότερα τα n qubits θα ανήκουν σε ένα χώρο Hilbert με διάσταση 2^n . Η βάση του χώρου αυτού θα έχει 2^n διανύσματα. Η εκθετική αυτή αύξηση της διάστασης του χώρου Hilbert και κατά συνέπεια και η ίδια τάξης αύξηση του αριθμού των qubits αποτελεί σημαντική προϋπόθεση για την εκθετική αύξηση της ταχύτητας των υπολογισμών σε ένα κβαντικό υπολογιστή [2].

Εντροπία

Η εντροπία είναι μια βασική έννοια με πολύ σημαντικό ρόλο στην κβαντική θεωρία πληροφορίας. Το μέγεθος αυτό μετράει πόση είναι η αβεβαιότητα που περικλείει ένα καταστατικό διάνυσμα ενός φυσικού συστήματος.

1.2.4 Εντροπία Shannon

Σημαντικό μαθηματικό εργαλείο της κλασσικής θεωρίας πληροφορίας είναι η εντροπία Shannon. Ας δούμε τι ακριβώς εκφράζει και γιατί είναι τόσο σημαντική για την θεωρία πληροφορίας. Υποθέτουμε ότι ξέρουμε την τιμή μιας τυχαίας μεταβλητής X [3]. Η εντροπία Shannon για την μεταβλητή X εκφράζει πόση πληροφορία κερδίζουμε ή χάνουμε κατά μέσο όρο όταν εμείς ξέρουμε την τιμή της X . Με άλλα λόγια η εντροπία Shannon για την X μετράει το ποσό της αβεβαιότητας για το καταστατικό διάνυσμα που εκφράζει την X χωρίς εμείς να ξέρουμε την τιμή της X .

Έστω n οι διαφορετικές τιμές που μπορεί να πάρει η X με κάποιες αντίστοιχες πιθανότητες p_n . Τότε η εντροπία της τυχαίας μεταβλητής X καθορίζεται αν

λάβουμε υπ όψιν τις πιθανότητες των διαφορετικών δυνατών τιμών της μεταβλητής.

Έστω $\{p_1, p_2 \dots p_n\}$ η κατανομή για την X . Η εντροπία Shannon εκφράζεται συναρτήσει της παραπάνω κατανομής ως εξής

$$S(X) = - \sum_{i=1}^n p_i \log p_i \quad (1.17)$$

Παρατηρήσεις

- Τα p_i εκφράζουν πιθανότητες άρα είναι μικρότερα της μονάδας συνεπώς το $\log p_i < 0$. Συμπεραίνουμε ότι η εντροπία είναι πάντα μεγαλύτερη του μηδέν.

$$S(X) = - \sum_{i=1}^n p_i \log p_i > 0 \quad (1.18)$$

- Τι γίνεται στην περίπτωση που κάποιο από τα p_i είναι 0.

$$\lim_{x \rightarrow 0} (x \log x) = 0$$

Συμφωνούμε λοιπόν ότι $0 \log 0 = 0$

1.2.5 Εντροπία Von Neumann

Είδαμε παραπάνω ότι η εντροπία Shannon σχετίζεται με την κλασσική θεωρία πληροφορίας και εκφράζεται μέσω μιας κλασσικής πιθανοθεωρητικής κατανομής. Η κατάσταση ενός κβαντικού συστήματος περιγράφεται από τα καταστατικά διανύσματα και κατ επέκταση από τον πίνακα πυκνότητας όπως έχουμε αναφέρει αναλυτικά σε προηγούμενη παράγραφο. Τα διαγώνια στοιχεία του πίνακα πυκνότητας εκφράζουν μια κατανομή. Σε αναλογία με τα κλασσικά συστήματα και την εντροπία Shannon για τα κβαντικά συστήματα χρησιμοποιούμε την εντροπία Von Neumann που εκφράζεται συναρτήσει του πίνακα πυκνότητας.

Έστω ρ πίνακας πυκνότητας. Η εντροπία Von Neumann [4] δίνεται από τον παρακάτω τύπο

$$S(\rho) = -\text{Tr}(\rho \log \rho) \quad (1.19)$$

Γνωρίζουμε επίσης ότι και οι ιδιοτιμές του πίνακα πυκνότητας εκφράζουν την ίδια κατανομή και αυτό γίνεται φανερό με την διαγωνοποίηση του πίνακα πυκνότητας ρ

$$\rho = \sum_{i=1}^n \lambda_i |i\rangle \langle i| \quad (1.20)$$

Άρα η εντροπία Von Neumann μπορεί να γραφεί σε συνάρτηση με τις ιδιοτιμές του ρ με την παρακάτω μορφή

$$S(\rho) = - \sum_{i=1}^n (\lambda_i \log \lambda_i) \quad (1.21)$$

η οποία είναι και η πιο πρακτική υπολογιστικά.

Παρατηρήσεις

- Παρατηρούμε ότι όταν όλα τα λ_i είναι 0 εκτός από ένα και μοναδικό τότε αυτό θα είναι 1 και θα ισχύει $S(\rho) = 0$. Αυτό συμβαίνει στην περίπτωση που

$$\rho^2 = \rho$$

Σε αυτή την περίπτωση έχουμε βεβαιότητα.

- Η εντροπία Von Neumann μετράει την αβεβαιότητα με την οποία βρίσκεται το σύστημα σε κάποια από τις δυνατές καταστάσεις.
- Η εντροπία είναι καλά ορισμένη ακόμα και για συστήματα με άπειρες καταστάσεις και ως είναι δύσκολη η διαγωνοποίηση του πίνακα ρ .

Ιδιότητες της εντροπίας

1. Αναλλοίωτο κάτω από μοναδιακούς (unitary) μετασχηματισμούς.
Έστω $\rho' = U\rho U^\dagger$ τότε ισχύει

$$S(\rho) = S(U\rho U^\dagger) \quad (1.22)$$

2. Προσθετικότητα

Η συνολική εντροπία n συστημάτων ανεξάρτητων είναι ίση με το άθροισμα των εντροπιών όλων των συστημάτων. Έστω n συστήματα ανεξάρτητα με πίνακες πυκνότητας $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n$ τότε

$$S(\rho_1 \otimes \rho_2 \dots \otimes \rho_n) = S(\rho_1) + S(\rho_2) + \dots + S(\rho_n) \quad (1.23)$$

Η ιδιότητα αυτή δεν ισχύει όταν τα συστήματα δεν είναι ανεξάρτητα.

3. Υποπροσθετικότητα

Έστω ένα διμερές σύστημα και ρ ο πίνακας πυκνότητας. Υποθέτουμε επίσης ότι ρ_1 και ρ_2 οι πίνακες πυκνότητας των επιμέρους συστημάτων. Αν ο πίνακας ρ δεν μπορεί να αναλυθεί στους πίνακες ρ_1 και ρ_2 με την βοήθεια του τανυστικού γινομένου τότε έχουμε την παρακάτω σχέση εντροπιών για το συνολικό σύστημα και τα επιμέρους συστήματα.

$$S(\rho) \leq S(\rho_1) + S(\rho_2) \quad (1.24)$$

Από την παραπάνω σχέση φαίνεται ότι κατά την μετάβαση από το συνολικό σύστημα στα επιμέρους συστήματα έχουμε απώλεια πληροφορίας οπότε και αύξηση της εντροπίας.

4. Έστω ένα κβαντικό σύστημα που αποτελείτε από n υποσυστήματα. Ας είναι $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n$ οι πίνακες πυκνότητας. Τότε ισχύει

$$S\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \rho_i\right) \geq \sum_{i=1}^n \lambda_i S(\rho_i) \quad (1.25)$$

όπου $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$ και $\lambda_i \geq 0$. Ο τύπος αυτός μας λέει ότι με την συγχώνευση των n συστημάτων σε ένα έχουμε απώλεια πληροφορίας και συνεπώς αύξηση της εντροπίας.

1.3 Κβαντικός Εναγκαλισμός

1.3.1 Διμερή κβαντικά συστήματα.

Είδαμε στην παράγραφο (1.1) ότι ένα κβαντικό σύστημα περιγράφεται από ένα χώρο Hilbert \mathcal{H} και κάθε κατάσταση του από ένα καταστατικό διάνυσμα που ανήκει στον \mathcal{H} . Τι γίνεται στην περίπτωση που έχουμε ένα διμερές σύστημα δηλαδή ένα σύστημα που αποτελείται από δυο επιμέρους συστήματα [5]. Το κάθε υποσύστημα θα περιγράφεται από τον δικό του χώρο Hilbert και τα δικά του καταστατικά διανύσματα. Ας είναι \mathcal{H} ο χώρος για το διμερές σύστημα με διάσταση d και \mathcal{H}_α και \mathcal{H}_β οι χώροι για τα υποσυστήματα με διαστάσεις d_α και d_β αντίστοιχα.

Ο χώρος \mathcal{H} εκφράζεται συναρτήση των \mathcal{H}_α και \mathcal{H}_β και με την βοήθεια του τανυστικού γινομένου με τον παρακάτω τύπο

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_\alpha \otimes \mathcal{H}_\beta \quad (1.26)$$

με $d = d_\alpha d_\beta$

Από μαθηματικής πλευράς έγινε μια ανάλυση του χώρου \mathcal{H} στους χώρους των υποσυστημάτων. Τίθεται το ερώτημα αν μπορεί να γίνει κάτι ανάλογο και για τα καταστατικά διανύσματα του διμερούς συστήματος. Αν δηλαδή ένα διάνυσμα του \mathcal{H} μπορεί να γραφεί σαν τανυστικό γινόμενο δυο διανυσμάτων που ανήκουν στον \mathcal{H}_α και \mathcal{H}_β αντίστοιχα. Η απάντηση είναι για κάποια διανύσματα ναι ενώ για κάποια άλλα όχι.

Για να μπορέσουμε να αποφανθούμε σε ποιες περιπτώσεις έχουμε θετική και σε ποιες αρνητική απάντηση θα μιλήσουμε παρακάτω για την έννοια της παραγοντοποιησιμότητας των χώρων και λίγο αργότερα για την παραγοντοποιησιμότητα factorizability των διανυσμάτων τους.

1.3.2 Παραγοντοποιησιμότητα των χώρων Hilbert

Θα επικεντρώσουμε την μελέτη μας σε χώρους Hilbert με πεπερασμένη διάσταση. Στην περίπτωση αυτή ένας χώρος \mathcal{H} με διάσταση d και $d \ll \infty$ θα είναι ισόμορφος με τον \mathbb{S}^d .

Έστω χώρος \mathcal{H} με πεπερασμένη διάσταση d . Αν ο \mathcal{H} μπορεί να εκφραστεί από τον παρακάτω τύπο

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_1^{d_1} \otimes \mathcal{H}_2^{d_2} \quad (1.27)$$

, όπου \mathcal{H}_1 και \mathcal{H}_2 είναι χώροι Hilbert με διαστάσεις d_1 και d_2 αντίστοιχα, τότε ο \mathcal{H} ονομάζεται παραγοντοποιήσιμος. Η διάσταση του \mathcal{H} θα είναι $d = d_1 d_2$.

Τίθεται το ερώτημα αν οι χώροι \mathcal{H}_1 και \mathcal{H}_2 με όμοιο τρόπο μπορούν να γραφούν σαν τανυστικό γινόμενο κάποιων άλλων χώρων Hilbert και αν ναι μέχρι που μπορεί να φτάσει αυτή η ανάλυση. Η απάντηση είναι θετική και η μαθηματική έκφραση που την δίνει φαίνεται παρακάτω.

Έστω χώρος Hilbert \mathcal{H} με διάσταση d και χώροι \mathcal{H}_i με διαστάσεις αντίστοιχα d_i .

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_1^{d_1} \otimes \mathcal{H}_2^{d_2} \otimes \dots \otimes \mathcal{H}_n^{d_n} \quad (1.28)$$

όπου τα d_i ικανοποιούν την παρακάτω σχέση

$$d = \prod_{i=1}^n d_i \quad (1.29)$$

Ας δούμε τώρα ποια μπορεί να είναι η μέγιστη παραγοντοποίηση που μπορεί να έχει ένας χώρος Hilbert [6]. Να πούμε ότι με τον όρο μέγιστη παραγοντοποίηση εννοούμε ποιο είναι το μεγαλύτερο πλήθος των \mathcal{H}_i με την μικρότερη διάσταση d_i που μπορεί να αναλυθεί ο \mathcal{H} . Εύκολα βλέπει κανείς ότι θα έχουμε μέγιστο n όταν οι διαστάσεις d_i είναι όσο το δυνατό μικρότερες. Το μικρότερο d_i μπορεί να είναι το 2 άρα για

$$d_i = 2 \quad \forall \quad i \quad \text{με} \quad i = 1 \dots n$$

έχω μέγιστη παραγοντοποίηση και ο χώρος \mathcal{H} μπορεί να γραφεί ως εξής

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_1^2 \otimes \mathcal{H}_2^2 \otimes \dots \otimes \mathcal{H}_n^2 \quad (1.30)$$

με την προϋπόθεση ότι η διάσταση του \mathcal{H} είναι δύναμη του 2 δηλαδή $d = 2^n$. Οι χώροι \mathcal{H}_i αφού έχουν διάσταση 2 αποτελούν χώρους που ανήκουν τα qubits. Ένα κβαντικό σύστημα λοιπών που περιγράφεται από ένα χώρο \mathcal{H} με διάσταση 2^n μπορεί να αναλυθεί σε n χώρους διάστασης 2 δηλαδή σε n qubits χώρους. Δεν είναι όμως αυτή η μόνη παραγοντοποίηση που μπορεί να έχει ο χώρος \mathcal{H} .

Ας δούμε την παραγοντοποίηση σε διμερή μορφή ενός χώρου \mathcal{H} με διάσταση 2^n . Ο \mathcal{H} θα περιγράφεται από το ταυσιτικό γινόμενο δύο χώρων \mathcal{H}_a και \mathcal{H}_b με διαστάσεις 2^k και 2^{n-k} αντίστοιχα. Άρα

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_a^{2^k} \otimes \mathcal{H}_b^{2^{n-k}} \quad (1.31)$$

Καθένας από τους \mathcal{H}_a και \mathcal{H}_b μπορεί να παραγοντοποιηθεί σε k και σε $n - k$ αντίστοιχα qubits χώρους.

Για τον \mathcal{H}_a

$$\mathcal{H}_a^{2^k} = \mathcal{H}_1^2 \otimes \mathcal{H}_2^2 \otimes \mathcal{H}_3^2 \otimes \dots \otimes \mathcal{H}_k^2 \quad (1.32)$$

και για τον \mathcal{H}_b

$$\mathcal{H}_b^{2^{n-k}} = \mathcal{H}_{k+1}^2 \otimes \mathcal{H}_{k+2}^2 \otimes \mathcal{H}_{k+3}^2 \otimes \dots \otimes \mathcal{H}_n^2 \quad (1.33)$$

Στην γενική περίπτωση ενός χώρου Hilbert με διάσταση d και όχι απαραίτητα με $d = 2^n$ ο τύπος που εκφράζει την μέγιστη παραγοντοποίηση φαίνεται παρακάτω

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_1^{d_1} \otimes \mathcal{H}_2^{d_2} \otimes \mathcal{H}_3^{d_3} \dots \otimes \mathcal{H}_n^{d_n} \quad (1.34)$$

με τα d_i να είναι πρώτοι και $d = \prod_{i=1}^n d_i$

1.3.3 Παραγοντοποιησιμότητα διανυσμάτων

Είδαμε παραπάνω ότι ένας χώρος Hilbert μπορεί να παραγοντοποιηθεί σε δύο η και σε περισσότερους χώρους Hilbert. Θα δούμε αν αυτό συμβαίνει και με τα διανύσματα που περιέχει ένας χώρος \mathcal{H} , αν δηλαδή και αυτά με την σειρά τους παραγοντοποιούνται σε διανύσματα που ανήκουν στους χώρους που προκύπτουν από την παραγοντοποίηση του \mathcal{H} .

Έστω χώροι Hilbert $\mathcal{H}, \mathcal{H}_a, \mathcal{H}_b$ με διαστάσεις d, d_a και d_b αντίστοιχα. Ο \mathcal{H} προκύπτει όπως φαίνετε παρακάτω.

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_a \otimes \mathcal{H}_b \quad (1.35)$$

με $d = d_a d_b$.

Εστω

$$\{|m\rangle\}_{m=1}^{d_a} \quad \{|n\rangle\}_{n=1}^{d_b} \quad \{|k\rangle\}_{k=1}^d$$

βάσεις για τους χώρους \mathcal{H}_a , \mathcal{H}_b και \mathcal{H} αντίστοιχα. Αν ένα διάνυσμα $|a\rangle$ με $|a\rangle \in \mathcal{H}$ μπορεί να προκύψει από το ταυστικό γινόμενο των $|a_1\rangle$ και $|a_2\rangle$ με $|a_1\rangle \in \mathcal{H}_a$ και $|a_2\rangle \in \mathcal{H}_b$ όπως φαίνεται παρακάτω

$$|a\rangle = |a_1\rangle \otimes |a_2\rangle \quad (1.36)$$

τότε αυτό λέγεται παραγοντοποιήσιμο.

Δεν είναι όμως όλα τα διανύσματα του χώρου \mathcal{H} παραγοντοποιήσιμα. Υπάρχουν $|b\rangle$ στο \mathcal{H} που δεν μπορούν να προκύψουν από το ταυστικό γινόμενο δυο διανυσμάτων που ανήκουν στους επιμέρους χώρους \mathcal{H}_a και \mathcal{H}_b και ονομάζονται μη παραγοντοποιήσιμα. Τα διανύσματα αυτά εκφράζονται από την βάση $\{|k\rangle\}_{k=1}^d$. Ας δούμε τα παρακάτω παραδείγματα :

Παράδειγμα 1°

Έστω χώρος \mathcal{H} με διάσταση 4 και χώροι \mathcal{H}_a και \mathcal{H}_b με διάσταση 2. Οι βάσεις των χώρων αυτών θα είναι

$$\{|00\rangle, |11\rangle, |10\rangle, |01\rangle\} \quad \{|0\rangle, |1\rangle\} \quad \{|0\rangle, |1\rangle\}$$

Έστω το διάνυσμα $|a\rangle$ του \mathcal{H} όπως φαίνεται παρακάτω

$$|a\rangle = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

Έστω ότι το $|a\rangle$ είναι παραγοντοποιήσιμο. Τότε θα μπορεί να γραφεί με την παρακάτω μορφή

$$|a\rangle = |a_1\rangle \otimes |a_2\rangle \quad \text{με} \quad |a_1\rangle \in \mathcal{H}_a \quad \text{και} \quad |a_2\rangle \in \mathcal{H}_b$$

Ας είναι

$$|a_1\rangle = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \quad |a_2\rangle = \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} \quad |a_1\rangle \otimes |a_2\rangle = \begin{bmatrix} ac \\ ad \\ bc \\ bd \end{bmatrix}$$

Θα πρέπει

$$1. \quad ac = 1/\sqrt{2}$$

2. $ad = 0$
3. $bc = 0$
4. $bd = 1/\sqrt{2}$

Από την (1) παίρνω ότι a και c διάφορα του 0 άρα από τις (2) και (3) πρέπει b και d να είναι 0. Τότε δεν ικανοποιείται η (4) άρα το σύστημα δεν έχει λύση. Συνεπώς το $|a\rangle$ δεν είναι παραγοντοποιήσιμο.

Παράδειγμα 2°

Έστω χώρος \mathcal{H} με διάσταση 4 και χώροι \mathcal{H}_a και \mathcal{H}_b με διαστάσεις 2. Ο \mathcal{H} θα γράφεται $\mathcal{H} = \mathcal{H}_a \otimes \mathcal{H}_b$. Ας έχω τις παρακάτω βάσεις.

$$\{|k\rangle\}_{k=1}^4 \quad \{|i\rangle\}_{i=1}^2 \quad \{|j\rangle\}_{j=1}^2$$

Έστω το παρακάτω διάνυσμα $|a\rangle$ που είναι στοιχείο του χώρου \mathcal{H} . Θα δείξουμε ότι το διάνυσμα αυτό είναι παραγοντοποιήσιμο. Ας είναι

$$|a\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

Ας είναι επίσης

$$|a_1\rangle = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \quad |a_2\rangle = \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} \quad |a_1\rangle \otimes |a_2\rangle = \begin{bmatrix} ac \\ ad \\ bc \\ bd \end{bmatrix}$$

Θα πρέπει

$$|a\rangle = |a_1\rangle \otimes |a_2\rangle \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ac \\ ad \\ bc \\ bd \end{bmatrix}$$

Συνεπώς προκύπτουν οι παρακάτω εξισώσεις

1. $ac = 0$
2. $ad = 1/\sqrt{2}$
3. $bc = 0$
4. $bd = 1/\sqrt{2}$

Από (2) και (4) παίρνω ότι $a = b$ και από (1) και (3) $c = 0$. Άρα $c = 0$
 $a = b = 1/2^{1/4}$ και $d = 2^{-1/4}$. Άρα τα διανύσματα με την βοήθεια των οποίων
 παραγοντοποιήθηκε το $|a\rangle$ θα είναι

$$|a_1\rangle = \begin{bmatrix} 1/2^{1/4} \\ 1/2^{1/4} \end{bmatrix} \quad |a_2\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/2^{-1/4} \end{bmatrix}$$

Από τα δύο παραπάνω παραδείγματα έγινε σαφές ότι σε ένα χώρο Hilbert υπάρχουν διανύσματα που μπορούμε να τα χωρίσουμε σε δύο κατηγορίες σε εκείνα που παραγοντοποιούνται και αυτά που δεν μπορούν να παραγοντοποιηθούν. Τα διανύσματα της τελευταίας κατηγορίας συνηθίζεται στην βιβλιογραφία να λέγονται εναγκαλισμένα διανύσματα (Entangled vectors).

Μετά από τον διαχωρισμό αυτό εκείνο που θα μας απασχολήσει είναι το πως θα αντιλαμβανόμαστε σε ποια από τις δύο κατηγορίες ανήκει ένα δεδομένο διάνυσμα. Για να δώσουμε απάντηση στο παραπάνω ερώτημα θα αναφερθούμε αρχικά σε μια πιο συγκεκριμένη βάση του αρχικού χώρου \mathcal{H} που σχετίζεται με τις βάσεις των χώρων που παραγοντοποιείται ο \mathcal{H} .

1.3.4 Παραγοντοποιήσιμη βάση χώρου Hilbert

Με τον όρο παραγοντοποιήσιμη βάση εννοούμε την βάση που προκύπτει από το τανυστικό γινόμενο των βάσεων των επιμέρους χώρων που έχει διασπαστεί ο \mathcal{H} . Με το παράδειγμα που ακολουθεί η έννοια γίνεται περισσότερο κατανοητή. Έστω \mathcal{H} με διάσταση d , \mathcal{H}_a με διάσταση d_a και \mathcal{H}_b με διάσταση d_b .

Έστω οι παρακάτω βάσεις για τους \mathcal{H} , \mathcal{H}_a , \mathcal{H}_b

$$\{|k\rangle\}_{k=1}^d, \quad \{|i\rangle\}_{i=1}^{d_a}, \quad \{|j\rangle\}_{j=1}^{d_b}$$

Η πρώτη βάση είναι για τον χώρο \mathcal{H} όπως επίσης και η παρακάτω που προκύπτει από το τανυστικό γινόμενο των βάσεων των \mathcal{H}_a και \mathcal{H}_b .

$$\{|i\rangle \otimes |j\rangle\} \quad i = 1 \dots d_a \quad j = 1 \dots d_b$$

Η παραπάνω ονομάζεται παραγοντοποιήσιμη βάση του \mathcal{H} . Κάθε χώρος \mathcal{H} που μπορεί να γραφεί σαν γινόμενο δύο άλλων χώρων Hilbert έχει τουλάχιστον μια παραγοντοποιήσιμη βάση. Κάθε διάνυσμα $|a\rangle$ του χώρου \mathcal{H} μπορεί να γραφεί με την βοήθεια της παραπάνω βάσης ως εξής

$$|a\rangle = \sum_{i=1}^{d_a} \sum_{j=1}^{d_b} c_{ij} |i\rangle \otimes |j\rangle \quad (1.37)$$

όπου τα c_{ij} είναι εν γένει μιγαδικοί αριθμοί και αποτελούν τα στοιχεία ενός $d_a \times d_b$ πίνακα που ονομάζεται πίνακας συντελεστών.

Θεώρημα: Το διάνυσμα $|a\rangle$ είναι παραγοντοποιήσιμο πάνω στην παραγοντοποιήσιμη βάση του χώρου \mathcal{H} αν και μόνον αν ο πίνακας των συντελεστών ικανοποιεί την συνθήκη της micro-singularity³ [6].

$$c_{ij}c_{ab} = c_{ib}c_{aj} \quad (1.38)$$

για κάθε δυνατή τιμή των δεικτών.

Παρατηρήσεις

- Η παραγοντοποιησιμότητα των διανυσμάτων σχετίζεται με τον τρόπο που επιλέγουμε να παραγοντοποιήσουμε τον χώρο \mathcal{H} . Ένα διάνυσμα μπορεί να είναι παραγοντοποιήσιμο στην παραγοντοποιήσιμη βάση που προκύπτει από την διάσπαση του \mathcal{H} σε $\mathcal{H}_a^{d_a} \otimes \mathcal{H}_b^{d_b}$ και μη παραγοντοποιήσιμο για την διάσπαση $\mathcal{H}_b^{d_b} \otimes \mathcal{H}_a^{d_a}$ [7]. Αυτό γίνεται φανερό στο παρακάτω παράδειγμα:

Έστω χώρος \mathcal{H} με διάσταση 8 και χώροι \mathcal{H}_a και \mathcal{H}_b με διαστάσεις 4 και 2 αντίστοιχα. Ας δούμε αρχικά την διάσπαση του \mathcal{H} σαν ταυστικό γινόμενο των \mathcal{H}_a και \mathcal{H}_b με την συγκεκριμένη σειρά που δίνονται

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_a \otimes \mathcal{H}_b$$

και με την παρακάτω παραγοντοποιήσιμη βάση

$$\{|ij\rangle \otimes |k\rangle : i = 1 \dots 2 \quad j = 1 \dots 2 \quad k = 1 \dots 2\}$$

Σε αυτήν την βάση ένα παραγοντοποιήσιμο διάνυσμα $|\psi\rangle$ θα έχει την εξής γενική μορφή

$$|\psi\rangle = |\psi_a\rangle \otimes |\psi_b\rangle$$

όπου το $|\psi_a\rangle$ ανήκει στον χώρο \mathcal{H}_a και το $|\psi_b\rangle$ στον \mathcal{H}_b και

$$|\psi_a\rangle = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} \quad |\psi_b\rangle = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$$

η με τον συμβολισμό του Dirac

$$|\psi\rangle = (a|11\rangle_a + b|12\rangle_a + c|21\rangle_a + d|22\rangle_a) \otimes (\alpha|1\rangle_b + \beta|2\rangle_b) \quad (1.39)$$

³Θα δούμε παρακάτω ότι η συνθήκη αυτή δεν είναι τίποτα παραπάνω από την απαίτηση η ορίζουσα και οι υποορίζουσες του πίνακα των συντελεστών να είναι ίσες με 0.

Τότε ο πίνακας των συντελεστών C_{matrix} θα είναι

$$C_{matrix} = \begin{bmatrix} aa & a\beta \\ ba & b\beta \\ ca & c\beta \\ da & d\beta \end{bmatrix} \quad (1.40)$$

Για να ικανοποιείται η συνθήκη της micro-singularity [6] και συνεπώς να είναι το διάνυσμα μου παραγοντοποιήσιμο αρκεί όλες οι υποορίζουσες του πίνακα των συντελεστών C_{matrix} να είναι 0. Πράγματι

$$\begin{vmatrix} aa & a\beta \\ ba & b\beta \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{vmatrix} ca & c\beta \\ da & d\beta \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{vmatrix} aa & a\beta \\ da & d\beta \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} ba & b\beta \\ ca & c\beta \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{vmatrix} aa & a\beta \\ ca & c\beta \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{vmatrix} ba & b\beta \\ da & d\beta \end{vmatrix} = 0$$

Συνεπώς το διάνυσμα $|\psi\rangle$ είναι παραγοντοποιήσιμο .

Ας δούμε τώρα το ίδιο παράδειγμα αλλά γράφοντας το χώρο \mathcal{H} σαν $\mathcal{H}_b \otimes \mathcal{H}_a$.

Για την διάσπαση αυτή η παραγοντοποιήσιμη βάση θα είναι

$$\{|k\rangle \otimes |ij\rangle : k = 1 \dots 2 \quad i = 1 \dots 2 \quad j = 1 \dots 2\}$$

Άρα το διάνυσμα $|\psi\rangle$ θα γράφεται στην παραπάνω βάση ως εξής

$$|\psi\rangle = a\alpha |1\rangle_b \otimes |11\rangle + a\beta |1\rangle_a + \dots$$

και ο πίνακας των συντελεστών C'_{matrix} θα είναι

$$C'_{matrix} = \begin{bmatrix} aa & a\beta & ba & b\beta \\ ca & c\beta & da & d\beta \end{bmatrix} \quad (1.41)$$

Εύκολα παρατηρούμε ότι η παρακάτω υποορίζουσα δεν είναι εν γένει 0 αφού

$$\begin{vmatrix} a\beta & ba \\ c\beta & da \end{vmatrix} = a\beta da - bac\beta \neq 0$$

και συνεπώς για την διάσπαση αυτή του \mathcal{H} το διάνυσμα $|\Psi\rangle$ είναι μη παραγοντοποιήσιμο.

- Επακόλουθο των όλων παραπάνω που αναφέραμε είναι να χωρίσουμε τα καταστατικά διανύσματα ενός χώρου \mathcal{H} σε παραγοντοποιήσιμα και μη παραγοντοποιήσιμα. Αυτές οι καταστάσεις είναι ακραίες και σε ένα κβαντικό σύστημα κάποιο καταστατικό διάνυσμα μπορεί να εκφράζεται μέσω κάποιας παραμέτρου και συνεπώς να μην γνωρίζουμε άμεσα σε ποια από τις δύο 'ακραίες' κατηγορίες ανήκει.

Παράδειγμα:

Έστω χώρος \mathcal{H} με διάσταση 4 και η παραγοντοποίησή του σε δυο qubits χώρους \mathcal{H}_a και \mathcal{H}_b . Παίρνω $|\psi\rangle$ στο \mathcal{H} έτσι ώστε

$$|\psi\rangle = \cos \theta |00\rangle + \sin \theta |11\rangle$$

το $|\psi\rangle$ είναι ήδη αναπτυγμένο στην παραγοντοποιήσιμη βάση $\{|i\rangle \otimes |j\rangle\}_{i,j=1}^2$ άρα ο πίνακας συντελεστών C_{matrix} θα είναι

$$C_{matrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 \\ 0 & \sin \theta \end{bmatrix}$$

και η ορίζουσά του

$$\begin{vmatrix} \cos \theta & 0 \\ 0 & \sin \theta \end{vmatrix} = \cos \theta \sin \theta$$

Παρατηρούμε ότι η παραπάνω ορίζουσα μηδενίζεται για $\theta = 0$ και $\theta = \pi/2$. Για τις τιμές αυτές του θ το διάνυσμα $|\Psi\rangle$ είναι παραγοντοποιήσιμο σύμφωνα με το θεώρημα (1). Θα λέγαμε ότι καθώς το θ τείνει να γίνει 0 ή $\pi/2$ το $|\psi\rangle$ τείνει⁴ να γίνει παραγοντοποιήσιμο.

Έτσι γίνεται απαραίτητη η μέτρηση της παραγοντοποιησιμότητας ενός καταστατικού διανύσματος. Για την μέτρηση αυτή εισάγονται κάποια μέτρα που θα μελετήσουμε στην επόμενη παράγραφο.

1.3.5 Εναγκαλισμός - Μέτρα εναγκαλισμού

Ο εναγκαλισμός αποτελεί ένα είδος συσχέτισης των καταστάσεων των επιμέρους συστημάτων του συνολικού κβαντικού συστήματος που μελετάμε .

Ορισμός: Λέμε ότι ένα διμερές σύστημα βρίσκεται σε εναγκαλισμό όταν η κατάσταση του δεν μπορεί να περιγραφεί σαν τανυστικό γινόμενο των καταστάσεων των υποσυστημάτων του.

Για μια κατάσταση κβαντικού συστήματος που βρίσκεται σε εναγκαλισμό η πληροφορία που μεταφέρει ολόκληρο το σύστημα μπορεί ουσιαστικά να αντληθεί γνωρίζοντας μόνο την κατάσταση του ενός από τα δύο υποσυστήματα. Στην περίπτωση ενός κβαντικού συστήματος που περιγράφεται από ένα χώρο Hilbert διάστασης 4 και παραγοντοποιείται σε δύο qubits χώρους, που περιγράφουν τα υποσυστήματα η γνώση του πρώτου qubit μιας εναγκαλισμένης

⁴Η σημασία του όρου ' τείνει ' στο συγκεκριμένο σημείο δεν είναι απόλυτα κατανοητή. Στην συνέχεια του κεφαλαίου ο όρος θα γίνει κατανοητός.

κατάστασης μας πληροφορεί με βεβαιότητα για την κατάσταση του δεύτερου qubit χωρίς να επέμβουμε κάνοντας μια μέτρηση. Αξίζει να σημειώσουμε ότι η έννοια του εναγκαλισμού έχει πρωταρχικό ρόλο στην θεωρία πληροφορίας και αυτό γιατί ένα εναγκαλισμένο κβαντικό σύστημα μπορεί να μεταφέρει περισσότερη πληροφορία από τα υποσυστήματά του. Με την χρήση της ιδιότητας αυτής μπορούμε να επιτύχουμε καλύτερους ρυθμούς μετάδοσης και συνεπώς επεξεργασίας πληροφορίας.

Όπως είδαμε στο τελευταίο παράδειγμα στο καταστατικό διάνυσμα έχουμε διαβάθμιση του μέτρου⁵ της παραγοντοποιησιμότητας ανάλογα με την γωνία θ και συνεπώς του εναγκαλισμού. Παρουσιάζεται όπως φαίνετε η ανάγκη για την εισαγωγή ενός μέτρου για τον εναγκαλισμό. Όμως πριν ασχοληθούμε με αυτό να συμφωνήσουμε στο ότι θα μεταφέρουμε την μελέτη μας στον πίνακα πυκνότητας της κατάστασης και όχι στο καταστατικό διάνυσμα που δεν έχουμε αρκετό θεωρητικό υπόβαθρο. Το μέτρο αυτό πρέπει να έχει μια πολύ συγκεκριμένη ιδιότητα, να παραμένει αναλλοίωτο κάτω από μοναδιακούς (Unitary) μετασχηματισμούς. Ένας ορισμός που δίνουν οι Ranee K. Brylinski και Goong Chen φαίνεται παρακάτω

Ορισμός: Ένα μέτρο του εναγκαλισμού είναι μια συνάρτηση f με

$$f : \mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 \rightarrow \mathfrak{R} \quad (1.42)$$

η οποία είναι αναλλοίωτη κάτω από μοναδιακούς μετασχηματισμούς [7].

Μια συνάρτηση η οποία θα ικανοποιούσε τον παραπάνω ορισμό θα αποτελούσε μέτρο για τον εναγκαλισμό. Βιβλιογραφικά πολύ συχνά συναντώνται δύο τέτοιες συναρτήσεις για τις οποίες γίνεται λόγος αμέσως μετά.

1.3.6 Ιεραρχία ιχνών:

Εύκολα μπορεί να δει κανείς ότι η συνάρτηση του ίχνους

$$tr : \mathfrak{S}^{m \times m} \rightarrow \mathfrak{R} \quad (1.43)$$

είναι αναλλοίωτη [8] κάτω από μοναδιακούς (Unitary) μετασχηματισμούς δηλαδή

$$tr(A) = tr(UAU^\dagger)$$

αφού λόγο της κυκλικότητας θα έχω

$$tr(UAU^\dagger) = tr(U^\dagger UA) = tr(IA) = tr(A)$$

⁵ Δεν έχουμε ορίσει τι είναι μέτρο εναγκαλισμού όμως χρησιμοποιούμε την έννοια μέτρο αφού θα αναφερθούμε σε αυτήν διεξοδικά λίγο παρακάτω.

όπου $A, U \in \mathbb{S}^{m,m}$ και U μοναδιακός.

Έστω διμερές κβαντικό σύστημα που περιγράφεται από τους χώρους $\mathcal{H}, \mathcal{H}_a, \mathcal{H}_b$ με διαστάσεις d, d_a και d_b αντίστοιχα. Τότε μια κατάσταση $|\Psi\rangle$ θα γράφεται

$$|\Psi\rangle = \sum_{i=1}^{d_a} \sum_{j=1}^{d_b} c_{ij} |ij\rangle$$

Από τα c_{ij} φαίνεται ότι υπάρχει μια σχέση με τους πίνακες διάστασης $d_a \times d_b$. Καθορίζουμε πίνακα A με $A_{ij} = (c_{ij})_{i=1:d_a}^{j=1:d_b}$. Ο μειωμένος πίνακας πυκνότητας ρ_1 θα προκύπτει από την σχέση

$$\rho_1 = Tr_2 \rho = AA^\dagger$$

Ο πίνακας A κάτω από τοπικούς μοναδιακούς (Unitary) μετασχηματισμούς της μορφής $U \otimes V$ θα μετασχηματίζεται σε

$$A \rightarrow UAV$$

Συνεπώς ο ρ_1 θα μετασχηματίζεται σε

$$\rho_1 = (UAV) (V^\dagger A^\dagger U^\dagger) = UAA^\dagger U^\dagger$$

και το ίχνος του είναι αναλλοίωτο κάτω από τέτοιους μετασχηματισμούς.

Η συνάρτηση του ίχνους πληρεί όλες τις προϋποθέσεις για να αποτελέσει μέτρο του εναγκαλισμού. Έτσι αναπτύχθηκε μια ιεραρχία I_n [9] από ίχνη για τους πίνακες πυκνότητας με τύπο

$$I_n = Tr (\rho_1)^{n+1} \quad (1.44)$$

Οι πρώτοι που ασχολήθηκαν με την σχέση αυτή για $n = 1$ ήταν οι Linden και Popescu και στην συνέχεια γενικεύτηκε για κάθε n από τους Albeverio και Fei.

Παρατηρήσεις :

- Στην σχέση (1.44) για $n = 0$ παίρνω

$$I_0 = Tr (AA^\dagger)$$

Γνωρίζω ότι το παραπάνω ίχνος είναι ίσο με την μονάδα και αποτελεί κάποιο είδος κανονικοποίησης. Να δούμε ποια είναι η φυσική του σημασία σε ένα κβαντικό σύστημα. Έχουμε αναλύσει στην παράγραφο (1.1.3) ότι οι ιδιοτιμές του πίνακα πυκνότητας αθροίζονται στην μονάδα και αποτελούν όρους μιας κατανομής. Το ίχνος του ίδιου πίνακα ισούται με το άθροισμα των ιδιοτιμών. Με το να είναι αναλλοίωτο το I_0 δεν επεμβαίνουμε στην κατανομή.

- Στην σχέση (1.44) για $n = 1$ παίρνω

$$I_1 = \text{Tr} (AA^\dagger)^2$$

Για $\rho^2 = \rho$ δηλαδή όταν ο πίνακας πυκνότητας είναι ένας προβολικός τελεστής τότε το σύστημα βρίσκεται σε καθαρή κατάσταση και κατά συνέπεια η κατάσταση αυτή είναι μη εναγκαλισμένη. Άρα για

$$\rho^2 = \rho \Rightarrow \text{Tr} \rho^2 = \text{Tr} \rho = 1$$

έχουμε μη εναγκαλισμένες καταστάσεις ενώ για $\rho^2 \neq \rho$ έχω εναγκαλισμό.

Καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι ένα κατάλληλο μέτρο για τον εναγκαλισμό καταστάσεων είναι το ίχνος του ρ^2 που θα το δούμε να κάνει την παρουσία του και στην γραμμική εντροπία.

1.3.7 Ιεραρχία Concurrence

Η ανάγκη και συνεπώς η μελέτη για την εύρεση μέτρων εναγκαλισμού οδήγησε και σε μια άλλη ιεραρχία που βιβλιογραφικά είναι γνωστή σαν ιεραρχία Concurrence [10]. Ένας ακριβής καθορισμός της ιεραρχίας αυτής δίνεται από τους Heng Fan Keiji Matsumoto και Hiroshi Imai

θεωρούμε διμερές χβαντικό σύστημα που περιγράφεται από τους χώρους \mathcal{H} , \mathcal{H}_a και \mathcal{H}_b με διαστάσεις d^2 , $d_a = d$ και $d_b = d$ αντίστοιχα. Ένα καταστατικό διάνυσμα $|\Psi\rangle$ του χώρου \mathcal{H} θα περιγράφεται από τον παρακάτω τύπο.

$$|\Psi\rangle = \sum_{i,j=0}^{d-1} a_{ij} |ij\rangle$$

με την κανονικοποίηση $\sum_{i,j=0}^{d-1} |a_{ij}|^2 = 1$. Καθορίζουμε πίνακα A με στοιχεία τα a_{ij} δηλαδή $A_{ij} = (a_{ij})_{i=1:d_a}^{j=1:d_b}$. Τότε ο μειωμένος πίνακας πυκνότητας ρ_a θα είναι $\rho_a = \text{Tr}_b \rho = AA^\dagger$. Ας είναι λ_i οι ιδιοτιμές του πίνακα ρ_a τότε καθορίζουμε το παρακάτω σύνολο

$$\lambda_\phi = \left\{ \lambda_0^\downarrow, \lambda_1^\downarrow \dots \lambda_{d-1}^\downarrow \right\} \quad (1.45)$$

Να σημειώσουμε ότι τα στοιχεία του συνόλου λ_ϕ βρίσκονται σε μη αύξουσα διάταξη και αποτελούν τις ιδιάζουσες τιμές του πίνακα A .

Ορισμός μερικής διάταξης: Έστω $\lambda^\downarrow = \left(\lambda_i^\downarrow \right)_{i=1}^d$ τότε για δύο στοιχεία της ακολουθίας $\lambda_j^\downarrow, \lambda_k^\downarrow$ θα λέμε ότι

$$\lambda_j^\downarrow \succ \lambda_k^\downarrow \iff \lambda_{ja}^\downarrow \geq \lambda_{ka}^\downarrow \quad \forall a$$

με $j = 1 \dots d$ και $k = 1 \dots d$.

Καθορισμός της ιεραρχίας : Η ιεραρχία Concurrence καθορίζεται ως

$$C_k(\Psi) = \sum_{0 \leq i_0 < i_1 < \dots < i_k \leq (d-1)} \lambda_{i_0}^\downarrow, \lambda_{i_1}^\downarrow \dots \lambda_{i_k}^\downarrow \quad (1.46)$$

με $k = 0, 1, \dots, d-1$.

Παρατηρήσεις

- Για $k = 0$ ο τύπος (1.46) παίρνει την παρακάτω μορφή .

$$C_0(\Psi) = \sum_{i_0=0}^{d-1} \lambda_{i_0}^\downarrow$$

που δεν είναι τίποτα παραπάνω από την σχέση κανονικοποίησης του διανύσματος $|\Psi\rangle$. Αν το δούμε από την πλευρά της ιεραρχίας των ιχνών αποτελεί τον πρώτο όρο αυτής δηλαδή το άθροισμα των ιδιοτιμών λ_{i_0} είναι ίσο με την μονάδα.

- Για $k = 1$ από την σχέση (1.46) παίρνω

$$C_1(\Psi) = \sum_{i_0, i_1=0}^{d-1} \lambda_{i_0} \lambda_{i_1} \quad (1.47)$$

Παρατηρούμε ότι το τελευταίο άθροισμα έχει δύο δείκτες οι οποίοι μπορούν να παίρνουν τιμές από το 0 μέχρι και το $d-1$ αλλά με τον περιορισμό $0 \leq i_0 < i_1 \leq (d-1)$ σύμφωνα με τον τύπο (1.46). Συνεπώς μας παραπέμπει σε άθροισμα άνω τριγώνου πίνακα στον οποίο έχουμε θέσει τα i_0 σαν γραμμές και τα i_1 σαν στήλες.

Να σημειώσουμε ότι οι δύο πρώτοι όροι της ακολουθίας, C_0 και C_1 είναι αρκετοί για να καθορίσουν την διαχωρισιμότητα [10]. Όμως σε γενικότερα πλαίσια υπάρχει ένα ανοικτό πρόβλημα για μεγαλύτερους όρους της ακολουθίας Concurrence. Αυτό σχετίζεται με την πληροφορία που μπορούν να προσφέρουν στον τομέα του εναγκαλισμού και για το ποια η σχέση σύνδεσής τους με τους όρους της ακολουθίας I_n .

Γενικότερα όλοι οι όροι της ακολουθίας Concurrence είναι αναλλοίωτοι κάτω από μοναδιακούς (unitary) μετασχηματισμούς [9] και μπορούν να εκφραστούν από κάποιους όρους της ιεραρχίας I_n της σχέσης (1.44).

1.3.8 Εναγκαλισμός και εντροπία.

Επανερχόμαστε σε μια από τις ιδιότητες της εντροπίας Von Neumann που είχαμε αναφέρει στην παράγραφο (1.2.5) δηλαδή το ότι μπορεί να μετρήσει την αβεβαιότητα της κατάστασης που βρίσκεται ένα σύστημα από το σύνολο των δυνατών καταστάσεων. Να δούμε αρχικά γιατί το μέγεθος αυτό μπορεί να αποτελέσει ένα μέτρο της αβεβαιότητας και συνεπώς του εναγκαλισμού.

Ας θεωρήσουμε διμερές κβαντικό σύστημα που περιγράφεται από τους χώρους \mathcal{H} , \mathcal{H}_a και \mathcal{H}_b με διαστάσεις d , d_a και d_b αντίστοιχα. Για λόγους απλότητας και χωρίς βλάβη της γενικότητας θα θεωρήσουμε ότι $d_a = d_b = d_s$. Μια κατάσταση του συστήματος θα περιγράφεται από το παρακάτω διάνυσμα σύμφωνα με τον τύπο

$$|\psi\rangle = \sum_{i,j=1}^{d_s} c_{ij} |i\rangle \otimes |j\rangle$$

Ορίζουμε τον πίνακα A με στοιχεία $A_{ij} = (c_{ij})_{i=1:d_s}^{j=1:d_s}$. Τότε ο μειωμένος πίνακας πυκνότητας θα περιγράφεται από την επόμενη σχέση

$$\rho_a = Tr_b \rho = AA^\dagger \quad (1.48)$$

με την κανονικοποίηση $\sum_{i,j=1}^{d_s} |c_{ij}|^2 = 1$.

Είναι γνωστό ότι η εντροπία Von Neumann εκφράζεται μέσω των ιδιοτιμών του πίνακα ρ_a . Οι ιδιοτιμές ενός τελεστή είναι αναλλοίωτες κάτω από μετασχηματισμούς της μορφής $U \otimes V$ αφού τελικά οι παραπάνω δρουν σαν μετασχηματισμοί ομοιότητας. Ας το δούμε

$$A \longrightarrow UAV \quad \rho_a \longrightarrow (UAV)(UAV)^\dagger$$

και τελικά ο ρ_a μετασχηματίζεται σε έναν νέο τελεστή ας τον ονομάσουμε ρ'_a με τύπο

$$\rho'_a = (UAV)(UAV)^\dagger = UAA^\dagger U^\dagger$$

Η τελευταία σχέση μας λέει ότι οι ρ_a και ρ'_a έχουν τις ίδιες ιδιοτιμές. Συνεπώς μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού τις ιδιοτιμές του πίνακα ρ_a και σύνολο τιμών στο \mathfrak{R} δεν θα εξαρτάται από μοναδιακούς (unitary) μετασχηματισμούς άρα μπορεί να αποτελέσει μέτρο για τον εναγκαλισμό.

Μια τέτοια συνάρτηση είναι αυτή της εντροπίας Von Neumann σύμφωνα με την (1.19)

$$S = -Tr(\rho_a \log(\rho_a)) = -\sum_{i=1}^{d_s} \lambda_i \log \lambda_i$$

Παρατηρήσεις

- Εύκολα φαίνεται από την παραπάνω σχέση ότι όταν ο πίνακας πυκνότητας ρ_a είναι προβολικός τελεστής τότε η εντροπία της κατάστασης που εκφράζει θα είναι 0. Αυτό γιατί οι ιδιοτιμές του ρ_a θα είναι 0 και 1 δηλαδή

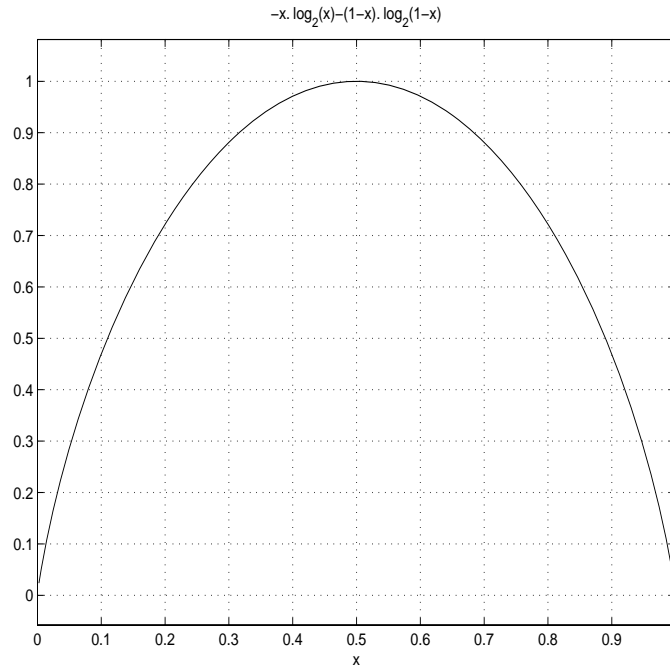
$$S = -(0 \log(0) + 1 \log(1)) = 0 + 0 = 0$$

Καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι όταν η εντροπία μιας κατάστασης είναι 0 τότε η κατάσταση είναι μη εναγκαλισμένη.

- Για διμερή κβαντικά συστήματα που περιγράφονται από χώρους \mathcal{H} διάστασης 4 και αναλύονται σε δύο qubits χώρους, για την εντροπία χρησιμοποιούμε τον λογάριθμο με βάση 2. Τότε η μέγιστη τιμή που μπορεί να πάρει η εντροπία είναι το 1 [3]. Να δούμε το γιατί. Ο ρ_a είναι πίνακας πυκνότητας και οι ιδιοτιμές του θα αθροίζονται στην μονάδα. Αν είναι x η μια ιδιοτιμή η άλλη θα είναι $1 - x$. Τότε η εντροπία θα είναι

$$S = x \log_2(x) + (1 - x) \log_2(1 - x)$$

και το γράφημά της θα είναι



Σχήμα 1.1: Εντροπία για σύστημα διάστασης 4.

Παρατηρούμε ότι για $x = 1/2$ η εντροπία παίρνει την μέγιστη τιμή που είναι το 1. Άρα για διμερή συστήματα που περιγράφονται από το ταυυστικό

γινόμενο δύο qubit χώρων μέγιστο εναγκαλισμό θα έχουν οι καταστάσεις για τις οποίες η κατανομή που εκφράζουν οι ιδιοτιμές του μειωμένου πίνακα πυκνότητας είναι μία ομοιόμορφη κατανομή.

Ας δούμε όμως στην πράξη το πως μας πληροφορεί η εντροπία για το μέτρο εναγκαλισμού μιας κβαντικής κατάστασης. Για να γίνει πιο απτή η έννοια της εντροπίας σαν μέτρο εναγκαλισμού θα μετρήσουμε την εντροπία της παρακάτω κατάστασης.

Είχαμε μελετήσει στην παράγραφο (1.3.3) την κατάσταση που περιγράφεται από το διάνυσμα

$$|a\rangle = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \quad |a\rangle \in \mathcal{H} \quad \mathcal{H} = \mathcal{H}_a \otimes \mathcal{H}_b$$

με τους χώρους \mathcal{H}_a και \mathcal{H}_b να είναι δύο qubit χώροι και καταλήξαμε στο συμπέρασμα ότι περιγράφει μια εναγκαλισμένη κατάσταση. Ας θεωρήσουμε το παρακάτω ποιο γενικό διάνυσμα $|\varphi\rangle$ που περιγράφει ένα σύνολο καταστάσεων μεταξύ αυτών και την παραπάνω εναγκαλισμένη και να δούμε πως μεταβάλλεται η εντροπία του.

$$|\varphi\rangle = \begin{bmatrix} \sin \theta \\ 0 \\ 0 \\ \cos \theta \end{bmatrix}$$

με πίνακα συντελεστών C και μειωμένο πίνακα πυκνότητας ρ_a

$$C = \begin{bmatrix} \sin \theta & 0 \\ 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \quad \rho_a = CC^\dagger = \begin{bmatrix} \sin^2 \theta & 0 \\ 0 & \cos^2 \theta \end{bmatrix}$$

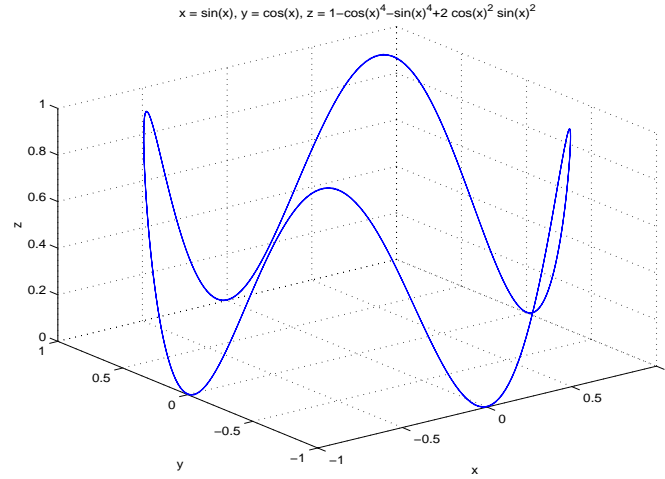
Οι ιδιοτιμές του ρ_a είναι $\sin^2 \theta$ και $\cos^2 \theta$ άρα η εντροπία θα περιγράφεται από τον τύπο

$$S = -\left(\sin^2 \theta \log_2 (\sin^2 \theta) + \cos^2 \theta \log_2 (\cos^2 \theta) \right)$$

και γραφικά συναρτήσει των $\sin \theta$ και $\cos^2 \theta$ αποτυπώνεται στο σχήμα (1.2) παρακάτω.

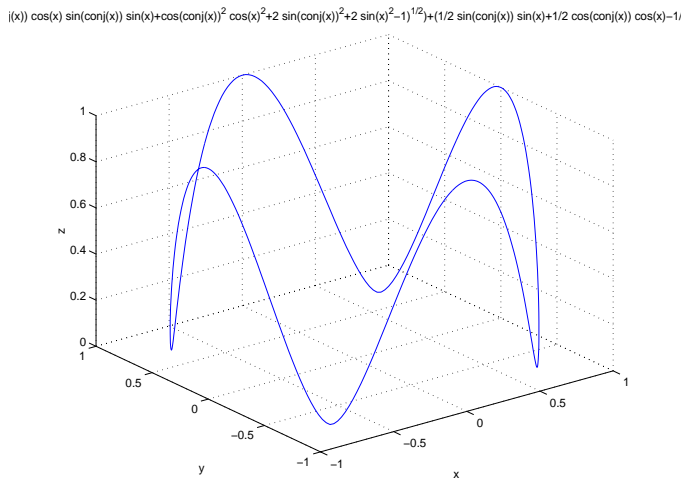
Παρατηρούμε ότι για $\theta \in \{0, \pi, \pi/2, 3\pi/4\}$ η εντροπία είναι 0 και έχουμε μη εναγκαλισμένες καταστάσεις. Για $\theta \in \{\pi/4, 3\pi/4, 5\pi/4, 7\pi/4\}$ η εντροπία είναι 1 και έχουμε μέγιστα⁶ εναγκαλισμένες καταστάσεις. Για τις υπόλοιπες

⁶Θα χρησιμοποιούμε τον όρο μέγιστος εναγκαλισμός όταν η εντροπία της κατάστασης που μελετάμε έχει τιμή 1.

Σχήμα 1.2: Μεταβολή της εντροπίας για το $|\varphi\rangle$.

τιμές του θ η εντροπία μεταβάλλεται στο διάστημα $(0, 1)$ και έχουμε καταστάσεις αν μας επιτραπεί ο όρος λίγο ή πολύ εναγκαλισμένες αν η τιμή της εντροπίας απέχει λιγότερο από το 0 ή από το 1 αντίστοιχα.

Στο σχήμα (1.3) αποτυπώνεται η μεταβολή της εντροπίας για ένα τυχαίο διάνυσμα $|b\rangle$ της μορφής $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ \sin \theta \\ \cos \theta \end{bmatrix}$ σε συνάρτηση με το $\sin \theta$ και $\cos \theta$.

Σχήμα 1.3: Μεταβολή της εντροπίας για το $|b\rangle$.

Σημειώσεις.

1. Η εντροπία σαν μέτρο εναγκαλισμού μας πληροφορεί για το πόσο εναγκαλισμένη είναι μία κατάσταση σε αντίθεση με την ιδιότητα *microsingularity* που αναφέρεται μόνο στις ακραίες καταστάσεις εναγκαλισμού και μη εναγκαλισμού.
2. Εύκολα παρατηρεί κανείς ότι αν μελετήσουμε κβαντικό σύστημα με μειωμένο πίνακα πυκνότητας διάστασης μεγαλύτερη από δύο τότε αν χρησιμοποιήσουμε για την εντροπία το λογάριθμο με βάση το δύο η μέγιστη τιμή που μπορεί να πάρει δεν θα είναι πλέον η μονάδα. Για να διατηρηθεί η εντροπία στο διάστημα $[0, 1]$ πρέπει να χρησιμοποιούμε λογάριθμο με βάση ίση με την διάσταση του μειωμένου πίνακα πυκνότητας.
3. Όμοια με τα διμερή συστήματα που περιγράφονται από δύο qubits χώρους μπορεί ναδειχτεί για κάθε n -διάστατο κβαντικό σύστημα ότι μία κατάσταση βρίσκεται σε μέγιστο εναγκαλισμό δηλαδή τιμή εντροπίας 1 όταν οι ιδιοτιμές του ρ_a συνιστούν ομοιόμορφη κατανομή.

Κεφάλαιο 2

ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

2.1 Διάσπαση SVD

2.1.1 Ορισμός της SVD.

Η διάσπαση *svd* (singular value decomposition) η αλλιώς διάσπαση ιδιζουσών τιμών είναι στενά συνδεδεμένη¹ με την παραγοντοποίηση ιδιοτιμών. Βέβαια όπως θα δούμε στην συνέχεια η διάσπαση *svd* μπορεί να γίνει για οποιονδήποτε πίνακα ανεξαρτήτως διαστάσεων και στοιχείων. Μπορούμε να μιλάμε για διάσπαση *svd* σε τετραγωνικούς είτε παραλληλόγραμμους πίνακες, σε πίνακες με πραγματικά η μιγαδικά στοιχεία. Το γεγονός ότι η διάσπαση αυτή μπορεί να εφαρμοστεί σε ένα πολύ γενικό φάσμα πινάκων την κάνει πολύ ενδιαφέρουσα και αποτέλεσε αντικείμενο μελέτης για πολλούς ερευνητές. Η εν λόγω διάσπαση είχε ανακαλυφθεί αρκετές φορές ανεξάρτητα η μία από την άλλη. Τελικά αναγνωρίστηκε με την νεώτερη διατύπωσή της από τους Eugenio Beltrami το 1873 Gamille Jordan το 1875 J.Sylvester το 1889 L.Autonne το 1913 και από τους C.Eckart και G.Young το 1936.

Ας δούμε αναλυτικά την διάσπαση αυτή ξεκινώντας από τον ορισμό όπως δίνεται από τον C. D. Meyer [11].

Για κάθε πίνακα A διαστάσεων $m \times n$ τάξης r με $(A)_{ij} \in \mathbb{S}$ υπάρχουν μοναδιαίοι (unitary) πίνακες U $m \times m$ και V $n \times n$ όπου m και n οι διαστάσεις τους αντίστοιχα και διαγώνιος πίνακας D $r \times r$ με $D = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \dots, \sigma_{r-1}, \sigma_r)$ τέτοιο ώστε

$$A = U \begin{bmatrix} D_{r \times r} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V^\dagger \quad (2.1)$$

¹Η σχέση σύνδεσης για τη διάσπαση *svd* και την παραγοντοποίηση ιδιοτιμών θα δοθεί λίγο αργότερα ώστε να έχουμε ορίσει την κάθε έννοια και να είναι ποιο απτό για τον αναγνώστη.

με $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3 \geq \dots \geq \sigma_{r-1} \geq \sigma_r$.

Τα σ_i ονομάζονται ιδιάζουσες τιμές του A και είναι μη μηδενικές. Καλό είναι να σημειώσουμε ότι αν

$$\rho = \min \{m, n\} \quad \text{και} \quad r < \rho$$

τότε ο πίνακας A έχει $\rho - r$ διαφορετικές του μηδενός ιδιάζουσες τιμές.

Η διάσπαση που περιγράψαμε παραπάνω καλείται διάσπαση ιδιάζουσών τιμών του A και τα διανύσματα στήλες του U και V καλούνται αριστερά και δεξιά ιδιάζοντα διανύσματα του A αντίστοιχα.

2.1.2 Γεωμετρική ερμηνεία.

Αξίζει να σημειώσουμε ότι οι ιδιάζουσες τιμές ενός πίνακα A μας πληροφορούν για την γεωμετρία των γραμμικών μετασχηματισμών. Αυτό γιατί οι ιδιάζουσες τιμές σ_i μας λένε για το πόσο ζούληγμα² [12] μπορεί να επιφέρει η δράση του πίνακα A στην μοναδιαία σφαίρα. Για λόγους απλότητας και χωρίς βλάβη της γενικότητας θα υποθέσουμε ότι ο πίνακας A είναι πραγματικός τετραγωνικός $n \times n$ και θα μελετήσουμε την δράση του στην υπερσφαίρα στον \mathbb{R}^n . Για την υπερσφαίρα θα χρησιμοποιήσουμε την ℓ_2 -νόρμα και ο μαθηματικός τύπος που την περιγράφει θα είναι

$$S_2 = \{x : \|x\|_2^2 = 1\} \quad (2.2)$$

και η διάσπαση ιδιάζουσών τιμών για τον A και A^{-1} θα είναι

$$A = UDV^T \quad \text{και} \quad A^{-1} = VD^{-1}U^T \quad (2.3)$$

αφού οι πίνακες U και V είναι ορθογώνιοι και ισχύει $VV^T = V^TV = I$ άρα ο αντίστροφος με τον ανάστροφο ταυτίζονται. Τότε για κάθε y με $y \in A(S_2)$ υπάρχει ένα x με $x \in S_2$ έτσι ώστε $y = Ax$. Θέτω $w = U^Ty$. Τότε

$$1 = \|x\|_2 = \|A^{-1}Ax\|_2^2 = \|A^{-1}y\|_2^2 = \|VD^{-1}U^Ty\|_2^2 = \|D^{-1}U^Ty\|_2^2 =$$

$$\|D^{-1}w\|_2^2 = \frac{w_1^2}{\sigma_1^2} + \frac{w_2^2}{\sigma_2^2} + \frac{w_3^2}{\sigma_3^2} + \dots + \frac{w_r^2}{\sigma_r^2}$$

Καταλήγουμε λοιπόν στην παρακάτω σχέση

$$\frac{w_1^2}{\sigma_1^2} + \frac{w_2^2}{\sigma_2^2} + \frac{w_3^2}{\sigma_3^2} + \dots + \frac{w_r^2}{\sigma_r^2} = 1 \quad (2.4)$$

²Με τον όρο ζούληγμα εννοούμε την συμπίεση-μεταβολή που μπορεί να επέλθει στα μήκη και την κατεύθυνση των κυρίων ημιαξόνων της υπερέλειψης.

η οποία εκφράζει ένα ελλειψοειδές με τα σ_i να είναι οι ιδιάζουσες τιμές του πίνακα A [13].

Γνωρίζουμε ότι οι ορθογώνιοι μετασχηματισμοί είναι ισομετρίες συνεπώς αφήνουν αναλλοίωτα τα μήκη. Τέτοιου είδους είναι και οι μετασχηματισμοί με τους πίνακες U και V . Η συνεισφορά τους στο μετασχηματισμό είναι η κατεύθυνση που δίνουν στους ημιάξονες του ελλειψοειδούς. Ποιο συγκεκριμένα η μοναδιαία σφαίρα πριν την δράση του πίνακα A είχε ημιάξονες στις κατευθύνσεις των διανυσμάτων βάσης του χώρου, στην περίπτωση μας του \mathbb{R}^3 δηλαδή τα $\{e_1, e_2, e_3\}$. Μετά την δράση του πίνακα A οι κατευθύνσεις των ημιαξόνων θα καθορίζονται από τις στήλες του πίνακα U που είναι τα αριστερά ιδιάζοντα διανύσματα του A , αριθμημένα έτσι ώστε να ταιριάζουν με τις αντίστοιχες ιδιάζουσες τιμές. Το ρόλο για το μήκος των ημιαξόνων έχει αναλάβει ο πίνακας D και ποιο συγκεκριμένα το μήκος του i ημιάξονα είναι ίσο με την σ_i ιδιάζουσα τιμή όπως φαίνεται και από τον τελευταίο τύπο.

Παράδειγμα.

Θα μελετήσουμε την δράση 2×2 πίνακα στον μοναδιαίο κύκλο. Υποθέτουμε ότι ο πίνακας A είναι πραγματικός και ότι και οι δύο ιδιάζουσες τιμές είναι μη μηδενικές. Ο μοναδιαίος κύκλος θα περιγράφεται από το σύνολο

$$S = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\} \equiv \{a \in \mathbb{R}^2 : \|a\|_2^2 = 1\} \quad (2.5)$$

Ας πάρουμε τον παρακάτω πίνακα A (τυχαία επιλογή)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0.5 \end{bmatrix}$$

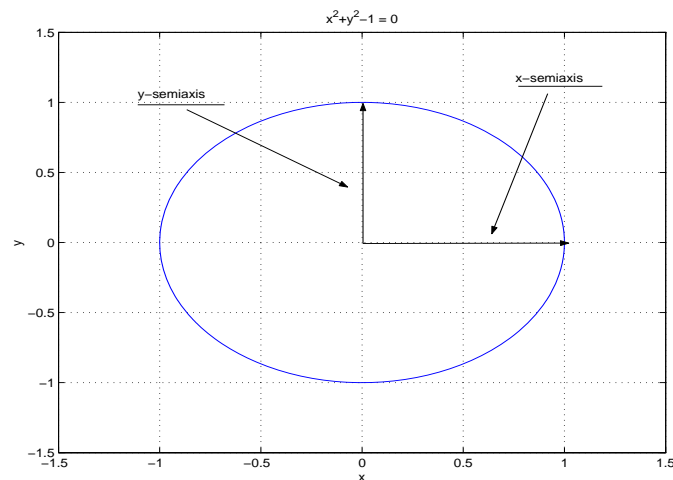
Από την διάσπαση ιδιάζουσών τιμών του A προκύπτουν οι πίνακες U , D

$$U = \begin{bmatrix} -0.5152 & -0.8571 \\ -0.8571 & 0.5152 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 3.4139 & 0 \\ 0 & 1.6111 \end{bmatrix}$$

και V

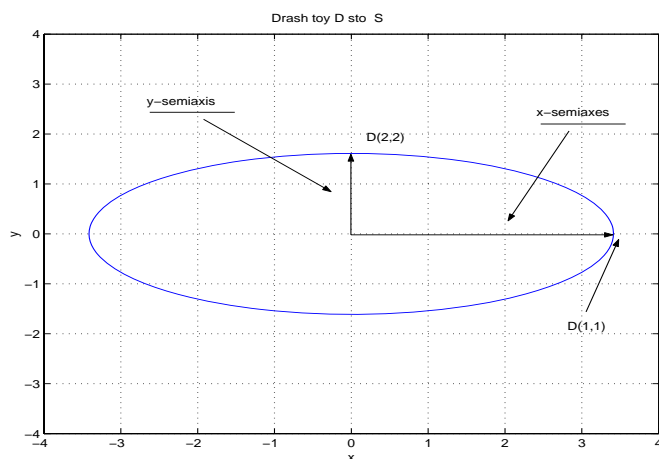
$$V = \begin{bmatrix} -0.9041 & 0.4274 \\ -0.4274 & -0.9041 \end{bmatrix}$$

Παρακάτω αποτυπώνεται στο σχήμα (2.1) ο μοναδιαίος κύκλος με ημιάξονες πάνω στους άξονες x και y με μήκη ένα. Στο σχήμα (2.2) φαίνεται η παραμόρφωση που δέχεται ο μοναδιαίος κύκλος με την δράση μόνο του πίνακα των ιδιάζουσών τιμών D . Παρατηρούμε πραγματικά ότι ο πίνακας D το μόνο που μεταβάλλει είναι τα μήκη των ημιαξόνων της έλλειψης και όχι την κατεύθυνσή τους.

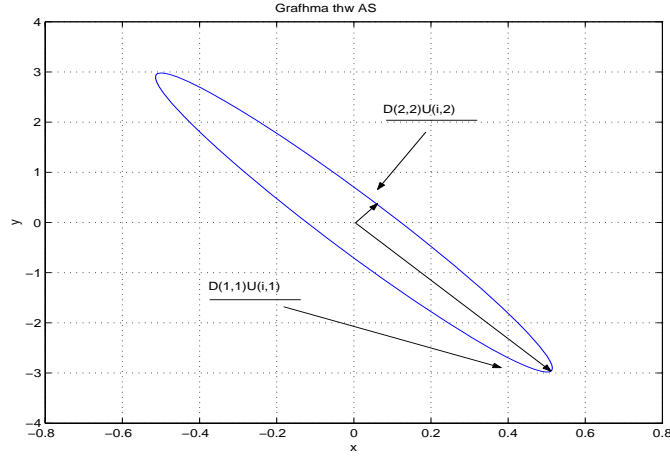


Σχήμα 2.1: Μοναδιαίος κύκλος.

Να σημειώσουμε ότι τα $D_{1,1}$ και $D_{2,2}$ που φαίνονται στο σχήμα στους άξονες x και y είναι τα στοιχεία του πίνακα D δηλαδή οι ιδιάζουσες τιμές του πίνακα A . Συνεπώς με την δράση του D ο ημιάξονας x απέκτησε μήκος ίσο με σ_1 και ο άξονας y μήκος ίσο με σ_2 .

Σχήμα 2.2: $\frac{x^2}{\sigma_1^2} + \frac{y^2}{\sigma_2^2} = 1$.

Αν παρατηρήσουμε τα παραπάνω σχήματα βλέπουμε ότι με την δράση του πίνακα D και μόνο δεν αλλάζουν οι κατευθύνσεις των ημιαξόνων. Να δούμε τι γίνεται με την δράση του πίνακα A .



Σχήμα 2.3: Ζούληγμα του μοναδιαίου κύκλου.

Πράγματι με την δράση του πίνακα A εκτός από την αλλαγή των μηκών των ημιαξόνων έχουμε και αλλαγή των διανυσμάτων βάσης. Πλέον τα διανύσματα βάσης καθορίζονται από τον πίνακα U και ποιο συγκεκριμένα κάθε στήλη του U αποτελεί και ένα διάνυσμα βάσης. Στην διεύθυνση των διανυσμάτων της βάσης βρίσκονται και οι ημιάξονες της έλλειψης.

Παρατηρήσεις

- Η πρώτη ιδιάζουσα τιμή κάθε πίνακα A είναι ίση με την δεύτερη νόρμα του πίνακα. Ας δούμε γιατί συμβαίνει αυτό.

$$\|A\|_2 = \|UDV^\dagger\|_2 = \|D\|_2 = \sigma_1 \quad (2.6)$$

Αυτό γιατί οι πίνακες U και V είναι μοναδιαίοι (unitary) άρα ξέρουμε ότι $\|U\|_2 = 1$ και $\|V^\dagger\|_2 = 1$.

- Για κάθε μη ιδιάζων³ πίνακα A η τελευταία ιδιάζουσα τιμή του, είναι ίση με το πηλίκο της μονάδας, με την δεύτερη νόρμα του αντιστρόφου του πίνακα A . Πράγματι

$$\frac{1}{\|A^{-1}\|_2} = \frac{1}{\|UDV^\dagger\|_2} = \frac{1}{\|VD^{-1}U^\dagger\|_2} = \frac{1}{\|D^{-1}\|_2} = \frac{1}{\frac{1}{\sigma_r}} = \sigma_r \quad (2.7)$$

³Η απαίτηση αυτή για μη ιδιάζων πίνακα είναι απαραίτητη για να έχω εξασφαλίσει την αντιστρεψιμότητα που χρησιμοποιώ στις νόρμες.

Για την τελευταία ισότητα χρησιμοποιώ το γεγονός ότι ο αντίστροφος διαγωνίου πίνακα είναι ένας διαγώνιος πίνακας με στοιχεία τα αντίστροφα των στοιχείων του αρχικού μας πίνακα.

- Στο παραπάνω παράδειγμα είδαμε με την δράση στον μοναδιαίο κύκλο ενός πίνακα A προκύπτει ένα ελλειψοειδές με ημιάξονες με μήκη ίσα με τις ιδιάζουσες τιμές του A . Συνεπώς στο μέγεθος του ζουλήγματος καθοριστικός είναι ο ρόλος των ιδιζουσών τιμών. Ορίζετε λοιπόν σαν μέτρο της παραμόρφωσης της μοναδιαίας υπερσφαίρας το πηλίκο k με τύπο

$$k = \frac{\sigma_1}{\sigma_n} \quad (2.8)$$

Το k είναι πάντα μεγαλύτερο της μονάδας και γίνεται ίσο με αυτήν μόνο στην περίπτωση που ο A είναι μοναδιακός (unitary).

2.1.3 Προσεγγίσεις χαμηλής τάξης.

Άμεση εφαρμογή της διάσπασης ιδιζουσών τιμών έχουμε στην διαδικασία που περιγράφουμε παρακάτω. Βιβλιογραφικά είναι γνωστή σαν Low-Rank Approximations η οποία αποδίδεται στα ελληνικά ως χαμηλότερης τάξης προσεγγίσεις ενός πίνακα τάξης r από πίνακες με τάξη μικρότερη του r . Συγκεκριμένα θα δούμε πώς ένας πίνακας τάξης r προσεγγίζεται από το άθροισμα πινάκων ίδιας διάστασης και τάξης ένα (Rank one matrices). Για να προσεγγίσουμε ένα τυχαίο πίνακα A από πίνακες τάξεως ένα (Rank one matrices) πρέπει πρώτα να γίνει η διάσπαση ιδιζουσών τιμών.

Έστω η παρακάτω ανάλυση του A

$$A = U \begin{bmatrix} D_{r \times r} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V^\dagger$$

όπου ο πίνακας $D_{r \times r}$ θα είναι διαγώνιος με τα στοιχεία σ_i της διαγωνίου σε φθίνουσα διάταξη

$$D_{r \times r} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma_{r-1} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \sigma_r \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

Θεώρημα: Ο πίνακας A είναι το άθροισμα r πινάκων τάξεως ένα. Δηλαδή

$$A = \sum_{j=1}^r \sigma_j u_j v_j^\dagger \quad (2.10)$$

όπου τα u_j τα διανύσματα στήλες του U και τα v_j^\dagger τα συζυγοανάστροφα διανύσματα στήλες του V .

Είδαμε σύμφωνα με το παραπάνω θεώρημα πως ένας τυχαίος πίνακας A εν γένει με μιγαδικά στοιχεία μπορεί να προσεγγιστεί από άθροισμα πινάκων ίδιας διάστασης και τάξης ένα. Εύλογα τίθεται το ερώτημα για το πόσο καλή είναι η παραπάνω προσέγγιση. Σε αυτό η απάντηση έρχεται από το παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα: Για κάθε ν με $0 \leq \nu \leq r$ καθορίζουμε πίνακα A_ν με τον παρακάτω τύπο

$$A_\nu = \sum_{j=1}^{\nu} \sigma_j u_j v_j^\dagger \quad (2.11)$$

Η δεύτερη νόρμα της διαφοράς των A και A_ν θα είναι ίση με την $\nu+1$ ιδιάζουσα τιμή αφού

$$\|A - A_\nu\|_2 = \inf_{B \in \mathbb{S}^{m \times n}} \|A - B\|_2 = \sigma_{\nu+1} \quad (2.12)$$

Να σημειώσουμε ότι ο πίνακας B που παρουσιάζεται στην τελευταία νόρμα έχει τάξη μικρότερη της τάξης του A δηλαδή ν .

Απόδειξη: Υποθέτουμε ότι υπάρχουν κάποια B τα οποία να έχουν τάξη μικρότερη είτε ίση με ν , έτσι ώστε να ισχύει

$$\|A - B\|_2 < \|A - A_\nu\|_2 = \sigma_{\nu+1}$$

Τότε θα υπάρχει ένας $(m - \nu)$ διάστατος χώρος W υπόχωρος του \mathbb{S}^n έτσι ώστε για $w \in W \implies Bw = 0$. Άρα για κάθε w θα ισχύει $Aw = (A - B)w$. Από την παραπάνω σχέση θα έχουμε

$$\|A - B\|_2 = \|(A - B)w\|_2 \leq \|A - B\|_2 \|w\|_2 < \sigma_{\nu+1} \|w\|_2$$

Ταυτόχρονα όμως υπάρχει και ένας άλλος υπόχωρος του \mathbb{S}^n διάστασης $\nu+1$ που στην ουσία είναι ο χώρος που προκύπτει από το span των πρώτων $\nu+1$ δεξιών ιδιάζουσών διανυσμάτων του A . Στον χώρο αυτό θα έχω ότι $\|Aw\| \geq \sigma_{\nu+1}$. Όμως το άθροισμα των τάξεων των δύο παραπάνω χώρων που αναφερθήκαμε είναι ν θα υπάρχει ένα μη μηδενικό διάνυσμα που θα έρχεται σε αντίθεση και με τις δύο σχέσεις. Συνεπώς άτοπο. □

Παρατηρήσεις

- Εάν $\nu = r = \min\{m, n\}$ τότε $\sigma_{\nu+1} = 0$ άρα

$$\|A - A_\nu\|_2 = \sigma_{\nu+1} = 0$$

Συνεπώς αν στην διαδικασία της προσέγγισης λάβω υπ όψιν μου όλες τις μη μηδενικές ιδιάζουσες τιμές ο πίνακας A_ν θα ταυτίζεται με τον A με άλλα λόγια θα έχω τέλεια προσέγγιση.

- Στην περίπτωση που επιλέξω το ν έτσι ώστε $\nu \leq r$ η διαφορά της νόρμας του A_ν και A θα είναι

$$\|A - A_\nu\|_2 = \sigma_{\nu+1}$$

Συμπεραίνουμε ότι ανάλογα με την προσέγγιση που θέλουμε να έχουμε για τους A και A_ν θα πρέπει να επιλέξουμε το κατάλληλο ν . Να πούμε ότι η παραπάνω επιλογή θα επηρεάζεται άμεσα από το μέτρο των ιδιζουσών τιμών κοντά στην σ_ν .

- Με την συγκεκριμένη διαδικασία προσέγγισης ο πίνακας A τάξης r προσεγγίζεται από πίνακα A_ν τάξης ν . Ο A_ν είναι ο καλύτερος⁴ πίνακας, τάξης ν με τον οποίο προσεγγίζεται ο A . Οποιοσδήποτε άλλος πίνακας τάξης ν έχει διαφορά νόρμας με τον A μεγαλύτερη από ότι με τον A_ν .
- Να δούμε τι σημαίνει γεωμετρικά η προσέγγιση του A απο πίνακα A_ν . Είδαμε στην γεωμετρική ερμηνεία της διάσπασης ιδιζουσών τιμών ότι τα σ_i είναι τα μήκη των ημιαξόνων ενός ελλειψοειδούς. Με το να επιλέγουμε ν μικρότερο της τάξης του A σημαίνει ότι τα σ_i για $i \geq \nu$ τα αγνοούμε συνεπώς τα μήκη των αντίστοιχων ημιαξόνων γίνονται μηδέν. Άρα απο ένα ελλειψοειδές του \mathbb{R}^r μεταφερόμαστε σε αντίστοιχο ελλειψοειδές του \mathbb{R}^ν κόβοντας $r - \nu$ διαστάσεις του πρώτου [12].

2.2 Εφαρμογές της SVD

Η διάσπαση ιδιζουσών τιμών μαζί με το θεώρημα χαμηλής τάξης προσέγγιση αποτελούν σημαντικά εργαλεία που βρίσκουν εφαρμογή σε πολλά προβλήματα. Τα δύο βασικότερα στοιχεία που αναδεικνύουν, τα δύο παραπάνω θεωρήματα, σε σημαντικά είναι: Ο εύκολος υπολογισμός της διάσπασης ιδιζουσών τιμών πίνακα και ο 'ψαλιδισμός'⁵ της τάξης με την χρήση του θεωρήματος χαμηλής τάξης προσέγγιση. Εφαρμογές των εν λόγω θεωρημάτων παρατηρούμε πέρα από τις θεωρητικές, σε περιπτώσεις στις οποίες υπεισέρχονται στους υπολόγισμούς πίνακες με διαστάσεις της τάξης των μερικών χιλιάδων.

Η λύση συστημάτων, το πρόβλημα των ελαχίστων τετραγώνων, οι μηχανές αναζήτησης και η συμπίεση δεδομένων - επεξεργασία εικόνας είναι μερικές από

⁴Με τον όρο καλύτερος στο σημείο αυτό εννοούμε τον κοντινότερο αυτόν με την μικρότερη διαφορά δεύτερης νόρμας απο τον A .

⁵Ψαλιδισμένος θεωρείτε ο προσεγγιστικός πίνακας τάξης μικρότερης από τον αρχικό

τις πολλές εφαρμογές. Στην παρούσα εργασία θα ασχοληθούμε με τις δύο τελευταίες, περισσότερο από πλευράς μαθηματικών.

2.2.1 Μηχανές αναζήτησης

Για να γίνει πιο κατανοητή η χρήση της διάσπασης ιδιαζουσών τιμών στις μηχανές αναζήτησης θα δούμε αρχικά μέσα σε γενικές γραμμές την λειτουργία μιας τέτοιας απλής⁶ μηχανής.

Ένα από τα βασικότερα στοιχεία μιας τέτοιας μηχανής είναι το λεξικό το οποίο περιέχει όρους που συνήθως τους συμβολίζουμε με T_i . Οι όροι αυτοί είναι συνήθως απλές λέξεις χωρίς αυτό να σημαίνει ότι ένα λεξικό δεν μπορεί να περιέχει όρους T_i που να αποτελούνται από δύο λέξεις. Όσον αφορά το μέγεθος του λεξικού η με άλλα λόγια ποιο θα είναι το πλήθος των όρων T_i είναι θέμα απαιτήσεων και λέξεων που περιέχει η γλώσσα που απευθύνεται η μηχανή αναζήτησης. Σίγουρα όμως σε όποια γλώσσα και αν απευθύνεται οι όροι T_i θα ξεπερνούν τις μερικές εκατοντάδες χιλιάδες.

Με ανάλογο τρόπο πρέπει να κωδικοποιήσουμε και τις δισεκατομμύρια πληροφορίες που υπάρχουν στο διαδίκτυο και είναι διαθέσιμες για αναζήτηση από οποιοδήποτε χρήστη. Έτσι προκύπτουν οι όροι D_j που αντιπροσωπεύουν τις πληροφορίες του διαδυκτίου. Για να γίνουμε ποιο συγκεκριμένοι και να μην μιλάμε με αφηρημένους όρους υποθέτουμε ότι το πλήθος των T_i είναι m και το πλήθος των D_j είναι n .

Πριν αρχίσει η διαδικασία αναζήτησης πρέπει να γίνει από την μηχανή έλεγχος σε όλες τις διαθέσιμες πληροφορίες D_j για το πόσες φορές παρατηρούνται οι λέξεις T_i μέσα σε αυτές. Έτσι προκύπτει ο παρακάτω πίνακας [11]

$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} D_1 & D_2 & \dots & D_n \end{matrix} \\ \begin{matrix} T_1 \\ T_2 \\ \vdots \\ T_m \end{matrix} & \begin{pmatrix} freq_{11} & freq_{12} & \dots & freq_{1n} \\ freq_{21} & freq_{22} & \dots & freq_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ freq_{m1} & freq_{m2} & \dots & freq_{mn} \end{pmatrix} \end{matrix} \quad (2.13)$$

ο οποίος έχει διαστάσεις $m \times n$. Κάθε στοιχείο του πίνακα A_{ij} δηλώνει πόσες φορές παρατηρήθηκε η λέξη T_i στην πληροφορία η καλύτερα στο κείμενο ή την ιστοσελίδα D_j . Ο όρος πληροφορία ουσιαστικά ταυτίζεται με τους όρους κείμενο και ιστοσελίδα και θα γίνεται χρήση και των τριών ανάλογα με το ποιος από αυτούς ταιριάζει καλύτερα.

⁶Στις μέρες μας η εξέλιξη των μηχανών αυτών είναι αλματώδης και η λειτουργία τους περίπλοκη. Σκοπός της συγκεκριμένης παραγράφου δεν είναι η εις βάθος ανάλυση μία τέτοιας μηχανής αλλά ο ρόλος της διάσπασης svd σε αυτήν.

Αυτό που έχει σειρά είναι να καθορίσουμε αυτό που θέλουμε να ψάξουμε και να το κωδικοποιήσουμε στην γλώσσα της μηχανής. Σημαντικός είναι ο ρόλος στο σημείο αυτό των λέξεων κλειδιών αφού μέσω αυτών καθορίζουμε την υπό αναζήτηση πληροφορία. Έτσι φτιάχνουμε ένα διάνυσμα q σύμφωνα με τον παρακάτω τύπο

$$q_i = \begin{cases} 1 & \text{εαν } T_i \ni q \\ 0 & \text{αλλιως} \end{cases} \quad (2.14)$$

με διαστάσεις $n \times 1$ και στοιχεία μηδέν και 1 ανάλογα με το αν το αντίστοιχο T_i αποτελεί λέξη κλειδί.

Για να δούμε με ποιο από τα διανύσματα στήλες D_i του πίνακα A είναι πιο κοντά το διάνυσμα q και συνεπώς το D_i κείμενο ίσως να αναζητάει η μηχανή, πάμε να υπολογίσουμε το συνημίτονο της γωνίας των δύο διανυσμάτων.

$$\cos(\theta_j) = \frac{q^T d_j}{\|q\|_2 \|d_j\|_2} = \frac{q^T A e_j}{\|q\|_2 \|A e_j\|_2} \quad (2.15)$$

Όταν το συνημίτονο είναι κοντά στην μονάδα τότε τα δύο υπό εξέταση διανύσματα βρίσκονται κοντά. Από κάποια τιμή c του συνημίτονου που έχει καθοριστεί πειραματικά και μετά η μηχανή επιστρέφει το διάνυσμα D_i πράγμα που σημαίνει ότι το κείμενο ή η ιστοσελίδα D_i περιέχει τις λέξεις κλειδιά και πιθανόν να είναι αυτό που ζητάμε.

Αν πριν αρχίσει η όλη διαδικασία κανονικοποιήσουμε τις στήλες του πίνακα A θα έχουμε ότι

$$q^T A = [\cos(\vartheta_1) \quad \cos(\vartheta_2) \quad \cos(\vartheta_3) \quad \dots \quad \cos(\vartheta_n)] \quad (2.16)$$

όπου τα $\cos(\vartheta_i)$ μας δείχνουν το πόσο κοντά είναι τα διανύσματα στήλες D_i στο διάνυσμα q . Συνεπώς αν θεωρήσουμε τα D_i ιστοσελίδες εκείνες με τα μεγαλύτερα $\cos(\vartheta_i)$ θα περιέχουν πιθανόν αυτά που ζητάμε.

Όμως τα αποτελέσματα που θα πάρουμε δεν θα είναι απαραίτητα ικανοποιητικά λόγω του ότι ο πίνακας A περιέχει αρκετό θόρυβο. Ο θόρυβος αυτός μπορεί να οφείλεται σε πολλούς παράγοντες, όπως τις λέξεις κλειδιά το λεξιλόγιο την απόκλιση λόγω πράξεων και λοιπά. Θα δούμε πως με την βοήθεια της διάσπασης ιδιαιζουσών τιμών μπορούμε να φιλτράρουμε την πληροφορία και να αποβάλουμε ένα μεγάλο μέρος του θορύβου. Έστω η παρακάτω διάσταση του πίνακα A και ο προσεγγιστικός πίνακας A_k σύμφωνα με το θεώρημα χαμηλής τάξης προσέγγιση

$$A = UDV \quad A_k = \sum_{j=1}^k \sigma_j u_j v_j^\dagger$$

Για το συγκεκριμένο πρόβλημα γράφουμε τον πίνακα A_k με την παρακάτω μορφή

$$A_k = \sum_{j=1}^k \sigma_j Z_j \quad \mu\epsilon \quad Z_j = u_j v_j^\dagger$$

Τότε από την θεωρία πληροφορίας γνωρίζουμε ότι ο θόρυβος είναι κατανεμημένος τυχαία και σχεδόν ομοιόμορφα προς όλες τις κατευθύνσεις των Z_j . Συνεπώς τα πρώτα και τα τελευταία Z_j θα περιέχουν παρόμοιες ποσότητες θορύβου. Όμως τα αρχικά Z_j περιέχουν το μεγαλύτερο μέρος της πληροφορίας και τα τελευταία ασήμαντη ποσότητα. Με το να μην λάβουμε υπόψη μας τις τελευταίες ιδιάζουσες τιμές και συνεπώς τα αντίστοιχα Z_j 'πετάμε' μεγάλο μέρος θορύβου και ελάχιστη ποσότητα πληροφορίας. Έτσι αν στον τύπο (2.16) χρησιμοποιήσουμε τον πίνακα A_k που περιέχει λιγότερο θόρυβο αντί του A τα αποτελέσματα που θα πάρουμε θα είναι καλύτερα.

2.2.2 Συμπίεση δεδομένων - Επεξεργασία εικόνας

Σκοπός της συγκεκριμένης παραγράφου είναι να επισημάνουμε την σημασία της διάσπασης ιδιάζουσών τιμών και του θεωρήματος χαμηλής διάστασης προσέγγιση στην συμπίεση πληροφορίας. Για την καλύτερη ανάλυση της διαδικασίας θα ασχοληθούμε με την επεξεργασία⁷ εικόνας. Ο λόγος που θα ασχοληθούμε με την εικόνα οφείλεται στο ότι αποτελεί μορφή πληροφορίας και μάλιστα κατέχει εξέχουσα θέση στην εποχή μας.

Υποθέτουμε ότι έχουμε στη διάθεσή μας μια εικόνα την οποία θέλουμε να συμπίεσουμε. Είναι γνωστό ότι κάθε εικόνα μπορεί να εκφραστεί με την βοήθεια ενός $m \times n$ πραγματικού πίνακα του οποίου οι διαστάσεις θα καθορίζονται από τα pixels τα οποία αποτελείται η εν λόγω εικόνα. Στην συνέχεια τον πίνακα αυτόν θα τον ονομάζουμε πίνακα δεδομένων αφού περικλείει όλη την πληροφορία για την εικόνα. Τα στοιχεία του πίνακα θα είναι πραγματικοί αριθμοί και θα εξαρτώνται από το χρώμα - φωτεινότητα του αντίστοιχου pixel. Να σημειώσουμε ότι ανάλογα με το πλήθος των χρωμάτων που έχουμε σε μια εικόνα ή που θέλουμε να χρησιμοποιήσουμε μεταβάλλονται αντίστοιχα και τα στοιχεία του πίνακα της εικόνας. Αν για παράδειγμα έχουμε ασπρόμαυρη εικόνα τα στοιχεία μπορεί να είναι από το 0 μέχρι 1 όπου το 0 αντιστοιχεί στο λευκό και το 1 στο μαύρο. Για τις έγχρωμες εικόνες συνήθως χρησιμοποιείται η κλίμακα από 0 έως 255 που αντιπροσωπεύει 255 χρώματα.

Πριν αναφερθούμε στο μαθηματικό κομμάτι της συμπίεσης δεδομένων να πούμε τί εννοούμε με τον όρο συμπίεση. Ένας πίνακας δεδομένων $m \times n$

⁷Με τον όρο επεξεργασία εννοούμε την έκφραση και την μετάδοσή της με οικονομικότερο τρόπο (λιγότερα bytes)

χρειάζεται mn στοιχεία για τον πλήρη καθορισμό του. Φανταστείτε ότι αν οι διαστάσεις του είναι της τάξης των μερικών χιλιάδων ο αριθμός mn είναι πολύ μεγάλος και η αποθήκευσή και μετάδοση του δύσκολη. Σκοπός της συμπίεσης είναι να εκφραστεί ο πίνακας δεδομένων με λιγότερα από mn στοιχεία ώστε να μεταδίδεται και να αποθηκεύεται ευκολότερα.

Ας είναι A ο πίνακας δεδομένων με διαστάσεις $m \times n$ με την παρακάτω διάσπαση ιδιζουσών τιμών.

$$A = U \tilde{D} V^\dagger$$

όπου ο πίνακας \tilde{D} περιέχει όλες τις ιδιζουσες τιμές του A ακόμα και τις μηδενικές. Δηλαδή

$$\tilde{D} = \text{diag} \{ \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r, 0, \dots, 0 \}$$

Τότε σύμφωνα με το θεώρημα χαμηλής τάξης προσέγγιση ο πίνακας A μπορεί να προσεγγιστεί από τον A_ν που προκύπτει από το άθροισμα πινάκων τάξεως 1. Οι A και A_ν εκφράζονται συναρτήσει των ιδιζουσών τιμών όπως φαίνεται παρακάτω

$$A = \sum_{j=1}^r \sigma_j u_j v_j^\dagger \quad A_\nu = \sum_{j=1}^\nu \sigma_j u_j v_j^\dagger$$

με το ν να ικανοποιεί την ανίσωση $1 \leq \nu \leq r$. Συνεπώς ο A μπορεί να εκφραστεί από τον A_ν . Να δούμε ποιο είναι το κόστος⁸ έκφρασης του A_ν . Απαιτούνται ν το πλήθος ιδιζουσες τιμές και $\nu + \nu = 2\nu$ ιδιζόντα διανύσματα. Άρα συνολικά θα έχουμε $m\nu + n\nu + \nu = (m + n + 1)\nu$ όπου $m\nu$ και $n\nu$ το πλήθος των στοιχείων των αριστερών και δεξιών ιδιζουσών διανυσμάτων αντίστοιχα. Εύκολα βλέπουμε ότι το $(m + n + 1)\nu$ είναι σίγουρα μικρότερο από το mn ενώ το πόσο μικρότερο είναι εξαρτάται από την επιλογή του ν . Στο σημείο αυτό τίθεται το ζήτημα τι ν πρέπει να επιλέξουμε. Σίγουρα η παράμετρος που θα το καθορίσει θα είναι η επί τοις εκατό προσέγγιση του A από τον A_ν . Έστω

$$S_a = \sum_{j=1}^\nu \sigma_j u_j v_j^\dagger \quad S_b = \sum_{j=\nu+1}^r \sigma_j u_j v_j^\dagger \quad (2.17)$$

τότε $A = S_a + S_b$. Ορίζεται σαν μέτρο επί τοις εκατό λάθους του A_ν σε σχέση με τον A η ποσότητα [14]

$$sfalma = \frac{|S_b|}{|A|} = \sqrt{\frac{\sum_{j=\nu+1}^r \sigma_j^2}{\sum_{j=1}^r \sigma_j^2}} \quad (2.18)$$

Συνεπώς ανάλογα με το λάθος που μας επιτρέπεται να έχουμε, κάνουμε και την ανάλογη επιλογή του ν .

⁸Όταν λέμε κόστος έκφρασης πίνακα εννοούμε το πλήθος των στοιχείων που χρειαζόμαστε για να τον καθορίσουμε.

2.3 Χρήσιμα θεωρήματα

Στην παράγραφο αυτή θα διατυπωθούν κάποια θεωρήματα μερικά από αυτά μαζί με την απόδειξή τους. Γίνεται λόγος σε ξεχωριστή παράγραφο για αυτά γιατί είναι απαραίτητα και χρησιμοποιούνται σε αρκετά σημεία της εργασίας.

Θεώρημα: Οι μη μηδενικές ιδιάζουσες τιμές ενός πίνακα A είναι οι τετραγωνικές ρίζες των μη μηδενικών ιδιοτιμών του AA^\dagger ή του $A^\dagger A$

Απόδειξη: Έστω η ανάλυση ιδιζουσών τιμών του A $A = U\tilde{D}V^\dagger$ όπου \tilde{D} είναι ο διαγώνιος που περιέχει όλες⁹ τις ιδιάζουσες τιμές και τις τυχών μηδενικές. Τότε

$$AA^\dagger = U\tilde{D}V^\dagger (U\tilde{D}V^\dagger)^\dagger = U\tilde{D}\tilde{D}^\dagger U^\dagger$$

αλλά ο πίνακας \tilde{D} περιέχει ιδιάζουσες τιμές που είναι πάντα πραγματικές άρα $\tilde{D}\tilde{D}^\dagger = \tilde{D}^2$. Συνεπώς

$$AA^\dagger = U\tilde{D}^2 U^\dagger$$

και λόγω του ότι ο U μοναδιακός οι U και U^\dagger δρουν σαν μετασχηματισμό ομοιότητας οι ιδιοτιμές του AA^\dagger θα ταυτίζονται με τις ιδιοτιμές του διαγώνιου πίνακα \tilde{D}^2 που είναι τα διαγώνια στοιχεία του. Αν είναι λ_i οι ιδιοτιμές του AA^\dagger θα έχω

$$\sigma_i^2 = \lambda_i \implies \sigma_i = \sqrt{\lambda_i} \quad (2.19)$$

□

Θεώρημα: Η τάξη r ενός πίνακα A είναι ίση με τον αριθμό των μη μηδενικών ιδιζουσών τιμών του.

Απόδειξη: Γνωρίζουμε ότι η τάξη διαγώνιου πίνακα είναι ίση με τον αριθμό των μη μηδενικών στοιχείων του. Με την διάσπαση του πίνακα A σε $A = U\tilde{D}V^\dagger$ έχουμε ότι U και V^\dagger είναι μοναδιακοί (unitary) άρα έχουν μέγιστη τάξη. Ο πίνακας \tilde{D} είναι διαγώνιος συνεπώς η τάξη του A ταυτίζεται με την τάξη του \tilde{D} που είναι ίση με το πλήθος των ιδιζουσών τιμών.

□

Θεώρημα: Η Frobenius νόρμα πίνακα A είναι ίση με την τετραγωνική ρίζα του αθροίσματος των τετραγώνων των ιδιζουσών τιμών του.

$$\|A\|_F = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 + \dots + \sigma_r^2} \quad (2.20)$$

⁹Τονίζουμε ότι ο \tilde{D} περιέχει όλες τις ιδιάζουσες τιμές για να μην γίνεται σύγχυση με τον πίνακα $D_{r \times r}$ του ορισμού που αποτελεί μπλόκ του \tilde{D}

Απόδειξη: Θεωρούμε διάσπαση του πίνακα A όπως και στις προηγούμενες αποδείξεις δηλαδή $A = U\tilde{D}V^\dagger$. Τότε η Frobenius νόρμα του πίνακα A θα είναι

$$\|A\|_F = \|U\tilde{D}V^\dagger\|_F = \|\tilde{D}\|_F$$

αφού γνωρίζουμε ότι η Frobenius νόρμα είναι αναλλοίωτη κάτω από μοναδιακούς μετασχηματισμούς, άρα

$$\|A\|_F = \|\tilde{D}\|_F = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 + \dots + \sigma_r^2}$$

□

Θεώρημα: Για κάθε ν με $0 \leq \nu \leq r$ η Frobenius νόρμα της διαφοράς των πινάκων A και A_ν είναι ίση με την τριγωνική ρίζα του αθροίσματος των τετραγώνων των ιδιοζουσών τιμών σ_i για $i \geq n+1$. Δηλαδή

$$\|A - A_\nu\|_F = \inf_{B \in \mathfrak{S}^{m \times n}} \|A - B\|_F = \sqrt{\sigma_{\nu+1}^2 + \sigma_{\nu+2}^2 + \dots + \sigma_r^2} \quad (2.21)$$

Θεώρημα: Για κάθε πίνακα A με $A \in \mathfrak{S}^{m \times m}$ η απόλυτη τιμή της ορίζουσας είναι ίση με το γινόμενο των ιδιοζουσών τιμών του .

$$|\det(A)| = \prod_{j=1}^m \sigma_j \quad (2.22)$$

Απόδειξη: Έστω η παρακάτω ανάλυση του πίνακα A $A = U\tilde{D}V^\dagger$. Τότε η ορίζουσα του A θα είναι

$$|\det(A)| = |\det(U\tilde{D}V^\dagger)| = |\det(U)| |\det(\tilde{D})| |\det(V^\dagger)|$$

και λόγω του ότι οι unitary πίνακες έχουν ορίζουσα ένα η παραπάνω σχέση γίνεται

$$|\det(A)| = |\det(\tilde{D})| = \prod_{j=1}^m \sigma_j$$

□

Θεώρημα: Κάθε πίνακας A με $A \in \mathfrak{S}^{m \times n}$ έχει μια διάσπαση ιδιοζουσών τιμών . Οι ιδιοζουσες τιμές σ_i είναι μοναδικά καθορισμένες .

Πρόταση: Έστω πίνακας A με ιδιοτιμές λ_j . Τότε οι ιδιοτιμές του πίνακα Ac με το $c \in \mathbb{R}$ είναι οι $c\lambda_j$.

Θεώρημα: (Cauchy's Interlacing Theorem) Έστω A ερμητιανός τελεστής στον χώρο \mathcal{H} και B μια συμπίεσή του σε ένα $(n - k)$ -διάστατο υπόχωρο \mathcal{N} . Δηλαδή

$$A = \begin{bmatrix} B & * \\ * & * \end{bmatrix}$$

Τότε για $j = 1, 2, \dots, n - k$ θα ισχύει

$$\lambda_j^\downarrow(A) \geq \lambda_j^\downarrow(B) \geq \lambda_{j+k}^\downarrow(A) \quad (2.23)$$

Θεώρημα: Κατίσχυση (Majorization) Έστω $p = \{p_i\}_{i=1}^N$ με μή αύξουσα διάταξη $p^\downarrow = \{p_1^\downarrow, p_2^\downarrow, \dots, p_N^\downarrow\}$ και ομοίως $q = \{q_i\}_{i=1}^N$ με μή αύξουσα διάταξη $q^\downarrow = \{q_1^\downarrow, q_2^\downarrow, \dots, q_N^\downarrow\}$. Τότε

$$\begin{aligned} q_1^\downarrow &\geq p_1^\downarrow \\ q_1^\downarrow + q_2^\downarrow &\geq p_1^\downarrow + p_2^\downarrow \\ &\vdots \\ q_1^\downarrow + \dots + q_N^\downarrow &\geq p_1^\downarrow + \dots + p_N^\downarrow \end{aligned} \quad q \succ p \iff \quad (2.24)$$

Κεφάλαιο 3

ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ ΔΙΑΣΤΑΤΙΚΗΣ ΣΥΜΠΙΕΣΗΣ

3.1 Γενικά

Είδαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο ότι μπορούμε να συμπίεσουμε ένα πίνακα δεδομένων. Η διαδικασία που ακολουθήσαμε ήταν η διάσπαση ιδιάζουσών τιμών του πίνακα και η δημιουργία του αθροίσματος των τάξεως ένα πινάκων με την βοήθεια των αριστερών και δεξιών ιδιάζόντων διανυσμάτων και ιδιάζουσών τιμών. Η διαδικασία αυτή είναι αποτελεσματική στην περίπτωση που κάποιες ιδιάζουσες τιμές είναι πολύ μικρές σε σχέση με τις υπόλοιπες των οποίων η συνεισφορά είναι μηδαμινή και τις αγνοούμε. Έτσι εκφράζουμε τον πίνακα δεδομένων με λιγότερα στοιχεία από $m \times n$ αν για παράδειγμα αυτός είναι διάστασης $m \times n$. Συνεπώς επιτυγχάνεται συμπίεση των δεδομένων μας. Δεν είναι όμως λίγες οι περιπτώσεις που ο πίνακας δεδομένων δεν έχει ανισοκατανομή στις ιδιάζουσες τιμές δηλαδή κάποιες μικρές κάποιες μεγάλες, αλλά όλες έχουν περίπου το ίδιο μέτρο. Είναι λογικό να μην μπορούμε να αγνοήσουμε κάποιες από αυτές αφού όλες προσφέρουν σχεδόν το ίδιο για την δημιουργία του πίνακα. Στις περιπτώσεις αυτές σκοπός είναι να αναπτυχθούν κάποιες διαδικασίες που θα ανισοκατανήμουν τις ιδιάζουσες τιμές του πίνακα διατηρώντας ταυτόχρονα κάποιες βασικές επιθυμητές ιδιότητες του πίνακα που καθορίζονται ανάλογα με το πρόβλημα π.χ νόρμες, αντιστρεψιμότητα, ίχνος και λοιπά. Οι διαδικασίες αυτές θα αποτελέσουν αντικείμενο μελέτης για αυτήν την παράγραφο.

3.1.1 Ο φορμαλισμός $|A\rangle\rangle$

Πριν όμως ασχοληθούμε με την μελέτη των διαδικασιών αυτών διεξοδικά, θα μιλήσουμε για την έκφραση μιας κατάστασης κβαντικού συστήματος με τον φορμαλισμό $|A\rangle\rangle$. Ο φορμαλισμός αυτός θα μας βοηθήσει να κατανοήσουμε καλύτερα τον τρόπο με τον οποίο θα επέμβουμε σε ένα διμερές κβαντικό σύστημα με στόχο την συμπίεσή του. Με τον όρο επέμβουμε εννοούμε την διαδικασία που θα υποβάλουμε ένα διμερές κβαντικό σύστημα ώστε να επιτύχουμε την διαστατική ελάττωση του διανύσματος κατάστασης που το περιγράφει, διατηρώντας σταθερό το μέτρο του κβαντικού εναγκαλισμού των υποσυστημάτων που το αποτελούν.

Έστω διμερές κβαντικό σύστημα που περιγράφεται από τον χώρο Hilbert \mathcal{H} διάστασης d και $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ οι χώροι των υποσυστημάτων του με διαστάσεις d_1 και d_2 αντίστοιχα. Γνωρίζουμε ότι

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$$

Αν $\{|i\rangle\}_{i=1}^{d_1}$ μια βάση για τον χώρο \mathcal{H}_1 και $\{|j\rangle\}_{j=1}^{d_2}$ μια βάση για τον χώρο \mathcal{H}_2 τότε κάθε δυνατή κατάσταση του συστήματος, δηλαδή κάθε καταστατικό διάνυσμα $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$, θα μπορεί να γραφεί με την παρακάτω μορφή

$$|\psi\rangle = \sum_{ij} a_{ij} |i\rangle \otimes |j\rangle$$

Παρατηρούμε ότι το καταστατικό διάνυσμα $|\psi\rangle$ μπορεί να γραφεί με την βοήθεια των συντελεστών a_{ij} και των διανυσμάτων βάσης των χώρων $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$. Οι συντελεστές a_{ij} αριθμούνται με την βοήθεια δύο δεικτών ij πράγμα που μας παραπέμπει σε μορφή πινάκων. Το i παίρνει τιμές από ένα έως d_1 και ανάλογα το j από ένα έως d_2 , συνεπώς μιλάμε για πίνακες διαστάσεων $d_1 \times d_2$.

Υπάρχει λοιπόν μια αντιστοιχία των καταστατικών διανυσμάτων $|\psi\rangle$ του χώρου \mathcal{H} με τους πίνακες διάστασης $d_1 \times d_2$ [15] [16].

$$\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 \longleftrightarrow \mathcal{M}_{d_1 d_2}(\mathbb{C})$$

Παρουσιάζεται συνεπώς η ανάγκη για ένα πιο γενικευμένο φορμαλισμό ο οποίος θα περιέχει και την έννοια του καταστατικού διανύσματος αλλά και του πίνακα των συντελεστών ενός αναπτύγματος σε κάποια βάση που αντιστοιχεί στο διάνυσμα αυτό.

Έτσι παρουσιάζεται η έκφραση $|A\rangle\rangle$ που περικλείει και την έννοια του διανύσματος αλλά και την έννοια του αντίστοιχου πίνακά του, και ορίζεται ως εξής [17]

$$|\psi\rangle = \sum_{ij} a_{ij} |i\rangle \otimes |j\rangle \equiv |A\rangle\rangle$$

όπου $A = (a_{ij})_{i=1:d_1}^{j=1:d_2}$.

Ιδιότητες:

1. $(C \otimes I) | A \rangle \rangle = | CA \rangle \rangle$
Να πούμε ότι ο πίνακας C έχει διαστάσεις $d_1 \times d_1$ και ο μοναδιαίος I είναι διαστάσεων $d_2 \times d_2$.
2. $(I \otimes K) | A \rangle \rangle = | AK^T \rangle \rangle$
Όμοια με το προηγούμενο τώρα η μονάδα είναι $d_1 \times d_1$ και ο πίνακας K $d_2 \times d_2$.
3. $(C \otimes K) | A \rangle \rangle = | CAK^T \rangle \rangle$
4. $\langle\langle A | B \rangle\rangle = \text{Tr} [A^\dagger B]$
5. Το μερικό ίχνος ως προς τον δεύτερο χώρο του κβαντικού διμερούς συστήματος θα μας δώσει τον περιθώριο¹ πίνακα πυκνότητας.

$$\text{Tr}_2(|A\rangle\rangle\langle\langle A|) = AA^\dagger$$

6. Χρησιμοποιώντας την πολική διάσπαση για τον πίνακα A θα έχουμε ότι $A = V\sqrt{A^\dagger A}$ με τον πίνακα V να είναι μοναδιακός. Επιλέγουμε μοναδιακό πίνακα U τέτοιο ώστε $UA^\dagger AU^\dagger$ να είναι διαγώνιος. Τότε θα έχουμε

$$|A\rangle\rangle = |V\sqrt{A^\dagger A}\rangle\rangle = VU^\dagger \otimes U^\dagger |U\sqrt{A^\dagger A}U^\dagger\rangle\rangle = \sum_i \sqrt{\lambda_i} |i\rangle_1' |i\rangle_2''$$

όπου $|i\rangle_1' = VU^\dagger |i\rangle_1$, $|i\rangle_2'' = U^\dagger |i\rangle_2$ και λ_i είναι οι ιδιοτιμές του πίνακα $A^\dagger A$ με αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα $|i\rangle$.

7. Για την ευκλείδια νόρμα διανύσματος γνωρίζουμε ότι $\|A\|_2 = \sqrt{A^\dagger A}$. Η νόρμα αυτή γίνεται ισοδύναμη με την Frobenius νόρμα για τον φορμαλισμό $|A\rangle\rangle$. Με την χρήση της (4) έχουμε

$$\|A\|_2 = \sqrt{A^\dagger A} \equiv \|A\|_F = \sqrt{\text{Tr}(A^\dagger A)} = \sqrt{\text{Tr}(AA^\dagger)} \equiv |||A\rangle\rangle||$$

Να τονίσουμε ότι διατήρηση της Frobenius νόρμας σημαίνει διατήρηση του μήκους του διανύσματος $|A\rangle\rangle$.

¹Η έννοια περιθώριος πίνακας και μειωμένος πίνακας ταυτίζονται.

8. Με την βοήθεια της ιδιότητας (5) και του αντίστοιχου μερικού ίχνους ως προς τον πρώτο χώρο μπορούμε να δούμε τις μέγιστα εναγκαλισμένες καταστάσεις ως εξής

$$Tr_2(|A\rangle\rangle\langle\langle A|) = AA^\dagger = \frac{1}{N}I \quad \text{και} \quad Tr_1(|A\rangle\rangle\langle\langle A|) = A^\dagger A = \frac{1}{N}I$$

Συνεπώς τα στοιχεία της διαγωνίου του περιθώριου πίνακα πυκνότητας συνιστούν ομοιόμορφη κατανομή άρα έχουμε μέγιστο εναγκαλισμό.

9. Οι μέγιστα εναγκαλισμένες καταστάσεις θα περιγράφονται από τον τύπο

$$|A\rangle\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}}I|U\rangle\rangle$$

όπου U μοναδιακός, και θα συνδέονται μεταξύ τους με μοναδιακούς μετασχηματισμούς, δηλαδή

$$|U\rangle\rangle = UV^\dagger \otimes I|V\rangle\rangle$$

Να σημειώσουμε ότι η έκφραση $|A\rangle\rangle$ θα χρησιμοποιείται παρακάτω είτε με την έννοια του διανύσματος είτε με την έννοια του πίνακα των συντελεστών ανάλογα την περίπτωση.

Παρατηρήσεις:

Από τις σχέσεις (1) και (2) παρατηρούμε ότι πάντα ο πρώτος πίνακας του ταυυστικού γινομένου έχει διαστάσεις ίσες με αυτές του πρώτου χώρου \mathcal{H}_1 στον οποίο και δρα ενώ ο δεύτερος έχει τις αντίστοιχες διαστάσεις του χώρου \mathcal{H}_2 όπου δρα αντίστοιχα.

Συνεπώς ανάλογα τις ανάγκες και τις απαιτήσεις που έχουμε θα μπορούσαμε με κατάλληλη δράση ταυυστικού γινομένου να επέμβουμε στον πρώτο στον δεύτερο ή και στους δύο χώρους του διμερούς κβαντικού συστήματος που θέλουμε να συμπίεσουμε. Στον αλγόριθμο συμπίεσης που θα περιγράψουμε παρακάτω η διαδικασία που ακολουθείται περιλαμβάνει τοπικές δράσεις στον πρώτο η τον δεύτερο χώρο ανάλογα με το ποιόν θα επιλέξουμε εμείς. Επιλέγουμε την δράση στον πρώτο² χώρο που θα γίνει σύμφωνα με τύπο (1). Τότε θα έχουμε δράσεις της μορφής

$$(D \otimes I)|A\rangle\rangle = |DA\rangle\rangle$$

όπου D ο συνολικός πίνακας επανάληψης του αλγορίθμου. Όμως ο πίνακας D προέρχεται από το γινόμενο τόσων πινάκων όσα είναι και τα βήματα του

²Με όμοιο τρόπο μπορούμε να μιλήσουμε για την τοπική δράση στον δεύτερο χώρο.

αλγόριθμου. Αν τους συμβολίσουμε με D_k με $k = 1, 2, \dots, s$ όπου s το πλήθος των βημάτων, τότε η δράση θα έχει ως εξής

$$(D_s \otimes I) \dots (D_3 \otimes I) (D_2 \otimes I) (D_1 \otimes I) | A \rangle \rangle = | D_s \dots D_3 D_2 D_1 A \rangle \rangle = | A' \rangle \rangle$$

όπου A' ο πίνακας συντελεστών που προκύπτει μετά την εφαρμογή του αλγορίθμου στον πίνακα συντελεστών A .

Σχόλια:

- Πρόκειται λοιπόν για έναν αλγόριθμο διαστατικής συμπίεσης ο οποίος λειτουργεί σε γενικότερα πλαίσια όμοια με αλγόριθμους συμπίεσης δεδομένων. Βασικός στόχος του αλγορίθμου είναι η προετοιμασία του πίνακα δεδομένων έτσι ώστε οι ιδιάζουσες τιμές του από κάποιο δείκτη και μετά να δημιουργούν ασυνέχεια (Gap, σκαλοπάτι) για την διάσπαση ιδιζουσών τιμών. Η ιδέα της ασυνέχειας δεν είναι καινούργια, βλέπε [23] απλά καινούργια είναι η διαδικασία που ακολουθείται.
- Ο αλγόριθμος αυτός είναι ένας κλασσικός αλγόριθμος αλλά σε κβαντικό πλαίσιο. Δρα τοπικά όπως έχουμε αναφέρει στον πρώτο η τον δεύτερο χώρο του κβαντικού συστήματος διατηρώντας ταυτόχρονα τον κβαντικό εναγκαλισμό και των δύο υποσυστημάτων. Συνεπώς μιλάμε για έναν αλγόριθμο προσέγγισης χαμηλής τάξης με περιορισμούς.

3.2 Μελέτη συμπίεσης με επαναληπτική διαδικασία

Γνωρίζουμε ότι οι ιδιάζουσες τιμές πίνακα A συνδέονται άμεσα με τις ιδιοτιμές του πίνακα AA^\dagger . Σίγουρα οι ιδιοτιμές έχουν μελετηθεί πολύ περισσότερο από τις ιδιάζουσες και το μαθηματικό υπόβαθρο για αυτές είναι σίγουρα μεγαλύτερο. Λόγο του παραπάνω και της γνώσης μας για την σχέση σύνδεσης ιδιζουσών και ιδιοτιμών πίνακα, αρχικά θα μελετήσουμε τις ιδιοτιμές του πίνακα συντελεστών $| A \rangle \rangle$ και στην συνέχεια θα μεταφέρουμε τα συμπεράσματά μας στις ιδιάζουσες.

Έχουμε δείξει ότι οι ιδιοτιμές των πινάκων $AA^\dagger = Tr_2(| A \rangle \rangle \langle \langle A |)$ και $A^\dagger A = Tr_1(| A \rangle \rangle \langle \langle A |)$ είναι οι ίδιες συνεπώς θα καταλήξουμε στα ίδια συμπεράσματα είτε δουλέψουμε με τον AA^\dagger είτε με τον $A^\dagger A$. Επιλέγουμε τον $A^\dagger A$.

3.2.1 Σχέσεις ιδιοτιμών πίνακα και υποπινάκων του

Έστω ερμητιανός πίνακας H . Χωρίζουμε τον H σε μπλόκ, με την παρακάτω μορφή.

$$H = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

όπου το μπλόκ H_{11} έχει διαστάσεις έστω $l \times l$ και το H_{22} $m \times m$. Τότε αναγκαστικά το H_{12} θα είναι $l \times (n - l)$ και το H_{21} θα είναι $m \times (n - m)$. Να σημειώσουμε ότι ο H έχει θεωρηθεί τετραγωνικός διαστάσεων $n \times n$.

Η μέχρι σήμερα ανάπτυξη της θεωρίας μας επιτρέπει να μιλήσουμε για σχέση ιδιοτιμών του H και των μπλόκ H_{11} και H_{22} με συγκεκριμένες ανισότητες. Αυτές που θα χρησιμοποιήσουμε και σχετίζουν τις ιδιοτιμές του H και H_{11} είναι

$$\lambda_j(H) \geq \lambda_j(H_{11}) \quad (3.2)$$

για $j = 1 \dots l$

$$\lambda_{l-j+1}(H_{11}) \geq \lambda_{n-j+1}(H) \quad (3.3)$$

για $j = 1 \dots l$

Ενώ για την σχέση των ιδιοτιμών του H και H_{22} έχουμε τις παρακάτω

$$\lambda_j(H) \geq \lambda_j(H_{22}) \quad (3.4)$$

για $j = 1 \dots m$

$$\lambda_{m-j+1}(H_{22}) \geq \lambda_{n-j+1}(H) \quad (3.5)$$

για $j = 1 \dots m$.

Όλες οι παραπάνω ανισώσεις είναι απόρροια του Cauchy interlacing theorem που έχουμε αναφέρει στο προηγούμενο κεφάλαιο σχέση (2.24) [18] [19]

3.2.2 Κατασκευή πίνακα επανάληψης

Σκοπός είναι να κατασκευαστεί πίνακας επανάληψης τέτοιος ώστε με την επαναληπτική δράση του από δεξιά ή από αριστερά πάνω στον πίνακα δεδομένων $|A\rangle\rangle$ που θέλω να κάνω συμπίεση να δημιουργεί μια ανισοκατανομή στις ιδιόζουσες τιμές του. Τονίζουμε ξανά ότι λέγοντας ανισοκατανομή εννοούμε την αύξηση κάποιων και την παράλληλη μείωση κάποιων άλλων ιδιόζουσών τιμών με ταυτόχρονη διατήρηση συγκεκριμένων ιδιοτήτων - ανάλογα το πρόβλημα - του πίνακα δεδομένων.

Ονομάζουμε τον πίνακα επανάληψης D_k διαστάσεων ίδιων με αυτών του πίνακα δεδομένων που θέλουμε να συμπίεσουμε. Ο D_k είναι ο μοναδιαίος πίνακας

που στην διαγώνιό του υπάρχουν δύο μπλόκ το d_k^A και το d_k^B που ορίζονται ως εξής

$$d_k^A = \begin{bmatrix} f_k & 0 \\ 0 & f_k \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

και για τον d_k^B

$$d_k^B = \begin{bmatrix} g_k & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & g_k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & g_k \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

Οι διαστάσεις του d_k^A παραμένουν κατά όλη την διάρκεια της διαδικασίας αμετάβλητες και είναι δύο επί δύο. Τα f_k είναι μεταβλητές που μπορούν να πάρουν πραγματικές τιμές και θα καθοριστούν στην συνέχεια. Να σημειώσουμε ότι ο δείκτης k δηλώνει το βήμα της επανάληψης. Το μπλόκ d_k^B έχει διαστάσεις $m \times m$ που το m εξαρτάται από το πρόβλημα και τις απαιτήσεις που έχουμε για το ποσοστό της συμπίεσης. Να αναφέρουμε ότι μεγάλη συμπίεση σημαίνει μεγάλη τιμή για το m και αντίστροφα. Δεν θα αναφερθούμε περισσότερο στο σημείο αυτό για το m αφού θα γίνει εκτενέστερη μελέτη για αυτό λίγο αργότερα που θα γνωρίζουμε και την σημασία του. Όσο για τα g_k όμοια με τα f_k είναι μεταβλητές³ που μπορούν να πάρουν πραγματικές τιμές.

Ο ρόλος των μπλόκ d_k^A και d_k^B είναι σημαντικός και πολύ συγκεκριμένος. Το μπλόκ d_k^A είναι υπεύθυνο όπως θα δούμε στην συνέχεια του κεφαλαίου για την αύξηση της τιμής των πρώτων ιδιαζουσών τιμών του πίνακα συντελεστών $|A\rangle\rangle$ μετά την δράση⁴ του πίνακα επανάληψης D_k . Με ανάλογο τρόπο το μπλόκ d_k^B θα είναι εκείνο που θα προκαλέσει την μείωση των τελευταίων ιδιαζουσών τιμών του πίνακα συντελεστών $|A\rangle\rangle$.

Να δούμε τώρα ποιες είναι ακριβώς οι θέσεις που καταλαμβάνουν τα μπλόκ d_k^A και d_k^B στον πίνακα επανάληψης D_k . Το στοιχείο $(d_k^A)_{11}$ του μπλόκ d_k^A βρίσκεται στην θέση $(2k-1, 2k-1)$ του πίνακα D_k ενώ το στοιχείο $(d_k^B)_{11}$ του d_k^B βρίσκεται στην θέση $(n-km+1, n-km+1)$ του επαναληπτικού πίνακα D_k όπως φαίνεται παρακάτω.

³Για την αποφυγή συγχύσεων να πούμε ότι οι μεταβλητές f_k και g_k μπορεί να είναι διαφορετικές σε κάθε βήμα.

⁴Ο τρόπος δράσης του πίνακα επανάληψης θα περιγραφεί παρακάτω όπου και θα γίνει περισσότερο κατανοητός ο ρόλος των μπλόκ d_k^A και d_k^B .

$$\begin{bmatrix}
 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\
 0 & \ddots & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\
 0 & \dots & 1 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\
 & \dots & \dots & \begin{bmatrix} f_k & 0 \\ 0 & f_k \end{bmatrix} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\
 & \dots & \dots & & 1 & \dots & \dots & \dots & \dots & \\
 & \dots & \dots & & & \ddots & \dots & \dots & \dots & \\
 0 & \dots & \dots & & & & 1 & \dots & \dots & \\
 & \dots & \dots & & & & & \begin{bmatrix} g_k & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & g_k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & g_k \end{bmatrix} & \dots & 0 \\
 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 1 & 0 \\
 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & & \ddots & 0 \\
 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & & 1
 \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

Περιγραφή της κίνησης των μπλόκ d_k^A και d_k^B στον πίνακα D_k .

Τα μπλόκ d_k^A και d_k^B για $k = 1$ για το πρώτο βήμα δηλαδή καταλαμβάνουν την πάνω αριστερή γωνία και την κάτω δεξιά αντίστοιχα του πίνακα D_k . Στο επόμενο βήμα το d_k^A θα μετακινηθεί κατά δύο θέσεις πάνω στην διαγώνιο - προς τα κάτω - ενώ το μπλόκ d_k^B θα μετακινηθεί κατά m θέσεις στην διαγώνιο - προς τα πάνω -. Στην γενική λοιπόν περίπτωση τα d_k^A και d_k^B κινούνται στην διαγώνιο με αντίθετες φορές και με βήματα δύο και m αντίστοιχα. Εύκολα μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι μετά από κάποια τιμή του k τα δύο μπλόκ θα έρθουν σε επαφή⁵.

Η μέγιστη τιμή που μπορεί να πάρει το k είναι εκείνη η οποία για την αμέσως επόμενη τα δυο μπλόκ έρχονται σε επαφή. Να δούμε ποια είναι η μαθηματική έκφραση του μέγιστου k . Στην k επανάληψη το μπλόκ d_k^A θα έχει μετακινηθεί k φορές κατά μήκος της διαγωνίου και τα διαγώνια στοιχεία του θα καταλαμβάνουν τις θέσεις $(2k-1, 2k-1)$ και $(2k, 2k)$. Όμοια για το μπλόκ d_k^B τα διαγώνια στοιχεία του θα καταλαμβάνουν τις θέσεις του D_k από $((n-km+1), (n-km+1))$ μέχρι $(n-(k-1)m, n-(k-1)m)$. Για να μην έχουμε επαφή των δύο μπλόκ πρέπει

$$2k + mk \leq n \implies k \leq \frac{n}{2+m} \quad (3.9)$$

⁵Χρησιμοποιούμε τον όρο επαφή εννοώντας ότι τα μπλόκ θα πέσουν το ένα πάνω στο άλλο.

Καταλήγουμε λοιπών στο συμπέρασμα ότι το k παίρνει τιμές από ένα έως $\frac{n}{2+m}$ όπου το m η διάσταση του τετραγωνικού μπλόκ d_k^B .

$$k = 1 \dots \frac{n}{2+m} \quad (3.10)$$

3.2.3 Πρώτο βήμα του αλγορίθμου.

Υποθέτουμε ότι έχουμε ένα διμερές κβαντικό σύστημα $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ διάστασης n^2 όπου n η διάσταση των χώρων \mathcal{H}_1 και \mathcal{H}_2 . Έστω ότι θέλουμε να συμπίεσουμε ένα καταστατικό διάνυσμα $|\psi\rangle$ ή ισοδύναμα τον πίνακα συντελεστών $|A\rangle\rangle$ διαστάσεων $n \times n$. Θα δράσουμε από αριστερά⁶ με τον επαναληπτικό πίνακα D_k για $k = 1$ δηλαδή $(D_1 \otimes I) |A\rangle\rangle = |D_1 A\rangle\rangle$ και θα μελετήσουμε την σχέση των ιδιζουσών τιμών του $|A\rangle\rangle$ και του $|D_1 A\rangle\rangle$. Ισοδύναμα μπορούμε να μελετήσουμε τις ιδιοτιμές του $AA^\dagger = Tr_2(|A\rangle\rangle\langle\langle A|)$ και του $D_1 A (D_1 A)^\dagger = Tr_2(|D_1 A\rangle\rangle\langle\langle D_1 A|)$. Άς είναι $|D_1 A\rangle\rangle = |A_1\rangle\rangle$ η αντικατάσταση του $|A\rangle\rangle$ μετά το πρώτο βήμα.

$$D_1 A (D_1 A)^\dagger = D_1 A A^\dagger D_1^\dagger$$

Θα έχουμε $AA^\dagger = Tr_2(|A\rangle\rangle\langle\langle A|) = \rho$ και λόγω του ότι ο D_1 είναι πραγματικός διαγώνιος πίνακας θα ισχύει $D_1^\dagger = D_1$ άρα η παραπάνω σχέση γίνεται

$$D_1 A (D_1 A)^\dagger = D_1 \rho D_1 \quad (3.11)$$

Επίσης για τον επαναληπτικό πίνακα D_k γνωρίζουμε ότι μπορεί να γραφεί με την μορφή μπλόκ για $k = 1$ ως

$$D_1 = \begin{bmatrix} d_1^A & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix}$$

όπου C είναι ένα μπλόκ διαστάσεων $(n-2) \times (n-2)$ που περιέχει και το μπλόκ d_1^B . Δηλαδή

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & \\ \vdots & & 1 & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & d_1^B \end{bmatrix}$$

Γράφουμε τους ρ και $D_1 \rho D_1$ σε μορφή μπλόκ για να μπορέσουμε να συγκρίνουμε τις ιδιοτιμές τους με την βοήθεια των σχέσεων (3.2), (3.3) και (3.4), (3.5)

$$\rho = \begin{bmatrix} \rho_A^{11} & \rho_A^{12} \\ \rho_A^{21} & \rho_A^{22} \end{bmatrix}$$

⁶Η δράση μπορεί να γίνει και από δεξιά οδηγώντας μας στα ίδια αποτελέσματα.

$$D_1 \rho D_1 = \begin{bmatrix} d_1^A & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \rho_A^{11} & \rho_A^{12} \\ \rho_A^{21} & \rho_A^{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1^A & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} d_1^A \rho_A^{11} d_1^A & d_1^A \rho_A^{12} C \\ C \rho_A^{21} d_1^A & C \rho_A^{22} C \end{bmatrix}$$

Για να δούμε καλύτερα το μπλόκ $d_1^A \rho_A^{11} d_1^A$ του $D_1 \rho D_1$ θα αντικαταστήσουμε το δύο επί δύο μπλόκ d_1^A με την παρακάτω μορφή

$$d_1^A = \begin{bmatrix} f_1 & 0 \\ 0 & f_1 \end{bmatrix}$$

Τότε

$$d_1^A \rho_A^{11} d_1^A = \begin{bmatrix} f_1^2 \rho_{11} & f_1^2 \rho_{12} \\ f_1^2 \rho_{21} & f_1^2 \rho_{22} \end{bmatrix}$$

Όπου ρ_{ij} τα στοιχεία του πίνακα ρ .

Για απλοποίηση των εκφράσεων και ευκολότερη χρήση αυτών θα θέσουμε τον πίνακα $d_1^A \rho_A^{11} d_1^A = \tilde{\rho}_A^{11}$.

Γνωρίζουμε ότι ο πίνακας $D_1 \rho D_1$ είναι ερμητιανός αφού είναι της μορφής RR^T . Συνεπώς μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την ανισότητα (3.2). Θα έχουμε

$$\lambda_j(D_1 \rho D_1) \geq \lambda_j(\tilde{\rho}_A^{11}) \quad (3.12)$$

για $j = 1 \dots 2$.

Αλλά από την σχέση (2.23) για τις ιδιοτιμές πίνακα A και Ac όπου c σταθερά προκύπτει ότι

$$\lambda_j(\tilde{\rho}_A^{11}) = f_1^2 \lambda_j(\rho_A^{11}) \quad (3.13)$$

Κατά συνέπεια από τις (3.12) και (3.13) θα έχουμε

$$\lambda_j(D_1 \rho D_1) \geq f_1^2 \lambda_j(\rho_A^{11})$$

Ανάλογα ο πίνακας ρ είναι ερμητιανός άρα από την ανισότητα (3.2) παίρνουμε την παρακάτω σχέση

$$\lambda_j(\rho) \geq \lambda_j(\rho_A^{11}) \quad (3.14)$$

για $j = 1 \dots 2$.

Στόχος του πρώτου βήματος του αλγορίθμου είναι μετά την ολοκλήρωσή του οι δύο πρώτες ιδιάζουσες τιμές του πίνακα $D_1 \rho D_1$ να είναι μεγαλύτερες από τις αντίστοιχες του ρ . Για την επίτευξη του στόχου αυτού σημαντικός είναι ο ρόλος της σταθεράς f_1 . Από τις δύο παραπάνω σχέσεις προκύπτει ότι για τον σκοπό αυτό αρκεί η παρακάτω ανισότητα

$$f_1^2 \lambda_j(\rho_A^{11}) > \lambda_j(\rho)$$

Το μπλόκ ρ_A^{11} του πίνακα ρ είναι ερμητιανό άρα για τις ιδιοτιμές του γνωρίζουμε ότι είναι πραγματικοί μη αρνητικοί αριθμοί. Έτσι από την παραπάνω σχέση προκύπτει ότι

$$f_1^2 > \frac{\lambda_j(\rho)}{\lambda_j(\rho_A^{11})} \quad (3.15)$$

Από την λύση της παραπάνω ανίσωσης θα βρούμε το διάστημα μέσα στο οποίο πρέπει να παίρνει τιμές το f_1 ώστε οι δύο πρώτες ιδιάζουσες του $|D_1A\rangle\rangle = |A_1\rangle\rangle$ να είναι μεγαλύτερες από τις αντίστοιχες του $|A\rangle\rangle$. Αν

$$M_A = \max_{j=1,2} \left\{ \left| \sqrt{\frac{\lambda_j(\rho)}{\lambda_j(\rho_A^{11})}} \right| \right\}$$

τότε το f_1 μπορεί να παίρνει τιμές στα διαστήματα $(-\infty, -M_A)$ και $(M_A, +\infty)$. Να πούμε ότι από τα δύο διαστήματα $(-\infty, -M_A)$ και $(M_A, +\infty)$ ουσιαστικά μας ενδιαφέρει το ένα. Αυτό γιατί στην διαδικασία υπολογισμού των ιδιοτιμών του $|D_1A\rangle\rangle$ παρουσιάζεται το f_1^2 και όχι το f_1 άρα καμία σημασία αν είναι θετικό ή αρνητικό. Επιλέγουμε να δουλεύουμε στον θετικό ημιιάξωνα δηλαδή στο διάστημα $(M_A, +\infty)$.

Με την δράση του πίνακα D_1 στον πίνακα δεδομένων $|A\rangle\rangle$ οδηγηθήκαμε στον πίνακα $|D_1A\rangle\rangle$ που πλέον αποτελεί τον νέο πίνακα δεδομένων. Με την όλη παραπάνω διαδικασία δείξαμε ότι πετύχαμε μια αύξηση⁷ της τιμής των δυο πρώτων ιδιαζουσών τιμών του $|D_1A\rangle\rangle$ με την προϋπόθεση βέβαια ότι θα επιλεγεί το f_1 στο διάστημα $(M_A, +\infty)$. Αυτό ήταν άλλωστε και ένα μέρος του ζητούμενου. Αυτό που μένει να δείξουμε για το πρώτο βήμα της διαδικασίας είναι ότι οι ιδιάζουσες τιμές του $|A\rangle\rangle$ από $n-m+1$ έως n δηλαδή τα $\sigma_j(|A\rangle\rangle)$ για $j = n-m+1 \dots n$ είναι μεγαλύτερα από τα αντίστοιχα του $|D_1A\rangle\rangle$.

Θα ακολουθήσουμε παρόμοια διαδικασία με αυτή που ακολουθήθηκε για το f_1 , για τον περιορισμό του g_1 σε κάποιο διάστημα, καθώς και για την σχέση των m τελευταίων ιδιαζουσών τιμών του $|A\rangle\rangle$ και $|D_1A\rangle\rangle$.

Σε αυτή την προσπάθειά μας για τον περιορισμό του g_1 θα χωρίσουμε τον πίνακα D_1 σε μπλόκ ως εξής

$$D_1 = \begin{bmatrix} Y & 0 \\ 0 & d_1^B \end{bmatrix}$$

⁷Πετύχαμε μεν αύξηση των ιδιαζουσών τιμών χωρίς να ξέρουμε από πριν το μέτρο της αύξησης. Θα δούμε αργότερα ότι αν και μας ενδιαφέρει δεν μπορούμε να επεμβούμε στο μέτρο αυτό χωρίς κανένα περιορισμό.

όπου το μπλόκ Y έχει διαστάσεις $(n - m) \times (n - m)$ και περιέχει και το μπλόκ d_1^A . Σε μπλόκ ίδιου μεγέθους με αυτά του D_1 χωρίζουμε και τον ρ δηλαδή

$$\rho = \begin{bmatrix} \rho_B^{11} & \rho_B^{12} \\ \rho_B^{21} & \rho_B^{22} \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

όπου το ρ_B^{11} έχει διαστάσεις $(n - m) \times (n - m)$ και το ρ_B^{22} $m \times m$. Τότε

$$D_1 \rho D_1 = \begin{bmatrix} Y & 0 \\ 0 & d_1^B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \rho_B^{11} & \rho_B^{12} \\ \rho_B^{21} & \rho_B^{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y & 0 \\ 0 & d_1^B \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} Y \rho_B^{11} Y & Y \rho_B^{12} d_1^B \\ d_1^B \rho_B^{21} Y & d_1^B \rho_B^{22} d_1^B \end{bmatrix}$$

Θέτουμε $\tilde{\rho}_B^{22} = d_1^B \rho_B^{22} d_1^B$ και κάνοντας τις πράξεις θα καταλήξουμε στην εξής μορφή

$$\tilde{\rho}_B^{22} = g_1^2 \rho_B^{22} \quad (3.17)$$

Ο πίνακας ρ είναι ερμητιανός συνεπώς με την βοήθεια της σχέσης (3.5) θα έχω

$$\lambda_{m-j+1}(\rho_B^{22}) \geq \lambda_{n-j+1}(\rho) \quad (3.18)$$

για $j = 1 \dots m$.

Όμοια ο πίνακας $D_1 \rho D_1$ αφού είναι της μορφής RR^T είναι ερμητιανός άρα από την ανισότητα (3.5) θα έχω

$$\lambda_{m-j+1}(\tilde{\rho}_B^{22}) \geq \lambda_{n-j+1}(D_1 \rho D_1)$$

για $j = 1 \dots m$.

Αλλά από την σχέση (2.23) για τις ιδιοτιμές πίνακα A και cA όπου c σταθερά για τα λ του $\tilde{\rho}_B^{22}$ θα έχω

$$\lambda_{m-j+1}(\tilde{\rho}_B^{22}) = g_1^2(\lambda_{m-j+1}(\rho_B^{22}))$$

για $j = 1 \dots m$.

Από τις δύο τελευταίες σχέσεις προκύπτει ότι

$$g_1^2(\lambda_{m-j+1}(\rho_B^{22})) \geq \lambda_{n-j+1}(D_1 \rho D_1) \quad (3.19)$$

για $j = 1 \dots m$.

Να υπενθυμίσουμε ότι στο σημείο αυτό θέλουμε να κατευθύνουμε τις m τελευταίες ιδιάζουσες τιμές του $|D_1 A\rangle\rangle$ έτσι ώστε να είναι μικρότερες από τις αντίστοιχες του $|A\rangle\rangle$ ή ισοδύναμα τις m τελευταίες ιδιοτιμές του $D_1 \rho D_1$ έτσι ώστε να είναι μικρότερες από τις αντίστοιχες του ρ . Αυτό μπορεί να γίνει όπως φαίνεται από τις σχέσεις (3.18) και (3.19) αρκεί να επιλέξουμε τέτοιο g_1 ώστε να ισχύει η παρακάτω ανισότητα

$$g_1^2 (\lambda_{m-j+1} (\rho_B^{22})) < \lambda_{n-j+1} (\rho) \quad (3.20)$$

για $j = 1 \dots m$.

Ο πίνακας ρ_B^{22} είναι ερμητιανός συνεπώς γνωρίζουμε ότι οι ιδιοτιμές του είναι μη αρνητικοί πραγματικοί αριθμοί άρα

$$g_1^2 < \frac{\lambda_{n-j+1} (\rho)}{\lambda_{m-j+1} (\rho_B^{22})} \quad (3.21)$$

Από την λύση της παραπάνω ανίσωσης θα προκύψει το διάστημα μέσα στο οποίο μπορεί να παίρνει τιμές το g_1 ώστε οι m τελευταίες ιδιοτιμές του $D_1 \rho D_1$ να είναι μικρότερες από τις αντίστοιχες του ρ . Άν

$$M_B = \min_{j=1 \dots m} \left\{ \left| \sqrt{\frac{\lambda_{n-j+1} (\rho)}{\lambda_{m-j+1} (\rho_B^{22})}} \right| \right\}$$

τότε το διάστημα που θα μπορεί να παίρνει τιμές το g_1 θα είναι το $(-M_B, M_B)$. Λόγο του ότι το g_1 εμφανίζεται κατά την διάρκεια όλης της διαδικασίας υψωμένο στο τετράγωνο, οι αρνητικές τιμές δεν έχουν καμία σημασία και θεωρούμε σαν διάστημα τιμών το $(0, M_B)$.

Σχόλια για το πρώτο βήμα

- Να πούμε ότι απώτερος σκοπός της όλης διαδικασίας είναι να κάνει μεγάλες τις αρχικές ιδιάζουσες τιμές του πίνακα $|A\rangle\rangle$ και πολύ μικρές τις τελευταίες διατηρώντας ταυτόχρονα κάποιες ιδιότητες του. Με το πρώτο βήμα της διαδικασίας δείξαμε ότι με την κατάλληλη επιλογή των f_1 και g_1 καταφέρνουμε να μεγαλώσουμε τις δύο πρώτες και να μικραίνουν τις m τελευταίες.
- Κάποιος θα μπορούσε να πει ότι από την στιγμή που καταφέρνουμε την συγκεκριμένη αυτή μεταβολή στο μέτρο των ιδιάζουσών τιμών, να επιλέξουμε το μέγεθος του μπλόκ d_1^B έτσι ώστε να μικραίνουν το επιθυμητό πλήθος ιδιάζουσών τιμών με ένα βήμα, και να μην έχουμε επαναληπτική

διαδικασία. Αυτό όπως θα δούμε στην πορεία μπορεί να γίνει αλλά δίνοντας μας σχετικά μικρότερη συμπίεση από την επαναληπτική διαδικασία και χειρότερης ποιότητας⁸.

- Δεν έχουμε μιλήσει καθόλου για τις ιδιότητες του πίνακα που θέλουμε να διατηρήσουμε αν και αναφερόμαστε συχνά στο θέμα αυτό. Δεν σημαίνει ότι το αγνοούμε. Θα αναφερθούμε διεξοδικά σε αυτές αργότερα αφού θα συμβάλουν στον πλήρη καθορισμό των f_1 και g_1 . Μέχρι τώρα τα f_1 και g_1 μπορούν να παίρνουν τιμές σε ένα ολόκληρο διάστημα.

3.2.4 Τα επόμενα βήματα του αλγορίθμου.

Είδαμε στο πρώτο βήμα του αλγορίθμου ότι με την δράση του πίνακα D_1 μεταβάλαμε το μέτρο των δύο πρώτων και των m τελευταίων ιδιζουσών τιμών του $|A\rangle\rangle$. Τις μεν πρώτες δύο τις μεγάλωσαμε και τις m τελευταίες τις μικραίνουμε. Δείξαμε ότι για την μεταβολή αυτή των συγκεκριμένων ιδιζουσών τιμών ευθύνεται ο επαναληπτικός πίνακας D_1 και ποιο συγκεκριμένα τα μπλόκ αυτού d_1^A και d_1^B .

Δεύτερο βήμα του αλγορίθμου:

Ανάλογα με το πρώτο βήμα στόχος του δεύτερου βήματος είναι η αύξηση του μέτρου της τρίτης και τέταρτης ιδιζουσας τιμής του $|D_1A\rangle\rangle = |A_1\rangle\rangle$ και η μείωση των σ_{n-2m+1} έως και την σ_{n-m} . Αυτό επιτυγχάνεται με την δράση απο αριστερά στον πίνακα $|A_1\rangle\rangle$ του πίνακα D_2 δηλαδή $(D_2 \otimes I) |A_1\rangle\rangle = |D_2A_1\rangle\rangle = |D_2D_1A\rangle\rangle$. Αυτό θα είναι και το δεύτερο βήμα του αλγορίθμου. Το μπλόκ d_2^A θα είναι όμοιο με το d_1^A αλλά με διαφορετική τιμή εν γένει για την μεταβλητή f_2 . Στο βήμα αυτό το μπλόκ d_2^A θα βρίσκεται δύο θέσεις προς τα κάτω από το d_1^A και στα δύο πρώτα στοιχεία της διαγωνίου του D_2 θα υπάρχουν μονάδες. Όσο για το μπλόκ d_2^B θα βρίσκεται m θέσεις πιο πάνω από εκεί που βρισκόταν το d_1^B στο πρώτο βήμα. Οι θέσεις στην διαγώνιο από $n-m+1$ έως n του D_2 θα καλυφθούν από μονάδες. Να τονίσουμε ότι στο δεύτερο βήμα του αλγορίθμου την θέση του πίνακα $|A\rangle\rangle$ έχει πάρει πλέον ο πίνακας $|A_1\rangle\rangle$. Ο $|A\rangle\rangle$ παύει να υπάρχει για τον αλγόριθμο μετά το πρώτο βήμα.

κ-οστό βήμα του αλγορίθμου:

Στο κ-οστό βήμα ο πίνακας $|A\rangle\rangle$ θα έχει αντικατασταθεί από τον $|D_{k-1}D_{k-2} \dots D_1A\rangle\rangle = |$

⁸Γνωρίζουμε ότι κατά την συμπίεση ένα πολύ μικρό μέρος της πληροφορίας χάνεται. Στην περίπτωση αυτή το μέρος που χάνεται είναι αρκετά μεγαλύτερο από αυτό που χάνετε στην επαναληπτική διαδικασία.

$A_{k-1}\rangle\rangle$. Σε αυτόν θα δράσουμε από αριστερά με τον πίνακα D_k δηλαδή $(D_k \otimes I) | A_{k-1}\rangle\rangle = | D_k A_{k-1}\rangle\rangle = | A_k\rangle\rangle$. Το μπλόκ d_k^A του D_k θα καταλαμβάνει τις θέσεις $(D_k)_{ij}$ για $i = 2k-1 \dots 2k$ και $j = 2k-1 \dots 2k$. Συνεπώς η συνεισφορά του d_k^A είναι η αύξηση της τιμής των ιδιζουσών τιμών σ_{2k-1} και σ_{2k} του πίνακα $| A_{k-1}\rangle\rangle$. Ανάλογα το μπλόκ d_k^B θα καταλαμβάνει τις θέσεις $(D_k)_{ij}$ για $i = (n - (k-1)m + 1) \dots (n - km + 1)$ και $j = (n - (k-1)m + 1) \dots (n - km + 1)$. Η δράση του d_k^B στο βήμα αυτό θα προκαλέσει την μείωση των $\sigma_{(n-(k-1)m+1)}$ μέχρι και την $\sigma_{(n-km+1)}$ του πίνακα $| A_{k-1}\rangle\rangle$.

Συμπέρασμα:

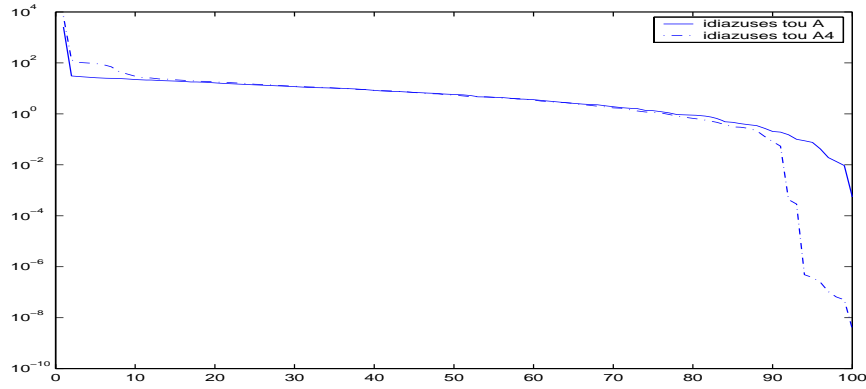
Μετά από k βήματα του αλγορίθμου έχουμε καταφέρει να μεγαλώσουμε τις $2k$ πρώτες ιδιζουσες τιμές του πίνακα $| A\rangle\rangle$ και ταυτόχρονα να μικρानουμε τις mk τελευταίες. Το μέγεθος της αύξησης ή αντίστοιχα της μείωσης των ιδιζουσών εξαρτάται άμεσα από την επιλογή των f_k και g_k στα αντίστοιχα διαστήματα τιμών τους και έμμεσα από τις ιδιότητες του αρχικού πίνακα συντελεστών $| A\rangle\rangle$ που θέλουμε να διατηρήσουμε και το μέγεθος της συμπίεσης που απαιτούμε να έχουμε.

Παράδειγμα:

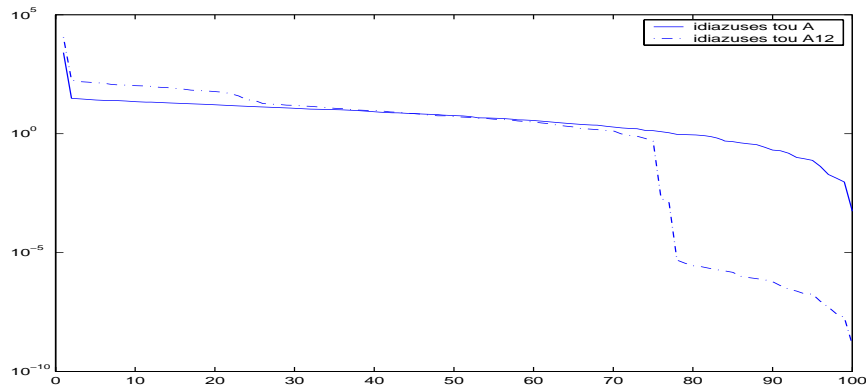
Να δούμε τον παραπάνω αλγόριθμο που περιγράψαμε στην πράξη. Θα εφαρμόσουμε τον εν λόγω αλγόριθμο σε έναν τυχαίο πίνακα $| A\rangle\rangle$ διαστάσεων 100×100 . Η επιλογή των διαστάσεων έγινε έτσι ώστε να μπορέσουμε να δούμε εύκολα οπτικά τις μεταβολές των ιδιζουσών τιμών και ταυτόχρονα να μην είναι τόσο μικρός ο πίνακας ώστε να μην υπάρχει ανάγκη συμπίεσης.

Οι διαστάσεις του μπλόκ d_k^B επιλέχθηκαν να είναι 2×2 . Η επιλογή αυτή έγινε λόγω του ότι για $m = 2$ έχουμε την πιο απλή περίπτωση. Λόγω του ότι δεν έχουμε αναφερθεί στο πως καθορίζουμε τα f_k και g_k στο συγκεκριμένο παράδειγμα θα πάρουμε $f_k = 3$ και $g_k = 0.001$ για όλα τα βήματα της διαδικασίας.

Στο σχήμα (3.1) αποτυπώνονται οι ιδιζουσες τιμές του $| A\rangle\rangle$ και του $| A4\rangle\rangle$ που $| A4\rangle\rangle$ έχουμε συμβολίσει τον πίνακα που προκύπτει στο τέταρτο βήμα δηλαδή $| A4\rangle\rangle = | D_4 D_3 D_2 D_1 A\rangle\rangle$. Παρατηρούμε ότι έχουν μεταβληθεί προς τα πάνω οι οκτώ πρώτες ιδιζουσες τιμές και προς τα κάτω οι οκτώ τελευταίες. Άλλωστε αυτό θα έπρεπε να περιμένουμε αφού το μπλόκ d_k^A για $k = 1 \dots 4$ έχει κινηθεί κατά μήκος της διαγωνίου μέχρι και τις θέσεις $(D)_{ij}$ για $i = 7 \dots 8$ και $j = 7 \dots 8$ και έχει επέμβει στο μέτρο των οκτώ πρώτων ιδιζουσών τιμών. Με όμοιο τρόπο κινείται και το μπλόκ d_k^B για $k = 1 \dots 4$ και επηρεάζει τις οκτώ τελευταίες ιδιζουσες τιμές.



Σχήμα 3.1: Ιδιάζουσες τιμές πίνακα $|A\rangle\rangle$ και $|A_4\rangle\rangle$.



Σχήμα 3.2: Ιδιάζουσες τιμές πίνακα $|A\rangle\rangle$ και $|A_{12}\rangle\rangle$.

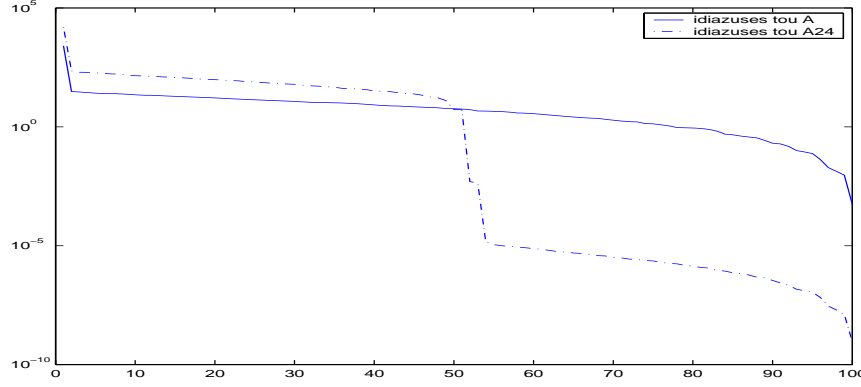
Στο σχήμα (3.2) έχει προχωρήσει η διαδικασία μέχρι και το δωδέκατο βήμα και βλέπουμε την αύξηση και μείωση αντίστοιχα των εικοσιτεσσάρων περίπου⁹ πρώτων και τελευταίων ιδιάζουσών τιμών αντίστοιχα.

Στο σχήμα (3.3) έχει ολοκληρωθεί η επαναληπτική διαδικασία και το αποτέλεσμα είναι αύξηση των πενήντα πρώτων και η μείωση των πενήντα τελευταίων ιδιάζουσών τιμών.

Διευκρινήσεις:

- Κάποιος θα μπορούσε να πει ότι αν ο πίνακας δεδομένων έχει περιττή διάσταση τότε στο τελευταίο βήμα της διαδικασίας μία ιδιάζουσα τιμή

⁹Το περίπου αναφέρεται στο σχήμα αφού θεωρητικά δείξαμε ότι ακριβώς οι εικοσιτέσσερις θα μεταβληθούν, απλά στο σχήμα είναι δύσκολο να δούμε ακριβώς και τις εικοσιτέσσερις.



Σχήμα 3.3: Ιδιάζουσες τιμές πίνακα $|A\rangle\rangle$ και $|A_{25}\rangle\rangle$.

θα έμενε αμετάβλητη. Και βέβαια αυτό μπορεί να συμβεί χωρίς όμως να σημαίνει ότι ο αλγόριθμος δεν λειτουργεί αφού έχουμε μεταβάλει το μέτρο όλων των υπολοίπων ιδιάζουσών τιμών.

- Εύκολα μπορεί να προκληθεί σύγχυση για το πλήθος των βημάτων. Από τον τύπο (3.10) βλέπουμε ότι το k δηλαδή ο αριθμός που μας φανερώνει τα βήματα παίρνει τιμές από ένα έως $\frac{n}{2+m}$.

Συνεπώς αν θέλουμε να μιλάμε για πραγματικά βήματα του αλγορίθμου οι τιμές που θα παίρνει το k θα καθορίζονται από τους παρακάτω τύπους ανάλογα αν ο αριθμός $(2+m)$ διαιρεί τον n ή όχι.

$$k = 1, \dots, \frac{n}{2+m} \quad (3.22)$$

όταν ο $(2+m)$ διαιρεί τον n και

$$k = 1, \dots, \left\lceil \frac{n}{2+m} \right\rceil \quad (3.23)$$

όταν ο $(2+m)$ δεν διαιρεί τον n .

Καθορισμός του m :

Η επιλογή του m εξαρτάται από δύο αρκετά σημαντικούς παράγοντες. Το μέγεθος της συμπίεσης που θέλουμε να επιτύχουμε είναι ο ένας και το πόσο θέλουμε να διατηρήσουμε τις κάποιες ιδιότητες του αρχικού πίνακα είναι ο άλλος. Ουσιαστικά οι δύο παραπάνω παράγοντες είναι αλληλένδετοι και μεταβολή

στον ένα προκαλεί μεταβολή και στον άλλον. Αρχικά θα μιλήσουμε για καθορισμό του m ανάλογα με το μέγεθος της συμπίεσης που επιθυμούμε και θα δούμε στην πορεία ότι έμμεσα εμπλέκεται και ο δεύτερος παράγοντας.

Έστω ότι θέλουμε να συμπίεσουμε ένα τυχαίο πίνακα συντελεστών $|A\rangle\rangle$ διαστάσεων $n \times n$ και βρισκόμαστε στο σημείο που πρέπει να καθορίσουμε το m . Υποθέτουμε επίσης ότι θέλουμε να χρησιμοποιήσουμε στην συμπίεση τις s^{10} πρώτες ιδιάζουσες τιμές. Σκοπός λοιπόν είναι να επιλέξουμε τέτοιο m ώστε να μεγαλώσουμε τις s πρώτες και να μικραίνουμε τις $n - s$ τελευταίες. Για να επιτύχουμε την αύξηση των s πρώτων ιδιάζουσών τιμών πρέπει το μπλόκ d_k^A στην τελευταία επανάληψη να δράσει στις σ_{s-1} και σ_s , πράγμα που σημαίνει ότι έχει δράσει και σε όλες τις προηγούμενες. Αλλά το μπλόκ d_k^A κινείται με βήμα δύο άρα όταν θα δρά στις σ_{s-1} και σ_s θα βρίσκεται ο αλγόριθμος στην $\frac{s}{2}$ επανάληψη. Όμως για να μην έχουμε επαφή των d_k^A και d_k^B θα πρέπει να ισχύει

$$2\frac{s}{2} + m\frac{s}{2} = n$$

Από την λύση ως προς m της παραπάνω εξίσωσης προκύπτει η τιμή του m για να συμπίεσω τον πίνακα συντελεστών $|A\rangle\rangle$ χρησιμοποιώντας τις s πρώτες ιδιάζουσες τιμές. Συνεπώς

$$m = \frac{2(n-s)}{s} \quad (3.24)$$

Σημείωση:

Θα μπορούσε κάποιος να πει ότι θα επιλέξουμε το μικρότερο s δηλαδή δύο ώστε να έχουμε την μεγαλύτερη συμπίεση, και να χρησιμοποιήσουμε μόνο τις δύο πρώτες ιδιάζουσες τιμές. Αυτό εν γένει δεν μπορεί να γίνει γιατί τότε δεν μπορούμε να διατηρήσουμε τις όποιες ιδιότητες του αρχικού πίνακα. Δεν θα αναφερθούμε περισσότερο σε αυτό αφού θα το μελετήσουμε εκτενέστερα αργότερα.

3.2.5 Καθορισμός των f_k και g_k για την διαστατική συμπίεση.

Διατήρηση του ίχνους του $\rho = AA^\dagger$:

Μία από τις ιδιότητες που πρέπει να διατηρήσουμε είναι το ίχνος του πίνακα $AA^\dagger = \text{Tr}_2(|A\rangle\rangle\langle\langle A|)$ που είναι ίσο με την μονάδα. Αυτό σημαίνει ότι σε κάθε βήμα της διαδικασίας πρέπει ο πίνακας συντελεστών που προκύπτει πολλαπλασιαζόμενος με τον συζυγοανάστροφό του να έχει ίχνος ίσο με ένα.

¹⁰ Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι το s είναι άρτιος για αποφυγή δεκαδικών αριθμών κατά την διαίρεσή του με το δύο.

Να δούμε πως μπορεί να γίνει αυτό για το πρώτο βήμα. Με την διεκπερέωση του πρώτου βήματος ο πίνακας που προκύπτει θα είναι ο $|D_1 A\rangle\rangle$ συνεπώς αυτό που θέλουμε είναι το ίχνος του $D_1 A A^\dagger D_1 = Tr_2(|D_1 A\rangle\rangle\langle\langle D_1 A|)$ να είναι ίσο με ένα. Η διαγώνιος του $D_1 A A^\dagger D_1$ θα είναι της μορφής

$$diag(D_1 A A^\dagger D_1) = (f_1^2 \rho_{11}, f_1^2 \rho_{22}, \rho_{33}, \dots, g_1^2 \rho_{n-m}, \dots, g_1^2 \rho_{nn})$$

όπου ρ_{ij} τα στοιχεία του πίνακα $\rho = A A^\dagger$. Συνεπώς το ίχνος του $D_1 \rho D_1$ θα δίνετε από τον παρακάτω τύπο

$$Tr(D_1 \rho D_1) = f_1^2 \sum_{i=1}^2 \rho_{ii} + \sum_{i=3}^{m-1} \rho_{ii} + g_1^2 \sum_{i=m}^n \rho_{ii}$$

Καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι για την διατήρηση του ίχνους του $A A^\dagger$ αρκεί να ισχύει η ισότητα

$$f_1^2 \sum_{i=1}^2 \rho_{ii} + \sum_{i=3}^{m-1} \rho_{ii} + g_1^2 \sum_{i=m}^n \rho_{ii} = 1 \quad (3.25)$$

Από την παραπάνω σχέση φαίνεται ότι μπορεί να υπάρχουν πολλά ζεύγη f_1 και g_1 που να είναι κατάλληλα για την διατήρηση του ίχνους στο πρώτο βήμα. Σίγουρα κάποια από αυτά αποκλείονται από τις σχέσεις (3.15) (3.21) που απαιτούν από τα f_1 και g_1 να βρίσκονται σε ένα συγκεκριμένο διάστημα τιμών.

Διατήρηση του ίχνους του $\rho^2 = (A A^\dagger)^2$:

Μια δεύτερη ιδιότητα που θέλουμε να διατηρήσουμε είναι το ίχνος του $(A^\dagger A)^2$. Ας δούμε αρχικά πως μπορεί να γίνει αυτό για το πρώτο βήμα. Ο πίνακας που προκύπτει μετά το πρώτο βήμα είναι ο $|D_1 A\rangle\rangle$. Άρα ο αντίστοιχος του $(A A^\dagger)^2$ θα είναι ο $(D_1 A A^\dagger D_1)^2 = (Tr_2(|D_1 A\rangle\rangle\langle\langle D_1 A|))^2 = \rho'^2$. Σκοπός μας είναι να επιλέξουμε κατάλληλα f_1 και g_1 έτσι ώστε τα ίχνη των δύο τελευταίων πινάκων να είναι ίσα. Το ίχνος του $(\rho')^2$ θα δίνετε από τον παρακάτω τύπο

$$Tr((\rho')^2) = f_1^4 \sum_{i,j=1}^2 \rho_{ij} \rho_{ji} + g_1^4 \sum_{i,j=m}^n \rho_{ij} \rho_{ji} + \sum_{i,j=3}^{m-1} \rho_{ij} \rho_{ji}$$

Συνεπώς για την διατήρηση του ίχνους του $(\rho)^2$ δηλαδή την ισότητά του με το ίχνος του $(\rho')^2$ αρκεί να ισχύει η παρακάτω σχέση

$$f_1^4 \sum_{i,j=1}^2 \rho_{ij} \rho_{ji} + g_1^4 \sum_{i,j=m}^n \rho_{ij} \rho_{ji} + \sum_{i,j=3}^{m-1} \rho_{ij} \rho_{ji} = Tr(\rho^2) \quad (3.26)$$

Η παραπάνω σχέση είναι μια συνάρτηση των f_1 και g_1 . Με επιλογή τέτοιων f_1 και g_1 ώστε να ικανοποιούν την παραπάνω σχέση καταφέρνουμε να διατηρήσουμε το ίχνος του πίνακα $(\rho')^2$ ίσο με το ίχνος του ρ^2 . Είναι φανερό ότι θα υπάρχουν πολλά ζεύγη f_1 και g_1 που να ικανοποιούν την (3.26). Σίγουρα κάποια από αυτά αποκλείονται από τις σχέσεις (3.15) (3.21) που απαιτούν από τα f_1 και g_1 να βρίσκονται σε ένα συγκεκριμένο διάστημα τιμών.

Παρατηρήσεις:

- Για να διατηρήσουμε ταυτόχρονα και το ίχνος του $\rho' = D_1 A A^\dagger D_1$ ίσο με την μονάδα και το ίχνος του $\rho'^2 = (D_1 A A^\dagger D_1)^2$ ίσο με το ίχνος του ρ^2 πρέπει να επιλέξουμε εκείνα τα f_1 και g_1 που ικανοποιούν και την (3.25) και την (3.26) και ταυτόχρονα να ανήκουν στα διαστήματα που μας καθορίζουν οι σχέσεις (3.15) και (3.21). Όπως θα δούμε στην πορεία δεν υπάρχουν f_1 και g_1 που να ικανοποιούν και την (3.25) και την (3.26). Υπάρχουν όμως πολλά ζεύγη που ικανοποιούν την μία από τις δύο σχέσεις και ταυτόχρονα είναι πολύ κοντά στο να ικανοποιήσουν και την άλλη. Από εκείνα τα ζεύγη θα πρέπει να επιλέξουμε τα καλύτερα πράγμα στο οποίο θα μας βοηθήσει το θεώρημα της κατίσχυσης (Majorization).
- Με ανάλογο τρόπο καθορίζονται τα διαστήματα τιμών για τα ζεύγη f_k και g_k για τα υπόλοιπα βήματα. Να σημειώσουμε επίσης ότι λόγω του ότι οι σχέσεις (3.25) και (3.26) δεν έχουν εν γένει κοινές λύσεις επιλέγουμε ποια από τις δύο θέλουμε να κρατήσουμε απόλυτα σταθερή, ενώ ταυτόχρονα προσεγγίζουμε τις λύσεις της άλλης με την κατάλληλη επιλογή των ζευγών f_k και g_k .

3.2.6 Επιλογή των ιδανικών ζευγών (f_k, g_k)

Μέχρι στιγμής μιλήσαμε για το πως καθορίζουμε ένα διάστημα τιμών μέσα από το οποίο θα επιλέξουμε τα f_k και g_k , για το κάθε βήμα της διαδικασίας. Να τονίσουμε ότι για τα ζεύγη των f_k και g_k σε κάθε βήμα έχουμε πολλές επιλογές και πρέπει πρώτον να καθορίσουμε ποια θα θεωρούμε καλά ζεύγη και δεύτερον πως θα γίνει η επιλογή αυτή.

Δείξαμε στην προηγούμενη παράγραφο πως διατηρούμε το ίχνος του πίνακα πυκνότητας ρ και ρ^2 στην περίπτωση της διαστατικής συμπίεσης. Δεν μελετήσαμε τι μπορεί να συμβαίνει με τα μερικά ίχνη των διαφόρων ρ' και ρ'^2 που προκύπτουν σε κάθε βήμα της διαδικασίας. Απαίτησή μας είναι να μην διατηρήσουμε μόνο το συνολικό ίχνος τους αλλά με την κατάλληλη επιλογή των ζευγών f_k και g_k να διατηρήσουμε και τα μερικά ίχνη αυτών. Έτσι καθορίζουμε ποια ζεύγη είναι για την συγκεκριμένη περίπτωση τα ιδανικά - εκείνα που διατηρούν

και τα μερικά ίχνη -. Αυτό μαθηματικά εκφράζεται από τις παρακάτω ανισότητες που δεν είναι τίποτα παραπάνω από το θεώρημα της κατίσχυσης σχέση (2.25) [20] (Majorization) για την περίπτωση των μερικών ιχνών.

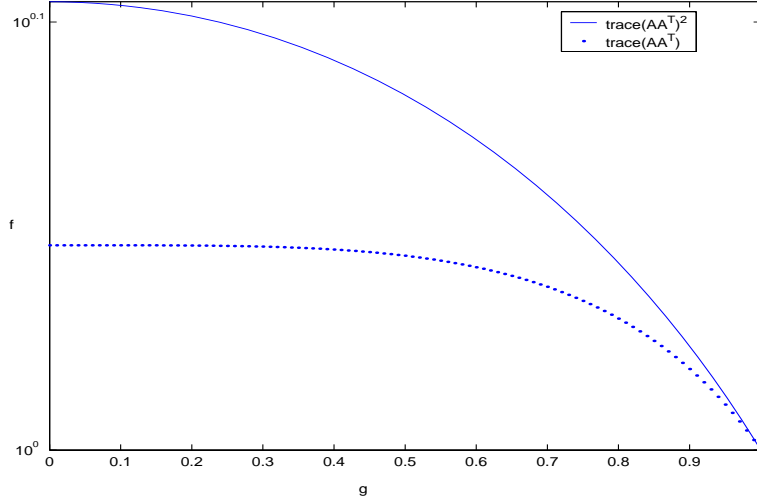
$$\begin{aligned}\rho_{11}^\downarrow &\leq \rho'_{11}^\downarrow \\ \rho_{11}^\downarrow + \rho_{22}^\downarrow &\leq \rho'_{11}^\downarrow + \rho'_{22}^\downarrow \\ \rho_{11}^\downarrow + \rho_{22}^\downarrow + \rho_{33}^\downarrow &\leq \rho'_{11}^\downarrow + \rho'_{22}^\downarrow + \rho'_{33}^\downarrow \\ &\vdots \\ \rho_{11}^\downarrow + \rho_{22}^\downarrow + \dots + \rho_{nn}^\downarrow &\leq \rho'_{11}^\downarrow + \rho'_{22}^\downarrow + \dots + \rho'_{nn}^\downarrow\end{aligned}$$

όπου ρ_{ii} τα διαγώνια στοιχεία του πίνακα ρ και ρ'_{ii} τα στοιχεία του πίνακα ρ' στο k βήμα της διαδικασίας. Να πούμε ότι αφού τα f_k και g_k ανήκουν σε ολόκληρο διάστημα θα έχουμε άπειρα ρ' . Όμως για υπολογιστικούς λόγους και χωρίς βλάβη της γενικότητας επιλέγουμε τα f_k και g_k από το διάστημα τιμών με κάποιο βήμα. Όσο μικρότερο το βήμα τόσο περισσότερα τα ρ' που προκύπτουν. Από το πλήθος αυτό των ρ' θα πρέπει να επιλέξουμε τον ιδανικότερο. Τα κριτήρια για την επιλογή δεν θα είναι τίποτα άλλο παρά τα μερικά ίχνη των πινάκων ρ' στο κάθε βήμα. Με την επιλογή των f_k και g_k που να ικανοποιούν την πυραμίδα ξέρουμε ότι και ο πίνακας ρ' και όλοι οι υποπίνακές του είναι οι ιδανικότεροι για την προσέγγιση του ρ . Αυτό γιατί τα μερικά και ταυτόχρονα το ολικό ίχνος μας το εξασφαλίζει το θεώρημα της κατίσχυσης (Majorization) ενώ σε επίπεδο πινάκων μας καλύπτει το θεώρημα προσέγγισης χαμηλής τάξης (Low-Rank Approximations).

Σχόλια

- Στο σημείο αυτό πρέπει να σημειώσουμε στην τελευταία σχέση της παραπάνω πυραμίδας επικρατεί η ισότητα και όχι η ανισότητα με την προϋπόθεση ότι έχουμε επιλέξει να κρατήσω απόλυτα σταθερό το ίχνος του ρ και όχι του ρ^2 .
- Στο πρόβλημα της κβαντικής συμπίεσης που μελετάμε έχουμε εξηγήσει ότι θα κρατήσουμε σταθερό το ίχνος του ρ^2 και με την κατάλληλη επιλογή των f_k και g_k θα προσεγγίσουμε το ίχνος του ρ . Για να το επιτύχουμε αυτό τα f_k και g_k πρέπει να βρίσκονται στην συνεχή καμπύλη του σχήματος¹¹(3.4). Με την συνεχή καμπύλη εκφράζεται η συνάρτηση (3.25) και με την διακεκομμένη η (3.26).

¹¹ Αυτή είναι η μορφή των εξισώσεων (3.25) και (3.26) και λόγο του ότι έχουμε πίνακες με ίχνος ένα η μεταβολή των γραφικών παραστάσεων από πίνακα σε πίνακα θα είναι μηδαμινή. Στο συγκεκριμένο παράδειγμα έχει επιλεγεί πίνακας τυχαίος 100×100 .



Σχήμα 3.4: Συναρτήσεις ίχνους ρ και ρ^2 .

Για εκείνα τα f_k και g_k που ανήκουν στην συνεχή καμπύλη δημιουργώ τους πίνακες ρ'_k . Λόγο της επιλογής αυτής των f_k και g_k το ίχνος των ρ'_k θα είναι μεγαλύτερο της μονάδας. Αυτό γιατί για συγκεκριμένο g_k το f_k είναι μεγαλύτερο από εκείνο που αντιστοιχεί στην καμπύλη του ίχνους. Δηλαδή αν για το πρώτο βήμα της διαδικασίας $\rho_1'^t$ με $t = 1 \dots z$ οι πίνακες από τους οποίους πρέπει να επιλέξω η επιλογή πρέπει να ακολουθεί τον παρακάτω τύπο.

$$\rho_1'^{t_0} \prec \rho_1'^t \quad t = 1 \dots z$$

όπου $\rho_1'^{t_0}$ ο ιδανικότερος πίνακας. Ένας εύκολος τρόπος να δούμε ποιος πίνακας κατισχύει τον άλλο είναι οι καμπύλες Lorenz που περιγράφονται στην επόμενη παράγραφο.

3.2.7 Καμπύλες Lorenz

Οι εν λόγω καμπύλες αναπτύχθηκαν από τον μαθηματικό Lorenz από όπου και πήραν ο ονομά τους, με σκοπό την σύγκριση κατανομών βλέπε [19].

Στο πρόβλημα της κβαντικής συμπίεσης και στο σημείο της κατάλληλης επιλογής των f_k και g_k στο k βήμα έτσι ώστε να έχουμε διατήρηση και του συνολικού ίχνους και των μερικών ίχνων, προκύπτει ένα σύνολο από πίνακες που πρέπει να επιλέξουμε τον ιδανικότερο. Για την επιλογή αυτή συγκρίνουμε τα μερικά και τα ολικά ίχνη τους. Αλλά το συνολικό ίχνος των πινάκων αυτών είναι ίσο με την μονάδα¹² και στην ουσία έχουμε να συγκρίνουμε κατανομές.

¹²Ουσιαστικά στην διάρκεια της διαδικασίας το ίχνος του AA^\dagger δεν είναι ακριβώς μονάδα

Τα στοιχεία της διαγωνίου των πινάκων αποτελούν τις κατανομές αυτών.

Για την κατασκευή της καμπύλης για κάθε πίνακα εργαζόμαστε ως εξής: Διατάσσουμε τα διαγώνια στοιχεία του πίνακα από το μικρότερο στο μεγαλύτερο και στην συνέχεια απεικονίζουμε τα σημεία T_s με

$$T_s = \left(\sum_{i=1}^s \frac{a_{ii}}{n}, \frac{s}{n} \right) \quad (3.27)$$

όπου $s = 1 \dots n$. Να υπενθυμίσουμε ότι n η διάσταση του πίνακα και a_{ii} τα διατεταγμένα πλέον διαγώνια στοιχεία του. Να πούμε ότι το γράφημα των καμπυλών Lorenz θα βρίσκεται στο χώρο του \mathbb{R}^2 και στο χωρίο που περικλείεται από τις ευθείες $x = 0$ $x = 1$ και $y = 0$ $y = 1$ η με άλλα λόγια στο μοναδιαίο τετράγωνο. Η ομοιόμορφη κατανομή θα αντιπροσωπεύεται στο επίπεδο από την ευθεία $y = x$ όπως άλλωστε μπορούμε να συμπεράνουμε από τον τύπο (3.27). Όλες οι υπόλοιπες κατανομές θα βρίσκονται κάτω¹³ από αυτήν λόγω της διάταξης που κάναμε στα στοιχεία της διαγωνίου του πίνακα της αντίστοιχης κατανομής από το μικρότερο στο μεγαλύτερο.

Για την σύγκριση κατανομών ελέγχουμε τις αντίστοιχες καμπύλες Lorenz. Όταν αυτές δεν τέμνονται και λόγω του ότι βρίσκονται κάτω από την ευθεία $y = x$ με άκρα τα σημεία $(0, 0)$ και $(1, 1)$ κάποια θα βρίσκετε πάνω από την άλλη. Αυτή που βρίσκεται πάνω θα είναι και αυτή που κατischύει. Τότε μπορούμε να μιλήσουμε για διατήρηση του ολικού και των μερικών αθροισμάτων της κατανομής ενώ στο αντίστοιχο πρόβλημα πινάκων για την διατήρηση του ολικού και των μερικών ιχνών.

Όμως υπάρχει περίπτωση να διατηρείται το συνολικό ίχνος και να μην διατηρούνται τα μερικά ίχνη δηλαδή να μην ικανοποιείται το κριτήριο της κατίσχυσης. Τότε έχουμε τομή των καμπυλών Lorenz.

Παράδειγμα:

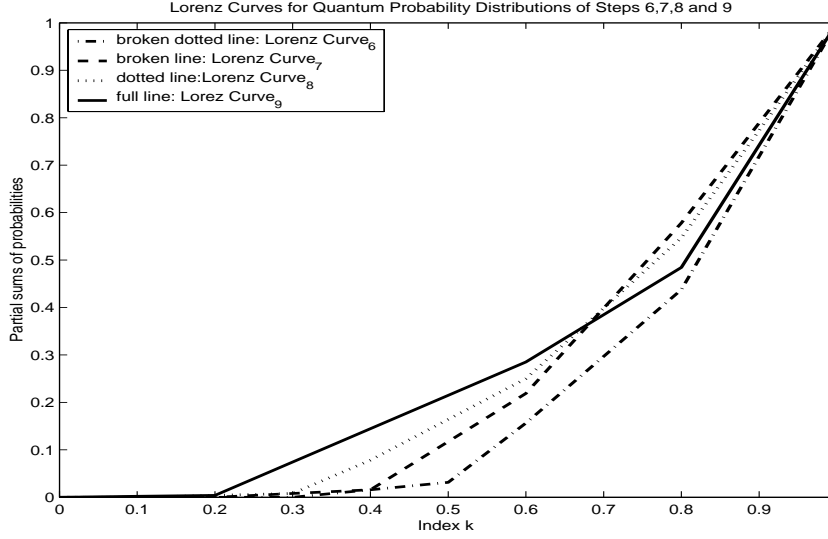
Έστω οι δύο παρακάτω κατανομές [21]

$$\left(\frac{1}{128}, \frac{1}{128}, \frac{13}{128}, \frac{13}{128}, \frac{23}{128}, \frac{23}{128}, \frac{27}{128}, \frac{27}{128} \right) \\ \left(\frac{1}{256}, \frac{1}{256}, \frac{1}{256}, \frac{1}{256}, \frac{18}{256}, \frac{22}{256}, \frac{22}{256}, \frac{38}{256}, \frac{38}{256}, \frac{58}{256} \right)$$

Οι καμπύλες Lorenz για τις παραπάνω είναι οι η επτά και η οκτώ αντίστοιχα του σχήματος (3.5). Πραγματικά αν δημιουργήσουμε τα μερικά αθροίσματα δεν ικανοποιείται το κριτήριο της κατίσχυσης ενώ το συνολικό άθροισμα διατηρείτε στην μονάδα, πράγμα που δικαιολογεί και την τομή των δύο καμπυλών.

αλλά πάρα πολύ κοντά σε αυτήν και για την κατανομή το θεωρούμε ίσο με ένα

¹³ Στην βιβλιογραφία αρκετές είναι οι φορές που η διάταξη των στοιχείων της κατανομής γίνεται από το μεγαλύτερο στο μικρότερο οπότε και οι αντίστοιχες καμπύλες βρίσκονται πάνω από αυτήν της ομοιόμορφης.



Σχήμα 3.5: Καμπύλες Lorenz

3.3 Εφαρμογή

Αφού ολοκληρώθηκε η περιγραφή της όλης διαδικασίας για την συμπίεση κβαντικών διμερών συστημάτων σειρά έχει η υλοποίηση της σε ένα συγκεκριμένο παράδειγμα ώστε να δούμε και στην πράξη τα θεωρητικά αναμενόμενα αποτελέσματα που περιγράψαμε.

Να τονίσουμε για άλλη μια φορά ότι η εν λόγω διαδικασία συμπίεσης μελετήθηκε με σκοπό την συμπίεση διμερών κβαντικών συστημάτων για αυτό και οι ποσότητες που επιλέξαμε να διατηρήσουμε ήταν το ίχνος του μειωμένου πίνακα πυκνότητας ρ του συστήματος και το ίχνος του ρ^2 . Η διατήρηση του ίχνους του ρ θα εξασφαλίζει την κατανομή και το ίχνος του ρ^2 θα εξασφαλίζει τον εναγκαλισμό (entanglement).

Για να είναι το παράδειγμα ποιο κατανοητό και εύκολα συγκρίσιμο το αποτέλεσμα μετά την διαδικασία συμπίεσης, επιλέγουμε να συμπίεσουμε μια εικόνα και ποιο συγκεκριμένα του E.Schrodinger.

Η εν λόγω εικόνα περιγράφεται από έναν πίνακα διαστάσεων 273×180 τα στοιχεία του οποίου είναι πραγματικοί αριθμοί από το 0 έως και το 255 και αντιπροσωπεύουν 255 διαφορετικές αποχρώσεις ανάμεσα στο άσπρο και το μαύρο.

Θα εφαρμόσουμε την διαδικασία βήμα προς βήμα. Για να γίνει όμως αυτό θα πρέπει ο πίνακας που αντιπροσωπεύει την εικόνα έστω P να έχει τέτοιες ιδιότητες ώστε ο πίνακας PP^\dagger να είναι πίνακας πυκνότητας. Για να γίνει αυτό αρκεί να διαιρέσω τον P με την ρίζα του αθροίσματος των τετραγώνων των

ιδιζουσών τιμών του. Έστω \bar{P} ο πίνακας που προκύπτει. Τότε

$$\bar{P} = P \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^{180} \sigma_i^2}} \quad (3.28)$$

Συνεπώς ο πίνακας \bar{P} έχει τις απαιτούμενες ιδιότητες δηλαδή ο PP^\dagger είναι πίνακας πυκνότητας και το ίχνος του είναι ίσο με την μονάδα. Ο πίνακας λοιπόν που θέλω να συμπίσω και στον οποίο θα εφαρμόσω τον αλγόριθμο θα είναι ο \bar{P} και όχι ο P . Επιλέγουμε την πιο απλή περίπτωση δηλαδή οι διαστάσεις του μπλόκ d_k^B να είναι 2×2 σε όλη την διάρκεια¹⁴ της διαδικασίας. Για να καθορίσω το πλήθος των βημάτων ελέγχω την ποσότητα

$$\frac{n}{2+m} = \frac{180}{2+2} = 45$$

σύμφωνα με την σχέση (3.22). Αυτό θα είναι τα πραγματικό πλήθος των βημάτων. Το k θα παίρνει τιμές από 1 έως και 45.

Πρώτο βήμα

Για το πρώτο βήμα αναγκαίο είναι να ορίσουμε τα f_1 και g_1 . Αυτά θα ορίζονται σύμφωνα με τις εξισώσεις (3.25) και (3.26). Έτσι θα έχουμε για το ίχνος του $\bar{P}\bar{P}^\dagger$

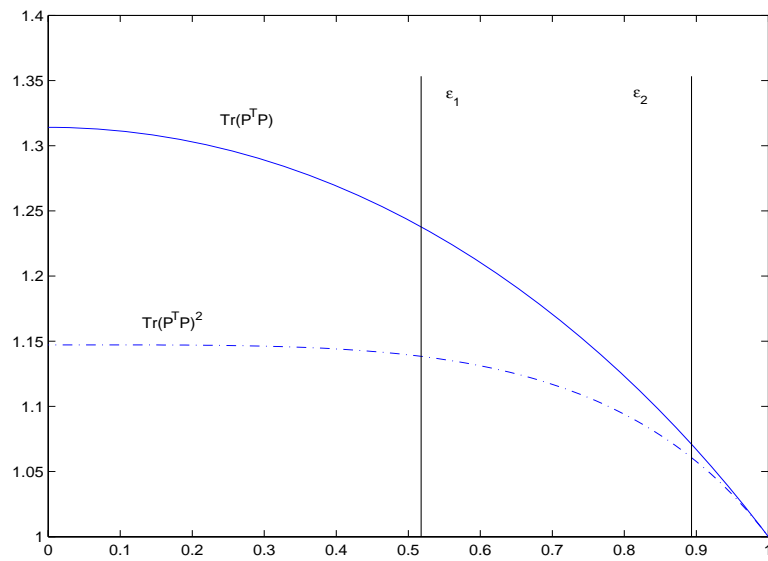
$$1 = 0.01715f_1^2 + 0.01246g_1^2 + 0.97038$$

ενώ για το ίχνος του $(\bar{P}\bar{P}^\dagger)^2$ θα έχουμε

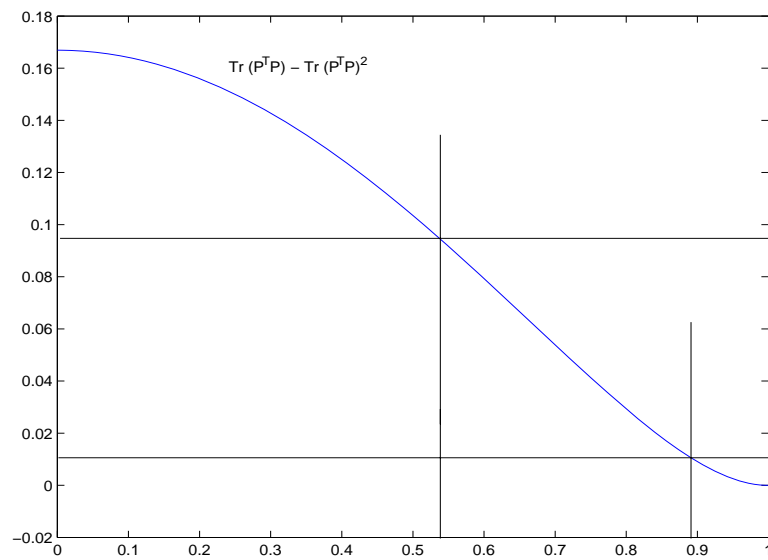
$$0.85076 = 0.01518f_2^4 + 0.01111g_1^4 + 0.82445$$

Η γραφική παράσταση των δύο παραπάνω εξισώσεων απεικονίζετε στο σχήμα (3.6) όπου με διακεκομμένη γραμμή έχουμε την διατήρηση του ίχνος του $(\bar{P}\bar{P}^\dagger)^2$ και με συνεχή την διατήρηση του ίχνος του $\bar{P}\bar{P}^\dagger$. Όπως έχουμε πει κρατάμε σταθερό το ίχνος του $(\bar{P}\bar{P}^\dagger)^2$ που αντιστοιχεί στον εναγκαλισμό (entanglement) και προσεγγίζουμε το ίχνος του $\bar{P}\bar{P}^\dagger$. Έστω τώρα οτι θέλουμε να έχουμε για το ίχνος του $\bar{P}\bar{P}^\dagger$ μια προσέγγιση της τάξης του 10^{-2} . Τότε η επιλογή του g_1 πρέπει να είναι ανάμεσα στο 0.52 και το 0.89 το οποίο μας δείχνουν και οι ευθείες ϵ_1 και ϵ_2 του σχήματος (3.6). Ο καθορισμός του διαστήματος μέσα από το οποίο πρέπει να επιλεχθεί το g_1 προέκυψε από την διαφορά των εξισώσεων διατήρησης του ίχνους του $(\bar{P}\bar{P}^\dagger)^2$ και του $\bar{P}\bar{P}^\dagger$. Το λάθος αυτό περιγράφεται γραφικά στο σχήμα (3.7)

¹⁴Ανάλογα με το πρόβλημα οι διαστάσεις των μπλόκ d_k^A και d_k^B μπορούν να αλλάζουν. Στο συγκεκριμένο παράδειγμα επιλέγουμε την πιο απλή περίπτωση.

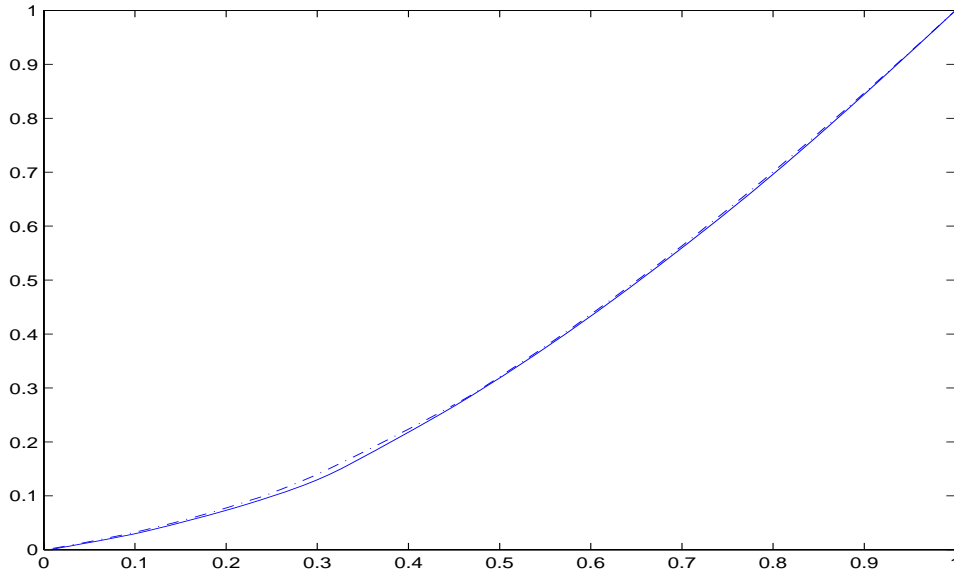


Σχήμα 3.6: Καμπύλες ιχνών ρ και ρ^2



Σχήμα 3.7: Καμπύλη διαφοράς ιχνών ρ και ρ^2

Από αυτά τα ζεύγη καλούμαστε να επιλέξουμε τα ιδανικότερα δηλαδή αυτά που έχουν την καλύτερη προσέγγιση για το ίχνος του $\bar{P}\bar{P}^\dagger$ και ταυτόχρονα διατηρούν και τα μερικά ίχνη. Χωρίς να σημαίνει ότι αυτό είναι απαραίτητο, καλό είναι να επιλέγουμε κάποιο g στο μέσο περίπου του διαστήματος που επιτυγχάνεται η επιθυμητή προσέγγιση του ίχνους του $\bar{P}\bar{P}^\dagger$ για την περίπτωση μας δηλαδή στο μέσο του 0.52 και 0.89. Να σημειώσουμε ότι όσο το g πλησιάζει στην μονάδα το μέγεθος της συμπίεσης μειώνεται και όσο πλησιάζει προς το μηδέν η συμπίεση μεγαλώνει. Άρα με την επιλογή του g περίπου στο μέσον του διαστήματος $[0.52, 0.89]$ επιτυγχάνουμε και ικανοποιητική συμπίεση και ικανοποιητικό σφάλμα για το ίχνος του $\bar{P}\bar{P}^\dagger$.



Σχήμα 3.8: Καμπύλες Lorenz

Από τα εν λόγω ζεύγη με την βοήθεια των καμπυλών Lorenz που μας εξασφαλίζουν την διατήρηση των μερικών ιχνών προκύπτει ότι το ζεύγος $f_1 = 1.116, g_1 = 0.705$ είναι το ιδανικότερο.

Με τον καθορισμό των f_1 και g_1 και στην συνέχεια με την δράση του πίνακα D_1 στον πίνακα P ολοκληρώνεται το πρώτο βήμα του αλγορίθμου. Αποτέλεσμα του βήματος αυτού είναι η αύξηση της τιμής των δύο πρώτων ιδιζουσών τιμών της τάξης του 10^{-1} και η μείωση αντίστοιχα των δύο τελευταίων. Να σημειώσουμε ότι το μέγεθος της μείωσης αν και φαίνεται μικρό είναι αρκετά σημαντικό αφού έχουμε να κάνουμε με πίνακα με 180 ιδιοτιμές που αθροίζονται στην μονάδα.

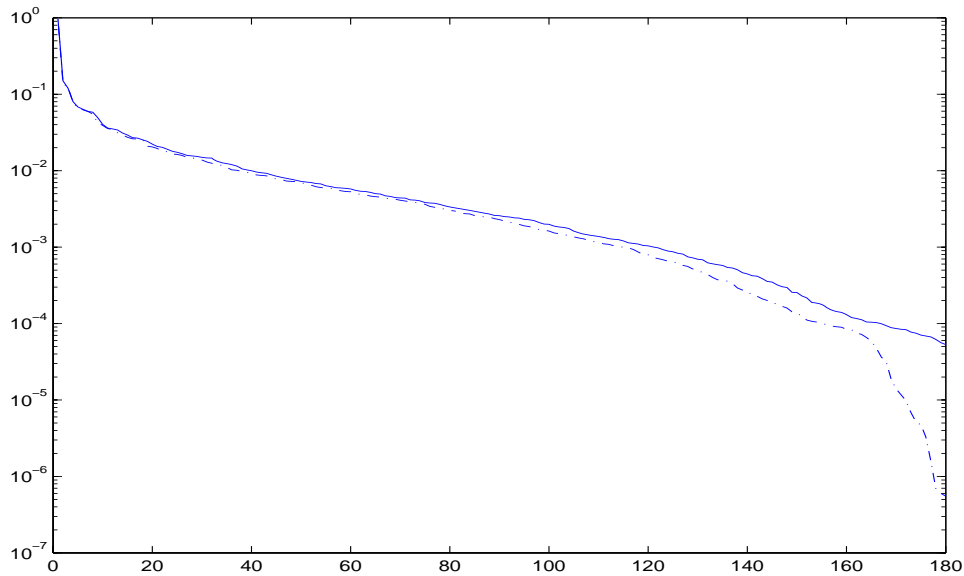
Επόμενα βήματα:

Με ανάλογο τρόπο εξελίσσεται η διαδικασία μέχρι και το τεσσαρακοστό πέμπτο βήμα όπου και τερματίζεται. Εμείς ενδεικτικά θα αναφέρουμε μερικά από τα ζεύγη (f_k, g_k) .

- $f_1 = 1.116$ $g_1 = 0.705$
- $f_8 = 1.973$ $g_8 = 0.632$
- $f_{26} = 2.011$ $g_{26} = 0.643$
- $f_{45} = 2.117$ $g_{45} = 0.697$

Να σημειώσουμε ότι για τον καθορισμό των ζευγών (f_k, g_k) έχει χρησιμοποιηθεί διπλή ακρίβεια δεκατεσσάρων δεκαδικών ψηφίων. Τα παραπάνω ζεύγη έχουν υποστεί στρογγυλοποίηση στο τρίτο δεκαδικό ψηφίο χωρίς να σημαίνει ότι τα υπόλοιπα δεν είναι σημαντικά για την εξαγωγή ενός καλού αποτελέσματος.

Να δούμε όμως γραφικά τι πετύχαμε, αρχικά για τις ιδιάζουσες τιμές του πίνακα \bar{P} και στην συνέχεια τις επιπτώσεις στην έκφραση της εικόνας μέσω ιδιάζουσών τιμών.

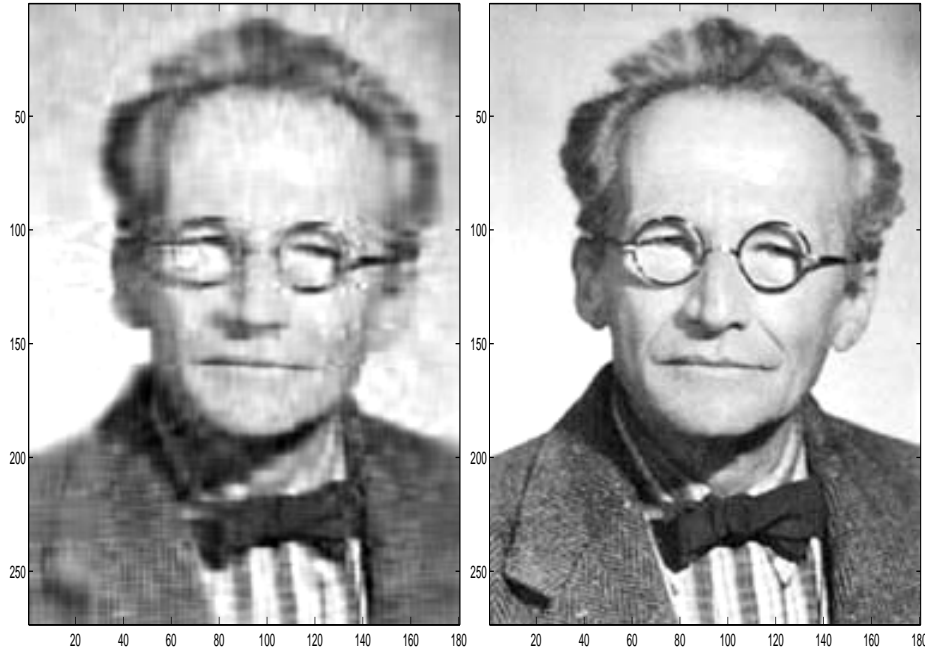


Σχήμα 3.9: Ιδιάζουσες τιμές πριν και μετά

Στο παραπάνω γράφημα σχήμα (3.9) με την συνεχή γραμμή αποτυπώνονται οι ιδιάζουσες τιμές του πίνακα \bar{P} πριν την διαδικασία συμπίεσης και με την διακεκομμένη γραμμή οι ιδιάζουσες του ίδιου πίνακα μετά την ολοκλήρωση της διαδικασίας. Παρατηρούμε ότι έχουν υποστεί μια αύξηση οι πρώτες τριάντα περίπου ιδιάζουσες τιμές και οι υπόλοιπες μειώθηκαν.

Ας περάσουμε όμως να δούμε ποιο θα είναι το κέρδος από την όλη διαδικασία στην έκφραση της εικόνας με την βοήθεια του πίνακα \bar{P}_{45} και όχι του \bar{P} . Να θυμηθούμε ότι αρχικά ο πίνακας P υπέστη μία μετατροπή διαιρώντας τον με την τιμή $\frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^{180} \sigma_i^2}}$ τύπος (3.28). Συνεπώς για την αντιστροφή του μετα-

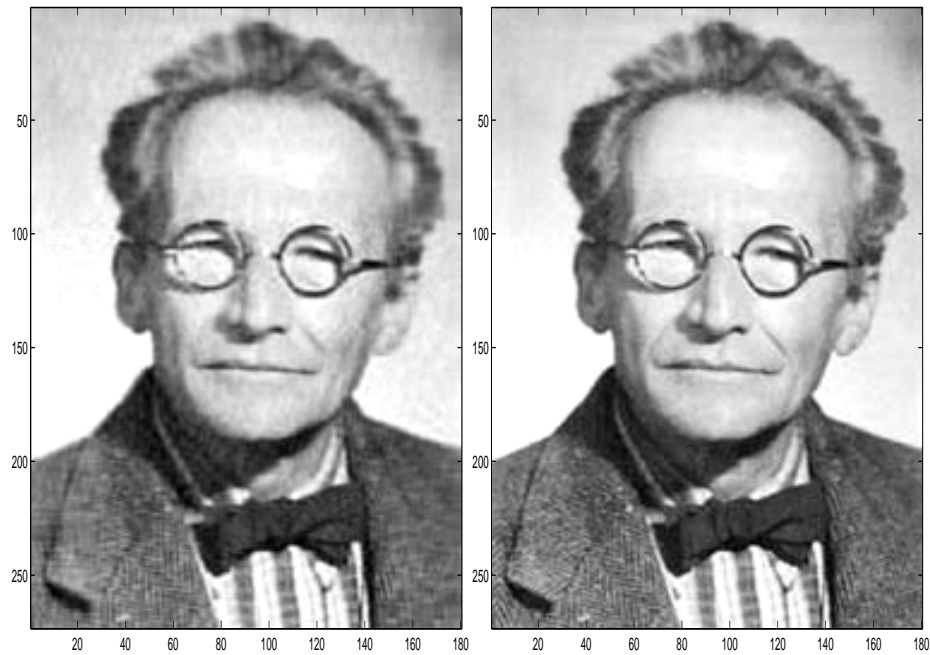
σχηματισμού θα πολλαπλασιάσουμε τον πίνακα \bar{P}_{22} με την τιμή $\sqrt{\sum_{i=1}^{180} \sigma_i^2}$ και σε αυτόν που προκύπτει κάνουμε διάσπαση ιδιαζουσών τιμών και προσεγγίζουμε την εν λόγο εικόνα με την βοήθεια του θεωρήματος προσέγγισης χαμηλής τάξης (Low rank - Approximation).



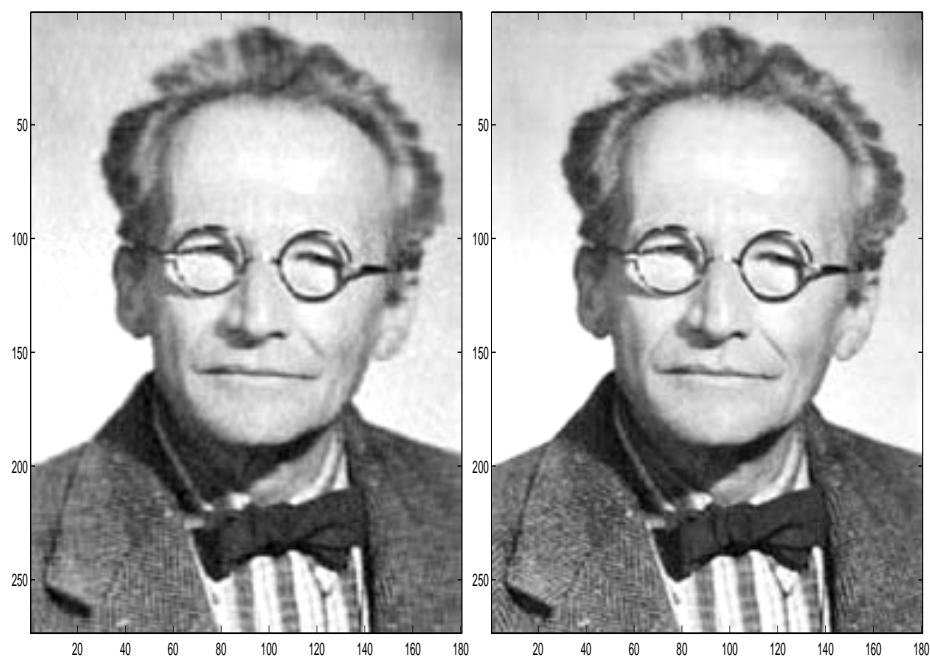
Σχήμα 3.10: Χρήση δεκαπέντε ιδιαζουσών τιμών

Για την παραγωγή της εικόνας σχήμα (3.10) αριστερα έχουν χρησιμοποιηθεί δεκαπέντε ιδιάζουσες τιμές και με την βοήθεια του τύπου (2.18) προκύπτει ότι το σφάλμα είναι περίπου οκτώμισι επί της εκατό της γνήσιας¹⁵ εικόνας

¹⁵Γνήσια θεωρούμε την εικόνα που προκύπτει από την χρήση όλων των ιδιαζουσών τιμών.



Σχήμα 3.11: Χρήση τριάντα τεσσάρων ιδιαζουσών τιμών



Σχήμα 3.12: Χρήση σαράντα ιδιαζουσών τιμών

δεξιά. Αν το συγκρίνουμε με την αντίστοιχη πριν την εφαρμογή του αλγορίθμου βλέπουμε ότι έχουμε μια μείωση του σφάλματος κατά ενάμιση επί της εκατό. Ανάλογα βλέπουμε η εικόνα που προκύπτει μετά την συμπίεση με την χρήση τριάντα τεσσάρων ιδιζουσών τιμών, αντιστοιχεί σε αυτήν που προκύπτει πριν την συμπίεση σε σαράντα. Η μείωση αυτή κατά έξη τιμές μπορεί να φαίνεται μικρή αλλά δεν είναι αφού ουσιαστικά χρησιμοποιούμε $6 + 6(273 + 180) = 2274$ λιγότερα στοιχεία. Ενδεικτικά παραθέτουμε και την εικόνα που προκύπτει με την χρήση σαράντα ιδιζουσών στην οποία το σφάλμα αγγίζει το τρία κόμμα δύο επί της εκατό.

3.4 Κβαντικό κύκλωμα

Να δούμε όμως όλη την διαδικασία που περιγράφηκε στην παράγραφο (3.2) από μια ποιο πρακτική σκοπιά. Με άλλα λόγια να εξετάσουμε πως μπορεί να υλοποιηθεί όλη αυτή η σκέψη με ένα κβαντικό κύκλωμα. Για την καλύτερη κατανόηση του προβλήματος αρχικά θα αναφέρουμε κάποια βασικά στοιχεία για τις κβαντικές πύλες που θα μας βοηθήσουν στην κατασκευή του τελικού κβαντικού κυκλώματος.

3.4.1 Κβαντικές πύλες

Μια κβαντική πύλη έχει τον ίδιο αριθμό qubits εισόδου και εξόδου. Τα καταστατικά διανύσματα εισόδου και εξόδου σε μία n -qubits κβαντική πύλη υπολογίζεται σαν το ταυυστικό γινόμενο των qubits εισόδου και εξόδου αντίστοιχα. Για παράδειγμα το διάνυσμα εισόδου μιας 2-qubits κβαντικής πύλης είναι το $|\Phi\rangle \otimes |\Psi\rangle$ εάν τα διανύσματα εισόδου είναι τα $|\Phi\rangle$ και $|\Psi\rangle$.

Έστω $|Q\rangle$ ένα αρχικό καταστατικό διάνυσμα το οποίο θα δεχτεί την δράση μιας κβαντικής πύλης. Το διάνυσμα εξόδου θα προκύπτει από την δράση κάποιου τελεστή έστω G πάνω στο αρχικό διάνυσμα $|Q\rangle$. Αν W το διάνυσμα εξόδου θα ισχύει

$$|W\rangle = G|Q\rangle$$

Να σημειώσουμε ότι ο τελεστής G εξαρτάται αποκλειστικά από το είδος της πύλης.

Ενός qubit πύλες - Μονόμπιτες.

Μια κβαντική πύλη ενός qubit είναι ένα μαύρο κουτί το οποίο μετατρέπει το qubit εισόδου π.χ $|Q\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle$ σε qubit εξόδου $|\Phi\rangle = a'|0\rangle + b'|1\rangle$. Μαθηματικά μια τέτοια πύλη περιγράφεται από έναν πίνακα 2×2 με μιγαδικά στοιχεία. Ας είναι G ο πίνακας που περιγράφει την πύλη. Λαμβάνοντας υπό

όψιν ότι πρέπει $|a|^2 + |b|^2 = 1$ καθώς επίσης και $|a'|^2 + |b'|^2 = 1$ καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι ο πίνακας G πρέπει να είναι μοναδιακός.

Μερικές βασικές μονόμπιτες κβαντικές πύλες:

- Η μοναδιαία πύλη I στην οποία το qubit εισόδου παραμένει το ίδιο με το qubit εξόδου. Ο πίνακας που την περιγράφει είναι

$$G = I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Η πύλη NOT η οποία αλλάζει τις συνιστώσες του qubit εισόδου. Ο πίνακας που την περιγράφει είναι

$$G = Q = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

- Η πύλη Hadamard. Αν $|\Phi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle$ είναι το qubit εισόδου το qubit εξόδου θα είναι το $|\Phi'\rangle = a\frac{|0\rangle+|1\rangle}{\sqrt{2}} + b\frac{|0\rangle-|1\rangle}{\sqrt{2}}$. Ο πίνακας που την περιγράφει είναι

$$G = H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Κάθε μία από τις παραπάνω κβαντικές πύλες αντιπροσωπεύεται από το παρακάτω κύκλωμα [22].



Σχήμα 3.13: Μονόμπιτες κβαντικές πύλες.

Πύλες με δύο qubits-Δίμπιτες.

Οι πύλες αυτές έχουν δύο qubits εισόδου και δύο qubits εξόδου. Το ένα από τα qubits εισόδου ονομάζεται qubit ελέγχου και το άλλο ονομάζεται qubit στόχου. Από αυτές μια από τις πιο σημαντικές είναι η CNOT την οποία και θα περιγράψουμε.

Η πύλη CNOT

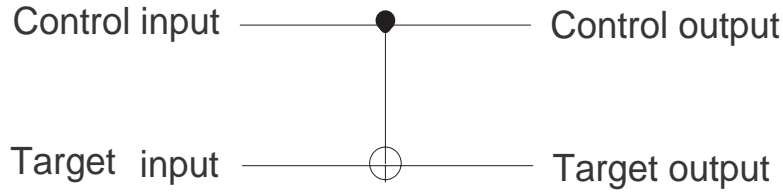
Η εφαρμογή της πύλης CNOT έχει ως εξής: Στο qubit ελέγχου δεν έχουμε καμία μεταβολή και παραμένει το ίδιο κατά την έξοδό του σαν qubit εξόδου. Το qubit στόχου στην έξοδό του παραμένει το ίδιο αν το qubit ελέγχου είναι το $|0\rangle$ ενώ αν είναι το $|1\rangle$ έχουμε αναστροφή στις συνιστώσες του. Οι μεταβολή των συνιστωσών των qubits εισόδου έχει ως εξής

$$|00\rangle \mapsto |00\rangle \quad |01\rangle \mapsto |01\rangle \quad |10\rangle \mapsto |11\rangle \quad |11\rangle \mapsto |10\rangle$$

Άρα ο πίνακας που περιγράφει την πύλη θα είναι

$$G_{CNOT} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

με αντίστοιχο κβαντικό κύκλωμα



Σχήμα 3.14: Πύλη CNOT

3.4.2 Κβαντικό κύκλωμα αλγόριθμου διαστατικής συμπίεσης

Θα προσπαθήσουμε να εκφράσουμε τον πίνακα D της διαδικασίας με τέτοιο τρόπο έτσι ώστε να μας οδηγήσει στην δομή που θα μπορούσε να έχει το κύκλωμα.

$$D = D_0 D_1 D_2 D_3 \dots D_n$$

όπου n το τελευταίο βήμα της επαναληπτικής διαδικασίας και τα D_i για $i = 0 \dots n$ είναι οι πίνακες επανάληψης για κάθε βήμα. [Βλέπε (3.2)]

Εύκολα βλέπουμε ότι κάθε ένα από τα D_i είναι στην πραγματικότητα ένας διαγώνιος πίνακας με δύο μπλόκ διαστάσεων δύο επί δύο σε πολύ συγκεκριμένες θέσεις. Όμως κάθε ένας από τους D_i μπορεί να γραφεί σαν γινόμενο δύο διαγώνιων πινάκων από τους οποίους ο πρώτος θα περιέχει το πάνω μπλόκ του

D_i στην ίδια θέση και ο δεύτερος το κάτω μπλόκ στην αντίστοιχη θέση. Έτσι μπορεί να πάρει την παρακάτω μορφή

$$D = \tilde{D}_0 \tilde{D}_1 \tilde{D}_2 \dots \tilde{D}_{2n} \tilde{D}_{2n+1} \tilde{D}_{2n+1} \quad (3.29)$$

Να σημειώσουμε ότι οι πίνακες \tilde{D}_i με $i = 0 \dots 2n + 1$ έχουν διπλασιαστεί σε σχέση με τους D_i αφού κάθε ένας από τους τελευταίους γράφεται σαν γινόμενο δύο \tilde{D}_i . Για λόγους απλότητας και χωρίς βλάβη της γενικότητας στην συνέχεια θα αναφερόμαστε σε διμερή κβαντικά συστήματα που εκφράζονται από χώρους Hilbert διάστασης 2^m . Τότε τα \tilde{D}_i μπορούν να εκφραστούν με την παρακάτω μορφή

$$\tilde{D}_k = \left(P_k \otimes T + \sum_{i=0}^{2^{m-1}-1} P_i \otimes I_2 \right) \quad (3.30)$$

Αφού τα βήματα του αλγορίθμου είναι $(2^{m-2} - 1)$ το k θα παίρνει τιμές μέχρι το διπλάσιο και ένα άρα $k = 0, 1, 2, \dots, (2^{m-1} - 1)$. Ο πίνακας T έχει πάντα διαστάσεις 2×2 και περιέχει είτε τα f είτε τα g σύμφωνα με τον παρακάτω τύπο

$$\begin{aligned} T &= T_f & k &= 0, 1, 2, \dots, \left(\frac{2^{m-1}}{2} - 1 \right) \\ T &= T_g & k &= \left(\frac{2^{m-1}}{2} \right), \dots, (2^{m-1} - 1) \end{aligned}$$

Να πούμε επίσης ο P_k είναι τελεστής διαστάσεων $2^{m-1} \times 2^{m-1}$ με τύπο

$$P_k = |k\rangle \langle k|$$

Συνεπώς ο συνολικός πίνακας επανάληψης D θα πάρει την εξής τελική μορφή

$$D = \prod_{k=0}^{2^{m-2}-1} D_k = \prod_{k=0}^{2^{m-1}-1} \tilde{D}_k \quad (3.31)$$

Κάθε ένας από τους πίνακες \tilde{D}_k έχει δομή την δομή πίνακα control- \tilde{D}_k . Με τον τρόπο αυτό έκφρασης του πίνακα D -δομή control- μπορούμε να μεταβούμε στο αντίστοιχο κβαντικό κύκλωμα.

Όμως στα κβαντικά κυκλώματα η γλώσσα με την οποία μπορούμε να μιλήσουμε είναι αυτή των qubits. Συνεπώς πρέπει όλους τους δείκτες της σχέσης (3.31) να τους μεταφράσουμε σε δυαδική μορφή. Να τονίσουμε ότι στους τύπους των (3.30) και (3.31) ο δείκτης k μας δείχνει την θέση εμφύτευσης του μπλόκ T . Άρα

$$D = \prod_{k=0}^{2^{m-1}-1} \tilde{D}_k^{k_2} \quad (3.32)$$

Στον τελευταίο τύπο με τον εκθέτη επιτυγχάνουμε την μετατροπή του k από το δεκαδικό σύστημα στο δυαδικό. π.χ Έστω ότι βρισκόμαστε στο χώρο όπου ζουν τα διπλά qubits και ότι το $k = 3$. Τότε στην δυαδική γραφή θα έχουμε $3_2 = (1, 1)$.

Συμπέρασμα:

Η όλη διαδικασία της συμπίεσης που περιγράφηκε στην παράγραφο(3.2) μπορεί να υλοποιηθεί για ένα διμερές κβαντικό σύστημα διάστασης 2^m με την βοήθεια κβαντικού κυκλώματος δομής $control_D^m$ όπου ο πίνακας D περιγράφεται από την τελευταία σχέση. Η δομή του κυκλώματος είναι m φορές control αφού το σύστημα έχει διάσταση 2^m άρα πρέπει τα μπλόκ¹⁶ του πίνακα επανάληψης να τοποθετηθούν σε m διαφορετικές θέσεις. Να πούμε ότι η αρίθμηση ξεκινάει από το 0. π.χ για $m = 3$ τα control που θα έχουμε θα είναι τέσσερα συμπεριλαμβανομένου και του 0.

Παράδειγμα:

Έστω διμερές κβαντικό σύστημα που περιγράφεται από χώρο \mathcal{H} διάστασης 2^3 . Με την βοήθεια του τύπου (3.32) θα χαρτογραφήσουμε το κβαντικό κύκλωμα με το οποίο μπορεί να υλοποιηθεί η συμπίεση του παραπάνω συστήματος.

Έχουμε $m = 3$

Άρα

$$D = \prod_{k=0}^3 \tilde{D}_k^{k_2}$$

συνεπώς

$$D = \tilde{D}_0^{0_2} \tilde{D}_1^{1_2} \tilde{D}_2^{2_2} \tilde{D}_3^{3_2}$$

και για την μετατροπή σε δυαδική μορφή θα έχουμε

$$0_2 \equiv (0, 0) \quad 1_2 \equiv (0, 1) \quad 2_2 \equiv (1, 0) \quad 3_2 \equiv (1, 1)$$

$$D = \tilde{D}_0^{(0,0)} \tilde{D}_1^{(0,1)} \tilde{D}_2^{(1,0)} \tilde{D}_3^{(1,1)}$$

Παρατηρούμε ότι το ο πίνακας D αποτελείται από τέσσερις επιμέρους πίνακες που έχουν δομή πίνακα control- \tilde{D}_k . Να δούμε μια πιο αναλυτική γραφή

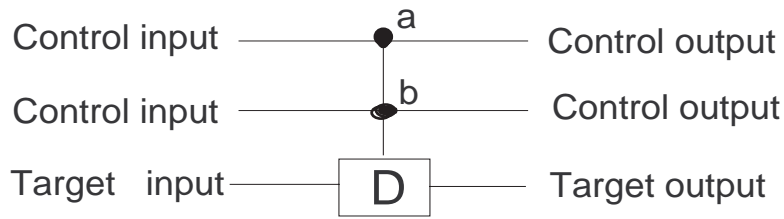
¹⁶Έχουμε ξεκινήσει την διαδικασία καθορίζοντας ότι τα μπλόκ $D_{1_k} = T_f$ και $D_{2_k} = T_g$ έχουν διαστάσεις 2×2 .

του κάθε ενός από αυτούς, πράγμα που θα μας οδηγήσει στον σχεδιασμό του κυκλώματος.

$$\tilde{D}_k^{(a,b)} = P_a \otimes P_b \otimes I_2 + \sum_{(i,j) \neq (a,b)} P_i \otimes P_j \otimes I_2$$

Να σημειώσουμε ότι στον παραπάνω τύπο τα a, b, i, j είναι εκφρασμένα στο δυαδικό σύστημα συνεπώς παίρνουν τιμές 0 και 1.

Ας δούμε ποια θα είναι η μορφή του κυκλώματος για τον $\tilde{D}_k^{(a,b)}$. Πρόκειται για μια δομή control-D με δύο qubits ελέγχου και ένα στόχο. Η περιγραφή με κβαντικό κύκλωμα φαίνεται στο (σχ 3.15).

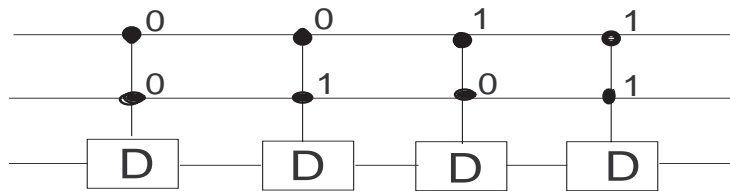


Σχήμα 3.15: Πύλη.

Αν θυμηθούμε ότι ο συνολικός πίνακας D γράφεται σαν το γινόμενο πινάκων $\tilde{D}_k^{(a,b)}$ δηλαδή

$$D = \tilde{D}_0^{(0,0)} \tilde{D}_1^{(0,1)} \tilde{D}_2^{(1,0)} \tilde{D}_3^{(1,1)}$$

τότε το συνολικό κβαντικό σύστημα θα περιγράφεται από την σύνθεση τεσσάρων κυκλωμάτων της μορφής του σχήματος (3.15). Έτσι προκύπτει το συνολικό κβαντικό κύκλωμα



Σχήμα 3.16: Συνολικό κύκλωμα.

3.5 Πληθυσμιακό μοντέλο

Στην παράγραφο αυτή σκοπός είναι να εξηγήσουμε τα αποτελέσματα της συμπίεσης και να δούμε ποιο το πραγματικό κέρδος από την εφαρμογή της όλης διαδικασίας σε ένα διμερές κβαντικό σύστημα.

Ας ξεκινήσουμε να δούμε αρχικά ποια η δράση του πίνακα επανάληψης D_k στο διμερές κβαντικό σύστημα. Έστω σύστημα που περιγράφεται από χώρο \mathcal{H} διάστασης¹⁷ 2^m με υποσυστήματα \mathcal{H}_1 και \mathcal{H}_2 διαστάσεων¹⁸ $2^{\frac{m}{2}}$ και $2^{\frac{m}{2}}$ αντίστοιχα. Τότε ένα καταστατικό διάνυσμα έστω $|\psi\rangle$ θα γράφεται

$$|\psi\rangle = \sum_{ij} a_{ij} |i\rangle \otimes |j\rangle$$

για $i = 1 \dots 2^{\frac{m}{2}}$ και $j = 1 \dots 2^{\frac{m}{2}}$. Τότε σύμφωνα με τον φορμαλισμό $|A\rangle\rangle$ και την παράγραφο (3.1.1) θα έχουμε

$$|\psi\rangle \longleftrightarrow |A\rangle\rangle$$

Συνεπώς ο πίνακας του αλγορίθμου D μπορεί να δράσει στο $|A\rangle\rangle$ όπως φαίνεται παρακάτω με δύο τρόπους

$$(I \otimes D) |A\rangle\rangle = |AD^T\rangle\rangle \quad (3.33)$$

$$(D \otimes I) |A\rangle\rangle = |DA\rangle\rangle \quad (3.34)$$

Να σημειώσουμε ότι στην παράγραφο (3.2) έχει περιγραφεί ο αλγόριθμος συμπίεσης σύμφωνα με την τελευταία σχέση. Η χρήση και της πρώτης σχέσης είναι όμοια με αυτήν της δεύτερης.

Σημαντικό είναι να τονίσουμε ότι σύμφωνα με την σχέση (3.33) ο πίνακας D δρα στον δεύτερο χώρο \mathcal{H}_2 του κβαντικού συστήματος ενώ σύμφωνα με την σχέση (3.34) έχουμε δράση στον πρώτο χώρο \mathcal{H}_1 . Συνεπώς και στις δύο περιπτώσεις μιλάμε για τοπική δράση του πίνακα D .

Λόγο του ότι στην παράγραφο (3.2) περιγράψαμε την συμπίεση σύμφωνα με τον τύπο (3.34) δηλαδή δράση του D στον πρώτο χώρο, στο εξής θα θεωρούμε ότι ακολουθούμε αυτόν τον τρόπο δράσης. Ο πρώτος χώρος \mathcal{H}_1 έχει διάσταση $2^{\frac{m}{2}}$ συνεπώς μια κατάσταση χρειάζεται για να περιγραφεί $\frac{m}{2}$ qubits. Όμως αρκετές είναι οι φορές που οι καταστάσεις αυτές μπορούν να περιγραφούν από

¹⁷Χωρίς να σημαίνει ότι ο αλγόριθμος δεν μπορεί να εφαρμοστεί σε σύστημα διάστασης n θα ασχοληθούμε για λόγους απλότητας και καλύτερης κατανόησης με εκείνα που έχουν διάσταση 2^m .

¹⁸Ξανά οι διαστάσεις των \mathcal{H}_1 και \mathcal{H}_2 επιλέγονται ίσες για λόγους απλότητας και συνεπώς το m άρτιος.

λιγότερα qubits είτε λόγω του ότι κάποια απο αυτά δεν προσφέρουν σχεδόν τίποτα - θόρυβος - είτε λόγω του ότι βρισκόμαστε σε υπόχωρο του χώρου \mathcal{H}_1 συνεπώς κάποιες συντεταγμένες είναι μηδενικές.

Με την διαδικασία συμπίεσης και με την βοήθεια του θεωρήματος προσέγγισης χαμηλής τάξης καταφέρνουμε να φιλτράρουμε κατά κάποιο τρόπο τον θόρυβο και να χρησιμοποιούμε λιγότερα από $\frac{m}{2}$ qubits για την περιγραφή της κατάστασης.

Αν μεταφράσουμε το κβαντικό σύστημα που έχουμε σύμφωνα με το μοντέλο Alice και Bob όπου η Alice καταλαμβάνει τον πρώτο χώρο \mathcal{H}_1 και ο Bob τον δεύτερο \mathcal{H}_2 θα μπορούσαμε να πούμε:

Πριν την διαδικασία συμπίεσης για την περιγραφή μιας κατάστασης η Alice θα χρειαζόταν $\frac{m}{2}$ qubits δηλαδή $\frac{m}{2}$ μισθωτούς κάθε ένας από τους οποίους θα κατείχε ένα qubit. Μετά την διαδικασία συμπίεσης θα κρατήσουμε μόνο τους απαραίτητους μισθωτούς οι οποίοι θα είναι λιγότεροι από $\frac{m}{2}$ και συνεπώς κέρδος σε εργατική δύναμη.

3.6 Πίνακας G.W.Stewart

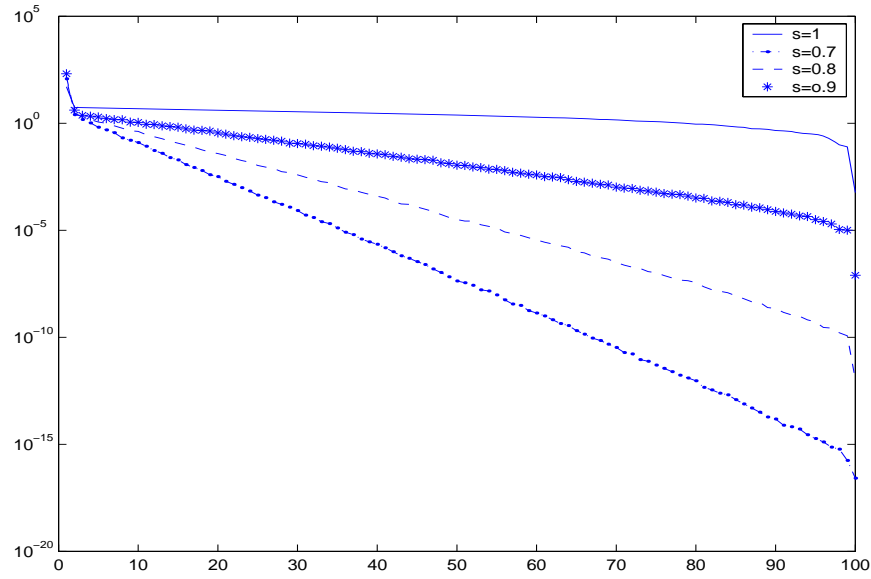
Ένα μαθηματικό εργαλείο για μια τέτοια διαδικασία μεταβολής¹⁹ των ιδιζουσών τιμών πίνακα παρουσιάζεται στο (QLP approximation to the SVD) [23]. Στην παραπάνω μελέτη σκοπός δεν είναι η μεταβολή ιδιζουσών τιμών πίνακα. Σκοπός είναι η διάσπαση QLP μέσα από την μελέτη της οποίας παρουσιάζεται και μια μεταβολή των ιδιζουσών τιμών. Συνεπώς η διαδικασία αυτή δεν μπορεί να δουλέψει στην περίπτωσή μας απλά αποτέλεσε μια αρχική ιδέα για το πώς μπορούν να μεταβληθούν οι ιδιζουσες τιμές πίνακα.

Καθοριστικός είναι ο ρόλος του πίνακα K_n με την παρακάτω μορφή

$$K_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & s & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & s^2 & & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & \dots & s^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -c & -c & \dots & -c \\ 0 & 1 & -c & \dots & -c \\ 0 & 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad (3.35)$$

όπου $s^2 + c^2 = 1$. Με την δράση του πίνακα K_n από αριστερά σε οποιονδήποτε πίνακα μπορούμε να προκαλέσουμε μια μεταβολή στις ιδιζουσες τιμές του. Ανάλογα το πρόβλημα μπορούμε να επιλέξουμε κατάλληλα το \sin και έμμεσα του \cos . Παρακάτω φαίνεται γραφικά η μεταβολή των ιδιζουσών τιμών πίνακα A διάστασης 100×100 με την δράση του K_n .

¹⁹Με τον όρο αυτό εννοούμε την αύξηση της τιμής κάποιων ιδιζουσών τιμών και την παράλληλη μείωση κάποιων άλλων.



Σχήμα 3.17: Ιδιάζουσες τιμές πίνακα 100×100 για διάφορες τιμές του s .

Παρατηρούμε ότι για $s = 0.9$ η μεταβολή στο μέτρο των ιδιάζουσών τιμών δεν είναι μεγάλη και δικαιολογείται από το γεγονός ότι όσο το s πλησιάζει στην μονάδα ο πίνακας K_n τείνει να γίνει ο μοναδιαίος πίνακας άρα δεν θα επηρεάζει την δομή του 100×100 A αφού $AI = A$. Όταν το s απομακρύνεται από την μονάδα η μεταβολή των ιδιάζουσών τιμών γίνεται μεγαλύτερη. Να σημειώσουμε ότι η επιλογή του πίνακα A είναι τυχαία και η διάσταση επιλέχθηκε 100×100 πρώτον για να έχουμε αρκετές ιδιάζουσες τιμές και να δούμε καλύτερα την μεταβολή αυτών και δεύτερον γιατί η συμπίεση για την οποία ψάχνουμε εργαλεία βρίσκει εφαρμογή κατά κύριο λόγο σε μεγάλους πίνακες δεδομένων.

Κεφάλαιο 4

ΓΕΝΙΚΕΥΣΕΙΣ

Είδαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο ότι με τον αλγόριθμο που περιγράψαμε είναι δυνατόν να συμπίεσουμε ένα διμερές χβαντικό σύστημα και γενικότερα έναν πίνακα δεδομένων τετραγωνικό ή και παραλληλόγραμμο. Κατά την διάρκεια της διαδικασίας σημαντικός ήταν ο ρόλος των ζευγών (f_k, g_k) σε κάθε βήμα, τόσο για το αποτέλεσμα όσο και για το κόστος¹ της όλης διαδικασίας. Σκοπός στο συγκεκριμένο κεφάλαιο θα είναι να εξετάσουμε αν υπάρχει τρόπος ο αλγόριθμος συμπίεσης να εφαρμοστεί σε μια οικογένεια από διμερή χβαντικά συστήματα - πίνακες δεδομένων - με συγκεκριμένες ιδιότητες υπολογίζοντας μόνο μία φορά τα ζεύγη (f_k, g_k) .

4.1 Συμπίεση οικογένειας διμερών χβαντικών συστημάτων

Στο κεφάλαιο τρία και με την βοήθεια των σχέσεων (3.25) και (3.26) βλέπουμε ότι για τον καθορισμό των ζευγών (f_k, g_k) αποκλειστικό ρόλο έχουν τα διαγώνια στοιχεία του πίνακα πυκνότητας $\rho = AA^\dagger$ και του $\rho^2 = (AA^\dagger)^2$. Λογικό είναι λοιπόν να μελετήσουμε οικογένεια πινάκων πυκνότητας που έχουν κάποια συγκεκριμένη δομή στα διαγώνια στοιχεία τους. Να επισημάνουμε ότι μιλάμε για συμπίεση οικογένειας χβαντικών διμερών συστημάτων τα οποία περιγράφονται από πίνακες πυκνότητας ίδιας διάστασης.

Έστω διμερές χβαντικό σύστημα που περιγράφεται από πίνακα πυκνότητας ρ διαστάσεων $n \times n$ και ένα δεύτερο που περιγράφεται από τον πίνακα ρ' ίδιων διαστάσεων με τον ρ . Υποθέτουμε επίσης ότι συμπίεζουμε τον πρώτο σύστημα χρησιμοποιώντας τον επαναληπτικό πίνακα D_k επιλέγοντας σε κάθε βήμα τα

¹Εννοούμε ότι το μεγαλύτερο μέρος των πράξεων κατά την διαδικασία εκτελείται για τον καθορισμό των ζευγών (f_k, g_k) .

μπλόκ d_{1_k} και d_{2_k} να είναι διαστάσεων 2×2 . Συνεπώς έχουν καθοριστεί τα ζεύγη (f_k, g_k) . Θα δείξουμε ότι αναγκαία αλλά όχι ικανή συνθήκη για να συμπίεσουμε και το δεύτερο σύστημα με τα ίδια ζεύγη (f_k, g_k) αποτελούν οι δύο παρακάτω σχέσεις ανάλογα αν το n είναι άρτιος ή περιττός.

$$\sum_{j=i}^{i+1} \rho'_{jj} = \sum_{j=i}^{i+1} \rho_{jj} \quad i = 1, 3, 5, \dots, n-1 \quad (4.1)$$

για n άρτιο ενώ για n περιττό θα έχω

$$\begin{cases} \sum_{j=i}^{i+1} \rho'_{jj} = \sum_{j=i}^{i+1} \rho_{jj} \\ \sum_{j=i+\frac{n-1}{2}+1}^{i+1+\frac{n-1}{2}+1} \rho'_{jj} = \sum_{j=i+\frac{n-1}{2}+1}^{i+1+\frac{n-1}{2}+1} \rho_{jj} \end{cases} \quad (4.2)$$

για $i = 1, 3, 5, \dots, \frac{n-1}{2} - 1$.

Αυτό που μας λένε ουσιαστικά οι παραπάνω σχέσεις είναι ότι πρέπει το άθροισμα των στοιχείων της διαγωνίου των πινάκων ρ και ρ' ανά δύο και με βήμα δύο να είναι ίσα. Αυτό συμβαίνει γιατί καθένα από τα μπλόκ d_{1_k} και d_{2_k} δρα σε κάθε βήμα και επηρεάζει τα αντίστοιχα στοιχεία της διαγωνίου. Συνεπώς αν ισχύουν οι παραπάνω σχέσεις τότε θα έχουμε διατήρηση του ίχνους και για το πίνακα ρ' με την ίδια επιλογή των ζευγών (f_k, g_k) αφού από την σχέση (3.25) θα προκύπτουν τα ίδια αποτελέσματα και για τα δύο συστήματα.

Ανάλογα για την διατήρηση του εναγκαλισμού θα πρέπει το άθροισμα ανά δύο και με βήμα δύο των στοιχείων της διαγωνίου του πίνακα $(\rho')^2$ να ισούται με το αντίστοιχο άθροισμα των στοιχείων του πίνακα ρ^2 . Αυτό μαθηματικά εκφράζεται από τις παρακάτω σχέσεις.

$$\sum_{j=i}^{i+1} (\rho'_{jj})^2 = \sum_{j=i}^{i+1} (\rho_{jj})^2 \quad i = 1, 3, 5, \dots, n-1 \quad (4.3)$$

για n άρτιο ενώ για n περιττό θα έχω

$$\begin{cases} \sum_{j=i}^{i+1} (\rho'_{jj})^2 = \sum_{j=i}^{i+1} (\rho_{jj})^2 \\ \sum_{j=i+\frac{n-1}{2}+1}^{i+1+\frac{n-1}{2}+1} (\rho'_{jj})^2 = \sum_{j=i+\frac{n-1}{2}+1}^{i+1+\frac{n-1}{2}+1} (\rho_{jj})^2 \end{cases} \quad (4.4)$$

$i = 1, 3, 5, \dots, \frac{n-1}{2} - 1$

Όμως ούτε οι σχέσεις (4.3), (4.4) ανάλογα αν το n είναι άρτιος η περιττός δεν είναι ικανές για την συμπίεση και του δεύτερου συστήματος με τα ζεύγη

των (f_k, g_k) του πρώτου συστήματος. Αποτελούν απλά αναγκαίες συνθήκες. Αλλά μαζί οι (4.1), (4.3), για άρτιους (4.2), (4.4) για περιττούς αποτελούν αναγκαία και ικανή συνθήκη αφού οι πρώτες σχέσεις των ζευγών θα μας εξασφαλίσουν την κατανομή και οι τελευταίες τον εναγκαλισμό (Entanglement).

Διευκρινήσεις:

- Αν ο πίνακας πυκνότητας του δεύτερου συστήματος ικανοποιεί τις εξισώσεις (4.1), (4.3) αν το n είναι άρτιος ή τις (4.2), (4.4) αν το n είναι περιττός τότε οι εξισώσεις (3.25), (3.26) από τις οποίες προκύπτουν τα ζεύγη (f_k, g_k) ταυτίζονται.
- Στην περίπτωση που μελετήσαμε τα μπλόκ του πίνακα D_k είχαν σε όλη την διάρκεια της διαδικασίας την ίδια διάσταση 2×2 για αυτό και τα αθροίσματα στις σχέσεις (4.1), (4.2), (4.3), (4.4) ήταν της μορφής \sum_i^{i+1} . Σε περίπτωση που τα μπλόκ d_{1_k} και d_{2_k} έχουν διαφορετική διάσταση, έστω m τότε τα αθροίσματα στις (4.1), (4.2), (4.3), (4.4) θα έχουν την μορφή \sum_i^{i+m-1} .
- Έχουμε αναφέρει ότι τα μπλόκ του πίνακα επανάληψης D_k μπορεί να έχουν διαφορετικές διαστάσεις. Τότε οι δείκτες στους τύπους (4.1), (4.2), (4.3), (4.4) διαμορφώνονται ανάλογα.

Συμπέρασμα:

Καταλήγουμε λοιπόν στο συμπέρασμα ότι με τα ίδια ζεύγη των (f_k, g_k) που προέκυψαν κατά την συμπίεση διμερούς χβαντικού συστήματος μπορεί να γίνει και η συμπίεση μιας οικογένειας συστημάτων. Στην οικογένεια αυτή θα ανήκουν όλα τα συστήματα ίδιας διάστασης με το αρχικό που έγινε η συμπίεση και των οποίων οι πίνακες πυκνότητας και τα τετράγωνα αυτών ικανοποιούν τις σχέσεις (4.1), (4.3) αν n άρτιος ή τις σχέσεις (4.2), (4.4) αν n περιττός.

4.2 Κυρτοί συνδυασμοί

Δείξαμε στην παραπάνω ενότητα ότι μπορούμε συμπιέζοντας ένα διμερές χβαντικό σύστημα που εκφράζεται από πίνακα πυκνότητας διάστασης n να συμπίεσουμε μια οικογένεια από συστήματα με την χρήση των ίδιων ζευγών (f_k, g_k) . Ας ονομάσουμε την οικογένεια αυτή Ω^2 . Να πούμε ότι και οι κυρτοί συνδυασμοί

²Η οικογένεια αυτή φιλοξενεί όλα τα διμερή χβαντικά συστήματα που περιγράφονται από πίνακα πυκνότητας διάστασης n και ικανοποιούν τις εξισώσεις (4.1), (4.2), (4.3), (4.4)

πινάκων από το σύνολο Ω θα μας δώσουν πίνακες πυκνότητας. Άρα αν A και B ανήκουν στο Ω τότε ο πίνακας C με

$$C = tA + (1 - t)B$$

και $(0 \leq t \leq 1)$ θα είναι πίνακας πυκνότητας χωρίς να σημαίνει ότι ανήκει στο σύνολο Ω .

Θα δείξουμε ότι τα κβαντικά συστήματα που αντιπροσωπεύονται από πίνακες πυκνότητας διάστασης n και ταυτίζονται με κυρτούς συνδυασμούς πινάκων πυκνότητας από την οικογένεια F συμπίεζονται με την χρήση των ίδιων ζευγών (f_k, g_k) .

Καθορισμός του F

Χωρίς βλάβη της γενικότητας θεωρούμε ότι το n είναι άρτιος. Παίρνουμε δύο συστήματα των οποίων οι πίνακες πυκνότητας, ρ_a και ρ_b ανήκουν στην οικογένεια Ω . Τότε για αυτούς θα ισχύει η σχέση³ (4.1). Δηλαδή

$$\sum_{j=i}^{i+1} (\rho_a)_{jj} = \sum_{j=i}^{i+1} (\rho_b)_{jj} \quad i = 1, 3, 5, \dots, n-1 \quad (4.5)$$

Έστω πίνακας πυκνότητας ρ_c που προκύπτει σαν κυρτός συνδυασμός των ρ_a και ρ_b , δηλαδή $\rho_c = t\rho_a + (1-t)\rho_b$ με $(0 \leq t \leq 1)$. Τότε

$$\sum_{j=i}^{i+1} (\rho_c)_{jj} = t \sum_{j=i}^{i+1} (\rho_a)_{jj} + (1-t) \sum_{j=i}^{i+1} (\rho_b)_{jj}$$

αλλά με την βοήθεια της σχέσης (4.5) θα έχουμε

$$\sum_{j=i}^{i+1} (\rho_c)_{jj} = \sum_{j=i}^{i+1} (\rho_b)_{jj} = \sum_{j=i}^{i+1} (\rho_a)_{jj} \quad (4.6)$$

για $i = 1, 3, 5, \dots, n-1$.

Συνεπώς το ίχνος του πίνακα πυκνότητας ρ_c διατηρείται και η σχέση (4.1) επαληθεύεται. Να τονίσουμε για άλλη μια φορά ότι αυτό αποτελεί αναγκαία συνθήκη και όχι ικανή για την συμπίεση του κυρτού συνδυασμού ρ_c με την χρήση των ίδιων ζευγών (f_k, g_k) .

³Υποθέτουμε για λόγους απλότητας ότι η συμπίεση γίνεται με μπλόκ d_{1_k} και d_{2_k} διαστάσεων 2×2 χωρίς να σημαίνει ότι δεν μπορούμε να επιλέξουμε άλλες διαστάσεις.

Να δούμε τι γίνεται και με την σχέση (4.3) - η οποία αποτελεί την δεύτερη αναγκαία συνθήκη - στην περίπτωση του πίνακα ρ_c . Αφού ρ_a και ρ_b ανήκουν στην Ω γνωρίζουμε ότι

$$\sum_{j=i}^{i+1} (\rho_a)_{jj}^2 = \sum_{j=i}^{i+1} (\rho_b)_{jj}^2 \quad (4.7)$$

Για τον κυρτό συνδυασμό ρ_c θα έχουμε

$$\sum_{j=i}^{i+1} (\rho_c)_{jj}^2 = \sum_{j=i}^{i+1} (t\rho_a + (1-t)\rho_b)_{jj}^2$$

Όμως οι πίνακες ρ_a και ρ_b είναι πίνακες πυκνότητας συνεπώς συμμετρικοί άρα θα ισχύει $\rho_a \rho_b = \rho_b \rho_a$. Έτσι η παραπάνω σχέση γίνεται

$$\sum_{j=i}^{i+1} (\rho_c)_{jj}^2 = t^2 \sum_{j=i}^{i+1} (\rho_a)_{jj}^2 + (1-t)^2 \sum_{j=i}^{i+1} (\rho_b)_{jj}^2 + 2t(1-t) \sum_{j=i}^{i+1} (\rho_a \rho_b)_{jj}$$

και με την βοήθεια της σχέσης (4.7) παίρνω

$$\sum_{j=i}^{i+1} (\rho_c)_{jj}^2 = 2t^2 \sum_{j=i}^{i+1} (\rho_a)_{jj}^2 - 2t \sum_{j=i}^{i+1} (\rho_a)_{jj}^2 + \sum_{j=i}^{i+1} (\rho_a)_{jj}^2 + 2t(1-t) \sum_{j=i}^{i+1} (\rho_a \rho_b)_{jj}$$

Για να έχουμε συμπίεση και του συστήματος που αντιπροσωπεύεται απο τον κυρτό συνδυασμό ρ_c με τα ίδια ζεύγη των (f_k, g_k) αρκεί να ισχύει

$$\sum_{j=i}^{i+1} (\rho_c)_{jj}^2 = \sum_{j=i}^{i+1} (\rho_a)_{jj}^2 = \sum_{j=i}^{i+1} (\rho_b)_{jj}^2$$

που σύμφωνα με την (4.3) αποτελεί την δεύτερη αναγκαία συνθήκη. Τότε από τις δύο τελευταίες θα έχουμε

$$\begin{aligned} \sum_{j=i}^{i+1} (\rho_a)_{jj}^2 &= 2t^2 \sum_{j=i}^{i+1} (\rho_a)_{jj}^2 - 2t \sum_{j=i}^{i+1} (\rho_a)_{jj}^2 + \sum_{j=i}^{i+1} (\rho_a)_{jj}^2 + 2t(1-t) \sum_{j=i}^{i+1} (\rho_a \rho_b)_{jj} \\ (t-1) \sum_{j=i}^{i+1} (\rho_a)_{jj}^2 + (1-t) \sum_{j=i}^{i+1} (\rho_a \rho_b)_{jj} &= 0 \end{aligned}$$

Άρα για $t \neq 1$ θα έχουμε

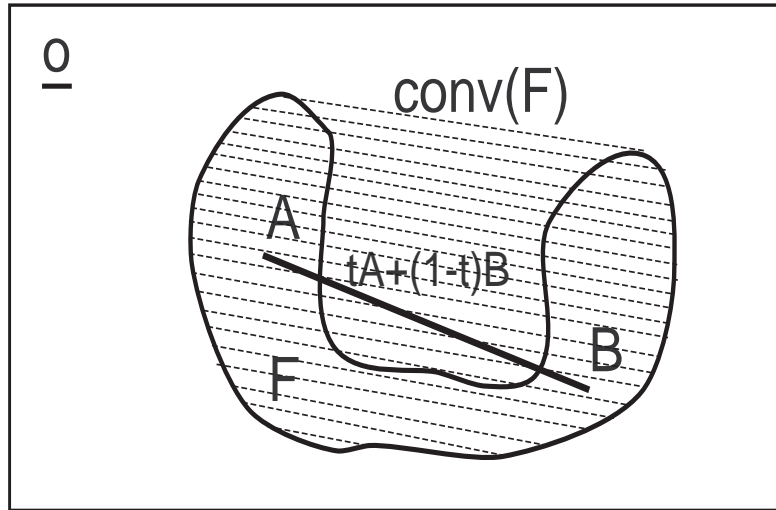
$$\sum_{j=i}^{i+1} (\rho_a)_{jj}^2 = \sum_{j=i}^{i+1} (\rho_a \rho_b)_{jj} \quad (4.8)$$

Με την σχέση (4.8) εξασφαλίζουμε την διατήρηση του εναγκαλισμού (Entanglement) του συστήματος που περιγράφεται από τον ρ_c . Να σημειώσουμε ότι η περίπτωση για $t = 1$ ουσιαστικά δεν μας ενδιαφέρει αφού δεν έχουμε κυρτό συνδυασμό αλλά πίνακα που ανήκει στην οικογένεια Ω .

Συμπέρασμα:

- Καταλήγοντας στην σχέση (4.6) συμπεραίνουμε ότι όλοι οι κυρτοί συνδυασμοί πινάκων πυκνότητας που ανήκουν στην οικογένεια Ω διατηρούν το ίχνος ίσο με την μονάδα χρησιμοποιώντας τα ίδια ζεύγη (f_k, g_k) .
- Για την διατήρηση του εναγκαλισμού (Entanglement) δεν συμβαίνει το ίδιο. Καταλήγουμε λοιπόν ότι για την διατήρηση του τελευταίου πρέπει οι πίνακες που δημιουργούν τους κυρτούς συνδυασμούς να ικανοποιούν την σχέση (4.8). Συνεπώς υπάρχουν κάποια στοιχεία της οικογένειας Ω των οποίων οι κυρτοί συνδυασμοί ικανοποιούν την σχέση (4.8). Αυτά συνιστούν την οικογένεια F .

Η παράσταση των παραπάνω οικογενειών που αναφερθήκαμε, γραφικά δίνει μια ποιο σαφή εικόνα για τις μεταξύ τους σχέσεις. Όπου Ω η οικογένεια των πι-



νάκων στους οποίους μπορεί να επιτευχθεί η συμπίεση με την χρήση των ίδιων ζευγών (f_k, g_k) . F η οικογένεια των πινάκων των οποίων και οι κυρτοί συνδυασμοί συμπίεζονται με τα ίδια ζεύγη (f_k, g_k) .

Ας δούμε όμως πιο συγκεκριμένα ποια μπορεί να είναι η σχέση που συνδέει τα ρ με τα ρ' . Για να γίνει αυτό κατανοητό γράφουμε τις σχέσεις⁴ (4.5) και (4.7) με την βοήθεια της απεικόνισης του ίχνους αφού ουσιαστικά τα αθροίσματα των διαγωνίων στοιχείων αυτό μας δηλώνουν. Τότε η (4.5) γίνεται

$$\text{Tr} (P_i + P_{i+1}) \rho = \text{Tr} (P_i + P_{i+1}) \rho' \quad i = 1, 3, 5, \dots, n-1$$

ενώ η (4.7) είναι ισοδύναμη με

$$\text{Tr} (P_i + P_{i+1}) \rho^2 = \text{Tr} (P_i + P_{i+1}) (\rho')^2 \quad i = 1, 3, 5, \dots, n-1$$

όπου $P_i = |i\rangle \langle i|$.

Με την βοήθεια των παραπάνω τύπων ορίζουμε τα αθροίσματα S_{1_i} για το ίχνος του ρ και το S_{2_i} για το ίχνος του ρ^2 ως εξής.

$$S_{1_i} = \text{Tr} (P_i + P_{i+1}) \rho = \text{Tr} (P_i + P_{i+1}) \rho' \quad i = 1, 3, 5, \dots, n-1$$

$$S_{2_i} = \text{Tr} (P_i + P_{i+1}) \rho^2 = \text{Tr} (P_i + P_{i+1}) (\rho')^2 \quad i = 1, 3, 5, \dots, n-1$$

Συνεπώς καταλήγουμε στο ότι πρέπει να διατηρούνται οι ποσότητες S_{1_i} και S_{2_i} . Άρα ψάχνουμε μετασχηματισμούς που διατηρούν το ίχνος μερικό και ολικό. Να δούμε ποιά η μορφή τους

$$U = \text{diag} \left(C_1^{k_1}, C_2^{k_2}, \dots, C_{\frac{n}{2}}^{k_{\frac{n}{2}}} \right)$$

όπου τα μπλόκ $C_i^{k_i}$ είναι 2×2 και ανήκουν στο παρακάτω σύνολο M

$$M = \left\{ C_i^{k_i} \quad : \quad C_i^{k_i} C_i^{k_i \dagger} = I_2 \right\}$$

Οι παρακάτω μετασχηματισμοί διατηρούν τις ποσότητες S_{1_i} και S_{2_i}

$$\rho \longrightarrow U \rho U^\dagger$$

Τότε αν ρ πίνακας πυκνότητας και ρ' ο πίνακας που προκύπτει μετά τον μετασχηματισμό θα έχουμε

$$\rho' = U \rho U^\dagger$$

Συνεπώς η παραπάνω σχέση μας δίνει ένα τρόπο όχι τον πιο εξαντλητικό ώστε να προκύψει οικογένεια πινάκων πυκνότητας τα στοιχεία της οποίας να

⁴Θεωρούμε ότι δουλεύουμε με πίνακες πυκνότητας άρτιας διάστασης για αυτό χρησιμοποιούμε και αυτές τις σχέσεις. Για πίνακες με περιττή διάσταση η διαδικασία είναι όμοια.

συμπιέζονται με την χρήση των ίδιων ζευγών f_k και g_k που συμπίεζεται και ο ρ .

Τότε η μαθηματική έκφραση της F και της κυρτής θήκης θα είναι

$$F = \left\{ U \rho U^\dagger \mid \rho \in W_n, U = \text{diag} \left(C_1^{k_1}, C_2^{k_2}, \dots, C_{\frac{n}{2}}^{k_{\frac{n}{2}}} \right) \mid C_i^{k_i} C_i^{k_i \dagger} = I_2, i = 1, 2, \dots, \frac{n}{2} \right\}$$

όπου W_n το σύνολο των πινάκων πυκνότητας διαστάσεων $n \times n$

$$\text{conv}(F) = \left\{ \sum_{i=1}^d q_i U_i \rho U_i^\dagger \mid q_i \geq 0, \sum_{i=1}^d q_i = 1 \right\}$$

Βιβλιογραφία

- [1] Howard N.Barnum, III, **Quantum Information Theory**, PhD thesis, University of New Mexico, December 1986.
- [2] K. G. H. Volbrecht, R. F. Werner, **Why two qubits are special**, *Journal of Mathematical Physics Volume 41 Number 10 October 2000*.
- [3] Michael Aaron Nielsen, **Quantum Information Theory**, *quant-ph/0011036 9 NOV 2000*.
- [4] M. Ohya, D. Petz, **Quantum Entropy end Its Use**, *Springer-Verlag 1993*.
- [5] Asher Peres, **Quantum Theory: Concepts and Methods**, *Kluwer Academic Publishers 1995*.
- [6] John Eakins, George Jaroszkiewicz, **Factorization and Entanglement in Quantum Systems**, *J.Phys. A Math. Gen 36 2003 517-526*.
- [7] Rane K. Brylinski, Goong Chen, **Mathematics of Quantum Computation**, *2002*.
- [8] N. Linden, S. Popescu, **One Multi-Particle Entanglement**, *Fortschr. Phys. 46 1998 4-5, 576-578*.
- [9] Sergio Albeverio, Shao-Ming Fei, Debashish Goswami, **Seperability of rank two quantum states**, *Physics Letters A 286 2001 91-96*.
- [10] Heng Fan, Keiji Matsumoto, Hiroshi Imai, **Quantify entanglement by concurrence hierarchy**, *J.Phys. A Math. Gen 36 2003 4151-4158*.

- [11] C. D. Meyer, **Matrix Analysis and Applied Linear Algebra**, *SIAM* 2000.
- [12] L. N. Trefethen, D. Bau III, **Numerical Linear Algebra**, *SIAM* 1997.
- [13] Alkiviadis G. Akritas, Gennadi I. Malaschonok, **Applications of Singular-Value Decomposition**
- [14] Dan Kalman, **A Singularly Valuable Decomposition: The SVD of a Matrix**, *The American University Washington DC* 20016 February 2002.
- [15] G. M. D Ariano, P. Lo Presti, M. F. Sacchi, **Bell Measurements and observables**, *quant-ph/0005121 v1* 29 May 2000.
- [16] Paolo Zanardi, **Entanglement of Quantum Evolutions**, *quant-ph/0010074 v2* 23 Oct 2000.
- [17] Antoine Royer, **Wigner function in Liouville space: A canonical formalism**, *Physical Review A* Volume 43, Number 1, 1 Jan 1991.
- [18] Bhatia, Rajendra, **Matrix Analysis** , *Springer* 1997.
- [19] Albert W. Marshall, Ingram Olkin, **Inequalities: Theory of Majorization and Its Applications**, *Academic Press* 1979.
- [20] Michael Aaron Nielsen, **Majorization and the Interconversion of Bipartite States**, *Quantum Information and Computation*, Vol. 1, No. 0(2001) 000-000.
- [21] Anthony J Braken, Demosthenes Ellinas and Ioannis Tsohantjis, **Pseudo memory effects, majorization and entropy in quantum random walks**, *J. Phys. A Math. Gen* 37 2004 L91-L97.
- [22] Debbie W. Leung, **Towards Robust Quantum Computation**, *cs.CC./0012017* 20 Dec. 2000.
- [23] G. W. Stewart, W. Gilbert, **Matrix Algorithms**, 1998.