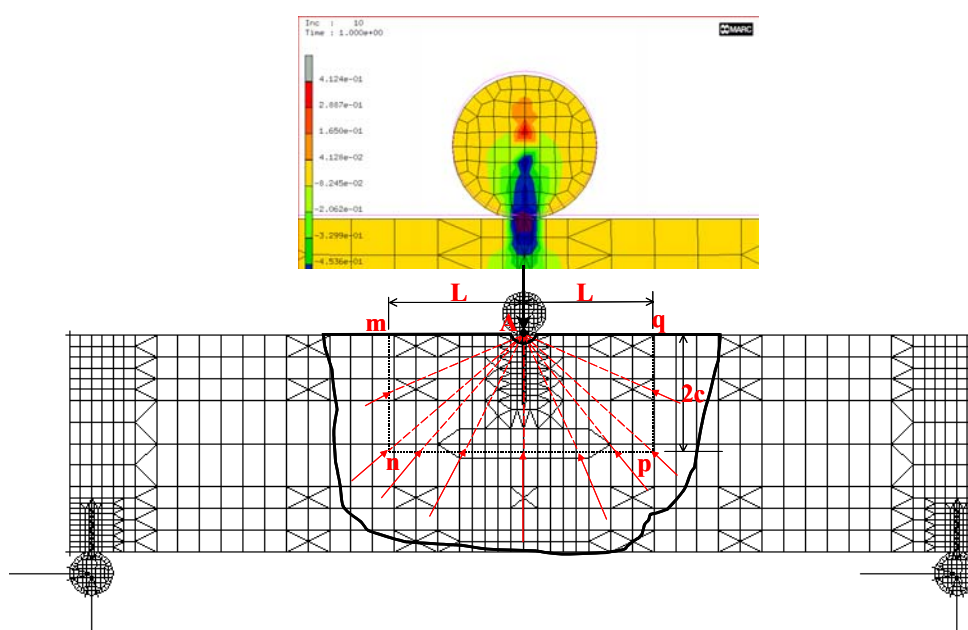




ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΟΡΥΚΤΩΝ ΠΟΡΩΝ

*ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΗΣΗ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ ΤΗΣ ΚΑΜΨΗΣ ΤΡΙΩΝ
ΣΗΜΕΙΩΝ-ΑΝΑΛΥΣΗ ΚΑΙ ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΜΕ ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΑ
ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ*



ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

ΕΥΣΤΑΘΙΟΣ Χ. ΠΑΠΑΘΕΟΔΩΡΟΥ

ΜΗΧΑΝΙΚΟΣ ΟΡΥΚΤΩΝ ΠΟΡΩΝ

Εξεταστική Επιτροπή

Ζαχαρίας Αγιουτάντης, Καθηγητής (Επιβλέπων)

Σταύρος Κουρκουλής, Επίκουρος Καθηγητής (Ε.Μ.Π)

Γεώργιος Εξαδάκτυλος, Αναπληρωτής Καθηγητής

Χανιά

Ιούνιος, 2004

Περίληψη

Αντικείμενο της παρούσας μεταπτυχιακής διατριβής είναι η ανάλυση της δοκιμής κάμψης τριών σημείων. Η μελέτη της δοκιμής πραγματοποιείται τόσο πειραματικά όσο και αριθμητικά με την Μέθοδο των Πεπερασμένων Στοιχείων και χρησιμοποιούνται δοκίμια από πετρώματα, τα οποία έχουν ευρεία χρήση στην αναστήλωση σημαντικών ιστορικών μνημείων στον ελλαδικό χώρο. Πιο συγκεκριμένα, η μελέτη επικεντρώνεται στο Διονυσιακό μάρμαρο που χρησιμοποιείται στην αναστήλωση του ναού του Παρθενώνα στην Ακρόπολη της Αθήνας και στον Κογχυλιόλιθο που χρησιμοποιείται στην αναστήλωση του ναού του Δία στην αρχαία Ολυμπία.

Ο προσδιορισμός του πεδίου τάσεων και παραμορφώσεων κατά την κάμψη τριών σημείων, αποτελεί ένα πρόβλημα για το οποίο δεν έχει βρεθεί ακόμα λύση παρά τις προσπάθειες διαφόρων επιστημόνων και μελετητών κατά το παρελθόν. Με την εφαρμογή της Μεθόδου των Πεπερασμένων Στοιχείων στην παρούσα εργασία, επιχειρείται η συμβολή προς την κατεύθυνση της επίλυσης του προβλήματος και τα αποτελέσματα που προκύπτουν είναι ιδιαίτερα σημαντικά.

Το πρόβλημα της κάμψης τριών σημείων προσεγγίζεται θεωρητικά με την αναφορά των αρχών της θεωρίας της απλής κάμψης, των θεωριών που έχουν αναπτυχθεί μέχρι σήμερα για την επίδραση του συγκεντρωμένου φορτίου και των αρχών της θραυστομηχανικής, σχετικά με την εκκίνηση και διάδοση των ρωγμών. Επίσης αναφέρονται οι αρχές της ελαστικής συμπεριφοράς που αφορούν τα υλικά με τα οποία ασχολείται η παρούσα εργασία.

Στη συνέχεια, περιγράφονται οι φυσικές και οι μηχανικές ιδιότητες του Διονυσιακού μαρμάρου και του Κογχυλιόλιθου, ενώ περιγράφεται λεπτομερώς η πειραματική διαδικασία της δοκιμής κάμψης τριών σημείων στα παραπάνω πετρώματα.

Ακολουθεί η αριθμητική επίλυση της δοκιμής με την Μέθοδο των Πεπερασμένων Στοιχείων, η οποία πραγματοποιήθηκε με το λογισμικό M.S.C. *Marc-Mentat*. Το Διονυσιακό μάρμαρο προσομοιώθηκε σαν ελαστικό εγκαρσίως ισότροπο υλικό, αλλά και σαν ελαστικό τέλεια πλαστικό υλικό με την εφαρμογή του παραβολικού κριτηρίου

αστοχίας Mohr-Coulomb, ενώ ο Κογχυλιόλιθος προσομοιώθηκε σαν ελαστικό τέλεια πλαστικό υλικό, επίσης με την εφαρμογή του παραβολικού κριτηρίου αστοχίας Mohr-Coulomb. Η αριθμητική επίλυση πραγματοποιήθηκε σε δυο διαστάσεις με την παραδοχή της θεώρησης επίπεδης παραμόρφωσης, ενώ χρησιμοποιήθηκαν στοιχεία επαφής για την προσομοίωση της διεπιφάνειας μεταξύ πετρώματος και χάλυβα. Η διακριτοποίηση των μοντέλων έγινε με τρόπο ώστε οι διαστάσεις τους να συμπίπτουν με αυτές των πραγματικών δοκιμών. Τέλος, συγκρίνονται τα αποτελέσματα που προκύπτουν από την πειραματική μελέτη της δοκιμής, με τα αποτελέσματα της αριθμητικής επίλυσης σχετικά με την κατανομή του πεδίου τάσεων και παραμορφώσεων.

Abstract

The subject of this master thesis is the study of the three point bending test. This study is carried out numerically using the Finite Element Method and the results are then compared with those obtained from a series of 3PB tests with prismatic specimens. The experimental study was conducted using rock specimens that are widely used in the restoration of important historical monuments in Greece. More specifically the study focuses on Dionysos Marble, which is used in the restoration of the Parthenon temple on the Acropolis of Athens and Conchylites shellstone, which is used in the restoration of the temple of Zeus at the ancient Olympia site.

The determination of the stress-strain fields in a relatively short prismatic beam under three point bending is a difficult task and a closed form solution does not exist yet, despite several attempts of many scientists in the past. In this study an attempt is made to find the solution of the problem with the use of the Finite Element Method and the results are quite interesting.

The principles of the simple bending theory, the theories of the concentrated load and the principles of fracture mechanics relative to initiation and expansion of cracks are analysed. Also the principles of elastic behaviour concerning the materials used in the present study are mentioned. Then the physical and mechanical properties of Dionysos marble and Conchylites shellstone are described, while the experimental study procedure for the three point bending tests of the rock specimens is explained in detail.

The numerical simulation employing the Finite Element Method was carried out using the M.S.C. Marc-Mentat software. Dionysos marble is modeled as a transversely isotropic material, and as a linearly elastic-perfectly plastic material obeying a parabolic Mohr-Coulomb failure criterion. The Conchylites shellstone is also modeled as a linearly elastic-perfectly plastic material obeying a parabolic Mohr-Coulomb failure criterion. The numerical study is carried out in two dimensions, while it is assumed that plane strain conditions prevail. Contact elements are introduced for the simulation of the interface between rock specimens and steel. The results obtained from numerical analysis are compared with the ones obtained from the experimental study and the agreement is proved satisfactory.

Πρόλογος

Για την διεκπεραίωση αυτής της μεταπτυχιακής διατριβής, είχα την ουσιαστική βοήθεια και συμπαράσταση ορισμένων προσώπων τα οποία θα ήθελα να ευχαριστήσω:

Τον Επιβλέποντα της μεταπτυχιακής διατριβής, Καθηγητή του Πολυτεχνείου Κρήτης κ. Ζαχαρία Αγιουτάντη για την καθοδήγηση και τις ουσιαστικές συμβουλές και παρατηρήσεις του ιδιαίτερα σε θέματα αριθμητικής επίλυσης με την Μέθοδο των Πεπερασμένων Στοιχείων, που ήταν πολύτιμες για την εκπόνηση της παρούσας εργασίας. Θα ήθελα επίσης να τον ευχαριστήσω και για τις σημαντικές του παρατηρήσεις στη συγγραφή του κειμένου.

Τον Επίκουρο Καθηγητή του Εθνικού Μετσόβειου Πολυτεχνείου κ. Σταύρο Κουρκουλή, ο οποίος διέθεσε τα απαιτούμενα δεδομένα της πειραματικής μελέτης των δοκιμών κάμψης από την έρευνα που εκπονεί στο εργαστήριο αντοχής υλικών του Ε.Μ.Π και ο οποίος με βοήθησε σημαντικά στην κατανόηση της πειραματικής μελέτης των δοκιμών κάμψης τριών σημείων. Ευχαριστίες, οφείλω επίσης και για τις παρατηρήσεις του στη συγγραφή του κειμένου, καθώς και για την συμμετοχή του στην αξιολόγηση.

Τον Αναπληρωτή Καθηγητή του Πολυτεχνείου Κρήτης κ. Γεώργιο Εξαδάκτυλο, για την συμμετοχή του στην αξιολόγηση της εργασίας αυτής.

Τον Μηχανικό Μεταλλείων κ. Μαυριγιαννάκη Στυλιανό, για την ουσιαστική συνεργασία που είχαμε κατά την διάρκεια φοίτησης μου στο μεταπτυχιακό πρόγραμμα σπουδών “Γεωτεχνολογία και Περιβάλλον” και για την βοήθεια του στην εκπόνηση αυτής της μεταπτυχιακής διατριβής.

Τέλος, ένα μεγάλο ευχαριστώ οφείλω στον πατέρα μου Χρήστο και τη μητέρα μου Ιωάννα, οι οποίοι με στήριξαν υλικά και ηθικά κατά την εφτάχρονη φοίτηση μου στο Πολυτεχνείο Κρήτης, την αδερφή μου Βασιλική και όλα τα αγαπημένα μου πρόσωπα.

Πίνακας Περιεχομένων

<u>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1</u>	1
<i>ΕΙΣΑΓΩΓΗ</i>	1
<u>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2</u>	4
<i>ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ ΤΗΣ</i>	
<i>ΚΑΜΨΗΣ ΤΡΙΩΝ ΣΗΜΕΙΩΝ</i>	4
2.1 ΑΠΛΗ ΘΕΩΡΙΑ ΚΑΜΨΗΣ	4
2.1.1 Απλή Κάμψη και μη Ομοιόμορφη Κάμψη	5
2.1.2 Καμπυλότητα μιας Δοκού	5
2.1.3 Διαμήκεις Παραμορφώσεις σε Δοκούς	7
2.1.4 Ορθές Τάσεις σε Δοκούς (Γραμμικά Ελαστικά Υλικά)	10
<i>Σχέση ροπής-καμπυλότητας</i>	11
<i>Εξίσωση κάμψης</i>	11
<i>Μέγιστες τάσεις στη διατομή</i>	12
2.1.5 Διατμητικές Τάσεις σε Δοκούς Ορθογωνικής Διατομής	13
<i>Υπολογισμός της εξίσωσης διάτμησης</i>	15
2.1.6 Κατανομή των Διατμητικών Τάσεων σε Ορθογωνική Δοκό	15
2.2 Η ΕΠΙΔΡΑΣΗ ΤΟΥ ΣΥΓΚΕΝΤΡΩΜΕΝΟΥ ΦΟΡΤΙΟΥ	17
2.2.1 Η Επίδραση του Συγκεντρωμένου Φορτίου στην	
<i>Περίπτωση Ισότροπων Υλικών</i>	18
2.2.2 Η Προσέγγιση Reissner για Εγκαρσίως Ισότροπα Υλικά	23
2.2.3 Κάμψη Τριών Σημείων υπό Συνθήκες Επίπεδης	
<i>Τάσης για Εγκαρσίως Ισότροπα Υλικά</i>	26
2.3 ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ ΑΣΤΟΧΙΑΣ ΜΕΣΩ ΤΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ ΘΡΑΥΣΤΟΜΗΧΑΝΙΚΗΣ	30
2.3.1 Θεωρία Griffith	31
2.3.2 Θεωρία Ενεργειακής Ισορροπίας του Griffith	32
<i>Εκκίνηση της ρωγμής και κρίσιμη ισορροπία</i>	37
<i>Τάση θραύσεως</i>	37
2.3.3 Ρυθμός Απελευθέρωσης Ενέργειας Παραμορφώσεων G	
και Αντίσταση σε Διάδοση Ρωγμής R	38

	<i>Αντοχή θραύσεως</i>	38
	<i>Αντίσταση σε διάδοση ρωγμής R</i>	39
2.3.4	Κριτήριο Τάσης Θραύσεως του Griffith	40
2.3.5	Περιορισμοί στην Εφαρμογή της Θεωρίας Griffith	43
2.3.6	Τασική Ανάλυση των Ρωγμών	43
	<i>Συντελεστής έντασης της τάσης</i>	44
	<i>Σχέση μεταξύ K και συνολικής απόκρισης</i>	48
	<i>Η επίδραση του πεπερασμένου μεγέθους</i>	52
	<i>Άνοιγμα χειλέων στην αιχμή της ρωγμής</i>	54
2.3.7	Συντελεστής Έντασης της Τάσης στην Κορυφή Εγκοπής	57
2.4	ΘΕΜΑΤΑ ΕΛΑΣΤΙΚΗΣ ΣΥΜΠΕΡΙΦΟΡΑΣ	58
2.4.1	Γραμμική Ισότροπη Ελαστικότητα	58
2.4.2	Γραμμική Ανισότροπη Ελαστικότητα	60
2.4.3	Ελαστοπλαστική Συμπεριφορά	62
	<i>Μονοαξονική συμπεριφορά ενός γραμμικά ελαστικού</i>	
	<i>τέλεια πλαστικού υλικού</i>	62
	<u>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3</u>	65
	<i>ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΥΛΙΚΩΝ</i>	65
3.1	ΤΟ ΔΙΟΝΥΣΙΑΚΟ ΜΑΡΜΑΡΟ	65
3.1.1	Φυσικές Ιδιότητες	65
3.1.2	Μηχανικές Ιδιότητες	66
3.1.3	Το Διονυσιακό Μάρμαρο υπό Άμεσο Εφελκυσμό	67
3.1.4	Η Συμπεριφορά του Μαρμάρου Διονύσου υπό Μονοαξονική και Τριαξονική Θλίψη	70
3.2	Ο ΚΟΓΧΥΛΙΟΛΙΘΟΣ	74
3.2.1	Φυσικές Ιδιότητες	74
3.2.2	Μηχανικές Ιδιότητες	75
	<u>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4</u>	78
	<i>ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΗ ΜΕΛΕΤΗ ΤΗΣ ΔΟΚΙΜΗΣ ΚΑΜΨΗΣ ΤΡΙΩΝ ΣΗΜΕΙΩΝ</i>	78
4.1	Η ΔΟΚΙΜΗ ΚΑΜΨΗΣ ΤΡΙΩΝ ΣΗΜΕΙΩΝ ΣΕ ΔΟΚΙΜΙΑ ΔΙΟΝΥΣΙΑΚΟΥ ΜΑΡΜΑΡΟΥ ΜΕ ΕΓΚΟΠΗ	78

4.2	Η ΔΟΚΙΜΗ ΚΑΜΨΗΣ ΤΡΙΩΝ ΣΗΜΕΙΩΝ ΣΕ ΔΟΚΙΜΙΑ ΚΟΓΧΥΛΙΟΛΙΘΟΥ	83
<u>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5</u>		86
<i>ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΕΠΙΛΥΣΗ ΤΗΣ ΔΟΚΙΜΗΣ ΚΑΜΨΗΣ ΤΡΙΩΝ ΣΗΜΕΙΩΝ ΜΕ ΤΗ ΜΕΘΟΔΟ ΤΩΝ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ</i>		86
5.1	Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ	86
5.2	ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΕΠΙΛΥΣΗ ΤΗΣ ΔΟΚΙΜΗΣ ΚΑΜΨΗΣ ΤΡΙΩΝ ΣΗΜΕΙΩΝ ΣΕ ΔΟΚΙΜΙΑ ΔΙΟΝΥΣΙΑΚΟΥ ΜΑΡΜΑΡΟΥ: ΕΛΑΣΤΟΠΛΑΣΤΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ	89
5.2.1	Γεωμετρία και Διακριτοποίηση του Μοντέλου	89
5.2.2	Συνοριακές Συνθήκες	91
5.2.3	Ιδιότητες Υλικών	92
5.2.4	Στοιχεία Επαφής Μεταξύ των Δύο Υλικών	93
5.2.5	Γεωμετρικές Ιδιότητες	94
5.2.6	Αποτελέσματα Αριθμητικής Επίλυσης	94
5.3	ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΕΠΙΛΥΣΗ ΤΗΣ ΔΟΚΙΜΗΣ ΚΑΜΨΗΣ ΤΡΙΩΝ ΣΗΜΕΙΩΝ ΣΕ ΔΟΚΙΜΙΑ ΔΙΟΝΥΣΙΑΚΟΥ ΜΑΡΜΑΡΟΥ: ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΕΛΑΣΤΙΚΟ ΕΓΚΑΡΣΙΩΣ ΙΣΟΤΡΟΠΟ ΜΟΝΤΕΛΟ	99
5.3.1	Γεωμετρία και Διακριτοποίηση του Μοντέλου	100
5.3.2	Συνοριακές Συνθήκες	101
5.3.3	Ιδιότητες Υλικών	101
5.3.4	Στοιχεία Επαφής Μεταξύ των Δύο Υλικών	102
5.3.5	Γεωμετρικές Ιδιότητες	103
5.3.6	Αποτελέσματα Αριθμητικής Επίλυσης	103
5.4	ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΕΠΙΛΥΣΗ ΤΗΣ ΔΟΚΙΜΗΣ ΚΑΜΨΗΣ ΤΡΙΩΝ ΣΗΜΕΙΩΝ ΣΕ ΔΟΚΙΜΙΑ ΚΟΓΧΥΛΙΟΛΙΘΟΥ: ΕΛΑΣΤΟΠΛΑΣΤΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ	108
5.4.1	Γεωμετρία και Διακριτοποίηση του Μοντέλου	108
5.4.2	Συνοριακές Συνθήκες	109
5.4.3	Ιδιότητες Υλικών	110
5.4.4	Στοιχεία Επαφής Μεταξύ των Δύο Υλικών	110
5.4.5	Γεωμετρικές Ιδιότητες	111
5.4.6	Αποτελέσματα Αριθμητικής Επίλυσης	111

<u>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6</u>	117
<i>ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΩΝ ΜΕΤΑΞΥ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ ΕΠΙΛΥΣΗΣ ΚΑΙ ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ</i>	117
6.1 ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΩΝ ΓΙΑ ΤΟ ΕΛΑΣΤΟΠΛΑΣΤΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΔΙΟΝΥΣΙΑΚΟΥ ΜΑΡΜΑΡΟΥ	117
6.2 ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΩΝ ΓΙΑ ΤΟ ΕΛΑΣΤΙΚΟ ΕΓΚΑΡΣΙΩΣ ΙΣΟΤΡΟΠΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΔΙΟΝΥΣΙΑΚΟΥ ΜΑΡΜΑΡΟΥ	119
6.3 ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΩΝ ΓΙΑ ΤΟ ΕΛΑΣΤΟΠΛΑΣΤΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΚΟΓΧΥΛΙΟΛΙΘΟΥ	121
<u>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7</u>	125
<i>ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ ΚΑΙ ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ</i>	125
7.1 ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ	125
7.2 ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ	132
<u>ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ</u>	133

Κατάλογος Σχημάτων

1.1:	Σχηματική αναπαράσταση του ναού του Παρθενώνα, στην οποία διακρίνονται τα επιστήλια τα οποία καταπονούνται σε κάμψη	2
1.2:	Στύλος στο ναό του Δία πριν και μετά την αναστήλωση του	3
2.1:	Η διάταξη του προβλήματος της απλής κάμψης (Gere & Timoshenko, 1997)	4
2.2:	Βέλος κάμψης της δοκού (Gere & Timoshenko, 1997)	6
2.3:	Παραμορφώσεις της δοκού σε απλή κάμψη (Gere & Timoshenko, 1997)	8
2.4:	Ορθές τάσεις σε δοκό γραμμικού ελαστικού υλικού (Gere & Timoshenko, 1997)	10
2.5:	α) Θετική καμπτική ροπή β) Αρνητική καμπτική ροπή (Gere & Timoshenko, 1997)	12
2.6:	Διατμητικές τάσεις σε δοκό ορθογωνικής διατομής (Gere & Timoshenko, 1997)	13
2.7:	Κάμψη δύο ξεχωριστών δοκών (Gere & Timoshenko, 1997)	14
2.8:	Κατανομή διατμητικών τάσεων σε δοκό ορθογωνικής διατομής α) Διατομή της δοκού β) Διάγραμμα στο οποίο διακρίνεται η παραβολική κατανομή των διατμητικών τάσεων στο ύψος της δοκού (Gere & Timoshenko, 1997)	16
2.9:	Ορθογωνική δοκός στηριζόμενη σε δύο κυλίνδρους, στην οποία εφαρμόζεται φορτίο στο μέσο τμήμα της, με έναν ίδιο τρίτο κύλινδρο (Timoshenko & Goodier, 1970)	18
2.10:	Η λύση του Stokes (Timoshenko & Goodier, 1970)	19
2.11:	α) Η διόρθωση Seewald για τις τάσεις β) Η διόρθωση Timoshenko για τα βέλη κάμψης (Exadaktylos & Kourkoulis, 2002)	23
2.12:	Η διάταξη του προβλήματος για την προσέγγιση Reissner (Exadaktylos & Kourkoulis, 2002)	23
2.13:	Η διάταξη του προβλήματος για την κάμψη τριών σημείων υπό συνθήκες επίπεδης τάσης (Exadaktylos & Kourkoulis, 2002)	26
2.14:	Η λύση για το ανισότροπο υλικό σύμφωνα με την παρούσα τεχνική θεωρία (Exadaktylos & Kourkoulis, 2002)	29
2.15:	Ελλειπτικό άνοιγμα σε μια απείρων διαστάσεων πλάκα που	

υπόκειται σε ομοιόμορφο εφελκυσμό (Whittaker et al., 1992)	31
2.16: Απείρων διαστάσεων πλάκα που περιέχει ένα ελλειπτικό άνοιγμα το οποίο υπόκειται σε ομοιόμορφη τάση σ (Whittaker et al., 1992)	34
2.17: Συνθήκες φόρτισης για την έναρξη της ρωγμής α) Σταθερή μετατόπιση β) Σταθερό φορτίο (Whittaker et al., 1992)	35
2.18: Σχηματική αναπαράσταση της προσέγγισης της ενεργειακής ισορροπίας Griffith για σταθερή μετατόπιση (Whittaker et al., 1992)	36
2.19: Ανοιχτή, επίπεδη υπό κλίση ελλειπτική ρωγμή που υπόκειται σε πολυαξονική θλίψη (Whittaker et al., 1992)	40
2.20: Το αρχικό και το τροποποιημένο κριτήριο θραύσης Griffith (Whittaker et al., 1992)	42
2.21: Το αρχικό και το τροποποιημένο κριτήριο Griffith σε μορφή φακέλου Mohr (Whittaker et al., 1992)	42
2.22: Προσδιορισμός της αρχής των αξόνων στην κορυφή της εγκοπής (Anderson, 1995)	43
2.23: Οι τρεις τύποι φόρτισης που μπορούν να εφαρμοστούν σε μια ρωγμή (Anderson, 1995)	44
2.24: Η κάθετη τάση στο επίπεδο της ρωγμής στον τύπο φόρτισης I (Anderson, 1995)	48
2.25: Ρωγμή μέσα στο σώμα απείρων διαστάσεων πλάκας η οποία υποβάλλεται σε εφελκυστική τάση (Anderson, 1995)	48
2.26: Ρωγμή στην μια ακμή μιας ημιαπείρων διαστάσεων πλάκας, η οποία υποβάλλεται σε εφελκυσμό (Anderson, 1995)	49
2.27: Σύγκριση των ανοιγμάτων των ρωγμών (crack opening displacements) για ρωγμή στην ακμή του σώματος και για ρωγμή μέσα στο σώμα (Anderson, 1995)	49
2.28: Ρωγμή μέσα πλάκα ημιαπείρων διαστάσεων για την γενική περίπτωση όπου η κύρια τάση δεν είναι κάθετη στο επίπεδο της ρωγμής (Anderson, 1995)	50
2.29: Κυκλική ρωγμή μέσα σε σώμα το οποίο υποβάλλεται σε εφελκυσμό (Anderson, 1995)	51
2.30: Συντελεστές έντασης της τάσης τύπου I για ελλειπτική και ημιελλειπτική ρωγμή. Οι λύσεις είναι σωστές μόνο όταν η ρωγμή είναι μικρή σε σχέση με τις διαστάσεις της πλάκας και όταν $a \leq c$ (Anderson, 1995)	52
2.31: Συγκέντρωση τάσης λόγω της ρωγμής μέσα σε πλάκα α) Πεπερασμένου πλάτους και β) Απείρου πλάτους (Anderson, 1995)	53

2.32:	Ομοαξονικές ρωγμές σε μια απείρων διαστάσεων πλάκα που υποβάλλεται σε εφελκυσμό (Anderson, 1995)	54
2.33:	CTOD. Μια αρχική αιχμηρή ρωγμή η οποία αμβλύνεται με την πλαστική παραμόρφωση με αποτέλεσμα μια πεπερασμένη μετατόπιση στην κορυφή της ρωγμής (Anderson, 1995)	55
2.34:	Προσδιορισμός του CTOD από την μετατόπιση της ρωγμής στην πλαστική ζώνη (Anderson, 1995)	55
2.35:	Διαφορετικοί προσδιορισμοί του CTOD α) Μετατόπιση στην κορυφή της ρωγμής β) Μετατόπιση στο σημείο τομής δύο κάθετων μεταξύ τους στην κορυφή της ρωγμής (Anderson, 1995)	56
2.36:	Τοπικό σύστημα συντεταγμένων για τα πεδία στην κορυφή της εγκοπής (Kourkoulis et al., 1999)	57
2.37:	Προσανατολισμός αξόνων για την θεώρηση εγκάρσιας ισοτροπίας (Potts & Zdravkovic, 1999)	60
2.38:	Μονοαξονική φόρτιση γραμμικά ελαστικού τέλεια πλαστικού υλικού (Potts & Zdravkovic, 1999)	63
3.1:	Η ανισοτροπία του Διονυσιακού μαρμάρου και η σχετική διεθνής ορολογία για τα δοκίμια (Βαρδουλάκης κ.α., 2002)	66
3.2:	Διατάξεις για τα πειράματα άμεσου μονοαξονικού εφελκυσμού σε δοκίμια Διονυσιακού μαρμάρου (Βαρδουλάκης κ.α., 2002)	68
3.3:	Διάγραμμα τάσεων-παραμορφώσεων του Διονυσιακού μαρμάρου υπό μονοαξονικό εφελκυσμό (Βαρδουλάκης κ.α., 2002)	69
3.4:	Φθορά του μέτρου ελαστικότητας του μαρμάρου Διονύσου συναρτήσει της αξονικής παραμόρφωσης (Βαρδουλάκης κ.α., 2002)	70
3.5:	α) Πειραματική διάταξη της δοκιμής μονοαξονικής θλίψης β) Δοκίμιο μαρμάρου για δοκιμή μονοαξονικής θλίψης στο οποίο διακρίνονται τα τοποθετημένα μηχανισιόμετρα για την μέτρηση των παραμορφώσεων	71
3.6:	Διάγραμμα τάσεων-παραμορφώσεων υπό α) Μονοαξονική και β) Τριαξονική θλίψη (Βαρδουλάκης κ.α., 2002)	72
3.7:	Το πλήρες διάγραμμα τάσεων-παραμορφώσεων (Βαρδουλάκης κ.α., 2002)	72
3.8:	Ο τύπος αστοχίας του Διονυσιακού μαρμάρου κατά Mohr-Coulomb (Βαρδουλάκης κ.α., 2002)	73
3.9:	α) Δείγμα Κογχυλιόλιθου που χρησιμοποιείται για την αναστήλωση του ναού του Δία στην αρχαία Ολυμπία β) Λεπτομερής εικόνα του Κογχυλιόλιθου στην οποία διακρίνονται τα απολιθωμένα κελύφη	74

3.10:	Διάγραμμα τάσεων-παραμορφώσεων για κυλινδρικά δοκίμια Κογχυλιόλιθου από αρχαία δομικά μέλη (Βαρδουλάκης κ.α., 2002)	76
3.11:	Διάγραμμα τάσεων-παραμορφώσεων για κυλινδρικά δοκίμια Κογχυλιόλιθου από προσφάτως λατομευμένο υλικό (Βαρδουλάκης κ.α., 2002)	77
4.1:	Η γεωμετρία των δοκιμίων και η διάταξη της φόρτισης (Kourkoulis et al., 1998)	78
4.2:	Σχηματική αναπαράσταση του συστήματος μηχανοσυστοιχιών και βελομέτρων, για την καταγραφή των παραμορφώσεων και των βέλων κάμψης της δοκού αντίστοιχα (Kourkoulis et al., 1998)	79
4.3:	Υδραυλικό πλαίσιο φόρτωσης AMSLER του εργαστηρίου αντοχής υλικών του Ε.Μ.Π	80
4.4:	Ημισφαιρική κεφαλή φορτίσεως για την εξασφάλιση της καθετότητας	80
4.5:	Αξονικές παραμορφώσεις μέσα και έξω από την ζώνη διεργασιών (Kourkoulis et al., 2003α)	81
4.6:	Αξονικές και εγκάρσιες παραμορφώσεις κατά μήκος του ύψους του δοκιμίου για φορτίο 11,8 kN (Kourkoulis et al., 2003α)	82
4.7:	Αξονικές και εγκάρσιες παραμορφώσεις κατά μήκος του ύψους του δοκιμίου για φορτίο 17,5 kN (Agioutantis et al., 2003)	82
4.8:	Σχηματική αναπαράσταση της πειραματικής διάταξης και των θέσεων των μηχανοσυστοιχιών επάνω στα δοκίμια (Kourkoulis et al., 2003β)	83
4.9:	Γραφική παράσταση του βέλους κάμψης της κάτω ακμής του δοκιμίου λίγο πριν την θραύση (Kourkoulis et al., 2003β)	84
4.10:	Γραφική παράσταση του βέλους κάμψης του μέσου οριζοντίου τμήματος του δοκιμίου συναρτήσει του εξωτερικού φορτίου (Kourkoulis et al., 2003β)	85
5.1.:	Διακριτοποίηση του μέσου σε στοιχεία	87
5.2:	Στοιχείο και οι κόμβοι από τους οποίους αποτελείται	87
5.3:	Παραδοχή επίπεδης τάσης (Αγιουτάντης, 2002)	88
5.4:	Παραδοχή επίπεδης παραμόρφωσης (Αγιουτάντης, 2002)	89
5.5:	Γεωμετρία και διακριτοποίηση του μοντέλου	90
5.6:	Η εγκοπή του δοκιμίου μήκους 10 mm και πλάτους 5 mm	90
5.7:	Σχηματική αναπαράσταση του δοκιμίου στο οποίο διακρίνονται οι θέσεις των μηχανοσυστοιχιών για την καταγραφή των παραμορφώσεων	91
5.8:	α) Φορτίο και κύλιση μόνο κατά τον κάθετο άξονα στον κύλινδρο φόρτισης β) Πάκτωση ($dx=0$, $dy=0$) στο κέντρο	

των κυλίνδρων του δοκιμίου	92
5.9: Κατάσταση διαρροής για θεώρηση επίπεδης παραμόρφωσης στη περίπτωση ελαστοπλαστικού υλικού με τη χρήση του παραβολικού κριτηρίου αστοχίας Mohr-Coulomb (Marc-Mentat, 1998)	93
5.10: α) Στοιχεία επαφής μεταξύ μαρμάρου και κυλίνδρου φόρτισης β) Στοιχεία επαφής μεταξύ μαρμάρου και κυλίνδρου στήριξης	93
5.11: Σχηματική αναπαράσταση του δοκιμίου στο οποίο διακρίνονται οι γραμμές για τις οποίες λήφθηκαν τα αποτελέσματα	94
5.12: Διάγραμμα της οριζόντιας συνιστώσας της τάσης (σ_x) συναρτήσει του μήκους τόξου	95
5.13: Διάγραμμα της κατακόρυφης συνιστώσας της τάσης (σ_y) συναρτήσει του μήκους τόξου	95
5.14: Διάγραμμα της οριζόντιας συνιστώσας της παραμόρφωσης (ϵ_x) συναρτήσει του μήκους τόξου	96
5.15: Διάγραμμα της κατακόρυφης συνιστώσας της παραμόρφωσης (ϵ_y) συναρτήσει του μήκους τόξου	96
5.16: Διάγραμμα της οριζόντιας συνιστώσας της τάσης (σ_x) συναρτήσει του μήκους τόξου	97
5.17: Διάγραμμα της κατακόρυφης συνιστώσας της τάσης (σ_y) συναρτήσει του μήκους τόξου	97
5.18: Διάγραμμα της οριζόντιας συνιστώσας (ϵ_x) της παραμόρφωσης συναρτήσει του μήκους τόξου	98
5.19: Διάγραμμα της κατακόρυφης συνιστώσας της παραμόρφωσης (ϵ_y) συναρτήσει του μήκους τόξου	98
5.20: Διάγραμμα του βέλους κάμψης συναρτήσει του μήκους τόξου	99
5.21: Διακριτοποίηση του μοντέλου όπου διακρίνονται το δοκίμιο και οι χαλύβδινοι κύλινδροι	100
5.22: Λεπτομέρεια της διακριτοποίησης στην περιοχή γύρω από την εγκοπή του δοκιμίου	100
5.23: α) Φορτίο και κύλιση μόνο κατά τον κάθετο άξονα στον κύλινδρο φόρτισης β) Πάκτωση ($dx=0$, $dy=0$) στο κέντρο των κυλίνδρων στήριξης του δοκιμίου	101
5.24: Σχηματική παράσταση στην οποία διακρίνονται οι δύο διευθύνσεις ανισοτροπίας (ασθενής και ισχυρή διεύθυνση)	102
5.25: α) Στοιχεία επαφής μεταξύ μαρμάρου και κυλίνδρου φόρτισης β) Στοιχεία επαφής μεταξύ μαρμάρου και κυλίνδρου στήριξης	102

5.26:	Διάγραμμα της οριζόντιας συνιστώσας της τάσης (σ_x) συναρτήσει του μήκους τόξου	103
5.27:	Διάγραμμα της κατακόρυφης συνιστώσας της τάσης (σ_y) συναρτήσει του μήκους τόξου	104
5.28:	Διάγραμμα της οριζόντιας συνιστώσας της παραμόρφωσης (ϵ_x) συναρτήσει του μήκους τόξου	104
5.29:	Διάγραμμα της κατακόρυφης συνιστώσας της παραμόρφωσης (ϵ_y) συναρτήσει του μήκους τόξου	105
5.30:	Διάγραμμα της οριζόντιας συνιστώσας της τάσης (σ_x) συναρτήσει του μήκους τόξου	105
5.31:	Διάγραμμα της κατακόρυφης συνιστώσας της τάσης (σ_y) συναρτήσει του μήκους τόξου	106
5.32:	Διάγραμμα της οριζόντιας συνιστώσας (ϵ_x) της παραμόρφωσης συναρτήσει του μήκους τόξου	106
5.33:	Διάγραμμα της κατακόρυφης συνιστώσας της παραμόρφωσης (ϵ_y) συναρτήσει του μήκους τόξου	107
5.34:	Διάγραμμα του βέλους κάμψης συναρτήσει του μήκους τόξου	107
5.35:	Διακριτοποίηση του μοντέλου	108
5.36:	Σχηματική αναπαράσταση της γεωμετρίας του μοντέλου και των θέσεων των μηχανισιομέτρων	109
5.37:	α) Φορτίο κατά τον κάθετο άξονα στον κύλινδρο φόρτισης β) Πάκτωση ($dx=0$, $dy=0$) στο κέντρο των κυλίνδρων στήριξης του δοκιμίου	110
5.38:	α) Στοιχεία επαφής μεταξύ δοκιμίου και κυλίνδρου φόρτισης β) Στοιχεία επαφής μεταξύ δοκιμίου και κυλίνδρου στήριξης	111
5.39:	Σχηματική αναπαράσταση του δοκιμίου όπου διακρίνονται οι γραμμές για τις οποίες λήφθηκαν αποτελέσματα για την αριθμητική επίλυση	112
5.40:	Διάγραμμα της οριζόντιας συνιστώσας της τάσης (σ_x) συναρτήσει του μήκους τόξου	112
5.41:	Διάγραμμα της κατακόρυφης συνιστώσας της τάσης (σ_y) συναρτήσει του μήκους τόξου	113
5.42:	Διάγραμμα της οριζόντιας συνιστώσας της παραμόρφωσης (ϵ_x) συναρτήσει του μήκους τόξου	113
5.43:	Διάγραμμα της κατακόρυφης συνιστώσας της παραμόρφωσης (ϵ_y) συναρτήσει του μήκους τόξου	114
5.44:	Διάγραμμα της οριζόντιας συνιστώσας της τάσης (σ_x) συναρτήσει του μήκους τόξου	114

5.45:	Διάγραμμα της κατακόρυφης συνιστώσας της τάσης (σ_y) συναρτήσει του μήκους τόξου	115
5.46:	Διάγραμμα της οριζόντιας συνιστώσας (ϵ_x) της παραμόρφωσης συναρτήσει του μήκους τόξου	115
5.47:	Διάγραμμα της κατακόρυφης συνιστώσας της παραμόρφωσης (ϵ_y) συναρτήσει του μήκους τόξου	116
5.48:	Διάγραμμα του βέλους κάμψης συναρτήσει του μήκους τόξου	116
6.1:	Πειραματικά και αριθμητικά αποτελέσματα για το βέλος κάμψης της δοκού	117
6.2:	Πειραματικά και αριθμητικά αποτελέσματα για την πολική κατανομή των ακτινικών παραμορφώσεων σε ακτίνα $r=25$ mm	118
6.3:	Πειραματικά και αριθμητικά αποτελέσματα για το βέλος κάμψης της δοκού	119
6.4:	Πειραματικά και αριθμητικά αποτελέσματα για την πολική κατανομή των ακτινικών παραμορφώσεων σε ακτίνα $r=25$ mm	120
6.5:	Γραφική παράσταση του βέλους κάμψης της κάτω ακμής του δοκιμίου λίγο πριν την θραύση	121
6.6:	Γραφική παράσταση του βέλους κάμψης του μέσου οριζοντίου τμήματος του δοκιμίου συναρτήσει του εξωτερικού φορτίου	122
6.7:	Πειραματικά και αριθμητικά αποτελέσματα των αξονικών και εγκάρσιων παραμορφώσεων κατά μήκος του ύψους του δοκιμίου (ως προς τον ουδέτερο άξονα)	123
6.8:	Πειραματικά και αριθμητικά αποτελέσματα των αξονικών και εγκάρσιων παραμορφώσεων για το κάθετο τμήμα στη θέση $x=-10$ cm (ως προς τον ουδέτερο άξονα)	123
7.1:	Βέλος κάμψης της κάτω ακμής του δοκιμίου συναρτήσει της απόστασης από το μέσο του δοκιμίου και για τα δύο μοντέλα Διονυσιακού μαρμάρου	128
7.2:	Κατανομή της κατακόρυφης συνιστώσας της παραμόρφωσης (ϵ_y) κατά μήκος του κεντρικού κατακόρυφου άξονα και για τα δύο μοντέλα Διονυσιακού μαρμάρου	129
7.3:	Κατανομή της ακτινικής παραμόρφωσης σε απόσταση 2,5 cm από την κορυφή της εγκοπής και για τα δύο μοντέλα Διονυσιακού μαρμάρου	130
7.4:	Κατανομή της οριζόντιας συνιστώσας της παραμόρφωσης (ϵ_x) κατά τον κεντρικό κατακόρυφο άξονα και για τα τρία μοντέλα	131

7.5:	Κατανομή της κατακόρυφης συνιστώσας της παραμόρφωσης (ϵ_y) κατά τον κεντρικό κατακόρυφο άξονα και για τα τρία μοντέλα	131
-------------	---	-----

Κατάλογος Πινάκων

2.1:	Τα πεδία τάσης μπροστά από την κορυφή μιας ρωγμής για τους τύπους φόρτισης I και II, για ένα γραμμικά ελαστικό ισότροπο υλικό (Anderson, 1995)	46
2.2:	Τα πεδία μετατόπισης για τους τύπους φόρτισης I και II, για ένα γραμμικά ελαστικό ισότροπο υλικό (Anderson, 1995)	46
2.3:	Μη μηδενικές συνιστώσες τάσης και μετατόπισης για τον τύπο φόρτισης III για ένα γραμμικά ελαστικό ισότροπο υλικό (Anderson, 1995)	47
3.1:	Οι μηχανικές ιδιότητες του μαρμάρου Διονύσου (Βαρδουλάκης κ.α., 2002)	67
3.2:	Μηχανικές ιδιότητες του κογχυλιόλιθου (ισχυρή διεύθυνση ανισοτροπίας) (Βαρδουλάκης κ.α., 2002)	75
7.1:	Συγκεντρωτικός πίνακας των δεδομένων της αριθμητικής επίλυσης με την Μέθοδο των Πεπερασμένων Στοιχείων και για τα τρία μοντέλα	126

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

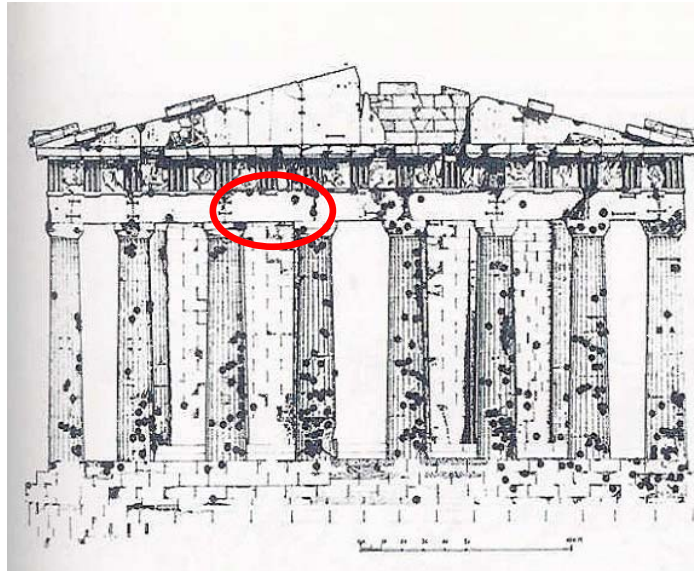
Εισαγωγή

Η δοκιμή κάμψης τριών σημείων θεωρείται μια από τις πιο ευρέως χρησιμοποιούμενη μηχανική δοκιμή, καθώς βασίζεται σε μια απλή πειραματική διαδικασία, από την οποία προκύπτει ένας σημαντικός αριθμός δεδομένων για τη μηχανική συμπεριφορά του εξεταζόμενου υλικού. Ο προσδιορισμός όμως του πεδίου τάσεων και παραμορφώσεων σε μια σχετικά μικρή πρισματική δοκό υπό την επίδραση εγκάρσιως συγκεντρωμένου φορτίου, αποτελεί ένα πρόβλημα για το οποίο δεν έχει βρεθεί ακόμα μια λύση κλειστής μορφής. Σχετικές μελέτες έχουν πραγματοποιηθεί από το τέλος του 19^{ου} από τους Wilson και Flamant, ενώ τα πρώτα αναλυτικά μοντέλα από τους Bousinesq και Filon. Στη συνέχεια, με το πρόβλημα ασχολήθηκαν και άλλοι επιστήμονες όπως οι Carman, Seewald, Timoshenko και άλλοι. Όμως ακόμα και σήμερα το πρόβλημα δεν έχει λυθεί αναλυτικά και ο προσδιορισμός του πεδίου τάσεων και παραμορφώσεων παραμένει αντικείμενο εκτεταμένης πειραματικής και αριθμητικής μελέτης.

Το πρόβλημα είναι ακόμα πιο σύνθετο στην περίπτωση όπου το υλικό δεν μπορεί να θεωρηθεί σαν γραμμικά ελαστικό και ισότροπο και γενική λύση δεν υπάρχει ακόμα και για την περίπτωση γραμμικά ελαστικού-ιδανικά πλαστικού ή εγκάρσιως ισότροπου υλικού. Τέτοια υλικά χρησιμοποιούνται ευρέως σήμερα στην Ελλάδα, για την αναστήλωση σημαντικών ιστορικών μνημείων. Η παρούσα μελέτη επικεντρώνεται στο Διονυσιακό μάρμαρο, το οποίο χρησιμοποιείται για την αναστήλωση του ναού του Παρθενώνα στην Ακρόπολη της Αθήνας, καθώς και στον Κογχυλιόλιθο που χρησιμοποιείται στην αναστήλωση του ναού του Δία στην Αρχαία Ολυμπία.

Η ανάγκη της προσομοίωσης της μηχανικής συμπεριφοράς πρισματικών δοκιμίων Διονυσιακού μαρμάρου, προέκυψε από το γεγονός ότι τα επιστήλια του Παρθενώνα είναι εν μέρη ραγισμένα στην εγκάρσια διεύθυνση (Σχήμα 1.1). Τα επιστήλια του

Παρθενώνα προέρχονται από Πεντελικό μάρμαρο, υλικό το οποίο χρησιμοποιήθηκε ευρύτατα από τους αρχαίους Έλληνες. Σήμερα η ανάγκη της αναστήλωσης του ναού έχει οδηγήσει στο συμπέρασμα ότι το ιδανικότερο υλικό που θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί εναλλακτικά είναι το μάρμαρο Διονύσου, καθώς παρουσιάζει παρόμοιες φυσικές και μηχανικές ιδιότητες με αυτές του Πεντελικού μαρμάρου.



Σχήμα 1.1: Σχηματική αναπαράσταση του ναού του Παρθενώνα, στην οποία διακρίνονται τα επιστήλια τα οποία καταπονούνται σε κάμψη

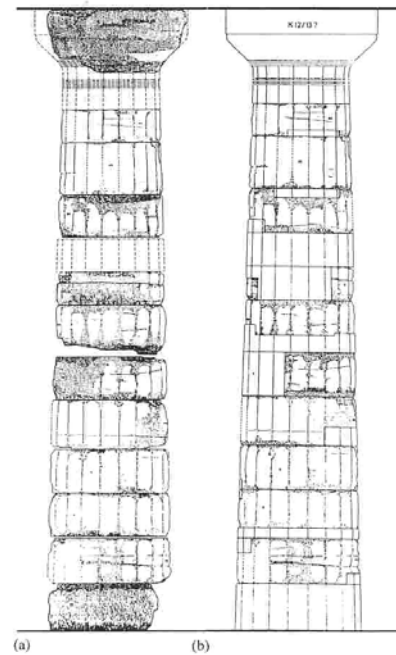
Σε αυτή τη μεταπτυχιακή διατριβή, αντιμετωπίζεται το πρόβλημα της κάμψης τριών σημείων σε δοκίμια Διονυσιακού μαρμάρου και πειραματικά αλλά και αριθμητικά σε δύο διαστάσεις με τη Μέθοδο των Πεπερασμένων Στοιχείων. Η ρωγή προσομοιώνεται σαν μια εγκοπή πεπερασμένου πλάτους και ημικυκλικής κορώνας. Στην αριθμητική επίλυση χρησιμοποιούνται στοιχεία επαφής για την προσομοίωση της διεπιφάνειας μεταξύ πετρώματος και χάλυβα και το υλικό αντιμετωπίζεται σαν εγκαρσίως ισότροπο, αλλά και σαν γραμμικά ελαστικό-τέλεια πλαστικό υλικό το οποίο ακολουθεί το παραβολικό κριτήριο αστοχίας Mohr-Coulomb.

Όπως ήδη αναφέρθηκε, άλλο ένα υλικό στο οποίο επικεντρώνεται η παρούσα εργασία είναι ο Κογχυλιόλιθος, που χρησιμοποιήθηκε από τους αρχαίους Έλληνες για την κατασκευή του ναού του Δία στην αρχαία Ολυμπία. Το πρόβλημα που αντιμετωπίζεται στην αναστήλωση του ναού είναι η ανακατασκευή των στύλων του, καθένας από τους οποίους αποτελείται από 13 δίσκους οι οποίοι είναι φθαρμένοι ή έχουν καταστραφεί εντελώς (Σχήμα 1.2).

Ο Κογχυλιόλιθος αποτελεί ένα μαλακό τύπο πετρώματος αποτελούμενο από απολιθωμένα κελύφη και λόγω της σύνθετης δομής του προσομοιώνεται στην αριθμητική επίλυση σαν γραμμικά ελαστικό-τέλεια πλαστικό υλικό. Και σε αυτήν την περίπτωση η αριθμητική προσομοίωση του υλικού με την Μέθοδο των Πεπερασμένων Στοιχείων, πραγματοποιείται σε δύο διαστάσεις και με την εισαγωγή στοιχείων επαφής μεταξύ πετρώματος και χάλυβα.

Σε αυτό το σημείο πρέπει να σημειωθεί ότι η πειραματική ανάλυση των δοκιμών κάμψης τριών σημείων στα δοκίμια Διονυσιακού μαρμάρου και Κογχυλιόλιθου, πραγματοποιήθηκε στα εργαστήρια αντοχής υλικών του Εθνικού Μετσόβειου Πολυτεχνείου.

Τα συμπεράσματα που προκύπτουν έπειτα από τη σύγκριση της πειραματικής ανάλυσης με την αριθμητική επίλυση, είναι πολύ ικανοποιητικά όσον αφορά τα μεταξύ τους αποτελέσματα, ενώ πολύ ενδιαφέρον παρουσιάζουν και τα συμπεράσματα για την κατανομή των τάσεων και παραμορφώσεων, καθώς και για την επίδραση του συγκεντρωμένου φορτίου.



Σχήμα 1.2: Στύλος στο ναό του Δία πριν και μετά την αναστήλωση του.

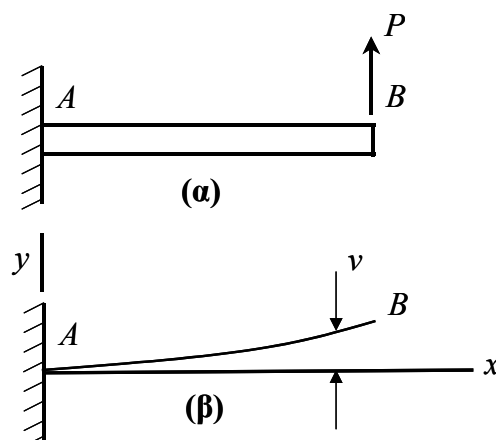
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Θεωρητική Προσέγγιση του Προβλήματος της Κάμψης Τριών Σημείων

Στην ενότητα αυτή προσεγγίζεται θεωρητικά το πρόβλημα της κάμψης τριών σημείων. Αρχικά περιγράφεται η θεωρία της απλής κάμψης και στη συνέχεια η επίδραση του συγκεντρωμένου φορτίου. Ακολουθεί η επεξήγηση των ρωγμών μέσω της θεωρίας θραυστομηχανικής και τέλος περιγράφονται οι σχέσεις που διέπουν την ελαστική συμπεριφορά ενός υλικού.

2.1 ΑΠΛΗ ΘΕΩΡΙΑ ΚΑΜΨΗΣ

Όταν σε μια δοκό δρουν φορτία, την αναγκάζουν σε κάμψη και με αυτό τον τρόπο ο άξονας της παραμορφώνεται σε καμπύλη. Αν για παράδειγμα θεωρηθεί μια μονόπακτη δοκός AB που υπόκειται σε φορτίο P στο ελεύθερο άκρο της, (Σχήμα 2.1.α) ο αρχικά ευθύγραμμος άξονας της δοκού καμπυλώνεται (Σχήμα 2.1.β). Η απόκλιση αυτή δίνεται από το βέλος κάμψης της δοκού (deflection curve).



Σχήμα 2.1: Η διάταξη του προβλήματος της απλής κάμψης (Gere & Timoshenko, 1997)

Πάνω στην διάταξη του σχήματος (2.1) κατασκευάζεται ένα σύστημα αναφοράς με σημείο αναφοράς το σημείο στήριξης της δοκού πάνω στον διαμήκη άξονα της. Ο θετικός άξονας x έχει διεύθυνση προς τα δεξιά και ο θετικός άξονας y έχει διεύθυνση προς τα πάνω. Ο άξονας z ο οποίος δεν διακρίνεται στο σχήμα 2.1 είναι κάθετος προς τους δύο άλλους άξονες με διεύθυνση προς τον αναγνώστη.

Η δοκός θεωρείται συμμετρική ως προς το επίπεδο xy , πράγμα που σημαίνει ότι ο άξονας y είναι άξονας συμμετρίας της τομής. Επιπλέον, όλα τα φορτία πρέπει να δρουν στο επίπεδο xy . Έτσι συνεπάγεται ότι τυχόν καμπυλώσεις λόγω φορτίων λαμβάνουν χώρα στο επίπεδο xy , το οποίο ονομάζεται επίπεδο της κάμψης (plane of bending).

Το βέλος κάμψης (deflection) της δοκού σε κάθε σημείο κατά μήκος του άξονα της, είναι η μετατόπιση αυτού του σημείου από την αρχική του θέση, μετρούμενη κατά την διεύθυνση y και συμβολίζεται με το σύμβολο v (Gere & Timoshenko, 1997).

2.1.1 Απλή Κάμψη και μη Ομοιόμορφη Κάμψη

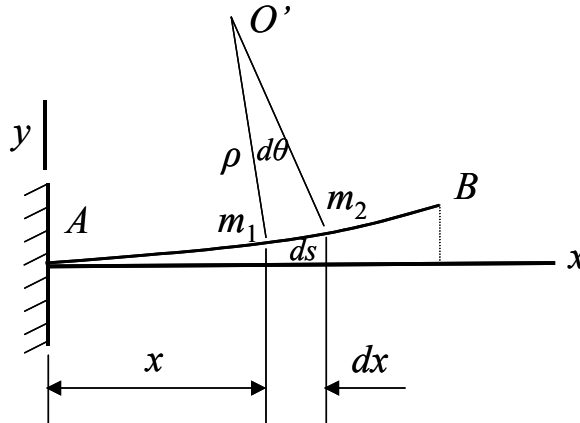
Ο όρος απλή κάμψη (pure bending) αναφέρεται στην κάμψη μιας δοκού υπό την επίδραση μιας καμπτικής ροπής. Για αυτό το λόγο η απλή κάμψη λαμβάνει χώρα μόνο σε περιοχές της δοκού όπου η διατμητική δύναμη είναι μηδέν. Μη ομοιόμορφη κάμψη συμβαίνει όταν υπάρχει κάμψη με την παρουσία διατμητικών δυνάμεων, που σημαίνει ότι η καμπτική ροπή αλλάζει κατά μήκος του άξονα της δοκού (Gere & Timoshenko, 1997).

2.1.2 Καμπυλότητα μιας Δοκού

Όταν εφαρμόζονται φορτία σε μια δοκό, ο διαμήκης άξονας της παραμορφώνεται σε καμπύλη όπως φαίνεται στο σχήμα (2.1). Οι τάσεις και παραμορφώσεις που προκύπτουν στην δοκό, είναι ευθέως σχετιζόμενες με την καμπυλότητα του βέλους κάμψεως.

Για την διευκρίνιση της έννοια της καμπυλότητας, θεωρείται η διάταξη του σχήματος (2.1). Το βέλος κάμψης της δοκού παρουσιάζεται στο σχήμα (2.2). Στη συνέχεια σημειώνονται δύο σημεία m_1 και m_2 πάνω στο βέλος κάμψης. Το σημείο m_1 επιλέγεται

σε μια αυθαίρετη απόσταση x από τον άξονα y και το σημείο m_2 επιλέγεται σε μια μικρή απόσταση ds λίγο μακρύτερα κατά μήκος της καμπύλης. Σε κάθε ένα από αυτά τα δύο σημεία σχεδιάζεται μια γραμμή κάθετα στην εφαπτομένη του βέλους κάμψης. Αυτές οι κάθετες τέμνονται στο σημείο O' , το οποίο είναι το κέντρο της καμπυλότητας του βέλους κάμψης.



Σχήμα 2.2: Βέλος κάμψης της δοκού (Gere & Timoshenko, 1997)

Η απόσταση m_1O' καλείται ακτίνα καμπυλότητας ρ και η καμπυλότητα κ καθορίζεται σαν την αντίστροφη της ακτίνας της καμπυλότητας (Gere & Timoshenko, 1997):

$$\kappa = \frac{1}{\rho} \quad (2.1)$$

Με την καμπυλότητα μετράται πόσο έντονα κάμπτεται μια δοκός. Αν το φορτίο στη δοκό είναι μικρό, η δοκός θα είναι σχεδόν ευθεία, η ακτίνα της καμπυλότητας θα είναι πολύ μεγάλη και η καμπυλότητα πολύ μικρή.

Από την γεωμετρία του τριγώνου $O'm_1m_2$ προκύπτει ότι (Gere & Timoshenko, 1997):

$$\rho d\theta = ds \quad (2.2)$$

όπου, $d\theta$ είναι η εσωτερική γωνία μεταξύ των δύο καθέτων και ds είναι η απόσταση μεταξύ των m_1 και m_2 .

Από τον συνδυασμό των εξισώσεων (2.1) και (2.2) προκύπτει η παρακάτω σχέση (Gere & Timoshenko, 1997):

$$\kappa = \frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{ds} \quad (2.3)$$

Αν η καμπυλότητα είναι σταθερή κατά μήκος μιας καμπύλης, η ακτίνα καμπυλότητας θα είναι επίσης σταθερή και η καμπύλη θα είναι το τόξο ενός κύκλου.

Τα βέλη κάμψης μιας δοκού είναι συνήθως πολύ μικρά σε σχέση με το μήκος της. Μικρά βέλη κάμψης σημαίνει ότι η καμπύλη τους είναι σχεδόν ευθεία. Συνεπώς η απόσταση ds κατά μήκος της καμπύλης μπορεί να τεθεί ίση με την οριζόντια προβολή της dx (Σχήμα 2.2). Οπότε η εξίσωση της καμπυλότητας γίνεται (Gere & Timoshenko, 1997):

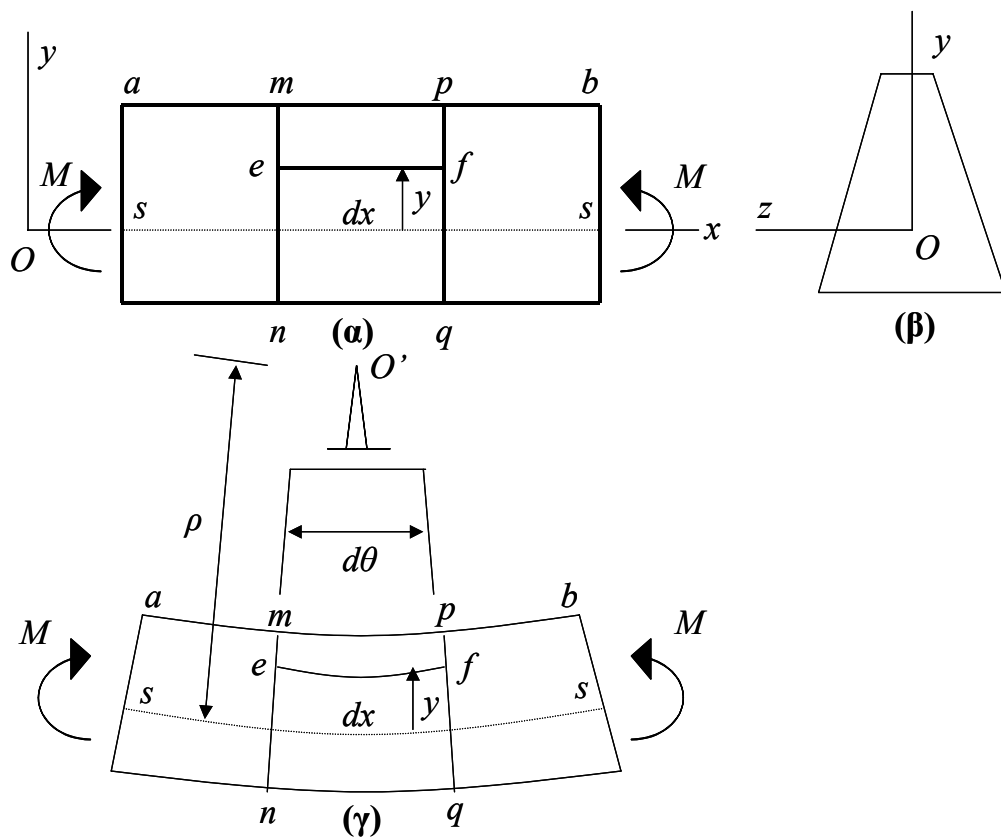
$$\kappa = \frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{dx} \quad (2.4)$$

2.1.3 Διαμήκεις Παραμορφώσεις σε Δοκούς

Οι διαμήκεις παραμορφώσεις σε μια δοκό μπορούν να προσδιοριστούν με την ανάλυση της καμπυλότητας της δοκού και τις σχετιζόμενες παραμορφώσεις. Για το σκοπό αυτό θεωρείται ένα τμήμα ab μιας δοκού σε απλή κάμψη, η οποία υπόκειται σε θετική καμπτική ροπή M (Σχήμα 2.3.α). Υποτίθεται ότι η δοκός έχει αρχικά έναν ευθύ διαμήκη άξονα (ο άξονας x στο σχήμα 2.3.α) και ότι η τομή της είναι συμμετρική ως προς τον άξονα y όπως φαίνεται στο σχήμα (2.3.β).

Υπό την επίδραση των καμπτικών ροπών, η δοκός κάμπτεται στο επίπεδο xy και ο διαμήκης άξονας της κάμπτεται σχηματίζοντας την καμπύλη ss στο σχήμα (2.3.γ). Οι τομές mn και pq στο σχήμα (2.3.α) παραμένουν επίπεδες και κάθετες στον διαμήκη άξονα. Το γεγονός αυτό είναι τόσο βασικό στην θεωρία της κάμψης που θεωρείται ως αξίωμα. Παρόλα αυτά μπορεί να καλείται και θεώρημα σύμφωνα με την ακόλουθη θεώρηση: Το βασικό σημείο είναι η συμμετρία της δοκού και του φορτίου της, γεγονός που σημαίνει ότι όλα τα στοιχεία της δοκού (όπως το στοιχείο $mpqn$) πρέπει να παραμορφωθούν με έναν ίδιο τρόπο, το οποίο είναι δυνατό μόνο αν οι διατομές παραμένουν επίπεδες κατά την κάμψη (Σχήμα 2.3.γ). Αυτό το συμπέρασμα ισχύει για δοκούς οποιουδήποτε υλικού, ανεξάρτητα αν το υλικό είναι ελαστικό ή μη ελαστικό, γραμμικό ή μη γραμμικό.

Λόγω των παραμορφώσεων που προκαλούνται από την κάμψη, οι τομές mn και pq περιστρέφονται σε σχέση μεταξύ τους ως προς τους κάθετους άξονες, κάθετα στο επίπεδο xy . Οι διαμήκεις γραμμές στο κατώτερο μέρος της δοκού επιμηκύνονται, ενώ το ανώτερο μέρος της δοκού συστέλλεται. Για αυτό το λόγο το κατώτερο μέρος της δοκού βρίσκεται σε εφελκυσμό και το ανώτερο μέρος σε θλίψη. Κάπου μεταξύ του ανώτερου και κατώτερου μέρους της δοκού υπάρχει μια διαμήκης επιφάνεια η οποία δεν διαφοροποιείται στο μήκος της. Η επιφάνεια αυτή υποδεικνύεται με την διακεκομμένη γραμμή ss στα σχήματα (2.3.α) και (2.3.γ) και ονομάζεται ουδέτερη επιφάνεια της δοκού.



Σχήμα 2.3: Παραμορφώσεις της δοκού σε απλή κάμψη (Gere & Timoshenko, 1997)

Τα επίπεδα που περιέχουν τις τομές mn και pq στην παραμορφωμένη δοκό τέμνονται σε μια γραμμή στο κέντρο της καμπυλότητας O' . Η γωνία μεταξύ αυτών των επιπέδων συμβολίζεται με $d\theta$ και η απόσταση από το O' μέχρι την ουδέτερη επιφάνεια ss είναι η ακτίνα της καμπυλότητας ρ . Η αρχική απόσταση dx μεταξύ των δύο επιπέδων (Σχήμα 2.3.α) είναι απαράλλαχτη στην ουδέτερη επιφάνεια (Σχήμα 2.3.γ) και για αυτό το λόγο

ισχύει ότι $\rho d\theta = dx$. Όμως, όλες οι υπόλοιπες διαμήκεις γραμμές μεταξύ των δύο επιπέδων δημιουργούν κάθετες παραμορφώσεις ε_x .

Για την εκτίμηση αυτών των κάθετων παραμορφώσεων, θεωρείται μια διαμήκης γραμμή ef η οποία βρίσκεται μέσα στη δοκό μεταξύ των επιπέδων mn και pq (Σχήμα 2.3.α). Η γραμμή ef προσδιορίζεται από την απόσταση της y από την ουδέτερη επιφάνεια στην αρχική μη παραμορφώσιμη δοκό. Έτσι, θεωρείται ότι ο άξονας x συμπίπτει με την ουδέτερη επιφάνεια της μη παραμορφωμένης δοκού. Βέβαια, όταν η δοκός κάμπτεται, η ουδέτερη επιφάνεια μετακινείται μαζί με την δοκό αλλά ο άξονας x παραμένει στην θέση του. Ωστόσο, η διαμήκης γραμμή ef στην παραμορφωμένη δοκό παραμένει στην ίδια απόσταση y από την ουδέτερη επιφάνεια. Για αυτό, το μήκος L_1 της γραμμής ef μετά την κάμψη είναι (Gere & Timoshenko, 1997):

$$L_1 = (\rho - y)d\theta = dx - \frac{y}{\rho}dx \quad (2.5)$$

Όταν το πραγματικό μήκος της γραμμής ef είναι dx , προκύπτει ότι η επιμήκυνση του είναι $L_1 - dx$ ή $-ydx/\rho$. Η αντίστοιχη διαμήκης παραμόρφωση είναι ίση με την επιμήκυνση διαιρούμενη με το αρχικό μήκος dx , οπότε (Gere & Timoshenko, 1997):

$$\varepsilon_x = -\frac{y}{\rho} = -\kappa y \quad (2.6)$$

όπου κ είναι η καμπυλότητα.

Η παραπάνω εξίσωση δείχνει ότι οι διαμήκεις παραμορφώσεις στη δοκό είναι ανάλογες με την καμπυλότητα και μεταβάλλονται γραμμικά με την απόσταση y από την ουδέτερη επιφάνεια. Όταν το υπό εξέταση σημείο είναι πάνω από την ουδέτερη επιφάνεια, η απόσταση y είναι θετική. Αν η καμπυλότητα είναι επίσης θετική, τότε η παραμόρφωση ε_x θα είναι αρνητική, εκφράζοντας βράχυνση. Αν το υπό εξέταση σημείο είναι κάτω από την ουδέτερη επιφάνεια η απόσταση y θα είναι αρνητική και αν η καμπυλότητα είναι θετική, η παραμόρφωση ε_x θα είναι και αυτή θετική, εκφράζοντας επιμήκυνση.

Η εξίσωση (2.6) για τις διαμήκεις παραμορφώσεις σε μια δοκό προέκυψε μόνο από την γεωμετρία της παραμορφωμένης δοκού. Οι ιδιότητες του υλικού δεν λήφθηκαν υπόψη.

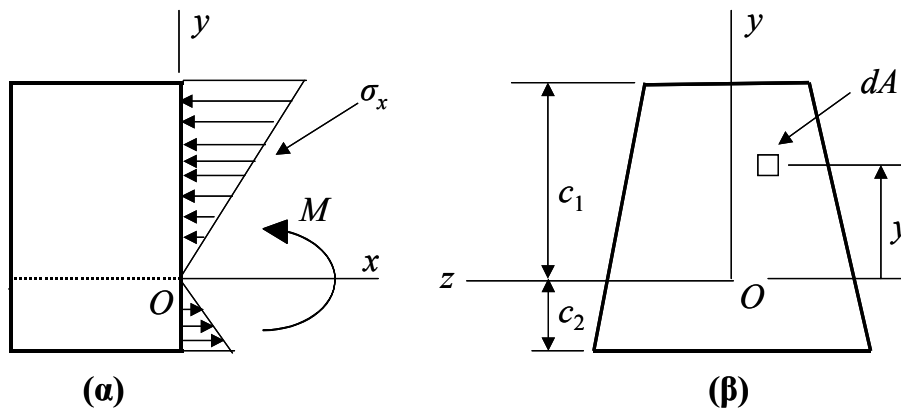
Για αυτό, οι παραμορφώσεις σε μια δοκό σε απλή κάμψη μεταβάλλονται γραμμικά με την απόσταση από την ουδέτερη επιφάνεια ανεξάρτητα από τη μορφή της καμπύλης τάσης-παραμόρφωσης του υλικού (Gere & Timoshenko, 1997).

2.1.4 Ορθές Τάσεις σε Δοκούς (Γραμμικά Ελαστικά Υλικά)

Η πιο κοινή σχέση τάσης-παραμόρφωσης που συναντάται στην μηχανική είναι η εξίσωση για τα γραμμικά ελαστικά υλικά. Με την αντικατάσταση του νόμου του Hooke στην εξίσωση (2.6) προκύπτει η παρακάτω σχέση (Gere & Timoshenko, 1997):

$$\sigma_x = E\varepsilon_x = -\frac{Ey}{\rho} = -E\kappa y \quad (2.7)$$

Η παραπάνω εξίσωση δείχνει ότι οι ορθές τάσεις που δρουν στην διατομή (cross section) μεταβάλλονται γραμμικά με την απόσταση y από την ουδέτερη επιφάνεια. Η κατανομή αυτή παρουσιάζεται στο σχήμα (2.4.α) για την περίπτωση κατά την οποία η καμπτική ροπή M είναι θετική και η δοκός κάμπτεται με θετική καμπυλότητα. Όταν η καμπυλότητα είναι θετική, οι τάσεις σ_x είναι αρνητικές (θλίψη) πάνω από την ουδέτερη επιφάνεια και θετικές (εφελκυσμός) κάτω από αυτή.



Σχήμα 2.4: Ορθές τάσεις σε δοκό γραμμικού ελαστικού υλικού (Gere & Timoshenko, 1997)

Το αποτέλεσμα των ορθών τάσεων αποτελείται από δύο συνιστώσες τάσης: (1) μια δύναμη που δρα κατά την διεύθυνση x και (2) ένα ζευγάρι καμπτικών ροπών που δρα στον άξονα z . Όμως η αξονική δύναμη είναι μηδέν όταν η δοκός είναι σε απλή κάμψη. Οπότε ισχύουν τα ακόλουθα: (1) η συνισταμένη δύναμη στην διεύθυνση x είναι μηδέν

και (2) η συνισταμένη καμπτική ροπή είναι ίση με την καμπτική ροπή M (Gere & Timoshenko, 1997):

$$\int_A y dA = 0 \quad (2.8)$$

Σύμφωνα με την παραπάνω εξίσωση η πρώτη ροπή της περιοχής της τομής εκτιμώμενη σε σχέση με τον άξονα z , είναι μηδέν. Δηλαδή, ο άξονας z πρέπει να περνά από το κεντροειδές (centroid) της τομής. Αφού ο άξονας z είναι και ο ουδέτερος άξονας προκύπτει το εξής συμπέρασμα: Ο ουδέτερος άξονας περνά από το κεντροειδές της τομής όταν το υλικό ακολουθεί το νόμο του Hooke και δεν υπάρχει αξονική δύναμη που δρα στην τομή.

Σχέση ροπής-καμπυλότητας

Η ροπή αδράνειας (moment of inertia) δίνεται από το εξής ολοκλήρωμα (Gere & Timoshenko, 1997):

$$I = \int_A y^2 dA \quad (2.9)$$

Η σχέση που συνδέει την ροπή αδράνειας με την καμπυλότητα είναι (Gere & Timoshenko, 1997):

$$k = \frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI} \quad (2.10)$$

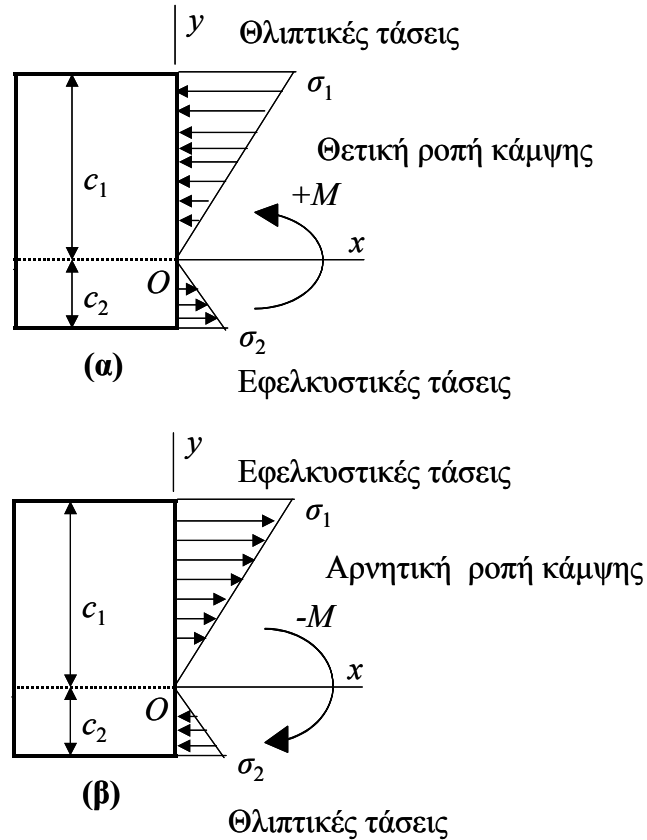
Εξίσωση κάμψης

Στη συνέχεια προσδιορίζονται οι τάσεις σε σχέση με την καμπτική ροπή. Αντικαθιστώντας την εξίσωση (2.10) στη σχέση (2.7) προκύπτει (Gere & Timoshenko, 1997):

$$\sigma_x = -\frac{My}{I} \quad (2.11)$$

Από την παραπάνω εξίσωση προκύπτει ότι οι τάσεις είναι ευθέως ανάλογες με την καμπτική ροπή M και αντιστρόφως ανάλογες με την ροπή αδράνειας I της διατομής. Επίσης, οι τάσεις μεταβάλλονται γραμμικά με την απόσταση y από τον ουδέτερο άξονα. Οι τάσεις που υπολογίζονται από την σχέση (2.11) καλούνται καμπτικές τάσεις (bending stresses).

Αν η καμπτική ροπή στη δοκό είναι θετική, οι καμπτικές τάσεις θα είναι θετικές (εφελκυσμός) στο μέρος της διατομής όπου το y είναι αρνητικό, δηλαδή πάνω από το κατώτερο μέρος της δοκού. Οι τάσεις στο ανώτερο μέρος της δοκού θα είναι αρνητικές (θλίψη). Αν οι ροπές κάμψης είναι αρνητικές, οι τάσεις θα αντιστραφούν.



Σχήμα 2.5: α) Θετική καμπτική ροπή β) Αρνητική καμπτική ροπή (Gere & Timoshenko, 1997)

Μέγιστες τάσεις στη διατομή

Οι μέγιστες ορθές τάσεις σ_1 και σ_2 στη διατομή του Σχήματος 2.5 είναι (Gere & Timoshenko, 1997):

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= -\frac{Mc_1}{I} = -\frac{M}{S_1} \\ \sigma_2 &= -\frac{Mc_2}{I} = -\frac{M}{S_2}\end{aligned}\tag{2.12}$$

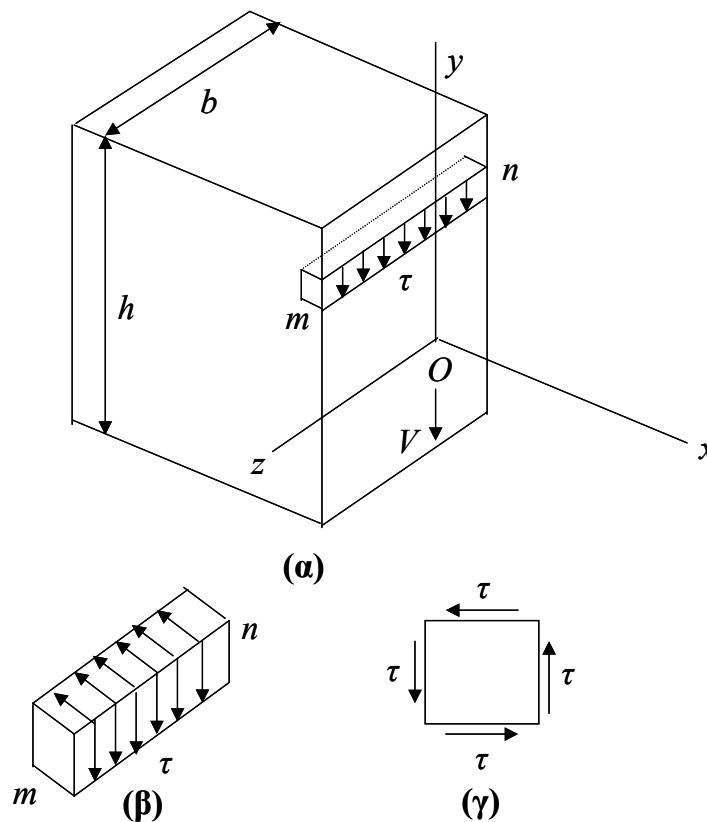
όπου,

$$S_1 = \frac{I}{c_1}, \quad S_2 = \frac{I}{c_2}\tag{2.13}$$

2.1.5 Διατμητικές Τάσεις σε Δοκούς Ορθογωνικής Διατομής

Όταν μια δοκός υπόκειται σε απλή κάμψη, οι μόνες συνισταμένες τάσης είναι οι καμπτικές ροπές και οι μόνες τάσεις είναι οι ορθές τάσεις που δρουν στις διατομές. Όμως, οι περισσότερες δοκοί υπόκεινται σε φορτία που παράγουν και καμπτικές ροπές και διατμητικές δυνάμεις (μη ομοιόμορφη κάμψη). Σε αυτές τις περιπτώσεις αναπτύσσονται στη δοκό ορθές και διατμητικές τάσεις.

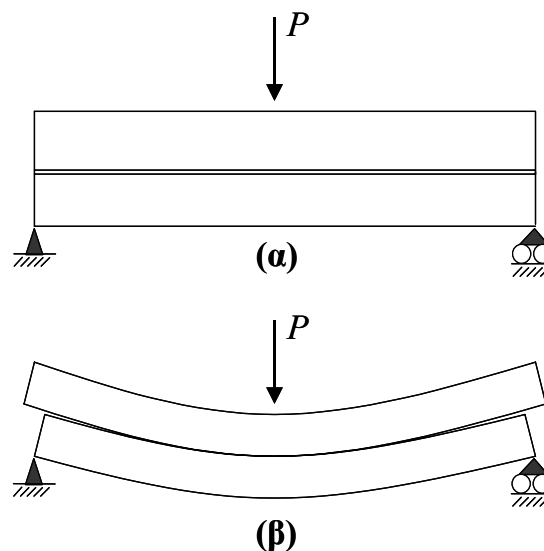
Για τον υπολογισμό των διατμητικών τάσεων θεωρείται δοκός ορθογωνικής διατομής (πάχους b και ύψους h) που υπόκειται σε μια θετική διατμητική δύναμη V (Σχήμα 2.6.α). Οι διατμητικές δυνάμεις τ που δρουν στην διατομή είναι παράλληλες με την διατμητική δύναμη, η οποία είναι παράλληλη με τις κάθετες πλευρές της διατομής. Θεωρείται επίσης, ότι οι διατμητικές δυνάμεις είναι ομοιόμορφα κατανεμημένες κατά μήκος του πάχους της δοκού, παρόλο που μπορεί να μεταβάλλονται κατά το ύψος. Χρησιμοποιώντας τις δύο παραπάνω υποθέσεις, μπορεί να προσδιοριστεί η ένταση της διατμητικής τάσης σε κάθε σημείο της διατομής.



Σχήμα 2.6: Διατμητικές τάσεις σε δοκό ορθογωνικής διατομής (Gere & Timoshenko, 1997)

Για την περαιτέρω ανάλυση απομονώνεται ένα μικρό στοιχείο mn της δοκού (Σχήμα 2.6.β). Σύμφωνα με τις υποθέσεις που έχουν γίνει, οι διατμητικές δυνάμεις τ που δρουν στο μπροστινό μέρος αυτού του στοιχείου είναι κάθετες και ομοιόμορφα κατανεμημένες από την μια μεριά της δοκού προς την άλλη. Επίσης είναι γνωστό ότι οι διατμητικές δυνάμεις που δρουν στην μια μεριά ενός στοιχείου, συνοδεύονται από διατμητικές δυνάμεις ίσου μεγέθους που δρουν στις κάθετες πλευρές του στοιχείου. Έτσι υπάρχουν οριζόντιες διατμητικές δυνάμεις που δρουν μεταξύ οριζοντίων στρωμάτων της δοκού όπως και κατακόρυφες διατμητικές δυνάμεις που δρουν στις διατομές.

Η ισότητα των οριζοντίων και κατακόρυφων διατμητικών δυνάμεων που δρουν σε ένα στοιχείο οδηγεί σε ένα σημαντικό συμπέρασμα σχετικά με τις διατμητικές δυνάμεις στην πάνω και κάτω ακμή της δοκού. Αν θεωρηθεί ότι το στοιχείο mn εντοπίζεται είτε στην πάνω ακμή είτε στην κάτω, φαίνεται ότι οι οριζόντιες διατμητικές δυνάμεις πρέπει να μηδενιστούν, καθώς δεν υπάρχουν τάσεις στις εξωτερικές επιφάνειες της δοκού. Συνεπάγεται ότι και οι κατακόρυφες διατμητικές δυνάμεις πρέπει να μηδενιστούν σε αυτές τις περιοχές, δηλαδή $\tau=0$ όπου $y=\pm h/2$.



Σχήμα 2.7: Κάμψη δύο ξεχωριστών δοκών
(Gere & Timoshenko, 1997)

Η ύπαρξη οριζοντίων διατμητικών δυνάμεων σε μια δοκό μπορεί να διαπιστωθεί αν δύο ομοιόμορφες πρισματικές δοκοί τοποθετηθούν η μια πάνω στην άλλη, στηριχθούν στις δύο άκρες τους και φορτιστούν με ένα φορτίο P όπως φαίνεται στο σχήμα (2.7). Αν η τριβή μεταξύ των δοκών είναι μικρή, τότε θα υπάρξει κάμψη ανεξάρτητη μεταξύ τους.

Κάθε δοκός θα είναι σε θλίψη πάνω από τον ουδέτερο άξονα της και σε εφελκυσμό κάτω από τον ουδέτερο άξονα της και επομένως η κάτω επιφάνεια της πάνω δοκού θα ολισθήσει σε σχέση με την πάνω επιφάνεια της κάτω δοκού.

Αν υποθεθεί ότι οι δύο δοκοί είναι κολλημένες κατά μήκος της κοινής τους επιφάνειας, ώστε να θεωρούνται σαν ένα σώμα και υποβληθούν σε φόρτιση, οι οριζόντιες διατμητικές δυνάμεις πρέπει να είναι μηδενικές κατά μήκος της κοινής επιφάνειας, ώστε να εμποδίζεται η ολίσθηση. Λόγω της παρουσίας αυτών των διατμητικών δυνάμεων, το σώμα αποτελούμενο από τις δύο δοκούς είναι πολύ πιο στιβαρό και ανθεκτικό από τις δύο ξεχωριστές δοκούς.

Υπολογισμός της εξίσωσης διάτμησης

Ακολουθεί ο προσδιορισμός της εξίσωσης για τις διατμητικές δυνάμεις τ σε μια πρισματική δοκό.

Η διατμητική εξίσωση (shear formula) δίνεται από την εξής σχέση (Gere & Timoshenko, 1997):

$$\tau = \frac{VQ}{Ib} \quad (2.14)$$

όπου, V είναι η διατμητική δύναμη, I είναι η ροπή αδράνειας, b το πάχος της δοκού και Q η στατική ροπή 1^{ης} τάξης (first moment) που δίνεται από την παρακάτω σχέση:

$$Q = \int ydA \quad (2.15)$$

Από την παραπάνω σχέση μπορεί να προσδιοριστεί η διατμητική τάση τ σε κάθε σημείο της διατομής μιας ορθογωνικής δοκού.

2.1.6 Κατανομή των Διατμητικών Τάσεων σε Ορθογωνική

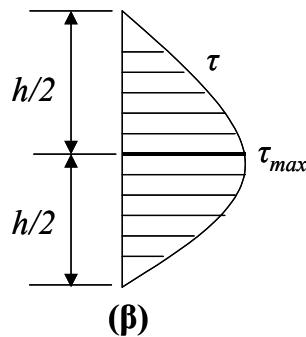
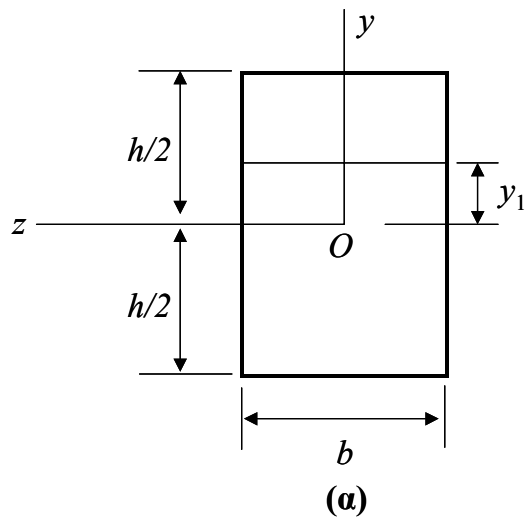
Δοκό

Στη συνέχεια ο προσδιορισμός της κατανομής των διατμητικών τάσεων σε δοκό ορθογωνικής διατομής φαίνεται στο σχήμα (2.8.α). Η στατική ροπή 1^{ης} τάξης (first moment) του σκιασμένου τμήματος της διατομής προκύπτει από την ολοκλήρωση της σχέσης (2.11) (Gere & Timoshenko, 1997):

$$Q = \int y dA = \int_{y_1}^{h/2} y b dy = \frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - y_1^2 \right) \quad (2.16)$$

Από τις εξισώσεις (2.10) και (2.12) προκύπτει ότι:

$$\tau = \frac{V}{2I} \left(\frac{h^2}{4} - y_1^2 \right) \quad (2.17)$$



Σχήμα 2.8: Κατανομή διατμητικών τάσεων σε δοκό ορθογωνικής διατομής **α)** Διατομή της δοκού **β)** Διάγραμμα στο οποίο διακρίνεται η παραβολική κατανομή των διατμητικών τάσεων στο ύψος της δοκού (Gere & Timoshenko, 1997)

Από την παραπάνω σχέση προκύπτει ότι οι διατμητικές τάσεις σε μια πρισματική δοκό μεταβάλλονται παραβολικά με την απόσταση y_1 από τον ουδέτερο άξονα. Έτσι όταν παρουσιάζονται κατά μήκος του ύψους της δοκού, το τ μεταβάλλεται όπως φαίνεται στο σχήμα (2.8.β). Σημειώνεται ότι η διατμητική τάση είναι μηδέν όταν $y_1 = \pm h/2$.

Η διατμητική τάση παίρνει την μέγιστη τιμή της στον ουδέτερο άξονα ($y_1=0$) όπου η αρχική ροπή Q έχει την μέγιστη τιμή της. Αντικαθιστώντας με $y_1=0$ στην εξίσωση (2.13) προκύπτει:

$$\tau_{\max} = \frac{Vh^2}{8I} = \frac{3V}{2A} \quad (2.18)$$

όπου, $A=bh$ είναι η περιοχή της διατομής.

Για αυτό, η μέγιστη διατμητική τάση σε δοκό ορθογωνικής διατομής είναι 50% μεγαλύτερη από την μέση διατμητική τάση (η οποία είναι ίση με V/A).

Οι τύποι των διατμητικών τάσεων που παρουσιάστηκαν σε αυτήν την ενότητα ισχύουν μόνο για γραμμικά ελαστικά υλικά με μικρά βέλη κάμψης.

Στην περίπτωση ορθογωνικών δοκών, η ακρίβεια της εξίσωσης διάτμησης εξαρτάται από τον λόγο ύψους προς πάχους της διατομής. Η εξίσωση μπορεί να θεωρείται ως έχει για πολύ στενές δοκούς (ύψους h πολύ μεγαλύτερου από το πάχος b). Όμως, χάνει την ακρίβεια της καθώς αυξάνεται το b σε σχέση με το h .

Επίσης, η εξίσωση διάτμησης εφαρμόζεται μόνο σε πρισματικές δοκούς. Αν η δοκός δεν είναι πρισματική, οι διατμητικές τάσεις είναι διαφορετικές από αυτές που προβλέπονται από την εξίσωση που δίνεται σε αυτήν την ενότητα.

2.2 Η ΕΠΙΔΡΑΣΗ ΤΟΥ ΣΥΓΚΕΝΤΡΩΜΕΝΟΥ ΦΟΡΤΙΟΥ

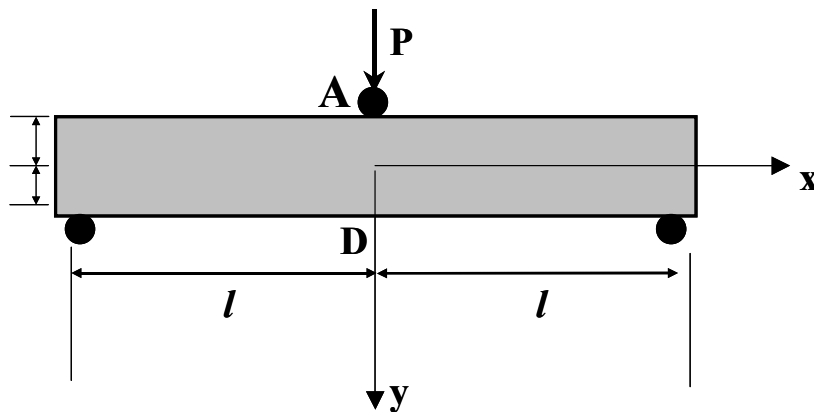
Σύμφωνα με την τεχνική θεωρία κάμψης των Bernoulli-Euler, η επίδραση του συγκεντρωμένου φορτίου (influence of punch) παραλείπεται. Είναι όμως γνωστό (Wilson, 1891), ότι στην κεντρική περιοχή μιας δοκού η οποία υποβάλλεται σε κάμψη

τριών σημείων, αναμένεται σημαντική διαταραχή του πεδίου των τάσεων και παραμορφώσεων, λόγω της επίδρασης του συγκεντρωμένου φορτίου.

Σε αυτή την παράγραφο περιγράφονται οι λύσεις που έχουν δοθεί μέχρι σήμερα από διάφορους ερευνητές για την επίδραση του συγκεντρωμένου φορτίου σε μια δοκό υπό κάμψη τριών σημείων, ώστε να είναι δυνατή η κατανόηση του προβλήματος που αντιμετωπίζεται στην κάμψη τριών σημείων.

2.2.1 Η Επίδραση του Συγκεντρωμένου Φορτίου στην Περίπτωση Ισότροπων Υλικών

Το πρόβλημα της κατανομής της τάσης σε μια δοκό η οποία υποβάλλεται στην δράση μιας συγκεντρωμένης δύναμης, παρουσιάζει ιδιαίτερο πρακτικό ενδιαφέρον. Σε δοκούς συνεχούς φόρτισης στενής ορθογωνικής διατομής, η κατανομή της τάσης προσεγγίζεται με ικανοποιητική ακρίβεια με την συνήθη θεωρία της κάμψης. Όμως, κοντά στο σημείο εφαρμογής του συγκεντρωμένου φορτίου, αναμένεται μια σοβαρή τοπική διαταραχή στην κατανομή της τάσης και είναι απαραίτητη η περαιτέρω διερεύνηση του προβλήματος (Timoshenko & Goodier, 1970).

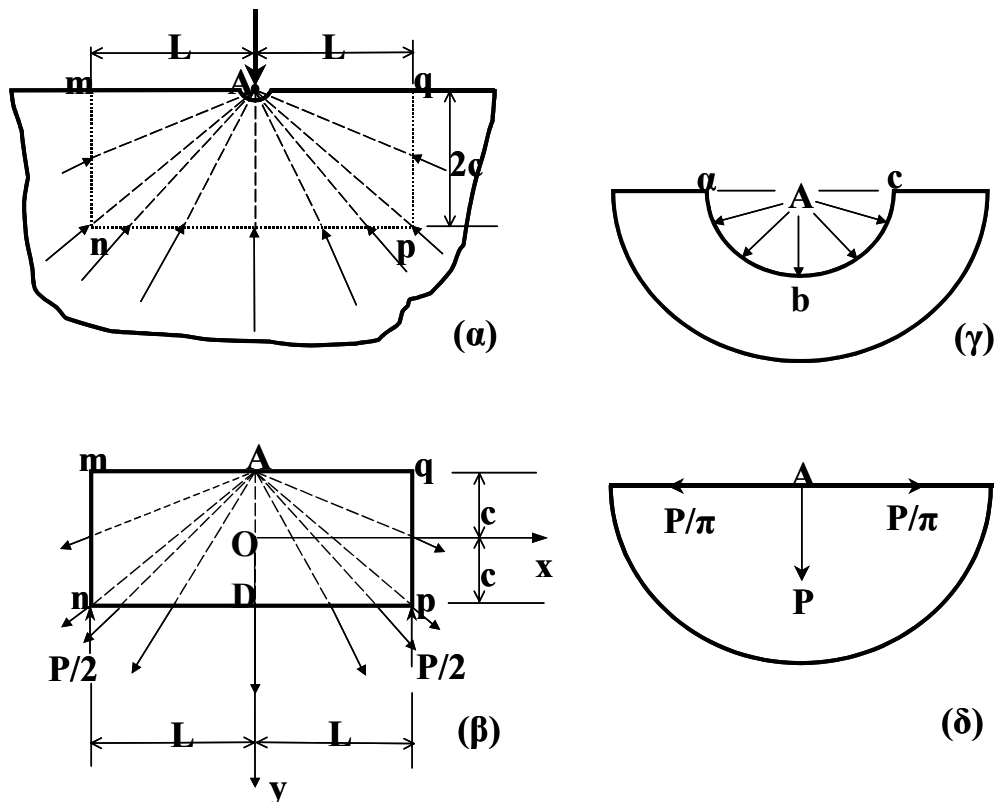


Σχήμα 2.9: Ορθογωνική δοκός στηριζόμενη σε δύο κυλίνδρους, στην οποία εφαρμόζεται φορτίο στο μέσο τμήμα της, με έναν ίδιο τρίτο κύλινδρο (Timoshenko & Goodier, 1970)

Η πρώτη μελέτη αυτών των τοπικών τάσεων έγινε πειραματικά από τον Carus Wilson. Πειραματιζόμενος με μια ορθογωνική δοκό στηριζόμενη σε δύο κυλίνδρους (Σχήμα 2.9), φορτίζοντας την στην μέση και χρησιμοποιώντας πολωμένο φως, έδειξε ότι στο σημείο A όπου εφαρμόζεται το φορτίο, η κατανομή της τάσης πλησιάζει αυτήν που

παράγεται σε μια ημιαπείρων διαστάσεων πλάκα από μια ομαλή συγκεντρωμένη δύναμη. Κατά μήκος της τομής AD η επίπεδη τάση σ_x δεν ακολουθεί κάποιον γραμμικό νόμο και στο σημείο D (το απέναντι του A στο κάτω μέρος της δοκού), η εφελκυστική τάση είναι μικρότερη από αυτήν που προβλέπεται από την θεωρία της κάμψης (Timoshenko & Goodier, 1970).

Τα παραπάνω αποτελέσματα εξηγήθηκαν με βάση σίγουρων εμπειρικών υποθέσεων από τον G.G. Stokes. Η διάταξη που παρουσιάζεται στο Σχήμα 2.9 μπορεί να παραχθεί από την υπέρθεση δύο διατάξεων του Σχήματος 2.10. Οι ακτινικές θλιπτικές τάσεις που δρουν στα τμήματα mn, nr και rq μιας ημιαπείρων διαστάσεων πλάκας (Σχήμα 2.10.α) αντικαθιστούνται από ίσες ακτινικές εφελκυστικές τάσεις που δρουν στις πλευρές της ορθογωνικής πλάκας η οποία στηρίζεται στα σημεία n και p (Σχήμα 2.10.β). Οι τάσεις σε αυτήν την δοκό πρέπει να υπερτίθενται (superposed) στις τάσεις της πλάκας ημιαπείρων διαστάσεων για να προκύψει η υπόθεση που αναλύει ο Stokes (Timoshenko & Goodier, 1970).



Σχήμα 2.10: Η λύση του Stokes (Timoshenko & Goodier, 1970)

Η ροπή κάμψης στο μέσο της τομής AD προκύπτει από την αφαίρεση όλων των ροπών των ακτινικών εφελκυστικών δυνάμεων που εφαρμόζονται στο μέσο της δοκού από την ροπή αντίδρασης $P/2$. Αυτή η τελική ροπή υπολογίζεται εύκολα αν παρατηρηθεί ότι οι ακτινικές κατανεμημένες εφελκυστικές δυνάμεις είναι στατικά ισοδύναμες με την κατανομή της πίεσης γύρω από το τεταρτημόριο ab της κυλινδρικής επιφάνειας abc στο σημείο A (Σχήμα 2.10.γ) ή χρησιμοποιώντας την εξής εξίσωση (Timoshenko & Goodier, 1970):

$$\sigma_r = -\frac{2P \cos \theta}{\pi r} \quad \sigma_\theta = \tau_{r\theta} = 0 \quad (2.19)$$

Αυτές οι εφελκυστικές δυνάμεις είναι ισοδύναμες με μια οριζόντια δύναμη P/π και μια κατακόρυφη δύναμη $P/2$ που εφαρμόζονται στο σημείο A (Σχήμα 2.10.δ). Τότε η καμπτική ροπή δηλαδή η ροπή ως προς το σημείο O είναι (Timoshenko & Goodier, 1970):

$$\frac{P}{2}l - \frac{P}{\pi}c \quad (2.20)$$

Και οι αντίστοιχες καμπτικές τάσεις είναι (Timoshenko & Goodier, 1970):

$$\sigma'_x = \frac{P}{I} \left(\frac{l}{2} - \frac{c}{\pi} \right) y = \frac{3P}{2c^3} \left(\frac{l}{2} - \frac{c}{\pi} \right) y \quad (2.21)$$

Σε αυτές τις καμπτικές τάσεις πρέπει να προστεθεί η ομοιόμορφα κατανεμημένη εφελκυστική τάση $P/2\pi c$ που παράγεται από την εφελκυστική δύναμη P/π . Οι ορθές τάσεις (normal stresses) στην τομή AD είναι σύμφωνα με την θεωρία (Timoshenko & Goodier, 1970):

$$\sigma_x = \frac{3P}{2c^3} \left(\frac{l}{2} - \frac{c}{\pi} \right) y + \frac{P}{2\pi c} \quad (2.22)$$

Η παραπάνω εξίσωση συμπίπτει με την εξίσωση που δίνεται από τον Stokes.

Μια καλύτερη προσέγγιση προκύπτει αν παρατηρηθεί ότι ένα συνεχές κατανεμημένο φορτίο εφαρμόζεται στο κάτω μέρος της δοκού (Σχήμα 2.10.β) και με την χρήση ταυτόχρονα των παρακάτω εξισώσεων (Timoshenko & Goodier, 1970):

$$\begin{aligned}
\sigma_x &= \frac{My}{I} + q\left(\frac{y^3}{2c^3} - \frac{3}{10} \frac{y}{c}\right) \\
\sigma_y &= -\frac{q}{2} + q\left(\frac{3y}{4c} - \frac{y^3}{4c^3}\right) \\
\tau_{xy} &= \frac{Q}{2I}(c^2 - y^2)
\end{aligned} \tag{2.23}$$

όπου, M είναι η καμπτική ροπή και Q οι διατμητικές δυνάμεις.

Η ένταση (πυκνότητα) του φορτίου στο σημείο D, από την εξίσωση (2.19), είναι $P/\pi c$. Αντικαθιστώντας την τιμή αυτή στις εξισώσεις (2.23) και συνδυάζοντας με την τιμή της σ_x , προκύπτει σαν δεύτερη προσέγγιση (Timoshenko & Goodier, 1970):

$$\begin{aligned}
\sigma_x &= \frac{3P}{2c^3}\left(\frac{l}{2} - \frac{c}{\pi}\right)y + \frac{P}{2\pi c} + \frac{P}{\pi c}\left(\frac{y^3}{2c^3} - \frac{3}{10} \frac{y}{c}\right) \\
\sigma_y &= \frac{P}{2\pi c} + \frac{P}{\pi c}\left(\frac{3y}{4c} - \frac{y^3}{4c^3}\right)
\end{aligned} \tag{2.24}$$

Και με την αρχή της υπέρθεσης προκύπτει από τις παραπάνω εξισώσεις (Timoshenko & Goodier, 1970):

$$\begin{aligned}
\sigma_x &= 0 \\
\sigma_y &= -\frac{2P}{\pi(c+y)}
\end{aligned} \tag{2.25}$$

για την περίπτωση πλάκας ημιαπείρων διαστάσεων, για τον υπολογισμό των συνολικών τάσεων κατά μήκος της τομής AD.

Στη συνέχεια ο L.N.G. Filon έδωσε μια λύση του προβλήματος με την χρήση τριγωνομετρικών σειρών. Εφάρμοσε αυτήν την λύση στην περίπτωση των συγκεντρωμένων φορτίων και πραγματοποίησε υπολογισμούς για αρκετές συγκεκριμένες περιπτώσεις, οι οποίες είναι σε καλή συμφωνία με πιο πρόσφατες έρευνες (Timoshenko & Goodier, 1970).

Περαιτέρω πρόοδος επί του θέματος σημειώθηκε από τον H. Lamb, ο οποίος θεώρησε μια απείρων διαστάσεων πλάκα, φορτιζόμενη σε ίσα διαστήματα από ισότιμες συγκεντρωμένες δυνάμεις, που δρουν στις προς τα πάνω και προς τα κάτω διευθύνσεις, εναλλάξ και υπολόγισε για αρκετές περιπτώσεις εκφράσεις για τα βέλη κάμψης. Από

αυτά προκύπτει ότι η τεχνική θεωρία κάμψης Bernoulli-Euler είναι πολύ ακριβής αν το βάθος της δοκού είναι μικρό σε σχέση με το μήκος της (Timoshenko & Goodier, 1970).

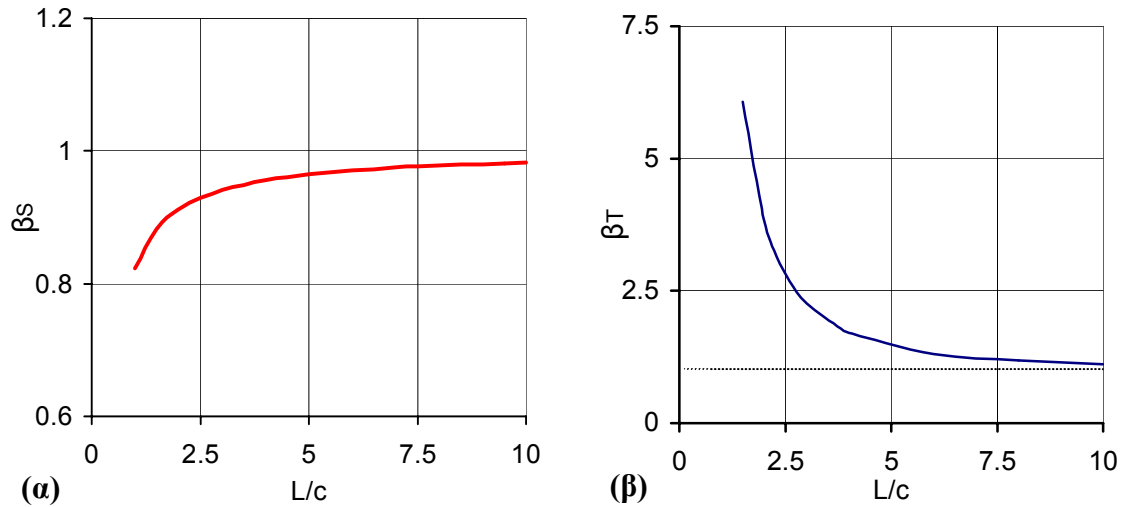
Όμως, η πιο λεπτομερής μελέτη της κατανομή της τάσης και της καμπυλότητας κοντά στο σημείο εφαρμογής του φορτίου έγινε από τον Seewald, ο οποίος χρησιμοποίησε την λύση του Karman. Ο Seewald έδειξε ότι η αξονική καμπτική τάση, σ_{xx} , πρέπει να διαχωριστεί σε δύο μέρη, από τα οποία, ένα που μπορεί να υπολογιστεί από την συνήθη θεωρία κάμψης και ένα δεύτερο, σ'_{xx} , που αναπαριστά την τοπική επίδραση κοντά στο σημείο εφαρμογής του φορτίου. Το δεύτερο μέρος παρουσιάζεται με τη μορφή $\sigma'_{xx} = \beta(P/c)$, όπου β είναι ένας αριθμητικός συντελεστής που εξαρτάται από τη θέση του σημείου στο οποίο υπολογίζονται οι τοπικές τάσεις. Οι τιμές του συντελεστή β δίνονταν από τον Seewald σαν νομογραφήματα $\beta = \beta(x/c)$ για διάφορες τιμές της μεταβλητής y .

Ομοίως, ο Timoshenko εισήγαγε ένα συντελεστή διόρθωσης $\delta = \delta(x/c)$ για το βέλος κάμψης (deflection) του μέσου οριζοντίου τμήματος της δοκού. Ειδικά για τις χαμηλότερες ίνες (fibers) της δοκού, δηλαδή για αυτές με $y=c$, οι λόγοι β_S και β_T της καμπτικής τάσης σύμφωνα με τον Seewald, $\sigma_{xx,S}$, και το μέγιστο βέλος κάμψης σύμφωνα με τον Timoshenko, δ_{Tim} , εκτός των αντίστοιχων ποσοτήτων σύμφωνα με την κλασσική λύση, $\sigma_{xx,Cl}$ και δ_{Cl} , αντίστοιχα μπορούν να προσεγγιστούν ως εξής (Exadaktylos & Kourkoulis, 2002):

$$\begin{aligned}\beta_S &\equiv \frac{\sigma_{xx,S}}{\sigma_{xx,Cl}} = 1 - 0,177 \left(\frac{c}{L} \right) \\ \beta_T &= \frac{\delta_{Tim}}{\delta_{Cl}} = 1 + 2,85 \left(\frac{c}{L} \right)^2 + 0,84 \left(\frac{c}{L} \right)^3\end{aligned}\tag{2.26}$$

Στα διαγράμματα που ακολουθούν (Σχήμα 2.11), οι παραπάνω λόγοι και για τις δύο τάσεις, β_S και τα βέλη κάμψης, β_T , σύμφωνα με τους Seewald και Timoshenko, παρουσιάζονται για την περίπτωση ισότροπων υλικών, συναρτήσει του λόγου του μήκους δια του ύψους της δοκού, L/c . Από τα διαγράμματα αυτά προκύπτει ότι η κλασσική θεωρία μπορεί να θεωρηθεί ως επαρκής για δοκούς με σχετικά υψηλές τιμές

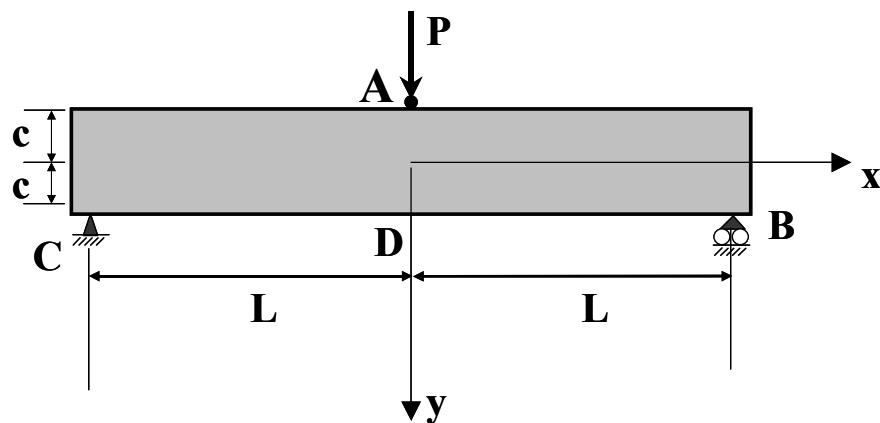
των λόγων L/c , δηλαδή για ανοίγματα που πλησιάζουν το δέκα (Exadaktylos & Kourkoulis, 2002).



Σχήμα 2.11: α) Η διόρθωση Seewald για τις τάσεις β) Η διόρθωση Timoshenko για τα βέλη κάμψης (Exadaktylos & Kourkoulis, 2002)

2.2.2 Η Προσέγγιση Reissner για Εγκαρσίως Ισότροπα Υλικά

Ας θεωρηθεί μια πρισματική δοκός ενός εγκαρσίως ισότροπου υλικού, μοναδιαίου πάχους, μήκους $2L$ και ύψους $2c$ και ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων (Σχήμα 2.12).



Σχήμα 2.12: Η διάταξη του προβλήματος (Exadaktylos & Kourkoulis, 2002)

Στην περίπτωση που θεωρηθεί ότι επικρατούν συνθήκες επίπεδης τάσης, οι εξισώσεις ισορροπίας έχουν ως εξής (Exadaktylos & Kourkoulis, 2002):

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} = 0 \quad (2.27)$$

Σε αυτήν την περίπτωση και υποθέτοντας ότι το υλικό συμπεριφέρεται γραμμικά ελαστικά οι σχέσεις τάσης-παραμόρφωσης είναι (Exadaktylos & Kourkoulis, 2002):

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xx} &= \frac{1}{E_x}(\sigma_{xx} - \nu_x \sigma_{yy}) \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{1}{E_y}(\sigma_{yy} - \nu_y \sigma_{xx}) \\ \gamma_{xy} &= \frac{1}{G} \sigma_{xy}\end{aligned}\tag{2.28}$$

όπου, E_x και E_y τα μέτρα ελαστικότητας κατά το επίπεδο της ισοτροπίας και κάθετα σε αυτό αντίστοιχα, τα ν_x και ν_y χαρακτηρίζουν τον εγκάρσιο χαρακτήρα του υλικού λόγω του αξονικού φορτίου στο επίπεδο της ισοτροπίας και κάθετα σε αυτό και G το μέτρο διάτμησης.

Οι σταθερές, E_x , E_y , ν_x , ν_y , δεν είναι ανεξάρτητες, όταν η ύπαρξη της συνάρτησης της παραμορφωσιακής ενέργειας (strain energy function) επιβάλλει την ακόλουθη σχέση μεταξύ τους (Exadaktylos & Kourkoulis, 2002):

$$E_x \nu_y = E_y \nu_x \tag{2.29}$$

Ο Reissner περιόρισε την μελέτη του για υλικά των οποίων το μέτρο ελαστικότητας κάθετα στο επίπεδο της ισοτροπίας είναι πολύ μικρό, δηλαδή $E_y \rightarrow 0$. Τότε από την εξίσωση (2.29) συμπεραίνεται ότι $\nu_y \rightarrow 0$, ή με άλλα λόγια οι μηδενιζόμενες ανεξάρτητες σταθερές, απαραίτητες για τον μηχανικό προσδιορισμό των υλικών υπό τις συνθήκες που θεωρούνται εδώ, είναι μόνο τρεις: οι σταθερές E_x , ν_x και G . Τότε το σύστημα των εξισώσεων (2.28) απλοποιείται ως εξής (Exadaktylos & Kourkoulis, 2002):

$$\begin{aligned}E_x \frac{\partial u}{\partial x} &= \sigma_{xx} - \nu_x \sigma_{yy} \\ \sigma_{yy} &= 0, \gamma_{xy} = \frac{1}{G} \sigma_{xy}\end{aligned}\tag{2.30}$$

όπου, $\varepsilon_{xx} \equiv (\partial u / \partial x)$.

Σύμφωνα με τον Reissner η συνθήκη $\sigma_{yy}=0$ ακολουθείται από τις σχέσεις τάσης-παραμόρφωσης (σχέση 2.28) σαν ένα φυσικό και αναπόφευκτο επακόλουθο, αφού σε μια διαφορετική περίπτωση μια πεπερασμένη ορθή τάση κατά μήκος του άξονα y , θα προκαλούσε μια άπειρη ορθή τάση κατά την διεύθυνση y . Η αξιοπιστία του παραπάνω αποτελέσματος μπορεί να ελεγχθεί θεωρώντας την προσεγγιστική λύση για την τάση σ_{yy} στο μέσο τμήμα της δοκού, όπως προκύπτει με σχετικά υψηλή ακρίβεια από την κατανομή ενός ομοιόμορφου κατακόρυφου φορτίου σ κατά μήκος του μισού μήκους της δοκού (Exadaktylos & Kourkoulis, 2002):

$$\sigma_{yy} = -\frac{\sigma}{\pi} \left[\arctan\left(-\frac{y}{a}, -1\right) - \arctan\left(\frac{y}{a}, 1\right) + \frac{2\frac{y}{a}}{\left(\frac{y}{a}\right)^2 + 1} \right] \quad (2.31)$$

Από την εξίσωση (2.31) συμπεραίνεται ότι για υψηλές τιμές του λόγου (y/a) η τάση σ_{yy} τείνει στο μηδέν. Στην πράξη όμως, δεν υπάρχει κανένα υλικό με $E_y=0$ και η θεωρία που αναπτύσσεται εδώ πρέπει να θεωρείται σαν την περιοριστική περίπτωση για υλικά με $E_y/E_x \rightarrow 0$, η σαν μια προσέγγιση για προβλήματα όπου η τάση σ_{yy} έχει πολύ μικρές τιμές.

Χρησιμοποιώντας το παραπάνω αποτέλεσμα, δηλαδή ότι $\sigma_{yy}=0$, οι εξισώσεις ισορροπίας αποδίδουν τις ακόλουθες γενικές εκφράσεις για τις δύο συνιστώσες της τάσης, σ_{xx} και σ_{xy} (Exadaktylos & Kourkoulis, 2002):

$$\sigma_{xy} = f(y), \sigma_{xx} = -xf'(y) + g(y) \quad (2.32)$$

όπου, f και g είναι αυθαίρετες συναρτήσεις.

Συνδυάζοντας τις δύο πρώτες εξισώσεις από την σχέση (2.28) προκύπτει το πεδίο μετατόπισης που είναι (Exadaktylos & Kourkoulis, 2002):

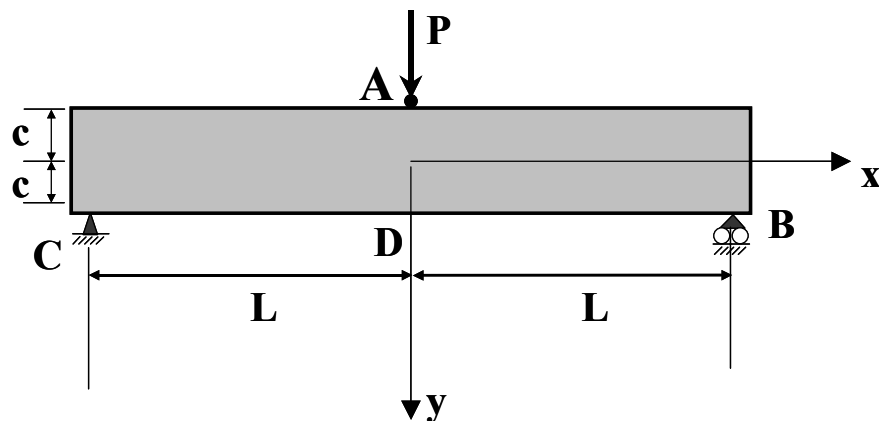
$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{E_x} \left[-\frac{x^2}{2} f'(y) + xg(y) + h(y) \right] \\ \nu &= \frac{1}{E_x} \left[\frac{x^3}{6} f''(y) - \frac{x^2}{2} g'(y) + \frac{E_x}{G} xf(y) + k(y) \right] \end{aligned} \quad (2.33)$$

όπου, h και k είναι αυθαίρετες συναρτήσεις.

Το σύστημα των εξισώσεων (2.32) και (2.33) αντιστοιχεί στην γενική λύση του προβλήματος. Χρησιμοποιώντας τις συνοριακές συνθήκες κατά μήκος των γραμμών $x=\text{σταθ.}$ προκύπτουν οι απαραίτητες εξισώσεις για τον προσδιορισμό των τεσσάρων αυθαίρετων εξισώσεων f , g , h και k . Χρησιμοποιώντας τις συνοριακές συνθήκες κατά μήκος των γραμμών $y=\text{σταθ.}$ προκύπτουν οι σχέσεις για τον προσδιορισμό των σταθερών στις λύσεις των συνοριακών διαφορικών εξισώσεων (Exadaktylos & Kourkoulis, 2002).

2.2.3 Κάμψη Τριών Σημείων υπό Συνθήκες Επίπεδης Τάσης για Εγκαρσίως Ισότροπα Υλικά

Θεωρείται η πρισματική δοκός του σχήματος (2.13), εγκαρσίως ισότροπο υλικού με τα επιπλέον χαρακτηριστικά που θεωρούνται από την θεωρία του Reissner, σχετικά με το λόγο (E_y/E_x).



Σχήμα 2.13: Η διάταξη του προβλήματος (Exadaktylos & Kourkoulis, 2002)

Οι συνοριακές συνθήκες του προβλήματος είναι (Exadaktylos & Kourkoulis, 2002):

$$\begin{aligned}
 x = 0 &\rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \\
 v &= 0 \\
 x = L &\rightarrow v = C \\
 y = \pm c &\rightarrow \tau_{xy} = 0
 \end{aligned}
 \tag{2.34}$$

όπου, C είναι μια αυθαίρετη σταθερά.

Εισάγοντας την πρώτη από τις παραπάνω συνοριακές συνθήκες στην δεύτερη από τις εξισώσεις (2.33) της προηγούμενης παραγράφου προκύπτει ότι (Exadaktylos & Kourkoulis, 2002):

$$k(y) = 0 \quad (2.35)$$

Στη συνέχεια ολοκληρώνοντας την πρώτη από τις εξισώσεις (2.33) ως προς x , προκύπτει η ακόλουθη διαφορική εξίσωση (Exadaktylos & Kourkoulis, 2002):

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{E_x} [-xf'(y) + g(y)] = 0 \quad (2.36)$$

Χρησιμοποιώντας ξανά την πρώτη συνοριακή συνθήκη, η εξίσωση (2.36) αποδίδει για την άγνωστη εξίσωση $g(y)$ ότι (Exadaktylos & Kourkoulis, 2002):

$$g(y) = 0 \quad (2.37)$$

Σαν επόμενο βήμα πρέπει να εισαχθεί η δεύτερη συνοριακή συνθήκη στην δεύτερη εξίσωση από τις εξισώσεις (2.33). Τότε προκύπτει ότι (Exadaktylos & Kourkoulis, 2002):

$$\frac{L^3}{6E_x} f''(y) + \frac{1}{G} Lf(y) = C \frac{6E_x}{L^3} \quad (2.38)$$

Μετά από κατάλληλους αλγεβρικούς υπολογισμούς της εξίσωσης (2.37), προκύπτει η ακόλουθη σχέση για την εξίσωση $f(y)$ (Exadaktylos & Kourkoulis, 2002):

$$f(y) = -\frac{CG}{L} + C_1 e^{ay} + C_2 e^{-ay} \quad (2.39)$$

$$a = \frac{1}{L} \sqrt{\frac{6E_x}{G}}$$

όπου, C_1 και C_2 είναι αυθαίρετες σταθερές.

Ο συνδυασμός της τρίτης συνοριακής συνθήκης με την εξίσωση (2.33) δίνει το ακόλουθο σύστημα εξισώσεων (Exadaktylos & Kourkoulis, 2002):

$$C_1 e^{ac} + C_2 e^{-ac} = \frac{CG}{L} \quad (2.40)$$

$$C_1 e^{-ac} + C_2 e^{ac} = \frac{CG}{L}$$

Η αλγεβρική λύση του συστήματος των εξισώσεων (2.40) δίνει τις ακόλουθες τιμές για τις δύο σταθερές C_1 και C_2 (Exadaktylos & Kourkoulis, 2002):

$$C_1 = C_2 = \frac{CGe^{-ac}}{L(e^{-2ac} + 1)} \quad (2.41)$$

Εισάγοντας την εξίσωση (2.37) στην δεύτερη από τις εξισώσεις (2.32) της προηγούμενης παραγράφου και με την χρήση της σχέσης (2.41) προκύπτει για την τάση σ_{xx} (Exadaktylos & Kourkoulis, 2002):

$$\sigma_{xx} = \frac{-2xCGe^{-ac}a \sinh(ac)}{L(1 + e^{-2ac})} \quad (2.42)$$

Επίσης, εισάγοντας την εξίσωση (2.39) στην πρώτη από τις εξισώσεις (2.32) της προηγούμενης παραγράφου και χρησιμοποιώντας ξανά την σχέση (2.41), η διατμητική τάση σ_{xy} γίνεται (Exadaktylos & Kourkoulis, 2002):

$$\tau_{xy} = -\frac{CG}{L} + \frac{2CGe^{-ac} \cosh(ay)}{L(1 + e^{-2ac})} \quad (2.43)$$

Οι εξισώσεις (2.42) και (2.43) αναπαριστούν την αρχική λύση του προβλήματος, για τον καθορισμό της σταθεράς C . Αυτό μπορεί να επιτευχθεί εξισώνοντας το εξωτερικό εφαρμοζόμενο φορτίο P (ανά μονάδα πλάτους της δοκού) με τη δύναμη που αναπτύσσεται από την δράση της τάσης τ_{xy} , ή με μαθηματικούς όρους από την εξίσωση (Exadaktylos & Kourkoulis, 2002):

$$P = 2b \int_{-c}^{+c} \tau_{xy} dy = \frac{2b}{La} e^{-ac} \left[-CGce^{ac} + C_1 Le^{2ac} - C_1 L \right] \quad (2.44)$$

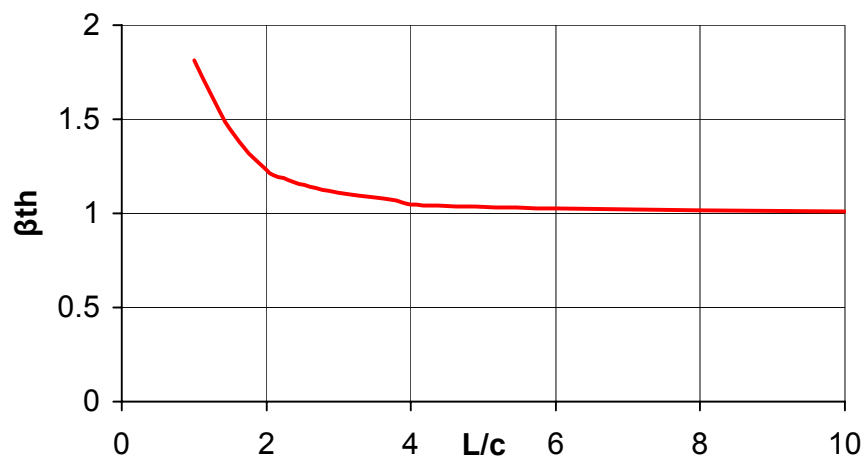
Στη συνέχεια, έπειτα από κατάλληλους αλγεβρικούς μετασχηματισμούς, η εξίσωση (2.44) παρέχει την τιμή της σταθεράς C , που σε σύνδεση με τις εξισώσεις (2.42) και (2.43), λύνει το πρόβλημα της κάμψης τριών σημείων εγκαρσίων ισότροπων υλικών υπό συνθήκες επίπεδης τάσης (Exadaktylos & Kourkoulis, 2002):

$$C = \frac{PLa}{2be^{-ac}} \left[-Gcae^{ac} + C_1' L (e^{2ac} - 1) \right] \quad (2.45)$$

$$C_1' = \frac{C_1}{C} = \frac{Ge^{-ac}}{L(e^{-2ac} + 1)}$$

Εφαρμόζοντας την παραπάνω λύση για ένα υποθετικό υλικό με $E_x=10$ GPa, $E_y=0,01$ GPa, $\nu_x=0,30$ και $G=5$ MPa, υπολογίζεται ο λόγος β_{th} της τάσης που αναπτύσσεται στην χαμηλότερη ίνα πέρα του αντίστοιχου που προκύπτει από την λύση Bernoulli-Euler και τα αποτελέσματα παρουσιάζονται στο διάγραμμα του Σχήματος 2.14, έναντι του λόγου του μήκους της δοκού δια του ύψους της (Exadaktylos & Kourkoulis, 2002).

Από αυτό το διάγραμμα φαίνεται ότι, όπως ακριβώς συμβαίνει και για τα ισότροπα υλικά, η λύση τείνει στην κλασσική θεωρία μόνο για λόγους του μήκους προς ύψους της δοκού που πλησιάζουν το 10. Όμως, το πιο εκπληκτικό συμπέρασμα είναι ότι για τιμές του L/c μικρότερες του 10 η λύση της ανισοτροπίας δίνει τιμές τάσης υψηλότερες από τις αντίστοιχες της κλασσικής θεωρίας, σε αντίθεση με τα ισότροπα υλικά, για τα οποία η κλασσική θεωρία υπερεκτιμά σημαντικά το επίπεδο της τάσης που αναπτύσσεται στην κατώτερη ίνα (Σχήμα 2.11.α) (Exadaktylos & Kourkoulis, 2002).



Σχήμα 2.14: Η λύση για το ανισότροπο υλικό σύμφωνα με την παρούσα τεχνική θεωρία (Exadaktylos & Kourkoulis, 2002)

2.3 ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ ΑΣΤΟΧΙΑΣ ΜΕΣΩ ΤΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ ΘΡΑΥΣΤΟΜΗΧΑΝΙΚΗΣ

Είναι γενικότερα αποδεκτό ότι η αντοχή σε θραύση (fracture strength) είναι μια δομική ιδιότητα των ψαθυρών (brittle) υλικών καθώς έχει αποδειχθεί ότι τα περισσότερα από αυτά τα υλικά τείνουν στην θραύση όταν φορτιστούν πέρα από το επίπεδο της αντοχής τους. Όμως στην αντοχή θραύσης συμβαίνουν μεταβολές λόγω παραγόντων όπως οι μέθοδοι πειράματος, οι διαστάσεις των δοκιμίων, οι συνθήκες περιβάλλοντος και τα εσωτερικά δομικά χαρακτηριστικά του υλικού (Whittaker et al., 1992).

Η μείωση στην εφελκυστική αντοχή ενός υλικού οφείλεται στην παρουσία ρωγμών (cracks) στο υλικό. Το γεγονός αυτό δεν ήταν αποδεκτό πριν την μελέτη των Inglis και Griffith και ιδιαίτερα ο τελευταίος ήταν ο πρώτος που συνέλαβε την σημασία των προϋπάρχουσων ρωγμών. Ο Inglis παρείχε μια μαθηματική λύση για μια φορτισμένη πλάκα που περιείχε ένα άνοιγμα ελλειπτικού σχήματος και ανέπτυξε σχέσεις που δίνουν την κατανομή των τάσεων γύρω από αυτό το άνοιγμα. Στη συνέχεια ο Griffith βασισμένος στην ανάλυση του Inglis, καθιέρωσε μια σχέση μεταξύ τάσης θραύσεως και μεγέθους της ρωγμής. Η προσέγγιση αυτή είναι γνωστή σαν θεωρία ενεργειακής ισορροπίας του Griffith (Griffith energy balance theory), η οποία αποτελεί την αρχή για την ανάπτυξη της σημερινής σύγχρονης θραυστομηχανικής (Whittaker et al., 1992).

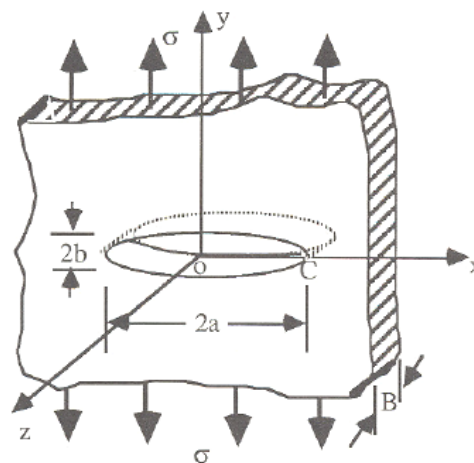
Σύμφωνα με τον Bieniawski, η εκκίνηση της ρωγμής (fracture initiation) καθορίζεται σαν την διαδικασία αστοχίας κατά την οποία η προϋπάρχουσα ρωγμή ή ρωγμές σε ένα υλικό αρχίζουν να εκτείνονται ή να μεγαλώνουν, ενώ η διάδοση της ρωγμής (fracture extension) καθορίζεται σαν την διαδικασία θραύσης κατά την οποία η προϋπάρχουσα ρωγμή ή ρωγμές εκτείνονται ή μεγαλώνουν σαν επακόλουθο της εκκίνησης της ρωγμής. Η εκκίνηση της ρωγμής δείχνει το ξεκίνημα της διάδοσης της ρωγμής και περιορίζεται στην περιοχή των άκρων της ρωγμής, αλλά η διάδοση της ρωγμής αναπαριστά την διαδικασία της επέκτασης από τις άκρες της προς τα σύνορα του υλικού όπου τελικά οδηγεί στην αστοχία του υλικού και για αυτό αναφέρεται σαν διαδικασία συνολικής αστοχίας (global failure process) (Whittaker et al., 1992).

2.3.1 Θεωρία Griffith

Βασιζόμενος στο γεγονός ότι η εφελκυστική αντοχή ενός υλικού είναι πολύ χαμηλότερη από την θεωρητικά προβλεπόμενη, ο Griffith υπέθεσε ότι τα ψαθυρά υλικά αναπόφευκτα περιέχουν μεγάλο αριθμό ρωγμών ή άλλων ασυνεχειών, οι οποίες κατανέμονται με τυχαίο προσανατολισμό μέσω του όγκου του υλικού. Αυτές οι ρωγμές είναι πολύ μικρές για να μπορούν να εντοπιστούν με συνήθη μέσα και λειτουργούν σαν συγκεντρωτές τάσης και σαν επακόλουθο, η εκκίνηση της ρωγμής προκαλείται από τις συγκεντρώσεις τάσης στα άκρα αυτών των εσωτερικών ρωγμών.

Στη συνέχεια ο Griffith μετά από μια σειρά πειραμάτων εφελκυστικής αντοχής σε ίνες γυαλιού κατέληξε στο συμπέρασμα ότι το μέγεθος του δοκιμίου είχε άμεση επιρροή στην αντοχή του, καθώς όσο λεπτότερο ήταν το δοκίμιο τόσο μεγαλύτερη ήταν η εφελκυστική αντοχή, καθώς τα λεπτότερα δοκίμια περιείχαν λιγότερες ρωγμές.

Στο σχήμα (2.15) διακρίνεται το μοντέλο ανάλυσης του Griffith στο οποίο μια λεπτή πλάκα απείρων διαστάσεων η οποία περιέχει ένα στενό ελλειπτικό άνοιγμα, υπόκειται σε ομοιόμορφη μονοαξονική εφελκυστική τάση σ . Με το μοντέλο αυτό ο Griffith προσπάθησε να προσομοιώσει την εσωτερική ρωγμή στο υλικό και να προβλέψει την αντοχή του σε θραύση.



Σχήμα 2.15: Ελλειπτικό άνοιγμα σε μια απείρων διαστάσεων πλάκα που υπόκειται σε ομοιόμορφο εφελκυσμό (Whittaker et al., 1992)

Η ρωγμή εντοπίζεται είτε μέσα στο υλικό (εσωτερική ρωγμή), είτε σε ένα μέρος του συνόρου του υλικού. Στην πρώτη περίπτωση έχει δύο άκρες, ενώ στην δεύτερη περίπτωση έχει μια άκρη. Αναμφίβολα το ελλειπτικό άνοιγμα στο μοντέλο του Griffith δεν είναι, αλλά θεωρείται ως ρωγμή. Από το σχήμα (2.15) είναι φανερό ότι η ακτίνα της καμπυλότητας στο σημείο C δίνεται από την εξίσωση (Whittaker et al., 1992):

$$\rho = \frac{b^2}{a} \quad (2.46)$$

όπου, ρ είναι η ακτίνα της καμπυλότητας στο σημείο C και a, b τα μήκη του μεγαλύτερου και μικρότερου ημιάξονα αντίστοιχα.

Είναι φανερό ότι $\rho \propto 1/a$ και όταν $a \rightarrow \infty$, $\rho \rightarrow 0$. Επομένως, ο όρος ρωγμή μπορεί να προσδιοριστεί μαθηματικά σαν μια απειροελάχιστη στενή έλλειψη.

Οι όροι ρωγμή, ρήγμα και άλλα συνώνυμα σημαίνουν ουσιαστικά μετατόπιση ασυνεχειών. Ο Griffith δεν συμπεριέλαβε τα πετρώματα στην μελέτη του, αλλά έχει αποδειχθεί ότι στα πετρώματα υπάρχουν ασυνέχειες τύπου ρωγμής οι οποίες δημιουργούνται είτε κατά την διάρκεια σχηματισμού τους, είτε έπειτα από θερμική ή θλιπτική καταπόνηση. Οι ρωγμές στα πετρώματα μπορεί να είναι μήκους εκατοντάδων χιλιάδων μέτρων όταν είναι σε μορφή ρηγμάτων, αλλά και τόσο μικρές στην κλίμακα των μικρών. Γενικότερα, τα περισσότερα πετρώματα έχουν πορώδεις γεγονός που υποδεικνύει την ύπαρξη ρωγμών με διαστάσεις μερικών μικρών (Whittaker et al., 1992).

2.3.2 Θεωρία Ενεργειακής Ισορροπίας του Griffith

Σύμφωνα με την θεωρία Griffith, η αστοχία ενός στερεού ψαθυρού υλικού προκαλείται από την διάδοση των ρωγμών οι οποίες υπάρχουν μέσα στο στερεό σώμα και η δημιουργία μιας νέας επιφάνειας ρωγμής από την διάδοση τους απορροφά ενέργεια η οποία παρέχεται από το παραγόμενο έργο από την εξωτερική δύναμη της απελευθέρωσης της αποθηκευμένης ενέργειας παραμόρφωσης στο στερεό, ή με συνδυασμό των δύο πηγών (Whittaker et al., 1992).

Η αστοχία ενός στερεού ψαθυρού υλικού περιλαμβάνει δύο απαραίτητες προϋποθέσεις (Whittaker et al., 1992):

α) Προϋπόθεση τάσης: σε κάποιο σημείο στο σώμα, η τοπική τάση πρέπει να είναι τόσο υψηλή ώστε υπερνικά την μοριακή αντοχή συνοχής του υλικού. Αυτό μπορεί να επιτευχθεί από την συγκέντρωση τάσης λόγω της ύπαρξης των ασυνεχειών όπως οι προϋπάρχουσες μικρορωγμές.

β) Προϋπόθεση ενέργειας: επαρκές ενεργειακό δυναμικό πρέπει να απελευθερωθεί για να υπερνικά την αντίσταση στην εξάπλωση της ρωγμής. Αυτό μπορεί να επιτευχθεί μέσω της αύξησης του παραγόμενου έργου από τις εξωτερικές δυνάμεις.

Όπως έχει ήδη αναφερθεί, στα πετρώματα υπάρχουν εσωτερικές μικρορωγμές που αποτελούν ενδείξεις για την συγκέντρωση τάσεων. Για αυτό το λόγο η προϋπόθεση τάσης (stress requirement) ικανοποιείται αυτομάτως. Η προϋπόθεση ενέργειας (energy requirement) είναι μια εφαρμογή του θεωρήματος του ελαχίστου ενεργειακού δυναμικού. Ο Griffith έδειξε ότι υπάρχει μια απλή ενεργειακή ισορροπία αποτελούμενη από την μείωση στο ενεργειακό δυναμικό μέσα στο φορτισμένο σώμα εξαιτίας της εξάπλωσης της ρωγμής και αυτό εξισορροπείται από την αύξηση της επιφανειακής ενέργειας, λόγω της αυξανόμενης επιφάνειας της ρωγμής (Whittaker et al., 1992).

Γενικότερα η συνολική ενέργεια U της πλάκας του σχήματος (2.15) μπορεί να γραφτεί ως εξής (Whittaker et al., 1992):

$$U=U_t + U_c - W + U_s=U_p + U_s \quad (2.47)$$

όπου,

U : Συνολική ενέργεια της πλάκας

U_t : Συνολική αρχική ενέργεια ελαστικής παραμόρφωσης της φορτιζόμενης αλλά μη σπασμένης ρωγματωμένης πλάκας

U_c : Η απελευθερούμενη ελαστική ενέργεια παραμόρφωσης που οφείλεται στη σύσταση της ρωγμής μήκους $2a$ και την χαλάρωση του υλικού πάνω και κάτω από τη ρωγμή

U_s : Αλλαγή στην ελαστική επιφανειακή ενέργεια λόγω του σχηματισμού νέων επιφανειών ρωγμής

U_p : Αλλαγή στο ενεργειακό δυναμικό, δηλαδή, $U_p= U_t+ U_c- W$

W : Το παραγόμενο έργο από τις εξωτερικές δυνάμεις.

Το U_t δίνεται από την παρακάτω σχέση (Whittaker et al., 1992):

$$U_t = 1/2 \int_V \sigma_y \varepsilon_y (B dx dy) = 1/2 \int_A \sigma_y \varepsilon_y dA = 1/2 \int_A \frac{\sigma^2}{E'} dA = \frac{\sigma^2 A}{2E'} \quad (2.48)$$

όπου,

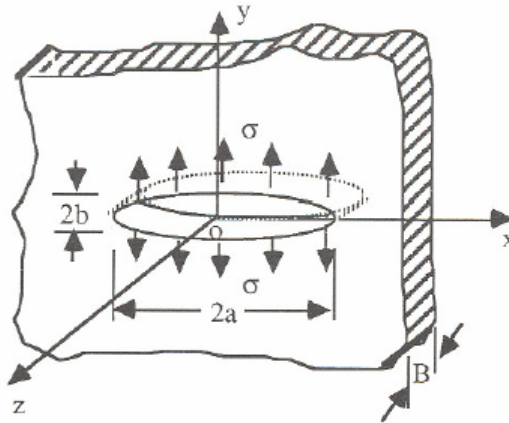
A : Η άπειρη περιοχή της λεπτής πλάκας

B : Πάχος, το οποίο θεωρείται ότι είναι μοναδιαίο, δηλαδή $B=1$.

V : Όγκος της πλάκας.

σ_y : σ για αυτή την περίπτωση.

E' : Ενεργό μέτρο ελαστικότητας του Young: $E'=E$ για επίπεδη τάση και $E'=E/(1-\nu^2)$ για επίπεδη παραμόρφωση.



Σχήμα 2.16: Απείρων διαστάσεων πλάκα που περιέχει ένα ελλειπτικό άνοιγμα το οποίο υπόκειται σε ομοιόμορφη τάση σ (Whittaker et al., 1992)

Το U_c που αντιστοιχεί στο σχήμα (2.15) είναι ίδιο με αυτό του στερεού στο οποίο οι επιφάνειες της ρωγμής υπόκεινται σε ομοιόμορφο εφελκυστική τάση σ η οποία είναι κάθετη στις επιφάνειες της ρωγμής (Σχήμα 2.16). Οπότε είναι (Whittaker et al., 1992):

$$U_c = 2 \int_0^a \nu(\sigma B dx) = 2 \int_0^a \frac{2\sigma \sqrt{a^2 - x^2}}{E'} dx = \pm \frac{\pi \sigma^2 a^2}{E'} \quad (2.49)$$

Το παραγόμενο έργο από τις εξωτερικές δυνάμεις W δίνεται από την παρακάτω σχέση (Whittaker et al., 1992):

$$W = \int_v P dy = 1/2 \int_A \sigma \varepsilon dA = \frac{\sigma \varepsilon A}{2} \quad (2.50)$$

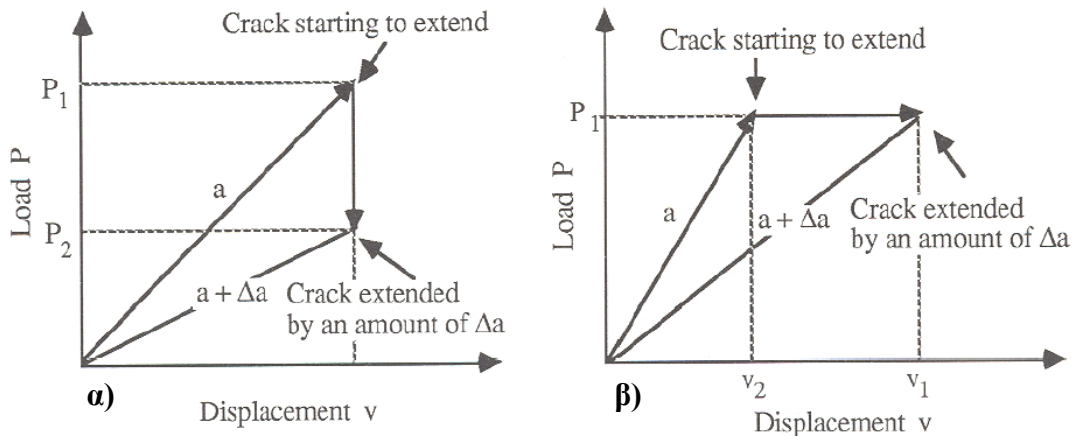
όπου,

v : Η συνολική μετατόπιση των φορτιζόμενων συνόρων.

P : Η εφαρμοζόμενη δύναμη ανά μονάδα πάχους.

ε : Παραμόρφωση.

Γενικότερα υπάρχουν δύο ειδικές περιπτώσεις συνθηκών φόρτισης: α) Σταθερής μετατόπισης και β) Σταθερού φορτίου. Στο σχήμα (2.17) παρουσιάζονται αυτές οι δύο συνθήκες φόρτισης.



Σχήμα 2.17: Συνθήκες φόρτισης για την έναρξη της ρωγμής **α)** Σταθερή μετατόπιση **β)** Σταθερό φορτίο (Whittaker et al., 1992)

Η τέταρτη ενεργειακά συνιστώσα U_s απαιτείται να υπερνικήσει τις μοριακές δυνάμεις συνοχής κατά τον σχηματισμό των νέων επιφανειών ρωγμών και δίνεται από την εξής σχέση (Whittaker et al., 1992):

$$U_s = 2A'\gamma_s = 2(2aB)\gamma_s = 4a\gamma_s \quad (2.51)$$

όπου,

γ_s : Η ειδική ενέργεια επιφάνειας, δηλαδή, η ενέργεια που απαιτείται για την δημιουργία μοναδιαίας επιφάνειας νέας ρωγμής καθώς η ρωγμή αυξάνεται σε μήκος.

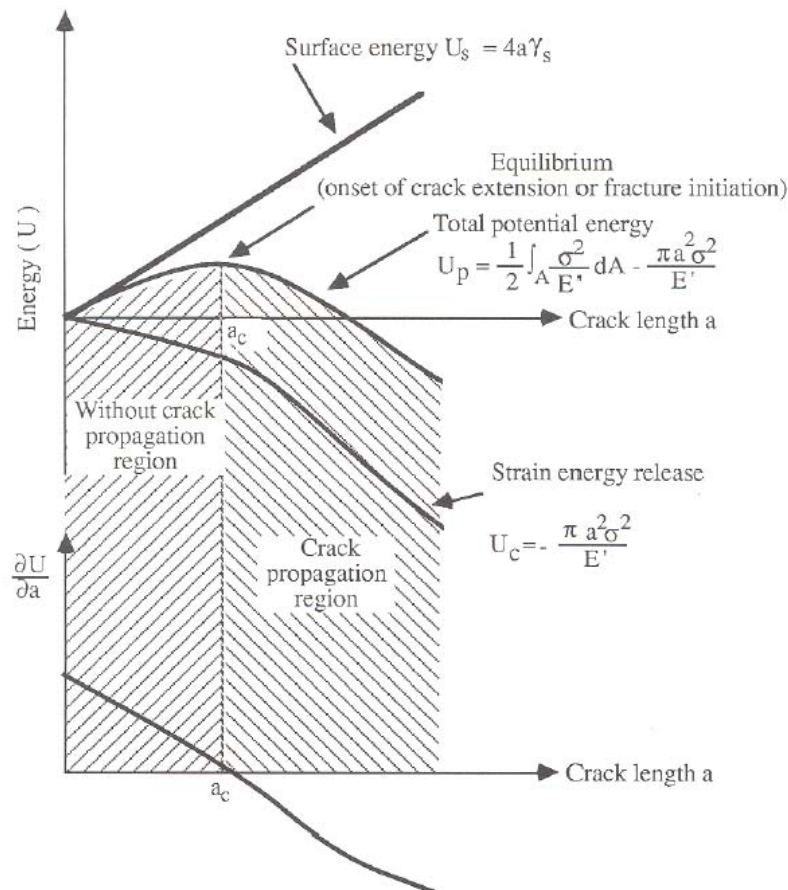
A' : Η διατομή της πλάκας.

Αφού το γ_s είναι μια σταθερή ιδιότητα του υλικού, από την παραπάνω εξίσωση συνεπάγεται ότι το U_s είναι γραμμικά ανάλογο με το μήκος της ρωγμής. Είναι φανερό ότι το U_s είναι αναστρέψιμο και για αυτό δεν αποτελεί μέρος του εσωτερικού ενεργειακού δυναμικού του συστήματος.

Σύμφωνα με τα παραπάνω η συνολική ελαστική ενέργεια U μπορεί να γραφεί και ως εξής (Whittaker et al., 1992):

$$U = \frac{\sigma^2 A}{2E'} \pm \frac{\pi \sigma^2 a^2}{E'} - \frac{\sigma \varepsilon A}{2} + 4a\gamma_s \quad (2.52)$$

Στο σχήμα (2.18) δίνεται το διάγραμμα της ενεργειακής ισορροπίας Griffith για την περίπτωση σταθερής μετατόπισης.



Σχήμα 2.18: Σχηματική αναπαράσταση της προσέγγισης της ενεργειακής ισορροπίας Griffith για σταθερή μετατόπιση (Whittaker et al., 1992)

Εκκίνηση της ρωγμής και κρίσιμη ισορροπία

Σύμφωνα με τον Griffith η εκκίνηση της ρωγμής λαμβάνει χώρα όταν $\partial U / \partial a < 0$ και η κρίσιμη ισορροπία (critical equilibrium) για την εκκίνηση της ρωγμής συμβαίνει όταν $\partial U / \partial a = 0$, δηλαδή (Whittaker et al., 1992):

$$\frac{\partial}{\partial a} \left[\frac{\sigma^2 A}{2E'} - \frac{\pi \sigma^2 a^2}{E'} + 4a\gamma_s \right] = 0 \quad (2.53)$$

Η παραπάνω εξίσωση οδηγεί στο εξής αποτέλεσμα (Whittaker et al., 1992):

$$4\gamma_s - \frac{2\pi \sigma^2 a}{E'} = 0 \quad (2.54)$$

ή

$$\sigma \sqrt{\pi a} = \sqrt{2E' \gamma_s} \quad (2.55)$$

Η τελευταία εξίσωση δείχνει ότι η εκκίνηση της ρωγμής σε ένα ιδανικά ψαθυρό υλικό ελέγχεται από την παράγωγο του πεδίο της εφαρμοζόμενης τάσης και την τετραγωνική ρίζα του μήκους της ρωγμής, καθώς επίσης και από τις ιδιότητες του υλικού E , ν και γ_s .

Τάση θραύσεως

Η τάση θραύσεως δίνεται από την παρακάτω σχέση (Whittaker et al., 1992):

$$\sigma_f = \sqrt{\frac{2E' \gamma_s}{\pi a}} \quad (2.56)$$

Η εξίσωση αυτή δίνει την εφαρμοζόμενη τάση θραύσεως μόνο για την εκκίνηση της ρωγμής και ισούται με την μονοαξονική εφελκυστική αντοχή (σ_t) για την κατάσταση εφελκυσμού. Η ποσότητα σ_f είναι μια σταθερά για ένα ιδανικά ψαθυρό υλικό που περιέχει μια κεντρική ρωγμή μήκους $2a$ ή μια ρωγμή στην άκρη μήκους a . Η σταθερά σ_f εξαρτάται αυστηρά από την γεωμετρία της ρωγμής.

2.3.3 Ρυθμός Απελευθέρωσης Ενέργειας Παραμορφώσεων G και Αντίσταση σε Διάδοση Ρωγμής R

Από την σχέση (2.55) προκύπτει η ακόλουθη εξίσωση (Whittaker et al., 1992):

$$\frac{\pi \sigma^2 a}{E'} = 2\gamma_s \quad (2.57)$$

Ο αριστερός όρος της παραπάνω εξίσωσης καλείται ρυθμός απελευθέρωσης ενέργειας παραμορφώσεων (strain energy release rate ή crack driving force) και συμβολίζεται με G . Μια ακόμα σχέση για αυτόν τον όρο είναι η εξής (Whittaker et al., 1992):

$$G = \frac{\partial U_c}{\partial a} = \frac{\pi \sigma^2 a}{E'} \quad (2.58)$$

Από την παραπάνω εξίσωση είναι φανερό ότι για σταθερή μετατόπιση, το G καθορίζεται σαν ελαστική ενέργεια παραμόρφωσης ανά μονάδα μήκους ρωγμής. Γενικότερα όμως το G καθορίζεται σαν παράγωγος της ελαστικής ενέργειας παραμόρφωσης, σχετικά με την περιοχή της ρωγμής παρά με το μήκος της ρωγμής.

Επίσης το G μπορεί να υπολογιστεί και ως εξής (Whittaker et al., 1992):

$$G = 1/2 P^2 \frac{d\lambda}{da} \quad (2.59)$$

όπου,

P : Το εφαρμοζόμενο φορτίο.

a : Μήκος της ρωγμής.

λ : Ελαστικότητα (compliance) που καθορίζεται σαν τη μετατόπιση του σημείου φόρτισης ανά μονάδα φορτίου.

Αντοχή θραύσης

Η θεωρία Griffith για την κρίσιμη κατάσταση της εκκίνησης της ρωγμής δίνεται από την εξής σχέση (Whittaker et al., 1992):

$$G = G_c \quad (2.60)$$

όπου, G_c είναι ο κρίσιμος ρυθμός απελευθέρωσης ενέργειας (critical energy release rate). Καλείται και αντοχή θραύσης (fracture toughness) και είναι χαρακτηριστική ιδιότητα του υλικού.

Όταν το G είναι ίσο με το G_c συμβαίνει διάδοση της ρωγμής.

Αντίσταση σε διάδοση ρωγμής R

Η αντίσταση σε διάδοση ρωγμής (crack resistance) R είναι η ενέργεια που απαιτείται για την προσανξάνουσα διάδοση της ρωγμής και καθορίζεται σύμφωνα με την ακόλουθη σχέση (Whittaker et al., 1992):

$$R = \frac{\partial U_c}{\partial a} = 2\gamma_s \quad (2.61)$$

Το R είναι ανεξάρτητο του μήκους της ρωγμής a , αλλά είναι μια συνάρτηση της εξάπλωσης της ρωγμής Δa . Η κατάσταση εξισορρόπησης για την εκκίνηση της ρωγμής εκφράζεται ως εξής (Whittaker et al., 1992):

$$G_c = R \quad (2.62)$$

Τα παραπάνω ισχύουν για την περίπτωση της φόρτισης με σταθερή μετατόπιση. Για την περίπτωση του σταθερού φορτίου, το W παίρνει μη μηδενική τιμή και το U_c λαμβάνει αρνητικό πρόσημο. Έτσι η σχέση της συνολικής ενέργειας είναι (Whittaker et al., 1992):

$$U = U_t + U_c - W + U_s \quad (2.63)$$

Η εκκίνηση της ρωγμής συμβαίνει όταν $\partial U / \partial a = 0$. Σημειώνοντας όμως ότι $U_t = a$ και $\partial U_t / \partial a = 0$, τότε (Whittaker et al., 1992):

$$\frac{\partial}{\partial a}(U_t + U_c - W + U_s) = 0 \quad (2.64)$$

από την οποία προκύπτει ότι (Whittaker et al., 1992):

$$\frac{\partial}{\partial a}(W - U_c) = \frac{\partial U_s}{\partial a} \quad (2.65)$$

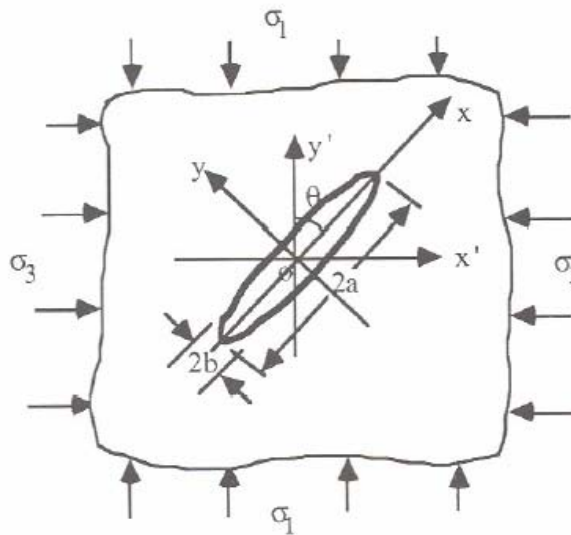
και προκύπτει τελικά ότι (Whittaker et al., 1992):

$$G_c = R$$

2.3.4 Κριτήριο Τάσης θραύσεως του Griffith

Ο Griffith παρουσίασε το 1924 ένα κριτήριο κρίσιμης μέγιστης τοπικής εφελκυστικής τάσης (critical maximum local tensile stress criterion) για διάδοση ρωγμής από τις άκρες της. Η ερμηνεία αυτής της προσέγγισης του Griffith είναι ότι η ρωγμή ξεκινά όταν η προκαλούμενη εφελκυστική τάση στην άκρη ή κοντά στην άκρη της ρωγμής υπερβαίνει την μοριακή αντοχή συνοχής του υλικού (Whittaker et al., 1992).

Στο σχήμα (2.19) παρουσιάζεται μια επίπεδη ελλειπτικής μορφής ρωγμή που υπόκειται σε πολυαξονικές τάσεις σ_1 και σ_3 ($\sigma_1 > \sigma_3$) στο άπειρο. Το κριτήριο τάσης θραύσεως του Griffith για το σύστημα του Σχήματος 2.19, προέκυψε από την εξέταση της κατανομής της εφαπτομενικής τάσης στην επιφάνεια της ελλειπτικής ρωγμής. Η κατανομή της τάσης γύρω από την ελλειπτική ρωγμή προέκυψε από την σχεδίαση των καρτεσιανών συντεταγμένων σε ελλειπτικές συντεταγμένες (Whittaker et al., 1992).



Σχήμα 2.19: Ανοιχτή, επίπεδη υπό κλίση ελλειπτική ρωγμή που υπόκειται σε πολυαξονική θλίψη (Whittaker et al., 1992)

Το κριτήριο τάσης θραύσεως του Griffith δίνεται από την παρακάτω σχέση (Whittaker et al., 1992):

$$\left. \begin{aligned} (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + 8\sigma_t(\sigma_1 + \sigma_3) &= 0 & \alpha\nu \quad \sigma_1 + 3\sigma_3 \geq 0 \\ \sigma_3 &= \sigma_t & \alpha\nu \quad \sigma_1 + 3\sigma_3 < 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.66)$$

όπου,

σ_1, σ_3 : Η μέγιστη και η ελάχιστη κύρια τάση αντίστοιχα στο άπειρο.

σ_t : Η μονοαξονική εφελκυστική αντοχή.

Το κριτήριο τάσης θραύσεως μπορεί να εκφραστεί εναλλακτικά σε σχέση με τον λόγο των κυρίων τάσεων σ_3/σ_1 και την μονοαξονική εφελκυστική αντοχή ή την μονοαξονική θλιπτική αντοχή (Whittaker et al., 1992):

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 &= \sigma_3 - 4\sigma_t \left[1 + \sqrt{1 - \frac{\sigma_3}{\sigma_t}} \right] & \alpha\nu \quad \sigma_1 + 3\sigma_3 \geq 0 \\ \sigma_3 &= \sigma_t & \alpha\nu \quad \sigma_1 + 3\sigma_3 < 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.67)$$

ή

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 &= \sigma_3 + \sigma_c \sqrt{2 \frac{\sigma_3}{\sigma_c} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \sigma_c} & \alpha\nu \quad \sigma_1 + 3\sigma_3 \geq 0 \\ \sigma_3 &= \sigma_t & \alpha\nu \quad \sigma_1 + 3\sigma_3 < 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.68)$$

όπου, σ_c η μονοαξονική θλιπτική αντοχή.

Το κριτήριο τάσης θραύσεως παρουσιάζεται στο σχήμα (2.20) στο οποίο περιλαμβάνεται και το τροποποιημένο κριτήριο Griffith από τους McClintock και Walsh.

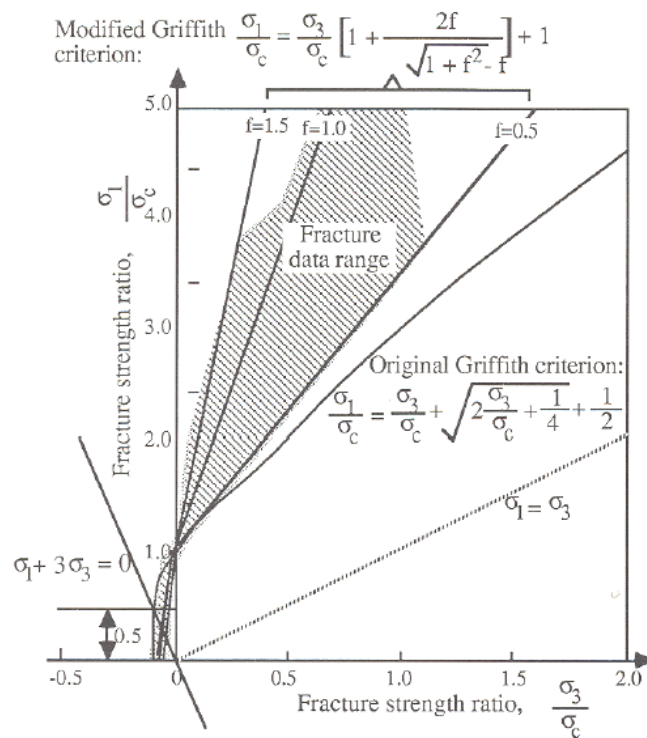
Το κριτήριο Griffith μπορεί να εκφραστεί και από έναν παραβολικό φάκελο Mohr σύμφωνα με την σχέση που ακολουθεί (Whittaker et al., 1992):

$$\tau^2 = 4\sigma_t(\sigma_t - \sigma) \quad (2.69)$$

όπου,

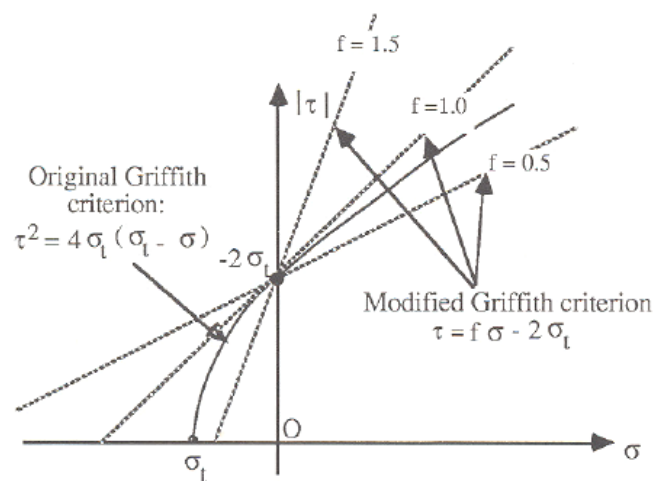
τ : Η διατμητική τάση που δρα κατά μήκος του επιπέδου της επιφάνειας της ρωγμής.

σ : Η ορθή τάση που δρα κάθετα στην επιφάνεια της ρωγμής.



Σχήμα 2.20: Το αρχικό και το τροποποιημένο κριτήριο θραύσης Griffith (Whittaker et al., 1992)

Στο σχήμα (2.21) παρουσιάζεται ο παραβολικός φάκελος Mohr, καθώς και το τροποποιημένο κριτήριο από τον Cook.



Σχήμα 2.21: Το αρχικό και το τροποποιημένο κριτήριο Griffith σε μορφή φακέλου Mohr (Whittaker et al., 1992)

2.3.5 Περιορισμοί στην Εφαρμογή της Θεωρίας Griffith

Η θεωρία Griffith είναι εφαρμόσιμη για τις περιπτώσεις που ακολουθούν (Whittaker et al., 1992):

- Ιδανικά ψαθυρά υλικά με μικρή πλαστική παραμόρφωση στις άκρες των ρωγμών.
- Έναρξη της θραύσης, ιδανικά για την κατάσταση εφελκυσμού.
- Πολύ επίπεδη και ανοιχτή έλλειψη που αναπαριστά μια ιδανική ρωγή.
- Μικρό μέγεθος ρωγμής σχετικά με τις διαστάσεις του δοκιμίου.
- Αναστρέψιμο θερμοδυναμικό σύστημα, δηλαδή, καμιά απώλεια ενέργειας εκτός από αυτήν που απαιτείται για την δημιουργία νέων επιφανειών ρωγμής.

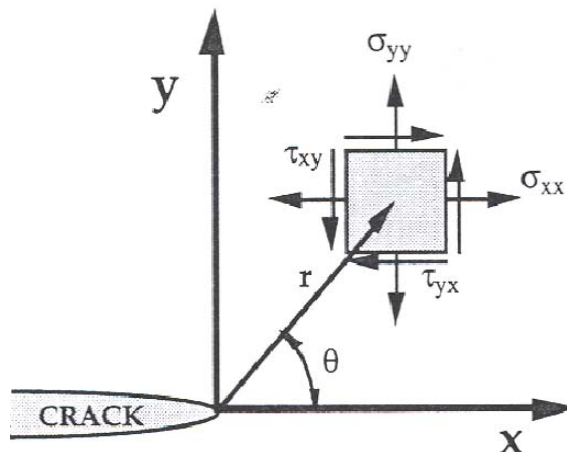
2.3.6 Τασική Ανάλυση των Ρωγμών

Αν προσδιοριστεί ένα σύστημα αξόνων πολικών συντεταγμένων με αρχή των αξόνων την άκρη (κορυφή) της ρωγμής (Σχήμα 2.22), το πεδίο τάσεων για κάθε γραμμικά ελαστικό σώμα δίνεται από την παρακάτω σχέση (Anderson, 1995):

$$\sigma_{ij} = \left(\frac{k}{\sqrt{r}} \right) f_{ij}(\theta) + \sum_{m=0}^{\infty} A_m r^{\frac{m}{2}} g_{ij}^{(m)}(\theta) \quad (2.70)$$

όπου,

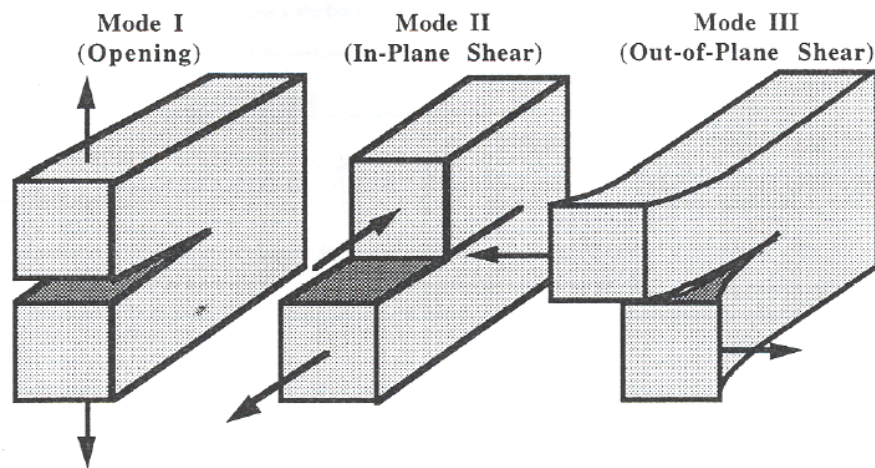
σ_{ij} ο τανυστής τάσης, r και θ προσδιορίζονται στο σχήμα 2.22, k είναι μια σταθερά και f_{ij} είναι μια αδιάστατη συνάρτηση του θ .



Σχήμα 2.22: Προσδιορισμός της αρχής των αξόνων στην κορυφή της ρωγμής (Anderson, 1995)

Η λύση για κάθε σχηματισμό περιέχει έναν πρωτεύον όρο που είναι ανάλογος του $1/\sqrt{r}$. Καθώς $r \rightarrow 0$, ο πρωτεύον όρος προσεγγίζει το άπειρο, αλλά οι υπόλοιποι όροι παραμένουν πεπερασμένοι ή πλησιάζουν στο μηδέν. Για αυτό η τάση κοντά στην κορυφή της ρωγμής μεταβάλλεται με το $1/\sqrt{r}$, ανεξάρτητα από τη μορφή του σώματος. Μπορεί επίσης να αποδειχθεί ότι η μετατόπιση κοντά στην κορυφή της ρωγμής μεταβάλλεται συναρτήσει του \sqrt{r} . Η σχέση (2.70) περιγράφει μια «ιδιομορφία» της τάσης, όταν η τάση είναι ασυμπτωτική στο $r=0$ (Anderson, 1995).

Υπάρχουν τρεις τύποι φόρτισης στους οποίους μπορεί να υποβληθεί μια ρωγμή (Σχήμα 2.23). Ο τύπος I (Mode I), όπου η κύρια φόρτιση εφαρμόζεται κάθετα στο επίπεδο της ρωγμής και η ρωγμή τείνει να ανοίξει, ο τύπος II (Mode II) που αντιστοιχεί σε διατμητική φόρτιση και με τον οποίο οι επιφάνειες της ρωγμής τείνουν να «γλιστρούν» προς αντίθετες κατευθύνσεις και ο τύπος III (Mode III) με τον οποίο εφαρμόζεται διατμητική τάση κάθετα στο επίπεδο της ρωγμής. Ένα σώμα μπορεί να φορτιστεί με κάθε έναν από αυτούς τους τύπους, ή και με συνδυασμό δύο ή τριών τύπων φόρτισης (Anderson, 1995).



Σχήμα 2.23: Οι τρεις τύποι φόρτισης που μπορούν να εφαρμοστούν σε μια ρωγμή (Anderson, 1995)

Συντελεστής έντασης της τάσης

Κάθε τύπος φόρτισης παράγει την «ιδιομορφία» $1/\sqrt{r}$ στην κορυφή της ρωγμής, αλλά η σταθερά k και το f_{ij} εξαρτώνται από τον τύπο φόρτισης. Η σταθερά k συνδέεται με τον

συντελεστή έντασης της τάσης (Stress Intensity Factor, SIF) K με την ακόλουθη σχέση (Anderson, 1995):

$$K = k\sqrt{2\pi} \quad (2.71)$$

Με τον συντελεστή έντασης της τάσης δίνεται συνήθως σαν δείκτης και ο τύπος φόρτισης, δηλαδή, K_I , K_{II} , ή K_{III} . Για αυτό, τα πεδία τάσης μπροστά από την κορυφή μιας ρωγμής σε ένα ισότροπο γραμμικά ελαστικό υλικό δίνονται ως εξής (Anderson, 1995):

$$\lim_{r \rightarrow 0} \sigma_{ij}^{(I)} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}^{(I)}(\theta) \quad (2.72.\alpha)$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} \sigma_{ij}^{(II)} = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}^{(II)}(\theta) \quad (2.72.\beta)$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} \sigma_{ij}^{(III)} = \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}^{(III)}(\theta) \quad (2.72.\gamma)$$

Σε ένα σύνθετο πρόβλημα φόρτισης ισχύει η παρακάτω σχέση (Anderson, 1995):

$$\sigma_{ij}^{(ολικο)} = \sigma_{ij}^{(I)} + \sigma_{ij}^{(II)} + \sigma_{ij}^{(III)} \quad (2.73)$$

Αναλυτικές σχέσεις για τα πεδία τάσης των τύπων I και II δίνονται στον πίνακα (2.1). Στον πίνακα (2.2) παρουσιάζονται οι σχέσεις της μετατόπισης για τους ίδιους τύπους και στον πίνακα (2.3) δίνονται οι μη μηδενικές συνιστώσες της τάσης και της μετατόπισης για τον τύπο III.

Πίνακας 2.1: Τα πεδία τάσης μπροστά από την κορυφή μιας ρωγμής για τους τύπους φόρτισης I και II, για ένα γραμμικά ελαστικό ισότροπο υλικό (Anderson, 1995)

	Mode I	Mode II
σ_{xx}	$\frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[1 - \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right)\right]$	$-\frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[2 + \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right)\right]$
σ_{yy}	$\frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[1 + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right)\right]$	$\frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right)$
τ_{xy}	$\frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right)$	$\frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[1 - \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right)\right]$
σ_{zz}	0 (Plane Stress) $\nu (\sigma_{xx} + \sigma_{yy})$ (Plane Strain)	0 (Plane Stress) $\nu (\sigma_{xx} + \sigma_{yy})$ (Plane Strain)
$\tau_{xz},$ τ_{yz}	0	0

Πίνακας 2.2: Τα πεδία μετατόπισης για τους τύπους φόρτισης I και II, για ένα γραμμικά ελαστικό ισότροπο υλικό (Anderson, 1995)

	Mode I	Mode II
u_x	$\frac{K_I}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[\kappa - 1 + 2 \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]$	$\frac{K_{II}}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[\kappa + 1 + 2 \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]$
u_y	$\frac{K_I}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[\kappa + 1 - 2 \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]$	$-\frac{K_{II}}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[\kappa - 1 - 2 \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]$

Πίνακας 2.3: Μη μηδενικές συνιστώσες τάσης και μετατόπισης για τον τύπο φόρτισης III για ένα γραμμικά ελαστικό ισότροπο υλικό (Anderson, 1995)

$\tau_{xz} = -\frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$
$\tau_{yz} = \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$
$u_z = \frac{K_{III}}{\mu^*} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$

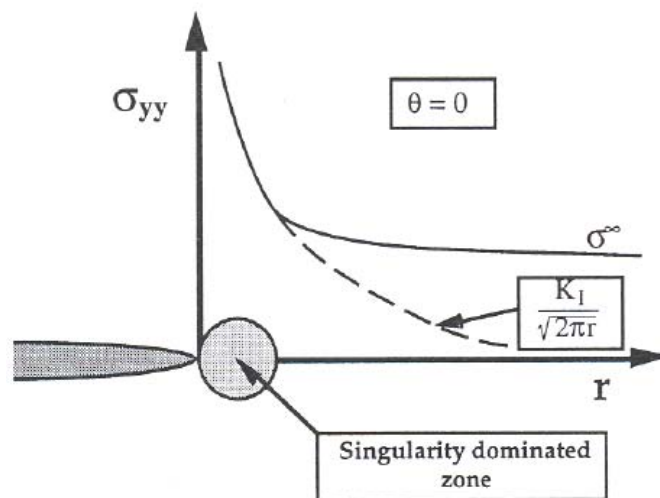
Στη συνέχεια θεωρείται ο τύπος I στο επίπεδο της ρωγμής όπου $\theta=0$ και σύμφωνα με τον πίνακα (2.1) οι τάσεις στις διευθύνσεις x και y είναι ίσες και είναι (Anderson, 1995):

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \quad (2.74)$$

Όταν $\theta=0$, η διατμητική τάση είναι μηδέν γεγονός που σημαίνει ότι το επίπεδο της ρωγμής είναι κύριο επίπεδο για τον τύπο φόρτισης I. Το σχήμα (2.24) αποτελεί μια σχηματική αναπαράσταση της κάθετης τάσης στο επίπεδο της ρωγμής σ_{yy} συναρτήσει της απόστασης από την κορυφή της ρωγμής. Η σχέση (2.74) ισχύει μόνο κοντά στην κορυφή της ρωγμής, όπου το $1/\sqrt{r}$ επικρατεί στο πεδίο τάσης. Οι τάσεις μακριά από την κορυφή της ρωγμής δέχονται την επίδραση από τις συνοριακές συνθήκες. Για παράδειγμα, αν το σώμα υποβάλλεται σε ομοιόμορφη εφελκυστική τάση, η σ_{yy} προσεγγίζει μια σταθερή τιμή, την σ^∞ . Έτσι, η περιοχή όπου οι σχέσεις των πινάκων (2.1) και (2.3) περιγράφουν το πεδίο στην κορυφή της ρωγμής, προσδιορίζονται σαν την περιοχή που επικρατεί ιδιομορφία (singularity dominated zone) (Anderson, 1995).

Ο συντελεστής έντασης της τάσης καθορίζει το πλάτος (amplitude) της ιδιομορφίας στην κορυφή της ρωγμής. Αυτό είναι οι τάσεις κοντά στην κορυφή της ρωγμής που

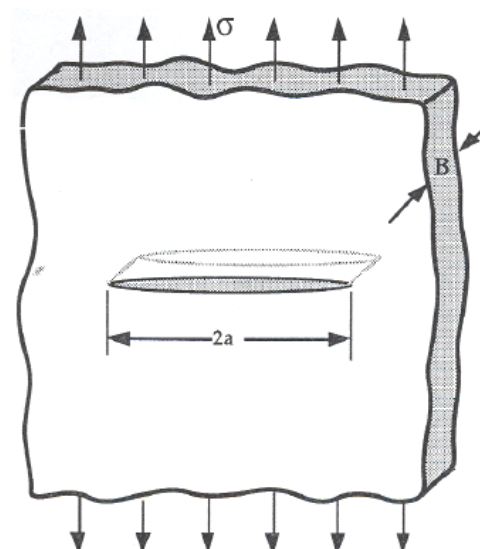
αυξάνονται σε αναλογία με το K . Επιπλέον, ο συντελεστής έντασης της τάσης καθορίζει πλήρως τις συνθήκες στην κορυφή της ρωγμής.



Σχήμα 2.24: Η κάθετη τάση στο επίπεδο της ρωγμής στον τύπο φόρτισης I (Anderson, 1995)

Σχέση μεταξύ K και συνολικής απόκρισης

Μια λύση κλειστής μορφής για το K είναι η διάταξη του Σχήματος 2.25 στην οποία υπάρχει μια ρωγμή μέσα στο σώμα μιας απείρου μεγέθους πλάκας η οποία υποβάλλεται σε εφελκυσμό.



Σχήμα 2.25: Ρωγμή μέσα στο σώμα απείρων διαστάσεων πλάκας η οποία υποβάλλεται σε εφελκυστική τάση (Anderson, 1995)

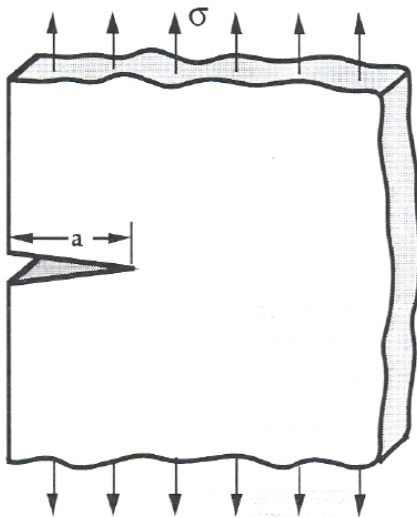
Αφού η τάση σ είναι κάθετη στο επίπεδο της ρωγμής, ο τύπος φόρτισης είναι τύπος I. Σε αυτήν την περίπτωση η σχέση μεταξύ K_I και των συνολικών συνθηκών (global conditions) είναι η εξής (Anderson, 1995):

$$K_I = \sigma\sqrt{\pi a} \quad (2.75)$$

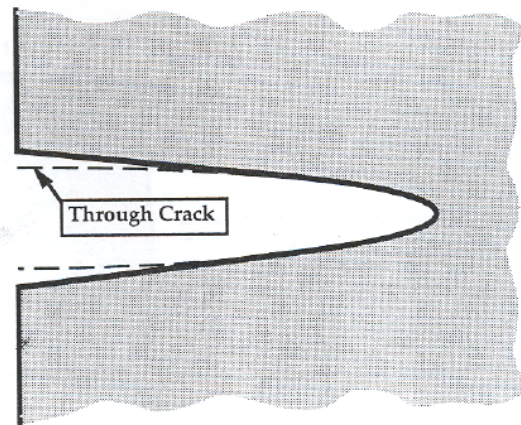
Μια συγγενική λύση είναι αυτή για την περίπτωση μιας ημιαπείρων διαστάσεων πλάκας με μια ρωγμή στην ακμή της (edge crack) (Σχήμα 2.26). Ο συντελεστής έντασης της τάσης για την ρωγμή δίνεται από την παρακάτω σχέση:

$$K_I = 1,12\sqrt{\pi a} \quad (2.76)$$

Η αύξηση κατά 12% στο K_I οφείλεται στις διαφορετικές συνοριακές συνθήκες που επικρατούν στην ελεύθερη ακμή του σώματος. Όπως διακρίνεται και στο σχήμα (2.27), η ρωγμή στην ακμή του σώματος ανοίγει περισσότερο γιατί είναι λιγότερο περιορισμένη από ότι η ρωγμή μέσα στο σώμα (through crack), η οποία σχηματίζει ένα ελλειπτικό σχήμα καθώς φορτίζεται.

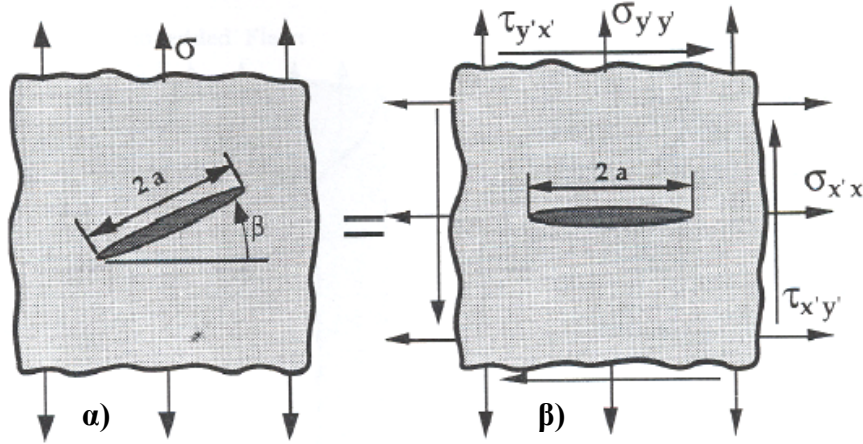


Σχήμα 2.26: Ρωγμή στην μια ακμή μιας ημιαπείρου πλάκας, η οποία υποβάλλεται σε εφελκυσμό (Anderson, 1995)



Σχήμα 2.27: Σύγκριση των ανοιγμάτων των ρωγμών (crack opening displacements) για ρωγμή στην ακμή του σώματος και για ρωγμή μέσα στο σώμα (Anderson, 1995)

Στη συνέχεια θεωρείται μια ρωγμή μέσα σε μια πλάκα ημιαπείρων διαστάσεων όπου η κάθετη στο επίπεδο της ρωγμής είναι προσανατολισμένη κατά μια γωνία β με τον άξονα φόρτισης (Σχήμα 2.28.α). Αν $\beta \neq 0$, η ρωγμή δέχεται συνδυασμένη φόρτιση των τύπων I και II.



Σχήμα 2.28: Ρωγμή μέσα σε πλάκα ημιαπείρων διαστάσεων για την γενική περίπτωση όπου η κύρια τάση δεν είναι κάθετη στο επίπεδο της ρωγμής (Anderson, 1995)

Το K_{III} είναι μηδέν όσο ο άξονας φόρτισης και η ρωγμή είναι κάθετα στο επίπεδο της πλάκας. Αν επαναπροσδιοριστούν οι άξονες ώστε να συμπίπτουν με τον προσανατολισμό της ρωγμής (Σχήμα 2.28.β), φαίνεται ότι η εφαρμοζόμενη τάση μπορεί να αναλυθεί στις ορθή και διατμητική συνιστώσα. Η κάθετη τάση στο επίπεδο της ρωγμής, $\sigma_{y'y'}$, παράγει τύπο φόρτισης I, ενώ η $\tau_{x'y'}$ εφαρμόζει τον τύπο φόρτισης II στην ρωγμή. Οι συντελεστές έντασης της τάσης για το σχήμα (2.28) μπορούν να προκύψουν συνδυάζοντας τις συνιστώσες $\sigma_{y'y'}$ και $\tau_{x'y'}$ με την σ και το β μέσω του κύκλου του Mohr (Anderson, 1995):

$$K_I = \sigma_{y'y'} \sqrt{\pi a} = \sigma \cos^2(\beta) \sqrt{\pi a} \quad (2.77)$$

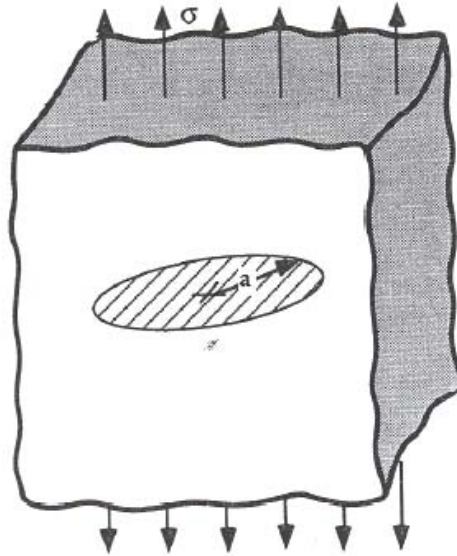
και

$$K_{II} = \tau_{y'x'} \sqrt{\pi a} = \sigma \sin(\beta) \cos(\beta) \sqrt{\pi a} \quad (2.78)$$

Μια άλλη λύση κλειστής μορφής για το K_I δίνεται για την κυκλική ρωγμή (penny-shaped crack) σε ένα ημιαπείρων διαστάσεων σώμα (Σχήμα 2.29) (Anderson, 1995):

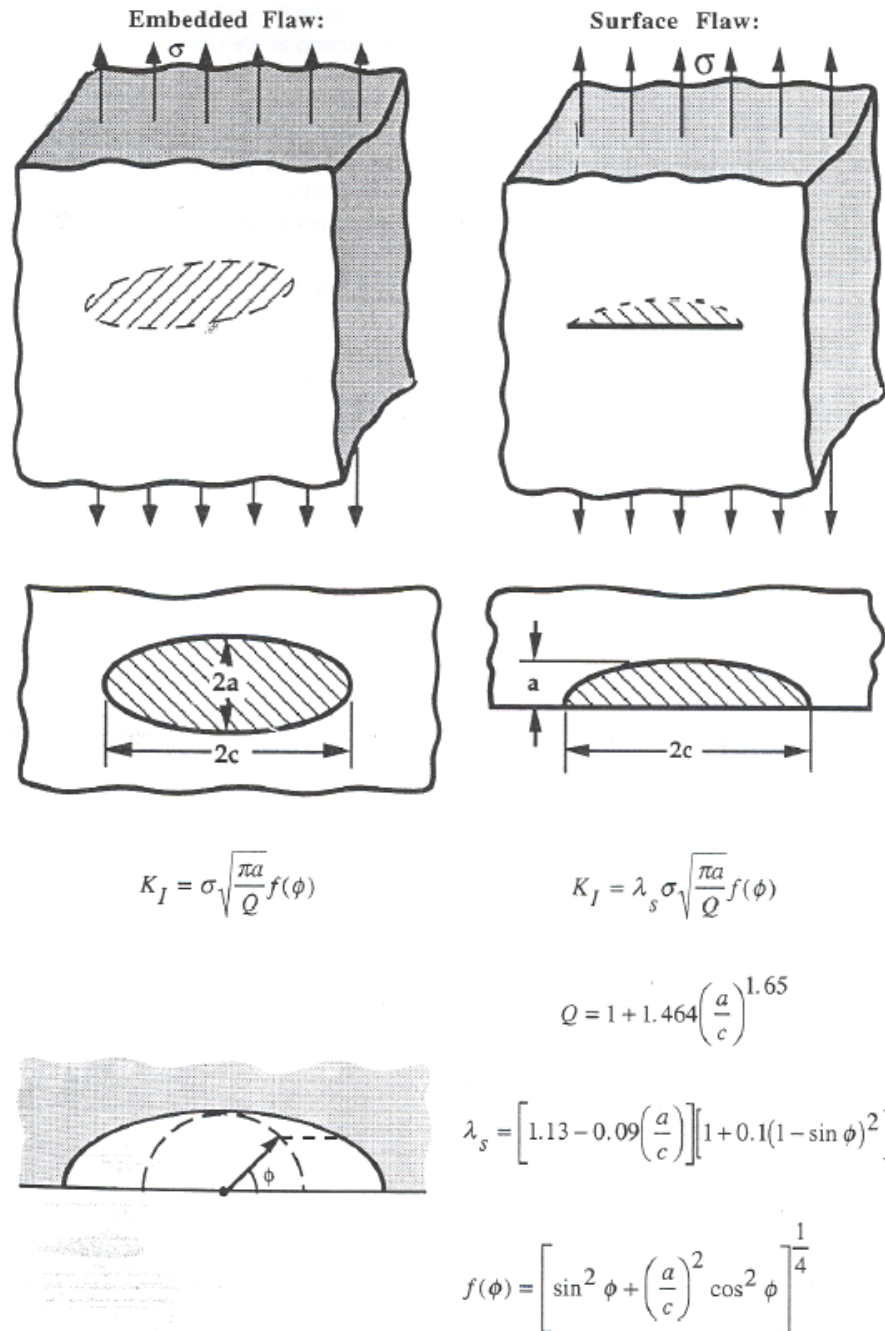
$$K_I = \frac{2}{\pi} \sigma \sqrt{\pi a} \quad (2.79)$$

όπου, a η ακτίνα της ρωγμής.



Σχήμα 2.29: Κυκλική ρωγμή μέσα σε σώμα το οποίο υποβάλλεται σε εφελκυσμό (Anderson, 1995)

Στο σχήμα (2.30) διακρίνεται και η γενική περίπτωση ελλειπτικής ή ημιελλειπτικής ρωγμής. Στην περίπτωση αυτή απαιτούνται δύο διαστάσεις μήκους για τον χαρακτηρισμό του μεγέθους της ρωγμής: $2c$ και $2a$, ο κύριος και ο δευτερεύων άξονας της έλλειψης αντίστοιχα.



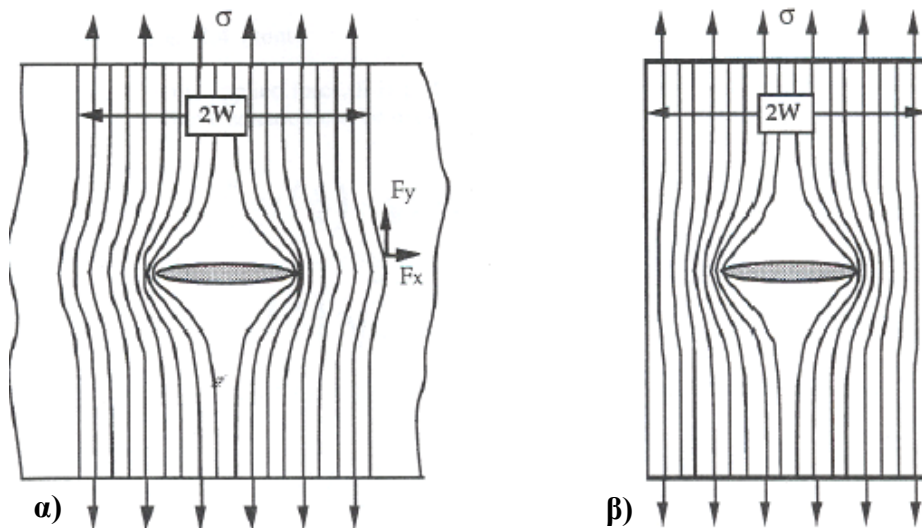
Σχήμα 2.30: Συντελεστές έντασης της τάσης τύπου I για ελλειπτική και ημιελλειπτική ρωγμή. Οι λύσεις είναι σωστές μόνο όταν η ρωγμή είναι μικρή σε σχέση με τις διαστάσεις της πλάκας και όταν $a \leq c$ (Anderson, 1995)

Η επίδραση του πεπερασμένου μεγέθους

Οι περισσότερες διατάξεις για τις οποίες υπάρχει μια κλειστή λύση για το K , αποτελούνται από μια ρωγμή απλού σχήματος σε μια πλάκα απείρων διαστάσεων. Οι διαστάσεις της ρωγμής είναι μικρές σε σύγκριση με τις διαστάσεις της πλάκας και η

κατάσταση στην κορυφή της ρωγμής δεν επηρεάζεται από τις εξωτερικές συνοριακές συνθήκες. Καθώς το μέγεθος της ρωγμής αυξάνει ή οι διαστάσεις της πλάκας μικραίνουν, οι εξωτερικές συνοριακές συνθήκες αρχίζουν να επηρεάζουν την κορυφή της ρωγμής. Σε αυτές τις περιπτώσεις δεν είναι συνήθως δυνατή μια λύση κλειστής μορφής για τον συντελεστή έντασης της τάσης (Anderson, 1995).

Στο σχήμα (2.31) παρουσιάζεται μια πλάκα με μια ρωγμή στο εσωτερικό της, η οποία υποβάλλεται σε εφελκυστική τάση. Επίσης, διακρίνεται η επίδραση του πεπερασμένου πλάτους στην κατανομή της τάσης στην κορυφή της ρωγμής, η οποία αναπαρίσταται με δυναμικές γραμμές (lines of force). Η τοπική τάση είναι ανάλογη με το κενό μεταξύ των γραμμών δύναμης. Αφού η εφελκυστική τάση δεν είναι δυνατόν να μεταβιβαστεί μέσω της ρωγμής, οι δυναμικές γραμμές κατανέμονται γύρω από την ρωγμή, με αποτέλεσμα μια τοπική συγκέντρωση τάσεων. Στην απείρου μεγέθους πλάκα, η γραμμή δύναμης σε απόσταση W από το κέντρο της ρωγμής έχει συνιστώσες δύναμης στις διευθύνσεις x και y . Αν το πλάτος της πλάκας περιοριστεί σε $2W$, η δύναμη x πρέπει να είναι μηδέν στην ελεύθερη ακμή. Αυτή η συνοριακή συνθήκη προκαλεί τις γραμμές δύναμης να συμπιεστούν, με αποτέλεσμα μεγαλύτερη συγκέντρωση τάσης στην άκρη της ρωγμής (Anderson, 1995).



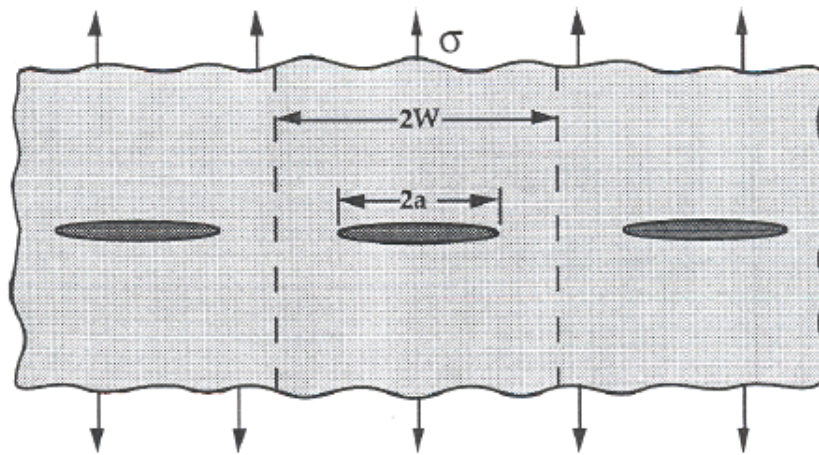
Σχήμα 2.31: Συγκέντρωση τάσης λόγω της ρωγμής μέσα σε πλάκα **α)** Πεπερασμένου πλάτους και **β)** Απείρου πλάτους (Anderson, 1995)

Μια τεχνική για την εκτίμηση της συνοριακής συνθήκης του πεπερασμένου πλάτους είναι να θεωρηθεί μια περιοδική παράταξη ομοαξονικών ρωγμών σε μια απείρου

μεγέθους πλάκα (Σχήμα 2.32). Ο συντελεστής έντασης της τάσης για τον τύπο Ι δίνεται από την παρακάτω σχέση (Anderson, 1995):

$$K_I = \sigma \sqrt{\pi a} \left[\frac{2W}{\pi a} \tan \left(\frac{\pi a}{2W} \right) \right]^{1/2} \quad (2.80)$$

Ο συντελεστής έντασης προσεγγίζει την τιμή της πλάκας καθώς το a/W προσεγγίζει το μηδέν. Το K_I είναι ασυμπτωτικό με το $a/W=1$.

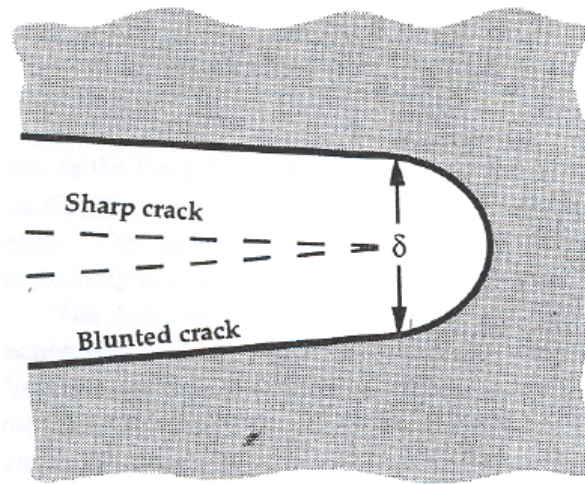


Σχήμα 2.32: Ομοαξονικές ρωγμές σε μια απείρων διαστάσεων πλάκα που υποβάλλεται σε εφελκυσμό (Anderson, 1995)

Άνοιγμα χειλέων στην αιχμή της ρωγμής

Το άνοιγμα χειλέων στην αιχμή της ρωγμής (Crack Tip Opening Displacement, CTOD) είναι μια ελαστοπλαστική παράμετρος η οποία περιγράφει τις συνθήκες που επικρατούν στην κορυφή (άκρη) μιας ρωγμής σε ένα ελαστοπλαστικό υλικό και μπορεί να χρησιμοποιηθεί σαν κριτήριο θραύσης (Anderson, 1995).

Ο Wells πρώτος παρατήρησε κατά την εξέταση ρωγματωμένων δοκιμίων, ότι οι επιφάνειες των ρωγμών μετακινούντουσαν χωριστά προς την θραύση του υλικού. Η πλαστική παραμόρφωση άμβλυνε την αρχική οξεία ρωγμή όπως φαίνεται στο σχήμα (2.33). Ο βαθμός της άμβλυνσης της ρωγμής αυξανόταν αναλογικά με την σκληρότητα του υλικού. Το γεγονός αυτό οδήγησε τον Wells στο να εισάγει τον όρο CTOD σαν μέτρο της αντοχής θραύσης (Anderson, 1995).

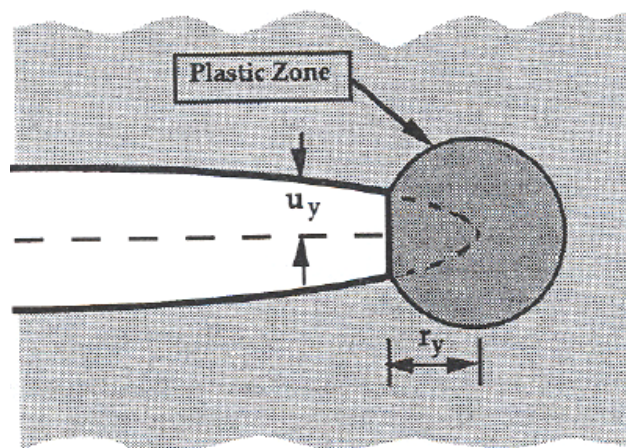


Σχήμα 2.33: CTOD. Μια αρχική αιχμηρή ρωγμή η οποία αμβλύνεται με την πλαστική παραμόρφωση με αποτέλεσμα μια πεπερασμένη μετατόπιση στην κορυφή της ρωγμής (Anderson, 1995)

Αν θεωρηθεί μια ρωγμή με μια μικρή πλαστική ζώνη (Σχήμα 2.34) το CTOD δίνεται από την παρακάτω σχέση (Anderson, 1995):

$$\delta = 2u_y = \frac{4}{\pi} \frac{K_I^2}{\sigma_{YS} E} \quad (2.81)$$

όπου, δ το CTOD.



Σχήμα 2.34: Προσδιορισμός του CTOD από την μετατόπιση της ρωγμής στην πλαστική ζώνη (Anderson, 1995)

Εναλλακτικά το CTOD μπορεί να σχετιστεί με τον ρυθμό απελευθέρωσης ενέργειας ως εξής (Anderson, 1995):

$$\delta = \frac{4}{\pi} \frac{G}{\sigma_{YS}} \quad (2.82)$$

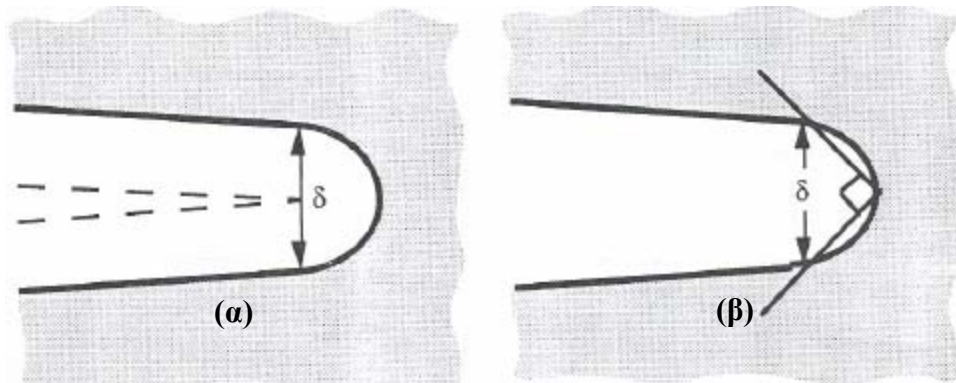
Επίσης το CTOD για μια ρωγμή σε μια πλάκα απείρων διαστάσεων η οποία υποβάλλεται σε εφελκυστική τάση είναι (Anderson, 1995):

$$\delta = \frac{8\sigma_{YS}a}{\pi E} \ln \sec \left(\frac{\pi}{2} \frac{\sigma}{\sigma_{YS}} \right) \quad (2.83)$$

όπου με ανάπτυγμα του όρου $\ln \sec$ προκύπτει ότι (Anderson, 1995):

$$\delta = \frac{K_I^2}{\sigma_{YS} E} = \frac{G}{\sigma_{YS}} \quad (2.84)$$

Υπάρχει μεγάλος αριθμός εναλλακτικών προσδιορισμών του CTOD. Οι πιο συνηθισμένοι διακρίνονται στο σχήμα (2.35) και είναι η μετατόπιση στην κορυφή της ρωγμής και η αποτέμνουσα που αντιστοιχεί σε γωνία 90° . Ο τελευταίος προσδιορισμός του CTOD χρησιμοποιείται κυρίως στην Μέθοδο των Πεπερασμένων Στοιχείων.



Σχήμα 2.35: Διαφορετικοί προσδιορισμοί του CTOD **α)** Μετατόπιση στην κορυφή της ρωγμής **β)** Μετατόπιση στο σημείο τομής δύο κάθετων μεταξύ τους στην κορυφή της ρωγμής (Anderson, 1995)

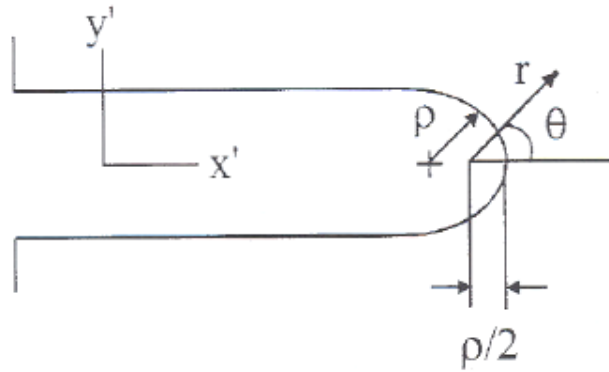
2.3.7 Συντελεστής Έντασης της Τάσης στην Κορυφή Εγκοπής

Η αναλυτική έκφραση του συντελεστή έντασης της τάσης (SIF) τύπου I, K_I , στην αιχμή μιας ρωγμής σε δοκίμιο κάμψης τριών σημείων έχει δοθεί από τους Gross και Srawley και είναι (Kourkoulis et al., 1999):

$$K_I = \sigma_{nom} \sqrt{\pi a} F(a/h)$$

$$F(a/h) = 1,090 - 1,735 \left(\frac{a}{h}\right) + 8,20 \left(\frac{a}{h}\right)^2 - 14,18 \left(\frac{a}{h}\right)^3 + 14,57 \left(\frac{a}{h}\right)^4, \quad \frac{l}{h} = 4$$
(2.85)

Ο τύπος I SIF όπως δίνεται παραπάνω από την θεωρία Θραυστομηχανικής Γραμμικά Ελαστικών Υλικών (Linear Elastic Fracture Mechanics, LEFM), είναι πλήρως εφαρμόσιμος στην κορυφή λεπτών εγκοπών όπως φαίνεται στο σχήμα (2.36).



Σχήμα 2.36: Τοπικό σύστημα συντεταγμένων για τα πεδία στην κορυφή της εγκοπής (Kourkoulis et al., 1999)

Για την περιοχή της κορυφής της εγκοπής όπου το r είναι μικρό σε σχέση με τις άλλες επίπεδες (επίπεδο $x' - y'$) διαστάσεις (εκτός από το πλάτος της εγκοπής s), το πεδίο παραμόρφωσης έχει την παρακάτω μορφή (Kourkoulis et al., 1999):

$$\varepsilon_{x'}(r, \theta) = \frac{1}{E} \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \left\{ -\frac{1}{1-\nu} \frac{\rho}{2r} \cos \frac{3\theta}{2} + \cos \frac{\theta}{2} \left[\frac{1-2\nu}{1-\nu} - \frac{1}{1-\nu} \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right] \right\} \quad (2.86.\alpha)$$

$$\varepsilon_{y'}(r, \theta) = \frac{1}{E} \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \left\{ \frac{1}{1-\nu} \frac{\rho}{2r} \cos \frac{3\theta}{2} + \cos \frac{\theta}{2} \left[\frac{1-2\nu}{1-\nu} + \frac{1}{1-\nu} \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right] \right\} \quad (2.86.\beta)$$

$$\varepsilon_{x'y'} = \frac{1}{G} \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \left\{ -\frac{\rho}{2r} \sin \frac{3\theta}{2} + \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \right\}, \quad r - \rho/2 \rightarrow 0 \quad (2.86.\gamma)$$

όπου, $\square E = E/(1-\nu^2)$ για συνθήκες επίπεδης παραμόρφωσης και $G = E/2(1+\nu)$.

Οι πρώτοι όροι στους παραπάνω τύπους είναι απαραίτητοι για να ικανοποιείται η συνθήκη των μηδενικών επιφανειακών τάσεων (tractions) κατά μήκος της κορυφής της εγκοπής η οποία έχει πεπερασμένο μήκος καμπυλότητας.

2.4 ΘΕΜΑΤΑ ΕΛΑΣΤΙΚΗΣ ΣΥΜΠΕΡΙΦΟΡΑΣ

Η βασική θεώρηση της ελαστικής συμπεριφοράς είναι ότι οι διευθύνσεις της κύριας προσανύουσας της τάσης και της προσανύξεσης της παραμόρφωσης συμπίπτουν. Ο γενικός καταστατικός πίνακας συσχετίζει προσανύξεις της συνολικής τάσης με προσανύξεις της παραμόρφωσης:

$$\begin{Bmatrix} \Delta\sigma_x \\ \Delta\sigma_y \\ \Delta\sigma_z \\ \Delta\tau_{xz} \\ \Delta\tau_{yz} \\ \Delta\tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} & D_{14} & D_{15} & D_{16} \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} & D_{24} & D_{25} & D_{26} \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} & D_{34} & D_{35} & D_{36} \\ D_{41} & D_{42} & D_{43} & D_{44} & D_{45} & D_{46} \\ D_{51} & D_{52} & D_{53} & D_{54} & D_{55} & D_{56} \\ D_{61} & D_{62} & D_{63} & D_{64} & D_{65} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta\varepsilon_x \\ \Delta\varepsilon_y \\ \Delta\varepsilon_z \\ \Delta\gamma_{xz} \\ \Delta\gamma_{yz} \\ \Delta\gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.87)$$

Τα ελαστικά καταστατικά μοντέλα μπορούν να πάρουν πολλές μορφές. Σήμερα χρησιμοποιούνται παραδοχές όπως ότι το έδαφος είναι ισότροπο, ανισότροπο, γραμμικό, ή και μη γραμμικό, με παραμέτρους που εξαρτώνται από το επίπεδο της τάσης ή και της παραμόρφωσης (Potts & Zdravkovic, 1999).

2.4.1 Γραμμική Ισότροπη Ελαστικότητα

Ισότροπο υλικό είναι αυτό το οποίο έχει σημειακή συμμετρία, δηλαδή κάθε επίπεδο στο σώμα είναι επίπεδο συμμετρίας για τη συμπεριφορά του υλικού. Σε μια τέτοια κατάσταση μπορεί να αποδειχθεί ότι απαιτούνται μόνο δύο ανεξάρτητες ελαστικές σταθερές για την περιγραφή της συμπεριφοράς του υλικού και ο καταστατικός πίνακας γίνεται συμμετρικός. Οι σταθερές αυτές είναι το μέτρο ελαστικότητας του Young E και ο λόγος Poisson ν . Η εξίσωση (2.87) γίνεται σε αυτή την περίπτωση:

$$\begin{Bmatrix} \Delta \sigma'_x \\ \Delta \sigma'_y \\ \Delta \sigma'_z \\ \Delta \tau_{xz} \\ \Delta \tau_{yz} \\ \Delta \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ & & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ & sym & & & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ & & & & & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \varepsilon_x \\ \Delta \varepsilon_y \\ \Delta \varepsilon_z \\ \Delta \gamma_{xz} \\ \Delta \gamma_{yz} \\ \Delta \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.88)$$

Αν η συμπεριφορά του υλικού είναι γραμμική, τότε τα E και ν είναι σταθερές και ο καταστατικός πίνακας που εκφράζεται σαν σχέση μεταξύ ενεργών τάσεων (σ') και παραμορφώσεων (ε) είναι ο ίδιος με αυτόν που δίνεται στη σχέση (2.88).

Είναι επίσης μερικές φορές πιο κατάλληλο να εκφράζεται η συμπεριφορά ενός υλικού συναρτήσει του συντελεστή διάτμησης G (elastic shear modulus) και του μέτρου συμπίεσης K (bulk modulus). Η εξίσωση (2.87) μετατρέπεται σε αυτή την περίπτωση ως εξής:

$$\begin{Bmatrix} \Delta \sigma'_x \\ \Delta \sigma'_y \\ \Delta \sigma'_z \\ \Delta \tau_{xz} \\ \Delta \tau_{yz} \\ \Delta \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K + \frac{4}{3}G & K - \frac{2}{3}G & K - \frac{2}{3}G & 0 & 0 & 0 \\ & K + \frac{4}{3}G & K - \frac{2}{3}G & 0 & 0 & 0 \\ & & K + \frac{4}{3}G & 0 & 0 & 0 \\ & & & K + \frac{4}{3}G & 0 & 0 \\ & sym & & & G & 0 \\ & & & & & G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \varepsilon_x \\ \Delta \varepsilon_y \\ \Delta \varepsilon_z \\ \Delta \gamma_{xz} \\ \Delta \gamma_{yz} \\ \Delta \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.89)$$

όπου,

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (2.90)$$

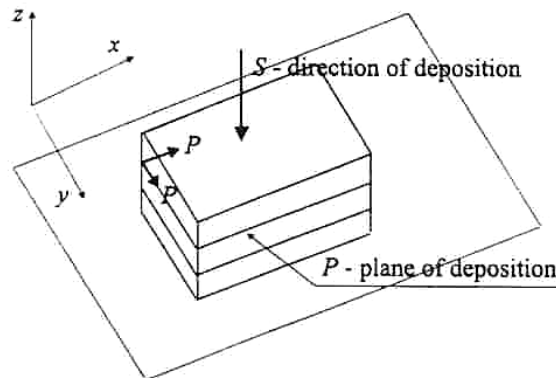
και

$$K = \frac{E}{3(1-2\nu)} \quad (2.91)$$

2.4.2 Γραμμική Ανισότροπη Ελαστικότητα

Μαθηματικά όταν ένα υλικό είναι πλήρως ανισότροπο ο πίνακας $[D]$ στην εξίσωση (2.87) είναι γεμάτος από στοιχεία. Αυτό συνεπάγεται ότι απαιτούνται 36 ανεξάρτητες παράμετροι για τον καθορισμό των τιμών του πίνακα D_{ij} . Όμως σύμφωνα με τη θεώρηση της ενέργειας θερμοδυναμικής παραμόρφωσης, ο πίνακας $[D]$ πρέπει να είναι συμμετρικός ($D_{ij} = D_{ji}$ για $i \neq j$). Επομένως ο συνολικός αριθμός των ανεξάρτητων ανισότροπων παραμέτρων μειώνεται σε 21.

Πολλά υλικά παρουσιάζουν περιορισμένες μορφές ανισοτροπίας. Για τα εδάφη συνήθως θεωρείται ότι τα χαρακτηριστικά ανισοτροπίας τους εξαρτώνται από τον τρόπο απόθεσης τους και το ιστορικό τάσης. Εδάφη τα οποία έχουν αποτεθεί φυσιολογικά πάνω σε ένα επίπεδο, παρουσιάζουν συνήθως έναν άξονα συμμετρίας κατά την διεύθυνση απόθεσης, δηλαδή τα χαρακτηριστικά τους δεν διαφοροποιούνται κατά αυτό το επίπεδο. Στο σχήμα (2.37) οι καρτεσιανές συντεταγμένες προσδιορίζονται σε ένα στρώμα έτσι ώστε ο άξονας z είναι στη διεύθυνση της απόθεσης του στρώματος, S , ενώ οι άξονες x και y είναι στο επίπεδο της απόθεσης, P .



Σχήμα 2.37: Προσανατολισμός αξόνων για την θεώρηση εγκάρσιας ισοτροπίας (Potts & Zdravkovic, 1999)

Αυτός ο τύπος ανισοτροπίας ονομάζεται “εγκάρσια ισοτροπία” (ορθότροπο υλικό) και οι άγνωστες παράμετροι του υλικού μειώνονται σε επτά. Η σχέση μεταξύ προσάυξης της τάσης και των συνιστωσών παραμόρφωσης δίνεται από τον πίνακα D στην εξίσωση (2.92):

$$\begin{bmatrix} A(1-\nu_{SP}\nu_{PS})E_P & A(\nu_{PP}+\nu_{SP}\nu_{PS})E_P & A\nu_{SP}(1+\nu_{PP})E_P & 0 & 0 & 0 \\ A(\nu_{PP}+\nu_{SP}\nu_{PS})E_P & A(1-\nu_{SP}\nu_{PS})E_P & A\nu_{SP}(1+\nu_{PP})E_P & 0 & 0 & 0 \\ A\nu_{SP}(1+\nu_{PP})E_S & A\nu_{SP}(1+\nu_{PP})E_S & A(1-\nu_{PP}\nu_{PP})E_S & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_{PS} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G_{PS} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G_{PP} \end{bmatrix} \quad (2.92)$$

όπου,

$$A = \frac{1}{1-2\nu_{SP}\nu_{PS}-2\nu_{SP}\nu_{PS}\nu_{PP}-\nu_{PP}^2} \quad (2.93)$$

E_S : Μέτρο ελαστικότητας του Young κατά την διεύθυνση της απόθεσης.

E_P : Μέτρο ελαστικότητας του Young κατά το επίπεδο της απόθεσης.

ν_{SP} : Λόγος Poisson στο επίπεδο της απόθεσης λόγω της τάσης που δρα στη διεύθυνση της απόθεσης.

ν_{PS} : Λόγος Poisson κατά τη διεύθυνση της απόθεσης λόγω της τάσης που δρα στο επίπεδο της απόθεσης.

ν_{PP} : Λόγος Poisson στο επίπεδο της απόθεσης λόγω της τάσης που δρα στο ίδιο επίπεδο.

G_{PS} : Μέτρο διάτμησης στο επίπεδο της διεύθυνσης της απόθεσης.

G_{PP} : Μέτρο διάτμησης στο επίπεδο της απόθεσης.

Λόγω της συμμετρίας μπορεί να αποδειχθεί ότι:

$$\frac{\mu_{SP}}{E_S} = \frac{\mu_{PS}}{E_P} \quad (2.94)$$

και

$$G_{PP} = \frac{E_P}{2(1+\mu_{PP})} \quad (2.95)$$

Έτσι μειώνεται ο αριθμός των παραμέτρων που απαιτούνται για τον καθορισμό της εγκάρσιας ισότροπης συμπεριφοράς από επτά σε πέντε. Ο πίνακας [D] στην εξίσωση (2.92) μετατρέπεται στη συμμετρική μορφή της εξίσωσης (2.96):

$$\begin{bmatrix}
 A(1-\nu_{SP}^2 \frac{E_P}{E_S})E_S & A(\nu_{PP} + \nu_{SP}^2 \frac{E_P}{E_S})E_S & A\nu_{SP}(1+\nu_{PP})E_S & 0 & 0 & 0 \\
 0 & A(1-\nu_{SP}^2 \frac{E_P}{E_S})E_S & A\nu_{SP}(1+\nu_{PP})E_S & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & A(1-\nu_{PP}^2 \frac{E_S^2}{E_P})E_S & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & G_{PS} & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & G_{PS} & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{E_P}{2(1+2\nu_{PP})}
 \end{bmatrix}
 \quad (2.96)$$

όπου,

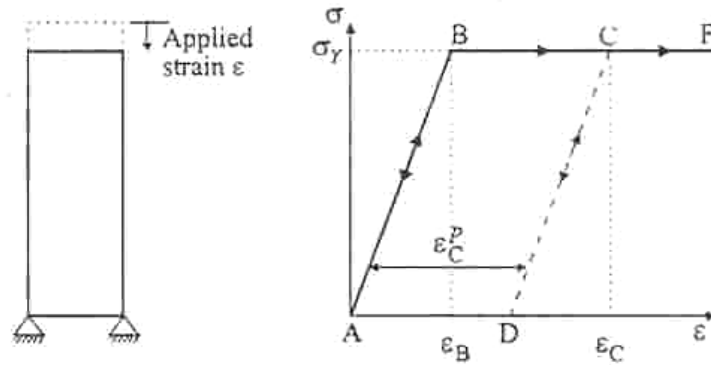
$$A = \frac{1}{(1+\nu_{PP}) \left[\frac{E_S}{E_P} (1-\nu_{PP}) - 2\nu_{SP}^2 \right]} \quad (2.97)$$

2.4.3 Ελαστοπλαστική Συμπεριφορά

Η ελαστοπλαστική συμπεριφορά χαρακτηρίζεται από έναν γραμμικά ή μη γραμμικά ελαστικό κλάδο. Όταν η εντατική κατάσταση του υλικού αντιπροσωπεύεται από τον ελαστικό κλάδο, τότε το υλικό παρουσιάζει ελαστική συμπεριφορά. Όταν όμως η εντατική κατάσταση υπερβεί το σημείο διαρροής του υλικού (yield point), τότε αρχίζει η εμφάνιση μόνιμων παραμορφώσεων. Επίσης, ένα πέτρωμα ή γεωυλικό μπορεί να μην χαρακτηρίζεται από τέλεια ελαστοπλαστική συμπεριφορά, αλλά στον κλάδο, μετά το σημείο διαρροής, να παρουσιάζει είτε κράτυνση (strain hardening) είτε χαλάρωση (strain softening) (Αγιουτάντης, 2002).

Μονοαξονική συμπεριφορά ενός γραμμικά ελαστικού τέλεια πλαστικού υλικού

Στο σχήμα (2.38) παρουσιάζεται μια δοκός ενός ιδανικού γραμμικού ελαστοπλαστικού υλικού, που φορτίζεται κατά τον κάθετο άξονα με την εφαρμογή θλιπτικής αξονικής παραμόρφωσης, ε . Σε αυτό το σχήμα φαίνεται επίσης η καμπύλη τάσης-παραμόρφωσης για αυτή την δοκό.



Σχήμα 2.38: Μονοαξονική φόρτιση γραμμικά ελαστικού τέλεια πλαστικού υλικού (Potts & Zdravkovic, 1999)

Κατά την πρώτη παραμορφωσιακή κατάσταση η δοκός συμπεριφέρεται ελαστικά, όπως φαίνεται στη γραμμή AB. Όταν το υλικό είναι γραμμικά ελαστικό, η κλίση της γραμμής AB δίνεται από το μέτρο ελαστικότητας του Young, E . Αν η παραμορφωσιακή διαδικασία σταματήσει πριν η τάση στη δοκό φτάσει το σημείο B και η δοκός είναι αφόρτιστη, η σχέση τάσης-παραμόρφωσης περιγράφεται από την γραμμή BA. Συνεπώς, όσο η παραμόρφωση δεν προκαλεί την τάση να φτάσει στο σημείο B, η δοκός συμπεριφέρεται με γραμμικά ελαστικό τρόπο και όταν αποφορτίζεται, επιστρέφει στην αρχική της κατάσταση, χωρίς να έχει υποστεί μόνιμες παραμορφώσεις.

Αν η δοκός φορτιστεί πέρα από την τροπή ε_B στο σημείο C, η καμπύλη τάσης-παραμόρφωσης περνά το σημείο B. Στο σημείο B εμφανίζεται η τάση διαρροής σ_Y και η δοκός γίνεται πλαστική. Δεν υπάρχει πλέον γραμμική σχέση μεταξύ τάσης και παραμόρφωσης και η τάση στη δοκό παραμένει σταθερή και ίση με σ_Y . Αν στη συνέχεια αποφορτιστεί, η δοκός γίνεται ελαστική και η καμπύλη τάσης-παραμόρφωσης περιγράφεται από την γραμμή CD, η οποία είναι παράλληλη με την γραμμή BA. Όταν γίνεται αποφόρτιση ώστε η αξονική τάση να είναι μηδέν (σημείο D), υπάρχει ακόμα παραμόρφωση στη δοκό. Αυτή η παραμόρφωση είναι ίδια με την πλαστική παραμόρφωση που επιτυγχάνεται κατά την γραμμή BC και δίνεται από την σχέση: $\varepsilon_C^p = \varepsilon_C - \varepsilon_B$. Έτσι η δοκός δεν επιστρέφει στην αρχική της μορφή αφού έχει υποστεί μόνιμες παραμορφώσεις. Αν στη συνέχεια η δοκός επαναφορτιστεί, η καμπύλη τάσης-παραμόρφωσης ακολουθεί και πάλι την γραμμή DC μέχρι το σημείο C, στο οποίο η αξονική τάση ισούται με την τάση διαρροής και η δοκός γίνεται και πάλι πλαστική. Στη συνέχεια κινείται στη γραμμή CF. Είναι σαφές ότι αν η παραμόρφωση δεν είναι

επαρκής ώστε η τάση να είναι στο σημείο C, η δοκός συμπεριφέρεται γραμμικά ελαστικά.

Η συμπεριφορά είναι αναστρέψιμη και για αυτό το λόγο ελαστική, στις γραμμές AB και DC, δεδομένου ότι στο τμήμα BCF η συμπεριφορά είναι μη αναστρέψιμη. Το υλικό που συμπεριφέρεται όπως στο σχήμα (2,38) ονομάζεται γραμμικά ελαστικό ιδανικά πλαστικό υλικό (Potts & Zdravkovic, 1999).

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Ιδιότητες των Υλικών

Στο κεφάλαιο αυτό περιγράφονται οι φυσικές και μηχανικές ιδιότητες του Διονυσιακού μαρμάρου και του Κογχυλιόλιθου, πετρώματα τα οποία υποβλήθηκαν σε δοκιμές κάμψης τριών σημείων. Το μάρμαρο Διονύσου χρησιμοποιείται στην αναστήλωση του ναού του Παρθενώνα στην Ακρόπολη της Αθήνας, ενώ ο Κογχυλιόλιθος χρησιμοποιείται για την αναστήλωση του ναού του Δία στην Αρχαία Ολυμπία.

3.1 Το ΔΙΟΝΥΣΙΑΚΟ ΜΑΡΜΑΡΟ

Το μάρμαρο Διονύσου χρησιμοποιείται σχεδόν αποκλειστικά στις εργασίες συντήρησης του Παρθενώνα στην Ακρόπολη της Αθήνας, λόγω της ομοιότητας των φυσικομηχανικών του ιδιοτήτων με αυτές του Πεντελικού μαρμάρου, το οποίο χρησιμοποιήθηκε ευρύτατα κατά το παρελθόν από τους αρχαίους Έλληνες (Βαρδουλάκης κ.α., 2002).

3.1.1 Φυσικές Ιδιότητες

Το Διονυσιακό μάρμαρο αποτελείται από 98% ασβεστίτη, 0,5% μοσχοβίτη, 0,3% σερικίτη, 0,2% χαλαζία και 0,1% χλωρίτη. Έχει πυκνότητα 2717 kg/m^3 , φαινομένη πυκνότητα 2717 kg/m^3 και συντελεστή απορρόφησης κατά βάρος περίπου 0,11%. Ο συντελεστής θερμικής διαστολής είναι περίπου $9 \times 10^{-6}/^{\circ}\text{C}$ μεταξύ 15°C και 100°C . Το πορώδες είναι ιδιαίτερα χαμηλό και κυμαίνεται μεταξύ 0,3% στην παρθενική του κατάσταση και 0,7% μετά την επίδραση διαφόρων φυσικών ή και τεχνητών διαβρωτικών παραγόντων. Το μέγεθος των κόκκων είναι της τάξεως των $0,43 \times 10^{-3} \text{ m}$, οι κρύσταλλοι του έχουν πολυγωνικό σχήμα με διαστάσεις μεταξύ $900 \text{ }\mu\text{m} \times 650 \text{ }\mu\text{m}$ και $950 \text{ }\mu\text{m} \times 874 \text{ }\mu\text{m}$ και είναι σχεδόν ομοιόμορφοι όσον αφορά τις διαστάσεις τους.

καταγράφονται οι τιμές του μέτρου ελαστικότητας E , του λόγου Poisson ν και της εφελκυστικής αντοχής σ_f . Η παρατήρηση αυτή δικαιολογεί την άποψη ότι το Διονυσιακό μάρμαρο μπορεί να θεωρείται ως εγκάρσιως ισότροπο υλικό με έναν άξονα ελαστικής συμμετρίας απείρου τάξεως (τον κάθετο στις στρώσεις) και επομένως η μηχανική του συμπεριφορά περιγράφεται με τη χρήση πέντε σταθερών: Των δύο μέτρων ελαστικότητας, E και E' , στο επίπεδο εγκάρσιας ισοτροπίας και κάθετα σε αυτό, των δύο λόγων Poisson, ν και ν' , οι οποίοι περιγράφουν την εγκάρσια ανταπόκριση των παραμορφώσεων εντός του επιπέδου ισοτροπίας σε εφελκυστικές φορτίσεις παραλλήλως και κάθετως σε αυτό και του μέτρου διατμήσεως, G , σε επίπεδα κάθετα στο επίπεδο ισοτροπίας (Βαρδουλάκης κ.α., 2002).

*Πίνακας 3.1: Οι μηχανικές ιδιότητες του μαρμάρου Διονύσου
(Βαρδουλάκης κ.α., 2002)*

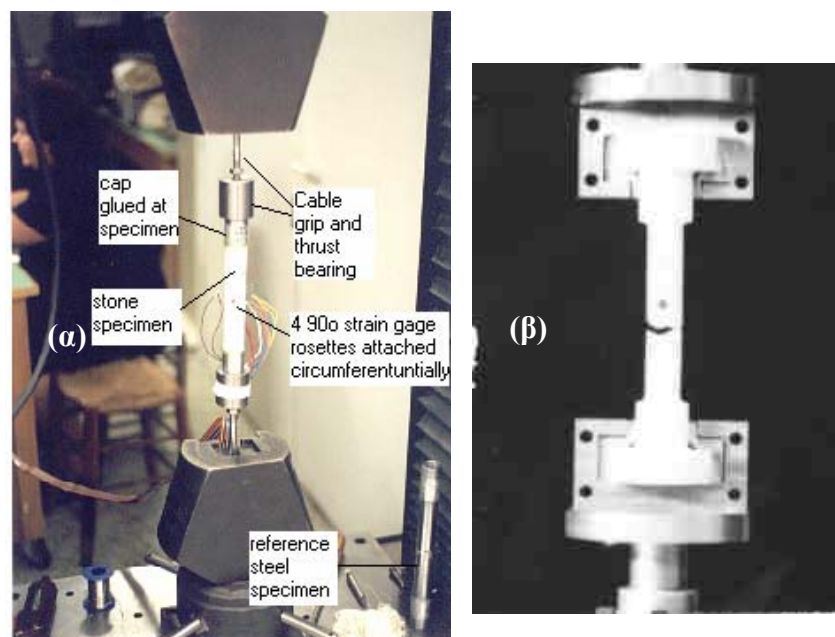
	E (GPa)	ν	σ_f (MPa)
Ισχυρή διεύθυνση (1)	84,5	0,26	10,8
Ενδιάμεση διεύθυνση (2)	79,5	0,26	9,5
Ασθενής διεύθυνση (3)	50,0	0,11	5,3

3.1.3 Το Διονυσιακό Μάρμαρο υπό Άμεσο Εφελκυσμό

Το πείραμα του μονοαξονικού εφελκυσμού παρέχει σημαντικές πληροφορίες σχετικά με την καταστατική συμπεριφορά των υλικών και την τιμή των ελαστικών σταθερών. Όμως, το πείραμα αυτό είναι απαγορευτικά δύσκολο στην περίπτωση γαιωδών υλικών, καθώς η απαιτούμενη σύνθλιψη εντός των αρπαγών (για την δημιουργία των απαραίτητων δυνάμεων τριβής οι οποίες θα φορτίσουν εφελκυστικώς το δοκίμιο), θρυμματίζει το υλικό στις κεφαλές λόγω της αυξημένης ψαθυρότητας. Πρακτικά το πείραμα μονοαξονικού εφελκυσμού υποκαθίσταται από το πείραμα αντιδιαμετρικής θλίψης, το οποίο όμως δημιουργεί πολυαξονικό εντατικό πεδίο με αποτέλεσμα να μην προκύπτουν ιδιαίτερα αξιόπιστα αποτελέσματα (Βαρδουλάκης κ.α., 2002).

Στο σχήμα (3.2) παρουσιάζονται οι πειραματικές διατάξεις με τις οποίες εκτελέστηκαν τα πειράματα άμεσου μονοαξονικού εφελκυσμού δοκιμίων από Διονυσιακό μάρμαρο.

Η πρώτη περιελάμβανε συνδυασμό κυλινδρικών δοκιμίων διπλής βαθμίδας στη διατομή (τύπου dogbone) και ειδικές διαιρούμενες αρπάγες. Το φορτίο ασκείται από τις αρπάγες στην πρώτη βαθμίδα των δοκιμίων διατμητικώς, χωρίς σύνθλιψη. Αυτή η μέθοδος έδωσε ικανοποιητικά αποτελέσματα, αλλά η εφαρμογή της είναι χρονοβόρα, καθώς απαιτείται ειδική επεξεργασία των δοκιμίων. Επίσης, η μέθοδος αποδείχθηκε ιδιαίτερα ευαίσθητη ακόμη και στις ελάχιστες αποκλίσεις από την απόλυτη ευθυγράμμιση μεταξύ του άξονα φορτίσεως της μηχανής και του άξονα φορτίσεως του δοκιμίου, με αποτέλεσμα τη δημιουργία παρασιτικών καμπτικών τάσεων (Βαρδουλάκης κ.α., 2002).

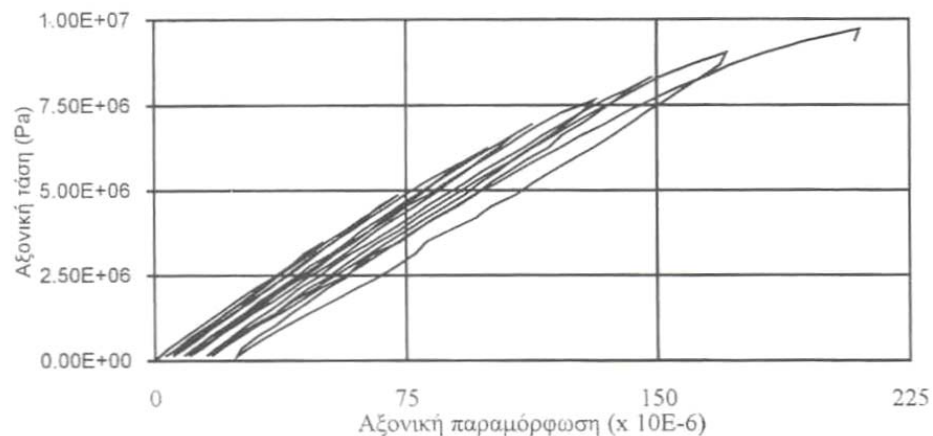


Σχήμα 3.2: Διατάξεις για τα πειράματα άμεσου μονοαξονικού εφελκυσμού σε δοκίμια Διονυσιακού μαρμάρου (Βαρδουλάκης κ.α., 2002)

Η δεύτερη μέθοδος στηρίζεται σε «εύκαμπτες» αρπάγες (συρματόσχοινα ειδικού τύπου), με τις οποίες ασκείται το εφελκυστικό φορτίο σε ειδικό κέλυφος εντός του οποίου «κοχλιώνεται» μεταλλική κεφαλή, με εσωτερική διάμετρο αυτή του δοκιμίου, εντός της οποίας συγκρατείται το δοκίμιο με κατάλληλη κυανοακρυλική συγκολλητική ουσία (Βαρδουλάκης κ.α., 2002).

Οι παραμορφώσεις στα δοκίμια μετρήθηκαν με τη χρήση τεσσάρων ζευγών ηλεκτρικών μηχανομετρώων (strain gauges) τύπου ορθογωνικής ροζέτας, τα οποία τοποθετήθηκαν στη κεντρική διατομή του δοκιμίου στα άκρα δύο καθέτων μεταξύ τους διαμέτρων (Βαρδουλάκης κ.α., 2002).

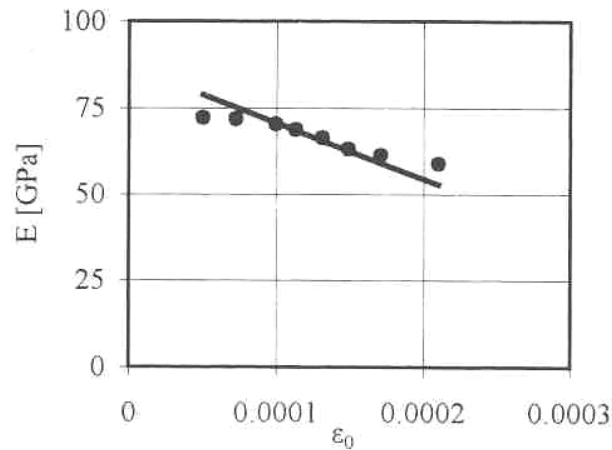
Το πρώτο συμπέρασμα που προκύπτει από την επεξεργασία των δεδομένων των πειραμάτων άμεσου εφελκυσμού, είναι ο σημαντικός περιορισμός της διασποράς των αποτελεσμάτων που αφορούν τόσο το μέτρο ελαστικότητας όσο και την τάση θραύσεως. Το πιο σημαντικό όμως συμπέρασμα, αφορά στην καταστατική συμπεριφορά του μαρμάρου Διονύσου καθώς όπως φαίνεται στο διάγραμμα αξονικών τάσεων-αξονικών παραμορφώσεων του Σχήματος 3.3, στο οποίο παρουσιάζονται τα δεδομένα μιας σειράς οκτώ κύκλων φόρτισης-αποφόρτισης, το υλικό παρουσιάζει μη γραμμική συμπεριφορά, ακόμα και από τα αρχικά στάδια φόρτισης. Το ίδιο συμπέρασμα προέκυψε και για το λόγο της εγκάρσιας συστολής σε συνάρτηση για την διαμήκη επιμήκυνση (λόγος Poisson). Σημαντικό είναι επίσης και το συμπέρασμα, ότι πέραν της μη γραμμικότητας, το υλικό παρουσιάζει σημαντικές παραμένουσες παραμορφώσεις, που πλησιάζουν το 10×10^{-6} στον τέταρτο κύκλο φόρτισης-αποφόρτισης, ενώ στον όγδοο προσεγγίζουν το 25×10^{-6} . Δηλαδή το μάρμαρο αυτό εμφανίζεται ως ένα σχετικά όλκιμο υλικό, η συμπεριφορά του οποίου προσεγγίζει (φαινομενικά) την αντίστοιχη του αλουμινίου (Βαρδουλάκης κ.α., 2002).



Σχήμα 3.3: Διάγραμμα τάσεων-παραμορφώσεων του Διονυσιακού μαρμάρου υπό μονοαξονικό εφελκυσμό (Βαρδουλάκης κ.α., 2002)

Τέλος, ενδιαφέρον παρουσιάζει και η μεταβολή του μέτρου ελαστικότητας E , συναρτήσει του επιπέδου των επιβαλλόμενων αξονικών παραμορφώσεων, ϵ . Όπως φαίνεται από το σχήμα (3.4), στο οποίο παρουσιάζονται οι τιμές του E συναρτήσει της παραμόρφωσης ϵ , η αρχική τιμή των περίπου 80 GPa μειώνεται κάτω από τα 60 GPa ελάχιστα πριν την αστοχία. Η σχετική συνάρτηση $E=E(\epsilon)$ εμφανίζεται ελαφρώς «σιγμοειδής», όμως μπορεί σε πρώτη προσέγγιση να θεωρηθεί γραμμική. Προκύπτει λοιπόν το συμπέρασμα, ότι για την σωστή περιγραφή της καταστατικής συμπεριφοράς

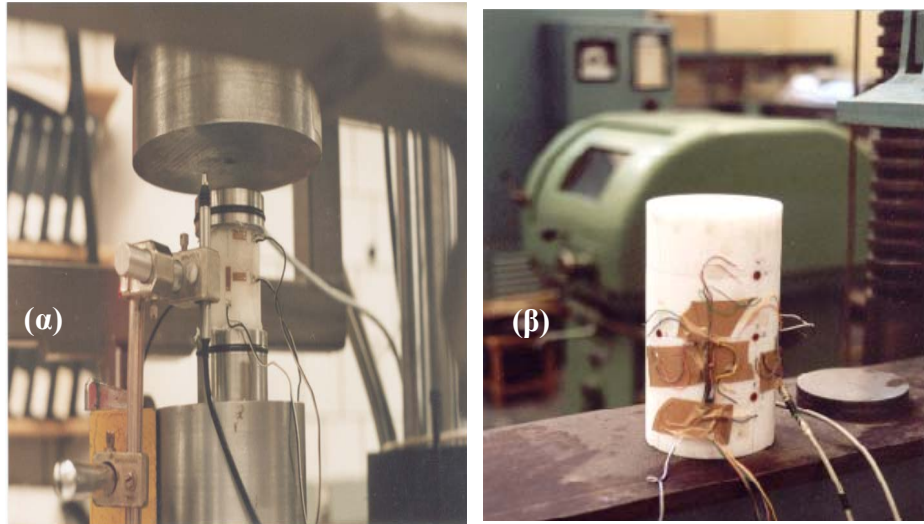
του Διονυσιακού μαρμάρου πρέπει να ληφθεί υπόψη και η μηχανική φθορά (mechanical damage) (Βαρδουλάκης κ.α., 2002).



Σχήμα 3.4: Φθορά του μέτρου ελαστικότητας του μαρμάρου Διονύσου συναρτήσει της αξονικής παραμόρφωσης (Βαρδουλάκης κ.α., 2002)

3.1.4 Η Συμπεριφορά του Μαρμάρου Διονύσου υπό Μονοαξονική και Τριαξονική Θλίψη

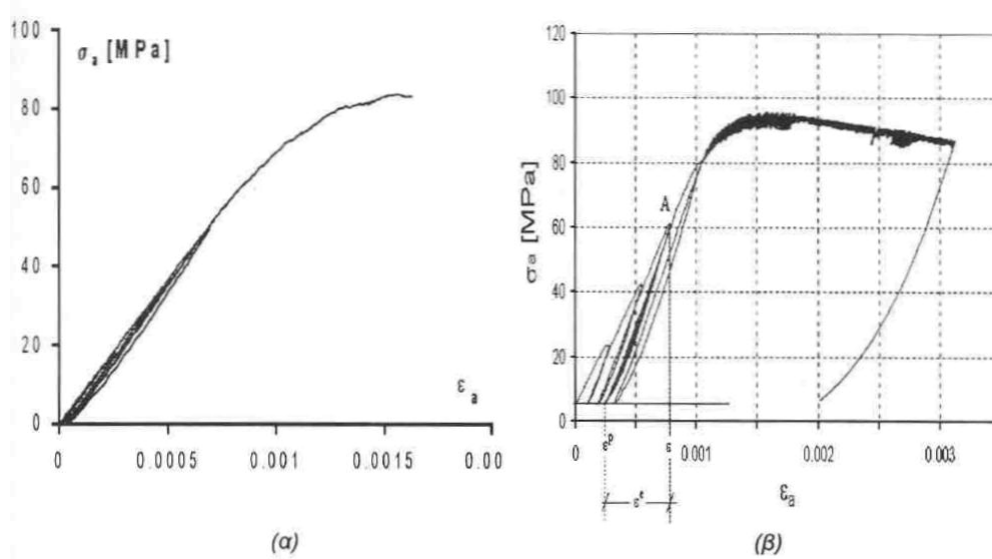
Η συμπεριφορά του Διονυσιακού μαρμάρου υπό θλιπτικά φορτία, μελετήθηκε τόσο υπό μονοαξονική θλίψη όσο και υπό θλίψη με πλευρική πίεση (τριαξονική δοκιμή θλίψης). Κατά την δοκιμή μονοαξονικής θλίψης, οι παραμορφώσεις μετρήθηκαν με τη χρήση ηλεκτρικών μηχανομετρών τύπου ορθογωνικής ροζέτας (Σχήμα 3.5), ενώ κατά την τριαξονική δοκιμή με τη χρήση της διάταξης LVDTs (Linear Voltage Displacement Transducers) (Βαρδουλάκης κ.α., 2002).



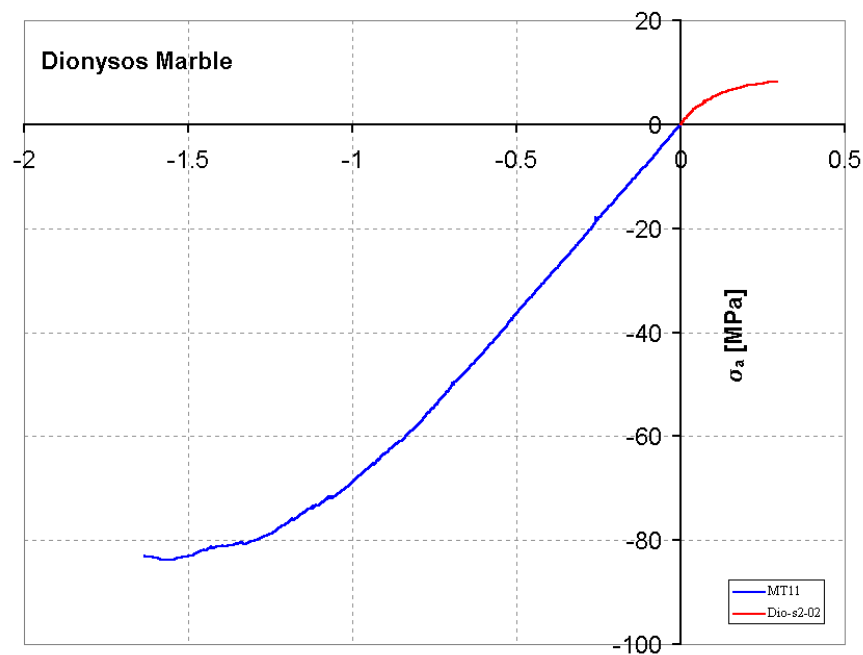
Σχήμα 3.5: α) Πειραματική διάταξη της δοκιμής μονοαξονικής θλίψης β) Δοκίμιο μαρμάρου για δοκιμή μονοαξονικής θλίψης στο οποίο διακρίνονται τα τοποθετημένα μηχανοσυστήματα για την μέτρηση των παραμορφώσεων

Στο σχήμα (3.6) παρουσιάζονται μαζί η αξονική τάση συναρτήσει της αξονικής παραμόρφωσης, όπως προκύπτει από τη δοκιμή μονοαξονικής θλίψης, και τα ίδια μεγέθη για την τριαξονική δοκιμή υπό πλευρική πίεση $p=5$ MPa. Από αυτά τα δύο γραφήματα προκύπτει διαφορά μεταξύ της εφελκυστικής και της θλιπτικής αντοχής του μαρμάρου, με λόγο αντοχών σε θλίψη και εφελκυσμό ίσο περίπου με 10. Και στο πείραμα θλίψης παρουσιάζεται μη γραμμική συμπεριφορά, για τιμές όμως παραμορφώσεων σημαντικά μεγαλύτερες από τις αντίστοιχες του εφελκυσμού, ενώ καταγράφονται και σημαντικές παραμένουσες παραμορφώσεις κατά την περίπτωση αποφορτίσεως. Είναι επίσης σαφής η αύξηση της ολκιμότητας λόγω της επίδρασης της πλευρικής πίεσης, καθώς και η ύπαρξη φθίνοντος κλάδου, στον οποίο η μηχανική φθορά του υλικού είναι έντονη, όπως προκύπτει και από την καμπύλη αποφορτίσεως στην οποία το μέτρο ελαστικότητας εμφανίζεται κατά 40% μειωμένο σε σχέση με το αρχικό (Βαρδουλάκης κ.α., 2002).

Στο σχήμα (3.7) παρουσιάζεται το πλήρες διάγραμμα τάσεων-παραμορφώσεων του μαρμάρου Διονύσου. Είναι εμφανής η τεράστια διαφορά στις απόλυτες τιμές των τάσεων και των παραμορφώσεων. Επίσης, ενώ στην περιοχή εφελκυσμού η καταστατική σχέση είναι εξαρχής μη γραμμική, στην περιοχή της θλίψης είναι απόλυτα γραμμική. Το γεγονός αυτό πρέπει να λαμβάνεται υπόψη όταν μελετώνται καταπονήσεις στις οποίες συνυπάρχουν εφελκυσμός και θλίψη όπως η κάμψη (Βαρδουλάκης κ.α., 2002).



Σχήμα 3.6: Διάγραμμα τάσεων-παραμορφώσεων υπό α) μονοαξονική και β) τριαξονική θλίψη (Βαρδουλάκης κ.α., 2002)

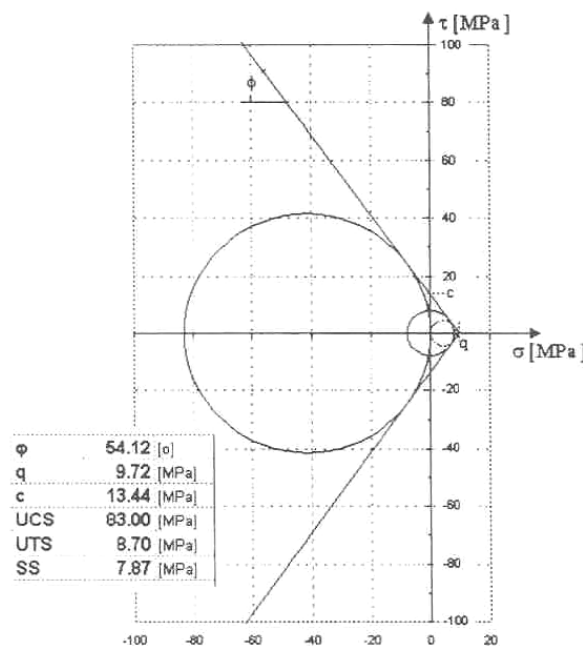


Σχήμα 3.7: Το πλήρες διάγραμμα τάσεων-παραμορφώσεων (Βαρδουλάκης κ.α., 2002)

Η σωστή εκτίμηση της τριβής που αναπτύσσεται μεταξύ των πλακών φόρτισης και του δοκιμίου, έχει αποδειχθεί καθοριστικός παράγοντας για την αξιολόγηση και ανάλυση των δεδομένων των πειραμάτων θλίψης. Έχει αποδειχθεί από το 1982, ότι πειράματα με τριβή παρέχουν ελάχιστα αξιόπιστες πληροφορίες σχετικά με την καταστατική συμπεριφορά γαιωδών υλικών. Τα πειράματα που περιγράφονται εδώ, πραγματοποιήθηκαν τόσο με την χρήση κατάλληλων λιπαντικών τα οποία ελαττώνουν

την τριβή όσο και «εν ξηρώ», δηλαδή με απευθείας επαφή των πλακών φόρτισης και των εδρών των δοκιμίων. Η μέθοδος λίπανσης που επιλέχθηκε περιελάμβανε συνδυασμό στρώσεων στερεού στεαρικού οξέος και φύλλων πολυτετραφλουροαιθυλενίου (PTFE). Αυτά τα φύλλα εκτός ότι λειτουργούν σαν λιπαντικά, εμποδίζουν και την διείσδυση των κόκκων του λιπαντικού στο μάρμαρο (Βαρδουλάκης κ.α., 2002).

Από τα δεδομένα των πειραμάτων εφελκυσμού και θλίψης, μπορεί να σχεδιασθεί ο τύπος αστοχίας του Διονυσιακού μαρμάρου κατά Mohr-Coulomb, με την υπόθεση ότι η περιβάλλουσα προσεγγίζεται ικανοποιητικά από ευθεία γραμμή, όπως φαίνεται στο σχήμα (3.8). Στο διάγραμμα εκτός των τιμών βασικών μηχανικών σταθερών του υλικού, παρουσιάζονται και η αντοχή σε θλίψη UCS, η αντοχή σε εφελκυσμό UTS, η αντοχή σε διάτμηση SS, η γωνία τριβής ϕ , καθώς και οι πειραματικές παράμετροι του κριτηρίου q και c . Τέλος, σημειώνεται ότι το διάγραμμα του Σχήματος 3.8, αφορά την ισχυρότερη διεύθυνση ανισοτροπίας (Βαρδουλάκης κ.α., 2002).



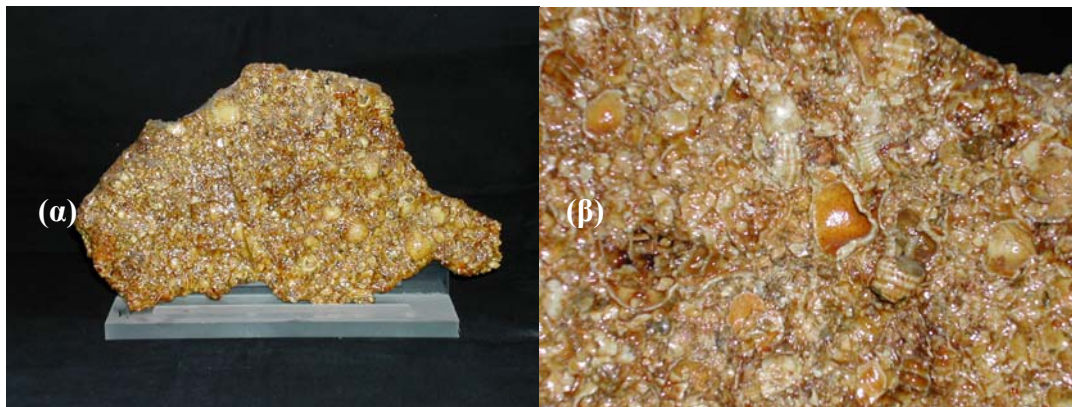
Σχήμα 3.8: Ο τύπος αστοχίας του Διονυσιακού μαρμάρου κατά Mohr-Coulomb (Βαρδουλάκης κ.α., 2002)

3.2 Ο ΚΟΓΧΥΛΙΟΛΙΘΟΣ

Για την αναστήλωση του ναού του Δία στην αρχαία Ολυμπία που αποτελεί ένα αξιοθαύμαστο μνημείο της πρώιμης περιόδου της κλασσικής αρχιτεκτονικής, χρησιμοποιείται ένα παρεμφερές υλικό με αυτό που χρησιμοποίησαν οι αρχαίοι Έλληνες, ο Κογχυλιόλιθος (Βαρδουλάκης κ.α., 2002).

3.2.1 Φυσικές Ιδιότητες

Ο Κογχυλιόλιθος αποτελεί ένα έντονα ανομοιογενές υλικό το οποίο αποτελείται από διαδοχικές στρώσεις αυθαίρετα τοποθετημένων κοχυλιών, οι οποίες συνδέονται χαλαρά μεταξύ τους με τη βοήθεια στρώσεων ασβέστου. Το μέγεθος των κοχυλιών ποικίλλει μεταξύ λίγων χιλιοστών και αρκετών εκατοστών (Σχήμα 3.9) (Βαρδουλάκης κ.α., 2002). Το πορώδες του Κογχυλιόλιθου είναι υψηλό και η μεγάλη ποικιλία των κοχυλιών που εντοπίζονται σε αυτό το είδος πετρώματος σχετίζεται άμεσα με τον τρόπο σχηματισμού του. Το πιο πιθανό είναι τα πετρώματα της οικογένειας αυτής να σχηματίστηκαν σε ρηχό, παράκτιο υφάλμυρο περιβάλλον και κάτω από την επίδραση καταιγίδων (Μπακόλας, 2004).



Σχήμα 3.9: α) Δείγμα Κογχυλιόλιθου που χρησιμοποιείται για την αναστήλωση του ναού του Δία στην αρχαία Ολυμπία β) Λεπτομερής εικόνα του Κογχυλιόλιθου στην οποία διακρίνονται τα απολιθωμένα κελύφη

Το ποσοστό αδιάλυτων ιζημάτων –μη ανθρακούχα ορυκτά-, είναι αρκετά υψηλό και κυμαίνεται μεταξύ 6 και 40%. Η ποιοτική ανάλυση έδειξε ότι αποτελούνται κυρίως από χαλαζίες, αργιλικά εξογκωμένα ορυκτά, όπως ο μοντμοριλλονίτης και ο σαπονίτης. Τα ενδογενή αίτια φθοράς του Κογχυλιόλιθου σχετίζονται με το υψηλό πορώδες, τη μη

ομογενή ορυκτή σύσταση του, καθώς και την ποιοτική/ποσοτική ορυκτή σύνθεση του από αργιλικά εξογκωμένα ορυκτά (Μπακόλας, 2004).

3.2.2 Μηχανικές Ιδιότητες

Ο Κογχυλιόλιθος παρουσιάζει μια ισχυρή ανισοτροπία εγκαρσίου τύπου λόγω της στρωσιγενούς δομής του. Το υλικό χαρακτηρίζεται από δύο διευθύνσεις ανισοτροπίας, μια κάθετη στις στρώσεις των κοχυλιών και μία εντός των στρώσεων, με μηχανικές ιδιότητες τελείως διαφορετικές μεταξύ τους (Βαρδουλάκης κ.α., 2002).

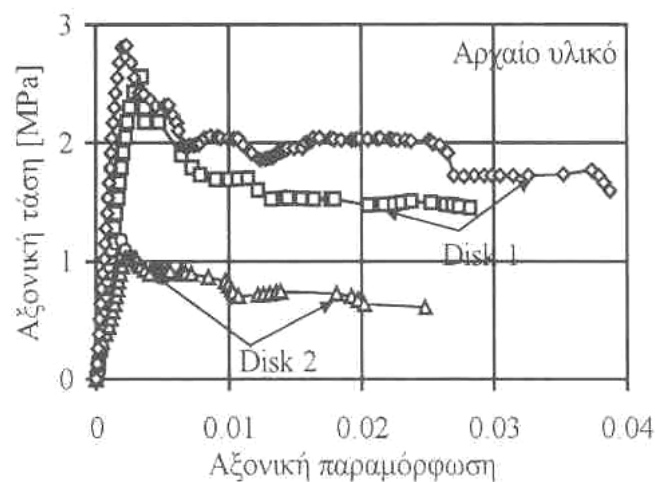
Αρχικά εκτελέσθηκε μακρά σειρά πειραμάτων μονοαξονικής θλίψης κυβικών και κυλινδρικών δοκιμίων με τη βοήθεια άκαμπτης υδραυλικής μηχανής AMSLER, μεγίστου φορτίου 1 MN. Η αυξημένη ακαμψία του πλαισίου φορτίσεως είναι απαραίτητη προϋπόθεση για την μελέτη της μετά το μέγιστο φορτίο περιοχής του διαγράμματος τάσεων-παραμορφώσεων, περιοχή η οποία φαίνεται να έχει ιδιαίτερη σημασία στον Κογχυλιόλιθο (Βαρδουλάκης κ.α., 2002).

Το φορτίο επιβλήθηκε στατικά και ο ρυθμός μετακίνησης των πλακών θλίψης δεν υπερέβαινε τα 10^{-2} mm/min. Ιδιαίτερη σημασία δόθηκε στην ελαχιστοποίηση της τριβής μεταξύ των πλακών και του δοκιμίου. Το σύστημα λίπανσης που χρησιμοποιήθηκε είναι το ίδιο με αυτό που χρησιμοποιήθηκε στα πειράματα θλίψης του μαρμάρου Διονύσου. Οι παραμορφώσεις μετρήθηκαν με σύστημα έξι βελομέτρων ευαισθησίας 10^{-6} m, τα τέσσερα τοποθετήθηκαν κατακόρυφα ανά 90° για έλεγχο της συμμετρίας φορτίσεως, ενώ με τα άλλα δύο μετρήθηκε η εγκάρσια διόγκωση, για την εκτίμηση του λόγου Poisson. Οι τιμές των μηχανικών σταθερών παρουσιάζονται στον πίνακα (3.2) (Βαρδουλάκης κ.α., 2002).

Πίνακας 3.2: Μηχανικές ιδιότητες του κογχυλιόλιθου (ισχυρή διεύθυνση ανισοτροπίας (Βαρδουλάκης κ.α., 2002)

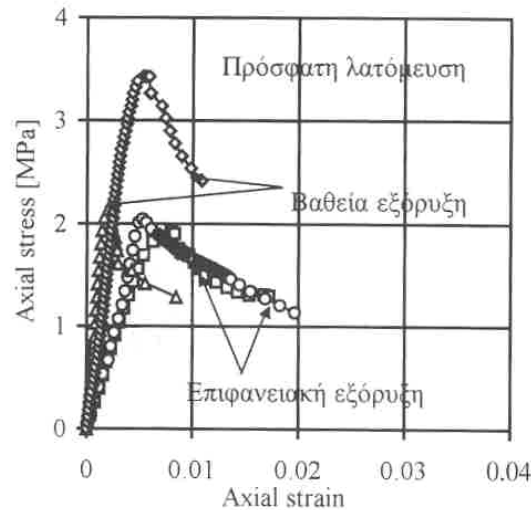
	Αρχαίο	Νέο
Μέτρο ελαστικότητας (GPa)	0,65	1,10
Θλιπτική αντοχή (κύβων) (MPa)	-	5,42
Θλιπτική αντοχή (κυλίνδρων) (MPa)	1,80	2,51
Λόγος Poisson	0,30	0,30

Στο σχήμα (3.10) παρουσιάζεται το διάγραμμα τάσεων-παραμορφώσεων για κυλινδρικά δοκίμια από αρχαίο υλικό. Στο σημείο αυτό, πρέπει να σημειωθεί, ότι υπήρξε ομαδοποίηση των πειραμάτων, σε σχέση με τον δίσκο από τον οποίο προέρχονται τα δοκίμια καθώς και οι τεράστιες διαφορές στην θλιπτική αντοχή, οι οποίες υπερβαίνουν το 200%. Το γεγονός αυτό οφείλεται στην ανομοιογένεια του υλικού, αλλά και στην προφόρτιση την οποία έχουν υποστεί οι δίσκοι και η οποία είναι συνάρτηση της θέσης των δίσκων στον αρχικό στύλο από τον οποίο προέρχονται (Βαρδουλάκης κ.α., 2002).



Σχήμα 3.10: Διάγραμμα τάσεων-παραμορφώσεων για κυλινδρικά δοκίμια Κογχυλιόλιθου από αρχαία δομικά μέλη (Βαρδουλάκης κ.α., 2002)

Αντίστοιχα, στο σχήμα (3.11) παρουσιάζεται το διάγραμμα τάσεων-παραμορφώσεων κυλινδρικών δοκιμίων από πρόσφατα λατομεύμενο υλικό. Εκτός από την κατά μέσο όρο αυξημένη θλιπτική αντοχή, εμφανίζονται και πάλι σημαντικές διαφορές μεταξύ των δοκιμίων σχετικά με τη θλιπτική αντοχή, οι οποίες υπερβαίνουν το 50%, αναλόγως του εάν το δοκίμιο προέρχεται από υλικό επιφανειακής ή βαθιάς εξόρυξης. Σημαντική είναι επίσης και η διαφορά στην μορφή της μετά το μέγιστο φορτίο περιοχής του διαγράμματος, η οποία στο αρχαίο υλικό εμφανίζεται σαφώς πιο οριζόντια, φθάνοντας σε σημαντικά επίπεδα παραμορφώσεων πριν την τελική αστοχία των δοκιμίων, υποδεικνύοντας επιλογή από τους αρχαίους Έλληνες υλικού με εξαιρετικά μεγάλη δυνατότητα απορροφήσεως ενέργειας παραμορφώσεων, παρά την σχετικά χαμηλή αντοχή του (Βαρδουλάκης κ.α., 2002).



Σχήμα 3.11: Διάγραμμα τάσεων-παραμορφώσεων για κυλινδρικά δοκίμια Κογχυλιόλιθου από πρόσφατως λατομευμένο υλικό (Βαρδουλάκης κ.α., 2002)

Εκτός από την θλίψη εκτελέστηκαν και πειράματα άμεσου εφελκυσμού καθώς και αντιδιαμετρικής θλίψης, με σκοπό τον προσδιορισμό της εφελκυστικής αντοχής του Κογχυλιόλιθου. Η διαφορά που προέκυψε μεταξύ των δύο μεθόδων είναι ιδιαίτερα σημαντική (~30%), καθιστώντας προβληματική την αποδοχή του πειράματος αντιδιαμετρικής θλίψης ως ακριβούς υποκατάστατου του, όντως ιδιαίτερα δύσκολου για δοκίμια από γαιώδη υλικά, πειράματος άμεσου εφελκυσμού (Βαρδουλάκης κ.α., 2002).

Ως τελευταία παρατήρηση για τη μηχανική συμπεριφορά του Κογχυλιόλιθου, πρέπει να αναφερθεί η σχετική με τον ιδιόμορφο τρόπο αστοχίας του, ο οποίος χαρακτηρίζεται από συνδυασμό αξονικών ρωγμών, παράλληλων με τον άξονα φορτίσεως και από κάποιο φορτίο και πέρα, από σύνθλιψη οριζόντιων στρώσεων με εγκάρσια διόγκωση του υλικού. Είναι σαφές ότι αυτός ο τρόπος αστοχίας δεν περιγράφεται με κάποια από τις κλασσικές θεωρίες αστοχίας των γαιωδών υλικών. Στην κατεύθυνση αυτή εισήχθησαν διάφορες θεωρίες, με πιο ενδιαφέρουσα εκείνη της «διαχύσεως των τάσεων» των Βαρδουλάκη και συνεργατών (Βαρδουλάκης κ.α., 2002).

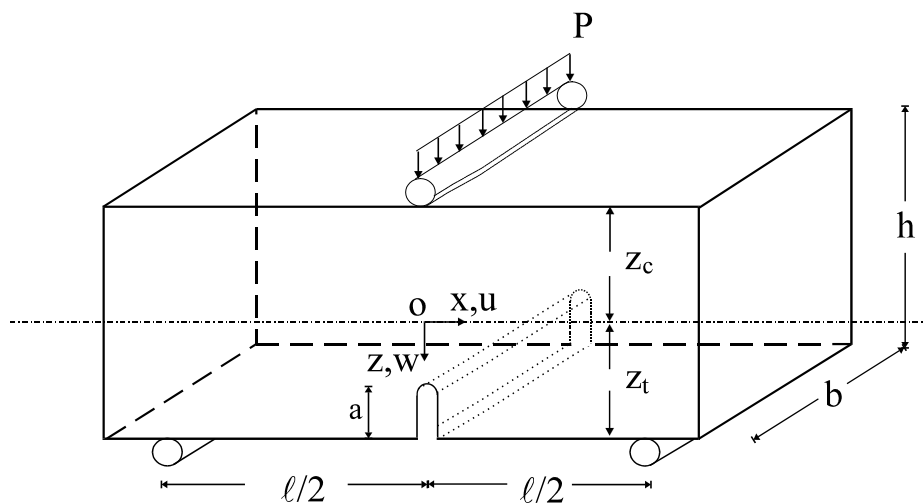
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

Πειραματική Μελέτη της Δοκιμής Κάμψης Τριών Σημείων

Ακολουθεί η περιγραφή της πειραματικής μελέτης της δοκιμής κάμψης τριών σημείων σε δοκίμια Διονυσιακού μαρμάρου και Κογχυλιόλιθου, η οποία πραγματοποιήθηκε στα εργαστήρια αντοχής υλικών του Ε.Μ.Π.

4.1 Η ΔΟΚΙΜΗ ΚΑΜΨΗΣ ΤΡΙΩΝ ΣΗΜΕΙΩΝ ΣΕ ΔΟΚΙΜΙΑ ΔΙΟΝΥΣΙΑΚΟΥ ΜΑΡΜΑΡΟΥ ΜΕ ΕΓΚΟΠΗ

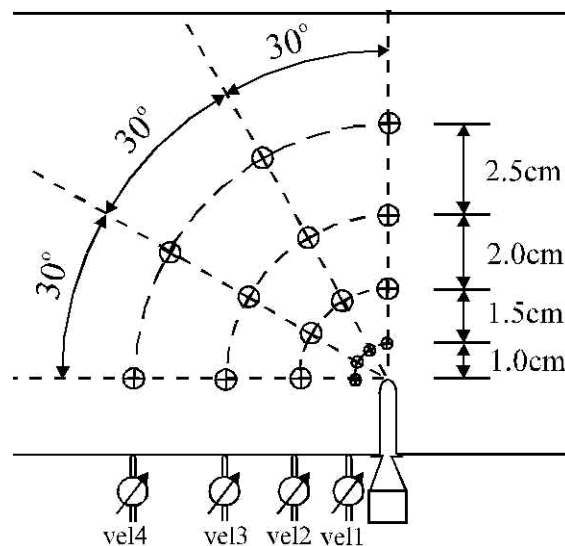
Τα δείγματα που χρησιμοποιήθηκαν για την πειραματική μελέτη της δοκιμής, διαμορφώθηκαν από πρόσφατα εξορυσόμενους όγκους μαρμάρου Διονύσου και ο διαμήκης άξονάς τους συμπίπτει με την ισχυρή διεύθυνση ανισοτροπίας. Ήταν πρισματικά δοκίμια συνολικού μήκους $L_0=420$ mm και τετραγωνικής διατομής 100×100 mm².



Σχήμα 4.1: Η γεωμετρία των δοκιμών και η διάταξη της φόρτισης (Kourkoulis et al., 1998)

Επίσης, μια εγκοπή σχήματος “U” μήκους $a=10$ mm και πλάτους $s=5$ mm διαμορφώθηκε στο μέσο των δοκιμίων κάθετα στο διαμήκη άξονα της δοκού, ώστε να προσομοιωθεί η επίδραση ασυνεχειών τύπου εγκοπής στην φέρουσα ικανότητα δομικών μελών από Διονυσιακό μάρμαρο, αφού έχει παρατηρηθεί ότι αριθμός επιτυλίων του Παρθενώνα φέρει εγκάρσιες ρωγμές. Στη συνέχεια, τα δείγματα τοποθετήθηκαν σε δύο χαλύβδινους κυλίνδρους διαμέτρου 70 mm σε απόσταση $L=400$ mm μεταξύ τους. Το φορτίο εφαρμόστηκε ομοιόμορφα κατά μήκος του πάχους των δειγμάτων με την βοήθεια ενός τρίτου ίδιου χαλύβδινου κυλίνδρου (Σχήμα 4.1) (Kourkoulis et al., 2003α).

Οι παραμορφώσεις που αναπτύχθηκαν μετρήθηκαν με την χρήση ορθογώνιων ροζετών παραμόρφωσης (strain gauges) τοποθετημένες σύμφωνα με ένα πολικό σύστημα αναφοράς, η αρχή συντεταγμένων του οποίου ήταν η κορυφή της εγκοπής (Σχήμα 4.2). Οι ροζέτες τοποθετήθηκαν σε τέσσερα ομόκεντρα τέταρτα ενός κύκλου με ακτίνα $r=10, 25, 45, 70$ cm σε κατευθύνσεις με $\theta=0^\circ, 30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$, από την οριζόντια γραμμή που περνά μέσω της κορυφής της εγκοπής, ενώ μια πρόσθετη ροζέτα τοποθετήθηκε ακριβώς στην κορυφή της εγκοπής (Kourkoulis et al., 2003α).



Σχήμα 4.2: Σχηματική αναπαράσταση του συστήματος μηχανοστοιμέτρων και βελομέτρων, για την καταγραφή των παραμορφώσεων και των βελών κάμψης της δοκού αντίστοιχα (Kourkoulis et al., 1998)

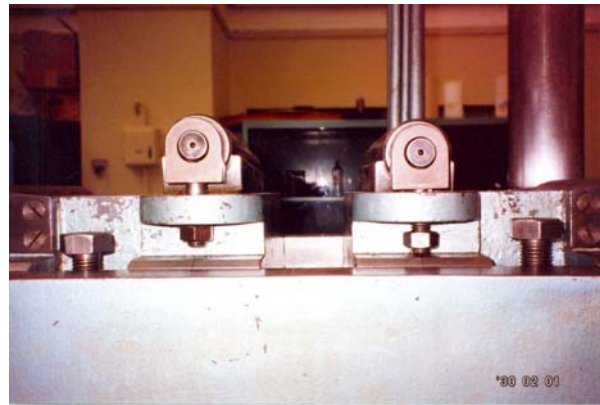
Επίσης, χρησιμοποιήθηκαν τέσσερα βελόμετρα (dial-clock gauges), (ευαισθησίας 10^{-3} mm), τα οποία τοποθετήθηκαν στη χαμηλότερη πλευρά της δοκού σε αποστάσεις ίσες

με 10, 25, 45, 75 mm από το μέσο της δοκού, για τη μέτρηση των βελών κάμψης (deflections) (Kourkoulis et al., 2003α) και ένας κατάλληλος μετρητής (extensometer) για την καταγραφή του ανοίγματος των χειλέων της εγκοπής (Notch Mouth Opening Displacement, NMOD) (Σχήμα 4.2) (Kourkoulis et al., 1998).

Το φορτίο εφαρμόστηκε στατικά με ένα ρυθμό που δεν υπερβαίνει τα 10^{-6} mm/min με τη χρήση ενός δύσκαμπτου υδραυλικού πλαισίου φόρτωσης (AMSLER) ικανότητας 10^6 N (Σχήμα 4.3-4.4). Λαμβάνοντας υπόψιν το μέγιστο φορτίο που δέχθηκαν τα δείγματα στην παρούσα μελέτη (δεν υπερέβη 20 kN σε καμία περίπτωση) μπορεί με σιγουριά να θεωρηθεί ότι η ακαμψία της δομής είναι άπειρη (Kourkoulis et al., 2003α).

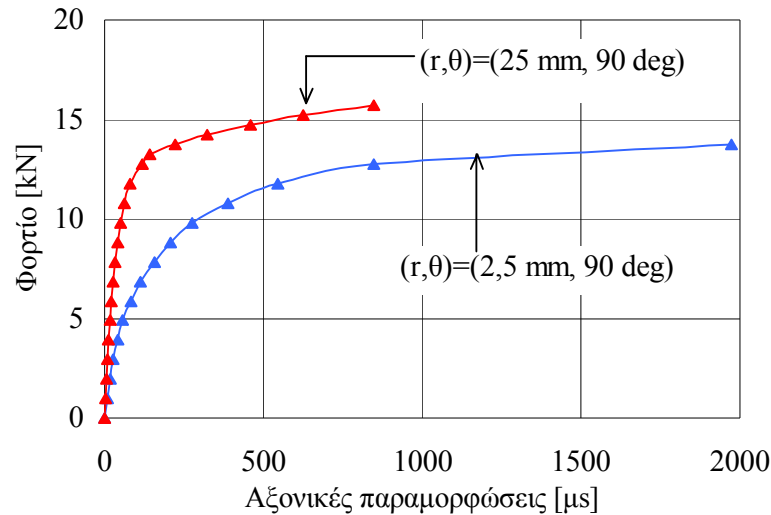


Σχήμα 4.3: Υδραυλικό πλαίσιο φόρτωσης AMSLER του εργαστηρίου αντοχής υλικών του Ε.Μ.Π



Σχήμα 4.4: Ημισφαιρική κεφαλή φορτίσεως για την εξασφάλιση της καθετότητας

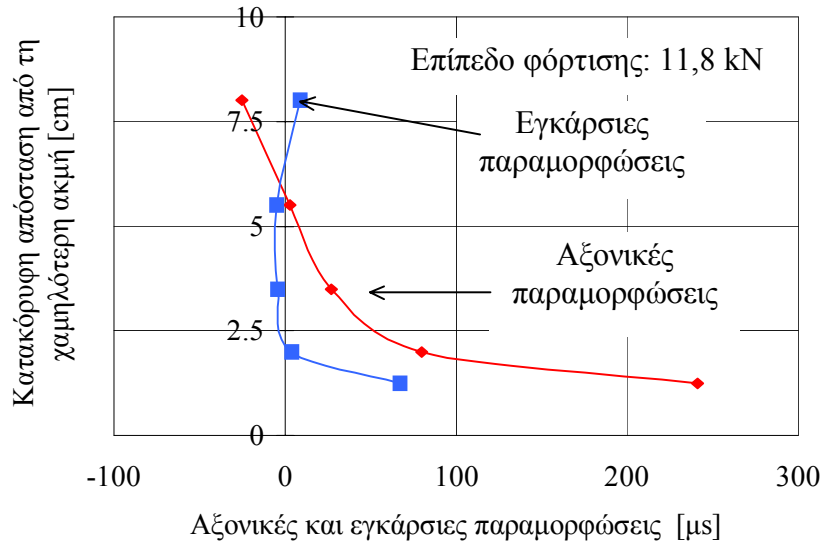
Χαρακτηριστικά πειραματικά αποτελέσματα παρουσιάζονται στο σχήμα (4.5). Σε αυτό το γράφημα οι αξονικές παραμορφώσεις (axial strains) που αναπτύχθηκαν παρουσιάζονται συναρτήσει του εξωτερικά εφαρμοζόμενου φορτίου. Τα αποτελέσματα προέκυψαν από δύο μηχανισιόμετρα, ένα μέσα στη ζώνη διεργασιών που αναπτύσσεται γύρω από την κορυφή της εγκοπής με $(r, \theta) = (2,5 \text{ mm}, 90^\circ)$ (καμπύλη μπλε χρώματος) και ένα σχετικά μακριά από αυτήν την ζώνη με $(r, \theta) = (25 \text{ mm}, 90^\circ)$ (καμπύλη κόκκινου χρώματος).



Σχήμα 4.5: Αξονικές παραμορφώσεις μέσα και έξω από την ζώνη διεργασιών (Kourkoulis et al., 2003α)

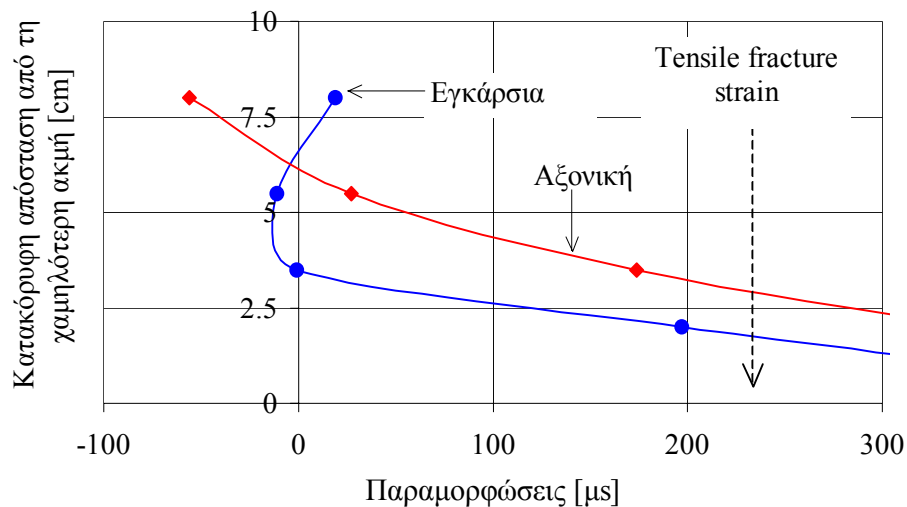
Από αυτό το γράφημα είναι εμφανές ότι το υλικό συμπεριφέρεται γραμμικά μέχρι ένα φορτίο ίσου με περίπου 12 kN για τα σημεία έξω από τη ζώνη διεργασιών (process zone), ενώ μέσα σε αυτήν την ζώνη η αντίστοιχη σχέση δεν είναι γραμμική σχεδόν από επίπεδα φόρτισης ίσα με περίπου 5 kN (Kourkoulis et al., 2003α).

Στο σχήμα (4.6) παρουσιάζονται οι αξονικές και εγκάρσιες παραμορφώσεις που αναπτύσσονται συναρτήσει του ύψους του δοκιμίου, για να γίνει εμφανής η διαταραχή του πεδίου παραμόρφωσης λόγω του σημείου φόρτισης και της ύπαρξης της εγκοπής. Πράγματι, από αυτό το γράφημα φαίνεται ότι ακόμη και για ένα επίπεδο φόρτισης ίσο με 11,8 kN (κάτω από το όριο για το οποίο ο λόγος τάσης - παραμόρφωσης γίνεται μη γραμμικός) οι αξονικές και οι εγκάρσιες κατανομές παραμόρφωσης παρουσιάζουν μια έντονα μη γραμμική συμπεριφορά καθώς προσεγγίζεται η κορυφή της εγκοπής. Από την άλλη μεριά, η διαταραχή λόγω του σημείου φόρτισης (punch effect) γίνεται καλύτερα κατανοητή από την απόκλιση της εγκάρσιας παραμόρφωσης, η οποία σύμφωνα με τη θεωρία Bernoulli-Euler πρέπει να είναι μηδέν, τουλάχιστον για τα σημεία μακριά από την περιοχή της κορυφής της εγκοπής (Kourkoulis et al., 2003α).



Σχήμα 4.6: Αξονικές και εγκάρσιες παραμορφώσεις κατά μήκος του ύψους του δοκιμίου για φορτίο 11,8 kN (Kourkoulis et al., 2003a)

Στο σχήμα (4.7) παρουσιάζεται το ίδιο διάγραμμα για φορτίο 17,5 kN. Όπως και στο προηγούμενο διάγραμμα διαπιστώνεται ότι οι αξονικές και εγκάρσιες παραμορφώσεις παρουσιάζουν μη γραμμική κατανομή. Η παρατήρηση αυτή είναι πιο εμφανής στην περίπτωση των εγκάρσιων παραμορφώσεων. Όμως, πρέπει σε αυτό το σημείο να διευκρινιστεί ότι τα πειραματικά αποτελέσματα στην περιοχή της κορυφής της εγκοπής πρέπει να γίνουν δεκτά με κάποια αμφιβολία, καθώς οι παραμορφώσεις που καταγράφηκαν αντιστοιχούν σε τιμές που υπερβαίνουν την κρίσιμη παραμόρφωση (critical strain) σε θράυση υπό εφελκυσμό. Προφανώς στο συγκεκριμένο επίπεδο φορτίου τα δοκίμια είχαν ήδη σπάσει (Agioutantis et al., 2003).

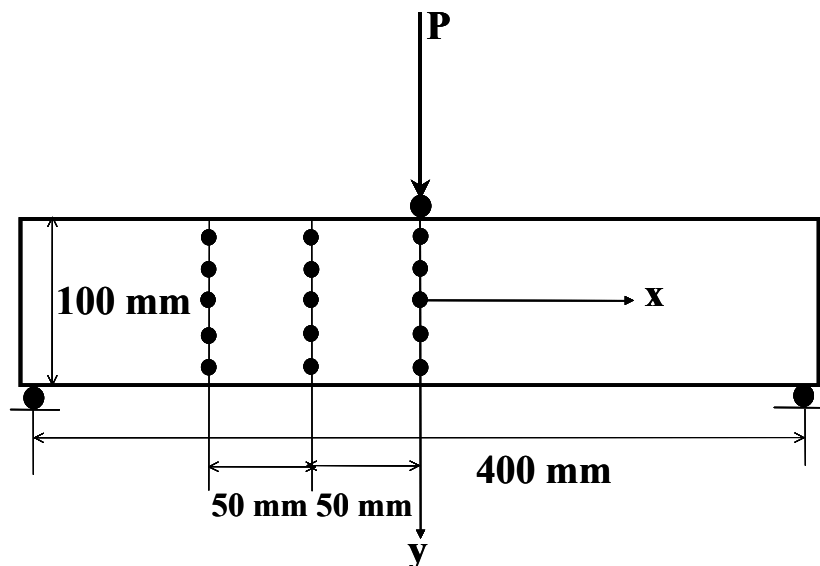


Σχήμα 4.7: Αξονικές και εγκάρσιες παραμορφώσεις κατά μήκος του ύψους του δοκιμίου για φορτίο 17,5 kN (Agioutantis et al., 2003)

4.2 Η ΔΟΚΙΜΗ ΚΑΜΨΗΣ ΤΡΙΩΝ ΣΗΜΕΙΩΝ ΣΕ ΔΟΚΙΜΙΑ ΚΟΓΧΥΛΙΟΛΙΘΟΥ

Η πειραματική μελέτη της δοκιμής κάμψης τριών σημείων σε δοκίμια χωρίς εγκοπή, πραγματοποιήθηκε με δοκίμια Κογχυλιόλιθου που προέρχονται από την αρχαία Ολυμπία. Πιο συγκεκριμένα, πραγματοποιήθηκε μια σειρά δοκιμών κάμψης τριών σημείων με πρισματικά δείγματα μήκους 420 mm και διατομή 100x100 mm. Τα δοκίμια τοποθετήθηκαν σε δύο κυλίνδρους χάλυβα διαμέτρου 20 mm, σε μια απόσταση 400 mm ο ένας από τον άλλο. Το φορτίο εφαρμόστηκε ομοιόμορφα κατά μήκος του πάχους των δειγμάτων με την βοήθεια ενός τρίτου ίδιου κυλίνδρου (Σχήμα 4.8).

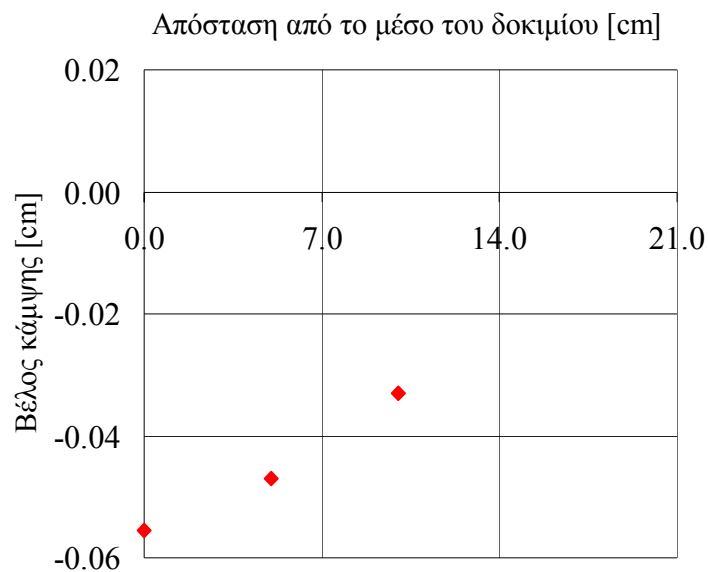
Οι παραμορφώσεις που αναπτύχθηκαν μετρήθηκαν με τη χρήση ηλεκτρικών μηχανομετρών (strain gauges) που τοποθετήθηκαν σύμφωνα με ένα καρτεσιανό σύστημα αναφοράς στις διατομές τριών κάθετων ($x=0, -50, -100$ mm) και πέντε οριζόντιων ($y=-45, -25, 0, 25, 45$ mm) γραμμών (Σχήμα 4.8). Επίσης, τρεις μετρητές τοπικής υποχώρησης (velometers) ευαισθησίας 10^{-4} cm τοποθετήθηκαν στα σημεία (x, y)=(0, 50 mm), (50 mm, 50 mm), (100 mm, 50 mm) για τη μέτρηση των βελών κάμψης (deflections) της δοκού (Kourkoulis et al., 2003β).



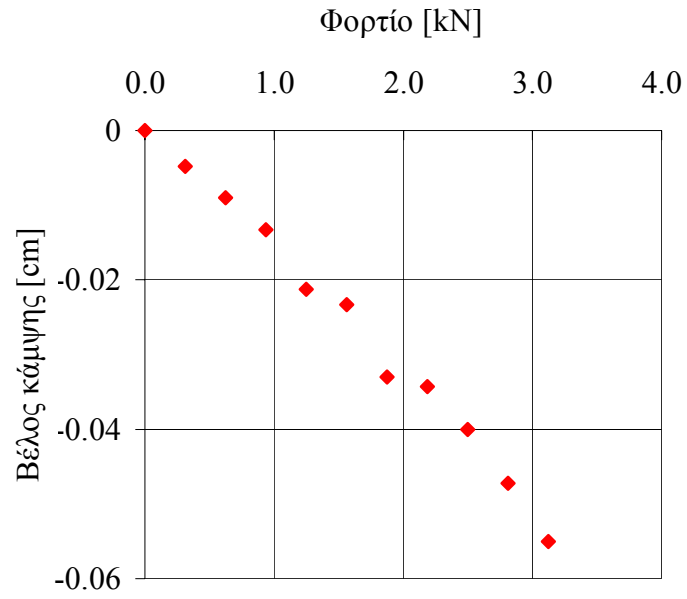
Σχήμα 4.8: Σχηματική αναπαράσταση της πειραματικής διάταξης και των θέσεων των μηχανομετρών επάνω στα δοκίμια (Kourkoulis et al., 2003β)

Τα δείγματα ήταν κομμένα παράλληλα στα στρώματα των υλικών. Ο διαμήκης άξονας τους ήταν προσανατολισμένος παράλληλα στα στρώματα των υλικών, ενώ ο y-άξονας του συστήματος αναφοράς (Σχήμα 4.8) ήταν κάθετος σε αυτά. Το φορτίο εφαρμόστηκε στατικά με ένα σταθερό ποσοστό μετατοπίσεων 3×10^{-3} cm/min με την χρήση ενός δύσκαμπτου υδραυλικού πλαισίου δυναμικότητας 250 kN. Λαμβάνοντας υπόψη ότι το μέγιστο φορτίο που καταγράφηκε κατά τη διάρκεια όλης της σειράς των δοκιμών δεν υπερέβη τα 3,5 kN, η ακαμψία του πλαισίου μπορεί να θεωρηθεί άπειρη (Kourkoulis et al., 2003β).

Τυπικά πειραματικά αποτελέσματα παρουσιάζονται στα σχήματα (4.9) και (4.10). Τα διαγράμματα που παρουσιάζονται αφορούν στο βέλος κάμψης (deflection) της δοκού λίγο πριν από την θραύση (Σχήμα 4.9) και στο βέλος κάμψης του χαμηλότερου σημείου του κεντρικού οριζοντίου τμήματος της δοκού συναρτήσει του εξωτερικού φορτίου (Σχήμα 4.10).



Σχήμα 4.9: Γραφική παράσταση του βέλους κάμψης της κάτω ακμής του δοκιμίου λίγο πριν την θραύση (Kourkoulis et al., 2003β)



Σχήμα 4.10: Γραφική παράσταση του βέλους κάμψης του μέσου οριζοντίου τμήματος του δοκιμίου συναρτήσει του εξωτερικού φορτίου (Kourkoulis et al., 2003β)

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

Αριθμητική Επίλυση της Δοκιμής Κάμψης Τριών Σημείων με τη Μέθοδο των Πεπερασμένων Στοιχείων

Στο κεφάλαιο αυτό περιγράφεται η αριθμητική επίλυση της δοκιμής κάμψης τριών σημείων σε δοκίμια Διονυσιακού μαρμάρου και Κογχυλιόλιθου με την Μέθοδο των Πεπερασμένων Στοιχείων (ΜΠΣ). Η προσομοίωση των δοκιμών πραγματοποιήθηκε σε δυο διαστάσεις στο λογισμικό πεπερασμένων στοιχείων *MSC.Mentat* και η επίλυση με το λογισμικό *MSC.Marc*. Για την πλήρη περιγραφή της συμπεριφοράς των υλικών κατά την διάρκεια της κάμψης, μοντελοποιήθηκαν τόσο τα δοκίμια όσο και οι χαλύβδινοι κύλινδροι, ενώ για την προσομοίωση της διεπιφάνειας μεταξύ χάλυβα και πετρώματος χρησιμοποιήθηκαν στοιχεία επαφής (contact elements). Η συμμετρία δεν λήφθηκε υπόψη έτσι ώστε τα τελικά μοντέλα να έχουν ακριβώς τις ίδιες διαστάσεις με αυτές των δειγμάτων.

Όσον αφορά το Διονυσιακό μάρμαρο, η αριθμητική ανάλυση πραγματοποιήθηκε με δύο διαφορετικές συνθήκες αναφορικά με τις ιδιότητες του υλικού. Το μάρμαρο Διονύσου προσομοιώθηκε σαν ελαστοπλαστικό υλικό με τη χρήση του παραβολικού κριτηρίου αστοχίας Mohr-Coulomb, αλλά και σαν ελαστικό εγκαρσίως ισότροπο υλικό. Ο Κογχυλιόλιθος προσομοιώθηκε σαν ελαστοπλαστικό υλικό που ακολουθεί το παραβολικό κριτήριο αστοχίας Mohr-Coulomb.

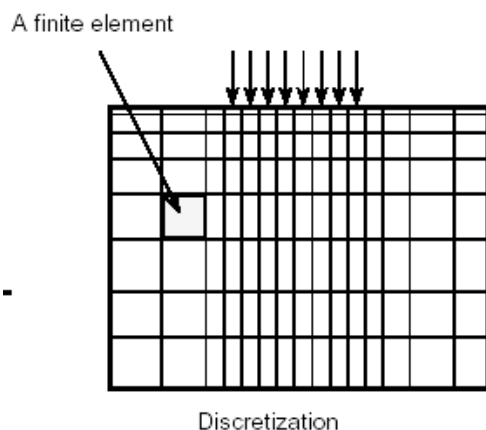
5.1 Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ

Με τη Μέθοδο των Πεπερασμένων Στοιχείων, υπολογίζονται τα άγνωστα μεγέθη στους κόμβους, οι οποίοι δημιουργούνται από τη διαίρεση του πεδίου σε στοιχεία. Στη συνέχεια με την θεώρηση κατάλληλων συναρτήσεων, οι οποίες συνδέουν την κατανομή

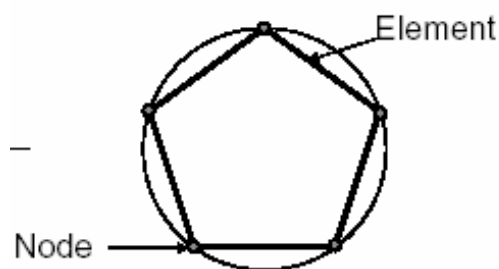
των μεγεθών στα εσωτερικά σημεία κάθε στοιχείου, είναι δυνατόν να υπολογιστεί η τιμή των μεγεθών αυτών σε κάθε σημείο του πεδίου με τους κόμβους του στοιχείου αυτού (Αγιουτάντης, 2002).

Η ΜΠΣ αποτελεί μια αριθμητική μέθοδο επίλυσης διαφορικών εξισώσεων σε συγκεκριμένο πεδίο ορισμού και με συγκεκριμένους περιορισμούς. Τα βήματα που ακολουθούνται κατά την εφαρμογή της ΜΠΣ είναι τα εξής (Αγιουτάντης, 2002):

- Διακριτοποίηση (descretization) του μέσου ή διαίρεση του μέσου σε στοιχεία ή τμήματα (elements) με τη βοήθεια ιδεατών γραμμών ή επιφανειών (Σχήμα 5.1). Τα στοιχεία αυτά αποτελούνται από δύο ή περισσότερους κόμβους, οι οποίοι συνδέονται με ευθύγραμμα ή καμπύλα τμήματα (Σχήμα 5.2). Οι κορυφές των στοιχείων ορίζουν τους κόμβους (nodes) του πλέγματος ή καννάβου διακριτοποίησης του προβλήματος (grid ή mesh).



Σχήμα 5.1: Διακριτοποίηση του μέσου σε στοιχεία



Σχήμα 5.2: Στοιχείο και οι κόμβοι από τους οποίους αποτελείται

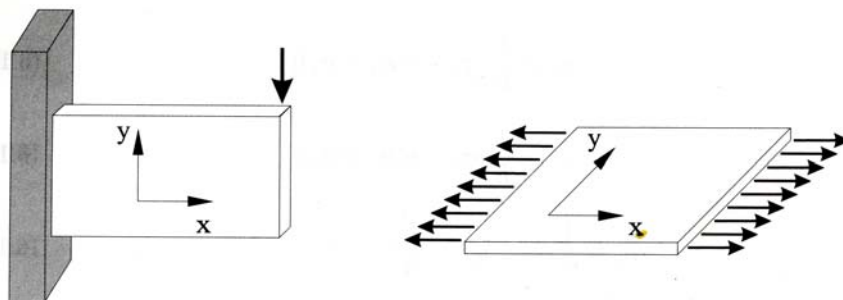
Η διαίρεση του πεδίου γίνεται κατά τέτοιο τρόπο, ώστε το μέγεθος των στοιχείων να είναι μικρό στα σημεία όπου απαιτείται μεγάλη ακρίβεια στους υπολογισμούς, ή εκεί που αναμένεται έντονη μεταβολή του ζητούμενου μεγέθους, ενώ το μέγεθος των στοιχείων μπορεί να είναι μεγαλύτερο στις υπόλοιπες περιοχές του πεδίου.

- Συνοριακές συνθήκες (boundary conditions). Η εισαγωγή συνοριακών συνθηκών είναι απαραίτητη για την επίλυση του προβλήματος και συνήθως εκφράζεται με τις συνθήκες ισορροπίας του πεδίου (π.χ. αγκύρωση των κατώτερων ή/και πλευρικών κόμβων, κλπ). Η φόρτιση του υλικού αποτελεί επίσης μία συνοριακή συνθήκη, καθώς, σε αντίθετη περίπτωση, η

υπολογιζόμενη παραμόρφωση είναι μηδενική. Στην περίπτωση που φορτιστεί ένα σώμα και όλοι οι κόμβοι του είναι ελεύθεροι να μετακινηθούν, τότε δεν υφίσταται παραμόρφωση, αλλά απλή μετακίνηση (ή στροφή). Στην περίπτωση αυτή δεν είναι δυνατή η επίλυση του προβλήματος με την προαναφερόμενη μέθοδο, διότι το φαινόμενο δεν υπακούει στην ίδια καταστατική εξίσωση.

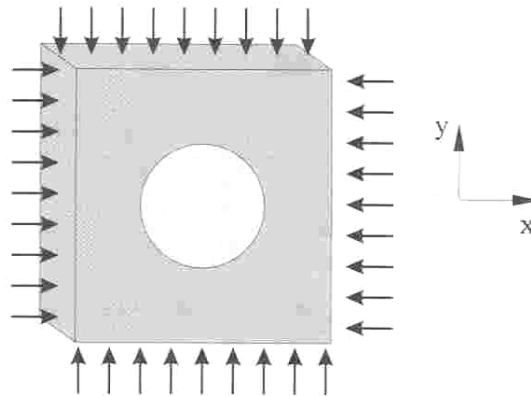
- Ιδιότητες υλικών (material properties). Κατά την εφαρμογή των ιδιοτήτων του υλικού, επιλέγονται οι τιμές των σταθερών του μοντέλου με το οποίο προσομοιώνεται το υλικό. Το απλούστερο μοντέλο που μπορεί να χρησιμοποιηθεί είναι το γραμμικά ελαστικό μοντέλο (παρόλο που το μοντέλο αυτό δεν θεωρείται το πλέον κατάλληλο για την περιγραφή της συμπεριφοράς πετρωμάτων και εδαφικών υλικών) σε μία, δύο ή περισσότερες διαστάσεις.
- Γεωμετρικές ιδιότητες (geometric properties). Στις γεωμετρικές ιδιότητες επιλέγεται αν το μοντέλο είναι μίας, δύο ή τριών διαστάσεων. Στην περίπτωση της επίλυσης δύο διαστάσεων, επιλέγεται αν η επίλυση του μοντέλου θα πραγματοποιηθεί με θεώρηση επίπεδης τάσης (plane stress) ή με θεώρηση επίπεδης παραμόρφωσης (plane strain).

Σύμφωνα με την θεώρηση επίπεδης τάσης, όταν η τρίτη διάσταση (z) ενός σώματος είναι πολύ μικρή σε σχέση με τις άλλες δύο και τα φορτία που δέχεται το σώμα ανήκουν στο επίπεδο των δύο σημαντικών διαστάσεων (επίπεδο x, y), μπορεί να θεωρηθεί ότι οι συνιστώσες τάσης κατά τον τρίτο άξονα είναι πολύ μικρές σε σύγκριση με τις συνιστώσες κατά το επίπεδο φόρτισης (Σχήμα 5.3) (Αγιουτάντης, 2002).



Σχήμα 5.3: Παραδοχή επίπεδης τάσης (Αγιουτάντης, 2002)

Κατά την θεώρηση επίπεδης παραμόρφωσης (Σχήμα 5.4), η συνιστώσα του διανύσματος μετατοπίσεων (u) είναι μηδενική κατά την τρίτη διάσταση ($u_z=0$ και επομένως $\varepsilon_z=0$), όταν η τρίτη διάσταση ενός σώματος (z) δεν είναι μικρή, σε σύγκριση με τις άλλες δύο (x, y). Επίσης μπορεί να θεωρηθεί, ότι τα διανύσματα μετατόπισης στο επίπεδο x, y είναι ανεξάρτητα από την τρίτη διάσταση, δηλαδή $u_x=f(x, y)$ και $u_y=f(x, y)$ (Αγιουτάντης, 2002).



Σχήμα 5.4: Παραδοχή επίπεδης παραμόρφωσης
(Αγιουτάντης, 2002)

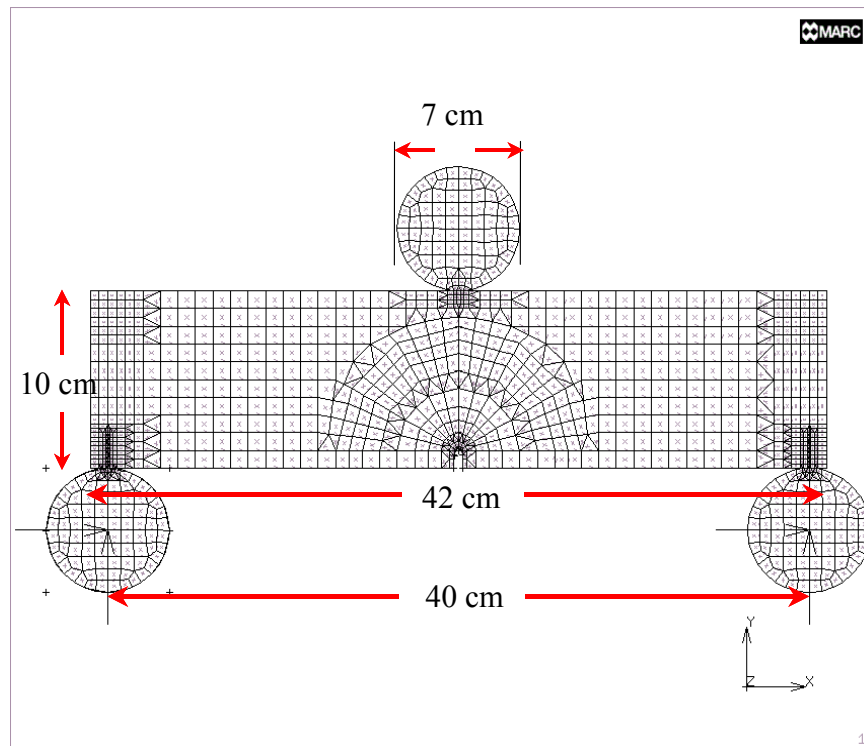
5.2 ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΕΠΙΛΥΣΗ ΤΗΣ ΔΟΚΙΜΗΣ ΚΑΜΨΗΣ ΤΡΙΩΝ ΣΗΜΕΙΩΝ ΣΕ ΔΟΚΙΜΙΑ ΔΙΟΝΥΣΙΑΚΟΥ ΜΑΡΜΑΡΟΥ: ΕΛΑΣΤΟΠΛΑΣΤΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ

Η προσομοίωση της δοκιμής κάμψης τριών σημείων σε δοκίμια Διονυσιακού μαρμάρου με τη Μέθοδο των Πεπερασμένων Στοιχείων, πραγματοποιήθηκε αρχικά με τη θεώρηση του μαρμάρου σαν ισότροπο ελαστοπλαστικό υλικό με τη χρήση του παραβολικού κριτηρίου αστοχίας Mohr-Coulomb.

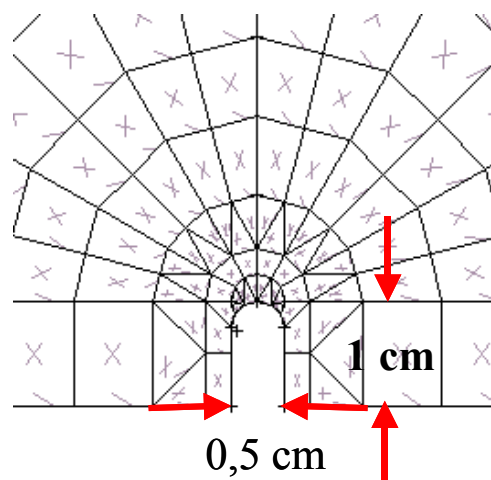
5.2.1 Γεωμετρία και Διακριτοποίηση του Μοντέλου

Όπως έχει ήδη αναφερθεί η γεωμετρία του μοντέλου συμπίπτει με τις πραγματικές διαστάσεις της πειραματικής διάταξης, καθώς δεν έχει χρησιμοποιηθεί συμμετρία. Οι διαστάσεις του μοντέλου είναι οι εξής (Σχήμα 5.5-5.6):

- Μήκος δοκιμίου: 42 cm
- Ύψος δοκιμίου: 10 cm
- Διάμετρος κυλίνδρων: 7 cm
- Απόσταση μεταξύ των δύο κυλίνδρων: 40 cm
- Μήκος εγκοπής: 1 cm
- Πλάτος εγκοπής: 0,5 cm

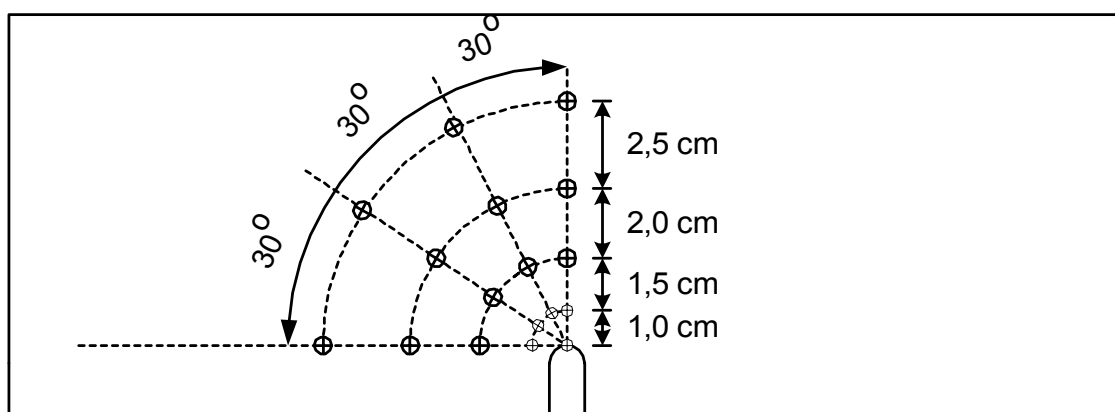


Σχήμα 5.5: Γεωμετρία και διακριτοποίηση του μοντέλου



Σχήμα 5.6: Η εγκοπή του δοκιμίου μήκους 1 cm και πλάτους 0,5 cm

Το μοντέλο αποτελείται από 1249 τετραπλευρικά και τριγωνικά στοιχεία επίπεδης παραμόρφωσης (plain strain elements) και από 1218 κόμβους. Η διακριτοποίηση έγινε κατά τέτοιο τρόπο ώστε στις πραγματικές θέσεις των μηχανομετρώμενων στα δοκίμια να αντιστοιχούν κόμβοι, για την ακριβέστερη εξαγωγή αποτελεσμάτων για τα συγκεκριμένα σημεία. Πιο συγκεκριμένα, τοποθετήθηκαν κόμβοι από την κορυφή της εγκοπής, κάθε 30° , από 0 μέχρι 7 cm σε πολικές συντεταγμένες, όπως φαίνεται στο σχήμα (5.7). Τέλος, πρέπει να αναφερθεί ότι ο κύλινδρος φόρτισης δεν εφάπτεται με το δοκίμιο σε αντίθεση με τους κύλινδρους στήριξης οι οποίοι εφάπτονται με το δοκίμιο με επτά κοινούς κόμβους.



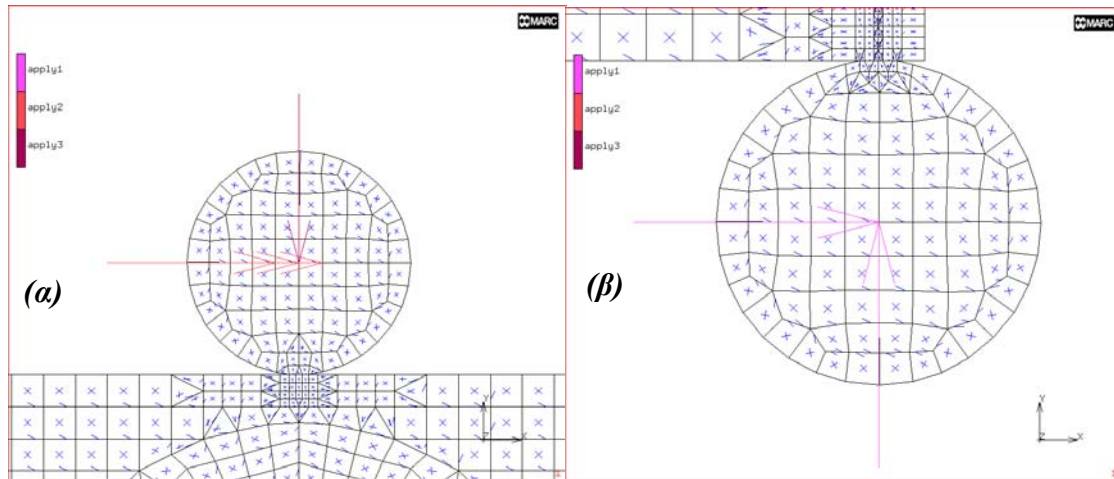
Σχήμα 5.7: Σχηματική αναπαράσταση του δοκιμίου στο οποίο διακρίνονται οι θέσεις των μηχανομετρώμενων για την καταγραφή των παραμορφώσεων

5.2.2 Συνοριακές Συνθήκες

Οι συνοριακές συνθήκες που εφαρμόστηκαν για την επίλυση του μοντέλου είναι οι εξής:

- Κύλιση μόνο κατά τον κάθετο άξονα ($d_x=0$) στον κύλινδρο φόρτισης σε τρεις κόμβους, προκειμένου να εξασφαλιστεί ότι καμία περιστροφή δεν θα εμφανιστεί κατά τη διάρκεια της επίλυσης (Σχήμα 5.8.α).
- Φορτίο 17,5 kN στο κέντρο του κυλίνδρου φόρτισης (Σχήμα 5.8.α), το οποίο εφαρμόστηκε σε δέκα στάδια.
- Πάκτωση ($d_x=0$, $d_y=0$) στα κέντρα των κυλίνδρων στήριξης του δοκιμίου (Σχήμα 5.8.β).

Λόγω της συμμετρίας του μοντέλου δεν απαιτήθηκε καμία άλλη συνοριακή συνθήκη.



Σχήμα 5.8: α) Φορτίο και κύλιση μόνο κατά τον κάθετο άξονα στον κύλινδρο φόρτισης β) Πάκτωση ($d_x=0$, $d_y=0$) στο κέντρο των κυλίνδρων του δοκιμίου

5.2.3 Ιδιότητες Υλικών

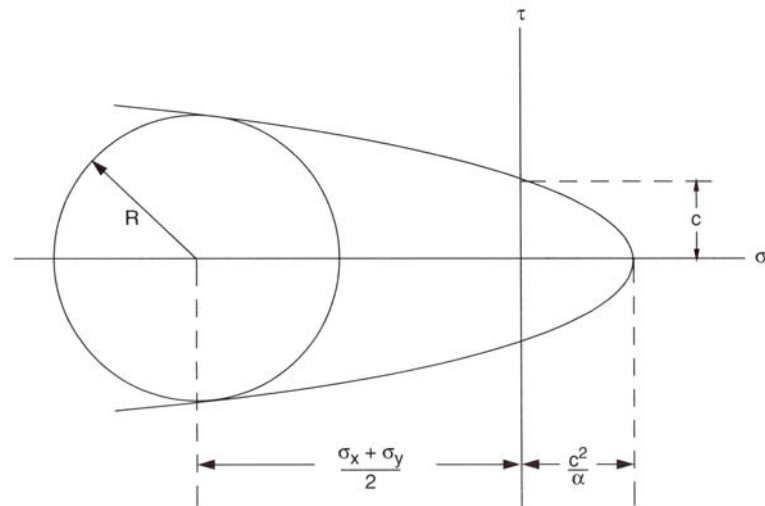
Ο χάλυβας προσομοιώθηκε σαν ελαστικό ισότροπο υλικό με τις ελαστικές σταθερές $E=210$ GPa και $\nu=0,3$, ενώ το μάρμαρο σαν ισότροπο ελαστοπλαστικό υλικό με τη χρήση του παραβολικού κριτηρίου αστοχίας Mohr-Coulomb (Σχήμα 5.9) το οποίο αποδίδεται από τις παρακάτω σχέσεις (Marc-Mentat, 1998):

$$f = (3J_2 + \sqrt{3}\beta \bar{\sigma} J_1)^{1/2} - \bar{\sigma} = 0 \quad (5.1)$$

$$\sigma^2 = 3(c^2 - \frac{a^2}{3}) \quad (5.2)$$

$$\beta = \frac{\alpha}{(3(3c^2 - a^2))^{1/2}} \quad (5.3)$$

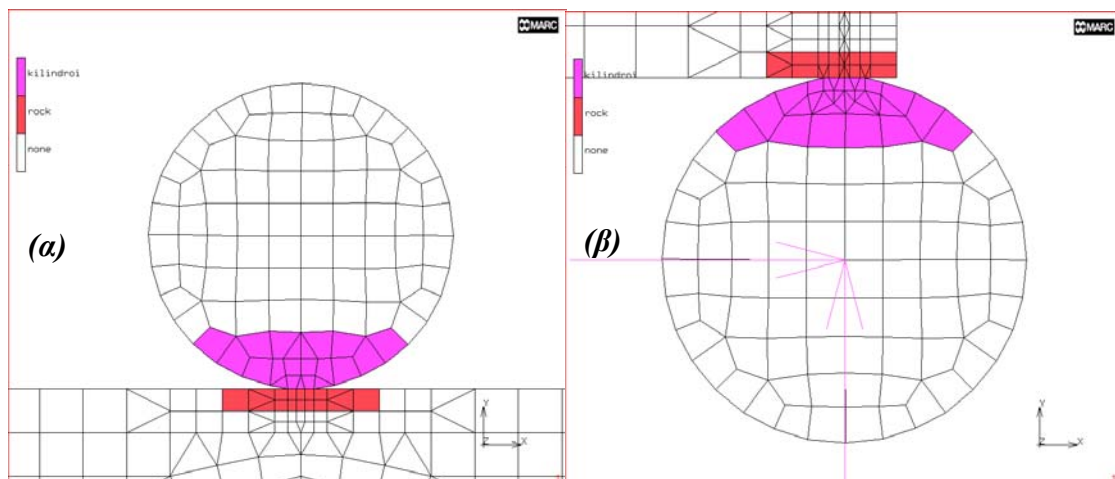
Οι ελαστικές σταθερές για το μάρμαρο είναι: $E=84,5$ GPa και $\nu=0,26$, ενώ οι παράμετροι της πλαστικότητας λήφθηκαν μέσω δοκιμών βαθμονόμησης και είναι: $\sigma=2,316$ kN/cm² και $\beta=0,061$.



Σχήμα 5.9: Κατάσταση διαρροής για θεώρηση επίπεδης παραμόρφωσης στην περίπτωση ελαστοπλαστικού υλικού με τη χρήση του παραβολικού κριτηρίου αστοχίας Mohr-Coulomb (Marc-Mentat, 1998)

5.2.4 Στοιχεία Επαφής Μεταξύ των Δύο Υλικών

Μεταξύ του μαρμάρου και του χάλυβα χρησιμοποιήθηκαν στοιχεία επαφής (Σχήμα 5.10). Ο συντελεστής τριβής μεταξύ του μαρμάρου και των χαλύβδινων κυλίνδρων τέθηκε ίσος με 0,4, που αντιστοιχεί σε γωνία τριβής $21,8^\circ$ (Kleftakis et al., 2000).



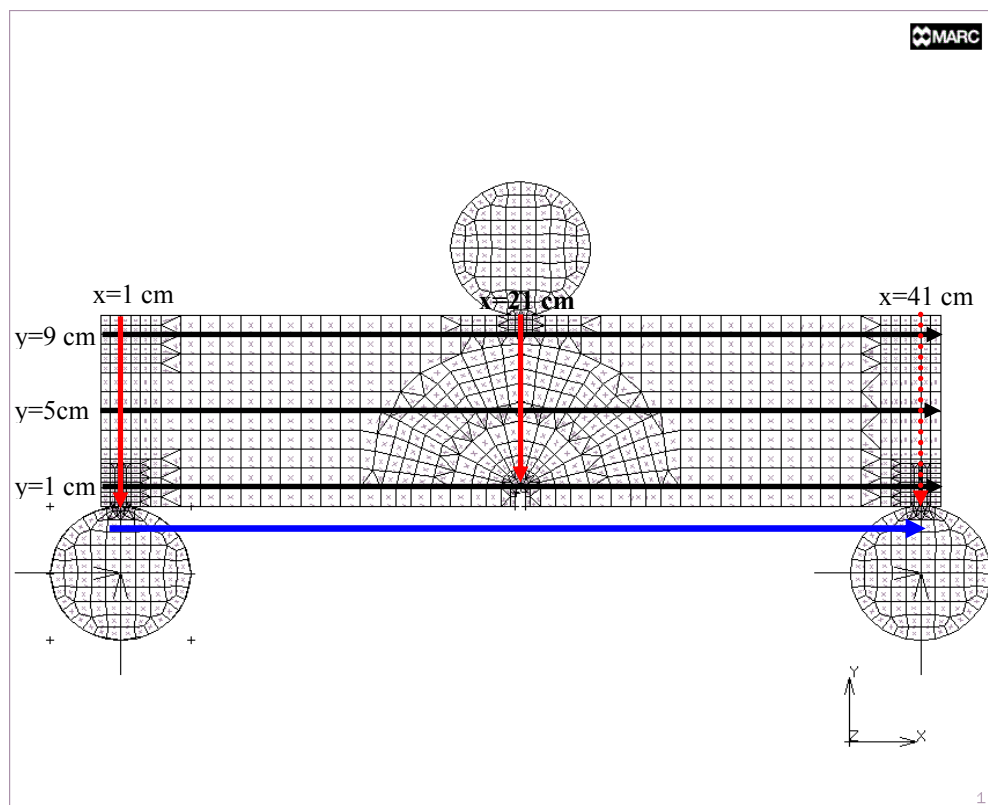
Σχήμα 5.10: α) Στοιχεία επαφής μεταξύ μαρμάρου και κυλίνδρου φόρτισης β) Στοιχεία επαφής μεταξύ μαρμάρου και κυλίνδρου στήριξης

5.2.5 Γεωμετρικές Ιδιότητες

Η επίλυση του μοντέλου έγινε με θεώρηση επίπεδης παραμόρφωσης (plane strain idealization).

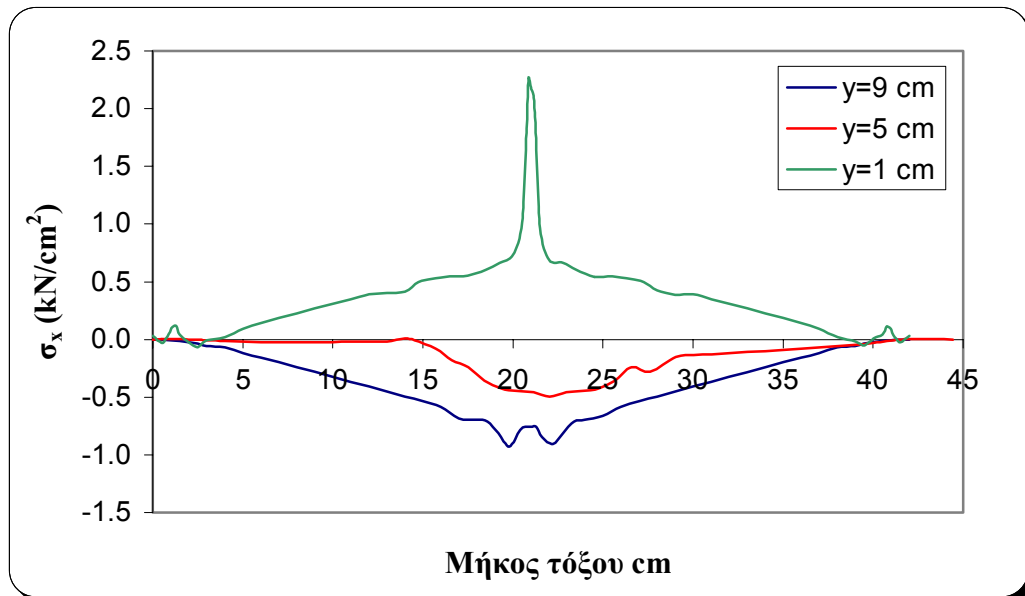
5.2.6 Αποτελέσματα Αριθμητικής Επίλυσης

Σε αυτή την ενότητα παρουσιάζονται κάποια από τα αποτελέσματα της αριθμητικής επίλυσης, σχετικά με τις συνιστώσες των τάσεων και των παραμορφώσεων. Στο σχήμα (5.11) διακρίνονται οι γραμμές για τις οποίες έχουν εξαχθεί τα αντίστοιχα διαγράμματα. Έχουν επιλεγθεί τρεις οριζόντιες γραμμές από τις οποίες η πρώτη απέχει 1 cm από την πάνω ακμή του δοκιμίου, η επόμενη βρίσκεται ακριβώς στον κεντρικό οριζόντιο άξονα του δοκιμίου και η τελευταία περνά ακριβώς από την κορυφή της εγκοπής. Από τις αντίστοιχες κάθετες γραμμές, οι δύο βρίσκονται στις δύο άκρες του μοντέλου στα σημεία επαφής των κυλίνδρων στήριξης με το δοκίμιο και μια ακόμα βρίσκεται στον κεντρικό κάθετο άξονα του δοκιμίου. Μαζί με τα αποτελέσματα των τάσεων και παραμορφώσεων παρουσιάζεται και το βέλος κάμψης της κατώτερης πλευράς του δοκιμίου.

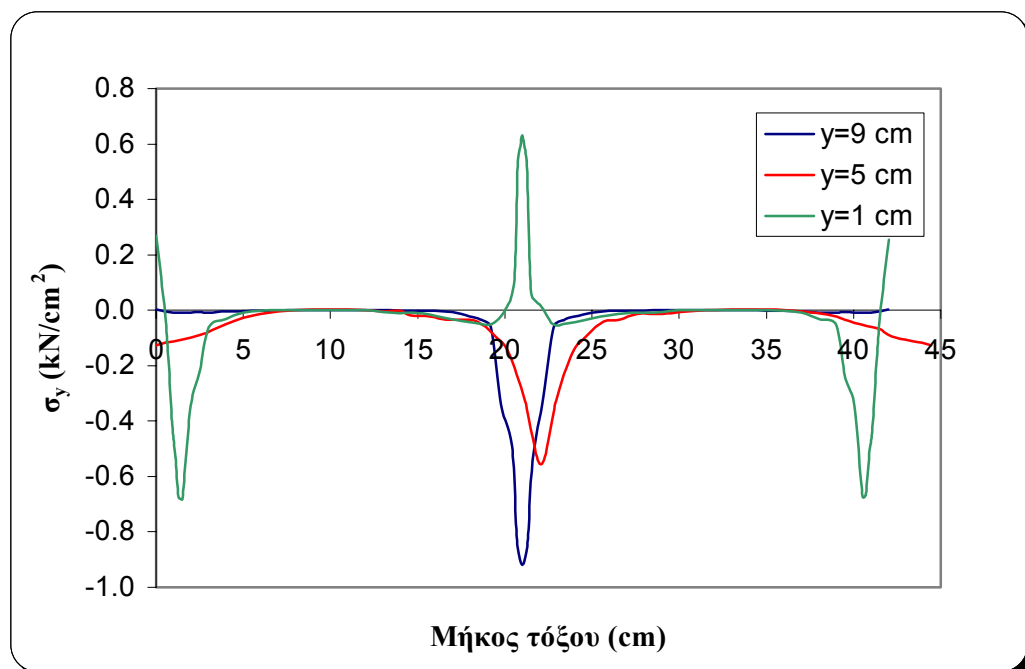


Σχήμα 5.11: Σχηματική αναπαράσταση του δοκιμίου στο οποίο διακρίνονται οι γραμμές για τις οποίες λήφθηκαν τα αποτελέσματα

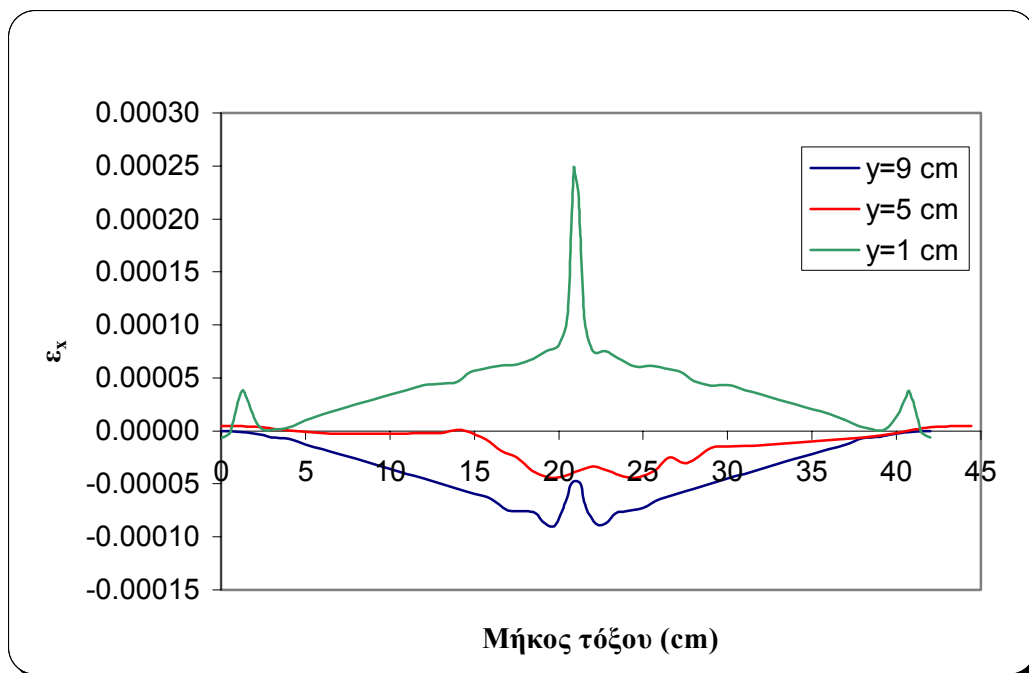
- Στα σχήματα 5.12-5.15 δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των οριζόντιων και κάθετων συνιστωσών τάσεων και παραμορφώσεων συναρτήσει του μήκους τόξου για τις οριζόντιες γραμμές του σχήματος (5.11) ($y=1$ cm, $y=5$ cm, $y=9$ cm). Σημειώνεται ότι η τάση εκφράζεται σε kN/cm^2 λόγω του ότι το μοντέλο επιλύει με αυτές τις μονάδες. Η σχέση μεταξύ kN/cm^2 και MPa είναι: $1 \text{ kN/cm}^2 = 10 \text{ MPa}$.



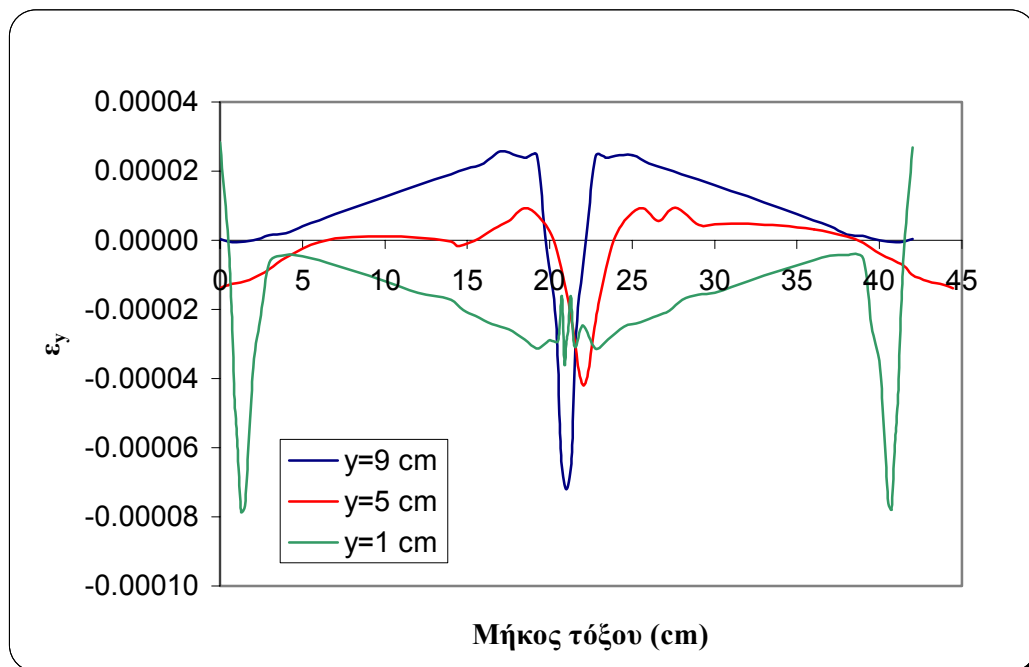
Σχήμα 5.12: Διάγραμμα της οριζόντιας συνιστώσας της τάσης (σ_x) συναρτήσει του μήκους τόξου



Σχήμα 5.13: Διάγραμμα της κατακόρυφης συνιστώσας της τάσης (σ_y) συναρτήσει του μήκους τόξου

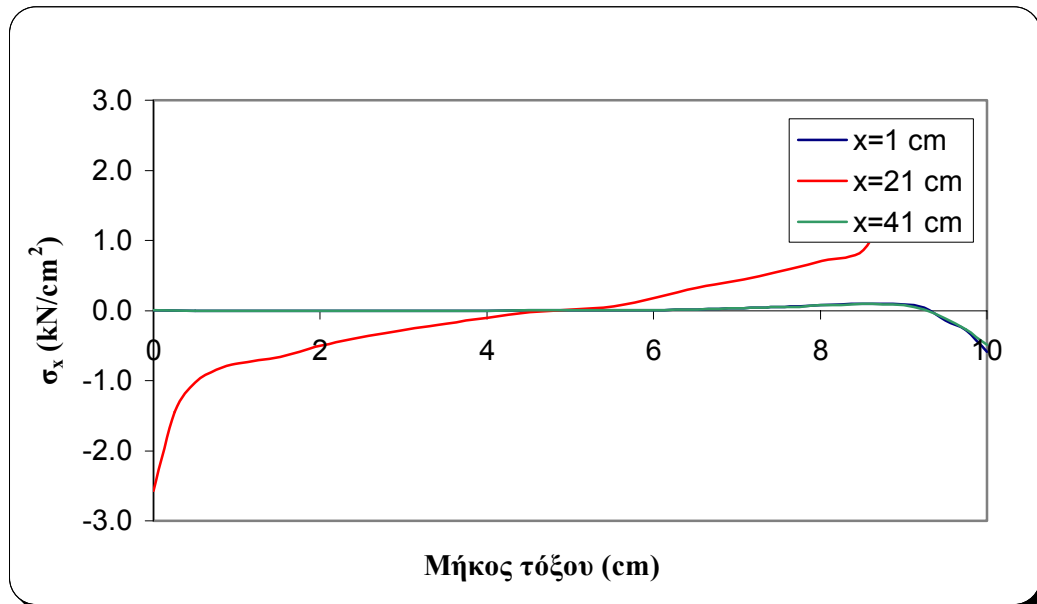


Σχήμα 5.14: Διάγραμμα της οριζόντιας συνιστώσας της παραμόρφωσης (ε_x) συναρτήσει του μήκους τόξου

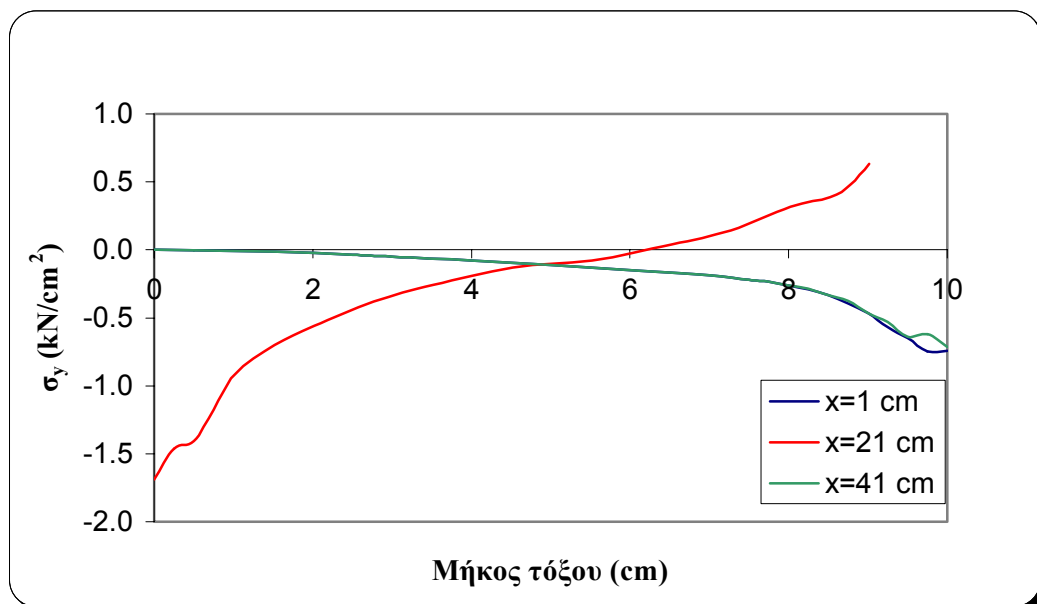


Σχήμα 5.15: Διάγραμμα της κατακόρυφης συνιστώσας της παραμόρφωσης (ε_y) συναρτήσει του μήκους τόξου

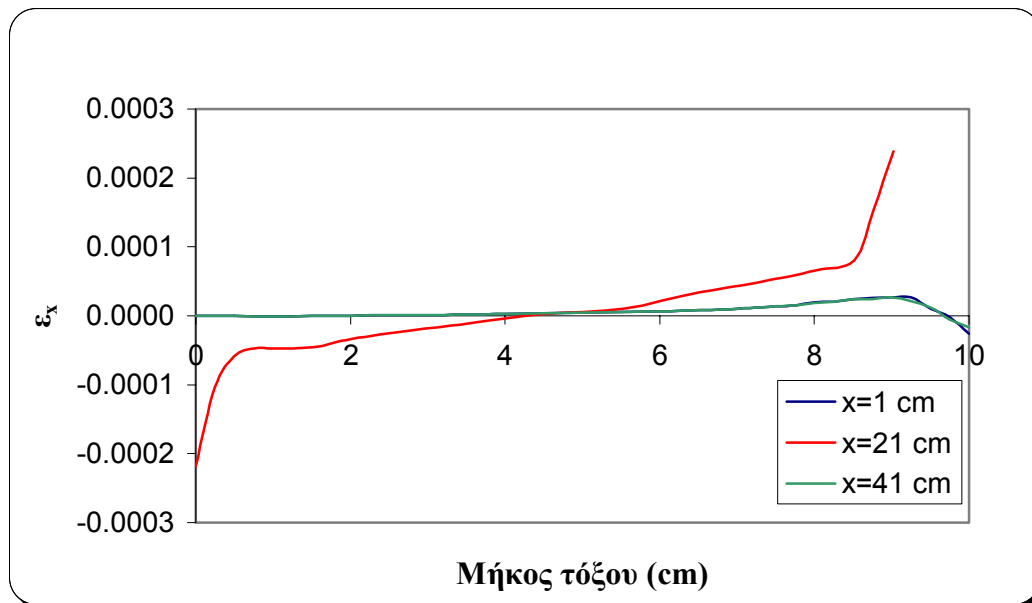
- Γραφικές παραστάσεις των οριζόντιων και κάθετων συνιστωσών τάσεων και παραμορφώσεων συναρτήσει του μήκους τόξου για τις κάθετες γραμμές του σχήματος 5.11 ($x=1$ cm, $x=21$ cm, $x=41$ cm) (Σχήματα 5.16-5.19):



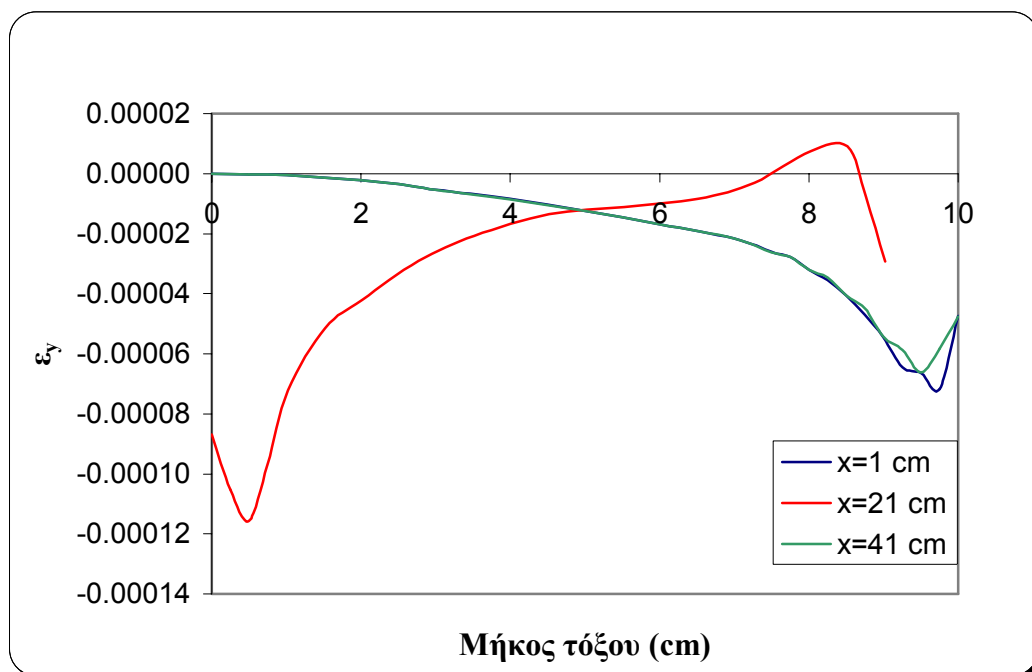
Σχήμα 5.16: Διάγραμμα της οριζόντιας συνιστώσας της τάσης (σ_x) συναρτήσει του μήκους τόξου



Σχήμα 5.17: Διάγραμμα της κατακόρυφης συνιστώσας της τάσης (σ_y) συναρτήσει του μήκους τόξου

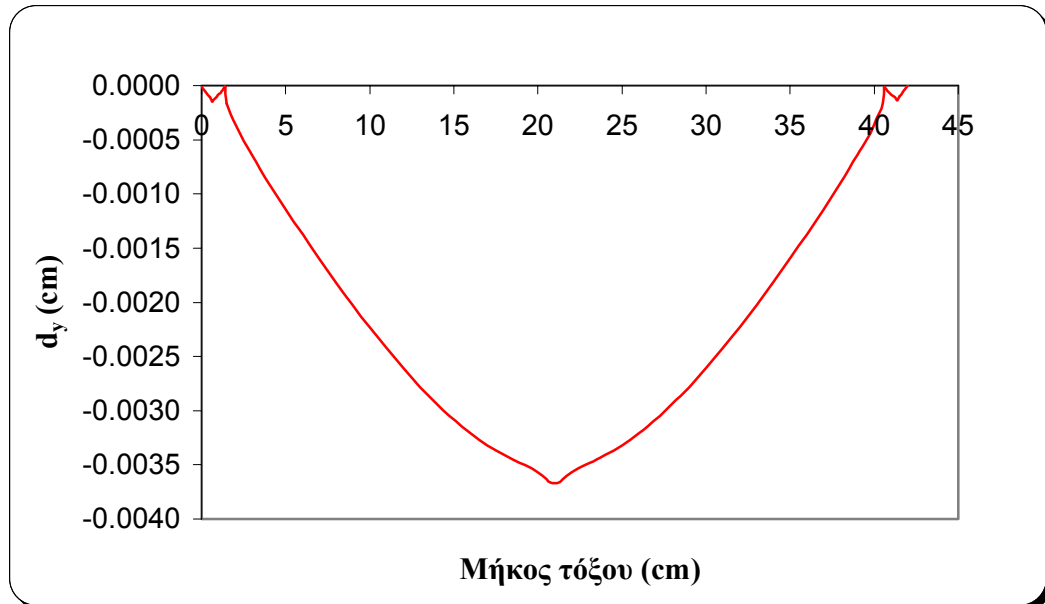


Σχήμα 5.18: Διάγραμμα της οριζόντιας συνιστώσας (ϵ_x) της παραμόρφωσης συναρτήσει του μήκους τόξου



Σχήμα 5.19: Διάγραμμα της κατακόρυφης συνιστώσας της παραμόρφωσης (ϵ_y) συναρτήσει του μήκους τόξου

- Γραφική παράσταση του βέλους κάμψεως της κατώτερης πλευράς του δοκιμίου συναρτήσει του μήκους τόξου:



Σχήμα 5.20: Διάγραμμα του βέλους κάμψης συναρτήσει του μήκους τόξου

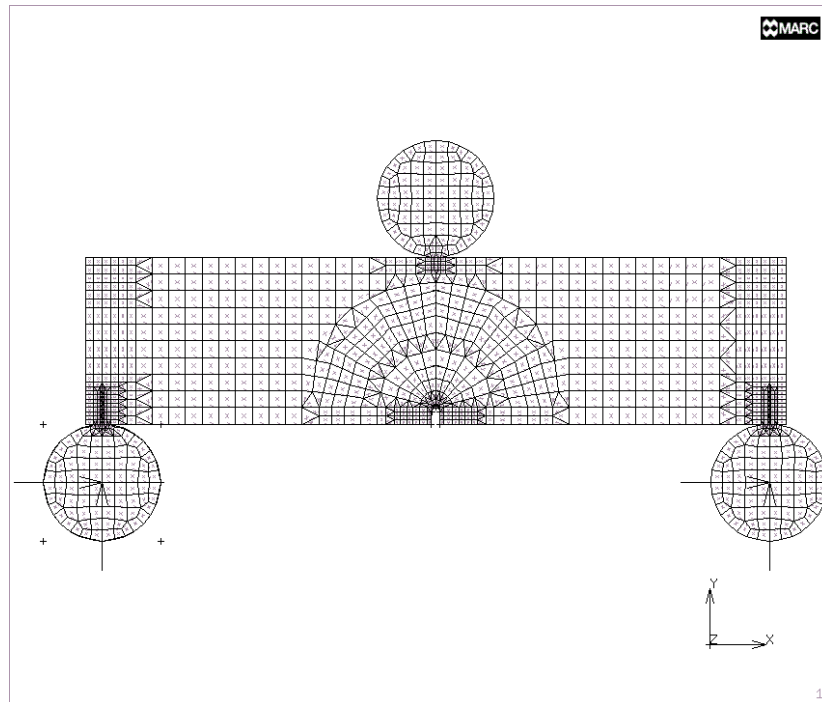
5.3 ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΕΠΙΛΥΣΗ ΤΗΣ ΔΟΚΙΜΗΣ ΚΑΜΨΗΣ ΤΡΙΩΝ ΣΗΜΕΙΩΝ ΣΕ ΔΟΚΙΜΙΑ ΔΙΟΝΥΣΙΑΚΟΥ ΜΑΡΜΑΡΟΥ: ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΕΛΑΣΤΙΚΟ ΕΓΚΑΡΣΙΩΣ ΙΣΟΤΡΟΠΟ ΜΟΝΤΕΛΟ

Στην ενότητα αυτή παρουσιάζεται η προσομοίωση της δοκιμής κάμψης τριών σημείων σε δοκίμια Διονυσιακού μαρμάρου με εγκοπή, με την θεώρηση του μαρμάρου σαν γραμμικά ελαστικού εγκάρσιως ισότροπου υλικού.

Ο τρόπος σχεδιασμού και επίλυσης του μοντέλου είναι σε γενικές γραμμές όμοιος με τον τρόπο που εφαρμόστηκε για την αριθμητική επίλυση του ελαστοπλαστικού μοντέλου της προηγούμενης ενότητας. Μικρές διαφορές εντοπίζονται μόνο στην διακριτοποίηση στο σημείο γύρω από την εγκοπή του δοκιμίου.

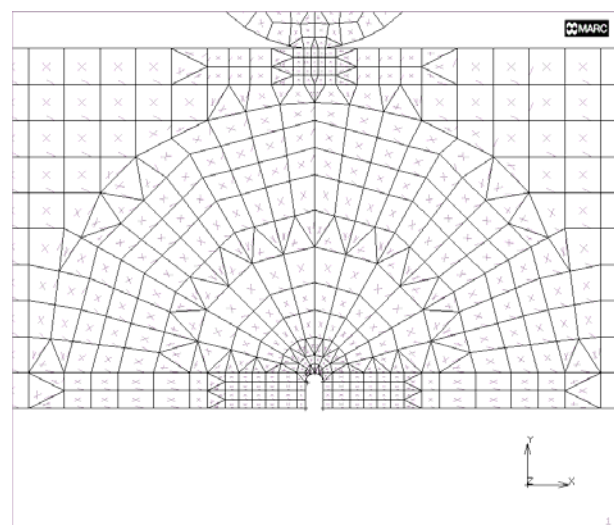
5.3.1 Γεωμετρία και Διακριτοποίηση του Μοντέλου

Όπως και στο ελαστοπλαστικό μοντέλο η γεωμετρία του μοντέλου συμπίπτει με αυτή των πραγματικών δοκιμών μαρμάρου που χρησιμοποιήθηκαν στην πειραματική μελέτη.



Σχήμα 5.21: Διακριτοποίηση του μοντέλου όπου διακρίνονται το δοκίμιο και οι χαλύβδινοι κύλινδροι

Το μοντέλο αποτελείται από 1321 τετραπλευρικά και τριγωνικά στοιχεία επίπεδης παραμόρφωσης και από 1278 κόμβους (Σχήμα 5.21). Η διακριτοποίηση και σε αυτήν την περίπτωση έγινε κατά τέτοιο τρόπο ώστε στις πραγματικές θέσεις των μηκυνσιομέτρων στα πραγματικά δοκίμια να αντιστοιχούν κόμβοι, με την ακριβώς ίδια γεωμετρία

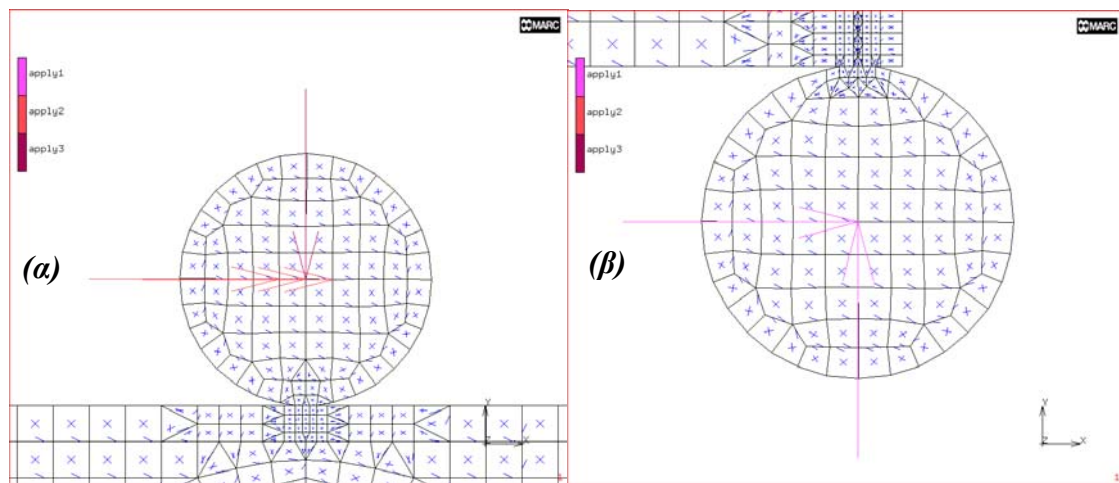


Σχήμα 5.22: Λεπτομέρεια της διακριτοποίησης στην περιοχή γύρω από την εγκοπή του δοκιμίου

τοποθέτησης των ροζετών όπως στο ελαστοπλαστικό μοντέλο της ενότητας 5.2 (Σχήμα 5.22). Επίσης ο κύλινδρος φόρτισης δεν είναι σε επαφή με το δοκίμιο, σε αντίθεση με τους κυλίνδρους στήριξης οι οποίοι εφάπτονται με το δοκίμιο με επτά κοινούς κόμβους.

5.3.2 Συνοριακές Συνθήκες

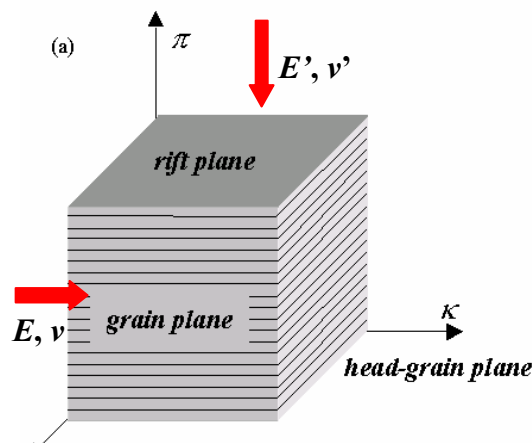
Οι συνοριακές συνθήκες που απαιτούνται για την επίλυση του μοντέλου είναι όμοιες με αυτές που χρησιμοποιήθηκαν στην ενότητα (5.2) για την προσομοίωση του ελαστοπλαστικού μοντέλου και διαφοροποιείται μόνο το μέγεθος του φορτίου που σε αυτή την περίπτωση είναι 11,8 kN και εφαρμόστηκε σε πέντε βήματα (Σχήμα 5.23).



Σχήμα 5.23: α) Φορτίο και κύλιση μόνο κατά τον κάθετο άξονα στον κύλινδρο φόρτισης β) Πάκτωση ($d_x=0$, $d_y=0$) στο κέντρο των κυλίνδρων στήριξης του δοκιμίου

5.3.3 Ιδιότητες Υλικών

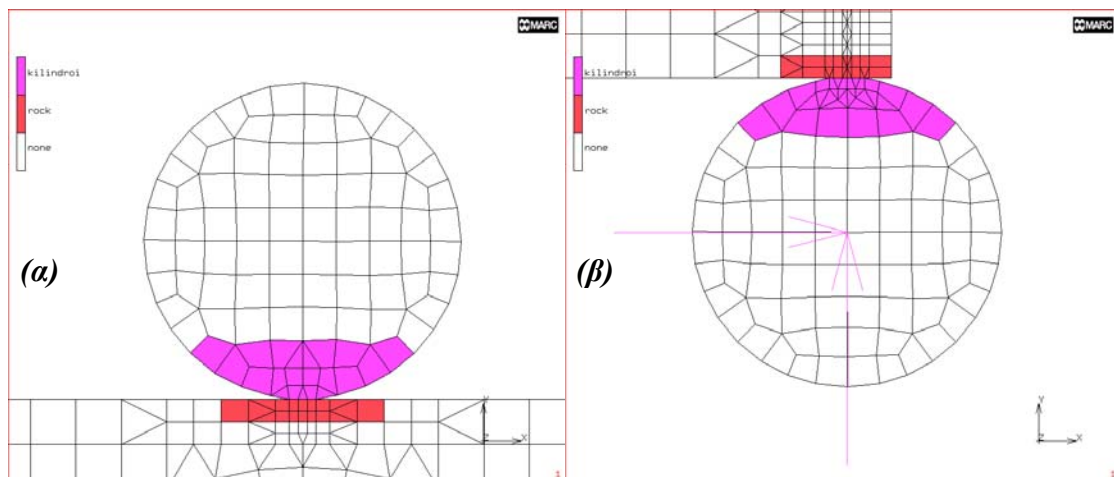
Ο χάλυβας προσομοιώθηκε σαν ελαστικό ισότροπο υλικό με τις ελαστικές σταθερές $E=210$ GPa και $\nu=0,3$, ενώ το μάρμαρο σαν γραμμικά ελαστικό εγκάρσιως ισότροπο (ή ορθότροπο) υλικό (Σχήμα 5.24) με τις σταθερές που αναφέρθηκαν στον πίνακα (3.1) του 3^{ου} κεφαλαίου.



Σχήμα 5.24: Σχηματική παράσταση στην οποία διακρίνονται οι δύο διευθύνσεις ανισοτροπίας (ασθενής και ισχυρή διεύθυνση)

5.3.4 Στοιχεία Επαφής Μεταξύ των Δύο Υλικών

Μεταξύ του μαρμάρου και του χάλυβα χρησιμοποιήθηκαν στοιχεία επαφής (Σχήμα 5.25). Ο συντελεστής τριβής μεταξύ του μαρμάρου και των χαλύβδινων κυλίνδρων τέθηκε ίσος με 0,4, που αντιστοιχεί σε γωνία τριβής $21,8^\circ$ (Kleftakis et al., 2000).



Σχήμα 5.25: α) Στοιχεία επαφής μεταξύ μαρμάρου και κυλίνδρου φόρτισης β) Στοιχεία επαφής μεταξύ μαρμάρου και κυλίνδρου στήριξης

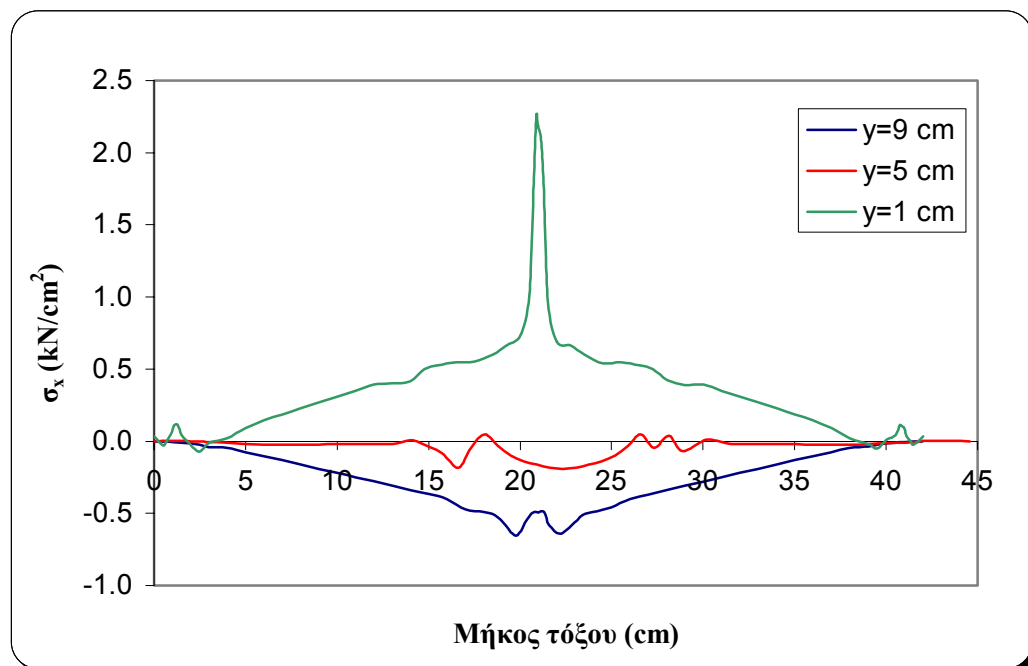
5.3.5 Γεωμετρικές Ιδιότητες

Η επίλυση του μοντέλου έγινε με θεώρηση επίπεδης παραμόρφωσης (plane strain idealization).

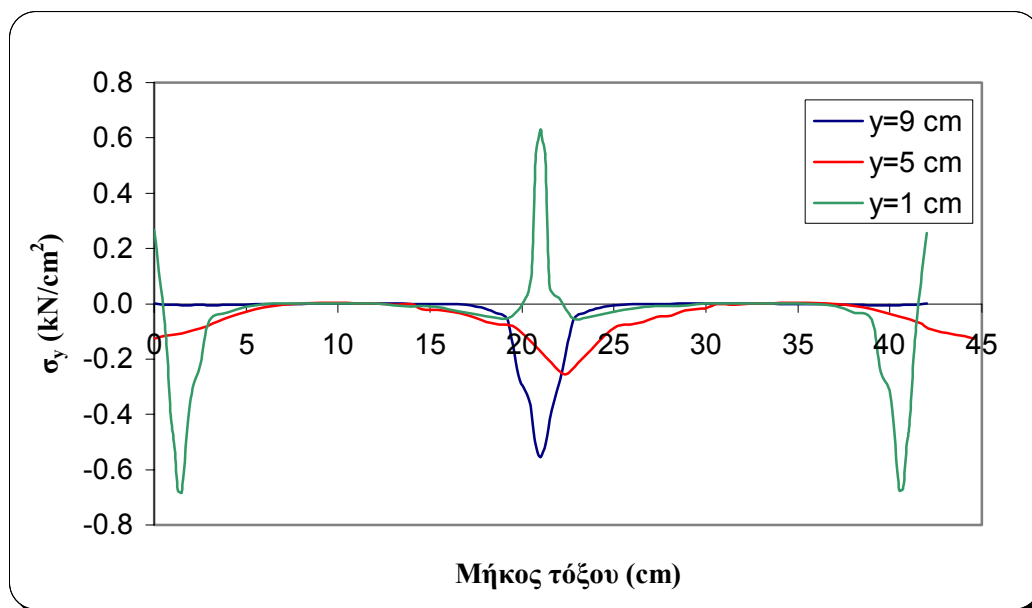
5.3.6 Αποτελέσματα Αριθμητικής Επίλυσης

Ακολουθούν αποτελέσματα της αριθμητικής επίλυσης για τάσεις και παραμορφώσεις συναρτήσει του μήκους τόξου, καθώς επίσης και για το βέλος κάμψης του δοκιμίου. Τα αποτελέσματα αφορούν τις ίδιες γραμμές με αυτές του σχήματος (5.11), καθώς όπως αναφέρθηκε τα δύο μοντέλα είναι της ίδιας γεωμετρίας.

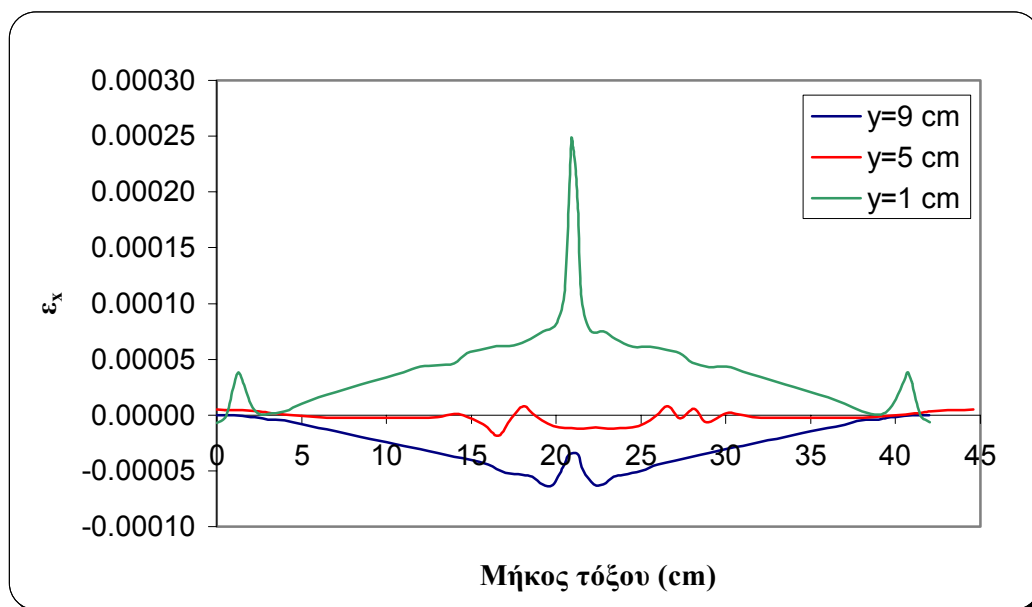
- Γραφικές παραστάσεις των οριζόντιων και κάθετων συνιστωσών τάσεων και παραμορφώσεων συναρτήσει του μήκους τόξου για τις οριζόντιες γραμμές του σχήματος (5.11) ($y=1$ cm, $y=5$ cm, $y=9$ cm) (Σχήματα 5.26-5.29):



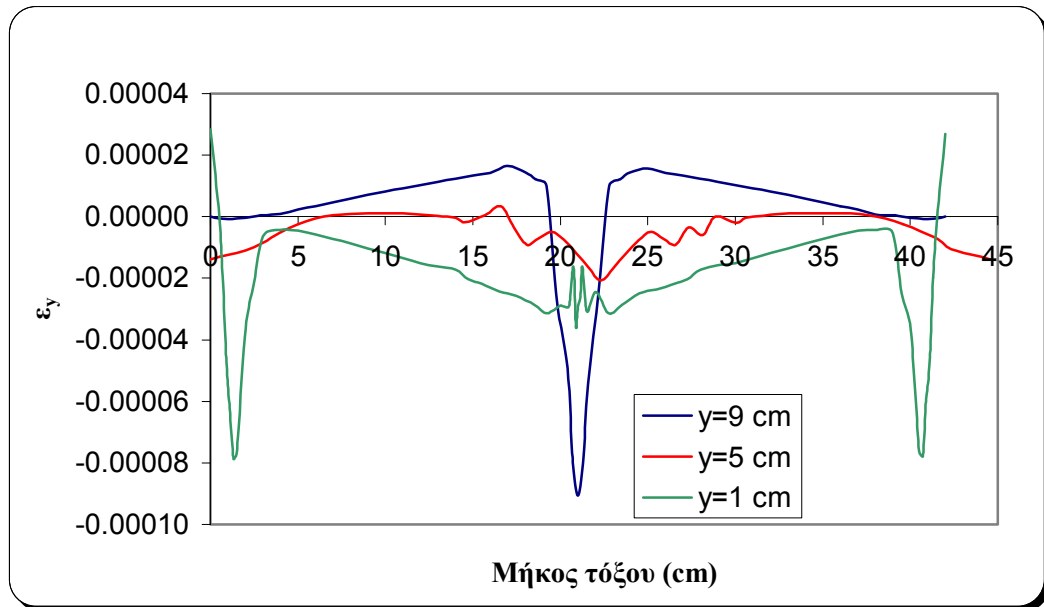
Σχήμα 5.26: Διάγραμμα της οριζόντιας συνιστώσας της τάσης (σ_x) συναρτήσει του μήκους τόξου



Σχήμα 5.27: Διάγραμμα της κατακόρυφης συνιστώσας της τάσης (σ_y) συναρτήσει του μήκους τόξου

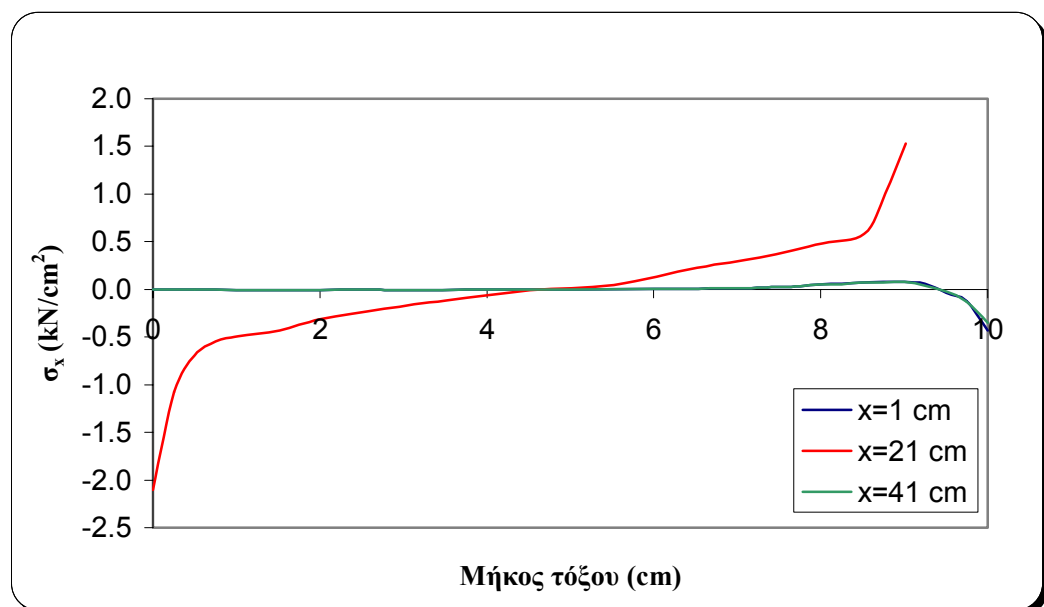


Σχήμα 5.28: Διάγραμμα της οριζόντιας συνιστώσας της παραμόρφωσης (ϵ_x) συναρτήσει του μήκους τόξου

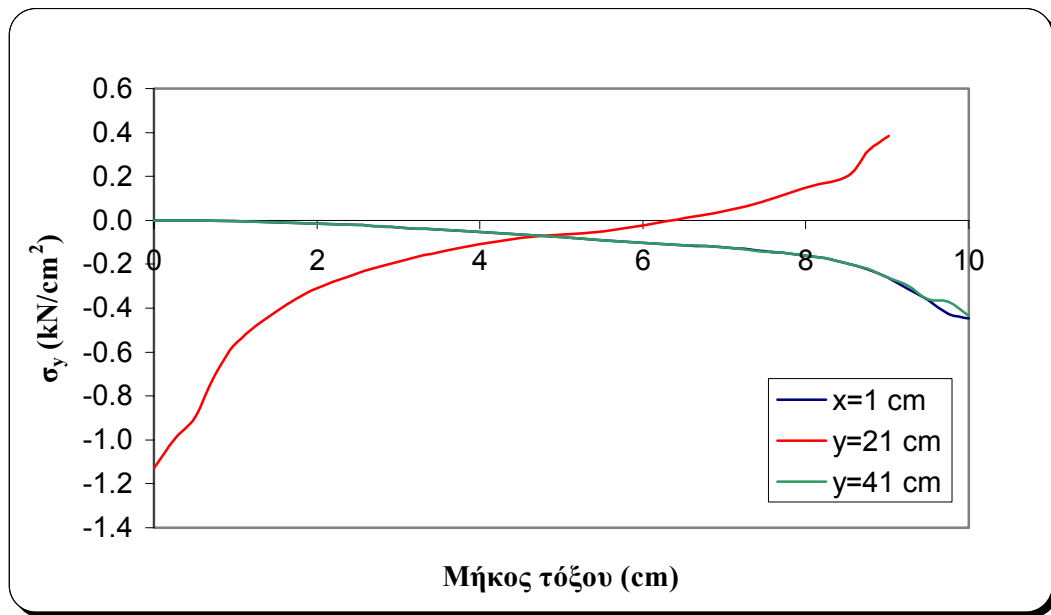


Σχήμα 5.29: Διάγραμμα της κατακόρυφης συνιστώσας της παραμόρφωσης (ε_y) συναρτήσει του μήκους τόξου

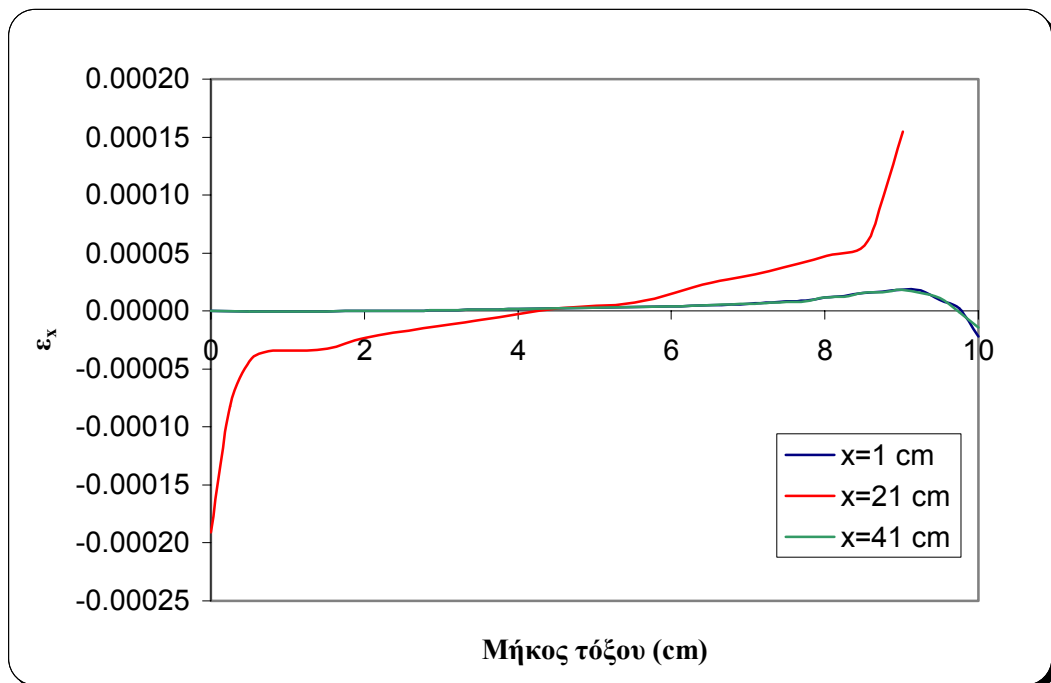
- Γραφικές παραστάσεις των οριζόντιων και κάθετων συνιστωσών τάσεων και παραμορφώσεων συναρτήσει του μήκους τόξου για τις κάθετες γραμμές ($x=1$ cm, $x=21$ cm, $x=41$ cm) του σχήματος (5.11) (Σχήματα 5.30-5.33):



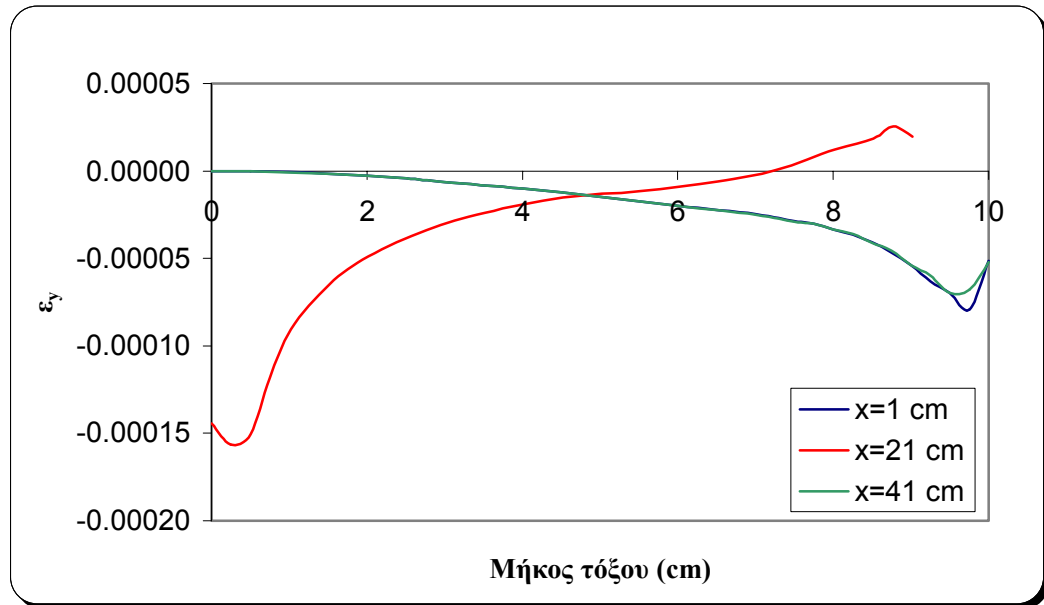
Σχήμα 5.30: Διάγραμμα της οριζόντιας συνιστώσας της τάσης (σ_x) συναρτήσει του μήκους τόξου



Σχήμα 5.31: Διάγραμμα της κατακόρυφης συνιστώσας της τάσης (σ_y) συναρτήσει του μήκους τόξου

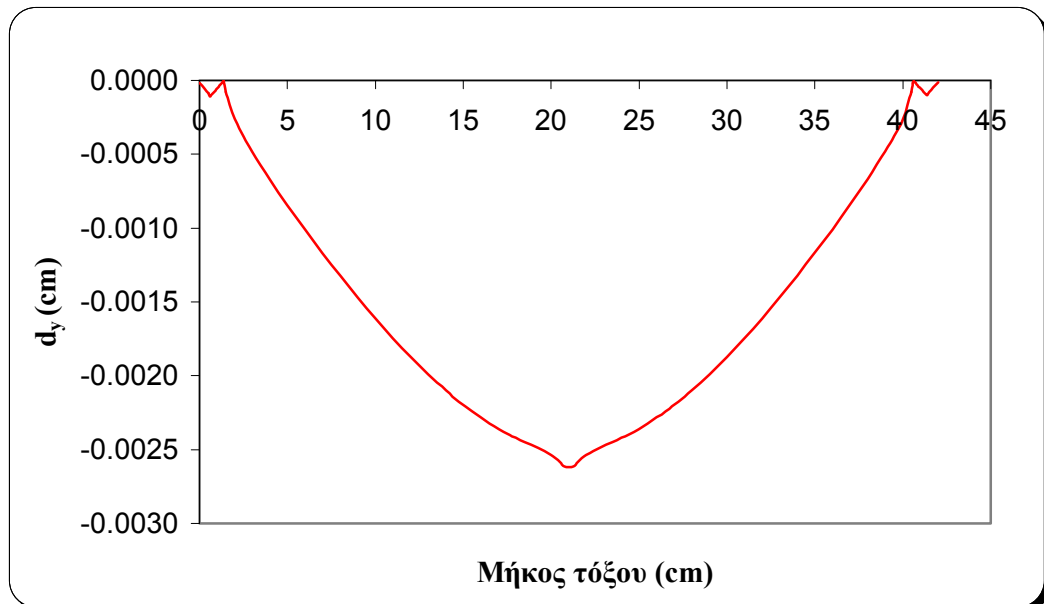


Σχήμα 5.32: Διάγραμμα της οριζόντιας συνιστώσας (ϵ_x) της παραμόρφωσης συναρτήσει του μήκους τόξου



Σχήμα 5.33: Διάγραμμα της κατακόρυφης συνιστώσας της παραμόρφωσης (ϵ_y) συναρτήσει του μήκους τόξου

- Γραφική παράσταση του βέλους κάμψης της κατώτερης πλευράς του δοκιμίου συναρτήσει του μήκους τόξου:



Σχήμα 5.34: Διάγραμμα του βέλους κάμψης συναρτήσει του μήκους τόξου

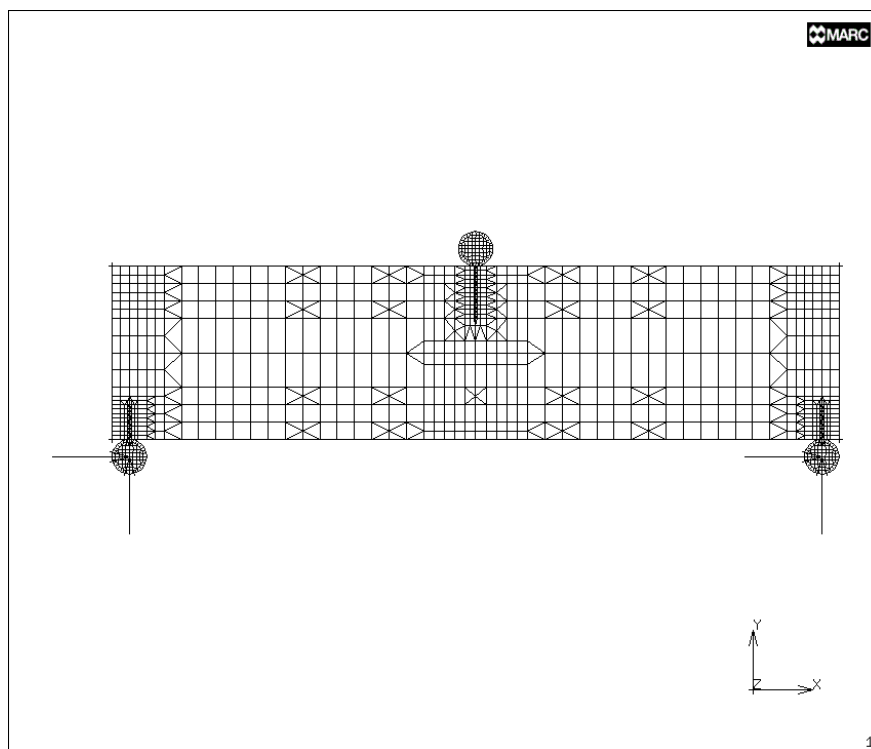
5.4 ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΕΠΙΛΥΣΗ ΤΗΣ ΔΟΚΙΜΗΣ ΚΑΜΨΗΣ ΤΡΙΩΝ ΣΗΜΕΙΩΝ ΣΕ ΔΟΚΙΜΙΑ ΚΟΓΧΥΛΙΟΛΙΘΟΥ: ΕΛΑΣΤΟΠΛΑΣΤΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ

Η προσομοίωση της δοκιμής κάμψης τριών σημείων παραγματοποιήθηκε και για δοκίμια Κογχυλιόλιθου, υλικό το οποίο προσομοιώθηκε σαν γραμμικά ελαστικό-τέλεια πλαστικό υλικό.

5.4.1 Γεωμετρία και Διακριτοποίηση του Μοντέλου

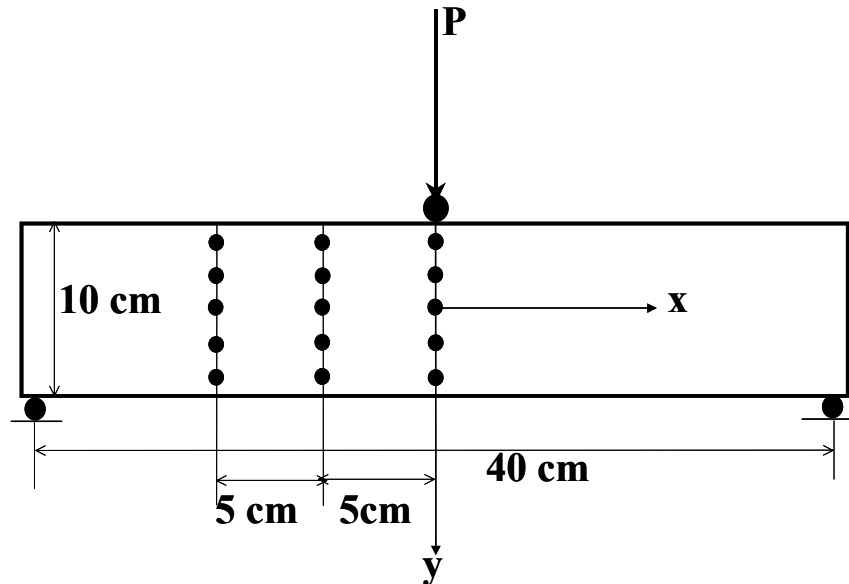
Για την πλήρη προσομοίωση της συμπεριφοράς των υλικών κατά την διάρκεια της κάμψης, μοντελοποιήθηκαν και οι χαλύβδινοι κύλινδροι και το δοκίμιο του Κογχυλιόλιθου με όμοιες διαστάσεις με αυτές της πραγματικής διάταξης (Σχήμα 5.35). Οι διαστάσεις του μοντέλου είναι οι εξής (Σχήμα 5.36):

- Μήκος δοκιμίου: 42 cm
- Ύψος δοκιμίου: 10 cm
- Διάμετρος κυλίνδρων: 2 cm
- Απόσταση μεταξύ των δύο κυλίνδρων: 40 cm



Σχήμα 5.35: Διακριτοποίηση του μοντέλου

Το μοντέλο αποτελείται από 1246 τετραπλευρικά και τριγωνικά στοιχεία επίπεδης παραμόρφωσης και 1167 κόμβους. Οι θέσεις των κόμβων καθορίστηκαν με τέτοιο τρόπο ώστε να συμπίπτουν με τις θέσεις των μηχανοσυστημάτων στα δοκίμια της πειραματικής διάταξης (Σχήμα 5.36).



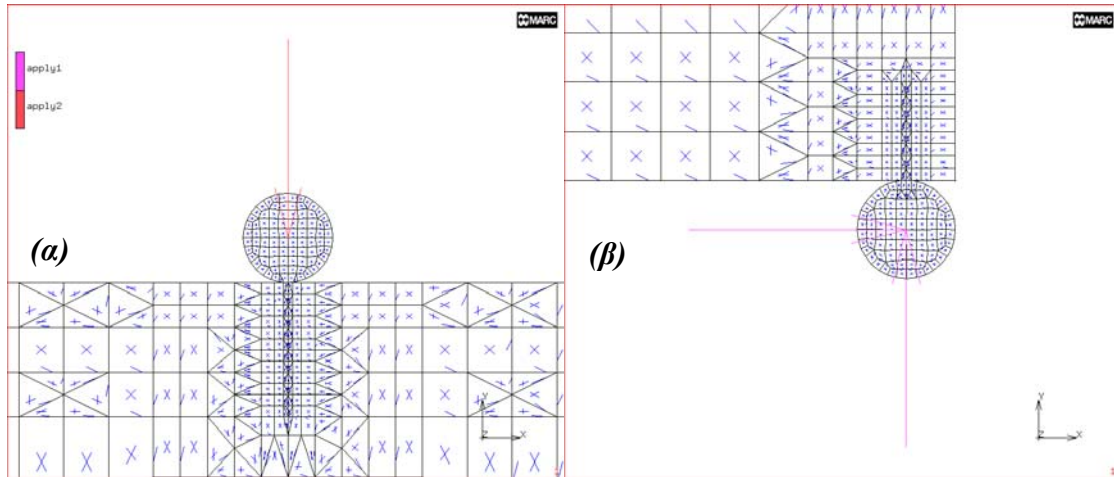
Σχήμα 5.36: Σχηματική αναπαράσταση της γεωμετρίας του μοντέλου και των θέσεων των μηχανοσυστημάτων

5.4.2 Συνοριακές Συνθήκες

Οι συνοριακές συνθήκες που εφαρμόστηκαν κατά την προσομοίωση του μοντέλου είναι οι εξής:

- Φορτίο 3,125 kN στο κέντρο του κυλίνδρου φόρτισης (Σχήμα 5.37.α), το οποίο εφαρμόστηκε σε δέκα στάδια.
- Πάκτωση ($d_x=0$, $d_y=0$) στα κέντρα των κυλίνδρων στήριξης του δοκιμίου (Σχήμα 5.37.β).
- Δεν υπήρξε περιορισμός κίνησης στον κύλινδρο φόρτισης.

Λόγω της συμμετρίας του μοντέλου δεν απαιτήθηκε καμία άλλη συνοριακή συνθήκη.



Σχήμα 5.37: α) Φορτίο κατά τον κάθετο άξονα στον κύλινδρο φόρτισης β) Πάκτωση ($d_x=0$, $d_y=0$) στο κέντρο των κυλίνδρων στήριξης του δοκιμίου

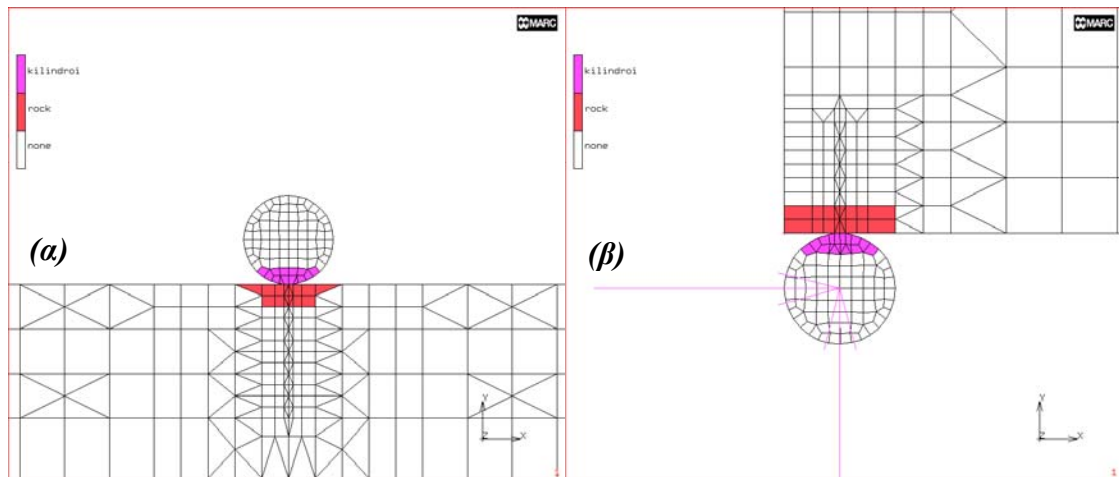
5.4.3 Ιδιότητες Υλικών

Ο χάλυβας προσομοιώθηκε ως ελαστικό υλικό με μέτρο ελαστικότητας του Young $E=210$ GPa και λόγο Poisson $\nu=0,3$. Οι αντίστοιχες τιμές για τον Κογκυλιόλιθο είναι $E=1,1$ GPa και $\nu=0,25$. Ο Κογκυλιόλιθος προσομοιώθηκε ως ελαστοπλαστικό υλικό με τη χρήση του παραβολικού κριτηρίου αστοχίας Mohr - Coulomb. Οι παράμετροί του λήφθηκαν μέσω δοκιμών βαθμονόμησης και είναι: $\sigma=0,265$ kN/cm² και $\beta=0,0757$ για την ακόλουθη κατάσταση διαρροής (Marc-Mentat, 1998):

$$\begin{aligned} f &= (3J_2 + \sqrt{3}\beta \bar{\sigma} J_1)^{1/2} - \bar{\sigma} = 0 \\ \sigma^2 &= 3 \left[c^2 - (a^2 / 3) \right] \\ \beta &= a / \left[3(3c^2 - a^2) \right]^{-1/2} \end{aligned} \quad (5.4)$$

5.4.4 Στοιχεία Επαφής Μεταξύ των Δύο Υλικών

Μεταξύ του Κογκυλιόλιθου και των κυλίνδρων χάλυβα τέθηκαν στοιχεία επαφής με συντελεστή τριβής 0,4, που αντιστοιχεί σε γωνία τριβής 21,8° (Σχήμα 5.38) (Kleftakis et al., 2000). Εντούτοις, σε όλες τις περιπτώσεις επαφών υπήρξαν τρεις κοινοί κόμβοι μεταξύ των κυλίνδρων χάλυβα και του πετρώματος.



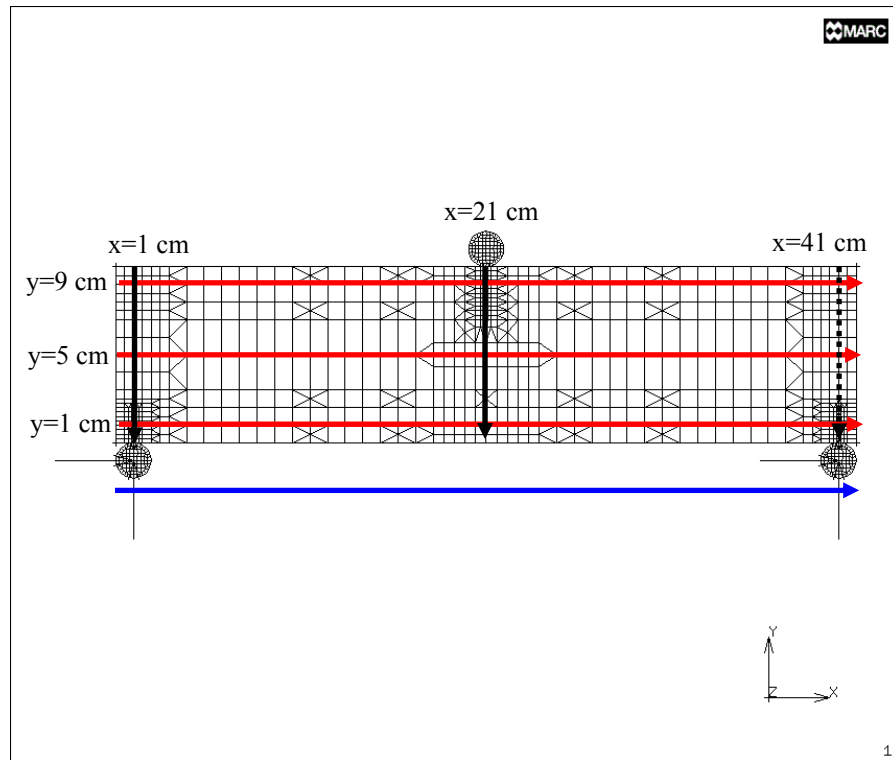
Σχήμα 5.38: α) Στοιχεία επαφής μεταξύ δοκιμίου και κυλίνδρου φόρτισης β) Στοιχεία επαφής μεταξύ δοκιμίου και κυλίνδρου στήριξης

5.4.5 Γεωμετρικές Ιδιότητες

Η επίλυση του μοντέλου έγινε με θεώρηση επίπεδης παραμόρφωσης (*plane strain idealization*).

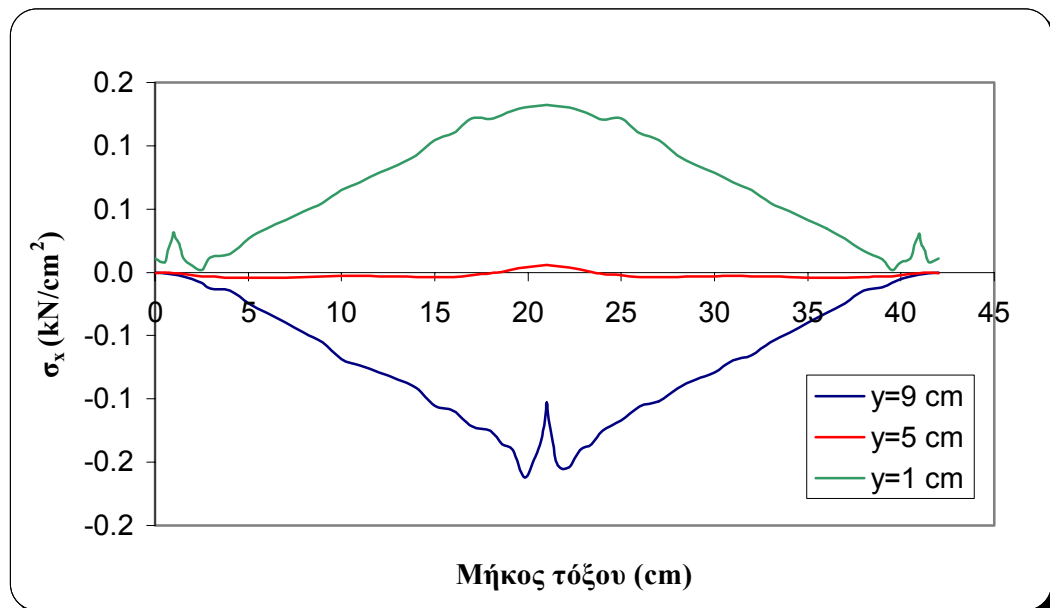
5.4.6 Αποτελέσματα Αριθμητικής Επίλυσης

Τα αποτελέσματα της αριθμητικής επίλυσης, σχετικά με τις συνιστώσες των τάσεων και των παραμορφώσεων, λήφθηκαν για τις γραμμές του Σχήματος 5.39. Έχουν επιλεγθεί τρεις οριζόντιες γραμμές από τις οποίες η πρώτη απέχει 1 cm από την πάνω ακμή του δοκιμίου, η επόμενη βρίσκεται ακριβώς στον κεντρικό οριζόντιο άξονα του δοκιμίου και η τελευταία περνά ακριβώς από την κορυφή της εγκοπής. Από τις αντίστοιχες κάθετες γραμμές οι δύο βρίσκονται στις δύο άκρες του μοντέλου στα σημεία επαφής των κυλίνδρων στήριξης με το δοκίμιο και μία ακόμα βρίσκεται στον κεντρικό κάθετο άξονα του δοκιμίου. Μαζί με τα αποτελέσματα των τάσεων και παραμορφώσεων παρουσιάζεται και το βέλος κάμψης της κατώτερης πλευράς του δοκιμίου.

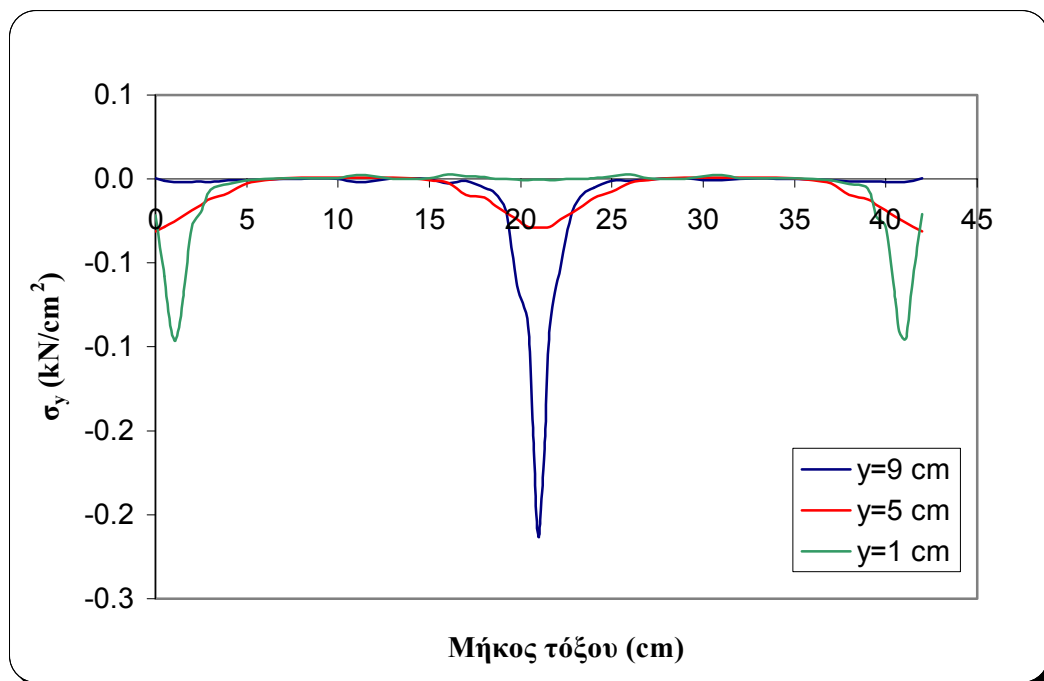


Σχήμα 5.39: Σχηματική αναπαράσταση του δοκιμίου όπου διακρίνονται οι γραμμές για τις οποίες λήφθηκαν αποτελέσματα για την αριθμητική επίλυση

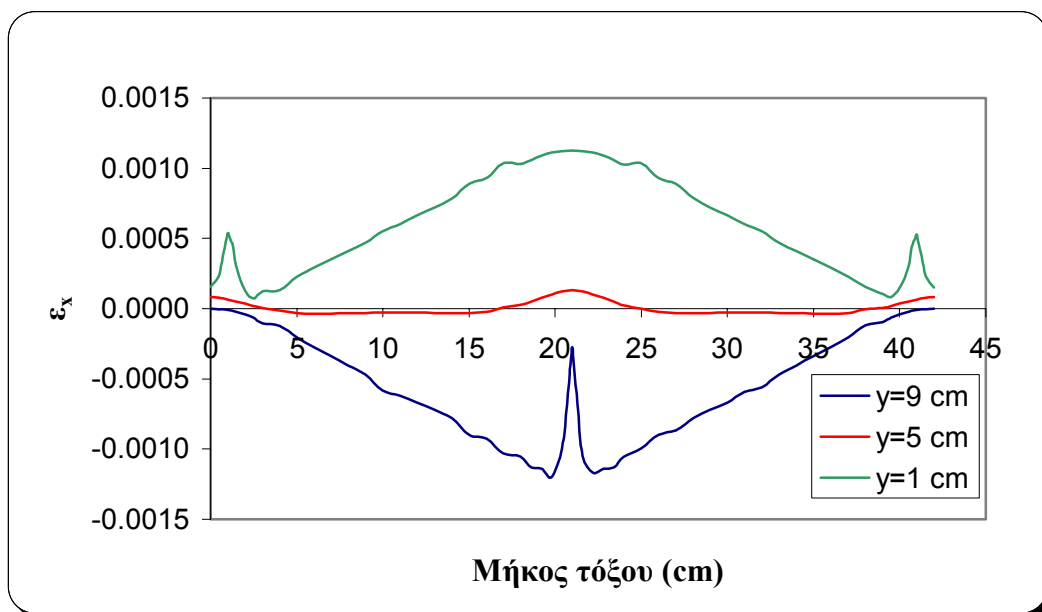
- Γραφικές παραστάσεις των οριζόντιων και κάθετων συνιστωσών τάσεων και παραμορφώσεων συναρτήσει του μήκους τόξου για τις οριζόντιες γραμμές του σχήματος (5.39) ($y=1$ cm, $y=5$ cm, $y=9$ cm) (Σχήματα 5.40-5.43):



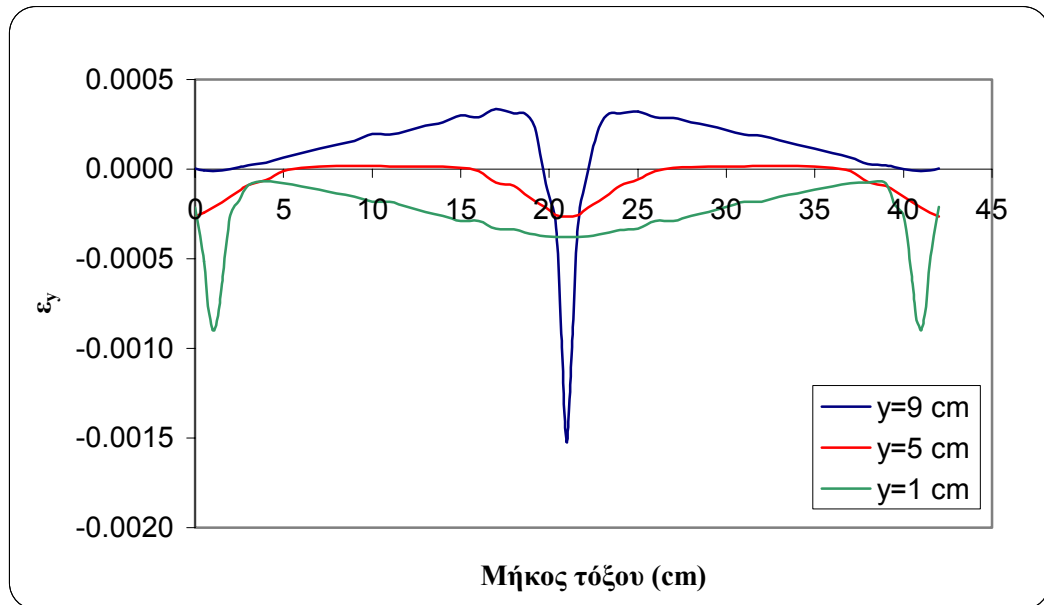
Σχήμα 5.40: Διάγραμμα της οριζόντιας συνιστώσας της τάσης (σ_x) συναρτήσει του μήκους τόξου



Σχήμα 5.41: Διάγραμμα της κατακόρυφης συνιστώσας της τάσης (σ_y) συναρτήσει του μήκους τόξου

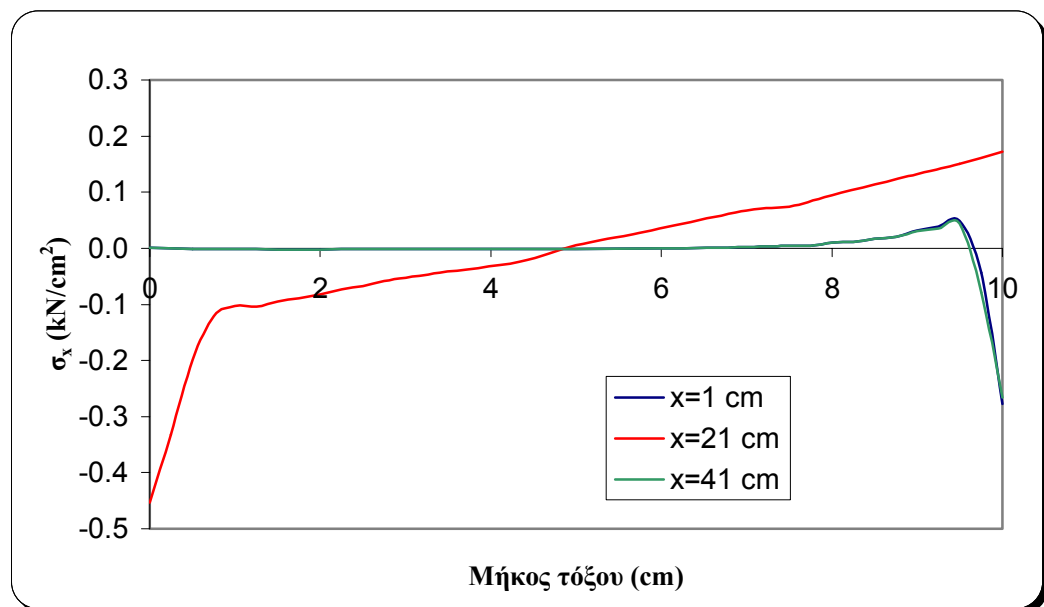


Σχήμα 5.42: Διάγραμμα της οριζόντιας συνιστώσας της παραμόρφωσης (ε_x) συναρτήσει του μήκους τόξου

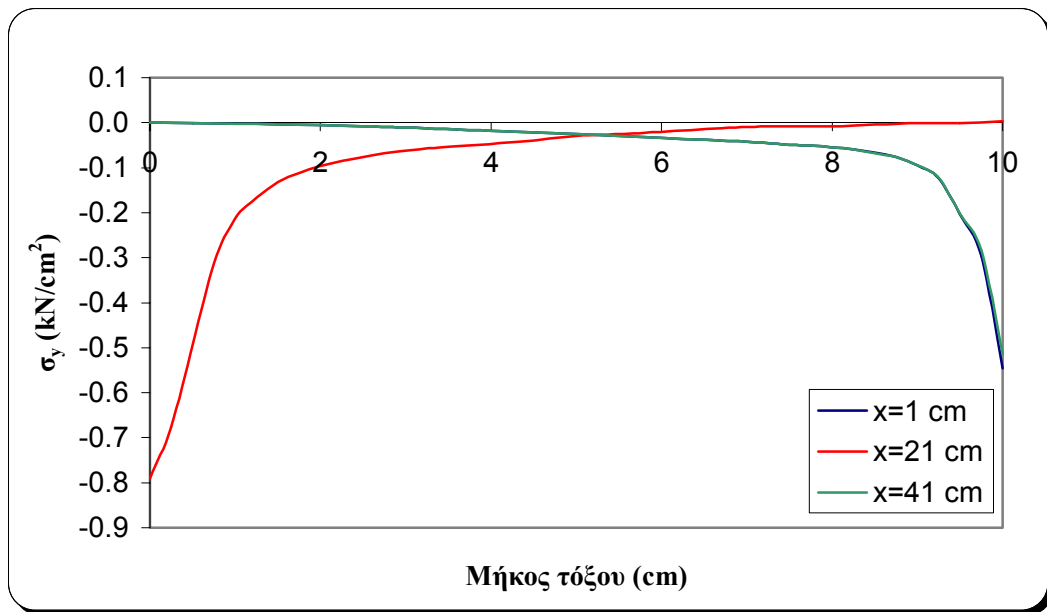


Σχήμα 5.43: Διάγραμμα της κατακόρυφης συνιστώσας της παραμόρφωσης (ε_y) συναρτήσει του μήκους τόξου

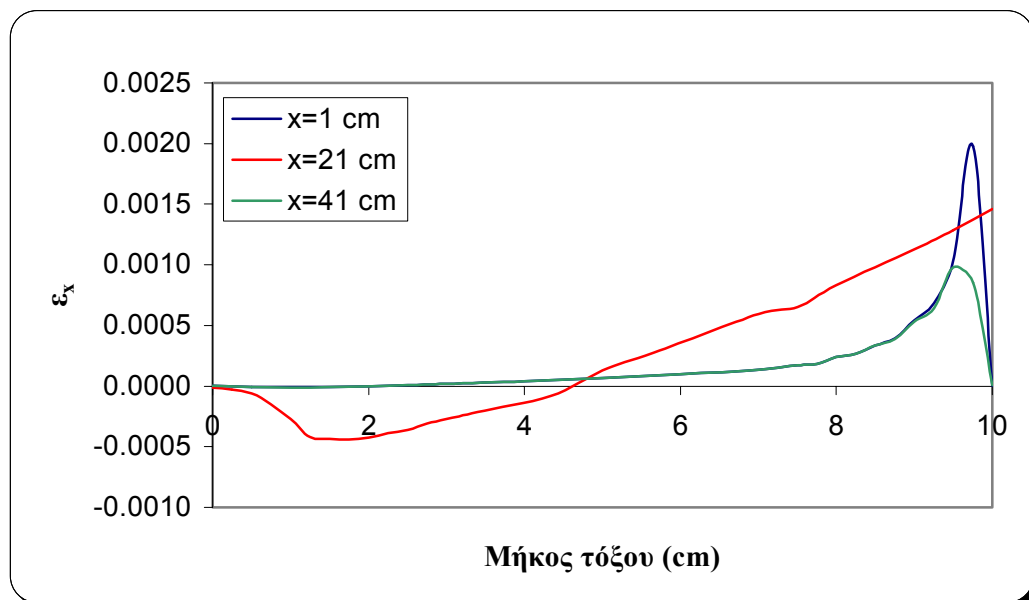
- Γραφικές παραστάσεις των οριζόντιων και κάθετων συνιστωσών τάσεων και παραμορφώσεων συναρτήσει του μήκους τόξου για τις κάθετες γραμμές ($x=1$ cm, $x=21$ cm, $x=41$ cm) του σχήματος (5.39)(Σχήματα 5.44-5.47):



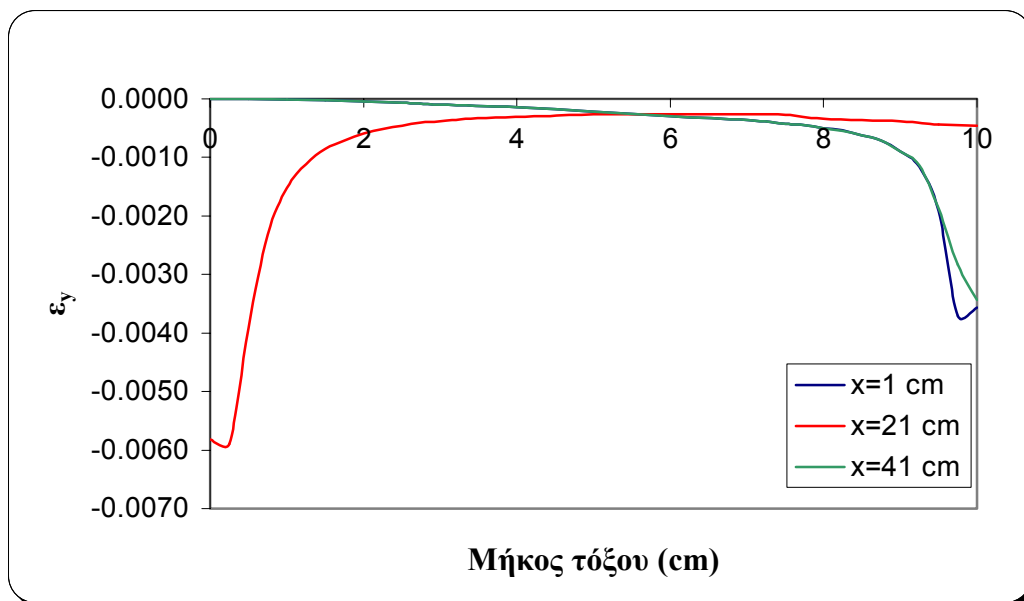
Σχήμα 5.44: Διάγραμμα της οριζόντιας συνιστώσας της τάσης (σ_x) συναρτήσει του μήκους τόξου



Σχήμα 5.45: Διάγραμμα της κατακόρυφης συνιστώσας της τάσης (σ_y) συναρτήσει του μήκους τόξου

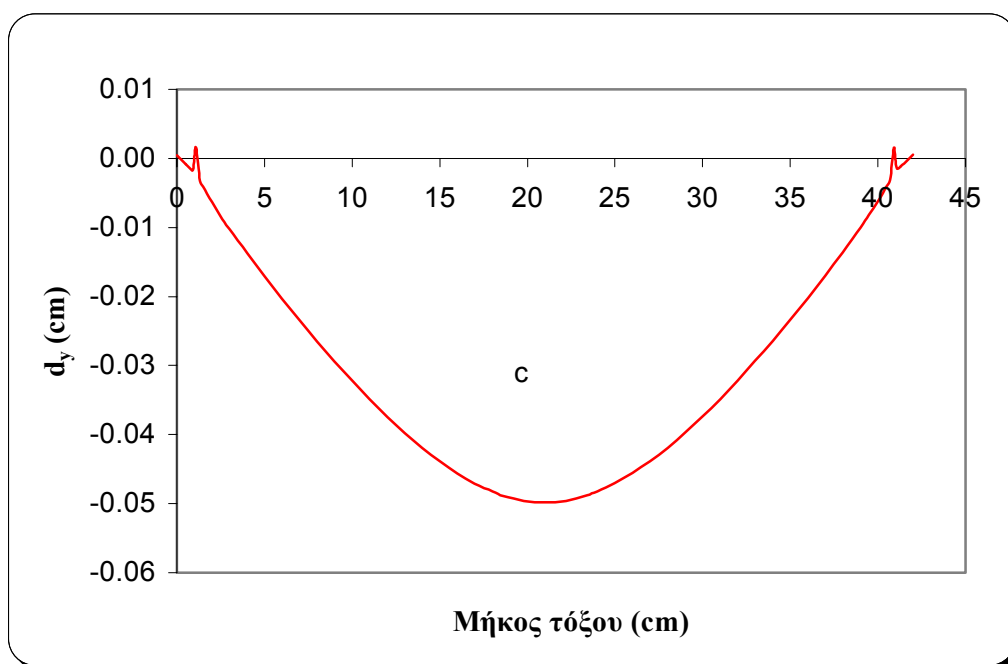


Σχήμα 5.46: Διάγραμμα της οριζόντιας συνιστώσας (ϵ_x) της παραμόρφωσης συναρτήσει του μήκους τόξου



Σχήμα 5.47: Διάγραμμα της κατακόρυφης συνιστώσας της παραμόρφωσης (ε_y) συναρτήσει του μήκους τόξου

- Γραφική παράσταση του βέλους κάμψης της κατώτερης πλευράς του δοκιμίου συναρτήσει του μήκους τόξου:



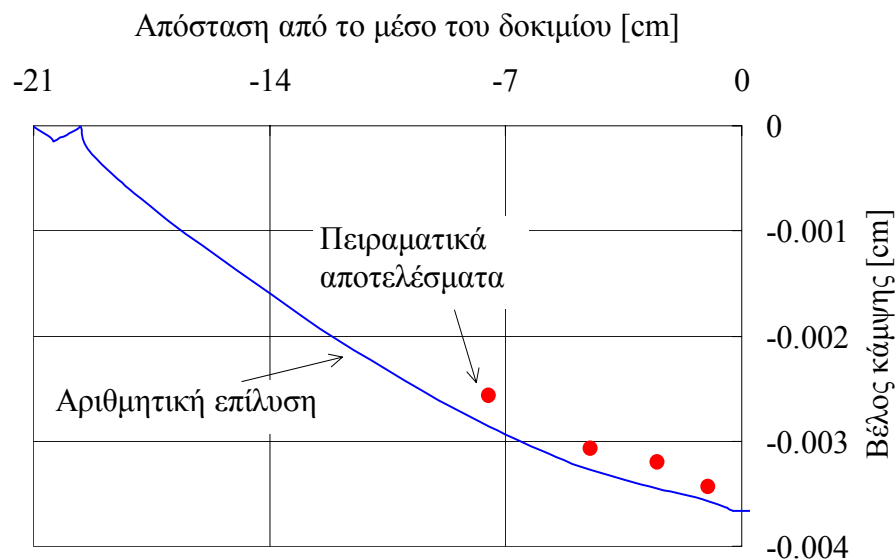
Σχήμα 5.48: Διάγραμμα του βέλους κάμψης συναρτήσει του μήκους τόξου

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

Σύγκριση Αποτελεσμάτων Μεταξύ Αριθμητικής Επίλυσης και Πειραματικής Ανάλυσης

6.1 ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΩΝ ΓΙΑ ΤΟ ΕΛΑΣΤΟΠΛΑΣΤΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΔΙΟΝΥΣΙΑΚΟΥ ΜΑΡΜΑΡΟΥ

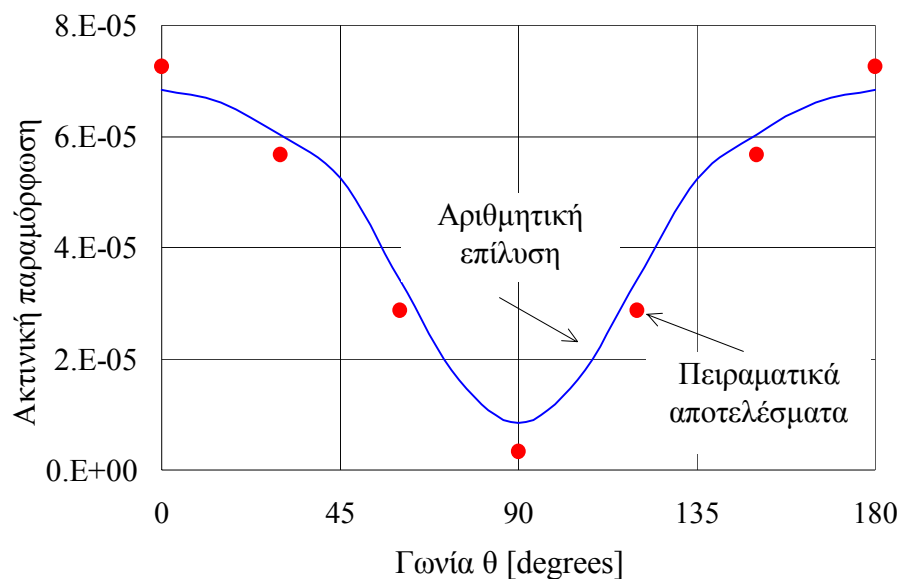
Τα συγκριτικά αποτελέσματα μεταξύ αριθμητικής επίλυσης και πειραματικής ανάλυσης για την περίπτωση της προσομοίωσης του Διονυσιακού μαρμάρου σαν ισότροπο ελαστοπλαστικό υλικό, αφορούν το βέλος κάμψης της δοκού και την κατανομή των ακτινικών παραμορφώσεων σε ακτίνα 25 mm από την κορυφή της εγκοπής.



Σχήμα 6.1: Πειραματικά και αριθμητικά αποτελέσματα για το βέλος κάμψης της δοκού

Στο διάγραμμα του Σχήματος 6.1 παρουσιάζονται τα αριθμητικά (καμπύλη μπλε χρώματος) και πειραματικά (κόκκινα σημεία) αποτελέσματα σχετικά με το βέλος κάμψης της δοκού στην χαμηλότερη πλευρά της, για φορτίο 17,5 kN. Είναι φανερό ότι οι τιμές της αριθμητικής επίλυσης είναι λίγο, αλλά συστηματικά υψηλότερες από τις πειραματικές τιμές. Η υψηλότερη απόκλιση είναι μικρότερη του 8%, γεγονός πολύ ενθαρρυντικό θεωρώντας ότι κατά την διάρκεια της αριθμητικής επίλυσης δεν λήφθηκε υπόψη η ανισοτροπία που παρουσιάζει το Διονυσιακό μάρμαρο.

Στο σχήμα (6.2) παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της αριθμητικής επίλυσης (καμπύλη μπλε χρώματος) και της πειραματικής μελέτης (κόκκινα σημεία) σχετικά με τη κατανομή των παραμορφώσεων. Σε αυτό το διάγραμμα παρουσιάζεται η κατανομή της ακτινικής παραμόρφωσης, ϵ_{rr} , κατά μήκος ενός ημικυκλίου ακτίνας 25 mm γύρω από την κορυφή της εγκοπής, για επίπεδο φόρτισης 17,5 kN. Και σε αυτή την περίπτωση τα αποτελέσματα της αριθμητικής επίλυσης βρίσκονται σε καλή συμφωνία με τα αντίστοιχα αποτελέσματα της πειραματικής ανάλυσης.



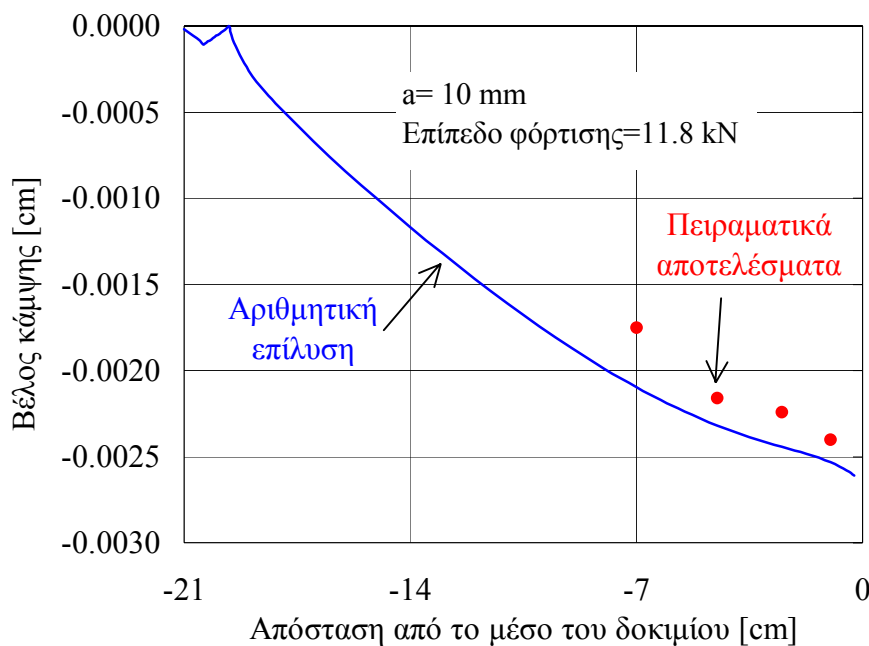
Σχήμα 6.2: Πειραματικά και αριθμητικά αποτελέσματα για την πολική κατανομή των ακτινικών παραμορφώσεων σε ακτίνα $r=25$ mm

6.2 ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΩΝ ΓΙΑ ΤΟ ΕΛΑΣΤΙΚΟ ΕΓΚΑΡΣΙΩΣ

ΙΣΟΤΡΟΠΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΔΙΟΝΥΣΙΑΚΟΥ ΜΑΡΜΑΡΟΥ

Τα αποτελέσματα που προκύπτουν από την πειραματική μελέτη και την αριθμητική επίλυση με τη ΜΠΣ για το Διονυσιακό μάρμαρο κατά την προσομοίωση του σαν γραμμικά ελαστικό εγκάρσιως ισότροπο υλικό, επικεντρώνονται όπως και στην προηγούμενη ενότητα στο βέλος κάμψης της δοκού και την κατανομή των ακτινικών παραμορφώσεων σε ακτίνα 25 mm από την κορυφή της εγκοπής.

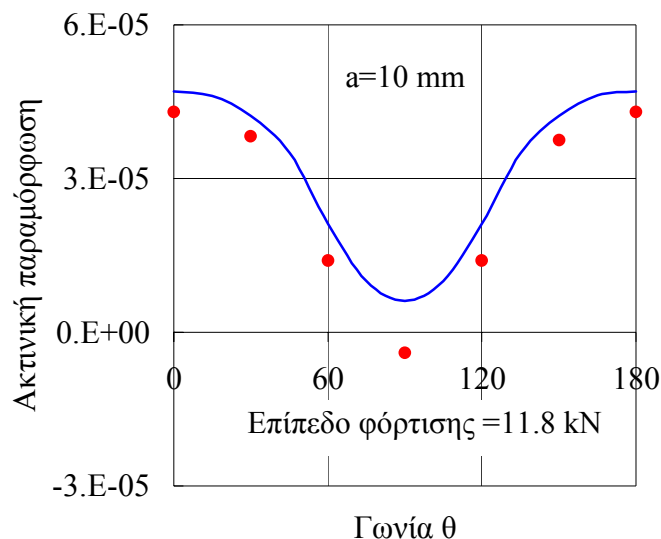
Στο σχήμα (6.3) παρουσιάζεται το βέλος κάμψης της χαμηλότερης πλευράς του δοκιμίου όπως υπολογίζεται από την επίλυση με τη ΜΠΣ (καμπύλη μπλε χρώματος), για ένα εξωτερικό φορτίο ίσο με 11,8 kN, καθώς μέχρι αυτό το επίπεδο η μηχανική συμπεριφορά του μαρμάρου Διονύσου είναι γραμμικά ελαστική. Στο ίδιο γράφημα παρουσιάζονται τα αντίστοιχα πειραματικά αποτελέσματα (κόκκινα σημεία), όπως λαμβάνονται από τα μηχανοκίνητα. Είναι φανερό ότι, αν και συστηματικά υψηλότερες, οι τιμές της αριθμητικής επίλυσης βρίσκονται σε καλή συμφωνία με τα πειραματικά αποτελέσματα. Η μέγιστη απόκλιση που καταγράφεται δεν υπερβαίνει το 10%, γεγονός το οποίο είναι πολύ ενθαρρυντικό εάν ληφθεί υπόψη το απόλυτο μέγεθος των μετρούμενων ποσοτήτων, το οποίο είναι στο βαθμό μόνο μερικών μικρών λόγω της ευθραυστότητας του μαρμάρου.



Σχήμα 6.3: Πειραματικά και αριθμητικά αποτελέσματα για το βέλος κάμψης της δοκού

Ένα άλλο σημείο που πρέπει να υπογραμμιστεί είναι η αλλαγή της κυρτότητας της καμπύλης του βέλους κάμψης στη περιοχή γύρω από την εγκοπή, ένα φαινόμενο που παρατηρήθηκε επίσης και πειραματικά. Περαιτέρω μελέτη αυτής της περιοχής με την ενίσχυση των πυκνότερων πλεγμάτων επαληθεύουν τα αποτελέσματα της ανάλυσης.

Στο σχήμα (6.4) παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της αριθμητικής επίλυσης (καμπύλη μπλε χρώματος) και της πειραματικής μελέτης (κόκκινα σημεία) σχετικά με τη κατανομή των παραμορφώσεων. Σε αυτό το γράφημα παρουσιάζεται η πολική κατανομή της ακτινικής παραμόρφωσης, ε_{rr} , γύρω από την εγκοπή, κατά μήκος ενός ημικυκλίου ακτίνας $r=25$ mm, με κέντρο την κορυφή της εγκοπής και για επίπεδο φόρτισης με 11,8 kN. Μπορεί να σημειωθεί ξανά ότι τα αποτελέσματα της αριθμητικής επίλυσης είναι σε ικανοποιητική συμφωνία με τα αντίστοιχα πειραματικά, που λαμβάνονται από τα μηχανοστάσια. Εντούτοις, υπογραμμίζεται ότι οι πειραματικές τιμές είναι συστηματικά μικρότερες από τις αριθμητικές, ενώ κοντά στη περιοχή της εγκοπής αναστρέφουν το πρόσημο τους και γίνονται αρνητικές. Αν και η απόκλιση δεν είναι σημαντική, η περαιτέρω ανάλυση είναι απαραίτητη (Kourkoulis et al., 2003α).



Σχήμα 6.4: Πειραματικά και αριθμητικά αποτελέσματα για την πολική κατανομή των ακτινικών παραμορφώσεων σε ακτίνα $r=25$ mm

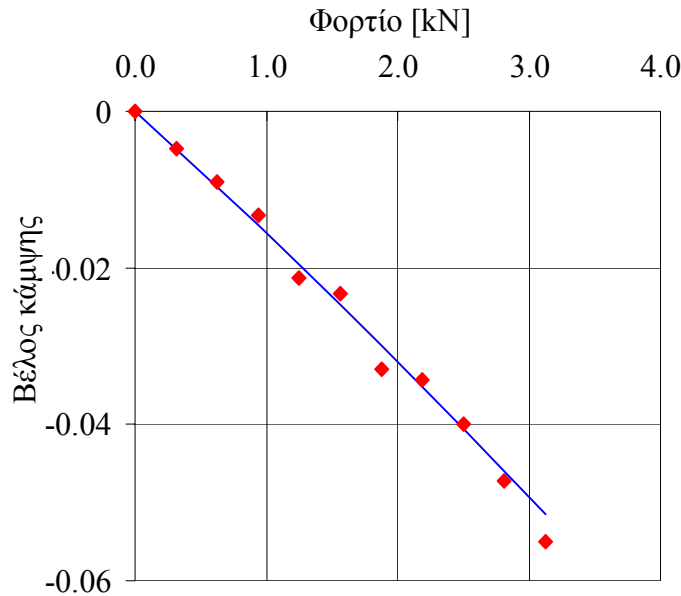
6.3 ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΩΝ ΓΙΑ ΤΟ ΕΛΑΣΤΟΠΛΑΣΤΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΚΟΓΧΥΛΙΟΛΙΘΟΥ

Τα συγκριτικά αποτελέσματα μεταξύ αριθμητικής επίλυσης και πειραματικής ανάλυσης για την περίπτωση της προσομοίωσης του Κογχυλιόλιθου σαν ισότροπο ελαστοπλαστικό υλικό, αφορούν το βέλος κάμψης της κατώτερης πλευράς και του μέσου οριζόντιου τμήματος του δοκιμίου, καθώς και την κατανομή των αξονικών και εγκάρσιων παραμορφώσεων για το κεντρικό κάθετο τμήμα και το κάθετο τμήμα στη θέση $x=-10$ cm του δοκιμίου.

Στο σχήμα (6.5) παρουσιάζονται τυπικά πειραματικά (κόκκινα σημεία) και αριθμητικά (καμπύλη μπλε χρώματος) αποτελέσματα για το βέλος κάμψης (deflection) της δοκού λίγο πριν την θραύση, ενώ στο διάγραμμα του Σχήματος 6.6 παρουσιάζεται το βέλος κάμψης του χαμηλότερου σημείου του κεντρικού οριζοντίου τμήματος συναρτήσει του εξωτερικού φορτίου. Και στις δύο περιπτώσεις τα πειραματικά αποτελέσματα συμφωνούν καλά με τα αριθμητικά, αν και εμφανίζονται μερικές αποκλίσεις, ειδικά για το βέλος κάμψης του μέσου οριζοντίου τμήματος για τα φορτία που πλησιάζουν το φορτίο θραύσης.



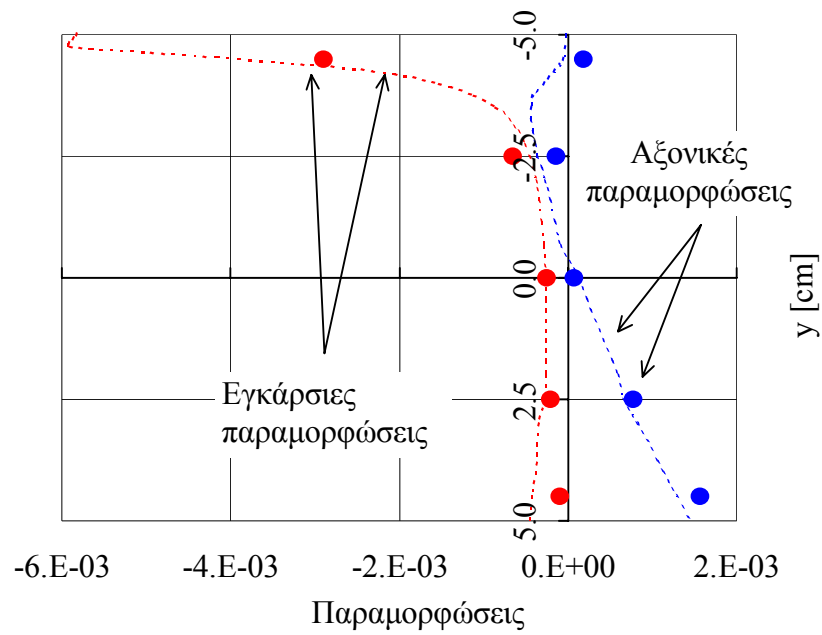
Σχήμα 6.5: Γραφική παράσταση του βέλους κάμψης της κάτω ακμής του δοκιμίου λίγο πριν την θραύση



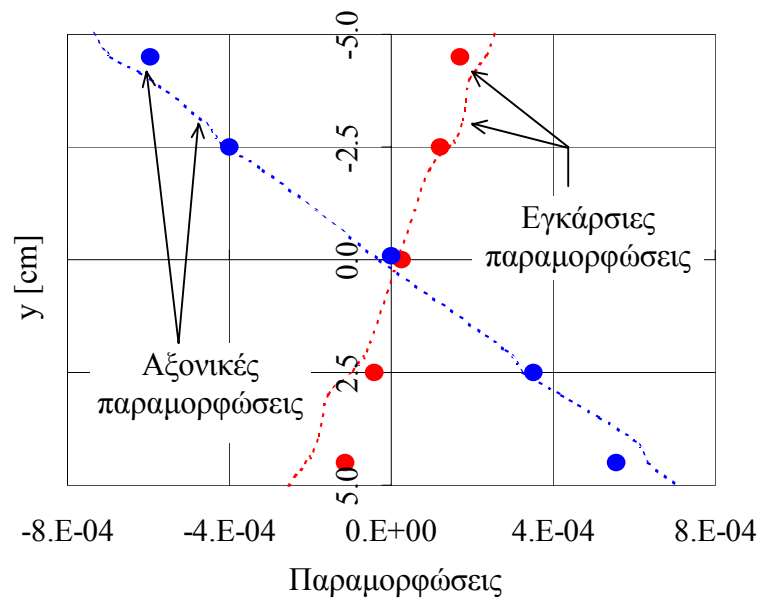
Σχήμα 6.6: Γραφική παράσταση του βέλους κάμψης του μέσου οριζοντίου τμήματος του δοκιμίου συναρτήσει του εξωτερικού φορτίου

Τα αποτελέσματα της αριθμητικής επίλυσης σχετικά με την μεταβολή των αξονικών και εγκάρσιων παραμορφώσεων κατά μήκος του ύψους του δοκιμίου παρουσιάζονται στο σχήμα (6.7) (μπλε και κόκκινη διακεκομμένη γραμμή, αντίστοιχα) για το κεντρικό τμήμα του δοκιμίου, μαζί με τις αντίστοιχες πειραματικές τιμές (σύμβολα μπλε και κόκκινου χρώματος αντίστοιχα), για φορτίο ίσο με το φορτίο θραύσης $P=3,125$ kN. Τα αποτελέσματα δείχνουν ότι η αξονική παραμόρφωση δεν διανέμεται γραμμικά κατά μήκος του ύψους του δοκιμίου και επιβεβαιώνεται ότι ο ουδέτερος άξονας είναι μετατοπισμένος προς τα πάνω. Στην πραγματικότητα το ανώτερο μισό του δοκιμίου εμφανίζεται να μην παρουσιάζει τάσεις και παραμορφώσεις. Αφ' ετέρου, η εγκάρσια παραμόρφωση φθάνει πολύ υψηλές τιμές στην άμεση περιοχή του συγκεντρωμένου φορτίου, εντούτοις το φαινόμενο μειώνεται γρήγορα και μια σταθερή τιμή, ίση περίπου με το ένα δέκατο του μέγιστου, επιτυγχάνεται, σε μια απόσταση ίση με περίπου το ένα τέταρτο του ύψους του δοκιμίου.

Στο σχήμα (6.8) παρουσιάζονται επίσης αξονικές και εγκάρσιες παραμορφώσεις για το τμήμα με $x=-10$ cm. Τα αποτελέσματα δείχνουν ότι η αξονική παραμόρφωση τώρα διανέμεται σχεδόν γραμμικά, ή με άλλα λόγια η επιρροή του συγκεντρωμένου φορτίου (punch) αποβάλλεται.



Σχήμα 6.7: Πειραματικά και αριθμητικά αποτελέσματα των αξονικών και εγκάρσιων παραμορφώσεων κατά μήκος του ύψους του δοκιμίου (ως προς τον ουδέτερο άξονα)



Σχήμα 6.8: Πειραματικά και αριθμητικά αποτελέσματα των αξονικών και εγκάρσιων παραμορφώσεων για το κάθετο τμήμα στη θέση $x = -10 \text{ cm}$ (ως προς τον ουδέτερο άξονα)

Και στις δυο περιπτώσεις η συμφωνία μεταξύ των αριθμητικών αποτελεσμάτων και των πειραματικών είναι πολύ ικανοποιητική για τις διαμήκεις παραμορφώσεις. Όσον αφορά

τις εγκάρσιες παραμορφώσεις, παρατηρούνται μερικές αποκλίσεις: οι πειραματικές τιμές είναι ελαφρώς αλλά συστηματικά μικρότερες από τις αριθμητικές. Αυτό είναι περισσότερο έντονο για το τμήμα με $x=-10$ cm. Μια πιθανή εξήγηση του φαινομένου θα μπορούσε να είναι το γεγονός ότι η εγκάρσιως ισότροπη φύση του Κογκυλιόλιθου, που αγνοείται από το παρόν αριθμητικό μοντέλο, ενισχύει την δοκό ενάντια στην εγκάρσια παραμόρφωση, δεδομένου ότι ενεργεί ως οριζόντια πολυστρωματική πλάκα (Kourkoulis et al., 2003β).

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7

Συμπεράσματα και Προτάσεις

7.1 ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Στην παρούσα εργασία μελετήθηκε το πρόβλημα της κάμψης τριών σημείων σε δοκίμια πετρωμάτων με την συμβολή της Μεθόδου των Πεπερασμένων Στοιχείων. Όσον αφορά τα υλικά, το πρόβλημα επικεντρώθηκε στο Διονυσιακό μάρμαρο και στον Κογχυλιόλιθο, ενώ τα αποτελέσματα που προέκυψαν από την αριθμητική επίλυση συγκρίθηκαν με πειραματικά αποτελέσματα από μια σειρά δοκιμών κάμψης τριών σημείων που έλαβε χώρα στο εργαστήριο αντοχής υλικών του Ε.Μ.Π.

Η αριθμητική επίλυση με την Μέθοδο των Πεπερασμένων Στοιχείων, πραγματοποιήθηκε σε δύο διαστάσεις με την θεώρηση επίπεδης παραμόρφωσης. Χρησιμοποιήθηκαν στοιχεία επαφής, ενώ η διακριτοποίηση των μοντέλων έγινε με τρόπο ώστε οι διαστάσεις τους να συμπίπτουν με αυτές των πραγματικών δοκιμών. Το Διονυσιακό μάρμαρο προσομοιώθηκε σαν ισότροπο ελαστοπλαστικό υλικό με την χρήση του παραβολικού κριτηρίου αστοχίας Mohr-Coulomb, αλλά και σαν γραμμικά ελαστικό εγκαρσίως ισότροπο υλικό, ενώ ο Κογχυλιόλιθος προσομοιώθηκε σαν ισότροπο ελαστοπλαστικό υλικό με την χρήση του παραβολικού κριτηρίου αστοχίας Mohr-Coulomb. Στον πίνακα (7.1) διακρίνονται αναλυτικά όλα τα δεδομένα της αριθμητικής επίλυσης και για τα τρία διαφορετικά μοντέλα.

Πίνακας 7.1: Συγκεντρωτικός πίνακας των δεδομένων της αριθμητικής επίλυσης με την Μέθοδο των Πεπερασμένων Στοιχείων και για τα τρία μοντέλα

Μοντέλο	ΔΚ 3 σημείων σε Διονυσιακό Μάρμαρο: Ελαστοπλαστικό	ΔΚ 3 σημείων σε Διονυσιακό Μάρμαρο: Γραμμικά Ελαστικό Εγκαρσίως Ισότροπο	ΔΚ 3 σημείων σε Κογχυλιόλιθο: Ελαστοπλαστικό
Διαστάσεις επίλυσης	2 -D	2 -D	2 -D
Επίλυση (Γεωμετρικές Ιδιότητες)	Θεώρηση επίπεδης παραμόρφωσης.	Θεώρηση επίπεδης παραμόρφωσης.	Θεώρηση επίπεδης παραμόρφωσης.
Διαστάσεις Δοκιμίου	Μήκος: 42 cm Ύψος: 10 cm Διάμετρος κυλίνδρων: 7 cm Απόσταση μεταξύ των δύο κυλίνδρων: 40 cm Μήκος εγκοπής: 1 cm Πλάτος εγκοπής: 0,5 cm	Μήκος: 42 cm Ύψος: 10 cm Διάμετρος κυλίνδρων: 7 cm Απόσταση μεταξύ των δύο κυλίνδρων: 40 cm Μήκος εγκοπής: 1 cm Πλάτος εγκοπής: 0,5 cm	Μήκος: 42 cm Ύψος: 10 cm Διάμετρος κυλίνδρων: 2 cm Απόσταση μεταξύ των δύο κυλίνδρων: 40 cm
Κοινοί Κόμβοι	Ο κύλινδρος φόρτισης δεν είναι σε επαφή με το δοκίμιο. Οι κύλινδροι στήριξης εφάπτονται με το δοκίμιο με 7 κοινούς κόμβους.	Ο κύλινδρος φόρτισης δεν είναι σε επαφή με το δοκίμιο. Οι κύλινδροι στήριξης εφάπτονται με το δοκίμιο με 7 κοινούς κόμβους.	Όλοι οι κύλινδροι σε επαφή με το δοκίμιο.
Συνοριακές Συνθήκες	1.Κύλιση μόνο κατά τον κάθετο άξονα ($d_x=0$) στον κύλινδρο φόρτισης σε τρεις κόμβους. 2.Φορτίο 17,5 kN στο κέντρο του κυλίνδρου φόρτισης σε δέκα βήματα. 3.Πάκτωση ($d_x=0$, $d_y=0$) στα κέντρα των κυλίνδρων στήριξης του δοκιμίου.	1.Κύλιση μόνο κατά τον κάθετο άξονα ($d_x=0$) στον κύλινδρο φόρτισης σε τρεις κόμβους. 2.Φορτίο 11,8 kN στο κέντρο του κυλίνδρου φόρτισης σε πέντε βήματα. 3.Πάκτωση ($d_x=0$, $d_y=0$) στα κέντρα των κυλίνδρων στήριξης του δοκιμίου.	1.Δεν υπάρχει περιορισμός κίνησης στον κύλινδρο φόρτισης. 2.Φορτίο 3,125 kN στο κέντρο του κυλίνδρου φόρτισης σε δέκα βήματα. 3.Πάκτωση ($d_x=0$, $d_y=0$) στα κέντρα των κυλίνδρων στήριξης του δοκιμίου.
Ιδιότητες Υλικών	Χάλυβας: Ελαστικό ισότροπο υλικό $E=210$ GPa, $\nu=0,3$. Μάρμαρο: Ελαστοπλαστικό υλικό με τη χρήση του παραβολικού κριτηρίου αστοχίας Mohr-Coulomb $E=84,5$ GPa, $\nu=0,26$, $\sigma=2,316$ kN/cm ² , $\beta=0,061$.	Χάλυβας: Ελαστικό ισότροπο υλικό $E=210$ GPa, $\nu=0,3$. Μάρμαρο: Ελαστικό εγκαρσίως ισότροπο $E_1=84,5$ GPa, $E_2=50$ GPa, $\nu_1=0,26$, $\nu_2=0,11$.	Χάλυβας: Ελαστικό ισότροπο υλικό $E=210$ GPa, $\nu=0,3$. Κογχυλιόλιθος: Ελαστοπλαστικό υλικό με τη χρήση του παραβολικού κριτηρίου αστοχίας Mohr-Coulomb $E=1,1$ GPa, $\nu=0,25$, $\sigma=2,65$ kN/cm ² , $\beta=0,0757$.
Στοιχεία Επαφής	Μεταξύ μαρμάρου και χάλυβα, συντελεστής τριβής 0,4.	Μεταξύ μαρμάρου και χάλυβα, συντελεστής τριβής 0,4.	Μεταξύ κογχυλιόλιθου και χάλυβα, συντελεστής τριβής 0,4.

Το Διονυσιακό μάρμαρο προσομοιώθηκε αρχικά σαν ισότροπο ελαστοπλαστικό υλικό και χωρίς να ληφθεί υπόψη ο εγκαρσίως ισότροπος χαρακτήρας του. Η υπόθεση της γραμμικότητας ισχύει για τη μεγαλύτερη περιοχή της καμπύλης τάσης – παραμόρφωσης για τις περιοχές μακριά από τη ζώνη επιρροής και το σημείο εφαρμογής του φορτίου.

Τα αποτελέσματα της αριθμητικής επίλυσης βρίσκονται σε καλή συμφωνία με τα πειραματικά αποτελέσματα σχετικά με το βέλος κάμψης της δοκού και το πεδίο παραμόρφωσης. Κάποιες αποκλίσεις που παρατηρούνται πιθανόν να οφείλονται στην υπόθεση της ισοτροπίας που υιοθετείται και μάλιστα με μεγέθη που αντιστοιχούν στην ισχυρή διεύθυνση, καθώς και στην υπόθεση ότι η ενδεχόμενη ελαστοπλαστική συμπεριφορά σε εφελκυσμό είναι παρόμοια με της θλίψης.

Επίσης, παρατηρείται ότι η ζώνη επιρροής που αναπτύσσεται γύρω από την εγκοπή είναι ισχυρότερη από την επίδραση του συγκεντρωμένου φορτίου, με αποτέλεσμα ο ουδέτερος άξονας της δοκού να μετακινείται προς την κάτω ακμή του δοκιμίου (Σχήμα 5.16).

Από την προσομοίωση του Διονυσιακού μαρμάρου σαν γραμμικά ελαστικό εγκαρσίως ισότροπο υλικό, προέκυψε ότι και σε αυτήν την περίπτωση ισχύει υπόθεση της γραμμικότητας ισχύει για τη μεγαλύτερη περιοχή της καμπύλης τάσης – παραμόρφωσης για τις περιοχές μακριά από τη ζώνη επιρροής και το σημείο εφαρμογής του φορτίου.

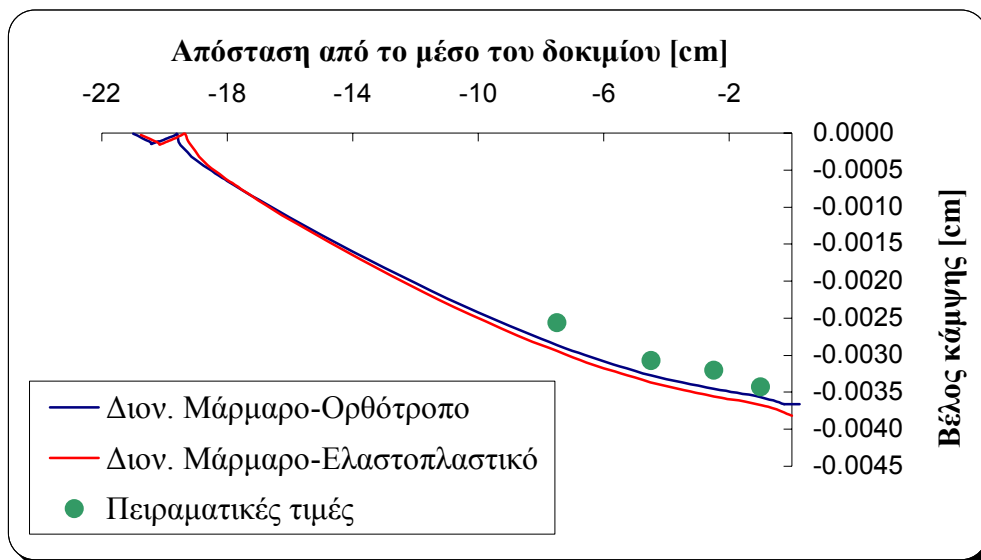
Ο ουδέτερος άξονας της δοκού μετακινείται προς την κάτω ακμή του δοκιμίου, καθώς η επίδραση της ζώνης επιρροής που αναπτύσσεται γύρω από την εγκοπή είναι ισχυρότερη από την επίδραση του συγκεντρωμένου φορτίου (Σχήμα 5.30).

Επίσης, τα αριθμητικά αποτελέσματα συμφωνούν με τις πειραματικές τιμές όσον αφορά το βέλος κάμψης της δοκού και το πεδίο παραμόρφωσης. Μερικές από τις αποκλίσεις που παρατηρούνται μπορούν να αποδοθούν:

- Στην υπόθεση της γραμμικότητας που υιοθετείται ή/και

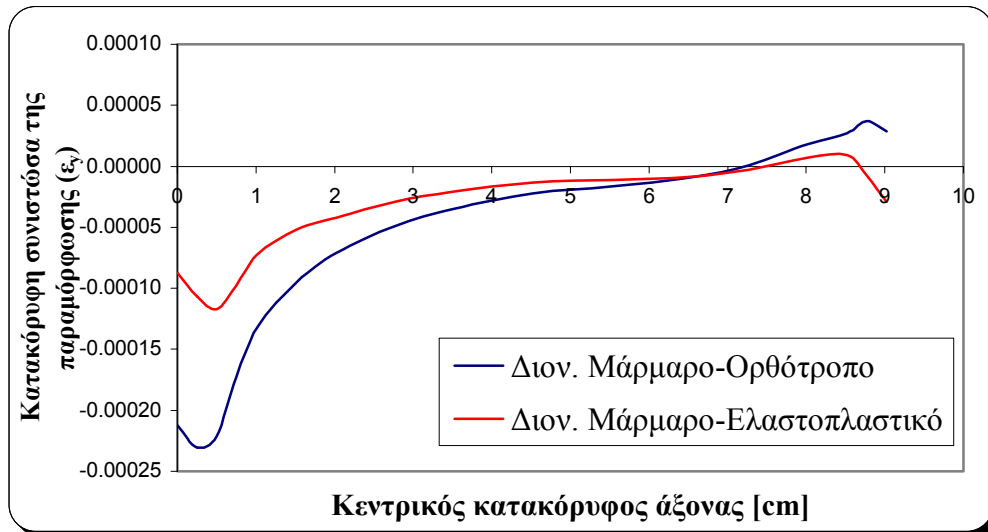
- Στην υπόθεση ότι οι δύο ασθενείς διευθύνσεις ανισοτροπίας περιγράφονται από τις ίδιες σταθερές ελαστικότητας.

Στα επόμενα διαγράμματα (Σχήματα 7.1-7.3) συγκρίνονται οι επιλύσεις των δύο διαφορετικών μοντέλων Διονυσιακού μαρμάρου. Στο διάγραμμα του Σχήματος 7.1 παρουσιάζεται το βέλος κάμψης της κάτω ακμής του δοκιμίου συναρτήσει της απόστασης από το μέσο του δοκιμίου και όπως διακρίνεται η επίλυση κατά την οποία το μάρμαρο προσομοιώνεται σαν ελαστικό εγκαρσίως ισότροπο υλικό είναι πλησιέστερη στις πειραματικές τιμές.

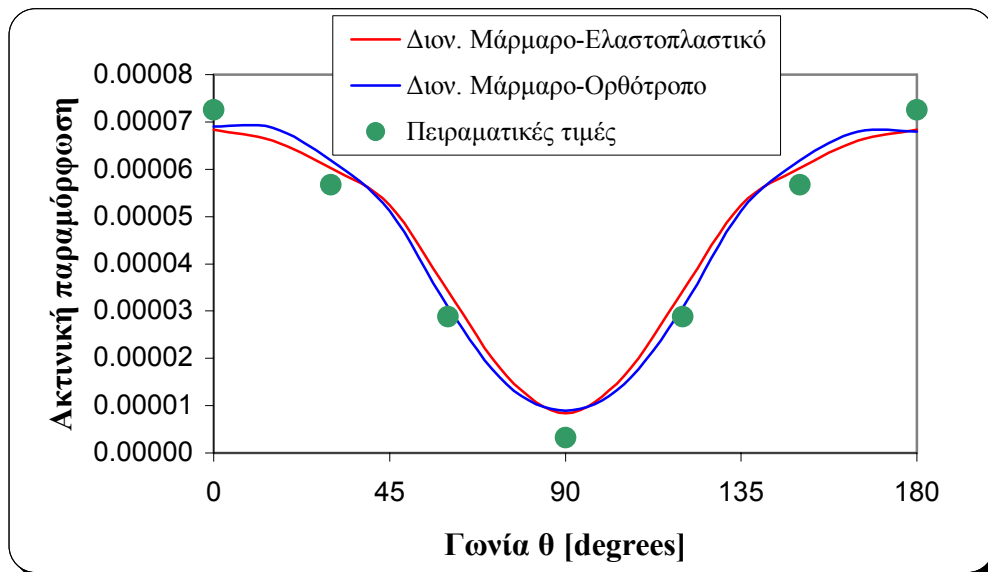


Σχήμα 7.1: Βέλος κάμψης της κάτω ακμής του δοκιμίου συναρτήσει της απόστασης από το μέσο του δοκιμίου και για τα δύο μοντέλα Διονυσιακού μαρμάρου

Στο διάγραμμα του Σχήματος 7.2 παρουσιάζεται η κατανομή της κατακόρυφης συνιστώσας της παραμόρφωσης (ϵ_y) κατά μήκος του κεντρικού κατακόρυφου άξονα και για τις δύο διαφορετικές επιλύσεις σχετικά με την προσομοίωση του Διονυσιακού μαρμάρου. Από την κατανομή των καμπυλών προκύπτει ότι υπάρχει μεγάλη απόκλιση μεταξύ των δύο επιλύσεων, ενώ οι καμπύλες συμπίπτουν περίπου σε απόσταση 2,5 cm από την κορυφή της εγκοπής, γεγονός που επιβεβαιώνεται και από το διάγραμμα του Σχήματος 7.3, στο οποίο παρουσιάζεται η κατανομή της ακτινικής παραμόρφωσης σε απόσταση 2,5 cm από την κορυφή της εγκοπής και για τα δύο μοντέλα Διονυσιακού μαρμάρου.



Σχήμα 7.2: Κατανομή της κατακόρυφης συνιστώσας της παραμόρφωσης (ε_y) κατά μήκος του κεντρικού κατακόρυφου άξονα και για τα δύο μοντέλα Διονυσιακού μαρμάρου



Σχήμα 7.3: Κατανομή της ακτινικής παραμόρφωσης σε απόσταση 2,5 cm από την κορυφή της εγκοπής και για τα δύο μοντέλα Διονυσιακού μαρμάρου

Κατά την προσομοίωση του προβλήματος της κάμψης τριών σημείων σε δοκίμια Κογχυλιόλιθου, προέκυψε ότι η τεχνική θεωρία κάμψης Bernoulli-Euler δεν είναι επαρκής για την περιγραφή του προβλήματος, λόγω της επίδρασης του συγκεντρωμένου φορτίου, καθώς επίσης και λόγω του μικρού ανοίγματος της δοκού. Φάνηκε επίσης, ότι ουδέτερος άξονας της δοκού δεν συμπίπτει με τον άξονα συμμετρίας της και δεν περνά από το κεντροειδές της, ενώ αναπτύσσονται σημαντικές

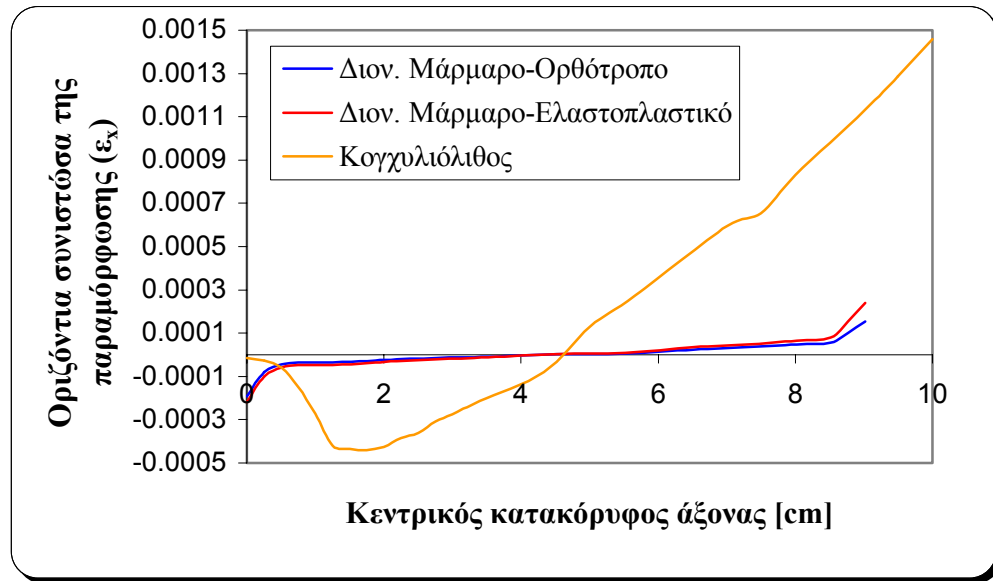
εγκάρσιες και διατμητικές παραμορφώσεις σχεδόν σε όλο το μήκος και το ύψος του δοκιμίου, δεδομένου ότι το μικρό άνοιγμα του δεν επιτρέπει στα φαινόμενα να θεωρούνται ως τοπικά: η επιρροή τους μειώνεται σε μια απόσταση από το σημείο εφαρμογής του φορτίου ίση περίπου με το ύψος του διαγώνιου τμήματος της δοκού.

Τα αριθμητικά αποτελέσματα πλησιάζουν πολύ καλά τα πειραματικά σχετικά με το βέλος κάμψης της δοκού. Το ίδιο ισχύει και για τις αξονικές παραμορφώσεις, ενώ μερικές αποκλίσεις παρατηρούνται για τις εγκάρσιες, που πιθανόν να οφείλονται στην πολυστρωματική φύση του συγκεκριμένου υλικού, η οποία δεν λήφθηκε υπόψη σε αυτή τη μελέτη.

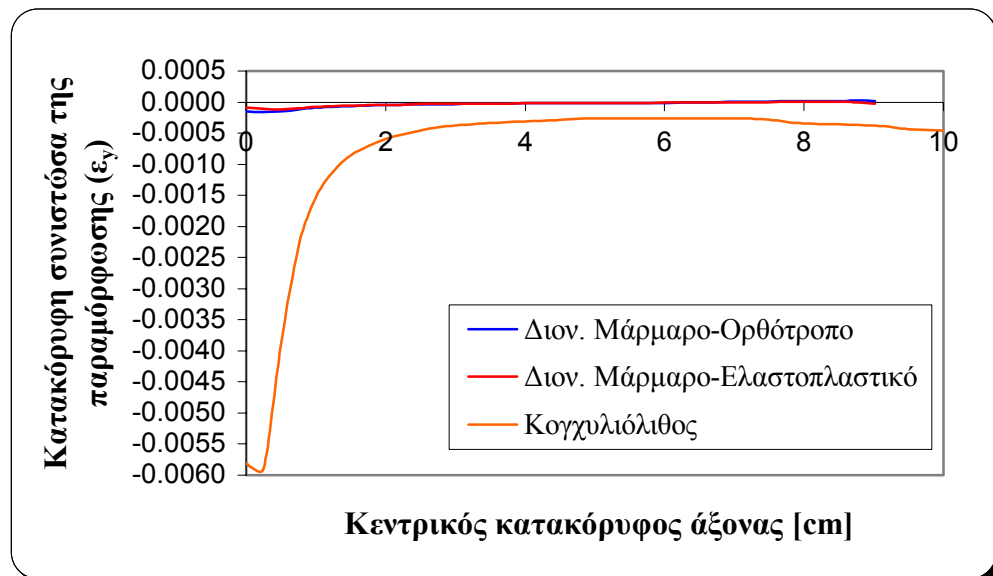
Επίσης, ο ουδέτερος άξονας της δοκού μετατοπίζεται προς την πάνω ακμή του δοκιμίου, λόγω της επίδρασης του συγκεντρωμένου φορτίου, καθώς σε αυτήν την περίπτωση δεν υπάρχει εγκοπή που θα μπορούσε να επηρεάσει τον ουδέτερο άξονα (Σχήμα 5.44).

Στα σχήματα 7.4 και 7.5 παρουσιάζεται η κατανομή των δύο συνιστωσών της παραμόρφωσης κατά μήκος του κεντρικού κατακόρυφου άξονα και για τα τρία διαφορετικά μοντέλα. Πιο συγκεκριμένα στα διάγραμμα του Σχήματος 7.4 διακρίνεται για κάθε μοντέλο η κατανομή της (ϵ_x) κατά μήκος του κεντρικού κατακόρυφου άξονα. Είναι εμφανής η σημαντική διαφορά στις τιμές της (ϵ_x) μεταξύ του Διονυσιακού μαρμάρου και του Κογχυλιόλιθου που οφείλεται στη διαφορά των μέτρων ελαστικότητας των δύο υλικών.

Αντίστοιχα στο διάγραμμα του Σχήματος 7.5 διακρίνεται η κατανομή της (ϵ_y) κατά μήκος του κεντρικού κατακόρυφου άξονα για κάθε μοντέλο. Και σε αυτήν την περίπτωση ισχύει η μεγάλη απόκλιση στις τιμές της (ϵ_y) μεταξύ Διονυσιακού μαρμάρου και Κογχυλιόλιθου.



Σχήμα 7.4: Κατανομή της οριζόντιας συνιστώσας της παραμόρφωσης (ϵ_x) κατά τον κεντρικό κατακόρυφο άξονα και για τα τρία μοντέλα



Σχήμα 7.5: Κατανομή της κατακόρυφης συνιστώσας της παραμόρφωσης (ϵ_y) κατά τον κεντρικό κατακόρυφο άξονα και για τα τρία μοντέλα

7.2 ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ

Για την περαιτέρω μελέτη του προβλήματος της κάμψης τριών σημείων, προτείνεται η προσομοίωση του προβλήματος με την Μέθοδο των Πεπερασμένων Στοιχείων σε τρεις διαστάσεις, για την λεπτομερέστερη εξαγωγή αποτελεσμάτων σχετικά με το πεδίο τάσεων και παραμορφώσεων. Επίσης, το πρόβλημα θα μπορούσε να μελετηθεί συναρτήσει της επίδρασης του μεγέθους (size effect) των δοκιμίων, καθώς είναι γνωστό ότι η αντοχή των υλικών εξαρτάται και από το μέγεθος των δοκιμίων.

Προτείνεται επίσης, η προσομοίωση του Κογχυλιόλιθου λαμβάνοντας υπόψη την πολυστρωματική φύση του υλικού, καθώς στην παρούσα μελέτη ο Κογχυλιόλιθος προσομοιώθηκε σαν ισότροπο ελαστοπλαστικό υλικό με την χρήση του παραβολικού κριτηρίου αστοχίας Mohr-Coulomb.

Όσον αφορά την μεγάλη απόκλιση που παρουσίασαν οι καμπύλες της κατακόρυφης συνιστώσας της παραμόρφωσης (ϵ_y) κατά μήκος του κεντρικού κατακόρυφου άξονα (Σχήμα 7.2), προτείνεται η περαιτέρω διερεύνηση του προβλήματος, με την σύγκριση πειραματικών και αριθμητικών αποτελεσμάτων σε διαφορετικά σημεία.

Βιβλιογραφία

ΔΙΕΘΝΗΣ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. Agioutantis, Z., Kourkoulis, S.K., Maurigiannakis, S. and Papatheodorou, E., (2003). “Notched Marble Specimens Under Bending: Experimental Study and Numerical Analysis Using an Elastoplastic Model with Contact Elements”, ESMC-5, Thessaloniki, Hellas.
2. Anderson, T.L., (1995). “Fracture Mechanics: Fundamentals and Applications”, 2nd Edition, CRC Press, Boca Raton, Florida, USA.
3. Exadaktylos, G.E. and Kourkoulis, S.K., (2002). “Three-Point Bending of Transversely Isotropic Rock-Type Materials: An Analytical, Numerical and Experimental Study”, 4th GRACM, Patra, Hellas.
4. Gere, J.M. and Timoshenko, S.P., (1997). “Mechanics of Materials”, 4th Edition, PWS Publishing Company, Boston, USA.
5. Kourkoulis, S.K., Agioutantis, Z., Maurigiannakis, S. and Papatheodorou, E., (2003)α. “Experimental and Numerical Analysis of Notched Marble Beams Under Bending: An Elastic Transversely Isotropic Model”, ICCES 2003, Corfu, Hellas.
6. Kourkoulis, S.K., Agioutantis, Z., Maurigiannakis, S. and Papatheodorou, E., (2003)β. “Modeling Three-Point Bending of Rock Type Materials Using An Elastoplastic Model with Contact Elements”, ESMC-5, Thessaloniki, Hellas.
7. Kourkoulis, S.K., Exadaktylos, G.E., Vardoulakis, I. and Stavropoulou, M.C., (1997). “Local Strains due to Punch Effect in Three Point Bending of Marble Beams”, 9th International Congress on Rock Mechanics, Paris, France.
8. Kourkoulis, S.K., Exadaktylos, G.E. and Vardoulakis, I., (1999). “U-Notched Dionysos-Pentelicon Marble Beams in Three Point Bending: The Effect of Nonlinearity, Anisotropy and Microstructure”, International Journal of Fracture 98: 369-392, 1999.

9. Kourkoulis, S.K., Stavropoulou, M.C., (1999). "Local Strains due to Punch Effect in Three Point Bending of Marble Beams", 9th International Society for Rock Mechanics, Paris, France.
10. MARC Analysis Research Corporation, Users' Manuals, 1995-1998.
11. Mentat 2, User's guide, 1996.
12. Potts, D. and Zdravkovic, L. (1999). "Finite Element Analysis in Geotechnical Engineering", Thomas Telford.
13. Timoshenko, S., (1986). "Strength of Materials: Part 1, Elementary Theory and Problems", 3rd Edition, CBS Publishers and Distributors, Delhi, India.
14. Timoshenko, S., (1986). "Strength of Materials: Part 2, Advanced Theory and Problems", 3rd Edition, CBS Publishers and Distributors, Delhi, India.
15. Timoshenko, S.P., Goodier, J.N., (1970). "Theory of Elasticity", 3rd Edition, McGraw-Hill International Editions.
16. Vardoulakis, I., Exadaktylos, G.E., Kourkoulis, S.K., (2001). "Size Effect on Failure Load of Marble Beams Under Three Point Bending", 6th Congress of Mechanics, Vol. II (Aifantis & Kounadis Eds.), Thessaloniki, July 19-21, pp. 140-148.
17. Vardoulakis, I., Kourkoulis, S.K. and Zambas, C. (1998). "Modeling of the Mechanical Behaviour of a Conchylites Shellstone", 2nd International Symposium on Hard Soils-Soft Rocks, Naples, Italy.
18. Vardoulakis, I., Kourkoulis, S.K., Pazis, D.N. and Andrianopoulos, N.P. (1995). "Mechanical Behavior of Dionysos Marble in Direct Tension", Felsmechanik Kolloquium, Universitat Fridericiana Karlsruhe, Germany.
19. Whittaker, B.N., Singh, R.N. and Sun, G. (1992). "Rock Fracture Mechanics", Elsevier Science Publishers B.V., Amsterdam, The Netherlands.

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. Αγιουτάντης, Ζ.Γ., (2002). “Στοιχεία Γεωμηχανικής, Μηχανική Πετρωμάτων”, Εκδόσεις ΙΩΝ, Αθήνα, Ελλάδα.
2. Αγιουτάντης, Ζ.Γ., Μερτίκας, Σ.Π., (2003). “Ένας Πρακτικός Οδηγός για τη Συγγραφή Τεχνικών Κειμένων”, Εκδόσεις ΙΩΝ, Αθήνα.
3. Βαρδουλάκης, Ι., Κουρκουλής, Σ., Εξαδάκτυλος, Γ., Ροζάκης, Α., (2002). “Μηχανικές Ιδιότητες και Συμβατότητα Φυσικών Δομικών Λίθων στα Αρχαία Μνημεία: Το Διονυσιακό Μάρμαρο”, Διεπιστημονική Ημερίδα «Ο Δομικός Λίθος στα Μνημεία», ΙΓΜΕ, Αθήνα, Ελλάδα.
4. Μπακόλας, Β., (2004). “Συμβολή στην Μελέτη της Επίδρασης των Διαστάσεων του Δοκιμίου στις Μηχανικές Ιδιότητες Γεωδών Υλικών: Η Περίπτωση του Κογχυλιόλιθου”, Εθνικό Μετσόβειο Πολυτεχνείο, Τμήμα Πολιτικών Μηχανικών, Αθήνα, Μάρτιος 2004.