



ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ ΚΡΗΤΗΣ

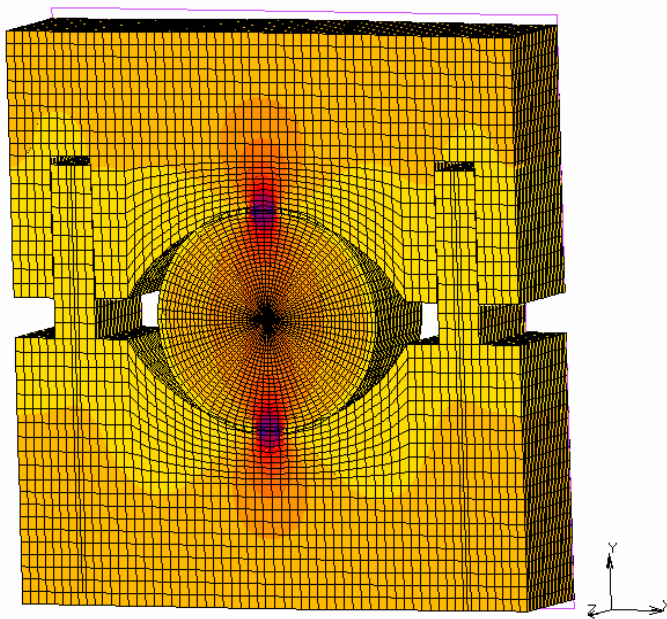
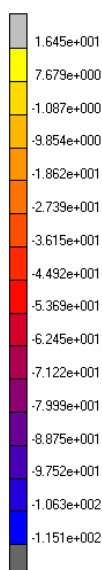
ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΟΡΥΚΤΩΝ ΠΟΡΩΝ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

«ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΚΑΙ ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ ΤΟΥ ΕΝΤΑΤΙΚΟΥ ΚΑΙ ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΙΑΚΟΥ ΠΕΔΙΟΥ ΣΕ ΒΡΑΖΙΛΙΑΝΟ ΔΙΣΚΟ ΜΕ ΡΩΓΜΗ ΚΑΙ ΕΓΚΟΠΗ»

ΕΡΝΕΣΤΟΣ Ν. ΣΑΡΡΗΣ

Time: 1.000e+000



lcase1
Elem 11 of Stress

ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΗ ΕΠΙΤΡΟΠΗ:

Δρ. Ζαχαρίας Αγιουτάντης, Καθηγητής Π.Κ (Επιβλέπων)

Δρ. Γεώργιος Εξαδάκτυλος, Καθηγητής Π.Κ

Δρ. Κουρκουλής Σταύρος, Επίκουρος Καθηγητής Ε.Μ.Π

Χανιά, Σεπτέμβριος 2005

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Η εργασία αυτή εκπονήθηκε με σκοπό την μελέτη του σύνθετου φαινομένου του εντατικού και παραμορφωσιακού πεδίου που δημιουργείται κατά την δοκιμή του κλασσικού Βραζιλιανού δίσκου με ρωγμή και εγκοπή, με την βοήθεια της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων.

Για την πραγματοποίηση της παρούσας εργασίας θα ήθελα να εκφράσω τις ευχαριστίες μου:

- Στον **κ. Αγιουτάντη Ζαχαρία**, Καθηγητή του Πολυτεχνείου Κρήτης και επιβλέποντα, για την επιλογή του θέματος, την άριστη συνεργασία που είχαμε, καθώς επίσης και για την αμέριστη συμπαράσταση του με τις συμβουλές αλλά και για την διόρθωση της εργασίας αυτής.
- Στον **κ. Εξαδάκτυλο Γεώργιο**, Καθηγητή του Πολυτεχνείου Κρήτης και συνεπιβλέποντα, για τις πολύτιμες συμβουλές σε θέματα θραυστομηχανικής καθώς επίσης και στο χρόνο που διέθεσε για την διόρθωση και εξέταση της εργασίας αυτής.
- Στον **κ. Κουρκουλή Σταύρο**, Επίκουρο Καθηγητή του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου, για τις συμβουλές και συνεργασία του, καθώς επίσης και τον χρόνο που διέθεσε για την διόρθωση και την εξέταση της εργασίας αυτής.

Στην προσπάθεια για την ολοκλήρωση της εργασίας αυτής συνέβαλαν και άλλοι συνεργάτες που θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά:

Τον επιστημονικό συνεργάτη του εργαστηρίου Μελέτης και Σχεδιασμού Εκμεταλλεύσεων, **κ. Κακλή Κωνσταντίνο** για την ουσιαστική συμβολή του στα κεφάλαια 5, 6 και 7.

Την επιστημονική συνεργάτιδα του εργαστηρίου Μηχανικής Πετρωμάτων **κα. Ειρήνη Καλογήρου** για τα σχόλια, διορθώσεις, παρατηρήσεις και συμπαράσταση της κατά την συγγραφή του κειμένου.

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στην παρούσα εργασία πραγματοποιήθηκε αριθμητική προσομοίωση της κλασσικής δοκιμής του Βραζιλιανού δίσκου υπό την επίδραση προϋπάρχουσων ρωγμών καθώς επίσης και εγκοπών σε διάφορους προσανατολισμούς, με σκοπό την ανάλυση της δημιουργίας του εντατικού και παραμορφωσιακού πεδίου που οδηγεί το δείγμα στην αστοχία. Βασικός στόχος είναι η αναπαραγωγή των συνθηκών που επικρατούν κατά την διάρκεια της δοκιμής στο εργαστήριο και η καλύτερη δυνατή προσομοίωση για την μελέτη της δημιουργίας ρωγμών όταν το δείγμα φτάσει κοντά στο σημείο έναρξης της θραύσης του.

Η μελέτη δημιουργίας του εντατικού και παραμορφωσιακού πεδίου καθώς επίσης και η δημιουργία ρωγμών είναι μεγάλης σημασίας για ένα μηχανικό διότι αυτές οι παράμετροι καθορίζουν τις αντοχές του δοκιμίου και κατ' επέκταση τις αντοχές μιας γεωκατασκευής. Τα καταστατικά μοντέλα προσομοίωσης μπορεί να χρησιμοποιηθούν ως εργαλείο υπολογισμού του εντατικού και παραμορφωσιακού πεδίου όταν δεν υπάρχουν μαθηματικές λύσεις κλειστής μορφής για την επίτευξη σύγκρισης με τα εργαστηριακά αποτελέσματα που μπορεί δώσουν οι εργαστηριακές δοκιμές. Προβλέπουν γενικά, τους μηχανισμούς που προκάλεσαν την αστοχία ή δημιουργία ρωγμών κατά την διάρκεια της δοκιμής και τις διάφορες επιδράσεις που μπορεί να επέλθουν από το εντατικό πεδίο.

Για την προσομοίωση της δοκιμής του Βραζιλιανού δίσκου δημιουργήθηκαν διάφορα δισδιάστατα μοντέλα τα οποία επιλύθηκαν με την μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων με το λογισμικό πακέτο "Marc, Mentat-2000" και μελετήθηκαν σε συνθήκες επίπεδης κατάστασης.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1	1
Εισαγωγή	1
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2	7
Βασικές Εξισώσεις της Ισότροπης Θεωρίας της Ελαστικότητας	7
2.1 Εισαγωγή	7
2.2 Ορισμός του προβλήματος	7
2.3 Βασικές εξισώσεις	9
2.4 Το Επίπεδο ελαστικό πρόβλημα	12
2.5 Προσέγγιση επίπεδης παραμόρφωσης	14
2.6 Προσέγγιση επίπεδης τάσης	16
2.7 Αρχή του Saint-Venant	18
2.8 Τασική συνάρτηση του Airy	19
2.9 Τασική συνάρτηση του Airy σε καρτεσιανές συντεταγμένες	22
2.9.1 Συνάρτηση του Airy υπό μορφή πρώτης τάξης πολυωνύμου	22
2.9.2 Συνάρτηση του Airy υπό μορφή δευτέρας τάξης πολυωνύμου	22
2.9.3 Συνάρτηση του Airy υπό μορφή τρίτης τάξης πολυωνύμου	23
2.9.4 Συνάρτηση του Airy υπό μορφή τετάρτης τάξης πολυωνύμου	23
2.9.5 Συνάρτηση του Airy υπό μορφή πέμπτης τάξης πολυωνύμου	24
2.10 Δισδιάστατα προβλήματα σε πολικές συντεταγμένες	25
2.11 Μετασχηματισμός της διαρμονικής εξίσωσης σε πολικές συντεταγμένες	27
2.12 Πολικές συνιστώσες των τάσεων συναρτήσει της τασικής συνάρτησης Airy	29
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3	31
Δοκιμή του Βραζιλιανού Δίσκου	31
3.1 Γενικά	31
3.2 Τάσεις σε κυκλικό δίσκο	32
3.3 Κατανομή των τάσεων στο Βραζιλιανό δίσκο	36
3.4 Συνθήκη θραύσης του δίσκου	38
3.5 Αναλυτική λύση του αντιδιαμετρικά φορτιζόμενου δίσκου	41
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4	49
Θεωρία Griffith και Θραυστομηχανική	49
4.1 Γενικά	49
4.2 Εισαγωγή	49
4.2.1 Αντοχή σε εφελκυσμό	49
4.2.2 Αντοχή σε εφελκυσμό και προϋπάρχουσες ρωγμές	50
4.2.3 Έναρξη θραύσης και διάδοση της ρωγμής	50
4.2.4 Η έννοια της μαθηματικής ρωγμής	50
4.2.5 Τύποι ρωγμών	51
4.3 Θεωρία Griffith για το ισοζύγιο ενέργειας	51
4.4 Ενέργεια επί της ρωγμής	52

4.4.1 Έναρξη θραύσης και κρίσιμη ισορροπία	54
4.4.2 Τάση θραύσης σ_f	55
4.4.3 Ρυθμός απελευθέρωσης ενέργειας παραμόρφωσης G	55
4.4.4 Αντίσταση στην έναρξη θραύσης R	56
4.5 Κριτήριο αστοχίας Griffith	57
4.5.1 Ανοιχτή ελλειπτική ρωγμή σε διαξονικό πεδίο	57
4.5.2 Συνιστώσες τάσεων στην ελλειπτική ρωγμή	59
4.5.3 Κριτήριο αστοχίας και λόγος κυρίων τάσεων	62
4.5.4 Τροποποιημένο κριτήριο αστοχίας Griffith	65
4.6 Παραδοχές στην εφαρμογή της θεωρίας Griffith	66
4.7 Θραυστομηχανικές παράμετροι	66
4.7.1 Φόρτιση και τύποι ρωγμών	67
4.7.2 Τάσεις και μετατοπίσεις στις ρωγμές σε καρτεσιανές και πολικές συντεταγμένες	67
4.7.3 Συντελεστής έντασης των τάσεων K	71
4.7.4 Έναρξη ρωγμής σε θλιπτικό εντατικό πεδίο	73
4.7.4.1 Περίπτωση ανοιχτής ρωγμής	73
4.7.4.2 Περίπτωση κλειστής ρωγμής	74
4.7.5 Έναρξη ρωγμής από αμβλείες εγχοπές σε θλιπτικό εντατικό πεδίο	74
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5	76
Αριθμητική Επίλυση του Βραζιλιανού Δίσκου	76
5.1 Εισαγωγή	76
5.2 Μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων	77
5.3 Επίλυση του προβλήματος της αντιδιαμετρικής θλίψης άρρηκτου δίσκου	79
5.3.1 Γεωμετρία και διακριτοποίηση	79
5.3.2 Ιδιότητες υλικού	80
5.3.3 Συνοριακές συνθήκες και φόρτιση	80
5.3.4 Γεωμετρικές ιδιότητες	83
5.3.5 Ανάλυση των τάσεων	86
5.3.5.1 Σταθερή γωνία επιβολής φορτίου (2α) και μεταβαλλόμενος ο προσανατολισμός γραμμής μελέτης (θ)	87
5.3.5.2 Σταθερός ο προσανατολισμός γραμμής μελέτης (θ) και μεταβαλλόμενη η γωνία επιβολής φορτίου (2α)	99
5.3.6 Υπολογισμός συγκέντρωσης των τάσεων (ΣΕΤ) q_{xx} και q_{yy}	104
5.3.7 Σύγκριση αναλυτικής λύσης με την αριθμητική επίλυση	105
5.3.8 Εφαρμογή του κριτηρίου Griffith	108
5.3.9 Ισοστατικές καμπύλες	110
5.3.10 Ανάλυση παραμορφώσεων	111
5.4 Επίλυση του προβλήματος της αντιδιαμετρικής θλίψης άρρηκτου δίσκου με χαλύβδινες σιαγόνες	114
5.4.1 Υπολογισμός επιφάνειας επαφής σιαγώνας με τον δίσκο	114
5.4.2 Γεωμετρία	116
5.4.3 Γεωμετρικές ιδιότητες	117
5.4.4 Συνοριακές συνθήκες και διακριτοποίηση	117
5.4.5 Ιδιότητες υλικών	118
5.4.6 Προβλήματα και στοιχεία επαφής	118
5.4.7 Συγκριτικά αποτελέσματα επίλυσης με τις χαλύβδινες σιαγόνες	120

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6	124
Αριθμητική Επίλυση του Ρωγματωμένου Βραζιλιανού Δίσκου	124
6.1 Εισαγωγή	124
6.2 Επίλυση του προβλήματος της αντιδιαμετρικής θλίψης του ρωγματωμένου δίσκου	124
6.2.1 Γεωμετρία και διακριτοποίηση	125
6.2.2 Ιδιότητες υλικού	127
6.2.3 Συνοριακές συνθήκες	127
6.2.4 Γεωμετρικές ιδιότητες	127
6.2.5 Στοιχεία επαφής	127
6.2.6 Ανάλυση των τάσεων	128
6.2.7 Εφαρμογή του κριτηρίου Griffith	134
6.2.8 Ισοτασικές καμπύλες	137
6.2.9 Υπολογισμός συντελεστών έντασης των τάσεων	138
6.3 Επίλυση του προβλήματος της αντιδιαμετρικής θλίψης ρωγματωμένου δίσκου με τις χαλύβδινες σιαγώνες	141
6.3.1 Υπολογισμός επιφάνειας επαφής σιαγώνας με τον δίσκο	141
6.3.2 Γεωμετρία	141
6.3.3 Γεωμετρικές ιδιότητες	142
6.3.4 Συνοριακές συνθήκες και διακριτοποίηση	142
6.3.5 Ιδιότητες υλικών	143
6.3.6 Στοιχεία επαφής	144
6.3.7 Αποτελέσματα επίλυσης με την χαλύβδινη σιαγόνα	144
6.3.7.1 Σταθερό το μήκος της ρωγμής (2L) και μεταβαλλόμενος ο προσανατολισμός της ρωγμής (ϕ)	145
6.3.7.2 Σταθερός ο προσανατολισμός της ρωγμής (ϕ) και μεταβαλλόμενο το μήκος της ρωγμής (2L)	150
6.4 Σύγκριση αποτελεσμάτων επίλυσης με σιαγώνες φόρτισης και χωρίς σιαγώνες φόρτισης	156
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7	158
Αριθμητική Επίλυση του Βραζιλιανού Δίσκου με Εγκοπή	158
7.1 Εισαγωγή	158
7.2 Επίλυση του προβλήματος της αντιδιαμετρικής θλίψης του δίσκου με εγκοπή	158
7.2.1 Γεωμετρία και διακριτοποίηση	159
7.2.2 Ιδιότητες υλικού	161
7.2.3 Συνοριακές συνθήκες	161
7.2.4 Γεωμετρικές ιδιότητες	161
7.2.5 Στοιχεία επαφής	161
7.2.6 Ανάλυση των τάσεων	162
7.2.7 Εφαρμογή του κριτηρίου Griffith	168
7.2.8 Ισοτασικές καμπύλες	171
7.2.9 Υπολογισμός συντελεστών έντασης των τάσεων	172
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 8	176
Συμπεράσματα και Προτάσεις	176

8.1 Συμπεράσματα	176
8.2 Προτάσεις	180
Βιβλιογραφία.....	182

1 Εισαγωγή

Οι γεωτεχνικοί μηχανικοί οι οποίοι ανήκουν στον κατασκευαστικό τομέα στοχεύουν στην εξασφάλιση της λειτουργικότητας της γεωκατασκευής που σχεδιάζουν για μεγάλα χρονικά διαστήματα με όσο το δυνατό πιο οικονομικό και τεχνικά άρτιο τρόπο. Για να σχεδιάσει ο γεωτεχνικός μηχανικός μια ασφαλή γεωκατασκευή θα πρέπει να μπορεί να εκτιμήσει με ποιο τρόπο η βραχομάζα μπορεί να φτάσει στην αστοχία, είτε στο σύνολο της είτε με αλληλεπίδραση του συνόλου της κατασκευής (π.χ φράγματα, θεμελιώσεις).

Μερικές από τις καταστροφές σε κατασκευές από διάφορα υλικά (πετρώματα, μέταλλα, σκυρόδεμα, κ.τ.λ), αποδίδονται σε κακούς θεωρητικούς υπολογισμούς ή στο γεγονός ότι οι κατασκευές βρέθηκαν εκτός των ορίων σχεδιασμού λειτουργίας τους. Γι' αυτό, πριν το σχεδιασμό ενός υπαίθριου ή υπόγειου έργου (πχ. στοών, σιράγγων κλπ) πρέπει να προηγείται ο λεπτομερής χαρακτηρισμός της βραχομάζας και ο ποιοτικός χαρακτηρισμός των γεωμηχανικών συνθηκών που επικρατούν. Το ανησυχητικό στοιχείο είναι όταν πολλές από τις καταστροφές δεν μπορούν να αποδοθούν στις παραπάνω αιτίες. Πρέπει λοιπόν να δοθεί μια καινούργια εξήγηση των φαινομένων αυτών (Αγιουτάντης, 2002).

Το πρόβλημα συνήθως ανάγεται στον προσδιορισμό των μέγιστων τάσεων που θα δημιουργηθούν στο πέτρωμα μετά την εξόρυξη ή γενικότερα στην κατανομή των τάσεων γύρω από το έργο. Πολλοί είναι οι παράγοντες που επηρεάζουν την κατανομή των τάσεων στη βραχομάζα όπως για παράδειγμα η μορφή του έργου, το μέγεθος και οι κατευθύνσεις των φορτίων, οι συνοριακές συνθήκες, κλπ. Ιδιαίτερα, για το σχεδιασμό του βέλτιστου συστήματος θραύσης ψαθυρών πετρωμάτων, είτε με ανατίναξη είτε με μηχανικό τρόπο, πρέπει να χαρακτηριστεί η αντοχή και η παραμορφωσιμότητα του πετρώματος (Αγιουτάντης, 2002).

Μέρος της έρευνας κατευθύνεται επίσης, στην αναζήτηση του ρόλου που παίζουν οι ατέλειες που βρίσκονται μέσα σε μια κατασκευή και πως αυτές τελικά επηρεάζουν τη διάρκεια ζωής της. Ατέλειες όπως είναι τα κενά, μπορεί να προϋπάρχουν στα υλικά από τα οποία απαρτίζεται η κατασκευή. Επιπλέον μπορούν να δημιουργηθούν κατά την κατασκευαστική φάση ή να εμφανιστούν κατά τη

διάρκεια χρήσης του έργου. Τέτοιες είναι οι εμφανιζόμενες μικροατέλειες εντός του υλικού, που οφείλονται στην κόπωση των μελών του έργου. Η περιγραφή μιας ατέλειας σε ένα σώμα πραγματοποιείται με την εισαγωγή της γεωμετρίας της. Στη συνέχεια αναζητείται το τασικό και παραμορφωσιακό πεδίο γύρω από την ατέλεια και οι συνθήκες κάτω από τις οποίες θα δημιουργηθεί ρωγμή και θα διαδοθεί εντός του σώματος, θεωρώντας ότι το υλικό είναι ομογενές, ισότροπο και γραμμικά ελαστικό (Δημοπούλου, 2004).

Μέχρι και σήμερα, τα κύρια ερωτήματα που καλούνται να απαντηθούν είναι:

- Ποια είναι η αντοχή της κατασκευής που φέρει ατέλεια, και πως εξαρτάται από τη γεωμετρία αυτής;
- Ποιο είναι το μέγιστο μέγεθος ρωγμής (κρίσιμο μέγεθος) αν υπάρχουν ρωγμές, για το οποίο η κατασκευή δεν θα αστοχήσει;
- Πως το μέγεθος των ατελειών της δομής του έργου συνδέεται με τα εφαρμοζόμενα εξωτερικά φορτία;
- Ποιο είναι το κρίσιμο φορτίο για να αρχίσει η ρωγμή να διαδίδεται;
- Ποιος είναι ο τρόπος διάδοσης της ρωγμής;

Για να απαντηθούν τα παραπάνω ερωτήματα εισάγονται μεγέθη της μηχανικής, τα οποία χαρακτηρίζουν την εντατική και παραμορφωσιακή κατάσταση του προβλήματος. Στην συνέχεια υπολογίζονται οι τιμές αυτών των μεγεθών, άμεσα ή έμμεσα στο εργαστήριο με την εκτέλεση πειραμάτων (Δημοπούλου, 2004).

Η αντοχή σε εφελκυσμό των πετρωμάτων είναι μια παράμετρος που σχετίζεται έντονα με πολλές από τις μηχανικές τους εφαρμογές (μηχανική συμπεριφορά των ορυκτών, διάτρηση και ανατίναξη των πετρωμάτων, στην αστοχία των πετρωμάτων σε υπόγειες και επιφανειακές εργασίες, όπως επίσης και στις κατασκευές). Για τον λόγο αυτό, είναι ενδιαφέρον να βρεθούν κατάλληλες εργαστηριακές μέθοδοι που θα οδηγήσουν στον προσδιορισμό της αντοχής των πετρωμάτων. Η διαδικασία που ακολουθείται ώστε να διαπιστωθεί ότι τα εφαρμοζόμενα φορτία δεν θα υπερβούν τα αναμενόμενα επίπεδα αντοχής του πετρώματος, για δεδομένες συνθήκες εξόρυξης, και να εξασφαλιστεί η ευστάθεια του έργου, είναι η εφαρμογή ενός τυπικού πειράματος σε δοκίμια από το υλικό που θα χρησιμοποιηθεί για να γίνει μια κατασκευή. Αν η μέγιστη υπολογιζόμενη τάση στην κατασκευή πολλαπλασιαζόμενη με ένα κατάλληλο συντελεστή ασφαλείας, είναι

μικρότερη από τη μέση αντοχή που κατέδειξαν τα πειράματα, τότε η κατασκευή θεωρείται ασφαλής (Κακλής, 2003).

Γενικά οι μέθοδοι μέτρησης της αντοχής διακρίνονται σε άμεσους και έμμεσους (Δημοπούλου, 2004):

- Άμεση μέθοδος μετρήσεων είναι η άσκηση εφελκυσμού στα άκρα κυλινδρικού δοκιμίου ή δοκιμίου άλλου σχήματος.
- Οι έμμεσες μέθοδοι περιλαμβάνουν τους ακόλουθους τύπους φόρτισης:
 - 1) Κάμψη σε πρισματικά, κυλινδρικά δοκίμια και δίσκους,
 - 2) Υδραυλικός εφελκυσμός,
 - 3) Διαμετρική συμπίεση σε δίσκους και δακτυλίδιους,
 - 4) Διαμετρική συμπίεση σε κυλίνδρους, σφαίρες και κύβους.

Πρέπει να σημειωθεί ότι οι έμμεσες μέθοδοι μέτρησης της αντοχής έχουν τα ακόλουθα μειονεκτήματα:

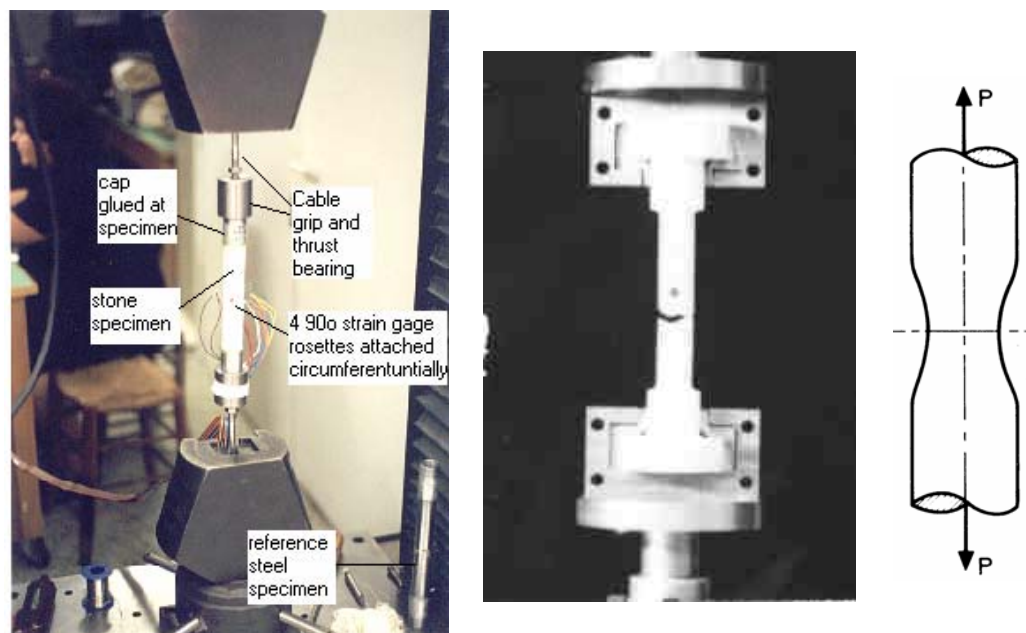
- Εντός του δοκιμίου αναπτύσσεται ανομοιόμορφο εντατικό πεδίο και
- η θραύση πολλές φορές αρχίζει από περιοχές συμπίεσης παρά εφελκυσμού.

Από την υπάρχουσα βιβλιογραφία προκύπτει ότι κάθε είδος εργαστηριακής δοκιμής (άμεσες και έμμεσες) δίνει δική της τιμή για την αντοχή του ίδιου υλικού. Οι λόγοι είναι πολλαπλοί: φυσικές ασυνέχειες του υλικού που το θραύουν σε χαμηλότερη τάση, ανομοιογένεια στη δομή του, μη τέλεια γραμμικά ελαστική συμπεριφορά σε όλη τη μάζα του κ.α. Στην περίπτωση της δοκιμής δακτυλίου, από φυσικής πλευράς, η οπή δεν είναι σημαντική, αλλά θεωρητικά, αντιπροσωπεύει μια ασυνέχεια στην ελαστική συνέχεια του υλικού (Hudson, 1969).

Άμεσος Εφελκυσμός

Η συμβατική μέθοδος υπολογισμού της αντοχής των πετρωμάτων είναι η δοκιμή του άμεσου εφελκυσμού όπως φαίνεται στο σχήμα 1.1. Η μέθοδος παρουσιάζει πειραματικές δυσκολίες και συνήθως δεν διεξάγεται στα εργαστήρια μηχανικής πετρωμάτων. Ειδικότερα σε ψαθυρά υλικά, μια από τις δυσκολίες είναι η ευθυγράμμιση και στερέωση του δοκιμίου. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα την εμφάνιση καμπτικών τάσεων ή στρεπτικής ροπής λόγω εκκεντρότητας των αξονικών φορτίων της μηχανής, καθώς επίσης και στη συγκέντρωση τάσεων τοπικά στα σημεία επαφής των δοκιμίων με τη μηχανή φόρτισης (Barla and Goffi, 1974, Nova and Zaninetti, 1990). Στα όλκιμα υλικά, λόγω της δημιουργίας λαιμού παύει να ισχύει ομοιόμορφη

επιβεβλημένη τάση. Η κατανομή των τάσεων στην περιοχή του λαιμού παύει να είναι μονοαξονική και καθίσταται τριαξονική, με υποθετικό άξονα συμμετρίας τον άξονα του δοκιμίου.



Σχήμα 1.1: Διατάξεις για τα πειράματα άμεσου μονοαξονικού εφελκυσμού

(Vardoulakis et al., 2002).

Λόγω αυτών των πειραματικών δυσκολιών, αναπτύχθηκαν εναλλακτικές μέθοδοι μέτρησης της εφελκυστικής αντοχής των πετρωμάτων γνωστές ως έμμεσες μέθοδοι (indirect tension tests).

Έμμεσος Εφελκυσμός

Λόγω των πειραματικών δυσκολιών που αναφέρθηκαν πιο πάνω, εναλλακτικές μέθοδοι αναπτύχθηκαν για τον προσδιορισμό της εφελκυστικής αντοχής των πετρωμάτων. Η δοκιμή του Βραζιλιανού δίσκου είναι μια έμμεση μέθοδος που χρησιμοποιεί κυλινδρικό συμπαγή δίσκο, ο οποίος φορτίζεται αντιδιαμετρικά κατά την μία διάμετρό του μέχρι να οδηγηθεί σε αστοχία. (σχήμα 1.2). Στη θεωρία, το εντατικό πεδίο το οποίο προκαλεί αστοχία σε εφελκυσμό μπορεί πλήρως να οριστεί, δεδομένου ότι το υλικό διατηρεί τέλεια γραμμική ελαστική συμπεριφορά μέχρι το σημείο της αστοχίας. Στην πραγματικότητα, πολλά ψαθυρά υλικά όπως τα πετρώματα, έχουν μη γραμμική εντατική και παραμορφωσιακή συμπεριφορά, λόγω των φυσικών ατελειών, οπότε η θεωρητική συμπεριφορά αποκλίνει από την πραγματική (Δημοπούλου, 2004).

Παρόλα αυτά, και η δοκιμή του Βραζιλιανού δίσκου έχει το μειονέκτημα ότι εκτός από εφελκυστικές τάσεις, εμφανίζονται και υψηλές διατμητικές τάσεις κοντά στις πλάκες φόρτισης. Η αστοχία μπορεί να οφείλεται τότε, όχι μόνο στην ασυνέχεια που δημιουργείται στο κέντρο του δίσκου λόγω εφελκυσμού, αλλά επίσης και στο σχηματισμό μικρών ρωγμών σχήματος σφήνας στις επιφάνειες επαφής. Η ελαχιστοποίηση των διατμητικών τάσεων που αναπτύσσονται στο δίσκο, επιτυγχάνεται με τη μέθοδο της αντιδιαμετρικής φόρτισης δίσκου με κυκλική οπή στο κέντρο (Ring test) ή δίσκους με εγκοπή (Notched Brazilian test).



Σχήμα 1.2: Διάταξη δοκιμής Βραζιλιανού δίσκου

Λόγω της γεωμετρίας του δοκιμίου και του τρόπου επιβολής του φορτίου (θλιπτική φόρτιση) δημιουργείται μία ζώνη εφελκυσμού στο κέντρο του δίσκου. Για το λόγο αυτό και η μέθοδος του Βραζιλιανού δίσκου κατατάσσεται στις *έμμεσες μεθόδους εφελκυσμού*. Σύμφωνα με την θεωρία της γραμμικής ελαστικότητας, η μέγιστη εφελκυστική τάση εμφανίζεται κάθετα στη διάμετρο φόρτισης και το μέγεθος της είναι ανάλογο του φορτίου.

Γενικά στη δοκιμή του Βραζιλιανού δίσκου, τα δοκίμια λαμβάνονται συνήθως υπό την μορφή κυλινδρικών πυρήνων οι οποίοι κόβονται σε δίσκους. Επομένως, είναι και αρκετά εύχρηστη μέθοδος αφού τα δοκίμια ετοιμάζονται με σχετική ευκολία. Αν ο προσανατολισμός τους ποικίλει, τότε η εφελκυστική αντοχή μπορεί να μετρηθεί για διάφορες διευθύνσεις. Επιπλέον, η μέση τιμή της αντοχής μεταβάλλεται ανάλογα με τη γεωμετρία και τις συνθήκες φόρτισης (Κακλής, 2002).

Η διάρθρωση της διατριβής έχει ως εξής:

Στο *Κεφάλαιο 1* έγινε μια σύντομη αναφορά στο γιατί ο προσδιορισμός των μηχανικών ιδιοτήτων των υλικών είναι σημαντικός και στη συνέχεια έγινε μια απλή ανάπτυξη στις μεθόδους προσδιορισμού αντοχής των πετρωμάτων σε εφελκυσμό.

Στο *Κεφάλαιο 2* γίνεται μια σύντομη αναφορά στις βασικές εξισώσεις της ισότροπης θεωρίας της ελαστικότητας και αναλύεται το επίπεδο πρόβλημα στις δυο διαστάσεις. Η ανάλυση στις δυο διαστάσεις είναι το βασικό αντικείμενο της θεωρίας της ελαστικότητας. Τέλος γίνεται μια σύντομη αναφορά στην επίλυση επίπεδων προβλημάτων με την τασική συνάρτηση Airy σε καρτεσιανές και πολικές συντεταγμένες.

Στο *Κεφάλαιο 3* γίνεται μια πιο σύνθετη ανάλυση γύρω από τις μαθηματικές εξισώσεις που διέπουν την δοκιμή του Βραζιλιανού δίσκου και παρουσιάζεται η αναλυτική λύση κλειστής μορφής του προβλήματος του αντιδιαμετρικά φορτιζόμενου δίσκου με την βοήθεια της μεθόδου των μιγαδικών δυναμικών που ανέπτυξε ο Muskhelishvili και των σειρών Fourier.

Στο *Κεφάλαιο 4* γίνεται η ανάπτυξη γύρω από την θεωρία θραύσης του Griffith και δίδονται οι βασικές εξισώσεις που διέπουν τις Θραυστομηχανικές παραμέτρους που μπορούν να προσδιοριστούν με την δοκιμή του βραζιλιανού δίσκου.

Στο *Κεφάλαιο 5, 6, 7*, παρουσιάζονται τα αποτελέσματα που προέκυψαν από την αριθμητική επίλυση του Βραζιλιανού δίσκου και τις παραλλαγές του, με μαθηματική ρωγμή και εγκοπή αντίστοιχα, με την μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων χρησιμοποιώντας το λογισμικό Marc-Mentat 2000.

Στο *Κεφάλαιο 8*, συνοψίζονται τα συμπεράσματα και γίνονται προτάσεις για το πως θα μπορούσε να βελτιωθεί η διατριβή αυτή.

2 Βασικές Εξισώσεις της Ισότροπης Θεωρίας της Ελαστικότητας

2.1 Εισαγωγή

Στο κεφάλαιο αυτό γίνεται μια σύντομη περιγραφή των εξισώσεων της θεωρίας της ελαστικότητας και αναλύεται το επίπεδο πρόβλημα στις δυο διαστάσεις. Ένα από τα βασικά αντικείμενα της θεωρίας της ελαστικότητας είναι ο προσδιορισμός της κατανομής των τάσεων και των μετατοπίσεων εντός της μάζας του προς εξέταση σώματος. Τέλος γίνεται μια σύντομη αναφορά στην επίλυση επίπεδων προβλημάτων με την τασική συνάρτηση Airy σε καρτεσιανές και πολικές συντεταγμένες.

2.2 Ορισμός του Προβλήματος

Γενικά, στα προβλήματα στις τρεις διαστάσεις που αντιμετωπίζονται με την θεωρία της ελαστικότητας, υπάρχουν 15 άγνωστες ποσότητες όπου πρέπει να προσδιοριστούν σε κάθε σημείο του υπό εξέταση σώματος. Ονομαστικά αυτές οι άγνωστες ποσότητες είναι οι 6 καρτεσιανές συνιστώσες των τάσεων, οι 6 καρτεσιανές συνιστώσες των παραμορφώσεων και 3 συνιστώσες των μετατοπίσεων. Για να επιτευχθεί η λύση του οποιουδήποτε προβλήματος, πρώτα θα πρέπει να οριστούν και οι ακόλουθες ποσότητες (Dally & Riley, 1991):

- Η γεωμετρία του σώματος.
- Οι συνοριακές συνθήκες.
- Το πεδίο των δυνάμεων που δέχεται το σώμα σαν συνάρτηση της θέσης τους.
- Οι ελαστικές σταθερές.

Για να προσδιοριστούν οι πιο πάνω ποσότητες θα πρέπει να λυθούν 15 εξισώσεις με 15 αγνώστους. Οι 3 άγνωστοι προσδιορίζονται από τις ακόλουθες εξισώσεις ισορροπίας των τάσεων (Dally & Riley, 1991):

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + F_x = 0 \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + F_y = 0 \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + F_z = 0 \quad (2.3)$$

Οι άλλες 6, προσδιορίζονται από τις ακόλουθες εξισώσεις παραμόρφωσης-μετατόπισης:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}, \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}, \quad \gamma_{zx} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \end{aligned} \quad (2.4)$$

και τέλος οι υπόλοιπες 6 που απομένουν, προσδιορίζονται από τις ακόλουθες εκφράσεις των τάσεων-παραμορφώσεων (Dally & Riley, 1991):

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{1}{E} [\sigma_{xx} - \nu(\sigma_{yy} + \sigma_{zz})] \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{1}{E} [\sigma_{yy} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{zz})] \\ \varepsilon_{zz} &= \frac{1}{E} [\sigma_{zz} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})] \\ \gamma_{xy} &= \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{xy}, \quad \gamma_{yz} = \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{yz}, \quad \gamma_{zx} = \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{zx} \end{aligned} \quad (2.5)$$

και

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [(1-\nu)\varepsilon_{xx} + \nu(\varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz})] \\ \sigma_{yy} &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [(1-\nu)\varepsilon_{yy} + \nu(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{zz})] \\ \sigma_{zz} &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [(1-\nu)\varepsilon_{zz} + \nu(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy})] \\ \tau_{xy} &= \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{xy}, \quad \tau_{yz} = \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{yz}, \quad \tau_{zx} = \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{zx} \end{aligned} \quad (2.6)$$

Η λύση ενός ελαστικού προβλήματος, πέραν από την ικανοποίηση των 15 πιο πάνω εξισώσεων, προϋποθέτει και την ικανοποίηση των συνοριακών συνθηκών. Πιο απλά, οι τάσεις που δρουν επί της επιφάνειας ενός σώματος πρέπει να δημιουργούν ελκυστές ισοδύναμους με τα επιβαλλόμενα φορτία στο σώμα. Οι συνοριακές συνθήκες συνήθως κατηγοριοποιούνται σε τέσσερα βασικά προβλήματα όπως αναλύονται στην συνέχεια (Dally & Riley, 1991).

Τύπου 1: Οι μετατοπίσεις διαγράφονται επί ολόκληρου του συνόρου. Το πρόβλημα τότε καλείται τύπου 1 και πρόβλημα συνοριακών τιμών.

Τύπου 2: Είναι το πιο συχνά αντιμετωπιζόμενο πρόβλημα. Είναι και αυτό ένα πρόβλημα συνοριακών τιμών αλλά σε αντίθεση με του τύπου 1, δίδονται οι ορθές και οι διατμητικές δυνάμεις επί ολόκληρης της επιφάνειας αντί για τις μετατοπίσεις.

Τύπου 3: Είναι ένα μικτό πρόβλημα συνοριακών τιμών, όπου δίδονται οι ορθές και οι διατμητικές δυνάμεις που δρουν σε μέρος του σώματος και οι μετατοπίσεις που δρουν στο υπόλοιπο μέρος του.

Τύπου 4: Είναι γενικό πρόβλημα συνοριακών τιμών, όπου το σώμα χωρίζεται σε 4 περιοχές. Στη πρώτη περιοχή προδιαγράφονται οι μετατοπίσεις, στην δεύτερη περιοχή δίδονται οι ορθές και οι διατμητικές τάσεις, στην τρίτη περιοχή δίδεται η ορθή συνιστώσα της μετατόπισης και η διατμητική συνιστώσα της τάσης ενώ στην τέταρτη και τελευταία περιοχή, δίδονται η διατμητική συνιστώσα της μετατόπισης και η ορθή συνιστώσα της τάσης. Είναι φανερό ότι οι πρώτοι τρεις τύποι προβλημάτων μπορεί να θεωρηθούν ειδικές περιπτώσεις του προβλήματος τύπου 4.

2.3 Βασικές Εξισώσεις

Το βασικά τέσσερα σύνολα εξισώσεων από τα οποία μπορεί να προσδιοριστούν οι άγνωστες ποσότητες στη θεωρία της ελαστικότητας είναι (Dally & Riley, 1991):

- Ισορροπία των τάσεων.
- Σχέσεις παραμόρφωσης-μετατόπισης.
- Εκφράσεις τάσεων-παραμορφώσεων.
- Εξισώσεις συμβιβαστού.

Συνήθως δυο ή και περισσότερα από τα πιο πάνω σύνολα μπορούν να συνδυαστούν και να δώσουν ένα νέο σύνολο εξισώσεων που είναι πιο εφαρμοσμένο σε συγκεκριμένα προβλήματα. Για παράδειγμα, αν συνδυαστούν οι εξισώσεις 2.4 με τις

2.5, λαμβάνονται οι ακόλουθες 6 σχέσεις τάσεων-παραμορφώσεων και 6 εξισώσεις παραμόρφωσης-μετατόπισης (Dally & Riley, 1991):

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{1}{E} [\sigma_{xx} - \nu(\sigma_{yy} + \sigma_{zz})] \\
 \frac{\partial v}{\partial y} &= \frac{1}{E} [\sigma_{yy} - \nu(\sigma_{zz} + \sigma_{xx})] \\
 \frac{\partial w}{\partial z} &= \frac{1}{E} [\sigma_{zz} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})] \\
 \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} &= \frac{1}{\mu} \tau_{xy}, \quad \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{1}{\mu} \tau_{yz}, \quad \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{1}{\mu} \tau_{zx}
 \end{aligned} \tag{2.7}$$

Στο σημείο αυτό αξίζει να αναφερθεί ότι το σύνολο εξισώσεων που συνίσταται από τις εξισώσεις ισορροπίας των τάσεων (2.1-2.3) και από τις εξισώσεις τάσεων-μετατοπίσεων, εκφράζονται σαν 9 εξισώσεις με 9 αγνώστους. Η μείωση των αγνώστων από 15 σε 9 έγινε δυνατή με την απαλοιφή των παραμορφώσεων. Το πρόβλημα μπορεί να μειωθεί περαιτέρω από 9 σε 3 αγνώστους αν οι εξισώσεις ισορροπίας των τάσεων (2.1-2.3) συνδυαστούν με τις σχέσεις τάσεων-μετατοπίσεων (2.7). Οπότε οι εξισώσεις ισορροπίας των μετατοπίσεων γράφονται (Dally & Riley, 1991):

$$\begin{aligned}
 \nabla^2 u + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \frac{1}{\mu} F_x &= 0 \\
 \nabla^2 v + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \frac{1}{\mu} F_y &= 0 \\
 \nabla^2 w + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \frac{1}{\mu} F_z &= 0
 \end{aligned} \tag{2.8}$$

όπου η σχέση ∇^2 είναι ο τελεστής Laplace:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{2.9}$$

Είναι ξεκάθαρο ότι η λύση των εξισώσεων ισορροπίας των μετατοπίσεων θα δώσει τρεις μετατοπίσεις, u, v, w . Μόλις προσδιοριστούν οι μετατοπίσεις αυτές, οι 6

παραμορφώσεις μπορούν εύκολα να προσδιοριστούν από τις εξισώσεις 2.4 και ως αποτέλεσμα αυτού του προσδιορισμού, να υπολογιστούν οι 6 τάσεις με τη βοήθεια των εξισώσεων 2.5 και 2.6.

Αναλυτικές λύσεις για προβλήματα στις τρεις διαστάσεις είναι αρκετά δύσκολο να επιτευχθούν, καθώς επίσης ο αριθμός των προβλημάτων που μπορούν να λυθούν είναι εκπληκτικά μικρός. Η πιο επιτυχής προσέγγιση ήταν οι τασικές συναρτήσεις των Boussinesq-Papkovich που ορίζονται με τέτοιο τρόπο έτσι ώστε να ικανοποιούνται οι εξισώσεις 2.8. Η ανάπτυξη των εξισώσεων αυτών θεωρείται ότι είναι αρκετά περίπλοκη που ξεφεύγει από τους σκοπούς της εργασίας αυτής, για αυτό και δεν θα συζητηθούν στο κεφάλαιο αυτό.

Στη συνέχεια κρίνεται σκόπιμο να αναπτυχθούν οι εξισώσεις του συμβιβαστού των τάσεων, αφού αποτελούν την βάση για ένα σημαντικό θεώρημα εξάρτησης των τάσεων από τις ελαστικές σταθερές. Αν οι σχέσεις τάσεων-παραμορφώσεων (σχέσεις 2.5), οι εξισώσεις ισορροπίας (σχέσεις 2.1-2.3) και οι ακόλουθες εξισώσεις (2.10) του συμβιβαστού των τροπών συνδυαστούν, λαμβάνονται οι 6 εξισώσεις (2.11) του συμβιβαστού των τάσεων άρα (Dally & Riley, 1991):

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2} \\
 \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z} &= \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial y^2} \\
 \frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial z \partial x} &= \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial z^2} \\
 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y \partial z} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) \\
 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial z \partial x} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) \\
 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right)
 \end{aligned} \tag{2.10}$$

και επομένως οι 6 εξισώσεις του συμβιβαστού των τάσεων θα είναι οι ακόλουθες:

$$\begin{aligned}
\nabla^2 \sigma_{xx} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2}{\partial x^2} I_1 &= -\frac{1}{1-\nu} \left(\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \right) - 2 \frac{\partial F_x}{\partial x} \\
\nabla^2 \sigma_{yy} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2}{\partial y^2} I_1 &= -\frac{1}{1-\nu} \left(\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \right) - 2 \frac{\partial F_y}{\partial y} \\
\nabla^2 \sigma_{zz} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2}{\partial z^2} I_1 &= -\frac{1}{1-\nu} \left(\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \right) - 2 \frac{\partial F_z}{\partial z} \\
\nabla^2 \tau_{xy} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} I_1 &= - \left(\frac{\partial F_x}{\partial y} + \frac{\partial F_y}{\partial x} \right) \\
\nabla^2 \tau_{yz} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} I_1 &= - \left(\frac{\partial F_y}{\partial z} + \frac{\partial F_z}{\partial y} \right) \\
\nabla^2 \tau_{zx} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2}{\partial z \partial x} I_1 &= - \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} + \frac{\partial F_z}{\partial x} \right)
\end{aligned} \tag{2.11}$$

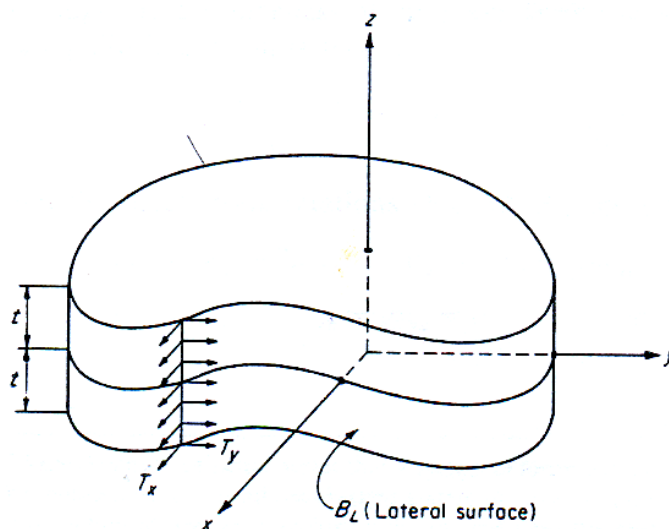
όπου το I_1 , είναι η πρώτη αναλλοίωτη των τάσεων $\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}$. Οι F_x, F_y, F_z , είναι οι δυνάμεις που δρουν επάνω στο σώμα στις διευθύνσεις X, Y, Z αντίστοιχα.

Αν αυτό το σύστημα των 6 εξισώσεων επιλυθεί για τις 6 καρτεσιανές συνιστώσες των τάσεων, και οι συνοριακές συνθήκες ικανοποιούνται, το πρόβλημα θεωρείται ότι μπορεί να επιλυθεί. Το αξιοσημείωτο των εξισώσεων 2.12, είναι ότι περιέχουν μια ελαστική σταθερά. Αφού εμφανίζεται μόνο ο λόγος Poisson ν , σημαίνει ότι οι εξισώσεις αυτές είναι ανεξάρτητες από το μέτρο ελαστικότητας E . Φυσικά, αυτό είναι πρακτικής σημασίας για ένα απλά συνδεδεμένο σώμα, αφού οι εξισώσεις του συμβιβαστού των παραμορφώσεων ισχύουν για αυτή την συνθήκη μόνο. Η μη εξάρτηση των τάσεων από το μέτρο ελαστικότητας, είναι αρκετά σημαντικό σε διάφορα πειράματα. Χαρακτηριστικό παράδειγμα όπου ευνοείται η πειραματική διαδικασία από την ανεξαρτησία των τάσεων από το μέτρο ελαστικότητας είναι στην φωτοελαστικότητα.

2.4 Το Επίπεδο Ελαστικό Πρόβλημα

Στη θεωρία της ελαστικότητας, υπάρχει μια ειδική κατηγορία προβλημάτων γνωστά ως επίπεδα προβλήματα, τα οποία μπορούν να επιλυθούν πολύ πιο εύκολα και άμεσα από τα γενικά προβλήματα ελαστικότητας στις τρεις διαστάσεις. Η γεωμετρία του σώματος και η φύση της φόρτισης στα σύνορα της, επιτρέπει την κατηγοριοποίηση σαν επίπεδο πρόβλημα με τον ακόλουθο τρόπο. Εξ ορισμού, το επίπεδο σώμα αποτελείται από μια περιοχή ομοιόμορφου πάχους που περικλείεται

από δυο παράλληλα επίπεδα και μια κλειστή παράπλευρη επιφάνεια B_L , όπως φαίνεται στο σχήμα 2.1. Αν και το πάχος του σώματος θα πρέπει να είναι ομοιόμορφο, αυτό δεν αποτελεί απαγορευτικό περιορισμό. Μπορεί να είναι πολύ χοντρό ή πολύ λεπτό το σώμα. Σε ιδανικές συνθήκες, οι δυο ακραίες περιπτώσεις είναι και οι επιθυμητές (Dally & Riley, 1991).



Σχήμα 2.1: Σώμα όπου μπορεί να θεωρηθεί για το επίπεδο ελαστικό πρόβλημα (Dally & Riley, 1991)

Εκτός από τους περιορισμούς που αναφέρονται στη γεωμετρία του σώματος, επιβάλλονται και εκείνοι που αφορούν στα φορτία που δρουν επάνω σε αυτό (Dally & Riley, 1991).

- Οι δυνάμεις, εάν υπάρχουν, δεν μπορεί να μεταβάλλονται με το πάχος μιας περιοχής, δηλαδή $F_x = F_x(x, y)$ και $F_y = F_y(x, y)$. Περαιτέρω, η δύναμη κατά την Z διεύθυνση πρέπει να είναι μηδέν.
- Οι επιφανειακοί ελκυστές ή τα φορτία στην παράπλευρη επιφάνεια B_L , πρέπει να είναι στο επίπεδο του μοντέλου και ομοιόμορφα κατανομημένα επάνω στο πάχος του μοντέλου, δηλαδή σταθερά κατά την Z διεύθυνση, επομένως $T_x = T_x(x, y)$, $T_y = T_y(x, y)$ και $T_z = 0$.
- Δεν μπορούν να επιβληθούν φορτία στα παράλληλα επίπεδα που περικλείουν την πάνω και κάτω επιφάνεια του σώματος, δηλαδή $T_n = 0$ στο $z = \pm t$.

Μόλις οριστούν η γεωμετρία και οι φορτίσεις, προσδιορίζονται οι τάσεις κάνοντας χρήση των προσεγγίσεων επίπεδης τάσης ή επίπεδης παραμόρφωσης.

Συνήθως χρησιμοποιείται η προσέγγιση της επίπεδης παραμόρφωσης όταν το σώμα είναι αρκετά μεγάλο σε σχέση με τις άλλες του διαστάσεις. Η θεώρηση επίπεδης τάσης εφαρμόζεται όταν το σώμα είναι μικρό σε σχέση με τις άλλες του διαστάσεις.

2.5 Προσέγγιση Επίπεδης Παραμόρφωσης

Αν θεωρηθεί ότι οι παραμορφώσεις σε ένα σώμα είναι επίπεδες, δηλαδή οι παραμορφώσεις στις X, Y διευθύνσεις είναι συνάρτηση του x και y μόνο, καθώς επίσης οι παραμορφώσεις κατά την Z διεύθυνση είναι μηδενικές, τότε οι σχέσεις παραμορφώσεων-μετατοπίσεων, μπορούν να απλοποιηθούν ως εξής (Dally & Riley, 1991):

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x}, & \varepsilon_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y}, & \varepsilon_{zz} &= \frac{\partial w}{\partial z} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, & \gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0, & \gamma_{zx} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = 0\end{aligned}\quad (2.12)$$

όμοια με αντικαταστάσεις των εξισώσεων 2.12 στις αρχικές εκφράσεις τάσεων-παραμορφώσεων, επιτυγχάνονται οι απλοποιημένες σχέσεις τάσεων-παραμορφώσεων για συνθήκες επίπεδης παραμόρφωσης (Dally & Riley, 1991):

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= \lambda J_1 + 2\mu\varepsilon_{xx} \\ \sigma_{yy} &= \lambda J_1 + 2\mu\varepsilon_{yy} \\ \sigma_{zz} &= \lambda J_1 \\ \tau_{xy} &= \mu\gamma_{xy} \\ \tau_{yz} &= \tau_{zx} = 0\end{aligned}\quad (2.13)$$

όπου $J_1 = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}$. Επιπλέον οι εξισώσεις ισορροπίας των τάσεων απλοποιούνται στην εξής μορφή (Dally & Riley, 1991):

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + F_x &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + F_y &= 0\end{aligned}\quad (2.14)$$

Κάθε λύση για ένα πρόβλημα επίπεδης παραμόρφωσης πρέπει να ικανοποιεί τις εξισώσεις 2.12-2.13, επιπλέον και τις συνοριακές συνθήκες επάνω στην παράπλευρη επιφάνεια B_L και των επιπέδων του σχήματος 2.1. Οι συνοριακές συνθήκες μπορούν να εκφραστούν συναρτήσει των συνιστωσών των τάσεων όπου αναλύονται σε καρτεσιανό σύστημα. Επομένως επί της επιφάνειας B_L πρέπει να ικανοποιούνται οι πιο κάτω συνοριακές συνθήκες (Dally & Riley, 1991):

$$\begin{aligned} T_{nx} &= \sigma_{xx}\sigma\nu(n, x) + \tau_{xy}\sigma\nu(n, y) \\ T_{ny} &= \tau_{xy}\sigma\nu(n, x) + \sigma_{yy}\sigma\nu(n, y) \\ T_{nz} &= 0 \end{aligned} \quad (2.15)$$

όπου T_{nx} , T_{ny} , T_{nz} , είναι συνιστώσες των τάσεων στις X , Y , Z διευθύνσεις που εφαρμόζονται στην επιφάνεια B_L . Τέλος, επάνω στα παράλληλα επίπεδα που περικλείουν την πάνω και κάτω επιφάνεια του σώματος ισχύει $T_n = 0$. Είναι φανερό ότι από τις εξισώσεις 2.13, η συνιστώσα της τάσης σ_{zz} θα είναι ίση με μηδέν. Όμως το J_1 είναι πάντοτε μηδέν, άρα η λύση του προβλήματος δεν θα είναι ακριβής αφού παραβιάζονται οι συνοριακές συνθήκες στα παράλληλα επίπεδα που περικλείουν την πάνω και κάτω επιφάνεια του σώματος. Σε πολλά προβλήματα, η παραβίαση των συνοριακών συνθηκών μπορεί να αποφευχθεί με την υπέρθεση μιας ίσης και αντίθετης κατανομής σ_{zz} (λύση με υπόλοιπα) επάνω στην αρχική λύση του προβλήματος.

Είναι δυνατό να επιτευχθεί ακριβής λύση σε ένα πρόβλημα με υπόλοιπο μόνο όταν η σ_{zz} είναι γραμμική συνάρτηση του X και Y . Όταν η σ_{zz} είναι μη γραμμική, τότε γίνεται μια προσεγγιστική λύση που βασίζεται στην αρχή του Saint-Venant. Όταν η μη γραμμική κατανομή της σ_{zz} είναι στα παράλληλα σύνορα του σώματος, αντικαθίσταται με από μια γραμμική κατανομή που είναι στατικά ισοδύναμη. Είναι φανερό ότι η προσέγγιση της επίπεδης παραμόρφωσης περιορίζεται σε κεντρικές περιοχές όπως φρέαρ, φράγματα όπου είναι αρκετά μεγάλα ως προς τις δυο διαστάσεις τους. Στην κεντρική περιοχή τέτοιων σωμάτων, οι τάσεις σ_{xx} , σ_{yy} και τ_{xy} μπορούν να προσδιοριστούν από την λύση του αρχικού επίπεδου προβλήματος αφού με την υπέρθεση μιας ίσης κατανομής επάνω στην αρχική λύση δεν επηρεάζει αυτές τις τάσεις, απλά υποβιβάζει την σ_{zz} μέχρι να εξαφανιστεί (Dally & Riley, 1991).

2.6 Προσέγγιση Επίπεδης Τάσης

Όπως έχει αναφερθεί, η θεώρηση της επίπεδης παραμόρφωσης περιορίζεται σε σώματα των οποίων η τρίτη διάσταση είναι αρκετά μεγαλύτερη σε σχέση με τις άλλες δυο διαστάσεις τους. Για την περίπτωση όπου η τρίτη διάσταση είναι μικρή σε σχέση με τις άλλες διαστάσεις, μπορεί να θεωρηθεί η παραδοχή (Dally & Riley, 1991):

$$\sigma_{zz} = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0 \quad (2.16)$$

σε όλο το πάχος του σώματος. Αυτή η παραδοχή υποβιβάζει τις εξισώσεις ισορροπίας των τάσεων στην εξής μορφή (Dally & Riley, 1991):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + F_x &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + F_y &= 0 \end{aligned} \quad (2.17)$$

και οι σχέσεις τάσης παραμόρφωσης λαμβάνουν την μορφή (Dally & Riley, 1991):

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \lambda J_1 + 2\mu \varepsilon_{xx} \\ \sigma_{yy} &= \lambda J_1 + 2\mu \varepsilon_{yy} \\ \sigma_{zz} &= \lambda J_1 + 2\mu \varepsilon_{zz} \\ \tau_{xy} &= \mu \gamma_{xy} \\ \tau_{yz} &= \mu \gamma_{yz} = 0 \\ \tau_{zx} &= \mu \gamma_{zx} = 0 \end{aligned} \quad (2.18)$$

από την τρίτη εξίσωση 2.18, λαμβάνεται η ακόλουθη σχέση:

$$\varepsilon_{zz} = -\frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}) \quad (2.19)$$

σύμφωνα με την ε_{xx} , η πρώτη αναλλοίωτη των παραμορφώσεων J_1 γίνεται:

$$J_1 = \frac{2\mu}{\lambda + 2\mu} (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}) \quad (2.20)$$

Αντικαθιστώντας την αναλλοίωτη J_1 στις εξισώσεις 2.18 λαμβάνεται:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \frac{2\lambda\mu}{\lambda + 2\mu} (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}) + 2\mu\varepsilon_{xx} \\ \sigma_{yy} &= \frac{2\lambda\mu}{\lambda + 2\mu} (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}) + 2\mu\varepsilon_{yy} \\ \tau_{xy} &= \mu\gamma_{xy} \\ \sigma_{zz} = \tau_{yz} = \tau_{zx} &= 0 \end{aligned} \quad (2.21)$$

Στην γενική περίπτωση, οι τάσεις σ_{xx} , σ_{yy} και τ_{xy} δεν είναι ανεξάρτητες από το Z και άρα οι συνοριακές συνθήκες επί της παράπλευρης επιφάνειας B_L , δεν μπορούν να ικανοποιηθούν αυτόματα. Για να ξεπεραστεί αυτή η δυσκολία, συνήθως γίνεται χρήση των μέσων τάσεων και μετατοπίσεων επάνω στο μέσο πάχος του σώματος. Οι μέσες τιμές των τάσεων και των μετατοπίσεων δίδονται από τις σχέσεις (Dally & Riley, 1991):

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_{xx} &= \frac{1}{2t} \int_{-t}^t \sigma_{xx} dz, \quad \tilde{\sigma}_{yy} = \frac{1}{2t} \int_{-t}^t \sigma_{yy} dz, \quad \tilde{\tau}_{zz} = \frac{1}{2t} \int_{-t}^t \tau_{zz} dz \\ \tilde{u} &= \frac{1}{2t} \int_{-t}^t u dz, \quad \tilde{v} = \frac{1}{2t} \int_{-t}^t v dz \end{aligned} \quad (2.22)$$

Το σύμβολο (\sim) πάνω από τις τάσεις και τις μετατοπίσεις δείχνει ότι γίνεται αναφορά στις μέσες τιμές. Αντικαθιστώντας τις μέσες αυτές τιμές στις εξισώσεις 2.15 λαμβάνονται οι συνοριακές συνθήκες που πρέπει να εφαρμοστούν επί της παράπλευρης επιφάνειας B_L (Dally & Riley, 1991):

$$\begin{aligned} T_{nx} &= \tilde{\sigma}_{xx} \cos(n, x) + \tilde{\tau}_{xy} \cos(n, y) \\ T_{ny} &= \tilde{\tau}_{xy} \cos(n, x) + \tilde{\sigma}_{yy} \cos(n, y) \end{aligned} \quad (2.23)$$

Αν γίνει μια σύγκριση μεταξύ των λύσεων που λαμβάνονται από τις θεωρήσεις επίπεδης παραμόρφωσης και επίπεδης τάσης, τότε μπορεί να παρατηρηθεί ότι είναι

ακριβώς οι ίδιες με την μοναδική διαφορά στις εξισώσεις 2.18 και 2.13. Αν εξεταστεί μια τυπική εξίσωση από αυτά τα δυο σύνολα εξισώσεων, όπως φαίνεται στην σχέση 2.24 (Dally & Riley, 1991):

$$\sigma_{xx} = \begin{cases} \lambda(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}) + 2\mu\varepsilon_{xx} & \text{Επίπεδη Παραμόρφωση} \\ \frac{2\lambda\mu}{\lambda + 2\mu}(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}) + 2\mu\varepsilon_{xx} & \text{Επίπεδη Τάση} \end{cases} \quad (2.24)$$

φαίνεται ότι είναι ίδιες εκτός από τους συντελεστές του όρου $(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy})$. Αφού όλες οι εξισώσεις είναι ίδιες για τις θεωρήσεις επίπεδης παραμόρφωσης και επίπεδης τάσης, τότε μπορεί μετατραπούν από επίπεδη παραμόρφωση σε επίπεδη τάση και αντίστροφα. Οπότε για την μετατροπή της επίπεδης παραμόρφωσης σε επίπεδη τάση αρκεί (Dally & Riley, 1991):

$$\lambda \rightarrow \frac{2\lambda\mu}{\lambda + 2\mu}, \quad \frac{\nu}{1-\nu} \rightarrow \nu \quad (2.25)$$

ενώ για την μετατροπή της επίπεδης τάσης σε επίπεδη παραμόρφωση αρκεί:

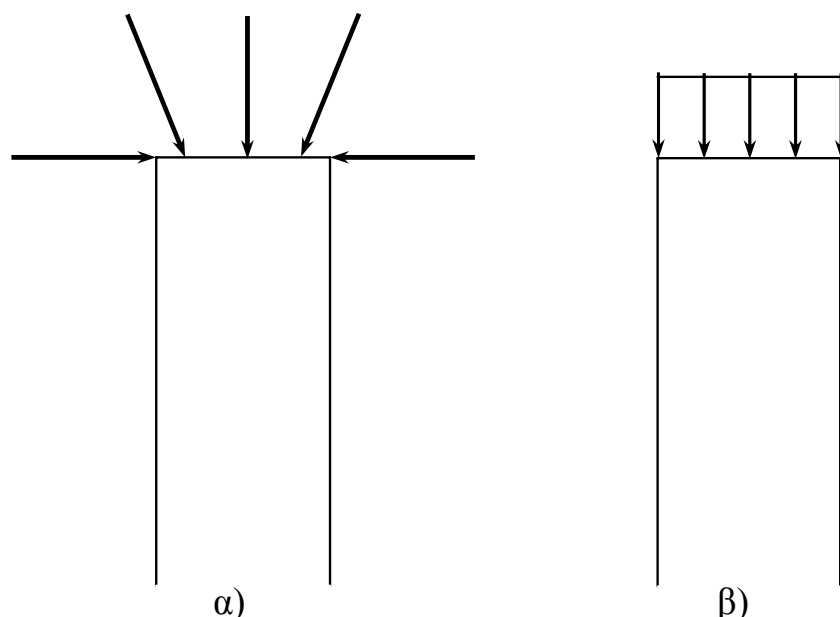
$$\frac{2\lambda\mu}{\lambda + 2\mu} \rightarrow \lambda, \quad \nu \rightarrow \frac{\nu}{1-\nu} \quad (2.26)$$

Γενικά για την θεώρηση της επίπεδης τάσης θεωρείται ότι σ_{zz} , τ_{yz} και τ_{zx} , εξαρτώνται από την Z διεύθυνση. Σαν αποτέλεσμα αυτού, οι συνοριακές συνθήκες παραβιάζονται και για την απαλοιφή αυτού του προβλήματος γίνεται χρήση των μέσων τιμών των τάσεων και των μετατοπίσεων. Τέλος μπορεί να γίνει μετατροπή από την μια θεώρηση στην άλλη, με απλή αντικατάσταση του λόγου Poisson όπως δείχνουν οι σχέσεις 2.25 και 2.26.

2.7 Αρχή του Saint-Venant

Σύμφωνα με την αρχή του Saint-Venant (1855), όταν ένα σύστημα δυνάμεων, που δρα σε πεπερασμένο αριθμό συνοριακών επιφανειών ενός σώματος μπορεί να αντικατασταθεί από ένα στατικά ισοδύναμο σύστημα δυνάμεων. Οι τάσεις και

παραμορφώσεις τότε σε κάποιο εσωτερικό σημείο του σώματος που βρίσκεται αρκετά μακριά από τα σημεία δράσης των δυνάμεων, ταυτίζονται με αυτές που προκύπτουν από την εφαρμογή του αρχικού συστήματος δυνάμεων (σχήμα. 2.2). Πρακτικά, η αρχή αυτή αποδίδεται με το ότι ο τρόπος με τον οποίο δρουν οι δυνάμεις σε μία περιοχή είναι σημαντικός όταν εξετάζεται η εντατική κατάσταση στην περιοχή αυτή (Αγιουτάντης, 2002).



Σχήμα 2.2: Αρχή Saint-Venant α) αρχικό σύστημα δυνάμεων, β) στατικό ισοδύναμο σύστημα δυνάμεων.

Η αρχή αυτή έχει ιδιαίτερη πρακτική αξία κατά το σχεδιασμό και ανάλυση των κατασκευών, καθώς η συγκέντρωση των τάσεων έχει τοπική σημασία και επηρεάζει ελάχιστα την συνολική συμπεριφορά του σώματος πάνω στο οποίο ενεργεί.

2.8 Τασική Συνάρτηση του Airy

Στο επίπεδο πρόβλημα, όπως αναφέρθηκε και πιο πάνω, οι τρεις άγνωστοι που πρέπει να προσδιοριστούν έτσι ώστε να ικανοποιούνται οι εξισώσεις ισορροπίας και οι συνοριακές συνθήκες είναι οι τάσεις σ_{xx} , σ_{yy} και τ_{xy} . Ο πιο βολικός τρόπος για να προσδιοριστούν οι πιο πάνω άγνωστοι είναι με δυο εξισώσεις ισορροπίας και μια εξίσωση του συμβιβαστού των τάσεων. Οι δισδιάστατες εξισώσεις ισορροπίας είναι (Dally & Riley, 1991):

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + F_x &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + F_y &= 0\end{aligned}\tag{2.27}$$

ενώ η εξίσωση του συμβιβαστού των τάσεων για την περίπτωση επίπεδης παραμόρφωσης είναι η εξής (Dally & Riley, 1991):

$$\nabla^2(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) = -\frac{2(\lambda + \mu)}{\lambda + 2\mu} \left(\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} \right)\tag{2.28}$$

Αν θεωρηθεί ότι το πεδίο των δυνάμεων που ορίζεται σε μια περιοχή $\Omega(x, y)$, είναι τέτοιο ώστε οι δυνάμεις να δίδονται από τις σχέσεις:

$$F_x = -\frac{\partial \Omega}{\partial x}, \quad F_y = -\frac{\partial \Omega}{\partial y}\tag{2.29}$$

Αντικαθιστώντας τις εξισώσεις 2.29 στις 2.27 και 2.28 και λαμβάνοντας υπόψη ότι (Dally & Riley, 1991):

$$\frac{2(\lambda + \mu)}{(\lambda + 2\mu)} = \frac{1}{(1 - \nu)}\tag{2.30}$$

λαμβάνονται οι καινούργιες εξισώσεις (Dally & Riley, 1991):

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} &= \frac{\partial \Omega}{\partial x}, \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} = \frac{\partial \Omega}{\partial y} \\ \nabla^2(\sigma_{xx} + \sigma_{yy} - \frac{\Omega}{1 - \nu}) &= 0\end{aligned}\tag{2.31}$$

Οι εξισώσεις 2.31, είναι αυτές που πρέπει να ικανοποιούν οι τάσεις σ_{xx} , σ_{yy} και τ_{xy} . Αν τώρα θεωρηθεί ότι οι τάσεις αυτές μπορούν να αναπαρασταθούν από μια συνάρτηση Φ τέτοια ώστε (Dally & Riley, 1991):

$$\sigma_{xx} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \Omega, \quad \sigma_{yy} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \Omega, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \quad (2.32)$$

Αν οι εξισώσεις 2.32 αντικατασταθούν στις 2.31, ικανοποιούνται αυτομάτως οι δυο εξισώσεις ισορροπίας και η εξίσωση του συμβιβαστού των τάσεων λαμβάνει την μορφή:

$$\nabla^4 \Phi = -\frac{1-2\nu}{1-\nu} \nabla^2 \Omega \quad (2.33)$$

Άρα οι εξισώσεις ισορροπίας και συμβιβαστού των τάσεων ικανοποιούνται αμέσως αν η συνάρτηση Φ ικανοποιεί την εξίσωση 2.33. Η έκφραση της Φ είναι γνωστή σαν η **τασική συνάρτηση του Airy**. Αν η εξίσωση 2.33 λυθεί ως προς Φ , λαμβάνεται μια νέα έκφραση που περιέχει τα x , y και ένα αριθμό σταθερών. Οι σταθερές υπολογίζονται από τις συνοριακές συνθήκες και οι τάσεις υπολογίζονται από την Φ σύμφωνα με τις σχέσεις 2.32. Ο προσδιορισμός της Φ από την εξίσωση 2.33 επιτρέπει τον προσδιορισμό των τάσεων για συνθήκες επίπεδης παραμόρφωσης. Για συνθήκες επίπεδης τάσης, η σχέση που προσδιορίζει την Φ είναι (Dally & Riley, 1991):

$$\nabla^4 \Phi = -(1-\nu) \nabla^2 \Omega \quad (2.34)$$

Φυσικά για την περίπτωση όπου οι δυνάμεις δρουν εντός βαρυτικού πεδίου (όπως όλα τα προβλήματα της θεωρίας της ελαστικότητας), το δεξιό μέρος των εξισώσεων 2.33 και 2.34 είναι ίσο με μηδέν ή είναι σταθερό, επομένως ισχύει (Dally & Riley, 1991):

$$\nabla^2 \Omega = 0 \quad (2.35)$$

και οι εξισώσεις 2.33 και 2.34 λαμβάνουν την μορφή:

$$\nabla^2 \Phi = 0 \quad (2.36)$$

Αυτή είναι η γνωστή διαρμονική εξίσωση που μπορεί να γραφεί υπό την μορφή:

$$\frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \Phi}{\partial y^4} = 0 \quad (2.37)$$

Εξετάζοντας την διαρμονική εξίσωση, φαίνεται ότι η συνάρτηση Φ και οι τάσεις σ_{xx} , σ_{yy} και τ_{xy} είναι ανεξάρτητες από τις ελαστικές σταθερές.

2.9 Τασική Συνάρτηση Airy σε Καρτεσιανές Συντεταγμένες

Κάθε συνάρτηση Airy που χρησιμοποιείται για την επίλυση ενός επίπεδου προβλήματος, πρέπει να ικανοποιεί τις εξισώσεις 2.36 και 2.37 καθώς ο προσδιορισμός της Φ θα δώσει μέσω των εξισώσεων 2.32 τις άγνωστες τάσεις όπου και αυτές με την σειρά τους θα ικανοποιούν τις συνοριακές συνθήκες. Οι πιο κοινά χρησιμοποιούμενες συναρτήσεις είναι σε μορφή πολυωνύμων. Στη συνέχεια θα αναπτυχθούν τα πολυώνυμα αυτά μέχρι την πέμπτη τάξη (Dally & Riley, 1991).

2.9.1 Συνάρτηση Airy υπό Μορφή Πρώτης Τάξης Πολυωνύμου

Το πολυώνυμο είναι της μορφής (Dally & Riley, 1991):

$$\Phi_1 = a_1 x + b_1 y \quad (2.38)$$

από τις σχέσεις 2.32 φαίνεται ότι οι τάσεις είναι μηδενικές:

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \tau_{xy} = 0 \quad (2.39)$$

και άρα οι εξισώσεις 2.36 και 2.37 ικανοποιούνται. Αυτή η συνάρτηση όμως είναι κατάλληλη για ελεύθερο πεδίο τάσεων, επομένως η λύση με τέτοιο πολυώνυμο είναι σπάνια εφαρμόσιμη.

2.9.2 Συνάρτηση Airy υπό Μορφή Δευτέρας Τάξης Πολυωνύμου

Το πολυώνυμο είναι της μορφής (Dally & Riley, 1991):

$$\Phi_2 = a_2 x^2 + b_2 xy + c_2 y^2 \quad (2.40)$$

Και οι τάσεις από τις σχέσεις 2.32 είναι:

$$\sigma_{xx} = 2c_2 \quad \sigma_{yy} = 2a_2 \quad \tau_{xy} = -b_2 \quad (2.41)$$

Οι εξισώσεις 2.36 και 2.37 ικανοποιούνται και η τασική συνάρτηση Φ_2 παράγει ομοιόμορφο πεδίο τάσεων σε όλο το σώμα που είναι ανεξάρτητα από τα x και y .

2.9.3 Συνάρτηση Airy υπό Μορφή Τρίτης Τάξης Πολυωνύμου

Το πολυώνυμο είναι της μορφής (Dally & Riley, 1991):

$$\Phi_3 = a_3 x^3 + b_3 x^2 y + c_3 x y^2 + d_3 y^3 \quad (2.42)$$

Ξανά από τις σχέσεις 2.32, οι τάσεις που προκύπτουν είναι:

$$\sigma_{xx} = 2c_3 x + 6d_3 y \quad \sigma_{yy} = 6a_3 x + 2b_3 y \quad \tau_{xy} = -b_3 x - 2c_3 y \quad (2.43)$$

Οι εξισώσεις 2.36 και 2.37 ικανοποιούνται υπό συνθήκη και η τασική συνάρτηση Φ_3 παράγει γραμμικά μεταβαλλόμενο τασικό πεδίο σε όλο το σώμα.

2.9.4 Συνάρτηση Airy υπό Μορφή Τετάρτης Τάξης Πολυωνύμου

Το πολυώνυμο είναι της μορφής (Dally & Riley, 1991):

$$\Phi_4 = a_4 x^4 + b_4 x^3 y + c_4 x^2 y^2 + d_4 x y^3 + e_4 y^4 \quad (2.44)$$

Για άλλη μια φορά από τις σχέσεις 2.32, οι τάσεις που προκύπτουν είναι:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= 2c_4 x^2 + 6d_4 xy + 12e_4 y^2 \\ \sigma_{yy} &= 12a_4 x^2 + 6b_4 xy + 2c_4 y^2 \\ \tau_{xy} &= -3b_4 x^2 - 4c_4 xy - 3d_4 y^2 \end{aligned} \quad (2.45)$$

Όταν αντικατασταθεί η τασική συνάρτηση Φ_4 στην εξίσωση 2.37, παρατηρείται ότι η εξίσωση δεν ικανοποιείται ούτε υπό συνθήκη.

Για να ικανοποιηθεί η διαρμονική εξίσωση θα πρέπει:

$$e_4 = -\left(a_4 + \frac{c_4}{3}\right) \quad (2.46)$$

Αντικαθιστώντας την 2.46 στις σχέσεις των τάσεων, προκύπτει:

$$\sigma_{xx} = 2c_4x^2 + 6d_4xy - 12a_4y^2 - 4c_4y^2 \quad (2.47)$$

Οι τάσεις σ_{yy} και τ_{xy} παραμένουν αναλλοίωτες. Η τασική συνάρτηση Φ_4 παράγει τασικό πεδίο τάσεων που είναι πολυώνυμο δευτέρας τάξης σε x και y .

2.9.5 Συνάρτηση Airy υπό Μορφή Πέμπτης Τάξης Πολυωνόμου

Το πολυώνυμο είναι της μορφής (Dally & Riley, 1991):

$$\Phi_5 = a_5x^5 + b_5x^4y + c_5x^3y^2 + d_5x^2y^3 + e_5xy^4 + f_5y^5 \quad (2.48)$$

Εισάγοντας τη τασική συνάρτηση αυτή στις σχέσεις 2.32, οι τάσεις που προκύπτουν είναι:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= 2c_4x^3 + 6d_5x^2y + 12e_5xy^2 + 20f_5y^3 \\ \sigma_{yy} &= 20a_5x^3 + 12b_5x^2y + 6c_5xy^2 + 2d_5y^3 \\ \tau_{xy} &= -4b_5x^3 - 6c_5x^2y - 6d_5xy^2 - 4e_5y^3 \end{aligned} \quad (2.49)$$

Ξανά, ας σημειωθεί ότι η τασική συνάρτηση Φ_5 πρέπει να υπόκειται σε συγκεκριμένες συνοριακές συνθήκες που να περιέχουν τις σταθερές f_5 και e_5 . Για να ικανοποιείται η διαρμονική εξίσωση, θα πρέπει:

$$e_5 = -(5a_5 + c_5), \quad f_5 = \frac{1}{5}(b_5 + d_5) \quad (2.50)$$

Υπό τους πιο πάνω περιορισμούς, οι καρτεσιανές συντεταγμένες των τάσεων γίνονται:

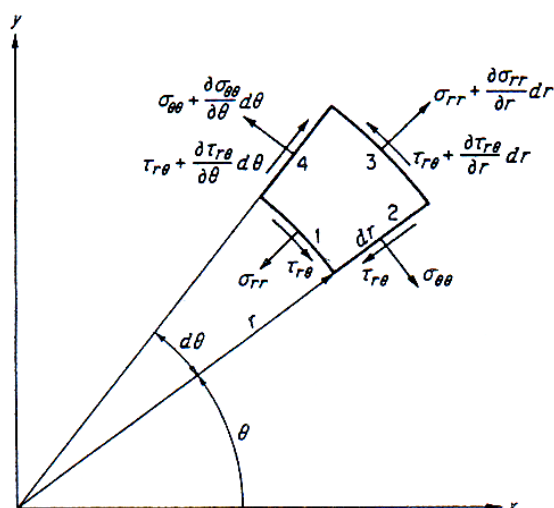
$$\begin{aligned}
\sigma_{xx} &= 2c_5x^3 + 6d_5x^2y - 12(5a_5 + c_5)xy^2 - 4(b_5 + d_5)y^3 \\
\sigma_{yy} &= 20a_5x^3 + 12b_5x^2y + 6c_5xy^2 + 2d_5y^3 \\
\tau_{xy} &= -4b_5x^3 - 6c_5x^2y - 6d_5xy^2 + 4(5a_5 + c_5)y^3
\end{aligned} \tag{2.51}$$

Η τασική συνάρτηση Φ_5 παράγει τασικό πεδίο που είναι πολυώνυμο τρίτου βαθμού στο x και y . Είναι δυνατό να συνεχιστεί η διαδικασία μέχρι οποιασδήποτε τάξης πολυώνυμο είναι επιθυμητό, αρκεί η διαρμονική εξίσωση να ικανοποιείται. Επίσης είναι δυνατό να προστεθούν δυο τασικές συναρτήσεις και θεωρητικά να δομηθεί οποιαδήποτε συνάρτηση που να είναι εκφρασμένη σε x και y .

2.10 Δισδιάστατα Προβλήματα σε Πολικές Συντεταγμένες

Σε πολλά προβλήματα, η γεωμετρία του προς εξέταση σώματος δεν επιτρέπει την χρήση του καρτεσιανού συστήματος συντεταγμένων και είναι πιο βολικό να χρησιμοποιείται άλλο σύστημα συντεταγμένων. Μια μεγάλη τάξη προβλημάτων όπως οι κυκλικοί δίσκοι, τα κοίλα δοκάρια και τα ημι-επίπεδα, μπορούν να επιλυθούν σε πολικό σύστημα συντεταγμένων. Σε κάθε ελαστικό πρόβλημα η επιλογή του κατάλληλου συστήματος συντεταγμένων είναι υψηλής σημασίας αφού αυτή η επιλογή καθιερώνει την πολυπλοκότητα των μαθηματικών σχέσεων που θα εφαρμοστούν για να ικανοποιηθούν οι καταστατικές εξισώσεις και οι συνοριακές συνθήκες του προβλήματος (Dally & Riley, 1991).

Για να μπορέσει να γίνει δυνατή η επίλυση δισδιάστατων ελαστικών προβλημάτων σε πολικές συντεταγμένες, πρέπει να οριστούν ξανά οι εξισώσεις ισορροπίας, ο ορισμός της τασικής συνάρτησης του Airy και μια από της εξισώσεις του συμβιβαστού των τάσεων. Οι εξισώσεις ισορροπίας των τάσεων σε πολικές συντεταγμένες μπορούν να παραχθούν από το διάγραμμα ελεύθερου σώματος σε πολικές συντεταγμένες όπως φαίνεται στο σχήμα 2.3 (Dally & Riley, 1991):



Σχήμα 2.3: Στοιχείο μοναδιαίου πάχους όπου φαίνονται οι τάσεις που επιδρούν στις 4 πλευρές του (Dally & Riley, 1991)

Το στοιχείο αυτό θεωρείται πολύ μικρό. Οι μέσες τιμές των τάσεων των ορθών και διατμητικών τάσεων που δρουν στην επιφάνεια 1, συμβολίζονται σ_{rr} και $\tau_{r\theta}$ αντίστοιχα. Αφού οι τάσεις αυτές μπορούν να μεταβάλλονται συναρτήσει της ακτίνας r , οι τιμές των ορθών και διατμητικών τάσεων στην επιφάνεια 3 δίδονται από τις σχέσεις (Dally & Riley, 1991):

$$\sigma_{rr} + \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} dr, \quad \tau_{r\theta} + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} dr \quad (2.52)$$

όμοια οι μέσες τιμές των ορθών και διατμητικών τάσεων που δρουν στην επιφάνεια 2, δίδονται από τις $\sigma_{\theta\theta}$ και $\tau_{r\theta}$. Αφού και σε αυτή την περίπτωση, οι τάσεις μπορούν να μεταβάλλονται συναρτήσει της γωνίας θ , οι τιμές των ορθών και διατμητικών τάσεων στην επιφάνεια 4 δίδονται από τις σχέσεις (Dally & Riley, 1991):

$$\sigma_{\theta\theta} + \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} d\theta, \quad \tau_{r\theta} + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} d\theta \quad (2.53)$$

Για να είναι τώρα αυτό το πολικό στοιχείο σε κατάσταση ισορροπίας, το άθροισμα όλων των δυνάμεων κατά την ακτινική r , και εφαπτομενική θ , διεύθυνση πρέπει να ισούται με μηδέν. Αθροίζοντας πρώτα τις δυνάμεις στην ακτινική διεύθυνση και θεωρώντας ότι η δύναμη που επιδράει επί στοιχείου είναι η F_r , η εξίσωση ισορροπίας είναι (Dally & Riley, 1991):

$$\begin{aligned} \left(\sigma_{rr} + \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} dr \right) (r + dr) d\theta - \sigma_{rr} r d\theta - \left[\sigma_{\theta\theta} dr + \left(\sigma_{\theta\theta} + \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} d\theta \right) dr \right] \frac{d\theta}{2} + \\ \left(\tau_{r\theta} + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} d\theta - \tau_{r\theta} \right) dr + F_r r d\theta dr = 0 \end{aligned} \quad (2.54)$$

Διαιρώντας την εξίσωση ισορροπίας 2.54 με $dr d\theta$, απλοποιείται στη μορφή:

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} dr - \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{2} + \sigma_{rr} + \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} r - \sigma_{\theta\theta} + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + F_r r = 0 \quad (2.55)$$

Αν το στοιχείο είναι αρκετά μικρό ώστε να επιτρέπει οι παράγωγοι dr και $d\theta$ να τείνουν στο μηδέν τότε οι δυο όροι της εξίσωσης 2.55 τείνουν επίσης στο μηδέν και η εξίσωση ξαναγράφεται (Dally & Riley, 1991):

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r} (\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}) + F_r = 0 \quad (2.56)$$

Η εξίσωση ισορροπίας κατά την εφαπτομενική διεύθυνση, παράγεται με τον ίδιο τρόπο αν όμως οι δυνάμεις που επιδρούν κατά την θ διεύθυνση στο πολικό στοιχείο θεωρηθούν ίσες με το μηδέν, άρα γράφεται (Dally & Riley, 1991):

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + 2 \frac{\tau_{r\theta}}{r} + F_\theta = 0 \quad (2.57)$$

Οι σχέσεις 2.56 και 2.57 είναι οι εξισώσεις ισορροπίας σε πολικές συντεταγμένες. Είναι ανάλογες με τις εξισώσεις ισορροπίας σε καρτεσιανές συντεταγμένες όπως αναφέρθηκαν στις σχέσεις 2.27. Κάθε λύση ελαστικού προβλήματος θα πρέπει να ικανοποιεί τις εξισώσεις αυτές.

2.11 Μετασχηματισμός της Διαρμονικής Εξίσωσης σε Πολικές Συντεταγμένες

Όπως έχει αναφερθεί, η τασική συνάρτηση του Airy θα πρέπει να ικανοποιεί την διαρμονική εξίσωση δεδομένου ότι οι δυνάμεις να είναι μηδενικές ή σταθερές. Στις πολικές συντεταγμένες η τασική συνάρτηση θα πρέπει να ικανοποιεί την ίδια

εξίσωση με την διαφορά ότι ο τελεστής ∇^4 πρέπει να μετασχηματιστεί σε πολικό σύστημα συντεταγμένων. Οι σχέσεις μετασχηματισμού από καρτεσιανό σε πολικό σύστημα συντεταγμένων γίνεται από τις σχέσεις (Dally & Riley, 1991):

$$r^2 = x^2 + y^2, \quad \theta = \varepsilon\phi^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) \quad (2.58)$$

διαφοροποιώντας τις σχέσεις 2.58, λαμβάνονται (Dally & Riley, 1991):

$$\begin{aligned} \frac{\partial r}{\partial x} &= \frac{x}{r} = \sigma\upsilon\nu\theta, & \frac{\partial r}{\partial y} &= \frac{y}{r} = \eta\mu\theta \\ \frac{\partial \theta}{\partial x} &= -\frac{y}{r^2} = -\frac{\eta\mu\theta}{r}, & \frac{\partial \theta}{\partial y} &= \frac{x}{r^2} = -\frac{\sigma\upsilon\nu\theta}{r} \end{aligned} \quad (2.59)$$

Η μορφή του τελεστή ∇^4 σε καρτεσιανές συντεταγμένες είναι:

$$\nabla^4 \phi = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right) \quad (2.60)$$

Κάθε στοιχείο της σχέσης 2.60 μπορεί να μετασχηματιστεί ανεξάρτητα με την βοήθεια των σχέσεων 2.58 και 2.59. Αν θεωρηθεί ότι οι η Φ είναι συνάρτηση των r και θ , τότε:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \phi}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x} \quad (2.61)$$

και

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = \frac{\partial \phi}{\partial r} \frac{\partial^2 r}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial r}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + 2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial r \partial \theta} \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} \quad (2.62)$$

αντικαθιστώντας τις ισότητες από τις σχέσεις 2.59 στην εξίσωση 2.62, προκύπτει:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = \frac{\eta \mu^2 \theta}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \sigma \nu \nu^2 \theta \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} - \frac{\eta \mu 2 \theta}{r} \frac{\partial^2 \phi}{\partial r \partial \theta} + \frac{\eta \mu 2 \theta}{r^2} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} + \frac{\eta \mu^2 \theta}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} \quad (2.63)$$

ακολουθώντας την ίδια διαδικασία (Dally & Riley, 1991),

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = \frac{\sigma \nu \nu^2 \theta}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \eta \mu^2 \theta \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{\eta \mu 2 \theta}{r} \frac{\partial^2 \phi}{\partial r \partial \theta} - \frac{\eta \mu 2 \theta}{r^2} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} + \frac{\sigma \nu \nu^2 \theta}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} \quad (2.64)$$

και

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} = -\frac{\eta \mu \theta \sigma \nu \nu \theta}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \eta \mu \theta \sigma \nu \nu \theta \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{\sigma \nu \nu 2 \theta}{r} \frac{\partial^2 \phi}{\partial r \partial \theta} - \frac{\sigma \nu \nu 2 \theta}{r^2} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} - \frac{\eta \mu \theta \sigma \nu \nu \theta}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} \quad (2.65)$$

προσθέτοντας τις σχέσεις 2.64 και 2.65, λαμβάνεται:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} \quad (2.66)$$

Τέλος, η διαρμονική εξίσωση παίρνει την τελική της μορφή:

$$\begin{aligned} \nabla^4 \phi &= \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right) \Leftrightarrow \\ \nabla^4 \phi &= \left(\frac{\partial}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} \right) = 0 \end{aligned} \quad (2.67)$$

Η σχέση 2.67, είναι η εξίσωση του συμβιβαστού των τάσεων συναρτήσει της τασικής συνάρτησης του Airy Φ , που αναφέρεται σε πολικές συντεταγμένες.

2.12 Πολικές Συνιστώσες των Τάσεων Συναρτήσει της Τασικής Συνάρτησης του Airy

Οι δισδιάστατες εξισώσεις μετασχηματισμού των τάσεων από καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων σε πολικό σύστημα γίνεται με μετασχηματισμό τανυστών

δευτέρας τάξης. Το αποτέλεσμα του μετασχηματισμού αυτού είναι (Dally & Riley, 1991):

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &= \sigma_{xx} \cos^2 \theta + \sigma_{yy} \sin^2 \theta + \tau_{xy} \sin 2\theta \\ \sigma_{\theta\theta} &= \sigma_{yy} \cos^2 \theta + \sigma_{xx} \sin^2 \theta - \tau_{xy} \sin 2\theta \\ \tau_{r\theta} &= (\sigma_{yy} - \sigma_{xx}) \sin \theta \cos \theta + \tau_{xy} \cos 2\theta\end{aligned}\quad (2.68)$$

Αν οι σχέσεις 2.32 αντικατασταθούν στις σχέσεις 2.68 και F_x και F_y είναι μηδενικές, τότε οι ακτινικές, οι εφαπτομενικές και διατμητικές συνιστώσες των τάσεων θα γίνουν (Dally & Riley, 1991):

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \cos^2 \theta + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \sin^2 \theta - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \sin 2\theta \\ \sigma_{\theta\theta} &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \cos^2 \theta + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \sin^2 \theta + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \sin 2\theta \\ \tau_{r\theta} &= \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right) \sin \theta \cos \theta - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \cos 2\theta\end{aligned}\quad (2.69)$$

αν τα αποτελέσματα που προκύπτουν από τις σχέσεις 2.63 μέχρι 2.65 αντικατασταθούν στις σχέσεις 2.69, προκύπτουν οι πολικές συνιστώσες των τάσεων συναρτήσει της τασικής συνάρτησης Φ , ακολούθως:

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &= \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} \\ \sigma_{\theta\theta} &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} \\ \tau_{r\theta} &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \phi}{\partial r \partial \theta}\end{aligned}\quad (2.70)$$

Οι πιο πάνω σχέσεις προσδιορίζουν την τασική συνάρτηση του Airy σε πολικές συντεταγμένες και μπορεί να εφαρμοστούν για να προσδιορίσουν οποιοδήποτε τασικό πεδίο σαν συνάρτηση της ακτινικής r , και εφαπτομενικής θ , συνιστώσας.

3 Δοκιμή του Βραζιλιανού Δίσκου

3.1 Γενικά

Η δοκιμή του Βραζιλιανού δίσκου γίνεται με τη συμπίεση δυο διαμετρικά αντίθετων συγκεντρωμένων φορτίων ενός δοκιμίου που έχει τη μορφή δίσκου. Η δοκιμή αυτή πρωτοεμφανίστηκε ταυτόχρονα και ανεξάρτητα το 1953 από Akazawa στην Ιαπωνία και τον Carneiro στην Βραζιλία. Από τότε είναι πάρα πολύ δημοφιλής για τον έμμεσο προσδιορισμό της αντοχής σε εφελκυσμό των πετρωμάτων καθώς και του σκυροδέματος.

Η θεωρητική θεμελίωση της δοκιμής του Βραζιλιανού δίσκου είναι η λύση για τις τάσεις, η οποία προτάθηκε το 1883 από τον Hertz και μερικά χρόνια αργότερα από τον Mitchell. Έχουν γίνει πολλές ερευνητικές προσπάθειες για να διευρυνθεί το πεδίο εφαρμογής της δοκιμής αυτής, καθώς και να βελτιωθεί η απόδοση της.

Ο Hondros το 1959, θεωρώντας το υλικό ομογενές, ισότροπο και γραμμικά ελαστικό, δημιούργησε μία πλήρη επίλυση του τασικού πεδίου για την περίπτωση ενός ακτινικού φορτίου κατανεμημένου πάνω σε ένα πεπερασμένο αριθμό κυκλικών τόξων του δίσκου και θεωρείται ότι αυτός ο τύπος του φορτίου μπορεί να είναι καλύτερος από το αρχικό συγκεντρωμένο γραμμικό φορτίο για το δοκίμιο, δίνοντας έτσι μια πιο ολοκληρωμένη λύση για συνθήκες επίπεδης τάσης (δίσκους) και επίπεδης παραμόρφωσης (κυλίνδρους).

Το 1978 η δοκιμή του Βραζιλιανού δίσκου προτάθηκε από τη Διεθνή Εταιρεία Μηχανικής Πετρωμάτων σαν η προτεινόμενη μέθοδος για τον προσδιορισμό της εφελκυστικής αντοχής πετρωμάτων. Στη συνέχεια η δοκιμή αυτή τυποποιήθηκε από την Αμερικανική Εταιρεία A.S.T.M. για τον προσδιορισμό της αντοχής σε δοκίμια τσιμέντου. Γενικά θεωρείται ότι η δοκιμή του Βραζιλιανού δίσκου είναι μία εύκολη και βολική μέθοδος για την εκτίμηση της εφελκυστικής αντοχής σε πετρώματα και τσιμέντο.

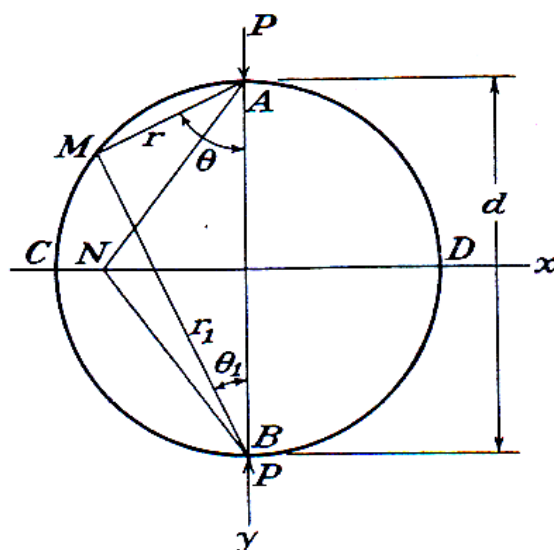
Το 1993 ο Guo και οι συνεργάτες του πρότειναν μία απλή μέθοδο για τον προσδιορισμό της σκληρότητας θραύσης K_{IC} χρησιμοποιώντας τη δοκιμή του Βραζιλιανού δίσκου. Η δοκιμή αυτή δεν απαιτεί ούτε αρχική ρωγμή ούτε αρχική εγκοπή και φαίνεται να δουλεύει. Όμως η χρήση του Βραζιλιανού δίσκου για το

σκοπό αυτό δεν έχει ωριμάσει ακόμα και υπάρχουν προβλήματα που δεν έχουν επιλυθεί, σε επίπεδο θεωρίας. Για παράδειγμα η διαδικασία της φόρτισης μέσω τόξου είναι πολύ δύσκολο να εφαρμοστεί στην πράξη. Πρόσφατα ο Wang και οι συνεργάτες του βελτίωσαν τη μέθοδο του Guo για τη δοκιμή σκληρότητας θραύσης. Έγινε σαφές ότι η αρχική έναρξη της ρηγμάτωσης στην περιοχή του κέντρου του δίσκου Brazil ήταν ένα πρόβλημα κλειδί το οποίο έπρεπε να επιλυθεί κατάλληλα.

Στη μελέτη αυτή που έκανε ο Wang προτείνεται μία τροποποίηση του Βραζιλιανού δίσκου με την εισαγωγή δύο παράλληλων επίπεδων πεπλατυσμένων πλευρών οι οποίες θα χρησιμοποιηθούν για την επιβολή του φορτίου. Αυτός ο τρόπος φόρτισης θεωρείται καλύτερος από τον αρχικό τρόπο σημειακής φόρτισης όσον αφορά το θέμα της τοπικής αστοχίας λόγω της υπερβολικής συγκέντρωσης τάσεων και πιθανόν να είναι καλύτερος από τη φόρτιση σε τόξο, η οποία χρησιμοποιεί ένα σύνθετο σύστημα φόρτισης δοκιμίων (Wang et al., 2004).

3.2 Τάσεις σε Κυκλικό Δίσκο

Οι πρώτοι που ανέλυσαν τις τάσεις σε κυκλικό δίσκο ήταν ο Hertz το 1883 και στην συνέχεια ο Mitchel το 1900. Η ανάλυση ξεκινάει με την απλή περίπτωση δυο ίσων και αντίθετων δυνάμεων P , που εφαρμόζονται στην κατακόρυφη διάμετρο AB ενός δίσκου όπως φαίνεται στο σχήμα 3.1 (Timoshenko & Goodier, 1970).



Σχήμα 3.1: Γεωμετρία και φόρτιση κυκλικού δίσκου (Timoshenko & Goodier, 1970)

Αν θεωρηθεί ότι κάθε μια από τις δυνάμεις αυτές παράγει ακτινική κατανομή τάσεων, μπορεί να βρεθεί το μέγεθος των δυνάμεων αυτών που πρέπει να εφαρμοστεί στην περιφέρεια του δίσκου για να επιτευχθεί τέτοια κατανομή τάσεων. Σε κάθε σημείο M

επάνω στην περιφέρεια υπάρχει συμπίεση στις διευθύνσεις r και r_1 αντίστοιχα ίσες με (Timoshenko & Goodier, 1970):

$$\left(\frac{2P}{\pi}\right)\left(\frac{\sigma_{\nu\theta}}{r}\right), \quad \left(\frac{2P}{\pi}\right)\left(\frac{\sigma_{\nu\theta_1}}{r_1}\right) \quad (3.1)$$

Αφού οι χορδές r και r_1 είναι κάθετες μεταξύ τους ισχύει:

$$\frac{\sigma_{\nu\theta}}{r} = \frac{\sigma_{\nu\theta_1}}{r_1} = \frac{1}{d} \quad (3.2)$$

όπου d , η διάμετρος του δίσκου. Απο την σχέση 3.2 συμπεραίνεται ότι οι δυο κύριες τάσεις στο σημείο M είναι δύο ίσες τάσεις θλιπτικού τύπου και σε μέγεθος:

$$2P/\pi d \quad (3.3)$$

Αφού οι ίδιες θλιπτικές τάσεις επιδρούν σε κάθε επίπεδο διαμέσου του σημείου M , κάθετα στο επίπεδο του δίσκου, οι θλιπτικές δυνάμεις πρέπει να είναι σταθερές και σε μέγεθος όπως αναφέρεται στην σχέση 3.3 και να εφαρμόζονται στην περιφέρεια του δίσκου έτσι ώστε να επιτυγχάνεται η ακτινική κατανομή των τάσεων.

Αν τα σύνορα του δίσκου είναι ελεύθερα από εξωτερικές δυνάμεις, οι τάσεις σε κάθε σημείο του δίσκου υπολογίζονται με υπέρθεση ενός ομοιόμορφου εφελκυσμού στο επίπεδο του δίσκου σε μέγεθος ίσο με την σχέση 3.3. Αν θεωρηθεί το σημείο N στην οριζόντια διάμετρο του δίσκου, λόγω συμμετρίας, δεν υπάρχουν διατμητικές δυνάμεις στο επίπεδο αυτό. Οι ορθές τάσεις που παράγονται από τις δυο ίσες ακτινικά συμπίεσεις είναι (Timoshenko & Goodier, 1970):

$$-2\left(\frac{2P}{\pi} \frac{\sigma_{\nu\theta}}{r}\right) \sigma_{\nu\nu}^2 \theta \quad (3.4)$$

στην οποία το r , είναι η απόσταση AN και θ η γωνία μεταξύ της AN και της κατακόρυφης διαμέτρου. Άρα η συνολική ορθή τάση στο οριζόντιο επίπεδο στο σημείο N είναι (Timoshenko & Goodier, 1970):

$$\sigma_y = -\frac{4P}{\pi} \frac{\sin^3 \theta}{r} + \frac{2P}{\pi d} \quad (3.5)$$

Η γωνία θ , δίδεται από την σχέση:

$$\sin \theta = \frac{d}{\sqrt{d^2 + 4x^2}} \quad (3.6)$$

οπότε με αντικατάσταση λαμβάνεται:

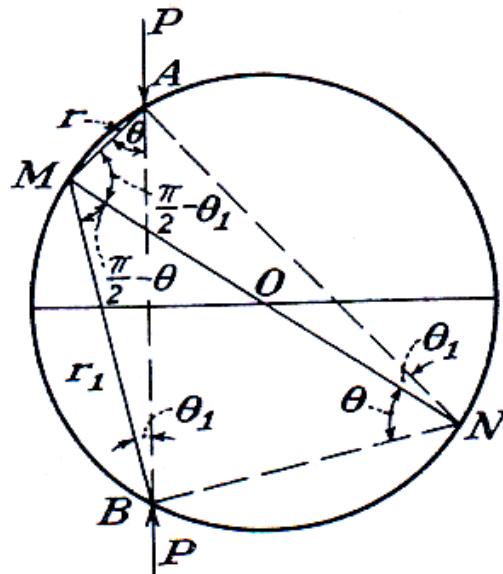
$$\sigma_y = \frac{2P}{\pi d} \left[1 - \frac{4d^4}{(d^2 + 4x^2)^2} \right] \quad (3.7)$$

Η μέγιστη θλιπτική τάση επί της διαμέτρου CD, είναι στο κέντρο του δίσκου:

$$\sigma_y = -\frac{6P}{\pi d} \quad (3.8)$$

Στα εξωτερικά όρια του δίσκου, η τάση αυτή τείνει να εξαφανιστεί.

Θεωρώντας τώρα την περίπτωση δυο ίσων και αντίθετων δυνάμεων να επιδρούν κατά μήκος μιας χορδής AB, όπως φαίνεται στο σχήμα 3.2, είναι αποδεχτό ότι δημιουργούν δυο απλές ακτινικές κατανομές ξεκινώντας από το A και B.



Σχήμα 3.2: Γεωμετρία και φόρτιση σε τυχαίο σημείο στην περιφέρεια κυκλικού δίσκου
(Timoshenko & Goodier, 1970)

Οι τάσεις στο επίπεδο που είναι εφαπτόμενο στην περιφέρεια του δίσκου στο σημείο M, υπολογίζονται από την υπέρθεση των δυο ακτινικών θλιπτικών τάσεων που επιδρούν στις διευθύνσεις r και r_1 αντίστοιχα. Το μέγεθος είναι ακριβώς το ίδιο με τις σχέσεις 3.1. Η κάθετη γραμμή στο σημείο M είναι η διάμετρος MN του δίσκου. Αφού τα τρίγωνα MAN και MBN είναι ορθογώνια και οι γωνίες $\hat{A}MO$ και $\hat{B}MO$ καθορίζουν τις διευθύνσεις r , r_1 και είναι ίσες με $\frac{\pi}{2} - \theta_1$ και $\frac{\pi}{2} - \theta$ αντίστοιχα. Η ορθή τάση στο σημείο M θα είναι (Timoshenko & Goodier, 1970):

$$\begin{aligned}\sigma &= -\frac{2P}{\pi} \frac{\sigma \nu \theta}{r} \sigma \nu \nu^2 \left(\frac{\pi}{2} - \theta_1 \right) - \frac{2P}{\pi} \frac{\sigma \nu \theta_1}{r_1} \sigma \nu \nu^2 \left(\frac{\pi}{2} - \theta_1 \right) \\ &= -\frac{2P}{\pi} \left(\frac{\sigma \nu \theta \eta \mu^2 \theta_1}{r} + \frac{\sigma \nu \theta_1 \eta \mu^2 \theta}{r_1} \right)\end{aligned}\quad (3.9)$$

και η διατμητική θα είναι:

$$\tau = -\frac{2P}{\pi} \left(\frac{\sigma \nu \theta}{r} \eta \mu \theta_1 \sigma \nu \nu \theta_1 - \frac{\sigma \nu \theta_1}{r_1} \eta \mu \theta \sigma \nu \nu \theta \right) \quad (3.10)$$

Οι εξισώσεις αυτές μπορούν να απλοποιηθούν αν παρατηρηθεί ότι από τα τρίγωνα MAN και MBN ισχύει (Timoshenko & Goodier, 1970):

$$\begin{aligned}r &= d \eta \mu \theta_1 \\ r_1 &= d \eta \mu \theta\end{aligned}\quad (3.11)$$

αντικαθιστώντας στις σχέσεις 3.9 και 3.10, οι τελική μορφή της ορθής και διατμητικής τάσης θα είναι (Timoshenko & Goodier, 1970):

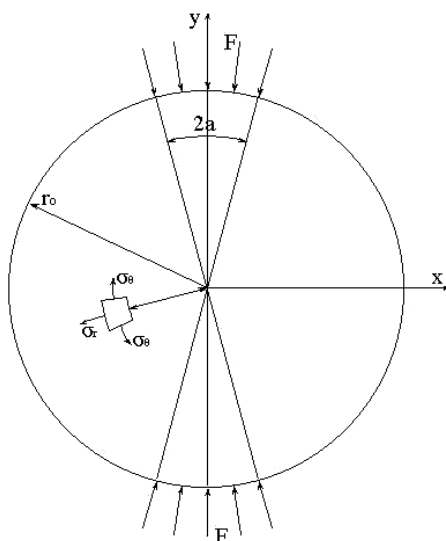
$$\begin{aligned}\sigma &= -\frac{2P}{\pi d} \eta \mu(\theta + \theta_1) \\ \tau &= 0\end{aligned}\quad (3.12)$$

Από το σχήμα 3.2, φαίνεται ότι το $\eta \mu(\theta + \theta_1)$ παραμένει σταθερό γύρω από το σύνορο. Αφού θα πρέπει να εφαρμοστεί στο σύνορο ομοιόμορφα κατανεμημένη

θλιπτική φόρτιση έντασης $\frac{2P}{\pi d} \eta \mu(\theta + \theta_1)$ για να επιτευχθεί ακτινική τασική κατανομή.

3.3 Κατανομή των Τάσεων στον Βραζιλιανό Δίσκο

Θεωρώντας ότι η αρχική θραύση ξεκινά από το κέντρο του δίσκου και εκτείνεται κατά μήκος της διαμέτρου φόρτισης, η κατανομή των τάσεων κατά μήκος αυτής της διαμέτρου έχει μεγάλο ενδιαφέρον. Η κάθετη συνιστώσα της τάσης στην διάμετρο φόρτισης Y είναι η σ_θ , και η παράλληλη προς αυτήν είναι η σ_r , όπως φαίνεται και στο σχήμα 3.3.



Σχήμα 3.3: Το τασικό πεδίο εντός ενός Βραζιλιανού δίσκου (Hondros, 1959).

Οι εφαπτομενική συνιστώσα δίδεται από την σχέση 3.13 (Hondros, 1959):

$$\sigma_\theta = + \frac{F}{\pi r_0 t a} \left\{ \frac{\left[1 - \left(\frac{r}{r_0} \right)^2 \right] \sin 2a}{1 - 2 \left(\frac{r}{r_0} \right)^2 \cos 2a + \left(\frac{r}{r_0} \right)^4} - \tan^{-1} \left[\frac{1 + \left(\frac{r}{r_0} \right)^2}{1 - \left(\frac{r}{r_0} \right)^2} \tan a \right] \right\} \quad (3.13)$$

ενώ η ακτινική συνιστώσα δίδεται από την σχέση 3.14 (Hondros, 1959):

$$\sigma_r = -\frac{F}{\pi r_0 t a} \left\{ \frac{\left[1 - \left(\frac{r}{r_0} \right)^2 \right] \sin 2a}{1 - 2 \left(\frac{r}{r_0} \right)^2 \cos 2a + \left(\frac{r}{r_0} \right)^4} + \tan^{-1} \left[\frac{1 + \left(\frac{r}{r_0} \right)^2}{1 - \left(\frac{r}{r_0} \right)^2} \tan a \right] \right\} \quad (3.14)$$

όπου σ_θ = η συνιστώσα της τάσης, κάθετη στη διάμετρο φόρτισης

σ_r = η συνιστώσα της τάσης, παράλληλη στη διάμετρο φόρτισης

F = επιβαλλόμενη δύναμη

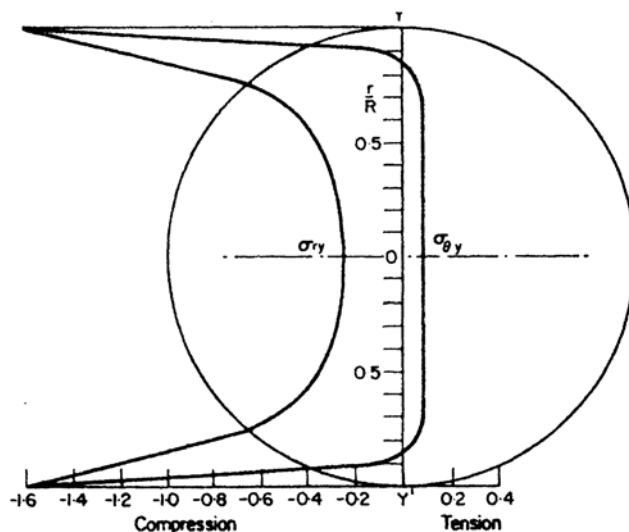
r_0 = ακτίνα δίσκου

t = πάχος δίσκου

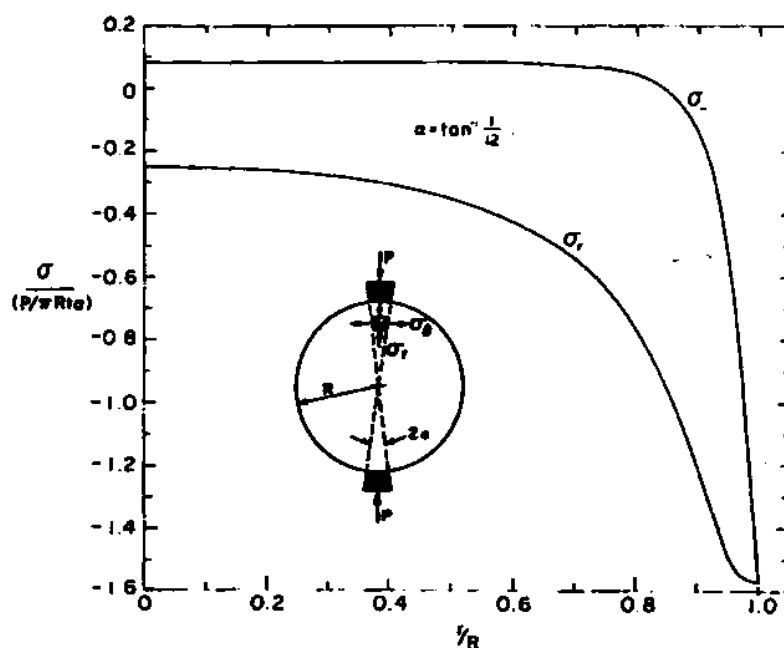
$2a$ = ακτινική απόσταση κατά την οποία θεωρείται ότι η δύναμη F κατανέμεται ακτινικά (συνήθως $\leq 15^\circ$)

r = απόσταση από το κέντρο του δίσκου

Η εφελκυστική τάση λαμβάνεται θετική (σύμβαση μηχανικής του στερεού σώματος). Η κατανομή των τάσεων κατά μήκος της διαμέτρου φόρτισης δίνεται στα σχήματα 3.4 και 3.5 αντίστοιχα:



Σχήμα 3.4: Κατανομή των τάσεων στη δοκιμή του Βραζιλιανού δίσκου (Hudson, 1969).



Σχήμα 3.5: Κατανομή των τάσεων κατά μήκος της διαμέτρου φόρτισης (Hondros (1959)).

Η εφαπτομενική τάση σ_θ και η ακτινική σ_r στο κέντρο του δίσκου θα δίδονται από τις σχέσεις 3.15 και 3.16 αντίστοιχα (Hondros, 1959):

$$\sigma_\theta = + \frac{F}{\pi r_0 t} \left[\frac{\sin 2a}{a} - 1 \right] \approx + \frac{F}{\pi r_0 t} \quad (3.15)$$

$$\sigma_r = - \frac{F}{\pi r_0 t} \left[\frac{\sin 2a}{a} + 1 \right] \approx - \frac{3F}{\pi r_0 t} \quad (3.16)$$

Αν η φόρτιση γίνει κατά μήκος τόξου επαφής 15° , το σφάλμα που εισάγεται για το υπολογισμό της σ_θ από την σχέση 3.15 είναι 2%. Η έκφραση που υπολογίζει την εφελκυστική αντοχή (tensile strength) του υλικού στο κέντρο του δίσκου συναρτήσει του φορτίου F φαίνεται στην σχέση 3.17:

$$\sigma_\theta = \frac{F}{\pi r_0 t} = \frac{2F}{\pi D t} \quad (3.17)$$

3.4 Συνθήκη Θραύσης του Δίσκου

Από τη σχέση 3.17, προκύπτει ότι η τιμή της τάσης στο κέντρο είναι ανεξάρτητη από τον τρόπο φόρτισης, δηλαδή από το αν η φόρτιση είναι σημειακή ή

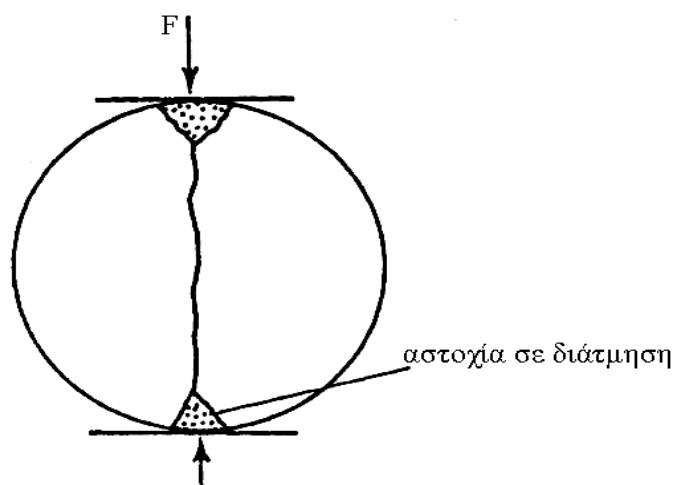
κατανεμημένη σε μήκος τόξου $2a$. Η αστοχία θα πρέπει να είναι ανεξάρτητη από τις θλιπτικές τάσεις που εμφανίζονται κατά μήκος του άξονα φόρτισης Y και από τις κάθετες τάσεις του επιπέδου XY του δίσκου όπως φαίνεται και στο σχήμα 3.3. Επίσης, η αστοχία είναι κυρίως εφελκυστική.

Όμως οι προτεινόμενες λύσεις του Hondros δεν είχαν την απαιτούμενη εμβάθυνση όσον αφορά την ανάλυση σφάλματος και είναι δύσκολο να πραγματοποιήσει κανείς την απαιτούμενη ομοιόμορφη και ακτινική φόρτιση μέσα από ένα ζεύγος τόξων σε ένα πραγματικό πείραμα.

Για να είναι η δοκιμή Brazil αξιόπιστη, η αστοχία του δίσκου πρέπει να συμπίπτει με μια κάθετη ρωγμή κατά μήκος του άξονα φόρτισης ξεκινώντας μάλιστα από το κέντρο του δίσκου. Στην πραγματικότητα οι συνθήκες είναι κάπως διαφορετικές.

Πρώτος ο Fairhurst το 1964 και αργότερα ο Colback το 1966, έθεσαν το βασικό θέμα της αξιοπιστίας της δοκιμής του Βραζιλιανού δίσκου. Οι μελέτες τους έδειξαν ότι η αστοχία ακολουθεί το κριτήριο αστοχίας του Griffith και για έστω μικρές γωνίες επαφής μπορεί να συμβεί μακριά από το κέντρο του δίσκου.

Όταν η φόρτιση είναι σημειακή, αναπτύσσονται μεγάλες διατμητικές τάσεις οι οποίες προκαλούν τοπικά θρυμματισμό ακριβώς κάτω από την επιβολή της φόρτισης, καθιστώντας έτσι την δοκιμή ως μη έγκυρη. Στην περιοχή της επαφής, αναπτύσσονται σημαντικές εφαιτομενικές τάσεις οι οποίες καθορίζουν την κατανομή των τάσεων τοπικά. Αυτές προκαλούν το σχηματισμό μικρών σφηνών όπως φαίνεται και στο σχήμα 3.6:



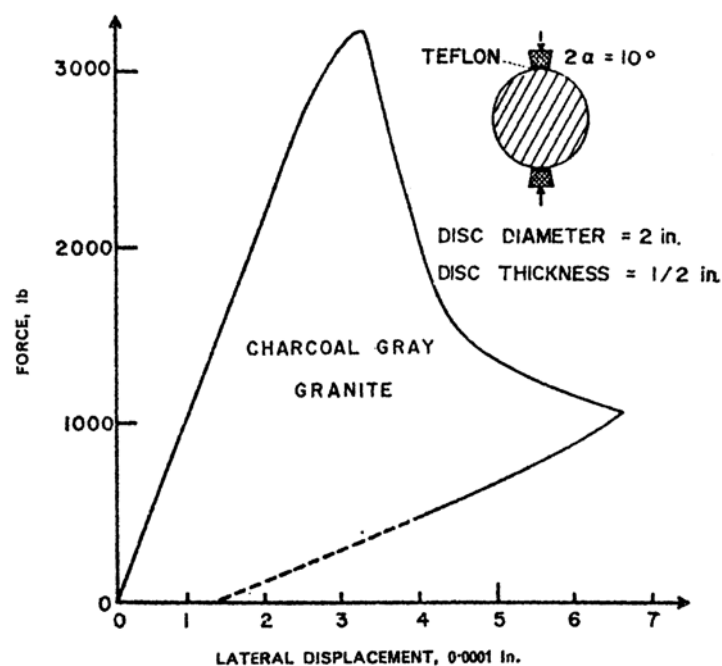
Σχήμα 3.6: Αστοχία δίσκου σε διάτμηση κάτω από το σημείο επιβολής του φορτίου (Hobbs, 1964).

Οι Addinal και Hackett το 1965, βρήκαν πειραματικά ότι η γενέτειρα της ρωγμής κάτω από συγκεκριμένες συνθήκες φόρτισης, είναι συνάρτηση της επιφάνειας επαφής και από τα πειράματά τους έδειξαν ότι η αρχή της ρωγμής δεν είναι στο κέντρο του δίσκου. Για να μεταβάλλουν το τόξο επαφής, χρησιμοποίησαν μαλακά ελαστικά υλικά στη διεπιφάνεια της μεταλλικής πλάκας και του δίσκου. Το μέγεθος των σφηνών βρέθηκε ότι εξαρτάται από το ελαστικό υλικό.

Οι Mellor και Hawkes το 1971, απέδειξαν αρκετά ικανοποιητικά ότι σε μια σωστά πραγματοποιημένη δοκιμή, η ρωγμή δεν ξεκινά από την επαφή με τις πλάκες, καθώς σε πολλούς δίσκους η ρωγμή κατέληγε περίπου στο $1/10$ της διαμέτρου από το όριο. Μελέτησαν συγκεκριμένα τις τάσεις επαφής κάτω από τα επιβαλλόμενα φορτία και στη συνέχεια σχεδίασαν ένα σύστημα σιαγόνων με καμπύλες επιφάνειες επαφής για το σκοπό αυτό. Όμως η κατασκευή των σιαγόνων αυτών δεν είναι μία εύκολη υπόθεση και στην πραγματικότητα πρέπει να υπάρχει μία σειρά τέτοιων σιαγόνων ανάλογα με τις διαμέτρους των δοκιμίων. Επιπλέον η κατανομή των δυνάμεων επαφής μεταξύ των σιαγόνων και του δοκιμίου είναι ακόμα υπό αμφισβήτηση. Γενικά, η δοκιμή δίνει ικανοποιητικές μετρήσεις της αντοχής, για υλικά τύπου Griffith.

Οι Barla και Innaurato το 1973, παρατήρησαν σε δίσκους γνευσίου, ότι αστοχούσαν κατά μήκος της διαμέτρου φόρτισης, ενώ δίσκοι σχιστόλιθου, κατά μήκος των επιπέδων ανισοτροπίας, καταλήγοντας ότι η τεχνική είναι κατάλληλη για τον υπολογισμό της εφελκυστικής αντοχής σε πετρώματα με μέτρια ανισοτροπία.

Ο Hudson και οι συνεργάτες του το 1972, παρατήρησαν από τα πειράματά τους σε γρανίτη και μάρμαρο ότι η αστοχία στη δοκιμή του Βραζιλιανού δίσκου ξεκινούσε πάντα κάτω από τα σημεία φόρτισης εάν κανείς χρησιμοποιούσε επίπεδες χαλύβδινες πλάκες, το οποίο βέβαια στην πραγματικότητα αντίκρουε τη χρήση της δοκιμής αυτής για τον υπολογισμό της αντοχής σε εφελκυσμό. Οι δοκιμές τους έγιναν σε υδραυλική μηχανή με έλεγχο μετατόπισης, ώστε η αστοχία να είναι ελεγχόμενη και τα δοκίμια να μην καταστραφούν όπως συνέβη με άλλες συμβατικές μηχανές επιβολής φορτίου. Οι καμπύλη φορτίου–μετατόπισης για το γρανίτη δείχνουν μία τέλεια ελεγχόμενη δοκιμή χωρίς βίαια αστοχία όπως φαίνεται και στο σχήμα 3.7.



Σχήμα 3.7: Διάγραμμα φορτίου–μετατόπισης μιας δοκιμής Βραζιλιανού δίσκου σε γρανίτη (Hudson et al., 1972).

3.5 Αναλυτική Λύση του Προβλήματος του Αντιδιαμετρικά Φορτιζόμενου Ισότροπου Δίσκου

Το πρόβλημα του ισότροπου δίσκου σε αντιδιαμετρική φόρτιση μπορεί να επιλυθεί με την βοήθεια της μεθόδου των μιγαδικών δυναμικών που αναπτύχθηκε από τον Muskhelishvili το 1963. Στη περίπτωση του ισότροπου δίσκου, οι τάσεις σε πολικές συντεταγμένες, δίδονται από τις σχέσεις (Muskhelishvili, 1963):

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta} &= 4\Re[\Phi(z)] \\ \sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr} + 2i\tau_{r\theta} &= 2\left[\bar{z}\Phi'(z) + \Psi(z)\right]e^{2i\theta}\end{aligned}\quad (3.18)$$

Οι εκφράσεις για τις μιγαδικές συναρτήσεις των τάσεων $\Phi(z)$ και $\Psi(z)$ στην περιοχή που περικλείεται από $|z| < R$ δίδονται σε μορφή σειράς όπως φαίνεται στις σχέσεις 3.19:

$$\left. \begin{aligned} \Phi(z) &= \sum_0^{\infty} a_k z^k \\ \Psi(z) &= \sum_0^{\infty} a'_k z^k \end{aligned} \right\} |z| < R \quad (3.19)$$

όπου $z = re^{i\theta}$ και a_k, a'_k είναι οι μιγαδικές σταθερές οι οποίες προσδιορίζονται από τις συνοριακές συνθήκες. Θεωρείται ότι ο δίσκος φορτίζεται αντιδιαμετρικά με ομοιόμορφη πίεση P , που δρα σε τόξο μήκους α , όπως φαίνεται στο σχήμα 3.3. Αγνοώντας τις βαρυτικές δυνάμεις, οι συνοριακές συνθήκες του εν λόγω προβλήματος δίδονται από τις σχέσεις 3.20 (Κακλής, 2002):

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= -\frac{2P}{\pi} \left[a + \sum_0^{\infty} \frac{\eta \mu 2k a \sin 2k \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right)}{k} \right] \\ \tau_{r\theta} &= 0 \end{aligned} \right\} r = R, \quad \theta \in [0, 2\pi) \quad (3.20)$$

όπως απέδειξε ο Muskhelishvili, οι συνοριακές συνθήκες μπορούν να εκφραστούν με όρους των συναρτήσεων τάσης με τον ακόλουθο τρόπο (Muskhelishvili, 1963):

$$\sigma_{rr} - i\tau_{r\theta} = \Phi(t) + \overline{\Phi(t)} - e^{2i\theta} \left[t\Phi'(t) + \Psi(t) \right] \quad (3.21)$$

με

$$t = Re^{i\theta} \quad (3.22)$$

Αντικαθιστώντας τις εξισώσεις 3.18 και 3.19 στη εξίσωση 3.21 προκύπτει η σχέση:

$$\sigma_{rr} - i\tau_{r\theta} = \sum_0^{\infty} (1-k) a_k R^k e^{ik\theta} \sum_0^{\infty} \overline{a_k} r^k e^{-ik\theta} + \sum_2^{\infty} a'_{k-2} R^{k-2} e^{ik\theta} \quad (3.23)$$

εξισώνοντας τα δεύτερα μέλη των σχέσεων 3.20 και 3.23, οι συνοριακές συνθήκες παίρνουν την μορφή:

$$\sum_0^{\infty} (1-k)a_k R^k e^{ik\theta} + \sum_0^{\infty} \overline{a_k} R^k e^{-ik\theta} + \sum_2^{\infty} a'_{k-2} R^{k-2} e^{ik\theta} =$$

$$-\frac{2P}{\pi} \left[a + \sum_{2,4,\dots}^{\infty} \frac{\eta\mu\kappa\alpha\sigma\nu \frac{k\pi}{2} e^{ik\theta}}{k} + \sum_{2,4,\dots}^{\infty} \frac{\eta\mu\kappa\alpha\sigma\nu \frac{k\pi}{2} e^{-ik\theta}}{k} \right] \quad (3.24)$$

Οι συντελεστές a_k και a'_k μπορούν να προσδιοριστούν από την εξίσωση 3.24.

Συγκρίνοντας τους συντελεστές $e^{i0\theta}$ προκύπτει:

$$a_0 + \overline{a_0} = -\frac{2P\alpha}{\pi} \quad (3.25)$$

όμοια για $e^{i\theta}$ προκύπτει:

$$\overline{a_1} R^1 = 0 \Rightarrow \overline{a_1} = 0 \quad (3.26)$$

από την εξίσωση 3.24 και συγκρίνοντας τους συντελεστές των $e^{ik\theta}$, προκύπτει για $k \geq 2$:

$$(1-k)a_k R^k - a'_{k-2} R^{k-2} = -\frac{2P}{\pi} \frac{\eta\mu\kappa\alpha\sigma\nu \frac{k\pi}{2}}{k} \quad (k=2,4,6\dots) \quad (3.27)$$

$$(1-k)a_k R^k - a'_{k-2} R^{k-2} = 0 \quad (k=3,5,7\dots)$$

όμοια για $e^{-ik\theta}$, προκύπτει για $k \geq 2$:

$$\overline{a_k} R^k = -\frac{2P}{\pi} \frac{\eta\mu\kappa\alpha\sigma\nu \frac{k\pi}{2}}{k} \quad (k=2,4,6\dots) \quad (3.28)$$

$$\overline{a_k} R^k = 0 \quad (k=3,5,7\dots)$$

αφού $a_0 = \overline{a_0}$, η σχέση 3.25 γίνεται:

$$a_0 = -\frac{P\alpha}{\pi} \quad (3.29)$$

επίσης από την σχέση 3.26 προκύπτει:

$$a_1 = 0 \quad (3.30)$$

από τις σχέσεις 3.28 παράγονται οι σχέσεις 3.31:

$$\begin{aligned} \overline{a_k} &= -\frac{2P}{\pi} \frac{\eta \mu k a \sigma \nu \frac{k\pi}{2}}{kR^k} \quad (k = 2, 4, 6 \dots) \\ \overline{a_k} &= 0 \quad (k = 3, 5, 7 \dots) \end{aligned} \quad (3.31)$$

Επειδή οι συντελεστές a_k είναι πραγματικοί αριθμοί, ισχύει:

$$\begin{aligned} a_k &= -\frac{2P}{\pi} \frac{\eta \mu k a \sigma \nu \frac{k\pi}{2}}{kR^k} \quad (k = 2, 4, 6 \dots) \\ a_k &= 0 \quad (k = 3, 5, 7 \dots) \end{aligned} \quad (3.32)$$

αντικαθιστώντας στην εξίσωση 3.27, προκύπτει:

$$\begin{aligned} a'_k &= \frac{2P}{\pi} \frac{\eta \mu (k+2) a \sigma \nu \frac{(k+2)\pi}{2}}{R^k} \quad (k = 0, 2, 4, \dots) \\ a'_k &= 0 \quad (k = 1, 3, 5, \dots) \end{aligned} \quad (3.33)$$

Έτσι οι αναλυτικές συναρτήσεις $\Phi(z)$ και $\Psi(z)$ μπορούν να υπολογιστούν αντικαθιστώντας τις σχέσεις 3.29, 3.30, 3.32 και 3.33 στις σχέσεις 3.19, οπότε λαμβάνεται:

$$\begin{aligned} \Phi(z) &= -\frac{Pa}{\pi} - \frac{P}{\pi} \sum_1^{\infty} \left(\frac{\eta \mu 2k a \sigma \nu k \pi}{kR^{2k}} \right) z^{2k} \\ \Psi(z) &= \frac{2P}{\pi} \sum_0^{\infty} \left(\frac{\eta \mu (2k+2) a \sigma \nu (k+1)\pi}{R^{2k}} \right) z^{2k} \end{aligned} \quad (3.34)$$

Οι σχέσεις 3.18 είναι ισοδύναμες με τις παραπάνω ισότητες που δίνουν ξεχωριστά τις τρεις τάσεις ως εξής:

$$\begin{aligned}\sigma_{\theta\theta} &= \Re \left[2\Phi(z) + re^{i\theta} \Phi'(z) + e^{2i\theta} \Psi(z) \right] \\ \sigma_{rr} &= \Re \left[2\Phi(z) - re^{i\theta} \Phi'(z) + e^{2i\theta} \Psi(z) \right] \\ \tau_{r\theta} &= \Im \left[re^{i\theta} \Phi'(z) + e^{2i\theta} \Psi(z) \right]\end{aligned}\quad (3.35)$$

όπου η πρώτη παράγωγος της συνάρτησης $\Phi(z)$ ως προς τη μιγαδική μεταβλητή z , μπορεί να υπολογιστεί από την πρώτη σχέση 3.34. Έτσι προκύπτει:

$$\Phi'(z) = -\frac{2P}{\pi} \sum_1^{\infty} \left(\frac{\eta\mu 2ka \csc k\pi}{R^{2k}} \right) z^{2k-1} \quad (3.36)$$

Αντικαθιστώντας τις σχέσεις 3.34 και 3.36 στην πρώτη των εξισώσεων 3.35, και για $\theta = 0$, προκύπτει:

$$\sigma_{\theta}^{(0)} = \frac{2P}{\pi} \left\{ \left[\left(\frac{r}{R} \right)^2 - 1 \right] \sum_1^{\infty} (-1)^k \left(\frac{r}{R} \right)^{2k} \eta\mu 2ka - \sum_1^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k} \left(\frac{r}{R} \right)^{2k} \eta\mu 2ka - a \right\} \quad (3.37)$$

η οποία μέσω των σχέσεων (Prodnikov, 1986):

$$\sum_1^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k} \left(\frac{r}{R} \right)^{2k} \eta\mu 2ka = \tau \phi \xi \epsilon \phi \left[\frac{\left(\frac{r}{R} \right)^2 \eta\mu 2a}{1 + \left(\frac{r}{R} \right)^2 \sigma \upsilon \nu 2a} \right] \quad (3.38)$$

και

$$\sum_1^{\infty} (-1)^k \left(\frac{r}{R} \right)^{2k} \eta\mu 2ka = \frac{-2 \left(\frac{r}{R} \right)^2 \epsilon \phi a}{\left[\left(1 + \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right)^2 - 4 \left(\frac{r}{R} \right)^2 \eta\mu^2 a \right] (\epsilon \phi^2 a + 1)} \quad (3.39)$$

οπότε η τελική εφαπτομενική συνιστώσα της τάσης στο $\theta = 0$ δίδεται από την αναλυτική σχέση κλειστής μορφής (Κακλής, 2002):

$$\sigma_{\theta}^{(0)} = \frac{2P}{\pi} \left\{ \frac{2 \left[\left(\frac{r}{R} \right)^2 - 1 \right] \varepsilon \phi a}{\left[\left(1 + \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right)^2 - 4 \left(\frac{r}{R} \right)^2 \eta \mu^2 a \right] (\varepsilon \phi^2 a + 1)} - \tau \phi \xi \varepsilon \phi \left[\frac{\left(\frac{r}{R} \right)^2 \eta \mu 2a}{1 + \left(\frac{r}{R} \right)^2 \sigma \upsilon \nu 2a} \right] - \alpha \right\} \quad (3.40)$$

Στην οποία έχει τεθεί $\sigma_{\theta}^{(0)} = \sigma_{\theta\theta}(\theta = 0)$. Για $\theta = \pi/2$ προκύπτει:

$$\sigma_{\theta}^{(90)} = -\frac{2P}{\pi} \left\{ a \sum_1^{\infty} \left(1 + \frac{1}{k} \right) \left(\frac{r}{R} \right)^{2k} \eta \mu 2ka - \sum_1^{\infty} \left(\frac{r}{R} \right)^{2k-2} \eta \mu 2ka \right\} \quad (3.41)$$

η οποία μέσω των σχέσεων (Prodnikov, 1986), λαμβάνεται (Κακλής, 2002):

$$\sum_1^{\infty} \left(\frac{r}{R} \right)^{2k} \eta \mu 2ka = \frac{\left(\frac{r}{R} \right)^2 \eta \mu 2a}{1 - 2 \left(\frac{r}{R} \right)^2 \sigma \upsilon \nu 2a + \left(\frac{r}{R} \right)^4} \quad (3.42)$$

και

$$\sum_1^{\infty} \frac{1}{k} \left(\frac{r}{R} \right)^{2k} \eta \mu 2ka = \tau \phi \xi \varepsilon \phi \left[\frac{\left(\frac{r}{R} \right)^2 \eta \mu 2a}{1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \sigma \upsilon \nu 2a} \right] \quad (3.43)$$

και

$$\sum_1^{\infty} \left(\frac{r}{R} \right)^{2k-2} \eta \mu 2ka = \frac{\eta \mu 2a}{1 - 2 \left(\frac{r}{R} \right)^2 \sigma \upsilon \nu 2a + \left(\frac{r}{R} \right)^4} \quad (3.44)$$

$$\sigma_{\theta}^{(90^0)} = \frac{2P}{\pi} \left\{ \frac{\eta\mu 2a}{1 - 2\left(\frac{r}{R}\right)^2 \sigma\upsilon\nu 2a + \left(\frac{r}{R}\right)^4} \left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2 \right] - \tau\omicron\xi\epsilon\phi \left[\frac{\left(\frac{r}{R}\right)^2 \eta\mu 2a}{1 + \left(\frac{r}{R}\right)^2 \sigma\upsilon\nu 2a} \right] - \alpha \right\} \quad (3.45)$$

Στην οποία έχει τεθεί $\sigma_{\theta}^{(90^0)} = \sigma_{\theta\theta}(\theta = \pi/2)$. Αντικαθιστώντας τις σχέσεις 3.34 και 3.36 στην δεύτερη των εξισώσεων 3.35 και $\theta = 0$, προκύπτει:

$$\sigma_r^{(0^0)} = \frac{2P}{\pi} \left\{ \left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^{-2} \right] \sum_1^{\infty} (-1)^k \left(\frac{r}{R}\right)^{2k} \eta\mu 2ka - \sum_1^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k} \left(\frac{r}{R}\right)^{2k} \eta\mu 2ka - a \right\} \quad (3.46)$$

η οποία μέσω των σχέσεων 3.38 και 3.39 λαμβάνεται η τελική ακτινική συνιστώσα της τάσης (Κακλής, 2002):

$$\sigma_r^{(0^0)} = \frac{2P}{\pi} \left\{ \frac{2 \left[\left(\frac{r}{R}\right)^2 - 1 \right] \epsilon\phi a}{\left[\left(1 + \left(\frac{r}{R}\right)^2 \right)^2 - 4 \left(\frac{r}{R}\right)^2 \eta\mu^2 a \right] (\epsilon\phi^2 a + 1)} - \tau\omicron\xi\epsilon\phi \left[\frac{\left(\frac{r}{R}\right)^2 \eta\mu 2a}{1 + \left(\frac{r}{R}\right)^2 \sigma\upsilon\nu 2a} \right] - \alpha \right\} \quad (3.47)$$

Στην οποία έχει τεθεί $\sigma_r^{(0^0)} = \sigma_{rr}(\theta = 0)$. Για $\theta = \pi/2$ προκύπτει:

$$\sigma_r^{(90^0)} = -\frac{2P}{\pi} \left\{ a \sum_1^{\infty} \left(1 - \frac{1}{k} \right) \left(\frac{r}{R}\right)^{2k} \eta\mu 2ka + \sum_1^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^{2k-2} \eta\mu 2ka \right\} \quad (3.48)$$

η οποία μέσω των σχέσεων 3.42, 3.43 και 3.44 γίνεται (Κακλής, 2002):

$$\sigma_r^{(90^0)} = \frac{2P}{\pi} \left\{ \frac{\eta\mu 2a}{1 - 2\left(\frac{r}{R}\right)^2 \sigma\upsilon\nu 2a + \left(\frac{r}{R}\right)^4} \left[\left(\frac{r}{R}\right)^2 - 1 \right] - \tau\omicron\xi\epsilon\phi \left[\frac{\left(\frac{r}{R}\right)^2 \eta\mu 2a}{1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2 \sigma\upsilon\nu 2a} \right] - \alpha \right\} \quad (3.49)$$

Στην οποία έχει τεθεί $\sigma_r^{(90^\circ)} = \sigma_{rr}(\theta = \pi/2)$. Αντικαθιστώντας τις σχέσεις 3.34 και 3.36 στην τρίτη των εξισώσεων 3.35 και για $\theta = 0$, προκύπτει (Κακλής, 2002):

$$\boxed{\tau_{r\theta} = 0} \quad (3.50)$$

4 Θεωρία Griffith και Θραυστομηχανική

4.1 Γενικά

Στο κεφάλαιο αυτό γίνεται μια σύντομη ανάπτυξη της θεωρίας του Griffith, ο οποίος θεωρείται και ένας από τους πρώτους που θεμελίωσαν τις αρχές της θραυστομηχανικής. Στη συνέχεια αναφέρεται το κριτήριο αστοχίας του Griffith, οι περιορισμοί του, τα όρια εφαρμογής του αλλά και πως μπορεί να τροποποιηθεί. Τέλος αναφέρονται κάποιες γενικές σχέσεις θραυστομηχανικών παραμέτρων που κρίνεται σκόπιμο να αναφερθούν για το σκοπό της εργασίας αυτής.

4.2 Εισαγωγή

Είναι κοινά αποδεκτό ότι αντοχή σε θραύση (κρίσιμη τάση) είναι μια έμφυτη ιδιότητα των ψαθυρών υλικών αφού έχει αποδειχτεί ότι τα υλικά αυτά τείνουν προς θραύση όταν φορτιστούν πέραν του επιπέδου της κρίσιμης τάσης. Σαν συνεπακόλουθο αυτού, δημιουργήθηκαν σειρές από κριτήρια για να μπορούν να υπολογίζουν τις μέγιστες τάσεις που μπορεί να δεχτεί μια κατασκευή χωρίς να ξεπερνά το όριο της κρίσιμης τάσης. Η πιο πάνω προσέγγιση είναι γνωστή ως συμβατική. Η αντοχή σε θραύση ενός ψαθυρού υλικού δεν μπορεί να αναπαραχθεί εύκολα. Η μεταβολές στην αντοχή θραύσης είναι συνάρτηση πολλών παραγόντων όπως, η εργαστηριακή μέθοδος, οι διαστάσεις των δοκιμίων, τα χαρακτηριστικά της κατασκευής και πολλά άλλα (Whittaker et al., 1992).

4.2.1 Αντοχή σε εφελκυσμό

Σύμφωνα με τον Whittaker που συγκέντρωσε διάφορα στοιχεία από μελέτες για την αντοχή σε εφελκυσμό, αναφέρει ότι η αντοχή σε θραύση αυξομειώνεται περίπου μια τάξη μεγέθους. Η θεωρητική τιμή της αντοχής σε εφελκυσμό για ιδανικό ψαθυρό υλικό είναι περίπου: $E/10$, όπου το E , είναι το μέτρο ελαστικότητας του δοκιμίου. Στη πράξη όμως η αντοχή σε εφελκυσμό είναι της τάξης: $E/10^3 - E/10^2$. Μπορεί ακόμα να αναφερθεί ότι σε εργαστηριακές δοκιμές που έγιναν σε διονυσιακό μάρμαρο, προέκυψε η τιμή αυτή να είναι ακόμα μικρότερη, της τάξης του $E/10^4$.

(Αγιουτάντης, 2002). Αυτό οδηγεί στο συμπέρασμα ότι η αντοχή σε θραύση δεν είναι μια ιδιότητα των υλικών. Κατά τον Griffith, η ιδιότητα του υλικού που συνδέεται με την θραύση είναι: η μονάδα έργου θραύσης συγκεκριμένης επιφανειακής ενέργειας, που είναι η ενέργεια που απαιτείται για να σχηματίσει μια νέα επιφάνεια θραύσης, παρά η αντοχή σε εφελκυσμό (Whittaker et al., 1992).

4.2.2 Αντοχή σε εφελκυσμό και προϋπάρχουσες ρωγμές

Η μείωση της αντοχής σε εφελκυσμό ενός ψαθυρού υλικού, οφείλεται σε προϋπάρχουσες ρωγμές ή ασυνέχειες στο υλικό. Ο Griffith το 1921, κατέδειξε ότι οι προϋπάρχουσες ρωγμές λειτουργούν σαν πρόδρομος της αστοχίας καταλήγοντας σε μια σχέση μεταξύ της τάσης θραύσης και του μεγέθους της ρωγμής. Η προσέγγιση αυτή είναι γνωστή ως ισοζύγιο ενέργειας του Griffith με την οποία εξήγησε ποσοτικά ότι η αντοχή σε εφελκυσμό είναι μικρότερη από την θεωρητική τιμή διότι όλα τα υλικά περιέχουν ατέλειες και μικρορωγμές (Whittaker et al., 1992).

4.2.3 Έναρξη θραύσης και διάδοση της ρωγμής

Η θεωρία του Griffith εφαρμόζεται σε απλοποιημένη μορφή και σε περιορισμένες εφαρμογές, ιδιαίτερα στην περίπτωση αστοχίας από θλιπτικές τάσεις. Εξαιτίας των περιορισμών για την εφαρμογή της θεωρίας του Griffith, αναπτύχθηκαν διάφορες τροποποιήσεις οι οποίες βασίζονται στον διαχωρισμό *έναρξης θραύσης* και της *διάδοσης θραύσης*. Η *έναρξη θραύσης* ορίζεται σαν η διαδικασία θραύσης από την οποία προϋπάρχουσες ρωγμές ξεκινάνε να διευρύνονται. Η *διάδοση θραύσης* ορίζεται σαν η διαδικασία αστοχίας από την οποία οι προϋπάρχουσες ρωγμές διευρύνονται ως αποτέλεσμα της έναρξης θραύσης. Η έναρξη θραύσης αντιπροσωπεύει το ξεκίνημα της διεύρυνσης της ρωγμής και περιορίζεται στην περιοχή της αιχμής της ρωγμής, ενώ η διάδοση θραύσης αντιπροσωπεύει την διαδικασία που οδηγεί το δείγμα σε καταστροφική αστοχία από τις αιχμές της ρωγμής μέχρι τα εξωτερικά όρια του δείγματος (Whittaker et al., 1992).

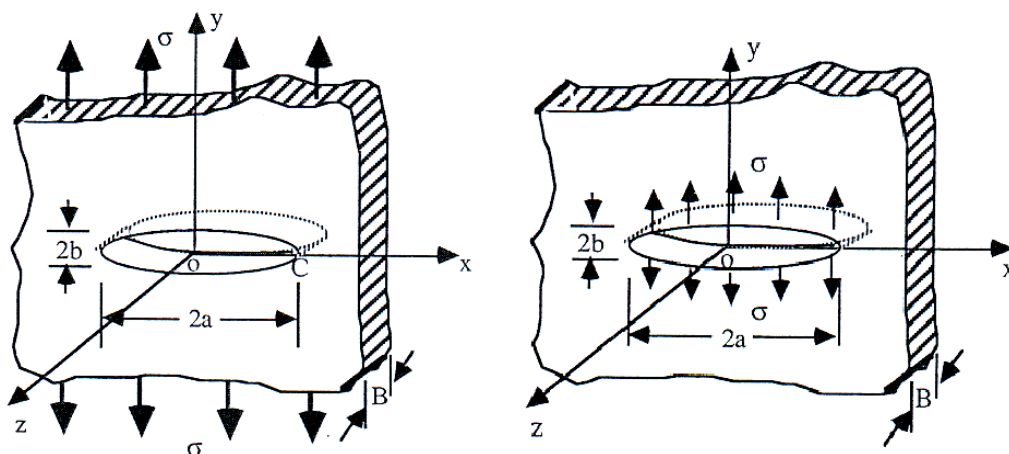
4.2.4 Η έννοια της μαθηματικής ρωγμής

Η ρωγμή είναι μια μαθηματική έννοια που αντιπροσωπεύει οξεία άκρα (αιχμές ρωγμής). Η ρωγμή αυτή μπορεί να υπάρχει εντός του σώματος διακατέχοντας δυο αιχμές ή να είναι στο εξωτερικό σύνορο του σώματος διακατέχοντας μία αιχμή. Από

το σχήμα 4.1, η ακτίνα καμπυλότητας στο σημείο C δίδεται από την σχέση (Whittaker et al., 1992):

$$\rho = \frac{b^2}{a} \quad (4.1)$$

όπου ρ , είναι η ακτίνα καμπυλότητας στο σημείο C, a και b είναι το μήκος του μικρότερου και μεγαλύτερου ημι-άξονα αντίστοιχα.



Σχήμα 4.1: Ελλειπτική οπή σε πλάκα η οποία υπόκειται σε ομοιόμορφο εφελκυσμό στο άπειρο (Whittaker et al., 1992)

Από την σχέση 4.1, φαίνεται ότι $\rho \propto 1/a$ και $a \rightarrow \infty$, $\rho \rightarrow 0$. Άρα από μαθηματικής άποψης, ο όρος ρωγμή μπορεί να οριστεί σαν μια απειροστή στενή έλλειψη. Ο συντελεστής συγκέντρωσης τάσης στην αιχμή της ρωγμής γίνεται μοναδιαίος ή άπειρος (Whittaker et al., 1992).

4.2.5 Τύποι ρωγμών

Από φυσικής άποψης, η ρωγμή είναι αποτέλεσμα μιας διαδικασίας ανομοιογενούς παραμόρφωσης. Άρα οι ρωγμές αναπαριστούν ασυνεχείς μετατοπίσεις. Οι επιφάνειες της μπορεί να δέχονται ή να μην δέχονται τάσεις. Η θεωρία του Griffith δεν λαμβάνει υπόψη πετρώματα, αλλά υπάρχουν στοιχεία ότι υπάρχουν τέτοιες ρωγμές στα πετρώματα και συγκεκριμένα στα όρια των κόκκων ή και ακόμα εντός των κόκκων. Θεωρείται ότι η αστοχία στα πετρώματα ξεκινάει από τα όρια των κόκκων όπου υπάρχουν αυτές οι μικρορωγμές και οι ρωγμές Griffith στα

πετρώματα είναι περίπου ίσες με την μέγιστη διάμετρο κόκκου (Whittaker et al., 1992).

4.3 Θεωρία του Griffith για το Ισοζύγιο Ενέργειας

Η προσέγγιση με το ισοζύγιο ενέργειας, προτάθηκε από τον Griffith το 1921. Υποστήριξε ότι η αστοχία ενός ψαθυρού υλικού προκαλείται από την διεύρυνση ρωγμών (τύπου Griffith) που είναι έμφυτες στα ψαθυρά στερεά. Η δημιουργία μιας νέας ρωγματωμένης επιφάνειας που προκαλείται από την διάδοση της ρωγμής, απορροφάει ενέργεια που παρέχεται από το έργο που δημιουργούν οι εξωτερικές δυνάμεις που είναι ως αποτέλεσμα της ενέργειας παραμόρφωσης του στερεού.

Στο τέλος της αιχμής μιας ρωγμής, μπορεί να δημιουργηθεί συγκέντρωση τάσεων, που αυξάνει τοπικά τις τάσεις σε μια τιμή μεγαλύτερη από αυτή των ενδοατομικών δεσμών. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα την πιθανότητα να ξεκινήσει η θραύση. Στο σημείο αυτό όμως, η θραύση μπορεί να μην ξεκινήσει διότι η ενέργεια που παρέχεται δεν είναι αρκετή έτσι ώστε να ξεπεράσει την αντίσταση στη έναρξη και διάδοση της ρωγμής. Όσο περισσότερη ενέργεια απορροφάει ένα στερεό, τόση μεγάλη αντίσταση θα έχει στην έναρξη και διάδοση μιας ρωγμής. Συνέπεια της πιο πάνω θεωρίας, είναι ότι για να επέλθει αστοχία σε ένα στερεό, θα πρέπει να ικανοποιούνται δυο απαραίτητες προϋποθέσεις (Whittaker et al., 1992):

- **Προϋπόθεση τάσης:** Σε κάποιο σημείο του στερεού, οι τοπικές τάσεις πρέπει να είναι αρκετά ψηλές για να υπερβούν τις δυνάμεις συνοχής του στερεού. Αυτό επιτυγχάνεται με την συγκέντρωση τάσεων λόγω ύπαρξης προϋπάρχουσων μικρορωγμών εντός του στερεού γύρω από τις αιχμές της ρωγμής (ρωγμές Griffith).
- **Προϋπόθεση ενέργειας:** Επαρκής ενέργεια (επιφανειακή ενέργεια) πρέπει να αποδοθεί έτσι ώστε να ξεπεραστεί η αντίσταση που έχει το υλικό στην έναρξη και διάδοση μιας ρωγμής. Αυτό επιτυγχάνεται με την αύξηση του έργου που παράγεται από τις εξωτερικές δυνάμεις.

4.4 Ενέργεια επί της Ρωγμής

Όπως αναφέρθηκε και πιο πριν, οι μικρορωγμές δημιουργούν συγκεντρώσεις τάσεων στις αιχμές τους. Άρα η προϋπόθεση τάσης ικανοποιείται αυτομάτως. Η

προϋπόθεση ενέργειας είναι βασικά μια εφαρμογή του θεωρήματος της ελάχιστης πιθανής ενέργειας από τα θεμελιώδη θεωρήματα της κλασσικής μηχανικής και της θερμοδυναμικής. Κατά τον Griffith, το απλό ισοζύγιο ενέργειας που αποτελείται από την μείωση της πιθανής ενέργειας μέσα σε ένα σώμα που δέχεται τάσεις εξαιτίας της διεύρυνσης της ρωγμής, ισούται με την αύξηση της επιφανειακής ενέργειας εξαιτίας της νέας επιφάνειας της ρωγμής που έχει δημιουργηθεί. Μέσω αυτού του ισοζυγίου, ο Griffith εδραίωσε την σχέση μεταξύ της αντοχής σε θραύση και του μεγέθους ή των διαστάσεων μιας ρωγμής. Γενικά η συνολική ενέργεια U , μιας ρωγματωμένης πλάκας όπως φαίνεται στο σχήμα 4.1, δίδεται από την σχέση (Whittaker et al., 1992):

$$U = U_t + U_c - W + U_s \quad (4.2)$$

ή

$$U = U_p + U_s \quad (4.3)$$

όπου: U = Συνολική ενέργεια της άπειρης ρωγματωμένης πλάκας,

Η αρχική ελαστική ενέργεια παραμόρφωσης της πλάκας δίδεται από την σχέση (Whittaker et al., 1992):

$$U_t = \frac{\sigma^2 A}{3E'} \quad (4.4)$$

όπου E' , το ενεργό μέτρο ελαστικότητας, Η ελαστική ενέργεια παραμόρφωσης που ελευθερώνεται από την εισαγωγή του μήκους $2a$ και της χαλάρωσης του υλικού εκατέρωθεν της ρωγμής δίδεται από την σχέση (Whittaker et al., 1992):

$$U_c = \pm \frac{\pi \sigma^2 a^2}{E'} \quad (4.5)$$

Η αλλαγή στην ελαστική επιφανειακή ενέργεια εξαιτίας της δημιουργίας νέας επιφάνειας ρωγμής δίδεται από την σχέση (Whittaker et al., 1992):

$$U_s = 4a\gamma_s \quad (4.6)$$

Η αλλαγή της διαθέσιμης ενέργειας δίδεται από την σχέση (Whittaker et al., 1992):

$$U_p = U_t + U_c - W \quad (4.7)$$

Και τέλος το έργο που παράγεται από τις εξωτερικές δυνάμεις δίδεται από την σχέση (Whittaker et al., 1992):

$$W = \frac{\sigma \varepsilon A}{2} \quad (4.8)$$

Αν αντικατασταθούν οι σχέσεις 4.4, 4.5, 4.6 και 4.8 στην 4.2 λαμβάνεται η γενική έκφραση της ελαστικής ενέργειας (Whittaker et al., 1992):

$$U = \frac{\sigma^2 A}{3E'} \pm \frac{\pi \sigma^2 a^2}{E'} - \frac{\sigma \varepsilon A}{2} + 4a\gamma_s \quad (4.9)$$

όπου: σ = Η τάση κατά την διεύθυνση επιβολής της.

A = Περιοχή της πλάκας.

E' = Το ενεργό μέτρο ελαστικότητας. Για συνθήκες επίπεδης τάσης είναι

$$E' = E, \text{ ενώ για συνθήκες επίπεδης παραμόρφωσης είναι } E' = \frac{E}{(1-\nu)^2}.$$

a = Το μισό μήκος της ρωγμής.

ε = Η παραμόρφωση.

γ_s = Η ενέργεια που απαιτείται για την δημιουργία μιας νέας μονάδας

επιφάνειας ρωγμής καθώς η ρωγμή αυξάνει το μήκος της.

Το \pm υποδηλώνει ότι το έργο που παράγεται από της εξωτερικές δυνάμεις αυξάνει την ενέργεια παραμόρφωσης του συστήματος ή την μειώνει αντίστοιχα.

4.4.1 Έναρξη θραύσης και κρίσιμη ισορροπία

Η θεωρία του Griffith υποστηρίζει ότι η έναρξη θραύσης γίνεται όταν:

$$\frac{\partial U}{\partial a} < 0 \quad (4.10)$$

και η κρίσιμη ισορροπία πριν ξεκινήσει η θραύση συμβαίνει όταν:

$$\frac{\partial U}{\partial a} = 0 \quad (4.11)$$

από την μερική παράγωγο της ενέργειας ως προς το μισό μήκος της ρωγμής όταν υπάρχει κρίσιμη ισορροπία, λαμβάνεται σχέση 4.12 που είναι και η έναρξη θραύσης σε ιδανικά ψαθυρά υλικά (Whittaker et al., 1992):

$$\sigma\sqrt{\pi a} = \sqrt{2E'\gamma_s} \quad (4.12)$$

Από την πιο πάνω σχέση συμπεραίνεται ότι η έναρξη θραύσης εξαρτάται από τις τάσεις μακρινού πεδίου και την τετραγωνική ρίζα του μήκους της ρωγμής, τις ελαστικές σταθερές και την ειδική επιφανειακή ενέργεια. Φαίνεται ότι ο δεύτερος όρος της σχέσης 4.12 είναι σταθερός και άρα η έναρξη θραύσης λαμβάνει χώρα όταν το γινόμενο $\sigma\sqrt{\pi a}$ τείνει να φτάσει μια κρίσιμη σταθερή τιμή. Η κρίσιμη αυτή τιμή είναι γνωστή και ως κρίσιμος συντελεστής έντασης των τάσεων ή σκληρότητα θραύσης K_{IC} (Whittaker et al., 1992).

4.4.2 Τάση θραύσης σ_F

Η τάση που απαιτείται να εφαρμοστεί στο σώμα έτσι ώστε να ξεκινήσει η θραύση είναι (Whittaker et al., 1992):

$$\sigma_f = \sqrt{\frac{2E'\gamma_s}{\pi a}} \quad (4.13)$$

Η τάση αυτή είναι ίση προς την αντοχή σε θλίψη για την περίπτωση όπου το πεδίο των τάσεων είναι εφελκυστικό όπως φαίνεται στο σχήμα 4.1. Η τάση θραύσης είναι αυστηρά εξαρτώμενη από την γεωμετρία της ρωγμής. Πειράματα που έχουν

γίνει, αποδεικνύουν ότι η τάση θραύσης εξαρτάται από το μέγεθος του δοκιμίου, δηλαδή όσο μεγαλύτερο είναι το δείγμα, τόσο μικρότερη θα είναι η τάση θραύσης.

4.4.3 Ρυθμός απελευθέρωσης ενέργειας παραμόρφωσης G

Με κατάλληλες πράξεις, αφαιρούνται τα ριζικά από την σχέση 4.12 και λαμβάνεται καινούργια σχέση 4.14 (Whittaker et al., 1992):

$$\frac{\pi \sigma^2 a}{E'} = 2\gamma_s \quad (4.14)$$

Το δεξιό μέρος της σχέσης αντιπροσωπεύει την ελαστική ενέργεια ανά μονάδα επιφάνειας της ρωγμής. Αυτή η ενέργεια είναι και η απελευθέρωση ενέργειας παραμόρφωσης που απαιτείται για την διάδοση της ρωγμής. Η ενέργεια αυτή μπορεί να γραφεί (Whittaker et al., 1992):

$$G = \frac{\partial U_c}{\partial a} = \frac{\pi \sigma^2 a}{E'} \quad (4.15)$$

Γενικά για μια σταθερή τιμή μετατόπισης, η απελευθέρωση της ελαστικής ενέργειας παραμόρφωσης, ορίζεται ως η μερική παράγωγος της ελαστικής ενέργειας ως προς την περιοχή της ρωγμής ως προς το μισό μήκος της ρωγμής.

4.4.4 Αντίσταση στη έναρξη θραύσης R

Το αριστερό μέλος της σχέσης 4.14, αντιπροσωπεύει την ελαστική επιφανειακή ενέργεια της επιφάνειας της ρωγμής. Αυτή είναι και η ενέργεια που απαιτείται για την σταδιακή διεύρυνση της ρωγμής και είναι μια ποσότητα που μπορεί να μετρηθεί η αντίσταση στην έναρξη θραύσης και δημιουργία ρωγμής. Αυτή η ποσότητα δίδεται από την σχέση (Whittaker et al., 1992):

$$R = \frac{\partial U_c}{\partial a} = 2\gamma_s \quad (4.16)$$

Η αντίσταση στην έναρξη θραύσης και δημιουργία ρωγμής R, είναι ανεξάρτητη από το μήκος της ρωγμής a, αλλά είναι συνάρτηση του μήκους

διεύρυνσης της Δα. Μια εναλλακτική κρίσιμη συνθήκη είναι ότι η G πρέπει να είναι τουλάχιστο ίση με την αντίσταση R , πριν ξεκινήσει η ασταθής διεύρυνση της ρωγμής. Η συνθήκη αυτής της ισορροπίας δίδεται από την σχέση (Whittaker et al., 1992):

$$G_C = R \quad (4.17)$$

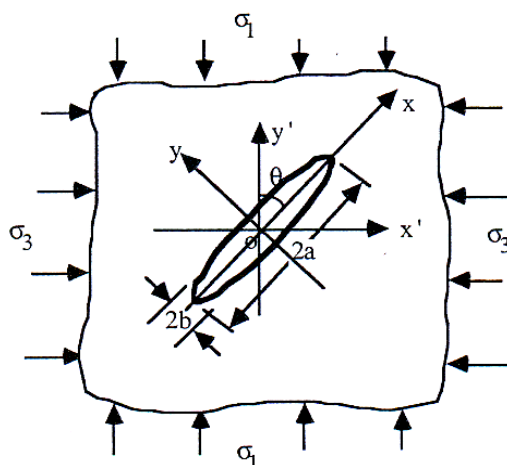
4.5 Κριτήριο Αστοχίας Griffith

Στην εφαρμογή της θεωρίας του Griffith για το ισοζύγιο ενέργειας για τον υπολογισμό της μονοαξονικής αντοχής σε εφελκυσμό, θεωρείται ότι η διεύρυνση της ρωγμής γίνεται στο ίδιο επίπεδο. Αυτή η θεώρηση επιτρέπει ένα μοναδικό υπολογισμό διότι η μεταβολή της ενέργειας συνδέεται με την διεύρυνση της ρωγμής. Στην πραγματικότητα όμως ο προσδιορισμός της επιφανειακής ενέργειας δεν είναι απλή υπόθεση αφού τα παραγόμενα τασικά πεδία είναι πολύπλοκα καθώς είναι αποτέλεσμα θλίψης. Σε αυτή την περίπτωση η ρωγμή δεν μπορεί να θεωρηθεί ότι θα διευρυνθεί στο ίδιο επίπεδο αλλά σε κάποιο προσανατολισμό ως προς τον άξονα της ρωγμής.

Στο σημείο αυτό εισάγεται μια νέα έννοια όταν η ρωγμή τείνει να κλείσει λόγω θλιπτικού τασικού πεδίου, αυτή είναι γνωστή ως το κλείσιμο της ρωγμής (crack closure). Το κλείσιμο της ρωγμής είναι μια αρκετά πιθανή περίπτωση και πρέπει να λαμβάνονται υπόψη τα φαινόμενα τριβής μεταξύ των χειλών της ρωγμής. Η ερμηνεία της πιο πάνω υπόθεσης είναι ότι η ρωγμή θα ξεκινήσει να διευρύνεται όταν κοντά ή στην αιχμή της αναπτυχθούν εφελκυστικές τάσεις, μεγαλύτερες από τις δυνάμεις συνοχής του υλικού. Η υπόθεση αυτή είναι γνωστή και ως η προσέγγιση της τάσης θραύσης (Whittaker et al., 1992).

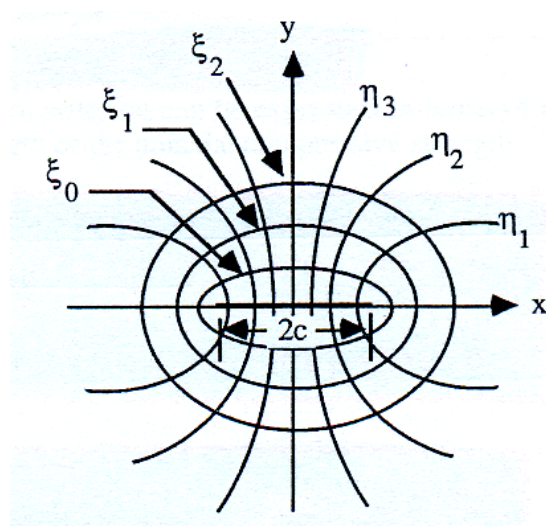
4.5.1 Ανοιχτή ελλειπτική ρωγμή σε διαξονικό πεδίο

Το σχήμα 4.2, παρουσιάζει την σχηματική διάταξη μιας ανοιχτής ρωγμής σε θλιπτικό διαξονικό πεδίο. Πρέπει να σημειωθεί ότι στην περίπτωση αυτή οι θλιπτικές τάσεις λαμβάνονται θετικές ενώ οι εφελκυστικές τάσεις λαμβάνονται αρνητικές. Το 1924, ο Griffith ανέπτυξε το κριτήριο αστοχίας μελετώντας τις μεταβολές της εφαπτομενικής τάσης στην επιφάνεια μιας ελλειπτικής ρωγμής όπως φαίνεται στο σχήμα 4.2 (Whittaker et al., 1992).



Σχήμα 4.2: Κεκλιμένη ελλειπτική οπή σε πλάκα η οποία υπόκειται σε θλιπτική διαξονική φόρτιση (Whittaker et al., 1992)

Η κατανομή των τάσεων γύρω από την ελλειπτική ρωγμή επιτεύχθηκε με μετασχηματισμό του καρτεσιανού συστήματος συντεταγμένων σε ελλειπτικό σύστημα συντεταγμένων. Στο σχήμα 4.3 φαίνεται το ελλειπτικό σύστημα συντεταγμένων (ξ - η) που ανταποκρίνεται στο πεδίο τάσεων του σχήματος 4.2 (Whittaker et al., 1992).



Σχήμα 4.3: Ελλειπτικό σύστημα συντεταγμένων (Whittaker et al., 1992)

Οι σχέσεις που συνδέουν τα δυο συστήματα αναφοράς είναι (Whittaker et al., 1992):

$$\begin{aligned} x &= c \cosh(\xi) \cos(\eta) \\ y &= c \sinh(\xi) \sin(\eta) \end{aligned} \quad (4.18)$$

όπου c , η εστία της έλλειψης. Από τις σχέσεις 4.18, μπορούν να ληφθούν δυο ομάδες εξισώσεων με φυσική και μαθηματική σημασία. Απαλείφοντας το η , λαμβάνεται η εξίσωση (Whittaker et al., 1992):

$$\left(\frac{x}{c \cos h(\xi)}\right)^2 + \left(\frac{y}{c \sin h(\xi)}\right)^2 = 1 \quad (4.19)$$

Η εξίσωση 4.19, περιγράφει μια οικογένεια ελλείψεων. Αν απαλειφτεί το ξ , λαμβάνεται η εξίσωση 4.20 που είναι μια οικογένεια υπερβολών (Whittaker et al., 1992):

$$\left(\frac{x}{c \cos(\eta)}\right)^2 + \left(\frac{y}{c \sin(\eta)}\right)^2 = 1 \quad (4.20)$$

Στο σύνορο της ελλειπτικής ρωγμής ισχύει: $\xi = \xi_0$ και $0 \leq \eta \leq 2\pi$.

4.5.2 Συνιστώσες τάσεων στην ελλειπτική ρωγμή

Οι συνιστώσες των τάσεων παράλληλα και κάθετα με τους άξονες της έλλειψης προκύπτουν συναρτήσει των κυρίων τάσεων σ_1 και σ_3 (Whittaker et al., 1992):

$$\begin{aligned} \sigma_y &= \frac{1}{2} [(\sigma_1 + \sigma_3) - (\sigma_1 - \sigma_3) \sin 2\theta] \\ \sigma_{xy} &= \frac{1}{2} (\sigma_1 - \sigma_3) \sin 2\theta \end{aligned} \quad (4.21)$$

Η συνιστώσα σ_x , έχει αμελητέα επίδραση για αυτό και παραλείπεται από την ανάλυση. Η εφαπτομενική τάση στην ελλειπτική επιφάνεια είναι η ακόλουθη (Whittaker et al., 1992):

$$\sigma_\eta = \frac{\sigma_y (\sin h(2\xi_0) + e^{2\xi_0} \cos(2\eta) - 1) + 2\sigma_{xy} e^{2\xi_0} \sin(2\eta)}{\cos h(2\xi_0) - \cos(2\eta)} \quad (4.22)$$

όπου το ξ_0 είναι πολύ μικρό (μια μικρή ελλειπτική ρωγμή). Το η είναι επίσης πολύ μικρό στις αιχμές τις ρωγμής και άρα η σχέση 4.22 μπορεί να ελαττωθεί σε (Whittaker et al., 1992):

$$\sigma_\eta = \frac{2(\xi_0 \sigma_y + \eta \sigma_{xy})}{\xi_0^2 + \eta^2} \quad (4.23)$$

Οι μέγιστες και ελάχιστες εφαπτομενικές τάσεις μπορούν να υπολογιστούν εξισώνοντας την παράγωγο της τάσης σ_η ως προς το η , η οποία διαδικασία παράγει την σχέση:

$$\eta = \frac{\xi_0 \left[\sigma_y \pm \sqrt{\sigma_y^2 + \sigma_{xy}^2} \right]}{\sigma_{xy}} \quad (4.24)$$

αντικαθιστώντας την σχέση 4.24 και 4.21 στην εξίσωση 4.23 λαμβάνονται οι μέγιστες και ελάχιστες εφαπτομενικές τάσεις από την σχέση (Whittaker et al., 1992):

$$\xi_0 \sigma_{\eta m} = \frac{1}{2} [(\sigma_1 + \sigma_3) - (\sigma_1 - \sigma_3) \sin 2\theta] \pm \sqrt{\frac{1}{2} (\sigma_1^2 + \sigma_3^2) - (\sigma_1^2 - \sigma_3^2) \sin 2\theta} \quad (4.25)$$

Από την σχέση 4.25, φαίνεται ότι οι μέγιστες και ελάχιστες εφαπτομενικές τάσεις είναι ανεξάρτητες από τον προσανατολισμό της ρωγμής. Ο κρίσιμος προσανατολισμός θ_c , της ρωγμής αυτής δίδεται από την σχέση (Whittaker et al., 1992):

$$\sin \theta_c = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2(\sigma_1 + \sigma_3)} \quad (4.26)$$

είναι φανερό ότι η σχέση 4.26 μπορεί να είναι πραγματική μόνο όταν (Whittaker et al., 1992):

$$\left| \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2(\sigma_1 + \sigma_3)} \right| \leq 1 \quad (4.27)$$

που τελικά καταλήγει:

$$\sigma_1 + 3\sigma_3 \geq 0 \quad (4.28)$$

όπως αναφέρθηκε και πιο πριν, οι εφελκυστικές τάσεις λαμβάνονται θετικές και η μέγιστη εφαπτομενική τάση λαμβάνεται από αντικατάσταση του κρίσιμου προσανατολισμού θ_c της ρωγμής στην σχέση 4.25. Επομένως η νέα σχέση που προκύπτει θα είναι (Whittaker et al., 1992):

$$\xi_0 \sigma_{\eta m} = -\frac{(\sigma_1 - \sigma_3)^2}{4(\sigma_1 + \sigma_3)} \quad (4.29)$$

Η σχέση 4.29 αποτελεί την βάση για το κριτήριο αστοχίας του Griffith για $\sigma_1 + 3\sigma_3 \geq 0$. Η ερμηνεία του είναι ότι η θραύση θα ξεκινήσει όταν η μέγιστη εφαπτομενική τάση στην αιχμή της ρωγμής εξισωθεί με τις δυνάμεις συνοχής του υλικού.

Το πιο πάνω κριτήριο μπορεί να εκφραστεί συναρτήσει της μονοαξονικής αντοχής σε εφελκυσμό σ_t . Για την περίπτωση της μονοαξονικής περίπτωσης ισχύει ότι $\sigma_1 = 0$, $\sigma_3 = \sigma_t$ και $\sigma_1 + 3\sigma_3 < 0$. Άρα η μέγιστη εφελκυστική τάση $\sigma_{\eta m}$ λαμβάνεται (Whittaker et al., 1992):

$$\xi_0 \sigma_{\eta m} = 2\sigma_3 = 2\sigma_t \quad (4.30)$$

Συνδυάζοντας τις σχέσεις 4.29 και 4.30, προκύπτει το γνωστό κριτήριο αστοχίας του Griffith συναρτήσει των κυρίων τάσεων σ_1 και σ_3 όπως φαίνεται στη σχέση 4.31 (Whittaker et al., 1992):

$$\left. \begin{aligned} (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + 8\sigma_t(\sigma_1 + \sigma_3) &= 0 \\ \sigma_3 &= \sigma_t \end{aligned} \right\} \quad \begin{aligned} \sigma_1 + 3\sigma_3 &\geq 0 \\ \sigma_1 + 3\sigma_3 &< 0 \end{aligned} \quad (4.31)$$

όπου: σ_1 και σ_3 η μέγιστη και ελάχιστη κύρια τάση αντίστοιχα στο άπειρο. Η σ_t είναι η μονοαξονική αντοχή σε εφελκυσμό.

4.5.3 Κριτήριο αστοχίας και λόγος κυρίων τάσεων

Εναλλακτικά το κριτήριο αστοχίας μπορεί να εκφραστεί συναρτήσει του λόγου των κυρίων τάσεων σ_3/σ_1 και της μονοαξονικής αντοχής σε εφελκυσμό ή της μονοαξονικής αντοχής σε θλίψη. Επομένως συναρτήσει της αντοχής σε εφελκυσμό το κριτήριο αστοχίας του Griffith γίνεται (Whittaker et al., 1992):

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 &= \sigma_3 - 4\sigma_t \left[1 + \sqrt{1 - \frac{\sigma_3}{\sigma_t}} \right] \\ \sigma_3 &= \sigma_t \end{aligned} \right\} \quad \begin{aligned} \sigma_1 + 3\sigma_3 &\geq 0 \\ \sigma_1 + 3\sigma_3 &< 0 \end{aligned} \quad (4.31)$$

και συναρτήσει της αντοχής σε μονοαξονική θλίψη, το κριτήριο αστοχίας του Griffith γίνεται (Whittaker et al., 1992):

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 &= \sigma_3 + \sigma_c \left[1 + \sqrt{2\frac{\sigma_3}{\sigma_c} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2\sigma_c}} \right] \\ \sigma_3 &= \sigma_t \end{aligned} \right\} \quad \begin{aligned} \sigma_1 + 3\sigma_3 &\geq 0 \\ \sigma_1 + 3\sigma_3 &< 0 \end{aligned} \quad (4.32)$$

όπου το σ_c , είναι η αντοχή σε μονοαξονική θλίψη. Όταν το δοκίμιο είναι σε κατάσταση θλιπτικού πεδίου, η ελάχιστη κύρια τάση σ_3 είναι ίση με μηδέν και η μέγιστη κύρια τάση γίνεται ίση με την αντοχή σε θλίψη και άρα η σχέση 4.32 γίνεται:

$$\sigma_c = -8\sigma_t \quad (4.33)$$

Η σχέση 4.33 δηλώνει ότι η αντοχή σε μονοαξονική θλίψη είναι οχτώ φορές μεγαλύτερη από την αντοχή σε εφελκυσμό. Ο θεωρητικός λόγος θλιπτικής αντοχής σ_1 προς εφελκυστική αντοχή σ_t , όπως προκύπτει από την θεωρία Griffith, είναι 8 (Vutukuri, 1974).

Η επίδραση αυτών των παραγόντων στα αποτελέσματα της δοκιμής του Βραζιλιανού δίσκου αναλύθηκαν από τον Fairhurst το 1964, ο οποίος διεύρυνε το κριτήριο για διάφορους λόγους θλιπτικής/εφελκυστικής αντοχής n που αποκλίνουν από την θεωρητική τιμή 8. Η αστοχία τότε συμβαίνει όταν (Vutukuri, 1974):

$$\sigma_1 = \sigma_T \quad (4.34)$$

αν ισχύει:

$$m(m-2)\sigma_1 + \sigma_3 \geq 0 \quad (4.35)$$

ή όταν:

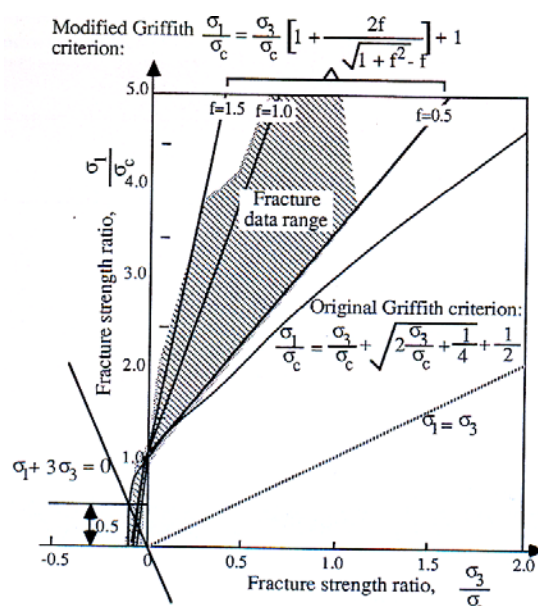
$$\frac{(\sigma_1 - \sigma_3)^2}{\sigma_1 + \sigma_3} = -2(m-1)^2 \sigma_T \left[1 + \frac{2\sigma_T}{\sigma_1 + \sigma_3} \left\{ \left(\frac{m-1}{2} \right)^2 - 1 \right\} \right] \quad (4.36)$$

αν ισχύει:

$$m(m-2)\sigma_1 + \sigma_3 \leq 0 \quad (4.37)$$

όπου $m = \sqrt{n} + 1$. Περαιτέρω ανάλυση των προηγούμενων σχέσεων, οδήγησαν τον Fairhurst στο συμπέρασμα ότι απαιτείται τόξο 20° ή και παραπάνω κατανομής του φορτίου, ώστε η αστοχία να εμφανιστεί στο κέντρο ομογενούς δίσκου. Τόξο περίπου 5° και χαμηλό n οδηγούν σε αστοχία μακριά από το κέντρο ή και σε παραπλανητική τιμή της εφελκυστικής αντοχής (Vutukuri, 1974).

Σε παρόμοια συμπεράσματα κατέληξαν οι Addinal & Hackett το 1964 και 1965. Βρήκαν ότι η αστοχία σε κλασσικά υλικά τύπου Griffith ($n=8$) συμβαίνει κοντά στο κέντρο για γωνία τόξου επαφής μεγαλύτερη από 9° . Το κριτήριο αστοχίας του Griffith φαίνεται γραφικά στο σχήμα 4.4:

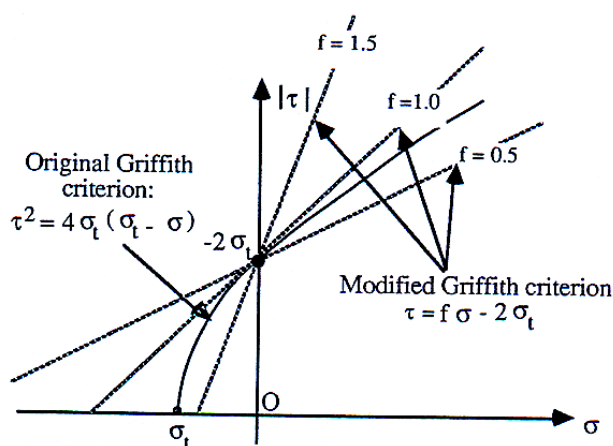


Σχήμα 4.4: Αρχικό και τροποποιημένο κριτήριο αστοχίας του Griffith (Whittaker et al., 1992)

Το κριτήριο Griffith μπορεί να εκφραστεί και από έναν παραβολικό φακέλο Mohr σύμφωνα με την σχέση που ακολουθεί (Whittaker et al., 1992):

$$\tau^2 = 4\sigma_t(\sigma_t - \sigma) \quad (4.38)$$

όπου: τ , είναι η διατμητική τάση που δρα κατά μήκος του επιπέδου της επιφάνειας της ρωγμής και σ , είναι η ορθή τάση που δρα κάθετα στην επιφάνεια της ρωγμής. Η γραφική απεικόνιση του παραβολικού φακέλου Mohr φαίνεται στο σχήμα 4.5:



Σχήμα 4.5: Αρχικό και τροποποιημένο κριτήριο αστοχίας του Griffith υπό μορφή φακέλου Mohr (Whittaker et al., 1992)

4.5.4 Τροποποιημένο κριτήριο αστοχίας Griffith

Οι ρωγμές σε θλιπτικό εντατικό πεδίο, μπορεί να κλείσουν πριν προλάβει να δημιουργηθεί το εφελκυστικό πεδίο τάσεων μπροστά από την αιχμή της ρωγμής γίνει ικανό έτσι ώστε να ξεκινήσει η ρωγμή να διευρύνεται. Αμέσως μετά το κλείσιμο, δημιουργούνται διατμητικές τάσεις (δυνάμεις τριβής) ως αποτέλεσμα της πίεσης επαφής μεταξύ των χειλών της ρωγμής. Αυτή η τριβή πρέπει να υπερνικηθεί έτσι ώστε να μπορέσει να ξεκινήσει η θραύση (Whittaker et al., 1992).

Οι McClintock και Walsh το 1962, τροποποίησαν το κριτήριο αστοχίας του για να λαμβάνει υπόψη τα φαινόμενα τριβής που δημιουργούνται επί των χειλών της ρωγμής μετά το κλείσιμο της από το θλιπτικό τασικό πεδίο. Το τροποποιημένο κριτήριο αστοχίας φαίνεται στο σχήμα 4.4 και δίδεται από την σχέση (Whittaker et al., 1992):

$$\sigma_1 = \sigma_3 \left[1 + \frac{2f}{\sqrt{1+f^2} - f} \right] + \sigma_c \quad (4.39)$$

όπου f , ο συντελεστής τριβής μεταξύ των χειλών της ρωγμής.

Από το σχήμα 4.4 φαίνεται ότι ο συντελεστής τριβής είναι μεγαλύτερος από τη μονάδα. Αυτό θεωρητικά είναι δυνατό να συμβεί αλλά πρακτικά είναι αδύνατο διότι αν ο συντελεστής πάρει τιμή μεγαλύτερη από την μονάδα, αυτό σημαίνει ότι η αντοχή σε διάτμηση είναι μεγαλύτερη από ορθές τάσεις που δρουν επί των χειλών της ρωγμής. Η εξήγηση αυτής της ανώμαλης συμπεριφοράς είναι εξαιτίας των χαρακτηριστικών (ατέλειες) της επιφάνειας της ρωγμής και στο ότι η καθολική αστοχία του δείγματος είναι ως αποτέλεσμα της διάδοσης της ρωγμής και όχι από την έναρξη θραύσης. Εναλλακτικά το τροποποιημένο κριτήριο αστοχίας του Griffith μπορεί να εκφραστεί και από ένα φάκελο Mohr όπως φαίνεται γραφικά στο σχήμα 4.5 και δίδεται από την σχέση (Whittaker et al., 1992):

$$\tau = f\sigma - 2\sigma_c \quad (4.40)$$

Στο σημείο αυτό αξίζει να αναφερθεί ότι οι σχέσεις 4.39 και 4.40 του τροποποιημένου κριτηρίου αστοχίας εφαρμόζονται μόνο στην περίπτωση που η ρωγμή έχει κλείσει υπό θλιπτικό εντατικό πεδίο.

4.6 Παραδοχές στην Εφαρμογή της Θεωρίας του Griffith

Η θεωρία του Griffith για το ισοζύγιο ενέργειας μπορεί να εφαρμοστεί όταν ισχύουν οι ακόλουθες παραδοχές (Whittaker et al., 1992):

- Ιδανικά ψαθυρά υλικά με περιορισμένη ανοχή σε πλαστική παραμόρφωση μπροστά από τις αιχμές των ρωγμών.
- Έναρξη θραύσης σε συνθήκες εφελκυσμού.
- Μια πολύ επίπεδη και ανοιχτή έλλειψη, αντιπροσωπεύει ιδανική ρωγμή.
- Μια μικρή ρωγμή σε σχέση με τις διαστάσεις του δοκιμίου.
- Ένα αντιστρεπτό θερμοδυναμικό σύστημα χωρίς απώλειες ενέργειας παρά μόνο για την δημιουργία νέας επιφάνειας ρωγμής.
- Όπου υπάρχει η δυνατότητα να προβλεφτούν τα σημεία στα οποία υπάρχει συγκέντρωση τάσεων, θεωρείται ότι θα είναι και η αφετηρία δημιουργίας και διάδοσης της ρωγμής. Δεν είναι δυνατό όμως να προβλεφτεί η τροχιά ή τον ρυθμό τον οποίο θα ακολουθήσει η διάδοση της ρωγμής.

4.7 Θραυστομηχανικές Παράμετροι

Στη συνέχεια γίνεται μια ανασκόπηση των αρχών της γραμμικής ελαστικής θραυστομηχανικής (LEFM-Linear elastic fracture mechanics), που θεωρείται ένα αναλυτικό εργαλείο επίλυσης και πρόβλεψης θραύσης υπό ασταθής συνθήκες. Οι σχέσεις οι οποίες θα αναφερθούν δεν δίδονται με τις αποδείξεις τους διότι ξεφεύγει από τους σκοπούς της εργασίας αυτής.

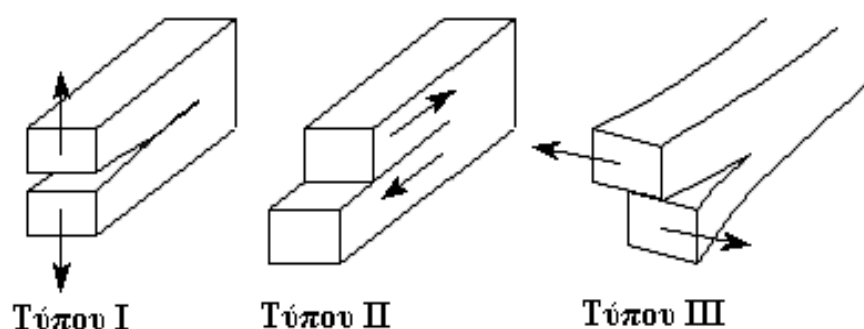
Υπάρχουν δυο βασικές προσεγγίσεις για την πρόβλεψη της θραύσης με κυρίαρχες συνθήκες τις γραμμικές και ελαστικές. Η πρώτη βασίζεται στο ισοζύγιο ενέργειας που είναι και η απαραίτητη συνθήκη για την θραύση όπως αναφέρθηκε και πιο πάνω. Η δεύτερη βασίζεται στο μέγεθος της έντασης της τάσης στην αιχμή της ρωγμής, όπου φτάνει μια κρίσιμη τιμή έτσι ώστε να ξεκινήσει η θραύση. Οι δυο αυτές προσεγγίσεις είναι ισοδύναμες αν γίνει η παραδοχή ότι το υλικό συμπεριφέρεται γραμμικά και ελαστικά μέχρι το σημείο αστοχίας του και δεν είναι αναγκαίο να γίνεται επιλογή μεταξύ τους για επίτευξη βέλτιστων αποτελεσμάτων σε μια ανάλυση. Οι δυο αυτές μέθοδοι, μπορούν να αναλύσουν και κάποιας περιορισμένης έκτασης πλαστικότητα, κάτι που κάνει τις δυο μεθόδους εύχρηστες και εφαρμόσιμες σε διάφορα προβλήματα (Saxena, 1998).

4.7.1 Φόρτιση και τύποι ρωγμών

Οι ορισμοί των τριών διαφορετικών τρόπων φόρτισης και τύποι ρωγμών ενός ρωγματωμένου σώματος είναι (Saxena, 1998):

- **Ρωγή τύπου I** (άνοιγμα), όπου η φόρτιση της ρωγμής επιβάλλεται συμμετρικά ως προς τα επίπεδα $x-y$ και $x-z$.
- **Ρωγή τύπου II** (ολίσθηση σε επίπεδο), όπου η ρωγή φορτίζεται σχετικά ως προς τα επίπεδα $x-y$ και $x-z$.
- **Ρωγή τύπου III** (ολίσθηση εκτός επιπέδου), όπου η ρωγή φορτίζεται ασύμμετρα ως προς τα επίπεδα $x-y$ και $x-z$.

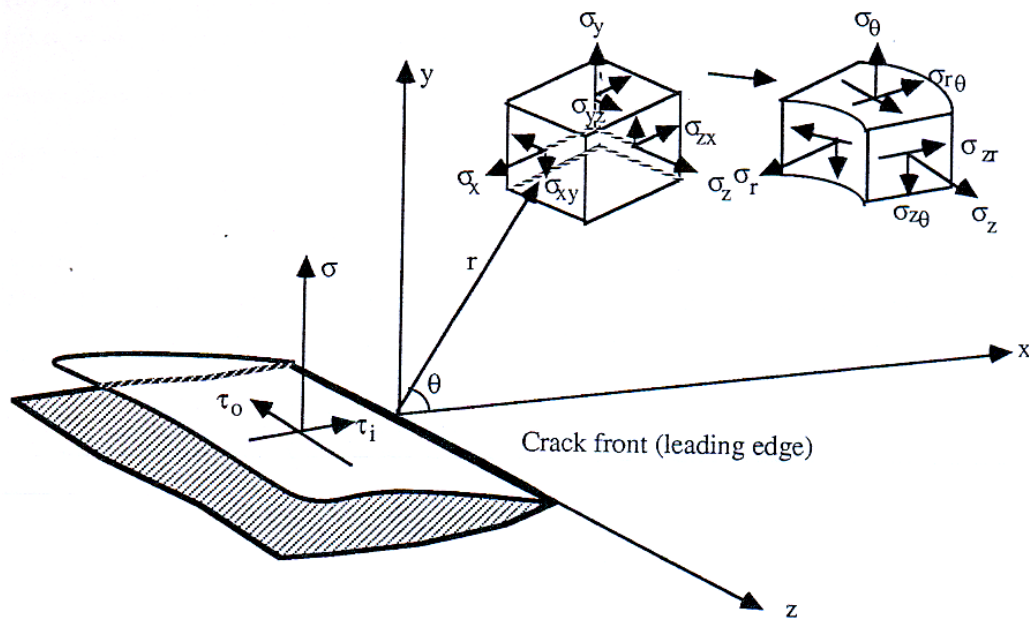
Η επαλληλία των πιο πάνω τύπων ρωγμών φαίνονται στο σχήμα 4.6 και μπορούν να περιγράψουν τις περισσότερες περιπτώσεις θραύσης με την προϋπόθεση να ισχύουν συνθήκες επίπεδης τάσης και παραμόρφωσης (Saxena, 1998).



Σχήμα 4.6: Τύποι φόρτισης και ανοίγματος ρωγμών (Saxena, 1998)

4.7.2 Τάσεις και μετατοπίσεις στις αιχμές της ρωγμής σε καρτεσιανό και πολικό σύστημα συντεταγμένων

Οι ακόλουθες αναλυτικές λύσεις τάσεων και μετατοπίσεων προτάθηκαν από τον Irwin για συνθήκες επίπεδης παραμόρφωσης (Saxena, 1998). Η σχηματική αναπαράσταση των τάσεων για ένα στοιχείο στο καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων αλλά και στο πολικό δίδεται στο σχήμα 4.7 (Whittaker et al., 1992):



Σχήμα 4.7: Συντεταγμένες και εντατική κατάσταση σε καρτεσιανό και πολικό σύστημα συντεταγμένων (Whittaker et al., 1992)

Τύπου Ι:

$$\sigma_{xx} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left[1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right] \quad (4.41)$$

$$\sigma_{yy} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left[1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right] \quad (4.42)$$

$$\sigma_{xy} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \quad (4.43)$$

$$\sigma_{zz} = \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \quad (4.44)$$

$$\sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0 \quad (4.45)$$

$$u = \frac{K_I}{G} \frac{\sqrt{r}}{\sqrt{2\pi}} \cos \frac{\theta}{2} \left[1 - 2\nu - \cos^2 \frac{\theta}{2} \right] \quad (4.46)$$

$$V = \frac{K_I}{G} \frac{\sqrt{r}}{\sqrt{2\pi}} \sin \frac{\theta}{2} \left[2 - 2\nu - \cos^2 \frac{\theta}{2} \right] \quad (4.47)$$

$$w = 0 \quad (4.48)$$

Τύπου II:

$$\sigma_{xx} = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \left[2 + \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \right] \quad (4.49)$$

$$\sigma_{yy} = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \quad (4.50)$$

$$\sigma_{xy} = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left[1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right] \quad (4.51)$$

$$\sigma_{zz} = \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \quad (4.52)$$

$$\sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0 \quad (4.53)$$

$$u = \frac{K_{II}}{G} \frac{\sqrt{r}}{\sqrt{2\pi}} \cos \frac{\theta}{2} \left[2 - 2\nu - \cos^2 \frac{\theta}{2} \right] \quad (4.54)$$

$$V = \frac{K_{II}}{G} \frac{\sqrt{r}}{\sqrt{2\pi}} \cos \frac{\theta}{2} \left[-1 + 2\nu + \sin^2 \frac{\theta}{2} \right] \quad (4.55)$$

$$w = 0 \quad (4.56)$$

Τύπου III:

$$\sigma_{zx} = \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \quad (4.57)$$

$$\sigma_{yz} = -\frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \quad (4.58)$$

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = \sigma_{xy} = 0 \quad (4.59)$$

$$w = \frac{K_{III}}{u} \frac{\sqrt{2r}}{\pi} \sin \frac{\theta}{2} \quad (4.60)$$

$$u = v = 0 \quad (4.61)$$

όπου ν : λόγος Poisson, E : μέτρο ελαστικότητας και $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ το μέτρο διάτμησης.

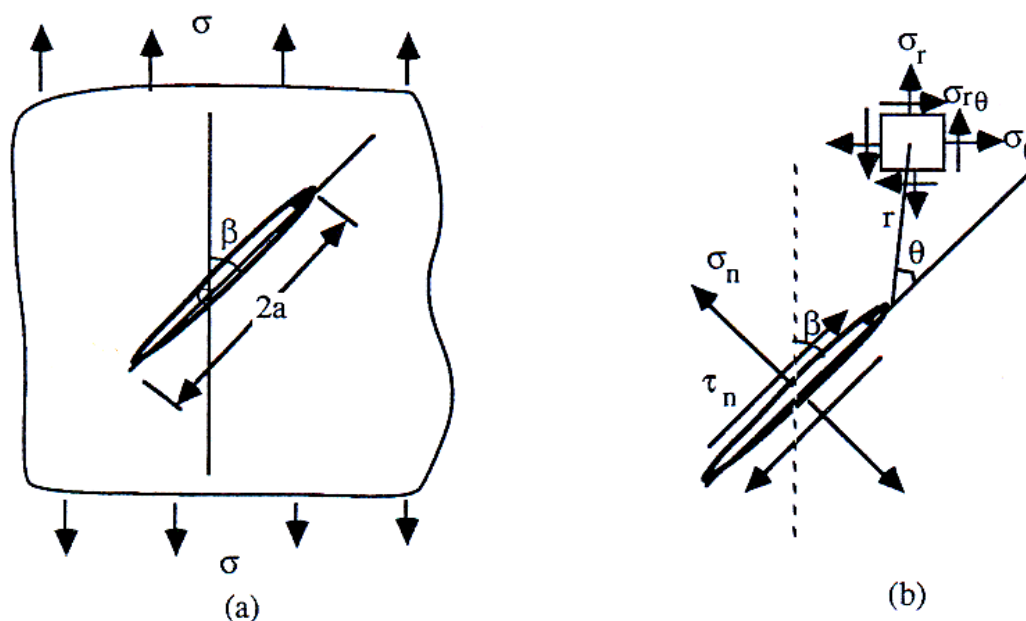
Οι τάσεις και μετατοπίσεις στη αιχμή της ρωγμής σε πολικές συντεταγμένες είναι αντίστοιχες με του συστήματος των καρτεσιανών συντεταγμένων με απλό μετασχηματισμό, για αυτό και δίδονται σε τανυστική μορφή (Whittaker et al., 1992):

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{ij} &= \frac{K_N}{\sqrt{2\pi r}} f_{Nij}(\theta) \\ u_{ij} &= \frac{K_N}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} g_{Nij}(\theta) \end{aligned} \right\} \quad (N = I, II; \quad i, j = x, y; \quad i, j = r, \theta) \quad (4.62)$$

Οι πιο πάνω σχέσεις αφορούν τις τάσεις και μετατοπίσεις για κάθε τύπο φόρτισης ξεχωριστά. Αυτή η ανάλυση είναι απλή αλλά θεμελιώδης. Στην πράξη, τα πιο πολλά προβλήματα που αφορούν θραύσεις πετρωμάτων είναι μικτού τύπου και συγκεκριμένα των τύπου I και τύπου II. Για την ανάλυση του προβλήματος της μεικτής θραύσης, ας θεωρηθεί μια τυπική διάταξη κεκλιμένης ρωγμής όπως φαίνεται στο σχήμα 4.8α και να υπόκειται σε ομοιόμορφο τασικό πεδίο. Το τασικό πεδίο μπορεί να είναι είτε εφελκυστικό είτε θλιπτικό. Από ανάλυση των τάσεων προκύπτουν οι ορθές και διατμητικές τάσεις επάνω στο επίπεδο της ρωγμής (Whittaker et al., 1992):

$$\begin{aligned} \sigma_n &= \sigma \eta \mu^2 \beta \\ \tau_n &= \sigma \eta \mu \beta \sin \nu \beta \end{aligned} \quad (4.63)$$

όπου σ_n , τ_n η ορθή και διατμητική τάση αντίστοιχα και β , η γωνία από τον κατακόρυφο άξονα με το επίπεδο της ρωγμής όπως φαίνεται και στο σχήμα 4.8β.



Σχήμα 4.8: Ρωγμή σε φόρτιση μεικτού τύπου, Α) διάταξη φόρτισης, Β) ανάλυση τάσεων επί της ρωγμής (Whittaker et al., 1992)

Οι τάσεις και μετατοπίσεις του μικτού τύπου φόρτισης δίδονται σε ταυνοστική μορφή ως ακολούθως (Whittaker et al., 1992):

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{ij} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} f_{Iij}(\theta) + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} f_{IIij}(\theta) \\ u_{ij} &= \frac{K_I}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} g_{Ii}(\theta) + \frac{K_{II}}{4\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} g_{IIi}(\theta) \end{aligned} \right\} \quad (i, j = r, \theta) \quad (4.64)$$

4.7.3 Συντελεστής έντασης των τάσεων K

Η προσέγγιση με τον συντελεστή έντασης των τάσεων K και της κρίσιμης τιμής του K_C , είναι ευρύτερα αποδεκτό σαν κριτήριο έναρξης θραύσης, σύμφωνα με το οποίο η έναρξη της θραύσης επιτυγχάνεται όταν το K φτάσει την κρίσιμη τιμή K_C . Ο συντελεστής έντασης των τάσεων K, είναι και μια ποσοτική παράμετρος που χαρακτηρίζει (Whittaker et al., 1992):

- την μοναδιαία (singular) συμπεριφορά,
- την συγκέντρωση των τάσεων, καθώς επίσης και
- την αντοχή που μπορεί να παρουσιαστεί σε μια αιχμή ρωγμής.

Ο συντελεστής έντασης των τάσεων K, εξαρτάται από το μέγεθος της ρωγμής, την γεωμετρία και το επίπεδο φόρτισης. Ο κρίσιμος συντελεστής έντασης των τάσεων

K_C ή αλλιώς σκληρότητα θραύσης, προσδιορίζει την ανοχή των ρωγμών σε μια κατασκευή υπό συγκεκριμένες συνθήκες.

Οι συντελεστές έντασης των τάσεων, μπορούν να οριστούν συναρτήσει των τάσεων και των μετατοπίσεων μπροστά από την αιχμή μιας ρωγμής με προσανατολισμό παράλληλα με την διάμετρο φόρτισης ($\theta=90^0$) ως εξής (Whittaker et al., 1992):

Τύπου I:

$$K_I = \lim_{r \rightarrow 0} \sigma_{\theta} \sqrt{2\pi r} \quad (4.65)$$

Τύπου II:

$$K_{II} = \lim_{r \rightarrow 0} \sigma_{r\theta} \sqrt{2\pi r} \quad (4.66)$$

Οι πιο πάνω σχέσεις προσδιορισμού του συντελεστή έντασης των τάσεων αφορούν τον κάθε τύπο φόρτισης ξεχωριστά. Οι συντελεστές έντασης των τάσεων μικτού τύπου και συγκεκριμένα των τύπου I και τύπου II δίδονται από τις σχέσεις:

$$\begin{aligned} K_I &= \sigma_n \sqrt{\pi a} = \sigma \sqrt{\pi a} \eta \mu^2 \beta \\ K_{II} &= \tau_n \sqrt{\pi a} = \sigma \sqrt{\pi a} \eta \mu \beta \sin \beta \end{aligned} \quad (4.67)$$

Από τις σχέσεις 4.67, είναι φανερό ότι οι συντελεστές έντασης των τάσεων K_I και K_{II} , είναι συνάρτηση της γωνίας β όπως ορίζεται στο σχήμα 4.8β.

Οι σχέσεις 4.68 και 4.69, συνδέουν τον ρυθμό απελευθέρωσης της ενέργειας G με τον συντελεστή έντασης των τάσεων K . Ο ρυθμός G , εξαρτάται από τις ελαστικές σταθερές και τους συντελεστές έντασης των τάσεων όπου και αυτοί με την σειρά τους εξαρτώνται από τους τρεις διαφορετικούς τρόπους φόρτισης. Για συνθήκες επίπεδης παραμόρφωσης ισχύει (Whittaker et al., 1992):

$$G = \frac{1-\nu^2}{E} (K_I^2 + K_{II}^2) + \frac{1+\nu}{E} K_{III}^2 \quad (4.68)$$

Ενώ για επίπεδη τάση ισχύει:

$$G = \frac{1}{E}(K_I^2 + K_{II}^2) \quad (4.69)$$

4.7.4 Έναρξη ρωγμής σε θλιπτικό εντατικό πεδίο

Είναι ευρέως αποδεκτό ότι η έναρξη της ρωγμής υπό θλιπτικό εντατικό πεδίο οφείλεται στις εφελκυστικές τάσεις που αναπτύσσονται στην αιχμή της ρωγμής. Ο τύπος της ρωγμής που δημιουργείται υπό θλιπτικό εντατικό πεδίο είναι εντελώς διαφορετικός από το εφελκυστικό πεδίο τάσεων. Αυτό που παρουσιάζει ενδιαφέρον είναι ότι η έναρξη της ρωγμής από προϋπάρχουσες ρωγμές δεν οδηγεί το δείγμα σε καθολική αστοχία αφού η ρωγμή κλείνει, σταματά να διαδίδεται (crack arrest) σε κάποιο τυχαίο σημείο ως αποτέλεσμα του θλιπτικού εντατικού πεδίου που αναπτύσσεται εντός του δοκιμίου. Τέτοιου είδους ρωγμές ονομάζονται πρωτεύουσες και με την αύξηση του φορτίου τότε μια δευτερεύουσα ρωγμή δημιουργείται που οδηγεί τελικά το δείγμα σε καθολική αστοχία (rapture). Τα χείλη της ρωγμής κλείνουν αναπόφευκτα με το θλιπτικό εντατικό πεδίο. Μόλις κλείσουν τα χείλη της ρωγμής, η διάδοση των ορθών τάσεων είναι δυνατή με αποτέλεσμα την δημιουργία τάσεων τριβής μεταξύ των χειλών εξαιτίας της σχετικής κίνησης μεταξύ τους. Επομένως είναι αναγκαίο να μελετηθούν οι ρωγμές τέτοιου τύπου σε δυο υποπεριπτώσεις, χωρίς την επίδραση τριβής (ανοιχτή ρωγμή) και με επίδραση τριβής (κλειστή ρωγμή) (Whittaker et al., 1992).

4.7.4.1 Περίπτωση ανοιχτής ρωγμής

Για την περίπτωση μιας κεκλιμένης ανοιχτής ρωγμής η οποία υποβάλλεται σε θλιπτικό εντατικό πεδίο τάσεων (σχήμα 4.8), οι τάσεις και οι συντελεστές έντασης των τάσεων δίδονται από τις εξισώσεις 4.64 και 4.67 αντίστοιχα με την διαφορά ότι οι συντελεστές έντασης των τάσεων K_I και K_{II} είναι αρνητικοί. Αρνητικός συντελεστής έντασης τάσης τύπου I σημαίνει ότι επιδρά θλιπτική τάση στην αιχμή της ρωγμής. Αρνητικός συντελεστής έντασης τάσης τύπου II σημαίνει αντίθετη κατεύθυνση της διατμητικής τάσης που επιδρά παράλληλα στο επίπεδο της ρωγμής (Whittaker et al., 1992).

4.7.4.2 Περίπτωση κλειστής ρωγμής

Για την περίπτωση μιας κεκλιμένης κλειστής ρωγμής η οποία υποβάλλεται σε θλιπτικό εντατικό πεδίο, οι ορθές τάσεις που επιδρούν πάνω στα χείλη της ρωγμής δεν επηρεάζουν την κατανομή των τάσεων γύρω από την ρωγμή. Οι τάσεις σε αυτή την περίπτωση δίδονται από τις ακόλουθες σχέσεις (Swedlow, 1976):

$$\begin{bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_\theta \\ \sigma_{r\theta} \end{bmatrix} = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \begin{bmatrix} \eta\mu\frac{\theta}{2}(1-3\eta\mu^2\frac{\theta}{2}) \\ -3\eta\mu\frac{\theta}{2}\sigma\nu^2\frac{\theta}{2} \\ \sigma\nu\frac{\theta}{2}(1-3\eta\mu^2\frac{\theta}{2}) \end{bmatrix} + \sigma_{ts} \begin{bmatrix} \sigma\nu^2\theta \\ \eta\mu^2\theta \\ -\eta\mu\theta\sigma\nu\theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \eta\mu^2\theta - f\eta\mu 2\theta \\ \sigma\nu^2\theta + f\eta\mu 2\theta \\ \eta\mu\theta\sigma\nu\theta - f\sigma\nu 2\theta \end{bmatrix} \quad (4.70)$$

Για συνθήκες επίπεδης παραμόρφωσης ισχύει: $\sigma_z = \nu(\sigma_r + \sigma_\theta)$ ενώ για συνθήκες επίπεδης τάσης: $\sigma_z = \sigma_{rz} = \sigma_{\theta z} = 0$. Για τους συντελεστές έντασης των τάσεων ισχύει ότι αναφέρθηκε και για την περίπτωση της ανοιχτής ρωγμής.

4.7.5 Έναρξη ρωγμής από αμβλείες εγκοπές σε θλιπτικό εντατικό πεδίο

Για μια ρωγμή απειροστής ακτίνας, η έναρξη διάδοσης της θα γίνει στην εφελκυστική ζώνη τάσεων που δημιουργείται γύρω από την αιχμή της εγκοπής. Εφελκυστικές τάσεις στην αιχμή της εγκοπής υποδηλώνει θετικό συντελεστή έντασης των τάσεων K_I στην αιχμή της εγκοπής. Είναι λοιπόν αναγκαίο να σχηματιστούν οι εκφράσεις για τους συντελεστές έντασης των τάσεων K_I και K_{II} για τη αιχμή της εγκοπής υπό θλιπτικό εντατικό πεδίο (Whittaker et al., 1992).

Αν θεωρηθεί το σχήμα 4.8, στο οποίο η κεκλιμένη ρωγμή έχει αμβλείες αιχμές και υποβάλλεται σε θλίψη, τότε η εγκάρσια τάση σ_{ts} , παράλληλα με το επίπεδο της ρωγμής δίδεται από την σχέση (Tirosh & Catz, 1981):

$$\sigma_{ts} = \sigma \sigma\nu^2 \beta \quad (4.71)$$

Η μέγιστη εγκάρσια τάση παράγει εφελκυστική τάση γύρω από την αιχμή της εγκοπής. Το μέγεθος την εγκάρσιας τάσης ισούται με το μέγεθος της μέγιστης εφαπτομενικής τάσης σ_{\max} , στην αιχμή της εγκοπής (Muskhelishvili, 1963). Συνεπώς

ο θετικός συντελεστής έντασης των τάσεων τύπου I δίδεται από την σχέση (Sih, 1973):

$$K_I = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{1}{2} \sigma_{\max} \sqrt{\pi \rho} \quad (4.72)$$

Αντικαθιστώντας την σχέση 4.71 στην σχέση 4.72, λαμβάνεται:

$$K_I = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\rho}{\alpha}} (\sigma \sqrt{\pi \alpha} \sin^2 \beta) \quad (4.73)$$

ο αρνητικός συντελεστής έντασης των τάσεων τύπου I ο οποίος είναι αποτέλεσμα του θλιπτικού εντατικού πεδίου δίδεται από τις σχέσεις 4.67. Η συνολική τιμή των συντελεστών έντασης των τάσεων K_I και K_{II} για αμβλύ άκρο εγκοπής, υπό θλιπτικό εντατικό πεδίο δίδεται από την σχέση:

$$\begin{aligned} K_I &= \sigma \sqrt{\pi \alpha} \left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\rho}{\alpha}} \sin^2 \beta - \eta \mu^2 \beta \right) \\ K_{II} &= \sigma \sqrt{\pi \alpha} \sin \beta \eta \mu \beta \end{aligned} \quad (4.74)$$

5 Αριθμητική Επίλυση του Βραζιλιανού Δίσκου

5.1 Εισαγωγή

Στο κεφάλαιο αυτό γίνεται η παρουσίαση των αποτελεσμάτων που προέκυψαν από την αριθμητική επίλυση του Βραζιλιανού δίσκου με την μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων. Η προσομοίωση των δοκιμών πραγματοποιήθηκε σε δυο διαστάσεις στο λογισμικό πεπερασμένων στοιχείων MSC. Marc-Mentat 2000. Η μοντελοποίηση γίνεται με επιβολή συνοριακών συνθηκών απευθείας επάνω στον Βραζιλιανό δίσκο για σκοπούς ελέγχου των κατανομών των εφαστομενικών και ακτινικών τάσεων με αναλυτικές λύσεις κλειστής μορφής.

Σκοπός της εργασίας αυτής είναι η προσομοίωση της δοκιμής του έμμεσου εφελκυσμού του Βραζιλιανού δίσκου. Αφού ελεγχθεί η σύγκλιση της αριθμητικής με την αναλυτική λύση για την περίπτωση του άρρηκτου Βραζιλιανού δίσκου, κατασκευάζονται οι κατανομές των εφαστομενικών και ακτινικών κατανομών για το πρόβλημα του Βραζιλιανού προ-ρηγματωμένου δίσκου και του Βραζιλιανού δίσκου με εγκοπή καθώς επίσης και διερευνάται αν εφαρμόζεται το κριτήριο αστοχίας του Griffith για τις πιο πάνω περιπτώσεις.

Η διάρθρωση της αριθμητικής επίλυσης χωρίζεται σε τρία μέρη:

Μέρος Α:

Στο μέρος Α (κεφάλαιο 5), πραγματοποιείται μια παραμετρική διερεύνηση με επιβολή ομοιόμορφα κατανεμημένου φορτίου στο πάνω και κάτω άκρο του δίσκου για γωνίες φόρτισης από 1^0 μέχρι 15^0 καθώς επίσης και με σημειακή φόρτιση.

Μέρος Β:

Στο μέρος Β (κεφάλαιο 6), επιλύεται το πρόβλημα του προ-ρηγματωμένου βραζιλιανού δίσκου με επίπεδη απειροστή μαθηματική ρωγή, τα στοιχεία της οποίας θα αναλυθούν στο αντίστοιχο κεφάλαιο, σε διάφορους προσανατολισμούς της ρωγμής για 0^0 , 15^0 , 30^0 , 45^0 , 60^0 , 75^0 , 90^0 . Η επίλυση έγινε με στοιχεία χαμηλής και

υψηλής τάξης (4 node & 8 node quadrilaterals) για την καλύτερη διακριτοποίηση γύρω από την ρωγμή έτσι ώστε η μεταβολή στη κατανομή των μεγεθών να φαίνεται καλύτερα.

Μέρος Γ:

Στο μέρος Γ (κεφάλαιο 7), επιλύεται το πρόβλημα του βραζιλιανού δίσκου με εγκοπή μεγάλου πάχους, σε διάφορους προσανατολισμούς της εγκοπής για 0° , 15° , 30° , 45° , 60° , 75° , 90° . Η επίλυση έγινε και σε αυτή την περίπτωση με στοιχεία χαμηλής και ψηλής τάξης (4 node & 8 node quadrilaterals) για την καλύτερη διακριτοποίηση γύρω από την εγκοπή έτσι ώστε η μεταβολή στη κατανομή των μεγεθών να φαίνεται καλύτερα.

Στη συνέχεια γίνεται και επίλυση υπό την επίδραση των χαλύβδινων σιαγόνων για το πρόβλημα του κλασσικού βραζιλιανού δίσκου καθώς επίσης και του προ-ρηγματωμένου δίσκου. Για την προσομοίωση της διεπιφάνειας μεταξύ των σιαγόνων, των οδηγών ευθυγράμμισης καθώς επίσης της επαφής του δοκιμίου και των πλακών χρησιμοποιήθηκαν στοιχεία επαφής (contact elements). Συμμετρία δεν λήφθηκε καθόλου υπόψη για αποφυγή φαινομένων περιστροφής. Τα υλικά προσομοιώθηκαν στις δυο διαστάσεις και σε μια απλή εφαρμογή στις τρεις διαστάσεις σαν γραμμικά ελαστικά και ισότροπα.

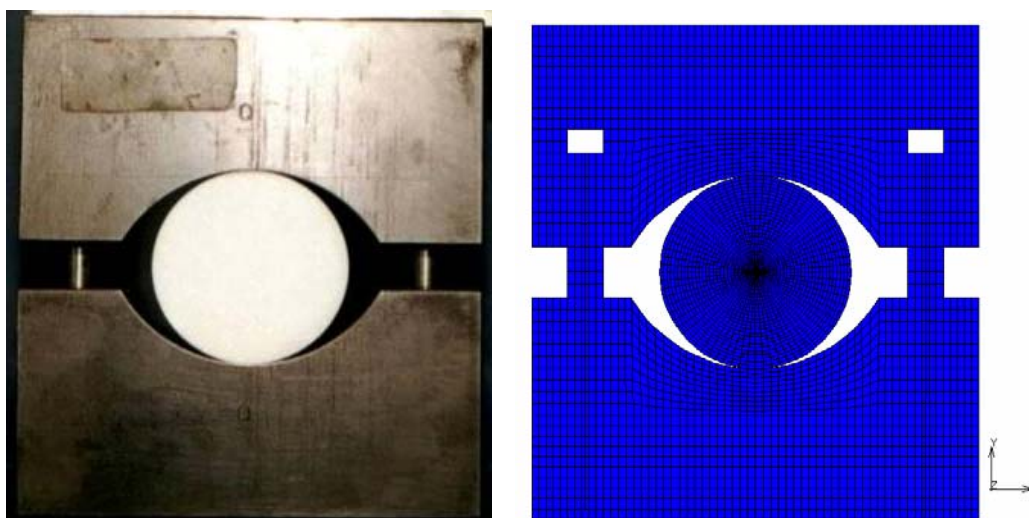
5.2 Η Μέθοδος των Πεπερασμένων Στοιχείων

Με τη Μέθοδο των Πεπερασμένων Στοιχείων, υπολογίζονται τα άγνωστα μεγέθη στους κόμβους, οι οποίοι δημιουργούνται από τη διαίρεση του πεδίου σε στοιχεία. Στη συνέχεια με την θεώρηση κατάλληλων συναρτήσεων, οι οποίες συνδέουν την κατανομή των μεγεθών στα εσωτερικά σημεία κάθε στοιχείου, είναι δυνατόν να υπολογιστεί η τιμή των μεγεθών αυτών σε κάθε σημείο του πεδίου με τους κόμβους του στοιχείου αυτού (Αγιουτάντης, 2002).

Η ΜΠΣ αποτελεί μια αριθμητική μέθοδο επίλυσης μερικών διαφορικών εξισώσεων παραβολικού τύπου σε συγκεκριμένο πεδίο ορισμού και με συγκεκριμένους περιορισμούς. Τα βήματα που ακολουθούνται κατά την εφαρμογή της ΜΠΣ είναι τα εξής (Αγιουτάντης, 2002):

- **Διακριτοποίηση** (descretization) του μέσου ή διαίρεση του μέσου σε στοιχεία ή τμήματα με τη βοήθεια ιδεατών γραμμών ή επιφανειών (σχήμα 5.1). Τα στοιχεία αυτά αποτελούνται από δύο ή περισσότερους κόμβους, οι οποίοι συνδέονται με

ευθύγραμμα ή καμπύλα τμήματα. Οι κορυφές των στοιχείων ορίζουν τους κόμβους του πλέγματος ή καννάβου διακριτοποίησης του προβλήματος.



Σχήμα 5.1: Διακριτοποίηση του συνεχούς σώματος

Η διαίρεση του πεδίου γίνεται κατά τέτοιο τρόπο, ώστε το μέγεθος των στοιχείων να είναι μικρό στα σημεία όπου απαιτείται μεγάλη ακρίβεια στους υπολογισμούς, ή εκεί που αναμένεται έντονη μεταβολή του ζητούμενου μεγέθους, ενώ το μέγεθος των στοιχείων μπορεί να είναι μεγαλύτερο στις υπόλοιπες περιοχές του πεδίου.

- **Συνοριακές συνθήκες** (boundary conditions). Η εισαγωγή συνοριακών συνθηκών είναι απαραίτητη για την επίλυση του προβλήματος και συνήθως εκφράζεται με τις συνθήκες ισορροπίας του πεδίου (π.χ. αγκύρωση των κατώτερων ή/και πλευρικών κόμβων, κλπ). Η φόρτιση του υλικού αποτελεί επίσης μία συνοριακή συνθήκη, καθώς, σε αντίθετη περίπτωση, η υπολογιζόμενη παραμόρφωση είναι μηδενική. Στην περίπτωση που φορτιστεί ένα σώμα και όλοι οι κόμβοι του είναι ελεύθεροι να μετακινηθούν, τότε δεν υφίσταται παραμόρφωση, αλλά απλή μετακίνηση (ή στροφή). Στην περίπτωση αυτή δεν είναι δυνατή η επίλυση του προβλήματος με την προαναφερόμενη μέθοδο, διότι το φαινόμενο δεν υπακούει στην ίδια καταστατική εξίσωση.
- **Ιδιότητες υλικών** (material properties). Κατά την εφαρμογή των ιδιοτήτων του υλικού, επιλέγονται οι τιμές των ελαστικών σταθερών του μοντέλου με το οποίο προσομοιώνεται το υλικό. Το απλούστερο μοντέλο που μπορεί να χρησιμοποιηθεί είναι το γραμμικά ελαστικό και ισότροπο μοντέλο.

- **Γεωμετρικές ιδιότητες** (geometric properties). Στις γεωμετρικές ιδιότητες επιλέγεται αν το μοντέλο θα είναι μίας, δύο ή τριών διαστάσεων. Στην περίπτωση της επίλυσης δύο διαστάσεων, επιλέγεται αν η επίλυση του μοντέλου θα πραγματοποιηθεί με θεώρηση επίπεδης τάσης ή με θεώρηση επίπεδης παραμόρφωσης. Η επιλογή αυτών των θεωρήσεων ελαττώνει κατά μια τάξη τους υπολογισμούς.

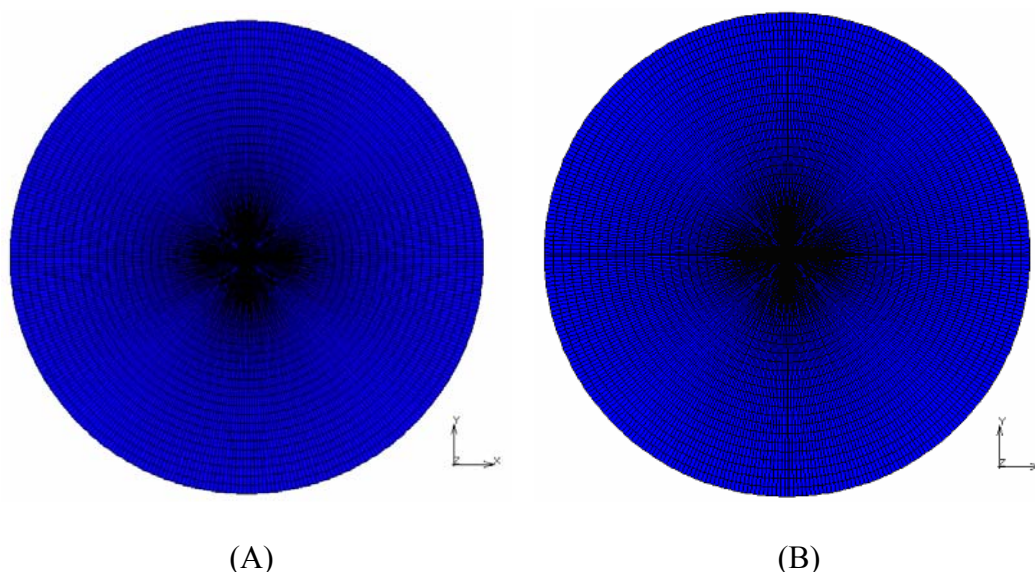
5.3 Επίλυση του Προβλήματος της Αντιδιαμετρικής Θλίψης Άρρηκτου Δίσκου

Όπως αναφέρθηκε και πιο πριν, η ανάλυση ξεκινάει με την παραμετρική διερεύνηση της εντατικής κατάστασης που προκύπτει με την επιβολή ομοιόμορφα κατανεμημένου φορτίου στο πάνω και κάτω άκρο του δίσκου για γωνίες φόρτισης από 1^0 μέχρι 15^0 καθώς επίσης και με σημειακή φόρτιση.

5.3.1 Γεωμετρία και Διακριτοποίηση

Η γεωμετρία των δοκιμίων δεν είναι τυχαία. Οι διαστάσεις των δοκιμίων με βάση την Διεθνή Ένωση Μηχανικής Πετρωμάτων (ISRM) πρέπει να έχουν διάμετρο μεγαλύτερη ή ίση με NX, δηλαδή 54 mm για την περίπτωση επίλυσης και πλάτος περίπου ίσο με την ακτίνα τους. Στην περίπτωση επίλυσης θεωρήθηκε το πάχος ίσο με 27 mm. Η διακριτοποίηση κατασκευάστηκε σε πολικό σύστημα συντεταγμένων αφού η ανάλυση των δίσκων είναι πιο εύκολη σε πολικές συντεταγμένες παρά σε καρτεσιανές. Τα στοιχεία που χρησιμοποιήθηκαν για το συγκεκριμένο πρόβλημα ήταν τετράπλευρα με 4 κόμβους. Τα στοιχεία αυτά θεωρούνται χαμηλής τάξης στοιχεία. Για το εν λόγω πρόβλημα όμως, λόγω της απλότητας της γεωμετρίας δεν απαιτείται επίλυση με στοιχεία υψηλότερης τάξης. Η διακριτοποίηση του δίσκου φτιάχτηκε με τέτοιο τρόπο ώστε να είναι δυνατή η επιβολή των επιθυμητών συνοριακών συνθηκών και να μπορεί να ληφθούν αποτελέσματα στους κόμβους ανά 1 mm και ανά 1^0 . Για τον σκοπό αυτό, δημιουργήθηκαν δυο ομάδες μοντέλων. Η πρώτη ικανοποιεί τις συνοριακές συνθήκες της σημειακής φόρτισης και των άρτιων γωνιών επιβολής της φόρτισης. Η δεύτερη ικανοποιεί τις συνοριακές συνθήκες των περιττών γωνιών επιβολής φόρτισης. Το σφάλμα που δημιουργείται στη διακριτοποίηση εξαιτίας της γεωμετρίας είναι αμελητέο για αυτό και δεν χρειάζεται

ανάλυση σφάλματος από τέτοιου είδους πρόβλημα. Η γεωμετρία και διακριτοποίηση του άρρηκτου δίσκου και για τις δυο ομάδες μοντέλων φαίνεται στο σχήμα 5.2.



Σχήμα 5.2: Διακριτοποίηση των δυο ομάδων μοντέλων

Σε αυτή την επίλυση τα μοντέλα επιλύθηκαν αποκλειστικά με τετραπλευρικά στοιχεία επίπεδης τάσης. Ο αριθμός των στοιχείων και των κόμβων που χρησιμοποιήθηκαν για την επίλυση των δυο ομάδων μοντέλων δίδονται πίνακα 5.1:

Πίνακας 5.1: Αριθμός κόμβων και στοιχείων που χρησιμοποιήθηκαν για την επίλυση

Μοντέλο	Στοιχεία	Κόμβοι
A' ομάδας	9612	9613
B' ομάδας	9720	9721

5.3.2 Ιδιότητες υλικού

Το υλικό μοντελοποιήθηκε ως γραμμικό ελαστικό και ισότροπο με ελαστικές σταθερές, $E = 80 \text{ GPa}$, και λόγο Poisson, $\nu = 0.25$.

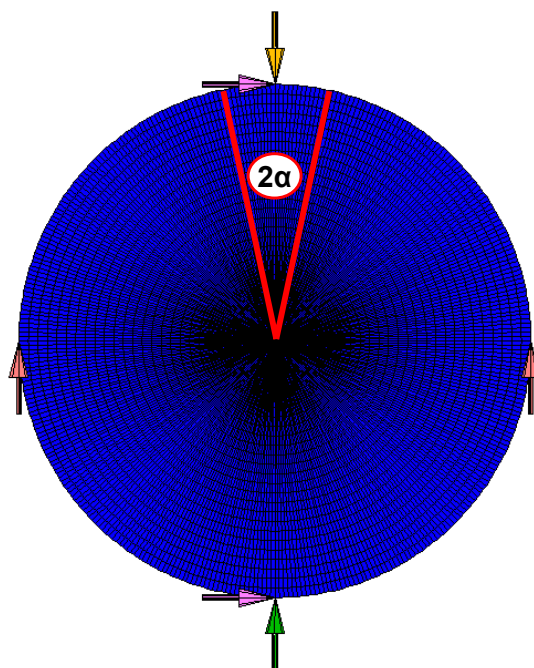
5.3.3 Συνοριακές συνθήκες και φόρτιση

Οι συνοριακές συνθήκες που επιβλήθηκαν και στις δυο ομάδες μοντέλων ήταν ίδιες. Αυτές είναι:

- Κύλιση ($dy = 0$) κατά την οριζόντια διεύθυνση στον δεξιό και αριστερό συνοριακό κόμβο.

- Κύλιση ($dx = 0$) κατά την κατακόρυφη διεύθυνση στον πάνω και κάτω συνοριακό κόμβο.
- Παραμετρική μονοαξονική φόρτιση που αντιστοιχεί σε γωνίες επιβολής φόρτισης, 2α από 1° μέχρι 15° κατά τον κατακόρυφο άξονα του δοκιμίου με μοναδιαίο βήμα καθώς επίσης και για σημειακή.

Οι συνοριακές συνθήκες και η γωνία επιβολή τους φαίνεται στο σχήμα 5.3.



Σχήμα 5.3: Συνοριακές συνθήκες του προβλήματος

Το μέγεθος της επιβαλλόμενης φόρτισης υπολογίζεται με τον εξής τρόπο:

- **Εύρεση σημειακής φόρτισης για δεδομένη τάση θραύσης $\sigma_f = 5 \text{ MPa}$**

Από την σχέση που υπολογίζει το την αντοχή σε εφελκυσμό υπολογίζεται το σημειακό φορτίο (Αγιουτάντης, 2002):

$$T_0 = \frac{2F_{Max}}{\pi Dt} \Leftrightarrow 5 = \frac{2F_{Max}}{3.14 \times 54 \times 27} \Leftrightarrow F_{Max} = 11450 \text{ N} [11.45 \text{ kN}] \quad (5.1)$$

όπου T_0 : η αντοχή σε εφελκυσμό (δεδομένη 5 MPa)

D: Διάμετρος δοκιμίου (54mm)

t: Πάχος δοκιμίου (27mm)

➤ **Εύρεση μήκους τόξου από δεδομένη γωνία (παραμετρικά από 1^0 μέχρι 15^0)**

Το μήκος τόξου S , για δεδομένη γωνία [έστω την γωνία όπου εφαρμόζεται στο εργαστήριο ($2\alpha = 10^0$)] δίδεται από την σχέση:

$$S = \Theta \times R \Leftrightarrow S = 10^0 \times \frac{\pi}{180^0} \times 27 \Leftrightarrow S = 4.71mm \quad (5.2)$$

Όπου: Θ σε ακτίνια

R : ακτίνα του δοκιμίου

➤ **Εύρεση τάσης επί του μήκους τόξου**

Η σχέση της τάσης που ασκείται σε κάθε μήκος τόξου (έστω για το μήκος τόξου που αντιστοιχεί στις 10^0) δίδεται από την σχέση:

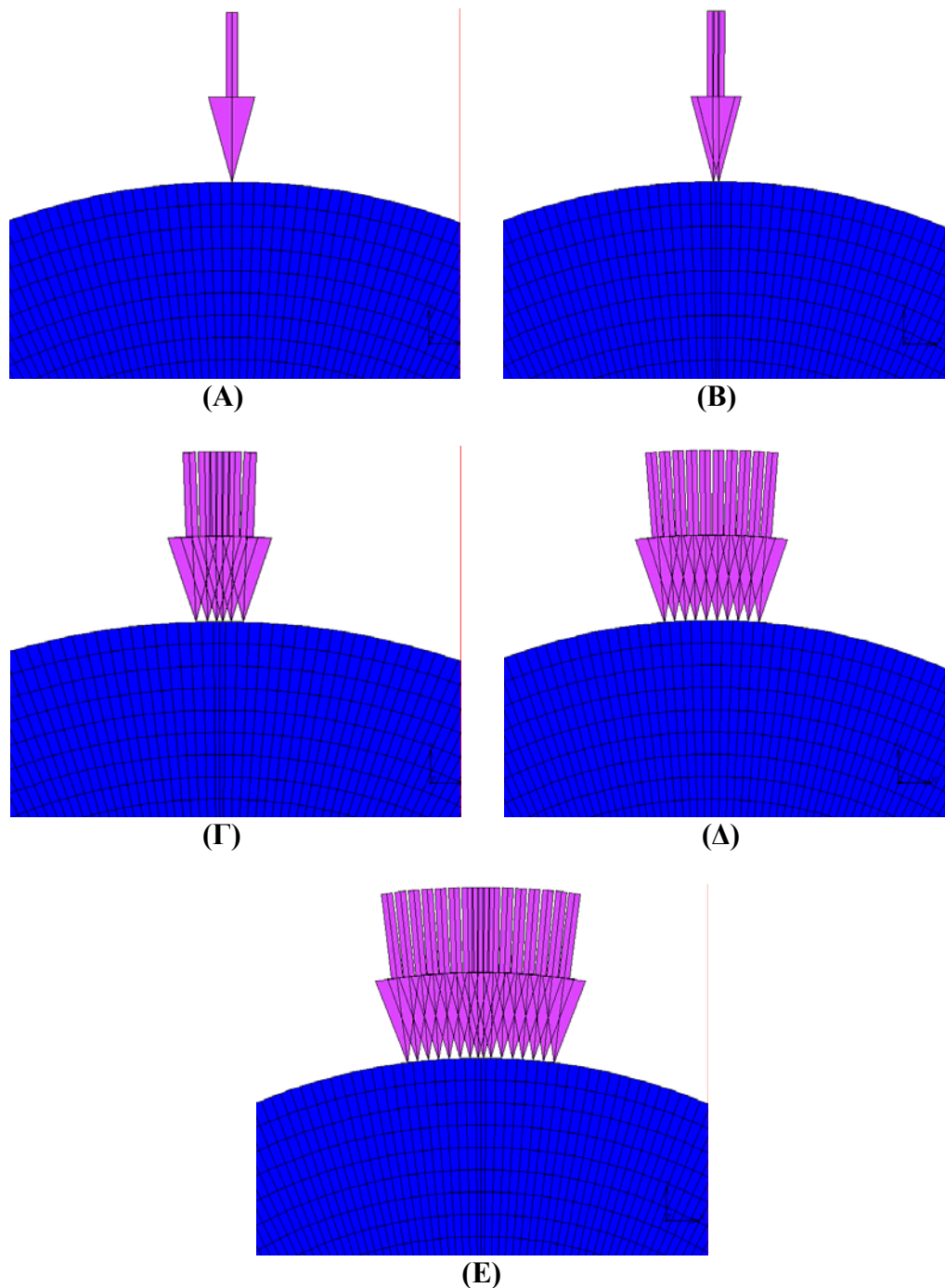
$$\sigma = \frac{F}{S \times t} \Leftrightarrow \sigma = \frac{11450}{4.71 \times 27} \Leftrightarrow \sigma \approx 90MPa \quad (5.3)$$

Ομοίως υπολογίζονται τα μεγέθη των επιβαλλόμενων φορτίων για όλες τις γωνίες 2α :

Πίνακας 5.2: Υπολογισμός φορτίων για την επίλυση

Γωνίες (Μοίρες)	Ακτίνα	Μήκος Τόξου (mm)	Τάσεις (MPa)
1	0.017	0.471	899.91
2	0.035	0.942	449.96
3	0.052	1.414	299.97
4	0.070	1.885	224.98
5	0.087	2.356	179.98
6	0.105	2.827	149.99
7	0.122	3.299	128.56
8	0.140	3.770	112.49
9	0.157	4.241	99.99
10	0.175	4.712	89.99
11	0.192	5.184	81.81
12	0.209	5.655	74.99
13	0.227	6.126	69.22
14	0.244	6.597	64.28
15	0.262	7.069	59.99

Στο σχήμα 5.4 φαίνεται η λεπτομέρεια στην επιβολή των φορτίσεων

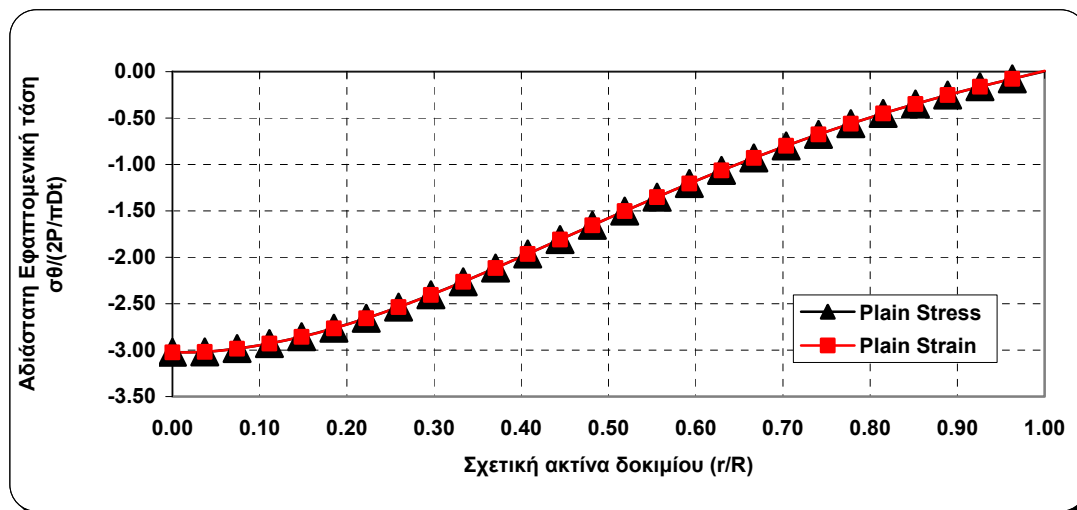


Σχήμα 5.4: Αντιδιαμετρική φόρτιση του δίσκου, (Α) σημειακή φόρτιση, (Β) φόρτιση σε 1° , (Γ) φόρτιση σε 5° , (Δ) φόρτιση σε 10° και (Ε) φόρτιση σε 15°

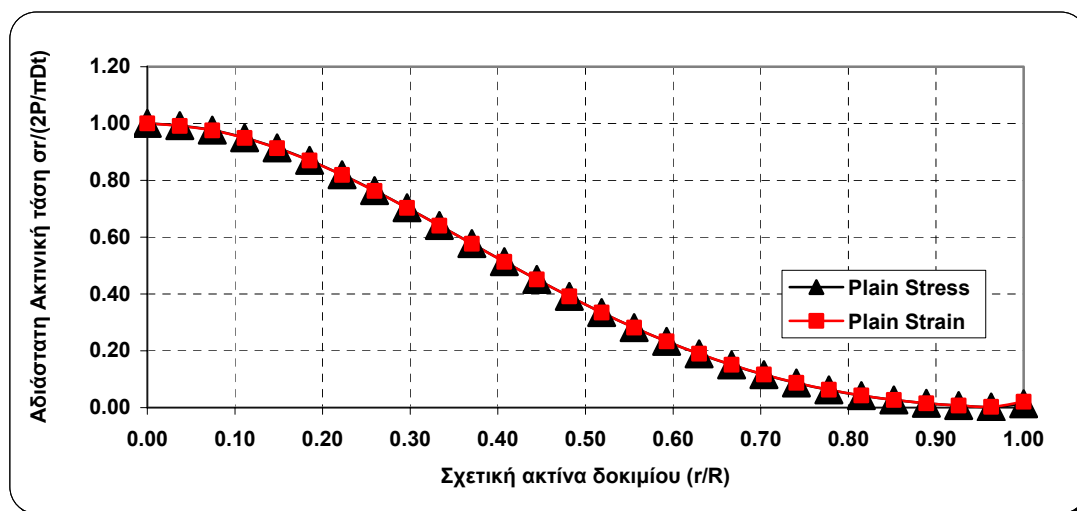
5.3.4 Γεωμετρικές ιδιότητες

Όπως έχει αναφερθεί σε προηγούμενα κεφάλαια, η απλοποίηση του προβλήματος της αντιδιαμετρικής θλίψης από τις τρεις διαστάσεις στις δύο διαστάσεις γίνεται εφικτή με την θεώρηση συνθηκών επίπεδης τάσης. Πριν την τελική επίλυση με θεώρηση επίπεδης τάσης, πραγματοποιήθηκε μια διερεύνηση για το πόσο επηρεάζει η επίλυση με θεώρηση επίπεδης παραμόρφωσης. Ο έλεγχος της

επίπεδης εντατικής κατάστασης έγινε με την κατασκευή της κατανομής των αδιάστατων εφαπτομενικών και ακτινικών τάσεων στον κατακόρυφο ($\theta=90^0$) και οριζόντιο ($\theta=0^0$) άξονα του δοκιμίου για το μοντέλο με κατανεμημένη φόρτιση σε μήκος τόξου 10^0 . Τα σχήματα 5.5 και 5.6 δείχνουν τις κατανομές των αδιάστατων εφαπτομενικών και ακτινικών τάσεων συναρτήσει της σχετικής ακτίνας του δοκιμίου στο οριζόντιο άξονα.

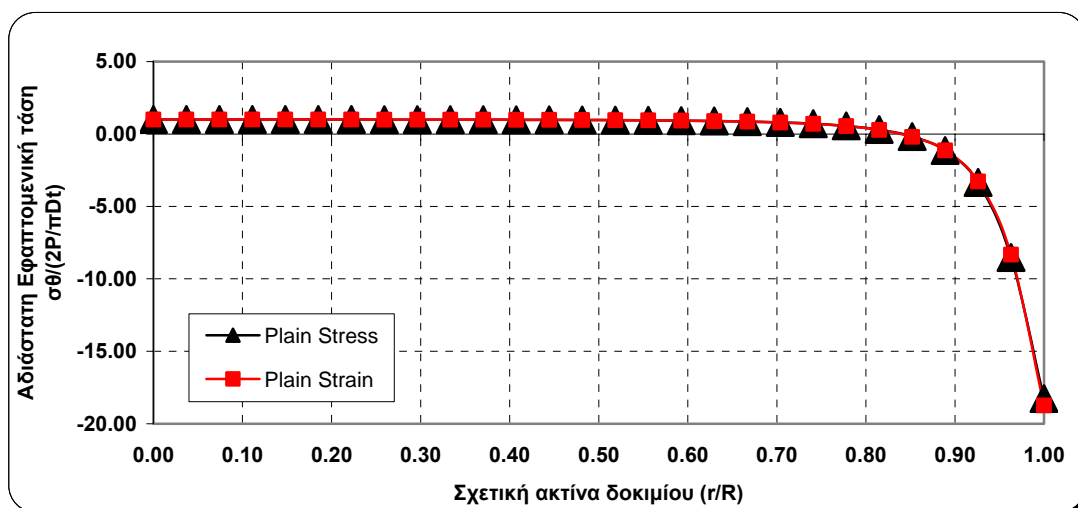


Σχήμα 5.5: Αδιάστατη εφαπτομενική τάση στον οριζόντιο άξονα

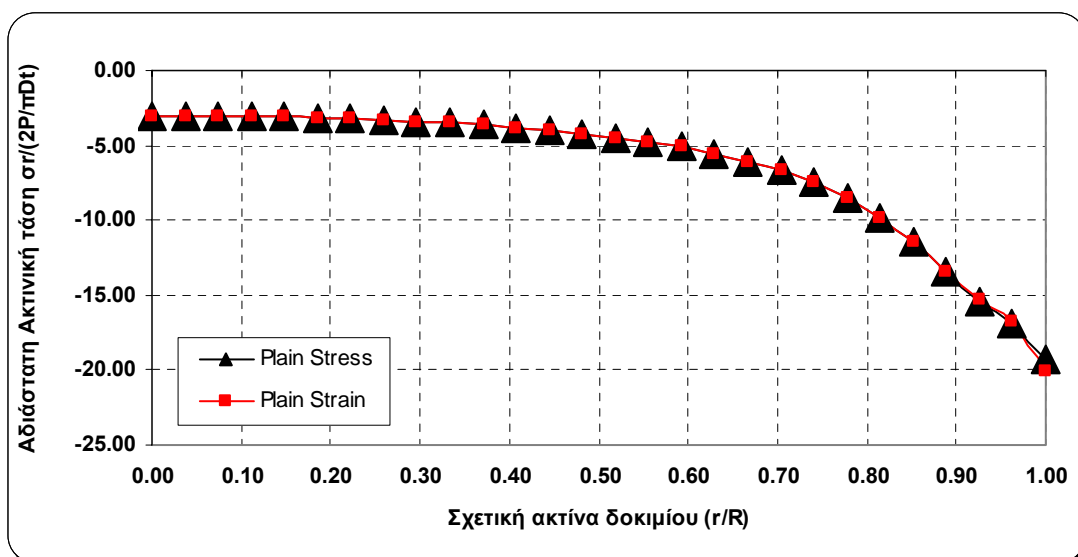


Σχήμα 5.6: Αδιάστατη ακτινική τάση στον οριζόντιο άξονα

Στη συνέχεια σχήματα 5.7 και 5.8 δείχνουν τις κατανομές των αδιάστατων εφαπτομενικών και ακτινικών τάσεων συναρτήσει της σχετικής ακτίνας του δοκιμίου στο κατακόρυφο άξονα:



Σχήμα 5.7: Αδιάστατη εφαπτομενική τάση στον κατακόρυφο άξονα



Σχήμα 5.8: Αδιάστατη ακτινική τάση στον κατακόρυφο άξονα

Παρατήρηση:

Συγκρίνοντας τα γραφήματα, δεν παρατηρείται σχεδόν καμία διαφορά στις διευθύνσεις στις οποίες επιλέγηκε να γίνει η σύγκριση. Η διαφορά που παρουσιάζεται είναι της τάξης του τρίτου δεκαδικού ψηφίου, όπως φαίνεται και από τις ενδεικτικές τιμές του πίνακα 5.3. Αυτό οδηγεί στο συμπέρασμα ότι όσο αφορά την αριθμητική επίλυση, οι συνθήκες επίπεδης τάσης και επίπεδης παραμόρφωσης δεν επηρεάζουν καθόλου το αποτέλεσμα της λύσης. Επομένως επιλέγεται η διαδικασία επίλυσης με θεώρηση επίπεδης τάσης.

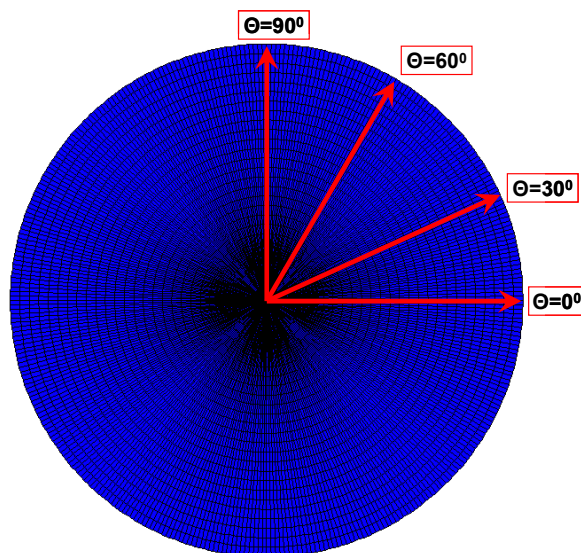
Πίνακας 5.3: Διαφορά της κατανομής των εφαπτομενικών τάσεων για επίπεδη τάση και επίπεδη παραμόρφωση

Οριζόντιος Άξονας		Κατακόρυφος Άξονας	
Επίπεδη Τάση	Επίπεδη Παραμόρφωση	Επίπεδη Τάση	Επίπεδη Παραμόρφωση
$\sigma_{\theta}/(2P/\pi Dt)$	$\sigma_{\theta}/(2P/\pi Dt)$	$\sigma_{\theta}/(2P/\pi Dt)$	$\sigma_{\theta}/(2P/\pi Dt)$
-3.023	-3.023	1.000	1.001
-3.018	-3.020	1.000	0.999
-2.983	-2.984	0.999	0.999
-2.929	-2.930	0.999	0.998
-2.856	-2.856	0.998	0.997
-2.765	-2.765	0.997	0.996
-2.657	-2.658	0.996	0.995
-2.536	-2.537	0.994	0.993
-2.404	-2.404	0.992	0.991
-2.263	-2.263	0.989	0.988
-2.115	-2.115	0.985	0.984
-1.963	-1.963	0.981	0.980
-1.809	-1.809	0.975	0.974
-1.655	-1.655	0.968	0.966
-1.502	-1.502	0.958	0.955
-1.352	-1.352	0.944	0.941
-1.206	-1.206	0.925	0.922
-1.064	-1.064	0.899	0.894
-0.929	-0.929	0.860	0.854
-0.799	-0.799	0.802	0.794
-0.676	-0.676	0.712	0.701
-0.560	-0.560	0.563	0.548
-0.450	-0.450	0.305	0.285
-0.348	-0.347	-0.174	-0.196
-0.251	-0.251	-1.134	-1.142
-0.161	-0.161	-3.338	-3.279
-0.078	-0.077	-8.525	-8.324
0.004	0.009	-18.256	-18.728

5.3.5 Ανάλυση των τάσεων

Για την καλύτερη ανάλυση των κατανομών των εφαπτομενικών και ακτινικών τάσεων εντός ενός άρρηκτου δίσκου υπό αντιδιαμετρική θλίψη κρίθηκε σκόπιμο να κατασκευαστούν δύο ομάδες γραφημάτων. Τα δεδομένα που αναλύονται λήφθηκαν σε διάφορες γωνίες για όλα τα μοντέλα που επιλύθηκαν με παραμετρική φόρτιση, ξεκινώντας από το κέντρο του δίσκου μέχρι το εξωτερικό του σύνορο. Οι γωνίες

αυτές ορίζονται δεξιόστροφα από τον οριζόντιο άξονα μέχρι την γραμμή μελέτης και είναι στις 0^0 , 30^0 , 60^0 και 90^0 . Στο σχήμα 5.9 φαίνονται οι γραμμές μελέτης εντός του δίσκου.



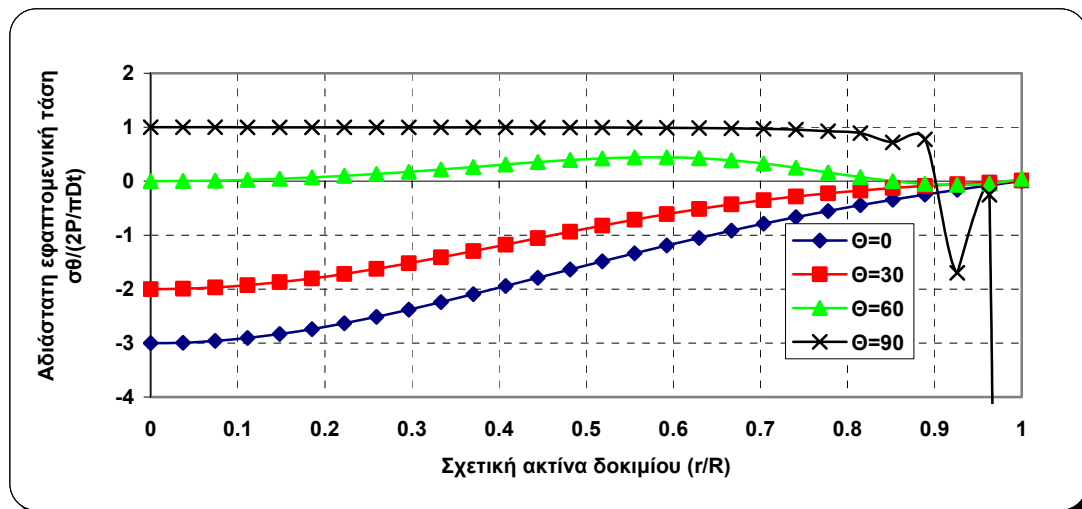
Σχήμα 5.8: Ανάλυση δεδομένων σε διάφορους προσανατολισμούς γραμμών μελέτης

Στην πρώτη ομάδα γραφημάτων παρουσιάζονται οι κατανομές των αδιάστατων εφαπτομενικών και ακτινικών τάσεων μεταβάλλοντας τον προσανατολισμό γραμμής μελέτης (Θ) και κρατώντας σταθερή την γωνία επιβολής φόρτισης (2α). Στη δεύτερη ομάδα γραφημάτων παρουσιάζονται οι κατανομές των αδιάστατων εφαπτομενικών και ακτινικών τάσεων κρατώντας τον προσανατολισμό γραμμής μελέτης (Θ), σταθερό και μεταβάλλοντας την γωνία επιβολής φόρτισης (2α).

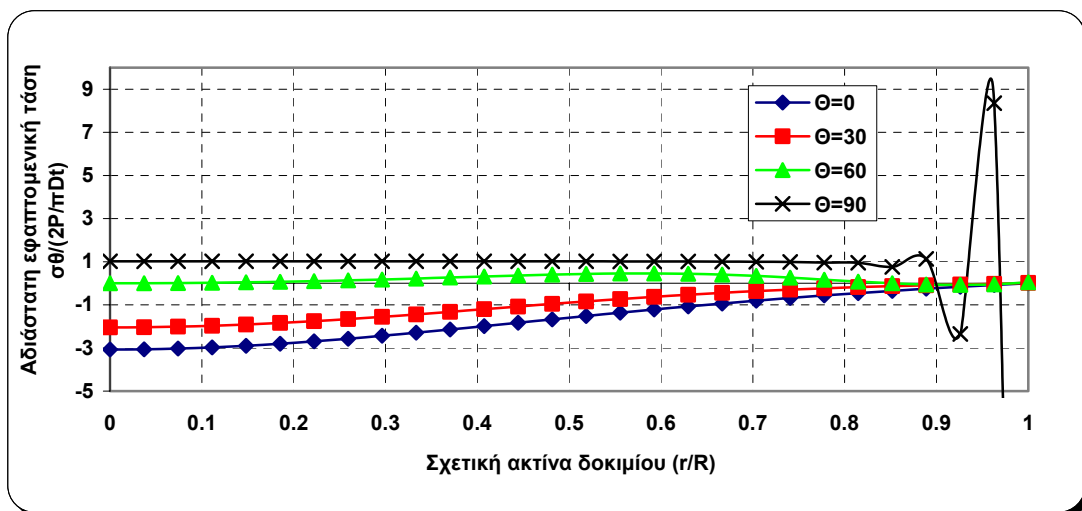
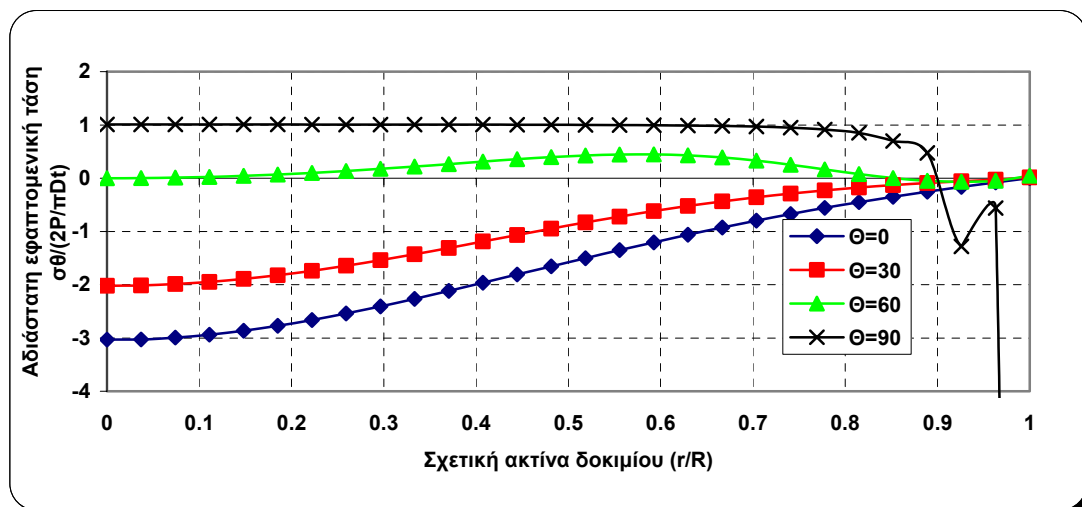
5.3.5.1 Σταθερή η γωνία επιβολής φορτίου (2α) και μεταβαλλόμενος ο προσανατολισμός γραμμής μελέτης (Θ)

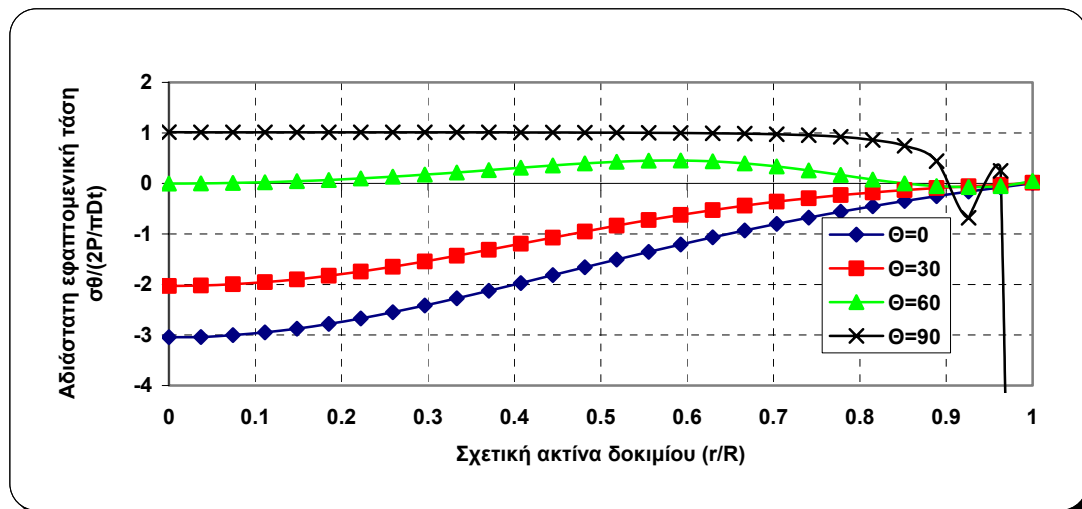
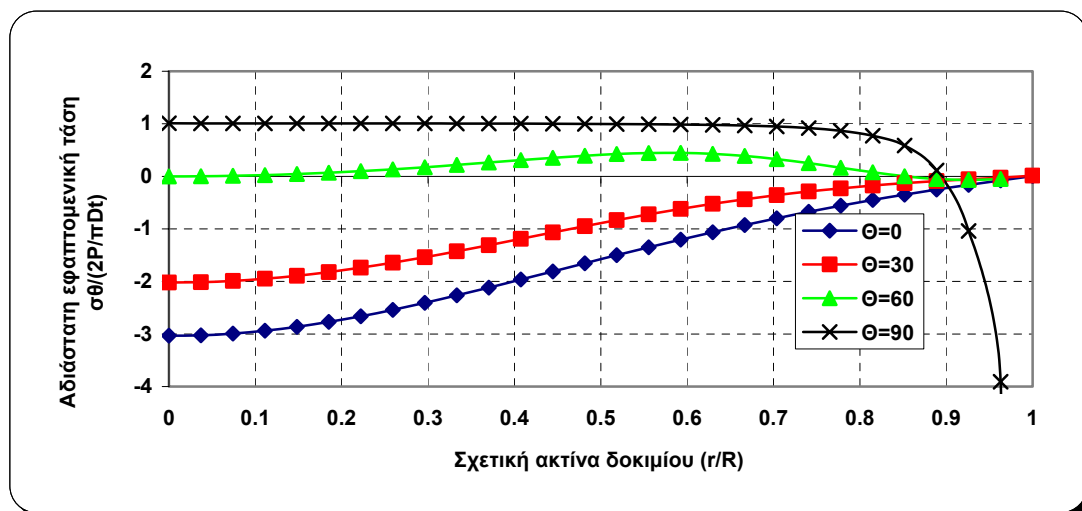
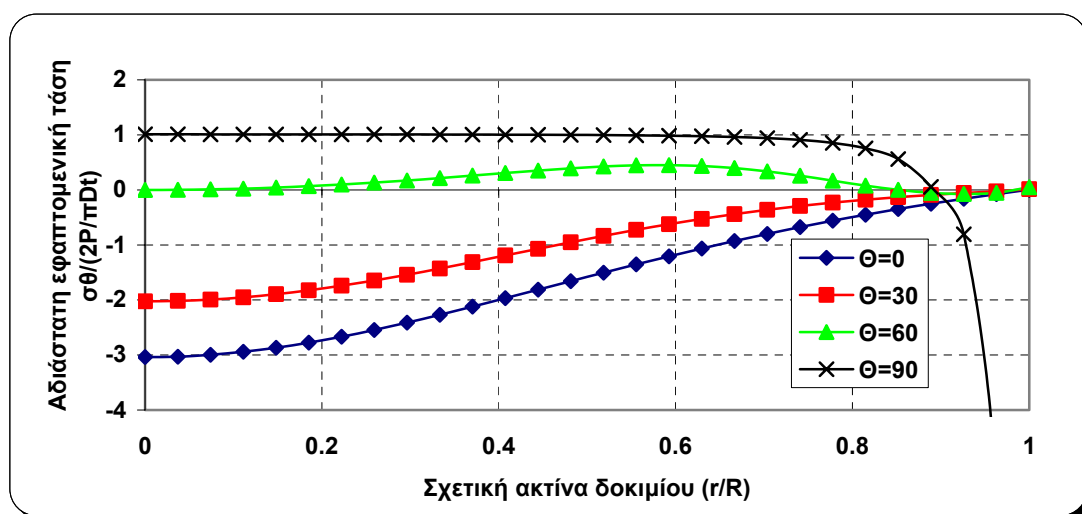
Στα σχήματα 5.9 μέχρι και 5.24 συγκρίνονται οι κατανομές των αδιάστατων εφαπτομενικών τάσεων συναρτήσει της σχετικής ακτίνας του δοκιμίου για όλες τις γωνίες επιβολής φόρτισης 2α , ενώ στα σχήματα 5.25 μέχρι και 5.39 συγκρίνονται οι κατανομές των αδιάστατων ακτινικών τάσεων συναρτήσει της σχετικής ακτίνας του δοκιμίου.

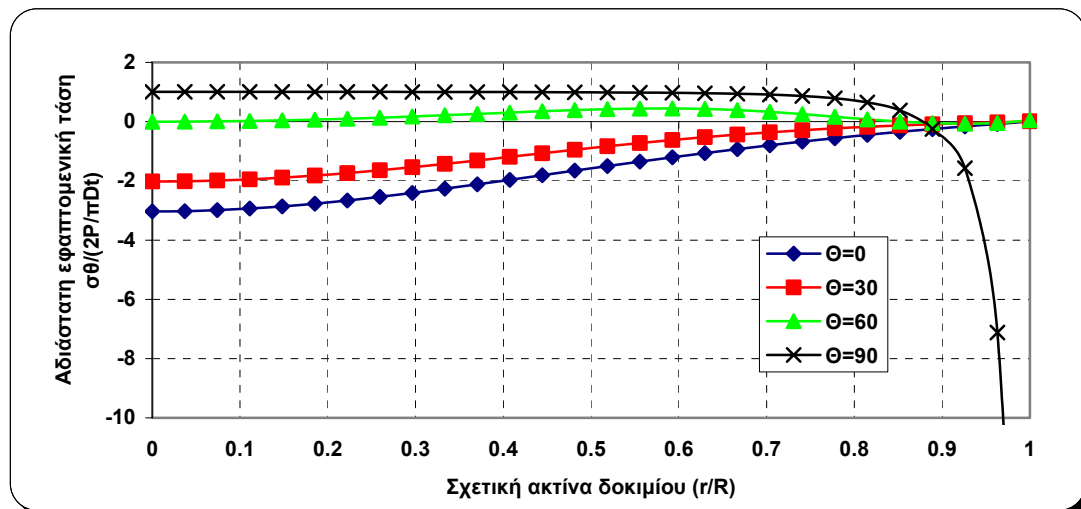
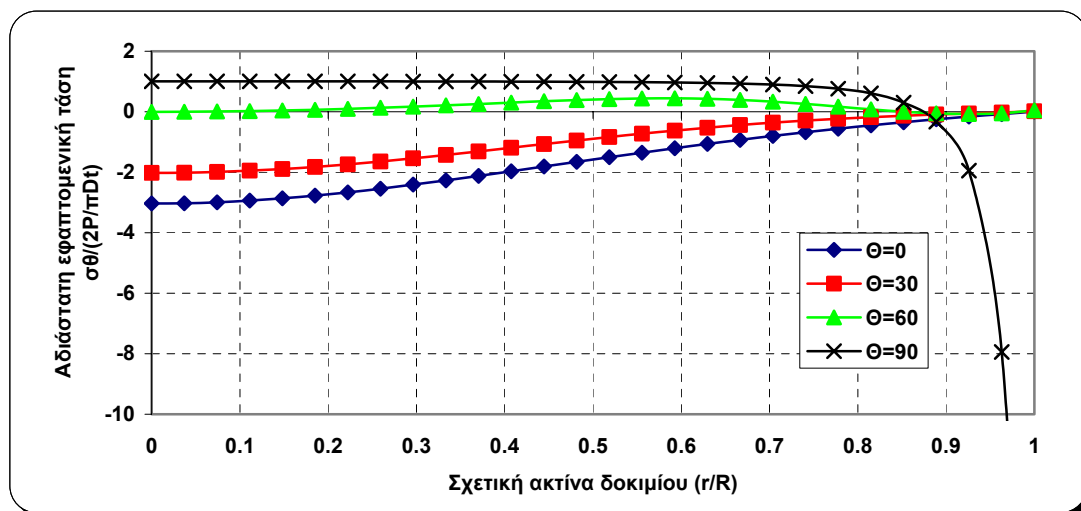
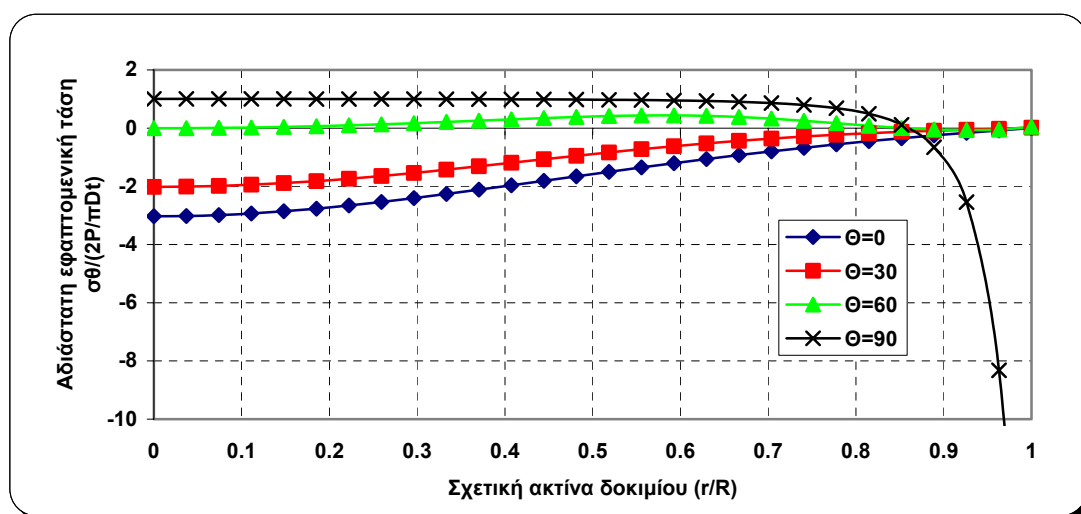
➤ Εφαπτομενικές Τάσεις

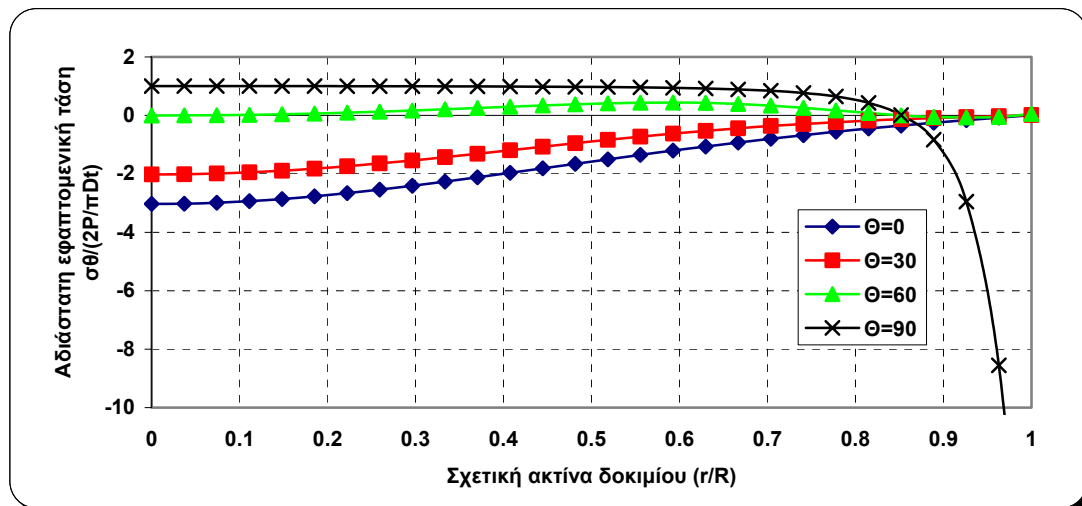
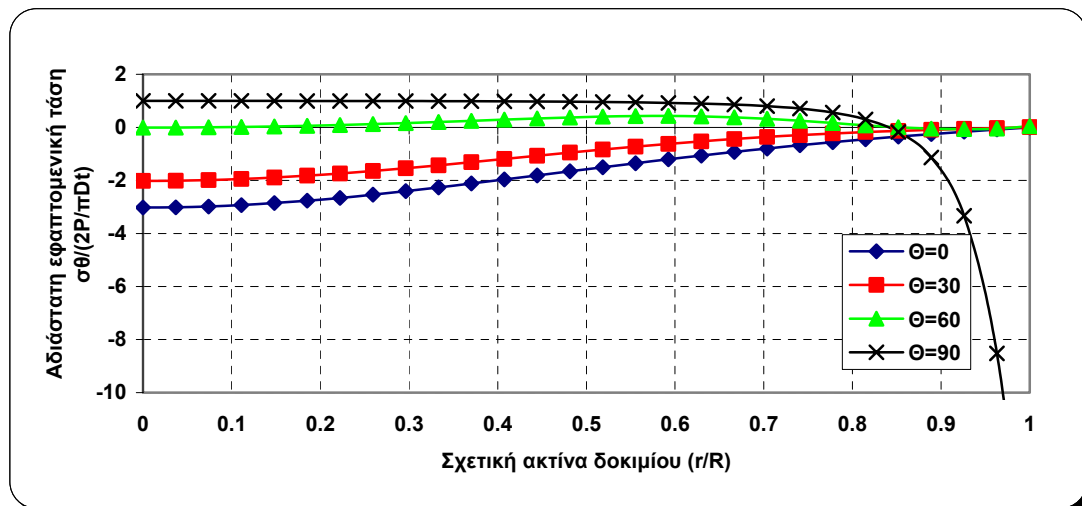
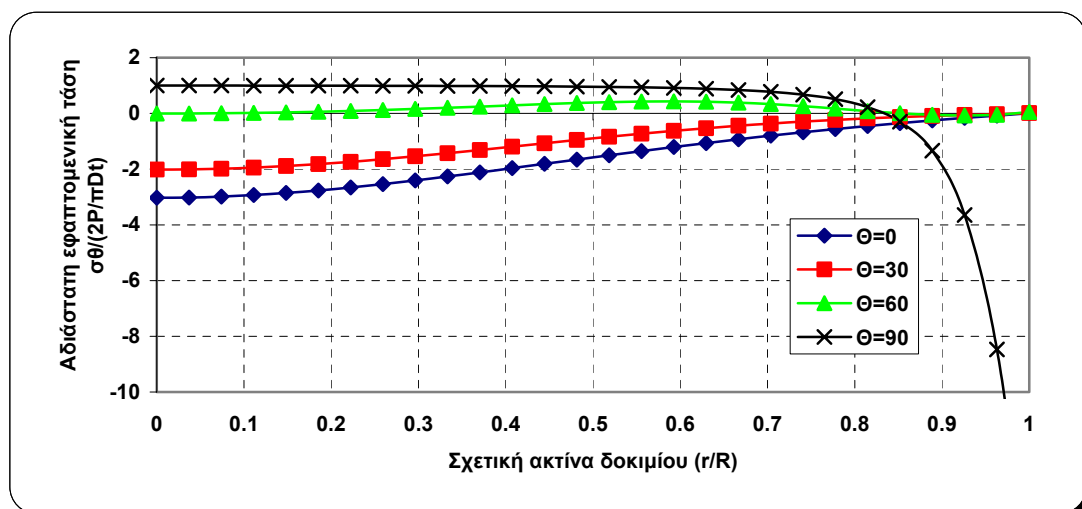


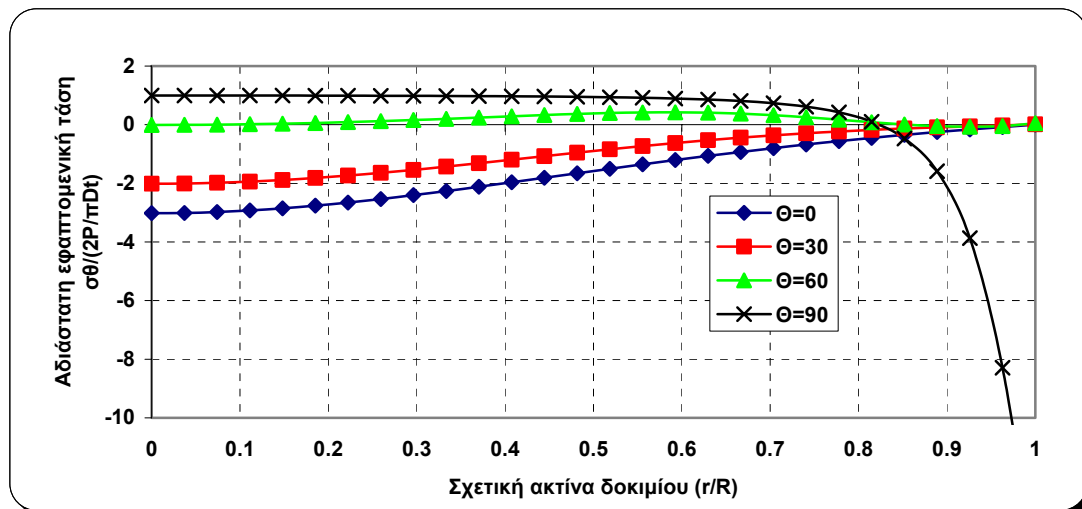
Σχήμα 5.9: Κατανομή εφαπτομενικής τάσης για σημειακό φορτίο

Σχήμα 5.10: Κατανομή εφαπτομενικής τάσης για γωνία επιβολής φορτίου 1° Σχήμα 5.11: Κατανομή εφαπτομενικής τάσης για γωνία επιβολής φορτίου 2°

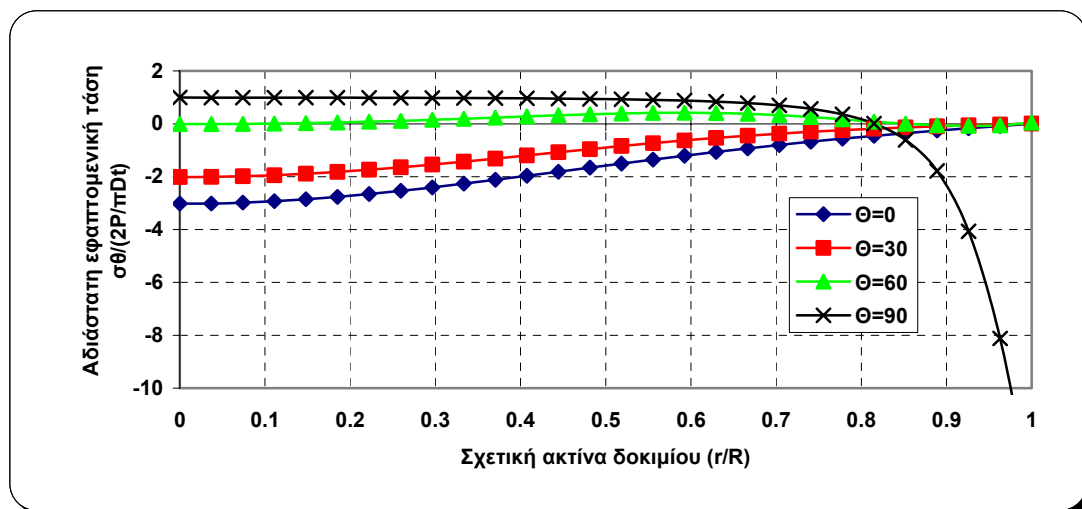
Σχήμα 5.12: Κατανομή εφαπτομενικής τάσης για γωνία επιβολής φορτίου 3° Σχήμα 5.13: Κατανομή εφαπτομενικής τάσης για γωνία επιβολής φορτίου 4° Σχήμα 5.14: Κατανομή εφαπτομενικής τάσης για γωνία επιβολής φορτίου 5°

Σχήμα 5.15: Κατανομή εφαπτομενικής τάσης για γωνία επιβολής φορτίου 6° Σχήμα 5.16: Κατανομή εφαπτομενικής τάσης για γωνία επιβολής φορτίου 7° Σχήμα 5.17: Κατανομή εφαπτομενικής τάσης για γωνία επιβολής φορτίου 8°

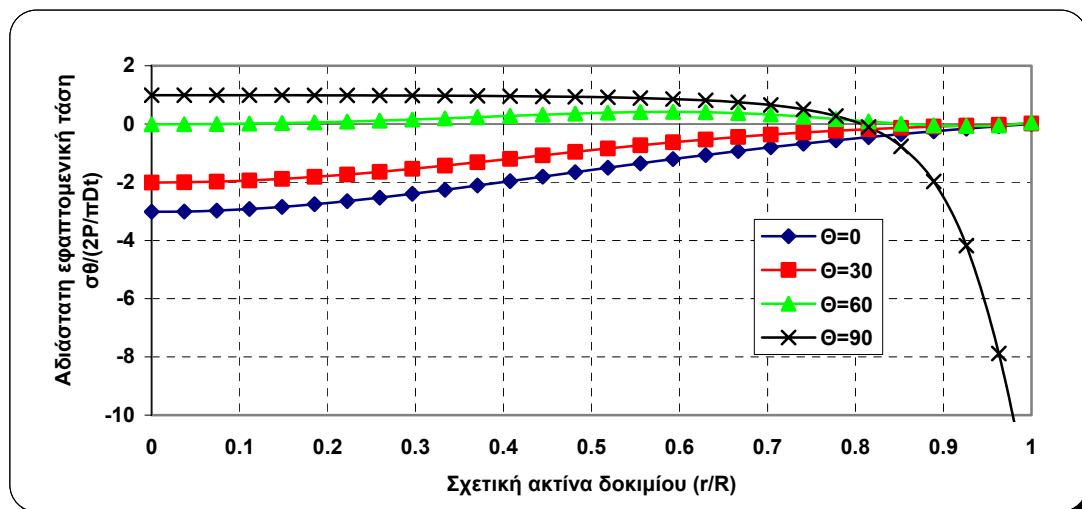
Σχήμα 5.18: Κατανομή εφαπτομενικής τάσης για γωνία επιβολής φορτίου 9° Σχήμα 5.19: Κατανομή εφαπτομενικής τάσης για γωνία επιβολής φορτίου 10° Σχήμα 5.20: Κατανομή εφαπτομενικής τάσης για γωνία επιβολής φορτίου 11°



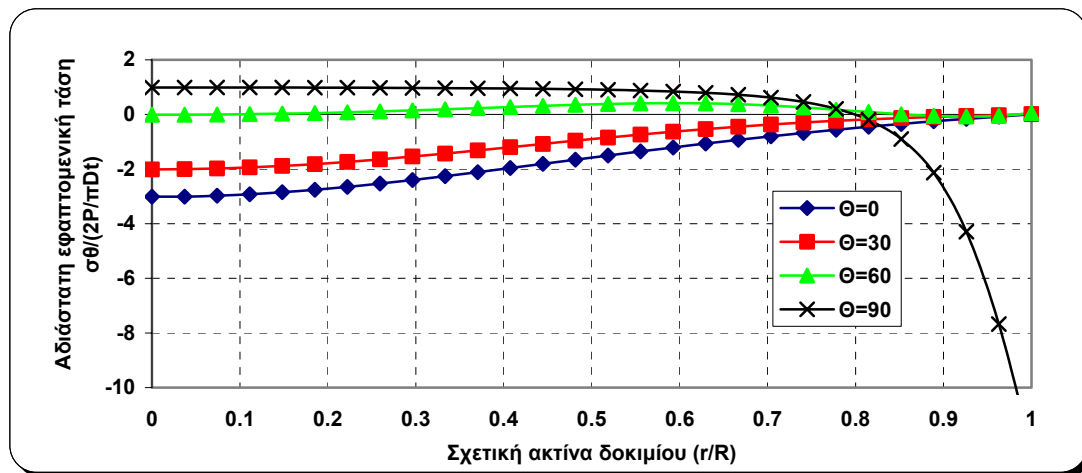
Σχήμα 5.21: Κατανομή εφαπτομενικής τάσης για γωνία επιβολής φορτίου 12°



Σχήμα 5.22: Κατανομή εφαπτομενικής τάσης για γωνία επιβολής φορτίου 13°

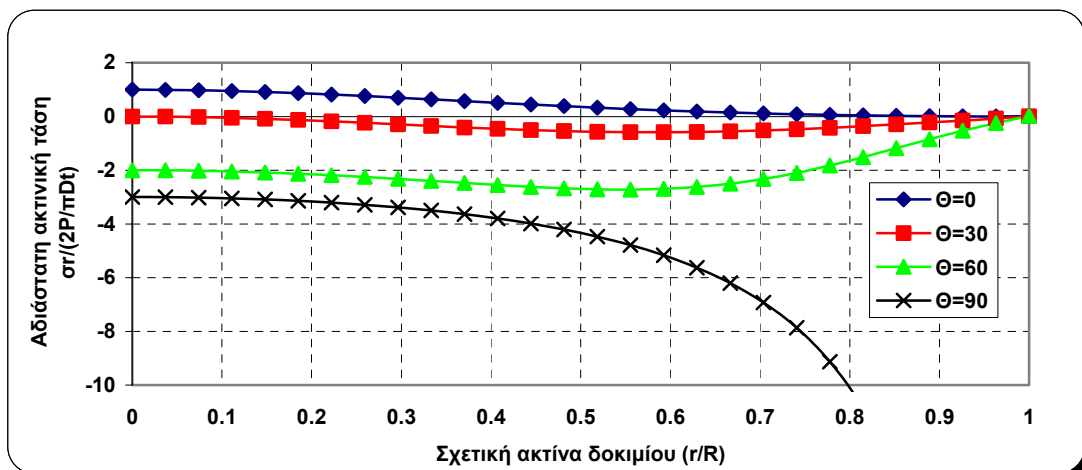


Σχήμα 5.23: Κατανομή εφαπτομενικής τάσης για γωνία επιβολής φορτίου 14°

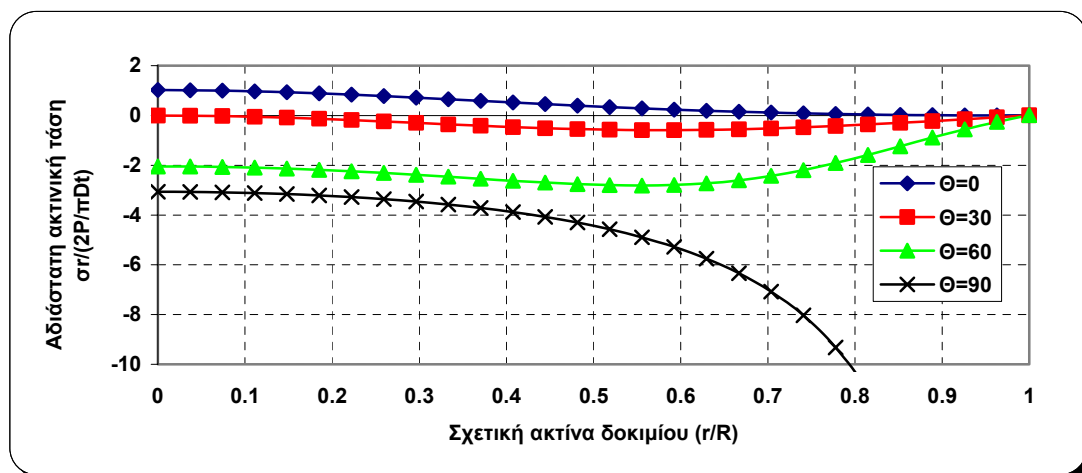


Σχήμα 5.24: Κατανομή εφαπτομενικής τάσης για γωνία επιβολής φορτίου 15°

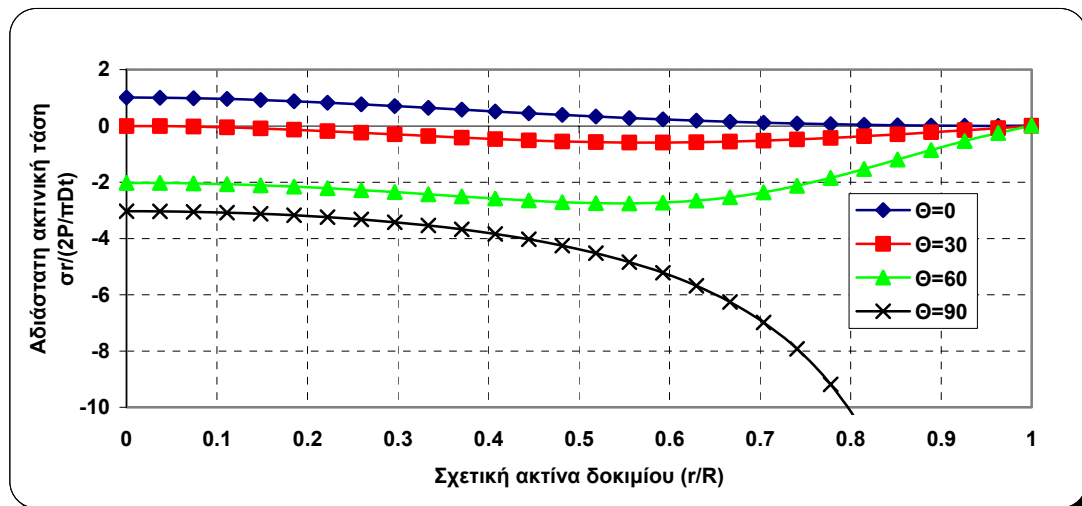
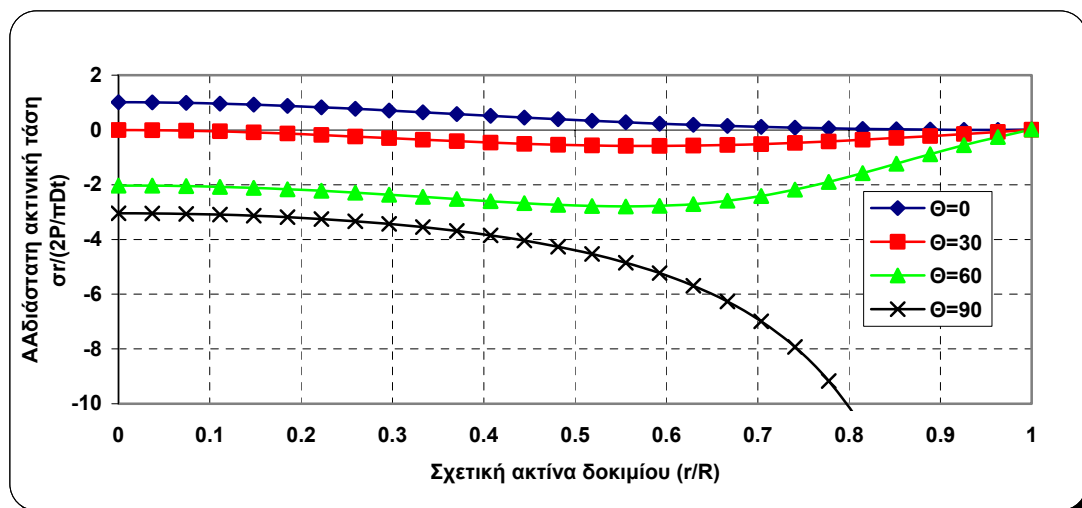
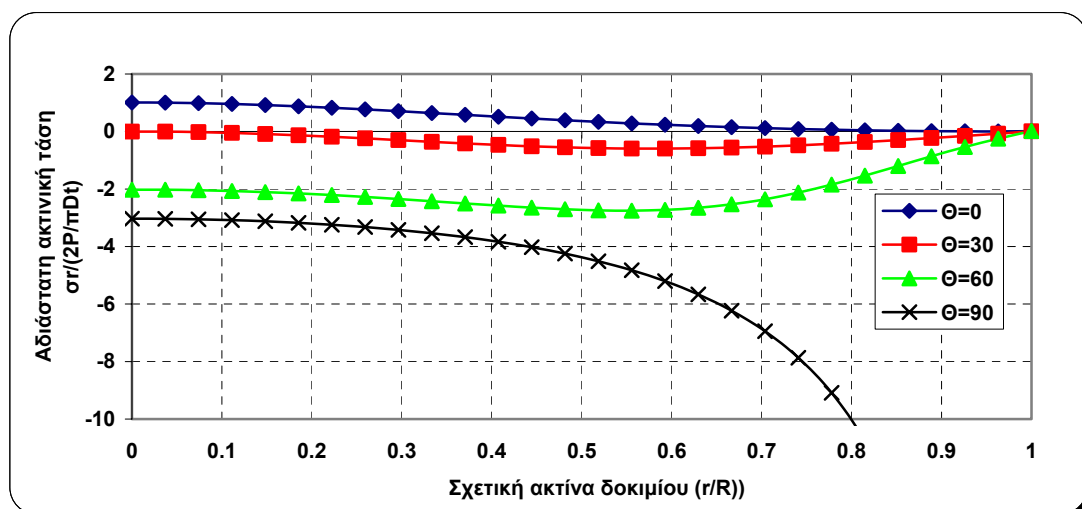
➤ Ακτινικές Τάσεις

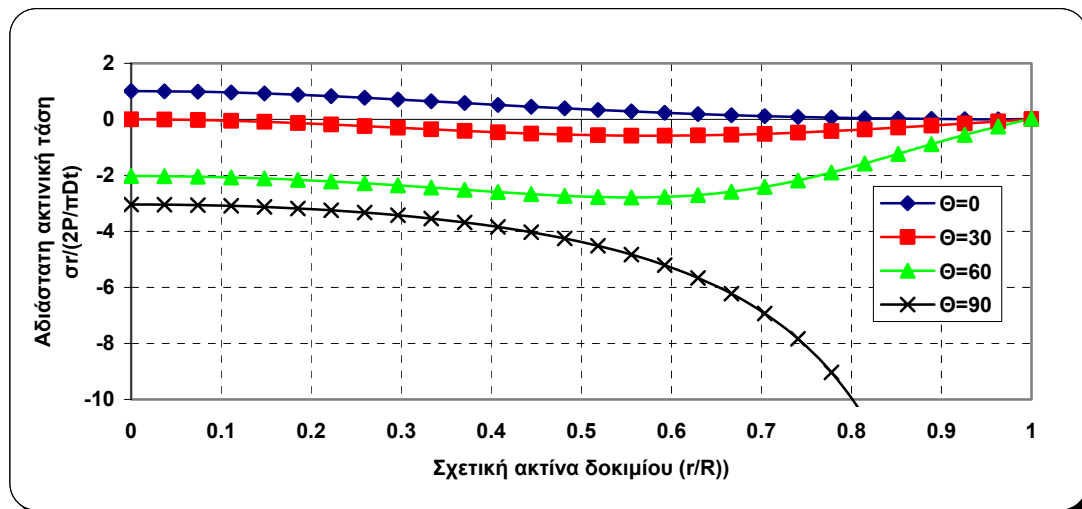
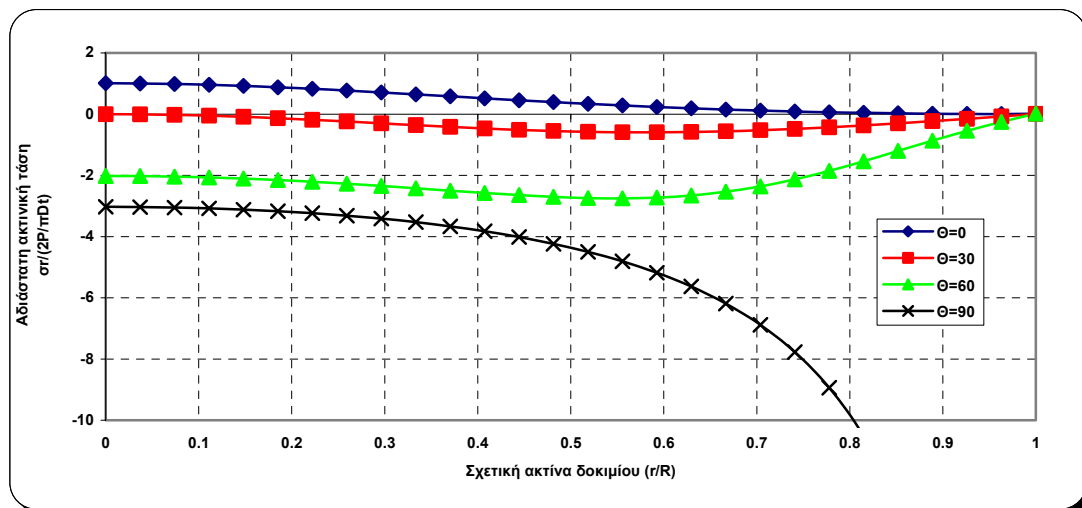
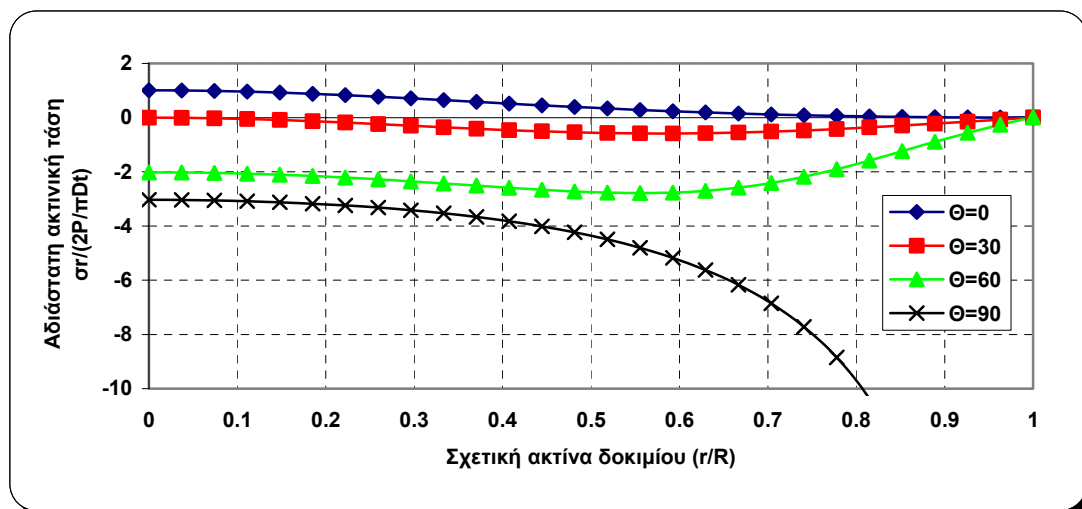


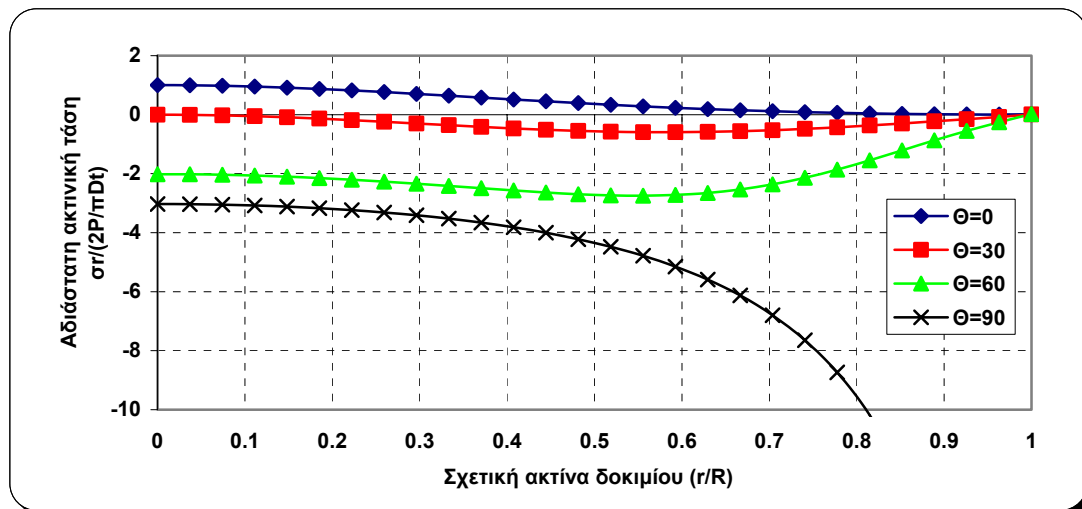
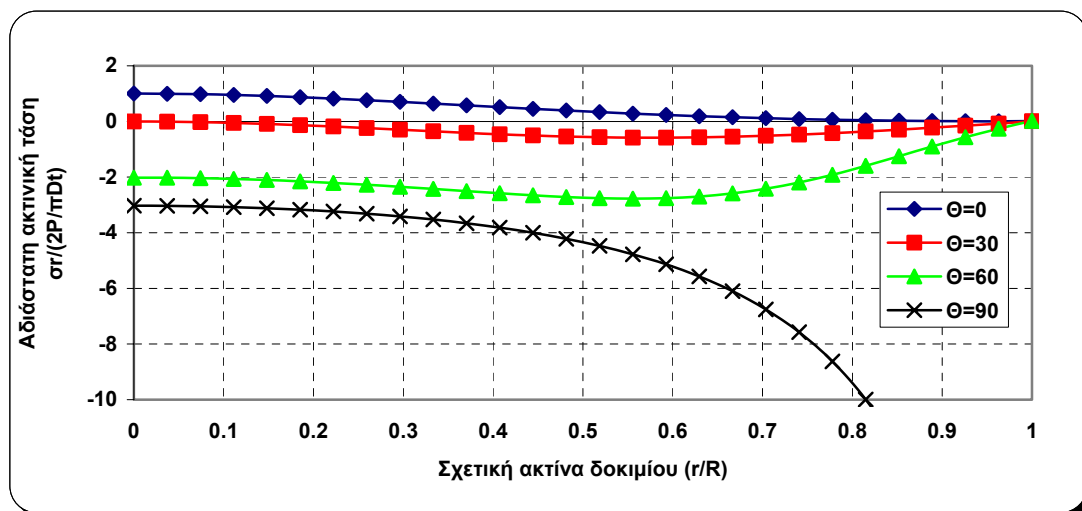
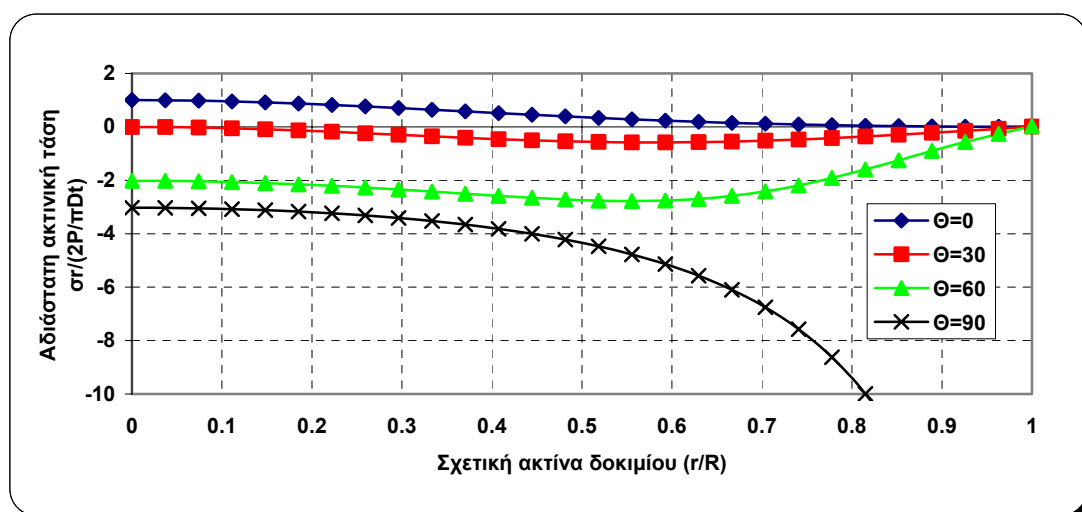
Σχήμα 5.25: Κατανομή ακτινικής τάσης για σημειακό φορτίο

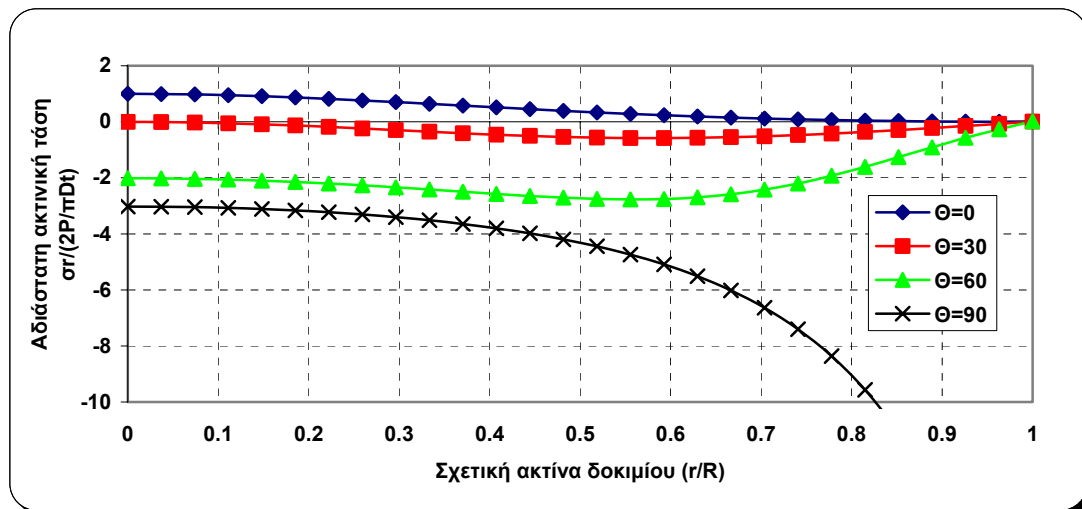
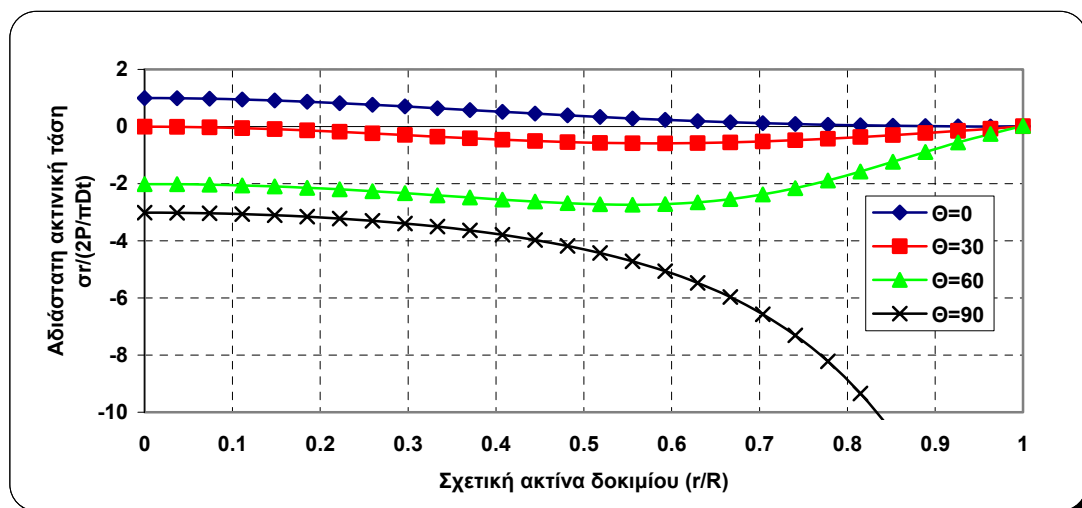
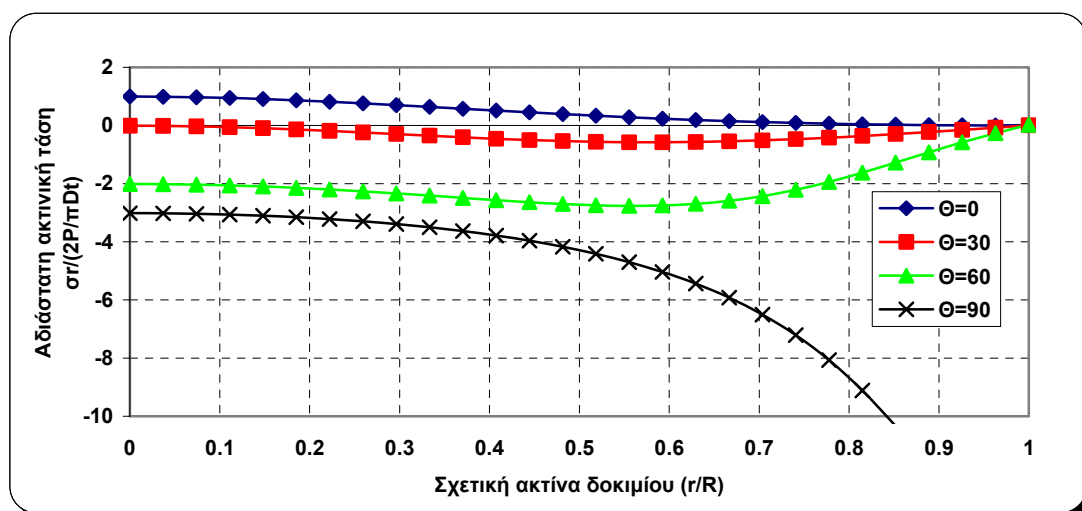


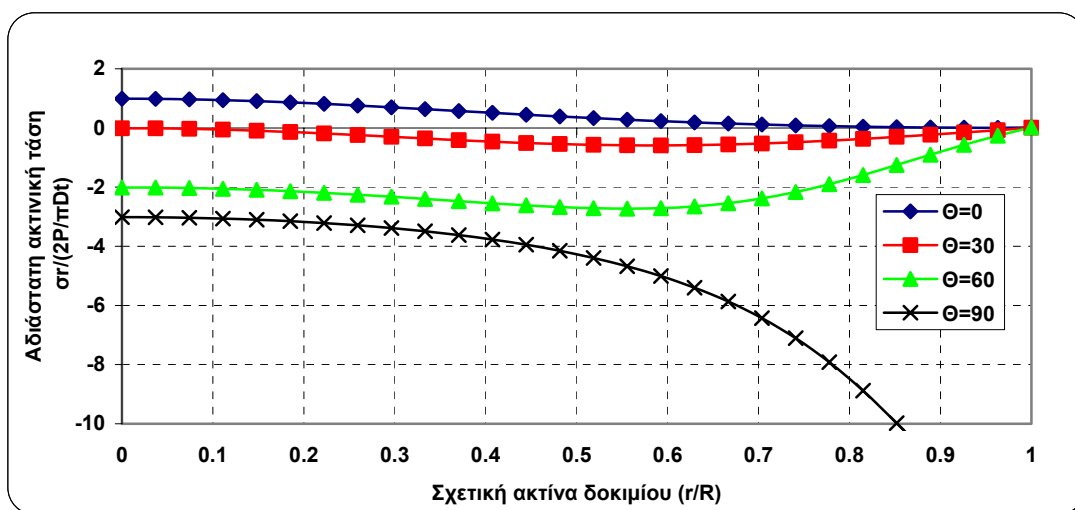
Σχήμα 5.26: Κατανομή ακτινικής τάσης για γωνία επιβολής φορτίου 1°

Σχήμα 5.27: Κατανομή ακτινικής τάσης για γωνία επιβολής φορτίου 2° Σχήμα 5.28: Κατανομή ακτινικής τάσης για γωνία επιβολής φορτίου 3° Σχήμα 5.29: Κατανομή ακτινικής τάσης για γωνία επιβολής φορτίου 4°

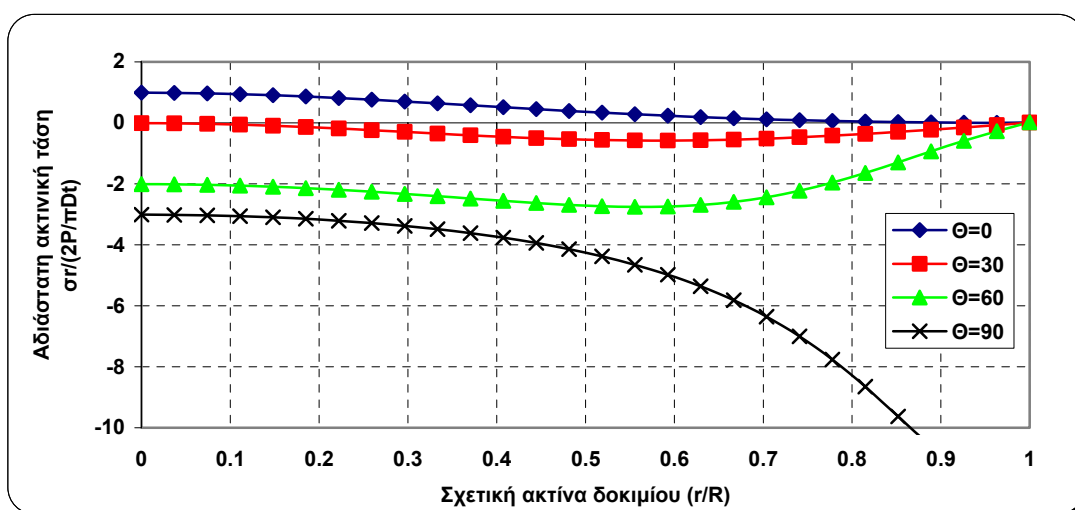
Σχήμα 5.30: Κατανομή ακτινικής τάσης για γωνία επιβολής φορτίου 5° Σχήμα 5.31: Κατανομή ακτινικής τάσης για γωνία επιβολής φορτίου 6° Σχήμα 5.32: Κατανομή ακτινικής τάσης για γωνία επιβολής φορτίου 7°

Σχήμα 5.33: Κατανομή ακτινικής τάσης για γωνία επιβολής φορτίου 8° Σχήμα 5.34: Κατανομή ακτινικής τάσης για γωνία επιβολής φορτίου 9° Σχήμα 5.35: Κατανομή ακτινικής τάσης για γωνία επιβολής φορτίου 10°

Σχήμα 5.36: Κατανομή ακτινικής τάσης για γωνία επιβολής φορτίου 11° Σχήμα 5.37: Κατανομή ακτινικής τάσης για γωνία επιβολής φορτίου 12° Σχήμα 5.38: Κατανομή ακτινικής τάσης για γωνία επιβολής φορτίου 13°



Σχήμα 5.39: Κατανομή ακτινικής τάσης για γωνία επιβολής φορτίου 14°



Σχήμα 5.39: Κατανομή ακτινικής τάσης για γωνία επιβολής φορτίου 15°

Παρατηρήσεις:

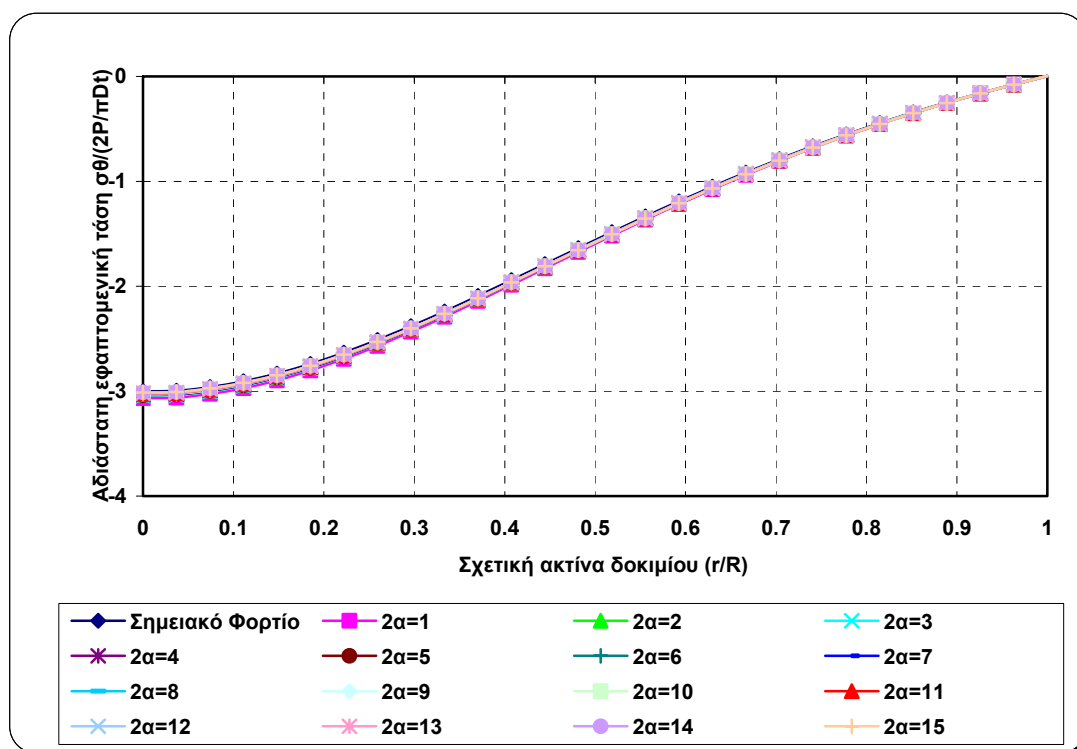
- Από τις συγκρίσεις των εφαπτομενικών τάσεων, παρατηρείται ότι το μέγεθος των τάσεων στο κέντρο του δίσκου για όλες τις γωνίες επιβολής φόρτισης ακόμα και για τη σημειακή φόρτιση είναι από +1 ($\Theta=90^\circ$) μέχρι -3 ($\Theta=0^\circ$). Στο εξωτερικό σύνορο του δίσκου οι εφαπτομενικές τάσεις μηδενίζονται ομαλά όσο αυξάνει και η γωνία επιβολής της φόρτισης, εκτός στον κατακόρυφο άξονα ($\Theta=90^\circ$). Αυτό οφείλεται στο ότι αυτός είναι ο άξονας στον οποίο γίνεται η επιβολή της φόρτισης με αποτέλεσμα την δημιουργία μιας ζώνης συγκέντρωσης τάσεων ακριβώς κάτω από το σημείο αυτό. Είναι πιθανόν, τα μεγέθη αυτά των τάσεων να είναι υπεύθυνα για την θραύση του δίσκου κάτω από το σημείο επιβολής του φορτίου παρά στο κέντρο του.

- Από τις συγκρίσεις των ακτινικών τάσεων, παρατηρείται και πάλι ότι το μέγεθος των τάσεων στο κέντρο του δίσκου για όλες τις γωνίες επιβολής φόρτισης ακόμα και για τη σημειακή φόρτιση είναι από $+1$ ($\Theta=0^\circ$) μέχρι -3 ($\Theta=90^\circ$). Στο εξωτερικό σύνορο του δίσκου και πάλι οι ακτινικές τάσεις μηδενίζονται ομαλά όσο αυξάνει και η γωνία επιβολής της φόρτισης, εκτός στον κατακόρυφο άξονα ($\Theta=90^\circ$) για την ίδια εξήγηση που δόθηκε προηγουμένως.

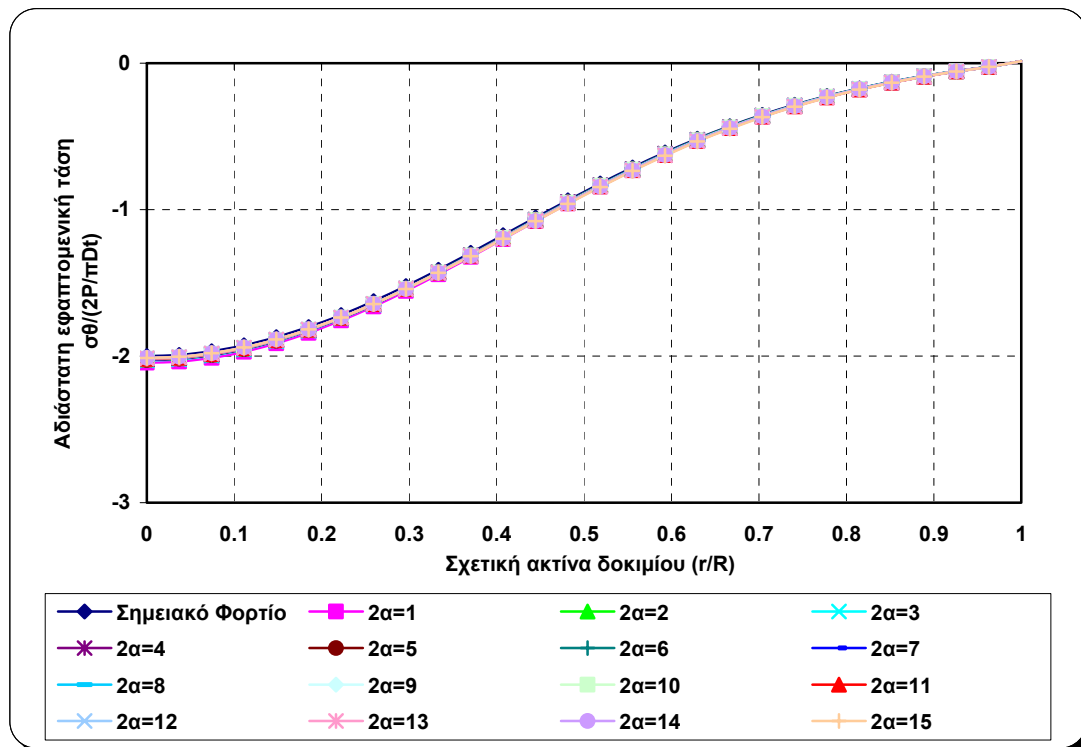
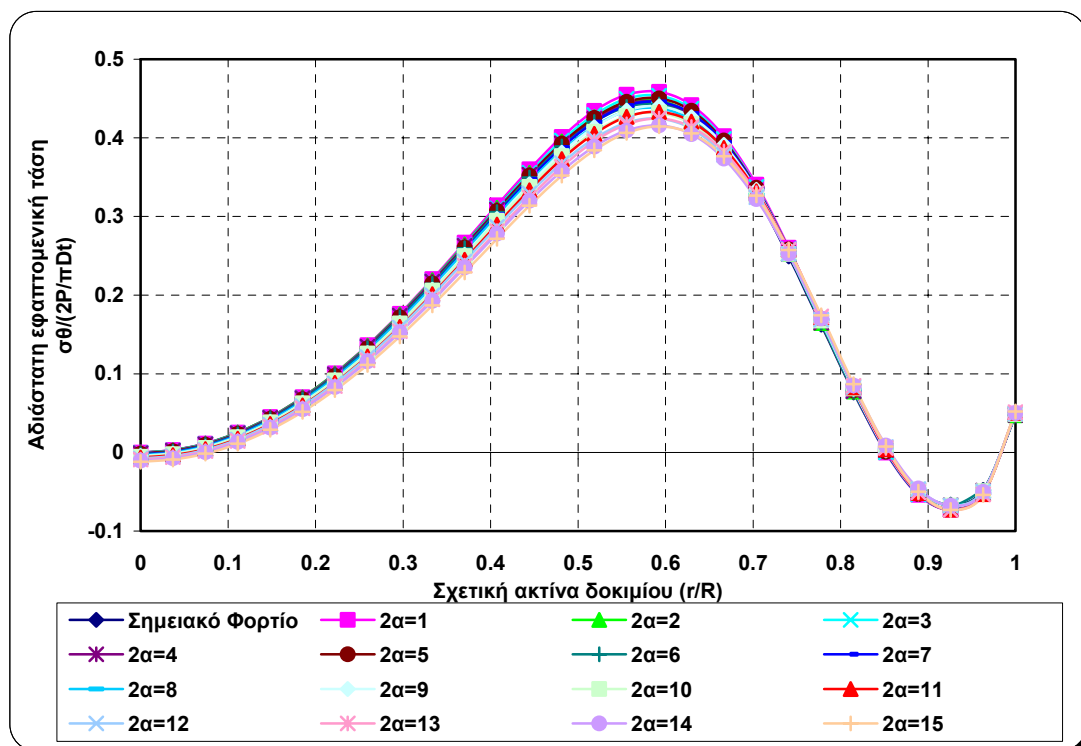
5.3.5.2 Σταθερός ο προσανατολισμός γραμμής μελέτης (Θ) και μεταβαλλόμενη η γωνία επιβολής φορτίου (2α)

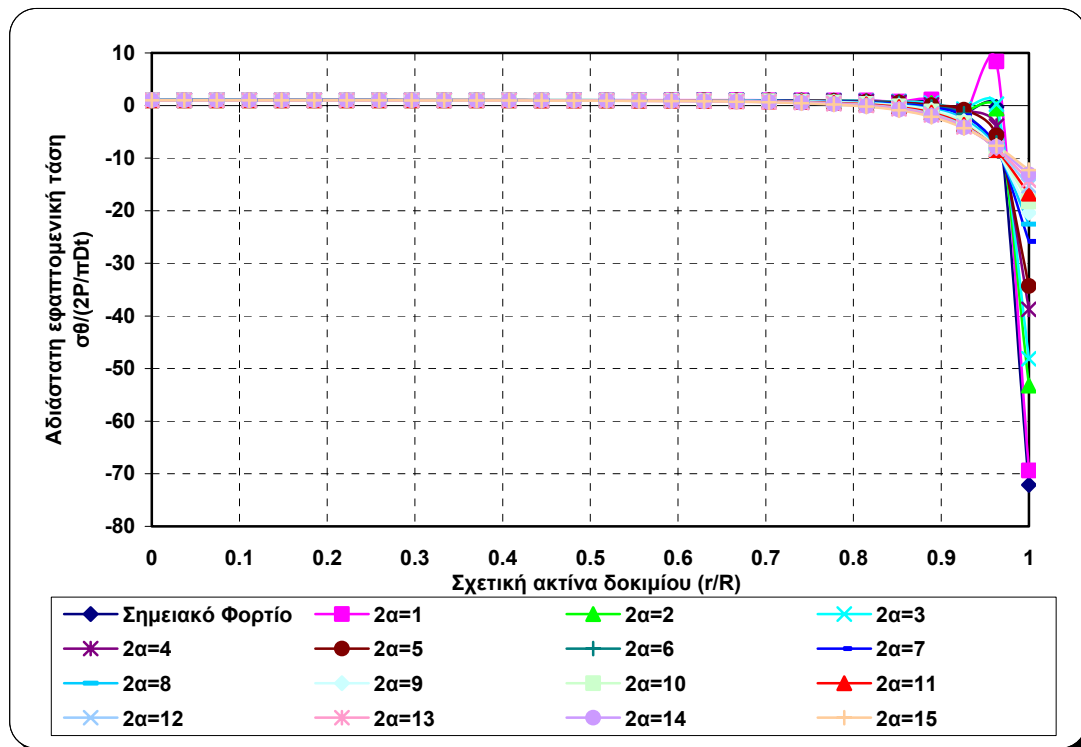
Στα σχήματα 5.40 μέχρι και 5.43 συγκρίνονται οι κατανομές των αδιάστατων εφαπτομενικών τάσεων συναρτήσει της σχετικής ακτίνας του δοκιμίου για διάφορους προσανατολισμούς γραμμών μελέτης (Θ), ενώ στα σχήματα 5.44 μέχρι και 5.47 συγκρίνονται οι κατανομές των αδιάστατων ακτινικών τάσεων συναρτήσει της σχετικής ακτίνας του δοκιμίου.

➤ Εφαπτομενικές Τάσεις

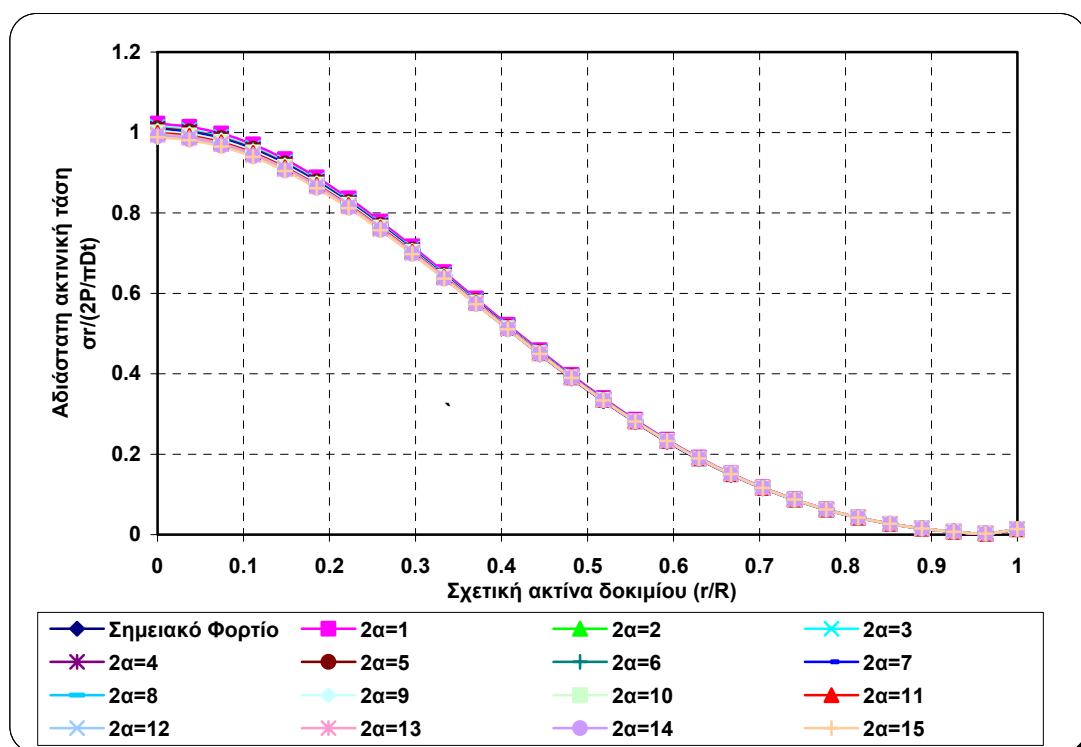


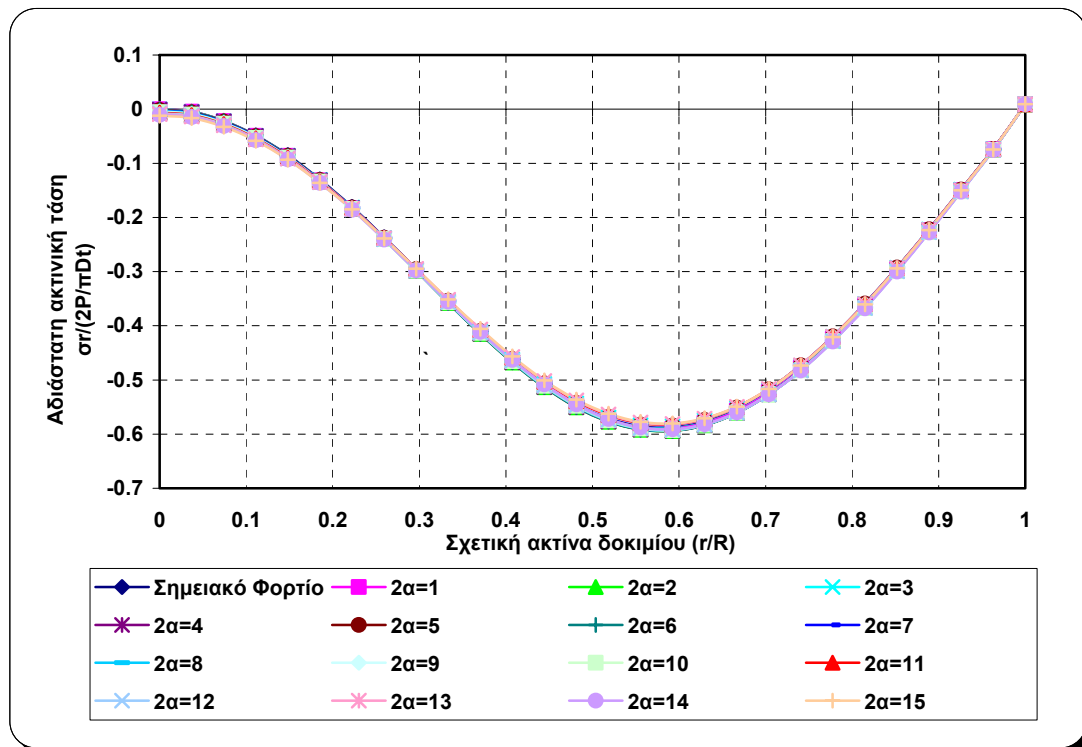
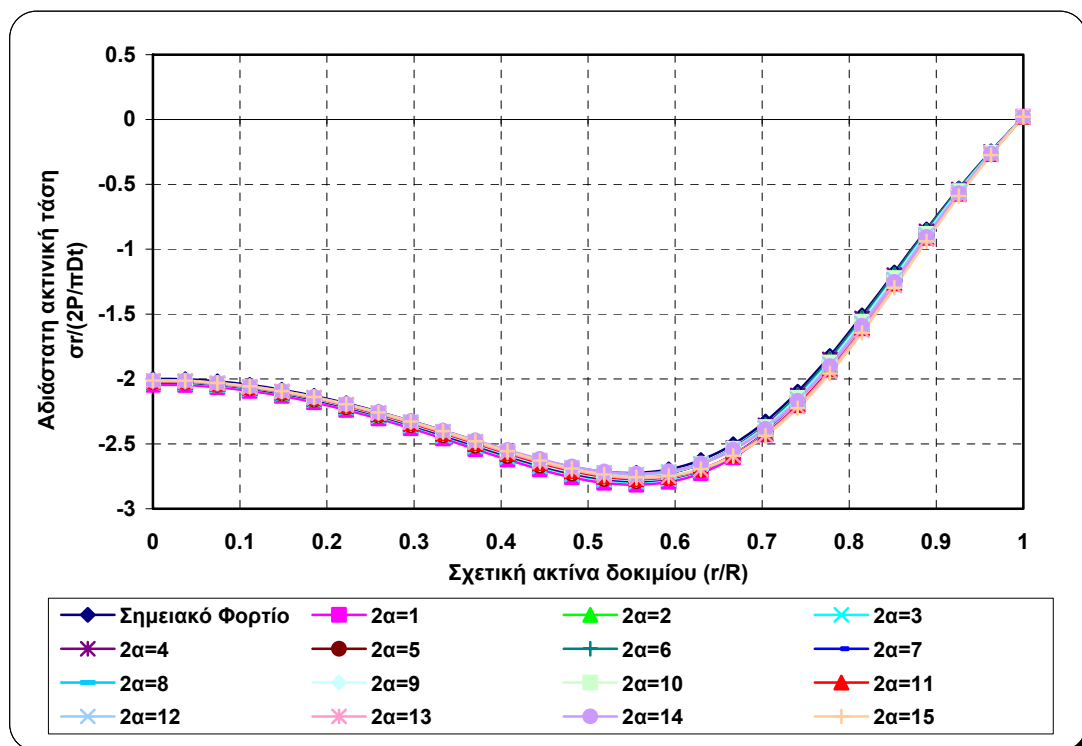
Σχήμα 5.40: Κατανομή εφαπτομενικής τάσης για γραμμή μελέτης 0°

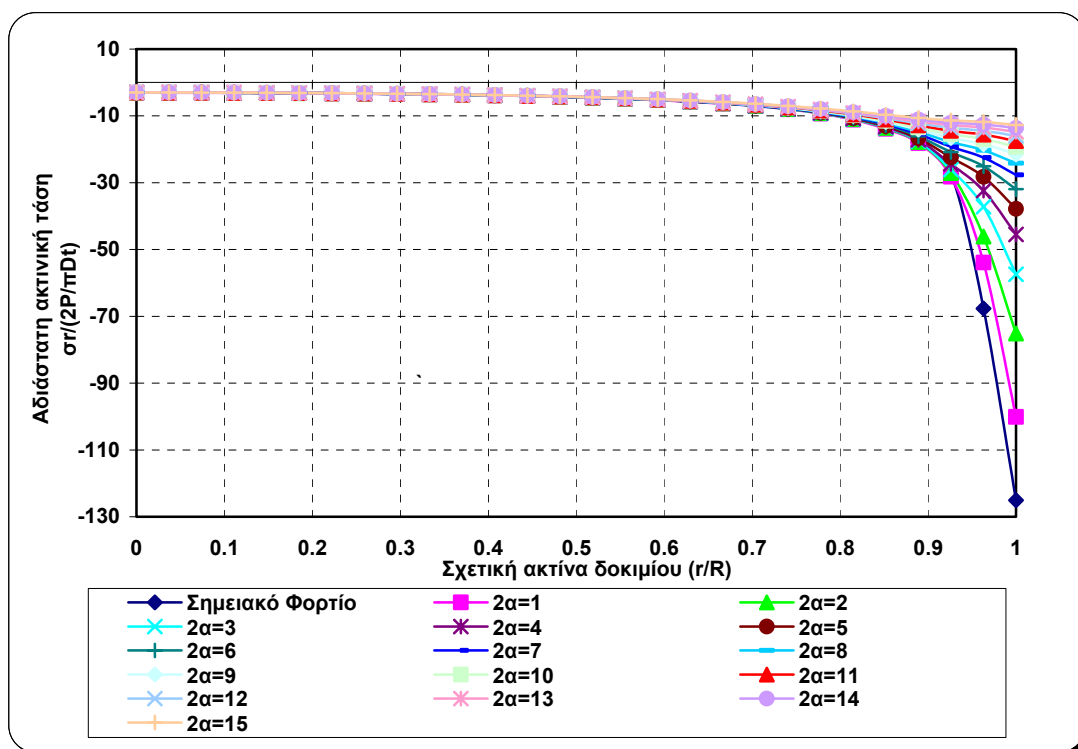
Σχήμα 5.41: Κατανομή εφαπτομενικής τάσης για γραμμή μελέτης 30° Σχήμα 5.42: Κατανομή εφαπτομενικής τάσης για γραμμή μελέτης 60°

Σχήμα 5.43: Κατανομή εφαπτομενικής τάσης για γραμμή μελέτης 90°

➤ Ακτινικές Τάσεις

Σχήμα 5.44: Κατανομή ακτινικής τάσης για γραμμή μελέτης 0°

Σχήμα 5.45: Κατανομή ακτινικής τάσης για γραμμή μελέτης 30° Σχήμα 5.46: Κατανομή ακτινικής τάσης για γραμμή μελέτης 60°



Σχήμα 5.47: Κατανομή ακτινικής τάσης για γραμμή μελέτης 90°

Παρατηρήσεις:

- Από τα σχήματα 5.40 μέχρι και 5.47, παρατηρείται ότι με την αύξηση της γωνίας επιβολής του φορτίου 2α , οι εφαπτομενικές τάσεις μεταβάλλονται ελάχιστα στο κέντρο του δίσκου και τείνουν να μηδενιστούν στο εξωτερικό του σύνορο.
- Με την αλλαγή στον προσανατολισμό της γραμμής μελέτης Θ , ξεκινώντας από 0° μέχρι 90° , παρατηρείται ότι το μέγεθος των εφαπτομενικών τάσεων αυξάνεται.
- Με την αύξηση της γωνίας επιβολής του φορτίου 2α , οι ακτινικές τάσεις μεταβάλλονται ελάχιστα στο κέντρο του δίσκου και τείνουν να μηδενιστούν στο εξωτερικό του σύνορο.
- Με την αλλαγή στον προσανατολισμό της γραμμής μελέτης Θ , ξεκινώντας από 0° μέχρι 90° , παρατηρείται ότι το μέγεθος των ακτινικών τάσεων μειώνεται.

5.3.6 Υπολογισμός συντελεστών συγκέντρωσης των τάσεων (ΣΕΤ) q_{xx} και q_{yy}

Οι συγκεντρώσεις των τάσεων στο κέντρο του δίσκου ορίζονται από τις σχέσεις:

$$q_{xx} = \frac{\sigma_{xx}}{\left(\frac{pa}{\pi}\right)} \quad (5.4)$$

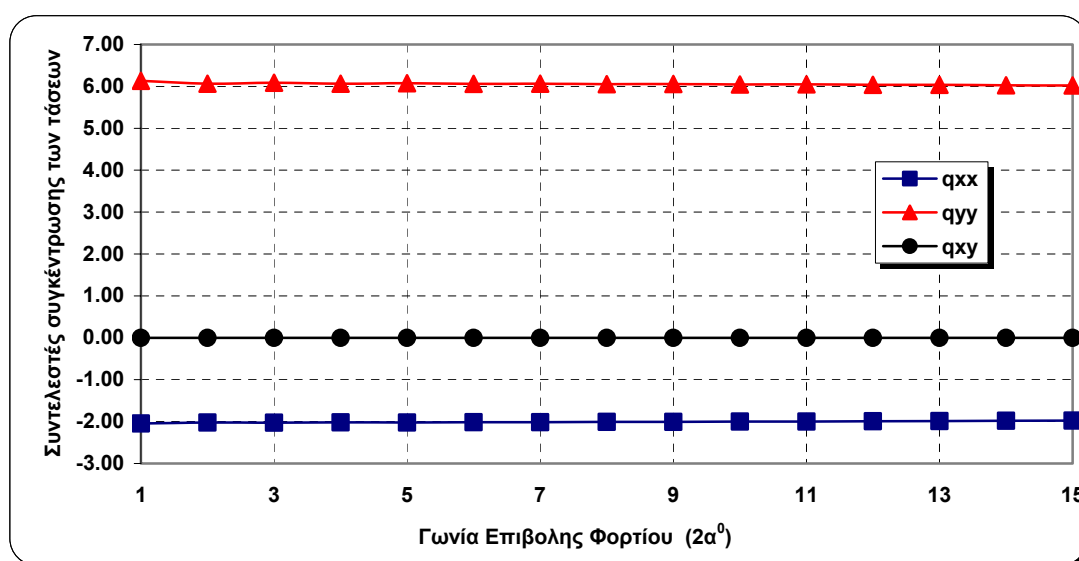
και

$$q_{yy} = \frac{\sigma_{yy}}{\left(\frac{pa}{\pi}\right)} \quad (5.5)$$

και

$$q_{xy} = \frac{\sigma_{xy}}{\left(\frac{pa}{\pi}\right)} \quad (5.6)$$

όπου p , το μέτρο της πίεσης που εφαρμόζεται στο δίσκο, σ_{xx} και σ_{yy} , οι οριζόντιες και κατακόρυφες τάσεις όπως υπολογίστηκαν στο κέντρο του δίσκου για τις διάφορες γωνίες επιβολής του φόρτισης (2α). Το σχήμα 5.48 παρουσιάζει τους συντελεστές συγκέντρωσης των τάσεων στο κέντρο του δίσκου συναρτήσει της γωνίας επιβολής του φορτίου.



Σχήμα 5.48: Συντελεστές συγκέντρωσης των τάσεων στο κέντρο του δίσκου

Παρατηρήσεις:

- Από το σχήμα 5.48 παρατηρείται μια ελαφριά αρνητική κλίση της καμπύλης του συντελεστή q_{yy} και μια θετική κλίση της καμπύλης του συντελεστή q_{xx} , ενώ του συντελεστή q_{xy} , είναι εντελώς οριζόντια ευθεία.
- Στον συντελεστή q_{yy} , οι μέγιστες τιμές τις καμπύλης είναι για τις γωνίες επιβολής φορτίου από 1^0 μέχρι 5^0 , ενώ οι μέγιστες τιμές του συντελεστή q_{xx} , είναι για τις γωνίες επιβολής φορτίου από 9^0 μέχρι 15^0 .
- Από το γράφημα αυτό επιβεβαιώνεται ότι η οριζόντια συγκέντρωση τάσης έχει εφελκυστικό¹ χαρακτήρα και παραμένει σχετικά σταθερή στο 70% της διαμέτρου του δίσκου με τιμή ίση με:

$$q_{xx} = 2a, \quad q_{yy} = -6a, \quad q_{xy} = 0 \quad (5.7)$$

- Με τη μέγιστη εφελκυστική τιμή του συντελεστή συγκέντρωσης των τάσεων στο κέντρο του δίσκου, θα αναμενόταν εάν ήταν να ξεκινήσει ρωγμή ότι θα ξεκινούσε στο κέντρο του.

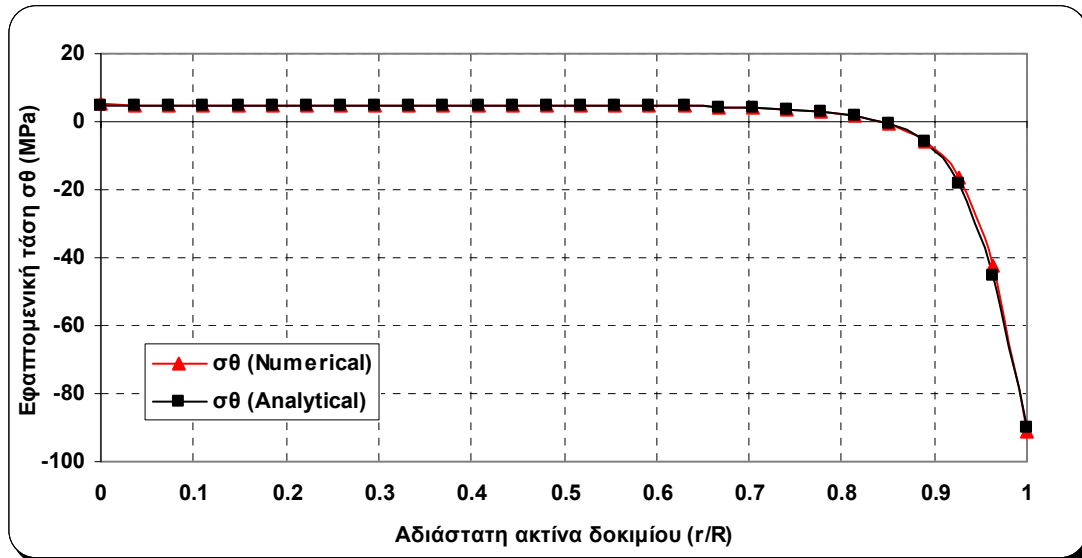
5.3.7 Σύγκριση αναλυτικής λύσης με την αριθμητική επίλυση

Όταν μελετάται ένα πρόβλημα ή μοντελοποιείται ένα φυσικό φαινόμενο με αριθμητικές μεθόδους, είναι απαραίτητο να γίνεται ένας έλεγχος σύγκλισης των λύσεων που αναμένεται να ληφθούν. Με τον όρο σύγκλιση λύσης εννοείται πόσο η αριθμητική λύση προσεγγίζει την αναλυτική λύση κλειστής μορφής όπως είναι οι σχέσεις 3.40, 3.45, 3.47, 3.49 και 3.50 (Κακλής, 2002). Η σύγκλιση στο Msc.Marc-Mentat επιτυγχάνεται με διάφορες επιλύσεις του προβλήματος ιδίων διαστάσεων και γεωμετρίας με διαφορετικό αριθμό στοιχείων έτσι ώστε η ακρίβεια της λύσης να συγκλίνει προς την πραγματική. Σε αυτό το σημείο πρέπει να τονιστεί ότι όσο αυξάνει ο αριθμός των στοιχείων τόσο αυξάνει και το υπολογιστικό κόστος. Συνήθως η επιθυμητή σύγκλιση επιτυγχάνεται όταν οι αριθμητικές λύσεις δεν ξεπερνούν το 3-5 % διαφορά μεταξύ τους και προσεγγίζουν ικανοποιητικά την αναλυτική λύση.

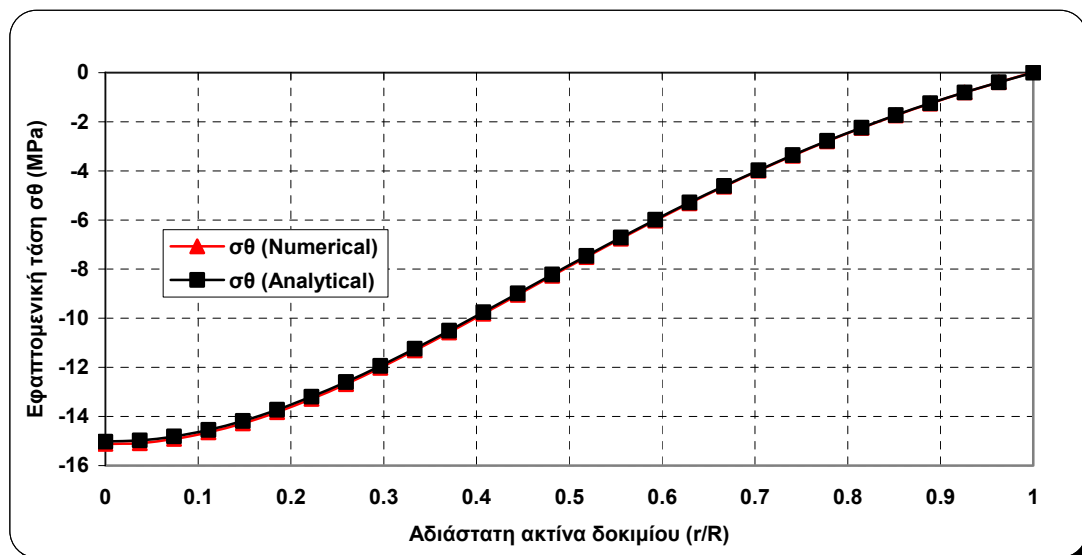
Στα σχήματα 5.49 μέχρι και 5.52, συγκρίνονται η αναλυτική λύση για τις εφαπτομενικές και ακτινικές τάσεις κατά τον κατακόρυφο και οριζόντιο άξονα του δίσκου, με την αριθμητική επίλυση. Για τον σκοπό της σύγκλισης, χρησιμοποιήθηκε

¹ Υπενθυμίζεται ότι στη μηχανική πετρωμάτων, η σύμβαση πρόσημων είναι διαφορετική από την κλασσική μηχανική. Θετικό πρόσημο σημαίνει θλίψη ενώ Αρνητικό πρόσημο σημαίνει εφελκυσμός

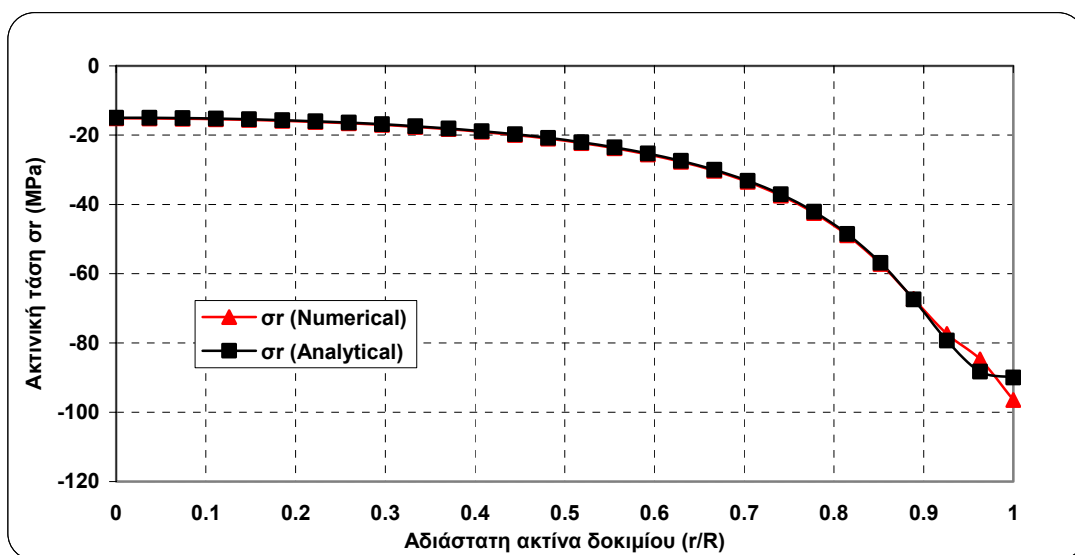
το μοντέλο που αντιστοιχεί σε γωνία επιβολής φορτίου ($2\alpha = 10^\circ$). Το μοντέλο επιλύθηκε με συνθήκες επίπεδης τάσης και κατανεμημένη τάση ίση με 90 MPa στο μήκος του τόξου που αντιστοιχεί στις 10° .



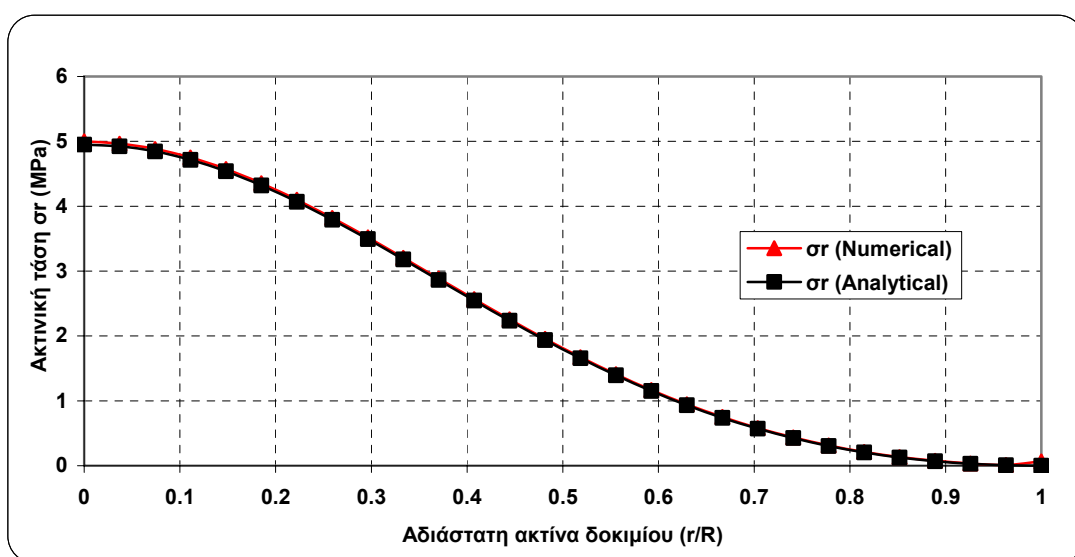
Σχήμα 5.49: Σύγκριση εφαπτομενικών τάσεων αναλυτικής με αριθμητικής λύσης στον κατακόρυφο άξονα



Σχήμα 5.50: Σύγκριση εφαπτομενικών τάσεων αναλυτικής με αριθμητικής λύσης στον οριζόντιο άξονα



Σχήμα 5.51: Σύγκριση ακτινικών τάσεων αναλυτικής με αριθμητικής λύσης στον κατακόρυφο άξονα



Σχήμα 5.52: Σύγκριση ακτινικών τάσεων αναλυτικής με αριθμητικής λύσης στον οριζόντιο άξονα

Παρατηρήσεις:

- Από τα σχήματα 5.49 μέχρι 5.52 όπου γίνεται έλεγχος σύγκλισης των ακτινικών και εφαπτομενικών τάσεων, παρατηρείται αρκετά καλή σύγκλιση σε όλες τις διευθύνσεις.
- Η απόκλιση που παρουσιάζεται στο σχήμα 5.51 είναι πιθανόν εξαιτίας της επιβολής της φόρτισης. Ο αριθμός των στοιχείων που χρησιμοποιήθηκε για τον έλεγχο σύγκλισης (9612 στοιχεία) παρουσιάστηκε αρκετά ικανοποιητικός.

Μεγαλύτερος αριθμός στοιχείων θα σήμαινε υπολογιστικό κόστος ενώ μικρότερος αριθμός στοιχείων μπορεί να έδινε απόκλιση από την αναλυτική λύση.

- Το διάγραμμα διατμητικών τάσεων παραλείπεται διότι οι τιμές που παρουσιάζει είναι σχεδόν μηδενικές.
- Αφού διαπιστώθηκε η ικανοποιητική ακρίβεια των αριθμητικών μοντέλων είναι δυνατή η συνέχιση της ανάλυσης σε προβλήματα όπου δεν υπάρχει αναλυτική λύση όπως είναι τα προβλήματα με επίδραση μαθηματικής ρωγμής (closed crack situation) και με επίδραση εγκοπής (notched Brazilian).

5.3.8 Εφαρμογή του κριτηρίου Griffith

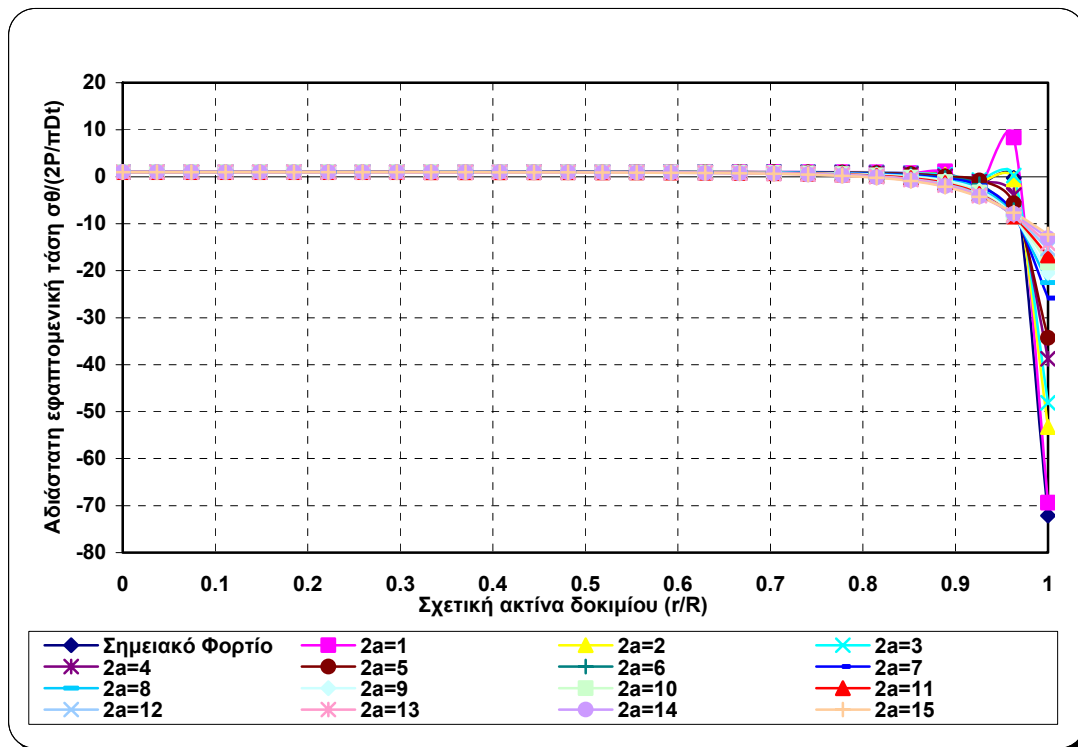
Χρησιμοποιώντας το κριτήριο αστοχίας του Griffith όπως περιγράφηκε στο κεφάλαιο 4, οι σχέσεις 4.31 σε πολικές συντεταγμένες στον κατακόρυφο άξονα του δίσκου μετασχηματίζονται:

$$\begin{aligned} 3\sigma_{\theta} + \sigma_r < 0 & \Leftrightarrow \sigma_G = -\frac{(\sigma_{\theta} - \sigma_r)^2}{8(\sigma_{\theta} + \sigma_r)} \\ 3\sigma_{\theta} + \sigma_r \geq 0 & \Leftrightarrow \sigma_G = \sigma_{\theta} \end{aligned} \quad (5.8)$$

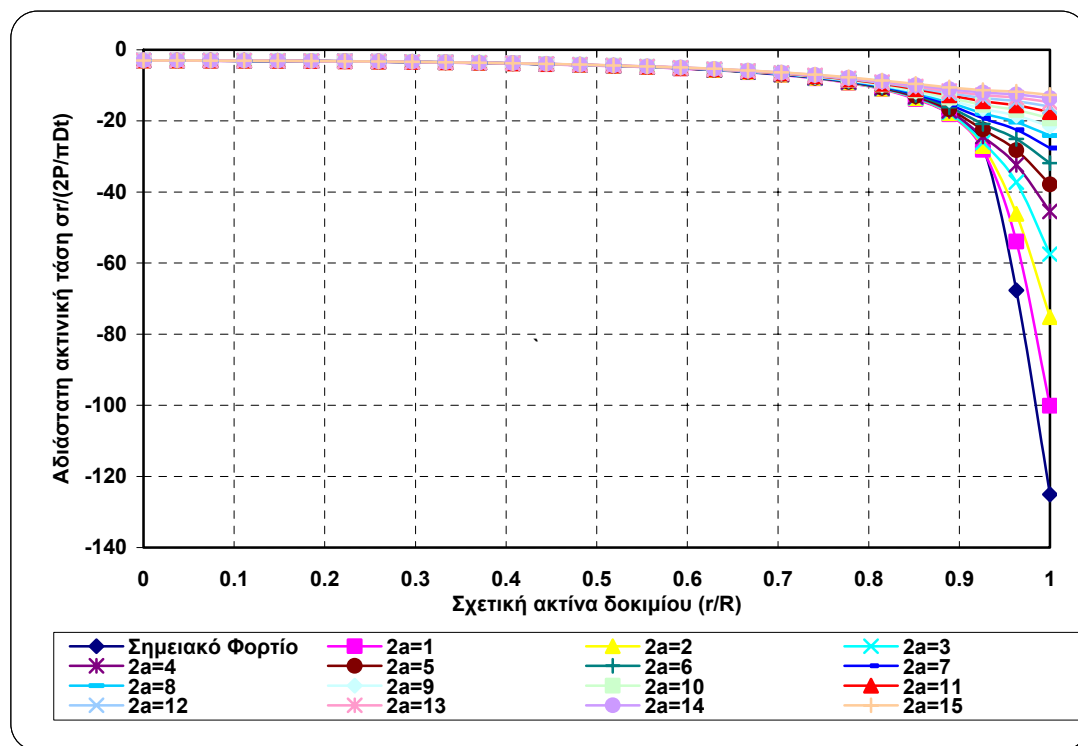
όπου

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \sigma_{\theta} \\ \sigma_3 &= \sigma_r \end{aligned} \quad (5.9)$$

Στο κέντρο του δίσκου είναι κατανοητό ότι ισχύει $3\sigma_{\theta} + \sigma_r \approx 0$ και άρα οι εφαπτομενική τάση θα δίνει την ισοδύναμη τάση Griffith που είναι και η υπεύθυνη για την έναρξη της θραύσης στο κέντρο του δίσκου. Τα γραφήματα 5.53 και 5.54 δίνουν τις κατανομές των αδιάστατων εφαπτομενικών και ακτινικών τάσεων συναρτήσει της σχετικής ακτίνας του δοκιμίου στον κατακόρυφο άξονα για όλες τις γωνίες επιβολής φόρτισης (2α).



Σχήμα 5.53: Αδιάστατες εφαπτομενικές τάσεις συναρτήσει της σχετικής ακτίνας του δοκιμίου



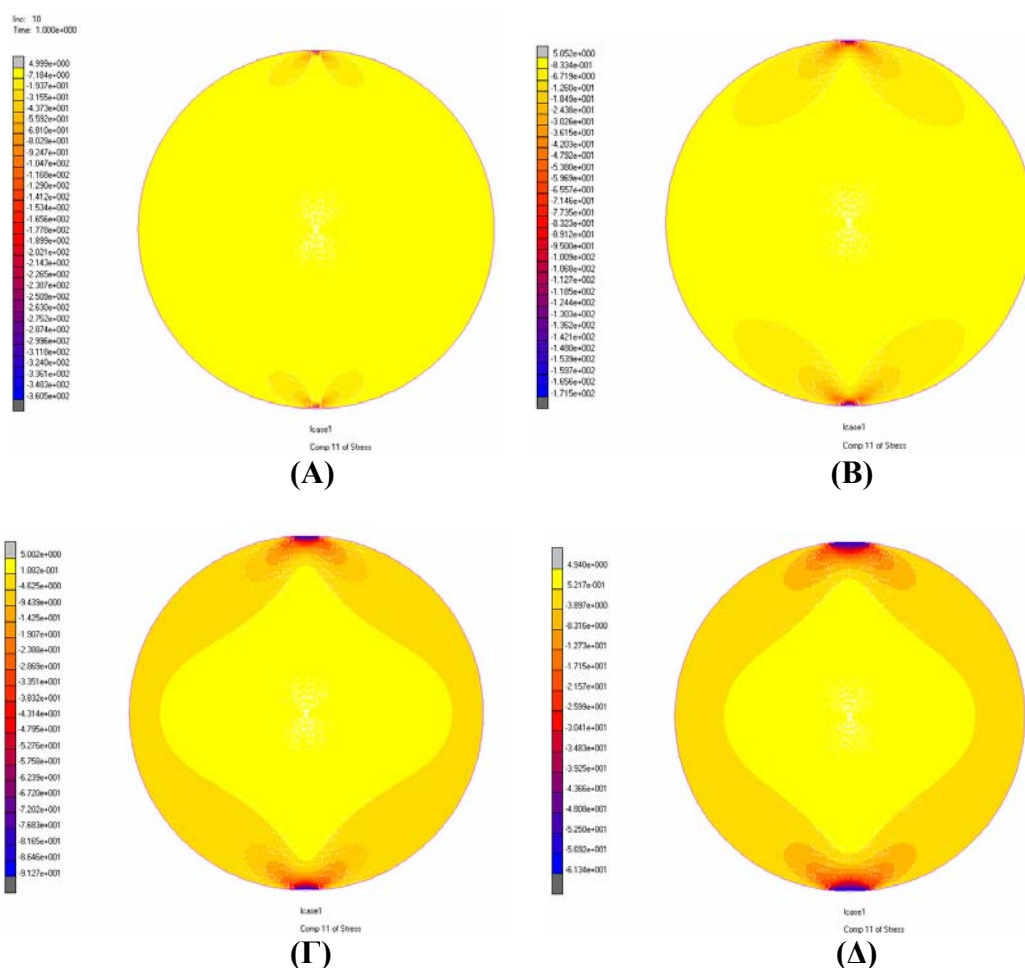
Σχήμα 5.54: Αδιάστατες ακτινικές τάσεις συναρτήσει της σχετικής ακτίνας του δοκιμίου

Παρατηρήσεις:

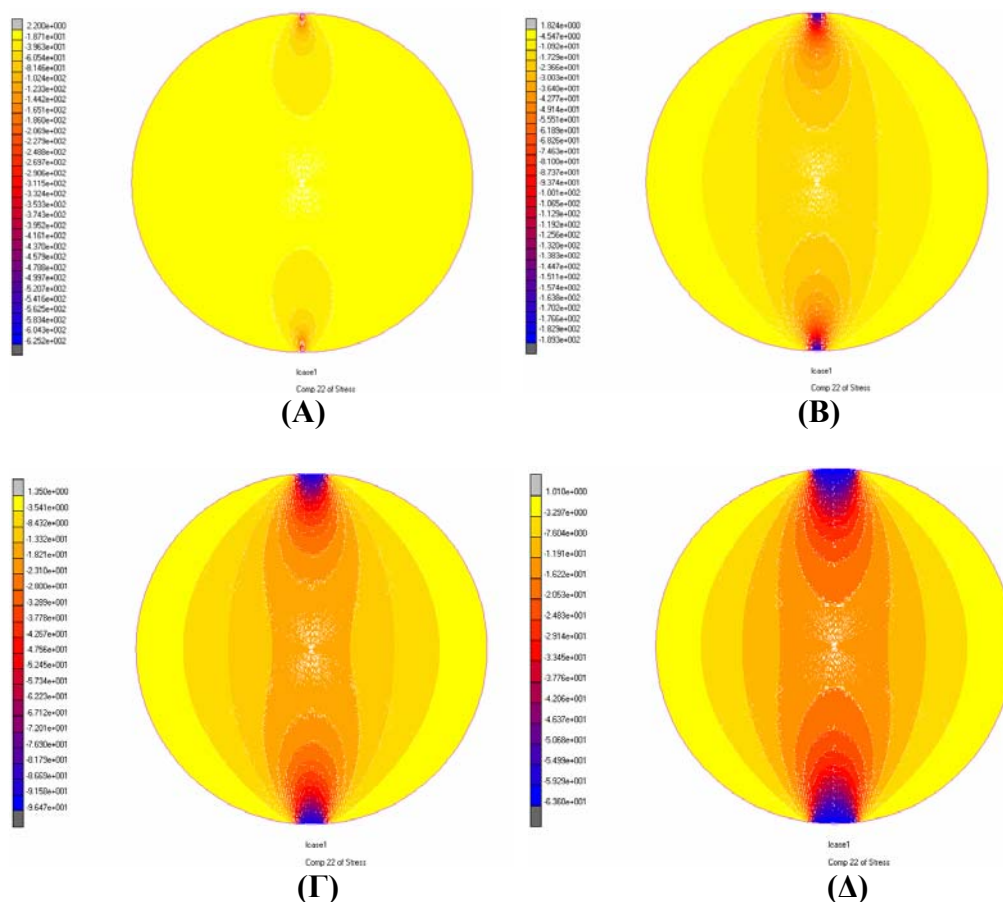
- Από τα σχήματα 5.53 και 5.54, είναι φανερό ότι στο κέντρο του δίσκου ισχύει $3\sigma_\theta + \sigma_r \approx 0$ και άρα οι ισοδύναμες τάσεις Griffith που είναι υπεύθυνες για την θραύση του δίσκου είναι μέγιστες στο κέντρο του. Επομένως αυτή θα δίδεται από την δεύτερη των σχέσεων 5.8.
- Αυτό που είναι ενδιαφέρον, από την εφαρμογή του κριτηρίου του Griffith, για γωνία επιβολής $2\alpha = 1$, η τάση Griffith δεν είναι μέγιστη στο κέντρο του αλλά ακριβώς κάτω από το σημείο επιβολής της φόρτισης. Αυτό θα σήμαινε ότι τα δοκίμιο θα αστοχούσε στο εξωτερικό σύνορο του και όχι στο κέντρο του.

5.3.9 Ισοτασικές καμπύλες

Από την επίλυση που έγινε, στα σχήματα 5.55 και 5.56 φαίνονται οι ισοτασικές καμπύλες των οριζόντιων και κατακόρυφων τάσεων για γωνίες επιβολής φόρτισης: (Α) Σημειακό φορτίο, (Β) $2\alpha = 5^\circ$, (Γ) $2\alpha = 10^\circ$ και (Δ) $2\alpha = 15^\circ$.

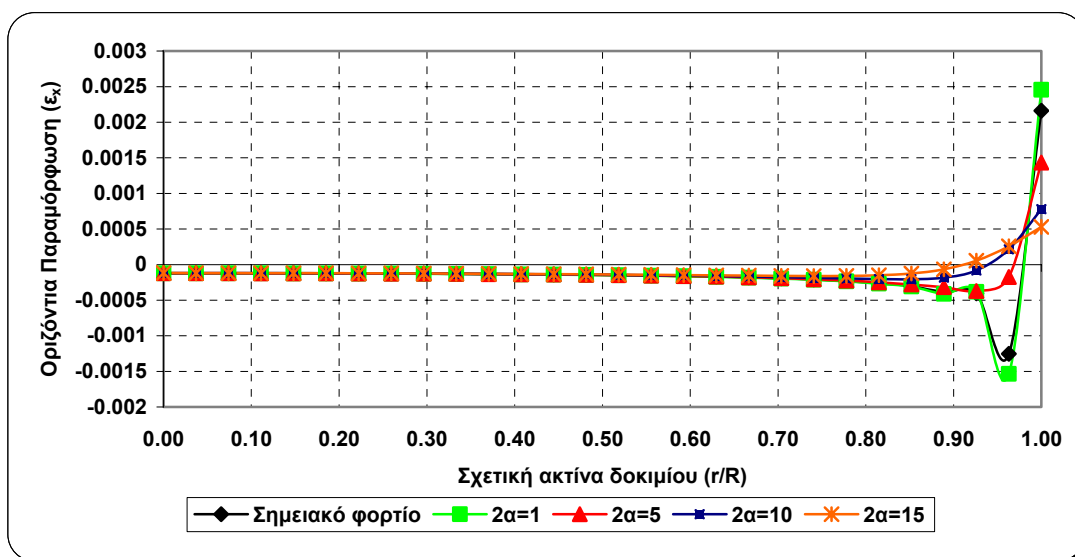
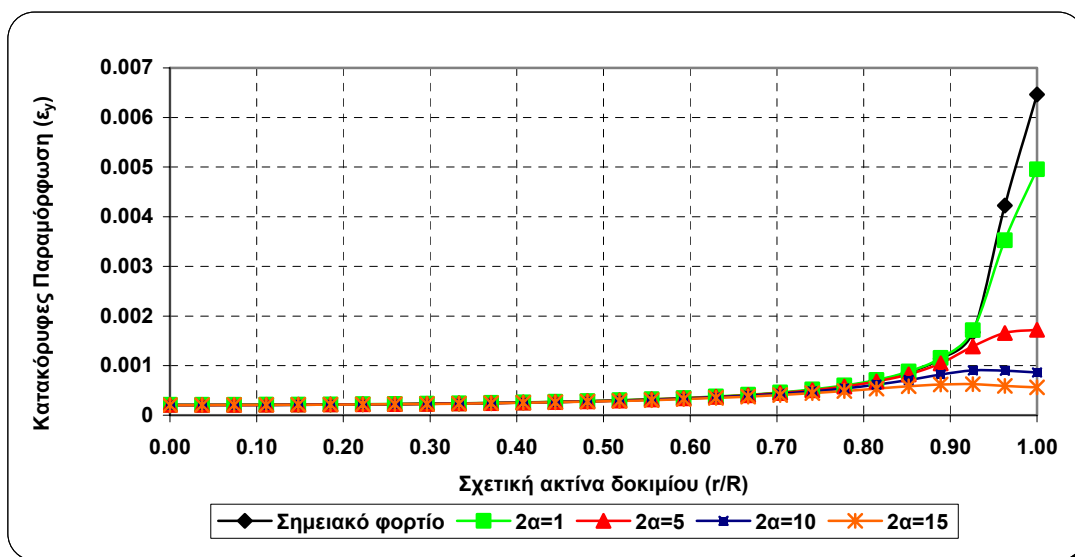


Σχήμα 5.55: Κατανομές οριζόντιων τάσεων σ_{xx}

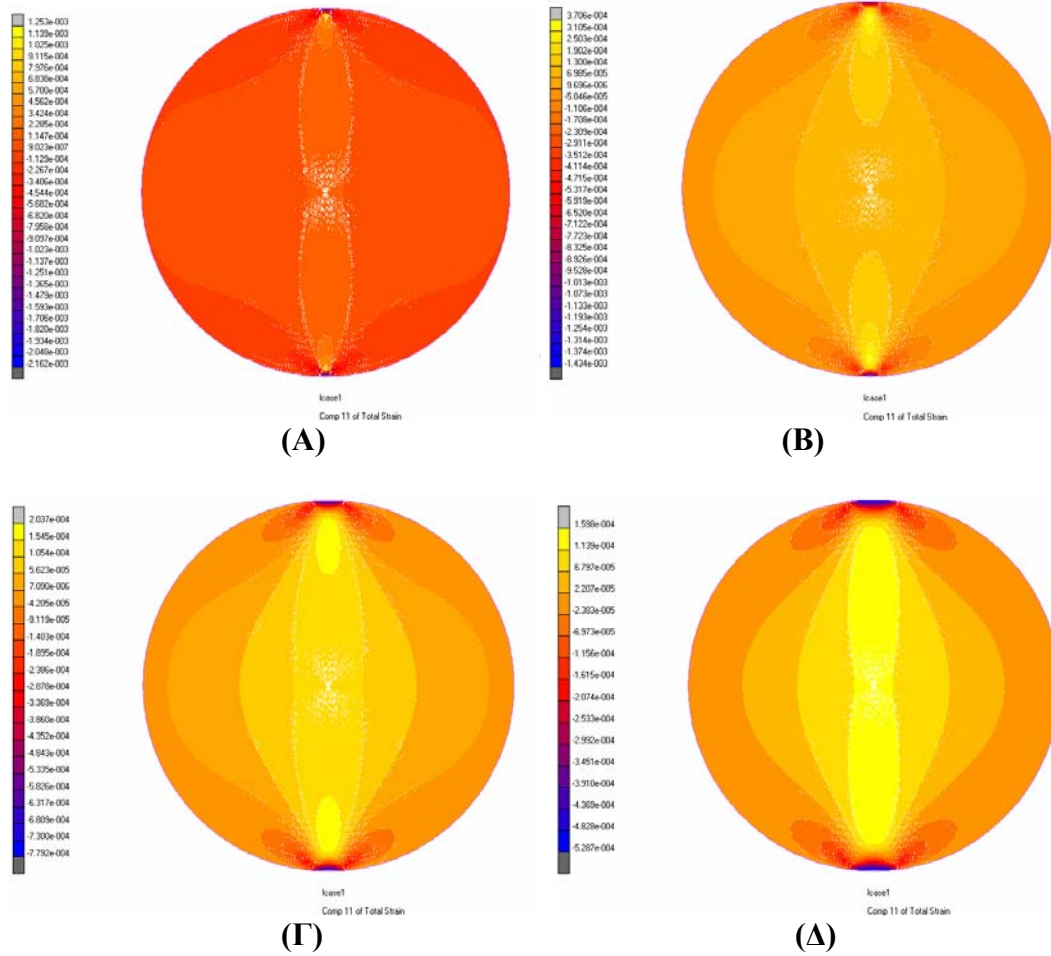
Σχήμα 5.56: Κατανομές κατακόρυφων τάσεων σ_{yy}

5.3.10 Ανάλυση παραμορφώσεων

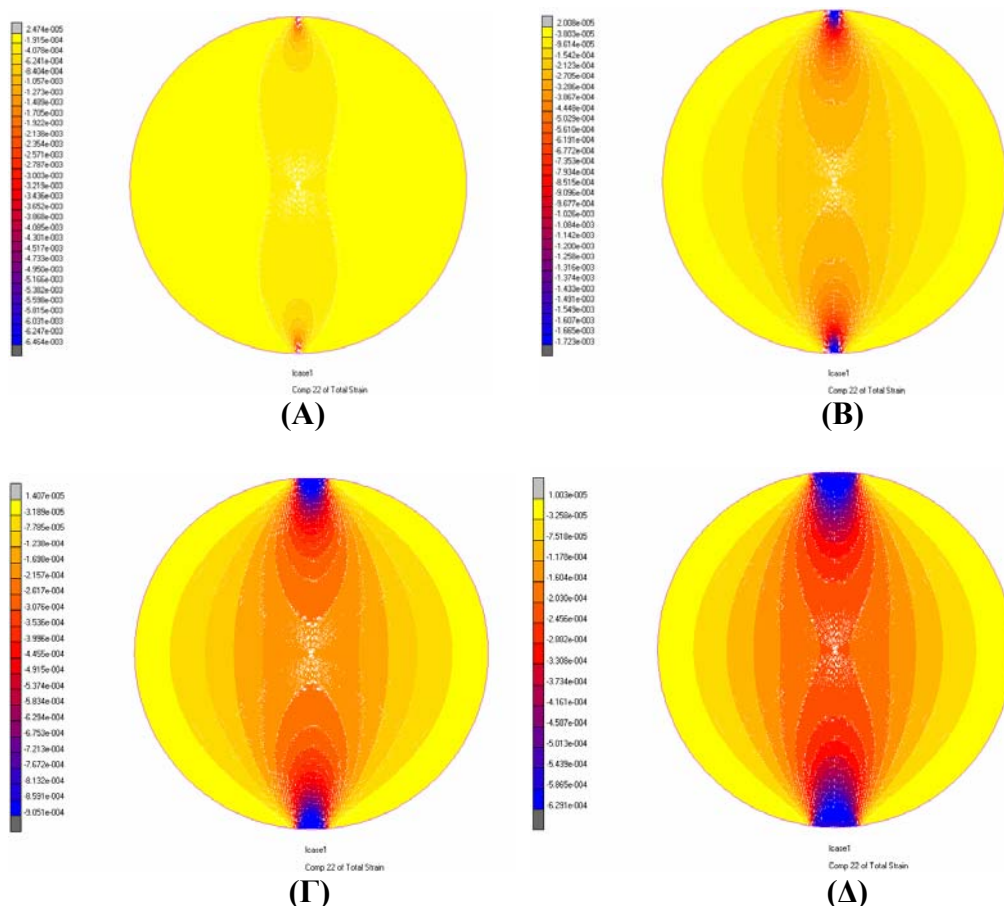
Για την ανάλυση των παραμορφώσεων, κατασκευάστηκαν τα διαγράμματα της οριζόντιας (ϵ_x), και κατακόρυφης (ϵ_y) παραμόρφωσης συναρτήσει της σχετικής ακτίνας του δοκιμίου. Στα σχήματα 5.57 και 5.58 φαίνονται οι οριζόντιες και κατακόρυφες παραμορφώσεις αντίστοιχα για γωνίες επιβολής φόρτισης: (Α) σημειακό φορτίο, (Β) $2\alpha = 5^\circ$, (Γ) $2\alpha = 10^\circ$ και (Δ) $2\alpha = 15^\circ$, ενώ στα διαγράμματα 5.59 και 5.60 φαίνονται οι ισοτασικές καμπύλες τους. Στα διαγράμματα αυτά φαίνονται οι καμπύλες που ανταποκρίνονται σε γωνία επιβολής φορτίου $2\alpha = 1^\circ, 5^\circ, 10^\circ, 15^\circ$, καθώς επίσης και του σημειακού φορτίου.

Σχήμα 5.57: Οριζόντιες παραμορφώσεις ε_{xx} Σχήμα 5.58: Κατακόρυφες παραμορφώσεις ε_{yy} Παρατηρήσεις:

- Από το σχήμα 5.57 και 5.58 παρατηρείται ότι οι μέγιστες οριζόντιες και κατακόρυφες παραμορφώσεις σημειώνονται στο εξωτερικό σύνορο του δίσκου. Αυτό είναι πιθανόν εξαιτίας της επιβολής των συνοριακών συνθηκών.
- Σημειώνεται ότι το (-) στην μηχανική πετρωμάτων αναφέρεται σε έκταση ενώ το (+) αναφέρεται σε βράχυνση.



Σχήμα 5.59: Κατανομές οριζόντιων παραμορφώσεων ϵ_{xx}



Σχήμα 5.60: Κατανομές οριζόντιων παραμορφώσεων $\epsilon_{\gamma\gamma}$

5.4 Επίλυση του Προβλήματος της Αντιδιαμετρικής Θλίψης Άρρηκτου Δίσκου με τις Χαλύβδινες Σιαγώνες

Από την πιο πάνω ανάλυση που έγινε, κρίθηκε σκόπιμο να επιλυθεί και ένα μοντέλο στο οποίο η φόρτιση να γίνει με τις σιαγώνες φόρτισης.

5.4.1 Υπολογισμός επιφάνειας επαφής σιαγώνας με τον δίσκο

Η επαφή μιας οριζόντιας και μιας κυλινδρικής επιφάνειας, όπως συμβαίνει μεταξύ πλακών φόρτισης και δοκιμίου, ορίζεται από ένα σημείο. Η θεώρηση αυτή προϋποθέτει σημειακή φόρτιση στο σύνορο του δοκιμίου, κάτι όμως δύσκολο στην πράξη και ανεπιθύμητο λόγω εμφάνισης υψηλών τάσεων στην διεπιφάνεια. Το εύρος της διεπιφάνειας όταν μια οριζόντια και μια κυλινδρική επιφάνεια συμπίεζονται μπορεί να υπολογιστεί από την θεωρία της ελαστικότητας (Timoshenko & Goodier, 1970):

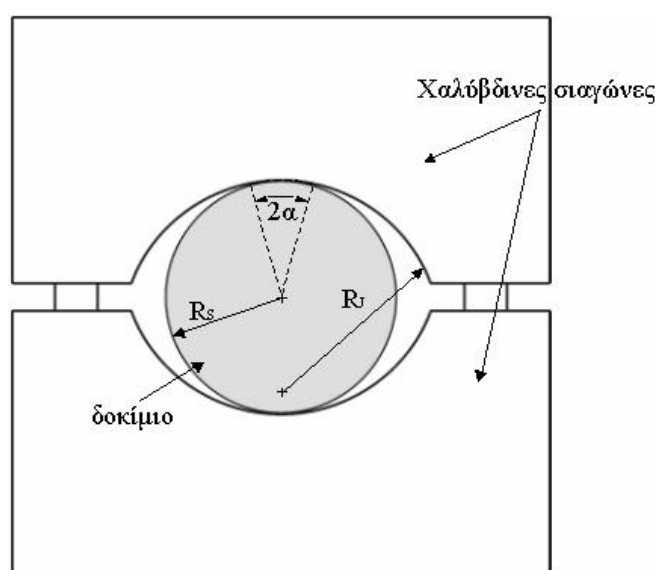
$$2a = 4 \left[\frac{FR}{\pi t} \left(\frac{1-\nu_p^2}{E_p} + \frac{1-\nu_s^2}{E_s} \right) \right]^{1/2} \quad (5.10)$$

ή:

$$\frac{a}{R} = 2 \left[\left(\frac{F}{\pi R t} \right)^{1/2} \left(\frac{1-\nu_p^2}{E_p} + \frac{1-\nu_s^2}{E_s} \right) \right]^{1/2} \quad (5.11)$$

όπου: $2a$, το εύρος του τόξου επαφής, F το φορτίο, R ακτίνα του δοκιμίου, t το πάχος του δοκιμίου, και οι δείκτες p και s αναφέρονται στις πλάκες φόρτιση και στο δοκίμιο, αντίστοιχα.

Για να ελαχιστοποιηθούν οι ανεπιθύμητες τάσεις στην διεπιφάνεια, η φόρτιση κατανέμεται στην επιφάνεια των δοκιμίων μέσω ζεύγους χαλύβδινων σιαγώνων όπως φαίνεται και στο σχήμα 5.61.



Σχήμα 5.60: Διάταξη δοκιμής Βραζιλιανού δίσκου με τις σιαγόνες

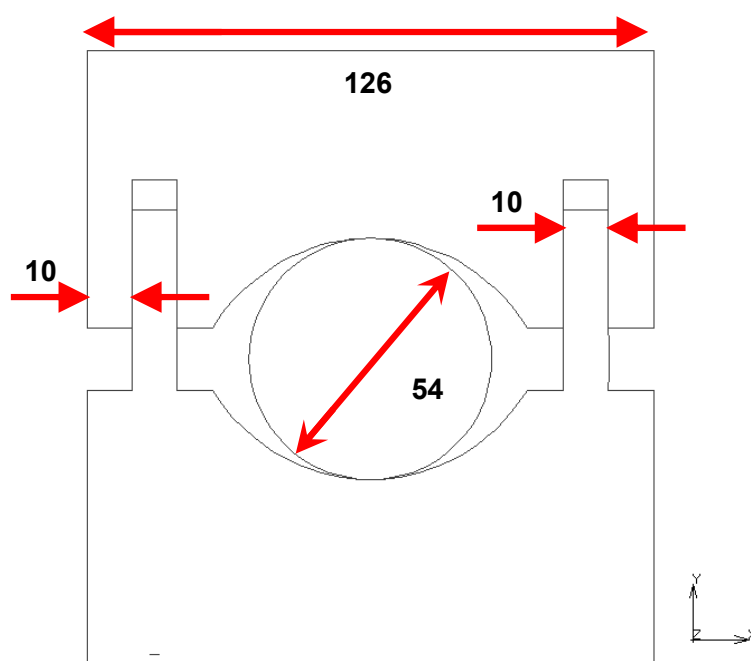
Η επιφάνεια επαφής αποτελείται από τόξο κύκλου, ακτίνας μεγαλύτερης από του δοκιμίου, περίπου 10° ($2\alpha \approx R/6$) στην αστοχία. Η διάμετρος του απαιτούμενου τόξου επαφής μεταξύ των δυο κυλινδρικών επιφανειών (σιαγώνα–δοκίμιο) προκύπτει από την σχέση 5.10:

$$2a = 4 \left[\frac{P}{\pi t} \cdot \frac{R_S R_J}{R_S + R_J} \left(\frac{1 - \nu_S^2}{E_S} + \frac{1 - \nu_J^2}{E_J} \right) \right]^{\frac{1}{2}} \quad (5.12)$$

όπου R_S η ακτίνα του δοκιμίου και R_J της σιαγόνας (Mellor & Hawkes, 1971).

5.4.2 Γεωμετρία

Η γεωμετρία του δοκιμίου παραμένει η ίδια όπως περιγράφηκε στην ενότητα 5.3.1. Υπενθυμίζεται ότι η ακτίνα του δοκιμίου είναι 27 mm. Η γεωμετρία των χαλύβδινων σιαγόνων μαζί με το δοκίμιο φαίνεται στο σχήμα 5.61.



Σχήμα 5.61: Γεωμετρία διάταξης με τις σιαγόνες

Το άνοιγμα που σχηματίζουν μεταξύ τους οι δύο σιαγόνες πρέπει να επιτρέπει την έδραση δοκιμίων που έχουν μορφή δίσκου έτσι ώστε οι σιαγόνες και το δοκίμιο να βρίσκονται σε επαφή κατά τόξο 10° την στιγμή της αστοχίας. Αυτό επιτυγχάνεται όταν η ακτίνα του ημικυλίνδρου της σιαγόνας να είναι 1.5 φορές η ακτίνα του δοκιμίου. Το πλάτος των σιαγόνων πρέπει να είναι 1.1 φορές το πλάτος του δοκιμίου. Επομένως:

$$\frac{\text{ακτίνα σιαγόνας}}{\text{ακτίνα δοκιμίου}} = 1.5 \quad \frac{\text{πάχος σιαγόνας}}{\text{πάχος δοκιμίου}} = 1.1 \quad (5.13)$$

5.4.3 Γεωμετρικές ιδιότητες

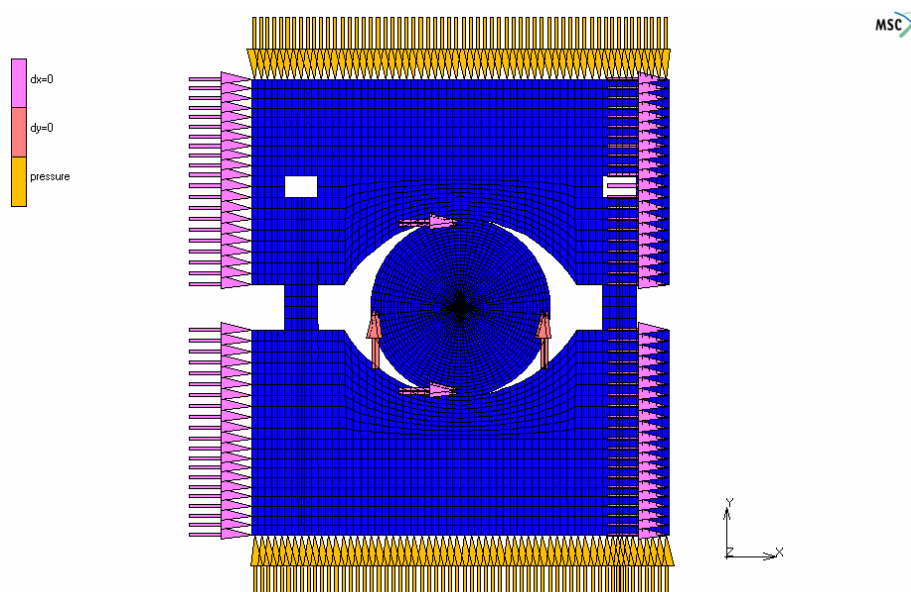
Οι γεωμετρικές συνθήκες (επίπεδη τάση και επίπεδη παραμόρφωση), όπως αποδείχτηκε και στην ενότητα 5.3.4, δεν επηρεάζουν την αριθμητική επίλυση. Το μοντέλο αυτό επιλύθηκε με θεώρηση επίπεδης τάσης για συμβατότητα με την θεωρία της ελαστικότητας.

5.4.4 Συνοριακές συνθήκες και διακριτοποίηση

Οι συνοριακές συνθήκες που επιβλήθηκαν στο μοντέλο είναι:

- Κύλιση ($dy = 0$) κατά την οριζόντια διεύθυνση σε δυο συνοριακούς κόμβους στο δοκίμιο.
- Κύλιση ($dx = 0$) κατά την κατακόρυφη διεύθυνση στον δεξιό και αριστερό άκρο των σιαγώνων και σε δυο συνοριακούς κόμβους στο δοκίμιο.
- Πίεση μεγέθους 4.5 MPa των στοιχείων της χαλύβδινης σιαγώνας στο πάνω και κάτω άκρο τους.

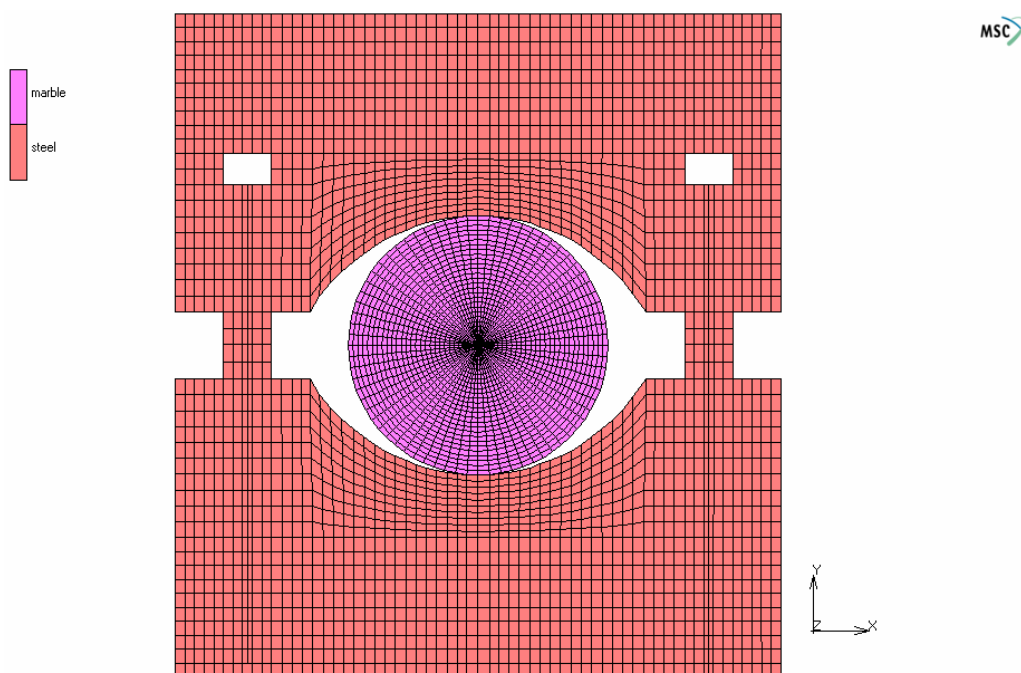
Η επιβολή των συνοριακών συνθηκών έγινε με αυτό το τρόπο για την αποφυγή περιστροφής του δοκιμίου κατά την επίλυση καθώς επίσης και για την εξασφάλιση της τέλει σχετικής ολίσθησης μεταξύ των δυο μελών της χαλύβδινης σιαγώνας. Για την επίλυση χρησιμοποιήθηκαν 4427 στοιχεία και 4636 κόμβοι. Στο σχήμα 5.62 φαίνεται η επιβολή των συνοριακών συνθηκών καθώς επίσης και η διακριτοποίησή τους:



Σχήμα 5.62: Συνοριακές συνθήκες

5.4.5 Ιδιότητες υλικών

Τα υλικά που χρησιμοποιήθηκαν για την προσομοίωση της δοκιμής ήταν χάλυβας για τις χαλύβδινες σιαγώνες με μέτρο ελαστικότητας, $E = 210 \text{ GPa}$ και λόγο Poisson, $\nu = 0.3$. Το δοκίμιο ήταν ένα υλικό που ανταποκρίνεται σε μέτρο ελαστικότητας, $E = 80 \text{ GPa}$ και λόγο Poisson, $\nu = 0.25$. Οι ιδιότητες των υλικών φαίνονται στο σχήμα 5.63.



Σχήμα 5.63: Ιδιότητες υλικών

5.4.6 Προβλήματα και στοιχεία επαφής

Πολλά φυσικά προβλήματα απαιτούν την αριθμητική μοντελοποίηση επαφής σωμάτων. Η ανάλυση προβλημάτων επαφής είναι αρκετά περίπλοκη διαδικασία γιατί απαιτείται ο ακριβής εντοπισμός της κίνησης πολλαπλών γεωμετρικών σωμάτων. Επίσης απαιτείται η ανάλυση της κίνησης λόγω της αλληλεπίδρασης αυτών των σωμάτων μετά το στάδιο επαφής τους. Η αναπαράσταση της επαφής περιλαμβάνει την περιγραφή της τριβής μεταξύ των επιφανειών, την μεταφορά θερμότητας μεταξύ σωμάτων, κλπ. Η αριθμητική προσομοίωση προβλημάτων επαφής απαιτεί την ανίχνευση της κίνησης των σωμάτων, ανίχνευση επαφής, επιβολή κατάλληλων περιορισμών ώστε να αποφεύγονται φαινόμενα διείσδυσης και τέλος επιβολή κατάλληλων συνοριακών συνθηκών ώστε να περιγραφούν τα φαινόμενα τριβής και μετάδοσης θερμότητας.

Τα στάδια για τη σύνθεση και επίλυση προβλημάτων επαφής με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων απαιτούν την επιβολή συνθηκών κινηματικής επαφής, επιβολή του κατάλληλου νόμου τριβής επιφανειών και τέλος επίλυση του προβλήματος με την αρχή του υποθετικού έργου (Marc, 2000).

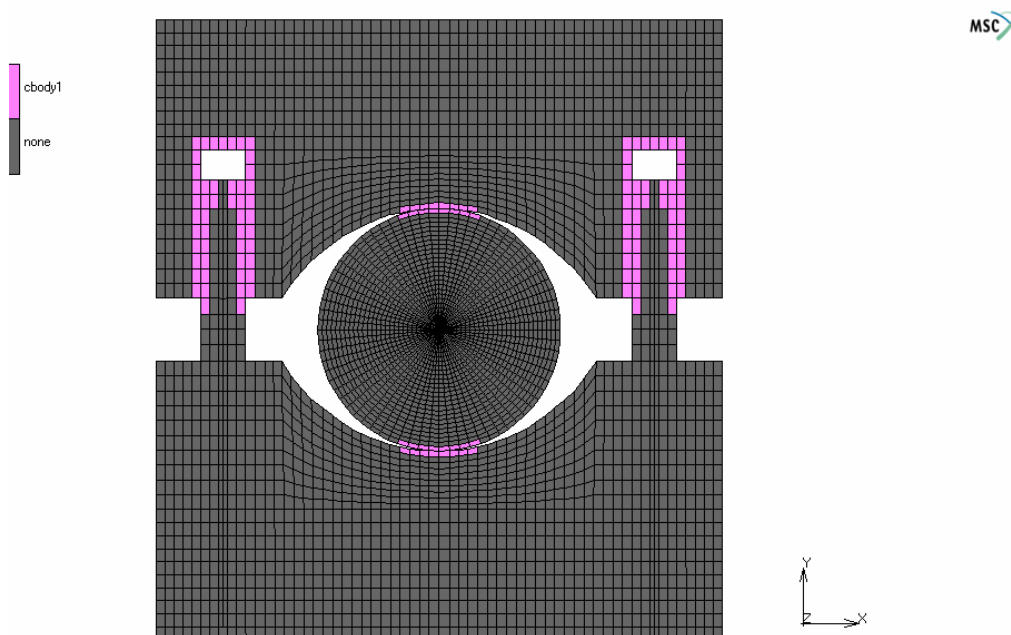
Οι μετατοπίσεις στο όριο επαφής των σωμάτων πρέπει να είναι συμβατές μεταξύ τους ώστε να μην παρουσιάζονται φαινόμενα διείσδυσης. Οι κινηματικοί περιορισμοί για να μην παρουσιάζονται φαινόμενα διείσδυσης περιγράφονται με τη σχέση:

$$g = (u^1 - u^2) \cdot n_2 + g_0 \geq 0 \quad \text{στο} \quad \Gamma_c \quad (5.14)$$

όπου u^1, u^2 αποτελούν τα διανύσματα μετατοπίσεων δύο σωμάτων που βρίσκονται σε επαφή. Το πρώτο σώμα μπορεί να ονομαστεί επαφέας (contactor), ενώ το δεύτερο σώμα, στόχος (target). Ο όρος (Γ_c) εκφράζει το όριο επαφής των σωμάτων ενώ το (g_0) το αρχικό κενό μεταξύ των δύο σωμάτων πριν την επαφή. Ο όρος (n_2) αποτελεί το μοναδιαίο διάνυσμα κάθετο στο σημείο επαφής του δεύτερου σώματος. Το διάνυσμα αυτό ορίζει την διεύθυνση επαφής. Η σχέση 5.14 ορίζει το κενό σε κάθε στάδιο μεταξύ των δύο σωμάτων. Σύμφωνα με αυτά (Ling & Stolarski 1997):

- Όταν η απόσταση είναι μεγαλύτερη του μηδενός ($g > 0$), δεν παρουσιάζεται επαφή.
- Η περίπτωση ($g = 0$) ορίζει επαφή των δύο σωμάτων.
- Αντίθετα, όταν το κενό παρουσιάζει αρνητική τιμή ($g < 0$) τότε έχει παρουσιαστεί διείσδυση των σωμάτων.

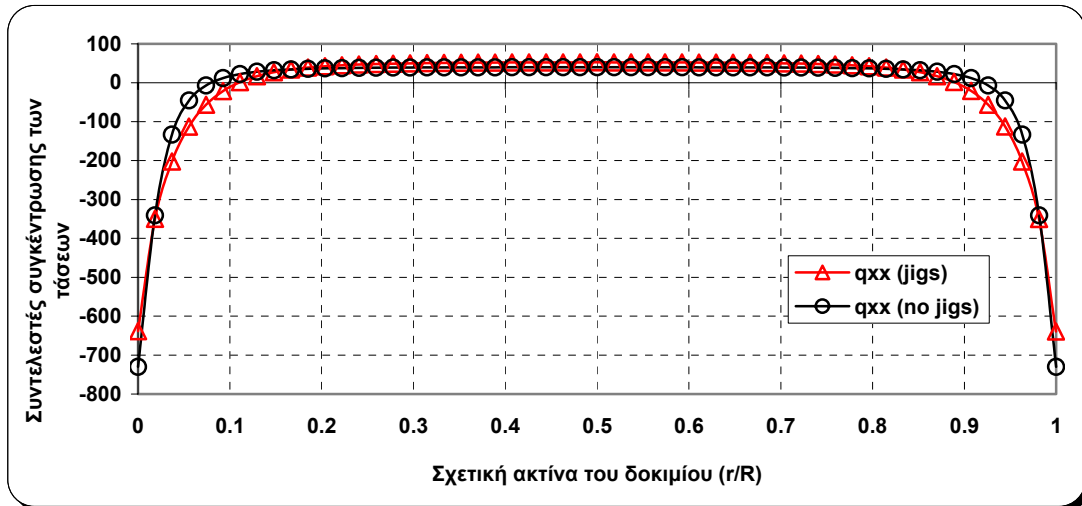
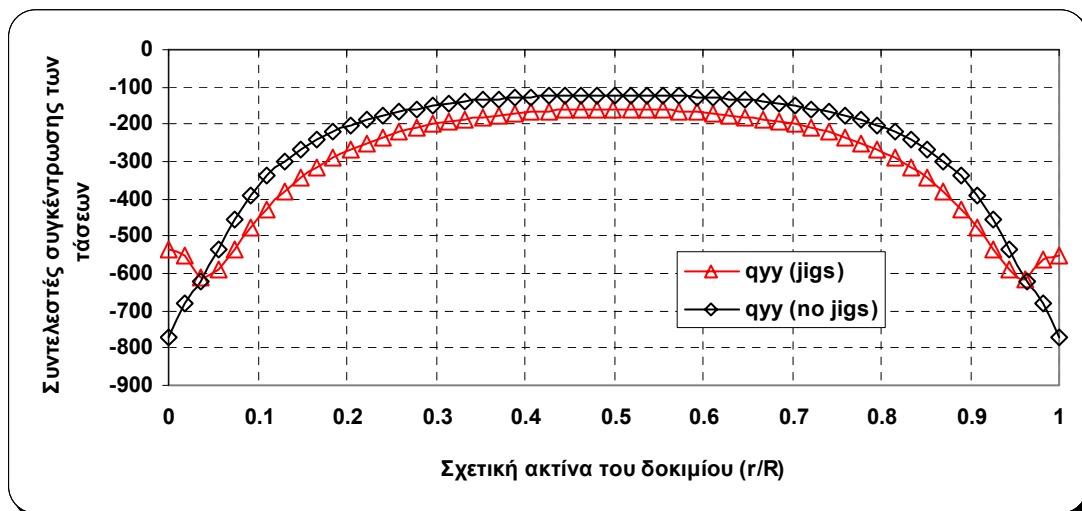
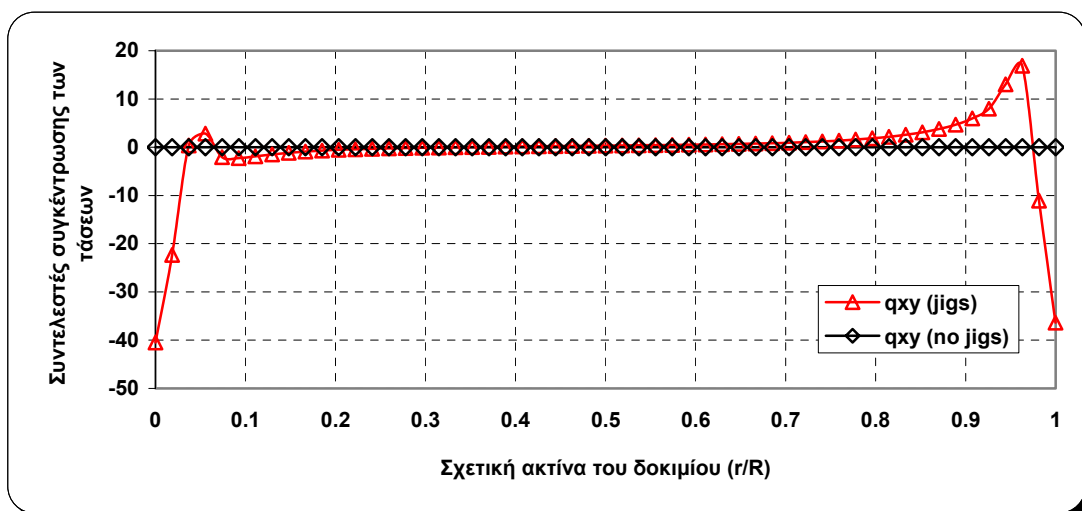
Τα στοιχεία επαφής είναι στοιχεία όπου χρησιμοποιούνται για την μοντελοποίηση τέτοιων φαινομένων (τριβής και αποφυγής διείσδυσης). Τα στοιχεία αυτά τοποθετήθηκαν μεταξύ των οδηγών ευθυγράμμισης και της πλάκας φόρτισης καθώς επίσης και στο μήκος τόξου του δοκιμίου που έρχεται σε επαφή με το κοίλο μέρος της χαλύβδινης πλάκας. Ο συντελεστής τριβής μεταξύ των επιφανειών που χρησιμοποιήθηκε ήταν 0.4 που ανταποκρίνεται σε γωνία 22° . Ο νόμος τριβής που υπακούει η τριβή που επιβλήθηκε θεωρήθηκε να είναι τριβή Coulomb. Τα στοιχεία επαφής που χρησιμοποιήθηκαν συνολικά ήταν 84. Τα στοιχεία επαφής φαίνονται στο σχήμα 5.64.



Σχήμα 5.64: Στοιχεία επαφής

5.4.7 Συγκριτικά αποτελέσματα επίλυσης με τις χαλύβδινες σιαγώνες

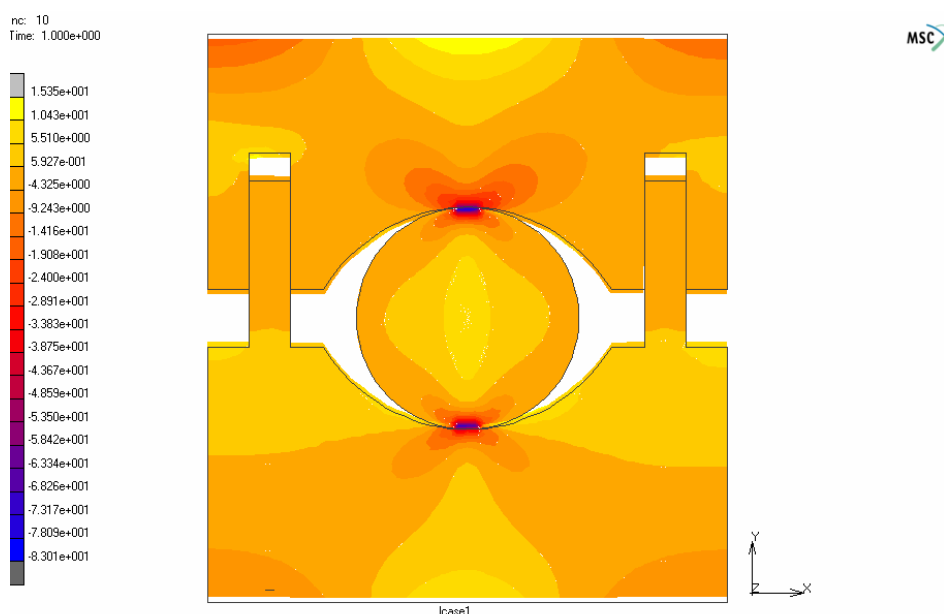
Τα αποτελέσματα που θα παρουσιαστούν, περιορίζονται για σκοπούς απλότητας στους συντελεστές έντασης των τάσεων στην κατακόρυφη διάμετρο του δίσκου. Από την επίλυση λαμβάνονται οι τιμές των τάσεων σ_{11} , σ_{22} , και σ_{12} στο κεντρικό κατακόρυφο άξονα με την βοήθεια τους υπολογίζονται οι συντελεστές έντασης των τάσεων. Τα σχήματα 5.65, 5.66 και 5.67 δείχνουν τις συγκρίσεις των συντελεστών έντασης των τάσεων q_{xx} , q_{yy} , και q_{xy} συναρτήσει της σχετικής ακτίνας των δοκιμίων για το μοντέλο χωρίς σιαγώνες που έχει γωνία επιβολής φορτίου 10^0 και για το μοντέλο με τις χαλύβδινες σιαγώνες.

Σχήμα 5.65: Σύγκριση συντελεστών έντασης των τάσεων q_{xx} Σχήμα 5.66: Σύγκριση συντελεστών έντασης των τάσεων q_{yy} Σχήμα 5.67: Σύγκριση συντελεστών έντασης των τάσεων q_{xy}

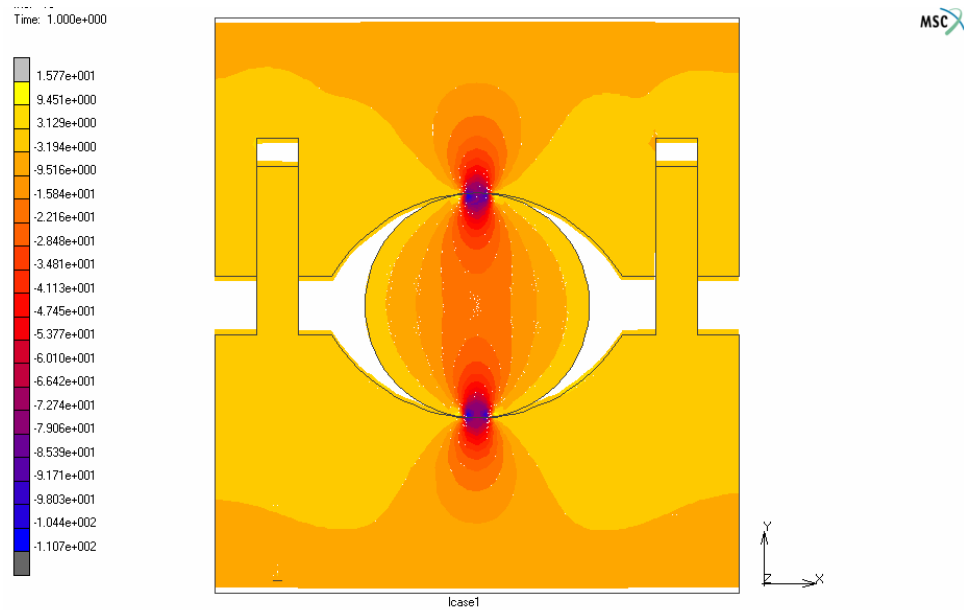
Παρατηρήσεις:

- Από το σχήμα 5.65, παρατηρείται ότι η μέγιστη συγκέντρωση τάσεων q_{xx} , παρουσιάζεται στο κέντρο του δίσκου. Το μέγεθος των τάσεων μάλιστα είναι εφελκυστικό και είναι υπεύθυνο για την θραύση στο κέντρο του δίσκου. Παρατηρείται επίσης ότι η καμπύλη q_{xx} , χωρίς τις σιαγώνες είναι πιο αυξημένη. Αυτό είναι λογικό διότι οι σιαγώνες μεταφέρουν ομαλά τις τάσεις στο δοκίμιο.
- Από το σχήμα 5.66 παρατηρείται ότι η μέγιστη συγκέντρωση τάσεων q_{yy} , παρουσιάζεται πάλι στο κέντρο του δίσκου. Το μέγεθος των τάσεων αυτή τη φορά είναι θλιπτικό και παρουσιάζει κάποια σχετική διαφορά στη σύγκριση των καμπύλων με σιαγώνες και χωρίς σιαγώνες αντίστοιχα. Αυτό οφείλεται στην επίλυση με τις σιαγώνες.
- Από το σχήμα 5.67 παρατηρείται ότι η μέγιστη συγκέντρωση τάσεων q_{xy} , παρουσιάζεται πάλι στα άκρα του δίσκου όπου επιβάλλεται η φόρτιση με τις σιαγώνες. Η διαφορά που παρουσιάζεται από την σύγκριση των καμπύλων με σιαγώνες και χωρίς σιαγώνες αντίστοιχα είναι αισθητά μεγάλη. Αυτό οφείλεται στο ότι η επίλυση με τις σιαγώνες και τις συνθήκες επαφής που επιβλήθηκαν στο μοντέλο δημιουργούν διατμητικές τάσεις στα σύνορα του δοκιμίου.

Τα σχήματα 5.68 και 5.69 δείχνουν τις ισοτασικές καμπύλες που δημιουργούνται κατά την επίλυση με σιαγώνες.



Σχήμα 5.68: Οριζόντιες τάσεις (σ_{11})



Σχήμα 5.69: Κατακόρυφες τάσεις (σ_{22})

6 Αριθμητική Επίλυση του Ρηγματωμένου Βραζιλιανού Δίσκου

6.1 Εισαγωγή

Στο κεφάλαιο αυτό γίνεται η παρουσίαση των αποτελεσμάτων που προέκυψαν από την αριθμητική επίλυση του ρηγματωμένου Βραζιλιανού δίσκου με την μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων. Η προσομοίωση των δοκιμών πραγματοποιήθηκε όπως και η προηγούμενη (του κλασσικού Βραζιλιανού δίσκου) στις δυο διαστάσεις με το λογισμικό πεπερασμένων στοιχείων MSC. Marc-Mentat 2000. Η μοντελοποίηση γίνεται και σε αυτή την προσομοίωση με επιβολή συνοριακών συνθηκών απευθείας επάνω στον Βραζιλιανό δίσκο. Καθώς έχει ήδη ελεγχθεί η σύγκλιση της αριθμητικής με την αναλυτική λύση για την περίπτωση του άρρηκτου Βραζιλιανού δίσκου, το επόμενο βήμα της ανάλυσης είναι η κατασκευή των κατανομών των εφαπτομενικών και ακτινικών τάσεων για το πρόβλημα του ρηγματωμένου Βραζιλιανού δίσκου καθώς επίσης και η διερεύνηση εφαρμογής του κριτηρίου αστοχίας του Griffith.

6.2 Επίλυση του Προβλήματος της Αντιδιαμετρικής Θλίψης του Ρηγματωμένου Δίσκου

Για το πρόβλημα του ρηγματωμένου δίσκου, η ανάλυση ξεκινάει με τον προσδιορισμό της εντατικής κατάστασης που προκύπτει με την επιβολή ομοιόμορφα κατανεμημένου φορτίου στο πάνω και κάτω άκρο του δίσκου. Αφού πραγματοποιήθηκε παραμετρική διερεύνηση για γωνίες φόρτισης (2α) από 1° μέχρι 15° , στη συνέχεια η ανάλυση πραγματοποιείται για το μοντέλο που αντιστοιχεί σε γωνία φόρτισης 10° μόνο, καθώς επίσης για την περίπτωση επιβολής σημειακής φόρτισης.

6.2.1 Γεωμετρία και διακριτοποίηση

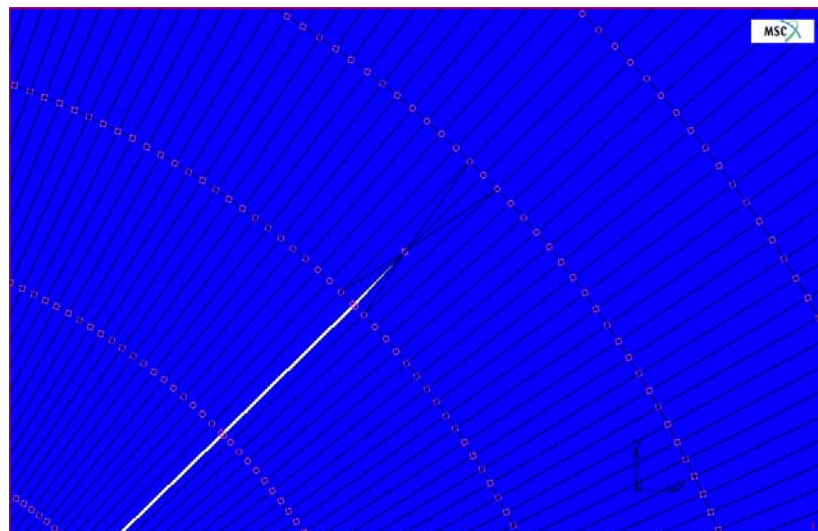
Η γεωμετρία των δοκιμίων είναι ίδια με αυτήν που αναπτύχθηκε στο πρόβλημα του κλασσικού Βραζιλιανού δίσκου που ήδη περιγράφηκε. Η διαφορά από την προηγούμενη επίλυση είναι η εισαγωγή μιας απειροστής ρωγμής, πάχους

0.01 mm και μήκους ίσο με το $\frac{1}{10}$ της διαμέτρου του δοκιμίου. Η ρωγμή αυτή εισάγεται στο κέντρο του δίσκου και επιλύεται το πρόβλημα με προσανατολισμούς της ρωγμής για 0^0 , 15^0 , 30^0 , 45^0 , 60^0 , 75^0 , 90^0 .

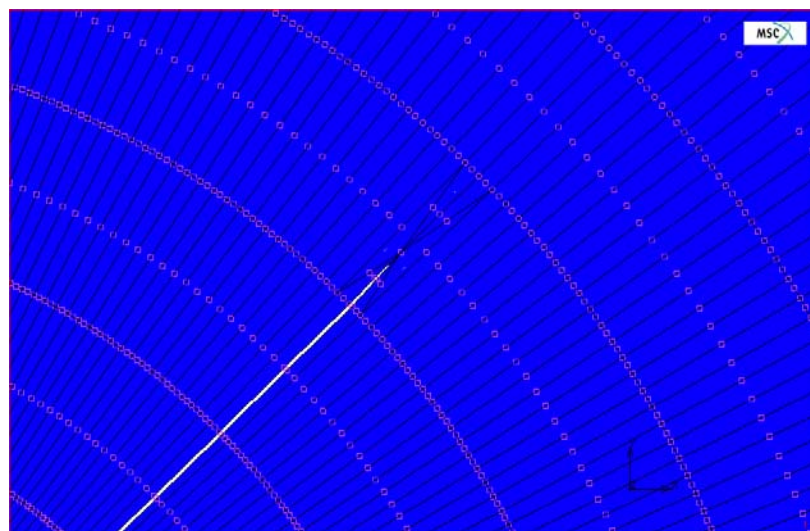
Όπως αναφέρθηκε και στην ενότητα 4.2.4, τέτοιου είδους ρωγμές καλούνται μαθηματικές ρωγμές. Στην ενότητα 4.7.4, αναφέρθηκε επίσης η σημαντικότητα μελέτης της ρωγμής χωρίς την επίδραση τριβής (ανοιχτή ρωγμή) και υπό την επίδραση τριβής (κλειστή ρωγμή).

Η διακριτοποίηση κατασκευάστηκε σε πολικό σύστημα συντεταγμένων αφού η ανάλυση των δίσκων είναι πιο εύκολη σε πολικές συντεταγμένες παρά σε καρτεσιανές. Τα στοιχεία που χρησιμοποιήθηκαν για το συγκεκριμένο πρόβλημα ήταν τετράπλευρα με 4 κόμβους (χαμηλής τάξης) καθώς επίσης και με τετράπλευρα 8 κόμβων (υψηλής τάξης). Η επίλυση με των δυο τύπων στοιχείων πραγματοποιήθηκε για την διερεύνηση της επίδρασης των στοιχείων υψηλής τάξης σε προβλήματα θραυστομηχανικής και συγκεκριμένα για καλύτερη διακριτοποίηση γύρω από την αιχμή της ρωγμής έτσι ώστε η μεταβολή στη κατανομή των μεγεθών γύρω από την αιχμή να φαίνεται καλύτερα.

Η διακριτοποίηση του δίσκου φτιάχτηκε με τέτοιο τρόπο ώστε να είναι δυνατή η επιβολή των επιθυμητών συνοριακών συνθηκών και να μπορεί να ληφθούν αποτελέσματα στους κόμβους ανά 1 mm και ανά 1^0 . Η γεωμετρία και διακριτοποίηση του ρηγματωμένου δίσκου είναι ίδια όπως και στο σχήμα 5.2. Στο σχήμα 6.1, φαίνεται η λεπτομέρεια στη διακριτοποίηση της αιχμής της ρωγμής με στοιχεία χαμηλής και υψηλής τάξης.



(A)



(B)

Σχήμα 6.2: Διακριτοποίηση της αιχμής της ρωγμής, (A) στοιχεία χαμηλής τάξης, (B) στοιχεία υψηλής τάξης

Ο αριθμός των στοιχείων και των κόμβων που χρησιμοποιήθηκαν για την επίλυση των μοντέλων δίδονται στον πίνακα 6.1.

Πίνακας 6.1: Αριθμός κόμβων και στοιχείων

Μοντέλο	Στοιχεία	Κόμβοι
Χαμηλής τάξης	11400	11406
Υψηλής τάξης	11400	34212

6.2.2 Ιδιότητες υλικού

Το υλικό μοντελοποιήθηκε ως γραμμικά ελαστικό και ισότροπο με ελαστικές σταθερές, $E = 80 \text{ GPa}$, και λόγο Poisson, $\nu = 0.25$.

6.2.3 Συνοριακές συνθήκες

Οι συνοριακές συνθήκες που επιβλήθηκαν στα μοντέλα ήταν ίδιες όπως και στην επίλυση του κλασσικού Βραζιλιανού δίσκου. Αυτές είναι:

- Κύλιση ($dy = 0$) κατά την οριζόντια διεύθυνση στον δεξιό και αριστερό συνοριακό κόμβο.
- Κύλιση ($dx = 0$) κατά την κατακόρυφη διεύθυνση στον πάνω και κάτω συνοριακό κόμβο.
- Μονοαξονική φόρτιση που αντιστοιχεί σε γωνία επιβολής φόρτισης, $2\alpha = 10^\circ$ και μεγέθους 90 MPa κατά τον κατακόρυφο άξονα του δοκιμίου καθώς επίσης και για σημειακή μεγέθους 11450 kN .

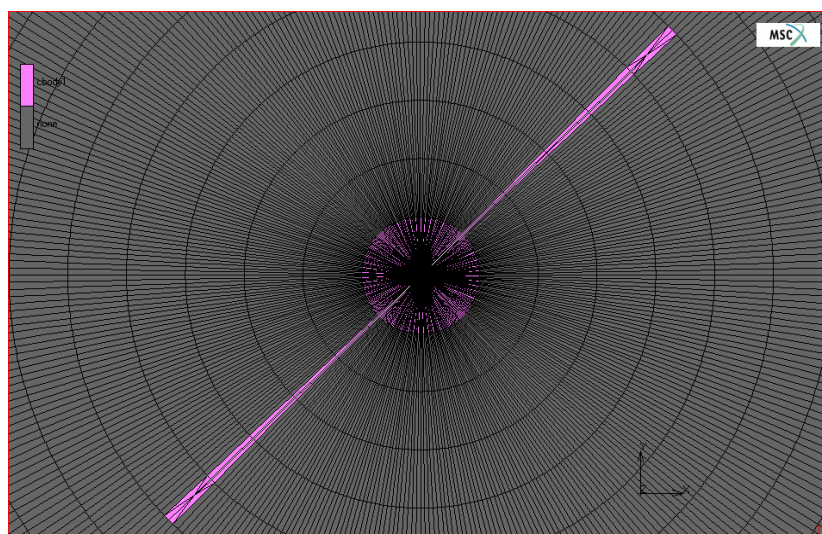
6.2.4 Γεωμετρικές ιδιότητες

Η επίλυση έγινε με θεώρηση επίπεδης τάσης. Το πάχος του δοκιμίου θεωρήθηκε 27 mm . Ο λόγος που χρησιμοποιήθηκε αυτή η θεώρηση αποδείχτηκε στην ενότητα 5.3.4.

6.2.5 Στοιχεία επαφής

Όπως αναφέρθηκε και προηγουμένως, οι ρωγμές με απειροστό πάχος καλούνται μαθηματικές ρωγμές. Η μελέτη όμως της κλειστής ρωγμής (χωρίς την επίδραση των στοιχείων επαφής) δεν δίνει λογικά αποτελέσματα, για αυτό το λόγο δεν θα γίνει αναφορά σε αυτά τα συμπεράσματα. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι τα στοιχεία επαφής μετά το κλείσιμο της ρωγμής μεταφέρουν τάσεις όπως θα γινόταν και στην πραγματικότητα. Αν δεν ληφθούν υπόψη τα στοιχεία επαφής γύρω από την ρωγμή τότε εμφανίζονται φαινόμενα αλληλοεπικάλυψης των χειλών της ρωγμής (διείσδυση), με αποτέλεσμα την αστάθεια της λύσης ή τον υπολογισμό εντελώς λανθασμένων αποτελεσμάτων. Για το λόγο αυτό κρίθηκε σκόπιμο να γίνει η ανάλυση μόνο για την περίπτωση της κλειστής ρωγμής. Για τα μοντέλα που επιλύθηκαν, χρησιμοποιήθηκαν στοιχεία επαφής γύρω από την ρωγμή. Ο συντελεστής τριβής μεταξύ των χειλών της ρωγμής λήφθηκε ίσος με 0.4 που αντιστοιχεί σε γωνία 22° . Ο

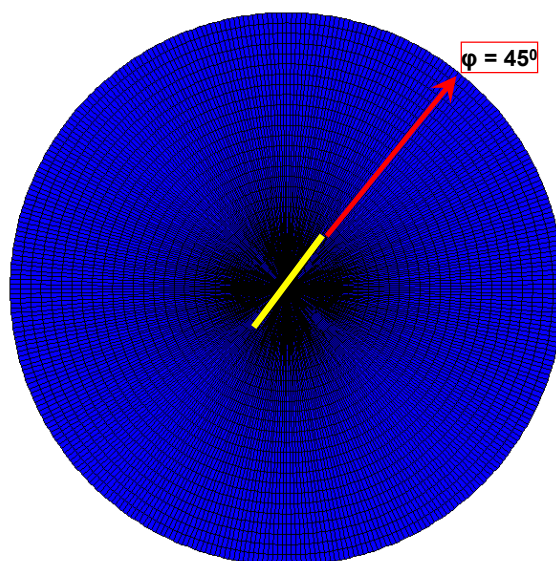
νόμος τριβής που επιβλήθηκε ήταν τριβή τύπου Coulomb. Ο αριθμός των στοιχείων επαφής που χρησιμοποιήθηκαν είναι 384 και φαίνονται στο σχήμα 6.3.



Σχήμα 6.3: Στοιχεία επαφής γύρω από την ρωγμή

6.2.6 Ανάλυση των τάσεων

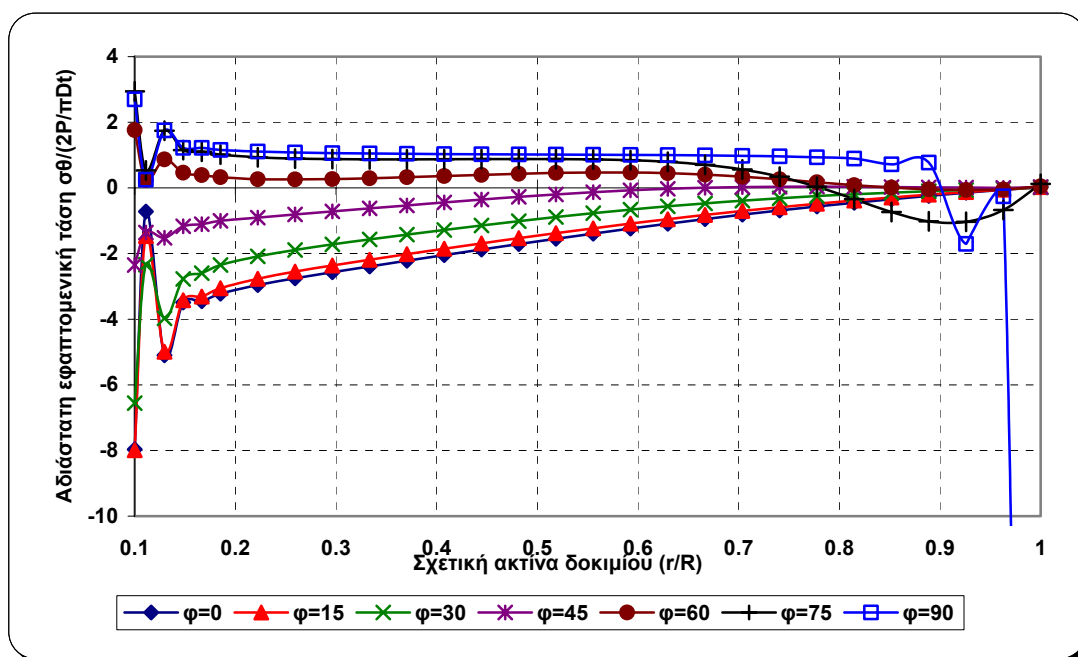
Η ανάλυση των τάσεων έγινε με την κατασκευή των κατανομών των αδιάστατων εφαπτομενικών και ακτινικών τάσεων στο επίπεδο της ρωγμής. Οι εφαπτομενικές και ακτινικές τάσεις παρουσιάζονται για τις δυο τάξεις στοιχείων (τετράπλευρα 4 κόμβων και τετράπλευρα 8 κόμβων), καθώς επίσης και για τους δυο τύπους φόρτισης (σημειακή και κατανεμημένη σε γωνία επιβολής $2\alpha = 10^\circ$). Τα δεδομένα που αναλύονται, λήφθηκαν στο επίπεδο της ρωγμής σε διάφορους προσανατολισμούς της, ξεκινώντας από την αιχμή της ρωγμής μέχρι το εξωτερικό σύνορο του δίσκου. Οι γωνίες προσανατολισμού της ρωγμής φ , ορίζονται δεξιόστροφα από τον οριζόντιο άξονα μέχρι το επίπεδο της ρωγμής. Οι γωνίες φ λαμβάνονται στις 0° , 15° , 30° , 45° , 60° , 75° και 90° . Στο σχήμα 6.4 φαίνεται ενδεικτικά το μοντέλο με ρωγμή με προσανατολισμό $\varphi = 45^\circ$.



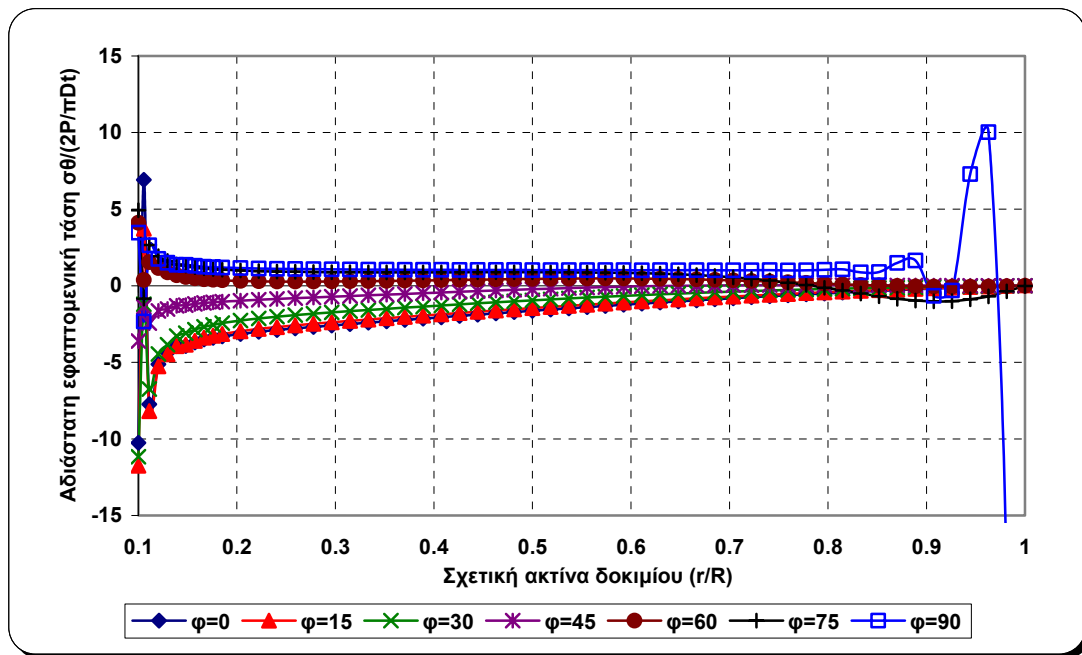
Σχήμα 6.4: Προσανατολισμός ρωγμής και λήψη δεδομένων στο επίπεδο της

Αρχικά στα σχήματα 6.5 έως και 6.8 παρουσιάζονται οι κατανομές των αδιάστατων εφαπτομενικών τάσεων για χαμηλής και υψηλής τάξης στοιχεία για τη σημειακή φόρτιση και την κατανεμημένη, ώστε να εξαχθούν συμπεράσματα ως προς την καταλληλότητα των στοιχείων. Στη συνέχεια στα σχήματα 6.9 έως και 6.12 παρουσιάζονται με την ίδια σειρά οι κατανομές των ακτινικών τάσεων.

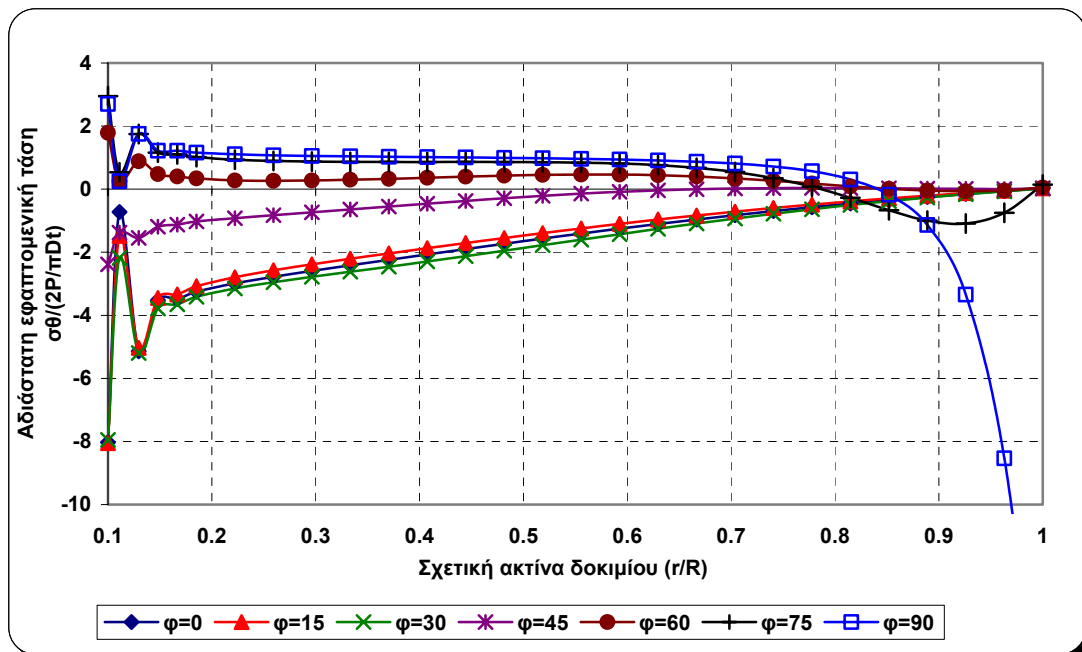
➤ Εφαπτομενικές Τάσεις



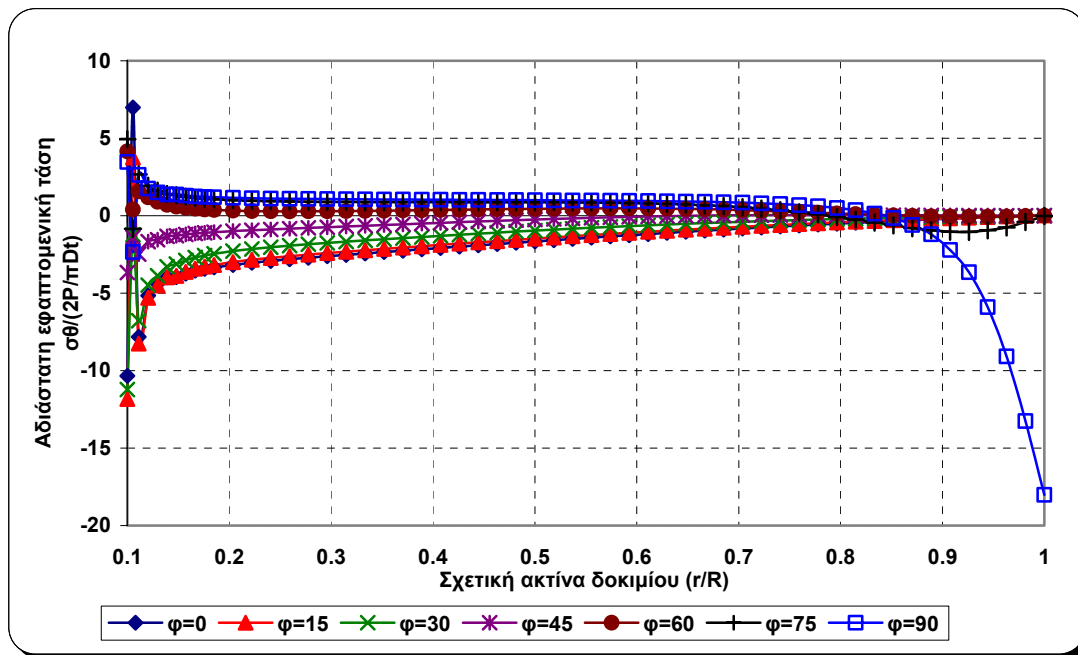
Σχήμα 6.5: Κατανομή εφαπτομενικών τάσεων για σημειακή φόρτιση και στοιχεία χαμηλής τάξης



Σχήμα 6.6: Κατανομή εφαπτομενικών τάσεων για σημειακή φόρτιση και στοιχεία υψηλής τάξης

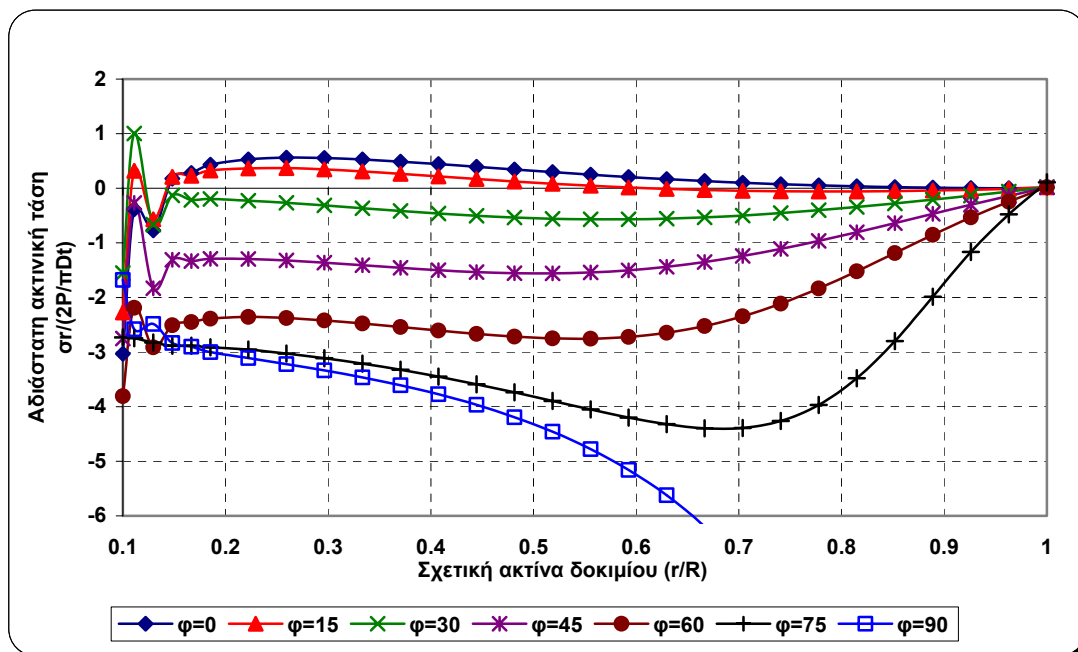


Σχήμα 6.7: Κατανομή εφαπτομενικών τάσεων για κατανεμημένη φόρτιση και στοιχεία χαμηλής τάξης

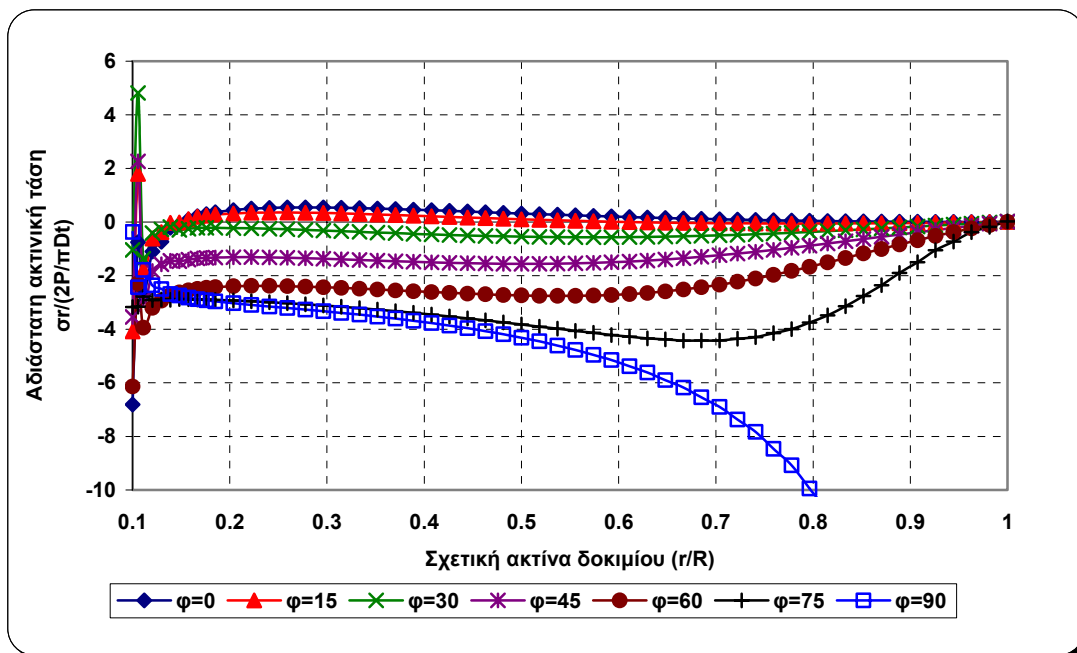


Σχήμα 6.8: Κατανομή εφαπτομενικών τάσεων για κατανεμημένη φόρτιση και στοιχεία υψηλής τάξης

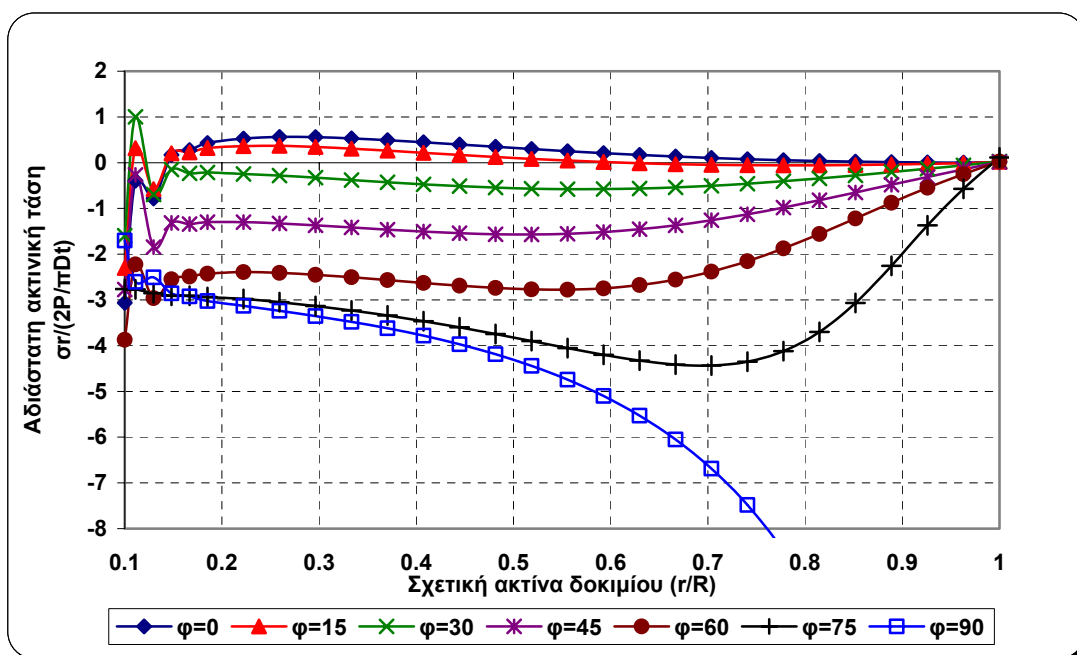
➤ Ακτινικές Τάσεις



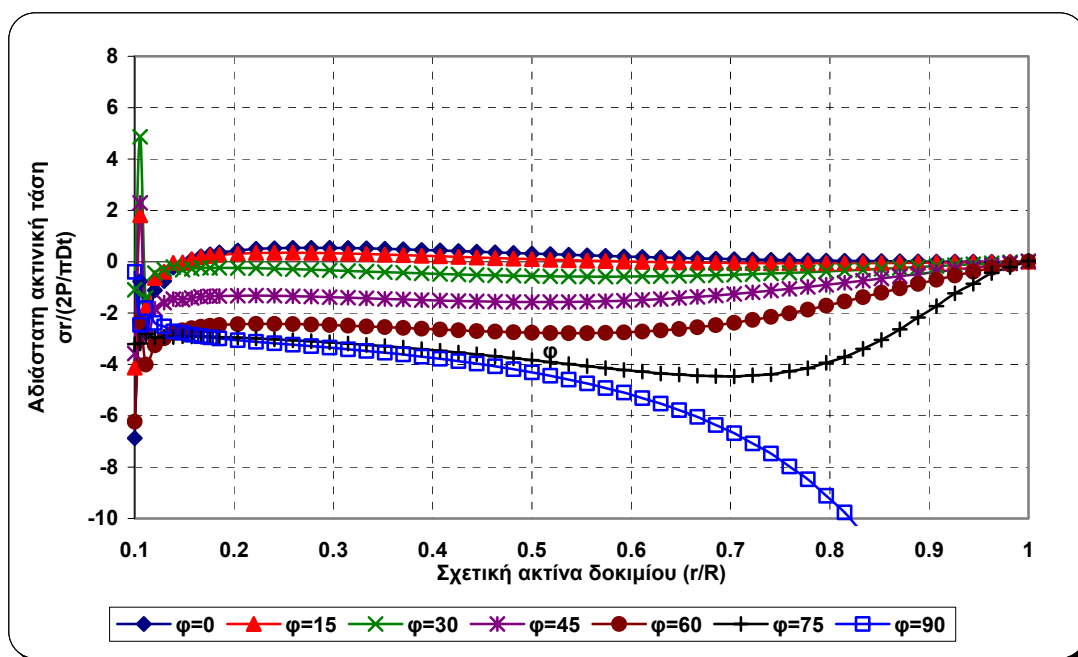
Σχήμα 6.9: Κατανομή ακτινικών τάσεων για σημειακή φόρτιση και στοιχεία χαμηλής τάξης



Σχήμα 6.10: Κατανομή ακτινικών τάσεων για σημειακή φόρτιση και στοιχεία υψηλής τάξης



Σχήμα 6.11: Κατανομή ακτινικών τάσεων για κατανομημένη φόρτιση και στοιχεία χαμηλής τάξης



Σχήμα 6.12: Κατανομή ακτινικών τάσεων για κατανεμημένη φόρτιση και στοιχεία υψηλής τάξης

Παρατηρήσεις:

- Από τις συγκρίσεις των εφαπτομενικών τάσεων με στοιχεία χαμηλής τάξης, παρατηρείται ότι το μέγεθος των τάσεων στην αιχμή της ρωγμής είναι από **-8** για ($\varphi = 0^\circ$) μέχρι **+3** για ($\varphi = 90^\circ$) και για τους δυο τύπους φόρτισης (κατανεμημένη και σημειακή). Μετά τείνουν να μηδενιστούν στο εξωτερικό σύνορο του δίσκου. Αυτή που δεν μηδενίζεται είναι η καμπύλη για $\varphi = 90^\circ$ διότι είναι ακριβώς κάτω από το σημείο επιβολής της φόρτισης με αποτέλεσμα την δημιουργία μιας ζώνης συγκέντρωσης τάσεων.
- Από τις συγκρίσεις των εφαπτομενικών τάσεων με στοιχεία υψηλής τάξης, παρατηρείται ότι το μέγεθος των τάσεων στην αιχμή της ρωγμής είναι από **+5** για ($\varphi = 90^\circ$) μέχρι **-12** για ($\varphi = 0^\circ$) και για τους δυο τύπους φόρτισης (κατανεμημένη και σημειακή). Μετά τείνουν να μηδενιστούν στο εξωτερικό σύνορο του δίσκου. Αυτή που δεν μηδενίζεται είναι η καμπύλη για $\varphi = 90^\circ$ διότι όπως αναφέρθηκε και προηγουμένως είναι ακριβώς κάτω από το σημείο επιβολής της φόρτισης με αποτέλεσμα την δημιουργία μιας ζώνης συγκέντρωσης τάσεων.
- Από τις συγκρίσεις των ακτινικών τάσεων με στοιχεία χαμηλής τάξης, παρατηρείται ότι το μέγεθος των τάσεων στην αιχμή της ρωγμής είναι από **-1.5** μέχρι **-4** και για τους δυο τύπους φόρτισης (κατανεμημένη και σημειακή). Μετά

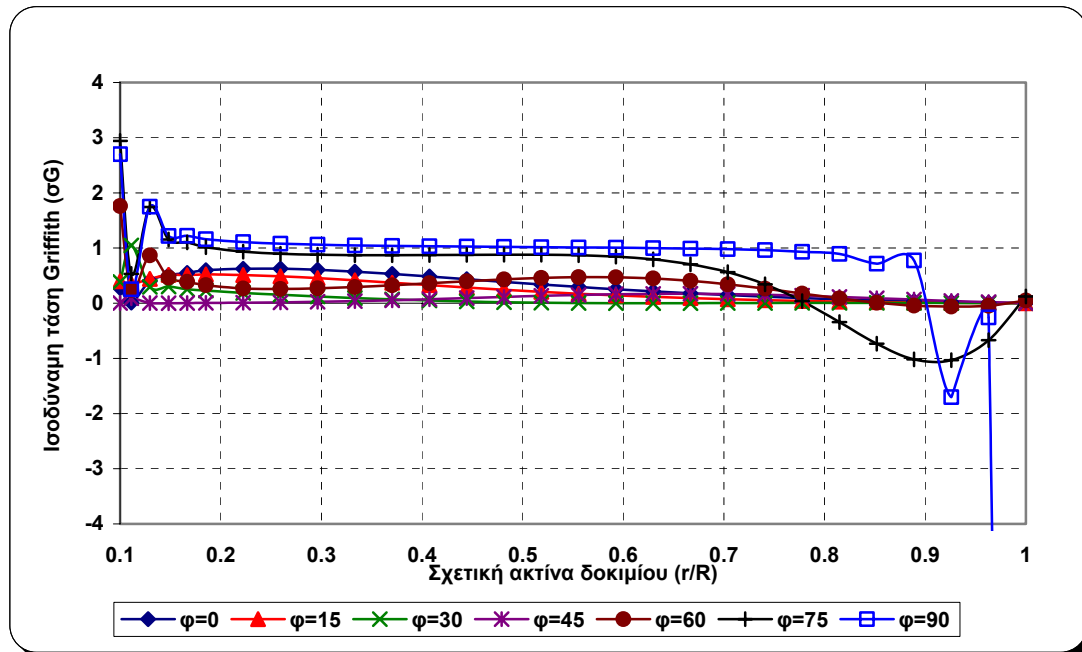
τείνουν να μηδενιστούν στο εξωτερικό σύνορο του δίσκου. Αυτή που δεν μηδενίζεται είναι η καμπύλη για $\varphi = 90^0$ διότι είναι ακριβώς κάτω από το σημείο επιβολής της φόρτισης με αποτέλεσμα την δημιουργία μιας ζώνης συγκέντρωσης τάσεων.

- Από τις συγκρίσεις των ακτινικών τάσεων με στοιχεία υψηλής τάξης, παρατηρείται ότι το μέγεθος των τάσεων στην αιχμή της ρωγμής είναι από **-2** μέχρι **-6.5** και για τους δυο τύπους φόρτισης (κατανεμημένη και σημειακή). Μετά τείνουν να μηδενιστούν στο εξωτερικό σύνορο του δίσκου. Αυτή που δεν μηδενίζεται είναι η καμπύλη για $\varphi = 90^0$ διότι όπως αναφέρθηκε και προηγουμένως είναι ακριβώς κάτω από το σημείο επιβολής της φόρτισης με αποτέλεσμα την δημιουργία μιας ζώνης συγκέντρωσης τάσεων.
- Η διαφορά στα μεγέθη των τάσεων από την επίλυση μεταξύ των δυο τύπων στοιχείων (υψηλής και χαμηλής τάξης), οφείλεται στην μεγαλύτερη ακρίβεια που προσφέρουν τα στοιχεία ανώτερης τάξης. Παρατίθενται τα αποτελέσματα από τις δυο επιλύσεις αλλά στο σημείο αυτό αξίζει να αναφερθεί ότι τα στοιχεία ανώτερης τάξης προσφέρουν μεγαλύτερη ακρίβεια, αλλά το υπολογιστικό κόστος τους είναι μεγάλο.
- Το **σημαντικότερο συμπέρασμα** που εξάγεται είναι ότι με την εφαρμογή της πίεσης στον δίσκο, η ρωγμή κλείνει όταν έχει προσανατολισμό $\varphi = 0^0, 15^0, 30^0$ και 45^0 με αποτέλεσμα να αναπτύσσονται θλιπτικές εφαστομενικές και ακτινικές τάσεις στην αιχμή της ρωγμής. Αυτό σημαίνει ότι το κριτήριο Griffith δεν μπορεί να εφαρμοστεί διότι προϋποθέτει εφελκυστικές τάσεις στην αιχμή της ρωγμής. Αντίθετα όταν ο προσανατολισμός της αιχμής της ρωγμής είναι μεγαλύτερος από 45^0 , τότε η ρωγμή δεν κλείνει με αποτέλεσμα εφελκυστικές εφαστομενικές τάσεις επί της αιχμής της ρωγμής και άρα το κριτήριο Griffith μπορεί να εφαρμοστεί. Αυτό ισχύει και για τις δυο τάξεις στοιχείων και για τους δυο τύπους φόρτισης.

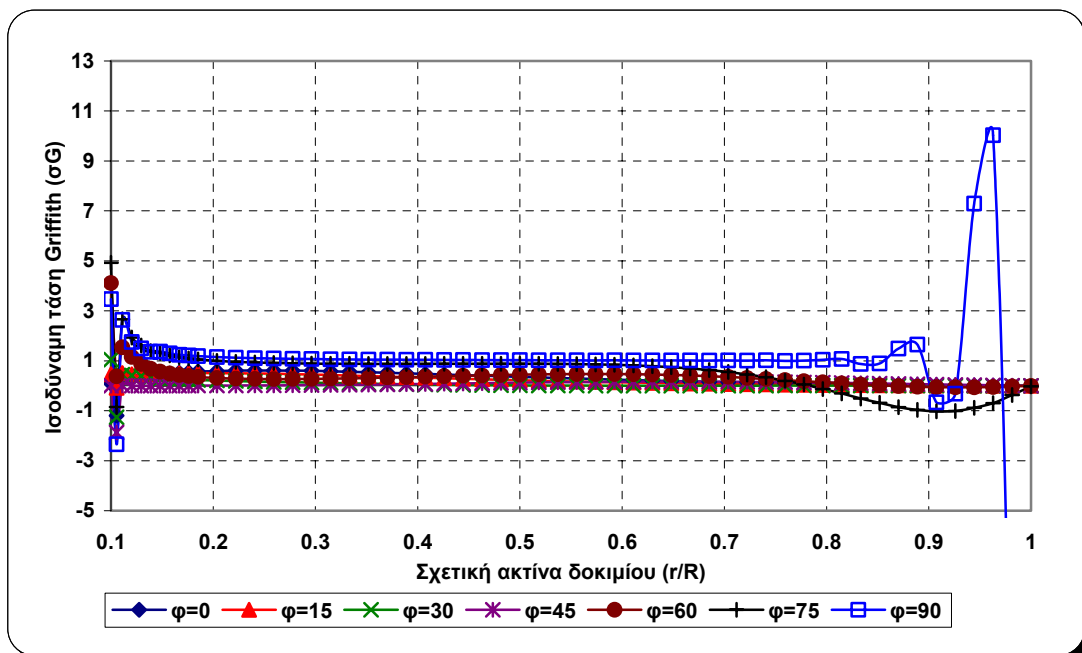
6.2.7 Εφαρμογή του κριτηρίου Griffith

Εφαρμόζοντας το κριτήριο αστοχίας του Griffith όπως περιγράφηκε στο κεφάλαιο 4 και όμοια με την ενότητα 5.3.8, το κριτήριο μπορεί να μετασχηματιστεί σε πολικές συντεταγμένες. Τα σχήματα 6.13 και 6.14 δείχνουν την ισοδύναμη τάση Griffith για σημειακή φόρτιση για τα στοιχεία χαμηλής και υψηλής τάξης αντίστοιχα,

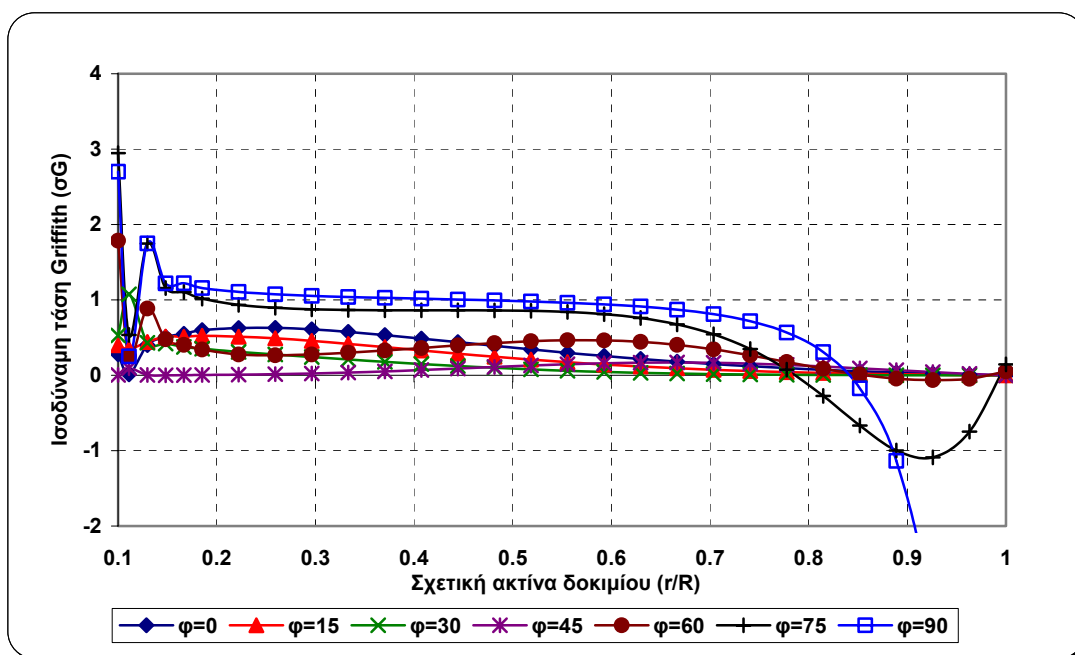
ενώ τα σχήματα 6.15 και 6.16 δείχνουν επίσης την ισοδύναμη τάση Griffith για κατανομημένη φόρτιση αυτή την φορά για τα στοιχεία χαμηλής και υψηλής τάξης.



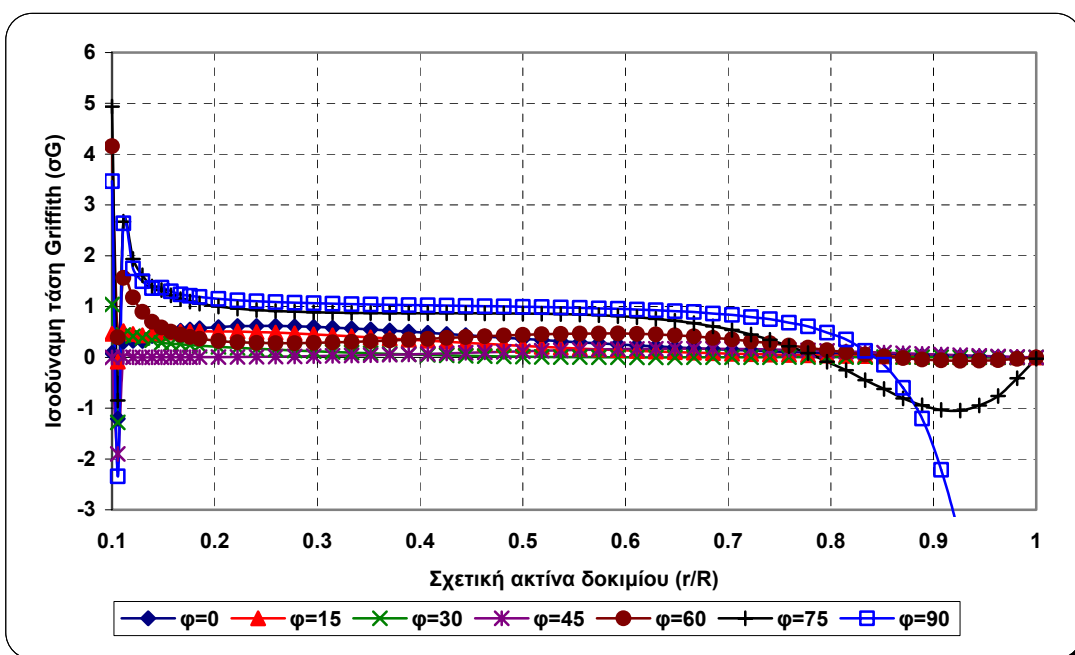
Σχήμα 6.13: Ισοδύναμη τάση Griffith για σημειακή φόρτιση και στοιχεία χαμηλής τάξης



Σχήμα 6.14: Ισοδύναμη τάση Griffith για σημειακή φόρτιση και στοιχεία υψηλής τάξης



Σχήμα 6.15: Ισοδύναμη τάση Griffith για κατανεμημένη φόρτιση και στοιχεία χαμηλής τάξης



Σχήμα 6.16: Ισοδύναμη τάση Griffith για κατανεμημένη φόρτιση και στοιχεία υψηλής τάξης

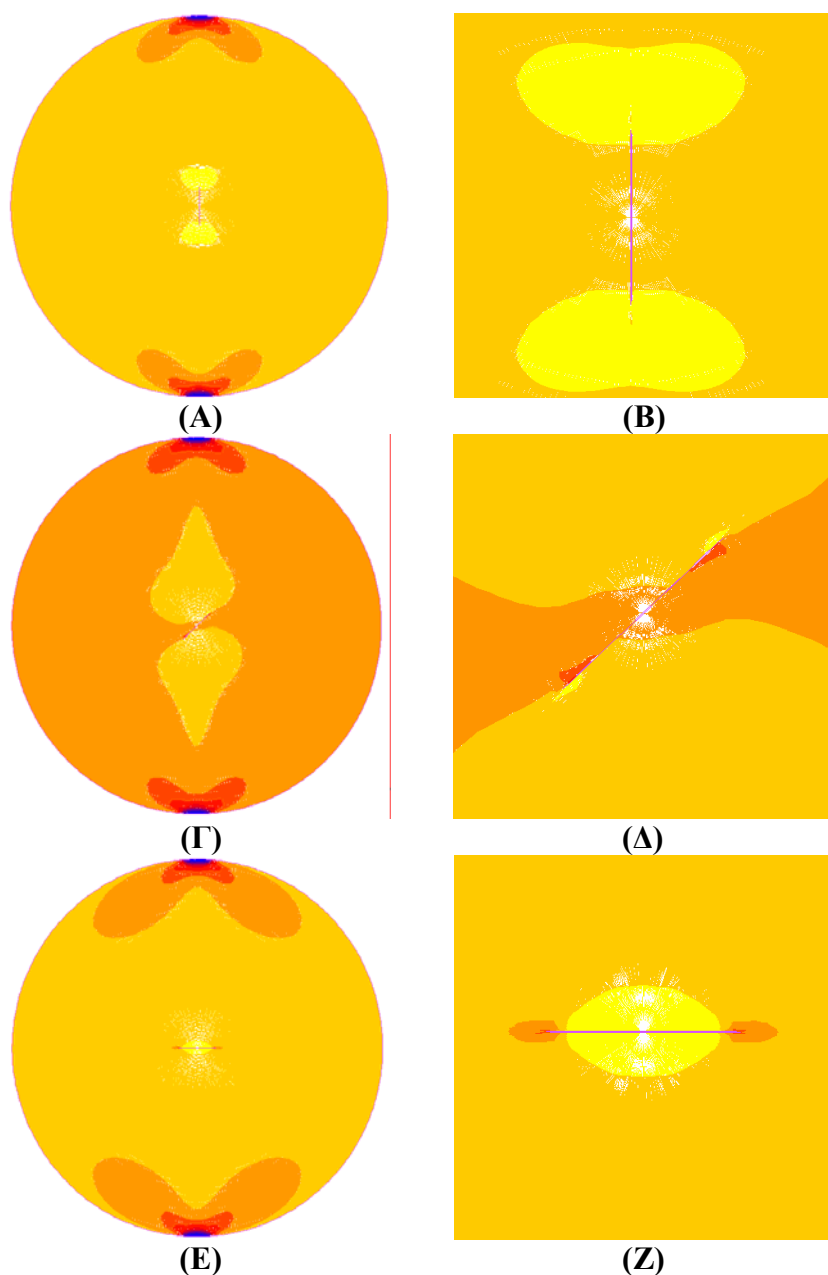
Παρατηρήσεις:

Τα γραφήματα των ισοδύναμων τάσεων Griffith που προκύπτουν από την εφαρμογή του κριτηρίου αστοχίας ενισχύουν το συμπέρασμα ότι η ρωγμή κλείνει όταν έχει προσανατολισμό $\varphi = 0^\circ, 15^\circ, 30^\circ$ και 45° . Αυτό φαίνεται από τα γραφήματα όπου φαίνονται οι θλιπτικές τάσεις Griffith. Αντίθετα όταν ο προσανατολισμός της

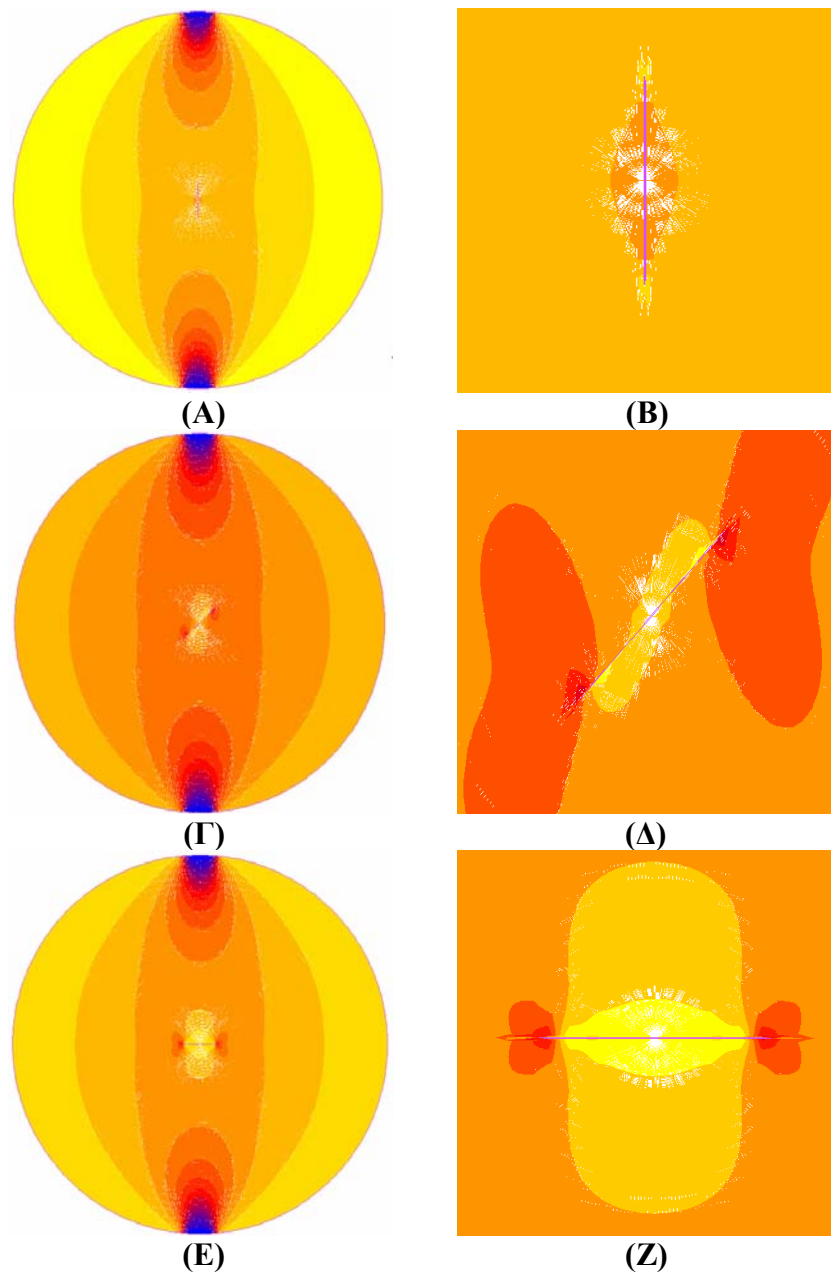
αιχμής της ρωγμής είναι μεγαλύτερος από 45° , τότε η ρωγμή δεν κλείνει. Αυτό φαίνεται από τις εφελκυστικές τάσεις Griffith στα γραφήματα και είναι μέγιστες στην αιχμή της ρωγμής. Αυτό σημαίνει ότι εάν ήταν να ξεκινήσει θραύση του δίσκου, θα ξεκινούσε στην αιχμή της ρωγμής. Αυτό ισχύει και για τις δυο τάξεις στοιχείων και για τους δυο τύπους φόρτισης.

6.2.8 Ισοτασικές καμπύλες

Στα σχήματα 6.17 και 6.18 φαίνονται οι ισοτασικές καμπύλες των οριζόντιων και κατακόρυφων τάσεων όταν η ρωγμή έχει προσανατολισμό $\varphi = 0^\circ, 45^\circ$ και 90° .



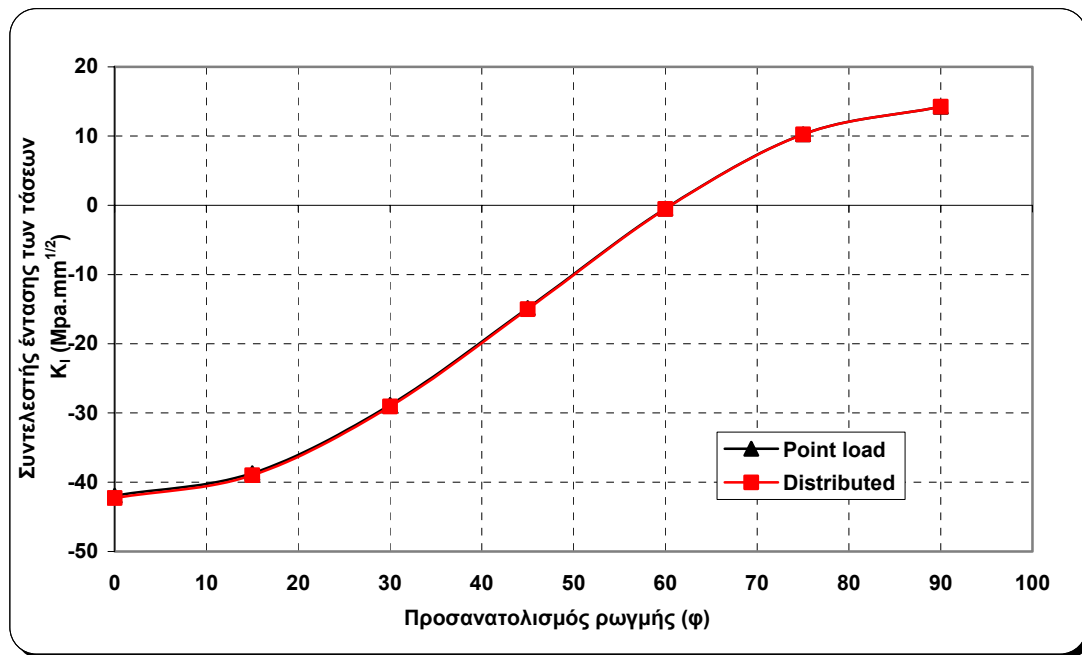
Σχήμα 6.17: Κατανομές οριζόντιων τάσεων σ_{xx} στον δίσκο και στην αιχμή της ρωγμής



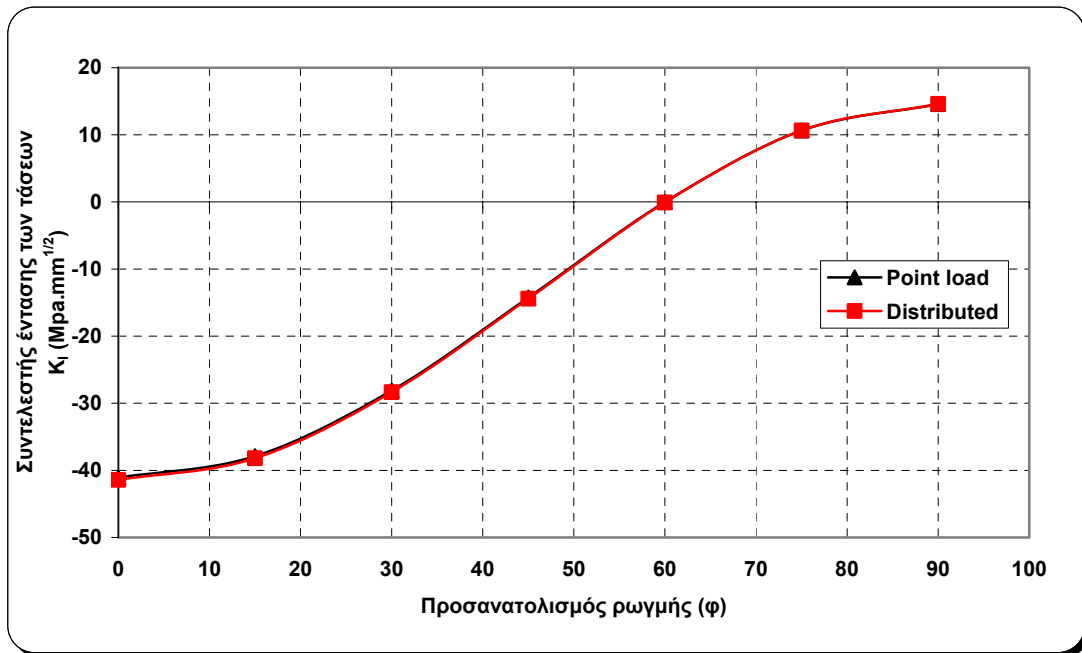
Σχήμα 6.18: Κατανομές κατακόρυφων τάσεων σ_{yy} στον δίσκο και στην αιχμή της ρωγμής

6.2.9 Υπολογισμός συντελεστών έντασης των τάσεων

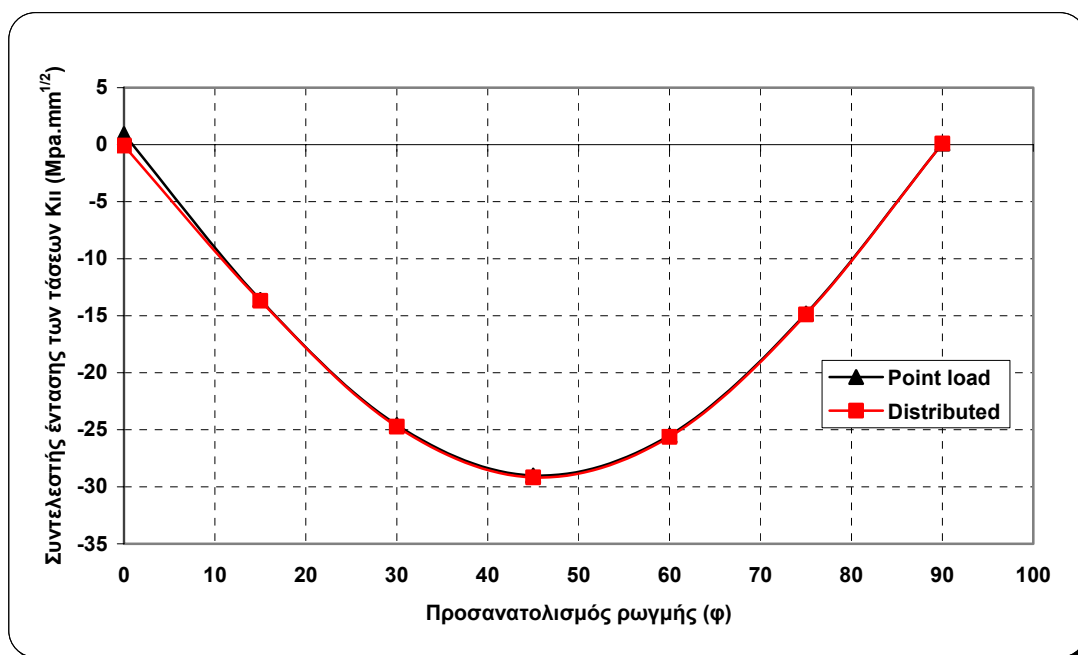
Οι συντελεστές έντασης των τάσεων υπολογίστηκαν για όλες τις περιπτώσεις προσανατολισμού της ρωγμής, ϕ . Οι σχέσεις υπολογισμού αναλύθηκαν στο κεφάλαιο 4. Τα σχήματα 6.19 και 6.20 παρουσιάζουν τον συντελεστή έντασης των τάσεων K_I για σημειακή φόρτιση και κατανεμημένη αντίστοιχα καθώς επίσης και για χαμηλής και υψηλής τάξης στοιχεία, ενώ τα σχήματα 6.21 και 6.22 παρουσιάζουν τον συντελεστή έντασης των τάσεων K_{II} για τις ίδιες περιπτώσεις.



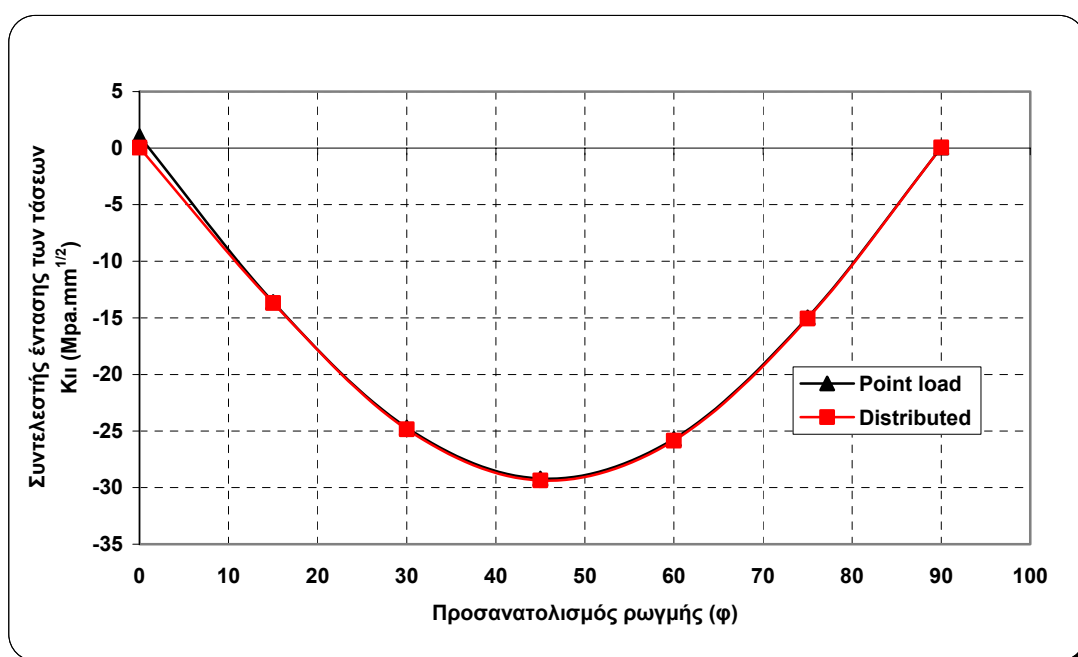
Σχήμα 6.19: Συντελεστής έντασης των τάσεων για τύπου I ρωγή και στοιχεία χαμηλής τάξης



Σχήμα 6.20: Συντελεστής έντασης των τάσεων για τύπου I ρωγή και στοιχεία υψηλής τάξης



Σχήμα 6.21: Συντελεστής έντασης των τάσεων για τύπου II ρωγμή και στοιχεία χαμηλής τάξης



Σχήμα 6.22: Συντελεστής έντασης των τάσεων για τύπου II ρωγμή και στοιχεία υψηλής τάξης

Παρατηρήσεις:

- Από το σχήμα 6.19 και 6.20, φαίνεται ότι ο συντελεστής έντασης των τάσεων K_I είναι αρνητικός για προσανατολισμούς της ρωγμής από 0° μέχρι 60° . Για προσανατολισμούς ρωγμής μεγαλύτερους από 60° , ο συντελεστής έντασης των τάσεων K_I , είναι θετικός. Αυτό γίνεται για τους δυο τύπους φόρτισης και για τα

δυο είδη στοιχείων. Αυτό οδηγεί στο συμπέρασμα ότι για γωνίες μικρότερες των 60° , η ρωγμή κλείνει και άρα εισάγεται η έννοια της αδυναμίας διάδοσης της (crack arrest). Στο σημείο αυτό αξίζει να αναφερθεί ότι αυτό είναι σε αντίθεση με τα αποτελέσματα των τάσεων. Στα αποτελέσματα από τα σχήματα των κατανομών των τάσεων φαίνεται ότι η ρωγμή κλείνει σε προσανατολισμό 45° , ενώ τα αποτελέσματα από τους συντελεστές έντασης των τάσεων φαίνεται ότι η ρωγμή παραμένει κλειστή μέχρι τις 60° .

- Από το σχήμα 6.21 και 6.22, φαίνεται ότι ο συντελεστής έντασης των τάσεων K_{II} είναι μηδενικός για τους προσανατολισμούς της ρωγμής 0° και 90° . Για προσανατολισμούς ρωγμής ενδιάμεσα από τις δυο γωνίες προσανατολισμού, είναι αρνητικός. Αυτό γίνεται για τους δυο τύπους φόρτισης και για τα δυο είδη στοιχείων. Αυτό οδηγεί στο συμπέρασμα ότι για προσανατολισμούς της ρωγμής 0° και 90° η δοκιμή παρουσιάζει τύπου I ρωγμή μόνο, ενώ για οποιαδήποτε γωνία μεταξύ των 0° και 90° , η δοκιμή παρουσιάζει ρωγμές μεικτού τύπου, I και II (mixed mode loading).

6.3 Επίλυση του Προβλήματος της Αντιδιαμετρικής Θλίψης Ρηγματωμένου Δίσκου με τις Χαλύβδινες Σιαγώνες

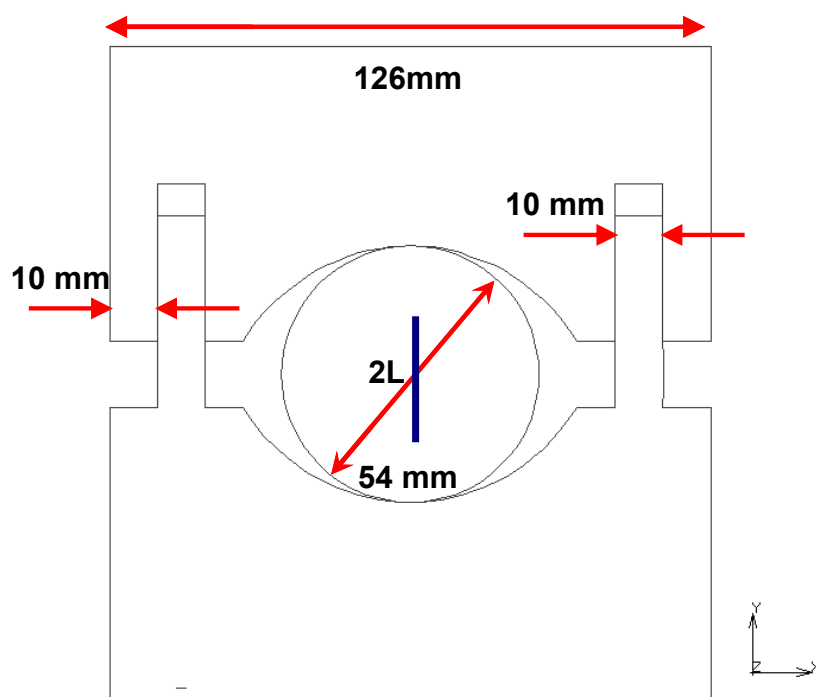
Από την πιο πάνω ανάλυση που έγινε, κρίθηκε σκόπιμο να διερευνηθεί παραμετρικά το πόσο επηρεάζει το μήκος της ρωγμής $2L$ συναρτήσει του προσανατολισμού της, τις κατανομές των εφαπτομενικών και ακτινικών τάσεων όταν η φόρτιση γίνεται με τις σιαγώνες (Sarris et al., 2005).

6.3.1 Υπολογισμός επιφάνειας επαφής σιαγώνας με τον δίσκο

Ο υπολογισμός της επιφάνειας επαφής της σιαγώνας με τον δίσκο είναι ακριβώς ο ίδιος όπως περιγράφηκε αναλυτικά στην ενότητα 5.4.1.

6.3.2 Γεωμετρία

Η γεωμετρία του δοκιμίου και των σιαγώνων φόρτισης παραμένει η ίδια όπως περιγράφηκε στην ενότητα 5.4.2. Οι ιδιότητες της ρωγμής παραμένουν ίδιες όπως αναλύθηκαν και στην ενότητα 6.2. Το μήκος της ρωγμής $2L$ που φτιάχτηκε παραμετρικά ήταν 10 mm, 20 mm, 30 mm και 40 mm. Η γεωμετρία των χαλύβδινων σιαγώνων μαζί με το δοκίμιο φαίνεται στο σχήμα 6.23.



Σχήμα 6.23: Γεωμετρία διάταξης με τις σιαγώνες και η θέση της ρωγμής

6.3.3 Γεωμετρικές ιδιότητες

Οι γεωμετρικές συνθήκες (επίπεδη τάση και επίπεδη παραμόρφωση), όπως αποδείχτηκε και στην ενότητα 5.3.4, δεν επηρεάζουν την αριθμητική επίλυση. Το μοντέλο αυτό επιλύθηκε με θεώρηση επίπεδης τάσης για συμβατότητα με την θεωρία της ελαστικότητας.

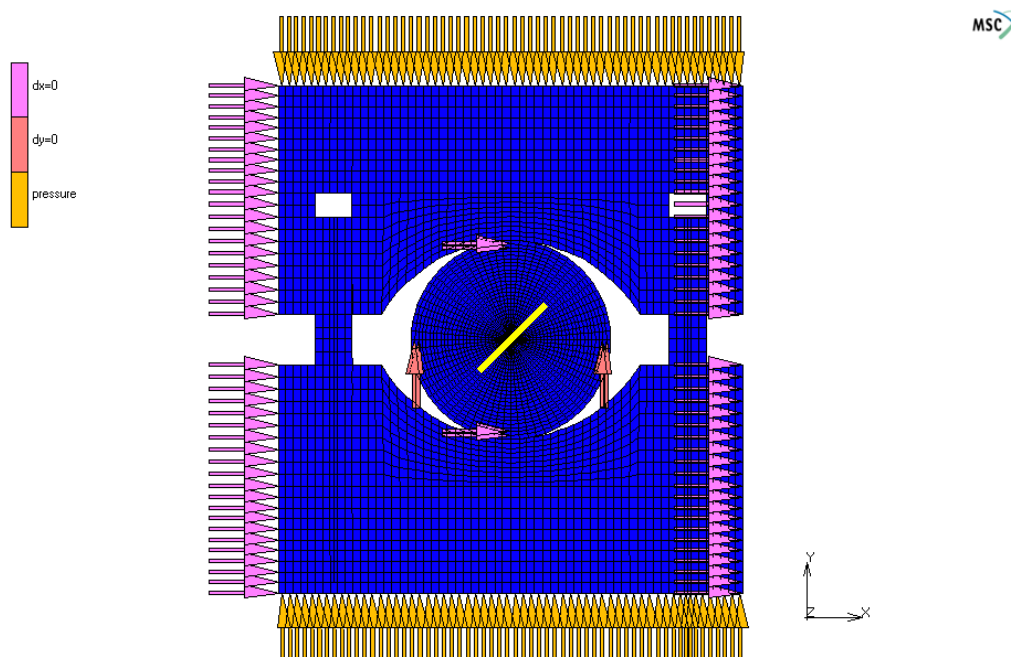
6.3.4 Συνοριακές συνθήκες και διακριτοποίηση

Οι συνοριακές συνθήκες που επιβλήθηκαν στο μοντέλο είναι:

- Κύλιση ($dy = 0$) κατά την οριζόντια διεύθυνση σε δυο συνοριακούς κόμβους στο δοκίμιο.
- Κύλιση ($dx = 0$) κατά την κατακόρυφη διεύθυνση στον δεξιό και αριστερό άκρο των σιαγώνων και σε δυο συνοριακούς κόμβους στο δοκίμιο.
- Πίεση μεγέθους 4.5 MPa των στοιχείων της χαλύβδινης σιαγώνας στο πάνω και κάτω άκρο τους.

Η επιβολή των συνοριακών συνθηκών έγινε με αυτό το τρόπο για την αποφυγή περιστροφής του δοκιμίου κατά την επίλυση καθώς επίσης και για την εξασφάλιση της τέλει σχετικής ολίσθησης μεταξύ των δυο μελών της χαλύβδινης

σιαγώνας. Στο σχήμα 6.24 φαίνεται η επιβολή των συνοριακών συνθηκών καθώς επίσης και η διακριτοποίησή τους:



Σχήμα 6.24: Συνοριακές συνθήκες στο μοντέλο με ρωγμή στις 45°

6.3.5 Ιδιότητες υλικών

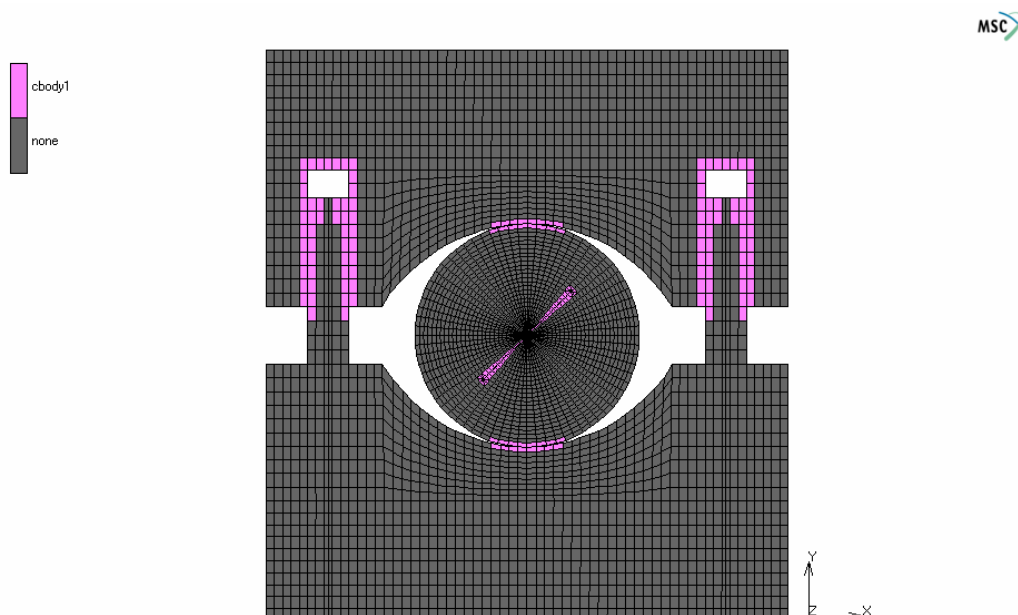
Τα υλικά που χρησιμοποιήθηκαν για την προσομοίωση της δοκιμής ήταν χάλυβας για τις χαλύβδινες σιαγώνες με μέτρο ελαστικότητας, $E = 210 \text{ GPa}$ και λόγο Poisson, $\nu = 0.3$. Το δοκίμιο ήταν ένα υλικό που ανταποκρίνεται σε μέτρο ελαστικότητας, $E = 80 \text{ GPa}$ και λόγο Poisson, $\nu = 0.25$. Ο αριθμός των στοιχείων και κόμβων που χρησιμοποιήθηκαν φαίνεται στο πίνακα 5.2.

Πίνακας 5.2: Αριθμός κόμβων και στοιχείων

Μοντέλο με μήκος ρωγμής 2L (mm)	Στοιχεία	Κόμβοι
10	4436	4648
20	4436	4658
30	4436	4668
40	4436	4678

6.3.6 Στοιχεία επαφής

Τα στοιχεία επαφής είναι στοιχεία όπως έχει ήδη αναφερθεί, τα οποία χρησιμοποιούνται για την μοντελοποίηση τέτοιων φαινομένων (τριβής και αποφυγής διείσδυσης). Τα στοιχεία αυτά τοποθετήθηκαν μεταξύ των οδηγών ευθυγράμμισης και της πλάκας φόρτισης, στο μήκος τόξου του δοκιμίου που έρχεται σε επαφή με το κοίλο μέρος της χαλύβδινής πλάκας καθώς επίσης και μεταξύ των χειλών της ρωγμής. Ο συντελεστής τριβής μεταξύ των επιφανειών που χρησιμοποιήθηκε ήταν 0.4 που ανταποκρίνεται σε γωνία 22^0 . Ο νόμος τριβής που υπακούει η τριβή που επιβλήθηκε θεωρήθηκε να είναι τριβή Coulomb. Τα στοιχεία επαφής φαίνονται στο σχήμα 6.25.

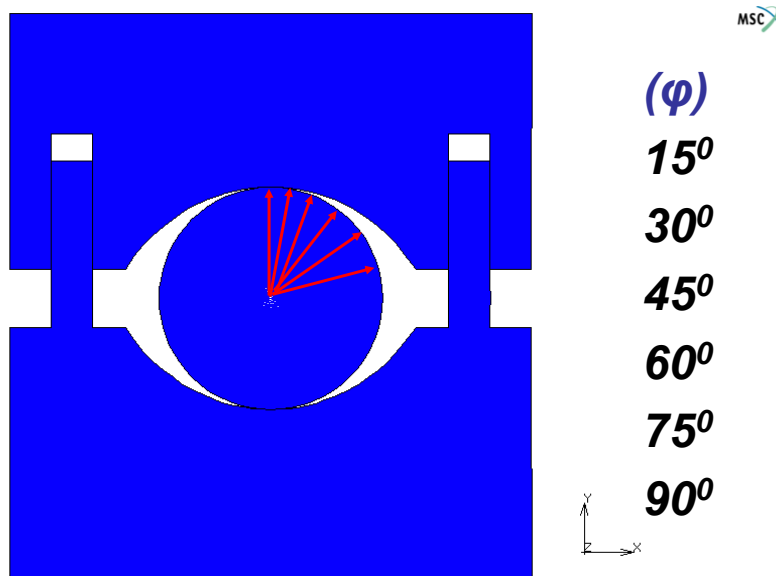


Σχήμα 6.25: Στοιχεία επαφής

6.3.7 Αποτελέσματα επίλυσης με τις χαλύβδινες σιαγώνες

Τα αποτελέσματα που θα παρουσιαστούν χωρίζονται πάλι για την καλύτερη ανάλυση των κατανομών των επαπτομενικών και ακτινικών τάσεων σε δύο ομάδες γραφημάτων. Τα δεδομένα που αναλύονται λήφθηκαν σε διάφορους προσανατολισμούς των ρωγμών ξεκινώντας από το κέντρο του δίσκου σε αντίθεση με τα σχήματα των αδιάστατων τάσεων της ενότητας 6.2.6 που ξεκινούσαν από την αιχμή της ρωγμής μέχρι το εξωτερικό σύνορο του δίσκου. Οι γωνίες αυτές ορίζονται

δεξιόστροφα από τον οριζόντιο άξονα μέχρι την γραμμή μελέτης και είναι στις 15° , 30° , 45° , 60° , 75° και 90° . Στο σχήμα 6.26 φαίνονται οι προσανατολισμοί των γραμμών μελέτης εντός του δίσκου.

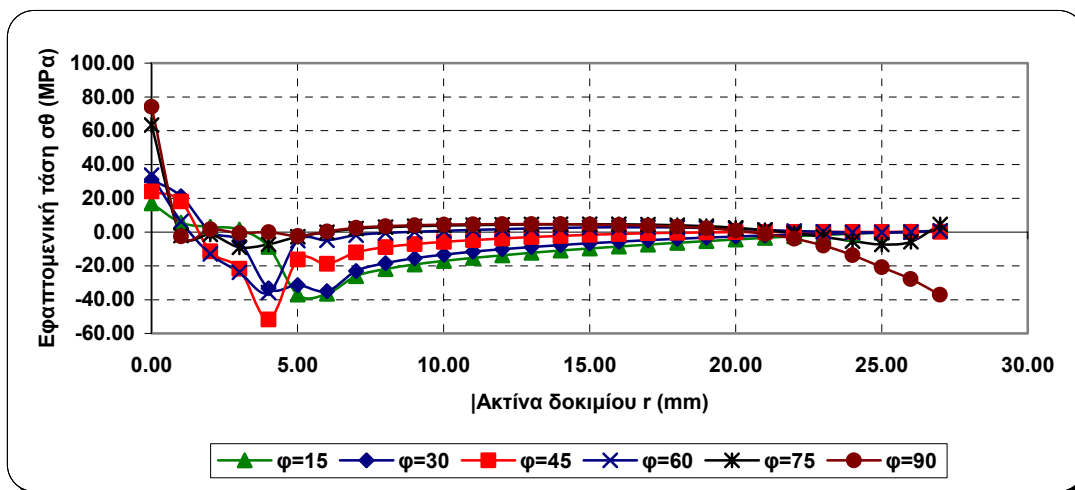


Σχήμα 6.26: Λήψη δεδομένων σε διάφορες γωνίες

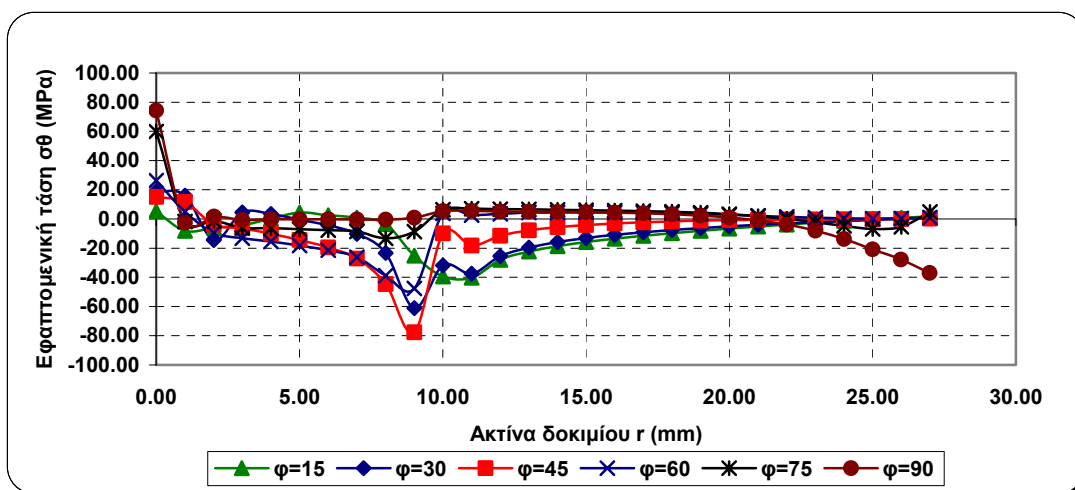
Στην πρώτη ομάδα γραφημάτων παρουσιάζονται οι κατανομές των εφαπτομενικών και ακτινικών τάσεων μεταβάλλοντας τον προσανατολισμό της ρωγμής (φ) και κρατώντας σταθερό το μήκος της ρωγμής ($2L$). Στη δεύτερη ομάδα γραφημάτων παρουσιάζονται οι κατανομές των εφαπτομενικών και ακτινικών τάσεων κρατώντας το μήκος της ρωγμής ($2L$) σταθερό και μεταβάλλοντας τον προσανατολισμό της ρωγμής (φ).

6.3.7.1 Σταθερό το μήκος της ρωγμής ($2L$) και μεταβαλλόμενος ο προσανατολισμός της ρωγμής (φ)

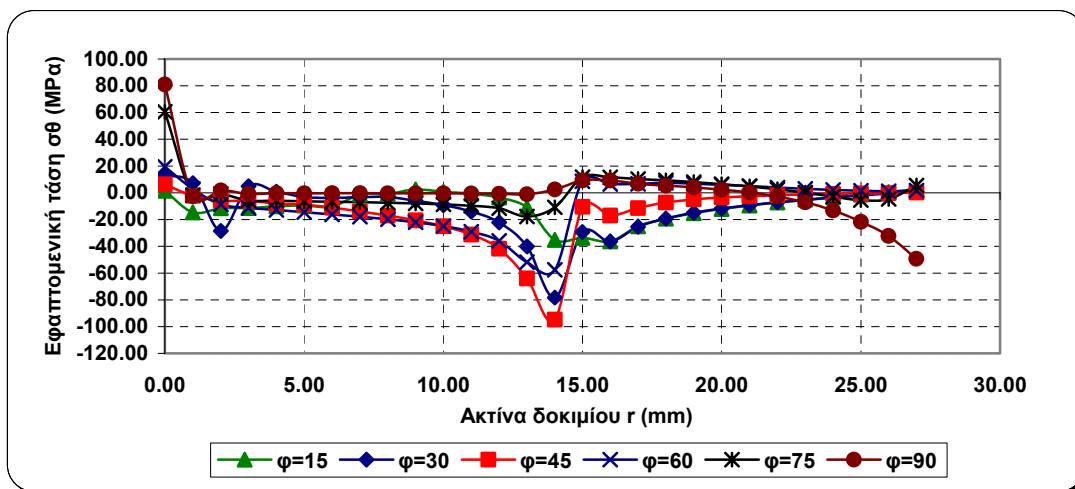
Στα σχήματα 6.27 μέχρι και 6.30 συγκρίνονται οι κατανομές των εφαπτομενικών τάσεων συναρτήσει του μήκους του δοκιμίου για όλα τα μήκη ρωγμών, ενώ στα σχήματα 6.31 μέχρι και 6.34 συγκρίνονται οι κατανομές των ακτινικών τάσεων συναρτήσει του μήκους του δοκιμίου για όλα τα μήκη ρωγμών.



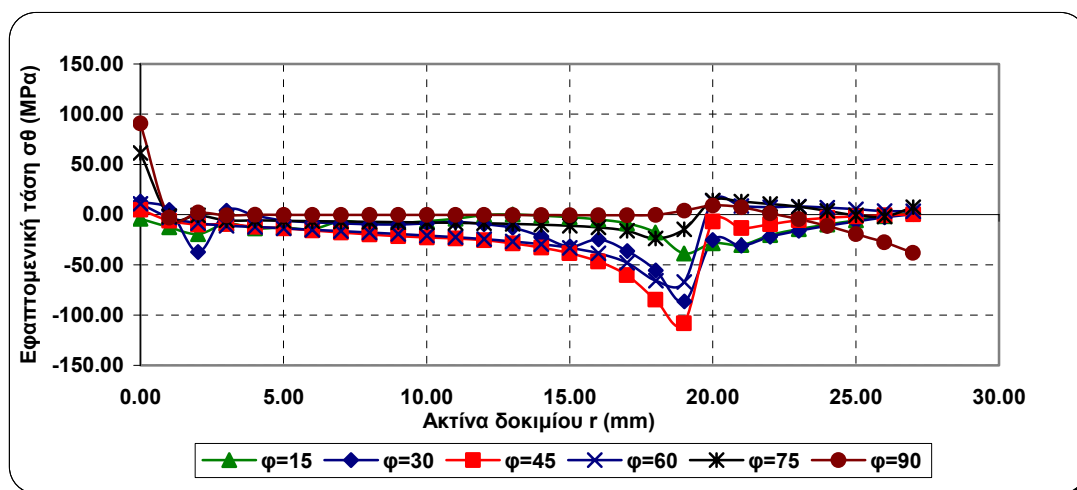
Σχήμα 6.27: Κατανομές εφαπτομενικών τάσεων συναρτήσει του μήκους του δοκιμίου για μήκος ρωγμής 10 mm



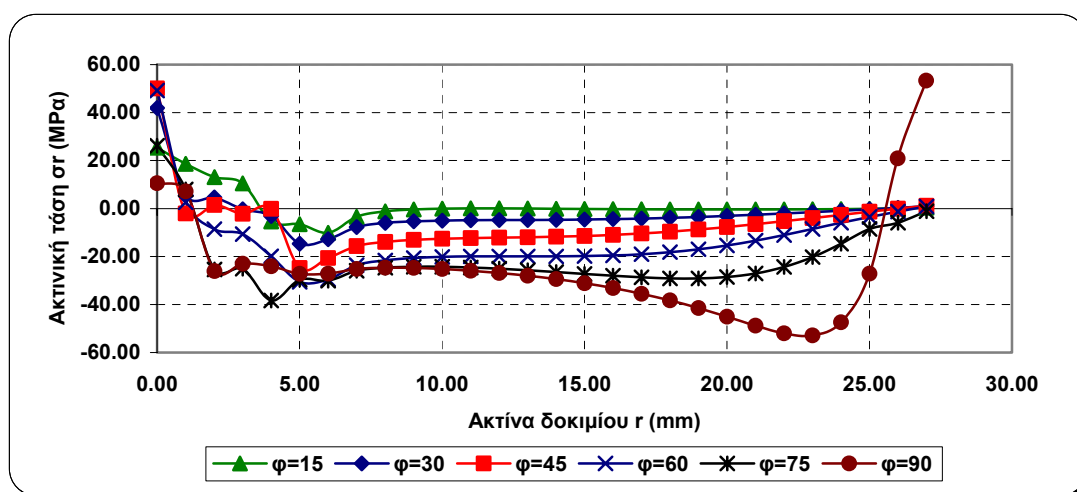
Σχήμα 6.28: Κατανομές εφαπτομενικών τάσεων συναρτήσει του μήκους του δοκιμίου για μήκος ρωγμής 20 mm



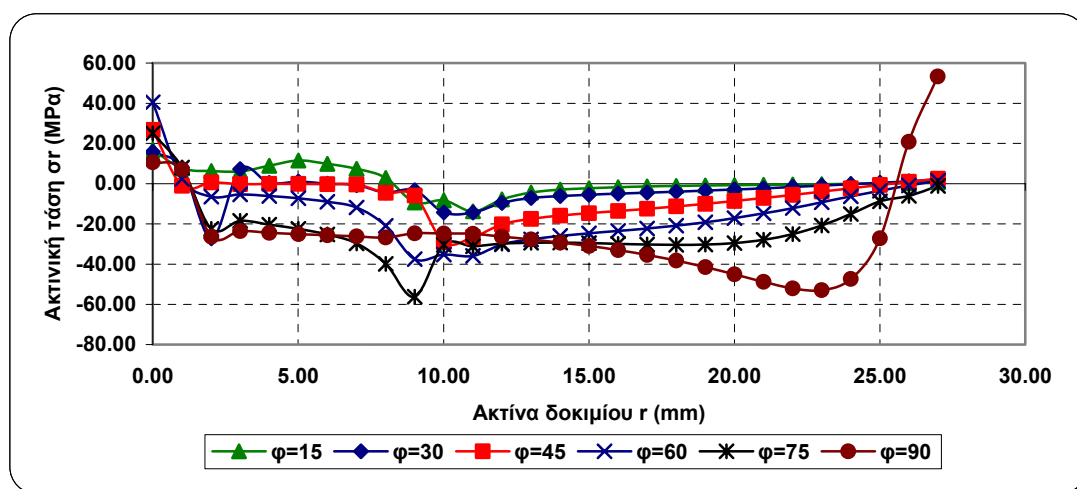
Σχήμα 6.29: Κατανομές εφαπτομενικών τάσεων συναρτήσει του μήκους του δοκιμίου για μήκος ρωγμής 30 mm



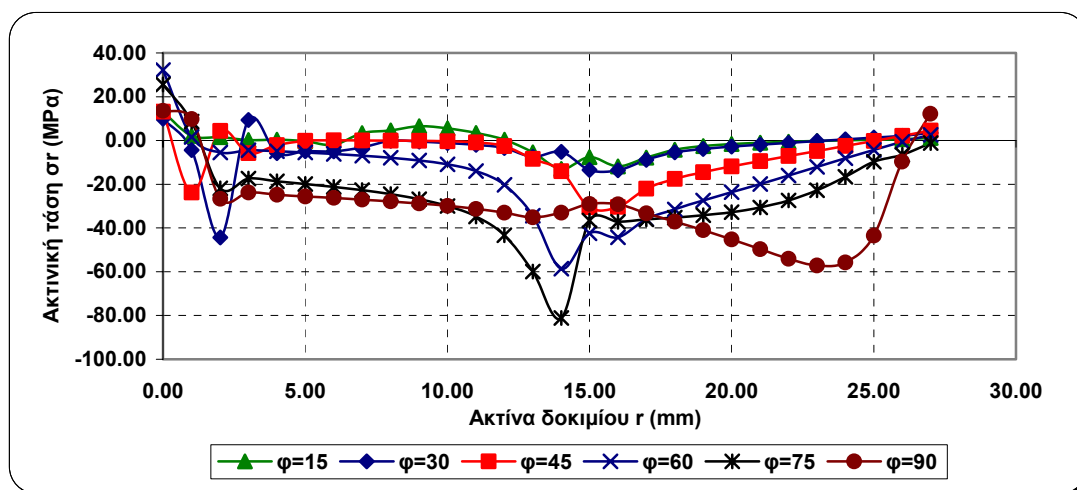
Σχήμα 6.30: Κατανομές εφαπτομενικών τάσεων συναρτήσει του μήκους του δοκιμίου για μήκος ρωγμής 40 mm



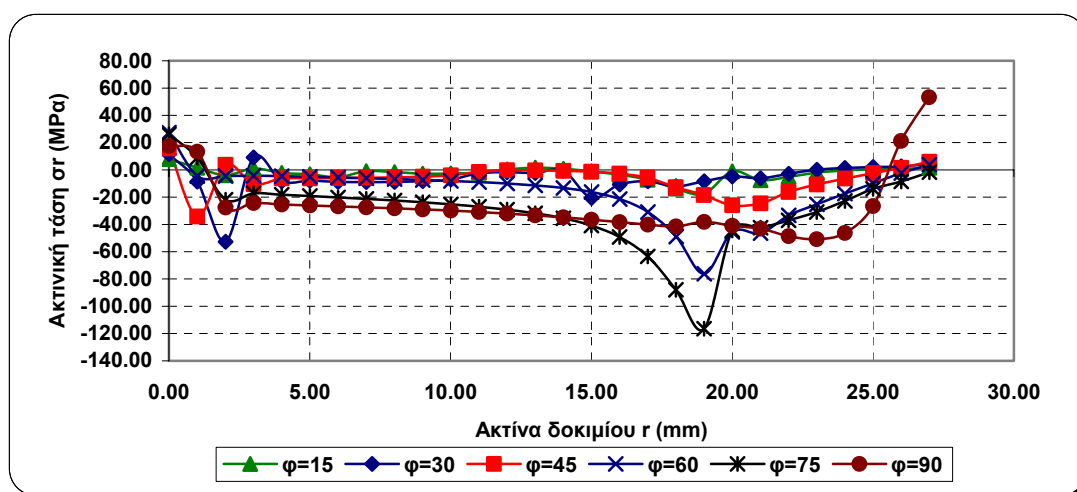
Σχήμα 6.31: Κατανομές ακτινικών τάσεων συναρτήσει του μήκους του δοκιμίου για μήκος ρωγμής 10 mm



Σχήμα 6.32: Κατανομές ακτινικών τάσεων συναρτήσει του μήκους του δοκιμίου για μήκος ρωγμής 20 mm



Σχήμα 6.33: Κατανομές ακτινικών τάσεων συναρτήσει του μήκους του δοκιμίου για μήκος ρωγμής 30 mm



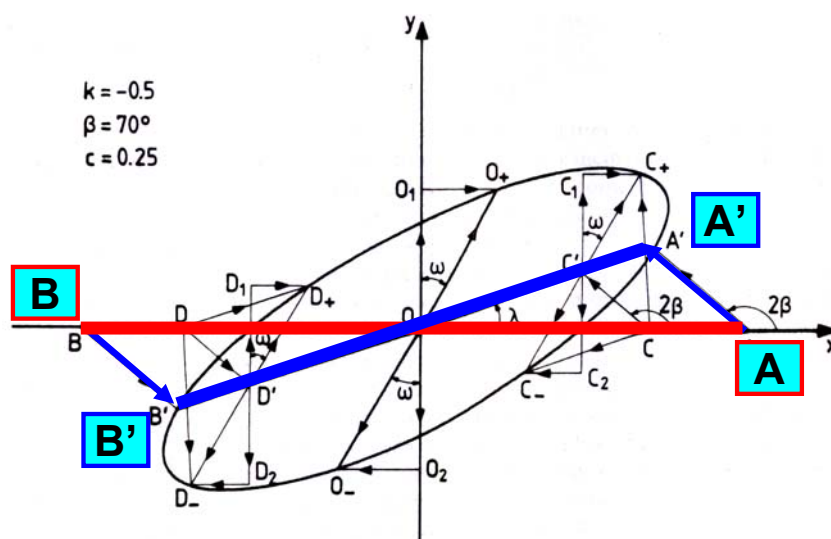
Σχήμα 6.34: Κατανομές ακτινικών τάσεων συναρτήσει του μήκους του δοκιμίου για μήκος ρωγμής 40 mm

Παρατηρήσεις:

- Από τις συγκρίσεις στα σχήματα 6.27 έως και 6.34, παρατηρείται ότι οι εφαπτομενικές και ακτινικές τάσεις στο κέντρο του δίσκου είναι εφελκυστικές ανεξάρτητα από τον προσανατολισμό της ρωγμής ή και γενικά από την παρουσία της ρωγμής.
- Παρουσιάζονται μεγαλύτερες θλιπτικές εφαπτομενικές και ακτινικές τάσεις στην αλλαγή γεωμετρίας στο αμβλύ άκρο της ρωγμής παρά στην αιχμή της. Αυτό είναι σε συμφωνία με την θεωρία του Griffith που υποστηρίζει όταν μια κεκλιμένη ρωγμή είναι σε θλιπτικό μονοαξονικό πεδίο, η ρωγμή δεν ξεκινάει στο επίπεδο της ρωγμής αλλά σε μια γωνία σε σχέση με αυτό. Αν η γωνία είναι

θετική ή αρνητική σε κλίση ως προς το επίπεδο της ρωγμής, χρήζει ιδιαίτερης διερεύνησης η οποία δεν είναι αντικείμενο της εργασίας αυτής. Δηλαδή εάν ήταν να ξεκινήσει ρωγμή θα ξεκινούσε από την αλλαγή γεωμετρίας στο αμβλύ άκρο, αλλά η τροχιά που θα ακολουθούσε η ρωγμή όμως δεν μπορεί εύκολα να προβλεφθεί.

- Όταν ο προσανατολισμός της ρωγμής φ , είναι μεγαλύτερος από 45^0 , οι εφαπτομενικές και ακτινικές τάσεις είναι εφελκυστικές ενώ όταν είναι μικρότερος από 45^0 , οι εφαπτομενικές και ακτινικές τάσεις είναι θλιπτικές.
- Η πιο πάνω παρατήρηση δεν ισχύει για την περίπτωση όπου το μήκος της ρωγμής $2L$, είναι 10 mm. Σε αυτό το μήκος ρωγμής, ο προσανατολισμός φ , δεν επηρεάζει καθόλου τις εφαπτομενικές και ακτινικές τάσεις. Τα μεγέθη και για τους δυο τύπους τάσεων είναι θλιπτικά. Η εξήγηση του φαινομένου του κλεισίματος της ρωγμής μπορεί να εξηγηθεί από το σχήμα 6.35.



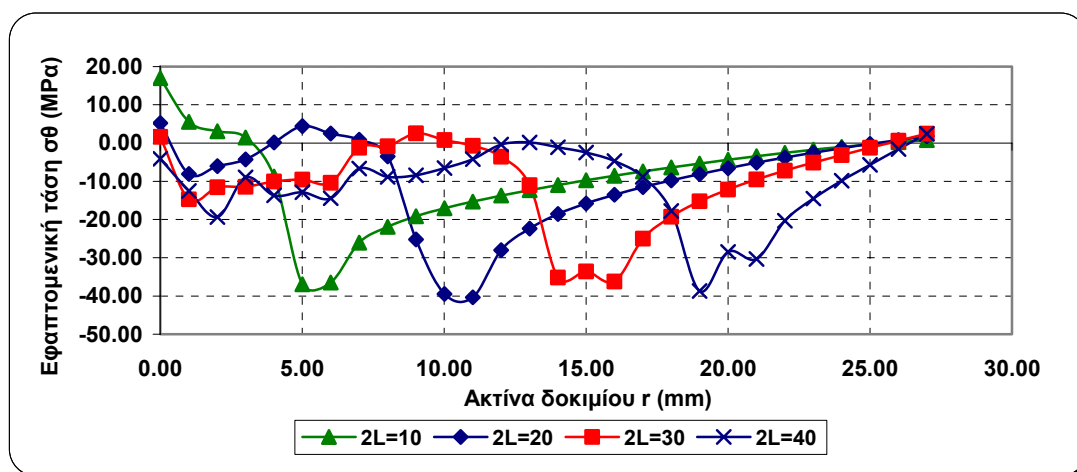
Σχήμα 6.35: Σχηματική εξήγηση του κλεισίματος της ρωγμής

Η ρωγμή AB, όταν υποβληθεί σε εντατικό πεδίο, μεταφέρεται στην θέση A'B'. Η περιστροφή αυτή δεν είναι συμμετρική ως προς κάποιο άξονα της έλλειψης με αποτέλεσμα το κλείσιμο της ρωγμής και στην αιχμή να εμφανίζονται πάντα θλιπτικές τάσεις. Αυτό σημαίνει από μαθηματικής άποψης ότι η αναλυτική λύση των Muskhelishvili-Kolossov δεν μπορεί να εφαρμοστεί σε αυτή την περίπτωση διότι πρέπει να αλλάξουν οι συνοριακές συνθήκες κατά την διάρκεια επίλυσης έτσι ώστε

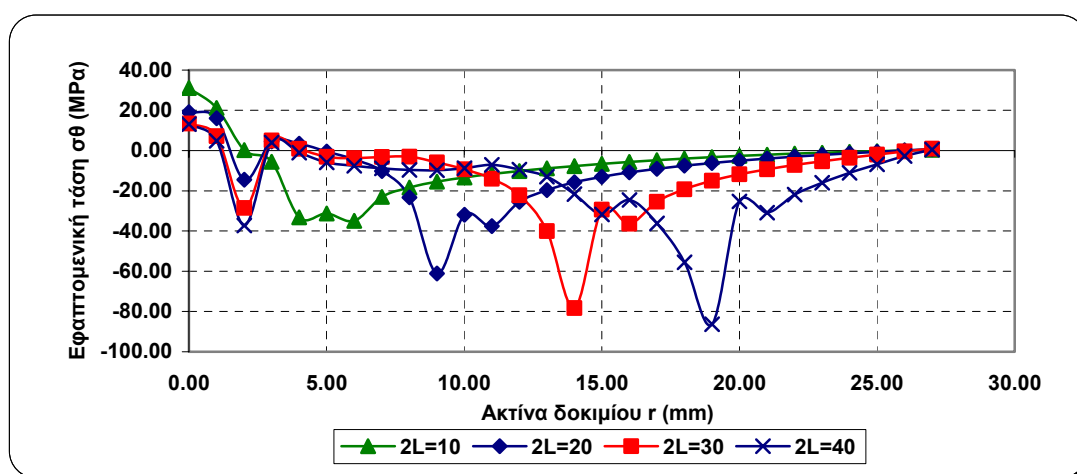
να ισχύει ο περιορισμός της λύσης που λέει ότι πρέπει τα χείλη της ρωγμής να είναι ελεύθερα από τάσεις (stress free crack lip condition).

6.3.7.2 Σταθερός ο προσανατολισμός της ρωγμής (φ) και μεταβαλλόμενο το μήκος της ρωγμής ($2L$)

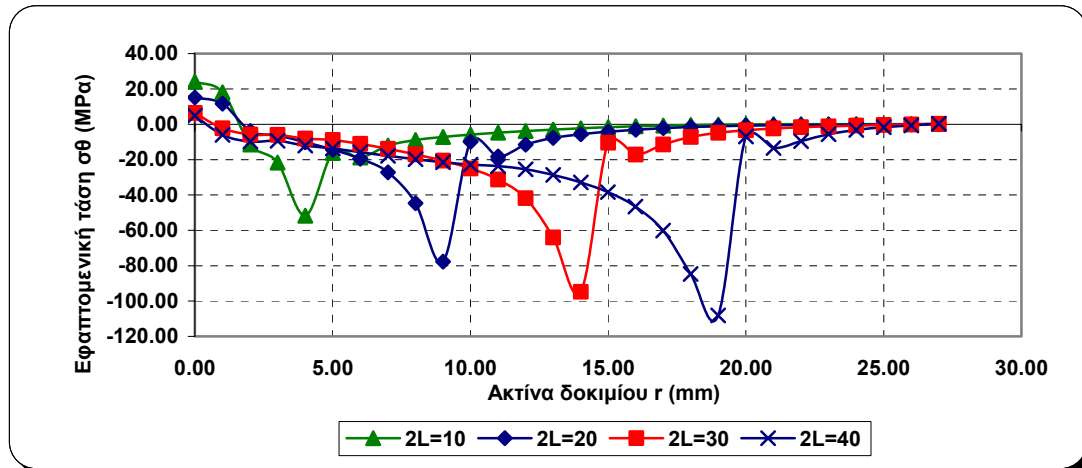
Στα σχήματα 6.36 μέχρι και 6.41 συγκρίνονται οι κατανομές των εφαπτομενικών τάσεων συναρτήσει του μήκους του δοκιμίου για όλους τους προσανατολισμούς των ρωγμών, ενώ στα σχήματα 6.42 μέχρι και 6.47 συγκρίνονται οι κατανομές των ακτινικών τάσεων συναρτήσει του μήκους του δοκιμίου για όλους τους προσανατολισμούς των ρωγμών.



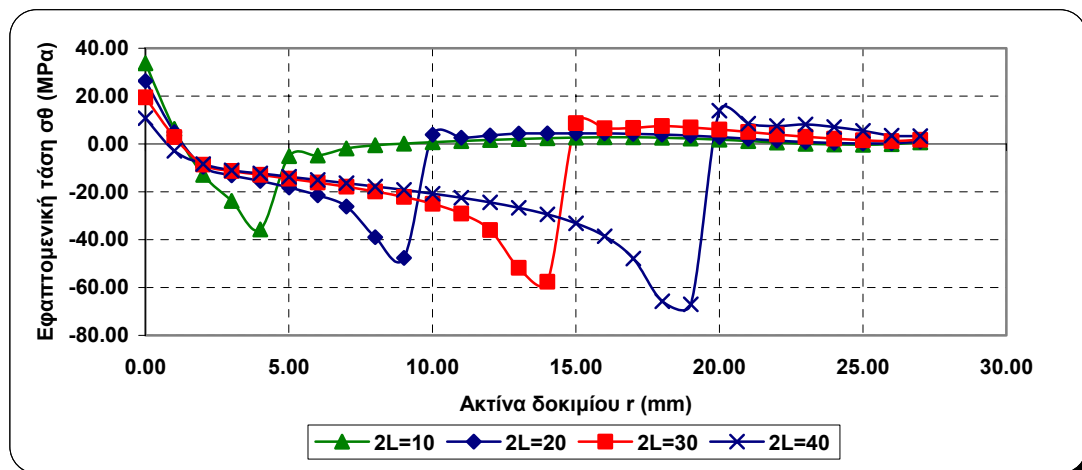
Σχήμα 6.36: Κατανομές εφαπτομενικών τάσεων συναρτήσει του μήκους του δοκιμίου για προσανατολισμό ρωγμής 15°



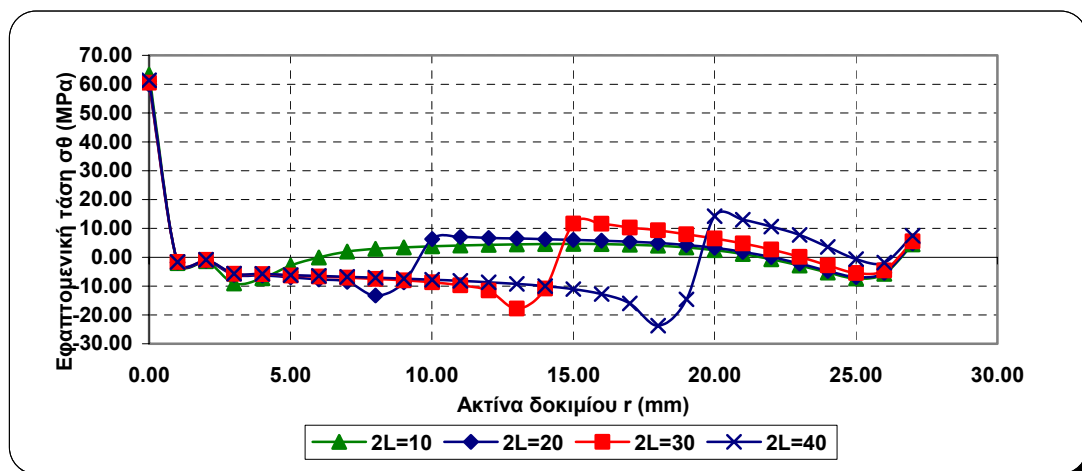
Σχήμα 6.37: Κατανομές εφαπτομενικών τάσεων συναρτήσει του μήκους του δοκιμίου για προσανατολισμό ρωγμής 30°



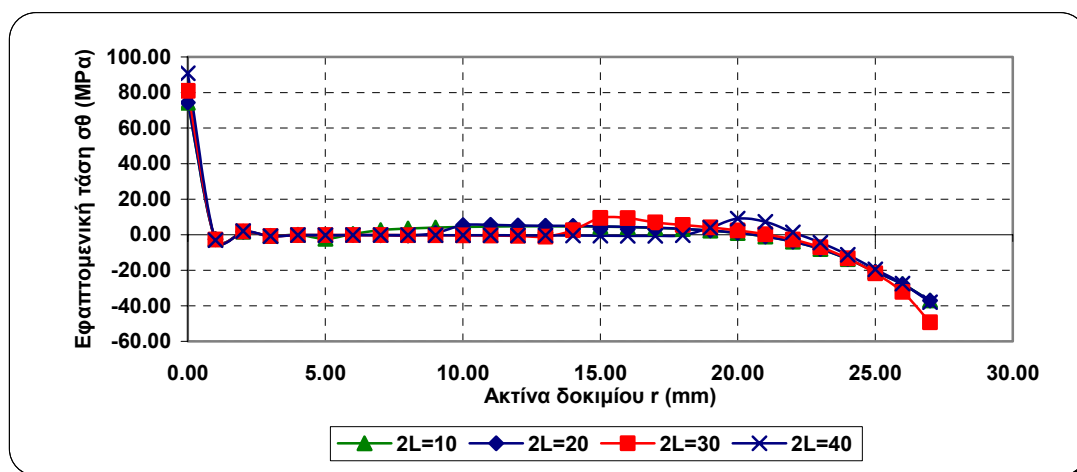
Σχήμα 6.38: Κατανομές εφαπτομενικών τάσεων συναρτήσει του μήκους του δοκιμίου για προσανατολισμό ρωγμής 45°



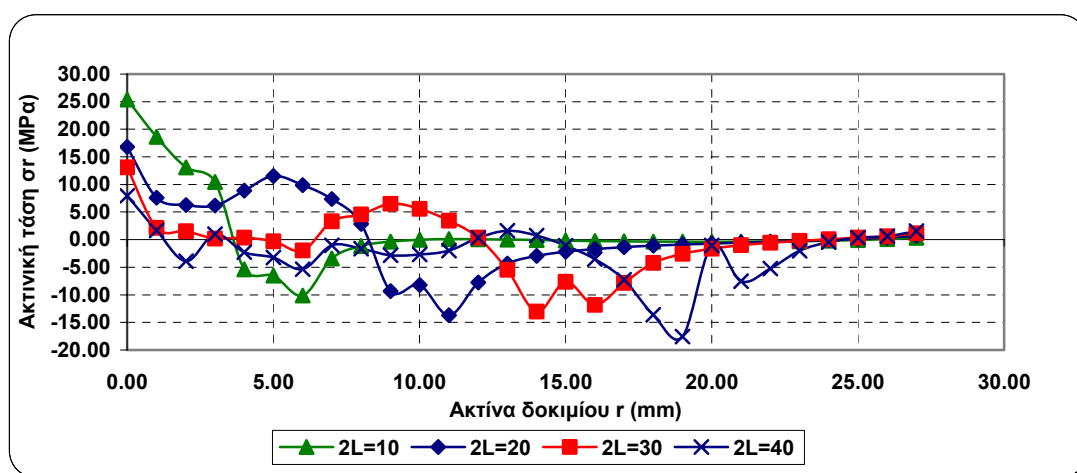
Σχήμα 6.39: Κατανομές εφαπτομενικών τάσεων συναρτήσει του μήκους του δοκιμίου για προσανατολισμό ρωγμής 60°



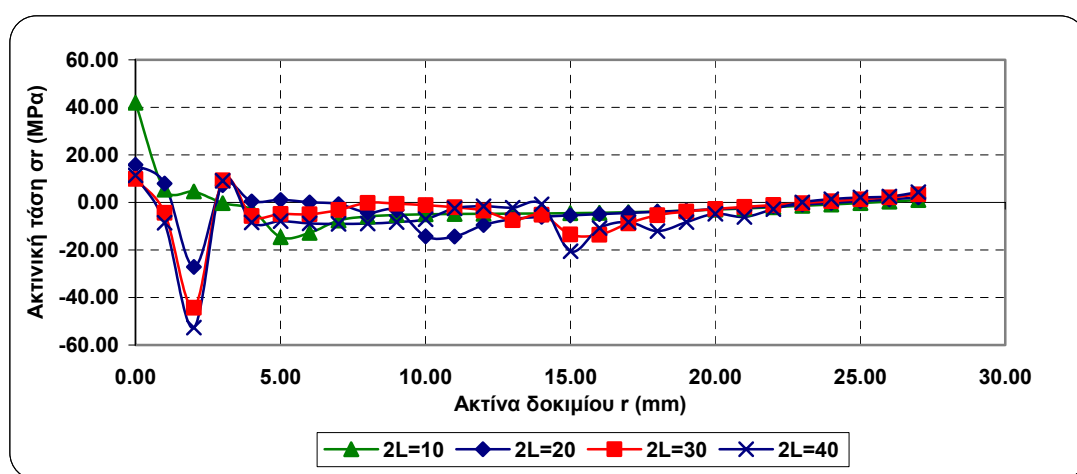
Σχήμα 6.40: Κατανομές εφαπτομενικών τάσεων συναρτήσει του μήκους του δοκιμίου για προσανατολισμό ρωγμής 75°



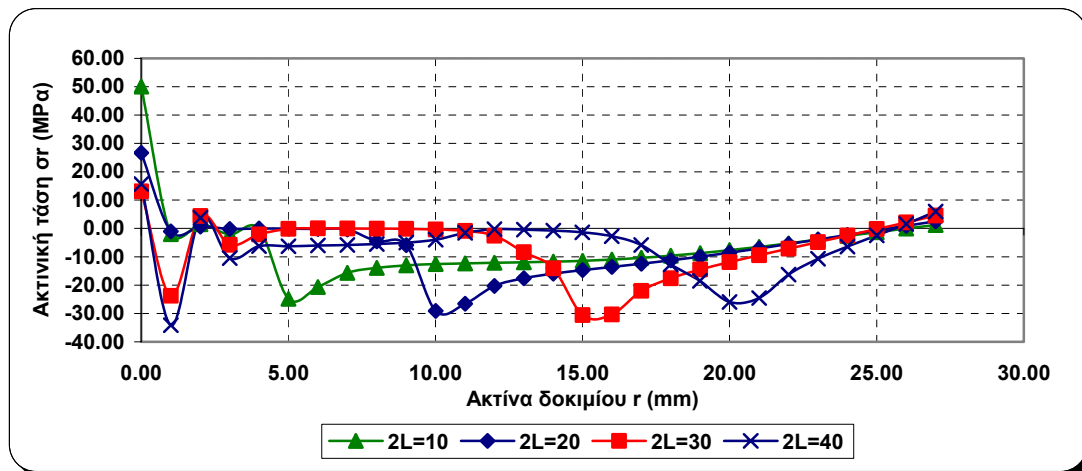
Σχήμα 6.41: Κατανομές εφαπτομενικών τάσεων συναρτήσει του μήκους του δοκιμίου για προσανατολισμό ρωγμής 90°



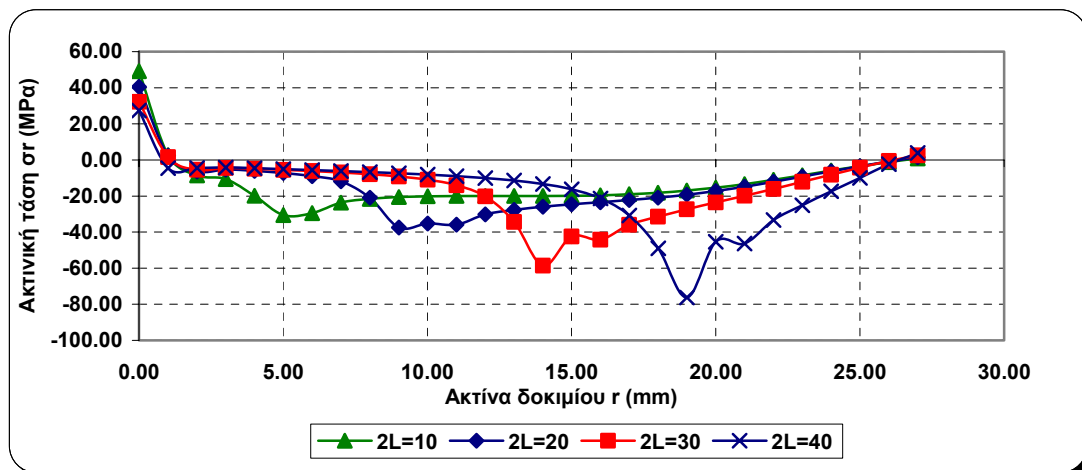
Σχήμα 6.42: Κατανομές ακτινικών τάσεων συναρτήσει του μήκους του δοκιμίου για προσανατολισμό ρωγμής 15°



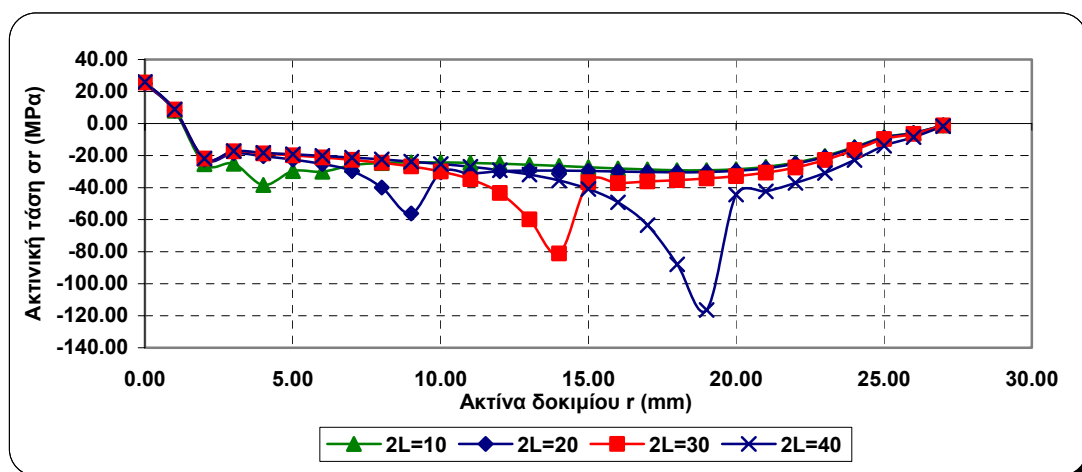
Σχήμα 6.43: Κατανομές ακτινικών τάσεων συναρτήσει του μήκους του δοκιμίου για προσανατολισμό ρωγμής 30°



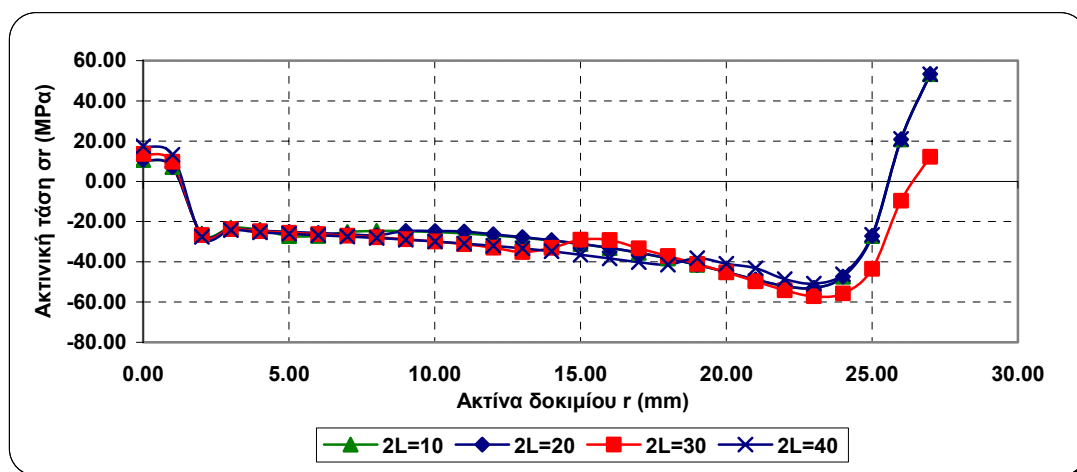
Σχήμα 6.44: Κατανομές ακτινικών τάσεων συναρτήσει του μήκους του δοκιμίου για προσανατολισμό ρωγμής 45°



Σχήμα 6.45: Κατανομές ακτινικών τάσεων συναρτήσει του μήκους του δοκιμίου για προσανατολισμό ρωγμής 60°



Σχήμα 6.46: Κατανομές ακτινικών τάσεων συναρτήσει του μήκους του δοκιμίου για προσανατολισμό ρωγμής 75°



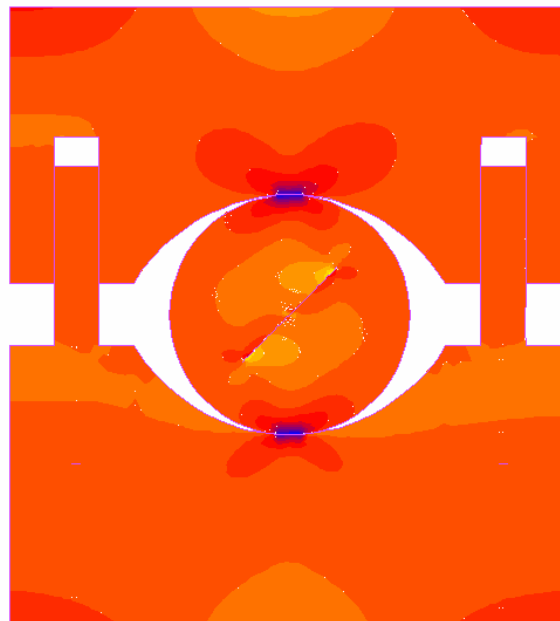
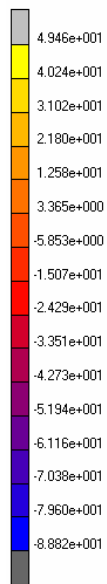
Σχήμα 6.47: Κατανομές ακτινικών τάσεων συναρτήσει του μήκους του δοκιμίου για προσανατολισμό ρωγμής 90°

Παρατηρήσεις:

- Από την εξέταση των σχημάτων 6.36 έως και 6.47, παρατηρείται ότι με την αύξηση του μήκους της ρωγμής $2L$, οι εφαπτομενικές και ακτινικές τάσεις αυξάνονται γραμμικά σε μέγεθος στην αιχμή της ρωγμής.
- Ο προσανατολισμός της ρωγμής $\varphi = 45^\circ$, φαίνεται να είναι η χειρότερη περίπτωση διότι οι εφελκυστικές και εφαπτομενικές τάσεις στην αιχμή της ρωγμής είναι μεγαλύτερες σε μέγεθος παρά σε άλλους προσανατολισμούς.

Τα σχήματα 6.48 και 6.49 δείχνουν τις ισοτασικές καμπύλες των οριζόντιων και κατακόρυφων τάσεων που δημιουργούνται κατά την επίλυση με σιαγόνες όταν ο προσανατολισμός της ρωγμής είναι στις 45° και το μήκος της ρωγμής είναι 30 mm.

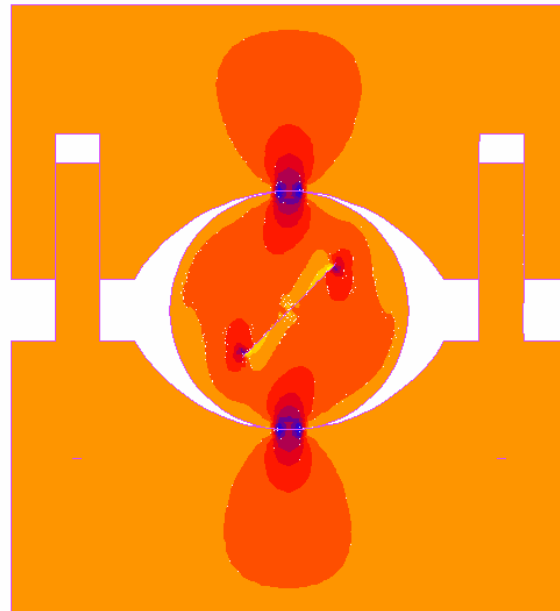
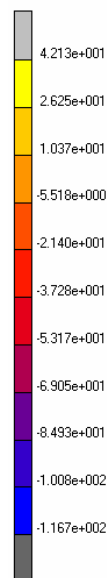
Inc: 10
Time: 1.000e+000



lcase1
Comp 11 of Stress

Σχήμα 6.48: Οριζόντιες τάσεις (σ_{11})

Inc: 10
Time: 1.000e+000

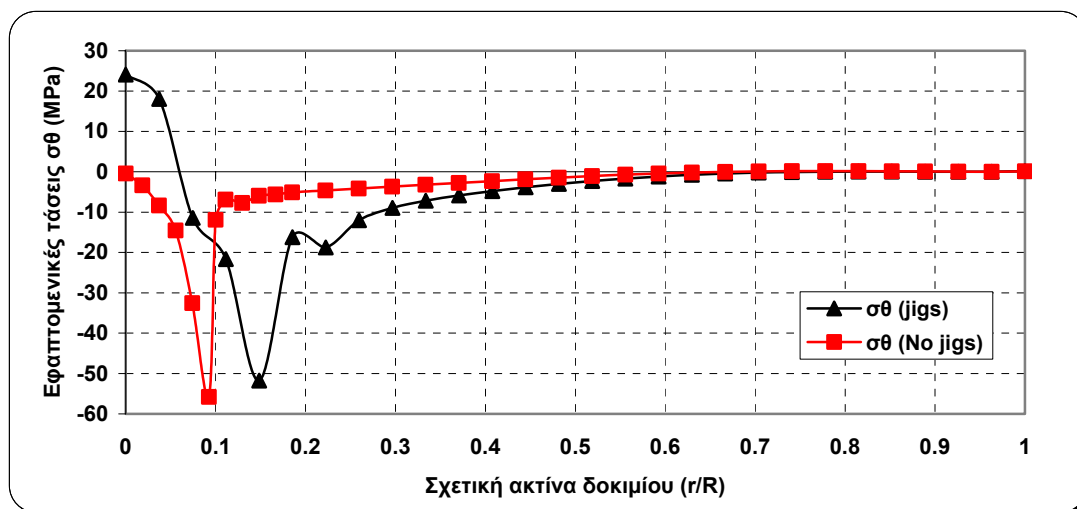


lcase1
Comp 22 of Stress

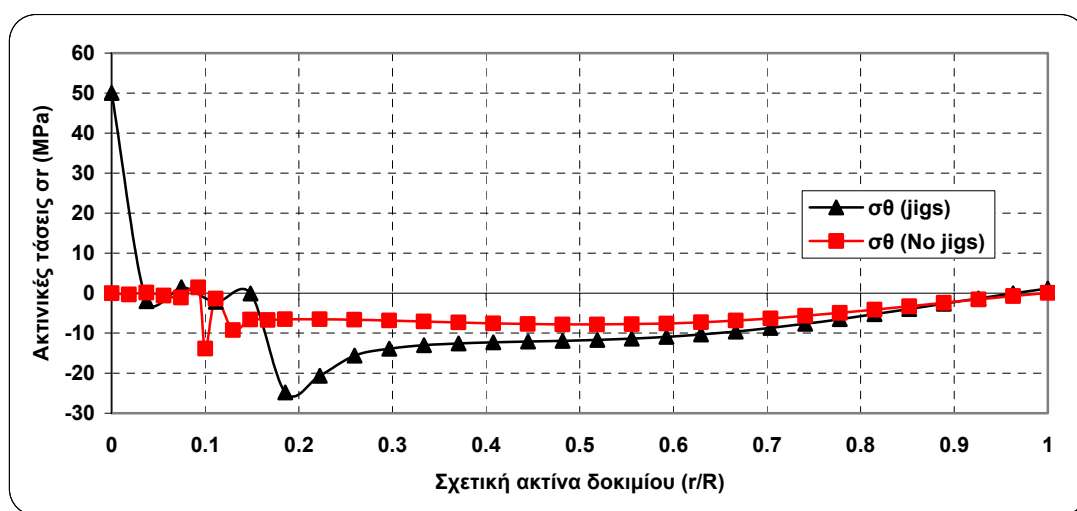
Σχήμα 6.49: Κατακόρυφες τάσεις (σ_{22})

6.4 Σύγκριση Αποτελεσμάτων Επίλυσης με Σιαγόνες Φόρτισης και Χωρίς Σιαγόνες Φόρτισης

Από τις δυο διαφορετικές επιλύσεις που πραγματοποιήθηκαν, στα σχήματα 6.50 και 6.51 γίνεται μια ενδεικτική σύγκριση των κατανομών των εφαπτομενικών και ακτινικών τάσεων για προσανατολισμό γραμμής μελέτης $\varphi=45^\circ$ με στοιχεία χαμηλής τάξης.



Σχήμα 6.50: Σύγκριση κατανομών εφαπτομενικών τάσεων συναρτήσει της σχετικής ακτίνας του δοκιμίου για μοντέλο με σιαγόνες φόρτισης και χωρίς, για προσανατολισμό ρωγμής 45°



Σχήμα 6.51: Σύγκριση κατανομών ακτινικών τάσεων συναρτήσει της σχετικής ακτίνας του δοκιμίου για μοντέλο με σιαγόνες φόρτισης και χωρίς, για προσανατολισμό ρωγμής 45°

Παρατηρήσεις:

- Παρατηρώντας τα σχήματα 6.50 και 6.51, συμπεραίνεται ότι με την παρουσία των σιαγώνων φόρτισης, τα μεγέθη των τάσεων στο κέντρο του δίσκου είναι πάντα μέγιστα στο κέντρο του δίσκου ακόμα και με την παρουσία των ρωγμών.
- Η απουσία των σιαγώνων φόρτισης δίνει σχεδόν μηδενικά μεγέθη τάσεων στο κέντρο του δίσκου.
- Η διαφορά που φαίνεται στα μεγέθη των εφαπτομενικών και ακτινικών τάσεων στην αιχμή της ρωγμής είναι στο ότι τα μήκη των ρωγμών $2L$, είναι διαφορετικά. Στο μοντέλο με τις σιαγώνες φόρτισης, το μήκος της ρωγμής $2L$ είναι 5 mm, ενώ χωρίς σιαγώνες φόρτισης το μήκος της ρωγμής $2L$ είναι 2.7 mm. Η μορφή των καμπύλων είναι ίδια μεταξύ τους.
- Από την ανάλυση που πραγματοποιήθηκε με τις σιαγώνες φόρτισης, προκύπτει ότι η προσομοίωση με αυτές είναι πιο ρεαλιστική και προσεγγίζει πιο καλά την πραγματικότητα μέσω των αποτελεσμάτων που εξάγονται από την ανάλυση.

7 Αριθμητική Επίλυση του Βραζιλιανού Δίσκου με Εγκοπή

7.1 Εισαγωγή

Στο κεφάλαιο αυτό γίνεται η παρουσίαση των αποτελεσμάτων που προέκυψαν από την αριθμητική επίλυση του Βραζιλιανού δίσκου με εγκοπή με την μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων. Η προσομοίωση των δοκιμών πραγματοποιήθηκε όπως και στις προηγούμενες δύο, του κλασσικού Βραζιλιανού δίσκου και υπό την επίδραση μαθηματικής ρωγμής στις δυο διαστάσεις με το λογισμικό πεπερασμένων στοιχείων MSC. Marc-Mentat 2000. Η μοντελοποίηση γίνεται και σε αυτή την προσομοίωση όπως και στις προηγούμενες δύο με επιβολή συνοριακών συνθηκών απευθείας επάνω στον Βραζιλιανό δίσκο. Καθώς έχει ήδη ελεγχθεί η σύγκλιση της αριθμητικής με την αναλυτική λύση για την περίπτωση του άρρηκτου Βραζιλιανού δίσκου, το επόμενο βήμα της ανάλυσης είναι η κατασκευή των κατανομών των εφαστομενικών και ακτινικών τάσεων για το πρόβλημα του Βραζιλιανού δίσκου με εγκοπή καθώς επίσης και η διερεύνηση εφαρμογής του κριτηρίου αστοχίας του Griffith.

7.2 Επίλυση του Προβλήματος της Αντιδιαμετρικής Θλίψης του Δίσκου με Εγκοπή

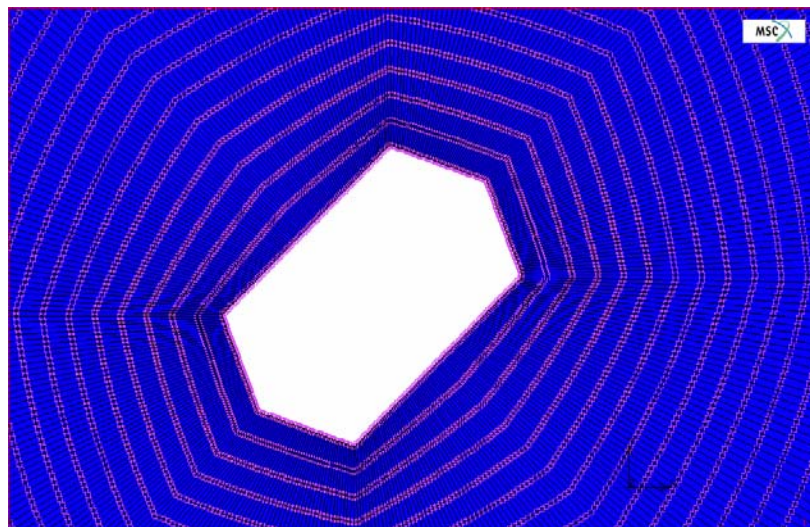
Για το πρόβλημα του δίσκου με εγκοπή, η ανάλυση ξεκινάει πάλι με τον προσδιορισμό της εντατικής κατάστασης που προκύπτει με την επιβολή ομοιόμορφα κατανεμημένου φορτίου στο πάνω και κάτω άκρο του δίσκου. Αφού πραγματοποιήθηκαν διάφορες διερευνήσεις στα προηγούμενα προβλήματα, η ανάλυση πραγματοποιείται για το μοντέλο που αντιστοιχεί σε γωνία φόρτισης 10^0 μόνο, καθώς επίσης και με σημειακή φόρτιση για δυο τύπους στοιχείων, χαμηλής και υψηλής τάξης.

7.2.1 Γεωμετρία και διακριτοποίηση

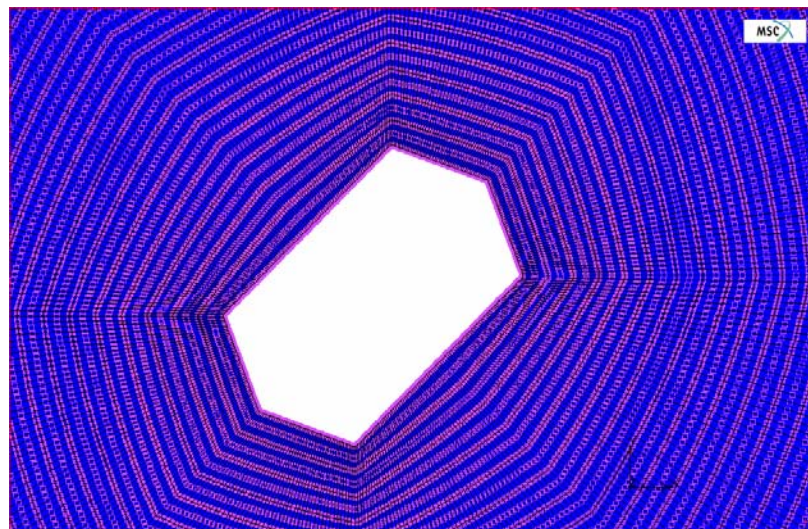
Η γεωμετρία των δοκιμίων είναι ίδια με αυτή που χρησιμοποιήθηκε στα προβλήματα του κλασσικού Βραζιλιανού δίσκου με την επίδραση μαθηματικής ρωγμής και χωρίς. Η διαφορά από την προηγούμενη επίλυση είναι η εισαγωγή μιας εγκοπής, πάχους 3 mm και μήκους ίσο με το $\frac{1}{10}$ της διαμέτρου του δοκιμίου. Η εγκοπή αυτή εισάγεται στο κέντρο του δίσκου και επιλύεται το πρόβλημα με προσανατολισμούς της εγκοπής για $0^\circ, 15^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 75^\circ, 90^\circ$.

Η διακριτοποίηση φτιάχτηκε σε πολικό σύστημα συντεταγμένων αφού η ανάλυση των δίσκων είναι πιο εύκολη σε πολικές συντεταγμένες παρά σε καρτεσιανές. Τα στοιχεία που χρησιμοποιήθηκαν για το συγκεκριμένο πρόβλημα ήταν τετράπλευρα με 4 κόμβους (χαμηλής τάξης) καθώς επίσης και με τετράπλευρα 8 κόμβων (υψηλής τάξης). Η επίλυση με των δυο τύπων στοιχείων πραγματοποιήθηκε για την διερεύνηση της επίδρασης των στοιχείων υψηλής τάξης σε προβλήματα θραυστομηχανικής και συγκεκριμένα για καλύτερη διακριτοποίηση γύρω από την εγκοπή έτσι ώστε η μεταβολή στη κατανομή των μεγεθών γύρω από την εγκοπή να φαίνεται καλύτερα.

Η διακριτοποίηση του δίσκου φτιάχτηκε με τέτοιο τρόπο ώστε να είναι δυνατή η επιβολή των επιθυμητών συνοριακών συνθηκών και να μπορεί να ληφθούν αποτελέσματα στους κόμβους ανά 1 mm και ανά 1° . Λόγω της περιπλοκότητας της εγκοπής αυτό δεν έγινε ακριβώς εφικτό. Εισήχθηκε ένα σφάλμα 0.1 της μοίρας και 0.1 του mm, που ουσιαστικά είναι αποδεκτό. Η λεπτομέρεια στη διακριτοποίηση του δίσκου με εγκοπή φαίνεται στο σχήμα 7.1 με στοιχεία χαμηλής και υψηλής τάξης.



(A)



(B)

Σχήμα 7.1: Διακριτοποίηση της εγκοπής, (A) στοιχεία χαμηλής τάξης, (B) στοιχεία υψηλής τάξης

Ο αριθμός των στοιχείων και των κόμβων που χρησιμοποιήθηκαν για την επίλυση των μοντέλων δίδονται στον πίνακα 7.1.

Πίνακας 7.1: Αριθμός κόμβων και στοιχείων

Μοντέλο	Στοιχεία	Κόμβοι
Χαμηλής τάξης	18200	18564
Υψηλής τάξης	18200	55328

7.2.2 Ιδιότητες υλικού

Το υλικό μοντελοποιήθηκε ως γραμμικά ελαστικό και ισότροπο με ελαστικές σταθερές, $E = 80 \text{ GPa}$, και λόγο Poisson, $\nu = 0.25$, που είναι ίδιες με τις ιδιότητες που χρησιμοποιήθηκαν στα προηγούμενα προβλήματα.

7.2.3 Συνοριακές συνθήκες

Οι συνοριακές συνθήκες που επιβλήθηκαν στα μοντέλα ήταν ίδιες όπως και στα προηγούμενα προβλήματα που επιλύθηκαν, του κλασσικού Βραζιλιανού δίσκου και του δίσκου με μαθηματική ρωγμή. Αυτές είναι:

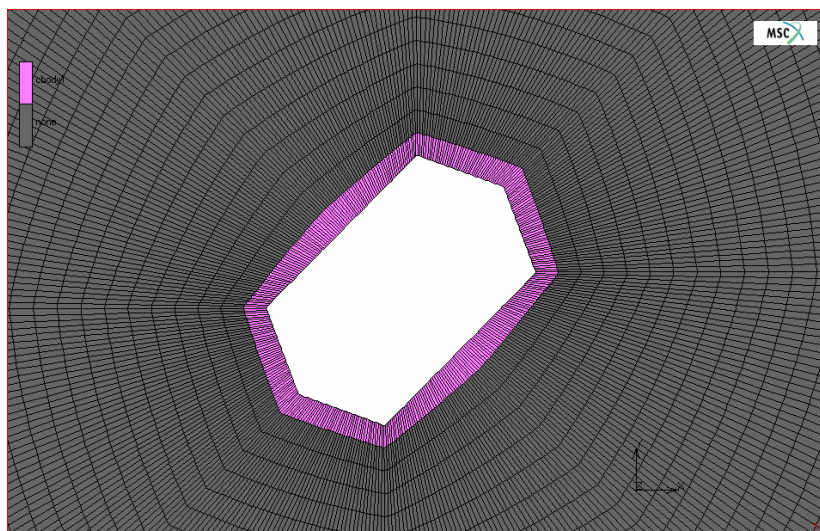
- Κύλιση ($dy = 0$) κατά την οριζόντια διεύθυνση στον δεξιό και αριστερό συνοριακό κόμβο.
- Κύλιση ($dx = 0$) κατά την κατακόρυφη διεύθυνση στον πάνω και κάτω συνοριακό κόμβο.
- Μονοαξονική φόρτιση που αντιστοιχεί σε γωνία επιβολής φόρτισης, $2\alpha = 10^\circ$ και μεγέθους 90 MPa κατά τον κατακόρυφο άξονα του δοκιμίου καθώς επίσης και για σημειακή μεγέθους 11450 kN .

7.2.4 Γεωμετρικές ιδιότητες

Οι γεωμετρικές ιδιότητες ήταν επίσης οι ίδιες με τα προηγούμενα προβλήματα. Η επίλυση έγινε με θεώρηση επίπεδης τάσης. Το πάχος του δοκιμίου θεωρήθηκε 27 mm . Ο λόγος που χρησιμοποιήθηκε αυτή η θεώρηση αποδείχτηκε στην ενότητα 5.3.4.

7.2.5 Στοιχεία επαφής

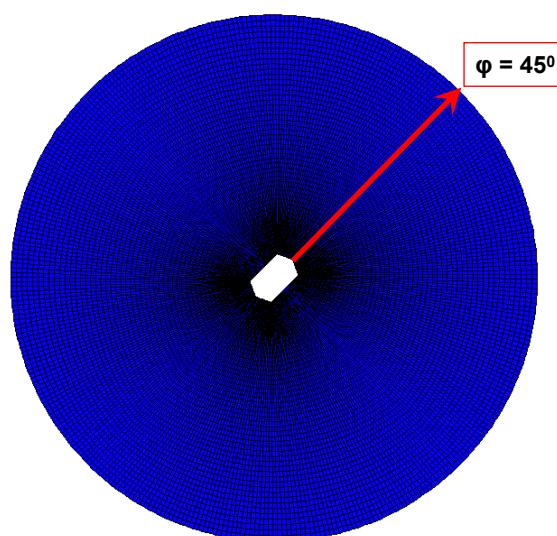
Για τα μοντέλα που επιλύθηκαν, χρησιμοποιήθηκαν στοιχεία επαφής γύρω από την εγκοπή. Ο συντελεστής τριβής μεταξύ των χειλών της ρωγμής λήφθηκε ίσος με 0.4 που αντιστοιχεί σε γωνία 22° . Ο νόμος τριβής που επιβλήθηκε ήταν τριβή τύπου Coulomb. Ο αριθμός των στοιχείων επαφής που χρησιμοποιήθηκαν είναι 364 και φαίνονται στο σχήμα 7.2.



Σχήμα 7.2: Στοιχεία επαφής γύρω από την εγκοπή

7.2.6 Ανάλυση των τάσεων

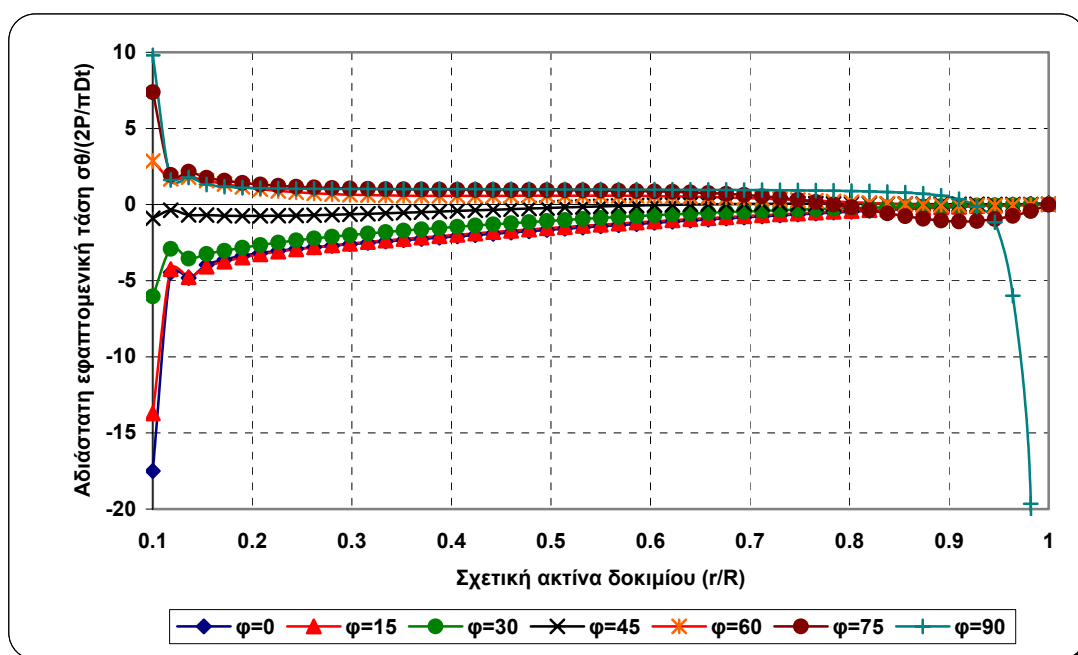
Η ανάλυση των τάσεων όπως και στο προηγούμενο πρόβλημα με την ρωγμή έγινε με την κατασκευή των κατανομών των αδιάστατων εφαπτομενικών και ακτινικών τάσεων στο επίπεδο της εγκοπής. Οι εφαπτομενικές και ακτινικές τάσεις παρουσιάζονται για τις δυο τάξεις στοιχείων (τετράπλευρα 4 κόμβων και τετράπλευρα 8 κόμβων), καθώς επίσης και για τους δυο τύπους φόρτισης (σημειακή και κατανεμημένη σε γωνία επιβολής $2\alpha = 10^\circ$). Τα δεδομένα που αναλύονται, λήφθηκαν στο επίπεδο της εγκοπής σε διάφορους προσανατολισμούς της, ξεκινώντας από την κορυφή της εγκοπής μέχρι το εξωτερικό σύνορο του δίσκου. Οι γωνίες προσανατολισμού της ρωγμής φ , ορίζονται δεξιόστροφα από τον οριζόντιο άξονα μέχρι το επίπεδο της ρωγμής. Οι γωνίες φ είναι στις 0° , 15° , 30° , 45° , 60° , 75° και 90° . Στο σχήμα 7.3 φαίνεται ενδεικτικά το μοντέλο με εγκοπή σε προσανατολισμό $\varphi = 45^\circ$.



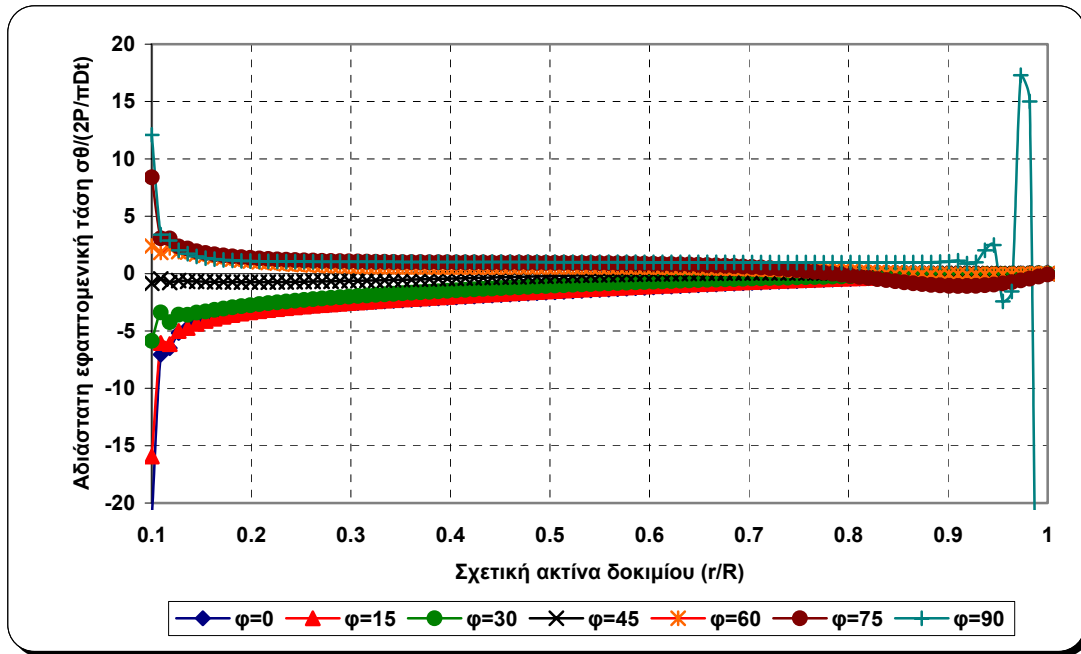
Σχήμα 7.3: Προσανατολισμός εγκοπής και λήψη δεδομένων στο επίπεδο της

Αρχικά στα σχήματα 7.4 έως και 7.7 παρουσιάζονται οι κατανομές των αδιάστατων εφαπτομενικών τάσεων για χαμηλής και υψηλής τάξης στοιχεία για τη σημειακή φόρτιση και την κατανεμημένη, για σκοπούς σύγκρισης μεταξύ των στοιχείων. Στη συνέχεια στα σχήματα 7.8 μέχρι και 7.11 παρουσιάζονται με την ίδια σειρά οι κατανομές των ακτινικών τάσεων.

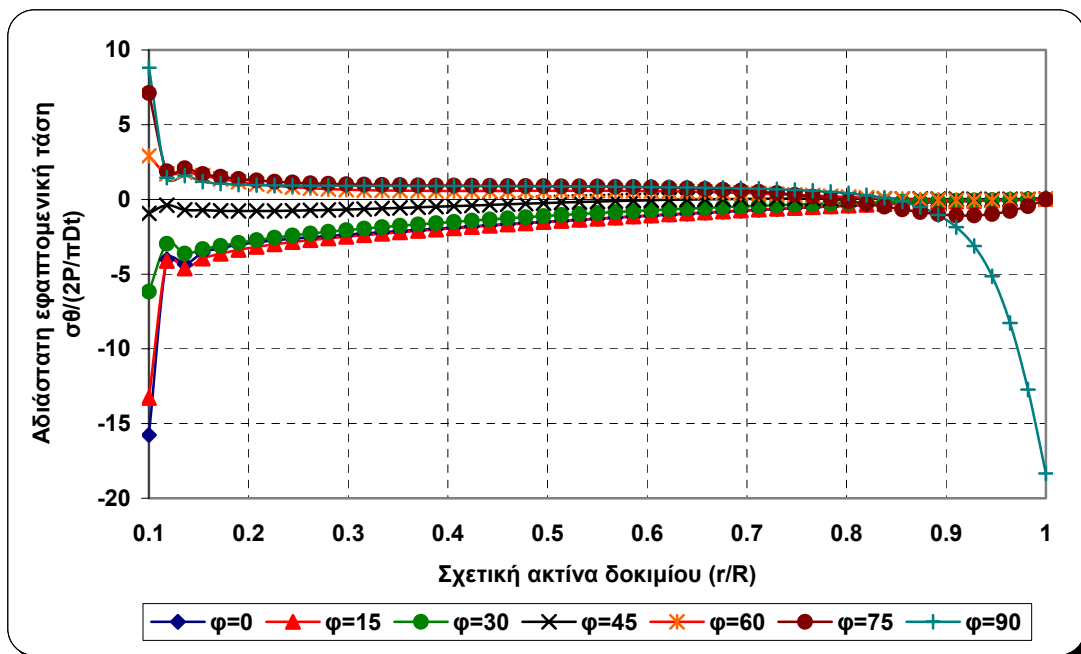
➤ Εφαπτομενικές Τάσεις



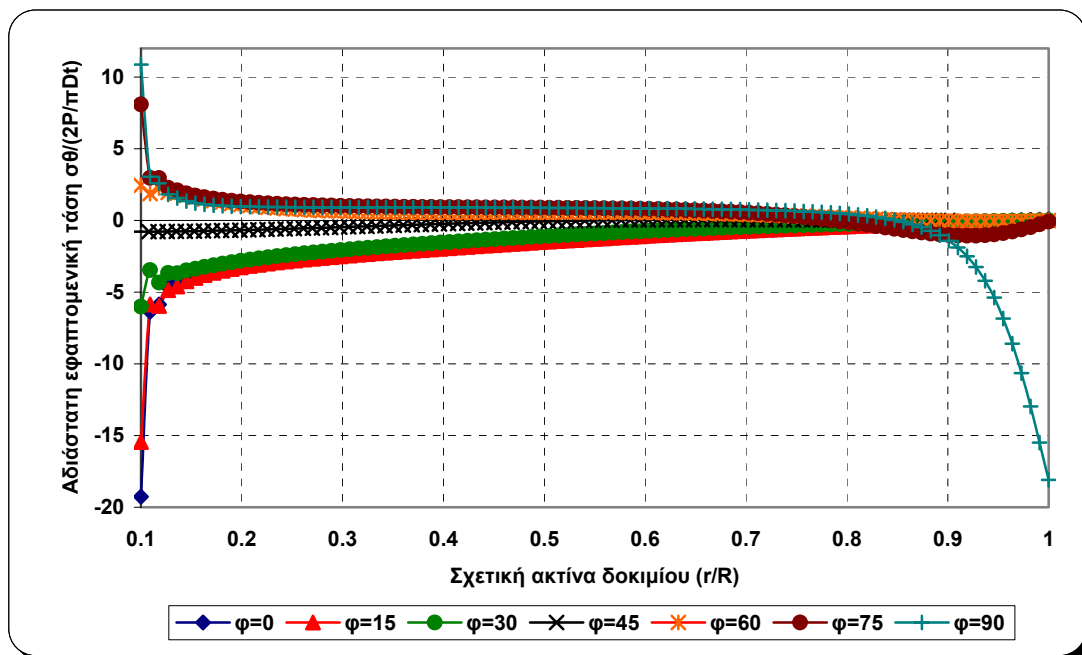
Σχήμα 7.4: Κατανομή εφαπτομενικών τάσεων για σημειακή φόρτιση και στοιχεία χαμηλής τάξης



Σχήμα 7.5: Κατανομή εφαπτομενικών τάσεων για σημειακή φόρτιση και στοιχεία υψηλής τάξης

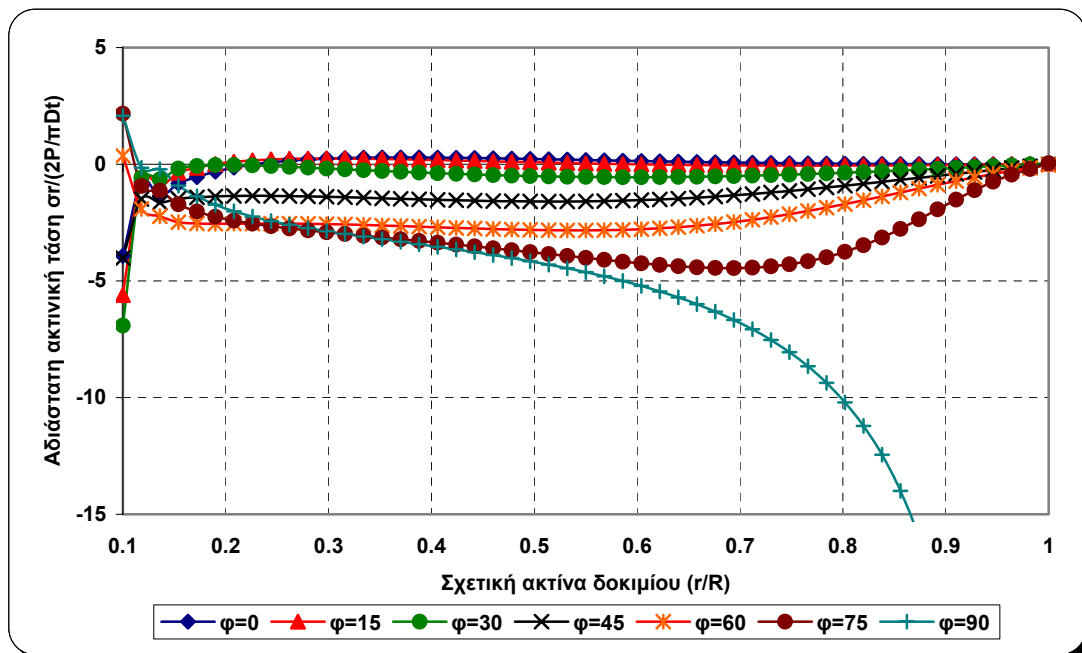


Σχήμα 7.6: Κατανομή εφαπτομενικών τάσεων για κατανομημένη φόρτιση και στοιχεία χαμηλής τάξης

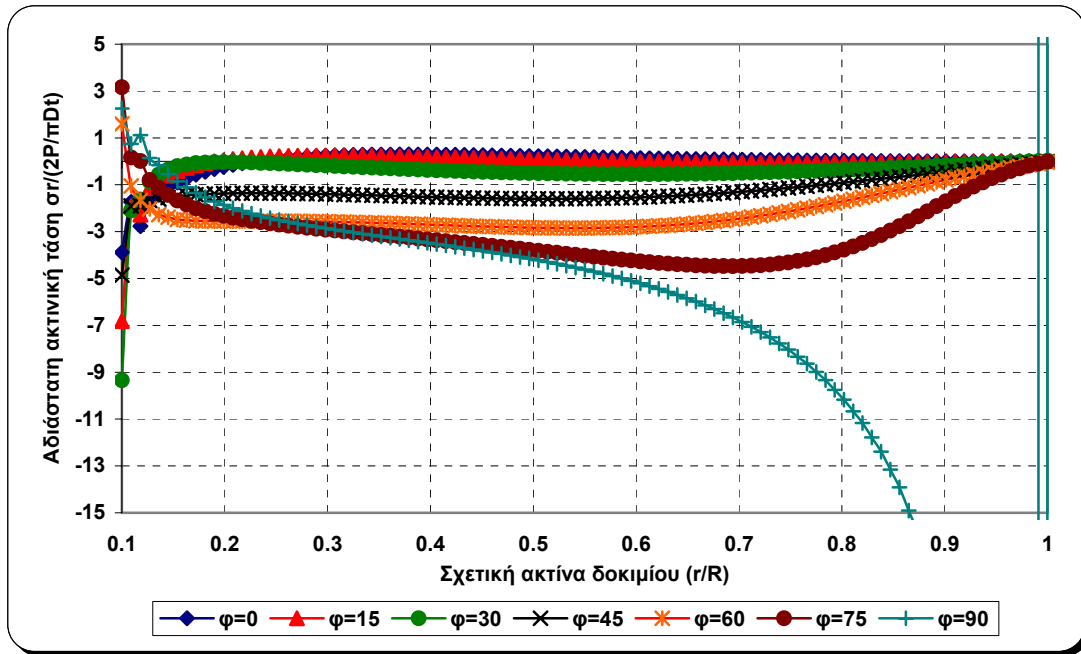


Σχήμα 7.7: Κατανομή εφαπτομενικών τάσεων για κατανεμημένη φόρτιση και στοιχεία υψηλής τάξης

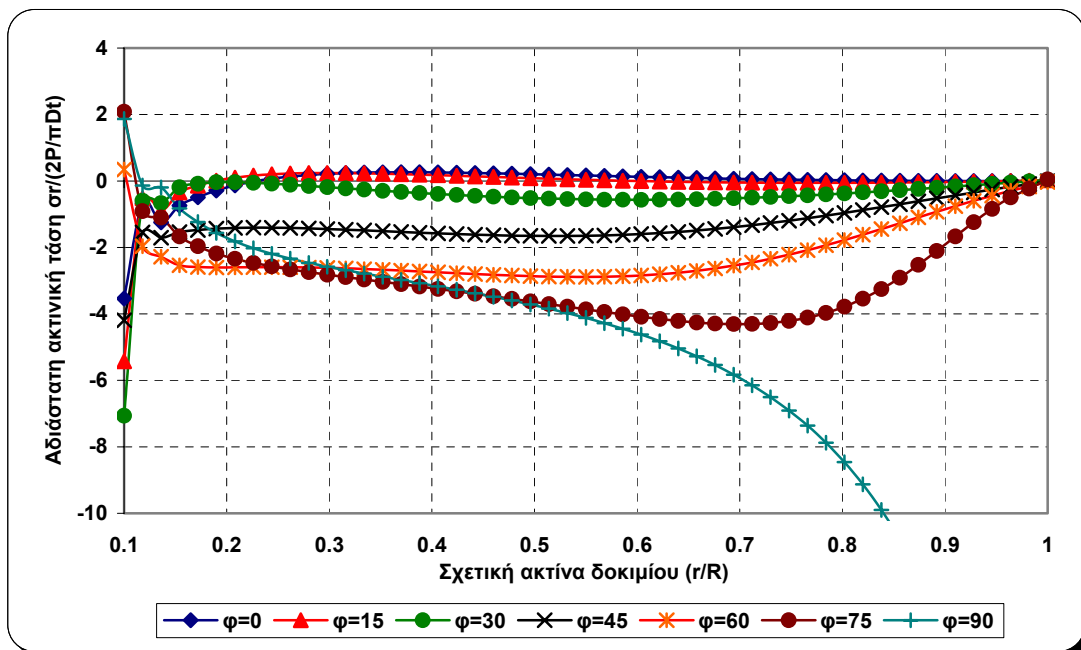
➤ Ακτινικές Τάσεις



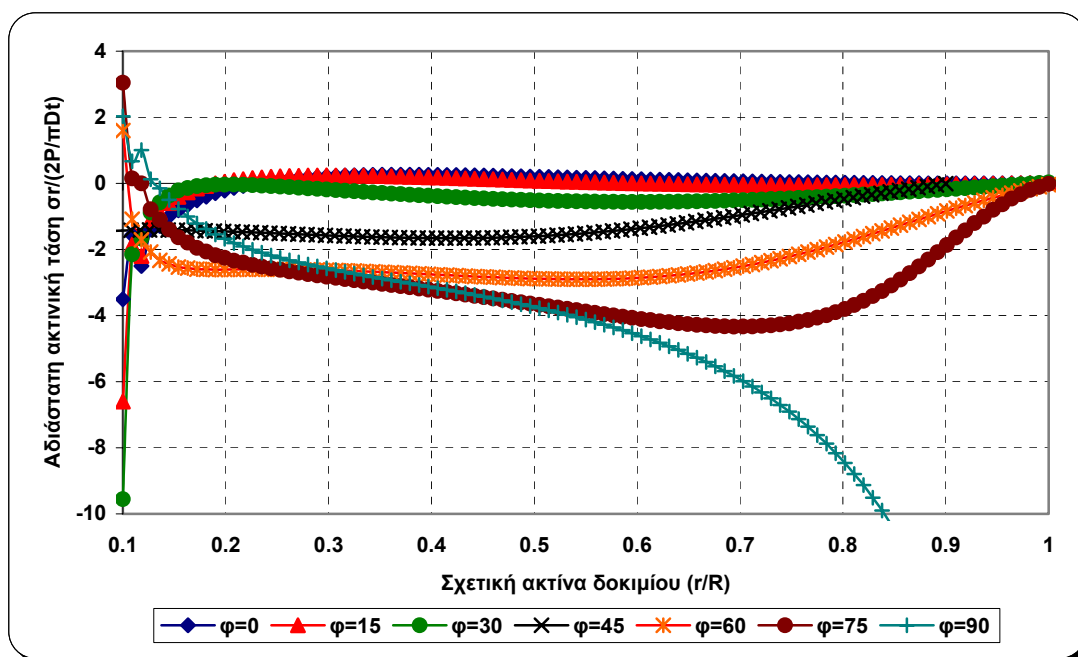
Σχήμα 7.8: Κατανομή ακτινικών τάσεων για σημειακή φόρτιση και στοιχεία χαμηλής τάξης



Σχήμα 7.9: Κατανομή ακτινικών τάσεων για σημειακή φόρτιση και στοιχεία υψηλής τάξης



Σχήμα 7.10: Κατανομή ακτινικών τάσεων για κατανεμημένη φόρτιση και στοιχεία χαμηλής τάξης



Σχήμα 7.11: Κατανομή ακτινικών τάσεων για κατανεμημένη φόρτιση και στοιχεία υψηλής τάξης

Παρατηρήσεις:

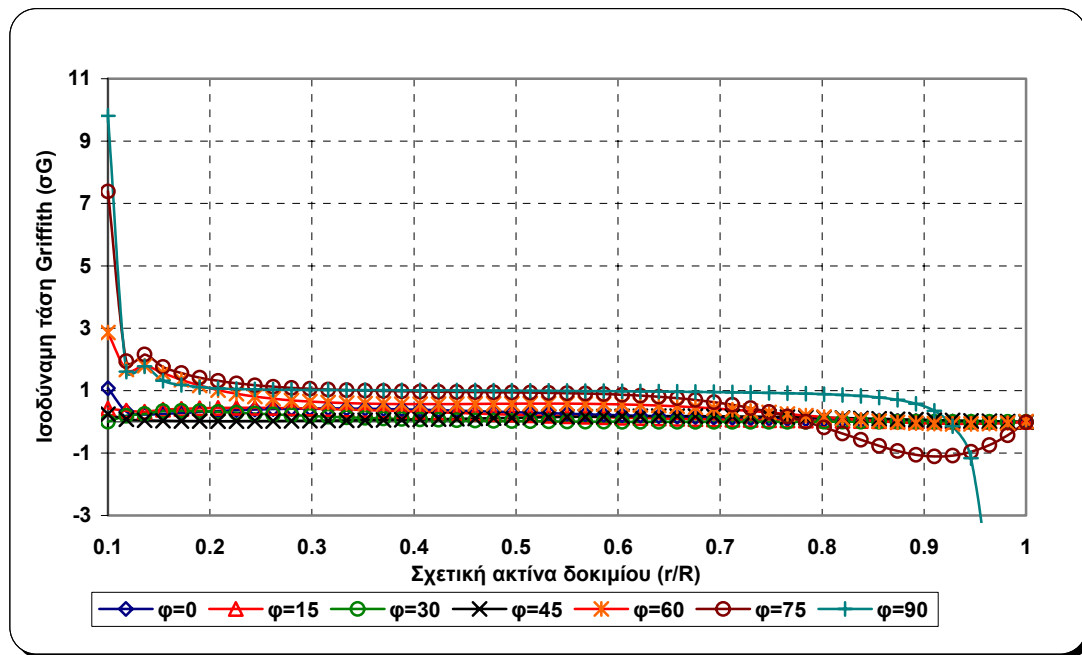
- Από τις συγκρίσεις των εφαπτομενικών τάσεων με στοιχεία χαμηλής τάξης, παρατηρείται ότι το μέγεθος των τάσεων στην κορυφή της εγκοπής είναι από -17 για ($\phi=0^\circ$) μέχρι +10 για ($\phi=90^\circ$) και για τους δυο τύπους φόρτισης (κατανεμημένη και σημειακή). Μετά τείνουν να μηδενιστούν στο εξωτερικό σύνορο του δίσκου. Αυτή που δεν μηδενίζεται είναι η καμπύλη για $\phi=90^\circ$ διότι είναι ακριβώς κάτω από το σημείο επιβολής της φόρτισης με αποτέλεσμα την δημιουργία μιας ζώνης συγκέντρωσης τάσεων.
- Από τις συγκρίσεις των εφαπτομενικών τάσεων με στοιχεία υψηλής τάξης, παρατηρείται ότι το μέγεθος των τάσεων στην κορυφή της εγκοπής είναι από +12 για ($\phi=90^\circ$) μέχρι -20 για ($\phi=0^\circ$) και για τους δυο τύπους φόρτισης (κατανεμημένη και σημειακή). Μετά τείνουν να μηδενιστούν στο εξωτερικό σύνορο του δίσκου. Αυτή που δεν μηδενίζεται είναι η καμπύλη για $\phi=90^\circ$ διότι όπως αναφέρθηκε και προηγουμένως είναι ακριβώς κάτω από το σημείο επιβολής της φόρτισης με αποτέλεσμα την δημιουργία μιας ζώνης συγκέντρωσης τάσεων.
- Από τις συγκρίσεις των ακτινικών τάσεων με στοιχεία χαμηλής τάξης, παρατηρείται ότι το μέγεθος των τάσεων στην κορυφή της εγκοπής είναι από -7 μέχρι +3 και για τους δυο τύπους φόρτισης (κατανεμημένη και σημειακή). Μετά

τείνουν να μηδενιστούν στο εξωτερικό σύνορο του δίσκου. Αυτή που δεν μηδενίζεται είναι η καμπύλη για $\varphi=90^0$ διότι είναι ακριβώς κάτω από το σημείο επιβολής της φόρτισης με αποτέλεσμα την δημιουργία μιας ζώνης συγκέντρωσης τάσεων.

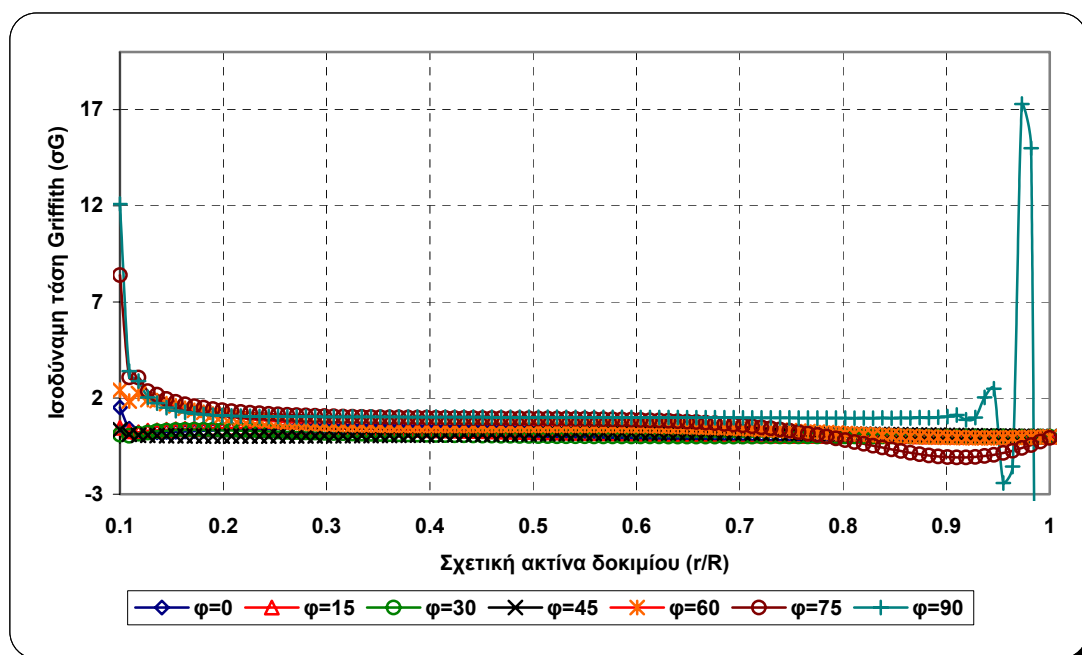
- Από τις συγκρίσεις των ακτινικών τάσεων με στοιχεία υψηλής τάξης, παρατηρείται ότι το μέγεθος των τάσεων στην κορυφή της εγκοπής είναι από **-9** μέχρι **+3** και για τους δυο τύπους φόρτισης (κατανεμημένη και σημειακή). Μετά τείνουν να μηδενιστούν στο εξωτερικό σύνορο του δίσκου. Αυτή που δεν μηδενίζεται είναι η καμπύλη για $\varphi=90^0$ διότι όπως αναφέρθηκε και προηγουμένως είναι ακριβώς κάτω από το σημείο επιβολής της φόρτισης με αποτέλεσμα την δημιουργία μιας ζώνης συγκέντρωσης τάσεων.
- Η μικρή διαφορά στα μεγέθη των τάσεων από την επίλυση μεταξύ των δυο τύπων στοιχείων ίσως να οφείλεται στην ακρίβεια που προσφέρουν τα στοιχεία υψηλής τάξης.
- Το **σημαντικότερο συμπέρασμα** που εξάγεται και σε αυτή την περίπτωση είναι ότι με την εφαρμογή της πίεσης στον δίσκο, η κορυφή της εγκοπής συμπίεζεται όταν έχει προσανατολισμό ίσο με $\varphi = 0^0, 15^0, 30^0$ και 45^0 με αποτέλεσμα να αναπτύσσονται θλιπτικές εφαστομενικές και ακτινικές τάσεις στην κορυφή της εγκοπής. Αυτό σημαίνει ότι το κριτήριο Griffith δεν μπορεί να εφαρμοστεί ούτε σε αυτή την περίπτωση διότι προϋποθέτει εφελκυστικές τάσεις στην αιχμή της ρωγμής. Αντίθετα όταν ο προσανατολισμός της αιχμής της ρωγμής είναι μεγαλύτερος από 45^0 , τότε η κορυφή της εγκοπής δεν συμπίεζεται, με αποτέλεσμα εφελκυστικές εφαστομενικές τάσεις επί της κορυφής της εγκοπής και άρα το κριτήριο Griffith μπορεί να εφαρμοστεί. Αυτό ισχύει και για τις δυο τάξεις στοιχείων και για τους δυο τύπους φόρτισης.

7.2.7 Εφαρμογή του κριτηρίου Griffith

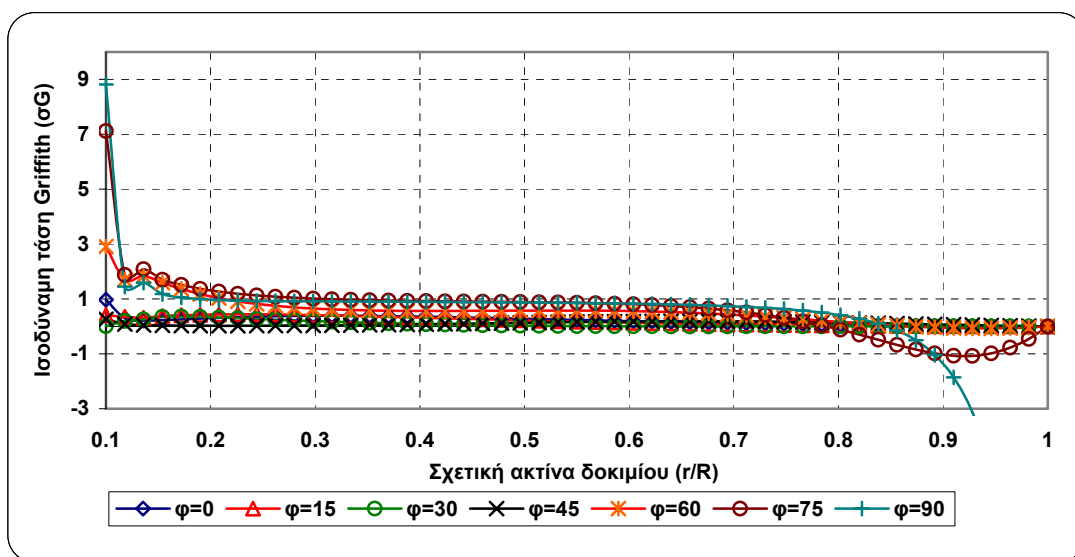
Εφαρμόζοντας το κριτήριο αστοχίας του Griffith όπως περιγράφηκε στο κεφάλαιο 4 και όμοια με την ενότητα 5.3.8, το κριτήριο μπορεί να μετασχηματιστεί σε πολικές συντεταγμένες. Τα σχήματα 7.12 και 7.13 δείχνουν την ισοδύναμη τάση Griffith για σημειακή φόρτιση για τα στοιχεία χαμηλής και υψηλής τάξης αντίστοιχα, ενώ τα σχήματα 7.14 και 7.15 δείχνουν επίσης την ισοδύναμη τάση Griffith για κατανεμημένη φόρτιση αυτή την φορά για τα στοιχεία χαμηλής και υψηλής τάξης.



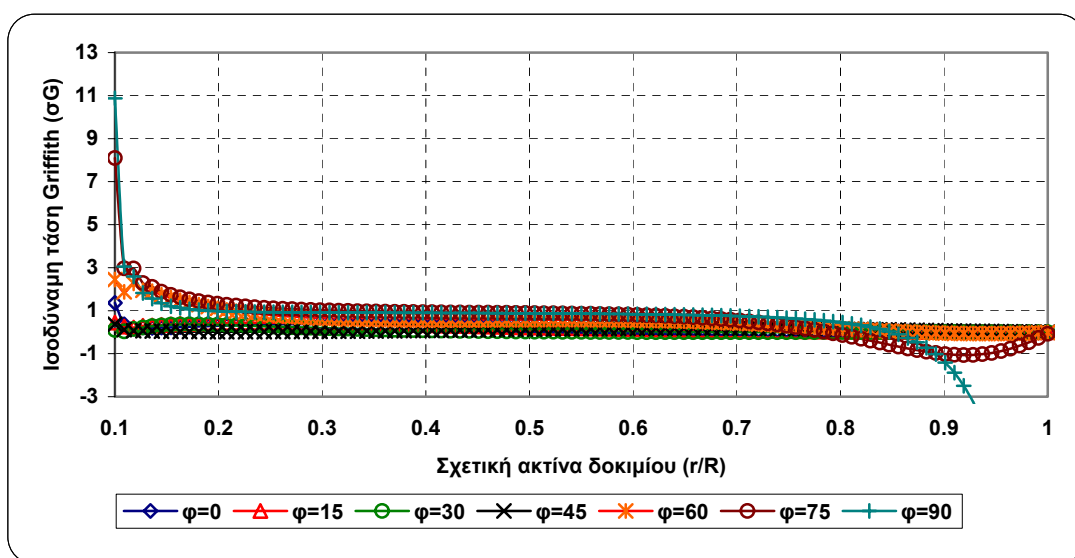
Σχήμα 7.12: Ισοδύναμη τάση Griffith για σημειακή φόρτιση και στοιχεία χαμηλής τάξης



Σχήμα 7.13: Ισοδύναμη τάση Griffith για σημειακή φόρτιση και στοιχεία υψηλής τάξης



Σχήμα 7.14: Ισοδύναμη τάση Griffith για κατανεμημένη φόρτιση και στοιχεία χαμηλής τάξης



Σχήμα 7.15: Ισοδύναμη τάση Griffith για κατανεμημένη φόρτιση και στοιχεία υψηλής τάξης

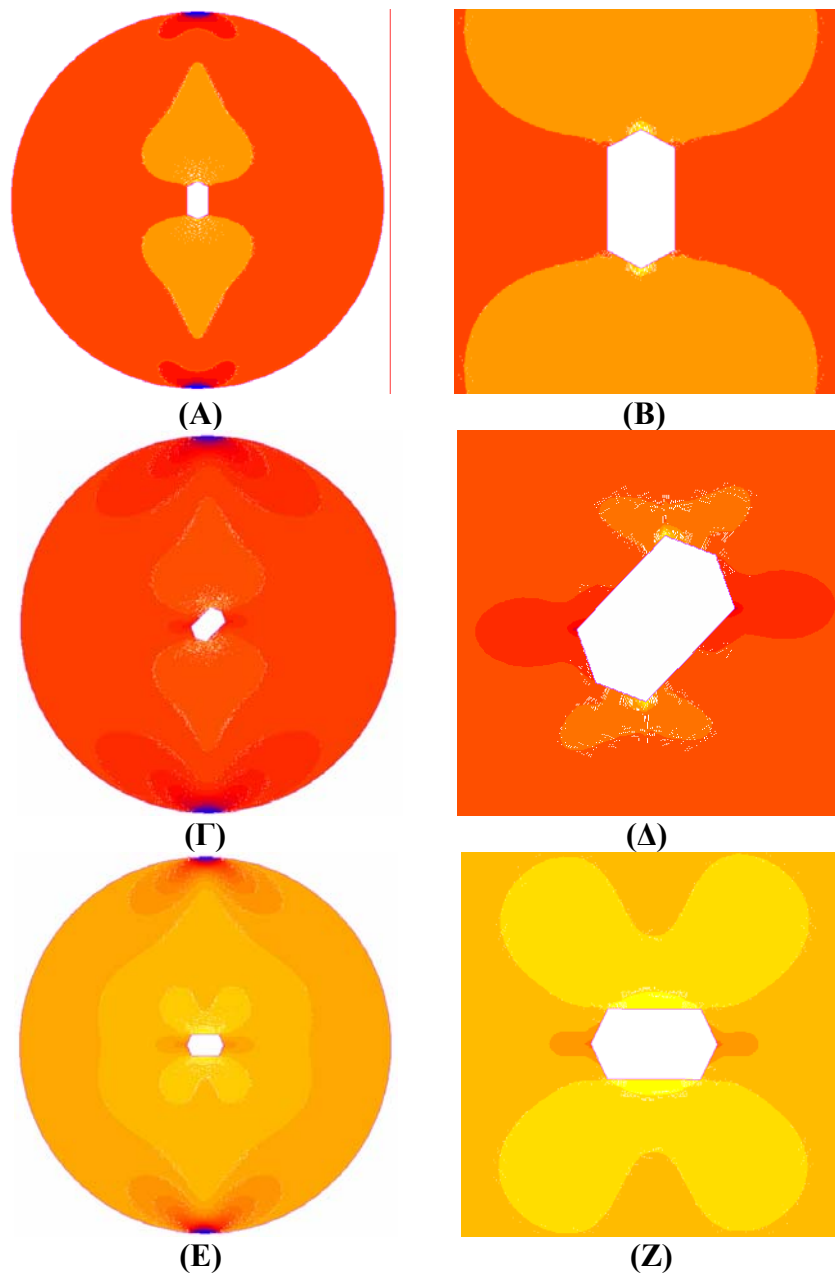
Παρατηρήσεις:

Τα σχήματα των ισοδύναμων τάσεων Griffith που προκύπτουν από την εφαρμογή του κριτηρίου αστοχίας ενισχύουν το συμπέρασμα ότι η κορυφή της εγκοπής συμπιέζεται όταν έχει προσανατολισμό $\varphi = 0^\circ, 15^\circ, 30^\circ$ και 45° . Αυτό φαίνεται από τα γραφήματα όπου φαίνονται οι θλιπτικές ισοδύναμες τάσεις Griffith. Αντίθετα όταν ο προσανατολισμός της κορυφής της εγκοπής είναι μεγαλύτερος από 45° , τότε η εγκοπή δεν συμπιέζεται. Αυτό φαίνεται από τις εφελκυστικές ισοδύναμες τάσεις Griffith στα γραφήματα και είναι μέγιστες στην κορυφή της εγκοπής. Αυτό

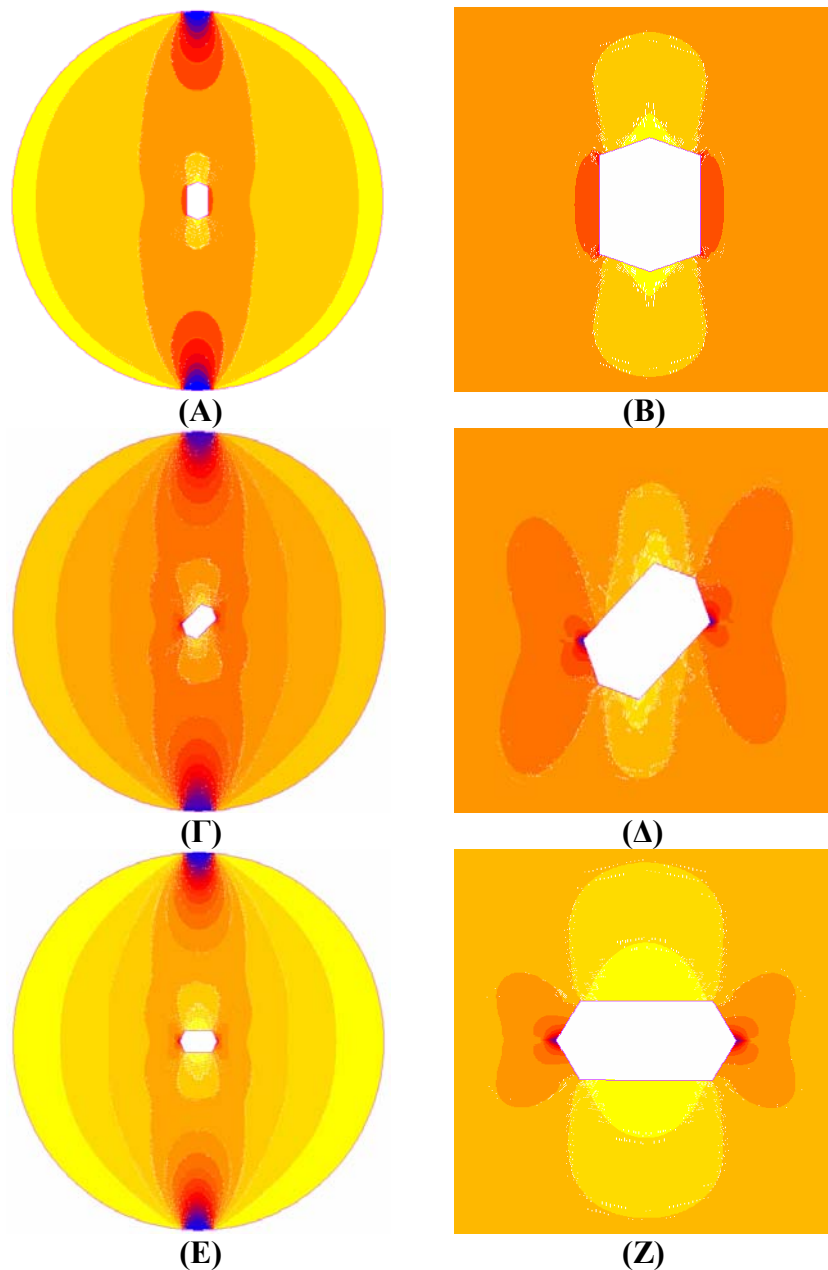
σημαίνει ότι εάν ήταν να ξεκινήσει θραύση του δίσκου, θα ξεκινούσε στην αιχμή της ρωγμής. Αυτό ισχύει και για τις δυο τάξεις στοιχείων και για τους δυο τύπους φόρτισης.

7.2.8 Ισοτασικές καμπύλες

Στα σχήματα 7.16 και 7.17 φαίνονται οι ισοτασικές καμπύλες των οριζόντιων και κατακόρυφων τάσεων όταν η εγκοπή έχει προσανατολισμό $\varphi = 0^\circ, 45^\circ$ και 90° .



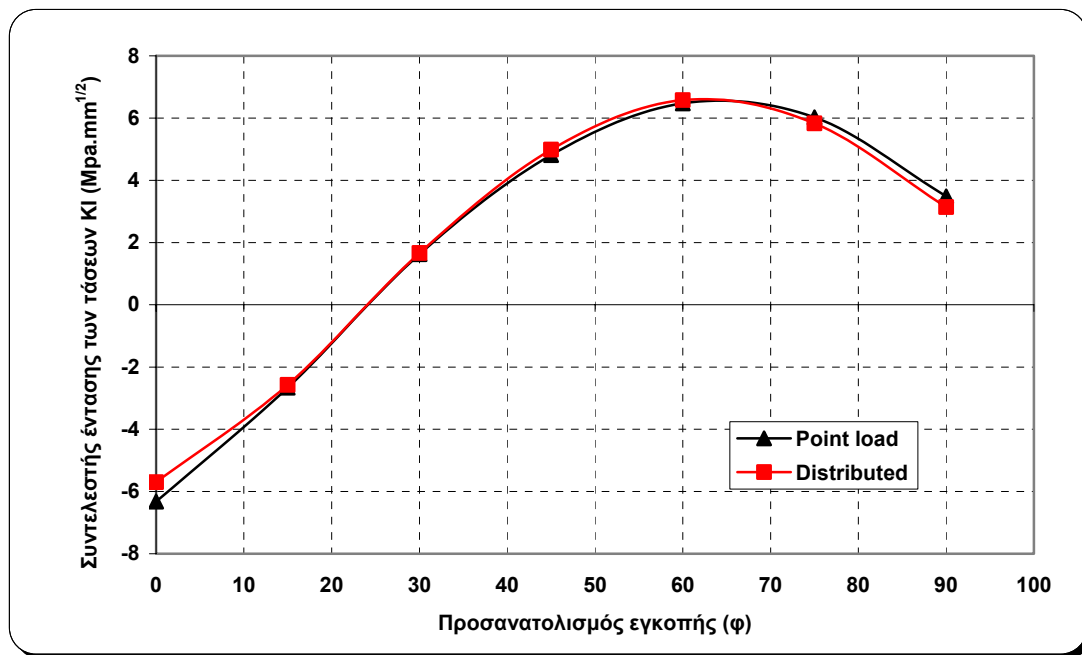
Σχήμα 7.16: Κατανομές οριζόντιων τάσεων σ_{xx} στον δίσκο και στην κορυφή της εγκοπής



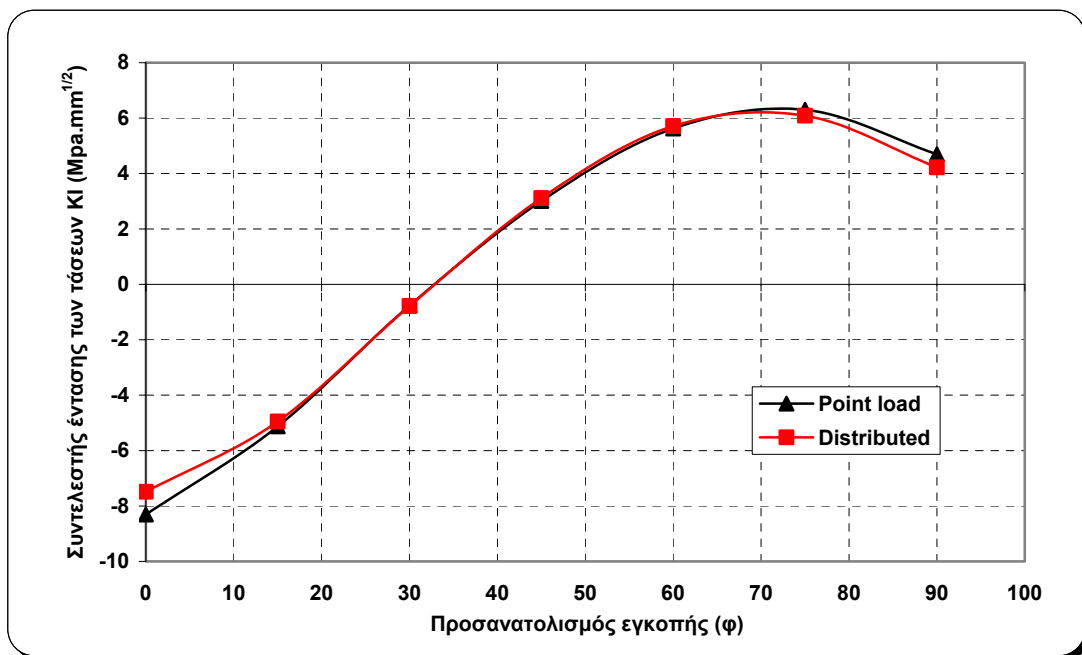
Σχήμα 7.17: Κατανομές κατακόρυφων τάσεων $\sigma_{\phi\phi}$ στον δίσκο και στην κορυφή της εγκοπής

7.2.9 Υπολογισμός συντελεστών έντασης των τάσεων

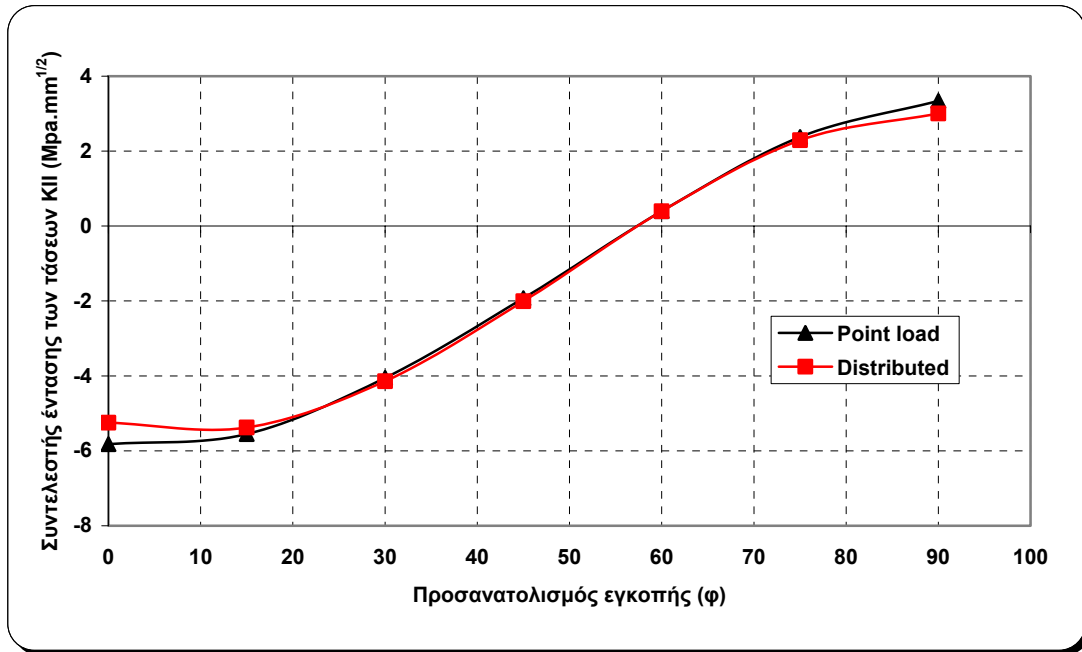
Οι συντελεστές έντασης των τάσεων υπολογίστηκαν για όλες τις περιπτώσεις προσανατολισμού της εγκοπής, ϕ . Οι σχέσεις υπολογισμού αναλύθηκαν στο κεφάλαιο 4. Τα σχήματα 7.18 και 7.19 παρουσιάζουν τον συντελεστή έντασης των τάσεων K_I για σημειακή φόρτιση και κατανεμημένη αντίστοιχα καθώς επίσης και για χαμηλής και υψηλής τάξης στοιχεία, ενώ τα σχήματα 7.20 και 7.21 παρουσιάζουν τον συντελεστή έντασης των τάσεων K_{II} για τις ίδιες περιπτώσεις.



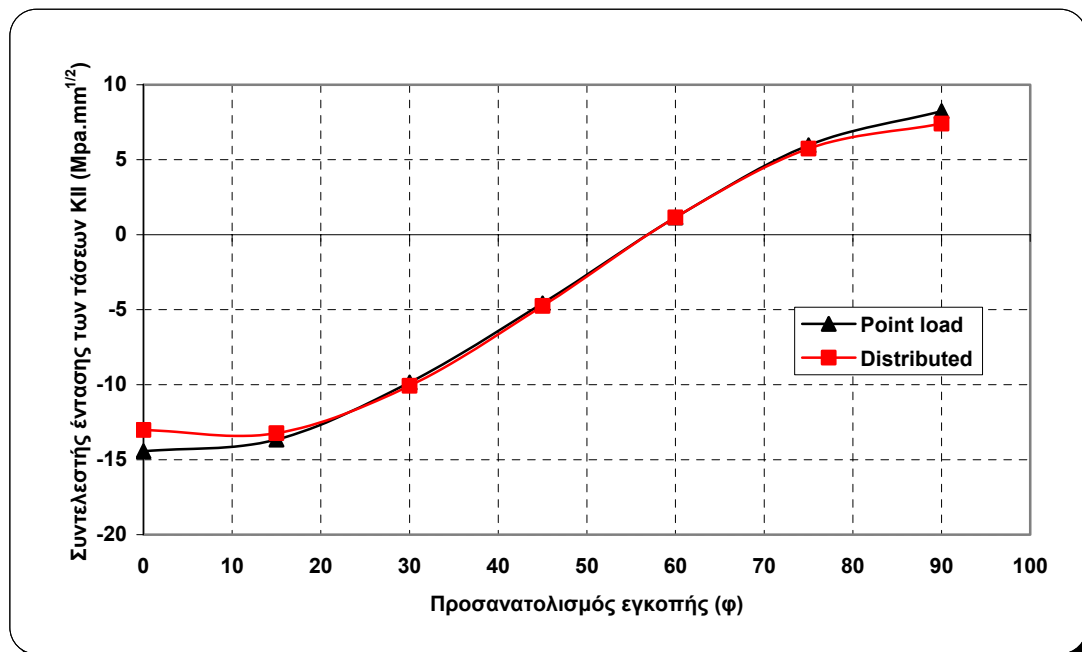
Σχήμα 7.18: Συντελεστής έντασης των τάσεων για τύπου I ρωγή και στοιχεία χαμηλής τάξης



Σχήμα 7.19: Συντελεστής έντασης των τάσεων για τύπου I ρωγή και στοιχεία υψηλής τάξης



Σχήμα 7.20: Συντελεστής έντασης των τάσεων για τύπου II ρωγή και στοιχεία χαμηλής τάξης



Σχήμα 7.21: Συντελεστής έντασης των τάσεων για τύπου II ρωγή και στοιχεία υψηλής τάξης

Παρατηρήσεις:

- Από το σχήμα 7.18 και 7.19, φαίνεται ότι ο συντελεστής έντασης των τάσεων K_I είναι αρνητικός για προσανατολισμούς της εγκοπής από 0° μέχρι 15° . Για προσανατολισμούς εγκοπής μεγαλύτερους από 15° , ο συντελεστής έντασης των

τάσεων K_I , είναι θετικός. Για τα στοιχεία υψηλής τάξης, ο συντελεστής έντασης των τάσεων είναι θλιπτικός από 0^0 μέχρι 30^0 . Αυτό γίνεται και για τους δυο τύπους φόρτισης (σημειακή και κατανεμημένη). Αυτό οδηγεί στο συμπέρασμα ότι για γωνίες περίπου μικρότερες των 30^0 , η κορυφή της εγκοπής συμπιέζεται και άρα υπάρχει αδυναμία έναρξης θραύσης στην κορυφή της εγκοπής.

- Από το σχήμα 7.20 και 7.21, φαίνεται ότι ο συντελεστής έντασης των τάσεων K_{II} είναι αρνητικός για τους προσανατολισμούς της εγκοπής από 0^0 μέχρι 45^0 . Για προσανατολισμούς της εγκοπής μεγαλύτερους από 45^0 , ο συντελεστής έντασης των τάσεων γίνεται θετικός. Αυτό γίνεται για τους δυο τύπους φόρτισης και για τα δυο είδη στοιχείων. Αυτό οδηγεί στο συμπέρασμα ότι για προσανατολισμούς από 0^0 μέχρι 45^0 , οι διατμητικές τάσεις που αναπτύσσονται στην κορυφή της εγκοπής επιδρούν παράλληλα στο επίπεδο της και σε αντίθετη κατεύθυνση.

8 Συμπεράσματα και Προτάσεις

8.1 Συμπεράσματα

Η παρούσα εργασία μελετά το πρόβλημα της αντιδιαμετρικής φόρτισης δοκιμίων με ρωγή και εγκοπή στο κέντρο τους με την βοήθεια της Μεθόδου των Πεπερασμένων Στοιχείων. Η αριθμητική επίλυση με την Μέθοδο των Πεπερασμένων Στοιχείων, πραγματοποιήθηκε σε δύο διαστάσεις με την θεώρηση επίπεδης τάσης. Η διακριτοποίηση των μοντέλων έγινε με τρόπο ώστε οι διαστάσεις τους να είναι πραγματικές. Δημιουργήθηκαν μοντέλα χωρίς τις σιαγώνες φόρτισης αλλά και με τις σιαγώνες φόρτισης χρησιμοποιώντας στοιχεία επαφής. Το υλικό προσομοιώθηκε σαν ελαστικό, ομογενές και ισότροπο. Ομοίως και η χαλύβδινη συσκευή φόρτισης η οποία χρησιμοποιήθηκε για την μεταφορά και ομοιόμορφη κατανομή του φορτίου, προσομοιώθηκε επίσης σαν ελαστική, ομογενής και ισότροπη. Τα αποτελέσματα που προέκυψαν από την αριθμητική επίλυση συγκρίθηκαν με αναλυτικές λύσεις κλειστής μορφής όπου διαπιστώθηκε η ακρίβεια της προσομοίωσης.

Η μελέτη αυτή στο πρώτο μέρος της επικεντρώνεται στην εύρεση των κατανομών των εφαπτομενικών και ακτινικών τάσεων από παραμετρική διερεύνηση της γωνίας επιβολής φορτίου (2α), ξεκινώντας από σημειακή φόρτιση μέχρι κατανεμημένη επάνω σε μήκος τόξου του δίσκου που αντιστοιχεί σε 15^0 , με μοναδιαίο βήμα σε άρρηκτο δίσκο παράλληλα, εφαρμόζεται και το κριτήριο αστοχίας του Griffith. Το δεύτερο μέρος της εργασίας επικεντρώνεται στην εύρεση των κατανομών των εφαπτομενικών και ακτινικών τάσεων από την επίλυση του δίσκου με την εισαγωγή μιας μαθηματικής ρωγμής. Υπολογίζονται οι συντελεστές έντασης των τάσεων και εφαρμόζεται το κριτήριο αστοχίας του Griffith. Το τρίτο και τελευταίο μέρος της μελέτης επικεντρώνεται στην εύρεση των κατανομών των εφαπτομενικών και ακτινικών τάσεων από την επίλυση του δίσκου με την εισαγωγή μιας εγκοπής. Υπολογίζονται οι συντελεστές έντασης των τάσεων και εφαρμόζεται το κριτήριο αστοχίας του Griffith όπως και στην προηγούμενη περίπτωση. Η επίλυση των πιο πάνω προβλημάτων έγινε με στοιχεία χαμηλής και υψηλής τάξης έτσι ώστε η μεταβολή στη κατανομή των μεγεθών να είναι πιο εμφανής.

Ανακεφαλαιώνοντας, από την εργασία αυτή προέκυψαν τα ακόλουθα συμπεράσματα:

➤ **Από την επίλυση του άρρηκτου δίσκου**

- 1 Από την επίλυση που έγινε για έλεγχο της επίπεδης κατάστασης, η διαφορά των αποτελεσμάτων που προέκυψαν με θεώρηση επίπεδης τάσης από θεώρηση επίπεδης παραμόρφωσης είναι της τάξης του τρίτου δεκαδικού ψηφίου. Επομένως η θεώρηση επίλυσης δεν επηρεάζει το αποτέλεσμα της προσομοίωσης.
- 2 Από την παραμετρική επιβολή φόρτισης παρατηρήθηκε ότι για μικρές γωνίες επιβολής φορτίου 2α , δημιουργείται μια ζώνη συγκέντρωσης τάσεων κάτω από το σημείο επιβολής των συνοριακών συνθηκών με αποτέλεσμα το δοκίμιο εάν ήταν σε εργαστηριακές συνθήκες να κινδύνευε να αστοχήσει τοπικά κάτω από το σημείο επιβολής της φόρτισης. Το φαινόμενο αυτό είναι πιο έντονο με την παρουσία των σιαγόνων φόρτισης.
- 3 Με την παραμετρική διερεύνηση της γωνίας επιβολής της φόρτισης 2α , παρατηρήθηκε ότι οι κατανομές των εφαπτομενικών και ακτινικών τάσεων στο κέντρο του άρρηκτου δίσκου μεταβάλλονται ελάχιστα. Αυτό σημαίνει ότι είτε σημειακή φόρτιση χρησιμοποιηθεί είτε κατανεμημένη, το αποτέλεσμα στο κέντρο του δίσκου θα είναι περίπου το ίδιο και άρα η έναρξη της θραύσης μπορεί να ξεκινήσει στο κέντρο του δίσκου.
- 4 Με την αλλαγή του προσανατολισμού της γραμμής μελέτης Θ , παρατηρείται ότι οι κατανομές των εφαπτομενικών και ακτινικών τάσεων είναι πιο ομοιόμορφες κατά την κατακόρυφη διεύθυνση Oy από ότι στην Ox και υπάρχει συμμετρία ως προς τους άξονες αυτούς.
- 5 Ο αναμενόμενος συντελεστής συγκέντρωσης των τάσεων q_{xx} (-2) και q_{yy} (6) για την περίπτωση του ισότροπου υλικού όπως προτείνεται από την Διεθνή Ένωση Μηχανικής Πετρωμάτων (ISRM), επαληθεύονται επακριβώς στο κέντρο του δίσκου.
- 6 Η σύγκριση που πραγματοποιήθηκε με τις αναλυτικές λύσεις κλειστής μορφής, παρατηρείται σχεδόν πλήρης σύγκλιση αριθμητικών και αναλυτικών λύσεων. Μικρή διαφορά αλλά αμελητέα είναι στο σημείο επιβολής της φόρτισης.

- 7 Από την εφαρμογή του κριτηρίου Griffith, παρατηρείται ότι η μέγιστη συγκέντρωση τάσεων είναι στο κέντρο του δίσκου και άρα η θραύση θα ξεκινούσε σίγουρα στο κέντρο του για όλες τις γωνίες επιβολής φόρτισης. Εξαίρεση αποτελεί η γωνία επιβολής φόρτισης $2\alpha = 1^\circ$ που δεν συμφωνεί με τα υπόλοιπα αποτελέσματα, όμως θα μπορούσε να θεωρηθεί ότι είναι αριθμητικό σφάλμα αφού παρουσιάζεται στην επίλυση.
- 8 Από την επίλυση με σιαγώνες φόρτισης, παρατηρείται η δημιουργία μιας ζώνης διάτμησης ακριβώς κάτω από το σημείο επαφής του χάλυβα με τον δίσκο.

➤ **Από την επίλυση του ρηγματωμένου δίσκου**

- 9 Από την επίλυση του ρηγματωμένου δίσκου, παρατηρείται τοπική συγκέντρωση τάσεων στην αιχμή της ρωγμής. Οι τάσεις αυτές έχουν εφελκυστικό χαρακτήρα όταν ο προσανατολισμός της ρωγμής φ , είναι μεγαλύτερος από 45° και θλιπτικό χαρακτήρα όταν ο προσανατολισμός της ρωγμής είναι μικρότερος από 45° . Αυτό σημαίνει ότι η ρωγμή κλείνει και δεν επιτρέπει την διάδοση της καθώς επίσης και την εφαρμογή του κριτηρίου αστοχίας Griffith.
- 10 Παρατηρείται συμμετρία στη κατανομή του τασικού πεδίου ως προς τον κύριο άξονα ρωγμής αφού θεωρείται σαν επίπεδη έλλειψη.
- 11 Όταν οι ρωγμές είναι κεκλιμένες, παρατηρείται συγκέντρωση τάσεων εφελκυστικού χαρακτήρα στο πάνω άκρο της αιχμής και όχι μπροστά στην αιχμή της ρωγμής. Αυτό είναι σε πλήρη συμφωνία με την θεωρία του Griffith που υποστηρίζει ότι όταν μια κεκλιμένη ρωγμή υποβληθεί σε θλιπτικό εντατικό πεδίο, η ρωγμή δεν θα ξεκινήσει από το επίπεδο της να διαδίδεται αλλά σε μια γωνία σε σχέση με αυτό.
- 12 Η εύρεση των συντελεστών έντασης των τάσεων, οδηγεί στο συμπέρασμα ότι οι ρωγμές είναι τύπου I μόνο όταν ο προσανατολισμός της ρωγμής είναι 0° και 90° . Για οποιαδήποτε άλλη γωνία μέσα σε αυτό το πεδίο τιμών, η ρωγμή είναι μικτού τύπου, I και II. Επίσης για γωνίες προσανατολισμού των ρωγμών μικρότερες από 60° , ο συντελεστής έντασης των τάσεων τύπου I είναι θλιπτικός. Αυτό ενισχύει το προηγούμενο συμπέρασμα του κλεισίματος της ρωγμής με την ανάπτυξη θλιπτικού τασικού πεδίου επί της αιχμής της ρωγμής.
- 13 Από την επίλυση με σιαγώνες και την παραμετρική διερεύνηση επιρροής του μήκους της ρωγμής $2L$, παρατηρήθηκε το κλείσιμο της ρωγμής και σε αυτή την

περίπτωση όταν ο προσανατολισμός ήταν μικρότερος από 45^0 . Ενδιαφέρον παρουσίασε το μήκος ρωγμής 10 mm όπου ο προσανατολισμός δεν επηρέασε το κλείσιμο της ρωγμής ούτε για την περίπτωση των 90^0 . Αυτό οφείλεται στην περιστροφή της έλλειψης κατά την επιβολή της φόρτισης. Η περιστροφή αυτή δεν είναι συμμετρική ως προς τον άξονα της και άρα η ρωγμή κλείνει για όλους τους προσανατολισμούς που διερευνήθηκαν, μιας και έχει και πολύ μικρό μήκος $2L$.

- 14 Σε όλες τις περιπτώσεις επίλυσης (χωρίς και με σιαγώνες φόρτισης), παρατηρήθηκε τοπική συγκέντρωση τάσεων γύρω από την αιχμή της ρωγμής, είτε θλιπτικού είτε εφελκυστικού χαρακτήρα. Στο κέντρο του δίσκου όμως επικρατούσε μέγιστο εντατικό πεδίο. Αυτό οδηγεί στο συμπέρασμα ότι η παρουσία τουλάχιστον μιας ρωγμής που εξετάστηκε δεν είναι ικανή να επηρεάσει την έναρξη της θραύσης στο κέντρο του δίσκου, χωρίς να σημαίνει ότι δεν θα ξεκινούσε να διαδίδεται και η ρωγμή από την αιχμή της δευτερογενώς.
- 15 Από την εφαρμογή του κριτηρίου Griffith, παρατηρείται ότι η μέγιστη συγκέντρωση τάσεων είναι στην αιχμή της ρωγμής και άρα η θραύση θα ξεκινούσε σίγουρα από την αιχμή της για τις περιπτώσεις όπου $\varphi > 45^0$. Σημειώνεται ότι ο έλεγχος του κριτηρίου Griffith έγινε μόνο στο επίπεδο της ρωγμής ξεκινώντας από τη αιχμή προς το εξωτερικό σύνορο του δίσκου. Ο έλεγχος από το κέντρο του δίσκου προς το εξωτερικό σύνορο του δεν πραγματοποιήθηκε αφού έγινε στην περίπτωση του άρρηκτου δίσκου και αποδείχτηκε η θραύση στο κέντρο. Τα όρια εφαρμογής του κριτηρίου σε αυτή την περίπτωση είναι στο αν η θραύση θα ξεκινούσε στην αιχμή της ρωγμής για τους προκαθορισμένους προσανατολισμούς της όπως μελετήθηκε.
- 16 Τελικά ο χειρότερος προσανατολισμός της ρωγμής αποδείχτηκε να είναι στις 45^0 όπου η συγκέντρωση τάσεων είναι μέγιστη και θλιπτικού χαρακτήρα.
- 17 Η προσομοίωση με τις σιαγώνες φόρτισης φαίνεται να προσεγγίζει πιο καλά την πραγματικότητα και προκύπτει ότι η παρουσία ρωγμών στον δίσκο δεν είναι ικανές να επηρεάσουν την θραύση στο κέντρο του. Από την ανάλυση που πραγματοποιήθηκε, φαίνεται να δημιουργείται συγκέντρωση τάσεων γύρω από την αιχμή της ρωγμής, αλλά δεν είναι μεγαλύτερες σε μέγεθος από αυτές που δημιουργούνται στο κέντρο του δίσκου. Αυτό οδηγεί στο συμπέρασμα ότι είναι

η πιθανή έναρξη δευτερογενούς θραύσης στην αιχμή της προκαθορισμένης ρωγμής αλλά δεν θα επηρεάσει την θραύση στο κέντρο του δίσκου.

➤ **Από την επίλυση του δίσκου με εγκοπή**

- 18** Από την επίλυση του δίσκου με εγκοπή, παρατηρείται τοπική συγκέντρωση τάσεων στην κορυφή της εγκοπής. Οι τάσεις αυτές έχουν εφελκυστικό χαρακτήρα όταν ο προσανατολισμός της εγκοπής φ , είναι μεγαλύτερος από 45^0 και θλιπτικό χαρακτήρα όταν ο προσανατολισμός της εγκοπής είναι μικρότερος από 45^0 . Αυτό σημαίνει ότι η κορυφή της εγκοπής συμπίεζεται και δεν επιτρέπει την έναρξη θραύσης στην κορυφή της καθώς επίσης και την εφαρμογή του κριτηρίου αστοχίας Griffith.
- 19** Όταν οι εγκοπές είναι κεκλιμένες, παρατηρείται συγκέντρωση τάσεων εφελκυστικού χαρακτήρα στο πάνω άκρο της εγκοπής και όχι στην κορυφή της. Αυτό είναι και πάλι σε πλήρη συμφωνία με την θεωρία του Griffith που υποστηρίζει ότι όταν μια κεκλιμένη ρωγμή υποβληθεί σε θλιπτικό εντατικό πεδίο, η εγκοπή δεν θα ξεκινήσει από το επίπεδο της να διαδίδεται αλλά σε μια γωνία σε σχέση με αυτό.
- 20** Η εύρεση του συντελεστή έντασης των τάσεων K_I , είναι αρνητικός για προσανατολισμούς της εγκοπής από 0^0 μέχρι 30^0 . Αυτό οδηγεί στο συμπέρασμα ότι για γωνίες περίπου μικρότερες των 30^0 , η κορυφή της εγκοπής συμπίεζεται και άρα υπάρχει αδυναμία έναρξης θραύσης στην κορυφή της εγκοπής. Η εύρεση του συντελεστή έντασης των τάσεων K_{II} όμως, είναι αρνητικός για τους προσανατολισμούς της εγκοπής από 0^0 μέχρι 45^0 . Αυτό σημαίνει ότι οι διατμητικές τάσεις που αναπτύσσονται στην κορυφή της εγκοπής επιδρούν παράλληλα στο επίπεδο της και σε αντίθετη κατεύθυνση. Δηλαδή εάν η εγκοπή ήταν σε προσανατολισμό από 0^0 μέχρι 45^0 και ήταν να ξεκινήσει θραύση στην κορυφή της εγκοπής, αυτή θα ξεκινούσε λόγω διάτμησης και όχι λόγω εφελκυσμού.

8.2 Προτάσεις

Για την περαιτέρω μελέτη του προβλήματος της αντιδιαμετρικής φόρτισης δίσκων με ρωγμή και εγκοπή στο κέντρο τους, προτείνεται:

- Η εύρεση αναλυτικής λύσης που λαμβάνει υπόψη τις ρωγμές και τις εγκοπές για να μπορέσει να γίνει δυνατή η εφαρμογή της παρούσας εργασίας μέσω της σύγκρισης των αποτελεσμάτων που επιτεύχθηκαν με την Μέθοδο των Πεπερασμένων Στοιχείων.
- Η αλλαγή στις ιδιότητες του υλικού έτσι ώστε να ανταποκρίνεται στις πραγματικές συνθήκες κάποιου πετρώματος για την λεπτομερέστερη εξαγωγή αποτελεσμάτων σχετικά με το πεδίο τάσεων και παραμορφώσεων.
- Η μελέτη λαμβάνοντας υπόψη τις τρεις διευθύνσεις ανισοτροπίας του ή και η μελέτη του προβλήματος με τη θεώρηση εγκάρσιας ισοτροπίας. Επίσης το πρόβλημα τα μπορούσε να μελετηθεί όσο αφορά την επίδραση στο μέγεθος (size effect) των δοκιμίων, με βάση την θεωρία του Carpinteri. καθώς είναι γνωστό ότι οι αντοχές των υλικών εξαρτώνται και από το μέγεθος των δοκιμίων.
- Η εκτέλεση εργαστηριακών δοκιμών όπου είναι δυνατό, (διότι για το πρόβλημα με την μαθηματική ρωγμή είναι σχεδόν αδύνατο να μορφοποιηθούν δοκίμια), για την σύγκριση των αριθμητικών αποτελεσμάτων που λήφθηκαν με την Μέθοδο των Πεπερασμένων Στοιχείων.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Ελληνική Βιβλιογραφία

1. **Αγιουτάντης, Ζ.**, “Στοιχεία Γεωμηχανικής και Μηχανική Πετρωμάτων”, Εκδόσεις «Ιων», Αθήνα 2002.
2. **Βαρδουλάκης, Ι., Σ. Κουρκουλής, Γ. Εξαδάκτυλος, Α. Ροζάκης**, “Μηχανικές ιδιότητες και συμβατότητα φυσικών δομικών λίθων στα αρχαία μνημεία: Το Διονυσιακό μάρμαρο”, Διεπιστημονική Ημερίδα «Ο Δομικός Λίθος στα Μνημεία», ΙΓΜΕ, Αθήνα, Ελλάδα, 2002.
3. **Δημοπούλου, Μ.** “Θεωρητική, Πειραματική και Αριθμητική Διερεύνηση της Αντιδιαμετρικής Φόρτισης Δακτυλίου σε Μάρμαρο Διονύσου”, Μεταπτυχιακή διατριβή, Χανιά, 2004.
4. **Θεοχάρης, Π.**, “Πειραματική Μηχανική των Υλικών”, Εθνικό Μετσόβειο Πολυτεχνείο, Αθήνα, 1970.
5. **Κακλής, Ν.Κ.**, “Χαρακτηρισμός ανισοτροπίας και αντοχής των πετρωμάτων με τη δοκιμή αντιδιαμετρικής θλίψεως δίσκου”, Διδακτορική διατριβή, Πολυτεχνείο Κρήτης, Χανιά, 2002.

Διεθνής Βιβλιογραφία

1. **Barla, G., N. Innaurato**, “Indirect Tensile Testing of Anisotropic Rocks”, Rock Mechanics, Vol. 5, pp. 215-230, 1973.
2. **Barla, G., L. Goffi**, “Direct Tensile Testing of Anisotropic Rocks”, Proceedings of the Third International Congress of Rock Mechanics, Vol. 2, Part A, Denver, pp. 93-98, 1974.
3. **Berenbaum R., I. Brodie**, “Measurement of the Tensile Strength of Brittle Materials”, British Journal of Applied Physics, Vol. 10, pp. 281-287, 1959.
4. **Bieniawski Z.T, I. Hawkes**, “Suggested Methods for Determining Tensile Strength of Rock Materials”, Int. J. Rock Mech. Min. Sci and Geomech. Abstr., 15, pp. 99-103, 1978.

5. **Brady B. H. G. and E. T. Brown**, “*Rock Mechanics – For Underground Mining*”, Chapman & Hall, 1985.
6. **Brown, E.T.**, “*Rock Characterization Testing and Monitoring*”, Pergamon Press, 1981.
7. **Carneiro F.L.L, A. Barcillos**, “*Tensile Strength of Concrete*”, Bulletin No. 13, International Association of Testing and Research Laboratories for Materials and Structures, pp. 97-123, Paris, 1953.
8. **Cook R., D. Malkus and M. Plesha**, “*Concepts and Applications of Finite Element Analysis*”, J. Wiley, 1989.
9. **Dally J.W, W.F Riley**, “*Experimental Stress Analysis*”, Third Edition, McGraw Hill, 1991.
10. **Desai C. S. and J. F. Abel**, “*Intoduction to the Finite Element Method – A Numerical Method for Engineering Analysis*”, East – West Press, 1972.
11. **Exadaktylos, G.E., I. Vardoulakis, S.K. Kourkoulis**, “*Influence of Nonlinearity and Double Elasticity on Flexure of Rock Beams – II. Characterization of Dionysos Marble*”, Int. J. Sol. Struct., 38, pp. 4119-4145, 2001.
12. **Exadaktylos G.E, K.N. Kaklis**, “*Applications of An Explicit Solution for the Transversely Isotropic Circular Disk Compressed Diametrically*”, Int. J. Rock Mech. Min. Sci and Geomech. Abstr., 38, pp. 227-343, 2001.
13. **Fagan M. J.**, “*Finite Element Analysis – Theory and Practice*”, Longman Group, 1996.
14. **Felippa C. A.**, “*An Introduction to Finite Element Method*”, (Lecture notes), Department of Aerospace Engineering Sciences, Colorado University, 2003.
15. **Freund L. B.**, “*Dynamic Fracture Mechanics*”, Cambridge University Press, 1978.
16. **Gere, J.M., S.P. Timoshenko**, “*Mechanics of Materials*”, 4th Edition, PWS Publishing Company, 1997.
17. **Griffith A. A.**, “*The Phenomenon of Rapture and Flow in Solids*”, Phil. Trans. R. Soc. London, Series A, pp. 163-198, 1921.
18. **Griffith A. A.**, “*Theory of Rapture*”, Proc.1st Int. Congr. Applied. Mech., pp. 55-63, 1924.
19. **Guo, H., N.I. Aziz**, “*A simple Method of Measuring rock Fracture Toughness Using the Brazilian Test Method*”, Proceedings of the 11th International

- Conference on Ground Control in Mining, University of Wollongong, NSW, Australia, 1993.
20. **Hobbs, D.W.**, “*The Tensile Strength of Rocks*”, Int. J. Rock Mech. Min. Sci and Geomech. Abstr., 1, pp. 385-396, 1964.
 21. **Hobbs, D.W.**, “*An Assessment of a Technique for Determining the Tensile Strength of Rock*” Brit. J. Appl. Phys., 16, pp. 259-268, 1965.
 22. **Hondros, G.**, “*The Evaluation of Poisson’s Ratio and the Modulus of Materials of a Low Tensile Resistance by the Brazilian (indirect tensile) Test with Particular Reference to Concrete*”, Aust. J. Appl. Sci., 10, pp. 243-264, 1959.
 23. **Hudson, J.A., E.T. Brown, F. Rummel**, “*The Controlled Failure of discs and Rings Loaded in Diametral Compression*”, Int. J. Rock Mech. Min. Sci., 9, pp. 241-248, 1972.
 24. **Hwang C. G., P. A. Wawrzynek, A. K. Tayebi and A. R. Ingraffea**, “*On the Virtual Crack Extension Method for Calculation of the Rates of Energy Release Rate*”, Engineering Fracture Mechanics Vol. 59, No 4, pp. 521-542, 1998.
 25. **Jaeger J.C, N.G.W. Cook**, “*Fundamentals of Rock Mechanics*”, Chapman and Hall, London, 2nd Edition, 1976.
 26. **Liebowitz H., J. S. Sandhu, J. D. Lee and C. M. Menandro**, “*Computational Fracture Mechanics: Research and Application*”, Engineering Fracture Mechanics, Vol. 50, No 5/6, pp. 653-670, 1995.
 27. **Ling W. and H. Stolarski**, “*On Elasto-Plastic Finite Element Analysis of Some Frictional Contact Problems with Large Sliding*”, Engineering Computations, Vol. 14, No 5, pp. 558-580, 1997.
 28. **Mark A. J.**, “*A Plane Stress Finite Element Model for Elastic-Plastic Mode I/II Crack Growth*”, Department of Mechanical and Nuclear Engineering, Kansas State University, 1998.
 29. **Mellor, M., I. Hawkes**, “*Measurement of Tensile Strength by Diametral Compression of Discs and Annuli*”, Engineering Geology, 5, pp. 173-225, 1971.
 30. **Msc engineering group**, “*Marc-Mentat, 2000 Manuals*”, Theory and User Information, 2000.
 31. **Muskhelishvili, N.I.**, “*Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity*”, P. Noordhoff Ltd., Groningen-The Netherlands, 1964.
 32. **Papadopoulos G. A.**, “*Fracture Mechanics - The Experimental Method of Caustics and The Determination of Criterion of Fracture*”, Springer Verlag, 1992.

33. **Prodnikov A.P, Yu.A Brychkov, O.I Maricher**, “*Integrals and Series-Elementary Functions*”, (Translated from Russian), Vol. 1, Gordon and Breach Science Publishers, Amsterdam, 1986.
34. **Reddy J.N**, “*An Introduction to the Finite Element Method*”, Second Edition, McGraw Hill, 1984.
35. **Rocco C., G. Guinea, J. Planas, M. Elices**, “*Mechanisms of Rapture in Splitting Tests*”, ACI Materials Journal, pp. 52-60, 1999.
36. **Sarris E., K.N, Kaklis, Z. Agioutantis, S. Kourkoulis**, “*Numerical Simulation of the Cracked Brazilian Disk Under Diametrical Compression*”, Proceedings of the 7th International Workshop on Bifurcation, Instabilities and Degradation in Geomechanics, pp.84, Chania, Crete, 2005.
37. **Saxena A.**, “*Non Linear Fracture Mechanics for Engineers*”, 1998.
38. **Shih C.F, R.J Asaro**, “*Elastic-Plastic Analysis of Cracks on Bimaterial Interfaces: Part I-Small Scale Yielding*”, Journal of Applies Mechanics, Vol 55, pp. 299-316, 1998.
39. **Swedlow J. L.**, “*Criteria for Growth of the Angled Crack*”, Cracks and Fractures, ASTM STP 601, pp. 506-521, 1976.
40. **Timoshenko, S.P., J.N. Goodier**, “*Theory of Elasticity*”, 3rd Edition, International Students Edition, 1970.
41. **Tirosh J., E. Catz**, “*Mixed Mode Fracture Angle and Fracture Locus of Materials Subjected to Compressive Loading*”, Engineering Fracture Mechanics, Vol. 14, pp. 27-38, 1981.
42. **Vutukuri, V.S., R.D. Lama and S.S Saluja**, “*Handbook on Mechanical Properties of Rocks*”, Series on Rock and Soil Mechanics, Vol. 1, Trans Tech Publications, 1974.
43. **Wang, Q.Z., X.M. Jia, S.Q Kou, Z.X. Zhang, P.A Lindqvist**, , “*The Flattened Brazilian Disc Specimen Used for Testing Elastic Modulus, Tensile Strength and Fracture Toughness of Brittle Rocks: Analytical and Numerical Results*”, Int. J. Rock Mech. Min. Sci., 41, pp. 245-253, 2004.
44. **Whittaker, B.N., R.N. Singh, and G. Sun**, “*Rock Fracture Mechanics*”, Elsevier Science Publishers B.V., Amsterdam, the Netherlands, 1992.