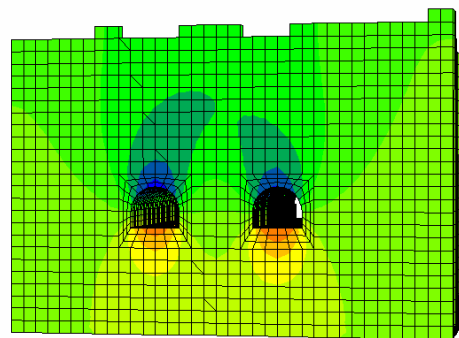
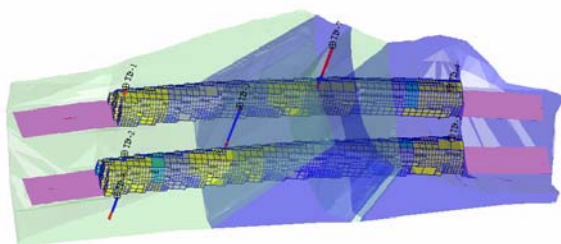


**ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ ΚΡΗΤΗΣ**  
**ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΟΡΥΚΤΩΝ ΠΟΡΩΝ**

**ΔΙΑΤΡΙΒΗ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟΥ ΔΙΠΛΩΜΑΤΟΣ ΕΙΔΙΚΕΥΣΗΣ**

**ΣΥΖΕΥΓΜΕΝΗ ΓΕΩΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ – ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ**  
**ΣΗΡΑΓΓΩΝ**



**ΣΑΡΑΤΣΗΣ ΓΕΩΡΓΙΟΣ**  
**ΜΗΧΑΝΙΚΟΣ ΟΡΥΚΤΩΝ ΠΟΡΩΝ**

**ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΗ ΕΠΙΤΡΟΠΗ**

**ΕΞΑΔΑΚΤΥΛΟΣ ΓΕΩΡΓΙΟΣ, ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ Π.Κ. (Επιβλέπων)**  
**ΧΡΙΣΤΟΠΟΥΛΟΣ ΔΙΟΝΥΣΙΟΣ, ΑΝ. ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ Π.Κ.**  
**ΣΤΑΥΡΟΠΟΥΛΟΥ ΜΑΡΙΑ, ΔΕΚΤΟΡΑΣ Ε.Κ.Π.Α.**

**ΧΑΝΙΑ**  
**ΔΕΚΕΜΒΡΙΟΣ 2004**

## Περιεχόμενα

|                     |  |           |
|---------------------|--|-----------|
| <b>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1</b>   | <b>Εισαγωγή .....</b>  | <b>2</b>  |
| <b>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2</b>   | <b>Θεωρία Χωρικών Τυχαίων Μεταβλητών.....</b>  | <b>5</b>  |
| 2.1                 | Γενικά για την Γεωστατιστική .....   | 5         |
| 2.2                 | Θεωρία του Hmi – Βαριογράμματος .....  | 7         |
| <b>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3</b>   | <b>Θεωρία του Kriging.....</b>   | <b>21</b> |
| 3.1                 | Γενικά για την μέθοδο Kriging .....  | 21        |
| 3.2                 | Προϋποθέσεις για την Εφαρμογή της Μεθόδου Kriging .....  | 32        |
| <b>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4</b>   | <b>Συζευγμένη Γεωστατιστική – Μηχανική Ανάλυση Σηράγγων ..</b>                                   | <b>34</b> |
| 4.1                 | Εισαγωγή .....   | 34        |
| 4.2                 | Συλλογή, Επεξεργασία και Απεικόνιση των Δεδομένων Πεδίου και του<br>Σχεδιασμού των Σηράγγων..... | 35        |
| 4.3                 | Τριδιάστατο Αριθμητικό Μοντέλο των Διδύμων Σηράγγων .....  | 51        |
| <b>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5</b>   | <b>Συμπεράσματα – Προτάσεις .....</b>  | <b>61</b> |
| <b>ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ</b> | <b>.....</b>   | <b>63</b> |

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1 Εισαγωγή

Η κατασκευή υπογείων έργων έχει σημαντικές θετικές κοινωνικο-οικονομικό-περιβαλλοντικές επιπτώσεις στη σύγχρονη κοινωνία. Ως παραδείγματα μπορούν να αναφερθούν οι υπόγειες σιδηροδρομικές ή οδικές σήραγγες, οι υπόγειες εκμεταλλεύσεις, τα υπόγεια parking και διαβάσεις, οι υπόγειοι αποθηκευτικοί θάλαμοι στερεών και υγρών καυσίμων αλλά και σφραγίσματος αποβλήτων κ.λπ. Η μεγάλη ανάπτυξη της σύγχρονης Μηχανικής των Υπογείων Κατασκευών οφείλεται σε μεγάλο βαθμό στην σημαντική ανάπτυξη υπολογιστικών εργαλείων προσομοίωσης της μηχανικής συμπεριφοράς των κατασκευών αυτών. Πλέον, η Υπολογιστική Μηχανική είναι τυποποιημένη μέθοδος στο σχεδιασμό σηράγγων και άλλων τύπων υπογείων έργων (μεγάλοι θάλαμοι, συστήματα εκμεταλλεύσεων ορυκτών πόρων κ.λπ.). Βεβαίως δεν πρέπει να παραγνωρίζεται το γεγονός ότι αν τα γεωτεχνικά δεδομένα εισαγωγής (γεωλογία, τεκτονική, μηχανικές ιδιότητες των γεωϋλικών) δεν είναι αξιόπιστα και αντιπροσωπευτικά της περιβάλλουσας βραχώμαζας, τότε οδηγούμαστε σε αμφισβητήσιμα αποτελέσματα με αρνητική επίδραση στο κόστος ή/και στην ασφάλεια του έργου.

Κατά την φάση της έρευνας υπογείων εκσκαφών, παρατηρούνται πολλές φορές μεγάλες χωρικές μεταβολές των ιδιοτήτων της βραχώμαζας εξαιτίας της γεωλογικής και τεκτονικής ιστορίας αυτής. Οι μεταβολές αυτές (που συντελούν στην ετερογένεια της βραχώμαζας) συνήθως δεν λαμβάνονται υπόψη, με εξαίρεση περιπτώσεις εντόνων τοπικών μεταβολών που οφείλονται στην ύπαρξη μεγάλων πτυχώσεων, ρηγμάτων και μετάβαση γεωλογικών σχηματισμών. Ακόμα και σε περιπτώσεις καλής κρίσης του γεωλόγου ή του μηχανικού, η ποσοτικοποίηση της ανομοιογένειας της βραχώμαζας και της σχετιζόμενης αβεβαιότητας των εκτιμώμενων ιδιοτήτων δεν γίνεται με κάποιο τυποποιημένο και αξιόπιστο (ελεύθερο σφαλμάτων) τρόπο. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα τα δεδομένα που χρησιμοποιούνται στα αριθμητικά μοντέλα προσομοίωσης της συμπεριφοράς της βραχώμαζας να υποεκτιμώνται, και ως εκ τούτου να μην είναι αντιπροσωπευτικά των γεωλογικών σχηματισμών. Η προσέγγιση αυτή οδηγεί συνήθως σε μεγαλύτερο κόστος κατασκευής και απώλεια χρόνου.

Λαμβάνοντας λοιπόν υπόψη την ετερογένεια της βραχώμαζας, κατά την έρευνα, το σχεδιασμό και την κατασκευή των υπόγειων εκσκαφών, ανακύπτουν τα εξής προβλήματα:

1. Η επάρκεια της αρχικής τεχνικο – γεωλογικής έρευνας και της ερμηνείας των δεδομένων που συλλέγονται σε σχέση με τις πραγματικές συνθήκες που επικρατούν στην περιοχή μελέτης
2. Με ποιους τρόπους είναι δυνατό να βελτιωθεί η σχέση κόστους – ποιότητας, αποτελεσμάτων της αρχικής έρευνας
3. Πώς τα δεδομένα που συλλέγονται κατά το στάδιο της έρευνας είναι δυνατό να χρησιμοποιηθούν καλύτερα κατά τον σχεδιασμό και την κατασκευή των υπογείων εκσκαφών και
4. Ποιος είναι ο ρόλος της των τεχνικών αριθμητικής ανάλυσης κατά τον σχεδιασμό των τελευταίων.

Οι συνηθισμένες μέθοδοι που χρησιμοποιούνται σήμερα στο σχεδιασμό υπογείων εκσκαφών, δε λαμβάνουν υπόψη τις μεταβολές των ιδιοτήτων της βραχώμαζας στο χώρο, παρά το γεγονός ότι οι ιδιότητες αυτές παρουσιάζουν πολλές φορές μεγάλες διακυμάνσεις στην τιμή τους. Για την αντιμετώπιση αυτών των διακυμάνσεων καθώς και της αβεβαιότητας των προβλέψεων, οι μηχανικοί χρησιμοποιούν σήμερα αυθαίρετους συντελεστές ασφαλείας.

Η εφαρμογή της γεωστατιστικής μπορεί να δώσει λύσεις στα παραπάνω προβλήματα [1] και [2]. Η γεωστατιστική, επιτρέπει την πρόβλεψη της χωρικής κατανομής ιδιοτήτων καθώς και της αβεβαιότητας αυτών των προβλέψεων, βάση δεδομένων δειγματοληψίας και παρατηρήσεων (γεωλογικές, τεχνικές κ.λπ.).

Τα αριθμητικά μοντέλα βρίσκουν σήμερα ευρεία εφαρμογή κατά των σχεδιασμό υπογείων έργων. Παρά την ευρεία χρήση τους όμως, οι περισσότερες προσομοιώσεις με τα μοντέλα αυτά γίνονται σχεδόν πάντα στις δύο διαστάσεις. Οι Negro and Queiroz [4] (2000) παρουσίασαν τα συμπεράσματα τους από τη μελέτη πάνω από 65 επιστημονικών δημοσιεύσεων της σύγχρονης βιβλιογραφίας σχετικών με προσομοιώσεις συμπεριφοράς υπογείων έργων. Παρατηρούν το ανησυχητικό γεγονός ότι το 92% των προσεγγίσεων αυτών γίνονται στις δύο διαστάσεις του χώρου. Όμως, στην πραγματικότητα όλα τα υπόγεια έργα εμπεριέχουν τις τρεις διαστάσεις. Ακόμα και σε περιπτώσεις που η

γεωμετρία είναι τέτοια που μπορεί να προσεγγισθεί από επίπεδη ανάλυση (π.χ. σήραγγα μεγάλου μήκους), η μη ευθυγράμμιση του επί τόπου εντατικού πεδίου με τον άξονα της σήραγγας αλλά και η ενδογενής ετερογένεια των γεωλογικών σχηματισμών στις τρεις διαστάσεις του χώρου, καθιστά την τρι-διάστατη υπολογιστική ανάλυση αναγκαία για την εξαγωγή ασφαλών ποσοτικών αποτελεσμάτων.

Η πρωτοτυπία της συγκεκριμένης εργασίας έγκειται στον συνδυασμό της Γεωστατιστικής και της Υπολογιστικής Μηχανικής σε τρεις διαστάσεις για τον σχεδιασμό υπογείων έργων. Συγκεκριμένα, σύμφωνα με την ολοκληρωμένη αυτή προσέγγιση, χρησιμοποιούνται δύο τριδιάστατα υπολογιστικά εργαλεία που αυτή τη στιγμή βρίσκονται στο μέτωπο της Γεωστατιστικής όπως είναι ο σχεδιαστικός – απεικονιστικός κώδικας SURPAC [5] και της Γεωμηχανικής όπως είναι ο κώδικας πεπερασμένων διαφορών FLAC3D [6]. Τα εργαλεία αυτά χρησιμοποιούνται στην παρούσα εργασία για τον τριδιάστατο σχεδιασμό και την απεικόνιση της μηχανικής συμπεριφοράς σιηράγγων σε ανομοιογενή συνεχή μέσα. Πιο συγκεκριμένα εφαρμόζονται στην κατασκευή ενός τριδιάστατου μοντέλου διδύμων σιηράγγων στην Ελλάδα, ακολουθώντας τα παρακάτω βήματα:

1. Κατασκευή βάσης δεδομένων από γεωλογικά δεδομένα και δεδομένα γεωερευνητικού προγράμματος
2. Τριδιάστατα μοντέλα της επιφανείας και της γεωλογίας της περιοχής
3. Χωρική συσχέτιση των δεδομένων των γεωτρήσεων και κατασκευή τριδιάστατου μοντέλου κατανομής των γεωτεχνικών παραμέτρων της βραχώμαζας
4. Κατασκευή κώδικα σε C++ για την αυτόματη μεταφορά ογκομετρικού μοντέλου μηχανικών ιδιοτήτων όπως έχει προκύψει από την γεωστατιστική ανάλυση στο τριδιάστατο κώδικα πεπερασμένων διαφορών FLAC3D, για περαιτέρω προσομοίωση της μηχανικής συμπεριφοράς των σιηράγγων.

Στο σημείο αυτό θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά όλους όσους βοήθησαν να έρθει σε πέρας αυτή η εργασία. Πιο συγκεκριμένα θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα Καθηγητή του τμήματος κύριο Εξαδάκτυλο Γεώργιο, τον Αναπληρωτή Καθηγητή Χριστόπουλο Διονύσιο καθώς και την κυρία Σταυροπούλου Μαρία, Λέκτορα του τμήματος Γεωλογίας Πανεπιστημίου Αθηνών, τομέα Δυναμικής, Τεκτονικής και εφαρμοσμένης Γεωλογίας.

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 Θεωρία Χωρικών Τυχαίων Μεταβλητών

### 2.1 Γενικά για την Γεωστατιστική

Από την εφαρμογή της στατιστικής σε προβλήματα γεωλογίας και έρευνας μεταλλευτικών κοιτασμάτων που χρονολογείται από τα μέσα του 1960, προέκυψε ο επιστημονικός κλάδος της γεωστατιστικής. Ο κλάδος αυτός έχει παραδοσιακά ως αντικείμενο την εφαρμογή στατιστικών μεθόδων και στοχαστικής ανάλυσης σε θέματα που απασχολούν κυρίως τον υπολογισμό αποθεμάτων στην εκμετάλλευση μεταλλείων. Σήμερα πλέον, η γεωστατιστική χρησιμοποιείται ως πρακτικό εργαλείο στην υδρολογία, στην επιδημιολογία, στην στατιστική, στις επιστήμες της ατμόσφαιρας, στην γεωγραφία, στην γεωπονία κ.ά.

Η γεωστατιστική απαρτίζεται από ένα σύνολο τεχνικών μοντελοποίησης της χωρικής κατανομής φυσικών μεγεθών που θεωρούνται ως τυχαίες μεταβλητές. Η διαδικασία αυτή γίνεται σε δύο στάδια κυρίως, όπως:

1. Στατιστική ανάλυση των δειγματοληπτικών μετρήσεων κάποιου φυσικού μεγέθους που έχουν περισυλλεγεί από μια περιοχή
2. Παρεμβολή των τιμών των μεγεθών αυτών μεταξύ των σημείων ή περιοχών δειγματοληψίας, με χρήση διαφόρων τεχνικών όπως του πλησιέστερου γείτονα (Nearest neighbor), της δύναμης της αντίστροφης απόστασης (inverse distance), και του Kriging, οι οποίες είναι και οι πλέον διαδεδομένες.

Σύμφωνα με τα παραπάνω, η μελέτη της χωρικής κατανομής μιας ποσότητας με τη χρήση μόνο κλασσικών στατιστικών μεθόδων θα γινόταν με την κατασκευή στατιστικών κατανομών των διαφορών  $Z(\mathbf{x}) - Z(\mathbf{x} + \mathbf{h})$  για δεδομένο μέτρο του  $\mathbf{h}$  και προσανατολισμό του διανύσματος που ενώνει τα δύο σημεία δειγματοληψίας, με τη χρήση στατιστικών παραμέτρων που περιγράφουν το ιστόγραμμα, και αυτή η διαδικασία να συνεχιστεί για πολλές αποστάσεις δειγματοληψίας και προσανατολισμούς στο χώρο. Τα ιστογράμματα αυτά περιγράφονται από τις παραμέτρους:

- ο μέσος όρος (mean)

$$m^*(\mathbf{h}) = \frac{1}{n} \sum [Z(\mathbf{x}) - Z(\mathbf{x} + \mathbf{h})] \quad (2.1)$$

- η διασπορά (variance):

$$\sigma^2 = \frac{1}{n} \sum [Z(\mathbf{x}) - Z(\mathbf{x} + \mathbf{h})]^2 \quad (2.2)$$

Για να αποφευχθεί αυτή η χρονοβόρος διαδικασία, η γεωστατιστική χρησιμοποιεί δύο επιπλέον παραδοχές για την περιγραφή της συμπεριφοράς των χωρικών μεταβλητών. Οτιδήποτε γράφεται στην συγκεκριμένη εργασία είναι βασισμένο στις παραδοχές αυτές, που περιγράφονται αναλυτικότερα στην συνέχεια:

*Θεώρηση της Στασιμότητας δευτέρου βαθμού:* υποθέτει πως όλα τα δείγματα προέρχονται από την ίδια συνάρτηση κατανομής (λογαριθμοκανονική/κανονική). Μία χωρική συνάρτηση είναι τέτοια όταν:

1. η μέση τιμή  $E\{Z(\mathbf{x})\}$  υπάρχει και δεν εξαρτάται από το σημείο  $\mathbf{x}$  του χώρου, αλλά  $E\{Z(\mathbf{x})\} = m, \quad \forall \mathbf{x}$
2. για κάθε ζευγάρι τυχαίων μεταβλητών  $\{Z(\mathbf{x}), Z(\mathbf{x} + \mathbf{h})\}$ , η συνδιασπορά υπάρχει και εξαρτάται από την απόσταση (διεύθυνση)  $\mathbf{h}$ ,  

$$C(\mathbf{h}) = E\{Z(\mathbf{x} + \mathbf{h})Z(\mathbf{x})\} - m^2 \quad \forall \mathbf{x}$$

*Θεώρηση Ενδογενούς (stationary increments) Υπόθεσης (Intrinsic hypothesis):* δέχεται πως είναι σημαντικές μόνο οι τιμές του μέσου όρου και της διασποράς των διαφορών των μεταβλητών:

1. όπως η πρώτη προϋπόθεση της παραδοχής της στασιμότητας, και
2. για όλα τα διανύσματα  $\mathbf{h}$ , το διάστημα  $[Z(\mathbf{x}) - Z(\mathbf{x} + \mathbf{h})]$  έχει πεπερασμένη διασπορά που είναι ανεξάρτητη του  $\mathbf{x}$  και είναι  

$$Var\{Z(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - Z(\mathbf{x})\} = E\{[Z(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - Z(\mathbf{x})]^2\} = 2\gamma(\mathbf{h})$$

Λόγω της πρώτης θεώρησης κατά την γεωστατιστική ανάλυση αν  $Z(\mathbf{x}_1)$  και  $Z(\mathbf{x}_2)$  αποτελούν δύο διαφορετικές τιμές μιας ιδιότητας, σε δύο διαφορετικά σημεία  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$  στο χώρο, τότε οι τιμές αυτές εξαρτώνται μόνο από την απόσταση μεταξύ των σημείων, και την διεύθυνση τους. Η προϋπόθεση αυτή σημαίνει ότι δείγματα που βρίσκονται σε μικρότερη απόσταση  $h = |\mathbf{h}| = |\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|$  μεταξύ τους συσχετίζονται καλύτερα από ότι όταν βρίσκονται σε μεγαλύτερες αποστάσεις.

## 2.2 Θεωρία του Ημι – Βαριογράμματος

Στην στατιστική η διασπορά περιγράφει ποσοτικά την απόσταση ή διαφορά των τιμών από την μέση τιμή μιας κατανομής. Αντιστοίχως στη γεωστατιστική το ημι – βαριόγραμμα περιγράφει την «απόσταση ή διαφορά» των τιμών συναρτήσει της απόστασης και της διεύθυνσης, συνεπώς έχει τρισδιάστατο χαρακτήρα.

Αν θεωρηθούν δύο αριθμητικές τιμές  $Z(\mathbf{x})$  και  $Z(\mathbf{x} + \mathbf{h})$  σε δύο σημεία  $\mathbf{x}$  και  $\mathbf{x} + \mathbf{h}$  που ορίζονται από ένα διάνυσμα  $\mathbf{h}$ , τότε η διαφοροποίηση μεταξύ των τιμών περιγράφεται ποσοτικά από την συνάρτηση  $2\gamma(\mathbf{x}, \mathbf{h})$ , που ορίζεται ως η μέση τιμή της τυχαίας μεταβλητής  $[Z(\mathbf{x}) - Z(\mathbf{x} + \mathbf{h})]^2$ , δηλαδή:

$$2\gamma(\mathbf{x}, \mathbf{h}) = E\{[Z(\mathbf{x}) - Z(\mathbf{x} + \mathbf{h})]^2\} \quad (2.3)$$

Η συνάρτηση  $\gamma$  ονομάζεται «ημι – βαριόγραμμα».

Στο σημείο αυτό ορίζεται ένα νέο μέγεθος που περιγράφει το βαθμό συσχέτισης δύο χωρικών μεταβλητών, και ονομάζεται «συμμεταβλητότητα (covariance)». Αν δύο χωρικές μεταβλητές  $Z(\mathbf{x})$  και  $Z(\mathbf{x} + \mathbf{h})$  εμφανίζουν διασπορά στα σημεία  $\mathbf{x}$  και  $\mathbf{x} + \mathbf{h}$  τότε εμφανίζουν και συμμεταβλητότητα στα  $\mathbf{x}$  και  $\mathbf{x} + \mathbf{h}$  η οποία είναι συνάρτηση της μεταξύ τους απόστασης και ισούται με:

$$C(\mathbf{x}, \mathbf{x} + \mathbf{h}) = E\{[Z(\mathbf{x}) - m(\mathbf{x})][Z(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - m(\mathbf{x} + \mathbf{h})]\} \Rightarrow \quad (2.5)$$

$$C(\mathbf{h}) = E\{Z(\mathbf{x} + \mathbf{h})Z(\mathbf{x})\} - m^2 \quad (2.6)$$

Λόγω της χωρικής φύσης της συμμεταβλητότητας, της διασποράς και του ημι – βαριογράμματος, είναι δυνατό να καταδειχθεί πως ισχύουν οι κάτωθι σχέσεις:

$$Var\{Z(\mathbf{x})\} = E\{[Z(\mathbf{x}) - m]^2\} = C(0), \quad \forall \mathbf{x} \quad (2.7)$$

και

$$\gamma(\mathbf{h}) = \frac{1}{2} E\{[Z(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - Z(\mathbf{x})]^2\} = C(0) - C(\mathbf{h}), \quad \forall \mathbf{x} \quad (2.8)$$

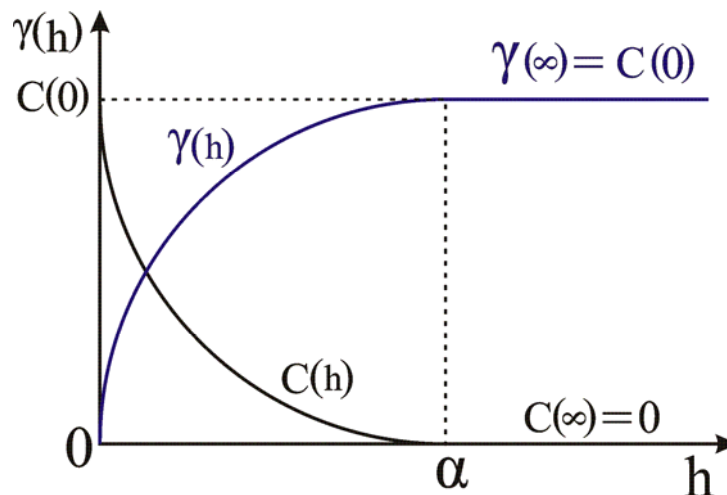
Στην φύση, η συσχέτιση μεταξύ δύο χωρικών μεταβλητών,  $Z(\mathbf{x})$  και  $Z(\mathbf{x} + \mathbf{h})$ , απομειώνεται μέχρι μηδενισμού, όταν το μέτρο του διανύσματος τείνει στο άπειρο ( $|\mathbf{h}| \rightarrow \infty$ ). Στην πράξη θεωρείται πως το  $C(\mathbf{h}) = 0$ , όταν η απόσταση  $|\mathbf{h}| \geq a$ . Η



απόσταση αυτή, στην οποία το  $C(h)=0$  καλείται «απόσταση συσχέτισης» (range ή correlation length) και περιγράφει την μετάβαση από μία κατάσταση στην οποία υπάρχει συσχέτιση μεταξύ των μεταβλητών ( $|h| < a$ ), σε μία κατάσταση όπου δεν είναι δυνατή καμία συσχέτιση. Από την εξίσωση (2.8) σε συνδυασμό με το γεγονός ότι το ημι – βαριόγραμμα περιγράφει την διασπορά μεταξύ των θέσεων στο χώρο ( $x$  και  $x+h$ ), είναι δυνατό να εξαχθούν τα παρακάτω συμπεράσματα:

1.  $\gamma(0)=0$  και
2.  $\gamma(h)=\gamma(-h) \geq 0$

Το ημι – βαριόγραμμα αναπαρίσταται γραφικά την εξάρτηση της διασποράς από την απόσταση μεταξύ των δειγμάτων, ενώ ένα σύνολο από ημι – βαριογράμματα προς διάφορες κατευθύνσεις περιγράφει την ανισοτροπία του πληθυσμού. Ένα κλασικό ημι – βαριόγραμμα και η συμμεταβλητότητα του απεικονίζονται παρακάτω (Σχ. 2.1)

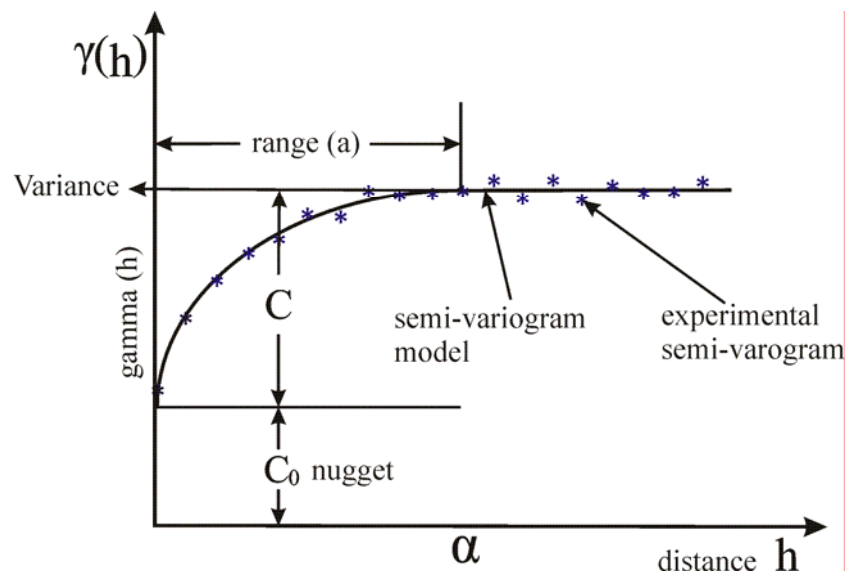


**Σχήμα 2.1 :** Απεικόνιση του ημι –βαριογράμματος, της συμμεταβλητότητας και των βασικών παραμέτρων τους.

Το ημι – βαριόγραμμα (Σχ. 2.1), παύει να αυξάνει μετά από μία συγκεκριμένη απόσταση  $a$ , και πλησιάζει το όριο  $\gamma(\infty)$  που ονομάζεται «οροφή» (sill), του ημι – βαριογράμματος και αποτελεί την a priori διασπορά της χωρικής μεταβλητής:  $\gamma(\infty)=Var\{Z(x)\}=C(0)$ . Τέτοια ημι – βαριογράμματα που εμφανίζουν «οροφή» και «απόσταση» ονομάζονται μεταβατικά (transitional) μοντέλα [1]. Σε ένα μεταβατικό φαινόμενο, οποιαδήποτε τιμή της μεταβλητής θα συσχετιστεί με οποιαδήποτε άλλη η οποία απέχει το πολύ απόσταση  $a$ . Όπως προαναφέρθηκε, η συσχέτιση αυτή και

συνεπώς η ακτίνα επιρροής του ενός δείγματος επάνω στο άλλο μειώνεται καθώς η απόσταση μεταξύ των δειγμάτων αυξάνει, μέχρι η τελευταία να φτάσει την οριακή τιμή  $a$ , όπου οι χωρικές μεταβλητές  $Z(x)$  και  $Z(x+h)$  είναι πλήρως ασυσχέτιστες μεταξύ τους.

Στο Σχ. 2.2 παρουσιάζονται τα βασικά χαρακτηριστικά των ημι – βαριογραμμάτων όπως είναι η οροφή (Sill), το *Nugget* και η μέγιστη απόσταση επιρροής (range). Όπως φαίνεται η οροφή είναι το άθροισμα του nugget και του  $C$ . Ως nugget ορίζεται ως η διασπορά μεταξύ δύο δειγμάτων των οποίων η απόσταση είναι μηδενική. Κανονικά η διασπορά αυτή πρέπει να είναι μηδέν, κάτι όμως που δεν συμβαίνει στη φύση και οφείλεται κυρίως σε σφάλματα κατά τη δειγματοληψία και στην ετερογένεια της μεταβλητής που δεν είναι δυνατό να εντοπιστεί στην κλίμακα που γίνεται η δειγματοληψία. Οι μικροδιαφορές αυτές είναι ένας τύπος «λευκού θορύβου» (white noise) και ισχύει πως  $C(t_1, t_2) = 0$ ,  $(t_1 \neq t_2)$  [13].



**Σχήμα 2.2:** Απεικόνιση του πειραματικού (σημεία) και της συνάρτησης (συνεχής καμπύλη) ημι – βαριογράμματος.

Οι βασικές διαφορές μεταξύ των ημι-βαριογραμμάτων που παρουσιάζονται παραπάνω, Σχ. 2.2 είναι ότι:

- το πειραματικό ημι – βαριογράμμα (μπλε σημεία) είναι διακριτή συνάρτηση, ενώ

- το μοντελοποιημένο ημι – βαριόγραμμα (συνεχής γραμμή) χρησιμοποιεί μαθηματικές εξισώσεις για να περιγράψει τη χωρική μεταβλητότητα του πειραματικού και χρησιμοποιείται από τον αλγόριθμο του Kriging.

Ο αριθμός των μαθηματικών συναρτήσεων που μπορούν να βαθμονομηθούν πάνω σε πειραματικά ημι – βαριόγραμμα, είναι περιορισμένος. Αυτό συμβαίνει επειδή οι εξισώσεις του Kriging για να έχουν μοναδική και σταθερή λύση [2] πρέπει ο πίνακας των συμμεταβλητοτήτων:

$$K = \begin{bmatrix} \tilde{C}_{00} & \tilde{C}_{01} & \cdots & \tilde{C}_{0n} \\ \tilde{C}_{10} & \tilde{C}_{11} & \cdots & \tilde{C}_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{C}_{n0} & \tilde{C}_{n1} & \cdots & \tilde{C}_{nn} \end{bmatrix}$$

να είναι θετικά ορισμένους. Ένας συμμετρικός  $n \times n$  πίνακας  $A$  είναι θετικά ορισμένος, ( $|A| > 0$ ), αν το γινόμενο  $X^t A X$  (όπου ο υπερυψωμένος δείκτης «t» συμβολίζει την πράξη της αναστροφής πινάκων) είναι μεγαλύτερο του μηδενός, δηλαδή:

$X^t A X > 0$ , για κάθε  $X = [x_1, \dots, x_n]^T$  (όπου τα  $x_i$  δεν είναι όλα μηδενικά), ο  $A$  είναι θετικά ορισμένος εάν όλες οι ορίζουσες των υποπινάκων του είναι μεγαλύτερες του μηδέν:  $|A_i| > 0$ ,  $i = (1, \dots, n)$ . Μη θετικά ορισμένες συναρτήσεις οδηγούν σε πίνακες που δεν έχουν λύσεις ή είναι μαθηματικά ασταθείς. Οι συναρτήσεις που χρησιμοποιούνται είναι περιορισμένες σε αριθμό αλλά αρκετές για να περιγράψουν ικανοποιητικά το σύνολο των περιπτώσεων που μπορούν να συναντηθούν στην πράξη. Η επιλογή της κατάλληλης συνάρτησης εξαρτάται από το σχήμα του πειραματικού ημι – βαριόγραμματος και από τον τύπο των αρχικών δεδομένων. Οι συνηθέστερες συναρτήσεις από αυτές (Σχ. 2.3), είναι η εκθετική, η σφαιρική, η κανονική (normal - Gaussian), η γραμμική, η γραμμική με οροφή. Ένα μεγάλο πρόβλημα που ανακύπτει με την χρήση των συναρτήσεων αυτών σχετίζεται κυρίως με τον ορισμό της απόστασης συσχέτισης  $a$ . Η απόσταση αυτή στο σφαιρικό ημι – βαριόγραμμα είναι ίση με την μέγιστη απόσταση στην οποία τα δείγματα μπορούν να συσχετιστούν μεταξύ τους. Στο εκθετικό μοντέλο

$$\gamma(\mathbf{h}) = 1 - \exp\left(\frac{-|\mathbf{h}|}{a}\right), \quad h \geq 0$$

η πραγματική απόσταση συσχέτισης  $a'$  είναι ίση με τρεις φορές το  $a$ , καθώς η συνάρτηση τείνει ασυμπτωτικά για να προσεγγίσει την μονάδα στο άπειρο, για αυτό το λόγο το  $a$  υπολογίζεται προσεγγιστικά ως η απόσταση εκείνη στην οποία το μη-βαριόγραμμα φτάνει το 95% της διασποράς [1], δηλ.

$$a' = 3a, \quad \text{όπου } \gamma(a') = 1 - e^{-3} = 0.95 \cong 1$$

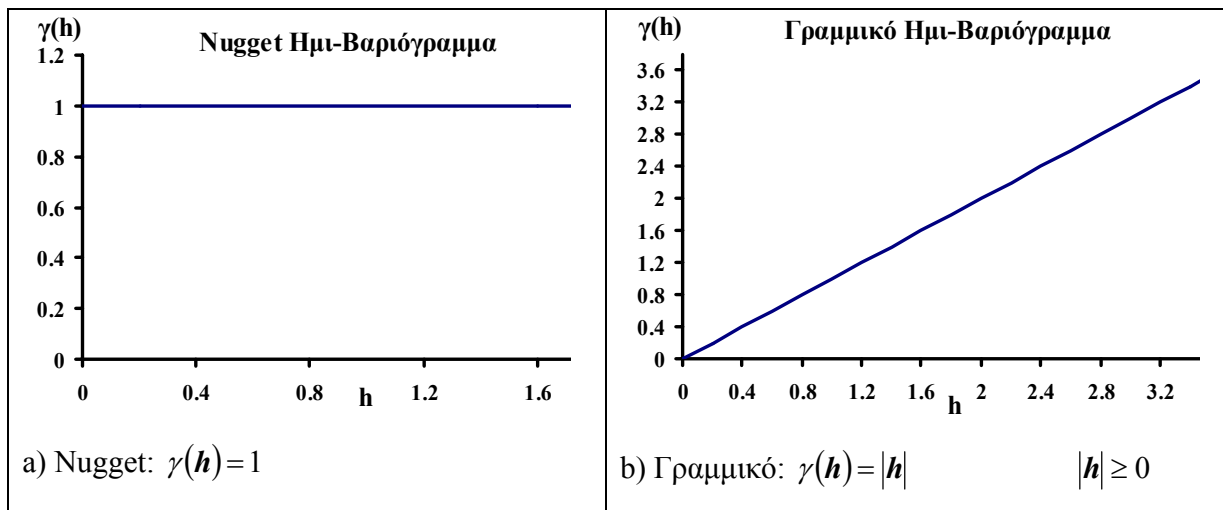
Η κυριότερη διαφορά μεταξύ του σφαιρικού και του εκθετικού μοντέλου είναι η απόσταση στην οποία οι εφαπτόμενες τους στο σημείο 0 τέμνονται με την οροφή (sill).

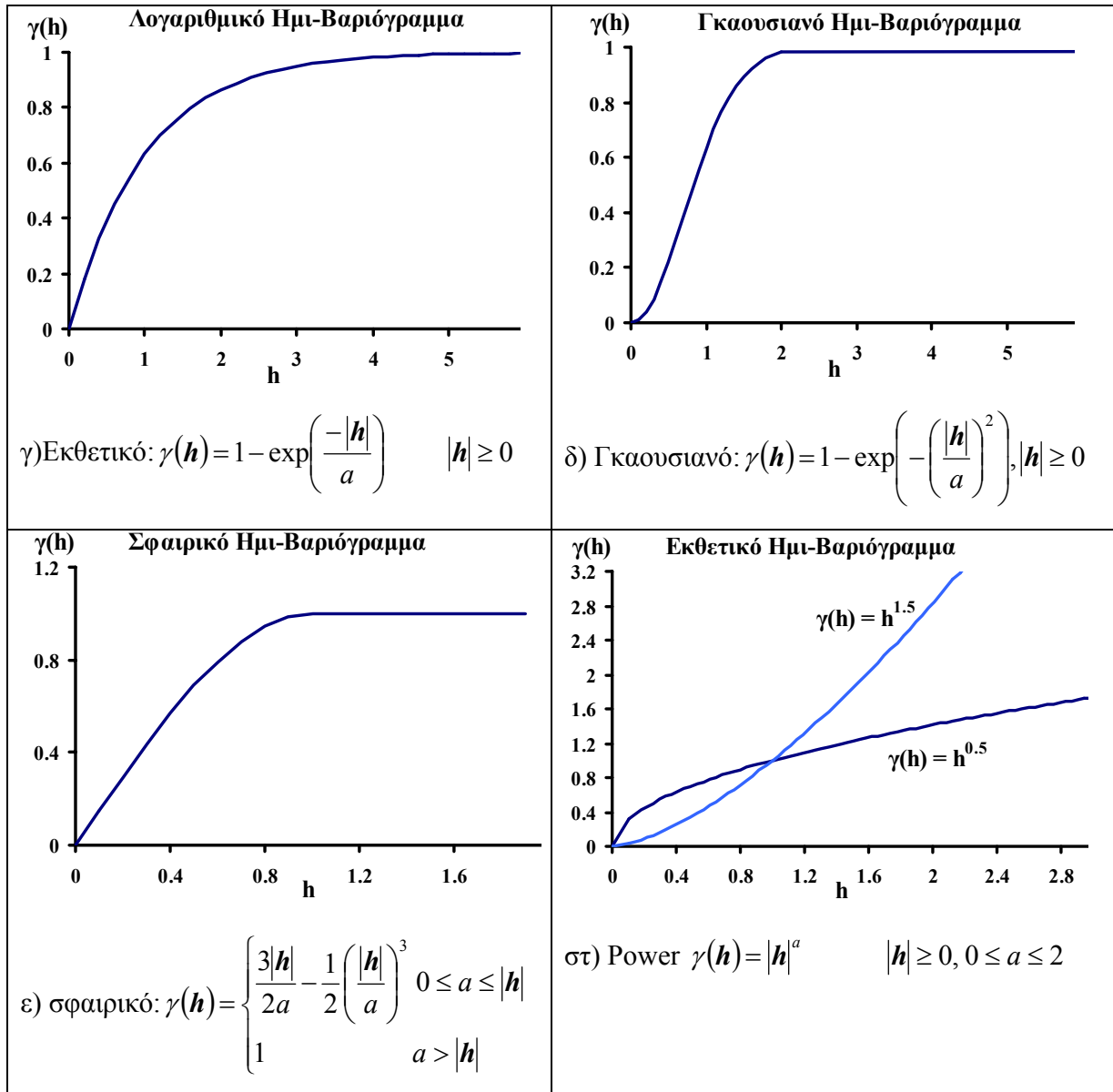
Για το σφαιρικό  $|h| = \frac{2a}{3}$ , δηλ. δύο τρίτα της απόστασης  $a$ , ενώ για το εκθετικό  $|h| = a = a'/3$ , δηλ. το ένα τρίτο της πραγματικής απόστασης  $a'$ .

Ομοίως με το εκθετικό μοντέλο, στο Γκαουσιανό μοντέλο που περιγράφεται από τη σχέση

$$\gamma(h) = 1 - \exp(-|h|^2/a^2)$$

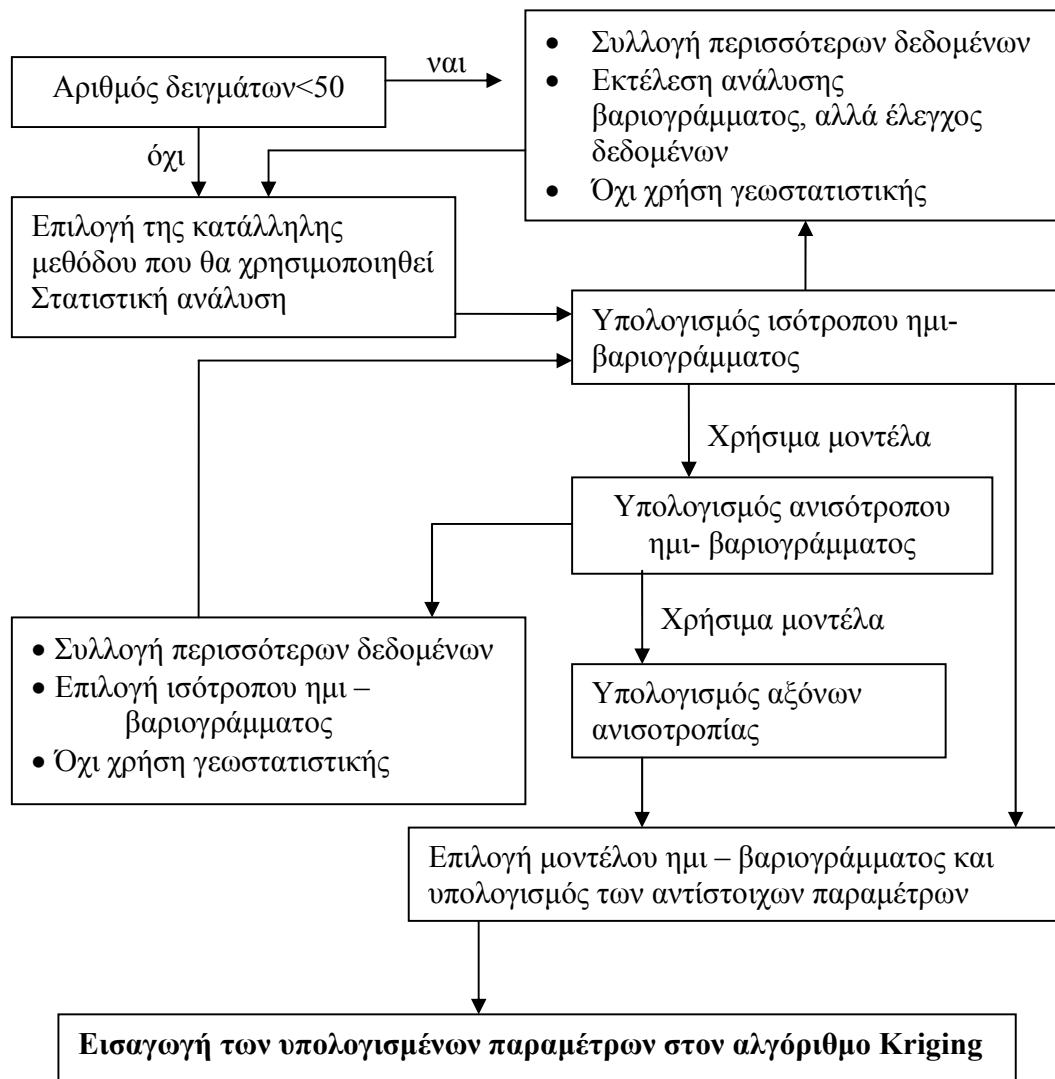
η μέγιστη απόσταση  $a'$  βρίσκεται από την προσεγγιστική σχέση [1]  $a' = \sqrt{3}a$ , όπου  $\gamma(a') = 0.95 \cong 1$





**Σχήμα 2.3:** Είδη μοντέλων ημι – βαριογραμμμάτων

Η σωστή επιλογή του μοντέλου του ημι – βαριογράμματος που περιγράφει ακριβέστερα τις πειραματικές παρατηρήσεις, καθώς και ο καθορισμός της ποιότητας του τελευταίου ακολουθείται ένας αλγόριθμος που παρουσιάζεται στο Σχ. 2.4. Η πρόβλεψη άλλωστε της συμπεριφοράς μεταβλητών σε άγνωστες περιοχές δεν είναι απλή διαδικασία.



**Σχήμα 2.4:** Διάγραμμα ροής των βημάτων που ακολουθούνται κατά την γεωστατιστική ανάλυση.

Ένας βασικός παράγοντας που εξετάζεται στην αρχή, είναι το ελάχιστο μέγεθος του διαθέσιμου δείγματος, καθώς από αυτό εξαρτάται και η ποιότητα του θεωρητικού μοντέλου. Όταν το δείγμα αποτελείται από λιγότερες από 50 μετρήσεις δεν είναι δυνατό να παραχθούν αξιόπιστα θεωρητικά αποτελέσματα, χωρίς αυτό να σημαίνει πως μια αρκετά μεγαλύτερη ποσότητα μπορεί. Το πλεονέκτημα όμως, είναι πως στην δεύτερη περίπτωση τα αποτελέσματα της ανάλυσης θα είναι περισσότερα και ο βαθμός

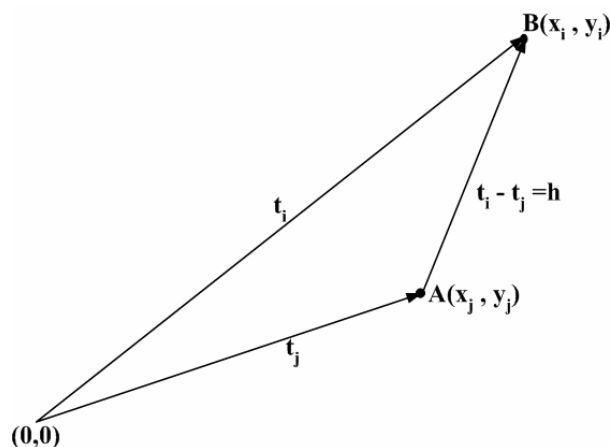
«υποστήριξης» του κάθε πειραματικού σημείου του ημι – βαριογράμματος θα είναι μεγαλύτερος. Σε περιπτώσεις λοιπόν που τα δεδομένα είναι λίγα, τότε γίνεται συλλογή νέων ή συνεχίζεται η ανάλυση, λαμβάνοντας υπόψη όμως πως τα αποτελέσματα δεν θα είναι αξιόπιστα.

Στην συνέχεια ακολουθεί η προσαρμογή του καταλληλότερου θεωρητικού μοντέλου που περιγράφει το πειραματικό ημι-βαριόγραμμα. Το μοντέλο αυτό και η χρησιμότητα του ως εργαλείου πρόβλεψης εξαρτάται κυρίως από τον αριθμό των δειγμάτων, την απόσταση μεταξύ τους, τον βαθμό ανομοιογένειας κ.λπ. Π.χ. αν τα δεδομένα που υπάρχουν δεν είναι καλής ποιότητας, τότε τα αποτελέσματα της ανάλυσης Kriging (που περιγράφεται παρακάτω στο Κεφ.3) δεν θα δώσουν αξιόπιστες προβλέψεις. Ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα τέτοιας συμπεριφοράς είναι τα «Μοντέλα καθαρού Nugget» (Σχ. 2.4α) [1]. Στα μοντέλα αυτά οι τιμές του ημι – βαριογράμματος είναι ίσες ή μεγαλύτερες της διασποράς και είναι χρήσιμα μόνο για τον καθορισμό της μέσης τιμής της ιδιότητας στο χώρο, καθώς δεν ενδείκνυται η χρήση τους στην ανάλυση του Kriging.

Κατά την γεωστατιστική ανάλυση κατασκευάζεται σε αρχικό στάδιο ένα ημι – βαριόγραμμα του οποίου η ανοχή στην διεύθυνση είναι τόσο μεγάλη, ώστε η κατεύθυνση οποιουδήποτε διανύσματος που ενώνει δύο πειραματικά σημεία να μην είναι σημαντική. Ο συνδυασμός όλων των δυνατών διευθύνσεων σε ένα ημι – βαριόγραμμα, καθιστά πλέον σημαντικό μόνο το μέτρο του  $h_{ij}$ , ενώ το ημι – βαριόγραμμα μπορεί να θεωρηθεί ως ο μέσος όρος των ημι – βαριογραμμάτων διαφόρων διευθύνσεων. Η χρήση τέτοιων ημι – βαριογραμμάτων συνεπάγεται άμεσα την ύπαρξη ισοτροπίας, αλλά βοηθά στον προσδιορισμό παραμέτρων που χρειάζονται για τον υπολογισμό άλλων ημι – βαριογραμμάτων. Καθώς η διεύθυνση πλέον δεν παίζει σημαντικό ρόλο, γίνεται ευκολότερη η εύρεση παραμέτρων όπως ο αριθμός των διαστημάτων ( $lags=h$ ) και το εύρος της απόστασης ανοχής που ορίζεται σε επόμενη παράγραφο.

#### *Υπολογισμός απόστασης και γωνίας ανοχής*

Σε ένα σύνολο δεδομένων παρατηρείται το φαινόμενο σημεία με χαμηλές τιμές μιας χωρικής μεταβλητής να είναι συγκεντρωμένα σε μια περιοχή, ενώ σημεία με υψηλές τιμές της ίδιας μεταβλητής να βρίσκονται σε άλλη. Δύο σημεία  $A$  και  $B$  αναπαρίσταται στο χώρο με την μορφή διανυσμάτων (Σχ. 2.5) με μέτρο  $|\mathbf{h}|$  και διεύθυνση  $\alpha$ .




**Σχήμα 2.5:** Απεικόνιση του διανύσματος  $h$ , που συνδέει δύο σημεία  $A$  και  $B$ , στα οποία είναι γνωστή η τιμή της υπό μελέτη μεταβλητής [2].

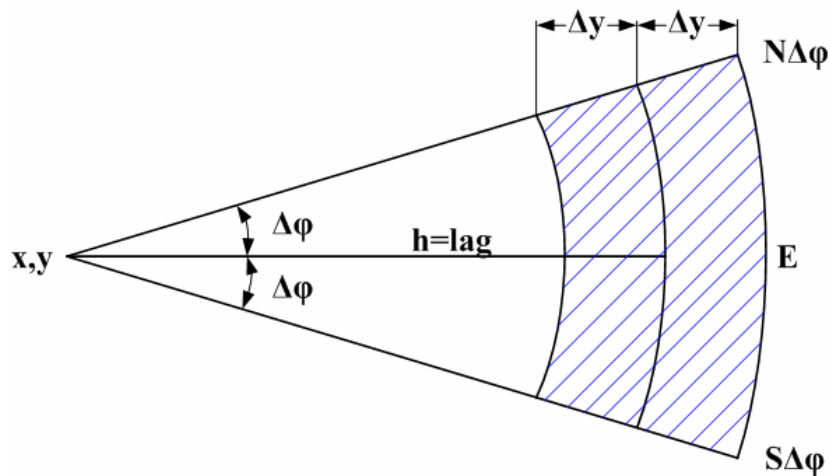
Σαν  $t_j$  και  $t_i$  ορίζονται τα διανύσματα που σχηματίζονται από τα σημεία  $A(x_j, y_j)$  και  $B(x_i, y_i)$  με την αρχή των αξόνων, αντίστοιχα. Το διάνυσμα  $h$  είναι η διαφορά  $t_i - t_j$  των δύο σημείων, η οποία μπορεί να περιγραφεί και από το ζευγάρι συντεταγμένων,  $(x_i - x_j, y_i - y_j)$ . Συνήθως όταν στο ημι – βαριόγραμμα γίνεται αναφορά σε ένα τέτοιο διάνυσμα, χρησιμοποιούνται τα ζεύγη σημείων τα οποία απέχουν απόσταση περίπου ίση με το μέτρο του  $|h|$ .

Στην πράξη αντί της απόστασης  $|h|$ , επιλέγεται ένα εύρος τιμών  $h' = h \pm \Delta h$ , επειδή τα δεδομένα σπάνια βρίσκονται σε κανονικό κάρναβο δειγματοληψίας. Για το λόγο αυτό, αντί της εξίσωσης (8) χρησιμοποιείται η

$$2\gamma(x, h) = \frac{1}{N(h)} \sum_{i=1}^{N(h)} [Z(x_i) - Z(x_i + h')]^2. \quad \text{Ο}$$

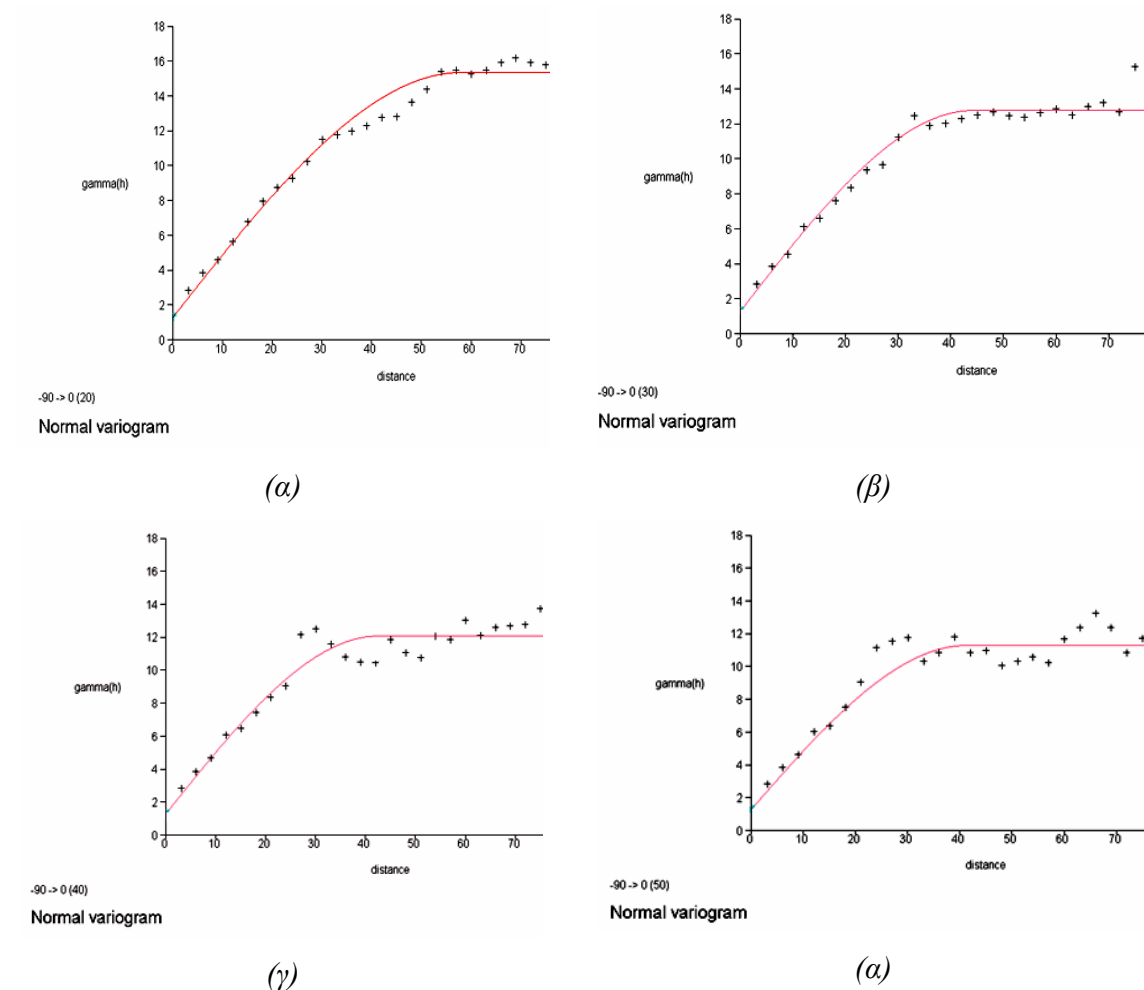
τρόπος με τον οποίο προσεγγίζεται το  $\Delta h$  εξαρτάται κυρίως από τον αριθμό των δεδομένων. Η πιο συνηθισμένη προσέγγιση είναι αυτή που παρουσιάζεται στο σχήμα (Σχ. 2.6) όπου η τιμή του  $\gamma(h)$  υπολογίζεται μεταξύ του  $(x, y)$  και όλων των σημείων που περικλείονται στην γραμμοσκιασμένη περιοχή (  ):





**Σχήμα 2.6 :** Στο σχήμα φαίνεται οι ανοχές της απόστασης ( $h$ ) και της γωνίας ( $\phi$ ) ανίχνευσης των ζευγών των δεδομένων για την κατασκευή του ημι-βαριογράμματος [2].

Η γωνία  $\Delta\phi$  (Σχ. 2.6), που εκτείνεται γύρω από τη διεύθυνση έρευνας του ημι – βαριογράμματος καλείται γωνία ανοχής και παρουσιάζει ιδιαίτερο ενδιαφέρον, κυρίως κατά τον υπολογισμό ημι – βαριογραμμάτων προς διάφορες κατευθύνσεις για τον έλεγχο ανισοτροπίας της μεταβλητής. Θα ήταν ιδανική η χρήση όσο το δυνατό μικρότερης γωνίας ανοχής, ώστε ο υπολογισμός αυτών των ημι – βαριογραμμάτων να μην γίνεται από σημεία που βρίσκονται σε διαφορετικές κατευθύνσεις. Δυστυχώς όμως, κάτι τέτοιο έχει σαν αποτέλεσμα τη χρήση πολύ μικρού αριθμού ζευγαριών και τελικώς περιορισμένη υποστήριξη κάθε πειραματικού σημείου του ημι – βαριογράμματος. Για το λόγο αυτό υπολογίζονται ημι – βαριογράμματα για διαφορετικές γωνίες ανοχής και τελικά χρησιμοποιείται η μικρότερη από εκείνες που δίνει ικανοποιητικά αποτελέσματα. Στο παρακάτω Σχ. 2.7, φαίνονται τα βαριογράμματα των διευθύνσεων BN με τέσσερις διαφορετικές γωνίες ανοχής που κατασκευάστηκαν από βάση δεδομένων δειγματοληψίας MgO στο λατομείο αδρανών του Καμαρίου [14].



**Σχήμα 2.7 :** Απεικόνιση βαριογραμμμάτων με γωνίες ανοχής  $20^\circ$ ,  $30^\circ$ ,  $40^\circ$  και  $50^\circ$  μοίρες.

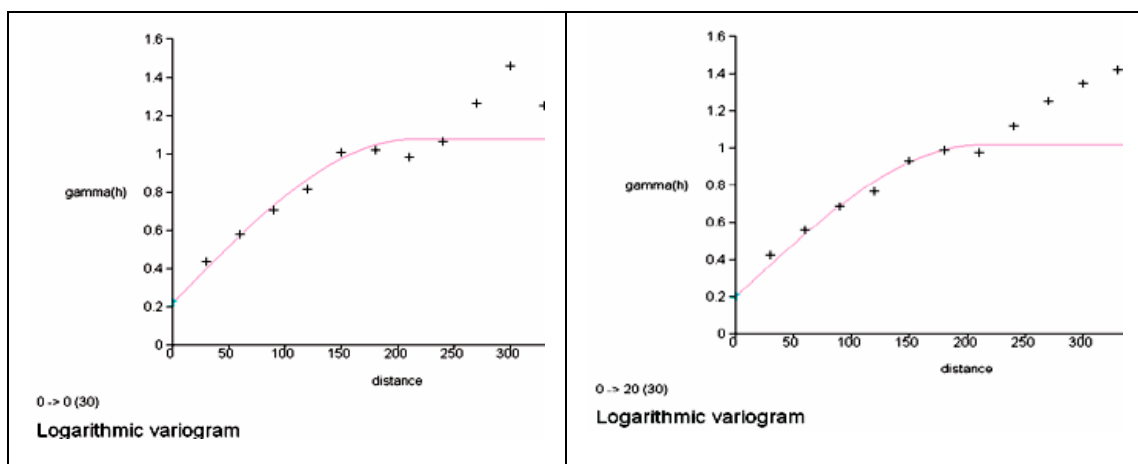
Για οποιαδήποτε απόσταση  $h$  (lag), ο αριθμός των ζευγαριών που συμμετέχουν στους υπολογισμούς του ημι – βαριογράμματος, αυξάνει όσο η γωνία ανοχής μεγαλώνει. Όταν ο αριθμός αυτός γίνει αρκετά μεγάλος ώστε να δώσει ένα καλά σχηματισμένο ημι – βαριόγραμμα, τότε γίνεται και η επιλογή της γωνία ανοχής, που πρέπει να είναι όσο το δυνατό μικρότερη.

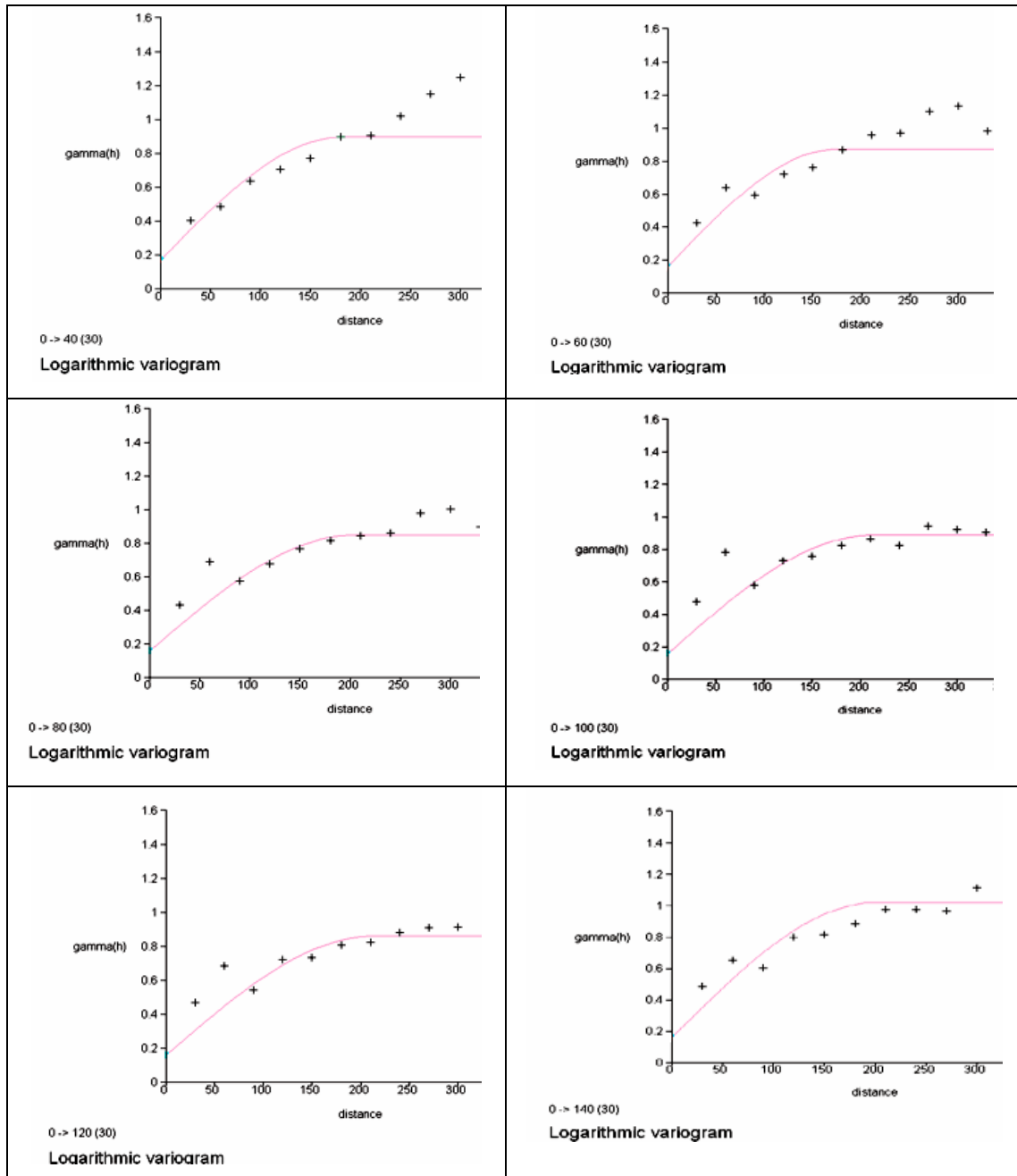
#### Ανισοτροπία χωρικής κατανομής μιας μεταβλητής

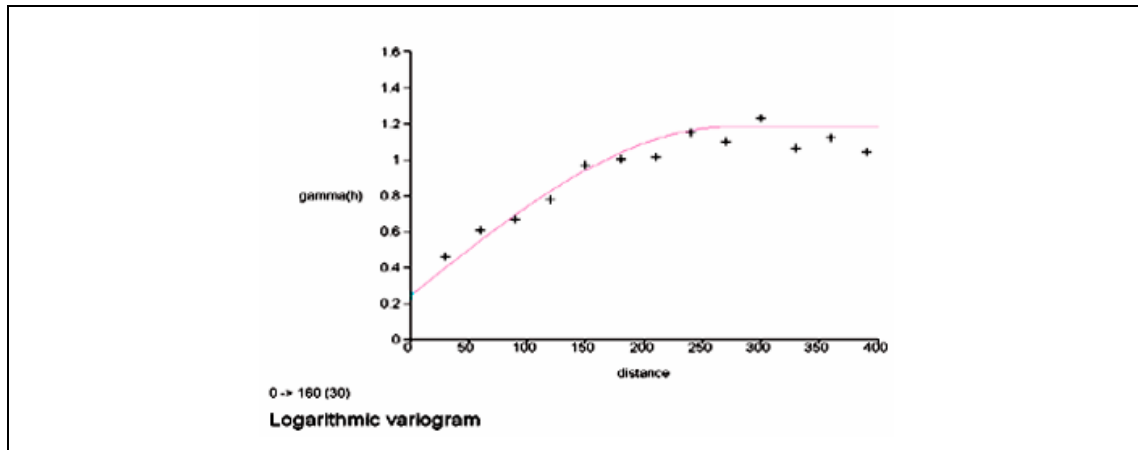
Η μελέτη ημι – βαριογραμμμάτων σε διάφορες διευθύνσεις είναι δυνατό να οδηγήσει στον εντοπισμό πιθανής ανισοτροπίας μιας χωρικής τυχαίας μεταβλητής (Σχ. 2.6α). Ο άξονας ανισοτροπίας, περικλείει πληροφορίες για το αίτιο ή το μηχανισμό που παρήγαγε

τη δεδομένη χωρική κατανομή ενός φυσικού μεγέθους (π.χ. περιεκτικότητα σε ορυκτό, βαθμός τεκτονισμού, αντοχή κ.α.). Για παράδειγμα σε ένα στρωσιγενές κοίτασμα, η διεύθυνση της μέγιστης απόστασης συσχέτισης μεταξύ ζευγών δειγμάτων θα είναι κατά πάσα πιθανότητα κατά την παράταξη του κοιτάσματος.

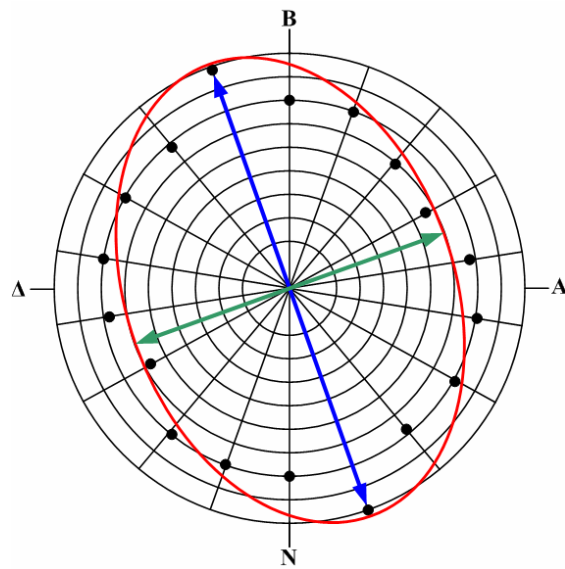
Ένας απλός και αποτελεσματικός τρόπος για τον έλεγχο ανισοτροπίας γίνεται με την μελέτη ημι – βαριογραμμάτων σε διάφορες διευθύνσεις, διαδικασία που απαιτεί όμως μεγάλο αριθμό δεδομένων, πράγμα που την καθιστά πολλές φορές αδύνατη. Τα ημι – βαριογράμματα αυτά, συνήθως εμφανίζουν την ίδια οροφή (sill) αλλά διαφορετική απόσταση συσχέτισης. Ο τύπος αυτός ανισοτροπίας ονομάζεται *γεωμετρική*, ενώ σε περιπτώσεις που συμβαίνει το αντίθετο, καλείται *ζωνώδης* [2]. Κατασκευάζονται, λοιπόν ημι – βαριογράμματα, ανά  $10^\circ$  ή  $20^\circ$  μοίρες (Σχ. 2.8α) των οποίων τα αποτελέσματα αυτά – ήτοι η μέγιστη απόσταση επιρροής ή η οροφή, αντίστοιχα - παρουσιάζονται με τη μορφή ροδογραμμάτων. Τα ροδογράμματα είναι πολικά διαγράμματα, κάθε σημείο των οποίων έχει σαν συντεταγμένες ( $h$ ,  $\theta$ ) την μέγιστη ακτίνα επιρροής του ημι – βαριογράμματος και την γωνία στην οποία έχει υπολογιστεί αυτή. Από τα ροδογράμματα αυτά (Σχ. 2.8β) υπολογίζονται οι κλίσεις και το μήκος των αξόνων ανισοτροπίας που χρειάζονται για την περαιτέρω ανάλυση με την μέθοδο kriging. Στο Σχ. 2.8α&β παρουσιάζονται τα αποτελέσματα τέτοιας ανάλυσης ανισοτροπίας του MgO στο λατομείο ασβεστολίθου του Καμαρίου [14]. Η ανισοτροπία αυτή βρέθηκε, μετά από *in situ* μετρήσεις ασυνεχείων, να συνδέεται με υπάρχον σύστημα πτυχών στο εν λόγω λατομείο.







(α)



(β)

**Σχήμα 2.8α&β:** (α)απεικόνιση ημι-βαριογραμμάτων ανά  $20^\circ$  και (β)του ελλειψοειδους ανισοτροπίας που προκύπτει από την απεικόνιση των αποστάσεων επιρροής σε ροδόγραμμα (rose diagram) [18].

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3      Θεωρία του Kriging

### 3.1    Γενικά για την μέθοδο Kriging

Στα τέλη του 1950 ο G. Matheron ανέπτυξε την «Θεωρία των Χωρικών Μεταβλητών» (Theory of Regionalized Variables). Η θεωρία αυτή προήλθε από την προσπάθεια του μηχανικού μεταλλείων D. G. Krige το 1950 περίπου, να υπολογίσει αποθέματα κοιτασμάτων χρυσού στη Νότιο Αφρική με βάση δεδομένα δειγματοληψίας περιεκτικότητας χρυσού σε κάνναβο γεωτρήσεων. Γι' αυτό και η θεωρία αυτή αποκαλείται συνήθως «Kriging» προς αναγνώριση του θεμελιωτή της ιδέας αυτής.

Κατά την φάση της έρευνας πριν την εξόρυξη υπογείων εκσκαφών, παρατηρούνται πολλές φορές μεγάλες χωρικές μεταβολές των φυσικομηχανικών ιδιοτήτων της βραχώμαζας εξαιτίας της γεωλογικής και τεκτονικής ιστορίας αυτής. Η ετερογένεια αυτή της βραχώμαζας συνήθως δεν λαμβάνεται υπόψη στο σχεδιασμό, με εξαίρεση περιπτώσεις εντόνων τοπικών μεταβολών που οφείλονται στην ύπαρξη μεγάλων πτυχώσεων, ρηγμάτων και αλλαγές γεωλογικών σχηματισμών. Το πρόβλημα αυτό μπορεί να αντιμετωπιστεί με τοπικές εκτιμήσεις οι οποίες επιτυγχάνονται με την χρήση της μεθόδου Kriging. Σύμφωνα με αυτή την μέθοδο το σύνολο της βραχώμαζας χωρίζεται σε μικρότερα ογκοτεμάχια, συνήθως σχήματος ορθογωνίου πρίσματος (blocks), των οποίων το μέγεθος ποικίλει ανάλογα με την απαιτούμενη ακρίβεια, τον αριθμό των δεδομένων και των αποτελεσμάτων της ανάλυσης ημι – βαριογράμματος (Κεφ. 2). Είναι προφανές πως ο συγκεκριμένος τρόπος αντιμετώπισης του προβλήματος, διαφέρει ριζικά από τον υπολογισμό μιας μέσης τιμής της μεταβλητής σε κάποιες περιοχές του συνόλου της βραχώμαζας, όπως συμβαίνει συνήθως στην πράξη. Η εκτίμηση των μεταβλητών ενός ογκοτεμαχίου, γίνεται δίνοντας σταθμικούς συντελεστές (weights) στις τιμές των αντίστοιχων μεταβλητών στα δείγματα που ανήκουν στην περιοχή γύρω από το ογκοτεμάχιο. Οι συντελεστές αυτοί υπολογίζονται κατά τέτοιο τρόπο ώστε η διακύμανση της μεταβλητής εντός κάθε block να ελαχιστοποιείται. Οι συντελεστές αυτοί εξαρτώνται άμεσα από τις γεωστατιστικές παραμέτρους ( $C_0$ ,  $C$ ,  $a$ ) του ημι – βαριογράμματος, καθώς και από τη σχετική θέση των δειγμάτων με το εκτιμώμενο block στο περιοχή. Η ελαχιστοποιημένη διακύμανση ονομάζεται «διασπορά Kriging» (kriging variance).

Σήμερα πλέον, έχουν αναπτυχθεί διάφορες παραλλαγές της τεχνικής kriging:

- Απλό (Simple) kriging: : αποτελεί την πλέον κλασική μέθοδο kriging. Όλες οι άλλες αποτελούν τροποποιήσεις αυτής. Υπολογίζει την τιμή της άγνωστης μεταβλητής προϋποθέτοντας ότι είναι γνωστή η μέση τιμή των δειγμάτων.
- Κανονικό (ordinary) kriging: βασίζεται στο ημι – βαριόγραμμα για πρόβλεψη της τιμής μιας μεταβλητής σε κάποιο σημείο, χωρίς να είναι γνωστή η μέση τιμή των δειγμάτων. Η μέση τιμή θεωρείται σταθερή μέσα στην περιοχή εκτίμησης. Προϋποθέτει πως το δείγμα ακολουθεί την κανονική κατανομή ενώ, λόγω της συνθήκης αμεροληψίας το άθροισμα των σταθμικών συντελεστών (weights) που υπεισέρχονται στην εξίσωση παρεμβολής είναι ίσο με την μονάδα.
- Ενδεικτικό (Indicator) kriging: η μέθοδος αυτή μετασχηματίζει τα αρχικά δεδομένα χρησιμοποιώντας έναν ενδεικτικό (indicator) μετασχηματισμό. Δηλαδή, βάση μίας συγκεκριμένης τιμής (cut off), τα δεδομένα με τιμές μεγαλύτερες αυτής εξισώνονται με το 1, ενώ τα υπόλοιπα με μηδέν.
- Γενικευμένο (Universal) kriging: αυτή η παραλλαγή του kriging, χρησιμοποιείται όταν ο πληθυσμός των δεδομένων παρουσιάζει κάποια «τάση» (trend).

Όλες οι μορφές του kriging περιγράφονται από την γενική εξίσωση γραμμικής παλινδρόμησης:

$$[Z_k^*(x) - m(x)] = \sum_{i=1}^n w_i(x) [Z(x_i) - m(x_i)] \quad (3.1)$$

όπου,  $Z_k^*(x)$  είναι η εκτιμώμενη τιμή της μεταβλητής στο σημείο  $x$

$m(x)$  είναι η αναμενόμενη (μέση) τιμή, που εξαρτάται όμως από την θέση  $x$  της μεταβλητής

$Z(x_i)$  είναι η γνωστή τιμή της μεταβλητής στο σημείο  $x$

#### *Κανονικό (Ordinary) Kriging*

Το σύνηθες (ordinary) kriging, αποτελεί την πιο απλή μορφή της μεθόδου, καθώς χρησιμοποιεί γνωστές τιμές μεταβλητών για να υπολογίσει άλλες άγνωστες τιμές. Βασική παραδοχή της μεθόδου, είναι πως η χωρική τυχαία μεταβλητή είναι στάσιμη (stationary), δηλαδή οι στατιστικές ιδιότητες της είναι αναλλοίωτες στο χώρο. Η υπόθεση αυτή επιτρέπει τον υπολογισμό μιας άγνωστης τιμής  $Z$ , σε ένα σημείο  $x_i$ ,

χρησιμοποιώντας μία σταθμισμένη μέση εκτιμήτρια (weighted average), που αποδίδεται με τη σχέση:

$$Z_k^*(\mathbf{x}) = \sum w_i Z(\mathbf{x}_i) \quad (3.2)$$

όπου,  $Z_k^*(\mathbf{x})$  είναι η προβλεφθείσα τιμή της μεταβλητής

$w_i$  είναι οι σταθμισμένοι συντελεστές του kriging

$Z(\mathbf{x}_i)$  είναι οι μετρηθείσες τιμές της μεταβλητής στα σημεία  $x_1 \dots x_n$

Η σχέση (3.2) προκύπτει από την (3.1) καθώς δέχεται την υπόθεση πως η μέση τιμή  $m = E\{Z(\mathbf{x})\}$  είναι σταθερή σε όλη την περιοχή ενδιαφέροντος (υπόθεση ή αρχή της σταθερότητας). Ένα επιπλέον χαρακτηριστικό την παραλλαγής αυτής της μεθόδου kriging, είναι πως οι σταθμισμένοι συντελεστές  $w_i$  έχουν άθροισμα ίσο με την μονάδα:

$$\sum_{i=1}^n w_i = 1 \quad (3.3)$$

Αυτή η τελευταία παραδοχή γίνεται με σκοπό την διασφάλιση αμερόληπτων (unbiased) προβλέψεων. Αυτό σημαίνει πως το μέσο σφάλμα πρέπει να είναι ίσο με το 0. Αν τώρα θεωρηθεί ένα σύνολο δειγμάτων με μετρηθείσες τιμές  $u$ , οι άγνωστε τιμές σε κάθε σημείο που δεν υπάρχει δείγμα είναι δυνατό να υπολογιστούν με την χρήση ενός σταθμισμένου γραμμικού συνδυασμού των  $u$ :

$$\hat{u} = \sum_{j=1}^n w_j u \quad (3.4)$$

όπου οι συντελεστές  $w_j$  ( $j = 1, \dots, n$ ) μεταβάλλονται καθώς υπολογίζονται νέες τιμές σε νέες άγνωστες θέσεις. Το σφάλμα  $r_i$  για κάθε νέα υπολογισμένη τιμή είναι  $r_i = \hat{u}_i - u_i$ , ενώ για ένα σύνολο εκτιμήσεων  $k$ , το μέσο σφάλμα  $r_{aver}$  είναι:

$$m_r = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k r_i = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k (\hat{u}_i - u_i) \quad (3.5)$$

Η παραπάνω εξίσωση παρά το γεγονός ότι υπολογίζει το μέσο σφάλμα, δεν μπορεί να καθορίσει τα βάρη με τα οποία πρέπει να πολλαπλασιασθούν τα γνωστά δείγματα,



ώστε αυτό να είναι ίσο με 0. Αυτό συμβαίνει λόγω της ύπαρξης αγνώστων ποσοτήτων, όπως οι πραγματικές τιμές  $u_1, \dots, u_n$ . Το πρόβλημα αυτό αντιμετωπίζεται μέσω της Θεωρίας Πιθανοτήτων, όπου οι άγνωστες τιμές αντιμετωπίζονται ως αποτέλεσμα μιας τυχαίας διαδικασίας [2]. Για την πρόβλεψη μιας άγνωστης τιμής  $Z(x_0)$  της μεταβλητής, στο σημείο  $x_0$ , χρησιμοποιείται μια τυχαία σταθερή συνάρτηση που αποτελείται από τις τυχαίες μεταβλητές  $Z(x_i)$ , όπου  $i = 1 \dots n$ , οι οποίες ακολουθούν την ίδια συνάρτηση κατανομής, ώστε η αναμενόμενη τιμή σε κάθε σημείο να είναι  $E(Z)$ . Κάθε ζεύγος των τυχαίων αυτών μεταβλητών έχει κατανομή, που εξαρτάται μόνο από την απόσταση  $h$  μεταξύ τους και όχι από την ακριβή τους θέση στο χώρο (stationarity) και συμμεταβλητότητα  $\tilde{C}_V(\mathbf{h})$ .

Όπως προαναφέρθηκε, στην διαδικασία αυτή, κάθε τιμή είναι το αποτέλεσμα μιας τυχαίας μεταβλητής. Έτσι και οι προβλέψεις, οι οποίες είναι αποτέλεσμα ενός σταθμισμένου γραμμικού συνδυασμού τυχαίων μεταβλητών θα είναι και αυτές τυχαίες μεταβλητές. Στο σημείο  $x_0$ , λοιπόν ισχύει:

$$Z_k^*(\mathbf{x}_0) = \sum_{i=1}^n w_i Z(\mathbf{x}_i) \quad (3.6)$$

Ενώ το σφάλμα της πρόβλεψης, στο  $x_0$ , είναι:

$$R(\mathbf{x}_0) = Z_k^*(\mathbf{x}_0) - Z(\mathbf{x}_0) \Leftrightarrow R(\mathbf{x}_0) = \sum_{i=1}^n w_i Z(\mathbf{x}_i) - Z(\mathbf{x}_0) \quad (3.7)$$

Το σφάλμα των εκτιμήσεων των αγνώστων τιμών είναι επίσης μια τυχαία μεταβλητή της οποίας η αναμενόμενη τιμή πρέπει να είναι ίση με το μηδέν, ώστε να πληρούται η συνθήκη αμεροληψίας.

$$E\{R(\mathbf{x}_0)\} = E\left\{\sum_{i=1}^n w_i Z(\mathbf{x}_i) - Z(\mathbf{x}_0)\right\} = E\left\{\sum_{i=1}^n w_i Z(\mathbf{x}_i)\right\} - E\{Z(\mathbf{x}_0)\} \Leftrightarrow$$

$$E\{R(\mathbf{x}_0)\} = \sum_{i=1}^n w_i E\{Z(\mathbf{x}_i)\} - E\{Z(\mathbf{x}_0)\} = 0 \quad (3.8)$$

Λόγω της θεώρησης πως η τυχαία συνάρτηση είναι «σταθερή» όλες οι αναμενόμενες τιμές της (3.8) είναι ίσες με  $E\{Z\}$ , δηλαδή:

$$[8] \Leftrightarrow E\{R(\mathbf{x}_0)\} = \sum_{i=1}^n w_i E\{Z\} - E\{Z\} = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n w_i E\{Z\} = E\{Z\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^n w_i = 1 \quad (3.9)$$

Η τελευταία εξίσωση αποτελεί την συνθήκη αμεροληψίας (δηλ. δεν δίνονται αυθαίρετα μικρά ή μεγάλα βάρη σε σημεία που είναι γειτονικά του σημείου πρόβλεψης)(unbiased condition).

#### *Kriging Χώρου (Block)*

Συχνά είναι αναγκαία η γνώση της μέσης τιμής μιας μεταβλητής σε μία συγκεκριμένη περιοχή (όγκο  $V$ ). Μία μέθοδος για να επιτευχθεί κάτι τέτοιο είναι η διακριτοποίηση της περιοχής σε αρκετά σημεία στα οποία υπολογίζεται αρχικά η τιμή της εκάστοτε μεταβλητής και κατόπιν η μέση τιμή όλων αυτών των προβλέψεων. Η διαδικασία αυτή είναι ιδιαίτερα χρονοβόρος και απαιτεί μεγάλη επεξεργαστική ισχύ κατά την χρήση ηλεκτρονικών υπολογιστών. Το πρόβλημα αυτό επιλύεται με την χρήση της μεθόδου του *Kriging Χώρου* (block kriging).

Η μέση εκτιμώμενη τιμή  $Z_V(\mathbf{x}_0)$ , της τυχαίας μεταβλητής  $Z(\mathbf{x}_i)$ , στον όγκο  $V(\mathbf{x}_0)$  ισούται με το ολοκλήρωμα [1]:

$$Z_V(\mathbf{x}_0) = \frac{1}{V} \int_V Z(\mathbf{x}_0) d\mathbf{x} \quad (3.10)$$

Για την μεταβλητή  $Z(\mathbf{x}_i)$ , λόγω της αποδοχής του δευτέρου βαθμού «στασιμότητας», ισχύει:

- $E\{Z(\mathbf{x})\} = m$ , όπου το  $m$  είναι συνήθως άγνωστο
- $E\{[Z(\mathbf{x} + \mathbf{h})Z(\mathbf{x})]\} - m^2 = C(\mathbf{h})$ , συµμεταβλητότητα
- $E\{[Z(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - Z(\mathbf{x})]^2\} = 2\gamma(\mathbf{h})$ , βαριόγραμμα

Η διασπορά των προβλέψεων του kriging είναι η μέση εκτιμώμενη τιμή του τετραγώνου της διαφοράς  $E\{[Z_V - Z_K^*]^2\}$ , όπου το  $Z_V$  είναι η μέση τιμή των γνωστών μεταβλητών και  $Z_K^*$  είναι η μέση τιμή των προβλέψεων του kriging. Η διασπορά  $E\{[Z_V - Z_K^*]^2\}$ , μπορεί να αναλυθεί ως εξής:

$$E\{[Z_V - Z_K^*]^2\} = E\{Z_V^2 - 2Z_V Z_K^* + (Z_K^*)^2\} = E\{Z_V^2\} - 2E\{Z_V Z_K^*\} + E\{(Z_K^*)^2\} \quad (3.11)$$

Ο πρώτος όρος του δεξιού μέλους της εξίσωσης (3.11) μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$E\{Z_V^2\} = \frac{1}{V^2} \int_V dx \int_V E\{Z(x)Z(x')\} dx' = \tilde{C}(V, V) + m^2 \quad (3.12)$$

Ο δεύτερος όρος μπορεί επίσης να αναλυθεί περαιτέρω με τον εξής τρόπο:

$$E\{Z_V Z_K^*\} = \sum_i w_i \frac{1}{Vu_i} \int_V dx \int_{u_i} E\{Z(x)Z(x')\} dx' = \sum_i w_i \tilde{C}(V, u_i) + m^2 \quad (3.13)$$

ενώ ο τρίτος όρος είναι ίσος με:

$$E\{(Z_K^*)^2\} = \sum_i \sum_j w_i w_j \frac{1}{u_i u_j} \int_{u_i} dx \int_{u_j} E\{Z(x)Z(x')\} dx' = \sum_i \sum_j w_i w_j \tilde{C}(u_i, u_j) + m^2 \quad (3.14)$$

Αντικαθιστώντας τις (3.12), (3.13) και (3.14) στην (3.11) :

$$E\{[Z_V - Z_K^*]^2\} = \tilde{C}(V, V) + m^2 - 2 \sum_i w_i \tilde{C}(V, u_i) - 2m^2 + \sum_i \sum_j w_i w_j \tilde{C}(u_i, u_j) + m^2 \Leftrightarrow$$

$$E\{[Z_V - Z_K^*]^2\} = \tilde{C}(V, V) - 2 \sum_i w_i \tilde{C}(V, u_i) + \sum_i \sum_j w_i w_j \tilde{C}(u_i, u_j) \quad (3.15)$$

όπου  $\tilde{C}(V, u_i), i = 1 \dots n$  αναπαριστά την μέση τιμή της συνάρτησης συμμεταβλητότητας  $C(\mathbf{h})$ , όταν τα δύο άκρα του διανύσματος  $\mathbf{h}$  βρίσκονται σε σημεία εντός των όγκων  $V$  και  $u_i$ , αντίστοιχα.

Η εξίσωση (3.15) εκφράζει το σφάλμα της διασποράς ως συνάρτηση των  $n$  σταθμικών όρων, όταν οι συμμεταβλητότητες  $\tilde{C}(u_i, u_j)$  είναι γνωστές. Η

ελαχιστοποίηση μιας συνάρτησης με  $n$  μεταβλητές, επιτυγχάνεται συνήθως, θέτοντας τις  $n$  μερικές παραγώγους ίσες με το 0. Με τον τρόπο αυτό παράγεται ένα σύστημα  $n$  εξισώσεων με  $n$  αγνώστους. Το πρόβλημα που ανακύπτει στην συγκεκριμένη περίπτωση είναι ότι πρέπει να ικανοποιείται ταυτοχρόνως ο επιπρόσθετος περιορισμός που υπάρχει ώστε το άθροισμα των σταθμικών συντελεστών να είναι ίσο με την μονάδα (unbiased condition). Η προσθήκη λοιπόν της επιπρόσθετης εξίσωσης  $\sum_{i=1}^n w_i = 1$ , οδηγεί σε ένα σύστημα  $n+1$  εξισώσεων με  $n$  αγνώστους. Τέτοιου είδους προβλήματα επιλύονται συνήθως με την χρήση της μεθόδου των *Συντελεστών Lagrange* [2]. Η μέθοδος αυτή αντιμετωπίζει το παραπάνω πρόβλημα, με την εισαγωγή στην εξίσωση (3.15), μιας νέας άγνωστης παραμέτρου  $\mu$ . Η παράμετρος αυτή ονομάζεται παράμετρος ή συντελεστής *Lagrange* και διαμορφώνει την (3.15) ως εξής:

$$E\{[Z_V - Z_K^*]^2\} = \tilde{C}(V, V) - 2 \sum_{i=1}^n w_i \tilde{C}(V, u_i) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i w_j \tilde{C}(u_i, u_j) - 2\mu \left( \sum_{i=1}^n w_i - 1 \right) \quad (3.16)$$

Η εισαγωγή της μεταβλητής στην εξίσωση πρέπει να γίνει κατά τέτοιο τρόπο ώστε να μην επηρεάζεται η ισότητα. Ο όρος που προστίθεται στο τέλος της (3.16) ισούται με το μηδέν λόγω της συνθήκης αμεροληψίας:

$$\sum_i w_i = 1 \Leftrightarrow \sum_i w_i - 1 = 0 \Leftrightarrow 2\mu \left( \sum_i w_i - 1 \right) = 0 \quad (3.17)$$

Η προσθήκη του νέου αυτού όρου στην (3.16), που δεν επηρεάζει την εξίσωση, μετατρέπει το σύστημα των εξισώσεων από υπερκαθορισμένο σε κανονικό, καθώς πλέον η πρώτου βαθμού μερική παράγωγος της ως προς  $w$  οδηγεί σε ένα σύστημα  $n+1$  εξισώσεων με  $n+1$  αγνώστους (τις  $n$  τυχαίες μεταβλητές και την παράμετρο *Lagrange*  $\mu$ ). Επιπλέον η πρώτου βαθμού μερική παράγωγος της (3.16) ως προς  $\mu$ , δίνει την συνθήκη αμεροληψίας:

$$\frac{\partial \left( E\{[Z_V - Z_K^*]^2\} \right)}{\partial \mu} = \frac{\partial \left( 2\mu \left( \sum_{i=1}^n w_i - 1 \right) \right)}{\partial \mu} = 2 \sum_{i=1}^n w_i - 2 = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n w_i = 1$$

Εφόσον, λοιπόν η συνθήκη αυτή εμπεριέχεται στο σύστημα των  $n+1$  εξισώσεων, η επίλυση του συστήματος παράγει τους σταθμικούς συντελεστές ( $w_i$ ) που ελαχιστοποιούν την διασπορά του σφάλματος όταν το άθροισμα του  $\sigma$  είναι ίσο με την μονάδα. Επιπλέον κατά την επίλυση λαμβάνεται και η τιμή της παραμέτρου *Lagrange*, που είναι χρήσιμη για τον υπολογισμό της ελαχιστοποιημένης διασποράς.

Η εξίσωση της πρώτης μερικής παραγώγου της (3.16) ως προς  $w_1$  με το μηδέν, παρουσιάζεται στην συνέχεια:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(E\{[Z_V - Z_K^*]^2\})}{\partial w_1} &= \frac{\partial(\tilde{C}(V, V))}{\partial w_1} - \frac{\partial\left(2\sum_i w_i \tilde{C}(V, u_i)\right)}{\partial w_1} + \frac{\partial\left(\sum_i \sum_j w_i w_j \tilde{C}(u_i, u_j)\right)}{\partial w_1} + \frac{\partial\left(2\mu\left(\sum_{i=1}^n w_i - 1\right)\right)}{\partial w_1} \Leftrightarrow \\ \frac{\partial(\tilde{C}(V, V))}{\partial w_1} - \frac{\partial\left(2\sum_i w_i \tilde{C}(V, u_i)\right)}{\partial w_1} + \frac{\partial\left(\sum_i \sum_j w_i w_j \tilde{C}(u_i, u_j)\right)}{\partial w_1} + \frac{\partial\left(2\mu\left(\sum_{i=1}^n w_i - 1\right)\right)}{\partial w_1} &= 0 \quad (3.18) \end{aligned}$$

- ο πρώτος όρος είναι:  $\frac{\partial(\tilde{C}(V, V))}{\partial w_1} = 0 \quad (3.19),$

καθώς κανένας όρος δεν εξαρτάται από το  $w_1$

- ο δεύτερος όρος είναι:  $\frac{\partial\left(2\sum_i w_i \tilde{C}(V, u_i)\right)}{\partial w_1} = 2 \frac{\partial\left(w_1 \tilde{C}(V, u_1)\right)}{\partial w_1} = 2 \tilde{C}(V, u_1) \quad (3.20),$

καθώς μόνο ο πρώτος όρος του αθροίσματος μεταβάλλεται με το  $w_1$ .

- ο τρίτος όρος ισούται με:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial \left( \sum_i \sum_j w_i w_j \tilde{C}(u_i, u_j) \right)}{\partial w_1} = \frac{\partial \left( w_1^2 \tilde{C}(u_1, u_1) + 2w_1 \sum_{j=2}^n w_j \tilde{C}(u_1, u_j) \right)}{\partial w_1} = \\
& = 2w_1 \tilde{C}(u_1, u_1) + 2 \sum_{j=2}^n w_j \tilde{C}(u_1, u_j) \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow \frac{\partial \left( \sum_i \sum_j w_i w_j \tilde{C}(u_i, u_j) \right)}{\partial w_1} = 2 \sum_{j=1}^n w_j \tilde{C}(u_1, u_j) \tag{3.21}
\end{aligned}$$

$$\bullet \text{ ο τελευταίος όρος είναι: } \frac{\partial \left( 2\mu \left( \sum_{i=1}^n w_i - 1 \right) \right)}{\partial w_1} = \frac{\partial (2\mu w_1)}{\partial w_1} = 2\mu \tag{3.22}$$

Αντικαθιστώντας στην (3.18) τις παραπάνω εκφράσεις (3.19), (3.20), (3.21) και (3.22) των επιμέρους όρων:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial \left( E \left\{ [Z_V - Z_K^*]^2 \right\} \right)}{\partial w_1} = 2 \sum_{j=1}^n w_j \tilde{C}(u_1, u_j) - 2\tilde{C}(V, u_1) + 2\mu = 0 \Leftrightarrow \\
& \sum_{j=1}^n w_j \tilde{C}(u_1, u_j) + \mu = \tilde{C}(u_1, V) \tag{3.23}
\end{aligned}$$

Αντίστοιχες εξισώσεις παράγονται κατά την παραγωγή της (3.16) ως προς τους υπόλοιπους σταθμικούς συντελεστές  $w_i$ , καταλήγοντας στο ακόλουθο γραμμικό σύστημα εξισώσεων:

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^n w_j \tilde{C}(u_1, u_j) + \mu = \tilde{C}(u_1, V) \\
& \quad \vdots \\
& \sum_{j=1}^n w_j \tilde{C}(u_i, u_j) + \mu = \tilde{C}(u_i, V) \\
& \quad \vdots \\
& \sum_{j=1}^n w_j \tilde{C}(u_n, u_j) + \mu = \tilde{C}(u_n, V)
\end{aligned} \tag{3.24}$$

Το σύστημα εξισώσεων (3.24) αυτό, που ονομάζεται και *Σύστημα Συνήθους Kriging* (Ordinary Kriging System), γράφεται σε πιο συμπαγή μορφή ως εξής:

$$\mathbf{C} \cdot \mathbf{w} = \mathbf{D} \quad \text{ή}$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{C}(u_1, u_1) & \cdots & \tilde{C}(u_1, u_n) & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \tilde{C}(u_n, u_1) & \cdots & \tilde{C}(u_n, u_n) & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \\ \mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{C}(u_1, V) \\ \vdots \\ \tilde{C}(u_n, V) \\ 1 \end{bmatrix} \tag{3.25}$$

Για τον υπολογισμό των στοιχείων των πινάκων  $\mathbf{C}$  και  $\mathbf{D}$ , πρέπει προηγουμένως να επιλεγεί η κατάλληλη συνάρτηση συµµεταβλητότητας  $\tilde{C}(h)$  που περιγράφει την χωρική κατανομή της μεταβλητής  $Z(x)$ . Αφού πλέον είναι γνωστοί οι πίνακες αυτοί τότε υπολογίζονται και οι σταθμικοί συντελεστές  $w_i$ . Για να υπολογιστεί η ελαχιστοποιημένη διασπορά του σφάλματος της μεθόδου, γίνεται αντικατάσταση στην (3.26) των γνωστών πλέον συντελεστών  $w_i$  ή ακολουθείται η παρακάτω μέθοδος. Πολλαπλασιάζοντας τους  $n$  όρους της εξίσωσης:

$$\sum_{j=1}^n w_j \tilde{C}(u_i, u_j) + \mu = \tilde{C}(u_i, V) \tag{3.26}$$

με το  $w_i$ , και προσθέτοντας όλες τις εξισώσεις που προκύπτουν:

$$w_i \left( \sum_{j=1}^n w_j \tilde{C}(u_i, u_j) + \mu \right) = w_i \left( \tilde{C}(u_i, V) \right) \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n w_i \sum_{j=1}^n w_j \tilde{C}(u_i, u_j) + \sum_{i=1}^n w_i \mu = \sum_{i=1}^n w_i \tilde{C}(u_i, V) \Leftrightarrow$$

$$\sum_{i=1}^n w_i \sum_{j=1}^n w_j \tilde{C}(u_i, u_j) = \sum_{i=1}^n w_i \tilde{C}(u_i, V) - \sum_{i=1}^n w_i \mu \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sum_i \sum_j w_i w_j \tilde{C}(u_i, u_j) = \sum_{i=1}^n w_i \tilde{C}(u_i, V) - \mu \quad (3.27)$$

Κατόπιν, αντικαθιστώντας την (3.27) στην (3.16):

$$E \left\{ [Z_V - Z_K^*]^2 \right\} = \tilde{C}(V, V) - 2 \sum_i w_i \tilde{C}(u_i, V) + \sum_i w_i \tilde{C}(u_i, V) - \mu \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow E \left\{ [Z_V - Z_K^*]^2 \right\} = \tilde{C}(V, V) - \left( \sum_i w_i \tilde{C}(u_i, V) + \mu \right) = \tilde{\sigma}_R^2 \quad \text{ή}$$

$$\tilde{\sigma}_R^2 = \tilde{\sigma}^2 - \mathbf{w} \cdot \mathbf{D} \quad (3.28)$$

Στην πράξη είναι συνήθως γνωστή είναι η συνάρτηση του ημι - βαριογράμματος  $\tilde{\gamma}(h)$  και όχι η συνάρτηση συμμεταβλητότητας  $\tilde{C}(h)$ . Λόγω της θεώρησης πως οι τυχαίες μεταβλητές έχουν την ίδια μέση τιμή και διασπορά, προκύπτει η παρακάτω σχέση (3.29) που συνδέει το ημι - βαριόγραμμα με την συμμεταβλητότητα:

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma}(u_i, u_j) &= \frac{1}{2} E \left\{ [Z_i - Z_j]^2 \right\} = \frac{1}{2} E \{ Z_i^2 \} - E \{ Z_i Z_j \} + \frac{1}{2} E \{ Z_j^2 \} = \\ &= E \{ Z^2 \} - E \{ Z_i Z_j \} = E \{ Z^2 \} - \tilde{m}^2 - \left[ E \{ Z_i Z_j \} - \tilde{m}^2 \right] = \end{aligned}$$

$$\tilde{\gamma}(u_i, u_j) = \tilde{\sigma}^2 - \tilde{C}(u_i, u_j) \quad (3.29)$$

Αντικαθιστώντας στην (3.26) την (3.29) προκύπτει το Σύστημα Συνήθους Kriging (Ordinary Kriging System) ως συνάρτηση της συνάρτησης του ημι - βαριογράμματος.

$$\boxed{\sum_{j=1}^n w_j \tilde{\gamma}(u_i, u_j) - \mu = \tilde{\gamma}(u_i, V)}$$



### 3.2 Προϋποθέσεις για την Εφαρμογή της Μεθόδου Kriging

Η κύρια προϋπόθεση για την εφαρμογή της υπόψιν μεθόδου είναι ότι το μοντέλο που πρόκειται να προσαρμοστεί στο πειραματικό βαριόγραμμα, χαρακτηρίζει τη χωρική κατανομή της ζητούμενης ποσότητας. Υπάρχουν πολλές μέθοδοι για να ελεγχθεί η ορθότητα της παραπάνω παραδοχής. Τις περισσότερες φορές, γίνονται έλεγχοι συγκρίνοντας τις πραγματικές τιμές των δειγμάτων με τις εκτιμημένες τιμές τους από τις παραμέτρους του μοντέλου του βαριογράμματος σε σχέση με τα δεδομένα των γύρω δειγμάτων, χρησιμοποιώντας την μέθοδο kriging. Οι παράμετροι του βαριογράμματος διορθώνονται μέχρι το μοντέλο να ανταποκρίνεται ικανοποιητικά στην πραγματικότητα, δηλαδή να δίνει αμερόληπτες εκτιμήσεις των τιμών των δειγμάτων και τα πραγματικά σφάλματα εκτίμησης να συμφωνούν με τα θεωρητικά προβλεπόμενα σφάλματα από το kriging. Η εκτίμηση σημειακών τιμών με τον τρόπο αυτό, είναι μια αρκετά δύσκολη και χρονοβόρος διαδικασία. Οι εκτιμήσεις των τιμών που προκύπτουν, έχουν πολύ χαμηλότερα σφάλματα εκτίμησης από τις σημειακές εκτιμήσεις που έγιναν κατά τον έλεγχο της αξιοπιστίας του μοντέλου του βαριογράμματος. Αν η χωρική κατανομή αλλάζει μέσα στο χώρο ενδιαφέροντος, τότε υπάρχει μη – σταθερότητα και ένα μόνο βαριόγραμμα δεν είναι αρκετό για να γίνει σωστός χαρακτηρισμός σε όλα τα μέρη του χωρίου  $V$ . Σε αυτές τις περιπτώσεις γίνεται χρήση μεθόδων kriging όπως είναι η τεχνική *Γενικευμένου (universal) Kriging*, που απαιτούν πολυπλοκότερες εξισώσεις και συνεπώς λύσεις. Πολλές φορές για να αντιμετωπιστούν τέτοιες περιπτώσεις το χωρίο χωρίζεται σε επιμέρους μικρότερες περιοχές στις οποίες η χωρική μεταβλητότητα παραμένει σταθερή και έτσι γίνεται χρήση του συνηθισμένου (ordinary) kriging. Το kriging στη μορφή αυτή μπορεί να χρησιμοποιηθεί στην πλειοψηφία των συνήθων προβλημάτων και εφαρμόζεται στις παρακάτω κυρίως περιπτώσεις:

1. Στον έλεγχο της αποτελεσματικότητας ενός ερευνητικού προγράμματος.
2. Στην πύκνωση του καννάβου γεωτρήσεων (συνήθως τυχαία κατανεμημένου) ή ακόμα στον προσδιορισμό του καννάβου των ερευνητικών γεωτρήσεων, χρησιμοποιώντας βαριογράμματα για την ελαχιστοποίηση της διακύμανσης kriging.

3. Στην τοποθέτηση ερευνητικών στοών καθώς επίσης και στον σχεδιασμό της δειγματοληψίας.
4. Στην δημιουργία αρχείων εκτιμητών blocks για τον περαιτέρω υπολογισμό ενός κοιτάσματος.
5. Στον σχεδιασμό βραχυπρόθεσμων καθώς και μακροπρόθεσμων προγραμμάτων παραγωγής.

## **ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4    Συζευγμένη Γεωστατιστική – Μηχανική Ανάλυση Σηράγγων**

### **4.1    Εισαγωγή**

Στο κεφάλαιο αυτό περιγράφεται η κατασκευή ολοκληρωμένου μοντέλου προσομοίωσης μηχανικής συμπεριφοράς υπογείων έργων σε ετερογενείς βραχώμαζες με την σύζευξη τριδιάστατων γεωστατιστικών μοντέλων πρόβλεψης της κατανομής των μηχανικών ιδιοτήτων της βραχώμαζας λαμβανοντας υπόψη τη γεωλογική δομή στο χώρο και την εισαγωγή αυτών σε τριδιάστατα αριθμητικά μοντέλα προσομοίωσης συμπεριφοράς της βραχώμαζας

Το πρώτο βήμα της παραπάνω μεθοδολογίας, που περιγράφεται στην παράγραφο 4.2, είναι η συλλογή και επεξεργασία δεδομένων πεδίου και ο σχεδιασμός των σηράγγων. Τα ψηφιακά μοντέλα που κατασκευάζονται, επιτρέπουν την επεξεργασία των δεδομένων με διάφορους τρόπους, όπως για παράδειγμα ο συνδυασμός πραγματικών και υπολογισμένων τιμών των ιδιοτήτων της βραχώμαζας ώστε να παραχθούν τα πιθανά σενάρια για την γεωμηχανική κατάσταση της περιοχής.

Στην συνέχεια σχεδιάζεται η γεωλογία και το ψηφιακό μοντέλο επιφανείας της περιοχής. Ο στόχος του τρίτου βήματος, παράγραφος 4.3, είναι να προβλεφθεί η χωρική κατανομή των γεωτεχνικών παραμέτρων της βραχώμαζας, όπως ο δείκτης κερματισμού της βραχώμαζας (RQD), ο δείκτης ποιότητας της βραχώμαζας (RMR) και οι τιμές του δείκτη αποσάθρωσης (WI).

Ο δείκτης κερματισμού της βραχώμαζας (Rock Quality Designation - RQD) αποτελεί ποσοτική εκτίμηση του κερματισμού της βραχώμαζας με βάση τους πυρήνες γεωτρήσεων. Ο δείκτης RQD ορίζεται ως το ποσοστό (επί τοις εκατό) των τεμαχών μήκους άνω των 100mm σε κάποιο μήκος της γεώτρησης.

Το σύστημα RMR (Rock Mass Rating) προτάθηκε από τον Bieniawski το 1976, έλαβε την τελική του μορφή το 1979 (Bieniawski, 1979) και παρουσιάσθηκε (χωρίς ουσιαστικές τροποποιήσεις) εκ νέου το 1989 (Bieniawski, 1989). Κατά το σύστημα αυτό, η ταξινόμηση της βραχώμαζας γίνεται με έξι (6) παραμέτρους εκάστη των οποίων λαμβάνει μια τιμή. Το άθροισμα των τιμών των έξι παραμέτρων αποτελεί την τιμή του δείκτη RMR. Οι έξι παράμετροι και οι τιμές τους είναι:

- Αντοχή του "συμπαγούς" πετρώματος σε μοναξονική θλίψη (*sc<sub>i</sub>*)
- Δείκτης κερματισμού της βραχώμαζας (RQD)
- Απόσταση μεταξύ των ασυνεχειών
- Κατάσταση των επιφανειών των ασυνεχειών
- Παρουσία υπόγειου νερού
- Προσανατολισμός των ασυνεχειών σε σχέση με τη φορά διάνοιξης του έργου

Για την πρόβλεψη, λοιπόν των παραπάνω μηχανικών παραμέτρων, γίνεται κλασσική στατιστική ανάλυση των δεδομένων, ώστε να βρεθεί ο τύπος της κατανομής που ακολουθούν οι δείκτες αυτοί. Στην συνέχεια ακολουθεί η γεωστατιστική ανάλυση, που συνδυάζει την κατασκευή των ημι – βαριογραμμμάτων και την μέθοδο χωρικής πρόβλεψης kriging ώστε να προβλεφθούν οι τιμές των ανωτέρω ιδιοτήτων σε όλη την έκταση της μελετούμενης περιοχής. Τέλος τα αποτελέσματα από το στάδιο αυτό χρησιμοποιούνται για την κατασκευή του αριθμητικού μοντέλου πεπερασμένων διαφορών. Για να επιτευχθεί αυτό, ήταν αναγκαία η κατασκευή αλγορίθμου σε κώδικα C++, για την μεταφορά του γεωστατιστικού ογκομετρικού μοντέλου στο τριδιάστατο μοντέλο πεπερασμένων διαφορών.

#### **4.2 Συλλογή, Επεξεργασία και Απεικόνιση των Δεδομένων Πεδίου και του Σχεδιασμού των Σηράγγων**

Η σήραγγα που εξετάζεται είναι διπλής κατεύθυνσεως και συνίσταται από δύο κλάδους, ένα ανά κατεύθυνση, μήκους 130 m ο κάθε ένας. Οι άξονες των σηράγγων έχουν γενική διεύθυνση Δ - Α και αναπτύσσονται οριζοντιογραφικά σε καμπύλα τμήματα. Υψομετρικά παρουσιάζουν κλίση της τάξεως του 2%. Η διατομή των σηράγγων είναι πεταλοειδής με εμβαδό διατομής 110 m<sup>2</sup>, ακτίνα 6.1 m και ύψος 10 m. Η τοπογραφία της περιοχής μελέτης των δίδυμων σηράγγων συμπεριλαμβανομένων των οδών προσπέλασης, καθώς επίσης και το σχέδιο των δύο σηράγγων με τις εισόδους σε κάθε πλευρά του λόφου παρουσιάζεται στο Σχ. 4.1.

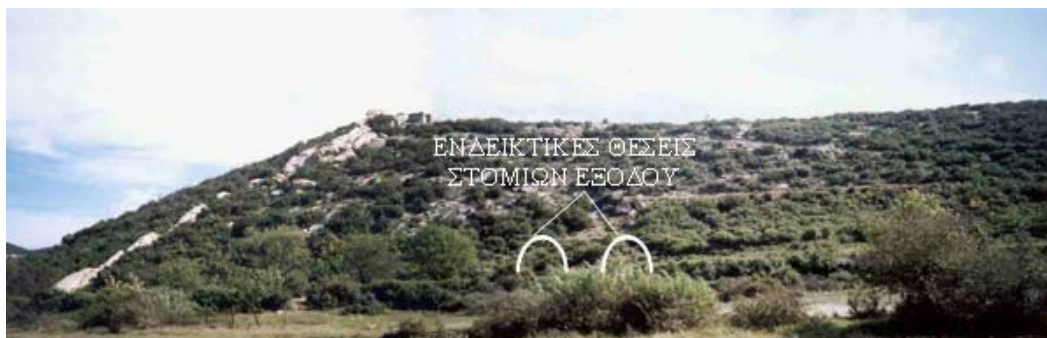
Η βασική γεωμορφή που αναπτύσσονται στην περιοχή διέλευσης της σήραγγας είναι ο επιμήκης λόφος (Φωτ. 4.1,2). Το υψόμετρο του φυσικού εδάφους κατά μήκος της

χάραξης κυμαίνεται στις περιοχές των στομιών από +92m έως +104m και φθάνει τα +136m περίπου στη θέση του μέγιστου υπερκειμένου. Οι κλίσεις του φυσικού εδάφους στα ανατολικά και δυτικά πρηνή του λόφου είναι μέτριες, της τάξεως των 30°. Οι μέτριες μορφολογικές κλίσεις των φυσικών πρηνών ευνοούνται από την παρουσία των βραχωδών σχηματισμών των μαρμάρων και των βιοτιτικών γνευσίων της σειράς των Κερδυλλίων, στο μεγαλύτερο τμήμα της μελετούμενης έκτασης. Ηπιότερες κλίσεις της τάξεως των 20° παρατηρούνται στα χαμηλότερα υψομετρικά τμήματα του λόφου όπου εμφανίζονται σχετικά χαλαροί σχηματισμοί κορημάτων, αλλουβίων και πλειστοκαινικών αποθέσεων.

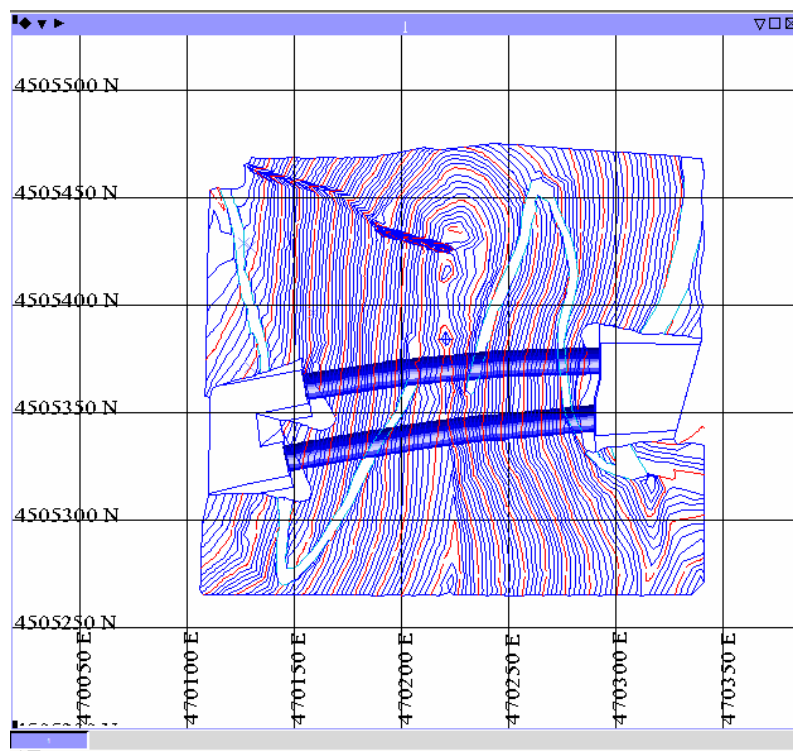
Η ευρύτερη περιοχή της Σήραγγας δομείται γεωλογικά από τους σχηματισμούς της ενότητας των Κερδυλλίων της Σερβομακεδονικής μάζας. Η λιθοστρωματογραφική της διάρθρωση περιλαμβάνει λεπτόκοκκους, βιοτιτικούς γνεύσιους και ορίζοντες παχυστρωματών μαρμάρων με ενστρώσεις σχιστογνευσίων και συχνές εμφανίσεις απλιτικών και πηγματιτικών φλεβών. Τοπικά επικάθονται επί του γεωλογικού υποβάθρου νεότεροι χαλαροί σχηματισμοί συνιστάμενοι από αλλουβιακές και κορηματικές αποθέσεις.



**Φωτογραφία 4.1:** Γενική άποψη περιοχής εισόδου σήραγγας



**Φωτογραφία 4.2:** Γενική άποψη περιοχής εξόδου σήραγγας



**Σχήμα 4.1:** Τοπογραφικός χάρτης της περιοχής μελέτης με τις σήραγγες και τις εισόδους τους.

Σύμφωνα με την γεωλογική μελέτη της περιοχής ενδιαφέροντος, η δίδυμη σήραγγα αναμένεται να διανοιχθεί στους σχηματισμούς των μαρμάρων και των βιοτιτικών γνευσίων. Κατά τη φάση του γεωερευνητικού προγράμματος της μελέτης, κατά μήκος

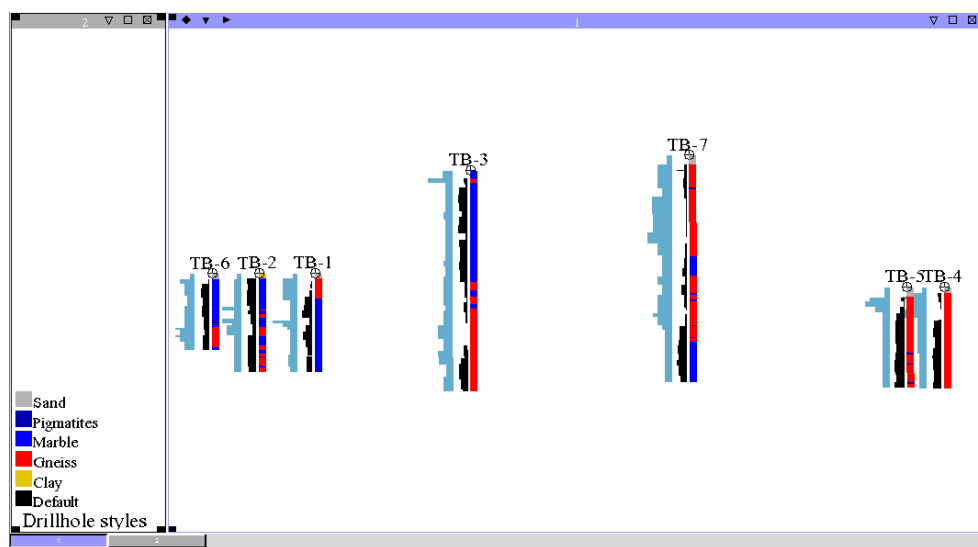
των αξόνων των σηράγγων, ορύχθηκαν επτά ερευνητικές γεωτρήσεις (TB1 – TB7), στους πυρήνες των οποίων έγιναν δοκιμές για τον προσδιορισμό γεωτεχνικών παραμέτρων (πορώδες, αντοχή σε μονοαξονική θλίψη, RQD, βαθμός αποσάθρωσης, κλπ.) καθώς και προσδιορισμός της λιθολογίας (Σχ. 4.2). Η λιθολογία των γεωλογικών σχηματισμών καθώς και τα τμήματα στα οποία εντοπίζονται (πυρήνες δειγματοληψίας) παρουσιάζονται στον Πιν. 4.1 και στο Σχ. 4.2, όπου επιπλέον έχουν αποτυπωθεί και οι μετρηθείσες τιμές του βαθμού αποσάθρωσης της βραχώμαζας υπό μορφή ιστογραμμάτων συχνότητας.

Οι τιμές RMR που υπολογίστηκαν σύμφωνα με την εμπειρική ταξινόμηση Bieniawski [7], παρουσιάζονται επίσης υπό μορφή ιστογραμμάτων συχνότητας κατά μήκος των ερευνητικών γεωτρήσεων (Σχ. 4.3).

**Πίνακας 4.1:** Περιγραφή της λιθολογίας της βραχώμαζας κατά μήκος των ερευνητικών γεωτρήσεων.

| <b>Νο.<br/>Γεώτρησης</b> | <b>Βάθος (m)</b> | <b>Λιθολογία</b>                          |
|--------------------------|------------------|---|
| TB-1                     | 1.10-5.20        | Μέτρια αποσαθρωμένος Γνεύσιος             |
| TB-1                     | 5.20-20.05       | Μάρμαρο                                   |
| TB-2                     | 1.00-20.00       | Μάρμαρο                                   |
| TB-3                     | 0.00-28.20       | Μάρμαρο                                   |
| TB-3                     | 28.20-38.20      | Μέτρια αποσαθρωμένος Γνεύσιος             |
| TB-3                     | 38.20-45.00      | Ελαφρά αποσαθρωμένος Γνεύσιος             |
| TB-4                     | 1.00-6.60        | Μέτρια έως εντελώς αποσαθρωμένος Γνεύσιος |
| TB-4                     | 6.60-20.70       | Ελαφρά αποσαθρωμένος Γνεύσιος             |
| TB-5                     | 2.00-5.15        | Έντονα αποσαθρωμένος Γνεύσιος             |
| TB-5                     | 5.15-20.50       | Ελαφρά αποσαθρωμένος Γνεύσιος             |
| TB-6                     | 2.00-15.50       | Μάρμαρο                                   |
| TB-7                     | 2.00-8.50        | Μέτρια αποσαθρωμένος Γνεύσιος             |
| TB-7                     | 8.50-20.70       | Μέτρια έως εντελώς αποσαθρωμένος Γνεύσιος |

|      |             |   |
|------|-------------|---|
| TB-7 | 20.70-24.50 | Μάρμαρο                                   |
| TB-7 | 24.50-31.00 | Μέτρια αποσαθρωμένος Γνεύσιος             |
| TB-7 | 31.00-35.10 | Μέτρια έως εντελώς αποσαθρωμένος Γνεύσιος |
| TB-7 | 35.10-38.10 | Ελαφρά αποσαθρωμένος Γνεύσιος             |
| TB-7 | 38.10-46.30 | Μάρμαρο                                   |

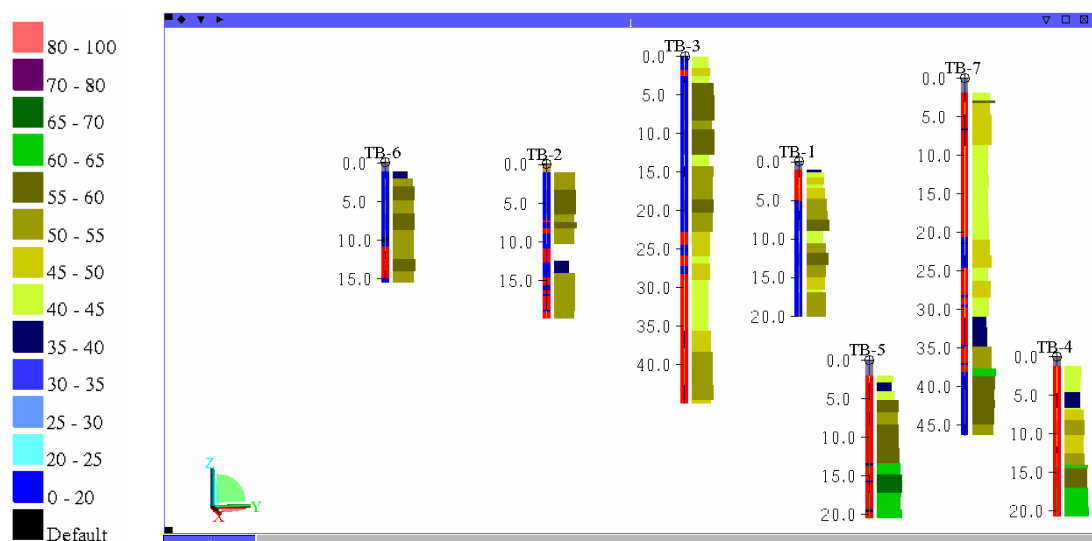


**Σχήμα 4.2:** Κάθετη τομή των ερευνητικών γεωτρήσεων. Οι κατανομές των RQD και WI παρουσιάζονται με μαύρο και μπλε χρώμα αντίστοιχα ενώ οι διάφοροι γεωλογικοί σχηματισμοί που συναντήθηκαν περιγράφονται στην λεζάντα.

Το RMR χρησιμοποιείται σήμερα στην μηχανική των υπογείων έργων, για την ποσοτική ταξινόμηση της βραχύμαζας και ως εργαλείο για τον υπολογισμό των συντελεστών απομείωσης της παραμορφωσιμότητας και της αντοχής των ιδιοτήτων του αρρήκτου πετρώματος που μετρούνται στο εργαστήριο. Το RMR υπολογίζεται με βάση διάφορες γεωτεχνικές παραμέτρους (Πιν. 4.2) που περιγράφουν την συμπεριφορά της βραχύμαζας. Πρέπει εδώ να επισημανθεί πως θα μπορούσε να έχει χρησιμοποιηθεί στην

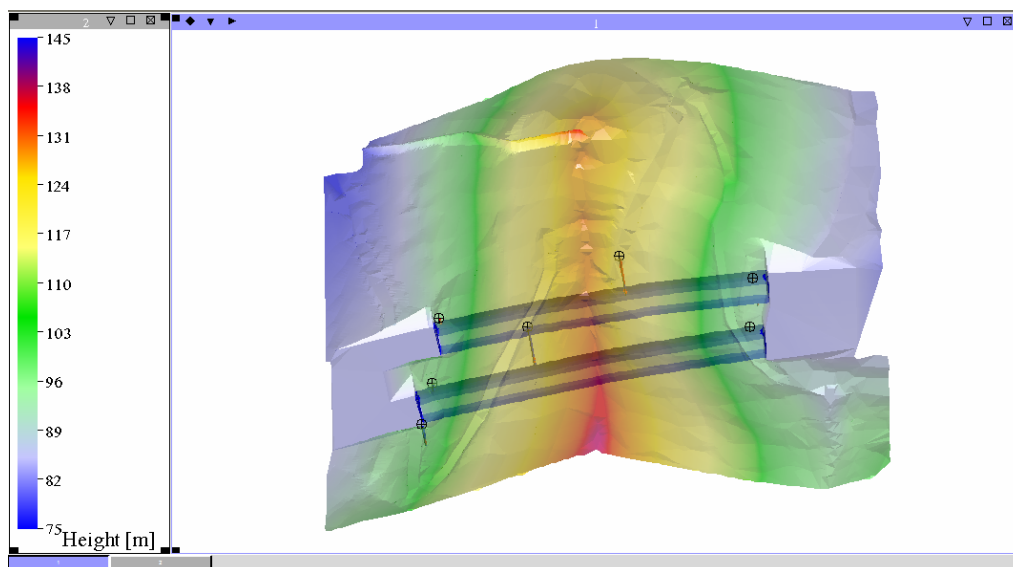


παρούσα εργασία οποιοδήποτε άλλο εμπειρικό σύστημα ταξινόμησης της βραχώδους (λ.χ. Q [8] και GSI [9]).



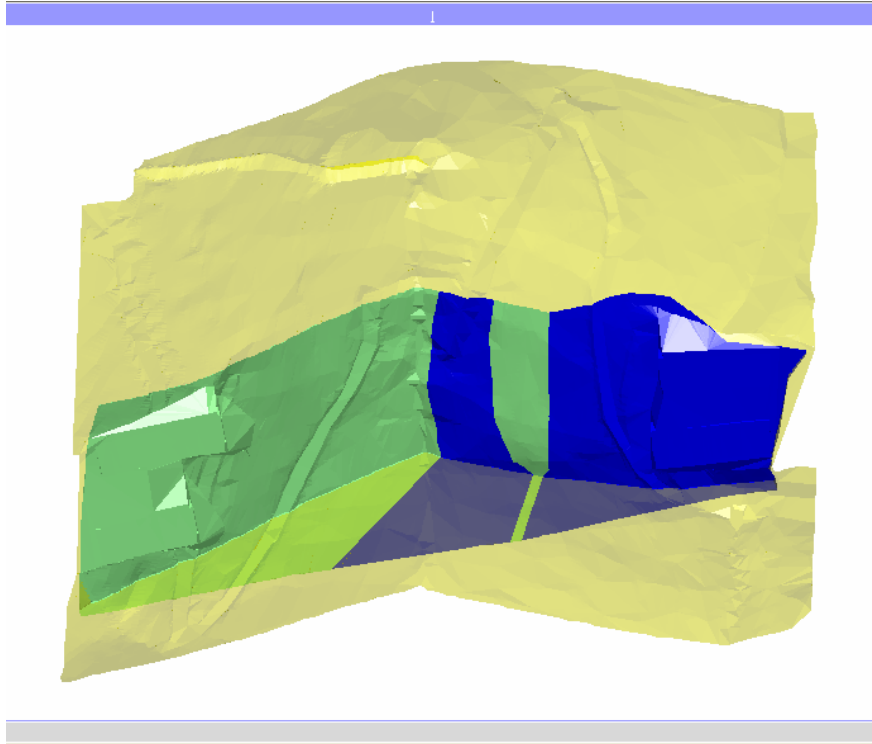
**Σχήμα 4.3:** Χρωματικός κώδικας απεικόνισης της κατανομής των υπολογισμένων τιμών RMR κατά μήκος κάθε γεώτρησης.

Το επόμενο βήμα είναι η αποτύπωση της τοπογραφίας της περιοχής μελέτης σε ψηφιακή μορφή. Για να γίνει αυτό χρησιμοποιήθηκε το υπολογιστικό πακέτο Surpac Vision της Surpac Software International (Pty.) Ltd. of Belmond (now Perth), Western Australia (Surpac, 1995). Ο αλγόριθμος τριγωνοποίησης του πακέτου αυτού χρησιμοποιήθηκε για την κατασκευή του ψηφιακού μοντέλου επιφανείας (DTM) της περιοχής των διδύμων σηράγγων (Σχ. 4.4) από δεδομένα τοπογραφικού χάρτη κλίμακας 1:500.



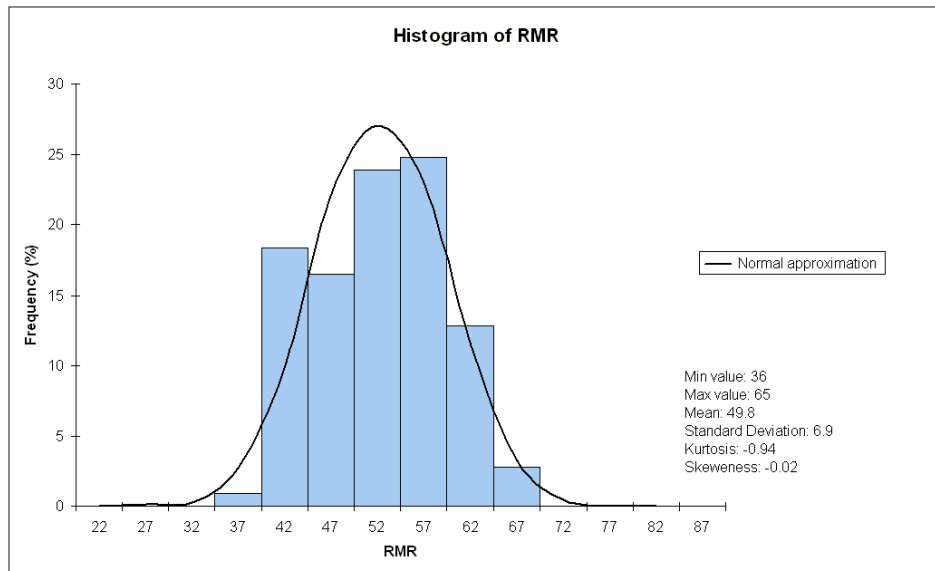
**Σχήμα 4.4:** Ψηφιακό μοντέλο επιφανείας (DTM) της περιοχής μελέτης χρωματισμένο σύμφωνα με το υψόμετρο της τοπογραφίας (σε m) με τις ερευνητικές γεωτρήσεις και τις σήραγγες.

Στη συνέχεια, γίνεται η κατασκευή του τριδιάστατου γεωλογικού μοντέλου με συνδυασμό δεδομένων από διδιάστατες γεωλογικές τομές και γεωτρήσεις πυρηνοληψίας. Το παραχθέν γεωλογικό και ψηφιακό μοντέλο επιφανείας παρουσιάζεται στο Σχ. 4.5, όπου φαίνεται πως οι γεωλογικοί σχηματισμοί εμφανίζουν στρωσιγενή διάταξη.

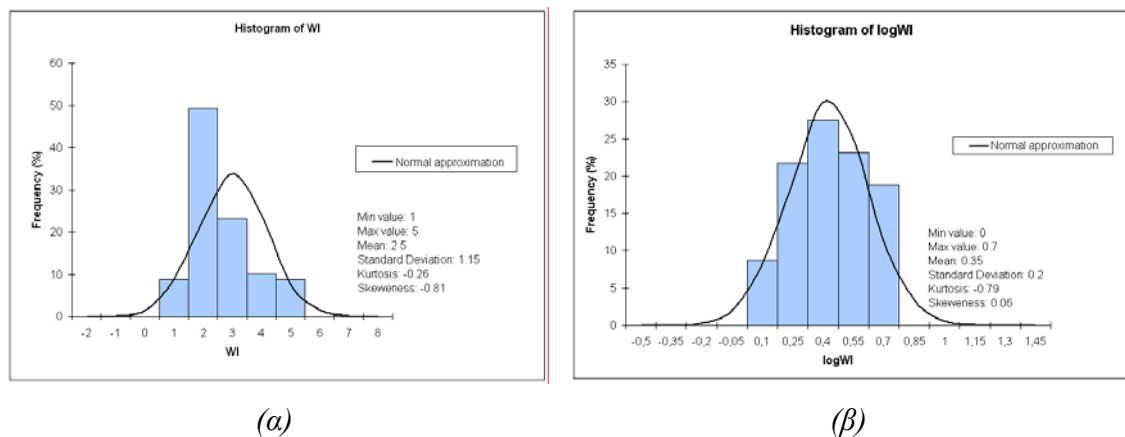


*Σχήμα 5: Απεικόνιση του γεωλογικού μοντέλου της περιοχής μελέτης (το μάρμαρο και ο γνεύσιος παρουσιάζονται με πράσινο και μπλε χρώμα, αντίστοιχα).*

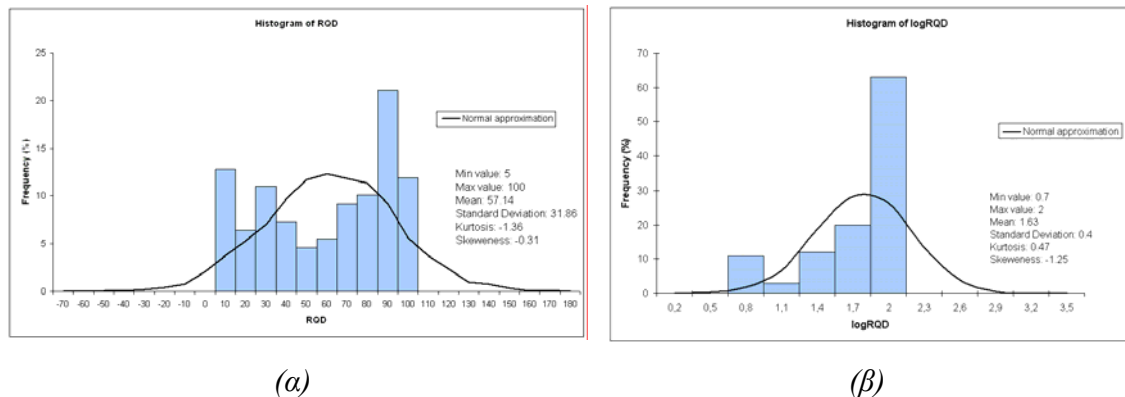
Καταρχήν μελετώνται οι στατιστικές ιδιότητες των παραμέτρων RMR, τα WI και RQD ως τυχαίες μεταβλητές. Δεδομένου ότι η τεχνική "Kriging" που θα εφαρμοστεί στη συνέχεια υποθέτει κανονική κατανομή των τυχαίων μεταβλητών, ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει το πόσο καλά η κατανομή μιας μεταβλητής προσεγγίζει την κανονική (Gaussian) κατανομή πιθανότητας. Ένας πρώτος ποιοτικός έλεγχος της υπόθεσης αυτής για τις μεταβλητές RMR, WI και RQD παρουσιάζεται στα σχήματα 4.6, 4.7 και 4.8 αντίστοιχα, όπου παρουσιάζονται υπό μορφή ιστογραμμάτων, οι κατανομές συχνότητας τους αντίστοιχα.



**Σχήμα 4.6:** Ιστόγραμμα κατανομής της συχνότητας εμφάνισης των τιμών του RMR και η καλύτερα προσαρμοσμένη καμπύλη κανονικής κατανομής (συνεχής γραμμή).



**Σχήμα 4.7:** (α) Ιστόγραμμα κατανομής της συχνότητας εμφάνισης των τιμών του WI, (β) ιστόγραμμα κατανομής της συχνότητας εμφάνισης των λογαριθμικά μετασχηματισμένων τιμών του WI και η καλύτερα προσαρμοσμένη καμπύλη κανονικής κατανομής (συνεχής γραμμή).



**Σχήμα 4.8:** (α) ιστόγραμμα συχνότητας του δείκτη  $RQD$ , (β) ιστόγραμμα συχνότητας μετά από λογαριθμικό μετασχηματισμό των τιμών του  $RQD$  και η καλύτερα προσαρμοσμένη καμπύλη κανονικής κατανομής (συνεχής γραμμή).

Από το Σχ.6, μπορεί να παρατηρηθεί πως στην συγκεκριμένη περίπτωση, η κατανομή του  $RMR$  μπορεί να προσεγγιστεί με την κανονική κατανομή, σε στενά σχετικά όρια, γύρω από τη μέση τιμή  $RMR=50$ , που σημαίνει ότι η βραχύμαζα μπορεί να ταξινομηθεί σε τρεις κατηγορίες βραχύμαζας (δηλ. Τάξη II:  $61 < RMR < 80$ , Τάξη III:  $41 < RMR < 60$  και Τάξη IV:  $21 < RMR < 40$ ). Επίσης εξετάζονται η ασυμμετρία και η κυρτότητα της κατανομής, με σκοπό την αξιολόγηση της απόκλισης της τελευταίας από τη συμμετρία (skewness) καθώς και του βαθμού στον οποίο η κατανομή εμφανίζεται πιο πεπλατυσμένη ή πιο οξεία (kurtosis). Πρέπει εδώ να σημειωθεί πως στην περίπτωση του βαθμού αποσάθρωσης ( $WI$ ) και του δείκτη κερματισμού του πετρώματος ( $RQD$ ) παρατηρείται μεγάλη απόκλιση της κατανομής από την κανονική, πρόβλημα που αντιμετωπίζεται όμως με την εφαρμογή ενός λογαριθμικού μετασχηματισμού των τιμών αυτών των μεταβλητών (Σχ. 4.7β και 4.8β, αντίστοιχα). Η κατανομή των μετασχηματισμένων πλέον τιμών  $\log(WI)$  πλησιάζει αρκετά την κανονική, κάτι όμως που δεν ισχύει και για τις μετασχηματισμένες τιμές  $\log(RQD)$  (Σχ. 4.8β).

Μια άλλη βασική προϋπόθεση για την εφαρμογή της γεωστατιστικής ανάλυσης είναι τα δεδομένα να έχουν «σταθερή στήριξη», δηλαδή η δειγματοληψία να έχει γίνει σε ίδιου μήκους πυρήνες [1]. Στην συγκεκριμένη εργασία υπήρχαν μετρήσεις σε όλο το μήκος του πυρήνα δειγματοληψίας αλλά όχι σε σταθερό βήμα. Οι μεταβλητές των

δειγμάτων πυρήνων μήκους  $l$  υπολογίστηκαν με σταθμικούς μέσους των αντίστοιχων μεταβλητών των πραγματικών δειγμάτων διαφορετικού μήκους. Έτσι, η τιμή της μεταβλητής  $z_l$  του δείγματος  $l$  υπολογίστηκε από τις τρεις διαφορετικές  $z_1, z_2, z_3$  μεταβλητές, σταθμισμένες με τα αντίστοιχα μήκη  $l_1, l_2, l_3$  των τομών τους με το ολικό δείγμα  $l$ , δηλαδή:

$$z_l = \frac{l_1 z_1 + l_2 z_2 + l_3 z_3}{l_1 + l_2 + l_3}$$

Για την εφαρμογή ανασύνθεσης τέτοιου τύπου, θεωρείται πως η τιμή της μεταβλητής παραμένει ομοιόμορφη μέσα σε κάθε δείγμα πυρήνα, γεγονός όμως που δημιουργεί μια εξομάλυνση καθώς η συντεθειμένη τιμή πλέον, δίνει μια πιο ομαλή εικόνα της πραγματικής μεταβλητότητας του φαινομένου.

Η ανασύνθεση γίνεται στη συνέχεια με την βοήθεια αλγορίθμου του υπολογιστικού πακέτου Surpac (πρόκειται για ένα γεωστατιστικό – σχεδιαστικό υπολογιστικό πακέτο [5]). Σαν μήκος δειγματοληψίας επιλέχθηκαν τα 3 μέτρα, καθώς δίνει πιο ομαλά ημι – βαριογράμματα, από αυτά μικρότερων αποστάσεων. Το μειονέκτημα του συγκεκριμένου μήκους είναι ο σχετικά μικρός αριθμός των σημείων στήριξης, Σχ. 4.9β. Οι συναρτήσεις ημι – βαριογραμμάτων των RMR, WI και RQD παρουσιάζονται στα Σχ. 4.9 – 4.11, αντίστοιχα. Το αρχικό σφάλμα είναι η τιμή  $\gamma(0)$ , δηλ. η τιμή του ημι – βαριογράμματος για απόσταση δειγμάτων ίση με το μηδέν. Κανονικά, η τιμή αυτή πρέπει να είναι ίση με μηδέν, αλλά συνήθως αυτό δεν συμβαίνει εξαιτίας της τοπικής γεωλογικής ετερογένειας, των σφαλμάτων κατά την δειγματοληψία κ.λπ. Το ημι – βαριόγραμμα αυξάνει με την απόσταση, γεγονός που δείχνει πως η συσχέτιση του RMR αυξάνει καθώς αυξάνει η απόσταση  $h$  μεταξύ δύο σημείων δειγματοληψίας. Όταν η απόσταση γίνει αρκετά μεγάλη η συσχέτιση μεταξύ των μεταβλητών  $Z(x_i)$  και  $Z(x_i + h)$  παύει να υπάρχει, και το ημι – βαριόγραμμα τείνει ασυμπτωτικά σε μια σταθερή τιμή. Η απόσταση αυτή καλείται «ακτίνα επιρροής», και αναπαριστά την ακτίνα επιρροής (για ισότροπο σφαιρικό μοντέλο) πέρα από την οποία τα ζεύγη των δειγμάτων δεν συσχετίζονται πλέον μεταξύ τους. Η «οροφή» του ημι – βαριογράμματος, αναπαριστά το όριο στο οποίο σταθεροποιείται το ημι – βαριόγραμμα. Η διαφορά μεταξύ της «οροφής» και της τιμής του ημι – βαριογράμματος σε απόσταση  $|h|$ , δίδει το επίπεδο εμπιστοσύνης μια

προβλεφθείσης τιμής. Είναι δυνατό να υπολογιστεί το στατιστικό σφάλμα  $\sigma_i$  (τυπική απόκλιση), των διαφορών για ένα διάστημα, από τις ημι – διασπορές, καθώς:

$$\sigma_i = \sqrt{2\gamma_i}$$

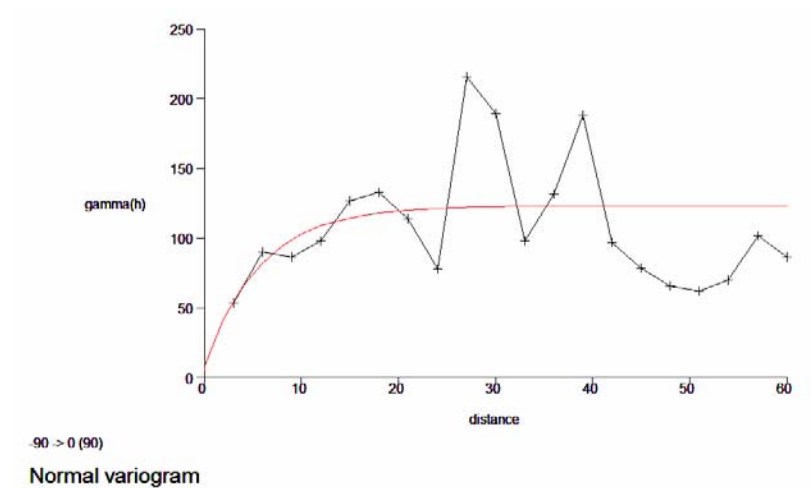
Το πλεονέκτημα της τυπικής απόκλισης, θεωρώντας κανονική κατανομή των διαφορών των δειγμάτων, (κάτι που ισχύει για τις τιμές του RMR, για τις λογαριθμικά μετασχηματισμένες τιμές του WI και μερικώς τις λογαριθμικά μετασχηματισμένες τιμές του RQD) είναι ότι πολλαπλάσια αυτού μπορούν να σχετισθούν σε διαφορετικά επίπεδα εμπιστοσύνης. Για παράδειγμα, με 68% βεβαιότητα μία τιμή βρίσκεται στο διάστημα  $\pm \sigma$  από την μέση τιμή. Με 96% βεβαιότητα μία τιμή βρίσκεται στο διάστημα  $\pm 2\sigma$  από την μέση τιμή κλπ. Αυτό σημαίνει πως η πιθανότητα μία τιμή να είναι μεγαλύτερη (ή μικρότερη) του αθροίσματος της μέσης τιμής και μίας τυπικής απόκλισης  $\sigma_i$  είναι 16%, ενώ της μέσης τιμής και δύο τυπικών αποκλίσεων είναι 2%. Πρέπει να σημειωθεί εδώ ότι όπως η μέση τιμή των ιδιοτήτων της βραχώμαζας, έτσι και η τυπική απόκλιση έχει τη δική της χωρική μεταβλητότητα, που μπορεί να αποθηκευτεί σε ένα χωρικό μοντέλο μαζί με τις προβλεφθείσες μέσες τιμές.

Τα πειραματικά ημι – βαριογράμματα για τις τρεις γεωτεχνικές παραμέτρους που προαναφερθήκαν, περιγράφονται καλύτερα από το εκθετικό μοντέλο ημι – βαριογράμματος, που αποδίδεται από την σχέση:

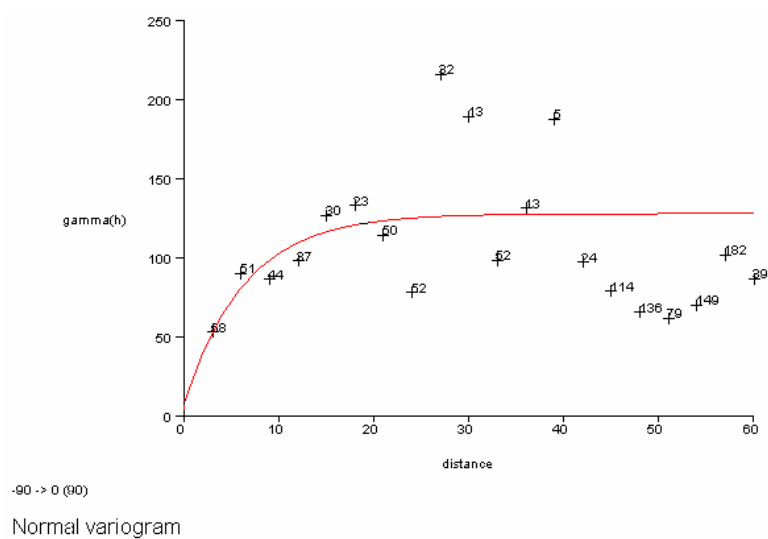
$$\gamma(h) = C_0 + C \left( 1 - e^{-\frac{|h|}{\alpha}} \right), \quad \alpha > 0$$

όπου το  $C_0$  είναι το nugget,  $C$  είναι η τιμή του ημι – βαριογράμματος για απόσταση ίση με την μέγιστη ακτίνα επίδρασης και  $\alpha$  είναι μια παράμετρος με διαστάσεις μήκους. Στα Σχ. 4.9 – 4.11, τα πειραματικά ημι – βαριογράμματα περιγράφονται με σταυρούς, ενώ τα θεωρητικά μοντέλα με συνεχή γραμμή. Οι παράμετροι των μοντέλων των ημι – βαριογραμμάτων που προσαρμόστηκαν στα πειραματικά παρουσιάζονται στον Πιν. 4.2. Το nugget, το οποίο υπολογίστηκε για όλες τις γεωτεχνικές παραμέτρους που μελετηθήκαν πλησιάζει το μηδέν, γεγονός που δείχνει πως δεν υπάρχει κάποια σημαντική μεταβολή στις τιμές των παραμέτρων αυτών σε πολύ μικρές αποστάσεις  $h$  (lag). Αυτό ήταν αναμενόμενο καθώς η δειγματοληψία έγινε σε πολύ μικρά διαστήματα εν συγκρίσει με τα διαστήματα που οι παραπάνω παράμετροι έχουν περίπου την ίδια

τιμή. Όπως φαίνεται στον Πιν. 4.2 η μέγιστη απόσταση επίδρασης του RMR είναι περίπου 19 m και πλησιάζει τις αποστάσεις επίδρασης των άλλων δύο παραμέτρων.



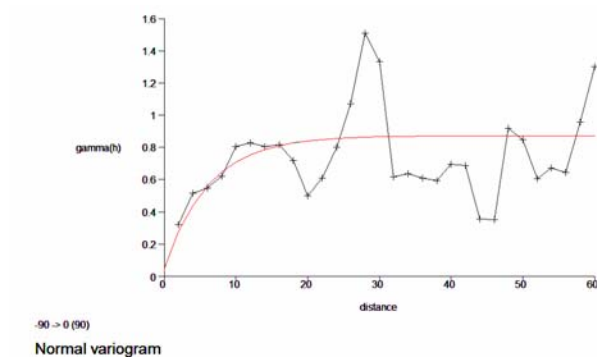
(α)



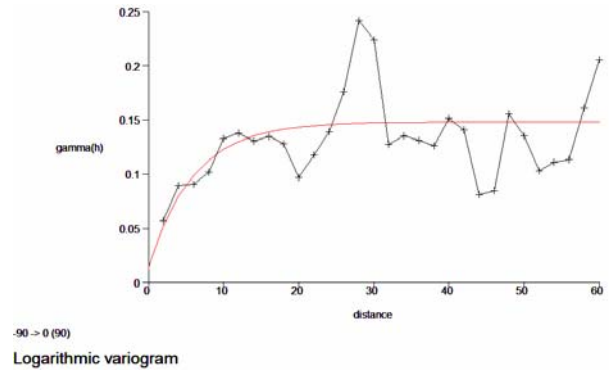
(β)

**Σχήμα 4.9:** (α) Ισότροπο πειραματικό ημι – βαριόγραμμα του RMR με το προσαρμοσμένο εκθετικό μοντέλο (β) αριθμός ζευγών στήριξης των σημείων του ημι – βαριογράμματος.



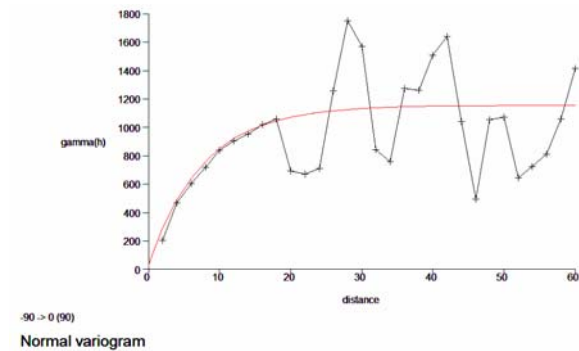


(α)

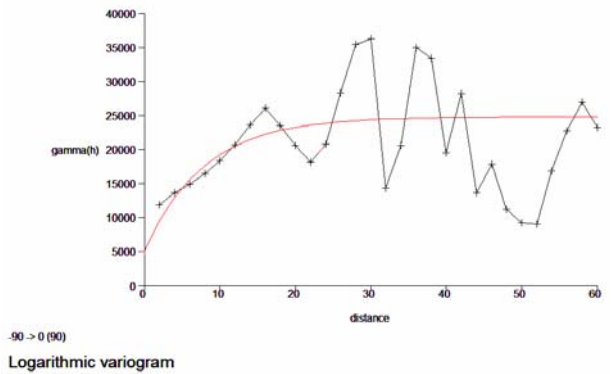


(β)

**Σχήμα 4.10:** Ισότροπο πειραματικό ημι – βαριόγραμμα με το προσαρμοσμένο εκθετικό μοντέλο των (α) τιμών του WI (β) λογαριθμικά μετασχηματισμένων τιμών του WI.



(α)



(β)

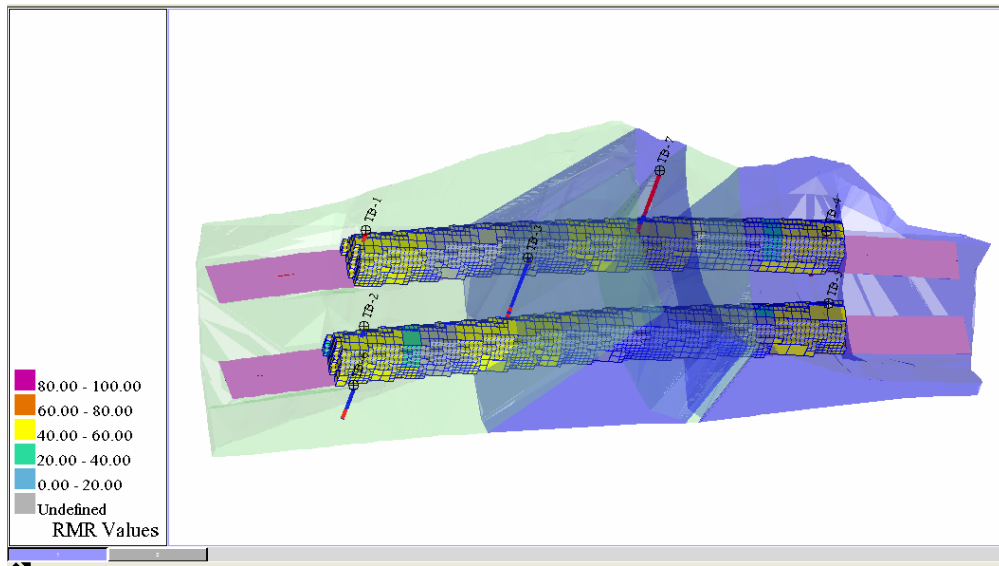
**Σχήμα 4.11:** Ισότροπο πειραματικό ημι – βαριόγραμμα με το προσαρμοσμένο εκθετικό μοντέλο των (α) τιμών του RQD (β) λογαριθμικά μετασχηματισμένων τιμών του RQD.

**Πίνακας 4.2:** αποτελέσματα της ανάλυσης ημι – βαριογράμματος των γεωτεχνικών παραμέτρων της βραχομάζας.

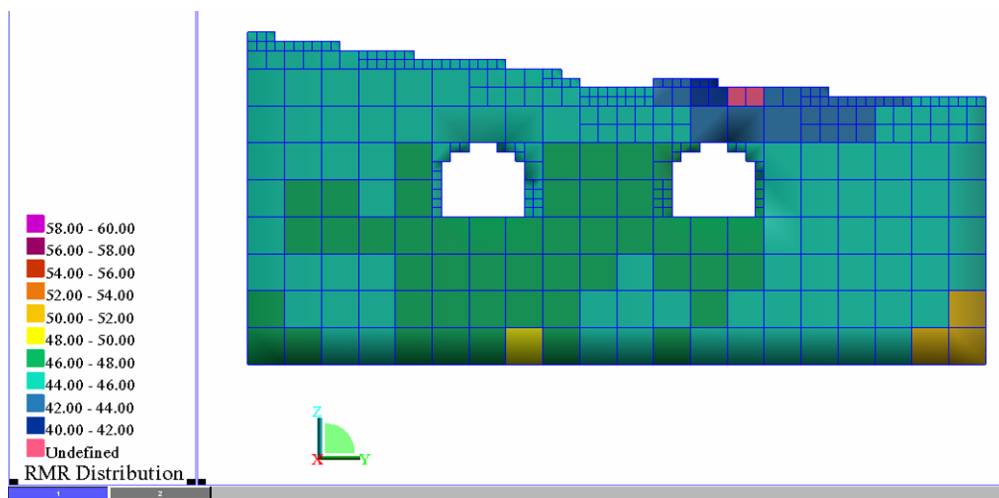
| Rock Mass Property | Semi-variogram parameters |      |           |
|--------------------|---------------------------|------|-----------|
|                    | Nugget effect             | Sill | Range [m] |
| RMR                | 8                         | 110  | 19        |
| RQD                | 37                        | 1118 | 23        |
| WI                 | 0.05                      | 0.8  | 18        |

Στη συνέχεια, γίνεται χρήση της μεθόδου «Volume Kriging», για τον υπολογισμό της χωρικής κατανομής των γεωτεχνικών παραμέτρων στην περιοχή γύρω από τις γεωτρήσεις. Η μέθοδος αυτή είναι η πλέον ενδεδειγμένη καθώς τα ογκοτεμάχια θα εισαχθούν σε επόμενο στάδιο σε ένα τριδιάστατο αριθμητικό μοντέλο πεπερασμένων διαφορών. Όπως περιγράφεται αναλυτικά στο Κεφ.3, η μέθοδος αυτή προβλέπει την «καλύτερη αμερόληπτη γραμμική εκτιμήτρια» της μέσης τιμής μιας χωρικής μεταβλητής σε οποιονδήποτε όγκο  $V$  της βραχόμαζας, ενώ παράλληλα ελαχιστοποιεί την αβεβαιότητα των προβλέψεων. Η βασική ιδέα αυτής της μεθόδου ογκομετρικής μοντελοποίησης (block modeling), είναι να πληρώσει τον τριδιάστατο χώρο με μικρά παραλληλεπίπεδα στοιχεία, που καλούνται blocks και μετά να υπολογίσει στο εσωτερικό τους τις τιμές διαφόρων μεταβλητών βασιζόμενη στα γνωστά σημεία δειγματοληψίας. Στην συγκεκριμένη περίπτωση επιλέχθηκε ένα σύνολο από κυβικά ογκοτεμάχια διαστάσεων  $5 \times 5 \times 5$  m, για να καλυφθεί η υπό μελέτη περιοχή. Τα ημι – βαριογράμματα των Σχ. 4.9 – 4.11 χρησιμοποιήθηκαν για τον υπολογισμό παραμέτρων, που είναι αναγκαίες για το στάδιο την μοντελοποίησης. Ο υπολογισμός των τιμών των μεταβλητών στο εσωτερικό των κυβικών ογκοτεμαχίων βασίστηκε στη μέθοδο του «Συνήθους Kriging». Η μέθοδος αυτή εφαρμόστηκε μόνο στα σημεία τα οποία εμπεριέχονται σε μια σφαίρα ακτίνας ίσης με την μέγιστη ακτίνα επιρροής γύρω από τα γνωστά σημεία δειγματοληψίας, καθώς όλα τα μοντέλα που χρησιμοποιήθηκαν θεωρήθηκαν ισότροπα. Η θεώρηση αυτή έγινε, καθώς ο αριθμός των αρχικών δεδομένων δεν ήταν αρκετός ώστε να κατασκευαστούν αξιόπιστα ημι – βαριογράμματα σε διαφορετικές διευθύνσεις. Οι προβλεφθείσες με αυτή τη μέθοδο γεωτεχνικές παράμετροι, ελέγχθηκαν σε επόμενο στάδιο για τυχόν σφάλματα. Από αυτόν τον έλεγχο δεν παρατηρήθηκαν ιδιαίτερες διαφορές μεταξύ των προβλεφθέντων και των μετρηθέντων τιμών.

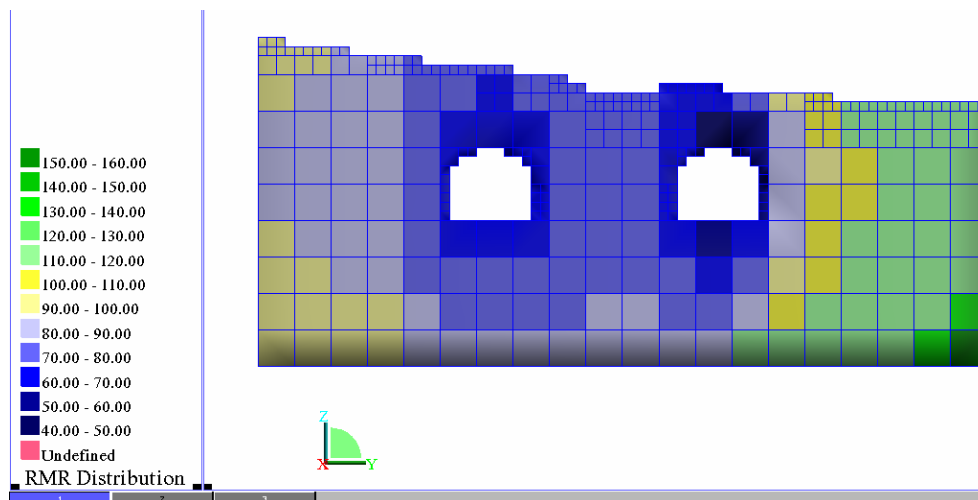
Τα ογκοτεμαχισμένα μοντέλα των διδύμων σηράγγων παρουσιάζονται στο Σχ. 4.12α, ενώ στο Σχ. 4.12β, παρουσιάζονται οι τιμές του RMR σε μία τομή του μοντέλου κοντά στα ανατολικά στόμια. Πρέπει εδώ να σημειωθεί πως αυτά τα μοντέλα των σηράγγων μπορούν να χρησιμοποιηθούν για τον σχεδιασμό του κατάλληλου συστήματος εξόρυξης των σηράγγων.



( $\alpha$ )



( $\beta$ )



(γ)

**Σχήμα 4.12:** (α) μοντέλο της κατανομής του RMR μαζί με τους γεωλογικούς σχηματισμούς και τις γεωτρήσεις στη περιοχή των δίδυμων σπηραγγών, (β) & (γ) κατακόρυφη τομή της περιοχής μελέτης όπου απεικονίζονται η κατανομή του RMR και η διασπορά kriging.

#### 4.3 Τριδιάστατο Αριθμητικό Μοντέλο των Διδύμων Σπηραγγών

Όπως αναφέρθηκε στην αρχή αυτού του κεφαλαίου, για την δημιουργία του μοντέλου αυτού χρησιμοποιήθηκαν δύο υπολογιστικά προγράμματα:

- το γεωστατιστικό – σχεδιαστικό λογισμικό Surpac Vision και
- το λογισμικό πεπερασμένων διαφορών FLAC<sup>3D</sup>

Για τον υπολογισμό των τάσεων και των μετατοπίσεων της βραχομάζας κατά την διάνοιξη της σπηραγγας χρησιμοποιήθηκε η Μέθοδος των Πεπερασμένων Διαφορών (FDM) με το πρόγραμμα FLAC<sup>3D</sup> που αναπτύχθηκε από τον Dr. Peter Cundall και την Itasca Consulting Group, Inc. στην Minnesota, 1986.

Κατά τη μέθοδο αυτή η βραχώμαζα προσομοιώνεται με τη βοήθεια κατάλληλων τρισδιάστατων στοιχείων τα οποία μορφώνουν ένα πλέγμα. Κάθε στοιχείο συμπεριφέρεται με τον προκαθορισμένο νόμο τάσεων-παραμορφώσεων και τις εφαρμοζόμενες δυνάμεις ή συνοριακές συνθήκες. Η εκσκαφή προσομοιώνεται με την αφαίρεση των στοιχείων εκείνων του πλέγματος που καταλαμβάνουν το χώρο της

διατομής της. Σε κάθε κόμβο επιλύονται οι εξισώσεις κίνησης χρησιμοποιώντας την έννοια των διαδοχικών βημάτων για την προσέγγιση της τελικής λύσεως. Σε κάθε φάση εκσκαφής το πρόγραμμα χρησιμοποιεί για την επίλυση κατάλληλη επαναληπτική μέθοδο, θεωρώντας ως δεδομένα τα αποτελέσματα της προηγούμενης επίλυσης και τις μηχανικές-γεωμετρικές ιδιότητες του φορέα. Η επαναληπτική διαδικασία συνεχίζεται, μέχρις ότου το μέγεθος της “ανισορροπίας” εξωτερικών και εσωτερικών δυνάμεων γίνει μικρότερο από κάποιο προκαθορισμένο κλάσμα της αρχικής “ανισορροπίας”. Η αρχική “ανισορροπία” δημιουργείται λόγω των αφαιρέσεων (εκσκαφών) τμημάτων της σήραγγας.

Κατά την ανάλυση η βραχομάζα θεωρήθηκε ως *ομογενές συνεχές ελαστο-πλαστικό (Mohr-Coulomb) μέσο* και η εισαγωγή της αρχικής εντατικής κατάστασης έγινε με τη θεώρηση λιθοστατικών τάσεων. Συγκεκριμένα ο προσδιορισμός των γεωτεχνικών παραμέτρων της βραχομάζας έγινε σύμφωνα με τις θεωρήσεις

- ο λόγος Poisson της βραχομάζας θεωρήθηκε ίσος με 0.3, ενώ το μέτρο ελαστικότητας  $E$  υπολογίστηκε με την χρήση του ακόλουθου εμπειρικού νόμου των Serafim και Pereira [12]

$$E = 10^{\frac{RMR-10}{40}}$$

- η συνοχή  $C$  της βραχομάζας συσχετίστηκε με το RMR με την χρήση γραμμικής παρεμβολής, σύμφωνα με τον Bieniawsky [13] και προέκυψε η παρακάτω εξίσωση:

$$C = 0.005 \cdot RMR \quad [MPa]$$

- η γωνία εσωτερικής τριβής της βραχομάζας υπολογίστηκε από το RMR με την χρήση της εμπειρικής σχέσης του Trueman [14]

$$\varphi = 0.5 \cdot RMR + 5 \quad [deg]$$

- τέλος η γωνία διασταλτικότητας  $\psi$  θεωρήθηκε ίση με το μηδέν

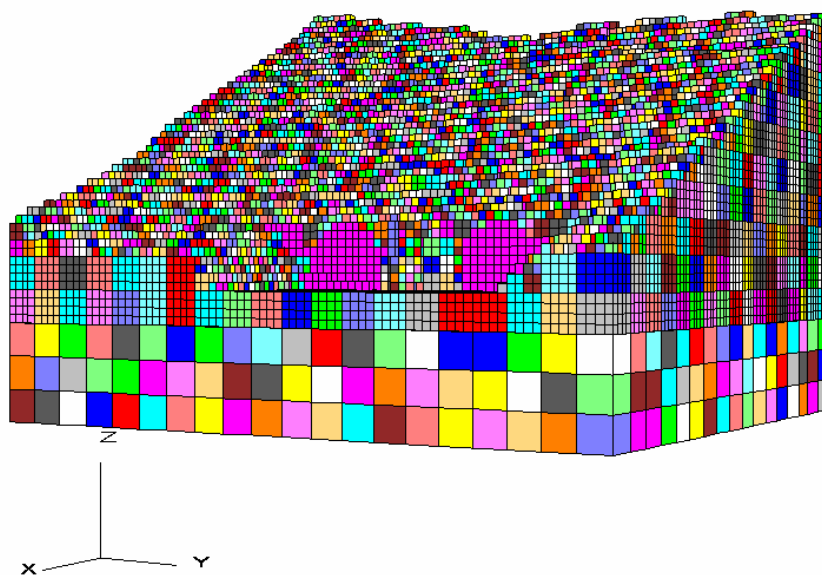
Τα βήματα που ακολουθήθηκαν στην κατάστρωση και ανάλυση του προβλήματος, επιγραμματικά αναφέρονται στη συνέχεια.

- Εισαγωγή γεωμετρίας, συνδεσμολογίας και μηχανικών ιδιοτήτων στοιχείων και οριακών συνθηκών προσομοιώματος. **Για την μεταφορά των συντεταγμένων των blocks καθώς και των μεταβλητών που υπολογίστηκαν με την μέθοδο**

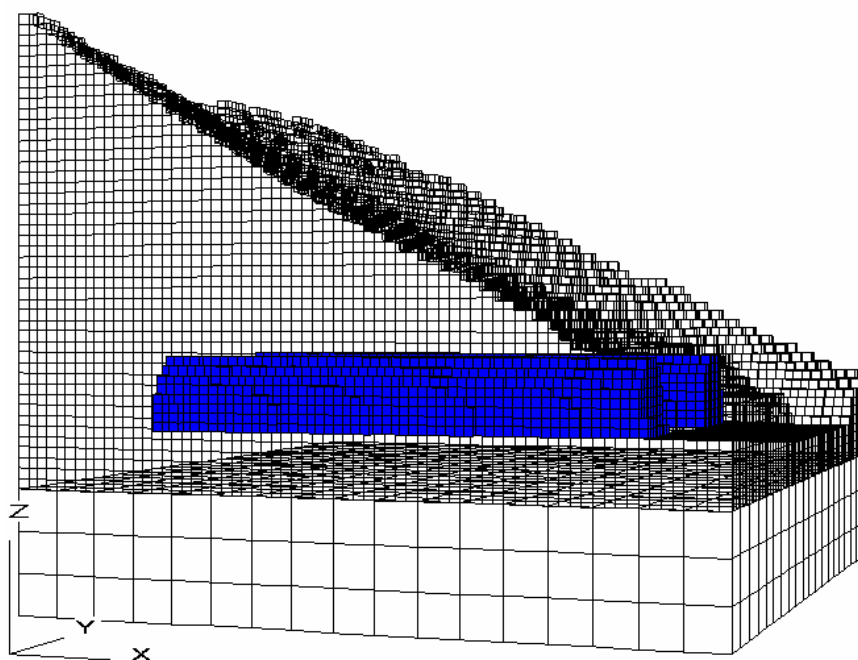
**kriging από το Surpac, στο FLAC<sup>3D</sup> ήταν αναγκαία η δημιουργία μιας ρουτίνας σε γλώσσα προγραμματισμού C++.**

- Προσομοίωση της αρχικής εντατικής κατάστασης (φυσικό πεδίο τάσεων) με παραδοχή μόνο του ιδίου βάρους της βραχομάζας. Στο στάδιο αυτό επιλύθηκε το προσομοίωμα υπό την επίδραση της βαρύτητας μέχρι την αποκατάσταση ισορροπίας, με εφαρμογή κυλίσεων στις πλευρές και στη βάση του μοντέλου.
- Προσομοίωση της εκσκαφής των 50 πρώτων μέτρων των σηράγγων μέχρι την αποκατάσταση ισορροπίας.

Το πλέγμα των πεπερασμένων ογκοτεμαχίων που μεταφέρθηκε από το Surpac στο FLAC<sup>3D</sup>, παρουσιάζεται στο Σχ. 4.13α, όπου διακρίνονται στοιχεία διαστάσεων 1.25x1.25x1.25 m και 5x5x5 m στο επάνω και στο κάτω τμήμα του μοντέλου αντίστοιχα. Η επιλογή χρήσης δύο τύπων στοιχείων διαφορετικών διαστάσεων αντί του ενός ήταν αναγκαία για την επίτευξη μεγαλύτερης ακρίβειας των αποτελεσμάτων στη γειτονιά των σηράγγων. Επιπλέον η επίλυση του αριθμητικού μοντέλου για πολύ μεγάλο αριθμό στοιχείων είναι αδύνατη. Αναφέρεται χαρακτηριστικά πως το συγκεκριμένο μοντέλο αποτελείται από 123496 στοιχεία κυβικού σχήματος.



(α)



(β)

**Σχήμα 4.13:** (α) τριδιάστατο πλέγμα πεπερασμένων διαφορών που αναπαριστά την γεωμετρία που εισάχθηκε στο FLAC3D από το SURPAC και (β) το πλέγμα του μοντέλου με τις δίδυμες σήραγγες.

Στα Σχ. 4.14α και 4.14β παρουσιάζεται σε κάθετη τομή η κατανομή της συνοχής της βραχώμαζας στην περιοχή των σηράγγων καθώς και γύρω από αυτές.

#### FLAC3D 2.10

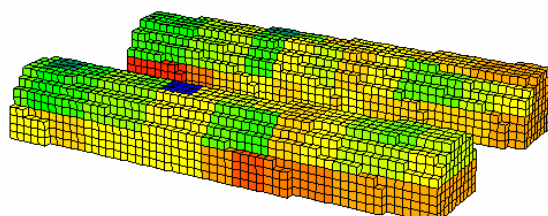
Step 8085 Model Perspective  
15:36:39 Wed Sep 29 2004

|                  |             |
|------------------|-------------|
| Center:          | Rotation:   |
| X: 2.656e+002    | X: 20.000   |
| Y: 5.353e+003    | Y: 0.000    |
| Z: 9.289e+001    | Z: 150.000  |
| Dist: 2.850e+002 | Mag: 1      |
|                  | Ang: 22.500 |

#### Block Contour of cohesion

|                            |
|----------------------------|
| 1.8485e+005 to 1.8500e+005 |
| 1.9000e+005 to 1.9500e+005 |
| 2.0000e+005 to 2.0500e+005 |
| 2.1000e+005 to 2.1500e+005 |
| 2.2000e+005 to 2.2500e+005 |
| 2.3000e+005 to 2.3500e+005 |
| 2.4000e+005 to 2.4500e+005 |
| 2.5000e+005 to 2.5500e+005 |
| 2.5500e+005 to 2.5770e+005 |

Interval = 5.0e+003



(α)

### FLAC3D 2.10

Step 8065 Model Perspective  
11:35:40 Sat Oct 02 2004

|                  |              |
|------------------|--------------|
| Center:          | Rotation:    |
| X: 2.675e+002    | X: 0.000     |
| Y: 5.350e+003    | Y: 0.000     |
| Z: 1.035e+002    | Z: 80.000    |
| Dist: 2.650e+002 | Mag.: 1      |
|                  | Ang.: 22.500 |

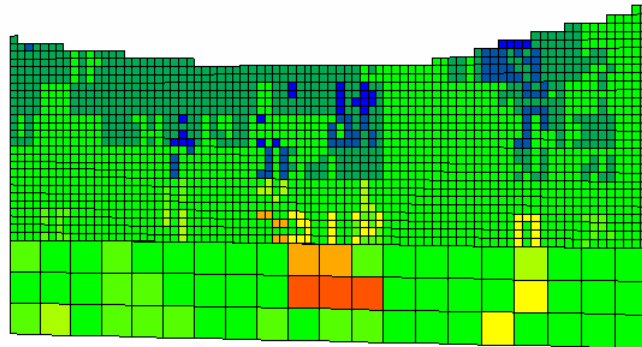
|               |                |
|---------------|----------------|
| Plane Origin: | Plane Normal:  |
| X: 2.650e+002 | X: -1.000e+000 |
| Y: 5.350e+003 | Y: -1.837e-016 |
| Z: 1.035e+002 | Z: 6.123e-017  |

#### Block Contour of young

Plane: on

|                            |
|----------------------------|
| 1.2517e+009 to 2.5000e+009 |
| 2.5000e+009 to 5.0000e+009 |
| 5.0000e+009 to 7.5000e+009 |
| 7.5000e+009 to 1.0000e+010 |
| 1.0000e+010 to 1.2500e+010 |
| 1.2500e+010 to 1.5000e+010 |
| 1.5000e+010 to 1.7500e+010 |
| 1.7500e+010 to 2.0000e+010 |
| 2.0000e+010 to 2.1540e+010 |

Interval = 2.5e+009



(β)

**Σχήμα 4.14:** (α) αναπαράσταση της υπολογισμένης κατανομής της συνοχής  $C$ , και (β) κάθετη τομή  $B - N$  του πλέγματος των πεπερασμένων διαφορών και αναπαράσταση της ανομοιογενούς κατανομής του μέτρου ελαστικότητας  $E$ .

Μετά από την ολοκλήρωση της αριθμητικής ανάλυσης τα αποτελέσματα μπορούν να απεικονιστούν με τη μορφή γραφικών σε τρισδιάστατη ή διδιάστατη (τομές) προοπτική. Ενδεικτικά, παρουσιάζονται οι κατακόρυφες μετατοπίσεις καθώς και η μεταβολή της διατμητικής παραμόρφωσης στα Σχ. 4.15 β, γ αντίστοιχα.



### FLAC3D 2.10

Step 13094: Model Perspective  
16:12:45 Wed Sep 29 2004

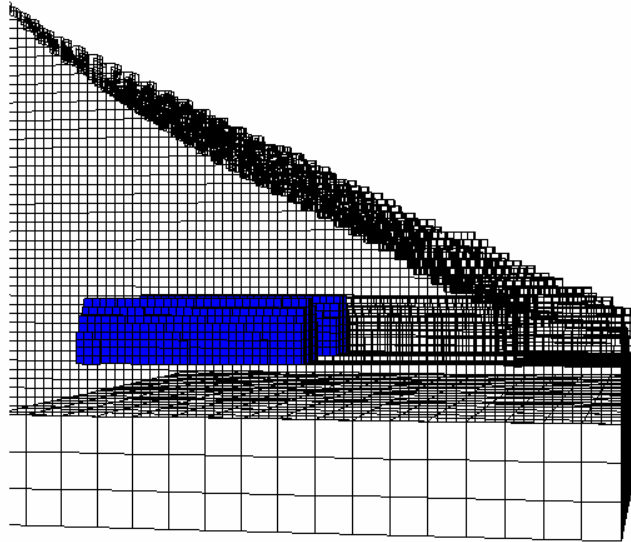
|                  |              |
|------------------|--------------|
| Center:          | Rotation:    |
| X: 2.675e+002    | X: 0.000     |
| Y: 5.350e+003    | Y: 0.000     |
| Z: 1.035e+002    | Z: 360.000   |
| Dist: 2.850e+002 | Mag.: 1      |
|                  | Ang.: 22.500 |

Sketch

Magfac = 0.000e+000  
Linestyle

Block Group

■ Tunnels



(a)

### FLAC3D 2.10

Step 13094: Model Perspective  
16:17:36 Wed Sep 29 2004

|                  |              |
|------------------|--------------|
| Center:          | Rotation:    |
| X: 2.675e+002    | X: 359.865   |
| Y: 5.350e+003    | Y: 359.922   |
| Z: 1.035e+002    | Z: 88.165    |
| Dist: 3.284e+002 | Mag.: 1      |
|                  | Ang.: 22.500 |

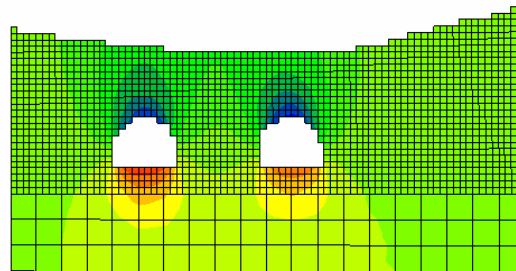
|               |                |
|---------------|----------------|
| Plane Origin: | Plane Normal:  |
| X: 2.650e+002 | X: -1.000e+000 |
| Y: 5.350e+003 | Y: -1.837e-016 |
| Z: 1.035e+002 | Z: 6.123e-017  |

Contour of Z-Displacement

Plane: on  
Magfac = 0.000e+000

|   |                              |
|---|------------------------------|
| ■ | -6.2545e-004 to -6.0000e-004 |
| ■ | -6.0000e-004 to -5.0000e-004 |
| ■ | -5.0000e-004 to -4.0000e-004 |
| ■ | -4.0000e-004 to -3.0000e-004 |
| ■ | -3.0000e-004 to -2.0000e-004 |
| ■ | -2.0000e-004 to -1.0000e-004 |
| ■ | -1.0000e-004 to 0.0000e+000  |
| ■ | 0.0000e+000 to 1.0000e-004   |
| ■ | 1.0000e-004 to 2.0000e-004   |
| ■ | 2.0000e-004 to 3.0000e-004   |
| ■ | 3.0000e-004 to 4.0000e-004   |
| ■ | 4.0000e-004 to 4.6017e-004   |

Interval = 1.0e-004



(b)

**FLAC3D 2.10**

Step 13094 Model Perspective  
16:19:23 Wed Sep 29 2004

---

|                  |              |
|------------------|--------------|
| Center:          | Rotation:    |
| X: 2.675e+002    | X: 359.665   |
| Y: 5.350e+003    | Y: 359.622   |
| Z: 1.035e+002    | Z: 88.165    |
| Dist: 3.284e+002 | Mag.: 1      |
|                  | Ang.: 22.500 |

---

|               |                |
|---------------|----------------|
| Plane Origin: | Plane Normal:  |
| X: 2.650e+002 | X: -1.000e+000 |
| Y: 5.350e+003 | Y: -1.637e-016 |
| Z: 1.035e+002 | Z: 6.123e-017  |

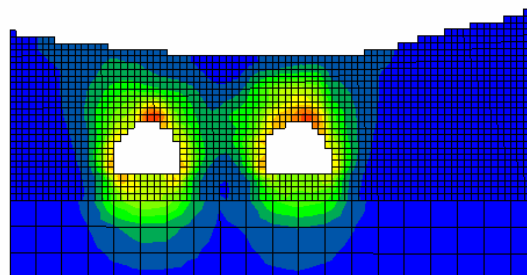
---

**Contour of Shear Strain Increment**

Plane: on  
Magfac = 0.000e+000  
Gradient Calculation

|                            |
|----------------------------|
| 5.1572e-007 to 5.0000e-006 |
| 5.0000e-006 to 1.0000e-005 |
| 1.0000e-005 to 1.5000e-005 |
| 1.5000e-005 to 2.0000e-005 |
| 2.0000e-005 to 2.5000e-005 |
| 2.5000e-005 to 3.0000e-005 |
| 3.0000e-005 to 3.5000e-005 |
| 3.5000e-005 to 4.0000e-005 |
| 4.0000e-005 to 4.5000e-005 |
| 4.5000e-005 to 5.0000e-005 |
| 5.0000e-005 to 5.4526e-005 |

Interval = 5.0e-006



(γ)

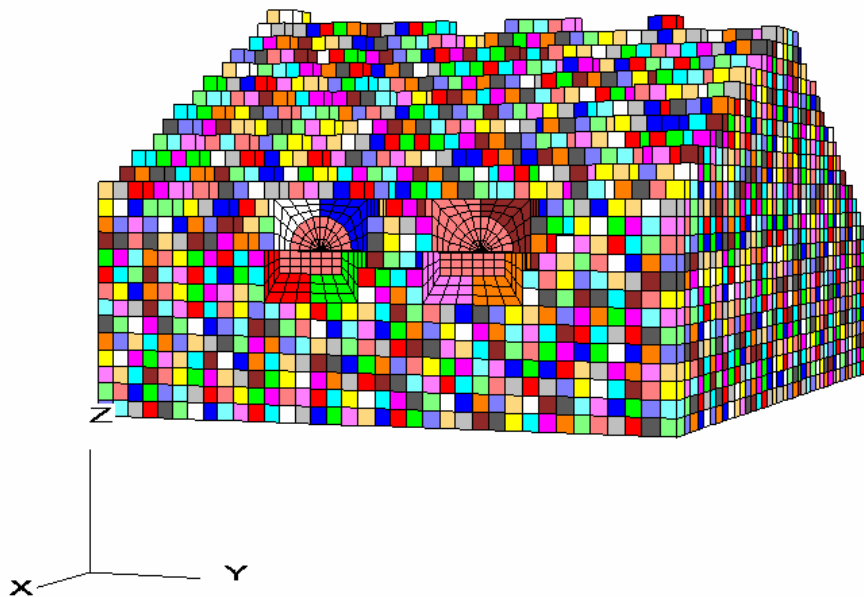
**Σχήμα 4.15:** Απόψεις (α) του μοντέλου των σπηράγγων μετά την διάνοιξη των πρώτων 50 μέτρων, (β) της κατακόρυφης μετατόπισης και (γ) της shear strain γύρω από την περιοχή των σπηράγγων.

Πρέπει εδώ να σημειωθεί πως τα κυβικά στοιχεία που κατασκευάστηκαν στο Surpac, έχουν το μειονέκτημα, να δημιουργούν ανώμαλες επιφάνειες στο σύνορο των σπηράγγων. Επιφάνειες δηλαδή, που ενώ θα έπρεπε να είναι καμπύλες, περιγράφονται πλέον από ένα σύνολο ευθυγράμμων τμημάτων, γεγονός που δημιουργεί πρόβλημα κυρίως κατά το στάδιο σχεδιασμού της υποστήριξης των σπηράγγων. Αυτό το πρόβλημα είναι δυνατό να αντιμετωπισθεί με δύο τρόπους. Είτε μειώνοντας πάρα πολύ τις διαστάσεις των στοιχείων του μοντέλου, κάτι που αυξάνει απαγορευτικά το χρόνο επίλυσης, είτε ακολουθώντας την διαδικασία που περιγράφεται στη συνέχεια.

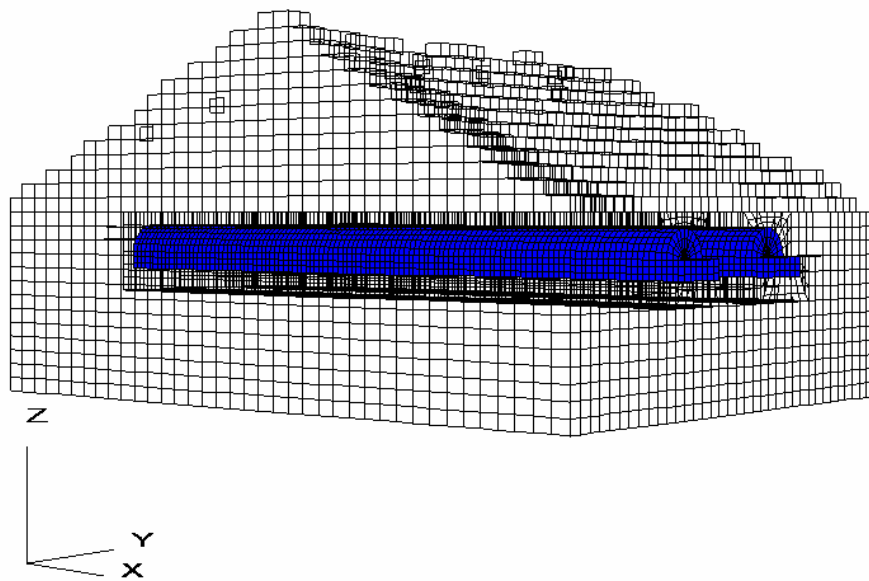
Οι σπήραγγες τώρα κατασκευάζονται με την χρήση δύο κατάλληλων ακτινικών στοιχείων του FLAC<sup>3D</sup>. Στις διαστάσεις των στοιχείων αυτών, προσαρμόζονται πλέον οι διαστάσεις των στοιχείων που κατασκευάζονται στο Surpac. Για το λόγο αυτό, είναι αναγκαία η σχεδίαση δύο πλέον μοντέλων, που παρουσιάζονται στο Σχ.17α. Ένα για την

περιοχή των σπήραγγων και ένα με διαστάσεις 4x3x3 μέτρα για την περιοχή γύρω από αυτές.

Οι διαστάσεις των στοιχείων των δύο αυτών περιοχών είναι 4x9x9 μέτρα. Το μειονέκτημα σε αυτή την περίπτωση είναι πως ήταν αδύνατος ο σχεδιασμός της καμπυλότητας που έχουν οι σήραγγες κατά τον άξονα τους, λόγω του μεγάλου αριθμού των στοιχείων που χρησιμοποιήθηκαν. Το τελικό πλέγμα και οι σήραγγες με ευθύγραμμο πλέον άξονα, παρουσιάζονται στο Σχ. 4.16β. Στην περίπτωση αυτή το τριδιάστατο μοντέλο αποτελείται από 50123 στοιχεία, αριθμό πολύ μικρότερο από αυτό του πρώτου, γεγονός που επιταχύνει αρκετά την επίλυση με την μέθοδο των πεπερασμένων διαφορών. Μετά την επιτυχή μεταφορά του γεωστατιστικού μοντέλου στο  $FLAC^{3D}$ , είναι δυνατός ο υπολογισμός και η παρουσίαση οποιασδήποτε παραμέτρου της βραχώμαζας. Σαν παράδειγμα, παρουσιάζεται η κατανομή της συνοχής και των κάθετων μετατοπίσεων γύρω από τις σήραγγες στα Σχ. 17α και β αντίστοιχα.



(α)



(β)

**Σχήμα 4.16α, β:** απεικόνιση του τριδιάστατου μοντέλου πεπερασμένων διαφορών αποτελούμενο από κυλινδρικού και κυβικού σχήματος στοιχεία και (β) κατακόρυφη τομή με διεύθυνση B – N όπου απεικονίζεται η κατανομή της συνοχής.

#### FLAC3D 2.10

Step 6675: Model Perspective  
13:04:40 Thu Sep 30 2004

|                  |              |
|------------------|--------------|
| Center:          | Rotation:    |
| X: 2.200e+002    | X: 0.384     |
| Y: 5.355e+003    | Y: 0.000     |
| Z: 1.010e+002    | Z: 79.932    |
| Dist: 4.520e+002 | Mag.: 1.4    |
|                  | Ang.: 22.500 |

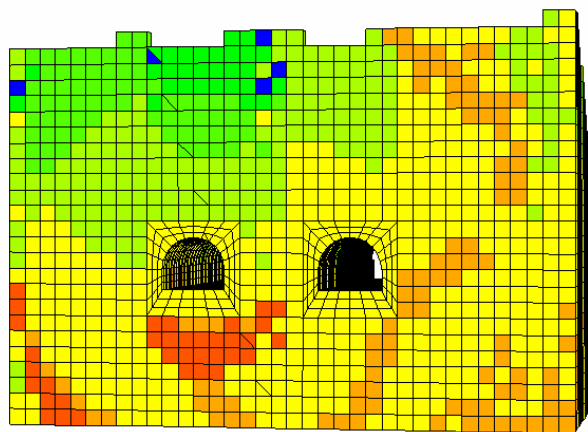
|               |                |
|---------------|----------------|
| Plane Origin: | Plane Normal:  |
| X: 2.200e+002 | X: -1.000e+000 |
| Y: 5.350e+003 | Y: -1.837e-016 |
| Z: 1.010e+002 | Z: 6.123e-017  |

#### Block Contour of cohesion

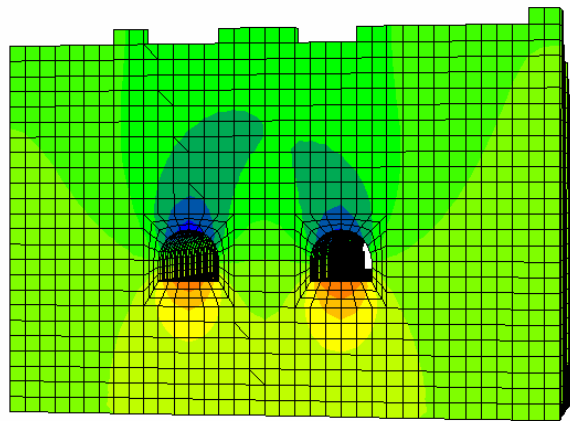
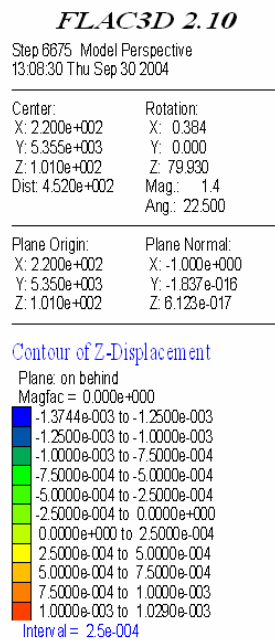
Plane: on behind

|                            |
|----------------------------|
| 8.3000e+004 to 1.0000e+005 |
| 1.0000e+005 to 1.2500e+005 |
| 1.2500e+005 to 1.5000e+005 |
| 1.5000e+005 to 1.7500e+005 |
| 1.7500e+005 to 2.0000e+005 |
| 2.0000e+005 to 2.2500e+005 |
| 2.2500e+005 to 2.5000e+005 |
| 2.5000e+005 to 2.7500e+005 |
| 2.7500e+005 to 3.0000e+005 |
| 3.0000e+005 to 3.1665e+005 |

Interval = 2.5e+004



(α)



(β)

**Σχήμα 4.17:** απεικόνιση (α) της κατανομής της συνοχής στο εσωτερικό των κυβικών στοιχείων που συνθέτουν το τριδιάστατο πλέγμα και (β) της κατακόρυφης μετατόπισης.

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5    Συμπεράσματα – Προτάσεις

Τα αποτελέσματα οποιασδήποτε γεωτεχνικής ανάλυσης εξαρτώνται κυρίως από την αρχική υπόθεση στην οποία βασίζεται. Μέχρι σήμερα όλες οι γεωτεχνικές αναλύσεις θεωρούν πως οι γεωλογικοί σχηματισμοί είναι ομοιογενείς. Ο σκοπός αυτή της εργασίας είναι (α) να δείξει πως η χωρική ανομοιογένεια των γεωτεχνικών παραμέτρων μπορεί να ποσοτικοποιηθεί και (β) να συνδέσει γεωστατιστική μέθοδο πρόβλεψης kriging με τα αριθμητικά μοντέλα που χρησιμοποιούνται για την ανάλυση τάσης – παραμόρφωσης στις υπόγειες εκσκαφές.

Τα συμπεράσματα από την μελέτη αυτή αναφέρονται στην συνέχεια:

1. η εγγενής χωρική ετερογένεια των μηχανικών ιδιοτήτων της βραχομάζας μπορεί να προσομοιωθεί πλέον με τυποποιημένο τρόπο με βάση τη γεωστατιστική, χωρίς να επαφίεμεθα μόνο σε διάφορες αυθαίρετες κρίσεις.
2. Τα ημι –βαριογράμματα παρουσίασαν αρκετά καλά αποτελέσματα για όλες τις παραμέτρους που μελετήθηκαν και για το λόγο αυτό η τεχνική του συνήθους kriging επιλέχθηκε ως η καλύτερη μέθοδος πρόβλεψης. Το πλεονέκτημα της μεθόδου αυτής είναι πως υπολογίζει τα διάφορα επίπεδα εμπιστοσύνης των προβλέψεων που δίνει και επιπλέον ελαχιστοποιεί το σφάλμα πρόβλεψης. Συμπερασματικά μπορούμε να πούμε πως οι γεωτεχνικές παράμετροι σχεδιασμού, μπορούν να θεωρηθούν ως χωρικές μεταβλητές με συγκεκριμένη δομή και να προβλεφθούν οι τιμές των σε άγνωστες περιοχές μεταξύ των θέσεων των μετρήσεων.
3. Το γεωτεχνικό ογκομετρικό μοντέλο (BM) των σήραγγων μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τον σχεδιασμό της υπόγειας εκσκαφής.
4. Τέλος, το προτεινόμενο ολοκληρωμένο γεωστατιστικό-αριθμητικό μοντέλο μπορεί να αποτελέσει εργαλείο πρόβλεψης των αναμενόμενων γεωτεχνικών συνθηκών και το εντατικό – παραμορφωσιακό πεδίο μπροστά από το μέτωπο της σήραγγας και να ελέγχεται συνεχώς κατά την διάρκεια εκσκαφής, αναβαθμίζοντας ή διορθώνοντας το αρχικό μοντέλο με νέα στοιχεία. Η τελευταία αυτή προσέγγιση αποτελεί σήμερα και την κεντρική ιδέα της «παρατηρησιακής μεθόδου» στην σήραγγοποιία και στο σχεδιασμό και κατασκευή υπογείων εκμεταλλεύσεων. Συνεπώς, η Γεωστατιστική

μπορεί να «συζευχθεί» εύκολα με αυτή την νέα προσέγγιση της Μηχανικής των Υπογείων Έργων.

## ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- [1] Journel A.G. and Huijbregts, CH. J., Mining Geostatistics, Academic Press, London, 1978.
- [2] Isaaks E.H. and Srivastava R. M., Applied Geostatistics, Oxford University Press, New York, 1989.
- [3] Panet M., Understanding deformations in tunnels. In *Comprehensive Rock Engineering*, Vol. 1, Pergamon Press, Oxford, 1993, pp.663-690.
- [4] Negro A. and Queiroz B.I.P., Prediction and performance of soft ground tunnels. In *Geotechnical Aspects of Underground Construction in Soft Ground*, Balkema, Tokyo, Japan, 2000, pp. 409-418.
- [5] Surpac Software International (ed.), Users Reference - Generic Tools Reference - SSI Installation and Setup Manual. Belmont, WA (Surpac Software International, Inc.), 1995.
- [6] Itasca Consulting Group Inc., FLAC3D, Fast Lagrangian Analysis of Continua in 3 Dimensions: User's Guide, Minneapolis, Minnesota 55401 USA, 2002.
- [7] Bieniawski Z.T., Engineering rock mass classifications. Wiley, New York, 1989.
- [8] Barton N., Some new Q-value correlations to assist in site characterization and tunnel design, *Int. J. Rock Mech. & Min. Sci.*, 2002, **39**, pp. 185-216.
- [9] Hoek E., Marinos P. and Benissi M., Applicability of the Geological Strength Index (GSI) classification for very weak and sheared rock masses - The case of the Athens Schist formation, *Bulletin of the Engineering Geology and the Environment*, 1998, Vol 57, 151-160
- [10] Serafim J.L. and Pereira J.P., Considerations of the geomechanics classification of Bieniawski., *Proc. Int. Symp. on Engng Geol. And Underground Constr.*, LNEC, Lisboa, Portugal, 1983.
- [11] Bieniawski Z.T., The geomechanics classification in rock engineering applications, *Proc. 4th ISRM Congress*, Montreux, 1979, Vol. 2, pp. 41-48.
- [12] Trueman, R., An evaluation of strata support techniques in dual life gateroads. Ph.D. Thesis, University of Wales, Cardiff, 1988.



- [13] Probability, random variables, and stochastic processes / Athanasios Papoulis, New York :McGraw-Hill, c1991
- [14] Ερευνητικό πρόγραμμα (QUARRYSTAT): Μελέτη προσδιορισμού θέσεων ανόρυξης γεωτρήσεων προγραμματισμού παραγωγής στο λατομείο Καμαρίου. Πολυτεχνείο Κρήτης, 16/05/2003 – 15/09/2003