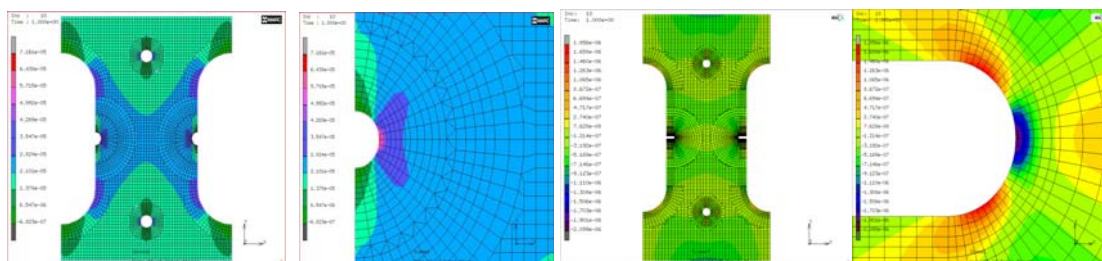




**ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ ΚΡΗΤΗΣ**  
**ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΟΡΥΚΤΩΝ ΠΟΡΩΝ**

**ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ**

**ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΗΣΗ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ ΑΜΕΣΟΥ**  
**ΕΦΕΛΚΥΣΜΟΥ ΣΕ ΔΟΚΙΜΙΑ ΜΕ ΕΓΚΟΠΗ - ΑΝΑΛΥΣΗ ΚΑΙ**  
**ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΜΕ ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΑ ΔΕΔΟΜΕΝΑ**



**ΚΟΝΤΟΣ ΓΕΩΡΓΙΟΣ**

**ΜΗΧΑΝΙΚΟΣ ΟΡΥΚΤΩΝ ΠΟΡΩΝ**

**ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΗ ΕΠΙΤΡΟΠΗ:**

**Ζ. ΑΓΙΟΥΤΑΝΤΗΣ, Καθηγητής (Επιβλέπων)**

**Γ. ΕΞΑΔΑΚΤΥΛΟΣ, Καθηγητής**

**Σ. ΚΟΥΡΚΟΥΛΗΣ, Επίκουρος Καθηγητής (Ε.Μ.Π.)**

**ΧΑΝΙΑ, ΔΕΚΕΜΒΡΙΟΣ 2005**

## ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Αντικείμενο της παρούσας μεταπτυχιακής διατριβής είναι η ανάλυση της δοκιμής άμεσου εφελκυσμού. Η μελέτη της δοκιμής πραγματοποιείται τόσο πειραματικά όσο και αριθμητικά με την Μέθοδο των Πεπερασμένων Στοιχείων. Για τη μελέτη χρησιμοποιούνται δοκίμια *dogbone* από Διονυσιακό μάρμαρο· υλικό το οποίο έχει χρήση στην αναστήλωση σημαντικών ιστορικών μνημείων στον ελλαδικό χώρο. Βασικός στόχος είναι η αναπαραγωγή των συνθηκών που επικρατούν κατά την διάρκεια της δοκιμής στο εργαστήριο και η καλύτερη δυνατή προσομοίωση για την μελέτη της περιοχής γύρω από την εγκοπή.

Ο προσδιορισμός του πεδίου τάσεων και παραμορφώσεων κατά τον άμεσο εφελκυσμό σε δοκίμια *dogbone* με εγκοπή, αποτελεί ένα πρόβλημα για το οποίο δεν έχει βρεθεί ακόμα λύση παρά τις προσπάθειες διαφόρων επιστημόνων και μελετητών κατά το παρελθόν. Στην παρούσα εργασία με την εφαρμογή της Μεθόδου των Πεπερασμένων Στοιχείων επιχειρείται η συμβολή προς την κατεύθυνση της επίλυσης του προβλήματος και τα αποτελέσματα που προκύπτουν είναι ιδιαίτερα σημαντικά.

Το πρόβλημα του άμεσου εφελκυσμού προσεγγίζεται θεωρητικά με την αναφορά των αρχών της θεωρίας του εφελκυσμού και των αρχών της θραυστομηχανικής, σχετικά με την εκκίνηση και διάδοση των ρωγμών. Επίσης αναφέρονται οι αρχές της ελαστικής συμπεριφοράς που αφορούν το υλικό με το οποίο ασχολείται η παρούσα εργασία.

Στη συνέχεια, περιγράφονται οι φυσικές και οι μηχανικές ιδιότητες του Διονυσιακού μαρμάρου, ενώ περιγράφεται λεπτομερώς η πειραματική διαδικασία της δοκιμής άμεσου εφελκυσμού.

Ακολουθεί η αριθμητική επίλυση της δοκιμής με την Μέθοδο των Πεπερασμένων Στοιχείων, η οποία πραγματοποιήθηκε με το λογισμικό M.S.C. *Marc-Mentat*. Το Διονυσιακό μάρμαρο προσομοιώθηκε σαν ελαστικό ισότροπο υλικό, αλλά και σαν ελαστικό εγκαρσίως ισότροπο υλικό. Η αριθμητική επίλυση πραγματοποιήθηκε σε δυο διαστάσεις με την παραδοχή της θεώρησης επίπεδης παραμόρφωσης. Η διακριτοποίηση των μοντέλων έγινε με τρόπο ώστε οι διαστάσεις τους να συμπίπτουν με αυτές των πραγματικών δοκιμίων και περιλαμβάνει τρεις διαφορετικές γεωμετρίες εγκοπών. Τέλος, συγκρίνονται τα αποτελέσματα που

προκύπτουν από την πειραματική μελέτη της δοκιμής, με τα αποτελέσματα της αριθμητικής επίλυσης σχετικά με την κατανομή των παραμορφώσεων.

## ***ABSTRACT***

The subject of this master thesis is the numerical simulation of the direct tension test using the Finite Element Method. The results are then compared with those obtained from a series of tension tests with dogbone specimens. The experimental study was conducted using rock material that is commonly used in the restoration of important historical monuments in Greece. The fundamental objective is a) the reproduction of the conditions that prevail during the actual experiments in the laboratory and b) the simulation of the stress-strain regime in the region round the notch.

The determination of the stress-strain fields in a dogbone specimen with a notch under tension is a difficult task and a closed form solution does not exist yet, despite several attempts in the past. In this study an attempt is made to find the solution of the problem utilizing the Finite Element Method.

The principles of the direct tension theory and the theory of fracture mechanics relative to the initiation and the expansion of cracks are analysed. Also the principles of elastic behaviour concerning the materials used in the present study are briefly presented. The physical and mechanical properties of Dionysos marble are then described, while the experimental procedure for the tension tests of the rock specimens is explained in detail.

The numerical simulation employing the Finite Element Method was carried out using the M.S.C. Marc-Mentat software. The Dionysos marble was modeled as an elastic isotropic material, and as a transversely isotropic material. The numerical study was performed in two dimensions, while it is assumed that plane strain conditions prevail. The dimensions of the models were the same with those of the real specimens and include three different geometric notches. The results obtained from the numerical analysis were compared with the ones obtained from the experimental study and the agreement is satisfactory.

## ***ΠΡΟΛΟΓΟΣ***

Για την διεκπεραίωση αυτής της μεταπτυχιακής διατριβής, είχα την ουσιαστική βοήθεια και συμπαράσταση ορισμένων προσώπων τα οποία θα ήθελα να ευχαριστήσω:

Τον Επιβλέποντα της μεταπτυχιακής διατριβής, Καθηγητή του Πολυτεχνείου Κρήτης κ. Ζαχαρία Αγιουτάντη για την καθοδήγηση και τις ουσιαστικές συμβουλές και παρατηρήσεις του, που ήταν πολύτιμες για την εκπόνηση της παρούσας εργασίας. Θα ήθελα επίσης να τον ευχαριστήσω και για τις σημαντικές του παρατηρήσεις στη συγγραφή του κειμένου.

Τον Επίκουρο Καθηγητή του Εθνικού Μετσόβειου Πολυτεχνείου κ. Σταύρο Κουρκουλή, ο οποίος διέθεσε τα απαιτούμενα δεδομένα της πειραματικής μελέτης των δοκιμών κάμψης από την έρευνα που εκπονεί στο εργαστήριο αντοχής υλικών του Ε.Μ.Π και ο οποίος με βοήθησε σημαντικά στην κατανόηση της πειραματικής μελέτης των δοκιμών άμεσου εφελκυσμού. Ευχαριστίες, οφείλω επίσης και για τις παρατηρήσεις του στη συγγραφή του κειμένου, καθώς και για την συμμετοχή του στην αξιολόγηση.

Τον Καθηγητή του Πολυτεχνείου Κρήτης κ. Γεώργιο Εξαδάκτυλο, για την συμμετοχή του στην αξιολόγηση της εργασίας αυτής.

Τον Μηχανικό Μεταλλείων κ. Μαυριγιαννάκη Στυλιανό, για την ουσιαστική συνεργασία που είχαμε κατά την διάρκεια φοίτησης μου στο μεταπτυχιακό πρόγραμμα σπουδών “Γεωτεχνολογία και Περιβάλλον” και για την βοήθεια του στην εκπόνηση αυτής της μεταπτυχιακής διατριβής.

Τον Πολιτικό Μηχανικό κ. Μοσχάκη Νίκο που επεξεργάστηκε τα πειραματικά δεδομένα, και είχαμε πολύ καλή συνεργασία όποτε χρειάστηκε στην ανταλλαγή και επεξήγηση των δεδομένων.

Τέλος, ένα μεγάλο ευχαριστώ οφείλω στον πατέρα μου Δημοσθένη και τη μητέρα μου Χρύσα, οι οποίοι με στήριξαν υλικά και ηθικά κατά την εφτάχρονη φοίτηση μου στο Πολυτεχνείο Κρήτης.

## **ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ**

### **ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1<sup>ο</sup>**

ΕΙΣΑΓΩΓΗ .....	1
----------------	---

### **ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2<sup>ο</sup>**

ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ ΑΜΕΣΟΥ ΕΦΕΛΚΥΣΜΟΥ ΣΕ ΔΟΚΙΜΙΟ ΜΕ ΕΓΚΟΠΗ .....	5
---	---

2.1 ΘΕΩΡΙΑ ΕΦΕΛΚΥΣΜΟΥ .....	5
-----------------------------	---

2.2 ΤΑΣΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΤΩΝ ΡΩΓΜΩΝ .....	6
-------------------------------------	---

2.2.1 Συντελεστής Έντασης της Τάσης .....	8
---	---

2.2.2 Σχέση Μεταξύ $K$ και Συνολικής Απόκρισης .....	11
--	----

2.2.3 Η Επίδραση του Πεπερασμένου Μεγέθους .....	13
--	----

2.2.4 Άνοιγμα Χειλέων στην Αιχμή της Ρωγμής .....	15
---	----

2.2.5 Συντελεστής Έντασης της Τάσης στην Κορυφή Εγκοπής .....	17
---	----

2.2.6 Κατανομή Ελαστικής Τάσης σε πεπερασμένου μεγέθους πλάκες με πλευρικές εγκοπές .....	18
---	----

2.3 ΘΕΩΡΙΑ GRIFFITH .....	26
---------------------------	----

2.3.1 Θεωρία Ενεργειακής Ισορροπίας του Griffith .....	28
--	----

2.3.2 Ρυθμός Απελευθέρωσης Ενέργειας Παραμορφώσεων $G$ και Αντίσταση σε Διάδοση Ρωγμής $R$ .....	33
--	----

2.3.3 Κριτήριο Τάσης θραύσεως του Griffith .....	35
--	----

2.3.4 Περιορισμοί στην Εφαρμογή της Θεωρίας Griffith .....	39
--	----

2.4 ΘΕΜΑΤΑ ΕΛΑΣΤΙΚΗΣ ΣΥΜΠΕΡΙΦΟΡΑΣ .....	39
---	----

2.4.1 Γραμμική Ισότροπη Ελαστικότητα .....	39
--	----

2.4.2 Γραμμική Ανισότροπη Ελαστικότητα .....	40
--	----

2.4.3 Το Επίπεδο Ελαστικό Πρόβλημα .....	43
--	----

2.4.4 Προσέγγιση Επίπεδης Παραμόρφωσης .....	44
--	----

2.4.5 Προσέγγιση Επίπεδης Τάσης .....	46
---------------------------------------	----

### **ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3<sup>ο</sup>**

<b>ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΥΛΙΚΟΥ .....</b>	<b>50</b>
3.1 ΦΥΣΙΚΕΣ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ .....	50
3.2 ΜΗΧΑΝΙΚΕΣ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ .....	51
3.2.1 Η Συμπεριφορά του Διονυσιακού Μαρμάρου υπό Άμεσο Εφελκυσμό ..	53
3.2.2 Η Συμπεριφορά του Μαρμάρου Διονύσου υπό Μονοαξονική και Τριαξονική Θλίψη.....	56

### **ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4<sup>ο</sup>**

<b>ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΗ ΔΟΚΙΜΗ ΤΟΥ ΑΜΕΣΟΥ ΕΦΕΛΚΥΣΜΟΥ .....</b>	<b>60</b>
4.1 Η ΔΟΚΙΜΗ ΑΜΕΣΟΥ ΕΦΕΛΚΥΣΜΟΥ ΣΕ ΔΟΚΙΜΙΑ ΔΙΟΝΥΣΙΑΚΟΥ ΜΑΡΜΑΡΟΥ ΜΕ ΗΜΙΚΥΚΛΙΚΗ ΕΓΚΟΠΗ .....	61
4.2 Η ΔΟΚΙΜΗ ΑΜΕΣΟΥ ΕΦΕΛΚΥΣΜΟΥ ΣΕ ΔΟΚΙΜΙΑ ΔΙΟΝΥΣΙΑΚΟΥ ΜΑΡΜΑΡΟΥ ΜΕ ΕΓΚΟΠΗ ΤΥΠΟΥ-U .....	66

### **ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5<sup>ο</sup>**

<b>ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΕΠΙΛΥΣΗ ΤΗΣ ΔΟΚΙΜΗΣ ΑΜΕΣΟΥ ΕΦΕΛΚΥΣΜΟΥ ΜΕ ΤΗΝ ΜΕΘΟΔΟ ΤΩΝ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ .....</b>	<b>72</b>
5.1 Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ .....	72
5.2 Η ΔΟΚΙΜΗ ΑΜΕΣΟΥ ΕΦΕΛΚΥΣΜΟΥ ΣΕ ΔΟΚΙΜΙΑ ΔΙΟΝΥΣΙΑΚΟΥ ΜΑΡΜΑΡΟΥ ΜΕ ΗΜΙΚΥΚΛΙΚΗ ΕΓΚΟΠΗ: <i>ΙΣΟΤΡΟΠΟ ΜΟΝΤΕΛΟ</i> .....	76
5.2.1 Ισότροπο Μοντέλο Ημικυκλικής Εγκοπής Ακτίνας 1cm .....	76
5.2.2 Ισότροπο Μοντέλο Ημικυκλικής Εγκοπής Ακτίνας 2cm .....	81
5.3 Η ΔΟΚΙΜΗ ΑΜΕΣΟΥ ΕΦΕΛΚΥΣΜΟΥ ΣΕ ΔΟΚΙΜΙΑ ΔΙΟΝΥΣΙΑΚΟΥ ΜΑΡΜΑΡΟΥ ΜΕ ΗΜΙΚΥΚΛΙΚΗ ΕΓΚΟΠΗ: <i>ΟΡΘΟΤΡΟΠΟ ΜΟΝΤΕΛΟ</i> .....	85
5.3.1 Ορθότροπο Μοντέλο Ημικυκλικής Εγκοπής Ακτίνας 1cm.....	85
5.3.2 Ορθότροπο Μοντέλο Ημικυκλικής Εγκοπής Ακτίνας 2cm.....	90
5.4 Η ΔΟΚΙΜΗ ΑΜΕΣΟΥ ΕΦΕΛΚΥΣΜΟΥ ΣΕ ΔΟΚΙΜΙΑ ΔΙΟΝΥΣΙΑΚΟΥ ΜΑΡΜΑΡΟΥ ΜΕ ΕΓΚΟΠΗ ΤΥΠΟΥ-U: <i>ΙΣΟΤΡΟΠΟ ΜΟΝΤΕΛΟ</i> .....	93
5.5 Η ΔΟΚΙΜΗ ΑΜΕΣΟΥ ΕΦΕΛΚΥΣΜΟΥ ΣΕ ΔΟΚΙΜΙΑ ΔΙΟΝΥΣΙΑΚΟΥ ΜΑΡΜΑΡΟΥ ΜΕ ΕΓΚΟΠΗ ΤΥΠΟΥ-U: <i>ΟΡΘΟΤΡΟΠΟ ΜΟΝΤΕΛΟ</i> .....	101
5.6 ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΩΝ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ ΕΠΙΛΥΣΗΣ ΚΑΙ ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ .....	106



5.6.1	Σύγκριση αποτελεσμάτων για τα μοντέλα με ημικυκλική εγκοπή.....	106
5.6.2	Σύγκριση αποτελεσμάτων για τα μοντέλα με εγκοπή τύπου-U.....	109
5.6.3	Σύγκριση αποτελεσμάτων από συνδυασμό όλων των μοντέλων .....	113

## ***ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6<sup>ο</sup>***

<b>ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ ΚΑΙ ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ .....</b>	<b>115</b>
---	------------

6.1	ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ.....	115
6.2	ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ.....	117

<b><i>ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ .....</i></b>	<b>118</b>
----------------------------------	------------

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1<sup>ο</sup>

### ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Οι γεωτεχνικοί μηχανικοί οι οποίοι ανήκουν στον κατασκευαστικό τομέα στοχεύουν στην εξασφάλιση της λειτουργικότητας της γεωκατασκευής που σχεδιάζουν για μεγάλα χρονικά διαστήματα με όσο το δυνατό πιο οικονομικό και τεχνικά άρτιο τρόπο. Για να σχεδιάσει ο γεωτεχνικός μηχανικός μια ασφαλή γεωκατασκευή θα πρέπει να μπορεί να εκτιμήσει με ποιο τρόπο η βραχομάζα μπορεί να φτάσει στην αστοχία, είτε στο σύνολο της είτε με αλληλεπίδραση του συνόλου της κατασκευής (π.χ φράγματα, θεμελιώσεις).

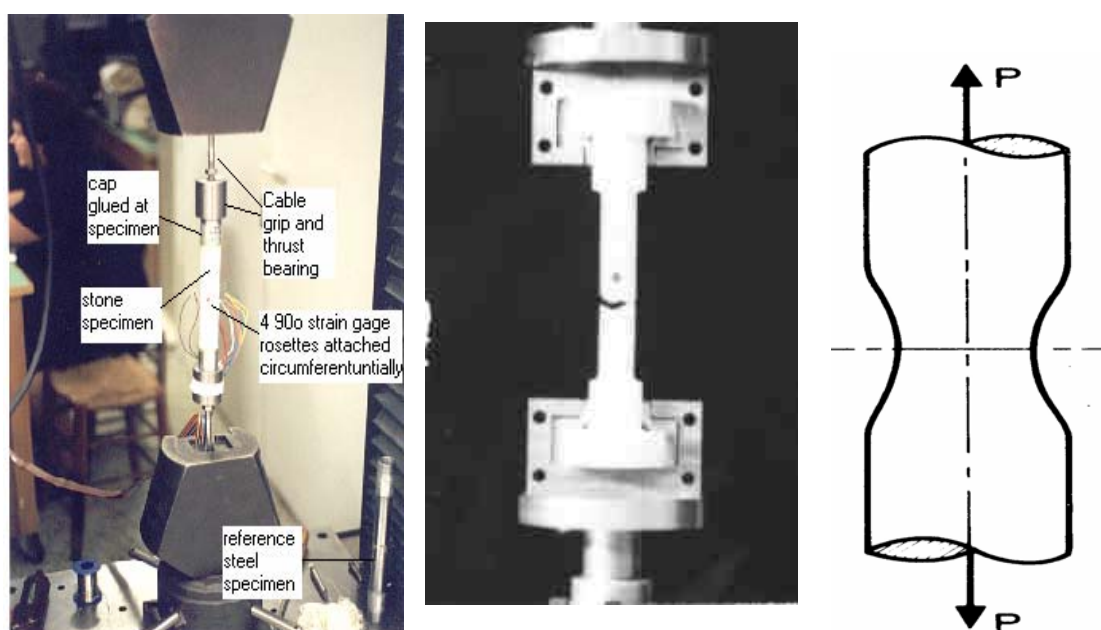
Το πρόβλημα συνήθως ανάγεται στον προσδιορισμό των μέγιστων τάσεων που θα δημιουργηθούν στο πέτρωμα μετά την εξόρυξη ή γενικότερα στην κατανομή των τάσεων γύρω από το έργο. Πολλοί είναι οι παράγοντες που επηρεάζουν την κατανομή των τάσεων στη βραχομάζα όπως για παράδειγμα η μορφή του έργου, το μέγεθος και οι κατευθύνσεις των φορτίων, οι συνοριακές συνθήκες, κλπ. (Αγιουτάντης, 2002).

Η αντοχή σε εφελκυσμό των πετρωμάτων είναι μια παράμετρος που σχετίζεται έντονα με πολλές από τις μηχανικές τους εφαρμογές (μηχανική συμπεριφορά των ορυκτών, διάτρηση και ανατίναξη των πετρωμάτων, στην αστοχία των πετρωμάτων σε υπόγειες και επιφανειακές εργασίες, όπως επίσης και στις κατασκευές).

Γενικά οι μέθοδοι μέτρησης της αντοχής διακρίνονται σε άμεσους και έμμεσους (Δημοπούλου, 2004):

- ❖ Άμεση μέθοδος μέτρησης είναι η άσκηση εφελκυσμού στα άκρα κυλινδρικού δοκιμίου ή δοκιμίου άλλου σχήματος.
- ❖ Οι έμμεσες μέθοδοι περιλαμβάνουν τους ακόλουθους τύπους φόρτισης:
  - Κάμψη σε πρισματικά, κυλινδρικά δοκίμια και δίσκους,
  - Υδραυλικός εφελκυσμός,
  - Διαμετρική συμπίεση σε δίσκους και δακτυλίους,
  - Διαμετρική συμπίεση σε κυλίνδρους, σφαίρες και κύβους.

Η συμβατική μέθοδος υπολογισμού της αντοχής των πετρωμάτων είναι η δοκιμή του άμεσου εφελκυσμού όπως φαίνεται στο σχήμα 1.1. Η μέθοδος παρουσιάζει πειραματικές δυσκολίες και συνήθως δεν διεξάγεται στα εργαστήρια μηχανικής πετρωμάτων. Ειδικότερα σε ψαθυρά υλικά, μια από τις δυσκολίες είναι η ευθυγράμμιση και στερέωση του δοκιμίου. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα την εμφάνιση καμπτικών τάσεων ή στρεπτικής ροπής λόγω εκκεντρότητας των αξονικών φορτίων της μηχανής, καθώς επίσης και στη συγκέντρωση τάσεων τοπικά στα σημεία επαφής των δοκιμίων με τη μηχανή φόρτισης (Barla and Goffi, 1974, Nova and Zaninetti, 1990). Στα όλκιμα υλικά, λόγω της δημιουργίας λαιμού παύει να ισχύει ομοιόμορφη επιβεβλημένη τάση. Η κατανομή των τάσεων στην περιοχή του λαιμού παύει να είναι μονοαξονική και καθίσταται τριαξονική, με υποθετικό άξονα συμμετρίας τον άξονα του δοκιμίου.



**Σχήμα 1.1:** Διατάξεις για τα πειράματα άμεσου μονοαξονικού εφελκυσμού (Vardoulakis et al., 2002).

Ο στόχος αυτής της μελέτης είναι η προσομοίωση της μηχανικής συμπεριφοράς των δοκιμίων μαρμάρου με εγκοπή (*notch*) που υποβάλλονται σε δοκιμή άμεσου εφελκυσμού.

Το πρόβλημα της κατανομής των τάσεων και των παραμορφώσεων παρουσία εγκοπών είναι σημαντικό δεδομένου ότι η συγκέντρωση τάσεων που δημιουργείται κοντά στην άκρη των εγκοπών διαδραματίζει σημαντικό ρόλο στο ασφαλή σχεδιασμό

κατασκευών οποιουδήποτε είδους και ιδιαίτερα των σύγχρονων κατασκευών που πρόκειται να φέρουν υψηλά φορτία. Η λύση στο πρόβλημα της συγκέντρωσης τάσεων γύρω από κυκλικές και ελλειπτικές εγκοπές σε ένα άπειρο μέσο εισήχθη από τους Kirsch και Inglis, από την αρχή του προηγούμενου αιώνα. Εντούτοις και παρά την εντατική έρευνα που πραγματοποιήθηκε, το πρόβλημα δεν είναι τόσο απλό. Ιδιαίτερα στην περίπτωση όπου οι διαστάσεις του υπό μελέτη μέσου είναι του ίδιου μεγέθους με εκείνες της εγκοπής, η κατάσταση γίνεται ιδιαίτερα περίπλοκη και οι αναλυτικές λύσεις που είναι διαθέσιμες σήμερα αντιστοιχούν σε έναν πολύ περιορισμένο αριθμό ειδικών περιπτώσεων (Kourkoulis, 2004).

Η κατάσταση γίνεται ακόμα πιο δύσκολη στην περίπτωση που το υπό μελέτη μέσο αποτελείται από ένα μη-ισότροπο υλικό και η αναλυτική λύση γίνεται απαγορευτικά δύσκολη, ακόμα και για το απλουστευμένο πρόβλημα της εγκάρσιας ισοτροπίας. Σε αυτή την περίπτωση η πειραματική μελέτη παραμένει το μόνο αξιόπιστο εργαλείο που μπορεί να παρέχει τα απαραίτητα στοιχεία για τη βαθμονόμηση των αριθμητικών προτύπων καθώς και για την επικύρωση των αναλυτικών λύσεων. Σε αυτή την κατεύθυνση η μεταβολή της παραμόρφωσης του πεδίου στα ημικυκλικά χαραγμένα δοκίμια που κατασκευάζονται από Διονυσιακό μάρμαρο (ένα χαρακτηριστικό εγκάρσιο ισότροπο υλικό) μελετάται πειραματικά σε μια προσπάθεια να ποσοτικοποιηθεί η συγκέντρωση τάσης κοντά στο όριο της εγκοπής. Τα αποτελέσματα της μελέτης χρησιμοποιούνται για την επικύρωση ενός αριθμητικού προτύπου που λύνεται με τη χρήση της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων (Kourkoulis, 2004).

Για να υπολογιστούν τα κύρια ποιοτικά χαρακτηριστικά γνωρίσματα των πεδίων τάσεων και παραμορφώσεων που αναπτύσσονται στα δείγματα με τη χρήση των πεπερασμένων στοιχείων, το πρόβλημα μελετάται σε δύο διαστάσεις και η ρωγμή μοντελοποιείται ως εγκοπή πεπερασμένου πλάτους και ημικυκλικής κορώνας ακτίνας 1 και 2cm και σαν εγκοπή τύπου-U με βάθος σχισμής 1cm. Επιπλέον, θεωρείται ότι το υλικό είναι εγκαρσίως ισότροπο και ότι συμπεριφέρεται ως γραμμικά ελαστικό. Η θεώρηση εγκάρσιας ισοτροπίας στηρίζεται στα αποτελέσματα μιας ολοκληρωμένης πειραματικής μελέτης δοκιμών άμεσου εφελκυσμού και μονοαξονικής θλίψης για το μάρμαρο Διονύσου. Αυτός ο τύπος μαρμάρου χρησιμοποιείται εκτενώς στο πρόγραμμα αποκατάστασης, που αυτή την περίοδο είναι υπό εξέλιξη στο ναό του Παρθενώνα, καθώς οι ιδιότητες του είναι πολύ κοντά σε αυτές του αντίστοιχου αυθεντικού υλικού.

Σε αυτό το σημείο πρέπει να σημειωθεί ότι η πειραματική ανάλυση των δοκιμών άμεσου εφελκυσμού στα δοκίμια Διονυσιακού μαρμάρου, πραγματοποιήθηκε στα εργαστήρια αντοχής υλικών του Εθνικού Μετσόβειου Πολυτεχνείου.

Τα συμπεράσματα που προκύπτουν έπειτα από τη σύγκριση της πειραματικής ανάλυσης με την αριθμητική επίλυση, είναι πολύ ικανοποιητικά όσον αφορά την απόκλιση στα μεταξύ τους αποτελέσματα, ενώ πολύ ενδιαφέρον παρουσιάζουν και τα συμπεράσματα για την κατανομή των παραμορφώσεων.

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2<sup>ο</sup>

### ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ ΑΜΕΣΟΥ ΕΦΕΛΚΥΣΜΟΥ ΣΕ ΔΟΚΙΜΙΟ ΜΕ ΕΓΚΟΠΗ

Στην ενότητα αυτή προσεγγίζεται θεωρητικά το πρόβλημα του άμεσου εφελκυσμού σε δοκίμιο με εγκοπή. Αρχικά δίνονται κάποια στοιχεία για τη θεωρία του άμεσου εφελκυσμού και στη συνέχεια η επίδραση των ρωγμών μέσω της θεωρίας θραυστομηχανικής. Ακολουθεί η θεωρία του Griffith και τέλος περιγράφονται οι σχέσεις που διέπουν την ελαστική συμπεριφορά ενός υλικού.

#### 2.1 ΘΕΩΡΙΑ ΕΦΕΛΚΥΣΜΟΥ

Είναι κοινά αποδεκτό ότι αντοχή σε θραύση (κρίσιμη τάση) είναι μια έμφυτη ιδιότητα των ψαθυρών υλικών αφού έχει αποδειχτεί ότι τα υλικά αυτά τείνουν προς θραύση όταν φορτιστούν πέραν του επιπέδου της κρίσιμης τάσης. Σαν συνεπακόλουθο αυτού, δημιουργήθηκαν σειρές από κριτήρια για να μπορούν να υπολογίζουν τις μέγιστες τάσεις που μπορεί να δεχτεί μια κατασκευή χωρίς να ξεπερνά το όριο της κρίσιμης τάσης. Οι μεταβολές στην αντοχή θραύσης είναι συνάρτηση πολλών παραγόντων όπως, η εργαστηριακή μέθοδος, οι διαστάσεις των δοκιμίων, τα χαρακτηριστικά της κατασκευής και πολλά άλλα (Whittaker et al., 1992).

Ο Whittaker, που συγκέντρωσε διάφορα στοιχεία από μελέτες για την αντοχή σε εφελκυσμό, αναφέρει ότι η αντοχή σε θραύση αυξομειώνεται περίπου μια τάξη μεγέθους. Η θεωρητική τιμή της αντοχής σε εφελκυσμό για ιδανικό ψαθυρό υλικό είναι περίπου:  $E/10$ , όπου το  $E$ , είναι το μέτρο ελαστικότητας του δοκιμίου. Στη πράξη όμως η αντοχή σε εφελκυσμό είναι της τάξης:  $E/10^3$  έως  $E/10^2$ . Μπορεί ακόμα να αναφερθεί ότι σε εργαστηριακές δοκιμές που έγιναν σε διονυσιακό

μάρμαρο, προέκυψε η τιμή αυτή να είναι ακόμα μικρότερη, της τάξης του  $E/10^4$  (Αγιουτάντης, 2002). Αυτό οδηγεί στο συμπέρασμα ότι η αντοχή σε θραύση δεν είναι μια ιδιότητα των υλικών. Κατά τον Griffith, η ιδιότητα του υλικού που συνδέεται με την θραύση είναι: η μονάδα έργου θραύσης συγκεκριμένης επιφανειακής ενέργειας, που είναι η ενέργεια που απαιτείται για να σχηματίσει μια νέα επιφάνεια θραύσης, παρά η αντοχή σε εφελκυσμό (Whittaker et al., 1992).

Η μείωση της αντοχής σε εφελκυσμό ενός ψαθυρού υλικού, οφείλεται σε προϋπάρχουσες ρωγμές ή ασυνέχειες στο υλικό. Ο Griffith το 1921, κατέδειξε ότι οι προϋπάρχουσες ρωγμές λειτουργούν σαν πρόδρομος της αστοχίας καταλήγοντας σε μια σχέση μεταξύ της τάσης θραύσης και του μεγέθους της ρωγμής. Η προσέγγιση αυτή είναι γνωστή ως ισοζύγιο ενέργειας του Griffith με την οποία εξήγησε ποσοτικά ότι η αντοχή σε εφελκυσμό είναι μικρότερη από την θεωρητική τιμή διότι όλα τα υλικά περιέχουν ατέλειες και μικρορωγμές (Whittaker et al., 1992).

## 2.2 ΤΑΣΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΤΩΝ ΡΩΓΜΩΝ

Αν προσδιοριστεί ένα σύστημα αξόνων πολικών συντεταγμένων με αρχή των αξόνων την άκρη (κορυφή) της ρωγμής (Σχήμα 2.1), το πεδίο τάσεων για κάθε γραμμικά ελαστικό σώμα δίνεται από την παρακάτω σχέση (Anderson, 1995):

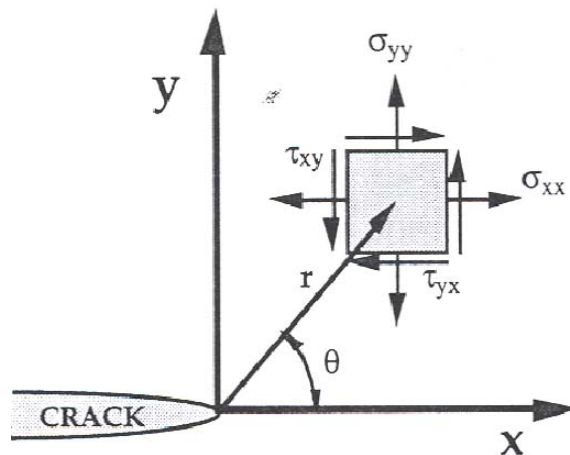
$$\sigma_{ij} = \left( \frac{k}{\sqrt{r}} \right) f_{ij}(\theta) + \sum_{m=0}^{\infty} A_m r^{\frac{m}{2}} g_{ij}^{(m)}(\theta) \quad (2.1)$$

όπου,

$\sigma_{ij}$  ο τανυστής τάσης,  $r$  και  $\theta$  προσδιορίζονται στο σχήμα 2.1,  $k$  είναι μια σταθερά και  $f_{ij}$  είναι μια αδιάστατη συνάρτηση του  $\theta$ .

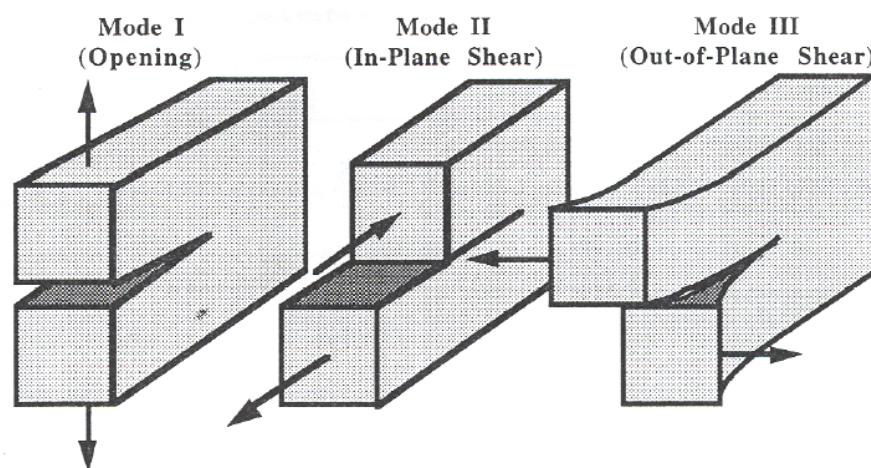
Η λύση περιέχει έναν πρωτεύοντα όρο που είναι ανάλογος του  $1/\sqrt{r}$ . Καθώς  $r \rightarrow 0$ , ο πρωτεύον όρος προσεγγίζει το άπειρο, αλλά οι υπόλοιποι όροι παραμένουν πεπερασμένοι ή πλησιάζουν στο μηδέν. Για αυτό η τάση κοντά στην κορυφή της ρωγμής μεταβάλλεται με το  $1/\sqrt{r}$ , ανεξάρτητα από τη μορφή του σώματος. Μπορεί επίσης να αποδειχθεί ότι η μετατόπιση κοντά στην κορυφή της ρωγμής μεταβάλλεται

συναρτήσει του  $\sqrt{r}$ . Η σχέση (2.1) περιγράφει μια «ιδιομορφία» της τάσης, όταν η τάση είναι ασυμπτωτική στο  $r=0$  (Anderson, 1995).



**Σχήμα 2.1:** Προσδιορισμός της αρχής των αξόνων στην κορυφή της ρωγμής (Anderson, 1995)

Υπάρχουν τρεις τύποι φόρτισης στους οποίους μπορεί να υποβληθεί μια ρωγμή (Σχήμα 2.2). Ο τύπος I (Mode I), όπου η κύρια φόρτιση εφαρμόζεται κάθετα στο επίπεδο της ρωγμής και η ρωγμή τείνει να ανοίξει, ο τύπος II (Mode II) που αντιστοιχεί σε διατμητική φόρτιση και με τον οποίο οι επιφάνειες της ρωγμής τείνουν να «γλιστρούν» προς αντίθετες κατευθύνσεις και ο τύπος III (Mode III) με τον οποίο εφαρμόζεται διατμητική τάση κάθετα στο επίπεδο της ρωγμής. Ένα σώμα μπορεί να φορτιστεί με κάθε έναν από αυτούς τους τύπους, ή και με συνδυασμό δύο ή τριών τύπων φόρτισης (Anderson, 1995).



**Σχήμα 2.2** Οι τρεις τύποι φόρτισης που μπορούν να εφαρμοστούν σε μια ρωγμή (Anderson, 1995)



### 2.2.1 Συντελεστής Έντασης της Τάσης

Κάθε τύπος φόρτισης παράγει την «ιδιομορφία»  $1/\sqrt{r}$  στην κορυφή της ρωγμής, αλλά η σταθερά  $k$  και το  $f_{ij}$  εξαρτώνται από τον τύπο φόρτισης. Η σταθερά  $k$  συνδέεται με τον συντελεστή έντασης της τάσης (Stress Intensity Factor, SIF)  $K$  με την ακόλουθη σχέση (Anderson, 1995):

$$K = k\sqrt{2\pi} \quad (2.2)$$

Με τον συντελεστή έντασης της τάσης δίνεται συνήθως σαν δείκτης και ο τύπος φόρτισης, δηλαδή,  $K_I$ ,  $K_{II}$ , ή  $K_{III}$ . Για αυτό, τα πεδία τάσης μπροστά από την κορυφή μιας ρωγμής σε ένα ισότροπο γραμμικά ελαστικό υλικό δίνονται ως εξής (Anderson, 1995):

$$\lim_{r \rightarrow 0} \sigma_{ij}^{(I)} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}^{(I)}(\theta) \quad (2.3.\alpha)$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} \sigma_{ij}^{(II)} = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}^{(II)}(\theta) \quad (2.3.\beta)$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} \sigma_{ij}^{(III)} = \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}^{(III)}(\theta) \quad (2.3.\gamma)$$

Σε ένα σύνθετο πρόβλημα φόρτισης ισχύει η παρακάτω σχέση (Anderson, 1995):

$$\sigma_{ij}^{(ολικο)} = \sigma_{ij}^{(I)} + \sigma_{ij}^{(II)} + \sigma_{ij}^{(III)} \quad (2.4)$$

Αναλυτικές σχέσεις για τα πεδία τάσης των τύπων I και II δίνονται στον πίνακα (2.1). Στον πίνακα (2.2) παρουσιάζονται οι σχέσεις της μετατόπισης για τους ίδιους τύπους και στον πίνακα (2.3) δίνονται οι μη μηδενικές συνιστώσες της τάσης και της μετατόπισης για τον τύπο III.

**Πίνακας 2.1:** Τα πεδία τάσης μπροστά από την κορυφή μιας ρωγμής για τους τύπους φόρτισης I και II, για ένα γραμμικά ελαστικό ισότροπο υλικό (Anderson, 1995)

	Mode I	Mode II
$\sigma_{xx}$	$\frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[1 - \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right)\right]$	$-\frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[2 + \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right)\right]$
$\sigma_{yy}$	$\frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[1 + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right)\right]$	$\frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right)$
$\tau_{xy}$	$\frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right)$	$\frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[1 - \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right)\right]$
$\sigma_{zz}$	0 (Plane Stress) $\nu (\sigma_{xx} + \sigma_{yy})$ (Plane Strain)	0 (Plane Stress) $\nu (\sigma_{xx} + \sigma_{yy})$ (Plane Strain)
$\tau_{xz},$ $\tau_{yz}$	0	0

**Πίνακας 2.2:** Τα πεδία μετατόπισης για τους τύπους φόρτισης I και II, για ένα γραμμικά ελαστικό ισότροπο υλικό (Anderson, 1995)

	Mode I	Mode II
$u_x$	$\frac{K_I}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[\kappa - 1 + 2 \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]$	$\frac{K_{II}}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[\kappa + 1 + 2 \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]$
$u_y$	$\frac{K_I}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[\kappa + 1 - 2 \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]$	$-\frac{K_{II}}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[\kappa - 1 - 2 \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]$

**Πίνακας 2.3:** Μη μηδενικές συνιστώσες τάσης και μετατόπισης για τον τύπο φόρτισης III για ένα γραμμικά ελαστικό ισότροπο υλικό (Anderson, 1995)

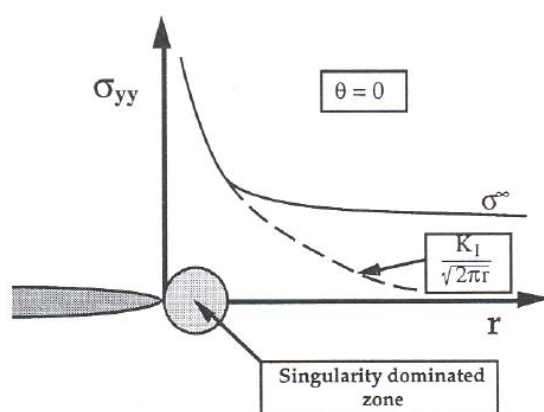
$\tau_{xz} = -\frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$
$\tau_{yz} = \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$
$u_z = \frac{K_{III}}{\mu^*} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$

Στη συνέχεια θεωρείται ο τύπος I στο επίπεδο της ρωγμής όπου  $\theta=0$  και σύμφωνα με τον πίνακα (2.1) οι τάσεις στις διευθύνσεις x και y είναι ίσες και είναι (Anderson, 1995):

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \quad (2.5)$$

Όταν  $\theta=0$ , η διατμητική τάση είναι μηδέν γεγονός που σημαίνει ότι το επίπεδο της ρωγμής είναι κύριο επίπεδο για τον τύπο φόρτισης I. Το σχήμα (2.3) αποτελεί μια σχηματική αναπαράσταση της κάθετης τάσης στο επίπεδο της ρωγμής  $\sigma_{yy}$  συναρτήσει της απόστασης από την κορυφή της ρωγμής. Η σχέση (2.5) ισχύει μόνο κοντά στην κορυφή της ρωγμής, όπου το  $1/\sqrt{r}$  επικρατεί στο πεδίο τάσης. Οι τάσεις μακριά από την κορυφή της ρωγμής δέχονται την επίδραση από τις συνοριακές συνθήκες. Για παράδειγμα, αν το σώμα υποβάλλεται σε ομοιόμορφη εφελκυστική τάση, η  $\sigma_{yy}$  προσεγγίζει μια σταθερή τιμή, την  $\sigma^\infty$ . Έτσι, η περιοχή όπου οι σχέσεις των πινάκων (2.1) και (2.3) περιγράφουν το πεδίο στην κορυφή της ρωγμής, προσδιορίζονται σαν την περιοχή που επικρατεί ιδιομορφία (singularity dominated zone) (Anderson, 1995).

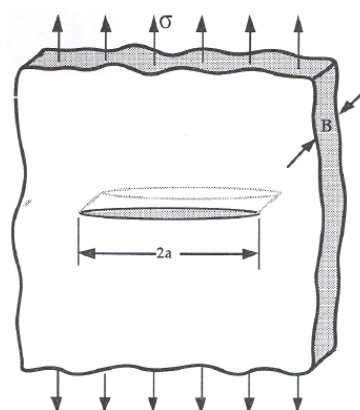
Ο συντελεστής έντασης της τάσης καθορίζει το πλάτος (amplitude) της ιδιομορφίας στην κορυφή της ρωγμής. Αυτό είναι οι τάσεις κοντά στην κορυφή της ρωγμής που αυξάνονται σε αναλογία με το  $K$ . Επιπλέον, ο συντελεστής έντασης της τάσης καθορίζει πλήρως τις συνθήκες στην κορυφή της ρωγμής.



**Σχήμα 2.3:** Η κάθετη τάση στο επίπεδο της ρωγμής στον τύπο φόρτισης I (Anderson, 1995)

### 2.2.2 Σχέση Μεταξύ $K$ και Συνολικής Απόκρισης

Μια λύση κλειστής μορφής για το  $K$  είναι η διάταξη του Σχήματος 2.4 στην οποία υπάρχει μια ρωγμή μέσα στο σώμα μιας απείρου μεγέθους πλάκας η οποία υποβάλλεται σε εφελκυσμό.



**Σχήμα 2.4:** Ρωγμή μέσα στο σώμα απείρων διαστάσεων πλάκας η οποία υποβάλλεται σε εφελκυστική τάση (Anderson, 1995)

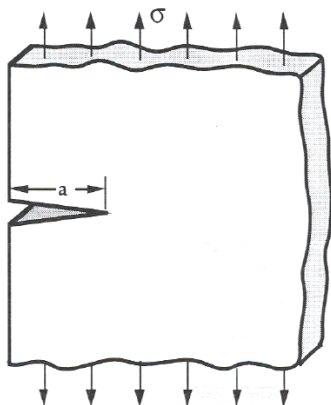
Αφού η τάση  $\sigma$  είναι κάθετη στο επίπεδο της ρωγμής, ο τύπος φόρτισης είναι τύπος I. Σε αυτήν την περίπτωση η σχέση μεταξύ  $K_I$  και των συνολικών συνθηκών (global conditions) είναι η εξής (Anderson, 1995):

$$K_I = \sigma\sqrt{\pi a} \quad (2.6)$$

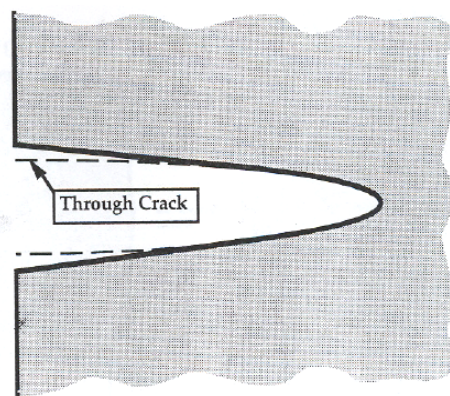
Μια συγγενική λύση είναι αυτή για την περίπτωση μιας ημιαπείρων διαστάσεων πλάκας με μια ρωγμή στην ακμή της (edge crack) (Σχήμα 2.5). Ο συντελεστής έντασης της τάσης για την ρωγμή δίνεται από την παρακάτω σχέση:

$$K_I = 1,12\sqrt{\pi a} \quad (2.7)$$

Η αύξηση κατά 12% στο  $K_I$  οφείλεται στις διαφορετικές συνοριακές συνθήκες που επικρατούν στην ελεύθερη ακμή του σώματος. Όπως διακρίνεται και στο σχήμα (2.6), η ρωγμή στην ακμή του σώματος ανοίγει περισσότερο γιατί είναι λιγότερο περιορισμένη από ότι η ρωγμή μέσα στο σώμα (through crack), η οποία σχηματίζει ένα ελλειπτικό σχήμα καθώς φορτίζεται.

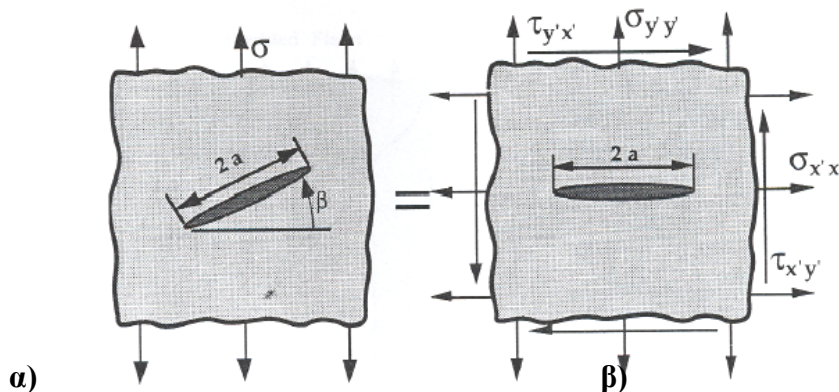


**Σχήμα 2.5:** Ρωγμή στην μια ακμή μιας ημιαπείρων πλάκας, που υποβάλλεται σε εφελκυσμό (Anderson, 1995)



**Σχήμα 2.6:** Σύγκριση των ανοιγμάτων των ρωγμών, για ρωγμή στην ακμή του σώματος και για ρωγμή μέσα στο σώμα (Anderson, 1995)

Στη συνέχεια θεωρείται μια ρωγμή μέσα σε μια πλάκα ημιαπείρων διαστάσεων όπου η κάθετη στο επίπεδο της ρωγμής είναι προσανατολισμένη κατά μια γωνία  $\beta$  με τον άξονα φόρτισης (Σχήμα 2.7.α). Αν  $\beta \neq 0$ , η ρωγμή δέχεται συνδυασμένη φόρτιση των τύπων I και II.



**Σχήμα 2.7:** Ρωγμή μέσα σε πλάκα ημιαπείρων διαστάσεων για την γενική περίπτωση όπου η κύρια τάση δεν είναι κάθετη στο επίπεδο της ρωγμής (Anderson, 1995)

Το  $K_{III}$  είναι μηδέν όσο ο άξονας φόρτισης και η ρωγμή είναι κάθετα στο επίπεδο της πλάκας. Αν επαναπροσδιοριστούν οι άξονες ώστε να συμπίπτουν με τον προσανατολισμό της ρωγμής (Σχήμα 2.7.β), φαίνεται ότι η εφαρμοζόμενη τάση μπορεί να αναλυθεί στις ορθή και διατμητική συνιστώσα. Η κάθετη τάση στο επίπεδο της ρωγμής,  $\sigma'_{y'y'}$ , παράγει τύπο φόρτισης I, ενώ η  $\tau'_{x'y'}$  εφαρμόζει τον τύπο φόρτισης II στην ρωγμή. Οι συντελεστές έντασης της τάσης για το σχήμα (2.7) μπορούν να προκύψουν συνδυάζοντας τις συνιστώσες  $\sigma'_{y'y'}$  και  $\tau'_{x'y'}$  με την  $\sigma$  και το  $\beta$  μέσω του κύκλου του Mohr (Anderson, 1995):

$$K_I = \sigma_{y'y'} \sqrt{\pi a} = \sigma \cos^2(\beta) \sqrt{\pi a} \quad (2.8)$$

και

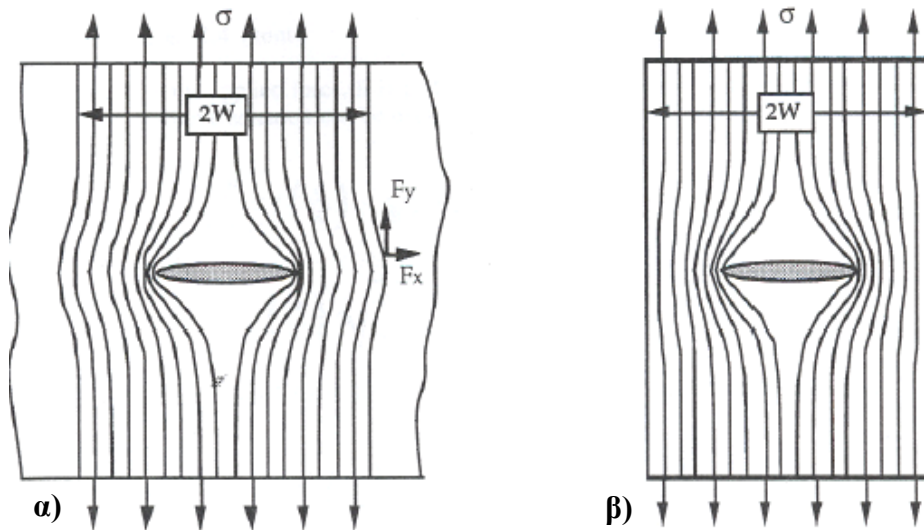
$$K_{II} = \tau_{y'x'} \sqrt{\pi a} = \sigma \sin(\beta) \cos(\beta) \sqrt{\pi a} \quad (2.9)$$

### 2.2.3 Η Επίδραση του Πεπερασμένου Μεγέθους

Οι περισσότερες διατάξεις για τις οποίες υπάρχει μια κλειστή λύση για το  $K$ , αποτελούνται από μια ρωγμή απλού σχήματος σε μια πλάκα απείρων διαστάσεων. Οι διαστάσεις της ρωγμής είναι μικρές σε σύγκριση με τις διαστάσεις της πλάκας και η κατάσταση στην κορυφή της ρωγμής δεν επηρεάζεται από τις εξωτερικές συνοριακές συνθήκες. Καθώς το μέγεθος της ρωγμής αυξάνει ή οι διαστάσεις της πλάκας μικραίνουν, οι εξωτερικές συνοριακές συνθήκες αρχίζουν να επηρεάζουν την κορυφή της ρωγμής. Σε αυτές τις περιπτώσεις δεν είναι συνήθως δυνατή μια λύση κλειστής μορφής για τον συντελεστή έντασης της τάσης (Anderson, 1995).

Στο σχήμα (2.8) παρουσιάζεται μια πλάκα με μια ρωγμή στο εσωτερικό της, η οποία υποβάλλεται σε εφελκυστική τάση. Επίσης, διακρίνεται η επίδραση του πεπερασμένου πλάτους στην κατανομή της τάσης στην κορυφή της ρωγμής, η οποία αναπαρίσταται με δυναμικές γραμμές (lines of force). Η τοπική τάση είναι ανάλογη με το κενό μεταξύ των γραμμών δύναμης. Αφού η εφελκυστική τάση δεν είναι δυνατόν να μεταβιβαστεί μέσω της ρωγμής, οι δυναμικές γραμμές κατανέμονται γύρω από την ρωγμή, με αποτέλεσμα μια τοπική συγκέντρωση τάσεων. Στην απείρου μεγέθους πλάκα, η γραμμική δύναμης σε απόσταση  $W$  από το κέντρο της ρωγμής έχει συνιστώσες δύναμης στις διευθύνσεις  $x$  και  $y$ . Αν το πλάτος της πλάκας περιοριστεί σε  $2W$ , η δύναμη  $x$  πρέπει να είναι μηδέν στην ελεύθερη ακμή. Αυτή η συνοριακή συνθήκη προκαλεί τις γραμμές δύναμης να συμπιεστούν, με αποτέλεσμα μεγαλύτερη συγκέντρωση τάσης στην άκρη της ρωγμής (Anderson, 1995).



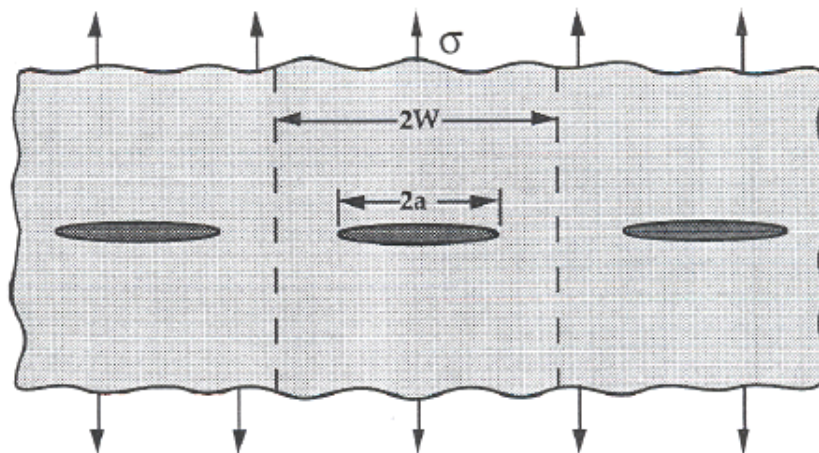


**Σχήμα 2.8:** Συγκέντρωση τάσης λόγω της ρωγμής μέσα σε πλάκα **α)** Πεπερασμένου πλάτους και **β)** Απείρου πλάτους (Anderson, 1995)

Μια τεχνική για την εκτίμηση της συνοριακής συνθήκης του πεπερασμένου πλάτους είναι να θεωρηθεί μια περιοδική παράταξη ομοαξονικών ρωγμών σε μια απείρου μεγέθους πλάκα (Σχήμα 2.9). Ο συντελεστής έντασης της τάσης για τον τύπο I δίνεται από την παρακάτω σχέση (Anderson, 1995):

$$K_I = \sigma \sqrt{\pi a} \left[ \frac{2W}{\pi a} \tan \left( \frac{\pi a}{2W} \right) \right]^{1/2} \quad (2.10)$$

Ο συντελεστής έντασης προσεγγίζει την τιμή της πλάκας καθώς το  $a/W$  προσεγγίζει το μηδέν. Το  $K_I$  είναι ασυμπτωτικό με το  $a/W=1$ .

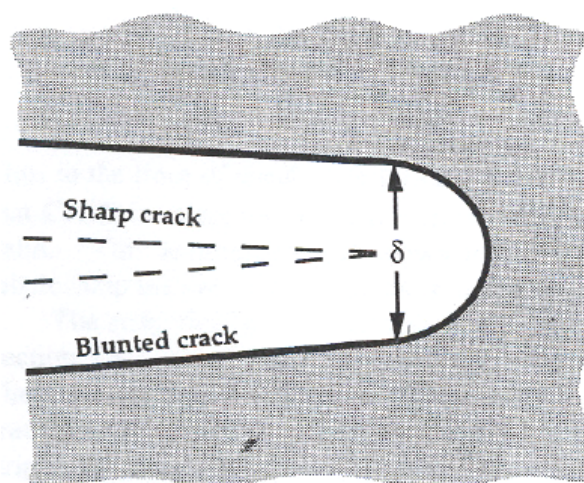


**Σχήμα 2.9:** Ομοαξονικές ρωγμές σε μια απείρων διαστάσεων πλάκα που υποβάλλεται σε εφέλκυσμό (Anderson, 1995)

### 2.2.4 Άνοιγμα Χειλέων στην Αιχμή της Ρωγμής

Το άνοιγμα χειλέων στην αιχμή της ρωγμής (Crack Tip Opening Displacement, CTOD) είναι μια ελαστοπλαστική παράμετρος η οποία περιγράφει τις συνθήκες που επικρατούν στην κορυφή (άκρη) μιας ρωγμής σε ένα ελαστοπλαστικό υλικό και μπορεί να χρησιμοποιηθεί σαν κριτήριο θραύσης (Anderson, 1995).

Ο Wells πρώτος παρατήρησε κατά την εξέταση ρωγματομένων δοκιμίων, ότι οι επιφάνειες των ρωγμών μετακινούντουσαν χωριστά προς την θραύση του υλικού. Η πλαστική παραμόρφωση άμβλυνε την αρχική οξεία ρωγμή όπως φαίνεται στο σχήμα (2.10). Ο βαθμός της άμβλυνσης της ρωγμής αυξανόταν αναλογικά με την σκληρότητα του υλικού. Το γεγονός αυτό οδήγησε τον Wells στο να εισάγει τον όρο CTOD σαν μέτρο της αντοχής θραύσης (Anderson, 1995).



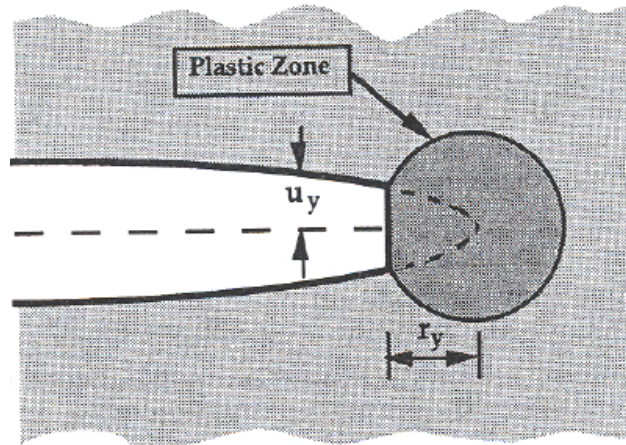
**Σχήμα 2.10:** CTOD. Μια αρχική αιχμηρή ρωγμή η οποία αμβλύνεται με την πλαστική παραμόρφωση με αποτέλεσμα μια πεπερασμένη μετατόπιση στην κορυφή της ρωγμής (Anderson, 1995)

Αν θεωρηθεί μια ρωγμή με μια μικρή πλαστική ζώνη (Σχήμα 2.11) το CTOD δίνεται από την παρακάτω σχέση (Anderson, 1995):

$$\delta = 2u_y = \frac{4}{\pi} \frac{K_I^2}{\sigma_{ys} E} \quad (2.11)$$

όπου,  $\delta$  το CTOD.





**Σχήμα 2.11:** Προσδιορισμός του CTOD από την μετατόπιση της ρωγμής στην πλαστική ζώνη (Anderson, 1995)

Εναλλακτικά το CTOD μπορεί να σχετιστεί με τον ρυθμό απελευθέρωσης ενέργειας ως εξής (Anderson, 1995):

$$\delta = \frac{4}{\pi} \frac{G}{\sigma_{YS}} \quad (2.12)$$

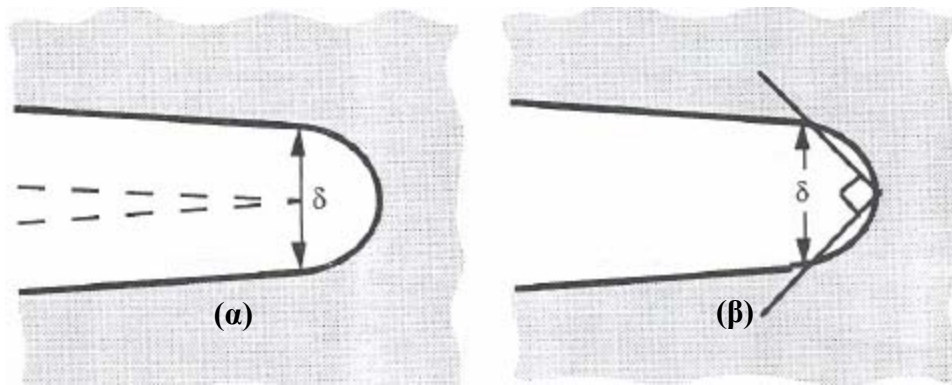
Επίσης το CTOD για μια ρωγμή σε μια πλάκα απείρων διαστάσεων η οποία υποβάλλεται σε εφελκυστική τάση είναι (Anderson, 1995):

$$\delta = \frac{8\sigma_{YS}a}{\pi E} \ln \sec \left( \frac{\pi}{2} \frac{\sigma}{\sigma_{YS}} \right) \quad (2.13)$$

όπου με ανάπτυγμα του όρου  $\ln \sec$  προκύπτει ότι (Anderson, 1995):

$$\delta = \frac{K_I^2}{\sigma_{YS} E} = \frac{G}{\sigma_{YS}} \quad (2.14)$$

Υπάρχει μεγάλος αριθμός εναλλακτικών προσδιορισμών του CTOD. Οι πιο συνηθισμένοι διακρίνονται στο σχήμα (2.12) και είναι η μετατόπιση στην κορυφή της ρωγμής και η αποτέμνουσα που αντιστοιχεί σε γωνία 90°. Ο τελευταίος προσδιορισμός του CTOD χρησιμοποιείται κυρίως στην Μέθοδο των Πεπερασμένων Στοιχείων.



**Σχήμα 2.12:** Διαφορετικοί προσδιορισμοί του CTOD **α)** Μετατόπιση στην κορυφή της ρωγμής **β)** Μετατόπιση στο σημείο τομής δύο κάθετων μεταξύ τους στην κορυφή της ρωγμής (Anderson, 1995)

### 2.2.5 Συντελεστής Έντασης της Τάσης στην Κορυφή Εγκοπής

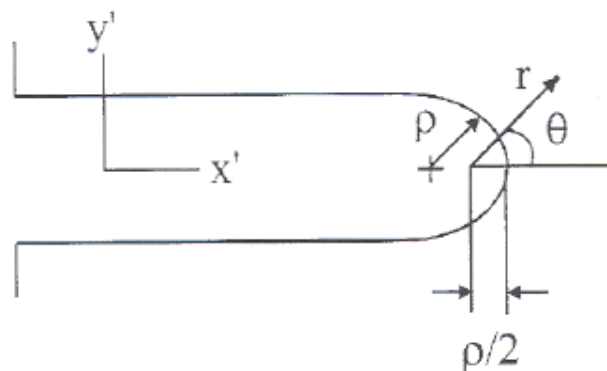
Η αναλυτική έκφραση του συντελεστή έντασης της τάσης (SIF) τύπου I,  $K_I$ , στην αιχμή μιας ρωγμής σε δοκίμιο κάμψης τριών σημείων έχει δοθεί από τους Gross και Srawley και είναι (Kourkoulis et al., 1999):

$$K_I = \sigma_{nom} \sqrt{\pi a} F(a/h)$$

$$F(a/h) = 1,090 - 1,735 \left( \frac{a}{h} \right) + 8,20 \left( \frac{a}{h} \right)^2 - 14,18 \left( \frac{a}{h} \right)^3 + 14,57 \left( \frac{a}{h} \right)^4, \quad \frac{l}{h} = 4$$

(2.15)

Ο τύπος I SIF όπως δίνεται παραπάνω από την θεωρία Θραυστομηχανικής Γραμμικά Ελαστικών Υλικών (Linear Elastic Fracture Mechanics, LEFM), είναι πλήρως εφαρμόσιμος στην κορυφή λεπτών εγκοπών όπως φαίνεται στο σχήμα (2.13).



**Σχήμα 2.13:** Τοπικό σύστημα συντεταγμένων για τα πεδία στην κορυφή της εγκοπής (Kourkoulis et al., 1999)

Για την περιοχή της κορυφής της εγκοπής όπου το  $r$  είναι μικρό σε σχέση με τις άλλες επίπεδες (επίπεδο  $x' - y'$ ) διαστάσεις (εκτός από το πλάτος της εγκοπής  $s$ ), το πεδίο παραμόρφωσης έχει την παρακάτω μορφή (Kourkoulis et al., 1999):

$$\varepsilon_{x'}(r, \theta) = \frac{1}{\square} \frac{K_I}{E \sqrt{2\pi r}} \left\{ -\frac{1}{1-\nu} \frac{\rho}{2r} \cos \frac{3\theta}{2} + \cos \frac{\theta}{2} \left[ \frac{1-2\nu}{1-\nu} - \frac{1}{1-\nu} \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right] \right\} \quad (2.16.\alpha)$$

$$\varepsilon_{y'}(r, \theta) = \frac{1}{\square} \frac{K_I}{E \sqrt{2\pi r}} \left\{ \frac{1}{1-\nu} \frac{\rho}{2r} \cos \frac{3\theta}{2} + \cos \frac{\theta}{2} \left[ \frac{1-2\nu}{1-\nu} + \frac{1}{1-\nu} \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right] \right\} \quad (2.16.\beta)$$

$$\varepsilon_{x'y'} = \frac{1}{G} \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \left\{ -\frac{\rho}{2r} \sin \frac{3\theta}{2} + \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \right\}, \quad r - \rho/2 \rightarrow 0 \quad (2.16.\gamma)$$

όπου,  $\square = E/(1-\nu^2)$  για συνθήκες επίπεδης παραμόρφωσης και  $G = E/2(1+\nu)$ .

Οι πρώτοι όροι στους παραπάνω τύπους είναι απαραίτητοι για να ικανοποιείται η συνθήκη των μηδενικών επιφανειακών τάσεων (tractions) κατά μήκος της κορυφής της εγκοπής η οποία έχει πεπερασμένο μήκος καμπυλότητας.

### 2.2.6 Κατανομή Ελαστικής Τάσης σε πεπερασμένου μεγέθους πλάκες με πλευρικές εγκοπές

Σε μια ανάλυση για την ανάπτυξη ρωγμής είναι απαραίτητο να είναι γνωστό η κατανομή τάσης κοντά στις περιοχές αύξησης της τάσης. Η διαδικασία που περιγράφεται αναθεωρεί τις κύριες εκφράσεις ελαστικής τάσης για πελώριες πλάκες με ημι-άπειρες συμμετρικές V-σηματοποιημένες εγκοπές και τις προσαρμόζει σε μερικές πρακτικές περιπτώσεις, στις οποίες η αμοιβαία επιρροή από τις χαραγές όπως επίσης και από τις περιορισμένου μεγέθους πλάκες παίζουν ένα σημαντικό ρόλο στην κατανομή της τάσης. Επομένως ο σκοπός είναι να δοθεί μια κατά προσέγγιση λύση κλειστού τύπου για την διαμήκης τάσης, ισχυρή για ολόκληρο το μήκος του συνδέσμου, δηλ. από τη μια άκρη της εγκοπής ως την άλλη.

Η εμφάνιση μη συνεχόμενης γεωμετρίας είναι αναπόφευκτη σε δομικά συστατικά, προκαλώντας λίγο ή πολύ τοπικές διαταράξεις των τασικών πεδίων. οι περιοχές αύξησης της τάσης είναι οι προτιμώμενες θέσεις για έναρξη ρωγμής. Για να

προβλεφθεί η εξασθενημένη διάρκεια ζωής ενός συστατικού με εγκοπή, χρειάζονται οι αναλύσεις και της αρχής της ρωγμής και της εξάπλωσης της. Όπως είναι γνωστό, οι συντελεστές συγκέντρωσης τάσης δίνουν μόνο τη μέγιστη τιμή τάσης και δεν παρέχουν καμία πληροφορία σχετικά με άλλες συνισταμένες τάσης, ούτε σχετικά με την κατανομή πίεσης πριν από τη μη-ραγισμένη εγκοπή. Μια τέτοια κατανομή είναι καθοριστική για τον ακριβή προσδιορισμό της κινητήριας δύναμης της σχισμής, π.χ. ο συντελεστής της έντασης της τάσης για μια σχισμή που προέρχεται από εγκοπή. Ο βαθμός της ακρίβειας για την ανάλυση της ανάπτυξης καταπονημένης ρωγμής εξαρτάται σε μεγάλο βαθμό από την ακρίβεια που χρησιμοποιείται για να περιγραφθεί η τάση στην υψηλά τασική περιοχή.

Οι πιο γνωστές κατά προσέγγιση εκφράσεις για καταμερισμό διαμήκους τάσης από τη ρίζα της εγκοπής έναντι διαφορετικών διαμορφώσεων, η καθεμία με μια σειρά από διαφορετική οξύτητα εγκοπής, ήταν ορθά ελεγμένες από τους Shin et al. (1994a, b). Για να αποδώσουν την καλύτερη εκτίμηση της κατανομής τάσης από τη ρίζα της εγκοπής κατά μήκος του κατακόρυφου άξονα ως την κατεύθυνση του φορτίου, πρότειναν να χρησιμοποιούν διαφορετικές εκφράσεις εξαιτίας των Chen, Glinka-Newport και Kujawski (1978, 1987, 1991), σε συμφωνία με τις τιμές της συγκέντρωσης τάσης. Από τότε που μια εξέταση των εκφράσεων του Chen και του Kujawski (1994α, β) έδειξε ότι έτειναν αντίστοιχα να υποτιμούν και να υπερτιμούν μια τέτοια κατανομή, μια έκφραση βασισμένη στη μεσαία τιμή τους προτάθηκε αργότερα από τους Kujawski και Shin (1997), εφόσον ήταν φυσικό ότι θα απέδιδε μια καλύτερη προσέγγιση για μια ευρύ σειρά από αμβλείες έως αιχμηρές εγκοπές.

Πρόσφατα οι Xu et al. (1995) δημιούργησαν νέες εκφράσεις για να περιγράψουν το πεδίο τάσης για πλευρικές και κεντρικές εγκοπές σε πεπερασμένες και μη πεπερασμένες πλάκες υπό μονοαξονικό εφελκυσμό. Εισήγαγαν σε μια γνωστή φόρμουλα Greager-Paris (1967), έγκυρη για αιχμηρές σχισμές, μερικές σταθερές διόρθωσης, καθορισμένες αριθμητικά εφαρμόζοντας εξισώσεις στα πεδία τάσης μη πεπερασμένες πλάκες, η καθεμία εμπεριέχοντας ένα ελλειπτικό σχισμή με διαφορετικό λόγο ακτίνας. Για πεπερασμένα σώματα με εγκοπή, συστήθηκε επίσης διορθωτικός συντελεστής πλάτους• αυτός αποκτήθηκε εφαρμόζοντας εξισώσεις στα πεδία τάσης για καθορισμένα πλάτη λωρίδων, το καθένα με ένα κυκλικό άνοιγμα διαφορετικού μεγέθους (Xu et al. 1995). Η κατανομή τάσης εξαρτάται από την ακτίνα της ρίζας της εγκοπής  $\rho$  και τον συντελεστή συγκέντρωσης πίεσης  $K_t$  για μη

πεπερασμένα σώματα, και για πεπερασμένα σώματα από  $\rho$ ,  $Kt$ , το βάθος της εγκοπής και το μήκος του συνδέσμου εμπρός από την άκρη της εγκοπής.

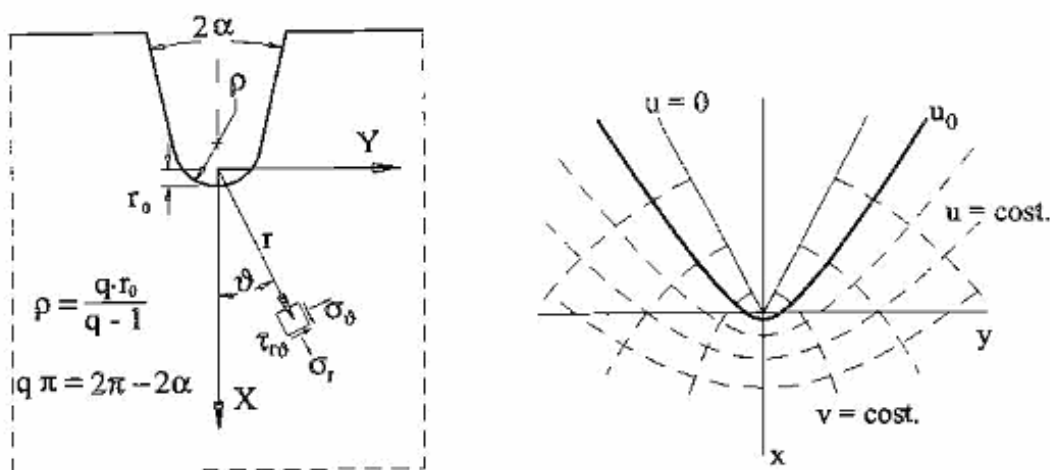
Σε αυτή την ενότητα εξετάζεται μόνο η συνισταμένη τάσης κατακόρυφα στον άξονα της εγκοπής και παράλληλα με την εξωτερική κατεύθυνση του φορτίου, διότι αυτή είναι η συνισταμένη τάσης που είναι πραγματικά σημαντική για την ανάλυση καταπόνησης. Εφόσον μια αναλυτική λύση είναι δύσκολο ή αδύνατον να ισχύσει για ένα πεπερασμένο σώμα με εγκοπή, ο Xu et al (1995) κατέληξαν ότι είναι εξαιρετικά επιθυμητές οι κατά προσέγγιση εκφράσεις τάσης, κλειστού τύπου, σε περιοχές συγκέντρωσης τάσης.

Ωστόσο, όπως είναι γνωστό, μερικές αναλυτικές λύσεις όντως υπάρχουν• ανάμεσα από αυτές παρατίθενται τουλάχιστον μερικές από τις κλασσικές προ-1950 συμβολές στην ανάλυση εγκοπής, και συγκεκριμένα, οι εργασίες των Inglis (1913), Howland (1929-30), Knight (1935) και Ling (1947) πάνω στην κατανομή τάσης κοντά σε ελλειπτικά ανοίγματα, κυκλικά ανοίγματα, έγκλειστα ανοίγματα και συμμετρικά ημικυκλικές εγκοπές, αντίστοιχα. Ο Inglis περιόρισε την εργασία του σε πλάκες με απεριόριστο πλάτος (η λύση ήταν ακριβής και επομένως εφαρμόσιμη στα ακραία όρια του σχήματος που μια έλλειψη μπορεί να πάρει, δηλ. μια κυκλική οπή και ένα κοφτερό ευθύ ραγίσμα)• οι υπόλοιπες αναφερόμενες εργασίες (Howland, 1929-30, Knight, 1935, Ling, 1947) διαπραγματεύτηκαν εγκοπές σε πεπερασμένες μεγέθους πλάκες.

Θα αναλυθούν εγκοπές τύπου-V και U, όπως επίσης και οι ημικυκλικές εγκοπές, οι τελευταίες λαμβάνοντας ως ακραίες περιπτώσεις της προτεινόμενης μεθόδου. Με σκοπό να βρεθεί η επίδραση των πεπερασμένου μεγέθους πλακών στον καταμερισμό της τάσης προκαλούμενη από συμμετρικές εγκάρσιες εγκοπές σε πλάκες υπό αξονικά εφελκυστικά φορτία. Το εναρκτήριο σημείο παρουσιάζεται από μια αναλυτική λύση που προτάθηκε πρόσφατα από τους συγγραφείς (Lazzarin και Tono, 1996) για να περιγράψει από μια ενωμένη προσέγγιση, τα πεδία τάσης κοντά σε αιχμηρά ραγίσματα, εγκοπές τύπου-V. Ο βαθμός ακρίβειας της λύσης είχε ήδη αναλυθεί εκτενεστέρα στους Atzori et al. (1997) σχετικά και με τα διαμήκη και με τα εγκάρσια πεδία τάσης, λαμβάνοντας υπόψη όχι μόνο εφελκυστικά αλλά και καμπτικά φορτία.

Συγκεκριμένα, σύμφωνα με μια σύνθετη μεταβλητή μέθοδο δημιουργημένη από τον Muskhelishvili (1935), τα πεδία τάσης για συμμετρικές εγκοπές τύπου-V (σχήμα 2.14) αποκτήθηκαν κάτω από οριζόντια τάση ή συνθήκες επίπεδης

καταπόνησης χρησιμοποιώντας τις αναλυτικές δυναμικές συναρτήσεις  $\varphi(z) = az^\lambda$  και  $\psi(z) = bz^\lambda + cz^\mu$  και τους συντελεστές  $a, b, c$  και τους πραγματικούς εκθέτες  $\lambda$  και  $\mu$ , με την υπόθεση ότι  $\lambda > \mu$ . Όλοι οι συντελεστές και οι εκθέτες καθορίστηκαν (Lazzarin και Tovo, 1996, Atzori et al., 1997) χρησιμοποιώντας μια σύμμορφο απεικόνιση (ήδη προτεινόμενη από τον Neuber (1958)) στο βοηθητικό σύστημα των καμπυλόγραμμων συντεταγμένων  $(u, v)$  που φαίνονται στο σχήμα 2.15. Επισημάνθηκε ότι τα πεδία τάσης ισχυρά για αιχμηρά ραγίσματα (Westergaard, 1939, Irwin, 1957), V ρωγμές (Williams, 1952, Carpenter, 1984), και U-σχηματισμένες εγκοπές (Creager-Paris, 1967, Glinka, 1985) μπορούν εύκολα να προέλθουν ως χαρακτηριστικές περιπτώσεις από νέες λύσεις κλειστού τύπου, επιβάλλοντας ανάλογες τιμές στις σχετικές γεωμετρικές παραμέτρους.



**Σχήμα 2.14:** Πολικό σύστημα συντεταγμένων και καμπυλόγραμμο σύστημα (Lazzarin and Tovo, 1996, Atzori, 1997)

Εξαιτίας της φύσης τους, οι εκφράσεις τάσης που αναφέρθηκαν στους (Lazzarin-Tovo, 1996, Atzori et al., 1997) ήταν έγκυρες μόνο σε περιοχές συγκέντρωσης τάσης σε μεγάλες πλάκες, δηλ. σε πλάκες όπου θεωρητικά το πλάτος και το βάθος της εγκοπής θα μπορούσαν να θεωρηθούν απεριόριστα. Ωστόσο, η ακρίβεια τους παρέμεινε επίσης καλή για πλάκες περιορισμένου πλάτους, αλλά μόνο μέχρι το κύριο πεδίο τάσης να τέμνει την εικονική γραμμή τάσης που εκτιμάται στην περιοχή δικτύου (η οποία είναι η υψηλή πιεζόμενη περιοχή).

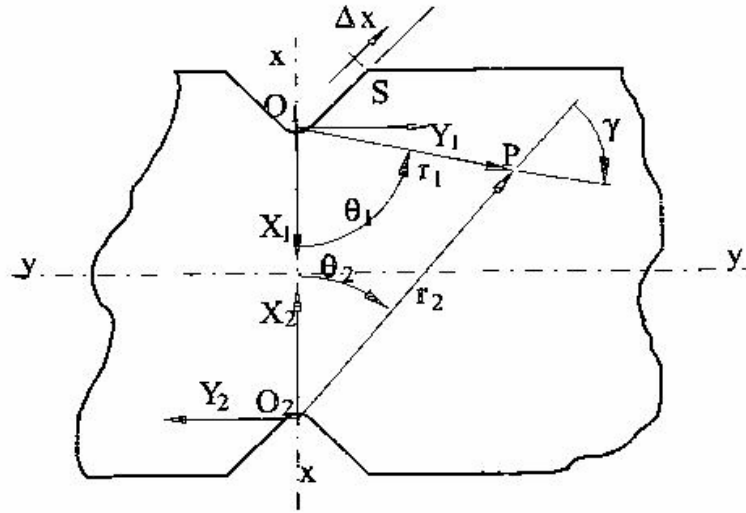
Οι στόχοι αυτής της ενότητας περιληπτικά είναι οι εξής:

(α) να δώσει μια διαδικασία η οποία, αρχίζοντας από την κύρια έκφραση τάσης που ήδη αναφέρθηκε παραπάνω (Lazzarin-Tovo, 1996, Atzori et al., 1997),

επιτρέπει να αυξηθεί η ζώνη εγκυρότητας τους, από τη ρίζα της εγκοπής, έως τον άξονα της συμμετρίας, δηλ. σε όλη την περιοχή δικτύου της πλάκας• για να το κάνει αυτό η αμοιβαία επίδραση από τις δυο εγκοπές θα συγκριθεί και μια απλή συνθήκη ισορροπίας θα καθοριστεί στο αδύναμο τμήμα της πλάκας•

(β) να ορίσει το βαθμό ακρίβειας και το φάσμα ισχύς της νέας έκφρασης, με βάση τη κλειστού τύπου λύση Xu et al. (1995), στη μόνη όπου ένας συντελεστής πεπερασμένου μεγέθους αναφέρεται ρητά•

(γ) να αναζητήσει ένα σύνδεσμο ανάμεσα στον κύριο εκθέτη των πεδίων τάσης όλων των αναλυμένων περιπτώσεων και στον εκθέτη  $\lambda$  που έχει ήδη δοθεί από τον William (1952) για ανοιχτά τύπου-V ραγίσματα με άκρες χωρίς έλκυση.



**Σχήμα 2.15:** Σχήμα αναφοράς για δύο πλευρικές εγκοπές (Lazzarin and Tovo, 1996, Atzori, 1997)

#### 2.2.6.1 Διατύπωση του προβλήματος.

Η τελική έκφραση των συντελεστών πίεσης  $\sigma_\theta$ ,  $\sigma_r$  και  $\tau_{r\theta}$  (σχήμα 2.14), αποκτάται επιβάλλοντας τις συνοριακές συνθήκες στο βοηθητικό επίπεδο  $(u, v)$ , στη ρίζα της εγκοπής και κατά μήκος της πλευράς της, σε απόσταση από τη ρίζα.

$$\begin{aligned}\sigma_\theta &= \lambda r^{\lambda-1} (a_1 (1+\lambda) \cos(1-\lambda) \vartheta + b_1 \cos(1+\lambda) \vartheta) + \mu r^{\mu-1} c_1 \cos(1+\mu) \vartheta \\ \sigma_r &= \lambda r^{\lambda-1} (a_1 (3-\lambda) \cos(1-\lambda) \vartheta - b_1 \cos(1+\lambda) \vartheta) - \mu r^{\mu-1} c_1 \cos(1+\mu) \vartheta \\ \sigma_{r\vartheta} &= \lambda r^{\lambda-1} (a_1 (1-\lambda) \sin(1-\lambda) \vartheta - b_1 \sin(1+\lambda) \vartheta) - \mu r^{\mu-1} c_1 \sin(1+\mu) \vartheta\end{aligned}\quad (2.17)$$

Για πλάκες περιορισμένου μεγέθους είναι φυσικό ότι σε αντιστοιχία με το γενικό σημείο P μπορεί να παρουσιαστεί ένα αποτέλεσμα από την αμοιβαία επίδραση των δυο εγκοπών. Η συνολική κατανομή της τάσης μπορεί εύκολα να αποκτηθεί κάτω από τη γραμμική ελαστική υπόθεση συνδυάζοντας την επίδραση της εγκοπής 1 με αυτή λόγω της εγκοπής 2. Τώρα, εάν κάποιος δώσει τα πεδία τάσης θεωρώντας ως σύστημα αναφοράς αυτό της εγκοπής 1, η δεύτερη συμβολή χρειάζεται μια περιστροφή από τη φυσική της ροπή χαρακτηριζόμενη από τη γωνία  $\theta_2$  σε αυτή χαρακτηριζόμενη με  $\theta_1$  (βλ. σχήμα 2.15). Ως αποτέλεσμα, τα πεδία πίεσης είναι:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_\theta \\ \tau_{r\theta} \end{Bmatrix}_{tot}^1 = \begin{Bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_\theta \\ \tau_{r\theta} \end{Bmatrix}^1 + \begin{bmatrix} \cos^2 \gamma & \sin^2 \gamma & 2 \sin \gamma \cos \gamma \\ \sin^2 \gamma & \cos^2 \gamma & -2 \sin \gamma \cos \gamma \\ -\sin \gamma \cos \gamma & \sin \gamma \cos \gamma & \cos^2 \gamma - \sin^2 \gamma \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_\theta \\ \tau_{r\theta} \end{Bmatrix}^2 \quad (2.18)$$

Κάτω από ένα απομακρυσμένο αξονικό φορτίο εφαρμοσμένο στην πλάκα, οι υπολογισμοί της δύναμης καταπόνησης και της υπολειπόμενης διάρκειας μπορούν να βασιστούν μόνο στη κατανομή τάσης  $\sigma_\theta$  κατά μήκος του άξονα συμμετρίας. Έτσι, κατά μήκος του άξονα, η διατύπωση  $\sigma_\theta$  απλοποιείται ως εξής:

$$(\sigma_{\theta\alpha})_{q=q_2=0} = \xi_1^{\xi-1} (a_1(1+\xi) + b_1) + \mu_1^{\mu-1} c_1 + \xi(h+2r_0-r_1)^{\xi-1} (a_1(1+\xi) + b_1) + \mu(h+2r_0-r_1)^{\mu-1} c_1 + \sigma_{const} \quad (2.19)$$

όπου, για να αποφευχθούν παρεξηγήσεις, ο εκθέτης  $\xi$  αντικαθιστά τον εκθέτη  $\lambda$  που ήδη χρησιμοποιήθηκε στους (Lazzarin-Tovo, 1996, Atzori et al., 1997) για τις εγκοπές τύπου-V σε μη πεπερασμένες πλάκες. Ο εκθέτης  $\lambda$  έδωσε επίσης το βαθμό ιδιομορφίας για ανοιχτά ραγίσματα με άκρες χωρίς έλκυση. Αξίζει να σημειωθεί ότι ένας αμετάβλητος όρος  $\sigma_{const}$  έχει προστεθεί στη (2.19) για να περιγράψει επιπλέον την κατανομή  $\sigma_\theta$  σε μια απόσταση μακριά από την εγκοπή, όπου η κλίση της τάσης μπορεί στην πράξη να μηδενιστεί.



### 2.2.6.2 Εκτίμηση εκθετών και σταθερών.

Για να οριστούν ο εκθέτης  $\xi$  και ο συντελεστής  $b_l$ , στους οι όροι  $\sigma_u=0$  και  $\tau_{uv}=0$  επιβλήθηκαν κατά μήκος της ελεύθερης πλευράς, μακριά από τη ρίζα της εγκοπής (όπου οι όροι σχετιζόμενοι με τον εκθέτη  $\mu$  είναι άσκοποι). Για πλάκες πεπερασμένου μεγέθους αυτοί οι όροι ορίζονται τώρα στο σημείο S (σχήμα 2.15), δηλ. σε αντιστοιχία με την τομή μεταξύ των πλευρών εγκοπής και της ακτίνας της ρίζας της εγκοπής. ωστόσο, για εγκοπές τύπου-V και U, έχει επαληθευτεί ότι τέτοιες συνοριακές συνθήκες μπορούν να επιβληθούν ικανοποιητικά στο σημείο S τουλάχιστον όταν οι πλάκες παρουσιάζουν ένα βάθος εγκοπής  $\geq 4$  την ακτίνα της εγκοπής

Οι διατυπώσεις για  $\sigma_u$  και  $\tau_{uv}$  μπορούν να δοθούν ως εξής:

$$\begin{aligned}
 & (\sigma_u)_s \\
 &= \xi r_{1s}^{\xi-1} (a_1 (1+\xi) \cos(1-\xi) \mathcal{Q}_{1s} + b_1 \cos(1+\xi) \mathcal{Q}_{1s}) \cos^2 \gamma_{1s} \\
 &+ \xi r_{1s}^{\xi-1} (a_1 (3-\xi) \cos(1-\xi) \mathcal{Q}_{1s} - b_1 \cos(1+\xi) \mathcal{Q}_{1s}) \sin^2 \gamma_{1s} \\
 &- 2\xi r_{1s}^{\xi-1} (a_1 (1-\xi) \sin(1-\xi) \mathcal{Q}_{1s} + b_1 \sin(1+\xi) \mathcal{Q}_{1s}) \sin \gamma_{1s} \cos \gamma_{1s} \\
 &+ \xi r_{2s}^{\xi-1} (a_1 (1+\xi) \cos(1-\xi) \mathcal{Q}_{2s} + b_1 \cos(1+\xi) \mathcal{Q}_{2s}) \cos^2 \gamma_{2s} \\
 &+ \xi r_{2s}^{\xi-1} (a_1 (3-\xi) \cos(1-\xi) \mathcal{Q}_{2s} - b_1 \cos(1+\xi) \mathcal{Q}_{2s}) \sin^2 \gamma_{2s} \\
 &- 2\xi r_{2s}^{\xi-1} (a_1 (1-\xi) \sin(1-\xi) \mathcal{Q}_{2s} + b_1 \sin(1+\xi) \mathcal{Q}_{2s}) \sin \gamma_{2s} \cos \gamma_{2s}
 \end{aligned} \tag{2.20}$$

$$\begin{aligned}
 & (\tau_{uv})_s \\
 &= \xi r_{1s}^{\xi-1} (a_1 (1+\xi) \cos(1-\xi) \mathcal{Q}_{1s} + b_1 \cos(1+\xi) \mathcal{Q}_{1s}) \cos \gamma_{1s} \sin \gamma_{1s} \\
 &- \xi r_{1s}^{\xi-1} (a_1 (3-\xi) \cos(1-\xi) \mathcal{Q}_{1s} - b_1 \cos(1+\xi) \mathcal{Q}_{1s}) \cos \gamma_{1s} \sin \gamma_{1s} \\
 &+ \xi r_{1s}^{\xi-1} (a_1 (1-\xi) \sin(1-\xi) \mathcal{Q}_{1s} + b_1 \sin(1+\xi) \mathcal{Q}_{1s}) (\cos^2 \gamma_{1s} - \sin^2 \gamma_{1s}) \\
 &+ \xi r_{2s}^{\xi-1} (a_1 (1+\xi) \cos(1-\xi) \mathcal{Q}_{2s} + b_1 \cos(1+\xi) \mathcal{Q}_{2s}) \cos \gamma_{2s} \sin \gamma_{2s} \\
 &+ \xi r_{2s}^{\xi-1} (a_1 (3-\xi) \cos(1-\xi) \mathcal{Q}_{2s} - b_1 \cos(1+\xi) \mathcal{Q}_{2s}) \cos \gamma_{2s} \sin \gamma_{2s} \\
 &+ \xi r_{2s}^{\xi-1} (a_1 (1-\xi) \sin(1-\xi) \mathcal{Q}_{2s} + b_1 \sin(1+\xi) \mathcal{Q}_{2s}) (\cos^2 \gamma_{2s} - \sin^2 \gamma_{2s})
 \end{aligned} \tag{2.21}$$

Οι εξισώσεις (2.20-2.21) καταλήγουν σε ένα ομοιογενές σύστημα σχετικά με τα  $a_l$  και  $b_l$ . Οι επιλύσεις είναι μη-ασήμαντες μόνο εάν η ορίζουσα είναι ίση με μηδέν. Ξαναγράφοντας το σύστημα στη μορφή (2.22) όπου  $\delta_{11}$  και  $\delta_{21}$  είναι

ολοφάνερα οι όροι σχετιζόμενοι με  $a_1$ ,  $\delta_{22}$  και  $\delta_{12}$  εκείνοι πολλαπλασιάζοντας  $b_1$ , ο όρος για την ορίζουσα γίνεται

$$\begin{Bmatrix} \sigma_u \\ \tau_{uv} \end{Bmatrix}_S = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} \\ \delta_{21} & \delta_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.22)$$

Η εξίσωση (2.23) επιτρέπει τον αριθμητικό προσδιορισμό του εκθέτη  $\xi$ , έπειτα ο όρος  $b_1$  μπορεί να υπολογιστεί σύμφωνα με την (2.22) ως:

$$\delta_{11}\delta_{22} - \delta_{12}\delta_{21} = 0 \quad (2.23)$$

Ο υπολογισμός του  $\xi$  πραγματικά παριστάνει το κρίσιμο σημείο για μια εξ' ολοκλήρου αναλυτική λύση• ωστόσο μια εκτίμηση του  $\xi$  μπορεί απευθείας να αποκτηθεί χρησιμοποιώντας τον εκθέτη  $\lambda$  του William.

Η σταθερά  $c_1$  και ο εκθέτης  $\mu$  μπορούν να καθοριστούν αργότερα επιβάλλοντας στη ρίζα της εγκοπής τους ίδιους όρους ορίου που αναφέρθηκαν στους (Lazzarin and Tovo, 1996, Atzori et al., 1997)

$$(\sigma_u)_{u=u_0, v=0} = (\sigma_r)_{r=r_0^q, g=0} = 0 \quad (2.24)$$

$$\left( \frac{\partial \tau_{uv}}{\partial v} \right)_{u=u_0, v=0} = 0 \Rightarrow \left( \frac{\partial \tau_{rg}}{\partial g} \right)_{r=r_0^q, g=0} - \frac{1}{q} (\sigma_g)_{r=r_0^q, g=0} = 0 \quad (2.25)$$

με ρητή μορφή, αυτές οι συνοριακές συνθήκες δίνουν:

$$\begin{aligned} & \xi r_0^{\xi-1} \left( (1+\xi) + \frac{b_1}{a_1} \right) + \mu r_0^{\mu-1} \frac{c_1}{a_1} \\ & + \left( \xi (r_0 + h)^{\xi-1} \left( (1+\xi) + \frac{b_1}{a_1} \right) + \mu (r_0 + h)^{\mu-1} \frac{c_1}{a_1} \right) = 0 \end{aligned} \quad (2.26)$$

$$\begin{aligned}
& \xi r_0^{\xi-1} \left( (1-\xi)(1-\xi) + \frac{b_1}{a_1}(1+\xi) \right) + \mu r_0^{\mu-1} \frac{c_1}{a_1}(1+\mu) \\
& + \left( \xi (r_0+h)^{\xi-1} \left( (1-\xi)(1-\xi) + \frac{b_1}{a_1}(1+\xi) \right) + \mu (r_0+h)^{\mu-1} \frac{c_1}{a_1}(1+\mu) \right) \\
& - \frac{1}{q} \left( \xi r_0^{\xi-1} \left( (1+\xi)(1-\xi) + \frac{b_1}{a_1}(1+\xi) \right) + \mu r_0^{\mu-1} \frac{c_1}{a_1}(1+\mu) \right) \\
& - \frac{1}{q} \left( \xi (r_0+h)^{\xi-1} \left( (1+\xi)(1-\xi) + \frac{b_1}{a_1}(1+\xi) \right) + \mu (r_0+h)^{\mu-1} \frac{c_1}{a_1}(1+\mu) \right) = 0
\end{aligned} \tag{2.27}$$

Τέλος χρησιμοποιώντας τη μέγιστη τιμή πίεσης  $\sigma_\theta$  στη ρίζα της εγκοπής και επιβάλλοντας μια απλή συνθήκη ισορροπίας στην περιοχή δικτύου της πλάκας όπως στη παρακάτω σχέση:

$$\sigma_{nom,net} = \frac{2}{h} \int_{r_0+b/2}^{r_0} (\sigma_g)_{g=0} dr + \sigma_{const} \tag{2.28}$$

είναι δυνατόν να οριστούν οι τιμές  $a_1$  και  $\sigma_{const}$ . Στην εξίσωση (2.28)  $h$  είναι το μήκος συνδέσμου, και  $r_0$  η απόσταση από το τοπικό σχήμα αναφοράς στην άκρη της εγκοπής (σχήμα 14).

Αξίζει να σημειωθεί ότι

- Το ολοκλήρωμα μπορεί να λυθεί αναλυτικά, δηλ. χωρίς να αναμιχθεί καμία αριθμητική διαδικασία.
- Ο όρος  $\sigma_{const}$  δεν συμπίπτει με την εικονική πίεση στην συνολική περιοχή, που ήδη προστέθηκε από τους Tada et al. (1973) για να επεκτείνει την περιοχή ισχύς της κατανομής τάσης, από την υψηλά πιεζόμενη περιοχή σε αυτή της εικονικής πίεσης.

## 2.3 ΘΕΩΡΙΑ GRIFFITH

Βασιζόμενος στο γεγονός ότι η εφελκυστική αντοχή ενός υλικού είναι πολύ χαμηλότερη από την θεωρητικά προβλεπόμενη, ο Griffith υπέθεσε ότι τα ψαθυρά υλικά αναπόφευκτα περιέχουν μεγάλο αριθμό ρωγμών ή άλλων ασυνεχειών, οι οποίες

κατανέμονται με τυχαίο προσανατολισμό μέσω του όγκου του υλικού. Αυτές οι ρωγμές είναι πολύ μικρές για να μπορούν να εντοπιστούν με συνήθη μέσα και λειτουργούν σαν συγκεντρωτές τάσης και σαν επακόλουθο, η εκκίνηση της ρωγμής προκαλείται από τις συγκεντρώσεις τάσης στα άκρα αυτών των εσωτερικών ρωγμών.

Στη συνέχεια ο Griffith μετά από μια σειρά πειραμάτων εφελκυστικής αντοχής σε ίνες γυαλιού κατέληξε στο συμπέρασμα ότι το μέγεθος του δοκιμίου είχε άμεση επιρροή στην αντοχή του, καθώς όσο λεπτότερο ήταν το δοκίμιο τόσο μεγαλύτερη ήταν η εφελκυστική αντοχή, καθώς τα λεπτότερα δοκίμια περιείχαν λιγότερες ρωγμές.

Στο σχήμα (2.16) διακρίνεται το μοντέλο ανάλυσης του Griffith στο οποίο μια λεπτή πλάκα απείρων διαστάσεων η οποία περιέχει ένα στενό ελλειπτικό άνοιγμα, υπόκειται σε ομοιόμορφη μονοαξονική εφελκυστική τάση  $\sigma$ . Με το μοντέλο αυτό ο Griffith προσπάθησε να προσομοιώσει την εσωτερική ρωγμή στο υλικό και να προβλέψει την αντοχή του σε θραύση.

Η ρωγμή εντοπίζεται είτε μέσα στο υλικό (εσωτερική ρωγμή), είτε σε ένα μέρος του συνόρου του υλικού. Στην πρώτη περίπτωση έχει δύο άκρες, ενώ στην δεύτερη περίπτωση έχει μια άκρη. Αναμφίβολα το ελλειπτικό άνοιγμα στο μοντέλο του Griffith δεν είναι, αλλά θεωρείται ως ρωγμή. Από το σχήμα (2.16) είναι φανερό ότι η ακτίνα της καμπυλότητας στο σημείο C δίνεται από την εξίσωση (Whittaker et al., 1992):

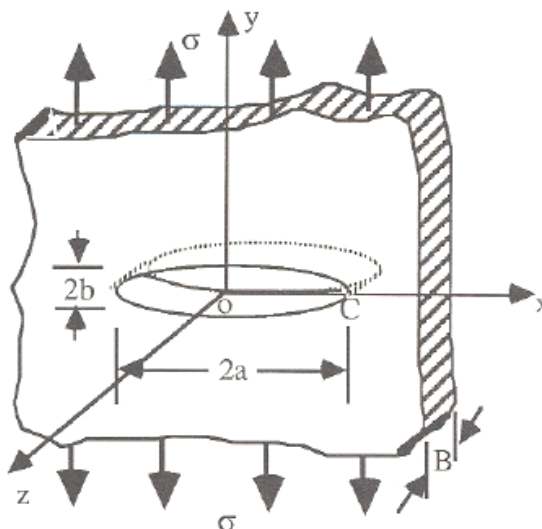
$$\rho = \frac{b^2}{a} \quad (2.29)$$

όπου,  $\rho$  είναι η ακτίνα της καμπυλότητας στο σημείο C και  $a, b$  τα μήκη του μεγαλύτερου και μικρότερου ημιάξονα αντίστοιχα.

Είναι φανερό ότι  $\rho \propto 1/a$  και όταν  $a \rightarrow \infty$ ,  $\rho \rightarrow 0$ . Επομένως, ο όρος ρωγμή μπορεί να προσδιοριστεί μαθηματικά σαν μια απειροελάχιστη στενή έλλειψη.

Οι όροι ρωγμή, ρήγμα και άλλα συνώνυμα σημαίνουν ουσιαστικά μετατόπιση ασυνεχειών. Ο Griffith δεν συμπεριέλαβε τα πετρώματα στην μελέτη του, αλλά έχει αποδειχθεί ότι στα πετρώματα υπάρχουν ασυνέχειες τύπου ρωγμής οι οποίες δημιουργούνται είτε κατά την διάρκεια σχηματισμού τους, είτε έπειτα από θερμική ή

θλιπτική καταπόνηση. Οι ρωγμές στα πετρώματα μπορεί να είναι μήκους εκατοντάδων χιλιάδων μέτρων όταν είναι σε μορφή ρηγμάτων, αλλά και τόσο μικρές στην κλίμακα των μικρών. Γενικότερα, τα περισσότερα πετρώματα έχουν πορώδες γεγονός που υποδεικνύει την ύπαρξη ρωγμών με διαστάσεις μερικών μικρών (Whittaker et al., 1992).



**Σχήμα 2.16:** Ελλειπτικό άνοιγμα σε μια απείρων διαστάσεων πλάκα που υπόκειται σε ομοιόμορφο εφελκυσμό (Whittaker et al., 1992)

### 2.3.1 Θεωρία Ενεργειακής Ισορροπίας του Griffith

Σύμφωνα με την θεωρία Griffith, η αστοχία ενός στερεού ψαθυρού υλικού προκαλείται από την διάδοση των ρωγμών οι οποίες υπάρχουν μέσα στο στερεό σώμα και η δημιουργία μιας νέας επιφάνειας ρωγμής από την διάδοση τους απορροφά ενέργεια η οποία παρέχεται από το παραγόμενο έργο από την εξωτερική δύναμη της απελευθέρωσης της αποθηκευμένης ενέργειας παραμόρφωσης στο στερεό, ή με συνδυασμό των δύο πηγών (Whittaker et al., 1992).

Η αστοχία ενός στερεού ψαθυρού υλικού περιλαμβάνει δύο απαραίτητες προϋποθέσεις (Whittaker et al., 1992):

α) Προϋπόθεση τάσης: σε κάποιο σημείο στο σώμα, η τοπική τάση πρέπει να είναι τόσο υψηλή ώστε υπερνικά την μοριακή αντοχή συνοχής του υλικού. Αυτό μπορεί να επιτευχθεί από την συγκέντρωση τάσης λόγω της ύπαρξης των ασυνεχειών όπως οι προϋπάρχουσες μικρορωγμές.

β) Προϋπόθεση ενέργειας: επαρκές ενεργειακό δυναμικό πρέπει να απελευθερωθεί για να υπερνικά την αντίσταση στην εξάπλωση της ρωγμής. Αυτό μπορεί να επιτευχθεί μέσω της αύξησης του παραγόμενου έργου από τις εξωτερικές δυνάμεις.

Όπως έχει ήδη αναφερθεί, στα πετρώματα υπάρχουν εσωτερικές μικρορωγμές που αποτελούν ενδείξεις για την συγκέντρωση τάσεων. Για αυτό το λόγο η προϋπόθεση τάσης (stress requirement) ικανοποιείται αυτομάτως. Η προϋπόθεση ενέργειας (energy requirement) είναι μια εφαρμογή του θεωρήματος του ελαχίστου ενεργειακού δυναμικού. Ο Griffith έδειξε ότι υπάρχει μια απλή ενεργειακή ισορροπία αποτελούμενη από την μείωση στο ενεργειακό δυναμικό μέσα στο φορτισμένο σώμα εξαιτίας της εξάπλωσης της ρωγμής και αυτό εξισορροπείται από την αύξηση της επιφανειακής ενέργειας, λόγω της αυξανόμενης επιφάνειας της ρωγμής (Whittaker et al., 1992).

Γενικότερα η συνολική ενέργεια  $U$  της πλάκας του σχήματος (2.16) μπορεί να γραφτεί ως εξής (Whittaker et al., 1992):

$$U = U_t + U_c - W + U_s = U_p + U_s \quad (2.30)$$

όπου,

$U$ : Συνολική ενέργεια της πλάκας

$U_t$ : Συνολική αρχική ενέργεια ελαστικής παραμόρφωσης της φορτιζόμενης αλλά μη σπασμένης ρωγματωμένης πλάκας

$U_c$ : Η απελευθερούμενη ελαστική ενέργεια παραμόρφωσης που οφείλεται στη σύσταση της ρωγμής μήκους  $2a$  και την χαλάρωση του υλικού πάνω και κάτω από τη ρωγμή

$U_s$ : Αλλαγή στην ελαστική επιφανειακή ενέργεια λόγω του σχηματισμού νέων επιφανειών ρωγμής

$U_p$ : Αλλαγή στο ενεργειακό δυναμικό, δηλαδή,  $U_p = U_t + U_c - W$

$W$ : Το παραγόμενο έργο από τις εξωτερικές δυνάμεις.

Το  $U_t$  δίνεται από την παρακάτω σχέση (Whittaker et al., 1992):

$$U_t = 1/2 \int_V \sigma_y \varepsilon_y (B dx dy) = 1/2 \int_A \sigma_y \varepsilon_y dA = 1/2 \int_A \frac{\sigma^2}{E} dA = \frac{\sigma^2 A}{2E} \quad (2.31)$$

όπου,

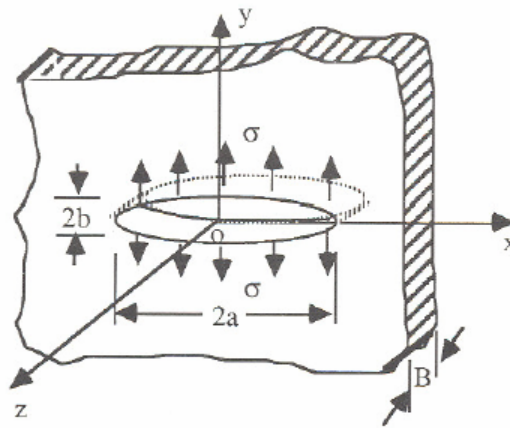
$A$ : Η άπειρη περιοχή της λεπτής πλάκας

$B$ : Πάχος, το οποίο θεωρείται ότι είναι μοναδιαίο, δηλαδή  $B=1$ .

$V$ : Όγκος της πλάκας.

$\sigma_y$ :  $\sigma$  για αυτή την περίπτωση.

$E'$ : Ενεργό μέτρο ελαστικότητας του Young:  $E'=E$  για επίπεδη τάση και  $E'=E/(1-\nu^2)$  για επίπεδη παραμόρφωση.



**Σχήμα 2.17:** Απείρων διαστάσεων πλάκα που περιέχει ένα ελλειπτικό άνοιγμα το οποίο υπόκειται σε ομοιόμορφη τάση  $\sigma$  (Whittaker et al., 1992)

Το  $U_c$  που αντιστοιχεί στο σχήμα (2.16) είναι ίδιο με αυτό του στερεού στο οποίο οι επιφάνειες της ρωγμής υπόκεινται σε ομοιόμορφο εφελκυστική τάση  $\sigma$  η οποία είναι κάθετη στις επιφάνειες της ρωγμής (Σχήμα 2.17). Οπότε είναι (Whittaker et al., 1992):

$$U_c = 2 \int_0^a \nu(\sigma B dx) = 2 \int_0^a \frac{2\sigma \sqrt{a^2 - x^2}}{E'} dx = \pm \frac{\pi \sigma^2 a^2}{E'} \quad (2.32)$$

Το παραγόμενο έργο από τις εξωτερικές δυνάμεις  $W$  δίνεται από την παρακάτω σχέση (Whittaker et al., 1992):

$$W = \int_{\nu} P dy = 1/2 \int_A \sigma \epsilon dA = \frac{\sigma \epsilon A}{2} \quad (2.33)$$

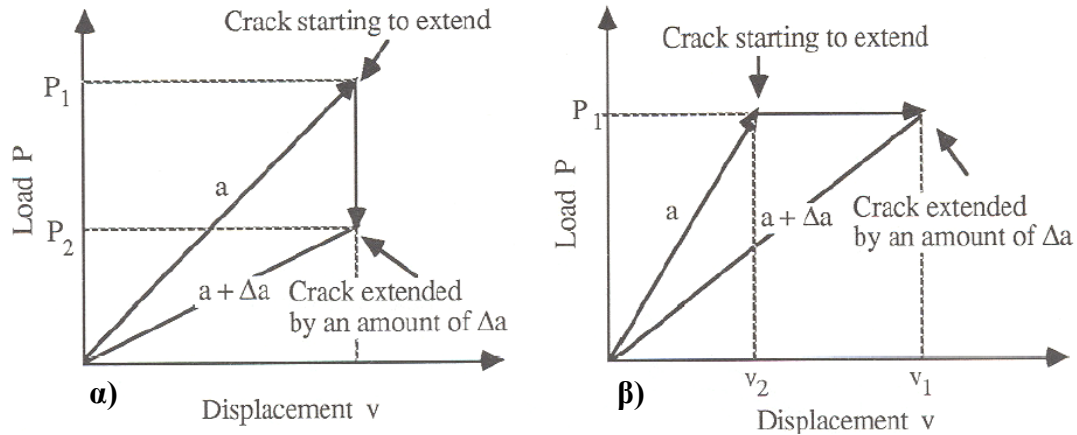
όπου,

$\nu$ : Η συνολική μετατόπιση των φορτιζόμενων συνόρων.

$P$ : Η εφαρμοζόμενη δύναμη ανά μονάδα πάχους.

$\epsilon$ : Παραμόρφωση.

Γενικότερα υπάρχουν δύο ειδικές περιπτώσεις συνθηκών φόρτισης: α) Σταθερής μετατόπισης και β) Σταθερού φορτίου. Στο σχήμα (2.18) παρουσιάζονται αυτές οι δύο συνθήκες φόρτισης.



**Σχήμα 2.18:** Συνθήκες φόρτισης για την έναρξη της ρωγμής α) Σταθερή μετατόπιση β) Σταθερό φορτίο (Whittaker et al., 1992)

Η τέταρτη ενεργειακά συνιστώσα  $U_s$  απαιτείται να υπερνικήσει τις μοριακές δυνάμεις συνοχής κατά τον σχηματισμό των νέων επιφανειών ρωγμών και δίνεται από την εξής σχέση (Whittaker et al., 1992):

$$U_s = 2A'\gamma_s = 2(2aB)\gamma_s = 4a\gamma_s \quad (2.34)$$

όπου,

$\gamma_s$ : Η ειδική ενέργεια επιφάνειας, δηλαδή, η ενέργεια που απαιτείται για την δημιουργία μοναδιαίας επιφάνειας νέας ρωγμής καθώς η ρωγμή αυξάνεται σε μήκος.

$A'$ : Η διατομή της πλάκας.

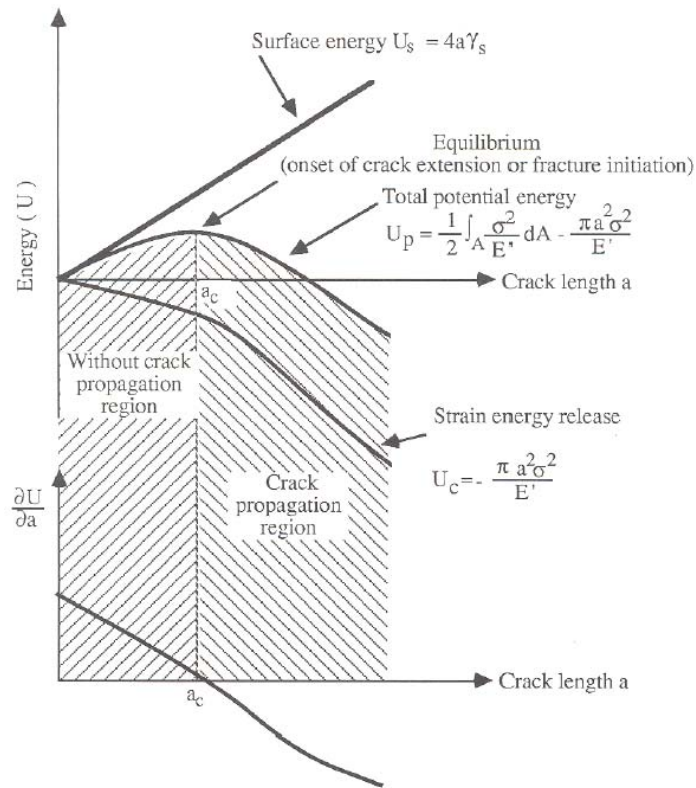
Αφού το  $\gamma_s$  είναι μια σταθερή ιδιότητα του υλικού, από την παραπάνω εξίσωση συνεπάγεται ότι το  $U_s$  είναι γραμμικά ανάλογο με το μήκος της ρωγμής. Είναι φανερό ότι το  $U_s$  είναι αναστρέψιμο και για αυτό δεν αποτελεί μέρος του εσωτερικού ενεργειακού δυναμικού του συστήματος.

Σύμφωνα με τα παραπάνω η συνολική ελαστική ενέργεια  $U$  μπορεί να γραφεί και ως εξής (Whittaker et al., 1992):

$$U = \frac{\sigma^2 A}{2E'} \pm \frac{\pi \sigma^2 a^2}{E'} - \frac{\sigma \varepsilon A}{2} + 4a\gamma_s \quad (2.35)$$



Στο σχήμα (2.19) δίνεται το διάγραμμα της ενεργειακής ισορροπίας Griffith για την περίπτωση σταθερής μετατόπισης.



**Σχήμα 2.19:** Σχηματική αναπαράσταση της προσέγγισης της ενεργειακής ισορροπίας Griffith για σταθερή μετατόπιση (Whittaker et al., 1992)

### 2.3.1.1 Εκκίνηση της ρωγμής και κρίσιμη ισορροπία

Σύμφωνα με τον Griffith η εκκίνηση της ρωγμής λαμβάνει χώρα όταν  $\partial U / \partial a < 0$  και η κρίσιμη ισορροπία (critical equilibrium) για την εκκίνηση της ρωγμής συμβαίνει όταν  $\partial U / \partial a = 0$ , δηλαδή (Whittaker et al., 1992):

$$\frac{\partial}{\partial a} \left[ \frac{\sigma^2 A}{2E'} - \frac{\pi \sigma^2 a^2}{E'} + 4a\gamma_s \right] = 0 \quad (2.36)$$

Η παραπάνω εξίσωση οδηγεί στο εξής αποτέλεσμα (Whittaker et al., 1992):

$$4\gamma_s - \frac{2\pi \sigma^2 a}{E'} = 0 \quad (2.37)$$

ή

$$\sigma \sqrt{\pi a} = \sqrt{2E'\gamma_s} \quad (2.38)$$

Η τελευταία εξίσωση δείχνει ότι η εκκίνηση της ρωγμής σε ένα ιδανικά ψαθυρό υλικό ελέγχεται από την παράγωγο του πεδίο της εφαρμοζόμενης τάσης και την τετραγωνική ρίζα του μήκους της ρωγμής, καθώς επίσης και από τις ιδιότητες του υλικού  $E$ ,  $\nu$  και  $\gamma_s$ .

### 2.3.1.2 Τάση θραύσεως

Η τάση θραύσεως δίνεται από την παρακάτω σχέση (Whittaker et al., 1992):

$$\sigma_f = \sqrt{\frac{2E'\gamma_s}{\pi a}} \quad (2.39)$$

Η εξίσωση αυτή δίνει την εφαρμοζόμενη τάση θραύσεως μόνο για την εκκίνηση της ρωγμής και ισούται με την μονοαξονική εφελκυστική αντοχή ( $\sigma_t$ ) για την κατάσταση εφελκυσμού. Η ποσότητα  $\sigma_f$  είναι μια σταθερά για ένα ιδανικά ψαθυρό υλικό που περιέχει μια κεντρική ρωγμή μήκους  $2a$  ή μια ρωγμή στην άκρη μήκους  $a$ . Η σταθερά  $\sigma_f$  εξαρτάται αυστηρά από την γεωμετρία της ρωγμής.

### 2.3.2 Ρυθμός Απελευθέρωσης Ενέργειας Παραμορφώσεων $G$ και Αντίσταση σε Διάδοση Ρωγμής $R$

Από την σχέση (2.38) προκύπτει η ακόλουθη εξίσωση (Whittaker et al., 1992):

$$\frac{\pi\sigma^2 a}{E'} = 2\gamma_s \quad (2.40)$$

Ο αριστερός όρος της παραπάνω εξίσωσης καλείται ρυθμός απελευθέρωσης ενέργειας παραμορφώσεων (strain energy release rate ή crack driving force) και συμβολίζεται με  $G$ . Μια ακόμα σχέση για αυτόν τον όρο είναι η εξής (Whittaker et al., 1992):

$$G = \frac{\partial U_c}{\partial a} = \frac{\pi\sigma^2 a}{E'} \quad (2.41)$$

Από την παραπάνω εξίσωση είναι φανερό ότι για σταθερή μετατόπιση, το  $G$  καθορίζεται σαν ελαστική ενέργεια παραμόρφωσης ανά μονάδα μήκους ρωγμής. Γενικότερα όμως το  $G$  καθορίζεται σαν παράγωγος της ελαστικής ενέργειας παραμόρφωσης, σχετικά με την περιοχή της ρωγμής παρά με το μήκος της ρωγμής.

Επίσης το  $G$  μπορεί να υπολογιστεί και ως εξής (Whittaker et al., 1992):

$$G = 1/2P^2 \frac{d\lambda}{da} \quad (2.42)$$

όπου,

$P$ : Το εφαρμοζόμενο φορτίο.

$a$ : Μήκος της ρωγμής.

$\lambda$ : Ελαστικότητα (compliance) που καθορίζεται σαν τη μετατόπιση του σημείου φόρτισης ανά μονάδα φορτίου.

### 2.3.2.1 Αντοχή θραύσης

Η θεωρία Griffith για την κρίσιμη κατάσταση της εκκίνησης της ρωγμής δίνεται από την εξής σχέση (Whittaker et al., 1992):

$$G = G_c \quad (2.43)$$

όπου,  $G_c$  είναι ο κρίσιμος ρυθμός απελευθέρωσης ενέργειας (critical energy release rate). Καλείται και αντοχή θραύσης (fracture toughness) και είναι χαρακτηριστική ιδιότητα του υλικού.

Όταν το  $G$  είναι ίσο με το  $G_c$  συμβαίνει διάδοση της ρωγμής.

### 2.3.2.2 Αντίσταση σε διάδοση ρωγμής $R$

Η αντίσταση σε διάδοση ρωγμής (crack resistance)  $R$  είναι η ενέργεια που απαιτείται για την προσαυξάνουσα διάδοση της ρωγμής και καθορίζεται σύμφωνα με την ακόλουθη σχέση (Whittaker et al., 1992):

$$R = \frac{\partial U_c}{\partial a} = 2\gamma_s \quad (2.44)$$

Το  $R$  είναι ανεξάρτητο του μήκους της ρωγμής  $a$ , αλλά είναι μια συνάρτηση της εξάπλωσης της ρωγμής  $\Delta a$ . Η κατάσταση εξισορρόπησης για την εκκίνηση της ρωγμής εκφράζεται ως εξής (Whittaker et al., 1992):

$$G_c = R \quad (2.45)$$

Τα παραπάνω ισχύουν για την περίπτωση της φόρτισης με σταθερή μετατόπιση. Για την περίπτωση του σταθερού φορτίου, το  $W$  παίρνει μη μηδενική τιμή και το  $U_c$  λαμβάνει αρνητικό πρόσημο. Έτσι η σχέση της συνολικής ενέργειας είναι (Whittaker et al., 1992):

$$U = U_t + U_c - W + U_s \quad (2.46)$$

Η εκκίνηση της ρωγμής συμβαίνει όταν  $\partial U / \partial a = 0$ . Σημειώνοντας όμως ότι  $U_t = a$  και  $\partial U_t / \partial a = 0$ , τότε (Whittaker et al., 1992):

$$\frac{\partial}{\partial a} (U_t + U_c - W + U_s) = 0 \quad (2.47)$$

από την οποία σχέση προκύπτει ότι (Whittaker et al., 1992):

$$\frac{\partial}{\partial a} (W - U_c) = \frac{\partial U_s}{\partial a} \quad (2.48)$$

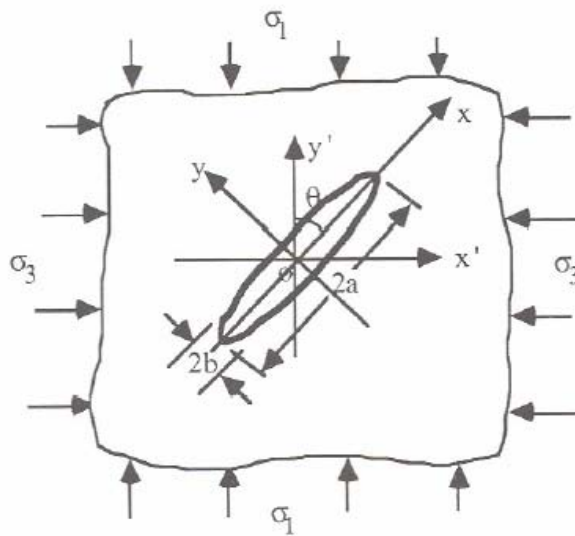
και προκύπτει τελικά ότι (Whittaker et al., 1992):

$$G_c = R \quad (2.49)$$

### 2.3.3 Κριτήριο Τάσης θραύσεως του Griffith

Ο Griffith παρουσίασε το 1924 ένα κριτήριο κρίσιμης μέγιστης τοπικής εφελκυστικής τάσης (critical maximum local tensile stress criterion) για διάδοση ρωγμής από τις άκρες της. Η ερμηνεία αυτής της προσέγγισης του Griffith είναι ότι η ρωγμή ξεκινά όταν η προκαλούμενη εφελκυστική τάση στην άκρη ή κοντά στην άκρη της ρωγμής υπερβαίνει την μοριακή αντοχή συνοχής του υλικού (Whittaker et al., 1992).

Στο σχήμα (2.20) παρουσιάζεται μια επίπεδη ελλειπτικής μορφής ρωγμή που υπόκειται σε πολυαξονικές τάσεις  $\sigma_1$  και  $\sigma_3$  ( $\sigma_1 > \sigma_3$ ) στο άπειρο. Το κριτήριο τάσης θραύσεως του Griffith για το σύστημα του Σχήματος 2.20, προέκυψε από την εξέταση της κατανομής της εφαπτομενικής τάσης στην επιφάνεια της ελλειπτικής ρωγμής. Η κατανομή της τάσης γύρω από την ελλειπτική ρωγμή προέκυψε από την σχεδίαση των καρτεσιανών συντεταγμένων σε ελλειπτικές συντεταγμένες (Whittaker et al., 1992).



**Σχήμα 2.20:** Ανοιχτή, επίπεδη υπό κλίση ελλειπτική ρωγμή που υπόκειται σε πολυαξονική θλίψη (Whittaker et al., 1992)

Το κριτήριο τάσης θραύσεως του Griffith δίνεται από την παρακάτω σχέση (Whittaker et al., 1992):

$$\left. \begin{aligned} (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + 8\sigma_t(\sigma_1 + \sigma_3) &= 0 & \text{αν } \sigma_1 + 3\sigma_3 \geq 0 \\ \sigma_3 &= \sigma_t & \text{αν } \sigma_1 + 3\sigma_3 < 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.50)$$

όπου,

$\sigma_1, \sigma_3$ : Η μέγιστη και η ελάχιστη κύρια τάση αντίστοιχα στο άπειρο.

$\sigma_t$ : Η μονοαξονική εφελκυστική αντοχή.

Το κριτήριο τάσης θραύσεως μπορεί να εκφραστεί εναλλακτικά σε σχέση με τον λόγο των κυρίων τάσεων  $\sigma_3/\sigma_1$  και την μονοαξονική εφελκυστική αντοχή ή την μονοαξονική θλιπτική αντοχή (Whittaker et al., 1992):

$$\left. \begin{array}{ll} \sigma_1 = \sigma_3 - 4\sigma_t \left[ 1 + \sqrt{1 - \frac{\sigma_3}{\sigma_t}} \right] & \alpha\nu \quad \sigma_1 + 3\sigma_3 \geq 0 \\ \sigma_3 = \sigma_t & \alpha\nu \quad \sigma_1 + 3\sigma_3 < 0 \end{array} \right\} \quad (2.51)$$

ή

$$\left. \begin{array}{ll} \sigma_1 = \sigma_3 + \sigma_c \sqrt{2 \frac{\sigma_3}{\sigma_c} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \sigma_c} & \alpha\nu \quad \sigma_1 + 3\sigma_3 \geq 0 \\ \sigma_3 = \sigma_t & \alpha\nu \quad \sigma_1 + 3\sigma_3 < 0 \end{array} \right\} \quad (2.52)$$

όπου,  $\sigma_c$  η μονοαξονική θλιπτική αντοχή.

Το κριτήριο τάσης θραύσεως παρουσιάζεται στο σχήμα (2.21) στο οποίο περιλαμβάνεται και το τροποποιημένο κριτήριο Griffith από τους McClintock και Walsh.

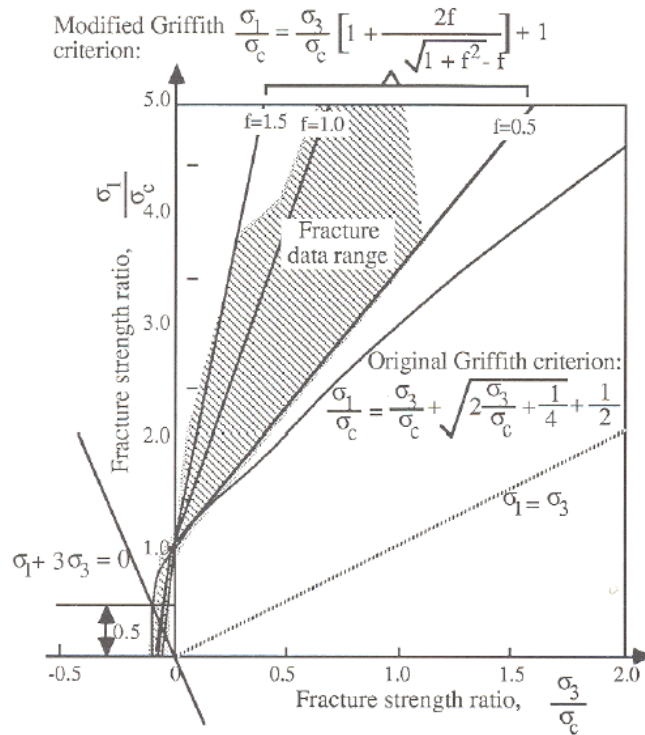
Το κριτήριο Griffith μπορεί να εκφραστεί και από έναν παραβολικό φάκελο Mohr σύμφωνα με την σχέση που ακολουθεί (Whittaker et al., 1992):

$$\tau^2 = 4\sigma_t(\sigma_t - \sigma) \quad (2.53)$$

όπου:

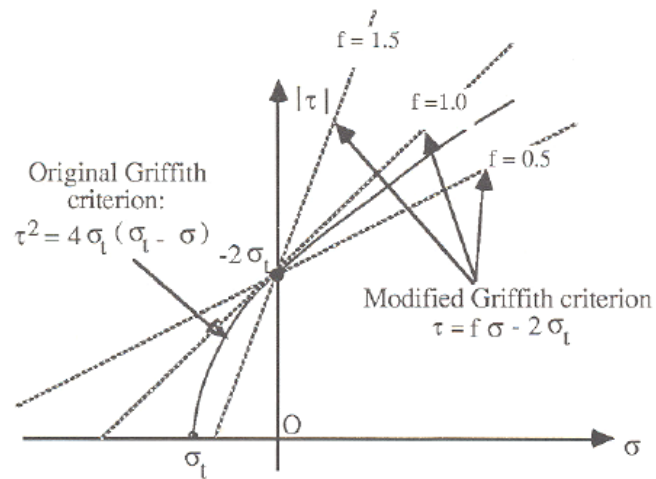
$\tau$ : Η διατμητική τάση που δρα κατά μήκος του επιπέδου της επιφάνειας της ρωγμής.

$\sigma$ : Η ορθή τάση που δρα κάθετα στην επιφάνεια της ρωγμής.



**Σχήμα 2.21:** Το αρχικό και το τροποποιημένο κριτήριο θραύσης Griffith (Whittaker et al., 1992)

Στο σχήμα (2.22) παρουσιάζεται ο παραβολικός φάκελος Mohr, καθώς και το τροποποιημένο κριτήριο από τον Cook.



**Σχήμα 2.22:** Το αρχικό και το τροποποιημένο κριτήριο Griffith σε μορφή φακέλου Mohr (Whittaker et al., 1992)

### 2.3.4 Περιορισμοί στην Εφαρμογή της Θεωρίας Griffith

Η θεωρία Griffith είναι εφαρμόσιμη για τις περιπτώσεις που ακολουθούν (Whittaker et al., 1992):

- Ιδανικά ψαθυρά υλικά με μικρή πλαστική παραμόρφωση στις άκρες των ρωγμών.
- Έναρξη της θραύσης, ιδανικά για την κατάσταση εφελκυσμού.
- Πολύ επίπεδη και ανοιχτή έλλειψη που αναπαριστά μια ιδανική ρωγμή.
- Μικρό μέγεθος ρωγμής σχετικά με τις διαστάσεις του δοκιμίου.
- Αναστρέψιμο θερμοδυναμικό σύστημα, δηλαδή, καμιά απώλεια ενέργειας εκτός από αυτήν που απαιτείται για την δημιουργία νέων επιφανειών ρωγμής.

## 2.4 ΘΕΜΑΤΑ ΕΛΑΣΤΙΚΗΣ ΣΥΜΠΕΡΙΦΟΡΑΣ

### 2.4.1 Γραμμική Ισότροπη Ελαστικότητα

Ισότροπο υλικό είναι αυτό το οποίο έχει σημειακή συμμετρία, δηλαδή κάθε επίπεδο στο σώμα είναι επίπεδο συμμετρίας για τη συμπεριφορά του υλικού. Σε μια τέτοια κατάσταση μπορεί να αποδειχθεί ότι απαιτούνται μόνο δύο ανεξάρτητες ελαστικές σταθερές για την περιγραφή της συμπεριφοράς του υλικού και ο καταστατικός πίνακας γίνεται συμμετρικός. Οι σταθερές αυτές είναι το μέτρο ελαστικότητας του Young  $E$  και ο λόγος Poisson  $\nu$ . Η εξίσωση (2.53) γίνεται σε αυτή την περίπτωση:

$$\begin{Bmatrix} \Delta \sigma'_x \\ \Delta \sigma'_y \\ \Delta \sigma'_z \\ \Delta \tau_{xz} \\ \Delta \tau_{yz} \\ \Delta \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ & & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ & sym & & & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ & & & & & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \varepsilon_x \\ \Delta \varepsilon_y \\ \Delta \varepsilon_z \\ \Delta \gamma_{xz} \\ \Delta \gamma_{yz} \\ \Delta \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.54)$$



Αν η συμπεριφορά του υλικού είναι γραμμική, τότε τα  $E$  και  $\nu$  είναι σταθερές και ο καταστατικός πίνακας που εκφράζεται σαν σχέση μεταξύ ενεργών τάσεων ( $\sigma'$ ) και παραμορφώσεων ( $\varepsilon$ ) είναι ο ίδιος με αυτόν που δίνεται στη σχέση (2.54).

Είναι επίσης μερικές φορές πιο κατάλληλο να εκφράζεται η συμπεριφορά ενός υλικού συναρτήσει του συντελεστή διάτμησης  $G$  (elastic shear modulus) και του μέτρου συμπίεσης  $K$  (bulk modulus). Η εξίσωση (2.53) μετατρέπεται σε αυτή την περίπτωση ως εξής:

$$\begin{Bmatrix} \Delta\sigma'_x \\ \Delta\sigma'_y \\ \Delta\sigma'_z \\ \Delta\tau_{xz} \\ \Delta\tau_{yz} \\ \Delta\tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K + \frac{4}{3}G & K - \frac{2}{3}G & K - \frac{2}{3}G & 0 & 0 & 0 \\ & K + \frac{4}{3}G & K - \frac{2}{3}G & 0 & 0 & 0 \\ & & K + \frac{4}{3}G & 0 & 0 & 0 \\ & & & K + \frac{4}{3}G & 0 & 0 \\ & sym & & & G & 0 \\ & & & & & G \\ & & & & & & G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta\varepsilon_x \\ \Delta\varepsilon_y \\ \Delta\varepsilon_z \\ \Delta\gamma_{xz} \\ \Delta\gamma_{yz} \\ \Delta\gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.55)$$

όπου,

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (2.56)$$

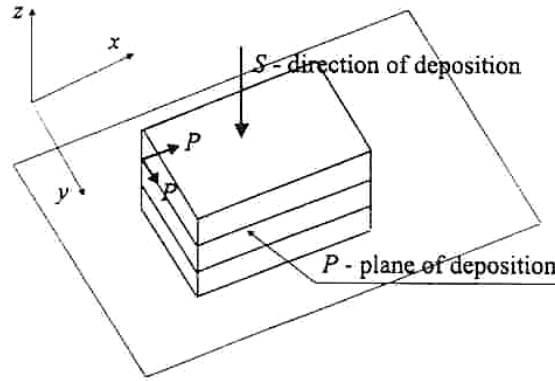
και

$$K = \frac{E}{3(1-2\nu)} \quad (2.57)$$

#### 2.4.2 Γραμμική Ανισότροπη Ελαστικότητα

Μαθηματικά όταν ένα υλικό είναι πλήρως ανισότροπο ο πίνακας  $[D]$  στην εξίσωση (2.54) είναι γεμάτος από στοιχεία. Αυτό συνεπάγεται ότι απαιτούνται 36 ανεξάρτητες παράμετροι για τον καθορισμό των τιμών του πίνακα  $D_{ij}$ . Όμως σύμφωνα με τη θεώρηση της ενέργειας θερμοδυναμικής παραμόρφωσης, ο πίνακας  $[D]$  πρέπει να είναι συμμετρικός ( $D_{ij} = D_{ji}$  για  $i \neq j$ ). Επομένως ο συνολικός αριθμός των ανεξάρτητων ανισότροπων παραμέτρων μειώνεται σε 21.

Πολλά υλικά παρουσιάζουν περιορισμένες μορφές ανισοτροπίας. Για τα εδάφη συνήθως θεωρείται ότι τα χαρακτηριστικά ανισοτροπίας τους εξαρτώνται από τον τρόπο απόθεσης τους και το ιστορικό τάσης. Εδάφη τα οποία έχουν αποτεθεί φυσιολογικά πάνω σε ένα επίπεδο, παρουσιάζουν συνήθως έναν άξονα συμμετρίας κατά την διεύθυνση απόθεσης, δηλαδή τα χαρακτηριστικά τους δεν διαφοροποιούνται κατά αυτό το επίπεδο. Στο σχήμα 2.23 οι καρτεσιανές συντεταγμένες προσδιορίζονται σε ένα στρώμα έτσι ώστε ο άξονας z είναι στη διεύθυνση της απόθεσης του στρώματος, S, ενώ οι άξονες x και y είναι στο επίπεδο της απόθεσης, P.



**Σχήμα 2.23:** Προσανατολισμός αξόνων για την θεώρηση εγκάρσιας ισοτροπίας (Potts and Zdravkovic, 1999)

Αυτός ο τύπος ανισοτροπίας ονομάζεται “εγκάρσια ισοτροπία” (ορθότροπο υλικό) και οι άγνωστες παράμετροι του υλικού μειώνονται σε επτά. Η σχέση μεταξύ προσαύξησης της τάσης και των συνιστωσών παραμόρφωσης δίνεται από τον πίνακα D στην εξίσωση (2.58):

$$\begin{bmatrix}
 A(1 - \nu_{SP}\nu_{PS})E_P & A(\nu_{PP} + \nu_{SP}\nu_{PS})E_P & A\nu_{SP}(1 + \nu_{PP})E_P & 0 & 0 & 0 \\
 A(\nu_{PP} + \nu_{SP}\nu_{PS})E_P & A(1 - \nu_{SP}\nu_{PS})E_P & A\nu_{SP}(1 + \nu_{PP})E_P & 0 & 0 & 0 \\
 A\nu_{SP}(1 + \nu_{PP})E_S & A\nu_{SP}(1 + \nu_{PP})E_S & A(1 - \nu_{PP}\nu_{PP})E_S & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & G_{PS} & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & G_{PS} & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G_{PP}
 \end{bmatrix}
 \quad (2.58)$$

όπου,

$$A = \frac{1}{1 - 2\nu_{SP}\nu_{PS} - 2\nu_{SP}\nu_{PS}\nu_{PP} - \nu_{PP}^2} \quad (2.59)$$

$E_S$  : Μέτρο ελαστικότητας του Young κατά την διεύθυνση της απόθεσης.

$E_P$  : Μέτρο ελαστικότητας του Young κατά το επίπεδο της απόθεσης.

$\nu_{SP}$  : Λόγος Poisson στο επίπεδο της απόθεσης λόγω της τάσης που δρα στη διεύθυνση της απόθεσης.

$\nu_{PS}$  : Λόγος Poisson κατά τη διεύθυνση της απόθεσης λόγω της τάσης που δρα στο επίπεδο της απόθεσης.

$\nu_{PP}$  : Λόγος Poisson στο επίπεδο της απόθεσης λόγω της τάσης που δρα στο ίδιο επίπεδο.

$G_{PS}$  : Μέτρο διάτμησης στο επίπεδο της διεύθυνσης της απόθεσης.

$G_{PP}$  : Μέτρο διάτμησης στο επίπεδο της απόθεσης.

Λόγω της συμμετρίας μπορεί να αποδειχθεί ότι:

$$\frac{\mu_{SP}}{E_S} = \frac{\mu_{PS}}{E_P} \quad (2.60)$$

και

$$G_{PP} = \frac{E_P}{2(1 + \mu_{PP})} \quad (2.61)$$

Έτσι μειώνεται ο αριθμός των παραμέτρων που απαιτούνται για τον καθορισμό της εγκάρσιας ισότροπης συμπεριφοράς από επτά σε πέντε. Ο πίνακας [D] στην εξίσωση (2.92) μετατρέπεται στη συμμετρική μορφή της εξίσωσης (2.62):

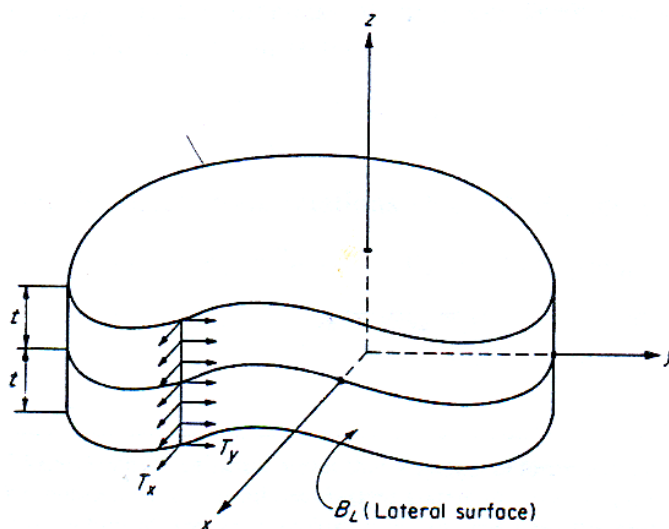
$$\begin{bmatrix} A(1 - \nu_{SP}^2 \frac{E_P}{E_S})E_S & A(\nu_{PP} + \nu_{SP}^2 \frac{E_P}{E_S})E_S & A\nu_{SP}(1 + \nu_{PP})E_S & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A(1 - \nu_{SP}^2 \frac{E_P}{E_S})E_S & A\nu_{SP}(1 + \nu_{PP})E_S & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A(1 - \nu_{PP}^2 \frac{E_S^2}{E_P})E_S & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_{PS} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G_{PS} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{E_P}{2(1 + 2\nu_{PP})} \end{bmatrix} \quad (2.62)$$

όπου,

$$A = \frac{1}{(1 + \nu_{PP}) \left[ \frac{E_S}{E_P} (1 - \nu_{PP}) - 2\nu_{SP}^2 \right]} \quad (2.63)$$

### 2.4.3 Το Επίπεδο Ελαστικό Πρόβλημα

Στη θεωρία τη ελαστικότητας, υπάρχει μια ειδική κατηγορία προβλημάτων γνωστά ως επίπεδα προβλήματα, τα οποία μπορούν να επιλυθούν πολύ πιο εύκολα και άμεσα από τα γενικά προβλήματα ελαστικότητας στις τρεις διαστάσεις. Η γεωμετρία του σώματος και η φύση της φόρτισης στα σύνορα της, επιτρέπει την κατηγοριοποίηση σαν επίπεδο πρόβλημα με τον ακόλουθο τρόπο. Εξ ορισμού, το επίπεδο σώμα αποτελείται από μια περιοχή ομοιόμορφου πάχους που περικλείεται από δυο παράλληλα επίπεδα και μια κλειστή παράπλευρη επιφάνεια  $B_L$ , όπως φαίνεται στο σχήμα 2.24. Αν και το πάχος του σώματος θα πρέπει να είναι ομοιόμορφο, αυτό δεν αποτελεί απαγορευτικό περιορισμό. Μπορεί να είναι πολύ χοντρό ή πολύ λεπτό το σώμα. Σε ιδανικές συνθήκες, οι δυο ακραίες περιπτώσεις είναι και οι επιθυμητές (Dally & Riley, 1991).



**Σχήμα 2.24:** Σώμα όπου μπορεί να θεωρηθεί για το επίπεδο ελαστικό πρόβλημα (Dally & Riley, 1991)

Εκτός από τους περιορισμούς που αναφέρονται στη γεωμετρία του σώματος, επιβάλλονται και εκείνοι που αφορούν στα φορτία που δρουν επάνω σε αυτό (Dally & Riley, 1991).

- Οι δυνάμεις, εάν υπάρχουν, δεν μπορεί να μεταβάλλονται με το πάχος μιας περιοχής, δηλαδή  $F_x = F_x(x, y)$  και  $F_y = F_y(x, y)$ . Περαιτέρω, η δύναμη κατά την  $Z$  διεύθυνση πρέπει να είναι μηδέν.
- Οι επιφανειακοί ελκυστές ή τα φορτία στην παράπλευρη επιφάνεια  $B_L$ , πρέπει να είναι στο επίπεδο του μοντέλου και ομοιόμορφα κατανεμημένα επάνω στο πάχος του μοντέλου, δηλαδή σταθερά κατά την  $Z$  διεύθυνση, επομένως  $T_x = T_x(x, y)$ ,  $T_y = T_y(x, y)$  και  $T_z = 0$ .
- Δεν μπορούν να επιβληθούν φορτία στα παράλληλα επίπεδα που περικλείουν την πάνω και κάτω επιφάνεια του σώματος, δηλαδή  $T_n = 0$  στο  $z = \pm t$ .

Μόλις οριστούν η γεωμετρία και οι φορτίσεις, προσδιορίζονται οι τάσεις κάνοντας χρήση των προσεγγίσεων επίπεδης τάσης ή επίπεδης παραμόρφωσης. Συνήθως χρησιμοποιείται η προσέγγιση της επίπεδης παραμόρφωσης όταν το σώμα είναι αρκετά μεγάλο σε σχέση με τις άλλες του διαστάσεις. Η θεώρηση επίπεδης τάσης εφαρμόζεται όταν το σώμα είναι μικρό σε σχέση με τις άλλες του διαστάσεις.

#### 2.4.4 Προσέγγιση Επίπεδης Παραμόρφωσης

Αν θεωρηθεί ότι οι παραμορφώσεις σε ένα σώμα είναι επίπεδες, δηλαδή οι παραμορφώσεις στις  $X, Y$  διευθύνσεις είναι συνάρτηση του  $x$  και  $y$  μόνο, καθώς επίσης οι παραμορφώσεις κατά την  $Z$  διεύθυνση είναι μηδενικές, τότε οι σχέσεις παραμορφώσεων-μετατοπίσεων, μπορούν να απλοποιηθούν ως εξής (Dally & Riley, 1991):

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0, \quad \gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = 0 \end{aligned} \quad (2.64)$$

όμοια με αντικαταστάσεις των εξισώσεων 2.12 στις αρχικές εκφράσεις τάσεων-παραμορφώσεων, επιτυγχάνονται οι απλοποιημένες σχέσεις τάσεων-παραμορφώσεων για συνθήκες επίπεδης παραμόρφωσης (Dally & Riley, 1991):

$$\begin{aligned}
\sigma_{xx} &= \lambda J_1 + 2\mu \varepsilon_{xx} \\
\sigma_{yy} &= \lambda J_1 + 2\mu \varepsilon_{yy} \\
\sigma_{zz} &= \lambda J_1 \\
\tau_{xy} &= \mu \gamma_{xy} \\
\tau_{yz} &= \tau_{zx} = 0
\end{aligned} \tag{2.65}$$

όπου  $J_1 = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}$ . Επιπλέον οι εξισώσεις ισορροπίας των τάσεων απλοποιούνται στην εξής μορφή (Dally & Riley, 1991):

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + F_x &= 0 \\
\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + F_y &= 0
\end{aligned} \tag{2.66}$$

Κάθε λύση για ένα πρόβλημα επίπεδης παραμόρφωσης πρέπει να ικανοποιεί τις εξισώσεις 2.64-2.65, επιπλέον και τις συνοριακές συνθήκες επάνω στην παράλληλη επιφάνεια  $B_L$  και των επιπέδων του σχήματος 2.24. Οι συνοριακές συνθήκες μπορούν να εκφραστούν συναρτήσει των συνιστωσών των τάσεων όπου αναλύονται σε καρτεσιανό σύστημα. Επομένως επί της επιφάνειας  $B_L$  πρέπει να ικανοποιούνται οι πιο κάτω συνοριακές συνθήκες (Dally & Riley, 1991):

$$\begin{aligned}
T_{nx} &= \sigma_{xx} \sigma \nu(n, x) + \tau_{xy} \sigma \nu(n, y) \\
T_{ny} &= \tau_{xy} \sigma \nu(n, x) + \sigma_{yy} \sigma \nu(n, y) \\
T_{nz} &= 0
\end{aligned} \tag{2.67}$$

όπου  $T_{nx}$ ,  $T_{ny}$ ,  $T_{nz}$ , είναι συνιστώσες των τάσεων στις X, Y, Z διευθύνσεις που εφαρμόζονται στην επιφάνεια  $B_L$ . Τέλος, επάνω στα παράλληλα επίπεδα που περικλείουν την πάνω και κάτω επιφάνεια του σώματος ισχύει  $T_n = 0$ . Είναι φανερό ότι από την εξίσωση 2.65, η συνιστώσα της τάσης  $\sigma_{zz}$  θα είναι ίση με μηδέν. Όμως το  $J_1$  είναι πάντοτε μηδέν, άρα η λύση του προβλήματος δεν θα είναι ακριβής αφού παραβιάζονται οι συνοριακές συνθήκες στα παράλληλα επίπεδα που περικλείουν την πάνω και κάτω επιφάνεια του σώματος. Σε πολλά προβλήματα, η παραβίαση των συνοριακών συνθηκών μπορεί να αποφευχθεί με την υπέρθεση μιας ίσης και

αντίθετης κατανομής  $\sigma_{zz}$  (λύση με υπόλοιπα) επάνω στην αρχική λύση του προβλήματος.

Είναι δυνατό να επιτευχθεί ακριβής λύση σε ένα πρόβλημα με υπόλοιπο μόνο όταν η  $\sigma_{zz}$  είναι γραμμική συνάρτηση του  $X$  και  $Y$ . Όταν η  $\sigma_{zz}$  είναι μη γραμμική, τότε γίνεται μια προσεγγιστική λύση που βασίζεται στην αρχή του Saint-Venant. Όταν η μη γραμμική κατανομή της  $\sigma_{zz}$  είναι στα παράλληλα σύνορα του σώματος, αντικαθίσταται με από μια γραμμική κατανομή που είναι στατικά ισοδύναμη. Είναι φανερό ότι η προσέγγιση της επίπεδης παραμόρφωσης περιορίζεται σε κεντρικές περιοχές όπως φρέαρ, φράγματα όπου είναι αρκετά μεγάλα ως προς τις δυο διαστάσεις τους. Στην κεντρική περιοχή τέτοιων σωμάτων, οι τάσεις  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$  και  $\tau_{xy}$  μπορούν να προσδιοριστούν από την λύση του αρχικού επίπεδου προβλήματος αφού με την υπέρθεση μιας ίσης κατανομής επάνω στην αρχική λύση δεν επηρεάζει αυτές τις τάσεις, απλά υποβιβάζει την  $\sigma_{zz}$  μέχρι να εξαφανιστεί (Dally & Riley, 1991).

#### 2.4.5 Προσέγγιση Επίπεδης Τάσης

Όπως έχει αναφερθεί, η θεώρηση της επίπεδης παραμόρφωσης περιορίζεται σε σώματα των οποίων η τρίτη διάσταση είναι αρκετά μεγαλύτερη σε σχέση με τις άλλες δυο διαστάσεις τους. Για την περίπτωση όπου η τρίτη διάσταση είναι μικρή σε σχέση με τις άλλες διαστάσεις, μπορεί να θεωρηθεί η παραδοχή (Dally & Riley, 1991):

$$\sigma_{zz} = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0 \quad (2.68)$$

σε όλο το πάχος του σώματος. Αυτή η παραδοχή υποβιβάζει τις εξισώσεις ισορροπίας των τάσεων στην εξής μορφή (Dally & Riley, 1991):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + F_x &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + F_y &= 0 \end{aligned} \quad (2.69)$$

και οι σχέσεις τάσης παραμόρφωσης λαμβάνουν την μορφή (Dally & Riley, 1991):

$$\begin{aligned}
 \sigma_{xx} &= \lambda J_1 + 2\mu \varepsilon_{xx} \\
 \sigma_{yy} &= \lambda J_1 + 2\mu \varepsilon_{yy} \\
 \sigma_{zz} &= \lambda J_1 + 2\mu \varepsilon_{zz} \\
 \tau_{xy} &= \mu \gamma_{xy} \\
 \tau_{yz} &= \mu \gamma_{yz} = 0 \\
 \tau_{zx} &= \mu \gamma_{zx} = 0
 \end{aligned} \tag{2.70}$$

από την τρίτη εξίσωση 2.70, λαμβάνεται η ακόλουθη σχέση:

$$\varepsilon_{zz} = -\frac{\lambda}{\lambda + 2\mu}(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}) \tag{2.71}$$

σύμφωνα με την  $\varepsilon_{xx}$ , η πρώτη αναλλοίωτη των παραμορφώσεων  $J_1$  γίνεται:

$$J_1 = \frac{2\mu}{\lambda + 2\mu}(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}) \tag{2.72}$$

Αντικαθιστώντας την αναλλοίωτη  $J_1$  στις εξισώσεις 2.70 λαμβάνεται:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{xx} &= \frac{2\lambda\mu}{\lambda + 2\mu}(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}) + 2\mu \varepsilon_{xx} \\
 \sigma_{yy} &= \frac{2\lambda\mu}{\lambda + 2\mu}(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}) + 2\mu \varepsilon_{yy} \\
 \tau_{xy} &= \mu \gamma_{xy} \\
 \sigma_{zz} &= \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0
 \end{aligned} \tag{2.73}$$

Στην γενική περίπτωση, οι τάσεις  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$  και  $\tau_{xy}$  δεν είναι ανεξάρτητες από το  $Z$  και άρα οι συνοριακές συνθήκες επί της παράπλευρης επιφάνειας  $B_L$ , δεν μπορούν να ικανοποιηθούν αυτόματα. Για να ξεπεραστεί αυτή η δυσκολία, συνήθως γίνεται χρήση των μέσων τάσεων και μετατοπίσεων επάνω στο μέσο πάχος του σώματος. Οι μέσες τιμές των τάσεων και των μετατοπίσεων δίδονται από τις σχέσεις (Dally & Riley, 1991):



$$\begin{aligned}\tilde{\sigma}_{xx} &= \frac{1}{2t} \int_{-t}^t \sigma_{xx} dz, & \tilde{\sigma}_{yy} &= \frac{1}{2t} \int_{-t}^t \sigma_{yy} dz, & \tilde{\tau}_{zz} &= \frac{1}{2t} \int_{-t}^t \tau_{zz} dz \\ \tilde{u} &= \frac{1}{2t} \int_{-t}^t u dz, & \tilde{v} &= \frac{1}{2t} \int_{-t}^t v dz\end{aligned}\quad (2.74)$$

Το σύμβολο ( $\sim$ ) πάνω από τις τάσεις και τις μετατοπίσεις δείχνει ότι γίνεται αναφορά στις μέσες τιμές. Αντικαθιστώντας τις μέσες αυτές τιμές στις εξισώσεις 2.15 λαμβάνονται οι συνοριακές συνθήκες που πρέπει να εφαρμοστούν επί της παράπλευρης επιφάνειας  $B_L$  (Dally & Riley, 1991):

$$\begin{aligned}T_{nx} &= \tilde{\sigma}_{xx} \cos(n, x) + \tilde{\tau}_{xy} \cos(n, y) \\ T_{ny} &= \tilde{\tau}_{xy} \cos(n, x) + \tilde{\sigma}_{yy} \cos(n, y)\end{aligned}\quad (2.75)$$

Αν γίνει μια σύγκριση μεταξύ των λύσεων που λαμβάνονται από τις θεωρήσεις επίπεδης παραμόρφωσης και επίπεδης τάσης, τότε μπορεί να παρατηρηθεί ότι είναι ακριβώς οι ίδιες με την μοναδική διαφορά στις εξισώσεις 2.65 και 2.70. Αν εξεταστεί μια τυπική εξίσωση από αυτά τα δυο σύνολα εξισώσεων, όπως φαίνεται στην σχέση 2.76 (Dally & Riley, 1991):

$$\sigma_{xx} = \begin{cases} \lambda(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}) + 2\mu\varepsilon_{xx} & \text{Επίπεδη Παραμόρφωση} \\ \frac{2\lambda\mu}{\lambda + 2\mu}(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}) + 2\mu\varepsilon_{xx} & \text{Επίπεδη Τάση} \end{cases} \quad (2.76)$$

φαίνεται ότι είναι ίδιες εκτός από τους συντελεστές του όρου  $(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy})$ . Αφού όλες οι εξισώσεις είναι ίδιες για τις θεωρήσεις επίπεδης παραμόρφωσης και επίπεδης τάσης, τότε μπορεί μετατραπούν από επίπεδη παραμόρφωση σε επίπεδη τάση και αντίστροφα. Οπότε για την μετατροπή της επίπεδης παραμόρφωσης σε επίπεδη τάση αρκεί (Dally & Riley, 1991):

$$\lambda \rightarrow \frac{2\lambda\mu}{\lambda + 2\mu}, \quad \frac{\nu}{1 - \nu} \rightarrow \nu \quad (2.77)$$

ενώ για την μετατροπή της επίπεδης τάσης σε επίπεδη παραμόρφωση αρκεί:

$$\frac{2\lambda\mu}{\lambda+2\mu} \rightarrow \lambda, \quad \nu \rightarrow \frac{\nu}{1-\nu} \quad (2.78)$$

Γενικά για την θεώρηση της επίπεδης τάσης θεωρείται ότι  $\sigma_{zz}$ ,  $\tau_{yz}$  και  $\tau_{zx}$ , εξαρτώνται από την  $Z$  διεύθυνση. Σαν αποτέλεσμα αυτού, οι συνοριακές συνθήκες παραβιάζονται και για την απαλοιφή αυτού του προβλήματος γίνεται χρήση των μέσων τιμών των τάσεων και των μετατοπίσεων. Τέλος μπορεί να γίνει μετατροπή από την μια θεώρηση στην άλλη, με απλή αντικατάσταση του λόγου Poisson όπως δείχνουν οι σχέσεις 2.77 και 2.78.

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3<sup>ο</sup>

### ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΥΛΙΚΟΥ

Στο κεφάλαιο αυτό περιγράφονται οι φυσικές και μηχανικές ιδιότητες του Διονυσιακού μαρμάρου, το πέτρωμα το οποίο υποβλήθηκε σε δοκιμές άμεσου εφελκυσμού.

Το μάρμαρο Διονύσου χρησιμοποιείται σχεδόν αποκλειστικά στις εργασίες συντήρησης του Παρθενώνα στην Ακρόπολη της Αθήνας, λόγω της ομοιότητας των φυσικομηχανικών του ιδιοτήτων με αυτές του Πεντελικού μαρμάρου, το οποίο χρησιμοποιήθηκε ευρύτατα κατά το παρελθόν από τους αρχαίους Έλληνες (Βαρδουλάκης κ.α., 2002).

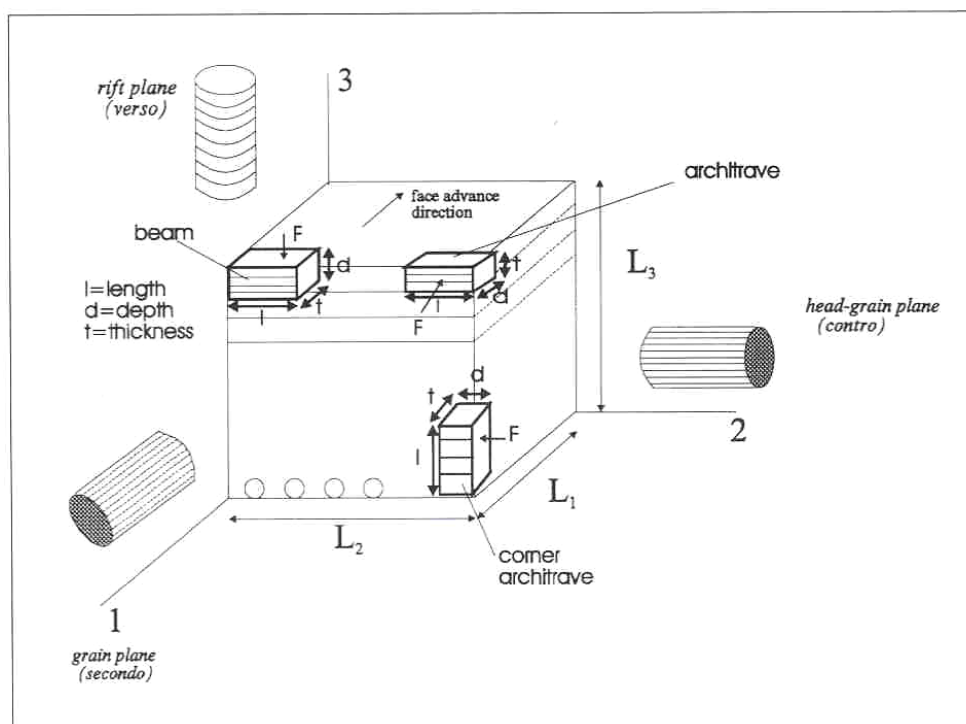
#### 3.1 ΦΥΣΙΚΕΣ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

Το Διονυσιακό μάρμαρο αποτελείται από 98% ασβεστίτη, 0,5% μοσχοβίτη, 0,3% σερίκίτη, 0,2% χαλαζία και 0,1% χλωρίτη. Έχει πυκνότητα  $2717 \text{ kg/m}^3$ , φαινόμενη πυκνότητα  $2717 \text{ kg/m}^3$  και συντελεστή απορρόφησης κατά βάρος περίπου 0,11%. Ο συντελεστής θερμικής διαστολής είναι περίπου  $9 \times 10^{-6}/^{\circ}\text{C}$  μεταξύ  $15^{\circ}\text{C}$  και  $100^{\circ}\text{C}$ . Το πορώδες είναι ιδιαίτερα χαμηλό και κυμαίνεται μεταξύ 0,3% στην παρθενική του κατάσταση και 0,7% μετά την επίδραση διαφόρων φυσικών ή και τεχνητών διαβρωτικών παραγόντων. Το μέγεθος των κόκκων είναι της τάξεως των  $0,43 \times 10^{-3} \text{ m}$ , οι κρύσταλλοι του έχουν πολυγωνικό σχήμα με διαστάσεις μεταξύ  $900 \mu\text{m} \times 650 \mu\text{m}$  και  $950 \mu\text{m} \times 874 \mu\text{m}$  και είναι σχεδόν ομοιόμορφοι όσον αφορά τις διαστάσεις τους.

Το χρώμα του Διονυσιακού μαρμάρου είναι λευκό με λίγες στακτόχρωμες φλέβες κατά τη διεύθυνση της σχιστότητας του υλικού. Λόγω της παρουσίας μικρών ποσοτήτων μοσχοβίτη και χλωρίτη εντοπίζονται τοπικά ασημόχρωμες περιοχές (Βαρδουλάκης κ.α., 2002).

### 3.2 ΜΗΧΑΝΙΚΕΣ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

Σχετικά με τις μηχανικές ιδιότητες του μαρμάρου Διονύσου, τα δεδομένα που αναφέρονται στην ελληνική και διεθνή βιβλιογραφία, ποικίλουν εντός ευρέων ορίων. Οι τιμές της εφελκυστικής αντοχής κυμαίνονται μεταξύ 2,4 MPa και 19,4 MPa, ενώ οι τιμές για το μέτρο ελαστικότητας μεταξύ 23 GPa και 90 GPa. Η διασπορά αυτή οφείλεται κυρίως στις διαφορετικές συνθήκες υπό τις οποίες εκτελούνται τα πειράματα, αλλά και στην ανισοτροπία η οποία χαρακτηρίζει τη μηχανική συμπεριφορά του Διονυσιακού μαρμάρου. Υπάρχουν τρεις διευθύνσεις ανισοτροπίας, μία κάθετη στις υλικές στρώσεις (rift plane ή verso ή Π-plane) και δύο εντός του επιπέδου των στρώσεων (grain plane ή secondo ή M-plane και head-grain plane ή contro ή k-plane), όπως φαίνεται στο σχήμα 3.1 (Βαρδουλάκης κ.α., 2002).

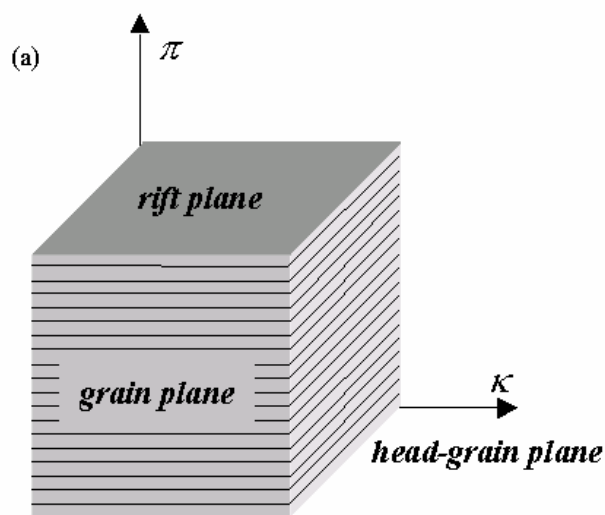


**Σχήμα 3.1:** Η ανισοτροπία του Διονυσιακού μαρμάρου και η σχετική διεθνής ορολογία για τα δοκίμια (Βαρδουλάκης κ.α., 2002)

Όμως, από μια σειρά πειραμάτων άμεσου εφελκυσμού, προέκυψε ότι οι μηχανικές ιδιότητες κατά τις δύο διευθύνσεις ανισοτροπίας (αυτές κατά τα επίπεδα grain και head grain στο σχήμα 3.1) είναι παραπλήσιες. Η παρατήρηση αυτή δικαιολογεί την άποψη ότι το Διονυσιακό μάρμαρο μπορεί να θεωρείται ως εγκαρσίως ισότροπο υλικό με έναν άξονα ελαστικής συμμετρίας απείρου τάξεως (τον

κάθετο στις στρώσεις) (Σχήμα 3.2) και επομένως η μηχανική του συμπεριφορά περιγράφεται με τη χρήση πέντε σταθερών: Των δύο μέτρων ελαστικότητας,  $E$  και  $E'$ , στο επίπεδο εγκάρσιας ισοτροπίας και κάθετα σε αυτό, των δύο λόγων Poisson,  $\nu$  και  $\nu'$ , οι οποίοι περιγράφουν την εγκάρσια ανταπόκριση των παραμορφώσεων εντός του επιπέδου ισοτροπίας σε εφελκυστικές φορτίσεις παραλλήλως και κάθετως σε αυτό και του μέτρου διατμήσεως,  $G$ , σε επίπεδα κάθετα στο επίπεδο ισοτροπίας (Βαρδουλάκης κ.α., 2002).

Οι τιμές των πρώτων τεσσάρων από αυτές τις σταθερές, που είναι απαραίτητες για την παρούσα μελέτη, παρουσιάζονται συνοπτικά στον πίνακα 3.1, μαζί με την αντοχή σε εφελκυσμό.



Σχήμα 3.2: Οι δυο ανισότροπες διευθύνσεις του μαρμάρου Διονύσου (Βαρδουλάκης κ.α., 2002)

Πίνακας 3.1: Μηχανικές ιδιότητες του μαρμάρου Διονύσου (Βαρδουλάκης κ.α., 2002)

Διεύθυνση ανισοτροπίας	Ισχυρή	Ασθενής
Μέτρο Ελαστικότητας $E$ (GPa)	84,5	50
Λόγος Poisson $\nu$	0,26	0,11
Αντοχή σε Εφελκυσμό (MPa)	10,8	5,3

### **3.2.1 Η Συμπεριφορά του Διονυσιακού Μαρμάρου υπό Άμεσο Εφελκυσμό**

Η αντοχή σε εφελκυσμό των φυσικών λίθων επηρεάζεται από τους ίδιους σχεδόν παράγοντες που επηρεάζεται και η αντοχή σε θλίψη. Ειδικότερα η ορυκτολογική σύσταση και το πορώδες αποτελούν βασικούς παράγοντες της αντοχής σε εφελκυσμό.

Ο Merriam κ.α. παρατήρησε ότι η αντοχή σε εφελκυσμό των γρανιτών μεταβάλλεται αντιστρόφως ανάλογα της ποσότητας του περιεχόμενου χαλαζία. Εξάλλου μελέτη για την επίδραση της ορυκτολογικής σύστασης στις μηχανικές ιδιότητες των ψαμμιτών απέδειξε ότι η αντοχή σε εφελκυσμό των ψαμμιτών αυξάνεται με το περιεχόμενο βασικό συστατικό. Χαρακτηριστική ήταν και η μείωση της αντοχής σε εφελκυσμό που παρατηρήθηκε στους ψαμμίτες με την αύξηση του πορώδους.

Σχετικά με την επίδραση της υγρασίας διαπιστώθηκε ότι η αύξηση της προκαλεί γενικά μείωση της αντοχής σε εφελκυσμό των φυσικών λίθων. Ειδικότερα στην περίπτωση των ψαμμιτών παρατηρήθηκε μείωση της αντοχής σε εφελκυσμό από 11 έως 48% για υγρασία περιβάλλοντος 100%.

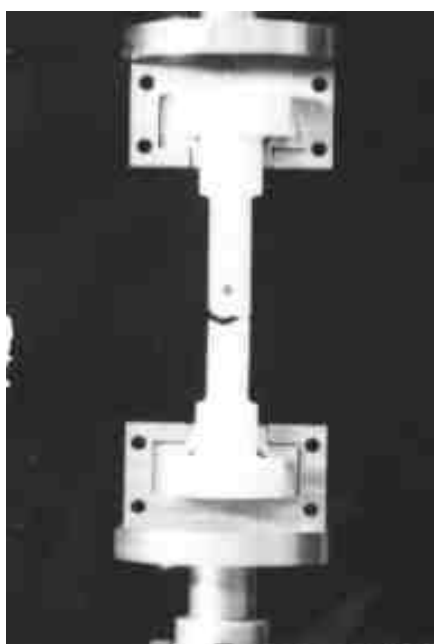
Οι Price και Knill σε μελέτη τους για την επίδραση της ταχύτητας επιβολής του φορτίου κατά τον έλεγχο της αντοχής σε εφελκυσμό συμπέραναν ότι η αντοχή σε εφελκυσμό των πετρωμάτων αυξάνεται με την ταχύτητα του επιβαλλόμενου φορτίου και στην περίπτωση του δολερίτη και ασβεστόλιθου η αύξηση έφθασε στο 17 και 44% αντίστοιχα. Ανάλογα ήταν και τα αποτελέσματα που προέκυψαν σχετικά με την επίδραση της ταχύτητας του επιβαλλόμενου φορτίου επί της αντοχής σε εφελκυσμό ψαμμίτη και γρανίτη.

Συγκεκριμένα για το Διονυσιακό μάρμαρο το πείραμα του μονοαξονικού εφελκυσμού παρέχει σημαντικές πληροφορίες σχετικά με την καταστατική συμπεριφορά του υλικού και την τιμή των ελαστικών σταθερών. Όμως, το πείραμα αυτό είναι απαγορευτικά δύσκολο στην περίπτωση γαιωδών υλικών, καθώς η απαιτούμενη σύνθλιψη εντός των αρπαγών (για την δημιουργία των απαραίτητων δυνάμεων τριβής οι οποίες θα φορτίσουν εφελκυστικώς το δοκίμιο), θρυμματίζει το υλικό στις κεφαλές λόγω της αυξημένης ψαθυρότητας. Πρακτικά το πείραμα μονοαξονικού εφελκυσμού υποκαθίσταται από το πείραμα αντιδιαμετρικής θλίψης,

το οποίο όμως δημιουργεί πολυαξονικό εντατικό πεδίο με αποτέλεσμα να μην προκύπτουν ιδιαίτερα αξιόπιστα αποτελέσματα (Βαρδουλάκης κ.α., 2002).

Στο σχήμα (3.3) παρουσιάζεται πειραματική διάταξη με την οποία εκτελέστηκαν τα πειράματα άμεσου μονοαξονικού εφελκυσμού δοκιμίων από Διονυσιακό μάρμαρο. Η πρώτη περιελάμβανε συνδυασμό κυλινδρικών δοκιμίων διπλής βαθμίδας στη διατομή (τύπου dogbone) και ειδικές διαιρούμενες αρπάγες. Το φορτίο ασκείται από τις αρπάγες στην πρώτη βαθμίδα των δοκιμίων διατμητικώς, χωρίς σύνθλιψη. Αυτή η μέθοδος έδωσε ικανοποιητικά αποτελέσματα, αλλά η εφαρμογή της είναι χρονοβόρα, καθώς απαιτείται ειδική επεξεργασία των δοκιμίων.

Επίσης, η μέθοδος αποδείχθηκε ιδιαίτερα ευαίσθητη ακόμη και στις ελάχιστες αποκλίσεις από την απόλυτη ευθυγράμμιση μεταξύ του άξονα φορτίσεως της μηχανής και του άξονα φορτίσεως του δοκιμίου, με αποτέλεσμα τη δημιουργία παρασιτικών καμπτικών τάσεων (Βαρδουλάκης κ.α., 2002).

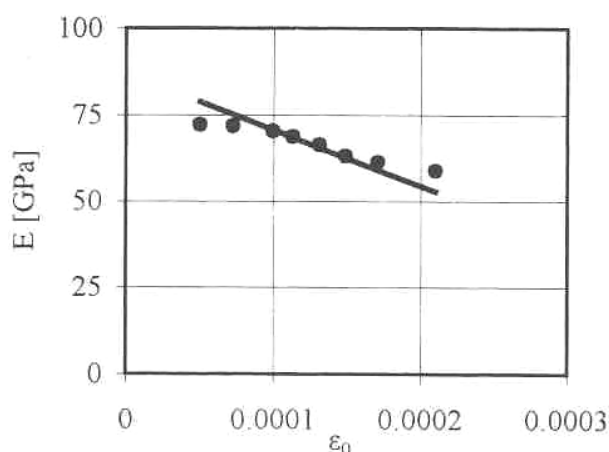


**Σχήμα 3.3:** Διάταξη για τα πειράματα άμεσου μονοαξονικού εφελκυσμού σε δοκίμια Διονυσιακού μαρμάρου (Βαρδουλάκης κ.α., 2002)

Η δεύτερη μέθοδος στηρίζεται σε «εύκαμπτες» αρπάγες (συρματόσχοινα ειδικού τύπου), με τις οποίες ασκείται το εφελκυστικό φορτίο σε ειδικό κέλυφος εντός του οποίου «κοχλιώνεται» μεταλλική κεφαλή, με εσωτερική διάμετρο αυτή του

δοκιμίου, εντός της οποίας συγκρατείται το δοκίμιο με κατάλληλη κυανοακρυλική συγκολλητική ουσία (Βαρδουλάκης κ.α., 2002).

Ενδιαφέρον συμπέρασμα παρουσιάζει η μεταβολή του μέτρου ελαστικότητας  $E$ , συναρτήσει του επιπέδου των επιβαλλόμενων αξονικών παραμορφώσεων,  $\varepsilon$ . Όπως φαίνεται από το σχήμα (3.4), στο οποίο παρουσιάζονται οι τιμές του  $E$  συναρτήσει της παραμόρφωσης  $\varepsilon$ , η αρχική τιμή των περίπου 80 GPa μειώνεται κάτω από τα 60 GPa ελάχιστα πριν την αστοχία. Η σχετική συνάρτηση  $E=E(\varepsilon)$  εμφανίζεται ελαφρώς «σιγμοειδής», όμως μπορεί σε πρώτη προσέγγιση να θεωρηθεί γραμμική. Προκύπτει λοιπόν το συμπέρασμα, ότι για την σωστή περιγραφή της καταστατικής συμπεριφοράς του Διονυσιακού μαρμάρου πρέπει να ληφθεί υπόψη και η μηχανική φθορά (mechanical damage) (Βαρδουλάκης κ.α., 2002).

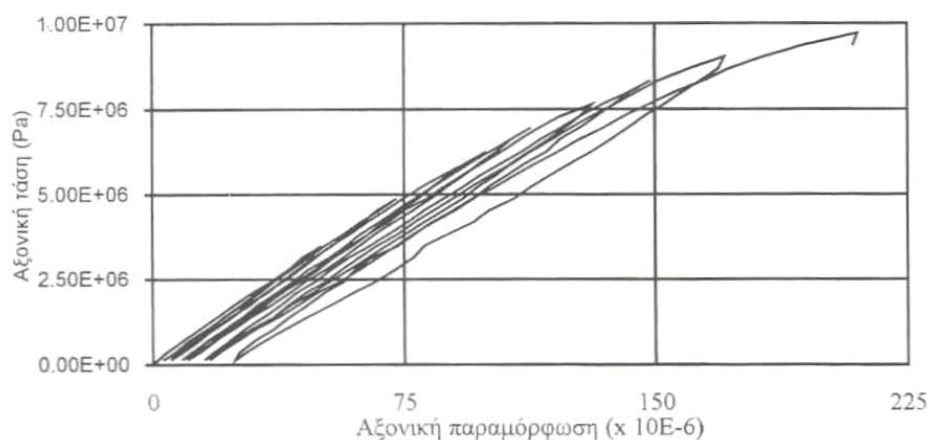


**Σχήμα 3.4:** Φθορά του μέτρου ελαστικότητας του μαρμάρου Διονύσου συναρτήσει της αξονικής παραμόρφωσης (Βαρδουλάκης κ.α., 2002).

Το πιο σημαντικό όμως συμπέρασμα, αφορά στην καταστατική συμπεριφορά του μαρμάρου Διονύσου καθώς όπως φαίνεται στο διάγραμμα αξονικών τάσεων-αξονικών παραμορφώσεων του Σχήματος 3.5, στο οποίο παρουσιάζονται τα δεδομένα μιας σειράς οκτώ κύκλων φόρτισης-αποφόρτισης, το υλικό παρουσιάζει μη γραμμική συμπεριφορά, ακόμα και από τα αρχικά στάδια φόρτισης. Το ίδιο συμπέρασμα προέκυψε και για το λόγο της εγκάρσιας συστολής σε συνάρτηση για την διαμήκη επιμήκυνση (λόγος Poisson). Σημαντικό είναι λοιπόν, ότι πέραν της μη γραμμικότητας, το υλικό παρουσιάζει σημαντικές παραμένουσες παραμορφώσεις, που πλησιάζουν το  $10 \times 10^{-6}$  στον τέταρτο κύκλο φόρτισης-αποφόρτισης, ενώ στον όγδοο προσεγγίζουν το  $25 \times 10^{-6}$ . Δηλαδή το μάρμαρο αυτό εμφανίζεται ως ένα



σχετικά όλκιμο υλικό, η συμπεριφορά του οποίου προσεγγίζει (φαινομενικά) την αντίστοιχη του αλουμινίου (Βαρδουλάκης κ.α., 2002).



**Σχήμα 3.5:** Διάγραμμα τάσεων-παραμορφώσεων του Διονυσιακού μαρμάρου υπό μονοαξονικό εφελκυσμό (Βαρδουλάκης κ.α., 2002)

### 3.2.2 Η Συμπεριφορά του Μαρμάρου Διονύσου υπό Μονοαξονική και Τριαξονική Θλίψη

Η αντοχή σε θλίψη αποτελεί βασική μηχανική ιδιότητα κάθε δομικού υλικού με ιδιαίτερη σημασία όταν αυτό πρόκειται να χρησιμοποιηθεί ως φέρον στοιχείο. Στην περίπτωση των φυσικών λίθων η αντοχή σε θλίψη αποτελεί έναν δείκτη της ποιότητας και ένα κριτήριο της εκλογής.

Η αντοχή σε θλίψη των φυσικών λίθων επηρεάζονται σημαντικά από εσωτερικούς παράγοντες, όπως η ορυκτολογική σύσταση, το πορώδες, η κρυσταλλικότητα και η υφή και από εξωτερικούς, όπως το σχήμα, οι διαστάσεις, η κατάσταση των δοκιμίων και οι συνθήκες της δοκιμής. Η αντοχή σε θλίψη των χαλαζιακών φυσικών λίθων είναι μεγαλύτερη των ασβεστιτικών, ενώ η αντοχή σε θλίψη των λίθων με μήτρα σιδηρούχα ορυκτά είναι μικρότερη των ασβεστιτικών. Μικρή είναι και η αντοχή σε θλίψη των αργιλούχων φυσικών λίθων.

Η αύξηση του πορώδους προκαλεί σημαντική μείωση της αντοχής σε θλίψη των φυσικών λίθων. Στο συμπέρασμα αυτό κατέληξαν πολλοί ερευνητές, οι οποίοι και αναφέρουν σχέσεις πορώδους και αντοχής σε θλίψη για διάφορες κατηγορίες

πετρωμάτων. Ανάλογες σχέσεις υπάρχουν και μεταξύ πυκνότητας ή ειδικού βάρους και αντοχής σε θλίψη. Γενικά παρατηρείται αύξηση της αντοχής σε θλίψη με την πυκνότητα των πετρωμάτων.

Το μέγεθος των κρυστάλλων επιδρά στην αντοχή σε θλίψη των φυσικών λίθων. Συγκεκριμένα η αύξηση του μεγέθους των κρυστάλλων προκαλεί μείωση της αντοχής σε θλίψη.

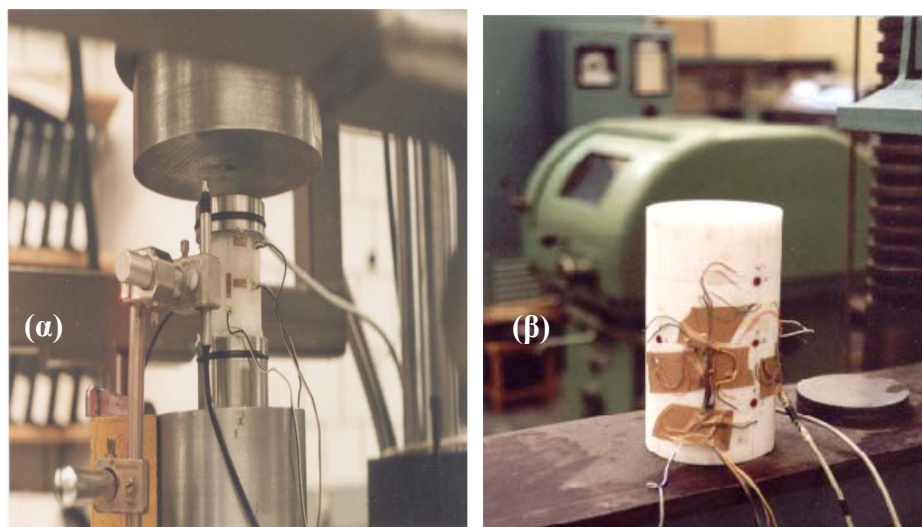
Σχετικά με την γεωμετρία των δοκιμίων ο Grosvenor αναφέρει ότι η αντοχή σε θλίψη κυλινδρικών δοκιμίων είναι συνήθως μεγαλύτερη των πρισματικών για λόγο  $h/d=1$  (όπου,  $h$  το ύψος και  $d$  η διάμετρος ή το πλάτος) και μικρότερη για  $h/d=1,5$ , ενώ είναι η ίδια περίπου για  $h/d=2$ . Η αντοχή σε θλίψη μειώνεται γενικά με την αύξηση του λόγου  $h/d$  ( $h/d>1$ ) και για την τιμή 2,5-3 παραμένει σταθερή. Η αύξηση του μεγέθους των δοκιμίων προκαλεί, -όπως εύλογα αναμένεται- μείωση της αντοχής σε θλίψη. Ο Bieniawski σε σχετική μελέτη του απέδωσε τη μείωση της αντοχής στην πιθανή αύξηση των μικρορωγμών ή ελαττωμάτων των δοκιμίων λόγω αύξηση του μεγέθους.

Η αντοχή σε θλίψη αυξάνεται με την ταχύτητα της εφαρμοζόμενης θλιπτικής τάσης. Η διεύθυνση επιβολής της θλιπτικής τάσης επηρεάζει το αποτέλεσμα της αντοχής σε θλίψη και το φαινόμενο παρουσιάζεται εντονότερο στα στρωσιγενή πετρώματα. Ειδικότερα στις «φυσικές πλάκες» η αντοχή σε θλίψη κατά διεύθυνση κάθετη στις στρώσεις είναι μεγαλύτερη της διεύθυνσης της παράλληλης στις στρώσεις σε ποσοστό που κυμαίνεται από 10 έως 40%. Το ποσοστό αυτό μειώνεται στην περίπτωση κορεσμού των λίθων με νερό.

Η αύξηση της υγρασίας μειώνει την αντοχή σε θλίψη των φυσικών λίθων και η μείωση είναι μεγαλύτερη στους λίθους με αυξημένο πορώδες. Στο μάρμαρο παρατηρήθηκε μείωση της αντοχής σε θλίψη στην κατάσταση κατά 4%, στο γρανίτη κατά 8% και στον ασβεστόλιθο και σχιστόλιθο κατά 15%. Στην περίπτωση του ψαμμίτη και σχιστόλιθου διαπιστώθηκε μείωση της αντοχής κατά 40 και 60% αντιστοίχως, στην κατάσταση κορεσμού.

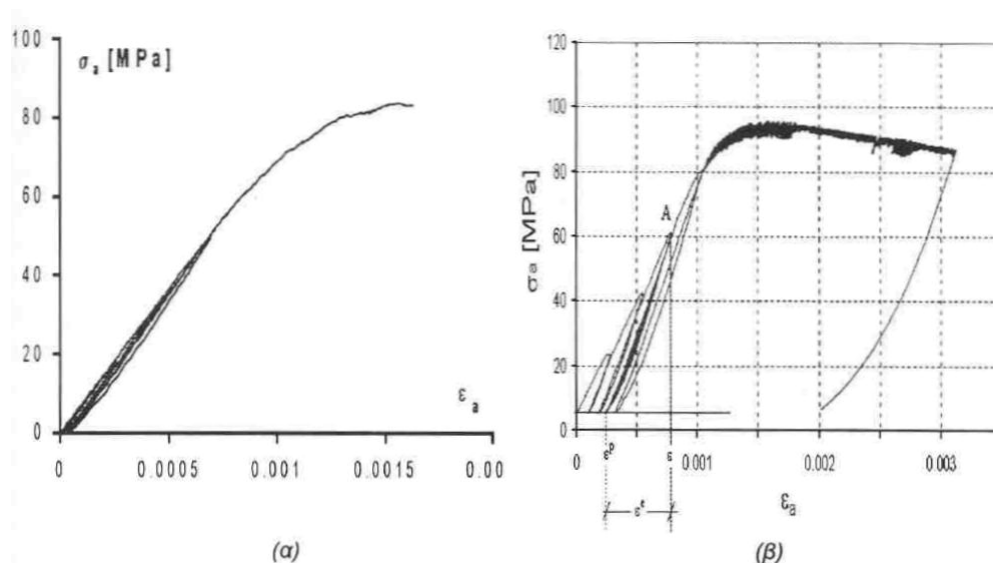
Σχετικά με την επίδραση της θερμοκρασίας επί της αντοχής σε θλίψη τα πειραματικά αποτελέσματα έχουν δείξει αύξηση της αντοχής σε θλίψη με τη θερμοκρασία. Ειδικότερα στην περίπτωση του διάβαση η αύξηση της αντοχής σε θλίψη ήταν 20% για αύξηση της θερμοκρασίας των δοκιμίων από 27 σε 200°C. Η μεταβολή αυτή δικαιολογείται από την ανάπτυξη εσωτερικών τάσεων αντίθετων των θλιπτικών.

Συγκεκριμένα η συμπεριφορά του Διονυσιακού μαρμάρου υπό θλιπτικά φορτία, μελετήθηκε τόσο υπό μονοαξονική θλίψη όσο και υπό θλίψη με πλευρική πίεση (τριαξονική δοκιμή θλίψης). Κατά την δοκιμή μονοαξονικής θλίψης, οι παραμορφώσεις μετρήθηκαν με τη χρήση ηλεκτρικών μηχανομετρών τύπου ορθογωνικής ροζέτας (Σχήμα 3.6), ενώ κατά την τριαξονική δοκιμή με τη χρήση της διάταξης LVDTs (Linear Voltage Displacement Transducers) (Βαρδουλάκης κ.α., 2002).



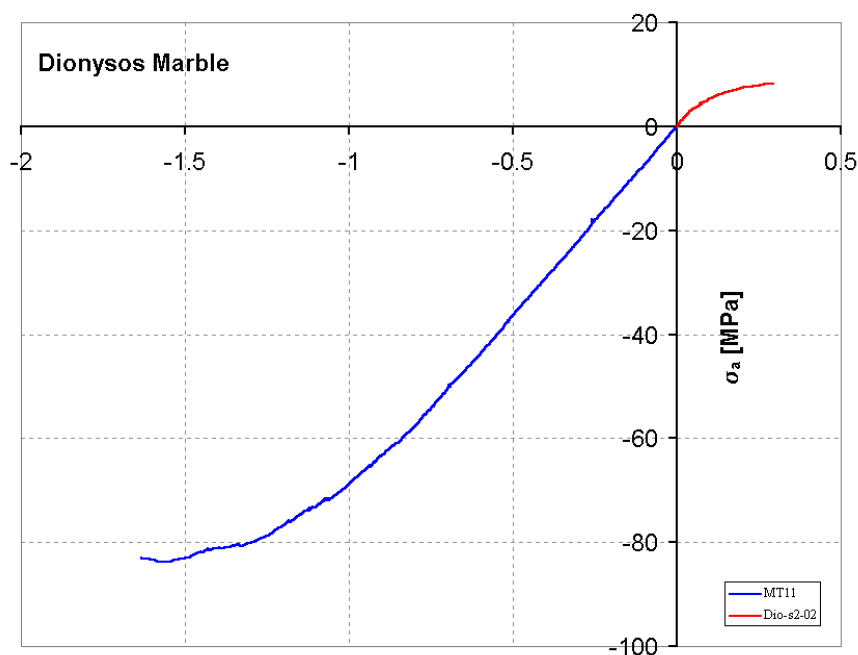
**Σχήμα 3.6:** α) Πειραματική διάταξη της δοκιμής μονοαξονικής θλίψης β) Δοκίμιο μαρμάρου για δοκιμή μονοαξονικής θλίψης στο οποίο διακρίνονται τα τοποθετημένα μηχανοσκόπετρα για την μέτρηση των παραμορφώσεων (Βαρδουλάκης κ.α., 2002)

Στο σχήμα (3.7) παρουσιάζονται μαζί η αξονική τάση συναρτήσει της αξονικής παραμόρφωσης, όπως προκύπτει από τη δοκιμή μονοαξονικής θλίψης, και τα ίδια μεγέθη για την τριαξονική δοκιμή υπό πλευρική πίεση  $p=5$  MPa. Από αυτά τα δύο γραφήματα προκύπτει διαφορά μεταξύ της εφελκυστικής και της θλιπτικής αντοχής του μαρμάρου, με λόγο αντοχών σε θλίψη και εφελκυσμό ίσο περίπου με 10. Και στο πείραμα θλίψης παρουσιάζεται μη γραμμική συμπεριφορά, για τιμές όμως παραμορφώσεων σημαντικά μεγαλύτερες από τις αντίστοιχες του εφελκυσμού, ενώ καταγράφονται και σημαντικές παραμένουσες παραμορφώσεις κατά την περίπτωση αποφορτίσεως. Είναι επίσης σαφής η αύξηση της ολκιμότητας λόγω της επίδρασης της πλευρικής πίεσης, καθώς και η ύπαρξη φθίνοντος κλάδου, στον οποίο η μηχανική φθορά του υλικού είναι έντονη, όπως προκύπτει και από την καμπύλη αποφορτίσεως στην οποία το μέτρο ελαστικότητας εμφανίζεται κατά 40% μειωμένο σε σχέση με το αρχικό (Βαρδουλάκης κ.α., 2002).



**Σχήμα 3.7:** Διάγραμμα τάσεων-παραμορφώσεων υπό **α)** μονοαξονική και **β)** τριαξονική θλίψη (Βαρδουλάκης κ.α., 2002)

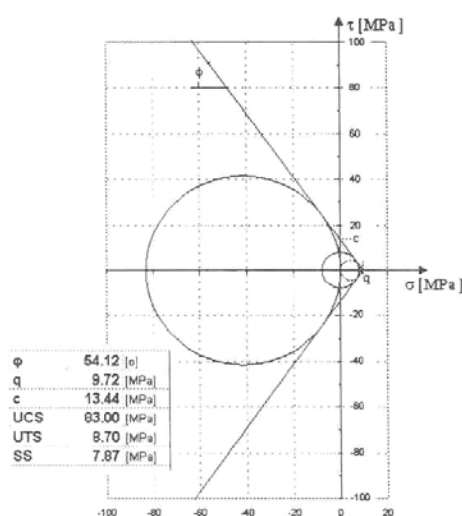
Στο σχήμα (3.8) παρουσιάζεται το πλήρες διάγραμμα τάσεων-παραμορφώσεων του μαρμάρου Διονύσου. Είναι εμφανής η τεράστια διαφορά στις απόλυτες τιμές των τάσεων και των παραμορφώσεων. Επίσης, ενώ στην περιοχή εφελκυσμού η καταστατική σχέση είναι εξαρχής μη γραμμική, στην περιοχή της θλίψης είναι απόλυτα γραμμική. Το γεγονός αυτό πρέπει να λαμβάνεται υπόψη όταν μελετώνται καταπονήσεις στις οποίες συνυπάρχουν εφελκυσμός και θλίψη όπως η κάμψη (Βαρδουλάκης κ.α., 2002).



**Σχήμα 3.8:** Το πλήρες διάγραμμα τάσεων-παραμορφώσεων (Βαρδουλάκης κ.α., 2002)

Η σωστή εκτίμηση της τριβής που αναπτύσσεται μεταξύ των πλακών φόρτισης και του δοκιμίου, έχει αποδειχθεί καθοριστικός παράγοντας για την αξιολόγηση και ανάλυση των δεδομένων των πειραμάτων θλίψης. Έχει αποδειχθεί από το 1982, ότι πειράματα με τριβή παρέχουν ελάχιστα αξιόπιστες πληροφορίες σχετικά με την καταστατική συμπεριφορά γαιωδών υλικών. Τα πειράματα που περιγράφονται εδώ, πραγματοποιήθηκαν τόσο με την χρήση κατάλληλων λιπαντικών τα οποία ελαττώνουν την τριβή όσο και «εν ξηρώ», δηλαδή με απευθείας επαφή των πλακών φόρτισης και των εδρών των δοκιμίων. Η μέθοδος λίπανσης που επιλέχθηκε περιελάμβανε συνδυασμό στρώσεων στερεού στεαρικού οξέος και φύλλων πολυτετραφλουροαιθυλενίου (PTFE). Αυτά τα φύλλα εκτός ότι λειτουργούν σαν λιπαντικά, εμποδίζουν και την διείσδυση των κόκκων του λιπαντικού στο μάρμαρο (Βαρδουλάκης κ.α., 2002).

Από τα δεδομένα των πειραμάτων εφελκυσμού και θλίψης, μπορεί να σχεδιασθεί ο τύπος αστοχίας του Διονυσιακού μαρμάρου κατά Mohr-Coulomb, με την υπόθεση ότι η περιβάλλουσα προσεγγίζεται ικανοποιητικά από ευθεία γραμμή, όπως φαίνεται στο σχήμα (3.9). Στο διάγραμμα εκτός των τιμών βασικών μηχανικών σταθερών του υλικού, παρουσιάζονται και η αντοχή σε θλίψη UCS, η αντοχή σε εφελκυσμό UTS, η αντοχή σε διάτμηση SS, η γωνία τριβής  $\phi$ , καθώς και οι πειραματικές παράμετροι του κριτηρίου  $q$  και  $c$ . Τέλος, σημειώνεται ότι το διάγραμμα του Σχήματος 3.9, αφορά την ισχυρότερη διεύθυνση ανισοτροπίας (Βαρδουλάκης κ.α., 2002).



**Σχήμα 3.9:** Ο τύπος αστοχίας του Διονυσιακού μαρμάρου κατά Mohr-Coulomb (Βαρδουλάκης κ.α., 2002)

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4<sup>ο</sup>

### ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΗ ΔΟΚΙΜΗ ΤΟΥ ΑΜΕΣΟΥ ΕΦΕΛΚΥΣΜΟΥ

Στο κεφάλαιο αυτό περιγράφεται η πειραματική μελέτη της δοκιμής άμεσου εφελκυσμού σε δοκίμια Διονυσιακού μαρμάρου, η οποία πραγματοποιήθηκε στα εργαστήρια αντοχής υλικών του Ε.Μ.Π.

#### 4.1 Η ΔΟΚΙΜΗ ΑΜΕΣΟΥ ΕΦΕΛΚΥΣΜΟΥ ΣΕ ΔΟΚΙΜΙΑ ΔΙΟΝΥΣΙΑΚΟΥ ΜΑΡΜΑΡΟΥ ΜΕ ΗΜΙΚΥΚΛΙΚΗ ΕΓΚΟΠΗ

Τα δείγματα κόπηκαν από πρόσφατα εξορυσσόμενους όγκους μαρμάρου Διονύσου. Το τετραγωνικό τμήμα που σχηματίζεται στο μέσον του δοκιμίου και περιέχει τις εγκοπές, έχει διάσταση 180mm. Οι ημικυκλικές εγκοπές δημιουργήθηκαν και στις δύο πλευρές των δειγμάτων με ακτίνα 10mm. Το συνολικό μήκος των δοκιμίων ήταν 400mm και το συνολικό πλάτος 300mm (Σχήμα 4.1, 4.2).

Το φορτίο εφαρμόστηκε με τη χρήση δυο χαλύβδινων πύρων, διαμέτρου 22mm που περνούν μέσα από τρύπες διαμέτρου 23mm. Προκειμένου να αποφευχθεί η θραύση κοντά στην περιοχή του φορτίου εφαρμογής τα "αυτιά" των δοκιμίων ενισχύθηκαν με Plexiglas. Δόθηκε ιδιαίτερη προσοχή έτσι ώστε να αποφευχθεί η άμεση επαφή των μεταλλικών κυλίνδρων με το μάρμαρο. Το φορτίο μεταφέρθηκε από τους κυλίνδρους στο μάρμαρο μέσω του συγκολλητικού υλικού, με αποτέλεσμα να εφαρμόζεται μια ομοιόμορφη διατμητική τάση επιφάνειας και να αποφευχθεί η συγκέντρωση τάσεων κοντά στους πύρους φόρτισης.

Τα δοκίμια κόπηκαν με τέτοιο τρόπο ώστε ο ισχυρός άξονας ανισοτροπίας να συμπίπτει με την κατεύθυνση των φορτίων. Εντούτοις για κάποια δείγματα ο άξονας συμμετρίας έτεινε ελαφρώς από 5° έως 8°, όσο αφορά την ισχυρή κατεύθυνση ανισοτροπίας. Γι' αυτά τα δείγματα οι σταθερές του υλικού μετασχηματίστηκαν με τη διαδικασία που πρότεινε ο *Lekhnitskii* για τα εγκαρσίως ισότροπα υλικά (Kourkoulis and Agioutantis, 2004). Κατ' αυτό τον τρόπο για κάθε δείγμα η αριθμητική επίλυση



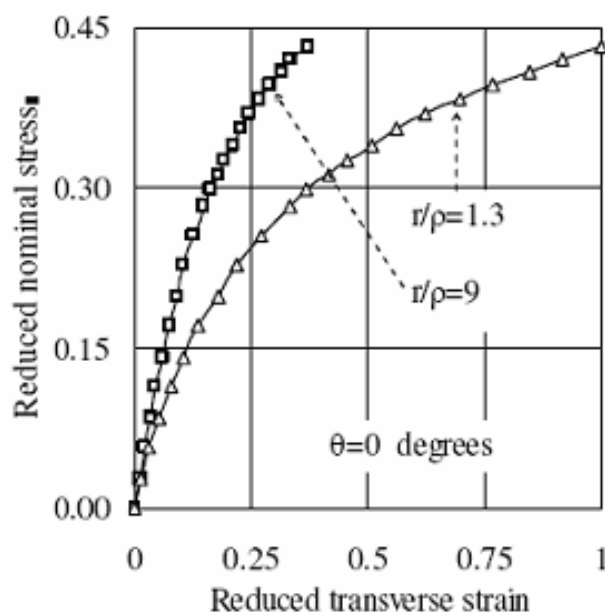
Το φορτίο εφαρμόστηκε στατικά με τιμή 0,02cm/min με τη χρήση ενός ηλεκτρικού πλαισίου φόρτισης Instron δυναμικότητας 250kN (Σχήμα 4.3). Οι παραμορφώσεις που αναπτύχθηκαν μετρήθηκαν με την χρήση 17 ορθογώνιων ροζετών παραμόρφωσης τύπου Kyowa KFG-X-120-D16, τοποθετημένων σύμφωνα με ένα πολικό σύστημα αναφοράς, η αρχή συντεταγμένων του οποίου ήταν η κορυφή της μιας εγκοπής. Για το δοκίμιο με διάμετρο εγκοπής 20 mm, οι ροζέτες τοποθετήθηκαν σε τέσσερα ομόκεντρα ημικύκλια με ακτίνα  $r=1.3, 2.3, 3.8, 5.8$  cm σε κατευθύνσεις με  $\theta=0^\circ, 30^\circ, 60^\circ, 80^\circ$ , από την οριζόντια γραμμή που περνά από το κέντρο της εγκοπής, και μια επιπλέον ροζέτα τοποθετήθηκε ακριβώς στο κέντρο του δοκιμίου (Σχήμα 4.1).



*Σχήμα 4.3: Πλαίσιο φόρτισης Instron*

Χαρακτηριστικά πειραματικά αποτελέσματα παρουσιάζονται στο σχήμα 4.4. Παρουσιάζεται η μεταβολή της εγκάρσιας παραμόρφωσης ανηγμένης παραμόρφωσης ως προς την μέγιστη τιμή σε σχέση με την ανηγμένη ονομαστική τάση, που βασίζεται στις μετρήσεις των δύο μηχανομετρών καταγραφής παραμόρφωσης, τα οποία είναι τοποθετημένα στα σημεία  $(r/\rho, \theta)=(1.3, 0^\circ)$  και  $(r/\rho, \theta)=(9, 0^\circ)$ , μέχρι το τελευταίο και μέγιστο φορτίο  $P=7$  kN. Οι συγκεκριμένες ροζέτες επιλέχθηκαν δεδομένου ότι αντιστοιχούν στο πιο κοντινό και στο πιο μακρινό σημείο στην εγκοπή, αντίστοιχα. Το εντυπωσιακό συμπέρασμα που εξάγεται από το σχήμα 4.4 είναι ότι για τα σημεία πολύ κοντά στην άκρη των εγκοπών, η εξέλιξη των τιμών της παραμόρφωσης είναι μη-γραμμική από τα πρώτα βήματα της φόρτισης, αντίθετα προς αυτό που θα περίμενε κανείς για ένα σχεδόν ξαθυρό πέτρωμα (Kourkoulis and Agioutantis, 2004).



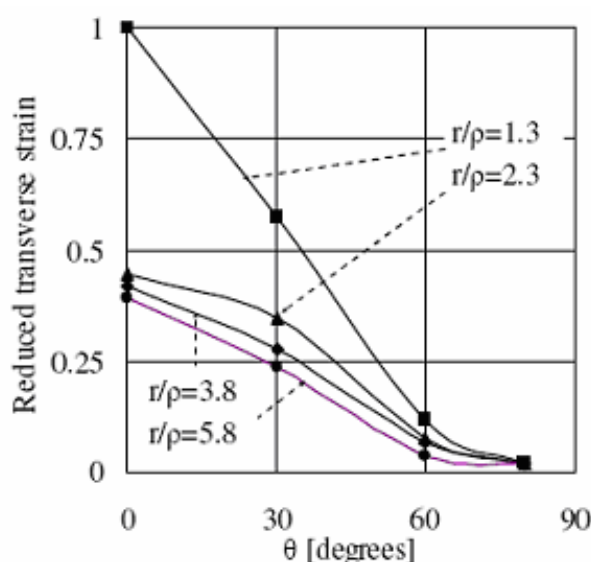


**Σχήμα 4.4:** Η μεταβολή της εγκάρσιας παραμόρφωσης σε σχέση με την ονομαστική τάση για το κεντρικό σημείο του μοντέλου και για το κοντινότερο σημείο στην εγκοπή (Kourkoulis and Agioutantis, 2004).

Πράγματι μια μικρή περιοχή μη γραμμικότητας είναι λογική (Σχήμα 3.8), εντούτοις αυτό που εμφανίζεται σε αυτή την περίπτωση, είναι ότι το φαινόμενο δεν περιορίζεται στα φορτία που πλησιάζουν το όριο θραύσης του υλικού αλλά ελέγχει μάλλον τη συμπεριφορά του Διονυσιακού μαρμάρου με παρουσία εγκοπής κάτω από το εφελκυστικό φορτίο κατά τη διάρκεια ολόκληρης της διαδικασίας φόρτισης. Αυτή η μη γραμμικότητα αποδίδεται στην ανάπτυξη μιας ζώνης έντονων μικρό-ρωγμών (ζώνη διαδικασίας, process zone) γύρω από την κορώνα των εγκοπών. Αυτή η ζώνη διαδικασίας έχει ποσοτικοποιηθεί για το Διονυσιακό μάρμαρο και έχει βρεθεί της τάξης των 5mm. Εξετάζοντας τις διαστάσεις της αντίστοιχης ροζέτας, πράγματι προκύπτει το συμπέρασμα ότι το σημείο που μελετάται βρίσκεται μέσα στην ζώνη διαδικασίας. Αντίθετα, στο κεντρικό σημείο του δοκιμίου η σχέση τάσης-παραμόρφωσης είναι γραμμική για το μεγαλύτερο μέρος της διαδικασίας φόρτισης και η μη γραμμικότητα που παρατηρείται κοντά στο φορτίο θραύσης αποδίδεται στη φύση του Διονυσιακού μαρμάρου (Σχήμα 3.8). Επίσης, από το ίδιο σχήμα φαίνεται ότι η εγκάρσια παραμόρφωση που αναπτύσσεται στην περιοχή γύρω από την εγκοπή είναι 2,7 φορές μεγαλύτερη από την αντίστοιχη εγκάρσια παραμόρφωση στο κεντρικό σημείο του μοντέλου. Το γεγονός αυτό αποτελεί μια ένδειξη (που δεν συμπίπτει με τον αντίστοιχο παράγοντα συγκέντρωσης τάσης λόγω της εγκάρσιας

ισοτροπικής φύσης του Διονυσιακού μαρμάρου) της ενίσχυσης τμημάτων παραμόρφωσης λόγω της παρουσίας της εγκοπής (Kourkoulis and Agioutantis, 2004).

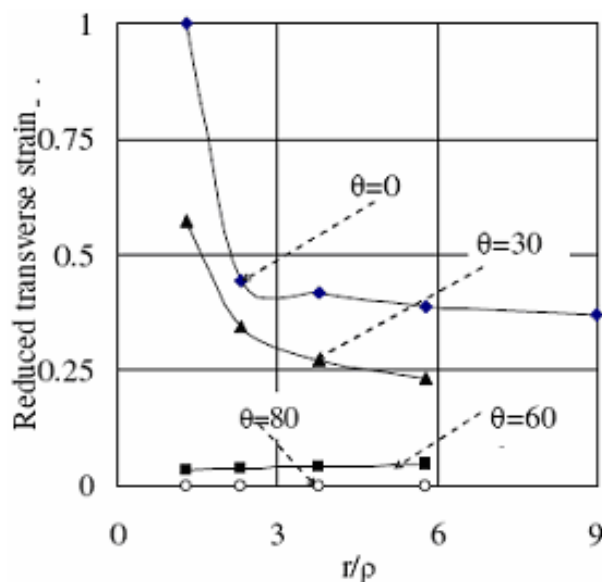
Στο σχήμα 4.5 απεικονίζεται η πολική μεταβολή της εγκάρσιας παραμόρφωσης και για τις τέσσερις γραμμές μελέτης που εξετάζονται, δηλαδή για τιμές της παραμέτρου της ακτίνας  $r/\rho$  ίσες με 1.3, 2.3, 3.8, 5.8. Οι τιμές αντιστοιχούν στο μέγιστο φορτίο 7kN. Από το διάγραμμα αυτό εξάγεται το συμπέρασμα ότι η εγκοπή επιδρά ελάχιστα στο μέγεθος των παραμορφώσεων για τιμές του  $r$  μικρότερες από περίπου το διπλάσιο της τιμής της ακτίνας της εγκοπής. Στην πραγματικότητα οι διαφορές των τιμών εγκάρσιας παραμόρφωσης και για τις τρεις γραμμές μελέτης με ακτίνα  $r/\rho = 2.3, 3.8$  και  $5.8$  είναι σχεδόν αμελητέες ανεξάρτητα από την τιμή της γωνίας (Kourkoulis and Agioutantis, 2004).



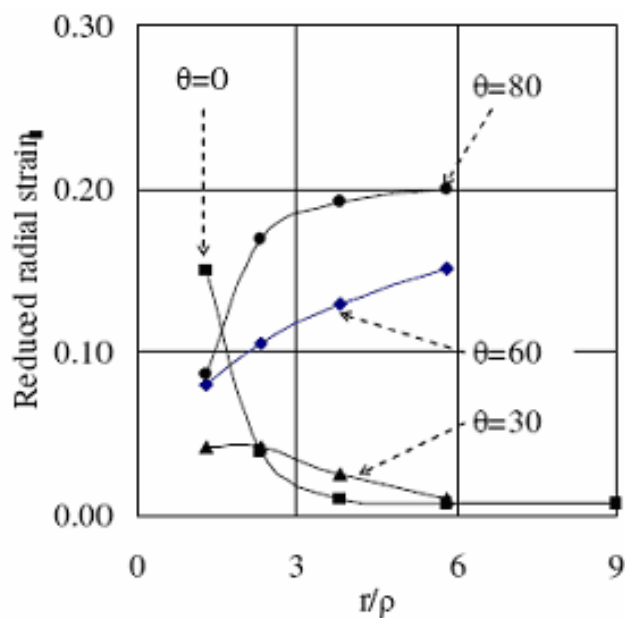
**Σχήμα 4.5:** Η πολική μεταβολή της εγκάρσιας παραμόρφωσης κατά μήκος των τεσσάρων ημικυκλικών περιγραμμιάτων (Kourkoulis and Agioutantis, 2004).

Τέλος η εξάρτηση των εγκάρσιων και ακτινικών παραμορφώσεων με βάση την απόσταση από την άκρη των εγκοπών απεικονίζεται στα σχήματα 4.6 και 4.7, αντίστοιχα, όπου οι εγκάρσιες και ακτινικές παραμορφώσεις σχεδιάζονται κατά μήκος των γραμμών μελέτης για  $\theta=0^\circ, 30^\circ, 60^\circ$  και  $80^\circ$ . Όπως φαίνεται από το σχήμα 4.6, η εγκάρσια παραμόρφωση επηρεάζεται έντονα από την παρουσία της εγκοπής για τις γραμμές  $\theta=0^\circ$  και  $\theta=30^\circ$ . Από τα παραπάνω προκύπτει το συμπέρασμα ότι η επίδραση της εγκοπής στις τιμές της εγκάρσιας παραμόρφωσης μειώνεται πολύ γρήγορα με την αύξηση της απόστασης από την άκρη της εγκοπής: Πράγματι για λόγο ακτινών  $r/\rho \geq 2.5$  οι εγκάρσιες παραμορφώσεις παραμένουν ουσιαστικά σταθερές

για ολόκληρη τη γραμμή μελέτης που αντιστοιχεί στη δεδομένη γωνία. Η μεταβολή των ακτινικών παραμορφώσεων είναι πολύπλοκότερη. Για  $\theta=0^\circ$  η τιμή  $(r/\rho=1.3)/(r/\rho=9)$  φτάνει το 20 υποδηλώνοντας ότι η επίδραση της εγκοπής στην ακτινική παραμόρφωση είναι τεράστια (Kourkoulis and Agioutantis, 2004).



**Σχήμα 4.6:** Η εξάρτηση των εγκάρσιων παραμορφώσεων κατά μήκος από την άκρη της εγκοπής (Kourkoulis and Agioutantis, 2004).



**Σχήμα 4.7:** Η εξάρτηση των ακτινικών παραμορφώσεων κατά μήκος από την άκρη της εγκοπής (Kourkoulis and Agioutantis, 2004).



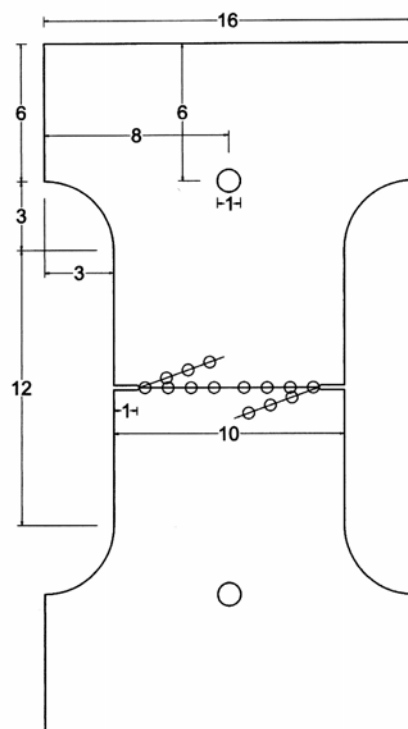
Όπως φαίνεται και στο σχήμα 4.8, το δοκίμιο είχε πλάτος 16cm κατά μέγιστο στις «κεφαλές», στις οποίες βρίσκονταν οι οπές, και μέγιστο μήκος 30cm, κατά τον κεντρικό άξονα. Οι κεφαλές αυτές είχαν ύψος 6 εκατοστών και συνδέονταν με το κυρίως σώμα του δοκιμίου, διαστάσεων 10X12cm, με τις προαναφερθείσες καμπύλες συναρμογής, μορφής τεταρτοκύκλιου και ακτίνας τριών εκατοστών. Οι οπές από τις οποίες διέρχονται οι πύροι, ήταν ακτίνας μισού εκατοστού. Επίσης δύο συμμετρικές ως προς τον κάθετο άξονα συμμετρίας, ημικυκλικές εγκοπές (μορφής U) βάθους ενός εκατοστού και ακτίνας ενός χιλιοστού βρίσκονταν στον οριζόντιο κεντρικό άξονα του δοκιμίου. Τέλος, για λόγους απλούστευσης του προβλήματος, αλλά και οικονομίας υλικού, επιλέχθηκε τα δοκίμια να έχουν πάχος ενός εκατοστού.

Τα προαναφερθέντα δοκίμια φορτίστηκαν σε πλαίσιο φόρτισης INSTRON 1126 του Εργαστηρίου Αντοχής Υλικών του Πολυτεχνείου, ικανής να ασκήσει μέγιστο φορτίο 25 τόννων με διάφορες ταχύτητες οι οποίες ποικίλουν από 0,001 έως 20 cm/min. Η μηχανή αποτελείται, μεταξύ άλλων, από δύο κεφαλές εκ των οποίων η κατώτερη παραμένει σταθερή ενώ, μέσω της άλλης, κινητής κεφαλής, μεταβιβάζεται το φορτίο.

Στο σώμα του δοκιμίου είχαν τοποθετηθεί ειδικά ηλεκτρομηκυνσιόμετρα τύπου KFG-1-120-D16-11 τα οποία με τη σειρά τους συνδέονταν με μία άλλη συσκευή (γέφυρα) τύπου Tem L TDS-256 DC. Η συσκευή αυτή είναι ένας ψηφιακός μετρητής παραμορφώσεων στον οποίο μεταβιβάζονται οι τιμές που δίνουν τα ηλεκτρομηκυνσιόμετρα. Αναλυτικά, στις δυνατότητες της συσκευής είναι η λήψη ενδείξεων ανά 0,2 δευτερόλεπτα τουλάχιστον, με περιθώριο λάθους 0,1%.

Με δυνατότητα λήψης δεδομένων από 32 μόνο διαύλους ανά πείραμα, ο αριθμός των ηλεκτρομηκυνσιομέτρων αναγκαστικά περιορίζονταν στο νούμερο αυτό. Δεδομένου ότι για κάθε επιλεγμένο σημείο τοποθέτησης ενός μετρητή ήταν απαραίτητες δύο μετρήσεις (διαμήκης και εγκάρσια παραμόρφωση), το σύνολο των σημείων που ήταν διαθέσιμα ήταν 16, για μία επιφάνεια 120 cm<sup>2</sup> περίπου.

Εκτελέστηκαν τρεις παραλλαγές του πειράματος, με διαφορετική διάταξη των ηλεκτρομηκυνσιομέτρων η κάθε μία. Στην πρώτη διάταξη 14 διπλά μηχανοσυστήματα τοποθετήθηκαν στο δοκίμιο, 8 εκ των οποίων ήταν στον οριζόντιο άξονα συμμετρίας, έχοντας απόσταση 10 χιλιοστών μεταξύ τους. Τα υπόλοιπα 6 ήταν τοποθετημένα ανά τρία, με τη ίδια απόσταση μεταξύ τους, αντισυμμετρικά ως προς τον οριζόντιο άξονα συμμετρίας, υπό γωνία 20° αρχίζοντας από τις ακμές του δοκιμίου (Σχήμα 4.9).

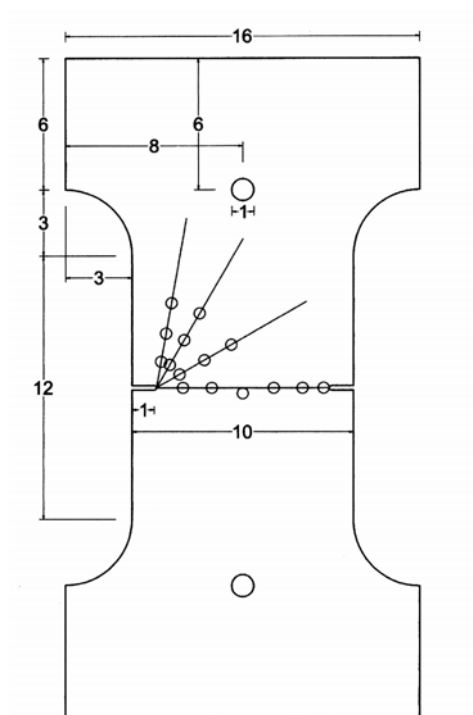


**Σχήμα 4.9:** 1<sup>η</sup> διάταξη των ηλεκτρομηκυνσιομέτρων

Με τη διάταξη αυτή, η οποία φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, καλύπτεται όλη η εγγύτερη επιφάνεια στην οποία αναμενόταν να δημιουργηθεί η ρωγμή θραύσεως, η οποία και αναμενόταν να δημιουργηθεί στις 9-10<sup>ο</sup> έχοντας παρατηρήσει τέτοιες γωνίες σε αντίστοιχα πειράματα.

Με την πραγματοποίηση του πρώτου πειράματος με αυτή τη διάταξη και έχοντας γνώση των αντίστοιχων πειραμάτων που είχαν εκτελεστεί πριν την εργασία αυτή σε παρόμοια δοκίμια, κατέστη πλέον δυνατό να προσδιοριστεί με μεγαλύτερη ακρίβεια η κατεύθυνση που θα ακολουθούσε η γραμμή θραύσης.

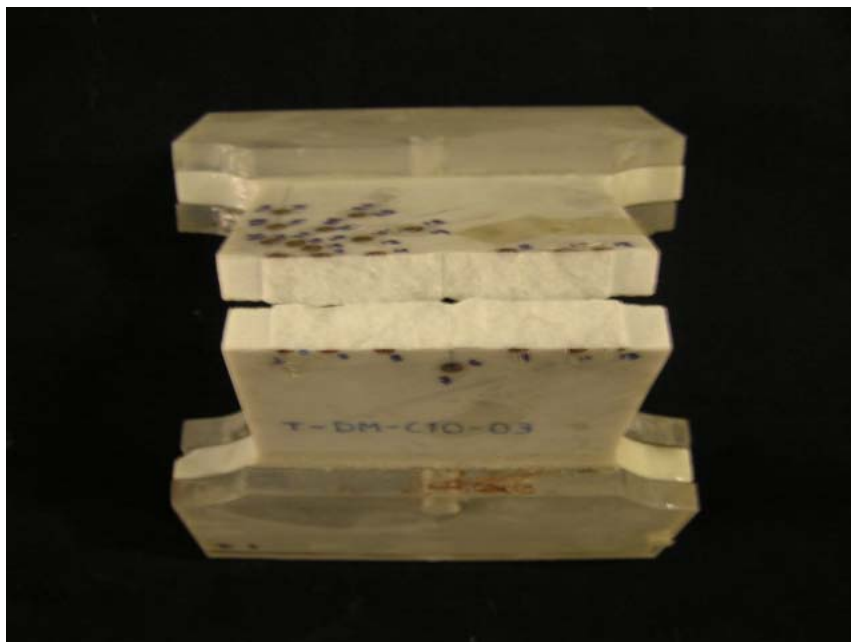
Με τη γνώση αυτή αναδιατάχθηκαν τα ηλεκτρομηκυνσιόμετρα όπως φαίνεται στο σχήμα 4.10, με χαρακτηριστικό γνώρισμα πλέον την τοποθέτηση όλων στο ίδιο μισό του δοκιμίου, αυτό στο οποίο θα δημιουργηθεί και η ρωγμή. Με αυτό τον τρόπο έγινε δυνατό να πυκνώσουν οι λαμβανόμενες μετρήσεις συμπεριλαμβάνοντας τιμές από περισσότερες ευθείες (υπό γωνίες 0°, 30°, 60° και 80° από την αιχμή της εγκοπής). Τονίζεται εδώ ότι η ευθεία των 80° προτιμήθηκε αρχικά έναντι της φυσιολογικά αναμενόμενης ευθείας των 90° λόγω επιφυλάξεων ότι η εγγύτητα της αιχμής θα προκαλούσε λανθασμένες μετρήσεις στον πρώτο μετρητή μίας τέτοιας ευθείας.



**Σχήμα 4.10:** 2<sup>η</sup> διάταξη των ηλεκτρομηκυνσιομέτρων

Όπως φαίνεται και στο σχήμα 4.10, μία ακόμα αλλαγή στη διάταξη επήλθε στις αποστάσεις των μηχανομετρών μεταξύ τους. Έτσι, η απόσταση του πρώτου κάθε ευθείας εξ αυτών ήταν 12 χιλιοστά, σε μία ακτίνα δηλαδή 12mm από το κέντρο, του δεύτερου 13 χιλιοστά από το προηγούμενο, ενώ ο τρίτος κάθε ευθείας βρίσκονταν σε ακτίνα 40 χιλιοστών από τη ρίζα της εγκοπής. Πρέπει να παρατηρηθεί εδώ, ότι στην ευθεία των  $0^\circ$  στην οποία κανονικά ο μετρητής θα βρίσκονταν στο κέντρο του δοκιμίου, λόγω τεχνικών προβλημάτων αυτός μετατοπίστηκε κατά τι κατώτερα του κέντρου αυτού. Τα υπόλοιπα μηχανομέτρα στην ευθεία αυτή βρίσκονταν συμμετρικά ως προς το πραγματικό κέντρο του δοκιμίου.

Όμως, με την ολοκλήρωση και αξιοποίηση των αποτελεσμάτων του πρώτου πειράματος με τη νέα διάταξη φάνηκε ότι οι επιφυλάξεις αυτές ήταν αβάσιμες. Έτσι, από το επόμενο κιόλας πείραμα η ευθεία των  $80^\circ$  «μετατοπίστηκε» κατά τις αναμενόμενες  $10^\circ$ . Μία ακόμα μετατόπιση ήταν αυτή του κεντρικού μετρητή σε μία θέση ακόμα πιο κάτω από το κέντρο του δοκιμίου με σκοπό την ελαχιστοποίηση των προαναφερθέντων τεχνικών προβλημάτων.



*Σχήμα 4.11: Τα στελέχη του plexiglas όπως φαίνονται κολλημένα στο ήδη θραυσμένο δοκίμιο*

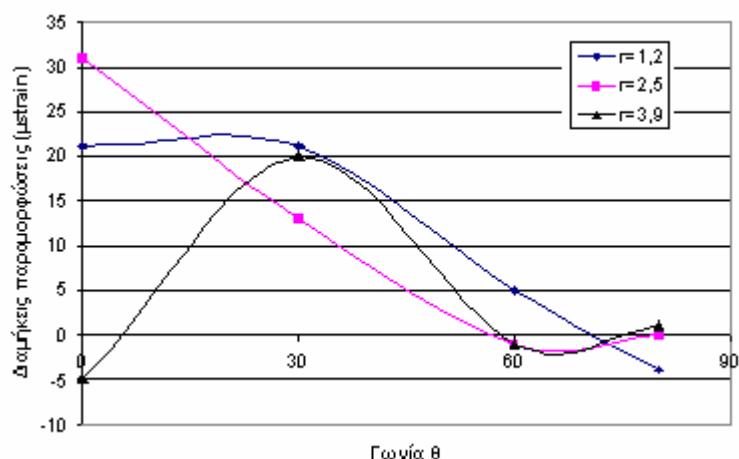
Τέλος, μία ακόμα σημαντική αλλαγή, ήταν η προσθήκη ενισχυτικών πλακών από plexiglass στις κεφαλές του δοκιμίου. Με την προσθήκη αυτή ενισχύονταν η περιοχή των κεφαλών η οποία, όπως αποδείχθηκε από τα πειράματα, ήταν δυνατό να οδηγήσει το δοκίμιο σε δύο διαφορετικές μορφές θραύσης εκ των οποίων μία μόνο ήταν αναμενόμενη.

Έτσι, επιλέχθηκε η προαναφερθείσα λύση του plexiglas, το οποίο τοποθετήθηκε υπό μορφή τεσσάρων πλακών, από δύο εκατέρωθεν κάθε κεφαλής. Το plexiglas συνδέεται στο δοκίμιο με τη βοήθεια εποξικής κόλλας. Τα κομμάτια αυτά είχαν διαστάσεις 16X8cm πριν την αφαίρεση των μη κοινών σημείων που είχαν μάρμαρο και plexiglas, τα επονομαζόμενα «αυτιά», ούτως ώστε αυτά να ακολουθούν τη μορφή της καμπύλης συναρμογής του δοκιμίου.

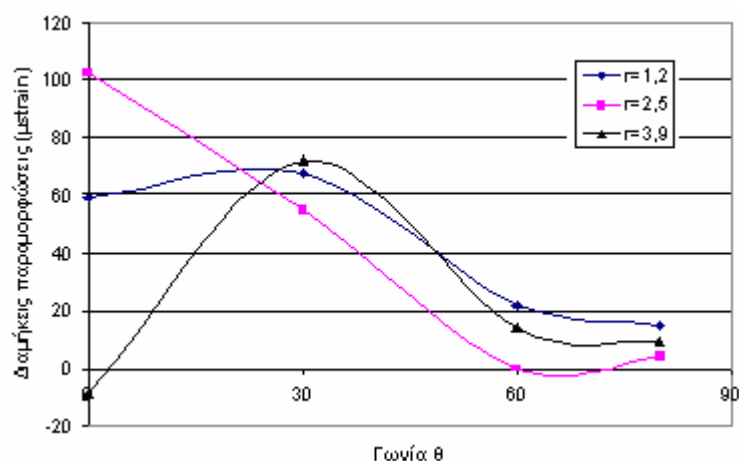
Στο plexiglas ανοίγονταν επίσης οπές ελάχιστα μικρότερης διαμέτρου από αυτές του δοκιμίου, στα ίδια βεβαίως σημεία από τα οποία διέρχονταν ο πύρος. Το γεγονός αυτό είχε το πλεονέκτημα ότι ο πύρος ερχόταν σε επαφή μόνο με το plexiglas και όχι με το δοκίμιο, μεταβιβάζοντας έτσι τις τάσεις έμμεσα σε αυτό, με τη βοήθεια της κόλλας. Έτσι, αντί η δύναμη να ασκείται συγκεντρωμένα στην οπή, με τη λύση αυτή υπήρχε πλέον μία επιφανειακά κατανεμημένη δύναμη σε όλη σχεδόν την επιφάνεια της κεφαλής, όπου αυτή ήταν σε επαφή με το τεμάχιο.



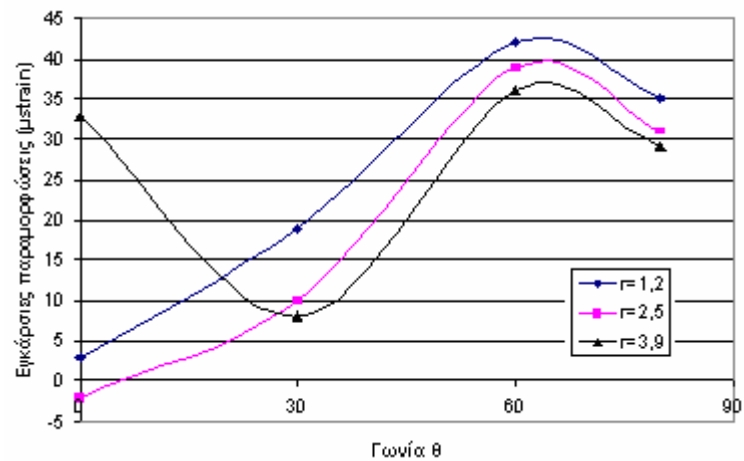
Χαρακτηριστικά πειραματικά αποτελέσματα παρουσιάζονται στο σχήματα που ακολουθούν. Στα σχήματα 4.12 και 4.13 απεικονίζεται η πολική μεταβολή της διαμήκως παραμόρφωσης και για τις τρεις γραμμές μελέτης που εξετάζονται, δηλαδή για τιμές της παραμέτρου της ακτίνας  $r/\rho$  ίσες με 1.2, 2.5, και 3.9cm. Οι τιμές αντιστοιχούν στο 50% και στο 100% του μέγιστου φορτίου. Αντίστοιχα στα σχήματα 4.14 και 4.15 απεικονίζονται οι εγκάρσιες παραμορφώσεις.



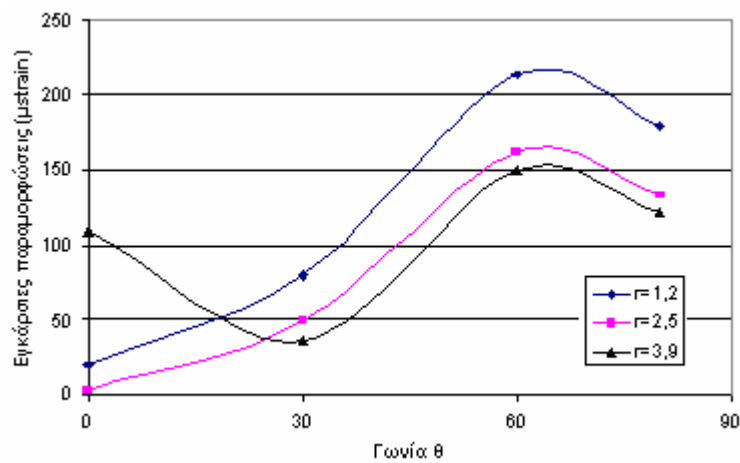
**Σχήμα 4.12:** Πολικό διάγραμμα διαμήκων παραμορφώσεων για το 50% της μέγιστης φόρτισης



**Σχήμα 4.13:** Πολικό διάγραμμα διαμήκων παραμορφώσεων για το 100% της μέγιστης φόρτισης.



Σχήμα 4.14: Πολικό διάγραμμα εγκάρσιων παραμορφώσεων για το 50% της μέγιστης φόρτισης



Σχήμα 4.15: Πολικό διάγραμμα εγκάρσιων παραμορφώσεων για το 100% της μέγιστης φόρτισης.

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5<sup>ο</sup>

### ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΕΠΙΛΥΣΗ ΤΗΣ ΔΟΚΙΜΗΣ ΑΜΕΣΟΥ ΕΦΕΛΚΥΣΜΟΥ ΜΕ ΤΗΝ ΜΕΘΟΔΟ ΤΩΝ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ

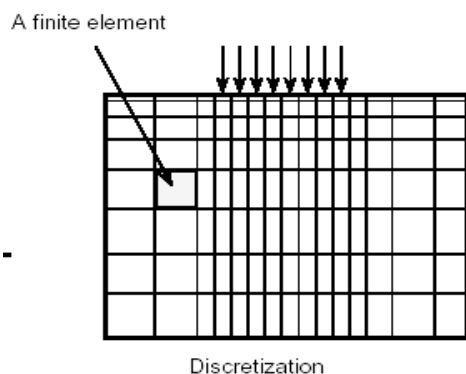
Στο κεφάλαιο αυτό περιγράφεται η αριθμητική επίλυση της δοκιμής άμεσου εφελκυσμού σε μοντέλα Διονυσιακού μαρμάρου με την Μέθοδο των Πεπερασμένων Στοιχείων (ΜΠΣ). Η προσομοίωση των δοκιμών πραγματοποιήθηκε σε δυο διαστάσεις στο λογισμικό πεπερασμένων στοιχείων *MSC.Mentat* και η επίλυση με το λογισμικό *MSC.Marc*. Η συμμετρία δεν λήφθηκε υπόψη έτσι ώστε τα τελικά μοντέλα να έχουν ακριβώς τις ίδιες διαστάσεις με αυτές των αντίστοιχων εργαστηριακών δοκιμών.

Όσον αφορά το Διονυσιακό μάρμαρο, η αριθμητική ανάλυση πραγματοποιήθηκε με δύο διαφορετικές συνθήκες αναφορικά με τις ιδιότητες του υλικού. Το μάρμαρο Διονύσου προσομοιώθηκε σαν ελαστικό ισότροπο υλικό, αλλά και σαν ελαστικό εγκαρσίως ισότροπο υλικό. Επίσης, όσον αφορά την γεωμετρία μοντελοποιήθηκαν δοκίμια με ημικυκλική εγκοπή ακτίνας 1 και 2cm και δοκίμια με εγκοπή τύπου-U μήκους 1cm και πλάτους 0,3cm.

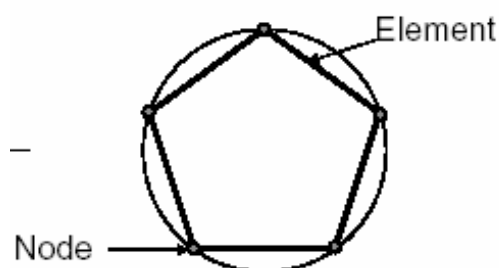
#### 5.1 Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ

Με τη ΜΠΣ, υπολογίζονται τα άγνωστα μεγέθη στους κόμβους, οι οποίοι δημιουργούνται από τη διαίρεση του πεδίου σε στοιχεία. Στη συνέχεια με την θεώρηση κατάλληλων συναρτήσεων, οι οποίες συνδέουν την κατανομή των μεγεθών στα εσωτερικά σημεία κάθε στοιχείου, είναι δυνατόν να υπολογιστεί η τιμή των μεγεθών αυτών σε κάθε σημείο του πεδίου με τους κόμβους του στοιχείου αυτού. Τα βήματα που ακολουθούνται κατά την εφαρμογή της ΜΠΣ είναι τα εξής (Αγιουτάντης, 2002):

- Διακριτοποίηση (discretization) του μέσου ή διαίρεση του μέσου σε στοιχεία ή τμήματα (elements) με τη βοήθεια ιδεατών γραμμών ή επιφανειών (Σχήμα 5.1). Τα στοιχεία αυτά αποτελούνται από δύο ή περισσότερους κόμβους, οι οποίοι συνδέονται με ευθύγραμμο ή καμπύλο τμήματα (Σχήμα 5.2). Οι κορυφές των στοιχείων ορίζουν τους κόμβους (nodes) του πλέγματος ή καννάβου διακριτοποίησης του προβλήματος (grid ή mesh).



**Σχήμα 5.1.:** Διακριτοποίηση του μέσου σε στοιχεία (Καρανάχου, 1985)

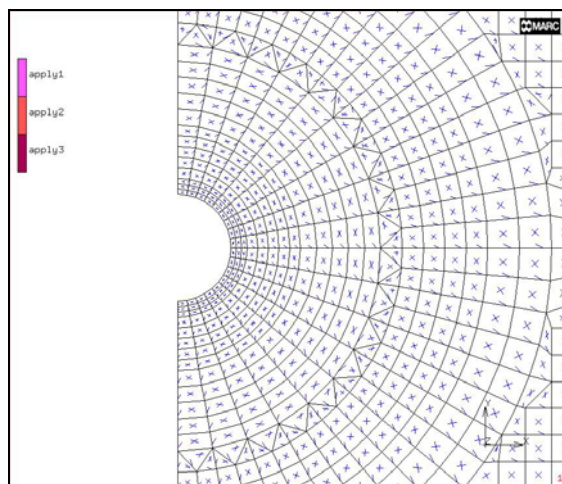


**Σχήμα 5.2:** Στοιχείο και οι κόμβοι από τους οποίους αποτελείται (Καρανάχου, 1985)

Ιδιαίτερη προσοχή πρέπει να δοθεί στη διαδικασία της διακριτοποίησης ώστε το μοντέλο που θα δημιουργηθεί να προσφέρει όσο το δυνατόν καλύτερη ακρίβεια, στο μικρότερο δυνατό χρόνο. Πιο συγκεκριμένα, οικονομία πεπερασμένων στοιχείων, άρα και του χρόνου ανάλυσης, μπορεί να επιτευχθεί από τη χρήση απλοποιημένης γεωμετρίας και την παρουσία συμμετρίας σ' ένα μοντέλο.

Η διαίρεση του πεδίου γίνεται κατά τέτοιο τρόπο, ώστε το μέγεθος των στοιχείων να είναι μικρό στα σημεία όπου απαιτείται μεγάλη ακρίβεια στους υπολογισμούς, ή εκεί που αναμένεται έντονη μεταβολή του ζητούμενου μεγέθους, ενώ το μέγεθος των στοιχείων μπορεί να είναι μεγαλύτερο στις υπόλοιπες περιοχές του πεδίου (Σχήμα 5.3).

- Συνοριακές συνθήκες (boundary conditions). Η εισαγωγή συνοριακών συνθηκών είναι απαραίτητη για την επίλυση του προβλήματος και συνήθως εκφράζεται με τις συνθήκες ισορροπίας του πεδίου (π.χ. αγκύρωση των κατώτερων ή/και πλευρικών κόμβων, κλπ). Η φόρτιση του υλικού αποτελεί



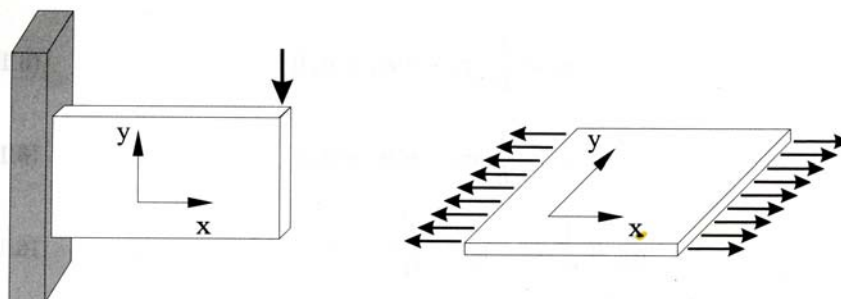
**Σχήμα 5.3.:** Μεταβαλλόμενη διακριτοποίηση του μέσου σε στοιχεία

επίσης μία συνοριακή συνθήκη, καθώς, σε αντίθετη περίπτωση, η υπολογιζόμενη παραμόρφωση είναι μηδενική. Στην περίπτωση που φορτιστεί ένα σώμα και όλοι οι κόμβοι του είναι ελεύθεροι να μετακινηθούν, τότε δεν υφίσταται παραμόρφωση, αλλά απλή μετακίνηση (ή στροφή). Στην περίπτωση αυτή δεν είναι δυνατή η επίλυση του προβλήματος με την προαναφερόμενη μέθοδο, διότι το φαινόμενο δεν υπακούει στην ίδια καταστατική εξίσωση.

- Ιδιότητες υλικών (material properties). Κατά την εφαρμογή των ιδιοτήτων του υλικού, επιλέγονται οι τιμές των σταθερών του μοντέλου με το οποίο προσομοιώνεται το υλικό. Το απλούστερο μοντέλο που μπορεί να χρησιμοποιηθεί είναι το γραμμικά ελαστικό μοντέλο (παρόλο που το μοντέλο αυτό δεν θεωρείται το πλέον κατάλληλο για την περιγραφή της συμπεριφοράς πετρωμάτων και εδαφικών υλικών) σε μία, δύο ή περισσότερες διαστάσεις.
- Γεωμετρικές ιδιότητες (geometric properties). Στις γεωμετρικές ιδιότητες επιλέγεται αν το μοντέλο είναι μίας, δύο ή τριών διαστάσεων. Στην περίπτωση της επίλυσης δύο διαστάσεων, επιλέγεται αν η επίλυση του μοντέλου θα πραγματοποιηθεί με θεώρηση επίπεδης τάσης (plane stress) ή με θεώρηση επίπεδης παραμόρφωσης (plane strain).

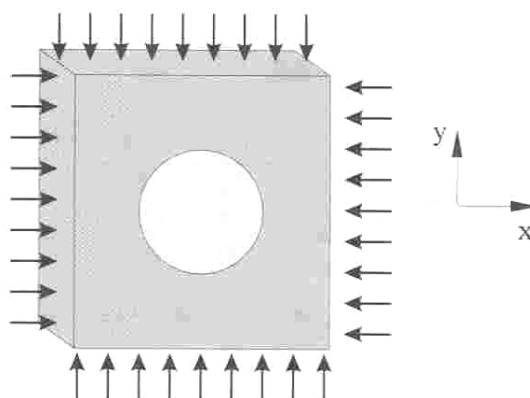
Σύμφωνα με την θεώρηση επίπεδης τάσης, όταν η τρίτη διάσταση ( $z$ ) ενός σώματος είναι πολύ μικρή σε σχέση με τις άλλες δύο και τα φορτία που δέχεται το σώμα ανήκουν στο επίπεδο των δύο σημαντικών διαστάσεων (επίπεδο  $x, y$ ), μπορεί

να θεωρηθεί ότι οι συνιστώσες τάσης κατά τον τρίτο άξονα είναι πολύ μικρές σε σύγκριση με τις συνιστώσες κατά το επίπεδο φόρτισης (Σχήμα 5.4) (Αγιουτάντης, 2002).



**Σχήμα 5.4:** Παραδοχή επίπεδης τάσης (Αγιουτάντης, 2002)

Κατά την θεώρηση επίπεδης παραμόρφωσης (Σχήμα 5.5), η συνιστώσα του διανύσματος μετατοπίσεων ( $u$ ) είναι μηδενική κατά την τρίτη διάσταση ( $u_z=0$  και επομένως  $\varepsilon_z=0$ ), όταν η τρίτη διάσταση ενός σώματος ( $z$ ) δεν είναι μικρή, σε σύγκριση με τις άλλες δύο ( $x, y$ ). Επίσης μπορεί να θεωρηθεί, ότι τα διανύσματα μετατόπισης στο επίπεδο  $x, y$  είναι ανεξάρτητα από την τρίτη διάσταση, δηλαδή  $u_x=f(x, y)$  και  $u_y=f(x, y)$  (Αγιουτάντης, 2002).



**Σχήμα 5.5:** Παραδοχή επίπεδης παραμόρφωσης (Αγιουτάντης, 2002)

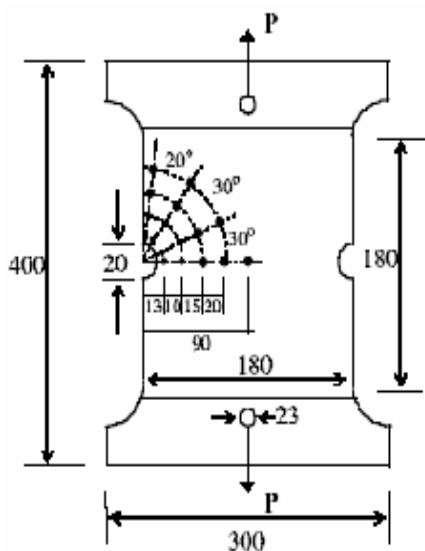
## 5.2 Η ΔΟΚΙΜΗ ΑΜΕΣΟΥ ΕΦΕΛΚΥΣΜΟΥ ΣΕ ΔΟΚΙΜΙΑ ΔΙΟΝΥΣΙΑΚΟΥ ΜΑΡΜΑΡΟΥ ΜΕ ΗΜΙΚΥΚΛΙΚΗ ΕΓΚΟΠΗ: ΙΣΟΤΡΟΠΟ ΜΟΝΤΕΛΟ

Η προσομοίωση της δοκιμής άμεσου εφελκυσμού σε δοκίμια Διονυσιακού μαρμάρου με τη Μέθοδο των Πεπερασμένων Στοιχείων, πραγματοποιήθηκε αρχικά με τη θεώρηση του μαρμάρου σαν ισότροπο ελαστικό υλικό και μοντελοποιήθηκαν δυο διαφορετικές γεωμετρίες ημικυκλικής εγκοπής ακτίνας 1 και 2cm.

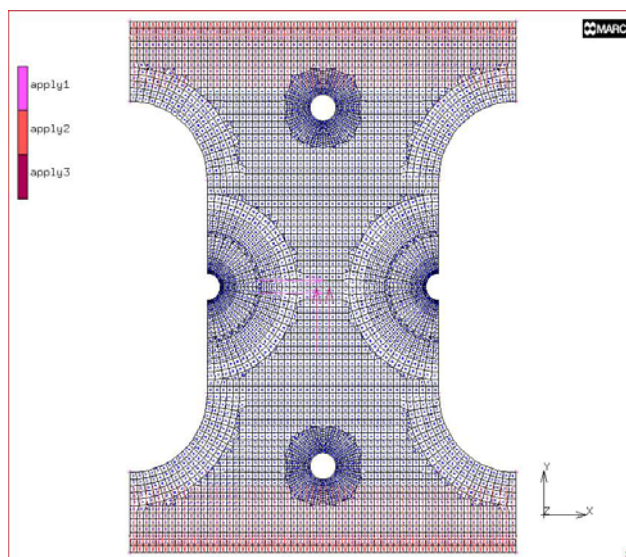
### 5.2.1 Ισότροπο Μοντέλο Ημικυκλικής Εγκοπής Ακτίνας 1cm

#### Γεωμετρία και Διακριτοποίηση του Μοντέλου

Όπως έχει ήδη αναφερθεί η γεωμετρία του μοντέλου συμπίπτει με τις πραγματικές διαστάσεις της πειραματικής διάταξης, καθώς δεν έχει χρησιμοποιηθεί συμμετρία. Οι διαστάσεις του μοντέλου είναι οι εξής (Σχήμα 5.6):



Σχήμα 5.6: Γεωμετρία του μοντέλου

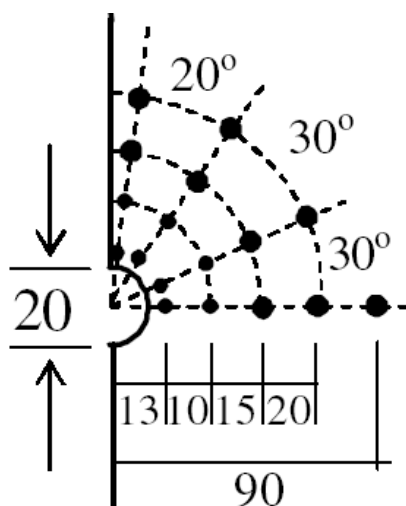


Σχήμα 5.7: Διακριτοποίηση του μοντέλου

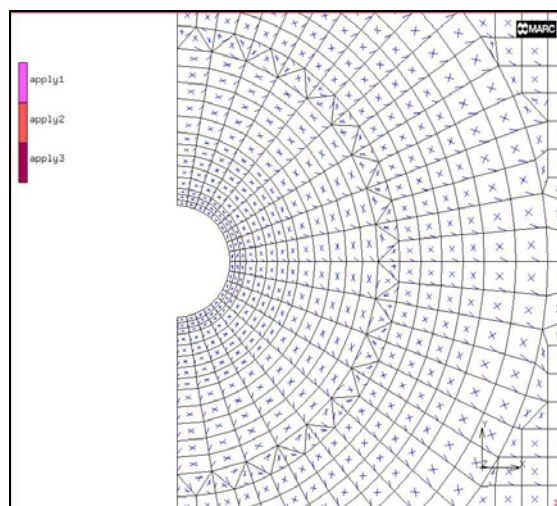
- Πλάτος δοκιμίου: 30 cm
- Ύψος δοκιμίου: 40 cm
- Πλάτος κεντρικού τμήματος: 18 cm
- Ύψος κεντρικού τμήματος: 18 cm

- Ακτίνα εγκοπής: 1 cm

Για την διακριτοποίηση του μοντέλου (Σχήμα 5.7) χρησιμοποιήθηκαν 4504 τετράπλευρα και τριγωνικά στοιχεία επίπεδης παραμόρφωσης (*plain strain elements*) και 4619 κόμβοι. Οι θέσεις των κόμβων είναι καθορισμένες με τέτοιο τρόπο ώστε να συμπίπτουν με τις θέσεις των μηχανομετρών στα δείγματα, με σκοπό την ακριβέστερη εξαγωγή αποτελεσμάτων για τα συγκεκριμένα σημεία. Πιο συγκεκριμένα, τοποθετήθηκαν κόμβοι σε ακτίνες 1,3cm 2,3cm 3,8cm 5,8cm από την κορυφή της εγκοπής, 0° 30° 60° 80° σε πολικές συντεταγμένες και ακριβώς στο κέντρο του δοκιμίου, όπως φαίνεται στο σχήμα (5.8-5.9).



**Σχήμα 5.8:** Σχηματική αναπαράσταση της εγκοπής όπου διακρίνονται οι θέσεις των μηχανομετρών για την καταγραφή των παραμορφώσεων



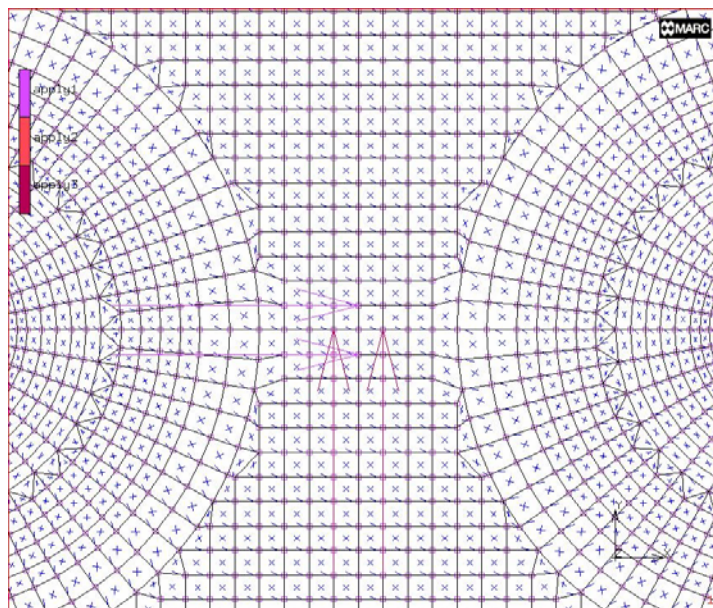
**Σχήμα 5.9:** Διακριτοποίηση εγκοπής

### Συνοριακές Συνθήκες

Στα μοντέλα εφαρμόστηκαν δύο συνοριακές συνθήκες, με τις οποίες εφαρμόστηκε κύλιση ( $d_x=0$ ,  $d_y=0$ ) στον άξονα  $XX'$  και  $YY'$  γύρω από τον κεντρικό κόμβο του μοντέλου, προκειμένου να εξασφαλιστεί ότι καμία περιστροφή δεν θα εμφανιστεί κατά τη διάρκεια της επίλυσης (Σχήμα 5.10). Επίσης στα δοκίμια εφαρμόστηκε μέγιστο εφελκυστικό φορτίο (edge load) 7kN (3,5kN σε κάθε οριζόντια πλευρά του δοκιμίου) που εφαρμόστηκε γραμμικά σε δέκα βήματα.



Λόγω της συμμετρίας του μοντέλου δεν απαιτήθηκε καμία άλλη συνοριακή συνθήκη.



Σχήμα 5.10: Κύλιση ( $d_x=0$ ,  $d_y=0$ ) γύρω από το κέντρο του δοκιμίου

### Ιδιότητες Υλικού

Το μάρμαρο προσομοιώθηκε σαν ελαστικό ισότροπο υλικό με ελαστικές σταθερές  $E=85,5$  GPa και  $\nu=0,26$ .

### Γεωμετρικές Ιδιότητες

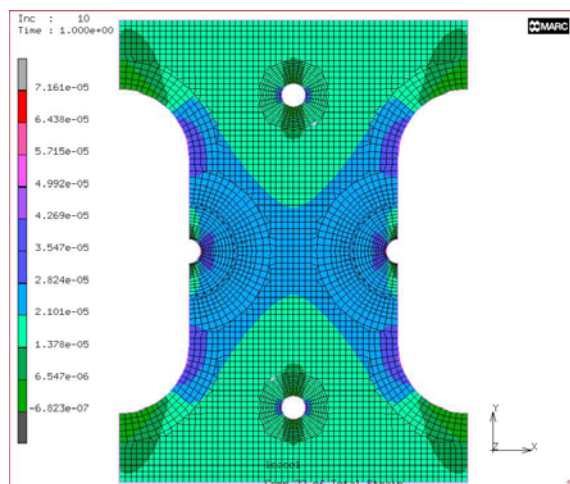
Η επίλυση του μοντέλου έγινε με θεώρηση επίπεδης παραμόρφωσης (plane strain idealization).

### Αποτελέσματα Αριθμητικής Επίλυσης

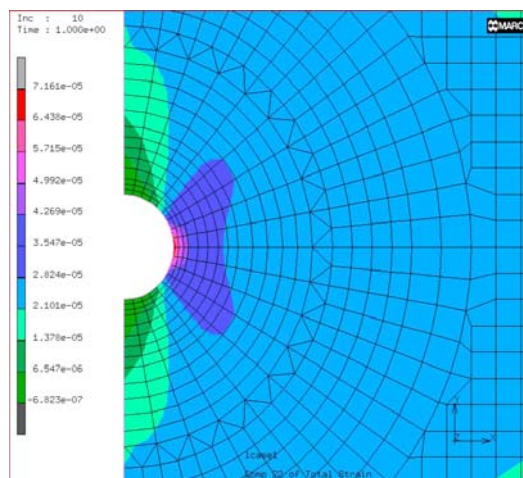
Σε αυτή την ενότητα παρουσιάζονται κάποια από τα αποτελέσματα της αριθμητικής επίλυσης, σχετικά με τις συνιστώσες των παραμορφώσεων. Οι γραμμές για τις οποίες έχουν εξαχθεί τα αντίστοιχα διαγράμματα είναι ίδιες με αυτές που σχηματίζουν τα μηχανοσκόπια.

Στα σχήματα 5.11 και 5.12 παρουσιάζονται αποτελέσματα που προκύπτουν από την αριθμητική επίλυση. Στο σχήμα 5.11 διακρίνεται η κατανομή της

κατακόρυφης ανηγμένης παραμόρφωσης  $\epsilon_{22}$  στο ισότροπο δοκίμιο, ενώ στο σχήμα 5.12 παρουσιάζεται η ίδια κατανομή στην περιοχή της εγκοπής.

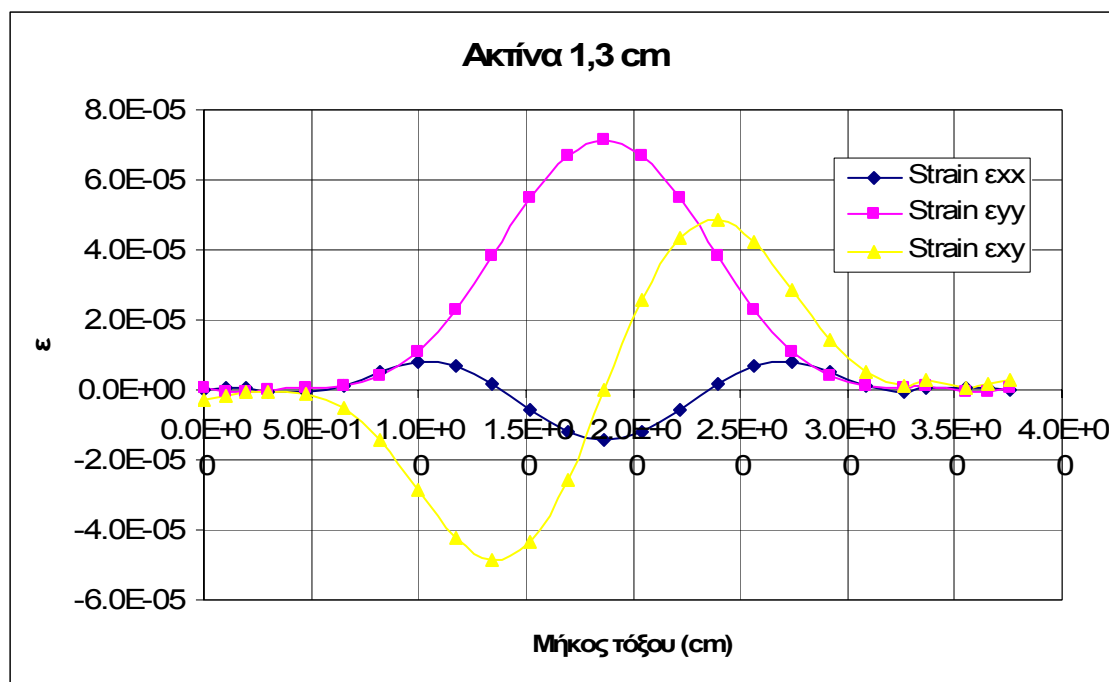


**Σχήμα 5.11:** Κατανομή της κατακόρυφης ανηγμένης παραμόρφωσης  $\epsilon_{22}$ , για ισότροπο δοκίμιο.

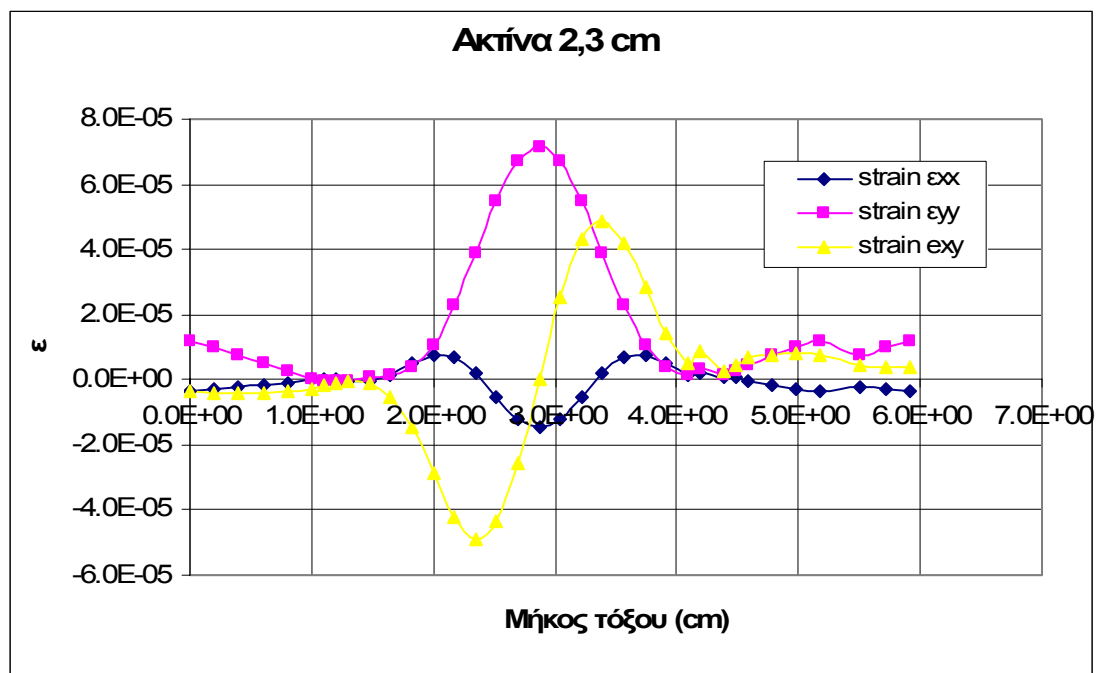


**Σχήμα 5.12:** Κατανομή της κατακόρυφης ανηγμένης παραμόρφωσης  $\epsilon_{22}$ , για ισότροπο δοκίμιο κοντά στην εγκοπή.

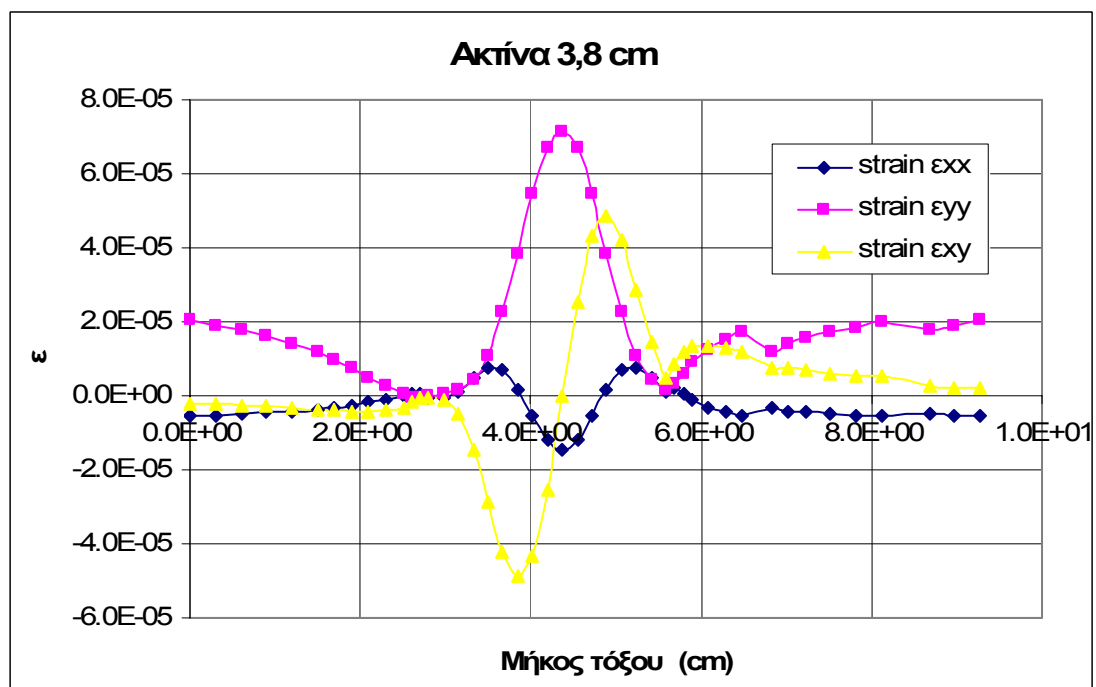
Έχουν επιλεγθεί τέσσερις ημικυκλικές γραμμές ακτίνας από το κέντρο της εγκοπής 1,3cm 2,3cm 3,8cm 5,8cm. Οι τιμές των παραμορφώσεων στα διαγράμματα έχουν φορά από πάνω προς τα κάτω (δεξιόστροφη).



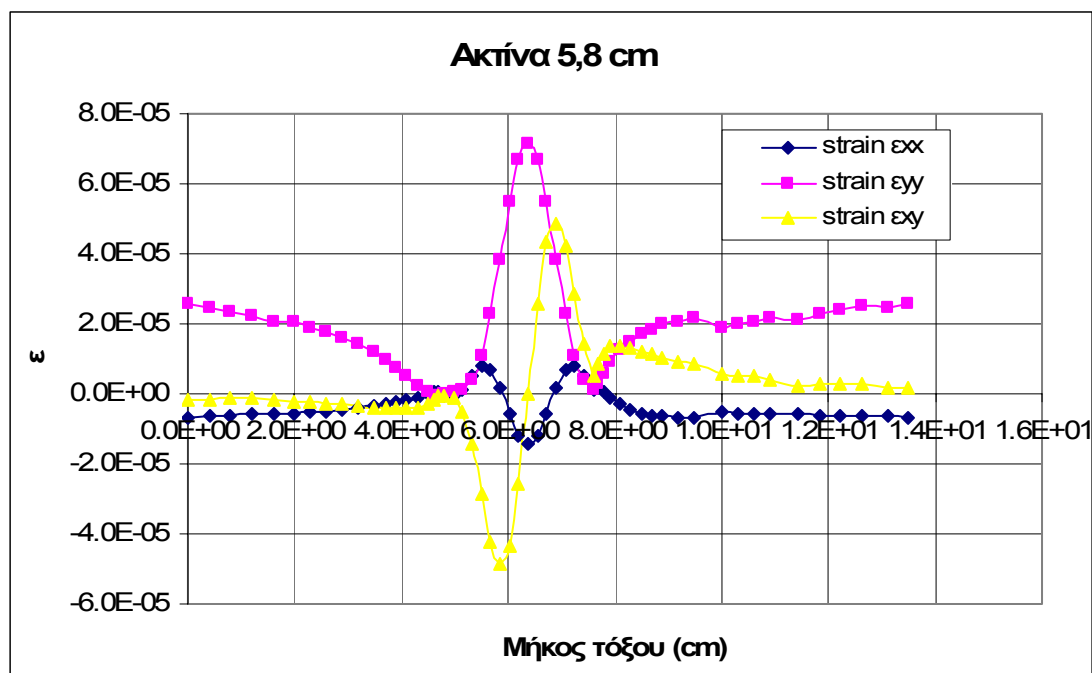
**Σχήμα 5.13:** Διάγραμμα της μεταβολής των παραμορφώσεων συναρτήσει του μήκους τόξου ακτίνας 1,3cm



**Σχήμα 5.14:** Διάγραμμα της μεταβολής των παραμορφώσεων συναρτήσει του μήκους τόξου ακτίνας 2,3cm



**Σχήμα 5.15:** Διάγραμμα της μεταβολής των παραμορφώσεων συναρτήσει του μήκους τόξου ακτίνας 3,8cm



Σχήμα 5.16: Διάγραμμα της μεταβολής των παραμορφώσεων συναρτήσει του μήκους τόξου ακτίνας 5,8cm

### 5.2.2 Ισότροπο Μοντέλο Ημικυκλικής Εγκοπής Ακτίνας 2cm

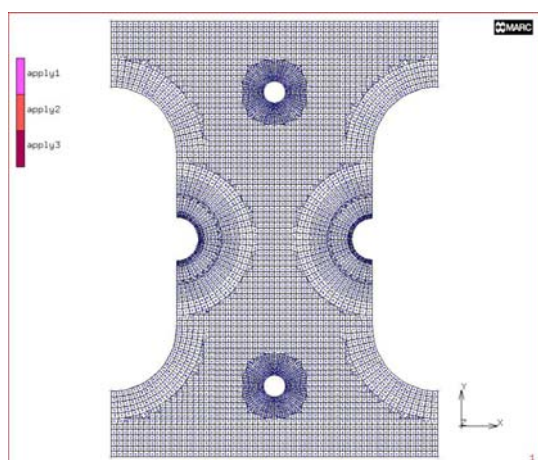
Ο τρόπος σχεδιασμού και επίλυσης του μοντέλου είναι σε γενικές γραμμές όμοιος με τον τρόπο που εφαρμόστηκε για την αριθμητική επίλυση του μοντέλου της προηγούμενης ενότητας. Μικρές διαφορές εντοπίζονται μόνο στην διακριτοποίηση στο σημείο γύρω από την εγκοπή του δοκιμίου.

#### Γεωμετρία και Διακριτοποίηση του Μοντέλου

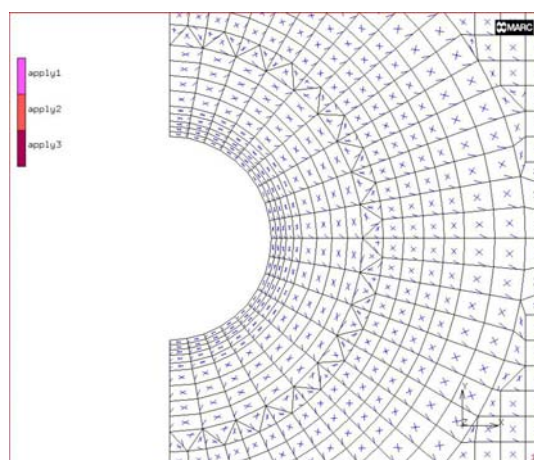
Όπως και στο προηγούμενο μοντέλο η γεωμετρία του μοντέλου συμπίπτει με αυτή των πραγματικών δοκιμίων μαρμάρου που χρησιμοποιήθηκαν στην πειραματική μελέτη, με την διαφορά ότι η εγκοπές έχουν ακτίνα 2cm (Σχήμα 5.17)

Το μοντέλο αποτελείται από 4360 τετραπλευρικά και τριγωνικά στοιχεία επίπεδης παραμόρφωσης και από 4475 κόμβους. Η διακριτοποίηση και σε αυτήν την περίπτωση έγινε κατά τέτοιο τρόπο ώστε στις πραγματικές θέσεις των μηχανοσυστημάτων στα πραγματικά δοκίμια να αντιστοιχούν κόμβοι, με την ακριβώς

ίδια γεωμετρία τοποθέτησης των ροζετών όπως στο μοντέλο εγκοπής ακτίνας 1cm με την μόνη διαφορά ότι δεν υπάρχει η πρώτη ημικυκλική γραμμή από ροζετών (1,3cm).



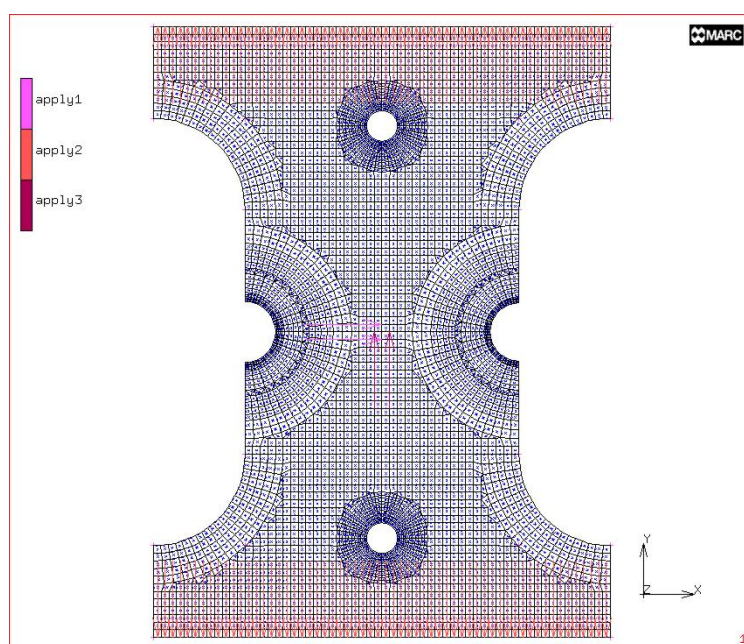
Σχήμα 5.17: Διακριτοποίηση του μοντέλου



Σχήμα 5.18: Λεπτομέρεια της διακριτοποίησης στην περιοχή γύρω από την εγκοπή του δοκιμίου

### Συνοριακές Συνθήκες

Οι συνοριακές συνθήκες που απαιτούνται για την επίλυση του μοντέλου είναι όμοιες με αυτές που χρησιμοποιήθηκαν στην ενότητα (5.2.1) για την προσομοίωση του μοντέλου και διαφοροποιείται μόνο το μέγεθος του φορτίου που σε αυτή την περίπτωση είναι 4,4 kN (2,2kN σε κάθε οριζόντια πλευρά του δοκιμίου) και εφαρμόστηκε σε δέκα βήματα (Σχήμα 5.19).



Σχήμα 5.19: Συνοριακές συνθήκες κύλισης και φορτίο σε κάθε πλευρά του δοκιμίου



### Ιδιότητες Υλικού

Το μάρμαρο προσομοιώθηκε σαν ελαστικό ισότροπο υλικό με ελαστικές σταθερές  $E=85,5$  GPa και  $\nu=0,26$ .

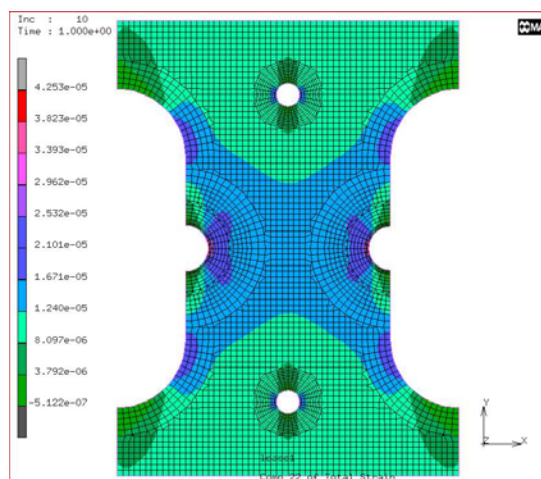
### Γεωμετρικές Ιδιότητες

Η επίλυση του μοντέλου έγινε με θεώρηση επίπεδης παραμόρφωσης.

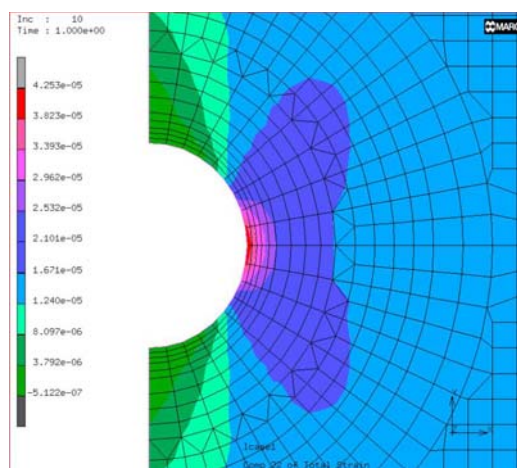
### Αποτελέσματα Αριθμητικής Επίλυσης

Ακολουθούν αποτελέσματα της αριθμητικής επίλυσης για τις παραμορφώσεις συναρτήσει του μήκους του τόξου που σχηματίζουν τα μηκυνσιόμετρα των πραγματικών μοντέλων. Τα αποτελέσματα αφορούν τις ίδιες γραμμές με αυτές του σχήματος (5.8) με διαφορά ότι δεν υπάρχει η μικρότερη ημικυκλική γραμμή ακτίνας 1,3cm.

Στα σχήματα 5.20 και 5.21 παρουσιάζονται αποτελέσματα που προκύπτουν από την αριθμητική επίλυση. Στο σχήμα 5.20 διακρίνεται η κατανομή της κατακόρυφης ανηγμένης παραμόρφωσης  $\epsilon_{22}$  στο ισότροπο δοκίμιο, ενώ στο σχήμα 5.21 παρουσιάζεται η ίδια κατανομή στην περιοχή της εγκοπής.

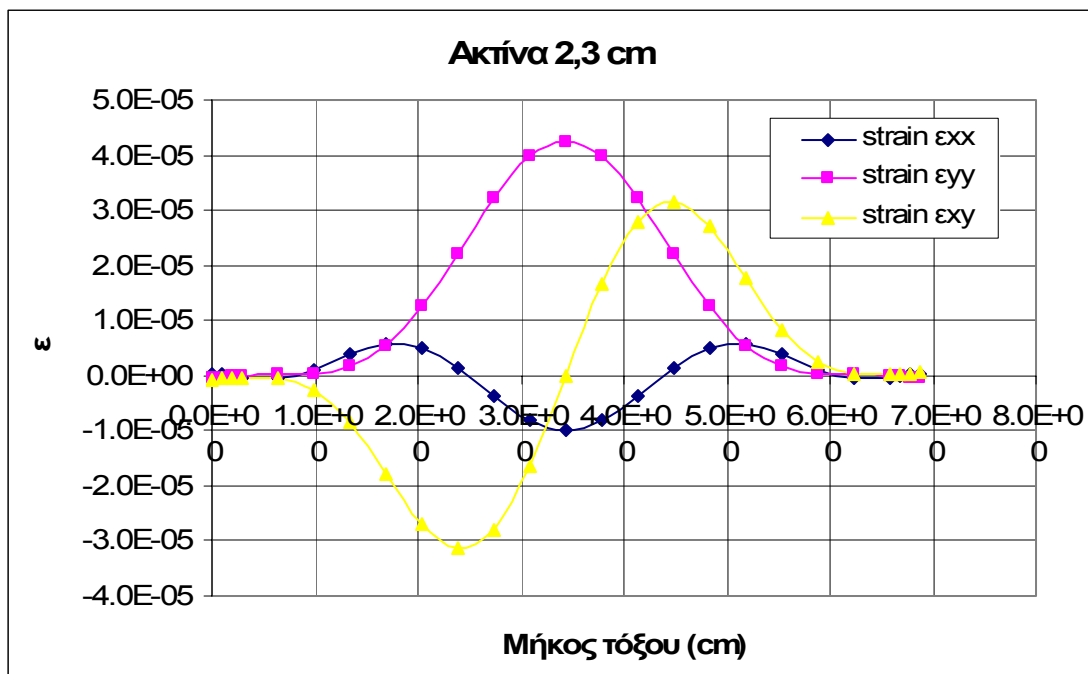


**Σχήμα 5.20:** Κατανομή της κατακόρυφης ανηγμένης παραμόρφωσης  $\epsilon_{22}$ , για ισότροπο δοκίμιο.

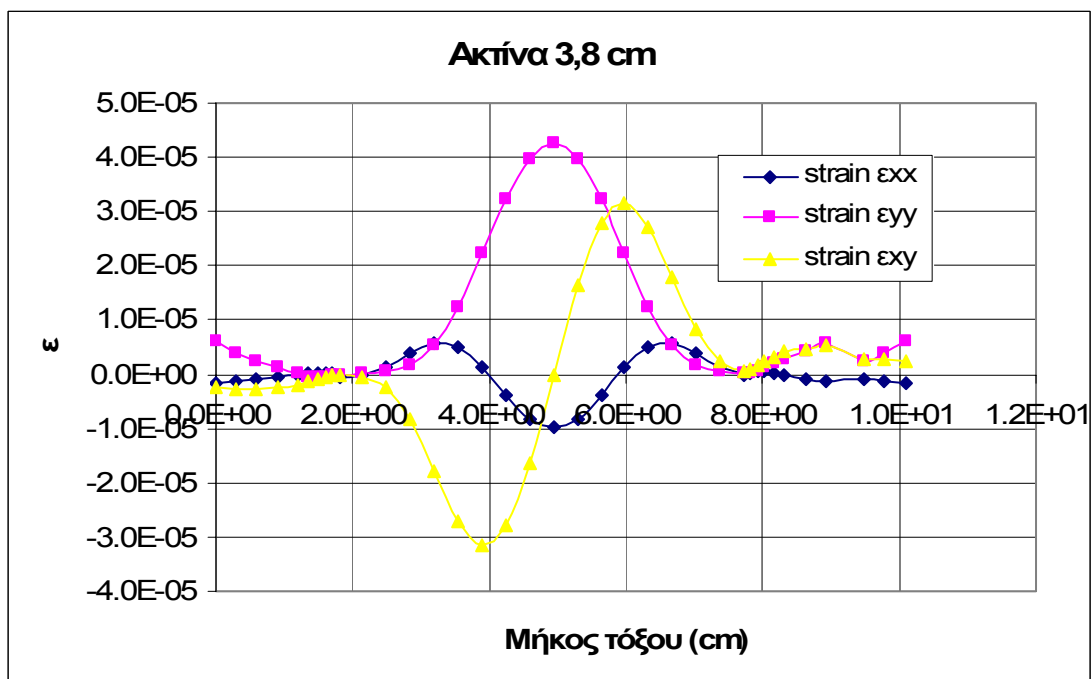


**Σχήμα 5.21:** Κατανομή της κατακόρυφης ανηγμένης παραμόρφωσης  $\epsilon_{22}$ , για ισότροπο δοκίμιο κοντά στην εγκοπή.

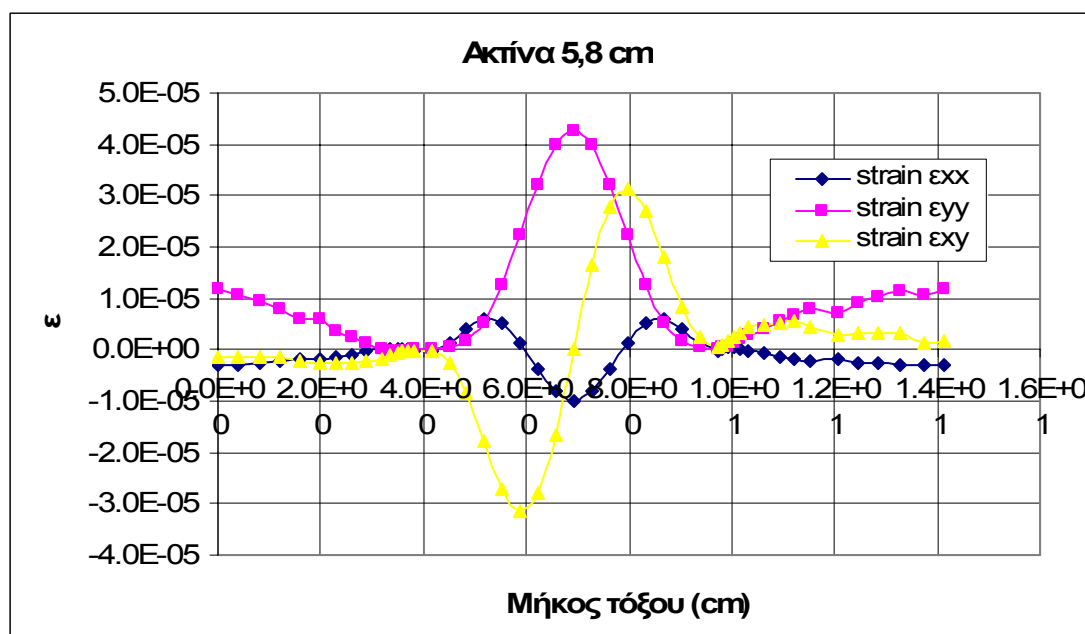
Έχουν επιλεγθεί τρεις ημικυκλικές γραμμές ακτίνας από το κέντρο της εγκοπής 2,3cm 3,8cm 5,8cm. Οι τιμές των παραμορφώσεων στα διαγράμματα έχουν φορά από πάνω προς τα κάτω (δεξιόστροφη).



Σχήμα 5.22: Διάγραμμα της μεταβολής των παραμορφώσεων συναρτήσει του μήκους τόξου ακτίνας 2,3cm



Σχήμα 5.23: Διάγραμμα της μεταβολής των παραμορφώσεων συναρτήσει του μήκους τόξου ακτίνας 3,8cm



Σχήμα 5.24: Διάγραμμα της μεταβολής των παραμορφώσεων συναρτήσει του μήκους τρύπου ακτίνας 5,8cm

### 5.3 Η ΔΟΚΙΜΗ ΑΜΕΣΟΥ ΕΦΕΛΚΥΣΜΟΥ ΣΕ ΔΟΚΙΜΙΑ ΔΙΟΝΥΣΙΑΚΟΥ ΜΑΡΜΑΡΟΥ ΜΕ ΗΜΙΚΥΚΛΙΚΗ ΕΓΚΟΠΗ: ΟΡΘΟΤΡΟΠΟ ΜΟΝΤΕΛΟ

Όπως και για το ισότροπο μοντέλο η προσομοίωση της δοκιμής άμεσου εφελκυσμού σε δοκίμια Διονυσιακού μαρμάρου με τη ΜΠΣ, πραγματοποιήθηκε με τη θεώρηση του μαρμάρου σαν ορθότροπο ελαστικό υλικό και μοντελοποιήθηκαν δυο διαφορετικές γεωμετρίες ημικυκλικής εγκοπής ακτίνας 1 και 2cm.

#### 5.3.1 Ορθότροπο Μοντέλο Ημικυκλικής Εγκοπής Ακτίνας 1cm

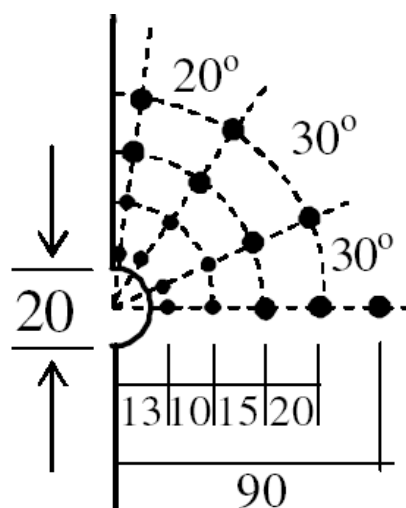
##### Γεωμετρία και Διακριτοποίηση του Μοντέλου

Όπως και στο ισότροπο μοντέλο η γεωμετρία του μοντέλου συμπίπτει με αυτή των πραγματικών δοκιμών μαρμάρου που χρησιμοποιήθηκαν στην πειραματική μελέτη.



Η διακριτοποίηση του μοντέλου είναι όμοια με αυτή του ισότροπου ελαστικού μοντέλου εγκοπής 1cm, έτσι ώστε κατά την σύγκριση των αποτελεσμάτων να μην παρουσιάζεται απόκλιση λόγω του παράγοντα της διακριτοποίησης. Το μοντέλο αποτελείται 4504 τετράπλευρα και τριγωνικά στοιχεία επίπεδης παραμόρφωσης (*plain strain elements*) και 4619 κόμβοι. Οι θέσεις των κόμβων είναι και εδώ καθορισμένες με τέτοιο τρόπο ώστε να συμπίπτουν με τις θέσεις των μηχανομετρών στα δείγματα, με σκοπό την ακριβέστερη εξαγωγή αποτελεσμάτων για τα συγκεκριμένα σημεία.

Πιο συγκεκριμένα, τοποθετήθηκαν κόμβοι σε ακτίνες 1,3cm 2,3cm 3,8cm 5,8cm από την κορυφή της εγκοπής, 0° 30° 60° 80° σε πολικές συντεταγμένες και ακριβώς στο κέντρο του δοκιμίου, όπως φαίνεται στο σχήμα 5.25.



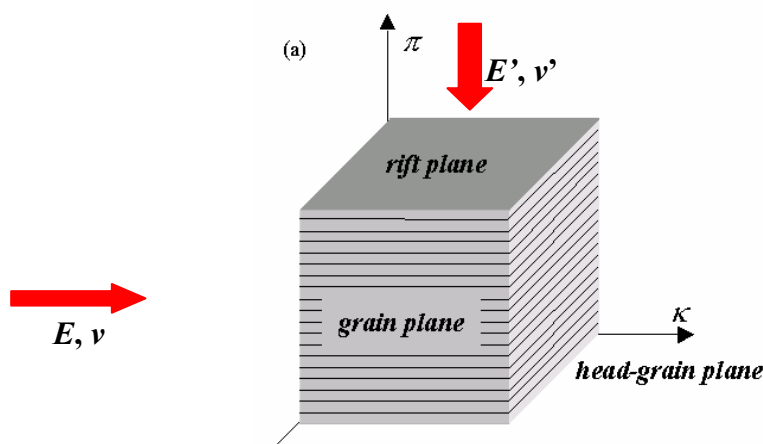
**Σχήμα 5.25:** Σχηματική αναπαράσταση της εγκοπής όπου διακρίνονται οι θέσεις των μηχανομετρών για την καταγραφή των παραμορφώσεων

### Συνοριακές Συνθήκες

Στο μοντέλο εφαρμόστηκαν οι ίδιες συνοριακές συνθήκες, δηλαδή κύλιση ( $d_x=0$ ,  $d_y=0$ ) στον άξονα  $XX'$  και  $YY'$  γύρω από τον κεντρικό κόμβο του μοντέλου, προκειμένου να εξασφαλιστεί ότι καμία περιστροφή δεν θα εμφανιστεί κατά τη διάρκεια της επίλυσης. Επίσης τα δοκίμια εφαρμόστηκε μέγιστο εφελκυστικό φορτίο 7kN (3,5kN σε κάθε οριζόντια πλευρά του δοκιμίου) που εφαρμόστηκε σε δέκα βήματα.

### Ιδιότητες Υλικού

Το μάρμαρο προσομοιώθηκε σαν γραμμικά ελαστικό εγκάρσιως ισότροπο (ή ορθότροπο) υλικό (Σχήμα 5.26) με τις σταθερές που αναφέρθηκαν στον πίνακα (3.1) του 3<sup>ου</sup> κεφαλαίου.



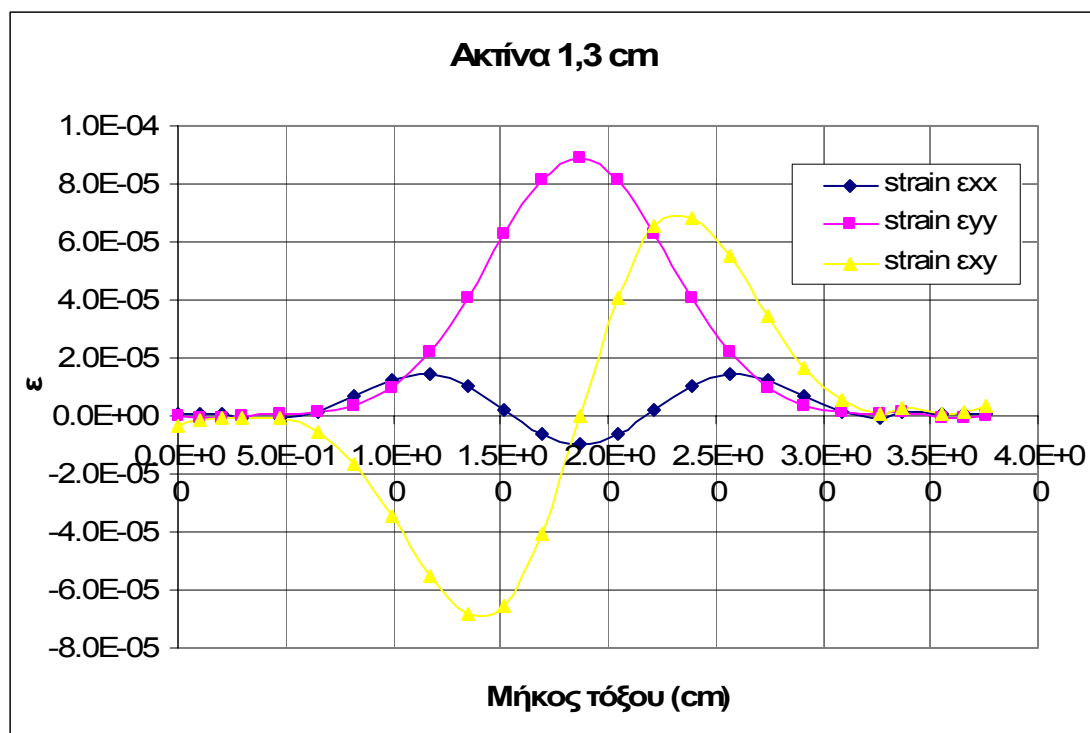
**Σχήμα 5.26:** Σχηματική παράσταση στην οποία διακρίνονται οι δύο διευθύνσεις ανισοτροπίας (ασθενής και ισχυρή διεύθυνση)

### Γεωμετρικές Ιδιότητες

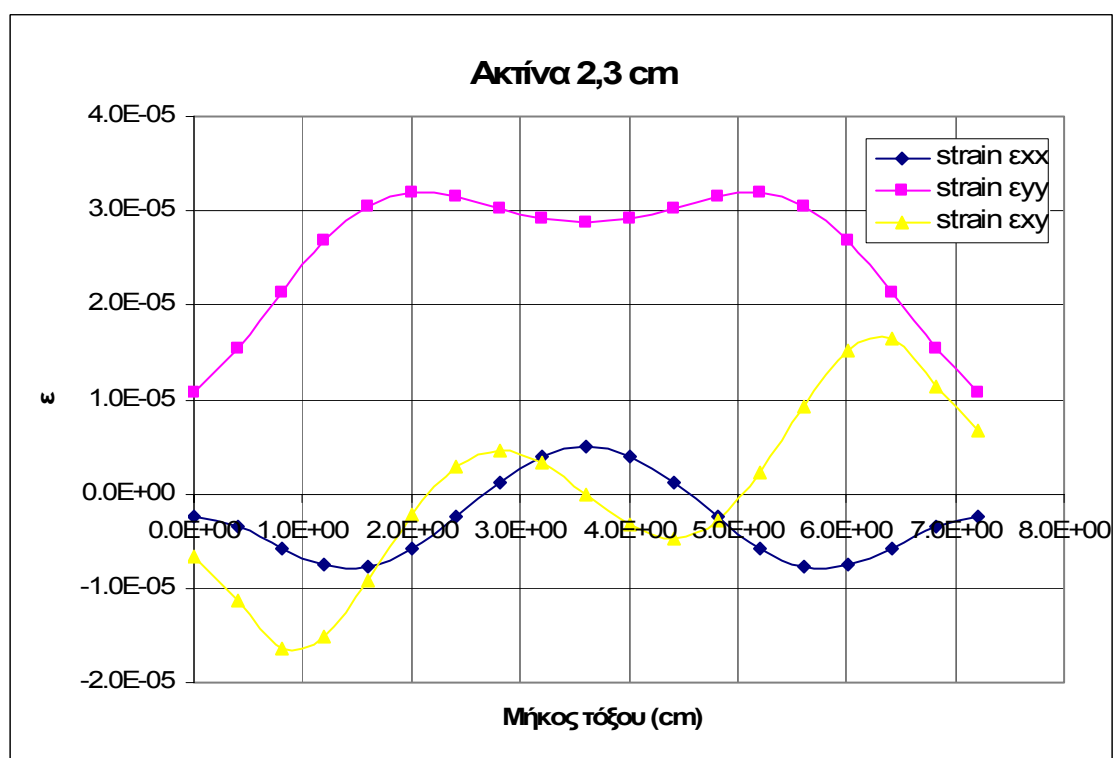
Η επίλυση του μοντέλου έγινε με θεώρηση επίπεδης παραμόρφωσης.

### Αποτελέσματα Αριθμητικής Επίλυσης

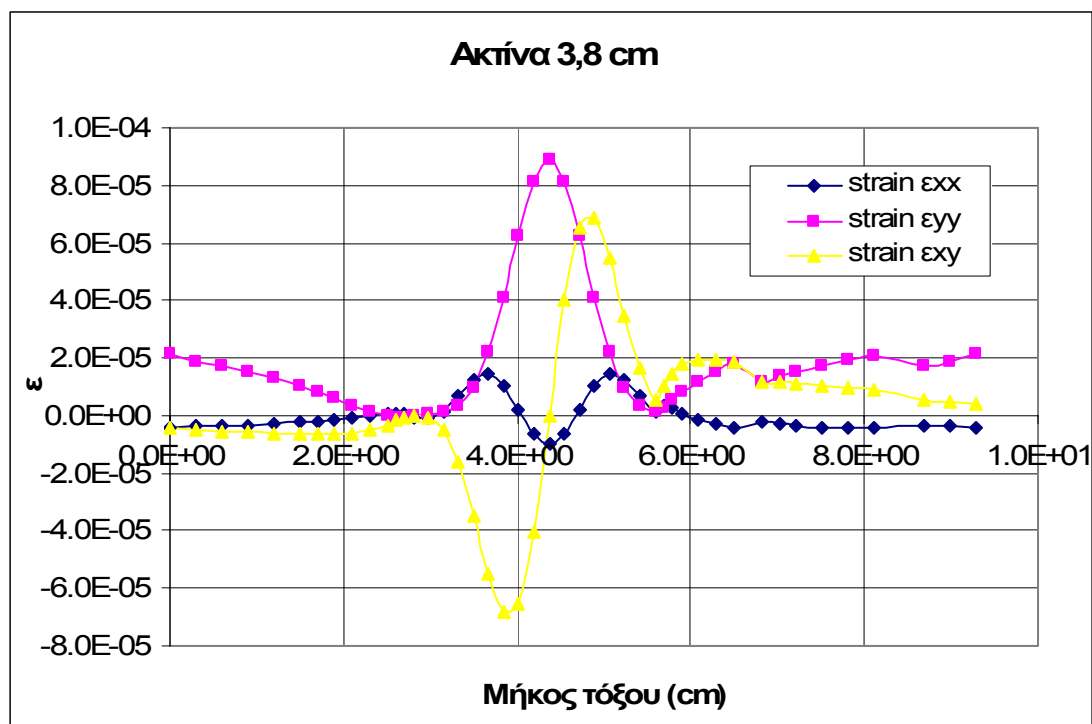
Ακολουθούν αποτελέσματα της αριθμητικής επίλυσης για τις παραμορφώσεις συναρτήσει του μήκους του τόξου που σχηματίζουν τα μηκυνσιόμετρα των πραγματικών μοντέλων. Τα αποτελέσματα αφορούν τις ίδιες γραμμές με αυτές του σχήματος (5.25) με την διαφορά ότι αφορούν τις παραμορφώσεις ολόκληρου του ημικυκλίου και όχι μόνο του τεταρτημορίου που βρισκόντουσαν τα μηκυνσιόμετρα. Οι τιμές των παραμορφώσεων στα διαγράμματα αρχίζουν από πάνω προς τα κάτω (δεξιόστροφα).



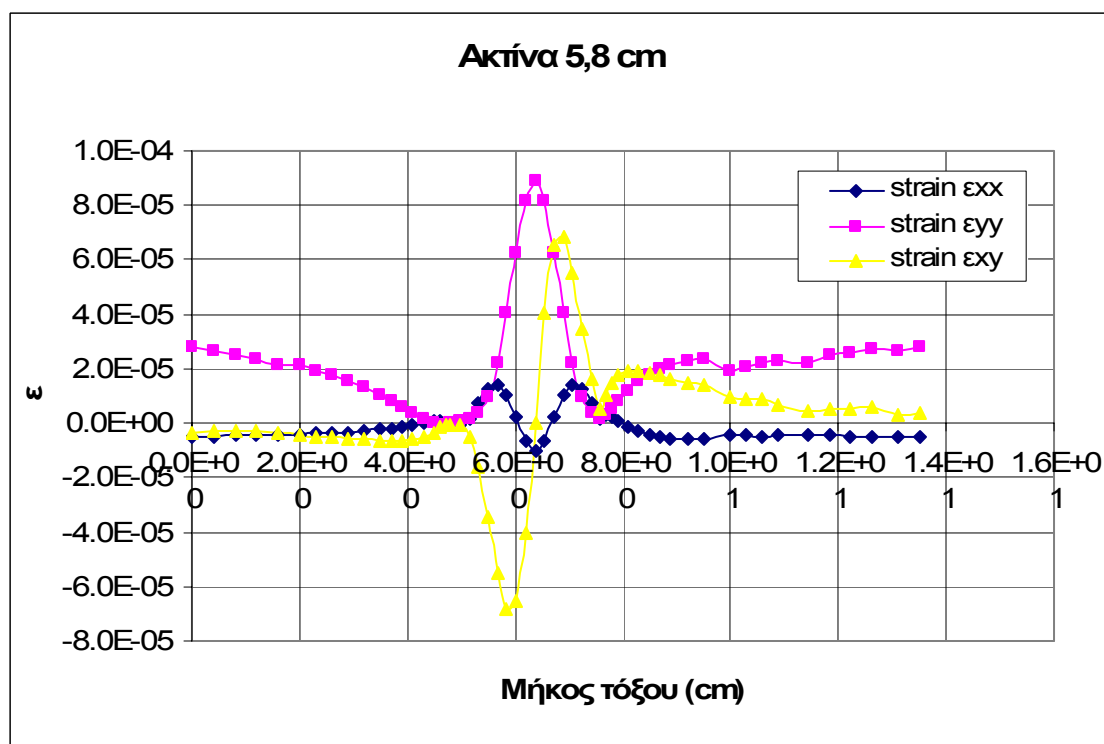
**Σχήμα 5.27:** Διάγραμμα της μεταβολής των παραμορφώσεων συναρτήσει του μήκους τόξου ακτίνας 1,3cm



**Σχήμα 5.28:** Διάγραμμα της μεταβολής των παραμορφώσεων συναρτήσει του μήκους τόξου ακτίνας 2,3cm



**Σχήμα 5.29:** Διάγραμμα της μεταβολής των παραμορφώσεων συναρτήσει του μήκους τόξου ακτίνας 3,8cm



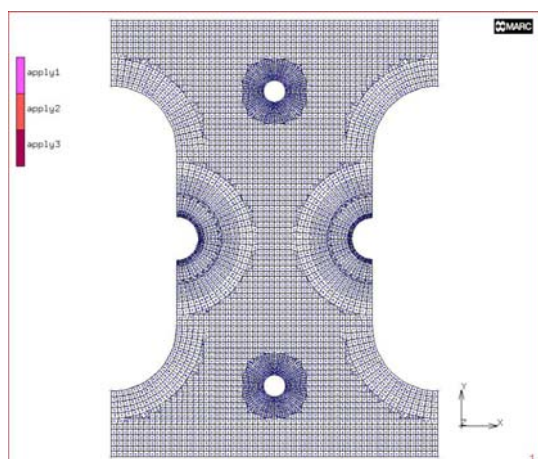
**Σχήμα 5.30:** Διάγραμμα της μεταβολής των παραμορφώσεων συναρτήσει του μήκους τόξου ακτίνας 5,8cm

### 5.3.2 Ορθότροπο Μοντέλο Ημικυκλικής Εγκοπής Ακτίνας 2cm

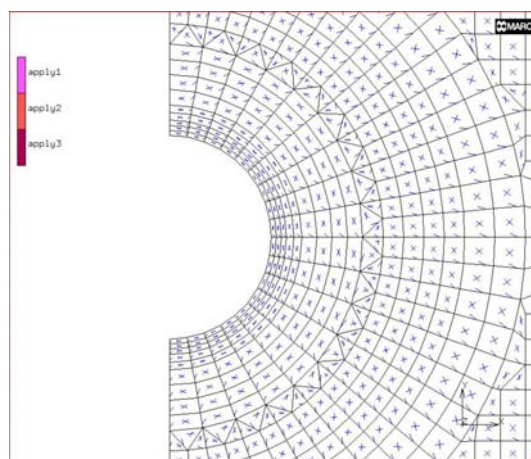
Ο τρόπος σχεδιασμού και επίλυσης του μοντέλου είναι όμοιος με τον τρόπο που εφαρμόστηκε για την αριθμητική επίλυση του ελαστικά ισότροπου μοντέλου με ημικυκλική εγκοπή 2cm. Διαφορές εντοπίζονται μόνο στις ιδιότητες του υλικού.

#### Γεωμετρία και Διακριτοποίηση του Μοντέλου

Το μοντέλο αποτελείται από 4360 τετραπλευρικά και τριγωνικά στοιχεία επίπεδης παραμόρφωσης και από 4475 κόμβους.



Σχήμα 5.31: Διακριτοποίηση του μοντέλου



Σχήμα 5.32: Λεπτομέρεια της διακριτοποίησης στην περιοχή γύρω από την εγκοπή του δοκιμίου

#### Συνοριακές Συνθήκες

Οι συνοριακές συνθήκες που απαιτούνται για την επίλυση του μοντέλου είναι όμοιες με αυτές που χρησιμοποιήθηκαν στην ενότητα (5.3.1) για την προσομοίωση του μοντέλου και διαφοροποιείται μόνο το μέγεθος του φορτίου που σε αυτή την περίπτωση είναι 4,4kN (2,2kN σε κάθε οριζόντια πλευρά του δοκιμίου) και εφαρμόστηκε σε δέκα βήματα.

### Ιδιότητες Υλικού

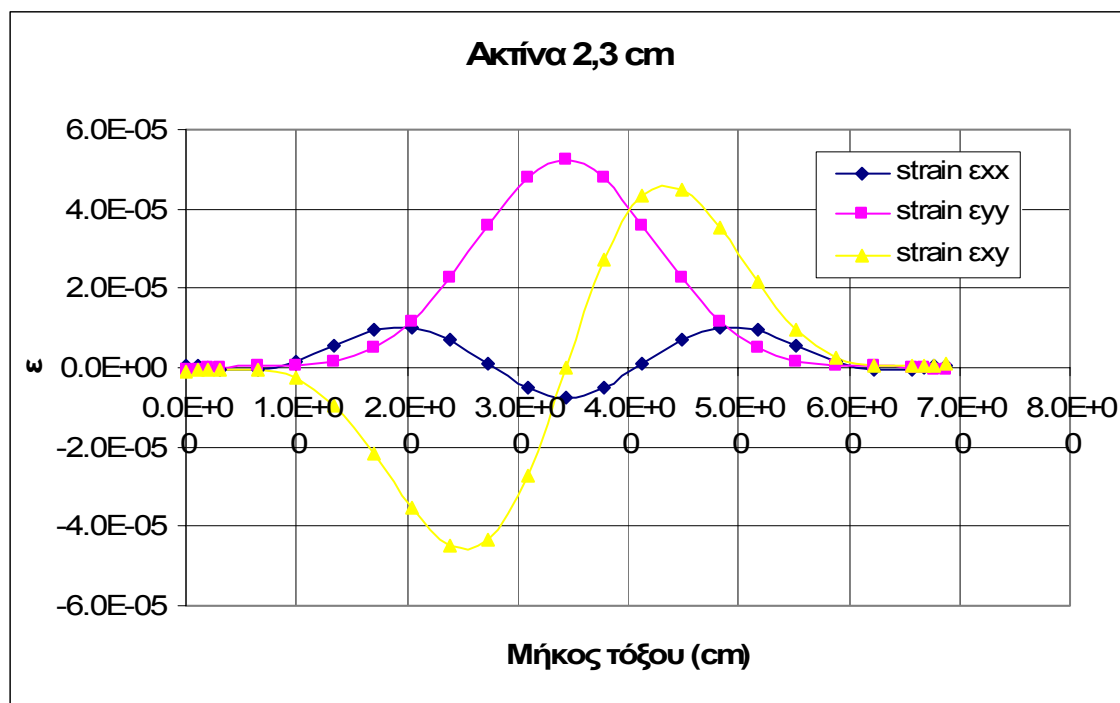
Το μάρμαρο προσομοιώθηκε σαν γραμμικά ελαστικό εγκαρσίως ισότροπο (ή ορθότροπο) υλικό με τις σταθερές που αναφέρθηκαν στον πίνακα (3.1) του 3<sup>ου</sup> κεφαλαίου.

### Γεωμετρικές Ιδιότητες

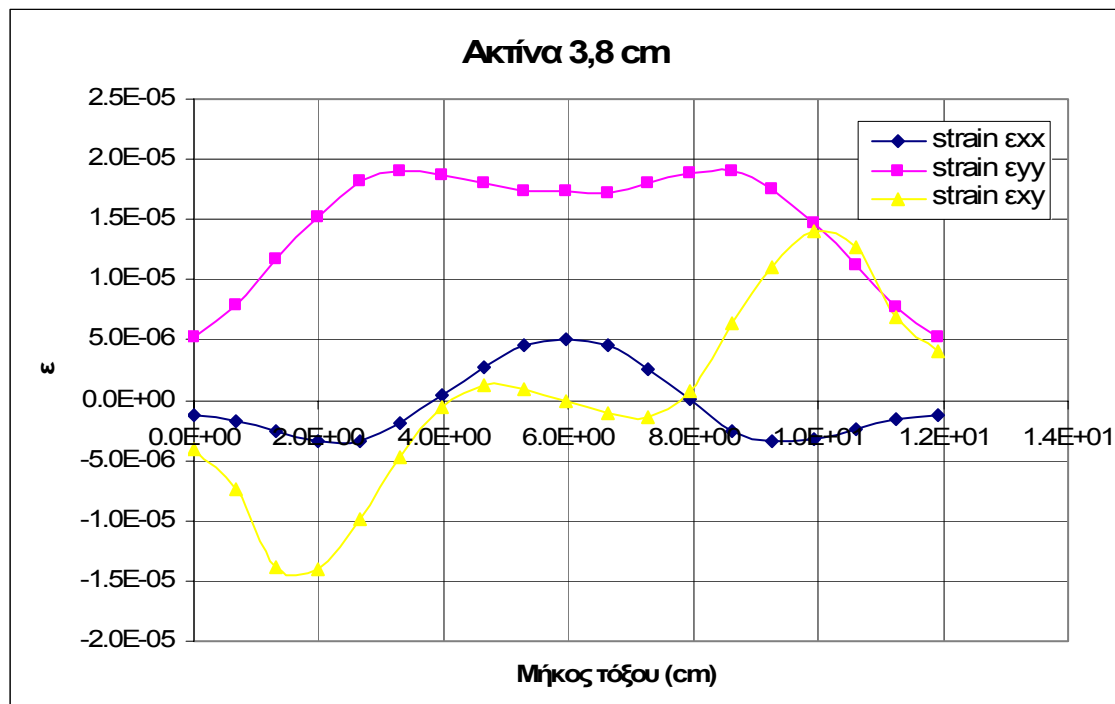
Η επίλυση του μοντέλου έγινε με θεώρηση επίπεδης παραμόρφωσης.

### Αποτελέσματα Αριθμητικής Επίλυσης

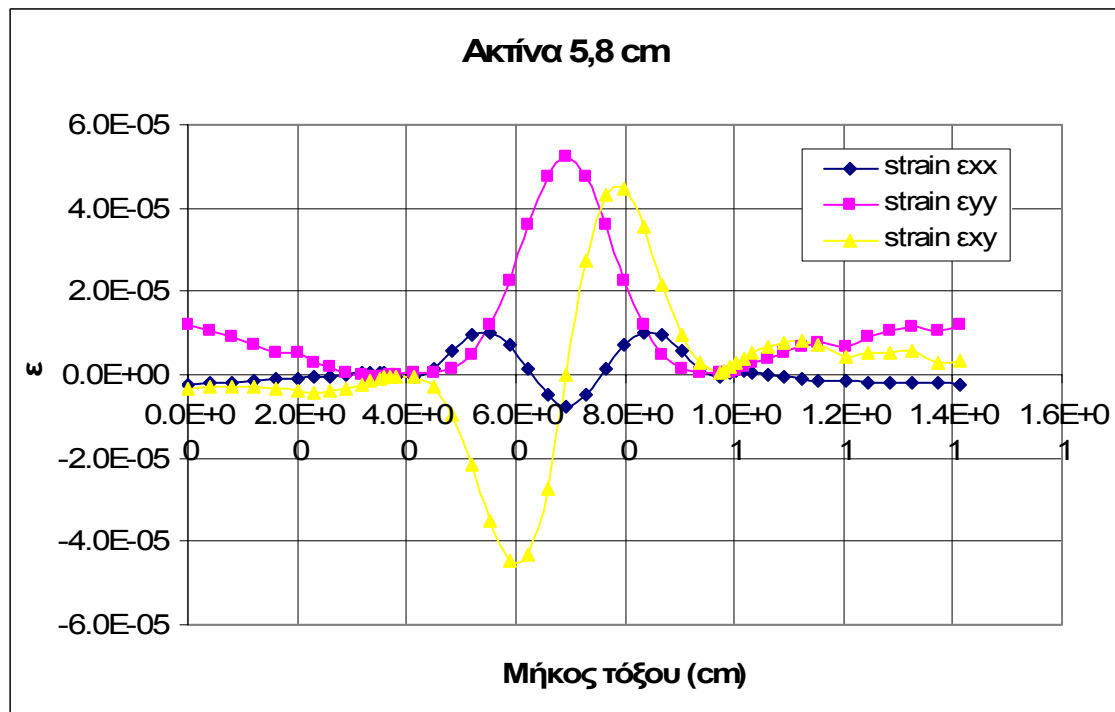
Ακολουθούν αποτελέσματα της αριθμητικής επίλυσης για τις παραμορφώσεις συναρτήσει του μήκους του τόξου που σχηματίζουν τα μηκυνσιόμετρα των πραγματικών μοντέλων. Τα αποτελέσματα αφορούν τις ίδιες γραμμές με αυτές της παραγράφου 5.2.2.



Σχήμα 5.33: Διάγραμμα της μεταβολής των παραμορφώσεων συναρτήσει του μήκους τόξου ακτίνας 2,3cm



*Σχήμα 5.34: Διάγραμμα της μεταβολής των παραμορφώσεων συναρτήσει του μήκους τόξου ακτίνας 3,8cm*



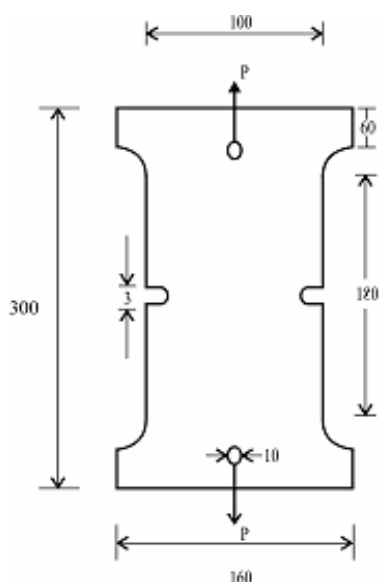
*Σχήμα 5.35: Διάγραμμα της μεταβολής των παραμορφώσεων συναρτήσει του μήκους τόξου ακτίνας 5,8cm*

## 5.4 Η ΔΟΚΙΜΗ ΑΜΕΣΟΥ ΕΦΕΛΚΥΣΜΟΥ ΣΕ ΔΟΚΙΜΙΑ ΔΙΟΝΥΣΙΑΚΟΥ ΜΑΡΜΑΡΟΥ ΜΕ ΕΓΚΟΠΗ ΤΥΠΟΥ-U: ΙΣΟΤΡΟΠΟ ΜΟΝΤΕΛΟ

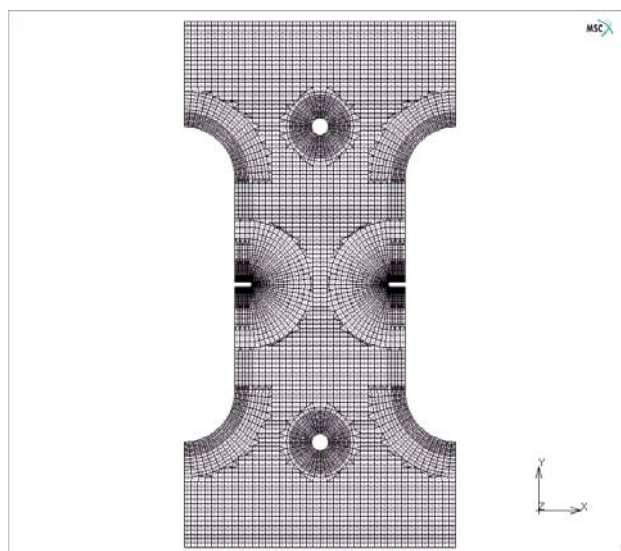
Η προσομοίωση της δοκιμής άμεσου εφελκυσμού πραγματοποιήθηκε και για δοκίμια Διονυσιακού μαρμάρου με εγκοπή τύπου-U, υλικό το οποίο προσομοιώθηκε σαν γραμμικά ελαστικό ισότροπο και σαν γραμμικά ελαστικό ορθότροπο.

### Γεωμετρία και Διακριτοποίηση του Μοντέλου

Η γεωμετρία του μοντέλου συμπίπτει με τις πραγματικές διαστάσεις της πειραματικής διάταξης, καθώς δεν έχει χρησιμοποιηθεί συμμετρία. Οι διαστάσεις του μοντέλου είναι οι εξής (Σχήμα 5.36):



Σχήμα 5.36: Γεωμετρία του μοντέλου

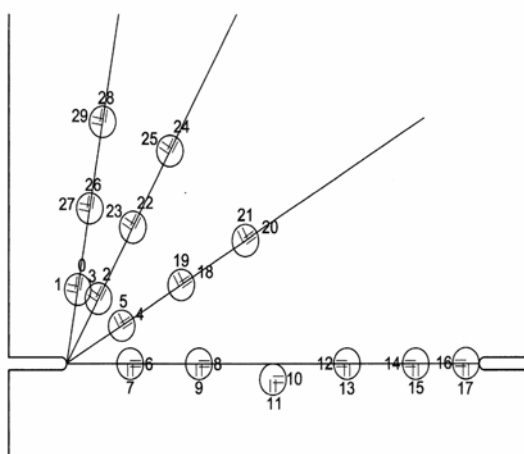


Σχήμα 5.37: Διακριτοποίηση του μοντέλου

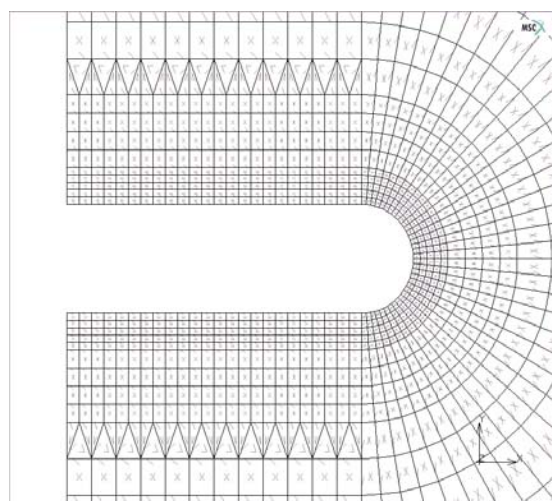
- Πλάτος δοκιμίου: 16 cm
- Ύψος δοκιμίου: 30 cm
- Πλάτος υπό εξέταση σώματος: 10 cm
- Ύψος υπό εξέταση σώματος: 12 cm
- Μήκος εγκοπής: 1 cm
- Πλάτος εγκοπής: 0,3 cm



Για την διακριτοποίηση του μοντέλου (Σχήμα 5.37) χρησιμοποιήθηκαν 7840 τετράπλευρα και τριγωνικά στοιχεία επίπεδης παραμόρφωσης και 7883 κόμβοι. Οι θέσεις των κόμβων είναι καθορισμένες με τέτοιο τρόπο ώστε να συμπίπτουν με τις θέσεις των μηχανομετρών στα δείγματα, με σκοπό την ακριβέστερη εξαγωγή αποτελεσμάτων για τα συγκεκριμένα σημεία. Πιο συγκεκριμένα, τοποθετήθηκαν κόμβοι σε ακτίνες 3mm, 11,5mm, 22,5mm, 32,5mm από την κορυφή της εγκοπής, και ακτινικά σε 0°, 30°, 60°, 80° σε πολικές συντεταγμένες, όπως φαίνεται στα σχήματα 5.38 και 5.39.



**Σχήμα 5.38** Σχηματική αναπαράσταση της εγκοπής όπου διακρίνονται οι θέσεις των μηχανομετρών για την καταγραφή των παραμορφώσεων

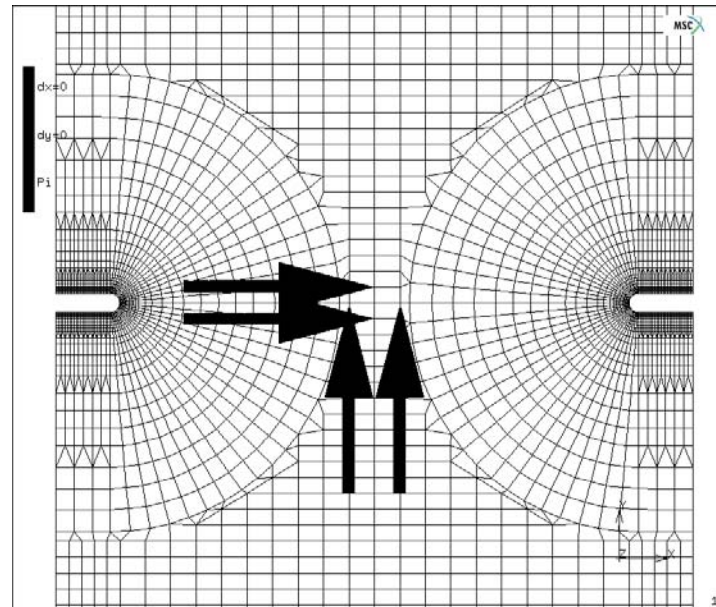


**Σχήμα 5.39:** Διακριτοποίηση εγκοπής

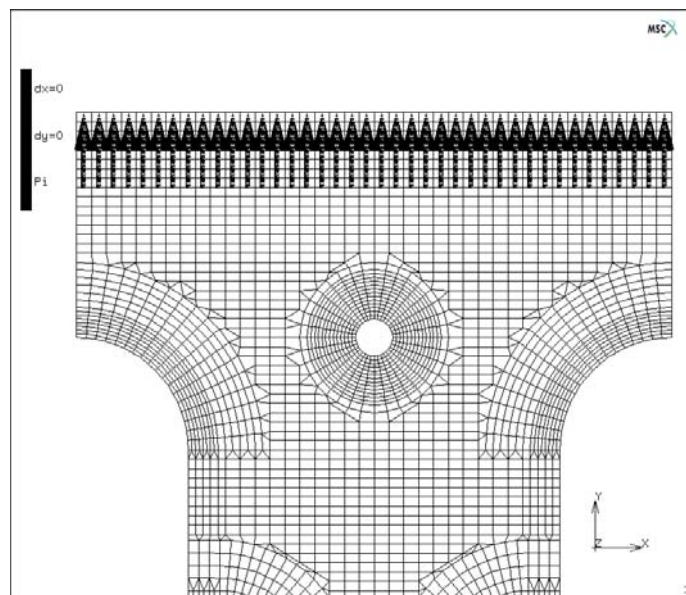
### Συνοριακές Συνθήκες

Στο μοντέλο εφαρμόστηκαν δύο συνοριακές συνθήκες, με τις οποίες εφαρμόστηκε κύλιση ( $d_x=0$ ,  $d_y=0$ ) στον άξονα  $XX'$  και  $YY'$  γύρω από τον κεντρικό κόμβο του μοντέλου, προκειμένου να εξασφαλιστεί ότι καμία περιστροφή δεν θα εμφανιστεί κατά τη διάρκεια της επίλυσης (Σχήμα 5.40). Επίσης τα δοκίμια εφαρμόστηκε μέγιστο εφελκυστικό φορτίο 1,4kN (0,7kN σε κάθε οριζόντια πλευρά του δοκιμίου) που εφαρμόστηκε σε δέκα βήματα (Σχήμα 5.41).

Λόγω της συμμετρίας του μοντέλου δεν απαιτήθηκε καμία άλλη συνοριακή συνθήκη.



Σχήμα 5.40: Κύλιση ( $d_x=0$ ,  $d_y=0$ ) γύρω από το κέντρο του δοκιμίου



Σχήμα 5.41: Εφελκυστικό φορτίο στην πάνω πλευρά του μοντέλου

### Ιδιότητες Υλικού

Το μάρμαρο προσομοιώθηκε σαν ελαστικό ισότροπο υλικό με ελαστικές σταθερές  $E=85,5$  GPa και  $\nu=0,26$ .

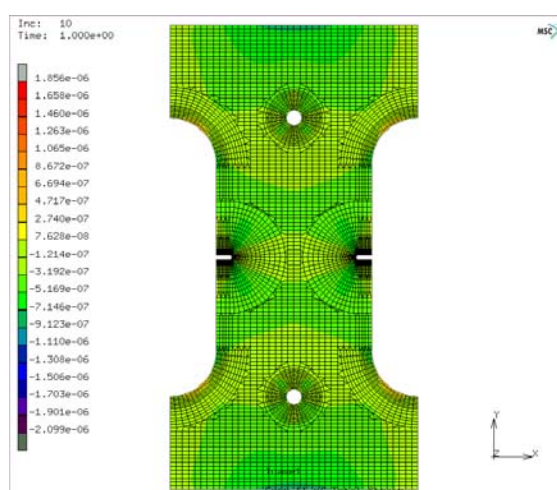
### Γεωμετρικές Ιδιότητες

Η επίλυση του μοντέλου έγινε με θεώρηση επίπεδης παραμόρφωσης (plane strain idealization).

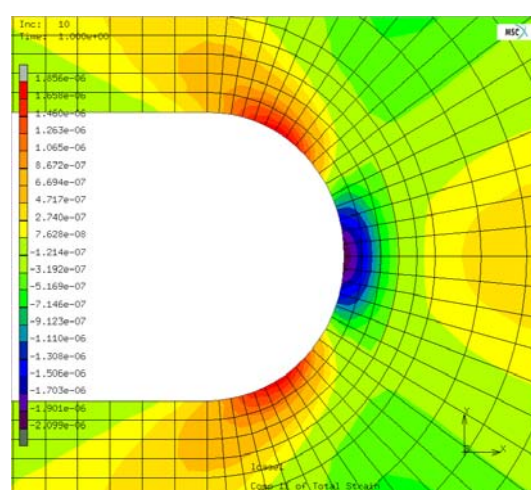
### Αποτελέσματα Αριθμητικής Επίλυσης

Σε αυτή την ενότητα παρουσιάζονται κάποια από τα αποτελέσματα της αριθμητικής επίλυσης, σχετικά με τις συνιστώσες των παραμορφώσεων.

Στα σχήματα 5.42 και 5.43 παρουσιάζονται αποτελέσματα που προκύπτουν από την αριθμητική επίλυση. Στο σχήμα 5.42 διακρίνεται η κατανομή της κατακόρυφης ανηγμένης παραμόρφωσης  $\varepsilon_{22}$  στο ισότροπο δοκίμιο, ενώ στο σχήμα 5.43 παρουσιάζεται η ίδια κατανομή στην περιοχή της εγκοπής.

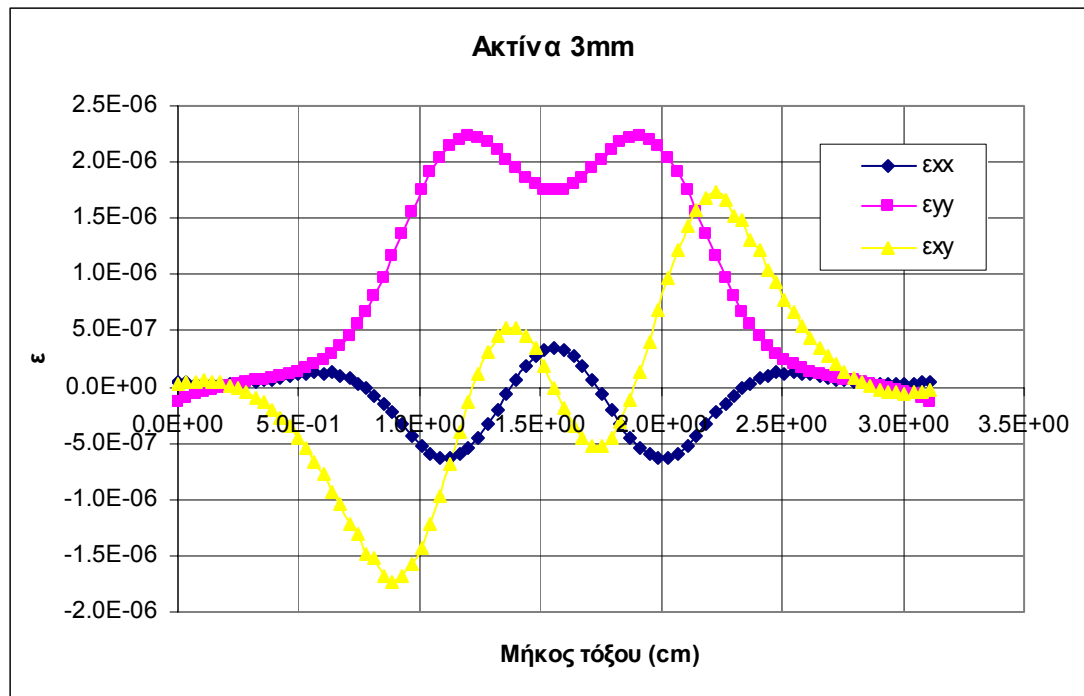


**Σχήμα 5.42:** Κατανομή της κατακόρυφης ανηγμένης παραμόρφωσης  $\varepsilon_{22}$ , για ισότροπο δοκίμιο.

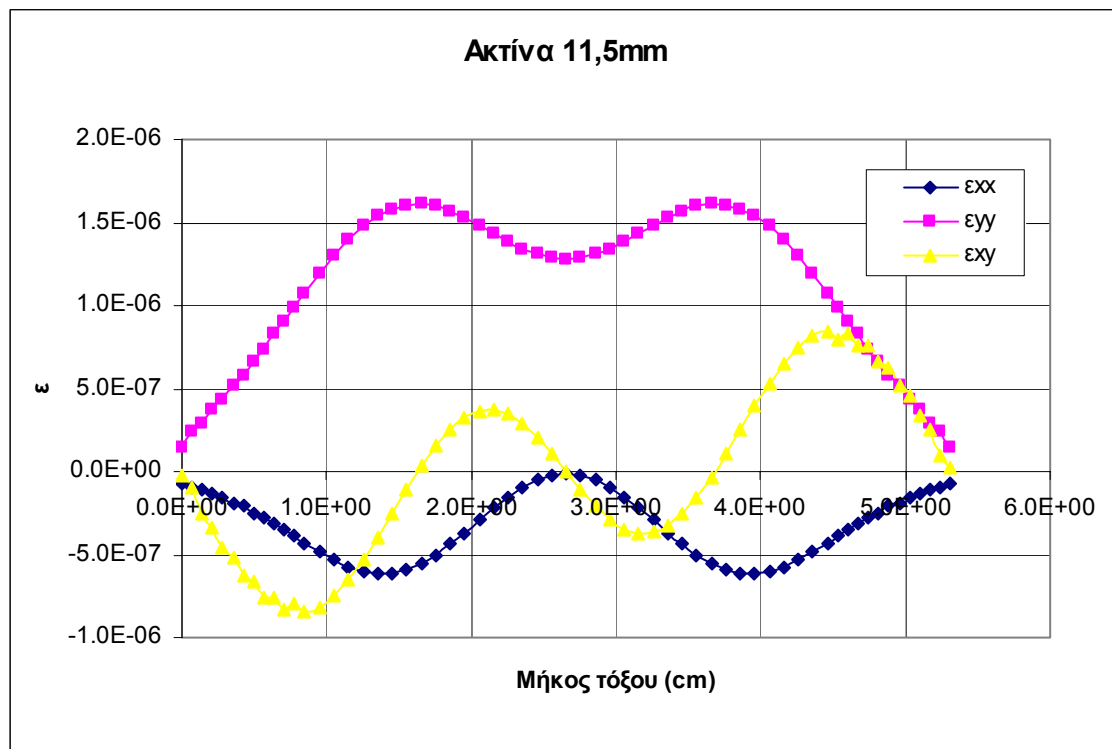


**Σχήμα 5.43:** Κατανομή της κατακόρυφης ανηγμένης παραμόρφωσης  $\varepsilon_{22}$ , για ισότροπο δοκίμιο κοντά στην εγκοπή.

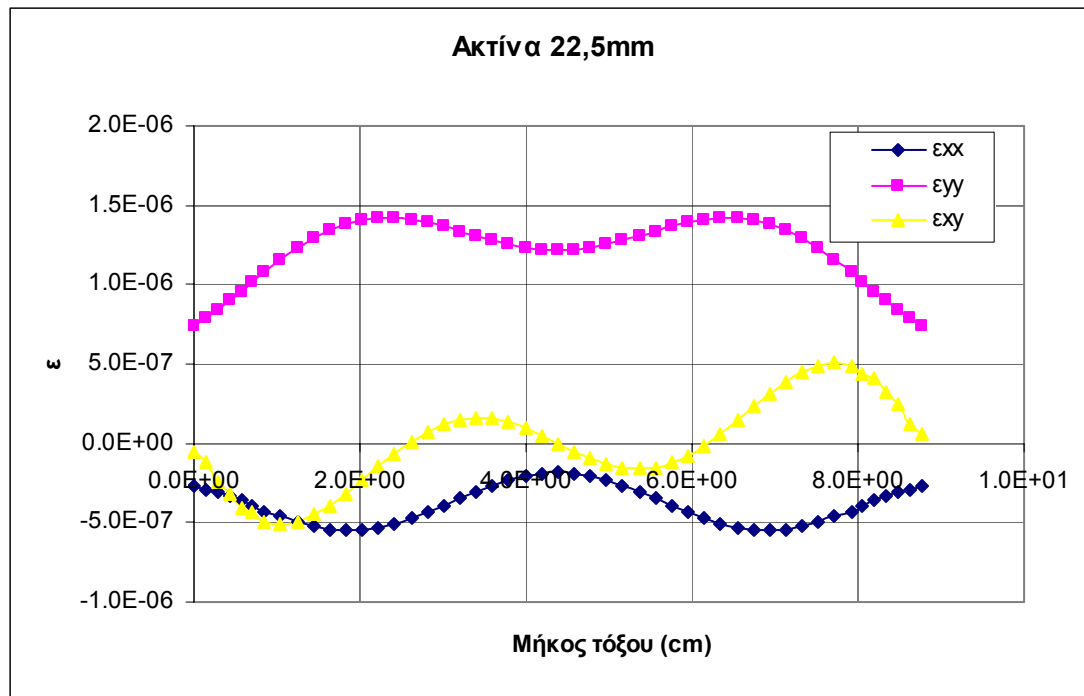
- Έχουν επιλεγθεί τέσσερις πολικές γραμμές, ακτίνας από το κέντρο της εγκοπής 1,3cm 2,3cm 3,8cm 5,8cm. Οι τιμές των παραμορφώσεων στα διαγράμματα έχουν φορά από πάνω προς τα κάτω (δεξιόστροφη).



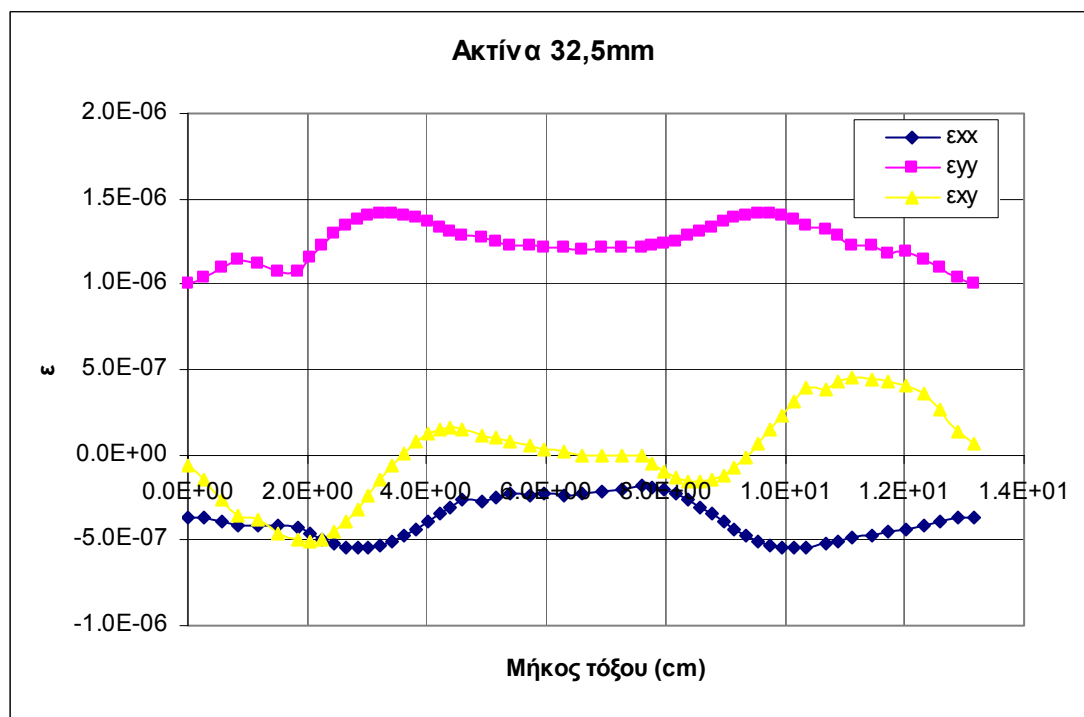
**Σχήμα 5.44:** Διάγραμμα της μεταβολής των παραμορφώσεων συναρτήσει του μήκους τόξου ακτίνας 0,3cm



**Σχήμα 5.45:** Διάγραμμα της μεταβολής των παραμορφώσεων συναρτήσει του μήκους τόξου ακτίνας 1,15cm

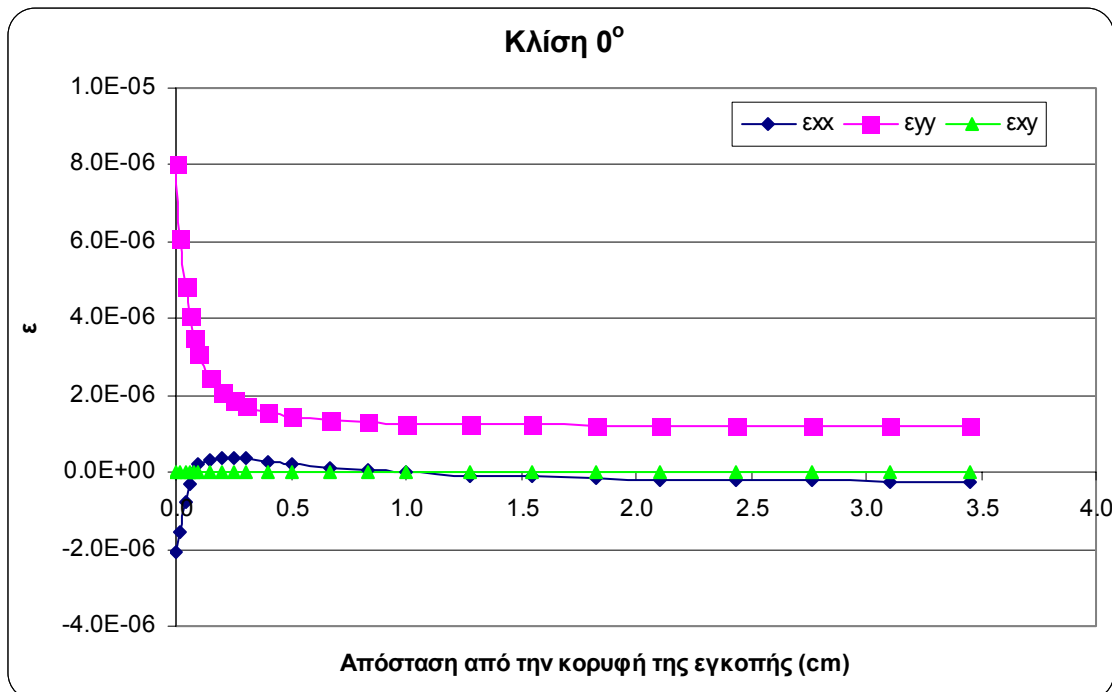


*Σχήμα 5.46: Διάγραμμα της μεταβολής των παραμορφώσεων συναρτήσει του μήκους τόξου ακτίνας 2,25cm*

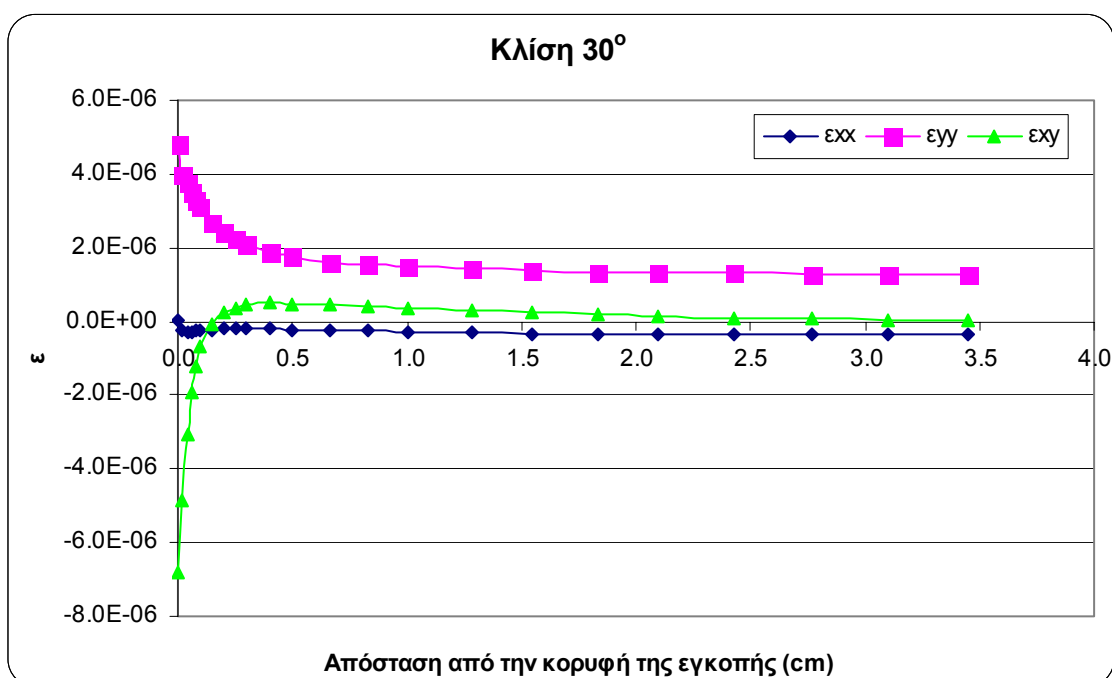


*Σχήμα 5.47: Διάγραμμα της μεταβολής των παραμορφώσεων συναρτήσει του μήκους τόξου ακτίνας 3,25cm*

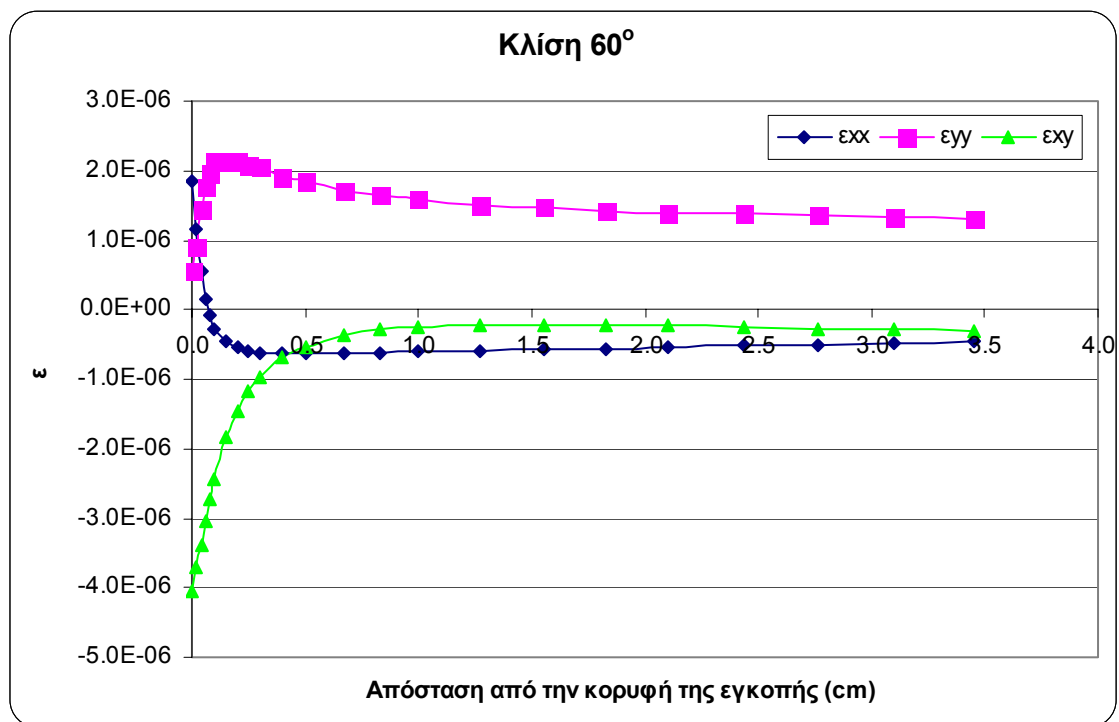
- Έχουν επιλεγθεί τρεις οριζόντιες ακτινικές γραμμές από την κορυφή της εγκοπής οι οποίες έχουν κλίση 0°, 30°, 60°, 80° και μήκος 3,5cm. Οι τιμές των παραμορφώσεων στα διαγράμματα αρχίζουν από την κορυφή της εγκοπής.



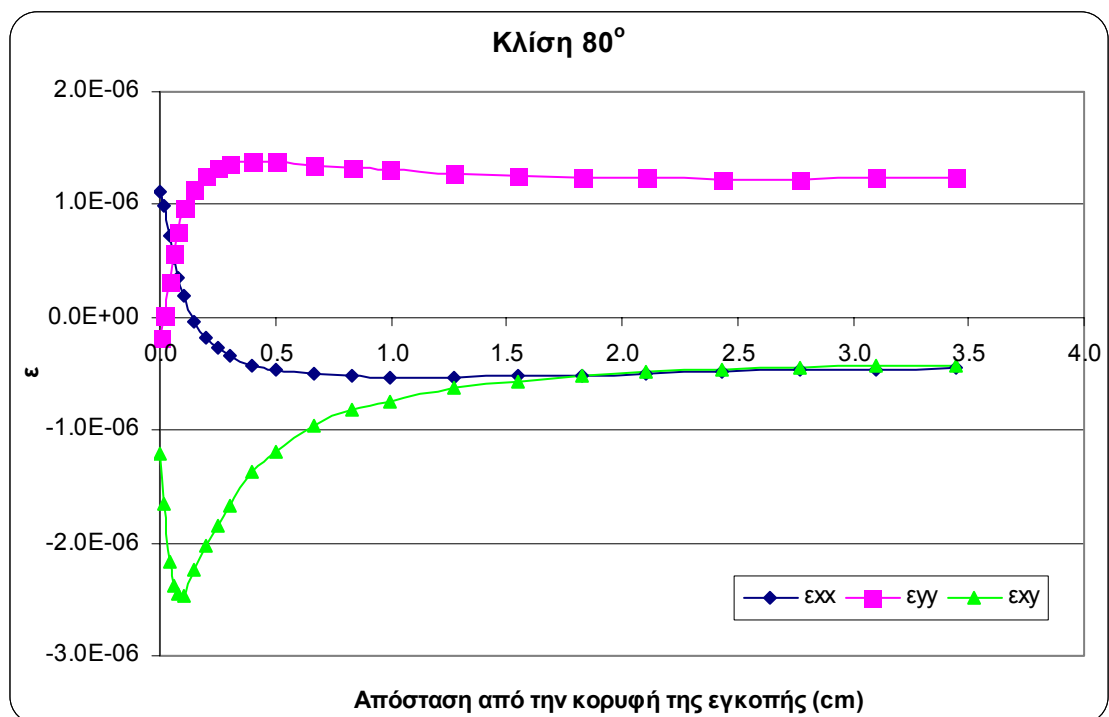
Σχήμα 5.48: Διάγραμμα της μεταβολής των παραμορφώσεων συναρτήσει της απόστασης από την κορυφή της εγκοπής με κλίση 0°



Σχήμα 5.49: Διάγραμμα της μεταβολής των παραμορφώσεων συναρτήσει της απόστασης από την κορυφή της εγκοπής με κλίση 30°



**Σχήμα 5.50:** Διάγραμμα της μεταβολής των παραμορφώσεων συναρτήσει της απόστασης από την κορυφή της εγκοπής με κλίση 60°



**Σχήμα 5.51:** Διάγραμμα της μεταβολής των παραμορφώσεων συναρτήσει της απόστασης από την κορυφή της εγκοπής με κλίση 80°

## 5.5 Η ΔΟΚΙΜΗ ΑΜΕΣΟΥ ΕΦΕΛΚΥΣΜΟΥ ΣΕ ΔΟΚΙΜΙΑ ΔΙΟΝΥΣΙΑΚΟΥ ΜΑΡΜΑΡΟΥ ΜΕ ΕΓΚΟΠΗ ΤΥΠΟΥ-U: *ΟΡΘΟΤΡΟΠΟ ΜΟΝΤΕΛΟ*

Ο τρόπος σχεδιασμού και επίλυσης του μοντέλου είναι όμοιος με τον τρόπο που εφαρμόστηκε για την αριθμητική επίλυση του ελαστικά ισότροπου μοντέλου με εγκοπή τύπου-U. Διαφορές εντοπίζονται μόνο στις ιδιότητες του υλικού.

### Γεωμετρία και Διακριτοποίηση του Μοντέλου

Η γεωμετρία του μοντέλου συμπίπτει με τις πραγματικές διαστάσεις της πειραματικής διάταξης, καθώς δεν έχει χρησιμοποιηθεί συμμετρία.

Για την διακριτοποίηση του μοντέλου χρησιμοποιήθηκαν 7840 τετράπλευρα και τριγωνικά στοιχεία επίπεδης παραμόρφωσης και 7883 κόμβοι.

### Συνοριακές Συνθήκες

Οι συνοριακές συνθήκες που απαιτούνται για την επίλυση του μοντέλου είναι όμοιες με αυτές που χρησιμοποιήθηκαν στην ενότητα 5.4 για την προσομοίωση του μοντέλου.

### Ιδιότητες Υλικού

Το μάρμαρο προσομοιώθηκε σαν γραμμικά ελαστικό εγκαρσίως ισότροπο (ή ορθότροπο) υλικό (Σχήμα 5.26) με τις σταθερές που αναφέρθηκαν στον πίνακα 3.1 του 3<sup>ου</sup> κεφαλαίου.

### Γεωμετρικές Ιδιότητες

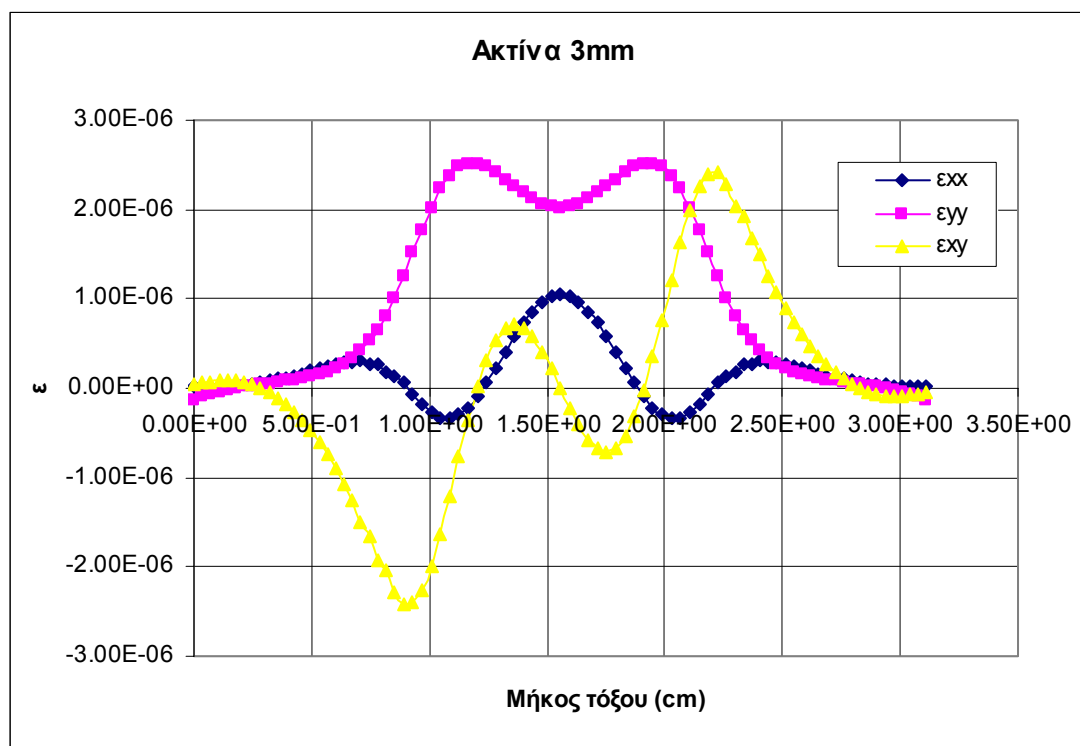
Η επίλυση του μοντέλου έγινε με θεώρηση επίπεδης παραμόρφωσης.



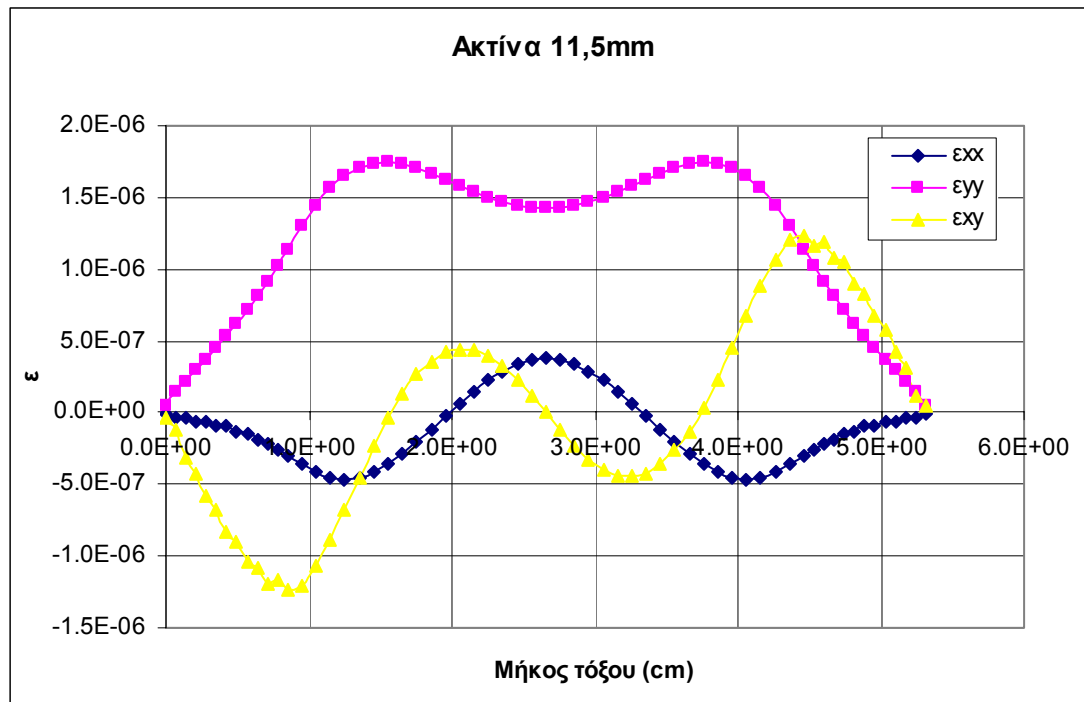
**Αποτελέσματα Αριθμητικής Επίλυσης**

Τα αποτελέσματα από την αριθμητική επίλυση, σχετικά με τις συνιστώσες των παραμορφώσεων είναι για τις ίδιες γραμμές εξέτασης όπως με το ισότροπο μοντέλο εγκοπής-U.

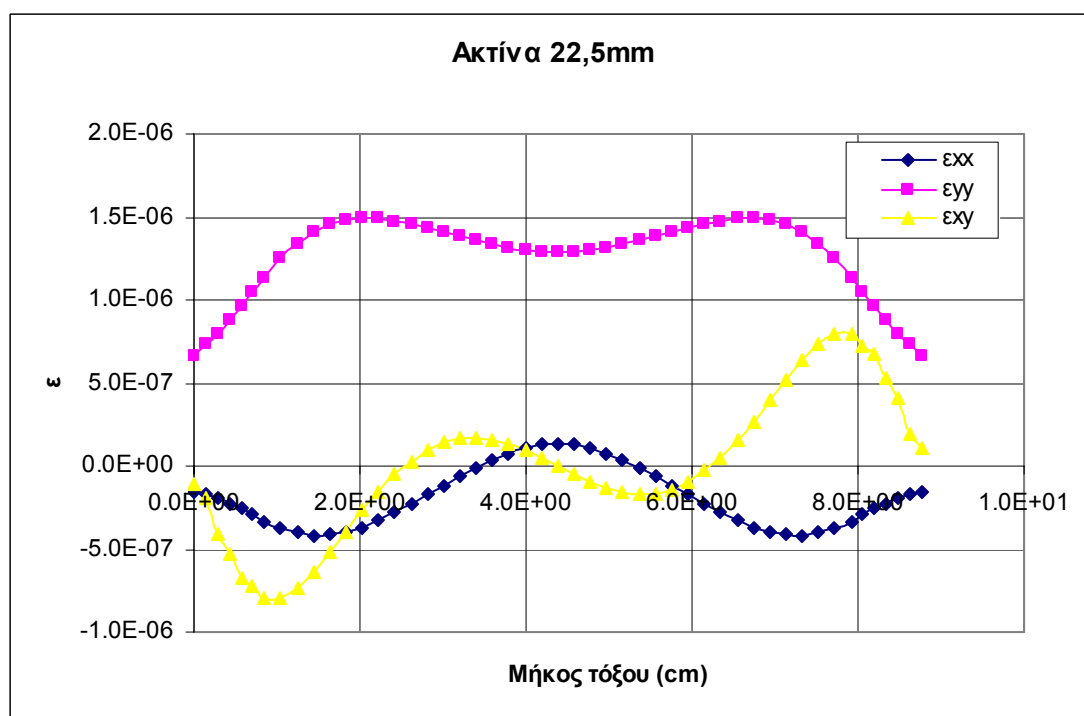
- Έχουν επιλεγθεί τέσσερις πολικές ημικυκλικές γραμμές, ακτίνας από το κέντρο της εγκοπής 1,3cm 2,3cm 3,8cm 5,8cm. Οι τιμές των παραμορφώσεων στα διαγράμματα έχουν φορά από πάνω προς τα κάτω (δεξιόστροφη).



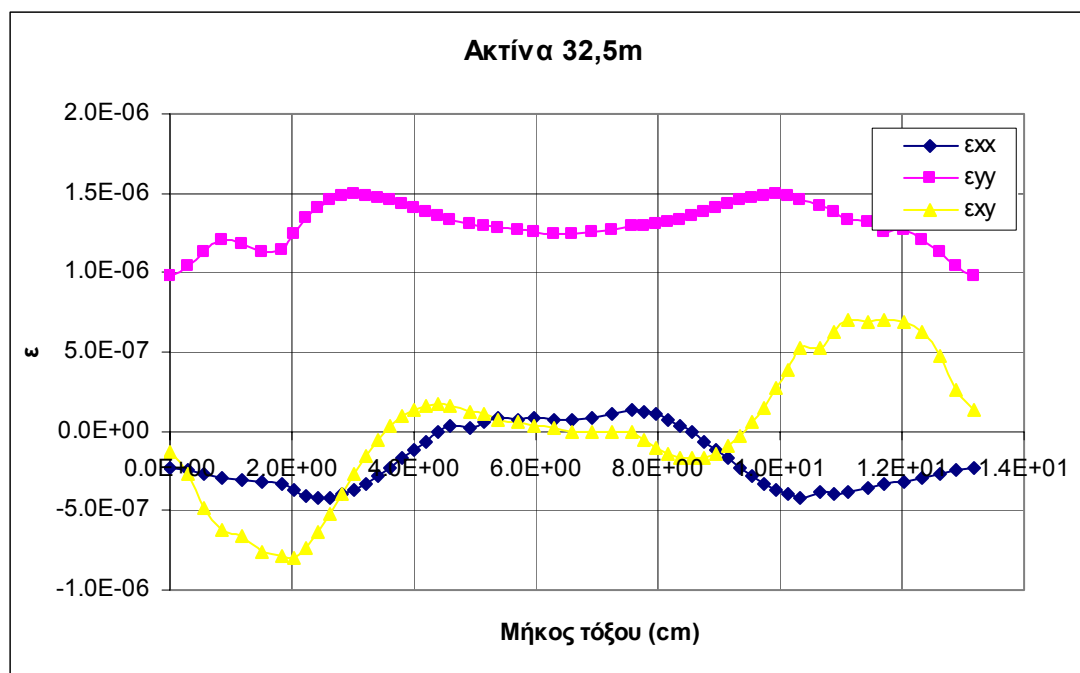
**Σχήμα 5.52:** Διάγραμμα της μεταβολής των παραμορφώσεων συναρτήσει του μήκους τόξου ακτίνας 0,3cm



**Σχήμα 5.53:** Διάγραμμα της μεταβολής των παραμορφώσεων συναρτήσει του μήκους τόξου ακτίνας 1,15cm

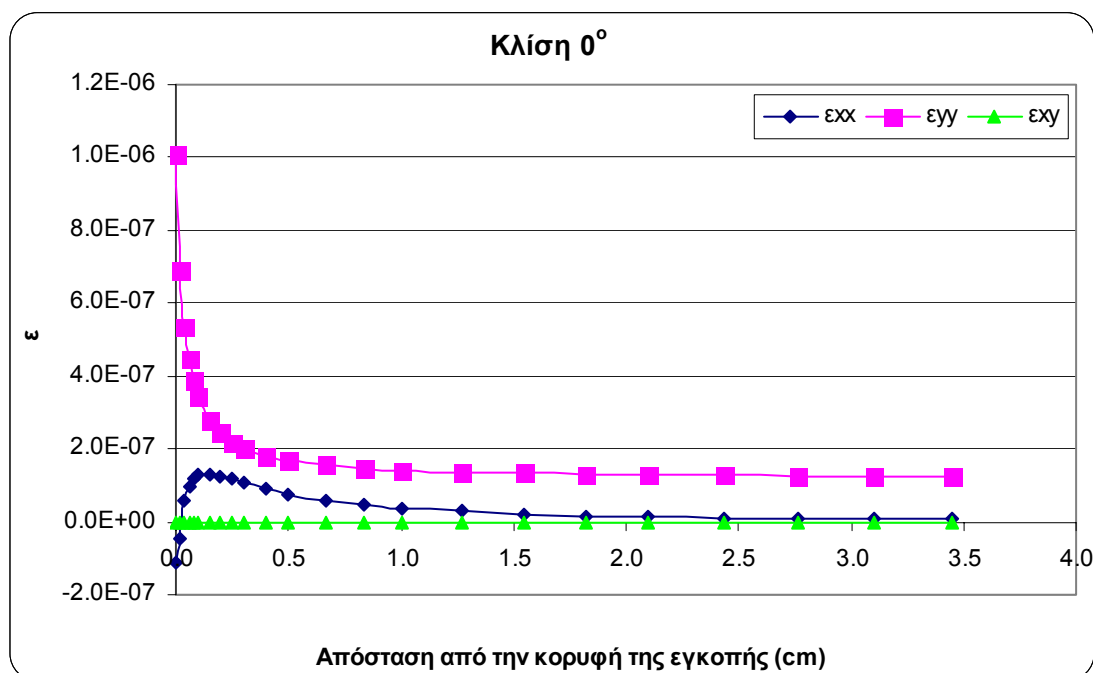


**Σχήμα 5.54:** Διάγραμμα της μεταβολής των παραμορφώσεων συναρτήσει του μήκους τόξου ακτίνας 2,25cm

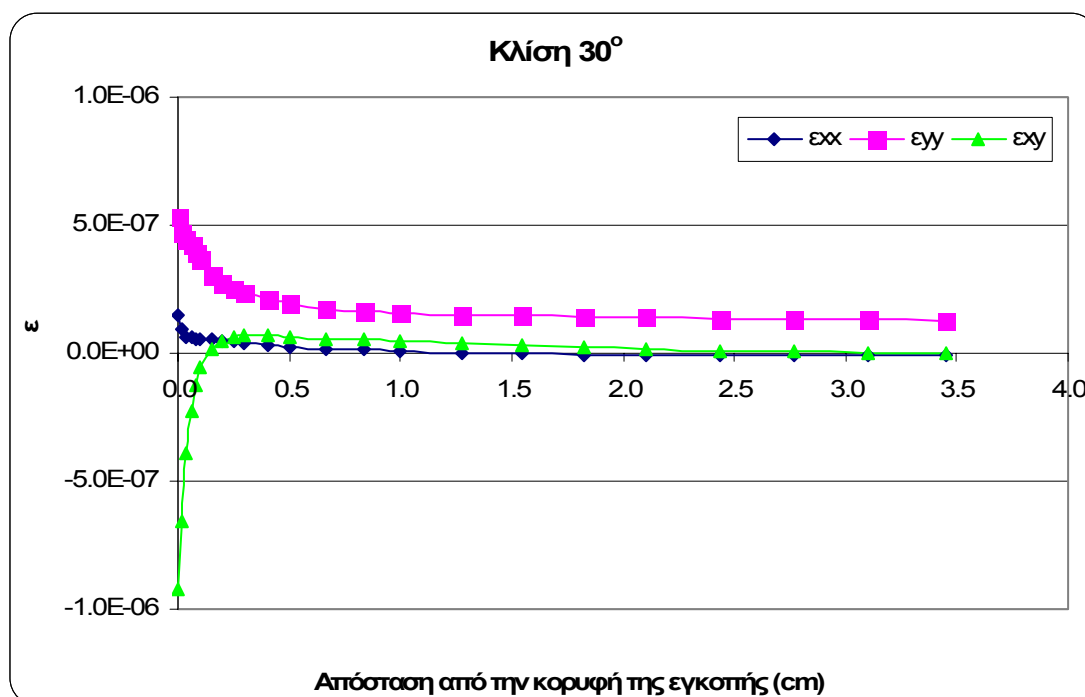


Σχήμα 5.55: Διάγραμμα της μεταβολής των παραμορφώσεων συναρτήσει του μήκους τόξου ακτίνας 3,25cm

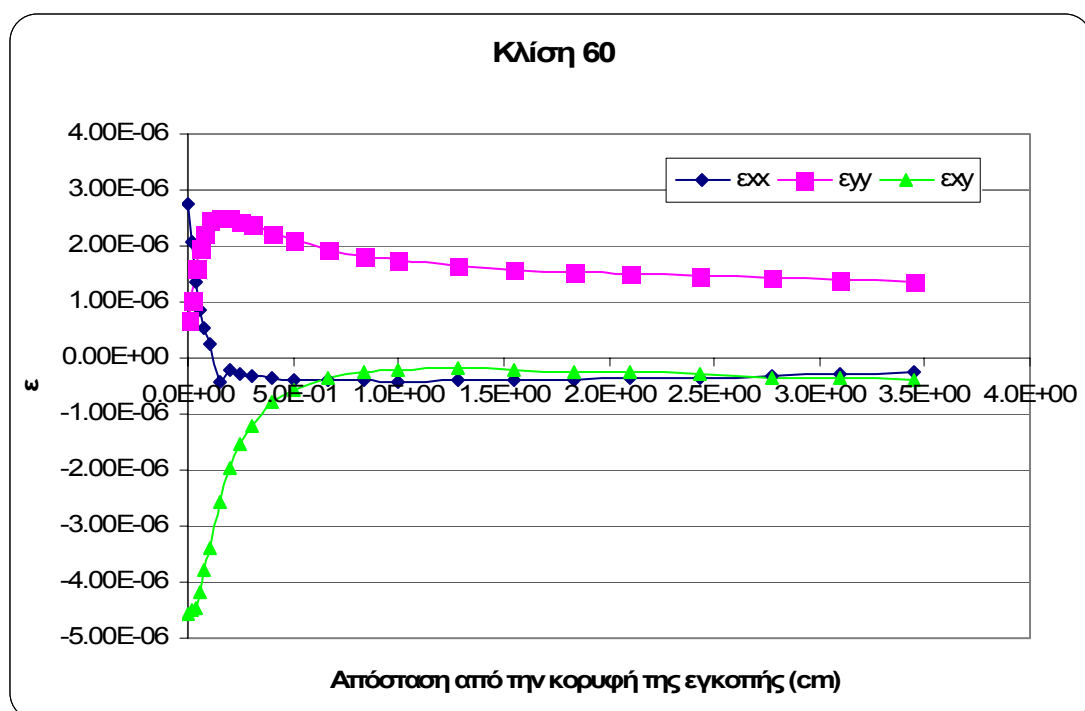
- Έχουν επιλεγθεί τρεις οριζόντιες ακτινικές γραμμές από την κορυφή της εγκοπής οι οποίες έχουν κλίση 0°, 30°, 60°, 80° και μήκος 3,5cm. Οι τιμές των παραμορφώσεων στα διαγράμματα αρχίζουν από την κορυφή της εγκοπής.



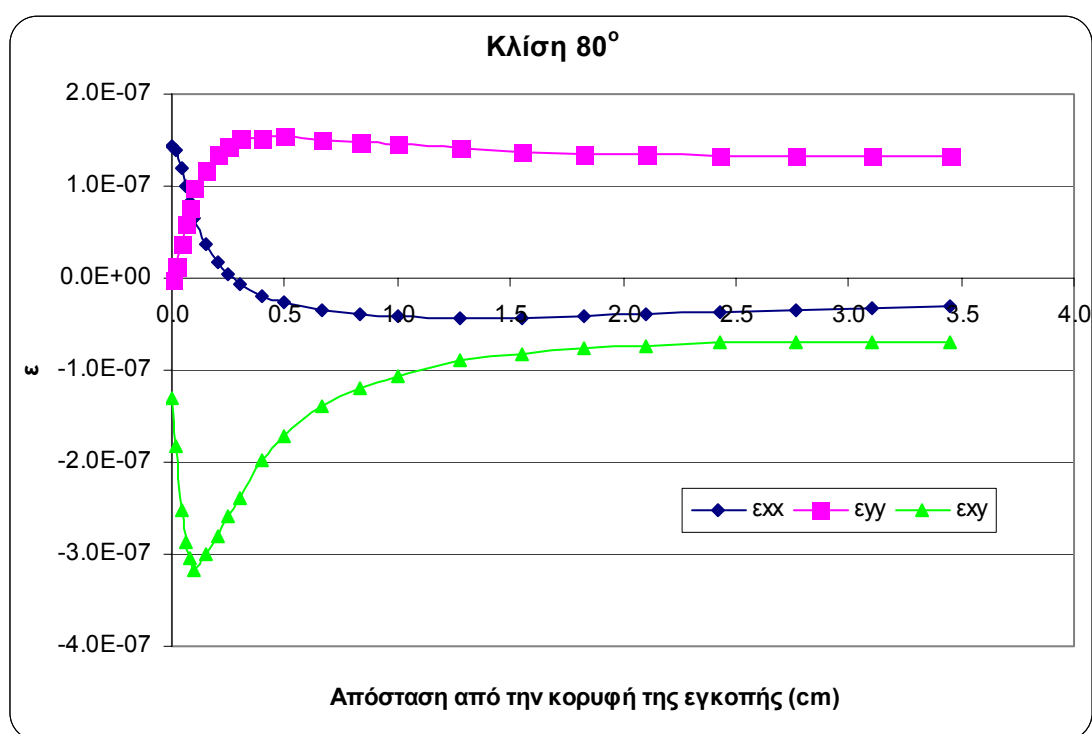
Σχήμα 5.56: Διάγραμμα της μεταβολής των παραμορφώσεων συναρτήσει της απόστασης από την κορυφή της εγκοπής με κλίση 0°



**Σχήμα 5.57:** Διάγραμμα της μεταβολής των παραμορφώσεων συναρτήσει της απόστασης από την κορυφή της εγκοπής με κλίση 30°



**Σχήμα 5.58:** Διάγραμμα της μεταβολής των παραμορφώσεων συναρτήσει της απόστασης από την κορυφή της εγκοπής με κλίση 60°

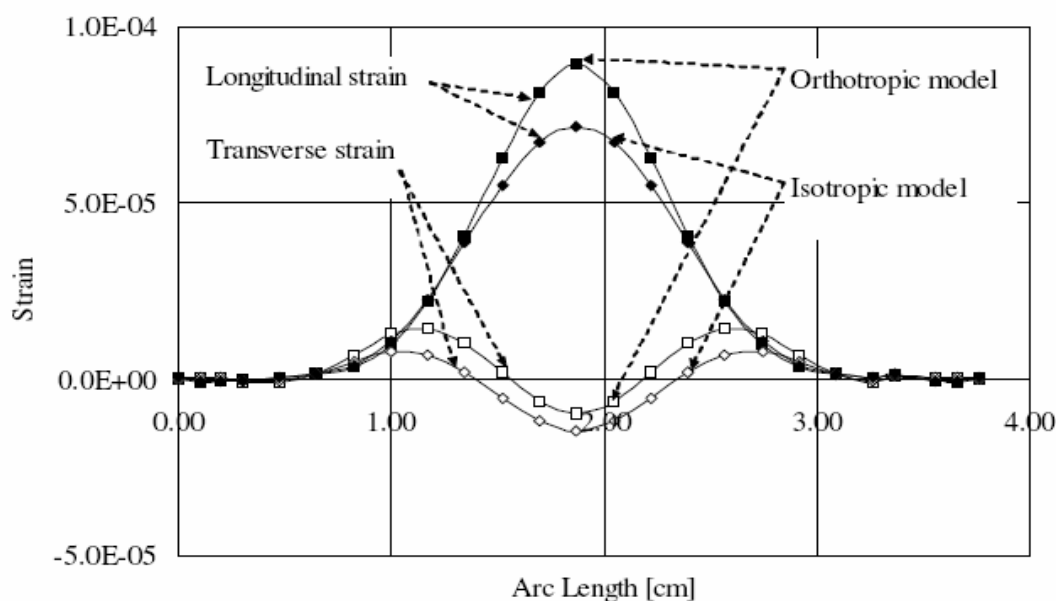


Σχήμα 5.59: Διάγραμμα της μεταβολής των παραμορφώσεων συναρτήσει της απόστασης από την κορυφή της εγκοπής με κλίση 80°

## 5.6 ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΩΝ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ ΕΠΙΛΥΣΗΣ ΚΑΙ ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ

### 5.6.1 Σύγκριση αποτελεσμάτων για τα μοντέλα με ημικυκλική εγκοπή

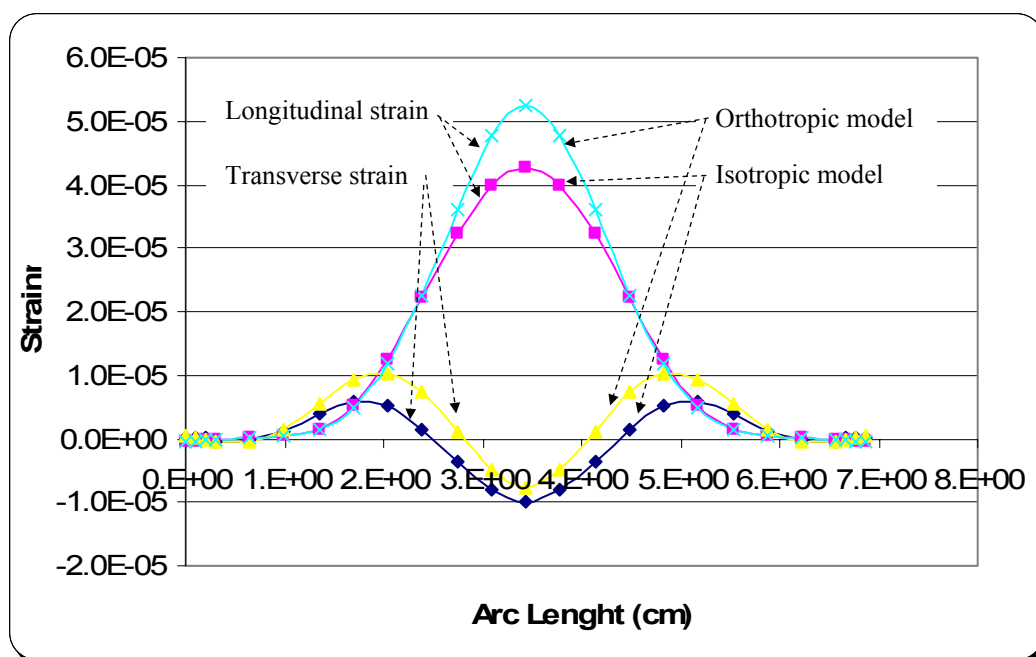
Τα συγκριτικά αποτελέσματα από την αριθμητική επίλυση για την περίπτωση της προσομοίωσης του Διονυσιακού μαρμάρου σαν ισότροπο και ορθότροπο ελαστικό υλικό με ημικυκλική εγκοπή ακτίνας 1cm, φαίνονται στο σχήμα 5.60 όπου διακρίνεται η μεταβολή της παραμόρφωσης στα δοκίμια σύμφωνα με ένα καρτεσιανό σύστημα αναφοράς κατά μήκος ενός ημικυκλικού περιγράμματος με ακτίνα 13mm γύρω από την εγκοπή. Περιέχονται και οι διαμήκεις (γεμάτα σύμβολα) και οι εγκάρσιες (κενά σύμβολα) παραμορφώσεις.



**Σχήμα 5.60:** Η μεταβολή των παραμορφώσεων στο ισότροπο και ορθότροπο μοντέλο με ακτίνα εγκοπής 10mm.

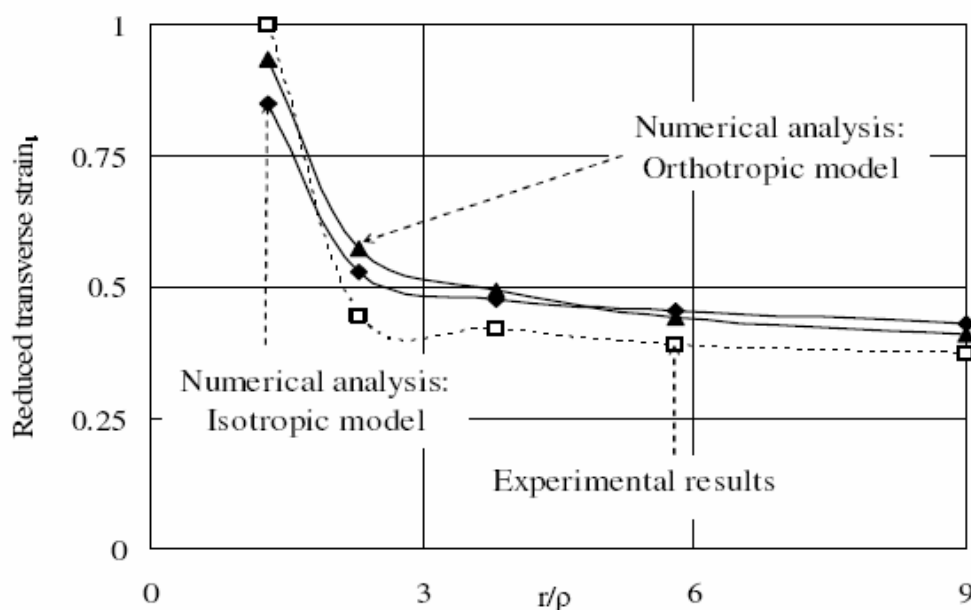
Από αυτό το διάγραμμα είναι εμφανές ότι οι παραμορφώσεις της περίπτωσης που το υλικό θεωρείται ορθότροπο (τετραγωνικά σύμβολα) υπερβαίνουν τις αντίστοιχες τιμές των παραμορφώσεων του ισότροπου μοντέλου (ρομβικά σύμβολα). Η διαφορά στις τιμές είναι πιο έντονη (περίπου 20%) για τις διαμήκειες παραμορφώσεις στην μέση του ημικυκλίου της εγκοπής.

Η ίδια απόκλιση στις τιμές των παραμορφώσεων υπάρχει και για το μοντέλο με ημικυκλική εγκοπή ακτίνας 2cm (σχήμα 5.61), πάλι σύμφωνα με ένα καρτεσιανό σύστημα αναφοράς κατά μήκος ενός ημικυκλικού περιγράμματος αλλά με ακτίνα 23mm γύρω από την εγκοπή. Η μόνη διαφορά που μπορεί να εντοπιστεί είναι κατά τις εγκάρσιες παραμορφώσεις η απόκλιση ανάμεσα στο ισότροπο και ορθότροπο μοντέλο στις 45° και -45° του ημικυκλικού περιγράμματος παρατηρείται η μέγιστη απόκλιση, ενώ στη μέση της εγκοπής παρατηρείται σύγκλιση, σε αντίθεση με τα αποτελέσματα από την εγκοπή με ακτίνα 1cm, όπου στα συγκεκριμένα αποτελέσματα παρατηρείται η ίδια απόκλιση.



**Σχήμα 5.61:** Η μεταβολή των παραμορφώσεων στο ισότροπο και ορθότροπο μοντέλο με ακτίνα εγκοπής 20mm.

Στο σχήμα 5.62 η μεταβολή της εγκάρσιας παραμόρφωσης κατά μήκος της γραμμής για  $\theta=0^\circ$  σχεδιάζεται με βάση τις πειραματικές μετρήσεις (κενά σύμβολα και διακεκομμένη γραμμή), καθώς επίσης και από την αριθμητική επίλυση (γεμισμένα σύμβολα και συνεχείς γραμμές). Τα αποτελέσματα της αριθμητικής επίλυσης σχεδιάζονται και για το ισότροπο και για το ορθότροπο μοντέλο (ρομβικά και τριγωνικά σύμβολα, αντίστοιχα). Και στις τρεις περιπτώσεις οι παραμορφώσεις έχουν μειωθεί πέρα από την αντίστοιχη μέγιστη τιμή, δηλαδή την τιμή για  $r/\rho=1.3$ . Από το σχήμα 5.62 προκύπτει το συμπέρασμα ότι τα αποτελέσματα των αριθμητικών προσομοιώσεων είναι σε πολύ καλή συμφωνία με εκείνα της πειραματικής μελέτης. Τα αριθμητικά αποτελέσματα υπερβαίνουν ελαφρώς τα πειραματικά όταν  $r/\rho \geq 2$ . Για τιμές  $r/\rho < 2$  τα πειραματικά αποτελέσματα έχουν ελαφρώς αυξημένη τιμή σε σχέση με τα αριθμητικά. Αυτή η συμπεριφορά μπορεί να αιτιολογηθεί με βάση το ότι η θεώρηση γραμμικότητας που υιοθετείται από την αριθμητική επίλυση δεν ισχύει όταν το  $r/\rho \leq 2$ , δεδομένου ότι αυτή η περιοχή βρίσκεται μέσα στην ζώνη διαδικασίας όπου υπάρχει έντονη ανάπτυξη μικρο-ρωγμών.

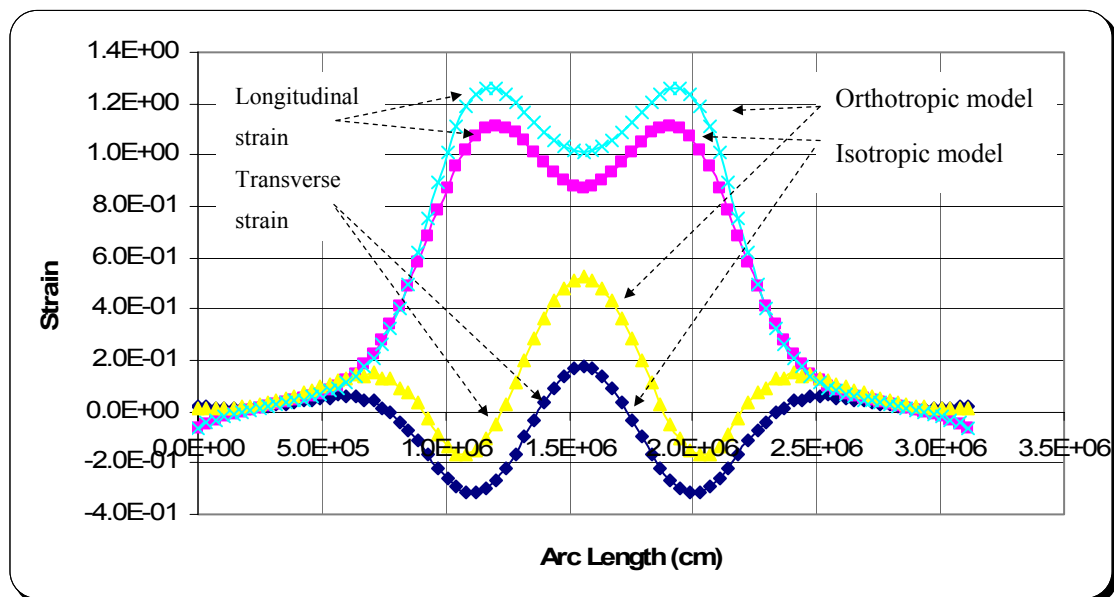


**Σχήμα 5.62:** Η μεταβολή της εγκάρσιας παραμόρφωσης σύμφωνα με τα αριθμητικά και τα πειραματικά αποτελέσματα (Kourkoulis and Agioutantis, 2004)

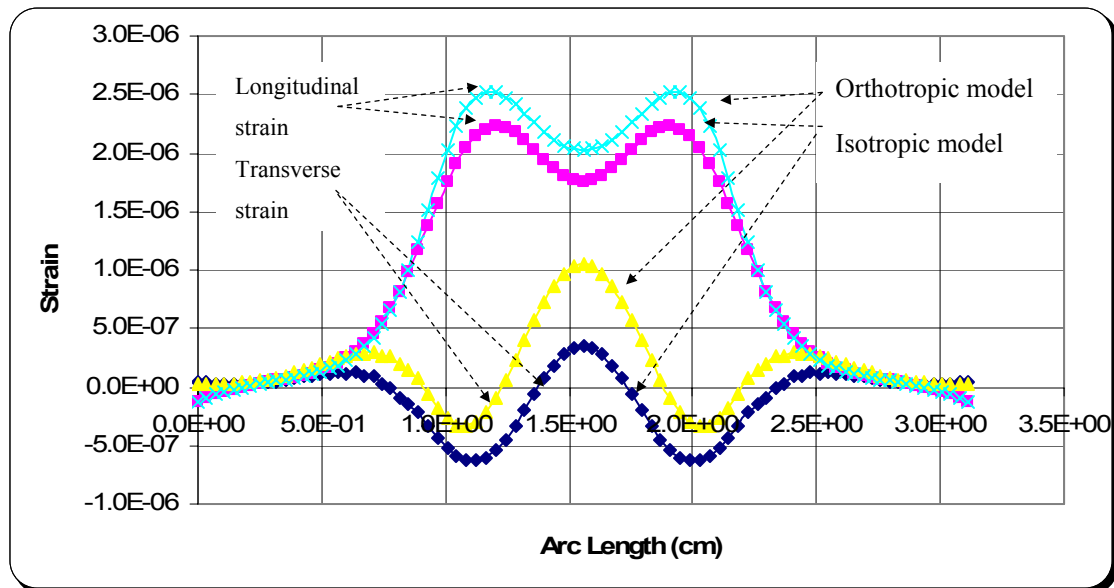
### 5.6.2 Σύγκριση αποτελεσμάτων για τα μοντέλα με εγκοπή τύπου-U

Τα συγκριτικά αποτελέσματα από την αριθμητική επίλυση για την περίπτωση της προσομοίωσης του Διονυσιακού μαρμάρου σαν ισότροπο και ορθότροπο ελαστικό υλικό με εγκοπή τύπου-U με βάθος σχισμής 1cm, φαίνονται στα σχήματα που ακολουθούν. Η σύγκριση γίνεται ανάμεσα στα ισότροπα και ορθότροπα μοντέλα για τις διαμήκεις και εγκάρσιες παραμορφώσεις και για φορτίο 50% και 100% του μέγιστου φορτίου, σύμφωνα με ένα καρτεσιανό σύστημα αναφοράς κατά μήκος ενός ημικυκλικού περιγράμματος με ακτίνα 3mm και 11,5cm γύρω από την εγκοπή.

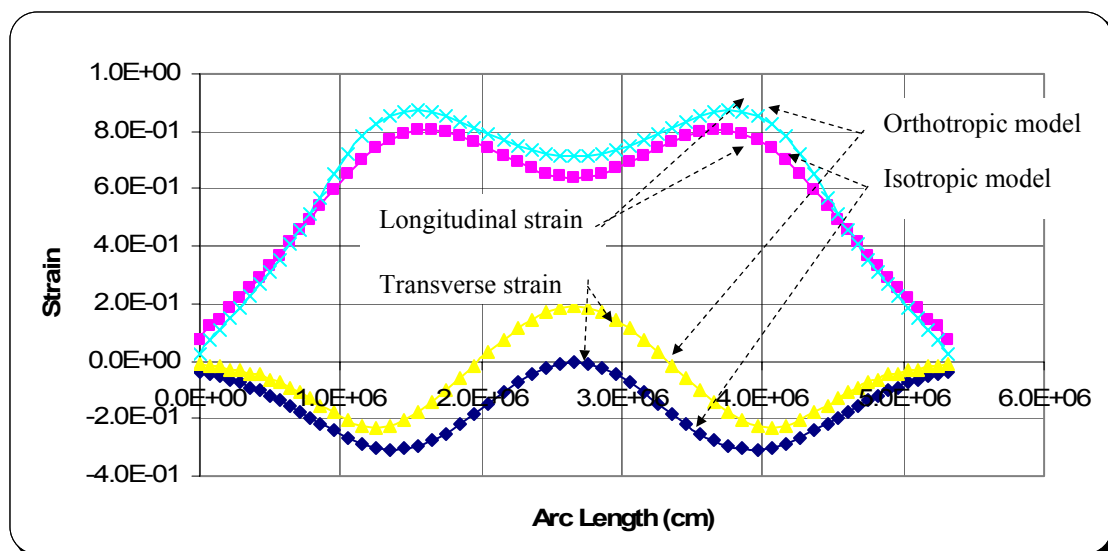




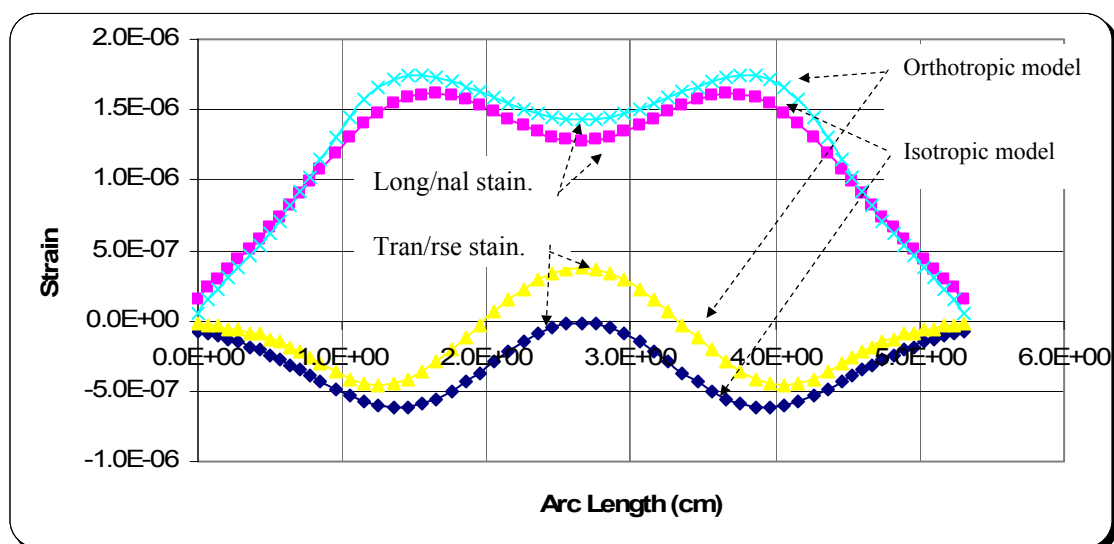
Σχήμα 5.63: Η μεταβολή των παραμορφώσεων στο ισότροπο και ορθότροπο μοντέλο για παράλληλη απόσταση 3mm από την εγκοπή για φορτίο 50% του μεγίστου.



Σχήμα 5.64: Η μεταβολή των παραμορφώσεων στο ισότροπο και ορθότροπο μοντέλο για παράλληλη απόσταση 3mm από την εγκοπή για φορτίο 100% του μεγίστου



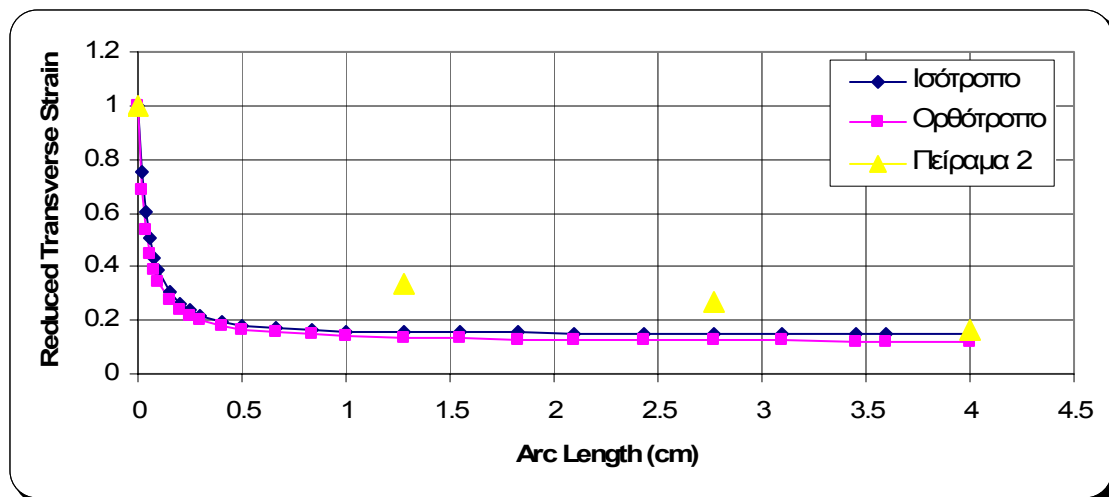
Σχήμα 5.65: Η μεταβολή των παραμορφώσεων στο ισότροπο και ορθότροπο μοντέλο για παράλληλη απόσταση 11,5mm από την εγκοπή για φορτίο 50% του μεγίστου.



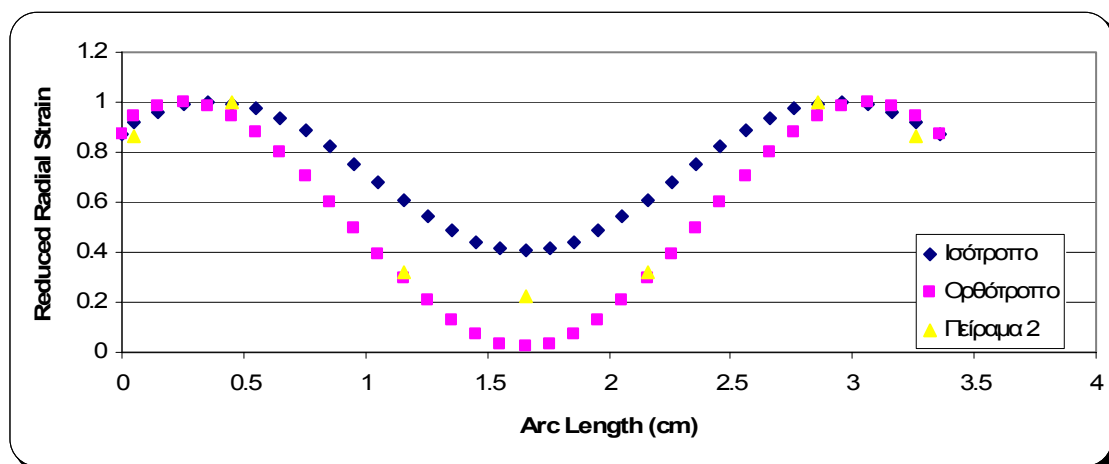
Σχήμα 5.66: Η μεταβολή των παραμορφώσεων στο ισότροπο και ορθότροπο μοντέλο για παράλληλη απόσταση 11,5mm από την εγκοπή για φορτίο 100% του μεγίστου.

Στο σχήμα 5.67 σχεδιάζεται η μεταβολή της εγκάρσιας παραμόρφωσης κατά μήκος της γραμμής για  $\theta=0^\circ$  σχεδιάζεται με βάση τις πειραματικές μετρήσεις, καθώς επίσης και από την αριθμητική επίλυση. Τα αποτελέσματα της αριθμητικής επίλυσης σχεδιάζονται και για το ισότροπο και για το ορθότροπο.

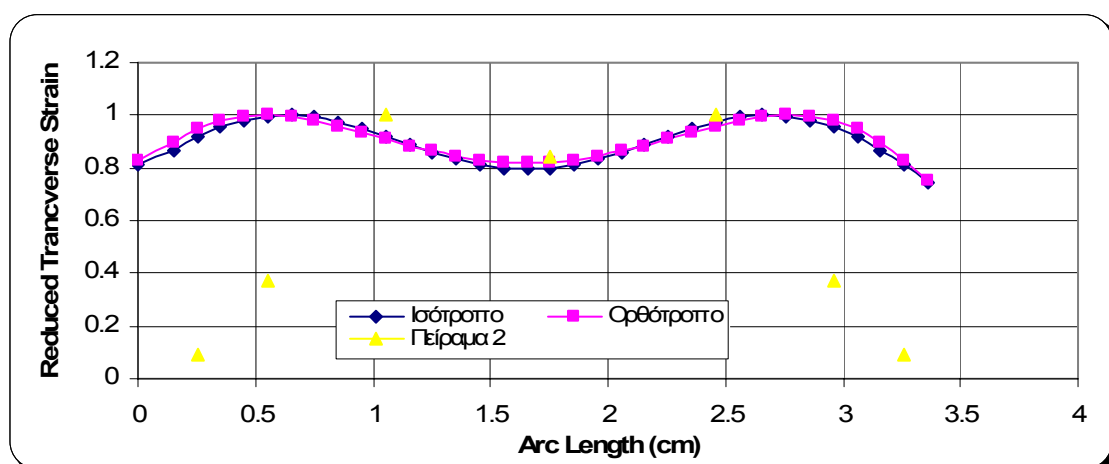
Επίσης στα σχήματα 5.68 και 5.69 σχεδιάζεται σε πολικό διάγραμμα η ανηγμένη διαμήκης και εγκάρσια παραμόρφωση για μήκος τόξου 1,15cm γύρω από την εγκοπή.



Σχήμα 5.67: Ακτινικό διάγραμμα ανηγμένης εγκάρσιας παραμόρφωσης για  $0^\circ$  μοίρες από την άκρη της εγκοπής μέχρι το μέσο του δοκιμίου



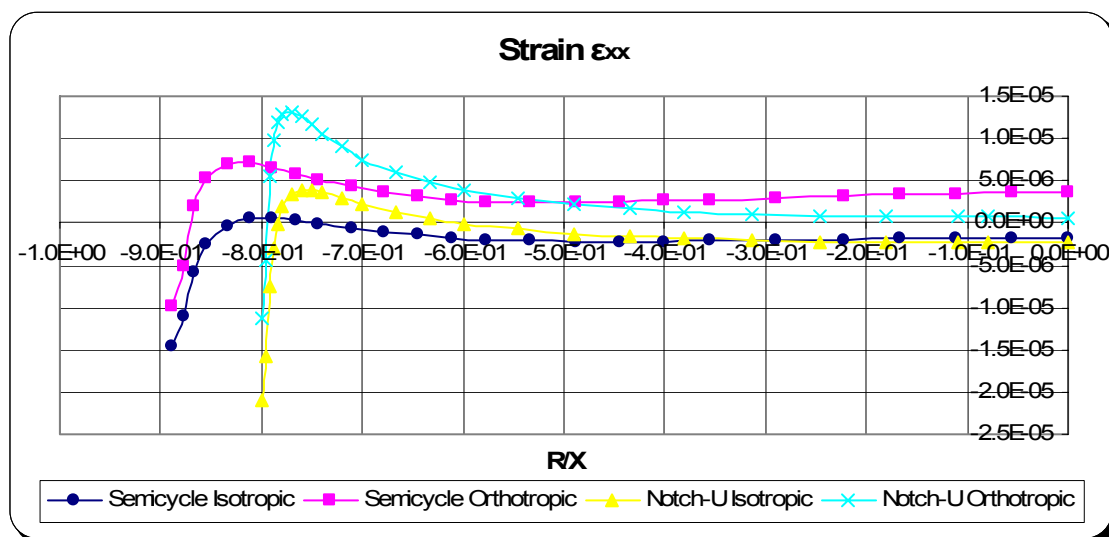
Σχήμα 5.68: Πολικό διάγραμμα ανηγμένης διαμήκης παραμόρφωσης για μήκος τόξου 1,15cm από την εγκοπή



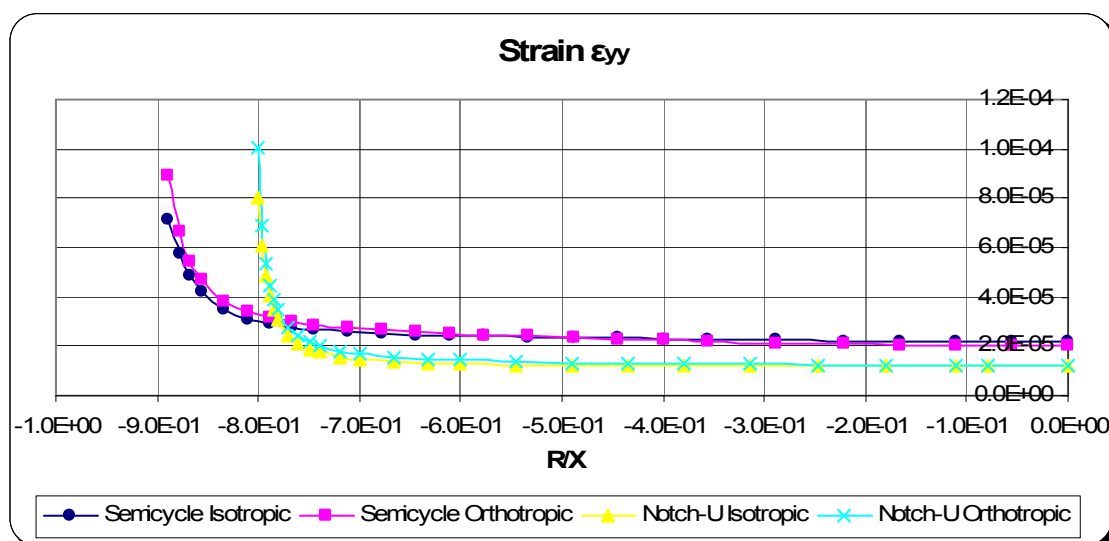
Σχήμα 5.69: Πολικό διάγραμμα ανηγμένης εγκάρσιας παραμόρφωσης για μήκος τόξου 1,15cm από την εγκοπή

### 5.6.3 Σύγκριση αποτελεσμάτων από συνδυασμό όλων των μοντέλων

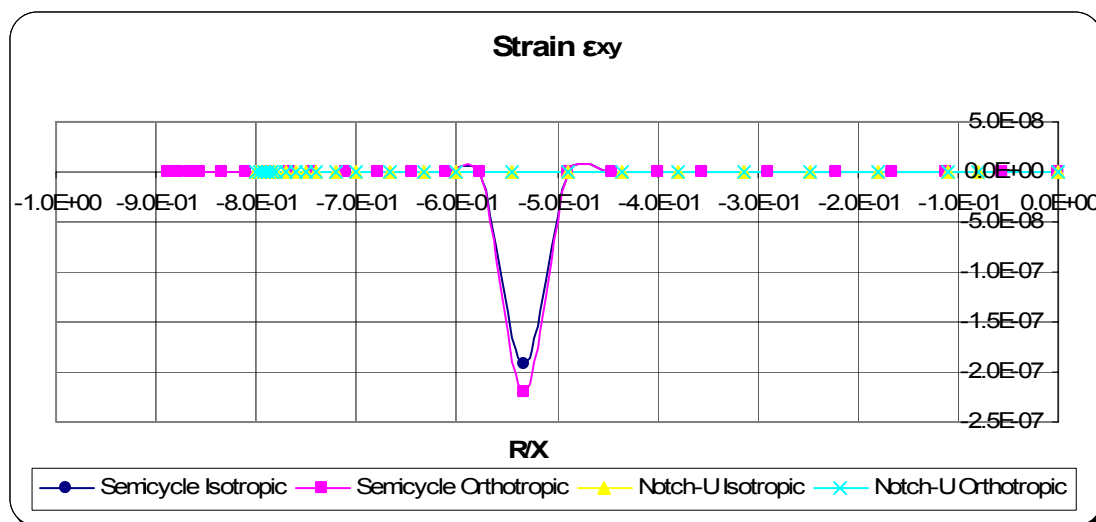
Στα διαγράμματα που ακολουθούν γίνεται σύγκριση μεταξύ των αποτελεσμάτων από τα μοντέλα με εγκοπή-U και για το ισότροπο και για το ορθότροπο μοντέλο, και για τα μοντέλα με ημικυκλική εγκοπή με ακτίνα 1cm. Τα διαγράμματα αρχίζουν από το κέντρο του δοκιμίου κατά μήκος όλου του πλάτους του μοντέλου μέχρι την κορυφή των εγκοπών και δίνουν τις μεταβολές των παραμορφώσεων  $\epsilon_{xx}$ ,  $\epsilon_{yy}$ ,  $\epsilon_{xy}$ , αντίστοιχα σε κάθε διάγραμμα. Η σύγκριση γίνεται μεταξύ των διαφορετικών γεωμετριών των μοντέλων και μεταξύ των ισότροπων και ορθότροπων μοντέλων.



Σχήμα 5.70: Η μεταβολή της διαμήκων παραμορφώσεων στο ισότροπο και ορθότροπο μοντέλο για όλους τους τύπους εγκοπής..



Σχήμα 5.71: Η μεταβολή των εγκάρσιων παραμορφώσεων στο ισότροπο και ορθότροπο μοντέλο για όλους τους τύπους εγκοπής..



**Σχήμα 5.72:** Η μεταβολή των διατμητικών παραμορφώσεων στο ισότροπο και ορθότροπο μοντέλο για όλους τους τύπους εγκοπής..

Παρατηρώντας τα διαγράμματα των διαμήκων και εγκάρσιων παραμορφώσεων συμπεραίνεται ότι για τις διαμήκες παραμορφώσεις ο συντελεστής μεταβολής των τάσεων από το κέντρο του δοκιμίου μέχρι την εγκοπή για την μεν ημικυκλική είναι περίπου 2,5 ενώ για την εγκοπή τύπου-U είναι περίπου 10 με τις τιμές των ορθότροπων μοντέλων να είναι λίγο μεγαλύτερες, αντίστοιχα είναι και τα αποτελέσματα που εξάγονται και από το διάγραμμα των εγκάρσιων παραμορφώσεων. Συμπέρασμα αυτών είναι ότι οι εγκοπές τύπου-U σε σχέση με τις ημικυκλικές εγκοπές επιφέρουν πολύ μεγαλύτερες συγκεντρώσεις τάσεων, που είναι πολύ λογικό αφού όσο τείνει η εγκοπή να πάρει την μορφή σχισμής τόσο αυξάνεται και ο συντελεστής συγκέντρωσης τάσεων.

Τέλος παρατηρώντας το τελευταίο διάγραμμα των διατμητικών παραμορφώσεων γίνεται σαφές ότι οι διατμητικές παραμορφώσεις κατά μήκος στο μέσο του δοκιμίου τείνουν στο μηδέν όπως είναι και θεωρητικά σωστό.

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6<sup>ο</sup>

### ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ ΚΑΙ ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ

#### 6.1 ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Στην παρούσα εργασία μελετήθηκε το πρόβλημα του άμεσου εφελκυσμού σε δοκίμια τύπου *dogbone* με διαφορετικές γεωμετρίες εγκοπών με την συμβολή της Μεθόδου των Πεπερασμένων Στοιχείων. Όσον αφορά τα υλικά, το πρόβλημα επικεντρώθηκε στο Διονυσιακό μάρμαρο, ενώ τα αποτελέσματα που προέκυψαν από την αριθμητική επίλυση συγκρίθηκαν με πειραματικά αποτελέσματα από μια σειρά δοκιμών άμεσου εφελκυσμού που έλαβε χώρα στο εργαστήριο αντοχής υλικών του Ε.Μ.Π.

Η αριθμητική επίλυση με την Μέθοδο των Πεπερασμένων Στοιχείων, πραγματοποιήθηκε σε δύο διαστάσεις με την θεώρηση επίπεδης παραμόρφωσης. Η διακριτοποίηση των μοντέλων έγινε με τρόπο ώστε οι διαστάσεις τους να συμπίπτουν με αυτές των πραγματικών δοκιμίων. Το Διονυσιακό μάρμαρο προσομοιώθηκε σαν ισότροπο ελαστικό υλικό, αλλά και σαν γραμμικά ελαστικό εγκαρσίως ισότροπο υλικό. Η μελέτη αυτή στο πρώτο μέρος της επικεντρώνεται στην μοντελοποίηση δοκιμίων με ημικυκλική εγκοπή ακτίνας 1 και 2cm, ενώ στο δεύτερο μέρος σε δοκίμια με εγκοπή τύπου-U μήκους 1cm και πλάτους 0,3cm.

Ανακεφαλαιώνοντας, από την εργασία αυτή προέκυψαν τα ακόλουθα συμπεράσματα:

- Για τα μοντέλα με ημικυκλική εγκοπή 1cm και 2cm όπως και για τα μοντέλα με εγκοπή τύπου-U, οι παραμορφώσεις πολικά γύρω από την εγκοπή στη περίπτωση που το υλικό θεωρείται ορθότροπο υπερβαίνουν τις αντίστοιχες τιμές των παραμορφώσεων του ισότροπου μοντέλου. Η διαφορά στις τιμές είναι πιο έντονη για τις διαμήκεις παραμορφώσεις στην μέση του ημικυκλίου.

- Μια ζώνη διαδικασίας (process zone) αναπτύσσεται γύρω από την κορώνα των εγκοπών ανεξαρτήτου γεωμετρίας, δίνοντας τη μακροσκοπική σχέση αξονικής τάσης-αξονικής παραμόρφωσης μη-γραμμική από τα αρχικά βήματα φόρτισης.
- Ένα ακόμα στοιχείο στα αποτελέσματα της σύγκρισης αριθμητικών και πειραματικών δεδομένων με τη θεωρία, όσον αφορά τα διαμήκη διαγράμματα, είναι η σωστή απεικόνιση της εμφάνισης «κοιλιάς» στην κεντρική περιοχή του δοκιμίου. Τα περισσότερα πειραματικά καθώς και τα αριθμητικά δεδομένα αναπαριστούν σωστά το τασικό πεδίο στην περιοχή αυτή, πλησιάζοντας επαρκώς την μηδενική τιμή.
- Η ημικυκλική εγκοπή ενισχύει τις εγκάρσιες παραμορφώσεις κατά 2,7 φορές ενώ η εγκοπή τύπου-U κατά 10 φορές, αποτελέσματα που συμφωνούν με τα πειραματικά δεδομένα και την θεωρία.
- Η επιρροή της ημικυκλικής εγκοπής αποβάλλεται γρήγορα: Για  $r/\rho \geq 2$  είναι σχεδόν αμελητέα.
- Τα αποτελέσματα της αριθμητικής επίλυσης είναι σε πολύ καλή συμφωνία με τα αντίστοιχα πειραματικά, ειδικά για τα μοντέλα με ημικυκλική εγκοπή.
- Αποκλίσεις παρατηρούνται για τα σημεία που βρίσκονται πολύ κοντά ή μέσα στη ζώνη διαδικασίας.
- Οι διαφορές των αποτελεσμάτων μεταξύ ισότροπων και ορθότροπων μοντέλων δεν υπερβαίνουν το 20%.

Ολοκληρώνοντας την διπλωματική αυτή εργασία, πρέπει να αναφερθούν οι αδυναμίες της. Ξεκινώντας από το ίδιο το υλικό, το μάρμαρο Διονύσου, πρέπει να γίνει κατανοητό στον αναγνώστη, ότι η προσέγγιση του, ως ισότροπο ή εγκαρσίως ισότροπο, δεν είναι απολύτως σωστή. Ενώ στις περισσότερες πρακτικές περιπτώσεις η παραδοχή αυτή δεν οδηγεί σε μεγάλα σφάλματα, το γεγονός παραμένει ότι, αυστηρώς ορισμένο, το μάρμαρο Διονύσου παραμένει ένα ανισότροπο υλικό.

Οι δύο διευθύνσεις για τις οποίες έγινε η θεώρηση του ισότροπου υλικού στην πραγματικότητα έχουν μία απόκλιση της τάξεως του 6% στο μέτρο ελαστικότητας και 10,5% στην εφελκυστική αντοχή. Γίνεται κατανοητό, ότι ενώ οι αποκλίσεις αυτές γίνονται αποδεκτές, μπορούν να οδηγήσουν σε παρεκκλίσεις από την πραγματικότητα οι οποίες οφείλουν να σημειωθούν.

Ένα ακόμα σημείο το οποίο πρέπει να επισημανθεί είναι η παραδοχή της γραμμικότητας που έγινε στο αριθμητικό προσομοίωμα. Παρότι κάτι τέτοιο ισχύει μέχρι και το 67%, περίπου, της τάσης θραύσεως του υλικού, η παραδοχή αυτή είναι εσφαλμένη σε ολόένα και μεγαλύτερο βαθμό όσο η φόρτιση πλησιάζει την τιμή θραύσεως.

## 6.2 ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ

Για την περαιτέρω μελέτη του προβλήματος του άμεσου εφελκυσμού, προτείνεται η προσομοίωση του προβλήματος με την Μέθοδο των Πεπερασμένων Στοιχείων σε τρεις διαστάσεις, για την λεπτομερέστερη εξαγωγή αποτελεσμάτων σχετικά με το πεδίο τάσεων και παραμορφώσεων. Επίσης, το πρόβλημα θα μπορούσε να μελετηθεί συναρτήσει της επίδρασης του μεγέθους (size effect) των δοκιμίων, καθώς είναι γνωστό ότι η αντοχή των υλικών εξαρτάται και από το μέγεθος των δοκιμίων.

Ακόμα θα μπορούσε να πραγματοποιηθεί υπολογισμός της ελαστοπλαστικής περιοχής (elastic-plastic boundary condition) γύρω από τις εγκοπές, για σύγκριση με την πειραματική ζώνη διαταραχής (process zones) που δημιουργείται γύρω από τις εγκοπές στα πειραματικά δοκίμια.



## ***ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ***

### ***ΔΙΕΘΝΗΣ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ***

1. Anderson, T.L., (1995). “Fracture Mechanics: Fundamentals and Applications”, 2<sup>nd</sup> Edition, CRC Press, Boca Raton, Florida, USA.
2. Dally J.W and W.F Riley, (1991). “Experimental Stress Analysis”, Third Edition, McGraw Hill.
3. Kourkoulis, S.K. and Agioutantis, Z., (2004). “Transversely Isotropic Marble Plates Under Tension”, 12th International Conference on Experimental Mechanics. Politecnico Bari, Italia.
4. Kourkoulis, S.K., Exadaktylos, G.E. and Vardoulakis, I., (1999). “U-Notched Dionysos-Pentelicon Marble Beams in Three Point Bending: The Effect of Nonlinearity, Anisotropy and Microstructure”, International Journal of Fracture 98: 369-392, 1999.
5. Kourkoulis, S.K. and Stavropoulou, M.C., (1999). “Local Strains due to Punch Effect in Three Point Bending of Marble Beams”, 9<sup>th</sup> International Society for Rock Mechanics, Paris, France.
6. Kotousov, A. and Wang, C.H., (2002). “Tree-dimensional stress constraint in an elastic plate with a notch”, International Journal of Solids and Structures 39: 4311-4326.
7. Lazzarin, P. and Tovo, R., (1996). “A Unified Approach to the Evaluation of Linear Elastic Fields in the Neighborhood of Cracks and Notches”, International Journal of Fracture: 78: 3-19.
8. Li, Z. and Guo, W., (2001). “Tree-Dimensional Elastic Stress Fields Near Notches in Finite Thick Plates”, International Journal of Solids and Structures 37: 7617-7631.

9. Li, Z., Guo, W., (2001). “Tree-Dimensional Elastic Stress Fields Ahead of Blunk V Notches in Finite Thickness Plate”, International Journal of Fracture 107: 53-71.
10. MARC Analysis Research Corporation, Users' Manuals, 1995-1998.
11. Potts, D. and Zdravkovic, L. (1999). “Finite Element Analysis in Geotechnical Engineering”, Thomas Telford.
12. Whittaker, B.N., Singh, R.N. and Sun, G. (1992). “Rock Fracture Mechanics”, Elsevier Science Publishers B.V., Amsterdam, The Netherlands.
13. Wang, C.H., Guo, W., Rose and L.R.F., (1999). “A Method for Determining the Elastic-Plastic Response Ahead of a Notch Tip” J. Eng. Mater. Technol. 121: 313-320.

### ***ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ***

1. Αγιουτάντης, Ζ.Γ., (2002). “Στοιχεία Γεωμηχανικής, Μηχανική Πετρωμάτων”, Εκδόσεις ΙΩΝ, Αθήνα, Ελλάδα.
2. Βαρδουλάκης, Ι., Κουρκουλής, Σ., Εξαδάκτυλος, Γ., Ροζάκης, Α., (2002). “Μηχανικές Ιδιότητες και Συμβατότητα Φυσικών Δομικών Λίθων στα Αρχαία Μνημεία: Το Διονυσιακό Μάρμαρο”, Διεπιστημονική Ημερίδα «Ο Δομικός Λίθος στα Μνημεία», ΙΓΜΕ, Αθήνα, Ελλάδα.
3. Δημοπούλου, Μ, (2004). “Θεωρητική, Πειραματική και Αριθμητική Διερεύνηση της Αντιδιαμετρικής Φόρτισης Δακτυλίου σε Μάρμαρο Διονύσου”, Μεταπτυχιακή διατριβή, Χανία.