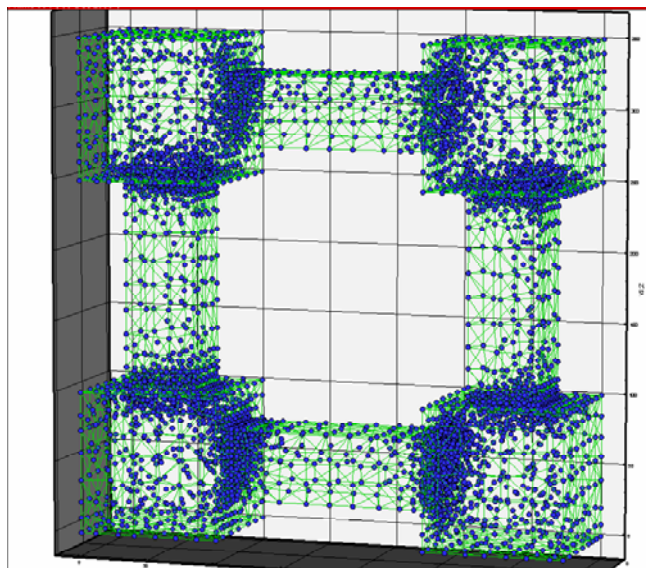




ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ ΚΡΗΤΗΣ

ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΠΑΡΑΓΩΓΗΣ ΚΑΙ ΔΙΟΙΚΗΣΗΣ



*Ανάπτυξη λογισμικού δημιουργίας τριδιάστατου μη δομημένου πλέγματος
με δυνατότητες προσαρμογής της πυκνωσης*

Διατριβή που υπεβλήθη για τη μερική ικανοποίηση των απαιτήσεων
για την απόκτηση Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης

υπό

Λάζαρου Δ. Αδαμούδη

Επιβλέπων καθηγητής: Ιωάννης Κ. Νικολός

Χανιά, Ιανουάριος 2007

© Copyright υπό Λάζαρου Αδαμούδη, Χανιά 2007

Η διατριβή του Λάζαρου Αδαμούδη, εγκρίνεται

Ιωάννης Κ. Νικολός
Λέκτορας, Επιβλέπων

Βασίλειος Σ. Κουϊκόγλου
Καθηγητής

Γεώργιος Σταυρουλάκης
Καθηγητής

Σύντομο Βιογραφικό Σημείωμα

Ο Λάζαρος Αδαμούδης γεννήθηκε στη Θεσσαλονίκη το 1981, όπου μεγάλωσε και ολοκλήρωσε τη βασική του εκπαίδευση στο 5^ο Λύκειο Θεσσαλονίκης. Το 2000 εισήχθη στο Τμήμα Μηχανικών Παραγωγής και Διοίκησης του Πολυτεχνείου Κρήτης. Το 2005 αποφοίτησε με βαθμό 7,81 και εισήχθη στο Μεταπτυχιακό Πρόγραμμα Ειδίκευσης του ιδίου τμήματος, στον Τομέα Συστημάτων Παραγωγής. Με την εργασία αυτή ολοκληρώνει τις μεταπτυχιακές σπουδές του.

Ευχαριστίες

Με την ολοκλήρωση αυτής της εργασίας και των μεταπτυχιακών σπουδών μου νοιώθω την ανάγκη να ευχαριστήσω τον κ. Ι. Νικολό, ο οποίος ήταν ο επιβλέπων της εργασίας αυτής. Η προσφορά του στο πρόσωπό μου είναι πολύ μεγάλη και δεν περιορίζεται μόνο στην πολύ καλή συνεργασία και καθοδήγηση. Επίσης ευχαριστώ τους καθηγητές Β. Κουϊκόγλου και Γ. Σταυρουλάκη, για την τιμή που μου έκαναν με το να είναι μέλη της εξεταστικής επιτροπής.

Ευχαριστώ τον στρατευμένο πλέον κ. Βαλάκο Γιάννη για την πολύτιμη βοήθειά του στη δημιουργία των γεωμετριών και των πλεγμάτων που χρησιμοποιήθηκαν για τον έλεγχο της μεθοδολογίας που αναπτύχθηκε.

Τέλος ευχαριστώ την οικογένειά μου για τη στήριξή τους και το κουράγιο που εξακολουθούν να επιδεικνύουν.

«Έμαθα τι είναι τύχη: όταν η προετοιμασία συναντά την ευκαιρία».

*Ειρήνη Παπακωνσταντοπούλου.
Πρωταθλήτρια Ελλάδος το 2006 στη συγχρονισμένη κολύμβηση.*

Περιεχόμενα

Πρόλογος	7
Κεφάλαιο 1: Γενικά στοιχεία για τη δημιουργία πλέγματος	8
1.1 Εισαγωγικά	8
Κεφάλαιο 2: Η τεχνική του προελαύνοντος μετώπου	11
2.1 Εισαγωγικά	11
2.2 Απαιτήσεις της μεθόδου	11
2.3 Μοντελοποίηση της γεωμετρίας	12
2.4 Η μέθοδος Advancing Front	13
2.4.1 Σύσταση διαδοχικών μετώπων	14
2.4.2 Παράμετροι του πλέγματος υποβάθρου (Background mesh)	14
2.4.3 Δημιουργία τετραέδρων	17
2.5 Εκτίμηση της ποιότητας του πλέγματος	19
2.6 Δομές δεδομένων	21
2.6.3 Το εναλλασσόμενο ψηφιακό δέντρο (ADT)	22
2.6.3 Γεωμετρική αναζήτηση	24
2.6.3 Γεωμετρική τομή	24
2.7 Η χρήση του εναλλασσόμενου ψηφιακού δέντρου στη δημιουργία πλέγματος	27
Κεφάλαιο 3: Ο Αλγόριθμος που αναπτύχθηκε	28
3.1 Δεδομένα εισόδου	28
3.2 Δημιουργία πλέγματος υποβάθρου και ορισμός παραμέτρων	29
3.3 Βασική επαναληπτική διαδικασία	31
3.4 Σύσταση διαδοχικών μετώπων	43
3.5 Περιορισμοί	46
3.6 Τερματισμός της βασικής διαδικασίας	50
3.7 Διαδικασία αποκατάστασης	57
3.8 Τελεστής εμφύτευσης κόμβου	57
3.9 Τελεστής Laplacian εξομάλυνσης	61
3.10 Τελεστής διεύρυνσης τομέων	63
3.11 Τελεστής εξομάλυνσης οριακών επιφανειών	66
3.12 Τελεστής αφαίρεσης κορυφών	69
3.13 Τροποποιημένος τελεστής εμφύτευσης κόμβου	71
3.14 Τελεστής διακριτοποίησης υποχώρων	73
3.15 Επαναληπτική διαδικασία αποκατάστασης	76
Κεφάλαιο 4: Πιστοποίηση του αλγορίθμου	78
4.1 Κύβος	78
4.2 Μη κυρτή γεωμετρία με σφαίρες	81
4.3 Μη κυρτή γεωμετρία με κύβους και πρίσματα	84
Κεφάλαιο 5: Ανακεφαλαίωση και συμπεράσματα	86
5.1 Ανακεφαλαίωση της εργασίας	86
5.2 Συμπεράσματα	86
5.3 Προτάσεις	87
Παράρτημα Α: Διαγράμματα ροής	89
Α.1 Διάγραμμα ροής συνολικού αλγορίθμου	89
Α.2 Διάγραμμα ροής βασικής επαναληπτικής διαδικασίας	90
Α.3 Διάγραμμα ροής διαδικασίας αποκατάστασης	91
Βιβλιογραφία	92

Πρόλογος

Σκοπός της παρούσας εργασίας είναι η ανάπτυξη μεθοδολογίας και του αντίστοιχου λογισμικού για τη διακριτοποίηση αυθαίρετων γεωμετριών με τη δημιουργία τριδιάστατου πλέγματος τετραεδρικών στοιχείων. Η προς διακριτοποίηση γεωμετρία περιγράφεται από ένα επιφανειακό πλέγμα τριγωνικών στοιχείων, το οποίο αποτελεί το μοναδικό δεδομένο εισόδου. Η μεθοδολογία που αναπτύχθηκε αντιμετωπίζει γεωμετρικές ανεξαρτήτως πολυπλοκότητας και επιφανειακής πυκνώσης, δίνοντας έμφαση στην αξιοπιστία, στην αυτοματοποίηση, στην ταχύτητα και στην οικονομία υπολογιστικών πόρων.

Για τη δοκιμή της προτεινόμενης μεθοδολογίας χρησιμοποιήθηκαν επιφανειακά πλέγματα, που κατασκευάστηκαν με το λογισμικό πακέτο *CATIA*. Οι αντίστοιχες γεωμετρικές ποικίλουν ως προς την πολυπλοκότητα, την κυρτότητα, την πυκνώση και τον όγκο τους. Η εγκυρότητα του πλέγματος ελέγχθηκε τόσο υπολογιστικά, όσο και οπτικά με τη βοήθεια του λογισμικού *Tecplot 9.0*.

Ο αλγόριθμος που αναπτύχθηκε βασίζεται στην τεχνική του προελαύνοντος μετώπου, αλλά περιλαμβάνει πρωτότυπες ιδέες και τεχνικές, που αναπτύχθηκαν στα πλαίσια της παρούσας εργασίας. Ιδιαίτερη βαρύτητα έχει δοθεί στην παρουσίαση των τελευταίων.

Στη συνέχεια γίνεται μια σύντομη αναφορά στα αντικείμενα που εξετάζονται σε κάθε κεφάλαιο της εργασίας. Στο κεφάλαιο 1 παρουσιάζονται γενικά στοιχεία για την δημιουργία πλέγματος και τη χωρική διακριτοποίηση. Δίνονται επιγραμματικά οι βασικότερες μεθοδολογίες και η μέχρι σήμερα πρόοδος. Στο κεφάλαιο 2 καταγράφονται τα σημαντικότερα στοιχεία της τεχνικής του προελαύνοντος μετώπου. Παρουσιάζονται τα βήματα της μεθόδου, οι σχετικές δομές δεδομένων και η εφαρμογή τους. Στο κεφάλαιο 3 περιγράφονται τα βήματα του αλγορίθμου που αναπτύχθηκε στην παρούσα εργασία, με τη σειρά εφαρμογής τους. Ιδιαίτερη βαρύτητα δίνεται στις πρωτότυπες τεχνικές που συμπληρώνουν τη μέθοδο του κεφαλαίου 2. Η περιγραφή κάθε βήματος συνοδεύεται από κατάλληλα σχήματα και εικόνες. Στο κεφάλαιο 4 πιστοποιείται ο αλγόριθμος του κεφαλαίου 3, μέσω της εφαρμογής του σε διάφορες περιπτώσεις. Παρουσιάζονται και σχολιάζονται τα αποτελέσματα του αλγορίθμου. Στο κεφάλαιο 5 παρουσιάζονται γενικά συμπεράσματα και προτείνονται θέματα επέκτασης της παρούσας εργασίας. Στο παράρτημα Α παρατίθεται το διάγραμμα ροής του αλγορίθμου, που παρουσιάζεται αναλυτικά στο κεφάλαιο 3.

Κεφάλαιο 1

Γενικά στοιχεία για τη δημιουργία πλέγματος

1.1 Εισαγωγικά

Η αυτοματοποιημένη παραγωγή μη δομημένου πλέγματος αποτελεί ένα σχετικά νέο επιστημονικό πεδίο. Η κατασκευή μη δομημένου πλέγματος στις δύο διαστάσεις αφορά μεθόδους τριγωνικών και τετραπλευρικών στοιχείων, ενώ στις τρεις διαστάσεις οι αντίστοιχες μέθοδοι αφορούν τετραεδρικά και εξαεδρικά στοιχεία. Μεταξύ των μεθόδων αυτών περιλαμβάνονται μέθοδοι κατασκευής επιφανειακού πλέγματος, ενώ ένας άλλος κλάδος αφορά την μετα-επεξεργασία του πλέγματος και τη βελτίωσή του μέσω εξομάλυνσης, εκκαθάρισης και τοπικής βελτίωσης. Τέλος, άλλα σχετικά θέματα αφορούν στην κατασκευή προσαρμόσιμων, ανισοτροπικών και καρτεσιανών πλεγμάτων, καθώς και ζητήματα δομών δεδομένων και γεωμετρικής αναπαράστασης. Οι αλγόριθμοι δημιουργίας πλεγμάτων εφαρμόζουν γενικά πολύπλοκες επαναληπτικές τεχνικές, που προσαρμόζουν το πλέγμα στη γεωμετρία των οριακών επιφανειών.

[<http://www.andrew.cmu.edu/user/sowen/survey/index.html>].

Εννοιολογικά, ένα δομημένο πλέγμα διαφέρει από ένα μη δομημένο από το χαρακτηριστικό γνώρισμα του σταθερού πλήθους γειτονικών στοιχείων για κάθε εσωτερικό κόμβο του. Οι αλγόριθμοι δομημένου πλέγματος εφαρμόζουν συχνά τεχνικές “block-structured”, που χρησιμοποιούνται συνήθως στις εφαρμογές Υπολογιστικής Ρευστοδυναμικής (CFD), όπου συχνά απαιτείται αυστηρή ευθυγράμμιση των στοιχείων για τη σύλληψη φυσικών φαινομένων. Αντίθετα, στα μη δομημένα πλέγματα επιτρέπεται το μεταβλητό πλήθος γειτονικών στοιχείων για κάθε κόμβο. Τα συνηθέστερα μη δομημένα πλέγματα αποτελούνται από τριγωνικά (επιφανειακά) ή τετραεδρικά (χωρικά) στοιχεία, ενώ χρησιμοποιούνται επίσης τετραπλευρικά (επιφανειακά) και εξαεδρικά (χωρικά) στοιχεία.

Οι συνηθέστεροι σύγχρονοι αλγόριθμοι κατασκευής μη δομημένων πλεγμάτων εφαρμόζουν τις τεχνικές Octree, Delaunay και Advancing Front. Στην τεχνική Octree ένα σύνολο κύβων, που περικλείουν το γεωμετρικό μοντέλο, υποδιαιρείται επαναληπτικά μέχρι να επιτευχθεί η επιθυμητή ακρίβεια διακριτοποίησης. Στις περιοχές τομής των κύβων με τη γεωμετρία δημιουργούνται ακανόνιστα τριγωνικά στοιχεία, που χρησιμοποιούνται για την κατασκευή τετραέδρων.

Η τεχνική Delaunay είναι η πιο διαδεδομένη τεχνική κατασκευής τριγωνικών και τετραεδρικών στοιχείων. Εισάγει το ομώνυμο κριτήριο, σύμφωνα με το οποίο ένας νέος κόμβος δεν επιτρέπεται να βρίσκεται στο εσωτερικό της περιγεγραμμένης σφαίρας κάθε τετραέδρου του πλέγματος. Το κριτήριο Delaunay συνδυάζεται με κάποια μέθοδο δημιουργίας νέων κόμβων, οι οποίοι στη συνέχεια ενώνονται, δημιουργώντας τριγωνικά και τετραεδρικά στοιχεία.

Τέλος, μια επίσης διαδεδομένη τεχνική κατασκευής μη δομημένου πλέγματος είναι η τεχνική του προελαύνοντος μετώπου (Advancing front). Μια παραλλαγή της τεχνικής εφαρμόζεται στον αλγόριθμο, που αναπτύχθηκε στα πλαίσια της παρούσας εργασίας. Δύο ερευνητές που συνέβαλαν αποφασιστικά στο συγκεκριμένο αντικείμενο είναι ο Rainald Lohner και ο S. H. Lo [Lohner, 1989], [Lo, 1985], [Lo, 1991]. Στη μέθοδο αυτή τα τετράεδρα παράγονται προοδευτικά προς το εσωτερικό του χωρίου διακριτοποίησης, χρησιμοποιώντας γεωμετρικά κριτήρια για την τοποθέτηση των νέων κόμβων του πλέγματος.

Αρκετές από τις σύγχρονες ανάγκες δημιουργίας πλέγματος αφορούν στη διαμόρφωση επιφανειακών πλεγμάτων σε αυθαίρετες τριδιάστατες επιφάνειες. Τα επιφανειακά στοιχεία των επιφανειών, που συνήθως αναπαριστώνται από επιφάνειες NURBS, χρησιμοποιούνται είτε άμεσα ως δομικά στοιχεία, είτε ως δεδομένα εισόδου σε μια γεννήτρια χωρικού πλέγματος. Οι αλγόριθμοι δημιουργίας επιφανειακού πλέγματος διακρίνονται σε αλγορίθμους παραμετρικού χώρου και σε απευθείας τριδιάστατου χώρου.

Οι αλγόριθμοι παραμετρικού χώρου αναπτύσσουν στοιχεία στον διδιάστατο παραμετρικό χώρο της επιφάνειας. Συχνά είναι πολύ αποδοτική η ανάπτυξη των στοιχείων στις δύο διαστάσεις και στη συνέχεια, ως τελικό στάδιο, οι συντεταγμένες των κορυφών μεταφέρονται στο φυσικό χώρο. Αντίθετα, οι αλγόριθμοι τριδιάστατου χώρου αναπτύσσουν εξ αρχής στοιχεία στην πραγματική τριδιάστατη γεωμετρία, χωρίς να λαμβάνεται υπ' όψη η παραμετρική αναπαράστασή της.

Σπάνια ένας αλγόριθμος δημιουργίας πλέγματος είναι ικανός να δημιουργήσει ένα βέλτιστο πλέγμα χωρίς την εφαρμογή μιας μετα-διαδικασίας βελτίωσης της συνολικής ποιότητας των στοιχείων. Οι δύο βασικότερες κατηγορίες βελτίωσης του πλέγματος είναι η εξομάλυνση και η εκκαθάριση. Η εξομάλυνση αφορά σε μεθόδους τροποποίησης των συντεταγμένων των κόμβων, διατηρώντας όμως αμετάβλητη τη συνδεσμολογία των στοιχείων του πλέγματος. Η εκκαθάριση αναφέρεται γενικά σε κάθε διαδικασία που τροποποιεί τη συνδεσμολογία των στοιχείων του πλέγματος.

Οι περισσότερες διαδικασίες εξομάλυνσης αποτελούν επαναληπτικές μεθοδολογίες, που μεταθέτουν μεμονωμένους κόμβους, βελτιώνοντας την τοπική ποιότητα των στοιχείων. Χρησιμοποιείται μια μεγάλη γκάμα μεθόδων, που διακρίνονται σε μεθόδους σταθμισμένου μέσου (μεταξύ των οποίων και η Laplacian διαδικασία που εφαρμόστηκε στην παρούσα εργασία), μεθόδους βελτιστοποίησης, φυσικές μεθόδους και μεθόδους τοποθέτησης μεσοκόμβων. Όπως και στην εξομάλυνση, η εκκαθάριση ενός πλέγματος περιλαμβάνει ένα μεγάλο αριθμό αλγορίθμων. Η βελτίωση της ποιότητας επιτυγχάνεται προχωρώντας σε τοπικές αλλαγές στη συνδεσμολογία των στοιχείων. Κάθε αλλαγή που εφαρμόζεται πρέπει να ικανοποιεί κάποια κριτήρια, που διακρίνονται σε κριτήρια βελτίωσης σχήματος και σε κριτήρια βελτίωσης της τοπολογίας. Η βελτίωση του σχήματος επιτυγχάνεται για παράδειγμα με διαγώνια αντιμετάθεση, ενώ μια τακτική βελτίωσης της τοπολογίας είναι η βελτιστοποίηση του πλήθους των ακμών που μοιράζονται έναν κόμβο.

Τέλος, εφαρμόζονται και διαδικασίες τοπικής βελτίωσης του πλέγματος (π.χ. τοπικής πυκνώσης), που αποσκοπούν στην αποδοτική τοπική μείωση του μεγέθους των στοιχείων. Η μείωση του όγκου είναι συνήθως χρήσιμη στη

σύλληψη τοπικών φυσικών φαινομένων, ή απλά στη τοπική βελτίωση της ποιότητας των στοιχείων.

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζουν τα αποτελέσματα έρευνας [<http://www.andrew.cmu.edu/user/sowen/survey/index.html>] που αφορά τις εφαρμογές δημιουργίας πλέγματος που χρησιμοποιήθηκαν κατά την περίοδο Σεπτεμβρίου του 1998. Στην έρευνα συμμετείχαν 94 προϊόντα λογισμικού διάφορων ειδών, αντιπροσωπευτικά των σύγχρονων διαθέσιμων αλγορίθμων. Τα σημαντικότερα συμπεράσματα είναι:

- Η συντριπτική πλειοψηφία των προϊόντων παράγουν διδιάστατο πλέγμα, ενώ τριδιάστατο πλέγμα παράγεται μόνο από το 68% των λογισμικών.
- Οι CFD εφαρμογές μπορούν να αξιοποιήσουν το 57% των προϊόντων, οι κατασκευαστικές και δομικές εφαρμογές το 28%, οι ηλεκτρομαγνητικές εφαρμογές επίσης 28%, οι περιβαλλοντολογικές εφαρμογές το 14% και οι εφαρμογές μεταφοράς θερμότητας το 10%.
- Το 45% των εφαρμογών βασίζεται στον αλγόριθμο Delaunay, το 25% στον αλγόριθμο προελαύνοντος μετώπου, ενώ μόλις το 6% στηρίζεται στον αλγόριθμο Octree.
- Το 21% των προϊόντων προσφέρουν τη δυνατότητα προσαρμογής του πλέγματος, το 41% προσφέρει δυνατότητα τοπικής βελτίωσης, ενώ μόλις το 10% προσφέρει τη δυνατότητα συνολικής βελτίωσης του πλέγματος.

Κεφάλαιο 2

Η τεχνική του προελαύνοντος μετώπου

2.1 Εισαγωγικά

Η τεχνική του προελαύνοντος μετώπου (advancing front technique, AFT) χρησιμοποιείται για τη δημιουργία μη δομημένων τριγωνικών πλεγμάτων στις δύο διαστάσεις. Εισήχθηκε από τον George [George, 1971], ενώ στη συνέχεια χρησιμοποιήθηκε και εξελίχθηκε από τον Lo [Lo, 1985]. Ακολουθώντας τροποποιήθηκε από τον Peraire [Peraire et al., 1987] ο οποίος υιοθέτησε την ταυτόχρονη δημιουργία στοιχείων και σημείων. Η τροποποίηση αυτή επέτρεψε τον τοπικό έλεγχο του πλέγματος μέσω της τοπικής διαφοροποίησης του επιθυμητού μεγέθους και σχήματος των στοιχείων.

Η μεθοδολογία επεκτάθηκε και στις τρεις διαστάσεις [Lohner et al., 1988], [Peraire et al., 1988], [Lo, 1991], [Golgolab, 1989], [Huet, 1990]. Πρόσφατες εφαρμογές της μεθόδου βελτιώνουν την ταχύτητα και την αποδοτικότητά της. Επιπλέον, κατάλληλη τροποποίηση της μεθόδου χρησιμοποιείται για την ανάπτυξη μη δομημένων πλεγμάτων εξαεδρικών στοιχείων.

2.2 Απαιτήσεις της μεθόδου

Σκοπός του αλγορίθμου είναι η διακριτοποίηση ενός υπολογιστικού χωρίου περίπλοκης γεωμετρίας με τη μορφή ενός μη δομημένου πλέγματος τετραεδρικών στοιχείων [Peraire et al., 1999]. Η προσέγγιση αυτή παρουσιάζει ιδιαίτερο ενδιαφέρον, καθώς μπορεί να αυτοματοποιηθεί πλήρως και να εξασφαλίσει μικρούς υπολογιστικούς χρόνους. Στη μη δομημένη μορφή, το πλήθος των κόμβων και των στοιχείων που συνορεύουν με έναν εσωτερικό κόμβο του πλέγματος δεν είναι σταθερό στο σύνολο του χωρίου. Η έλλειψη κανονικότητας στο πλέγμα συνεπάγεται αυξημένο υπολογιστικό κόστος, με την έννοια του χρόνου και της υπολογιστικής μνήμης, σε σύγκριση με αντίστοιχα δομημένα πλέγματα. Ωστόσο, το μη δομημένο πλέγμα προσφέρει προσαρμοστικότητα και γεωμετρική ευκαμψία.

Για την βέλτιστη αξιοποίηση των παραπάνω χαρακτηριστικών η διαδικασία ανάπτυξης του πλέγματος θα πρέπει να ικανοποιεί τις παρακάτω απαιτήσεις [Peraire et al., 1999]:

- Ο αλγόριθμος πρέπει να χειρίζεται αυθαίρετες γεωμετρίες αυτόματα, με την ελάχιστη δυνατή παρέμβαση του χρήστη.
- Τα δεδομένα εισόδου πρέπει να περιοριστούν σε μια υπολογιστική γεωμετρική αναπαράσταση του χωρίου.
- Η διαδικασία πρέπει να υποστηρίζει την τοπική διαφοροποίηση του μεγέθους και του σχήματος των στοιχείων.

- Η διαδικασία πρέπει να υποστηρίζει τη χρήση προσαρμοστικών μεθόδων με στόχο την ανάπτυξη της ακριβέστερης δυνατής προσέγγισης για δεδομένο πλήθος κόμβων.

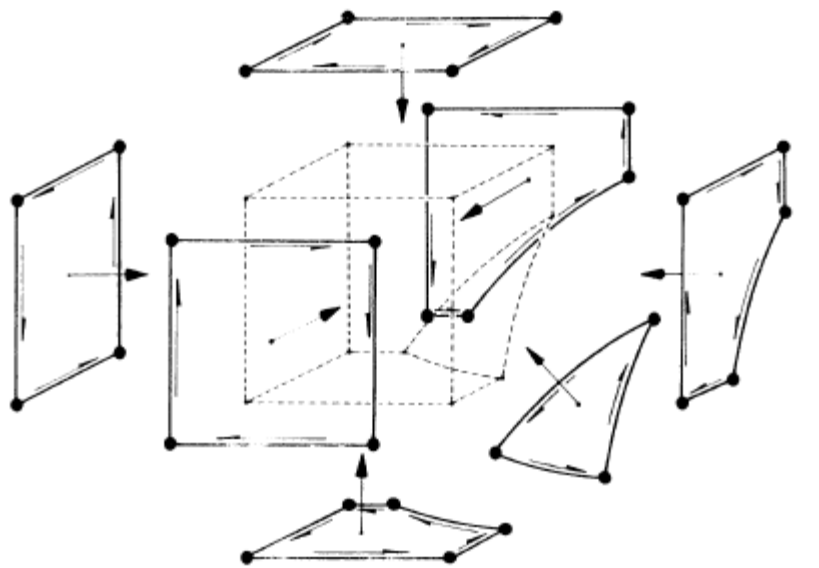
Η αλγοριθμική διαδικασία που περιγράφεται στη συνέχεια αποτελεί μια τριδιάστατη επέκταση της μεθόδου AFT [Peraire et al., 1987]. Η μέθοδος εφαρμόζεται στο σύστημα FELISA [Peiro et al., 1994] με την αρχική της μορφή. Η παρούσα εργασία χρησιμοποιεί την παραπάνω μέθοδο με σημαντικές τροποποιήσεις, στις οποίες θα δοθεί ιδιαίτερη βαρύτητα στα επόμενα κεφάλαια.

2.3 Μοντελοποίηση της γεωμετρίας

Η οριακή επιφάνεια του προς διακριτοποίηση χωρίου πρέπει να παρασταθεί με κατάλληλο τρόπο ώστε να είναι εφαρμόσιμος ο αλγόριθμος. Η αναπαράσταση αυτή θα πρέπει να παρουσιάζει τη μεγαλύτερη δυνατή γενικότητα. Η στερεή μοντελοποίηση προσφέρει τα καταλληλότερα εργαλεία για την αναπαράσταση και επεξεργασία αυθαίρετων γεωμετρικών σχημάτων.

Εν συντομία, η αναπαράσταση ενός αυθαίρετου χωρίου επιτυγχάνεται με τη χρήση σύνθετων καμπυλών και επιφανειών. Το σύνολό τους τείνει να προσεγγίσει με ακρίβεια την οριακή επιφάνεια του χωρίου. Η ακριβέστερη προσέγγιση επιτυγχάνεται με τη χρήση τριγωνικών στοιχείων με μεταβαλλόμενο σχήμα και μέγεθος. Το σύνολο των τριγωνικών τριδιάστατων στοιχείων συνιστούν ένα επιφανειακό, μη δομημένο πλέγμα. Επιπλέον, το μεταβλητό μέγεθος των τριγωνικών στοιχείων επιτρέπει την πύκνωση του επιφανειακού πλέγματος, που αναπαριστά το χωρίο, στις περιοχές αυξημένου ενδιαφέροντος.

Επιπλέον, τα οριακά στοιχεία που αναπαριστούν τη γεωμετρία οφείλουν να παρουσιάζουν συγκεκριμένο προσανατολισμό. Η φορά αρίθμησης των κόμβων, που συνθέτουν κάθε τριγωνικό στοιχείο, θα πρέπει να είναι τέτοια ώστε ο προσανατολισμός κάθε στοιχείου να υποδεικνύει το χώρο που πρόκειται να διακριτοποιηθεί (σχήμα 2.1).



Σχήμα 2.1: Κατεύθυνση των οριακών επιφανειών [Peraire et al., 1999].

2.4 Η μέθοδος *Advancing Front*

Το σημαντικότερο χαρακτηριστικό της τεχνικής του προελαύνοντος μετώπου είναι η ταυτόχρονη δημιουργία νέων κόμβων, ακμών, τριγώνων και τετραέδρων [Peraire et al., 1999]. Το χαρακτηριστικό αυτό δίνει τη δυνατότητα δημιουργίας στοιχείων μεταβλητού σχήματος και αποτελεί τη βασικότερη διαφορά από τις μεθόδους που βασίζονται στην τακτική *Delaunay*, οι οποίες γενικά συνδέουν σημεία τα οποία έχουν προηγουμένως διαταχθεί στο χώρο.

Το πρόβλημα συνίσταται στην διαίρεση ενός αυθαίρετα πολύπλοκου γεωμετρικού χώρου σε μια έγκυρη συναρμογή τρισδιάστατων στοιχείων. Η εγκυρότητα του παραγόμενου πλέγματος εξασφαλίζεται αν τα στοιχεία που δημιουργούνται καλύπτουν το σύνολο του χωρίου, ενώ η τομή των στοιχείων επιτρέπεται μόνο στις κοινές κορυφές, ακμές και τριγωνικές επιφάνειές τους. Η διακριτοποίηση του χωρίου ξεκινά από το επιφανειακό πλέγμα και συνεχίζει σε διαδοχικά μέτωπα προς το κέντρο του. Τα τριγωνικά στοιχεία που συνθέτουν το επιφανειακό πλέγμα θα αποτελέσουν έδρες των τετραέδρων που συνορεύουν με την εξωτερική επιφάνεια του χωρίου. Συνεπώς, η κατανομή των κόμβων και η πυκνότητά τους στην οριακή επιφάνεια πρέπει να συμβαδίζει με την απαίτηση του χρήστη αναφορικά με το μέγεθος των τετραεδρικών στοιχείων.

Κατά τη δημιουργία ενός νέου τετραέδρου, οι τρεις κορυφές ενός τριγώνου του τρέχοντος μετώπου συνδέονται μέσω ακμών με έναν νέο, ή με έναν υπάρχον κόμβο. Κατά την προτεινόμενη μεθοδολογία στην παρούσα εργασία το τρέχον μέτωπο δεν ανανεώνεται συνεχώς, όπως προτείνει η κλασσική τεχνική *AFT*. Αντιθέτως, η διαδικασία λειτουργεί με διαδοχικά μη δυναμικά μέτωπα και τερματίζεται όταν δεν υπάρχουν διαθέσιμα τρίγωνα για τη σύσταση νέου μετώπου.

2.4.1 Σύσταση διαδοχικών μετώπων

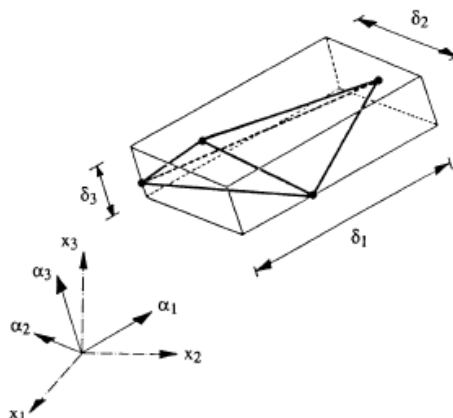
Στην εκδοχή της AFT που εδραιώθηκε η τεχνική του προελαύνοντος μετώπου υιοθετείται η λογική ενός δυναμικού μετώπου. Αποτελεί μια δυναμική δομή, που ανανεώνεται συνεχώς παράλληλα με τη δημιουργία νέων τετραέδρων. Αρχικά το μέτωπο συνίσταται από τα τρίγωνα του επιφανειακού πλέγματος. Σε μια τυχαία χρονική στιγμή, το μέτωπο αποτελείται από τα τριγωνικά στοιχεία που δύνανται να χρησιμοποιηθούν για την παραγωγή ενός νέου τετραέδρου.

Η τροποποιημένη τεχνική, που εφαρμόζεται στην παρούσα εργασία, αντικαθιστά το δυναμικό μέτωπο με ένα σύνολο διαδοχικών στατικών μετώπων. Όπως και στην αυθεντική εκδοχή, το μέτωπο αρχικά συνίσταται από τα τρίγωνα του επιφανειακού πλέγματος. Τα τρίγωνα του μετώπου αποτελούν μία εκ των τεσσάρων εδρών των τετραέδρων που πρόκειται να δημιουργηθούν κατά το τρέχων μέτωπο. Εφόσον όλα τα τρίγωνα αξιοποιηθούν για την δημιουργία τετραέδρων, συνίσταται το επόμενο μέτωπο από παλαιά και νέα τριγωνικά στοιχεία, που μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την δημιουργία τετραέδρων.

Το μέτωπο δεν ανανεώνεται μετά από κάθε δημιουργία τετραέδρου, αλλά μετά την αξιοποίηση όλων των τριγώνων του. Η διαδικασία συνεχίζεται έως ότου κανένα τρίγωνο δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως έδρα ενός νέου τετραέδρου, κάτι που συμβαίνει όταν διακριτοποιηθεί πλήρως το ζητούμενο χωρίο.

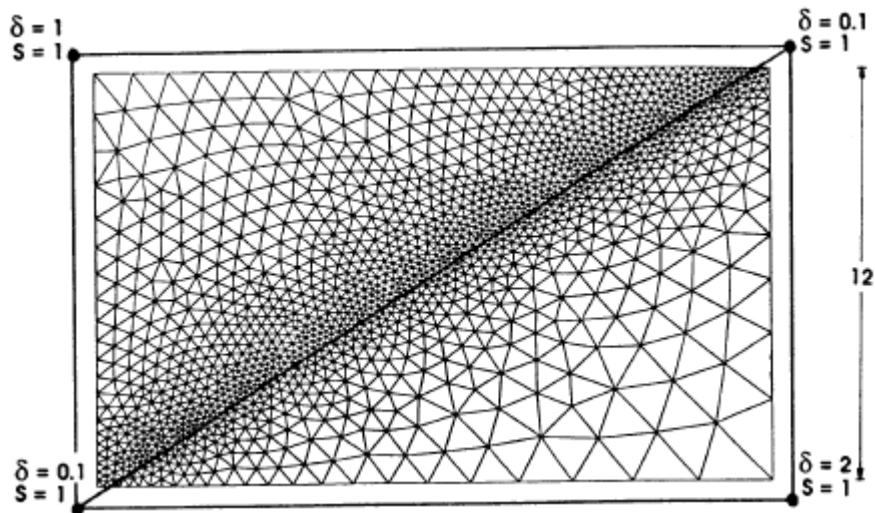
2.4.2 Παράμετροι του πλέγματος υποβάθρου (Background mesh)

Στην αυθεντική εκδοχή της, η τεχνική του προελαύνοντος μετώπου προϋποθέτει από τον χρήστη τον ορισμό παραμέτρων του πλέγματος στο προς διακριτοποίηση χωρίο [Peraire et al., 1999]. Τα επιθυμητά γεωμετρικά χαρακτηριστικά του πλέγματος ορίζονται τοπικά με τη μορφή συγκεκριμένων παραμέτρων. Αν N είναι το πλήθος των διαστάσεων (3 στην περίπτωση που εξετάζεται), τότε οι απαραίτητες παράμετροι είναι ένα σύνολο από N μεταξύ τους κάθετες διευθύνσεις α_i και N αντίστοιχα μεγέθη στοιχείων δ_i , $i=1, \dots, N$ (σχήμα 2.2).

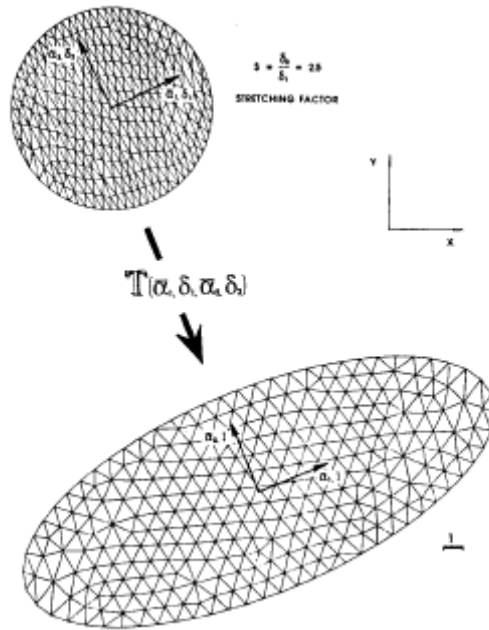


Σχήμα 2.2: Οι παράμετροι του background πλέγματος [Peraire et al, 1999].

Συνεπώς, σε δεδομένο σημείο, αν τα μεγέθη στοιχείων είναι ίσα, το πλέγμα στην περιοχή του σημείου θα αποτελείται από στοιχεία με σχεδόν ίσο μέγεθος (σχήμα 2.3). Οι παράμετροι πλέγματος χρησιμοποιούνται για τον μετασχηματισμό της περιοχής του χωρίου, στην οποία πρόκειται να δημιουργηθεί ένα νέο στοιχείο, σε έναν κανονικοποιημένο χώρο (σχήμα 2.4). Η κανονικοποίηση αυτή δημιουργεί ένα τεχνητό χωρίο, όπου τα στοιχεία έχουν περίπου μοναδιαίο μέγεθος και κατά συνέπεια διευκολύνεται η διαδικασία παραγωγής ενός νέου στοιχείου του πλέγματος.

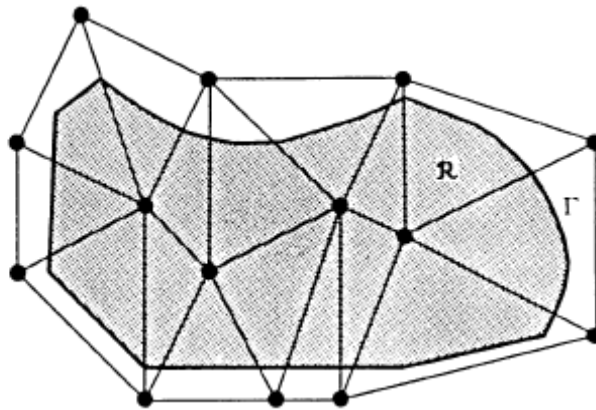


Σχήμα 2.3: Δημιουργία πλέγματος στις 2 διαστάσεις χρησιμοποιώντας ένα πλέγμα υποβάθρου, που αποτελείται από 2 στοιχεία. Διακρίνεται η επίδραση των παραμέτρων του βοηθητικού πλέγματος υποβάθρου στη μορφή του τελικού πλέγματος [Peraire et al, 1999].



Σχήμα 2.4: Η επίδραση του μετασχηματισμού για σταθερές παραμέτρους του βοηθητικού πλέγματος [Peraire et al., 1999].

Η τοπική διανομή των παραμέτρων του πλέγματος απαιτεί την ύπαρξη ενός πλέγματος υποβάθρου (background mesh). Το πλέγμα αυτό πρέπει να καλύπτει πλήρως το υπό διακριτοποίηση χωρίο και αρκεί να αποτελείται από ένα μικρό αριθμό τετραεδρικών στοιχείων (σχήμα 2.5). Στους κόμβους αυτού του πλέγματος υποβάθρου καθορίζονται από το χρήστη οι επιθυμητές παράμετροι του προς κατασκευή πλέγματος.



Σχήμα 2.5: Διδιάστατο βοηθητικό πλέγμα υποβάθρου [Peraire et al., 1999].

Ωστόσο, οι παράμετροι που καθορίζονται από το χρήστη (και λαμβάνονται ως δεδομένες από τον αλγόριθμο) πρέπει να συμφωνούν με την πυκνωση του επιφανειακού πλέγματος. Κατά συνέπεια, ο καθορισμός ενός πλήθους παραμέτρων (που συχνά είναι μεγάλος), αλλά και η καθοριστική σημασία της

επιλογής τους, συνιστά μια μάλλον κουραστική και επίπονη διαδικασία για τον χρήστη.

Η τροποποιημένη εκδοχή της τεχνικής AFT, που παρουσιάζεται στην παρούσα εργασία, δεν απαιτεί τον καθορισμό τέτοιων παραμέτρων, οπότε και αποκλείει τα πιθανά σφάλματα, που οφείλονται στον ορισμό ακατάλληλων παραμέτρων πλέγματος στο πλέγμα υποβάθρου. Αυτό σημαίνει ότι δεν απαιτείται η κατασκευή πλέγματος υποβάθρου, ενώ η διαδικασία δεν καταφεύγει στο μετασχηματισμό του χωρίου στον κανονικοποιημένο χώρο. Καταλήγοντας, ο αλγόριθμος λαμβάνει ως δεδομένο εισόδου μόνο την μαθηματική αναπαράσταση της οριακής επιφάνειας του χωρίου και η διαδικασία δεν απαιτεί τον καθορισμό άλλων παραμέτρων από το χρήστη. Αυτό καθιστά την προτεινόμενη μεθοδολογία περισσότερο εύχρηστη και απλή.

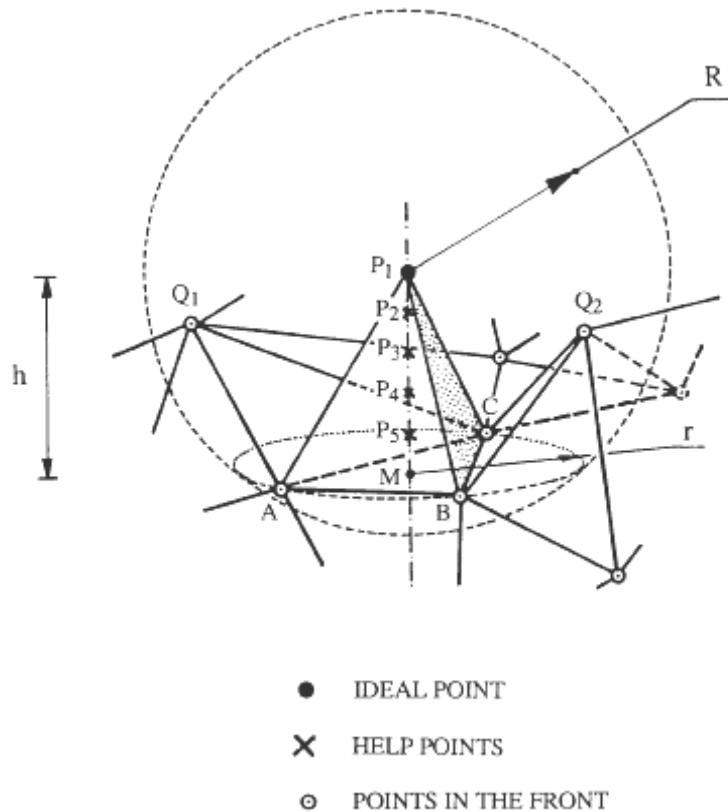
2.4.3 Δημιουργία τετραέδρων

Κατά την έναρξη της διαδικασίας ορίζεται το πρώτο μέτωπο από τα τριγωνικά στοιχεία του επιφανειακού πλέγματος, το οποίο λαμβάνεται ως δεδομένο εισόδου. Αποτελείται από προσανατολισμένα τρίγωνα, που αποτελούν τη διακριτοποιημένη οριακή επιφάνεια του προς διακριτοποίηση χωρίου. Ο προσανατολισμός των τριγώνων επιτυγχάνεται με την κατάλληλη φορά αρίθμησης των κορυφών τους. Κατά τη βασική επαναληπτική διαδικασία, η δημιουργία ενός τετραεδρικού στοιχείου γενικευμένης μορφής εμπεριέχει τα ακόλουθα στάδια [Peraire et al., 1999]:

1. Επιλογή ενός τριγώνου ABC από το μέτωπο, που θα αποτελέσει τη βάση του νέου τετραέδρου. Γενικά, μπορεί να επιλεγεί οποιοδήποτε τρίγωνο του μετώπου. Ωστόσο, πρακτικά είναι σκόπιμο να επιλέγεται το μικρότερο τρίγωνο. Το μέγεθος κάθε τριγώνου του μετώπου καθορίζεται από το μήκος του μικρότερου ύψους του. Συνεπώς, το μέτωπο αποτελεί ουσιαστικά μια διατεταγμένη λίστα τριγώνων.
2. Καθορισμός της ιδανικής κορυφής P^I του νέου τετραέδρου. Το σημείο P^I ανήκει στην κάθετη ευθεία στο τρίγωνο ABC , που διέρχεται από το κέντρο M του τριγώνου. Η κατεύθυνση στην οποία εντοπίζεται το P^I ορίζεται από τον προσανατολισμό του τριγώνου, έτσι ώστε να βρίσκεται στο εσωτερικό του χωρίου. Επίσης, το σημείο P^I πρέπει να βρίσκεται στην κατάλληλη θέση, ώστε οι τρεις εν δυνάμει ακμές AP^I , BP^I , CP^I να έχουν μήκος περίπου ίσο με το βέλτιστο μήκος. Το τελευταίο καθορίζεται από το μέσο μήκος των ακμών που ανήκουν στη γειτονιά του τριγώνου ABC . Υπολογίζεται το μήκος δ_I που αντιστοιχεί στη μεγαλύτερη απόσταση του P^I από τις κορυφές του τριγώνου ABC .
3. Εντοπισμός των υποψηφίων σημείων που μπορούν να χρησιμοποιηθούν ως κορυφές των νέων τετραέδρων. Τα υποψήφια σημεία είναι (α) οι κόμβοι Q^1, Q^2, \dots του πλέγματος οι οποίοι περιέχονται σε σφαίρα με κέντρο το σημείο M και ακτίνα δ_I , και (β) ένα σύνολο νέων σημείων P^1, P^2, \dots, P^r , τα οποία τοποθετούνται κατά μήκος του ύψους $P^I M$. Έστω D ένα εκ των σημείων A, B και C , το οποίο έχει τη μεγαλύτερη απόσταση από το M . Για κάθε σημείο Q^i ,

κατασκευάζεται νοητά η σφαίρα με κέντρο το σημείο C_Q που ανήκει στην ευθεία P^1M , και ταυτόχρονα η σφαίρα διέρχεται από τα σημεία Q και D . Η θέση των κέντρων C_Q πάνω στην ευθεία P^1M ορίζει μια κατάταξη των αντίστοιχων σημείων Q , κατά την οποία το σημείο με το αντίστοιχο κέντρο που απέχει περισσότερο από το P^1 προς την κατεύθυνση P^1M κατέχει την πρώτη θέση στην κατάταξη. Στην διατεταγμένη λίστα των υποψηφίων σημείων που σχηματίζεται προστίθενται στο τέλος και τα σημεία P^1, P^2, \dots, P^n . Η βιβλιογραφία προτείνει την προσθήκη έως και 5 νέων σημείων P , ενώ στην τροποποιημένη εφαρμογή της παρούσας εργασίας χρησιμοποιήθηκαν μόνο τα σημεία P^1 και P^2 .

4. Επιλογή του βέλτιστου σημείου εκ των υποψηφίων για την ένωσή του με τις κορυφές του τριγώνου ABC . Το βέλτιστο σημείο είναι το πρώτο από τη διατεταγμένη λίστα για το οποίο προκύπτει έγκυρο τετράεδρο. Η εγκυρότητα ενός τετραέδρου εξασφαλίζεται με τη διαβεβαίωση ότι καμία από τις νέες ακμές δεν τέμνει κανένα από τα τρίγωνα του πλέγματος, και καμία από τις νέες τριγωνικές έδρες δεν τέμνει καμία από τις ακμές. Επιπλέον, στην τροποποιημένη έκδοση της τεχνικής, που προτείνεται στην παρούσα εργασία, το νέο τετράεδρο ικανοποιεί τους περιορισμούς που έχει θέσει ο χρήστης. Οι περιορισμοί αυτοί αφορούν κυρίως τις γωνίες που σχηματίζονται μεταξύ των εδρών και των ακμών του πλέγματος, και εξασφαλίζουν ικανοποιητική ποιότητα στο πλέγμα που σχηματίζεται.
5. Αποθήκευση του νέου τετραέδρου και ενημέρωση των αντίστοιχων δομών.
6. Τα παραπάνω βήματα επαναλαμβάνονται για όλα τα τρίγωνα του μετώπου. Όταν αυτά εξαντληθούν, σχηματίζεται το επόμενο μέτωπο, από τα τρίγωνα του πλέγματος που ανήκουν μόνο σε ένα τετράεδρο και μπορούν να αποτελέσουν βάσεις για νέα στοιχεία. Στην πραγματικότητα η τροποποιημένη διαδικασία δεν υιοθετεί τη λογική του προελαύνοντος μετώπου, αλλά τη λογική των διαδοχικών μετώπων. Καταχραστικά, η ονομασία της τεχνικής διατηρείται, αν και δεν είναι η πλέον δόκιμη.



Σχήμα 2.6: Δημιουργία τετραεδρικού στοιχείου [Peraire et al., 1999].

2.5 Εκτίμηση της ποιότητας του πλέγματος

Κάθε εκτίμηση της ποιότητας ενός πλέγματος είναι σχετική με τη επιθυμητή μορφή της λύσης που προσεγγίζεται κάθε φορά. Γενικά λαμβάνονται υπ' όψη τα ακόλουθα [Peraire et al., 1999]:

1. Τα χαρακτηριστικά του βέλτιστου πλέγματος για το εκάστοτε πρόβλημα. Το παραπάνω εισάγει και την έννοια της προσαρμοστικότητας στο επιφανειακό πλέγμα. Για παράδειγμα, το πλέγμα που δημιουργείται πρέπει να ακολουθεί την πυκνωση του επιφανειακού πλέγματος και να τη διαδίδει ομοιόμορφα στο εσωτερικό του.
2. Εκτίμηση της στατιστικής κατανομής συγκεκριμένων μετρικών. Τέτοιες μετρικές μπορεί να είναι το πλήθος των στοιχείων που συνορεύουν με κάθε ακμή, οι διεδρες γωνίες κάθε τετραέδρου, καθώς και σύνθετες συναρτήσεις όπως ο λόγος των ακτίνων της περιγεγραμμένης και της εγγεγραμμένης σφαίρας κάθε τετραέδρου.

Στην παρούσα εργασία χρησιμοποιήθηκε μια μετρική συνάρτηση για την αξιολόγηση του παραγόμενου πλέγματος. Η συνάρτηση αυτή είναι ο λόγος της ακτίνας της περιγεγραμμένης σφαίρας σε κάθε τετραέδρο προς την ακτίνα της εγγεγραμμένης σφαίρας [Choi et al., 2003]. Η συνάρτηση αυτή είναι μια

από τις πιο διαδεδομένες μετρικές συναρτήσεις που χρησιμοποιούνται. Η εγγεγραμμένη σφαίρα ορίζεται ως η μεγαλύτερη σφαίρα που μπορεί να περιέχεται στο τετράεδρο, ενώ η περιγεγραμμένη σφαίρα είναι η μικρότερη σφαίρα η οποία το περιβάλλει.

Η ακτίνα της εγγεγραμμένης σφαίρας $R_{inscribed}$ υπολογίζεται από την ακόλουθη σχέση:

$$R_{inscribed} = \frac{3V}{\sum_{i=1}^4 A_i} \quad (2.1)$$

όπου V είναι ο όγκος του τετραέδρου και A_i είναι το εμβαδό της i -οστής έδρας του.

Η ακτίνα της περιγεγραμμένης σφαίρας δίνεται από την ακόλουθη εξίσωση (2.2) [Blumenthal., 1970]:

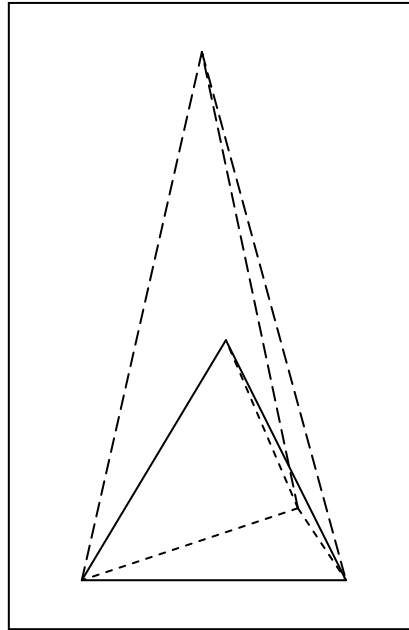
$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & d_{12}^2 & d_{13}^2 & d_{14}^2 & R_{circ}^2 \\ 1 & d_{21}^2 & 0 & d_{23}^2 & d_{24}^2 & R_{circ}^2 \\ 1 & d_{31}^2 & d_{32}^2 & 0 & d_{34}^2 & R_{circ}^2 \\ 1 & d_{41}^2 & d_{42}^2 & d_{43}^2 & 0 & R_{circ}^2 \\ 1 & R_{circ}^2 & R_{circ}^2 & R_{circ}^2 & R_{circ}^2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad (2.2)$$

όπου με R_{circ} συμβολίζεται η ζητούμενη ακτίνα και με d_{ij} συμβολίζεται η απόσταση μεταξύ των κορυφών i και j .

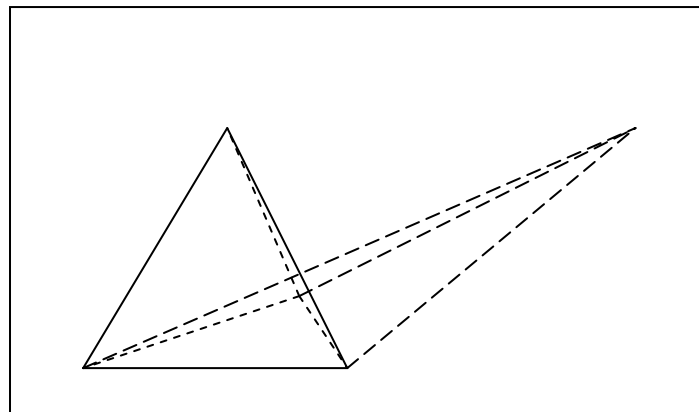
Ο λόγος των ακτίνων υπολογίζεται ως:

$$Ratio = \frac{R_{circ}}{R_{inscribed}} \quad (2.3)$$

Για ένα κανονικό τετράεδρο, το οποίο έχει ίσες αποστάσεις μεταξύ των κορυφών του και έδρες ίσων εμβαδών, η τιμή του λόγου είναι ίση με 3 [Choi et al., 2003]. Η τιμή του λόγου αυξάνεται γραμμικά όσο αυξάνεται η στρέβλωση τύπου «stretching» του τετραεδρικού στοιχείου (σχήμα 2.7), ενώ παρουσιάζει τετραγωνική αύξηση για την στρέβλωση τύπου «shearing» (σχήμα 2.8).



Σχήμα 2.7: Στρέβλωση τύπου «stretching» ενός τετραεδρικού στοιχείου.



Σχήμα 2.8: Στρέβλωση τύπου «shearing» ενός τετραεδρικού στοιχείου.

2.6 Δομές δεδομένων

Από τη φύση της διαδικασίας γίνεται αντιληπτό ότι μια επιτυχημένη εφαρμογή απαιτεί την αξιοποίηση δομών δεδομένων, που εξασφαλίζουν επαρκείς διαδικασίες ταξινόμησης και γεωμετρικής αναζήτησης [Peraire et al., 1999]. Είναι απαραίτητη η αξιόπιστη εισαγωγή και διαγραφή τριγώνων, ακμών και σημείων από κατάλληλες δομές, ώστε να αναγνωρίζονται γρήγορα οι ακμές και τα τρίγωνα που τέμνονται με συγκεκριμένους υποχώρους.

Το πρόβλημα του καθορισμού των μελών ενός συνόλου n σημείων, που εμπεριέχονται σε έναν N -διάστατο υποχώρο, είναι γνωστό ως γεωμετρική αναζήτηση. Διάφοροι αλγόριθμοι έχουν προταθεί [Bentley et al., 1979], [Shamos et al., 1976], [Boris, 1986] για την επίλυση του προβλήματος με

υπολογιστικό κόστος ανάλογο του $\log(n)$. Η πολυπλοκότητα του προβλήματος αυξάνεται σημαντικά στις περιπτώσεις που το σύνολο των n σημείων αντικαθίσταται από ένα σύνολο στοιχείων πεπερασμένου όγκου, όπως τμήματα ευθειών, τρίγωνα ή τετράεδρα. Ένα πρόβλημα γεωμετρικής αναζήτησης που συναντάται στην τεχνική του προελαύνοντος μετώπου αφορά τον εντοπισμό στοιχείων που τέμνουν έναν συγκεκριμένο υποχώρο. Ο αλγόριθμος, που χρησιμοποιείται για την επαρκή αντιμετώπιση του προβλήματος, βασίζεται στη χρήση του εναλλασσόμενου ψηφιακού δέντρου (alternating digital tree, ADT) [Bonet, 1990].

Ο αλγόριθμος του εναλλασσόμενου ψηφιακού δέντρου (ADT) επιτρέπει την επαρκή αντιμετώπιση της γεωμετρικής αναζήτησης. Προσφέρει τη δυνατότητα εισαγωγής και εξαγωγής σημείων από κατάλληλη δομή δεδομένων και βέλτιστης αναζήτησης σημείων που περιέχονται σε δεδομένο υποχώρο. Ο αλγόριθμος ADT αποτελεί μια επέκταση της τεχνικής αναζήτησης ψηφιακών δυαδικών δέντρων. Εφαρμόζεται για οποιοδήποτε αριθμό διαστάσεων και αντιμετωπίζει ένα γεωμετρικό στοιχείο στις N διαστάσεις ως ένα σημείο στον $2N$ -διάστατο χώρο.

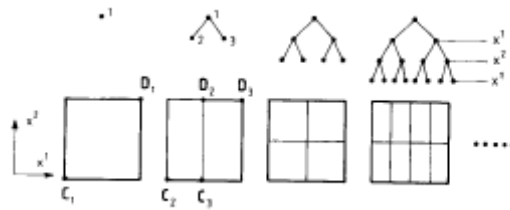
2.6.3 Το εναλλασσόμενο ψηφιακό δέντρο (ADT)

Τα δυαδικά δέντρα αποτελούν τη βάση για μια πληθώρα αλγορίθμων αναζήτησης, συμπεριλαμβανομένου και του ακόλουθου [Peraire et al., 1999]. Μια αναλυτική περιγραφή των δομών δυαδικών δέντρων παρουσιάζεται στο [George, 1971].

Έστω ένα σύνολο n σημείων στον N -διάστατο χώρο. Για ευκολία υποτίθεται ότι μετά από κατάλληλη αδιαστατοποίηση οι τιμές των συντεταγμένων τους x_1, x_2, \dots, x_n ανήκουν στο διάστημα $[0,1)$. Η τελευταία παραδοχή δεν είναι απαραίτητη, οπότε στην παρούσα εφαρμογή του αλγορίθμου παραλήφθηκε. Ο σκοπός των αλγορίθμων γεωμετρικής αναζήτησης είναι η επιλογή των σημείων που εντοπίζονται στο εσωτερικό ενός συγκεκριμένου υποχώρου. Ο υποχώρος συνιστά ένα γενικευμένο ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο, οπότε ο ορισμός του έγκειται στον ορισμό μιας ελάχιστης a και μιας μέγιστης τιμής b των συντεταγμένων των κορυφών του σε κάθε διάσταση.

Η σύγκριση των συντεταγμένων κάθε σημείου με τις συντεταγμένες των κορυφών του υποχώρου, με σκοπό τη διαπίστωση αν ισχύει $a^i \leq x_k^i \leq b^i$ για $i=1,2,\dots,N$, καθιστά το υπολογιστικό κόστος της διαδικασίας αναζήτησης ανάλογο με το πλήθος των σημείων n . Το κόστος αυτό μπορεί να μειωθεί σημαντικά με την αποθήκευση των σημείων σε ένα δυαδικό δέντρο με κατάλληλο τρόπο, ώστε η δομή του δέντρου να αναπαριστά τη θέση των σημείων στο χώρο. Οι πιο γνωστοί αλγόριθμοι που αντιμετωπίζουν το πρόβλημα στη μονοδιάστατη μορφή του χρησιμοποιούν δυαδικά και ψηφιακά δέντρα αναζήτησης. Τα δυαδικά δέντρα έχουν επεκταθεί και στα N -διάστατα προβλήματα, αλλά το αντίστοιχο N -d δέντρο δεν υποστηρίζει την επαρκή διαγραφή κόμβων. Ο αλγόριθμος που παρουσιάζεται αποτελεί φυσική επέκταση του μονοδιάστατου αλγορίθμου ψηφιακού δέντρου και ξεπερνά τις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν τα N -d δέντρα.

Γενικά, ένα εναλλασσόμενο ψηφιακό δέντρο μπορεί να οριστεί ως ένα ψηφιακό δέντρο στο οποίο αποθηκεύεται ένα σύνολο n σημείων σύμφωνα με καθορισμένα γεωμετρικά κριτήρια. Τα κριτήρια αυτά βασίζονται στις ομοιότητες που προκύπτουν μεταξύ της ιεραρχικής και πατρικής δομής ενός δυαδικού δέντρου, καθώς και σε μια επαναληπτική διαδικασία διχοτόμησης. Κάθε κόμβος στο δέντρο έχει δύο παιδιά, όπως η διαδικασία διχοτόμησης διαιρεί ένα χώρο σε δύο μικρότερους υποχώρους. Αντίστοιχα, είναι δυνατή η συσχέτιση των κόμβων ενός δέντρου και των υποχώρων του μοναδιαίου υπερκύβου: η ρίζα του δέντρου αντιπροσωπεύει τον ίδιο τον υπερκύβο. Ο χώρος αυτός διχοτομείται κατά μήκος του x^1 άξονα, και η περιοχή για την οποία ισχύει $0 \leq x^1 \leq 0.5$ αντιστοιχίζεται στο αριστερό παιδί της ρίζας, ενώ η περιοχή $0.5 \leq x^1 \leq 1$ αντιστοιχίζεται στο δεξί παιδί. Η διαδικασία επαναλαμβάνεται για κάθε ένα από αυτούς τους κόμβους κατά μήκος της x^2 κατεύθυνσης, όπως εικονίζεται στο σχήμα 2.9. Στον διδιάστατο χώρο η διαδικασία αυτή μπορεί να επαναληφθεί εναλλάσσοντας τους x^1 και x^2 άξονες. Αντίστοιχα, στον N -διάστατο χώρο η διαδικασία συνεχίζεται επιλέγοντας τις κατευθύνσεις x_1, x_2, \dots, x_n με κυκλική σειρά.



Σχήμα 2.9: Συσχέτιση μεταξύ του δυαδικού δέντρου και της διαδικασίας διχοτόμησης [Peraire et al., 1999].

Το επίπεδο της ρίζας του δέντρου ορίζεται ως 0. Αν ο κόμβος k του επιπέδου m αναπαριστά μια περιοχή (c_k, d_k) , οι υποπεριοχές που συσχετίζονται με το αριστερό και δεξί παιδί, (c_k^l, d_k^l) και (c_k^r, d_k^r) αντίστοιχα, προκύπτουν από τη διαίρεση της (c_k, d_k) κατά μήκος του κάθετου επιπέδου στον j -οστό άξονα συντεταγμένων. Ο j -οστός άξονας έχει επιλεγθεί κυκλικά από τις διευθύνσεις του N -διάστατου χώρου σύμφωνα με τη σχέση (2.4):

$$j = 1 + \text{mod}(m, N) \quad (2.4)$$

Κατά συνέπεια, προκύπτουν:

$$c_{kl}^i = c_k^i, d_{kl}^i = d_k^i \text{ για } i \neq j, \text{ και } c_{kl}^j = c_k^j, d_{kl}^j = \frac{1}{2}(c_k^j + d_k^j) \quad (2.5)$$

$$c_{kr}^i = c_k^i, d_{kr}^i = d_k^i \text{ για } i \neq j, \text{ και } c_{kr}^j = \frac{1}{2}(c_k^j + d_k^j), d_{kr}^j = d_k^j \quad (2.6)$$

Η συσχέτιση μεταξύ κόμβων και υποχώρων του μοναδιαίου υπερκύβου επιτρέπει έναν περαιτέρω ορισμό του ADT, ορίζοντας ότι κάθε σημείο στο δέντρο περικλείεται στον υποχώρο που αντιστοιχεί στον κόμβο στον οποίο έχει αποθηκευτεί. Συνεπώς, αν ο κόμβος k μιας ADT δομής περιέχει ένα σημείο με συντεταγμένες x_k , πρέπει να ικανοποιείται η ακόλουθη συνθήκη (2.7):

$$c_k^i \leq x_k^i < d_k^i \text{ για } i=1,2,\dots,N \quad (2.7)$$

2.6.3 Γεωμετρική αναζήτηση

Έστω ένα σύνολο σημείων αποθηκευμένο σε μια ADT δομή [Peraire et al., 1999]. Η παραπάνω συνθήκη προσφέρει τη δυνατότητα επαρκούς αντιμετώπισης του προβλήματος γεωμετρικής αναζήτησης. Η επαναληπτική δομή της διαδικασίας διχοτόμησης που περιγράφηκε εξασφαλίζει ότι η περιοχή που συσχετίζεται με έναν κόμβο k περικλείει όλες τις υποπεριοχές που συσχετίζονται με τους κόμβους κατάντη του k . Για παράδειγμα, όλα τα σημεία σε μια δομή ADT αποθηκεύονται σε κόμβους που βρίσκονται προφανώς κατάντη της ρίζας του δέντρου, και προφανώς περικλείονται στον μοναδιαίο υπερκύβο, ο οποίος συσχετίζεται με τη ρίζα. Ανάλογα, όλο το σύνολο των σημείων, που αποθηκεύεται σε ένα υποδέντρο, περικλείεται στο χώρο που αντιπροσωπεύεται από τη ρίζα του υποδέντρου.

Το χαρακτηριστικό αυτό μπορεί να χρησιμοποιηθεί ώστε να μειωθεί το κόστος της γεωμετρικής αναζήτησης, ελέγχοντας, σε οποιοδήποτε κόμβο k , την περίπτωση τομής μεταξύ του εύρους αναζήτησης (a,b) και της περιοχής που αντιστοιχεί στον κόμβο k , ο οποίος ορίζεται ως (c_k,d_k) . Αν οι περιοχές αυτές δεν συμπίπτουν, τότε όλο το σύνολο των σημείων που είναι αποθηκευμένο στο υποδέντρο με ρίζα τον κόμβο k παραλείπεται από την αναζήτηση, οπότε αποφεύγεται η εξέταση των συντεταγμένων όλων αυτών των σημείων.

Αντίστοιχα, μια συστηματική διαδικασία επιλογής των σημείων που περικλείονται σε ένα δεδομένο εύρος αναζήτησης (a,b) προκύπτει από τον αλγόριθμο προσπέλασης. Η γενικευμένη λειτουργία προσπέλασης της ρίζας παίρνει την έννοια του ελέγχου αν το σημείο που είναι αποθηκευμένο σε αυτή προσπίπτει στο εύρος αναζήτησης. Επιπλέον, το αριστερό και δεξιό υποδέντρο προσπελάζονται μόνο αν οι περιοχές που συσχετίζονται με τις αντίστοιχες ρίζες τους επικαλύπτονται με το εύρος αναζήτησης.

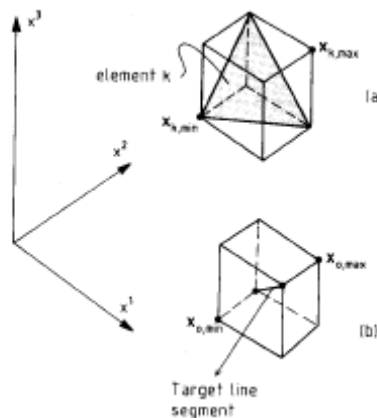
2.6.3 Γεωμετρική τομή

Προβλήματα γεωμετρικής τομής παρουσιάζονται σε πολλές εφαρμογές [Peraire et al., 1999]. Για παράδειγμα, είναι ένα συνηθισμένο πρόβλημα που παρουσιάζεται σε αλγορίθμους επαφής [Bonet, 1989], εφαρμογές αφαίρεσης κρυφών γραμμών, αλλά και στον αλγόριθμο προελαύνοντος μετώπου που παρουσιάστηκε, όπου πρέπει να αναγνωριστούν τα τρίγωνα ενός συνόλου

τριγωνικών στοιχείων τα οποία τέμνονται με ένα δεδομένο ευθύγραμμο τμήμα. Γενικά, το πρόβλημα της γεωμετρικής τομής είναι ο εντοπισμός των γεωμετρικών οντοτήτων ενός συνόλου που τέμνονται με μια δεδομένη οντότητα. Στην περίπτωση που ελέγχονται όλες οι πιθανές τομές μία προς μία, η λύση αυτών των προβλημάτων μπορεί έχει τεράστιο υπολογιστικό κόστος, ιδιαίτερα στις περιπτώσεις που αφορούν σε περίπλοκες γεωμετρίες, όπως αυθαίρετες καμπύλες και επιφάνειες. Πολλοί από αυτούς τους αναλυτικούς ελέγχους τομής μπορούν να αντικατασταθούν από απλές συγκρίσεις μεταξύ των οριακών συντεταγμένων οποιουδήποτε ζεύγους αντικειμένων. Για παράδειγμα, ένα τρίγωνο με x-συντεταγμένες στο διάστημα (0,5 , 0,7) δεν μπορεί να τέμνεται με ένα ευθύγραμμο τμήμα με x-συντεταγμένες μεταξύ 0,1 και 0,3. Γενικά, η τομή μεταξύ δύο αντικειμένων στο N -διάστατο Ευκλείδειο χώρο απαιτεί κάθε ένα από τα N ζεύγη από εύρη συντεταγμένων να υπερκαλύπτονται.

Έστω το πρόβλημα τομής μεταξύ τριγωνικών στοιχείων και ενός ευθυγράμμου τμήματος στον R^3 . Αν $(x_{k,\min}, x_{k,\max})$ είναι οι οριακές συντεταγμένες του στοιχείου k και αν $(x_{0,\min}, x_{0,\max})$ είναι το κατώτατο και ανώτατο όριο του ευθυγράμμου τμήματος (σχήμα 2.10), τότε ένα σημαντικό βήμα για τη λύση του προβλήματος γεωμετρικής τομής είναι η επιλογή των τριγωνικών στοιχείων που ικανοποιούν την ανισότητα (2.8):

$$\begin{aligned} x_{k,\min}^i &\leq x_{0,\max}^i \\ x_{k,\max}^i &\leq x_{0,\min}^i \end{aligned} \quad \text{για } i = 1, 2, \dots, N \quad (2.8)$$



Σχήμα 2.10: Ορισμός των ορίων συντεταγμένων ενός τριγωνικού στοιχείου και ενός ευθυγράμμου τμήματος [Peraire et al, 1999].

Το κόστος του ελέγχου της ανισότητας (2.8) για κάθε στοιχείο αυξάνεται ανάλογα με το n , οπότε για πολυάριθμα σύνολα καθίσταται απαγορευτικό. Ωστόσο, η μείωσή του είναι εφικτή εισάγοντας το πρόβλημα της γεωμετρικής αναζήτησης. Εφόσον το πλήθος των στοιχείων που θα ικανοποιούν την ανισότητα (2.8) θα είναι λογικά πολύ μικρότερο από n , το κόστος διερεύνησης πιθανής τομής μόνο για τα στοιχεία που θα εντοπιστούν από τη γεωμετρική αναζήτηση γίνεται ανεκτό.

Για την ερμηνεία της ανισότητας (2.8) ως πρόβλημα γεωμετρικής αναζήτησης, είναι ευνοϊκή η θεώρηση ότι όλα τα στοιχεία εντοπίζονται στο εσωτερικό του μοναδιαίου υπερκύβου. Η θεώρηση αυτή προφανώς είναι προαιρετική και εδώ γίνεται για λόγους ευκολίας, ενώ πρακτικά εφαρμόζεται εύκολα μέσω κατάλληλης αδιαστατοποίησης. Κατά συνέπεια, η ανισότητα (2.8) παίρνει τη μορφή:

$$\begin{aligned}
 0 &\leq \mathbf{x}_{k,\min}^1 \leq \mathbf{x}_{0,\max}^1 \\
 &\vdots \\
 0 &\leq \mathbf{x}_{k,\min}^N \leq \mathbf{x}_{0,\max}^N \\
 \mathbf{x}_{0,\min}^1 &\leq \mathbf{x}_{k,\max}^1 \leq 1 \\
 &\vdots \\
 \mathbf{x}_{0,\min}^N &\leq \mathbf{x}_{k,\max}^N \leq 1
 \end{aligned} \tag{2.9}$$

Έστω ένα στοιχείο k στον R^N με όρια συντεταγμένων $\mathbf{x}_{k,\min}$ και $\mathbf{x}_{k,\max}$. Συνδυάζοντας τα δύο αυτά σύνολα συντεταγμένων, το στοιχείο k στον R^N μετασχηματίζεται σε σημείο στον R^{2N} με συντεταγμένες \mathbf{x}_k^i για $i=1,2,\dots,2N$ ορισμένες ως:

$$\mathbf{x}_k = \left[x_{k,\min}^1, \dots, x_{k,\min}^N, x_{k,\max}^1, \dots, x_{k,\max}^N \right]^T \tag{2.10}$$

Χρησιμοποιώντας αυτή την ερμηνεία για κάθε στοιχείο k , η ανισότητα (2.9) απλοποιείται στην:

$$a^i \leq x_k^i \leq b^i \text{ για } i=1,2,\dots,2N \tag{2.11}$$

Όπου \mathbf{a} και \mathbf{b} ερμηνεύονται ως η χαμηλότερη και υψηλότερη κορυφή ενός υπερ-ορθογώνιου χώρου στον R^{2N} με τη μορφή:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{a} &= \left[0, \dots, 0, x_{0,\max}^1, \dots, x_{0,\max}^N \right]^T \\
 \mathbf{b} &= \left[x_{0,\min}^1, \dots, x_{0,\min}^N, 1, \dots, 1 \right]^T
 \end{aligned} \tag{2.12}$$

Κατά συνέπεια, το πρόβλημα εντοπισμού των στοιχείων στον R^N που ικανοποιούν τη σχέση (2.8) είναι αντίστοιχο με ένα πρόβλημα γεωμετρικής αναζήτησης στον R^{2N} . Αφού συσταθεί το σύνολο των σημείων που περιλαμβάνονται σε έναν υποχώρο, ελέγχεται η πιθανή τομή καθενός από αυτά με το στοιχείο-στόχο για την εύρεση της λύσης στο πρόβλημα γεωμετρικής τομής.

2.7 Η χρήση του εναλλασσόμενου ψηφιακού δέντρου στη δημιουργία πλέγματος

Ο αλγόριθμος προελαύνοντος μετώπου, που περιγράφεται στη παράγραφο 2.4, απαιτεί συχνή χρήση λειτουργιών, όπως η αναζήτηση σημείων μέσα σε προκαθορισμένο υποχώρο και ο εντοπισμός τομών μεταξύ γεωμετρικών στοιχείων (η περίπτωση αυτή αφορά τριγωνικά στοιχεία και ακμές) [Peraire et al., 1999]. Η πολυπλοκότητα του προβλήματος αυξάνεται, λαμβάνοντας υπ' όψη ότι τα ενεργά τριγωνικά στοιχεία που συνιστούν το μέτωπο αλλάζουν συνεχώς, οπότε είναι απαραίτητη και μια επαρκής διαδικασία εισαγωγής και διαγραφής στοιχείων στη δομή. Προφανώς, για μεγάλα πλέγματα πολλών στοιχείων οι διαδικασίες αυτές μπορεί να γίνουν ιδιαίτερα απαιτητικές.

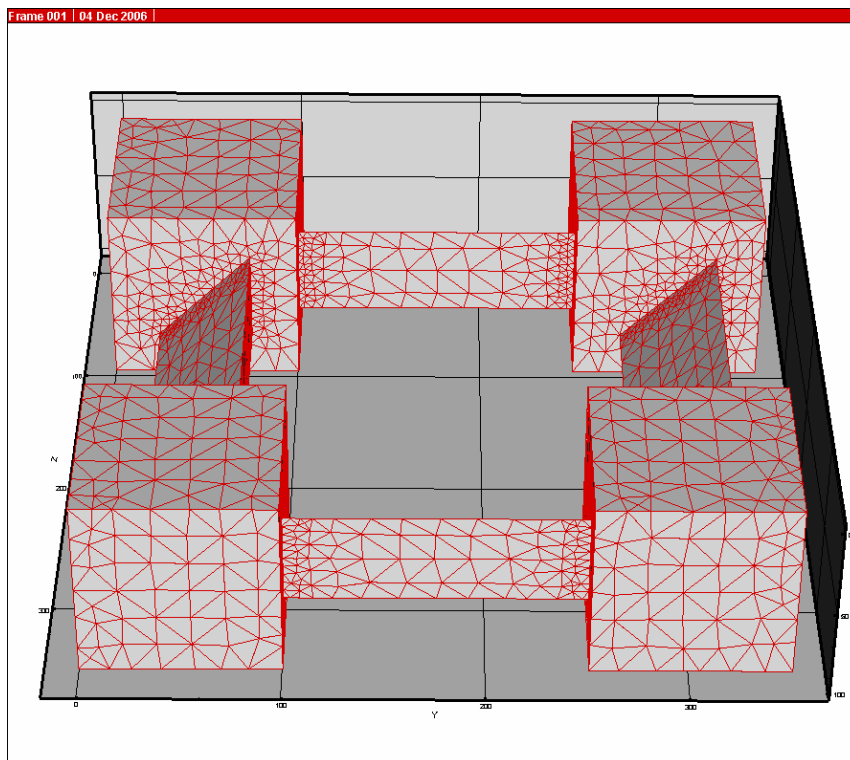
Η επιτυχημένη εφαρμογή των παραπάνω αλγορίθμων, που παρουσιάζεται στη παρούσα εργασία, χρησιμοποιεί εκτενώς τη δομή δεδομένων του εναλλασσόμενου ψηφιακού δέντρου. Στην περίπτωση της δημιουργίας τετραέδρων, χρησιμοποιούνται τρεις δομές ADT, μία για τα τριγωνικά στοιχεία του μετώπου, μία για τις ακμές του και μία για τους ενεργούς κόμβους του. Η συνδυασμένη χρήση τους προσφέρει μεγάλη ευελιξία, ώστε οι διαδικασίες εισαγωγής και διαγραφής στοιχείων, γεωμετρικής αναζήτησης και γεωμετρικής τομής να παρουσιάζουν βέλτιστη λειτουργία από πλευράς ταχύτητας και αξιοπιστίας.

Κεφάλαιο 3

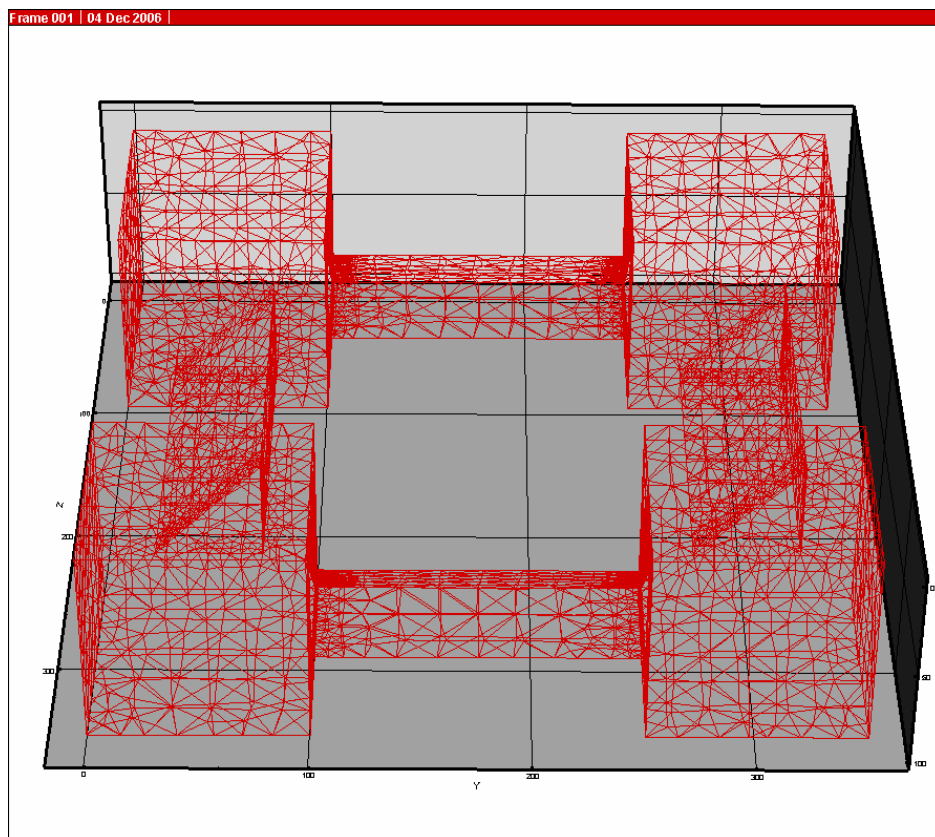
Ο Αλγόριθμος που αναπτύχθηκε

3.1 Δεδομένα εισόδου

Το μοναδικό δεδομένο εισόδου που απαιτείται από τον αλγόριθμο που αναπτύχθηκε είναι ένα επιφανειακό πλέγμα τριγωνικών στοιχείων, που συνιστά την οριακή επιφάνεια του υπό διακριτοποίηση χωρίου. Ο αλγόριθμος αντιμετωπίζει είτε κυρτούς, είτε μη κυρτούς χώρους. Απαραίτητη προϋπόθεση αποτελεί η σωστή αρίθμηση των κόμβων κάθε τριγωνικού στοιχείου, ώστε το κάθετο διάνυσμα σε ένα τρίγωνο να έχει φορά προς το εσωτερικό του χωρίου. Για κυρτούς χώρους, ο αλγόριθμος έχει τη δυνατότητα ελέγχου της ορθότητας της αρίθμησης, καθώς και της διόρθωσής της, όπου αυτό είναι απαραίτητο. Ωστόσο, για μη κυρτά χωρία, ο χρήστης πρέπει να εξασφαλίσει εκ των προτέρων την ορθότητα του επιφανειακού πλέγματος που εισάγεται. Στις εικόνες 3.1 και 3.2 που ακολουθούν εικονίζεται ένα επιφανειακό πλέγμα τριγωνικών στοιχείων, που ορίζει τον υπό διακριτοποίηση μη κυρτό χώρο. Αποτελείται από 2988 κόμβους και 5976 τριγωνικά στοιχεία. Το επιφανειακό πλέγμα κατασκευάστηκε με το λογισμικό *CATIA* και δίνεται ως δεδομένο εισόδου στον αλγόριθμο με τη μορφή ενός αρχείου κειμένου.



Εικόνα 3.1: Αποψη του επιφανειακού πλέγματος.

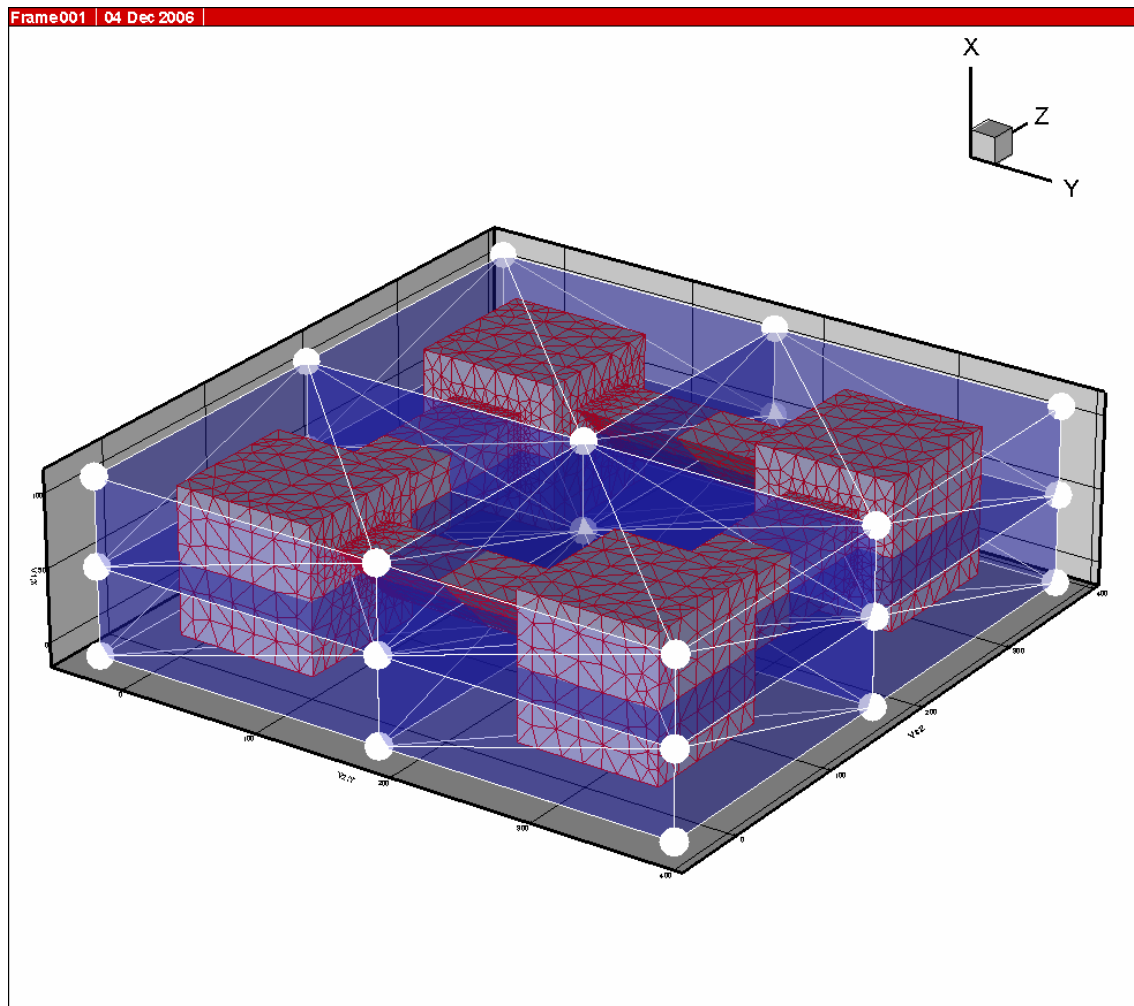


Εικόνα 3.2: Άποψη του επιφανειακού πλέγματος.

Το πλέγμα εισόδου δεν παρουσιάζει την ίδια πυκνωση, καθώς η πυκνωση των κόμβων είναι αυξημένη στα σημεία αυξημένου ενδιαφέροντος για το χρήστη. Μια από τις απαιτήσεις που πρέπει να ικανοποιεί ο αλγόριθμος είναι η διατήρηση της ομοιόμορφης πυκνωσης και στο εσωτερικό του πλέγματος, με προοδευτική μετάβαση από πυκνότερους σε αραιότερους κόμβους.

3.2 Δημιουργία πλέγματος υποβάθρου και ορισμός παραμέτρων

Η πρωτότυπη μορφή του αλγορίθμου προελαύνοντος μετώπου περιλαμβάνει τη δημιουργία και χρήση ενός βοηθητικού πλέγματος υποβάθρου. Το βοηθητικό πλέγμα πρέπει να περιβάλλει πλήρως τον όγκο της γεωμετρίας που δόθηκε από τον χρήστη, ενώ η κατασκευή του πρέπει να είναι απλή και επαρκής. Το βοηθητικό πλέγμα αρκεί να αποτελείται από έναν μικρό αριθμό τετραέδρων, ενώ ο χρήστης καλείται να καθορίσει σε κάθε κόμβο του ένα τριδιάστατο σύστημα συντεταγμένων με αντίστοιχες παραμέτρους πυκνωσης. Ο αλγόριθμος που αναπτύχθηκε υποστηρίζει τη δημιουργία και χρήση βοηθητικού πλέγματος υποβάθρου και αντίστοιχων παραμέτρων, χωρίς ωστόσο να είναι απαραίτητο. Για την παραπάνω γεωμετρία, ένα επαρκές πλέγμα υποβάθρου παρουσιάζεται στην εικόνα 3.3.



Εικόνα 3.3: Βοηθητικό background πλέγμα.

Το βοηθητικό πλέγμα υποβάθρου αποτελείται από 40 τετράεδρα και 27 κόμβους. Ο χρήστης έχει τη δυνατότητα να ορίσει παραμέτρους πύκνωσης σε κάθε κόμβο του, ώστε να διαμορφώσει κατάλληλα την επιθυμητή πύκνωση στο χωρικό πλέγμα, που πρόκειται να δημιουργηθεί.

Ωστόσο, η διαδικασία ορισμού 27 συστημάτων συντεταγμένων και 81 παραμέτρων πύκνωσης είναι μάλλον κουραστική και αναποτελεσματική σε πρακτικές εφαρμογές. Επιπλέον, οι παράμετροι που καλείται να καθορίσει ο χρήστης, πρέπει να συμφωνούν με την πύκνωση των κόμβων του επιφανειακού πλέγματος, ώστε να μην υπάρχει παραμόρφωση στο πλέγμα που πρόκειται να κατασκευαστεί. Βέβαια, είναι πρακτικά αδύνατο για το χρήστη να υπολογίσει και να ορίσει παραμέτρους σύμφωνα με το οριακό πλέγμα. Προφανώς οι σωστές παράμετροι πρέπει να δίνονται από τη διαδικασία κατασκευής του επιφανειακού πλέγματος. Εάν ωστόσο οι παράμετροι δεν προσφέρονται από αυτή, όπως στη περίπτωση του λογισμικού *CATIA* που χρησιμοποιήθηκε στην παρούσα εργασία, είναι σχεδόν αναπόφευκτος ο κίνδυνος να δοθούν αντιφατικά δεδομένα, που θα προκαλέσουν αποσταθεροποίηση του αλγορίθμου και, στην καλύτερη περίπτωση, τη δημιουργία ενός παραμορφωμένου πλέγματος, που δεν θα καλύπτει τις απαιτήσεις του χρήστη. Επιπλέον, είναι αμφίβολη η χρησιμότητα

αυτών των παραμέτρων πύκνωσης, καθώς η επίτευξη της επιθυμητής πύκνωσης στο πλέγμα, μέσω των παραμέτρων του πλέγματος υποβάθρου χωρίς τη χρήση πηγών πύκνωσης, περιορίζεται μάλλον σε ελάχιστες περιπτώσεις.

Για τους παραπάνω λόγους, ο αλγόριθμος που αναπτύχθηκε καθιστά προαιρετικό τον καθορισμό των παραμέτρων του επιφανειακού πλέγματος. Ο αλγόριθμος παράγει ένα επαρκές πλέγμα υποβάθρου και ορίζει αυτόματα κατάλληλες ουδέτερες παραμέτρους στους κόμβους του, που δεν εμφανίζουν καμία επίδραση στη δημιουργία του τελικού πλέγματος. Ο χρήστης μπορεί ασφαλώς να παρέμβει και να τις τροποποιήσει, κάτι που δεν προτείνεται.

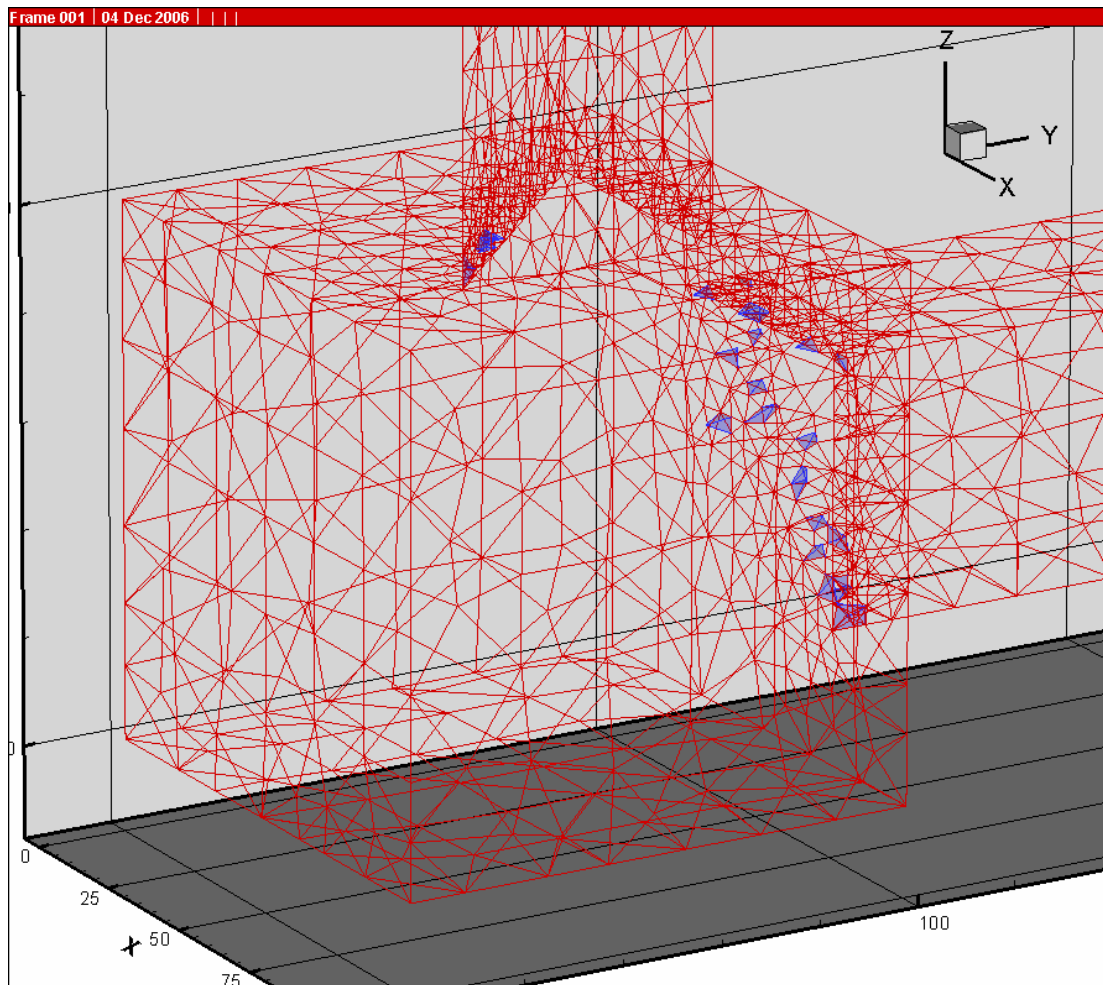
3.3 Βασική επαναληπτική διαδικασία

Η βασική επαναληπτική διαδικασία δημιουργίας του τριδιάστατου πλέγματος αρχίζει με τη σύσταση μετώπου τριγωνικών στοιχείων. Το μέτωπο είναι ουσιαστικά μια διατεταγμένη λίστα τριγώνων, τα οποία θα αποτελέσουν τις έδρες-βάσεις των νέων τετραέδρων. Σε αυτό συμμετέχει κάθε τρίγωνο, το οποίο μπορεί να αξιοποιηθεί για τη δημιουργία ενός νέου στοιχείου. Τα τρίγωνα αυτά είναι όσα ανήκουν σε ένα μόνο τετράεδρο, ή όσα συνιστούν το επιφανειακό πλέγμα και δεν ανήκουν σε κανένα τετράεδρο. Η διάταξή τους στη λίστα καθορίζεται σε σχέση με το μήκος του μικρότερου ύψους τους.

Μια από τις σημαντικότερες διαφορές μεταξύ του αλγορίθμου που αναπτύχθηκε και της πρωτότυπης διαδικασίας προελαύνοντος μετώπου είναι ο τρόπος διαχείρισης των μετώπων. Κατά την πρωτότυπη μορφή, δημιουργείται ένα μέτωπο κατά την έναρξη της διαδικασίας, το οποίο συνεχώς ανανεώνεται. Κάθε φορά που αξιοποιείται ένα τρίγωνο του μετώπου για τη δημιουργία ενός νέου τετραέδρου, αφαιρείται από το μέτωπο. Ταυτόχρονα, να νέα τρίγωνα που δημιουργούνται εισέρχονται σε αυτό. Κατά συνέπεια, ο αλγόριθμος δημιουργεί ένα δυναμικό μέτωπο, που συνεχώς αλλάζει τη μορφή του και προελαύνει στο προς διακριτοποίηση χωρίο. Αντίθετα, η μεθοδολογία που αναπτύχθηκε στην παρούσα εργασία δημιουργεί πολλά διαδοχικά, στατικά, μέτωπα. Κατά τη δημιουργία ενός νέου τετραέδρου αφαιρείται από το μέτωπο το τρίγωνο που αξιοποιήθηκε, αλλά δεν προστίθενται τα νέα τριγωνικά στοιχεία που δημιουργούνται στο ενεργό μέτωπο. Αφού το μέτωπο εξαντληθεί, με τη εξέταση όλων των τριγωνικών του στοιχείων, συστήνεται το επόμενο μέτωπο από τα τρίγωνα που θεωρούνται 'ενεργά', δηλαδή όσα ανήκουν σε ένα, ή και σε κανένα τετράεδρο. Συνεπώς, η έννοια του προελαύνοντος μετώπου αντικαθίσταται από διαδοχικά μέτωπα. Η τροποποίηση αυτή βασίστηκε στην πειραματική διαπίστωση ότι ο αλγόριθμος παρουσιάζει καλύτερη συμπεριφορά στην περίπτωση των διαδοχικών μετώπων. Η διακριτοποίηση του χωρίου γίνεται ομαλά, από το εξωτερικό προς το εσωτερικό του, αποφεύγοντας γενικά τη δημιουργία εσωτερικών κοιλοτήτων στο προς διακριτοποίηση χωρίο. Η χρήση διαδοχικών μετώπων αφορά σε διακριτοποίηση διαδοχικών ομαλών χωρίων, που ισοδυναμούν με ανεξάρτητα επιφανειακά πλέγματα. Η προσέγγιση αυτή κρίνεται πειραματικά

πλεονεκτικότερη έναντι της διακριτοποίησης ενός χωρίου που σταδιακά αναπτύσσει κοιλότητες στο εσωτερικό του.

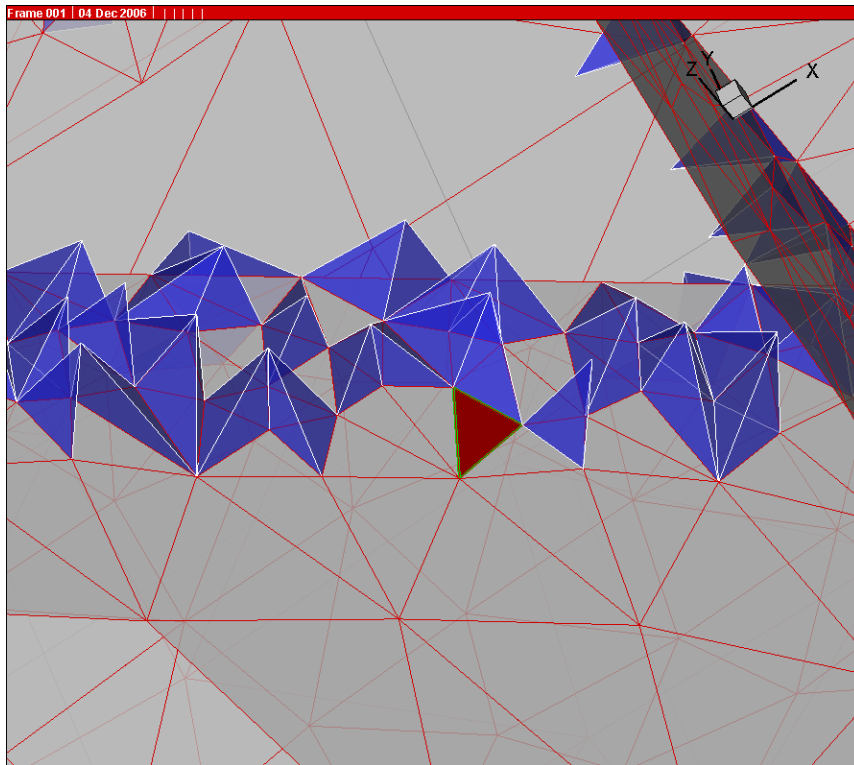
Όπως ήδη αναφέρθηκε, τα τρίγωνα που συνιστούν ένα μέτωπο διατάσσονται σύμφωνα με το μήκος του μικρότερου ύψους τους. Το πρώτο τρίγωνο του μετώπου έχει το μικρότερο ύψος συγκριτικά με τα αντίστοιχα ύψη όλων των τριγώνων. Ως αποτέλεσμα, ο αλγόριθμος αξιοποιεί πρώτα τα μικρότερα τρίγωνα, δημιουργώντας αντίστοιχα μικρά τετράεδρα. Θεωρητικά, ο αλγόριθμος μπορεί να λειτουργήσει και με μια τυχαία διάταξη των τριγώνων του μετώπου, αλλά πρακτικά είναι σκόπιμο να κατασκευάζονται πρώτα τα μικρότερα τετράεδρα, τα οποία συνήθως έχουν κρίσιμη σημασία για τη σταθερότητα του αλγορίθμου (εικόνα 3.4).



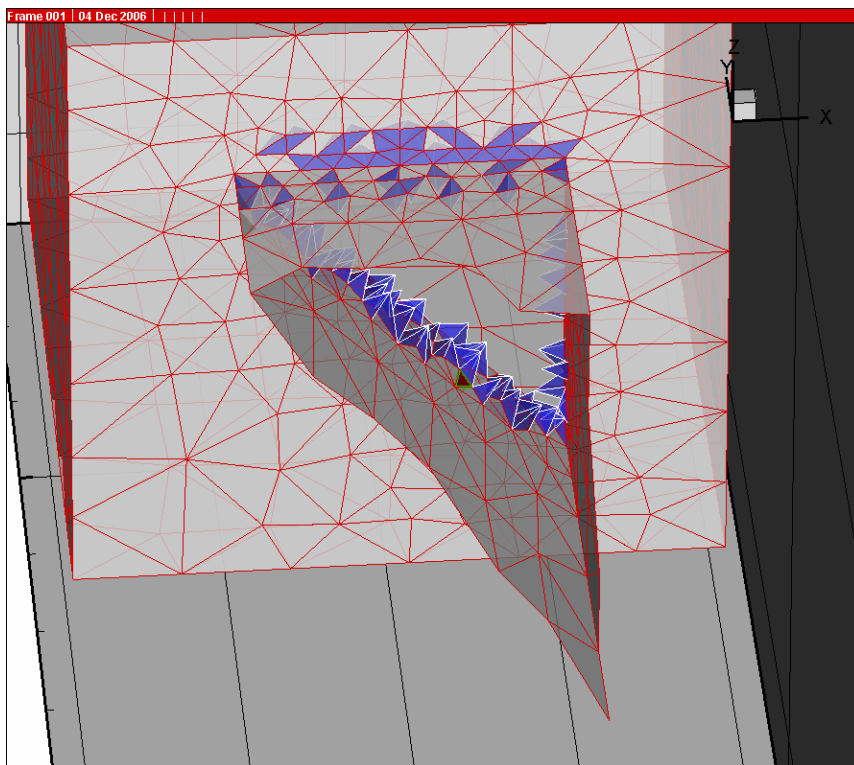
Εικόνα 3.4: Δημιουργία τετράεδρων στο 1^ο μέτωπο. Με μπλε χρώμα διακρίνονται τα νέα τετράεδρα. Η διαδικασία ξεκινά από τα μικρότερα τριγωνικά στοιχεία του μετώπου.

Εφόσον συσταθεί ένα μέτωπο σε οποιαδήποτε φάση του αλγορίθμου, εξάγεται ένα τριγωνικό στοιχείο από την κορυφή της λίστας το οποίο θα χρησιμοποιηθεί ως έδρα-βάση κατά τη δημιουργία ενός νέου τετράεδρου. Στην εικόνα 3.5 διακρίνεται μια τυχαία φάση από τη δημιουργία του τριδιάστατου πλέγματος. Η φάση εξελίσσεται κατά το πρώτο μέτωπο του αλγορίθμου, οπότε τα τετράεδρα που έχουν ήδη δημιουργηθεί (και διακρίνονται με μπλε χρώμα) έχουν τουλάχιστον μία έδρα που ανήκει στο

επιφανειακό πλέγμα. Το ενεργό τρίγωνο, που εξάγεται από το μέτωπο και θα αξιοποιηθεί, διακρίνεται με κόκκινο χρώμα.



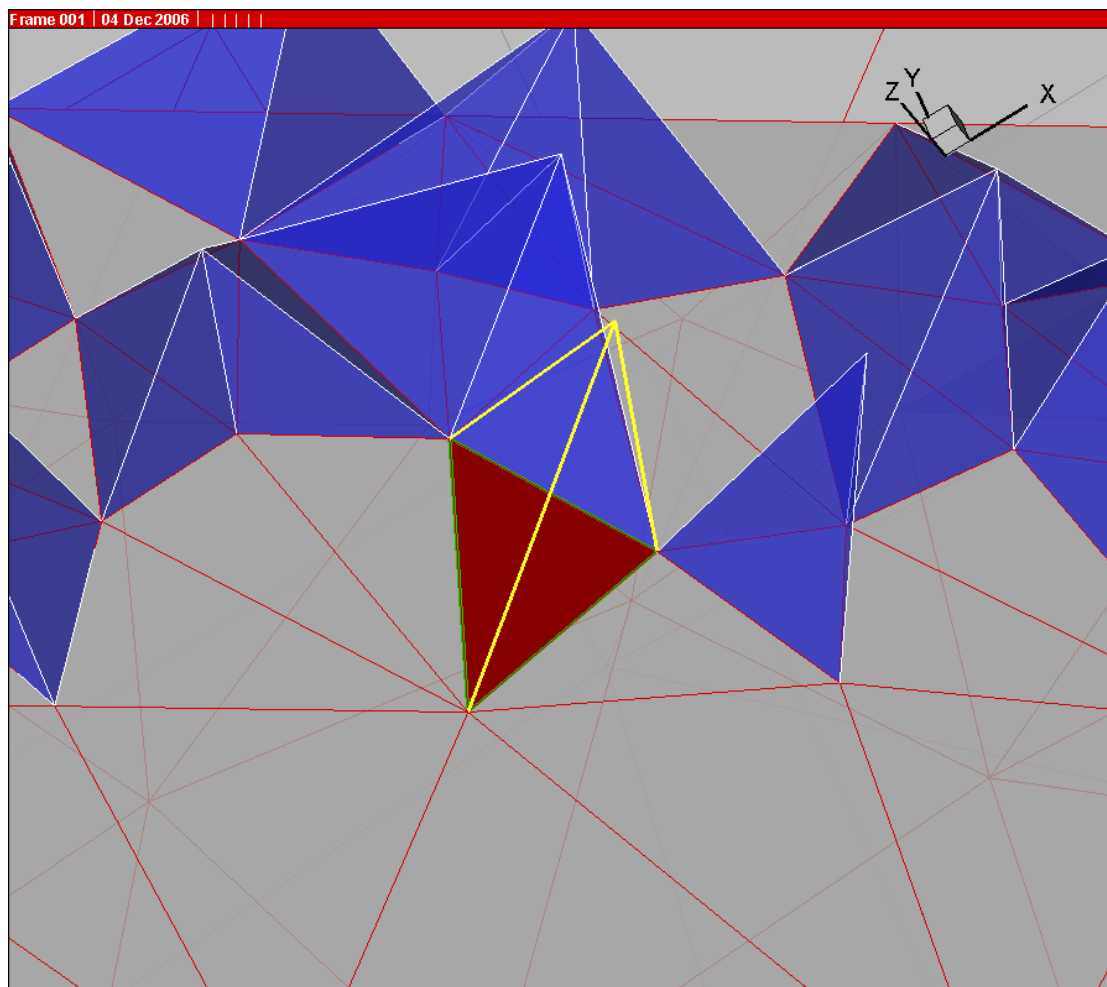
Εικόνα 3.5: Επιλογή τριγώνου από το τρέχον μέτωπο. Με μπλε χρώμα διακρίνονται τα νέα τετράεδρα. Με κόκκινο χρώμα διακρίνεται το τριγωνικό στοιχείο, που θα αποτελέσει τη βάση του επόμενου νέου τετραέδρου.



Εικόνα 3.6: Συνολική άποψη της περιοχής της εικόνας 3.5.

Για το υπό εξέταση τρίγωνο αρχικά εκτιμάται το ιδανικό τετράεδρο που μπορεί να δημιουργηθεί, χρησιμοποιώντας ως βάση το παραπάνω τριγωνικό στοιχείο. Προφανώς, οι τρεις από τις τέσσερις κορυφές του τετραέδρου είναι οι τρεις κορυφές του τριγώνου, ενώ η τέταρτη κορυφή P^1 θα εντοπιστεί πάνω στην ευθεία που διέρχεται από το μέσο του τριγώνου-βάση και είναι κάθετη σ' αυτή.

Επιπλέον, η κορυφή P^1 που αναζητείται πρέπει να ισαπέχει από τις κορυφές του τριγώνου-βάση, ώστε οι τρεις νέες ακμές, που θα δημιουργηθούν ταυτόχρονα με το νέο τετράεδρο, να έχουν ίσο μήκος. Οι απαιτήσεις αυτές ικανοποιούνται από δύο πιθανά σημεία, εκ των οποίων γίνεται αποδεκτό το σημείο που εντοπίζεται στο εσωτερικό του προς διακριτοποίηση χώριου. Το βέλτιστο τετράεδρο, που θα δημιουργηθεί αν χρησιμοποιηθεί το σημείο που εντοπίστηκε, εικονίζεται με κίτρινο περίγραμμα στην εικόνα 3.7.



Εικόνα 3.7: Δημιουργία νέου τετράεδρου. Με κίτρινο περίγραμμα διακρίνεται το ιδανικό τετράεδρο για την περίπτωση του τριγώνου που επιλέχθηκε. Το ιδανικό τετράεδρο σχηματίζεται από τις κορυφές του τριγώνου και το σημείο P^1 .

Η δεύτερη σημαντική διαφορά της εφαρμογής από την πρωτότυπη μορφή της διαδικασίας είναι η αδρανοποίηση του βοηθητικού πλέγματος υποβάθρου. Η χρήση του πλέγματος και των αντίστοιχων παραμέτρων του έχει ως αποτέλεσμα την κανονικοποίηση του χώρου, ώστε όλα τα τριγωνικά στοιχεία να έχουν παραπλήσιο σχήμα και μέγεθος. Αυτό επιτρέπει την χρήση μιας

απόλυτα προκαθορισμένης διαδικασίας για την δημιουργία νέων τετραέδρων, ανεξάρτητα από το τριγωνικό στοιχείο που αποτελεί τη βάση του. Στην περίπτωση του κανονικοποιημένου χώρου, τα τρία ύψη οποιουδήποτε τριγώνου έχουν σχεδόν ίσο μήκος, οπότε το σημείο P^1 έχει καθορισμένη απόσταση από τις κορυφές του τριγώνου. Αν ωστόσο δεν χρησιμοποιείται η λογική της κανονικοποίησης, όπως στην προτεινόμενη μεθοδολογία, κάθε τριγωνικό στοιχείο πρέπει να αντιμετωπίζεται με διαφορετική λογική και η διαδικασία να προσαρμόζεται στο εκάστοτε τρίγωνο. Πρακτικά, σε κάθε τρίγωνο πρέπει να υπολογιστεί η απόσταση που πρέπει να έχει σημείο P^1 από τις κορυφές της βάσης. Η απόσταση αυτή λαμβάνεται ίση με το μέσο μήκος των ακμών που γειτνιάζουν με το εκάστοτε τρίγωνο-βάση. Με την τακτική αυτή, οι τρεις νέες ακμές, που δημιουργούνται ταυτόχρονα με το νέο τετράεδρο, έχουν περίπου ίσο μήκος με τις κοντινές ακμές του πλέγματος, ώστε τελικά να εξασφαλίζεται η ομοιόμορφη διάδοση της επιφανειακής πύκνωσης στο εσωτερικό του πλέγματος.

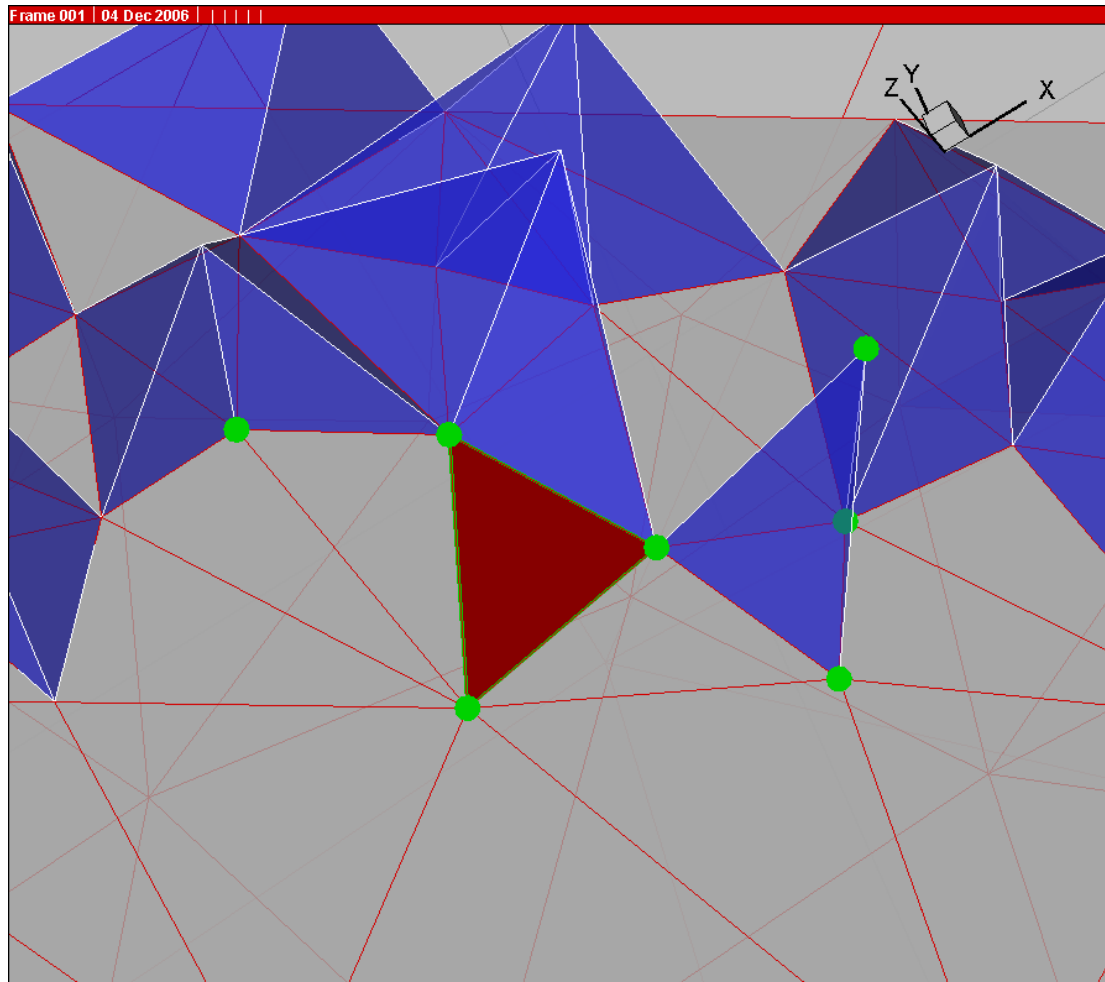
Μετά τον εντοπισμό της βέλτιστης κορυφής P^1 , εντοπίζονται οι κόμβοι Q του πλέγματος, που είναι σχετικοί με τη δημιουργία του νέου τετραέδρου. Ο αλγόριθμος προσπαθεί να χρησιμοποιήσει έναν από τους υπάρχοντες κόμβους του πλέγματος, ώστε να δημιουργήσει ένα υποβέλτιστο τετράεδρο, αν βέβαια αυτό είναι εφικτό. Αν αυτό είναι αδύνατο, καταφεύγει στη δημιουργία και αξιοποίηση των σημείων P , αν βέβαια είναι επίσης εφικτό. Η λογική αυτή κρατάει σε χαμηλά επίπεδα το πλήθος των κόμβων που δημιουργούνται, οπότε διατηρεί σε χαμηλό επίπεδο και τις υπολογιστικές απαιτήσεις της εφαρμογής.

Οι κόμβοι Q , που θεωρούνται σχετικοί με τη δημιουργία του νέου τετραέδρου, είναι οι κόμβοι του πλέγματος που βρίσκονται κοντά στο τρίγωνο-βάση. Πρακτικά, είναι οι κόμβοι που εντοπίζονται στο εσωτερικό μιας σφαίρας με κέντρο το κέντρο του τριγώνου και ακτίνα ίση με τη μεγαλύτερη απόσταση του σημείου P^1 από τις κορυφές του. Οι κόμβοι Q που εντοπίζονται στη περίπτωση που εξετάζεται είναι τα πράσινα σημεία που διακρίνονται στην εικόνα 3.8.

Τα παραπάνω σημεία αποτελούν υποψήφια σημεία, που μπορούν να χρησιμοποιηθούν ως τέταρτη κορυφή του νέου τετραέδρου, ενώ εξαιρούνται από αυτά οι κορυφές του τριγώνου-βάσης. Για κάθε σημείο Q που απομένει, σχεδιάζεται νοητά μια σφαίρα, που διέρχεται από αυτό και από την κορυφή του τριγώνου-βάση που έχει τη μεγαλύτερη απόσταση από το κέντρο του. Το κέντρο C_Q της σφαίρας εντοπίζεται στην ευθεία που ορίζεται από το σημείο P^1 και από το κέντρο του τριγώνου. Η θέση των κέντρων C_Q των νοητών σφαιρών κατατάσσει τα αντίστοιχα υποψήφια σημεία Q . Το πρώτο σημείο Q της κατάταξης αντιστοιχεί στο κέντρο C_Q που απέχει περισσότερο από το σημείο P^1 προς το κέντρο του τριγώνου.

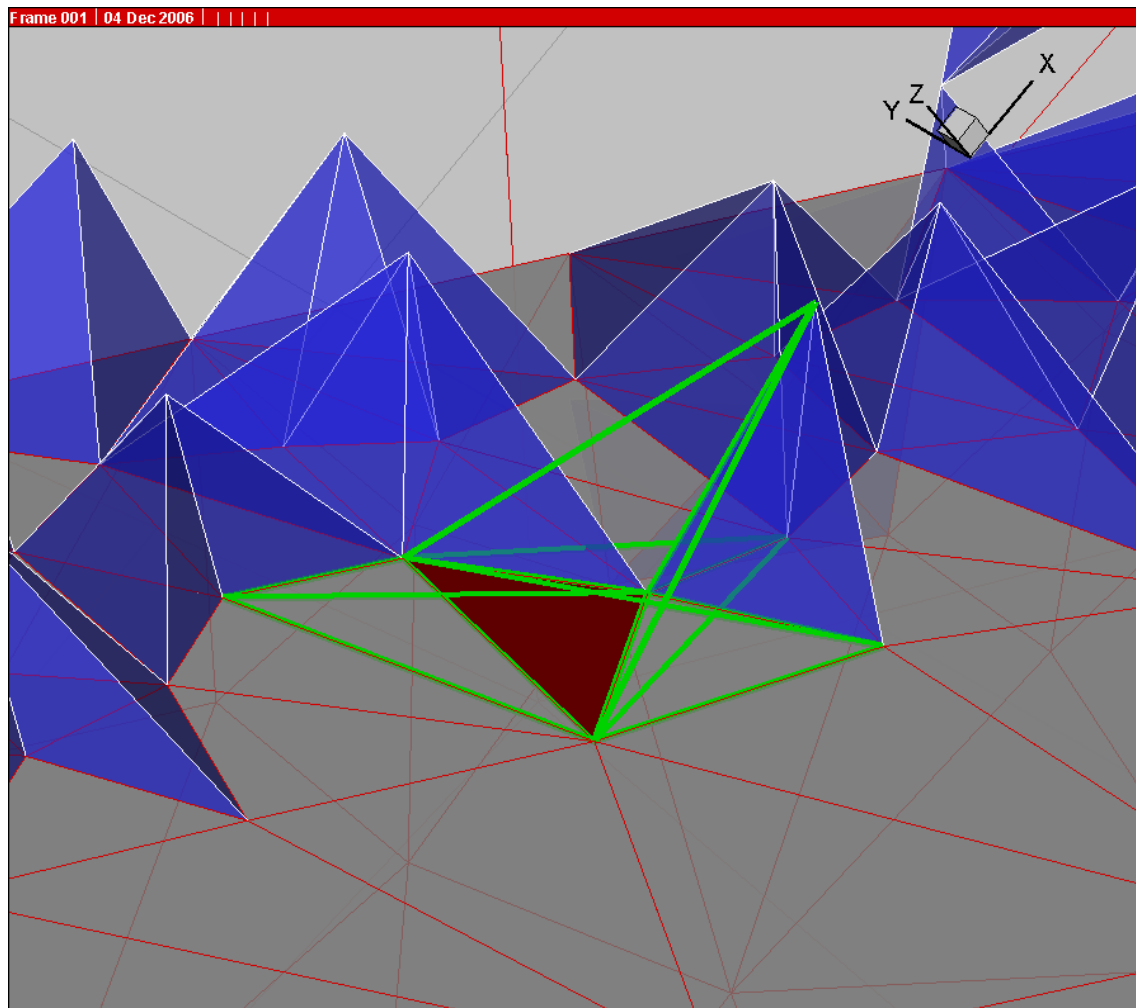
Εφόσον καταταχθούν τα σημεία Q , στο τέλος της διατεταγμένης λίστας των υποψηφίων σημείων προστίθενται τα σημεία P . Τα σημεία αυτά, ένα εκ των οποίων είναι και το σημείο P^1 , είναι ισαπέχοντα σημεία, που τοποθετούνται στο τμήμα που ενώνει το P^1 και το κέντρο του τριγώνου-βάση. Στην πρωτότυπη μορφή της, η διαδικασία χρησιμοποιεί έως και 5 σημεία P . Στην παρούσα εφαρμογή, πέραν του P^1 εντοπίζεται και χρησιμοποιείται ένα μόνο ακόμη σημείο P , το P^2 , το οποίο τοποθετείται στην ευθεία που περιγράφεται

παραπάνω, αλλά βρίσκεται κοντά στο σημείο P' . Ο λόγος που εξαιρούνται τα υπόλοιπα σημεία P είναι ότι πειραματικά αποδεικνύεται ότι η αξιοποίηση περισσότερων σημείων P μπορεί να προκαλέσει τη δημιουργία παραμορφωμένων τετραέδρων και ασυνήθιστα μικρών τριγωνικών στοιχείων. Το αποτέλεσμα είναι η αδικαιολόγητη και ανεπιθύμητη πύκνωση του πλέγματος, που, υπό συνθήκες, θέτει σε κίνδυνο τη σταθερότητα του αλγορίθμου.



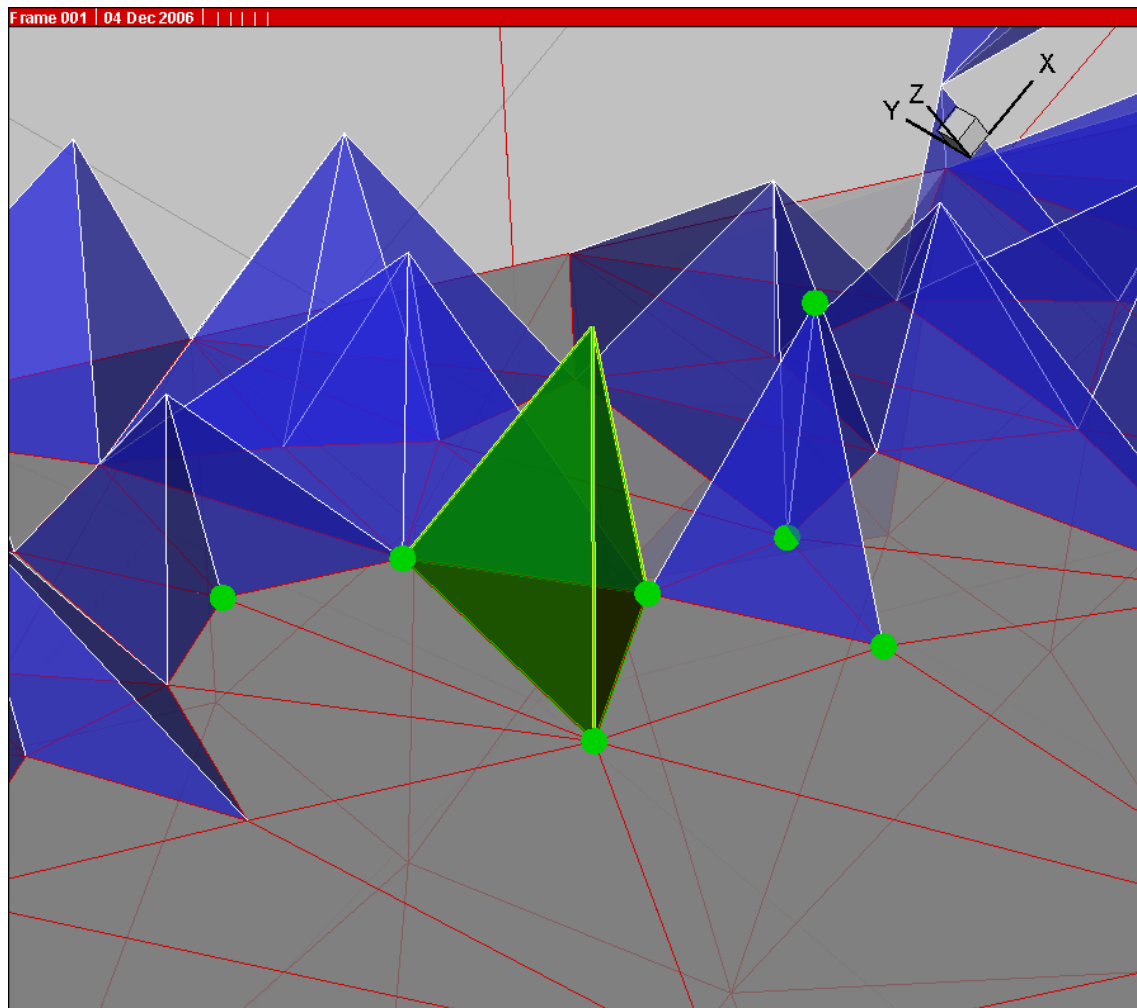
Εικόνα 3.8: Δημιουργία νέου τετραέδρου. Με πράσινο χρώμα διακρίνονται τα σημεία Q . Τα σημεία Q είναι πιθανές κορυφές του νέου τετραέδρου.

Εφόσον συσταθεί πλήρως η διατεταγμένη λίστα των υποψηφίων κορυφών του νέου τετραέδρου, η διαδικασία προχωρά στην επιλογή ενός από αυτά και στη δημιουργία του νέου στοιχείου. Το σημείο που επιλέγεται είναι το πρώτο σημείο της διατεταγμένης λίστας που αποδίδει έγκυρο τετράεδρο. Στην εικόνα 3.9 διακρίνονται με πράσινο περίγραμμα τα τετράεδρα που μπορούν να δημιουργηθούν, αξιοποιώντας τα σημεία Q , τα οποία προηγούνται των σημείων P στη λίστα των υποψηφίων σημείων.



Εικόνα 3.9: Δημιουργία νέου τετραέδρου. Με πράσινο διάγραμμα διακρίνονται τα τετράεδρα που προκύπτουν χρησιμοποιώντας ως 4^η κορυφή ένα από τα σημεία Q .

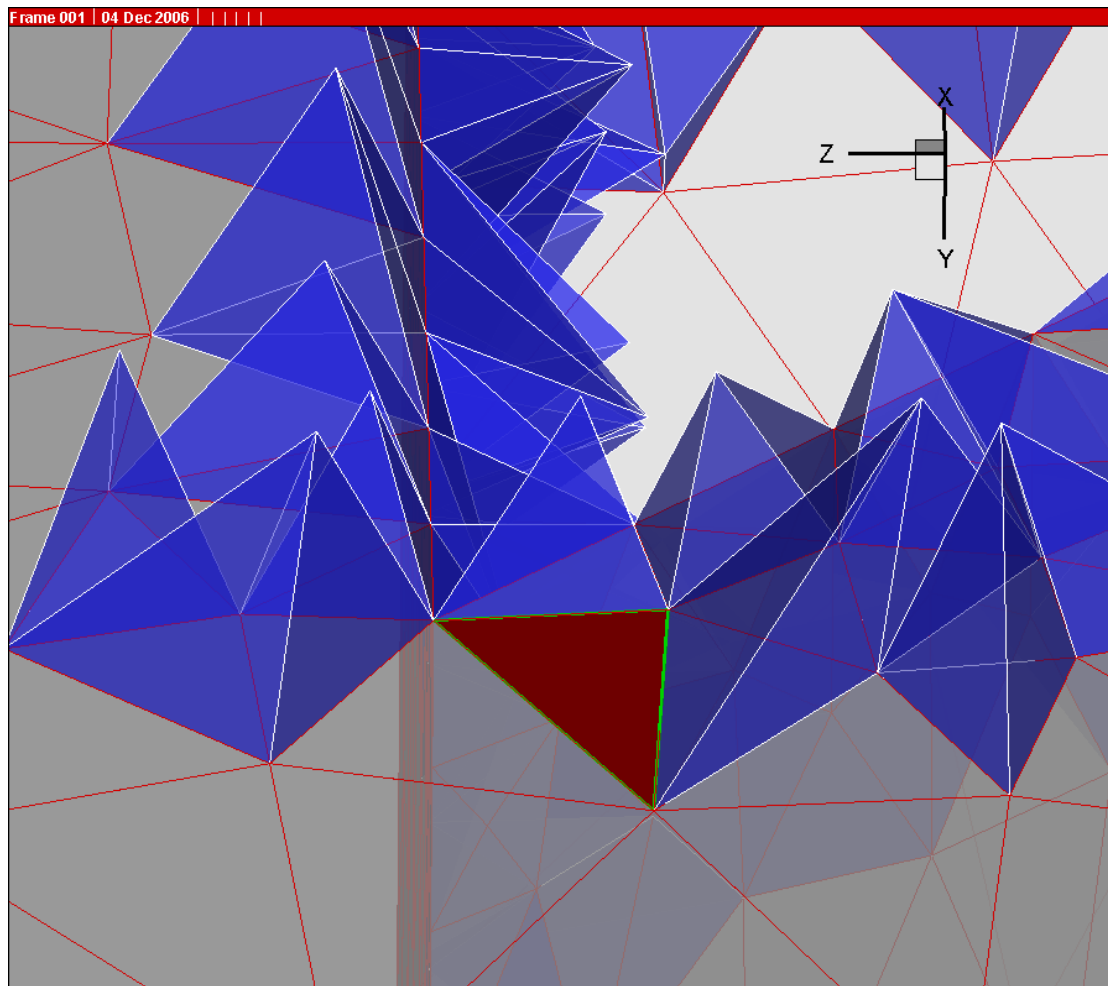
Τα τετράεδρα που εικονίζονται στην εικόνα 3.9 κρίθηκαν τελικά άκυρα και τα αντίστοιχα σημεία Q απορρίφθηκαν από τη διαδικασία. Η εγκυρότητα ενός τετραέδρου εξασφαλίζεται εφόσον οι ακμές του δεν τέμνουν κανένα από τα τρίγωνα του πλέγματος και οι έδρες του δεν τέμνουν καμιά από τις ακμές του πλέγματος. Επιπλέον, κάθε νέο τετράεδρο δεν πρέπει να περικλείει κανέναν κόμβο. Στο σημείο αυτό εντοπίζεται και η τρίτη σημαντική διαφοροποίηση της παρούσας εφαρμογής από την πρωτότυπη διαδικασία. Στην εφαρμογή αυτή ένα νέο τετράεδρο κρίνεται έγκυρο εφόσον πληροί τις παραπάνω προϋποθέσεις και επιπλέον ικανοποιεί κάποιους περιορισμούς, που ρυθμίζονται ανάλογα με το εκάστοτε τρίγωνο-βάση. Σκοπός των περιορισμών είναι η εξασφάλιση υψηλής ποιότητας του πλέγματος, αλλά κυρίως η εφικτότητα της διαδικασίας στα επόμενα στάδια. Οι περιορισμοί θα αναλυθούν στη συνέχεια. Μετά την απόρριψη των σημείων Q ακολουθεί η εξέταση των υπόλοιπων υποψηφίων κορυφών, που είναι κατά σειρά τα σημεία P^1 και P^2 . Εφόσον κάποιο από αυτά αποδίδει έγκυρο τετράεδρο, επιλέγεται ως η τέταρτη κορυφή του νέου τετραέδρου και ακολουθεί η ενημέρωση των σχετικών δομών δεδομένων. Στη περίπτωση που εξετάζεται, το σημείο P^1 επιλέγεται και δημιουργείται το νέο τετράεδρο, όπως διακρίνεται εικόνα 3.10.



Εικόνα 3.10: Δημιουργία νέου τετραέδρου. Το νέο τετραέδρο, το οποίο διακρίνεται με πράσινο χρώμα, σχηματίζεται από τις κορυφές του τριγώνου-βάσης και το σημείο P^i .

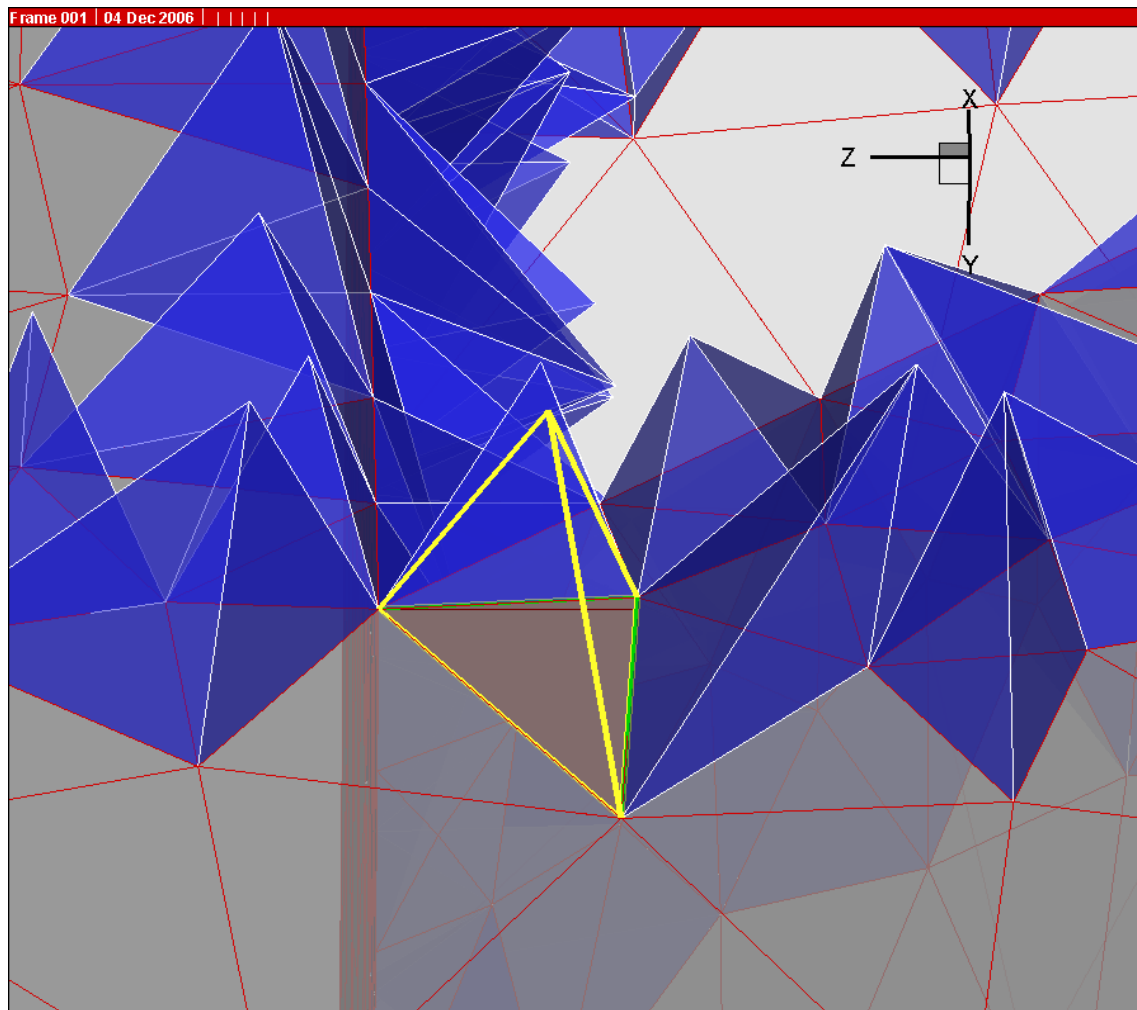
Στην περίπτωση που κανένα υποψήφιο σημείο δεν αποδίδει έγκυρο τετραέδρο, το τρίγωνο-βάση χαρακτηρίζεται ως κρίσιμο και θα συμμετάσχει και στα επόμενα μέτωπα της διαδικασίας. Ο αλγόριθμος συνεχίζει με το επόμενο τριγωνικό στοιχείο του τρέχοντος μετώπου.

Στη συνέχεια περιγράφεται μια δεύτερη περίπτωση δημιουργίας ενός νέου τετραέδρου. Στην εικόνα 3.11 με κόκκινο χρώμα διακρίνεται το τρίγωνο-βάση, το οποίο περιβάλλεται από τετραέδρα μπλε χρώματος, τα οποία έχουν ήδη δημιουργηθεί.



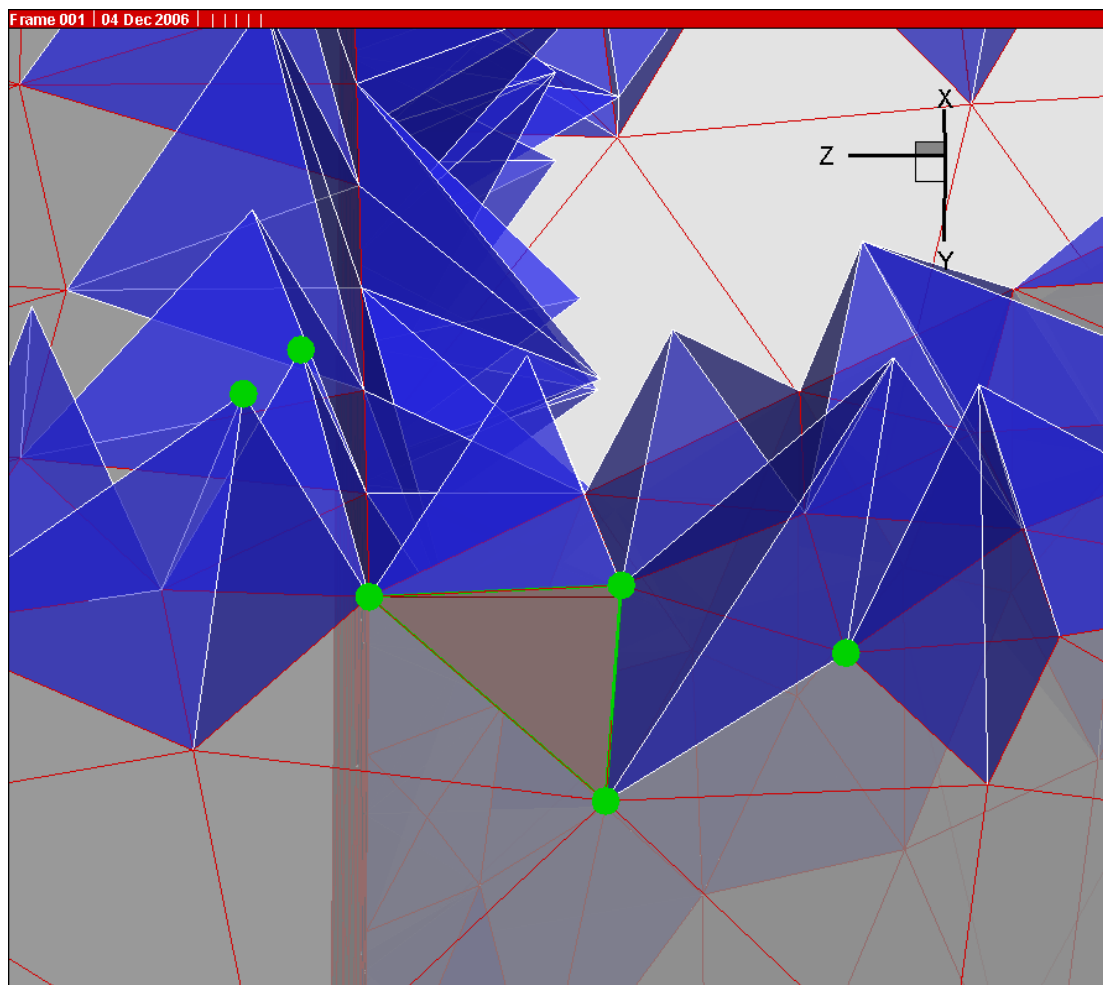
Εικόνα 3.11: Δημιουργία νέου τετραέδρου. Με κόκκινο χρώμα διακρίνεται το τρίγωνο του μετώπου που επιλέχθηκε ως βάση για το επόμενο τετράεδρο. Με μπλε χρώμα διακρίνονται τα τετράεδρα που έχουν ήδη δημιουργηθεί κατά το τρέχων μέτωπο.

Αρχικά εντοπίζεται η κορυφή P^i του ιδανικού τετραέδρου. Στην εικόνα 3.12 εικονίζεται με κίτρινο περίγραμμα το τετράεδρο που αποδίδεται από το σημείο P^i .

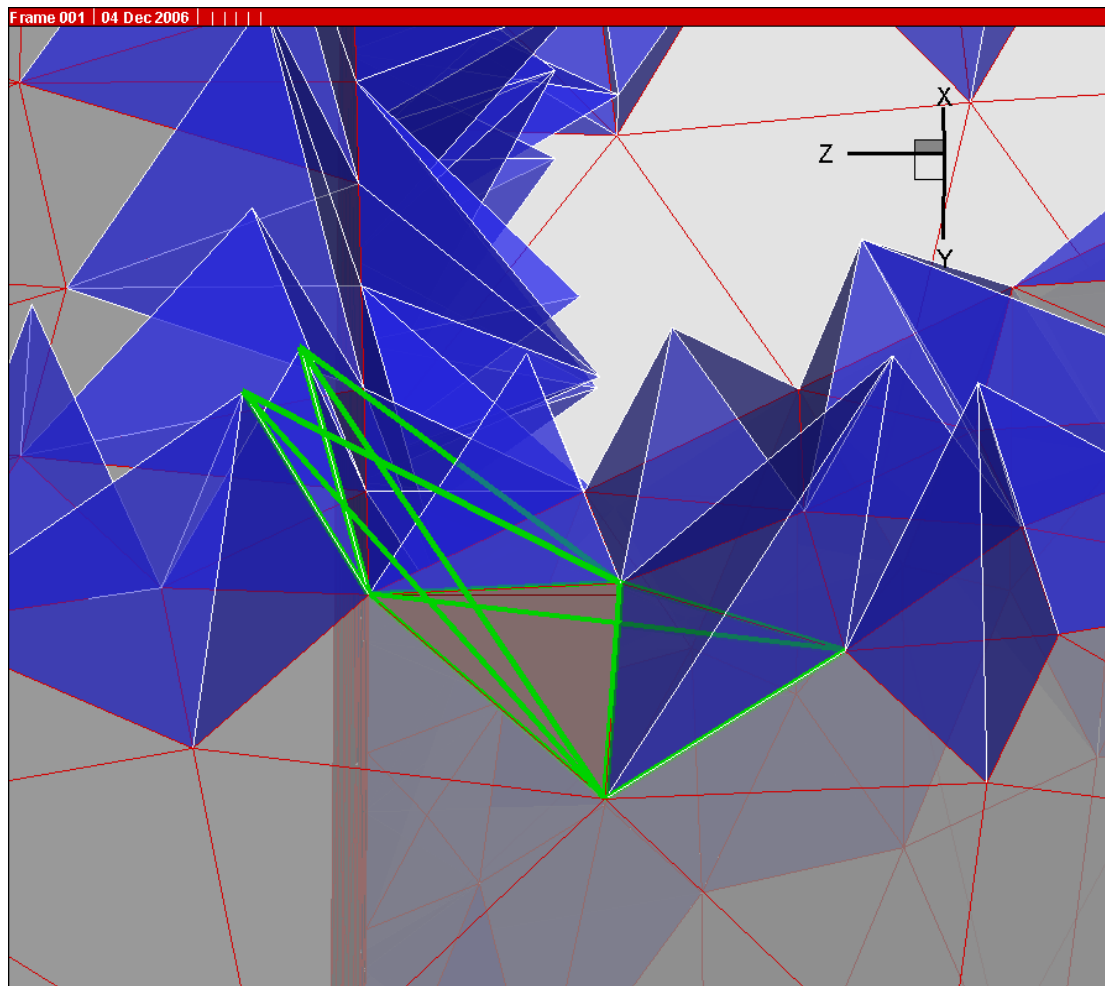


Εικόνα 3.12: Δημιουργία νέου τετραέδρου. Με κίτρινο περίγραμμα διακρίνεται το ιδανικό τετράεδρο για την περίπτωση του τριγώνου που επιλέχθηκε. Το ιδανικό τετράεδρο σχηματίζεται από τις κορυφές του τριγώνου και το σημείο P^i .

Ακολουθεί ο εντοπισμός των σχετικών κόμβων του πλέγματος (εικόνα 3.13), η αναγνώριση των σημείων Q και η κατάταξή τους βάση των κέντρων C_Q . Εν συνεχεία αναζητείται κατάλληλη κορυφή μεταξύ των υποψηφίων σημείων. Για κάθε ένα ελέγχεται η εγκυρότητα του αντίστοιχου τετραέδρου μέχρι τον εντοπισμό ενός εφικτού τετραέδρου. Στην εικόνα 3.14 απεικονίζονται με πράσινο περίγραμμα τα τετράεδρα που αποδίδονται από τα σημεία Q .

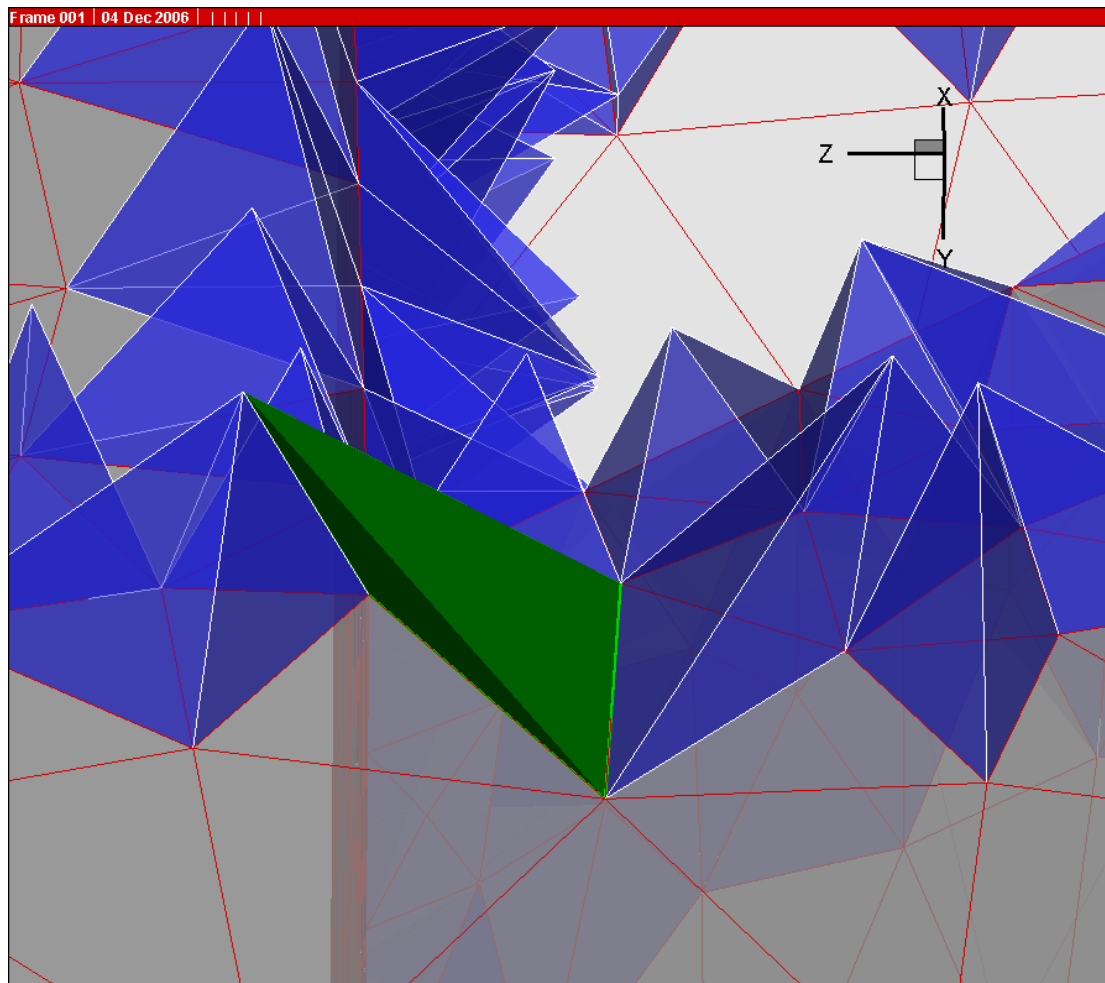


Εικόνα 3.13: Δημιουργία νέου τετραέδρου. Με πράσινο χρώμα διακρίνονται τα σημεία Q. Τα σημεία Q είναι πιθανές κορυφές του νέου τετραέδρου.



Εικόνα 3.14: Δημιουργία νέου τετραέδρου. Με πράσινο διάγραμμα διακρίνονται τα τετράεδρα που προκύπτουν χρησιμοποιώντας ως 4^η κορυφή ένα από τα σημεία Q .

Σε αυτή την περίπτωση εντοπίζεται υποψήφιο σημείο Q που αποδίδει έγκυρο τετράεδρο. Η διαδικασία αναζήτησης κορυφής τερματίζεται ενώ ταυτόχρονα δημιουργούνται οι νέες ακμές, οι νέες έδρες και το νέο τετράεδρο. Ωστόσο, δεν δημιουργείται κανένα νέο σημείο, καθώς και οι τέσσερις κορυφές του νέου τετραέδρου είναι κόμβοι του πλέγματος που προϋπήρχαν. Το νέο τετράεδρο απεικονίζεται στην εικόνα 3.15.

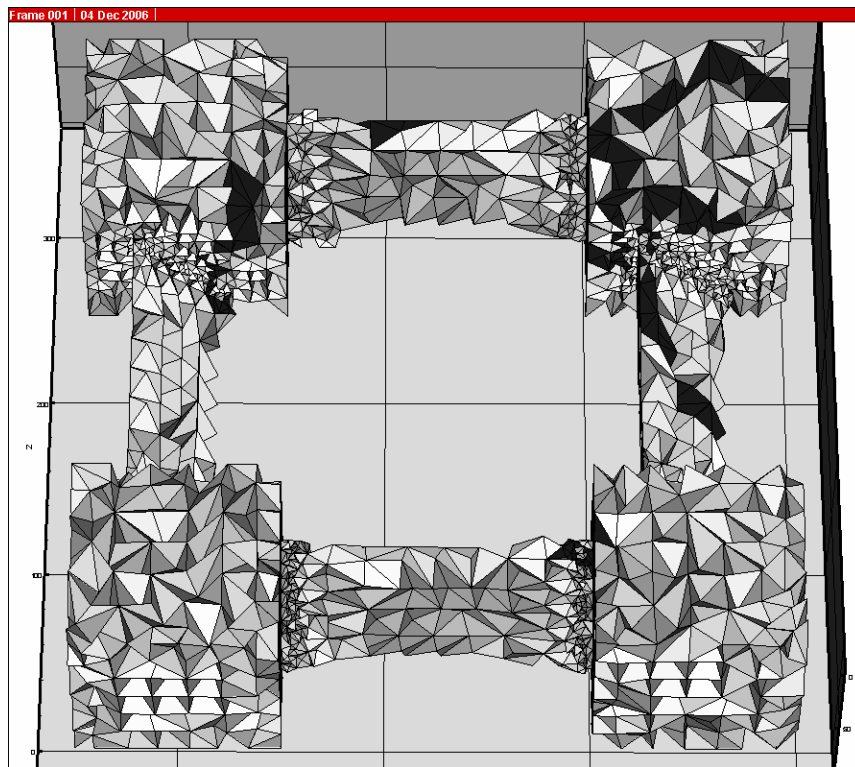


Εικόνα 3.15: Δημιουργία νέου τετραέδρου. Το νέο τετράεδρο, το οποίο διακρίνεται με πράσινο χρώμα, σχηματίζεται από τις κορυφές του τριγώνου-βάσης και ένα σημείο Q .

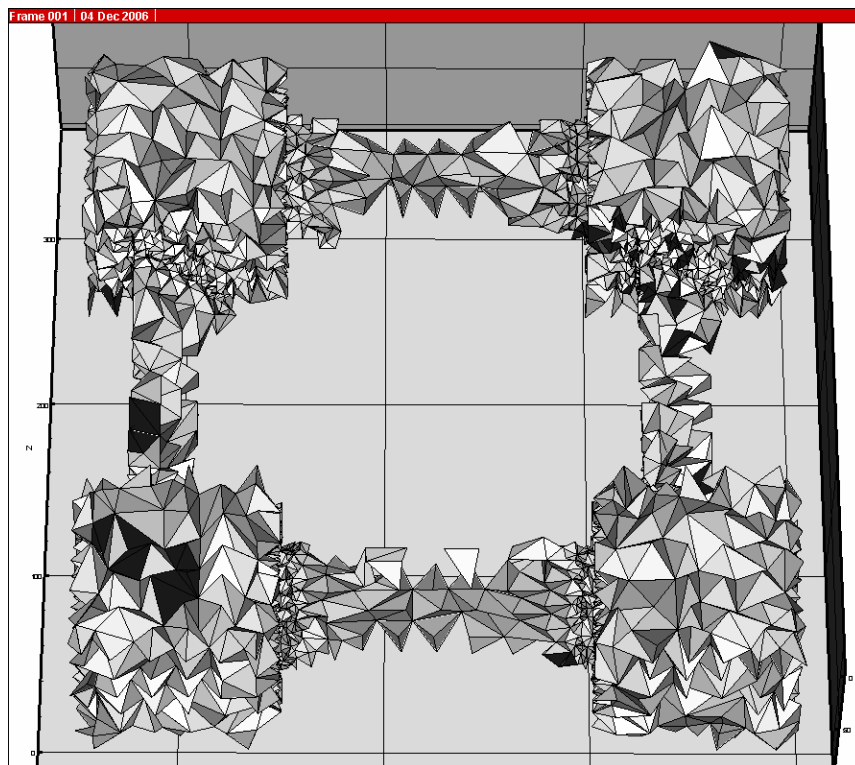
3.4 Σύσταση διαδοχικών μετώπων

Η βασική διαδικασία επαναλαμβάνεται για κάθε ένα τρίγωνο του τρέχοντος μετώπου, δημιουργώντας κάθε φορά ένα νέο τετράεδρο, εφόσον αυτό είναι έγκυρο. Το πρώτο μέτωπο, που χρησιμοποιεί η διαδικασία, αποτελείται από τα τριγωνικά στοιχεία, τα οποία συνθέτουν το επιφανειακό πλέγμα της γεωμετρίας. Όταν ολοκληρωθεί η εξέταση όλων των τριγώνων ενός μετώπου δημιουργείται το επόμενο από όλα τα τρίγωνα που αποτελούν έδρα λιγότερων από δύο τετραέδρων. Τα στοιχεία αυτά είναι τα τρίγωνα που δημιουργήθηκαν σε προηγούμενο μέτωπο και δεν ανήκουν σε δύο τετράεδρα, ή δεν ανήκουν σε κανένα τετράεδρο, εφόσον είναι τρίγωνα του αρχικού επιφανειακού πλέγματος. Η διαδικασία συνεχίζεται με την εξέταση των στοιχείων του νέου μετώπου. Κατά τη σύσταση διαδοχικών μετώπων επανεξετάζονται τριγωνικά στοιχεία που ήδη έχουν εξεταστεί μία ή περισσότερες φορές, χωρίς να ήταν εφικτή η δημιουργία ενός τετραέδρου με βάση τα εν λόγω τρίγωνα (εικόνα 3.19). Σε κάθε επανεξέταση τα τρίγωνα αντιμετωπίζονται με χαλαρότερους

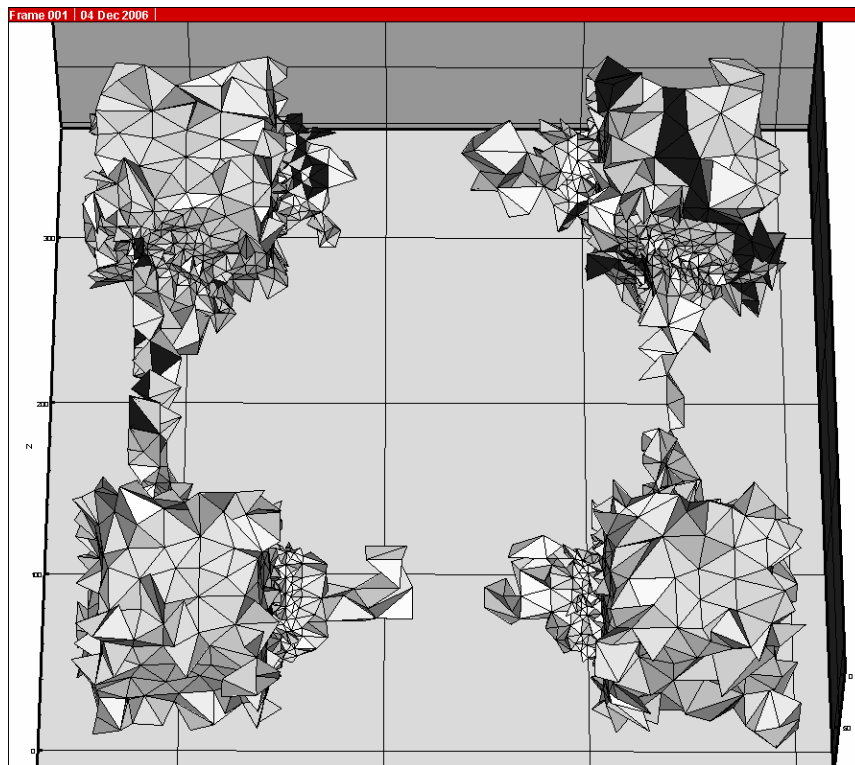
περιορισμούς, όπως θα εξηγηθεί στη συνέχεια. Στις εικόνες 3.16, 3.17 και 3.18 παρουσιάζονται διαδοχικά μέτωπα της διαδικασίας.



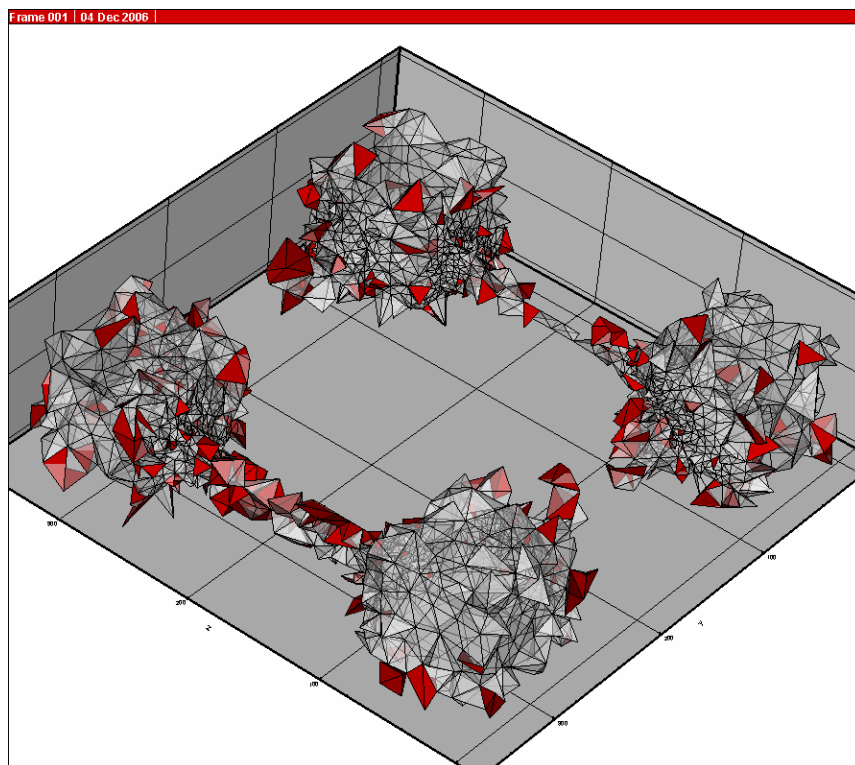
Εικόνα 3.16: Δημιουργία πλέγματος, 2^ο διαδοχικό μέτωπο.



Εικόνα 3.17: Δημιουργία πλέγματος, 3^ο διαδοχικό μέτωπο.



Εικόνα 3.18: Δημιουργία πλέγματος, 4^ο διαδοχικό μέτωπο.



Εικόνα 3.19: Δημιουργία πλέγματος. Με κόκκινο χρώμα διακρίνονται τα τρίγωνα που θα επανεξεταστούν κατά το 4^ο διαδοχικό μέτωπο.

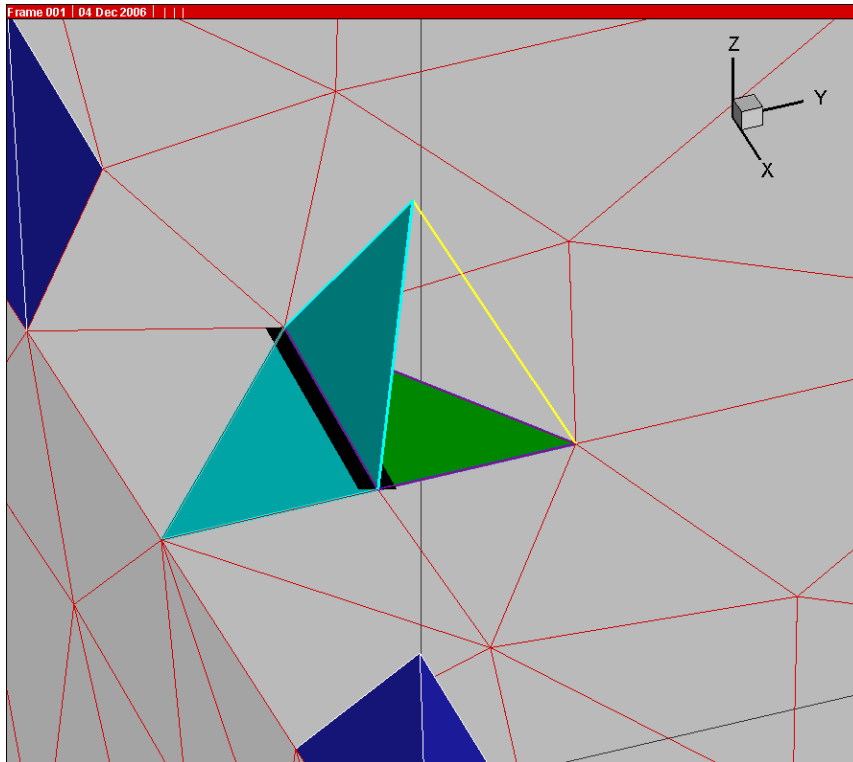
3.5 Περιορισμοί

Η εγκυρότητα ενός νέου τετραέδρου διασφαλίζει ότι τα νέα τρίγωνα, που δημιουργούνται ταυτόχρονα με τη δημιουργία του τετραέδρου, δεν παρουσιάζουν τομή με καμία ακμή του υπάρχοντος πλέγματος, και επιπλέον οι νέες ακμές δεν τέμνουν τα τρίγωνα του πλέγματος. Η αξιοπιστία του αλγορίθμου δημιουργίας τριδιάστατου πλέγματος κρίνεται από την αξιοπιστία της διαδικασίας ελέγχου πιθανής τομής μεταξύ ενός τριγώνου και μιας ακμής. Η διαδικασία αυτή είναι επίσης κρίσιμη και για την αποδοτικότητα του αλγορίθμου, καθώς απαιτεί ένα μεγάλο μέρος του συνολικού υπολογιστικού χρόνου. Για τους λόγους αυτούς η διαδικασία ελέγχου της εγκυρότητας ενός τετραέδρου αξιοποιεί σύνθετες δομές δεδομένων, όπως τα εναλλασσόμενα ψηφιακά δέντρα, που επινοήθηκαν ακριβώς για τη συγκεκριμένη διαδικασία. Η ανάλυση της συγκεκριμένης δομής προηγήθηκε στο κεφάλαιο 2.

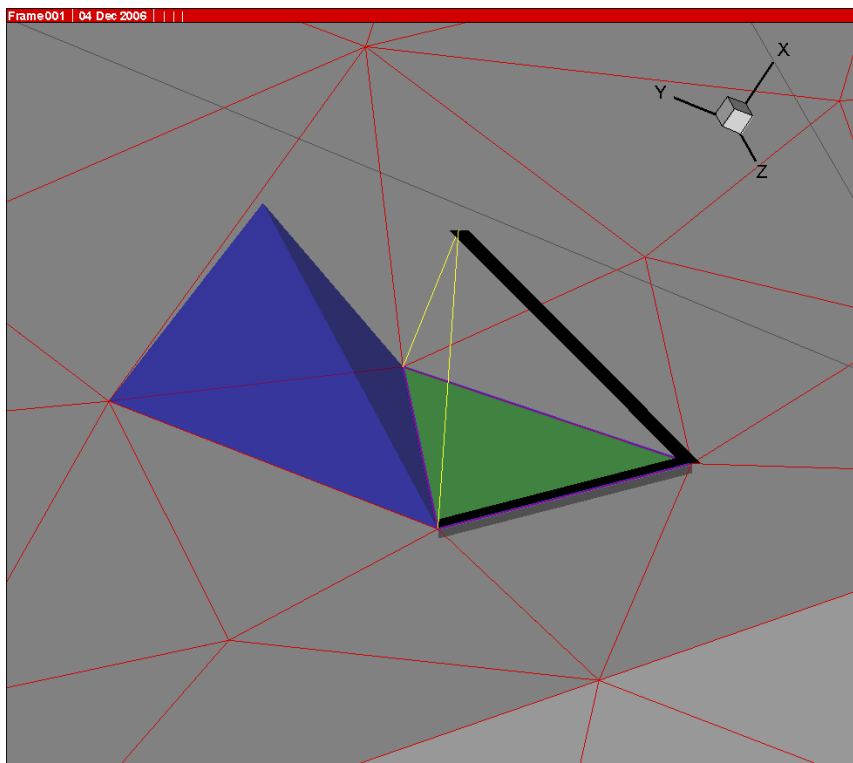
Εκτός από την προϋπόθεση της μη ύπαρξης τομής μεταξύ στοιχείων του πλέγματος, η εγκυρότητα ενός τετραέδρου προϋποθέτει και την ικανοποίηση κάποιων περιορισμένων που αφορούν γωνίες μεταξύ εδρών, ακμών, και μεταξύ έδρας και ακμής. Ένα νέο τετράεδρο είναι αποδεκτό όταν:

- δεν παρουσιάζει τομή με κανένα στοιχείο του πλέγματος.
- οι γωνίες μεταξύ των εδρών του δεν ξεπερνάνε μια μέγιστη τιμή.
- οι διέδρες γωνίες μεταξύ κάθε έδρας του και των γειτονικών εδρών του πλέγματος είναι μεγαλύτερες από μια ελάχιστη τιμή.
- οι γωνίες μεταξύ κάθε ακμής του και των ακμών του πλέγματος είναι μεγαλύτερες από μια ελάχιστη τιμή.
- οι γωνίες που σχηματίζει κάθε ακμή του με τις γειτονικές έδρες του πλέγματος είναι μεγαλύτερες από μια ελάχιστη τιμή.
- το νέο τετράεδρο δεν εσωκλείει κανένα κόμβο του πλέγματος.

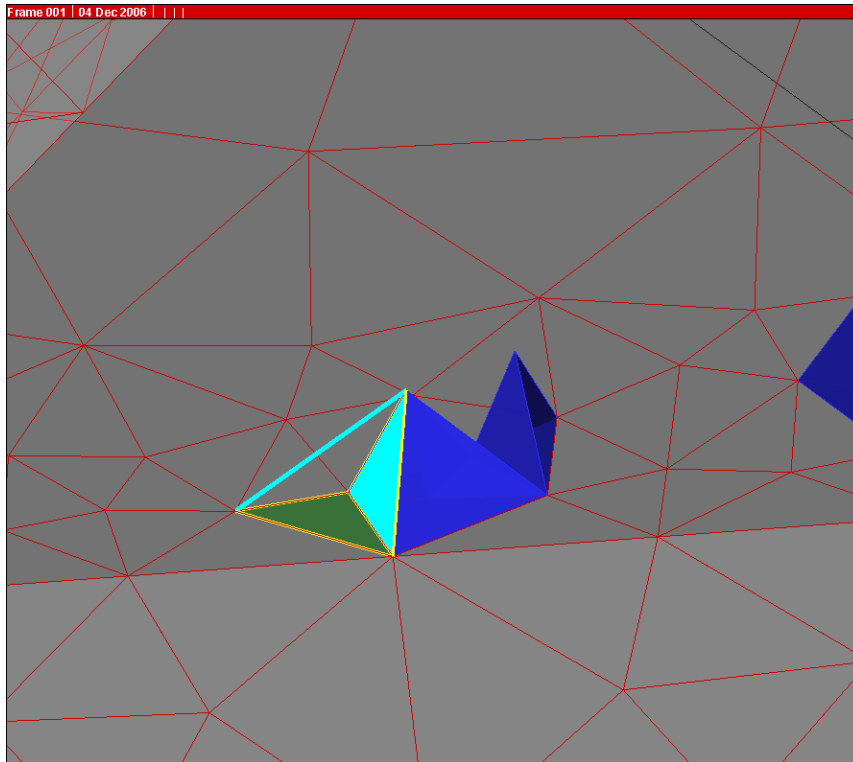
Οι επιβολή όλων των παραπάνω περιορισμών υπερπεριορίζει τη διαδικασία, χωρίς να βελτιώνει σημαντικά την ποιότητα του παραγόμενου πλέγματος. Συνήθως επιβάλλεται ένας συνδυασμός μερικών από τους παραπάνω περιορισμούς, ανάλογα με την περίπτωση που καλείται να αντιμετωπίσει ο αλγόριθμος. Στις εικόνες 3.20, 3.21 και 3.22 διακρίνονται οι γωνίες που υπολογίζονται και που οφείλουν να πληρούν συγκεκριμένες προϋποθέσεις, ώστε να είναι αποδεκτό ένα νέο τετράεδρο.



Εικόνα 3.20: Διέδρη γωνία. Με γαλάζιο χρώμα διακρίνονται οι δύο έδρες και με μαύρο χρώμα διακρίνεται η κοινή ακμή τους, όπου σχηματίζεται η εν λόγω γωνία.



Εικόνα 3.21: Γωνία μεταξύ ακμών. Με μαύρο χρώμα διακρίνονται οι δύο ακμές που σχηματίζουν τη γωνία που ελέγχεται.



Εικόνα 3.22: Γωνία μεταξύ έδρας και ακμής. Με γαλάζιο χρώμα διακρίνονται η έδρα και η ακμή που σχηματίζουν τη γωνία που ελέγχεται.

Η επιβολή των περιορισμών έχει σκοπό την διασφάλιση ότι τα τετράεδρα που δημιουργούνται έχουν αποδεκτό σχήμα και αποφεύγεται όσο το δυνατό η δημιουργία υπερβολικά στρεβλών τετραέδρων. Επιπλέον, οι περιορισμοί εξασφαλίζουν ότι κάθε νέο τετράεδρο δημιουργείται με τον καταλληλότερο δυνατό τρόπο, ώστε να διασφαλίζεται ικανοποιητικός χώρος γύρω του για τη δημιουργία γειτονικών τετραέδρων.

Η αυστηρότητα των περιορισμών αυτών δεν είναι σταθερή, αλλά προσαρμόζεται σε κάθε τριγωνικό στοιχείο του μετώπου, ανάλογα με το πλήθος των επανεξετάσεων που έχει υποστεί. Σε πολλές περιπτώσεις εξετάζεται ένα τριγωνικό στοιχείο χωρίς όμως να καθίσταται τελικά δυνατή η δημιουργία ενός νέου τετραέδρου, που να ικανοποιεί το σύνολο των περιορισμών. Στις περιπτώσεις αυτές δεν αναλαμβάνεται καμία ενέργεια και τα στοιχεία αυτά συμμετέχουν και στα επόμενα μέτωπα. Κατά την επανεξέτασή τους οι περιορισμοί που καλείται να ικανοποιεί ένα νέο τετράεδρο (έχοντας ως έδρα-βάση τα συγκεκριμένα τρίγωνα) είναι χαλαρότεροι, αυξάνοντας έτσι την πιθανότητα να βρεθεί μια εφικτή λύση. Οι περιορισμοί που επιβάλλονται χαλαρώνουν με την έννοια της μείωσης της ελάχιστης επιτρεπτής γωνίας και την αύξηση της μέγιστης επιτρεπτής.

Ως παράδειγμα, σε μια εφαρμογή εξετάζεται το k τρίγωνο κατά το m μέτωπο και οι περιορισμοί επιβάλλουν μέγιστη διέδρη γωνία 120 μοιρών και ελάχιστη διέδρη γωνία 30 μοιρών. Εάν τελικά δεν βρεθεί νέο τετράεδρο που να ικανοποιεί τους περιορισμούς, το k τρίγωνο θα συμμετέχει και στο $m+1$ μέτωπο. Οι περιορισμοί που θα επιβληθούν τότε θα αφορούν μέγιστη διέδρη γωνία 130 μοιρών και ελάχιστη διέδρη γωνία 25 μοιρών.

Η σταδιακή χαλάρωση των περιορισμών επιτρέπει την εύρεση εφικτής λύσης σε αρκετές δύσκολες περιπτώσεις, χωρίς ωστόσο να μειώνεται δραματικά η ποιότητα του πλέγματος. Για ένα δεδομένο τριγωνικό στοιχείο, οι περιορισμοί χαλαρώνουν αναλογικά με το πλήθος των επανεξετάσεων που έχει υποστεί, μέχρι ένα μέγιστο αριθμό επανεξετάσεων. Στην περίπτωση που ένα τρίγωνο φτάσει τον αριθμό αυτό, δεν γίνονται πλέον προσπάθειες δημιουργίας τετραέδρου χρησιμοποιώντας το εν λόγω τρίγωνο και το πρόβλημα θα κληθεί να αντιμετωπίσει η διαδικασία αποκατάστασης, η οποία θα αναλυθεί στη συνέχεια.

Ένας επιπλέον έμμεσος περιορισμός που επιβάλλεται αφορά στον έλεγχο πιθανής τομής τριγώνων και ακμών. Κατά τον έλεγχο αυτό, το εμβαδό κάθε τριγώνου μεγεθύνεται τεχνητά, πολλαπλασιάζοντας με ένα συντελεστή, ώστε ο έλεγχος να εξασφαλίζει όχι μόνο ότι ένα νέο στοιχείο δεν τέμνεται με κάποιο άλλο στοιχείο του πλέγματος, αλλά επιπλέον ότι διατηρείται μια σχετική απόσταση μεταξύ τους και ότι ο χώρος που θα απομείνει γύρω από ένα νέο τετράεδρο θα είναι επαρκής, ώστε να μπορούν να δημιουργηθούν γειτονικά τετράεδρα. Πειραματικά φάνηκε η χρησιμότητα του έμμεσου αυτού περιορισμού, καθώς συμβάλλει σημαντικά τόσο στην ποιότητα του πλέγματος, όσο και στη σταθερότητα του αλγορίθμου.

Όπως αναφέρθηκε, σε κάθε περίπτωση που καλείται να αντιμετωπίσει ο αλγόριθμος μπορεί να απαιτείται διαφορετικός συνδυασμός περιορισμών, με διαφορετικά επιτρεπτά όρια των γωνιών, συντελεστή μεγέθυνσης των τριγώνων, ρυθμό χαλάρωσης των περιορισμών και μέγιστο αριθμό επανεξετάσεων ενός τριγώνου. Επιπλέον, κάποιοι περιορισμοί δύνανται να μην χαλαρώνουν, αλλά να παραμένουν σταθεροί για οποιοδήποτε τρίγωνο, ώστε να διασφαλίζεται υψηλή ποιότητα του τελικού πλέγματος, μειώνοντας όμως την αξιοπιστία του αλγορίθμου. Εν γένει, ο χρήστης μπορεί να χρησιμοποιήσει διαφορετικούς συνδυασμούς περιορισμών, σταθμίζοντας την αύξηση της ποιότητας του παραγόμενου πλέγματος και την μείωση της ευρωστίας της βασικής μεθοδολογίας. Σε κάθε περίπτωση όμως πρέπει να διατηρείται μια σχετική ισορροπία μεταξύ των ανταγωνιστικών αυτών χαρακτηριστικών, για την ομαλή λειτουργία του αλγορίθμου.

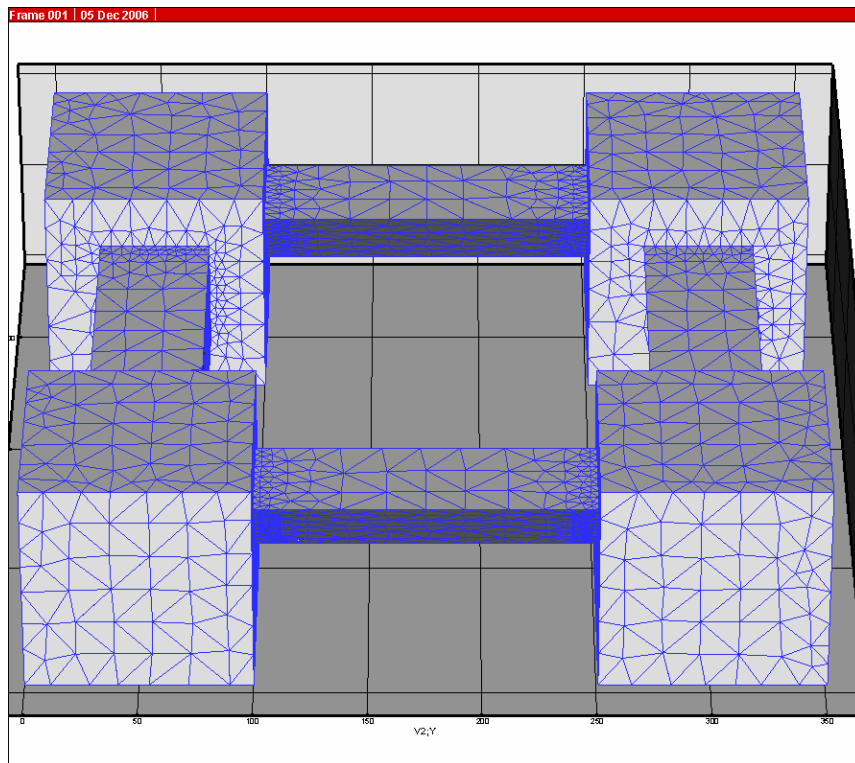
3.6 Τερματισμός της βασικής διαδικασίας

Η βασική διαδικασία που αναλύθηκε προηγουμένως, επαναλαμβάνεται για κάθε τριγωνικό στοιχείο ενός μετώπου, ενώ όταν εξεταστούν όλα τα τρίγωνα, συστήνεται ένα νέο μέτωπο. Η βασική διαδικασία τερματίζεται υπό δύο συνθήκες.

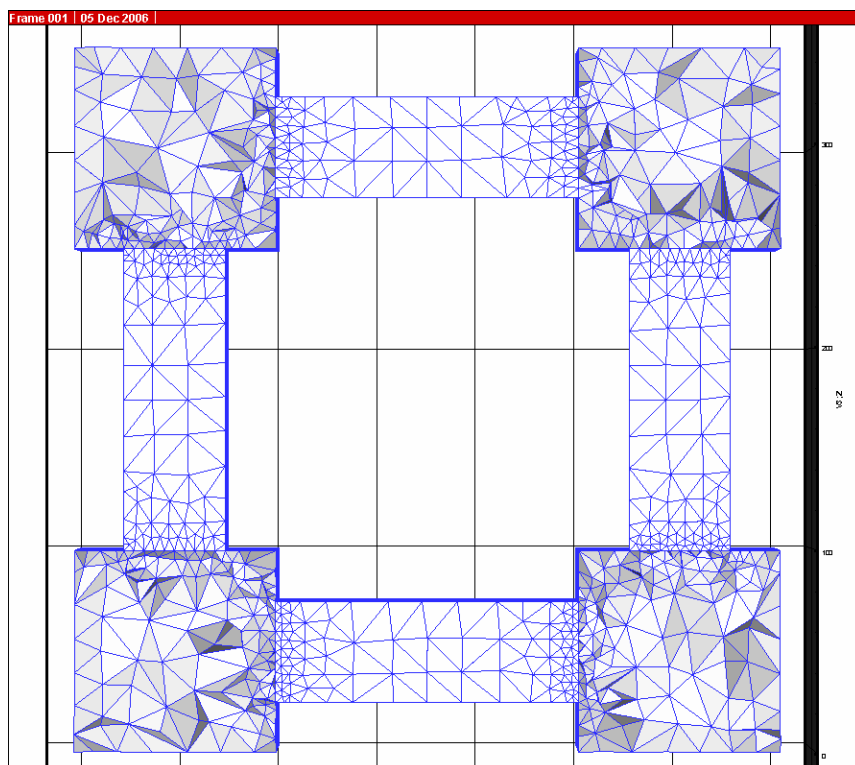
Η πρώτη συνθήκη τερματισμού της βασικής επαναληπτικής διαδικασίας είναι η περίπτωση που δεν υπάρχει κανένα τριγωνικό στοιχείο που να μπορεί να συμμετάσχει στη συγκρότηση νέου μετώπου. Αυτό συμβαίνει όταν όλα τα τρίγωνα του πλέγματος ανήκουν σε δύο τετράεδρα, ή σε ένα όσον αφορά τα τρίγωνα του επιφανειακού πλέγματος. Ο υπό διακριτοποίηση χώρος έχει διακριτοποιηθεί πλήρως και ο αλγόριθμος περατώνεται. Η συνθήκη αυτή παρουσιάζεται σε λίγες σχετικά περιπτώσεις, όπου συνήθως το επιφανειακό πλέγμα δεν παρουσιάζει πυκνώσεις, ο χώρος προς διακριτοποίηση δεν παρουσιάζει ιδιαίτερη γεωμετρική πολυπλοκότητα και οι περιορισμοί που επιβάλλονται αποφέρουν την ιδανική ισορροπία μεταξύ ποιότητας και ευρωστίας.

Η δεύτερη και πιο συνηθισμένη συνθήκη τερματισμού της βασικής επαναληπτικής διαδικασίας είναι η περίπτωση κατά την οποία όλα τα τρίγωνα που συμμετέχουν στη συγκρότηση νέου μετώπου έχουν ήδη φτάσει το μέγιστο αριθμό επανεξετάσεων, οπότε δεν υπόκεινται σε νέα εξέταση. Με άλλα λόγια, δεν υπάρχει τρίγωνο το οποίο συμμετέχει στο επόμενο μέτωπο και δεν έχει εξεταστεί εξαντλητικά με συνεχή χαλάρωση των περιορισμών. Σε αυτή την περίπτωση το χωρίο που περικλείεται από το επιφανειακό πλέγμα δεν έχει διακριτοποιηθεί πλήρως, καθώς υπάρχουν μικρές περιοχές που δεν είναι εφικτή η διακριτοποίησή τους. Στην περίπτωση που η βασική διαδικασία ενσωματώνει περιορισμούς που δεν χαλαρώνουν αλλά διατηρούν σταθερά αποδεκτά όρια, ο αλγόριθμος επιστρέφει στην βασική επαναληπτική διαδικασία, αίροντας κάθε περιορισμό, συμπεριλαμβανομένου και του έμμεσου περιορισμού μεγέθυνσης των τριγώνων. Η βασική διαδικασία συνεχίζεται έως ότου φτάσει σε μία από τις δύο συνθήκες τερματισμού. Εάν φτάσει στη δεύτερη συνθήκη για δεύτερη φορά, τότε ο αλγόριθμος συνεχίζει με τη διαδικασία αποκατάστασης του πλέγματος, που θα παρουσιαστεί στη συνέχεια.

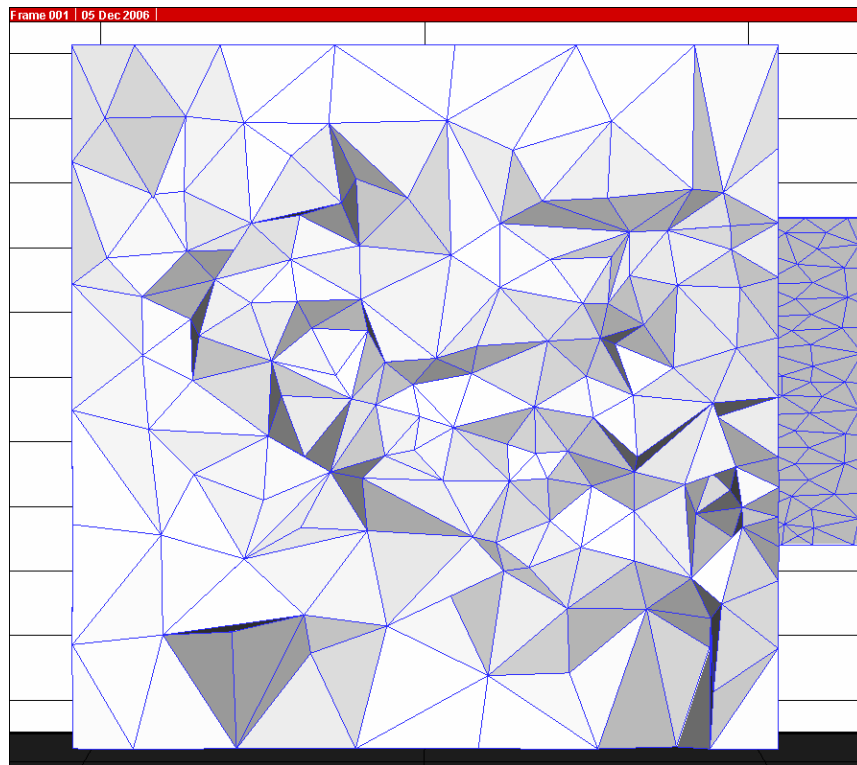
Στη περίπτωση που εξετάζεται, η βασική διαδικασία τερματίζεται όταν ικανοποιείται η δεύτερη συνθήκη τερματισμού. Στις εικόνες 3.23-3.27 που ακολουθούν παρουσιάζεται το πλέγμα που δημιουργήθηκε μετά την ολοκλήρωση 33 μετώπων.



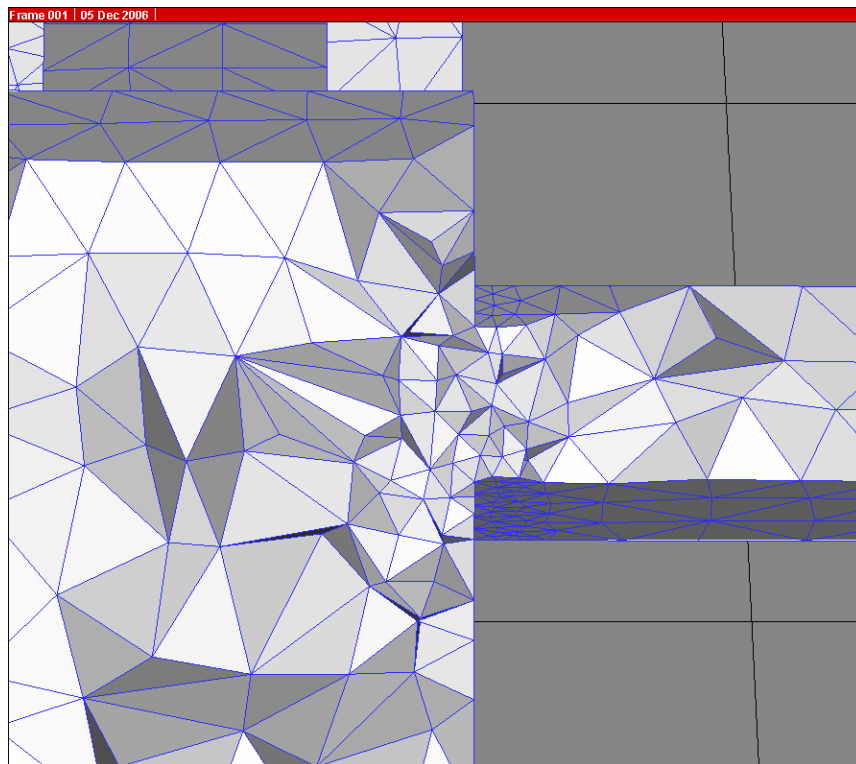
Εικόνα 3.23: Εξωτερική άποψη του πλέγματος, όπως υπολογίστηκε από τη βασική επαναληπτική διαδικασία.



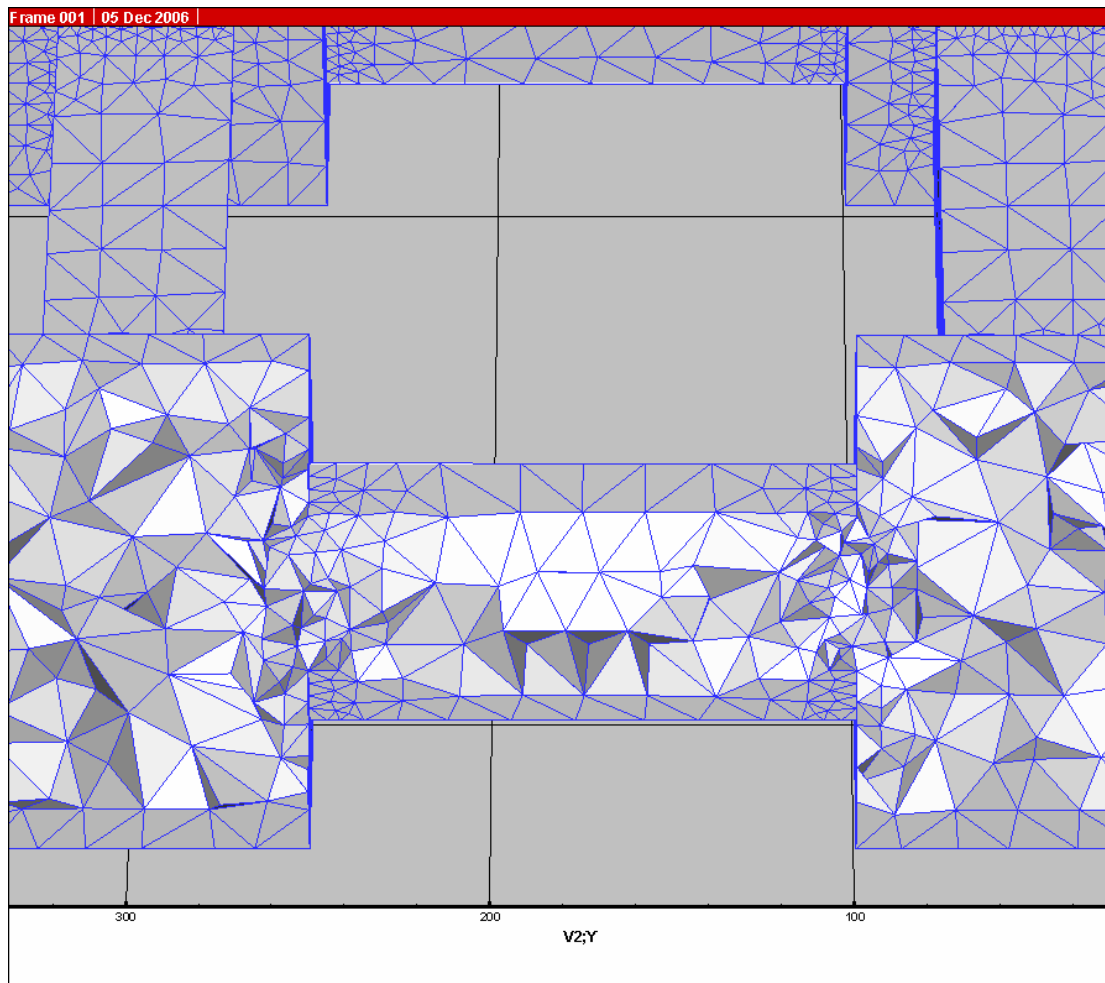
Εικόνα 3.24: Οριζόντια τομή του πλέγματος, όπως υπολογίστηκε από τη βασική επαναληπτική διαδικασία.



Εικόνα 3.25: Κάθετη τομή του πλέγματος, όπως υπολογίστηκε από τη βασική επαναληπτική διαδικασία.

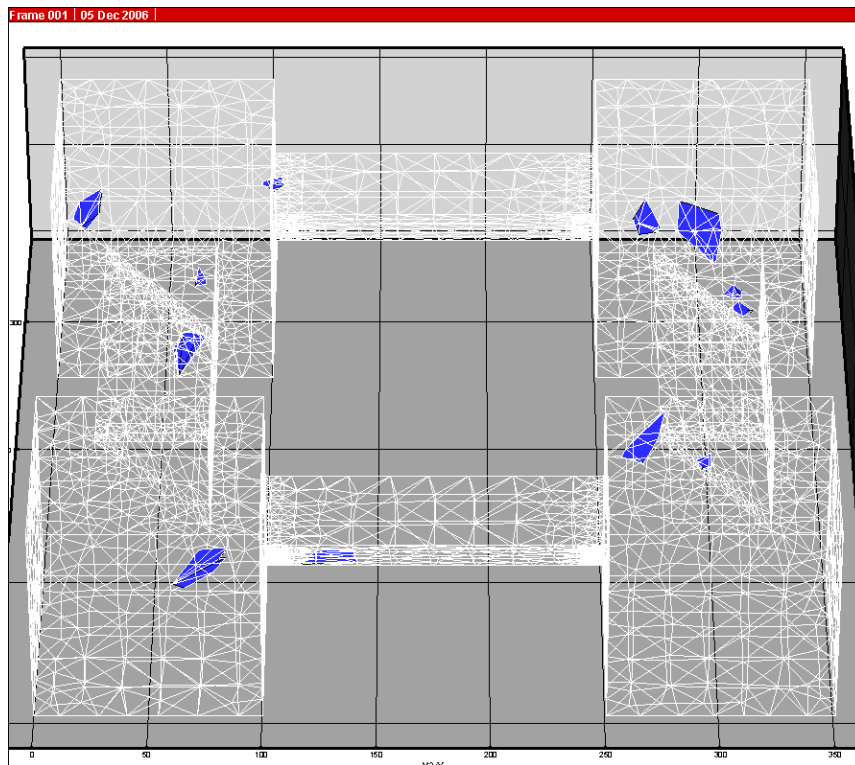


Εικόνα 3.26: Τομή του πλέγματος, όπως υπολογίστηκε από τη βασική επαναληπτική διαδικασία.

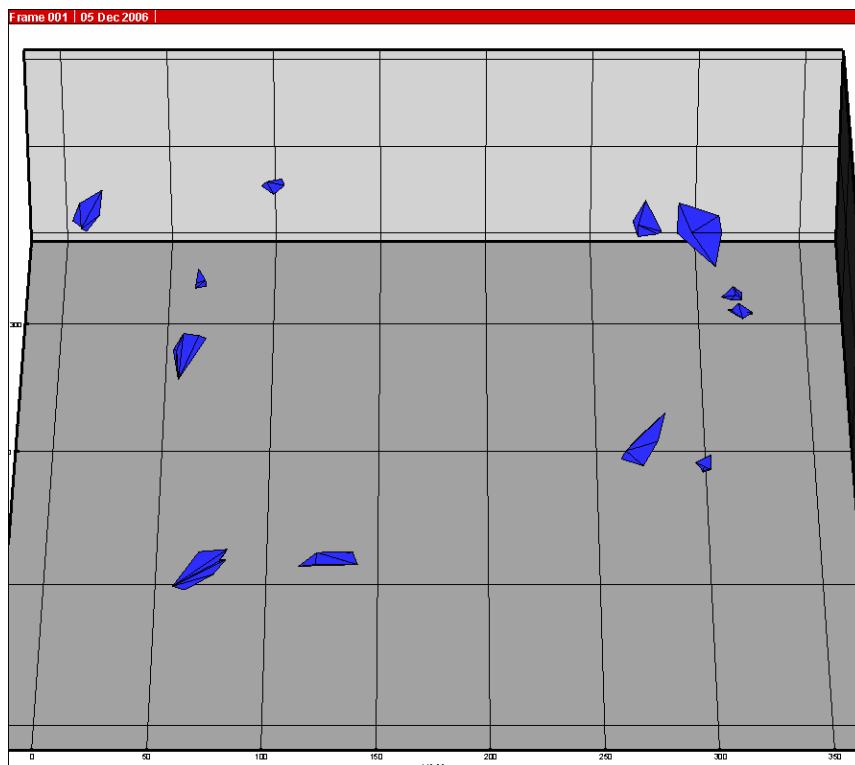


Εικόνα 3.27: Τομή του πλέγματος, όπως υπολογίστηκε από τη βασική επαναληπτική διαδικασία.

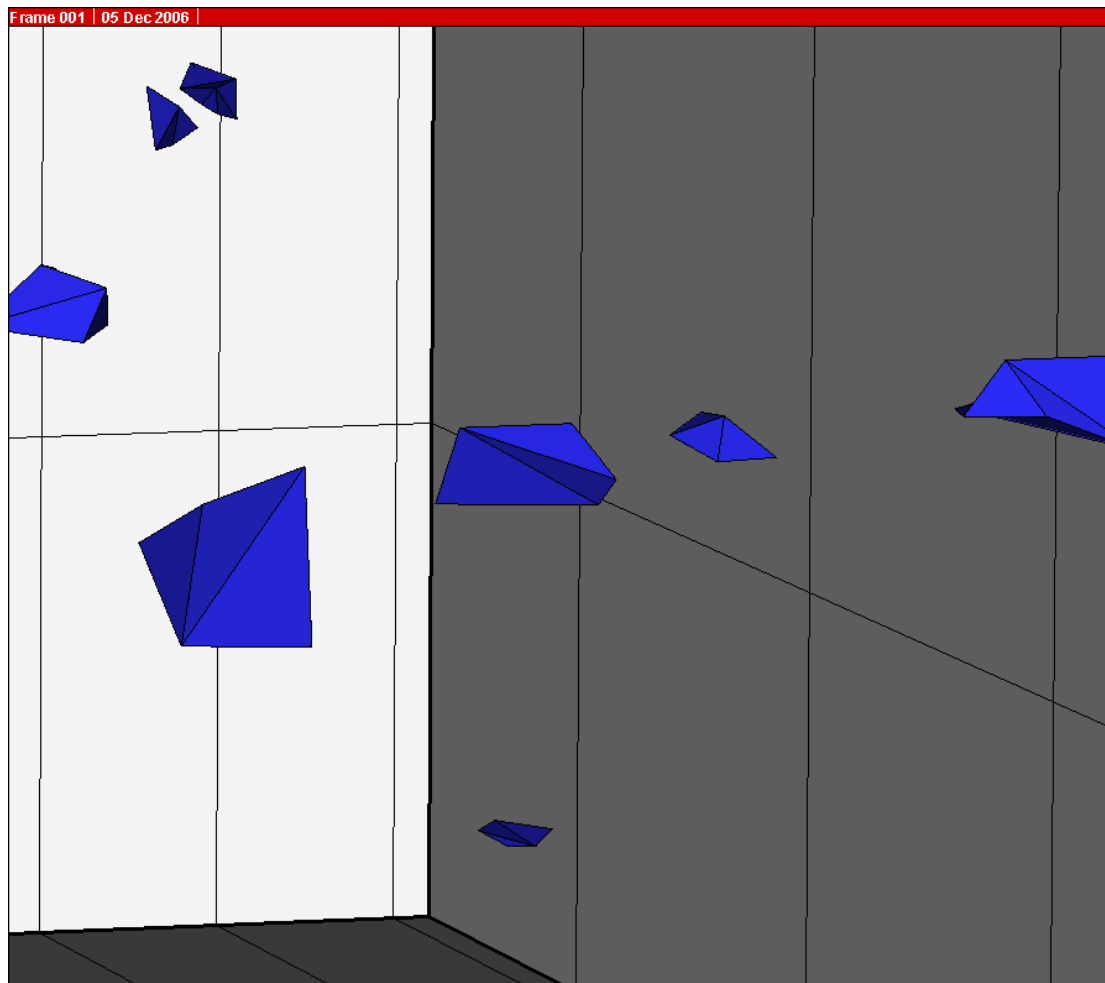
Οι παραπάνω εικόνες επιβεβαιώνουν την ικανοποιητική λειτουργία της βασικής διαδικασίας, υπό την έννοια της ποιότητας του παραγόμενου πλέγματος. Η επιφανειακή πύκνωση έχει διαδοθεί ομαλά και στο εσωτερικό του πλέγματος, διαφοροποιώντας αντίστοιχα το μέγεθος των τετραέδρων, παρόλο που το πλέγμα δεν έχει ακόμα βελτιωθεί χρησιμοποιώντας εξειδικευμένες τεχνικές. Ωστόσο, η βασική διαδικασία δεν κατάφερε να ολοκληρώσει τη διακριτοποίηση του χώρου. Πειραματικά αποδεικνύεται ότι πιθανότατα δεν μπορεί να υπάρξει διαδικασία βασισμένη στην τεχνική του προελαύνοντος μετώπου που να προσφέρει απόλυτη αξιοπιστία και να εγγυάται την ολοκληρωμένη κατασκευή πλέγματος, ανεξάρτητα από τη γεωμετρία του χωρίου. Σε πολλές περιπτώσεις, όπως και σε αυτή που εξετάζεται, η βασική διαδικασία καταλήγει σε ένα μέτωπο, το οποίο είναι αδύνατο να διακριτοποιηθεί περαιτέρω. Οι εικόνες 3.28. 3.29 και 3.30 που ακολουθούν εικονίζουν το εν λόγω μέτωπο.



Εικόνα 3.28: Το τελικό πλέγμα, στο οποίο καταλήγει η βασική διαδικασία. Με μπλε χρώμα διακρίνεται το τελικό μέτωπο, ενώ το λευκό διάγραμμα απεικονίζει την εξωτερική επιφάνεια του προς διακριτοποίηση χώριου.

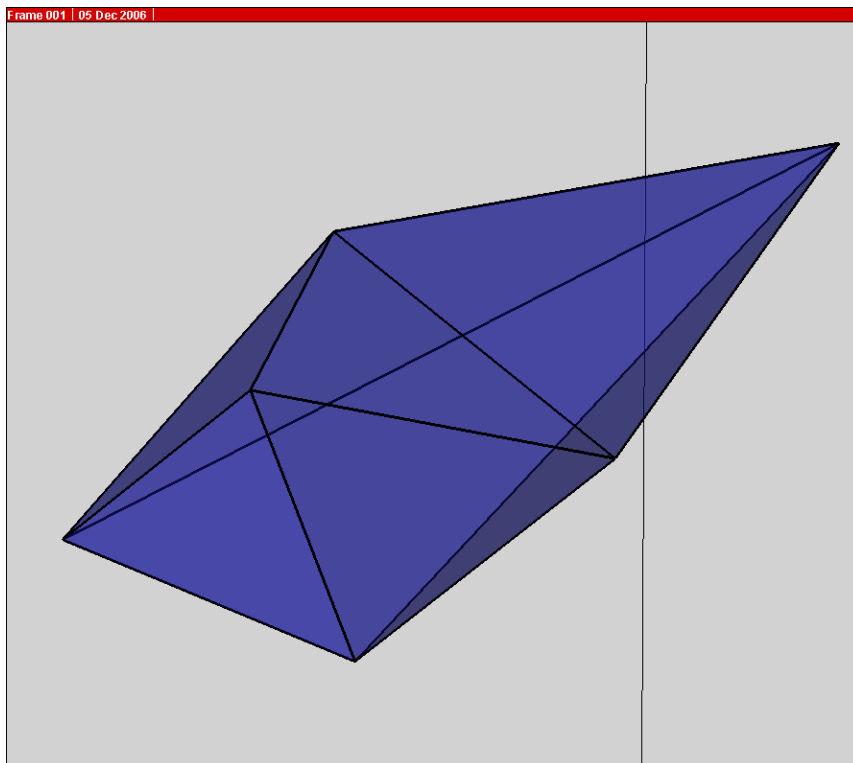


Εικόνα 3.29: Απεικόνιση του χώρου, που αδυνατεί να διακριτοποιήσει η βασική επαναληπτική διαδικασία.

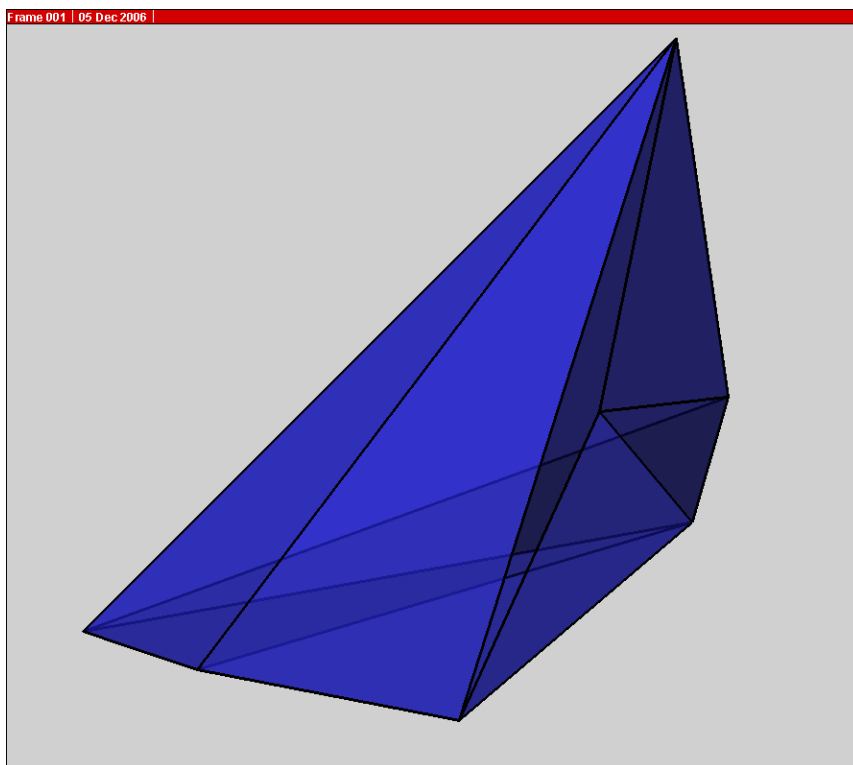


Εικόνα 3.30: Κοντινή απεικόνιση του χώρου, που αδυνατεί να διακριτοποιήσει η βασική επαναληπτική διαδικασία.

Ο χώρος που έχει απομείνει χωρίζεται συνήθως σε μικρούς υποχώρους, που ονομάστηκαν τομείς. Η αδυναμία της διαδικασίας να προχωρήσει στην διακριτοποίησή τους οφείλεται στο γεγονός ότι οι τομείς αποτελούν μη κυρτούς χώρους με ακατάλληλη επιφανειακή διακριτοποίηση. Η αποφυγή αυτών των χώρων είναι συνήθως αδύνατη, παρόλο που οι περιορισμοί της διαδικασίας έχουν ακριβώς αυτό το σκοπό. Οι τομείς αποτελούνται από λίγα συνήθως τριγωνικά στοιχεία, τα οποία έχουν τέτοια διάταξη στο χώρο, που απαγορεύουν τη δημιουργία νέων τετραέδρων. Στις εικόνες 3.31 και 3.32 παρουσιάζονται δύο από τους τομείς που απόμειναν και διακρίνεται η μη κυρτότητά τους.



Εικόνα 3.31: Άποψη ενός τομέα, όπως προκύπτει από τη βασική επαναληπτική διαδικασία.



Εικόνα 3.32: Άποψη ενός άλλου τομέα, όπως προκύπτει από τη βασική επαναληπτική διαδικασία.

3.7 Διαδικασία αποκατάστασης

Η ολοκλήρωση του πλέγματος επιτυγχάνεται με τη χρήση κατάλληλης διαδικασίας αποκατάστασης, που ακολουθεί μετά τη βασική επαναληπτική διαδικασία. Σκοπός της είναι η διακριτοποίηση των τομέων που απομένουν. Η βασική διαδικασία εξασφαλίζει αξιόλογη ποιότητα στο πλέγμα που έχει ήδη κατασκευαστεί, αλλά αδυνατεί να διακριτοποιήσει τους υποχώρους των παραπάνω εικόνων, που καταλαμβάνουν ένα πολύ μικρό ποσοστό του αρχικού χώρου. Για το λόγο αυτό, η διαδικασία αποκατάστασης του πλέγματος προσηλώνεται στη διακριτοποίησή τους χωρίς να δίνει έμφαση στην ποιότητα των τετραέδρων που θα δημιουργηθούν, καθώς δεν επηρεάζει σε σημαντικό βαθμό την ποιότητα του συνολικού πλέγματος, που θα προκύψει. Επιπλέον, η διακριτοποίηση μη κυρτών χώρων αποτελεί ιδιαίτερα δύσκολη διαδικασία, κάτι που δεν επιτρέπει την ταυτόχρονη απαίτηση δημιουργίας ποιοτικών τετραέδρων, όσον αφορά το σχήμα τους.

Η διαδικασία αποκατάστασης εφαρμόζει ουσιαστικά μια σειρά από γεωμετρικούς τελεστές, που σκοπεύουν στη μείωση αρχικά του πλήθους των υποχώρων και εν συνεχεία στη διαμόρφωση κατά το δυνατό κυρτών όγκων, με βελτιωμένο επιφανειακό πλέγμα. Οι τελεστές αυτοί μπορούν να εφαρμοστούν και με διαφορετική σειρά από αυτή που θα παρουσιαστεί, προσαρμοσμένη στην εκάστοτε περίπτωση που εξετάζεται.

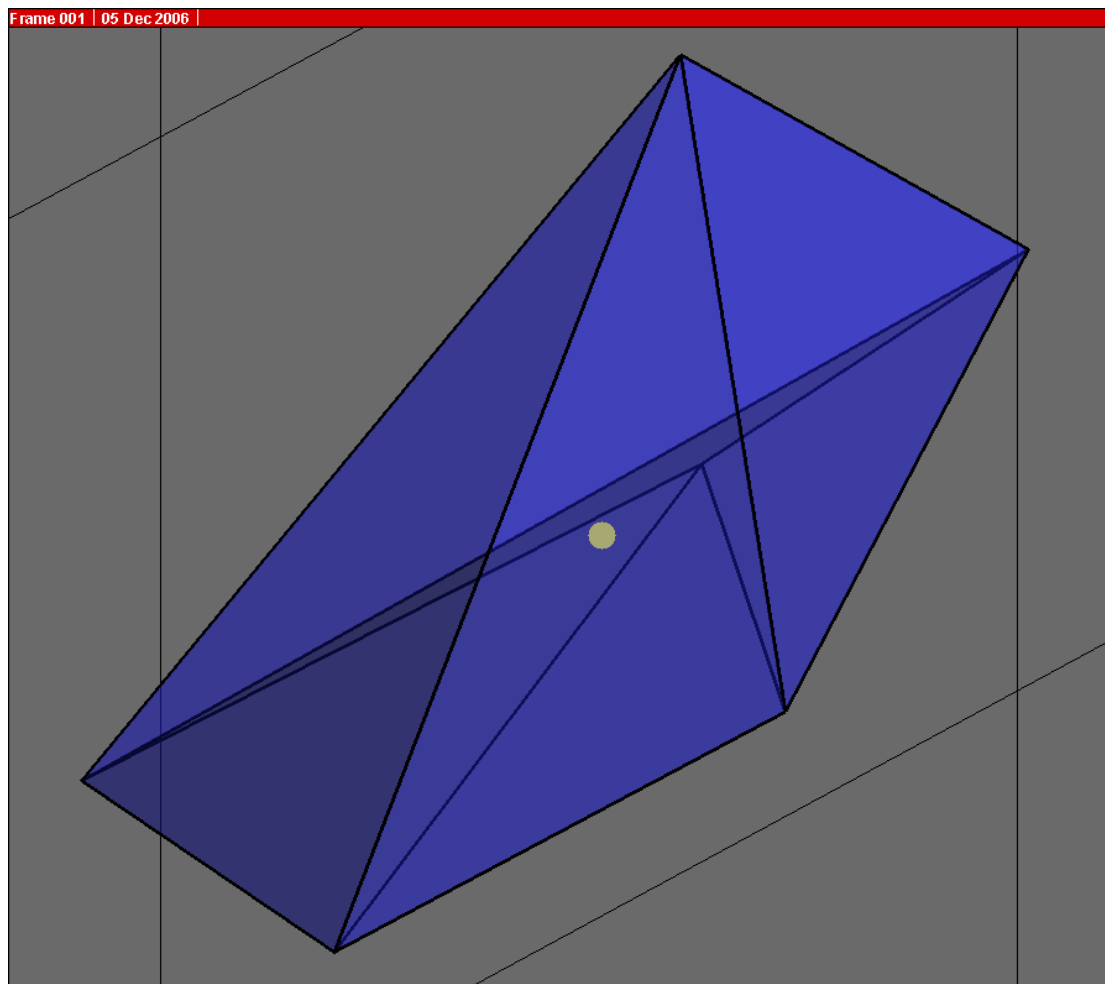
3.8 Τελεστής εμφύτευσης κόμβου

Ο πρώτος τελεστής που εφαρμόζει η διαδικασία αποκατάστασης είναι ο τελεστής εμφύτευσης κόμβου. Η αντίστοιχη διαδικασία έχει ως στόχο τον καθορισμό ενός μοναδικού κόμβου στο εσωτερικό κάθε τομέα, ο οποίος θα βρίσκεται σε κατάλληλη θέση ώστε να αποτελέσει την τέταρτη κορυφή νέων τετραέδρων που θα έχουν ως έδρες-βάσεις τα τριγωνικά στοιχεία που συνθέτουν τον εν λόγω τομέα. Προφανώς, σε μερικές περιπτώσεις δεν είναι δυνατό να διακριτοποιηθεί ένας τομέας πλήρως, χρησιμοποιώντας μόνο έναν βοηθητικό κόμβο στο εσωτερικό του, ιδιαίτερα αν αυτός ο τομέας είναι έντονα μη κυρτός. Ωστόσο, ο τελεστής μπορεί να διακριτοποιήσει άμεσα ένα μεγάλο αριθμό τομέων.

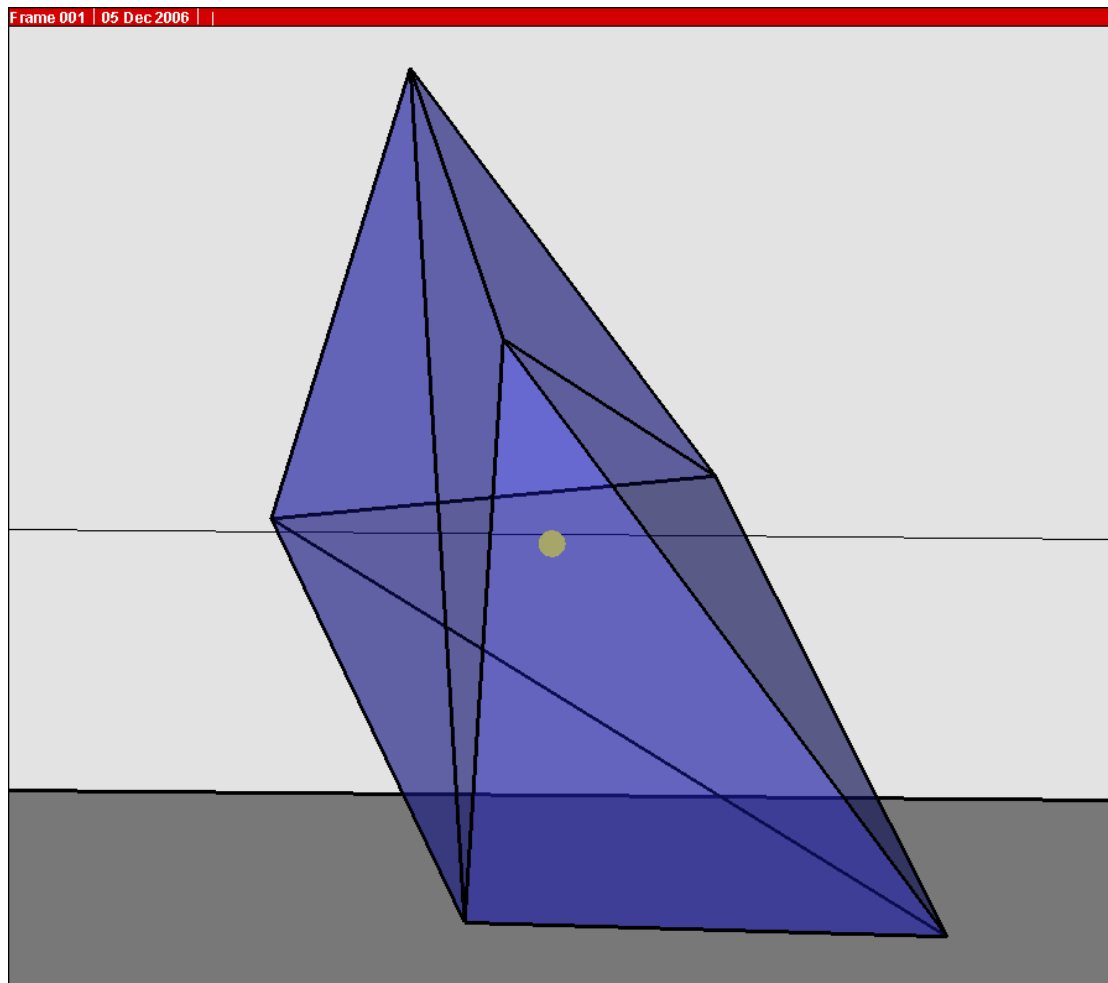
Η εύρεση της καταλληλότερης θέσης για τον μοναδικό βοηθητικό κόμβο στο εσωτερικό κάθε τομέα είναι δύσκολη διαδικασία. Κάθε τριγωνικό στοιχείο ορίζει ένα επίπεδο που διχοτομεί τον τριδιάστατο χώρο σε δύο ημιχώρους. Ο ένας από αυτούς περιλαμβάνει και τον τομέα στον οποίο ανήκει το συγκεκριμένο τρίγωνο, και στον οποίο πρέπει να βρίσκεται ο ζητούμενος κόμβος. Θεωρητικά, ο βοηθητικός κόμβος πρέπει να βρίσκεται στην τομή των υποχώρων αυτών, που αντιστοιχούν σε κάθε τρίγωνο του τομέα. Προφανώς σε αρκετές περιπτώσεις έντονα μη κυρτών τομέων δεν υπάρχει τομή όλων των υποχώρων, και εκτός αυτού, ο υπολογιστικός εντοπισμός της τομής των υποχώρων αποτελεί εξαιρετικά δύσκολη διαδικασία.

Για την αποφυγή περίπλοκων και απαιτητικών διαδικασιών, ο τελεστής τοποθετεί ένα κόμβο στο σημείο του τομέα, που ορίζεται ως η μέση τιμή των

συντεταγμένων των κόμβων που τον ορίζουν (εικόνα 3.33). Στις περιπτώσεις που ο τομέας είναι κυρτός, ή ακόμα και αν δεν είναι έντονα μη κυρτός, η παραπάνω θέση βρίσκεται στο εσωτερικό του τομέα και ο κόμβος μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τη δημιουργία έγκυρων τετραέδρων που διακριτοποιούν πλήρως τον τομέα. Στις περιπτώσεις που ο τομέας είναι έντονα μη κυρτός, η παραπάνω θέση μπορεί να εντοπίζεται έξω από τον τομέα και να είναι ακατάλληλη. Συνήθως στις περιπτώσεις αυτές δεν μπορεί να υπάρξει ένας μοναδικός κόμβος που να μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την πλήρη διακριτοποίηση του τομέα, οπότε ο τελεστής δεν προβαίνει σε καμία ενέργεια και δεν δημιουργεί βοηθητικό κόμβο. Στις εικόνες 3.33 και 3.34 που ακολουθούν παρουσιάζονται ενδεικτικοί τομείς με τους αντίστοιχους βοηθητικούς κόμβους. Στις περιπτώσεις αυτές ο τομέας διακριτοποιήθηκε επιτυχώς, δημιουργώντας νέα τετράεδρα με έδρες-βάσεις τα τρίγωνα του τομέα και τέταρτη κορυφή τον μοναδικό βοηθητικό κόμβο.

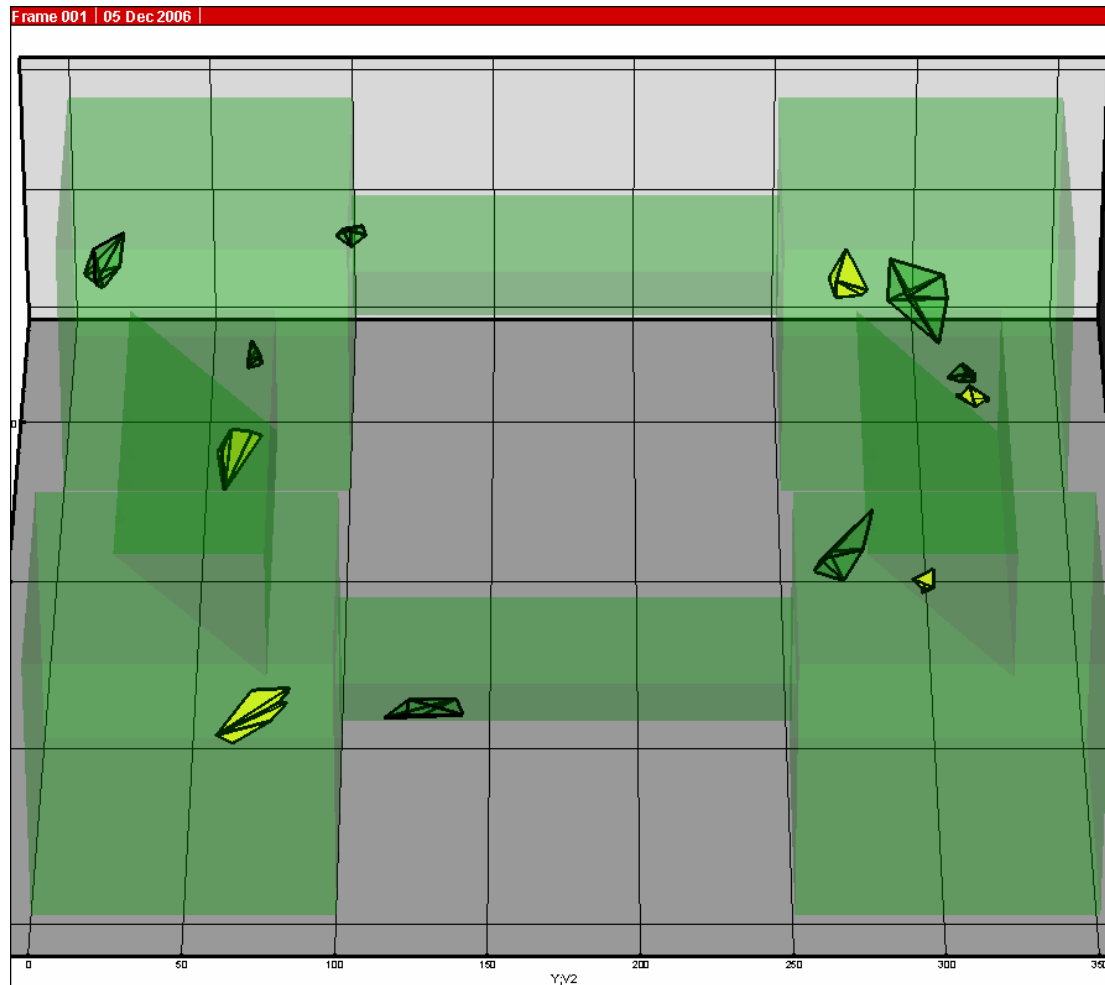


Εικόνα 3.33: Άποψη ενός τομέα και του κόμβου που εμφυτεύθηκε επιτυχώς στο εσωτερικό του (με κίτρινο χρώμα).



Εικόνα 3.34: Άποψη ενός τομέα και του κόμβου που εμφυτεύθηκε επιτυχώς στο εσωτερικό του (με κίτρινο χρώμα).

Με τον τελεστή εμφύτευσης κόμβου διακριτοποιούνται γρήγορα οι περισσότεροι τομείς που απομείνανε από την βασική διαδικασία. Η ποιότητα των τετραέδρων που δημιουργήθηκαν είναι αρκετές φορές χαμηλή, καθώς μερικά τετράεδρα παρουσιάζουν έντονη στρεβλότητα. Ωστόσο, το σχετικά μικρό πλήθος των τετραέδρων αυτών δεν επιδεινώνει τη συνολική ποιότητα του πλέγματος. Στην εικόνα 3.35 που ακολουθεί διακρίνεται ο σημαντικός αριθμός των τομέων που διακριτοποιούνται επιτυχώς με τον τελεστή εμφύτευσης κόμβου. Από τους 12 συνολικά τομείς που υπήρχαν αρχικά έχουν διακριτοποιηθεί οι 7, που διακρίνονται με πράσινο χρώμα. Στους εναπομείναντες 5 τομείς, που διακρίνονται με κίτρινο χρώμα, θα εφαρμοστούν οι επόμενοι τελεστές της διαδικασίας αποκατάστασης.



Εικόνα 3.35: Άποψη των τομέων που απομένουν μετά τον τελεστή εμφύτευσης κόμβου. Με πράσινο χρώμα εικονίζονται οι τομείς που διακριτοποιήθηκαν με τη βοήθεια του συγκεκριμένου τελεστή, ενώ με κίτρινο χρώμα απεικονίζονται οι τομείς που απομένουν.

Επιγραμματικά, τα βήματα του τελεστή εμφύτευσης κόμβου είναι τα ακόλουθα:

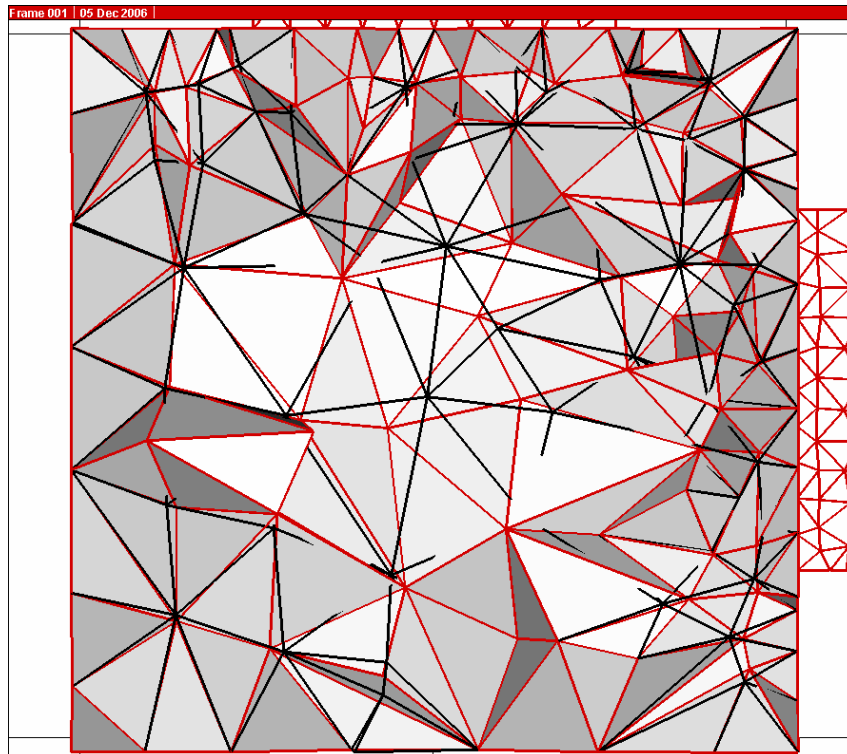
1. Εντοπισμός του κέντρου του τομέα. Οι συντεταγμένες του ορίζονται ως η μέση τιμή των συντεταγμένων όλων των κόμβων του.
2. Δημιουργία του βοηθητικού κόμβου στη θέση που εντοπίστηκε.
3. Έλεγχος της χρησιμότητας του βοηθητικού κόμβου. Σε περίπτωση που ο βοηθητικός κόμβος δεν μπορεί να αξιοποιηθεί από κάθε τριγωνικό στοιχείο του τομέα για τη δημιουργία ενός έγκυρου τετραέδρου, ο κόμβος διαγράφεται και ο τελεστής τερματίζεται. Στην αντίθετη περίπτωση, ο τελεστής προχωρά στο επόμενο βήμα.
4. Δημιουργία των κατάλληλων ADT δομών. Χρησιμοποιούνται κατά τον έλεγχο εγκυρότητας των νέων τετραέδρων.
5. Δημιουργία των νέων τετραέδρων χρησιμοποιώντας όλα τα τρίγωνα του τομέα και τον βοηθητικό κόμβο.

3.9 Τελεστής Laplacian εξομάλυνσης

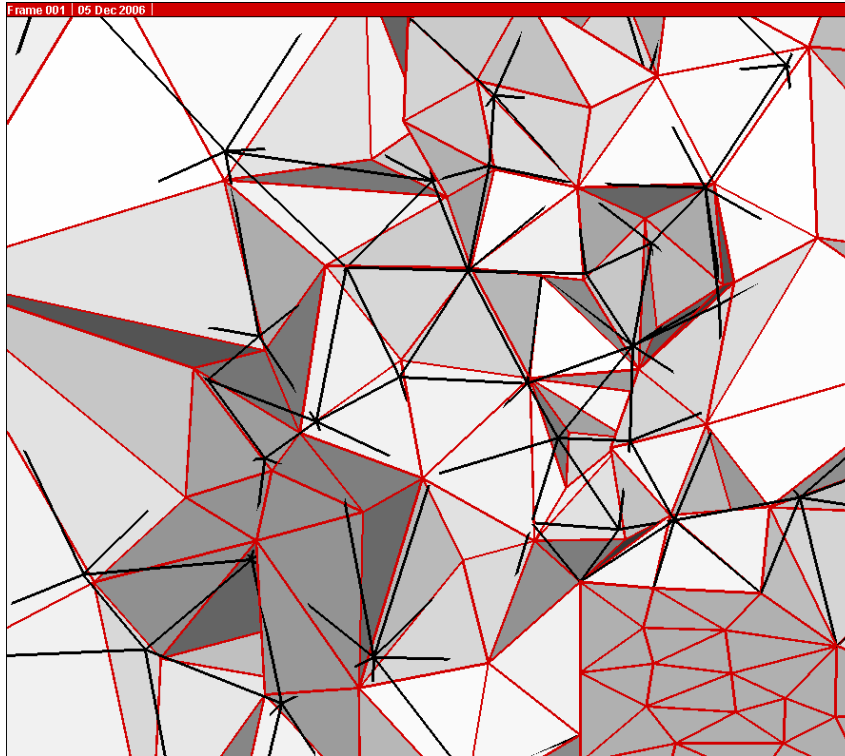
Ο τελεστής Laplacian εξομάλυνσης επιβάλλεται στο χωρικό πλέγμα και βελτιώνει σημαντικά την ποιότητά του. Αποτελεί μια επαναληπτική διαδικασία μετακίνησης των εσωτερικών μόνο κόμβων του πλέγματος στο κέντρο των περιβαλλόντων τετραέδρων του κάθε κόμβου, σύμφωνα με την σχέση (3.1):

$$P_N = \frac{\sum_{i=1}^{N_E} (C_i^E)}{N_E} \quad (3.1)$$

όπου το P_N εκφράζει τις νέες συντεταγμένες του εσωτερικού κόμβου P , N_E είναι το πλήθος των τετραεδρικών στοιχείων που συνδέονται με τον κόμβο P , και C_i^E είναι το κέντρο ενός στοιχείου. Η διαδικασία Laplacian εξομάλυνσης είναι αρκετά δημοφιλής και παρουσιάζει πολύ καλά αποτελέσματα (εικόνες 3.36 και 3.37). Βελτιώνει το σχήμα των τετραέδρων και εξομαλύνει την πυκνωση των κόμβων.



Εικόνα 3.36: Επίδραση της διαδικασίας Laplacian εξομάλυνσης. Με κόκκινο χρώμα παρουσιάζεται η αρχική μορφή του πλέγματος όπως παρουσιάζεται σε μια κάθετη τομή του, ενώ με μαύρο χρώμα διακρίνεται η μορφή του μετά την εφαρμογή της διαδικασίας.



Εικόνα 3.37: Επίδραση της διαδικασίας Laplacian εξομάλυνσης. Με κόκκινο χρώμα παρουσιάζεται η αρχική μορφή του πλέγματος, όπως παρουσιάζεται σε μια τομή του, ενώ με μαύρο χρώμα διακρίνεται η μορφή του μετά την εφαρμογή της διαδικασίας.

Ο τελεστής Laplacian εξομάλυνσης εφαρμόζεται αμέσως μετά τη διακριτοποίηση όσων τομέων ήταν εφικτό μέσω του τελεστή εμφύτευσης κόμβου, ώστε να βελτιώσει την ποιότητα του πλέγματος και να καταστήσει όσο το δυνατό πιο αποτελεσματικό τον επόμενο τελεστή. Επειδή ακριβώς το πλέγμα δεν είναι ακόμα πλήρες, εφαρμόζεται ένα μόνο επαναληπτικό βήμα, ώστε να μην παραμορφωθούν έντονα τα τετραεδρικά στοιχεία που συνορεύουν με τις οριακές επιφάνειες των υπολειπόμενων τομέων. Κατά την κίνηση των κόμβων ελέγχεται κάθε πιθανή τομή μεταξύ στοιχείων, επιτρέποντας μόνο τις κινήσεις που διατηρούν την εγκυρότητα του πλέγματος.

Τα βήματα του τελεστή Laplacian εξομάλυνσης είναι τα ακόλουθα:

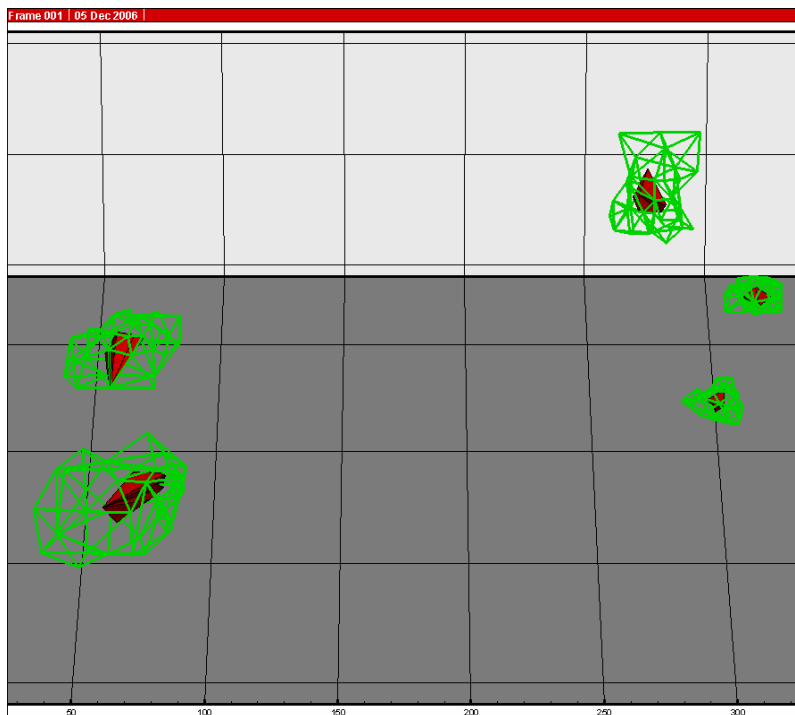
1. Δημιουργία των κατάλληλων ADT δομών. Χρησιμοποιούνται κατά τον έλεγχο εγκυρότητας της μετακίνησης κάθε εσωτερικού κόμβου.
2. Για κάθε εσωτερικό κόμβο εντοπίζονται τα κέντρα των τετραέδρων στα οποία ανήκει.
3. Υπολογισμός της μέσης τιμής των συντεταγμένων των παραπάνω κέντρων. Η θέση που αντιστοιχεί στις συντεταγμένες που υπολογίζονται ορίζει τη θέση στην οποία θα μετακινηθεί ο εσωτερικός κόμβος, αν αυτό είναι επιτρεπτό.
4. Έλεγχος της εγκυρότητας του πλέγματος που θα προκύψει μετά την μετακίνηση του κόμβου. Η μετακίνηση του κόμβου πραγματοποιείται

- μόνο αν αυτή κριθεί επιτρεπτή, εφόσον δηλαδή δεν προκύπτουν τομές μεταξύ των στοιχείων του πλέγματος.
5. Επανάληψη των βημάτων 2, 3 και 4 για κάθε εσωτερικό κόμβο του πλέγματος.
 6. Τα παραπάνω βήματα συνιστούν έναν κύκλο της διαδικασίας Laplacian εξομάλυνσης. Το πλήθος των κύκλων της διαδικασίας καθορίζονται από το χρήστη.

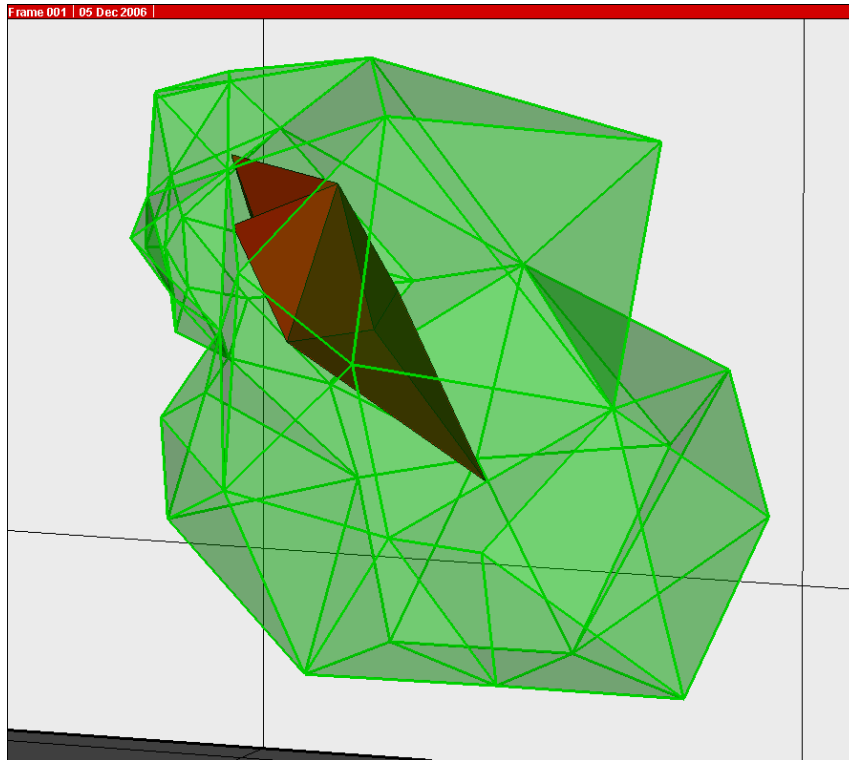
3.10 Τελεστής διεύρυνσης τομέων

Ο σημαντικότερος λόγος που καθίσταται δύσκολη η διακριτοποίηση των τομέων είναι η μη κυρτή φύση τους. Στις περιπτώσεις που απόμειναν είναι πρακτικά αδύνατη η διακριτοποίησή τους. Η διαδικασία αποκατάστασης καταφεύγει στη διεύρυνση των τομέων, μέσω του αντίστοιχου τελεστή.

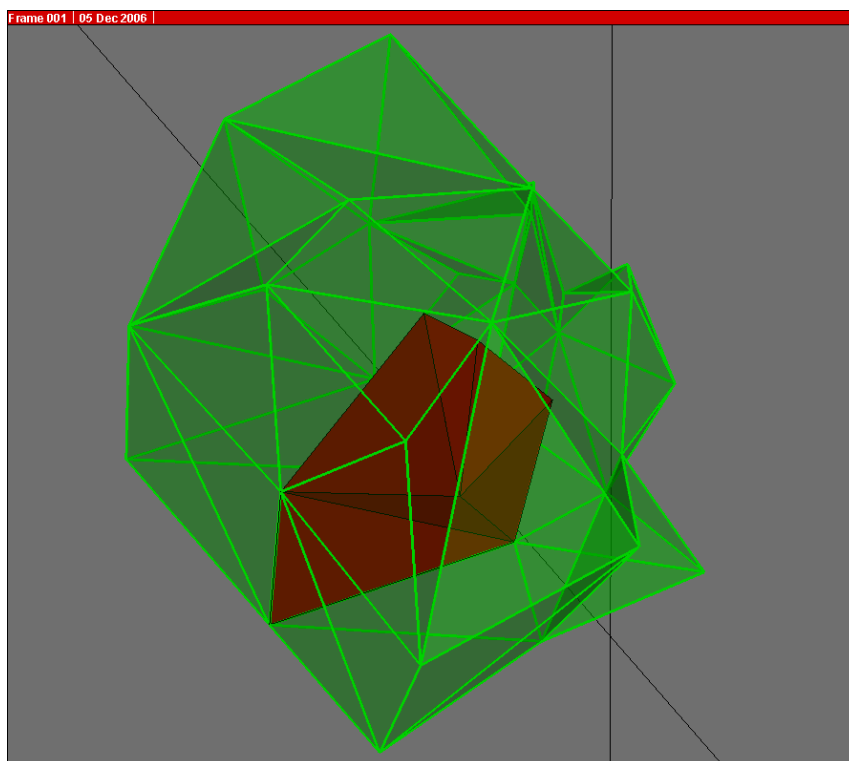
Ο συγκεκριμένος τελεστής έχει ως σκοπό τη διαγραφή κάποιων τετραέδρων που δημιουργήθηκαν σε προηγούμενα στάδια, ώστε οι τομείς να διευρυνθούν και να προκύψουν κατά το δυνατόν περισσότερο κυρτοί χώροι. Ο τελεστής διαγράφει γειτονικά τετράεδρα του κάθε τομέα, τα οποία μπορούν να επιλεγούν με διάφορα κριτήρια. Στην περίπτωση που παρουσιάζεται, τα τετράεδρα που διαγράφονται αγγίζουν μέσω μιας έστω κορυφής τον τομέα που πρόκειται να διευρυνθεί. Η διαγραφή τετραέδρων συνοδεύεται και από την ταυτόχρονη διαγραφή τριγώνων, ακμών και κόμβων, που πλέον δεν αποτελούν έγκυρα στοιχεία του πλέγματος. Στις εικόνες 3.38, 3.39 και 3.40 που ακολουθούν διακρίνεται η τελική μορφή των αντίστοιχων τομέων, μετά την εφαρμογή του εν λόγω τελεστή.



Εικόνα 3.38: Διεύρυνση τομέων. Με κόκκινο χρώμα εικονίζεται η μορφή των τομέων πριν τη διεύρυνση, ενώ με πράσινο διάγραμμα παρουσιάζεται η μορφή τους μετά την εφαρμογή του συγκεκριμένου τελεστή.



Εικόνα 3.39: Διεύρυνση τομέων. Με κόκκινο χρώμα εικονίζεται η μορφή ενός τομέα πριν τη διεύρυνση, ενώ με πράσινο χρώμα παρουσιάζεται η μορφή του μετά την εφαρμογή του τελεστή.

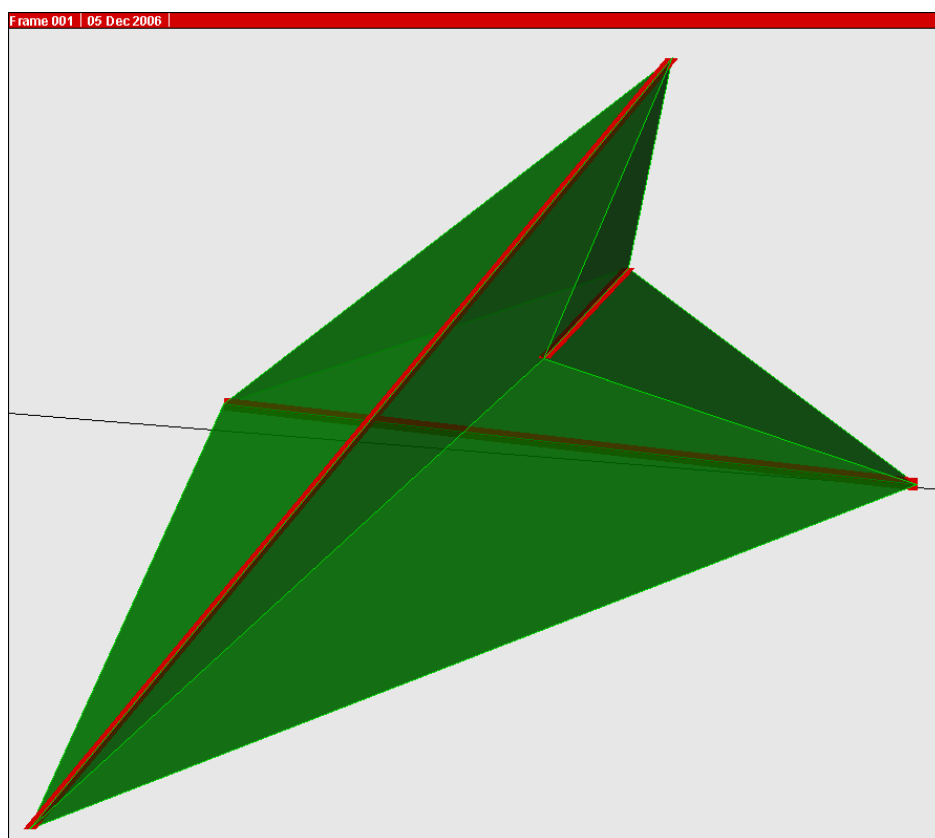


Εικόνα 3.40: Διεύρυνση τομέων. Με κόκκινο χρώμα εικονίζεται η μορφή ενός τομέα πριν τη διεύρυνση, ενώ με πράσινο χρώμα παρουσιάζεται η μορφή του μετά την εφαρμογή του τελεστή.

Στη συνέχεια περιγράφονται συνοπτικά τα βήματα του τελεστή διεύρυνσης τομέων:

1. Για κάθε κόμβο ενός τομέα εντοπίζονται και αποθηκεύονται όλα τα τετράεδρα στα οποία ανήκει.
2. Διαγραφή όλων των τετράεδρων που εντοπίστηκαν στο προηγούμενο βήμα 1. Η διαγραφή των τετράεδρων προκαλεί και την παράλληλη διαγραφή στοιχείων που πλέον δεν είναι έγκυρα. Μεταξύ αυτών είναι και ο κόμβος του προηγούμενου βήματος 1.
3. Ενημέρωση των δομών δεδομένων.
4. Επανάληψη των παραπάνω βημάτων για κάθε τομέα.
5. Διαγραφή των τετράεδρων για τα οποία τρεις από τις τέσσερις έδρες τους ανήκουν σε κάποιον τομέα. Ταυτόχρονη ενημέρωση των δομών δεδομένων.

Μια εναλλακτική προσέγγιση, που δοκιμάστηκε για την επιλογή των τετράεδρων που θα διαγραφούν, είναι η διαγραφή των τετράεδρων που θα προκαλέσουν τη διαγραφή συγκεκριμένων ακμών. Σε κάθε μη κυρτό τομέα υπάρχει τουλάχιστον μία ακμή, στην ύπαρξη της οποίας οφείλεται η μη κυρτή φύση του. Ο τελεστής διεύρυνσης εντοπίζει τις συγκεκριμένες ακμές σε κάθε τομέα, όπως διακρίνεται στην εικόνα 3.41.



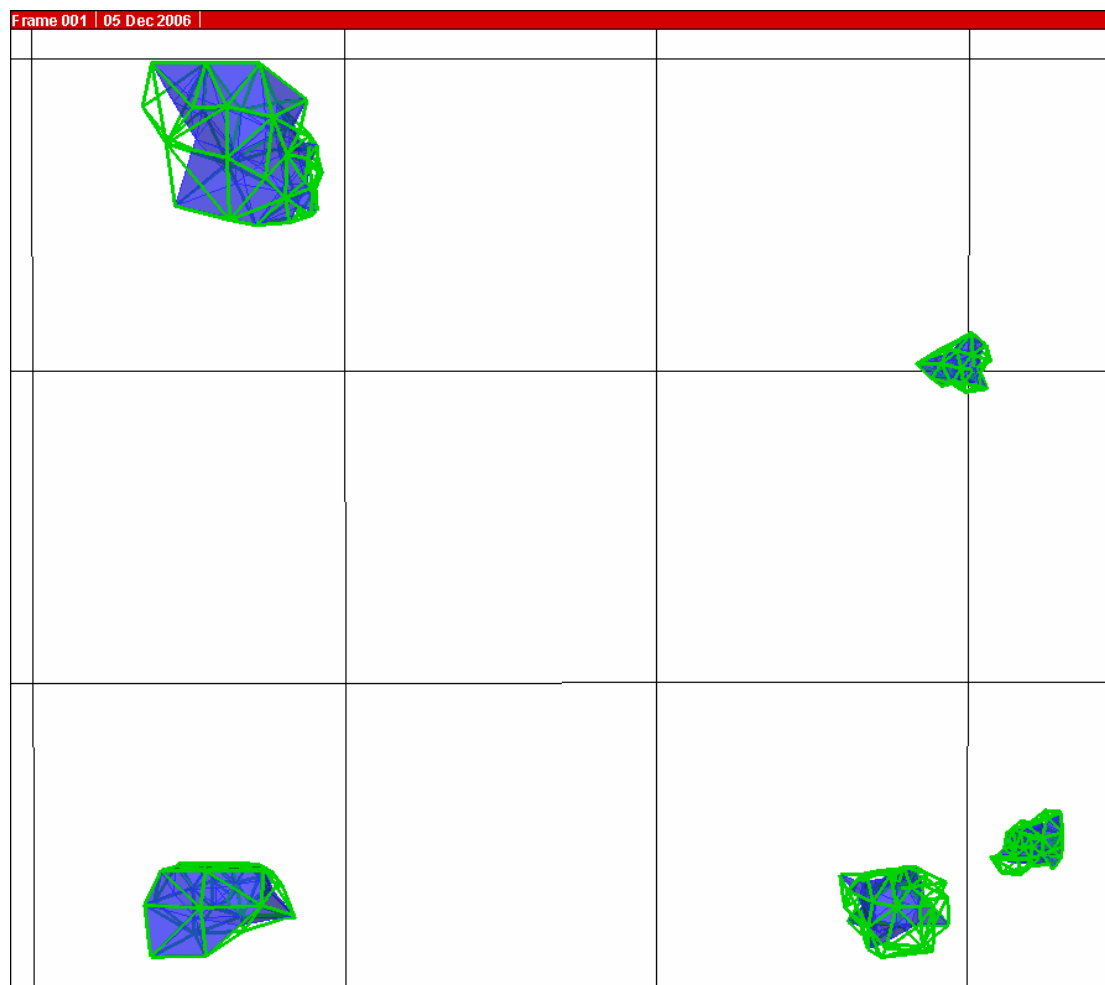
Εικόνα 3.41: Εντοπισμός των ακμών ενός μη κυρτού τομέα που πρόκειται να διαγραφούν. Με πράσινο χρώμα εικονίζεται ένας τομέας και με κόκκινο χρώμα οι ακμές του, στις οποίες οφείλεται η μη κυρτή φύση του.

Εν συνεχεία ο τελεστής εντοπίζει και διαγράφει όλα τα τετράεδρα, στα οποία ανήκουν οι ακμές που εντόπισε. Η διαγραφή των τετραέδρων προφανώς αποφέρει και τη διαγραφή των αντίστοιχων ακμών.

Η προσέγγιση αυτή έχει ως αποτέλεσμα τη διεύρυνση των τομέων, σε μικρότερη όμως κλίμακα σε σχέση με την προηγούμενη διαδικασία. Ωστόσο, τα αποτελέσματά της δεν είναι πάντα τα επιθυμητά, καθώς δεν εξασφαλίζει ότι οι διευρυμένοι τομείς τείνουν σε κυρτούς χώρους, αλλά αντίθετα ενδέχεται να επιδεινώσει την κατάσταση κάποιων τομέων. Δεν παύει βέβαια να αποτελεί ένα χρήσιμο εργαλείο για την αποκατάσταση του πλέγματος.

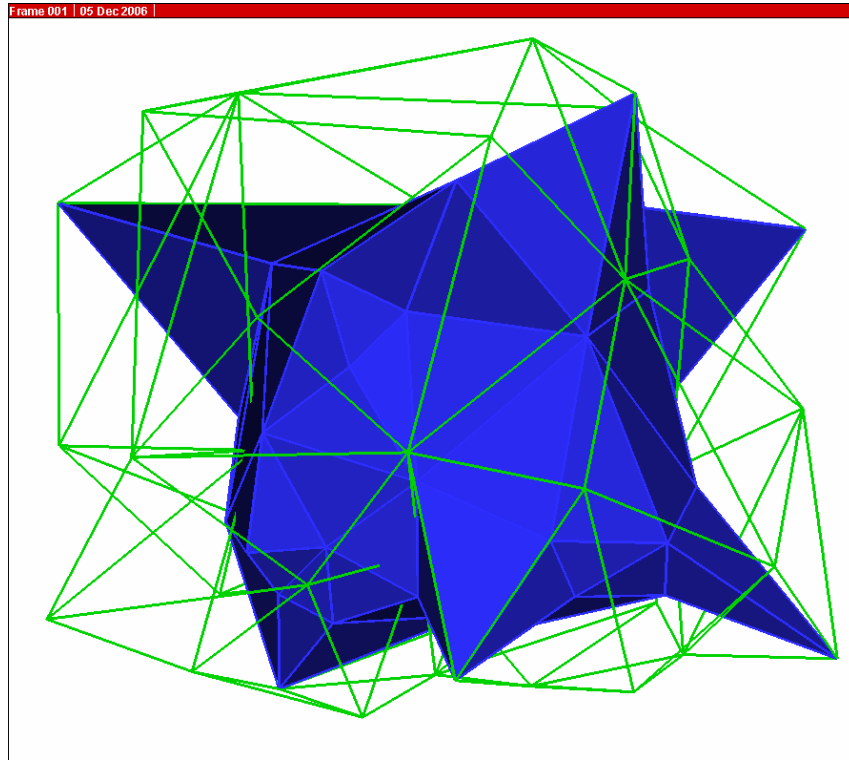
3.11 Τελεστής εξομάλυνσης οριακών επιφανειών

Μετά τη διεύρυνση των τομέων, η διαδικασία αποκατάστασης προχωρά στην εξομάλυνση των επιφανειών τους. Αποτελεί μια επαναληπτική διαδικασία που μετακινεί τους επιφανειακούς κόμβους των τομέων, μόνο αν μια κίνηση δεν προκαλεί τομή στοιχείων. Η νέα θέση ενός επιφανειακού κόμβου υπολογίζεται ως η μέση τιμή των συντεταγμένων των γειτονικών επιφανειακών κόμβων του.

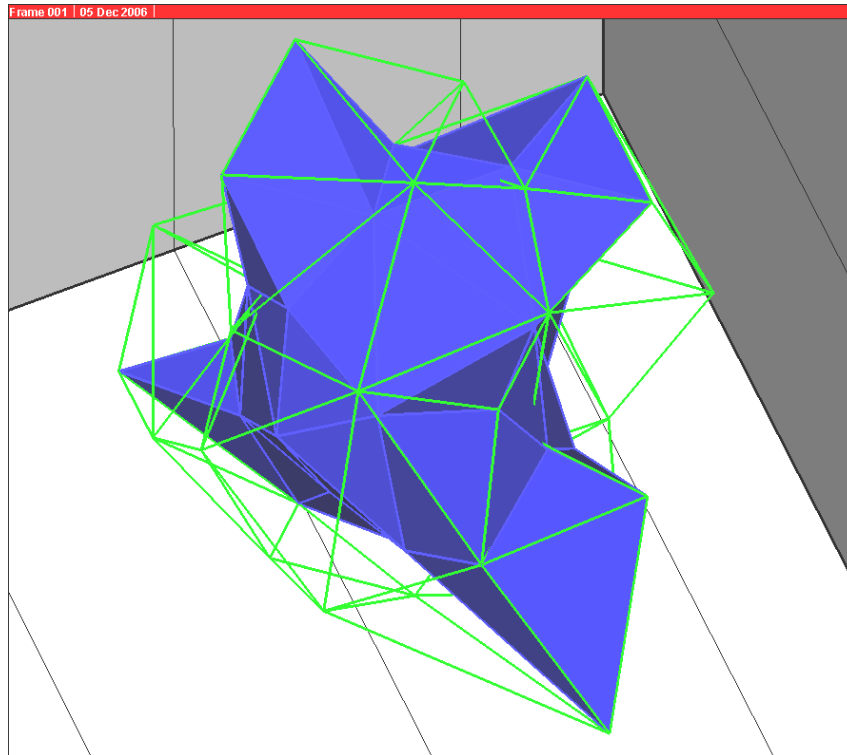


Εικόνα 3.42: Εξομάλυνση οριακών επιφανειών. Με πράσινο περίγραμμα εικονίζεται η μορφή των τομέων πριν την εξομάλυνση, ενώ με μπλε χρώμα παρουσιάζεται η τελική μορφή τους.

Ο τελεστής εξομάλυνσης των οριακών επιφανειών εφαρμόζεται οπωσδήποτε μετά την Laplacian εξομάλυνση, ώστε να προκύψουν τα επιθυμητά αποτελέσματα. Όπως διακρίνεται στις εικόνες 3.42-3.44, οι τομείς αποκτούν μια περισσότερο κυρτή μορφή. Παρουσιάζουν όμως έντονες κορυφές στους κόμβους των επιφανειών τους οι οποίοι δεν μετακινήθηκαν, ώστε να αποφευχθούν τομές στοιχείων.



Εικόνα 3.43: Εξομάλυνση οριακών επιφανειών. Άποψη της αρχικής μορφής (πράσινες ακμές) ενός τομέα και της τελικής μορφής του (γαλάζιες επιφάνειες) μετά την εξομάλυνση της επιφάνειάς του. Διακρίνονται οι κόμβοι που δεν μετακινήθηκαν, αφού κάτι τέτοιο θα οδηγούσε σε τομές ακμών και εδρών.



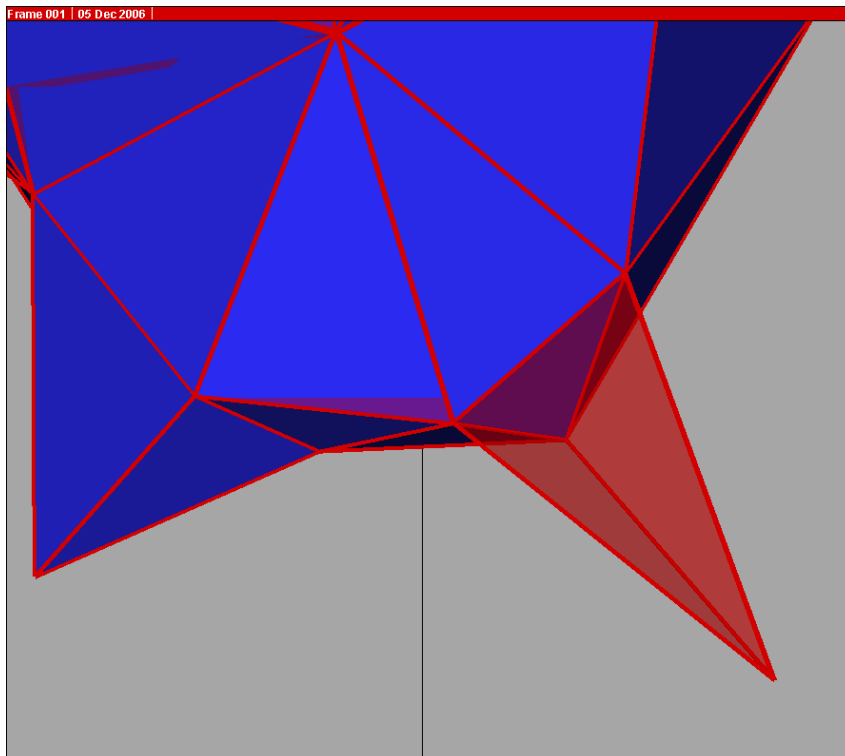
Εικόνα 3.44: Εξομάλυνση οριακών επιφανειών. Άποψη της αρχικής μορφής ενός τομέα (πράσινες ακμές) και της τελικής μορφής του (γαλάζιες επιφάνειες) μετά την εξομάλυνση της επιφάνειάς του.

Τα βήματα του τελεστή εξομάλυνσης οριακών επιφανειών είναι τα ακόλουθα:

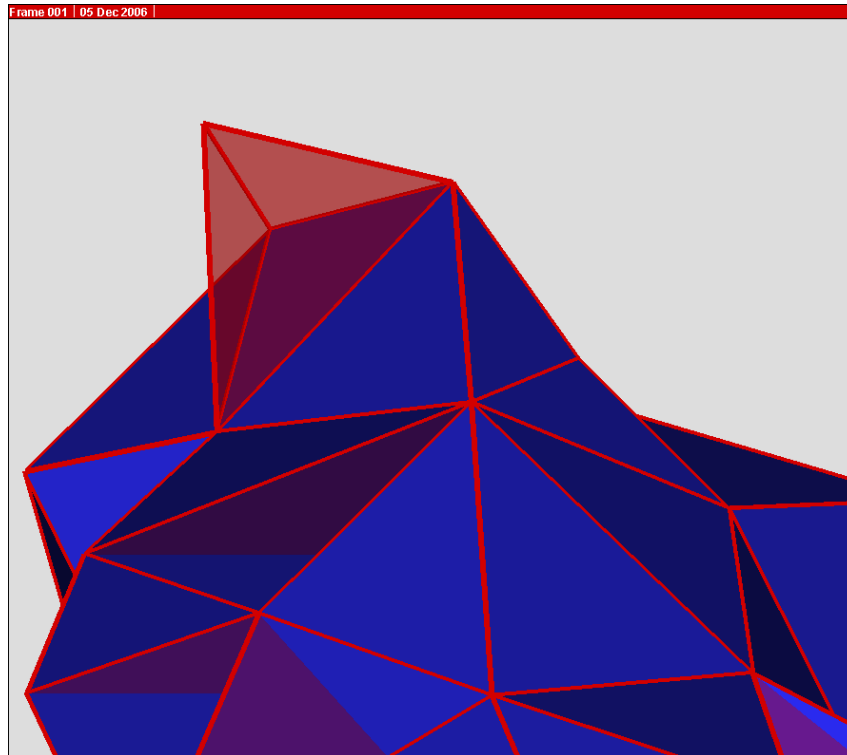
1. Δημιουργία των κατάλληλων δομών ADT. Χρησιμοποιούνται στον έλεγχο εγκυρότητας της μετακίνησης των κόμβων.
2. Για κάθε κόμβο ενός τομέα, και εφόσον αυτός δεν ανήκει στο αρχικό επιφανειακό πλέγμα της γεωμετρίας, εντοπίζονται οι γειτονικοί του κόμβοι, που ανήκουν στον ίδιο τομέα.
3. Υπολογισμός της μέσης τιμής των συντεταγμένων των κόμβων που εντοπίστηκαν στο προηγούμενο βήμα 2.
4. Έλεγχος της εγκυρότητας του πλέγματος που θα προκύψει αν ο κόμβος του πρώτου βήματος μετακινηθεί στη θέση που αντιστοιχεί στις συντεταγμένες που υπολογίστηκαν στο βήμα 3. Ελέγχονται πιθανές τομές των στοιχείων του πλέγματος.
5. Αν η μετακίνηση κριθεί επιτρεπτή από το προηγούμενο βήμα 4, ο κόμβος καταλαμβάνει τη νέα θέση. Σε αντίθετη περίπτωση δεν πραγματοποιείται η μετακίνηση.
6. Ενημέρωση των δομών ADT.
7. Τα βήματα 2 έως 6 επαναλαμβάνονται για όλους τους τομείς.

3.12 Τελεστής αφαίρεσης κορυφών

Στη συνέχεια εφαρμόζεται ο τελεστής αφαίρεσης κορυφών στους τομείς. Ο τελεστής εξομάλυνσης οριακών επιφανειών έχει ήδη δώσει μια περισσότερο κυρτή μορφή στους τομείς. Ωστόσο κάποιοι από τους οριακούς κόμβους δεν έχουν μετακινηθεί, προκύπτοντας έτσι έντονες κορυφές στις επιφάνειες. Ο τελεστής αφαίρεσης κορυφών έχει στόχο να δημιουργήσει άμεσα τετράεδρα, απομακρύνοντας αυτές τις κορυφές. Ο τελεστής δημιουργεί ένα νέο τετράεδρο όταν ένας επιφανειακός κόμβος ενός τομέα συνδέεται μόνο με τρεις επιφανειακούς κόμβους, οι οποίοι έχουν τέτοια θέση ώστε να σχηματίζουν ένα έγκυρο τετράεδρο.



Εικόνα 3.45: Αφαίρεση κορυφών. Με κόκκινο χρώμα παρουσιάζεται το τετράεδρο που δημιουργείται κατά την εφαρμογή του τελεστή αφαίρεσης κορυφών. Με μπλε χρώμα εικονίζεται η τελική μορφή του τομέα.



Εικόνα 3.46: Αφαίρεση κορυφών. Με κόκκινο χρώμα παρουσιάζεται το τετράεδρο που δημιουργείται κατά την εφαρμογή του τελεστή αφαίρεσης κορυφών. Με μπλε χρώμα απεικονίζεται η τελική μορφή του τομέα.

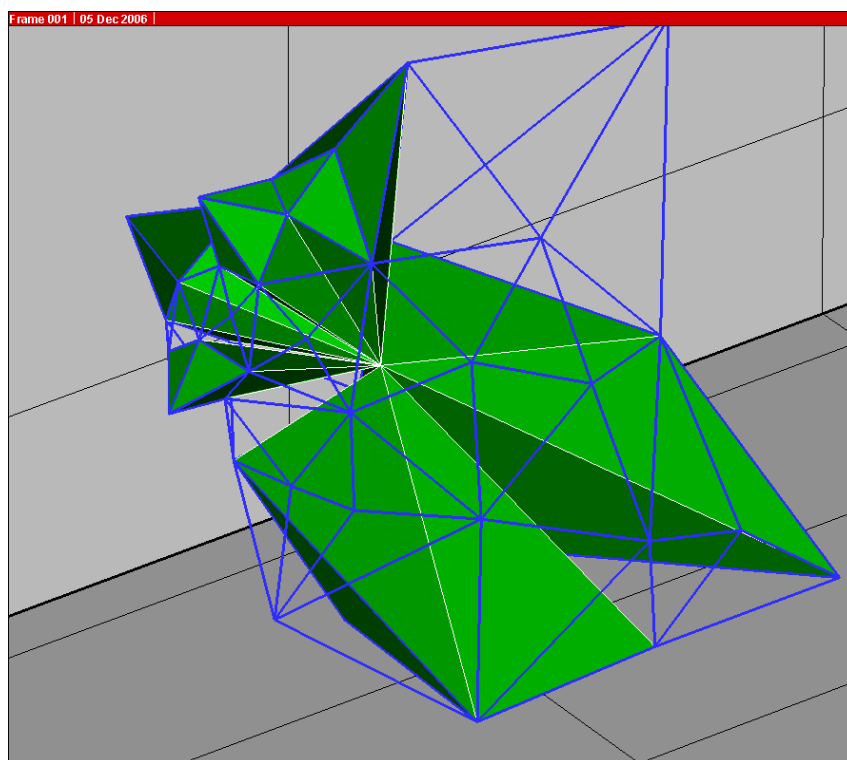
Ακολουθούν τα βήματα του τελεστή αφαίρεσης κορυφών:

1. Για κάθε κόμβο ενός τομέα υπολογίζεται το πλήθος των γειτονικών κόμβων του, οι οποίοι ανήκουν στον ίδιο τομέα.
2. Στην περίπτωση που ο κόμβος του προηγούμενου βήματος έχει ακριβώς 3 γειτονικούς κόμβους που ανήκουν στον ίδιο τομέα, ελέγχεται αν οι τέσσερις συνολικά κόμβοι μπορούν να σχηματίσουν ένα έγκυρο τετράεδρο. Στην αντίθετη περίπτωση η διαδικασία επιστρέφει στο βήμα 1 και εξετάζει τον επόμενο κόμβο του τομέα.
3. Εφόσον οι τέσσερις κόμβοι του προηγούμενου βήματος μπορούν να σχηματίσουν ένα έγκυρο τετράεδρο, τότε αυτό δημιουργείται και ενημερώνονται οι αντίστοιχες δομές δεδομένων.
4. Τα προηγούμενα βήματα 1 έως 3 εκτελούνται για όλους τους τομείς.

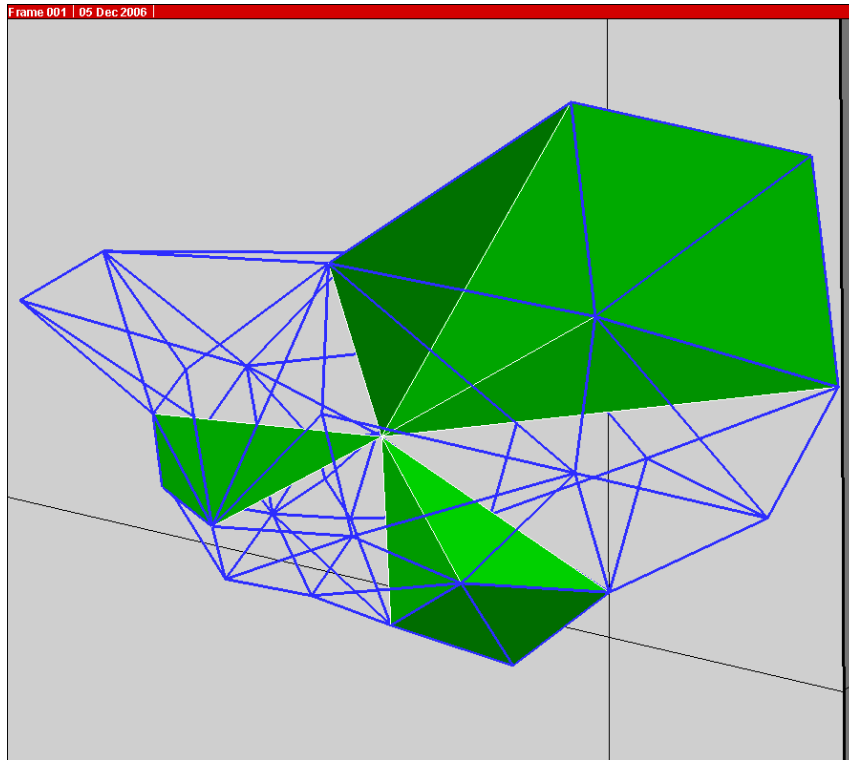
Μετά την εξομάλυνση των οριακών επιφανειών, εφαρμόζεται ο τελεστής αφαίρεσης κορυφών, δίνοντας έμφαση στους κόμβους των επιφανειών που δεν κινήθηκαν κατά την εφαρμογή του προηγούμενου τελεστή. Με την απομάκρυνση των κορυφών, οι τομείς λαμβάνουν μια πιο ομαλή μορφή, που επιτρέπει την αποτελεσματική εφαρμογή ενός τροποποιημένου τελεστή εμφύτευσης κόμβου.

3.13 Τροποποιημένος τελεστής εμφύτευσης κόμβου

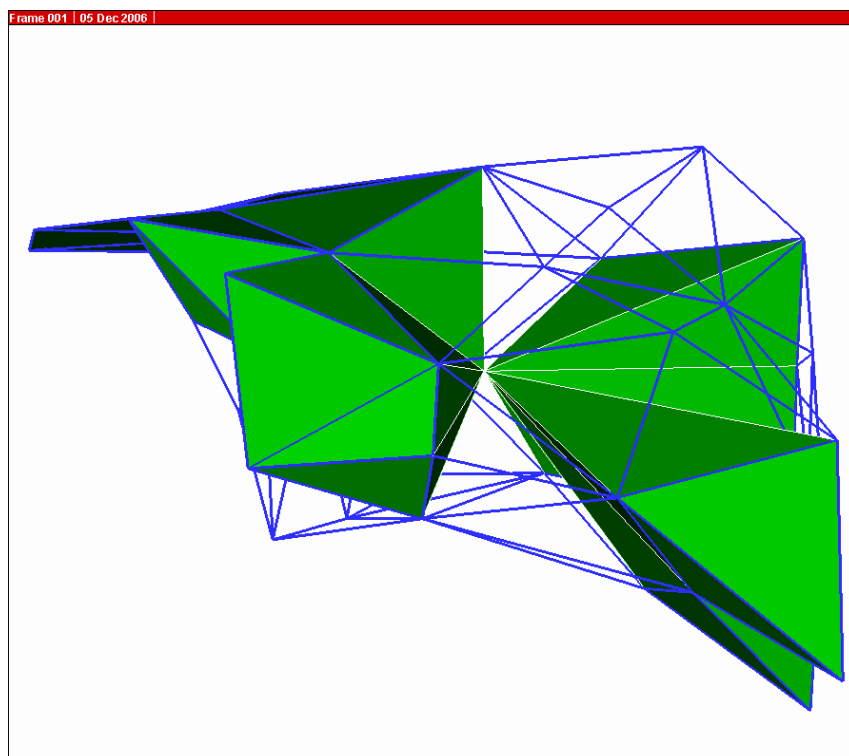
Ο τελεστής αυτός αποτελεί μια ελαφρά παραλλαγμένη μορφή του τελεστή εμφύτευσης κόμβου, που παρουσιάστηκε σε προηγούμενη παράγραφο. Η μοναδική τροποποίηση αφορά στη χρησιμοποίηση του βοηθητικού κόμβου που εμφυτεύεται στο εσωτερικό κάθε τομέα. Ενώ στην αρχική μορφή του τελεστή ο κόμβος εμφυτεύεται μόνο αν αυτός μπορεί να αξιοποιηθεί από όλα τα τρίγωνα του τομέα, στην τροποποιημένη εκδοχή του ο κόμβος εμφυτεύεται και αξιοποιείται από όσα τριγωνικά στοιχεία έχουν αυτή τη δυνατότητα, ενώ δεν πραγματοποιείται καμία ενέργεια για τα υπόλοιπα. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα να διακριτοποιείται το μεγαλύτερο μέρος, αν όχι το σύνολο, του όγκου κάθε τομέα, διασπώντας τον σε μικρότερους τομείς, που παρουσιάζουν σχετικά καλή μορφή (εικόνες 3.47-3.49). Τα βήματα του τελεστή είναι όμοια με τα βήματα του τελεστή εμφύτευσης κόμβου, εξαιρώντας το βήμα 3.



Εικόνα 3.47: Τροποποιημένη εμφύτευση κόμβου. Το γαλάζιο πλέγμα απεικονίζει τη μορφή ενός τομέα πριν την εφαρμογή του τελεστή, ενώ με πράσινο χρώμα απεικονίζονται οι τελικοί τομείς που απομένουν μετά την εφαρμογή του.



Εικόνα 3.48: Τροποποιημένη εμφύτευση κόμβου. Το γαλάζιο πλέγμα απεικονίζει τη μορφή ενός τομέα πριν την εφαρμογή του τελεστή, ενώ με πράσινο χρώμα απεικονίζονται οι τελικοί τομείς που απομένουν μετά την εφαρμογή του.



Εικόνα 3.49: Τροποποιημένη εμφύτευση κόμβου. Το γαλάζιο πλέγμα απεικονίζει τη μορφή ενός τομέα πριν την εφαρμογή του τελεστή, ενώ με πράσινο χρώμα απεικονίζονται οι τελικοί τομείς που απομένουν μετά την εφαρμογή του.

3.14 Τελεστής διακριτοποίησης υποχώρων

Το τελεστής αυτός έχει τη δυνατότητα να επιλέγει γειτονικά τρίγωνα, που ανήκουν στην επιφάνεια των τομέων και να δημιουργεί νέα τετράεδρα, χρησιμοποιώντας τα ως βάσεις. Ως τέταρτη κορυφή για τα νέα τετράεδρα χρησιμοποιείται ένας βοηθητικός κόμβος, που δημιουργείται με παρόμοια λογική με αυτή του τελεστή εμφύτευσης κόμβου. Σκοπός του τελεστή είναι η διακριτοποίηση ενός υποχώρου, στον οποίο ανήκει ένα συγκεκριμένο τρίγωνο, ώστε να αυξηθεί η πιθανότητα διακριτοποίησης του εναπομείναντα τομέα, μέσω του τελεστή εμφύτευσης βοηθητικού κόμβου.

Ο τελεστής αρχικά επιλέγει ένα τριγωνικό στοιχείο ενός τομέα, γύρω από το οποίο βρίσκεται το σύνολο των τριγώνων που ορίζουν έναν υποχώρο (την εξωτερική του επιφάνεια). Το κριτήριο επιλογής του πρώτου τριγώνου μπορεί να ποικίλει, ανάλογα με την εκάστοτε περίπτωση. Στην περίπτωση που εξετάζεται, αρχικά επιλέγονται τα τρίγωνα που δεν μπορούν να αξιοποιήσουν τον βοηθητικό κόμβο του τελεστή εμφύτευσης κόμβου. Μεταξύ αυτών, επιλέγεται το τριγωνικό στοιχείο με το μεγαλύτερο εμβαδό.

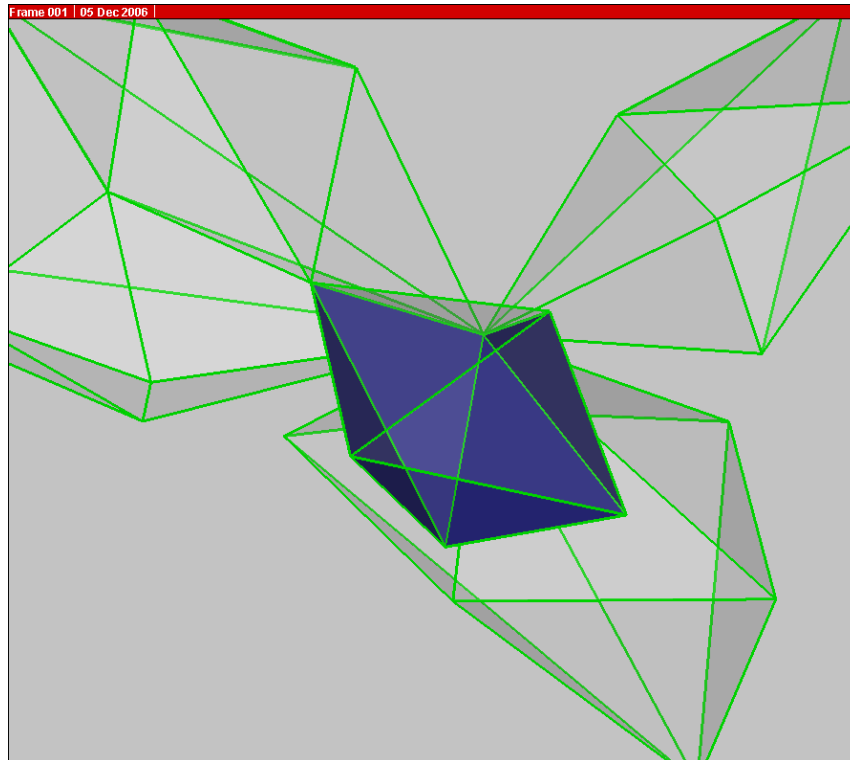
Το επιλεγμένο τρίγωνο ορίζει μερικώς ένα τμήμα του τομέα με τη βοήθεια κάποιων εκ των γειτονικών του τριγωνικών στοιχείων (όπως περιγράφεται στη συνέχεια). Το σύνολο αυτό των επιφανειακών τριγώνων συμμετέχει στη δημιουργία νέων τετραέδρων με έδρες-βάσεις τα τρίγωνα που το συστήνουν και ως τέταρτη (κοινή) κορυφή έναν βοηθητικό κόμβο, που τοποθετείται στη θέση που αντιστοιχεί στη μέση τιμή των συντεταγμένων των κορυφών των εν λόγω τριγώνων. Ο βοηθητικός κόμβος δηλαδή δημιουργείται με τη λογική που αναπτύσσεται στον τελεστή εμφύτευσης κόμβου. Τα τριγωνικά στοιχεία, που επιλέγονται να ανήκουν στο παραπάνω σύνολο, πρέπει να έχουν έναν τουλάχιστον κοινό κόμβο με το πρώτο τρίγωνο. Επιπλέον, ο βοηθητικός κόμβος που θα προκύψει από το πρώτο τρίγωνο, τα ήδη υπάρχοντα και κάθε νέο υποψήφιο για εισαγωγή στο εν λόγω σύνολο, θα πρέπει να είναι αξιοποιήσιμος από όλα τα τρίγωνα του συνόλου.

Η διαδικασία αυτή διεξάγεται εφαρμόζοντας ταυτόχρονα ελέγχους ώστε να εξασφαλίζεται η εγκυρότητα του πλέγματος που αναπτύσσεται. Μια εναλλακτική προσέγγιση της επιλογής του πρώτου τριγώνου, αφορά το περισσότερο απομακρυσμένο τρίγωνο από το κέντρο του τομέα, το οποίο δεν μπορεί να αξιοποιήσει τον έμφυτο βοηθητικό κόμβο. Στις εικόνες 3.50 και 3.51 που ακολουθούν παρουσιάζονται διαφορετικές περιπτώσεις υποχώρων που συστάθηκαν και διακριτοποιήθηκαν.

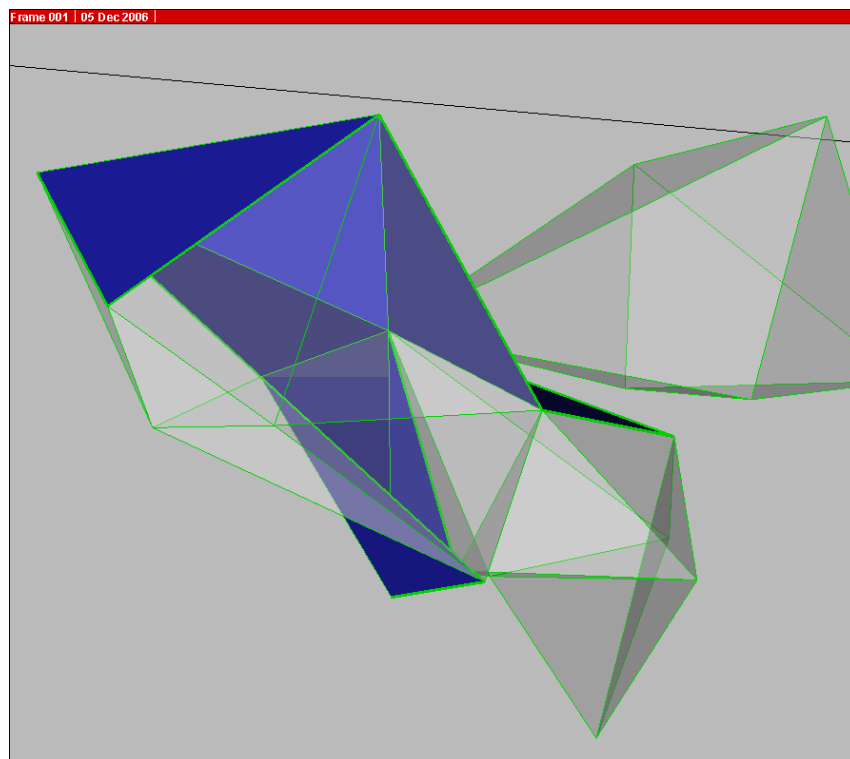
Ακολουθούν επιγραμματικά τα βήματα του τελεστή διακριτοποίησης υποχώρων:

1. Δημιουργία των κατάλληλων ADT δομών.
2. Για κάθε τρίγωνο κάθε τομέα εντοπίζονται τα τρία γειτονικά του τρίγωνα, που ανήκουν στον ίδιο τομέα.
3. Εντοπισμός του κέντρου ενός τομέα. Οι συντεταγμένες του προκύπτουν ως η μέση τιμή των συντεταγμένων των κόμβων του.

4. Εντοπισμός των τριγωνικών στοιχείων του τομέα τα οποία δεν δημιουργούν έγκυρο τετράεδρο, χρησιμοποιώντας ως τέταρτη κορυφή το κέντρο του τομέα.
5. Εντοπισμός του τριγωνικού στοιχείου με το μεγαλύτερο εμβαδό μεταξύ των τριγώνων που εντοπίστηκαν στο προηγούμενο βήμα 4.
6. Εισαγωγή του τριγώνου του προηγούμενου βήματος σε μια λίστα. Για κάθε τριγωνικό στοιχείο που εισέρχεται στη λίστα εξετάζονται μεμονωμένα τα τρία γειτονικά του τρίγωνα που ανήκουν στον τομέα. Τα τριγωνικά στοιχεία, που επιλέγονται να ανήκουν στο παραπάνω σύνολο, πρέπει να έχουν έναν τουλάχιστον κοινό κόμβο με το πρώτο τρίγωνο. Για κάθε ένα υπολογίζεται η μέση τιμή των συντεταγμένων των κορυφών του και των κορυφών των τριγώνων που περιέχονται στη λίστα. Αν το σημείο που αντιστοιχεί στις συντεταγμένες αυτές μπορεί να χρησιμοποιηθεί από όλα τα τρίγωνα της λίστας για τη δημιουργία έγκυρου τετραέδρου, τότε το τρίγωνο που εξετάζεται εισέρχεται στη λίστα. Συνολικά εξετάζονται τα γειτονικά τρίγωνα όλων των στοιχείων που ανήκουν στη λίστα, εφόσον έχουν κοινό κόμβο με το πρώτο τρίγωνο της λίστας.
7. Εντοπισμός της μέσης τιμής των συντεταγμένων των τριγώνων που περιέχονται στη λίστα του προηγούμενου βήματος. Δημιουργία ενός βοηθητικού κόμβου στην αντίστοιχη θέση. Δημιουργία τετραέδρων χρησιμοποιώντας τον βοηθητικό κόμβο και τα τρίγωνα της λίστας.
8. Επανάληψη των βημάτων 3 έως 7 για όλους τους τομείς.



Εικόνα 3.50: Διακριτοποίηση υποχώρων. Το πράσινο περίγραμμα εικονίζει τη μορφή των τομέων, ενώ με μπλε χρώμα παρουσιάζονται τα τριγωνικά στοιχεία που οριοθετούν έναν υποχώρο, που θα διακριτοποιηθεί από τον τελεστή.



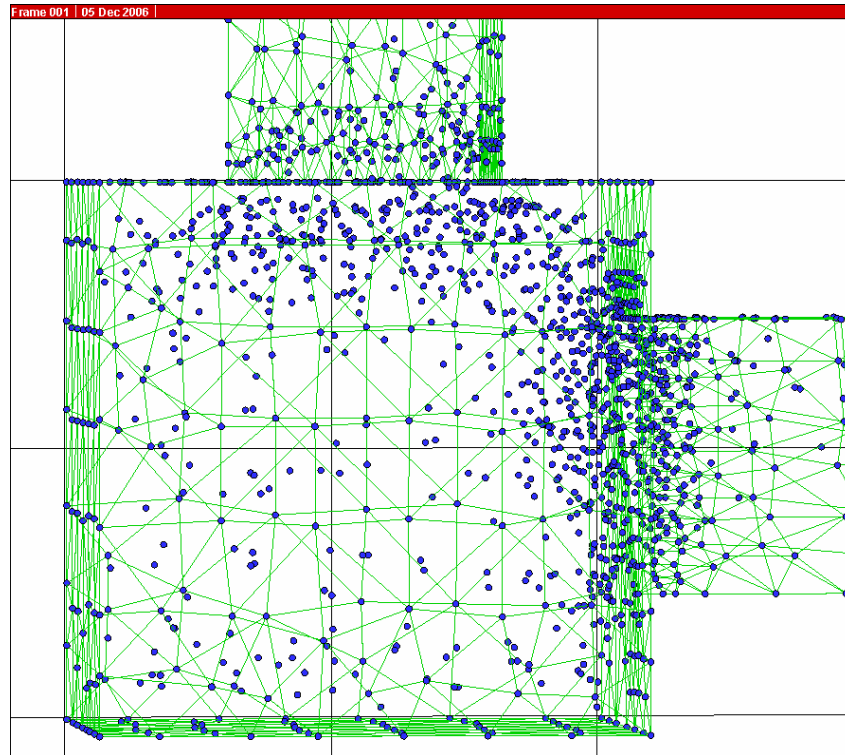
Εικόνα 3.51: Διακριτοποίηση υποχώρων. Το πράσινο περίγραμμα εικονίζει τη μορφή των τομέων, ενώ με μπλε χρώμα παρουσιάζονται τα τριγωνικά στοιχεία που οριοθετούν έναν υποχώρο, που θα διακριτοποιηθεί από τον τελεστή.

3.15 Επαναληπτική διαδικασία αποκατάστασης

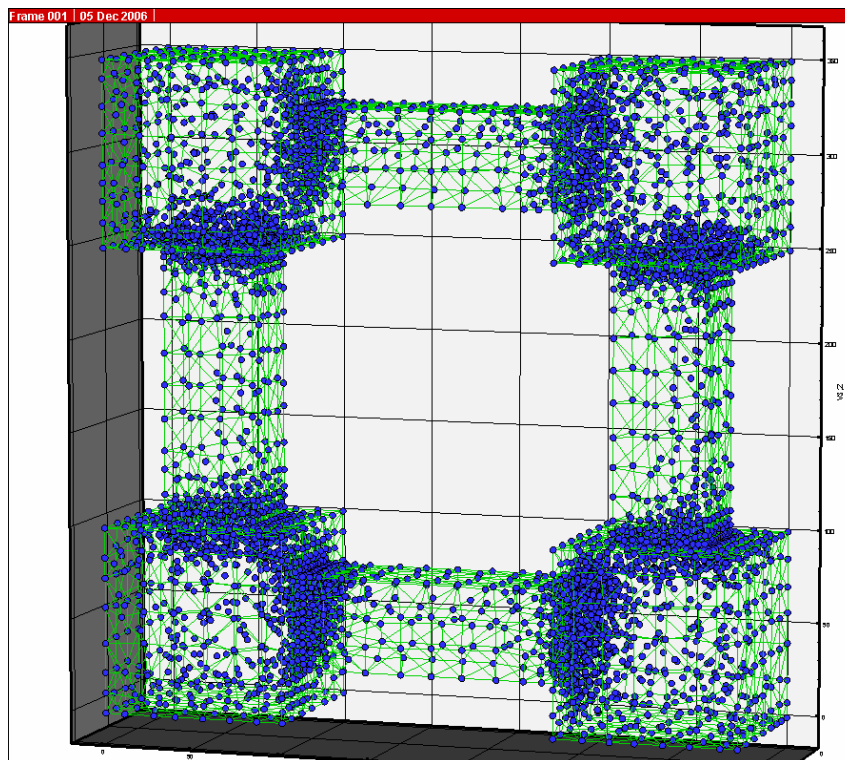
Η διαδικασία αποκατάστασης περιλαμβάνει μια επαναληπτική ρουτίνα κάποιων εκ των παραπάνω τελεστών. Συγκεκριμένα, ακριβώς μετά την εφαρμογή του τροποποιημένου τελεστή εμφύτευσης κόμβου, εφαρμόζονται κυκλικά οι τελεστές αφαίρεσης κορυφών, διακριτοποίησης υποχώρων και εμφύτευσης κόμβου. Οι τρεις τελεστές συνεργάζονται μεταξύ τους με σκοπό τη σταδιακή διακριτοποίηση των τομέων που προκύπτουν από τον τροποποιημένο τελεστή εμφύτευσης κόμβου. Η λογική της ρουτίνας είναι η σταδιακή διακριτοποίηση κρίσιμων σημείων των τομέων, ώστε αυτοί να καταστούν σχεδόν κυρτοί χώροι, ή να διασπαστούν σε σχεδόν κυρτούς τομείς, ώστε να διακριτοποιηθούν πλήρως από τον τελεστή εμφύτευσης κόμβου που ακολουθεί. Ο τελεστής αφαίρεσης κορυφών συμπληρώνει τη λειτουργία του τελεστή διακριτοποίησης υποχώρων, εξομαλύνοντας τα όρια των τομέων, που προκύπτουν μετά την εφαρμογή του τελευταίου. Η επαναληπτική διαδικασία τερματίζεται όταν διακριτοποιηθούν όλοι οι τομείς, το οποίο συνεπάγεται την πλήρη διακριτοποίηση του χωρίου που ορίζεται από το αρχικό επιφανειακό πλέγμα.

Μετά την ολοκλήρωση του πλέγματος, εφαρμόζεται ο τελεστής Laplacian εξομάλυνσης σε 3 κύκλους, ώστε να βελτιωθεί η ποιότητα του πλέγματος. Τέλος, ελέγχεται η εγκυρότητα του πλέγματος (εξαντλητικά) και εξάγεται με τη μορφή αρχείου κειμένου.

Στις εικόνες 3.52 και 3.53 που ακολουθούν διακρίνεται η διάταξη των κόμβων του τελικού πλέγματος που δημιουργήθηκε στην περίπτωση που εξετάστηκε. Η πύκνωση των κόμβων στο εσωτερικό του πλέγματος ακολουθεί επιτυχώς την πύκνωση που παρουσιάζει το επιφανειακό πλέγμα.



Εικόνα 3.52: Τελικό πλέγμα. Το πράσινο πλέγμα εικονίζει τη μορφή της οριακής επιφάνειας, ενώ με μπλε χρώμα παρουσιάζονται οι κόμβοι του πλέγματος που δημιουργήθηκε.



Εικόνα 3.53: Τελικό πλέγμα. Το πράσινο πλέγμα εικονίζει τη μορφή της οριακής επιφάνειας, ενώ με μπλε χρώμα παρουσιάζονται οι κόμβοι του πλέγματος που δημιουργήθηκε.

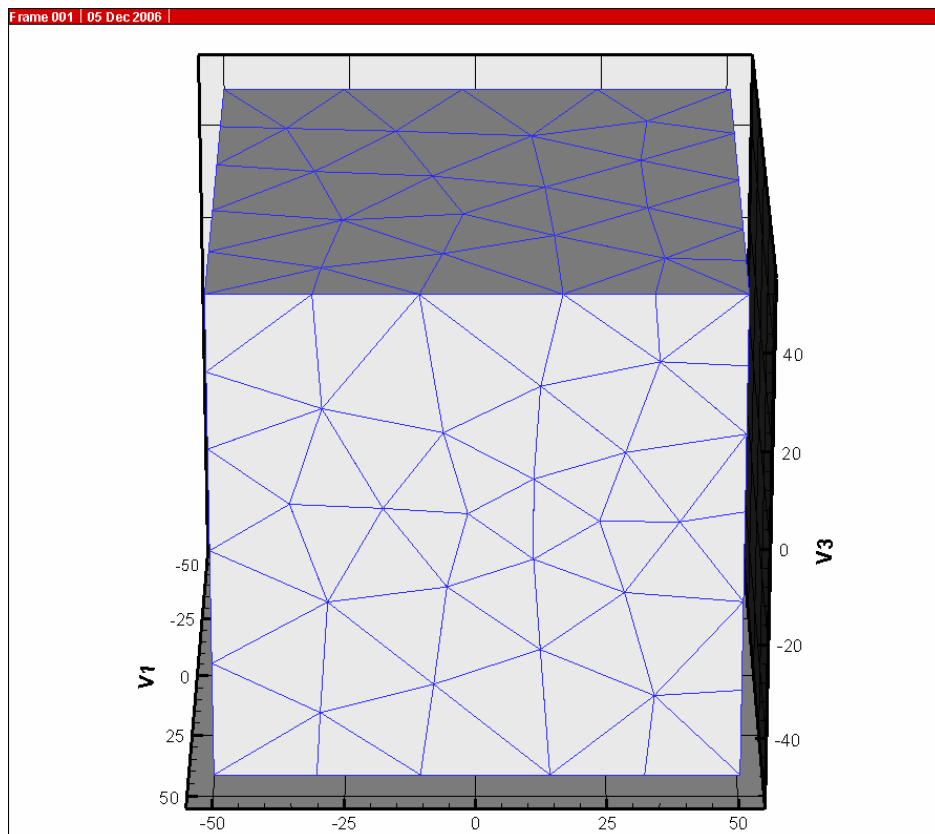
Κεφάλαιο 4

Πιστοποίηση του αλγορίθμου

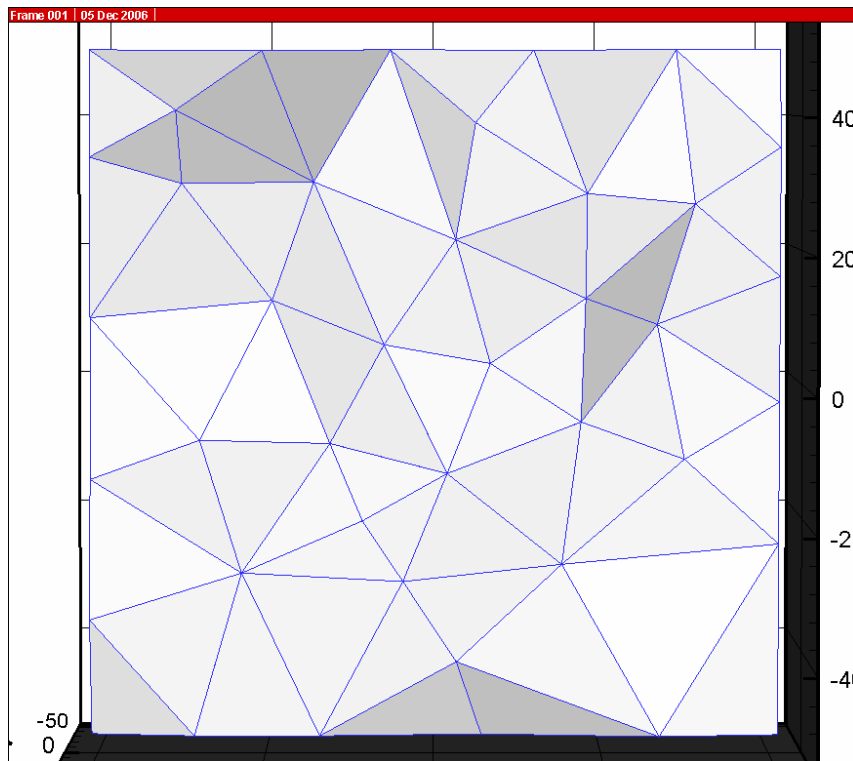
Για την πιστοποίηση της ορθότητας του αλγορίθμου παρουσιάζονται τα αποτελέσματά του για διάφορες γεωμετρίες.

4.1 Κύβος

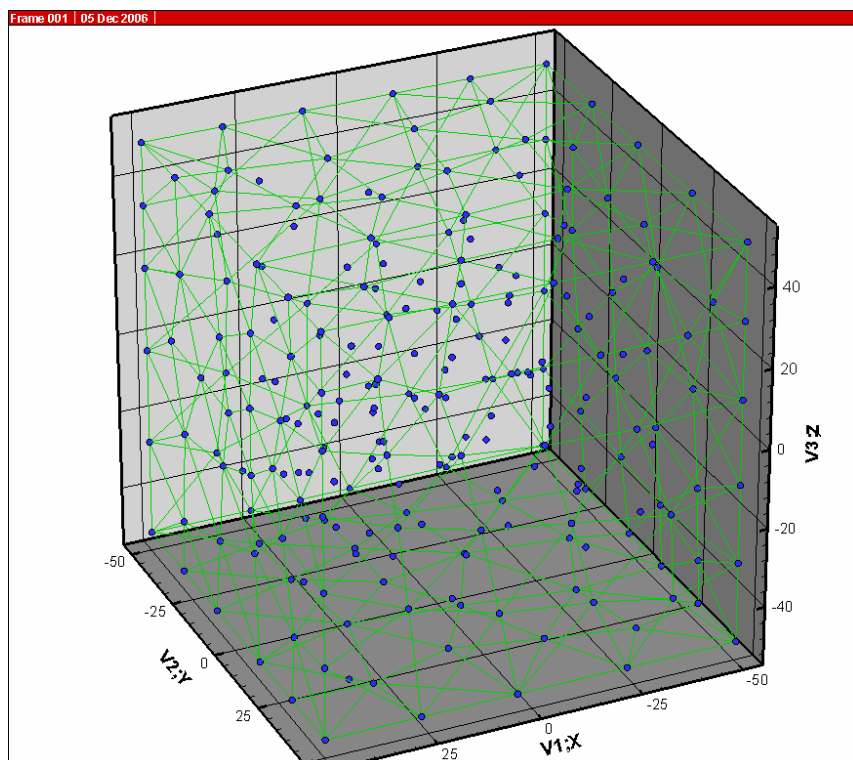
Στην περίπτωση αυτή διακριτοποιήθηκε μια απλή κυρτή γεωμετρία και συγκεκριμένα ένας κύβος. Το επιφανειακό πλέγμα είναι σχετικά αραιό και δεν εμφανίζει καμία τοπική πυκνωση. Οι εικόνες 4.1, 4.2 και 4.3 παρουσιάζουν το αρχικό επιφανειακό και το τελικό χωρικό πλέγμα. Αξίζει να σημειωθεί ότι η πλήρης διακριτοποίηση του κύβου επιτεύχθηκε με την βασική επαναληπτική διαδικασία, χωρίς να απαιτηθεί η επέμβαση της διαδικασίας αποκατάστασης.



Εικόνα 4.1: Επιφανειακό πλέγμα του κύβου.



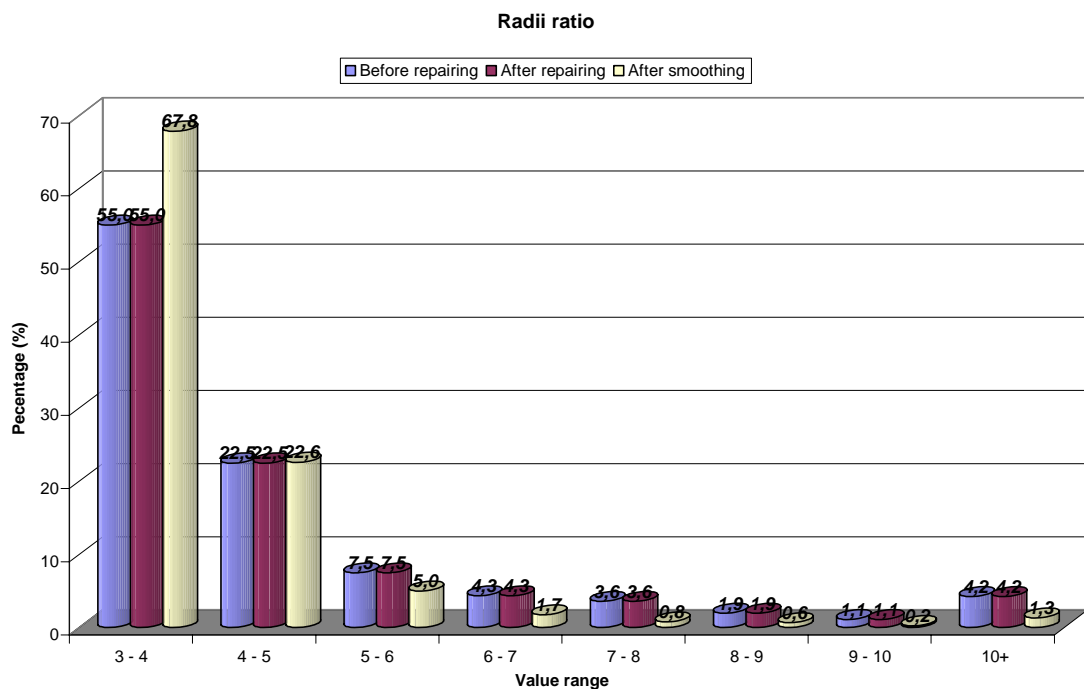
Εικόνα 4.2: Τομή του χωρικού πλέγματος που δημιουργήθηκε στην περίπτωση του κύβου.



Εικόνα 4.3: Τελικό πλέγμα. Με μπλε χρώμα παρουσιάζονται οι κόμβοι του πλέγματος που δημιουργήθηκε.

Τα χαρακτηριστικά της συγκεκριμένης εφαρμογής και τα στοιχεία του πλέγματος που προέκυψε είναι τα ακόλουθα:

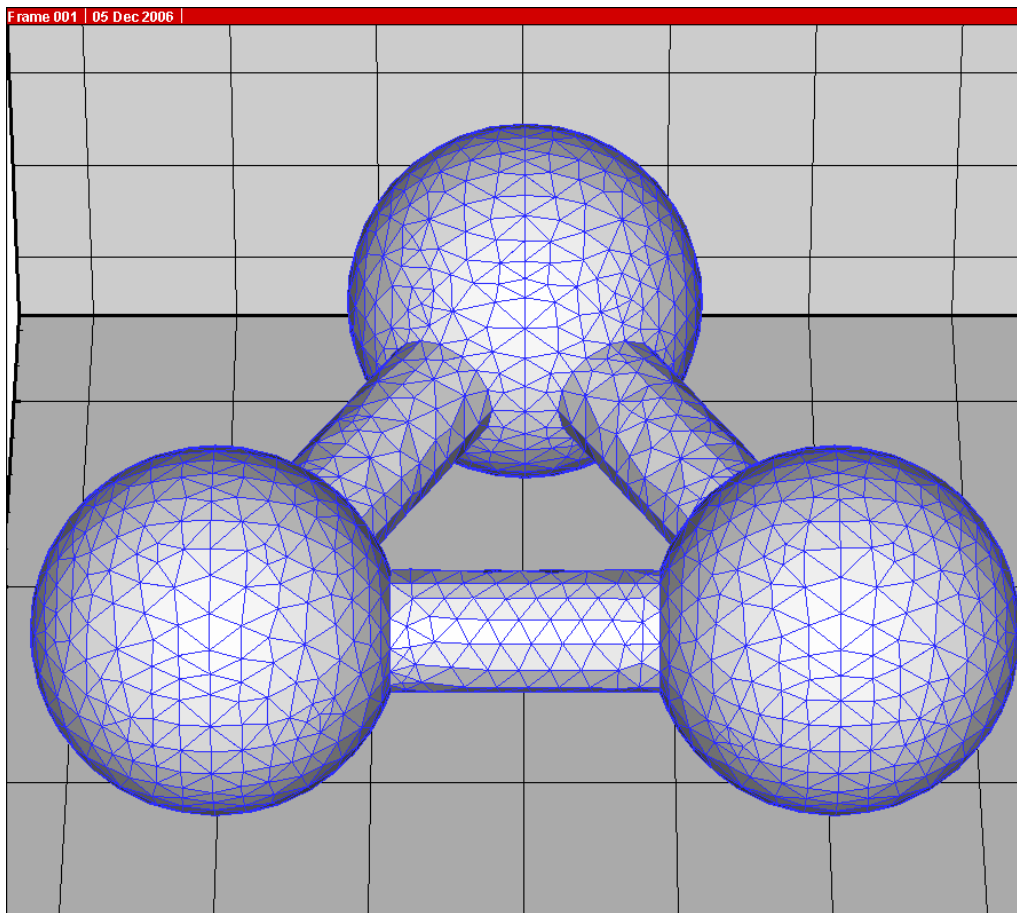
- Αρχικό επιφανειακό πλέγμα:
 - 300 τρίγωνα
 - 152 κόμβοι
- Περάτωση βασικής διαδικασίας. Δημιουργήθηκαν:
 - 926 τετράεδρα
 - 2002 τρίγωνα
 - 1319 ακμές
 - 244 κόμβοι
 - Όγκος του χώρου που διακριτοποιήθηκε: 1000000 (100% του συνολικού χωρίου).
 - Δημιουργήθηκαν 10 διαδοχικά μέτωπα
 - Χρόνος εκτέλεσης: 0,625 sec
- Περάτωση διαδικασίας αποκατάστασης.
Δεν απαιτήθηκε.
- Μετα-επεξεργασία.
 - Χρόνος εκτέλεσης: 2 sec



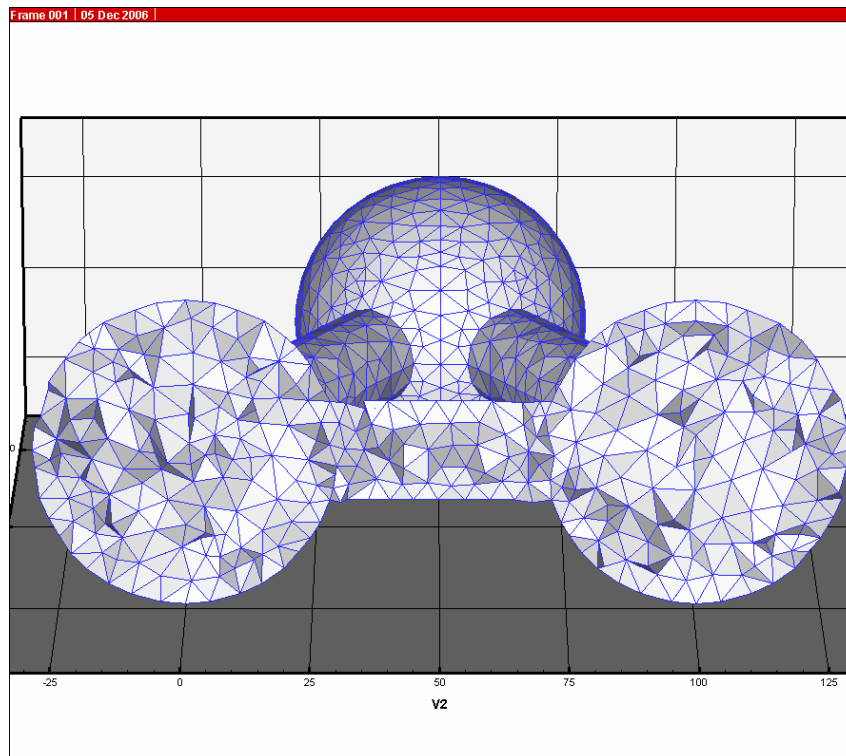
Εικόνα 4.4: Γραφική παράσταση της ποιότητας του πλέγματος σε διαδοχικές φάσεις του αλγορίθμου.

4.2 Μη κυρτή γεωμετρία με σφαίρες

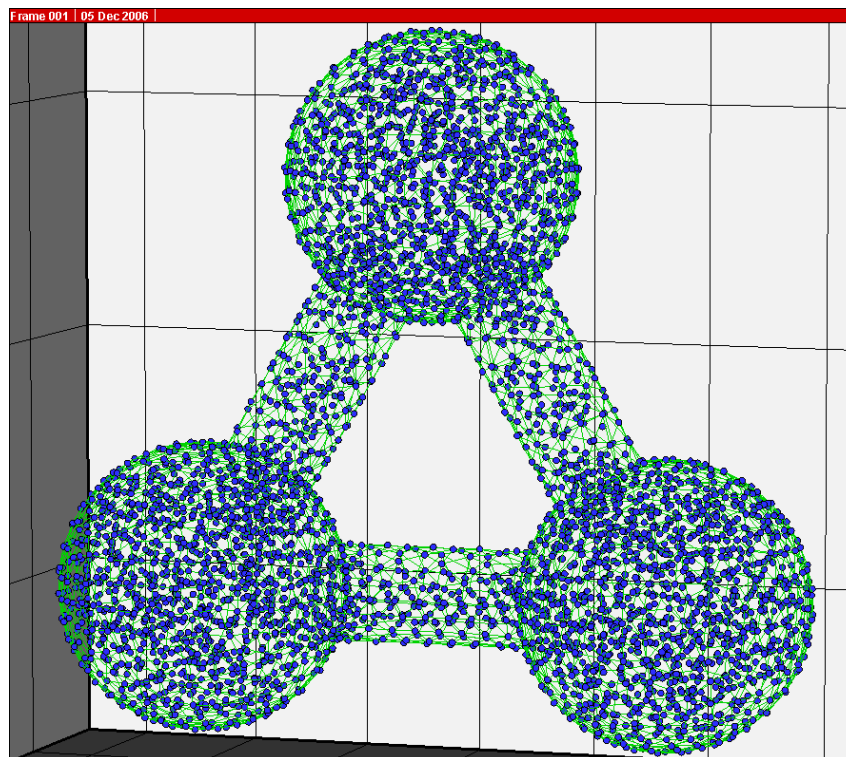
Η δεύτερη περίπτωση που μελετήθηκε είναι μια μη κυρτή γεωμετρία. Αποτελείται από τρεις σφαίρες που ενώνονται με τρεις κυλίνδρους. Το επιφανειακό πλέγμα παρουσιάζει μέτρια πυκνότητα, χωρίς τοπική πύκνωση. Το χωρικό πλέγμα ολοκληρώθηκε με τη συμβολή της διαδικασίας αποκατάστασης, μετά την εφαρμογή ενός μόλις τελεστή, αυτού της εμφύτευσης βοηθητικού κόμβου.



Εικόνα 4.5: Το επιφανειακό πλέγμα της δεύτερης περίπτωσης που εξετάστηκε.



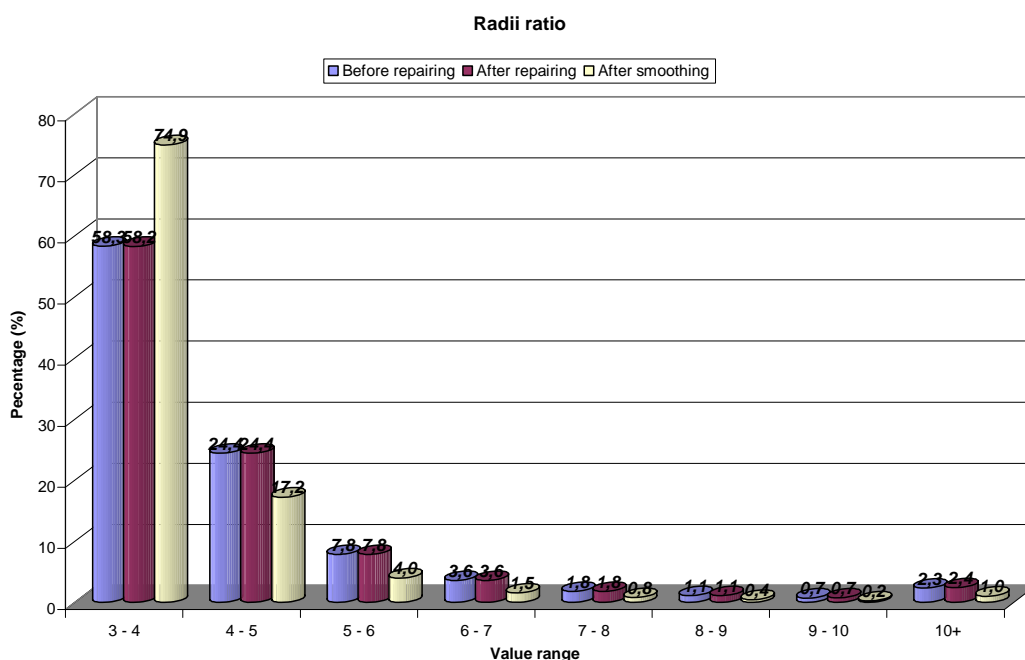
Εικόνα 4.6: Τομή του χωρικού πλέγματος που δημιουργήθηκε στην περίπτωση της δεύτερης γεωμετρίας.



Εικόνα 4.7: Τελικό πλέγμα για τη δεύτερη γεωμετρία που εξετάστηκε. Με μπλε χρώμα παρουσιάζονται οι κόμβοι του πλέγματος που δημιουργήθηκε.

Τα χαρακτηριστικά της συγκεκριμένης εφαρμογής και τα στοιχεία του πλέγματος που προέκυψε είναι τα ακόλουθα:

- Αρχικό επιφανειακό πλέγμα:
 - 3900 τρίγωνα
 - 1950 κόμβοι.
- Περάτωση βασικής διαδικασίας. Δημιουργήθηκαν:
 - 22365 τετράεδρα
 - 46689 τρίγωνα
 - 29115 ακμές
 - 4793 κόμβοι
 - Όγκος του χώρου που διακριτοποιήθηκε: 373308,3 (99,97% του συνολικού χωρίου).
 - Δημιουργήθηκαν 32 διαδοχικά μέτωπα
 - Χρόνος εκτέλεσης: 48 sec
- Περάτωση διαδικασίας αποκατάστασης. Δημιουργήθηκαν:
 - 22383 τετράεδρα
 - 46716 τρίγωνα
 - 29128 ακμές
 - 4795 κόμβοι
 - Όγκος του χώρου που διακριτοποιήθηκε: 373414 (100% του συνολικού χωρίου).
 - Χρόνος εκτέλεσης: 0,22 sec
- Μετα-επεξεργασία
 - Χρόνος εκτέλεσης: 113 sec

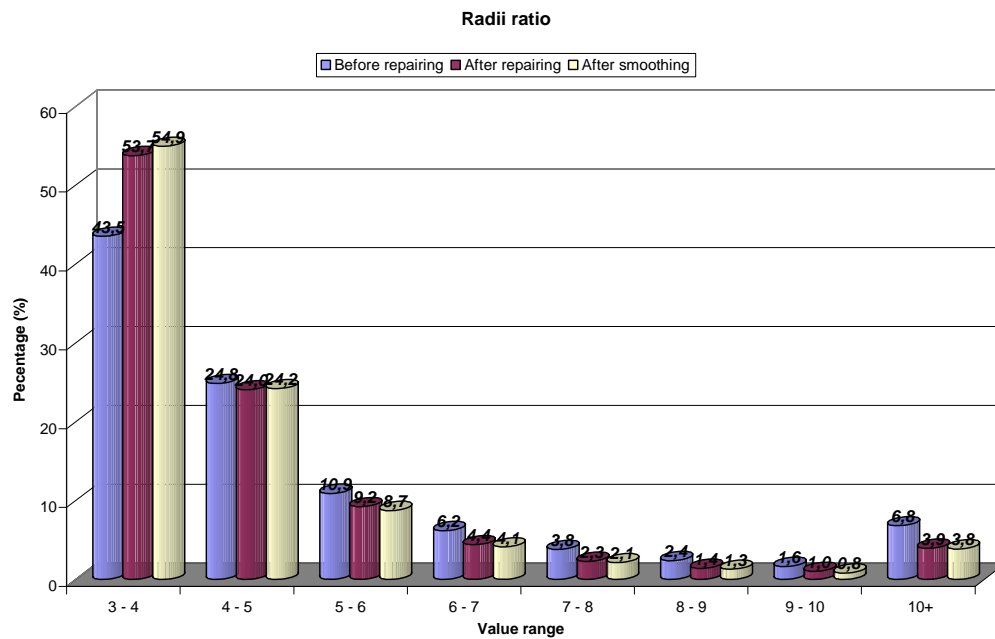


Εικόνα 4.8: Γραφική παράσταση της ποιότητας του πλέγματος, σε διαδοχικές φάσεις του αλγορίθμου, για τη δεύτερη γεωμετρία που εξετάστηκε.

4.3 Μη κυρτή γεωμετρία με κύβους και πρίσματα

Η τρίτη περίπτωση που εξετάστηκε είναι αυτή που παρουσιάστηκε στο κεφάλαιο 3. Οι εικόνες του τελικού πλέγματος παρουσιάστηκαν στο προηγούμενο κεφάλαιο. Τα χαρακτηριστικά της εφαρμογής και τα στοιχεία του πλέγματος είναι τα ακόλουθα:

- Αρχικό επιφανειακό πλέγμα:
 - 5976 τρίγωνα
 - 2988 κόμβοι.
- Περάτωση βασικής διαδικασίας. Δημιουργήθηκαν:
 - 29289 τετράεδρα
 - 61620 τρίγωνα
 - 38781 ακμές
 - 6462 κόμβοι
 - Όγκος του χώρου που διακριτοποιήθηκε: 4744038,7 (99,87% του συνολικού χωρίου).
 - Δημιουργήθηκαν 33 διαδοχικά μέτωπα
 - Χρόνος εκτέλεσης: 100 sec
- Περάτωση διαδικασίας αποκατάστασης. Δημιουργήθηκαν:
 - 29309 τετράεδρα
 - 61606 τρίγωνα
 - 38763 ακμές
 - 6467 κόμβοι
 - Όγκος του χώρου που διακριτοποιήθηκε: 4750000 (100% του συνολικού χωρίου).
 - Χρόνος εκτέλεσης: 214 sec
- Μετα-επεξεργασία.
 - Χρόνος εκτέλεσης: 169 sec



Εικόνα 4.9: Γραφική παράσταση της ποιότητας του πλέγματος σε διαδοχικές φάσεις του αλγορίθμου, για την τρίτη γεωμετρία που εξετάστηκε.

Κεφάλαιο 5

Ανακεφαλαίωση και συμπεράσματα

5.1 Ανακεφαλαίωση της εργασίας

Στην παρούσα εργασία αναπτύχθηκε μεθοδολογία και το αντίστοιχο λογισμικό χωρικής διακριτοποίησης με χρήση τετραεδρικών στοιχείων. Η μεθοδολογία βασίζεται σε μια τροποποιημένη έκδοχή της μεθόδου του προελαύνοντος μετώπου, καθώς και σε μια σειρά τεχνικών που αναπτύχθηκαν στα πλαίσια της παρούσας εργασίας. Ο αλγόριθμος εφαρμόστηκε σε διαφορετικές περιπτώσεις γεωμετριών, παράγοντας χωρικά πλέγματα ικανοποιητικής ποιότητας σε μικρό χρονικό διάστημα.

5.2 Συμπεράσματα

Τα σημαντικότερα συμπεράσματα, που εξήχθησαν από την εφαρμογή της προτεινόμενης μεθοδολογίας, συνοψίζονται στη συνέχεια:

- Η τεχνική του προελαύνοντος μετώπου αδυνατεί να δημιουργήσει ολοκληρωμένο πλέγμα σε σύνθετες και πολύπλοκες μη κυρτές γεωμετρίες. Η πρωτότυπη έκδοση της τεχνικής αποτελεί μια καλή μέθοδο παράλληλης δημιουργίας νέων κόμβων και τετραεδρικών στοιχείων, χωρίς όμως να εξασφαλίζει αξιόπιστη παραγωγή πλέγματος σε αυθαίρετες γεωμετρίες. Για το λόγο αυτό πρέπει να συνοδεύεται από μια τεχνική αποκατάστασης και ολοκλήρωσης του πλέγματος, αυξάνοντας την αξιοπιστία του συνολικού αλγορίθμου.
- Η τεχνική του προελαύνοντος μετώπου δημιουργεί νέα τετράεδρα μωπικά, καθώς δεν λαμβάνεται υπ' όψη η κατάσταση του χώρου, όπως προκύπτει μετά από τη δημιουργία κάθε νέου τετραέδρου. Η «αυθαίρετη» δημιουργία τετραέδρων πολύ συχνά οδηγεί σε καταστάσεις όπου δεν είναι εφικτή η περαιτέρω διακριτοποίηση του χώρου. Για την αποφυγή των καταστάσεων αυτών είναι απαραίτητη η επιβολή σχετικού ελέγχου, όπως των περιορισμών που εφαρμόστηκαν στην παρούσα εργασία, ώστε να εξασφαλίζεται κατά το δυνατό η εφικτότητα της διαδικασίας στα επόμενα στάδια.
- Η επιτυχής διακριτοποίηση μιας γεωμετρίας κρίνεται εν πολλοίς από την ποιότητα του επιφανειακού πλέγματος που την ορίζει. Η δημιουργία ενός ικανοποιητικού τριδιάστατου πλέγματος απαιτεί ένα επιφανειακό πλέγμα αντίστοιχης ποιότητας, που να παρουσιάζει ομοιομορφία και ομοιοτροπία.

- Η ανάπτυξη και εφαρμογή μιας αποδοτικής τεχνικής αποκατάστασης και ολοκλήρωσης του πλέγματος, που παράγεται από την τροποποιημένη τεχνική προελαύνοντος μετώπου, παρουσιάζει σαφώς μεγαλύτερη δυσκολία από την υλοποίηση της τελευταίας. Η εξομάλυνση οριακών επιφανειών και ο καθορισμός κυρτών ή σχεδόν κυρτών υποχώρων με συγκεκριμένα χαρακτηριστικά αποτελεί περίπλοκη διαδικασία με αυξημένη δυσκολία.
- Οποιαδήποτε διαδικασία παραγωγής τριδιάστατου πλέγματος δεν μπορεί να προσφέρει ποιότητα αντίστοιχη με αυτή που προκύπτει από κάποια διαδικασία βελτίωσης ποιότητας, όπως για παράδειγμα η Laplacian. Η εφαρμογή μιας μεθόδου μετα-επεξεργασίας του πλέγματος είναι απαραίτητη, καθώς η βελτίωση του πλέγματος ισοσταθμίζει την αύξηση των υπολογιστικών απαιτήσεων.
- Η αξιοπιστία του αλγορίθμου και η εγκυρότητα του πλέγματος που δημιουργεί καθορίζεται κυρίως από την αξιοπιστία της διαδικασίας ελέγχου πιθανής τομής μεταξύ ενός τριγωνικού στοιχείου και μια ακμής. Η ανάπτυξη μιας αξιόπιστης διαδικασίας ελέγχου είναι αρκετά επίπονη, αλλά η καθοριστική σημασία της επιβάλλει προσεκτική μελέτη, ώστε να προβλέπονται όλες οι πιθανές περιπτώσεις και να αντιμετωπίζονται κατάλληλα.
- Η αποδοτικότητα του αλγορίθμου από την άποψη της ταχύτητας κρίνεται κυρίως από την απόδοση της διαδικασίας γεωμετρικής αναζήτησης. Λόγω του μεγάλου πλήθους στοιχείων, που συνιστούν ένα τριδιάστατο πλέγμα, είναι αναγκαία η χρήση κατάλληλων δομών δεδομένων και αντίστοιχων τεχνικών, προσαρμοσμένων στις απαιτήσεις για γρήγορη αναζήτηση στοιχείων στο χώρο.

5.3 Προτάσεις

Το επιστημονικό πεδίο που εξετάστηκε έχει αναμφίβολα μεγάλο περιθώριο για περαιτέρω έρευνα και βελτίωση των έως τώρα αποτελεσμάτων. Η μεθοδολογία που αναπτύχθηκε στην παρούσα εργασία έχει αντίστοιχα περιθώρια βελτίωσης και εξέλιξης. Συνοπτικά προτείνονται τα ακόλουθα θέματα μελέτης:

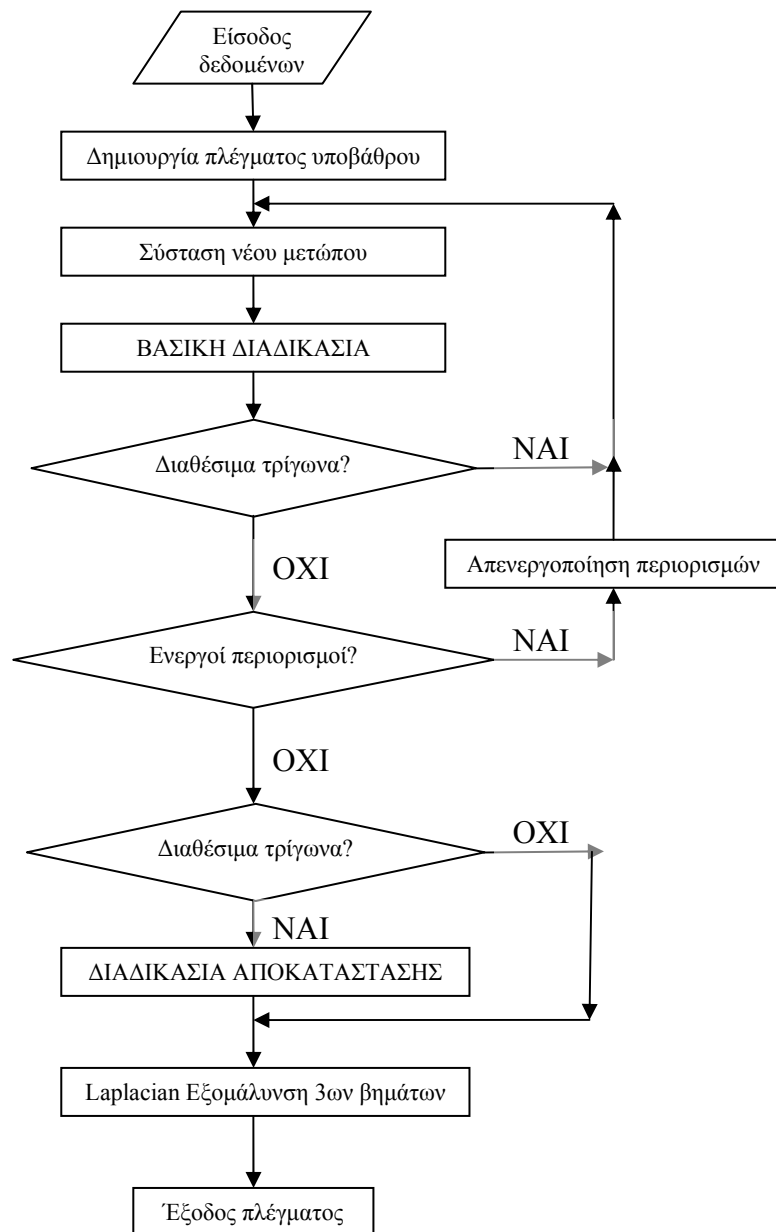
- Εισαγωγή δυνατότητας καθορισμού από τον χρήστη υποχρεωτικών σημείων, γραμμών και επιφανειών, τα οποία πρέπει να ακολουθεί το τελικό πλέγμα. Τα στοιχεία αυτά θα καθορίζονται πριν την έναρξη της διαδικασίας και θα λαμβάνονται υπ' όψη κατά τη διακριτοποίηση του χωρίου.
- Δυνατότητα εισαγωγής σημειακών και γραμμικών πηγών πυκνώσης. Ο χρήστης θα έχει τη δυνατότητα καθορισμού στοιχείων, όπως σημεία και γραμμές, γύρω από τα οποία θα παρουσιάζεται αυξημένη πυκνωση στο τριδιάστατο πλέγμα. Η διαφοροποίηση της πυκνώσης πρέπει να παρουσιάζει ομοιομορφία και ομοιοτροπία.

- Εισαγωγή δυνατότητας συνεργασίας με αλγόριθμο Octree, ο οποίος θα παρέχει τους κόμβους, που θα χρησιμοποιηθούν στη συνέχεια από την προτεινόμενη μεθοδολογία για τη δημιουργία του πλέγματος.

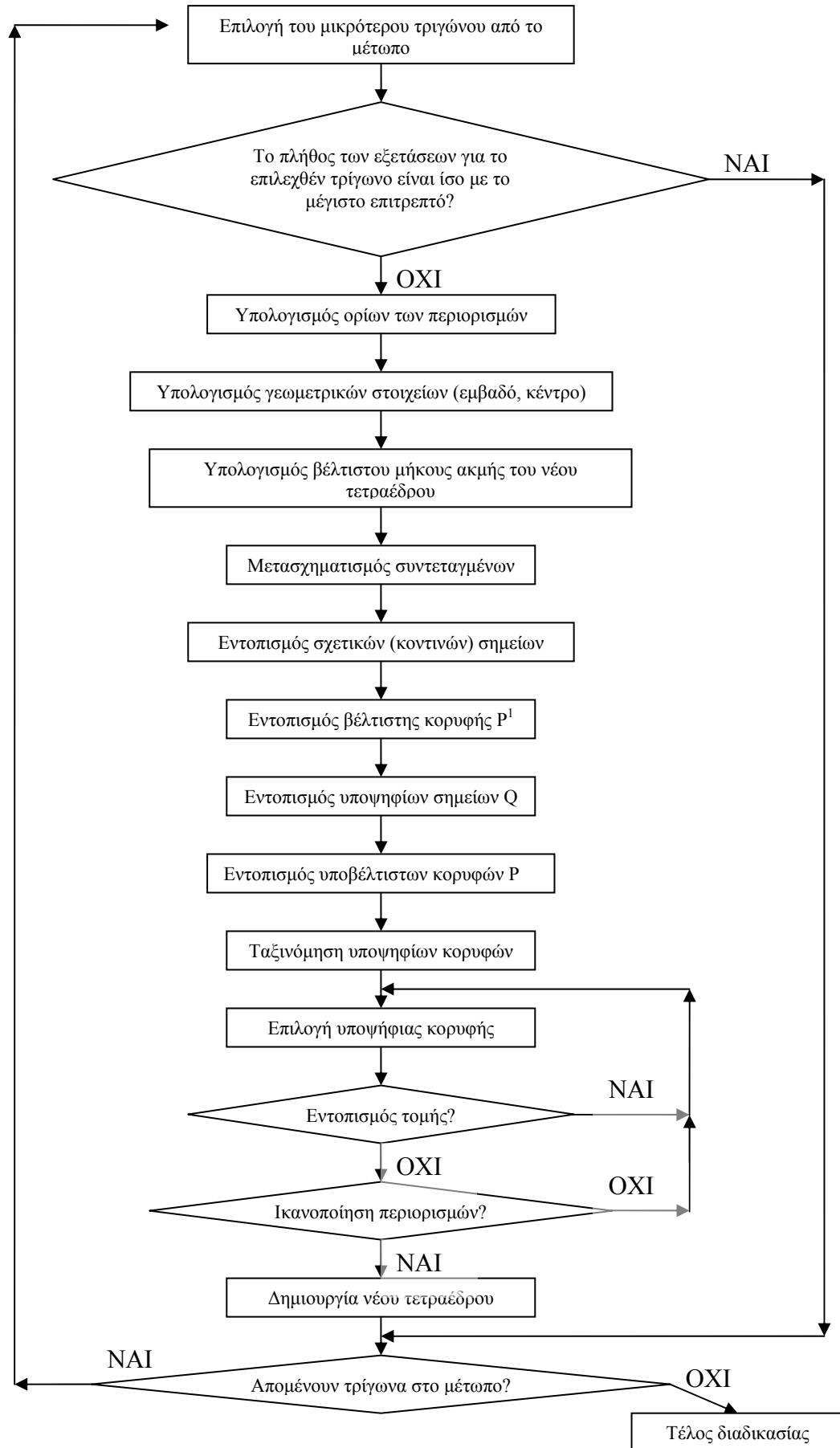
Παράρτημα Α

Διαγράμματα ροής

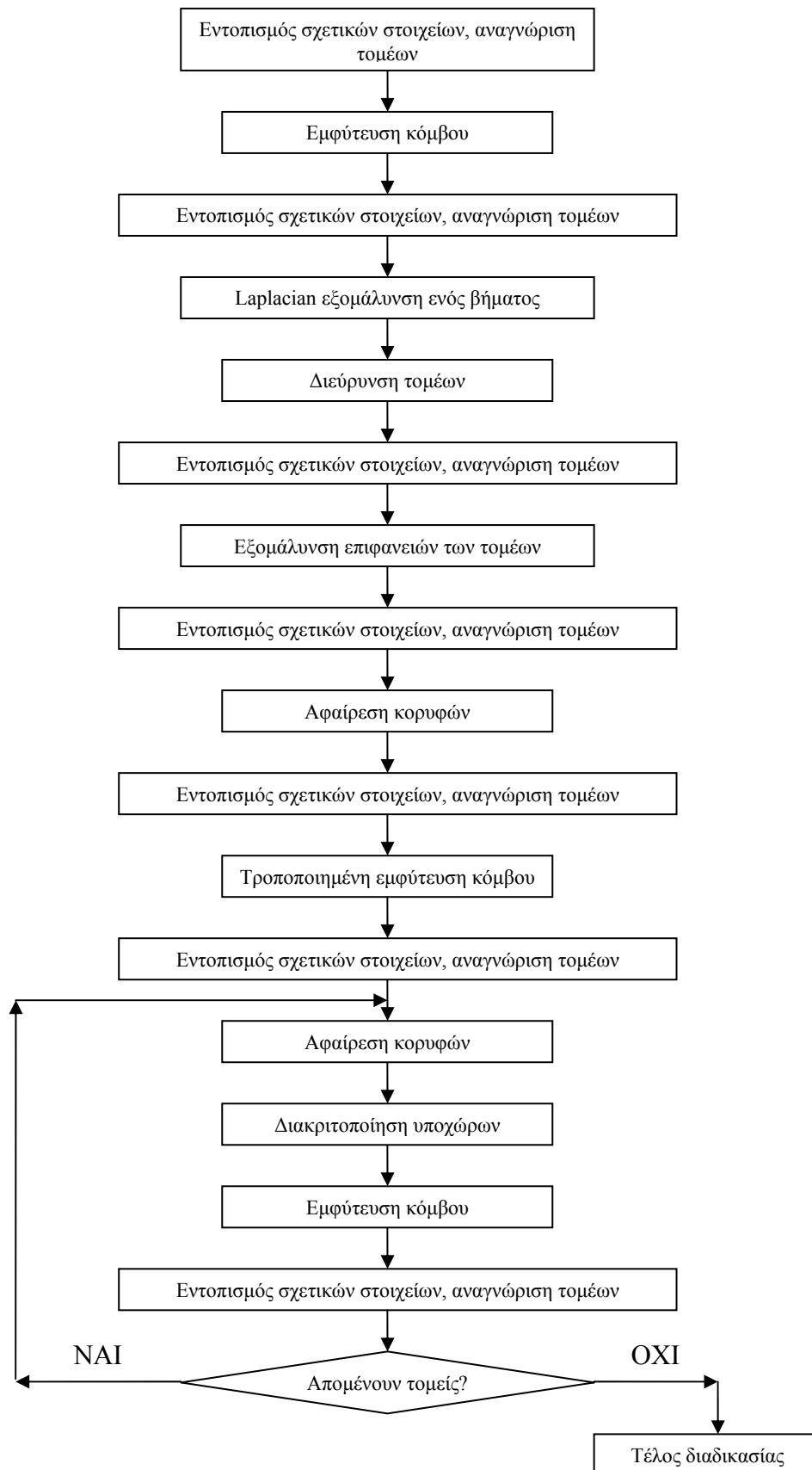
Α.1 Διάγραμμα ροής συνολικού αλγορίθμου



A.2 Διάγραμμα ροής βασικής επαναληπτικής διαδικασίας



A.3 Διάγραμμα ροής διαδικασίας αποκατάστασης



Βιβλιογραφία

Bentley J. L., Friedman J. H., Data structures for range searching, *Computing Surveys*, 11, No 4, 1979.

Blumenthal L. M., *Distance Geometry*, Chelsea, 1970.

Bonet J., *Finite element analysis of thin sheet superplastic forming process*, Ph.D. Thesis, Univesity of Wales, C/PhD/128/89, 1989.

Bonet J., Peraire J., An alternating digital tree (adt) algorithm for geometric searching and intersection problems, *Int. J. Num. Meth. Eng.* , 31, pp. 1-17, 1990.

Boris J., A vectorised algorithm for determining the nearest neighbours, *J. Comp. Phys.*, 66, pp. 1-20, 1986.

Chan C. T., Anastasiou K., An automatic tetrahedral mesh generation scheme by the advancing front method, *Com. Num. Meth. Eng.* , 13, pp. 33-46, 1997.

Choi W. Y., Kwak D. Y., Son I. H., Im Y. T., Tetrahedral mesh generation based on advancing front technique and optimization scheme, *Int. J. Num. Meth. Eng.* , 58, pp. 1857-1872, 2003.

George A. J., *Computer implementation of the finite element method*, Ph.D. Thesis, Stanford University, STAN-CS-71-208, 1971.

Golgolab A., *Mailleur 3D automatique pour des geometries complexes*, INRIA Research Report No 1004, March 1989.

Huet F., Generation de maillage automatique dans des configurations tridimensionnelles complexes. Utilisation d' une Methode de Front. *Applications of Mesh Generation to Complex 3D Configurations*, AGARD Conference Proceedings, No 464, pp 17.1-17.12, 1990.

Lo S. H., A new mesh generation scheme for arbitrary planar domains, *Int. J. Num. Meth. Eng.* , 21, pp. 1403-426, 1985.

Lo S. H., Volume discretization into tetrahedra – II. 3D triangulation by advancing front approach, *Comp. Struct.*, 39, No 5, pp. 501-511, 1991.

Lohner R., Parikh P., Generation of three-dimensional unstructured grids by the advancing-front method, AIAA Paper, AIAA-88-0515, 1988.

Peiro J., Peraire J., Morgan K., *FELISA system reference manual. Part I: basic theory*, Civil Eng. Dept. Report, CR/821/94, University of Wales, Swansea, U.K., 1994.

Peraire J., Vahdati M., Morgan K., Zienkiewicz O. C., Adaptive remeshing for compressible flow computations, *J. Comp. Phys.*, 72, pp. 449-466, 1987.

Peraire J., Peiro J., Formaggia L., Morgan K., Zienkiewicz O. C., Finite element Euler computations in three dimensions, *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 26, pp. 2135-2159, 1988.

Peraire J., Peiro J., Morgan K., Advancing Front Grid Generation, in J.F. Thompson, B.K. Soni, N.P. Weatherill (Eds.), *Handbook of Grid Generation*, CRC Pres, 1999.

Shamos M. I., Hoey D., Geometric intersection problems, *17th Annual Symposium on Foundations of Computer Science*, IEEE, 1976.

<http://www.andrew.cmu.edu/user/sowen/survey/index.html>