

---

Θα ήθελα να εκφράσω τις ευχαριστίες μου σε όλους όσους βοήθησαν για την  
εκπόνηση και ολοκλήρωση αυτής της διατριβής.

## Περιεχόμενα

<b>ΕΙΣΑΓΩΓΗ.....</b>	<b>4</b>
ΓΙΑΤΙ ΧΡΕΙΑΖΟΜΑΣΤΕ ΤΑ ΑΣΑΦΗ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΤΥΠΟΥ 2 .....	4
ΤΙ ΑΚΡΙΒΩΣ ΕΙΝΑΙ ΕΝΑ ΑΣΑΦΕΣ ΣΥΣΤΗΜΑ;.....	5
ΔΙΑΦΟΡΕΣ ΑΣΑΦΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΤΥΠΟΥ 1 ΚΑΙ 2 .....	6
ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ ΕΦΑΡΜΟΓΗΣ ΑΣΑΦΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΤΥΠΟΥ 2 .....	6
ΔΟΜΗ ΤΗΣ ΕΡΓΑΣΙΑΣ .....	7
<b>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1 .....</b>	<b>8</b>
<b>ΑΣΑΦΗ ΣΥΝΟΛΑ ΤΥΠΟΥ 2 .....</b>	<b>8</b>
1.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ .....	8
1.2 ΟΡΙΣΜΟΣ ΕΝΟΣ ΑΣΑΦΟΥΣ ΣΥΝΟΛΟΥ ΤΥΠΟΥ 2 .....	9
1.3 ΠΡΑΞΕΙΣ ΣΕ ΑΣΑΦΗ ΣΥΝΟΛΑ ΤΥΠΟΥ 2 .....	14
1.4 ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΑΣΑΦΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΣΥΜΜΕΤΟΧΗΣ .....	16
1.5 EMBEDDED ΣΥΝΟΛΑ ΤΥΠΟΥ 1 ΚΑΙ ΤΥΠΟΥ 2.....	18
1.6 UPPER AND LOWER MEMBERSHIP FUNCTIONS .....	20
<b>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 .....</b>	<b>21</b>
<b>ΑΣΑΦΕΙΣ ΣΧΕΣΕΙΣ ΤΥΠΟΥ 2 .....</b>	<b>21</b>
2.1 ΣΧΕΣΕΙΣ ΣΥΝΟΛΩΝ ΓΕΝΙΚΑ .....	21
2.2 ΣΧΕΣΕΙΣ ΚΑΙ ΣΥΝΘΕΣΕΙΣ ΣΤΟΝ ΙΔΙΟ ΠΑΡΑΓΟΜΕΝΟ ΧΩΡΟ .....	23
2.3 ΣΧΕΣΕΙΣ ΚΑΙ ΣΥΝΘΕΣΕΙΣ ΣΕ ΔΙΑΦΟΡΕΤΙΚΟΥΣ ΠΑΡΑΓΟΜΕΝΟΥΣ ΧΩΡΟΥΣ .....	25
2.4 ΣΥΝΘΕΣΗ ΕΝΟΣ ΣΥΝΟΛΟΥ ΜΕ ΜΙΑ ΣΧΕΣΗ.....	26
2.5 ΚΑΡΤΕΣΙΑΝΟ ΓΙΝΟΜΕΝΟ ΑΣΑΦΩΝ ΣΥΝΟΛΩΝ ΤΥΠΟΥ 2 .....	27
<b>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 .....</b>	<b>28</b>
<b>ΑΣΑΦΗ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΤΥΠΟΥ 2.....</b>	<b>28</b>
3.1 ΓΕΝΙΚΑ ΓΙΑ ΤΑ ΑΣΑΦΗ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΤΥΠΟΥ 2 .....	28
3.2 ΜΗΧΑΝΙΣΜΟΣ ΕΞΑΓΩΓΗΣ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΟΣ ΣΕ ΕΝΑ ΑΣΑΦΕΣ ΣΥΣΤΗΜΑ ΤΥΠΟΥ 2 .....	30
3.2.1 Εξαγωγή συμπεράσματος σε interval ασαφή συστήματα.....	32
3.3 ΜΕΙΩΣΗ ΤΥΠΟΥ (TYPE REDUCTION) ΣΕ ΕΝΑ ΑΣΑΦΕΣ ΣΥΣΤΗΜΑ ΤΥΠΟΥ 2 .....	35
3.3.1 Centroid Type Reduction .....	38
3.3.2 Height Type Reduction.....	40
3.3.3 Center-of-sets Type Reduction .....	42
3.3.4 Υπολογιστική πολυπλοκότητα .....	43
3.4 ΜΕΙΩΣΗ ΤΥΠΟΥ ΣΕ INTERVAL ΑΣΑΦΗ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΤΥΠΟΥ 2 .....	44
3.4.1 Centroid type reduction .....	46
3.4.2 Height type reduction.....	47
3.4.3 Centers-of-sets type reduction .....	47
3.5 ΑΠΟΣΑΦΟΠΟΙΗΣΗ.....	49
3.6 ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ .....	51
<b>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4 .....</b>	<b>55</b>
<b>ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΑΣΑΦΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΤΥΠΟΥ 2.....</b>	<b>55</b>
4.1 ΓΕΝΙΚΑ .....	55
4.2 ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΑΣΑΦΩΝ ΣΥΝΟΛΩΝ ΤΥΠΟΥ 2 ΣΤΗΝ ΛΗΨΗ ΑΠΟΦΑΣΕΩΝ .....	56
4.2.1 Εισαγωγικά.....	56
4.2.2 Παρουσίαση προβλήματος.....	57
4.2.3 Παράδειγμα .....	57
4.3 ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΑΣΑΦΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΤΥΠΟΥ 2 ΣΤΟΝ ΕΛΕΓΧΟ ΚΙΝΗΣΗΣ ΕΝΤΡΟΧΩΝ ΡΟΜΠΟΤ .....	60
4.3.1 Εισαγωγικά.....	60
4.3.2 Βασικές αρχές ασαφούς ελεγκτή .....	61
4.3.3 Δομή ιεραρχικού ασαφούς ελεγκτή .....	62

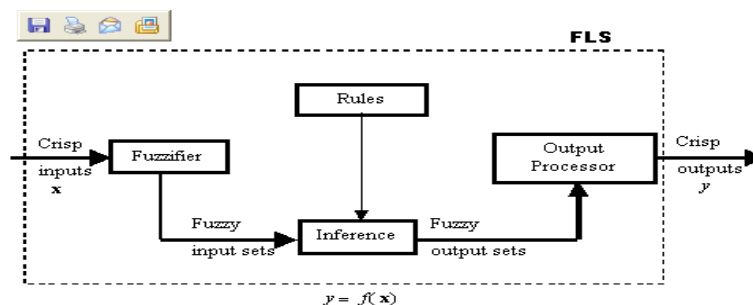
4.3.4 Ανάλυση κατώτερου επιπέδου ελεγκτών .....	63
4.3.4.1 Ελεγκτές ρύθμισης τροχιάς σύμφωνα με δεξιό και αριστερό άκρο..	63
4.3.4.2 Ελεγκτής αποφυγής εμποδίων .....	64
4.3.4.3 Ελεγκτής αναζήτησης σημείου στόχου.....	65
4.3.5 Ανάλυση ελεγκτή ανώτερου επιπέδου.....	65
4.3.6 Συμπεράσματα-αποτελέσματα.....	67
<b>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5 .....</b>	<b>70</b>
<b>ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΣΗ-ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ.....</b>	<b>70</b>
5.1 ΣΥΝΟΨΗ ΕΡΓΑΣΙΑΣ .....	70
5.2 ΔΙΑΘΕΣΙΜΟ ΛΟΓΙΣΜΙΚΟ .....	70
<b>ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ.....</b>	<b>71</b>

## Εισαγωγή

### *Γιατί χρειαζόμαστε τα ασαφή συστήματα τύπου 2*

Η αρχική ασαφής λογική (**fuzzy logic**) που θεμελιώθηκε από τον Zadeh κρίνεται ανίκανη σε ορισμένες περιπτώσεις να χειριστεί αβεβαιότητες. Με τον όρο «χειριστεί» εννοούμε την μοντελοποίηση και την ελαχιστοποίηση της επίδρασης των αβεβαιοτήτων. Βέβαια το γεγονός ότι τα αρχικά ασαφή συστήματα-τύπου 1- δεν μπορούν να το κάνουν αυτό ακούγεται περίεργο καθώς η ίδια λέξη ασαφές(fuzzy) εμπεριέχει την έννοια της αβεβαιότητας. Η προέκταση των ασαφών συστημάτων τύπου 1(ΑΣ1 για συντομία)-τα ασαφή συστήματα τύπου 2(ΑΣ2) δηλαδή που θα παρουσιάσουμε σε αυτήν την εργασία-έχει αυτήν την δυνατότητα της μοντελοποίησης των αβεβαιοτήτων και την ελαχιστοποίηση των επιδράσεων τους. Και αν όλες οι αβεβαιότητες εξαφανιστούν τα ασαφή συστήματα τύπου 2 μετατρέπονται σε ασαφή συστήματα τύπου 1 με τον ίδιο τρόπο που η πιθανότητα μετατρέπεται σε ντετερμινισμό όταν εξαφανιστεί η τυχαιότητα.

Η δομή ενός ασαφούς συστήματος παρουσιάζεται παρακάτω. Ο μηχανισμός ασαφοποίησης(**fuzzifier**),ο μηχανισμός εξαγωγής συμπεράσματος (**inference mechanism**) που συνδέεται άρρηκτα με μια βάση κανόνων και η επεξεργασία για την παραγωγή της εξόδου(output processor) περιλαμβάνει πράξεις με ασαφή σύνολα που χαρακτηρίζονται από τις συναρτήσεις συμμετοχής(**membership functions**).



Σχήμα 1 Δομή ασαφούς συστήματος

Ένα ασαφές σύστημα που περιγράφεται αποκλειστικά με όρους ασαφών συνόλων τύπου 1 ονομάζεται ασαφές σύστημα τύπου 1(ΑΣ1) ,ενώ όταν χρησιμοποιείται ένα τουλάχιστον ασαφές σύνολο τύπου 2 τότε αποκαλείται ασαφές σύστημα τύπου 2(ΑΣ2). Ο επεξεργαστής εξόδου για ένα ΑΣ1 είναι ένας απλός αποσαφοποιητής που μετασχηματίζει ένα ασαφές σύνολο τύπου 1 σε έναν αριθμό. Αντίθετα σε ένα ΑΣ2 αποτελείται από δύο μέρη. Πρώτα τα ασαφή σύνολα τύπου 2 μετασχηματίζονται σε ασαφή σύνολα τύπου 1 με την βοήθεια ενός μηχανισμού μείωσης τύπου(**type reduction**). Μετά με την γνωστή διαδικασία της αποσαφοποίησης το μετασχηματισμένο σύνολο μετασχηματίζεται με την σειρά του σε έναν αριθμό.

Τα ΑΣ1 δεν μπορούν άμεσα να χειριστούν αβεβαιότητες γιατί χρησιμοποιούν ασαφή σύνολα τύπου 1 που έχουν συγκεκριμένες συναρτήσεις συμμετοχής. Αντίθετα τα ΑΣ2 είναι πολύ χρήσιμα σε περιπτώσεις που είναι πολύ δύσκολο να καθορίσουμε μια ακριβής συνάρτηση συμμετοχής για ένα ασαφές σύνολο.

### ***Τι ακριβώς είναι ένα ασαφές σύστημα;***

Όπως φαίνεται στο σχήμα 1 ένα ασαφές σύστημα αποτελείται από 4 κύρια τμήματα:

- **Rules**
- **Fuzzifier**
- **Inference engine**
- **Output processor**

Όταν λοιπόν έχουμε καταλήξει στους ασαφείς κανόνες που αποτελούν και τη βάση του συστήματος μας , το ασαφές σύστημα ουσιαστικά αποτελεί μια αντιστοίχιση συγκεκριμένων εισόδων σε συγκεκριμένες εξόδους. Η αντιστοίχιση αυτή μπορεί να εκφραστεί ποσοτικά σαν  $y=f(x)$ . Αυτό το είδος ασαφών συστημάτων χρησιμοποιείται σε πολλές εφαρμογές όπως σε ασαφείς ελεγκτές και επεξεργαστές σημάτων.

Οι κανόνες αποτελούν την καρδιά ενός ασαφούς συστήματος και έχουν συναρτήσεις συμμετοχής που συνδέονται με αυτούς. Κάθε κανόνας μπορεί αν

θεωρηθεί σαν ένα υποσύστημα. Όταν δεν έχουμε εφαρμογή κάποιας εισόδου σε έναν κανόνα τότε ο κανόνας αυτός παραμένει ανενεργός. Ο μηχανισμός εξαγωγής συμπεράσματος αντιστοιχεί τα ασαφή σύνολα εισόδου κάθε κανόνα στα αντίστοιχα σύνολα εξόδου του κανόνα.

Ο ασαφοποιητής ουσιαστικά μετατρέπει τις εισόδους έτσι ώστε να είναι δυνατόν να τις μεταχειριζόμαστε σαν ασαφή σύνολα. Ο επεξεργαστής εξόδου όπως προείπαμε μετασχηματίζει τα ασαφή σύνολα σε ένα συγκεκριμένο αριθμό που παίρνουμε σαν έξοδο από το σύστημα.

### ***Διαφορές ασαφών συστημάτων τύπου 1 και 2***

Ουσιαστικά οι κυριότερες διαφορές των ΑΣ1 και ΑΣ2 έχουν αναφερθεί και παραπάνω. Έτσι η κυριότερη διαφορά τους έγκειται στο γεγονός ότι τα ΑΣ1 χρησιμοποιούν μόνο ασαφή σύνολα 1 ενώ αντίστοιχα τα ΑΣ2 χρησιμοποιούν τουλάχιστον ένα ασαφές σύνολο τύπου 2. Για τα ασαφή σύνολα τύπου 2 θα αναφερθούμε λεπτομερώς σε παρακάτω κεφάλαιο. Ο μηχανισμός εξαγωγής συμπεράσματος σε ένα ΑΣ1 αντιστοιχεί τα ασαφή σύνολα εισόδου τύπου 1 σε ασαφή σύνολα εξόδου επίσης τύπου 1, ενώ στα ΑΣ2 γίνεται η αντίστοιχη αντιστοίχιση αλλά για ασαφή σύνολα τύπου 2. Επίσης όπως προείπαμε ο επεξεργαστής εξόδου στα ΑΣ2 αποτελείται εκτός από τον αποσαφοποιητή που έχουμε στα ΑΣ1 και από ένα μηχανισμό «μείωσης τύπου» μετατρέπει τα ασαφή σύνολα τύπου 2 σε αντίστοιχα τύπου 1 και τα τροφοδοτεί στον αποσαφοποιητή για να πάρουμε τελικά σαν έξοδο πάλι έναν αριθμό.

### ***Περιπτώσεις εφαρμογής ασαφών συστημάτων τύπου 2***

Γενικά κρίνεται σκόπιμη η χρησιμοποίηση ΑΣ2 σε περιπτώσεις που έχουμε την παρουσία έντονης αβεβαιότητας. Για ένα ασαφές σύστημα όπως αυτό στο σχήμα 1 μπορούμε να έχουμε τις ακόλουθες πηγές αβεβαιότητας:

- Αβεβαιότητα για την σημασία των λέξεων που χρησιμοποιούνται στους κανόνες
- Αβεβαιότητα για τα συμπεράσματα των κανόνων
- Αβεβαιότητα για τον τρόπο ενεργοποίησης των κανόνων
- Αβεβαιότητα για τις παραμέτρους των δομικών στοιχείων του ασαφούς συστήματος

Κάποιες συγκεκριμένες περιπτώσεις που έχει διαπιστωθεί ότι τα ΑΣ2 υπερσχύουν των αντιστοίχων ΑΣ1 είναι οι παρακάτω:

- Όταν η μέτρηση του θορύβου είναι ασταθής και η φύση της αστάθειας δεν μπορεί να περιγραφεί εκ των προτέρων μαθηματικά
- Όταν έχουμε μηχανισμό παραγωγής δεδομένων που είναι χρονικά μεταβαλλόμενος και η φύση των μεταβολών με την πάροδο του χρόνου είναι τέτοια που δεν μπορεί να μοντελοποιηθεί εκ των προτέρων μαθηματικά
- Όταν έχουμε χαρακτηριστικά που περιγράφονται με στατιστικά μεγέθη που δεν είναι στατικά και η φύση της αστάθειας δεν μπορεί να περιγραφεί εκ των προτέρων μαθηματικά
- Όταν η γνώση εξάγεται από ειδικούς με την χρήση ερωτηματολογίων

Συγκεκριμένες εφαρμογές των ΑΣ2 θα περιγραφούν αναλυτικά στο κεφάλαιο 4

## ***Δομή της εργασίας***

Μετά την εισαγωγή του συγγράμματος, ακολουθούν τρία ακόμα κεφάλαια. Συνοπτικά, αναφέρουμε το αντικείμενο του καθενός:

**Κεφάλαιο 1:** εξετάζει τα ασαφή σύνολα τύπου 2, τις ιδιότητες τους, τα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά τους καθώς και τις πράξεις μεταξύ τους

**Κεφάλαιο 2:** εξετάζει τις ασαφείς σχέσεις τύπου 2 και τις συνθέσεις που ισχύουν μεταξύ των σχέσεων αυτών

**Κεφάλαιο 3:** εξετάζει αναλυτικά όλα τα μέρη που αποτελούν ένα ασαφές σύστημα τύπου 2 και επεξηγεί αναλυτικά την λειτουργία τους

**Κεφάλαιο 4:** ασχολείται με τις εφαρμογές που βρίσκουν τα ασαφή συστήματα τύπου 2 και παρουσιάζει μία από αυτές

**Κεφάλαιο 5:** παρουσιάζει γενικά συμπεράσματα από την εργασία

## Κεφάλαιο 1

### Ασαφή σύνολα τύπου 2

#### 1.1 Εισαγωγή

Η ιδέα του ασαφούς συνόλου τύπου 2 εισήχθη από τον Zadeh[1] σαν μια προέκταση ενός συνηθισμένου συνόλου (τύπου 1). Πρόκειται για ασαφή σύνολα που οι συναρτήσεις συμμετοχής τους είναι ασαφή σύνολα τύπου 1. Βρίσκουν εφαρμογές σε περιπτώσεις που είναι δύσκολο να προσδιορίσουμε μια ακριβής συνάρτηση συμμετοχής για ένα σύνολο. Επομένως είναι κατάλληλα για την ενσωμάτωση γλωσσικών(linguistic) αβεβαιοτήτων, δηλ λέξεων που μπορούν να χρησιμοποιούνται σαν μια γλωσσική βάση και να μπορούν να σημαίνουν διαφορετικά πράγματα σε διαφορετικούς ανθρώπους.[2].

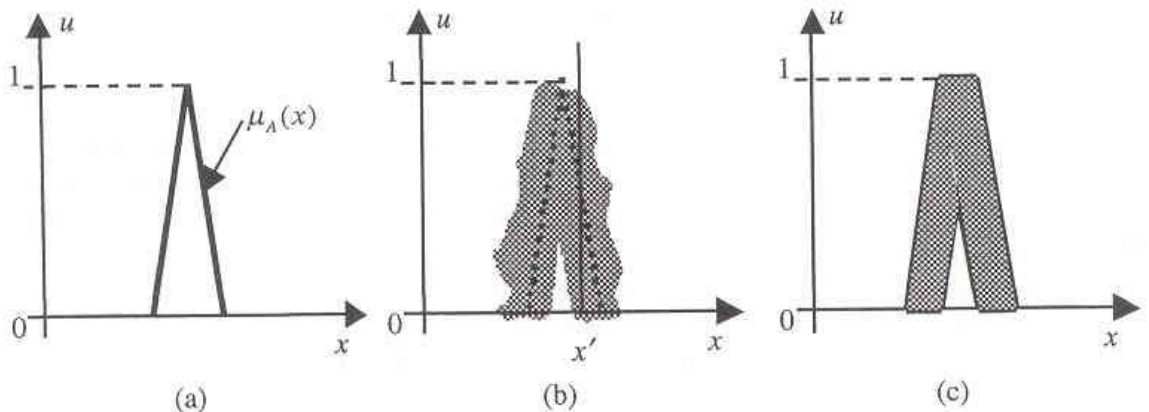
Μια ασαφής σχέση υψηλότερου τύπου(π.χ τύπου 2) αντιμετωπίζεται σαν ένας τρόπος για να αυξήσουμε την ασάφεια μιας σχέσης και σύμφωνα με τον Hisdal «αυξανόμενη ασάφεια σε μια περιγραφή σημαίνει αυξανόμενη ικανότητα χειρισμού ανακριβούς πληροφορίας με ένα λογικά σωστό τρόπο»[3]. Σύμφωνα με τον John , «Τα ασαφή σύνολα τύπου 2 επιτρέπουν γλωσσικούς βαθμούς συμμετοχής βοηθώντας στην αναπαράσταση της γνώσης και προσφέροντας βελτίωση στα συμπεράσματα που εξάγονται χρησιμοποιώντας ασαφή σύνολα τύπου 1 »[4].

Τα ασαφή σύνολα τύπου 2 μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να εκφράσουν τις αβεβαιότητες στις συναρτήσεις συμμετοχής των κλασσικών ασαφών συνόλων ,εξαιτίας των εξαρτήσεων των συναρτήσεων συμμετοχής από τις διαθέσιμες γλωσσικές και αριθμητικές πληροφορίες. Οι γλωσσικές πληροφορίες (π.χ κανόνες από ειδικούς) δεν παρέχουν γενικά πληροφορίες για τα σχήματα των συναρτήσεων συμμετοχής. Όταν οι συναρτήσεις συμμετοχής αποφασίζονται ή ρυθμίζονται με βάση αριθμητικά δεδομένα η αβεβαιότητα στα αριθμητικά δεδομένα(π.χ θόρυβος) μεταφράζεται σε αβεβαιότητα στις συναρτήσεις συμμετοχής.



## 1.2 Ορισμός ενός ασαφούς συνόλου τύπου 2

Φανταστείτε ότι «θολώνουμε» την συνάρτηση συμμετοχής τύπου 1 που φαίνεται στο σχήμα 1.2.1α μετακινώντας τα σημεία του τριγώνου είτε αριστερά είτε δεξιά και όχι απαραίτητα κατά το ίδιο ποσοστό όπως φαίνεται στο σχήμα 1.2.1b. Τότε για μια συγκεκριμένη τιμή του  $x$ , ας πούμε  $x'$ , δεν υπάρχει μόνο μια τιμή για την συνάρτηση συμμετοχής. Αντίθετα η συνάρτηση συμμετοχής παίρνει τιμές οπουδήποτε η κάθετη γραμμή τέμνει το «θόλωμα». Όλες αυτές οι τιμές δεν είναι ανάγκη να έχουν το ίδιο βάρος. Μπορούμε να αναθέσουμε μια κατανομή πλάτους για όλα αυτά τα σημεία. Κάνοντας το ίδιο για όλα τα  $x$  δημιουργούμε μια τρισδιάστατη συνάρτηση συμμετοχής –μια συνάρτηση συμμετοχής τύπου 2-που χαρακτηρίζει ένα ασαφές σύνολο τύπου 2.



**Σχήμα 1.2.1 α) Συνάρτηση συμμετοχής τύπου 1 β) «θολωμένη» συνάρτηση συμμετοχής γ) FOU**

Παρόμοια ορίζουμε παρακάτω την έννοια του ασαφούς συνόλου τύπου 2:

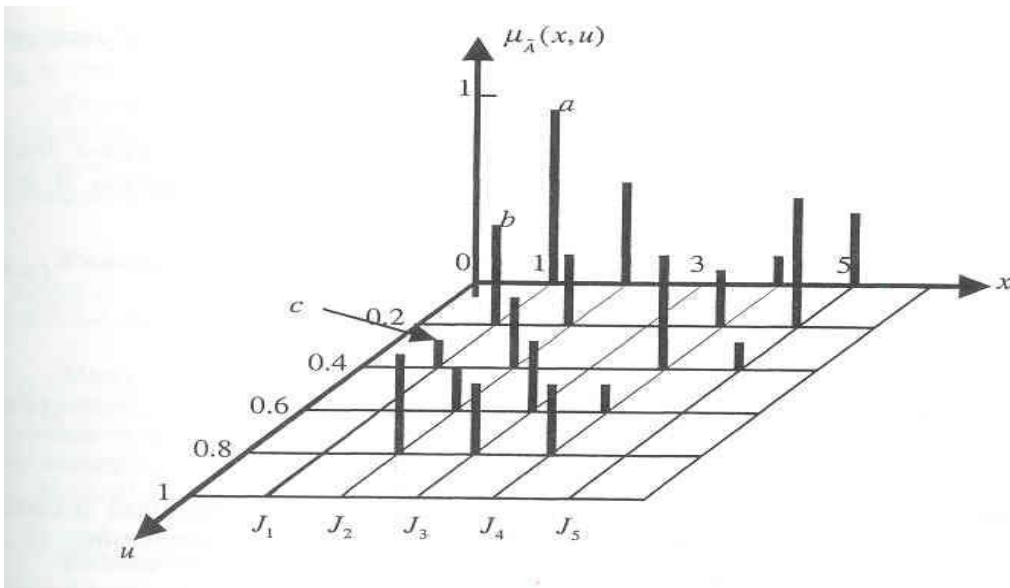
**Ορισμός 1-1:** Ένα ασαφές σύνολο τύπου 2, ας πούμε  $\tilde{A}$ , χαρακτηρίζεται από μια συνάρτηση συμμετοχής τύπου 2  $\mu_{\tilde{A}}(x,u)$ , όπου  $x \in X$  και  $u \in J_x \subseteq [0,1]$ , δηλ

$$\tilde{A} = \{((x,u), \mu_{\tilde{A}}(x,u)) \mid \forall x \in X, \forall u \in J_x \subseteq [0,1]\}$$

όπου  $0 \leq \mu_{\tilde{A}}(x,u) \leq 1$ . Επίσης μπορεί να εκφραστεί σαν

$$\tilde{A} = \int_{x \in X} \int_{u \in J_x} \mu_{\tilde{A}}(x,u)/(x,u) \quad J_x \subseteq [0,1],$$

**Παράδειγμα 1:** Το σχήμα 1.2.2 παρουσιάζει την  $\mu_{\tilde{A}}(x,u)$  για διακριτά  $x$  και  $u$ . Συγκεκριμένα  $X=\{1,2,3,4,5\}$  και  $U=\{0,0.2,0.4,0.6,0.8,1\}$ . Παρατηρείστε ότι  $J_1=\{0,0.2,0.4\}$ ,  $J_2=\{0,0.2,0.4,0.6,0.8\}$ ,  $J_3=\{0.6,0.8\}$ ,  $J_4=J_2$ ,  $J_5=J_1$  περιλαμβάνοντας τιμές στα  $J_1 \dots J_5$  για τις οποίες  $\mu_{\tilde{A}}(x,u) \neq 0$ .



Σχήμα 1.2.2 Παράδειγμα συνάρτησης συμμετοχής τύπου 2

Στον ορισμό 1-1 ο περιορισμός ότι  $\forall u \in J_x \subseteq [0,1]$  είναι σύμφωνος με τον περιορισμό στα ασαφή σύνολα τύπου 1 ότι  $0 \leq \mu_A(x) \leq 1$ . Έτσι αν η αβεβαιότητα εξαφανιστεί τότε η συνάρτηση συμμετοχής τύπου 2 μειώνεται σε τύπου 1 με την μεταβλητή  $u$  να αντιστοιχεί στην  $\mu_A(x)$  και  $0 \leq \mu_A(x) \leq 1$ . Ο επιπρόσθετος περιορισμός  $0 \leq \mu_{\tilde{A}}(x,u) \leq 1$  επιβάλλει στα πλάτη της συνάρτησης συμμετοχής να παίρνουν τιμές από 0 ως 1.

**Παράδειγμα 2:** Υποθέστε ότι  $X=\{\text{Susie}, \text{Betty}, \text{Helen}\}$  είναι ένα σύνολο γυναικών και ότι  $A$  είναι ένα ασαφές σύνολο τύπου 2 των όμορφων (beautiful) γυναικών στο  $X$ . Το  $A$  μπορεί να είναι:

$$A = \text{beautiful} = \text{middle/Susie} + \text{low/Betty} + \text{high/Helen}$$

όπου οι ασαφείς βαθμοί με τα ονόματα middle, low, high είναι ασαφή σύνολα στο  $J=\{0,0.1,\dots,0.9,1\} \subseteq [0,1]$  και τα οποία μπορεί να εκφράζονται για παράδειγμα ως εξής:

$$\text{middle}=0.3/0.3 + 0.7/0.4 + 1/0.5 + 0.7/0.6 + 0.3/0.7$$

$$\text{low}=1/0 + 0.9/0.1 + 0.7/0.2 + 0.4/0.3$$

$$\text{high}=0.4/0.7 + 0.7/0.8 + 0.9/0.9 + 1/1$$

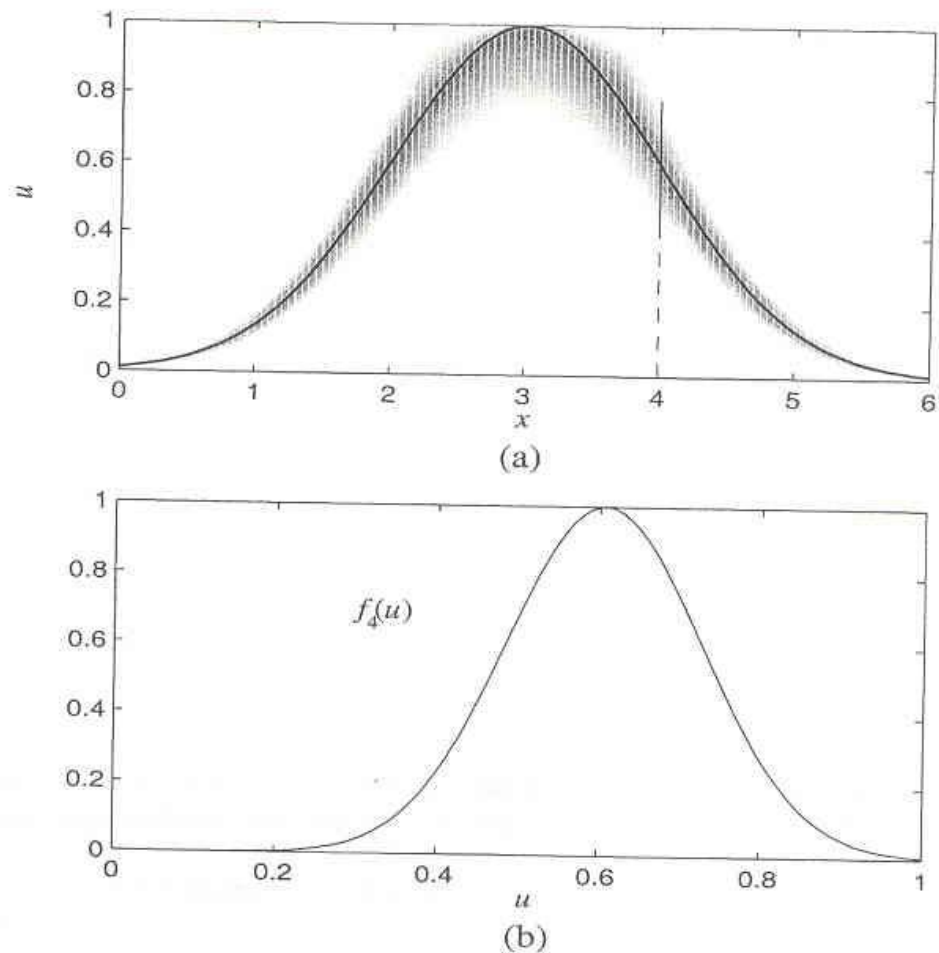
**Ορισμός 1-2:** Τα στοιχεία του πεδίου τιμών του  $\mu_A(x)$  καλούνται πρωτεύουσες συναρτήσεις συμμετοχής(**primary memberships**) και οι βαθμοί συμμετοχής των πρωτευουσών συναρτήσεων δευτερεύουσες συναρτήσεις(**secondary memberships**).

**Παράδειγμα:** Στο ασαφές σύνολο που περιγράφεται από το σχήμα 1.2.2 η δευτερεύουσα συνάρτηση συμμετοχής στο  $x=1$  είναι  $a/0+b/0.2+c/0.4$ . Οι πρωτεύουσες συμμετοχές στο  $x=1$  είναι  $u=0,0.2,0.4$  και οι αντίστοιχοι δευτερεύοντες βαθμοί  $a,b,c$ .

**Ορισμός 1-3:** Υποθέτουμε ότι καθεμία από τις δευτερεύουσες συναρτήσεις συμμετοχής ενός ασαφούς συνόλου τύπου 2 έχει μόνο ένα δευτερεύον βαθμό συμμετοχής ίσο με 1. Μια κύρια(**principal**) συνάρτηση συμμετοχής είναι η ένωση όλων αυτών των σημείων που ο δευτερεύων βαθμός συμμετοχής ισούται με 1, δηλ

$$\mu_{\text{principal}}(x) = \int_{x \in X} u / x \text{ όπου } f_x(u)=1$$

**Παράδειγμα:** Η κύρια συνάρτηση συμμετοχής για το Gaussian ασαφές σύνολο που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα είναι η έντονη μαύρη γραμμή



**Σχήμα 1.2.3 α)Αναπαράσταση ενός Gaussian ασαφούς συνόλου τύπου 2.Το πεδίο τιμών του βαθμού συμμετοχής για  $\chi=4$  φαίνεται επίσης  
β)δευτερεύουσα συνάρτηση συμμετοχής για  $\chi=4$**

**Ορισμός 1-4:** Η αβεβαιότητα στις πρωτεύουσες συναρτήσεις ενός ασαφούς συνόλου 2 αποτελείται από μια φραγμένη περιοχή που αποκαλούμε **footprint of uncertainty(FOU)**. Είναι η ένωση όλων των πρωτευουσών συναρτήσεων, δηλ

$$FOU(\tilde{A})= \bigcup_{x \in X} J_x$$

Στο σχήμα 1.2.1c είδαμε μια τέτοια περιοχή αβεβαιότητας.

**Ορισμός 1-5:** Ένας ασαφής βαθμός συμμετοχής  $\mu_A$  στο  $J$  αποκαλείται κανονικός(**normal**) αν

$$\max f(u_i)=1$$

Σε αντίθετη περίπτωση αποκαλείται μη κανονικός(**subnormal**). Επιπλέον ένας ασαφής βαθμός συμμετοχής που είναι κυρτός(convex) και κανονικός αναφέρεται σαν normal convex[5].

**Παράδειγμα:** Διάφοροι τύποι ασαφών βαθμών συμμετοχής στο  $J=\{0.1,0.2,0.3,0.4\}$  αναφέρονται παρακάτω:

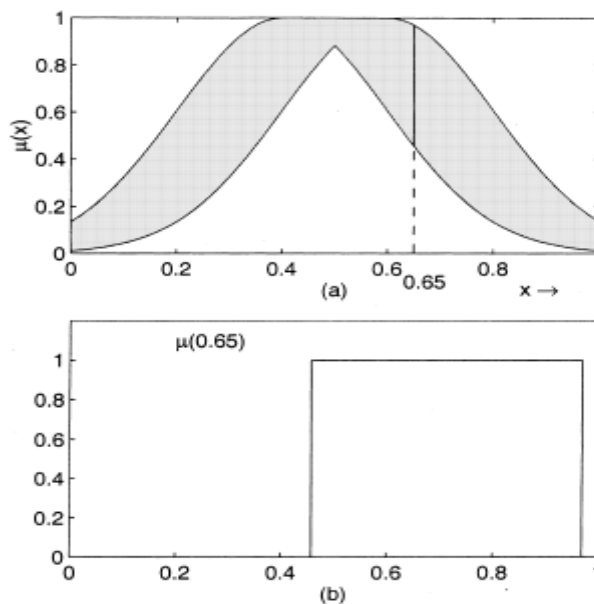
$$\mu_A=0.8/0.1+0.3/0.2+0.5/0.3+0.9/0.4(\text{subnormal, nonconvex})$$

$$\mu_A=0.3/0.1+0.6/0.2+0.8/0.3+0.5/0.4(\text{subnormal, convex})$$

$$\mu_A=0.7/0.1+0.2/0.2+1/0.3+0.3/0.4(\text{normal, nonconvex})$$

$$\mu_A=0.5/0.1+0.8/0.2+1/0.3+0.7/0.4(\text{normal, convex})$$

**Ορισμός 1-6:**Όταν  $f_x(u)=1, \forall u \in J_x \subseteq [0,1]$  τότε οι δευτερεύουσες συναρτήσεις συμμετοχής είναι **interval** σύνολα και αν αυτό ισχύει  $\forall x \in X$ , έχουμε την περίπτωση μιας interval συνάρτησης συμμετοχής. Οι interval δευτερεύουσες συναρτήσεις συμμετοχής αντικατοπτρίζουν μια ομοιόμορφη αβεβαιότητα στις πρωτεύουσες συναρτήσεις συμμετοχής του  $x$  και είναι αυτές με τις οποίες θα ασχοληθούμε κυρίως σε αυτήν την εργασία. Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται ένα interval set τύπου 2. Εφόσον οι δευτερεύουσες συμμετοχές είναι όλες 1 η αβεβαιότητα είναι ομοιόμορφη. Φαίνεται επίσης το πεδίο τιμών της δευτερεύουσας συμμετοχής για  $\chi=0.65$ .



Σχήμα 1.2.4a) Ένα interval set τύπου 2b) Δευτερεύουσα συμμετοχή για  $\chi=0.65$

Θα πρέπει να σημειώσουμε ότι ένα interval σύνολο μπορεί να αναπαρασταθεί μόνο από το εύρος τιμών που ορίζεται ,που μπορεί να εκφραστεί συναρτήσει του αριστερού και δεξιού καταλήγων σημείου σαν  $[l,r]$ , ή του κέντρου και της εξάπλωσης του σαν  $[c-s,c+s]$  όπου  $c=(l+r)/2$  και  $s=(r-l)/2$ .

### 1.3 Πράξεις σε ασαφή σύνολα τύπου 2

Οι πράξεις μεταξύ των ασαφών συνόλων τύπου 2 ορίζονται χρησιμοποιώντας την extension principle που εισήγαγε ο Zadeh το 1973.

Ας θεωρήσουμε λοιπόν  $\mu_A(x)$  και  $\mu_B(x)$  2 ασαφείς βαθμοί συμμετοχής(που είναι δηλαδή ασαφή σύνολα στο  $J \subseteq [0,1]$ ) δύο ασαφών συνόλων A και B αντίστοιχα οι οποίοι παριστάνονται ως εξής:

$$\begin{aligned}\mu_A(x) &= f(u_1)/u_1 + f(u_2)/u_2 + \dots + f(u_n)/u_n \\ &= \sum_i f(u_i)/u_i, \quad u_i \in J \\ \mu_B(x) &= g(w_1)/w_1 + f(w_2)/w_2 + \dots + f(w_m)/w_m \\ &= \sum_j g(w_j)/w_j, \quad w_j \in J\end{aligned}$$

όπου οι συναρτήσεις  $f$  και  $g$  είναι οι συναρτήσεις συμμετοχής των ασαφών συναρτήσεων συμμετοχής  $\mu_A(x)$  και  $\mu_B(x)$ .

Τότε οι πράξεις μεταξύ των ασαφών συνόλων A και B ορίζονται ως εξής:

#### **Ένωση(Union):**

$$\begin{aligned}A \cup B &\Leftrightarrow \mu_{A \cup B}(x) = \mu_A(x) \sqcup \mu_B(x) \\ &= \left( \sum_i f(u_i)/u_i \right) \sqcup \left( \sum_j g(w_j)/w_j \right) \\ &= \sum_{ij} (f(u_i) * g(w_j)) / (u_i \vee w_j)\end{aligned}$$

όπου  $*$  είναι μια t-norm και συνήθως η  $\min(\wedge)$  ή η product. Με το σύμβολο  $\sqcup$  αναφέρεται η πράξη join μεταξύ των ασαφών βαθμών συμμετοχής των 2 συνόλων.

#### **Τομή(Intersection):**

$$\begin{aligned}A \cap B &\Leftrightarrow \mu_{A \cap B}(x) = \mu_A(x) \sqcap \mu_B(x) \\ &= \left( \sum_i f(u_i)/u_i \right) \sqcap \left( \sum_j g(w_j)/w_j \right) \\ &= \sum_{ij} (f(u_i) * g(w_j)) / (u_i * w_j)\end{aligned}$$

όπου \* είναι μια t-norm και συνήθως η  $\min(\wedge)$  ή η product. Με το σύμβολο  $\sqcap$  αναφέρεται η πράξη meet μεταξύ των ασαφών βαθμών συμμετοχής των 2 συνόλων.

### **Συμπλήρωμα(Complement):**

$$\bar{A} \Leftrightarrow \mu_{\bar{A}}(x) = \bigvee \mu_A(x) = \sum_i f(u_i)/(1 - u_i)$$

Με το σύμβολο  $\bigvee$  αναφέρεται η πράξη negation σε ένα ασαφή βαθμό συμμετοχής ενός ασαφούς συνόλου.

**Παράδειγμα:** Ας υποθέσουμε ότι  $J = \{0, 0.1, \dots, 0.9, 1\}$  και ότι έχουμε τους εξής ασαφούς βαθμούς συμμετοχής:

$$\mu_A(x) = 0.5/0 + 0.7/0.1 + 0.3/0.2$$

$$\mu_B(x) = 0.9/0 + 0.6/0.1 + 0.2/0.2$$

Τότε έχουμε:

$$\mu_A(x) \sqcup \mu_B(x) = (0.5/0 + 0.7/0.1 + 0.3/0.2) \sqcup (0.9/0 + 0.6/0.1 + 0.2/0.2)$$

$$= \frac{0.5 \wedge 0.9}{0 \vee 0} + \frac{0.5 \wedge 0.6}{0 \vee 0.1} + \frac{0.5 \wedge 0.2}{0 \vee 0.2} + \frac{0.7 \wedge 0.9}{0.1 \vee 0} + \frac{0.7 \wedge 0.6}{0.1 \vee 0.1} + \frac{0.7 \wedge 0.2}{0.1 \vee 0.2} + \frac{0.3 \wedge 0.9}{0.2 \vee 0} + \frac{0.3 \wedge 0.6}{0.2 \vee 0.1} + \frac{0.3 \wedge 0.2}{0.2 \vee 0.2}$$

$$= 0.5/0 + 0.5/0.1 + 0.2/0.2 + 0.7/0.1 + 0.6/0.1 + 0.2/0.2 + 0.3/0.2 + 0.3/0.2 + 0.2/0.2$$

$$= 0.5/0 + (0.5 \vee 0.7 \vee 0.6)/0.1 + (0.2 \vee 0.2 \vee 0.3 \vee 0.3 \vee 0.2)/0.2$$

$$= 0.5/0 + 0.7/0.1 + 0.3/0.2$$

Παρόμοια βρίσκουμε:

$$\mu_A(x) \sqcap \mu_B(x) = 0.7/0 + 0.6/0.1 + 0.2/0.2$$

$$\bigvee \mu_A(x) = 0.5/1 + 0.7/0.9 + 0.3/0.8$$

**Παρατήρηση:** Καθώς οι ασαφείς βαθμοί συμμετοχής είναι ασαφή σύνολα στο  $J \subseteq [0, 1]$  μπορούμε να υπολογίσουμε και τα  $\mu_A(x) \cup \mu_B(x)$ ,  $\mu_A(x) \cap \mu_B(x)$  από τις κλασσικές πράξεις ασαφών συνόλων τύπου 1. Θα πρέπει όμως να τονίσουμε ότι για παράδειγμα η πράξη  $\cup$  είναι διαφορετική από την πράξη  $\sqcup$ . Για το παραπάνω παράδειγμα παίρνουμε

$$\mu_A(x) \cup \mu_B(x) = 0.9/0 + 0.7/0.1 + 0.3/0.2 \neq \mu_A(x) \sqcup \mu_B(x)$$

### 1.4 Ιδιότητες ασαφών συναρτήσεων συμμετοχής

Στον παρακάτω πίνακα παρουσιάζονται οι ιδιότητες των συναρτήσεων συμμετοχής ενός ασαφούς συνόλου τύπου 2 όπως παρουσιάζονται στην δημοσίευση των Karnik και Mendel[6]. Υποθέτουν convex και normal συναρτήσεις συμμετοχής. Η εξέταση των ιδιοτήτων των ασαφών συνόλων τύπου 1 που ισχύουν και στα αντίστοιχα τύπου 2 έγινε και για min και για product t-norm.

Για την απόδειξη του identity law οι Karnik, Mendel χρησιμοποίησαν τις αρχές για τους 0 και 1 βαθμούς συμμετοχής που παρουσιάζονται στην δημοσίευση των Mizumoto και Tanaka[5]. Αυτοί αναπαριστούνται σαν 1/0 και 1/1 αντίστοιχα. Λέμε λοιπόν ότι ένα στοιχείο έχει μηδενική συνάρτηση συμμετοχής σε ένα ασαφές σύνολο τύπου2 αν έχει secondary membership ίση με 1 για primary membership ίση με 0 και όλες τις άλλες secondary memberships ίσες με 0. Αντίστοιχα Λέμε ότι ένα στοιχείο έχει μοναδιαία συνάρτηση συμμετοχής σε ένα ασαφές σύνολο τύπου2 αν έχει secondary membership ίση με 1 για primary membership ίση με 1 και όλες τις άλλες secondary memberships ίσες με 0.

Οι ιδιότητες που δεν ισχύουν για τα ασαφή σύνολα τύπου 1 δεν ισχύουν και για τα ασαφή σύνολα τύπου2. Το αντίστροφο όμως δεν ισχύει. Δηλαδή κάποια ιδιότητα που ισχύει για τα ασαφή σύνολα τύπου 1 μπορεί να μην ισχύει για τα ασαφή σύνολα τύπου 2.

Για παράδειγμα από τον πίνακα βλέπουμε ότι για την product t-norm δεν ισχύουν οι idempotent, absorption, distributive, De Morgan's laws. Οι νόμοι αυτοί δεν ισχύουν και για την min t-norm όταν έχουμε subnormal fuzzy grades[5].



Table 1

Properties of membership grades. In the type-2 case, we assume *convex* and *normal* membership grades; and for type-2 laws,  $\sqcup$ ,  $\sqcap$  and  $\subseteq$  replace  $\vee$ ,  $\star$  and  $\leq$ , respectively. For product t-norm, the laws that are satisfied in the type-1 case, but not in the type-2 case, are highlighted. Results for the minimum t-norm are taken from [23]

Set-theoretic laws		Minimum t-norm		Product t-norm	
		Type-1	Type-2	Type-1	Type-2
Reflexive	$\mu_A \leq \mu_A$	Yes	Yes	Yes	Yes
Anti-symmetric	$\mu_A \leq \mu_B, \mu_B \leq \mu_A$ $\Rightarrow \mu_A = \mu_B$	Yes	Yes	Yes	Yes
Transitive	$\mu_A \leq \mu_B, \mu_B \leq \mu_C$ $\Rightarrow \mu_A \leq \mu_C$	Yes	Yes	Yes	Yes
Idempotent	$\mu_A \vee \mu_A = \mu_A$	Yes	Yes	Yes	<b>No</b>
	$\mu_A \star \mu_A = \mu_A$	Yes	Yes	No	No
Commutative	$\mu_A \vee \mu_B = \mu_B \vee \mu_A$	Yes	Yes	Yes	Yes
	$\mu_A \star \mu_B = \mu_B \star \mu_A$	Yes	Yes	Yes	Yes
Associative	$(\mu_A \vee \mu_B) \vee \mu_C$ $= \mu_A \vee (\mu_B \vee \mu_C)$	Yes	Yes	Yes	Yes
	$(\mu_A \star \mu_B) \star \mu_C$ $= \mu_A \star (\mu_B \star \mu_C)$	Yes	Yes	Yes	Yes
Absorption	$\mu_A \star (\mu_A \vee \mu_B) = \mu_A$	Yes	Yes	No	No
	$\mu_A \vee (\mu_A \star \mu_B) = \mu_A$	Yes	Yes	Yes	<b>No</b>
Distributive	$\mu_A \star (\mu_B \vee \mu_C)$ $= (\mu_A \star \mu_B) \vee (\mu_A \star \mu_C)$	Yes	Yes	Yes	<b>No</b>
	$\mu_A \vee (\mu_B \star \mu_C)$ $= (\mu_A \vee \mu_B) \star (\mu_A \vee \mu_C)$	Yes	Yes	No	No
Involution	$\mu_{\bar{A}} = \mu_A$	Yes	Yes	Yes	Yes
De Morgan's Laws	$\mu_{\bar{A} \vee \mu_B} = \mu_{\bar{A}} \star \mu_{\bar{B}}$	Yes	Yes	No	No
	$\mu_{\bar{A} \star \mu_B} = \mu_{\bar{A}} \vee \mu_{\bar{B}}$	Yes	Yes	No	No
Identity	$\mu_A \vee 0 = \mu_A$	Yes	Yes	Yes	Yes
	$\mu_A \star 1 = \mu_A$	Yes	Yes	Yes	Yes
	$\mu_A \vee 1 = 1$	Yes	Yes	Yes	Yes
	$\mu_A \star 0 = 0$	Yes	Yes	Yes	Yes
Complement	$\mu_A \vee \mu_{\bar{A}} \neq 1$	Yes	Yes	Yes	Yes
(Failure)	$\mu_A \star \mu_{\bar{A}} \neq 0$	Yes	Yes	Yes	Yes

Πίνακας 1.4 Ιδιότητες ασαφών συναρτήσεων συμμετοχής

## 1.5 Embedded σύνολα τύπου 1 και τύπου 2

Ένα ασαφές σύνολο τύπου 2  $\tilde{A}$  μπορεί να θεωρηθεί σαν ένα σύνολο από ασαφή σύνολα τύπου 2 επίσης  $\tilde{A}_e$  που τα ονομάζουμε embedded σύνολα, δηλ

$$\tilde{A}_e = \int_{x \in X} [f_x(\theta)/\theta] / x \quad \theta \in J_x \subseteq U=[0,1]$$

Το σύνολο  $\tilde{A}_e$  είναι ενσωματωμένο(embedded) στο σύνολο  $\tilde{A}$  και υπάρχει άπειρος αριθμός ενσωματωμένων συνόλων τύπου 2.

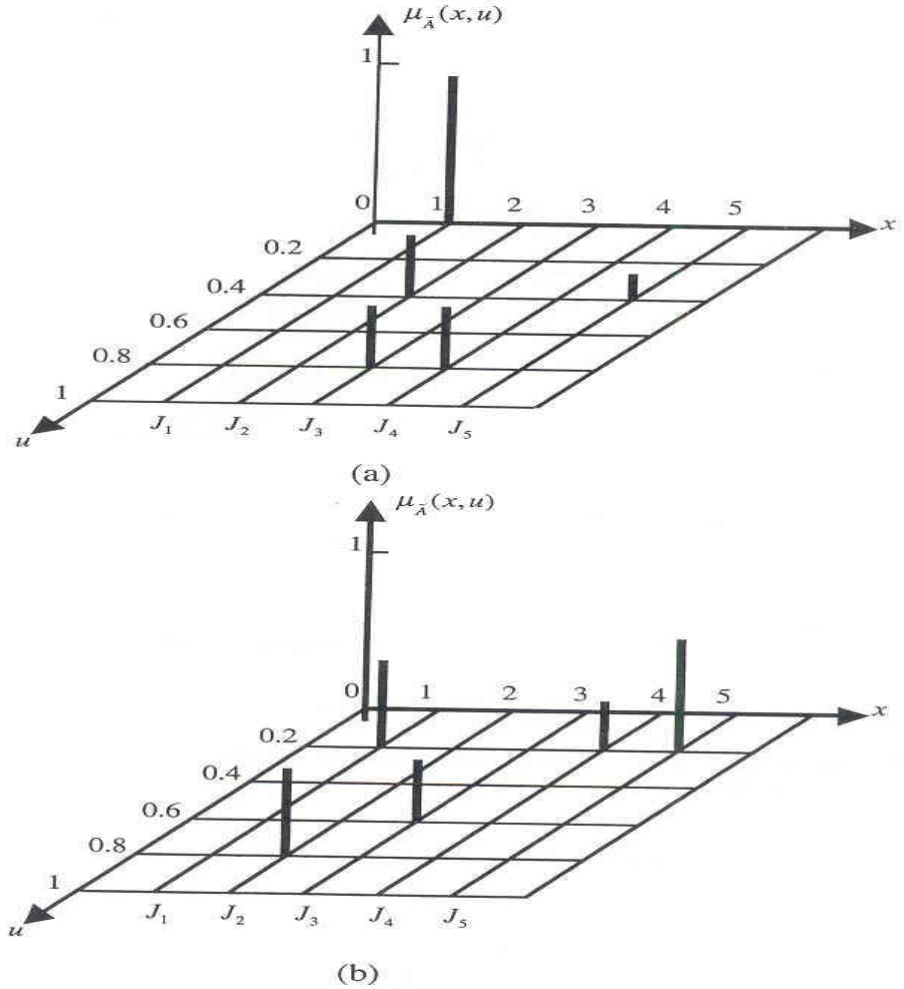
Για κάθε τιμή του x η συνάρτηση συμμετοχής του  $\tilde{A}_e$  έχει μόνο μια πρωτεύουσα συμμετοχή  $\theta$ , όπου  $\theta \in J_x$ , και ένα δευτερεύων βαθμό συμμετοχής  $f_x(\theta)$ . Η σχεδίαση της συνάρτησης συμμετοχής του  $\tilde{A}_e$  θα έμοιαζε με μια κυματιστή τομή. Ο άπειρος αριθμός των  $\tilde{A}_e$  οφείλεται στην συνεχή φύση των X και U.

**Ορισμός:** Για διακριτά σύνολα X και U ένα embedded σύνολο  $\tilde{A}_e$  έχει N στοιχεία, όπου το  $\tilde{A}_e$  περιέχει ακριβώς ένα στοιχείο από τα  $J_{x1}, J_{x2}, \dots, J_{xN}$ , τα  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_N$ , καθένα με ένα δευτερεύων βαθμό συμμετοχής  $f_{x1}(\theta_1), f_{x1}(\theta_2), \dots, f_{xN}(\theta_N)$ , δηλ

$$\tilde{A}_e = \sum_{i=1}^N [f_{xi}(\theta_i)/\theta_i] / x_i \quad \theta_i \in J_{xi} \subseteq U=[0,1]$$

Υπάρχουν συνολικά  $\prod_{i=1}^N M_i$  ενσωματωμένα σύνολα  $\tilde{A}_e$ .

**Παράδειγμα:** Στο παρακάτω σχήμα φαίνονται 2 από τα πιθανά 450 embedded σύνολα του ασαφούς συνόλου τύπου 2 που περιγράφηκε στο σχήμα 1.2.2



**Σχήμα 1.5** Ενσωματωμένα ασαφή σύνολα τύπου 2 που σχετίζονται με την συνάρτηση συμμετοχής του σχήματος 1.2.2

**Ορισμός:** Για διακριτά σύνολα  $X$  και  $U$  ένα embedded σύνολο τύπου 1  $A_e$  ορίζεται ως

$$A_e = \int_{x \in X} \theta/x \quad \theta \in J_x \subseteq U=[0,1]$$

Το σύνολο  $A_e$  είναι η ένωση όλων των πρωτευουσών συμμετοχών του συνόλου  $A_e$  και υπάρχει άπειρος αριθμός  $A_e$ .

Για διακριτά σύνολα  $X$  και  $U$  ένα embedded σύνολο  $A_e$  έχει  $N$  στοιχεία, ακριβώς ένα στοιχείο από τα  $J_{x1}, J_{x2}, \dots, J_{xN}$ , τα  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_N$ , δηλ

$$A_e = \sum_{i=1}^N \theta_i/x_i \quad \theta_i \in J_{xi} \subseteq U=[0,1]$$

Υπάρχουν συνολικά  $\prod_{i=1}^N M_i$  ενσωματωμένα σύνολα  $A_e$ .

**Παράδειγμα:** Για τα δύο embedded σύνολα του προηγούμενου σχήματος τα αντίστοιχα embedded σύνολα τύπου 1 είναι  $0/1+0.4/2+0.8/3+0.8/4+0.4/5$  και  $0.2/1+0.8/2+0.6/3+0.2/4+0.2/5$ .

Εδώ θα πρέπει να σημειώσουμε ότι η πρωτεύουσα συνάρτηση συμμετοχής όπως αυτή έχει οριστεί είναι ένα embedded σύνολο τύπου 1.

## 1.6 Upper and lower membership functions

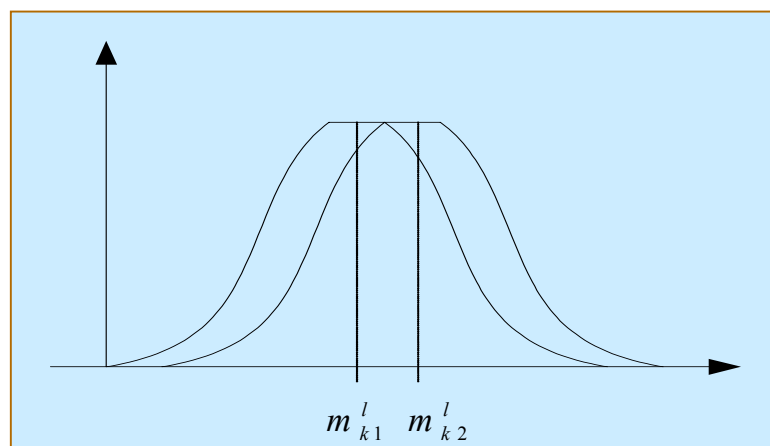
Η ανώτερη(upper) και κατώτερη(lower) συνάρτηση συμμετοχής είναι 2 συναρτήσεις συμμετοχής τύπου 1 που είναι τα όρια για την FOU ενός ασαφούς συνόλου τύπου 2  $\tilde{A}$ . Η ανώτερη συνάρτηση συμμετοχής σχετίζεται με το άνω όριο του  $\text{FOU}(\tilde{A})$  και συμβολίζεται με  $\bar{\mu}_{\tilde{A}}(x)$ . Αντίστοιχα η κατώτερη συνάρτηση συμμετοχής σχετίζεται με το κάτω όριο του  $\text{FOU}(\tilde{A})$  και συμβολίζεται με  $\underline{\mu}_{\tilde{A}}(x)$ . Άρα ένα ασαφές σύνολο τύπου 2 μπορεί να εκφραστεί ως:

$$\begin{aligned}\tilde{A} &= \mu_{\tilde{A}}(x, u) = \int_{x \in X} \mu_{\tilde{A}}(x) / x = \int_{x \in X} \left[ \int_{u \in J_x} f_x(u) / u \right] / x \\ &= \int_{x \in X} \left[ \int_{u \in [\underline{\mu}_{\tilde{A}}(x), \bar{\mu}_{\tilde{A}}(x)]} f_x(u) / u \right] / x\end{aligned}$$

Στην ειδική περίπτωση που οι δευτερεύουσες συναρτήσεις συμμετοχής είναι interval sets έχουμε:

$$\begin{aligned}\tilde{A} &= \int_{x \in X} \left[ \int_{u \in J_x} 1 / u \right] / x \\ &= \int_{x \in X} \left[ \int_{u \in [\underline{\mu}_{\tilde{A}}(x), \bar{\mu}_{\tilde{A}}(x)]} 1 / u \right] / x\end{aligned}$$

Στο παρακάτω σχήμα φαίνονται οι ανώτερη και κατώτερη συνάρτηση συμμετοχής για μια Gaussian πρωτεύουσα συνάρτηση συμμετοχής με αβέβαιο κέντρο



## Κεφάλαιο 2

### Ασαφείς σχέσεις τύπου 2

#### 2.1 Σχέσεις συνόλων γενικά

Ας υποθέσουμε  $R(A_1, \dots, A_n)$  ότι εκφράζει μια σχέση μεταξύ  $n$  μη-ασαφών(crisp) συνόλων  $A_1, \dots, A_n$ . Τότε η  $R(A_1, \dots, A_n)$  είναι ένα σαφές υποσύνολο του καρτεσιανού γινομένου  $A_1 \times \dots \times A_n$ . Μια δυαδική(binary) σχέση είναι μια ειδική περίπτωση σχέσης όπου  $n=2$ .

Μια ασαφής σχέση τύπου 1  $F(A_1, \dots, A_n)$  είναι [7] ένα ασαφές σύνολο τύπου 1 που ορίζεται στον καρτεσιανό παραγόμενο χώρο των σαφών συνόλων  $A_1, \dots, A_n$ , όπου οι σειρές  $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$  μπορούν να έχουν διαφορετικούς βαθμούς συμμετοχής  $\mu_F(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$  στη σχέση. Δηλαδή :

$$F(A_1, \dots, A_n) = \int_{A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n} \mu_F(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) / (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \quad \alpha_i \in A_i$$

Όμοια μια ασαφής σχέση τύπου 2  $\bar{F}(A_1, \dots, A_n)$  είναι [7] ένα ασαφές σύνολο τύπου 2 που ορίζεται επίσης στον καρτεσιανό παραγόμενο χώρο των σαφών συνόλων  $A_1, \dots, A_n$ . Δηλαδή :

$$\bar{F}(A_1, \dots, A_n) = \int_{A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n} \mu_{\bar{F}}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) / (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \quad \alpha_i \in A_i$$

όπου  $\mu_{\bar{F}}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$  μια δευτερεύουσα συνάρτηση συμμετοχής, δηλ ένα ασαφές σύνολο τύπου 1 για κάθε  $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$  .

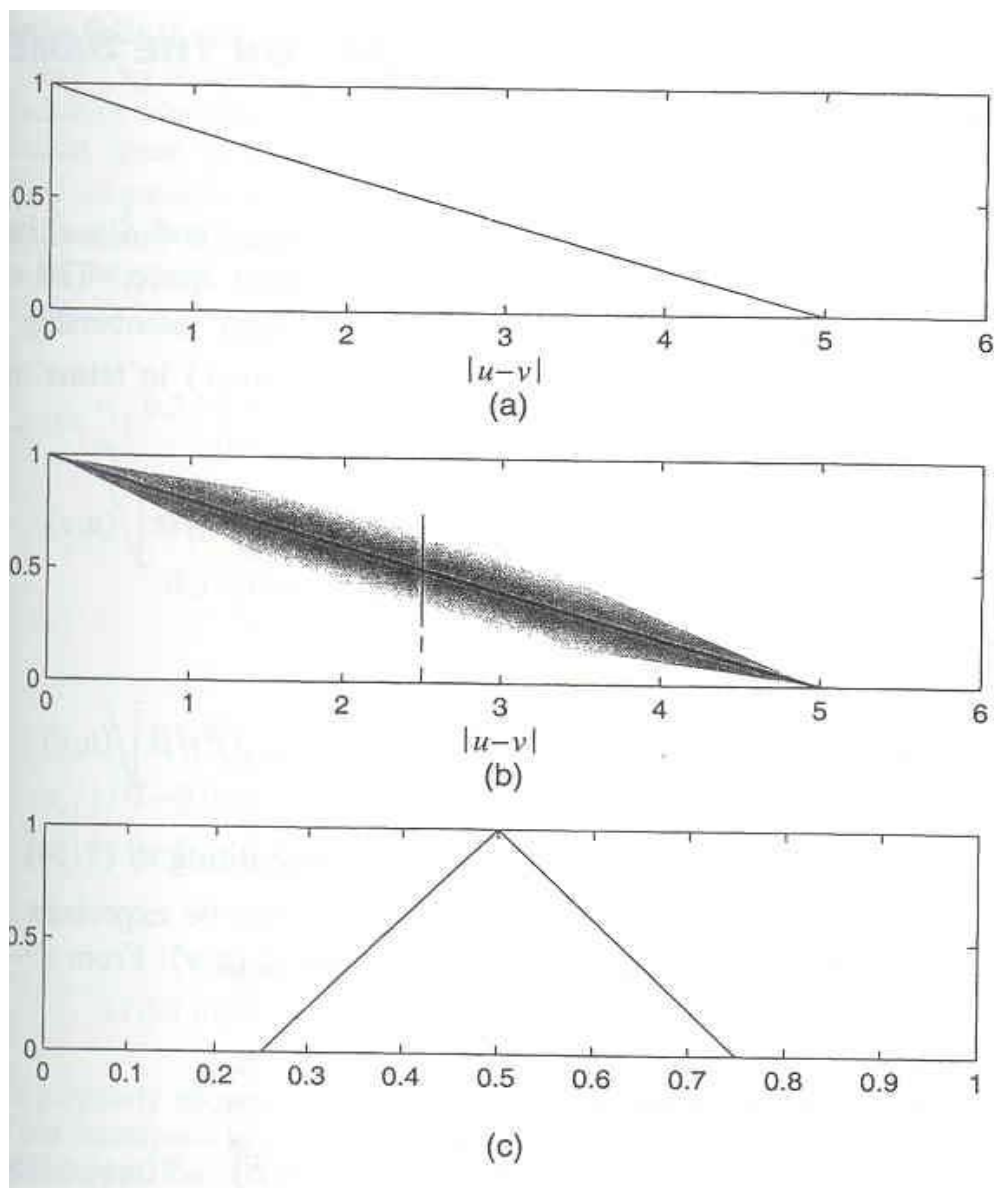
Όλες οι πράξεις και ιδιότητες που συζητήθηκαν στο προηγούμενο κεφάλαιο για τα ασαφή σύνολα τύπου 2 μπορούν να χρησιμοποιηθούν για τις ασαφείς σχέσεις τύπου 2.

**Παράδειγμα:** Ας θεωρήσουμε την ασαφή σχέση τύπου 1 μεταξύ δύο πραγματικών αριθμών  $u$  και  $v$  που εκφράζεται σαν « $u$  είναι κοντά στο  $v$ ». Επιλέγουμε σαν συνάρτηση συμμετοχής για αυτήν την σχέση την

$$\mu_c(|u-v|) = \max\{5-|u-v|/5, 0\}$$

Αυτή η συνάρτηση συμμετοχής εμφανίζεται στο σχήμα 2.1.1α.

Αν δεν είμαστε σίγουροι για το ακριβές σχήμα της συνάρτησης συμμετοχής λόγω της ασάφειας της λέξης «κοντά» θα μπορούσαμε να «θολώσουμε» την συνάρτηση συμμετοχής ώστε να αντικατοπτρίζεται αυτή η ασάφεια. Ένα παράδειγμα φαίνεται στο σχήμα 2.1.1.b[8]. Η παχιά μαύρη γραμμή δείχνει τους πρωτεύοντες βαθμούς συμμετοχής που έχουν δευτερεύοντες βαθμούς ίσους με 1. Το σχήμα 2.1.1.c δείχνει το δευτερεύον βαθμό συμμετοχής που αντιστοιχεί σε  $|u-v|=2.5$ .



**Σχήμα 2.1.1 Παραδείγματα συναρτήσεων συμμετοχής για α)ασαφείς σχέσεις τύπου 1 β)ασαφείς σχέσεις τύπου 2 γ)δευτερεύουσα συνάρτηση που αντιστοιχεί σε  $|u-v|=2.5$**

## 2.2 Σχέσεις και συνθέσεις στον ίδιο παραγόμενο χώρο

Ας υποθέσουμε δύο σύνολα  $U$  και  $V$  και 2 ασαφείς σχέσεις τύπου 2  $\bar{R}(u,v)$  και  $\bar{S}(u,v)$  που ορίζονται στον ίδιο παραγόμενο χώρο. Τα στοιχεία των  $\bar{R}(u,v)$  και  $\bar{S}(u,v)$  είναι ασαφή σύνολα τύπου 1 (δηλ δευτερεύουσες συναρτήσεις συμμετοχής). Τότε:

$$\bar{R}(u,v) = \int_{U \times V} \mu_{\bar{R}}(u,v)/(u,v) = \int_{U \times V} \left[ \int_{a \in J_a(u,v)} r_{(u,v)}(a)/a \right] / (u,v)$$

$$\bar{S}(u,v) = \int_{U \times V} \mu_{\bar{S}}(u,v)/(u,v) = \int_{U \times V} \left[ \int_{\beta \in J_{\beta}(u,v)} s_{(u,v)}(\beta)/\beta \right] / (u,v)$$

και

$$\mu_{\bar{R} \cup \bar{S}}(u,v) = \mu_{\bar{R}}(u,v) \sqcup \mu_{\bar{S}}(u,v) = \int_{a \in J_a(u,v)} \int_{\beta \in J_{\beta}(u,v)} r_{(u,v)}(a) * s_{(u,v)}(\beta) / (a \vee \beta)$$

$$\mu_{\bar{R} \cap \bar{S}}(u,v) = \mu_{\bar{R}}(u,v) \sqcap \mu_{\bar{S}}(u,v) = \int_{a \in J_a(u,v)} \int_{\beta \in J_{\beta}(u,v)} r_{(u,v)}(a) *$$

$$s_{(u,v)}(\beta) / (a \wedge \beta)$$

$$\forall (u,v) \in U \times V$$

**Παράδειγμα:** Θεωρούμε τις ασαφείς σχέσεις «u is close to v» και «u is smaller than v» ορισμένες στον ίδιο παραγόμενο χώρο  $U \times V$ . Αν θεωρήσουμε ότι πρόκειται για σχέσεις τύπου 2 που εκφράζονται ως εξής θεωρώντας  $U = \{u_1, u_2\} = \{2, 12\}$  και  $V = \{v_1, v_2, v_3\} = \{1, 7, 13\}$ :

$$\mu_{\tilde{c}}(u,v) = \begin{matrix} u_1 \\ u_2 \end{matrix} \begin{pmatrix} \mathbf{V}_1 & \mathbf{V}_2 & \mathbf{V}_3 \\ 0.3/0.8 + 1/0.9 + 0.7/0.1 & 0.7/0.3 + 1/0.4 + 0.1/0.5 & 0.5/0 + 1/0.1 \\ 0.5/0 + 1/0.1 & 0.7/0.3 + 1/0.4 + 0.1/0.5 & 0.3/0.8 + 1/0.9 + 0.7/1 \end{pmatrix}$$

και

$$\mu_{\tilde{s}}(u,v) = \begin{matrix} u_1 \\ u_2 \end{matrix} \begin{pmatrix} \mathbf{V}_1 & \mathbf{V}_2 & \mathbf{V}_3 \\ 1/0 + 0.9/0.1 + 0.4/0.5 & 0.8/0.3 + 0.8/0.4 + 0.9/0.5 + 1/0.6 & 0.9/0.9 + 1/1 \\ 1/0 + 0.1/0.1 + 0.1/0.2 & 1/0 + 0.3/0.1 & 1/0.3 + 0.9/0.4 + 0.4/0.5 \end{pmatrix}$$

Οι δευτερεύοντες βαθμοί συμμετοχής για την ένωση και τομή των 2 σχέσεων βρίσκονται ως εξής:

$$\begin{aligned}\mu_{\tilde{c} \cup \tilde{s}}(u_i, v_j) &= \mu_{\tilde{c}}(u_i, v_j) \sqcup \mu_{\tilde{s}}(u_i, v_j) \\ &= \sum_{a \in J_a(u_i, v_j)} \sum_{\beta \in J_\beta(u_i, v_j)} r(u_i, v_j)(\alpha) * s(u_i, v_j)(\beta) / (\alpha \vee \beta)\end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}\mu_{\tilde{c} \cap \tilde{s}}(u_i, v_j) &= \mu_{\tilde{c}}(u_i, v_j) \sqcap \mu_{\tilde{s}}(u_i, v_j) \\ &= \sum_{a \in J_a(u_i, v_j)} \sum_{\beta \in J_\beta(u_i, v_j)} r(u_i, v_j)(\alpha) * s(u_i, v_j)(\beta) / (\alpha \wedge \beta)\end{aligned}$$

Για παράδειγμα

$$\begin{aligned}\mu_{\tilde{c} \cup \tilde{s}}(u_1, v_1) &= (0.3/0.8 + 1/0.9 + 0.7/1) \sqcup (1/0 + 0.9/0.1 + 0.4/0.5) \\ &= 0.3/0.8 + 0.3/0.8 + 0.3/0.8 + 1/0.9 + 0.9/0.9 \\ &\quad + 0.4/0.9 + 0.7/1 + 0.7/1 + 0.4/1 \\ &= 0.3/0.8 + 1/0.9 + 0.7/1\end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}\mu_{\tilde{c} \cap \tilde{s}}(u_1, v_1) &= (0.3/0.8 + 1/0.9 + 0.7/1) \sqcap (1/0 + 0.9/0.1 + 0.4/0.5) \\ &= 0.3/0 + 0.3/0.1 + 0.3/0.5 + 1/0 + 0.9/0.1 \\ &\quad + 0.4/0.5 + 0.7/0 + 0.7/0.1 + 0.4/0.5 \\ &= 1/0 + 0.9/0.1 + 0.4/0.5\end{aligned}$$

Κάνοντας παρόμοιους υπολογισμούς για όλα τα ζεύγη  $u_i, v_i$  παίρνουμε τελικά:

$$\mu_{\tilde{c} \cup \tilde{s}}(u, v) = \begin{matrix} u_1 & \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3 \\ u_2 & \begin{pmatrix} 0.3/0.8 + 1/0.9 + 0.7/1 & 0.7/0.3 + 0.8/0.4 + 0.9/0.5 + 1/0.6 & 0.9/0.9 + 1/1 \\ 0.5/0 + 1/0.1 + 0.1/0.2 & 0.7/0.3 + 1/0.4 + 0.1/0.5 & 0.3/0.8 + 1/0.9 + 0.7/1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

και

$$\mu_{\tilde{c} \cap \tilde{s}}(u, v) = \begin{matrix} u_1 & \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3 \\ u_2 & \begin{pmatrix} 1/0 + 0.9/0.1 + 0.4/0.5 & 0.8/0.3 + 1/0.4 + 0.1/0.5 & 0.5/0 + 1/0.1 \\ 1/0 + 0.1/0.1 & 1/0 + 0.3/0.1 & 1/0.3 + 0.9/0.4 + 0.4/0.5 \end{pmatrix} \end{matrix}$$



### 2.3 Σχέσεις και συνθέσεις σε διαφορετικούς παραγόμενους χώρους

Αν  $\bar{R}$  και  $\bar{S}$  είναι δύο ασαφείς σχέσεις τύπου 2 στο  $U \times V$  και  $V \times W$  αντίστοιχα τότε η συνάρτηση συμμετοχής για κάθε ζεύγος  $(u, w)$ ,  $u \in U$  και  $w \in W$  είναι μη μηδενική αν και μόνο αν υπάρχει τουλάχιστον ένα  $v \in V$  τέτοιο ώστε  $\mu_{\bar{R}}(u, v) \neq 0$  και  $\mu_{\bar{S}}(v, w) \neq 0$ . Αυτό είναι ισοδύναμο με την ακόλουθη sup-star σύνθεση:

$$\mu_{\bar{R} \circ \bar{S}}(u, w) = \bigvee_{v \in V} [\mu_{\bar{R}}(u, v) \sqcap \mu_{\bar{S}}(v, w)] \quad u \in U, w \in W$$

Η απόδειξη βρίσκεται στις δημοσιεύσεις των Karnik και Mendel[8][9].

**Παράδειγμα:** Θεωρούμε τις ασαφείς σχέσεις «u is close to v» στον  $U \times V$  και «V is much bigger than w» στον  $V \times W$ . Αν θεωρήσουμε ότι πρόκειται για σχέσεις τύπου 2 που εκφράζονται ως εξής θεωρώντας  $U = \{u_1, u_2\} = \{2, 12\}$ ,  $V = \{v_1, v_2, v_3\} = \{1, 7, 13\}$  και  $W = \{w_1, w_2\} = \{4, 8\}$ :

$$\mu_{\tilde{c}}(u, v) = \begin{matrix} u_1 \\ u_2 \end{matrix} \begin{pmatrix} & \mathbf{V}_1 & \mathbf{V}_2 & \mathbf{V}_3 \\ 0.3/0.8+1/0.9+0.7/0.1 & 0.7/0.3+1/0.4+0.1/0.5 & 0.5/0+1/0.1 \\ 0.5/0+1/0.1 & 0.7/0.3+1/0.4+0.1/0.5 & 0.3/0.8+1/0.9+0.7/1 \end{pmatrix}$$

και

$$\mu_{\bar{m}b}(v, w) = \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{matrix} \begin{pmatrix} & \mathbf{W}_1 & \mathbf{W}_2 \\ 1/0+0.6/0.1 & 1/0+0.1/0.1 \\ 0.4/0.5+1/0.6+0.9/0.7 & 1/0+0.8/0.1+0.2/0.2 \\ 0.7/0.9+1/1 & 0.5/0.6+1/0.7+0.7/0.8 \end{pmatrix}$$

Η σύνθεση των σχέσεων δίνεται από την σχέση:

$$\mu_{\tilde{c} \circ \bar{m}b}(u_i, w_j) = [\mu_{\tilde{c}}(u_i, v_1) \sqcap \mu_{\bar{m}b}(v_1, w_j)] \sqcup [\mu_{\tilde{c}}(u_i, v_2) \sqcap \mu_{\bar{m}b}(v_2, w_j)] \\ \sqcup [\mu_{\tilde{c}}(u_i, v_3) \sqcap \mu_{\bar{m}b}(v_3, w_j)]$$

Για παράδειγμα

$$\mu_{\tilde{c} \circ \bar{m}b}(u_1, w_1) = [(0.3/0.8+1/0.9+0.7/1)] \sqcap (1/0+0.6/0.1) \\ \sqcup [(0.7/0.3+1/0.4+0.1/0.5)] \sqcap (0.4/0.5+1/0.6+0.9/0.7) \\ \sqcup [(0.5/0+1/0.1) \sqcap (0.7/0.9+1/1)] \\ = 0.7/0.3+1/0.4$$

Κάνοντας τους ίδιους υπολογισμούς με τον ίδιο τρόπο παίρνουμε:

$$\mu_{\tilde{c} \circ \tilde{m} \circ b}(u, w) = \begin{matrix} u_1 \\ u_2 \end{matrix} \begin{pmatrix} w_1 & w_2 \\ 0.7/0.3 + 1/0.4 & 0.5/0 + 1/0.1 + 0.2/0.2 \\ 0.3/0.8 + 1/0.9 + 0.7/1 & 0.5/0.6 + 1/0.7 + 0.7/0.8 \end{pmatrix}$$

## 2.4 Σύνθεση ενός συνόλου με μια σχέση

Η σύνθεση ενός ασαφούς συνόλου τύπου 2  $\tilde{R}$  και μιας ασαφούς σχέσης  $\tilde{S}(U, V)$  δίνεται από την ακόλουθη ειδική περίπτωση της σύνθεσης 2 ασαφών σχέσεων[8][9]:

$$\mu_{\tilde{R} \circ \tilde{S}}(v) = \sqcup_{u \in U} [\mu_{\tilde{R}}(u) \sqcap \mu_{\tilde{S}}(u, v)]$$

στην οποία  $\mu_{\tilde{R}}(u)$  είναι η δευτερεύουσα συνάρτηση συμμετοχής της  $\tilde{R}$ . Η σχέση αυτή παίζει σημαντικό ρόλο στο μηχανισμό συμπεράσματος ενός κανόνα του οποίου τα if μέρη (antecedents) ή τα then(consequents) είναι ασαφή σύνολα τύπου 2 και αποτελεί τον βασικό μηχανισμό συμπεράσματος σε ένα ΑΣ2.

**Παράδειγμα:** Θεωρούμε πάλι την ασαφή σχέση «u is close to v» στον  $U \times V$  όπου  $U = \{u_1, u_2\} = \{2, 12\}$ ,  $V = \{v_1, v_2, v_3\} = \{1, 7, 13\}$  με την δευτερεύουσα συνάρτηση συμμετοχής της να δίνεται πάλι από την σχέση:

$$\mu_{\tilde{c}}(u, v) = \begin{matrix} u_1 \\ u_2 \end{matrix} \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ 0.3/0.8 + 1/0.9 + 0.7/0.1 & 0.7/0.3 + 1/0.4 + 0.1/0.5 & 0.5/0 + 1/0.1 \\ 0.5/0 + 1/0.1 & 0.7/0.3 + 1/0.4 + 0.1/0.5 & 0.3/0.8 + 1/0.9 + 0.7/1 \end{pmatrix}$$

Επίσης θεωρούμε το ασαφές σύνολο τύπου 2 «small» του οποίου η συνάρτηση συμμετοχής είναι:

$$\mu_{\tilde{s}}(u) = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ 0.5/0.7 + 1/0.9 & 1/0.1 + 0.3/0.4 \end{pmatrix}$$

Η σύνθεση της ασαφούς σχέσης και του ασαφούς συνόλου μπορεί να γίνει με την εφαρμογή της σχέσης:

$$\mu_{\tilde{s} \circ \tilde{c}}(v_j) = [\mu_{\tilde{s}}(u_1) \sqcap \mu_{\tilde{c}}(u_1, v_j)] \sqcup [\mu_{\tilde{s}}(u_2) \sqcap \mu_{\tilde{c}}(u_2, v_j)]$$

με  $j=1,2,3$ . Τελικά παίρνουμε:

$$\mu_{\tilde{s} \circ \tilde{c}}(v) = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ 0.5/0.7 + 0.3/0.8 + 1/0.9 & 0.7/0.3 + 1/0.4 + 0.1/0.5 & 1/0.1 + 0.3/0.4 \end{pmatrix}$$

## 2.5 Καρτεσιανό γινόμενο ασαφών συνόλων τύπου 2

Ας θεωρήσουμε  $A_1, A_2, \dots, A_n$  ασαφή σύνολα που ορίζονται στα  $X_1, X_2, \dots, X_n$ . Το καρτεσιανό γινόμενο των  $A_1, A_2, \dots, A_n$ ,  $A_1, A_2, \dots, A_n$  είναι ένα ασαφές σύνολο τύπου 2 στον παραγόμενο χώρο  $X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$  με συνάρτηση συμμετοχής:

$$\mu_{A_1 \times \dots \times A_n}(x_1, \dots, x_n) = \mu_{A_1}(x_1) \sqcap \mu_{A_2}(x_2) \sqcap \dots \sqcap \mu_{A_n}(x_n)$$

**Παράδειγμα:** Ας θεωρήσουμε δύο σύνολα  $U$  και  $V$  όπου  $U = \{u_1, u_2, u_3\}$  και  $V = \{v_1, v_2\}$ . Επίσης ένα ασαφές σύνολο τύπου 2  $F$  στο  $U$  με δευτερεύουσα συνάρτηση συμμετοχής

$$\mu_F(u) = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ 0.9/0.2 + 0.9/0.8 + 0.4/1 & 0.1/0.4 + 1/0.7 + 1/1 & 0.6/0 + 0.8/0.2 \end{pmatrix}$$

και ένα ασαφές σύνολο τύπου 2  $G$  στο  $V$  με δευτερεύουσα συνάρτηση συμμετοχής

$$\mu_G(v) = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \\ 0.4/0.5 + 0.3/0.6 & 0.7/0.6 + 0.6/0.8 + 0.1/0.9 \end{pmatrix}$$

Η συνάρτηση συμμετοχής του καρτεσιανού γινομένου  $F \times G$  μπορεί να βρεθεί ως:

$$\mu_{F \times G}(u_i, v_j) = \mu_F(u_i) \sqcap \mu_G(v_j) \quad i=1,2,3 \text{ και } j=1,2$$

Τελικά

$$\mu_{F \times G}(u, v) =$$

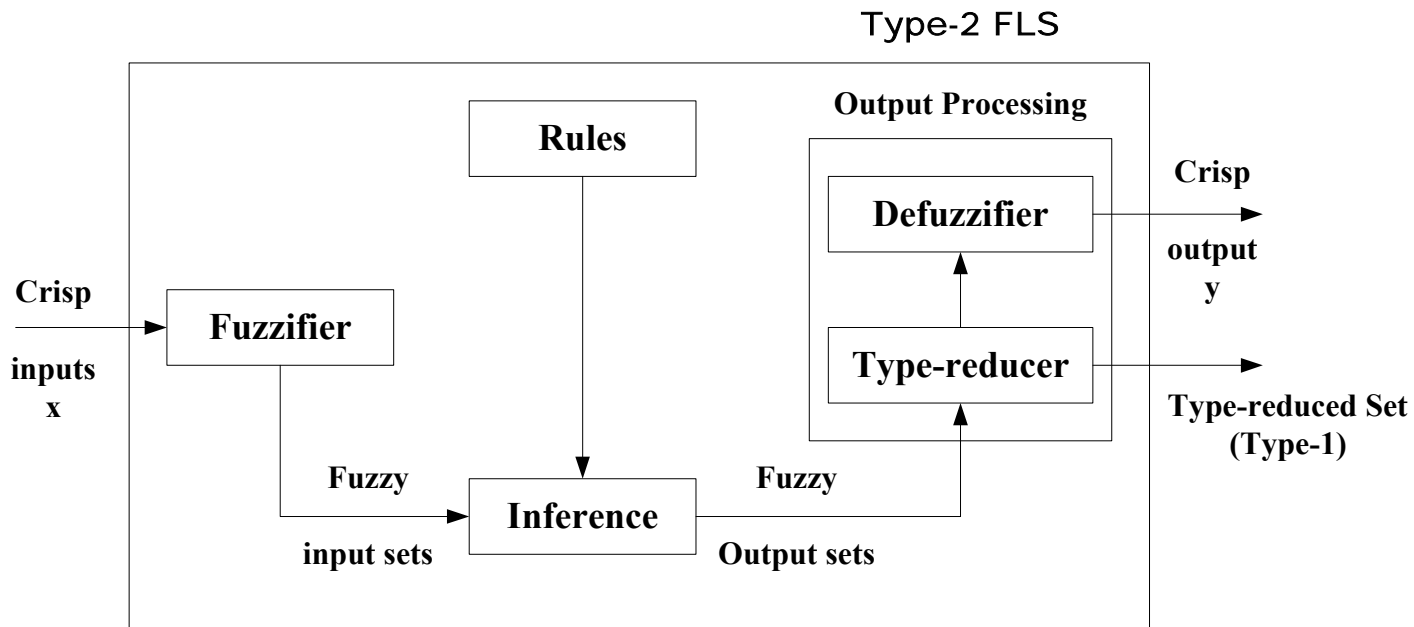
$$\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \\ 0.4/0.2 + 0.4/0.5 + 0.3/0.6 & 0.7/0.2 + 0.7/0.6 + 0.6/0.8 + 0.1/0.9 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0.1/0.4 + 0.4/0.5 + 0.3/0.6 & 0.1/0.4 + 0.7/0.6 + 0.6/0.7 + 0.6/0.8 + 0.1/0.9 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0.4/0 + 0.4/0.2 & 0.6/0 + 0.7/0.2 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

## Κεφάλαιο 3

### Ασαφή συστήματα τύπου 2

#### 3.1 Γενικά για τα ασαφή συστήματα τύπου 2

Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η δομή ενός ασαφούς συστήματος τύπου 2. Παρουσιάζει πολλές ομοιότητες με την αντίστοιχη ενός ΑΣ1. Σε ένα ΑΣ1 όμως η μονάδα επεξεργασίας της εξόδου περιέχει μόνο τον αποσαφοποιητή(defuzzifier). Θεωρούμε ότι ο αναγνώστης είναι εξοικειωμένος με ΑΣ1,οπότε θα επικεντρωθούμε μόνο στις διαφορές των δύο συστημάτων,



Σχήμα 3.1 Δομή ασαφούς συστήματος τύπου 2

Ο ασαφοποιητής (fuzzifier) αντιστοιχίζει μια σαφή είσοδο σε ένα ασαφές σύνολο. Το σύνολο αυτό μπορεί να είναι γενικά τύπου 2, αλλά στην εργασία αυτή ασχολούμαστε μόνο με singleton fuzzification ,όπου το ασαφές σύνολο εισόδου έχει ένα μοναδικό σημείο μη μηδενικής συνάρτησης συμμετοχής.

Στα ΑΣ1 έχουμε γενικά «IF-THEN» κανόνες όπου ο  $l$ th κανόνας έχει την μορφή:

$$R^l: \text{IF } x_1 \text{ is } F_1^l \text{ and } x_2 \text{ is } F_2^l \text{ and } \dots \text{ and } x_p \text{ is } F_p^l \text{ THEN } y \text{ is } G^l$$

όπου  $x_i$ :είσοδοι, $F_i^1$ 's πρότερα(antecedent) σύνολα, $y$  η έξοδος και  $G_i^1$ 's τα επακόλουθα(consequent) σύνολα. Η διαφοροποίηση μεταξύ ΑΣ1 και ΑΣ2 σχετίζεται με την φύση των συναρτήσεων συμμετοχής που δεν είναι πολύ σημαντική κατά την δημιουργία των κανόνων. Έτσι η δομή των κανόνων παραμένει η ίδια και σε ένα ΑΣ2 με την μόνη διαφορά ότι κάποια ή όλα τα ασαφή σύνολα είναι τύπου 2. Έτσι ο  $l$ th κανόνας σε ένα ΑΣ2 έχει την μορφή:

$$R^l: \text{IF } x_1 \text{ is } F_1^1 \text{ and } x_2 \text{ is } F_2^1 \text{ and } \dots \text{ and } x_p \text{ is } F_p^1 \text{ THEN } y \text{ is } G^1$$

Δεν είναι απαραίτητο όλα τα ασαφή σύνολα να είναι τύπου 2. Αρκεί να έχουμε ένα ασαφές σύνολο τύπου 2 και τότε λέμε ότι έχουμε ένα ΑΣ2.

Σε ένα ΑΣ1, ο μηχανισμός εξαγωγής συμπεράσματος συνδυάζει κανόνες και κάνει αντιστοίχιση από τα ασαφή σύνολα εισόδου τύπου 1 στα ασαφή σύνολα εξόδου επίσης τύπου1. Πολλαπλά antecedents συνδυάζονται μέσω της t-norm(που αντιστοιχεί στην τομή των συνόλων). Οι συναρτήσεις συμμετοχής στα σύνολα εισόδου συνδυάζονται με εκείνες των συνόλων εξόδου χρησιμοποιώντας την sup-star σύνθεση. Πολλαπλοί κανόνες συνδυάζονται μέσω της t-conorm(που αντιστοιχεί στην ένωση των συνόλων) ή μέσω της διαδικασίας αποσαφοποίησης μέσω σταθμισμένου αθροίσματος. Παρόμοιος είναι και ο μηχανισμός εξαγωγής συμπεράσματος και στα ΑΣ2. Επιτελεί συνδυασμό κανόνων και αντιστοιχίζει ασαφή σύνολα εισόδου τύπου 2 σε ασαφή σύνολα εξόδου επίσης τύπου 2. Για το σκοπό αυτό χρησιμοποιούνται οι τομές και ενώσεις ασαφών συνόλων τύπου2 καθώς και οι συνθέσεις σχέσεων τύπου 2 που αναλύθηκαν σε προηγούμενα κεφάλαια.

Σε ένα ΑΣ1, η διαδικασία αποσαφοποίησης παράγει μια σαφή έξοδο από το ασαφές σύνολο που αποτελεί την έξοδο του μηχανισμού εξαγωγής συμπεράσματος, δηλ μια έξοδος τύπου 0(σαφής)παράγεται από ένα σύνολο τύπου1. Στα ΑΣ2 η έξοδος του μηχανισμού εξαγωγής συμπεράσματος είναι ένα ασαφές σύνολο τύπου 2. Έτσι χρησιμοποιούμε επεκταμένες τεχνικές αποσαφοποίησης που μετατρέπουν ασαφή σύνολα τύπου 2 σε αντίστοιχα τύπου 1. Ονομάζουμε αυτήν την διαδικασία μείωση τύπου(type reduction) και το εξαγόμενο σύνολο «type reduced set». Για να πάρουμε μια σαφή έξοδο σε ένα ΑΣ2 αποσαφοποιούμε το «type reduced set». Ο πιο σύνηθες τρόπος είναι να βρούμε το κέντρο του «type reduced set». Υπάρχουν όμως και άλλοι τρόποι που θα δούμε παρακάτω.

### 3.2 Μηχανισμός εξαγωγής συμπεράσματος σε ένα ασαφές σύστημα τύπου 2

Ας θεωρήσουμε ένα ΑΣ2 με  $p$  εισόδους  $x_1 \in X_1, x_2 \in X_2, \dots, x_p \in X_p$ , και μια έξοδο  $y \in Y$ . Ας υποθέσουμε ότι έχουμε  $M$  κανόνες όπου ο  $l$ th έχει την μορφή:

$$R^l: \text{IF } x_1 \text{ is } F_1^l \text{ and } x_2 \text{ is } F_2^l \text{ and } \dots \text{ and } x_p \text{ is } F_p^l \text{ THEN } y \text{ is } G^l$$

Ο κανόνας αυτός αντιπροσωπεύει μια σχέση ασαφής τύπου 2 μεταξύ του χώρου εισόδου  $X_1 \times X_2 \times \dots \times X_p$  και του χώρου εξόδου  $Y$ . Υποδηλώνουμε την συνάρτηση συμμετοχής αυτής της σχέσης σαν  $\mu_{F_1^l \times \dots \times F_p^l \rightarrow G^l}(x, y)$  όπου  $F_1^l \times \dots \times F_p^l$  καρτεσιανό γινόμενο των  $F_1^l, \dots, F_p^l$  και  $x = \{x_1, x_2, \dots, x_p\}$ .

Όταν μια είσοδος  $x'$  εφαρμοστεί τότε η σύνθεση του ασαφούς συνόλου  $\bar{X}$  στο οποίο ανήκει το  $x'$  γίνεται χρησιμοποιώντας την sup-star σύνθεση που αναλύσαμε και στην παράγραφο 2.4

$$\mu_{\bar{X}}(\bar{x}) \circ \mu_{F_1^l \times \dots \times F_p^l \rightarrow G^l}(y) = \sqcup_{x \in \bar{X}} [\mu_{\bar{X}}(x) \sqcap \mu_{F_1^l \times \dots \times F_p^l \rightarrow G^l}(x, y)]$$

Χρησιμοποιούμε singleton fuzzification, καθώς, το ασαφές σύνολο  $\bar{X}$  είναι τέτοιο που να έχει συνάρτηση συμμετοχής 1 για  $x = x'$  και 0 για όλες τις άλλες εισόδους. Έτσι η παραπάνω σχέση γίνεται:

$$\mu_{\bar{X}}(\bar{x}) \circ \mu_{F_1^l \times \dots \times F_p^l \rightarrow G^l}(y) = \mu_{F_1^l \times \dots \times F_p^l \rightarrow G^l}(x', y)$$

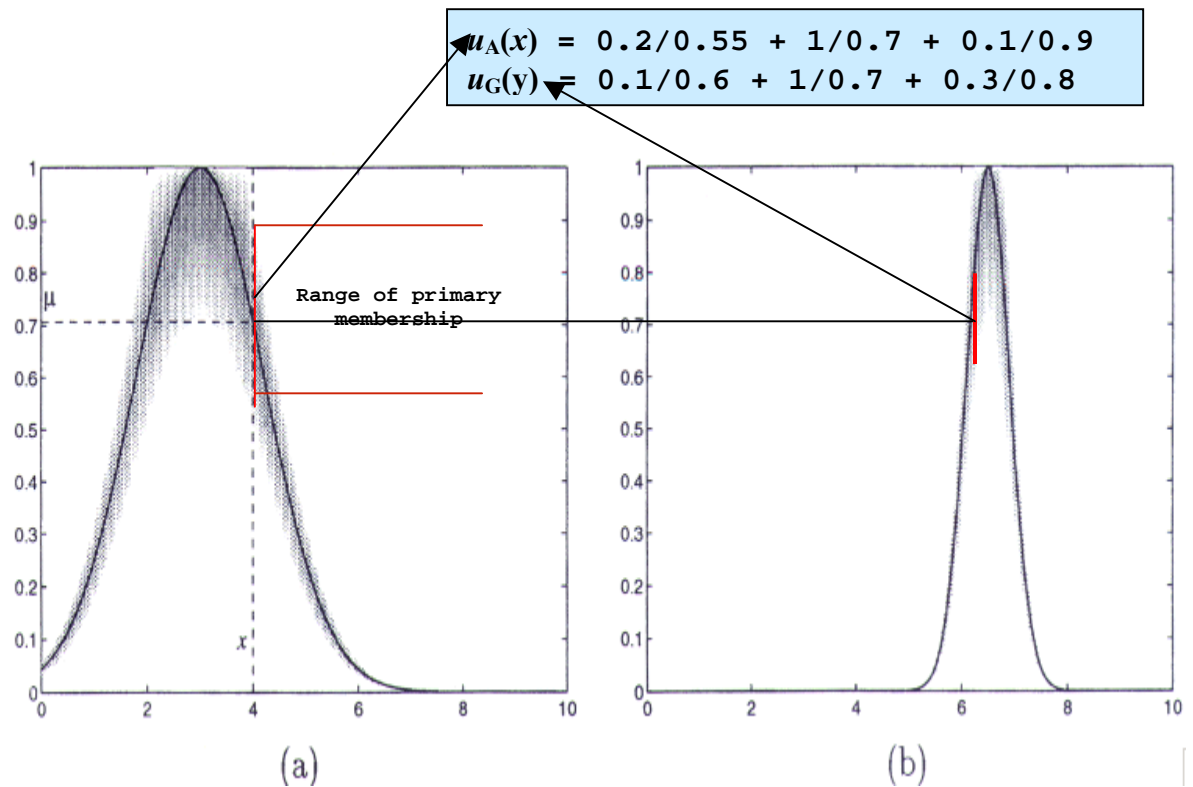
Υποδηλώνουμε το  $\bar{x} \circ \mu_{F_1^l \times \dots \times F_p^l \rightarrow G^l}$  σαν  $\bar{B}^l$ , το σύνολο εξόδου που αντιστοιχεί στον  $l$ th κανόνα. Το δεξιό μέρος της παραπάνω σχέσης (right-hand side ή RHS) υπολογίζεται χρησιμοποιώντας την πράξη meet (με product ή minimum t-norm) που αναλύθηκε σε προηγούμενο κεφάλαιο. Έτσι,

$$\mu_{\bar{B}^l}(y) = \mu_{F_1^l \times \dots \times F_p^l \rightarrow G^l}(x') \sqcap \mu_{G^l}(y)$$

Η συνάρτηση συμμετοχής όπως είδαμε και στην παράγραφο 2.5 υπολογίζεται εφαρμόζοντας τον τελεστή meet στις συναρτήσεις συμμετοχής καθενός εκ των ασαφών συνόλων. Έτσι,

$$\mu_{\bar{B}^l}(y) = \mu_{F_1^l}(x_1) \sqcap \mu_{F_2^l}(x_2) \sqcap \dots \sqcap \mu_{F_p^l}(x_p) \sqcap \mu_{G^l}(y) \quad (3.2.1)$$

**Παράδειγμα:** Το παρακάτω σχήμα δείχνει ένα παράδειγμα εξαγωγής συμπεράσματος χρησιμοποιώντας minimum t-norm για ένα τυχαίο ΑΣ2 με μία είσοδο και μία έξοδο και Gaussian ασαφή σύνολα. Η μαύρη περιοχή υποδηλώνει την FOU. Οι πιο μαύρες περιοχές υποδηλώνουν μεγαλύτερες δευτερεύουσες συναρτήσεις συμμετοχής. Η κύρια(principal) συνάρτηση συμμετοχής ,δηλ το σύνολο των πρωτεύοντων συναρτήσεων συμμετοχής που έχουν δευτερεύουσες συναρτήσεις ίσες με 1,σημειώνεται με μια λεπτή γραμμή.



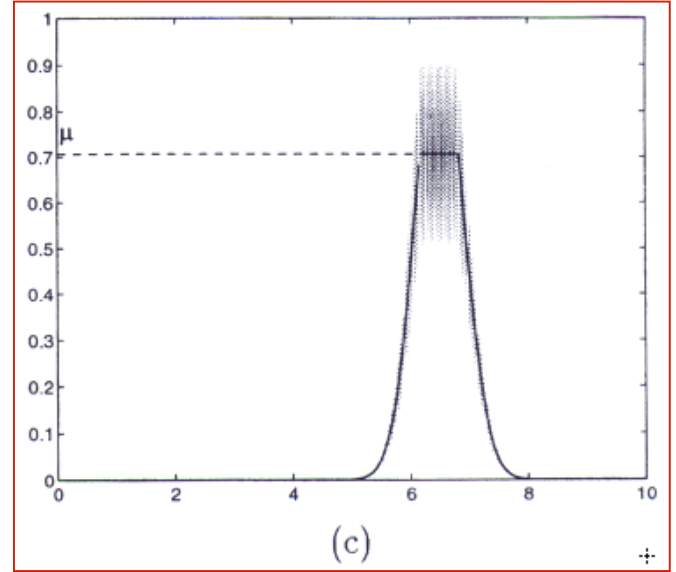
**Σχήμα 3.2 Antecedent και consequent fuzzy sets**

Στο 3.2c φαίνεται το συμπέρασμα εφαρμόζοντας τον τελεστή meet χρησιμοποιώντας minimum t-norm στην συνάρτηση συμμετοχής του  $x=4$  και την συνάρτηση συμμετοχής κάθε σημείου της συνάρτησης συμπεράσματος που φαίνεται στην 3.2b. Το αποτέλεσμα είναι ένα ασαφές σύνολο τύπου 2.

$$\mu_{A(x')} = 0.2/0.55 + 1/0.7 + 0.1/0.9$$

$$\mu_{G(x')} = 0.1/0.6 + 1/0.7 + 0.3/0.8$$

$$\mu_{A(x') \wedge \bar{X}(x')} = 0.2/0.55 + 1/0.7 + 0.1/0.9$$



**Σχήμα 3.2.c Fuzzy Inference Engine Result**

$$\begin{aligned} \mu_{A(x') \wedge \bar{X}(x') \wedge G(x')} &= \sup[(0.2 \wedge 0.1/0.55 \wedge 0.6) + (0.2 \wedge 1/0.55 \wedge 0.7) + (0.2 \wedge 0.1/0.55 \wedge 0.9) \\ &+ (1 \wedge 0.1/0.7 \wedge 0.6) + (1 \wedge 1/0.7 \wedge 0.7) + (1 \wedge 0.3/0.7 \wedge 0.8) + (0.1 \wedge 0.1/0.9 \wedge 0.6) \\ &+ (0.1 \wedge 1/0.9 \wedge 0.7) + (0.1 \wedge 0.3/0.9 \wedge 0.8)] \\ &= \sup[0.1/0.55 + 0.2/0.55 + 0.2/0.55 + 0.1/0.6 + 1/0.7 + 0.1/0.8 + 0.1/0.7 + 0.1/0.8] \\ &= 0.2/0.55 + 0.1/0.6 + 1/0.7 + 0.1/0.8 \end{aligned}$$

### 3.2.1 Εξαγωγή συμπεράσματος σε interval ασαφή συστήματα

Σε interval συστήματα όπου οι δευτερεύουσες συναρτήσεις συμμετοχής είναι interval sets αφού ισχύουν τα παρακάτω θεωρήματα:

**a)** Το αποτέλεσμα των πράξεων στα antecedent sets που δημιουργούν το σύνολο ενεργοποίησης  $F^l(x') = \bigcap \mu_{F_i^l}(x_i')$  είναι ένα interval set τύπου 1

$$F^l(x') = [\underline{f}^l(x'), \bar{f}^l(x')] = [\underline{f}^l, \bar{f}^l]$$

όπου

$$\underline{f}^l(x') = \underline{\mu}_{F_1^l}(x_1') * \dots * \underline{\mu}_{F_p^l}(x_p')$$

$$\bar{f}^l(x') = \bar{\mu}_{F_1^l}(x_1') * \dots * \bar{\mu}_{F_p^l}(x_p')$$



b)Το ενεργοποιούμενο από τον κανόνα  $R^l$  consequent set έχει συνάρτηση συμμετοχής:

$$\mu_{\bar{B}^l}(y) = \int_{b^l \in [\underline{f}^l \star \underline{\mu}_{\bar{G}^l}(y), \bar{f}^l \star \bar{\mu}_{\bar{G}^l}(y)]} 1/b^l, \quad y \in Y$$

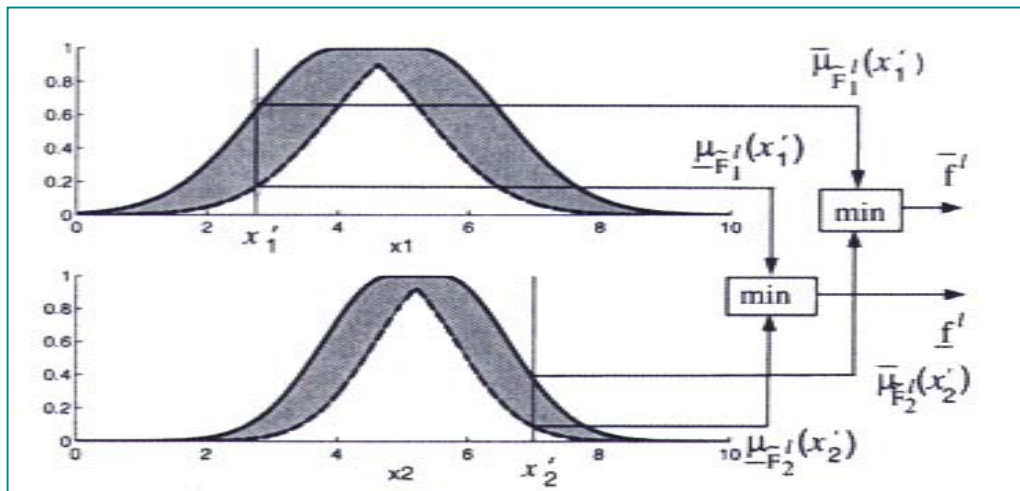
c)Αν υποθέσουμε ότι  $N$  από τους  $M$  κανόνες ενεργοποιούνται τότε το συνδυασμένο σύνολο εξόδου έχει συνάρτηση συμμετοχής:

$$\mu_{\bar{B}}(y) = \int_{b \in [\underline{f}^1 \star \underline{\mu}_{\bar{G}^1}(y) \vee \dots \vee \underline{f}^N \star \underline{\mu}_{\bar{G}^N}(y)] [\bar{f}^1 \star \bar{\mu}_{\bar{G}^1}(y) \vee \dots \vee \bar{f}^N \star \bar{\mu}_{\bar{G}^N}(y)]} 1/b.$$

**Παράδειγμα:** Στην παρακάτω γραφική φαίνονται οι πράξεις στα antecedent sets για ένα ΑΣ2 με κανόνες με 2 antecedent-1 consequent set .Η δύναμη ενεργοποίησης είναι ένα interval set με όρια  $[\underline{f}^l, \bar{f}^l]$  όπου

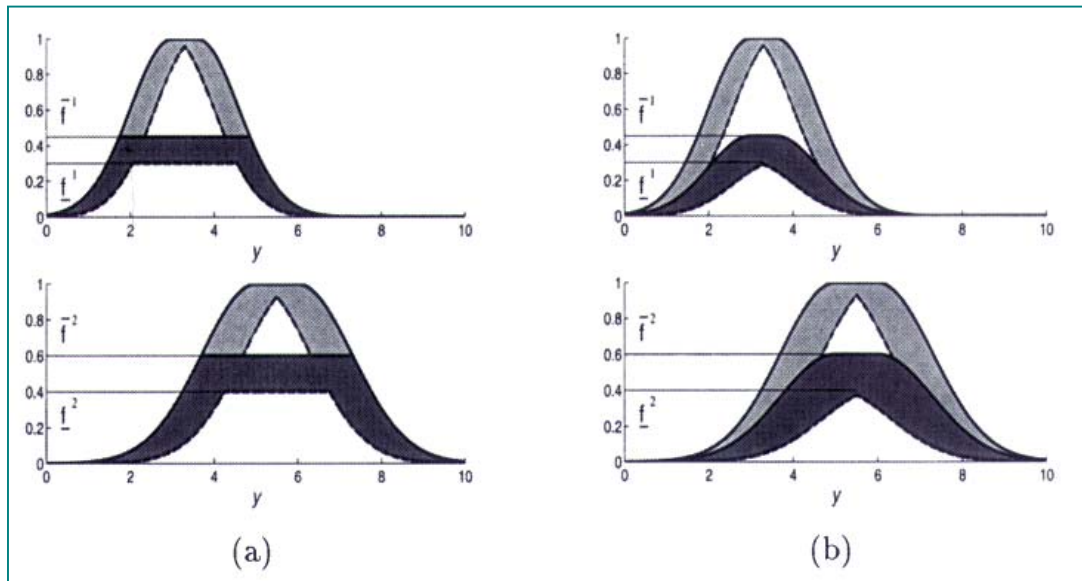
$$\underline{f}^l = \underline{\mu}_{F_1^l}(x_1') * \underline{\mu}_{F_2^l}(x_2')$$

$$\bar{f}^l = \bar{\mu}_{F_1^l}(x_1') * \bar{\mu}_{F_2^l}(x_2')$$



Σχήμα 3.2.1.1 Antecedent operations for a type 2 fuzzy logic system

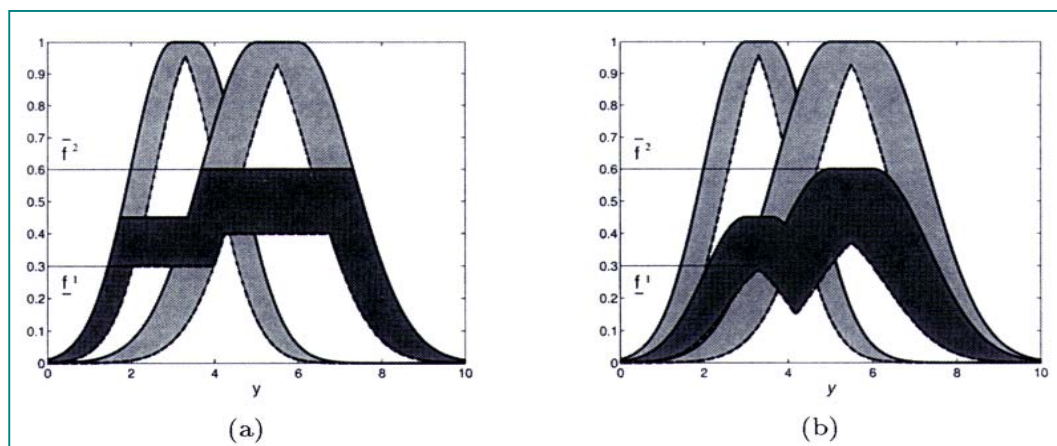
Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η συνάρτηση συμμετοχής  $\mu_{\bar{B}^l}(y)$  χρησιμοποιώντας την σχέση που αναπτύχθηκε παραπάνω. Για παράδειγμα το  $\bar{f}^l$  συνδυάζεται με t-norm με την άνω συνάρτηση συμμετοχής  $\bar{\mu}_{\bar{G}^l}(y)$  για να δώσει την καμπύλη  $\bar{f}^l * \bar{\mu}_{\bar{G}^l}(y)$ .



**Σχήμα 3.2.1.2 α)Ενεργοποιημένα σύνολα εξόδου με minimum t-norm**

**β)αντίστοιχα σύνολα χρησιμοποιώντας product t-norm**

Ενώ στο τρίτο σχήμα περιγράφεται το συνδυασμένο σύνολο εξόδου όπου τα ενεργοποιούμενα σύνολα εξόδου συνδυάζονται με την maximum t-conorm. Η άνω καμπύλη αντιστοιχεί στο  $[\bar{f}^1 * \bar{\mu}_G^1(y)] \vee [\bar{f}^2 * \bar{\mu}_G^2(y)]$  και η κάτω στο  $[\underline{f}^1 * \underline{\mu}_G^1(y)] \vee [\underline{f}^2 * \underline{\mu}_G^2(y)]$



**Σχήμα 3.2.1.3 α)Συνδυασμένα σύνολα εξόδου για τα σύνολα του 3.2.1.2α**

**β)αντίστοιχα σύνολα του 3.2.1.2β**

### 3.3 Μείωση τύπου(type reduction) σε ένα ασαφές σύστημα τύπου 2

Σε ένα ΑΣ1 η έξοδος που αντιστοιχεί σε κάθε ενεργοποιημένο κανόνα είναι ένα ασαφές σύνολο τύπου 1 στο χώρο εξόδου. Ο αποσαφοποιητής συνδυάζει τα σύνολα εξόδου που αντιστοιχούν σε όλους τους ενεργοποιημένους κανόνες με κάποιο τρόπο ώστε να παραχθεί ένα απλό σύνολο εξόδου και στην συνέχεια βγάζει ως έξοδο έναν σαφή αριθμό που είναι αντιπροσωπευτικός της συνδυασμένης εξόδου. Για παράδειγμα η κεντροειδής αποσαφοποίηση βρίσκει την ένωση όλων των συνόλων εξόδου και χρησιμοποιεί το κέντρο βάρους της ένωσης για να παράγει μια σαφή έξοδο.

Για τις μεθόδους αποσαφοποίησης τύπου 1 θεωρούμε ότι όλα τα σύνολα (antecedent και consequent) των κανόνων που αποτελούν την βάση κανόνων είναι τύπου 1. Για την διαδικασία μείωσης τύπου θεωρούμε ότι κάποια από τα antecedent ή consequent σύνολα είναι τύπου 2. Σε κάθε περίπτωση θεωρούμε ότι έχουν συνεχές πεδίο ορισμού και ότι τα ολοκληρώματα υποδεικνύουν την λογική ένωση.

Το σύνολο εξόδου που αντιστοιχεί σε κάθε κανόνα ενός ΑΣ2 είναι ένα ασαφές σύνολο τύπου 2. Η διαδικασία μείωσης τύπου συνδυάζει όλα τα σύνολα εξόδου με κάποιο τρόπο (όπως ο αποσαφοποιητής σε ένα ΑΣ1 συνδυάζει τα ασαφή σύνολα εξόδου τύπου1) και μετά υλοποιεί ένα κεντροειδή υπολογισμό στο σύνολο τύπου 2 που παράγεται δίνοντας ένα ασαφές σύνολο τύπου 1 το αποκαλούμε «type-reduced» set.

Το κέντρο βάρους ενός συνόλου τύπου 1  $A$ , του οποίου το πεδίο ορισμού διαχωρίζεται σε  $N$  σημεία δίνεται σαν

$$C_A = \frac{\sum_{i=1}^N x_i \mu_A(x_i)}{\sum_{i=1}^N \mu_A(x_i)}$$

Παρόμοια, το κέντρο βάρους ενός συνόλου τύπου 2  $\tilde{A}$ , του οποίου το πεδίο διακριτοποιείται σε  $N$  σημεία μπορεί να οριστεί ως ακολούθως.

Ονομάζουμε  $D_i = \mu_{\tilde{A}}(x_i)$ , έτσι ώστε:

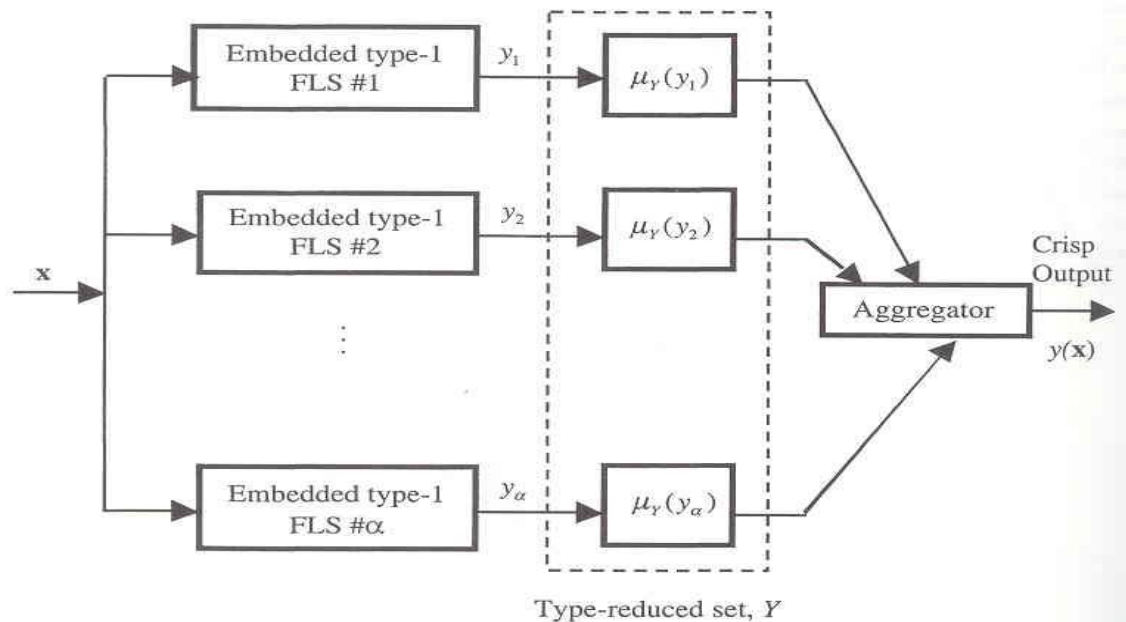
$$C_{\mathcal{A}} = \int_{\theta_1} \dots \int_{\theta_N} [\mu_{D_1}(\theta_1) * \dots * \mu_{D_N}(\theta_N)] / \frac{\sum_{i=1}^N x_i \theta_i}{\sum_{i=1}^N \theta_i}$$

όπου  $\theta_i \in D_i$ . Η παραπάνω σχέση μπορεί να περιγραφεί με λόγια ως εξής: Κάθε σημείο  $x_i$  του  $\mathcal{A}$  έχει ένα ασαφή βαθμό συμμετοχής  $D_i = \mu_{\mathcal{A}}(x_i)$  που συσχετίζεται με αυτό. Για να βρούμε το κέντρο βάρους, θεωρούμε κάθε πιθανό συνδυασμό  $\{\theta_1, \dots, \theta_N\}$  τέτοιο ώστε  $\theta_i \in D_i$ . Για κάθε τέτοιο συνδυασμό εφαρμόζουμε τον κεντροειδή υπολογισμό που ισχύει για τα σύνολα τύπου 1 τοποθετώντας  $\theta_i$  στην θέση του  $\mu_{\mathcal{A}}(x_i)$ . Και σε κάθε σημείο στο κέντρο βάρους ορίζουμε ένα βαθμό συμμετοχής ίσο με την t-norm των βαθμών συμμετοχής των  $\theta_i$  στο  $D_i$ . Αν περισσότεροι του ενός συνδυασμοί των  $\theta_i$  δίνουν το ίδιο σημείο κρατάμε αυτό με τον μεγαλύτερο βαθμό συμμετοχής.

Κάθε συνδυασμός  $\{\theta_1, \dots, \theta_N\}$  μπορεί να θεωρηθεί ότι σχηματίζει την συνάρτηση συμμετοχής κάποιου συνόλου τύπου 1  $\mathcal{A}'$  που έχει το ίδιο πεδίο με το  $\mathcal{A}$  και το οποίο όπως είπαμε στο κεφάλαιο 1 ονομάζεται embedded σύνολο στο  $\mathcal{A}$ . Το κέντρο βάρους  $C_{\mathcal{A}}$  είναι ένα σύνολο τύπου 1 του οποίου τα στοιχεία είναι τα κέντρα βάρους όλων των embedded συνόλων τύπου 1 στο  $\mathcal{A}$ . Η συμμετοχή κάθε κέντρου βάρους ενός embedded συνόλου στο  $C_{\mathcal{A}}$  υπολογίζεται σαν η t-norm των δευτερευόντων βαθμών συμμετοχής που αντιστοιχούν στο  $\{\theta_1, \dots, \theta_N\}$  που αποτελεί αυτό το embedded σύνολο.

Εδώ θα πρέπει να σημειώσουμε ότι αν το πεδίο ορισμού του  $\mathcal{A}$  και/ή του  $\mu_{\mathcal{A}}(x)$  είναι συνεχές, το πεδίο ορισμού του  $C_{\mathcal{A}}$  είναι επίσης συνεχές. Ο αριθμός των embedded συνόλων σε αυτήν την περίπτωση είναι άπειρος. Γι' αυτό τα πεδία τιμών των  $\mathcal{A}$  και  $\mu_{\mathcal{A}}(x)$  θα πρέπει να διακριτοποιηθούν ώστε να υπολογιστεί το κέντρο βάρους. Παρατηρούμε ότι αν το πεδίο τιμών κάθε  $D_i$  διακριτοποιηθεί σε  $M$  σημεία τότε ο αριθμός των πιθανών συνδυασμών  $\{\theta_1, \dots, \theta_N\}$  είναι  $M^N$ , που μπορεί να είναι τεράστιος αριθμός ακόμα και για μικρά  $M, N$ . Αν παρόλα αυτά οι συναρτήσεις συμμετοχής των  $D_i$  έχουν κάποια συγκεκριμένη δομή (π.χ ομοιόμορφη (interval sets), Gaussian, τριγωνική) μπορούμε να υπολογίσουμε ή να προσεγγίσουμε το κέντρο βάρους χωρίς να χρειαστεί να κάνουμε όλους τους υπολογισμούς. Για interval σύνολα θα εξηγήσουμε την διαδικασία μείωσης τύπου σε επόμενη παράγραφο.

Το σύνολο μειωμένου τύπου που προκύπτει είναι το κέντρο βάρους του ασαφούς συνόλου εξόδου τύπου 2 του ΑΣ2. Συνεπώς κάθε στοιχείο του συνόλου αυτού είναι το κέντρο βάρους κάποιου embedded συνόλου στο σύνολο εξόδου του ΑΣ2. Καθένα από τα embedded σύνολα τώρα μπορεί να θεωρηθεί σαν έξοδος ενός ΑΣ1 και αντίστοιχα το ΑΣ2 μπορεί να θεωρηθεί σαν ένα σύνολο ΑΣ1. Καθένα από αυτά τα σύνολα είναι ενσωματωμένο στο ΑΣ2 ,έτσι ώστε το ΑΣ2 να μπορεί να θεωρηθεί σαν ένα σύνολο εξόδων από όλα τα ενσωματωμένα ΑΣ1 σε ένα ΑΣ2. Αυτό αποδίδεται στο παρακάτω σχήμα:



**Σχήμα 3.3.1 Ένα ασαφές σύστημα τύπου 2 σαν θεώρηση συνόλου ενσωματωμένων συστημάτων τύπου 1**

Αν όλες οι antecedent και consequent συναρτήσεις συμμετοχής ενός ΑΣ2 είναι κανονικές(normal) και έχουν μόνο ένα σημείο με μοναδιαία δευτερεύουσα συνάρτηση συμμετοχής, τότε ο βαθμός συμμετοχής του συνόλου εξόδου θα είναι επίσης κανονικός και θα έχει μόνο ένα σημείο με μοναδιαία δευτερεύουσα συνάρτηση συμμετοχής και το ίδιο θα ισχύει και για το «type-reduced» set που προκύπτει.

Αν θεωρήσουμε ένα ΑΣ2 σαν μια παραλλαγμένη εκδοχή ενός ΑΣ1 , εξαιτίας των αβεβαιοτήτων στις συναρτήσεις συμμετοχής ,το σύνολο μειωμένου

τύπου που προκύπτει μπορεί να θεωρηθεί ότι αναπαριστά την αβεβαιότητα στην σαφή έξοδο εξαιτίας των αβεβαιοτήτων στις συναρτήσεις συμμετοχής. Κάποιο μέτρο της εξάπλωσης του «type-reduced» set μπορεί να θεωρηθεί ότι υποδηλώνει την πιθανή διαφοροποίηση της σαφής εξόδου λόγω των διαφοροποιήσεων στις παραμέτρους των συναρτήσεων συμμετοχής.

Στις παρακάτω υποενότητες θα περιγράψουμε πιο αναλυτικά 3 είδη διαδικασιών μείωσης τύπου.

### 3.3.1 Centroid Type Reduction

Η κεντροειδής αποσαφοποίηση[12] συνδυάζει τα ασαφή σύνολα εξόδου τύπου1 και βρίσκει το κέντρο βάρους του συνόλου που δημιουργείται. Αν ονομάσουμε το σύνολο αυτό  $B$ , τότε

$$y_c(x) = \frac{\sum_{i=1}^N y_i \mu_B(y_i)}{\sum_{i=1}^N \mu_B(y_i)}$$

όπου το σύνολο  $B$  διακριτοποιείται σε  $N$  σημεία.

Αντίστοιχα ο κεντροειδής μηχανισμός μείωσης τύπου συνδυάζει όλα τα ασαφή σύνολα εξόδου τύπου 2 βρίσκοντας την ένωση τους. Η συνάρτηση συμμετοχής του συνόλου  $\bar{B}$  που προκύπτει είναι:

$$\mu_{\bar{B}}(y) = \sqcup \mu_{B^1}(y) \quad (3.3.1.1)$$

όπου το  $\mu_{B^1}(y)$  είχε οριστεί στην παράγραφο 3.2. Μετά υπολογίζεται το κέντρο βάρους του συνόλου  $\bar{B}$ .

$$Y_c(x) = \int_{\theta_1} \dots \int_{\theta_N} [\mu_{D_1}(\theta_1) * \dots * \mu_{D_N}(\theta_N)] / \frac{\sum_{i=1}^N y_i \theta_i}{\sum_{i=1}^N \theta_i} \quad (3.3.1.2)$$

όπου  $D_i = \mu_{B^i}(y_i)$  και  $\theta_i \in \mu_{B^i}(y_i)$  ( $i=1, \dots, N$ ). Θέτουμε

$$a = \frac{\sum_{i=1}^N y_i \theta_i}{\sum_{i=1}^N \theta_i}$$

$$b = \mu_{D1} * \dots * \mu_{DN}(\theta_N) \quad (3.3.1.3)$$

Ο υπολογισμός του  $Y_c(x)$  περιλαμβάνει τον υπολογισμό των ζευγών  $(a,b)$  πολλές φορές. Ας υποθέσουμε ότι υπολογίζουμε το  $(a,b)$   $a$  φορές. Τότε μπορούμε να θεωρήσουμε τον υπολογισμό του  $Y_c(x)$  σαν τον υπολογισμό των  $a$  ζευγών  $(a_1,b_1), (a_2,b_2), \dots, (a_a,b_a)$ . Σημαντική πληροφορία είναι το πεδίο τιμών των  $a_i$ , δηλ  $a_L$  και  $a_R$  όπου  $a_L = \min a_i$  και  $a_R = \max a_i$  ( $i=1, \dots, a$ ) διότι είναι το όριο  $[a_L, a_R]$  που συσχετίζουμε με ένα γλωσσικό πεδίο τιμών. Αν αποθηκεύσουμε μόνο τα  $a_L$  και  $a_R$  αντί για όλα τα  $a$  μειώνονται οι απαιτήσεις αποθήκευσης κατά πολύ.

Η σειρά των υπολογισμών που απαιτούνται για τον υπολογισμό του  $Y_c(x)$  έχει ως ακολούθως:

- 1)Υπολόγισε το συνδυασμένο σύνολο εξόδου βάση της σχέσης 3.3.1.1. Αυτό είναι δυνατό γιατί μπορούμε πρώτα να υπολογίσουμε τα  $\mu_{B^1}(y)$  μέσω της σχέσης 3.2.1
- 2)Διαχώρισε το χώρο εξόδου  $Y$  σε  $N$  σημεία  $y_1, \dots, y_N$
- 3)Διαχώρισε το πεδίο τιμών κάθε  $\mu_{B^1}(y_i)$  ( $i=1, \dots, N$ ) σε κατάλληλο αριθμό σημείων
- 4)Απαρίθμησε όλα τα embedded σύνολα. Για παράδειγμα αν κάθε  $\mu_{B^1}(y_i)$  διαχωρίζεται σε  $M_i$  σημεία θα υπάρχουν  $\prod_{j=1}^N M_j$  ενσωματωμένα σύνολα
- 5)Υπολόγισε το «type-reduced» set χρησιμοποιώντας την 3.3.1.2, δηλ υπολόγισε τα ζεύγη  $(a_i, b_i)$   $i=1, 2, \dots, \prod_{j=1}^N M_j$ , όπου τα  $a_i$  και  $b_i$  είναι αυτά των σχέσεων 3.3.1.3. Χρησιμοποιούμε την minimum t-norm

Στο βήμα 5 ο υπολογισμός των συναρτήσεων συμμετοχής πρέπει να επαναληφθεί  $\prod_{j=1}^N M_j$  φορές και γενικά περιλαμβάνει τεράστιο υπολογιστικό φόρτο. Η υπολογιστική πολυπλοκότητα και τρόποι μείωσης της αναλύονται σε παρακάτω παράγραφο.

### 3.3.2 Height Type Reduction

Η αποσαφοποίηση ύψους αντικαθιστά το σύνολο εξόδου κάθε κανόνα με ένα μονοσύνολο στο σημείο που έχει την μεγαλύτερη συνάρτηση συμμετοχής στο εκάστοτε σύνολο και μετά υπολογίζει το κέντρο βάρους του συνόλου που δημιουργείται από τα μονοσύνολα αυτά. Η έξοδος του αποσαφοποιητή είναι:

$$y_h(x) = \frac{\sum_{l=1}^M \bar{y}^l \mu_B^l(\bar{y}^l)}{\sum_{l=1}^M \mu_B^l(\bar{y}^l)} \quad (3.3.2.1)$$

όπου  $\bar{y}^l$  είναι το σημείο που έχει τη μέγιστη συμμετοχή στο  $l$ th σύνολο εξόδου (αν υπάρχουν περισσότερα του ενός τότε παίρνουμε το μέσο όρο τους ως  $\bar{y}^l$ ). Η συμμετοχή του στο  $l$ th σύνολο εξόδου δίνεται ως:

$$\mu_B^l(\bar{y}^l) = \mu_G^l(\bar{y}^l) * T_{i=1}^p \mu_{Fi}^l(x_i)$$

όπου το  $*$  και  $T$  υποδηλώνουν την χρησιμοποιούμενη t-norm.

Η αντίστοιχη διαδικασία μείωσης τύπου αντικαθιστά κάθε σύνολο εξόδου με ένα μονοσύνολο τύπου 2, δηλ ένα ασαφές σύνολο του οποίου το πεδίο τιμών αποτελείται από ένα μόνο σημείο, η συμμετοχή του οποίου είναι ένα σύνολο τύπου 1. Το  $l$ th σύνολο εξόδου αντικαθίσταται από ένα μονοσύνολο στο  $\bar{y}^l$ , όπου  $\bar{y}^l$  επιλέγεται να είναι το σημείο που έχει την μεγαλύτερη συμμετοχή στην κύρια συνάρτηση συμμετοχής του συνόλου εξόδου  $\bar{B}^l$ . Αν το  $\bar{B}^l$  είναι τέτοιο ώστε η κύρια συνάρτηση συμμετοχής να μην μπορεί να προσδιοριστεί, τότε μπορούμε να διαλέξουμε σαν  $\bar{y}^l$  το σημείο που έχει την μεγαλύτερη πρωτεύουσα συμμετοχή με μοναδιαία δευτερεύουσα συμμετοχή ή κάποιο άλλο σημείο που ικανοποιεί ένα παρόμοιο κριτήριο. Ο βαθμός συμμετοχής του  $\bar{y}^l$  μπορεί να βρεθεί ως εξής:



$$\mu_{\bar{B}^l}(\bar{y}^l) = \mu_{\bar{B}^l}(\bar{y}^l) \cap [\cap \mu_{\bar{B}^l}(x_i)] \quad (3.3.2.2)$$

Αν θέσουμε  $D^l = \mu_{\bar{B}^l}(\bar{y}^l)$  τότε παίρνουμε:

$$Y_h(x) = \int_{\theta_1} \dots \int_{\theta_M} [\mu_{D^1}(\theta_1) * \dots * \mu_{D^M}(\theta_M)] / \frac{\sum_{l=1}^M \bar{y}^l \theta_l}{\sum_{l=1}^M \theta_l} \quad (3.3.2.3)$$

όπου  $\theta_l \in D^l$  για  $l=1, \dots, M$ . Σε αυτήν την περίπτωση  $\alpha = \sum_{l=1}^M \bar{y}^l / \sum_{l=1}^M \theta_l$ , ενώ το  $b$  δίνεται πάλι από την ίδια σχέση.

Η σειρά των υπολογισμών που απαιτούνται για τον υπολογισμό του  $Y_h(x)$  έχει ως ακολούθως :

- 1)Επέλεξε  $\bar{y}^l$  για κάθε σύνολο εξόδου  $l=1,2,\dots,M$  και υπολόγισε  $\mu_{\bar{B}^l}(\bar{y}^l)$  από την 3.3.2.2
- 2)Διαχώρισε το πεδίο τιμών κάθε  $\mu_{\bar{B}^l}(\bar{y}^l)$  σε ένα κατάλληλο αριθμό σημείων. Ο τρόπος διαχωρισμού είναι παρόμοιος με αυτόν στην κεντροειδή μείωση τύπου με την διαφορά ότι ο αριθμός των σημείων στον οριζόντιο άξονα(αριθμός κανόνων) είναι  $M$  αντί για  $N$
- 3)Απαρίθμησε όλους τους δυνατούς συνδυασμούς  $\{\theta_1, \dots, \theta_M\}$  τέτοια ώστε  $\theta_l \in \mu_{\bar{B}^l}(\bar{y}^l)$ . Υπάρχουν  $\prod_{l=1}^M M_l$  συνδυασμοί
- 4)Υπολόγισε το «type-reduced» set χρησιμοποιώντας την 3.3.2.3. Χρησιμοποιούμε είτε minimum t-norm είτε product t-norm.

Στο βήμα 4 το σταθμισμένο άθροισμα και οι υπολογισμοί των συναρτήσεων συμμετοχής απαιτούν  $\prod_{l=1}^M M_l$  συνδυασμούς που είναι κατά

πολύ λιγότεροι από τους αντίστοιχους που απαιτούνται για την κεντροειδή μείωση τύπου.

### 3.3.3 Center-of-sets Type Reduction

Στην center-of\_sets απασαφοποίηση αντικαθιστούμε κάθε consequent σύνολο με ένα μονοσύνολο που αντιστοιχεί στο κέντρο του και μετά βρίσκουμε το κέντρο του συνόλου τύπου 1 που αποτελείται από αυτά τα μονοσύνολα.. Η έξοδος έχει ως εξής:

$$y_{cos}(x) = \frac{\sum_{l=1}^M c_l T_{i=1}^p \mu_{F_{il}}(x_i)}{\sum_{l=1}^M T_{i=1}^p \mu_{F_{il}}(x_i)}$$

όπου  $T$  είναι η t-norm που επιλέγουμε  $\lambda$  και  $c^l$  το κέντρο του  $l$ th consequent συνόλου. Σημειώνουμε ότι αν το σύνολο αυτό είναι συμμετρικό, κανονικό και κυρτό τότε  $c^l = \bar{y}^l$  και  $\mu_G^l(\bar{y}^l) = 1$  για  $l=1, \dots, M$ . Σε αυτή την ειδική περίπτωση δηλαδή  $y_{cos}(x) = y_h(x)$ .

Στην αντίστοιχη διαδικασία μείωσης τύπου κάθε consequent σύνολο αντικαθίσταται με το κέντρο βάρους του (που είναι ένα σύνολο τύπου 1 αν το αντίστοιχο consequent σύνολο είναι τύπου 2) και βρίσκει ένα σταθμισμένο άθροισμα όπου το βάρος που αντιστοιχεί στο  $l$ th κέντρο είναι ο βαθμός ενεργοποίησης του  $l$ th κανόνα, δηλ  $\prod \mu_{F_{il}}^l(x_i)$ . Η έκφραση που δίνει το σύνολο μειωμένου τύπου είναι:

$$Y_{cos}(x) = \int_{d_1} \dots \int_{d_M} \int_{e_1} \dots \int_{e_M} T_{l=1}^M \mu_{C_l}(d_l) * T_{l=1}^M \mu_{E_l}(e_l) / \frac{\sum_{l=1}^M d_l e_l}{\sum_{l=1}^M e_l} \quad (3.3.3.1)$$

όπου  $T$  και  $*$  υποδηλώνουν την t-norm,  $d_l \in C_l = C \cap G^l$  το κέντρο του  $l$ th consequent set και  $e_l \in E_l = \prod \mu_{F_{il}}^l(x_i)$  ο βαθμός ενεργοποίησης του  $l$ th

consequent set. Σε αυτήν την περίπτωση  $\alpha = \sum_{l=1}^M d_l e_l / \sum_{l=1}^M e_l$  και

$$b = T_{l=1}^M \mu(d) * T_{l=1}^M \mu_E(e).$$

Ο αριθμός των υπολογισμών που απαιτούνται είναι γενικά μεγαλύτερος από τον αντίστοιχο του height type reducer αλλά μικρότερος από αυτόν του centroid type reducer.

### 3.3.4 Υπολογιστική πολυπλοκότητα

Παρουσιάσαμε 3 είδη μείωσης τύπου σε ένα ΑΣ2. Δυστυχώς όμως παρουσιάζουν μεγάλη υπολογιστική πολυπλοκότητα. Ευτυχώς όμως ένα ΑΣ2 μπορεί να θεωρηθεί σαν ένα σύνολο πολλών ΑΣ1. Όπως περιγράψαμε σε προηγούμενη παράγραφο το «type-reduced» set είναι ένα σύνολο από εξόδους όλων των ενσωματωμένων ΑΣ1. Οι πράξεις για καθένα από τα ΑΣ1 μπορούν να γίνουν παράλληλα. Η υπολογιστική πολυπλοκότητα για την εκτέλεση του type-reduction σε ένα ΑΣ1 είναι η ίδια με αυτήν της αποσαφοποίησης. Ο αριθμός των παράλληλων επεξεργαστών εξαρτάται από τον αριθμό των ΑΣ1. Ο υπολογισμός των  $\alpha$  όπως αυτά δίνονται από την σχέση 3.3.1.3 μας δείχνει την πολυπλοκότητα με όρους πολλαπλασιασμών, προσθέσεων και διαιρέσεων. Ο υπολογισμός των  $b$  μας δίνει την πολυπλοκότητα σε υπολογισμούς T-norm. Ο αριθμός των παράλληλων επεξεργαστών ισούται με τον αριθμό των ζευγών  $(\alpha_i, b_i)$ . Ο παρακάτω πίνακας συνοψίζει την υπολογιστική πολυπλοκότητα για τις 3 μεθόδους μείωσης τύπου που είδαμε παραπάνω. Υποθέτουμε ότι ενεργοποιούνται όλοι οι  $M$  κανόνες, κάτι που δεν ισχύει στην πράξη.

Type reducer	t-norm	multiplications	additions	divisions	Parallel processors
Centroid	$N-1$	$N$	$2(N-1)$	1	$\prod_{k=1}^N M_k$
Height	$M-1$	$M$	$2(M-1)$	1	$\prod_{i=1}^M \prod_{j=1}^p N_i$
Center-of-sets	$2M-1$	$M-1$	$2(M-1)$	1	$\prod_{i=1}^M \prod_{j=1}^p K_i$

Πίνακας 3.3.4 Υπολογιστική πολυπλοκότητα μεθόδων μείωσης τύπου

Στον παραπάνω πίνακα ο αριθμός των κανόνων που ενεργοποιούνται είναι  $M$ , ο αριθμός των antecedents είναι  $\pi$ , οι ενεργοποιούμενοι πρωτεύοντες βαθμοί συμμετοχής  $\mu_{\bar{p}}^i(x)$  ( $i=1,\dots,M, j=1,\dots,p$ ) δειγματολειπτούνται σε  $N_{ij}$  σημεία, η συνεπαγόμενη(consequent) συνάρτηση συμμετοχής  $\mu_{\bar{p}}(y_k)(k=1,\dots,N)$  δειγματολειπτείται σε  $M_k$  σημεία Το κέντρο του  $i$ th consequent συνόλου περιέχει  $K_i$  σημεία και το πεδίο τιμών της εξόδου περιέχει  $N$  σημεία.

### 3.4 Μείωση τύπου σε interval ασαφή συστήματα τύπου 2

Η διαδικασία μείωσης τύπου σε ένα γενικευμένο ΑΣ2 αποτελεί μια εξαιρετικά πολύπλοκη διαδικασία. Η πιο γενικευμένη μορφή για την εύρεση του «type-reduced» set είναι σύμφωνα με αυτά που είδαμε στην προηγούμενη παράγραφο:

$$Y(Z_1, \dots, Z_M, W_1, \dots, W_M) = \frac{\int_{z_1} \dots \int_{z_M} \int_{w_1} \dots \int_{w_M} T_{l=1}^M \mu_{Z_l}(z_l) * T_{l=1}^M \mu_{W_l}(w_l) / \frac{\sum_{l=1}^M w_{Z_l}}{\sum_{l=1}^M w_l}}{\sum_{l=1}^M w_l}$$

Τα πράγματα γίνονται πολύ πιο απλά όταν οι δευτερεύουσες συναρτήσεις συμμετοχής είναι interval sets .Στις παρακάτω παραγράφους θα αναλύσουμε πως απλοποιείται η διαδικασία μείωσης τύπου σε αυτήν την περίπτωση και θα παρουσιάσουμε μια υπολογιστική διαδικασία που επιτρέπει τον υπολογισμό του «type-reduced»set χωρίς να χρειάζεται να λάβουμε υπόψιν όλους τους συνδυασμούς των  $z_l$  και  $w_l$ .

Σε ένα interval λοιπόν ΑΣ2,κάθε  $Z_l$  και  $W_l(l=1,\dots,M)$  είναι ένα interval σύνολο τύπου 1. Λαμβάνοντας λοιπόν υπόψιν το γεγονός ότι  $\mu_{Z_l}(z_l) = \mu_{W_l}(w_l) = 1$  η γενική σχέση που δώσαμε παραπάνω γράφεται:

$$Y(Z_1, \dots, Z_M, W_1, \dots, W_M) = \int_{z_1} \dots \int_{z_M} \int_{w_1} \dots \int_{w_M} 1 / \frac{\sum_{l=1}^M w_{Z_l}}{\sum_{l=1}^M w_l} \quad (3.4.1)$$

Οπότε σε αυτήν την περίπτωση απαιτείται μόνο ο υπολογισμός του  $a$  στην 3.3.1.3 μιας και το  $b$  είναι μονάδα.

Όπως είχαμε αναφέρει και στο πρώτο κεφάλαιο ένα interval set μπορεί να αναπαρασταθεί μόνο μέσο του αριστερού και δεξιού του άκρου σαν  $[l, r]$  ή μέσο του κέντρου και της εξάπλωσης του σαν  $[c-s, c+s]$  όπου  $c=(l+r)/2$  και  $s=(r-l)/2$ .

Σε ένα γενικευμένο interval ΑΣ2 κάθε  $Z_l$  στην 3.4.1 είναι ένα interval σύνολο τύπου 1 με κέντρο  $c_l$  και εξάπλωση  $s_l(s_l \geq 0)$  όπως και κάθε  $W_l$  με αντίστοιχα κέντρα και εξάπλωση  $h_l$  και  $\Delta_l(\Delta_l \geq 0)$ . Το  $Y$  είναι επίσης ένα interval set. Έτσι το μόνο που χρειάζεται να υπολογίσουμε είναι τα δύο ακρινά σημεία του  $y_l$  και  $y_r$ . Το  $y_l$  εξαρτάται από το  $c_l-s_l$  και από ένα από τα δύο ακρινά σημεία του  $W_l$  και το  $y_r$  από το  $c_l+s_l$  και από ένα από τα δύο ακρινά σημεία του  $W_l$ . Στην συνέχεια θα παρουσιάσουμε μια επαναληπτική διαδικασία υπολογισμού των  $y_l$  και  $y_r$  για ένα interval ΑΣ2.

$$\text{Για ευκολία θέτουμε } S(w_1, \dots, w_M) = \frac{\sum_{l=1}^M z_l w_l}{\sum_{l=1}^M w_l} \quad (3.4.2)$$

Όπου  $w_l \in [h_l - \Delta_l, h_l + \Delta_l]$  και  $h_l \geq \Delta_l$  για  $l=1, \dots, M$  και  $z_l \in [c_l - s_l, c_l + s_l]$ . Το μέγιστο των  $S, y_r$  βρίσκεται ως ακολούθως. Θέτουμε  $z_l = c_l + s_l (l=1, \dots, M)$  και χωρίς απώλεια γενικότητας υποθέτουμε ότι τα  $z_l$  είναι διατεταγμένα σε αύξουσα σειρά, δηλ  $z_1 \leq z_2 \leq \dots \leq z_M$ . Τότε

- 1)Θέσε  $w_l = h_l$  για  $l=1, \dots, M$  και υπολόγισε  $S' = S(h_1, h_2, \dots, h_M)$  χρησιμοποιώντας την 3.4.2.
- 2)Βρες  $k(1 \leq k \leq M-1)$  τέτοιο ώστε  $z_k \leq S' \leq z_{k+1}$
- 3)Θέσε  $w_l = h_l - \Delta_l$  για  $l \leq k$  και  $w_l = h_l + \Delta_l$  για  $l \geq k+1$  και υπολόγισε  $S'' = S(h_1 - \Delta_1, \dots, h_k - \Delta_k, h_{k+1} + \Delta_{k+1}, \dots, h_M + \Delta_M)$  χρησιμοποιώντας την 3.4.2.
- 4)έλεγξε αν  $S'' = S'$ . Αν ναι σταμάτα.  $S''$  είναι η μέγιστη τιμή του  $S(w_1, \dots, w_M)$ . Αν όχι πήγαινε στο βήμα 5
- 5)θέσε  $S' = S''$ . Πήγαινε στο βήμα 2.

Η επαναληπτική αυτή διαδικασία συγκλίνει το πολύ σε  $M$  επαναλήψεις [8] όπου μία επανάληψη αποτελείται από ένα πέρασμα διαμέσο των βημάτων 2-5.

Η ελάχιστη τιμή του  $S(w_1, \dots, w_M)$  μπορεί να βρεθεί με μια παρόμοια διαδικασία. Χρειάζονται μόνο 2 αλλαγές. 1)πρέπει να θέσουμε  $z_l = c_l - s_l$  για  $l=1, \dots, M$  και 2)στο βήμα 3 πρέπει να θέσουμε  $w_l = h_l + \Delta_l$  για  $1 \leq k$  και  $w_l = h_l - \Delta_l$  για  $l \geq k+1$  για τον υπολογισμό του σταθμισμένου μέσου  $S'' = S(h_1 + \Delta_1, \dots, h_k + \Delta_k, h_{k+1} + \Delta_{k+1}, \dots, h_M + \Delta_M)$

Η υπολογιστική αυτή μέθοδος μπορεί να εφαρμοστεί για τον υπολογισμό του «type-reduced» set για όλους τους τύπους type reduction με ραγδαία μείωση της υπολογιστικής πολυπλοκότητας. Τα  $y_l$  και  $y_r$  μπορούν να υπολογιστούν παράλληλα και απαιτούνται μόνο 2 επεξεργαστές ανεξάρτητα από το είδος της μείωσης τύπου που χρησιμοποιούμε.

Στην συνέχεια θα εξηγήσουμε αναλυτικά πως εφαρμόζεται η παραπάνω διαδικασία σε καθέναν από τους τρόπους type-reduction που είδαμε παραπάνω.

### 3.4.1 Centroid type reduction

Για ένα interval  $A_{\Sigma 2}$ , ο βαθμός ενεργοποίησης που αντιστοιχεί σε κάθε κανόνα όπως επίσης και τα σύνολα εξόδου είναι interval σύνολα τύπου 1, οπότε η σχέση 3.3.1.2 γίνεται

$$Y_c(x) = \int_{\theta_1} \dots \int_{\theta_N} 1 / \frac{\sum_{i=1}^N y_i \theta_i}{\sum_{i=1}^N \theta_i} \quad (3.4.1.1)$$

Ας θεωρήσουμε ότι  $[L_i, R_i]$  είναι το πεδίο τιμών του  $\mu_{\bar{B}}(y_i)$ . Για να χρησιμοποιήσουμε την υπολογιστική διαδικασία που περιγράψαμε προηγούμενα παρατηρούμε ότι το άθροισμα στην 3.4.2 τώρα εκτείνεται από 1 ως N αντί από 1 ως M. Το  $y_i$  παίζει το ρόλο του  $c_l$ . Το  $s_l=0$  για όλα τα  $l$  μιας και το  $y_i$  είναι σαφές. Επίσης  $(L_i + R_i)/2 = h_l$  και  $(R_i - L_i)/2 = \Delta_l$ .

### 3.4.2 Height type reduction

Για ένα interval ΑΣ2 η σχέση 3.3.2.3 γίνεται

$$Y_h(x) = \int_{\theta_1} \dots \int_{\theta_M} 1 / \frac{\sum_{l=1}^M \bar{y}^l \theta_l}{\sum_{l=1}^M \theta_l}$$

Εδώ  $\bar{y}^l$  παίζει το ρόλο του  $c_l$ . Επίσης  $s_l=0$  για όλα τα  $l$  μιας και  $\bar{y}^l$  είναι σαφές. Και η συμμετοχή του συνόλου εξόδου του  $\bar{y}^l \mu_B^l(\bar{y}^l)$  παίζει το ρόλο του  $W^l$ . Αν θεωρήσουμε ότι  $[L_i, R_i]$  είναι το πεδίο τιμών κάθε  $\mu_B^l(\bar{y}^l)$  τότε  $(L_i + R_i)/2 = h_l$  και  $(R_i - L_i)/2 = \Delta_l$ .

### 3.4.3 Centers-of-sets type reduction

Για ένα interval ΑΣ2 η σχέση 3.3.3.1 γίνεται

$$Y_{\cos}(x) = \int_{d_1} \dots \int_{d_M} \int_{e_1} \dots \int_{e_M} 1 / \frac{\sum_{l=1}^M d_l e_l}{\sum_{l=1}^M e_l} \quad (3.4.3.1)$$

Η υπολογιστική διαδικασία εφαρμόζεται σε 2 στάδια. Στο πρώτο στάδιο υπολογίζουμε το κέντρο  $C_l$  καθενός interval consequent set τύπου 2. Το κέντρο ενός τέτοιου συνόλου  $\bar{A}$  δίνεται ως εξής:

$$C_{\bar{A}} = \int_{\theta_1} \dots \int_{\theta_N} 1 / \frac{\sum_{z=1}^Z y_z \theta_z}{\sum_{z=1}^Z \theta_z} \quad (3.4.3.2)$$

όπου  $\theta_i$  ανήκει σε κάποιο διάστημα στο  $[0,1]$ . Για να χρησιμοποιήσουμε την υπολογιστική διαδικασία που περιγράφηκε παραπάνω παρατηρούμε ότι τα  $y_z$  και  $\theta_z$  παίζουν το ρόλο των  $z_l$  και  $w_l$  αντίστοιχα. Επίσης  $s_l=0$  γιατί κάθε  $y_z$  είναι

σαφές. Πιο αναλυτικά ο αλγόριθμος για την εύρεση του δεξιού άκρου των κέντρων των συνόλων εξόδου έχει ως εξής:

Θεωρούμε ότι τα  $y_z$  είναι διατεταγμένα κατά αύξουσα σειρά  $y_1 \leq y_2 \leq y_3 \leq \dots \leq y_Z$ . Τότε,

1) Αρχικοποίησε  $\theta_z$  θέτοντας  $\theta_z = h_z$  για  $z=1, \dots, Z$  και υπολόγισε  $y' = y(h_1, \dots, h_Z)$

$$\text{σύμφωνα με την εξίσωση } y(\theta_1, \dots, \theta_Z) = \frac{\sum_{z=1}^Z y_z \theta_z}{\sum_{z=1}^Z \theta_z}$$

2) Βρες  $e (1 \leq e \leq Z-1)$  τέτοιο ώστε  $y_e \leq y' \leq y_{e+1}$

3) Θέσε  $\theta_z = h_z - \Delta_z$  για  $z \leq e$  και  $\theta_z = h_z + \Delta_z$  για  $z \geq e+1$  και υπολόγισε  $y'' = y(h_1 - \Delta_1, \dots, h_e - \Delta_e, h_{e+1} + \Delta_{e+1}, \dots, h_Z + \Delta_Z)$  χρησιμοποιώντας την ίδια εξίσωση.

4) έλεγξε αν  $y'' = y'$ . Αν ναι σταμάτα.  $y''$  είναι η μέγιστη τιμή του  $y(\theta_1, \dots, \theta_Z)$ . Αν όχι πήγαινε στο βήμα 5

5) θέσε  $y'$  ίσο με  $y''$ . Πήγαινε στο βήμα 2.

Για τον υπολογισμό του αριστερού άκρου εφαρμόζεται η ίδια διαδικασία αλλά με την εξής διαφορά: στο βήμα 3 θέτουμε  $\theta_z = h_z + \Delta_z$  για  $z \leq e$  και  $\theta_z = h_z - \Delta_z$  για  $z \geq e+1$  και υπολογίζουμε  $y'' = y(h_1 + \Delta_1, \dots, h_e + \Delta_e, h_{e+1} - \Delta_{e+1}, \dots, h_Z - \Delta_Z)$  χρησιμοποιώντας την ίδια εξίσωση.

Στο δεύτερο στάδιο υπολογίζουμε το «type reduced» set χρησιμοποιώντας την (3.4.3.1). Κατά τον υπολογισμό του συνόλου μειωμένου τύπου, το  $C_1$  παίζει το ρόλο του  $Z_1$  στην (3.4.1). Αν το πεδίο τιμών του  $C_1$  είναι το διάστημα  $[L_1^c, R_1^c]$  τότε  $c_1 = (L_1^c + R_1^c)/2$  και  $s_1 = (L_1^c - R_1^c)/2$ . Ο βαθμός ενεργοποίησης  $E_1$  παίζει το ρόλο του  $W_1$ . Αν το πεδίο τιμών του  $E_1$  είναι το διάστημα  $[L_1, R_1]$ , τότε  $h_1 = (L_1 + R_1)/2$  και  $\Delta_1 = (R_1 - L_1)/2$ .

Πιο αναλυτικά ο επαναληπτικός αλγόριθμος για τον υπολογισμό του δεξιού άκρου του συνόλου μειωμένου τύπου έχει ως εξής:



Θεωρούμε ότι τα  $y_r^i (i=1, \dots, M)$  (οι κανόνες) που υπολογίστηκαν στο προηγούμενο βήμα είναι διατεταγμένα κατά αύξουσα σειρά  $y_r^1 \leq y_r^2 \leq y_r^3 \leq \dots \leq y_r^M$ . Τότε,

1) Υπολόγισε  $y_r$  σύμφωνα με την εξίσωση  $y_r = \frac{\sum_{i=1}^M f_i y_i}{\sum_{i=1}^M f_i}$  όπου τα  $f_r^i = (\underline{f}^i + \overline{f}^i)/2$

όπου τα  $\underline{f}^i$  και  $\overline{f}^i$  έχουν υπολογιστεί παίρνοντας την t-norm των lower και upper συναρτήσεων συμμετοχής των antecedent sets και θέσε  $y_r' = y_r$ .

2) Βρες  $R (1 \leq R \leq M-1)$  τέτοιο ώστε  $y_r^R \leq y_r' \leq y_r^{R+1}$

3) Υπολόγισε  $y_r$  σύμφωνα με την ίδια εξίσωση χρησιμοποιώντας  $f_r^i = \underline{f}^i$  για  $i \leq R$  και  $f_r^i = \overline{f}^i$  για  $i \geq R$  και θέσε  $y_r'' = y_r$ .

4) έλεγξε αν  $y_r'' = y_r'$ . Αν ναι σταμάτα.  $y_r''$  είναι η μέγιστη τιμή του  $y$ . Αν όχι πήγαινε στο βήμα 5

5) θέσε  $y_r' = y_r''$ . Πήγαινε στο βήμα 2.

Για τον υπολογισμό του  $y_1$  εφαρμόζουμε παρόμοιο αλγόριθμο με την διαφορά ότι αφού βρούμε  $L$  αντίστοιχο του  $R$  υπολογίζουμε το  $y_1$  στο βήμα 3 θέτοντας  $f_l^i = \overline{f}^i$  για  $i \leq L$  και  $f_l^i = \underline{f}^i$  για  $i \geq L$ .

Σε καθεμία από τις παραπάνω περιπτώσεις, μια σαφής έξοδος για το ΑΣ2 μπορεί να βρεθεί υπολογίζοντας το κέντρο του «type-reduced» set. Εφόσον το σύνολο αυτό είναι interval, το κέντρο είναι το μέσο σημείο του διαστήματος.

### 3.5 Αποσαφοποίηση

Εφόσον έχουμε βρει το type-reduced set με κάποια από τις μεθόδους που περιγράψαμε παραπάνω το αποσαφοποιούμε για να πάρουμε μια σαφή έξοδο. Ο πιο συνηθισμένος τρόπος για να το επιτύχουμε αυτό είναι να βρούμε το κέντρο βάρους του συνόλου που έχει παραχθεί. Αυτό ισοδυναμεί με την εύρεση ενός σταθμισμένου μέσου όρου των εξόδων όλων των ενσωματωμένων ΑΣ1 στο ΑΣ2 όπου τα βάρη αντιστοιχούν στις συναρτήσεις συμμετοχής στο παραχθέν σύνολο.

Αν το σύνολο αυτό  $Y$  για μια είσοδο  $x$  είναι διακριτό και αποτελείται από  $N$  σημεία, η σχέση που δίνει το αποσαφoποιημένο σύνολο είναι:

$$C_Y(x) = \frac{\sum_{k=1}^N y_k \mu_Y(y_k)}{\sum_{k=1}^N \mu_Y(y_k)} \quad (3.5.1)$$

Αν το σύνολο μειωμένου τύπου που έχει παραχθεί έχει μόνο ένα σημείο με μοναδιαία συνάρτηση συμμετοχής και επιθυμούμε να μειώσουμε την υπολογιστική πολυπλοκότητα μπορούμε να σκεφτούμε ότι ένας πιο απλός τρόπος να πάρουμε μια σαφής τιμή εξόδου είναι να πάρουμε το σημείο που έχει μοναδιαία συνάρτηση συμμετοχής στο «type-reduced» set. Αν το κάνουμε αυτό όμως είναι σαν να αγνοούμε εντελώς την ανάλυση τύπου 2 και επιλέγοντας την έξοδο με βάση μόνο την κύρια συνάρτηση συμμετοχής του ΑΣ1 που είναι ενσωματωμένο στο ΑΣ2. Στην ειδική περίπτωση που το «type-reduced» set είναι κυρτό και συμμετρικό τότε το σημείο μοναδιαίας συνάρτησης συμμετοχής ταυτίζεται με το κέντρο του συνόλου.

Εφόσον είναι δυνατή η παράλληλη επεξεργασία για την διαδικασία μείωσης τύπου τότε η έξοδος κάθε επεξεργαστή μπορεί να εισαχθεί στον αποσαφoποιητή και να παραχθεί μια σαφής έξοδος. Έτσι η αποθήκευση δεδομένων δεν είναι πρόβλημα. Παρόλα αυτά οι περισσότεροι ερευνητές δεν έχουν την πολυτέλεια της παράλληλης επεξεργασίας. Αλλά υπάρχει η δυνατότητα της χρησιμοποίησης μιας επαναληπτικής διαδικασίας που έχει ως σκοπό την μείωση της μνήμης που απαιτείται για την αποθήκευση των δεδομένων. Υπολογίζουμε:

$$A(i)=A(i-1)+y_i\mu_Y(y_i), \quad A(0)=0$$

$$B(i)=B(i-1)+\mu_Y(y_i), \quad A(0)=0$$

για  $i=1,2,\dots,N$ . Μετά την  $N$ th επανάληψη η αποσαφoποιημένη έξοδος είναι  $C_Y(x)=A(N)/B(N)$ . Έτσι σε κάθε επανάληψη χρειάζεται να αποθηκεύουμε μόνο τα  $A, B$ .

### 3.6 Παράδειγμα

Εδώ θα παρουσιάσουμε ένα παράδειγμα προσέγγισης της συνάρτησης  $y=100-x^2$  όπου  $x \in [-10,10]$ . Αυτό που κάνει αναγκαία την χρησιμοποίηση ενός ΑΣ2 είναι ότι έχουμε πρόσβαση σε μετρήσεις του  $y$  που έχουν υποστεί αλλοίωση από θόρυβο. Έτσι λοιπόν παίρνουμε υπόψιν 10 στιγμιότυπα κάθε μέτρησης και το επαναλαμβάνουμε αυτό για 9 ζεύγη  $(x,y)$ . Για κάθε είσοδο  $x^i$  ( $i=1,\dots,9$ ) βρίσκουμε την μικρότερη ( $y_{\min}^i$ ) και μεγαλύτερη ( $y_{\max}^i$ ) από τις 10 τιμές του  $y$ . Τα 9 ζεύγη που παίρνουμε είναι:

$$(x^1, [y_{\min}^1, y_{\max}^1]) = (-10, [-7.79, 6.49])$$

$$(x^2, [y_{\min}^2, y_{\max}^2]) = (-7.5, [34.72, 52.93])$$

$$(x^3, [y_{\min}^3, y_{\max}^3]) = (-5, [66.12, 84.1])$$

$$(x^4, [y_{\min}^4, y_{\max}^4]) = (-2.5, [84.93, 101.75])$$

$$(x^5, [y_{\min}^5, y_{\max}^5]) = (0, [93.09, 109.95])$$

$$(x^6, [y_{\min}^6, y_{\max}^6]) = (2.5, [88.02, 103.53])$$

$$(x^7, [y_{\min}^7, y_{\max}^7]) = (5, [65.37, 84.32])$$

$$(x^8, [y_{\min}^8, y_{\max}^8]) = (7.5, [34.14, 50.85])$$

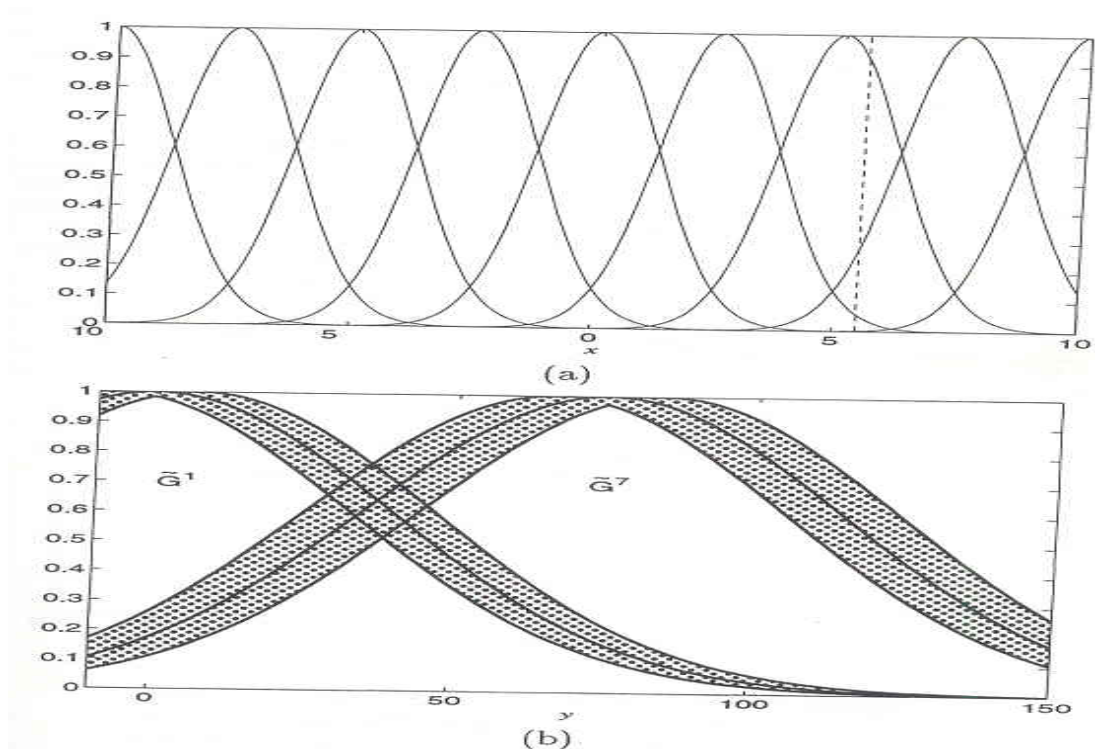
$$(x^9, [y_{\min}^9, y_{\max}^9]) = (10, [-9.62, 9.62])$$

Ο ασαφής προσεγγιστής σχηματίζει έναν κανόνα για καθένα από τα 9 ζεύγη, με καθένα από τους κανόνες να έχει την μορφή:

$$\text{IF } x \text{ is } A, \text{ THEN } y \text{ is } \tilde{G}$$

Επειδή μόνο οι τιμές του  $\nu$  είναι αβέβαιες στα ζεύγη εισόδων-εξόδων επιλέγουμε τα antecedent sets να είναι τύπου 1 και τα consequent τύπου 2. Στο παράδειγμα μας τα antecedent sets είναι Gaussian τύπου 1 και τα consequent sets να έχουν πρωτεύουσες συναρτήσεις Gaussian με αβέβαια κέντρα. Εννοείται ότι οι δευτερεύουσες συναρτήσεις είναι interval sets. Το ΑΣ2 χρησιμοποιεί maximum t-conorm, product t-norm, product implication, center-of-sets type-reduction.

Οι συναρτήσεις συμμετοχής για τα antecedent sets και τα FOU για 2 από τα consequent sets φαίνονται στο σχήμα 3.6.1. Τα κέντρα των Gaussian antecedent sets τοποθετήθηκαν στις δειγματοληπτημένες τιμές του  $x$ . Η απόκλιση κάθε σετ επιλέχθηκε τυχαία 1.25. Κάθε consequent set είναι ένα interval σύνολο τύπου 2 που δημιουργήθηκε από μια Gaussian πρωτεύουσα συνάρτηση συμμετοχής με κέντρο στο διάστημα  $[y_{\min}^i, y_{\max}^i]$ . Οι αποκλίσεις των consequent sets επιλέγουμε να είναι 40.

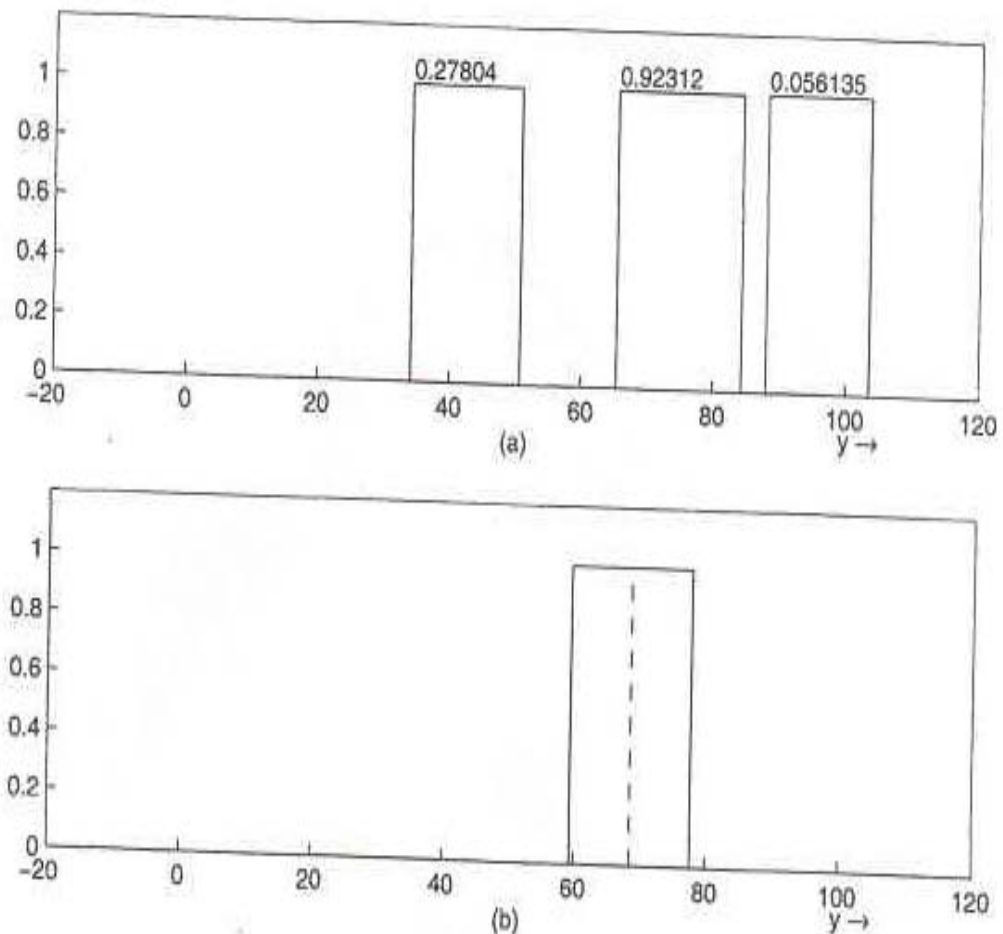


**Σχήμα 3.6.1 Συναρτήσεις συμμετοχής για a) antecedent sets b) 2 of the consequent sets**

Επιλέγουμε μια συγκεκριμένη είσοδο  $x=5.5$ . Η είσοδος αυτή έχει μη μηδενική συνάρτηση συμμετοχής σε 3 antecedent sets: 0.056135 στο σύνολο με κέντρο το

$2.5(x^6), 0.92312$  στο σύνολο με κέντρο το  $5(x^7)$  και  $0.27804$  στο σύνολο με κέντρο στο  $7.5(x^8)$ . Συνεπώς 3 κανόνες ενεργοποιούνται, οι κανόνες 6,7,8.

Χρησιμοποιήσαμε center-of-sets type-reduction και αντικαταστήσαμε κάθε consequent set με το κέντρο του, του οποίου διαβαθμίσαμε το βαθμό ενεργοποίησης σύμφωνα με product implication και t-norm. Τα κέντρα των 3 ενεργοποιούμενων consequent sets είναι interval sets των οποίων το πεδίο τιμών υπολογίστηκε με την επαναληπτική διαδικασία που περιγράφηκε στην παράγραφο 3.4 και τα οποία φαίνονται στο σχήμα 3.6.2a μαζί με τους βαθμούς ενεργοποίησης τους. Τα πεδία τιμών για τα 3 ενεργοποιούμενα σύνολα είναι  $[88.02, 103.53]$ ,  $[65.37, 84.32]$  και  $[34.14, 50.85]$ .



**Σχήμα 3.6.2 a)Centroids of 3 fired sets and their firing degrees  
b)center-of-sets type-reduced set and crisp output(dashed)**

Το αριστερό και δεξιό άκρο του type-reduced set προκύπτει ως εξής:

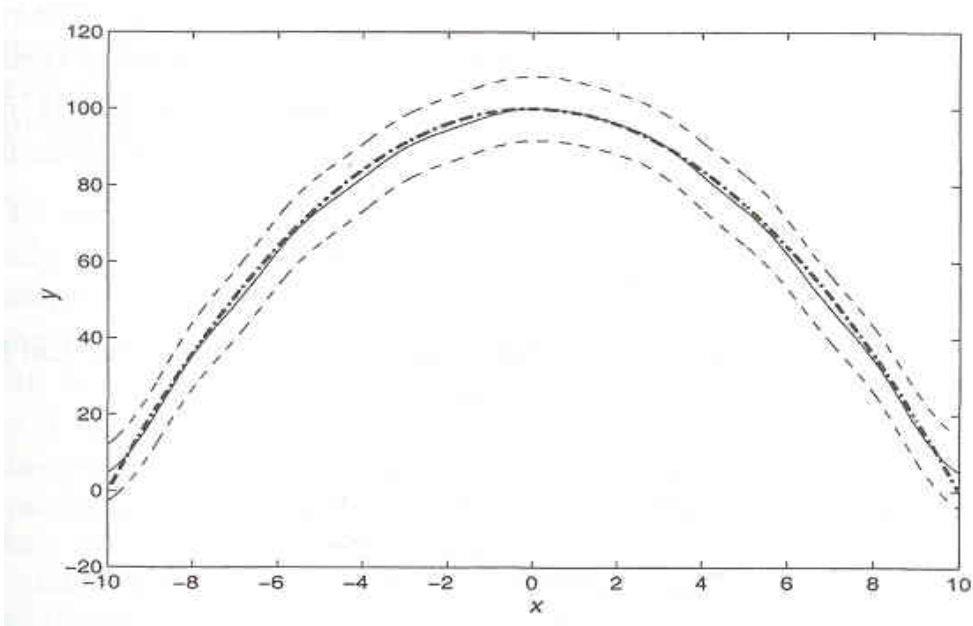
$$y_l = \frac{\sum_{i=1}^M f_l^i y_l^i}{\sum_{i=1}^M f_l^i} =$$

$$\frac{0.27804*50.85+0.92312*84.32+0.056135*103.53}{0.27804+0.92312+0.056135}=77.7$$

$$y_r = \frac{\sum_{i=1}^M f_r^i y_r^i}{\sum_{i=1}^M f_r^i} = \frac{0.27804*34.14+0.92312*65.37+0.056135*88.02}{0.27804+0.92312+0.056135}$$

$$=59.39$$

Το type-reduced set φαίνεται στο σχήμα 3.6.2b. Επιλέγουμε να πάρουμε σαν σαφή έξοδο το μέσο σημείο του συνόλου το 68.55. Η πραγματική τιμή της συνάρτησης για είσοδο 5.5 είναι 69.75. Στην παρακάτω γραφική φαίνεται η έξοδος του ΑΣ2 για κάθε είσοδο, η πραγματική τιμή της συνάρτησης και τα άνω και κάτω όρια του reduced set.



**Σχήμα 3.6.3** Η κανονική μαύρη γραμμή είναι η έξοδος του ασαφούς συστήματος, η διακεκομμένη με τις τελείες είναι η πραγματική τιμή της συνάρτησης και οι δυο άλλες διακεκομμένες τα άνω και κάτω όρια του type-reduced set

## Κεφάλαιο 4

### Εφαρμογές ασαφών συστημάτων τύπου 2

#### 4.1 Γενικά

Ο αριθμός των εφαρμογών των ΑΣ2 που αναφέρονται στην βιβλιογραφία συνεχώς αυξάνει. Παρακάτω θα παραθέσουμε τις κυριότερες εφαρμογές μαζί με αναφορές στις αντίστοιχες δημοσιεύσεις. Έτσι τα ΑΣ2 βρίσκουν εφαρμογές σε:

- Λήψη αποφάσεων [14][15]
- Επίλυση συστημάτων ασαφών εξισώσεων[16]
- Επεξεργασία ερευνών[17]
- Πρόβλεψη χρονοσειρών[18]
- Προσέγγιση συναρτήσεων
- Έλεγχος ρομπότ[19]
- Ρύθμιση κυκλοφορίας[20]
- Ρύθμιση κίνησης στο διαδίκτυο[21]
- Προ-επεξεργασία δεδομένων [22]

Στο προηγούμενο κεφάλαιο είδαμε την εφαρμογή ενός ΑΣ2 στην προσέγγιση συναρτήσεων και συγκεκριμένα στην συνάρτηση  $100\text{-}\chi^2$ . Παρακάτω θα αναλύσουμε την εφαρμογή των ασαφών συνόλων τύπου 2 στην λήψη πολυκριτήριων αποφάσεων όπως περιγράφεται στο paper του Yager[15] και την εφαρμογή ενός ΑΣ2 στην δημιουργία ενός ασαφή ελεγκτή της κίνησης έντροχων ρομπότ όπως αυτή περιγράφεται στην δημοσίευση του Hagra[23].

## ***4.2 Εφαρμογή ασαφών συνόλων τύπου 2 στην λήψη αποφάσεων***

### **4.2.1 Εισαγωγικά**

Σε πολλές περιπτώσεις πολυκριτήριων αποφάσεων η δημιουργία μιας συνάρτησης απόφασης που ενσωματώνει όλες τις αντικειμενικές συναρτήσεις με τρόπο που ικανοποιεί απόλυτα τον αποφασίζων είναι αδύνατη. Αυτό μπορεί να οφείλεται σε πολλούς παράγοντες όπως η αδυναμία πλήρους καταγραφής όλων των αντικειμενικών συναρτήσεων, η αδυναμία ορισμού των tradeoffs μεταξύ των αντικειμενικών συναρτήσεων και καθορισμού ενός πλάνου που τις συνδυάζει.

Ένας τρόπος προσέγγισης του προβλήματος είναι η δημιουργία πολλών πιθανών συναρτήσεων απόφασης και ο ορισμός από τον αποφασίζων του βαθμού που καθεμία από αυτές ικανοποιεί τις επιθυμίες του. Η ασαφής λογική είναι ένα καλό εργαλείο που βοηθά στην υλοποίηση αυτής της προσέγγισης. Και αυτό γιατί μας δίνεται η δυνατότητα να εκφράσουμε την εκάστοτε συνάρτηση απόφασης με γλωσσικούς όρους κάτι που είναι πολύ κοντά στον τρόπο της ανθρώπινης σκέψης. Έτσι μας δίνεται η δυνατότητα να παρουσιάσουμε στον αποφασίζων κάθε συνάρτηση απόφασης με όρους της λογικής κατασκευής της παρά με κάποια πολύπλοκη εξίσωση βοηθώντας τον έτσι να καταλάβει κατά πόσο η συνάρτηση αυτή είναι κοντά στην ιδανική συνάρτηση που ικανοποιεί τις επιθυμίες του. Μας δίνεται η δυνατότητα λοιπόν να δημιουργήσουμε ένα ασαφές υποσύνολο  $D$ , μέσα από το σύνολο των πιθανών συναρτήσεων απόφασης, του οποίου η συνάρτηση συμμετοχής είναι ο βαθμός στον οποίο η εκάστοτε συνάρτηση προσεγγίζει την ιδανική συνάρτηση που ικανοποιεί πλήρως τον αποφασίζων. Η χρησιμοποίηση ασαφών συνόλων των οποίων οι βαθμοί συμμετοχής είναι και αυτοί ασαφή σύνολα (τύπου 2) βοηθά στην αναπαράσταση και των βαθμών συμμετοχής με γλωσσικούς όρους.



### 4.2.2 Παρουσίαση προβλήματος

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε κάποιο πρόβλημα απόφασης και ένα σύνολο πιθανών εναλλακτικών  $X=\{X_1, \dots, X_n\}$ . Επίσης έχουμε το σύνολο των κριτηρίων ή αντικειμενικών στόχων που ο αποφασίζων θα πρέπει να λάβει υπόψιν είναι  $\{O_1, O_2, \dots, O_n\}$ .

Καταρχάς χρησιμοποιώντας την ιδέα των ασαφών υποσυνόλων μπορούμε να συσχετίσουμε με κάθε στόχο ένα ασαφές υποσύνολο του  $X$  ενδεικτικό του βαθμού στον οποίο κάθε εναλλακτική ικανοποιεί τον εκάστοτε στόχο. Μετά μπορούμε να σχηματίσουμε μια συνάρτηση απόφασης  $D_1=f(O_1, O_2, \dots, O_n)$ .

Δηλαδή μπορούμε να συνδυάσουμε τους αντικειμενικούς στόχους δημιουργώντας ένα πολυκριτήριο πρόβλημα απόφασης. Η μορφή της  $f$  εξαρτάται από τον τρόπο που θέλουμε να συνδυάσουμε τα κριτήρια. Για παράδειγμα θα μπορούσε  $D_1=O_1 \cap O_2 \cap \dots \cap O_n$  ή  $D_1=O_1 \cup O_2 \cup \dots \cup O_n$ .

Υπάρχουν διάφοροι τρόποι που μπορούμε να συνδυάσουμε τα αντικειμενικά κριτήρια για να δημιουργήσουμε μια συνάρτηση απόφασης. Επίσης δεν είναι απαραίτητο όλες οι πιθανές συναρτήσεις απόφασης να χρησιμοποιούν τα ίδια κριτήρια.

Ας θεωρήσουμε ένα σύνολο  $Y$  που αποτελείται από συναρτήσεις απόφασης,  $Y=\{D_1, D_2, D_3, \dots, D_m\}$ , και κάποια συνάρτηση απόφασης που θεωρούμε σαν ιδανική. Αυτή δεν είναι απαραίτητο να εκφράζεται συναρτήσει των κριτηρίων, αλλά αρκεί ο αποφασίζων να έχει κάποια αίσθηση για το πόσο καθεμία από τις συναρτήσεις απόφασης του  $Y$  ικανοποιούν την υποτιθέμενη ιδανική συνάρτηση  $D$ . Μπορούμε να ορίσουμε την  $D$  σαν ένα ασαφές σύνολο του  $Y$ . Δηλαδή,  $D=\left\{\frac{f_D(D_i)}{D_i}\right\}$  όπου  $\frac{f_D(D_i)}{D_i}$  είναι ο βαθμός που κάθε συνάρτηση απόφασης  $D_i$  ικανοποιεί την συνθήκη του να είναι η ιδανική συνάρτηση απόφασης.

### 4.2.3 Παράδειγμα

Ας υποθέσουμε ότι ένας αποφασίζων έχει να επιλέξει μια τράπεζα για συνεργασία με την εταιρεία του. Έστω  $X=\{X_1, X_2, X_3\}$  είναι 3 πιθανές

εναλλακτικές επιλογές και ότι ο αποφασίζων αποφασίζει βάσει δύο βασικών κριτηρίων:

1. να συνεργαστεί με μια τράπεζα με καλές εσωτερικές επαφές  $O_1$

2. να συνεργαστεί με μια τράπεζα που θα του παρέχει άμεσα πίστωση  $O_2$

Εδώ θα πρέπει να σημειώσουμε ότι συνήθως ένας αποφασίζων έχει να λάβει υπόψιν ένα μεγάλο αριθμό κριτηρίων μερικά από τα οποία δεν του είναι απόλυτα γνωστά αλλά έχει απλά μια αίσθηση του κατά πόσο επηρεάζουν την ιδανική συνάρτηση απόφασης.

Υποθέτουμε ότι οι πιθανές συναρτήσεις απόφασης είναι οι εξής 3 απλές:

$$1. D_1 = O_1 \cap O_2$$

$$2. D_2 = O_1$$

$$3. D_3 = O_1^{a_1} \cap O_2^{a_2} \text{ με } a_1=1.3 \text{ και } a_2=0.7$$

Μετά από μελέτη των τραπεζών ο αποφασίζων τις αξιολογεί ως εξής στα 2 κριτήρια:

$$O_1 = \left\{ \frac{0.7}{X_1}, \frac{0.5}{X_2}, \frac{0.3}{X_3} \right\}$$

$$O_2 = \left\{ \frac{0.4}{X_1}, \frac{0.8}{X_2}, \frac{0.9}{X_3} \right\}$$

Οπότε οι 3 πιθανές συναρτήσεις απόφασης γίνονται:

$$D_1 = O_1 \cap O_2 = \left\{ \frac{0.4}{X_1}, \frac{0.5}{X_2}, \frac{0.3}{X_3} \right\}$$

$$D_2 = O_1 = \left\{ \frac{0.7}{X_1}, \frac{0.5}{X_2}, \frac{0.3}{X_3} \right\}$$

$$D_3 = O_1^{a_1} \cap O_2^{a_2} = \left\{ \frac{0.7}{X_1}, \frac{0.5}{X_2}, \frac{0.3}{X_3} \right\}^{1.3} \cap \left\{ \frac{0.4}{X_1}, \frac{0.8}{X_2}, \frac{0.9}{X_3} \right\}^{0.7}$$

$$= \left\{ \frac{0.63}{X_1}, \frac{0.41}{X_2}, \frac{0.21}{X_3} \right\} \cap \left\{ \frac{0.53}{X_1}, \frac{0.86}{X_2}, \frac{0.93}{X_3} \right\}$$

$$= \left\{ \frac{0.53}{X_1}, \frac{0.41}{X_2}, \frac{0.21}{X_3} \right\}$$

Έστω ότι ο αποφασίζων αξιολογεί καθεμία από τις συναρτήσεις απόφασης ως εξής:

$$D = \left\{ \frac{0.7}{X_1}, \frac{low}{X_2}, \frac{high}{X_3} \right\}$$

$$\text{όπου low} = \left\{ \frac{1}{0}, \frac{0.9}{0.1}, \frac{0.7}{0.2}, \frac{0.5}{0.3} \right\}$$

$$\text{high} = \left\{ \frac{0.5}{0.7}, \frac{0.7}{0.8}, \frac{0.9}{0.9}, \frac{1}{1} \right\}$$

$$0.7 = \left\{ \frac{1}{0.7} \right\}$$

Το σύνολο D βλέπουμε ότι είναι ένα ασαφές σύνολο τύπου 2 και μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$D = \left\{ \frac{\left\{ \frac{1}{0.7} \right\}}{\left\{ \frac{0.4}{X_1}, \frac{0.5}{X_2}, \frac{0.3}{X_3} \right\}}, \frac{\left\{ \frac{1}{0}, \frac{0.9}{0.1}, \frac{0.7}{0.2}, \frac{0.5}{0.3} \right\}}{\left\{ \frac{0.7}{X_1}, \frac{0.5}{X_2}, \frac{0.3}{X_3} \right\}}, \frac{\left\{ \frac{0.5}{0.7}, \frac{0.7}{0.8}, \frac{0.9}{0.9}, \frac{1}{1} \right\}}{\left\{ \frac{0.53}{X_1}, \frac{0.41}{X_2}, \frac{0.21}{X_3} \right\}} \right\}$$

Εφαρμόζοντας την μεθοδολογία που περιγράφεται στην δημοσίευση του Yager το σύνολο D γίνεται:

$$D = \left\{ \frac{\left\{ \frac{1}{0.28}, \frac{1}{0.35}, \frac{1}{0.21} \right\}}{X_1}, \frac{\left\{ \frac{1}{0}, \frac{0.9}{0.07}, \frac{0.7}{0.14}, \frac{0.5}{0.21} \right\}}{X_1}, \frac{\left\{ \frac{1}{0}, \frac{0.9}{0.05}, \frac{0.7}{0.1}, \frac{0.5}{0.15} \right\}}{X_2}, \frac{\left\{ \frac{1}{0}, \frac{0.9}{0.03}, \frac{0.7}{0.08}, \frac{0.5}{0.09} \right\}}{X_3}, \right. \\ \left. \frac{\left\{ \frac{0.5}{0.37}, \frac{0.7}{0.42}, \frac{0.9}{0.48}, \frac{0.1}{0.53} \right\}}{X_1}, \frac{\left\{ \frac{0.5}{0.29}, \frac{0.7}{0.35}, \frac{0.9}{0.37}, \frac{0.1}{0.41} \right\}}{X_2}, \frac{\left\{ \frac{0.5}{0.15}, \frac{0.7}{0.17}, \frac{0.9}{0.19}, \frac{0.1}{0.21} \right\}}{X_3} \right\}$$

Υπολογίζοντας τα joins των συναρτήσεων συμμετοχής παίρνουμε την συνάρτηση συμμετοχής του συνόλου D

$$\begin{aligned} D(X_1) &= \left\{ \frac{1}{0.28} \right\} \sqcup \left\{ \frac{1}{0}, \frac{0.9}{0.07}, \frac{0.7}{0.14}, \frac{0.5}{0.21} \right\} \sqcup \left\{ \frac{0.5}{0.37}, \frac{0.7}{0.42}, \frac{0.9}{0.48}, \frac{0.1}{0.53} \right\} \\ &= \left\{ \frac{1}{0.28} \right\} \sqcup \left\{ \frac{0.5}{0.37}, \frac{0.7}{0.42}, \frac{0.9}{0.48}, \frac{0.1}{0.53} \right\} = \left\{ \frac{0.5}{0.37}, \frac{0.7}{0.42}, \frac{0.9}{0.48}, \frac{0.1}{0.53} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D(X_2) &= \left\{ \frac{1}{0.35} \right\} \sqcup \left\{ \frac{0.9}{0.05}, \frac{0.7}{0.1}, \frac{0.5}{0.15}, \frac{1}{0} \right\} \sqcup \left\{ \frac{0.5}{0.29}, \frac{0.7}{0.33}, \frac{0.9}{0.37}, \frac{1}{0.41} \right\} \\ &= \left\{ \frac{0.5}{0.35}, \frac{0.7}{0.35}, \frac{0.9}{0.37}, \frac{0.1}{0.41} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D(X_3) &= \left\{ \frac{1}{0.21} \right\} \sqcup \left\{ \frac{1}{0}, \frac{0.9}{0.03}, \frac{0.7}{0.06}, \frac{0.5}{0.09} \right\} \sqcup \left\{ \frac{0.5}{0.15}, \frac{0.7}{0.17}, \frac{0.9}{0.19}, \frac{0.1}{0.21} \right\} \\ &= \left\{ \frac{1}{0.21} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Επομένως } D &= \left\{ \frac{\left\{ \frac{0.5}{0.37}, \frac{0.7}{0.42}, \frac{0.9}{0.48}, \frac{0.1}{0.53} \right\}}{X_1}, \frac{\left\{ \frac{0.7}{0.35}, \frac{0.9}{0.37}, \frac{0.1}{0.41} \right\}}{X_2}, \frac{0.21}{X_3} \right\} \quad \text{ή} \\ D &= \left\{ \frac{\text{almost}0.53}{X_1}, \frac{\text{almost}0.41}{X_2}, \frac{0.21}{X_3} \right\} \end{aligned}$$

Βλέπουμε ότι από τις 3 εναλλακτικές αυτή που είναι προτιμητέα είναι η  $X_1$  αφού έχει μεγαλύτερο βαθμό συμμετοχής στο σύνολο  $D$ , άρα προσεγγίζει καλύτερα την ιδανική συνάρτηση απόφασης του αποφασίζοντα.

### 4.3 Εφαρμογή ασαφών συστημάτων τύπου 2 στον έλεγχο κίνησης έντροχων ρομπότ

#### 4.3.1 Εισαγωγικά

Η κίνηση έντροχων ρομπότ σε αδόμητα περιβάλλοντα που δεν γνωρίζουμε ακριβώς την υφή τους περιλαμβάνει την ανάγκη ανάπτυξης ελεγκτών που είναι σε θέση να χειριστούν ποικίλες αβεβαιότητες όπως:

- Αβεβαιότητα στις συναρτήσεις συμμετοχής των antecedent sets λόγω θορύβου στις μετρήσεις των σόναρ
- Αβεβαιότητα στις κινήσεις ελέγχου, δηλαδή στις συναρτήσεις συμμετοχής των συνόλων εξόδου λόγω των συνεχών αλλαγών στο περιβάλλον κίνησης
- Αβεβαιότητα στην κατασκευή των κανόνων λόγω διαφωνίας μεταξύ των ειδικών

Για τον χειρισμό όλων αυτών των αβεβαιοτήτων ο Hagra[23] ένας ασαφής ελεγκτής τύπου 2 με ιεραρχική δομή δείχνοντας ότι πετυχαίνει καλύτερες και πιο ομαλές τροχιές με την χρήση πολύ μικρότερης βάσης κανόνων από ότι θα είχαμε με ένα ΑΣ1

#### 4.3.2 Βασικές αρχές ασαφούς ελεγκτή

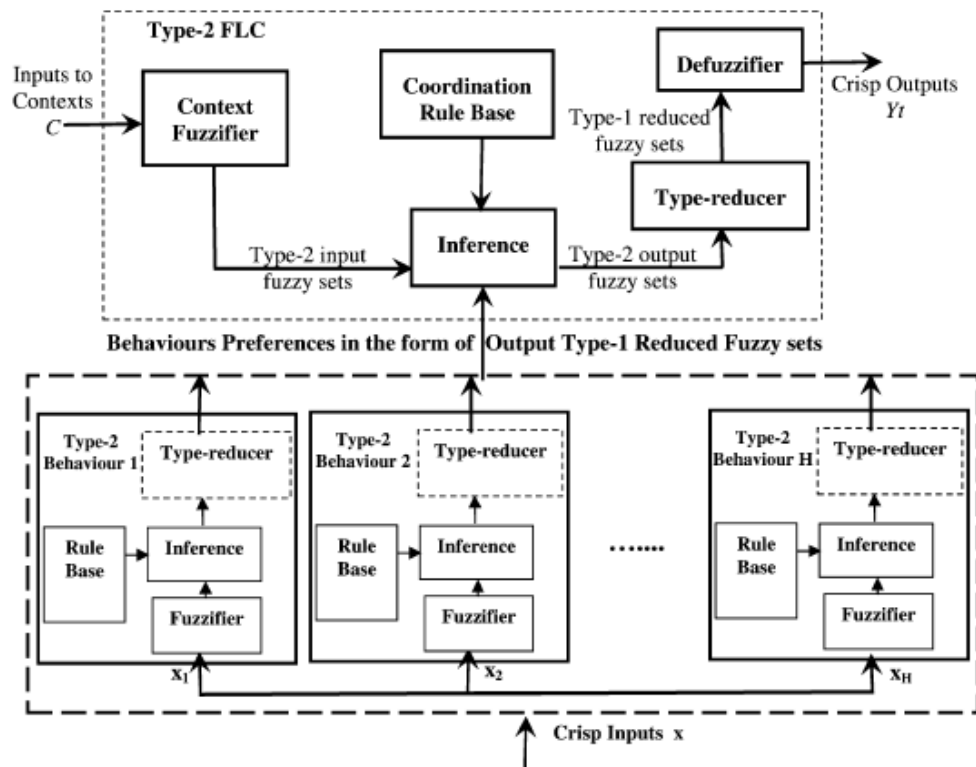
Ο ασαφής ελεγκτής που προτείνεται στην δημοσίευση είναι ένα κλασσικό ΑΣ2 με interval sets τύπου 2 οπότε οι διαδικασίες εξαγωγής συμπεράσματος και μείωσης τύπου έχουν ακριβώς όπως έχουν αναφερθεί ως τώρα. Για την εξαγωγή συμπεράσματος χρησιμοποιείται product norm και για την μείωση τύπου η center of sets type reduction όπως περιγράφηκε και προηγούμενα. Η ασαφής βάση κανόνων κανονικά περιέχει multiple-input-multiple-output(MIMO) κανόνες της μορφής :

$$R_{MIMO}^i : \text{IF } x_1 \text{ is } \tilde{F}_1^i \text{ and } \dots \text{and } x_p \text{ is } \tilde{F}_p^i, \text{ THEN} \\ y_1 \text{ is } \tilde{G}_1^i \dots y_c \text{ is } \tilde{G}_c^i, \quad i = 1, \dots, M$$

Οι MIMO κανόνες όμως μπορούν να θεωρηθούν σαν ένα σύνολο multiple-input - single-output(MISO) κανόνων.

### 4.3.3 Δομή ιεραρχικού ασαφούς ελεγκτή

Το βασικό πρόβλημα ενός κλασσικού ελεγκτή είναι η εκθετική αύξηση των κανόνων. Στο παράδειγμα μας έχουμε 8 εισόδους (7 από τους αισθητήρες των σόναρ και 1 από τον αισθητήρα του ανιχνευτή του σημείου στόχου). Αν υποθέσουμε ότι κάθε είσοδος αντιπροσωπεύεται από 3 μόνο ασαφή σύνολα τότε χρειαζόμαστε  $3^8$  κανόνες. Για να αντιμετωπίσουμε το πρόβλημα αυτό χρησιμοποιούμε έναν ιεραρχικό ασαφή ελεγκτή που αποτελείται από 4 χαμηλότερου επιπέδου ασαφείς ελεγκτές τύπου 2 η λειτουργία των οποίων συντονίζεται από έναν ανώτερου επιπέδου ασαφή ελεγκτή επίσης τύπου 2. Η δομή του ιεραρχικού ασαφούς ελεγκτή φαίνεται παρακάτω:



Σχήμα 4.3.3.1 Δομή ιεραρχικού ασαφούς ελεγκτή τύπου 2

Όπως βλέπουμε ο ελεγκτής που προτείνεται αποτελείται από 4 χαμηλότερου επιπέδου ασαφείς ελεγκτές που δρουν αυτόνομα και μοιάζουν με ένα κλασσικό ΑΣ2 με την διαφορά ότι δεν υπάρχει το στάδιο της

αποσαφοποίησης και η έξοδος είναι το type-reduced set. Οι 4 αυτοί ελεγκτές αφορούν την αποφυγή εμποδίων, την ευθυγράμμιση με το σημείο στόχο και την κίνηση του ρομπότ σύμφωνα με το αριστερό και δεξιό άκρο του διαδρόμου κίνησης. Οι ελεγκτές αυτοί έχουν 2 κοινές εξόδους, την ταχύτητα του αριστερού και δεξιού τροχού για τα ρομπότ εσωτερικού χώρου και την ταχύτητα των μπροστινών τροχών και την γωνία στροφής για τα αντίστοιχα εξωτερικού χώρου. Ο ανωτέρου επιπέδου ελεγκτής συντονίζει την λειτουργία των 4 ελεγκτών χαμηλότερου επιπέδου. Καθένας από τους ελεγκτές αυτούς έχει μια κατάσταση ενεργοποίησης(context) που αντιπροσωπεύει πότε θα πρέπει να ενεργοποιηθεί. Η δύναμη ενεργοποίησης εξαρτάται από την δύναμη ενεργοποίησης καθενός από τους κανόνες του ελεγκτή ανώτερου επιπέδου που έχουν την μορφή:

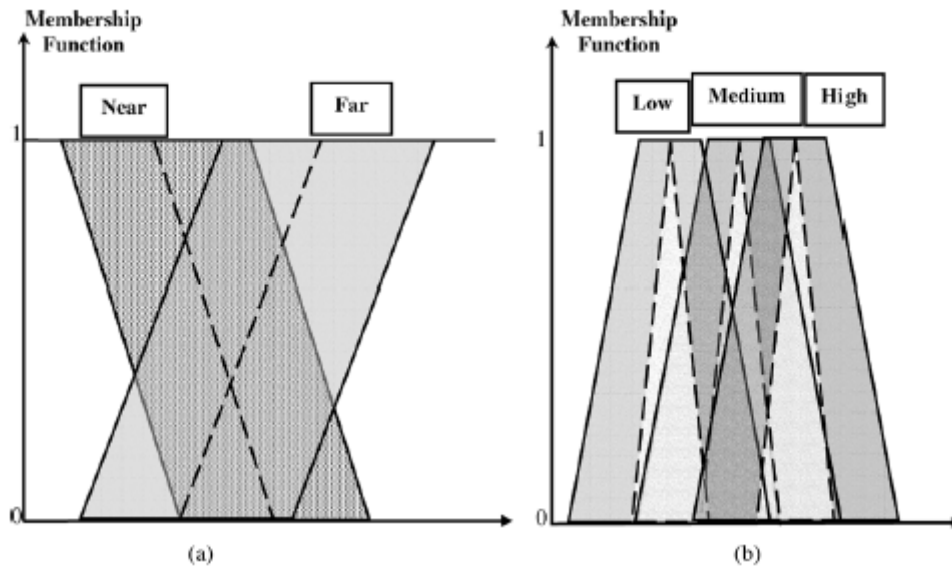
$$\text{IF } d_j \text{ is } \tilde{C}_j, \text{ THEN Behavior } \tilde{B}_j, \quad j = 1, \dots, H.$$

όπου  $\tilde{B}_j$  ένα ασαφές σύνολο τύπου 2 που αντιπροσωπεύει την ενεργοποίηση καθενός από τους 4 ελεγκτές. Σημειώνεται ότι όλες οι εισοδοί είναι σαφείς αλλά ασαφοποιούνται με βάση singleton fuzzification.

#### 4.3.4 Ανάλυση κατώτερου επιπέδου ελεγκτών

##### 4.3.4.1 Ελεγκτές ρύθμισης τροχιάς σύμφωνα με δεξιό και αριστερό άκρο

Οι 2 ελεγκτές(right and left edge following) που εξασφαλίζουν ότι το ρομπότ ακολουθεί τροχιά που απέχει συγκεκριμένη απόσταση από αριστερό και δεξιό άκρο έχουν δύο εισόδους, τις μετρήσεις των αισθητήρων των σόναρ που βρίσκονται αριστερά και δεξιά αντίστοιχα του ρομπότ και τα οποία έχουν τοποθετηθεί ένα στο μπροστινό και ένα πίσω μέρος κάθε πλευράς. Κάθε είσοδος αντιπροσωπεύεται από 2 μόνο interval fuzzy sets τύπου 2 που φαίνονται στο σχήμα 4.3.4.1.1a:



**Σχήμα 4.3.4.1.1a) Ασαφή σύνολα εισόδου για τους ελεγκτές διατήρησης απόστασης από αριστερό και δεξιό άκρο και αποφυγής εμποδίων b) Ασαφή σύνολα εξόδου για τις ταχύτητες των ρομπότ εσωτερικού χώρου**

Και για τους δύο ελεγκτές λοιπόν απαιτείται μια βάση κανόνων με 4 κανόνες. Οι έξοδοι για τα ρομπότ εσωτερικού χώρου είναι οι ταχύτητες του δεξιού και αριστερού τροχού οι οποίες αντιπροσωπεύονται από τα ασαφή σύνολα που φαίνονται στο σχήμα 4.3.4.1.1b.

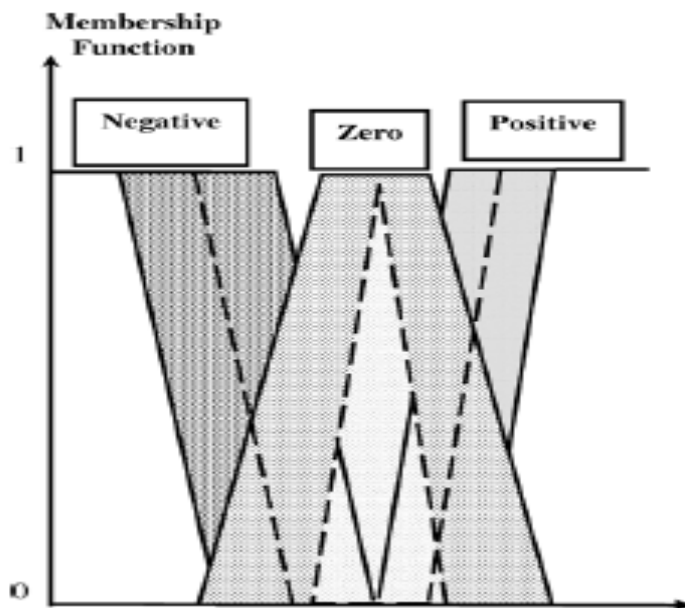
#### 4.3.4.2 Ελεγκτής αποφυγής εμποδίων

Ο ελεγκτής αυτός (obstacle avoidance controller) χρησιμεύει για την ασφαλή κίνηση των ρομπότ σε άγνωστα περιβάλλοντα προϋποθέτοντας την αποφυγή οποιωνδήποτε εμποδίων. Ο ελεγκτής αυτός δέχεται 3 εισόδους δέχεται 3 εισόδους από τα σόναρ που είναι τοποθετημένα στο εμπρόσθιο τμήμα του ρομπότ. Τα ασαφή σύνολα που περιγράφουν καθεμία από αυτές τις εισόδους είναι τα ίδια που φαίνονται στο σχήμα 4.3.4.1.1a. και οι έξοδοι επίσης οι ίδιοι με τους προηγούμενους ελεγκτές. Βλέπουμε ότι για τον ελεγκτή αυτόν χρειαζόμαστε μια βάση 8 κανόνων.



#### 4.3.4.3 Ελεγκτής αναζήτησης σημείου στόχου

Ο ελεγκτής αυτός(goal seeking controller) απαιτείται για να κατευθύνει το ρομπότ στο σημείο στόχο. Η είσοδος στον ελεγκτή είναι η απόκλιση από τον στόχο η οποία αντιπροσωπεύεται από τα ασαφή σύνολα:

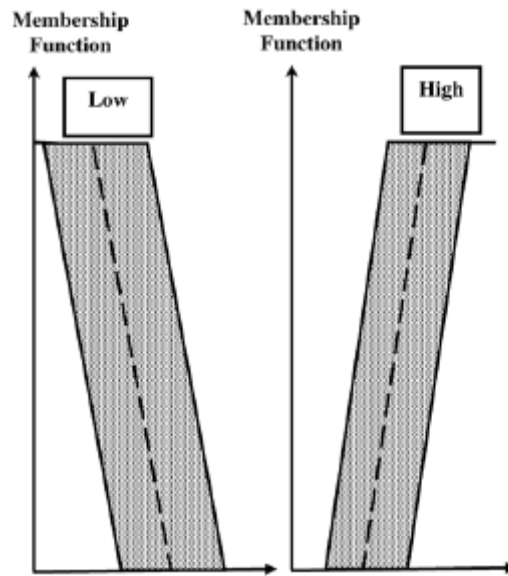


Σχήμα 4.3.4.3.1 Ασαφή σύνολα εισόδου ελεγκτή αναζήτησης στόχου

Οι έξοδοι είναι κοινοί με τους άλλους ελεγκτές. Όπως μπορούμε εύκολα να καταλάβουμε για τον ελεγκτή αυτόν χρειαζόμαστε μια βάση με 3 κανόνες

#### 4.3.5 Ανάλυση ελεγκτή ανώτερου επιπέδου

Ο ελεγκτής ανώτερου επιπέδου που είναι υπεύθυνος για τον συντονισμό της λειτουργίας των 4 άλλων ελεγκτών δέχεται σαφείς εισόδους στα 4 contexts  $d_j (j=1,2,\dots,4)$ . Η είσοδος  $d_1$  στο context που σχετίζεται με τον ελεγκτή αποφυγής εμποδίων( $\mathcal{E}_1$ ) είναι η ελάχιστη τιμή των αισθητήρων των μπροστινών σόναρ. Η είσοδος αυτή ασαφοποιείται με βάση το ασαφές σύνολο τύπου 2 που φαίνεται στην πρώτη από τις παρακάτω γραφικές:



**Σχήμα 4.3.5.1 Context interval sets για τον ελεγκτή αποφυγής εμποδίων και ρύθμισης τροχιάς(γραφική 1) και για τον ελεγκτή ανίχνευσης σημείου-στόχου(γραφική 2)**

Η γραφική αυτή μας δείχνει ότι όσο πιο μικρή είναι η απόσταση του ρομπότ από το κοντινότερο εμπόδιο τόσο μεγαλύτερη είναι η ενεργοποίηση του ελεγκτή ενεργοποίησης εμποδίων.

Η είσοδος  $d_2(d_3)$  στο context που σχετίζεται με τον ελεγκτή ελέγχου τροχιάς σύμφωνα με το αριστερό(δεξιό) άκρο  $E_2(E_3)$  είναι η ελάχιστη τιμή των αισθητήρων των αριστερών(δεξιών) σόναρ. Η είσοδος αυτή ασαφοποιείται με βάση το ίδιο ασαφές σύνολο τύπου 2 που είδαμε και πριν. Όσο πιο μικρή είναι η απόσταση του ρομπότ από ένα από τα δύο άκρα τόσο μεγαλύτερη είναι η ενεργοποίηση του αντίστοιχου ελεγκτή.

Η είσοδος  $d_4$  στο context που σχετίζεται με την ανίχνευση του σημείου-στόχου( $E_4$ ) είναι η ελάχιστη τιμή των  $d_1, d_2, d_3$ . Η είσοδος αυτή ασαφοποιείται με βάση το ασαφές σύνολο τύπου 2 που φαίνεται στην δεύτερη από τις γραφικές του σχήματος 4.3.5.1. Όταν λοιπόν το ρομπότ είναι ελεύθερο από τις πλαϊνές και την μπροστινή πλευρά τότε είναι μεγαλύτερη και η ενεργοποίηση του ελεγκτή ανίχνευσης στόχου.

Αφού οι σαφείς είσοδοι  $d_j$  έχουν ασαφοποιηθεί σύμφωνα με τα ασαφή σύνολα που αναφέραμε πιο πριν, οι ασαφοποιημένες τιμές τροφοδοτούνται στον

μηχανισμό εξαγωγής συμπεράσματος που αποφασίζει ποιοι κανόνες(και επομένως ποιοι ελεγκτές )ενεργοποιούνται από την συντονίζουσα βάση κανόνων.

Η βάση αυτή κανόνων περιέχει έναν κανόνα για καθεμία από τις 4 συμπεριφορές(behaviors) που ελέγχει καθένας από τους ελεγκτές. Έτσι έχουμε 4 κανόνες της μορφής:

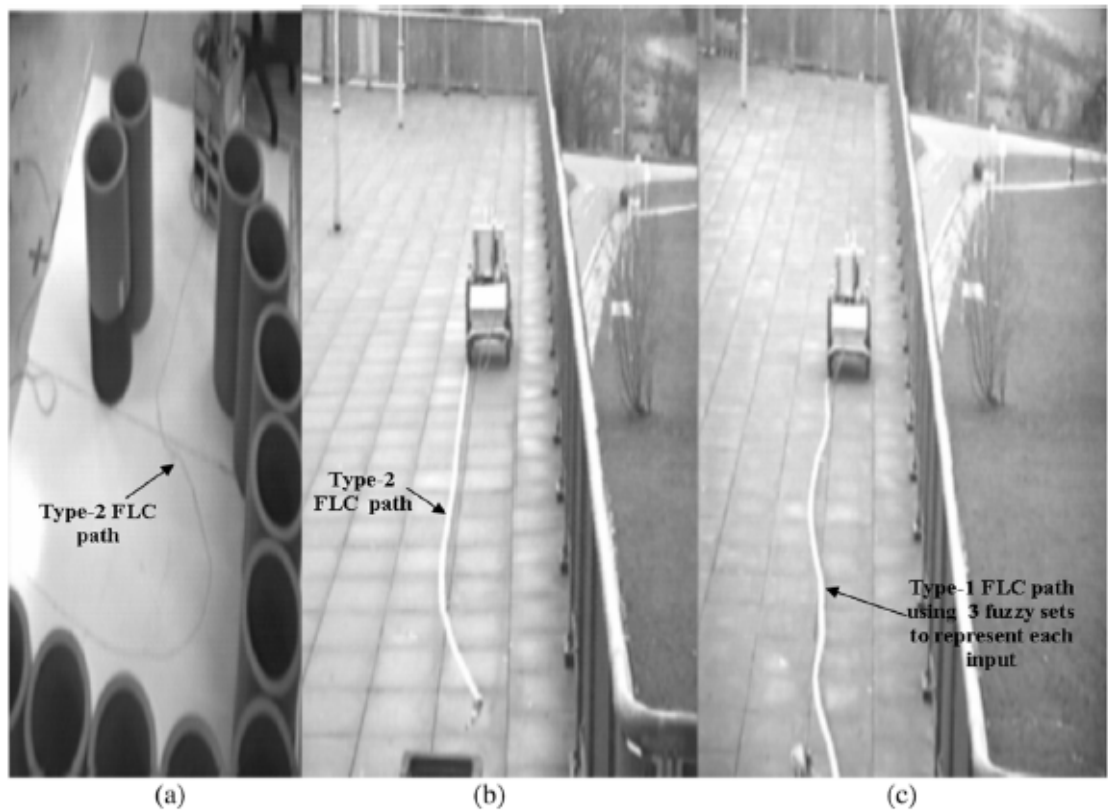
IF  $d_1$  is LOW THEN Obstacle Avoidance  
 IF  $d_2$  is LOW THEN Left Edge Following  
 IF  $d_3$  is LOW THEN Right Edge Following  
 IF  $d_4$  is LOW THEN Goal Seeking

Ορίζουμε σαν  $\overline{\mu^E}(d_j)$  και  $\underline{\mu^E}(d_j)$  το δεξιό και αριστερό αντίστοιχα άκρο της δύναμης ενεργοποίησης του  $j$ th κανόνα context. Για κάθε έξοδο  $k=1,2$  το μπλοκ μείωσης τύπου λαμβάνει τα σύνολα μειωμένου τύπου από τις εξόδους των 4 ελεγκτών χαμηλότερου επιπέδου  $[y_{ik}^j]$  όπου  $j=1,...,4$ . Αυτά τα σύνολα προσεγγίζουν τα κέντρα των συνόλων εξόδου των 4 ελεγκτών. Για να πάρουμε το τελικό σύνολο εξόδου εφαρμόζουμε την επαναληπτική διαδικασία που έχει αναφερθεί για τα interval sets. Παίρνοντας μετά το κέντρο του interval set που προκύπτει έχουμε 2 σαφείς εξόδους.

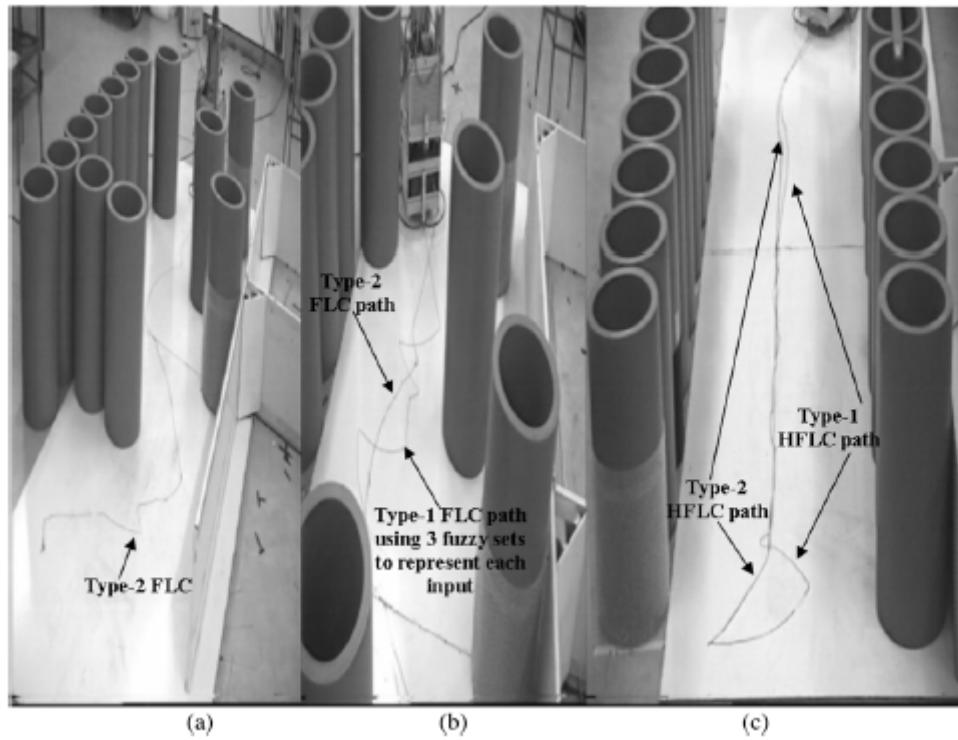
#### 4.3.6 Συμπεράσματα-αποτελέσματα

Το ιεραρχικό ΑΣ2 που προτείνεται στην δημοσίευση του Hagras πετυχαίνει δραματική μείωση των κανόνων. Αντί για τους  $3^8=6561$  κανόνες που θα χρειαζόνταν με έναν μη ιεραρχικό ελεγκτή όπως είδαμε παραπάνω με τον ελεγκτή που προτείνεται απαιτούνται μόνο  $8+4+4+3+4=23$  κανόνες. Οι κανόνες αυτοί είναι επίσης πολύ λιγότεροι από τους 52 κανόνες που χρησιμοποιούταν στον ιεραρχικό ΑΣ1 που προτάθηκε στην δημοσίευση [24]. Στην δημοσίευση [23] έγιναν διάφορα τεστ που έδειξαν την επιτυχημένη λειτουργία του ιεραρχικού

ασαφούς ελεγκτή τύπου 2 που προτάθηκε και την υπεροχή του σε σχέση με ασαφείς ελεγκτές τύπου 1 που μάλιστα χρησιμοποιούσαν μεγαλύτερες βάσεις κανόνων. Στα παρακάτω σχήματα φαίνονται κάποια από τα τεστ που έγιναν.



**Σχήμα 4.3.6.1 α) Διαδρομή ρομπότ ακολουθώντας μια πλευρά διαδρόμου, αποφεύγοντας εμπόδια και φθάνοντας έναν στόχο στην άκρη του διαδρόμου β) Διαδρομή σε εξωτερικό χώρο ακολουθώντας ανώμαλο διάδρομο γ) Ιδια διαδρομή χρησιμοποιώντας ασαφή ελεγκτή τύπου 1**



**Σχήμα 4.3.6.2** α)Τροχιά σε εσωτερικό χώρο υλοποιώντας μόνο την αποφυγή εμποδίων β)Σύγκριση τροχιών υλοποιώντας έναν ελεγκτή τύπου 1 και έναν τύπου 2 γ)Αντίστοιχη σύγκριση έχοντας ένα σημείο στόχο

## Κεφάλαιο 5

### Ανακεφαλαίωση-Συμπεράσματα

#### 5.1 Σύνοψη εργασίας

Ανακεφαλαιώνοντας την παρούσα εργασία θα λέγαμε ότι παρουσιάσαμε τα βασικά στοιχεία από τα οποία αποτελείται ένα ασαφές σύστημα τύπου 2. Παρουσιάσαμε τα ασαφή σύνολα τύπου 2 που αποτελούν τις συναρτήσεις συμμετοχής των ΑΣ2 και αναλύσαμε τις ιδιότητες και τις πράξεις μεταξύ τους. Στην συνέχεια παρουσιάσαμε τις ασαφείς σχέσεις τύπου 2 και τις συνθέσεις που ισχύουν μεταξύ τους. Στο βασικό κεφάλαιο της εργασίας μελετήσαμε αναλυτικά τα μέρη ενός ΑΣ2 επικεντρωνόμενοι στην διαδικασία μείωσης τύπου που είναι και η πιο πολύπλοκη και χρονοβόρα. Αναλύσαμε τις περιπτώσεις που κρίνεται αναγκαία η χρήση ενός ΑΣ2 για να αντιμετωπιστεί κυρίως η αβεβαιότητα που υπάρχει στις συναρτήσεις συμμετοχής. Παρουσιάσαμε 3 συγκεκριμένες εφαρμογές των ΑΣ2 στην προσέγγιση συναρτήσεων, στην λήψη πολυκριτήριων αποφάσεων και στον έλεγχο κίνησης έντροχων ρομπότ. Γενικά θα λέγαμε ότι η εισαγωγή των ΑΣ2 κρίθηκε αναγκαία για να αντιμετωπίσει το παράδοξο γεγονός της ύπαρξης σαφών συναρτήσεων συμμετοχής σε ένα περιβάλλον ασάφειας και αβεβαιότητας. Και η αναφορά των εφαρμογών στην βιβλιογραφία που χρησιμοποιούν ΑΣ2 συνεχώς μεγαλώνει και είναι ένας νέος κλάδος έρευνας και μελέτης.

#### 5.2 Διαθέσιμο λογισμικό

Υπάρχουν πάρα πολλά Matlab M-files διαθέσιμα στο διαδίκτυο στην διεύθυνση <http://sipi.usc.edu/~mendel/software> που μπορεί κάποιος ενδιαφερόμενος να δει την υλοποίηση ενός ΑΣ2. Περιλαμβάνονται M-files για την υλοποίηση ενός μεγάλου εύρους ΑΣ2 καθώς και αρχεία για την υλοποίηση ΑΣ1 ώστε να είναι δυνατή η σύγκριση της απόδοσης τους.

## Βιβλιογραφία

- [1] L.A Zadeh, The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning -1, Inform.Sci .8(1975) 199-249
- [2] J.M.Mendel, Computing with words when words can mean different things to different people, Presented at Intercat.ICSC Congress on Computational Intelligence:Methods and Applications,Rochester,New York,June 22-25,1999
- [3] E.Hisdal , The IF THEN ELSE statement and interval-valued fuzzy sets of higher type, Internat. J. Man-Mach. Stud. 15 (1981) 385-455
- [4] R.L.John, Type 2 fuzzy sets: an appraisal of theory and applications, Internat,J. Uncertainty, Fuzziness Knowledge-Based Systems 6(6)(1998) 563-576
- [5] M.Mizumoto,K.Tanaka, Some properties of fuzzy sets of type-2, Inform and Control 31(1976) 312-340
- [6] Nilesh N.Karnik, Jerry M,Mendel,Operations on type-2 fuzzy sets,Fuzzy Sets and Systems 122(2001) 327-348
- [7] Lin,C-T and C.S.G Lee,Neural Fuzzy Systems,Prentice-Hall PTR,Upper Saddle River,NJ,1996
- [8] Karnik,N.N and J.Mendel, An Introduction to Type-2 Fuzzy Logic Systems,Univ of Southern California,Los Angeles,CA ,June 1998b
- [9] Karnik,N.N and J.Mendel, Operations on type-2 fuzzy sets, accepted for publication on Fuzzy Sets and Systems,2000a
- [10] Jerry M.Mendel ,Uncertain Rule-Based Fuzzy Logic Systems:Introduction and New Directions, Prentice-Hall PTR,Upper Saddle River,NJ,2001
- [11] Nilesh N.Karnik,Jerry M.Mendel,Type-2 Fuzzy Logic Systems,IEEE Transactions on Fuzzy Systems,Vol 7,December 1999
- [12] G.J Klir and B.Yuan, Fuzzy Sets and Fuzzy logic:Theory and Applications.Englewood Cliffs,NJ:Prentice Hall,1995
- [13] D.Driankov,H Hellendoorn, and M.Reinfrank,An introduction to Fuzzy Control,2<sup>nd</sup> ed.New York:Springer-Verlag,1996
- [14] J.L.Chaneau,M.Gunaratne,and A.G.Alschaeffl,"An application of type-2 sets to decision making in engineering" ,Analysis of Fuzzy Information-Vol II:Artificial Intelligence and Decision Systems,J.C.Bezdek,Ed. Boca Raton,FL:CRC,1987
- [15] R.R.Yager,"Fuzzy subsets of type II in decisions",J.Cybern,vol 10,pp 137-159,1980

- [16] M.Wagenknecht and K.Hartmann, "Application of fuzzy sets of type 2 to the solution of fuzzy equation systems", Fuzzy Sets Syst,vol 25,pp 183-190,1988
- [17] Karnik and Mendel , "Applications of type-2 fuzzy logic systems: Handling the uncertainty associated with surveys" ,presented at FUZZY-IEEE Conf,Seoul, Korea Aug 1999
- [18] Karnik and Mendel, "Applications of type-2 fuzzy logic systems to forecasting of time-series",Information Sciences pp 89-111 1999
- [19] K.C.Wu , "Fuzzy interval control of mobile robots",Comput Elect. Eng. Vol 22, no 3,pp 211-229, 1996
- [20] R.I John,"Type 2 Inferencing and Community Transport Scheduling ",Proc.Fourth European Congress on Intelligent Techniques and Soft Computing EUFIT96,2(1996) 1369-1372
- [21] S.A Starks and V.Kreinovich and P.Narasimhamurthy,"How to Avoid Congestion in Computer Networks",Proceedings of NAFIPS/IFIS/NASA '94,(1994) 466-469
- [22] R.I John and P.R.Innocent and M.Barnes , "Type 2 Fuzzy Sets and Neuro-Fuzzy Clustering of Radiographic Tibia Images ", Proceedings Third Joint Conference on Information Science,(1997) 58-61
- [23] Hani A.Hagras , "An hierarchical type-2 fuzzy logic control architecture for autonomous mobile robots",IEEE transactions on fuzzy systems .vol 12 ,no 4 ,August 2004
- [24] H.Hagras ,V.Callaghan and M,Colley,"Prototyping design and learning in outdoor mobile robots operating in unstructured outdoor environments", IEEE Robot Automat,Mag,vol 8,no3 ,pp 53-69 Sept 2001
- [25] Jerry M.Mendel and Robert I.Bob John,"Type-2 Fuzzy Sets Made Simple",IEEE Transactions on Fuzzy Systems,Vol 10,No 2,April 2002