



ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ ΚΡΗΤΗΣ

ΓΕΝΙΚΟ ΤΜΗΜΑ

Τομέας: Μαθηματικών

**p-Cyclic SOR για προβλήματα συνοριακών  
τιμών με περιοδικές συνθήκες**

Διατριβή Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης της  
Μαρίας Γ. Παπαδομανωλάκη

Επιβλέπων : Καθηγητής  
Ιωάννης Σαριδάκης

Χανιά

Οκτώβριος 2003

## Ευχαριστίες

Θερμές ευχαριστίες οφείλω στον Καθηγητή κ. Ιωάννη Σαριδάκη για την πολύπλευρη συμβολή του στην εκπόνηση της παρούσας μεταπτυχιακής διατριβής. Με την πλούσια εμπειρία του, την καθοδήγηση του και το δημιουργικό του σχολιασμό, συνέβαλλε ουσιαστικά στο σχεδιασμό, την ανάλυση και αξιολόγηση των αποτελεσμάτων της μελέτης.

Ευχαριστίες επίσης οφείλω:

Στους Καθηγητές του Γενικού Τμήματος Αναπληρώτρια Καθηγήτρια κ. Παπαδοπούλου Έλενα και τον Επίκουρο Καθηγητή κ. Έλληνα Δημοσθένη, για τη συμμετοχή τους στην τριμελή επιτροπή και τις υποδείξεις τους κατά την εκπόνηση της διατριβής.

Στους καθηγητές του Γενικού Τμήματος του τομέα Μαθηματικών, το προσωπικό της πρυτανείας και του Εργαστηρίου Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Ηλεκτρονικών Υπολογιστών του Πολυτεχνείου Κρήτης, καθώς και στους μεταπτυχιακούς φοιτητές του τμήματος για τη συνεργασία και συμπαράσταση τους.

Τέλος θα ήθελα να ευχαριστήσω το σύζυγο μου και τους γονείς μου για την κατανόηση και υποστήριξη τους.

# Περιεχόμενα

<b>1</b>	<b>Βασικές Επαναληπτικές Μέθοδοι για την επίλυση συστημάτων <math>Ax = b</math></b>	<b>1</b>
1.1	Εισαγωγή . . . . .	1
1.2	Κλασσικές Επαναληπτικές Μέθοδοι . . . . .	5
1.2.1	Μέθοδος Jacobi . . . . .	6
1.2.2	Μέθοδος Gauss-Seidel . . . . .	7
1.2.3	Μέθοδο της Διαδοχικής Υπερχαλάρωσης -Successive overrelaxation method (SOR) . . . . .	8
1.2.4	Τεχνική της Παρεκβολής Extrapolation . . . . .	11
1.3	Block Επαναληπτικές Μέθοδοι . . . . .	13
<b>2</b>	<b>Μέθοδος της Διαδοχικής Υπερχαλάρωσης -SOR σε p-cyclic πίνακες</b>	<b>15</b>
2.1	Εισαγωγή-Ορισμός p-cyclic πινάκων . . . . .	15
2.2	Μέθοδος της Διαδοχικής Υπερχαλάρωσης -SOR σε p-cyclic πίνακες . . . . .	21
2.3	Βέλτιστη παράμετρος υπερχαλάρωσης . . . . .	25
<b>3</b>	<b>Βέλτιστη κυκλική διαμέριση για την μέθοδο της Διαδοχικής Υπερχαλάρωσης -SOR σε p-cyclic πίνακες</b>	<b>31</b>
3.1	Εισαγωγή . . . . .	31
3.2	Θεωρήματα για την εύρεση της βέλτιστης διαμέρισης, παραμέτρου υπερχαλάρωσης και φασματικής ακτίνας στην SOR μέθοδο για p-cyclic πίνακα. . . . .	34
<b>4</b>	<b>HERMITE COLLOCATION ΜΕΘΟΔΟΣ για προβλήματα συνοριακών τιμών</b>	<b>51</b>
4.1	Εισαγωγή . . . . .	51
4.2	Κυβικά Hermite Πολυώνυμα . . . . .	52
4.3	Collocation μέθοδος . . . . .	54
<b>5</b>	<b>P-Cyclic SOR για προβλήματα συνοριακών τιμών με περιοδικές συνοριακές συνθήκες</b>	<b>57</b>
5.1	Εισαγωγή . . . . .	57
5.2	Ορισμός του Collocation πίνακα . . . . .	58
5.3	Βέλτιστη διαμέριση SOR . . . . .	60

6	Προβλήματα συνοριακών τιμών με περιοδικές συνοριακές συνθήκες για σταθερούς συντελεστές	67
6.1	Εισαγωγή . . . . .	67
6.2	Αριθμητικά Αποτελέσματα . . . . .	70

# Κεφάλαιο 1

## Βασικές Επαναληπτικές Μέθοδοι για την επίλυση συστημάτων $Ax = b$

### 1.1 Εισαγωγή

Οι κλασσικές επαναληπτικές μέθοδοι για την επίλυση ενός γραμμικού συστήματος αλγεβρικών εξισώσεων  $Ax = b$  είναι μέθοδοι που ξεκινούν από μια αρχική εκτίμηση  $x^{(0)}$  και παράγουν με την βοήθεια ενός επαναληπτικού αλγορίθμου μια βελτιωμένη προσέγγιση  $x^{(k+1)}$  στη λύση  $x$ , από την προηγούμενη προσέγγιση  $x^{(k)}$ , μια διαδικασία η οποία τερματίζεται κατά βούληση. Πάνω σε αυτή τη λογική έχουν προταθεί κατά καιρούς, ξεκινώντας από τα τέλη του 19ου αιώνα, διάφορες μέθοδοι οι οποίες ανήκουν στην κατηγορία των λεγόμενων **έμμεσων ή επαναληπτικών**. Μια κατηγορία τέτοιων μεθόδων μπορεί να παραχθεί **διασπώντας τον πίνακα  $A$**  του γραμμικού συστήματος.

Πιο συγκεκριμένα, έστω

$$Ax = b, \quad A \in \mathbb{C}^{n,n}, \quad b \in \mathbb{C}^n \quad (1.1)$$

το προς επίλυση σύστημα, μιγαδικό γενικά, με  $A$  ομαλό ή αντιστρέψιμο πίνακα δηλαδή  $\det(A) \neq 0$ . Θεωρούμε μια διάσπαση του πίνακα  $A$ :

$$\boxed{A=M-N} \quad (1.2)$$

με περιορισμούς:

α) Ο πίνακας  $M$  που ονομάζεται **(προρ)ρυθμιστής** να είναι αντιστρέψιμος (δηλαδή υπάρχει ο  $M^{-1}$ ), και

β) Ένα γραμμικό σύστημα με πίνακα συντελεστών αγνώστων  $M$  να λύνεται με πολύ λιγότερες πράξεις από το αρχικό σύστημα με πίνακα συντελεστών αγνώστων του  $A$ .

Εάν λοιπόν  $A = M - N$ , τότε η εξίσωση  $Ax = b$  είναι ισοδύναμη με την :

$$\boxed{Mx = Nx + b} \quad (1.3)$$

ή ισοδύναμα με την

$$x = Tx + c \text{ όπου } T := M^{-1}N \text{ και } c := M^{-1}b \quad (1.4)$$

Οι παραπάνω εξισώσεις σταθερού σημείου παράγουν την επαναληπτική διαδικασία:

$$x^{(k+1)} = Tx^{(k)} + c, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (1.5)$$

με  $x^{(0)} \in \mathbb{C}^n$  τυχαίο. Ο πίνακας  $T$  στον αλγόριθμο είναι γνωστός ως **επαναληπτικός πίνακας** του αλγορίθμου ή της επαναληπτικής μεθόδου.

Ο παραπάνω αλγόριθμος παράγει μια ακολουθία διανυσμάτων  $\{x^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$  η οποία συγκλίνει στη λύση  $x = A^{-1}b$  του γραμμικού συστήματος αν η ακολουθία είναι συγκλίνουσα. Πράγματι, έστω ότι η ακολουθία είναι συγκλίνουσα και συγκλίνει στο  $y$ . Τότε αν πάρουμε τα όρια της παραπάνω σχέσης για  $k \rightarrow \infty$  έχουμε:

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} x^{(k+1)} &= \lim_{k \rightarrow \infty} Tx^{(k)} + \lim_{k \rightarrow \infty} c \\ &= T(\lim_{k \rightarrow \infty} x^{(k)}) + c \end{aligned}$$

Ισοδύναμα:

$$\begin{aligned} y &= Ty + c \\ y &= M^{-1}Ny + c \\ My &= Ny + b \\ (M - N)y &= b \\ Ay &= b \\ y &= A^{-1}b \end{aligned}$$

Οπότε η λύση του συστήματος είναι  $y \equiv x$  αφού  $\det(A) \neq 0$ .

Το ερώτημα όμως που δημιουργείται είναι **πότε η επαναληπτική μέθοδος συγκλίνει**

### ΘΕΩΡΗΜΑ 1.1 (Σύγκλιση επαναληπτικής μεθόδου)

*Αναγκαία και ικανή συνθήκη για τη σύγκλιση της ακολουθίας των παραγόμενων από τον αλγόριθμο διανυσμάτων στη λύση  $x = A^{-1}b$  του συστήματος  $Ax = b$  είναι η :*

$$\boxed{\rho(T) < 1}$$

όπου  $\rho(T)$  είναι η φασματική ακτίνα του πίνακα  $T$  και ισούται:  $\rho(T) := \max_i |\lambda_i|$  με  $\lambda$  τις ιδιοτιμές του πίνακα  $T$ .

Απόδειξη

Καταρχήν εισάγουμε το διάνυσμα–σφάλμα στην  $k$  επανάληψη ορίζοντας:

$$e^{(k)} = x^{(k)} - x \quad (1.6)$$

Αφαιρώντας την (1.4) από την (1.5) έχουμε:

$$x^{(k+1)} - x = T(x^{(k)} - x)$$

Με βάση τη σχέση (1.6) η παραπάνω σχέση γίνεται:

$$e^{k+1} = Te^k, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

με  $e^{(0)} \in C^n$  οποιοδήποτε.

Άπο απλή επαγωγή βρίσκουμε ότι

$$e^{(k)} = T^k e^{(0)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (1.7)$$

με  $e^{(0)} \in C^n$  οποιοδήποτε.

Εφόσον επιζητούμε να έχουμε σύγκλιση,  $\lim_{k \rightarrow \infty} x^{(k)} = A^{-1}b$  για οποιοδήποτε  $x^{(0)}$  ή ισοδύναμα  $\lim_{k \rightarrow \infty} e^{(k)} = 0$  για οποιοδήποτε  $e^{(0)}$ , παρατηρούμε ότι αν στη θέση του  $e^{(0)}$  στην σχέση (1.7) θέσουμε διαδοχικά τα διανύσματα στήλες  $e^j, j = 1(1)n$ , του μοναδιαίου πίνακα  $I$ , παίρνουμε ως  $e^{(k)}$  τις αντίστοιχες στήλες του πίνακα  $T^k$ . Επειδή δε θέλουμε να έχουμε  $\lim_{k \rightarrow \infty} e^{(k)} = 0$  για οποιοδήποτε  $e^{(0)}$  έπεται ότι οριακά οι στήλες του  $T^k$  θα τείνουν στο μηδενικό διάνυσμα ή ότι  $\lim_{k \rightarrow \infty} T^k = 0$ . Από [32] Θεώρημα 1.10 η τελευταία ισότητα ισχύει αν και μόνο εάν  $\rho(T) < 1$ , που αποτελεί την αναγκαία και ικανή συνθήκη για να συγκλίνει ο αλγόριθμος (1.5) στη λύση του συστήματος.

ΠΟΡΙΣΜΑ 1.1

Μια ικανή συνθήκη για τη σύγκλιση του αλγορίθμου (1.5) στη λύση του συστήματος είναι η

$$\|T\| < 1$$

όπου  $\|\cdot\|$  μια οποιοδήποτε φυσική νόρμα.

Απόδειξη

Λόγω της γνωστής σχέσης  $\rho(T) \leq \|T\|$  και του παραπάνω θεωρήματος (1.1) η απόδειξη είναι προφανής.

— — —  $\diamond$  — — —

ΠΟΡΙΣΜΑ 1.2

Αν για κάποια φυσική  $norm$  και για κάποιο θετικό ακέραιο  $k$  για τον επαναληπτικό πίνακα  $T$  του αλγορίθμου (1.5) ισχύει ότι  $\|T^k\| < 1$ , τότε ο αλγόριθμος συγκλίνει.

Απόδειξη

Επειδή  $\rho^k(T) = \rho(T^k) \leq \|T^k\| < 1$  έπεται ότι  $\rho(T) < 1$ . Άρα ο αλγόριθμος μας συγκλίνει.

— — —  $\diamond$  — — —

Θα πρέπει να τονισθεί ότι στην πράξη και εφόσον οι διαδοχικά παραγόμενοι όροι της ακολουθίας των διανυσμάτων από τον αλγόριθμο (1.5) στην περίπτωση της σύγκλισης τείνουν στη λύση, στο όριο θεσπίζονται κάποια κριτήρια σταματήματος των επαναλήψεων.

Το πρώτο κριτήριο τερματισμού παίζει το ρόλο του **απόλυτου σφάλματος** και είναι το εξής:

$$\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\| \leq \epsilon$$

όπου το  $x^{(k+1)}$  μπορεί να θεωρηθεί η ακριβής λύση και το  $x^{(k)}$  η προσεγγιστική.

ένω το δεύτερο κριτήριο τερματισμού παίζει το ρόλο του **σχετικού σφαλματος** και είναι το εξής:

$$\frac{\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\|}{\|x^{(k+1)}\|} \leq \epsilon$$

ΟΡΙΣΜΟΣ

Εστω  $A, B \in \mathbb{C}^{n,n}$ . Αν για κάποιο θετικό ακέραιο  $k$  και για μια φυσική  $norm$  είναι  $\|A^k\| < 1$ , τότε η ποσότητα

$$\mathcal{R}(A^k) = -\ln(\|A^k\|^{\frac{1}{k}}) = \frac{-\ln\|A^k\|}{k}$$

καλείται **μέση ταχύτητα σύγκλισης για  $k$  επαναλήψεις** Αν  $\|B^k\| < 1$  και  $\mathcal{R}(A^k) < \mathcal{R}(B^k)$ , τότε ο  $B$  είναι επαναληπτικά ταχύτερος του  $A$  για  $k$  επαναλήψεις.

Ο παραπάνω ορισμός έχει ιδιαίτερη σημασία στο όριο, όταν δηλαδή  $k \rightarrow \infty$ . Τότε, και κάτω από τις προϋποθέσεις του ορισμού, μπορεί να αποδειχτεί [34] ότι

$$\mathcal{R}_\infty(A) = -\lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{R}(A^k) = -\ln \rho(A)$$

Το τελευταίο συμπέρασμα στην περίπτωση συγκλινουσών επαναληπτικών μεθόδων ερμηνεύεται ως εξής :

‘Όσο μικρότερη είναι η φασματική ακτίνα του επαναληπτικού πίνακα τόσο ταχύτερα (ασυμπτωτικά) η ακολουθία  $\{x^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$  συγκλίνει στη λύση του συστήματος. Στην πράξη το ασυμπτωτικά σημαίνει για μεγάλες τιμές του  $k$ .’

Τέλος μετά την ανάλυση που προηγήθηκε, το συμπέρασμα στο οποίο καταλήγει κανείς σε ότι αφορά την επιλογή του (προ)ρυθμιστή πίνακα  $M$  στην εξίσωση (1.2) είναι ότι πέρα από τους δύο περιορισμούς που πρέπει να πληρούνται, πρέπει ακόμη ο  $M$  να επιλέγεται έτσι ώστε αφενός μεν  $\rho(T) \equiv \rho(M^{-1}N) < 1$  και αφετέρου δε η  $\rho(T)$  να είναι όσο το δυνατόν μικρότερη. Οι παραπάνω παρατηρήσεις, που μόλις έγιναν σχετικά με την επιλογή του  $M$  καθιστούν ίσως φανερό ότι αυτή δεν είναι πάντα τόσο εύκολη. Στη συνέχεια θα ασχοληθούμε με τις κλασσικές περιπτώσεις επιλογής του  $M$  και παραπέρα ανάπτυξη των αντίστοιχων επαναληπτικών μεθόδων.

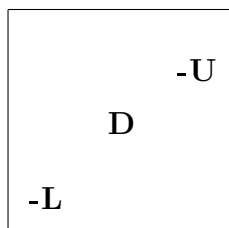
## 1.2 Κλασσικές Επαναληπτικές Μέθοδοι

Οι κλασσικές επαναληπτικές μέθοδοι βασίζονται στην ακόλουθη διάσπαση του πίνακα  $A$  του γραμμικού συστήματος  $Ax = b$  των συντελεστών των αγνώστων

$$\boxed{A=D-L-U} \quad (1.8)$$

όπου  $D = \text{diag}(A) = \text{diag}(a_{11}, a_{22} \dots a_{nn})$ , δηλαδή διαγώνιος πίνακας με διαγώνια στοιχεία τα αντίστοιχα του  $A$ ,  $L$  αυστηρά κάτω τριγωνικός και  $U$  αυστηρά άνω τριγωνικός. Η διάσπαση αυτή ορίζεται μονοσήμαντα.

Σχηματικά η διασπάση του πίνακα φαίνεται ως εξής:



### Σχήμα 1. Διάσπαση του πίνακα A

Ανάλογα με τον (προ)ρυθμιστή που χρησιμοποιούμε παράγουμε διαφορετικές κλασσικές επαναληπτικές μεθόδους. Από τις πιο γνωστές μεθόδους είναι οι :

#### 1.2.1 Μέθοδος Jacobi

Στη μέθοδο Jacobi ο (προ)ρυθμιστής πίνακας είναι ο  $M = D$  ενώ ο  $N = L + U$ . Σ'ο,τι αφορά την ικανοποίηση των βασικών περιορισμών που αφορούν στο ρυθμιστή πίνακα M διαπιστώνουμε τα ακόλουθα:

α) ο πίνακας M είναι αντιστρέψιμος αν και μόνο εάν  $\det(M) = \det(D) = a_{11}a_{22} \dots a_{nn} \neq 0$ . Επομένως η μέθοδος του Jacobi μπορεί να οριστεί αν και μόνο εάν  $a_{ii} \neq 0, i = 1(1)n$ .

β) το γραμμικό σύστημα με πίνακα συντελεστών αγνώστων  $M = D$  είναι πολύ οικονομικότερο σε πράξεις για να λυθεί, απαιτεί μόνο n διαιρέσεις, από ότι είναι ένα σύστημα με πίνακα συντελεστών αγνώστων A που απαιτεί  $\mathcal{O}(n^3)$  πράξεις με τη μέθοδο απαλοιφής Gauss.

Το επαναληπτικό βήμα της μεθόδου Jacobi δίδεται από τις σχέσεις:

$$x^{(k+1)} = D^{-1}(L + U)x^{(k)} + D^{-1}b$$

ή

$$x^{(k+1)} = Tx^k + c, T = D^{-1}(L + U), c = D^{-1}b$$

για  $k = 0, 1, 2, \dots$  και  $x^{(0)} \in C^n$  οποιοδήποτε. Αν θελήσουμε να βρούμε την οποιαδήποτε συνιστώσα του νέου διανύσματος  $x^{(k+1)}$  στην  $k+1$  επανάληψη σε συνάρτηση γνωστών συνιστωσών του παλαιού  $x^{(k)}$  ή και του νέου διανύσματος πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη της παραπάνω ισότητας επί  $D$ , οπότε προκύπτει

$$Dx^{(k+1)} = (L + U)x^{(k)} + b$$

Εκτελώντας τις πράξεις και στα δύο μέλη, εξισώνοντας τις  $i$ -οστες συνιστώσες των διανυσμάτων των δύο μελών και λύνωντάς ως προς την  $i$ -οστή συνιστώσα  $x_i^{(k+1)}$  του  $x^{(k+1)}$  παίρνουμε αμέσως ότι

$$x_i^{(k+1)} = \frac{(b_i - \sum_{j=1, j \neq i}^n a_{ij}x_j^{(k)})}{a_{ii}}, \quad i = 1(1)n.$$

Προφανώς η μέθοδος Jacobi συγκλίνει εάν και μόνο εάν

$$\rho(T) = \rho(M^{-1}N) = \rho(D^{-1}(L + U)) < 1$$

### 1.2.2 Μέθοδος Gauss-Seidel

Στην περίπτωση της μεθόδου Gauss-Seidel ο (προ) ρυθμιστής είναι ο  $M = D - L$  ενώ  $N = U$ . Για να υπάρχει η μέθοδος θα πρέπει να υπάρχει ο αντίστροφος του  $D - L$ . Αυτός είναι αντιστρέψιμος αν και μόνο εάν  $\det(D - L) \neq 0$  δηλαδή αν  $a_{ii} \neq 0, i = 1(1)n$ , όπως ακριβώς και στη μέθοδο Jacobi. Επίσης ένα σύστημα με πίνακα συντελεστών αγνώστων  $D - L$ , λύνεται με προς τα εμπρός αντικαταστάσεις που απαιτεί πράξεις πλήθους  $\mathcal{O}(n^2)$  και επομένως είναι οικονομικότερο στην επίλυση του από ένα σύστημα με πίνακα συντελεστών  $A$ . Όσο για τον δεύτερο περιορισμό σε ότι αφορά τον πίνακα  $M$  ικανοποιείται εφόσον ικανοποιείται ο πρώτος περιορισμός της αντιστρεψιμότητας.

Η μέθοδος Gauss-Seidel είναι επομένως η ακόλουθη:

$$x^{(k+1)} = (D - L)^{-1}Ux^{(k)} + (D - L)^{-1}b, k = 0, 1, 2, \dots,$$

ή

$$x^{(k+1)} = Tx^k + c, T = (D - L)^{-1}U, c = (D - L)^{-1}b$$

με  $x^{(0)} \in C^n$  οποιοδήποτε.

Όπως και στη μέθοδο του Jacobi έτσι και σ' αυτήν τη μέθοδο για να συγκλίνει θα πρέπει  $\rho(T) = \rho(M^{-1}N) = \rho((D - L)^{-1}U) < 1$ .

Αν εκτελέσουμε, όπως και προηγουμένως, τις πράξεις και στα δύο μέλη και εξισώσουμε τις i-οστες συνιστώσες των διανυσμάτων των δύο μελών και λύσουμε ως προς την i-οστή συνιστώσα  $x_i^{(k+1)}$  του  $x^{(k+1)}$  έχουμε ότι:

$$x_i^{(k+1)} = \frac{(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}x_j^{(k)})}{a_{ii}}, \quad i = 1(1)n.$$

Μπορούμε να παρατηρήσουμε λοιπόν, ότι η μέθοδος των Gauss-Seidel βρίσκει τις συνιστώσες της  $k + 1$  επανάληψης χρησιμοποιώντας όλες τις επόμενες συνιστώσες της προηγούμενης επανάληψης και όλες τις προηγούμενες συνιστώσες της τρέχουσας επανάληψης σε αντίθεση με τη μέθοδο Jacobi, όπου οι συνιστώσες της  $k + 1$  επανάληψης βρίσκονται μόνο από εκείνες της  $k$  επανάληψης. Με άλλα λόγια η μέθοδος Gauss-Seidel χρησιμοποιεί κάθε γνωστή πληροφορία, δηλαδή όλες τις πιο πρόσφατες διαθέσιμες συνιστώσες, ενώ η μέθοδος Jacobi αγνοεί πρόσφατες πληροφορίες.

### 1.2.3 Μέθοδο της Διαδοχικής Υπερχαλάρωσης -Successive over-relaxation method (SOR)

Στη συγκεκριμένη μέθοδο ορίζουμε ως ρυθμιστή τον πίνακα

$$M_\omega = \frac{1}{\omega}(D - \omega L), \omega \in C \setminus \{0\} \quad (1.9)$$

και

$$N_\omega = \frac{1}{\omega}[(1 - \omega)D + \omega U], \omega \in C \setminus \{0\} \quad (1.10)$$

Έτσι είναι εύκολο να βρεθεί ότι η SOR μέθοδος είναι η ακόλουθη:

$$x^{(k+1)} = \mathcal{L}_\omega x^{(k)} + c_\omega, k = 0, 1, 2, \dots \quad (1.11)$$

με  $x^{(0)} \in C^n$  οποιοδήποτε,

$$\mathcal{L}_\omega = (D - \omega L)^{-1}[(1 - \omega)D + \omega U] \quad (1.12)$$

και

$$c_\omega = \omega(D - \omega L)^{-1}b \quad (1.13)$$

Είναι εύκολο να φανεί, ότι για  $\omega = 1$  η μέθοδος απλοποιείται σε εκείνη των Gauss-Seidel.

Η αναλυτική έκφραση της οποιασδήποτε συνιστώσας του διανύσματος  $x^{(k+1)}$  δίνεται από την παρακάτω σχέση :

$$x_i^{(k+1)} = (1 - \omega)x_i^{(k)} + \omega \frac{(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}x_j^{(k)})}{a_{ii}} \quad i = 1(1)n. \quad (1.14)$$

Μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι οποιαδήποτε συνιστώσα της νέας επανάληψης δίνεται σα βαρυκεντρικός όρος της ίδιας συνιστώσας της προηγούμενης επανάληψης και της συνιστώσας που θα βρίσκαμε αν εφαρμόζαμε για την εύρεση της αντίστοιχης συνιστώσας τη μέθοδο των Gauss-Seidel.

### ΘΕΩΡΗΜΑ 1.3.2.1(Kahan)

*Αναγκαία συνθήκη για την σύγκλιση της SOR είναι:*

$$|\omega - 1| < 1, \omega \in \mathbb{C} \implies \omega \in (0, 2), \omega \in \mathbb{R}. \quad (1.15)$$

Πριν την απόδειξη του παραπάνω θεωρήματος χρήσιμο θα ήταν να αναφέρουμε το παρακάτω λήμμα.

### ΛΗΜΜΑ

Εστω  $A \in \mathbb{C}^{n,n}$  και έστω  $\lambda_i, i = 1(1)n$  οι ιδιοτιμές του. Ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις:

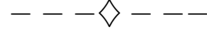
$$\sum_i^n \lambda_i = \sum_i^n a_{ii}, \prod_{i=1}^n \lambda_i = \det(A). \quad (1.16)$$

### Απόδειξη

Οι ιδιοτιμές του  $A$  είναι ρίζες της πολυωνυμικής εξίσωσης  $\det(A - \lambda I) = 0$ . Αν η ορίζουσα αναπτυχθεί πλήρως βρίσκεται ένα πολώνυμο βαθμού  $n$  ως προς  $\lambda$ , οπότε η προηγούμενη εξίσωση έχει τη γενική μορφή

$$\det(A - \lambda I) = c_n \lambda^n + c_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + c_1 \lambda + c_0 = 0, \quad (1.17)$$

Οπότε από την μορφή του πίνακα  $A - \lambda I$ , είναι εύκολο να παρατηρήσουμε ότι  $c_n = (-1)^n$ ,  $c_{n-1} = (-1)^{n-1} \sum_i^n a_{ii}$  και  $c_0 = \det(A)$ , όπου η τελευταία ισότητα προκύπτει αν θέσουμε στις δύο από τα αριστερά από το μηδέν εκφράσεις της παραπάνω σχέσης (1.17)  $\lambda = 0$ . Γνωρίζουμε επίσης από τους τύπους του Newton δηλαδή  $\sum_i^n \lambda_i = -\frac{c_{n-1}}{c_n}$  και  $\prod_{i=1}^n \lambda_i = (-1)^n \frac{c_0}{c_n}$ . Αν τώρα στις δύο ισότητες που μόλις προέκυψαν αντικαταστήσουμε τις τιμές των συντελεστών  $c_n, c_{n-1}, c_0$  εύκολα προκύπτει η σχέση (1.14) που θέλαμε να αποδείξουμε.



### Απόδειξη (θεωρήματος)

Αν  $\lambda_i \in \sigma(\mathcal{L}_\omega)$ ,  $i = 1(1)n$ , είναι οι  $n$  ιδιοτιμές του επαναληπτικού πίνακα της μεθόδου SOR, τότε  $\prod_{i=1}^n \lambda_i = \det(\mathcal{L}_\omega)$  με βάση το παραπάνω λήμμα. Αντικαθιστώντας το  $\mathcal{L}_\omega$  από τον τύπο (1.10) έχουμε ότι :

$$\prod_{i=1}^n \lambda_i = \det \mathcal{L}_\omega = \det((D - \omega L)^{-1}[(1 - \omega)D + \omega U]) = \det(D - \omega L)^{-1} \det((1 - \omega)D + \omega U) = \frac{1}{\det D} (1 - \omega)^n \det D = (1 - \omega)^n, \quad (1.16)$$

Επειδή είναι  $|\prod_{i=1}^n \lambda_i| = \prod_{i=1}^n |\lambda_i|$  και για τη σύγκλιση της SOR μεθόδου πρέπει να ισχύει  $|\lambda_i| < 1$ ,  $i = 1(1)n$ , προκύπτει ότι η ανισότητα  $\prod_{i=1}^n |\lambda_i| < 1$  αποτελεί μια αναγκαία συνθήκη για τη σύγκλιση. Χρησιμοποιώντας την παραπάνω σχέση (1.16) καταλήγουμε ότι θα πρέπει να ισχύει

$|\omega - 1| < 1$  και με απλές πράξεις καταλήγουμε και στο δεύτερο συμπέρασμα του θεωρήματος δηλαδή  $\omega \in (0, 2)$ .



### ΘΕΩΡΗΜΑ 1.3.2.2(Ostrowski-Reich)

Έστω ένας πίνακας  $B$  τετραγωνικός  $n \times n$  στην μορφή  $B = D^{-1}(L + U)$  όπου  $L, U$  είναι αντίστοιχα αυστηρά κάτω και άνω τριγωνικοί πίνακες. Εάν

$$\mathcal{L}_\omega := (D - \omega L)^{-1} \{(1 - \omega)D + \omega U\}$$

τότε για κάθε  $\omega$  ισχύει

$$\rho(\mathcal{L}_\omega) \geq |\omega - 1|$$

### Απόδειξη

Έστω  $\phi(\lambda) := \det(\lambda I - \mathcal{L}_\omega)$  το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα  $\mathcal{L}_\omega$ . Γνωρίζοντας ότι  $\prod_{i=1}^n \lambda_i = \det(\mathcal{L}_\omega)$ , για  $\lambda = 0$   $\det(\lambda I - \mathcal{L}_\omega) = \det(-\mathcal{L}_\omega) = \prod_{i=1}^n (-\lambda_i)$ . Αφού ο πίνακας  $L$  είναι αυστηρά κάτω τριγωνικός, τότε η ορίζουσα του πίνακα  $I - \omega L$  ισούται με την μονάδα.

Οπότε επειδή  $\det(D - \omega L) \neq 0$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\omega &= (D - \omega L)^{-1} [(1 - \omega)D + \omega U] \\ &= [D(I - \omega D^{-1}L)]^{-1} [(1 - \omega)D + \omega U] \\ &= (I - \omega D^{-1}L)^{-1} D^{-1} [(1 - \omega)D + \omega U] \\ &= (I - \omega D^{-1}L)^{-1} [(1 - \omega)I + \omega D^{-1}U] \end{aligned}$$

και το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα  $\mathcal{L}_\omega$  είναι :

$$\begin{aligned}\phi(\lambda) &= \det(I - \omega D^{-1}L) \det(\lambda I - \mathcal{L}_\omega) \\ &= \det(I - \omega D^{-1}L) \det\left\{\lambda I - (I - \omega D^{-1}L)^{-1} [(1 - \omega)I + \omega D^{-1}U]\right\} \\ &= \det[\lambda(I - \omega D^{-1}L) - (1 - \omega)I - \omega D^{-1}U] \\ &= \det[(\lambda + \omega - 1)I - \omega \lambda D^{-1}L - \omega D^{-1}U]\end{aligned}$$

ή ισοδύναμα

$$\phi(\lambda) = \det(I - \omega L) \det(\lambda I - \mathcal{L}_\omega) = \det\{(\lambda + \omega - 1)I - \omega \lambda L - \omega U\}$$

Για  $\lambda = 0$  παίρνουμε την σταθερά  $\mu$  του χαρακτηριστικού πολυωνύμου που είναι το γινόμενο των αρνητικών ιδιοτιμών του  $\mathcal{L}_\omega$ . Οπότε :

$$\mu = \prod_{i=1}^n (-\lambda_i(\omega)) = \det\{(\omega - 1)I - \omega U\} = (\omega - 1)^n$$

Έτσι ,

$$\rho(\mathcal{L}_\omega) = \max_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i(\omega)| \geq (|\omega - 1|^N)^{\frac{1}{N}} = |\omega - 1|$$

— — —  $\diamond$  — — —

Τέλος, η βέλτιστη επιλογή του  $\omega$  είναι εκείνη που κάνει τη φασματική ακτίνα  $\mathcal{L}_\omega$ , όσο το δυνατόν μικρότερη. Κεντρικό λοιπόν σημείο της υπερχαλάρωσης είναι ο καθορισμός του βέλτιστου  $\omega$ .

#### 1.2.4 Τεχνική της Παρεκβολής Extrapolation

Η extrapolation είναι μια τεχνική, που μας βοηθάει να γενικεύσουμε μια επαναληπτική μέθοδο με σκοπό να πετύχουμε, αν είναι δυνατόν, την ταχύτερη σύγκλιση της μεθόδου αυτής. Αυτή η τεχνική εκφράζεται με τη χρησιμοποίηση ορισμένων επιταχυντικών παραμέτρων.

Συγκεκριμένα έστω  $A = M - N$  και  $T = M^{-1}N$  ο επαναληπτικός πίνακας κάποιας κλασσικής επαναληπτικής μεθόδου τότε ορίζουμε μια νέα διάσπαση ως:

$$\boxed{A = M_\epsilon - N_\epsilon}$$

όπου  $M_\epsilon := \frac{1}{\epsilon}M$ .

και  $N_\epsilon := \frac{1}{\epsilon}[(1 - \epsilon)M + \epsilon N]$

$\epsilon \in \mathbb{C} \setminus 0$  παράμετρος που καλείται παράμετρος της παρεκβολής (extrapolation).

Με βάση τη παραπάνω διάσπαση το νέο επαναληπτικό σχήμα θα είναι το παρακάτω

$$x^{(k+1)} = T_\epsilon x^{(k)} + c_\epsilon, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

με  $x^{(0)} \in \mathbb{C}^n$  οποιοδήποτε, όπου

$$T_\epsilon = M_\epsilon^{-1} N_\epsilon = (1 - \epsilon)I + \epsilon T, c_\epsilon := \epsilon c.$$

Είναι φανερό ότι για  $\epsilon = 1$ ,  $M_\epsilon \equiv M$ ,  $T_\epsilon \equiv T$  και  $c_\epsilon := \epsilon c$  περιοριζόμαστε στο αρχικό αλγόριθμο.

Οι ιδιοτιμές των πινάκων  $T_\epsilon$  και  $T$  συνδέονται με τη σχέση :

$$\boxed{\mu = 1 - \epsilon + \epsilon \lambda, \quad \lambda \in \sigma(T), \quad \mu \in \sigma(T_\epsilon)}$$

Η extrapolation μέθοδος του Jacobi είναι η :

$$x^{(k+1)} = [(1 - \epsilon)I + \epsilon D^{-1}(L + U)]x^{(k)} + \epsilon D^{-1}b \text{ με } m = 0, 1, 2, \dots,$$

με  $x^{(0)}$  τυχαίο γνωστό διάνυσμα.

ή αντίστοιχα

$$x_i^{(k+1)} = (1 - \epsilon)x_i^{(k)} + \frac{\epsilon}{a_{ii}}(b_i - \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j^{(k)}) \text{ με } i = 1(1)n, \quad k = 0, 1, 2, \dots \text{ και με } x_i^{(0)}$$

αυθαίρετα γνωστούς αριθμούς.

Αντίστοιχα η extrapolation της μεθόδου των Gauss-Seidel αντιστοιχεί στη παρακάτω μορφή:

$$x^{(k+1)} = [(1 - \epsilon)I + \epsilon(D - L)^{-1}(U)]x^{(k)} + \epsilon(D - L)^{-1}b \text{ με } k = 0, 1, 2, \dots,$$

με  $x^{(0)}$  τυχαίο γνωστό διάνυσμα.

ή αντίστοιχα

$$x_i^{(k+1)} = (1 - \epsilon)x_i^{(k)} + \frac{1}{a_{ii}}[\epsilon b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} + (1 - \epsilon) \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k)} - \epsilon \sum_{j=i+1}^n a_{ij}x_j^{(k)}] \text{ με}$$

$i = 1(1)n, \quad k = 0, 1, 2, \dots$  και με  $x_i^{(0)}$  τυχαίους γνωστούς αριθμούς.

Τέλος η extrapolation της μεθόδου SOR αντιστοιχεί στη παρακάτω μορφή:

$$x^{(k+1)} = \{(1 - \epsilon)I + \epsilon(D - \omega L)^{-1}[(1 - \omega)D + \omega U]\}x^{(k)} + \epsilon\omega(D - \omega L)^{-1}b \text{ με } k = 0, 1, 2, \dots,$$

### ΣΗΜΕΙΩΣΗ

Ο πίνακας της AOR δίνεται από την παρακάτω σχέση :

$$\mathcal{L}_{r,\omega} = (1 - \epsilon)(D - \omega L)^{-1}(D - \omega L) + \epsilon \mathcal{L}_\omega = (D - \omega L)^{-1}[(1 - \epsilon)(D - \omega L) + \epsilon((1 - \omega)D + \omega U)]$$

$$= (D - \omega L)^{-1}[(1 - r)D - (\omega - r)L + rU]$$

όπου  $r = \epsilon\omega$  ονομάζεται acceleration παράμετρος ενώ η παράμετρος  $\omega$  είναι η overrelaxation παράμετρος.

Έτσι η accelerated overrelaxation (AOR) μέθοδος μπορεί να δηλωθεί ως εξής:

$$x^{(k+1)} = \mathcal{L}_{r,\omega}x^{(k)} + c_{r,\omega}, \quad k = 0, 1, 2$$

όπου  $c_{r,\omega} = \omega(D - \omega L)^{-1}b$   $x^0 \in \mathbb{C}^n$  αυθαίρετο.

## 1.3 Block Επαναληπτικές Μέθοδοι

Σε αυτή την περίπτωση θεωρούμε πάλι το γραμμικό σύστημα  $Ax = b$  και για την επίλυση του διαχωρίζουμε τον πίνακα  $A$

$$A = \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & \dots & A_{1,p} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & \dots & A_{2,p} \\ \vdots & & & \vdots \\ A_{N,1} & A_{N,2} & \dots & A_{p,p} \end{bmatrix}$$

σε μια  $p \times p$  block μορφή. **Βασική προϋπόθεση είναι ότι τα διαγώνια blocks (υποπίνακες) πρέπει να είναι τετραγωνικοί πίνακες** Είναι φανερό ότι αν  $A_{i,i}, i = 1(1)p$  είναι διαγώνιοι υποπίνακες διαστάσεων  $n_i \times n_i, i = 1(1)p$  θα πρέπει να ισχύει ότι  $\sum_{i=1}^p n_i = n$ .

Η διάσπαση του πίνακα  $A$  είναι της ίδιας μορφής με τη σχέση (1.8) με τη βασική διαφορά ότι ο πίνακας  $D$  δεν είναι γνωστός  $D = \text{diag}(A)$ , αλλά ο block διαγώνιος  $D = \text{diag}(A_{11}, A_{22}, \dots, A_{pp})$ . Οι πίνακες  $L$  και  $U$  ορίζονται πάλι ως αυστηρά κάτω τριγωνικός και αυστηρά άνω τριγωνικός αντίστοιχα, έτσι ώστε η διάσπαση (1.8) να είναι μονοσήμαντα ορισμένη και να εξαρτάται μόνο από τον διαχωρισμό σε blocks του πίνακα  $A$ . Ο βασικός περιορισμός σ' όλες τις επαναληπτικές μεθόδους είναι ότι ο πίνακας  $D$  να είναι αντιστρέψιμος. Είναι φανερό πως το τελευταίο συμβαίνει αν και μόνο εάν οι block υποπίνακες  $A_{i,i}, i = 1(1)p$  είναι αντιστρέψιμοι, οπότε θα ισχύει ότι  $D^{-1} = \text{diag}(A_{11}^{-1}, A_{22}^{-1}, \dots, A_{pp}^{-1})$ . Το γεγονός ότι ο  $D$  πληρεί και τη δεύτερη προϋπόθεση είναι φανερό γιατί το γραμμικό σύστημα με πίνακα συντελεστών αγνώστων  $D$  στην πραγματικότητα  $p$  συστήματα με πίνακες συντελεστών  $A_{i,i}, i = 1(1)p$  λύνεται οικονομικότερα από ένα πίνακα συντελεστών αγνώστων  $A$ .

Για την εφαρμογή των επαναληπτικών μεθόδων γίνεται ένας block διαχωρισμός τόσο στο άγνωστο διάνυσμα  $x$  όσο και στο γνωστό διάνυσμα  $b$  έτσι ώστε :

$$x = [x_1^T x_2^T \dots x_p^T]^T, b = [b_1^T b_2^T \dots b_p^T]^T \quad (1.17)$$

Οι μέθοδοι θα έχουν την ίδια γενική μορφή με την μόνη διαφορά ότι οι πίνακες  $L, D, U$  θα ορίζονται όπως αναφέρθηκαν προηγουμένως. Στην συνέχεια δίνουμε την μορφή των μεθόδων ως προς την  $i$ -οστή block γραμμή.

Για τη **block Jacobi** μέθοδο έχουμε:

$$A_{ii}x_i^{(k+1)} = b_i - \sum_{j=1, j \neq i}^p A_{ij}x_j^{(k)}, \quad i = 1(1)p, k = 0, 1, 2, \dots$$

ή

$$x_i^{(k+1)} = A_{ii}^{-1}(b_i - \sum_{j=1, j \neq i}^p A_{ij}x_j^{(k)}), \quad i = 1(1)p, k = 0, 1, 2, \dots$$

Ανάλογα για την **block Gauss-Seidel** μέθοδο έχουμε:

$$A_{ii}x_i^{(k+1)} = b_i - \sum_{j=1}^{i-1} A_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^p A_{ij}x_j^{(k)}, \quad i = 1(1)p, k = 0, 1, 2, \dots$$

ή

$$x_i^{(k+1)} = A_{ii}^{-1}(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} A_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^p A_{ij}x_j^{(k)}), \quad i = 1(1)p, k = 0, 1, 2, \dots$$

Τέλος για την **block SOR** ισχύει :

$$A_{ii}x_i^{(k+1)} = (1 - \omega)A_{ii}x_i^{(k)} + \omega(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} A_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^p A_{ij}x_j^{(k)}) \quad i = 1(1)p, k = 0, 1, 2, \dots$$

ή

$$x_i^{(k+1)} = (1 - \omega)x_i^{(k)} + \omega A_{ii}^{-1}(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} A_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^p A_{ij}x_j^{(k)}) \quad i = 1(1)p, k = 0, 1, 2, \dots$$

Θα θέλαμε τέλος να επισημάνουμε ότι η θεωρία που αναπτύχθηκε για τις point επαναληπτικές μέθοδοι ισχύει και στις αντίστοιχες επαναληπτικές block μέθοδοι με ελάχιστες τροποποιήσεις.

## Κεφάλαιο 2

# Μέθοδος της Διαδοχικής Υπερχαλάρωσης -SOR σε p-cyclic πίνακες

### 2.1 Εισαγωγή-Ορισμός p-cyclic πινάκων

Έστω το προς επίλυση σύστημα

$$Ax = b \quad (2.1)$$

όπου ο πίνακας  $A = [a_{i,j}]$  είναι τετραγωνικός  $n \times n$ ,  $n \geq 2$  και είναι της παρακάτω μορφής :

$$A = \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & \dots & A_{1,N} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & \dots & A_{2,N} \\ \vdots & & & \vdots \\ A_{N,1} & A_{N,2} & \dots & A_{N,N} \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

όπου τα διαγώνια blocks  $A_{i,i}$  είναι  $n_i \times n_i$  τετραγωνικοί πίνακες με  $1 \leq i \leq N$ .

Θεωρούμε ότι οι block διαγώνιοι πίνακες  $A_{i,i}$  είναι αντιστρέψιμοι, έτσι ώστε ο block διαγώνιος πίνακας  $D$

$$D = \begin{bmatrix} A_{1,1} & & & \\ & A_{2,2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_{N,N} \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

που παράγεται από τον πίνακα  $A$  είναι και αυτός αντιστρέψιμος. Προφανώς  $on \times n$  πίνακας  $B$  που ορίζεται ως εξής :

$$B := I - D^{-1}A = I - D^{-1}(D - L - U) = D^{-1}(L + U) \quad (2.4)$$

είναι ο **block Jacobi** πίνακας του  $A$ .

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζουν οι παρακάτω πίνακες

$$A_1 = \begin{bmatrix} A_{1,1} & O & O & \dots & O & A_{1,p} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & O & \dots & O & O \\ \vdots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ O & O & O & \dots & A_{p,p-1} & A_{p,p} \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

και

$$A_2 = \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & & & & \\ A_{2,1} & A_{2,2} & A_{2,3} & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots & A_{N-1,N} \\ & & & & A_{N,N-1} & A_{N,N} \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

όπου ο  $A_2$  είναι ένας block τριδιαγώνιος πίνακας. Οι παραπάνω όμως πίνακες βάσει της σχέσης (2.4) παράγουν τους αντίστοιχους block Jacobi πίνακες στην εξής μορφή:

$$B'_1 = \begin{bmatrix} O & O & O & \dots & O & B_1 \\ B_2 & O & O & \dots & O & O \\ O & B_3 & O & \dots & O & O \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ O & O & O & \dots & B_p & O \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

όπου  $B_1 = -A_{1,1}^{-1}A_{1,p}$  και  $B_j = -A_{j,j}^{-1}A_{j,j-1}$ ,  $2 \leq j \leq p$

$$B_2 = \begin{bmatrix} O & B_{1,2} & & & \\ B_{2,1} & O & B_{2,3} & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & \ddots & \ddots & B_{N-1,N} \\ & & & & B_{N,N-1} & O \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

Ο πίνακας  $B_1$  είναι πίνακας ανήκει στην κατηγορία των weakly cyclic of index p που ορίζονται ως εξής:.

### ΟΡΙΣΜΟΣ

Ένας  $n \times n$  πίνακας  $A$  ονομάζεται **weakly cyclic of index p** εάν υπάρχει μεταθετικός πίνακας  $P$  τέτοιος ώστε ο  $PAP^T$  να είναι της μορφής:

$$PAP^T = \begin{bmatrix} O & O & O & \dots & O & A_{1,p} \\ A_{2,1} & O & O & \dots & O & O \\ O & A_{3,2} & O & \dots & O & O \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ O & O & O & \dots & A_{p,p-1} & O \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

όπου οι διαγώνιοι πίνακες είναι τετραγωνικοί μηδενικοί πίνακες

Ανάλογα μπορούμε να βρούμε ένα κατάλληλο μεταθετικό πίνακα  $P$  ώστε ο πίνακας  $B_2$  να είναι weakly cyclic of index 2 [32]. Με αυτόν τον τρόπο καταλήγουμε λοιπόν να ορίσουμε τους p-cyclic.

### ΟΡΙΣΜΟΣ

Εάν ο πίνακας  $B$  block Jacobi της σχέσης (2.4) του πίνακα  $A$  είναι **weakly cyclic of index p** τότε ο πίνακας  $A$  καλείται **p-cyclic**.

### ΟΡΙΣΜΟΣ

Εάν ένας πίνακας  $A$  της μορφής (2.2) με διάσπαση  $A = D(I - L - U)$  είναι **p-cyclic**, τότε ο πίνακας  $A$  είναι **consistently ordered** εάν όλες οι ιδιοτιμές του πίνακα

$$B(a) = aL + a^{-(p-1)}U \quad (2.10)$$

παραγόμενο από τον Jacobi πίνακα  $B = L + U$ , είναι ανεξάρτητες του  $a$ , με  $a \neq 0$ . Τότε επίσης ο πίνακας  $B$  λέγεται *consistently ordered*.

Στην περίπτωση του  $B_1$  πίνακα ο  $B_1(a)$  με βάση την παραπάνω σχέση θα είναι :

$$B'_1(a) = \begin{bmatrix} O & O & O & \dots & O & a^{-(p-1)}B_1 \\ aB_2 & O & O & \dots & O & O \\ O & aB_3 & O & \dots & O & O \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ O & O & O & \dots & aB_p & O \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

Κάνοντας τους πολλαπλασιασμούς των block πινάκων κατάληγουμε ότι  $B_1^p(a) = B_1^p$ . Οπότε οι ιδιοτιμές του πίνακα  $B_1$  είναι ανεξάρτητες του  $a$  δηλαδή ο πίνακας  $A_1$  είναι consistently ordered p-cyclic.

Για να αποδείξουμε ότι οι ιδιοτιμές του πίνακα  $B_2(a)$  είναι ανεξάρτητες του  $a$  ακολουθούμε την έξης διαδικασία :

$$B_2(a)x = \lambda x \quad (2.12)$$

όπου  $x$  διάνυσμα του πίνακα  $B_2(a)$ . Αντικαθιστώντας στην παραπάνω σχέση τον πίνακα  $B_2(a)$  η έχουμε:

$$\alpha B_{j,j-1}X_{j-1} + \frac{1}{\alpha}B_{j,j+1}X_{j+1} = \lambda X_j, \quad j = 1, 1 \dots N \quad (2.13)$$

με  $B_{1,0}$  και  $B_{N,N+1}$  μηδενικοί πίνακες. Θέττοντας  $Z_j = \frac{1}{\alpha^j-1}X_j \quad j = 1, 1 \dots N$  η σχέση παίρνει την μορφή :

$$\alpha B_{j,j-1}Z_{j-1} + B_{j,j+1}Z_{j+1} = \lambda Z_j, \quad j = 1, 1 \dots N \quad (2.14)$$

Παρατηρούμε λοιπόν ότι οι ιδιοτιμές του πίνακα  $B_2(a)$  είναι ανεξάρτητες του  $a$  όποτε ο πίνακας  $A_2$  είναι consistently ordered 2-cyclic.

Το παρακάτω θεώρημα είναι ένα από τα βασικότερα για την εύρεση ιδιοτιμών ενός πίνακα. (34)

### ΘΕΩΡΗΜΑ Romanovsky

Έστω ο τετραγωνικός πίνακας  $A$  weakly cyclic of index  $k$  τότε:

$$\phi(\lambda) = \det(tI - A) = t^m \prod_{i=1}^r (t^k - \sigma_i^k) \quad (2.15)$$

με  $\sigma_i$  την ιδιοτιμή του πίνακα  $A$  και  $m + rk = n$ . [34]

Τέλος υπάρχει μια βασική σχέση για τους consistently ordered, weakly cyclic matrix of index p.

### ΘΕΩΡΗΜΑ 2.1

Εστω  $B = L + U$  να είναι ένας consistently ordered, weakly cyclic matrix of index p. Τότε για κάθε σταθερό  $\alpha, \beta, \gamma$  ισχύει

$$\det\{\gamma I - \alpha L - \beta U\} = \det\{\gamma I - (\alpha^{(p-1)}\beta)^{1/p}(L + U)\} \quad (2.16)$$

### Απόδειξη

Όπως είναι γνωστό για οποιαδήποτε σταθερά  $\alpha, \beta, \gamma$  ισχύει:

$$\det\{\gamma I - (\alpha L + \beta U)\} = \prod_{i=1}^n (\gamma - \sigma_i) \quad (2.17)$$

$$\det\{\gamma I - (\alpha^{(p-1)}\beta)^{1/p}(L + U)\} = \prod_{i=1}^n (\gamma - \tau_i) \quad (2.18)$$

όπου τα  $\sigma_i$ ,  $\tau_i$  είναι αντίστοιχα οι ιδιοτιμές των πινάκων  $\alpha L + \beta U$  και  $(\alpha^{(p-1)}\beta)^{1/p}(L + U)$ . Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι τα σύνολα

$$\{\sigma\}_{i=1}^n$$

και

$$\{\tau\}_{i=1}^n$$

είναι ίδια.

Εάν  $\alpha$  ή  $\beta$  είναι μηδέν, τότε ο  $\alpha L + \beta U$  είναι αυστηρά τριγωνικός, το οποίο σημαίνει ότι κάθε  $\sigma_i$  είναι μηδέν. Σ' αυτήν την περίπτωση είναι προφανές ότι τα  $\tau_i$  είναι μηδέν, άρα τα δύο σύνολα είναι ίσα.

Εάν  $\alpha$  και  $\beta$  είναι διαφορετικά του μηδενός ορίζω :

$$(\alpha/\beta)^{\frac{1}{p}} := \nu$$

Τότε μπορούμε να τα γράψουμε:

$$\alpha L + \beta U = (\alpha^{p-1}\beta)^{\frac{1}{p}}[\nu L + \nu^{-(p-1)}U]$$

Αφού ο πίνακας  $B = L + U$  είναι consistently ordered, weakly cyclic matrix of index p τότε οι ιδιοτιμές του πίνακα  $\nu L + \nu^{-(p-1)}U$  είναι ανεξάρτητα του  $\nu$  για  $\nu \neq 0$ . Έτσι για  $\nu = 1$  τα δύο σύνολα είναι ίσα. Άρα για οποιαδήποτε  $\alpha, \beta$  τα δύο σύνολα είναι ίσα, αποδεικνύοντας το θεώρημα.

Μια γενίκευση του παραπάνω θεωρήματος είναι το παρακάτω λήμμα:

**ΛΗΜΜΑ** Για οποιαδήποτε σταθερές  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  με  $\alpha \neq 0$  και με την προϋπόθεση ότι  $U^2 = 0$

ισχύει:

$$\det\{\gamma I - \alpha L - \beta U - \gamma LU\} = \det\{\gamma I - \alpha L - \alpha^{-1}(\alpha\beta + \gamma\delta)U\} \quad (2.19)$$

### Απόδειξη

Αφού ο  $U^2 = 0$  είναι φανερό ότι :

$$(I + \frac{\delta}{\alpha}U)(I - \frac{\delta}{\alpha}U) = I \quad (2.20)$$

Οπότε :

$$\begin{aligned} \gamma I - \alpha L - \beta U - \gamma LU &= \gamma I - \alpha L - \beta U - \gamma LU - \alpha^{-1}\beta\delta U^2 \\ &= \gamma I - \alpha L(I + \alpha^{-1}\delta U) - \beta U(I + \alpha^{-1}\delta U) \\ &= \gamma I - (\alpha L + \beta U)(I + \alpha^{-1}\delta U) \\ &= \gamma I - (\alpha L + \beta U)(I - \alpha^{-1}\delta U)^{-1} \\ &= [\gamma I - \alpha L - \alpha^{-1}(\alpha\beta + \gamma\delta)U](I - \alpha^{-1}\delta U)^{-1} \end{aligned}$$

Όμως  $\det(I - \alpha^{-1}\delta U) = 1$ , άρα η απόδειξη ολοκληρώθηκε.

Τέλος ένας πίνακας p-cyclic consistently ordered μπορεί να διαμεριστεί στους αντίστοιχους q-cyclic consistently ordered πίνακες.

Έστω ο p-cyclic πίνακας :

$$\begin{bmatrix} I & O & O & O & \dots & O & O & C \\ A & B & O & O & \dots & O & O & O \\ O & A & B & O & \dots & O & O & O \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ O & O & O & O & \dots & O & A & B \end{bmatrix}$$

όπου O δηλώνει τον  $2 \times 2$  μηδενικό πίνακα.

ένας αντίστοιχος 2-cyclic πίνακας είναι:

$$\left[ \begin{array}{ccccc|ccc} I & O & O & O & \dots & O & O & C \\ A & B & O & O & \dots & O & O & O \\ O & A & B & O & \dots & O & O & O \\ O & O & A & B & \dots & O & O & O \\ O & O & O & A & B & \dots & O & O \\ \hline O & O & O & O & A & B \dots & O & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ O & O & O & O & \dots & O & A & B \end{array} \right]$$

ενώ ένας αντίστοιχος 3-cyclic πίνακας :

$$\left[ \begin{array}{ccc|ccc|c} I & O & O & O & \dots & O & O & C \\ A & B & O & O & \dots & O & O & O \\ O & A & B & O & \dots & O & O & O \\ \hline O & O & A & B & \dots & O & O & O \\ O & O & O & A & B & \dots & O & O \\ O & O & O & O & A & B \dots & O & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ \hline O & O & O & O & O & O & A & B \ O \\ O & O & O & O & O & O & O & A \ B \end{array} \right]$$

## 2.2 Μέθοδος της Διαδοχικής Υπερχαλάρωσης -SOR σε p-cyclic πίνακες

Έστω ότι ο πίνακας A του συστήματος  $Ax = b$  είναι ένας p-cyclic στην μορφή (2.5). Δηλαδή

$$A = \left[ \begin{array}{cccccc} A_{1,1} & O & O & \dots & O & A_{1,p} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & O & \dots & O & O \\ \vdots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ O & O & O & \dots & A_{p,p-1} & A_{p,p} \end{array} \right] \quad (2.21)$$

Τότε οι πίνακες D,L και U της διάσπασης:

$$\boxed{A=D-L-U}$$

παίρνουν την μορφή :

$$D := \begin{bmatrix} A_{1,1} & & & & \\ & A_{2,2} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & A_{p,p} & \end{bmatrix}, \quad (2.22)$$

$$L := - \begin{bmatrix} O & O & O & \dots & O & O \\ A_{2,1} & O & O & \dots & O & O \\ \vdots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ O & O & O & \dots & A_{p,p-1} & O \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

$$U := - \begin{bmatrix} O & O & \dots & A_{1,p} \\ O & O & O & \dots & O & O \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ O & O & O & \dots & O & O \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

με  $A_{i,i}$  τετραγωνικοί αντιστρέψιμοι πίνακες.

Έφαρμόζοντας τη μέθοδο της διαδοχικής υπερχαλάρωσης :

$$\boxed{x^{(k+1)} = \mathcal{L}_\omega x^{(k)} + c_\omega, k = 0, 1, 2, \dots,}$$

με  $x^{(0)} \in C^n$  οποιοδήποτε, και

$$\boxed{\mathcal{L}_\omega = (D - \omega L)^{-1}[(1 - \omega)D + \omega U]}$$

όπου  $\omega \in (0, 2)$ .

Για να λύσουμε το πρόβλημα  $Ax = b$  θεωρούμε τον αντίστοιχο block Jacobi πίνακα  $B$  που δίνεται ως εξής:

$$B := D^{-1}(L + U)$$

$$B = \begin{bmatrix} O & O & O & \dots & O & T_1 \\ T_2 & O & O & \dots & O & O \\ O & T_3 & O & \dots & O & O \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ O & O & O & \dots & T_p & O \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

όπου  $B_j := -A_{jj}^{-1}A_{jk}$ ,  $k = p$  για  $j = 1$ ,  $k = j - 1$  για  $j = 2(1)p$

Εάν λοιπόν ο πίνακας συντελεστών  $A$  είναι **consistently ordered p-cyclic** πίνακας τότε υπάρχει μια βασική σχέση που συνδέει τις ιδιοτιμές του πίνακα της SOR με τις ιδιοτιμές του πίνακα του Jacobi.

### ΘΕΩΡΗΜΑ 2.2

Ο πίνακας  $A$  είναι **consistently ordered p-cyclic** πίνακας. Εάν  $\lambda$  είναι μια ιδιοτιμή του πίνακα της SOR και  $\mu$  ικανοποιεί τη σχέση :

$$(\lambda + \omega - 1)^p = \lambda^{p-1} \omega^p \mu^p \quad (2.26)$$

τότε  $\mu$  είναι μια ιδιοτιμή του πίνακα του block Jacobi. Αντίστροφα αν  $\mu$  ιδιοτιμή του πίνακα του Jacobi και  $\lambda$  ικανοποιεί την παραπάνω σχέση τότε  $\lambda$  είναι ιδιοτιμή του πίνακα της SOR  $\mathcal{L}_\omega$ .

### Απόδειξη

Οι ιδιοτιμές του πίνακα της SOR  $\mathcal{L}_\omega$  είναι οι ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου

$$\phi(\lambda) = \det(\lambda I - \mathcal{L}_\omega) = 0 \quad (2.27)$$

Ο πίνακας  $(I - \omega L)$  είναι αντιστρέψιμος και  $\det(I - \omega L) = 1$  όπως και στην απόδειξη του Θεωρήματος 1.322. Οπότε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο παίρνει την παρακάτω μορφή:

$$\phi(\lambda) := \det(I - \omega L) \det(\lambda I - \mathcal{L}_\omega) = \det(\lambda + \omega - 1)I - \omega \lambda L - \omega U \quad (2.28)$$

Βάσει του Θεωρήματος 2.1

$$\phi(\lambda) = \det\{(\lambda + \omega - 1)I - \lambda^{\frac{(p-1)}{p}} \omega(L + U)\} \quad (2.29)$$

Αφού ο πίνακας  $A$  είναι p-cyclic πίνακας από την υπόθεση άρα ο πίνακας του Jacobi οπότε και ο  $\lambda^{(p-1)/p} \omega(L + U)$  πίνακας είναι weakly cyclic of index p .

Εφαρμόζοντας το θεώρημα του **Romanovsky** το χαρακτηριστικό πολυώνυμο γίνεται:

$$\phi(\lambda) = (\lambda + \omega - 1)^m \prod_{i=1}^r \{(\lambda + \omega - 1)^p - \lambda^{p-1} \omega^p \mu_i^p\} \quad (2.30)$$

με  $\mu_i$  είναι μη μηδενικά αν  $r \geq 1$ .

Αν  $\mu$  ιδιοτιμή του Jacobi πίνακα και  $\lambda$  ικανοποιεί την σχέση (2.15), τότε ένας από τους όρους του χαρακτηριστικού πολυωνύμου  $\phi(\lambda)$  της σχέσης (2.20) μηδενίζεται αποδεικνύοντας ότι η τιμή  $\lambda$  είναι μια ιδιοτιμή του  $\mathcal{L}_\omega$ .

Αντίστροφα, έστω  $\omega \neq 0$  και έστω  $\lambda$  μια μη μηδενική ιδιοτιμή του πίνακα  $\mathcal{L}_\omega$ , έτσι ώστε τουλάχιστον ένας από τους όρους της σχέσης (2.20) να μηδενίζεται. Εάν  $\mu \neq 0$ , και  $\mu$  ικανοποιεί την σχέση (2.15), τότε  $(\lambda + \omega - 1) \neq 0$ . Άρα,

$$(\lambda + \omega - 1)^p = \lambda^{p-1} \omega^p \mu_i^p$$

για κάποια  $i, 1 \leq i \leq r$ , με  $\mu_i$  μη μηδενικό. Από την παραπάνω σχέση και τη σχέση (2.15) έχουμε:

$$\lambda^{p-1} \omega^p (\mu^p - \mu_i^p) = 0$$

αφού τα  $\lambda, \omega$  είναι μη μηδενικά, τότε  $\mu^p = \mu_i^p$ . Παίρνοντας τις  $p$ th ρίζες έχουμε ότι:

$$\mu = \mu_i e^{2\pi r/p}$$

,

όπου  $r$  είναι ένας μη μηδενικός ακέραιος αριθμός ικανοποιώντας την σχέση  $0 \leq r \leq p$ . Αλλά επειδή ο πίνακας του Jacobi είναι weakly cyclic αποδεικνύεται από το θεώρημα του Romanovsky ο  $\mu$  είναι ιδιοτιμή του πίνακα Jacobi. Για να τελειώσουμε την απόδειξη, εάν  $\omega \neq 0$ ,  $\lambda$  είναι μια μη μηδενική ιδιοτιμή του πίνακα  $\mathcal{L}_\omega$  και  $\mu = 0$ , τότε θα πρέπει να δείξουμε ότι και το  $\mu = 0$  είναι μια ιδιοτιμή του πίνακα Jacobi. Αλλά με αυτές τις υποθέσεις, από την σχέση (2.19) είναι φανερό ότι  $\phi(\lambda) = \det B = 0$  αποδεικνύοντας ότι  $\mu = 0$  είναι ιδιοτιμή του πίνακα Jacobi.

— — ◇ — — —

Η επιλογή του  $\omega = 1$  είναι τέτοια ώστε το  $\mathcal{L}_1$  να μας δίνει τον block Gauss-Seidel πίνακα .

## ΠΟΡΙΣΜΑ

Έστω ο πίνακας  $A$  να είναι ένας consistently ordered p-cyclic πίνακας με αντιστρέψιμα τα διαγώνια blocks  $A_{i,i}, 1 \neq i \neq N$ . Εάν  $\mu$  είναι μια ιδιοτιμή του block Jacobi πίνακα  $B$ , τότε  $\mu^p$  είναι μια ιδιοτιμή του  $\mathcal{L}_1$ . Εάν  $\lambda$  είναι μη μηδενική ιδιοτιμή του  $\mathcal{L}_1$  και  $\lambda = \mu^p$ , τότε  $\mu$  είναι μια ιδιοτιμή του  $B$ . Προφανώς λοιπόν, στην περίπτωση αυτή ισχύει

$$\rho(\mathcal{L}_1) = \rho(B)^p \leq 1 \quad (2.31)$$

και ως επακόλουθο η μέθοδος *Gauss-Seidel* συγκλίνει (δηλαδή  $\rho(\mathcal{L}_1) \leq 1$ ) εάν και μόνο εάν η μέθοδος *Jacobi* συγκλίνει. Όταν δε οι μέθοδοι συγκλίνουν τότε η μέθοδος *Gauss-Seidel* συγκλίνει  $p$  φορές πιο γρήγορα από την μέθοδο *Jacobi* αφού :

$$R_\infty(\mathcal{L}_1) = pR_\infty(B) \quad (2.32)$$

## 2.3 Βέλτιστη παράμετρος υπερχαλάρωσης

Θεωρούμε τον πίνακα  $A$  της μορφής (2.2) που είναι consistently ordered  $p$ -cyclic matrix με τους block διαγώνια υποπίνακες  $A_{i,i}$  με  $1 \leq i \leq N$  αντιστρέψιμους και υποθέτουμε ότι ο αντίστοιχος block *Jacobi* πίνακας  $B$  να συγκλίνει. Σκοπός μας είναι να προσδιορίσουμε τη βέλτιστη τιμή  $\omega_b$  της παραμέτρου  $\omega$  που ελαχιστοποιεί την φασματική ακτίνα δηλαδή :

$$\rho(\mathcal{L}_{\omega_b}) = \min_{\omega \in \mathbb{R}} \rho(\mathcal{L}_\omega) \quad (2.33)$$

Το πρόβλημα εύρεσης της βέλτιστη τιμής  $\omega_b$  της παραμέτρου  $\omega$  δεν είναι πάντα εύκολο. Για συγκεκριμένους πίνακες που οι ιδιοτιμές του πίνακα του  $B^p$ , όπου  $B$  είναι ο πίνακας του *Jacobi* είναι πραγματικές μη μηδενικές και θετικές έχει βρεθεί [34] ότι η βέλτιστη παράμετρος υπερχαλάρωσης  $\omega_b$  είναι μοναδική και είναι ακριβώς καθορισμένη ως η μοναδική θετική πραγματική ρίζα που είναι μικρότερη του  $p/(p-1)$  της εξίσωσης

$$(\rho(B)\omega_b)^p = [p^p(p-1)^{1-p}](\omega_b - 1) \quad (2.34)$$

όπου  $\rho(B)$  είναι η φασματική ακτίνα του αντίστοιχου block *Jacobi* πίνακα. Εμείς για λόγους πληρότητας, θα αποδείξουμε ότι στην περίπτωση  $p = 2$  η βέλτιστη παράμετρος  $\omega_b$  παίρνει την τιμή :

$$\omega_b = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \rho^2(B)}} = 1 + \left( \frac{\rho(B)}{1 + \sqrt{1 - \rho^2(B)}} \right)^2 \quad (2.35)$$

Τονίζουμε ότι η παραπάνω βέλτιστη ιδιοτιμή καθορίστηκε πρώτα από τον Young [38].

Στο θεώρημα (2.2) αποδείξαμε ότι η σχέση που συνδέει τις ιδιοτιμές  $\lambda \in \sigma(\mathcal{L}_\omega)$  του πίνακα της SOR με τις ιδιοτιμές  $\mu \in \sigma(B)$  του πίνακα του *Jacobi* δίνεται από τον παρακάτω τύπο :

$$(\lambda + \omega - 1)^p = \lambda^{p-1} \omega^p \mu^p$$

στην περίπτωση που  $p = 2$  η παραπάνω σχέση γίνεται :

$$(\lambda + \omega - 1)^2 = \lambda \omega^2 \mu^2$$

$$\lambda^2 + 2\lambda(\omega - 1) + (\omega - 1)^2 = \lambda \omega^2 \mu^2$$

$$\lambda^2 + 2\lambda(\omega - 1) - \lambda \omega^2 \mu^2 + (\omega - 1)^2 = 0$$

$$\lambda^2 + \lambda[2(\omega - 1) - \omega^2 \mu^2] + (\omega - 1)^2 = 0$$

Η τελευταία εξίσωση έχει διακρίνουσα

$$\Delta = (2(\omega - 1) - \omega^2 \mu^2)^2 - 4(\omega - 1)^2 = \omega^2 \mu^2 [\omega^2 \mu^2 - 4(\omega - 1)] \quad (2.36)$$

Οπότε οι ιδιοτιμές θα δίνονται από την σχέση :

$$\lambda^{\pm} = \frac{\omega^2 \mu^2 - 2(\omega - 1) \pm \sqrt{\omega^2 \mu^2 [\omega^2 \mu^2 - 4(\omega - 1)]}}{2} \quad (2.37)$$

### ΛΗΜΜΑ 2.1

Έστω

$$\lambda^{\pm} = \frac{\omega^2 \mu^2 - 2(\omega - 1) \pm \sqrt{\omega^2 \mu^2 [\omega^2 \mu^2 - 4(\omega - 1)]}}{2}$$

οι δύο ρίζες της εξίσωσης

$$(\lambda + \omega - 1)^2 = \lambda \omega^2 \mu^2$$

τότε εάν  $\Delta \geq 0$  και  $0 < \omega \leq 1$  η  $\lambda^+$  είναι αύξουσα συνάρτηση ως προς  $\mu^2$  και η  $\lambda^-$  είναι φθίνουσα συνάρτηση ως προς  $\mu^2$ .

### Απόδειξη

Η ιδιοτιμή  $\lambda^+$  δίνεται από την σχέση :

$$\lambda^+(\mu) = \frac{\omega^2 \mu^2 - 2(\omega - 1) + \sqrt{\omega^4 \mu^4 - 4\omega^2 \mu^2 (\omega - 1)}}{2}$$

Θέτω  $\mu^2 = u$  όποτε η παραπάνω σχέση γίνεται :

$$\lambda^+(u) = \frac{\omega^2 u - 2(\omega - 1) + \sqrt{\omega^4 u^2 - 4\omega^2 u(\omega - 1)}}{2}$$

$$\frac{d\lambda^+}{du} = \frac{\omega^2}{2} + \frac{2\omega^4 u - 4\omega^2(\omega - 1)}{2\sqrt{\omega^4 u^2 - 4\omega^2 u(\omega - 1)}}$$

Δηλαδή :

$$\frac{d\lambda^+}{d\mu^2} = \frac{\omega^2}{2} + \frac{2\omega^4 \mu^2 - 4\omega^2(\omega - 1)}{2\sqrt{\omega^4 \mu^4 - 4\omega^2 \mu^2(\omega - 1)}}$$

Οπότε  $\frac{d\lambda^+}{d\mu^2} > 0$  άρα η ιδιοτιμή  $\lambda^+$  είναι αύξουσα συνάρτηση ως προς  $\mu^2$

Με ανάλογο τρόπο αποδεικνύουμε ότι η  $\lambda^-$  είναι φθίνουσα συνάρτηση ως προς  $\mu^2$

— — —  $\diamond$  — — —

Θεωρούμε Α ένα 2-cyclic consistently ordered πίνακα με τους block διαγώνιους υποπίνακες αντιστρέψιμους και υποθέτουμε ότι ο αντίστοιχος block Jacobi Β πίνακας έχει πραγματικές ιδιοτιμές και συγκλίνει δηλαδή  $0 < \rho(B) < 1$ . Δηλώνουμε ως  $\bar{\mu} = \rho(B)$ . Οι ιδιοτιμές του πίνακα της SOR θα δίνονται από την σχέση  $(\lambda + \omega - 1)^2 = \lambda \omega^2 \mu^2$ . Στην παραπάνω περίπτωση, δηλαδή  $\Delta \geq 0$ , η φασματική ακτίνα του πίνακα της SOR θα δίνεται από την σχέση :

$$\rho(\mathcal{L}_\omega) = \left| \frac{\omega \bar{\mu}^2 - 2(\omega - 1) + \sqrt{\omega^4 \bar{\mu}^4 - 4\omega^2 \bar{\mu}^2(\omega - 1)}}{2} \right| \quad (2.38)$$

### ΛΗΜΜΑ 2.2

Εάν  $\Delta < 0$  τότε η φασματική ακτίνα του πίνακα της SOR θα δίνεται από την σχέση :

$$\rho(\mathcal{L}_\omega) = |\omega - 1| \quad (2.39)$$

### Απόδειξη

$$\lambda^\pm = \frac{\omega^2 \mu^2 - 2(\omega - 1) \pm i\sqrt{\omega^2 \mu^2 [\omega^2 \mu^2 - 4(\omega - 1)]}}{2}$$

$$\lambda^\pm = \sqrt{\frac{((\omega^2 \mu^2 - 2(\omega - 1))^2 + (\omega^2 \mu^2 [\omega^2 \mu^2 - 4(\omega - 1)])^2)}{4}} = |\omega - 1|$$

Άρα

$$\rho(\mathcal{L}_\omega) = |\omega - 1|$$

— — —  $\diamond$  — — —

Ως τώρα αναφερθήκαμε για τις ιδιοτιμές του πίνακα της SOR ως προς  $\mu^2$ . Θα μελετήσουμε λοιπόν στις παραπάνω περιπτώσεις για την φασματική ακτίνα του πίνακα της SOR και ως προς την παράμετρο  $\omega$ .

$$\Theta\epsilon\omega\rho\acute{o}\mu\epsilon \omega(\mu^2) \equiv \omega^2\mu^2 - 4(\omega - 1)$$

Η διακρίνουσα του παραπάνω τριωνύμου θα δίνεται από την σχέση:

$$\Delta = 16 - 16\mu^2$$

Άρα

$$\omega^{\pm} = \frac{4 \pm 4\sqrt{1 - \mu^2}}{2\mu^2} = \frac{2\mu^2}{\mu^2(1 \pm \sqrt{1 - \mu^2})} = \frac{2}{1 \pm \sqrt{1 - \mu^2}} \quad (2.40)$$

### ΛΗΜΜΑ 2.3

Έστω οι δύο πραγματικές ρίζες  $\lambda^{\pm} = \frac{\omega^2\mu^2 - 2(\omega - 1) \pm \sqrt{\omega^2\mu^2[\omega^2\mu^2 - 4(\omega - 1)]}}{2}$  όταν  $\Delta \geq 0$ . Τότε  $\lambda^{\pm} \geq 0$  και η  $\lambda^+$  είναι γνησίως φθίνουσα ως προς  $\omega$  ενώ η  $\lambda^-$  είναι γνησίως φθίνουσα ως προς  $\omega$  στο διάστημα  $(0, 1)$  και γνησίως αύξουσα στο διάστημα  $(1, 2)$ .

### Απόδειξη

Η ιδιοτιμή  $\lambda^+$  μπορεί να γραφτεί στην μορφή

$$\lambda^+ = \frac{1}{4}(\mu\omega + \sqrt{\omega^2\mu^2 - 4\omega + 4})^2 \quad (2.41)$$

Παραγωγίζοντας την έχουμε :

$$\frac{d\lambda^+}{d\omega} = \frac{1}{2\sqrt{\omega^2\mu^2 - 4\omega + 4}}(\mu\omega + \sqrt{\omega^2\mu^2 - 4\omega + 4})(\mu\sqrt{\omega^2\mu^2 - 4\omega + 4} - (2 - \mu^2\omega)) \quad (2.42)$$

Οι δυο πρώτοι παράγοντες της παραπάνω εξίσωσης είναι θετικοί ενώ ο τρίτος είναι αρνητικός γιατί :

$$\text{sign}(\mu\sqrt{\omega^2\mu^2 - 4\omega + 4} - (2 - \mu^2\omega)) = \text{sign}((\mu\sqrt{\omega^2\mu^2 - 4\omega + 4})^2 - (2 - \mu^2\omega)^2) = \text{sign}(\mu^2 - 1) = -1$$

Άρα λοιπόν η παράγωγος είναι αρνητική οπότε η ιδιοτιμή  $\lambda^+$  είναι φθίνουσα ως προς  $\omega$ .

Η  $\lambda^-$  ιδιοτιμή μπορεί να γραφτεί ως :

$$\lambda^- = \frac{1}{4}(\mu\omega - \sqrt{\omega^2\mu^2 - 4\omega + 4})^2 \quad (2.43)$$

Παραγωγίζοντας την παραπάνω σχέση έχουμε :

$$\frac{d\lambda^-}{d\omega} = \frac{1}{2\sqrt{\omega^2\mu^2 - 4\omega + 4}}(\mu\omega - \sqrt{\omega^2\mu^2 - 4\omega + 4})(\mu\sqrt{\omega^2\mu^2 - 4\omega + 4} - (2 + \mu^2\omega)) \quad (2.44)$$

Ο πρώτος και ο τρίτος όρος είναι θετικοί ενώ ο δεύτερος μπορεί να γραφτεί ως εξής :

$$\mu\omega - \sqrt{\omega^2\mu^2 - 4\omega + 4} = \frac{4(\omega - 1)}{(\mu\omega + \sqrt{\omega^2\mu^2 - 4\omega + 4})}$$

Οπότε η παράγωγος είναι αρνητική για  $\omega < 1$  ενώ είναι θετικοί για  $\omega > 1$ . Άρα η  $\lambda^-$  είναι γνησίως φθίνουσα ως προς  $\omega$  στο διάστημα  $(0, 1)$  και γνησίως αύξουσα στο διάστημα  $(1, 2)$ .

Βασιζόμενοι στο παραπάνω λήμμα θα παρουσιάσουμε την συμπεριφορά των ιδιοτιμών  $\lambda^\pm$  καθώς το  $\omega$  διανύει το διάστημα  $(0, 2)$ .

#### ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ I $0 < \omega < 1$

Οι ιδιοτιμές  $\lambda^\pm$  φθίνουν προς το μηδέν.

#### ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ II $\omega = 1$

Τότε η ιδιοτιμή  $\lambda^+ = \mu^2$  ενώ  $\lambda^- = 0$

#### ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ III $1 < \omega \leq \frac{2}{1+\sqrt{1-\mu^2}}$

Σε αυτή την περίπτωση η  $\lambda^+$  μειώνεται ενώ η ιδιοτιμή  $\lambda^-$  αυξάνεται.

#### ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ IV $\omega = \frac{2}{1+\sqrt{1-\mu^2}}$

Τότε η  $\lambda^+$  γίνεται ίση με την  $\lambda^-$

#### ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ V $\frac{2}{1+\sqrt{1-\mu^2}} < \omega < 2$

Οι ιδιοτιμές  $\lambda^\pm$  είναι μιγαδικές και βρίσκονται πάνω σε κύκλο  $\omega - 1$

### ΘΕΩΡΗΜΑ 2.3

Το μέτρο της μέγιστης κατά μέτρο ιδιοτιμής  $\mathcal{L}_\omega$  δίνεται από το  $\lambda(\mu_n) \equiv \lambda(\bar{\mu})$  με  $\mu_1 < \mu_2 \dots < \mu_n$  και δίνεται από :

$$\rho(\mathcal{L}_\omega) = \left| \frac{\omega\mu_n^2 - 2(\omega - 1) + \sqrt{\omega^4\mu_n^4 - 4\omega^2\mu_n^2(\omega - 1)}}{2} \right| \quad (2.45)$$

Απόδειξη

Αν  $\omega \geq \frac{2}{1+\sqrt{1-\mu_n^2}}$  τότε όλες οι ιδιοτιμές του πίνακα της SOR θα βρίσκονται πάνω στον κύκλο  $\omega - 1$  και θα έχουν μέτρο ίσο με  $|\omega - 1|$ .

Αν  $\omega \leq \frac{2}{1+\sqrt{1-\mu_n^2}}$  αρκεί να δείξουμε ότι το μέτρο της  $\lambda(\mu_n)$  είναι μεγαλύτερο από το  $\omega - 1$  το μέτρο των μιγαδικών ιδιοτιμών και μεγαλύτερο από το μέτρο των υπολοίπων πραγματικών ιδιοτιμών του  $\mathcal{L}_\omega$ .

Για την πρώτη περίπτωση έστω δύο ιδιοτιμές της εξίσωσης  $\lambda^+(\mu_n), \lambda^-(\mu_n)$  θα ισχύει

$$\lambda^+(\mu_n)\lambda^-(\mu_n) = (\omega - 1)^2$$

$$|\lambda^+(\mu_n)\lambda^-(\mu_n)| = (\omega - 1)^2$$

Όμως  $\lambda^+ > \lambda^-$  Άρα

$$\lambda^+(\mu_n) \geq |\omega - 1| = \omega - 1$$

Για την περίπτωση  $\omega \leq \frac{2}{1+\sqrt{1-\mu_n^2}}$  η απόδειξη είναι συνέπεια του Λήμματος 2.1.

Ειδικότερα για τους p-cyclic πίνακες ισχύουν τα παρακάτω θεωρήματα (34):

#### ΘΕΩΡΗΜΑ 2.4

Έστω ο πίνακας  $A$  της μορφής (2.2) που είναι *consistently ordered p-cyclic matrix* με τους *block* διαγώνια υποπίνακες  $A_{i,i}$  με  $1 \leq i \leq p$  αντιστρέψιμους. Εάν όλες οι ιδιοτιμές εις στην  $p$ -th δύναμη του *block Jacobi* πίνακα είναι πραγματικές, θετικές μη μηδενικές και  $0 \leq \rho(B) < 1$ , τότε η βέλτιστη παραμέτρος  $\omega_b$  δίνεται από την σχέση (2.34) και ισχύουν

$$1. \rho(\mathcal{L}_{\omega_b}) = (\omega_b - 1)(p - 1) \quad (2.46)$$

$$2. \rho(\mathcal{L}_{\omega}) > \rho(\mathcal{L}_{\omega_b}), \omega \neq \omega_b \quad (2.47)$$

#### ΘΕΩΡΗΜΑ 2.5

Έστω ο πίνακας  $A$  της μορφής (2.2) που είναι *consistently ordered p-cyclic matrix* με τους *block* διαγώνια υποπίνακες  $A_{i,i}$  με  $1 \leq i \leq p$  αντιστρέψιμους. Επίσης έστω όλες οι ιδιοτιμές εις στην  $p$ -th δύναμη του *block Jacobi* πίνακα είναι πραγματικές, θετικές μη μηδενικές και  $0 \leq \rho(B) < 1$ . Αν  $\rho(B) \rightarrow 1$  τότε :

$$R_{\infty}(\mathcal{L}_{\omega_b}) \sim \left(\frac{2p}{p-1}\right)^{1/2} [R_{\infty}(\mathcal{L}_1)]^{1/2} \quad (2.48)$$

## Κεφάλαιο 3

# Βέλτιστη κυκλική διαμέριση για την μέθοδο της Διαδοχικής Υπερχαλάρωσης -SOR σε $p$ -cyclic πίνακες

Στο κεφάλαιο αυτό θα εξετάσουμε ποια είναι η καλύτερη διαμέριση ενός  $p$ -cyclic πίνακα  $A$  σε  $q$ -cyclic μορφή με  $2 \leq q \leq p$  ώστε να βρούμε την βέλτιστη  $SOR$  μέθοδο για την λύση του συστήματος  $Ax = b$ .

### 3.1 Εισαγωγή

Από τα προηγούμενα κεφάλαια αναφέραμε ότι για την λύση του γραμμικού συστήματος:

$$Ax = (D - L - U)x = b \quad (3.1)$$

όπου  $A \in \mathbb{C}^{n,n}$  είναι ένας  $p$ -cyclic block πίνακας της μορφής :

$$A = \begin{bmatrix} A_{1,1} & O & O & \dots & O & A_{1,p} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & O & \dots & O & O \\ \vdots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ O & O & O & \dots & A_{p,p-1} & A_{p,p} \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

με διαγώνιο  $D := \text{diag}(A_{11}, A_{22}, \dots, A_{pp})$ , όπου οι block πίνακες  $A_{i,i}$  είναι τετραγωνικοί και αντιστρέψιμοι και οι  $L, U$  αυστηρά πάνω και κάτω τριγωνικοί πίνακες αντίστοιχα. Το επαναληπτικό βήμα της μέθοδου της διαδοχικής υπερχαλάρωσης SOR είναι :

$$x^{(m+1)} = \mathcal{L}_\omega x^{(m)} + \omega(D - \omega L)^{-1}b \quad (3.3)$$

$$\mathcal{L}_\omega := (D - \omega L)^{-1}[(1 - \omega)D + \omega U], \quad (3.4)$$

με  $x^{(0)}$  αρχικό και παράμετρο υπερχαλάρωσης  $\omega \in (0, 2)$ .

Για τη σύγκλιση της μεθόδου αυτής απαραίτητη και επαρκής συνθήκη είναι  $\rho(\mathcal{L}_\omega) < 1$  και όσο μικρότερη είναι η φασματική ακτίνα τόσο πιο γρήγορα συγκλίνει η μέθοδος αυτή. Οπότε το πρόβλημα για τον καθορισμό του βέλτιστου  $\omega$ , δηλαδή όταν ελαχιστοποιείται το  $\rho(\mathcal{L}_\omega)$  είναι ουσιώδους σημασίας.

Οι Markham, Neumann και ο Plemmons[23] ήταν οι πρώτοι που σκέφτηκαν το πρόβλημα της διαμέρισης ενός 3 - *cyclic* πίνακα  $A$  σ'ένα πίνακα 2 - *cyclic* για την εύρεση της βέλτιστης SOR. Βασιζόμενοι στα βέλτιστα αποτελέσματα που πέτυχε ο Kredell[21] για  $p = 2$  και οι Niethammer, de Pillis και Varga[23] για  $p = 3$  στην περίπτωση που οι φασματικές ακτίνες των block Jacobi πινάκων  $\sigma(J_2^2)$  και  $\sigma(J_3^3)$  είναι αρνητικές και παρατηρώντας ότι  $\sigma(J_3^3) \setminus \{0\} \equiv \sigma(J_2^2)$ , κατέληξαν ότι η βέλτιστη 2 - *cyclic* SOR ήταν καλύτερη από την βέλτιστη 3 - *cyclic* SOR. Παρακινούμενοι και βασιζόμενοι στα παραπάνω αποτελέσματα οι Γαλάνης, Χατζηδήμος και Νούτσος[11] διατύπωσαν κάτι γενικότερο, ότι ένας πίνακας  $A$  σε p-cyclic μορφή διαμεριζόμενος σε  $[(p+1)/2]$ -cyclic μορφή (όπου  $[x]$  δηλώνει το ακέραιο μέρος του πραγματικού αριθμού του  $x$ ) αποφέρει καλύτερη βέλτιστη SOR. Έτσι κατέληξαν ότι η διαμέριση ενός πίνακα  $A$  σε 2 - *cyclic* μορφή είναι πολύ καλύτερη από την αρχική μας  $p$  - *cyclic* μορφή. Αργότερα ο Pierce κατέληξε επίσης σ'ένα πολύ καλό αποτέλεσμα : Διαμερίζοντας έναν p-cyclic πίνακα  $A$  σ'ένα  $q$  - *cyclic* πίνακα με  $q < p$  διαπίστωσε ότι απαιτούνται τα ίδια ακριβώς αριθμητικά για μία επανάληψη είτε για μία  $p$  - *cyclic* είτε για μία  $q$  - *cyclic* SOR. Οι Pierce, Χατζηδήμος και Plemmons [26] βασιζόμενη στην εργασία του Pierce απάντησαν στην ερώτηση της αυστηρής μείωσης της βέλτιστης φασματικής ακτίνας της  $q$  - *cyclic* SOR λαμβάνοντας το από την διαμέριση της q-cyclic μορφής από τον αρχικό  $p$  - *cyclic* μορφή για όλες τις τιμές του  $q = 2(1)p$ . Ειδικότερα έδειξαν ότι όταν το φάσμα  $\sigma(J_p^p)$  είναι θετικό και κάτω από την υπόθεση ότι  $\rho(J_p) < 1$

$$\rho_2 < \rho_3 < \dots < \rho_{p-1} < \rho_p < 1 \quad (3.5)$$

καθώς και για το φάσμα  $\sigma(J_p^p)$  που είναι αρνητικό και χωρίς κανένα περιορισμό για το  $\rho(J_p)$ , ότι υπάρχει μοναδικό  $k \in 2, \dots, p$  τέτοιο ώστε

$$\left(\frac{k+1}{k-1}\right)^{(k+1)/p} \leq \rho(J_p) < \left(\frac{k}{k-2}\right)^{k/p} \quad (3.6)$$

τέτοιο ώστε

$$\rho_2 < \rho_3 < \dots < \rho_k < 1 < \rho(\mathcal{L}(\omega_q)) \quad (3.7)$$

με  $q = k + 1(1)p$ .

Σκοπός μας στο κεφάλαιο αυτό είναι να παραθέσουμε τα βασικά θεωρήματα που απέδειξαν οι Γαλάνης και Χατζηδήμος [9] για την εύρεση της βέλτιστης διαμέρισης, της παραμέτρου υπερχαλάρωσης και της φασματικής ακτίνας στην επαναληπτική μέθοδο SOR ενός  $p$ -cyclic consistently ordered πίνακα με την υπόθεση ότι  $\sigma(J_p^p) \subset R \setminus \{[1, \infty]\}$ . Οι παραπάνω απέδειξαν ότι η 2-cyclic SOR δεν είναι πάντα η βέλτιστη SOR.

### 3.2 Θεωρήματα για την εύρεση της βέλτιστης διαμέρισης, παραμέτρου υπερχαλάρωσης και φασματικής ακτίνας στην $SOR$ μέθοδο για p-cyclic πίνακα.

#### ΘΕΩΡΗΜΑ 3.2.1 (της καλύτερης διαμέρισης)

Έστω  $A$  p-cyclic consistently ordered πίνακας (3.2),  $T$  ο αντίστοιχος block Jacobi του συστήματος (3.1) και  $\sigma(T^p) \subset [-\alpha^p, \beta^p]$  με  $-\alpha^p, \beta^p \in \sigma(T^p)$  όπου  $0 \leq \beta \leq 1$  και  $0 \leq \alpha \leq \infty$ . Υποθέτουμε ότι ο πίνακας  $A$  διαμερίζεται σε ένα q-cyclic consistently ordered πίνακα με  $2 \leq q < p$  και δηλώνουμε ως  $\omega_q, \rho_q$  την παράμετρος υπερχαλάρωσης και την φασματική ακτίνα του πίνακα της βέλτιστης q-cyclic  $SOR$  αντίστοιχα. Τότε ισχύουν τα έξης:

\* (I) Εάν

$$0 \leq \frac{\alpha}{\beta} < \frac{p-2}{p}, \quad (3.8)$$

τότε υπάρχει μοναδικός ακέραιος  $l \in \{2, 3, \dots, p-1\}$  που ικανοποιεί την παρακάτω σχέση

$$\left(\frac{l-2}{l}\right)^{\frac{l}{p}} \leq \frac{\alpha}{\beta} < \left(\frac{l-1}{l+1}\right)^{\frac{(l+1)}{p}} \quad (3.9)$$

τέτοιος ώστε

$$\rho_l < \rho_{l-1} < \dots < \rho_2 < 1 \quad (3.10)$$

και

$$\rho_{l+1} < \rho_{l+2} < \dots < \rho_p < 1 \quad (3.11)$$

Επιπλέον, για κάθε  $\beta \in (0, 1)$  αντιστοιχεί μια μοναδική τιμή του  $\alpha$ ,

$$\alpha_{l,l+1} := \alpha(\beta) \in \left[\left(\frac{l-2}{l}\right)^{\frac{l}{p}}\beta, \left(\frac{l-1}{l+1}\right)^{\frac{(l+1)}{p}}\beta\right]$$

δοσμένη από την σχέση:

$$\alpha_{l,l+1} = \left(\frac{2\rho^{1/l} - (1+\rho)\beta^{p/l}}{1-\rho}\right)^{\frac{l}{p}} \quad (3.12)$$

όπου  $\rho$  είναι η μοναδική ρίζα στο διάστημα  $(0, 1)$  της εξίσωσης:

3.2 Θεωρήματα για την εύρεση της βέλτιστης διαμέρισης, παραμέτρου υπερχαλάρωσης και φασματικής ακτίνας στην  $SOR$  μέθοδο για  $p$ -cyclic πίνακα. 35

---

$$\beta^p(l + \rho)^{l+1} - (l + 1)^{l+1}\rho = 0, \quad (3.13)$$

τέτοιο ώστε:

$$\rho_l < \rho_{l+1} \quad \gamma\iota\alpha \quad \left(\frac{l-2}{l}\right)^{\frac{l}{p}}\beta \leq \alpha < \alpha_{l,l+1}, \quad (3.14)$$

$$\rho_l = \rho_{l+1} \quad \gamma\iota\alpha \quad \alpha = \alpha_{l,l+1}, \quad (3.15)$$

$$\rho_l > \rho_{l+1} \quad \gamma\iota\alpha \quad \alpha_{l,l+1} < \alpha < \left(\frac{l-1}{l+1}\right)^{\frac{(l+1)}{p}}\beta. \quad (3.16)$$

Από τα παραπάνω λοιπόν συμπεραίνουμε ότι για την πρώτη περίπτωση  $ηl - cyclic \ SOR$  δίνει την βέλτιστη  $SOR$ , στην δευτερή περίπτωση είτε  $ηl - cyclic \ SOR$  είτε  $ηl + 1 - cyclic \ SOR$  δίνουν την βέλτιστη  $SOR$  μέθοδο και στην τρίτη περίπτωση  $ηl + 1 - cyclic \ SOR$  δίνει την βέλτιστη  $SOR$ .

\* (II) Εάν

$$\frac{p-2}{p} \leq \frac{\alpha}{\beta} < 1, \quad (3.17)$$

τότε

$$\rho_p < \rho_{p-1} < \dots < \rho_3 < \rho_2 < 1 \quad (3.18)$$

Οπότε η αρχική  $p - cyclic$  μορφή δίνει την βέλτιστη  $SOR$  μέθοδο.

\* (III) Εάν

$$\frac{\alpha}{\beta} = 1, \quad (3.19)$$

όπου η περίπτωση  $\alpha = \beta = 0$  επίσης περιέχεται, τότε

$$\rho_p = \rho_{p-1} = \dots = \rho_3 = \rho_2 = \beta^p < 1 \quad (3.20)$$

Οπότε οποιαδήποτε  $q$ -cyclic με  $q = 2(1)p$ , είναι η βέλτιστη  $SOR$  μέθοδο.

\* (IV) Εάν

$$1 < \frac{\alpha}{\beta} \leq \frac{p}{p-2}, \quad (3.21)$$

Τα αποτελέσματα είναι ακριβώς τα ίδια με την περίπτωση (II).

\* (V) Εάν

$$\frac{p}{p-2} < \frac{\alpha}{\beta} \leq \infty, \quad (3.22)$$

όπου  $\frac{\alpha}{\beta} = \infty$  αντιστοιχεί στην περίπτωση που  $\alpha > 0, \beta = 0$  τότε υπάρχει μοναδικός ακέραιος  $k \in \{2, \dots, p\}$ , τέτοιος ώστε:

$$\left(\frac{k+1}{k-1}\right)^{\frac{(k+1)}{p}} < \rho(J_p) \leq \left(\frac{k}{k-2}\right)^{\frac{k}{p}} \quad (3.23)$$

και μοναδικός ακέραιος  $l \in \{2, \dots, \min(p-1, k)\}$ , ικανοποιώντας την σχέση:

$$\left(\frac{l+1}{l-1}\right)^{\frac{(l+1)}{p}} < \frac{\alpha}{\beta} \leq \left(\frac{l}{l-2}\right)^{\frac{l}{p}} \quad (3.24)$$

τέτοιος ώστε :

$$\rho_l < \rho_{l-1} < \dots < \rho_3 < \rho_2 < 1, \quad (3.25)$$

και

$$\rho_{l+1} < \rho_{l+2} < \dots < \rho_{k-1} < \rho_k \leq 1 \leq \rho(\mathcal{L}_{\omega_q}), \quad (3.26)$$

με  $q = k + 1(1)p$  και με την ισότητα να ισχύει όταν  $\rho_k \leq 1$  εάν και μόνο εάν  $k > 2$ . Επιπλέον για  $l = k$ , η  $l+1$ -cyclic SOR δίνει την βέλτιστη SOR μέθοδο. Ενώ για  $l < k$  σε κάθε  $\alpha \in (0, ((l+1)/(l-1))^{\frac{(l+1)}{p}})$ , αντιστοιχεί μια μοναδική τιμή του  $\beta$ :

$$\beta_{l,l+1} := \beta(\alpha) \in \left[\left(\frac{l-2}{l}\right)^{\frac{l}{p}}\alpha, \left(\frac{l-1}{l+1}\right)^{\frac{(l+1)}{p}}\alpha\right]$$

δοσμένη από την σχέση :

$$\beta_{l,l+1} = \left(\frac{2\rho^{1/l} - (1-\rho)\alpha^{p/l}}{1+\rho}\right)^{\frac{l}{p}} \quad (3.27)$$

όπου  $\rho$  είναι η μοναδική ρίζα στο διάστημα  $(0, 1)$  της εξίσωσης :

**3.2 Θεωρήματα για την εύρεση της βέλτιστης διαμέρισης, παραμέτρου υπερχαλάρωσης και φασματικής ακτίνας στην  $SOR$  μέθοδο για  $p$ -cyclic πίνακα. 37**

$$\alpha^p(l - \rho)^{l+1} - (l + 1)^{l+1}\rho = 0, \quad (3.28)$$

τέτοιο ώστε:

$$\rho_l < \rho_{l+1} \quad \gamma\iota\alpha \quad \left(\frac{l-2}{l}\right)^{\frac{l}{p}}\alpha \leq \beta < \beta_{l,l+1}, \quad (3.29)$$

$$\rho_l = \rho_{l+1} \quad \gamma\iota\alpha \quad \beta = \beta_{l,l+1}, \quad (3.30)$$

$$\rho_l > \rho_{l+1} \quad \gamma\iota\alpha \quad \beta_{l,l+1} < \beta < \left(\frac{l-1}{l+1}\right)^{\frac{(l+1)}{p}}\alpha. \quad (3.31)$$

Συνεπώς για την πρώτη περίπτωση η  $l$ -cyclic  $SOR$  δίνει την βέλτιστη  $SOR$ , στην δευτερή περίπτωση είτε η  $l$ -cyclic  $SOR$  είτε η  $l+1$ -cyclic  $SOR$  δίνουν την βέλτιστη  $SOR$  μέθοδο και στην τρίτη περίπτωση η  $l+1$ -cyclic  $SOR$  δίνει την βέλτιστη  $SOR$ .

**ΘΕΩΡΗΜΑ 3.2.2 ( βέλτιστες τιμές της παραμέτρου της υπερχαλάρωσης και της φασματικής ακτίνας).**

Κάτω από τις υποθέσεις του Θεωρήματος (3.2.1) έστω  $\omega_r$  και  $\rho_r$  δηλώνουν την παράμετρο της υπερχαλάρωσης και την φασματική ακτίνα είτε της βέλτιστης είτε οποιαδήποτε βέλτιστης  $r$ -cyclic  $SOR$  αντιστοιχίζοντας σε μια  $r$ -cyclic διαμέριση του  $A$  με  $r \in \{2, 3, \dots, p\}$ . Τότε  $\omega_r$  και  $\rho_r$  δίνονται από τις εξισώσεις :

$$\left(\frac{(\alpha_r + \beta_r)}{2}\omega\right)^r - \frac{(\alpha_r + \beta_r)}{(\beta_r - \alpha_r)}(\omega - 1) = 0 \quad (3.32)$$

και

$$\rho_r = \frac{(\alpha_r + \beta_r)}{(\beta_r - \alpha_r)}(\omega_r - 1) = \left(\frac{(\alpha_r + \beta_r)}{2}\omega_r\right)^r, \quad (3.33)$$

όπου  $\omega_r$  είναι η μοναδική θετική ρίζα της παραπάνω εξίσωσης στο διάστημα:

$$\left(\min\left\{1, 1 + \frac{\beta_r - \alpha_r}{\beta_r + \alpha_r}\right\}, \max\left\{1, 1 + \frac{\beta_r - \alpha_r}{\beta_r + \alpha_r}\right\}\right) \quad (3.34)$$

και

$$\alpha_r = \frac{r-2}{r}\beta_r^{\frac{r}{p}}, \quad \beta_r = \beta_r^{\frac{r}{p}} \iff \frac{\alpha}{\beta} \leq \left(\frac{r-2}{r}\right)^{\frac{r}{p}} \quad (3.35)$$

$$\alpha_r = \alpha^{\frac{p}{r}}, \quad \beta_r = \beta^{\frac{p}{r}} \iff \left(\frac{r-2}{r}\right)^{\frac{r}{p}} \leq \frac{\alpha}{\beta} \leq \left(\frac{r}{r-2}\right)^{\frac{r}{p}} \quad (3.36)$$

$$\alpha_r = \alpha^{\frac{p}{r}}, \quad \beta_r = \frac{r-2}{r} \alpha^{\frac{p}{r}} \iff \left(\frac{r}{r-2}\right)^{\frac{r}{p}} \leq \frac{\alpha}{\beta} \quad (3.37)$$

Πριν την απόδειξη των παραπάνω θεωρημάτων χρήσιμο θα ήταν να αναφέρουμε τα παρακάτω λήμματα.

### ΛΗΜΜΑ (3.2.1)

*H συνάρτηση*

$$y(x) := \left(\frac{x-2}{x}\right)^x, \quad x \in [2, \infty), \quad (3.38)$$

*αυξάνει αυστηρά.*

### Απόδειξη

Παραγωγίζοντας την συνάρτηση λαμβάνουμε :

$$dy/dx = y(x)z(x), \quad (3.39)$$

όπου

$$z(x) := \ln\left(\frac{x-2}{x}\right) + \frac{x}{x-2} - 1 \quad (3.40)$$

όπου  $z(x)$  είναι καλά ορισμένη και παραγωγίσιμη στο διάστημα  $(2, \infty)$ . Οπότε εύκολα βρίσκουμε ότι :

$$dz/dx = \frac{-4}{x(x-2)} < 0, \quad x \in (2, \infty), \quad (3.41)$$

Η παραπάνω σχέση δηλώνει ότι η συνάρτηση  $z(x)$  μειώνεται αυστηρά και

$$\inf_{x \in (2, \infty)} z(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} z(x) = 0. \quad (3.42)$$

Οπότε  $z(x) > 0$  και από την σχέση (3.39) συμπεραίνουμε ότι η  $y(x)$  αυξάνει αυστηρά στο διάστημα  $(2, \infty)$  παίρνοντας τις θετικές τιμές. Ξέροντας επίσης ότι η  $y(x)$  είναι συνεχής συναρτήσης στο διάστημα  $[2, \infty)$  και  $y(2) = 0$  ολοκληρώνουμε την απόδειξη.

### ΠΟΡΙΣΜΑ (3.2.1)

Για κάθε ακέραιο  $p \geq 3$  ισχύει :

$$y(2) < y(3) < \dots < y(p-1) < y(p) \quad (3.43)$$

με  $y$  την συνάρτηση που δίνονται απο την σχέση (3.38).

— — —  $\diamond$  — — —

### ΠΟΡΙΣΜΑ (3.2.2)

Έστω  $p \geq 3$  να είναι ακέραιος και  $a, b$  να είναι θετικές σταθερές ικανοποιώντας την σχέση:

$$\frac{\alpha}{\beta} \geq \left(\frac{p-2}{p}\right)^p \quad (3.44)$$

με  $b < 1$ . Τότε η συνάρτηση

$$g(x) = 1 - \frac{x}{2}(b^{\frac{1}{x}} - a^{\frac{1}{x}}) \quad (3.45)$$

ορισμένη για όλους τους πραγματικούς  $x \in [2, p]$ , παίρνει μόνο θετικές τιμές.

### Απόδειξη

Εάν  $\alpha \geq \beta$  η εγκυρότητα του ισχυρισμού είναι φανερή. Για  $\alpha < \beta (< 1)$ ,

$$g(x) \sim \frac{2}{x} - (1 - (\frac{\alpha}{\beta})^{\frac{1}{x}})b^{\frac{1}{x}} \quad (3.46)$$

Για να αποδείξουμε ότι το δεξιό μέρος είναι θετικό, όταν  $0 < b < 1$  είναι ισοδύναμο με το να αποδείξουμε ότι :

$$\frac{\alpha}{\beta} \geq \left(\frac{x-2}{x}\right)^x \quad (3.47)$$

Αλλά

$$\frac{\alpha}{\beta} \geq \left(\frac{p-2}{p}\right)^p \geq \left(\frac{x-2}{x}\right)^x \quad (3.48)$$

Οπότε αποδείξαμε ότι η  $g(x)$  είναι πάντα θετική με βάση το προηγούμενο λήμμα.

— — —  $\diamond$  — — —

### ΛΗΜΜΑ (3.2.3)

Εστω  $c$  και  $d$  διαφορετικές σταθερές με

$$0 < c < 1, \quad 0 < d \quad (3.49)$$

Τότε η συνάρτηση

$$f(\rho) := [(c-d)\rho + (c+d)] \ln\left(\frac{1}{2}[(c-d)\rho + (c+d)]\right) + (-c \ln c + d \ln d)\rho + (-c \ln c - d \ln d) \quad \rho \in [0, 1], \quad (3.50)$$

είναι αυστηρά αυξουσά, παίρνοντας μόνο τις αρνητικές τιμές και την τιμή 0 για  $\rho = 1$ .

### Απόδειξη

Η συνάρτηση  $f(\rho)$  είναι καλά ορισμένη και δύο φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα  $[0, 1]$ . Εύκολα βρίσκουμε ότι η παράγωγος της είναι :

$$f'(\rho) := (c-d)\{1 + \ln(\frac{1}{2}[(c-d)\rho + (c+d)])\} + (-c \ln c + d \ln d) \quad (3.51)$$

και η δεύτερη παράγωγος :

$$f''(\rho) := \frac{(c-d)^2}{(c-d)\rho + (c+d)} > 0 \quad \text{για} \quad \text{καθε} \quad \rho \in [0, 1], \quad (3.52)$$

Συνέπως από τις παραπάνω δύο σχέσεις συμπεραίνουμε ότι η  $f'(\rho)$  αυξάνει αυστηρά για  $\rho \in [0, 1]$ .

$$\min_{\rho \in [0, 1]} f'(\rho) = f'(0) \sim \frac{c}{d} \{1 + \ln[\frac{1}{2}(1 + \frac{d}{c})]\} - \{1 + \ln[\frac{1}{2}(1 + \frac{c}{d})]\} \quad (3.53)$$

$$\min_{\rho \in [0, 1]} f'(\rho) = x[1 + \ln(\frac{x+1}{2x})] - [1 + \ln(\frac{x+1}{2})] =: z(x) \quad (3.54)$$

όπου έχουμε θέσει  $x = \frac{c}{d}$ . Η συνάρτηση  $z(x)$  είναι δύο φορές συνεχής και παραγωγίσιμη. Οπότε λαμβάνουμε :

$$\frac{dz}{dx} = \frac{x-1}{x+1} + \ln(\frac{x+1}{2x}) \quad (3.55)$$

και

$$\frac{d^2z}{dx^2} \sim x - 1 \quad (3.56)$$

Οπότε, εάν  $c > d$  δηλαδή  $x > 1$  η δεύτερη παράγωγος της συνάρτησης  $z(x)$  είναι θετική άρα η  $\frac{dz}{dx}$  αυξάνεται αυστηρά όσο αυξάνεται το  $x$  για  $x \in [1, \infty)$ .

### 3.2 Θεωρήματα για την εύρεση της βέλτιστης διαμέρισης, παραμέτρου υπερχαλάρωσης και φασματικής ακτίνας στην *SOR* μέθοδο για p-cyclic πίνακα. 41

$$\min_{x \in [1, \infty)} \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dx} \Big|_{x=1} = 0 \quad (3.57)$$

Άρα η παράγωγος  $\frac{dz}{dx}$  είναι πάντα θετική στο διάστημα  $(1, \infty)$  δηλώνοντας ότι η συνάρτηση  $z(x)$  αυξάνει αυστηρά με το  $x$ . Έτσι

$$\min_{\rho \in [0, 1]} f'(\rho) = f'(0) > d \quad \inf_{x \in (1, \infty)} z(x) = 0 \quad (3.58)$$

Εάν  $c < d$  δηλαδή  $x < 1$  τότε η δεύτερη παράγωγος της συνάρτησης  $z(x)$  είναι αρνητική οπότε η  $\frac{dz}{dx}$  μειώνεται αυστηρά με το  $x$  να μειώνεται στο διάστημα  $(0, 1]$  και

$$\min_{x \in [0, 1]} \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dx} \Big|_{x=1} = 0 \quad (3.59)$$

Επομένως καταλήγουμε στην ίδια σχέση όπως και την (3.58). Τα αποτελέσματα της σχέσης (3.58) και το γεγονός ότι η συνάρτηση  $f'(\rho)$  στο διάστημα  $[0, 1]$  αυξάνει αυστηρά μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι η συνάρτηση  $f(\rho)$  αυξάνει στο διάστημα  $[0, 1]$ . Από την άλλη πλευρά

$$\max_{\rho \in [0, 1]} f(\rho) = f(1) = 0 \quad (3.60)$$

που αποδεικνύει το λήμμα.

— — — ◊ — — —

#### ΛΗΜΜΑ (3.2.4)

Έστω η σχέση

$$F(x, \rho) := \rho - (1/2[(b^{\frac{1}{x}} - a^{\frac{1}{x}})\rho + (b^{\frac{1}{x}} + a^{\frac{1}{x}})])^x = 0, \quad (3.61)$$

με  $x, \rho$  δοσμένα,  $p \geq 3$  γνωστός ακέραιος, και  $a, b (< 1)$  θετικές σταθερές ικανοποιώντας την σχέση :

$$\frac{\alpha}{\beta} \geq \left(\frac{p-2}{p}\right)^p. \quad (3.62)$$

Τότε η  $\rho$  είναι καλά ορισμένη συνάρτηση του  $x$  με όλα τα  $x \in [2, p]$  και  $x$  μια καλά ορισμένη συνάρτηση του  $\rho \in [0, 1]$ . Επιπλέον η συνάρτηση  $\rho$  μειώνεται αυστηρά με το  $x \in [2, p]$ .

#### Απόδειξη

$$F_x = -\left(\frac{1}{2}[(b^{\frac{1}{x}} - a^{\frac{1}{x}})\rho + (b^{\frac{1}{x}} + a^{\frac{1}{x}})]\right)^x$$

$$\cdot \left\{ \ln\left(\frac{1}{2}[(b^{\frac{1}{x}} - a^{\frac{1}{x}})\rho + (b^{\frac{1}{x}} + a^{\frac{1}{x}})]\right) \right.$$

$$\left. + x\left[+\left(-\frac{1}{x^2}\right)b^{\frac{1}{x}}\ln b - \left(\frac{1}{x^2}\right)a^{\frac{1}{x}}\ln a\right] / \frac{1}{2}[(b^{\frac{1}{x}} - a^{\frac{1}{x}})\rho + (b^{\frac{1}{x}} + a^{\frac{1}{x}})]\right\}$$

και

$$F_\rho = 1 - \left(\frac{1}{2}[x(b^{\frac{1}{x}} - a^{\frac{1}{x}})\rho + (b^{\frac{1}{x}} + a^{\frac{1}{x}})]\right)^{x-1} \frac{1}{2}(b^{\frac{1}{x}} - a^{\frac{1}{x}}),$$

οι οποίες σχέσεις μπορούν να γραφτούν βάση της σχέσης (3.61):

$$F_x = -\frac{1}{2}\rho^{1-\frac{1}{x}}\{[b^{\frac{1}{x}} - a^{\frac{1}{x}}]\rho + (b^{\frac{1}{x}} + a^{\frac{1}{x}})\}$$

$$\cdot \left\{ \ln\left(\frac{1}{2}[(b^{\frac{1}{x}} - a^{\frac{1}{x}})\rho + (b^{\frac{1}{x}} + a^{\frac{1}{x}})]\right) \right.$$

$$+ \left(-b^{\frac{1}{x}}\ln b^{\frac{1}{x}} + a^{\frac{1}{x}}\ln a^{\frac{1}{x}}\right)\rho$$

$$\left. + \left(-b^{\frac{1}{x}}\ln b^{\frac{1}{x}} - a^{\frac{1}{x}}\ln a^{\frac{1}{x}}\right)\right\}$$

και

$$F_\rho = 1 - \frac{x}{2}(b^{\frac{1}{x}} - a^{\frac{1}{x}})\rho^{1-\frac{1}{x}}$$

αντίστοιχα. Η  $F_x$  και η  $F_\rho$  είναι συνεχείς συναρτήσεις του  $x$  και του  $\rho$  για όλα τα  $x \in [2, p]$  και τα  $\rho \in [0, 1]$ . Η συνάρτηση  $F_x \geq 0$  βάση του λήμματος (3.2.3) για  $c = b^{\frac{1}{x}}$  και  $d = a^{\frac{1}{x}}$  και  $F_\rho \geq 0$  βάση του λήμματος (3.2.2).

Η παράγωγος του  $\rho$  η οποία είναι συνεχείς δίνεται από τον τύπο

$$\rho' = -\frac{F_x}{F_\rho} \leq 0, \quad (3.63)$$

με την ισότητα να ισχύει για  $\rho = 1$ . Άρα η συνάρτηση  $\rho$  μειώνεται αυστηρά για  $x \in [2, p]$ .

— — —◇— — —

### Απόδειξη (II) περίπτωσης του θεωρήματος 3.2.1

Έστω  $q$  που αναφέρεται σε οποιαδήποτε  $q$ -cyclic διαμέριση ενός  $p$ -cyclic πίνακα της μορφής (3.1) και έστω ότι ισχύει η (II) περίπτωση του θεωρήματος 3.2.1. Γνωρίζουμε ότι

$$\sigma(T_q^q) \setminus \{0\} \equiv \sigma(T_p^p) \setminus \{0\}, \quad q = 2(1)p. \quad (3.64)$$

Τότε, εάν  $-a_q^q$  και  $b_q^q$  δηλώνουν τις ακραίες ιδιοτιμές του  $T_q^q$ , όπου  $a_q, b_q > 0$ , τότε θα είναι

$$\alpha_q = a_q^{\frac{1}{q}}, \quad \beta_q = b_q^{\frac{1}{q}} \quad (3.65)$$

όπου έχουμε θέσει

$$a = \alpha^p, \quad b = \beta^p \quad (3.66)$$

Στην δική μας περίπτωση έχουμε :

$$\frac{p-2}{p} \leq \frac{\alpha}{\beta} < 1 \quad (3.67)$$

συνεπάγοντας ότι

$$1 > \frac{\alpha^p}{\beta^p} \geq \left(\frac{p-2}{p}\right)^p \quad (3.68)$$

Από τις παραπάνω σχέσεις και βάση του πορίσματος (3.2.1) εύκολα συμπεραίνουμε ότι :

$$1 > \frac{\alpha^q}{\beta^q} \geq \left(\frac{q-2}{q}\right), \quad q = 2(1)p, \quad (3.69)$$

ή ισοδύναμα

$$\frac{q-2}{q} \leq \frac{\alpha_q}{\beta_q} < 1, \quad q = 2(1)p, \quad (3.70)$$

Η βέλτιστη παράμετρος υπερχαλάρωσης της  $q$ -cyclic SOR θα δίνεται από τις εξισώσεις (3.32) και (3.33) με  $\rho = q$  και  $\alpha_r$  και  $\beta_r$  που δίνονται από την σχέση (3.36) όπου

$$\alpha_r = a^{\frac{1}{q}}, \beta_r = b^{\frac{1}{q}}.$$

Συνεπώς η  $\omega_q$  είναι η μοναδική θετική ρίζα στο διάστημα

$$(1, 1 + \frac{b^{\frac{1}{q}} - a^{\frac{1}{q}}}{b^{\frac{1}{q}} + a^{\frac{1}{q}}})$$

της εξίσωσης

$$\left(\frac{(a^{\frac{1}{q}} + b^{\frac{1}{q}})}{2}\omega\right)^q - \frac{(a^{\frac{1}{q}} + b^{\frac{1}{q}})}{(b^{\frac{1}{q}} - a^{\frac{1}{q}})}(\omega - 1) = 0 \quad (3.71)$$

ενώ η βέλτιστη φασματική ακτίνα δίνεται από την σχέση:

$$\rho_q = \frac{(a^{\frac{1}{q}} + b^{\frac{1}{q}})}{(b^{\frac{1}{q}} - a^{\frac{1}{q}})}(\omega_q - 1) = \left(\frac{(a^{\frac{1}{q}} + b^{\frac{1}{q}})}{2}\omega_q\right)^q. \quad (3.72)$$

Παραλείποντας τον δείκτη  $\{q\}$  από το  $\rho_q$  για ευκολία και συνδυάζοντας τις παραπάνω δύο σχέσεις παίρνουμε ότι

$$\rho = \left\{\frac{1}{2}[(b^{\frac{1}{q}} - a^{\frac{1}{q}})\rho + (a^{\frac{1}{q}} + b^{\frac{1}{q}})]\right\}^q \quad (3.73)$$

Τώρα βάζουμε το σύνολο των ακεραίων  $\{2, 3, \dots, p\}$  στο σύνολο των πραγματικών στο κλειστό διάστημα  $[2, p]$ .

Τότε σύμφωνα με τα παραπάνω διαπιστώνουμε ότι οι υποθέσεις του λήμματος (3.2.4) ισχύουν οπότε η συνάρτηση  $\rho$  είναι αυστηρά φθίνουσα συνάρτηση του  $x \in [2, p]$  δηλαδή  $\rho_p < \rho_{p-1} < \dots < \rho_3 < \rho_2 < 1$  το οποίο αποδεικνύει την σχέση (3.18) δηλαδή την δεύτερη περίπτωση του θεωρήματος.

— — —  $\diamond$  — — —

### Απόδειξη (I) περίπτωσης του θεωρήματος 3.2.1

Σε αυτή την περίπτωση ικανοποιείται η σχέση (3.8) ή ισοδύναμα:

$$0 \leq \frac{\alpha^p}{\beta^p} < \left(\frac{p-2}{p}\right)^p$$

Από τις σχέσεις (3.65) – (3.66) και το Πρόρισμα (3.2.1) και επειδή

$$0 = \left(\frac{2-2}{2}\right)^2$$

εύκολα καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι υπάρχει ένας ακέραιος  $l \in \{2, 3, \dots, p-1\}$  τέτοιος ώστε

$$0 \leq \left(\frac{l-2}{l}\right)^l \leq \frac{\alpha_l^l}{\beta_l^l} = \frac{\alpha^p}{\beta^p} = \frac{\alpha_{l+1}^{l+1}}{\beta_{l+1}^{l+1}} < \left(\frac{l-1}{l+1}\right)^{l+1} \leq \left(\frac{p-2}{p}\right)^p \quad (3.74)$$

από τα οποία προκύπτει η σχέση (3.9). Από την παραπάνω όμως σχέση συνεπάγεται η εξής ανισότητα:

$$0 \leq \frac{l-2}{l} \leq \frac{\alpha_l}{\beta_l},$$

### 3.2 Θεωρήματα για την εύρεση της βέλτιστης διαμέρισης, παραμέτρου υπερχαλάρωσης και φασματικής ακτίνας στην *SOR* μέθοδο για *p*-cyclic πίνακα. 45

που έχει την ίδια μορφή με την σχέση της (II) περίπτωσης του θεωρήματος με  $l$  αντί  $p$ . Το παραπάνω γεγονός μας οδηγεί στην ισχύ της σχέσης (3.10). Από την άλλη πλευρά για όλα τα  $q = l + 1(1)p$  η ανάλυση για την θετική περίπτωση οδηγεί στην περίπτωση (3.11). Απομένει λοιπόν να συγκρίνουμε το  $\rho_l$  και το  $\rho_{l+1}$  που είναι δηλωμένα στο Θεώρημα 3.2.2. Για την βέλτιστη *l*-cyclic *SOR* ισχύει ότι

$$\frac{l-2}{l} \leq \frac{\alpha_l}{\beta_l} < 1$$

οπότε οι σχέσεις (3.32) – (3.33) αντιστοιχούν στην σχέση (3.36). Με άλλα λόγια υπάρχει  $\omega_l$  μοναδική ρίζα στο διάστημα

$$(1, 1 + \frac{\beta_l^p - \alpha_l^p}{\beta_l^p + \alpha_l^p}) \quad (3.75)$$

της εξίσωσης

$$(\frac{(\alpha_l^p + \beta_l^p)}{2}\omega)^l - \frac{(\alpha_l^p + \beta_l^p)}{(\beta_l^p - \alpha_l^p)}(\omega - 1) = 0,$$

όπου η φασματική ακτίνα  $\rho_l$  δίνεται από την σχέση :

$$\rho_l = \frac{(\alpha_l^p + \beta_l^p)}{(\beta_l^p - \alpha_l^p)}(\omega_l - 1) = (\frac{(\alpha_l^p + \beta_l^p)}{2}\omega_l)^l$$

Για την βέλτιστη  $(l+1)$ -cyclic *SOR* ισχύει ότι

$$0 \leq \frac{a_{l+1}}{b_{l+1}} < \frac{l-1}{l+1}$$

οπότε οι σχέσεις (3.32) – (3.33) αντιστοιχούν στην σχέση (3.35). Έτσι η παράμετρος  $\omega_{l+1}$  στο διάστημα  $(1, \frac{l+1}{l})$  είναι ρίζα της εξίσωσης :

$$(\beta^{\frac{p}{l+1}}\omega)^{l+1} - \frac{(l+1)^{l+1}}{l^l}(\omega - 1) = 0$$

και η φασματική ακτίνα  $\rho_{l+1}$  δίνεται από την σχέση :

$$\rho_{l+1} = (\frac{l}{l+1}\beta^{\frac{p}{l+1}}\omega_{l+1})^{l+1} = l(\omega_{l+1} - 1).$$

Εξαλείφοντας τις παραμέτρους  $\omega_l, \omega_{l+1}$  από τις σχέσεις των φασματικών ακτίνων έχουμε ότι

$$\rho_l = \left\{ \frac{1}{2}[(\beta_l^p - \alpha_l^p)\rho_l + (\beta_l^p + \alpha_l^p)] \right\}^l \quad (3.76)$$

και

$$\rho_{l+1} = \beta^p \left( \frac{l + \rho_{l+1}}{l+1} \right)^{l+1}. \quad (3.77)$$

Επίσης για σταθερό  $\beta$  εάν

$$\frac{\alpha}{\beta} = \left(\frac{\alpha_l}{\beta_l}\right)^{\frac{l}{p}} \in \left[\left(\frac{l-2}{l}\right)^{\frac{l}{p}}, 1\right)$$

και

$$\frac{\alpha}{\beta} = \left(\frac{\alpha_{l+1}}{\beta_{l+1}}\right)^{\frac{l+1}{p}} \in \left[0, \left(\frac{l-1}{l+1}\right)^{\frac{l+1}{p}}\right)$$

η  $\rho_l$  είναι μια αυστηρά αυξανόμενη συνάρτηση του  $\alpha$  όταν η φασματική ακτίνα  $\rho_{l+1}$  είναι σταθερό. Από την παραπάνω ανάλυση έχουμε ότι για:

$$\frac{\alpha_l}{\beta_l} = \frac{l-2}{l} \quad \rho_l < \rho_{l+1}$$

καθώς και για

$$\frac{\alpha_{l+1}}{\beta_{l+1}} = \frac{l-1}{l+1} \quad \rho_{l+1} < \rho_l$$

για

$$\frac{\alpha}{\beta} \in \left(\left(\frac{l-2}{l}\right)^{\frac{l}{p}}, \left(\frac{l-1}{l+1}\right)^{\frac{l+1}{p}}\right)$$

όπου υπάρχει μοναδική τιμή του  $\alpha$  δηλωμένη από την  $a_{l,l+1}$  τέτοια ώστε  $\rho_l = \rho_{l+1}$ . Για να καθορίσουμε την φασματική ακτίνα  $\rho := \rho_l = \rho_{l+1}$  βρίσκουμε μοναδική τιμή του  $\rho \in (0, 1)$  που ικανοποιεί την σχέση (3.77)

$$\rho = \beta^p \left(\frac{l+\rho}{l+1}\right)^{l+1} \quad (3.78)$$

$$h(\rho) := \beta^p(l+\rho)^{l+1} - (l+1)^{l+1}\rho = 0 \quad (3.79)$$

και επαληθεύει τις σχέσεις:

$$h(0) = \beta^p(l+1)^{l+1} > 0 \quad (3.80)$$

$$h(1) = (l+1)^{l+1}(\beta^p - 1) < 0 \quad (3.81)$$

και

$$h'(\rho) = (l+1)\beta^p(l+\rho)^l - (l+1)^{l+1} \quad (3.82)$$

$$\sim \beta^p(l+\rho)^{l+1} - (l+1)^l(l+\rho) \sim (l+1)\rho - (l+\rho) = l(\rho - 1)$$

Παρατηρούμε λοιπόν οτι  $h'(\rho) < 0$  για όλα τα  $\rho \in (0, 1)$ . Έχοντας λοιπόν βρει το  $\rho$  λύνουμε την σχέση (3.79) ως προς  $\alpha$  και έχουμε:

### 3.2 Θεωρήματα για την εύρεση της βέλτιστης διαμέρισης, παραμέτρου υπερχαλάρωσης και φασματικής ακτίνας στην *SOR* μέθοδο για *p*-cyclic πίνακα. 47

$$\alpha_{l,l+1} = \left( \frac{2\rho^{\frac{1}{l}} - (1+\rho)\beta_l^{\frac{p}{l}}}{1-\rho} \right)^{\frac{l}{p}} \quad (3.83)$$

Από τα παραπάνω λοιπόν κατάληγουμε στην ισχύ της (I) περίπτωσης του θεωρήματος 3.2.1

— — —  $\diamond$  — — —

#### Απόδειξη (III) περίπτωσης του θεωρήματος 3.2

Στην περίπτωση που  $0 < \alpha = \beta < 1$  υποθέτουμε ότι  $\alpha \rightarrow \beta^-$ . Σε αυτή την περίπτωση τα αποτελέσματα της περίπτωσης (II) εφαρμόζονται αφού για τιμές του  $\alpha$  πολύ κοντά στο  $\beta$  θα είναι

$$1 > \frac{\alpha_q}{\beta_q} = \frac{\alpha^{\frac{p}{q}}}{\beta^{\frac{p}{q}}} > \left( \frac{p-2}{p} \right)^{\frac{p}{q}} \geq \frac{q-2}{q}, \quad q = 2(1)p \quad (3.84)$$

Οπότε η βέλτιστη τιμή του  $q$  θα βρεθεί από τις σχέσεις (3.71), (3.72):

$$(\beta^{\frac{p}{q}} - \alpha^{\frac{p}{q}}) \left( \frac{(\beta^{\frac{p}{q}} + \alpha^{\frac{p}{q}})}{2} \omega \right)^q - (\beta^{\frac{p}{q}} + \alpha^{\frac{p}{q}})(\omega - 1) = 0 \quad (3.85)$$

και

$$\rho_q = \left( \frac{(\beta^{\frac{p}{q}} + \alpha^{\frac{p}{q}})}{2} \omega_q \right)^q \quad (3.86)$$

Για  $\alpha \rightarrow \beta^-$  η σχέση (3.85) δίνει όριο  $\omega_q = 1$  για όλα τα  $q = 2(1)p$  και η σχέση (3.86)  $\rho_q = \beta^p$  για όλα τα  $q = 2(1)p$ . Άρα η φασματική ακτίνα είναι σταθερή ανεξάρτητη της διαμέρισης, οπότε οποιαδήποτε *q*-cyclic με  $q = 2(1)p$  είναι η βέλτιστη *SOR*.

#### Απόδειξη (IV) περίπτωσης του θεωρήματος 3.2.1

Για την απόδειξη της (IV) περίπτωσης του θεωρήματος 3.2 η διαδικασία είναι ανάλογη της (II) περίπτωσης.

Σε αυτή την περίπτωση

$$y(x) = \left( \frac{x}{x-2} \right)^x, \quad x \in (2, \infty)$$

Για  $x = 2, y(2) = \infty$  όπου  $y(x)$  είναι η αντίστροφη της συνάρτησης του πρώτου λήμματος και του πορίσματος και είναι αυστηρά φθίνουσα για τα  $x \in [2, \infty)$

Οπότε,

$$1 < \frac{\alpha_q}{\beta_q} = \frac{\alpha_q^{\frac{p}{q}}}{\beta_q^{\frac{p}{q}}} \leq \left(\frac{p}{p-2}\right)^{\frac{p}{q}} \leq \frac{q}{q-2}, \quad q = 2(1)p \quad (3.87)$$

και η βέλτιστη παράμετρος:

$$\omega_q \in \left(1 + \frac{b^{\frac{l}{q}} - a^{\frac{l}{q}}}{b^{\frac{l}{q}} + a^{\frac{l}{q}}}, 1\right)$$

Η φασματική ακτίνα δίνεται από την σχέση (3.73). Οπότε όπως και στη περίπτωση (II) του θεωρήματος (3.2.1) είναι φθίνουσα συνάρτηση άρα  $\rho_p < \rho_{p-1} < \dots < \rho_2 < 1$ .

### Απόδειξη (V) περίπτωσης του θεωρήματος 3.2.1

Τέλος για την απόδειξη της (V) περίπτωσης του θεωρήματος 3.2 βασιζόμενοι στα αποτελέσματα [25] εάν

$$\rho(T) = \alpha < \frac{p}{p-2}$$

δεν είναι αποτελεσματική ενώ αν

$$\rho(T) = \alpha \geq \frac{p}{p-2}$$

η p-cyclic SOR δεν θα συγκλίνει για καμία τιμή του  $\omega$ .

Αλλά η περίπτωση της q-cyclic διαμέρισης οδηγώντας στην βέλτιστη SOR δεν περιλαμβάνεται. Για παράδειγμα για  $q = 2$  θα είναι

$$\left(\frac{p}{p-2}\right)^p < \frac{\alpha^p}{\beta^p} = \frac{\alpha_2^2}{\beta_2^2} < \infty$$

η οποία συγκλίνει για την βέλτιστη 2-cyclic SOR. Οπότε είναι φανερό ότι στην περίπτωση της φθίνουσας συνάρτησης  $\left(\frac{x}{x-2}\right)^x$  υπάρχει μοναδικός ακέραιος

$$k \in \{2, \dots, p\}$$

τέτοιος ώστε να ικανοποιεί την σχέση (3.23). Γι αυτό το λόγο για  $q = k + 1(1)p$  η βέλτιστη q-SOR δεν θα συγκλίνει. Για όλα τα  $q \in \{2, \dots, \min(p-1, k)\}$  η διαδικασία απόδειξης είναι ανάλογη της απόδειξης της πρώτης περίπτωσης του θεωρήματος. Με άλλα λόγια απαιτούμε την ύπαρξη ενός μοναδικού ακεραίου  $l$  που να ικανοποιεί την σχέση (3.24) που είναι κάτι το αληθές αφού η συνάρτηση  $\left(\frac{x}{x-2}\right)^x$  είναι φθίνουσα. Για όλα τα  $q = l + 1(1)k$  θα ισχύει

$$\left(\frac{q}{q-2}\right)^{\frac{q}{p}} \leq \left(\frac{l+1}{l-1}\right)^{\frac{(l+1)}{p}} < \left(\frac{\alpha_q}{\beta_q}\right)^{\frac{q}{p}} = \frac{\alpha}{\beta} \left(\leq \left(\frac{l}{l-2}\right)^{\frac{l}{p}}\right)$$

### 3.2 Θεωρήματα για την εύρεση της βέλτιστης διαμέρισης, παραμέτρου υπερχαλάρωσης και φασματικής ακτίνας στην $SOR$ μέθοδο για $p$ -cyclic πίνακα. 49

που δείχνει ότι ισχύει η σχέση (3.26). Για  $q = 2(1)l$  η απόδειξη είναι ανάλογη της (IV) περίπτωσης του θεωρήματος. Για  $l = k$  η ανάλυση ως τώρα μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι η βέλτιστη  $SOR$  είναι η  $l$ -cyclic  $SOR$ . Για  $l < k$  για να αποφασίσουμε ποιο από τα  $\rho_l$  και  $\rho_{l+1}$  είναι το μικρότερο, δηλώνουμε ότι για  $\alpha \in (0, (\frac{l+1}{l-1})^{\frac{l+1}{p}})$  και για ένα  $\beta$  τέτοιο ώστε :

$$\frac{\alpha}{\beta} \in ((\frac{l+1}{l-1})^{\frac{l+1}{p}}, (\frac{l}{l-2})^{\frac{l}{p}})$$

η φασματική ακτίνα  $\rho_l$  αυξάνεται με το  $\beta$ . Για την υπόλοιπη απόδειξη ακολουθούμε μια ανάλογη απόδειξη όπως στην πρώτη περίπτωση.

— — —  $\diamond$  — — —

Τα παραπάνω θεωρήματα τα συνοψίζουμε στον εξής πίνακα :

Περίπτωση	ΤΙΜΗ του λόγου $\alpha/\beta$	Τιμές του $l$ και $\alpha_{l,l+1}$	Επιπλέον υπόχωροι	Διαμέριση $r$ για την βέλτιστη $SOR$
I	(i) 0 ( $0=\alpha < \beta < 1$ ) (i)( $0, (p-2/p)$ )	— Δηλώνω το μεγαλύτερο ακέραιο $l \in \{2, 3, \dots, p-1\} :$ $((l-2)/l)^l \leq (\alpha/\beta)^p$	— $(\alpha)(l-2)/l^{l/p}\beta$ $\leq \alpha < \alpha_{l,l+1}$ $(\beta)a = \alpha_{l,l+1}$ $(c)\alpha_{l,l+1} < a <$ $((l-1)/l+1)^{(l-1/p)}\beta$	2 $l$  $l, l+1$ $l+1$
II	$[(p-2/p), 1)$	—	—	$p$
III	1 ( $0 \leq a = b < 1$ )	—	—	$2, 3, \dots, p$
IV	$(1, p/p-2]$	—	—	$p$
V	(i)( $p/p-2, \infty$ )	Δηλώνω το μεγαλύτερο ακέραιο $k \in \{2, 3, \dots, p\} :$ $((k-2)/k)^k \leq (1/a^p)$ $l \in \{2, 3, \dots, \min(p-1, k)\} :$ $((l-2)/l)^l \leq (\beta/\alpha)^p$	(A) $l = k$ (B) $l < k$ (a) $((l-2)/l)^{l/p}a$ $\leq \beta < \beta_{l,l+1}$ (b) $\beta = \beta_{l,l+1}$ (c) $\beta_{l,l+1} < \beta$ $< ((l-1)/l+1)^{(l+1)/p}a$	$l$ $l$ $l$  $l, l+1$ $l+1$
	(ii) $\infty$ ( $a > 0, \beta = 0$ )	—	—	2

## Κεφάλαιο 4

# HERMITE COLLOCATION ΜΕΘΟΔΟΣ για προβλήματα συνοριακών τιμών

### 4.1 Εισαγωγή

Η γενική μορφή των προβλημάτων συνοριακών τιμών για συντομία δίνονται από την σχέση:

$$Lu(x) = f(x), \quad x \in \Omega \quad (4.1)$$

όπου  $L$  είναι ο διαφορικός τελεστής και για τις συνοριακές τιμές η σχέση είναι

$$Bu(x) = g(x), \quad x \in \partial\Omega \quad (4.2)$$

$B$  τελεστής.

Το πρόβλημα των συνοριακών τιμών που θα μελετήσουμε εμείς είναι το:

$$u''(x) + F(x)u(x) = g(x), \quad x \in I_x \equiv [a, b] \quad (4.3)$$

με περιοδικές συνοριακές συνθήκες:

$$u(a) - z_1 u(b) = w_1 \quad (4.4)$$

$$u'(a) - z_1 u'(b) = w_2 \quad (4.5)$$

Η επιλογή της μεθόδου διακριτοποίησης για μετάβαση από τον συνεχή χώρο στο διακριτό δηλαδή την μετατροπή του προβλήματος συνοριακών τιμών σε ένα γραμμικό σύστημα  $Ca = b$  εί-

ναι η collocation μέθοδος χρησιμοποιώντας ως συναρτήσεις βάσεις τα κυβικά Hermite πολυώνυμα.

Συγκεκριμένα θεωρούμε την ομοιόμορφη διαμέριση του διαστήματος  $I_x$  σε  $N$  υποδιαστήματα  $I_j \equiv [x_j, x_{j+1}]$ ,  $j = 1, \dots, N$  τα οποία παράγουν πλέγμα με βήμα διακριτοποίησης μήκους  $h = \frac{b-a}{N}$  και συντεταγμένες κόμβων  $x_m = a + (m-1)h$   $m = 1, \dots, N+1$ . Ως συναρτήσεις βάσεις χρησιμοποιούμε τα κυβικά Hermite πολυώνυμα  $\phi_{2m-1}(x)$  και  $\phi_{2m}(x)$  και η συνάρτηση  $u_n(x)$  προσεγγίζεται από την

$$u(x) \simeq u_n(x) = \sum_{m=1}^{N+1} [a_{2m-1}\phi_{2m-1}(x) + a_{2m}\phi_{2m}(x)] \quad (4.6)$$

Ως μέθοδο διακριτοποίησης όπως αναφέραμε πιο πάνω χρησιμοποιούμε την collocation μέθοδο και για την επίλυση του γραμμικού συστήματος  $Ca = b$  την επαναληπτική μέθοδο *SOR*.

## 4.2 Κυβικά Hermite Πολυώνυμα

Σε αυτή την περίπτωση θεωρούμε ότι το διάστημα  $S$  περιέχει όλες τις συναρτήσεις που είναι συνεχής στο διάστημα  $[0, 1]$  καθώς και η πρώτη τους παράγωγος είναι συνεχής συνάρτηση. Θέλουμε τέσσερις μεταβλητές για κάθε διάστημα, δηλαδή συνολικά  $4N$ . Έχουμε δύο συνεχείς συνθήκες σε κάθε εσωτερικό κόμβο. Οι ελεύθεροι συντελεστές είναι  $n = 4N - 2(N-1) = 2N + 2 = 2(N+1)$ .

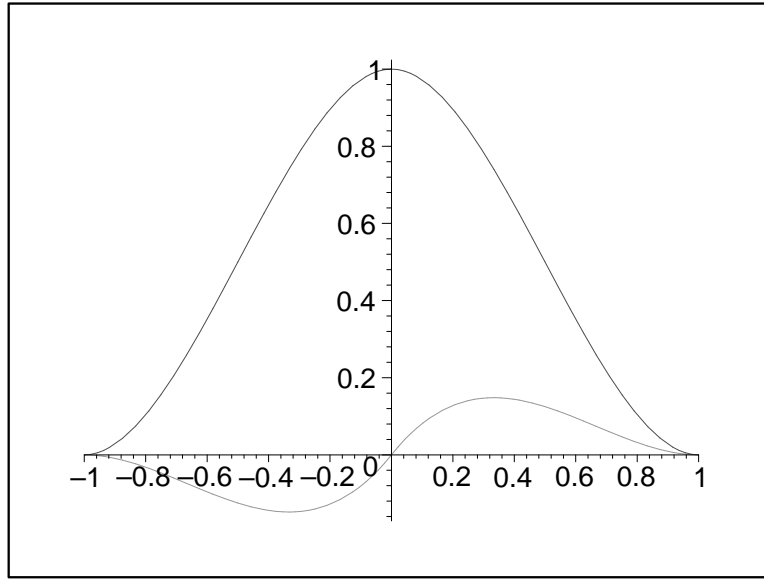
Η βάση των κυβικών πολυώνυμων αποτελείται από τις δύο συναρτήσεις  $\phi_{2m-1}(x)$  και  $\phi_{2m}(x)$  που ορίζονται σε κάθε κόμβο  $x_m$ ,  $m = 1, \dots, N+1$  ως εξής:

$$\phi_{2m-1}(x) = \begin{cases} \phi\left(\frac{x-x_m}{h_{m-1}}\right) & , x \in I_{m-1} \\ \phi\left(\frac{x-x_m}{h_m}\right) & , x \in I_m \\ 0 & , \text{αλλου} \end{cases} \quad (2.2)$$

$$\phi_{2m}(x) = \begin{cases} h_{m-1}\psi\left(\frac{x-x_m}{h_{m-1}}\right) & , x \in I_{m-1} \\ h_m\psi\left(\frac{x-x_m}{h_m}\right) & , x \in I_m \\ 0 & \text{αλλου} \end{cases} \quad (2.3)$$

όπου  $\phi_{2m-1}(x)$  και  $\phi_{2m}(x)$  είναι τα γενικά κυβικά Hermite και στο διάστημα  $[-1, 1]$  δίνονται από τις σχέσεις

$$\phi_{2m-1}(x) = \begin{cases} -2x^3 - 3x^2 + 1 & , -1 \leq x \leq 0 \\ 2x^3 - 3x^2 + 1 & , 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & , \text{αλλου} \end{cases}$$



Σχήμα 4.1: Πολυώνυμα Hermite

$$\phi_{2m}(x) = \begin{cases} x^3 + 2x^2 + x & , -1 \leq x \leq 0 \\ x^3 - 2x^2 + x & , 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{αλλου} \end{cases}$$

Ένα άμεσο συμπέρασμα των παραπάνω διευκρινίσεων που μπορεί να επαληθεύσει κανείς είναι ότι η τιμή της προσεγγιστικής λύσης  $u_n(x)$  για οποιαδήποτε  $x$  στο διάστημα  $I_m$  μπορεί να υπολογιστεί

$$u_n(x) = \sum_{j=2m-1}^{2m+2} a_j \phi_j(x), x \in I_m \quad (4.7)$$

Η παραπάνω σχέση συνδιασμένη με τις βασικές προϋποθέσεις των κυβικών Hermite πολυωνύμων μας:

$$\phi_{2m-1}(x_k) = \delta_{m,k} \quad (4.8)$$

$$\phi'_{2m-1}(x_k) = 0 \quad (4.9)$$

$$\phi_{2m}(x_k) = 0 \quad (4.10)$$

$$\phi'_{2m}(x_k) = \frac{1}{h} \delta_{m,k} \quad (4.11)$$

όπου  $\delta_{m,k}$  δηλώνει το Δέλτα του Kronecker.

συνεπάγει ότι:

$$a_{2m-1} = u_n(x_m) \quad (4.12)$$

$$a_{2m+1} = u_n(x_{m+1}) \quad (4.13)$$

$$a_{2m} = hu'_n(x_m) \quad (4.14)$$

$$a_{2m+2} = hu'_n(x_{m+1}) \quad (4.15)$$

### 4.3 Collocation μέθοδος

Στην διακριτοποίηση η collocation μέθοδος υπάρχει απαιτώντας το υπόλοιπο  $Lu_n - f$  να μηδενίζεται στα εσωτερικά σημεία της διαμέρισης του πεδίου  $\Omega$   $a < \sigma_2 < \sigma_3 \dots < \sigma_{n-1}$  και απαιτώντας η προσεγγιστική λύση  $u_n$  να ικανοποιεί τις συνοριακές συνθήκες στα δύο συνοριακά collocation σημεία  $\sigma_1 = a, \sigma_n = b$ .

Ανάλογα για τις  $n$  collocation εξισώσεις είναι:

$$Lu(\sigma_i) = f(\sigma_i), \sigma_i \in \Omega \quad (4.16)$$

$$Bu(\sigma_i) = g(\sigma_i), \sigma_i \in \partial\Omega \quad (4.17)$$

Στα προβλήματα των συνοριακών τιμών ως εσωτερικά collocation σημεία διαλέγουμε τα Gauss Points που είναι στο διάστημα  $[-1, 1]$  οι ρίζες του Legendre πολυωνύμου δευτέρου βαθμού και δηλώνονται από τις σχέσεις :

$$\sigma_{2j} = x_j + h\sigma \quad (4.18)$$

$$\sigma_{2j+1} = x_j + h\bar{\sigma} \quad (4.19)$$

με

$$\sigma = \frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{3}} \quad (4.20)$$

και

$$\bar{\sigma} = \frac{\sqrt{3} + 1}{2\sqrt{3}} \quad (4.21)$$

Έτσι χρησιμοποιώντας τα παραπάνω και ανάλογα το πρόβλημα των συνοριακών δημιουργείται ο πίνακας της collocation  $C$ .



## Κεφάλαιο 5

# P-Cyclic SOR για προβλήματα συνοριακών τιμών με περιοδικές συνοριακές συνθήκες

### 5.1 Εισαγωγή

Στην παρούσα μελέτη βασιζόμενη στα θεωρήματα που απέδειξαν οι Γαλάνης και Χατζηδημόσης και τα οποία παραθέσαμε στο τρίτο κεφάλαιο ασχοληθήκαμε με την διαμέριση των p-cyclic πινάκων για τα προβλήματα συνοριακών τιμών με περιοδικές συνοριακές συνθήκες χρησιμοποιώντας την μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων. Ως πρόβλημα μας θεωρήσαμε το 2 – point πρόβλημα συνοριακών τιμών

$$u''(x) + F(x)u(x) = g(x), \quad x \in I_x \equiv [a, b] \quad (5.1)$$

με περιοδικές συνοριακές συνθήκες:

$$u(a) - z_1 u(b) = w_1 \quad (5.2)$$

$$u'(a) - z_2 u'(b) = w_2 \quad (5.3)$$

και ως μέθοδο αριθμητικής επίλυσης του, τη Collocation μέθοδο με βάσεις τα Hermite Cubics πολυώνυμα .

Θα πρέπει να σημειωθεί ότι τέτοια προβλήματα έχουν πολλές και χρήσιμες εφαρμογές όπως για παράδειγμα στην Κβαντομηχανική Θεωρία ,στην κίνηση των πλανητών και σε πολλές άλλες.

## 5.2 Ορισμός του Collocation πίνακα

Όπως αναφέραμε και στο προηγούμενο κεφάλαιο η διακριτοποίηση της Collocation μέθοδου μπορεί να επιτευχθεί απαιτώντας το υπόλοιπο  $Lu_n - f$  να μηδενίζεται, δηλαδή μηδενίζοντας το υπόλοιπο  $R_n(x) \equiv u_n''(x) + F(x)u_n(x) - g(x)$  στα  $n-2 = 2N$  (δύο σε κάθε διάστημα) εσωτερικά collocation σημεία  $a < \sigma_2 < \sigma_3 \dots < \sigma_{n-1}$  και απαιτώντας η προσεγγιστική λύση  $u_n$  να ικανοποιεί τις συνοριακές συνθήκες στα δύο συνοριακά collocation σημεία  $\sigma_1 = a, \sigma_n = b$ . Δηλαδή,

$$u_n''(\sigma_k) + F(\sigma_k)u_n(\sigma_k) = g(\sigma_k), \quad k = 2, \dots, n-1 \quad (5.4)$$

$$u_n(\sigma_1) - z_1 u_n(\sigma_n) = w_1 \quad (5.5)$$

$$u_n'(\sigma_1) - z_2 u_n'(\sigma_n) = w_2 \quad (5.6)$$

Μια ισοδύναμη διατύπωση των παραπάνω εξισώσεων είναι το γραμμικό σύστημα των γραμμικών εξισώσεων με αγνώστους  $a_j, j = 1..n$  δηλαδή το σύστημα

$$C\alpha = \mathbf{b} \quad (5.7)$$

όπου  $C$  είναι ο  $n \times n$  collocation πίνακας,  $\alpha = [\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n]^T$  είναι το διάνυσμα των αγνώστων και  $\mathbf{b} = [b_1 b_2 \dots b_n]^T$  το διάνυσμα του δεξιού μέρους. Γνωρίζοντας ότι σε κάθε υποδιάστημα  $I_j, j = 1..N$  αντιστοιχούν δύο εσωτερικά collocation σημεία  $\sigma_{2j}$  και  $\sigma_{2j+1}$  και συνδυάζοντας τα παραπάνω μπορούμε εύκολα να διαπιστώσουμε ότι στοχειώδης εξίσωση για το  $j$ -οστο στοιχείο  $I_j$  θα δίνεται από :

$$C_j \begin{bmatrix} \alpha_{2j-1} \\ \alpha_{2j} \\ \alpha_{2j+1} \\ \alpha_{2j+2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g(\sigma_{2j}) \\ g(\sigma_{2j+1}) \end{bmatrix} \quad (5.8)$$

όπου  $C_j$  είναι ο στοιχειώδης collocation πίνακας που δηλώνεται ως εξής:

$$C_j = \begin{bmatrix} \Phi_{2j-1}^{2j} & \Phi_{2j}^{2j} & \Phi_{2j+1}^{2j} & \Phi_{2j+2}^{2j} \\ \Phi_{2j-1}^{2j+1} & \Phi_{2j}^{2j+1} & \Phi_{2j+1}^{2j+1} & \Phi_{2j+2}^{2j+1} \end{bmatrix} \quad (5.9)$$

με  $\Phi_i^k = \phi_i''(\sigma_k) + F(\sigma_k)\phi_i(\sigma_k)$ .

Ενώ οι συνοριακές συνθήκες δίνονται από τη σχέση:

$$\begin{bmatrix} \phi_1(a) & 0 \\ 0 & \phi_2'(a) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} z_1 \phi_{2N+1}(b) & 0 \\ 0 & z_2 \phi_{2N+2}'(b) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_{2N+1} \\ \alpha_{2N+2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}. \quad (5.10)$$

Οι εξισώσεις των συνοριακών συνθηκών δίνονται και από τη σχέση :

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} - Z \begin{bmatrix} \alpha_{2N+1} \\ \alpha_{2N+2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_1 \\ hw_2 \end{bmatrix} \quad (5.11)$$

όπου  $Z = \text{diag}(z_1, z_2)$ . Διαλέγοντας ως εσωτερικά collocation σημεία τα Gauss-points και χρησιμοποιώντας τα κυβικά Hermite πολυώνυμα λαμβάνουμε ότι:

$$C_j = \frac{1}{h^2} [A_j \quad B_j], \quad j = 1, \dots, N \quad (5.12)$$

όπου

$$A_j = \begin{bmatrix} c_1 + d_1 h^2 F(\sigma_{2j}) & c_2 + d_2 h^2 F(\sigma_{2j}) \\ c_3 + d_3 h^2 F(\sigma_{2j+1}) & c_4 + d_4 h^2 F(\sigma_{2j+1}) \end{bmatrix} \quad (2.17) \quad (5.13)$$

και

$$B_j = \begin{bmatrix} c_3 + d_3 h^2 F(\sigma_{2j}) & -c_4 - d_4 h^2 F(\sigma_{2j}) \\ c_1 + d_1 h^2 F(\sigma_{2j+1}) & -c_2 - d_2 h^2 F(\sigma_{2j+1}) \end{bmatrix} \quad (2.18) \quad (5.14)$$

με

$$c_1 = -2\sqrt{3} \quad c_2 = -1 - \sqrt{3} \quad c_3 = 2\sqrt{3} \quad c_4 = -1 + \sqrt{3}$$

$$d_1 = \frac{9 + 4\sqrt{3}}{18} \quad d_2 = \frac{3 + \sqrt{3}}{36} \quad d_3 = \frac{9 - 4\sqrt{3}}{18} \quad d_4 = \frac{3 - \sqrt{3}}{36}$$

Τα παραπάνω λοιπόν μας οδηγούν στον collocation πίνακα συντελεστών  $C$  στην block  $(N + 1)$ -κυκλική μορφή όπου δίνεται από τον τύπο :

$$C = \frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} h^2 I & O & O & O & \dots & O & O & -h^2 Z \\ A_1 & B_1 & O & O & \dots & O & O & O \\ O & A_2 & B_2 & O & \dots & O & O & O \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ O & O & O & O & \dots & O & A_N & B_N \end{bmatrix} \quad (2.19) \quad (5.15)$$

όπου  $O$  συμβολίζουμε τον  $2 \times 2$  μηδενικό πίνακα.

Επίσης για την αποφυγή υπολογιστικών λαθών αντι για το σύστημα  $C\mathbf{a} = \mathbf{b}$  χρησιμοποιήσαμε το ισοδύναμο του

$$\hat{C}\mathbf{a} = h^2 \mathbf{b} \quad (5.16)$$

όπου  $\hat{C} = h^2 C$ .

Τέλος από τα παραπάνω με εύκολους υπόλογισμους μπορούμε να καταλήξουμε στο συμπέρασμα ότι:

$$\det(A_j) = \det(B_j) \quad (5.17)$$

και

$$\det(B_j) \neq 0 \quad (5.18)$$

όταν

$$12[F(\sigma_{2j}) + F(\sigma_{2j+1})] + F(\sigma_{2j})F(\sigma_{2j+1}) \neq -432$$

που είναι σημαντική συνθήκη για να είναι ο πίνακας μας καλά ορισμένος.

### 5.3 Βέλτιστη διαμέριση SOR

Υποθέτουμε ότι έχουμε τον παραπάνω  $p \times p$  ( $p \in [2, N + 1]$ ) block διαμερισμένο πίνακα  $\hat{C}$  και κάτω από τις συνθήκες της αντιστρεψιμότητας μπορούμε να τον γράψουμε ως εξής:

$$\hat{C} = D_p - L_p - U_p \quad (5.19)$$

όπου  $D_p$  είναι ο block διαγώνιος πίνακας με τετραγωνικούς και αντιστρέψιμους block υποπίνακες,  $L_p$  είναι αυστηρά κάτω block τριγωνικός πίνακας και  $U_p$  είναι αυστηρά άνω block τριγωνικός πίνακας. Ο δείκτης  $p$  δηλώνει επίσης τον δείκτη κυκλικότητας. Η αντίστοιχη με τον πίνακα  $\hat{C}$  block SOR επαναληπτική μέθοδος περιγράφεται από τις παρακάτω σχέσεις:

$$x^{(m+1)} = \mathcal{L}_{\omega,p} x^{(m)} + c_{\omega,p}, m = 0, 1, \dots \quad (5.20)$$

$$\mathcal{L}_{\omega,p} = (D_p - \omega \mathcal{L}_p)^{-1} [(1 - \omega) D_p + \omega U_p] \quad (5.21)$$

$$c_{\omega,p} = \omega (D_p - \omega \mathcal{L}_p)^{-1} h^2 b \quad (5.22)$$

με  $x^{(0)}$  αρχικό,  $\mathcal{L}_{\omega,p}$  να είναι ο πίνακας της SOR επαναληπτικής μεθόδου και  $\omega \in (0, 2)$  να είναι η παράμετρος της υπερχαλάρωσης. Γνωρίζουμε από τα προηγούμενα κεφάλαια ότι το κριτήριο για τον ασυμπτωτικό ρυθμό σύγκλισης της SOR μεθόδου είναι η φασματική ακτίνα  $\rho(\mathcal{L}_{\omega,p})$  και η συνθήκη  $\rho(\mathcal{L}_{\omega,p}) < 1$  είναι η απαραίτητη και αναγκαία συνθήκη για τη σύγκλιση.

Το πρόβλημα της εύρεσης της βέλτιστης SOR μεθόδου είναι ισοδύναμο με το πρόβλημα του καθορισμού του δείκτη  $q \in [2, N + 1]$  τέτοιο ώστε:

$$\rho(\mathcal{L}_{\omega_q}, q) < \rho(\mathcal{L}_{\omega_p}, p) \quad \text{για} \quad p \neq q \quad (5.23)$$

όπου  $\omega_q$  και  $\omega_p$  δηλώνουν αντίστοιχα τις βέλτιστες παραμέτρους υπερχαλάρωσης των πινάκων  $\mathcal{L}_{\omega,q}$  και  $\mathcal{L}_{\omega,p}$  της SOR μεθόδου. Η λύση του προβλήματος εξαρτάται από τον καθορισμό του φάσματος  $\sigma(\mathcal{J}_{N+1}^{N+1})$  όπου

$$\mathcal{J}_{N+1} = D_{N+1}^{-1}(L_{N+1} + U_{N+1}) = \begin{bmatrix} O & O & O & O & \dots & O & O & Z \\ R_1 & O & O & O & \dots & O & O & O \\ O & R_2 & O & O & \dots & O & O & O \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ O & O & O & O & \dots & O & R_N & O \end{bmatrix} \quad (5.24)$$

είναι ο consistently ordered weakly cyclic of index  $N+1$  block Jacobi επαναληπτικός πίνακας.

Οι υποπίνακες  $R_j, j = 1, 2, \dots, N$  δηλώνονται από την σχέση :

$$R_j = -B_j^{-1}A_j \quad (5.25)$$

όπου  $A_j$  και  $B_j$  είναι οι πίνακες που έχουμε ορίσει στην προηγούμενη ενότητα. Η φύση του weakly cyclic Jacobi πίνακα  $\mathcal{J}_{N+1}^{N+1}$  συνεπάγει ότι ο πίνακας  $\mathcal{J}_{N+1}^{N+1}$  είναι block διαγώνιος και δίνεται από την σχέση:

$$\mathcal{J}_{N+1}^{N+1} = \text{diag}(ZR_N \dots R_1, R_1 Z R_N \dots R_2, \dots, R_N \dots R_1 Z) \quad (5.26)$$

και επειδή οι block διαγώνιοι υποπίνακες είναι όμοιοι είναι φανερό ότι το φάσμα του  $\mathcal{J}_{N+1}^{N+1}$  πίνακα είναι το ίδιο με το φάσμα οποιoδήποτε διαγώνιου υποπίνακα. Δηλαδή,

$$\sigma(\mathcal{J}_{N+1}^{N+1}) = \sigma(ZS) \quad \mu\epsilon \quad S \equiv R_N \dots R_1 \quad (5.27)$$

Καλώντας τη σχέση  $\det(A_j) = \det(B_j)$  διαπιστώνουμε ότι :

$$\det(S) = 1 \quad (5.28)$$

με

$$\sigma(ZS) = \{\lambda^-, \lambda^+\} \quad , \quad \lambda^\pm = \frac{\tau \pm \sqrt{\tau^2 - 4\zeta}}{2}, \quad (3.9) \quad (5.29)$$

και

$$\tau = \text{trace}(ZS) \quad \text{and} \quad \zeta = \det(Z) = z_1 z_2 \quad (5.30)$$

Είναι φανερό λοιπόν ότι για να είναι πραγματικό το φάσμα του πίνακα  $\mathcal{J}_{N+1}^{N+1}$  θα πρέπει να ισχύει:

$$\tau^2 - 4\zeta \geq 0 \quad (5.31)$$

### ΘΕΩΡΗΜΑ 5.1 (Βέλτιστης διαμέρισης)

Θεωρώντας ότι ο weakly cyclic Jacobi πίνακας  $\mathcal{J}_{N+1}$  είναι τέτοιος ώστε το φάσμα του πίνακα  $\mathcal{J}_{N+1}^{N+1}$  να είναι πραγματικό τότε η βέλτιστη παράμετρος της διαμέρισης  $q \in [2, N+1]$  η οποία χαρακτηρίζει την block SOR μέθοδο θα δίνεται από τον παρακάτω πίνακα:

ΠΙΝΑΚΑΣ ΒΕΛΤΙΣΤΗΣ ΔΙΑΜΕΡΙΣΗΣ				
ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ				ΒΕΛΤΙΣΤΗ ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΣ $q$
I	II	III	IV	
$\tau^2 = 4\zeta$	$\tau < 2$	---	---	$q = 2$
	$\tau \geq 2$	---	---	SOR δεν συγκλίνει
$\tau^2 > 4\zeta$	$\tau < 0$	$\zeta > 0$	---	$q = 2$
		$\zeta < 0$	(3.13c)	$q = N + 1$
			(3.13d)	$q = l \text{ ή } l + 1$ (3.14)
	$\tau = 0$	$\zeta < 0$	---	Οποιοδήποτε $q \in [2, N + 1]$
	$\tau > 0$	$\zeta < 0$	(3.13b)	$q = N + 1$
			(3.13a)	$q = l \text{ ή } l + 1$ (3.15)
		$\zeta \geq 0$	(3.16)	$q = 2$
			(3.17)	SOR δεν συγκλίνει

### Απόδειξη

Έχοντας ως βασική προϋπόθεση ότι το φάσμα του πίνακα  $\mathcal{J}_{N+1}^{N+1}$  είναι πραγματικό δηλαδή ότι ισχύει η συνθήκη

$$\tau^2 - 4\zeta \geq 0 \quad (5.32)$$

έχουμε τις παρακάτω δύο περιπτώσεις:

- (I)  $\tau^2 = 4\zeta$

Στην περίπτωση που ισχύει η παραπάνω συνθήκη οι ιδιοτιμές θα δίνονται από την σχέση:

$$\sigma(ZS) = \{\lambda^-, \lambda^+\} \quad (5.33)$$

όπου  $\lambda = \tau/2$  με

$$\tau = \text{trace}(ZS)$$

Οπότε το φάσμα του πίνακα  $\mathcal{J}_{N+1}^{N+1}$  είναι  $\sigma(\mathcal{J}_{N+1}^{N+1}) = \tau/2$  και είναι είτε θετικό είτε αρνητικό ανάλογα με τις περιοδικές συνθήκες. Όταν το φάσμα είναι θετικό ή μηδέν από το Θεώρημα 2.7 του [17] συμπεραίνουμε ότι το  $s = 1$  οπότε η φασματική ακτίνα δίνεται από την σχέση:

$$\varrho(\mathcal{J}_{N+1}^{N+1}) < \frac{p-1-s}{p-2} < \frac{N+1-1-1}{N+1-2} = \frac{N-1}{N-1} = 1 \quad (5.34)$$

Οπότε για  $\sigma(\mathcal{J}_{N+1}^{N+1}) = \tau/2$  θετικό ή μηδέν η φασματική ακτίνα είναι  $\varrho(\mathcal{J}_{N+1}^{N+1}) < 1$  και η παραπάνω συνθήκη ισχύει όταν  $0 \leq \tau < 2$ . Επίσης όταν το φάσμα είναι αρνητικό δηλαδή  $\tau < 0$  τότε

$$\rho_2 < \rho_3 < \dots < \rho_{N-1} < \rho_N \quad (5.35)$$

η  $2 - cyclic$  είναι η βέλτιστη SOR και συγκλίνει γρηγορότερα. Άρα για  $\tau < 2$  η SOR συγκλίνει και η βέλτιστη SOR είναι η  $2 - cyclic$  SOR. Ενώ για  $\tau \geq 2$  δεν συγκλίνει.

- (II)  $\tau^2 > 4\zeta$

Σε αυτήν την περίπτωση οι ιδιοτιμές του πίνακα  $\mathcal{J}_{N+1}^{N+1}$  είναι διαφορετικές δηλαδή  $\lambda^- \neq \lambda^+$ .

Δηλώνουμε ως:

$$\alpha = |\lambda^-|^{\frac{1}{N+1}}, \beta = |\lambda^+|^{\frac{1}{N+1}}$$

και θέτουμε τις εξής συνθήκες:

$$0 \leq \frac{\alpha}{\beta} < \frac{N-1}{N+1} \quad (5.36)$$

$$\frac{N-1}{N+1} \leq \frac{\alpha}{\beta} < 1 \quad (5.37)$$

$$1 \leq \frac{\alpha}{\beta} < \frac{N+1}{N-1} \quad (5.38)$$

$$\frac{N+1}{N-1} \leq \frac{\alpha}{\beta} < \infty \quad (5.39)$$

Οπότε η ανάλυση μας θα στηριχτεί στις παραπάνω υποπεριπτώσεις.

1. Έστω ότι το ίχνος είναι αρνητικό, δηλαδή  $\tau < 0$ . Τότε όταν  $\zeta > 0$  το φάσμα  $\sigma(\mathcal{J}_{N+1}^{N+1})$  είναι αρνητικό. Για την απόδειξη ότι το φάσμα είναι αρνητικό η διαδικασία είναι η ακόλουθη:

$$\sigma = \{\lambda^-, \lambda^+\} \quad \mu \in \quad \lambda^\pm = \frac{\tau \pm \sqrt{\tau^2 - 4\zeta}}{2} \quad (5.40)$$

όπου

$$\tau = \text{trace}(ZS)$$

και

$$\zeta = \det(Z) = \zeta_1 \zeta_2$$

Έτσι εάν  $\tau < 0$  η ιδιοτιμή  $\lambda^- = \frac{\tau - \sqrt{\tau^2 - 4\zeta}}{2}$  είναι πάντα αρνητική .

Η ιδιοτιμή  $\lambda^+ = \frac{\tau + \sqrt{\tau^2 - 4\zeta}}{2} < 0$  είναι αρνητική όταν:

$$\tau \leq -\sqrt{\tau^2 - 4\zeta}$$

$$\tau^2 \geq \tau^2 - 4\zeta$$

$$-4\zeta \leq 0$$

$$\zeta > 0$$

Για αυτό το λόγο το φάσμα  $\sigma(\mathcal{J}_{N+1}^{N+1})$  είναι αρνητικό ή μηδέν οπότε η βέλτιστη *SOR* είναι η *2-cyclic SOR*.

Διαφορετικά όταν  $\zeta < 0$  έχουμε:

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{|\lambda^-|^{\frac{1}{N+1}}}{|\lambda^+|^{\frac{1}{N+1}}} = \left| \frac{\frac{\tau - \sqrt{\tau^2 - 4\zeta}}{2}}{\frac{\tau + \sqrt{\tau^2 - 4\zeta}}{2}} \right|^{\frac{1}{N+1}} > 1$$

και από το Θεώρημα 3.2.1 εξασφαλίζουμε ότι όταν ισχύει η συνθήκη :

$$1 < \frac{\alpha}{\beta} \leq \frac{p}{p-2} = \frac{N+1}{N-2+1} = \frac{N+1}{N-1}$$

τότε η  $N+1$ -cyclic *SOR* είναι η βέλτιστη *SOR* γιατί:

$$\rho_{N+1} < \rho_N < \dots < \rho_3 < \rho_2 < \rho_1$$

ενώ όταν ισχύει η (5.38) σχέση τότε η βέλτιστη *SOR* είναι η όπου  $l \in 2, 3, \dots, N$  μοναδικός ακέραιος που ικανοποιεί την σχέση:

$$\left(\frac{l+1}{l-1}\right)^{l+1} < \left(\frac{a}{b}\right)^{N+1} < \left(\frac{l}{l-2}\right)^l$$

2. Στην περίπτωση που  $\tau = 0, \lambda^- = \lambda^+$  και  $\frac{a}{b} = 1$ . Οπότε σύμφωνα με το Θεώρημα 3.2.1 η βέλτιστη *SOR* είναι η *q-cyclic* με  $q \in [2, N+1]$ .

3. Τέλος, υποθέτουμε ότι το ίχνος είναι θετικό δηλαδή  $\tau > 0$ . Τότε, όταν  $\zeta > 0$  ισχύει ότι:

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{|\lambda^-|^{\frac{1}{N+1}}}{|\lambda^+|^{\frac{1}{N+1}}} = \left| \frac{\frac{\tau - \sqrt{\tau^2 - 4\zeta}}{2}}{\frac{\tau + \sqrt{\tau^2 - 4\zeta}}{2}} \right|^{\frac{1}{N+1}} < 1$$

και από το θεώρημα 3.2.1 συμπεραίνουμε ότι η όταν ισχύει η συνθήκη  $\frac{N-1}{N+1} \leq \frac{\alpha}{\beta} < 1$  τότε  $\rho_{N+1} < \rho_N < \dots < \rho_3 < \rho_2 < \rho_1$  δηλαδή η  $N+1 - cyclic$  SOR είναι η βέλτιστη ενώ όταν ισχύει η συνθήκη  $0 \leq \frac{\alpha}{\beta} < \frac{N-1}{N+1}$  τότε υπάρχει μοναδικός ακέραιος αριθμός ικανοποιώντας την σχέση :

$$\left( \frac{l-2}{l} \right)^l < \left( \frac{a}{b} \right)^{N+1} < \left( \frac{l-1}{l+1} \right)^l$$

και η  $l - cyclic$  ή  $l+1 - cyclic$  SOR είναι η SOR που συγκλίνει γρηγορότερα.

Στην περίπτωση που  $\zeta \geq 0$  τότε το φάσμα  $\sigma(\mathcal{J}_{N+1}^{N+1})$  είναι θετικό ή μηδεν. Η ιδιοτιμή  $\lambda^+ = \frac{\tau + \sqrt{\tau^2 - 4\zeta}}{2}$  είναι πάντα θετική ενώ η ιδιοτιμή  $\lambda^- = \frac{\tau - \sqrt{\tau^2 - 4\zeta}}{2} > 0$  είναι θετική όταν:

$$\tau \geq \sqrt{\tau^2 - 4\zeta}$$

$$\tau^2 \geq \tau^2 - 4\zeta$$

$$-4\zeta \leq 0$$

$$\zeta \geq 0$$

.

Έτσι στην περίπτωση που  $\zeta \geq 0$  τότε όταν

$$\rho(\mathcal{J}_{N+1}^{N+1}) < 1 \leftrightarrow \tau < 2 \quad \& \quad \tau - \zeta < 1 \quad (5.41)$$

βέλτιστη SOR είναι η  $2 - cyclic$  ενώ όταν :

$$\tau \geq 2 \quad \eta \quad \tau - \zeta \geq 1$$

τότε η SOR δεν συγκλίνει.

---◇---



## Κεφάλαιο 6

# Προβλήματα συνοριακών τιμών με περιοδικές συνοριακές συνθήκες για σταθερούς συντελεστές

### 6.1 Εισαγωγή

Στην μελέτη αυτή ασχοληθήκαμε με τα προβλήματα συνοριακών τιμών με περιοδικές συνοριακές συνθήκες που οι συντελεστές του είναι σταθεροί συντελεστές. Ο λόγος που ασχοληθήκαμε με τέτοιου είδους προβλήματα είναι το ιδιαίτερο ενδιαφέρον που παρουσιάζουν όπως για παράδειγμα στο πρόβλημα δύο διαστάσεων με ελλειπτικούς τελεστές που με τους κατάλληλους μετασχηματισμούς προσεγγίζουμε την collocation μέθοδο μιας διάστασης με σταθερούς συντελεστές.

Σε αυτήν την περίπτωση θέτουμε  $F(x) = c$  οπότε το πρόβλημα μας μετατρέπεται στο εξής :

$$u''(x) + cu(x) = g(x), \quad x \in I_x \equiv [a, b] \quad (1.1a)$$

$$u(a) - z_1 u(b) = w_1 \quad (1.1b)$$

$$u'(a) - z_2 u'(b) = w_2 \quad (1.1c)$$

Θέτοντας λοιπόν  $F(x) = F = \text{constant}$ , και  $\eta = F(x)h^2$  οι αντίστοιχοι πίνακες  $A_j$  και  $B_j$  των σχέσεων (5.17) και (5.18) του προηγούμενου κεφαλαίου γίνονται:

$$A_j = A = \begin{bmatrix} a_1(\eta) & a_2(\eta) \\ a_3(\eta) & a_4(\eta) \end{bmatrix}$$
$$B_j = B = \begin{bmatrix} a_3(\eta) & -a_4(\eta) \\ a_1(\eta) & -a_2(\eta) \end{bmatrix}$$

για  $j = 1, \dots, N$  με  $j = 1, \dots, N$  με  $a_k(\eta) = c_k + d_k\eta$  ( $k = 1, 2, 3, 4$ ) και  $c_k$  και  $d_k$  που δίνονται από τις γνωστές σχέσεις.

Πιο αναλυτικά, αν  $F(\sigma_{2j}) = F(\sigma_{2j+1}) = c$  οι πίνακες  $A_j$  και  $B_j$  γίνονται:

$$A_j = A = \begin{bmatrix} c_1 + d_1 h^2 c & c_2 + d_2 h^2 c \\ c_3 + d_3 h^2 c & c_4 + d_4 h^2 c \end{bmatrix}$$

$$B_j = B = \begin{bmatrix} c_3 + d_3 h^2 c & -c_4 - d_4 h^2 c \\ c_1 + d_1 h^2 c & -c_2 - d_2 h^2 c \end{bmatrix}$$

με

$$c_1 = -2\sqrt{3} \quad c_2 = -1 - \sqrt{3} \quad c_3 = 2\sqrt{3} \quad c_4 = -1 + \sqrt{3}$$

$$d_1 = \frac{9 + 4\sqrt{3}}{18} \quad d_2 = \frac{3 + \sqrt{3}}{36} \quad d_3 = \frac{9 - 4\sqrt{3}}{18} \quad d_4 = \frac{3 - \sqrt{3}}{36}$$

Ο πίνακας  $R_j$  γίνεται :

$$R_j = -B_j^{-1}A_j = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

οπότε:

$$S = R_j^{N+1} = \begin{bmatrix} 1 & (N+1) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

και

$$ZS = \begin{bmatrix} z_1 & z_1(N+1) \\ 0 & z_2 \end{bmatrix}$$

Έτσι το φάσμα δίνεται από τις παρακάτω σχέσεις:

$$\sigma(ZS) = \{\lambda^-, \lambda^+\}, \lambda^\pm = \frac{\tau \pm \sqrt{\tau^2 - 4\zeta}}{2}$$

με

$$\tau = \text{trace}(ZS) = z_1 + z_2$$

και

$$\zeta = \det(Z) = z_1 z_2$$

Η διαμέριση που χρησιμοποιήσαμε για τον collocation πίνακα είναι  $N = 8, N = 2, N = 3$  και  $N = 4$ .

Ο collocation πίνακας για την διαμέριση  $N = 8$ :



## 6.2 Αριθμητικά Αποτελέσματα

Σε αυτήν την ενότητα θα παραθέσουμε τα αριθμητικά αποτελέσματα για τρεις περιπτώσεις  $F = 0, F = 100, F = -1000$ .

Για  $F = 0$  τα αποτελέσματα παρουσιάζονται στον παρακάτω πίνακα :

ΠΙΝΑΚΑΣ ΒΕΛΤΙΣΤΗΣ ΔΙΑΜΕΡΙΣΗΣ					
I	II	III	IV	V	VI
ΣΥΝΘΗΚΕΣ		ΣΥΝΟΡΙΑΚΕΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ	ΔΙΑΜΕΡΙΣΗ	ΦΑΣΜΑΤΙΚΗ ΑΚΤΙΝΑ	ΒΕΛΤΙΣΤΗ ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΣ $q$
$\tau^2 = 4\zeta$	$\tau < 2$ $\tau = 1, \zeta = 1/4$	$z_1 = z_2 = 1/2$	$N = 8$	$\rho = 0.2234$	$q = 2$ $\Sigma\chi.(a)$
			$N = 4$	$\rho = 0.2094$	
			$N = 3$	$\rho = 0.1995$	
			$N = 2$	$\rho = 0.1720$	
$\tau^2 = 4\zeta$	$\tau \geq 2$ $\tau = 6 \zeta = 9$	$z_1 = z_2 = 3$	— — —	$\rho = 1$	$SOR$ δ.συγκλίνει
$\tau^2 > 4\zeta$	$\tau < 0, \zeta > 0$ $\tau = -3, \zeta = 2$	$z_1 = -1, z_2 = -2$	$N = 8$	$\rho = 0.4286$	$q = 2$ $\Sigma\chi.(c)$
			$N = 4$	$\rho = 0.3760$	
			$N = 3$	$\rho = 0.3398$	
			$N = 2$	$\rho = 0.2680$	
$\tau^2 > 4\zeta$	$\tau < 0, \zeta < 0$ $\tau = -0.065$ $\zeta = -0.0165$	$z_1 = -0.165, z_2 = 0.1$	$N = 8$	$\rho = 0.1283$	$q = N + 1$ $\Sigma\chi.(d)$
			$N = 4$	$\rho = 0.1290$	
			$N = 3$	$\rho = 0.1292$	
			$N = 2$	$\rho = 0.1290$	
$\tau^2 > 4\zeta$	$\tau = 0, \zeta < 0$ $\tau = 0$ $\zeta = -0.0009$	$z_1 = 0.03, z_2 = -0.03$	$N = 8$	$\rho = 0.03$	$q \in [2, N + 1]$ $\Sigma\chi.(e)$
			$N = 4$	$\rho = 0.03$	
			$N = 3$	$\rho = 0.03$	
			$N = 2$	$\rho = 0.03$	
$\tau^2 > 4\zeta$	$\tau > 0, \zeta < 0$ $\tau = 0.065$ $\zeta = -0.0165$	$z_1 = 0.165, z_2 = -0.1$	$N = 8$	$\rho = 0.1357$	$q = N + 1$ $\Sigma\chi.(f)$
			$N = 4$	$\rho = 0.1380$	
			$N = 3$	$\rho = 0.1378$	
			$N = 2$	$\rho = 0.1373$	
$\tau^2 > 4\zeta$	$\tau > 0, \zeta < 0$ $\tau = 3 \zeta = 2$	$z_1 = 1, z_2 = 2$	— — —	$\rho = 1$	$SOR$ δ.συγκλίνει

Στις παρακάτω γραφικές παραστάσεις με την γραμμή είναι η διαμέριση  $N = 8$ , με την —. — η διαμέριση  $N = 2$ , με τις τελείες η  $N = 3$  και με τις — — η διαμέριση  $N = 4$ .

Έστω λοιπόν ο weakly cyclic of index  $N + 1$  block Jacobi πίνακας  $\mathcal{J}_{N+1}$  έτσι ώστε το φάσμα του πίνακα  $\mathcal{J}_{N+1}^{N+1}$  να είναι πραγματικός αριθμός τότε έχουμε τις εξής περιπτώσεις:

- Περίπτωση 1α:  $z_1 = z_2 = 1/2$  έχουμε  $\tau = 1, \zeta = \frac{1}{4}$ . Σε αυτήν την περίπτωση έχουμε  $\tau^2 = 4\zeta$  και  $\tau \leq 2$ . Για την διαμέριση  $N = 8$  η φασματική ακτίνα είναι  $\rho = 0.2234$ , στην διαμέριση  $N = 2$  η φασματική ακτίνα είναι  $\rho = 0.1720$ , στην διαμέριση  $N = 3$  η φασματική ακτίνα είναι  $\rho = 0.1995$  και για την διαμέριση  $N = 4$  η φασματική ακτίνα είναι  $\rho = 0.2094$ . Άρα η βέλτιστη παράμετρος  $q$  είναι 2.
- Περίπτωση 1β:  $z_1 = z_2 = 3$  τότε  $\tau = 6, \zeta = 9$ . Έτσι  $\tau^2 = 4\zeta$  και  $\tau \geq 2$ . Στην περίπτωση αυτή δεν συγκλίνει η μέθοδος SOR.
- Περίπτωση 2α:  $z_1 = -1, z_2 = -2$  έχουμε  $\tau = -3, \zeta = 2$ . Αντικαθιστώντας τα έχουμε ότι  $\tau^2 > 4\zeta, \tau \leq 0$  και  $\zeta \geq 0$ . Για την διαμέριση  $N = 8$  η φασματική ακτίνα είναι  $\rho = 0.4286$ , στην διαμέριση  $N = 2$  η φασματική ακτίνα είναι  $\rho = 0.2680$ , στην διαμέριση  $N = 3$  η φασματική ακτίνα είναι  $\rho = 0.3398$  και στην διαμέριση  $N = 4$  η φασματική ακτίνα είναι  $\rho = 0.3760$ . Έτσι η βέλτιστη SOR είναι η 2-cyclic SOR.
- Περίπτωση 2b:  $z_1 = -0.165, z_2 = 0.1$  έχουμε  $\tau = -0.065, \zeta = -0.0165$ . Αντικαθιστώντας τα έχουμε ότι  $\tau^2 > 4\zeta, \tau \leq 0$  και  $\zeta \leq 0$ . Για την διαμέριση  $N = 8$  η φασματική ακτίνα είναι  $\rho = 0.1283$ , στην διαμέριση  $N = 2$  η φασματική ακτίνα είναι  $\rho = 0.1299$ , στην διαμέριση  $N = 3$  η φασματική ακτίνα είναι  $\rho = 0.1292$  και στην διαμέριση  $N = 4$  η φασματική ακτίνα είναι  $\rho = 0.1290$ . Έτσι η βέλτιστη SOR είναι η 2-cyclic SOR.
- Περίπτωση 2c:  $z_1 = 0.03, z_2 = -0.03$  έχουμε  $\tau = 0, \zeta = -0.0009$ . Οπότε  $\tau^2 > 4\zeta, \tau = 0$  και  $\zeta \leq 0$ . Στις διαμερίσεις  $N = 8, N = 2, N = 3, N = 4$  έχουμε την ίδια φασματική ακτίνα  $\rho = 0.03$  έτσι  $q \in [2, N + 1]$  είναι η βέλτιστη παράμετρος υπερχαλάρωσης.
- Περίπτωση 2d:  $z_1 = 0.165, z_2 = -0.1$  έχουμε  $\tau = -0.065, \zeta = -0.0165, \tau^2 > 4\zeta, \tau \geq 0$  και  $\zeta \leq 0$ . Για την διαμέριση  $N = 8$  η φασματική ακτίνα είναι  $\rho = 0.1357$ , στην διαμέριση  $N = 2$  η φασματική ακτίνα είναι  $\rho = 0.1373$ , στην διαμέριση  $N = 3$  η φασματική ακτίνα είναι  $\rho = 0.1378$  και στην διαμέριση  $N = 4$  η φασματική ακτίνα είναι  $\rho = 0.1380$ . Έτσι η βέλτιστη SOR είναι η 2-cyclic SOR.
- Περίπτωση 2e:  $z_1 = 1, z_2 = 2$  έχουμε  $\tau = 3, \zeta = 2$  και  $\tau^2 > 4\zeta, \tau \geq 0$  και  $\zeta \geq 0$ . Σε αυτήν την περίπτωση η SOR δεν συγκλίνει.

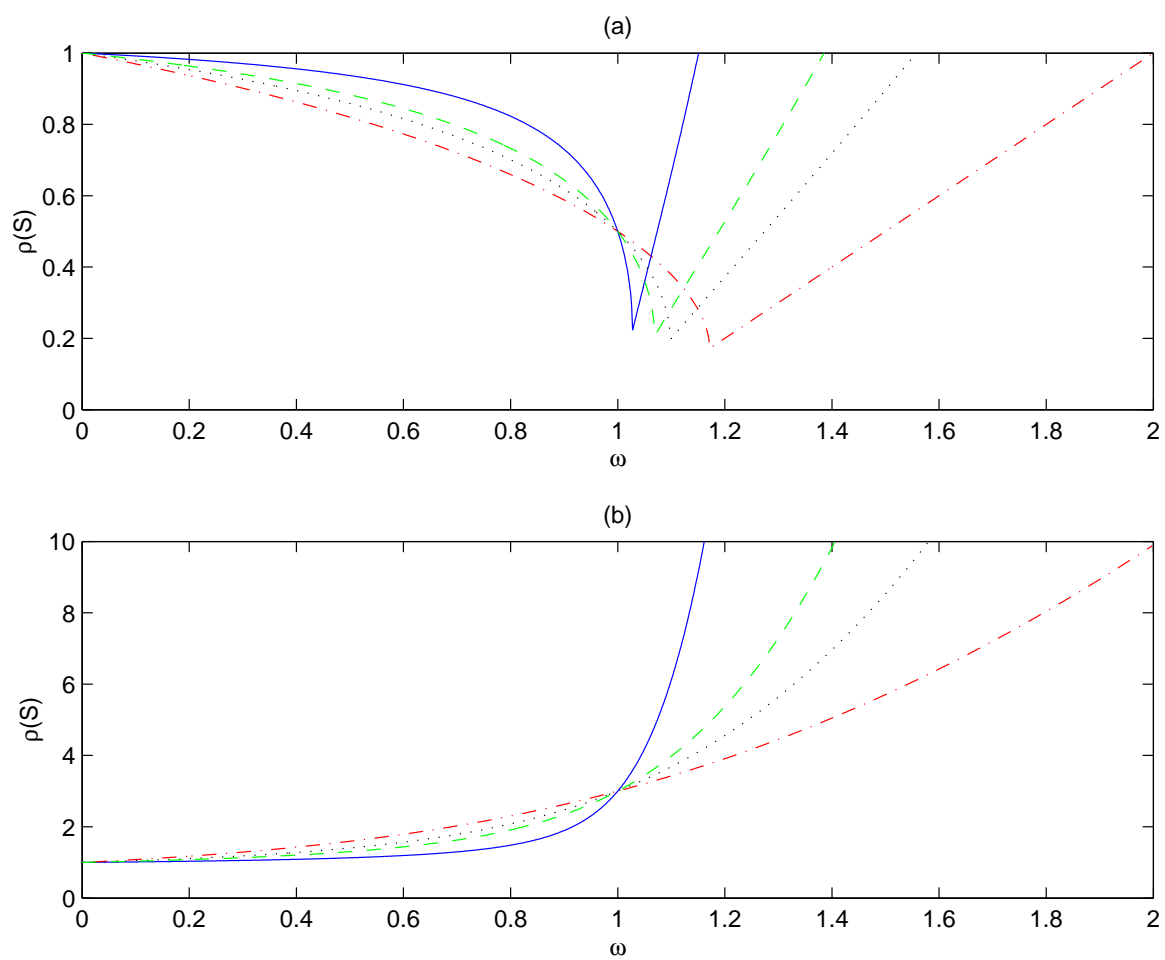
Ομοίως για  $F = 100$  ο αντίστοιχος πίνακας είναι:

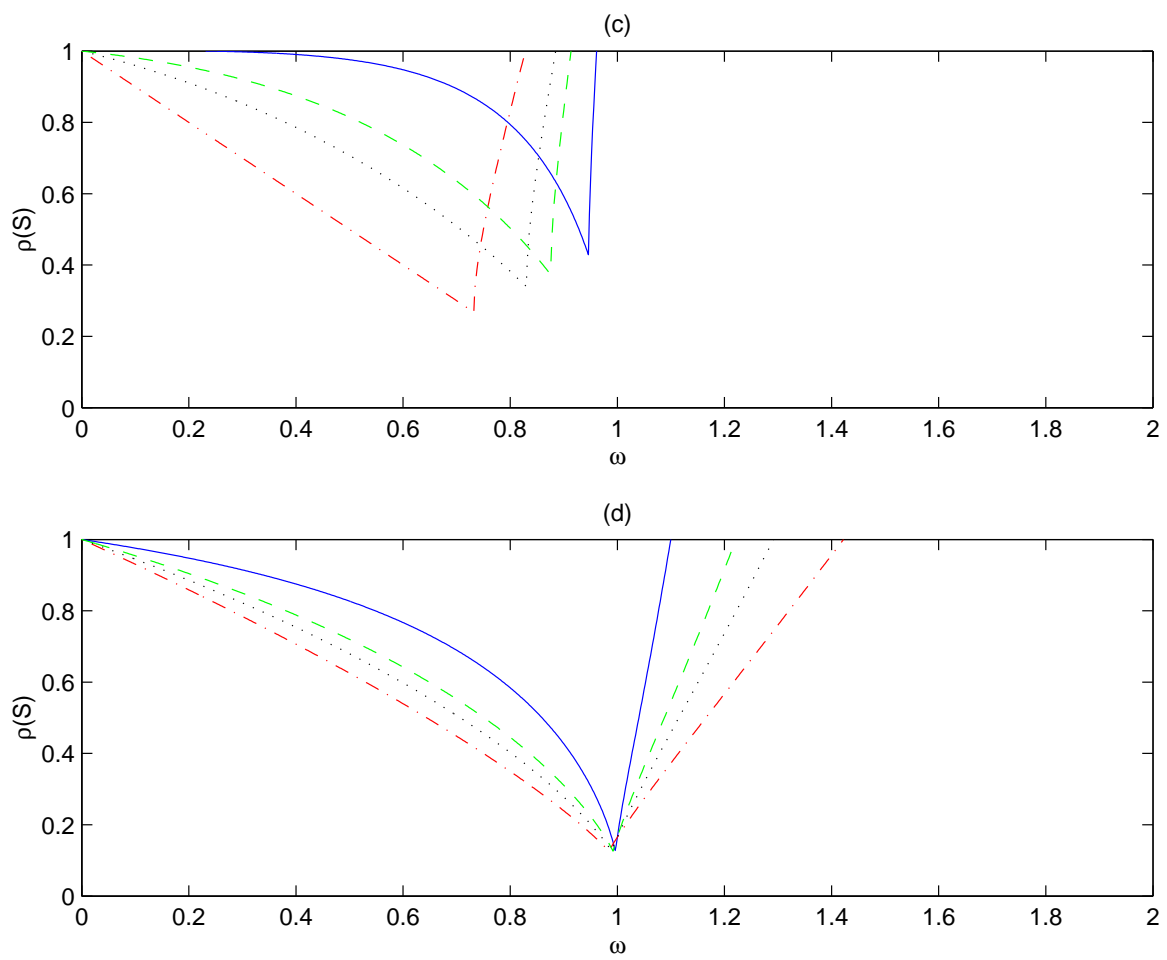
ΠΙΝΑΚΑΣ ΒΕΛΤΙΣΤΗΣ ΔΙΑΜΕΡΙΣΗΣ					
I	II	III	IV	V	VI
ΣΥΝΘΗΚΕΣ		ΣΥΝΟΡΙΑΚΕΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ	ΔΙΑΜΕΡΙΣΗ	ΦΑΣΜΑΤΙΚΗ ΑΚΤΙΝΑ	ΒΕΛΤΙΣΤΗ $q$
$\tau^2 = 4\zeta$	$\tau < 2$ $\tau = 1, \zeta = 1/4$	$z_1 = z_2 = 1/2$	$N = 8$	$\rho = 0.2828$	$q = 2$ $\Sigma\chi.(a)$
			$N = 4$	$\rho = 0.2694$	
			$N = 3$	$\rho = 0.2601$	
			$N = 2$	$\rho = 0.2379$	
$\tau^2 = 4\zeta$	$\tau \geq 2$ $\tau = 6 \zeta = 9$	$z_1 = z_2 = 3$	— — —	$\rho = 1$	$SOR$ δ.συγκλίνει
$\tau^2 > 4\zeta$	$\tau < 0, \zeta > 0$ $\tau = -3, \zeta = 2$	$z_1 = -1, z_2 = -2$	$N = 8$	$\rho = 0.4277$	$q = 2$ $\Sigma\chi.(c)$
			$N = 4$	$\rho = 0.3716$	
			$N = 3$	$\rho = 0.3394$	
			$N = 2$	$\rho = 0.2680$	
$\tau^2 > 4\zeta$	$\tau < 0, \zeta < 0$ $\tau = -0.065$ $\zeta = -0.0165$	$z_1 = -0.165, z_2 = 0.1$	$N = 8$	$\rho = 0.1283$	$q = N + 1$ $\Sigma\chi.(d)$
			$N = 4$	$\rho = 0.1318$	
			$N = 3$	$\rho = 0.1337$	
			$N = 2$	$\rho = 0.1300$	
$\tau^2 > 4\zeta$	$\tau = 0, \zeta < 0$ $\tau = 0$ $\zeta = -0.0009$	$z_1 = 0.03, z_2 = -0.03$	$N = 8$	$\rho = 0.03$	$q \in [2, N + 1]$ $\Sigma\chi.(e)$
			$N = 4$	$\rho = 0.03$	
			$N = 3$	$\rho = 0.03$	
			$N = 2$	$\rho = 0.03$	
$\tau^2 > 4\zeta$	$\tau > 0, \zeta < 0$ $\tau = 0.065$ $\zeta = -0.0165$	$z_1 = 0.165, z_2 = -0.1$	$N = 8$	$\rho = 0.1358$	$q = N + 1$ $\Sigma\chi.(f)$
			$N = 4$	$\rho = 0.1353$	
			$N = 3$	$\rho = 0.1366$	
			$N = 2$	$\rho = 0.1364$	
$\tau^2 > 4\zeta$	$\tau > 0, \zeta < 0$ $\tau = 3 \zeta = 2$	$z_1 = 1, z_2 = 2$	— — —	$\rho = 1$	$SOR$ δ.συγκλίνει

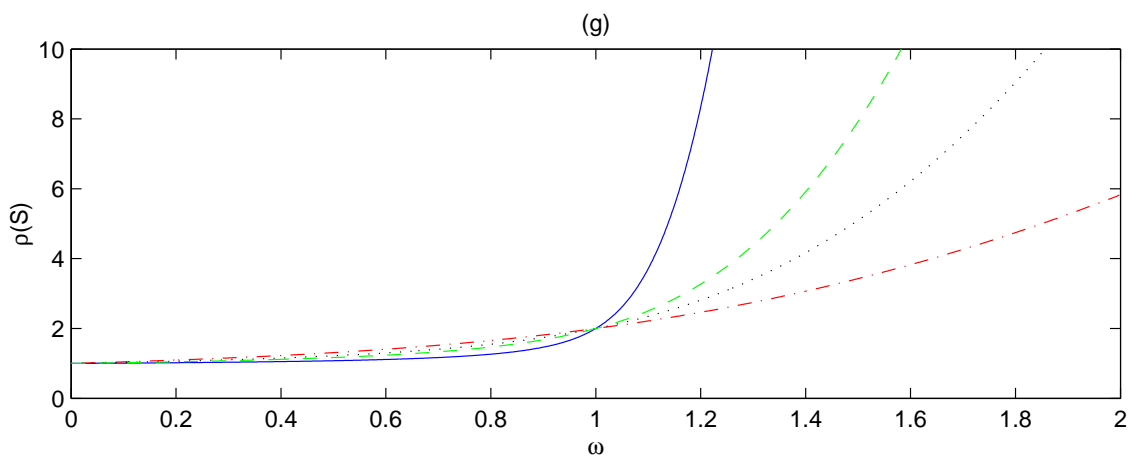
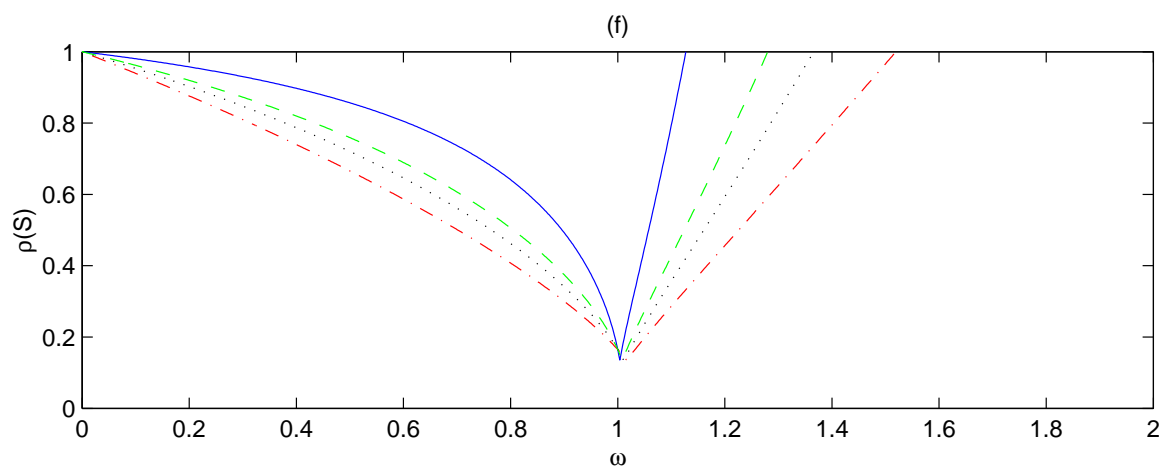
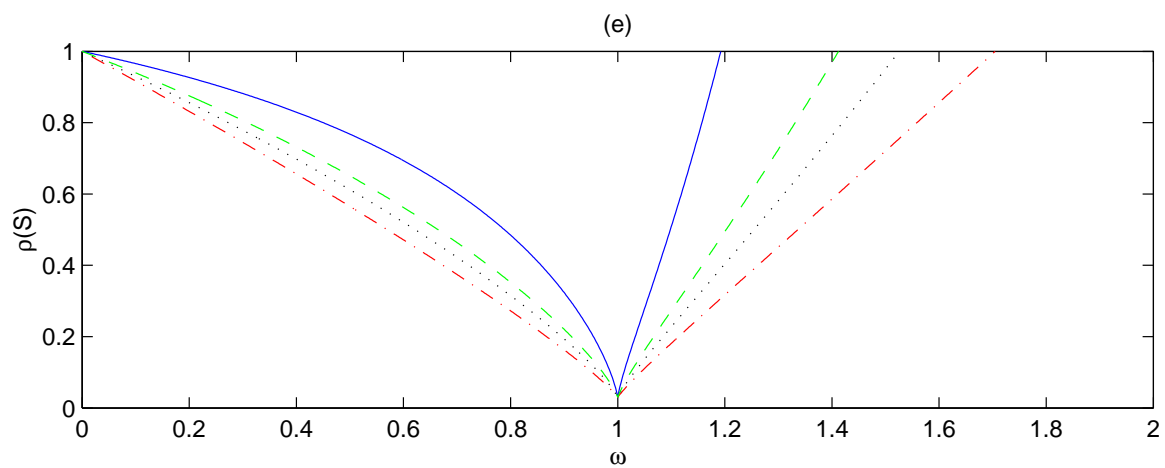
Τέλος τα αριθμητικά αποτελέσματα για  $F = -1000$  είναι τα εξής:

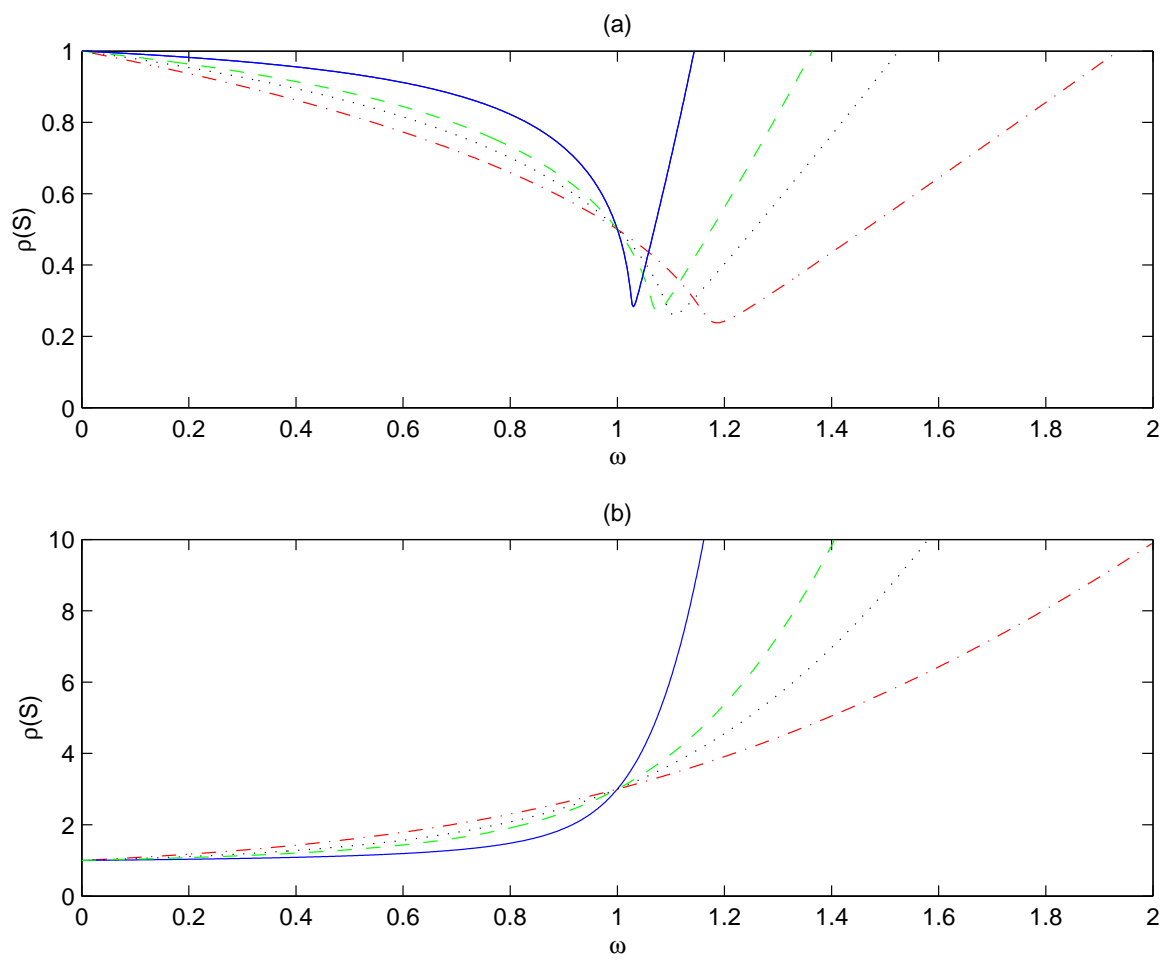
ΠΙΝΑΚΑΣ ΒΕΛΤΙΣΤΗΣ ΔΙΑΜΕΡΙΣΗΣ					
I	II	III	IV	V	VI
ΣΥΝΘΗΚΕΣ		ΣΥΝΟΡΙΑΚΕΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ	ΔΙΑΜΕΡΙΣΗ	ΦΑΣΜΑΤΙΚΗ ΑΚΤΙΝΑ	ΒΕΛΤΙ- ΣΤΗ $q$
$\tau^2 = 4\zeta$	$\tau < 2$ $\tau = 1, \zeta = 1/4$	$z_1 = z_2 = 1/2$	$N = 8$	$\rho = 0.3196$	$q = 2$ $\Sigma\chi.(a)$
			$N = 4$	$\rho = 0.2998$	
			$N = 3$	$\rho = 0.2878$	
			$N = 2$	$\rho = 0.2540$	
$\tau^2 = 4\zeta$	$\tau \geq 2$ $\tau = 6 \zeta = 9$	$z_1 = z_2 = 3$	— — —	$\rho = 1$	$SOR$ δ.συγκλίνει
$\tau^2 > 4\zeta$	$\tau < 0, \zeta > 0$ $\tau = -3, \zeta = 2$	$z_1 = -1, z_2 = -2$	$N = 8$	$\rho = 0.4574$	$q = 2$ $\Sigma\chi.(c)$
			$N = 4$	$\rho = 0.3951$	
			$N = 3$	$\rho = 0.3594$	
			$N = 2$	$\rho = 0.2820$	
$\tau^2 > 4\zeta$	$\tau < 0, \zeta < 0$ $\tau = -0.065$ $\zeta = -0.0165$	$z_1 = -0.165, z_2 = 0.1$	$N = 8$	$\rho = 0.1275$	$q = N + 1$ $\Sigma\chi.(d)$
			$N = 4$	$\rho = 0.1380$	
			$N = 3$	$\rho = 0.1284$	
			$N = 2$	$\rho = 0.1291$	
$\tau^2 > 4\zeta$	$\tau = 0, \zeta < 0$ $\tau = 0$ $\zeta = -0.0009$	$z_1 = 0.03, z_2 = -0.03$	$N = 8$	$\rho = 0.03$	$q \in [2, N + 1]$ $\Sigma\chi.(e)$
			$N = 4$	$\rho = 0.03$	
			$N = 3$	$\rho = 0.03$	
			$N = 2$	$\rho = 0.03$	
$\tau^2 > 4\zeta$	$\tau > 0, \zeta < 0$ $\tau = 0.065$ $\zeta = -0.0165$	$z_1 = 0.165, z_2 = -0.1$	$N = 8$	$\rho = 0.1348$	$q = N + 1$ $\Sigma\chi.(f)$
			$N = 4$	$\rho = 0.1368$	
			$N = 3$	$\rho = 0.1357$	
			$N = 2$	$\rho = 0.1364$	
$\tau^2 > 4\zeta$	$\tau > 0, \zeta < 0$ $\tau = 3 \zeta = 2$	$z_1 = 1, z_2 = 2$	— — —	$\rho = 1$	$SOR$ δ.συγκλίνει

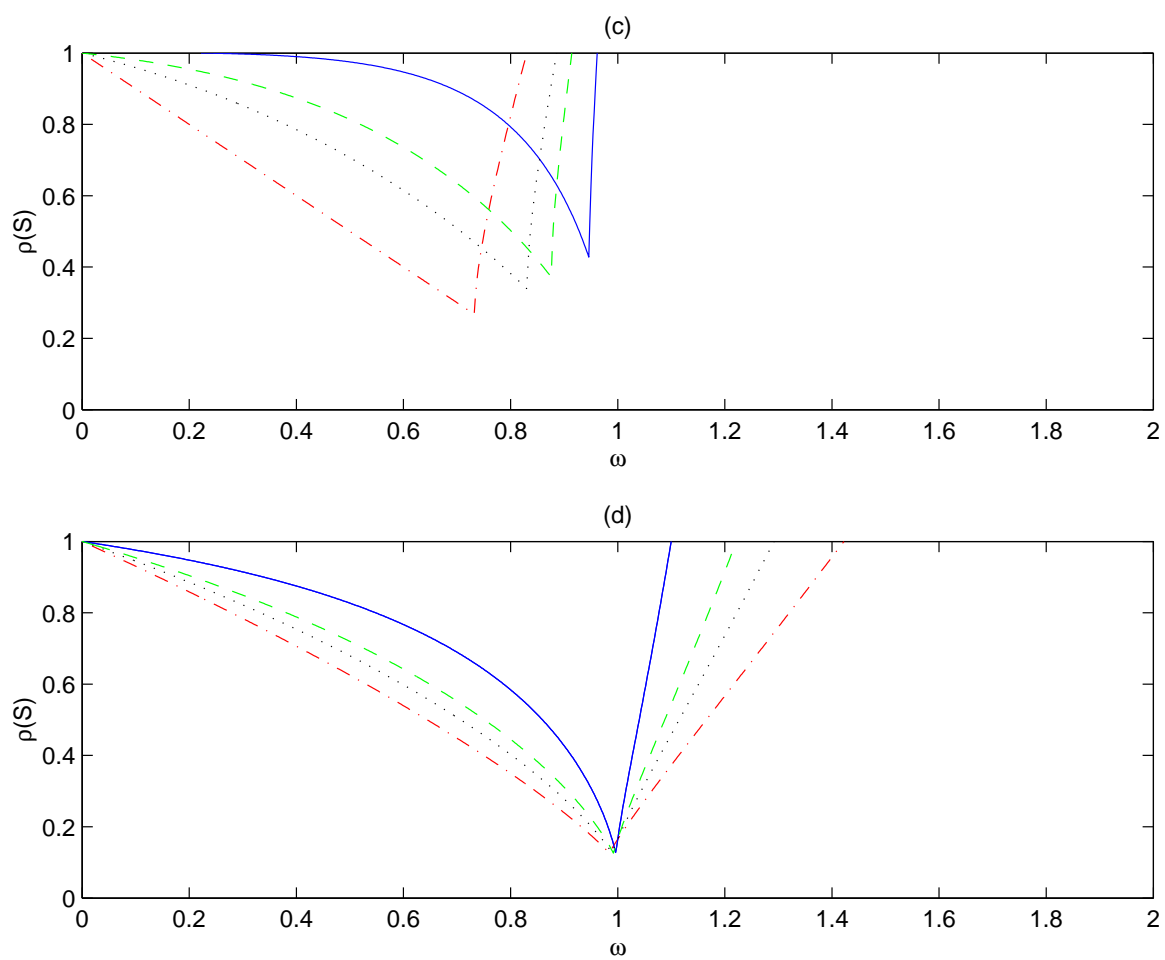
Οι γραφικές παραστάσεις για  $F = 0, F = 100$  και  $F = -1000$  είναι αντίστοιχα οι παρακάτω:

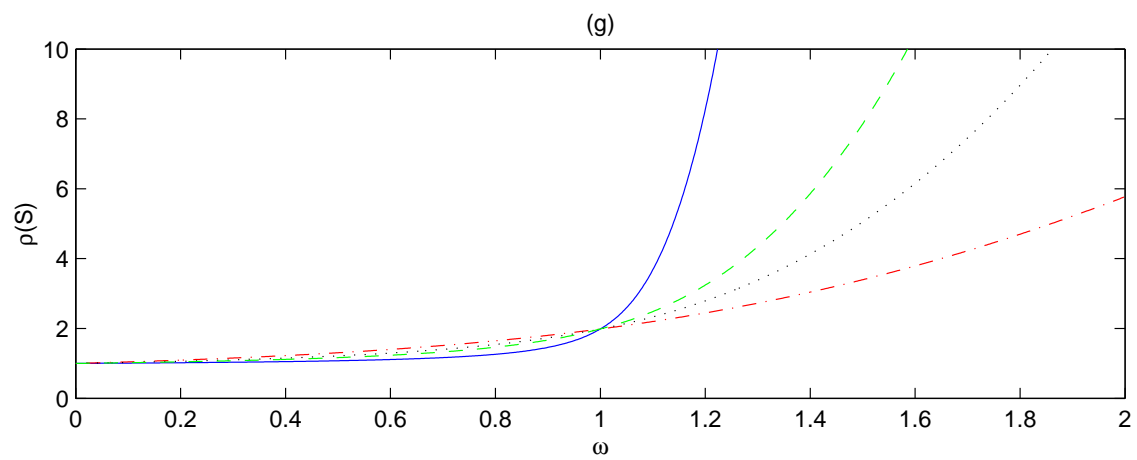
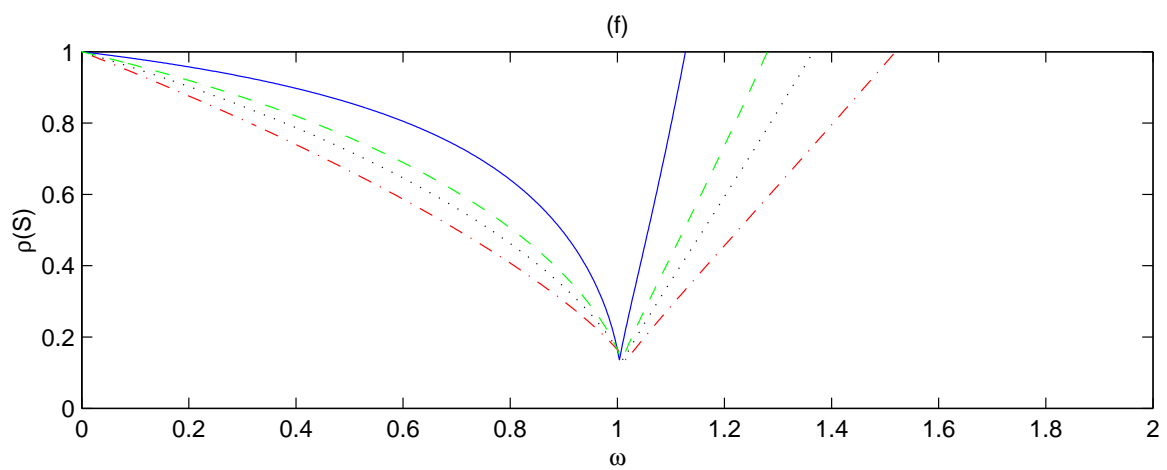
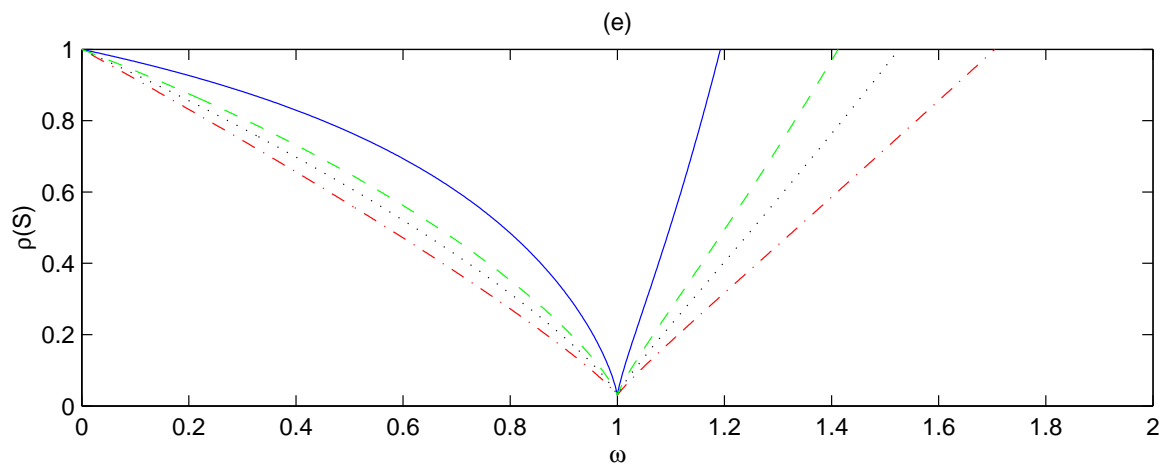


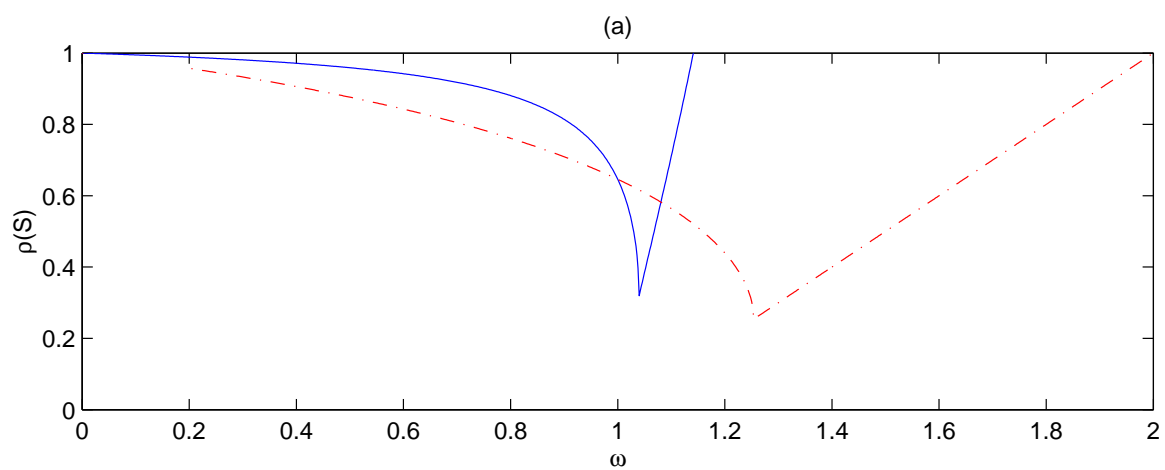


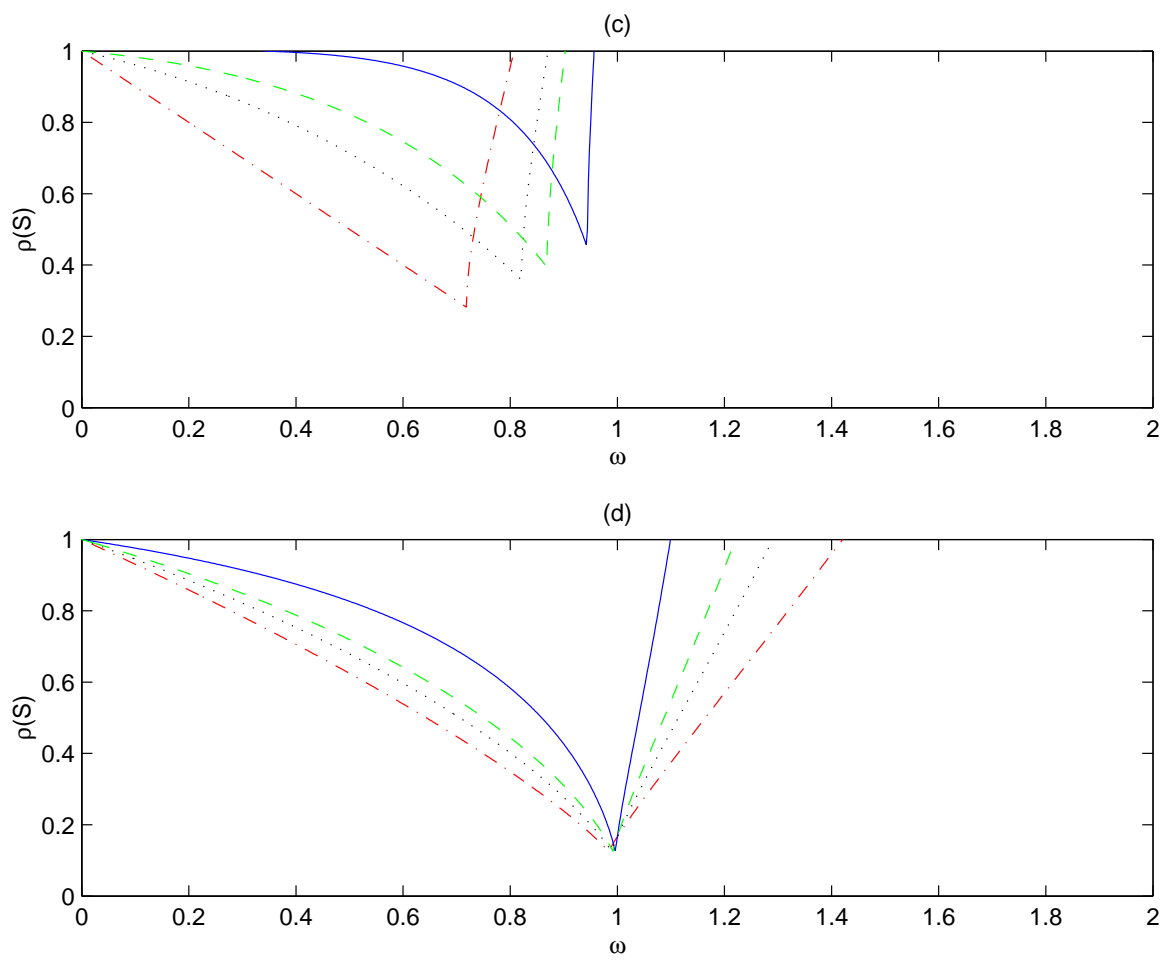


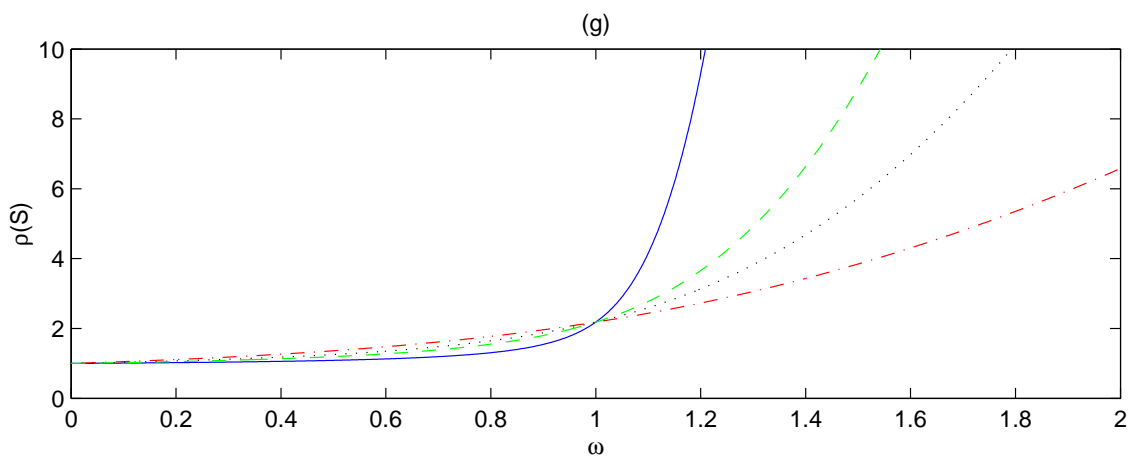
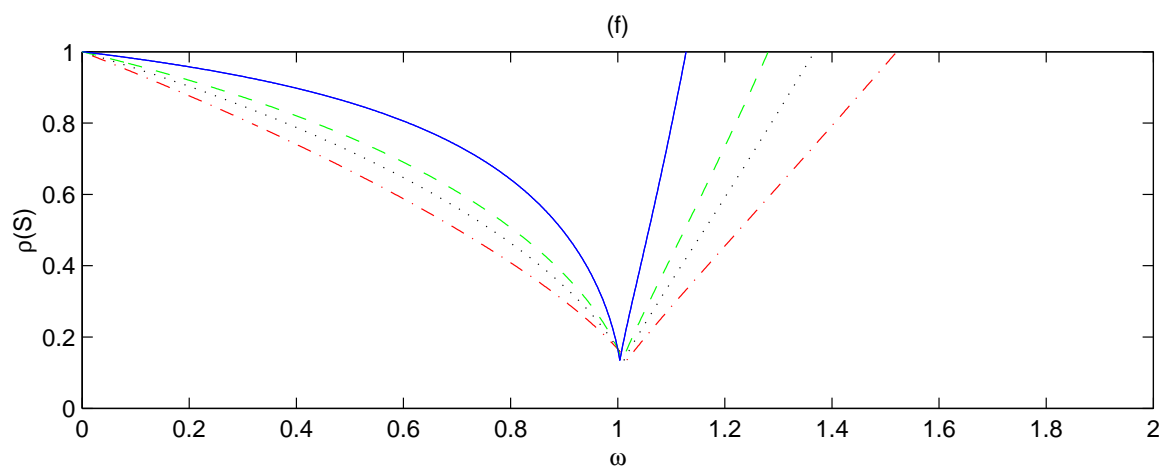
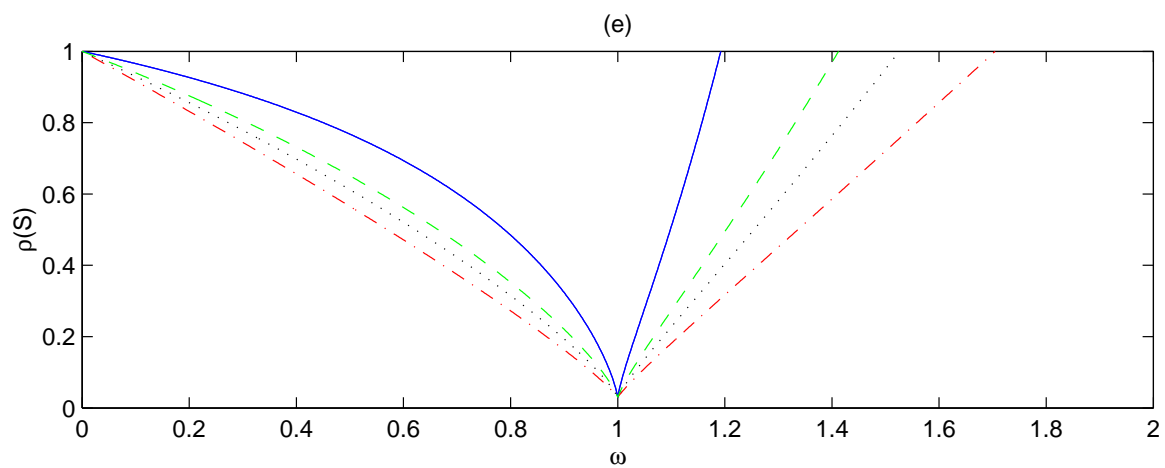












# Βιβλιογραφία

- [1] G.Varden Berghe,M.Van Daele and H.De Meyer "**A modified difference scheme for periodic and semiperiodic Sturm-Liouville problems**",Applied Numerical Mathematics 18(1995),pp 69 – 78.
- [2] G.Birkoff,M.H.Schultz and R.S Varga "**Piecewise Hermite in one and two variables with applications to partial differential equations**", Numeric.Math.11(1968), pp 232 – 256.
- [3] V.V.Bolotin "**The Dynamic Stability of Elastic Systems**", Holden Day Inc,San Francisco (1964)
- [4] C.De Boor and B.Swartz"**Collocation at Gaussian points**",SIAM Numeric.Analysis 10(1973), pp 582 – 606.
- [5] L.Brillouin "**Wave Propagation in Periodic Structures**", Dover Publications, New York, (1953).
- [6] J.W.Demmel."", Applied Numerical Linear Algebra, SIAM, Philadelphia(1996).
- [7] M.Eirmann,W.Niethammer and A.Ruttan"**Optimal successive overrelaxation iterative methods for p-cyclic matrices**", Numeric.Math.57(1990), pp 593 – 606.
- [8] M.Eirmann,W.Niethammer and A.Ruttan "**A detailed look at optimal successive overrelaxation iterative methods for p-cyclic matrices**", Technical Report, Institut fur Praktische Mathematic,Universitat Karlsruhe (1989).
- [9] S.Galanis and A.Hadjidimos"**Best cyclic repartitioning for optimal successive overrelaxation converge**",J Matrix Anal, App.13(1992), pp 102 – 120.
- [10] S.Galanis and A.Hadjidimos"**On some convergence results of the k-step iterative methods**", Appl.Numer.Math7(1991), pp 297 – 308.
- [11] S.Galanis , A.Hadjidimos and D.Noutsos"**On the equivalence of the k-step iterative Euler methods and SOR methods for k-cyclic matrices**", Math.Comp.Simulation30(1988), pp 213 – 230.

- [12] S.Galanis , A.Hadjidimos and D.Noutsos”**Optimal p-cyclic SOR for complex spectra**”, Linear Algebra App.263(1997), pp 233 – 260.
- [13] S.Galanis , A.Hadjidimos and D.Noutsos”**A Young -Eidson’s type algorithm for complex p-cyclic SOR spectra**”, Linear Algebra App.286(1999), pp 87 – 106.
- [14] A.Greenbaum ”**Iterative Methods for Solving Linear Systems**”, SIAM Philadelphia, (1997).
- [15] A.Hadjidimos ”**Computational Methods in Analysis** ”, Lecture Notes, Department of Computer Sciences,Purdue University, West Lafayette, Indiana, (1988).
- [16] A.Hadjidimos,R.J.Plemmons ”**A General Theory of Optimal p-cyclic SOR**”,CSD-TR-92076,Department of Computer Sciences,Purdue University,West Lafayette.
- [17] A.Hadjidimos,R.J.Plemmons ” **Optimal p-cyclic SOR**”,Numer.Math67(1994),pp 475 – 490.
- [18] A.Hadjidimos,R.J.Plemmons ”**Analysis of p-cyclic iterations for Markov chains**”,Linear Algebra,Markov chains and queueing models IMA Appl.Math 48(1993),pp 111 – 124.
- [19] G.W.Hill ”**On the part of the Motion of the Lunar Perigee which is a Function of the Mean Motions of the Sun and Moon**”,Acta Mathematica,VII(1886),pp 1 – 36.
- [20] K.Kontovasilis,R.J.Plemmons,W.J.Stewart ”**Block cyclic SOR for Markov Chains with p-cyclic infinitesimal generator**”,Linear Algebra,Markov Appl.Math 154 – 156(1991),pp 145 – 223.
- [21] B.Kreddel ”**On complex successive overrelaxation**”,BIT,2 (1962),pp 143– 152.
- [22] W.Mangus and S.Winkler ”**Hill’s Equation**”,Dover Publications,New York ,(1979).
- [23] T.L.Markham,M.Neumann,R.J.Plemmons ”**Convergence of a direct-iterative method for large-scale least square problems**”,Linear Algebra,Appl.69(1985),pp 155 – 167.
- [24] W.Niethammer and R.S.Varga ”**The analysis of the k-step iterative methods for linear systems from summability theory**”,Numer.Math41(1983),pp 177 – 206.
- [25] D.Noutsos ”**Optimal stretched parameters for the SOR iterative method**”,J.Comput.Appl.Math48(1993),pp 293 – 308.

- [26] D.J.Pierce,A.Hadjidimos,R.J.Plemmons **"Optimality relationships for p-cyclic SOR"**,Numer.Math 56(1990),pp 635 – 643.
- [27] Y.Saad **"Iterative Methods for Sparse Linear Systems"**,(2000).
- [28] Y.G.Saridakis,"**On the Analysis of the Unsymmetric Successive Overrelaxation Method when Applied to p-cyclic matrices**",Numeric.Math.'49,pp 461 – 473.
- [29] Y.G.Saridakis,C.Sifniotopoulos and D.Sotiropoulos **"Finite element collocation method for the solution of the eigenvalue problems with periodic boundary conditions"**.
- [30] Y.G.Saridakis,"**Optimality Repartioned SOR iterative method for p-cyclic collocation matrices**",HERMIS'94,pp 449 – 456.
- [31] D.Sotiropoulos **"Dispersion of Elastic Waves in Periodically Inhomogeneous Media"**,Comp Mech13(1994) pp 276 – 284.
- [32] E.T.Whitakker and G.N.Watson **"A course of Modern Analysis"**,University Press ,Cambridge(1927).
- [33] Richard.S Varga **"P-cyclic matrices:a generalization of the Young-Frankel successive overrelaxation scheme"**,Pacific J.Math.9(1959),pp 617 – 628.
- [34] Richard.S Varga **"Matrix Iterative Analysis"**, Prentice Hall,Englewood Cliffs,NJ,(1962).
- [35] R.S Varga,W.Niethammer,D.Y.Chai **"P-cyclic and the Symmetric Successive Overrelaxation Method "**,Linear Algebra and its applications 58(1984) pp 425 – 439.
- [36] P.Wild,W.Niethammer **"Over and underrelaxation for linear systems with weakly cyclic Jacobi matrices of index p "**,Linear Algebra and its applications 91(1987) pp 29 – 52.
- [37] D.M.Young **"Iterative methods for solving partial differential equations of elliptic type"**,Trans.Am.Math.Soc76(1954) pp 92 – 111.
- [38] D.M.Young **"Iterative solution of Large Linear Systems"**,New York,NY:(1971).
- [39] D.M.Young **"Applied Iterative Methods"**,NY:(1981).