

# ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΓΕΝΕΣΗΣ ΚΑΙ ΔΙΑΔΟΣΗΣ ΜΑΚΡΩΝ ΚΥΜΑΤΙΣΜΩΝ



ΚΑΖΟΛΕΑ ΜΑΡΙΑ

ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ ΚΡΗΤΗΣ  
ΓΕΝΙΚΟ ΤΜΗΜΑ - ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Επιβλέπων: Α.Ι.ΔΕΛΗΣ

Χανιά 2006



# Περιεχόμενα

<b>1</b>	<b>Εισαγωγή</b>	<b>7</b>
<b>2</b>	<b>Μαθηματικό Μοντέλο</b>	<b>11</b>
2.1	Παραγωγή των εξισώσεων ρηχών υδάτων . . . . .	11
2.1.1	Διατήρηση μάζας . . . . .	12
2.1.2	Διατήρηση ορμής . . . . .	12
2.2	Πρόβλημα Riemann . . . . .	15
2.2.1	Κύματα αραιώσης . . . . .	16
2.3	Ασυνέχειες και η συνθήκη Rankine-Hugoniot . . . . .	19
2.3.1	Κύματα τύπου Shock . . . . .	20
2.3.2	Συνθήκες Εντροπίας . . . . .	22
2.4	Εμφάνιση Στεγανών . . . . .	23
2.4.1	Στεγανό από δεξιά . . . . .	25
2.4.2	Στεγανό από αριστερά . . . . .	26
2.5	Στάσιμες καταστάσεις . . . . .	26
2.6	Συμπεράσματα . . . . .	27
<b>3</b>	<b>Αριθμητικό σχήμα</b>	<b>29</b>
3.1	Συντηρητικές μέθοδοι πεπερασμένων όγκων . . . . .	29
3.2	Μέθοδοι τύπου Godunov . . . . .	31
3.2.1	Γραμμικά προβλήματα . . . . .	31
3.3	Ο προσεγγιστικός επιλυτής Riemann του Roe . . . . .	33
3.3.1	F-wave παρουσίαση της μεθόδου . . . . .	34
3.3.2	CFL συνθήκη . . . . .	35
3.3.3	Εντροπική διόρθωση (Entropy Fix) . . . . .	36
3.3.4	Πηγαίοι όροι . . . . .	37
3.3.5	C-ιδιότητα . . . . .	39
3.4	Αντιμετώπιση υγρών/στεγανών καταστάσεων . . . . .	41
3.4.1	Διόρθωση . . . . .	43
3.4.2	Πρόβλημα 1. Διατήρηση Μάζας . . . . .	43
3.4.3	Πρόβλημα 2. Shock πάνω σε ένα στέρεο τοίχο . . . . .	45
3.5	Αριθμητικά σχήματα υψηλότερης τάξης . . . . .	46
3.5.1	Μείωση της ολικής κύμανσης (TVD) . . . . .	46
3.5.2	Slope-Limiting . . . . .	47
3.5.3	Flux-Limiting . . . . .	48

3.5.4	TVD οριοθέτες . . . . .	51
3.6	Συνοριακές συνθήκες . . . . .	52
3.7	Σχήμα κεντρικών διαφορών . . . . .	53
<b>4</b>	<b>Αριθμητικά αποτελέσματα σε μια διάσταση</b>	<b>55</b>
4.1	Σύγκριση του TVD σχήματος του Roe με το σχήμα κεντρικών διαφορών του [26]	55
4.1.1	Πρόβλημα 1 . . . . .	55
4.1.2	Πρόβλημα 2 . . . . .	57
4.1.3	Πρόβλημα 3 . . . . .	58
4.2	Σύγκριση αριθμητικών αποτελεσμάτων με αναλυτικές λύσεις και πειραματικά δεδομένα . . . . .	61
4.2.1	Benchmark 1: Αναρρίχηση κύματος Tsunami σε κεκλιμένη παραλία . .	61
4.2.2	Αναρρίχηση μεμονομένων κυμάτων . . . . .	65
4.2.3	Κατάρρευση φράγματος και διάδοση με τριγωνικό εμπόδιο . . . . .	72
4.2.4	Benchmark 3: Γένεση και αναρρίχηση κύματος Tsunami λόγω κατολίσθησης . . . . .	76
4.2.5	Αναρρίχηση κύματος προερχόμενου από οριζόντια μετακίνηση τοίχου .	79
<b>5</b>	<b>Επέκταση στις δύο διαστάσεις</b>	<b>81</b>
5.1	Αριθμητικό σχήμα . . . . .	82
5.1.1	Η μέθοδος του Godunov στις 2 διαστάσεις . . . . .	83
5.1.2	Ο προσεγγιστικός επιλυτής Riemann του Roe σε δύο διαστάσεις . . .	84
5.1.3	Πηγαίοι όροι . . . . .	85
5.2	C-ιδιότητα . . . . .	86
5.3	Αντιμετώπιση εμφάνισης στεγανών . . . . .	87
5.3.1	Διόρθωση . . . . .	88
5.3.2	Πρόβλημα 1. Διατήρηση Μάζας . . . . .	89
5.3.3	Πρόβλημα 2. Shock πάνω σε ένα στέρεο τοίχο . . . . .	91
5.4	Αριθμητικά σχήματα υψηλότερης τάξης . . . . .	92
<b>6</b>	<b>Αριθμητικά αποτελέσματα σε 2 διαστάσεις</b>	<b>95</b>
6.1	Σύγκριση του TVD σχήματος του Roe με το σχήμα κεντρικών διαφορών του [26]	95
6.1.1	Πρόβλημα 1 . . . . .	95
6.1.2	Πρόβλημα 2 . . . . .	98
6.2	Κατάρρευση φράγματος σε κανάλι με τοπογραφία και τριβή . . . . .	101
6.3	Benchmark 2 : Αναρρίχηση κύματος Tsunami σε σύνθετη παραλία τριών διαστάσεων . . . . .	103
6.4	Benchmark 4 : Γένεση και αναρρίχηση κύματος Tsunami λόγω κατολίσθησης	109
<b>7</b>	<b>Συμπεράσματα</b>	<b>117</b>



## Ευχαριστίες

Αρχίζοντας την παρουσίαση της εργασίας αυτής θα ήθελα να ευχαριστήσω όλους εκείνους που με βοήθησαν με διάφορους τρόπους. Στον δάσκαλό μου Λέκτορα Α.Ι. Δελή ( Γενικό τμήμα - Πολυτεχνείο Κρήτης) ανήκει η πρώτη θέση. Χωρίς την καθοδήγηση και τα σχόλια του δεν θα υπήρχε αυτή η εργασία. Για αυτό καθώς και την γενικότερη συμπαράστασή του κατά την διάρκεια των μεταπτυχιακών σπουδών μου του οφείλω ένα μεγάλο ευχαριστώ.

Ανάλογες ευχαριστίες οφείλω και στον ερευνητή Ν. Καμπάνη (Ινστιτούτο Υπολογιστικών Μαθηματικών - Ίδρυμα Τεχνολογίας και Έρευνας) ο οποίος πρότεινε το θέμα αυτής της εργασίας.

Τις ευχαριστίες μου εκφράζω προς το Ινστιτούτο Υπολογιστικών Μαθηματικών του ΙΤΕ για την οικονομική υποστήριξη, καθώς και τη διάθεση των απαραίτητων υπολογιστικών μέσων για την πραγματοποίηση των αριθμητικών πειραμάτων της παρούσας εργασίας.

Τέλος ευχαριστώ την οικογένειά μου και όλους τους φίλους για την υποστήρηξή τους και ιδιαίτερα τους Γ. Αραμπατζή, Π. Βαβύλη και Σ. Βολάνη.



# Κεφάλαιο 1

## Εισαγωγή

Οι ροές νερού με ελεύθερη επιφάνεια κάτω από την επίδραση της βαρύτητας αποτελούν μια μεγάλη κλάση προβλημάτων επιστημονικού και πρακτικού ενδιαφέροντος. Φυσικά φαινόμενα όπως πλημμύρες, κατάρρευση φραγμάτων, διάδοση κυμάτων σε ποταμούς και παράκτιες περιοχές απασχολούν εδώ και αρκετά χρόνια την επιστημονική κοινότητα λόγω του μεγάλου πρακτικού ενδιαφέροντος που παρουσιάζουν. Κύριος στόχος αυτής της εργασίας είναι η δημιουργία υπολογιστικών μεθόδων οι οποίες θα προσομοιώνουν τα παραπάνω φαινόμενα. Το πρώτο βήμα για την δημιουργία τέτοιων μεθόδων είναι η εύρεση ενός κατάλληλου μαθηματικού μοντέλου το οποίο να περιγράφει το φυσικό φαινόμενο. Για φαινόμενα ροής ρευστών τα μαθηματικά μοντέλα αποτελούνται από συστήματα μερικών διαφορικών εξισώσεων με αρχικές και συνοριακές συνθήκες. Το επόμενο βήμα είναι η κατασκευή και επιλογή κατάλληλων αριθμητικών μεθόδων για την επίλυση αυτών.

Μέχρι στιγμής για την προσομοίωση φαινομένων, τα οποία ορισμένα από αυτά θα μας απασχολήσουν και στην παρούσα εργασία, όπως αναρρίχηση κύματος στην ακτή, πλημμύρα ακτών και θραύση κυματισμών, έχουν αναπτυχθεί και χρησιμοποιούνται ευρέως διάφοροι επιχειρησιακοί κώδικες. Μερικοί από αυτούς είναι: HEC-RAS [3] ο οποίος βασίζεται στις εξισώσεις St. Venant μίας διάστασης, TELEMAC-2D [2], [1] ο οποίος βασίζεται στις εξισώσεις ρηχών υδάτων δύο διαστάσεων και οι οποίες επιλύονται με πεπερασμένα στοιχεία και LISFLOOD-FP [1] όπου οι εξισώσεις ρηχών υδάτων δύο διαστάσεων επιλύονται με πεπερασμένες διαφορές. Σε ακαδημαϊκό επίπεδο οι αριθμητικές μέθοδοι που έχουν χρησιμοποιηθεί είναι μέθοδοι πεπερασμένων διαφορών, πεπερασμένων στοιχείων [47] και τα τελευταία χρόνια μέθοδοι πεπερασμένων όγκων.

Το πλήρες μαθηματικό μοντέλο που περιγράφει την ροή των ρευστών είναι οι εξισώσεις Navier-Stokes. Η δυσκολία όμως χρησιμοποίησής του έγκειται στην ύπαρξη του ελεύθερου συνόρου. Για να οδηγηθούμε σε ένα μοντέλο που είναι εύκολα επιλύσιμο αριθμητικά κάνουμε την παραδοχή ότι το βάθος του νερού είναι μικρό σε σχέση με την καμπυλότητα της ελεύθερης επιφάνειας. Έτσι οδηγούμαστε σε ένα σύστημα μη γραμμικών μερικών διαφορικών εξισώσεων υπερβολικού τύπου, τις εξισώσεις ρηχών υδάτων. Παρά τις απλοποιήσεις που γίνονται στην εξαγωγή των εξισώσεων ρηχών υδάτων, η αριθμητική επίλυσή τους παραμένει ένα ενδιαφέρον και δύσκολο πρόβλημα και αυτό γιατί λόγω της υπερβολικότητάς τους επιδέχονται ασυνεχείς λύσεις οι οποίες έχουν φυσικό νόημα και ονομάζονται κρουστικά κύματα (shock waves). Τα κρουστικά κύματα είναι ασυνεχείς της ροής και απαιτούν ιδιαίτερη μεταχείριση στην αριθμητική επίλυση. Για το λόγο αυτό για την αριθμητική επίλυση των εξισώσεων ρηχών υδάτων απαιτείται η χρήση

σχημάτων που αναπτύχθηκαν για την αριθμητική επίλυση των εξισώσεων της συμπίεσης ροής και ονομάζονται shock capturing schemes.

Η κατασκευή και χρήση μιας οποιασδήποτε αριθμητικής μεθόδου, όπως για παράδειγμα μια κλασσική μέθοδος πεπερασμένων διαφορών όπου οι παράγωγοι προσεγγίζονται με κεντρικές περασμένες διαφορές, θα υπολόγιζε λανθασμένη ταχύτητα και θέση του κύματος σε συγκεκριμένο χρόνο. Επίσης θα παρουσίαζε μη φυσικές αριθμητικές ταλαντώσεις στο κύμα τύπου shock. Πολλές προσπάθειες έγιναν για ένα αξιοσημείωτο χρονικό διάστημα για τον σωστό υπολογισμό των κυμάτων τύπου shock. Τώρα είναι πλέον γνωστό ότι για τον σωστό υπολογισμό τους πρέπει να χρησιμοποιηθεί μια συντηρητική αριθμητική μέθοδος, δηλαδή μια μέθοδος η οποία θα διατηρεί ποσότητες όπως η μάζα η ορμή και η ενέργεια. Όντως 40 χρόνια πριν οι Lax και Wendroff [27] απέδειξαν μαθηματικά ότι αν μια συντηρητική αριθμητική μέθοδος συγκλίνει τότε συγκλίνει στη σωστή λύση των εξισώσεων. Πιο πρόσφατα οι Hou και LeFloch [22] απέδειξαν ένα συμπληρωματικό θεώρημα σύμφωνα με το οποίο αν χρησιμοποιείται μια μη-συντηρητική αριθμητική μέθοδος, τότε θα υπολογιστεί λάθος λύση εάν αυτή περιέχει κρουστικό κύμα.

Τα σχήματα πεπερασμένων διαφορών είναι σύνηθες να χρησιμοποιούνται στη μία και δύο διαστάσεις στα μοντέλα αναρρίχησης μακρών κυματισμών. Ο Liu [31] μοντελοποίησε την διαδικασία της αναρρίχησης πλημμυρίζοντας και στεγνώνοντας τα γειτονικά κελιά όπου συμβαίνουν οι αλλαγές στη στάθμη του νερού. Οι Titov και Synolakis [43] επέκτειναν το μιας διάστασης μοντέλο τους, σε δύο διαστάσεις μέσω ενός χωριζομένου σχήματος και χρησιμοποιώντας τεχνικές τύπου Neumann για την εξαγωγή της ταχύτητας του κινούμενου συνόρου. Οι μέθοδοι πεπερασμένων στοιχείων είναι επίσης μια δημοφιλής προσέγγιση στη μοντελοποίηση ροών δύο διαστάσεων, λόγω του εύκαμπτου σχήματος διακριτοποίησης. Οι Gopalakrishnan, Tung [20] και Zelt [48] ανέπτυξαν μοντέλα αναρρίχησης μακρών κυματισμών βασισμένα σε Eulerian και Lagrangian σχήματα, αντίστοιχα.

Όταν έχουμε να αντιμετωπίσουμε ασυνέχειες ροής η διατήρηση όγκου είναι ένα σημαντικό θέμα για τα μη συντηρητικά μοντέλα για τις μη γραμμικές εξισώσεις ρηχών υδάτων. Η μέθοδος πεπερασμένων όγκων έχει το πλεονέκτημα ότι λύνει την ολοκληρωτική μορφή των μη γραμμικών εξισώσεων ρηχών υδάτων ως ένα πλήρες συντηρητικό σχήμα. Τα αριθμητικά σχήματα τύπου Godunov με έναν επιλυτή Riemann έχουν την ικανότητα να υπολογίζουν σωστά τις ασυνέχειες. Ο Dodd [17] μελέτησε προβλήματα γένεσης, αναρρίχησης και υπερπήδησης του κύματος, σε μια διάσταση, χρησιμοποιώντας ένα τύπου Roe επιλυτή Riemann και αναλύοντας το πρόβλημα του κινούμενου συνόρου θεωρώντας ένα ελάχιστο βάθος νερού στις στεγανές περιοχές. Ο Hu και άλλοι [23] παρουσίασαν ένα παρόμοιο μοντέλο με ένα τύπου Godunov, upwind σχήμα και τον Harten, Lax, και van Leer (HLL) προσεγγιστικό επιλυτή Riemann. Ο Bocchini και άλλοι [6] εφάρμοσαν την μέθοδο πεπερασμένων όγκων σε δύο διαστάσεις χρησιμοποιώντας την σταθμισμένη μέθοδο ροής για τον ακριβή επιλυτή Riemann. Οι Hubbard και Dodd [24] επέκτειναν την μέθοδο του Dodd [17] σε δύο διαστάσεις χρησιμοποιώντας έναν αλγόριθμο προσαρμοζόμενου πλέγματος ενώ οι Bradford και Sanders [5] δημιούργησαν ένα παρόμοιο μοντέλο αλλά χρησιμοποίησαν μια χαρακτηριστική μέθοδο για τον εντοπισμό του κινούμενου συνόρου.

Η αριθμητική μέθοδος που αναπτύσσεται και χρησιμοποιείται στην παρούσα εργασία είναι μια μέθοδος πεπερασμένων όγκων τύπου upwind, η οποία βασίζεται στην μέθοδο του Godunov [19], που είναι συντηρητική και υπολογίζει σωστά, τις ασυνέχειες στη λύση, ως προς την ταχύτητα και τη θέση. Οι upwind μέθοδοι χρησιμοποιούν την πληροφορία κατεύθυνσης της

διάδοσης του κύματος στην κατασκευή των αριθμητικών αλγορίθμων. Η δουλειά του Godunov γενικεύει την δουλειά που είχε γίνει νωρίτερα από τους Courant, Isaacson και Rees [14] οι οποίοι πρώτοι χρησιμοποίησαν την προσέγγιση αυτού του τύπου δημιουργώντας ένα πρώτης τάξης στο χώρο upwind σχήμα. Η μέθοδος του Godunov πετυχαίνει το upwind λύνοντας τοπικά, προβλήματα τύπου Riemann. Η μέθοδος υπολογίζει την ακριβή λύση του προβλήματος Riemann κάτι που την κάνει ιδιαίτερα δύσκολη. Στη συνέχεια δύο περαιτέρω εξελίξεις έκαναν την παραπάνω μέθοδο πιο ελκυστική: (α) η γενίκευση της μεθόδου από την πρώτη τάξη ακρίβειας στην δεύτερη από τον van Leer [45] και άλλους, και (β) η ανάπτυξη νέων προσεγγιστικών επιλυτών Riemann από τον Roe [40], από τους Osher και Solomon [37] και αργότερα από άλλους βλ. [45] για λεπτομέρειες. Η μέθοδος που χρησιμοποιείται στην παρούσα εργασία βασίζεται σε αυτή του Roe [40].

Με τη χρήση του μοντέλου ρηχών υδάτων βασικός στόχος μας είναι η μελέτη της γένεσης και διάδοσης μακρών κυματισμών και η αναρρίχσή τους σε ακτή. Η θεωρία των μακρών κυματισμών είναι μια προσεγγιστική θεωρία εφαρμόσιμη σε κύματα μικρού σχετικού βάθους (ο λόγος του βάθους του νερού ως προς το μήκος κύματος), για τα οποία η κάθετη συνιστώσα της επιτάχυνσης των σωματιδίων του νερού είναι ασήμαντη, συγκρινόμενη με την βαρυτική επιτάχυνση, και η καμπυλότητα της τροχιάς των σωματιδίων του νερού είναι μικρή. Συνεπώς, κάθετη κίνηση των σωματιδίων του νερού δεν έχει επίδραση στην κατανομή της πίεσης. Στην κατηγορία των μακρών κυματισμών ανήκουν και τα Tsunamis. Τα Tsunamis είναι κύματα τα οποία μπορούν να προκληθούν από υποθαλάσσιους σεισμούς, από κατολισθήσεις και γενικά μετακινήσεις της τοπογραφίας ή από υποθαλάσσια έκρηξη ηφαιστείου. Τα Tsunamis τα οποία διασχίζουν έναν ωκεανό και προσκρούουν σε παράκτια περιοχή μακριά από την περιοχή γένεσης του κυματισμού ονομάζονται μακρινά Tsunamis ενώ αυτά που περιορίζονται κοντά στην πηγή τους ονομάζονται τοπικά Tsunamis. Στον ωκεανό το μήκος κύματος ενός Tsunami είναι περίπου 100 – 400km με μέσο βάθος στον ωκεανό τα 4km. Για αυτό το λόγο η προσέγγιση των μακρών κυματισμών δικαιολογείται για την μελέτη αυτών των φαινομένων και η θεωρία των ρηχών υδάτων οδηγεί σε μια ταχύτητα διάδοσης τους  $c = \sqrt{gh}$  όπου  $h$  είναι το βάθος του νερού και  $g$  είναι η επιτάχυνση της βαρύτητας. Μια τυπική ταχύτητα διάδοσης είναι 700km/h. Πρέπει να αναφερθεί ότι το ύψος ενός τέτοιου κύματος στον βαθύ ωκεανό είναι περίπου 1m όταν όμως προσεγγίζουν την ακτή όπου το βάθος του νερού μειώνεται, το ύψος του κύματος αυξάνει δραματικά προκαλώντας έτσι καταστροφές κατά την πρόσκρουσή του στην ακτή. Ένας άλλος χαρακτηρισμός που θα μπορούσαμε να δώσουμε είναι ότι ένα Tsunami είναι ένας μεμονομένος μη θραβόμενος μακρής κυματισμός.

Ο όρος θραύση κύματος (wave breaking) χρησιμοποιείται για την περιγραφή της μετάβασης ενός ομαλού κύματος σε κατάσταση μετωπικής ασυνέχειας [38]. Η θραύση οφείλεται στην υπερβολικότητα των κυμάτων τα οποία γίνονται πολύ μεγάλα καθώς το βάθος του νερού μειώνεται και δημιουργείται αστάθεια καθώς η ταχύτητα στην κορυφή του κύματος γίνεται μεγαλύτερη από αυτήν στη βάση. Θραύση των κυμάτων στην ακτή δεν εμφανίζεται πάντα. Καίριο ρόλο παίζουν το πλάτος του κύματος σε σχέση με το βάθος του νερού και η κλίση της ακτής. Υπάρχει δηλαδή περίπτωση να έχουμε μόνο απλή αναρρίχηση του κυματισμού.

Η διαδικασία της αναρρίχησης σε μια κεκλιμένη παραλία είναι ένα πολύπλοκο φαινόμενο το οποίο περιλαμβάνει, την άνοδο του κύματος στην παραλία, την ανάκλαση του κύματος, την διαδικασία τραβήγματος του κύματος όπου το νερό γίνεται σταδιακά ρηχότερο και άλλες διαδικασίες οι οποίες δεν έχουν γίνει ακόμα πλήρως κατανοητές. Ένα σημαντικό κομμάτι στους υπολογισμούς των παραπάνω διαδικασιών αποτελεί ο υπολογισμός της θέσης της ακτογραμμής

και αυτό γιατί περιλαμβάνει ένα κινούμενο σύνορο ανάμεσα σε τρεις διαφορετικές φάσεις : υγρό, αέρα και στερεό. Στα περισσότερα αριθμητικά προβλήματα, που αφορούν υδροδυναμική ανοιχτής θάλασσας, το ρευστό καταλαμβάνει ένα σταθερό πεδίο. Στα προβλήματα αναρρίχησης αυτό δεν είναι σταθερό αλλά μεταβάλλεται με τον χρόνο κατά έναν άγνωστο τρόπο καθώς το κύμα αναρριχάται και στη συνέχεια μετατοπίζεται από την παραλία.

Η παρούσα εργασία έχει οργανωθεί ως εξής : Στο δεύτερο κεφάλαιο παρουσιάζεται μια θεωρητική προσέγγιση των εξισώσεων ρήχων υδάτων σε μια διάσταση. Στο τρίτο κεφάλαιο παρατίθεται το αριθμητικό σχήμα που χρησιμοποιείται καθώς και η διακριτοποίηση που εφαρμόζεται στους πηγαίους όρους. Στο τέταρτο κεφάλαιο παρουσιάζονται τα αποτελέσματα του σχήματος σε μια διάσταση για συγκεκριμένα προβλήματα που μελετάνε κυρίως την αναρρίχηση του κύματος στην ακτή. Σύγκριση με πειραματικά δεδομένα γίνεται όπου αυτό είναι εφικτό. Στο πέμπτο κεφάλαιο γίνεται επέκταση στις δύο διαστάσεις και παρουσιάζεται τόσο το αριθμητικό σχήμα όσο και η διακριτοποίηση για τον πηγαίο όρο και στο τελευταίο κεφάλαιο παρατίθενται αποτελέσματα προβλημάτων για τις δύο διαστάσεις τα οποία μελετάνε την αναρρίχηση του κύματος.

Αριθμητικά σχήματα του τύπου που περιγράφονται στην παρούσα εργασία δεν έχουν εφαρμοστεί για την λύση προβλημάτων αυτού του τύπου (από όσο γνωρίζουμε μέχρι τώρα) με εξαίρεση την εργασία των LeVeque-George [28] για λίγα Benchmark προβλήματα και των πολύ πρόσφατων εργασιών [39],[46],[12] στις οποίες μερικώς και σε μια διάσταση λύνονται παρόμοια προβλήματα. Βασικός μας στόχος είναι η εφαρμογή, βελτίωση και μελέτη της συμπεριφοράς της συγκεκριμένης μεθόδου σε μια αλλά και δύο διαστάσεις στα παραπάνω προβλήματα αλλά και για δευτέρου βαθμού σχήματα στο χώρο.

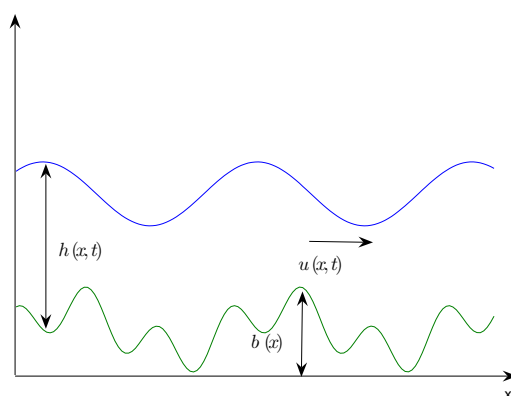
## Κεφάλαιο 2

### Μαθηματικό Μοντέλο

Οι εξισώσεις Navier-Stokes εφοδιασμένες με συνοριακές συνθήκες ελεύθερου συνόρου αποτελούν θεωρητικά το βασικό μαθηματικό μοντέλο για την περιγραφή και προσομοίωση πλημμυρικών κυμάτων. Το παραπάνω μαθηματικό μοντέλο είναι ιδιαίτερα πολύπλοκο και απαιτεί μια επίπονη και χρονοβόρα διαδικασία αριθμητικής επίλυσης. Στην εργασία αυτή θα χρησιμοποιηθούν, ως εναλλακτικό μαθηματικό μοντέλο, οι εξισώσεις των ρηχών υδάτων εφοδιασμένες με κατάλληλες αρχικές και συνοριακές συνθήκες. Είναι γνωστό ότι οι εξισώσεις των ρηχών υδάτων καταλήγουν σε ένα αποτελεσματικό αριθμητικό μοντέλο διατηρώντας παράλληλα την ποσοτική/ποιοτική αξιοπιστία στην περιγραφή της διάδοσης.

#### 2.1 Παραγωγή των εξισώσεων ρηχών υδάτων

Οι εξισώσεις ρηχών υδάτων αποτελούν ένα σύστημα μη γραμμικών υπερβολικών μερικών διαφορικών εξισώσεων που περιγράφουν τη μεταβολή στο χρόνο του βάθους του ρευστού και της οριζόντιας ορμής της ροής (σε μέσες τιμές). Παράγονται από τους νόμους διατήρησης της μάζας και της ορμής. Για να εξάγουμε τις εξισώσεις στην μία διάσταση θεωρούμε το ρευστό σε ένα κανάλι μοναδιαίου πλάτους και υποθέτουμε ότι η κατακόρυφη ταχύτητα του ρευστού είναι ασήμαντη και η οριζόντια ταχύτητα  $u(x, t)$  είναι σταθερή σε κάθε διατομή του καναλίου (Σχ. 2.1.1).



Σχήμα 2.1.1 Ροή με ελεύθερο σύνορο υπό την επίδραση της βαρύτητας.

### 2.1.1 Διατήρηση μάζας

Θεωρούμε ότι το ρευστό είναι ασυμπίεστο, δηλαδή η πυκνότητά του,  $\rho$ , είναι σταθερή. Αντίθετα επιτρέπουμε το βάθος του νερού  $h$  να αυξομειώνεται και είναι μια άγνωστη ποσότητα που θέλουμε να καθορίσουμε. Στην περιοχή  $[x_1, x_2]$  μπορούμε να καθορίσουμε ότι,

ρυθμός μεταβολής μάζας = καθαρό ποσό όγκου ροής που διέρχεται από την περιοχή  $x_1, x_2$ .

Η συνολική μάζα ανάμεσα σε δύο σημεία  $x_1, x_2$  του σχήματος (2.1.1) είναι :

$$\int_{x_1}^{x_2} \rho h(x, t) dx.$$

Άρα ο ρυθμός μεταβολής της μάζας στο χρόνο  $t$  δίνεται ως

$$\frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} \rho h(x, t) dx.$$

Ο όγκος της ροής (mass flux) βρίσκεται ολοκληρώνοντας την πυκνότητα της ορμής κατακόρυφα, δηλαδή

$$\int_B^{h+b} \rho u(x, t) dy = \rho u(x, t) \int_b^{h+b} dy = \rho u(x, t) h(x, t).$$

Συνεπώς, ο συνολικός όγκος ροής που διέρχεται από την περιοχή  $x_1$  είναι  $(\rho u h)|_{x_1}$  και από την περιοχή  $x_2$  είναι  $(\rho u h)|_{x_2}$ . Επομένως η ολοκληρωτική μορφή του νόμου διατήρησης της μάζας θα είναι

$$\frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} h(x, t) dx = (uh)|_{x_1} - (uh)|_{x_2}. \quad (2.1)$$

Ολοκληρώνοντας την παραπάνω σχέση ως προς το χρόνο  $t$ , στο χρονικό διάστημα  $[t, t + \Delta t]$  και θεωρώντας ότι οι συναρτήσεις  $h(x, t)$  και  $u(x, t)$  είναι παραγωγίσιμες βρίσκουμε

$$\int_t^{t+\Delta t} \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial (uh)}{\partial x} dx dt = 0,$$

οπότε η διαφορική μορφή της διατήρησης της μάζας είναι

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial (uh)}{\partial x} = 0. \quad (2.2)$$

### 2.1.2 Διατήρηση ορμής

Ουσιαστικά η διατήρηση της ορμής προκύπτει από τον δεύτερο νόμο του Newton, δηλαδή στην περιοχή  $[x_1, x_2]$  πρέπει να ισχύει ότι

ρυθμός μεταβολής ορμής = εφορμόσιμη δύναμη,



στην κατεύθυνση  $x$  (εφόσον αναφερόμαστε στη μια διάσταση). Ο ρυθμός μεταβολής της ορμής είναι η ολική παράγωγος της ταχύτητας δηλαδή :

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} \int_{x_1}^{x_2} \int_h^{h+b} \rho u dy dx = \\ \frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} \int_h^{h+b} \rho u dy dx + \int_{x_1}^{x_2} \int_h^{h+B} \rho \frac{\partial u^2}{\partial x} dy dx = \\ \frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} \rho h u dx + (\rho h u^2)|_{x_2} - (\rho h u^2)|_{x_1}. \end{aligned}$$

Επίσης η δύναμη που εφαρμόζεται στην κατεύθυνση  $x$  είναι το άθροισμα της δύναμης που αναπτύσσεται λόγω της πίεσης που εφαρμόζεται από τα άκρα και της δύναμης της πίεσης από τον πυθμένα.

Η δύναμη της πίεσης από τα άκρα είναι:

$$g \left[ \int_b^{h+b} \rho (y - h - b) dy \right]_{x_1}^{x_2} = \left[ -\frac{1}{2} g \rho h^2 \right]_{x_1}^{x_2},$$

η δύναμη της πίεσης από τον πυθμένα είναι :

$$-g \int_{x_1}^{x_2} \rho h \frac{db}{dx} dx,$$

άρα η συνολική δύναμη που εφαρμόζεται στην κατεύθυνση του  $x$  είναι:

$$\left[ -\frac{1}{2} g \rho h^2 \right]_{x_1}^{x_2} - g \int_{x_1}^{x_2} \rho h \frac{db}{dx} dx,$$

όπου  $g$  είναι η επιτάχυνση της βαρύτητας. Συνεπώς, η ολοκληρωτική μορφή διατήρησης της ορμής έχει την μορφή:

$$\frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} h u dx + (h u^2)_{x_2} - (h u^2)_{x_1} = \left[ -\frac{1}{2} g h^2 \right]_{x_1}^{x_2} - g \int_{x_1}^{x_2} h \frac{db}{dx} dx. \quad (2.3)$$

Υποθέτοντας όπως προηγούμενα ότι οι μεταβλητές  $h(x, t)$  και  $u(x, t)$  είναι παραγωγίσιμες και ακολουθώντας την ίδια διαδικασία που εφαρμόστηκε για την διατήρηση της μάζας παίρνουμε την διαφορική μορφή της διατήρησης της ορμής,

$$\frac{\partial(hu)}{\partial t} + \frac{\partial(hu^2 + \frac{1}{2}gh^2)}{\partial x} = -ghb_x. \quad (2.4)$$

Συνολικά μπορούμε να γράψουμε

$$\frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} \mathbf{q}(x, t) dx + \mathbf{f}(\mathbf{q}(x_2, t)) - \mathbf{f}(\mathbf{q}(x_1, t)) = \int_{x_1}^{x_2} \mathbf{R} dx \quad (2.5)$$

για την ολοκληρωτική μορφή και

$$\mathbf{q}_t + \mathbf{f}(\mathbf{q})_x = \mathbf{R} \quad (2.6)$$

για την διαφορική, όπου

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} h \\ hu \end{bmatrix}, \mathbf{f} = \begin{bmatrix} hu \\ hu^2 + \frac{1}{2}gh^2 \end{bmatrix}, \mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0 \\ -ghb_x \end{bmatrix}.$$

Στην περίπτωση της ύπαρξης τριβής ο πηγαίος όρος διαφοροποιείται και παίρνει την μορφή

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0 \\ -ghb_x - ghS_f \end{bmatrix},$$

όπου  $S_f$  αναπαριστά την δύναμη της τριβής και μπορεί να υπολογιστεί χρησιμοποιώντας την σχέση

$$S_f = n_m^2 \frac{u|u|}{h^{4/3}},$$

όπου  $n_m$  είναι ο συντελεστής του Manning και λαμβάνει συνήθως εμπειρικές τιμές της τάξης  $10^{-2}$ . Ο όρος τριβής είναι άκαμπτος όρος.

Ένα βασικό χαρακτηριστικό των μη γραμμικών νόμων διατήρησης είναι ότι ακόμα και στην περίπτωση που τα αρχικά δεδομένα είναι ομαλά, ασυνέχειες μπορεί να εμφανιστούν στη λύση, σε κάποια χρονική στιγμή. Άρα για την επίλυση τους πρέπει να ληφθεί υπόψη ότι για να εξάγουμε την διαφορική μορφή τους υποθέσαμε παραγωγισιμότητα των ποσοτήτων  $u$ ,  $h$ . Συνεπώς, η διαφορική μορφή (2.6) δεν ισχύει για λύσεις οι οποίες περιέχουν ασυνέχειες, παρόλο που ισχύει για τις περιοχές όπου η λύση είναι ομαλή. Η ολοκληρωτική μορφή όμως ισχύει ακόμα και εάν η  $\mathbf{q}$  είναι ασυνεχής. Μια λύση η οποία ικανοποιεί τον ολοκληρωτικό νόμο διατήρησης είναι μια ασθενής λύση του νόμου διατήρησης (2.6).

**Ορισμός 2.1.1** Η συνάρτηση  $q(x, t)$  ονομάζεται ασθενής λύση του νόμου διατήρησης (2.6) με δοσμένα αρχικά δεδομένα  $q(x, 0)$  εάν για όλες τις συναρτήσεις  $\phi \in C_0^1$  ισχύει ότι

$$\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty [q\phi_t + f(q)\phi_x] dx dt = - \int_0^\infty q(x, 0)\phi(x, 0) dx,$$

όπου  $C_0^1$  είναι το σύνολο των συναρτήσεων που είναι συνεχώς παραγωγίσιμες και έχουν συμπαγή φορέα [30].

Το σύστημα των μερικών διαφορικών εξισώσεων είναι υπερβολικό εφόσον ο Ιακωβιανός πίνακας του συστήματος  $\mathbf{f}'(\mathbf{q})$  είναι διαγωνιοποιήσιμος με πραγματικές ιδιοτιμές. Για τις εξισώσεις ρηχών υδάτων ο Ιακωβιανός πίνακας είναι

$$\mathbf{f}'(\mathbf{q}) = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{q}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -u^2 + gh & 2u \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

και έχει ιδιοτιμές  $\lambda_1 = u - c$ ,  $\lambda_2 = u + c$  οι οποίες είναι πραγματικές, με  $c = \sqrt{gh}$  να είναι η σχετική ταχύτητα κύματος - ρευστού. Τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα είναι

$$\mathbf{r}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ u - c \end{bmatrix}, \quad \mathbf{r}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ u + c \end{bmatrix}. \quad (2.8)$$

Άρα το σύστημα των (2.2) (2.4) είναι υπερβολικό. Στην περίπτωση όμως της εμφάνισης στεγανού, η οποία μελετάται στην παράγραφο 2.4 η μια από τις δύο ιδιοτιμές (ανάλογα την

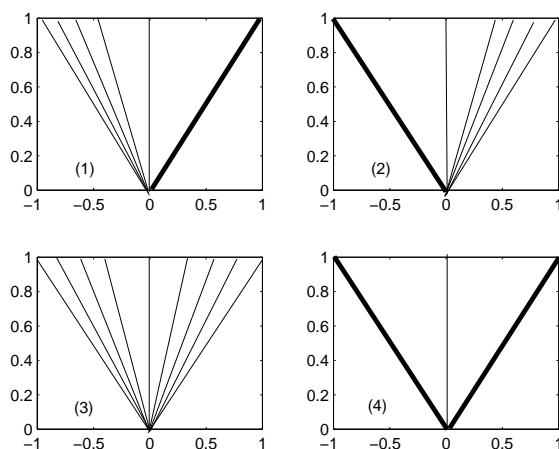
πλευρά στην οποία εμφανίζεται το στεγανό) μηδενίζεται. Ως αποτέλεσμα αυτού είναι το σύστημα να χάνει την υπερβολικότητά του.

Παρατηρούμε ότι οι ιδιοτιμές  $\lambda_1, \lambda_2$  μπορούν να λάβουν οποιοδήποτε πρόσημο, εξαρτώμενες από την ταχύτητα  $u$  σε σχέση με το  $c$ . Στην θεωρία ρηχών υδάτων ο αριθμός

$$Fr = \frac{|u|}{c}$$

ονομάζεται **αριθμός του Froude**. Όταν  $Fr > 1$  η ροή ονομάζεται υπερκρίσιμη ενώ όταν  $Fr < 1$  ονομάζεται υποκρίσιμη. Στην περίπτωση όπου η ροή είναι υποκρίσιμη,  $Fr < 1 \Rightarrow |u| < c$ , γνωρίζουμε ότι η ποσότητα  $c$  περιέχει την βαρυτική δύναμη και στην προκειμένη περίπτωση οι δυνάμεις βαρύτητας υπερσχύουν των δυνάμεων αδράνειας. Παρατηρώντας τις ιδιοτιμές  $\lambda_1 = u - c, \lambda_2 = u + c$  βλέπουμε ότι  $\lambda_1 < 0$  ενώ η δεύτερη ιδιοτιμή μπορεί να λάβει οποιοδήποτε πρόσημο. Άρα η φυσική πληροφορία διαδίδεται και προς τις δύο κατευθύνσεις. Στην υπερκρίσιμη ροή  $Fr > 1 \Rightarrow |u| > c$ , οι δυνάμεις αδράνειας υπερσχύουν αυτών της βαρύτητας, ενώ οι ιδιοτιμές έχουν πάντα το ίδιο πρόσημο, άρα η φυσική πληροφορία ροής διαδίδεται προς μια κατεύθυνση.

## 2.2 Πρόβλημα Riemann



Σχήμα 2.2.1. Όλες οι δυνατές λύσεις στο πρόβλημα Riemann για τις εξισώσεις ρηχών υδάτων μιας διάστασης. (α) κύμα αραιώσης - shock, (β) shock - κύμα αραιώσης, (γ) κύμα αραιώσης - κύμα αραιώσης, (δ) shock - shock

Το βασικό πρόβλημα που χρησιμοποιείται στην κατασκευή αριθμητικών μεθόδων για συστήματα υπερβολικού τύπου είναι το πρόβλημα Riemann το οποίο προκύπτει θεωρώντας τον ομογενή νόμο διατήρησης με συγκεκριμένες αρχικές συνθήκες,

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_t + \mathbf{f}(\mathbf{q})_x &= 0, \\ \mathbf{q}(x, 0) &= \begin{cases} \mathbf{q}_l & \alpha\nu x < 0 \\ \mathbf{q}_r & \alpha\nu x > 0 \end{cases}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Εδώ θεωρούμε τον νόμο διατήρησης μιας διάστασης (2.6) χωρίς πηγαίο όρο, με αρχικές συνθήκες

$$\mathbf{q}_l = \begin{bmatrix} h_l \\ h_l u_l \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q}_r = \begin{bmatrix} h_r \\ h_r u_r \end{bmatrix}.$$

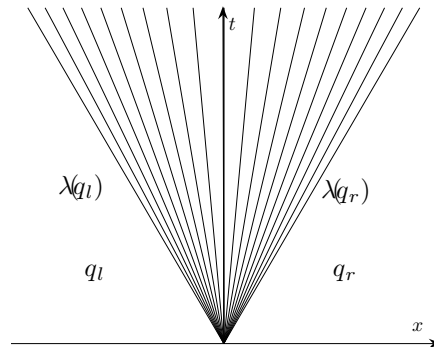
Υπάρχουν τέσσερις δυνατές λύσεις που μπορούν να προκύψουν κατά την επίλυση του προβλήματος Riemann, [30], [45]. Κάθε περίπτωση αποτελείται από δύο κύματα

- (1) κύμα αραιώσης - shock (κρουστικό κύμα),
- (2) shock - κύμα αραιώσης,
- (3) κύμα αραιώσης - κύμα αραιώσης,
- (4) shock - shock.

Η λύση ενός υπερβολικού συστήματος  $m$  εξισώσεων αποτελείται από  $m$  κύματα τα οποία κινούνται με διαφορετικές ταχύτητες και παρατηρούμε επαλληλία αυτών. Στην μη γραμμική περίπτωση τα κύματα αλληλεπιδρούν μεταξύ τους και επίσης παραμορφώνονται ξεχωριστά, οδηγώντας έτσι σε προβλήματα τα οποία είναι πολύ δύσκολο ή δεν μπορούν να λυθούν αναλυτικά. Για τις εξισώσεις ρηχών υδάτων σε μια διάσταση, η λύση του προβλήματος Riemann αποτελείται από δύο κύματα (οποιοδήποτε συνδυασμό κύματων αραιώσης και κυμάτων τύπου shock) (σχ. 2.2.1). Τα κύματα αυτά διαδίδονται με ταχύτητα  $\lambda_1$  για το αριστερό και  $\lambda_2$  για το δεξί τα οποία ονομάζονται 1-κύμα και 2-κύμα αντίστοιχα. Λύνοντας το παραπάνω πρόβλημα προκύπτουν δύο οικογένειες καμπυλών πάνω στις οποίες η λύση απλοποιείται και ισχύει ότι  $dx/dt = \lambda_1$  για την πρώτη οικογένεια και  $dx/dt = \lambda_2$  για την δεύτερη οικογένεια των χαρακτηριστικών καμπυλών [30]. Παρακάτω μελετάμε τις περιπτώσεις όπου η λύση του προβλήματος Riemann είναι ένα κύμα αραιώσης ή ένα κύμα τύπου shock. Στη συνέχεια θα κάνουμε μια σύντομη ανάλυση φαινομένων που θα μας είναι χρήσιμα για την κατανόηση των πιθανών μορφών της λύσης και θα εξάγουμε συνθήκες που πρέπει να ικανοποιούνται.

### 2.2.1 Κύματα αραιώσης

Εδώ μελετάμε την περίπτωση όπου δύο καταστάσεις συνδέονται μέσω μίας ομαλής μετάβασης η οποία ονομάζεται κύμα αραιώσης. Γενικά ένα κύμα αραιώσης έχει την μορφή που απεικονίζει το σχήμα (2.2.2), με  $\lambda(q_l) = u_l - c_l$  και  $\lambda(q_r) = u_r - c_r$ .



Σχήμα 2.2.2. Κύμα αραιώσης.

Είναι ένα ομαλό κύμα όπου όλες οι ποσότητες ροής μεταβάλλονται συνεχώς κατά μήκος αυτού. Οι χαρακτηριστικές οι οποίες βρίσκονται στα σύνορα του κύματος ονομάζονται κεφαλή και ουρά του κύματος αραιώσης και ισχύει ότι

$$\frac{dx}{dt} = u_l - c_l$$

και

$$\frac{dx}{dt} = u_r - c_r$$

για την κεφαλή και την ουρά αντίστοιχα.

Πάντα η λύση ενός προβλήματος Riemann παραμένει σταθερή πάνω στις ευθείες της μορφής

$$x = \epsilon t, \quad \epsilon \in \mathbb{R}.$$

Άρα ένα κύμα αραιώσης το οποίο ενώνει τις καταστάσεις  $\mathbf{q}_l, \mathbf{q}_r$  έχει επίσης την ίδια ιδιότητα. Άρα η λύση έχει την μορφή :

$$\mathbf{q}(x, t) = \begin{cases} \mathbf{q}_l & x \leq \epsilon_1 t \\ \mathbf{W}(x/t) & \epsilon_1 t < x < \epsilon_2 t, \\ \mathbf{q}_r & x \geq \epsilon_2 t \end{cases}$$

όπου  $\mathbf{W}$  ομαλή συνάρτηση με  $\mathbf{W}(\epsilon_1) = \mathbf{q}_l$  και  $\mathbf{W}(\epsilon_2) = \mathbf{q}_r$ , δηλαδή ένα κύμα αραιώσης είναι μια συνεχής λύση. Παραγωγίζοντας την  $\mathbf{q}(x, t) = \mathbf{W}(x/t)$  στο χώρο και στο χρόνο λαμβάνουμε

$$\mathbf{q}_x(x, t) = \frac{1}{t} \mathbf{W}'(x/t), \quad (2.10)$$

$$\mathbf{q}_t(x, t) = -\frac{x}{t^2} \mathbf{W}'(x/t). \quad (2.11)$$

Ακόμα κάθε υπερβολική εξίσωση μπορεί να γραφεί στη μορφή  $\mathbf{q}_t + \mathbf{f}'(\mathbf{q})\mathbf{q}_x = 0$  όπου  $\mathbf{f}'(\mathbf{q})$  ο Ιακωβιανός πίνακας, και αντικαθιστώντας τις σχέσεις (2.10) (2.11) προκύπτει ότι

$$\mathbf{f}'(\mathbf{W}(\epsilon))\mathbf{W}'(\epsilon) = \epsilon \mathbf{W}'(\epsilon). \quad (2.12)$$

Από την παραπάνω σχέση παρατηρούμε ότι η συνάρτηση  $\mathbf{W}'$  είναι ανάλογη με ένα ιδιοδιάνυσμα του Ιακωβιανού πίνακα και  $\epsilon$  η αντίστοιχη ιδιοτιμή, δηλαδή

$$\mathbf{W}'(\epsilon) = \alpha(\epsilon) \mathbf{r}_p(\mathbf{W}(\epsilon)), \quad (2.13)$$

$$\epsilon = \lambda_p(\mathbf{W}(\epsilon)), \quad (2.14)$$

όπου  $p = 1, 2$  για τις εξισώσεις ρηχών υδάτων. Επίσης απαιτείται μονότονη αύξηση της μεταβλητής  $\epsilon = x/t$  καθώς η συνάρτηση  $\mathbf{W}(\epsilon)$  μεταβάλλεται από την τιμή  $\mathbf{q}_l$  στην τιμή  $\mathbf{q}_r$ , αλλά μονοτονία της  $\epsilon$  από την (2.14) σημαίνει μονοτονία της ιδιοτιμής  $\lambda_p(\mathbf{W})$ , άρα

$$\lambda_p(\mathbf{q}_l) < \lambda_p(\mathbf{q}_r). \quad (2.15)$$

Αρχικά θα πρέπει να καθορίσουμε την συνάρτηση  $\mathbf{W}(\epsilon)$ . Παραγωγίζοντας την (2.14) ως προς  $\epsilon$  λαμβάνουμε

$$1 = \nabla \lambda_p(\mathbf{W}(\epsilon)) \cdot \mathbf{W}'(\epsilon)$$

και με αντικατάσταση στην (2.13)

$$\alpha(\epsilon) = \frac{1}{\nabla \lambda_p(\mathbf{W}(\epsilon)) \cdot r_p(\mathbf{W}(\epsilon))}.$$

Άρα προκύπτει

$$\mathbf{W}'(\epsilon) = \frac{r_p(\mathbf{W}(\epsilon))}{\nabla \lambda_p(\mathbf{W}(\epsilon)) \cdot r_p(\mathbf{W}(\epsilon))}, \quad \epsilon_1 \leq \epsilon \leq \epsilon_2 \quad (2.16)$$

η παραπάνω σχέση όμως είναι ένα σύστημα συνήθων διαφορικών εξισώσεων με αρχικές συνθήκες

$$\mathbf{W}(\epsilon_1) = \mathbf{q}_l \quad \mu\epsilon \quad \epsilon_1 = \lambda_p(\mathbf{q}_l), \quad \epsilon_2 = \lambda_p(\mathbf{q}_r).$$

Εφόσον έχουμε θεωρήσει το  $\mathbf{q}_l$  ως αρχική συνθήκη πρέπει να βρούμε τις καταστάσεις που μπορούν να συνδεθούν με το  $\mathbf{q}_l$  με ένα κύμα αραίωσης.

Λύνοντας το σύστημα (2.13) για την πρώτη ιδιοτιμή

$$\lambda_1(\mathbf{W}) = u - \sqrt{gh}, \quad r_1(\mathbf{W}) = (1, \lambda_1)^T$$

λαμβάνουμε

$$\begin{aligned} \sqrt{gh} &= \frac{1}{3} \left( 2\sqrt{gh_l} + u_l - \frac{x}{t} \right), \\ u &= \frac{1}{3} \left( 2\sqrt{gh_l} + u_l + 2\frac{x}{t} \right). \end{aligned}$$

Άρα μπορούμε να γράψουμε για το 1-κύμα αραίωσης

$$u - u_l = 2(\sqrt{gh_l} - \sqrt{gh}). \quad (2.17)$$

Είδαμε ότι για να υπάρχει ένα κύμα αραίωσης πρέπει να ικανοποιείται η σχέση (2.15). Εάν το  $\mathbf{q}_l$  συνδέεται με το  $\mathbf{q}_r$  με ένα 1-κύμα αραίωσης τότε πρέπει να ισχύει ότι

$$u_l - \sqrt{gh_l} < u_r - \sqrt{gh_r}.$$

Θέτοντας  $u = u_r$  και  $h = h_r$  στην (2.17), και με αντικατάσταση στην παραπάνω προκύπτει ότι

$$h_r < h_l \quad (2.18)$$

και επίσης βρίσκουμε από την (2.17) την δεύτερη συνθήκη που πρέπει να ικανοποιεί η  $\mathbf{q}_r$

$$u_r > u_l. \quad (2.19)$$

Εφαρμόζοντας την ίδια διαδικασία για την δεύτερη ιδιοτιμή λαμβάνουμε το 2-κύμα αραίωσης που συνδέει τις αρχικές καταστάσεις.

$$\begin{aligned}\sqrt{gh} &= \frac{1}{3}\left(2\sqrt{gh_l} - u_l + \frac{x}{t}\right), \\ u &= \frac{1}{3}\left(-2\sqrt{gh_l} + u_l + 2\frac{x}{t}\right).\end{aligned}$$

Αντίστοιχα μπορούμε να γράψουμε

$$u - u_l = -2(\sqrt{gh_l} - \sqrt{gh}) \quad (2.20)$$

και πρέπει να ισχύει ότι

$$h_r > h_l, \quad (2.21)$$

$$u_r > u_l. \quad (2.22)$$

Παρατηρούμε ότι εάν οι καταστάσεις  $\mathbf{q}_l$ ,  $\mathbf{q}_r$  συνδέονται με ένα κύμα αραίωσης, ισχύει πάντα  $u_r > u_l$ . Όταν όμως ισχύει ότι  $u_r < u_l$  τότε συνδέονται με ένα κύμα τύπου shock .

Η σχέση (2.17) ουσιαστικά περιγράφει μια καμπύλη. Παρατηρούμε ότι μπορεί να γραφεί ως

$$u + 2\sqrt{gh} = u_l + 2\sqrt{gh_l}$$

Άρα αν θέσουμε  $w^1(\mathbf{q}) = u + 2\sqrt{gh}$  βλέπουμε ότι η συνάρτηση έχει την ίδια τιμή πάνω σε όλα τα σημεία της καμπύλης. Η  $w^1(\mathbf{q})$  ονομάζεται **Riemann αναλλοίωτη** της πρώτης οικογένειας ή αλλιώς 1-Riemann αναλλοίωτη και έχει την ιδιότητα να παραμένει σταθερή κατά μήκος του κύματος. Για την δεύτερη ιδιοτιμή έχουμε αντίστοιχα  $w^2(\mathbf{q}) = u - 2\sqrt{gh}$  την 2-Riemann αναλλοίωτη.

Γενικά μπορούμε να πούμε ότι μια  $p$ -Riemann αναλλοίωτη είναι μία ομαλή συνάρτηση  $w : R^N \rightarrow R$  η οποία ικανοποιεί

$$\langle r_p(\mathbf{q}), \nabla w(\mathbf{q}) \rangle = 0 \quad \forall \mathbf{q} \in R^N.$$

## 2.3 Ασυνέχειες και η συνθήκη Rankine-Hugoniot

Στην προηγούμενη ενότητα αναφέρθηκε ότι η ολοκληρωτική μορφή των νόμων διατήρησης (2.5) επιδέ-

χεται ασυνέχειες στη λύση ή αλλιώς shocks. Για να εξάγουμε την διαφορική μορφή τους υποθέσαμε ομαλότητα της λύσης. Εφόσον οι μερικές διαφορικές εξισώσεις περιέχουν παραγώγους οι οποίες δεν ορίζονται σε μια ασυνέχεια, θα πρέπει η λύση κατά μήκος μίας ασυνέχειας να ικανοποιεί την πιο θεμελιώδη μορφή του νόμου διατήρησης, την ολοκληρωτική. Έστω μια ασυνέχεια η οποία διαδίδεται με ταχύτητα  $s$  και κινείται όπως στο σχήμα (2.3.1) όπου έχουμε εστιάσει σε μια μικρή περιοχή γύρω από την ασυνέχεια  $[x_1, x_1 + \Delta x]$  και σε ένα μικρό χρονικό διάστημα  $[t_1, t_1 + \Delta t]$  όπου η ταχύτητα διάδοσης της ασυνέχειας είναι ουσιαστικά σταθερή. Η

περιοχή  $[x_1, x_1 + \Delta x] \times [t_1, t_1 + \Delta t]$  χωρίζεται από το shock σε δύο περιοχές όπου σε κάθε μια η λύση  $q$  είναι σταθερή με τιμές  $q_l, q_r$ . Έφαρμόζοντας την (2.5) έχουμε :

$$\int_{x_1}^{x_1+\Delta x} q(x, t_1 + \Delta t) dx - \int_{x_1}^{x_1+\Delta x} q(x, t_1) dx = \int_{t_1}^{t_1+\Delta t} f(q(x_1, t)) dt - \int_{t_1}^{t_1+\Delta t} f(q(x_1 + \Delta x, t)) dt$$

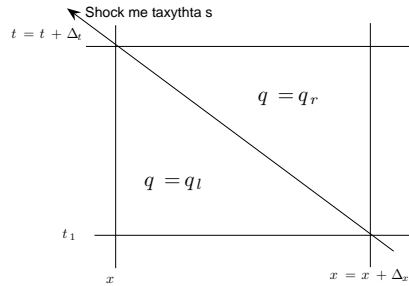
και εφόσον η  $q$  είναι ουσιαστικά σταθερή κατά μήκος κάθε ακμής η παραπάνω εξίσωση παίρνει την μορφή

$$\Delta x q_r - \Delta x q_l = \Delta t f(q_l) - \Delta t f(q_r) + O(\Delta t^2) \quad (2.23)$$

Αν η ταχύτητα του shock είναι  $s$ , τότε  $\Delta x = -s\Delta t$  για  $(s < 0)$ . Χρησιμοποιώντας αυτή τη σχέση διαιρώντας με  $-\Delta t$  και παίρνοντας  $\Delta t \rightarrow 0$  λαμβάνουμε τη συνθήκη

$$s(q_r - q_l) = f(q_r) - f(q_l) \quad (2.24)$$

η οποία καλείται συνθήκη Rankine - Hugoniot. Η λύση η οποία ικανοποιεί την ολοκληρωτική μορφή, άρα και την διαφορική όταν είναι ομαλή και ικανοποιεί την συνθήκη Rankine-Hugoniot κατά μήκος της ασυνέχειας ονομάζεται αθηνής λύση του νόμου διατήρησης όπως ορίστηκε και στο κεφάλαιο 2.1. Επιτρέποντας ασυνεχείς λύσεις οι οι οποίες ικανοποιούν την (2.5), η μοναδικότητα της λύσης δεν εξασφαλίζεται πάντα και συχνά άλλες συνθήκες πρέπει να προστεθούν. Αυτές βασίζονται κυρίως σε φυσικές παρατηρήσεις και παίρνουν την μορφή εντροπικής συνάρτησης.



Σχήμα 2.3.1. Η συνθήκη Rankine-Hugoniot καθορίζεται ολοκληρώνοντας σε μια απειροελάχιστη ορθογώνια περιοχή στο επίπεδο  $x - t$

### 2.3.1 Κύματα τύπου Shock

Εδώ θεωρούμε ότι η λύση του προβλήματος Riemann αποτελείται από ένα κύμα shock . Αρχίζουμε θεωρώντας το σύστημα των εξισώσεων ρηχών υδάτων  $\mathbf{q}_t + \mathbf{f}(\mathbf{q})_x = 0$  όπου  $\mathbf{q} =$



$(h, hu) \in R^m$  Σταθεροποιώντας το  $\mathbf{q}_l$  υπολογίζουμε όλες τις πιθανές καταστάσεις που μπορεί να συνδέονται με το  $\mathbf{q}_l$  με ένα κύμα shock. Σε αυτήν την περίπτωση οι  $\mathbf{q}_l, \mathbf{q}$  πρέπει να ικανοποιούν την συνθήκη Rankine-Hugoniot

$$\mathbf{f}(\mathbf{q}) - \mathbf{f}(\mathbf{q}_l) = s(\mathbf{q} - \mathbf{q}_l). \quad (2.25)$$

Η παραπάνω σχέση δίνει ένα σύστημα  $m$  εξισώσεων με  $m + 1$  αγνώστους. Πιο συγκεκριμένα για τις εξισώσεις ρηχών υδάτων όπου  $m = 2$  λαμβάνουμε :

$$\begin{aligned} s(h - h_l) &= hu - h_l u_l, \\ s(hu - h_l u_l) &= \left( \frac{(hu)^2}{h} + \frac{1}{2}gh^2 \right) - \left( \frac{(h_l u_l)^2}{h_l} + \frac{1}{2}gh_l^2 \right). \end{aligned}$$

Δύο εξισώσεις με τρεις αγνώστους άρα αναμένουμε ότι θα βρούμε μια παραμετρική οικογένεια λύσεων. Λύνοντας την πρώτη εξίσωση ως προς  $s$  και αντικαθιστώντας στην δεύτερη έχουμε:

$$hu = \frac{h_l u_l h}{h_l} \pm h(h - h_l) \sqrt{\frac{g}{2} \frac{(h + h_l)}{h h_l}}. \quad (2.26)$$

Θεωρώντας ότι  $h = h_l(1 + \epsilon)$  έχουμε:

$$\mathbf{q} = \mathbf{q}_l + \epsilon \begin{bmatrix} h_l \\ h_l u_l - (1 - \epsilon)h_l \sqrt{\frac{g}{2} \frac{2 + \epsilon}{1 + \epsilon} h_l} \end{bmatrix}, \quad (2.27)$$

και

$$\mathbf{q} = \mathbf{q}_l + \epsilon \begin{bmatrix} h_l \\ h_l u_l + (1 - \epsilon)h_l \sqrt{\frac{g}{2} \frac{2 + \epsilon}{1 + \epsilon} h_l} \end{bmatrix}. \quad (2.28)$$

Η πρώτη οικογένεια μπορούμε να δούμε ότι συσχετίζεται με την πρώτη ιδιοτιμή  $\lambda_1 = u - \sqrt{gh}$ , αφού παραγωγίζοντας την (2.27) ως προς  $\epsilon$  και αφήνοντας  $\epsilon \rightarrow 0$  λαμβάνουμε το πρώτο ιδιοδιάνυσμα. Ακόμα από την (2.26) μπορούμε να γράψουμε

$$u - u_l = -(h - h_l) \sqrt{\frac{g}{2} \frac{h + h_l}{h h_l}}. \quad (2.29)$$

Αντίστοιχα για την δεύτερη οικογένεια με την ιδιοτιμή  $\lambda_1 = u + \sqrt{gh}$  και γράφουμε

$$u - u_l = (h - h_l) \sqrt{\frac{g}{2} \frac{h + h_l}{h h_l}}. \quad (2.30)$$

Επίσης γνωρίζουμε από την προηγούμενη ενότητα ότι εφόσον δυο καταστάσεις  $\mathbf{q}_l, \mathbf{q}_r$  ενώνονται με ένα κύμα shock, τότε η συνθήκη που πρέπει να ισχύει για το  $\mathbf{q}_r$  είναι,

$$u_r < u_l. \quad (2.31)$$

Εφαρμόζοντας την παραπάνω συνθήκη στην σχέση (2.29) παίρνουμε για το 1-shock την σχέση

$$h_r < h_l, \quad (2.32)$$

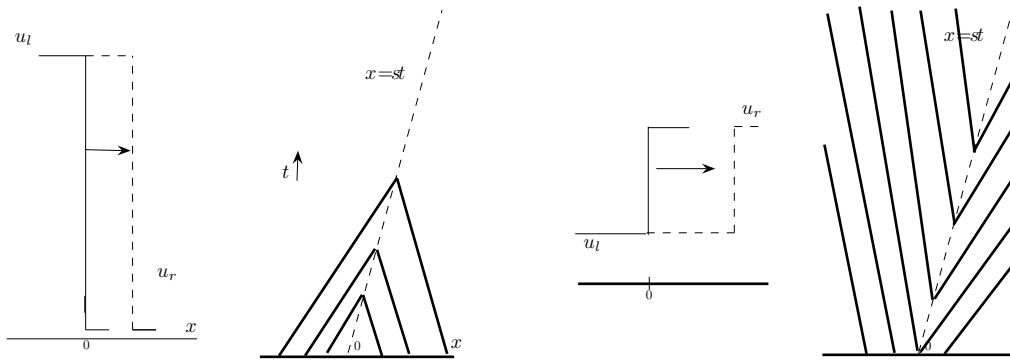
ενώ αν την εφαρμόσουμε στην σχέση (2.30), για το 2-shock δίνει,

$$h_r > h_l. \quad (2.33)$$

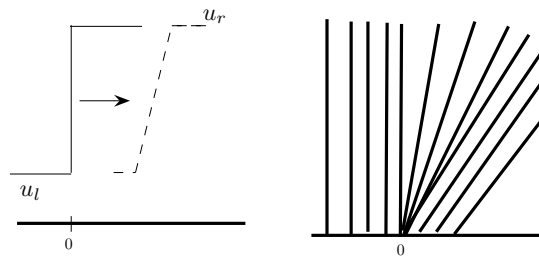
### 2.3.2 Συνθήκες Εντροπίας

Οι συνθήκες εντροπίας μας διασφαλίζουν ότι το πρόβλημα έχει μοναδική ασθενή λύση η οποία είναι φυσικά σωστή και μπορεί να εφαρμοστούν απ' ευθείας στην ασθενή λύση των υπερβολικών εξισώσεων, για να ελέγξουμε αν μια λύση είναι φυσικά αποδεκτή.

Εδώ εξετάζουμε συνθήκες οι οποίες συσχετίζονται με την χαρακτηριστική δομή, και επικεντρωνόμαστε κυρίως στους βαθμωτούς νόμους διατήρησης. Για κάποια συστήματα εξισώσεων η εύρεση κατάλληλων συνθηκών παραμένει ανοιχτό πρόβλημα. Μια εμφανής συνθήκη η οποία παρατηρείται στο σχήμα (2.3.2 α) είναι ότι οι χαρακτηριστικές καμπύλες πρέπει να πηγαίνουν προς το shock καθώς ο χρόνος αυξάνει. Μια ασυνέχεια με χαρακτηριστικές που φεύγουν από αυτή (2.3.2 β) είναι ασταθής σε διαταράξεις. Εάν ομαλοποιήσουμε ελαφρώς τα αρχικά δεδομένα ή προσθέσουμε ιξώδες στο σύστημα θα προκαλέσουμε την δομή η οποία φαίνεται στο σχήμα (2.3.3) Τα παραπάνω δίνουν την πρώτη μορφή της συνθήκης.



Σχήμα 2.3.2. Κύματα shock : ικανοποιείται η εντροπία (αριστερά), δεν ικανοποιείται (δεξιά).



Σχήμα 2.3.3. Κύμα αραιώσης.

**Συνθήκη Εντροπίας (Lax).** Ένας βαθμωτός νόμος διατήρησης ο οποίος είναι κυρτός, δηλαδή η συνάρτηση ροής έχει την ιδιότητα ότι η  $f''(q)$  δεν αλλάζει πρόσημο, με ασυνέχεια η οποία διαδίδεται με ταχύτητα  $s$ , λέμε ότι ικανοποιεί την συνθήκη εντροπίας του Lax εάν

$$f'(q_l) > s > f'(q_r), \quad (2.34)$$

με  $f'(q)$  να είναι η χαρακτηριστική ταχύτητα. Εφόσον η  $f$  είναι κυρτή, η ταχύτητα  $s$  από την (2.22) πρέπει να βρίσκεται ανάμεσα στα  $f'(q_l), f'(q_r)$  οπότε η συνθήκη (2.32) ανάγεται στην  $f'(q_l) > f'(q_r)$  και επειδή η  $f$  είναι κυρτή αρκεί να ισχύει ότι  $q_l > q_r$ .

Μια άλλη μορφή της συνθήκης εντροπίας βασίζεται στην εξάπλωση των χαρακτηριστικών και στην δημιουργία κύματος αραίωσης. Εάν η  $q(x, t)$  είναι αύξουσα συνάρτηση του  $x$  σε κάποια περιοχή, τότε οι χαρακτηριστικές καμπύλες διασκορπίζονται εάν  $f'' > 0$ . Ο ρυθμός διασκορπίσης μπορεί να ποσοτικοποιηθεί και δίνει την παρακάτω συνθήκη η οποία οφείλεται στον Oleinik.

**Συνθήκη Εντροπίας (Oleinik)** Η  $q(x, t)$  είναι εντροπική λύση σε ένα βαθμωτό νόμο διατήρησης  $q_t + f(q_x) = 0$  με  $f'' > 0$  εάν υπάρχει σταθερά  $E > 0$  τέτοια ώστε για κάθε  $\alpha > 0, t > 0$  και  $x \in R$

$$\frac{q(x + \alpha, t) - q(x, t)}{\alpha} < \frac{E}{t} \quad (2.35)$$

Για μια ασυνέχεια η οποία διαδίδεται με σταθερές καταστάσεις αριστερά και δεξιά από αυτήν ( $q_l, q_r$ ) η συνθήκη (2.10) ικανοποιείται μόνο εάν  $q_r - q_l \leq 0$  το οποίο οδηγεί στην (2.9).

Μια γενίκευση της συνθήκης εντροπίας του Lax για συστήματα εξισώσεων είναι η εξής.

**Συνθήκη Εντροπίας (Lax).** Μια ασυνέχεια που διαχωρίζει της καταστάσεις  $q_l, q_r$  και διαδίδεται με ταχύτητα  $s$  ικανοποιεί την συνθήκη εντροπίας του Lax εάν υπάρχει δείκτης  $p$  έτσι ώστε

$$\lambda_p(q_l) > s > \lambda_p(q_r), \quad (2.36)$$

έτσι ώστε η  $p$  οικογένεια των χαρακτηριστικών να προσκρούει στην ασυνέχεια ενώ οι υπόλοιπες να διασταυρώνονται με αυτήν, δηλαδή

$$\begin{aligned} \lambda_j(q_l) < s \text{ και } \lambda_j(q_r) < s \text{ για } j < p, \\ \lambda_j(q_l) > s \text{ και } \lambda_j(q_r) > s \text{ για } j > p. \end{aligned} \quad (2.37)$$

Στον παραπάνω ορισμό υποθέτουμε ότι οι ιδιοτιμές είναι διατεταγμένες έτσι ώστε  $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_m$ . Η παραπάνω συνθήκη μπορεί ναδειχθεί ότι είναι σωστή μόνο για αυστηρά υπερβολικούς νόμους διατήρησης. Μια άλλη προσέγγιση για τις συνθήκες εντροπίας είναι ορίζοντας συναρτήσεις εντροπίας. Αυτή η προσέγγιση εφαρμόζεται κυρίως στα συστήματα εξισώσεων. Για περισσότερες λεπτομέρειες βλ. [30].

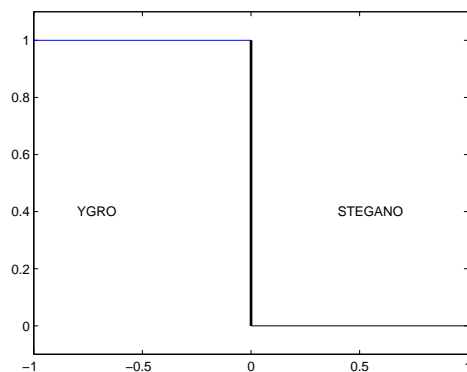
## 2.4 Εμφάνιση Στεγανών

Στα προηγούμενα κεφάλαια λύσαμε το πρόβλημα Riemann για την περίπτωση όπου το βάθος του νερού έχει παντού θετική τιμή. Στις στεγανές περιοχές το βάθος του νερού έχει προφανώς τιμή μηδέν και είναι μια απόλυτα αποδεκτή φυσική κατάσταση. Σ' αυτή την περίπτωση θεωρούμε υγρές περιοχές οι οποίες συνορεύουν με στεγανό και λύνουμε τις εξισώσεις ρηχών υδάτων πάνω

στο σύνορο υγρού/στεγανού. Η πιο απλή περίπτωση είναι αυτή του σχήματος (2.4.1) η οποία είναι μια ιδιαίτερη περίπτωση του προβλήματος Riemann.

Η εμφάνιση στεγανών μπορεί να προκύψει είτε από την αρχή, λόγω των αρχικών δεδομένων, είτε ως αποτέλεσμα της αλληλεπίδρασης δυο υγρών καταστάσεων. Εδώ θα ασχολήθουμε με την περίπτωση εμφάνισης στεγανών στην δεξιά ή την αριστερή πλευρά, λόγω των αρχικών δεδομένων.

Στην περίπτωση της μη εμφάνισης στεγανών, για τις εξισώσεις της μιας διάστασης, είδαμε ότι υπάρχουν πάντα δύο οικογένειες κυμάτων, δηλαδή τέσσερις δυνατές λύσεις. Οποιαδήποτε προσπάθεια χρησιμοποίησης των παραπάνω για την περίπτωση της εμφάνισης στεγανών θα αποτύχει γιατί η δομή της λύσης είναι διαφορετική. Πιο συγκεκριμένα, έχουμε μόνο ένα κύμα καθώς η ιδιοτιμή στο στεγανό γίνεται μηδέν, δηλαδή  $\lambda_1 = u - c = 0$ , όταν έχουμε στεγανό από αριστερά και  $\lambda_2 = u + c = 0$  όταν έχουμε από δεξιά. Το κύμα αυτό θα είναι κύμα αραιώσης καθώς σύμφωνα με την παρακάτω πρόταση δεν μπορεί να είναι shock.



Σχήμα 2.4.1. Το πρόβλημα Riemann για το οποίο δεν υπάρχει νερό σε ένα από τα δεδομένα.

**Πρόταση 2.4.1** Ένα κύμα *shock* δεν μπορεί να είναι γειτονικό με στεγανή περιοχή [45].

Έστω ένα πρόβλημα Riemann για τις εξισώσεις ρηχών υδάτων μιας διάστασης με αρχικές συνθήκες

$$\mathbf{q}_l = \begin{bmatrix} h_l \\ h_l u_l \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q}_r = \mathbf{q}_0 = \begin{bmatrix} h_0 \\ h_0 u_0 \end{bmatrix}$$

έτσι ώστε  $\mathbf{q}_l$  να είναι τα δεδομένα για την υγρή περιοχή με  $h_l > 0$  και  $\mathbf{q}_0$  για το στεγανό, με  $h_0 = 0$ . Υποθέτουμε ότι οι δύο αυτές καταστάσεις συνδέονται με ένα κύμα shock, ταχύτητας  $s$ . Τότε θα ισχύει η συνθήκη Rankine - Hugoniot σύμφωνα με την οποία

$$\begin{aligned} h_l u_l &= h_0 u_0 + s(h_l - h_0), \\ h_l u_l^2 + \frac{1}{2} g h_l^2 &= h_0 u_0^2 + \frac{1}{2} g h_0^2 + s(h_l u_l - h_0 u_0). \end{aligned}$$

Από την πρώτη εξίσωση λαμβάνουμε ότι  $s = u_l$  το οποίο σημαίνει ότι η ταχύτητα του shock είναι ίση με την ταχύτητα πίσω από αυτό. Με αντικατάσταση στην δεύτερη εξίσωση δίνει  $h_l = 0$  το οποίο είναι άτοπο.

### 2.4.1 Στεγανό από δεξιά

Η περίπτωση αυτή απεικονίζεται στο σχήμα (2.4.2 α) και το πρόβλημα Riemann έχει αρχικά δεδομένα

$$\mathbf{q}(x, 0) = \begin{cases} \mathbf{q}_l & x < 0, \\ \mathbf{q}_0 & x > 0 \end{cases}$$

Όπως βλέπουμε και στο σχήμα, το αναμενόμενο δεξί κύμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή  $\lambda_2 = u + c$  δεν υπάρχει. Αυτό είναι φυσικά σωστό εφόσον δεν υπάρχει νερό, έτσι ώστε το κύμα να διαδωθεί. Η λύση αποτελείται μόνο από ένα κύμα αραιώσης που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή  $\lambda_1 = u - c$ . Το σημείο του κύματος που απεικονίζεται με διακεκομμένη γραμμή ονομάζεται υγρό/στεγανό μέτωπο και είναι αυτό το οποίο θα μελετήσουμε. Για την κεφαλή του κύματος γνωρίζουμε ότι  $dx/dt = s_l = u_l - c_l$ . Για το μέτωπο του κύματος έστω  $c_c$  η σχετική ταχύτητα και  $u_c$  η ταχύτητα κατά μήκος της χαρακτηριστικής με ταχύτητα  $s_*$ . Τότε θα πρέπει να ισχύει ότι  $dx/dt = s_* = u_c - c_c$ . Συνδέοντας τα  $u_c, c_c$  με τα δεδομένα στην αριστερή πλευρά και χρησιμοποιώντας την πρώτη Riemann αναλλοίωτη  $w^1 = u + 2c$ ,  $c = \sqrt{gh}$  έχουμε ότι

$$u_c + 2c_c = u_l + 2c_l.$$

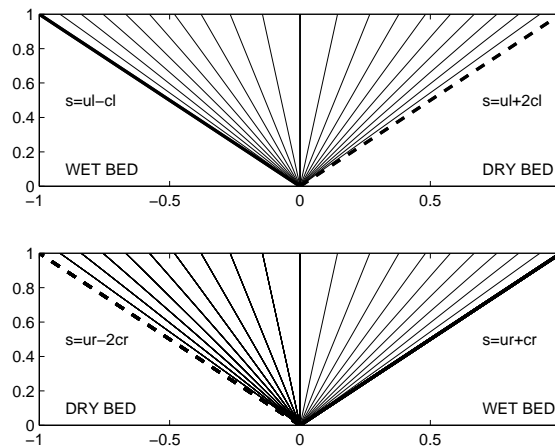
Όμως κατά μήκος του μετώπου έχουμε ότι  $h_c = 0$  και άρα  $c_c = 0$ , οπότε η ταχύτητα του μετώπου θα είναι

$$s_* = u_c = u_l + 2c_l. \quad (2.38)$$

Άρα η λύση θα έχει την μορφή

$$\mathbf{q}(x, t) = \begin{cases} \mathbf{q}_l & x/t \leq u_l - c_l \\ \mathbf{q}_{fan} & u_l - c_l \leq x/t \leq u_l + 2c_l \\ \mathbf{q}_0 & u_l + 2c_l \leq x/t \end{cases} \quad (2.39)$$

όπου  $\mathbf{q}_{fan}$  δίνεται στην παράγραφο 2.2.1 και ικανοποιεί την σχέση (2.17).



Σχήμα 2.4.2. Δύο περιπτώσεις όπου οι λύσεις του προβλήματος Riemann περιέχουν στεγανό. (α) Το στεγανό βρίσκεται από δεξιά. (β) Το στεγανό βρίσκεται από αριστερά.

### 2.4.2 Στεγανό από αριστερά

Για την εμφάνιση στεγανού από αριστερά τα αρχικά δεδομένα του προβλήματος Riemann έχουν την μορφή

$$\mathbf{q}(x, 0) = \begin{cases} \mathbf{q}_0 & x < 0 \\ \mathbf{q}_r & x > 0 \end{cases}$$

και η ακριβής λύση απεικονίζεται στο σχήμα (2.4.2 β). Παρατηρούμε ότι λείπει το κύμα της πρώτης οικογένειας, που σχετίζεται με την ιδιοτιμή  $\lambda_1 = u - c$  και ότι η λύση αποτελείται από ένα κύμα αραιώσης που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή  $\lambda_2 = u + c$ . Παρατηρούμε ότι η ουρά του κύματος είναι τώρα το υγρό/σεγανό μέτωπο. Αντίστοιχα με πριν η ταχύτητα του μετώπου υπολογίζεται ως

$$s_* = u_r - 2c_r \quad (2.40)$$

και η ολική λύση δίνεται από

$$\mathbf{q}(x, t) = \begin{cases} \mathbf{q}_0 & x/t \leq s_* \\ \mathbf{q}_{rfan} & s_* \leq x/t \leq u_r + c_r \\ \mathbf{q}_0 & u_r + c_r \leq x/t \end{cases} \quad (2.41)$$

όπου  $\mathbf{q}_{rfan}$  δίνεται στην παράγραφο 2.2.1 και ικανοποιεί την σχέση (2.20).

## 2.5 Στάσιμες καταστάσεις

Στην ιδιαίτερη περίπτωση όπου το υγρό βρίσκεται σε ισορροπία ( $\mathbf{q}_t = 0$ ), δηλαδή η ταχύτητα του συστήματος είναι ταυτοτικά μηδέν ή έχει μια σταθερή τιμή, έχουμε στάσιμη λύση. Στην περίπτωση όπου  $u \equiv 0$  έχουμε:

$$\mathbf{q}_t + \mathbf{f}(\mathbf{q})_x = \mathbf{R} \Rightarrow \mathbf{f}(\mathbf{q})_x = \mathbf{R}$$

όπου

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} h \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2}gh^2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0 \\ -ghb_x \end{bmatrix}$$

Άρα

$$\begin{aligned} h_t &= 0, \\ \left(\frac{1}{2}gh^2\right)_x &= -ghb_x, \end{aligned}$$

οπότε

$$\begin{aligned} h_t &= 0, \\ hh_x &= -hb_x. \end{aligned}$$

Από την πρώτη εξίσωση έχουμε ότι  $h = h(x) + k$  όπου  $k$  σταθερός αριθμός ενώ από την δεύτερη έχουμε  $h(h_x + b_x) = 0$ . Αν  $h = 0$  τότε θα παίρναμε την ταυτοτική λύση, άρα θα πρέπει

να ισχύει ότι  $h_x = -b_x$ . Ολοκληρώνοντας λαμβάνουμε  $h(x, t) = -b(x, t) + D(t)$ . Από την πρώτη εξίσωση όμως έχουμε εξάγει ότι η  $h$  είναι συνάρτηση μόνο του  $x$ , άρα για να ισχύει η παραπάνω θα πρέπει  $h(x) = -b(x) + D$  όπου  $D$  ένας σταθερός αριθμός. Αναδιατάσσοντας την παραπάνω, προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} D &= h(x) + b(x), \\ u(x, t) &\equiv 0 \end{aligned}$$

Δηλαδή παρατηρούμε ότι ανεξάρτητα από το χρόνο η λύση παραμένει σταθερή.

Στην περίπτωση όπου η ταχύτητα έχει κάποια τιμή αλλά παραμένει σταθερή, δηλαδή  $hu \equiv$  σταθερά, έχουμε:

$$\begin{aligned} (hu)_x &= 0 \Rightarrow \\ h_x u + hu_x &= 0 \end{aligned}$$

και από την δεύτερη εξίσωση

$$\begin{aligned} u^2 h + \left(\frac{1}{2}gh^2\right)_x + ghb_x &= 0 \Rightarrow \\ u(2u_x h + uh_x) + gh h_x + ghb_x &= 0 \Rightarrow \\ uu_x + gh_x + gb_x &= 0 \Rightarrow \\ \left(\frac{u^2}{2}\right)_x + g(h+b)_x &= 0. \end{aligned}$$

Άρα θα πρέπει να ισχύει ότι :

$$\begin{aligned} hu &= c_1 \\ \left(\frac{u^2}{2}\right)_x + g(h+b)_x &= c_2 \end{aligned}$$

όπου  $c_1, c_2$  σταθερές.

## 2.6 Συμπεράσματα

Από την παραπάνω μελέτη καταλήγουμε στο ότι θέλουμε να κατασκευάσουμε αριθμητικά σχήματα τέτοια ώστε

1. Να είναι συντηρητικά (διατήρηση ποσοτήτων)
2. Να υπολογίζουν σωστά τις ασυνέχειες (θέση, ταχύτητα)
3. Να υπολογίζουν εντροπικές λύσεις (φυσικά μοναδική λύση)
4. Να υπολογίζουν σωστά (θέση, ταχύτητα) υγρά/στεγανά μέτωπα
5. Να υπολογίζουν στάσιμες καταστάσεις χωρίς να προσθέτουν αριθμητικές διαταραχές (well-balanced) στον ίδιο βαθμό ακρίβειας.
6. Να διατηρούν την θετικότητα της τιμής του βάθους ( $h$ ) (positivity preserving)





## Κεφάλαιο 3

### Αριθμητικό σχήμα

#### 3.1 Συντηρητικές μέθοδοι πεπερασμένων όγκων

Η εμφάνιση ασυνεχειών σε νόμους διατήρησης έχει φυσικό νόημα, για παράδειγμα υδραυλικά άλματα (hydraulic jumps) και μετωπικά κύματα (bores), από υπολογιστική σκοπιά όμως είναι μια δυσχέρεια που αποκλείει την χρησιμοποίηση πολλών μεθόδων. Η χρήση μιας οποιασδήποτε μεθόδου μπορεί να οδηγήσει είτε στην εμφάνιση ταλαντώσεων κοντά στις ασυνέχειες, είτε στην μεταφορά αυτών με λανθασμένη ταχύτητα είτε στον λανθασμένο υπολογισμό τους. Για να αποφευχθούν οι παραπάνω δυσκολίες πρέπει η μέθοδος που θα χρησιμοποιηθεί να υπολογίζει σωστά την θέση και την ταχύτητα των ασυνέχειων (shock capturing). Η αριθμητική μέθοδος που χρησιμοποιείται εδώ είναι μια μέθοδος πεπερασμένων όγκων, με την αριθμητική λύση να προσεγγίζει την μέση τιμή της ακριβούς λύσης σε κάθε διακριτό υπολογιστικό κελί, και είναι κατάλληλη για υπερβολικά συστήματα μια και χειρίζεται κατάλληλα την εμφάνιση ασυνεχειών.

Μια ακόμα δυσχέρεια η οποία παρατηρείται είναι ότι με την επιλογή μιας οποιαδήποτε μεθόδου η λύση υπέρχει περίπτωση να συγκλίνει σε μια εντελώς λάθος λύση [29]. Αποδεικνύεται ότι μπορούμε να θέσουμε μια απλή συνθήκη στο αριθμητικό σχήμα έτσι ώστε να διασφαλίσουμε ότι δεν συγκλίνει σε μη αποδεκτή λύση. Αυτή η απαίτηση είναι ότι η μέθοδος θα πρέπει να είναι σε συντηρητική μορφή. Λαμβάνοντας την ολοκληρωτική μορφή των νόμων διατήρησης (2.5) και παραλείποντας προσωρινά τον πηγαίο όρο μπορούμε να γράψουμε,

$$\frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} \mathbf{q}(x, t) dx = -[\mathbf{f}(\mathbf{q}(x_2, t)) - \mathbf{f}(\mathbf{q}(x_1, t))].$$

Ορίζοντας μια διαμέριση στο χώρο  $\Delta = \{x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n\}$  με χωρικό βήμα  $\Delta x$ , δηλαδή  $x_{i+1} = x_i + \Delta x$ , εφαρμόζοντας την παραπάνω σχέση στο υπολογιστικό κελί  $C_i = [x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}]$ , με  $x_{i\pm\frac{1}{2}} = x_i \pm \frac{1}{2}\Delta x$  και ολοκληρώνοντας στο χρονικό διάστημα  $\tau^n = [t^n, t^{n+1}]$  με χρονικό βήμα  $\Delta t^n = t^{n+1} - t^n$  παίρνουμε

$$\int_{C_i} \mathbf{q}(x, t^{n+1}) dx = \int_{C_i} \mathbf{q}(x, t^n) dx - \int_{\tau^n} [\mathbf{f}(\mathbf{q}(x_{i+\frac{1}{2}}, t)) - \mathbf{f}(\mathbf{q}(x_{i-\frac{1}{2}}, t))] dt,$$

το οποίο γράφεται

$$\mathbf{Q}_i^{n+1} = \mathbf{Q}_i^n - \frac{\Delta t^n}{\Delta x} [\mathbf{F}_{i+\frac{1}{2}}^n - \mathbf{F}_{i-\frac{1}{2}}^n], \quad (3.1)$$

όπου

$$\mathbf{Q}_i^n = \frac{1}{\Delta x} \int_{C_i} \mathbf{q}(x, t^n) dx \quad (3.2)$$

είναι ο μέσος όρος της λύσης σε κάθε χωρικό κελί τη χρονική στιγμή  $t^n$  και

$$\mathbf{F}_{i\pm\frac{1}{2}}^n = \frac{1}{\Delta t^n} \int_{\tau^n} \mathbf{f}(\mathbf{q}(x_{i\pm\frac{1}{2}})) dt \quad (3.3)$$

είναι ο χρονικός μέσος όρος της ροής στα σύνορα του κελιού στο χρονικό διάστημα  $\tau^n$ . Όλες οι μέθοδοι της μορφής (3.1) είναι άμεσες μέθοδοι δηλαδή για τον υπολογισμό της τιμής  $\mathbf{Q}_i^{n+1}$  χρησιμοποιούνται μόνο τιμές του προηγούμενου χρονικού βήματος. Παρατηρούμε ότι αθροίζοντας τη λύση σε όλο το διάστημα υπολογισμού  $[\alpha, \beta]$ , η λύση αλλάζει μόνο λόγο της διαφοράς της ροής στα άκρα του διαστήματος (σύνορο).

$$\Delta x \sum_{i=1}^N \mathbf{Q}_i^{n+1} = \Delta x \sum_{i=1}^N \mathbf{Q}_i^n + \frac{\Delta t^n}{\Delta x} (\mathbf{F}_{N+1/2}^n - \mathbf{F}_{1-1/2}^n).$$

Οι παραπάνω μέθοδοι ονομάζονται συντηρητικές και συγκλίνουν σωστά στην ασθενή λύση όπως μπορεί να αποδειχθεί σύμφωνα με το παρακάτω θεώρημα, ενώ μια μέθοδος η οποία εξάγεται από την διαφορική μορφή των νόμων διατήρησης συχνά αποτυγχάνει στην σωστή σύγκλιση [30].

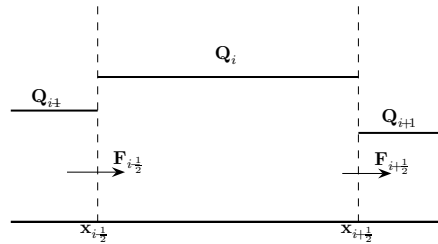
**Θεώρημα (Lax and Wendroff [27]) 3.1.1** Έστω μια ακολουθία από πλέγματα που έχουν δείκτες  $l = 1, 2, \dots$ , με  $\Delta x_l \rightarrow 0$  και  $\Delta t_l \rightarrow 0$  καθώς  $l \rightarrow \infty$ . Έστω ότι  $U_l(x, t)$  είναι η αριθμητική προσέγγιση υπολογισμένη με μια συνεπή και συντηρητική μέθοδο στο  $l$  πλέγμα. Υποθέτουμε ότι  $U_l$  συγκλίνει σε μια συνάρτηση  $u$  καθώς  $l \rightarrow \infty$  υπό την έννοια που ορίζεται παρακάτω. Τότε η  $u(x, t)$  είναι ασθενής λύση του νόμου διατήρησης.

Θεωρούμε ότι έχουμε σύγκλιση της  $U_l$  στη  $u$  υπό την παρακάτω έννοια:  
Πάνω σε κάθε φραγμένο σύνολο  $\Omega = [a, b] \times [0, T]$  στο επίπεδο  $x - t$ ,

$$\int_0^T \int_a^b |U_l(x, t) - u(x, t)| dx dt \rightarrow 0 \quad \text{καθως} \quad l \rightarrow \infty.$$

Η παραπάνω σχέση είναι η 1-νόρμα οπότε μπορούμε απλά να γράψουμε

$$\|U_l - u\|_{1, \Omega} \rightarrow 0 \quad \text{καθως} \quad l \rightarrow \infty.$$



Σχήμα 3.1.1 Υπολογιστικό κελί για την μέθοδο πεπερασμένων όγκων.

## 3.2 Μέθοδοι τύπου Godunov

Χρησιμοποιώντας μια μέθοδο της μορφής (3.1) απαιτείται μια κατάλληλα επιλεγμένη αριθμητική ροή (3.3). Αναφέρεται εδώ η μέθοδος του Godunov [19], που παράγει μια κλάση μεθόδων που αντιμετωπίζει επιτυχώς τις αριθμητικές δυσκολίες των υπερβολικών νόμων διατήρησης. Οι μέθοδοι τύπου Godunov είναι τύπου upwind μέθοδοι οι οποίες λύνουν ένα πρόβλημα Riemann

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_t + \mathbf{f}'(\mathbf{q})\mathbf{q}_x &= 0 \\ \mathbf{q}(x, 0) &= \begin{cases} \mathbf{q}_l & x < 0 \\ \mathbf{q}_r & x > 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (3.4)$$

σε κάθε άκρο των χωρικών κελιών  $x_{i\pm\frac{1}{2}}$  για κάθε χρονικό βήμα. Υποθέτοντας ότι η λύση μας είναι κατά τμήματα σταθερή, έχοντας την τιμή  $\mathbf{Q}_i$  σε κάθε υπολογιστικό κελί, βλέπουμε τη σχέση με το πρόβλημα Riemann. Στο σημείο  $x_{i-\frac{1}{2}}$  υπάρχει ασυνέχεια με  $\mathbf{q}_l = \mathbf{Q}_{i-1}$  και  $\mathbf{q}_r = \mathbf{Q}_i$ . Στην μέθοδο του Godunov οι αριθμητικές ροές που χρησιμοποιούνται στο σχήμα (3.1) βρίσκονται αποτιμώντας την πραγματική συνάρτηση ροής στην λύση του προβλήματος Riemann (2.9) στο  $x_{i-\frac{1}{2}}$  με αρχικές συνθήκες

$$\mathbf{q}(x, t^n) = \begin{cases} \mathbf{Q}_{i-1}^n & x < x_{i-\frac{1}{2}} \\ \mathbf{Q}_i^n & x > x_{i-\frac{1}{2}} \end{cases}. \quad (3.5)$$

Όπως είδαμε, οι λύσεις που προκύπτουν από ένα πρόβλημα Riemann για τις εξισώσεις ρηχών υδάτων είναι είτε shocks, είτε κύματα αραιώσης (rarefactions), είτε και τα δύο, και η μορφή της λύσης εξαρτάται από τα αρχικά δεδομένα  $q_l$ ,  $q_r$ . Στο τέλος κάθε χρονικού βήματος τα δεδομένα συντίθενται και η διαδικασία επαναλαμβάνεται.

### 3.2.1 Γραμμικά προβλήματα

Εξετάζουμε αρχικά την περίπτωση των γραμμικών υπερβολικών προβλημάτων, γιατί συχνά προσεγγιστικοί επιλυτές Riemann (οι οποίοι θα αναφερθούν παρακάτω) βασίζονται σε λύσεις ενός γραμμικοποιημένου Riemann προβλήματος δηλαδή του (2.9) με  $\mathbf{f}(\mathbf{q}) = \mathbf{A}\mathbf{q}$ ,  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ . Γενικά ένα γραμμικό πρόβλημα έχει την μορφή

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_t + \mathbf{A}\mathbf{q}_x &= \mathbf{R}, \\ \mathbf{q}(x, 0) &= \mathbf{q}_0(x). \end{aligned} \quad (3.6)$$

Ο πίνακας  $\mathbf{A}$  για να είναι διαγωνιοποιήσιμος πρέπει να γράφεται ως

$$\mathbf{A} = \mathbf{X}\mathbf{\Lambda}\mathbf{X}^{-1},$$

όπου  $\mathbf{\Lambda} = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_m)$  ο πίνακας των ιδιοτιμών και  $\mathbf{X} = [\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_m]$  ο πίνακας των ιδιοδιανυσμάτων. Για να λύσουμε ένα γραμμικό πρόβλημα, αρχικά χωρίς τον πηγαίο όρο ( $\mathbf{R} = 0$ ), αρκεί να το λύσουμε για τις χαρακτηριστικές μεταβλητές, δηλαδή θέτουμε  $\mathbf{w} = \mathbf{X}^{-1}\mathbf{q}$  οπότε

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_t + \mathbf{A}\mathbf{q}_x &= 0 \Rightarrow \\ \mathbf{X}^{-1}\mathbf{q}_t + \mathbf{\Lambda}\mathbf{X}^{-1}\mathbf{q}_x &= 0 \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\mathbf{w}_t + \mathbf{A}\mathbf{w}_x = 0 \quad (3.7)$$

όπου  $\mathbf{w}$  είναι το διάνυσμα των λεγόμενων χαρακτηριστικών μεταβλητών. Εφόσον ο  $\mathbf{A}$  είναι διαγώνιος η (3.7) είναι ένα σύστημα  $m$  βαθμωτών εξισώσεων μεταφοράς,

$$(w_p)_t + \lambda_p(w_p)_x = 0, \quad p = 1, \dots, m \quad (3.8)$$

Άρα η αρχική μορφή κάθε χαρακτηριστικής μεταβλητής απλά μεταφέρεται με ταχύτητα ίση με την αντίστοιχη ιδιοτιμή του πίνακα  $\mathbf{A}$ . Στη συνέχεια πηγαίνοντας πίσω, στις συντηρητικές μεταβλητές, βλέπουμε ότι η λύση αποτελείται από μια υπέρθεση όλων των ιδιοδιανυσμάτων του  $\mathbf{A}$ . Δηλαδή

$$\mathbf{q} = \mathbf{X}\mathbf{w}, \quad \text{όπου} \quad w_p(x, t) = w_p(x - \lambda_p t, 0). \quad (3.9)$$

Συνεπώς,

$$\mathbf{q}(x, t) = \sum_{p=1}^m w_p(x - \lambda_p t, 0) \mathbf{r}_p. \quad (3.10)$$

Θεωρώντας ένα γραμμικό πρόβλημα Riemann της μορφής

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_t + \mathbf{A}\mathbf{q}_x &= 0 \\ \mathbf{q}(x, 0) &= \begin{cases} \mathbf{Q}_{i-1} & x < 0 \\ \mathbf{Q}_i & x > 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (3.11)$$

Μπορούμε να γράψουμε τα  $\mathbf{Q}_{i-1}$ ,  $\mathbf{Q}_i$  σαν γραμμικό συνδιασμό των ιδιοδιανυσμάτων του  $\mathbf{A}$ ,

$$\mathbf{Q}_i - \mathbf{Q}_{i-1} = \sum_{p=1}^m \alpha_p \mathbf{r}_p = \sum_{p=1}^m \mathbf{W}_p,$$

με συντελεστές  $\alpha = \mathbf{X}^{-1} \Delta \mathbf{Q}_{i-1/2}$  και  $\mathbf{W}_p$  το  $p$  κύμα στη λύση. Η μέθοδος του Godunov ορίζεται θέτωντας

$$\mathbf{F}_{i-1/2} = f(\mathbf{Q}_{i-1/2}^\downarrow) = \mathbf{A}\mathbf{Q}_{i-1/2}^\downarrow,$$

όπου  $\mathbf{Q}_{i-1/2}^\downarrow$  είναι η λύση του προβλήματος Riemann στο  $x_{i-1/2}$  [30]

$$\mathbf{Q}_{i-1/2}^\downarrow = \mathbf{Q}_{i-1} + \sum_{p:\lambda_p < 0} (\mathbf{W}_p)_{i-1/2} = \mathbf{Q}_i - \sum_{p:\lambda_p > 0} (\mathbf{W}_p)_{i-1/2}. \quad (3.12)$$

Η αριθμητική συνάρτηση ροής στο  $i - 1/2$  δίνεται ως

$$\mathbf{F}_{i-1/2} = \mathbf{A}\mathbf{Q}_{i-1} + \sum_{p=1}^m (\alpha_p \lambda_p^- \mathbf{r}_p)_{i-1/2} \quad (3.13)$$

$$= \mathbf{A}\mathbf{Q}_i + \sum_{p=1}^m (\alpha_p \lambda_p^+ \mathbf{r}_p)_{i-1/2} \quad (3.14)$$

όπου  $\lambda^- = \min(\lambda, 0)$ ,  $\lambda^+ = \max(\lambda, 0)$ , Άρα από την (3.1) προκύπτει ότι

$$\mathbf{Q}_i^{n+1} = \mathbf{Q}_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} [\mathbf{F}_{i+\frac{1}{2}}^n - \mathbf{F}_{i-\frac{1}{2}}^n],$$

$$\mathbf{F}_{i-1/2}^n = \mathbf{A}\mathbf{Q}_i^n - \mathbf{A}^+(\mathbf{Q}_i^n - \mathbf{Q}_{i-1}^n),$$

$$\mathbf{F}_{i+1/2}^n = \mathbf{A}\mathbf{Q}_i^n + \mathbf{A}^-(\mathbf{Q}_{i+1}^n - \mathbf{Q}_i^n)$$

με  $\mathbf{A}^+ = \mathbf{X}\text{diag}(\lambda_p^+)\mathbf{X}^{-1}$ ,  $\mathbf{A}^- = \mathbf{X}\text{diag}(\lambda_p^-)\mathbf{X}^{-1}$ .

### 3.3 Ο προσεγγιστικός επιλυτής Riemann του Roe

Όπως προαναφέρθηκε στην μέθοδο του Godunov απαιτείται σε κάθε χωρικό κελί η ακριβής επίλυση ενός Riemann προβλήματος το οποίο είναι δαπανηρό για μη γραμμικά συστήματα υπερβολικών διαφορικών εξισώσεων. Πρέπει να παρατηρηθεί ότι για την εύρεση της αριθμητικής ροής χρησιμοποιείται μόνο η λύση στο σημείο  $x_{i-1/2}$ , βλ. (3.12), επομένως η εύρεση όλης της λύσης του προβλήματος Riemann περιττεύει. Στην πράξη είναι συνήθως πιο αποτελεσματικό η χρησιμοποίηση προσεγγιστικών επιλυτών Riemann για τον υπολογισμό της αριθμητικής ροής  $\mathbf{F}_{i-1/2}$ . Μια ευρέως διαδεδομένη επιλογή είναι αυτή του επιλυτή του Roe [40]. Η γενική ιδέα είναι να καθορίσουμε την  $\mathbf{q}(x, t)$  λύνοντας αντί του μη γραμμικού συστήματος ένα γραμμικοποιημένο σύστημα νόμων διατήρησης σταθερών συντελεστών. Πιο συγκεκριμένα λύνουμε ένα τροποποιημένο σύστημα νόμων διατήρησης, αντικαθιστώντας τον μη γραμμικό Ιακωβιανό πίνακα  $\mathbf{f}'(\mathbf{q})$  με ένα σταθερό, διαγωνιοποιήσιμο  $\mathbf{f}'(\mathbf{q}) = \hat{\mathbf{A}}$ , όπου  $\mathbf{f}'(\mathbf{q}) = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{q}}$ . Ο πίνακας  $\hat{\mathbf{A}}$  ονομάζεται πίνακας του Roe και επιλέγεται να ικανοποιεί τους παρακάτω περιορισμούς.

$$[1] \quad \hat{\mathbf{A}}_{i-1/2}(\mathbf{Q}_i - \mathbf{Q}_{i-1}) = \mathbf{f}(\mathbf{Q}_i) - \mathbf{f}(\mathbf{Q}_{i-1}),$$

$$[2] \quad \hat{\mathbf{A}}_{i-1/2} \text{ είναι διαγωνιοποιήσιμος με πραγματικές ιδιοτιμές,}$$

$$[3] \quad \hat{\mathbf{A}}_{i-1/2} \rightarrow \mathbf{f}'(\mathbf{q}) \text{ ομοιόμορφα καθώς } \mathbf{Q}_{i-1}, \mathbf{Q}_i \rightarrow \mathbf{q},$$

για  $\hat{\mathbf{A}}_{i-1/2} = \hat{\mathbf{A}}(\mathbf{Q}_{i-1}, \mathbf{Q}_i)$ . Στην ιδιαίτερη περίπτωση όπου τα  $\mathbf{Q}_i, \mathbf{Q}_{i-1}$  συνδέονται με ένα shock τότε απαιτούμε η προσεγγιστική Riemann λύση να ταυτίζεται με την πραγματική. Αυτό απορρέει από το γεγονός ότι ικανοποιείται η συνθήκη Rankine-Hugoniot,

$$\mathbf{f}(\mathbf{q}_r) - \mathbf{f}(\mathbf{q}_l) = s(\mathbf{q}_r - \mathbf{q}_l)$$

και μαζί με τον περιορισμό [1] έχουμε

$$\hat{\mathbf{A}}_{i-1/2}(\mathbf{q}_r - \mathbf{q}_l) = \mathbf{f}(\mathbf{q}_r) - \mathbf{f}(\mathbf{q}_l) = s(\mathbf{q}_r - \mathbf{q}_l),$$

δηλαδή πρέπει  $\mathbf{q}_r - \mathbf{q}_l$  να είναι ιδιοδιάνυσμα του  $\hat{\mathbf{A}}$  με ιδιοτιμή  $s$ . Συνεπώς η προσεγγιστική λύση αποτελείται από μια ασυνέχεια η οποία διαδίδεται με ταχύτητα  $s$ . Ο δεύτερος περιορισμός

κατοχυρώνει ότι το πρόβλημα  $\mathbf{q}_t + \hat{\mathbf{A}}\mathbf{q}_x = 0$  είναι υπερβολικό και επιλύσιμο και ο τρίτος περιορισμός εγγυάται τη συνέπεια, δηλαδή ότι η μέθοδος δίνει τη σωστή λύση σε ομαλές περιοχές.

Για τις εξισώσεις ρηχών υδάτων μιας διάστασης ο πίνακας  $\hat{\mathbf{A}}$  μπορεί να υπολογιστεί [30],[45] και είναι απλά ο Ιακωβιανός πίνακας (2.7) αποτιμημένος στις μέσες τιμές

$$\hat{h}_{i-1/2} = \frac{h_i + h_{i-1}}{2}, \quad \hat{u}_{i-1/2} = \frac{u_{i-1}\sqrt{h_{i-1}} + u_i\sqrt{h_i}}{\sqrt{h_{i-1}} + \sqrt{h_i}}. \quad (3.15)$$

Οι προσεγγιστικές ιδιοτιμές ή αλλιώς ταχύτητες του Roe είναι

$$(\hat{\lambda}_1)_{i-1/2} = \hat{u}_{i-1/2} - \sqrt{g\hat{h}_{i-1/2}}, \quad (\hat{\lambda}_2)_{i-1/2} = \hat{u}_{i-1/2} + \sqrt{g\hat{h}_{i-1/2}}, \quad (3.16)$$

με αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα

$$\hat{\mathbf{r}}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ \hat{u} - \hat{c} \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{r}}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ \hat{u} + \hat{c} \end{bmatrix}, \quad (3.17)$$

όπου  $\hat{c} = \sqrt{g\frac{h_i+h_{i-1}}{2}}$ . Όμοια με την προηγούμενη διαδικασία (παράγραφος 3.2) μπορούμε να υπολογίσουμε τις αριθμητικές ροές ως,

$$\mathbf{F}_{i-1/2}^n = \hat{\mathbf{A}}\mathbf{Q}_i^n - \hat{\mathbf{A}}^+(\mathbf{Q}_i^n - \mathbf{Q}_{i-1}^n), \quad (3.18)$$

$$\mathbf{F}_{i+1/2}^n = \hat{\mathbf{A}}\mathbf{Q}_i^n + \hat{\mathbf{A}}^-(\mathbf{Q}_{i+1}^n - \mathbf{Q}_i^n), \quad (3.19)$$

ή αλλιώς μπορούμε να γράψουμε

$$\mathbf{F}_{i-1/2}^n = \frac{1}{2}[\mathbf{f}(\mathbf{Q}_{i-1}) + \mathbf{f}(\mathbf{Q}_i)] - \frac{1}{2}|\hat{\mathbf{A}}|(\mathbf{Q}_i - \mathbf{Q}_{i-1}), \quad (3.20)$$

με  $|\hat{\mathbf{A}}| = \hat{\mathbf{A}}^+ - \hat{\mathbf{A}}^-$ , όπου  $\hat{\mathbf{A}}^+ = \hat{\mathbf{X}}\text{diag}(\hat{\lambda}_p^+)\hat{\mathbf{X}}^{-1}$  και  $\hat{\mathbf{A}}^- = \hat{\mathbf{X}}\text{diag}(\hat{\lambda}_p^-)\hat{\mathbf{X}}^{-1}$  με  $\hat{\mathbf{X}} = [\hat{\mathbf{r}}_1, \dots, \hat{\mathbf{r}}_p]$ .

### 3.3.1 F-wave παρουσίαση της μεθόδου

Η μέθοδος που παρουσιάστηκε παραπάνω μπορεί να γραφεί με τρόπο ο οποίος θα αποδειχθεί ιδιαίτερα χρήσιμος όταν προστεθούν πηγαίοι όροι στις εξισώσεις, οι οποίοι χρειάζονται για να χειριστούμε για παράδειγμα τον όρο της τοπογραφίας. Έχουμε δείξει ότι μια ασυνέχεια μπορεί να γραφεί ως:

$$\mathbf{Q}_i - \mathbf{Q}_{i-1} = \sum_{p=1}^m (\mathbf{W}_p)_{i-1/2}$$

τότε σε ένα γραμμικό πρόβλημα ή σε ένα μη γραμμικό το οποίο έχει γραμμικοποιηθεί τοπικά, χρησιμοποιώντας τον πίνακα του Roe  $\hat{\mathbf{A}}_{i-1/2}$ . Τα κύματα  $\mathbf{W}_p$  λαμβάνονται εκφράζοντας το  $\Delta\mathbf{Q}_{i-1/2} = \mathbf{Q}_i - \mathbf{Q}_{i-1}$  σαν γραμμικό συνδυασμό των ιδιοδιανυσμάτων του πίνακα. Δηλαδή  $(\mathbf{W}_p)_{i-1/2} = (\hat{\alpha}_p)_{i-1/2}(\hat{\mathbf{r}}_p)_{i-1/2}$  για τα βάρη  $(\hat{\alpha}_p)_{i-1/2}$  που όπως και στην παράγραφο 3.2 είναι

οι λύσεις του συστήματος  $\hat{\mathbf{a}}_{i-1/2} = \hat{\mathbf{X}}^{-1} \Delta \mathbf{Q}_{i-1/2}$ . Εναλλακτικά μπορούμε να γράψουμε την ασυνέχεια του  $\mathbf{f}(\mathbf{Q})$  ως γραμμικό συνδιασμό των ιδιοδιανυσμάτων του πίνακα

$$\mathbf{f}(\mathbf{Q}_i) - \mathbf{f}(\mathbf{Q}_{i-1}) = \sum_{p=1}^m (\beta_p)_{i-1/2} (\mathbf{r}_p)_{i-1/2} \equiv \sum_{p=1}^m (\mathbf{Z}_p)_{i-1/2}.$$

Εφόσον ο πίνακας  $\mathbf{A}$  ικανοποιεί τον περιορισμό (1), τότε έχουμε ότι

$$\mathbf{f}(\mathbf{Q}_i) - \mathbf{f}(\mathbf{Q}_{i-1}) = \hat{\mathbf{A}}_{i-1/2} (\mathbf{Q}_i - \mathbf{Q}_{i-1}) = \sum_{p=1}^m (\hat{\lambda}_p \mathbf{W}_p)_{i-1/2} = \sum_{p=1}^m (\mathbf{Z}_p)_{i-1/2}.$$

Άρα, εξάγουμε εύκολα ότι  $(\mathbf{Z}_p)_{i-1/2} = (\hat{\lambda}_p \mathbf{W}_p)_{i-1/2}$ . Τα διανύσματα  $\mathbf{Z}_p$  ονομάζονται f-κύματα. Επίσης για τους γραμμικοποιημένους επιλυτές Riemann θα ισχύει ότι :

$$(\mathbf{Z}_p)_{i-1/2} = \text{sgn}((\hat{\lambda}_p)_{i-1/2}) |(\hat{\lambda}_p)_{i-1/2}| (\mathbf{W}_p)_{i-1/2}$$

και από την (3.18) θα ισχύει ότι

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{i-1/2}^n &= \mathbf{f}(\mathbf{Q}_i) - \sum_{p=1}^m (\hat{\alpha}_p \hat{\lambda}_p^+ \hat{\mathbf{r}}_p)_{i-1/2} \\ &= \mathbf{f}(\mathbf{Q}_i) - \sum_{p=1}^m \frac{1}{2} \left( 1 + \text{sgn}((\hat{\lambda}_p)_{i-1/2}) \right) |(\hat{\lambda}_p)_{i-1/2}| (\mathbf{W}_p)_{i-1/2} \\ &= \mathbf{f}(\mathbf{Q}_i) - \sum_{p=1}^m \left( 1 + \text{sgn}((\hat{\lambda}_p)_{i-1/2}) \right) (\mathbf{Z}_p)_{i-1/2}, \end{aligned} \quad (3.21)$$

ή αλλιώς από την (3.20) μπορούμε να γράψουμε

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{i-1/2}^n &= \frac{1}{2} (\mathbf{F}_{i-1}^n + \mathbf{F}_i^n) - \frac{1}{2} \sum_{p=1}^m \left[ |\hat{\lambda}_p| \hat{\alpha}_p \hat{\mathbf{r}}_p \right]_{i-1/2} \\ &= \frac{1}{2} (\mathbf{F}_{i-1}^n + \mathbf{F}_i^n) - \frac{1}{2} \sum_{p=1}^m \text{sgn}((\hat{\lambda}_p)_{i-1/2}) (\mathbf{Z}_p)_{i-1/2}. \end{aligned} \quad (3.22)$$

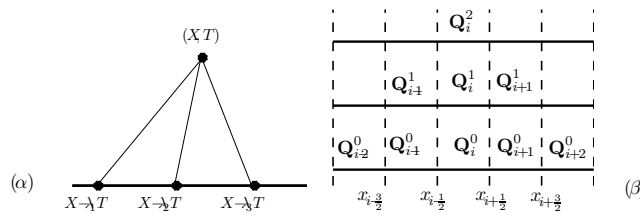
### 3.3.2 CFL συνθήκη

Εδώ δεν θα επικεντρωθούμε στην ανάλυση της συνέπειας και της ευστάθειας της μεθόδου. Κάτι τέτοιο μπορεί να βρεθεί στα [30],[29]. Θα αναφερθούμε μόνο στην συνθήκη CFL η οποία είναι μια αναγκαία συνθήκη ευστάθειας που πρέπει να ικανοποιείται από όλες τις μεθόδους πεπερασμένων όγκων και πεπερασμένων διαφορών έτσι ώστε να είναι ευσταθείς και να συγκλίνουν στην ακριβή λύση της εξίσωσης καθώς το πλέγμα εκλεπτύνεται. Για να διατυπώσουμε την παραπάνω συνθήκη πρέπει πρώτα να καθορίσουμε την έννοια του πεδίου εξάρτησης. Λύνοντας το γραμμικό πρόβλημα (3.6) στην παράγραφο 3.2.1 παρατηρήσαμε ότι η λύση σε ένα σημείο  $(X, T)$  εξαρτάται μόνο από τις αρχικές τιμές στα  $m$  σημεία,  $X - \lambda_p T$ ,  $p = 1, \dots, m$ . Το σύνολο των σημείων αυτών

$$D(X, T) = \{X - \lambda_p T : p = 1, \dots, m\} \quad (3.23)$$

ονομάζεται πεδίο εξάρτησης του σημείου  $(X, T)$  (Σχ. 3.3.1 (α)). Η τιμή των αρχικών δεδομένων σε άλλα σημεία δεν επιρρεάζει την τιμή της λύσης στο σημείο  $(X, T)$ .

Αντίστοιχα μπορούμε να καθορίσουμε και το αριθμητικό πεδίο εξάρτησης ως το σύνολο των σημείων όπου τα αρχικά αριθμητικά δεδομένα μπορούν να επιρρεάσουν την λύση σε ένα σημείο  $(X, T)$ . Η συγκεκριμένη μέθοδος που χρησιμοποιούμε γνωρίζουμε ότι είναι άμεση και ότι για τον υπολογισμό του  $Q_i^{n+1}$  χρειάζονται τα σημεία  $Q_{i-1}^n, Q_i^n, Q_{i+1}^n$ . Για παράδειγμα από το Σχήμα 3.3.1 (β) παρατηρούμε ότι το πεδίο εξάρτησης του σημείου  $(X, T) = (x_i, t^2)$  είναι μόνο τα αρχικά δεδομένα στο διάστημα  $X - 2\Delta x \leq x \leq X + 2\Delta x$ .



Σχήμα 3.3.1 (α) Πεδίο εξάρτησης του σημείου  $(X, T)$  για ένα υπερβολικό σύστημα τριών εξισώσεων με  $\lambda_1 < 0 < \lambda_2 < \lambda_3$  (β) Αριθμητικό πεδίο εξάρτησης για μια άμεση, τριών σημείων, πεπερασμένων όγκων μέθοδο.

**CFL συνθήκη 1** Μια αριθμητική μέθοδος συγκλίνει μόνο εάν το αριθμητικό πεδίο εξάρτησης περιέχει το πραγματικό πεδίο εξάρτησης της μερικής διαφορικής εξίσωσης, τουλάχιστον στο όριο καθώς  $\Delta t$  και  $\Delta x$  τείνουν στο μηδέν.

Από την παραπάνω συνθήκη οδηγούμαστε στην σχέση

$$\nu = \frac{\Delta t^n}{\Delta x} \max_p |\lambda_p^n| \leq 1. \quad (3.24)$$

Ο αριθμός  $\nu$  ονομάζεται αριθμός CFL ή αριθμός Courant. Συνεπώς, δοσμένου του αριθμού Courant μπορούμε να καθορίσουμε το χρονικό βήμα  $\Delta t^n$  από τη σχέση (3.24). Πρέπει να τονιστεί ότι η συνθήκη CFL είναι αναγκαία συνθήκη για ευστάθεια (και άρα για σύγκλιση) αλλά δεν είναι ικανή.

### 3.3.3 Εντροπική διόρθωση (Entropy Fix)

Όπως αναφέρθηκε και στο προηγούμενο κεφάλαιο, το γεγονός ότι χρησιμοποιούμε τον ολοκληρωτικό νόμο διατήρησης για να εξάγουμε τη γενική μορφή της αριθμητικής μεθόδου μας επιτρέπει την εμφάνιση ασυνεχειών, δεν μας εξασφαλίζει όμως ότι η λύση που θα πάρουμε θα είναι η φυσικά σωστή (εντροπική), εφόσον μπορούμε να έχουμε παραπάνω από μια ασθενής λύσεις. Συνεπώς η αριθμητική μέθοδος η οποία είναι βασισμένη στον ολοκληρωτικό νόμο διατήρησης υπάρχει περίπτωση να συγκλίνει σε μια ασθενή λύση η οποία παραβιάζει τις συνθήκες εντροπίας. Άρα



συχνά απαιτείται μια εντροπική διόρθωση. Για να καθορίσουμε τη διόρθωση χρειάζεται να μελετήσουμε τον επιλυτή Riemann του Roe που χρησιμοποιούμε.

Εφόσον χρησιμοποιούμε προσεγγιστικό επιλυτή, η πραγματική λύση σε ένα πρόβλημα Riemann, η οποία αποτελείται από  $m$  κύματα (οποιοδήποτε συνδυασμό κυμάτων αραιώσης και shock ) αντικαθίσταται από  $m$  ασυνέχειες, τοπικά σε κάθε κελί, οι οποίες μπορεί να προσεγγίζουν είτε shock είτε κύμα αραιώσης. Η δεύτερη περίπτωση είναι αυτή που παραβιάζει την εντροπία. Υπάρχει περίπτωση όμως η αντικατάσταση του ομαλού κύματος αραιώσης από το shock που παραβιάζει την εντροπία να μην επηρεάζει την αριθμητική λύση. Αυτό συμβαίνει γιατί τα κύματα που προκύπτουν από την επίλυση ενός προβλήματος Riemann στο μέτωπο κάθε κελιού αθροίζονται στα γειτονικά κελιά. Άρα εάν και οι δύο λύσεις παράγουν το ίδιο άθροισμα τότε δεν επηρεάζεται η συνολική λύση. Η μόνη περίπτωση που εξαιρείται είναι αυτή του υπερηχητικού κύματος αραιώσης.

**Υπερηχητικό κύμα αραιώσης** είναι ένα κύμα αραιώσης για το οποίο ισχύει  $\lambda_p < 0$  στα αριστερά του κύματος και  $\lambda_p > 0$  στα δεξιά του κύματος. Η δομή αυτού του κύματος έχει το χαρακτηριστικό ότι επικαλύπτει το μέτωπο του κελιού.

Για τις εξισώσεις ρηχών υδάτων, στην λύση του προβλήματος Riemann υπάρχει ένα ενδιάμεσο στάδιο  $\hat{\mathbf{Q}}_m$  ανάμεσα στα  $\mathbf{Q}_{i-1}, \mathbf{Q}_i$ . Οπότε υπολογίζοντας τις χαρακτηριστικές ταχύτητες εάν  $\lambda_{i-1} < 0 < \lambda_m$  τότε το 1-κύμα είναι υπερηχητικό κύμα αραιώσης. Εάν  $\lambda_m < 0 < \lambda_i$  τότε το 2-κύμα είναι υπερηχητικό κύμα αραιώσης. Για απλά συστήματα όπως είναι οι εξισώσεις ρηχών υδάτων μπορεί να υπολογιστεί [30] η πραγματική ενδιάμεση κατάσταση  $\mathbf{Q}_{i-1/2}$  που είναι λύση ενός προβλήματος Riemann στο  $x_{i-1/2}$  όταν ένα από τα δύο κύματα είναι υπερηχητικό κύμα αραιώσης. Για γενικά όμως συστήματα, δεν είναι εύκολο να βρέθει.

Ένας άλλος τρόπος για τον έλεγχο της ύπαρξης υπερηχητικού κύματος και την χρησιμοποίηση διόρθωσης, είναι ελέγχοντας ότι ο όρος ιξώδους στην αριθμητική ροή  $\mathbf{F}_{i-1/2}$  είναι πολύ μικρός. Σ' αυτήν την περίπτωση περιμένουμε η ιδιοτιμή  $\hat{\lambda}_{i-1/2}^p$  να είναι κοντά στο μηδέν. Τότε ο αντίστοιχος όρος στην ροή είναι κοντά στο μηδέν. Άρα μια διόρθωση εντροπίας είναι να αυξήσουμε το ιξώδες τροποποιώντας την αριθμητική ροή. Η διόρθωση αυτή ονομάζεται διόρθωση εντροπίας του Harten [21] και αναδιατυπώνονται οι ιδιοτιμές χωρίς ποτέ να πλησιάζουν κοντά στο μηδέν. Πιο συγκεκριμένα οι ιδιοτιμές  $|\hat{\lambda}_{i-1/2}^p|$  στην (3.16) αντικαθίστανται από την τιμή  $\phi_\delta(\hat{\lambda}_{i-1/2}^p)$  όπου  $\phi_\delta(\lambda)$  για ένα καθορισμένο αριθμό  $\delta$  είναι η συνάρτηση:

$$\phi_\delta(\lambda) = \begin{cases} |\lambda| & |\lambda| \geq \delta \\ \frac{\lambda^2 + \delta^2}{2\delta} & |\lambda| < \delta \end{cases} \quad (3.25)$$

Ο αριθμός  $\delta$  μπορεί να υπολογιστεί [16] σύμφωνα με τον παρακάτω τρόπο.

$$\begin{aligned} \delta_{i+1/2} &= \max [0, \hat{\lambda}_{i+1/2} - \lambda_i, \lambda_{i+1} - \hat{\lambda}_{i+1/2}], \\ \delta_{i-1/2} &= \max [0, \hat{\lambda}_{i-1/2} - \lambda_{i-1}, \lambda_i - \hat{\lambda}_{i-1/2}]. \end{aligned}$$

### 3.3.4 Πηγαίοι όροι

Μέχρι στιγμής θεωρούσαμε το ομογενές σύστημα  $\mathbf{q}_t + \mathbf{f}(\mathbf{q})_x = 0$ . όμως στις περισσότερες πραγματικές εφαρμογές υπάρχει και η τοπογραφία του βυθού, η οποία προσθέτει πηγαιούς όρους στις εξισώσεις ρηχών υδάτων. Δηλαδή έχουμε να αντιμετωπίσουμε την

$$\mathbf{q}_t + \mathbf{f}(\mathbf{q})_x = \mathbf{R}(\mathbf{q}).$$

Γένικα πρέπει να είμαστε προσεκτικοί με την διακριτοποίηση του πηγαίου όρου και στόχος μας είναι να αποτρέψουμε τη δημιουργία μη φυσικών αριθμητικών ταλαντώσεων, που οφείλονται σ' αυτήν έτσι ώστε κατά την ύπαρξη ισορροπίας να έχουμε στάσιμη λύση (παράγραφος 2.5). Υπάρχουν δυο τρόποι προσέγγισης του πηγαίου όρου για σχήματα τύπου Godunov.

$$\mathbf{Q}_i^{n+1} = \mathbf{Q}_i^n - \frac{\Delta t^n}{\Delta x} [\mathbf{F}_{i+\frac{1}{2}}^n - \mathbf{F}_{i-\frac{1}{2}}^n] + \Delta t^n \mathbf{R}_i^n$$

(1) Κατά σημείο, όπου ο πηγαίος όρος υπολογίζεται στους κόμβους, δηλαδή ως

$$\mathbf{R}_i^n \approx \Delta x \mathbf{R}(\mathbf{q}_i^n)$$

(2) Upwind προσέγγιση, δηλαδή ως

$$\mathbf{R}_i^n \approx \frac{\Delta x}{2} (\mathbf{R}_{i+1/2}^- + \mathbf{R}_{i-1/2}^+).$$

Εδώ χρησιμοποιείται ο δεύτερος τρόπος, αφού η κατά σημείο προσέγγιση δεν υπολογίζει ικανοποιητικά τις στάσιμες καταστάσεις της παραγράφου 2.5.

Για να υπολογίσουμε τον αριθμητικό πηγαίο όρο προβάλλουμε τον πηγαίο όρο στα ιδιοδιανύσματα του πίνακα του Roe [9] και λαμβάνουμε τις upwind προσεγγίσεις με  $\mathbf{R}_i = \mathbf{R}_{i-1/2}^+ + \mathbf{R}_{i+1/2}^-$  όπου

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{i-1/2}^+ &= \hat{\mathbf{A}}^+ \hat{\mathbf{A}}^{-1} \mathbf{R}_{i-1/2} \\ &= \frac{1}{2} (\hat{\mathbf{A}} + |\hat{\mathbf{A}}|) \hat{\mathbf{A}}^{-1} \mathbf{R}_{i-1/2} \\ &= \frac{1}{2} (\mathbf{I} + |\hat{\mathbf{A}}| \hat{\mathbf{A}}^{-1}) \mathbf{R}_{i-1/2} \\ &= \frac{1}{2} (\hat{\mathbf{X}} (\mathbf{I} + \hat{\mathbf{A}}^{-1} |\hat{\mathbf{A}}|) \hat{\mathbf{X}}^{-1}) \mathbf{R}_{i-1/2} \end{aligned} \quad (3.26)$$

και

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{i+1/2}^- &= \frac{1}{2} (\mathbf{I} - |\hat{\mathbf{A}}| \hat{\mathbf{A}}^{-1}) \mathbf{R}_{i+1/2} \\ &= \frac{1}{2} (\hat{\mathbf{X}} (\mathbf{I} - \hat{\mathbf{A}}^{-1} |\hat{\mathbf{A}}|) \hat{\mathbf{X}}^{-1}) \mathbf{R}_{i+1/2} \end{aligned} \quad (3.27)$$

Ξαναγυρίζοντας στον τρόπο γραφής χρησιμοποιώντας τα f-κύματα, ενσωματώνουμε πλέον στην διαφορά των ροών και τον πηγαίο όρο, δηλαδή,

$$\mathbf{f}(\mathbf{Q}_i) - \mathbf{f}(\mathbf{Q}_{i-1}) - \Delta x \mathbf{R}_{i-1/2} = \sum_{p=1}^m (\mathbf{Z}_p)_{i-1/2} \quad (3.28)$$

Όπου  $\mathbf{R}_{i-1/2}$  είναι μια διακριτοποίηση του πηγαίου όρου. Εφόσον ο πίνακας  $\mathbf{A}_{i-1/2}$  ικανοποιεί την συνθήκη του Roe γνωρίζουμε ότι  $(\mathbf{Z}_p)_{i-1/2} = (\hat{\lambda}_p \mathbf{W}_p)_{i-1/2} = (\beta_p \mathbf{r}_p)_{i-1/2}$ . Η (3.26) γράφεται

$$\mathbf{R}_{i-1/2} = \frac{1}{\Delta x} \sum_{p=1}^m \hat{\beta}_p \mathbf{r}_{pi-1/2}, \quad (3.29)$$

και βρίσκουμε τα βάρη  $\beta$  λύνοντας το σύστημα  $\hat{\beta} = \hat{\mathbf{X}}^{-1} \mathbf{R}$ , οπότε λαμβάνουμε

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\hat{c}\Delta b}{2}, \quad \hat{\beta}_2 = -\frac{\hat{c}\Delta b}{2}. \quad (3.30)$$

Για τις εξισώσεις ρηχών υδάτων προκύπτει ότι

$$\mathbf{R}_{i-1/2} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2}g(h_i + h_{i-1})(b_i - b_{i-1}) \end{bmatrix} \quad (3.31)$$

Με αντικατάσταση του (3.31) στην (3.26) και (3.27) και εκτελώντας τις πράξεις προκύπτει ότι

$$\mathbf{R}_{i-1/2}^+ = \frac{1}{2} \sum_{p=1}^m [\hat{\beta}_p \hat{r}_p (1 + \text{sgn}(\hat{\lambda}_p))]_{i-1/2}, \quad (3.32)$$

$$\mathbf{R}_{i+1/2}^- = \frac{1}{2} \sum_{p=1}^m [\hat{\beta}_p \hat{r}_p (1 - \text{sgn}(\hat{\lambda}_p))]_{i+1/2}. \quad (3.33)$$

Στην περίπτωση όπου θέλουμε να συμπεριλάβουμε στο αριθμητικό σχήμα και την τριβή, σημαίνει ότι στον πηγαίο όρο προστίθεται ο όρος τριβής (ο οποίος είναι μάλιστα ένας άκαμπτos όρος)

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 0 \\ -ghS_f \end{bmatrix}$$

τον οποίο και διακριτοποιούμε σημειακά, με έμμεσο ή ημί-άμεσο τρόπο, για να αποφευχθούν οι ταλαντώσεις όταν ο συντελεστής τριβής είναι μεγάλος, λόγω της έλλειψης χωρικών παραγώγων στον όρο. Άρα μπορούμε να γράψουμε το σχήμα ως εξής.

$$\mathbf{Q}_i^{n+1} = \frac{\mathbf{Q}_i^n - (\Delta t^n / \Delta x)(\mathbf{F}_{i+1/2}^n - \mathbf{F}_{i-1/2}^n) - (\Delta t^n / \Delta x)\mathbf{R}_i^n - \Delta t^n \theta \mathbf{S}_i^n}{1 - (1 - \theta)\Delta t^n \mathbf{S}_i^n / \mathbf{Q}_i^n} \quad (3.34)$$

όπου το  $\theta$  είναι ο βαθμός αμεσότητας για τον όρο της τριβής:  $\theta = 1$  αντιστοιχεί σε μια εντελώς έμμεση χρήση ενώ  $\theta = 0$  σε μια εντελώς άμεση [8].

### 3.3.5 C-ιδιότητα

Θεωρούμε τη λύση των εξισώσεων ρηχών υδάτων σε κατάσταση ηρεμίας όπως δείξαμε στην παράγραφο 2.5. Δηλαδή

$$u(x, t) = 0 \quad \text{και} \quad h(x, t) = D - b(x, t).$$

Για την συγκεκριμένη σταθερή κατάσταση  $\mathbf{q}_t = 0$ , άρα η συνάρτηση ροής και ο πηγαίος όρος βρίσκονται σε ισορροπία.

$$\mathbf{f}(\mathbf{q})_x = \mathbf{R}$$

Συνεπώς ένα ακριβές αριθμητικό σχήμα θα πρέπει να κρατάει επίσης σε ισορροπία την αριθμητική ροή με την προσέγγιση του πηγαίου όρου.

$$\mathbf{F}_{i+1/2} - \mathbf{F}_{i-1/2} = \mathbf{R}_i$$

Εάν το αριθμητικό σχήμα δεν ικανοποιεί την C-ιδιότητα τότε μπορεί να προκρίψουν ταλαντώσεις στα αριθμητικά αποτελέσματα.

**Ορισμός 3.3.1** Ένα αριθμητικό σχήμα λέμε ότι ικανοποιεί την  $C$ -ιδιότητα εάν λύνει ακριβώς τις σταθερές καταστάσεις, όπου το υγρό βρίσκεται σε ισορροπία, δηλαδή

$$u \equiv 0, \quad h \equiv D - b. \quad (3.35)$$

Όπου  $D$  είναι σταθερά τέτοια ώστε  $D > \max \{b(x), x \in [0, L]\}$ .

**Θεώρημα 3.3.1** Έστω ένα αριθμητικό σχήμα της μορφής (3.34) χωρίς τον όρο τριβής και ότι η λύση για το πρόβλημα σε ισορροπία (3.35) είναι της μορφής

$$\hat{\mathbf{Q}}_i = \begin{bmatrix} h(x_i) \\ h(x_i)u(x_i) \end{bmatrix} \quad (3.36)$$

Εάν για κάθε  $i$  ισχύει ότι

$$\mathbf{A}_{i+1/2}(\hat{\mathbf{Q}}_{i+1} - \hat{\mathbf{Q}}_i) = \mathbf{F}(\hat{\mathbf{Q}}_{i+1}) - \mathbf{F}(\hat{\mathbf{Q}}_i), \quad (3.37)$$

$$\mathbf{A}_{i+1/2}(\hat{\mathbf{Q}}_{i+1} - \hat{\mathbf{Q}}_i) = \mathbf{R}_{i+1/2}, \quad (3.38)$$

τότε το αριθμητικό σχήμα ικανοποιεί την  $C$ -ιδιότητα.

Η απόδειξη δίνεται στο [11].

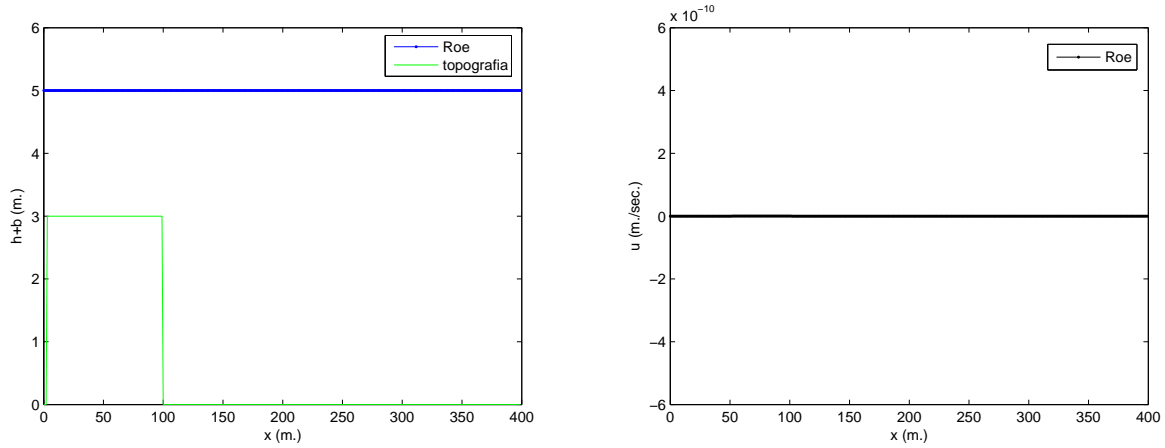
Για να δείξουμε ότι το αριθμητικό σχήμα του Roe που χρησιμοποιούμε ικανοποιεί την  $C$ -ιδιότητα αρκεί σύμφωνα με το παραπάνω θεώρημα να δείξουμε ότι ισχύουν οι σχέσεις (3.37), (3.38) για  $\mathbf{A}_{i+1/2} = \hat{\mathbf{A}}_{i+1/2}$  τον πίνακα του Roe και με  $\hat{\mathbf{Q}}_i$  τη λύση για το πρόβλημα σε ισορροπία. Γνωρίζουμε ότι ισχύει η συνθήκη του Roe δηλ

$$\hat{\mathbf{A}}_{i+1/2}(\hat{\mathbf{Q}}_{i+1} - \hat{\mathbf{Q}}_i) = \mathbf{F}(\hat{\mathbf{Q}}_{i+1}) - \mathbf{F}(\hat{\mathbf{Q}}_i),$$

άρα αρκεί να αποδείξουμε ότι ισχύει η (3.38)

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{A}}_{i+1/2}(\hat{\mathbf{Q}}_{i+1} - \hat{\mathbf{Q}}_i) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -(\hat{u}_{i+1/2})^2 + (\hat{c}_{i+1/2})^2 & \hat{u}_{i+1/2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \hat{h}_{i+1/2} \\ \Delta(\hat{h}\hat{u})_{i+1/2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ (\hat{c}_{i+1/2})^2(\hat{h}_{i+1} - \hat{h}_i) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ (\hat{c}_{i+1/2})^2(D - b_{i+1} - D + b_i) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ -(\hat{c}_{i+1/2})^2(\hat{b}_{i+1} - \hat{b}_i) \end{bmatrix} = \mathbf{R}_{i+1/2}. \end{aligned}$$

Άρα το σχήμα του Roe δίνει ικανοποιητική λύση, χωρίς καμία τροποποίηση στην περίπτωση που υπάρχει ισορροπία και  $D > \max \{b(x), x \in [0, L]\}$  δηλαδή όταν δεν εμφανίζονται στεγανά (Σχ. 3.3.2). Στην περίπτωση που εμφανίζονται, ο προσεγγιστικός επιλυτής Riemann του Roe αποτυγχάνει στον υπολογισμό και παρουσιάζεται αρνητικό βάθος στο υπολογιστικό κελί όπου υπάρχει στεγανό [30]. Άρα πρέπει να εφαρμοστεί, ένας ιδιαίτερος χειρισμός έτσι ώστε το σχήμα να διατηρεί την κατάσταση ισορροπίας.



Σχήμα 3.3.2. Λύση του σχήματος του Roe σε ισορροπία, για χρόνο  $t = 1000 \text{ sec}$ . Βάθος (αριστερά) και ταχύτητα (δεξιά).

Στο σχήμα (3.3.2) παρουσιάζεται ένα αριθμητικό παράδειγμα το οποίο εφαρμόζεται προς απόδειξη του ότι το σχήμα κρατάει ισορροπία. Παρατηρούμε ότι ο πυθμένας έχει ύψος  $3m$  από το  $1m$  έως τα  $100m$  και το νερό έχει βάθος  $5m$  με μηδενική ταχύτητα. Πάρα την ασυνέχεια που υπάρχει στο βυθό βλέπουμε ότι δεν υπάρχουν αριθμητικές ταλαντώσεις στη λύση και διατηρείται η στάσιμη κατάσταση καθώς  $t \rightarrow \infty$ .

### 3.4 Αντιμετώπιση υγρών/στεγανών καταστάσεων

Όπως αναφέρθηκε και στην προηγούμενη ενότητα ο επιλυτής του Roe αποτυγχάνει κατά την εμφάνιση στεγανών στο βυθό λόγω της πιθανής παρουσίας αρνητικού βάθους στο κελί όπου εμφανίζεται το στεγανό. Άρα χρειάζεται μια ιδιαίτερη αντιμετώπιση έτσι ώστε να αποφευχθεί η μη φυσική εμφάνιση αρνητικού βάθους. Για να βεβαιώσουμε ότι το αριθμητικό σχήμα μπορεί να ανταποκριθεί σωστά στην εμφάνιση στεγανών είναι λογικό πρώτα να βεβαιώσουμε ότι λύνει σωστά σταθερές καταστάσεις οι οποίες περιέχουν στεγανό.

**Ορισμός 3.4.1** Ένα αριθμητικό σχήμα λέμε ότι ικανοποιεί την γενικότερη μορφή της C-ιδιότητας εάν λύνει ακριβώς τις σταθερές καταστάσεις της μορφής

$$u \equiv 0, \quad h(x) = \begin{cases} D - b(x) & \text{αν } b(x) < D \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}, \quad (3.39)$$

όπου  $D$  σταθερά.

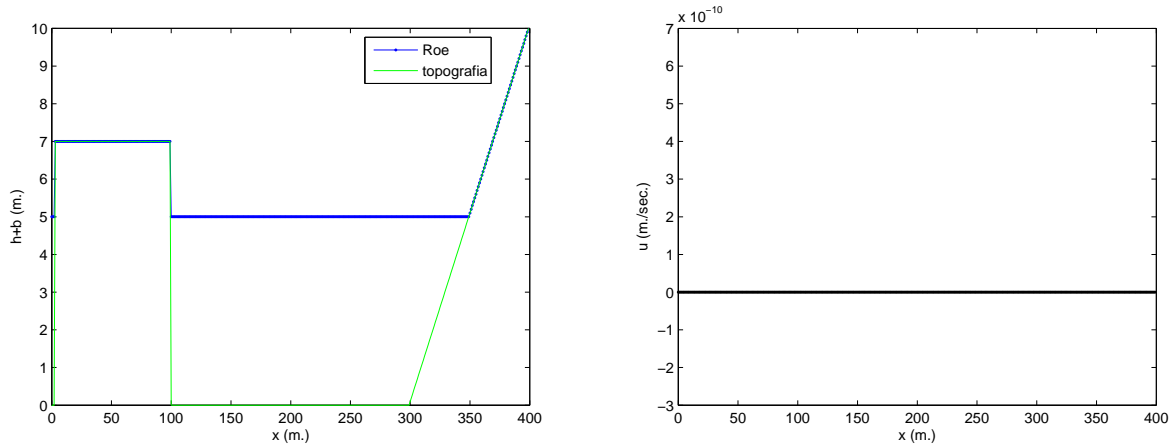
Προφανώς το Θεώρημα 3.3.1 ισχύει για την παραπάνω γενικευμένη μορφή της C-ιδιότητας. Παρ' όλα αυτά όμως δεν ικανοποιείται, για το σχήμα του Roe η ιδιότητα (3.37). Έστω μια σταθερή κατάσταση της μορφής (3.38). Θεωρώντας ένα υγρό κελί  $I_i$  και δίπλα σε αυτό ένα στεγανό  $I_{i+1}$  έχουμε

$$\mathbf{A}_{i+1/2}(\mathbf{Q}_{i+1} - \mathbf{Q}_i) = \begin{bmatrix} 0 \\ (c_{i+1/2}^n)^2 (h_{i+1}^n - h_i^n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ (c_{i+1/2}^n)^2 (b(x_i) - D) \end{bmatrix} \neq \mathbf{R}_{i+1/2}.$$

Η τροποποίηση η οποία γίνεται στον πηγαίο όρο έτσι ώστε να υπερβούμε το παραπάνω πρόβλημα είναι η εξής [11]:

$$\mathbf{R}_{i+1/2} = \begin{cases} \begin{bmatrix} 0 \\ -(c_{i+1/2}^n)^2 h_i^n \end{bmatrix}, & \text{αν } h_i^n < b(x_{i+1}) - b(x_i), \\ \begin{bmatrix} 0 \\ (c_{i+1/2}^n)^2 h_{i+1}^n \end{bmatrix}, & \text{αν } h_{i+1}^n < b(x_i) - b(x_{i+1}), \\ \begin{bmatrix} 0 \\ -(c_{i+1/2}^n)^2 (b(x_{i+1}) - b(x_i)) \end{bmatrix}, & \text{αλλιώς} \end{cases} \quad (3.40)$$

Όταν ο βυθός αναδύεται σε ένα κελί, ο πηγαίος όρος επαναπροσδιορίζεται στο κελί όπου υπάρχει στεγανό έτσι ώστε να αποφευχθεί η εμφάνιση πλαστών δυνάμεων πίεσης. Με την παραπάνω αντιμετώπιση ο επιλυτής του Roe κρατάει ισορροπία και στην περίπτωση εμφάνισης στεγανών (Σχ 3.4.1).



Σχήμα 3.4.1. Λύση του σχήματος του Roe σε ισορροπία, για χρόνο  $t = 1000\text{sec}$ . Βάθος (αριστερά) και ταχύτητα (δεξιά).

Παρόλο που η παραπάνω διακριτοποίηση για τον πηγαίο όρο επιτρέπει την ανάδυση βυθού για ρευστά σε ηρεμία πρέπει να γίνουν περισσότερες διορθώσεις στο αριθμητικό σχήμα για την περίπτωση ρευστού σε κίνηση, ( $u \neq 0$ ) αλλιώς υπάρχει περίπτωση το ρευστό να κάνει υπερπήδηση. Στο [9] οι καταστάσεις ανάδυσης βυθού, αντιμετωπίζονται θέτωντας την συνθήκη

$$u_{i+1}^n = 0 \quad (3.41)$$

στο υγρό κελί, για να προσομοιώσουμε την μετακίνηση του ρευστού κατά μήκος του στεγανού κελιού.

Στο [18] αναφέρεται ότι με την παραπάνω αντιμετώπιση δεν προσομοιώνεται σωστά η κίνηση. Οι ταχύτητες που υπολογίζονται στο μέτωπο του κύματος είναι μικρότερες από αυτές που παίρνουμε πειραματικά. Το παραπάνω σφάλμα επηρεάζει ιδιαίτερα στην περίπτωση όπου το νερό προχωράει σε στεγανό κελί αυξανόμενου βάθους. Η βελτιστοποίηση η οποία προτείνεται είναι: η παραπάνω διόρθωση εφαρμόζεται μόνο αν το νερό ρέει προς τοπογραφία αυξανόμενου βάθους, δηλαδή

$$\text{sgn}(u_i^n) = \text{sgn}(b_{i+1} - b_i). \quad (3.42)$$

Αυτή η διόρθωση βελτιώνει τις ταχύτητες που υπολογίζονται στο μέτωπο μεταξύ υγρού και στεγανού κελιού, αλλά αρνητικές τιμές βάρους εμφανίζονται στα στεγανά κελιά.

### 3.4.1 Διόρθωση

Στο [11] προτείνεται μια διαφοροποίηση του σχήματος του Roe βασισμένη στην διαπίστωση ότι η συνθήκη (3.40) είναι φυσικό να εφαρμοστεί μόνο στο μέτωπο και όχι σε όλο το βρεγμένο κελί. Άρα πρέπει να αντιμετωπιστεί ως εσωτερική συνοριακή συνθήκη του προβλήματος. Για την ακρίβεια το μέτωπο ανάμεσα στα δύο κελιά είναι ένα ελεύθερο σύνορο. Για να εφαρμοστεί αυτό προτείνεται η παρακάτω διαδικασία: Έστω ότι έχουμε μια κατάσταση όπου ο βυθός αναδύεται στο  $x_{i+1/2}$  στο χρόνο  $t_n$ ,  $I_i$  είναι το βρεγμένο κελί και  $I_{i+1}$  είναι το στεγανό. Δηλαδή

$$\mathbf{Q}_{i+1}^n = [0, 0]^T$$

- Υπολογίζεται ο τροποποιημένος πηγαίος όρος.
- Μια νέα κατάσταση  $\tilde{\mathbf{Q}}_i^n$  ορίζεται ως

$$\tilde{\mathbf{Q}}_i^n = \begin{bmatrix} h_i^n \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.43)$$

- $\mathbf{Q}_i^{n+1}$  και  $\mathbf{Q}_{i+1}^{n+1}$  υπολογίζονται χρησιμοποιώντας το σχήμα (3.1), τις αριθμητικές ροές (3.20), και τον τροποποιημένο πηγαίο όρο, αποτιμημένα στις καταστάσεις  $\tilde{\mathbf{Q}}_i^n$ ,  $\mathbf{Q}_{i+1}^n$ .

Ομοίως δουλεύουμε και στην περίπτωση όπου το  $I_i$  κελί είναι στεγανό και το  $I_{i+1}$  υγρό, ενώ όταν δεν υπάρχει ανάδυση βυθού το σχήμα του Roe χρησιμοποιείται χωρίς καμία τροποποίηση.

Η μοναδική διαφοροποίηση που εισάγουμε στη διόρθωση σε σχέση με το [11] είναι ότι εφαρμόζεται όχι σε κάθε περίπτωση που συνορεύει ένα στεγανό με ένα υγρό κελί αλλά μόνο στην περίπτωση όπου το ρευστό κινείται προς την τοπογραφία. Για παράδειγμα αν στο  $i$  κελί η ταχύτητα έχει θετικό πρόσημο, η διόρθωση θα εφαρμοστεί μόνο στην περίπτωση που το κελί  $i+1$  είναι στεγανό. Αν το  $i-1$  είναι στεγανό δεν θα εφαρμοστεί. Για να επιβεβαιώσουμε ότι η παραπάνω διόρθωση στο σχήμα του Roe δίνει ακριβή αποτελέσματα εφαρμόζουμε δύο προβλήματα δοκιμής που παρουσιάζονται στις επόμενες δυο παραγράφους [11].

### 3.4.2 Πρόβλημα 1. Διατήρηση Μάζας

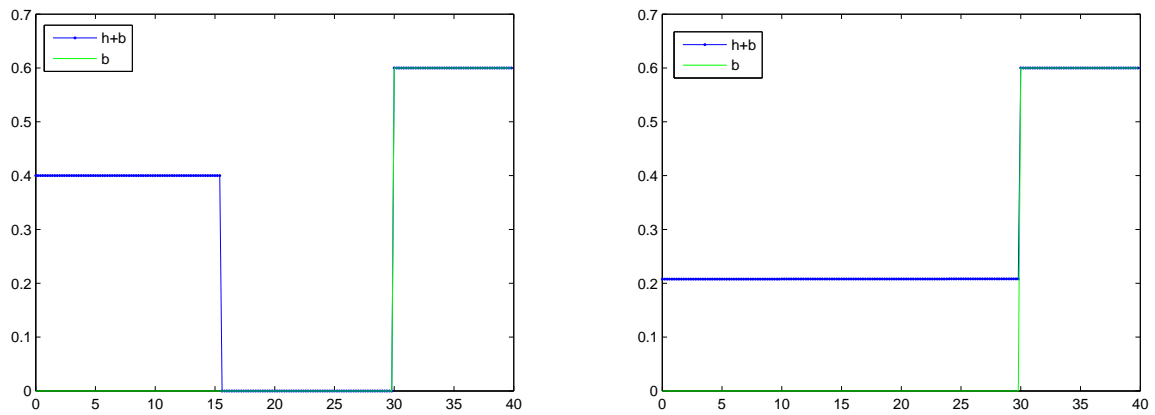
Ο στόχος αυτού του προβλήματος είναι να επιβεβαιώσουμε ότι η μάζα διατηρείται, όταν εφαρμόζουμε την διόρθωση κατά την εμφάνιση στεγανών. Θεωρούμε ένα κανάλι με τοπογραφία

$$b(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < 30 \\ 0.6 & 30 \leq x \leq 40 \end{cases}$$

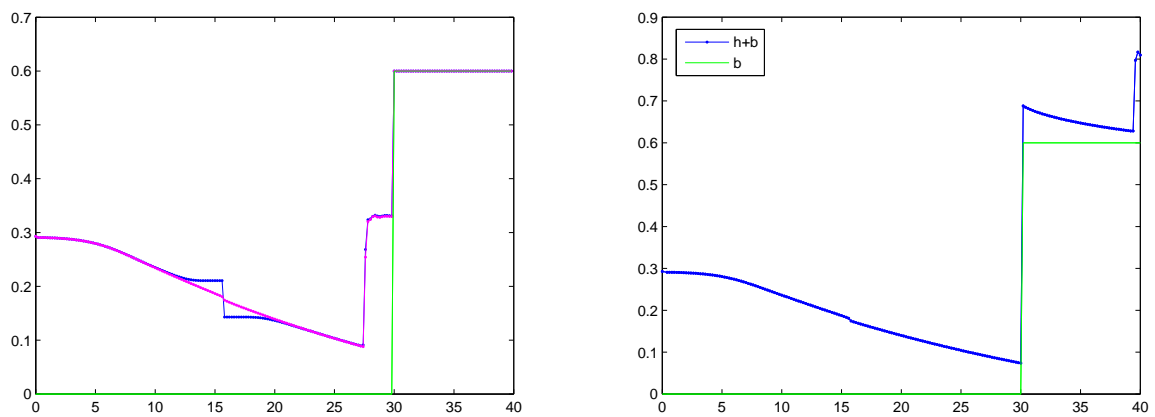
και σε αυτό εφαρμόζουμε ένα ιδεατό πρόβλημα κατάρρευσης φράγματος. Το φράγμα τοποθετείται στα 15.5 m και οι αρχικές συνθήκες για το βάθος του νερού είναι:

$$h(x, 0) = \begin{cases} 0.4, & 0 \leq x < 15.5 \\ 0, & 15.5 \leq x \leq 40 \end{cases}$$

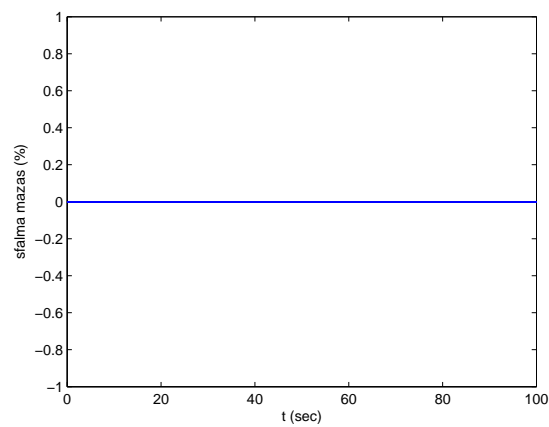
Οι συνοριακές συνθήκες που εφαρμόζουμε στο  $x = 0$  είναι ανάκλασης και για  $x = 40$  έχουμε συνοριακές συνθήκες ελεύθερης ροής.



Σχήμα 3.4.2. Οι αρχικές συνθήκες του προβλήματος (αριστερά) και λύση μετά από χρόνο  $t=1000$  sec. (δεξιά)



Σχήμα 3.4.3. Με τη διόρθωση (3.4.1) και χωρίς εντροπική διόρθωση (μπλέ), με εντροπική διόρθωση (ροζ) (αριστερά), χωρίς τη διόρθωση (3.4.1) (δεξιά) για χρόνο  $t = 10$  sec



Σχήμα 3.4.4. Διατήρηση μάζας



Στα παραπάνω γραφήματα βλέπουμε τη λύση σε χρόνο  $t = 10$  δευτερόλεπτα. Η λύση δίνεται τόσο για την περίπτωση όπου εφαρμόζεται η διόρθωση της παραγράφου 3.4.1 όσο και την περίπτωση που το σχήμα του Roe εφαρμόζεται χωρίς διόρθωση. Παρατηρούμε υπερπήδηση του νερού όταν δεν εφαρμόζεται η διόρθωση (δεξιά), ενώ με τη χρήση της βλέπουμε την διάδοση ενός κύματος (shock), το οποίο δημιουργείται όταν το νερό "χτυπήσει" στον τοίχο. Επίσης βλέπουμε την διαφορά ανάμεσα στη λύση χρησιμοποιώντας την συνθήκη εντροπίας, και στην μη εντροπική λύση. Στο σχήμα 3.4.4 φαίνεται η χρονική μεταβολή του σφάλματος μάζας, όπου:

$$\text{σφάλμα μάζας}(\%) = \frac{m^n - m_I}{m_I}$$

όπου  $m^n$  είναι η μάζα στο χρόνο  $t^n$  και  $m_I$  η μάζα στο χρόνο  $t^0$ . Η διατήρηση μάζας που προκύπτει είναι της τάξης του  $10^{-15}$ .

### 3.4.3 Πρόβλημα 2. Shock πάνω σε ένα στέρεο τοίχο

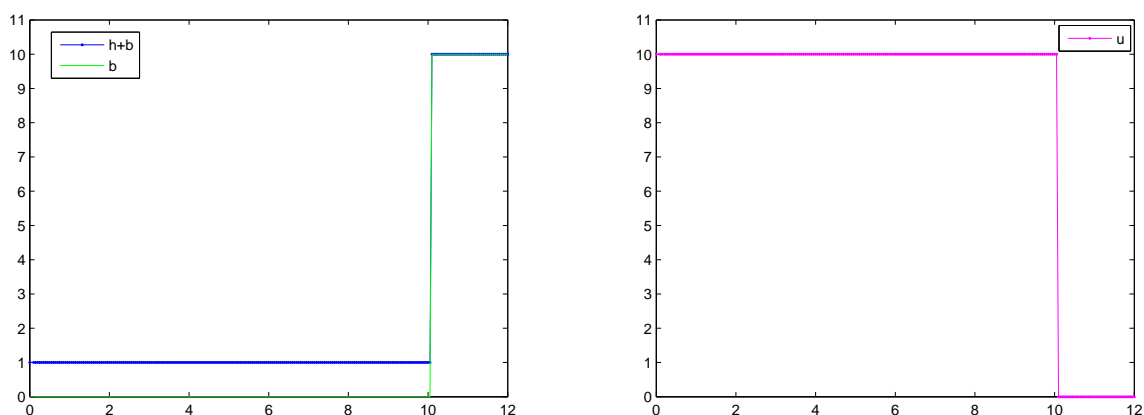
Σε αυτό το αριθμητικό πείραμα θεωρούμε μια στήλη νερού ύψους  $1m$  η οποία κινείται προς ένα κατακόρυφο τοίχο με ταχύτητα  $10m/s$ . Το κανάλι έχει μήκος  $12$  μέτρα και ο βυθός δίνεται από την συνάρτηση

$$b(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < 10 \\ 10, & 10 \leq x \leq 12. \end{cases}$$

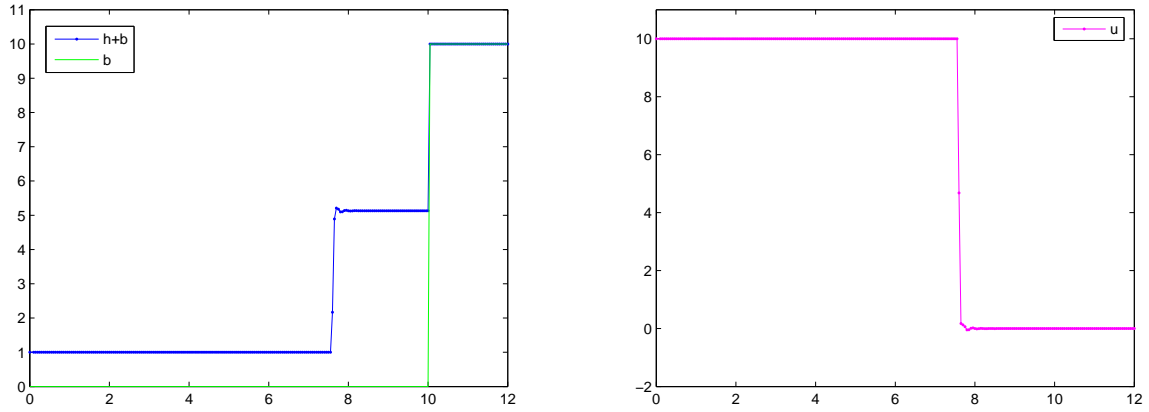
Οι αρχικές συνθήκες δίνονται από:

$$h(x, 0) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x < 10, \\ 0, & 10 \leq x \leq 12 \end{cases}, \quad hu(x, 0) = \begin{cases} 10, & 0 \leq x < 10, \\ 0, & 10 \leq x < 12 \end{cases}$$

Για τις συνοριακές συνθήκες θεωρούμε, στο  $x = 0$   $h(0, t) = 1$ ,  $hu(0, t) = 10$ . ενώ για  $x = 12$  θεωρούμε συνοριακές συνθήκες ελεύθερης ροής. Εδώ  $\Delta x = 0.05$ ,  $CFL = 0.9$ .



Σχήμα 3.4.5. Αρχικές συνθήκες για το βάθος  $h$  (αριστερά) και την ταχύτητα  $u$  (δεξιά) ( $t = 0$ )



Σχήμα 3.4.6. Η λύση σε χρόνο  $t = 1$  για βάθος και ταχύτητα χρησιμοποιώντας διόρθωση.

Το παραπάνω αριθμητικό παράδειγμα έχει ως στόχο να δείξει ότι πάρα τις ακραίες καταστάσεις βυθού και το γεγονός της ύπαρξης αρχικής ταχύτητας στο νερό που περιβάλλει την τοπογραφία, ο επιλύτης του Roe με την χρήση της διόρθωσης της παραγράφου 3.4.1 συμπεριφέρεται σωστά. Συγκρίνοντας τα αριθμητικά αποτελέσματα με αυτά που αντιστοιχούν στην ακριβή λύση [11], παρατηρούμε σωστή συμπεριφορά χωρίς υπερπήδηση του νερού με μόνο μια μικρή διατάραξη κοντά στο κύμα που διαδίδεται, το οποίο είναι κύμα τύπου shock.

### 3.5 Αριθμητικά σχήματα υψηλότερης τάξης

Τα κλασικά σχήματα δεύτερης χωρικής τάξης, για παράδειγμα το κλασικό σχήμα των Lax-Wendroff, παρουσιάζουν αριθμητική διασπορά [30],[45] και εμφανίζουν μη φυσικές ταλαντώσεις κοντά στις ασυνέχειες. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι τα δεύτερης τάξης αριθμητικά σχήματα δεν ικανοποιούν την ιδιότητα της λεγόμενης μείωσης της ολικής κύμανσης (Total Variation Diminishing) [21], η οποία αναλύεται στην αμέσως επόμενη ενότητα. Για αυτόν τον λόγο κατασκευάζουμε ένα αριθμητικό σχήμα το οποίο ικανοποιεί την TVD ιδιότητα χρησιμοποιώντας ένα δεύτερης τάξης σχήμα στις ομαλές περιοχές της λύσης και προσθέτοντας όρους αριθμητικής διάχυσης (απόσβεσης) κοντά στις ασυνέχειες. Αυτά τα σχήματα τα ονομάζουμε σχήματα υψηλής ανάλυσης (high resolution), τα οποία είναι τουλάχιστον δεύτερης τάξης στις ομαλές λύσεις και ελαχιστοποιούν τις ταλαντώσεις κοντά στις ασυνέχειες.

#### 3.5.1 Μείωση της ολικής κύμανσης (TVD)

Έστω ο βαθμωτός νόμος διατήρησης

$$q_t + f(q)_x = 0 \quad (3.44)$$

ο οποίος μπορεί να προσεγγιστεί αριθμητικά χρησιμοποιώντας το συντηρητικό σχήμα

$$q_i^{n+1} = q_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (f_{i+1/2}^n - f_{i-1/2}^n).$$

Η ακριβής λύση ενός βαθμωτού νόμου διατήρησης έχει ολική κύμανση

$$TV(q) = \int |q_x| dx.$$

Για βαθμωτούς νόμους διατήρησης η παραπάνω ιδιότητα μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να ελαχιστοποιηθούν οι ταλαντώσεις που παρουσιάζονται στα αριθμητικά σχήματα. Δυστυχώς αυτή η ιδιότητα δεν έχει πλήρως αποδειχθεί για συστήματα εξισώσεων όμως τα κριτήρια σχεδισμού, βασισμένα σε αυτήν, μπορούν να χρησιμοποιηθούν για ελάττωση των ταλαντώσεων. Ο Harten [21] απέδειξε ότι ένα αριθμητικό σχήμα ικανοποιεί την TVD ιδιότητα αν ισχύει

$$TV(q^{n+1}) \leq TV(q^n),$$

όπου

$$TV(q^{n+1}) = \sum_i |q_{i+1}^{n+1} - q_i^{n+1}|.$$

Για βαθμωτούς νόμους διατήρησης, αν ένα αριθμητικό σχήμα ικανοποιεί την TVD ιδιότητα τότε δεν εμφανίζονται ταλαντώσεις στα αριθμητικά αποτελέσματα. Ένας τρόπος για να διαπιστώσουμε αν ένα αριθμητικό σχήμα είναι TVD προκύπτει από το παρακάτω θεώρημα του Harten.

**Θεώρημα του Harten [21] 3.5.1** Έστω μια γενική μέθοδος της μορφής

$$q_i^{n+1} = q_i^n + D_i^n(q_{i+1}^n - q_i^n) - C_{i-1}^n(q_i^n - q_{i-1}^n)$$

όπου οι συντελεστές  $D_i^n, C_{i-1}^n$  έχουν κάποιες αυθαίρετες τιμές ( οι οποίες μπορεί να εξαρτώνται και από το  $q^n$ , δηλαδή η μέθοδος να είναι μη γραμμική). Τότε

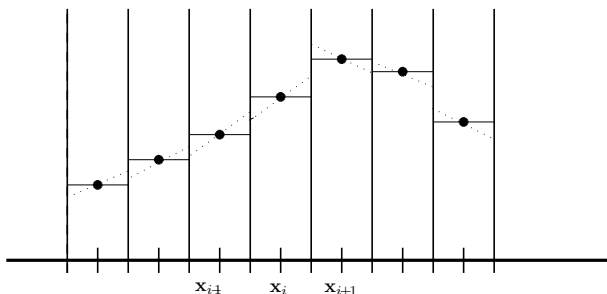
$$TV(q^{n+1}) \leq TV(q^n)$$

αρκεί να ικανοποιούνται οι ανισότητες:

$$C_{i-1}^n \geq 0, \quad D_i \geq 0, \quad 0 \leq C_i + D_i \leq 1$$

για κάθε  $i$ .

### 3.5.2 Slope-Limiting



Σχήμα 3.5.1. Αναπαράσταση της λύσης κατά τμήματα σταθερή (συμπαγή γραμμή) και κατά τμήματα γραμμική (διακεκομμένη γραμμή).

Ένας τρόπος για να λάβουμε ένα υψηλής ανάλυσης σχήμα είναι χρησιμοποιώντας μια γεωμετρική προσέγγιση. Μέχρι τώρα θεωρούσαμε την προσέγγιση της λύσης κατά τμήματα γραμμική σε κάθε κελί και λαμβάνουμε μια μέθοδο πρώτης τάξης στο χώρο. Για πετύχουμε δεύτερης τάξης ακρίβεια αρκεί να θεωρήσουμε μια γραμμική προσέγγιση της λύσης σε κάθε κελί. Μια εκτενής περιγραφή γίνεται στο βιβλίο του LeVeque [30]. Για να λάβουμε μια slope -limiter (οριοθέτη-κλίση) μέθοδο πρέπει να ακολουθήσουμε την εξής διαδικασία:

1. Χρησιμοποιώντας τα αριθμητικά δεδομένα  $q_i^n$  κατασκευάζουμε κατά τμήματα γραμμικές συναρτήσεις της μορφής:

$$\tilde{q}^n(x, t^n) = q_i^n + \sigma_i^n(x - x_i), \quad x_{i-1/2} < x < x_{i+1/2}$$

και  $\sigma_i^n = \frac{\Delta_i q}{\Delta x}$  είναι η κλίση στο  $i$  κελί η οποία κατασκευάζεται με βάση τα αριθμητικά δεδομένα (Σχ. 3.5.1).

2. Υπολογίζουμε την ακριβή λύση ενός γενικευμένου προβλήματος Riemann για την (3.44) χρησιμοποιώντας την κατά τμήματα γραμμική συνάρτηση.
3. Υπολογίζεται ο μέσος όρος της ακριβής λύσης

$$q_i^{n+1} = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \tilde{q}^n(x, t^{n+1}) dx$$

έτσι ώστε να πάρουμε τις νέες προσεγγίσεις  $q_i^{n+1}$

Για παράδειγμα θεωρώντας την βαθμωτή εξίσωση μεταφοράς  $q_t + uq_x = 0$  η οποία γνωρίζουμε ότι έχει ακριβή λύση  $q(x, t) = q(x - ut, 0)$ . Κατασκευάζοντας την γραμμική συνάρτηση του βήματος 1. λαμβάνουμε την ακριβή λύση  $\tilde{q}^n(x, t^{n+1}) = \tilde{q}^n(x - u\Delta t, t^n)$  και στη συνέχεια ολοκληρώνοντας όπως στο βήμα 3. έχουμε

$$q_i^{n+1} = q_i^n - \frac{u\Delta t}{\Delta x}(q_i^n - q_{i-1}^n) - \frac{1}{2} \frac{u\Delta t}{\Delta x}(\Delta x - u\Delta t)(\sigma_i^n - \sigma_{i-1}^n) \quad (3.45)$$

Το επόμενο βήμα είναι να διαλέξουμε τις κλίσεις έτσι ώστε το σχήμα (3.45) να είναι δεύτερης τάξης και να ικανοποιεί την TVD ιδιότητα. Διαλέγοντας  $\sigma_i^n = 0$  λαμβάνουμε το σχήμα upwind ενώ με  $\sigma_i^n = \frac{1}{\Delta x}(q_{i+1}^n - q_i^n)$  το σχήμα Lax - Wendroff. Στην πρώτη περίπτωση το σχήμα είναι πρώτης τάξης και στην δεύτερη δεν ικανοποιεί την TVD ιδιότητα. Για να ισχύουν και τα δύο αρκεί να επιλέξουμε

$$\sigma_i^n = \frac{1}{\Delta x} \min\text{mod}(q_{i+1}^n - q_i^n, q_i^n - q_{i-1}^n)$$

όπου  $\min\text{mod}(a, b) = \frac{1}{2}(\text{sgn}(a) + \text{sgn}(b))\min(|a|, |b|)$ . Δεν θα επεκταθούμε περισσότερο στους οριοθέτες κλίσης και αναφέρονται περισσότερο για την πληρότητα του κειμένου.

### 3.5.3 Flux-Limiting

Μια άλλη προσέγγιση που μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε για να κατασκευάσουμε ένα υψηλής ανάλυσης σχήμα είναι χρησιμοποιώντας οριοθέτες ροής (flux - limiting). Αυτές οι μέθοδοι κατασκευάζουν αριθμητικές ροές της μορφής:

$$f_{i+1/2}^{TVD} = f_{i+1/2}^{FO} + \Phi_{i+1/2}^n(f_{i+1/2}^{SO} - f_{i+1/2}^{FO}), \quad (3.46)$$

όπου  $f_{i+1/2}^{SO}$  είναι μια αριθμητική ροή δεύτερης τάξης,  $f_{i+1/2}^{FO}$  είναι μια αριθμητική ροή πρώτης τάξης και  $\Phi_{i+1/2}^n$  είναι ένας κατάλληλος οριοθέτης. Ο οριοθέτης διαλέγεται έτσι ώστε εάν τα δεδομένα είναι ομαλά, τότε λαμβάνει την τιμή 1 το οποίο διατηρεί τη αριθμητική ροή στη δεύτερη τάξη, ενώ εάν τα δεδομένα είναι κοντά σε ασυνέχεια λαμβάνει την τιμή 0 και η αριθμητική ροή γίνεται πρώτης τάξης. Ένας τρόπος μέτρησης της ομολότητας των δεδομένων είναι μελετώντας τον λόγο των διαδοχικών κλίσεων,

$$\theta_{i+1/2}^n = \frac{q_{I+1}^n - q_I^n}{q_{i+1}^n - q_i^n}, \quad I = i - \text{sgn}(\lambda_{i+1/2}^n) \quad (3.47)$$

όπου  $\lambda$  είναι η ταχύτητα του κύματος. Άρα διαλέγουμε η συνάρτηση  $\Phi_{i+1/2}^n$  να είναι συνάρτηση του  $\theta$ . Δηλαδή  $\Phi_{i+1/2}^n = \Phi(\theta_{i+1/2}^n)$ . Μερικοί από τους οριοθέτες  $\Phi$  που μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε είναι:

Flux-limiter	$\Phi(\theta)$
Minmod	$\max(0, \min(1, \theta))$
Roe's Superbee	$\max(0, \min(2\theta, 1), \min(\theta, 2))$
van Leer	$\frac{ \theta  + \theta}{1 +  \theta }$
van Albada	$\frac{\theta^2 + \theta}{1 + \theta^2}$

Πίνακας 3.1

Στην περίπτωση που θέλουμε να κατασκευάσουμε ένα υψηλής ανάλυσης σχήμα για ένα σύστημα ακολουθούμε την ίδια διαδικασία που είδαμε και στην βαθμωτή περίπτωση κατασκευάζοντας αριθμητική ροή της μορφής:

$$\mathbf{F}_{i+1/2}^{TVD} = \mathbf{F}_{i+1/2}^{FO} + \Phi_{i+1/2}^n (\mathbf{F}_{i+1/2}^{SO} - \mathbf{F}_{i+1/2}^{FO}). \quad (3.48)$$

Το σχήμα του Roe που έχουμε αναλύσει μέχρι στιγμής, (3.1) με αριθμητική ροή (3.20), είναι πρώτης τάξης ακρίβειας ως προς το χώρο. Για να γίνει υψηλής ανάλυσης χρειαζόμαστε ένα δεύτερης τάξης σχήμα. Αυτό που χρησιμοποιούμε για να πάρουμε όρους δεύτερης τάξης είναι το σχήμα των Lax -Wendroff, με αριθμητική ροή:

$$\mathbf{F}_{i-1/2} = \frac{1}{2}(\mathbf{I} - \frac{\Delta t}{\Delta x} |\mathbf{A}|) |\mathbf{A}| \Delta \mathbf{Q}_{i-1/2}.$$

Στη συνέχεια θέτουμε όπου  $\mathbf{A} = \hat{\mathbf{A}}$  και χρησιμοποιώντας για τους όρους πρώτης τάξης την (3.20), μπορούμε να υπολογίσουμε από την (3.48) την αριθμητική ροή του Roe

$$\mathbf{F}_{i+1/2}^n = \frac{1}{2}(\mathbf{F}_{i+1}^n + \mathbf{F}_i^n) - \frac{1}{2}(\mathbf{X}|\mathbf{A}|\mathbf{L}\mathbf{X}^{-1})_{i+1/2}^n \Delta \mathbf{Q}_{i+1/2}^n, \quad (3.49)$$

όπου

$$\mathbf{L} = \text{diag}\left(1 - \Phi(\hat{\theta}_p)(1 - \frac{\Delta t}{\Delta x} |\hat{\lambda}_p|)\right).$$

Ένας πιο συμπαγής τρόπος γραφής για την (3.49) προκύπτει αναλύοντάς την

$$\begin{aligned}
\mathbf{F}_{i+1/2}^n &= \frac{1}{2}(\mathbf{F}_{i+1}^n + \mathbf{F}_i^n) - \frac{1}{2} \sum_{p=1}^m [\hat{\alpha}_p |\hat{\lambda}_p| (1 - \Phi(\hat{\theta}_p)(1 - |\hat{\nu}_p|)) \hat{\mathbf{r}}_p]_{i+1/2} \\
&= \frac{1}{2}(\mathbf{F}_{i+1}^n + \mathbf{F}_i^n) - \frac{1}{2} \sum_{p=1}^m [\hat{\lambda}_p |\mathbf{W}_p| (1 - \Phi(\hat{\theta}_p)(1 - |\hat{\nu}_p|))]_{i+1/2} \\
&= \frac{1}{2}(\mathbf{F}_{i+1}^n + \mathbf{F}_i^n) - \frac{1}{2} \sum_{p=1}^m \text{sgn}(\hat{\lambda}_p) \mathbf{Z}_p (1 - \Phi(\hat{\theta}_p)(1 - |\hat{\nu}_p|))_{i+1/2}, \quad (3.50)
\end{aligned}$$

όπου

$$\hat{\theta}_p = \frac{(\hat{\alpha}_p)_{I+1/2}}{(\hat{\alpha}_p)_{i+1/2}}, \quad I = \begin{cases} i-1 & \hat{\lambda}_p > 0 \\ i+1 & \hat{\lambda}_p < 0 \end{cases}, \quad \hat{\nu}_p = \frac{\Delta t}{\Delta x} \hat{\lambda}_p.$$

Ο λόγος  $\hat{\theta}_p = \frac{(\hat{\alpha}_p)_{I+1/2}}{(\hat{\alpha}_p)_{i+1/2}}$  είναι ένα μέτρο της ομαλότητας των δεδομένων κοντά στο μέτωπο  $x_{i+1/2}$ . Όταν τα δεδομένα είναι ομαλά περιμένουμε  $\theta_{i+1/2}^n \approx 1$  ενώ κοντά σε ασυνέχεια το  $\theta_{i+1/2}^n$  θα είναι μακριά από το 1.

Η τιμή της συνάρτησης  $\phi(\theta)$ , όπως προαναφέρθηκε, εξαρτάται από την ομαλότητα των δεδομένων. Έτσι όταν υπάρχει ομαλότητα δηλαδή  $\theta = 1$  θα πρέπει  $\phi(\theta) = 1$  το οποίο δίνει την μέθοδο Lax - Wendroff ενώ στις ασυνέχειες  $\phi(\theta) = 0$  που δίνει την μέθοδο upwind. Διαλέγοντας τον κατάλληλο οριοθέτη, μπορούμε να καταλλήξουμε σε διαφορετικές μεθόδους. Για παράδειγμα διαλέγοντας για κάθε  $\theta$ ,  $\phi(\theta) \equiv 0$ , καταλήγουμε στην upwind μέθοδο. Αν για κάθε  $\theta$ ,  $\phi(\theta) \equiv 1$  προκύπτει η μέθοδος Lax-Wendroff και αν  $\phi(\theta) \equiv \theta$  η μέθοδος Beam-Warming. Όλες αυτές οι μέθοδοι θα δείξουμε στην συνέχεια ότι δεν ικανοποιούν την TVD ιδιότητα. Για να πάρουμε ένα σχήμα υψηλής ανάλυσης αρκεί να διαλέξουμε έναν οριοθέτη από τον πίνακα 3.1.

Στην περίπτωση που έχουμε πηγαίο όρο, όπως δείξαμε, πρέπει να υπάρχει ισορροπία με τις αριθμητικές ροές έτσι ώστε να ικανοποιείται η C-property. Για αυτό το λόγο προσεγγίζουμε τον πηγαίο όρο αντίστοιχα με τις αριθμητικές ροές [25],

$$\mathbf{R}_i = \mathbf{R}_{i+1/2}^{TVD} + \mathbf{R}_{i-1/2}^{TVD}$$

όπου

$$\mathbf{R}_{i+1/2}^{TVD} = \mathbf{R}_{i+1/2}^{FO} + \Phi(\mathbf{R}_{i+1/2}^{SO} - \mathbf{R}_{i+1/2}^{FO})$$

όπου για την προσέγγιση πρώτης τάξης χρησιμοποιούμε το (3.33) και για την προσέγγιση δεύτερης τάξης χρησιμοποιούμε την Lax-Wendroff αριθμητική ροή,

$$\mathbf{R}_{i+1/2}^{SO} = \frac{1}{2} \left[ \mathbf{X} \left( \mathbf{I} - \frac{\Delta t}{\Delta x} \mathbf{\Lambda}^{-1} \mathbf{\Lambda}^2 \right) \mathbf{X}^{-1} \mathbf{R} \right]_{i+1/2}$$

Άρα προκύπτει ότι

$$\mathbf{R}_{i+1/2}^{\pm} = \frac{1}{2} \left[ \hat{\mathbf{X}} (\mathbf{I} \pm \hat{\mathbf{\Lambda}}^{-1} |\hat{\mathbf{\Lambda}}| \hat{\mathbf{\Lambda}}) \mathbf{X}^{-1} \mathbf{R} \right]_{i+1/2}$$

και με εκέλεση των πράξεων μπορεί να γραφεί σε μορφή f-κυμάτων, δηλαδή,

$$\mathbf{R}_{i+1/2}^{\pm} = \frac{1}{2} \sum_{p=1}^m \left[ \hat{\beta}_p \hat{\mathbf{r}}_p (1 \pm \text{sgn}(\hat{\lambda}_p) (1 - \Phi(\hat{\theta}_p)(1 - |\hat{\nu}_p|))) \right]_{i+1/2} \quad (3.51)$$

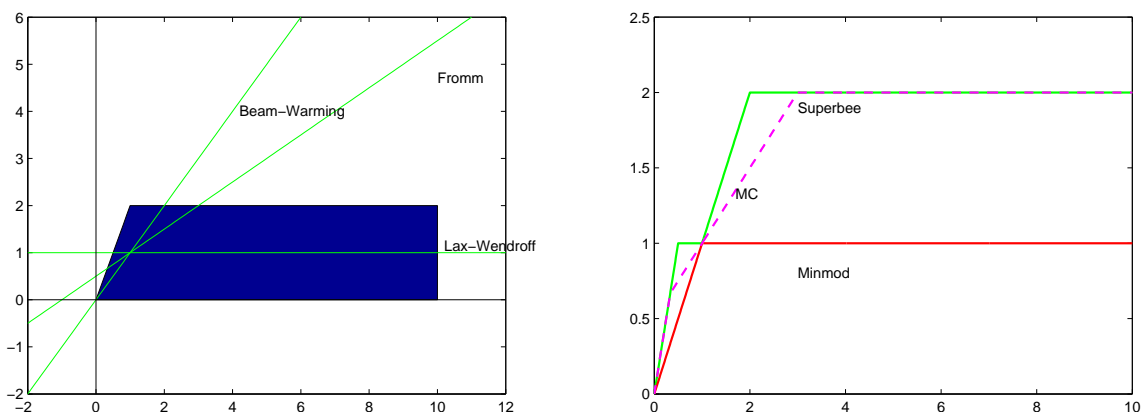
### 3.5.4 TVD οριοθέτες

Όπως αναφέρθηκε στις δύο προηγούμενες παραγράφους, ένα χαρακτηριστικό που θέλουμε να έχει η μέθοδος που χρησιμοποιούμε είναι να ικανοποιεί την TVD ιδιότητα, για αυτόν το λόγο χρησιμοποιούμε τους οριοθέτες. Για να αποδείξουμε αλγεβρικά ότι η μέθοδος που χρησιμοποιούμε (με την χρήση κάποιου οριοθέτη) ικανοποιεί την TVD ιδιότητα αρκεί να χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα 3.5.1. Για παράδειγμα για την εξίσωση μεταφοράς  $q_t + uq_x = 0$ ,  $u > 0$  χρησιμοποιώντας το θεώρημα 3.5.1 και έναν οποιοδήποτε οριοθέτη  $\phi(\theta)$  μπορούμε να αποδείξουμε [30] ότι για να επιτύχουμε μια TVD μέθοδο αρκεί να ισχύει ότι

$$0 \leq \phi(\theta) \leq \min\text{mod}(2, 2\theta). \quad (3.52)$$

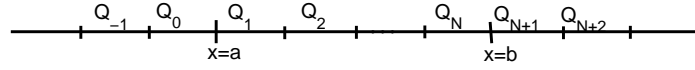
Η σχέση (3.42) ορίζει την TVD περιοχή στον άξονα των  $\phi - \theta$  και η καμπύλη  $\phi(\theta)$  πρέπει να βρίσκεται εντός αυτής της περιοχής (σχ. 3.5.2(α)). Το σχήμα αυτό επίσης δείχνει τις συναρτήσεις  $\phi(\theta)$  των μεθόδων Lax - Wendroff, Beam - Warming, Fromm. Όλες αυτές οι συναρτήσεις ξεπερνούν την περιοχή TVD άρα οι παραπάνω μέθοδοι δεν είναι TVD.

Γνωρίζουμε ότι για τις μεθόδους δεύτερης τάξης πρέπει να ισχύει  $\phi(1) = 1$ . Επίσης βρέθηκε ότι είναι προτιμότερο η  $\phi$  να είναι ένας κυρτός συνδιασμός των  $\phi = 1$  (Lax-Wendroff) και  $\phi = \theta$  (Beam-Warming). Θεωρώντας τους παραπάνω περιορισμούς παίρνουμε την δεύτερης τάξης TVD περιοχή του Sweby (σχ. 3.5.2(β)). Οι υψηλής ανάλυσης οριοθέτες παρατηρούμε ότι βρίσκονται μέσα στην περιοχή Sweby [41].



Σχήμα 3.5.2 (α) Η μπλέ περιοχή δείχνει πού πρέπει να βρίσκονται οι συναρτήσεις  $\phi(\theta)$  έτσι ώστε οι μέθοδοι να είναι TVD. Οι δεύτερης τάξης γραμμικές μέθοδοι φαίνεται ότι δεν είναι TVD. (β) Οι οριοθέτες για δεύτερης τάξης TVD μεθόδους οι οποίοι βρίσκονται μέσα στην περιοχή Sweby .

### 3.6 Συνοριακές συνθήκες



Σχήμα 3.6.1 Το υπολογιστικό χωρίο  $[a, b]$  με τα φανταστικά κελιά στα άκρα.

Μέχρι στιγμής έχουμε μελετήσει την μέθοδο του Roe για τον υπολογισμό της μέσης λύσης σε κάθε υπολογιστικό κελί  $\mathbf{Q}_i^{n+1}$  γνωρίζαμε τις τιμές του προηγούμενου χρονικού βήματος στα γειτονικά κελιά  $\mathbf{Q}_{i-1}^{n+1}$ ,  $\mathbf{Q}_{i+1}^{n+1}$  και ίσως και μακρύτερα, εφόσον χρειαζόντουσαν για να υπολογίσουμε τις αριθμητικές ροές  $\mathbf{F}_{i-1/2}^n$  και  $\mathbf{F}_{i+1/2}^n$ . Στην πράξη, πάντα υπολογίζουμε πάνω σε ένα πεπερασμένο σύνολο από υπολογιστικά κελιά το οποία σχηματίζουν μια φραγμένη περιοχή. Στα πρώτα και τελευταία κελιά δεν έχουμε την απαιτούμενη γειτονική πληροφορία που χρειάζεται. Αντί για αυτό έχουμε κάποιες φυσικές συνοριακές συνθήκες οι οποίες πρέπει να χρησιμοποιηθούν για την εύρεση της λύσης σε αυτά τα κελιά. Ανάλογα με το πρόβλημα και την μέθοδο που έχουμε εφαρμόζουμε κάθε φορά και τις κατάλληλες συνοριακές συνθήκες. Για την εφαρμογή των συνοριακών συνθηκών αυτό που ακολουθείται στην παρούσα εργασία είναι η προσέγγιση με *φανταστικά κελιά* [29].

Επεκτείνουμε το υπολογιστικό χωρίο και συμπεριλαμβάνουμε ορισμένα επιπλέον κελιά σε κάθε άκρο, τα λεγόμενα φανταστικά κελιά, όπου οι τιμή της λύσης είναι προκαθορισμένη από την αρχή κάθε χρονικού βήματος με κάποιο τρόπο που εξαρτάται από την συνοριακή συνθήκη και ίσως και την εσωτερική λύση. Στην εικόνα (3.6.1) φαίνεται ένα πλέγμα με δύο φανταστικά κελιά σε κάθε σύνορο. Έστω για παράδειγμα ότι το φυσικό χωρίο ενός προβλήματος είναι  $[a, b]$  και διαιρείται σε κελιά  $C_1, C_2, \dots, C_N$  με  $x_1 = a, x_{N+1} = b$  έτσι ώστε  $\Delta x = (b - a)/N$ . Χρησιμοποιώντας μια μέθοδο όπου για τον υπολογισμό της  $\mathbf{F}_{i-1/2}^n$  απαιτούνται μόνο τα  $\mathbf{Q}_{i-1}^n, \mathbf{Q}_i^n$  τότε χρειαζόμαστε ένα μόνο φανταστικό κελί σε κάθε άκρο. Το φανταστικό κελί  $C_0 = (a - \Delta x, a)$  μας επιτρέπει να υπολογίσουμε την ροή  $\mathbf{F}_{1/2}^n$  στο αριστερό σύνορο ενώ το φανταστικό κελί  $C_N = (b, b + \Delta x)$  χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό της  $\mathbf{F}_{N+1/2}^n$  στο  $x = b$ . Με μια flux-limiter μέθοδο χρειαζόμαστε δυο φανταστικά κελιά σε κάθε σύνορο. Οι συνοριακές συνθήκες που εφαρμόζονται στην παρούσα εργασία, ανάλογα το πρόβλημα που επιλύουμε κάθε φορά είναι συνοριακές συνθήκες ανάκλασης και συνοριακές συνθήκες ελεύθερης ροής.

Στην μέθοδο του Roe που χρησιμοποιούμε, εφόσον εφαρμόζουμε την τακτική των φανταστικών κελιών για να υπολογίσουμε την τιμή της λύσης στο τελευταίο υπολογιστικό κελί  $C_N$  χρειάζεται να γνωρίζουμε την τιμή της λύσης στο  $C_{N+1}$  εφόσον η μέθοδος είναι πρώτης τάξης και την τιμή στο  $C_{N+2}$  εφόσον είναι δεύτερης τάξης. Εφόσον εφαρμόζουμε συνοριακές συνθήκες ελεύθερης ροής οι τιμές που δίνουμε στα φανταστικά κελιά εξάγονται από αυτές των εσωτερικών κελιών. Στην συγκεκριμένη περίπτωση θέτουμε

$$\mathbf{Q}_{N+1}^n = \mathbf{Q}_N^n, \quad \mathbf{Q}_{N+2}^n = \mathbf{Q}_N^n$$

στην αρχή κάθε χρονικού βήματος.

Στην περίπτωση που χρησιμοποιούμε συνοριακές συνθήκες ανάκλασης θεωρούμε ότι το κύμα ανακλάται στα άκρα του συνόρου σαν να χτυπούσε πάνω σε ένα στέρεο τοίχο. Σε αυτήν



την περίπτωση οι τιμές που δίνουμε στα φανταστικά κελιά σε κάθε χρονικό βήμα καθορίζονται ως εξής:

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_{N+1}^n : \quad h_{N+1}^n &= h_N, \quad (hu)_{N+1} = -(hu)_N \\ \mathbf{Q}_{N+2}^n : \quad h_{N+2}^n &= h_N, \quad (hu)_{N+2} = -(hu)_N \end{aligned}$$

Αυτό δίνει την απαραίτητη συμμετρία στην αρχή κάθε χρονικού βήματος.

### 3.7 Σχήμα κεντρικών διαφορών

Σε αυτήν την παράγραφο στόχος μας είναι η παρουσίαση ενός σχήματος κεντρικών διαφορών [26] το οποίο χρησιμοποιείται σε πρακτικές εφαρμογές και η σύγκριση αποτελεσμάτων, για διάφορα προβλήματα ανάμεσα στο σχήμα κεντρικών διαφορών και στο σχήμα του Roe.

Οι εξισώσεις ρηχών υδάτων γνωρίζουμε ότι είναι οι εξής:

$$\begin{aligned} h_t + (hu)_x &= 0 \\ (hu)_t + \left(\frac{1}{2}gh^2 + hu^2\right) &= -ghB_x - ghS_f. \end{aligned}$$

Μπορούμε όμως να τις γράψουμε ισοδύναμα και στην μορφή [26]

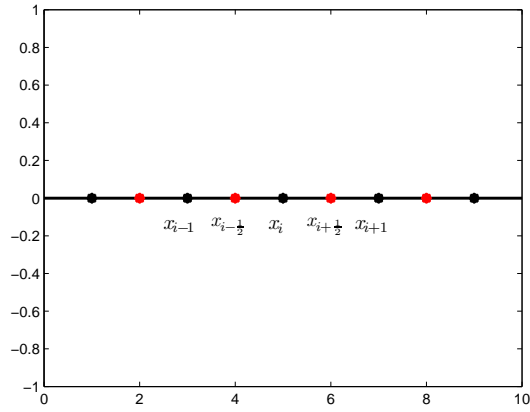
$$\begin{aligned} h_t + (hu)_x &= 0, \\ u_t + uu_x &= -g(h + B)_x - gS_f. \end{aligned}$$

Στην προκειμένη περίπτωση η περιγραφή της αναρρίχησης του κύματος στην ακτή επιτάσσει την επέκταση της λύσης σε περιοχές με πολύ μικρό  $h$  και καθώς το  $h$  είναι στον παρονομαστή του όρου τριβής, ο όρος αυτός γίνεται τόσο μεγάλος που επιδρά αποσταθεροποιητικά στην αριθμητική λύση. Εναλλακτική περιγραφή της διαδικασίας απωλειών ενέργειας στη ροή που να έχει και την επιθυμητή ιδιότητα να προκαλεί εντονότερη απόσβεση στις διακυμάνσεις της ροής με υψηλή συχνότητα είναι μαθηματικά δυνατή με την αντικατάσταση του τετραγωνικού όρου με τον όρο της διάχυσης που αποτελεί την ουσία της παραβολικής εξίσωσης. Συνεπώς η τελική μορφή των εξισώσεων θα είναι:

$$\begin{aligned} h_t + (hu)_x &= 0 \\ u_t + uu_x &= -g(h + B)_x + Eu_{xx}. \end{aligned}$$

Ο συντελεστής  $E$  της διάχυσης της ορμής αποτελεί μια παράμετρο βαθμονόμησης του μοντέλου και καθορίζεται με τρόπο ώστε η ενέργεια του συστήματος να εξελίσσεται φυσιολογικά και να αποφεύγονται οι αριθμητικές αστάθειες. Ενδιαφέρον επίσης παρουσιάζει το όριο μεταξύ ακτής και υδάτινης μάζας (ακτογραμμή) το οποίο συνεχώς μεταβάλλεται. Στην προκειμένη περίπτωση το όριο αυτό καθορίζεται από ένα αριθμό ο οποίος δίνει το ελάχιστο βάθος του νερού έτσι ώστε η περιοχή να θεωρείται βρεμένη. Η τιμή αυτή κάτω από την οποία το βάθος του νερού θεωρείται μηδενικό ονομάζεται *thres*.

Η διακριτοποίηση των εξισώσεων γίνεται πάνω σε ένα πλέγμα (σχ. 3.7.1) με σημεία  $x_i = (i - 1)\Delta x$  όπου  $\Delta x$  το χωρικό βήμα. Πιό συγκεκριμένα υπολογίζουμε τις τιμές  $u(x_i, t^n)$  στα σημεία  $x_i$  και τις τιμές  $h(x_i, t^n)$  στα μέσα των διαστημάτων  $[x_{i-1}, x_i]$  με  $i = 1, 2, \dots, m$ . Το παραπάνω πλέγμα ονομάζεται πλέγμα επικαλυπτόμενης διάταξης (staggered grid).



Σχήμα 3.7.1 Το πλέγμα πάνω στο οποίο υπολογίζονται οι τιμές βάθους και ταχύτητας.

Για να εξάγουμε το αριθμητικό σχήμα γίνεται προσέγγιση των παραγώγων ως προς το χρόνο και το διάστημα με πεπερασμένες διαφορές και έτσι καταλήγουμε στο

$$\frac{h_i^{n+1} - h_i^n}{\Delta t} = \frac{h_i^n + h_{i+1}^n}{2\Delta x} u_{i+1}^n - \frac{h_i^n + h_{i-1}^n}{2\Delta x} u_i^n \quad (3.53)$$

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = -u_i^n \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2\Delta x} - g \frac{h_i^n + B_i^n - h_{i-1}^n - B_{i-1}^n}{\Delta x} + E \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta x^2} \quad (3.54)$$

Περισσότερες πληροφορίες για το σχήμα και την χρησιμοποίησή του μπορούν να βρεθούν στο [26].

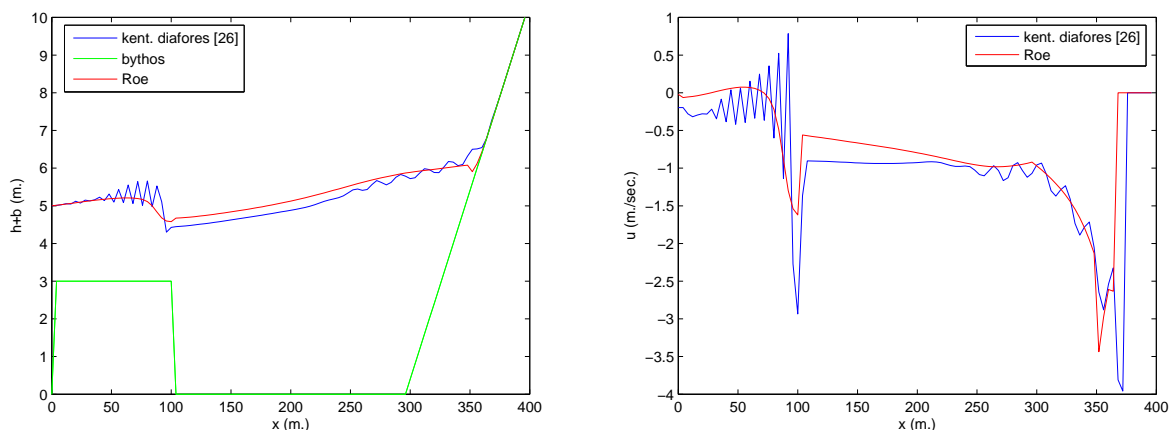
## Κεφάλαιο 4

# Αριθμητικά αποτελέσματα σε μια διάσταση

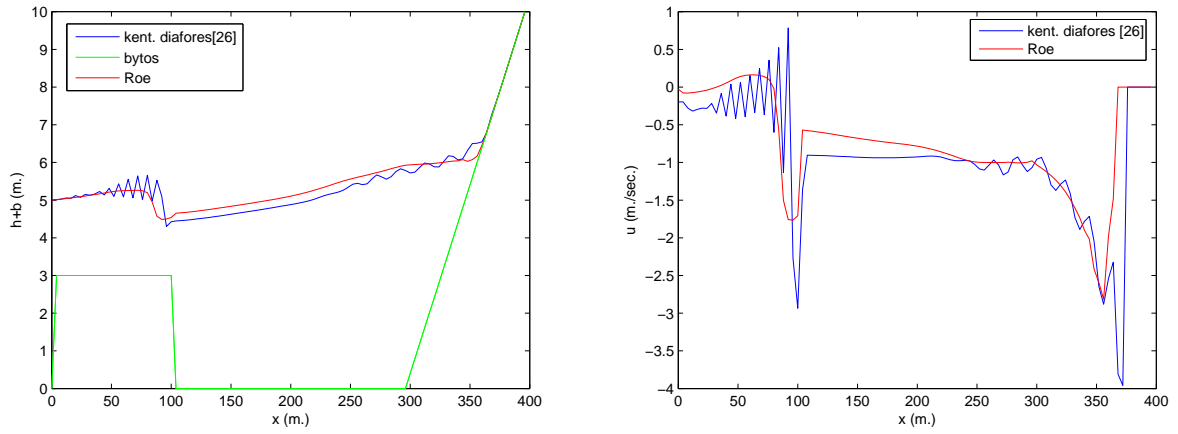
### 4.1 Σύγκριση του TVD σχήματος του Roe με το σχήμα κεντρικών διαφορών του [26]

#### 4.1.1 Πρόβλημα 1

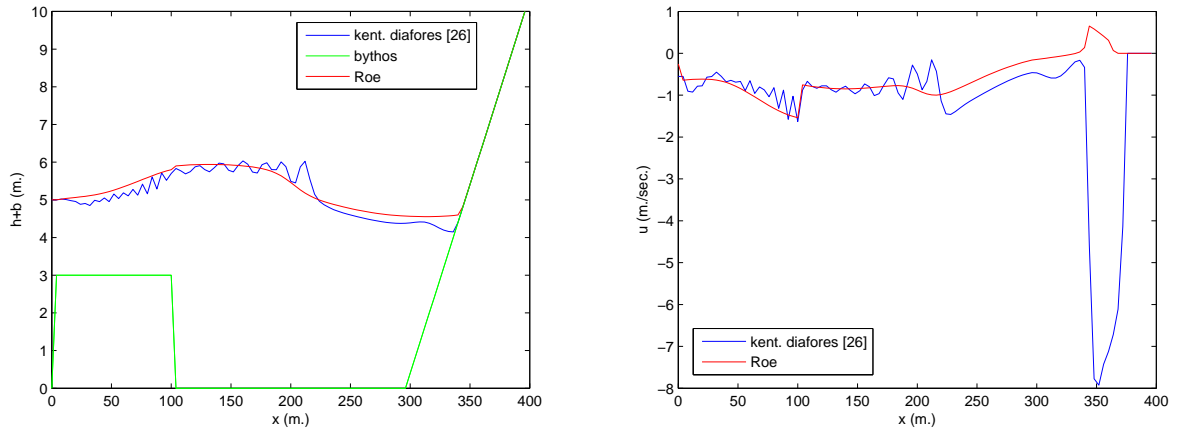
Το πρώτο πρόβλημα περιγράφει την γένεση και αναρρίχηση στην ακτή μη γραμμικών κυμάτων τα οποία οφείλονται σε διαταραχή της τοπογραφίας του πυθμένα (για παράδειγμα λόγω υπο-θαλάσσιου σεισμού). Θεωρούμε ότι στο δεξί άκρο του πεδίου υπάρχει πλαγιά κλίσης 1 : 10 ενώ στο αριστερό άκρο προκαλείται κατακόρυφη μετακίνηση του πυθμένα σε χρόνο 20 δευτερόλεπτα, κατά 3 μέτρα. Το διάστημα του πεδίου είναι 400 μέτρα. Και στα δύο αριθμητικά σχήματα το χωρικό βήμα είναι σταθερό και έχει τιμή  $\Delta x = 4$  μέτρα. Στα παρακάτω σχήματα παρουσιάζονται χαρακτηριστικά στιγμιότυπα της εξέλιξης και των δύο σχημάτων. Για το σχήμα κεντρικών διαφορών η μεταβολή του χρόνου είναι σταθερή κατά 0.2 δευτερόλεπτα ενώ για το σχήμα του Roe είναι μεταβαλλόμενη και εξαρτώμενη από την συνθήκη  $cfl$  όπου εδώ  $cfl = 0.9$



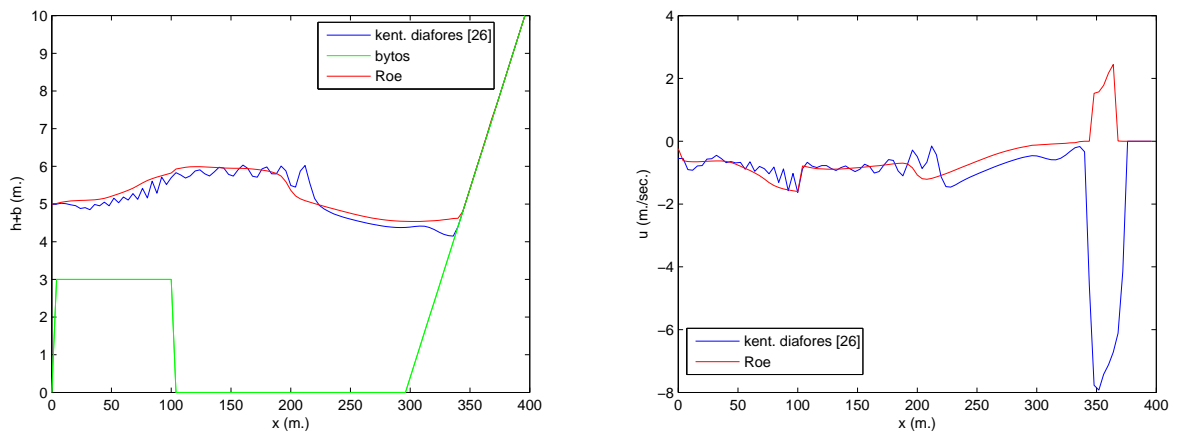
Σχήμα 4.1.1 Το βάθος (αριστερά) και η ταχύτητα (δεξιά) για τα σχήματα του Roe και των κεντρικών διαφορών σε χρόνο  $t = 60$  δευτερόλεπτα.



Σχήμα 4.1.2 Το βάθος (αριστερά) και η ταχύτητα (δεξιά) για τα σχήματα του Roe υψηλής ανάλυσης χρησιμοποιώντας τον οριοθέτη minmod και των κεντρικών διαφορών σε χρόνο  $t = 60$  δευτερόλεπτα.



Σχήμα 4.1.3 Το βάθος (αριστερά) και η ταχύτητα (δεξιά) για τα σχήματα του Roe και των κεντρικών διαφορών σε χρόνο  $t = 80$  δευτερόλεπτα.

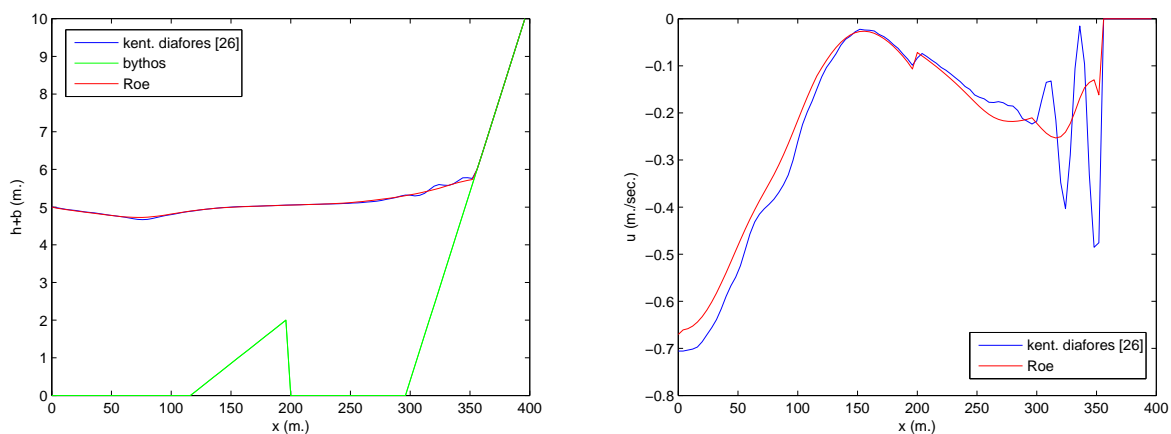


Σχήμα 4.1.4 Το βάθος (αριστερά) και η ταχύτητα (δεξιά) για τα σχήματα του Roe υψηλής ανάλυσης χρησιμοποιώντας τον οριοθέτη minmod και των κεντρικών διαφορών σε χρόνο  $t = 80$  δευτερόλεπτα.

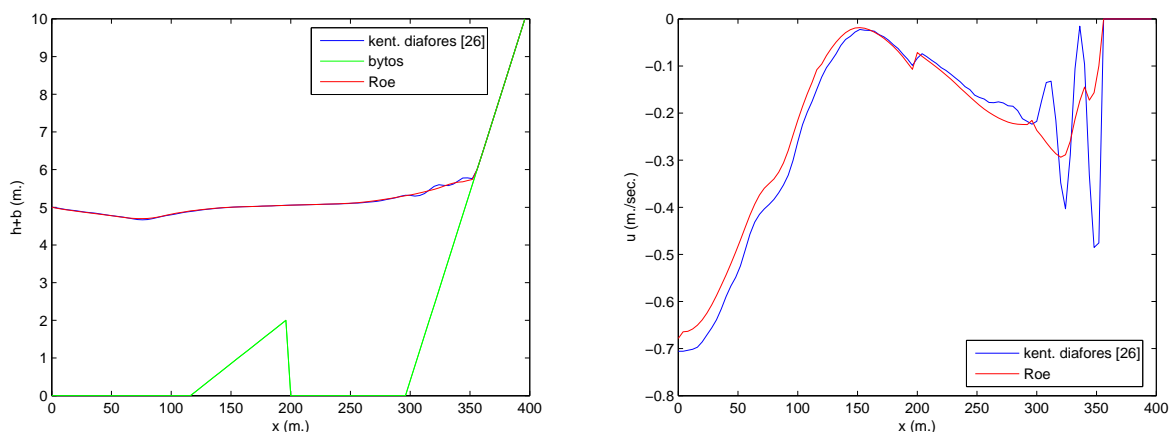
Η βασική διαφορά ανάμεσα στα δύο αριθμητικά σχήματα είναι η παρουσία ταλαντώσεων στη λύση που παίρνουμε από το κεντρικό σχήμα διαφορών, οι οποίες προκαλούνται πάνω από τον ασυνεγή πυθμένα αλλά και στο μέτωπο του κύματος κατά την αναρρίχσή του στην ακτή, οι οποίες στην συνέχεια διαδίδονται αλλιωνώντας την αριθμητική λύση. Η εμφάνιση αυτών των ταλαντώσεων είναι αναμενόμενη καθώς το σχήμα κεντρικών διαφορών δεν είναι shock capturing, σε αντίθεση με το σχήμα του Roe που δίνει πιο ομαλή λύση.

#### 4.1.2 Πρόβλημα 2

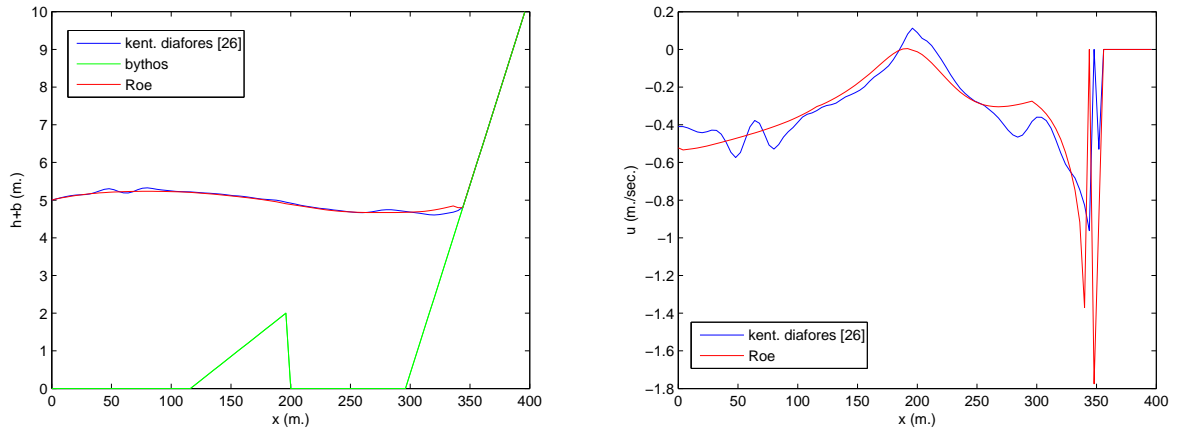
Σε αυτό το πρόβλημα η τοπογραφία του βυθού παραμένει ίδια με αυτή του προβλήματος 1 εκτός από την μορφολογία του πυθμένα. Εδώ αναδύεται ένα μικρότερο, τριγωνικό κομμάτι του πυθμένα στα 20 δευτερόλεπτα και μέχρι τα 2 μέτρα. Η κλίση της πλαγιάς παραμένει η ίδια όπως και όλα τα μεγέθη είναι όμοια με τα προαναφερθέντα.



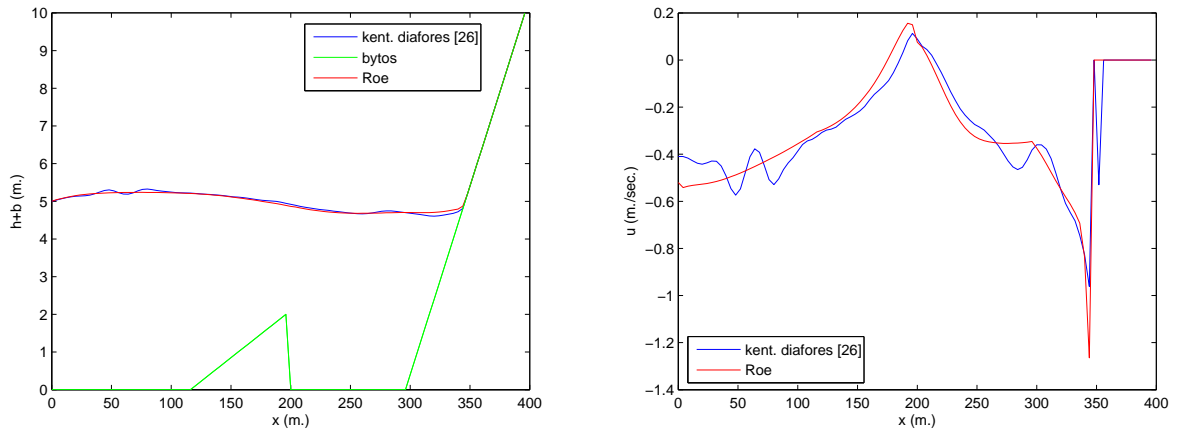
Σχήμα 4.1.5 Το βάθος (αριστερά) και η ταχύτητα (δεξιά) για τα σχήματα του Roe και των κεντρικών διαφορών σε χρόνο  $t = 40$  δευτερόλεπτα.



Σχήμα 4.1.6 Το βάθος (αριστερά) και η ταχύτητα (δεξιά) για τα σχήματα του Roe υψηλής ανάλυσης χρησιμοποιώντας τον οριοθέτη minmod και των κεντρικών διαφορών σε χρόνο  $t = 40$  δευτερόλεπτα.



Σχήμα 4.1.7 Το βάθος (αριστερά) και η ταχύτητα (δεξιά) για τα σχήματα του Roe και των κεντρικών διαφορών σε χρόνο  $t = 80$  δευτερόλεπτα.

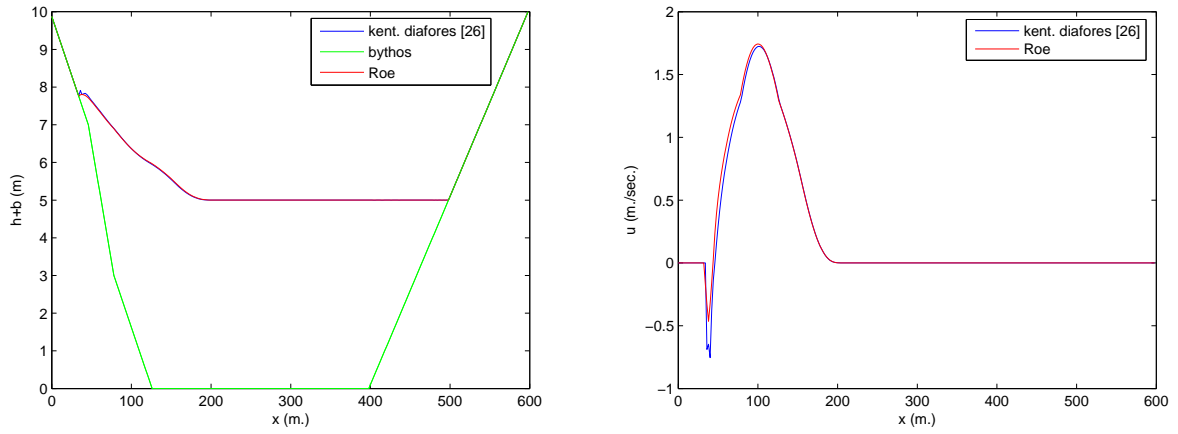


Σχήμα 4.1.8 Το βάθος (αριστερά) και η ταχύτητα (δεξιά) για τα σχήματα του Roe υψηλής ανάλυσης χρησιμοποιώντας τον οριοθέτη minmod και των κεντρικών διαφορών σε χρόνο  $t = 80$  δευτερόλεπτα.

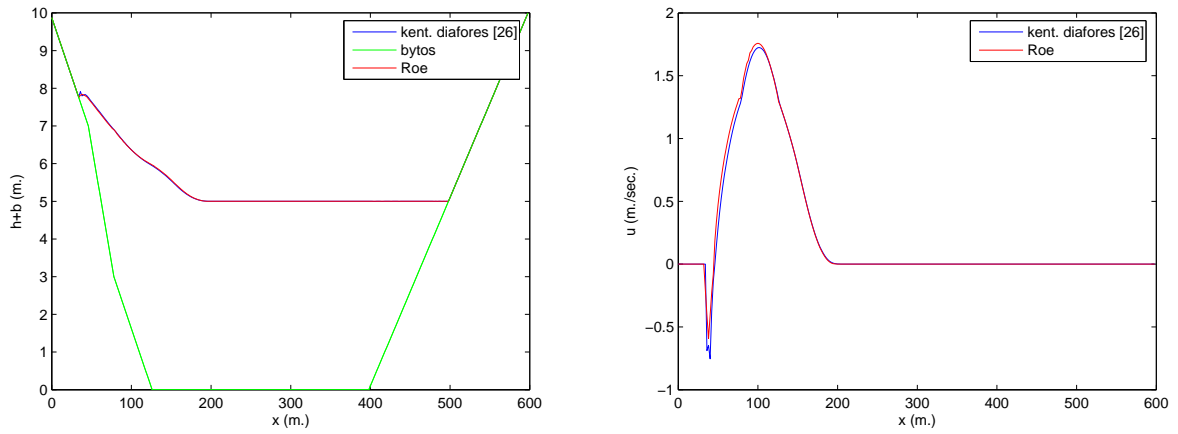
Παρατηρώντας τις λύσεις και στις δύο χρονικές στιγμές βλέπουμε ότι είναι αρκετά κοντά σε σχέση με το προηγούμενο πρόβλημα. Αυτό συμβαίνει λόγω του μικρότερου μεγέθους και της ομαλότερης κατασκευής της αναδυόμενης μάζας. Παρόλα αυτά βλέπουμε ότι το σχήμα του Roe συνεχίζει να δίνει ομαλότερες λύσεις χωρίς ταλαντώσεις στο βάθος.

### 4.1.3 Πρόβλημα 3

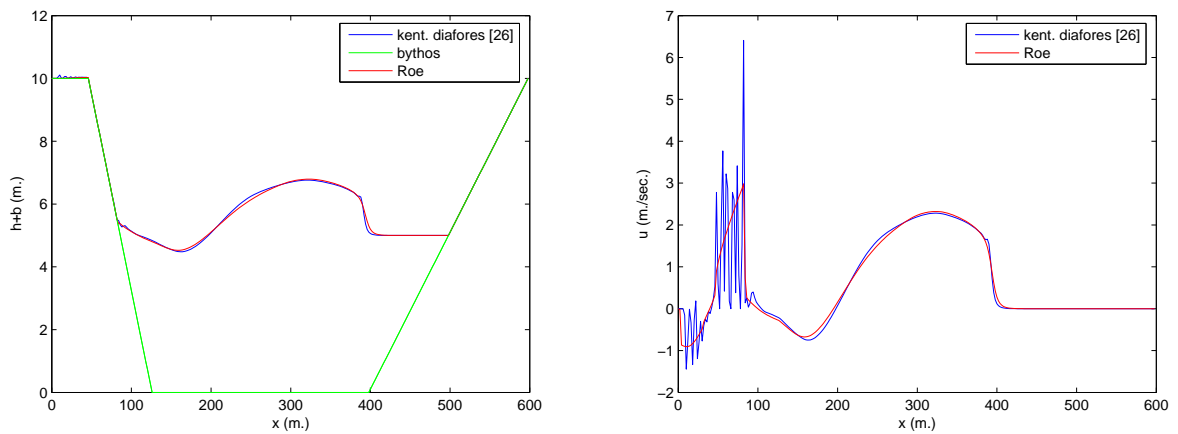
Το τρίτο πρόβλημα είναι ένα πρόβλημα κατολίσθησης. Η τοπογραφία του προβλήματος αποτελείται από δύο πλαγίες δεξιά και αριστερά του πεδίου με κλίση  $1 : 10$ . Η κατολίσθηση συμβαίνει στην αριστερή πλευρά για χρόνο 20 δευτερολέπτων. Η διαμέριση ανέρχεται στα 300 υπολογιστικά κελιά με χωρικό βήμα  $\Delta x = 2$  μέτρα. Το χρονικό βήμα για το σχήμα κεντρικών διαφορών είναι 0.02 δευτερόλεπτα ενώ όπως και πριν, για το σχήμα του Roe είναι μεταβαλλόμενο με  $cfl = 0.9$



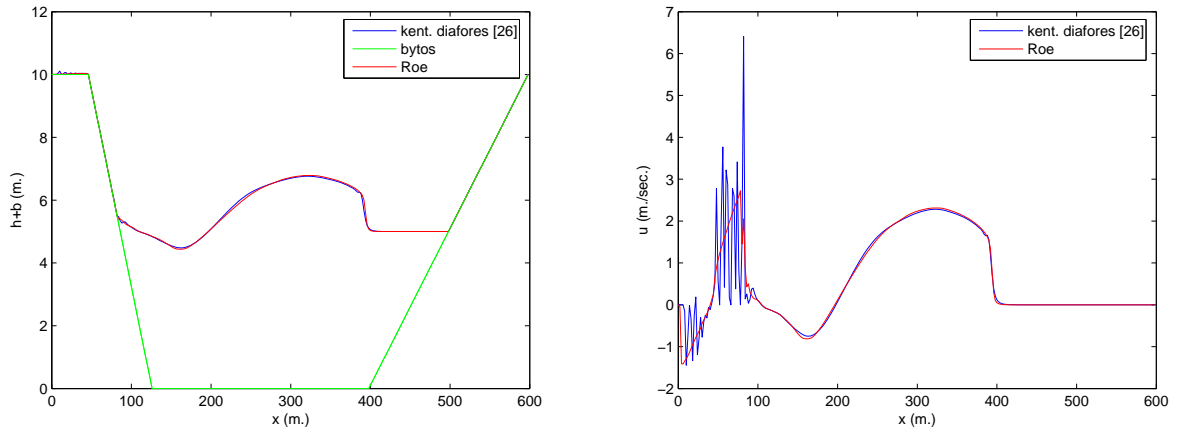
Σχήμα 4.1.9 Το βάθος (αριστερά) και η ταχύτητα (δεξιά) για τα σχήματα του Roe και των κεντρικών διαφορών σε χρόνο  $t = 10$  δευτερόλεπτα.



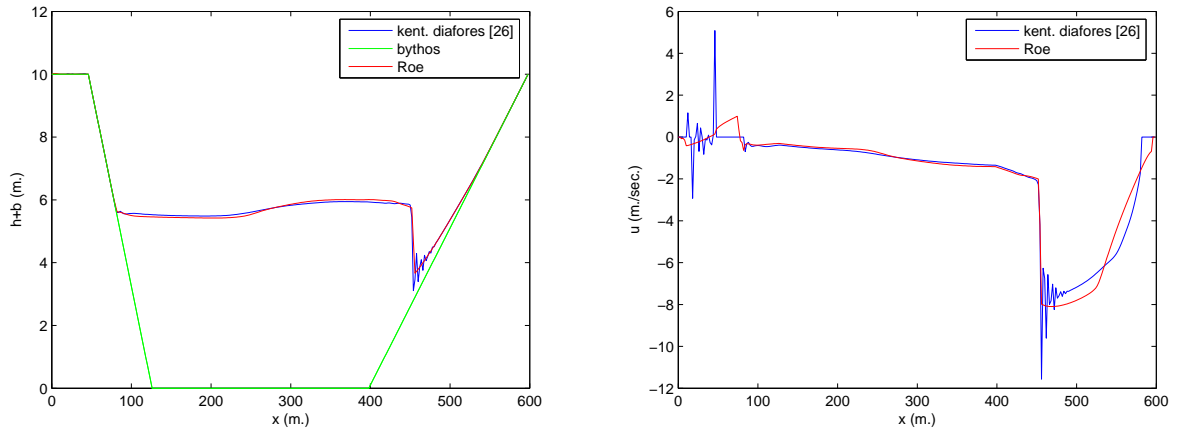
Σχήμα 4.1.10 Το βάθος (αριστερά) και η ταχύτητα (δεξιά) για τα σχήματα του Roe υψηλής ανάλυσης χρησιμοποιώντας τον οριοθέτη minmod και των κεντρικών διαφορών σε χρόνο  $t = 10$  δευτερόλεπτα.



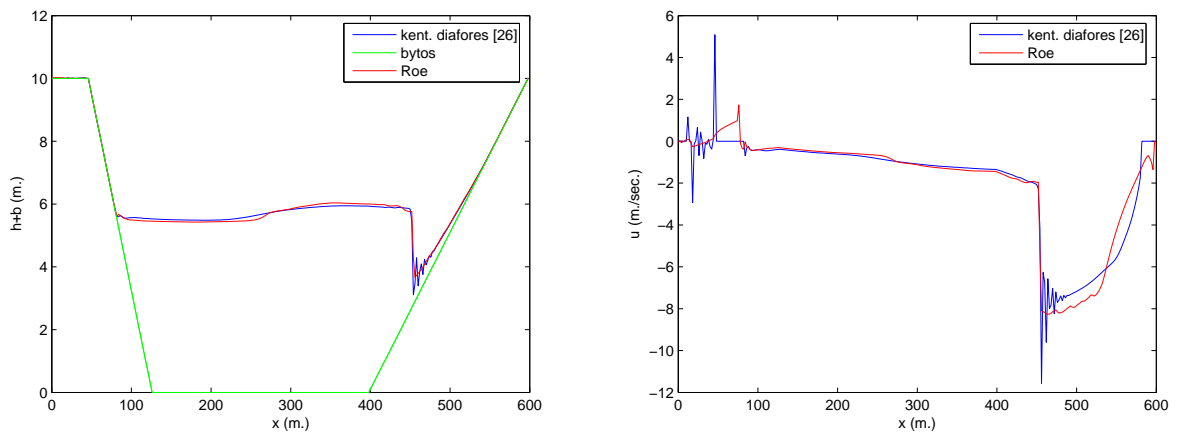
Σχήμα 4.1.11 Το βάθος (αριστερά) και η ταχύτητα (δεξιά) για τα σχήματα του Roe και των κεντρικών διαφορών σε χρόνο  $t = 40$  δευτερόλεπτα.



Σχήμα 4.1.12 Το βάθος (αριστερά) και η ταχύτητα (δεξιά) για τα σχήματα του Roe υψηλής ανάλυσης χρησιμοποιώντας τον οριοθέτη minmod και των κεντρικών διαφορών σε χρόνο  $t = 40$  δευτερόλεπτα.



Σχήμα 4.1.12 Το βάθος (αριστερά) και η ταχύτητα (δεξιά) για τα σχήματα του Roe και των κεντρικών διαφορών σε χρόνο  $t = 100$  δευτερόλεπτα.



Σχήμα 4.1.13 Το βάθος (αριστερά) και η ταχύτητα (δεξιά) για τα σχήματα του Roe υψηλής ανάλυσης χρησιμοποιώντας τον οριοθέτη minmod και των κεντρικών διαφορών σε χρόνο  $t = 100$  δευτερόλεπτα.



Μελετώντας και συγκρίνοντας τις αριθμητικές λύσεις του σχήματος κεντρικών διαφορών με το σχήμα του Roe, παρατηρούμε ότι κατά την αναρρίχηση του κύματος στην κινούμενη ακτή το σχήμα κεντρικών διαφορών παρουσιάζει ταλαντώσεις σε σχέση με το σχήμα του Roe (Σχ. 4.1.12) όπως και στα προηγούμενα δύο παραδείγματα. Στη συνέχεια το κύμα μετατοπίζεται προς τα πίσω και δημιουργείται ένα μέτωπο το οποίο ταξιδεύει προς την κεκλιμένη παραλία (Σχ. 4.1.10). Η διαφορά ανάμεσα στα δύο σχήματα είναι ότι η λύση του σχήματος κεντρικών διαφορών έχει παρουσιάσει μια μη φυσιολογική υπερπήδηση πάνω στην κινούμενη τοπογραφία. Τέλος στο χρονικό στιγμιότυπο των 100sec (Σχ. 4.1.13) παρατηρούμε ότι έχει δημιουργηθεί μια ασυνέχεια κοντά στην ακτή γύρω από την οποία το κεντρικό σχήμα διαφορών εμφανίζει ταλαντώσεις.

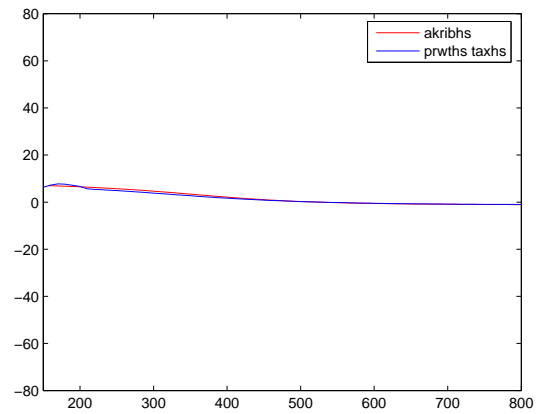
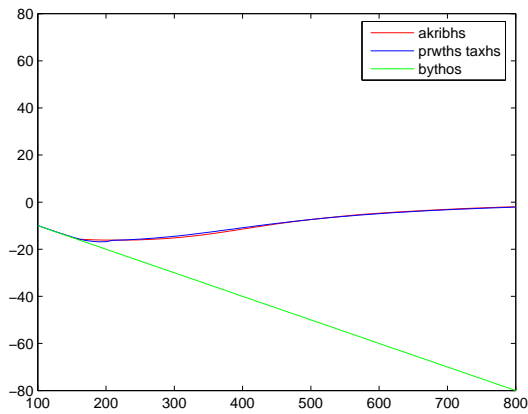
## 4.2 Σύγκριση αριθμητικών αποτελεσμάτων με αναλυτικές λύσεις και πειραματικά δεδομένα

Στις επόμενες παραγράφους εκτίθενται τα αποτελέσματα των προβλημάτων Benchmark 1 και Benchmark 3 τα οποία παρουσιάστηκαν στο 3<sup>ο</sup> Διεθνές συνέδριο για μακρούς κυματισμούς και μοντέλα αναρρίχησης. Τα προβλήματα αυτά είναι μιας διάστασης και σκοπό έχουν να δείξουν την συμπεριφορά του νερού στην ακτή λόγω της εισαγωγής κύματος με κατεύθυνση προς την ακτή για το πρόβλημα 1 και την αντίστοιχη συμπεριφορά λόγω κατολίσθησης του πυθμένα για το πρόβλημα 3. Τα αρχικά δεδομένα και οι αναλυτικές λύσεις μπορούν να βρεθούν στην ιστοσελίδα του συνεδρίου <http://www.cee.cornell.edu/longwave>. Ακόμα εξετάζουμε την αναρρίχηση μεμονωμένου κύματος (solitary wave) στην ακτή και διαχωρίζουμε την περίπτωση όπου το κύμα θραύεται κατά την άνοδο ή την κάθοδο στην κεκλιμένη επιφάνεια, και την περίπτωση της απλής αναρρίχησης εφορμίζοντας τα προβλήματα που αντιστοιχούν στα πειράματα του [42] και συγκρίνουμε τα αριθμητικά αποτελέσματα με τα πειραματικά δεδομένα.

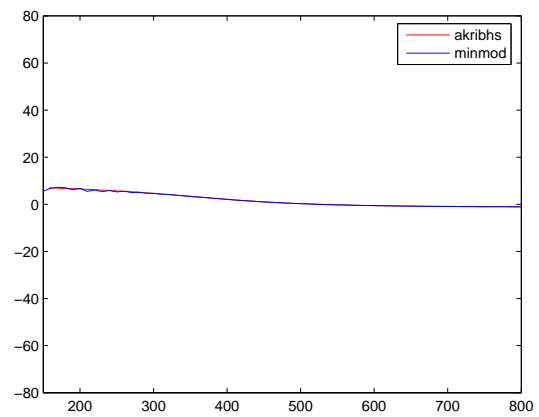
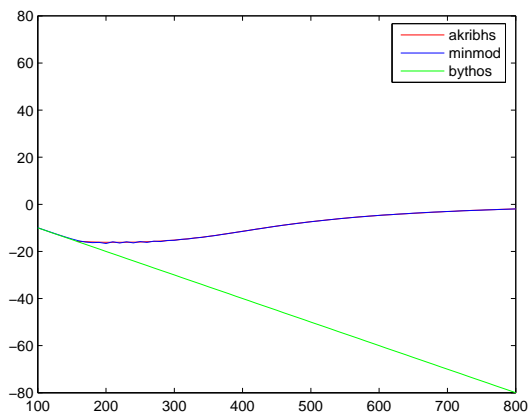
### 4.2.1 Benchmark 1: Αναρρίχηση κύματος Tsunami σε κεκλιμένη παραλία

Το πρώτο Benchmark πρόβλημα αποτελείται από μια κεκλιμένη παραλία  $b(x, t) = -x$  με αρχικά στάσιμο νερό και ακτογραμμή στο  $x = 0$ . Εισάγεται ένα κύμα, που έχει φορά προς την παραλία, με ανύψωση από την κατάσταση ισορροπίας  $\eta(x, 0)$ . Τα αρχικά δεδομένα δίνονται από το  $x = 0$  έως  $x = 50000$  μέτρα ανά 50 μέτρα. Επίσης παρέχεται και η αναλυτική λύση για το βάθος και την ταχύτητα σε χρόνους  $t = 160$  δευτερόλεπτα,  $t = 175$  δευτερόλεπτα  $t = 220$  δευτερόλεπτα. Η παραγωγή των αρχικών δεδομένων και της αναλυτικής λύσης για το πρόβλημα αυτό μπορεί να βρεθεί στο [10].

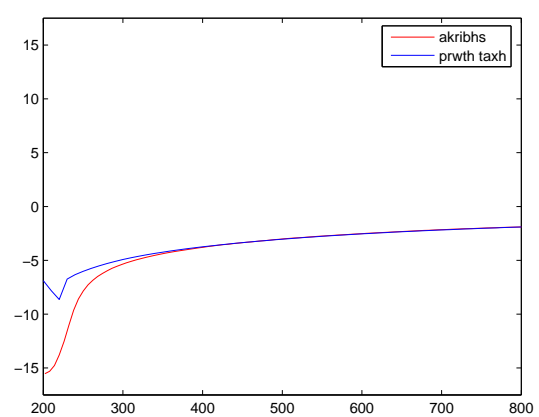
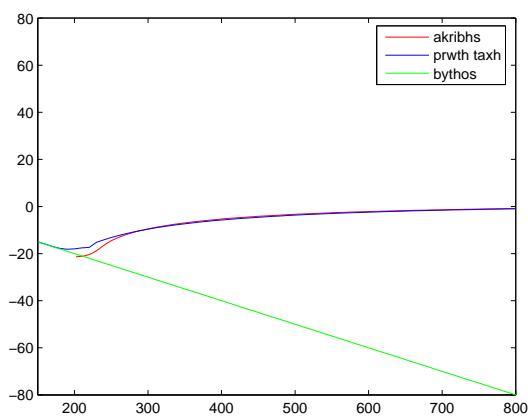
Στα αποτελέσματα που παρατίθενται συγκρίνουμε την αναλυτική λύση με την αριθμητική, του σχήματος που περιγράφηκε στο κεφάλαιο 3. Υπολογίζεται το βάθος και η ταχύτητα στο διάστημα  $x \in [-500, 50000]$  μέτρα. Χρησιμοποιείται ομοιόμορφη διαμέριση και ο αριθμός των υπολογιστικών κελιών είναι 5050 δηλαδή  $dx = 10$  μέτρα με  $cfl = 0.9$ .



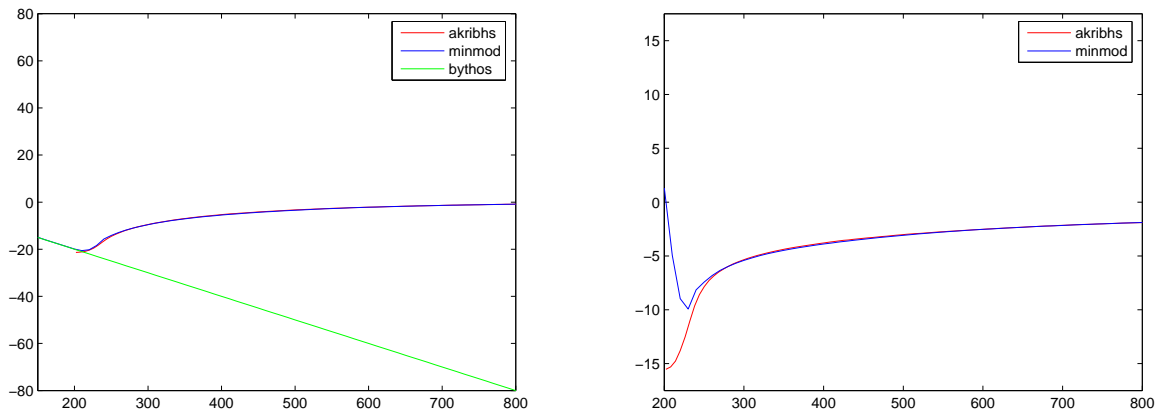
Σχήμα 4.2.1. Το βάθος (αριστερά) και η ταχύτητα (δεξιά) για χρόνο  $t = 160$  δευτερόλεπτα, για περιοχή κοντά στην ακτή και με πρώτης τάξης ακρίβεια.



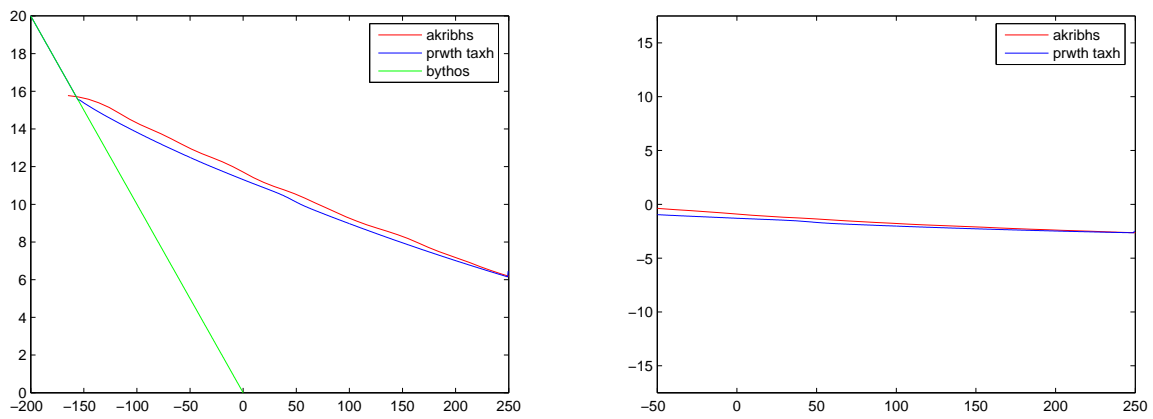
Σχήμα 4.2.2. Το βάθος (αριστερά) και η ταχύτητα (δεξιά) για χρόνο  $t = 160$  δευτερόλεπτα, για το υψηλής τάξης ακρίβειας σχήμα με οριοθέτη minmod.



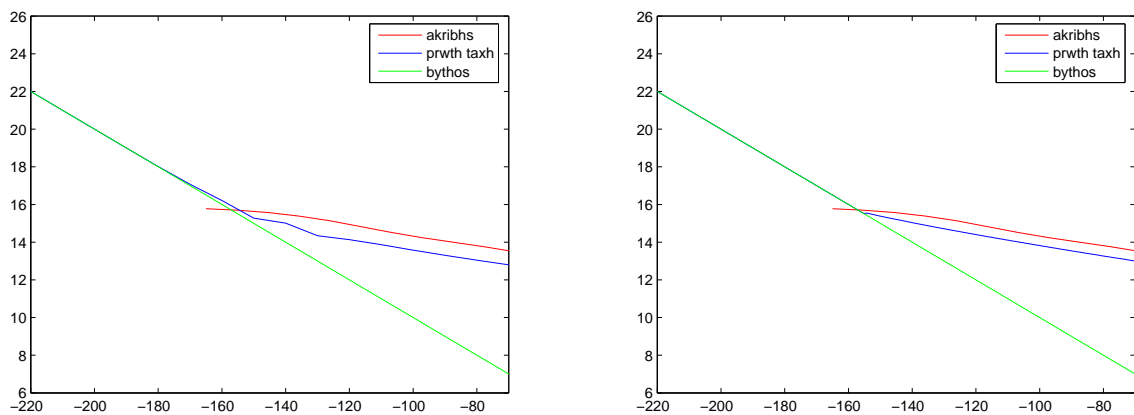
Σχήμα 4.2.3. Το βάθος (αριστερά) και η ταχύτητα (δεξιά) για χρόνο  $t = 175$  δευτερόλεπτα, για ακρίβεια πρώτης τάξης.



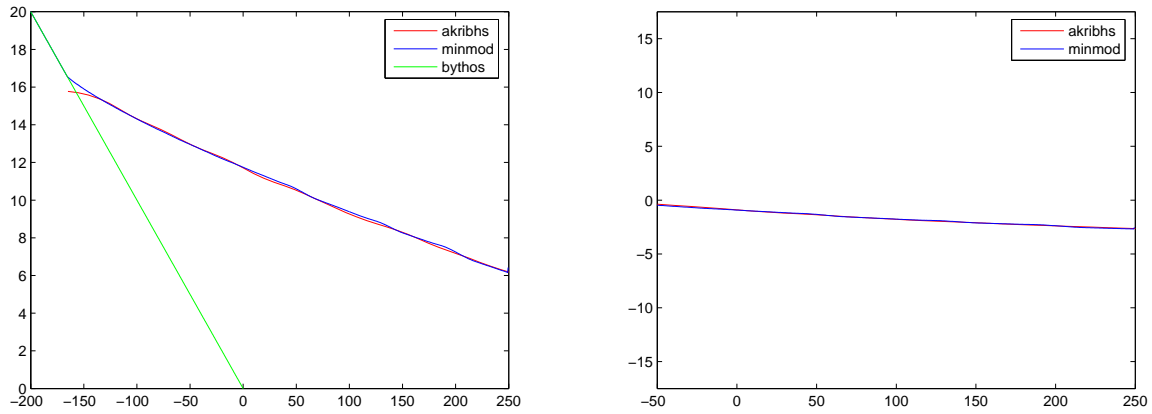
Σχήμα 4.2.4. Το βάθος (αριστερά) και η ταχύτητα (δεξιά) για χρόνο  $t = 175$  δευτερόλεπτα, για υψηλής τάξης ακρίβειας σχήμα με οριοθέτη minmod.



Σχήμα 4.2.5. Το βάθος (αριστερά) και η ταχύτητα (δεξιά) για χρόνο  $t = 220$  δευτερόλεπτα και ακρίβεια πρώτης τάξης.

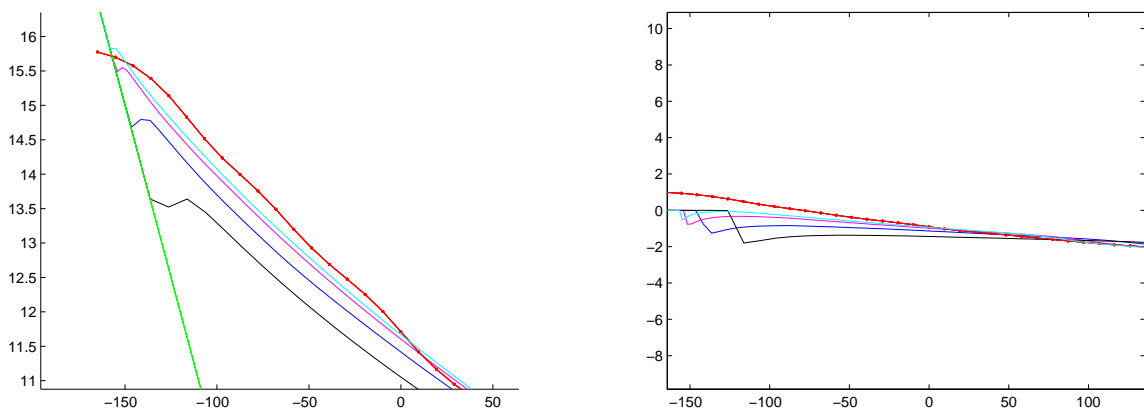


Σχήμα 4.2.5β. Το βάθος σε χρόνο  $t = 220$  δευτερόλεπτα χρησιμοποιώντας χωρίς διόρθωση υγρού στεγανού του (αριστερά) και χρησιμοποιώντας αυτή της παραγράφου 3.4.1 (δεξιά).

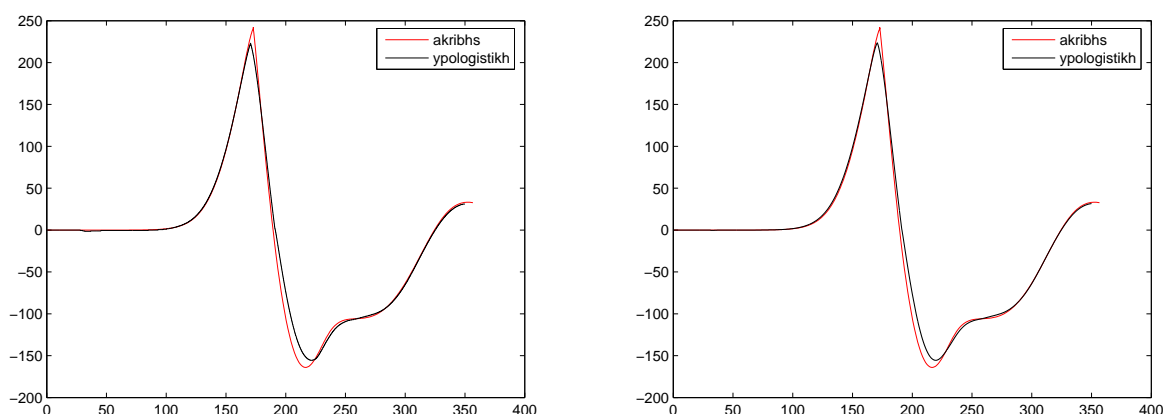


Σχήμα 4.2.6. Το βάθος (αριστερά) και η ταχύτητα (δεξιά) για χρόνο  $t = 220$  δευτερόλεπτα και υψηλής τάξης ακρίβειας σχήμα με οριοθέτη minmod.

Παρατηρώντας τα αποτελέσματα και συγκρίνοντας με την ακριβή λύση βλέπουμε ότι η μεγαλύτερη απόκλιση της αριθμητικής λύσης από την ακριβή βρίσκεται κυρίως κοντά στην ακτή για αυτό και εστιάζουμε σ' αυτή. Συγκρίνοντας τα αποτελέσματα του σχήματος πρώτης τάξης και αυτού της υψηλής ανάλυσης με τον οριοθέτη minmod βλέπουμε ότι επιτυγχάνουμε καλύτερη προσέγγιση με το σχήμα υψηλής ανάλυσης έχουμε όμως πολύ μικρές ταλαντώσεις. Αξίζει επίσης να σημειωθεί ότι χρησιμοποιώντας το σχήμα του Roe, χωρίς την χρήση της ειδικής αντιμετώπισης που εφαρμόζεται στις καταστάσεις υγρού/στεγανού, το νερό σκαρφαλώνει πάνω στην πλάγια ξεπερνώντας την πραγματική λύση. Καθώς αυξάνουμε τα σημεία του υπολογιστικού πλέγματος παρατηρούμε ότι η λύση πλησιάζει όλο και πιο κοντά στην πραγματική όπως φαίνεται και στο σχήμα 4.2.7 υπολογισμένη σε χρόνο  $t = 220$  δευτερολέπτων και με το σχήμα πρώτης τάξης.



Σχήμα 4.2.7. Το βάθος (αριστερά) και η ταχύτητα (δεξιά) για χρόνο  $t = 220$  δευτ. και για διαφορετικό χωρικό βήμα. (α) Το μαύρο αντιστοιχεί σε  $dx = 10.1$  μέτρα (β) Το μπλέ σε  $dx = 5.05$  μέτρα (γ) Το μώβ σε  $dx = 2.525$  μέτρα (δ) Το γαλάζιο σε  $dx = 1.633$  μέτρα και με κόκκινο σχεδιάζεται η ακριβής λύση.



Σχήμα 4.2.8 Η θέση της ακτογραμμής στο χρόνο για συσσώρευση 1000 σημείων κοντά στην ακτή (αριστερά) και για συσσώρευση 5000 σημείων κοντά στην ακτή.

Παρατηρώντας επίσης τα αποτελέσματα για χρόνο  $t = 220$  και για διαφορετικές χωρικές διαμερίσεις, και συγκρίνοντας τα με αποτελέσματα άλλων μεθόδων όπως για παράδειγμα στο [28] όπου αντί για τα ιδιοδιανύσματα και τις ταχύτητες του Roe χρησιμοποιούνται οι ταχύτητες του Einfeldt με ιδιαίτερη τροποποίηση για την απότρεψη εμφάνισης στεγανών και την διαχείριση πηγαίων όρων. Βλέπουμε ότι παρόλο που δεν γίνεται συσσώρευση των σημείων κοντά στην ακτή στην συγκεκριμένη περίπτωση τα αποτελέσματα είναι πολύ ικανοποιητικά. Στο σχήμα 4.2.8 παρατηρούμε την θέση της ακτογραμμής στο χρόνο υπολογισμένη συσσωρεύοντας 1000 σημεία και 5000 σημεία αντίστοιχα κοντά στην ακτή. Παρατηρούμε ότι όσα περισσότερα σημεία συσσωρευτούν κοντά στην ακτή τόσο τα αριθμητικά αποτελέσματα πλησιάζουν αυτά της αναλυτικής λύσης.

## 4.2.2 Αναρρίχηση μεμονομένων κυμάτων

Το παρών πρόβλημα εφαρμόζεται, όπως προαναφέρθηκε, για την μελέτη της αναρρίχησης μεμονομένων κυμάτων στην ακτή, αλλά και για την μελέτη μεμονομένων κυμάτων που υφίστανται θραύση, είτε κατά την άνοδο (run-up) είτε κατά την κάθοδο (run-down). Αυτές οι εφαρμογές των μεμονομένων κυμάτων ίσως να μην είναι και οι πιο κατάλληλες για τις εξισώσεις ρηχών υδάτων οι οποίες δεν περιέχουν όρους διασποράς. Αυτές οι περιπτώσεις όμως είναι μια καλή πηγή πειραματικών δεδομένων για τον έλεγχο της ικανότητας του παρόντος αριθμητικού σχήματος να προσομοιώνει τα κριτήρια θραύσης ως διαδιδόμενες ασυνέχειες (bores) ή ως στάσιμα υδραυλικά άλματα (hydraulic jumps) και να διατηρεί τον όγκο κατά μήκος των ασυνεχειών. Σύμφωνα με την ανάλυση του [42] έχουμε θραύση του κύματος κατά την κάθοδο του από την κεκλιμένη παραλία όταν  $H/d > 0.044$ , όπου  $H$  είναι το μέγιστο πλάτος του μεμονομένου κύματος σε χρόνο  $t = 0$  και  $d$  είναι το βάθος του νερού όταν αυτό βρίσκεται σε ηρεμία. Αντίστοιχα προκύπτει θραύση του κύματος κατά την άνοδό του στην παραλία όταν  $H/d > 0.055$ . Πιο συγκεκριμένα για το πρόβλημα αυτό θεωρούμε ένα μεμονωμένο κύμα με κέντρο στο  $x = X_1$  σε χρόνο  $t = 0$  και κατατομή επιφάνειας

$$\eta(x, 0) = \frac{H}{d} \sec h^2 \gamma (x - X_1)$$

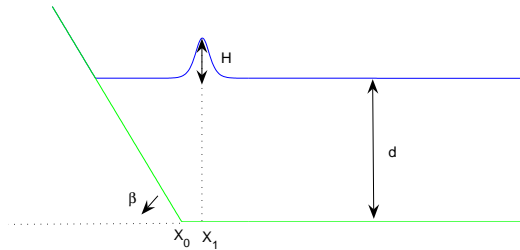
όπου  $\gamma = \sqrt{3H/4d}$  και αρχική ταχύτητα

$$u(x, 0) = \sqrt{g}\eta(x, 0).$$

Η παραλία είναι ένα επίπεδο με κλίση 1 : 19.85 άρα ο βυθός θα έχει την μορφή

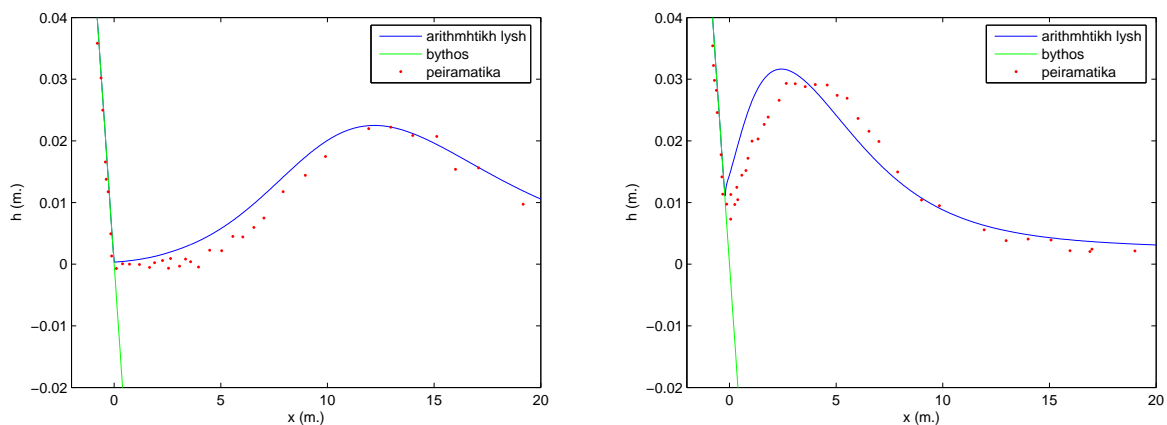
$$b(x) = \begin{cases} -x \tan \beta & x \leq \cot \beta \\ -1 & x > \cot \beta. \end{cases}$$

Το μεμονομένο κύμα τοποθετείται στο σημείο  $X_1$  το οποίο βρίσκεται σε απόσταση ίση με το μισό μήκος του κύματος, από την άκρη της κεκλιμένης επιφάνειας  $X_0$ . Εδώ εξετάζουμε τρεις περιπτώσεις κυμάτων. Όταν δεν συμβαίνει θραύση με  $H/d = 0.019$ , όταν συμβαίνει κατά την κάθοδο με  $H/d = 0.04$ , και με  $H/d = 0.28$  όπου παρατηρείται ισχυρή θραύση τόσο κατά την άνοδο όσο και κατά την κάθοδο. Σε κάθε περίπτωση το βάθος σε κατάσταση ισορροπίας  $d$  είναι  $1m$ . Στο σχήμα 4.2.9. βλέπουμε τις αρχικές συνθήκες του προβλήματος.



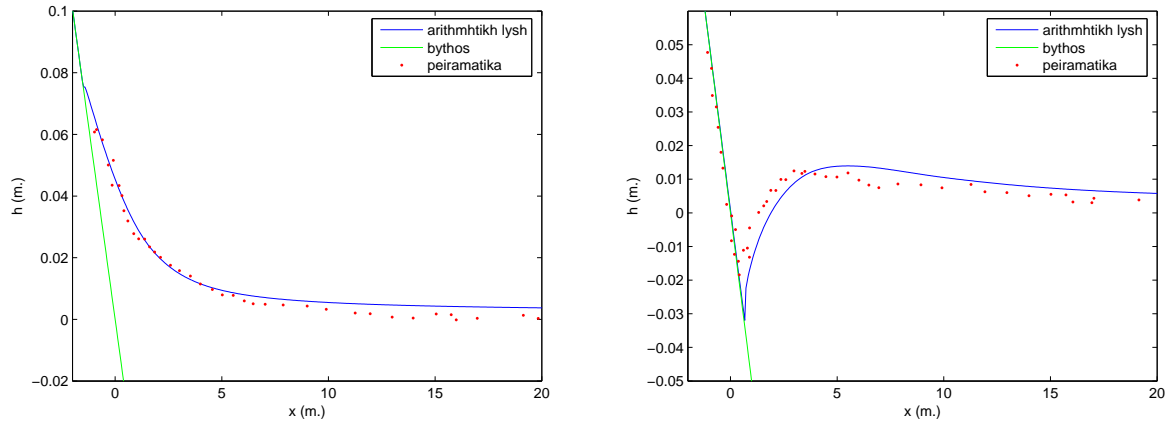
Σχήμα 4.2.9 Δομή αρχικών συνθηκών για το πρόβλημα της αναρρίχησης του μεμονωμένου κύματος.

Στην πρώτη περίπτωση όπως αναφέρθηκε εξετάζουμε την απλή αναρρίχηση του κύματος χωρίς να συμβαίνει θραύση. Εδώ ισχύει ότι  $H/d = 0.019$ , η συνθήκη  $cfl = 0.9$  και το βήμα της χωρικής διαμέρισης  $dx = 0.055m$  και συντελεστή τριβής  $Nm = 0.01$ . Παρακάτω παρατίθενται στιγμιότυπα της λύσης για διάφορες χρονικές στιγμές και γίνεται σύγκριση με τα πειραματικά δεδομένα. Τα παρακάτω αποτελέσματα έχουν προκύψει από το σχήμα πρώτης τάξης.



Σχήμα 4.2.10 Σύγκριση πειραματικών δεδομένων και αριθμητικής λύσης για το μεμονομένο κύμα με  $H/d = 0.019$  για τους αδιάστατους χρόνους  $t\sqrt{g/d} = 25$  (αριστερά) και

$$t\sqrt{g/d} = 40(\text{δεξιά}).$$



Σχήμα 4.2.11 Σύγκριση πειραματικών δεδομένων και αριθμητικής λύσης για το κύμα με  $H/d = 0.019$  για τους αδιάστατους χρόνους  $t\sqrt{g/d} = 55$  (αριστερά) και  $t\sqrt{g/d} = 70$  (δεξιά).

Στο σχήμα 4.2.10 βλέπουμε τη διάδοση του κύματος μέχρι να φτάσει στην ακτή ενώ στο σχήμα 4.2.11 βλέπουμε την μέγιστη άνοδο του κύματος το οποίο δεν έχει "σπάσει" (αριστερά) και την μέγιστη κάθοδο (δεξιά). Σύμφωνα με την ανάλυση του [42], για κύματα τα οποία δεν υφίστανται θραύση μπορούμε να υπολογίσουμε θεωρητικά την μέγιστη τιμή της αναρρίχησης του κύματος και τον χρόνο για τον οποίο αυτή συμβαίνει. Πιο συγκεκριμένα

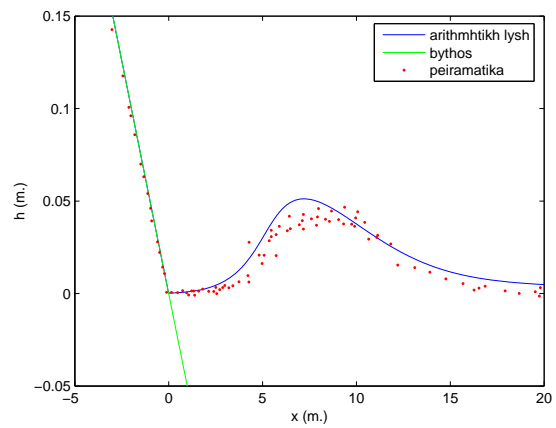
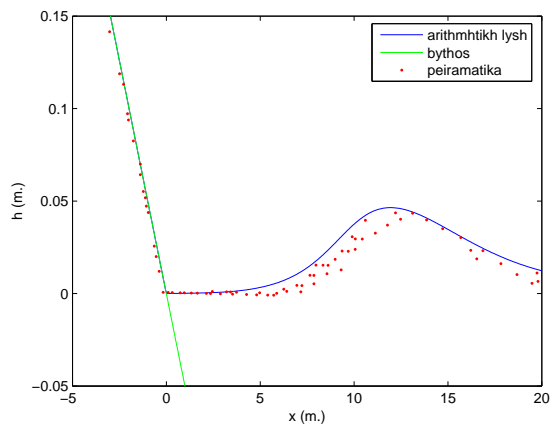
$$t_{max} = \frac{1}{c}(X_1 + X_0 - \frac{0.366}{\gamma}) \quad (4.1)$$

είναι ο χρόνος όπου συμβαίνει η μέγιστη αναρρίχηση και

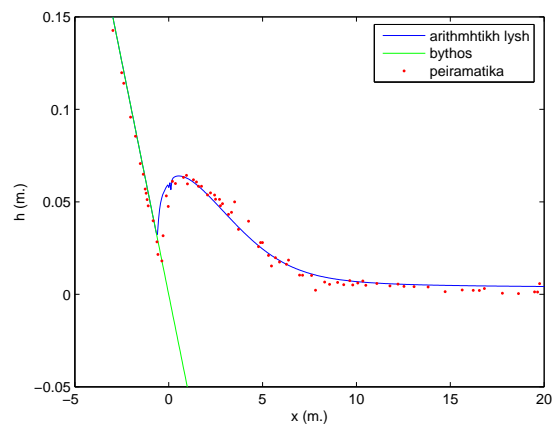
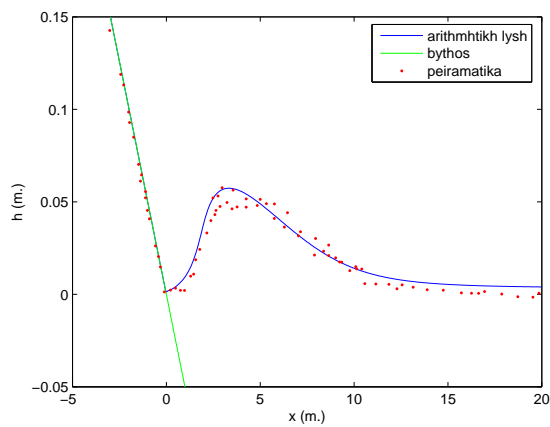
$$\frac{R}{d} = 2.831(\cot \beta)^{\frac{1}{2}} \left( \frac{H}{d} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (4.2)$$

είναι η μέγιστη αναρρίχηση. Υπολογίζοντας την παραπάνω ισότητα για τα δεδομένα του συγκεκριμένου προβλήματος βρίσκουμε ότι η μέγιστη αναρρίχηση θα είναι 0.087 μέτρα και παρατηρώντας τα αποτελέσματα βλέπουμε πολύ καλή προσέγγιση.

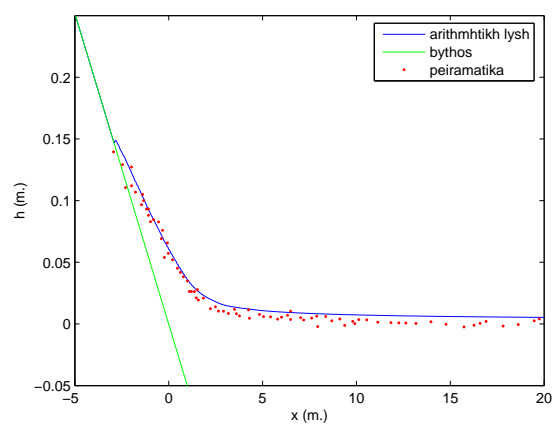
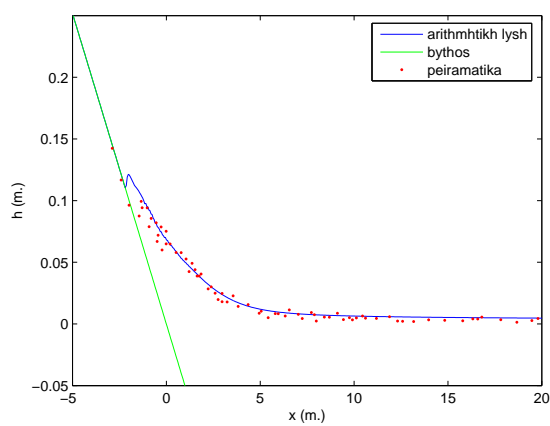
Η επόμενη περίπτωση αφορά την συμπεριφορά του κύματος το οποίο σπάει ελαφρώς κατά την κάθοδο με  $H/d = 0.04$ . Όπως και πριν παρατίθενται χρονικά στιγμιότυπα της αριθμητικής λύσης και πιο συγκεκριμένα της ελεύθερης επιφάνειας τα οποία συγκρίνονται με τα πειραματικά δεδομένα. Η συνθήκη  $cfl = 0.9$  και το βήμα της χωρικής διαμέρισης  $dx = 0.055m$ . Πρέπει να αναφερθεί ότι στο παρών πρόβλημα χρησιμοποιείται τριβή με  $Nm = 0.01$  και ότι τα αριθμητικά αποτελέσματα που λαμβάνουμε είναι δεύτερης τάξης χρησιμοποιώντας τον οριοθέτη minmod.



Σχήμα 4.2.12 Σύγκριση πειραματικών δεδομένων και αριθμητικής λύσης για το κύμα με  $h/d = 0.04$  για τους αδιάστατους χρόνους  $t\sqrt{g/d} = 20$  (αριστερά) και  $t\sqrt{g/d} = 26$  (δεξιά).

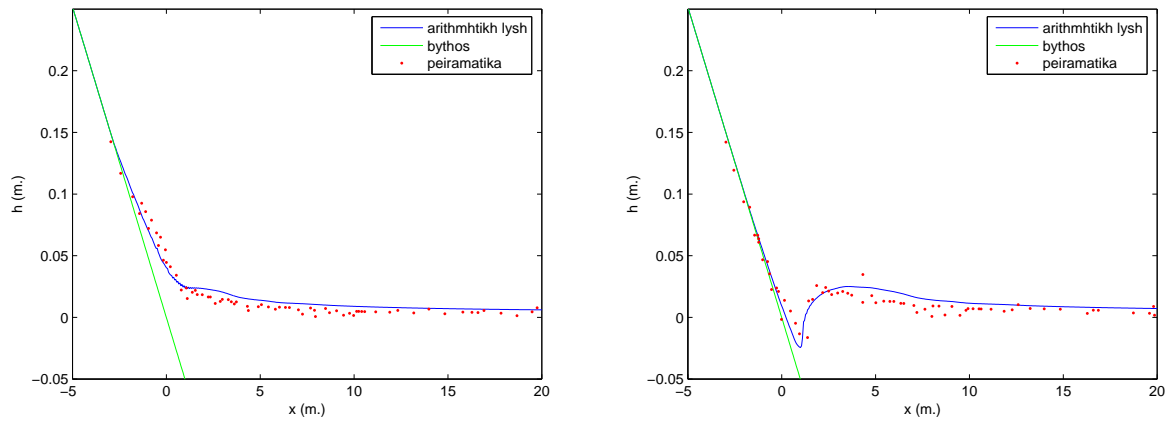


Σχήμα 4.2.13 Σύγκριση πειραματικών δεδομένων και αριθμητικής λύσης για το κύμα με  $H/d = 0.04$  για τους αδιάστατους χρόνους  $t\sqrt{g/d} = 32$  (αριστερά) και  $t\sqrt{g/d} = 38$  (δεξιά).



Σχήμα 4.2.14 Σύγκριση πειραματικών δεδομένων και αριθμητικής λύσης για το κύμα με  $H/d = 0.04$  για τους αδιάστατους χρόνους  $t\sqrt{g/d} = 44$  (αριστερά) και  $t\sqrt{g/d} = 50$  (δεξιά).

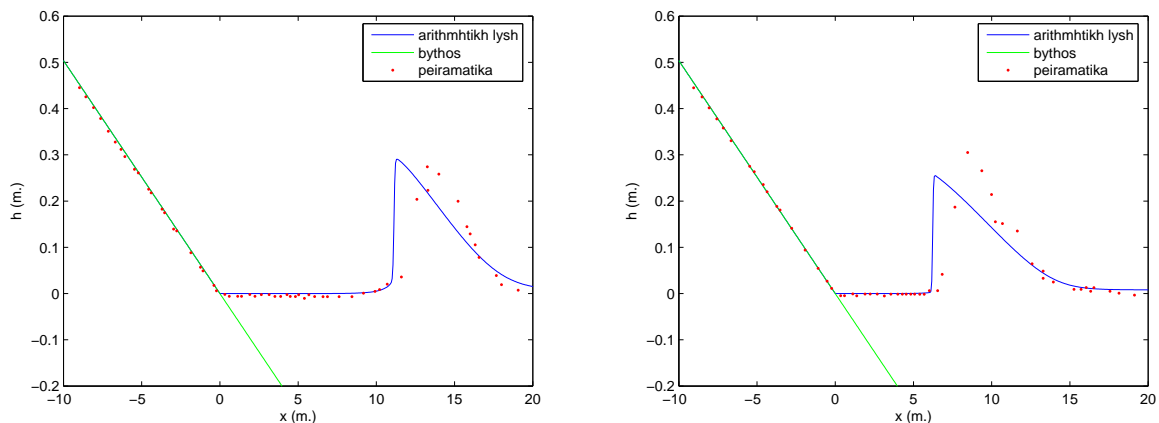




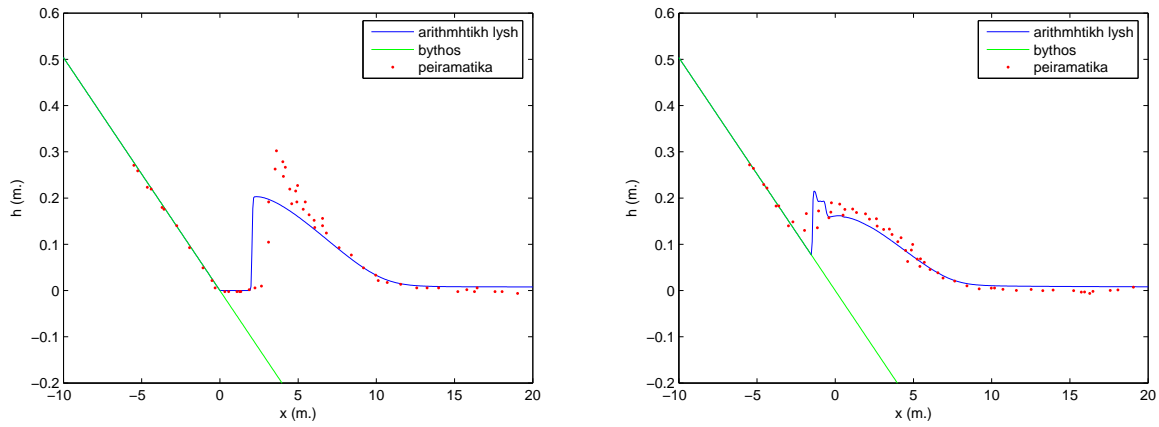
Σχήμα 4.2.15 Σύγκριση πειραματικών δεδομένων και αριθμητικής λύσης για το κύμα με  $H/d = 0.04$  για τους αδιάστατους χρόνους  $t\sqrt{g/d} = 56$  (αριστερά) και  $t\sqrt{g/d} = 62$  (δεξιά).

Στα στιγμιότυπα του σχήματος 4.2.12 φαίνεται ότι το κύμα πλησιάζει την ακτογραμμή ενώ στο δεξί στιγμιότυπο του σχήματος 4.2.13 το κύμα αρχίζει να αναρριχάται στην ακτή και σημειώνει την μέγιστη αναρρίχηση για αδιάστατο χρόνο 50. Ακόμα παρατηρούμε ότι κατά την κάθοδο του κύματος δεν εμφανίζονται ταλαντώσεις οι οποίες προκύπτουν σε λύσεις που βασίζονται σε σχήματα πεπερασμένων στοιχείων [48] ενώ η μέγιστη κάθοδος που συμβαίνει σε χρόνο 62 συμφωνεί με τα πειραματικά δεδομένα.

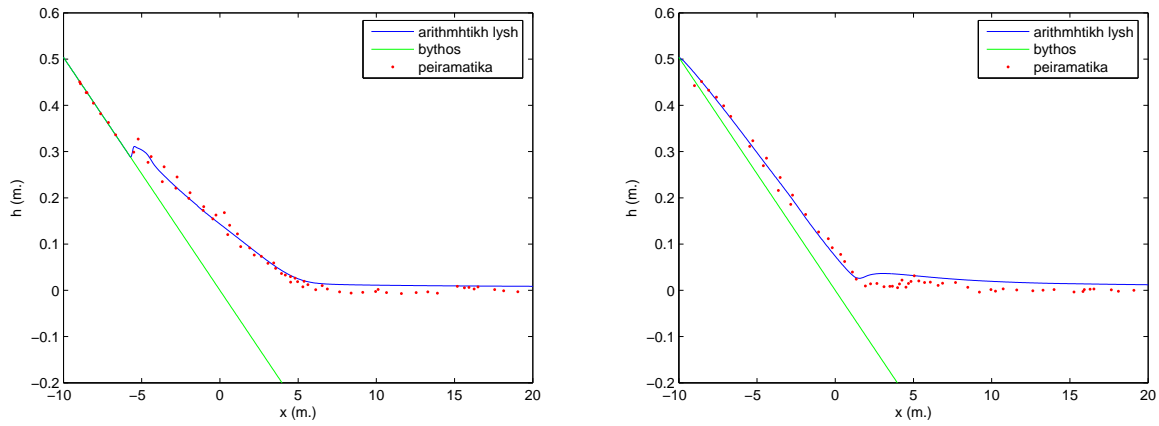
Τέλος το κύμα με το μεγαλύτερο πλάτος  $H/d = 0.28$  είναι αυτό που παρουσιάζει θραύση τόσο κατά την άνοδο όσο και κατά την κάθοδο. Αντίστοιχα με τα δύο προηγούμενα προβλήματα  $cfl = 0.9$ ,  $dx = 0.055m$ ,  $Nm = 0.01$ .



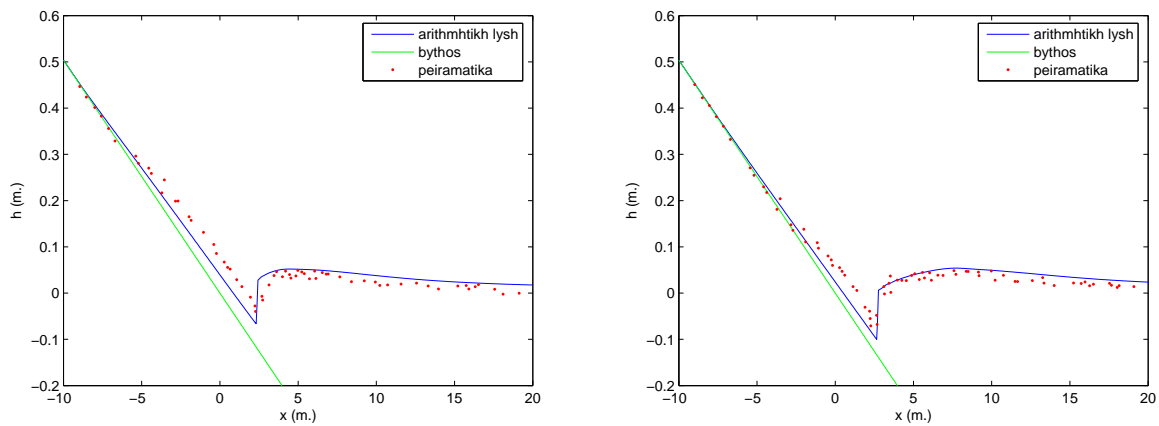
Σχήμα 4.2.16 Σύγκριση πειραματικών δεδομένων και αριθμητικής λύσης για το κύμα με  $H/d = 0.28$  για τους αδιάστατους χρόνους  $t\sqrt{g/d} = 10$  (αριστερά) και  $t\sqrt{g/d} = 15$  (δεξιά).



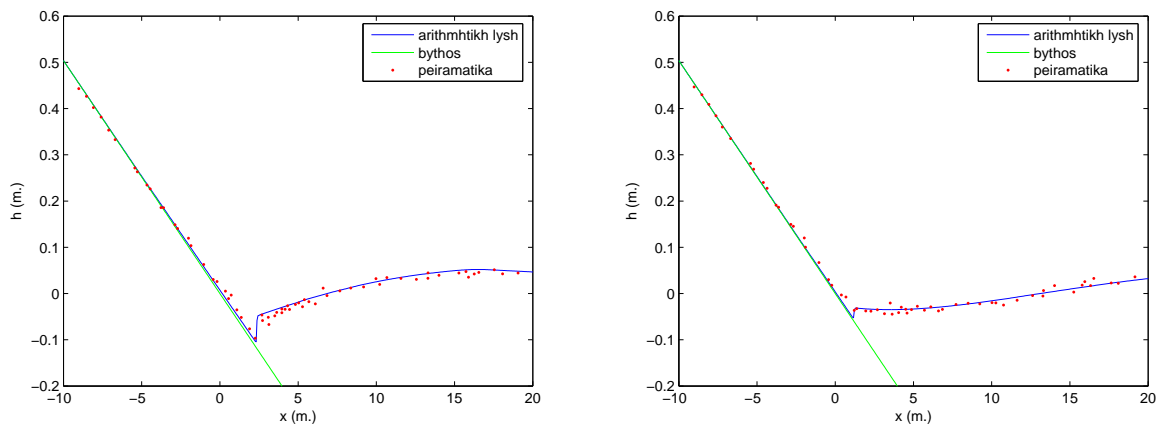
Σχήμα 4.2.17 Σύγκριση πειραματικών δεδομένων και αριθμητικής λύσης για το κύμα με  $H/d = 0.28$  για τους αδιάστατους χρόνους  $t\sqrt{g/d} = 20$  (αριστερά) και  $t\sqrt{g/d} = 25$  (δεξιά).



Σχήμα 4.2.18 Σύγκριση πειραματικών δεδομένων και αριθμητικής λύσης για το κύμα με  $H/d = 0.28$  για τους αδιάστατους χρόνους  $t\sqrt{g/d} = 30$  (αριστερά) και  $t\sqrt{g/d} = 45$  (δεξιά).



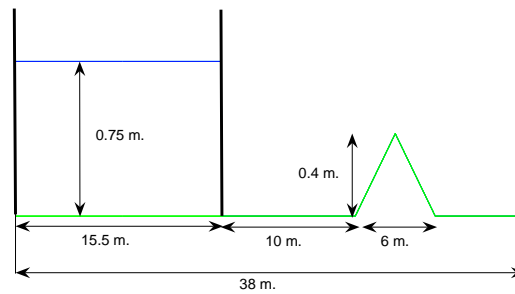
Σχήμα 4.2.19 Σύγκριση πειραματικών δεδομένων και αριθμητικής λύσης για το κύμα με  $H/d = 0.28$  για τους αδιάστατους χρόνους  $t\sqrt{g/d} = 55$  (αριστερά) και  $t\sqrt{g/d} = 60$  (δεξιά).



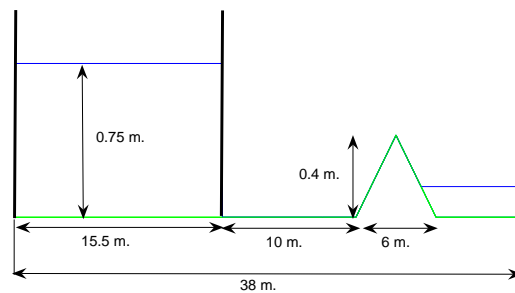
Σχήμα 4.2.20 Σύγκριση πειραματικών δεδομένων και αριθμητικής λύσης για το κύμα με  $H/d = 0.28$  για τους αδιάστατους χρόνους  $t\sqrt{g/d} = 70$  (αριστερά) και  $t\sqrt{g/d} = 80$  (δεξιά).

Στα παραπάνω αποτελέσματα φαίνεται αναλυτικά η πορεία του κύματος. Παρατηρούμε ότι το μέτωπο του κύματος γίνεται απότομο νωρίτερα από ότι τα πειραματικά δεδομένα. Αυτό οφείλεται στο μεγάλο ύψος του κύματος και στην αδυναμία των μη γραμμικών εξισώσεων ρηχών υδάτων, που δεν περιλαμβάνουν όρους διασποράς έτσι ώστε να ισορροπίσουν τις μη γραμμικές επιδράσεις. Το κύμα σύμφωνα με τα πειραματικά δεδομένα θραύεται σε αδιάστατο χρόνο 20. Το αριθμητικό μοντέλο προσομοιώνει το θραυόμενο κύμα σαν μια ασυνέχεια (bore) και αποθηκεύει το νερό που χύνεται από το θραυόμενο κύμα πίσω από το κάθετο μέτωπο. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα, η υπολογίσιμη ασυνέχεια (bore), να είναι ελαφρώς πιο μπροστά από το πειραματικό κύμα. Λόγω της διατήρησης της μάζας το υπολογιστικό προφίλ ανακάμπτει όταν η θραύση σταματάει σε αδιάστατο χρόνο 25. Η συμφωνία πειραματικών και υπολογιστικών αποτελεσμάτων παραμένει μέχρι και το χρόνο της μέγιστης αναρρίχησης  $(t(g/h)^{1/2} = 45)$ . Ασυμφωνία αρχίζει να φαίνεται γύρω στο 55 καθώς η ταχύτητα του μετώπου αυξάνεται δημιουργώντας ένα θραυόμενο κύμα κοντά στην γραμμή της κατάστασης ηρεμίας. Το μοντέλο πεπερασμένου όγκου που εξετάζουμε προσεγγίζει το θραυόμενο κύμα ως ένα υδραυλικό άλμα και διατηρεί τον όγκο ροής πίσω από αυτό. Η συμφωνία των δεδομένων αρχίζει εκ νέου όταν σταματάει η θραύση, στο τέλος της διαδικασίας καθόδου. Η διάδοση της ασυνέχειας (bore) με ένα σχεδόν κάθετο μέτωπο δείχνει την ικανότητα του σχήματος πεπερασμένου όγκου να υπολογίζει τις ασυνέχειες. Το σφάλμα διατήρησης μάζας % δεν ξεπερνάει το  $10^{-3}\%$ . Εν κατακλείδι, το παρών αριθμητικό μοντέλο παρέχει καλή προσέγγιση των θραυόμενων κυματισμών ως διαδιδόμενες ασυνέχειες (bores) ή στάσιμα υδραυλικά άλματα και δείχνει πολύ καλή ικανότητα στο να διατηρεί τον όγκο καθ' όλη την διάρκεια της αναρρίχησης και της καθόδου.

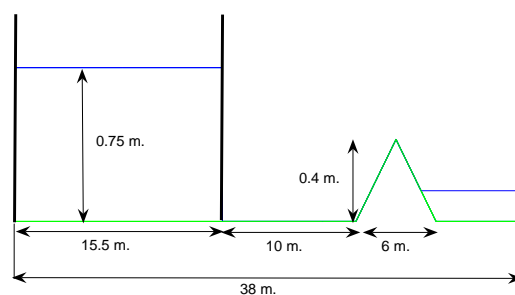
### 4.2.3 Κατάρρευση φράγματος και διάδοση με τριγωνικό εμπόδιο



Σχήμα 4.2.21 Γεωμετρία του πειραματικού μοντέλου στην προσομοίωση κατάρρευσης φράγματος και διάδοσης πάνω σε τριγωνικό εμπόδιο με ελεύθερο σύνορο.



Σχήμα 4.2.22 Γεωμετρία του πειραματικού μοντέλου στην προσομοίωση κατάρρευσης φράγματος και διάδοσης πάνω σε τριγωνικό εμπόδιο με μερικώς υγρό κανάλι.

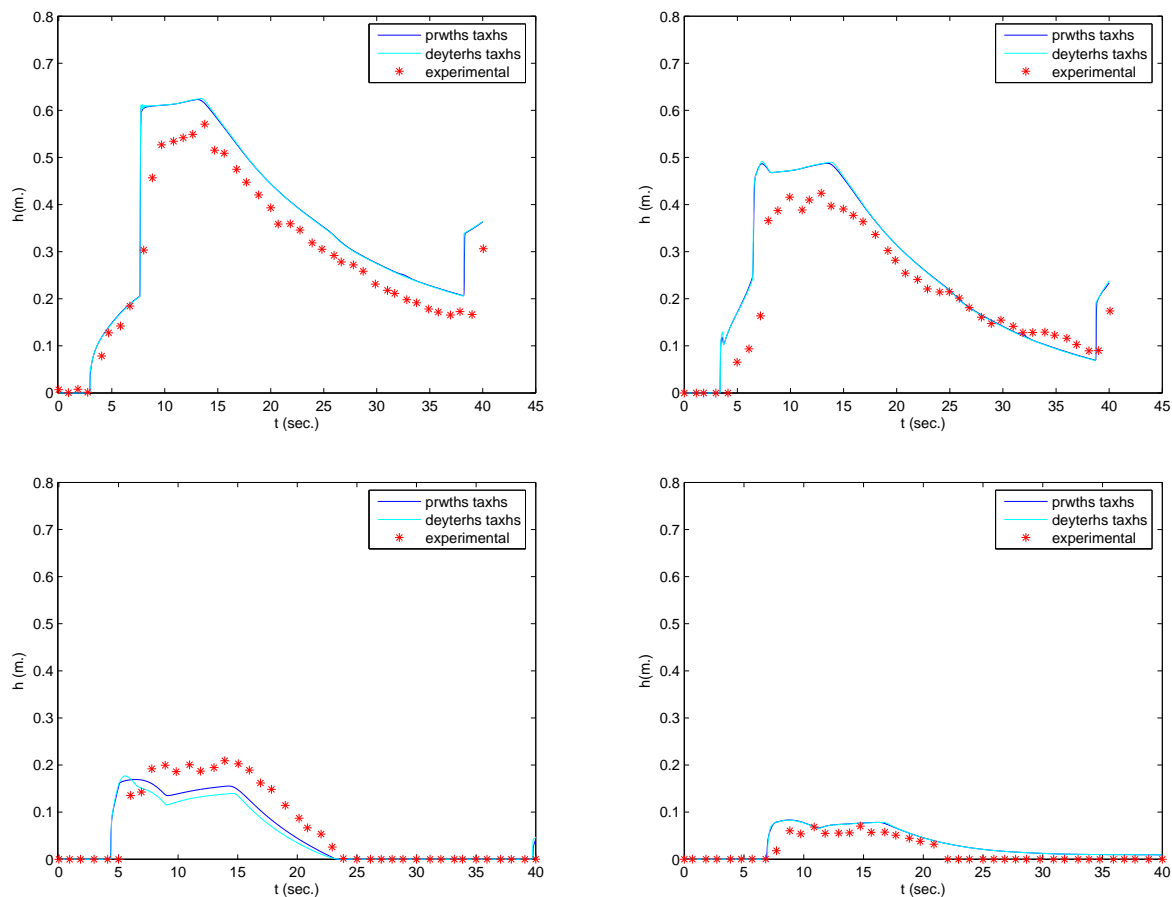


Σχήμα 4.2.23 Γεωμετρία του πειραματικού μοντέλου στην προσομοίωση κατάρρευσης φράγματος και διάδοσης πάνω σε τριγωνικό εμπόδιο με μερικώς υγρό κανάλι και με συνθήκες ανάκλασης.

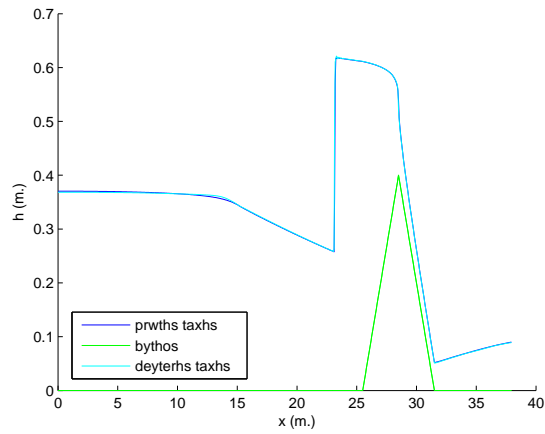
Σε αυτό το παράδειγμα εξετάζονται τρεις περιπτώσεις εξέλιξης του κύματος, που προκύπτει από την κατάρρευση φράγματος, πάνω σε τοπογραφία με τριγωνικό εμπόδιο [9],[36]. Η γεωμετρία του καναλιού φαίνεται στο σχήμα 4.2.21. Πιο συγκεκριμένα μια δεξαμενή με νερό βάθους 0.75 μέτρα συνδέεται με ένα ορθογώνιο κανάλι. Το συνολικό μήκος είναι 38 μέτρα. Το φράγμα τοποθετείται στα  $x = 15.5$  μέτρα και ένα τριγωνικό εμπόδιο πλάτους 6 μέτρων και ύψους 0.4 μέτρων, τοποθετείται 13 μέτρα μετά την δεξαμενή. Οι κλίσεις του τριγώνου είναι συμμετρικές. Οι αρχικές συνθήκες διαφέρουν ανάλογα με την περίπτωση που εξετάζουμε.

- (1) Στην πρώτη περίπτωση το κανάλι είναι στεγνό παντού και οι συνοριακές συνθήκες που εφαρμόζονται είναι για  $x = 0$  συνοριακές συνθήκες ανάκλασης και για  $x = 38$  συνοριακές συνθήκες ελεύθερης ροής (Σχ. 4.2.21).
- (2) Στην δεύτερη περίπτωση το κανάλι είναι μερικώς υγρό και η στάθμη του νερού που βρίσκεται μετά το τριγωνικό εμπόδιο, είναι  $x = 0.15$  μέτρα. Οι συνοριακές συνθήκες στο  $x = 0$  είναι συνθήκες ανάκλασης και στο  $x = 38$  υπάρχει τοίχος ύψους 0.15 μέτρων (Σχ. 4.2.22).
- (3) Η τρίτη περίπτωση είναι όμοια με την δεύτερη με τη διαφορά ότι στο  $x = 38$  έχουμε συνοριακές συνθήκες ανάκλασης (Σχ. 4.2.23).

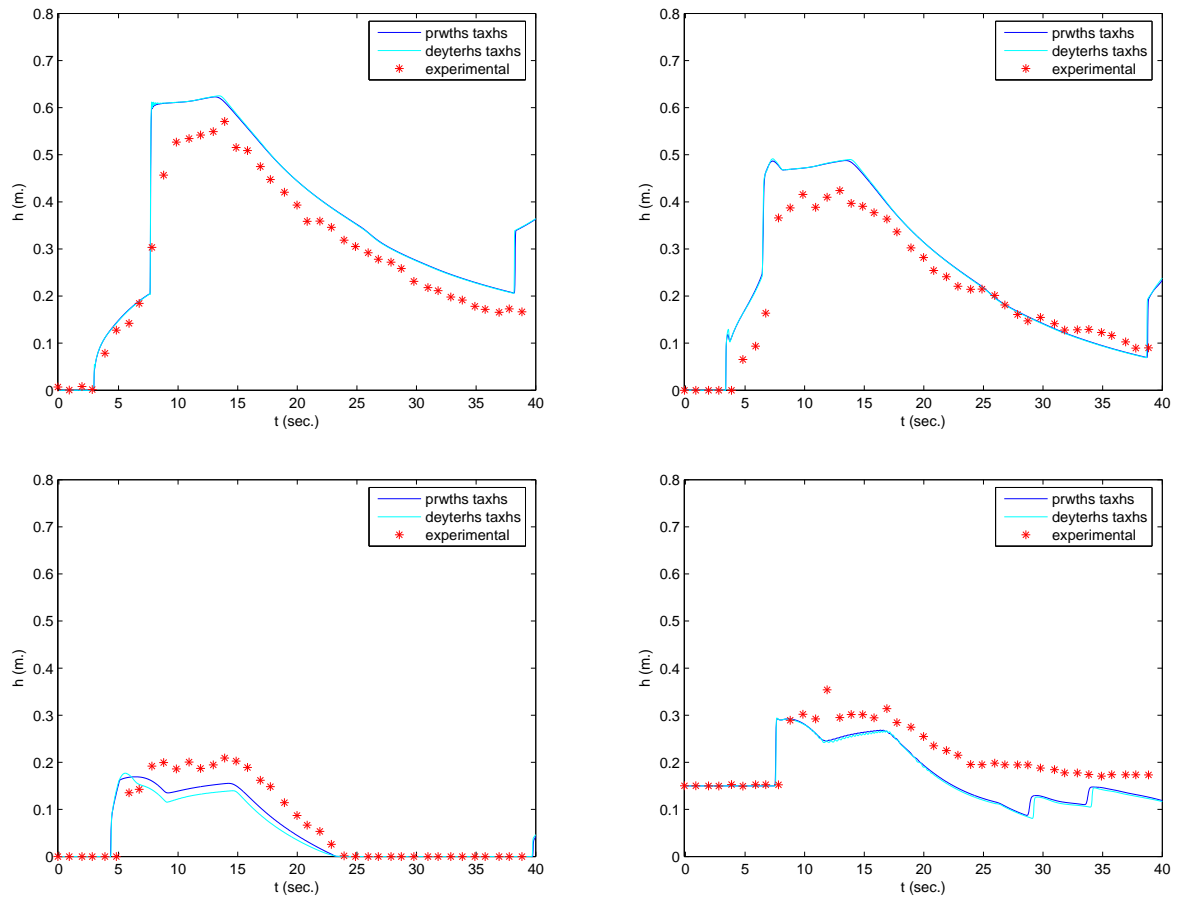
Ο συντελεστής τριβής του Manning είναι 0.0125 για όλες τις παραπάνω περιπτώσεις. Τα αποτελέσματα που παρατείνονται είναι τόσο η χρονική εξέλιξη του φαινομένου σε χρόνο 10 δευτερολέπτων, υπολογισμένη με το σχήμα του Roe πρώτης τάξης και με το σχήμα υψηλής ανάλυσης, αλλά και το ύψος του νερού το οποίο έχει μετρηθεί σε τέσσερα σημεία (πύλες) κατά μήκος του καναλιού. Η πρώτη πύλη (G10) βρίσκεται 10 μέτρα μετά το φράγμα, η δεύτερη (G11) 11 μέτρα μετά το φράγμα, η τρίτη (G13) 13 μέτρα και η τελευταία (G20) 20 μέτρα μετά το φράγμα.



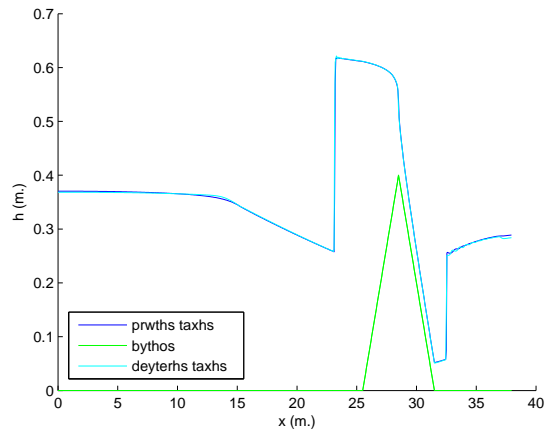
Σχήμα 4.2.24. Σύγκριση αριθμητικών και πειραματικών αποτελεσμάτων για τις πύλες G10, G11, G13, G20 μέχρι χρόνο  $t = 40$  δευτερόλεπτα για την πρώτη περίπτωση



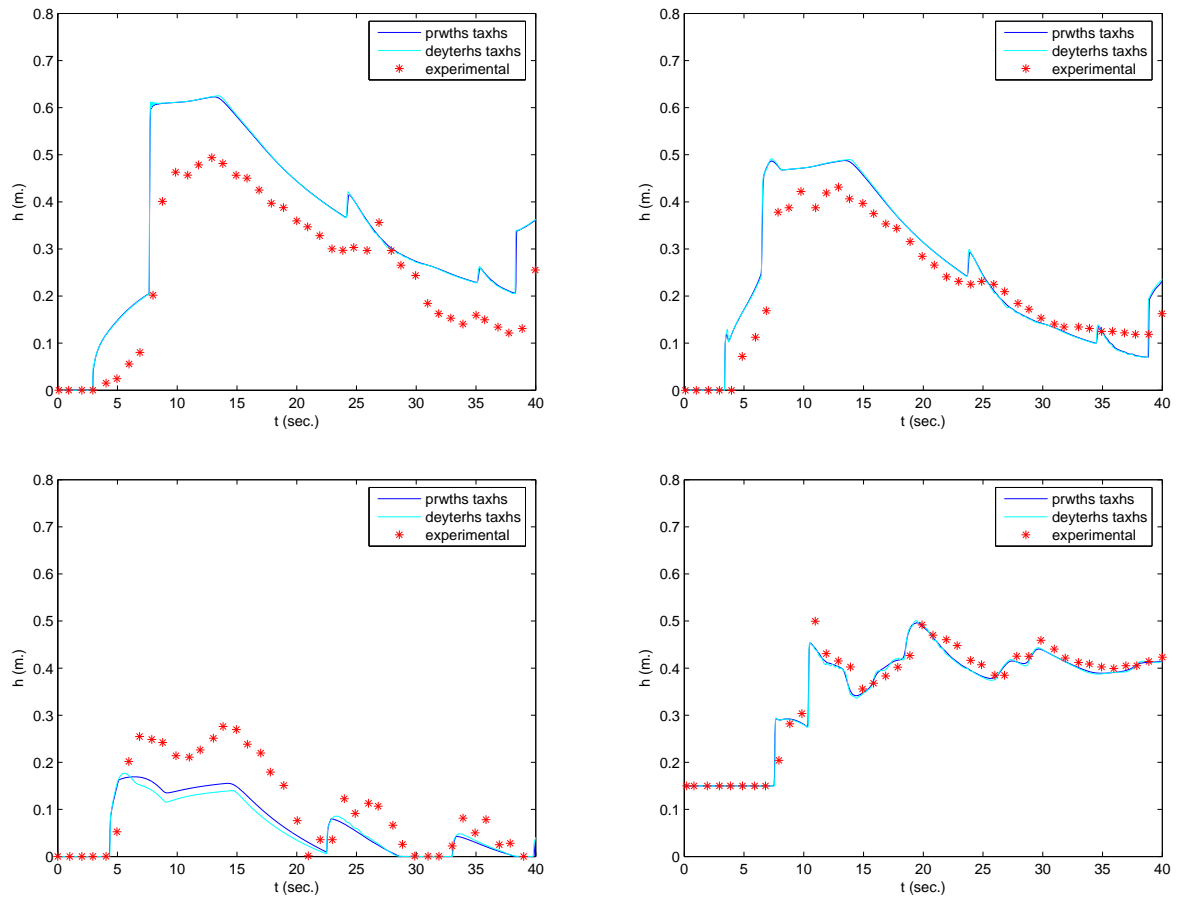
Σχήμα 4.2.25. Αριθμητική λύση σε χρόνο  $t = 10$  δευτερόλεπτα για την πρώτη περίπτωση. Σύγκριση ανάμεσα στο σχήμα του Roe πρώτης τάξης και σ' αυτό της υψηλής ακρίβειας με οριοθέτη minmod.



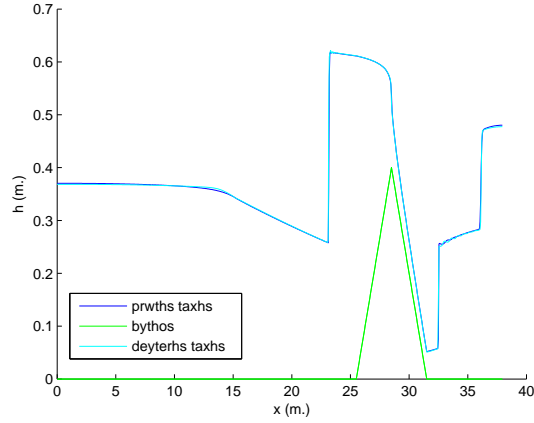
Σχήμα 4.2.26. Σύγκριση αριθμητικών και πειραματικών αποτελεσμάτων για τις πύλες  $G_{10}, G_{11}, G_{13}, G_{20}$  μέχρι χρόνο  $t = 40$  δευτερόλεπτα για την δεύτερη περίπτωση.



Σχήμα 4.2.27. Αριθμητική λύση σε χρόνο  $t = 10$  δευτερόλεπτα για την δεύτερη περίπτωση. Σύγκριση ανάμεσα στο σχήμα του Roe πρώτης τάξης και σ' αυτό της υψηλής ακρίβειας με οριοθέτη minmod.



Σχήμα 4.2.28. Σύγκριση αριθμητικών και πειραματικών αποτελεσμάτων για τις πύλες  $G_{10}, G_{11}, G_{13}, G_{20}$  μέχρι χρόνο  $t = 40$  δευτερόλεπτα για την τρίτη περίπτωση



Σχήμα 4.2.29. Αριθμητική λύση σε χρόνο  $t = 10$  δευτερόλεπτα για την τρίτη περίπτωση. Σύγκριση ανάμεσα στο σχήμα του Roe πρώτης τάξης και σ' αυτό της υψηλής ακρίβειας με οριοθέτη minmod.

Παρατηρώντας τα αποτελέσματα στις πύλες  $G10$  και  $G11$  οι οποίες είναι τοποθετημένες πριν το τριγωνικό εμπόδιο βλέπουμε και στις τρεις περιπτώσεις ότι η πρόβλεψη του χρόνου της άφιξης του κύματος όπως και του βάθους είναι καλή. Το σημείο  $G13$  βρίσκεται στην κορυφή του τριγώνου και άρα είναι ένα κρίσιμο σημείο. Παρατηρείται ότι η μετάβαση από υγρό σε στεγανό και το αντίθετο είναι σωστή. Συγκρίσιμα αποτελέσματα μπορούν να βρεθούν στα [36], [9].

#### 4.2.4 Benchmark 3: Γένεση και αναρρίχηση κύματος Tsunami λόγω κατολίσθησης

Στο τρίτο πρόβλημα Benchmark [32] μας ζητείται να υπολογίσουμε την ελεύθερη επιφάνεια και την αναρρίχηση του κύματος που προκαλείται λόγω της κατολίσθησης μαζάς του βύθου. Ο βύθος όπως και πριν είναι μια κεκλιμένη παραλία πάνω στην οποία κινείται μια μάζα που έχει το σχήμα συνάρτησης Gauss. Το διάστημα υπολογισμού είναι από  $x = 0$  έως  $x = 130$  μέτρα. Τα υπολογιστικά κελιά είναι 1300 και χρησιμοποιείται  $cfl = 0.9$ . Ο βυθός μπορεί να περιγραφεί ως:

$$h(x, t) = H(x) + h_0(x, t)$$

όπου

$$H(x) = -x \tan \beta$$

και

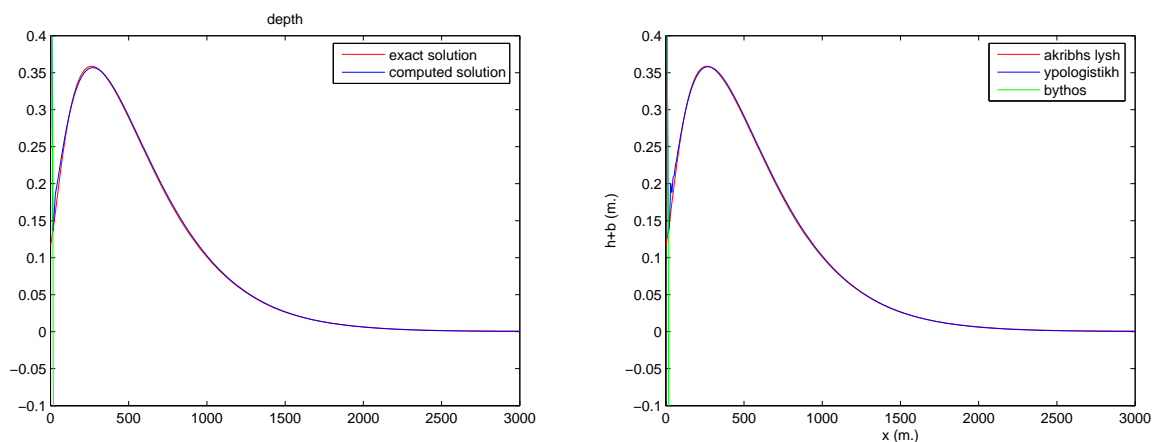
$$h_0(x, t) = \delta \exp \left[ - \left( 2 \sqrt{\frac{x \mu^2}{\delta \tan \beta}} - \sqrt{\frac{g}{\delta}} \mu t \right)^2 \right]$$

όπου το  $\delta$  είναι το μέγιστο πάχος της επιφάνειας που γλιστράει μετρίμενο κάθετα στον άξονα των  $x$ . Η ποσότητα  $\mu = \text{πάχος} / \text{μήκος}$  της επιφάνειας που ολισθαίνει και  $\beta$  είναι η κλίση της παραλίας. Η μάζα κινείται με σταθερή επιτάχυνση. Περισσότερες πληροφορίες μπορούν να βρεθούν στο [32].

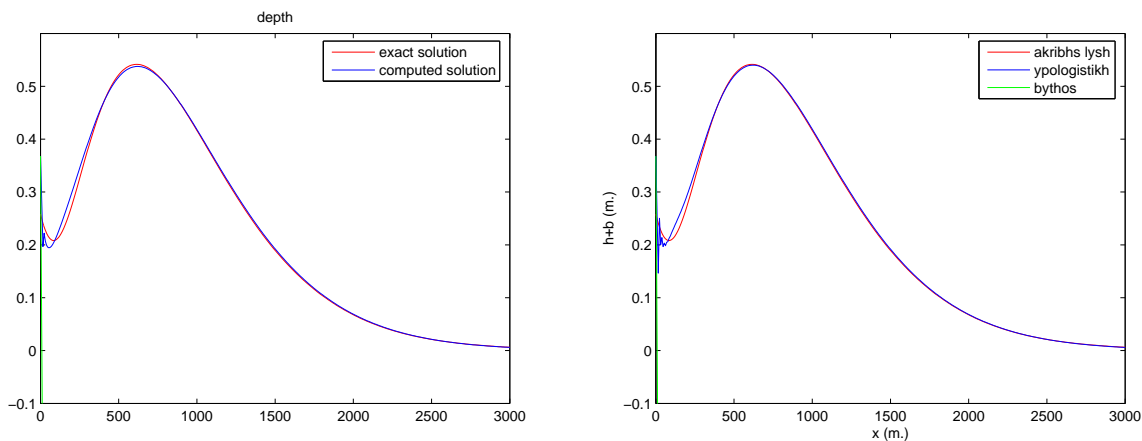
Για το συγκεκριμένο πρόβλημα υπολογίζουμε δύο περιπτώσεις. Στην πρώτη περίπτωση  $\frac{\tan \beta}{\mu} = 10 \Rightarrow \mu = 0.01$  δηλαδή η κινούμενη μάζα είναι πολύ λεπτή και στην δεύτερη  $\frac{\tan \beta}{\mu} = 1 \Rightarrow \mu = 0.1$ . Η γωνία και στις δύο περιπτώσεις είναι  $\beta = 5.7^\circ$ , ενώ συγκρίνουμε με τις αναλυτικές



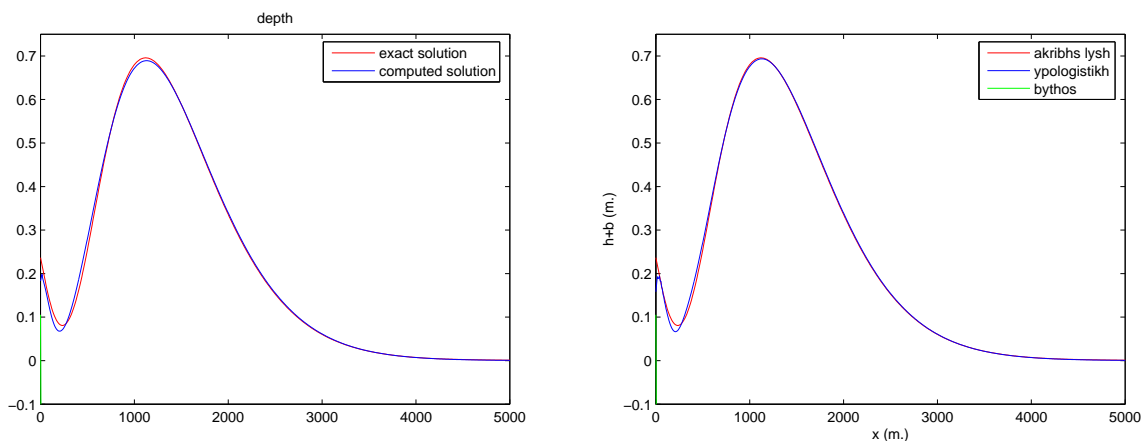
λύσεις, οι οποίες προέρχονται από τις γραμμικές εξισώσεις ρηχών υδάτων [32], για την πρώτη περίπτωση, στους χρόνους:  $t' = \sqrt{\frac{g}{\delta}}\mu t = 0.5, 1.0, 1.5$



Σχήμα 4.2.30. Ακριβής και υπολογιστική λύση για  $\mu = 0.01$  και χρόνο  $t' = 0.5$  δευτερόλεπτα. Πρώτης τάξης (αριστερά), υψηλής ανάλυσης (δεξιά) χρησιμοποιώντας τον οριοθέτη minmod.

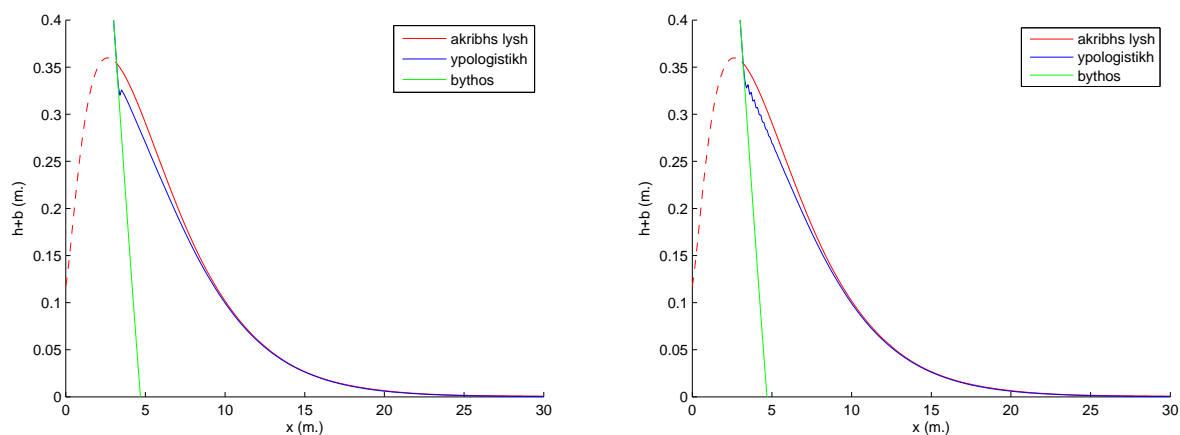


Σχήμα 4.2.31. Ακριβής και υπολογιστική λύση για  $\mu = 0.01$  και χρόνο  $t' = 1.0$  δευτερόλεπτα. Πρώτης τάξης (αριστερά), υψηλής ανάλυσης (δεξιά) χρησιμοποιώντας τον οριοθέτη minmod.

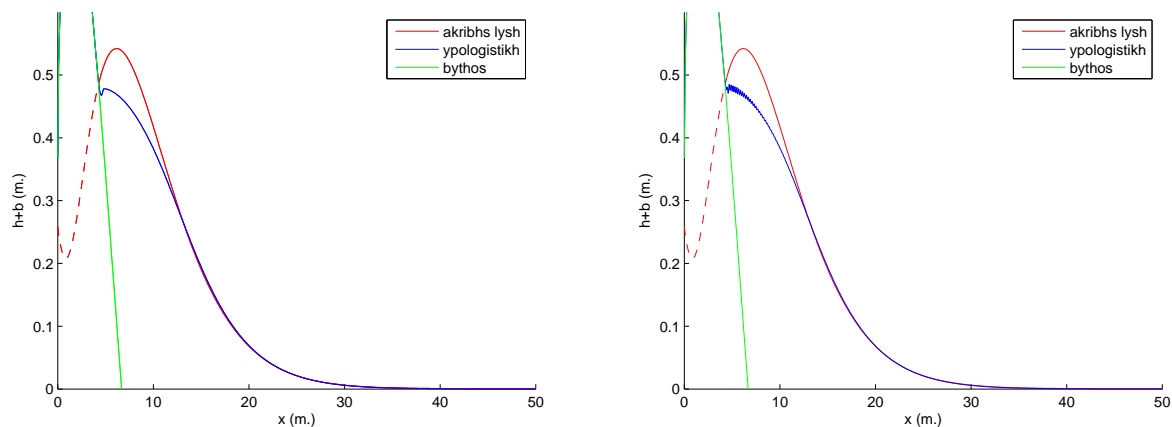


Σχήμα 4.2.32. Ακριβής και υπολογιστική λύση για  $\mu = 0.01$  και χρόνο  $t' = 1.5$  δευτερόλεπτα. Πρώτης τάξης (αριστερά), υψηλής ανάλυσης (δεξιά) χρησιμοποιώντας τον οριοθέτη minmod.

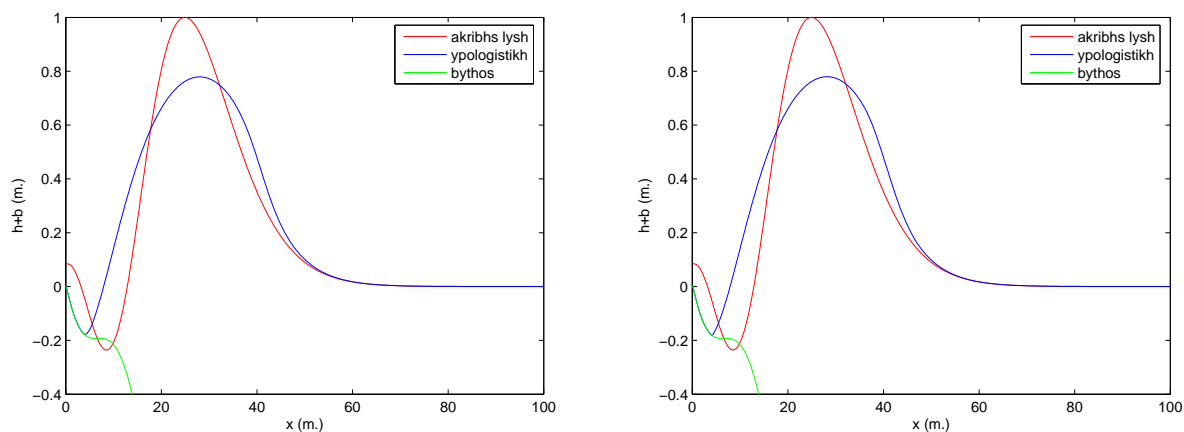
και για την δεύτερη περίπτωση  $t' = \sqrt{\frac{g}{\delta}} \mu t = 0.5, 1.0, 2.5, 4.5$



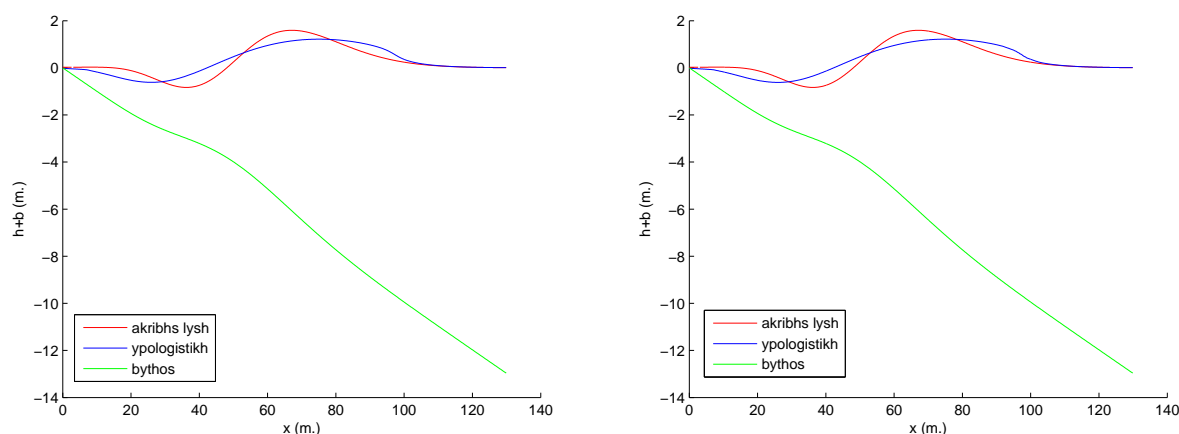
Σχήμα 4.2.33. Ακριβής και υπολογιστική λύση για  $\mu = 0.1$  και χρόνο  $t' = 0.5$  δευτερόλεπτα. Πρώτης τάξης (αριστερά), υψηλής ανάλυσης (δεξιά) χρησιμοποιώντας τον οριοθέτη minmod.



Πρώτης τάξης (αριστερά), υψηλής ανάλυσης (δεξιά) χρησιμοποιώντας τον οριοθέτη minmod. Σχήμα 4.2.34. Ακριβής και υπολογιστική λύση για  $\mu = 0.1$  και χρόνο  $t' = 1.0$  δευτερόλεπτα.



Σχήμα 4.2.35. Ακριβής και υπολογιστική λύση για  $\mu = 0.1$  και χρόνο  $t' = 2.5$  δευτερόλεπτα. Πρώτης τάξης (αριστερά), υψηλής ανάλυσης (δεξιά) χρησιμοποιώντας τον οριοθέτη minmod.



Σχήμα 4.2.36. Ακριβής και υπολογιστική λύση για  $\mu = 0.1$  και χρόνο  $t' = 4.5$  δευτερόλεπτα. Πρώτης τάξης (αριστερά), υψηλής ανάλυσης (δεξιά) χρησιμοποιώντας τον οριοθέτη minmod.

Παρατηρώντας τα χρονικά στιγμιότυπα της λύσης βλέπουμε ότι για τους αρχικούς χρόνους έχουμε μια πολύ καλή προσέγγιση της λύσης. Όμως μετά το πρώτο δευτερόλεπτο αρχίζει μια απόκλιση ανάμεσα στην αριθμητική και αναλυτική λύση. Αυτό είναι ιδιαίτερα εμφανές στην δεύτερη περίπτωση όπου η μετακινούμενη μάζα έχει μεγαλύτερο πάχος ( $\mu = 0.1$ ). Η παραπάνω συμπεριφορά είναι αναμενόμενη διότι η αναλυτική λύση προκύπτει από την επίλυση των γραμμικών εξισώσεων ρηχών υδάτων ενώ τα αριθμητικά αποτελέσματα που παρουσιάζονται προκύπτουν από τις μη γραμμικές εξισώσεις ρηχών υδάτων.

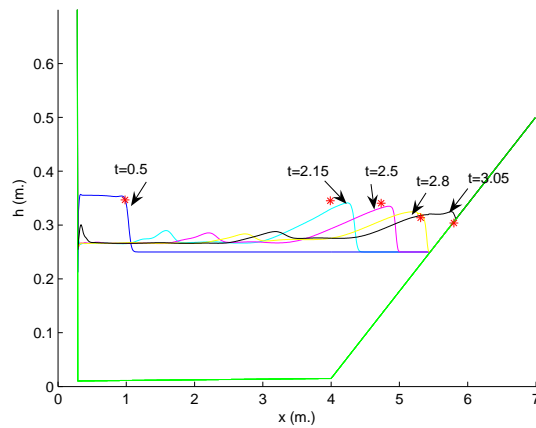
#### 4.2.5 Αναρρίχηση κύματος προερχόμενου από οριζόντια μετακίνηση τοίχου

Το τελευταίο πρόβλημα που μελετάμε για την απλή αναρρίχηση κύματος είναι αυτό το οποίο προέρχεται από το πείραμα το οποίο περιγράφεται στο [13]. Πιο συγκεκριμένα θα χρησιμοποιήσουμε τα πειραματικά δεδομένα, τα οποία μετρούνται σε μια κατασκευή η οποία περιέχει ένα κινούμενο τοίχο ο οποίος σπρώχνει το νερό καταπάνω σε μια κεκλιμένη παραλία, για την σύγκρισή τους με τα αριθμητικά αποτελέσματα.

Σε ένα κανάλι μήκους 7 μέτρων θεωρούμε τοπογραφία βυθού

$$b(x) = \begin{cases} 0.00125x + 0.01, & 0 \leq x \leq 4 \\ 0.015 + 0.162(x - 4), & 4 \leq x \leq 7. \end{cases}$$

Ένα κύμα προκαλείται από την οριζόντια μετατόπιση του τοίχου ο οποίος τοποθετείται στο  $x = 0$ , με σκοπό την μέτρηση της αναρρίχησής του. Για αυτό το σκοπό τοποθετούνται πέντε κανάλια μέτρησης στα  $x_1 = 1, x_2 = 4, x_3 = 4.7, x_4 = 5.3, x_5 = 5.8$  μέτρα. Ο τοίχος αρχίζει να κινείται σε χρόνο  $t = 0$  δευτερόλεπτα με σταθερή ταχύτητα  $0.58 \text{ m/s}$  για  $0.5$  δευτερόλεπτα σταματώντας ξαφνικά στα  $x = 0.29$  μέτρα. Το αρχικό βάθος του νερού σε ισορροπία είναι  $d = 0.25$  μέτρα. Περισσότερες πληροφορίες για την κατασκευή του προβλήματος μπορούν να βρεθούν στο [39]. Τα αποτελέσματα λαμβάνονται χρησιμοποιώντας 700 κελιά, η συνθήκη  $cfl$  είναι  $0.9$  και ο συντελεστής τριβής είναι  $n = 0.015 \text{ s/m}^3$ .



Σχήμα 4.2.37 Σύγκριση πειραματικών μετρήσεων (κόκκινο) με αριθμητικά αποτελέσματα σε χρόνους  $t = 0.5s$  (μπλέ),  $t = 2.15s$  (γαλάζιο),  $t = 2.5s$  (μωβ),  $t = 2.85s$  (κίτρινο) και  $t = 3.05s$  (μαύρο).

Παρατηρώντας τα αποτελέσματα βλέπουμε ότι ο κινούμενος τοίχος παράγει ένα κύμα, που βρίσκεται αρχικά σε ηρεμία, το οποίο διαδίδεται προς την ακτή. Μόλις φτάσει στην κεκλιμένη επιφάνεια αναρριχάται όσο το επιτρέπει η αδράνεια και στην συνέχεια τραβιέται προς τα πίσω δημιουργώντας ένα δεύτερο μέτωπο το οποίο διαδίδεται στην αντίθετη κατεύθυνση του πρώτου.

## Κεφάλαιο 5

### Επέκταση στις δύο διαστάσεις

Στις δύο χωρικές διαστάσεις οι εξισώσεις ρηχών υδάτων με την τοπογραφία ως πηγαίο όρο έχουν την μορφή

$$\mathbf{q}_t + \mathbf{f}(\mathbf{q})_x + \mathbf{g}(\mathbf{q})_y = \mathbf{R}(\mathbf{q}, x, y), \quad (5.1)$$

όπου

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} h \\ hu \\ hv \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} hu \\ hu^2 + \frac{1}{2}gh^2 \\ huv \end{bmatrix}, \quad \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} hv \\ huv \\ hv^2 + \frac{1}{2}gh^2 \end{bmatrix},$$

και ο πηγαίος όρος έχει την μορφή

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_2, \quad (5.2)$$

με

$$\mathbf{R}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -ghb_x(x, y) \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -ghb_y(x, y) \end{bmatrix}.$$

Οι Ιακώβιανοι πίνακες τώρα θα είναι δύο και μπορούν εύκολα να υπολογιστούν δίνοντας

$$\mathbf{f}'(\mathbf{q}) = \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ c^2 - u^2 & 2u & 0 \\ -uv & v & u \end{bmatrix}, \quad \mathbf{g}'(\mathbf{q}) = \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -uv & v & u \\ c^2 - v^2 & 0 & 2v \end{bmatrix}. \quad (5.3)$$

Οι ιδιοτιμές των δύο πινάκων δίνονται αντίστοιχα από

$$\lambda_1^F = u - c, \quad \lambda_2^F = u, \quad \lambda_3^F = u + c, \quad (5.4)$$

και

$$\lambda_1^G = v - c, \quad \lambda_2^G = v, \quad \lambda_3^G = v + c. \quad (5.5)$$

Τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα  $\mathbf{A}$  είναι

$$\mathbf{r}_1^F = \begin{bmatrix} 1 \\ u - c \\ v \end{bmatrix}, \quad \mathbf{r}_2^F = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ c \end{bmatrix}, \quad \mathbf{r}_3^F = \begin{bmatrix} 1 \\ u + c \\ v \end{bmatrix}, \quad (5.6)$$

και αυτά του πίνακα  $\mathbf{B}$

$$\mathbf{r}_1^G = \begin{bmatrix} 1 \\ u \\ v - c \end{bmatrix}, \quad \mathbf{r}_2^G = \begin{bmatrix} 0 \\ -c \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{r}_3^G = \begin{bmatrix} 1 \\ u \\ v + c \end{bmatrix}. \quad (5.7)$$

Το πρόβλημα Riemann για τις εξισώσεις σε δύο διαστάσεις αποκτάει πλέον την μορφή

$$\mathbf{q}_t + \mathbf{f}(\mathbf{q})_x + \mathbf{g}(\mathbf{q})_y = 0,$$

$$\mathbf{q}(x, 0) = \begin{cases} \mathbf{q}_l & \alpha\nu x < 0, \\ \mathbf{q}_r & \alpha\nu x > 0 \end{cases},$$

όπου τώρα

$$\mathbf{q}_l = \begin{bmatrix} h_l \\ h_l u_l \\ h_l v_l \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q}_r = \begin{bmatrix} h_r \\ h_r u_r \\ h_r v_r \end{bmatrix}.$$

## 5.1 Αριθμητικό σχήμα

Όπως και στη μια διάσταση η ποσότητα  $\mathbf{Q}_{ij}^n$  αναπαριστά τη μέση τιμή της λύσης πάνω στο υπολογιστικό κελί  $C_{i,j} = [x_{i-1/2}, x_{i+1/2}] \times [y_{j-1/2}, y_{j+1/2}]$  σε χρόνο  $t^n$ , δηλαδή

$$\mathbf{Q}_{ij}^n \approx \frac{1}{\Delta x \Delta y} \int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} q(x, y, t^n) dx dy, \quad (5.8)$$

όπου  $\Delta x = x_{i+1/2} - x_{i-1/2}$  και  $\Delta y = y_{j+1/2} - y_{j-1/2}$ . Εφόσον έχουμε θεωρήσει ότι η περιοχή στην οποία υπολογίζουμε την λύση είναι ορθογώνια ο νόμος διατήρησης θα έχει την μορφή

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int \int_{C_{ij}} q(x, y, t) dx dy &= \int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}} f(q(x_{i+1/2}, y, t)) dy - \int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}} f(q(x_{i-1/2}, y, t)) dy + \\ &\quad \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} g(q(x, y_{j+1/2}, t)) dx - \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} g(q(x, y_{j-1/2}, t)) dx, \end{aligned} \quad (5.9)$$

ολοκληρώνοντας την παραπάνω σχέση από  $t^n$  έως  $t^{n+1}$  και διαιρώντας με  $\Delta x \Delta y$  οδηγούμαστε στο σχήμα

$$\mathbf{Q}_{ij}^{n+1} = \mathbf{Q}_{ij}^n - \frac{\Delta t^n}{\Delta x} [\mathbf{F}_{i+1/2,j}^n - \mathbf{F}_{i-1/2,j}^n] - \frac{\Delta t^n}{\Delta y} [\mathbf{G}_{i,j+1/2}^n - \mathbf{G}_{i,j-1/2}^n], \quad (5.10)$$

όπου

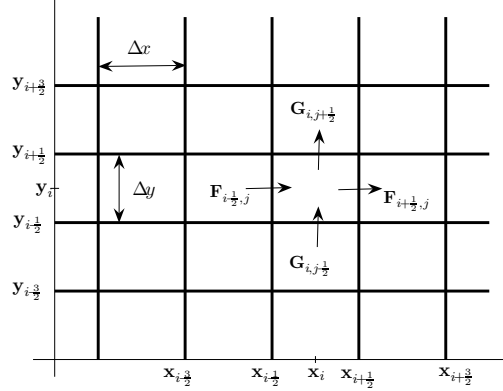
$$\mathbf{F}_{i\pm 1/2,j}^n = \frac{1}{\Delta t^n \Delta y} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}} f(q(x_{i\pm 1/2}, y, t)) dy dt \quad (5.11)$$

είναι η αριθμητική ροή ως προς την διεύθυνση του άξονα των  $x$  και

$$\mathbf{G}_{i,j\pm 1/2}^n = \frac{1}{\Delta t^n \Delta x} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} g(q(x, y_{j\pm 1/2}, t)) dx dt \quad (5.12)$$

η αριθμητική ροή ως προς των άξονα των  $y$ .

### 5.1.1 Η μέθοδος του Godunov στις 2 διαστάσεις



Σχήμα 5.1.1 Το πλέγμα για τις δύο διαστάσεις.

Μια επέκταση της μεθόδου του Godunov στις δύο διαστάσεις (η οποία αναπτύχθηκε στην παράγραφο 3.2 για τη μια διάσταση) λαμβάνεται λύνοντας το πρόβλημα Riemann σε κάθε πλευρά του υπολογιστικού κελιού  $C_{ij}$  (σχ. 5.1.1). Οι αριθμητικές ροές σε αυτή την περίπτωση θα έχουν την μορφή

$$\mathbf{F}_{i-1/2,j} = \mathbf{f}(\mathbf{Q}_{i-1/2,j}^\downarrow) \quad (5.13)$$

$$\mathbf{G}_{i,j-1/2} = \mathbf{g}(\mathbf{Q}_{i,j-1/2}^\downarrow) \quad (5.14)$$

όπου  $\mathbf{Q}_{i-1/2,j}^\downarrow$  είναι η λύση του προβλήματος Riemann για την εξίσωση  $\mathbf{q}_t + \mathbf{f}(\mathbf{q})_x = 0$  με αρχικές τιμές  $\mathbf{Q}_{ij}$ ,  $\mathbf{Q}_{i-1,j}$  στο  $(i-1/2, j)$  και  $\mathbf{Q}_{i,j-1/2}^\downarrow$  είναι η λύση του προβλήματος Riemann για την  $\mathbf{q}_t + \mathbf{g}(\mathbf{q})_y = 0$  με αρχικά δεδομένα  $\mathbf{Q}_{ij}$ ,  $\mathbf{Q}_{i,j-1}$  στο σημείο  $(i, j-1/2)$ .

Για ένα γραμμικό σύστημα εξισώσεων με  $\mathbf{f}(\mathbf{q}) = \mathbf{A}\mathbf{q}$  και  $\mathbf{g}(\mathbf{q}) = \mathbf{B}\mathbf{q}$  ορίζουμε τους πίνακες ιδιοδιανυσμάτων ως  $\mathbf{X}^F$  και  $\mathbf{X}^G$  για τους πίνακες  $\mathbf{A}$  και  $\mathbf{B}$  αντίστοιχα. Επίσης οι πίνακες που περιέχουν τις ιδιοτιμές είναι οι  $\mathbf{\Lambda}^x$  και  $\mathbf{\Lambda}^y$ . Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία που παρουσιάστηκε στην παράγραφο 3.2.1 λαμβάνουμε την φυσική γενίκευση της αριθμητικής ροής της μιας διάστασης

$$\mathbf{F}_{i-1/2,j} = \mathbf{A}^+ \mathbf{Q}_{i-1,j} + \mathbf{A}^- \mathbf{Q}_{ij}, \quad (5.15)$$

$$\mathbf{G}_{i,j-1/2} = \mathbf{B}^+ \mathbf{Q}_{i,j-1} + \mathbf{B}^- \mathbf{Q}_{ij}, \quad (5.16)$$

όπου

$$\mathbf{A}^\pm = \mathbf{X}^F (\mathbf{\Lambda}^F)^\pm (\mathbf{X}^F)^{-1}, \quad \mathbf{B}^\pm = \mathbf{X}^G (\mathbf{\Lambda}^G)^\pm (\mathbf{X}^G)^{-1}. \quad (5.17)$$

### 5.1.2 Ο προσεγγιστικός επιλυτής Riemann του Roe σε δύο διαστάσεις

Όπως και στη μια διάσταση μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε έναν προσεγγιστικό επιλυτή Riemann στη θέση της ακριβής λύσης Riemann για τον υπολογισμό των αριθμητικών ροών  $\mathbf{F}_{i-1/2,j}$ ,  $\mathbf{G}_{i,j-1/2}$ . Όπως και προηγουμένως σε κάθε χωρικό κελί, θα λύσουμε ένα τροποποιημένο σύστημα νόμων διατήρησης αντικαθιστώντας τους μη γραμμικούς Ιακωβιανούς πίνακες  $\mathbf{f}'(\mathbf{q})$  και  $\mathbf{g}'(\mathbf{q})$  με τους σταθερούς διαγωνιοποιήσιμους  $\hat{\mathbf{A}}$  και  $\hat{\mathbf{B}}$  αντίστοιχα. Δηλαδή  $\mathbf{f}(\mathbf{q}) = \hat{\mathbf{A}}\mathbf{q}$  και  $\mathbf{g}(\mathbf{q}) = \hat{\mathbf{B}}\mathbf{q}$ . Οι πίνακες  $\hat{\mathbf{A}}$  και  $\hat{\mathbf{B}}$  πρέπει να ικανοποιούν τους περιορισμούς

- (1)  $\hat{\mathbf{A}}_{i-1/2,j}(\mathbf{Q}_{ij} - \mathbf{Q}_{i-1,j}) = \mathbf{f}(\mathbf{Q}_{ij}) - \mathbf{f}(\mathbf{Q}_{i-1,j})$ ,
- (2)  $\hat{\mathbf{A}}_{i-1/2,j}$  είναι διαγωνιοποιήσιμος με πραγματικές ιδιοτιμές,
- (3)  $\hat{\mathbf{A}}_{i-1/2,j} \rightarrow \mathbf{f}'(\mathbf{q})$  ομοιόμορφα καθώς  $\mathbf{Q}_{i-1,j}, \mathbf{Q}_{ij} \rightarrow \mathbf{q}$   
και αντίστοιχα

- (4)  $\hat{\mathbf{B}}_{i,j-1/2}(\mathbf{Q}_{ij} - \mathbf{Q}_{i,j-1}) = \mathbf{g}(\mathbf{Q}_{ij}) - \mathbf{g}(\mathbf{Q}_{i,j-1})$ ,
- (5)  $\hat{\mathbf{B}}_{i,j-1/2}$  είναι διαγωνιοποιήσιμος με πραγματικές ιδιοτιμές,
- (6)  $\hat{\mathbf{B}}_{i,j-1/2} \rightarrow \mathbf{g}'(\mathbf{q})$  ομοιόμορφα καθώς  $\mathbf{Q}_{i,j-1}, \mathbf{Q}_{ij} \rightarrow \mathbf{q}$ ,

με  $\hat{\mathbf{A}}_{i-1/2,j} = \hat{\mathbf{A}}(\mathbf{Q}_{i-1,j} - \mathbf{Q}_{ij})$  και  $\hat{\mathbf{B}}_{i,j-1/2} = \hat{\mathbf{B}}(\mathbf{Q}_{i,j-1} - \mathbf{Q}_{ij})$ .

Για τις εξισώσεις ρηχών υδάτων οι πίνακες  $\hat{\mathbf{A}}_{i\pm 1/2,j}$  και  $\hat{\mathbf{B}}_{i,j\pm 1/2}$  είναι οι Ιακωβιανοί πίνακες (5.2) υπολογισμένοι στις μέσες τιμές

$$\hat{u}_{i\pm 1/2,j} = \frac{\sqrt{h_{i\pm 1,j}}u_{i\pm 1,j} + \sqrt{h_{ij}}u_{ij}}{\sqrt{h_{i\pm 1,j}} + \sqrt{h_{ij}}}, \quad \hat{v}_{i,j\pm 1/2} = \frac{\sqrt{h_{i,j\pm 1}}v_{i,j\pm 1} + \sqrt{h_{ij}}v_{ij}}{\sqrt{h_{i,j\pm 1}} + \sqrt{h_{ij}}} \quad (5.18)$$

και

$$\hat{h}_{i\pm 1/2,j} = \frac{1}{2}(h_{i\pm 1,j} + h_{ij}), \quad \hat{h}_{i,j\pm 1/2} = \frac{1}{2}(h_{i,j\pm 1} + h_{ij}), \quad (5.19)$$

[29],[45], οι προσεγγιστικές ιδιοτιμές που αντιστοιχούν στον πίνακα  $\hat{\mathbf{A}}$  είναι

$$\hat{\lambda}_1^F = \hat{u} - \hat{c}, \quad \hat{\lambda}_2^F = \hat{u}, \quad \hat{\lambda}_3^F = \hat{u} + \hat{c}, \quad (5.20)$$

με αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα

$$\hat{\mathbf{r}}_1^F = \begin{bmatrix} 1 \\ \hat{u} - \hat{c} \\ \hat{v} \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{r}}_2^F = \begin{bmatrix} 0 \\ \hat{u} \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{r}}_3^F = \begin{bmatrix} 1 \\ \hat{u} + \hat{c} \\ \hat{v} \end{bmatrix}. \quad (5.21)$$

Οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα  $\hat{\mathbf{B}}$  είναι

$$\hat{\lambda}_1^G = \hat{v} - \hat{c}, \quad \hat{\lambda}_2^G = \hat{v}, \quad \hat{\lambda}_3^G = \hat{v} + \hat{c}, \quad (5.22)$$



με αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα

$$\hat{\mathbf{r}}_1^G = \begin{bmatrix} 1 \\ \hat{u} \\ \hat{v} - \hat{c} \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{r}}_2^G = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{r}}_3^G = \begin{bmatrix} 1 \\ \hat{u} \\ \hat{v} + \hat{c} \end{bmatrix}. \quad (5.23)$$

Οι αριθμητικές ροές θα είναι:

$$\mathbf{F}_{i+1/2,j}^n = \frac{1}{2}(\mathbf{F}_{i+1,j}^n + \mathbf{F}_{ij}^n) - \frac{1}{2} \sum_{p=1}^m [\hat{\alpha}_p^F |\hat{\lambda}_p^F| \hat{\mathbf{r}}_p^F]_{i+1/2,j}, \quad (5.24)$$

$$\mathbf{G}_{i,j+1/2}^n = \frac{1}{2}(\mathbf{G}_{i,j+1}^n + \mathbf{G}_{ij}^n) - \frac{1}{2} \sum_{p=1}^m [\hat{\alpha}_p^G |\hat{\lambda}_p^G| \hat{\mathbf{r}}_p^G]_{i,j+1/2}, \quad (5.25)$$

όπου  $\hat{\alpha}_{i+1/2,j}^F = (\mathbf{X}^F)^{-1} \Delta \mathbf{Q}_{i+1/2,j}$  και  $\hat{\alpha}_{i,j+1/2}^G = (\mathbf{X}^G)^{-1} \Delta \mathbf{Q}_{i,j+1/2}$  με  $\mathbf{X}^F$  ο πίνακας των ιδιοδιανυσμάτων του  $\hat{\mathbf{A}}$  και  $\mathbf{X}^G$  ο πίνακας των ιδιοδιανυσμάτων του  $\hat{\mathbf{B}}$ .

### 5.1.3 Πηγαίοι όροι

Για την προσέγγιση του πηγαίου όρου επίσης διακριτοποιούμε ξεχωριστά ως προς κάθε χωρική κατεύθυνση τη σχέση  $\mathbf{R} = \mathbf{R}^1 + \mathbf{R}^2$ . Όπως και στη μια διάσταση προβάλλουμε τον όρο  $\mathbf{R}^1$  στα ιδιοδιανύσματα του πίνακα  $\hat{\mathbf{A}}$  και τον όρο  $\mathbf{R}^2$  στα ιδιοδιανύσματα του πίνακα  $\hat{\mathbf{B}}$  έτσι ώστε να λάβουμε:

$$\mathbf{R}_{ij}^1 = \mathbf{R}_{i+1/2,j}^{1-} + \mathbf{R}_{i-1/2,j}^{1+}, \quad \mathbf{R}_{ij}^2 = \mathbf{R}_{i,j+1/2}^{2-} + \mathbf{R}_{i,j-1/2}^{2+}, \quad (5.26)$$

όπου

$$\mathbf{R}_{i+1/2,j}^{1\pm} = \frac{1}{2} \sum_{p=1}^m [\hat{\beta}_p^F \hat{\mathbf{r}}_p^F (1 \pm \text{sgn}(\hat{\lambda}_p^F))]_{i+1/2,j}, \quad (5.27)$$

$$\mathbf{R}_{i,j+1/2}^{2\pm} = \frac{1}{2} \sum_{p=1}^m [\hat{\beta}_p^G \hat{\mathbf{r}}_p^G (1 \pm \text{sgn}(\hat{\lambda}_p^G))]_{i,j+1/2}, \quad (5.28)$$

και οι τιμές  $\beta_p$  είναι οι συντελεστές που προκύπτουν από την προβολή του πηγαίου όρου στα ιδιοδιανύσματα του πίνακα του Roe, όπως ακριβώς υπολογίστηκαν και στην παράγραφο 3.3.4. Για τις εξισώσεις ρηχών υδάτων σε δύο διαστάσεις έχουμε

$$\hat{\beta}_1^F = \frac{\hat{c} \Delta b}{2}, \quad \hat{\beta}_2^F = 0, \quad \hat{\beta}_3^F = -\frac{\hat{c} \Delta b}{2}, \quad (5.29)$$

όπου  $\Delta b = b_{i+1,j} - b_{ij}$  και

$$\hat{\beta}_1^G = \frac{\hat{c} \Delta b}{2}, \quad \hat{\beta}_2^G = 0, \quad \hat{\beta}_3^G = -\frac{\hat{c} \Delta b}{2}, \quad (5.30)$$

όπου  $\Delta b = b_{i,j+1} - b_{ij}$ .

Όταν συμπεριλαμβάνουμε στο σχήμα και την τριβή, δηλαδή όταν προστίθεται στον πηγαίο όρο ο όρος τριβής  $\mathbf{S} = \mathbf{S}^1 + \mathbf{S}^2$  με

$$\mathbf{S}^1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -ghS_f \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{S}^2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -ghS_g \end{bmatrix},$$

όπου

$$S_f = n_m^2 \frac{u\sqrt{u^2 + v^2}}{h^{4/3}}, \quad S_g = n_m^2 \frac{v\sqrt{u^2 + v^2}}{h^{4/3}},$$

τον οποίο και διακριτοποιούμε σημειακά, το σχήμα μπορεί να γραφεί ως:

$$\mathbf{Q}_{ij}^{n+1} = \frac{\mathbf{Q}_{ij}^n - (\Delta t^n / \Delta x)(\Delta \mathbf{F} + \mathbf{R}_{ij}^1) - (\Delta t^n / \Delta y)(\Delta \mathbf{G} + \mathbf{R}_{ij}^2) - \Delta t^n \theta \mathbf{S}_{ij}^n}{1 - (1 - \theta) \Delta t^n \mathbf{S}_{ij}^n / \mathbf{Q}_{ij}^n}, \quad (5.31)$$

με  $\Delta \mathbf{F} = \mathbf{F}_{i+1/2,j}^n - \mathbf{F}_{i-1/2,j}^n$  και  $\Delta \mathbf{G} = \mathbf{G}_{i,j+1/2}^n - \mathbf{G}_{i,j-1/2}^n$  όπου το  $\theta$  είναι ο βαθμός αμεσότητας για τον όρο της τριβής:  $\theta = 1$  αντιστοιχεί σε μια εντελώς έμμεση χρήση ενώ  $\theta = 0$  σε μια εντελώς άμεση [8].

## 5.2 C-ιδιότητα

Η C-ιδιότητα η οποία συζητήθηκε στο κεφάλαιο 3 μπορεί να επεκταθεί στις δύο διαστάσεις. Θεωρώντας τις εξισώσεις ρηχών υδάτων σε κατάσταση ηρεμίας, δηλαδή

$$u(x, y, t) \equiv 0, \quad v(x, y, t) \equiv 0 \quad \text{και} \quad h(x, y, t) = D - b \quad \forall (x, y, t)$$

οι συναρτήσεις αριθμητικής ροής και οι πηγαίοι όροι ισορροπούν

$$\mathbf{f}(\mathbf{q})_x + \mathbf{g}(\mathbf{q})_y = \mathbf{R}.$$

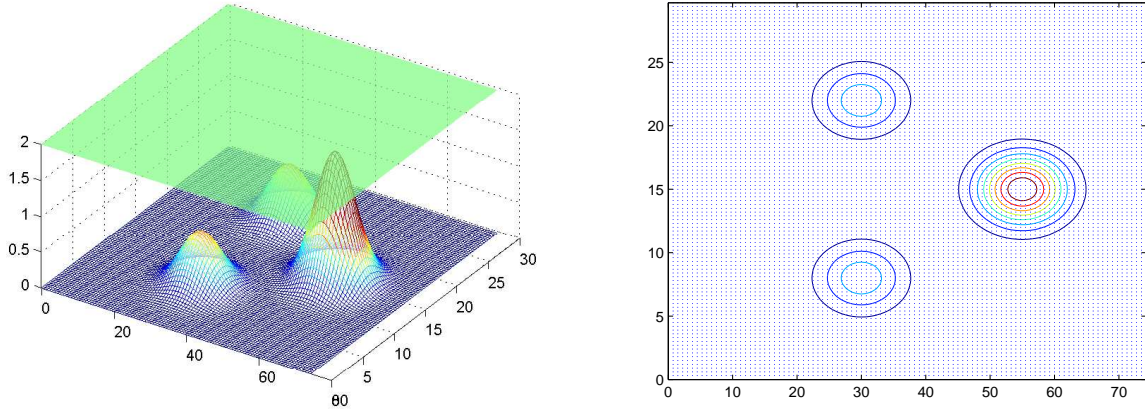
Στην περίπτωση της μιας διάστασης είχαμε δυο όρους που θέλαμε να ισορροπήσουμε ενώ τώρα υπάρχουν τρεις. Για αυτό το λόγο ξαναγράφουμε τον πηγαίο όρο στην μορφή (5.2) και διαχωρίζουμε την εξίσωση σε δύο μέρη:

$$\mathbf{f}(\mathbf{q})_x = \mathbf{R}^1 \quad \text{και} \quad \mathbf{g}(\mathbf{q})_y = \mathbf{R}^2.$$

Για να λάβουμε την παραπάνω συνθήκη αριθμητικά το σχήμα πρέπει να ισορροπεί τις αριθμητικές ροές με τις προσεγγίσεις των πηγαίων όρων

$$\mathbf{F}_{i+1/2,j} - \mathbf{F}_{i-1/2,j} = \mathbf{R}_{ij}^1 \quad \text{και} \quad \mathbf{G}_{i,j+1/2} - \mathbf{G}_{i,j-1/2} = \mathbf{R}_{ij}^2. \quad (5.32)$$

Όταν δεν ικανοποιείται η C-ιδιότητα τότε μη φυσικές αριθμητικές ταλαντώσεις υπάρχει περίπτωση να εμφανιστούν στα αριθμητικά αποτελέσματα. Μπορούμε να αποδείξουμε όπως και στη μια διάσταση (παράγραφο 3.3.5) ότι το σχήμα του Roe που χρησιμοποιούμε ικανοποιεί την προκειμένη ιδιότητα. Στο σχήμα 5.2.1 παρουσιάζεται παρουσιάζεται ένα αριθμητικό παράδειγμα για να δείχνει ότι σχήμα ικανοποιεί την C-ιδιότητα. Σε ένα κανάλι μήκους 75 μέτρων και πλάτους 30 μέτρων τοποθετούνται τρία βουνά με τοπογραφία η οποία περιγράφεται στα [7],[9]. Το βάθος του νερού καθορίζεται στα 2 μέτρα και έχει μηδενική ταχύτητα. Όπως παρατηρούμε και στο σχήμα 5.2.1 το νερό παραμένει ακίνητο καθώς  $t \rightarrow \infty$  πράγμα που σημαίνει ότι και στις δύο διαστάσεις το σχήμα του Roe ικανοποιεί την C-ιδιότητα.



Σχήμα 5.2.1 Λύση του σχήματος του Roe σε ισορροπία, για χρόνο  $t = 1000$  δευτερόλεπτα. Βάθος (αριστερά) και διάγραμμα ταχυτήτων (δεξιά).

### 5.3 Αντιμετώπιση εμφάνισης στεγανών

Όπως έχει αναφερθεί και στην ενότητα 3.4 ο επιλυτής του Roe αποτυγχάνει κατά την εμφάνιση στεγανών στο βυθό και έτσι χρειάζεται ιδιαίτερος χειρισμός. Αρχικά μελετώντας την περίπτωση της σταθερής κατάστασης με εμφάνιση στεγανών γίνεται η επέκταση της τροποποίησης του πηγαίου όρου (3.39) στις δύο διαστάσεις έτσι ώστε να ισχύει η γενικότερη μορφή της C-ιδιότητας δηλαδή σύμφωνα με την (3.38) ένα αριθμητικό σχήμα στις δύο διαστάσεις λέμε ότι ικανοποιεί την γενικευμένη μορφή της C-ιδιότητας εάν λύνει ακριβώς τις σταθερές καταστάσεις της μορφής

$$u \equiv 0, \quad v \equiv 0, \quad h(x, y) = \begin{cases} D - b(x, y) & \text{αν } b < D \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases} \quad (5.33)$$

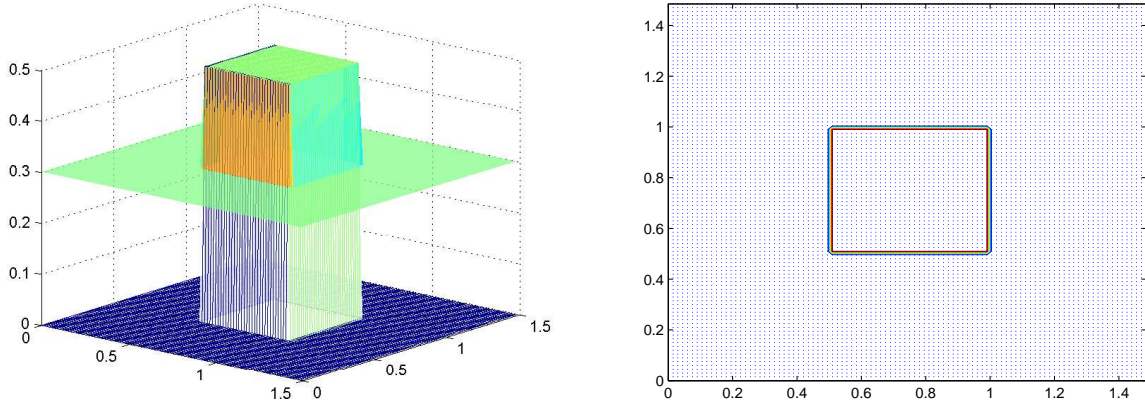
με  $D$  σταθερά. Άρα από την (3.39) ο πηγαίος όρος θα έχει την μορφή:

$$\mathbf{R}_{i+1/2,j}^n = \begin{cases} \begin{bmatrix} 0 \\ -(c_{i+1/2,j}^n)^2 h_{ij}^n \\ 0 \end{bmatrix}, & \text{αν } h_{ij}^n < b(x_{i+1,j}) - b(x_{ij}), \\ \begin{bmatrix} 0 \\ (c_{i+1/2,j}^n)^2 h_{i+1,j}^n \\ 0 \end{bmatrix}, & \text{αν } h_{i+1,j}^n < b(x_{ij}) - b(x_{i+1,j}), \\ \begin{bmatrix} 0 \\ -(c_{i+1/2,j}^n)^2 (b(x_{i+1,j}) - b(x_{ij})) \\ 0 \end{bmatrix}, & \text{διαφορετικά} \end{cases} \quad (5.34)$$

και

$$\mathbf{R}_{i,j+1/2}^n = \begin{cases} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -(c_{i,j+1/2}^n)^2 h_{ij}^n \end{bmatrix}, & \text{αν } h_{ij}^n < b(x_{i,j+1}) - b(x_{ij}), \\ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ (c_{i,j+1/2}^n)^2 h_{i,j+1}^n \end{bmatrix}, & \text{αν } h_{i,j+1}^n < b(x_{ij}) - b(x_{i,j+1}), \\ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -(c_{i,j+1/2}^n)^2 (b(x_{i,j+1}) - b(x_{ij})) \end{bmatrix}, & \text{διαφορετικά.} \end{cases} \quad (5.35)$$

Η παραπάνω διόρθωση οδηγεί στο να κρατιέται η ισορροπία και με εμφάνιση στεγανών (σχ. 5.3.1) αλλά δεν επαρκεί όταν έχουμε κίνηση του ρευστού. Στο παρακάτω αριθμητικό παράδειγμα έχουμε θεωρήσει ένα κανάλι μήκους 1.5 μέτρων και ίδιου πλάτους. Στο κέντρο αυτού του καναλιού έχει τοποθετηθεί μια στήλη με μήκος 0.5 μέτρα και ίδιο πλάτος και ύψος. Παρατηρούμε ότι παρά την ασυνέχεια που εμφανίζει η τοπογραφία το νερό παραμένει ακίνητο καθώς  $t \rightarrow \infty$ .



Σχήμα 5.3.1 Λύση του σχήματος του Roe σε ισορροπία, για χρόνο  $t = 1000$  δευτερόλεπτα. Βάθος (αριστερά) και διάγραμμα ταχυτήτων (δεξιά).

### 5.3.1 Διόρθωση

Επεκτείνουμε εδώ στις 2 διαστάσεις τη διόρθωση που παρουσιάστηκε στο κεφάλαιο 3.4. Πιο συγκεκριμένα εφαρμόζουμε την παρακάτω διαδικασία. Έστω ότι βρισκόμαστε στο κελί  $C_{ij}$ .

- Υπολογίζεται ο τροποποιημένος πηγαίος όρος (5.34) (5.35)
- Ελέγχουμε τα τέσσερα διπλανά κελιά  $C_{i+1,j}, C_{i-1,j}, C_{i,j+1}, C_{i,j-1}$  για να εξακριβώσουμε αν υπάρχει σχέση υγρού/στεγανού.
  - Στην περίπτωση της ύπαρξης τέτοιας σχέσης στην κατεύθυνση του άξονα των  $x$  (έστω με το κελί  $C_{i+1,j}$ ) θεωρούμε μια νέα παροδική κατάσταση

$$\hat{\mathbf{Q}}_{ij}^n = \begin{bmatrix} h_{ij}^n \\ 0 \\ h_{ij}^n v_{ij}^n \end{bmatrix} \quad (5.36)$$

- \* Υπολογίζουμε την αριθμητική ροή  $\mathbf{F}_{i+\frac{1}{2},j}^n$  και τους πηγαίους όρους  $\mathbf{R}_{i+\frac{1}{2},j}^{1\pm}$  αποτιμημένους στις καταστάσεις  $\hat{\mathbf{Q}}_{ij}^n, \mathbf{Q}_{i+1,j}^n$
- \* Ξαναδίνουμε στο  $\mathbf{Q}_{ij}^n$  την τιμή που είχε πριν από την αλλαγή.
- Στην περίπτωση της ύπαρξης σχέσης υγρού/στεγανού στην κατεύθυνση του άξονα των  $y$  (έστω στο  $C_{i,j+1}$ ) θεωρούμε μια νέα παροδική κατάσταση

$$\hat{\mathbf{Q}}_{ij}^n = \begin{bmatrix} h_{ij}^n \\ h_{ij}^n u_{ij}^n \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.37)$$

- \* Υπολογίζουμε την αριθμητική ροή  $\mathbf{G}_{i,j+\frac{1}{2}}^n$  και τους πηγαίους όρους  $\mathbf{R}_{i,j+\frac{1}{2}}^{2\pm}$  αποτιμημένους στις καταστάσεις  $\hat{\mathbf{Q}}_{ij}^n, \mathbf{Q}_{i,j+1}^n$
- \* Ξαναδίνουμε στο  $\mathbf{Q}_{ij}^n$  την τιμή που είχε πριν από την αλλαγή.
- Υπολογίζουμε την νέα τιμή  $\mathbf{Q}_{ij}^{n+1}$

Όπως και στη μια διάσταση η διόρθωση εφαρμόζεται μόνο στην περίπτωση όπου το ρευστό κατευθύνεται προς την τοπογραφία. Για να επιβεβαιώσουμε την ισχύ της παραπάνω τροποποίησης εφαρμόζουμε τα προβλήματα δοκιμής της παραγράφου (3.4) για τις δύο διαστάσεις.

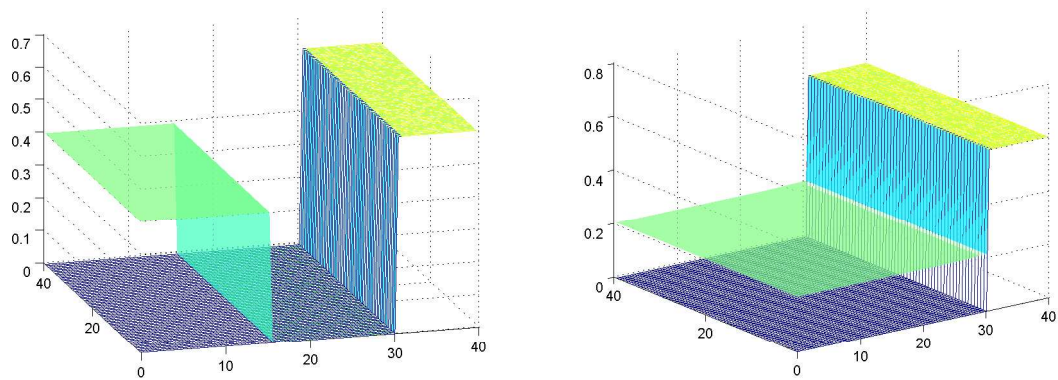
### 5.3.2 Πρόβλημα 1. Διατήρηση Μάζας

Όπως αναφέρθηκε και στο κεφάλαιο 3.4.1 στόχος αυτού του προβλήματος είναι να επιβεβαιώσουμε την διατήρηση μάζας και ναδειχθεί ότι δεν γίνεται υπερπήδηση του υγρού σε ακραίες καταστάσεις τοπογραφίας. Θεωρούμε ένα κανάλι μήκους 40 μέτρων, όπου η τοπογραφία μπορεί να περιγραφεί ως:

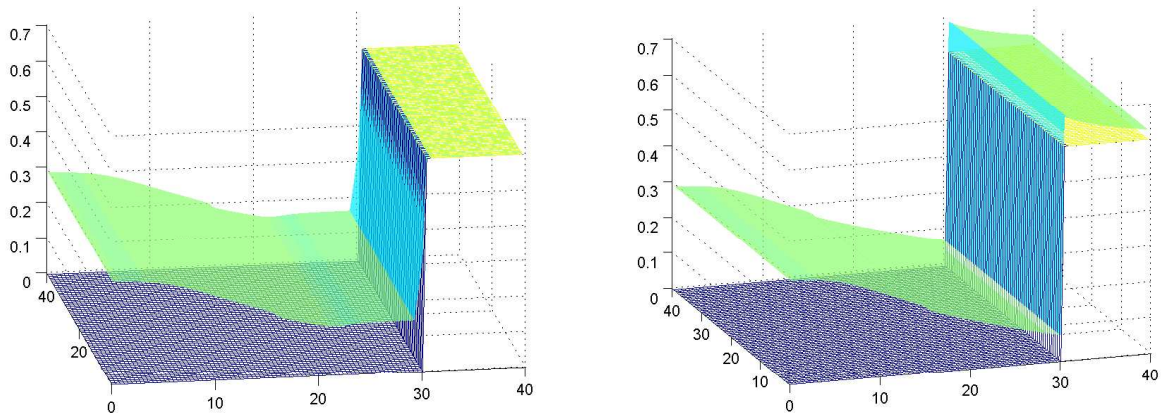
$$b(x, y) = \begin{cases} 0, & x \in [0, 30], y \in [0, 40] \\ 0.6, & x \in [30, 40], y \in [0, 40] \end{cases}$$

και σε αυτό εφαρμόζουμε ένα ιδεατό πρόβλημα κατάρρευσης φράγματος. Το φράγμα τοποθετείται στα 15.5m και οι αρχικές συνθήκες είναι

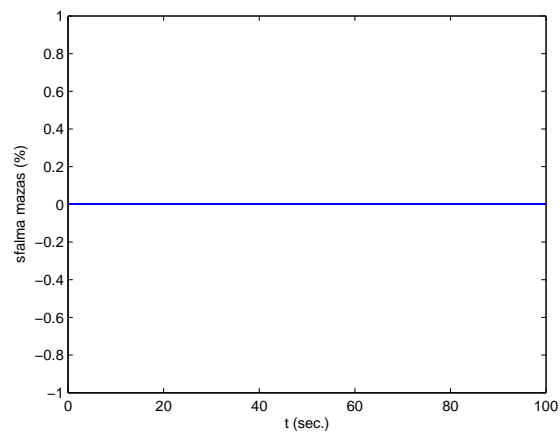
$$h(x, y, 0) = \begin{cases} 0.4, & x \in [0, 15.5], y \in [0, 40] \\ 0, & x \in [15.5, 40], y \in [0, 40] \end{cases}, \quad u(x, y, 0) \equiv 0, \quad v(x, y, 0) \equiv 0.$$



Σχήμα 5.3.1 Οι αρχικές συνθήκες του προβλήματος (αριστερά) και η λύση μετά από χρόνο  $t = 1000$  δευτερόλεπτα (δεξιά).



Σχήμα 5.3.2 Λύση για χρόνο  $t = 10$  δευτερόλεπτα με την διόρθωση της παραγράφου 3.5.1 (αριστερά) και χωρίς την διόρθωση (δεξιά).



Σχήμα 5.3.3 Διατήρηση μάζας.

Το αριθμητικό σχήμα εφαρμόζεται με  $dx = 0.4$ ,  $dy = 0.667$  και με  $cfl = 0.9$  μέχρι να επέλθει ηρεμία. Παρατηρώντας τα αποτελέσματα βλέπουμε ότι το σχήμα χωρίς την διόρθωση

παρουσιάζει μη φυσική υπερπήδηση του υγρού και ότι το σφάλμα μάζας

$$\text{σφάλμα μάζας(\%)} = \frac{m^n - m_I}{m_I}$$

βρίσκεται στο  $10^{-13}\%$ , όπου  $m^n$  είναι η μάζα στο χρόνο  $t^n$  και  $m_I$  η μάζα στο χρόνο  $t^0$ .

### 5.3.3 Πρόβλημα 2. Shock πάνω σε ένα στέρεο τοίχο

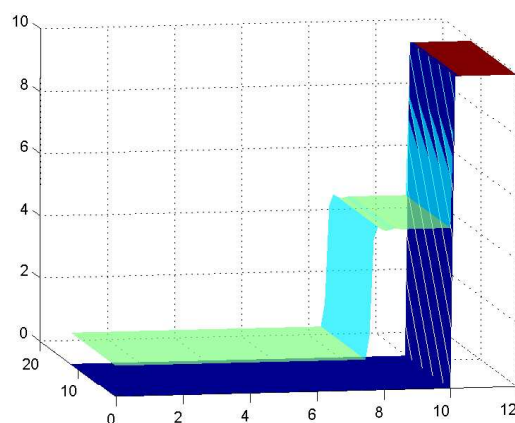
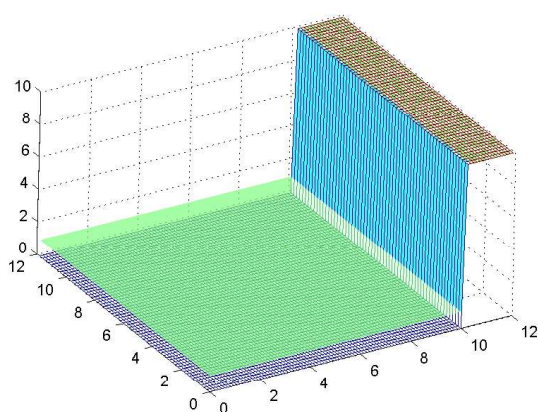
Σκοπός και αυτού του προβλήματος δοκιμής είναι ναδειχθεί ότι η λύση που προκύπτει από το αριθμητικό σχήμα, παρ' όλη την ύπαρξη ακραίων καταστάσεων στην τοπογραφία οι οποίες περιβάλλονται από νερό, είναι σωστή. Θεωρούμε μια στήλη νερού ύψους  $1m$  η οποία κινείται προς ένα κατακόρυφο τοίχο με ταχύτητα  $10m/s$ . Το κανάλι έχει διαστάσεις  $[0\ 12] \times [0\ 12]$  και ο βυθός έχει την μορφή

$$b(x, y) = \begin{cases} 0, & x \in [0\ 10), y \in [0\ 12] \\ 10, & x \in [10\ 12], y \in [0\ 12] \end{cases},$$

ενώ οι αρχικές συνθήκες είναι

$$h(x, y, 0) = \begin{cases} 1, & x \in [0\ 10), y \in [0\ 12] \\ 0, & x \in [10\ 12], y \in [0\ 12] \end{cases},$$

$$hu(x, y, 0) = \begin{cases} 10, & x \in [0\ 10), y \in [0\ 12] \\ 0, & x \in [10\ 12], y \in [0\ 12] \end{cases}, \quad hv(x, y, 0) \equiv 0.$$



Σχήμα 5.3.3 Αρχικές συνθήκες (αριστερά) και λύση για χρόνο  $t = 1$  δευτερόλεπτο (δεξιά).

Μελετώντας τα αποτελέσματα βλέπουμε ότι δεν παρατηρείται υπερπήδηση του υγρού κατά την διάδοση του κύματος, παρ' ό το ότι υπάρχει ακραία κατάσταση βυθού που περιβάλλεται από νερό με αρχική ταχύτητα. Αυτό που παρατηρείται είναι μια μικρή διατάραξη κοντά στο κύμα το οποίο είναι τύπου shock.

## 5.4 Αριθμητικά σχήματα υψηλότερης τάξης

Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία που εφαρμόστηκε στην παράγραφο 3.5 κατασκευάζουμε ένα σχήμα υψηλής ανάλυσης το οποίο είναι τουλάχιστον δεύτερης τάξης στις ομαλές περιοχές και ελαχιστοποιεί τις ταλαντώσεις κοντά στις ασυνέχειες. Χρησιμοποιώντας flux - limiting κατασκευάζουμε αριθμητικές ροές της μορφής:

$$\mathbf{F}_{i+1/2,j}^{TVD} = \mathbf{F}_{i+1/2,j}^{FO} + (\Phi_{i+1/2,j}^n)^F (\mathbf{F}_{i+1/2,j}^{SO} - \mathbf{F}_{i+1/2,j}^{FO}), \quad (5.38)$$

$$\mathbf{G}_{i,j+1/2}^{TVD} = \mathbf{G}_{i,j+1/2}^{FO} + (\Phi_{i,j+1/2}^n)^G (\mathbf{G}_{i,j+1/2}^{SO} - \mathbf{G}_{i,j+1/2}^{FO}), \quad (5.39)$$

όπου

$$(\Phi_{i+1/2,j})^F = \Phi(\theta_{i+1/2,j}^F), \quad \theta_{i+1/2,j}^F = \frac{q_{i+1,j}^n - q_{i,j}^n}{q_{i+1,j}^n - q_{ij}^n}, \quad I = i - \text{sgn}((\lambda_{i+1/2,j}^n)^F) \quad (5.40)$$

και

$$(\Phi_{i,j+1/2})^G = \Phi(\theta_{i,j+1/2}^G), \quad \theta_{i,j+1/2}^G = \frac{q_{i,J+1}^n - q_{i,J}^n}{q_{i,J+1}^n - q_{ij}^n}, \quad J = j - \text{sgn}((\lambda_{i,j+1/2}^n)^G) \quad (5.41)$$

και με  $\mathbf{F}^{FO}, \mathbf{G}^{FO}$  να είναι η αριθμητικές ροές πρώτης τάξης ακρίβειας ως προς το χώρο (5.24) και  $\mathbf{F}^{SO}, \mathbf{G}^{SO}$  να είναι η αριθμητικές ροές των Lax-Wendroff με

$$\mathbf{F}_{i-1/2,j}^n = \frac{1}{2}(\mathbf{I} - \frac{\Delta t}{\Delta x} |\mathbf{A}|) |\mathbf{A}| \Delta \mathbf{Q}_{i-1/2,j}$$

και

$$\mathbf{G}_{i,j-1/2}^n = \frac{1}{2}(\mathbf{I} - \frac{\Delta t}{\Delta x} |\mathbf{A}|) |\mathbf{A}| \Delta \mathbf{Q}_{i,j-1/2}.$$

Θέτοντας  $\mathbf{A} = \hat{\mathbf{A}}$  και  $\mathbf{B} = \hat{\mathbf{B}}$  στις παραπάνω σχέσεις, από τις (5.24), (5.25) και χρησιμοποιώντας τις (5.40), (5.41) υπολογίζουμε τις αριθμητικές ροές του Roe,

$$\mathbf{F}_{i+1/2,j}^n = \frac{1}{2}(\mathbf{F}_{i+1,j}^n + \mathbf{F}_{ij}^n) - \frac{1}{2} \sum_{p=1}^m |\hat{\lambda}_p^F| \mathbf{W}_p^F (1 - \Phi(\hat{\theta}_p^F)(1 - |\hat{\nu}_p^F|))_{i+1/2,j}, \quad (5.42)$$

$$\mathbf{G}_{i,j+1/2}^n = \frac{1}{2}(\mathbf{G}_{i,j+1}^n + \mathbf{G}_{ij}^n) - \frac{1}{2} \sum_{p=1}^m |\hat{\lambda}_p^G| \mathbf{W}_p^G (1 - \Phi(\hat{\theta}_p^G)(1 - |\hat{\nu}_p^G|))_{i+1/2,j}, \quad (5.43)$$

όπου  $\mathbf{W}_p^F = \hat{\alpha}_p^F \hat{\mathbf{r}}_p^F$ ,  $\mathbf{W}_p^G = \hat{\alpha}_p^G \hat{\mathbf{r}}_p^G$ , και

$$\hat{\theta}_p^F = \frac{(\hat{\alpha}_p^F)_{I+1/2,j}}{(\hat{\alpha}_p^F)_{i+1/2,j}}, \quad I = \begin{cases} i-1 & \hat{\lambda}_p^F > 0 \\ i+1 & \hat{\lambda}_p^F < 0, \end{cases} \quad \hat{\nu}_p^F = \frac{\Delta t}{\Delta x} \hat{\lambda}_p^F, \quad (5.44)$$

$$\hat{\theta}_p^G = \frac{(\hat{\alpha}_p^G)_{i,J+1/2}}{(\hat{\alpha}_p^G)_{i,j+1/2}}, \quad J = \begin{cases} j-1 & \hat{\lambda}_p^G > 0 \\ j+1 & \hat{\lambda}_p^G < 0, \end{cases} \quad \hat{\nu}_p^G = \frac{\Delta t}{\Delta x} \hat{\lambda}_p^G, \quad (5.45)$$

με  $\hat{\theta}_p^F$  να είναι το μέτρο της ομαλότητας των δεδομένων κοντά στο σημείο  $x_{i+1/2,j}$  και  $\hat{\theta}_p^G$  το μέτρο της ομαλότητας κοντά στο σημείο  $x_{i,j+1/2}$ .



Στην περίπτωση ύπαρξης πηγαίου όρου για να υπάρχει ισορροπία με τις αριθμητικές ροές γράφουμε:

$$\mathbf{R}_{ij}^1 = \mathbf{R}_{i+1/2,j}^{1,TVD} + \mathbf{R}_{i-1/2,j}^{1,TVD}, \quad (5.46)$$

$$\mathbf{R}_{ij}^2 = \mathbf{R}_{i,j+1/2}^{2,TVD} + \mathbf{R}_{i,j-1/2}^{2,TVD}, \quad (5.47)$$

όπου

$$\mathbf{R}_{i+1/2,j}^{1,TVD} = \mathbf{R}_{i+1/2,j}^{1,FO} + \Phi(\mathbf{R}_{i+1/2,j}^{1,SO} - \mathbf{R}_{i+1/2,j}^{1,FO}), \quad (5.48)$$

$$\mathbf{R}_{i,j+1/2}^{2,TVD} = \mathbf{R}_{i,j+1/2}^{2,FO} + \Phi(\mathbf{R}_{i,j+1/2}^{2,SO} - \mathbf{R}_{i,j+1/2}^{2,FO}). \quad (5.49)$$

Για τους όρους πρώτης τάξης χρησιμοποιούμε τις σχέσεις (5.27) (5.28) και για τους όρους δεύτερης τάξης την αριθμητική προσέγγιση του πηγαίου όρου των Lax-Wendroff:

$$\mathbf{R}_{i+1/2,j}^{1,SO} = \frac{1}{2}[\hat{\mathbf{X}}^F(\mathbf{I} - \frac{\Delta t}{\Delta x}(\hat{\Lambda}^F)^{-1}(\hat{\Lambda}^F)^2)(\hat{\mathbf{X}}^F)^{-1}\mathbf{R}^1]_{i+1/2,j}, \quad (5.50)$$

$$\mathbf{R}_{i,j+1/2}^{2,SO} = \frac{1}{2}[\hat{\mathbf{X}}^G(\mathbf{I} - \frac{\Delta t}{\Delta y}(\hat{\Lambda}^G)^{-1}(\hat{\Lambda}^G)^2)(\hat{\mathbf{X}}^G)^{-1}\mathbf{R}^2]_{i,j+1/2}. \quad (5.51)$$

Συνθέτωντας τα παραπάνω παίρνουμε:

$$\mathbf{R}_{i+1/2,j}^{1,\pm} = \frac{1}{2} \sum_{p=1}^m [\hat{\beta}_p^F \hat{\mathbf{r}}_p^F (1 \pm \text{sgn}(\hat{\lambda}_p^F)(1 - \Phi_p^F(1 - |\hat{\nu}_p^F|)))] , \quad (5.52)$$

$$\mathbf{R}_{i,j+1/2}^{2,\pm} = \frac{1}{2} \sum_{p=1}^m [\hat{\beta}_p^G \hat{\mathbf{r}}_p^G (1 \pm \text{sgn}(\hat{\lambda}_p^G)(1 - \Phi_p^G(1 - |\hat{\nu}_p^G|)))] . \quad (5.53)$$

Τα  $\hat{\beta}_p$  είναι οι συντελεστές που προκύπτουν από την προβολή του πηγαίου όρου στα ιδιοδιανύσματα των πινάκων  $\hat{\mathbf{A}}, \hat{\mathbf{B}}$  (παράγραφος 3.3.4) και έχουν τις τιμές

$$\hat{\beta}_1^F = \frac{\hat{c}\Delta b^F}{2}, \quad \hat{\beta}_2^F = 0, \quad \hat{\beta}_3^F = -\frac{\hat{c}\Delta b^F}{2}, \quad (5.54)$$

$$\hat{\beta}_1^G = \frac{\hat{c}\Delta b^G}{2}, \quad \hat{\beta}_2^G = 0, \quad \hat{\beta}_3^G = -\frac{\hat{c}\Delta b^G}{2}. \quad (5.55)$$

με  $\Delta b^F = b_{i+1,j} - b_{ij}$  και  $\Delta b^G = b_{i,j+1} - b_{ij}$ .



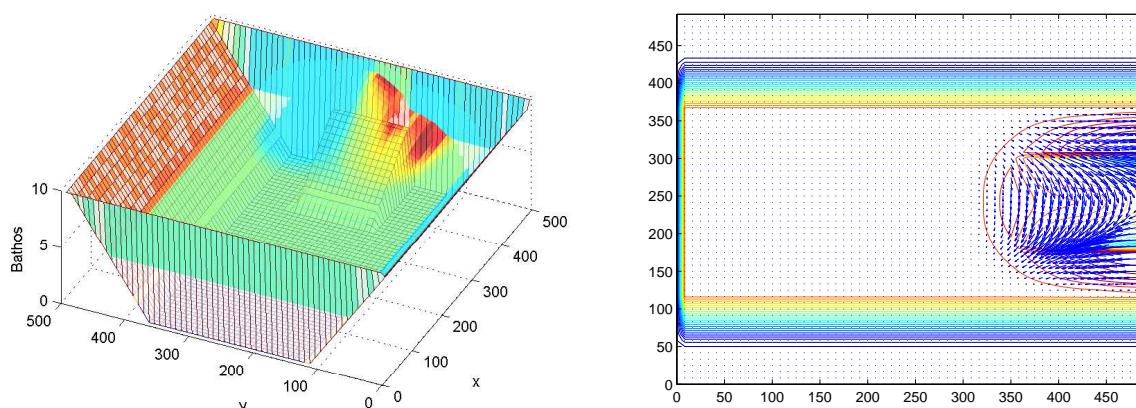
## Κεφάλαιο 6

### Αριθμητικά αποτελέσματα σε 2 διαστάσεις

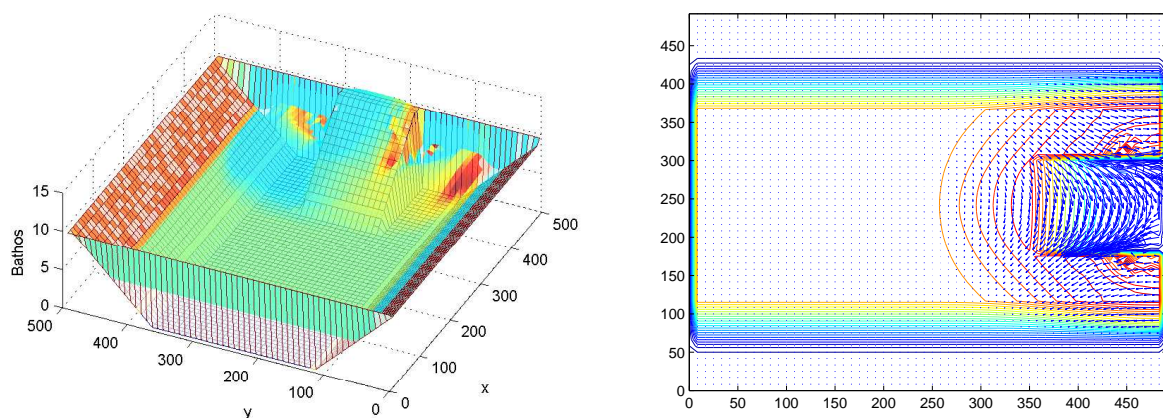
#### 6.1 Σύγκριση του TVD σχήματος του Roe με το σχήμα κεντρικών διαφορών του [26]

##### 6.1.1 Πρόβλημα 1

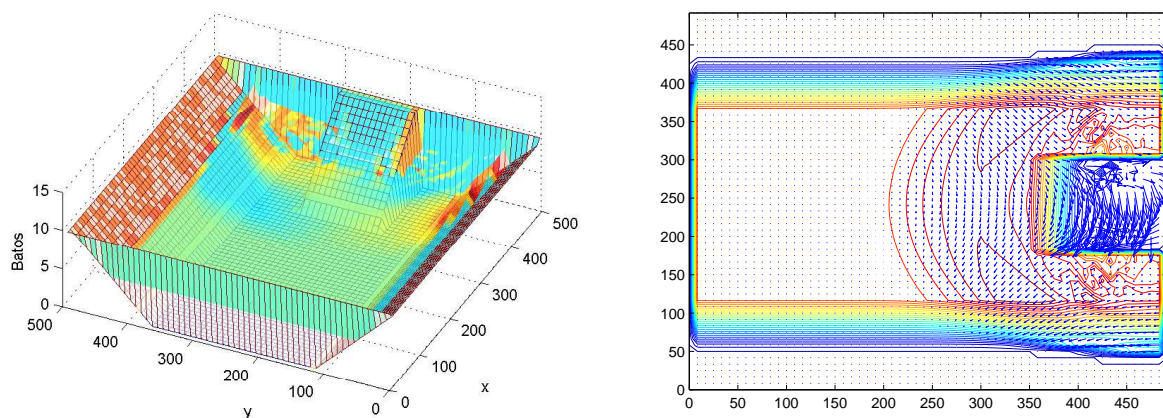
Το πρώτο πρόβλημα όπως και στη μια διάσταση περιγράφει την γένεση και αναρρίχηση στην ακτή μη γραμμικών κυμάτων τα οποία οφείλονται σε μεταβολή της τοπογραφίας του πυθμένα. Πιο συγκεκριμένα σε μια λεκάνη όπου οι δύο πλευρές έχουν κλίση 1 : 10 και οι άλλες δύο είναι κατακόρυφοι τοίχοι παρατηρείται μεταβολή της τοπογραφίας καθώς εισέρχεται στο κέντρο της μιας κάθετης πλευράς μια σφήνα για χρονικό διάστημα 20 δευτερολέπτων. Η σφήνα έχει και αυτή κλίση 1 : 10, μήκος 150 μέτρα και πλάτος 125 μέτρα. Όλο το χωρίο είναι  $500 \times 500$  μέτρα. Η διακριτοποίηση είναι ομοιόμορφη και είναι  $60 \times 60$ . Στα παρακάτω σχήματα παρουσιάζονται χαρακτηριστικά στιγμιότυπα της εξέλιξης και των δύο σχημάτων. Για το σχήμα κεντρικών διαφορών [26] η χρονική εξέλιξη είναι σταθερή με  $dt = 0.4$  δευτερόλεπτα ενώ για το σχήμα του Roe είναι μεταβαλλόμενη και εξαρτάται από την  $cfl$  συνθήκη, όπου εδώ  $cfl = 0.5$



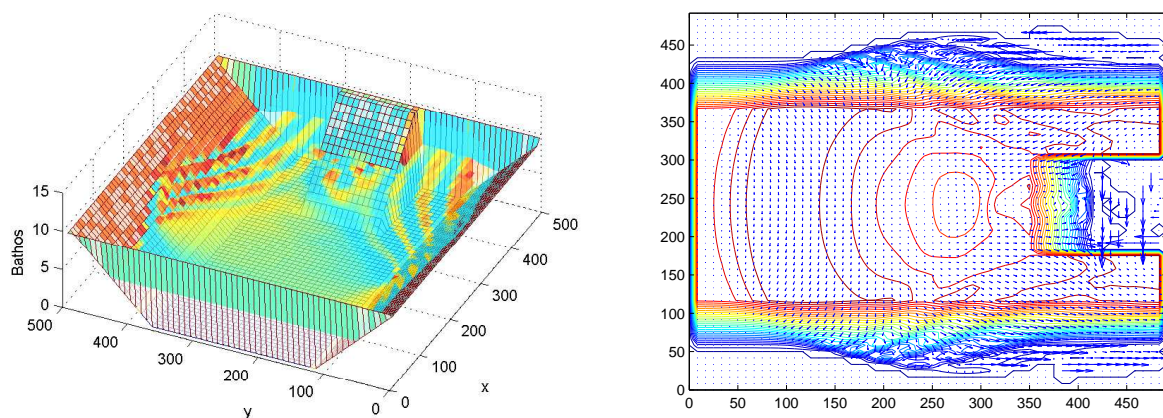
Σχήμα 6.1.1 Λύση του προβ. 6.1.1 με το σχήμα κεντρικών διαφορών [26]. Βάθος (αριστερά), ταχύτητα και σχεδιάγραμμα ισοϋψών καμπυλών (δεξιά), για χρόνο  $t = 10$  δευτερόλεπτα



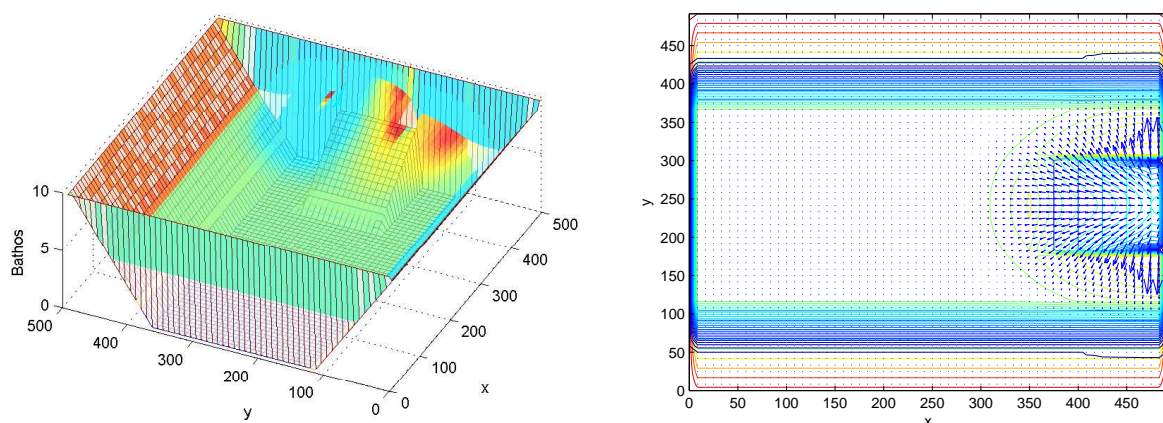
Σχήμα 6.1.2 Λύση του προβ. 6.1.1 με το σχήμα κεντρικών διαφορών [26]. Βάθος (αριστερά), ταχύτητα και σχεδιάγραμμα ισοϋψών καμπυλών (δεξιά), για χρόνο  $t = 20$  δευτερόλεπτα



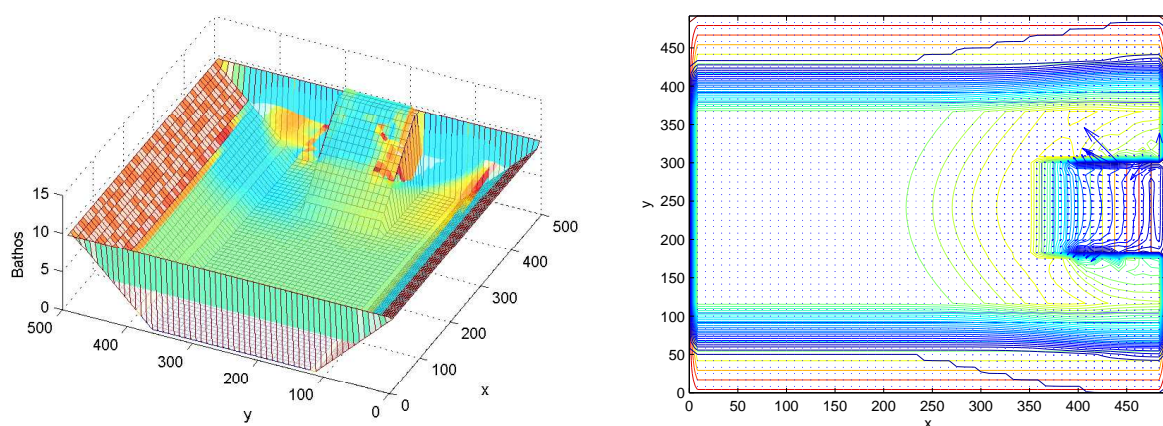
Σχήμα 6.1.3 Λύση του προβ. 6.1.1 με το σχήμα κεντρικών διαφορών [26]. Βάθος (αριστερά), ταχύτητα και σχεδιάγραμμα ισοϋψών καμπυλών (δεξιά), για χρόνο  $t = 30$  δευτερόλεπτα.



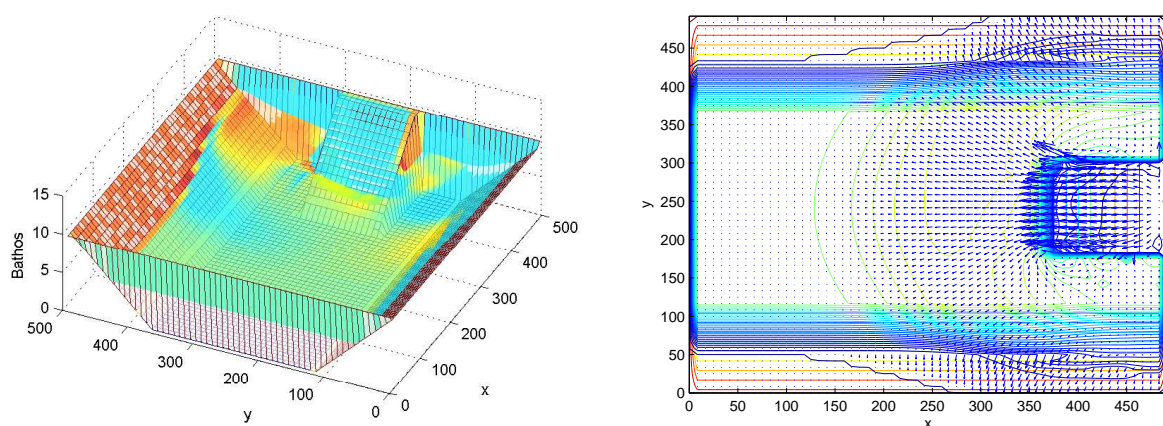
Σχήμα 6.1.4 Λύση του προβ. 6.1.1 με το σχήμα κεντρικών διαφορών [26]. Βάθος (αριστερά), ταχύτητα και σχεδιάγραμμα ισοϋψών καμπυλών (δεξιά), για χρόνο  $t = 60$  δευτερόλεπτα



Σχήμα 6.1.5 Λύση του 6.1.1 με το σχήμα του Roe. Βάθος (αριστερά), ταχύτητα και σχεδιάγραμμα των ισοϋψών καμπυλών (δεξιά), για χρόνο  $t = 10$  δευτερόλεπτα.

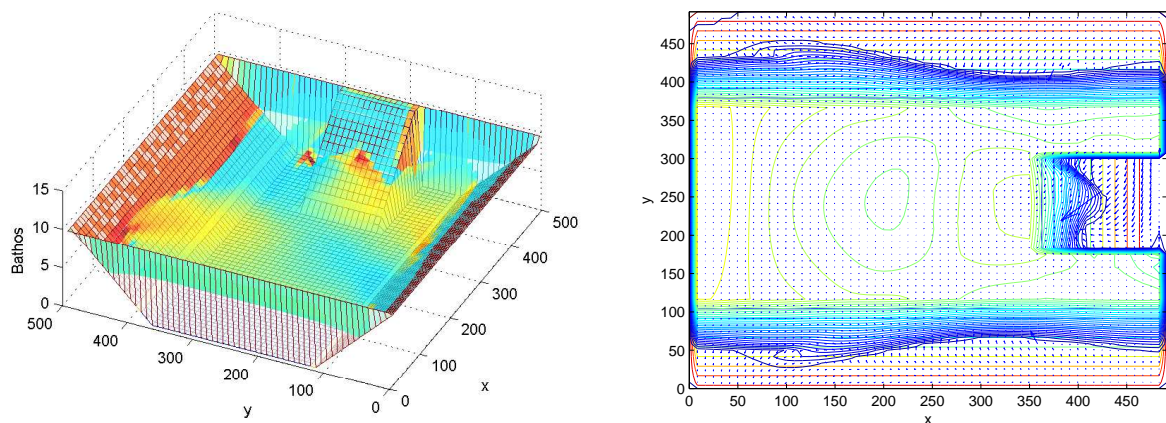


Σχήμα 6.1.6 Λύση του 6.1.1 με το σχήμα του Roe. Βάθους (αριστερά), ταχύτητα και σχεδιάγραμμα των ισοϋψών καμπυλών (δεξιά), για χρόνο  $t = 20$  δευτερόλεπτα.

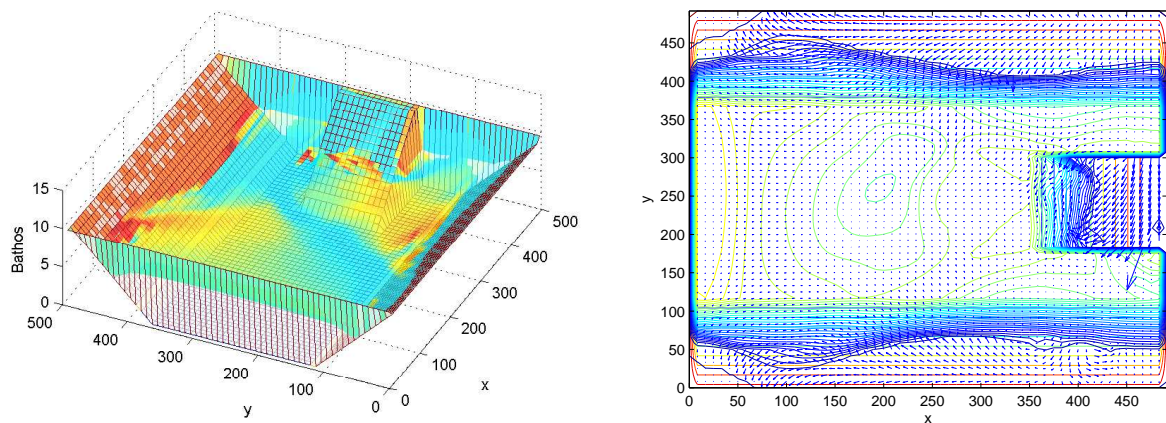


Σχήμα 6.1.7 Λύση του προβλήματος 6.1.1 με το σχήμα του Roe. Βάθος (αριστερά), ταχύτητα και σχεδιάγραμμα των ισοϋψών καμπυλών (δεξιά), για χρόνο  $t = 30$  δευτερόλεπτα.





Σχήμα 6.1.8 Λύση του προβλήματος 6.1.1 με το σχήμα του Roe. Βάθος (αριστερά), ταχύτητα και σχεδιάγραμμα των ισοϋψών καμπυλών (δεξιά), για χρόνο  $t = 60$  δευτερόλεπτα.

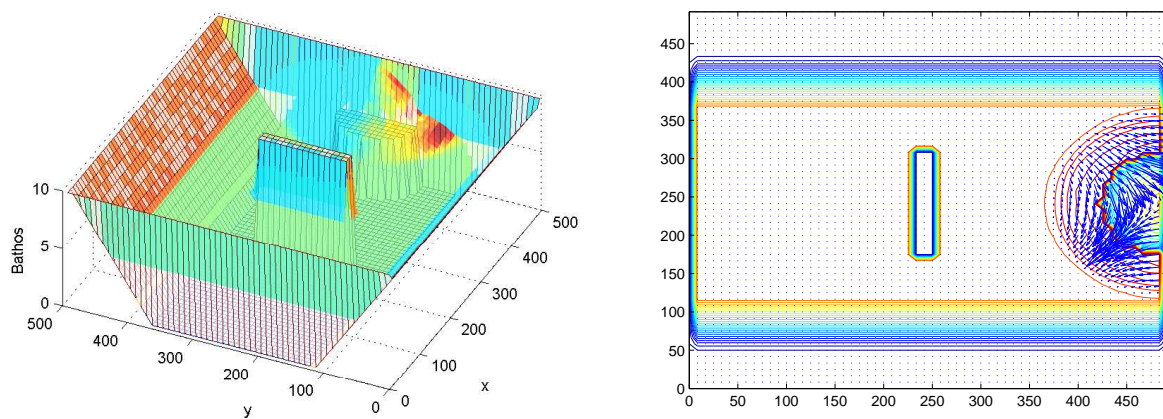


Σχήμα 6.1.9 Λύση 6.1.1 με το σχήμα του Roeυφλής ανάλυσης χρησιμοποιώντας τον οριοθέτη minmod . Βάθος (αριστερά), ταχύτητα και σχεδιάγραμμα των ισοϋψών καμπυλών (δεξιά), για χρόνο  $t = 60$  δευτερόλεπτα.

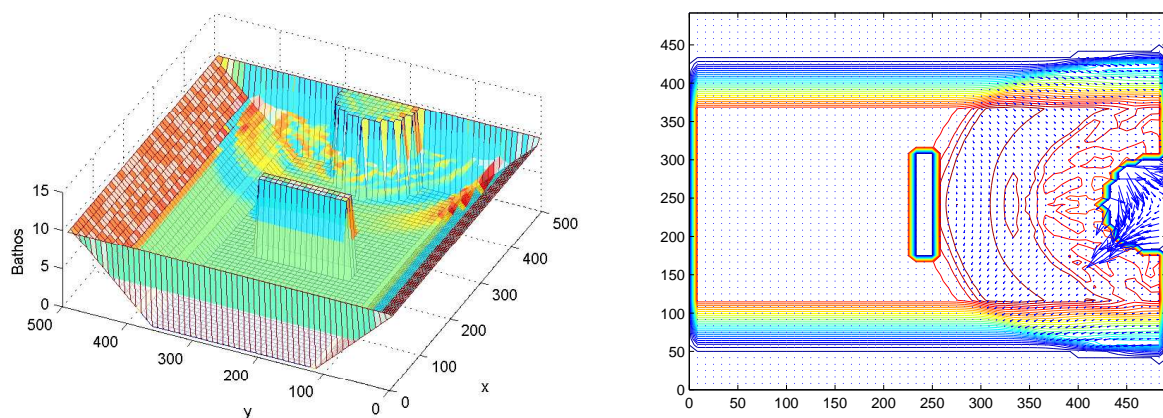
Παρατηρώντας και συγκρίνοντας τα αποτελέσματα βλέπουμε ότι το σχήμα κεντρικών διαφορών παρουσιάζει ταλαντώσεις, όπως και στη μια διάσταση, οι οποίες διαδίδονται και εξαπλώνονται με το πέρασμα του χρόνου. Το σχήμα όπως έχει αναφερθεί δεν είναι shock capturing για αυτό το λόγο παρουσιάζει ταλαντώσεις. Σε αντίθεση με το παραπάνω, το σχήμα του Roe δίνει πιο ομαλές λύσεις. Επίσης χρησιμοποιώντας το σχήμα υψηλής ανάλυσης βλέπουμε ότι λαμβάνουμε λιγότερη διάχυση στη λύση από το σχήμα πρώτης τάξης.

## 6.1.2 Πρόβλημα 2

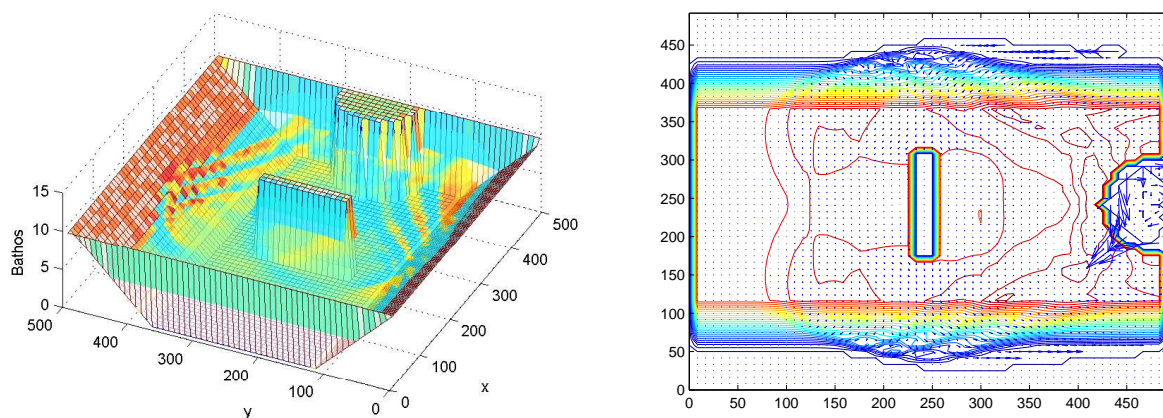
Στο δεύτερο πρόβλημα που παραβάλλουμε διατηρούμε την ίδια τοπογραφία με τη διαφορά ότι υπάρχει ένα ορθογώνιο εμπόδιο στο κέντρο του χωρίου και ότι εισχωρεί ένα ημικύκλιο αντί για τη σφήνα για τα πρώτα 20 δευτερόλεπτα. Όλες οι παράμετροι των προβλημάτων παραμένουν ίδιες με το πρόβλημα 1 και όπως προηγουμένως παραθέτουμε στιγμιότυπα της λύσης για το βάθος και τις ταχύτητες.



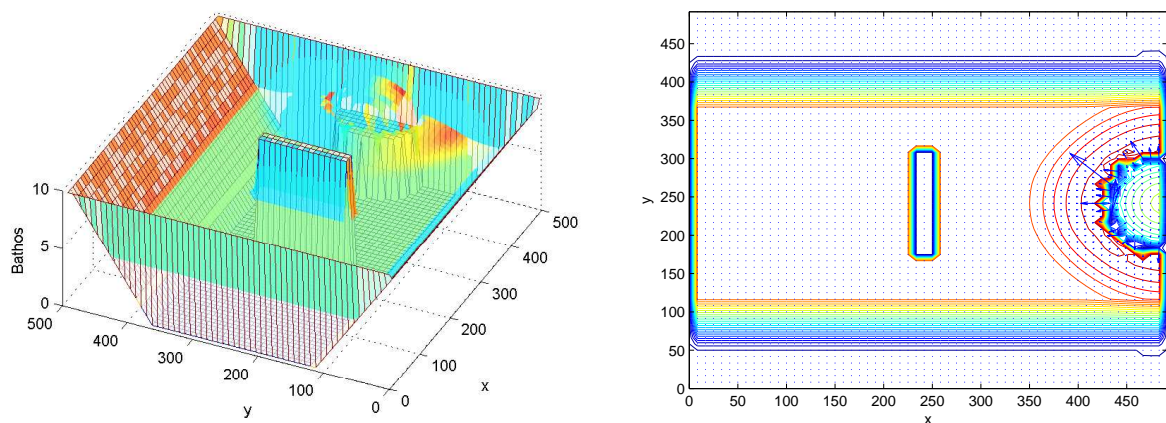
Σχήμα 6.1.10 Λύση του προβ. 6.1.2 με το σχήμα κεντρικών διαφορών [26]. Βάθος (αριστερά), ταχύτητα και σχεδιάγραμμα ισοϋψών καμπυλών (δεξιά), για χρόνο  $t = 10$  δευτερόλεπτα



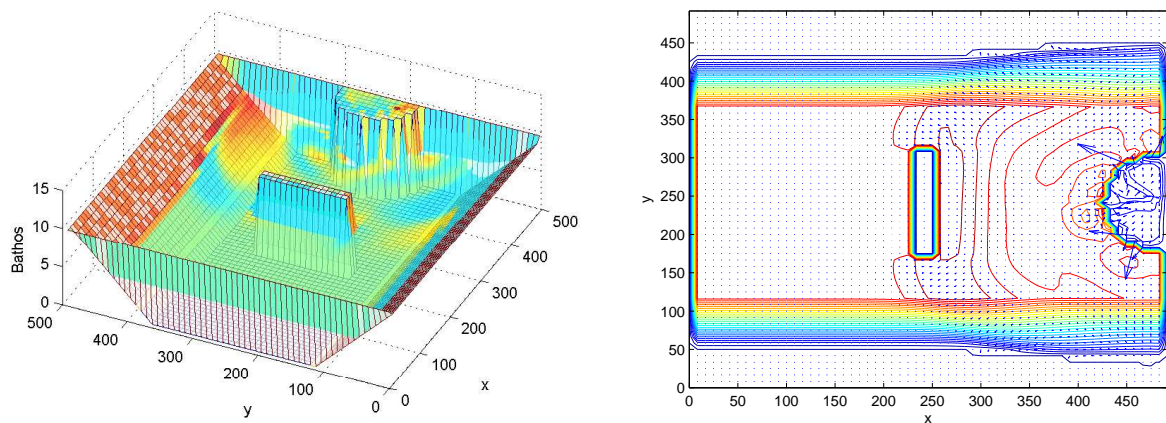
Σχήμα 6.1.11 Λύση του προβ. 6.1.2 με το σχήμα κεντρικών διαφορών [26]. Βάθος (αριστερά), ταχύτητα και σχεδιάγραμμα ισοϋψών καμπυλών (δεξιά), για χρόνο  $t = 10$  δευτερόλεπτα



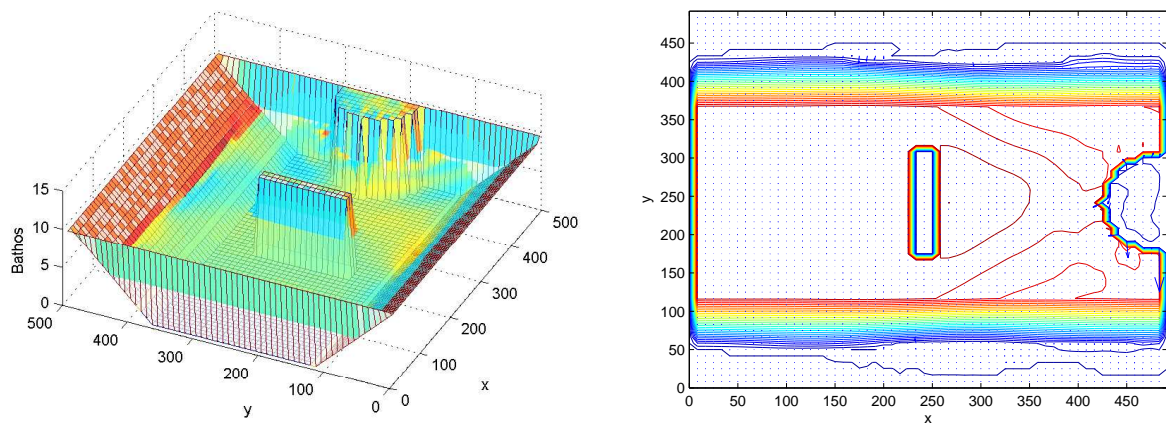
Σχήμα 6.1.12 Λύση του προβ. 6.1.2 με το σχήμα κεντρικών διαφορών [26]. Βάθος (αριστερά), ταχύτητα και σχεδιάγραμμα ισοϋψών καμπυλών (δεξιά), για χρόνο  $t = 60$  δευτερόλεπτα



Σχήμα 6.1.13 Λύση του προβ. 6.1.2 με το σχήμα του Roe. Βάθος (αριστερά), ταχύτητα και σχεδιάγραμμα των ισοϋψών καμπυλών (δεξιά), για χρόνο  $t = 10$  δευτερόλεπτα.



Σχήμα 6.1.14 Λύση του προβ. 6.1.2 με το σχήμα του Roe. Βάθος (αριστερά), ταχύτητα και σχεδιάγραμμα των ισοϋψών καμπυλών (δεξιά), για χρόνο  $t = 30$  δευτερόλεπτα.



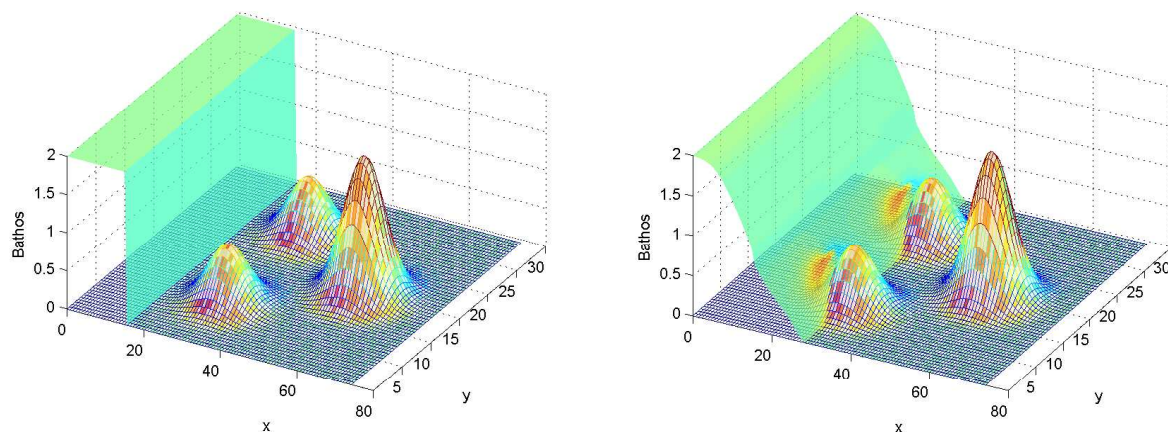
Σχήμα 6.1.15 Λύση του προβ. 6.1.2 με το σχήμα του Roe. Βάθος (αριστερά), ταχύτητα και σχεδιάγραμμα των ισοϋψών καμπυλών (δεξιά), για χρόνο  $t = 60$  δευτερόλεπτα.



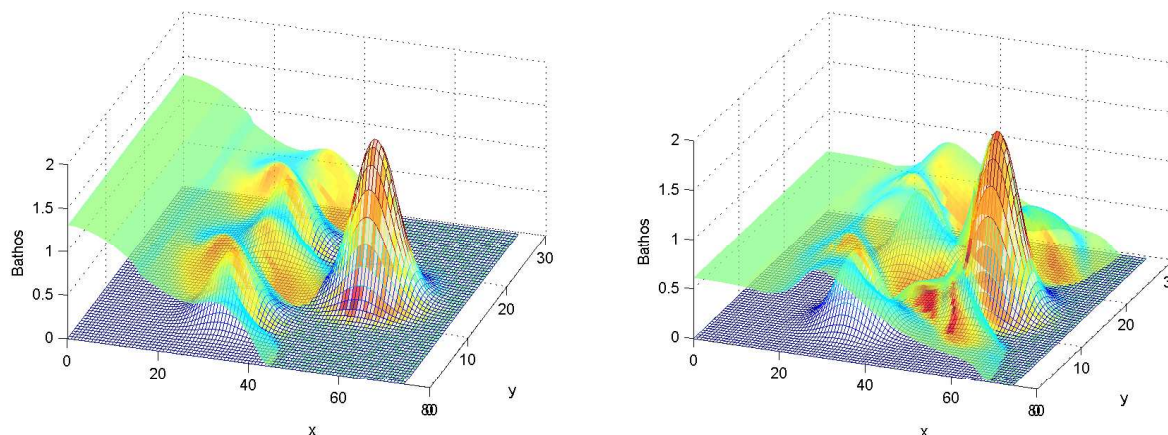
Όπως και στην προηγούμενη παράγραφο 6.1.1 το σχήμα κεντρικών διαφορών παρουσιάζει ταλαντώσεις στη λύση, οι οποίες διαδίδονται. Σε σχέση με το πρόβλημα 1 βλέπουμε ότι υπάρχουν περισσότερες, το οποίο είναι φυσιολογικό εφόσον ο πυθμένας παρουσιάζει μεγαλύτερη ασυνέχεια σε σχέση με τον πυθμένα του προηγούμενου προβλήματος.

## 6.2 Κατάρρευση φράγματος σε κανάλι με τοπογραφία και τριβή

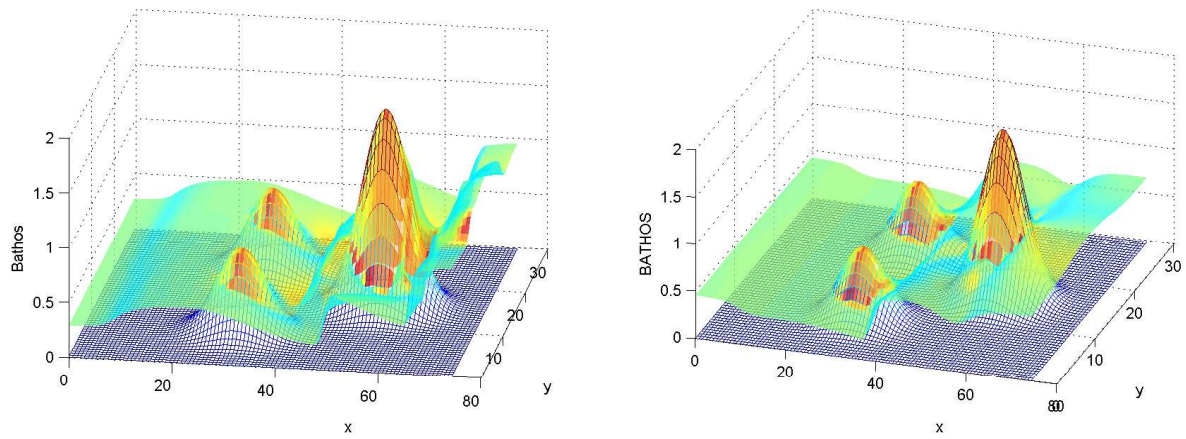
Στο παρών πρόβλημα ελέγχεται η απόδοση του σχήματος του Roe στον υπολογισμό πιο ρεαλιστικών καταστάσεων. Το συγκεκριμένο πρόβλημα είναι παρόμοιο με αυτό που παρουσιάζεται στα [15],[9],[7]. Σε ένα κανάλι μήκους 75 μέτρων και πλάτους 30 μέτρων τοποθετείται ένα φράγμα στα 16 μέτρα με νερό βάθους 1.875 μέτρα ενώ το υπόλοιπο κανάλι θεωρείται στεγανό. Τρία βουνά τοποθετούνται στο κανάλι. Οι αρχικές συνθήκες και η τοπογραφία του προβλήματος φαίνονται στο σχήμα 6.2.1 αριστερά. Ο αριθμός Manning για αυτό το πρόβλημα ορίζεται  $n_m = 0.018$  και εφαρμόζονται συνοριακές συνθήκες ανάκλασης.



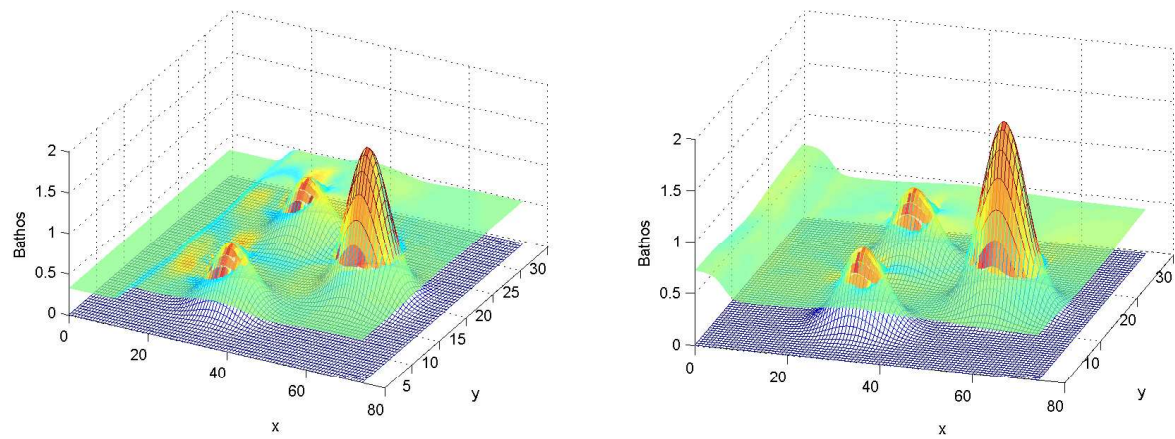
Σχήμα 6.2.1 Αρχικές συνθήκες (αριστερά) και εξέλιξη του βάθους του νερού σε χρόνο  $t = 2$  δευτερόλεπτα.



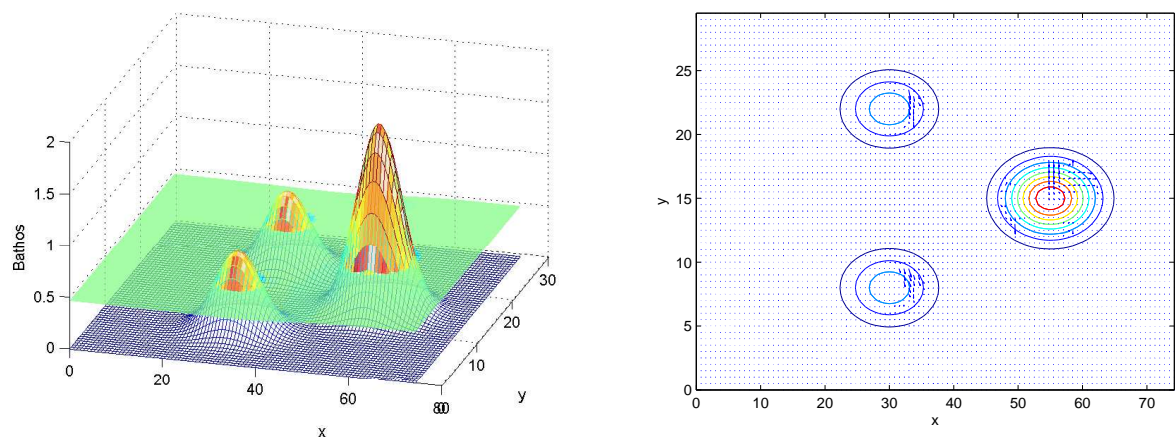
Σχήμα 6.2.2 Εξέλιξη του βάθους του νερού σε χρόνο  $t = 5$  δευτερόλεπτα (αριστερά) και σε χρόνο  $t = 10$  δευτερόλεπτα (δεξιά).



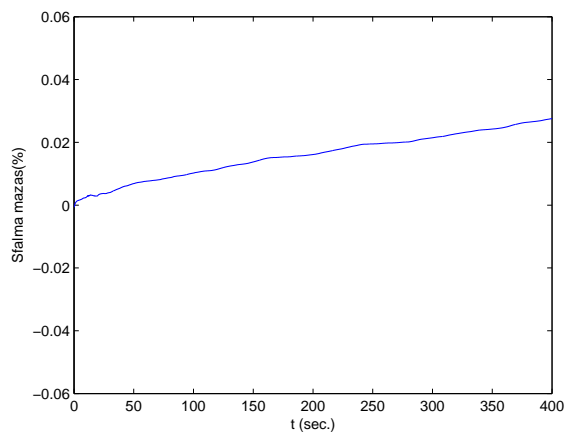
Σχήμα 6.2.3 Εξέλιξη του βάθους του νερού σε χρόνο  $t = 20$  δευτερόλεπτα (αριστερά) και σε χρόνο  $t = 30$  δευτερόλεπτα (δεξιά).



Σχήμα 6.2.4 Εξέλιξη του βάθους του νερού σε χρόνο  $t = 40$  δευτερόλεπτα (αριστερά) και σε χρόνο  $t = 50$  δευτερόλεπτα (δεξιά).



Σχήμα 6.2.5 Εξέλιξη του βάθους του νερού σε χρόνο  $t = 400$  δευτερόλεπτα (αριστερά) και διάγραμμα ισοϋψών καμπυλών του βάθους και ταχυτήτων (δεξιά).

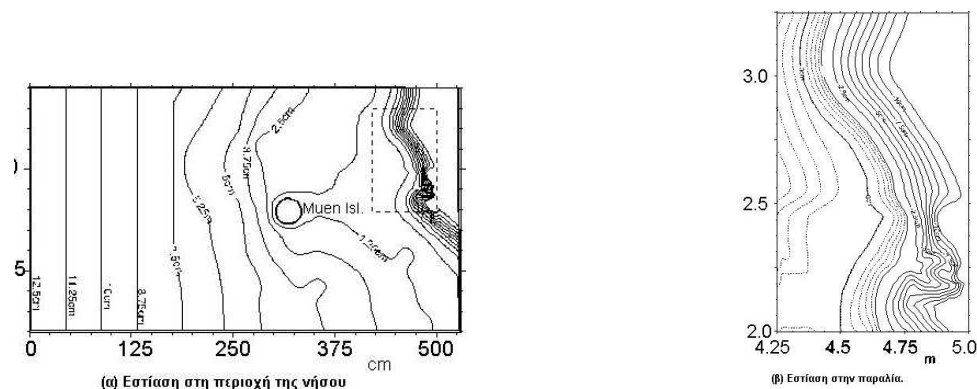


Σχήμα 6.2.6 Χρονική εξέλιξη του σφάλματος μάζας κατά τον υπολογισμό.

Στα σχήματα 6.2.1 - 6.2.5 παρουσιάζονται τα αριθμητικά αποτελέσματα για το βάθος του νερού σε διάφορους χρόνους μέχρι να φτάσει το υγρό σε ισορροπία. Τα μικρότερα βουνά σκεπάζονται σχεδόν ολόκληρα από νερό κατά την εξάπλωση του ενώ στο μεγαλύτερο υπάρχουν σημεία που παραμένουν στεγανά συνεχώς. Η σύγκρουση του μετώπου του κύματος πρώτα με το βουνό και στη συνέχεια με το τοίχος του συνόρου έχει την αναμενόμενη φυσική συμπεριφορά. Επίσης παρατηρείται η γένεση στεγανών στα μικρότερα βουνά καθώς ο χρόνος εξελίσσεται και φτάνουμε σε κατάσταση ισορροπίας. Στο σχήμα 6.2.6 παρουσιάζεται η εξέλιξη του σφάλματος της μάζας όπως υπολογίζεται στα [9], [15], όπου είναι στα επίπεδα του 0.02%.

### 6.3 Benchmark 2 : Αναρρίχηση κύματος Tsunami σε σύνθετη παραλία τριών διαστάσεων

Το 1993 το tsunami στο Okushiri της Ιαπωνίας προκάλεσε πολλά αναπάντεχα προβλήματα. Ένα από αυτά είναι η μέγιστη αναρρίχηση των 32 μέτρων που παρατηρήθηκε στο χωριό Monai στο νησί Okushiri. Αυτό το Benchmark πρόβλημα είναι ένα πείραμα με κλίμακα 1 : 400 της αναρρίχησης στο Monai χρησιμοποιώντας μια δεξαμενή, με μήκος 206 μέτρα, βάθος 6 μέτρα και 3.4 μέτρα πλάτος. Τονίζεται ότι το πρόβλημα δεν προσομοιώνει το πραγματικό γεγονός αλλά τις πειραματικές μετρήσεις. Στις παρακάτω εικόνες βλέπουμε την παραλιακή τοπογραφία που χρησιμοποιείται στο πείραμα.

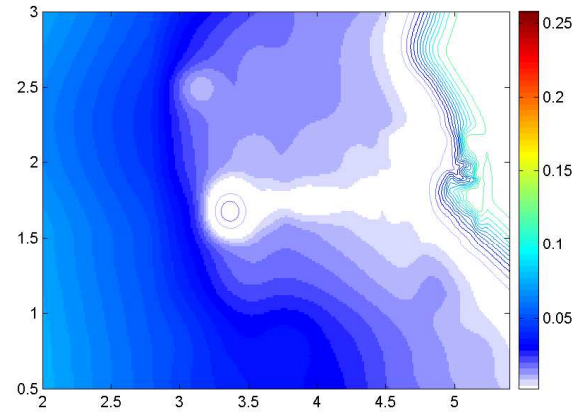
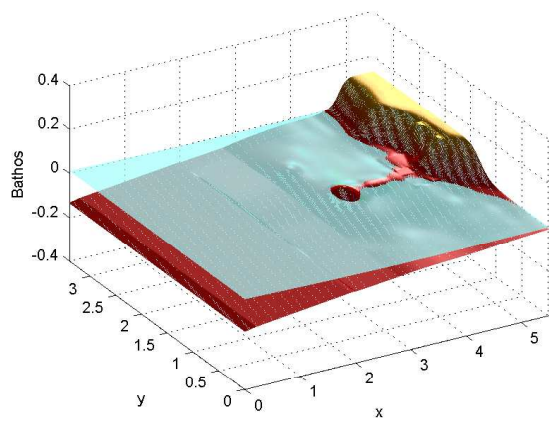


Σχήμα 6.3.1 (α) Εστίαση κοντά στη νήσο Monai και (β) εστίαση στην παραλία.

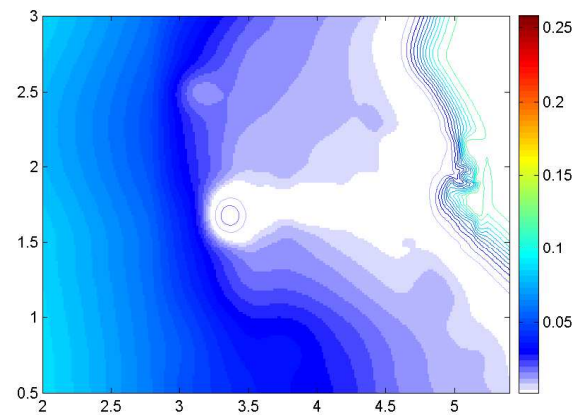
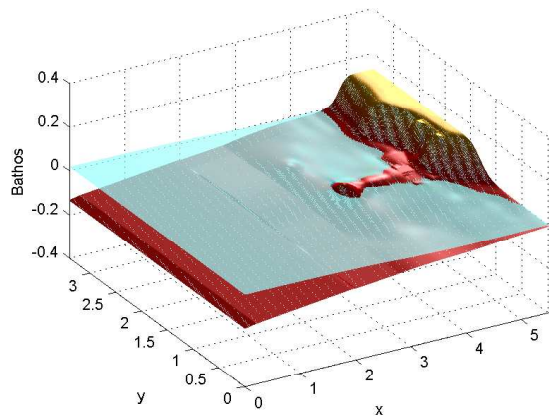
Το εισαγόμενο κύμα δίνεται στην ιστοσελίδα <http://www.cee.cornell.edu/longwave/>. Οι συνοριακές συνθήκες είναι συνοριακές συνθήκες ανάκλασης στο  $y = 0$  και στο  $y = 5.488$  για 3.5 μέτρα όπως φαίνεται και στο σχήμα 6.3.1 με τις πιο έντονες γραμμές. Ο κύριος σκοπός αυτού του προβλήματος είναι η μελέτη της χρονικής και χωρικής μεταβολής της ακτογραμμής όπως και η μεταβολή της επιφάνειας του νερού σε συγκεκριμένα σημεία κοντά στην ακτή. Το χωρίο που χρησιμοποιείται για την επίλυση του προβλήματος είναι  $[0, 5.488] \times [0, 3.402]$  με  $cfl = 0.4$  και  $dx = dy = 0.014$  μέτρα. Στα γραφήματα 6.3.2 - 6.3.7 παρατίθεται η χρονική εξέλιξη του φαινομένου μέχρι τα 20 δευτερόλεπτα τόσο σε τρισδιάστατη προβολή όσο και σε εστίαση κοντά στην παραλία, ενώ στα 6.3.8 - 6.3.10 παρατίθεται το ύψος της επιφάνειας του νερού στα σημεία: κανάλι1 = [4.521, 1.196], κανάλι2 = [4.521, 1.696], κανάλι3 = [4.521, 2.196]. Στο σχήμα 6.3.2 βλέπουμε ότι στο χρόνο των 10 δευτερολέπτων δεν έχει γίνει ακόμη αισθητή η είσοδος του κύματος ενώ δύο δευτερόλεπτα αργότερα το νερό αρχίζει να απομακρίνεται από την ακτή. Στο σχήμα 6.3.3 φαίνεται καθαρά η απομάκρυνση του νερού στα 14 δευτερόλεπτα. Στα σχήματα 6.3.5 και 6.3.6 το νερό πλημμυρίζει την παραλία ενώ στη συνέχεια βλέπουμε ότι πάλι απομακρίνεται.

Στα σχήματα 6.3.8 - 6.3.10 όπως προαναφέρθηκε παρουσιάζεται το ύψος της ελεύθερης επιφάνειας σε συγκεκριμένα σημεία συναρτήσει του χρόνου. Ακόμα βλέπουμε την διαφορετική συμπεριφορά της λύσης καθώς αλλάζει ο συντελεστής τριβής. Πιο συγκεκριμένα παρατηρούμε απόσβεση στη λύση καθώς ο συντελεστής τριβής αυξάνεται. Πρέπει να αναφερθεί ότι τα δεδομένα εισόδου τα οποία παρέχονται για το παρών πρόβλημα δίνονται μόνο μέχρι τα 22.5 δευτερόλεπτα. Στην πειραματική προσομοίωση του προβλήματος ακολουθούνται και άλλα κύματα για τα οποία δεν παρέχονται δεδομένα. Για αυτό το λόγο παρατηρείται διαφορά ανάμεσα στην αναλυτική και αριθμητική λύση για χρόνους μετά τα 22.5 δευτερόλεπτα. Τα αριθμητικά αποτελέσματα του προβλήματος είναι συγκρίσιμα με αυτά που παρουσιάζονται στο [28] και με αυτά που παρουσιάστηκαν στο 3<sup>ο</sup> διεθνές συνέδριο για μοντέλα αναρρίχησης μακρών κυματισμών.

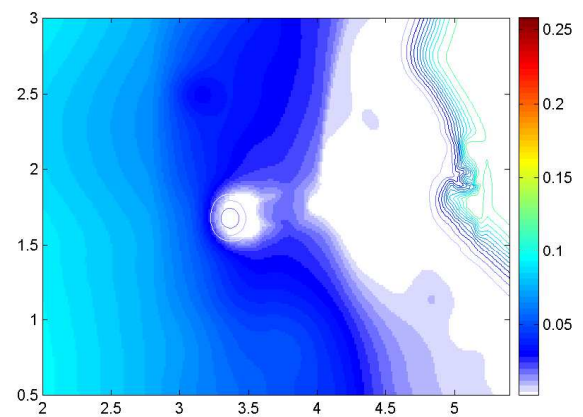
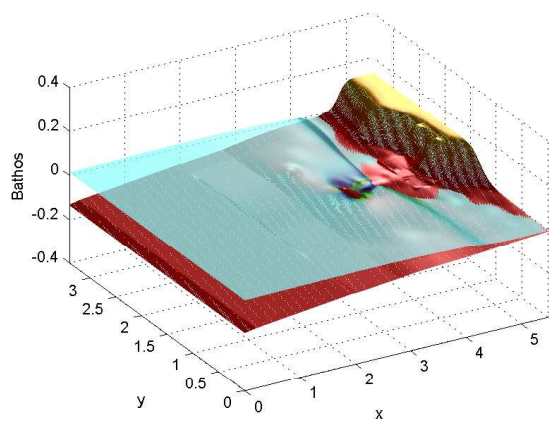




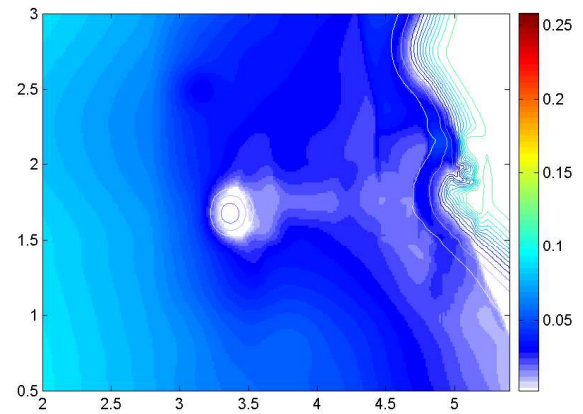
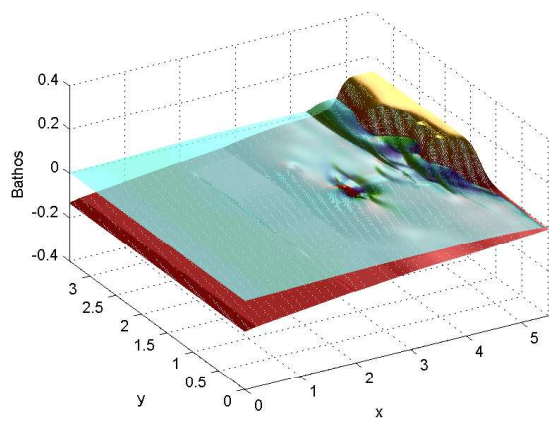
Σχήμα 6.3.2. Η λύση σε τρισδιάστατη μορφή (αριστερά) και εστιασμένη στην παραλία (δεξιά) για χρόνο  $t = 10.08$  δευτερόλεπτα.



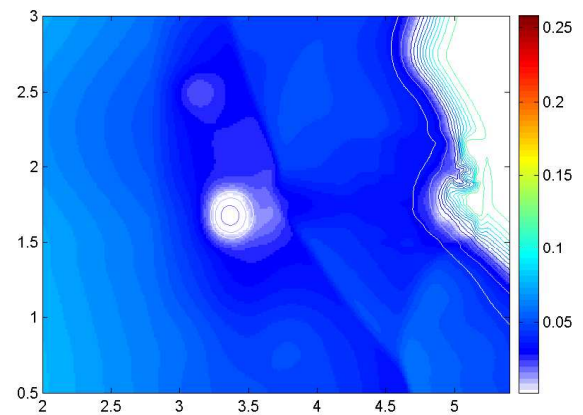
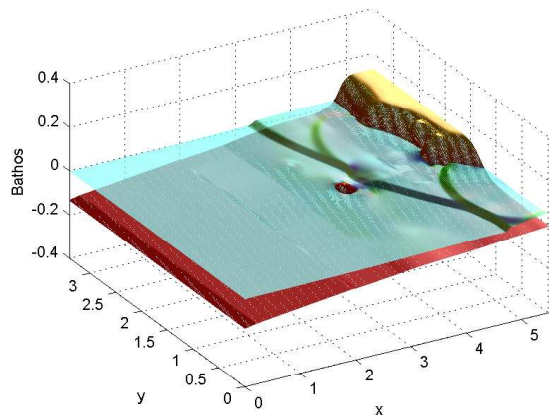
Σχήμα 6.3.3. Η λύση σε τρισδιάστατη μορφή (αριστερά) και εστιασμένη στην παραλία (δεξιά) για χρόνο  $t = 12.01$  δευτερόλεπτα.



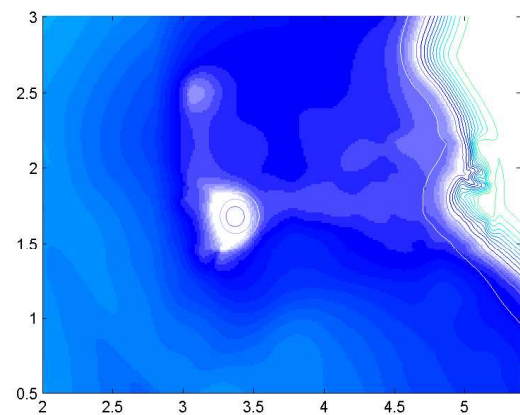
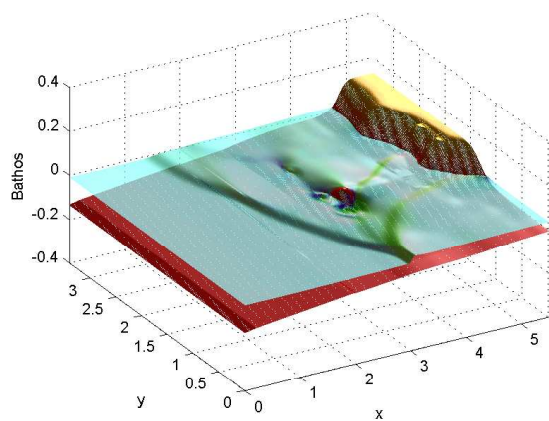
Σχήμα 6.3.4. Η λύση σε τρισδιάστατη μορφή (αριστερά) και εστιασμένη στην παραλία (δεξιά) για χρόνο  $t = 14.04$  δευτερόλεπτα.



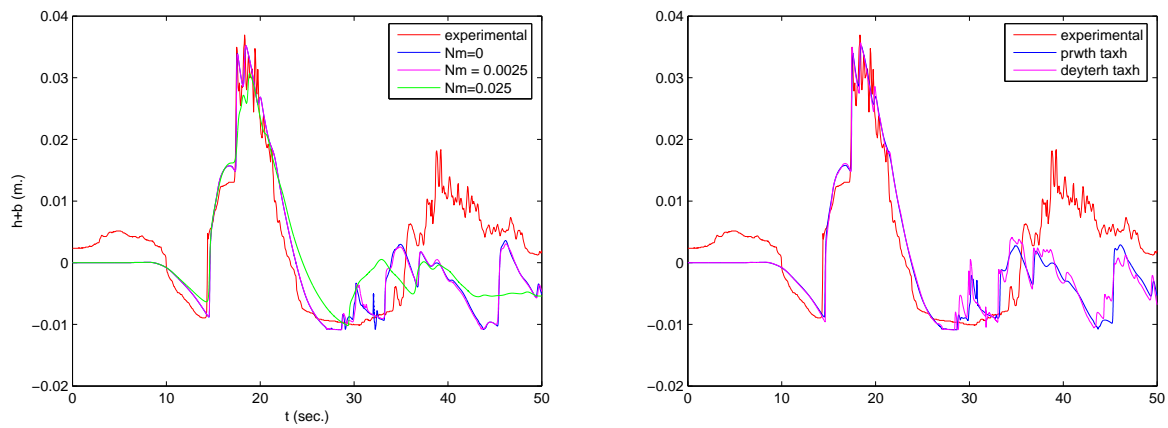
Σχήμα 6.3.5. Η λύση σε τρισδιάστατη μορφή (αριστερά) και εστιασμένη στην παραλία (δεξιά) για χρόνο  $t = 16.09$  δευτερόλεπτα.



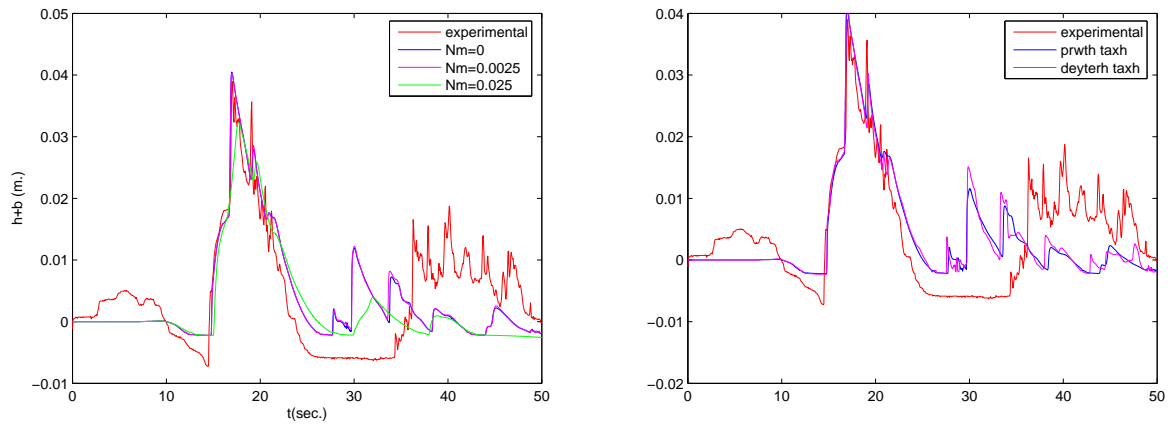
Σχήμα 6.3.6. Η λύση σε τρισδιάστατη μορφή (αριστερά) και εστιασμένη στην παραλία (δεξιά) για χρόνο  $t = 18.02$  δευτερόλεπτα.



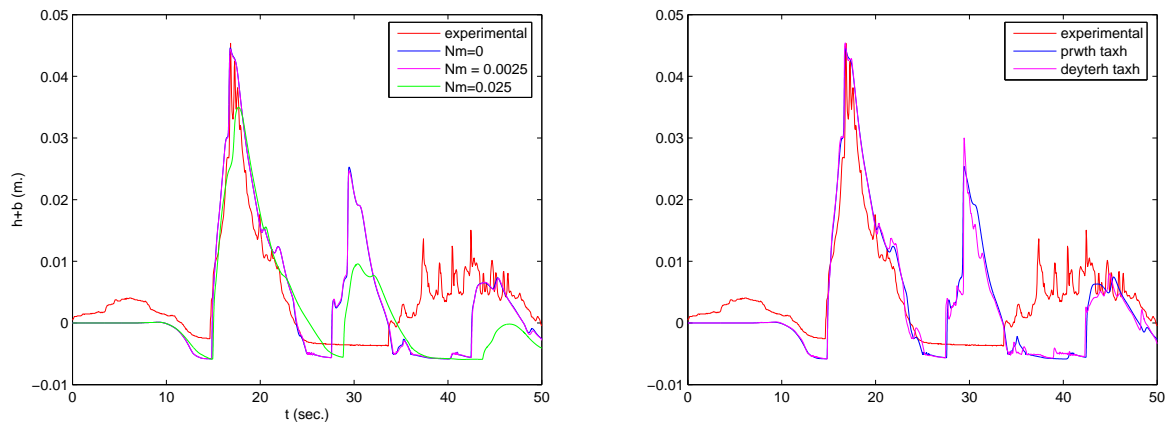
Σχήμα 6.3.7. Η λύση σε τρισδιάστατη μορφή (αριστερά) και εστιασμένη στην παραλία (δεξιά) για χρόνο  $t = 20.04$  δευτερόλεπτα.



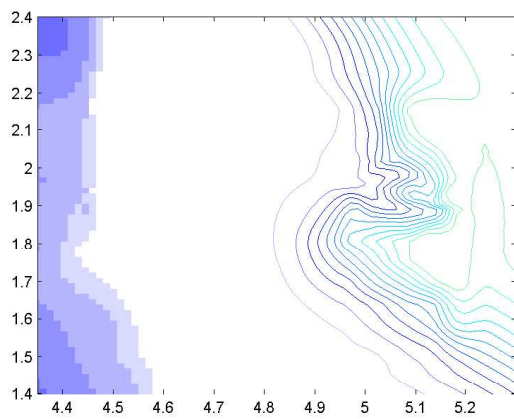
Σχήμα 6.3.8 Σύγκριση της αριθμητικής λύσης για το βάθος της θάλασσας με τα πειραματικά δεδομένα για το κανάλι 5. (α) Με διαφορετικούς συντελεστές τριβής, (β) σχήματα πρώτης και δεύτερης τάξης.



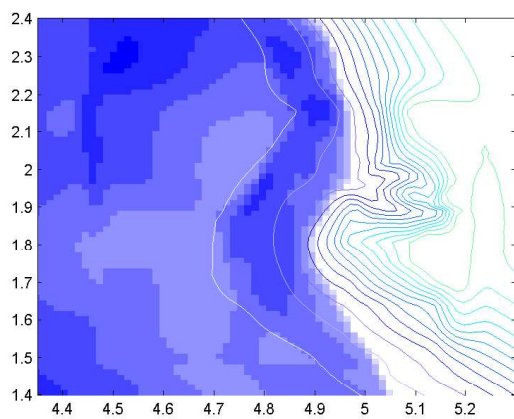
Σχήμα 6.3.9 Σύγκριση της αριθμητικής λύσης για το βάθος της θάλασσας με τα πειραματικά δεδομένα για το κανάλι 7. (α) Με διαφορετικούς συντελεστές τριβής, (β) σχήματα πρώτης και δεύτερης τάξης.



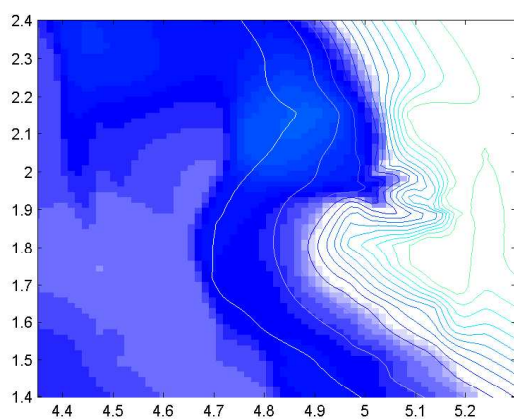
Σχήμα 6.3.10 Σύγκριση της αριθμητικής λύσης για το βάθος με τα πειραματικά δεδομένα για το κανάλι 9. (α) Με διαφορετικούς συντελεστές τριβής, (β) σχήματα πρώτης, δεύτερης τάξης.



Σχήμα 6.3.11 Σύγκριση της αριθμητικής λύσης (δεξιά) με το αντίστοιχο στιγμιότυπο από το video του εργαστηρίου (frame 11).

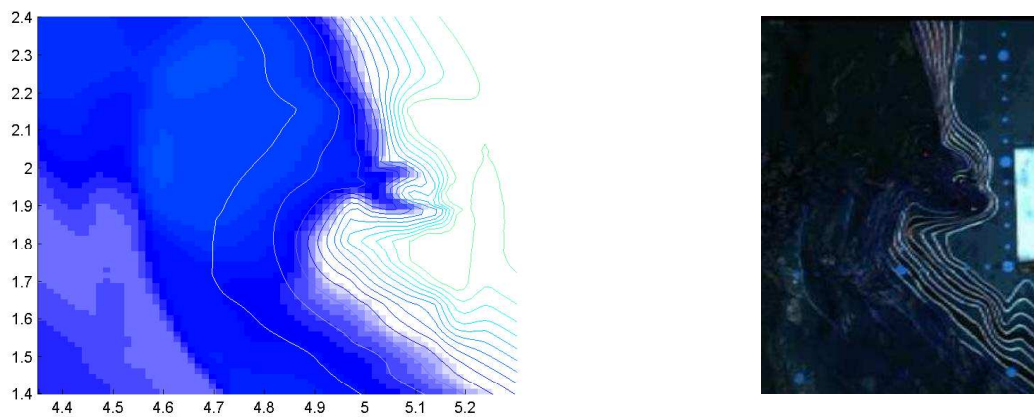


Σχήμα 6.3.12 Σύγκριση της αριθμητικής λύσης (δεξιά) με το αντίστοιχο στιγμιότυπο από το video του εργαστηρίου (frame 26).



Σχήμα 6.3.13 Σύγκριση της αριθμητικής λύσης (δεξιά) με το αντίστοιχο στιγμιότυπο από το video του εργαστηρίου (frame 41).

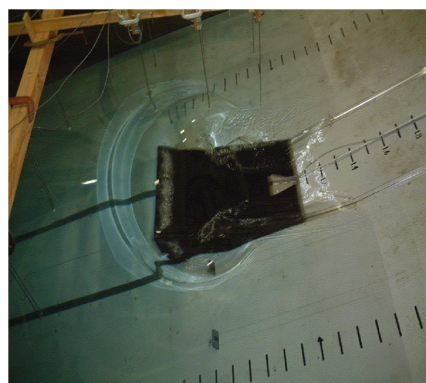




Σχήμα 6.3.14 Σύγκριση της αριθμητικής λύσης (δεξιά) με το αντίστοιχο στιγμιότυπο από το video του εργαστηρίου (frame 56).

## 6.4 Benchmark 4 : Γένεση και αναρρίχηση κύματος Tsunami λόγω κατολίσθησης

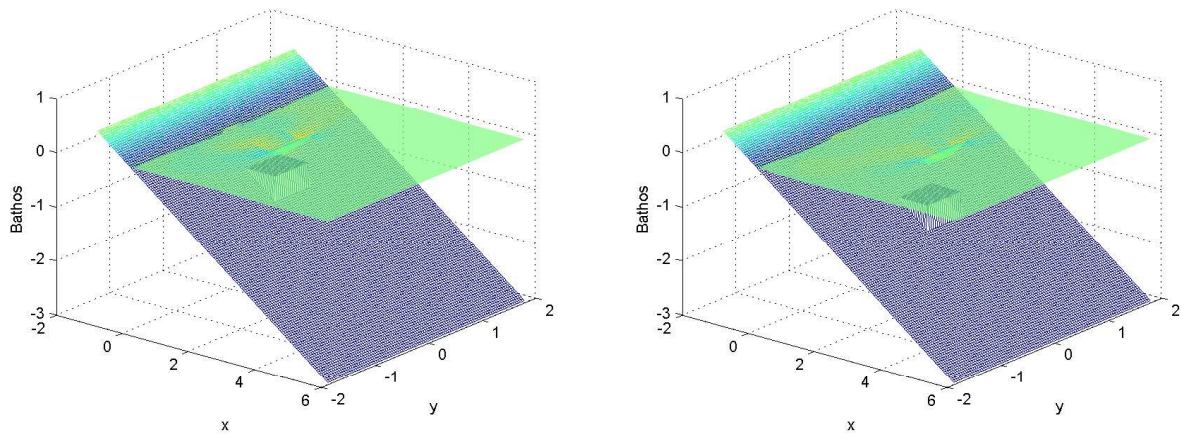
Αυτό το πρόβλημα απαιτεί την κατασκευή μιας μάζας η οποία ολισθαίνει σε μια κεκλιμένη επίπεδη παραλία κλίσης 1:2 και σύγκριση των αριθμητικών αποτελεσμάτων με τα πειραματικά δεδομένα. Τα πειράματα έχουν εκτελεστεί σε μια δεξαμενή μήκους  $104m$ , πλάτους  $3.7m$  και βάθους  $4.6m$  με μια επίπεδη κλίση 1:2 να είναι τοποθετημένη στο ένα άκρο της δεξαμενής. Η μάζα η οποία ολισθαίνει είναι μια σφήνα με διαστάσεις οριζόντιου μήκους  $b = 0.91m$ , ύψους  $a = 0.46m$  και πλάτους  $w = 0.61m$ . Η σφήνα ολισθαίνει λόγω της βαρυτικής δύναμης και η θέση της σε κάθε χρονική στιγμή είναι γνωστή. Ένα χρονικό στιγμιότυπο της κίνησης της σφήνας φαίνεται στην εικόνα 6.4.1.



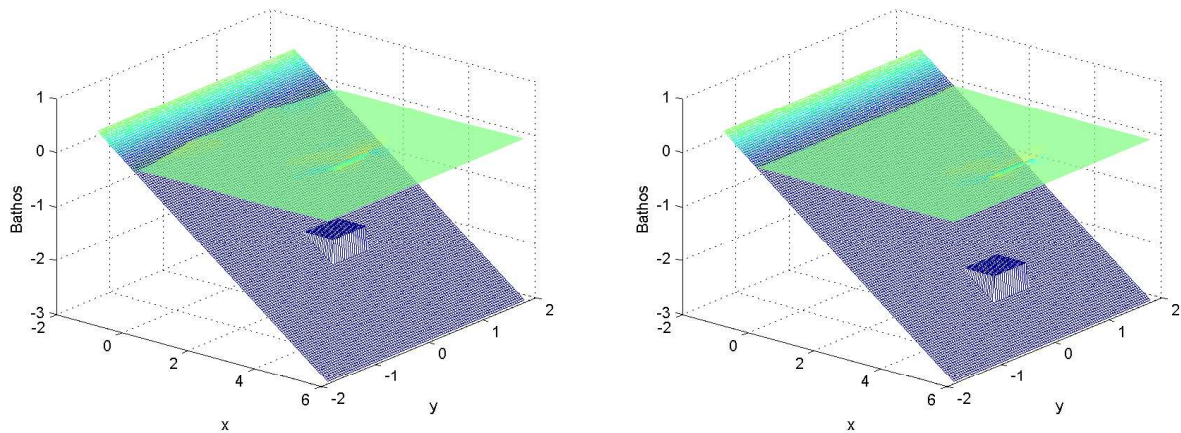
Σχ. 6.4.1 Χρονικό στιγμιότυπο του πειράματος για το πρόβλημα Benchmark 4.

Ένας αριθμός από πύλες τοποθετείται σε κατάλληλες θέσεις έτσι ώστε να μελετηθεί η διάδοση των κυμάτων που δημιουργούνται αλλά και η αναρρίχηση αυτών. Η δομή του προβλήματος

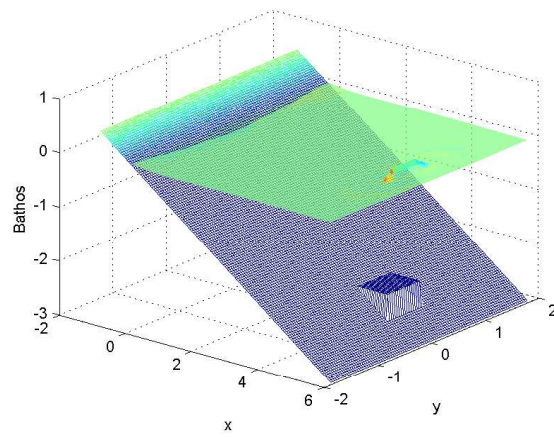
φαίνεται στο σχήμα 6.4.1. Μελετώνται δυο περιπτώσεις ολίσθησης της σφήνας με διαφορετική αρχική θέση αυτής. Στην πρώτη περίπτωση η απόσταση της σφήνας από την ήρεμη επιφάνεια του νερού είναι  $\Delta = -0.1$  και στην δεύτερη  $\Delta = -0.025$ . Η διαμέριση που χρησιμοποιείται είναι  $dx = 0.05m$ ,  $dy = 0.037m$  με  $cfl = 0.5$  και συντελεστή τριβής  $n = 0.025$ . Παρακάτω παρατήθονται χρονικά στιγμιότυπα της λύσης μέχρι τα 3 δευτερόλεπτα και τα αριθμητικά αποτελέσματα της επιφάνειας του νερού για τις πύλες οι οποίες μετράνε την διάδοση του κύματος και βρίσκονται σε θέση  $w_1 = (1.83, 0)$ ,  $w_2 = (1.2446, 0.635)$  και για αυτές που μετράνε την αναρρίχηση και βρίσκονται σε θέση  $r_2 = (0, 0.305)$ ,  $r_3 = (0, 0.61)$ . Για την πρώτη περίπτωση :



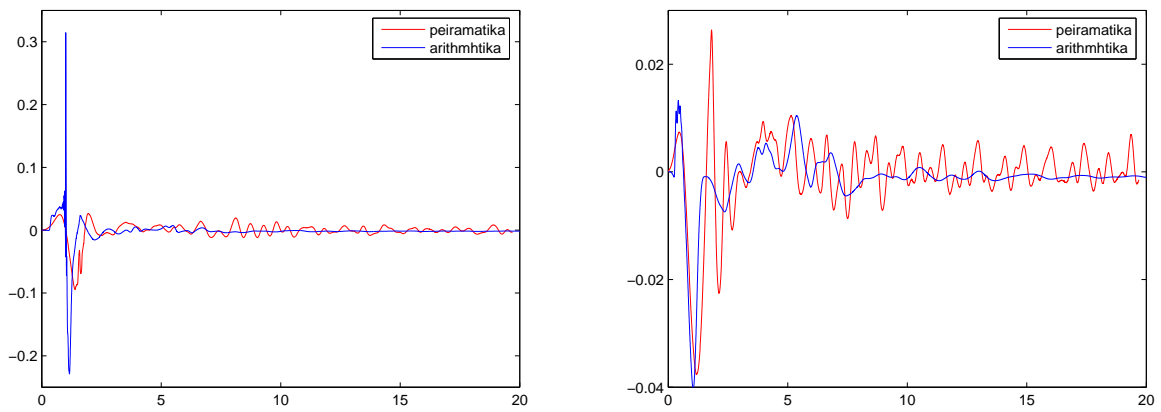
Σχήμα 6.4.2 Η λύση σε χρόνο  $t = 1s$  (δεξιά) και  $t = 1.5s$  (αριστερά) με  $\Delta = -0.1$ .



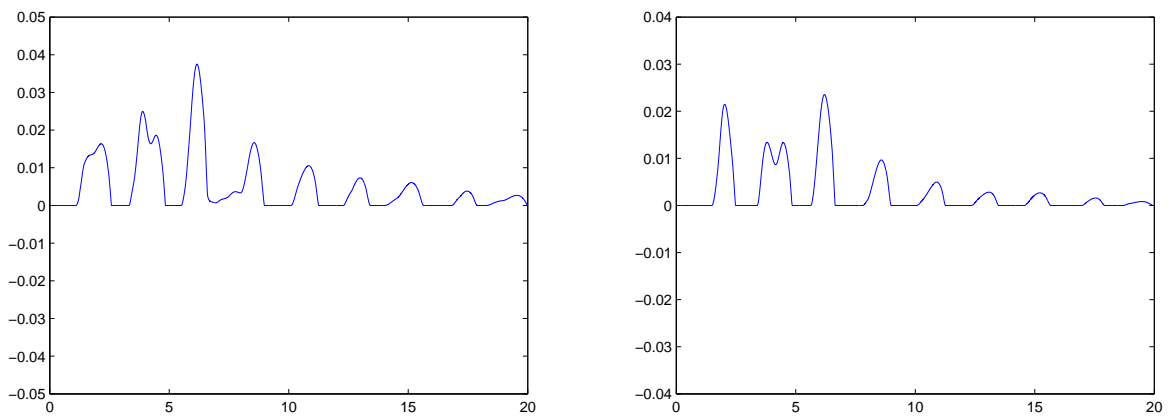
Σχήμα 6.4.3 Η λύση σε χρόνο  $t = 2s$  (δεξιά) και  $t = 2.5s$  (αριστερά) με  $\Delta = -0.1$ .



Σχήμα 6.4.4 Η λύση σε χρόνο  $t = 3s$  με  $\Delta = -0.1$ .

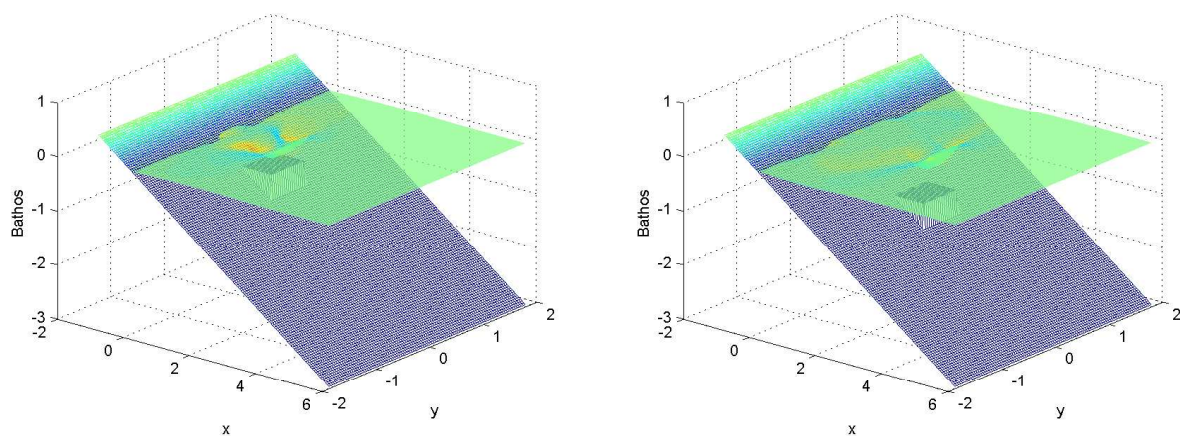


Σχήμα 6.4.5 Αποτελέσματα για τις πύλες  $w_1$  (αριστερά) και  $w_2$  (δεξιά).

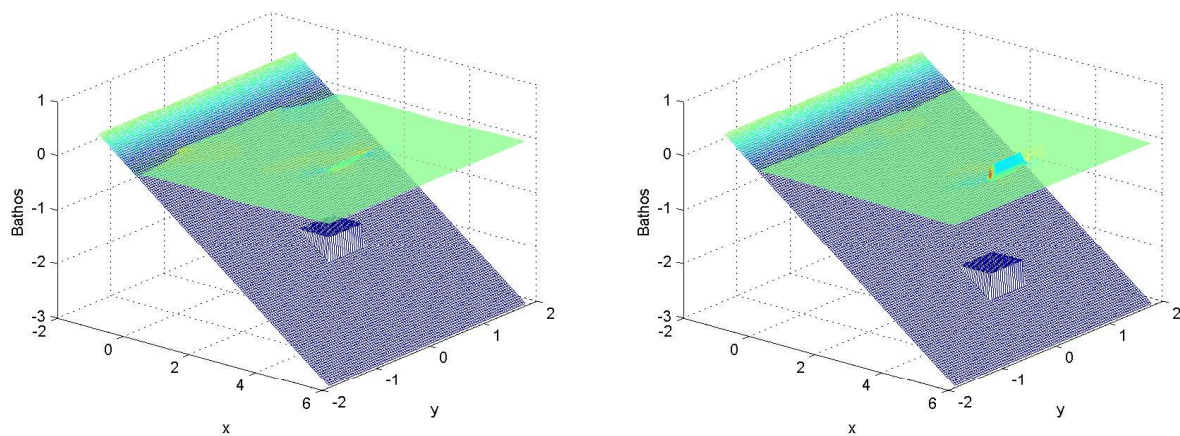


Σχήμα 6.4.6 Αποτελέσματα για τις πύλες  $r_2$  (αριστερά) και  $r_3$  (δεξιά).

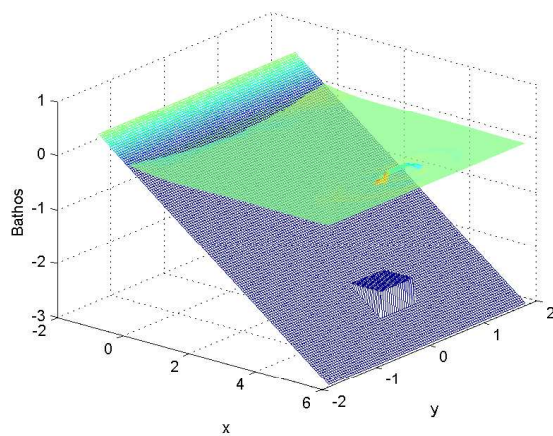
και για την δεύτερη



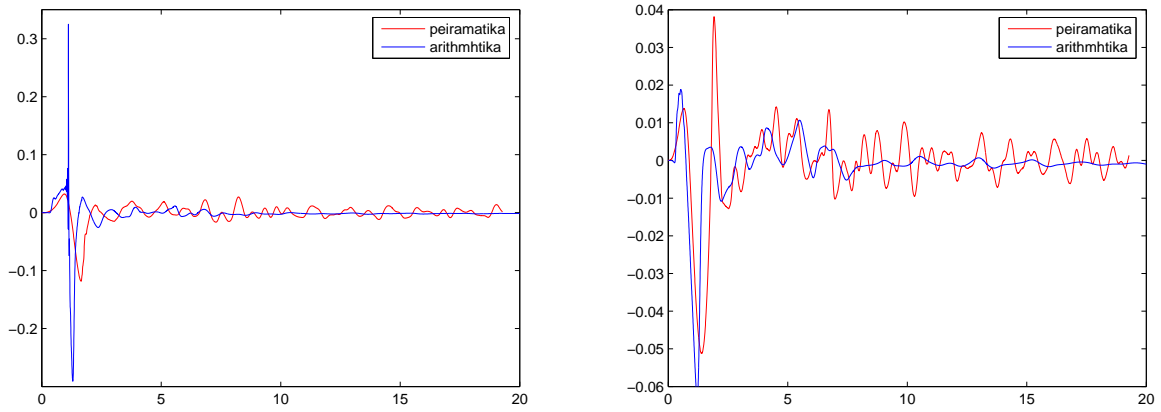
Σχήμα 6.4.7 Η λύση σε χρόνο  $t = 1s$  (δεξιά) και  $t = 1.5s$  (αριστερά) με  $\Delta = -0.025$ .



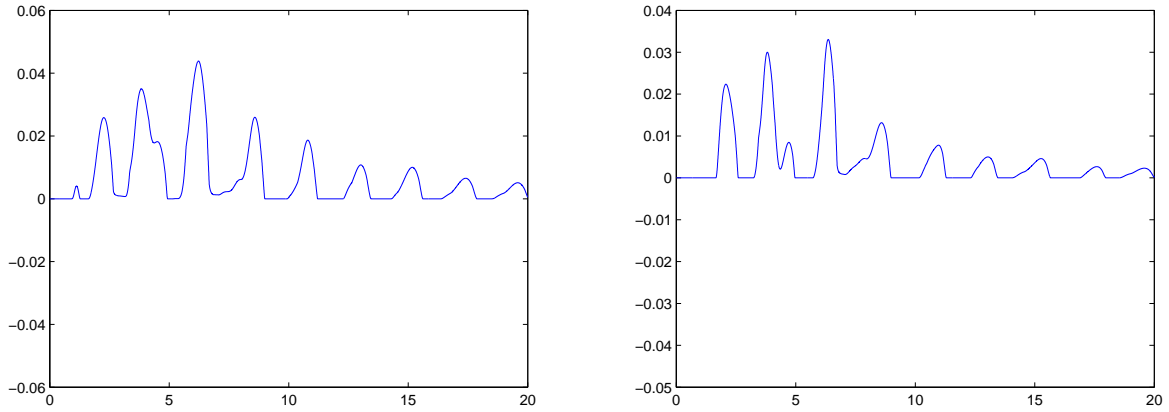
Σχήμα 6.4.8 Η λύση σε χρόνο  $t = 2s$  (δεξιά) και  $t = 2.5s$  (αριστερά) με  $\Delta = -0.025$ .



Σχήμα 6.4.9 Η λύση σε χρόνο  $t = 3s$  με  $\Delta = -0.025$ .



Σχήμα 6.4.10 Αποτελέσματα για τις πύλες  $w_1$  (αριστερά) και  $w_2$  (δεξιά).



Σχήμα 6.4.11 Αποτελέσματα για τις πύλες  $r_2$  (αριστερά) και  $r_3$  (δεξιά).

Βλέποντας τα χρονικά στιγμιότυπα της λύσης παρατηρούμε ότι και οι δύο περιπτώσεις έχουν την ίδια συμπεριφορά. Με το που αρχίζει η μετακίνηση του πυθμένα δημιουργούνται κύματα όπου το μεγαλύτερο διαδίδεται προς την θάλασσα και το μικρότερο αναρριχάται στην κεκλιμένη επιφάνεια προκαλώντας στην συνέχεια πλάγιους κυματισμούς κοντά στην ακτογραμμή οι οποίοι διασκορπίζονται. Η διαφορά ανάμεσα στις δύο περιπτώσεις είναι η ένταση του φαινομένου. Στην περίπτωση όπου η αρχική θέση της κινούμενης μάζας είναι βαθύτερη παρατηρούμε ότι το φαινόμενο είναι λιγότερο αισθητό από την περίπτωση όπου η αρχική θέση της μάζας πιο κοντά στην επιφάνεια του νερού.

Στις δύο παραπάνω περιπτώσεις παρατηρούμε ότι έχουμε υποθαλάσσια μετακίνηση της τοπογραφίας. Το τελευταίο πρόβλημα που εξετάζουμε είναι η περίπτωση της κατολίσθησης ενός λόφου η οποία ξεκινάει πάνω από την στάθμη της θάλασσας [35]. Η κλίση της επιφάνειας είναι  $\tan \theta = \frac{1}{10}$  και γενικά η τοπογραφία έχει την μορφή :

$$b(x, y) = h_0(x) - G(y) \frac{\Delta h}{4} \frac{\left[1 + \tanh\left(\frac{x-x_l}{S_l}\right)\right] \left[1 - \tanh\left(\frac{x-x_r}{S_r}\right)\right]}{\left[1 + \tanh\left(\frac{b \cos \theta}{2*S_l}\right)\right] \left[1 - \tanh\left(\frac{-b \cos \theta}{2*S_l}\right)\right]}$$

με

$$h_0(x) = -x \tan \theta, \quad G(y) = \exp \left[ -\left( \frac{y - y_0}{W} \right)^2 \right].$$

και  $\Delta h$  να είναι το μέγιστο κάθετο ύψος της μάζας,  $x_l, x_r$  να είναι το αριστερό και δεξί σημείο αντίστοιχα όπου αρχίζει η καμπυλότητα της μάζας και  $b$  είναι το σταθερό στο χρόνο, μήκος της μάζας μετρημένο παράλληλα στην κεκλιμένη επιφάνεια. Ακόμα  $S_l, S_r$  είναι όροι διαμόρφωσης που ελέγχουν την υπερβολικότητα του αριστερού και δεξιού αντίστοιχα, μέρους της μάζας. Το αριστερό και δεξί σύνορο και οι όροι διαμόρφωσης δίνονται από:

$$\begin{aligned} x_l(t) &= x_c(t) - S_l, & x_r(t) &= x_c(t) + S_r \\ S_l &= S_r = \frac{b}{2} \cos \theta \end{aligned}$$

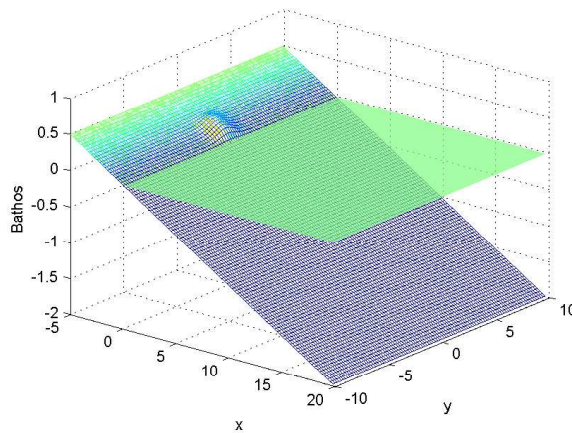
όπου  $x_c$  είναι η οριζόντια θέση του κέντρου της ολισθήσας μάζας. Επίσης  $W$  είναι το πλάτος της μάζας όπου ορίζεται ως η απόσταση ανάμεσα στα σημεία όπου το πάχος της μάζας είναι το 1% του ολικού πάχους. Η ταχύτητα με την οποία κινείται η ολισθήσα μάζα εξαρτάται από το ποσοστό του όγκου που βρίσκεται πάνω από την επιφάνεια της θάλασσας. Πιο συγκεκριμένα η ταχύτητα της μάζας είναι

$$Sv = f_s u_t \tanh \frac{t}{t_0} + f_a g t \sin \theta$$

με

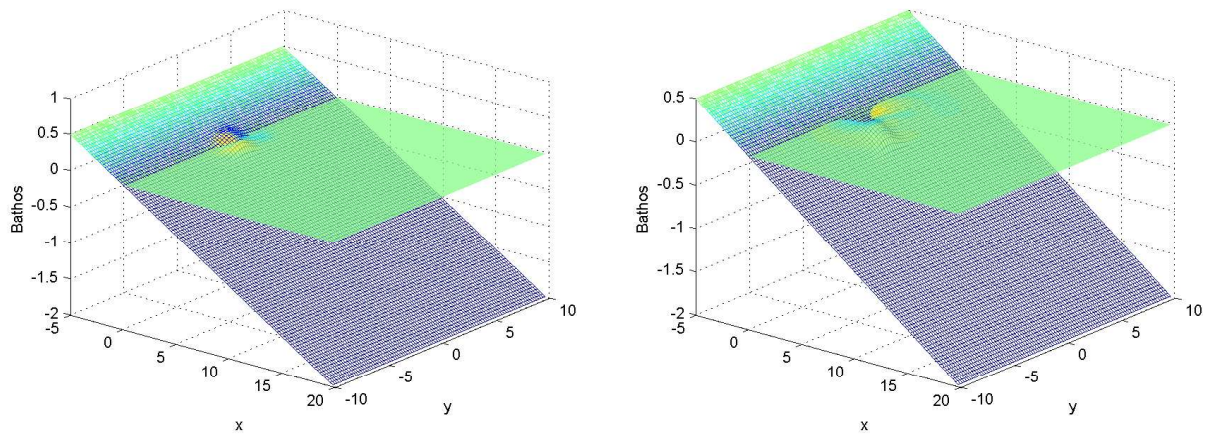
$$u_t = \sqrt{gb \frac{\pi(\gamma - 1)}{2C_d} \sin \theta}, \quad t_0 = u_t \frac{\gamma + C_m}{g(\gamma - 1) \sin \theta}$$

όπου  $C_m = C_d = 1$ ,  $\gamma$  είναι η συγκεκριμένη βαρύτητα του υλικού της ολισθήσας μάζας. Οι συντελεστές  $f_s$  και  $f_a$  είναι το ποσοστό του όγκου πάνω και κάτω από το νερό αντίστοιχα και φυσικά πρέπει να βρίσκονται ανάμεσα στο 0 και 1 με άθροισμα πάντα ίσο με 1. Παρακάτω παρατίθενται χρονικά στιγμιότυπα της λύσης οποία προκύπτει από τα αρχικά δεδομένα :  $\Delta h/L = 0.08$ ,  $e = 0.4$   $\mu = 0.01$ ,  $w = 1$ .

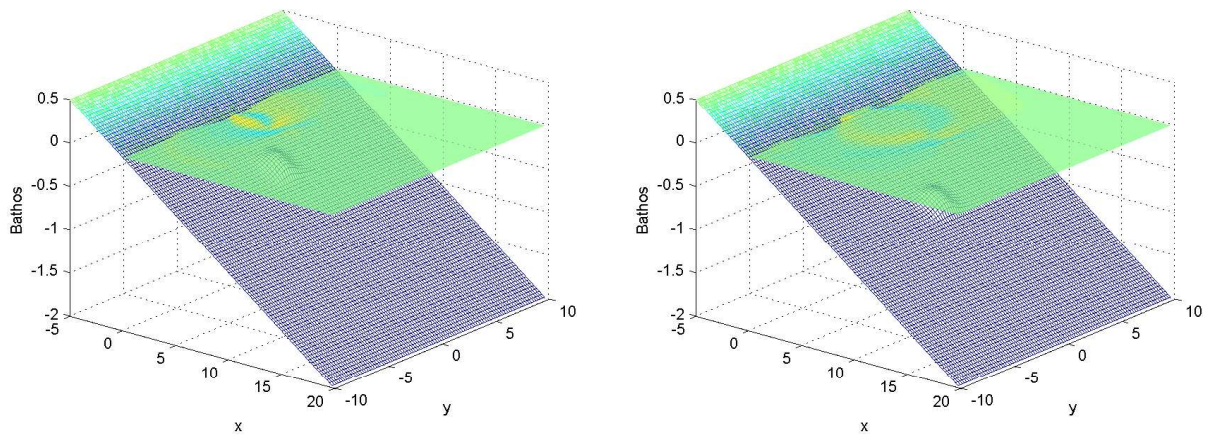


Σχήμα 6.4.12 Αρχικές συνθήκες

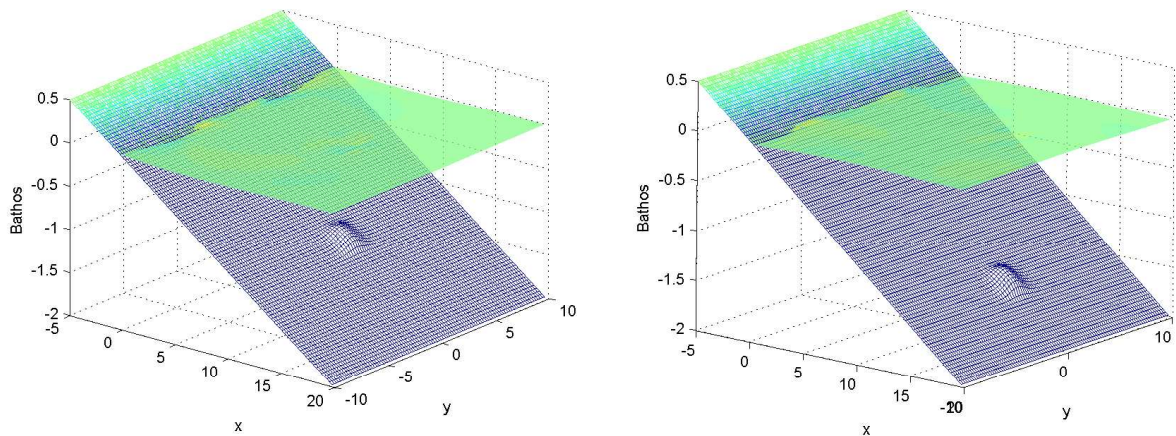




Σχήμα 6.4.13 Αποτελέσματα για το χρόνο  $t = 2s$  (αριστερά) και  $t = 4s$  (δεξιά).



Σχήμα 6.4.14 Αποτελέσματα για το χρόνο  $t = 6s$  (αριστερά) και  $t = 8s$  (δεξιά).



Σχήμα 6.4.15 Αποτελέσματα για το χρόνο  $t = 10s$  (αριστερά) και  $t = 12s$  (δεξιά).

Παρατηρώντας τα αποτελέσματα βλέπουμε ότι καθώς η κινούμενη μάζα βυθίζεται δημιουργείται ένα πρώτο κύμα λόγω ανύψωσης του νερού το οποίο και ταξιδεύει προς την θάλασσα. Καθώς η μάζα συνεχίζει την κίνηση σε βαθύτερα νερά, παρατηρούμε την δημιουργία ενός δεύτερου μεγαλύτερου κύματος όπως και την δημιουργία πλευρικών κυμάτων κοντά στην ακτογραμμή τα

οποία διασκοπίζονται καθώς τα μακρύτερα κύματα ταξιδεύουν μακριά από το  $y = 0$ , αφήνοντας ουρές από μικρότερα κύματα πίσω.



# Κεφάλαιο 7

## Συμπεράσματα

Η εργασία αυτή περιγράφει την ανάπτυξη μεθόδων για την αριθμητική επίλυση του μαθηματικού μοντέλου των εξισώσεων ρηχών υδάτων, που ως στόχο έχει την μελέτη της γένεσης αναρρίχησης και διάδοσης μακρών κυματισμών. Γίνεται εξαγωγή και ανάλυση τόσο του μαθηματικού μοντέλου που χρησιμοποιείται, όσο και του σχήματος που εφαρμόζεται για την αριθμητική επίλυση του μοντέλου. Η κατασκευή του αριθμητικού σχήματος γίνεται με βάση τον προσεγγιστικό επιλυτή Riemann του Roe, χρησιμοποιώντας κατάλληλες διορθώσεις, όπου αυτό απαιτείται, έτσι ώστε να διακρητοποιήσουμε τους πηγαίους όρους και να αντιμετωπίσουμε την εμφάνιση στεγανών στην τοπογραφία. Στην συνέχεια γίνεται επέκταση του σχήματος σε δεύτερης τάξης χωρική ακρίβεια και επέκταση όλων των παραπάνω σε δύο διαστάσεις. Εφαρμόζεται σε πλήθος προβλημάτων τόσο στη μία όσο και στις δύο διαστάσεις. Τα αριθμητικά αποτελέσματα συγκρίνονται είτε με αναλυτικές λύσεις είτε με πειραματικά αποτελέσματα όπου αυτό είναι δυνατό. Η μέθοδος που περιγράφεται χρησιμοποιείται για πρώτη φορά σε προβλήματα γένεσης και διάδοσης μακρών κυματισμών.

Πριν την εφαρμογή του σχήματος στα προβλήματα, τόσο στη μία όσο και στις δύο διαστάσεις, παρατηρήσαμε ότι το σχήμα του Roe με την τροποποίηση που γίνεται στον πηγαίο όρο διατηρεί τις στάσιμες καταστάσεις, ακόμα και στην περίπτωση όπου υπάρχει ανάδυση του πυθμένα και επιτυγχάνει και διατήρηση της μάζας. Αυτό σημαίνει ότι δεν εισάγονται μη φυσικές αριθμητικές ταλαντώσεις στο σχήμα έτσι ώστε να καταστρέφεται η αριθμητική λύση.

Τα προβλήματα μιας διάστασης στα οποία εφαρμόστηκε το παραπάνω σχήμα είναι προβλήματα που μελετούν την αναρρίχηση και θραύση μεμονομένων κυμάτων, την αναρρίχηση κυμάτων λόγω κατολίσθησης του πυθμένα και προβλήματα κατάρρευσης φράγματος. Σε όλα τα προβλήματα έγινε σύγκριση ανάμεσα σε πρώτης τάξης και δεύτερης τάξης, χωρικής ακρίβειας, αποτελέσματα. Η σύγκριση μεταξύ τους έδειξε ότι τα αποτελέσματα δεύτερης τάξης είναι ποιοτικά, περισσότερο ακριβή. Στα προβλήματα απλής αναρρίχησης κύματος είδαμε ότι η συμπεριφορά της αριθμητικής λύσης, συγκρινόμενη με την αναλυτική λύση, είναι σωστή και ακριβής χωρίς να γίνεται εκλέπτυνση του υπολογιστικού πλέγματος. Στα προβλήματα όπου μελετήθηκε η αναρρίχηση και θραύση μεμονομένων κυματισμών, παρόλο που αυτά τα προβλήματα δεν είναι και τα πιο κατάλληλα για τις εξισώσεις ρηχών υδάτων, οι οποίες δεν περιέχουν όρους διασποράς, η σύγκριση με τα πειραματικά δεδομένα που διαθέτουμε έδειξε ότι το παρόν αριθμητικό σχήμα, προσομοιώνει τα κριτήρια θραύσης ως διαδιδόμενες ασυνέχεις ή ως υδραυλικά άλματα επιτυχώς και διατηρεί τη μάζα καθ' όλη την διάρκεια της αναρρίχησης και της καθόδου. Στα προβλήματα κατάρρευσης φράγματος παρατηρήσαμε την ικανότητα

του σχήματος να προβλέπει το βάθος αλλά και την πλημμύρα και την απόσυρση του νερού σε σωστό χρόνο. Τέλος στα προβλήματα αναρρίχησης κύματος λόγω κατολίσθησης του πυθμένα παρατηρήθηκε πολύ καλή προσέγγιση της λύσης, αρχικά, ενώ μετά από κάποιο χρόνο είδαμε απόκλιση της αριθμητικής λύσης από την αναλυτική γεγονός που οφείλεται στο ότι η αναλυτική λύση προέρχεται από τις γραμμικές εξισώσεις ρηχών υδάτων.

Τα προβλήματα σε δυο διαστάσεις μελετούν επίσης την αναρρίχηση κύματος Tsunami σε σύνθετες παραλίες και την αναρρίχηση στην ακτή λόγω κατολίσθησης. Στο πρόβλημα της αναρρίχησης κύματος σε παραλία είδαμε ότι παρά την σύνθετη τοπογραφία επιτυγχάνεται καλή προσέγγιση τόσο του βάθους αλλά και των χρονικών στιγμών που το κύμα κατακλίζει την παραλία χωρίς να γίνει εκλέπτυνση του υπολογιστικού πλέγματος. Είναι επίσης εμφανής η απόσυρση του νερού που συμβαίνει πριν την πλημμύρα του κύματος. Στα προβλήματα αναρρίχησης λόγω κατολίσθησης παρατηρήσαμε ότι η κίνηση του νερού υπολογίζεται σωστά αλλά υπάρχει ασυμφωνία αριθμητικών και αναλυτικών αποτελεσμάτων μετά από κάποιο χρόνο, η οποία οφείλεται πιθανόν, στις διαστάσεις του υπολογιστικού πλέγματος.

Το σχήμα του Roe που παρουσιάστηκε στην παρούσα εργασία έδωσε κάποια βελτιωμένα αποτελέσματα για τις μη γραμμικές εξισώσεις ρηχών υδάτων στη μία και στις δύο διαστάσεις. Όπως και τα υπόλοιπα σχήματα τύπου Godunov μπορεί επιτυχώς να ανταποκριθεί σε δυσκολίες όπως ασυνέχειες οι οποίες προκύπτουν στις υπερβολικού τύπου μερικές διαφορικές εξισώσεις, όπως οι εξισώσεις ρηχών υδάτων. Με τη χρήση upwind στον υπολογισμό των πηγών όρων κατορθώνεται η διατήρηση της ισορροπίας και επιπρόσθετα με την τροποποίηση η οποία εφαρμόστηκε επιτεύχθηκε όχι μόνο η διατήρηση ισορροπίας κατά την εμφάνιση ακραίων καταστάσεων τοπογραφίας αλλά και η διατήρηση της θετικότητας της λύσης σε όλες τις περιπτώσεις. Επίσης υπολογίζεται σωστά η κίνηση σε ακραίες καταστάσεις τοπογραφίας χωρίς να εμφανίζεται υπερπήδηση του νερού όταν αυτό δεν είναι φυσικά σωστό. Όπως παρατηρήθηκε και στα αποτελέσματα η κίνηση του νερού στην ακτογραμμή, ιδιαίτερα στις περιπτώσεις ρεαλιστικής τοπογραφίας, είναι ιδιαίτερος λεπτή και η μέθοδος του Roe, όπως και άλλες μέθοδοι όταν εφαρμόζονται σε δομημένα πλέγματα, μετά την πρώτη αναρρίχηση και την πρώτη απόσυρση του νερού, δίνει μία μέση τιμή της λύσης για το βάθος του νερού.

Αυτό θα μπορούσε να είναι η βάση για περαιτέρω έρευνα, δηλαδή η μελέτη του συγκεκριμένου σχήματος σε μη δομημένα πλέγματα όπως επίσης και σε διαφορετικό τύπου πλέγματα για παράδειγμα τριγωνισμούς ή πολύγωνα έτσι ώστε να προσεγγίζεται καλύτερα η γεωμετρία της τοπογραφίας. Ένας ακόμα τομέας μελλοντικής έρευνας είναι η βελτίωση για τα μέτωπα υγρού/στεγανού (wet/dry fronts) τόσο για τη μία όσο και για τις δύο διαστάσεις και η ανάπτυξη των αριθμητικών σχημάτων με υψηλότερη τάξης ακρίβεια. Στα αριθμητικά σχήματα που περιγράψαμε, ο χρόνος εκτέλεσης τους εξαρτάται από το χωρικό βήμα που χρησιμοποιούμε και αυτό λόγω του περιορισμού της CFL συνθήκης που έχουμε επιβάλει. Τα σχήματα αυτά είναι άμεσα (explicit) όποτε ένας τομέας μελλοντικής έρευνας είναι η χρήση έμμεσων (implicit) σχημάτων. Ακόμα θα μπορούσε να γίνει χρήση παράλληλων υπολογισμών έτσι ώστε να ελαχιστοποιηθεί ο χρόνος λήψης των αποτελεσμάτων.

# Bibliography

- [1] P.D. Bates and A.P.J. De Roo. A simple raster-based model for floodplain inundation. *Journal of Hydrology*, 236, 2000.
- [2] P.D. Bates and M.S. Horritt. Predicting floodplain inundation: raster-based modelling versus the finite element approach. *Hydrological Processes*, 15, 2001.
- [3] P.D. Bates and M.S. Horritt. Evaluation of 1-d and 2-d numerical models for predicting river flood inundation. *Journal of Hydrology*, 268, 2002.
- [4] A. Bermudez and M.E. Vazquez-Cendón. Upwind methods for hyperbolic conservation laws with source terms. *Computer Fluids*, 23:1049, 1994.
- [5] S.F. Bradford and B.F. Sanders. Finite-volume model for shallow-water flooding of arbitrary topography. *J. Hydraul. Eng.*, 128, 2002.
- [6] M. Brocchini, R. Bernetti, A. Mancinelli, and G. Albertini. An efficient solver for nearshore flows based on the WAF method. *Coastal Eng.*, 43, 2001.
- [7] P. Brufau and P. García-Navarro. Unsteady free surface flow simulation over complex topography with a multidimensional upwind technique. *J. Comp. Phys.*, 186:503, 2003.
- [8] P. Brufau, García-Navarro P., and M.E Vázquez-Cendón. Zero mass error using unsteady wetting-drying conditions in shallow flows over dry irregular topography. *International Journal for Numerical Methods In Fluids*, 45:1047, 2004.
- [9] P. Brufau, M.E. Vazquez-Cendón, and P. Gracia-Navarro. A numerical model for the flooding and drying of irregular domain. *J. Numer. Meth. Fluids*, 39:247, 2002.
- [10] G.F. Carrier, T.T. Wu, and H. Yeh. Tsunami run-up and draw-down on a plane beach. *J. Fluid Mech.*, 475:79, 2003.
- [11] M.J. Castro, A.M. Ferreiro, J.A. García-Rodríguez, J.M. González-Vida, J. Macías, C. Parés, and M. Elena Vazquez-Cendón. The numerical treatment of wet/dry fronts in shallow flows: Application to one-layer and two-layer systems. *Mathematical and Computer Modelling*, 42:419, 2005.
- [12] M.J. Castro, J.M. González-Vida, and C. Parés. Numerical treatment of wet/dry fronts in shallow flows with a modified Roe scheme. *Math. Models and Meth. in Ap. Sc.*, 16:897, 2006.

- [13] L. Cea, A. Ferreiro, M. Vázquez-Cendón, and J. Puertas. An experimental and numerical analysis of solitary waves generated by bed and boundary movements. *Int. J. Numer. Methods Fluids*, 46:793, 2004.
- [14] R. Courant, E. Isaacson, and E. Rees. On the solution of nonlinear hyperbolic differential equations by finite differences. *Comm. Pure. Appl. Math.*, 5, 1952.
- [15] A.I. Delis and Th. Katsaounis. Numerical solution of the two-dimensional shallow water equations by the application of relaxation methods. *Applied Mathematical Modeling*, 29:754, 2005.
- [16] A.I. Delis and C.P Skeels. TVD schemes for open channel flow. *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, 26:791, 1998.
- [17] N. Dod. Numerical model of wave run-up, overtopping and regeneration. *J. Waterw. Port, Coastal, Ocean Eng.*, 124, 1998.
- [18] A. Ferreiro. Resolución y validación experimental del modelo de aguas poco profundas unidimensional incluyendo áreas secas. *Trabajo de DEA, Universidad de Santiago de Compostela*, 2002.
- [19] S.K Godunov. Finite difference methods for the computation of discontinuous solutions of the equations of fluid dynamics. *Math. Sb.*, 47:271, 1959.
- [20] T.C. Gopalakrishnan and C.C. Tung. Run-up of non-breaking waves: A finite-element approach. *Coastal Eng.*, 4, 1980.
- [21] A. Harten. High resolution schemes for hyperbolic conservation laws. *Journal of Computational Physics*, 49:1, 1983.
- [22] T.Y. Hou and P. LeFloch. Why non-conservative schemes converge to the wrong solutions: Error analysis. *Math. of Comput.*, 62, 1994.
- [23] K. Hu, C.G. Mingham, and D.M Causon. Numerical simulation of wave overtopping of coastal structures using the non-linear shallow water equations. *Coastal Eng.*, 41, 2000.
- [24] M.E Hubbard and N. Dod. A 2d numerical model of wave runup and overtopping. *Coastal Eng.*, 47, 2002.
- [25] M.E. Hubbart and P. Garcia-Navarro. Flux difference splitting and the balancing of source terms and flux gradients. *Journal of Computational Physics*, 165:2, 2000.
- [26] C. Koutitas, M. Gousidou, and G. Pehlivanidis. Computer simulation of long waves generation by landslides. *1<sup>st</sup> IC-EpsMsO*, 2005.
- [27] P.D. Lax and B. Wendroff. Systems of conservation laws. *Comm. Pure Appl. Math.*, 13:217, 1960.

- [28] Randall J. LeVeque and David L. George. High-resolution finite volume methods for the shallow water equations with bathymetry and dry states. *Proceedings of the Third International Workshop on Long-Wave Runup Models , Catalina, 2004*, 2006.
- [29] R.J. LeVeque. *Numerical Methods for Conservation Laws*. Birkhauser, 1992.
- [30] R.J LeVeque. *Finite Volume Methods for Hyperbolic Problems*. Cambridge University Press, 2002.
- [31] P.L.-F. Liu, Y.S. Cho, M.J. Briggs, U. Kanoglu, and C.E. Synolakis. Runup of solitary wave on a circular island. *J. Fluid Mech.*, 302, 1995.
- [32] P.L.-F. Liu, P. Lynett, and C.E Synolakis. Analytical solutions for forced long waves on a sloping beach. *J. Fluid Mech.*, 478:101, 2003.
- [33] P.L.-F. Liu, T.-R. Wu, F. Raichlen, C.E. Synolakis, and J.C. Borrero. Runup and rundown generated by three-dimensional sliding masses. *J. Of Fluid Mech.*, 536:107, 2005.
- [34] R.A. Luetlich and J.J. Westerink. Implementation and testing of element flooding and drying in the adcirc hydrodynamic model. *Department of the Army, U.S. Army Corps of Engineers, Vickburg, Miss.*
- [35] P. Lynett and P. Liu. A numerical study of the runup generated by the three-dimensional landslides. *Journal of Geophysical Research*, 110, 2005.
- [36] A. Mohammadian and D.Y. Le Roux. Simulation of shallow flows over variable topographies using unstructured grids. *International Journal for Numerical Methods In Fluids*, (In press).
- [37] S. Osher and F. Solomon. Upwind difference schemes for hyperbolic conservation laws. *Math. Comp.*, 158, 1982.
- [38] DH. Peregrin. Breaking waves on beaches. *Ann. Rev. Fluid Mech.*, 15:149, 1983.
- [39] G. Pérez, P. García-Navarro, M. ASCE, and M. Vázquez-Cendón. One-dimensional model of shallow water surface waves generated by landslides. *Journal of Hydraulic Engineering*, 132, 2006.
- [40] P.L Roe. Approximate riemann solvers, parameter vectors, and difference schemes. *J. Computational Physics*, 43:357, 1981.
- [41] P.K. Sweby. High resolution schemes using flux limiters for hyperbolic conservation laws. *SIAM J. Numer. Anal.*, 21, 1984.
- [42] C.E Synolakis. The run up of solitary waves. *J. Of Fluid Mech.*, 185:523, 1987.
- [43] V.V. Titov and C.E. Synolakis. Modeling of breaking and nonbreaking long-wave evolution and runup using vtcs-2. *J. Waterw. Port, Coastal, Ocean Eng.*, 121, 1995.

- [44] V.V. Titov and C.E. Synolakis. Numerical modeling of tidal wave runup. *J. Waterw. Port, Coastal, Ocean Eng.*, 124, 1998.
- [45] E.F. Toro. *Shock-Capturing Methods for Free-Surface Shallow Flows*. John Wiley and Sons Ltd, 2001.
- [46] Y. Wei, X.-Z. Mao, and K.F. Cheung. Well-balanced finite-volume model for long-wave runup. *J. Waterw. Port, Coastal, Ocean Eng.*, 132, 2006.
- [47] H. Yeh, P. Liu, and C. Synolakis. *Long Wave Runup Models*. World Scientific Publishing Co., 1996.
- [48] J.A Zelt. The run-up of nonbreaking and breaking solitary waves. *Coastal Engineering*, 15:205, 1991.