

ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ ΚΡΗΤΗΣ

ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΠΑΡΑΓΩΓΗΣ ΚΑΙ ΔΙΟΙΚΗΣΗΣ

ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΝΕΥΡΟΑΣΑΦΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΣΤΗΝ ΕΚΤΙΜΗΣΗ ΠΙΣΤΩΤΙΚΟΥ ΚΙΝΔΥΝΟΥ

Διατριβή που υπεβλήθη για τη μερική ικανοποίηση των απαιτήσεων για
την απόκτηση Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης

Υπό
ΚΙΤΣΙΟ ΕΜΜΑΝΟΥΗΛ

Χανιά, 2004

© Copyright υπό Κίτσιο Εμμανουήλ

2004

Η μεταπτυχιακή διατριβή του Κίτσιου Εμμανουήλ εγκρίνεται:

Όνομα	Υπογραφή
Ζοπουνίδης Κωνσταντίνος	
Δούμπος Μιχάλης	
Ματσατσίνης Νικόλαος	

ΒΙΟΓΡΑΦΙΚΟ ΣΗΜΕΙΩΜΑ

Κίτσιος Εμμανουήλ

Σορβόλου 13

Ηράκλειο 71305

e-mail: manoskitsios1@yahoo.gr

Ημ. Γεν.: 21/07/1980

Οικογεν. Κατ/ση: Άγαμος

ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ

2002 - 2004 Μεταπτυχιακός Φοιτητής στην κατεύθυνση Οργάνωσης και Διοίκησης του τμήματος Μηχανικών Παραγωγής και Διοίκησης, Πολυτεχνείου Κρήτης
(Μ.Ο. μαθημάτων 2002-2004: 9,00).

1998 - 2002: Φοιτητής του τμήματος Χρηματοοικονομικής και Τραπεζικής Διοικητικής, Πανεπιστημίου Πειραιώς.
Βαθμός πτυχίου: Άριστα 8,67

1995 - 1998: 2^ο Γενικό Λύκειο Ηρακλείου.
Βαθμός απολυτηρίου: Άριστα 20

1992 - 1998: Αριστεία Προόδου για κάθε μαθητικό έτος του Γυμνασίου και Λυκείου.

ΞΕΝΕΣ ΓΛΩΣΣΕΣ

Αγγλικά: Επίπεδο Proficiency, University of Michigan, 1996.

ΥΠΟΤΡΟΦΙΕΣ

Δεκ.1999: Υποτροφία από το τμήμα Χρηματοοικονομικής και Τραπεζικής Διοικητικής και τον Σύνδεσμο Μετόχων Χρηματιστηρίου Αξιών (ΣΜΕΧΑ) για την επίτευξη μιας από τις καλύτερες επιδόσεις στο τμήμα κατά το ακαδημαϊκό έτος 1998 - 1999.

Μάρ.2001: Υποτροφία από το Ι.Κ.Υ. μέσα στα πλαίσια του κοινοτικού προγράμματος ERASMUS για σπουδές 6 μηνών (από 1/9/2000 έως 20/2/2001) στο GENT UNIVERSITEIT Βελγίου (Πανεπιστήμιο Γάνδης).

Ιούλ.2004: Υποτροφία από τον Ελληνο-Καναδικό Σύνδεσμο (Hellenic-Canadian Association) για μεταπτυχιακές σπουδές σε Πανεπιστήμιο του Καναδά (University of British Columbia) για το ακαδημαϊκό έτος 2004-2005.

ΕΡΓΑΣΙΑΚΗ ΕΜΠΕΙΡΙΑ

02/07/01 – 31/08/01: Θερινή Πρακτική Άσκηση σε Υποκατάστημα της ΕΘΝΙΚΗΣ ΤΡΑΠΕΖΑΣ της ΕΛΛΑΔΟΣ Α.Ε. (Λογιστήριο/ Συναλλάγμα)

10/07/00 – 27/08/00: Θερινή Πρακτική Άσκηση σε Κατάστημα της ΕΜΠΟΡΙΚΗΣ ΤΡΑΠΕΖΑΣ της ΕΛΛΑΔΟΣ Α.Ε. (Χορηγήσεις)

ΓΝΩΣΕΙΣ Η/Υ

MS Windows, MS Office, SPSS, WEKA, NEFClass.

ΠΕΡΙΛΗΨΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗΣ

Η απελευθέρωση του τραπεζικού συστήματος τα τελευταία χρόνια στην Ελλάδα συνέβαλε στην ενίσχυση του ανταγωνισμού των χρηματοπιστωτικών ιδρυμάτων και στη μείωση των περιθωρίων κέρδους των τραπεζικών εργασιών, με αποτέλεσμα να καθίσταται αναγκαία η μείωση των κινδύνων που συνδέονται με τη χορήγηση πίστωσης. Όσον αφορά την καταναλωτική πίστη, η ραγδαία ανάπτυξη του τομέα των πιστωτικών καρτών οδήγησε στην αναζήτηση αυτοματοποιημένων μεθόδων πιστοληπτικής βαθμολόγησης που θα συνδυάζουν τη μεγαλύτερη δυνατή ακρίβεια ταξινόμησης των υποψήφιων δανειοληπτών σε κατηγορίες κινδύνου με τη δυνατότητα επεξήγησης της διαδικασίας λήψης απόφασης.

Τα νευροασαφή συστήματα αποδεικνύονται ιδιαίτερα χρήσιμα σε χρηματοοικονομικά προβλήματα, όπως είναι αυτό της πιστοληπτικής βαθμολόγησης, καθώς διακρίνονται για την ικανότητα μοντελοποίησης σύνθετων και μη-γραμμικών συστημάτων μέσα από τη χρησιμοποίηση των λεκτικά κατανοητών κανόνων της μορφής if-then. Μέσα στα πλαίσια της παρούσας εργασίας διερευνήθηκε η δυνατότητα εφαρμογής των νευροασαφών συστημάτων στην πιστοληπτική βαθμολόγηση, και συγκεκριμένα στην ταξινόμηση αιτήσεων για τη χορήγηση πιστωτικής κάρτας. Τα αποτελέσματα της ταξινόμησης συγκρίθηκαν με τεχνικές από το χώρο της μηχανικής μάθησης και της στατιστικής ανάλυσης και κρίθηκαν ικανοποιητικά. Μελλοντικά τα χρηματοπιστωτικά ιδρύματα μπορούν να ωφεληθούν από την ανάπτυξη έμπειρων συστημάτων βασισμένων σε νευροασαφή συστήματα, που θα προσδιορίζουν την ομάδα κινδύνου στην οποία ανήκουν οι πελάτες τους, με βάση τα ποιοτικά και ποσοτικά δεδομένα που διατηρούν για αυτούς.

Π Ε Ρ Ι Ε Χ Ο Μ Ε Ν Α

Βιογραφικό Σημείωμα	iv
Περίληψη Διατριβής	v
1. Εισαγωγή	3
2. Θεωρία Ασαφών Συνόλων και Ασαφής Λογική	5
2.1. Εισαγωγή	5
2.1.1. Ασαφής Γνώση	5
2.1.2. Βασικές Έννοιες Ασαφών Συνόλων	6
2.1.3. Ιδιότητες Ασαφών Συνόλων	14
2.1.4. Μορφές Συναρτήσεων Συμμετοχής	17
2.1.5. Ασαφείς Σχέσεις	20
2.1.6. Ασαφείς Μεταβλητές, Αριθμοί, Προτάσεις και Κανόνες	20
2.2. Ασαφής Συλλογιστική	23
2.2.1. Γενίκευση των τριών βασικών τελεστών	26
2.2.2. Η Αρχή της Επέκτασης (extension principle)	28
2.3. Συστήματα Ασαφούς Συλλογιστικής	29
3. Νευρωνικά Δίκτυα	33
3.1. Εισαγωγή	33
3.2. Τεχνητά Νευρωνικά Δίκτυα (ΤΝΔ)	34
3.3. Τύποι Τεχνητών Νευρωνικών Δικτύων	36
3.3.1. Δίκτυα με Απλή Τροφοδότηση	38
3.3.2. Κανόνας Δέλτα	41
3.3.3. Αλγόριθμος Εκμάθησης με βάση την Ανάστροφη Διάδοση του Σφάλματος (back propagation learning algorithm)	41
3.4. Νευρωνικά Δίκτυα με Ανατροφοδότηση	43
3.4.1. Δίκτυα Hopfield	43
3.4.2. Δίκτυα Kohonen	44
3.5. Άλλοι τύποι ΤΝΔ	45
3.6. Στάδια Διαδικασίας Ανάπτυξης ενός ΤΝΔ	46
3.7. Μάθηση και Ανάκληση	47
3.7.1. Μάθηση Υπό Επίβλεψη (supervised learning)	48
3.7.2. Μάθηση χωρίς επίβλεψη (unsupervised learning)	48
3.7.3. Ανταγωνιστική μάθηση (competitive learning)	48
3.7.4. Ενισχυτική μάθηση (reinforced learning)	49
3.7.5. Βαθμολογημένη μάθηση (graded learning)	49
3.7.6. Τυχαία Μάθηση (random learning)	49
3.8. Βασικά Χαρακτηριστικά	50
4. Υβριδικά Συστήματα Υπολογιστικής Νοημοσύνης	51
4.1. Εισαγωγή	51
4.2. Ασαφή Νευρωνικά Δίκτυα	52
4.3. Αρχιτεκτονικές Ασαφών Νευρωνικών Δικτύων	55

5. Εφαρμογές τεχνικών από το χώρο της στατιστικής, της μηχανικής μάθησης και της τεχνητής νοημοσύνης στην πιστοληπτική βαθμολόγηση (credit scoring).	59
5.1. Εισαγωγή	59
5.2. Πιστοληπτική Βαθμολόγηση (credit scoring)	59
5.3. Επισκόπηση τεχνικών πιστοληπτικής βαθμολόγησης (credit scoring)	60
6. Εφαρμογή Νευροασαφούς Συστήματος στην Πιστοληπτική Βαθμολόγηση για την Ταξινόμηση Αιτήσεων Πιστωτικών Καρτών ⁷³	
6.1. Περιγραφή των Δεδομένων και Διατύπωση του Προβλήματος	73
6.2. Παράμετροι Νευροασαφούς Συστήματος	75
6.3. Αποτελέσματα της εφαρμογής του Νευροασαφούς Συστήματος	80
6.4. Σύγκριση του Νευροασαφούς συστήματος με τεχνικές από το χώρο της μηχανικής μάθησης και της στατιστικής ανάλυσης.	84
7. Συμπεράσματα - Προοπτικές	90
8. Βιβλιογραφία	91

1. Εισαγωγή

Τα τελευταία 30 χρόνια η πρόβλεψη χρηματοοικονομικών κινδύνων έχει εξελιχθεί σε ένα ταχύτατα αναπτυσσόμενο κλάδο της χρηματοοικονομικής επιστήμης.

Ο τομέας των πιστωτικών καρτών από την πλευρά του έχει σημειώσει ραγδαία ανάπτυξη τις τελευταίες δύο δεκαετίες. Παραδοσιακά τα χρηματοπιστωτικά ιδρύματα εφάρμοζαν κανόνες αναλυτών, προκειμένου να αποφασίσουν σε ποιους πελάτες θα χορηγήσουν πίστωση. Η σημαντική αύξηση του αριθμού των υποψηφίων για τη λήψη πιστωτικής κάρτας κατέστησε αδύνατη, σε όρους τόσο οικονομικών πόρων, όσο και απασχολούμενου ανθρώπινου δυναμικού, τη διεξαγωγή όλων των απαραίτητων διαδικασιών από μία ολιγομελή ομάδα ειδικών. Κατά συνέπεια, καθίσταται πλέον αναγκαία η αυτοματοποίηση της διαδικασίας έγκρισης παροχής πίστωσης.

Ειδικότερα για την Ελλάδα, η μεγάλη απελευθέρωση του τραπεζικού συστήματος και η ταχεία μείωση των επιτοκίων δανεισμού τα τελευταία χρόνια οδήγησαν τις τράπεζες στην εντατική προσέλκυση πελατών. Από την άλλη πλευρά, η παρατηρούμενη μείωση των περιθωρίων κέρδους στις τραπεζικές εργασίες επιβάλλει τον περιορισμό των κινδύνων που συνδέονται με την καταναλωτική πίστη.

Η αναγκαιότητα για ορθολογική ανάπτυξη των χαρτοφυλακίων των δανείων των τραπεζικών ιδρυμάτων οδήγησε στην αναζήτηση μεθόδων πιστοληπτικής βαθμολόγησης που θα επιτυγχάνουν τη μεγαλύτερη δυνατή ακρίβεια ταξινόμησης των πελατών σε φερέγγυους και αφερέγγυους. Τα πρώτα μοντέλα πιστοληπτικής βαθμολόγησης που εφαρμόστηκαν (διακριτική ανάλυση, λογιστική παλινδρόμηση, κανονικό υπόδειγμα πιθανότητας κλπ) προέρχονταν από το χώρο της στατιστικής ανάλυσης. Τα τελευταία χρόνια τα νευρωνικά δίκτυα έχουν αναγνωριστεί ως μία αποτελεσματική μέθοδος αναγνώρισης προτύπων, η οποία επιτυγχάνει υψηλή ακρίβεια ταξινόμησης σε προβλήματα πιστοληπτικής βαθμολόγησης. Τα τεχνητά νευρωνικά δίκτυα όμως μειονεκτούν στο ότι δεν παρέχουν εξήγηση της διαδικασίας με την οποία καταλήγουν στο αποτέλεσμα.

Η ασαφής λογική μπορεί να εξηγήσει τη συμπεριφορά της λειτουργίας ενός συστήματος χρησιμοποιώντας κανόνες, και έχει το μεγάλο πλεονέκτημα ότι δεν απαιτεί ακρίβεια της πληροφορίας. Τα τεχνητά νευρωνικά δίκτυα από την πλευρά τους χαρακτηρίζονται για τη δυνατότητα εντοπισμού μη-γραμμικών σχέσεων μεταξύ των εξεταζόμενων μεταβλητών και για την ικανότητα γενίκευσης μέσω παραδειγμάτων. Τα νευροασαφή συστήματα αποτελούν υβριδικά συστήματα υπολογιστικής νοημοσύνης, τα οποία συνδυάζουν τα πλεονεκτήματα των τεχνητών νευρωνικών δικτύων και των ασαφών συστημάτων με σκοπό την επίλυση πολύπλοκων προβλημάτων. Τα νευροασαφή συστήματα έχουν εφαρμοστεί με επιτυχία τα τελευταία χρόνια στην πιστοληπτική βαθμολόγηση από τους Piramuthu (1999), Jagielska et al. (1999), Hoffman et al. (2002), και Malhotra και Malhotra (2002).

Σκοπός της παρούσας εργασίας είναι η διερεύνηση της δυνατότητας εφαρμογής των νευροασαφών συστημάτων στην πιστοληπτική βαθμολόγηση, και συγκεκριμένα στην ταξινόμηση αιτήσεων για τη χορήγηση πιστωτικής κάρτας. Η δομή της εργασίας έχει ως εξής: Στα κεφάλαια 2, 3 και 4 παρουσιάζεται το θεωρητικό υπόβαθρο της ασαφούς λογικής, των τεχνητών νευρωνικών δικτύων και των νευροασαφών συστημάτων αντίστοιχα. Στο κεφάλαιο 5 παρουσιάζεται το πρόβλημα της πιστοληπτικής βαθμολόγησης και οι τεχνικές που έχουν προταθεί για την

αντιμετώπισή του. Στο κεφάλαιο 6 παρουσιάζεται η εφαρμογή ενός νευροασαφούς συστήματος στην ταξινόμηση 150 αιτήσεων πιστωτικών καρτών και γίνεται η σύγκριση του με τεχνικές από το χώρο της μηχανικής μάθησης και της στατιστικής ανάλυσης. Στο κεφάλαιο 7 παρουσιάζονται τα συμπεράσματα της εργασίας και οι προοπτικές για μελλοντική έρευνα.

2. Θεωρία Ασαφών Συνόλων και Ασαφής Λογική

2.1. Εισαγωγή

Τον όρο «ασαφή λογική» (fuzzy logic) εισήγαγε το 1962 με άρθρο του ο Zadeh, ο οποίος αναφέρθηκε στην αναγκαιότητα δημιουργίας μίας μαθηματικής θεωρίας που θα επεξεργαζόταν ασαφείς-ανακριβείς έννοιες, οι οποίες δεν είναι δυνατό να μοντελοποιηθούν μέσω της θεωρίας των πιθανοτήτων. Η μαθηματική θεμελίωση της ασαφούς λογικής επιτεύχθηκε με τη διατύπωση της θεωρίας των ασαφών συνόλων (fuzzy set theory) από τον Zadeh (1965) λίγα χρόνια αργότερα..

Η ασαφής λογική (fuzzy logic) αποτελεί ένα υπερσύνολο της κλασικής λογικής, την οποία επεκτείνει, προκειμένου να μπορεί να χειριστεί τιμές αληθείας μεταξύ του «απολύτως αληθούς» και του «απολύτως ψευδούς». Η ασαφής λογική κατά τον Zadeh αποτελεί «τη διαδικασία της μετατροπής διακριτών μεγεθών σε ασαφή (fuzzification) που επιτρέπει τη γενίκευση μιας διακριτής (distinct) θεωρίας σε συνεχή (continuous)».

2.1.1. Ασαφής Γνώση

Η ασάφεια (fuzziness) είναι μια έννοια που σχετίζεται με την ποσοτικοποίηση της πληροφορίας και οφείλεται κυρίως σε μη-ακριβή (imprecise) δεδομένα. Για παράδειγμα η φράση «Ο Νίκος είναι ψηλός», επιτρέπει να βγουν κάποια συμπεράσματα ή να ληφθούν ορισμένες αποφάσεις που σχετίζονται με το ύψος του Νίκου, παρά το γεγονός ότι δεν προσδιορίζει με ακρίβεια το ύψος του Νίκου .

Το πρόβλημα σε αυτές τις περιπτώσεις δεν οφείλεται τόσο στις έννοιες που χρησιμοποιούνται, όσο στην αντίληψη που έχει ο καθένας για τέτοιους λεκτικούς προσδιορισμούς ποσοτικών μεγεθών. Κατά συνέπεια, η ασάφεια είναι ένα εγγενές χαρακτηριστικό της γλώσσας. Αν και είναι δυνατό να αποδοθούν συγκεκριμένες τιμές σε λεκτικά προσδιορισμένα μεγέθη για να περιοριστεί η ασάφεια, αυτό οδηγεί πολλές φορές σε λάθος κρίσεις.

Στο παράδειγμά μας, αν θεωρήσουμε ότι ψηλό είναι οποιοδήποτε άτομο έχει ύψος πάνω από 1.80 μέτρα, δεν είναι απόλυτα σωστό να βγει το συμπέρασμα ότι κάποιος άνθρωπος με ύψος 1.79 μέτρα δεν είναι ψηλός. Ένα άλλο παράδειγμα, το οποίο δίνει μια καλύτερη «αίσθηση» της ασάφειας, είναι το σύνολο των καρεκλών μέσα σε ένα δωμάτιο. Στην κλασική θεωρία συνόλων, ο προσδιορισμός των αντικειμένων που ανήκουν στο σύνολο «καρέκλα», μπορεί να γίνει απλά προσδιορίζοντας για κάθε αντικείμενο με «ναι» ή «όχι» αν είναι καρέκλα. Αν όμως ζητηθεί να προσδιοριστεί το σύνολο των αντικειμένων που μπορούν να «λειτουργήσουν» ως καρέκλα, τότε θα προκύψει ένα αρκετά διαφορετικό σύνολο, καθώς υπάρχουν πολλά αντικείμενα σε ένα δωμάτιο με αυτήν την ικανότητα, όπως ένας πάγκος, ένα γραφείο ή ακόμη και το πάτωμα. Ένα τέτοιο σύνολο αποτελεί ένα ασαφές σύνολο (fuzzy set) με την έννοια ότι δεν υπάρχουν αυστηρά κριτήρια που να καθορίζουν το κατά πόσο ένα αντικείμενο ανήκει σε αυτό το σύνολο ή δεν ανήκει.

Η ασαφής λογική (fuzzy logic) και η θεωρία των ασαφών συνόλων (fuzzy set theory) παρέχουν ένα πλαίσιο χειρισμού της ασάφειας και ένα πλαίσιο συλλογιστικής βασισμένης στην ασάφεια.

2.1.2. Βασικές Έννοιες Ασαφών Συνόλων

Ένα ασαφές σύνολο (fuzzy set) ορίζεται ως ένα σύνολο διατεταγμένων ζευγών $(x, \mu_A(x))$, όπου $x \in X$ και $\mu_A(x) \in [0,1]$.

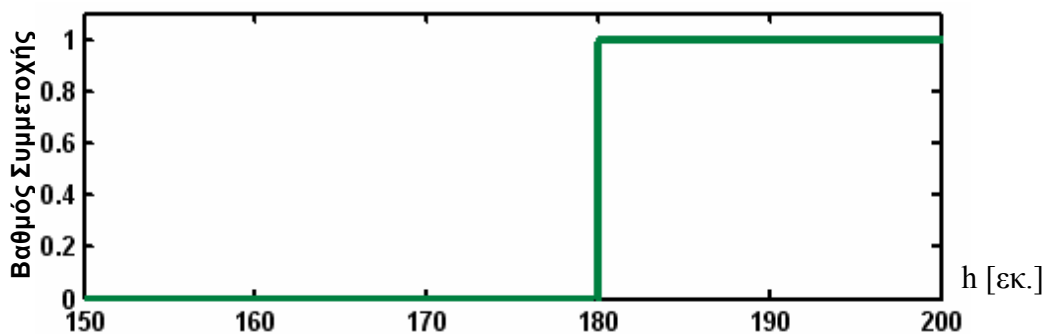
Το σύνολο X αποτελεί το ευρύτερο σύνολο αναφοράς (universe of discourse) που περιλαμβάνει όλα τα αντικείμενα στα οποία μπορεί να γίνει αναφορά. Η τιμή $\mu_A(x)$ λέγεται βαθμός αληθείας (degree of truth), συμβολίζει το βαθμό συγγένειας του x στο A και παίρνει τιμές στο διάστημα $[0,1]$.

Τέλος η συνάρτηση μ_A ονομάζεται συνάρτηση συμμετοχής (συγγένειας) (membership function). Στην πράξη η συνάρτηση συμμετοχής μπορεί να προέρχεται από:

- Υποκειμενικές εκτιμήσεις
- Προκαθορισμένες (ad hoc) και απλοποιημένες μορφές
- Συχνότητες εμφανίσεων και πιθανότητες
- Φυσικές μετρήσεις
- Διαδικασίες μάθησης και προσαρμογής (συνήθως με νευρωνικά δίκτυα)

Η διαφορά των ασαφών συνόλων συγκριτικά με την κλασική θεωρία συνόλων είναι ότι για τη χαρακτηριστική συνάρτηση αντιστοίχισης της δεύτερης ισχύει $\mu_A(x) \in \{0,1\}$, δηλαδή το x είτε ανήκει στο A [$\mu_A(x)=1$] ή δεν ανήκει [$\mu_A(x)=0$]. Άρα η ασαφής θεωρία συνόλων μεταπίπτει στην αντίστοιχη κλασική, όταν οι δυνατές τιμές της συνάρτησης συμμετοχής είναι μόνο 0 και 1.

Επανερχόμαστε στο παράδειγμα του κλασικού και του ασαφούς συνόλου «ψηλοί άνθρωποι», προκειμένου να αποδείξουμε τη χρησιμότητα της χρησιμοποίησης των ασαφών συνόλων στην αναπαράσταση εννοιών που δεν έχουν σαφώς καθορισμένα όρια προσδιορισμού τους.



Σχήμα 1: Σύνολο "Ψηλοί Άνθρωποι" - Κλασική προσέγγιση

Το σχήμα 1 προσεγγίζει το σύνολο «ψηλοί άνθρωποι» από τη σκοπιά της προσέγγισης των κλασικών συνόλων. Για κάθε υποσύνολο A του συνόλου αναφοράς X αντιστοιχεί μία χαρακτηριστική συνάρτηση (έστω μ_A) με πεδίο τιμών $\{0,1\}$. Κατά συνέπεια οι μοναδικές τιμές που μπορεί να πάρει αυτή η συνάρτηση αντιστοίχισης των στοιχείων του X στα στοιχεία του συνόλου $\{0,1\}$, είναι το μηδέν στην περίπτωση που το στοιχείο αυτό δεν ανήκει στο υποσύνολο A , και η μονάδα στην περίπτωση που το στοιχείο αυτό ανήκει στο υποσύνολο A . Το παρακάτω παράδειγμα επαλήθευσης της πρότασης «Ο Νίκος είναι ψηλός» ακολουθώντας την προσέγγιση

των κλασικών συνόλων γίνεται με βάση την οριοθέτηση ότι στο κλασικό σύνολο «ψηλοί άνθρωποι» ανήκουν όσοι έχουν ύψος μεγαλύτερο των 180 εκατοστών.

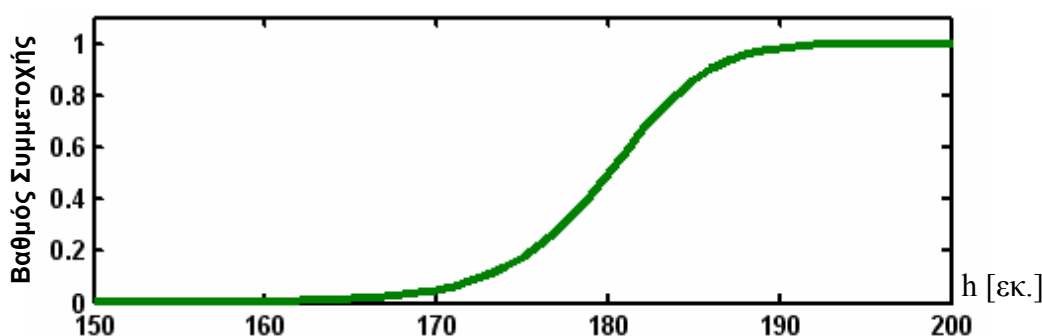
Κλασικό Σύνολο ψηλών ανθρώπων

$$A = \{h \mid h \geq 180 \text{ εκατοστά}\}$$

Πρόταση «Ο Νίκος είναι ψηλός»

Ύψος Νίκου	μ	Πρόταση
$h_{\text{ΝΙΚΟΥ}} = 180\text{εκ.}$	$\mu_A = 1$	Αληθής
$h_{\text{ΝΙΚΟΥ}} = 179\text{εκ.}$	$\mu_A = 0$	Ψευδής

Προσεγγίζοντας το ίδιο πρόβλημα με βάση τα ασαφή σύνολα, έχουμε το παρακάτω σχήμα 2. Η συνάρτηση συμμετοχής του ασαφούς συνόλου «ψηλοί άνθρωποι» δεν παίρνει δύο τιμές μόνο, όπως η χαρακτηριστική συνάρτηση του παραπάνω παραδείγματος, αλλά έχει πεδίο τιμών το διάστημα $[0,1]$.



Σχήμα 2: Σύνολο "Ψηλοί Άνθρωποι" - Ασαφής προέγγιση

Ασαφές Σύνολο ψηλών ανθρώπων

$$A = \int_X \mu_A(h)/h$$

$$\mu_A(h) = \begin{cases} 1 & , \quad \text{Το } h \text{ ανήκει πλήρως στο } A & h \geq 192 \\ (0,1) & , \quad \text{Το } h \text{ ανήκει μερικώς στο } A & 168 < h < 192 \\ 0 & , \quad \text{Το } h \text{ δεν ανήκει στο } A & h \leq 168 \end{cases}$$

Έστω X ένα μη κενό σύνολο αντικειμένων, με την κλασική έννοια του όρου, το οποίο αποτελεί το σύνολο αναφοράς (universe of discourse). Θεωρούμε ένα υποσύνολο A του X . Τότε υπάρχει μία συνάρτηση $\mu_A: X \rightarrow \{0,1\}$, η οποία ονομάζεται χαρακτηριστική συνάρτηση συμμετοχής κάθε στοιχείου x στο υποσύνολο A και ορίζεται ως

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1 & , x \in A \\ 0 & , x \notin A \end{cases}$$

Αν επεκτείνουμε το πεδίο τιμών της μ στο διάστημα $[0,1]$ τότε ορίζουμε ένα ασαφές υποσύνολο A του συνόλου X . Χαρακτηριστικό των ασαφών υποσυνόλων

είναι ότι κάθε στοιχείο του υπό θεώρηση συνόλου X δύναται να ανήκει σε αυτά, αλλά με διαφορετικό βαθμό συμμετοχής. Συνεπώς, ένα ασαφές υποσύνολο ορίζεται ως ένα σύνολο διατεταγμένων ζευγών όπως έχουμε ήδη αναφέρει.

Ένας εναλλακτικός συμβολισμός προτείνεται από τον Zadeh (1972): Όταν το σύνολο X είναι πεπερασμένο, δηλ. $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, τότε ένα ασαφές υποσύνολο A μπορεί να γραφεί ως:

$$A = \mu_A(x_1)/x_1 + \dots + \mu_A(x_n)/x_n = \sum_{i=1}^n \mu_A(x_i)/x_i$$

Ο συμβολισμός αυτός επεκτείνεται στην περίπτωση του μη πεπερασμένου συνόλου αναφοράς ως εξής:

$$A = \int_X \mu_A(x)/x, \quad x \in X$$

Η κάθετος δεν αναπαριστά διαίρεση, το «+» και το « \int » δεν υποδεικνύουν πραγματική πρόσθεση ή πραγματική ολοκλήρωση. Η σημασία τους είναι καθαρά συμβολική.

Παραδείγματα:

➤ Ασαφή Σύνολα με διακριτά μη διατεταγμένα σύνολα αναφοράς (fuzzy sets with a discrete non ordered universe)

Έστω $X = \{\text{Αθήνα, Χανιά, Ηράκλειο}\}$ το σύνολο των πόλεων που κάποιος μπορεί να επιλέξει για να ζήσει. Το ασαφές σύνολο $C = \{\text{επιθυμητή πόλη για να ζήσει κάποιος}\}$ μπορεί να περιγραφεί ως ακολούθως:

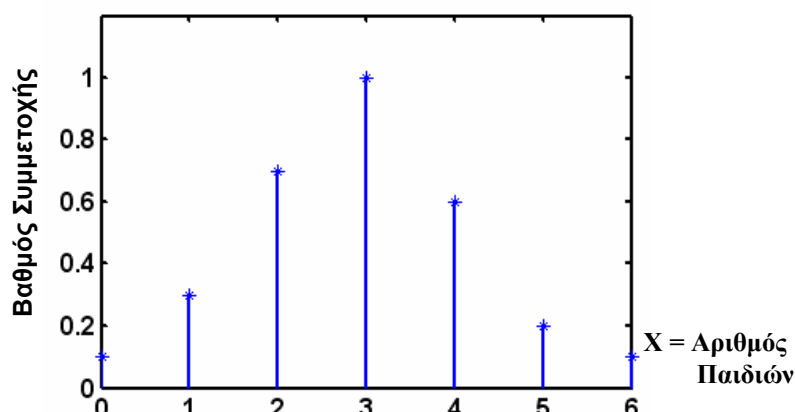
$$C = \{(\text{Αθήνα}, 0.9), (\text{Χανιά}, 0.8), (\text{Ηράκλειο}, 0.6)\}$$

Προφανώς το σύνολο αναφοράς X είναι διακριτό και περιλαμβάνει μη-διατεταγμένα αντικείμενα, καθώς στη συγκεκριμένη περίπτωση έχουμε τρεις πόλεις της Ελλάδος. Όπως γίνεται αντιληπτό, οι αναφερθέντες αυτοί βαθμοί συμμετοχής είναι αρκετά υποκειμενικοί, καθώς αναπαριστούν συγκεκριμένες προτιμήσεις, οι οποίες διαφέρουν από άτομο σε άτομο.

➤ Ασαφή Σύνολα με διακριτά διατεταγμένα σύνολα αναφοράς (fuzzy sets with a discrete ordered universe)

Έστω $X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ το σύνολο των παιδιών που μια οικογένεια μπορεί να επιλέξει να έχει. Τότε το ασαφές σύνολο $A = \{\text{λογικός αριθμός παιδιών σε μία οικογένεια}\}$ (βλέπε σχήμα 3) μπορεί να περιγραφεί ως ακολούθως:

$$A = \{(0, 0.1), (1, 0.3), (2, 0.7), (3, 1), (4, 0.6), (5, 0.2), (6, 0.1)\}$$



Σχήμα 3: Ασαφή Σύνολα με διακριτά κανονικοποιημένα σύνολα αναφοράς

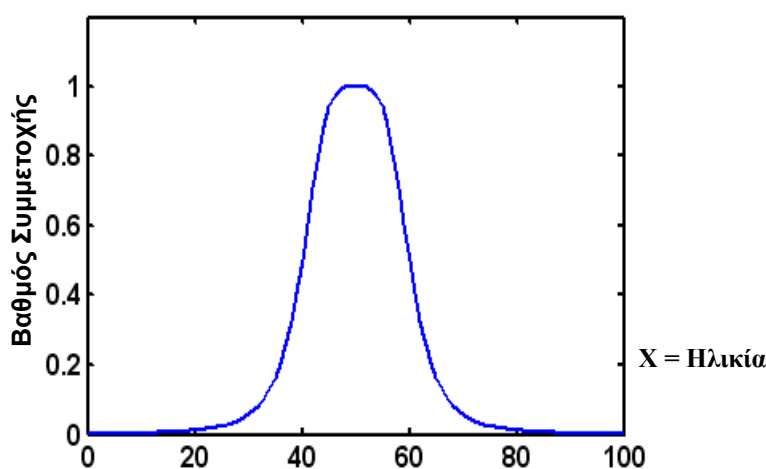
☞ Ασαφή Σύνολα με συνεχή σύνολα αναφοράς (fuzzy sets with a continuous universe)

Έστω $X = \mathbb{R}^+$ το σύνολο των πιθανών ηλικιών του ανθρώπου, Τότε το ασαφές σύνολο $B = \text{«περίπου 50 ετών»}$ (βλέπε σχήμα 4) μπορεί να εκφραστεί ως:

$$B = \{(x, \mu_B(x)) \mid x \in X\}$$

όπου:

$$\mu_B(x) = \frac{1}{1 + \left(\frac{x-50}{10}\right)^4}$$



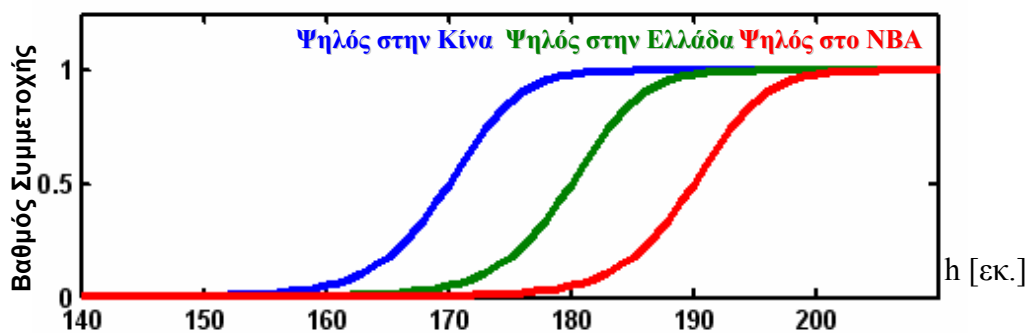
Σχήμα 4: Ασαφή Σύνολα με συνεχή σύνολα αναφοράς

Από τα προηγούμενα παραδείγματα γίνεται φανερό ότι η κατασκευή ενός ασαφούς συνόλου εξαρτάται από δύο παράγοντες:

1. τον εντοπισμό ενός κατάλληλου συνόλου αναφοράς και
2. τη συγκεκριμενοποίηση μιας κατάλληλης συνάρτησης συμμετοχής.

Η συγκεκριμενοποίηση των συναρτήσεων συμμετοχής είναι υποκειμενική, γεγονός που σημαίνει ότι οι συναρτήσεις συμμετοχής που σχηματίζονται για να περιγράψουν την ίδια έννοια (π.χ. τον «επιθυμητό αριθμό παιδιών σε μια οικογένεια») μπορεί να διαφέρουν σημαντικά ανάμεσα σε διαφορετικά άτομα. Αυτή η υποκειμενικότητα προέρχεται από τις ατομικές διαφορές στην αντίληψη ή την έκφραση ασαφών εννοιών, και δεν σχετίζεται με την επίδραση κάποιου τυχαίου παράγοντα.

Χρησιμοποιώντας ξανά το παράδειγμα του ασαφούς συνόλου «ψηλοί άνθρωποι», μπορούμε να καθορίσουμε με υποκειμενικά κριτήρια τις συναρτήσεις συμμετοχής, στην προσπάθειά μας να προσεγγίσουμε αποτελεσματικά την πραγματικότητα. Για αυτόν το λόγο η συνάρτηση συμμετοχής διαφοροποιείται όταν για παράδειγμα αναφερόμαστε στους «ψηλούς ανθρώπους» α) της Κίνας, β) της Ελλάδας και γ) των παικτών του NBA! Στο σχήμα 5 παραθέτουμε τη διαγραμματική απεικόνιση της συνάρτησης συμμετοχής για κάθε μία από αυτές τις περιπτώσεις.



Σχήμα 5: Υποκειμενικότητα στην εκτίμηση συναρτήσεων συμμετοχής με βάση το πλαίσιο αναφοράς

Επομένως η υποκειμενικότητα και η μη-τυχειότητα των ασαφών συνόλων είναι η πρωταρχική διαφοροποίηση ανάμεσα στην θεωρία των ασαφών συνόλων και την θεωρία πιθανοτήτων, που επικεντρώνεται στην αντικειμενική αντιμετώπιση τυχαίων φαινομένων.

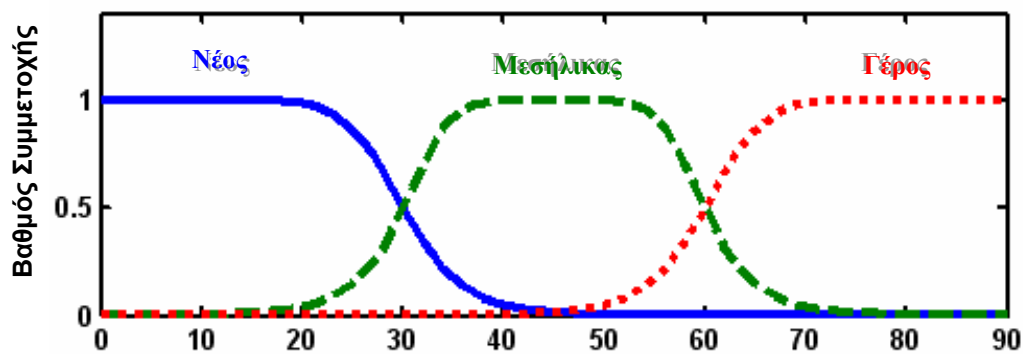
Το ασαφές σύνολο ορίζεται ως:

$$\rightarrow A = \sum_{x_i \in X} \mu_A(x_i) / x_i, \text{ Όταν το } X \text{ αποτελεί ένα σύνολο διακριτών αντικειμένων}$$

$$\rightarrow A = \int_X \mu_A(x) / x, \text{ Όταν το } X \text{ αποτελεί ένα συνεχές διάστημα (συνήθως το } \mathbb{R}^+)$$

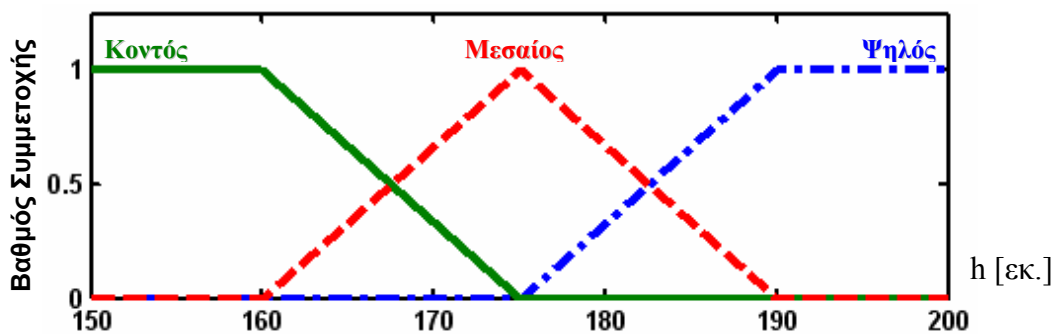
Στην πράξη, όταν το σύνολο αναφοράς αποτελεί ένα συνεχές διάστημα, τότε συνήθως το επιμερίζουμε σε διαφορετικά ασαφή σύνολα, των οποίων οι συναρτήσεις συμμετοχής καλύπτουν το X με έναν λίγο έως πολύ ομοιόμορφο τρόπο. Αυτά τα ασαφή σύνολα συνήθως παριστάνονται με ονομασίες που αντιστοιχούν σε επίθετα, όπως είναι τα «μεγάλο», «μεσαίο», «μικρό», τα οποία ονομάζονται λεκτικές μεταβλητές. Οι λεκτικές μεταβλητές αναλύονται παρακάτω σε άλλο κομμάτι της εργασίας.

Για παράδειγμα έστω το σύνολο αναφοράς $X = \text{«ηλικία»}$. Τότε μπορούμε να προσδιορίσουμε τα ασαφή σύνολα «νέος», «μεσήλικας» και «γέρος». Η λεκτική μεταβλητή «ηλικία» μπορεί να πάρει διαφορετικές λεκτικές τιμές όπως «νέος», «μεσήλικας» και «γέρος», κατά τρόπο αντίστοιχο που οι μεταβλητές με την κλασική έννοια του όρου παίρνουν διαφορετικές τιμές. Οι συνηθισμένες συναρτήσεις συμμετοχής (MF=membership function) για αυτές τις λεκτικές τιμές παρουσιάζονται στο σχήμα 6, όπου το σύνολο αναφοράς X καλύπτεται πλήρως από τις MFs και η μετάβαση από τη μία MF στην άλλη γίνεται ομαλά και σταδιακά.



Σχήμα 6: Συνάρτηση Συμμετοχής της μεταβλητής «ηλικία»

Σε πολλές εφαρμογές χρησιμοποιείται η τμηματικώς γραμμική απεικόνιση της συνάρτησης συμμετοχής, όπως στο σχήμα 7 για τα ασαφή σύνολα «κοντός», «μεσαίος» και «ψηλός». Η αλληλοεπικάλυψη των συναρτήσεων συμμετοχής για κάποιες τιμές του ύψους (π.χ. κοντός-μεσαίος στο διάστημα 160 ως 175 εκατοστά) αποτελεί εγγενές χαρακτηριστικό της θεωρίας των ασαφών συνόλων και πάνω σε αυτό στηρίζεται, όπως θα δείξουμε στη συνέχεια, η ασαφής συλλογιστική.



Σχήμα 7: Συνάρτηση Συμμετοχής των ασαφών συνόλων «κοντός», «μεσαίος» και «ψηλός».

Με βάση τον εναλλακτικό τρόπο, που παρουσιάσαμε παραπάνω, το ασαφές σύνολο «ψηλός» γράφεται:

$$\Psi_{\text{ηλός}} = 0/170 + 0/175 + 0.33/180 + 0.66/185 + 1/190 + 1/195,$$

Η κάθετος διαχωρίζει το $\mu_A(x)$ από το x και δεν αναπαριστά διαίρεση, όπως επίσης το «+» δεν υποδεικνύει πρόσθεση.

Το ασαφές σύνολο ψηλός με τη χρησιμοποίηση ζευγών της μορφής $(x, \mu_A(x))$ γράφεται ως εξής:

$$\Psi_{\text{ηλός}} = \{(170,0), (175,0), (180,0.33), (185,0.66), (190,1), (195,1)\}$$

Η διαφορά στους δύο τρόπους αναπαράστασης είναι ότι η αναπαράσταση με ζεύγη τιμών περιγράφει διακριτές τιμές, δηλαδή μόνο τα συγκεκριμένα ύψη (170, 175, 180, 185, 190, 195), ενώ η αναπαράσταση με αναλυτική συνάρτηση του $\mu(x)$ περιγράφει συνεχείς τιμές ύψους στο διάστημα ορισμού της $\mu(x)$.

Παρακάτω δίνονται κάποιοι ορισμοί που είναι απαραίτητοι για την περιγραφή των συναρτήσεων συμμετοχής.

➤ Χώρος Αναφοράς Ασαφούς Συνόλου - Support

Ο χώρος αναφοράς (support) ενός ασαφούς συνόλου A είναι το σύνολο όλων των σημείων x του X για τα οποία $\mu_A(x) > 0$:

$$\text{Support}(A) = \{x \mid \mu_A(x) > 0\}$$

➤ Πυρήνας Ασαφούς Συνόλου - Core

Ο πυρήνας (core) ενός ασαφούς συνόλου A είναι το σύνολο όλων των σημείων x του X για τα οποία $\mu_A(x) = 1$:

$$\text{Core}(A) = \{x \mid \mu_A(x) = 1\}$$

➤ Κανονικότητα - Normality

Ένα ασαφές σύνολο A είναι κανονικό (normal) όταν ο πυρήνας (core) του είναι μη κενό σύνολο. Με άλλα λόγια θα πρέπει να υπάρχει έστω ένα $x \in X$ τέτοιο που να ισχύει $\mu_A(x) = 1$

➤ Σημεία Διασταύρωσης Ασαφούς Συνόλου - Crossover points

Το σημείο διασταύρωσης (crossover point) ενός ασαφούς συνόλου A είναι ένα σημείο $x \in X$ για το οποίο $\mu_A(x) = 0,5$:

$$\text{Crossover}(A) = \{x \mid \mu_A(x) = 0,5\}$$

➤ Ασαφές singleton - Fuzzy singleton

Ένα ασαφές σύνολο του οποίου ο χώρος αναφοράς είναι ένα μοναδικό στοιχείο στο X με $\mu_A(x) = 1$ αποκαλείται ασαφές singleton (fuzzy singleton).

➤ α -τομή, ισχυρή α -τομή - α -cut, strong α -cut

Η α -τομή (α -cut) ή το σύνολο α -επιπέδου (α -level set) ενός ασαφούς συνόλου A είναι ένα συγκεκριμένο και σαφώς ορισμένο σύνολο που ορίζεται ως

$$A_\alpha = \{x \mid \mu_A(x) \geq \alpha\}$$

Η ισχυρή α -τομή (strong α -cut) ή το ισχυρό σύνολο α -επιπέδου (strong α -level set) ορίζονται ως

$$A'_\alpha = \{x \mid \mu_A(x) > \alpha\}$$

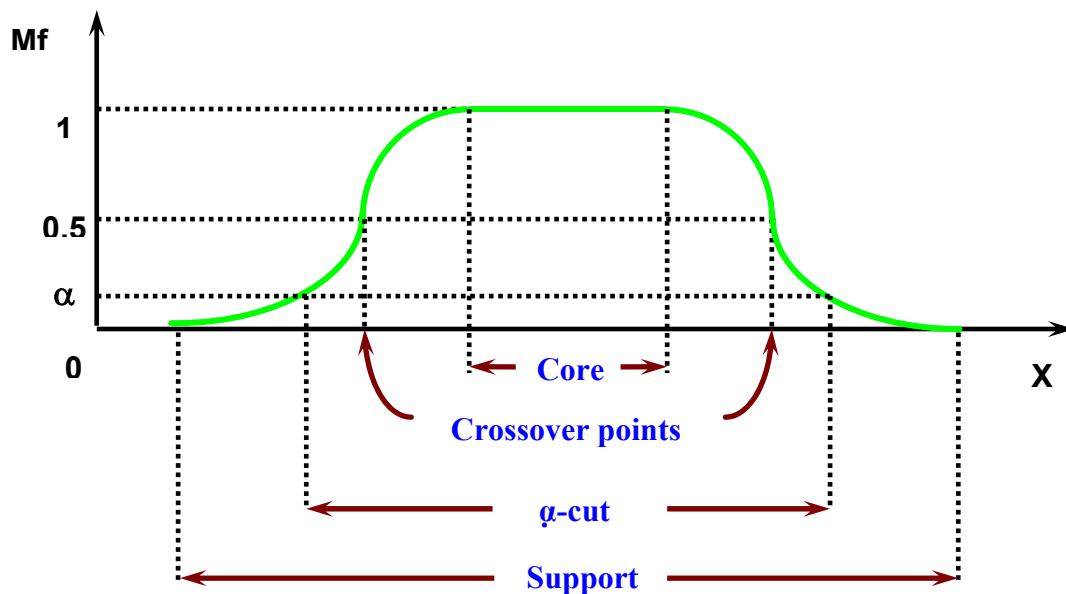
Χρησιμοποιώντας τους παραπάνω ορισμούς μπορούμε να εκφράσουμε το χώρο αναφοράς και τον πυρήνα ενός ασαφούς συνόλου ως:

$$\text{Support}(A) = A'_0$$

Και

$$\text{Core}(A) = A_1$$

Το σχήμα 8 εμφανίζει τις έννοιες που μόλις παρουσιάσαμε.



Σχήμα 8: Αναπαράσταση core, crossover points, α -cut, support

➤ Κυρτότητα - Convexity

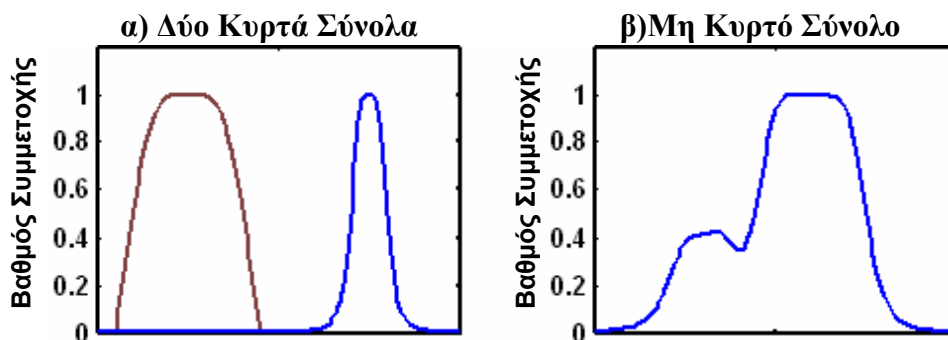
Ένα ασαφές σύνολο είναι κυρτό (convex), αν και μόνο αν για κάθε $x_1, x_2 \in X$ και οποιοδήποτε $\lambda \in [0,1]$ ισχύει:

$$\mu_A(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq \min(\mu_A(x_1), \mu_A(x_2))$$

Εναλλακτικά, το A είναι κυρτό όταν όλα τα α -επιπέδου σύνολά του (α -level sets) είναι κυρτά¹.

Παρατηρούμε ότι ο ορισμός της κυρτότητας ενός ασαφούς συνόλου δεν είναι τόσο αυστηρός, όσο ο συνήθης ορισμός της κυρτότητας μιας συνάρτησης ο οποίος για μια συνάρτηση f είναι:

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2)$$



Σχήμα 9: Αναπαράσταση κυρτών και μη-κυρτών ασαφών συνόλων

¹ Ένα σαφές σύνολο διακριτών τιμών (crisp set) ορισμένο στο R^n είναι κυρτό, αν και μόνο αν για οποιαδήποτε δύο σημεία $x_1 \in C$ και $x_2 \in C$, ο κυρτός συνδυασμός τους:

$$\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2,$$

εξακολουθεί να ανήκει στο C , όπου $0 \leq \lambda \leq 1$. Επομένως η κυρτότητα ενός α (crisp)-level set A_α υποδεικνύει ότι το A_α αποτελείται από ένα στοιχείο-γραμμή μόνο.

Στο σχήμα 9(α) παρουσιάζονται δύο κυρτά ασαφή σύνολα, εκ των οποίων το αριστερό ικανοποιεί και τις δυο προτάσεις που παραθέσαμε παραπάνω, ενώ το δεξιό ικανοποιεί μόνο την πρώτη πρόταση. Στο σχήμα 9(β) παρουσιάζεται ένα μη-κυρτό ασαφές σύνολο.

➤ Ασαφείς Αριθμοί - Fuzzy numbers

Ένας ασαφής αριθμός A είναι ένα ασαφές σύνολο στο πραγματικό εκείνο διάστημα του R που ικανοποιεί τις προϋποθέσεις της κανονικότητας (normality) και της κυρτότητας (convexity). Τα περισσότερα μη-σύνθετα ασαφή σύνολα ικανοποιούν αυτές τις συνθήκες, και έτσι οι ασαφείς αριθμοί αποτελούν τον πιο βασικό και συνηθισμένο τύπο ασαφών συνόλων.

➤ Πλάτος κανονικών και κυρτών ασαφών συνόλων - Bandwidth of normal and convex fuzzy sets

Για ένα κανονικό και κυρτό ασαφές σύνολο, το πλάτος (bandwidth) ορίζεται ως η απόσταση ανάμεσα στα δύο μοναδικά σημεία διασταύρωσης (crossover points).

$$\text{width}(A) = |x_2 - x_1|$$

όπου

$$\mu_A(x_1) = \mu_A(x_2) = 0,5$$

➤ Συμμετρία - Symmetry

Ένα ασαφές σύνολο A είναι συμμετρικό αν η συνάρτηση συμμετοχής του είναι συμμετρική γύρω από ένα συγκεκριμένο σημείο $x = c$, δηλαδή όταν ισχύει:

$$\mu_A(c + x) = \mu_A(c - x), \text{ για κάθε } x \in X$$

➤ Ανοιχτό αριστερά ή δεξιά ασαφές σύνολο, κλειστό ασαφές σύνολο - Open left or right, closed

Ένα ασαφές σύνολο είναι «ανοιχτό από αριστερά» όταν $\lim_{x \rightarrow -\infty} \mu_A(x) = 0$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} \mu_A(x) = 1$, ενώ είναι «ανοιχτό από δεξιά» όταν $\lim_{x \rightarrow -\infty} \mu_A(x) = 1$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} \mu_A(x) = 0$, και τέλος είναι «κλειστό» όταν $\lim_{x \rightarrow -\infty} \mu_A(x) = 0$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} \mu_A(x) = 1$. Για παράδειγμα το ασαφές σύνολο «νέος» είναι ανοιχτό αριστερά (open left), το «γέρος» είναι ανοιχτό δεξιά (open right), και το «μεσήλικας» είναι κλειστό (closed) (βλέπε σχήμα 6).

2.1.3. Ιδιότητες Ασαφών Συνόλων

Για τα ασαφή σύνολα ορίζονται πράξεις και ισχύουν ιδιότητες ανάλογες με αυτές που ισχύουν στα κλασικά σύνολα. Ορισμένες από αυτές, όπως είναι η ένωση και η τομή, ορίζονται μέσω των τελεστών \min και \max που συμβολίζονται με \wedge και \vee αντίστοιχα. Οι τελεστές αυτοί μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την επιλογή του μικρότερου και του μεγαλύτερου αντίστοιχα μεταξύ δύο στοιχείων (π.χ. $3 \wedge 4 = 3$, $3 \vee 4 = 4$) ή μεταξύ των στοιχείων ενός συνόλου. Το σύμβολο του εκάστοτε τελεστή μπορεί να γραφεί και στην αρχή των στοιχείων του συνόλου (προθεματική γραφή) ως εξής:

$$\mu = \wedge(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n) = \bigwedge_{k=1}^n (\mu_k)$$

Ισχύουν οι εξής ιδιότητες:

- ✓ Ένα ασαφές σύνολο ονομάζεται κανονικό αν υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού του για το οποίο $\mu(x_0)=1$
- ✓ Δύο ασαφή σύνολα A και B ορισμένα στο ευρύτερο σύνολο αναφοράς X είναι ισοδύναμα αν οι συναρτήσεις συμμετοχής τους είναι ίσες σε όλο το πεδίο ορισμού τους. Δηλαδή:

$$A = B \text{ αν } \mu_A(x) = \mu_B(x), \forall x \in X$$

- ✓ Το συμπληρωματικό ενός ασαφούς συνόλου A είναι το \bar{A} με συνάρτηση συμμετοχής:

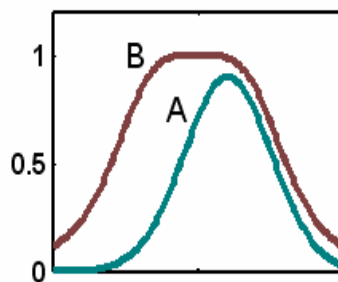
$$\bar{A} = X - A \Leftrightarrow \mu_{\bar{A}}(x) = 1 - \mu_A(x)$$

Η συμπληρωματικότητα στα ασαφή σύνολα είναι ισοδύναμη της άρνησης (NOT) στην ασαφή λογική.

- ✓ Για δύο ασαφή σύνολα A και B ορισμένα στο X , το A είναι υποσύνολο (subset, containment) του B , $A \subseteq B$ αν

$$A \subseteq B \Leftrightarrow \mu_A \leq \mu_B$$

Το σχήμα 10 απεικονίζει την έννοια του υποσυνόλου, όπου το A ασαφές σύνολο εμπεριέχεται στο B .



Σχήμα 10: Αναπαράσταση έννοιας υποσυνόλου στα ασαφή σύνολα.

- ✓ Η ένωση δυο ασαφών συνόλων A και B ορισμένων στο ίδιο σύνολο X είναι ένα νέο ασαφές σύνολο $C = A \cup B$, ή αλλιώς $C = A \text{ OR } B$, ορισμένο επίσης στο X , για το οποίο ισχύει:

$$A \cup B: \mu_{A \cup B}(x) = \vee(\mu_A(x), \mu_B(x)) = \max(\mu_A(x), \mu_B(x)) \quad \forall x \in X \quad \text{ή}$$

$$C = A \cup B \Leftrightarrow \mu_c(x) = \max(\mu_A(x), \mu_B(x)) = \mu_A(x) \vee \mu_B(x)$$

Η ένωση δυο ασαφών συνόλων σχετίζεται με τη διάζευξη (OR) της ασαφούς λογικής.

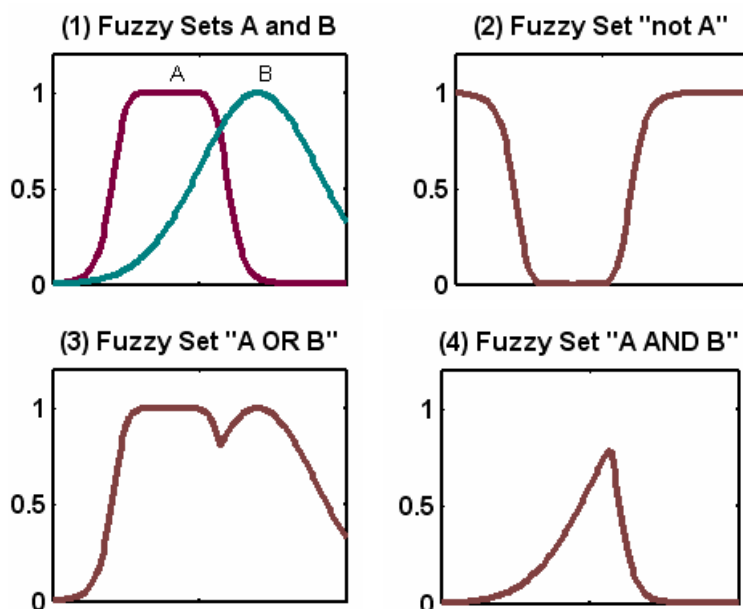
- ✓ Η τομή δυο ασαφών συνόλων A και B ορισμένων στο ίδιο σύνολο X είναι ένα νέο ασαφές σύνολο $C = A \cap B$, ή αλλιώς $C = A \text{ AND } B$ ορισμένο επίσης στο X , για το οποίο ισχύει:

$$A \cap B: \mu_{A \cap B}(x) = \wedge(\mu_A(x), \mu_B(x)) = \min(\mu_A(x), \mu_B(x)) \quad \forall x \in X$$

$$C = A \cap B \Leftrightarrow \mu_c(x) = \min(\mu_A(x), \mu_B(x)) = \mu_A(x) \wedge \mu_B(x)$$

Η τομή δυο ασαφών συνόλων σχετίζεται με τη σύζευξη (AND) της ασαφούς λογικής.

Το σχήμα 11 απεικονίζει (1) δύο ασαφή σύνολα A και B, (2) το \bar{A} , (3) την ένωση $A \cup B$, (4) την τομή $A \cap B$.



Σχήμα 11: Αναπαράσταση ένωσης-τομής ασαφών συνόλων

- ✓ Κενό ασαφές σύνολο « \emptyset » είναι αυτό για το οποίο η συνάρτηση συμμετοχής έχει την τιμή 0 σε όλο το πεδίο ορισμού του
- ✓ Το γινόμενο δυο ασαφών συνόλων A και B ορισμένων στο X, είναι ένα νέο ασαφές σύνολο του οποίου η συνάρτηση συμμετοχής ισούται με το αλγεβρικό γινόμενο των αντίστοιχων συναρτήσεων συμμετοχής των A και B.

$$\mu_{A \cdot B}(x) = \mu_A(x) \mu_B(x) \quad \forall x \in X$$
- ✓ Το γινόμενο ενός πραγματικού αριθμού α με ένα ασαφές σύνολο A, δίνει ένα νέο ασαφές σύνολο $\alpha \cdot A$ για το οποίο ισχύει:

$$\mu_{\alpha \cdot A}(x) = \alpha \cdot \mu_A(x) \quad \forall x \in X$$
- ✓ Ένα ασαφές σύνολο μπορεί να υψωθεί στη δύναμη α (θετικός πραγματικός αριθμός), υψώνοντας στο α τη συνάρτηση συμμετοχής του.

$$\mu_A^\alpha(x) = [\mu_A(x)]^\alpha \quad \forall x \in X$$

Η ύψωση ενός ασαφούς συνόλου στη δεύτερη δύναμη ($\alpha=2$), λαμβάνεται συνήθως ως μεταβολή της λεκτικής τιμής που αντιστοιχεί στο ασαφές σύνολο και συμβολίζεται με τον όρο «πολύ». Για παράδειγμα η ύψωση ενός συνόλου $A = \{\text{μικροί ακέραιοι}\}$ στη δεύτερη δύναμη δίνει $A^2 = \{\text{πολύ μικροί ακέραιοι}\}$.

Στην ασαφή θεωρία συνόλων, σε αντιστοιχία με την κλασική θεωρία συνόλων, ισχύουν τα παρακάτω για τα ασαφή σύνολα A, B και C ορισμένα στο ίδιο σύνολο X:

- Νόμος της διπλής άρνησης: $\overline{(\bar{A})} = A$
- Ταυτοδυναμία: $A \cup B = B \cup A$ και $A \cap B = B \cap A$
- Προσεταιριστική ιδιότητα: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ και $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

- Επιμεριστική ιδιότητα: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ και $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- Απορροφητική ιδιότητα: $A \cap (A \cup B) = A$ και $A \cup (A \cap B) = A$
- Νόμος του De Morgan: $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ και $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

Όλες οι παραπάνω ιδιότητες μπορούν να εκφραστούν χρησιμοποιώντας τις συναρτήσεις συμμετοχής των ασαφών συνόλων A , B και C αντί για τα ίδια τα ονόματά τους. Για παράδειγμα η αντιμεταθετική ιδιότητα θα μπορούσε να γραφεί και σαν:

$$\mu_A(x) \cap \mu_B(x) = \mu_B(x) \cap \mu_A(x)$$

Υπάρχουν μερικές ιδιότητες της κλασικής θεωρίας συνόλων που δεν ισχύουν στην περίπτωση των ασαφών συνόλων. Για παράδειγμα η σχέση $A \cap \overline{A} = \emptyset$, που στην κλασική θεωρία συνόλων αποτελεί το νόμο της αντίφασης, στη θεωρία των ασαφών συνόλων γίνεται:

$$A \cap \overline{A} \neq \emptyset$$

Παρόμοια η σχέση που στην κλασική θεωρία συνόλων αποτελεί το νόμο του αποκλειόμενου μέσου, στη θεωρία των ασαφών συνόλων γίνεται:

$$A \cup \overline{A} \neq X$$

2.1.4. Μορφές Συναρτήσεων Συμμετοχής

Παρακάτω παρουσιάζονται ορισμένες μορφές μονοδιάστατων παραμετρικών συναρτήσεων συμμετοχής, δηλαδή συναρτήσεων συμμετοχής με μία μοναδική είσοδο (input).

➤ Συναρτήσεις Συμμετοχής Τριγωνικής Μορφής (Triangular MFs)

Μια τριγωνικής μορφής συνάρτηση συμμετοχής προσδιορίζεται από τρεις παραμέτρους $\{a, b, c\}$ ως ακολούθως:

$$\text{trimf}(x; a, b, c) = \max\left(\min\left(\frac{x-a}{b-a}, \frac{c-x}{c-b}\right), 0\right)$$

Οι παράμετροι $\{a, b, c\}$ (όπου $a < b < c$) καθορίζουν τις συντεταγμένες στον οριζόντιο άξονα των τριών γωνιών της συγκεκριμένης τριγωνικής συνάρτησης συμμετοχής. Στο διάγραμμα (1) του σχήματος 12 παρουσιάζεται η συνάρτηση συμμετοχής της μορφής $\text{triangle}(x; 20, 60, 80)$.

➤ Συναρτήσεις Συμμετοχής Τραπεζοειδούς Μορφής (Trapezoidal MFs)

Η τραπεζοειδής συνάρτηση συμμετοχής προσδιορίζεται από τέσσερις παραμέτρους $\{a, b, c, d\}$ ως ακολούθως

$$\text{trapmf}(x; a, b, c, d) = \max\left(\min\left(\frac{x-a}{b-a}, 1, \frac{d-x}{d-c}\right), 0\right)$$

Οι παράμετροι $\{a, b, c, d\}$ με $a < b < c < d$ καθορίζουν τις συντεταγμένες στον οριζόντιο άξονα των τεσσάρων γωνιών της συγκεκριμένης τραπεζοειδούς συνάρτησης συμμετοχής. Στο διάγραμμα (2) του σχήματος 12 παρουσιάζεται η συνάρτηση συμμετοχής της μορφής $\text{trapezoid}(x; 10, 20, 60, 95)$, η οποία για $b=c$ καταλήγει να είναι ίδια με την τριγωνική.

Χάρη στην απλή μορφή τους και την υπολογιστική αποτελεσματικότητα, τόσο οι τριγωνικές MF, όσο και οι τραπεζοειδείς, έχουν χρησιμοποιηθεί ευρέως και

ιδιαίτερα σε εφαρμογές σε πραγματικό χρόνο. Όμως από τη στιγμή που κατασκευάζονται από τμήματα ευθειών, δεν είναι ομαλές στα άκρα (γωνίες), όπως αυτά προσδιορίζονται από τις παραμέτρους. Παρακάτω αναλύονται εναλλακτικοί τύποι συναρτήσεων συμμετοχής που προσδιορίζονται από ομαλές και μη-γραμμικές συναρτήσεις.

➤ Συναρτήσεις Συμμετοχής Γκαουσιανής Μορφής (Gaussian MFs)

Μια Γκαουσιανή συνάρτηση συμμετοχής προσδιορίζεται από δύο παραμέτρους $\{c, \sigma\}$

$$\text{gaussmf}(x; c, \sigma) = e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x-c}{\sigma} \right)^2}$$

Η Γκαουσιανή συνάρτηση συμμετοχής προσδιορίζεται επακριβώς από δύο παραμέτρους $\{c, \sigma\}$. Το c αναπαριστά το κέντρο της, και το σ το πλάτος της. Στο διάγραμμα (3) του σχήματος 12 απεικονίζεται η $\text{Gaussian}(x; 50, 20)$

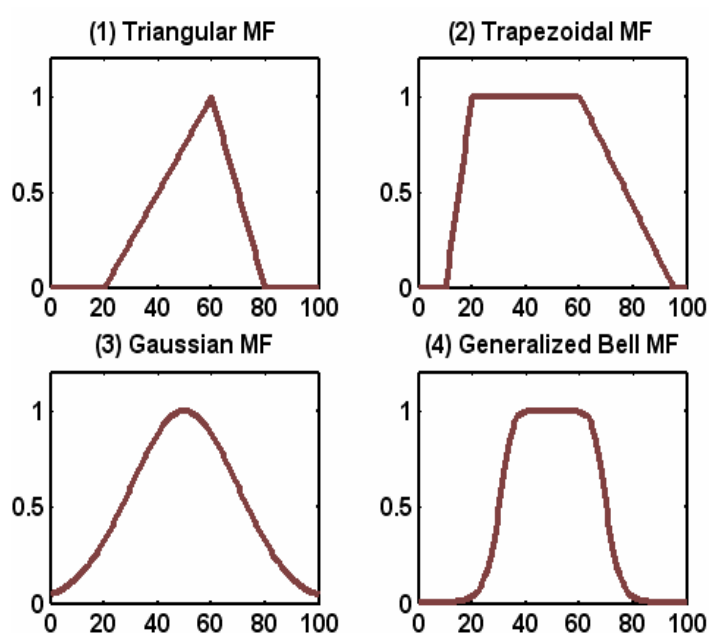
➤ Συναρτήσεις Συμμετοχής Γενικευμένης Καμπανοειδούς Μορφής (Generalized bell MFs)

Η γενικευμένη καμπανοειδής συνάρτηση συμμετοχής προσδιορίζεται από τρεις παραμέτρους $\{a, b, c\}$, όπου η παράμετρος b είναι συνήθως θετική.

$$\text{gbellmf}(x; a, b, c) = \frac{1}{1 + \left| \frac{x-c}{a} \right|^{2b}}$$

Στο διάγραμμα (4) του σχήματος 12 απεικονίζεται η $\text{gbellmf}(x; 20, 4, 50)$

Λόγω της ομαλότητας και του ακριβούς ορισμού τους η Γκαουσιανή (Gaussian) και καμπανοειδής (bell) MFs τείνουν να χρησιμοποιούνται ολοένα και περισσότερο στον προσδιορισμό ασαφών συνόλων, αλλά δεν μπορούν να προσδιορίσουν ασύμμετρες συναρτήσεις συμμετοχής.



Σχήμα 12: Αναπαράσταση μορφών Συναρτήσεων Συμμετοχής

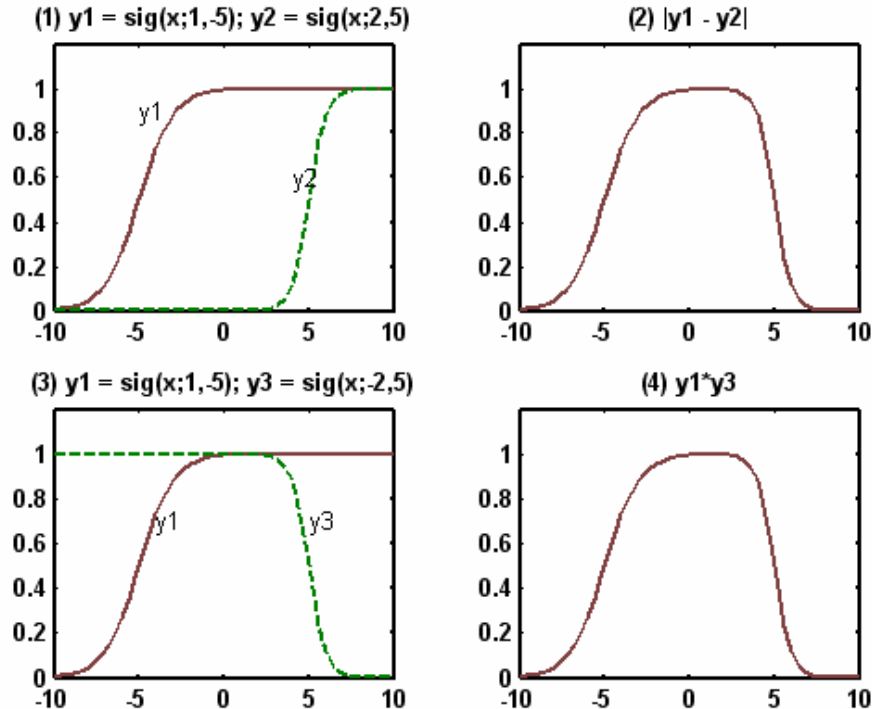
➤ Συνάρτηση Συμμετοχής Σιγμοειδούς Μορφής (Sigmoidal MF)

Η σιγμοειδής συνάρτηση συμμετοχής προσδιορίζεται ως ακολούθως:

$$\text{sigmf}(x; a, c) = \frac{1}{1 + e^{-a(x-c)}}$$

Το a ρυθμίζει την κλίση στο σημείο διασταύρωσης $x = c$. Ανάλογα με την τιμή που θα πάρει το a η σιγμοειδής MF είναι ανοιχτή αριστερά, ή ανοιχτή δεξιά, και επομένως είναι κατάλληλη να χρησιμοποιηθεί στην αναπαράσταση εννοιών όπως «πολύ μεγάλο» ή «πολύ αρνητικό». Σιγμοειδείς συναρτήσεις αυτής της μορφής χρησιμοποιούνται ευρύτατα ως συναρτήσεις ενεργοποίησης (activation function) των τεχνητών νευρωνικών δικτύων. Προκειμένου ένα τεχνητό νευρωνικό δίκτυο να προσομοιώσει τη συμπεριφορά ενός ασαφούς συστήματος εξαγωγής συμπερασμάτων (fuzzy inference system), το πρώτο πρόβλημα που αντιμετωπίζεται είναι η δημιουργία μίας κλειστής συνάρτησης συμμετοχής (closed MF) μέσω μιας σιγμοειδούς συνάρτησης. Θα δείξουμε δύο απλούς τρόπους για να το πετύχουμε αυτό στο αμέσως επόμενο παράδειγμα.

Το διάγραμμα (1) του σχήματος 13 απεικονίζει δύο σιγμοειδείς συναρτήσεις τις $y_1 = \text{sig}(x; 1, -5)$ και $y_2 = \text{sig}(x; 2, 5)$. Μπορούμε να εξάγουμε μια κλειστή και ασύμμετρη MF μέσα από την απόλυτη διαφορά τους $|y_1 - y_2|$, όπως φαίνεται και στο διάγραμμα (2). Το διάγραμμα (3) απεικονίζει μια επιπλέον σιγμοειδή MF της μορφής $y_3 = \text{sig}(x; -2, 5)$. Ένας εναλλακτικός τρόπος δημιουργίας μιας κλειστής και ασύμμετρης MF είναι μέσω του γινομένου $y_1 y_3$, όπως φαίνεται και από το διάγραμμα (4) του σχήματος 13.



Σχήμα 13: Κλειστές (closed) και ασύμμετρες (asymmetric) συναρτήσεις συμμετοχών βασισμένες σε σιγμοειδείς συναρτήσεις

2.1.5. Ασαφείς Σχέσεις

Οι ασαφείς σχέσεις είναι ασαφή σύνολα ορισμένα σε πεδία αναφοράς ανώτερης διάστασης (π.χ. $X \times X$, $X \times Y$, $X \times Y \times Z$, κλπ). Ποιοτικά μια ασαφής σχέση R θα μπορούσε να είναι για παράδειγμα μια έκφραση της μορφής «είναι βαρύτερο από» και η οποία θα συνδέει τα στοιχεία δυο άλλων συνόλων:

$$R = \{ \langle x \text{ είναι βαρύτερο από } y \rangle \mid x \in X, y \in Y \text{ και } R \in X \times Y \}$$

Οι ασαφείς σχέσεις μπορούν να εκφραστούν με την παράθεση όλων των ζευγών (τιμή, βαθμός συμμετοχής), δηλαδή ζευγών της μορφής $((x,y), \mu_R(x,y))$. Ένας εναλλακτικός τρόπος αναπαράστασης, ιδιαίτερα χρήσιμος σε υπολογισμούς, είναι σε μορφή πίνακα:

$$R = \{ ((x,y), \mu_R(x,y)) \mid (x,y) \in X \times Y \}$$

$$R = \begin{bmatrix} \mu_R(x_1, y_1) & \mu_R(x_1, y_2) & \dots & \mu_R(x_1, y_n) \\ \mu_R(x_2, y_1) & \mu_R(x_2, y_2) & \dots & \mu_R(x_2, y_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mu_R(x_m, y_1) & \mu_R(x_m, y_2) & \dots & \mu_R(x_m, y_n) \end{bmatrix}$$

Οι ασαφείς σχέσεις μπορούν να συνδυαστούν μεταξύ τους μέσω της διαδικασίας της σύνθεσης. Αν για παράδειγμα συνδυαστεί η ασαφής σχέση $R_1(x,y)$ ορισμένη στο $X \times Y$, με την ασαφή σχέση $R_2(y,z)$ ορισμένη στο $Y \times Z$, τότε θα προκύψει μία ασαφής σχέση $R(x,z)$, η οποία θα ορίζεται στο σύνολο $X \times Z$ και θα συσχετίζει άμεσα τα στοιχεία των συνόλων X και Z . Βέβαια είναι απαραίτητο να προσδιοριστεί επακριβώς η συνάρτηση συμμετοχής $\mu_R(x,z)$ της R με χρήση των συναρτήσεων συμμετοχής των R_1 και R_2 , δηλαδή των $\mu_{R_1}(x,y)$ και $\mu_{R_2}(y,z)$.

Η σύνθεση αποτελεί μία πολύ σημαντική διεργασία, καθώς οι κανόνες της μορφής If...Then αντιστοιχούν σε ασαφείς σχέσεις και το πρόβλημα της ασαφούς συλλογιστικής είναι μαθηματικά ισοδύναμο με τη σύνθεση. Οι περισσότεροι γνωστές μέθοδοι σύνθεσης ασαφών σχέσεων είναι η σύνθεση max-min (max-min composition) και η σύνθεση max-product (max-product composition).

Αν $R_1(x,y)$ και $R_2(y,z)$ είναι δύο ασαφείς σχέσεις ορισμένες στα σύνολα $X \times Y$ και $Y \times Z$ αντίστοιχα, τότε η σύνθεσή τους δίνει μια νέα σχέση $R_1 \circ R_2$ ορισμένη στο $X \times Z$, της οποίας η συνάρτηση συμμετοχής για την περίπτωση της max-min σύνθεσης είναι:

$$\mu_{R_1 \circ R_2}(x,z) = \bigvee_y [\mu_{R_1}(x,y) \wedge \mu_{R_2}(y,z)]$$

ενώ για την περίπτωση της σύνθεσης max-product είναι:

$$\mu_{R_1 \circ R_2}(x,z) = \bigvee_y [\mu_{R_1}(x,y) \cdot \mu_{R_2}(y,z)]$$

Οι υπολογισμοί στο δεξιό μέρος των παραπάνω σχέσεων είναι παρόμοιοι με αυτούς του πολλαπλασιασμού πινάκων.

2.1.6. Ασαφείς Μεταβλητές, Αριθμοί, Προτάσεις και Κανόνες

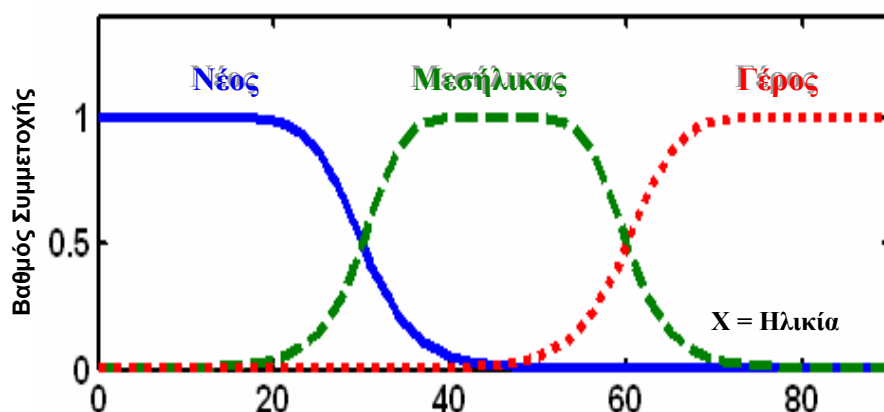
Η μεταβλητή εκείνη της οποίας οι τιμές ορίζονται με ασαφή σύνολα ονομάζεται ασαφής μεταβλητή (fuzzy variable). Για παράδειγμα τα ασαφή σύνολα {κοντός, μεσαίος, ψηλός} θα μπορούσαν να είναι το πεδίο τιμών της ασαφούς

μεταβλητής «ύψος». Για αυτόν το λόγο, η μεταβλητή «ύψος» χαρακτηρίζεται και ως λεκτική μεταβλητή, ενώ τα «κοντός», «μεσαίος», «ψηλός» ως πρωταρχικές λεκτικές τιμές.

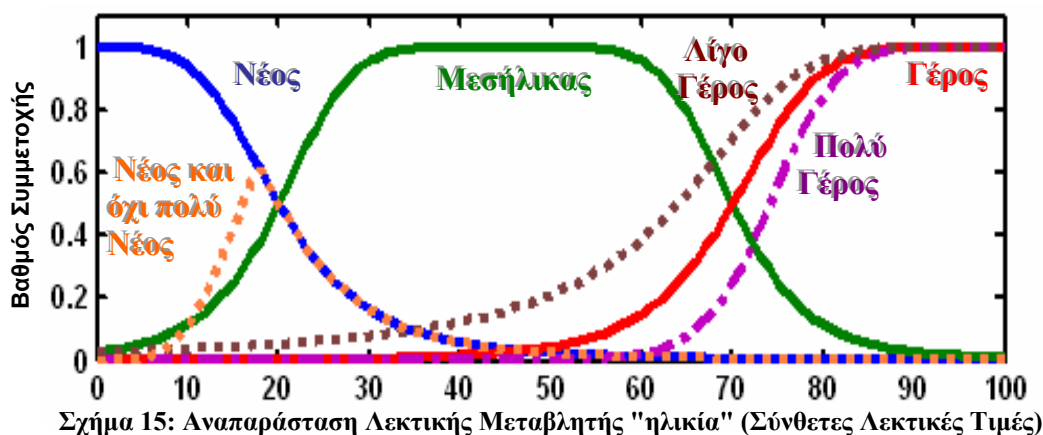
Μια λεκτική μεταβλητή (linguistic variable) χαρακτηρίζεται από 5 στοιχεία $\{x, T(x), X, G, M\}$ όπου x είναι η ονομασία της μεταβλητής, $T(x)$ είναι το σύνολο ορισμού του x (term set), δηλαδή των σύνολο των λεκτικών τιμών ή λεκτικών όρων, X είναι το σύνολο αναφοράς, G είναι ο συντακτικός κανόνας (syntactic rule) που δημιουργεί τους όρους στο $T(x)$ και M είναι ένας σημασιολογικός κανόνας (semantic rule) που αντιστοιχεί την κάθε λεκτική τιμή A με τη σημασία της $M(A)$, όπου $M(A)$ απεικονίζει ένα ασαφές σύνολο στο A . Για παράδειγμα αν χρησιμοποιήσουμε την ηλικία ως λεκτική μεταβλητή, τότε το αντίστοιχο term set $T(\text{age})$ θα μπορούσε να είναι:

**$T(\text{ηλικία}) = \{\text{νέος, όχι νέος, πολύ νέος, λίγο νέος ...}$
 **$\text{μεσήλικας, όχι μεσήλικας, ...}$
 **$\text{γέρος, όχι γέρος, πολύ γέρος, λίγο γέρος, ...}$
 $\text{όχι πολύ νέος και όχι πολύ γέρος, ...}\}$******

όπου ο κάθε όρος στο $T(\text{ηλικία})$ χαρακτηρίζεται από ένα ασαφές σύνολο του συνόλου αναφοράς $X=[0,100]$, όπως φαίνεται και στο παρακάτω σχήμα. Ο σημασιολογικός κανόνας προσδιορίζει τη συνάρτηση συμμετοχής της κάθε λεκτικής τιμής του συνόλου ορισμού (term set). Μερικές τυπικές τέτοιες συναρτήσεις συμμετοχής παρουσιάζονται στα σχήματα 14 και 15:



Σχήμα 14: Αναπαράσταση Λεκτικής Μεταβλητής "ηλικία"
(Πρωταρχικές Λεκτικές Τιμές)



Σχήμα 15: Αναπαράσταση Λεκτικής Μεταβλητής "ηλικία" (Σύνθετες Λεκτικές Τιμές)

Στο παράδειγμα του σχήματος 14 μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι το σύνολο ορισμού αποτελείται από ορισμένους πρωταρχικούς όρους (primary terms) όπως «νέος», «μεσήλικας» και «γέρος» που τροποποιούνται στο σχήμα 15, από την άρνηση «όχι» (not), και/ή από τις σταθμίσεις της μορφής «πολύ» (very), «λίγο» (more or less), οι οποίες έπειτα συνδέονται με συνδετικούς όρους, όπως το «και» και το διαζευκτικό όρο «ή».

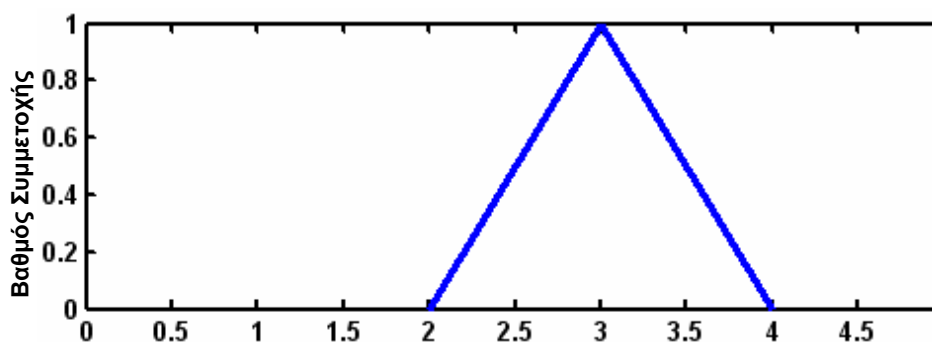
Επομένως συμπεραίνουμε ότι είναι δυνατόν από έναν αρχικά μικρό αριθμό πρωταρχικών λεκτικών τιμών, να προκύψει ένας πολύ μεγαλύτερος αριθμός σύνθετων λεκτικών τιμών με τη χρήση λεκτικών τελεστών όπως το AND (και), το OR (ή), το NOT (όχι), το VERY (πολύ) κλπ. Όπως ήδη αναφέρθηκε, τέτοιοι τελεστές ουσιαστικά επηρεάζουν κατά δεδομένο τρόπο τη συνάρτηση συμμετοχής που αντιστοιχεί σε μια λεκτική τιμή. Στον πίνακα 1 δίνεται η μορφή της συνάρτησης συμμετοχής που αντιστοιχεί σε μια πρωταρχική λεκτική τιμή κάτω από τη δράση συγκεκριμένων τελεστών.

Πίνακας 1: Επίδραση λεκτικών τελεστών στα ασαφή σύνολα.

Λεκτικοί Τελεστές	Επίδραση στη συνάρτηση συμμετοχής
Συστολή (πολύ) CON A,	$\mu_{\text{CON}(A)}(x) = [\mu_A(x)]^2$
Διαστολή (λίγο) DIL A	$\mu_{\text{DIL}(A)}(x) = \sqrt{\mu_A(x)}$
Τομή (και) A AND B	$\mu_{A \text{ AND } B}(x) = \mu_A(x) \wedge \mu_B(x)$
Ένωση (ή) A OR B	$\mu_{A \text{ OR } B}(x) = \mu_A(x) \vee \mu_B(x)$
Συμπλήρωμα (όχι) NOT A	$\mu_{\neg A}(x) = [1 - \mu_A(x)]$

Οι ασαφείς μεταβλητές μπορούν να χρησιμοποιηθούν σε ασαφείς κανόνες και στην ασαφή συλλογιστική, που θα εξεταστεί στην παράγραφο 2.2.

Οι ασαφείς αριθμοί (fuzzy numbers) είναι ασαφή υποσύνολα του συνόλου των πραγματικών αριθμών και χρησιμοποιούνται ευρέως σε εφαρμογές ελέγχου. Για παράδειγμα, η συνάρτηση συμμετοχής του αριθμού «ασαφές 3» θα μπορούσε να είναι όπως στο σχήμα 16. Συνήθως χρησιμοποιούνται τριγωνικές, τραπεζοειδείς ή εκθετικές (π.χ. Γκαουσιανές) συναρτήσεις συμμετοχής.



Σχήμα 16: Συνάρτηση Συμμετοχής του αριθμού «ασαφές 3»

Ασαφής πρόταση είναι αυτή που θέτει μια τιμή σε μια ασαφή μεταβλητή. Για παράδειγμα, στην ασαφή πρόταση «Το ύψος του Νίκου είναι μέτριο», το «ύψος» είναι η ασαφής μεταβλητή και «μέτριο» είναι ένα ασαφές σύνολο που αποτελεί την τιμή αυτής της μεταβλητής.

Ένα έμπειρο σύστημα (expert system) στην παραδοσιακή του μορφή αποτελείται από μια αλληλουχία κανόνων που περιγράφουν τη συμπεριφορά ενός φυσικού συστήματος. Οι έμπειροι κανόνες βασίζονται στην κλασική λογική και στη θεωρία συνόλων και ακολουθούν το επόμενο σχήμα ορισμού:

If condition A AND condition B then action C

Τα σύνολα A, B είναι κλασικά σύνολα τα οποία προσδιορίζουν καταστάσεις εισόδου του συστήματος, ενώ το σύνολο C εκφράζει μια κατάσταση ή ένα σήμα εξόδου. Οι έμπειροι κανόνες χρησιμοποιούν τους κλασικούς λογικούς τελεστές AND, OR και NOT για τη σύνδεση των μεταβλητών. Ένα σύνολο από διαφορετικούς κανόνες τέτοιας μορφής συνθέτει μια έμπειρη βάση κανόνων (expert rule bank), η οποία εκφράζει την εμπειρία που χρησιμοποιείται στην περιγραφή λειτουργιών ελέγχου ενός συστήματος. Τα περισσότερα συστήματα εμφανίζονται να είναι αρκετά πιο πολύπλοκα από ό,τι μια απλή λίστα κανόνων και επομένως η εξαγωγή της απόφασης δεν είναι μια απλή εφαρμογή των κανόνων αυτών. Η ιδέα της χρήσης της ασαφούς λογικής μέσα σε μία βάση κανόνων προτάθηκε αρχικά από τον Mamdani (1976). Έτσι η θεώρηση των συνόλων στον παραπάνω κανόνα ως ασαφών επιτρέπει την ενσωμάτωση της θεωρίας των ασαφών συνόλων σε ένα έμπειρο σύστημα. Σε έναν ασαφή κανόνα της μορφής if-then το τμήμα if του κανόνα είναι η υπόθεση (antecedent, premise), ενώ το τμήμα then είναι το συμπέρασμα (consequence) του κανόνα.

2.2. Ασαφής Συλλογιστική

Μια βάση ασαφών κανόνων αποτελείται από ένα σύνολο ασαφών κανόνων της μορφής if-then που χρησιμοποιείται για να περιγράψει ένα σύστημα. Ο μηχανισμός εξαγωγής συμπερασμάτων ενός συνόλου ασαφών κανόνων καλείται *ασαφής συλλογιστική* (fuzzy reasoning) ή *προσεγγιστική συλλογιστική* (approximate reasoning).

Ένας *ασαφής κανόνας* είναι μία υπό συνθήκη έκφραση που συσχετίζει δύο ή περισσότερες ασαφείς προτάσεις. Στην απλούστερη εκδοχή, ένας ασαφής κανόνας έχει τη μορφή:

If x is A then y is B

Για παράδειγμα, στον κανόνα «Εάν η ταχύτητα είναι μέτρια, τότε η πίεση στα φρένα πρέπει να είναι μέτρια», οι όροι «ταχύτητα» και «πίεση» είναι οι ασαφείς μεταβλητές που έχουν ως τιμή το ασαφές σύνολο «μέτρια».

Η αναλυτική περιγραφή ενός ασαφούς κανόνα if-then είναι μια ασαφής σχέση $R(x,y)$, που ονομάζεται σχέση συνεπαγωγής (implication relation), η οποία προκύπτει με κατάλληλο συνδυασμό του if και του then τμήματος του κανόνα, δηλαδή των συναρτήσεων συμμετοχής των ασαφών συνόλων A και B. Στη γενική της μορφή η συνάρτηση συνεπαγωγής ορίζεται ως:

$$R(x,y) \equiv \mu(x,y) = \varphi(\mu_A(x), \mu_B(y))$$

Η συνάρτηση φ ονομάζεται τελεστής συνεπαγωγής (implication operator) και υποδεικνύει τον ακριβή τρόπο με τον οποίο πρέπει να συνδυαστούν οι συναρτήσεις

συμμετοχής του if και του then τμήματος ενός ασαφούς κανόνα, ώστε να προκύψει η αναλυτική του έκφραση. Ο πίνακας 2 παρέχει τις πιο σημαντικές από τις εκφράσεις που έχουν προταθεί για τον τελεστή συνεπαγωγής.

Πίνακας 2: Μορφές τελεστών συνεπαγωγής

Ονομασία Τελεστή	Αναλυτική έκφραση του $\phi[\mu_A(x), \mu_B(y)]$
ϕ_m :Zadeh Max-Min	$[\mu_A(x) \wedge \mu_B(y)] \vee [1 - \mu_A(x)]$
ϕ_c :Mandani Min	$\mu_A(x) \wedge \mu_B(y)$
ϕ_p :Larsen Product	$\mu_A(x) \cdot \mu_B(y)$
ϕ_a :Arithmetic	$1 \wedge [1 - \mu_A(x) + \mu_B(y)]$
ϕ_b :Boolean	$(1 - \mu_A(x)) \vee \mu_B(y)$

Η σχέση συνεπαγωγής χρησιμοποιείται στα προβλήματα που προκύπτουν κατά τη συλλογιστική με ασαφείς κανόνες. Αυτά στη γενική τους μορφή είναι δύο ειδών:

$$\begin{array}{l} \text{If } x \text{ is } A \text{ then } y \text{ is } B \\ x \text{ is } A' \quad y \text{ is } B' (?) \end{array}$$

δηλαδή είναι γνωστή η τιμή A' της ασαφούς μεταβλητής x και πρέπει να υπολογιστεί η τιμή B' της ασαφούς μεταβλητής y και επίσης:

$$\begin{array}{l} \text{If } x \text{ is } A \text{ then } y \text{ is } B \\ x \text{ is } A' (?) \quad y \text{ is } B' \end{array}$$

δηλαδή είναι γνωστή η τιμή B' της ασαφούς μεταβλητής y και πρέπει να υπολογιστεί η τιμή A' της ασαφούς μεταβλητής x .

Το πρώτο πρόβλημα διευθετείται μέσω της συλλογιστικής διαδικασίας GMP (Generalized Modus Ponens) που ορίζει ότι $B' = A' \circ R(x, y)$, ενώ το δεύτερο διευθετείται μέσω της συλλογιστικής διαδικασίας GMT (Generalized Modus Tollens), που ορίζει ότι $A' = R(x, y) \circ B'$. Και στις δύο περιπτώσεις, η σχέση συνεπαγωγής $R(x, y)$ που έχει επιλεγεί να χρησιμοποιηθεί, πρέπει να συνδυασθεί με την κατά περίπτωση γνωστή παράμετρο (A' ή B'), ώστε να υπολογιστεί η άγνωστη παράμετρος. Υπενθυμίζεται εδώ ότι οι δύο περισσότεροι διαδεδομένες μέθοδοι σύνθεσης είναι η max-min και η max-product.

Ο βασικός κανόνας συνεπαγωγής στην παραδοσιακή δυαδική (binary) λογική είναι η Modus Ponens, σύμφωνα με την οποία μπορούμε να εξάγουμε αν η υπόθεση B είναι αληθής από την ορθότητα της A και την υπόθεση $A \rightarrow B$. Για παράδειγμα αν η A είναι η πρόταση «η τομάτα είναι κόκκινη» και B η πρόταση «η τομάτα είναι ώριμη», τότε έχουμε

$$\begin{array}{ll} \text{Παραδοχή 1 (γεγονός)} & x \text{ is } A \\ \text{Παραδοχή 2 (κανόνας)} & \text{if } x \text{ is } A \text{ then } y \text{ is } B, \\ \hline \text{Συμπέρασμα} & y \text{ is } B \end{array}$$

Όσον αφορά την ανθρώπινη συλλογιστική, η Modus Ponens εφαρμόζεται κατά προσέγγιση στις περισσότερες περιπτώσεις. Για παράδειγμα, αν έχουμε τον ίδιο κανόνα συνεπαγωγής «αν (if) η τομάτα είναι κόκκινη, τότε (then) είναι ώριμη» και γνωρίζουμε ότι «η τομάτα είναι λίγο έως πολύ κόκκινη», τότε μπορούμε να

συμπεράνουμε ότι «η τομάτα είναι λίγο έως πολύ ώριμη». Αυτό μπορεί να εκφραστεί ως ακολούθως:

Παραδοχή 1 (γεγονός)	$x \text{ is } A'$
Παραδοχή 2 (κανόνας)	$\text{if } x \text{ is } A \text{ then } y \text{ is } B.$
Συμπέρασμα	$y \text{ is } B'$

Όπου A' είναι παρόμοιο (έχει αρκετές ομοιότητες, αναλογίες) με το A και το B' είναι παρόμοιο με το B . Όταν τα A , B , A' και B' είναι ασαφή σύνολα κατάλληλων συνόλων αναφοράς, η μόλις περιγραφείσα διαδικασία αποκαλείται ως προσεγγιστική συλλογιστική (approximate reasoning) ή ασαφής συλλογιστική (fuzzy reasoning), ή αλλιώς Generalized Modus Ponens (GMP) γιατί συμπεριλαμβάνει την Modus Ponens ως ειδική περίπτωση της. Προκειμένου να γίνει κατανοητή η GMP, θα πρέπει πρώτα να παρουσιαστεί ο συνθετικός κανόνας συνεπαγωγής.

Ο συνθετικός κανόνας συνεπαγωγής (max-min compositional rule) διατυπώθηκε από τον Zadeh το 1973 ως μέθοδος συλλογιστικής κάτω από αβεβαιότητα.

Έστω A ένα ασαφές σύνολο στο X , B ένα ασαφές σύνολο στο Y και R μια ασαφής σχέση στο $X \times Y$

$$A = \{(x, \mu_A(x)) \mid x \in X, \mu_A(x): A \rightarrow [0,1]\}$$

$$B = \{(y, \mu_B(y)) \mid y \in Y, \mu_B(y): B \rightarrow [0,1]\}$$

$$R = \{((x, y), \mu_R(x, y)) \mid (x, y) \in X \times Y, \mu_R(x, y) = \min\{\mu_A(x), \mu_B(y)\}\}$$

Τότε, δεδομένων των A και R , το B προκύπτει από τη σχέση $B = A \circ R$ μέσω της σχέσης

$$\mu_B(y) = \max_x \{\min\{\mu_A(x), \mu_R(x, y)\}\}$$

όπου \circ το σύμβολο του max-min composition τελεστή.

Χρησιμοποιώντας τον συνθετικό κανόνα συνεπαγωγής, μπορούμε να αναπαραστήσουμε τη διαδικασία συμπερασμού της ασαφούς συλλογιστικής μέσα από τον παρακάτω ορισμό:

Ορισμός

Έστω A , A' και B ασαφή σύνολα ορισμένα στο X , X και Y αντίστοιχα. Υποθέτουμε ότι η ασαφής πρόταση $A \rightarrow B$ είναι εκφρασμένη ως ασαφής σχέση R στο $X \times Y$. Τότε το ασαφές σύνολο B που δημιουργείται από το « x είναι A » και τον ασαφή κανόνα «if x is A then y is B » προσδιορίζεται από

$$\begin{aligned} \mu_{B'}(y) &= \max_x \min[\mu_{A'}(x), \mu_R(x, y)] \\ &= \bigvee_x [\mu_{A'}(x) \wedge \mu_R(x, y)] \end{aligned}$$

ή ισοδύναμα

$$B' = A' \circ R = A' \circ (A \rightarrow B)$$

Τώρα μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την διαδικασία εξαγωγής συμπερασμάτων της ασαφούς συλλογιστικής, προκειμένου να εξάγουμε συμπεράσματα, δεδομένου ότι ο ασαφής ισχυρισμός $A \rightarrow B$ προσδιορίζεται ως μια κατάλληλη ασαφής σχέση.

Συμπερασματικά, με έναν ασαφή κανόνα της μορφής «If x is A then y is B » και έστω συλλογιστική διαδικασία GMP (δηλαδή γνωστό το A' ως τιμή του x και ζητούμενο το B' ως τιμή του y), τα ασαφή σύνολα A και B συνδυάζονται με κάποιον από τους τελεστές συνεπαγωγής και παράγουν τη σχέση συνεπαγωγής $R(x, y)$, από την οποία μέσω σύνθεσης (έστω max-min σύνθεση) με το A' προκύπτει η άγνωστη ποσότητα B' .

Η περιγραφή ενός προβλήματος με ασαφείς μεταβλητές, ασαφείς τιμές και ασαφείς κανόνες ονομάζεται ασαφής λεκτική περιγραφή του προβλήματος (fuzzy linguistic description).

2.2.1. Γενίκευση των τριών βασικών τελεστών

Η οικογένεια των T-τελεστών (T-operators) παρέχουν ικανοποιητικές γενικεύσεις των τριών θεμελιωδών τελεστών του Zadeh $\max(.,.)$, $\min(.,.)$, $1-(.)$ για την ένωση, την τομή και το συμπλήρωμα αντίστοιχα. Έχουμε τριών ειδών T-τελεστές που ονομάζονται T-norms, T-conorms και N-negation συναρτήσεις. Παρακάτω παραθέτουμε τους ορισμούς τους.

Οι «τριγωνικοί τύποι» (triangular norms, t-norms εφεξής) χρησιμοποιήθηκαν για πρώτη φορά από τους Schweizer και Sklar (1963), προκειμένου να μοντελοποιήσουν αποστάσεις σε πιθανοτικούς μετρικούς χώρους (probabilistic metric spaces). Οι t-norms χρησιμοποιήθηκαν εκτενώς μέσα στα πλαίσια της θεωρίας ασαφών συνόλων, προκειμένου να μοντελοποιήσουν τη λογική σύζευξη «και» (AND).

Η τομή δύο ασαφών συνόλων A και B δίνεται από τη συνάρτηση T που συναθροίζει δύο τιμές συμμετοχής ως ακολούθως:

$$\mu_{A \cap B}(x) = T(\mu_A(x), \mu_B(x)) = \mu_A(x) * \mu_B(x),$$

όπου $*$ είναι ο δυαδικός τελεστής (binary operator) για τη συνάρτηση T.

Η συνάρτηση $T: [0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$ ονομάζεται T-norm, αν και μόνο αν ισχύει για κάθε a, b, c και $d \in [0,1]$:

1. $T(a,b) = T(b,a)$ (αντιμετάθεση)
2. $T(a,b) \leq T(c,d)$, για κάθε $a \leq c$ και $b \leq d$ (μονοτονία)
3. $T(a, T(b,c)) = T(T(a,b), c)$ (προσεταιριστικότητα)
4. $T(0,0) = 0$, $T(a,1) = a$, $T(1,a) = a$ (οριακές συνθήκες)

Η πρώτη προϋπόθεση υποδεικνύει ότι ο τελεστής δεν εξαρτάται από τη σειρά με την οποία συνδυάζονται τα ασαφή σύνολα. Από τη δεύτερη προϋπόθεση συνάγεται ότι μία μείωση των τιμών συμμετοχής στα ασαφή σύνολα A ή B, δεν μπορεί να οδηγήσει σε αύξηση της τιμής συμμετοχής στην τομή $A \cap B$. Η τρίτη προϋπόθεση μας επιτρέπει την τομή οποιουδήποτε αριθμού συνόλων και σε οποιαδήποτε σειρά σε ανά δύο συνδυασμούς. Η τελευταία προϋπόθεση διαμορφώνει τις συνθήκες για την ορθή γενίκευση από τα σαφώς ορισμένα σύνολα (crisp sets) στα ασαφή.

Με τα παραπάνω αξιώματα επιχειρείται να ληφθούν υπόψη οι βασικές συνθήκες της τομής συνόλων. Οι πιο γνωστές συναρτήσεις t-norms είναι οι παρακάτω:

- ⊕ Minimum: $\min(a,b) = \min\{a,b\}$,
- ⊕ Lukasiewicz: $T_L(a,b) = \max\{a + b - 1, 0\}$
- ⊕ Product: $T_P(a,b) = ab$

Η επιλογή του κατάλληλου t-norm εξαρτάται από το πρόβλημα που εξετάζεται, το περιβάλλον στο οποίο εμπίπτει και από τη συμπεριφορά του αποφασίζοντα, του οποίου οι λογικοί κανόνες χρησιμοποιούνται στην μοντελοποίηση. Ο Zadeh είχε αρχικά χρησιμοποιήσει το ελάχιστο (\min) και το γινόμενο (product), προκειμένου να προσδιορίσει την τομή των ασαφών συνόλων. Οι συγκεκριμένοι t-norms έχουν χρησιμοποιηθεί από τους περισσότερους ερευνητές στην αναπαράσταση του συζευκτικού “and”. Οι Bellman και Zadeh (1974) εισήγαγαν την έννοια της «ασαφούς απόφασης» (fuzzy decision) ως την τομή μεταξύ των ασαφών στόχων (fuzzy goals) και των ασαφών περιορισμών (fuzzy constraints) χρησιμοποιώντας το ελάχιστο (minimum).

Ο τελεστής ασαφούς ένωσης προσδιορίζεται από τη συνάρτηση S που συναθροίζει δύο τιμές συμμετοχής ως ακολούθως:

$$\mu_{A \cup B}(x) = S(\mu_A(x), \mu_B(x)) = \mu_A(x) \tilde{+} \mu_B(x),$$

όπου $\tilde{+}$ είναι ο δυαδικός τελεστής (binary operator) για τη συνάρτηση S .

Η συνάρτηση $S: [0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$ ονομάζεται T-conorm (S-norm), αν και μόνο αν για το S ισχύει για κάθε a, b, c και $d \in [0,1]$:

1. $S(a,b) = S(b,a)$ (αντιμετάθεση)
2. $S(a,b) \leq S(c,d)$, για κάθε $a \leq c$ και $b \leq d$, (μονοτονία)
3. $S(a, S(b,c)) = S(S(a,b), c)$ (προσεταιριστικότητα)
4. $S(1,1) = 1, S(0,a) = S(a,0) = a$ (οριακές συνθήκες)

Οι βασικοί t-conorms (S-norms) είναι οι παρακάτω:

- ⊕ Maximum: $\max(a,b) = \max\{a,b\}$,
- ⊕ Lukasiewicz: $S_L(a,b) = \min\{a+b, 1\}$
- ⊕ Probabilistic: $S_P(a,b) = a+b-ab$

Ο τελεστής ασαφούς συμπληρώματος (fuzzy complement operator) αποτελεί μία συνεχή συνάρτηση $N: [0,1] \rightarrow [0,1]$, που ονομάζεται συνάρτηση άρνησης (negation function), αν και μόνο αν για το N ισχύει για κάθε $a, b \in [0,1]$:

1. $N(0) = 1, N(1) = 0$ (οριακές συνθήκες)
2. $N(a) \leq N(b)$, για κάθε $a \leq b$ (μονοτονία)

Όλες οι συναρτήσεις που ικανοποιούν αυτές τις προϋποθέσεις σχηματίζουν την ευρύτερη οικογένεια των ασαφών συμπληρωμάτων. Γίνεται αντιληπτό ότι η παραβίαση οποιασδήποτε εκ των προϋποθέσεων θα διεύρυνε την οικογένεια αυτή με συναρτήσεις που δεν μπορούν να αποτελέσουν τελεστές συμπληρώματος.

Μία κατηγορία ασαφών συμπληρωμάτων είναι το συμπλήρωμα κατά Sugeno (Sugeno's complement), που ορίζεται ως:

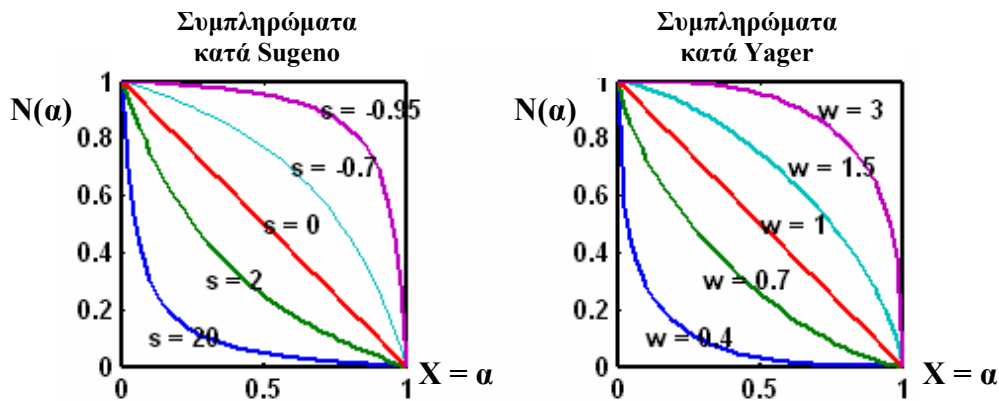
$$N_s(a) = \frac{1-a}{1+sa}$$

όπου s είναι μία παράμετρος μεγαλύτερη του -1. Για κάθε τιμή της παραμέτρου s , εξάγεται ένας συγκεκριμένος τελεστής ασαφούς συμπληρώματος (βλέπε σχήμα 13).

Ένα άλλο είδος ασαφούς συμπληρώματος είναι το συμπλήρωμα κατά Yager που ορίζεται ως:

$$N_w(a) = (1-a^w)^{1/w}$$

όπου w μία θετική παράμετρος. Το σχήμα 17 παρουσιάζει αυτήν την κατηγορία συναρτήσεων για διαφορετικές τιμές του w .



Σχήμα 17: Συμπληρώματα κατά Sugeno και Yager (Sugeno's and Yager's complements)

2.2.2. Η Αρχή της Επέκτασης (extension principle)

Η αρχή της επέκτασης είναι μια μαθηματική μέθοδος που επιτρέπει την επέκταση των εννοιών και των υπολογιστικών τεχνικών των κλασικών μαθηματικών στο πλαίσιο των ασαφών. Η αρχή της επέκτασης προτάθηκε από τον Zadeh (1965, 1973) και αποτελεί ένα σημαντικό εργαλείο που επιτρέπει την ενσωμάτωση των ασαφών συνόλων στην κλασική μαθηματική ανάλυση. Με βάση την αρχή της επέκτασης μπορούν να οριστούν αριθμητικοί τελεστές για την πρόσθεση, την αφαίρεση, το πολλαπλασιασμό και τη διαίρεση των ασαφών συνόλων, καθιστώντας δυνατή την εφαρμογή μη-ασαφών μαθηματικών εννοιών στο πεδίο της ασαφούς ανάλυσης. Η αρχή της επέκτασης εφαρμόζεται ιδιαίτερα σε προβλήματα μαθηματικού προγραμματισμού των οποίων οι παράμετροι δίνονται με τη μορφή ασαφών συνόλων.

Η αντιστοίχιση f από ένα σύνολο X σε ένα σύνολο Y απεικονίζεται με τον παρακάτω τρόπο:

$$f: X \rightarrow Y,$$

όπου το σύνολο X είναι το πεδίο της f και Y το εύρος της f .

Μία τέτοια αντιστοίχιση μπορεί να θεωρηθεί ως ένας κανόνας που αναθέτει κάποιο στοιχείο $y = f(x)$ στο Y , σε κάθε στοιχείο x στο X . Η αντιστοίχιση f αποτελεί συνάρτηση στην περίπτωση που το X και το Y αποτελούν σύνολα πραγματικών αριθμών. Για ένα υποσύνολο A του X , η απεικόνιση του A μέσω της f αποτελεί ένα υποσύνολο του Y και ορίζεται ως:

$$f(A) = \{y \mid y = f(x), x \in A\},$$

Επιπλέον, για ένα υποσύνολο B του Y , η αντίστροφη απεικόνιση του B μέσω της f αποτελεί ένα υποσύνολο του X και ορίζεται ως:

$$f^{-1}(B) = \{x \mid f(x) = y, y \in B\},$$

όπου η f^{-1} αποτελεί την αντίστροφη αντιστοίχιση της f .

Έστω ότι το B είναι ένα ασαφές σύνολο στο Y , του οποίου η συνάρτηση συμμετοχής είναι $\mu_B(y)$. Τότε η αντίστροφη αντιστοίχιση f^{-1} δημιουργεί ένα ασαφές σύνολο A στο X , του οποίου η συνάρτηση συμμετοχής προσδιορίζεται ως εξής:

$$\mu_A(x) = \mu_B(f(x)), \text{ για κάθε } y \in Y$$

για όλα τα $x \in X$ που αντιστοιχούν μέσω της f στο y .

Κατά ανάλογο τρόπο, όταν το A δεν είναι πλέον ένα σαφώς ορισμένο σύνολο, αλλά ένα ασαφές σύνολο μέσα στο X , τότε το ερώτημα που δημιουργείται είναι ποια είναι η συνάρτηση συμμετοχής για το ασαφές σύνολο B στο Y που δημιουργείται μέσα από την αντιστοίχιση $f: X \rightarrow Y$.

Αν η f είναι ένα-προς-ένα συνάρτηση, τότε η απάντηση είναι

$$\mu_{f(A)}(y) = \mu_A(x)$$

Εάν όμως η f δεν είναι ένα προς ένα συνάρτηση, τότε προκύπτει ασάφεια στην περίπτωση που δύο ή περισσότερα διακριτά στοιχεία στο X , για παράδειγμα x_1 και x_2 , αντιστοιχούν στο ίδιο σημείο y του Y . Για τη διαλεύκανση αυτής της ασάφειας ο Zadeh (1965) πρότεινε την ανάθεση του μεγαλύτερου βαθμού συμμετοχής εκ των δύο στο y . Γενικεύοντας καταλήγουμε στο ότι η συνάρτηση συμμετοχής για το B προσδιορίζεται ως εξής:

$$\mu_B(y) = \sup_{x \in f^{-1}(y)} \mu_A(x)$$

όπου $f^{-1}(y)$ αποτελεί το σύνολο των σημείων του X που αντιστοιχίζονται στο y μέσω της f .

Την αρχική διατύπωση του Zadeh (1965) ακολούθησαν τροποποιήσεις από τον ίδιο τον Zadeh (1973), τον Gaines (1976), τον Jain (1976, 1977) και άλλους.

Παρακάτω παρέχουμε τον γενικευμένο ορισμό της αρχής της επέκτασης, που εφαρμόζεται στον Καρτεσιανό χώρο.

Ορισμός

Έστω X ένα καρτεσιανό γινόμενο συνόλων αναφοράς, $X = X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$ και A_1, A_2, \dots, A_n ασαφή υποσύνολα των X_1, X_2, \dots, X_n αντίστοιχα και $f: X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n \rightarrow Y$ με $y = f(x_1 \times x_2 \times \dots \times x_n)$ μια σαφώς ορισμένη (crisp) συνάρτηση. Η Αρχή της Επέκτασης μεταφέρει την ασάφεια των A_1, A_2, \dots, A_n σε ένα ασαφές σύνολο B του Y , όπου:

$$B = \{(y, \mu_B(y)) \mid y = f(x_1, \dots, x_n), (x_1, \dots, x_n) \in X_1 \times \dots \times X_n\}$$

Και

$$\mu_B(y) = \begin{cases} \sup_{(x_1, \dots, x_n) \in f^{-1}(y)} \min\{\mu_{A_1}(x_1), \dots, \mu_{A_n}(x_n)\}, & f^{-1}(y) \neq \emptyset \\ 0, & f^{-1}(y) = \emptyset \end{cases}$$

Η αρχή της επέκτασης επιτρέπει σε μια σαφώς ορισμένη (crisp) συνάρτηση f των κλασικών συνόλων, με πεδίο ορισμού το σαφές σύνολο X , να αλλάξει πεδίο ορισμού, σε συγκεκριμένα ασαφή υποσύνολα του X (αντί για το ίδιο το σύνολο X). Για παράδειγμα αν A είναι ένα ασαφές υποσύνολο του σαφούς συνόλου X και f η crisp συνάρτηση ορισμένη στο X , τότε η αρχή της επέκτασης φανερώνει πώς η συνάρτηση f μπορεί να εφαρμοστεί πάνω στο ασαφές σύνολο A .

Συγκεκριμένα αν $A = \mu_A(x_1)/x_1 + \dots + \mu_A(x_n)/x_n$, τότε

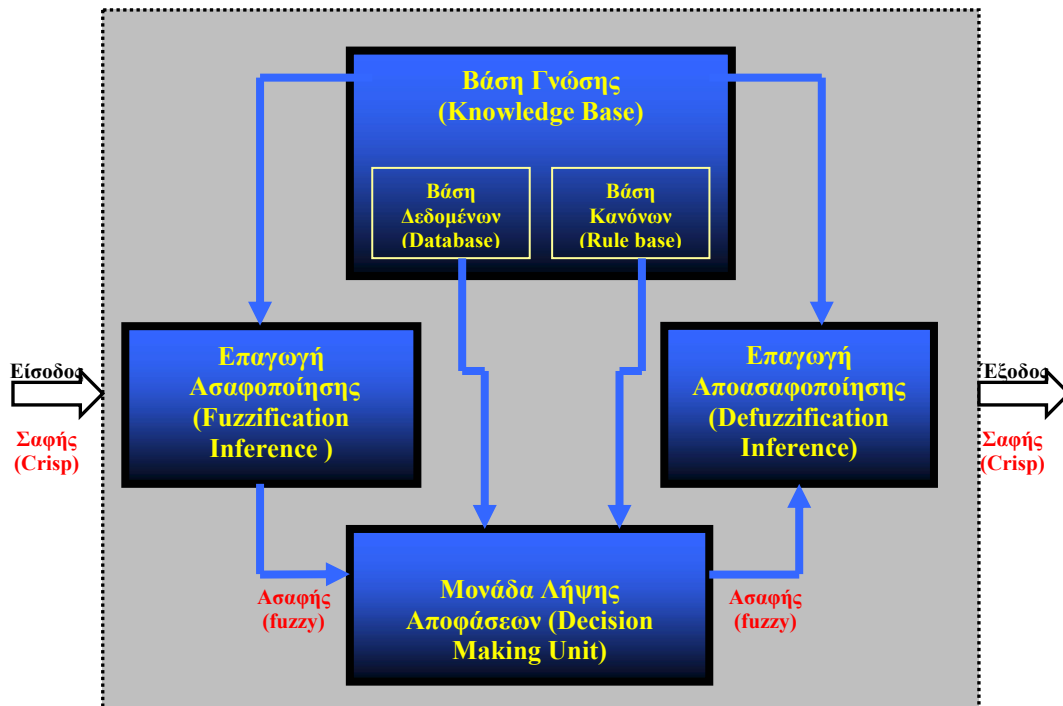
$$\begin{aligned} f(A) &= f(\mu_A(x_1)/x_1 + \dots + \mu_A(x_n)/x_n) \\ &= \mu_A(x_1)/f(x_1) + \dots + \mu_A(x_n)/f(x_n) \end{aligned}$$

Σημειώνεται ότι η f εφαρμόζεται πάντα πάνω στα στοιχεία του κλασικού συνόλου X .

Συμπερασματικά, η αρχή της επέκτασης επιτρέπει σε υπαρκτούς αλγόριθμους που έχουν οριστεί για σαφή δεδομένα, να χρησιμοποιηθούν στην περίπτωση που τα δεδομένα είναι, για κάποιο λόγο, ασαφή.

2.3. Συστήματα Ασαφούς Συλλογιστικής

Ένα σύστημα ασαφούς συμπερασμού (fuzzy inference system) αποτελεί μια δομή υπολογισμού που βασίζεται στη θεωρία των ασαφών συνόλων, στους ασαφείς κανόνες if-then και στην ασαφή συλλογιστική. Τα ασαφή συστήματα έχουν εφαρμοστεί με επιτυχία σε διάφορα πεδία, όπως στον αυτόματο έλεγχο, στην ταξινόμηση δεδομένων, τη λήψη αποφάσεων και στα έμπειρα συστήματα. Ένα σύστημα ασαφούς συμπερασμού είναι γνωστό στη διεθνή βιβλιογραφία ως “fuzzy inference system”, “fuzzy rule based system”, “fuzzy expert system”, “fuzzy logic controller” ή απλά “fuzzy model”. Ένα σύστημα για συλλογιστική με βάση την ασαφή λογική περιγράφεται, στην γενική του μορφή από το σχήμα 18.



Σχήμα 18: Σύστημα Ασαφούς Συμπερασμού (fuzzy inference system)

Βάση γνώσης (knowledge base): Αποτελείται από τη βάση κανόνων και τη βάση δεδομένων.

Βάση κανόνων (rule base): Περιέχει την κωδικοποίηση ενός αριθμού ασαφών κανόνων (fuzzy rules) της μορφής if-then.

Βάση δεδομένων (database): Ορίζει τις συναρτήσεις συμμετοχής (membership functions) των ασαφών συνόλων που χρησιμοποιούνται στους ασαφείς κανόνες.

Μονάδα λήψης αποφάσεων (decision making unit): Χρησιμοποιεί τους κανόνες και τις συναρτήσεις συμμετοχής, προκειμένου να υλοποιήσει ευέλικτα τη λειτουργία της εξαγωγής συμπερασμάτων.

Επαγωγή Ασαφοποίησης (fuzzification inference): Μετασχηματίζει τα δεδομένα εισόδου σε βαθμούς συμμετοχής χρησιμοποιώντας τιμές λεκτικών μεταβλητών (linguistic variables).

Επαγωγή Αποασαφοποίησης (defuzzification inference): Μετασχηματίζει τα ασαφή σύνολα (fuzzy sets), που επιστρέφονται ως αποτελέσματα της επεξεργασίας, σε τιμές εξόδου που μπορούν να είναι είτε κλιμακωτές (scalar) είτε διανυσματικές (vector).

Η κατασκευή ενός συστήματος (π.χ. ελέγχου) βασισμένου σε ασαφή λογική, προϋποθέτει καταρχήν πολύ καλή κατανόηση της διαδικασίας που πρόκειται να μοντελοποιηθεί. Το δυσκολότερο σημείο είναι η επιλογή των ασαφών μεταβλητών,

των τιμών τους και των κανόνων με τους οποίους θα συνδυαστούν. Συνήθως ο προσδιορισμός των συναρτήσεων συμμετοχής γίνεται αυτόματα με τη χρήση νευρωνικών δικτύων. Άλλα σημεία που απαιτούν προσοχή είναι η επιλογή του κατάλληλου τελεστή συνεπαγωγής, της μεθόδου αποσαφήνισης, κλπ. Ένα από τα χαρακτηριστικά που πρέπει να έχει ένα σύστημα ασαφούς συλλογιστικής είναι η σταθερότητα, δηλαδή η ικανότητά του να εμφανίζει καλή συμπεριφορά σε όλο το φάσμα τιμών εισόδου. Συνήθως η σταθερότητα συμπεριλαμβάνεται σαν ασαφής μεταβλητή στην περιγραφή του συστήματος και σχετικοί κανόνες ρυθμίζουν τη συμπεριφορά του συστήματος σε ακραίες καταστάσεις.

Τα ασαφή συστήματα εξαγωγής συμπερασμάτων (fuzzy inference systems) που εμφανίζονται πιο συχνά είναι το μοντέλο του Mamdani (1976) και το μοντέλο των Takagi-Sugeno-Kang (1985). Το **ασαφές μοντέλο Mamdani** αποτελεί την πρώτη προσπάθεια υλοποίησης συστημάτων ασαφούς ελέγχου. Η γενική μορφή των λεκτικών ασαφών κανόνων σε ένα ασαφές μοντέλο Mamdani είναι της μορφής:

$$R_j: \text{If } x \text{ is } A_j \text{ then } y \text{ is } B_j \quad j = 1, \dots, c$$

Όπου x είναι η μεταβλητή της υπόθεσης του κανόνα (είσοδος) και y η μεταβλητή του συμπεράσματος (αποτέλεσμα) του κανόνα. Τα x και y αποτελούν τις λεκτικές μεταβλητές και τα σύμβολα A_j και B_j αποτελούν τις λεκτικές τιμές (ασαφή σύνολα) που ορίζονται από τις συναρτήσεις συμμετοχής (MFs) $\mu_{A_j}(x): X \rightarrow [0,1]$ και $\mu_{B_j}(y): Y \rightarrow [0,1]$ αντίστοιχα. Τέλος, το c αποτελεί τον αριθμό των κανόνων στο ασαφές σύστημα.

Τα ασαφή σύνολα A_j ορίζουν περιοχές στο χώρο των υποθέσεων, για τις οποίες ισχύουν τα αντίστοιχα συμπεράσματα των προτάσεων. Στην περίπτωση που η είσοδος x αποτελεί ένα n -διαστάσεων διάνυσμα, προτιμάται για λόγους ευχρηστίας η υιοθέτηση n -ασαφών προτάσεων στην αναπαράσταση του n -διαστάσεων ασαφούς συνόλου, από ό,τι η αναπαράσταση του A_j ως ένα n -διαστάσεων ασαφές σύνολο.

Συγκεκριμένα ο λεκτικός ασαφής κανόνας λαμβάνει την ακόλουθη μορφή:

$$R_j: \text{If } x \text{ is } A_{x1} \text{ AND } \dots \text{ AND } x_n \text{ is } A_{xn} \text{ then } y \text{ is } B$$

Οι μονοδιάστατες συναρτήσεις συμμετοχών A_{x_i} , $i = 1, \dots, n$ μπορούν να λάβουν διάφορες μορφές (τριγωνική, καμπανοειδή, γκαουσιανή κλπ).

Για δεδομένη είσοδο, τα τελικά ασαφή σύνολα εξάγονται με βάση τον τελεστή ασαφούς συνεπαγωγής (fuzzy implication operator) $A \rightarrow B$, που μπορεί να υπολογιστεί με βάση το ελάχιστο (Mamdani), το γινόμενο (Larsen) ή κάποιον άλλο τύπο συνεπαγωγής (συνεπαγωγή κατά Lukasiewicz ή συνεπαγωγή κατά Zadeh).

1. Ελάχιστο (Mamdani minimum)

$$\mu_{A \rightarrow B}(x, y) = \min [\mu_A(x), \mu_B(y)]$$

2. Γινόμενο (Larsen product)

$$\mu_{A \rightarrow B}(x, y) = \mu_A(x) \cdot \mu_B(y)$$

3. Τελεστής κατά Lukasiewicz

$$\mu_{A \rightarrow B}(x, y) = \min [1, 1 - \mu_A(x) + \mu_B(y)]$$

4. Τελεστής κατά Zadeh

$$\mu_{A \rightarrow B}(x, y) = \max \{ \min [\mu_A(x), \mu_B(y)], 1 - \mu_A(x) \}$$

Η τιμή συμμετοχής $\mu_A(x)$ στις παραπάνω εξισώσεις αποτελεί την ενεργοποίηση του κανόνα (rule activation) ή εναλλακτικά το βαθμό εκπλήρωσης (degree of fulfillment) και υπολογίζεται μέσω της τομής των A_{x_i} , $i = 1, \dots, n$. Οι δύο πιο συνήθεις τύποι για τον υπολογισμό της τομής των ασαφών συνόλων είναι αυτοί του ελαχίστου και του γινομένου:

1. Ελάχιστο $\mu_A(x) = \min [\mu_{Ax1}(x), \mu_{Ax2}(x), \dots, \mu_{Axn}(x)]$
2. Γινόμενο $\mu_A(x) = \mu_{Ax1}(x) \cdot \mu_{Ax2}(x) \cdot \dots \cdot \mu_{Axn}(x)$

Υποθέτοντας ότι οι συναρτήσεις συμμετοχής των αποδόσεων είναι συμμετρικές με κέντρα τα y_j , $j = 1, \dots, c$ και με ίσες διασπορές, το γινόμενο κατά Larsen απλοποιείται στην παρακάτω μορφή:

$$\mu_{A_j \rightarrow B_j}(x, y) = \mu_{A_j}(x) \cdot y_j$$

Το αποσαφηνισμένο αποτέλεσμα του ασαφούς μοντέλου μπορεί να υπολογιστεί με βάση την αποασαφοποίηση με τη μέθοδο του Κέντρου Βάρους (center of gravity) ως εξής:

$$y_{FS} = \frac{\sum_{j=1}^c \mu_{A_j}(x) y_j}{\sum_{j=1}^c \mu_{A_j}(x)}$$

Στην περίπτωση που οι συναρτήσεις συμμετοχής έχουν διαφορετικές διασπορές (spreads), οι διαφορές αυτές μπορούν να συνυπολογιστούν λαμβάνοντας το Σταθμισμένο Κέντρο Βάρους (weighted center of gravity).

$$y_{FS} = \frac{\sum_{j=1}^c \mu_{A_j}(x) w_j y_j}{\sum_{j=1}^c \mu_{A_j}(x) w_j}$$

όπου w_j είναι το εμβαδόν του τελικού ασαφούς συνόλου B_j .

Το **ασαφές μοντέλο Sugeno**, γνωστό και ως μοντέλο TSK, παρουσιάστηκε από τους Takagi και Sugeno (1985). Στην γενική του μορφή το μοντέλο αυτό αναπτύσσει μια συστηματική μέθοδο δημιουργίας ασαφών κανόνων από ένα σύνολο δεδομένων. Η τυπική μορφή ενός ασαφούς κανόνα στο μοντέλο αυτό είναι της μορφής:

$$\text{If } x_1 \text{ is } A_1 \text{ and } \dots \text{ and } x_N \text{ is } A_N \text{ then } y = f(x_1, \dots, x_N)$$

Όπου τα A_k , $k = 1, \dots, N$ αποτελούν τις ασαφείς τιμές των υποθέσεων (ασαφή σύνολα εισόδου). Η ειδοποιός διαφοροποίηση του μοντέλου αυτού έγκειται στη συναρτησιακή μορφή του αποτελέσματος που βρίσκεται σε αντιδιαστολή με το ασαφές αποτέλεσμα που δίδεται από το μοντέλο Mamdani.

Συνήθως η συνάρτηση f είναι πολυωνυμική ως προς τις μεταβλητές εισόδου x_k , δηλαδή ισχύει $f(x_1, \dots, x_N) = p_1 x_1 + \dots + p_N x_N + p_0$

Για ένα σύνολο m ασαφών κανόνων, το μοντέλο συμπερασμού υπολογίζει μια έξοδο συνεχούς τιμής y εκφρασμένη ως σταθμισμένο μέσο όρο (weighted average) των επιμέρους εξόδων y_i ($i = 1, \dots, m$)

$$y = \frac{\sum_{i=1}^m \frac{w_i y_i}{\sum_{j=1}^m w_j}}{\sum_{i=1}^m \frac{w_i}{\sum_{j=1}^m w_j}} (p_i x_i + \dots + p_{iN} x_N + p_{i0})$$

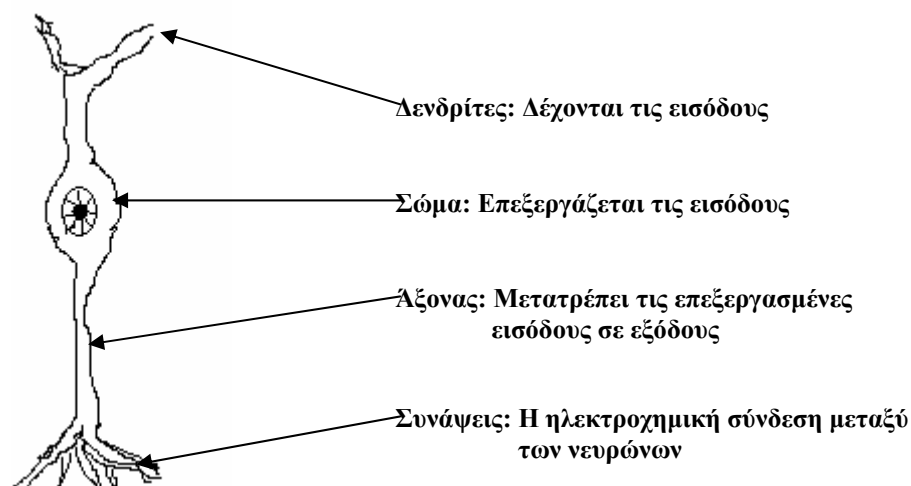
όπου το w_i εκφράζει την ισχύ του κανόνα i ($w_i = \mu_{A_{i1}}(x) \wedge \dots \wedge \mu_{A_{iN}}(x_N)$). Το ασαφές μοντέλο Sugeno προσφέρει ένα μεγάλο πλεονέκτημα ως προς την περιγραφή πολύπλοκων συστημάτων ελέγχου, επιτρέποντας τη διάσπαση ενός συστήματος σε μικρότερα υποσυστήματα και επιπλέον το διαμερισμό του χώρου εισόδου.

3. Νευρωνικά Δίκτυα

3.1. Εισαγωγή

Τα τεχνητά νευρωνικά δίκτυα ανήκουν στον τομέα της Μη Συμβολικής Τεχνητής Νοημοσύνης (non symbolic AI), η οποία προσομοιώνει βιολογικές διαδικασίες, όπως τη λειτουργία του εγκεφάλου ή τη διαδικασία εξέλιξης των ειδών, και η οποία διαφέρει από τη Συμβολική Τεχνητή Νοημοσύνη (symbolic AI), που προσομοιώνει τον τρόπο σκέψης του ανθρώπου, χρησιμοποιώντας ως δομικές μονάδες τα σύμβολα (ένα σύμβολο μπορεί να αναπαριστά μια έννοια ή μια σχέση ανάμεσα σε έννοιες).

Η ικανότητα του ανθρώπου να σκέφτεται, να θυμάται και να επιλύει προβλήματα εντοπίζεται στον εγκέφαλό του. Όπως είναι γνωστό από τη Βιολογία, η δομική μονάδα του εγκεφάλου είναι ο νευρώνας. Ένας τυπικός βιολογικός νευρώνας αποτελείται από το σώμα, που συνιστά τον πυρήνα του, τους δενδρίτες, μέσω των οποίων λαμβάνει σήματα από γειτονικούς νευρώνες (σημεία εισόδου), και τον άξονα, που αποτελεί την έξοδο του νευρώνα και το μέσο σύνδεσής του με τους άλλους νευρώνες (βλέπε σχήμα 19). Σε κάθε δενδρίτη υπάρχει ένα απειροελάχιστο κενό που ονομάζεται σύναψη. Οι συνάψεις μέσω χημικών διαδικασιών επιταχύνουν ή επιβραδύνουν τη ροή ηλεκτρικών φορτίων προς το σώμα του νευρώνα. Η ικανότητα μάθησης και μνήμης που εμφανίζει ο εγκέφαλος οφείλεται στην ικανότητα των συνάψεων να μεταβάλλουν την αγωγιμότητά τους. Τα ηλεκτρικά σήματα που εισέρχονται στο σώμα μέσω των δενδριτών συνδυάζονται και, εφόσον το αποτέλεσμα ξεπερνά κάποια τιμή κατωφλιού, το σήμα διαδίδεται με τη βοήθεια του άξονα προς άλλους νευρώνες.



Σχήμα 19: Απεικόνιση απλού νευρώνα

Ο εγκέφαλος είναι σε θέση να λαμβάνει πολύπλοκες αποφάσεις εκπληκτικά γρήγορα παρά το ότι ο χρόνος απόκρισης των βιολογικών νευρώνων είναι της τάξης των χιλιοστών του δευτερολέπτου. Κατά μια άποψη, αυτό οφείλεται στο ότι η υπολογιστική ικανότητα του εγκεφάλου και η πληροφορία που περιέχει είναι διαμερισμένα σε όλο του τον όγκο. Πρόκειται, δηλαδή, για ένα παράλληλο και κατανεμημένο υπολογιστικό σύστημα. Αυτά τα χαρακτηριστικά διαμορφώνουν το

κυριότερο κίνητρο πίσω από την επιθυμία να μοντελοποιηθεί ο ανθρώπινος εγκέφαλος με τα τεχνητά νευρωνικά δίκτυα.

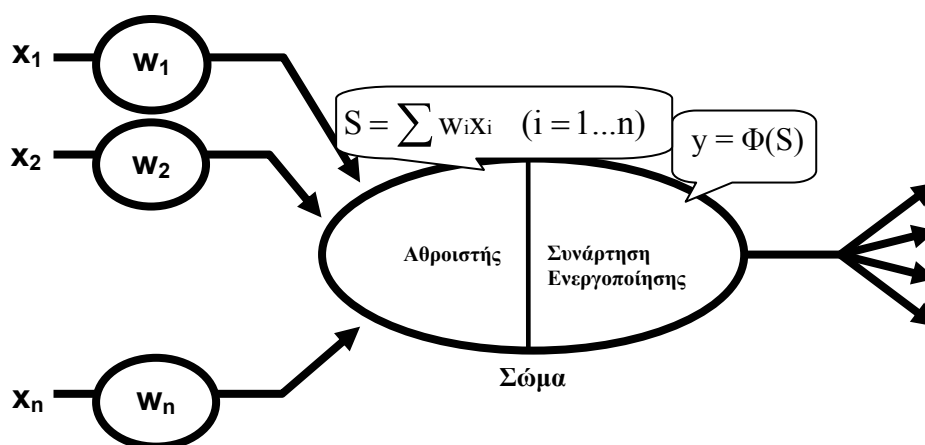
3.2. Τεχνητά Νευρωνικά Δίκτυα (ΤΝΔ)

Μοντέλο Τεχνητού Νευρώνα:

Ο τεχνητός νευρώνας (artificial neuron) αποτελεί το πρωταρχικό συστατικό στοιχείο των τεχνητών νευρωνικών δικτύων και είναι ένα υπολογιστικό μοντέλο τα μέρη του οποίου αντιστοιχίζονται άμεσα με αυτά του βιολογικού νευρώνα. Όπως απεικονίζεται στο σχήμα 20, ένας τεχνητός νευρώνας δέχεται κάποια σήματα εισόδου x_0, x_1, \dots, x_n , τα οποία, σε αντίθεση με τους ηλεκτρικούς παλμούς του εγκεφάλου, αντιστοιχούν σε συνεχείς μεταβλητές. Κάθε τέτοιο σήμα εισόδου σταθμίζεται με κάποιο βάρος w_i (weight), ο ρόλος του οποίου είναι αντίστοιχος με εκείνον της σύναψης του βιολογικού εγκεφάλου.

Η τιμή βάρους μπορεί να είναι θετική ή αρνητική σε αντιστοιχία με την επιταχυντική ή επιβραδυντική λειτουργία της σύναψης. Το σώμα του τεχνητού νευρώνα χωρίζεται σε δύο μέρη:

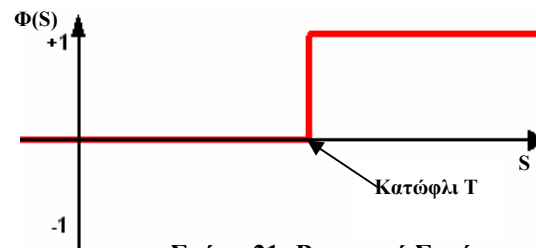
1. τον αθροιστή (sum), ο οποίος προσθέτει τα επηρεασμένα από τα βάρη σήματα εισόδου και παράγει την ποσότητα $S = \sum w_i x_i, i = 1 \dots n$ και
2. τη συνάρτηση ενεργοποίησης ή κατωφλίου (activation ή threshold ή transformation function), που αποτελεί ένα μη γραμμικό φίλτρο το οποίο διαμορφώνει την τελική τιμή του σήματος εξόδου y , σε συνάρτηση με την ποσότητα S . Το παρακάτω σχήμα παρουσιάζει το μοντέλο τεχνητού νευρώνα.



Σχήμα 20: Μοντέλο Τεχνητού Νευρώνα

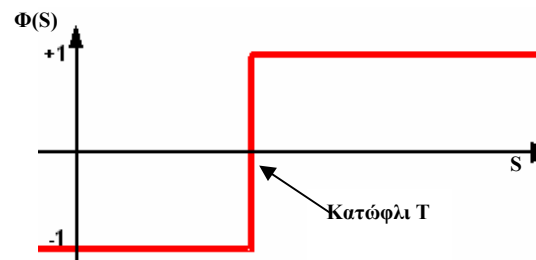
Στα σχήματα 21-23 παρουσιάζονται τρεις τυπικές μορφές που μπορεί να λάβει η συνάρτηση ενεργοποίησης

- Η βηματική (step) συνάρτηση (βλέπε σχήμα 21), η οποία δίνει στην έξοδο αποτέλεσμα (συνήθως 1), εφόσον η τιμή που υπολογίζει ο αθροιστής είναι μικρότερη (ή μεγαλύτερη) από μια τιμή κατωφλίου T .



Σχήμα 21: Βηματική Συνάρτηση

- Η συνάρτηση πρόσημου (sign) (βλέπε σχήμα 22), η οποία δίνει στην έξοδο αρνητική (ή θετική) πληροφορία, εφόσον η τιμή που υπολογίζει ο αθροιστής είναι μικρότερη (ή μεγαλύτερη) από μια τιμή κατωφλίου T.

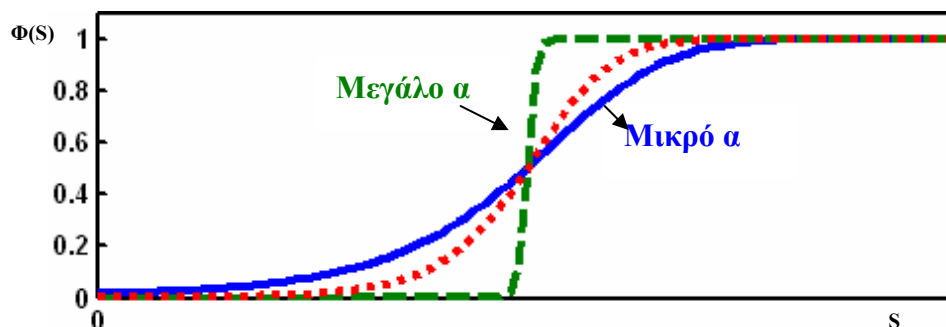


Σχήμα 22: Συνάρτηση Προσήμου

- Η σιγμοειδής (sigmoid) συνάρτηση (βλέπε σχήμα 23), η οποία εκφράζεται από τη γενική σχέση:

$$\Phi(S) = \frac{1}{1 + e^{-aS}}$$

όπου α είναι ένας συντελεστής ρύθμισης της ταχύτητας μετάβασης μεταξύ των δύο ασύμπτωτων τιμών. Η σιγμοειδής συνάρτηση είναι σημαντική γιατί παρέχει μη γραμμικότητα στο νευρώνα, η οποία είναι απαραίτητη για τη μοντελοποίηση μη γραμμικών φαινομένων.

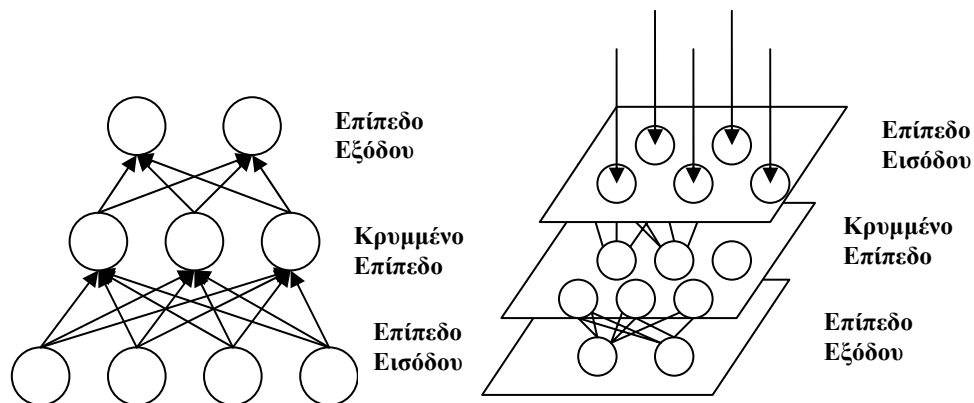


Σχήμα 23: Σιγμοειδής Συνάρτηση για διαφορετικές τιμές του συντελεστή α

3.3. Τύποι Τεχνητών Νευρωνικών Δικτύων

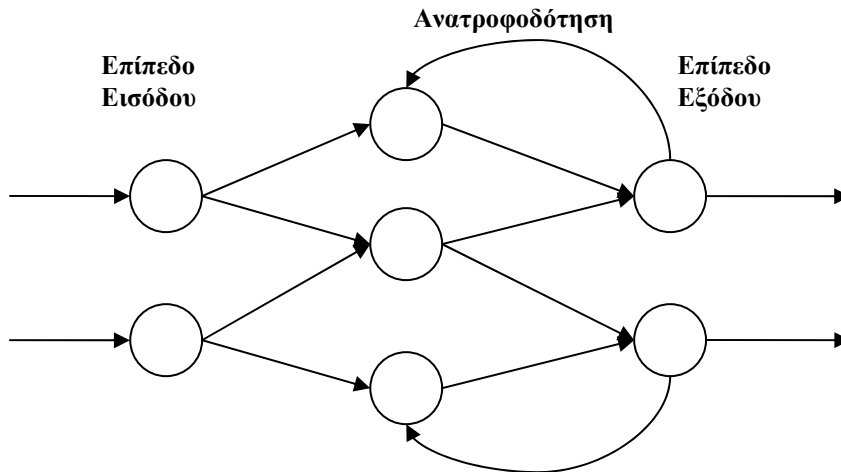
Τα τεχνητά νευρωνικά δίκτυα (artificial neural networks) ή πιο απλά ΤΝΔ, χαρακτηρίζονται ως συστήματα επεξεργασίας δεδομένων που αποτελούνται από ένα πλήθος τεχνητών νευρώνων οργανωμένων σε δομές παρόμοιες με αυτές του ανθρώπινου εγκεφάλου. Συνήθως οι τεχνητοί νευρώνες είναι οργανωμένοι σε μία σειρά από στρώματα ή επίπεδα (layers). Το πρώτο από αυτά τα επίπεδα ονομάζεται επίπεδο εισόδου (input layer) και χρησιμοποιείται για την εισαγωγή των δεδομένων. Τα στοιχεία, που συνιστούν το επίπεδο εισόδου, δεν είναι ουσιαστικά νευρώνες, καθώς δεν εκτελούν κάποιον υπολογισμό (δεν έχουν ούτε βάρη εισόδου, ούτε συναρτήσεις ενεργοποίησης). Στη συνέχεια μπορούν να υπάρχουν, προαιρετικά, ένα ή περισσότερα ενδιάμεσα ή κρυφά επίπεδα (hidden layers). Τέλος ακολουθεί ένα επίπεδο εξόδου (output layer).

Οι νευρώνες των διάφορων στρωμάτων μπορεί να είναι πλήρως ή μερικώς συνδεδεμένοι. Πλήρως συνδεδεμένοι (fully connected) είναι εκείνοι οι οποίοι συνδέονται με όλους τους νευρώνες του επόμενου επιπέδου. Σε κάθε άλλη περίπτωση οι νευρώνες είναι μερικώς συνδεδεμένοι (partially connected). Όταν δεν υπάρχουν συνδέσεις μεταξύ νευρώνων ενός επιπέδου και νευρώνων προηγούμενου επιπέδου (όταν δηλαδή η ροή πληροφορίας είναι μιας κατεύθυνσης) τα ΤΝΔ χαρακτηρίζονται ως δίκτυα με απλή (ή πρόσθια) τροφοδότηση (feedforward). Στην αντίθετη περίπτωση, καθώς και στην περίπτωση συνδέσεων μεταξύ νευρώνων του ίδιου επιπέδου, τα ΤΝΔ χαρακτηρίζονται ως δίκτυα με ανατροφοδότηση (feedback ή recurrent). Ο τύπος του δικτύου με ανατροφοδότηση διαφέρει από τον τύπο της απλής τροφοδότησης στο ότι περιλαμβάνει ένα βρόχο ανάδρασης, όπου κάθε νευρώνας τροφοδοτεί το σήμα της εξόδου του στις εισόδους όλων των άλλων νευρώνων.



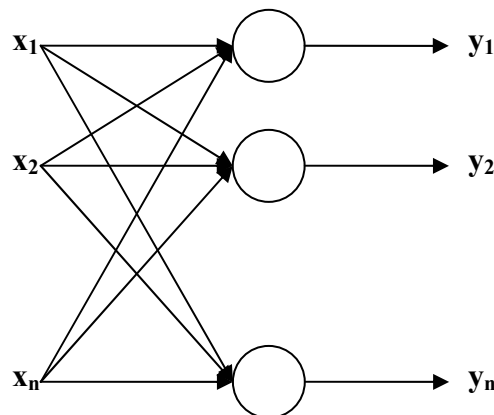
Σχήμα 24: Παραδείγματα πλήρως διασυνδεδεμένων ΤΝΔ απλής τροφοδότησης

Τα ΤΝΔ του σχήματος 24 αποτελούν παραδείγματα πλήρως διασυνδεδεμένων ΤΝΔ απλής τροφοδότησης, ενώ στο σχήμα 25 παραθέτουμε ένα παράδειγμα δικτύου με ανατροφοδότηση:

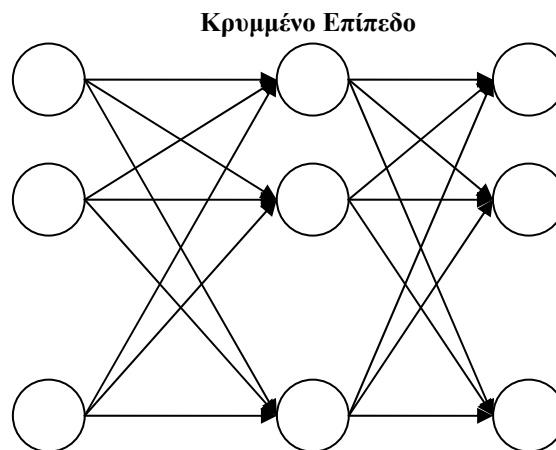


Σχήμα 25: Παράδειγμα δικτύου με ανατροφοδότηση

Έχουν αναπτυχθεί συγκεκριμένα ΤΝΔ, πάνω στα πρότυπα ορισμένων βιολογικών λειτουργιών που είναι γνωστά ως paradigms στη διεθνή βιβλιογραφία, και αποτελούν ουσιαστικά τους διαφορετικούς τύπους ΤΝΔ. Τα ΤΝΔ στις περισσότερες περιπτώσεις είναι δομημένα από στρώματα νευρώνων. Κάποια από αυτά έχουν ένα επίπεδο (SLNN=single-layer neural networks) (βλέπε σχήμα 26) και κάποια έχουν περισσότερα (MLNN=multi-layer neural networks) (βλέπε σχήμα 27).



Σχήμα 26: Απεικόνιση Νευρωνικών Δικτύων με ένα επίπεδο



Σχήμα 27: Απεικόνιση Νευρωνικών Δικτύων με πολλά επίπεδα

Τα πρώτα χρησιμοποιούν ως κανόνα μάθησης κυρίως τον κανόνα Hebb (Hebb rule) και τον κανόνα Δέλτα (Delta rule). Όσον αφορά τα MLNN οι Rumelhart, Hinton, και Williams (1986) εισήγαγαν τον αλγόριθμο εκμάθησης με ανάστροφη διάδοση του σφάλματος (back-propagation training algorithm), που θα αναλύσουμε παρακάτω. Επιπλέον τα MLNN χρησιμοποιούν σε ορισμένες περιπτώσεις την ανταγωνιστική μάθηση (competitive learning), για την οποία υπάρχουν τέσσερα κυρίως υποδείγματα (Wasserman 1989; Freeman και Skapura 1992; Rumelhart και McClelland, 1986).

Παρακάτω παρουσιάζουμε τους πιο γνωστούς τύπους ΤΝΔ, και κάποιους από τους αλγόριθμους εκπαίδευσής τους.

3.3.1. Δίκτυα με Απλή Τροφοδότηση

Τα ΤΝΔ με απλή τροφοδότηση (feedforward) συνιστούν την πιο απλή μορφή νευρωνικών δικτύων και αποτελούνται από ένα επίπεδο εισόδου, ένα επίπεδο εξόδου και προαιρετικά, ένα ή περισσότερα ενδιάμεσα, κρυφά επίπεδα. Δύο είναι τα θέματα τα οποία ανακύπτουν στην υλοποίηση των νευρωνικών δικτύων του τύπου αυτού.

Το πρώτο αφορά στη μάθηση, δηλαδή στον τρόπο που εκπαιδεύεται το δίκτυο για να έχει την επιθυμητή συμπεριφορά. Στα δίκτυα απλής τροφοδότησης χρησιμοποιούνται μέθοδοι μάθησης με επίβλεψη, οι σημαντικότερες από τις οποίες εξετάζονται στη συνέχεια.

Το δεύτερο θέμα αφορά στην τοπολογία του δικτύου, δηλαδή στο πόσα κρυφά επίπεδα θα έχει το δίκτυο και από πόσους νευρώνες θα αποτελείται το κάθε επίπεδο. Θα πρέπει να αναφερθεί ότι έχουν προταθεί αλγόριθμοι οι οποίοι μπορούν να δημιουργήσουν μια τοπολογία ΤΝΔ βάσει των εισόδων και των επιθυμητών εξόδων (όπως για παράδειγμα ο αλγόριθμος Upstart (Frey, 1990) και ο αλγόριθμος Tiling (Mezard και Nadal, 1989)).

Παρακάτω παρουσιάζεται η πιο απλή μορφή δικτύου απλής τροφοδότησης που ονομάζεται perceptron, καθώς και ο ομώνυμος αλγόριθμος εκπαίδευσης.

Perceptron και Multilayer Perceptron (MLP)

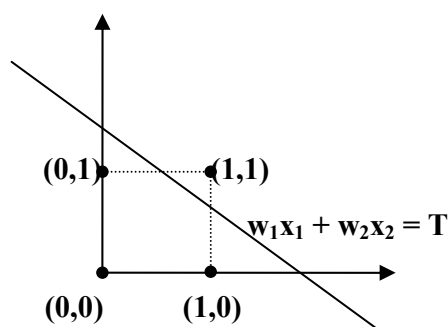
Το perceptron συνιστά την πιο απλουστευμένη τοπολογία δικτύου με απλή τροφοδότηση και αποτελεί ιστορικά μια πρώτη προσέγγιση τεχνητών νευρωνικών δικτύων που την εισήγαγε ο Rosenblatt (1958, 1962). Πρόκειται ουσιαστικά για ένα και μοναδικό τεχνητό νευρώνα, ο οποίος χρησιμοποιεί ως συνάρτηση κατωφλίου τη βηματική συνάρτηση. Η μάθηση στο perceptron συνίσταται στην επιλογή κατάλληλων τιμών βαρών, έτσι ώστε, δεδομένου ενός διανύσματος εισόδου, να παραχθεί η επιθυμητή έξοδος. Πρόκειται δηλαδή για μια απλή μορφή μάθησης υπό επίβλεψη. Ο αλγόριθμος μεταβολής των βαρών έχει ως εξής:

1. Εάν για τη συγκεκριμένη είσοδο παράγεται το επιθυμητό αποτέλεσμα, τότε δεν γίνεται καμία μεταβολή.
2. Εάν το αποτέλεσμα είναι 1, ενώ θα έπρεπε να είναι 0, τότε μειώνονται τα βάρη των ενεργών γραμμών (εκείνων που στο συγκεκριμένο πρότυπο έχουν είσοδο 1) κατά μια τιμή d , η οποία ονομάζεται ρυθμός μάθησης (learning rate).
3. Εάν το αποτέλεσμα είναι 0, ενώ θα έπρεπε να είναι 1, τότε αυξάνονται τα βάρη των ενεργών γραμμών κατά d .

Ένας perceptron με n γραμμές εισόδου μπορεί να θεωρηθεί ότι αναπαριστά ένα υπερεπίπεδο $n-1$ διαστάσεων, που διαχωρίζει τα διανύσματα εισόδου σε δύο ομάδες, τοποθετώντας από τη μια πλευρά όσα παράγουν έξοδο 1, και από την άλλη όσα

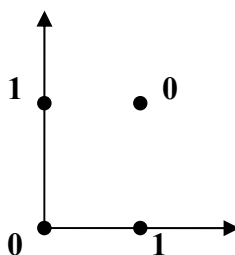
παράγουν έξοδο 0. Προβλήματα των οποίων οι τιμές εισόδου-εξόδου υπόκεινται σε αυτόν τον κανόνα ονομάζονται γραμμικώς διαχωρίσιμα (linearly separable) και έχει αποδειχτεί ότι μπορούν να μοντελοποιηθούν με τη χρήση του perceptron. Επομένως μετά από πεπερασμένο χρόνο εκπαίδευσης και εφόσον η συνάρτηση που συνδέει την είσοδο με την έξοδο είναι γραμμική, επέρχεται η σύγκλιση του perceptron.

Στο σχήμα 28 απεικονίζεται γραφικά η έννοια του γραμμικώς διαχωρίσιμου για τη συνάρτηση AND η οποία μπορεί να μοντελοποιηθεί με perceptron. Η ευθεία T χωρίζει τα ζευγάρια εισόδου –εξόδου σε δύο περιοχές. Πάνω και δεξιά της T βρίσκονται αυτά που έχουν έξοδο 1 και κάτω αριστερά αυτά που έχουν έξοδο 0. Εκτός από το AND, το perceptron είναι σε θέση να μοντελοποιήσει και τους στοιχειώδεις λογικούς συνδέσμους OR και NOT.



Σχήμα 28: Συνάρτηση AND γραμμικώς διαχωρίσιμη

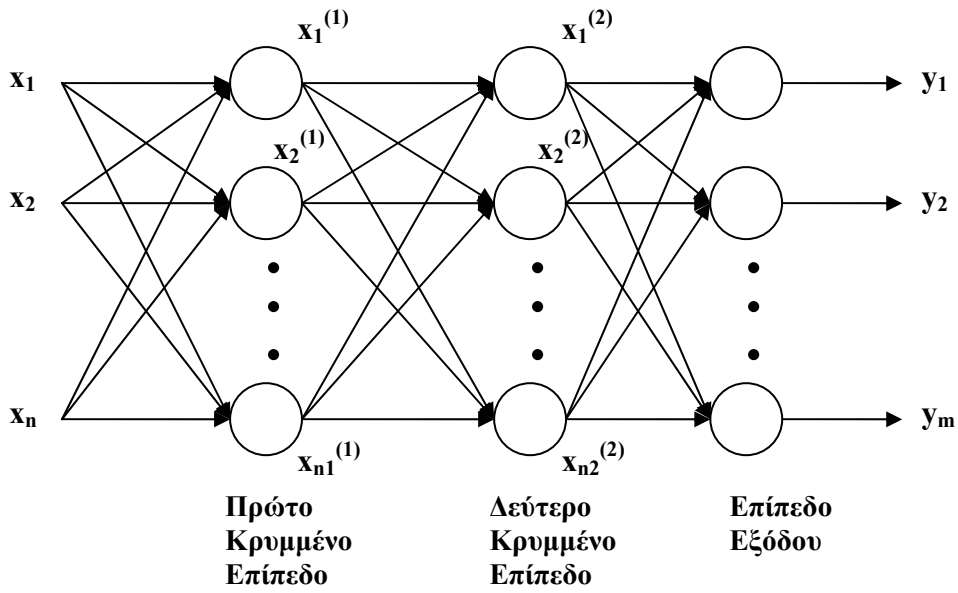
Προφανώς υπάρχουν και προβλήματα στα οποία τα ζευγάρια εισόδου-εξόδου δεν είναι γραμμικώς διαχωρίσιμα. Τέτοια προβλήματα δεν μπορούν να μοντελοποιηθούν με perceptron και απαιτούν τη χρήση ΤΝΔ με ενδιάμεσα κρυφά επίπεδα. Κλασικό παράδειγμα τέτοιας συνάρτησης είναι η XOR, της οποίας ο μη γραμμικώς διαχωρίσιμος χαρακτήρας απεικονίζεται στο σχήμα 29:



Σχήμα 29: Μη-γραμμικώς διαχωρίσιμη συνάρτηση XOR

Στην κατηγορία των νευρωνικών δικτύων πρόσθιας τροφοδότησης υπάγεται ο Multilayer Perceptron (MLP), ο οποίος δεν χρησιμοποιεί παρελθούσες τιμές των εξόδων του ή άλλου είδους εσωτερικές μεταβλητές για τον υπολογισμό της τρέχουσας εξόδου. Ο MLP αποτελείται από πολλαπλά επίπεδα απλοποιημένων σιγμοειδών κόμβων (επεξεργαστικών στοιχείων) ή νευρώνων, που αλληλεπιδρούν χρησιμοποιώντας σταθμισμένες συνδέσεις.

Η βασική δομή του MLP παρουσιάζεται στο σχήμα 30.



Σχήμα 30: Απεικόνιση ενός πολυεπίπεδου perceptron

Οι κύκλοι αναπαριστούν τους νευρώνες (βάρη, κατώφλι και συνάρτηση ενεργοποίησης) και οι γραμμές αναπαριστούν τις συνδέσεις μεταξύ των εισόδων και των νευρώνων, καθώς και μεταξύ των νευρώνων σε ένα επίπεδο και εκείνων στο επόμενο επίπεδο. Το συγκεκριμένο δίκτυο αποτελεί έναν τριών-επιπέδων perceptron, καθώς αποτελείται από τρία στάδια νευρωνικής επεξεργασίας μεταξύ των εισόδων και των εξόδων. Ο MLP έχει εισόδους τα x_i , $i = 1, 2, \dots, n$ και εξόδους τα y_j , $j = 1, 2, \dots, m$. Ο αριθμός των νευρώνων στο πρώτο κρυμμένο επίπεδο είναι n_1 . Στο δεύτερο κρυμμένο επίπεδο υπάρχουν n_2 νευρώνες, και στο επίπεδο εξόδου υπάρχουν m νευρώνες.

Οι νευρώνες στο πρώτο επίπεδο του MLP εκτελούν υπολογισμούς, των οποίων τα αποτελέσματα δίνονται από τον παρακάτω τύπο.

$$x_j^{(1)} = f_j^{(1)} \left(\left(\sum_{i=1}^n w_{ij}^{(1)} x_i \right) - \theta_j^{(1)} \right)$$

όπου $j = 1, 2, \dots, n_1$. Οι νευρώνες στο δεύτερο επίπεδο του MLP εκτελούν υπολογισμούς, το αποτέλεσμα των οποίων δίνεται από:

$$x_j^{(2)} = f_j^{(2)} \left(\left(\sum_{i=1}^{n_1} w_{ij}^{(2)} x_i^{(1)} \right) - \theta_j^{(2)} \right)$$

όπου $j = 1, 2, \dots, n_2$. Οι νευρώνες στο επίπεδο εξόδου του MLP εκτελούν υπολογισμούς, των οποίων τα αποτελέσματα δίνονται από:

$$y_j = f_j \left(\left(\sum_{i=1}^{n_2} w_{ij} x_i^{(2)} \right) - \theta_j \right)$$

όπου $j = 1, 2, \dots, m$.

Οι παράμετροι $w_{ij}^{(1)}$ ονομάζονται βάρη του πρώτου κρυμμένου επιπέδου. Τα $w_{ij}^{(2)}$ ονομάζονται βάρη του δεύτερου κρυμμένου επιπέδου. Τα w_{ij} ονομάζονται βάρη

του επιπέδου εξόδου. Οι παράμετροι $\theta_j^{(1)}$ και $\theta_j^{(2)}$ ονομάζονται κατώφλια του πρώτου και δεύτερου κρυμμένου επιπέδου αντίστοιχα, ενώ τα θ_j ονομάζονται τα κατώφλια του επιπέδου εξόδου. Οι συναρτήσεις f_j (για το επίπεδο εξόδου), $f_j^{(2)}$ (για το δεύτερο κρυμμένο επίπεδο), και $f_j^{(1)}$ (για το πρώτο κρυμμένο επίπεδο) αναπαριστούν τις συναρτήσεις ενεργοποίησης (activation functions). Οι συναρτήσεις ενεργοποίησης μπορούν να διαφοροποιούνται μεταξύ των νευρώνων του MLP.

3.3.2. Κανόνας Δέλτα

Ο κανόνας Δέλτα, (Delta rule) (Widrow-Hoff, 1960) αποτελεί γενίκευση του αλγορίθμου εκπαίδευσης του perceptron, με την έννοια ότι μπορεί να εφαρμοστεί και σε άλλα ΤΝΔ, τα οποία όμως επίσης δεν έχουν κρυφά επίπεδα. Παρακάτω περιγράφουμε τη λειτουργία του αλγορίθμου.

Έστω ότι σε ένα ΤΝΔ η συνάρτηση ενεργοποίησης παίρνει πραγματικές τιμές, όπως είναι για παράδειγμα η σιγμοειδής συνάρτηση:

$$g(z) = \frac{1}{1 + e^z}$$

Τότε η έξοδος ενός νευρώνα i μπορεί να υπολογιστεί βάσει της σχέσης:

$$a_i = g\left(\sum_{j=0}^n w_{ij} a_j\right)$$

όπου a_i είναι η έξοδος του νευρώνα i , w_j το βάρος της σύνδεσης j και a_j η είσοδος j από το νευρώνα του προηγούμενου επιπέδου.

Η μεταβολή του βάρους w_j υπολογίζεται από τον τύπο:

$$w_j = w_{j_old} - d \cdot (a_i - \alpha) a_j$$

όπου a_i είναι η έξοδος του νευρώνα, α είναι η επιθυμητή έξοδος, w_j το βάρος της σύνδεσης j , a_j η είσοδος j και d ο ρυθμός μάθησης. Το συνολικό σφάλμα, που αποτελεί ένα μέτρο της απόστασης από την επιθυμητή κατάσταση, υπολογίζεται από τον τύπο:

$$Err = \frac{1}{2} \sum (a_i - \alpha)^2$$

Αν και ο αλγόριθμος αυτός αποτελεί βελτίωση εκείνου που εφαρμόζεται στα perceptrons, δεν μπορεί να εφαρμοστεί σε δίκτυα τα οποία έχουν κρυφά επίπεδα, καθώς για κάθε νευρώνα πρέπει να είναι γνωστή με ακρίβεια η έξοδός του, κάτι που δεν είναι δυνατό όταν υπάρχουν κρυμμένα επίπεδα.

3.3.3. Αλγόριθμος Εκμάθησης με βάση την Ανάστροφη Διάδοση του Σφάλματος (back propagation learning algorithm)

Η ανάστροφη διάδοση του λάθους (back propagation) αποτελεί την πιο γνωστή μέθοδο εκπαίδευσης νευρωνικών δικτύων πολλών επιπέδων. Την εισήγαγαν οι Werbos (1974), Rumelhart et al. (1986) και Parker (1987).

Η βασική ιδέα είναι να καθοριστεί το «ποσοστό» του συνολικού σφάλματος που αντιστοιχεί στα βάρη του κάθε νευρώνα. Με αυτόν τον τρόπο γίνεται δυνατό να υπολογιστούν οι διορθώσεις στα βάρη του κάθε νευρώνα ξεχωριστά, το οποίο είναι

αρκετά πολύπλοκο για τα κρυφά επίπεδα, καθώς η έξοδός τους επηρεάζει πολλούς νευρώνες ταυτόχρονα.

Στην ανάστροφη διάδοση του λάθους υπολογίζεται αρχικά το σφάλμα για τους νευρώνες του επιπέδου εξόδου κατά τρόπο παρόμοιο με εκείνον του κανόνα Δέλτα. Το σφάλμα που υπολογίζεται χρησιμοποιείται για να υπολογιστούν τα σφάλματα στο τελευταίο κρυφό επίπεδο. Στη συνέχεια η διαδικασία επαναλαμβάνεται αναδρομικά προς το πρώτο επίπεδο. Με βάση δηλαδή τη διάδοση του σφάλματος προς τα πίσω (back propagation), γίνεται ένας υπολογισμός της συνεισφοράς κάθε βάρους των νευρώνων στο ολικό σφάλμα. Κατόπιν τα σφάλματα που υπολογίστηκαν για τους νευρώνες κάθε επιπέδου χρησιμοποιούνται για να μεταβάλουν τα βάρη του κάθε νευρώνα κατά τρόπο αντίστοιχο με εκείνον του κανόνα Δέλτα. Η διαδικασία επαναλαμβάνεται έως ότου το σφάλμα να πάρει τιμή στα όρια ανοχής που έχει θέσει ο χρήστης.

Έστω ότι έχουμε s παραδείγματα, κάθε ένα από τα οποία περιγράφεται από ένα διάνυσμα εισόδου $X_i = (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{in})$ και ένα διάνυσμα εξόδου $D_i = (d_{i1}, d_{i2}, \dots, d_{im})$, $1 \leq i \leq s$.

Ο αλγόριθμος ανάστροφης διάδοσης του σφάλματος αποτελείται από δύο φάσεις:

1. Στη φάση πρόσθιας διάδοσης (forward propagation), το X_i τροφοδοτείται στο επίπεδο εισόδου (input layer) και η έξοδος $Y_i = (y_{i1}, y_{i2}, \dots, y_{im})$ δημιουργείται μέσα στα πλαίσια του χώρου W , μέσα στον οποίο ο αλγόριθμος εκπαίδευσης θα ψάξει, προκειμένου να καθορίσει τα βάρη που αρμόζουν καλύτερα στα δεδομένα παραδείγματα. Έπειτα, υπολογίζοντας το τετραγωνικό σφάλμα $(y_{ij} - d_{ij})^2$, $1 \leq i \leq m$, για κάθε μονάδα εξόδου, η τιμή Y_i συγκρίνεται με την πραγματική (ή επιθυμητή) έξοδο D_i . Οι διαφορές που προκύπτουν αθροίζονται. Με αυτόν τον τρόπο προκύπτει η συνάρτηση σφάλματος E , που ορίζεται ως:

$$E = \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^m \frac{(y_{ij} - d_{ij})^2}{2}$$

Σκοπός είναι να ελαχιστοποιηθεί το E μεταβάλλοντας το W έτσι ώστε όλα τα διανύσματα εισόδου να αντιστοιχηθούν σωστά με τα αντίστοιχα διανύσματα εξόδου τους. Επομένως η διαδικασία μάθησης μπορεί να θεωρηθεί ως ένα πρόβλημα ελαχιστοποίησης με αντικειμενική συνάρτηση την E που ορίζεται στο διάστημα W .

2. Στη δεύτερη φάση (backward propagation) επιδιώκεται να εντοπισθεί η βέλτιστη λύση στο χώρο που ορίζονται τα βάρη, μέσω της μεθόδου φθίνουσας κλίσης (gradient descend method). Η κατεύθυνση και το μέγεθος αλλαγής Δw_{ij} του κάθε w_{ij} υπολογίζεται ως:

$$\Delta w_{ij} = - \frac{\partial E}{\partial w_{ij}} \varepsilon$$

όπου $0 < \varepsilon < 1$ είναι μια παράμετρος που ελέγχει το ρυθμό σύγκλισης του αλγορίθμου.

Το συνολικό τετραγωνικό σφάλμα που υπολογίστηκε στην πρώτη φάση «διαδίδεται» προς τα πίσω, από επίπεδο σε επίπεδο, από τις μονάδες εξόδου προς τις μονάδες εισόδου, κατά τη δεύτερη φάση. Οι προσαρμογές των βαρών προσδιορίζονται από τον τρόπο που η διάδοση (propagation) εξελίσσεται σε

κάθε επίπεδο. Αν I_i (input function), O_i (output function) και E , είναι συνεχείς και παραγωγίσιμες συναρτήσεις, τότε η τιμή της παραπάνω εξίσωσης σε κάθε επίπεδο μπορεί να υπολογιστεί με βάση τον κανόνα της αλυσίδας (chain rule):

$$\frac{\partial E}{\partial w_{ij}} = \frac{\partial E}{\partial O_i} \frac{\partial O_i}{\partial I_i} \frac{\partial I_i}{\partial w_{ij}}$$

Η όλη διαδικασία μπορεί να θεωρηθεί ως μια αναζήτηση του ολικού ελάχιστου της συνάρτησης σφάλματος, η οποία έχει ως παραμέτρους τις τιμές των βαρών. Η διόρθωση που μπορεί να γίνει κάθε φορά προσπαθεί να ελαχιστοποιήσει το σφάλμα επιλέγοντας να κάνει εκείνες τις αλλαγές που τείνουν να το μειώνουν τοπικά. Πρόκειται δηλαδή για μια αναζήτηση τύπου αναρρίχησης «λόφου». Υπάρχουν ωστόσο και περιπτώσεις, όπου ένα δίκτυο που εκπαιδεύεται με αυτόν τον τρόπο, δεν αποδίδει τα αναμενόμενα. Πρόκειται για τις περιπτώσεις κατά τις οποίες το δίκτυο πέφτει σε τοπικά ελάχιστα (local minima) και/ή παραλύει τελείως (network paralysis).

Στην πρώτη περίπτωση πρόκειται για εγγενή αδυναμία της αναζήτησης αναρρίχησης λόφου να βρει το ολικό ελάχιστο, δηλαδή το διάνυσμα των βαρών για το οποίο ελαχιστοποιείται το σφάλμα. Στη δεύτερη περίπτωση, το νευρωνικό δίκτυο πέφτει σε στάσιμη κατάσταση γιατί ένα ή περισσότερα βάρη έχουν σταθερά υψηλές απόλυτες τιμές και δεν τροποποιούνται σημαντικά σε κάθε διόρθωση. Για την αποφυγή αυτών των ανεπιθύμητων καταστάσεων έχουν προταθεί διάφορες παραλλαγές του βασικού αλγόριθμου (Dorsey et al., 1994; Craven, 1997).

3.4. Νευρωνικά Δίκτυα με Ανατροφοδότηση

Εκτός από τα δίκτυα απλής τροφοδότησης (feedforward), υπάρχουν και τα δίκτυα με ανατροφοδότηση (feedback/recurrent), τα οποία περιέχουν βρόγχους στη συνδεσμολογία των νευρώνων. Λόγω των βρόγχων, οι νευρώνες στα δίκτυα αυτά παράγουν σε κάθε κύκλο λειτουργίας αποτελέσματα που εξαρτώνται, όχι μόνο από την έξοδο των νευρώνων του προηγούμενου επιπέδου, αλλά και από την έξοδο του εαυτού τους κατά τον προηγούμενο κύκλο λειτουργίας, η οποία αποθηκεύεται προσωρινά.

Η προσθήκη βρόγχων στη συνδεσμολογία των νευρώνων αυξάνει προφανώς την πολυπλοκότητα του ΤΝΔ. Σε αντιστάθμισμα, η πληροφορία που διαθέτουν από τον προηγούμενο κύκλο λειτουργίας, επιταχύνει την εκπαίδευση του ΤΝΔ, βοηθά πολλές φορές στην αποφυγή των τοπικών ελαχίστων και επιπλέον αποτελεί ένα αρκετά περιορισμένο είδος μνήμης των προηγούμενων αποτελεσμάτων του συστήματος. Για την εκπαίδευση ΤΝΔ με ανατροφοδότηση χρησιμοποιείται συνήθως μια παραλλαγή της μεθόδου ανάστροφης διάδοσης του σφάλματος. Παρακάτω αναλύουμε δύο γνωστά δίκτυα με ανατροφοδότηση, τα δίκτυα Hopfield και τα δίκτυα Kohonen.

3.4.1. Δίκτυα Hopfield

Τα δίκτυα Hopfield είναι ίσως ο πιο γνωστός τύπος δικτύων με ανατροφοδότηση (Hopfield, 1982). Σε αυτά ο κάθε νευρώνας συνδέεται με όλους τους υπόλοιπους, ενώ οι συνδέσεις μεταξύ των νευρώνων είναι αμφίδρομες και έχουν συμμετρικά βάρη ($w_{ij}=w_{ji}$). Όλοι οι νευρώνες λειτουργούν ταυτόχρονα ως είσοδοι και έξοδοι του δικτύου. Οι νευρώνες είναι απλοί perceptrons με συνάρτηση ενεργοποίησης τη συνάρτηση προσήμου και έξοδο -1 ή 1.

Η εκπαίδευση ενός δικτύου Hopfield βασίζεται στη μεταβολή της τιμής των βαρών σύμφωνα με τη σχέση:

$$\Delta w_{ij} = (2x_i - 1)(2x_j - 1)$$

Όπου τα x_i και x_j έχουν τιμές 0 ή 1. Επιπλέον υπάρχει συμμετρία στις μεταβολές των βαρών, δηλαδή $\Delta w_{ij} = \Delta w_{ji}$.

Βάσει της σχέσης υπολογισμού της μεταβολής των βαρών και τις δυνατές τιμές των x , προκύπτει ότι, όταν η έξοδος ενός νευρώνα είναι ίδια με την είσοδο, τότε τα βάρη ενισχύονται, ενώ διαφορετικά εξασθενούν. Αυτό που τελικά «μαθαίνει» ένα δίκτυο Hopfield είναι ένα ή περισσότερα από τα διανύσματα εισόδου. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα το δίκτυο να λειτουργεί ως μνήμη συσχέτισης. Για κάθε διάνυσμα εισόδου το δίκτυο θα ισορροπήσει κατά τη λειτουργία της ανάκλησης στο «κοντινότερο» διάνυσμα από το σύνολο των διανυσμάτων με τα οποία εκπαιδεύτηκε.

Η λειτουργία ενός δικτύου Hopfield κατά τη φάση της ανάκλησης είναι η ακόλουθη:

1. Δίνεται στο δίκτυο ένα διάνυσμα εισόδου (ανάθεση τιμών -1 ή 1 σε κάθε νευρώνα του δικτύου).
2. Υπολογίζεται η έξοδος του κάθε νευρώνα με τη σχέση:

$$a_i = \sum_{j=0}^n w_{ji} a_j$$

3. Εάν το παραπάνω άθροισμα είναι θετικό, τότε η επιθυμητή τιμή εξόδου του νευρώνα είναι 1, ενώ στην αντίθετη περίπτωση -1.
4. Εάν οι επιθυμητές τιμές εξόδου είναι ίδιες με τις τιμές που αποδόθηκαν στους νευρώνες στο βήμα 1, τότε το δίκτυο είναι σε ισορροπία και οι τιμές που έχουν οι νευρώνες είναι η έξοδος (αποτέλεσμα του δικτύου).
5. Εάν το δίκτυο δεν είναι σε ισορροπία, τότε μεταβάλλονται οι τιμές που παρουσιάζουν διαφορές. Οι αλλαγές μπορούν να γίνουν είτε συγχρονισμένα, δηλαδή να αλλάξουν όλες οι τιμές των «προβληματικών» νευρώνων, είτε ασύγχρονα, δηλαδή να αλλάξει η τιμή ενός μόνο «προβληματικού» νευρώνα.
6. Η διαδικασία επαναλαμβάνεται από το βήμα 2.

Ο παραπάνω μηχανισμός ανάκλησης επιτρέπει σε ένα δίκτυο Hopfield να ανακαλεί το σωστό πρότυπο από αυτά που έχει κληθεί να αναγνωρίσει, ακόμα και όταν η είσοδος περιέχει θόρυβο ή είναι ελλιπής.

3.4.2. Δίκτυα Kohonen

Όλα τα δίκτυα που παρουσιάστηκαν μέχρι τώρα, χρησιμοποιούν για την εκπαίδευσή τους μεθόδους μάθησης υπό επίβλεψη. Το πιο χαρακτηριστικό ίσως παράδειγμα δικτύου το οποίο χρησιμοποιεί μάθηση χωρίς επίβλεψη είναι το δίκτυο Kohonen.

Ένα δίκτυο Kohonen αποτελείται από ένα πλήθος νευρώνων, οι οποίοι είναι τοποθετημένοι σε κάποια γεωμετρική τοπολογία π.χ. επίπεδο, σφαίρα, κλπ. Κάθε νευρώνας είναι συνδεδεμένος μέσω βαρών με την είσοδο που αποτελείται από M στοιχεία και λαμβάνει ένα πλήρες αντίγραφο του διανύσματος εισόδου τροποποιημένου από τα βάρη. Επιπλέον, υπάρχουν συνδέσεις μεταξύ των νευρώνων του ίδιου επιπέδου, και μάλιστα με τέτοιο τρόπο ώστε οι κοντινοί νευρώνες να επηρεάζονται θετικά, ενώ οι περισσότερο απομακρυσμένοι να επηρεάζονται ουδέτερα ή και αρνητικά. Για μια δεδομένη είσοδο, ο νευρώνας του οποίου τα συνδετικά βάρη είναι πιο «κοντά» σε αυτήν, επιλέγεται και μεταβάλλει τα βάρη του

έτσι ώστε να την πλησιάζει ακόμη περισσότερο. Επίσης, εξαιτίας της συνδεσμολογίας, μεταβάλλονται και τα βάρη στους νευρώνες που βρίσκονται στην άμεση γειτονιά του επιλεγμένου νευρώνα, έτσι ώστε και αυτών η έξοδος να πλησιάζει την είσοδο.

Μέσω αυτών των διαδικασιών ανταγωνισμού και γειτνίασης δημιουργείται ένας «χάρτης» πάνω στη γεωμετρική τοπολογία του δικτύου, ο οποίος αντικατοπτρίζει την κατηγοριοποίηση των εισόδων στο δίκτυο. Συγκεκριμένες περιοχές του χάρτη (σύνολα από νευρώνες) αντιπροσωπεύουν μια συγκεκριμένη κλάση/κατηγορία των εισόδων του δικτύου. Τόσο η μεταβολή των βαρών των νευρώνων, όσο και το μέγεθος της γειτονιάς μειώνονται με την πάροδο του χρόνου, έως ότου φτάσουν σε πολύ μικρές τιμές, οπότε το δίκτυο θεωρείται εκπαιδευμένο. Ένα εκπαιδευμένο δίκτυο Kohonen μπορεί να χρησιμοποιηθεί στην κατάταξη στοιχείων σε μια από τις κατηγορίες που ήδη έχουν σχηματιστεί.

3.5. Άλλοι τύποι ΤΝΔ

Δίκτυα adaptive resonance theory (ART):

Αναπτύχθηκαν από τους Grossberg και Carpenter (1987). Το μεγάλο πλεονέκτημά τους θεωρείται το γεγονός ότι ξεπερνούν κάποιους από τους περιορισμούς και την αστάθεια που συναντάται στη μάθηση υπό επίβλεψη. Η ART τοπολογία εφαρμόστηκε σε προβλήματα αναγνώρισης προτύπων.

Δίκτυα bidirectional associative memory (BAM):

Τα δίκτυα BAM αποτελούν ευέλικτα ΤΝΔ που αξιοποιούνται κυρίως σε μνήμες ειδικού τύπου ανάκλησης. Αν και απαιτούν μικρό χώρο αποθήκευσης, αντιμετωπίζουν πρόβλημα απεικόνισης των δεδομένων σε πρότυπα.

Δίκτυα brain state in a box (BSB):

Συσχετίζουν δεδομένα από πληθώρα εισόδων, ελαχιστοποιώντας το μέσο τετραγωνικό σφάλμα μιας διαδικασίας εκπαίδευσης. Αποδίδουν σε περιβάλλοντα βάσεων δεδομένων/γνώσεων με μεγάλο αριθμό προτύπων και σε περιπτώσεις όπου απαιτείται να προωθηθεί μόνο η μία από ένα μεγάλο αριθμό πιθανών λύσεων.

Δίκτυα adaline – madaline:

Τα δίκτυα madaline αναπτύχθηκαν από τον Widrow και τους συνεργάτες του (1960, 1962). Τα δίκτυα αυτής της μορφής αποτελούν ένα σύνολο από δίκτυα adaline, τα οποία είναι παράλληλα συνδεδεμένα και τα οποία δίνουν μία μόνο έξοδο. Τόσο τα δίκτυα adaline, όσο και τα perceptrons μπορούν να επιλύσουν μόνο γραμμικά προβλήματα. Η διαφορά τους έγκειται στο ότι η έξοδος των δικτύων adaline δεν περιορίζεται στις τιμές 0 και 1, λόγω της γραμμικής συνάρτησης ενεργοποίησης που εφαρμόζουν. Η απλότητα και η συνδυαστική ικανότητα των δικτύων madaline, τα καθιστούν ικανά στην επίλυση προβλημάτων ελέγχου. Η προσαρμοζόμενη δομή τους και ο αλγόριθμος εκπαίδευσης, ο οποίος τα συνοδεύει, τα υποστηρίζουν σε εμπορικές εφαρμογές, για τις οποίες προτιμώνται τα τελευταία είκοσι χρόνια (ADALINE = Adaptive Linear Neuron, MADALINE = Many Adaline Model).

3.6. Στάδια Διαδικασίας Ανάπτυξης ενός ΤΝΔ

Η διαδικασία ανάπτυξης σχηματισμού ενός ΤΝΔ αποτελείται από 9 στάδια (βλέπε σχήμα 31). Στο πρώτο στάδιο συλλέγονται τα δεδομένα που θα χρησιμοποιηθούν για την εκπαίδευση και τον έλεγχο του δικτύου. Στο δεύτερο στάδιο το δείγμα εκμάθησης πρέπει να αναγνωριστεί και ένα πλάνο πρέπει να δημιουργηθεί αναφορικά με τον έλεγχο της αποτελεσματικότητας του δικτύου. Επομένως κατά τα δύο πρώτα στάδια τα δεδομένα χωρίζονται σε δείγματα εκμάθησης (training test), που σκοπό έχουν την προσαρμογή των βαρών των συνδέσεων του ΤΝΔ, και σε δείγματα ελέγχου (testing set), που σκοπό έχουν την εξακρίβωση της εγκυρότητας του δικτύου. Γενικά όσο περισσότερα είναι τα δεδομένα, τόσο το καλύτερο, καθώς τα μεγάλα σύνολα δεδομένων, μπορεί από τη μια πλευρά να αυξάνουν τον χρόνο επεξεργασίας του δικτύου, αλλά από την άλλη βελτιώνουν την ακρίβεια της εκμάθησης και συχνά οδηγούν σε ταχύτερη σύγκλιση σε ένα καλό σύνολο σταθμίσεων των βαρών.

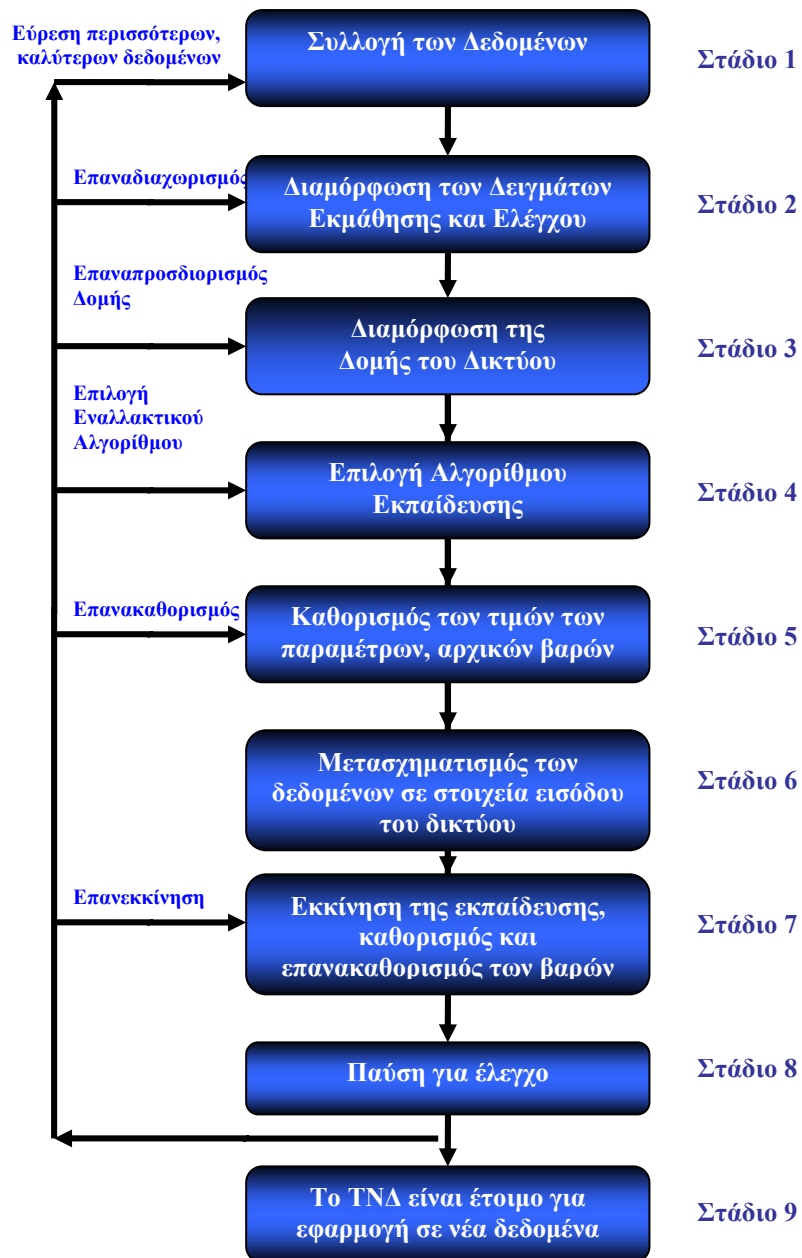
Στα στάδια 3 και 4, επιλέγεται η αρχιτεκτονική του δικτύου και ο αλγόριθμος εκπαίδευσης του δικτύου. Ο ακριβής αριθμός νευρώνων και επιπέδων (layers) θεωρείται σημαντική παράμετρος αυτών των σταδίων.

Μέρος της διαδικασίας του πέμπτου σταδίου αποτελεί να τεθούν τα αρχικά βάρη συνδέσεων των νευρώνων του δικτύου και να καθοριστούν οι παράμετροι για το επιθυμητό επίπεδο αποτελεσματικότητας της διαδικασίας μάθησης.

Το έκτο στάδιο μετατρέπει τα δεδομένα της εφαρμογής στην απαιτούμενη από το νευρωνικό δίκτυο κατάλληλη μορφή. Αυτό μπορεί να σημαίνει ότι απαιτείται λογισμικό για την προεπεξεργασία των δεδομένων. Σε αυτό το στάδιο σχεδιάζονται τεχνικές και διαδικασίες αποθήκευσης και χειρισμού δεδομένων για την αποτελεσματική και ευχερή επανεκπαίδευση του δικτύου, εφόσον βέβαια αυτή απαιτείται.

Στα στάδια 7 και 8 διεξάγονται διαδοχικά η εκπαίδευση και ο έλεγχος του δικτύου με την εισαγωγή των δεδομένων εισόδου και των επιθυμητών ή γνωστών δεδομένων εξόδου σε αυτό. Το δίκτυο υπολογίζει τα αποτελέσματα και προσαρμόζει τα βάρη μέχρι το σφάλμα απόκλισης των αποτελεσμάτων, που προκύπτει ως προς τα δεδομένα εξόδου των δεδομένων περιπτώσεων που χρησιμοποιήθηκαν, να πάρει τιμή στα όρια ανοχής που έχει θέσει ο χρήστης. Οι επιθυμητές εξόδους του ΤΝΔ και οι σχέσεις τους ως προς τις εισόδους του εξάγονται από ιστορικά στοιχεία (που αποτελούν μέρος των δεδομένων που συλλέξαμε στο πρώτο στάδιο).

Το δίκτυο είναι πλέον σε θέση να αναπαράγει τις επιθυμητές εξόδους με βάση εισόδους παρόμοιες με εκείνες του δείγματος εκμάθησης. Το δίκτυο τότε θεωρείται έτοιμο για χρήση.



Σχήμα 31: Διάγραμμα ροής της διαδικασίας διαμόρφωσης ενός TNA

3.7. Μάθηση και Ανάκληση

Τα TNA χρησιμοποιούν δύο βασικές λειτουργίες: τη μάθηση και την ανάκληση.

Ως μάθηση (learning) αποκαλείται η διαδικασία της τροποποίησης της τιμής των βαρών του δικτύου, ώστε, δοθέντος ενός συγκεκριμένου διάνυσματος εισόδου, να παραχθεί συγκεκριμένο διάνυσμα εξόδου. Η διαδικασία αυτή ονομάζεται επίσης και εκπαίδευση (training) του TNA. Ως ανάκληση (recall) αποκαλείται η διαδικασία του υπολογισμού ενός διάνυσματος εξόδου για συγκεκριμένο διάνυσμα εισόδου και τιμές βαρών. Ο γενικός τρόπος με τον οποίο γίνεται η τροποποίηση των βαρών ενός

TNΔ κατά την εκπαίδευσή του, επιτρέπει τη διάκριση διαφορετικών ειδών μάθησης στα TNΔ, που είναι τα εξής:

3.7.1. Μάθηση Υπό Επίβλεψη (supervised learning)

Στη μάθηση υπό επίβλεψη (supervised learning) το δίκτυο τροφοδοτείται με ζεύγη διανυσμάτων εισόδου – επιθυμητής εξόδου. Το TNΔ, παράγει μία έξοδο με βάση την τρέχουσα κατάσταση βαρών, η οποία αρχικά διαφέρει από την επιθυμητή έξοδο. Αυτή η διαφορά ονομάζεται σφάλμα (error) και βάσει αυτής, καθώς και ενός αλγορίθμου εκπαίδευσης, γίνεται συνήθως η αναπροσαρμογή των βαρών.

Στην πράξη στις περισσότερες εφαρμογές TNΔ χρησιμοποιείται μάθηση υπό επίβλεψη, για την οποία υπάρχουν αρκετοί αλγόριθμοι. Στον αλγόριθμο που βασίζεται στον κανόνα Δέλτα (Delta rule learning), η διαφορά μεταξύ πραγματικής και επιθυμητής εξόδου ελαχιστοποιείται μέσω μιας διαδικασίας ελαχίστων τετραγώνων. Στον αλγόριθμο ανάστροφης διάδοσης του σφάλματος (back propagation) η μεταβολή των βαρών βασίζεται στον υπολογισμό της συνεισφοράς του κάθε βάρους στο συνολικό σφάλμα. Σε αυτήν την περίπτωση το σφάλμα μεταξύ επιθυμητής και πραγματικής εξόδου ανατροφοδοτείται στα βάρη των προηγούμενων επιπέδων του TNΔ, χρησιμοποιώντας τη διαφορική της τιμή ή τις προσεγγίσεις αυτής.

3.7.2. Μάθηση χωρίς επίβλεψη (unsupervised learning)

Στη μάθηση χωρίς επίβλεψη, (unsupervised learning) η απόκριση του δικτύου βασίζεται στην ικανότητά του να αυτό-οργανώνεται με βάση τα διανύσματα εισόδου (π.χ. δίκτυα με βάση τον κανόνα του Kohonen, υπό τον οποίο αναπτύσσονται διανύσματα εξόδου με βάση εκείνα της εισόδου, χωρίς να απαιτείται η ύπαρξη προτύπων εξόδου). Αυτή η εσωτερική οργάνωση γίνεται έτσι ώστε σε συγκεκριμένο σύνολο εισόδων να αντιδρά ισχυρά ένας συγκεκριμένος νευρώνας. Τέτοια σύνολα εισόδων αντιστοιχούν σε έννοιες και χαρακτηριστικά του πραγματικού κόσμου, τα οποία το TNΔ καλείται να μάθει. Καθώς το δίκτυο δεν γνωρίζει τις πραγματικές τιμές εξόδου, εξετάζει τα πρότυπα εισόδου με βάση μετρούμενες ποσότητες ομοιότητας ή βαθμούς ποιότητας των δεδομένων εισόδου. Με αυτόν τον τρόπο διαμερίζεται το σύνολο εισόδων σε έναν αριθμό από ομάδες οι οποίες αυτό-προσαρμόζονται. Η συνάρτηση σφάλματος των νευρωνικών δικτύων που εκπαιδεύονται με μάθηση χωρίς επίβλεψη βασίζεται στις μετρήσεις ομοιότητας ή ποιότητας (για παράδειγμα αποστάσεις) για όλες τις εισόδους. Το αντικείμενο της εκπαίδευσης είναι η ελαχιστοποίηση της συνάρτησης αυτής, ώστε να δημιουργηθούν ομάδες προτύπων με παρόμοιες ιδιότητες. Οι ομάδες αυτές μπορούν να θεωρηθούν ως κατηγορίες εξόδων προερχόμενες από μια ταξινόμηση προτύπων. Για το σχηματισμό των ομάδων, πάντως, απαιτούνται ορισμένες κατευθυντήριες οδηγίες σχετικά με το ποια χαρακτηριστικά (σχήμα, χρώμα, σύσταση του υλικού ή κάποιο άλλο χαρακτηριστικό του) θα χρησιμοποιηθούν στην ομαδοποίηση αυτή, διαφορετικά η ομαδοποίηση μπορεί να μην είναι επιτυχής.

3.7.3. Ανταγωνιστική μάθηση (competitive learning)

Στην ανταγωνιστική μάθηση (competitive learning), που αποτελεί ιδιαίτερη μορφή μάθησης υπό επίβλεψη, οι τεχνητοί νευρώνες συναγωνίζονται, κατά κάποιο τρόπο, μεταξύ τους και μόνο αυτός με τη μεγαλύτερη απόκριση σε δοθείσα είσοδο τροποποιεί τα βάρη του. Με αυτόν τον τρόπο επιτελείται ένα είδος ανταγωνισμού στους νευρώνες εξόδου ενός δικτύου, που έχει ως αποτέλεσμα σε κάθε χρονική στιγμή να είναι ενεργός μόνο ένας νευρώνας. Ένας τέτοιος νευρώνας εξόδου που

κερδίζει τον ανταγωνισμό ονομάζεται «ο νικητής τα παίρνει όλα» (winner-takes-all). Μια ειδικής μορφής κατηγορία νευρωνικών δικτύων προβολής δεδομένων, που βασίζεται στην ανταγωνιστική μάθηση, είναι οι αυτό-οργανωμένοι χάρτες χαρακτηριστικών (self-organizing feature maps). Η κύρια εργασία των δικτύων αυτών είναι η μεταφορά των προτύπων από τη διάσταση που ορίζουν τα χαρακτηριστικά τους σε μια χαμηλότερη διάσταση (συνήθως επίπεδο) μέσω μίας τοπολογικής μορφής απεικόνισης. Για αυτόν το σκοπό χρησιμοποιείται ένας τοπογραφικός χάρτης των προτύπων εισόδου, στον οποίο οι συντεταγμένες των νευρώνων πάνω στο πλέγμα που σχηματίζεται αντιστοιχούν σε χαρακτηριστικά των προτύπων.

Στην γενική του μορφή, ο αλγόριθμος μάθησης που χρησιμοποιούν οι αυτό-οργανωμένοι χάρτες χαρακτηριστικών βασίζεται στους αλγόριθμους εκπαίδευσης του πλησιέστερου γείτονα (k-nearest neighbor) και στη γειτνίαση των κόμβων του πλέγματος που ορίζει ο χάρτης. Έτσι κατά την τροφοδότηση ενός προτύπου x στο δίκτυο, υπολογίζεται ο κοντινότερός του κόμβος j . Θεωρώντας ότι κάθε κόμβος j στο πλέγμα χαρακτηρίζεται από ένα διάνυσμα βάρους w_j , η παρακάτω ενημέρωση του δικτύου λαμβάνει χώρα.

$$w_i \leftarrow w_i + h_{ij}(t)[x - w_i]$$

για όλους τους γείτονες i του κόμβου j . Η συνάρτηση h_{ij} μπορεί είτε να είναι σταθερή (ρυθμός μάθησης) ή να εξαρτάται από τον βαθμό γειτνίασης του κόμβου i ως προς το j .

3.7.4. Ενισχυτική μάθηση (reinforced learning)

Η ενισχυτική μάθηση (reinforced learning) αποτελεί μια διαφορετική προσέγγιση στη διεργασία μάθησης σε σχέση με τη μάθηση υπό επίβλεψη και τη μάθηση χωρίς επίβλεψη. Το κυριότερο χαρακτηριστικό της ενισχυτικής μάθησης βρίσκεται στην ύπαρξη ενός ενισχυτικού σήματος (reinforcement signal) με βάση το οποίο αποτιμάται η αποτελεσματικότητα ενός συστήματος. Το ενισχυτικό σήμα μπορεί να είναι συνεχές ή διακριτό στην περιοχή τιμών $[0,1]$ και απεικονίζει την απόκριση του περιβάλλοντος στην εκτέλεση μιας ενέργειας, με την μορφή ενός βαθμού επιτυχίας (reward) ή αποτυχίας (penalty). Κατά τη διάρκεια της ενισχυτικής μάθησης σε ένα νευρωνικό δίκτυο, οι παράμετροι του δικτύου (βάρη συνάψεων) προσαρμόζονται με τέτοιο τρόπο, ώστε να επιτρέπουν την κατάλληλη επιλογή ενέργειας για κάθε σήμα εισόδου, όπως εκτιμάται από το ενισχυτικό σήμα. Ένα σήμα επιτυχίας έχει με αυτόν τον τρόπο ως αποτέλεσμα την ακόμα μεγαλύτερη ενίσχυση της ενέργειας που επιλέχτηκε, ενώ ένα σήμα αποτυχίας θα αποτρέψει την επανάληψη της ίδιας επιλογής ενέργειας κατά την επόμενη εμφάνιση του αντίστοιχου σήματος εισόδου.

3.7.5. Βαθμολογημένη μάθηση (graded learning)

Στη βαθμολογημένη μάθηση (graded learning) η έξοδος χαρακτηρίζεται ως «καλή» ή «κακή» με βάση μια αριθμητική κλίμακα και τα βάρη αναπροσαρμόζονται με βάση αυτόν τον χαρακτηρισμό.

3.7.6. Τυχαία Μάθηση (random learning)

Στην τυχαία μάθηση (random learning), οι μεταβολές στα βάρη εισάγονται τυχαία και ανάλογα με το αν η έξοδος βελτιώνεται ή όχι με βάση κάποια προκαθορισμένα από το χρήστη κριτήρια, οι μεταβολές αυτές υιοθετούνται ή απορρίπτονται.

3.8. Βασικά Χαρακτηριστικά Τεχνητών Νευρωνικών Δικτύων

Υπάρχουν τέσσερα χαρακτηριστικά που είναι άρρηκτα συνδεδεμένα με τα ΤΝΔ. Αυτά είναι:

- Η ικανότητά τους να μαθαίνουν μέσω παραδειγμάτων (learn by example)
- Η δυνατότητα θεώρησής τους ως κατανεμημένη μνήμη (distributed memory) και ως μνήμη συσχέτισης (associative memory)
- Η μεγάλη τους ανοχή σε σφάλματα (fault tolerant)
- Η ικανότητά τους για αναγνώριση προτύπων (pattern recognition)

Αν και τα ΤΝΔ δεν είναι τα μόνα συστήματα με ικανότητα μάθησης μέσω παραδειγμάτων, εν τούτοις διακρίνονται για την ικανότητά τους να οργανώνουν την πληροφορία των δεδομένων εισόδου σε χρήσιμες μορφές. Αυτές οι μορφές αποτελούν στην ουσία ένα μοντέλο που αναπαριστά τη σχέση που ισχύει μεταξύ των δεδομένων εισόδου και εξόδου. Το γεγονός αυτό τα κατέστησε χρήσιμα στην εξόρυξη σε δεδομένα (data mining) μέσα στα πλαίσια εύρεσης γνώσης σε βάσεις δεδομένων (knowledge discovery in databases).

Ο χαρακτηρισμός των ΤΝΔ ως κατανεμημένες μνήμες, πηγάζει από το ότι η πληροφορία που κωδικοποιούν είναι κατανεμημένη σε όλα τα βάρη της συνδεσμολογίας τους. Για τον ίδιο λόγο τα ΤΝΔ χαρακτηρίζονται και ως μνήμες συσχέτισης. Μια μνήμη συσχέτισης αποθηκεύει πληροφορία συσχετίζοντας αποθηκευμένα δεδομένα μεταξύ τους. Η ανάκληση της πληροφορίας γίνεται με βάση το περιεχόμενο και όχι τη διεύθυνση, όπως δηλαδή συμβαίνει με τον ανθρώπινο εγκέφαλο. Στην κατανεμημένη αναπαράσταση της γνώσης ανάμεσα στους συνδέσμους οφείλεται η ικανότητα αναγνώρισης προτύπων των ΤΝΔ.

Τα ΤΝΔ έχουν μεγάλη ανοχή σε δομικά σφάλματα. Αυτό σημαίνει ότι η κακή λειτουργία ή καταστροφή ενός νευρώνα ή κάποιων συνδέσεων δεν είναι ικανή να διαταράξει σημαντικά τη λειτουργία τους καθώς, όπως αναφέρθηκε, η πληροφορία που εσωκλείουν δεν είναι εντοπισμένη σε συγκεκριμένο σημείο, αλλά διάχυτη σε όλο το δίκτυο. Γενικά το μέγεθος του σφάλματος λόγω «δομικών αστοχιών» είναι ανάλογο του ποσοστού των κατεστραμμένων συνδέσεων. Το χαρακτηριστικό αυτό καθιστά τα ΤΝΔ ιδανικά για χρήση σε αυτοματισμούς που θα λειτουργήσουν σε αντίξοες συνθήκες (π.χ. διάστημα, χώρους με ραδιενέργεια κλπ).

Τα ΤΝΔ διακρίνονται κυρίως για τη δυνατότητα παράλληλης επεξεργασίας και για την ικανότητά τους να αναπαριστούν μη γραμμικές συμπεριφορές. Από την άλλη πλευρά όμως, τα αποτελέσματα που προκύπτουν δεν αιτιολογούνται, με αποτέλεσμα η διαδικασία που ακολουθούν να έχει χαρακτηριστεί ως ένα «μαύρο κουτί» (black box), όπου το εξαγόμενο αποτέλεσμα δεν γίνεται γνωστό πώς προέκυψε. Ένα άλλο μειονέκτημα των ΤΝΔ είναι ότι κατά τη φάση της εκμάθησης τους παρατηρείται αυξημένος υπολογιστικός φόρτος.

4. Υβριδικά Συστήματα Υπολογιστικής Νοημοσύνης

4.1. Εισαγωγή

Στις προηγούμενες ενότητες αναφερθήκαμε σε δύο σημαντικά πεδία της υπολογιστικής νοημοσύνης. Κάθε ένα από αυτά παρουσιάζει συγκεκριμένες υπολογιστικές ιδιότητες, οι οποίες καθιστούν δυνατή την ευρεία διάδοσή τους σε μια μεγάλη ποικιλία προβλημάτων. Παρόλα αυτά, εμπεριέχουν μειονεκτήματα και περιορισμούς, τα οποία δεν επιτρέπουν την εφαρμογή τους σε ορισμένες περιπτώσεις. Τα νευρωνικά δίκτυα αποτελούν μια πολύ ελκυστική μέθοδο αναγνώρισης προτύπων, αλλά δεν προσφέρονται για την εξήγηση της διαδικασίας της λήψης της απόφασης. Μπορούν να θεωρηθούν ως μαύρο κουτί (black box), όπου η εξαγωγή γνώσης από το εκπαιδευμένο δίκτυο είναι αρκετά δυσχερής. Όπως είναι φυσικό, θα θέλαμε να έχουμε πρόσβαση στο συλλογιστικό μηχανισμό των νευρωνικών δικτύων, ώστε να υπάρχει η δυνατότητα ευκολότερης διαχείρισης και κατασκευής τους.

Από την άλλη πλευρά η επιβολή εξωτερικής γνώσης στη δομή ενός νευρωνικού δικτύου αναφορικά με ένα συγκεκριμένο πρόβλημα είναι αρκετά δύσκολη. Ένα ακόμα μειονέκτημα που εμφανίζουν τα νευρωνικά δίκτυα είναι ότι γενικά δεν είμαστε σε θέση να γνωρίζουμε την ακριβή μορφή της αρχιτεκτονικής του δικτύου, και συνεπώς η δομή του καθορίζεται μόνο μέσα από πειραματικές διαδικασίες.

Η ασαφής λογική μπορεί να εξηγήσει τη συμπεριφορά της λειτουργίας ενός συστήματος χρησιμοποιώντας κανόνες, και έχει το μεγάλο πλεονέκτημα ότι δεν απαιτεί την ακρίβεια της πληροφορίας. Στις περιπτώσεις όμως που δεν υπάρχει διαθέσιμη εξωτερική γνώση, η δυνατότητα εφαρμογής των ασαφών συστημάτων περιορίζεται. Επίσης, διάφορα ζητήματα που εμφανίζουν δυσκολίες, είναι ο ακριβής διαμερισμός του χώρου εισόδων και εξόδων ενός προβλήματος σε ασαφή σύνολα, οι τιμές των παραμέτρων των συναρτήσεων συμμετοχής και ο ακριβής αριθμός των ασαφών κανόνων, με αποτέλεσμα τον περιορισμό των δυνατοτήτων εφαρμογής των ασαφών συστημάτων.

Τα νευρωνικά δίκτυα και τα ασαφή συστήματα μπορούν να θεωρηθούν ως ισοδύναμες μέθοδοι, όσον αφορά τη δυνατότητα εφαρμογής τους σε ένα ευρύ φάσμα προβλημάτων. Όλοι οι παραπάνω λόγοι οδήγησαν στην ανάπτυξη συνδυασμών μεθόδων των δύο ερευνητικών πεδίων με κύριο στόχο τον περιορισμό των παραπάνω μειονεκτημάτων. Τα υβριδικά συστήματα υπολογιστικής νοημοσύνης (hybrid computational intelligent systems) περιλαμβάνουν συνθέσεις των δύο παραπάνω μεθόδων.

Τα πλεονεκτήματα που παρουσιάζουν οι υβριδικές τεχνικές μπορούν να συνοψιστούν στα παρακάτω σημεία:

- . Η δημιουργία καινούριων υπολογιστικών μοντέλων προσφέρει νέες δυνατότητες θεωρητικής εμβάθυνσης.
- . Ανοίγονται καινούριοι ορίζοντες και διαστάσεις στον τομέα των εφαρμογών με τη δυνατότητα χρησιμοποίησης κάθε μεθόδου για την επίλυση διάφορων μορφών προβλημάτων της άλλης.
- . Αυξάνονται οι δυνατότητες ως προς την ελευθερία σχεδιασμού και ανάπτυξη ευφυών τεχνικών, και παρέχονται εναλλακτικές λύσεις συμβάλλοντας στην πληρέστερη εξέταση των προβλημάτων.

- ∴ Παρέχεται δυνατότητα επίλυσης πολύπλοκων προβλημάτων, που με άλλες μεθόδους θα φαίνονταν ανεπίλυτα.
- ∴ Διευκολύνεται η χρήση και ενσωμάτωση μεθόδων από άλλες γνωστικές περιοχές.

Συνδυάζοντας τα νευρωνικά δίκτυα και τα ασαφή συστήματα δημιουργείται μια νέα οικογένεια υβριδικών τεχνικών, που είναι τα ασαφή νευρωνικά δίκτυα (neural-fuzzy networks), τα οποία μπορούν να εφαρμοστούν στην επίλυση προβλημάτων ασαφών συστημάτων.

4.2. Ασαφή Νευρωνικά Δίκτυα

Οι υπάρχουσες τεχνικές ασαφούς συμπερασμού παρουσιάζουν τις παρακάτω δυσκολίες:

- ➔ Την έλλειψη μιας ακριβούς μεθόδου καθορισμού των συναρτήσεων συμμετοχής.
- ➔ Την έλλειψη δυνατότητας μάθησης ή προσαρμοστικότητας στις ασαφείς διαδικασίες.

Τα νευρωνικά δίκτυα χρησιμοποιούνται στην προσαρμογή των συναρτήσεων συμμετοχής ασαφών συστημάτων που χρησιμοποιούνται σε προβλήματα ελέγχου. Μολονότι η ασαφής λογική χαρακτηρίζεται από την ικανότητα εφαρμογής έμπειρης γνώσης μέσω ασαφών κανόνων, ο χρόνος σχεδιασμού και προσαρμογής των λεκτικών τιμών (ασαφών συνόλων) σε ένα πρόβλημα είναι τις περισσότερες φορές απαγορευτικός, ιδιαίτερα όσον αφορά σε διαδικασίες δοκιμής και σφάλματος (trial and error). Επιπλέον, ο συντονισμός των συναρτήσεων συμμετοχής καθίσταται μια περίπλοκη διαδικασία, καθώς υποθέτει τον έμπειρο καθορισμό ενός μεγάλου αριθμού παραμέτρων. Οι τεχνικές νευρωνικών δικτύων μέσα από τις διαδικασίες μάθησης επιτρέπουν την αυτοματοποίηση του σχεδιασμού ασαφών συστημάτων, βελτιώνοντας την αποτελεσματικότητά τους και μειώνοντας σημαντικά τον υπολογιστικό χρόνο.

Η βασική δομή των ασαφών νευρωνικών δικτύων αποτελεί μια άμεση απεικόνιση ενός ασαφούς συστήματος πάνω στη δομή ενός νευρωνικού δικτύου (συνήθως δικτύου πρόσθιας τροφοδότησης), με κατάλληλες συνδέσεις μεταξύ των νευρώνων των επιπέδων, που ακολουθούν τη μορφή των ασαφών κανόνων if-then. Στη συνέχεια το παραγόμενο νευρωνικό δίκτυο εκπαιδεύεται ως προς τις παραμέτρους του ασαφούς συστήματος με βάση ένα σύνολο αριθμητικών δεδομένων, χρησιμοποιώντας είτε μάθηση υπό επίβλεψη, είτε ενισχυτική μάθηση. Έτσι κατασκευάζονται προσαρμοστικοί ασαφείς ελεγκτές κατάλληλοι για ένα δεδομένο πρόβλημα.

Η εμπειρία του ειδικού ενσωματώνεται στο ασαφές νευρωνικό δίκτυο μέσω της ασαφούς λογικής με σκοπό να μειωθούν οι μεγάλες απαιτήσεις σε σύνολα δεδομένων εκμάθησης που θα απαιτούσε από μόνο του το ΤΝΔ. Τα ΤΝΔ κάνουν σημείο-προς-σημείο αντιστοίχιση των σημείων του χώρου των δεδομένων εισόδου με τα σημεία του χώρου δεδομένων εξόδου. Τα σημεία των δεδομένων ελέγχου θα πρέπει να είναι κατάλληλα κατανομημένα και αρκετά περιεκτικά σε πληροφορίες στην περίπτωση προσδιορισμού μιας συνεχούς πολυμεταβλητής συνάρτησης που θα χρησιμοποιηθεί από το δίκτυο. Από την άλλη πλευρά τα ασαφή δίκτυα δεν κάνουν αντιστοίχιση σημείο-προς-σημείο (point-to-point mapping), αλλά σύνολο-προς-σύνολο (set-to-set mapping). Αυτό επιτυγχάνεται με την προσθήκη σημείου-προς-σύνολο (point-to-set) (ασαφοποίηση) και συνόλου-προς-σημείο (set-to-point)

(αποασαφοποίηση) μετατροπής των εισόδων και εξόδων αντίστοιχα. Η πρώτη μετατροπή αποτελεί ουσιαστικά την ασαφοποίηση των δεδομένων εισόδου και έπειτα η δεύτερη μετατροπή συμβάλλει στην αποασαφοποίηση τους κατά την έξοδο². Ο αριθμός των κανόνων αντιστοίχισης μειώνεται σημαντικά με αυτόν τον τρόπο, με αποτέλεσμα να μειώνεται και η απαιτούμενη πληροφορία για την εκκίνηση του συστήματος. Όπως έχουμε σημειώσει και σε άλλα κομμάτια της εργασίας, η θεωρία των ασαφών συνόλων ομοιάζει με τον ανθρώπινο τρόπο σκέψης και οργάνωσης της γνώσης και για αυτόν το λόγο τα ασαφή νευρωνικά δίκτυα παρέχουν έναν κατάλληλο μηχανισμό απόκτησης γνώσης και ένα φιλικό για τον άνθρωπο (αλλά και για τους υπολογιστές) τρόπο χειρισμού τους.

Τα ασαφή νευρωνικά δίκτυα τελικά διεξάγουν μια σημείο-προς-σημείο αντιστοίχιση, αλλά με διαφορετικό τρόπο από τα νευρωνικά δίκτυα. Αποτελείται από τρία κύρια στάδια. Πρώτα μετατρέπουν τα δεδομένα εισόδου σε μια συνάρτηση συμμετοχής ασαφούς συνόλου. Στο επόμενο στάδιο διεξάγεται η διαδικασία της ασαφούς συλλογιστικής, ή με άλλα λόγια χρησιμοποιείται η ασαφής μνήμη συσχέτισης (fuzzy associative memory) για το συσχετισμό των ασαφών συνόλων της εισόδου με τα κατάλληλα ασαφή σύνολα της εξόδου. Στο τελευταίο στάδιο οι συναρτήσεις συμμετοχής των ασαφών εξόδων μετατρέπονται σε αριθμητικές εξόδους μέσα από τη διαδικασία της αποασαφοποίησης. Η λειτουργία των ασαφών νευρωνικών δικτύων είναι τέτοια που επιτρέπει την απόκτηση, αναπαράσταση και χρησιμοποίηση της γνώσης του ειδικού σε ένα αντικείμενο και αυτό είναι ιδιαίτερα σημαντικό σε εφαρμογές, όπως των προσαρμοστικών συστημάτων ελέγχου, όπου δεν μπορούν να προσδιοριστούν οι ακριβείς συναρτήσεις ενεργοποίησης του συστήματος και όπου τα σύνολα δεδομένων εκμάθησης δεν είναι αρκετά.

Εκτός από τα προβλήματα ελέγχου, τα ασαφή νευρωνικά δίκτυα μπορούν να εφαρμοστούν και σε προβλήματα αναγνώρισης προτύπων. Η παραδοσιακή θεωρία συνόλων περιγράφει γεγονότα με απότομα όρια, τα οποία μπορούν να συμβούν ή να μη συμβούν. Τα παραδοσιακά-κλασικά σύνολα χρησιμοποιούν τη θεωρία πιθανοτήτων για να χαρακτηρίσουν την εμφάνιση ενός γεγονότος, υπολογίζοντας την πιθανότητα με την οποία ένα δοθέν γεγονός αναμένεται να συμβεί. Αντίθετα η θεωρία των ασαφών συνόλων επιτρέπει τον υπολογισμό ενός βαθμού μέτρησης της εμφάνισης ενός γεγονότος, ο οποίος αποδεικνύεται περισσότερο πληροφοριακός.

Η αναγνώριση προτύπων διαμερίζει ένα χώρο επιρροής σε διάφορες κατηγορίες (σύνολα) και στη συνέχεια απεικονίζει κάθε πρότυπο σε μια από τις κατηγορίες. Αντιστοιχίζοντας κάθε κατηγορία με τη μορφή ενός ασαφούς συνόλου και προσδιορίζοντας τη λειτουργία απεικόνισης υπό το πρίσμα μιας συνάρτησης συμμετοχής, δημιουργείται μια άμεση σχέση μεταξύ των ασαφών συνόλων και της αναγνώρισης προτύπων. Έτσι οι κατηγορίες των προτύπων θεωρούνται ως ασαφή σύνολα, όπου ένα πρότυπο ανήκει σε κάθε μία από τις κατηγορίες με έναν κατάλληλο βαθμό συμμετοχής.

Η σχέση μεταξύ κατηγοριών προτύπων και ασαφών συνόλων παρουσιάστηκε από τους Bellman et al. (1966), οι οποίοι όρισαν την ασαφή ταξινόμηση προτύπων. Αργότερα παρουσιάστηκε η ιδέα αντικατάστασης των απότομων ορίων απόφασης του νευρωνικού δικτύου perceptron με όρια απόφασης ασαφών υπερεπιπέδων. Στην βιβλιογραφία καταγράφονται διάφοροι τύποι συνδυασμών ασαφών συστημάτων και νευρωνικών δικτύων, οι οποίοι κατασκευάζουν αποτελεσματικούς ταξινομητές προτύπων, εκμεταλλευόμενοι τα συγκεκριμένα πλεονεκτήματα που προσφέρει η συνεργεία των δύο τεχνικών. Τα ασαφή νευρωνικά δίκτυα ταξινόμησης προσπαθούν

² Το σύνολο στις παραπάνω προτάσεις αποτελεί υποσύνολο του χώρου του προβλήματος.

να διαμορφώσουν κατάλληλα τα όρια των κατηγοριών προτύπων με μάθηση των παραμέτρων των συναρτήσεων συμμετοχής.

Τα συστήματα που βασίζονται στην ασαφή λογική και αυτά που βασίζονται στα ΤΝΔ έχουν αντιθετικές απαιτήσεις κατά την εφαρμογή τους. Για παράδειγμα τα ασαφή συστήματα είναι κατάλληλα όταν υπάρχει αρκετή γνώση ειδικού για την εξεταζόμενη διαδικασία, ενώ τα συστήματα ΤΝΔ είναι χρήσιμα σε περιπτώσεις όπου υπάρχουν αρκετά ή μετρήσιμα δεδομένα για την εξεταζόμενη διαδικασία. Και οι δύο προσεγγίσεις κατασκευάζουν μη-γραμμικά συστήματα βασισμένα πάνω σε φραγμένες συνεχείς μεταβλητές, με τη διαφορά ότι η μεταχείριση των νευρωνικών συστημάτων γίνεται με τρόπο αριθμητικό-ποσοτικό, ενώ η μεταχείριση των ασαφών συστημάτων γίνεται με τρόπο συμβολικό-ποιοτικό. Τα ασαφή συστήματα όμως παρουσιάζουν τόσο συμβολικά, όσο και αριθμητικά, χαρακτηριστικά, καθώς οι συναρτήσεις συμμετοχής επιτρέπουν την αριθμητική επεξεργασία των λεκτικών μεταβλητών που μεταχειρίζονται.

Κατά συνέπεια, η σύνθεση νευρωνικών και ασαφών συστημάτων οδηγεί σε μια νέα κατάσταση, όπου το ασαφές σύστημα παρέχει ένα ισχυρό υπόβαθρο για την αναπαράσταση της γνώσης των ειδικών, ενώ τα ΤΝΔ παρέχουν ικανότητες μάθησης και είναι εξαιρετικά κατάλληλα για υπολογιστικά αποτελεσματικές εφαρμογές μέσω H/Y. Η σημασία της σύνθεσης αυτής εξάγεται και από τις διαφορές των ξεχωριστών αυτών συστημάτων, καθώς τα ΤΝΔ δεν παρέχουν ένα ισχυρό πλαίσιο για αναπαράσταση γνώσης, ενώ οι ελεγκτές ασαφούς λογικής δεν διακρίνονται για την ικανότητα αυτόματης μάθησης.

Τα υβριδικά νευροασαφή συστήματα μπορούν να δημιουργηθούν με δύο τρόπους: Παρέχοντας σε ένα νευρωνικό δίκτυο την ικανότητα χειρισμού ασαφούς πληροφορίας (fuzzy-neural network FNN) και ενισχύοντας ένα ασαφές σύστημα με νευρωνικά δίκτυα, προκειμένου να βελτιωθούν ορισμένα χαρακτηριστικά, όπως είναι η ευελιξία, η ταχύτητα και η προσαρμοστικότητα (neural-fuzzy systems NFS).

Σε ένα FNN οι είσοδοι και/ή τα βάρη των συνδέσεων και/ή οι έξοδοι του δικτύου αποτελούν ασαφή υποσύνολα ή ένα σύνολο από τιμές συμμετοχής σε ασαφή σύνολα. Για τη μοντελοποίηση αυτών των δικτύων χρησιμοποιούνται λεκτικές τιμές όπως «μικρό, μεσαίο, μεγάλο», ή ασαφείς αριθμοί. Νευρωνικά δίκτυα που χρησιμοποιούν ασαφείς νευρώνες χαρακτηρίζονται επίσης FNN, καθώς θεωρούνται ικανά να επεξεργαστούν ασαφείς πληροφορίες.

Ένα νευροασαφές σύστημα (NFS) από την άλλη πλευρά έχει ως σκοπό την πραγματοποίηση της διαδικασίας ασαφούς συλλογιστικής (fuzzy reasoning), όπου τα βάρη των συνδέσεων του δικτύου αντιστοιχούν στις παραμέτρους της ασαφούς συλλογιστικής. Χρησιμοποιώντας αλγόριθμους μάθησης της μορφής ανάστροφης διάδοσης του σφάλματος (backpropagation) το NFS μπορεί να αναγνωρίσει ασαφείς κανόνες και να «μάθει» τις συναρτήσεις συμμετοχής της ασαφούς συλλογιστικής. Συγκεκριμένα το NFS θα πρέπει να είναι ικανό είτε να «μάθει» λεκτικούς κανόνες και/ή συναρτήσεις συμμετοχής, είτε να βελτιστοποιεί τους ήδη υπάρχοντες κανόνες ή τις συναρτήσεις συμμετοχών. Υπάρχουν τρεις περιπτώσεις:

- 1) το σύστημα ξεκινά χωρίς κανόνες και δημιουργεί νέους κανόνες μέχρι το πρόβλημα της μάθησης να επιλυθεί. Η δημιουργία ενός νέου κανόνα προκύπτει από ένα πρότυπο εκμάθησης που δεν καλύπτεται αρκετά από την τρέχουσα βάση κανόνων.
- 2) το σύστημα ξεκινά με όλους εκείνους τους κανόνες που μπορούν να δημιουργηθούν από το διαμερισμό των μεταβλητών και διαγράφοντας ανεπαρκείς κανόνες από την βάση κανόνων ανάλογα με την αξιολόγηση της επίδοσής τους.

3) το σύστημα ξεκινά με μια βάση κανόνων που αποτελείται από σταθερό αριθμό κανόνων. Κατά τη διαδικασία της εκμάθησης οι κανόνες αντικαθίστανται μέσω μιας διαδικασίας βελτιστοποίησης.

Παρακάτω παραθέτουμε διάφορους τρόπους συνδυασμών νευρο-ασαφών στοιχείων που χρησιμοποιούνται στη σύνθεση υβριδικών συστημάτων υπολογιστικής νοημοσύνης. Οι κατηγορίες 1,3,4,5 αφορούν FNN δίκτυα, ενώ η κατηγορία 2 αφορά NFS. Παρακάτω περιγράφονται οι τρόποι με τους οποίους στοιχεία των ΤΝΔ μπορούν να συνδυαστούν με στοιχεία της ασαφούς λογικής, προκειμένου να δημιουργηθούν FNN και NFS δίκτυα.

1. **Ενσωματώνοντας ασάφεια στο πλαίσιο των νευρωνικών δικτύων:** Ασαφοποιώντας τα δεδομένα εισόδου, αναθέτοντας ασαφείς χαρακτηρισμούς σε δείγματα εκμάθησης, ασαφοποιώντας, ενδεχομένως, τη διαδικασία εκμάθησης και εξάγοντας εξόδους του νευρωνικού δικτύου με τη μορφή ασαφών συνόλων.
2. **Σχεδιάζοντας νευρωνικά δίκτυα καθοδηγούμενα από σχηματισμούς με βάση την ασαφή λογική:** Σχεδιάζοντας νευρωνικά δίκτυα για την εφαρμογή ασαφούς λογικής και ασαφούς λήψης αποφάσεων και δημιουργώντας συναρτήσεις συμμετοχής για την αναπαράσταση ασαφών συνόλων.
3. **Μεταβάλλοντας τα βασικά χαρακτηριστικά των νευρώνων:** Οι νευρώνες σχεδιάζονται για την πραγματοποίηση ποικίλων λειτουργιών μέσα στα πλαίσια χρησιμοποίησής τους στη θεωρία ασαφών συνόλων (όπως ασαφή ένωση, τομή, συνάθροιση), αντί για πράξεις όπως π.χ. ο απλός πολλαπλασιασμός.
4. **Χρησιμοποιώντας μέτρα ασάφειας, όπως το σφάλμα ή την αστάθεια του δικτύου:** Τα μέτρα ασάφειας ή αβεβαιότητας ενός ασαφούς συνόλου χρησιμοποιούνται για να μοντελοποιήσουν το σφάλμα ή την αστάθεια ή τη συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος που βασίζονται σε νευρωνικό δίκτυο.
5. **Καθιστώντας ασαφείς τους ξεχωριστούς νευρώνες του δικτύου:** Οι εισοδοί και οι εξοδοί των νευρώνων είναι ασαφή σύνολα και η λειτουργία των δικτύων, που συμπεριλαμβάνουν τους ασαφείς νευρώνες, αποτελεί επίσης μια ασαφή διαδικασία.

Υπάρχουν όμως και άλλου είδους κατηγοριοποιήσεις για τα νευροασαφή μοντέλα στην βιβλιογραφία. Οι Buckley και Hayashi (1994) έχουν ταξινομήσει τα ασαφοποιημένα νευρωνικά δίκτυα ως εξής. Τα δίκτυα μπορούν να διακρίνονται από

- 1) εισόδους με τη μορφή πραγματικών αριθμών, ασαφείς εξόδους και συνδετικά βάρη με τη μορφή πραγματικών αριθμών
- 2) ασαφείς εισόδους, ασαφείς εξόδους και συνδετικά βάρη με τη μορφή πραγματικών αριθμών
- 3) ασαφείς εισόδους, ασαφείς εξόδους και ασαφή συνδετικά βάρη.

4.3. Αρχιτεκτονικές Ασαφών Νευρωνικών Δικτύων

Ο κύριος σκοπός της ανάπτυξης νευρο-ασαφών συστημάτων είναι η σύνθεση της ικανότητας μάθησης των νευρωνικών δικτύων με την ικανότητα αναπαράστασης των συστημάτων ασαφούς συμπερασμού (fuzzy inference systems), έτσι ώστε οι μηχανές μάθησης που δημιουργούνται με αυτόν τον τρόπο να μπορούν να εξάγουν γνώση από τα δεδομένα και να την αναπαριστούν με τη μορφή ασαφών κανόνων (Jang και Sun, 1995; Jang, 1993; Nauck, Klawonn και Kruse, 1997; Brown και

Harris, 1994; Zurada και Lozowski, 1996). Το ασαφές σύστημα συμπερασμού (FIS) μπορούμε να το δημιουργήσουμε στην περίπτωση που υπάρχει διαθέσιμη γνώση εκφρασμένη σε λεκτικούς κανόνες, ενώ τα τεχνητά νευρωνικά δίκτυα (ΤΝΔ) προτιμώνται στην περίπτωση που έχουμε διαθέσιμα δεδομένα ή επιδιώκεται η εκμάθηση μέσω της προσομοίωσης. Για την κατασκευή ενός FIS απαιτείται ο προσδιορισμός των ασαφών συνόλων, των ασαφών τελεστών και της βάσης γνώσης. Για την κατασκευή ενός ΤΝΔ και τη χρησιμοποίησή του σε κάποια εφαρμογή απαιτείται ο προσδιορισμός της αρχιτεκτονικής του δικτύου και ο αλγόριθμος εκμάθησης από την πλευρά του χρήστη. Κάποιες από τις πιο δημοφιλείς μεθόδους νευρο-ασαφών συστημάτων παρουσιάζονται παρακάτω.

Fuzzy Adaptive learning Control Network (FALCON)

Η δομή του FALCON (Lin και Lee, 1991) είναι πέντε επιπέδων. Για κάθε μεταβλητή εξόδου υπάρχουν δύο λεκτικοί κόμβοι, από τους οποίους ο ένας αφορά τα δεδομένα εκμάθησης (επιθυμητή έξοδο), και ο άλλος την πραγματική έξοδο του FALCON. Το πρώτο κρυμμένο επίπεδο χρησιμοποιείται για την ασαφοποίηση της κάθε μεταβλητής εισόδου. Ο κάθε κόμβος μπορεί να είναι απλώς ένας μοναδικός κόμβος που αναπαριστά μία απλή συνάρτηση συμμετοχής ή να αποτελείται από κόμβους πολλαπλών επιπέδων που υπολογίζουν μία περίπλοκη συνάρτηση συμμετοχής. Το δεύτερο κρυμμένο επίπεδο προσδιορίζει τις υποθέσεις του κανόνα, ενώ τα συμπεράσματα του κανόνα προσδιορίζονται από το τρίτο κρυμμένο επίπεδο. Το FALCON εφαρμόζει έναν υβριδικό αλγόριθμο μάθησης που χρησιμοποιεί τόσο μάθηση χωρίς επίβλεψη (unsupervised learning) για τον εντοπισμό των αρχικών συναρτήσεων συμμετοχής και της αρχικής βάσης κανόνων, όσο και μάθηση μέσω φθίνουσας κλίσης (gradient descent learning) για τη βέλτιστη προσαρμογή των παραμέτρων των συναρτήσεων συμμετοχής, προκειμένου να εξαχθούν οι επιθυμητές έξοδοι.

Adaptive Neuro Fuzzy Inference System (ANFIS)

Το ANFIS (Jang, 1992) υλοποιεί ένα ασαφές σύστημα συμπερασμού τύπου Takagi-Sugeno και η δομή του είναι πέντε επιπέδων. Το πρώτο κρυμμένο επίπεδο χρησιμοποιείται για την ασαφοποίηση των μεταβλητών εισόδου, ενώ στο δεύτερο κρυμμένο επίπεδο χρησιμοποιούνται T-norm τελεστές για τον υπολογισμό της υπόθεσης του κανόνα. Το τρίτο κρυμμένο επίπεδο κανονικοποιεί την ισχύ των κανόνων, το τέταρτο κρυμμένο επίπεδο προσδιορίζει τις παραμέτρους του συμπεράσματος του κανόνα και το επίπεδο εξόδου υπολογίζει τη συνολική έξοδο ως τη συνάθροιση όλων των εισερχόμενων σημάτων. Το ANFIS χρησιμοποιεί τη μάθηση της ανάστροφης διάδοσης του σφάλματος (backpropagation learning) για τον προσδιορισμό των παραμέτρων των υποθέσεων των κανόνων και το ελάχιστο μέσο τετραγωνικό σφάλμα για τον υπολογισμό των παραμέτρων των συμπερασμάτων των κανόνων. Κάθε βήμα σε αυτήν τη διαδικασία εκμάθησης αποτελείται από δύο στάδια: Κατά το πρώτο στάδιο τα πρότυπα εισόδου διαδίδονται και ακολουθείται μία επαναλαμβανόμενη διαδικασία υπολογισμού των ελαχίστων μέσων τετραγωνικών σφαλμάτων για τον προσδιορισμό των βέλτιστων παραμέτρων των συμπερασμάτων των κανόνων, θεωρώντας στον εκάστοτε τρέχοντα κύκλο σταθερές τις παραμέτρους της υπόθεσης των κανόνων για ολόκληρο το σύνολο εκμάθησης. Κατά το δεύτερο στάδιο τα πρότυπα διαδίδονται ξανά και χρησιμοποιείται η ανάστροφη διάδοση του σφάλματος για την τροποποίηση των παραμέτρων των υποθέσεων των κανόνων, καθώς οι παράμετροι των συμπερασμάτων παραμένουν σταθερές. Στη συνέχεια η διαδικασία αυτή επαναλαμβάνεται.

Generalized Approximate Reasoning based Intelligent Control (GARIC)

Το σύστημα GARIC (Bherenji και Khedkar, 1992) εφαρμόζει ένα νευροασαφή ελεγκτή χρησιμοποιώντας δύο νευρωνικά δίκτυα, τα AEN και ASN:

Το AEN (Action State Evaluation Network) αποτελεί ένα προσαρμοστικό μηχανισμό αξιολόγησης των ενεργειών του ASN.

Το ASN (Action Selection Network) αποτελεί ένα νευρωνικό δίκτυο πρόσθιας τροφοδότησης με πέντε επίπεδα. Οι σύνδεσμοι μεταξύ των επιπέδων δεν είναι σταθμισμένοι. Το πρώτο κρυμμένο επίπεδο αποθηκεύει τις λεκτικές τιμές όλων των μεταβλητών εισόδου. Κάθε μονάδα εισόδου συνδέεται μόνο με εκείνες τις μονάδες του πρώτου κρυμμένου επιπέδου που αναπαριστούν τις λεκτικές τιμές που συνδέονται με αυτήν. Το δεύτερο κρυμμένο επίπεδο αναπαριστά τους κόμβους ασαφών κανόνων που προσδιορίζουν το βαθμό της ικανοποίησης ενός κανόνα χρησιμοποιώντας τον ειδικό τελεστή soft-min. Το τρίτο κρυμμένο επίπεδο αναπαριστά τις λεκτικές τιμές της μεταβλητής εξόδου. Τα αποτελέσματα του κανόνα υπολογίζονται με βάση την ισχύ των υποθέσεων του κανόνα, και μέσω της διαδικασίας τοπικού μέσου του μεγίστου (local mean-of-maximum). Η τελική έξοδος του ελεγκτή προκύπτει μετά την αποασαφοποίηση των αποτελεσμάτων του κάθε κανόνα. Το GARIC χρησιμοποιεί ένα συνδυασμό της μεθόδου φθίνουσας κλίσης (gradient descent) και της ενισχυτικής μάθησης (reinforcement learning) για τον καθορισμό των παραμέτρων των κόμβων.

Neuro-Fuzzy Control (NEFCON)

Το NEFCON (Nauck και Kruse, 1993) σχεδιάστηκε προκειμένου να εφαρμόσει ένα ασαφές σύστημα συμπερασμού τύπου Mamdani. Οι μονάδες εισόδου εφαρμόζουν την ασαφοποίηση των δεδομένων. Η επαγωγική λογική που εφαρμόζεται αναπαρίσταται από τις συναρτήσεις διάδοσης (propagation functions) και η μονάδα εξόδου εφαρμόζει την αποασαφοποίηση του αποτελέσματος. Η διαδικασία μάθησης του NEFCON βασίζεται σε ένα συνδυασμό ενισχυτικής μάθησης και μάθησης με ανάστροφη διάδοση του σφάλματος. Το NEFCON μπορεί να χρησιμοποιηθεί τόσο για την εκμάθηση μίας αρχικής βάσης κανόνων, όταν δεν είναι διαθέσιμη προηγούμενη γνώση για το σύστημα, όσο και για τη βελτιστοποίηση μίας υπάρχουσας βάσης κανόνων. Τα συστήματα NEFPROX (για την εκτίμηση συνάρτησης) και NEFCLASS (για την ταξινόμηση δεδομένων) αποτελούν δύο παραλλαγές της δομής NEFCON.

Στα πλαίσια της παρούσας εργασίας χρησιμοποιήθηκε το σύστημα NEFCLASS (Nauck και Kruse, 1995), το οποίο αποτελεί έναν τριών-επιπέδων ασαφή perceptron. Το συγκεκριμένο δίκτυο χρησιμοποιεί ασαφή σύνολα ως βάρη μεταξύ της εισόδου και του κρυμμένου επιπέδου, και δυαδικά βάρη (0/1) μεταξύ του κρυμμένου επιπέδου και του επιπέδου εξόδου. Οι νευρώνες του επιπέδου εισόδου εισάγουν τα χαρακτηριστικά του χώρου αναφοράς στο δίκτυο. Οι νευρώνες του κρυμμένου επιπέδου αναπαριστούν τους ασαφείς κανόνες και οι νευρώνες του επιπέδου εξόδου αναπαριστούν τις διαφορετικές κατηγορίες ταξινόμησης των χαρακτηριστικών. Ένας ασαφής κανόνας της μορφής if...then εξάγεται από ένα κρυμμένο νευρώνα λαμβάνοντας ως συμπέρασμα του κανόνα όλες τις εισόδους των συνδετικών βαρών του κρυμμένου επιπέδου, και θέτοντας το συμπέρασμα του κανόνα ισοδύναμο με την κατηγορία του νευρώνα εξόδου, με τον οποίο συνδέεται ο κρυφός κόμβος.

Ο αλγόριθμος επαγωγής της βάσης κανόνων αποτελείται από τρία βήματα.

- (1) τη δημιουργία ενός αρχικού συνόλου κανόνων,
- (2) την επιλογή των καλύτερων κανόνων σύμφωνα με κάποιο κριτήριο και

- (3) την κατάλληλη ρύθμιση των ασαφών συνόλων που μοντελοποιούν τους λεκτικούς όρους, οι οποίοι ανατίθενται στα πρότυπα της εισόδου.

Το χαρακτηριστικό γνώρισμα του NEFCLASS εντοπίζεται στο τρίτο βήμα, όπου εφαρμόζεται μία ασαφής ευρετική παραλλαγή της μεθόδου της φθίνουσας κλίσης, η οποία χρησιμοποιείται για την προσαρμογή των συνδετικών βαρών σε ένα τριών επιπέδων νευρωνικό δίκτυο τύπου perceptron.

FUZZY Net (FUN)

Στο FUN (Sulzberger et al., 1993) οι νευρώνες του πρώτου κρυμμένου επιπέδου περιλαμβάνουν τις συναρτήσεις συμμετοχής. Στο πρώτο κρυμμένο επίπεδο ασαφοποιούνται οι τιμές εισόδου, στο δεύτερο κρυμμένο επίπεδο υπολογίζονται οι συζεύξεις «AND» και στο τρίτο κρυμμένο επίπεδο αποθηκεύονται οι συναρτήσεις συμμετοχών των μεταβλητών εξόδου. Η συνάρτηση ενεργοποίησης των νευρώνων είναι το διαζευκτικό «OR». Ο νευρώνας εξόδου εκτελεί την αποασαφοποίηση. Το δίκτυο ξεκινά με μία βάση ασαφών κανόνων και τις αντίστοιχες συναρτήσεις συμμετοχής. Έπειτα το σύστημα χρησιμοποιεί μία τεχνική στοχαστικής μάθησης, που μεταβάλλει τυχαία τις παραμέτρους των συναρτήσεων συμμετοχής και τους συνδέσμους μέσα στη δομή του δικτύου. Για τη διαδικασία της μάθησης χρησιμοποιείται μία συνάρτηση κόστους, η οποία υπολογίζεται μετά από την αρχική τυχαία τροποποίηση των παραμέτρων. Η τροποποίηση που γίνεται αποδεκτή είναι εκείνη που οδηγεί σε βελτιωμένη αποτελεσματικότητα.

Evolving Fuzzy Neural Network (EFuNN)

Στα EFuNN (Kasabov και Qun Song, 1999) όλοι οι κόμβοι δημιουργούνται κατά τη διάρκεια της μάθησης. Το επίπεδο εισόδου προωθεί τα δεδομένα στο δεύτερο επίπεδο. Για τα δεδομένα εισόδου χρησιμοποιούνται προκαθορισμένες ασαφείς συναρτήσεις συμμετοχής. Το δεύτερο επίπεδο υπολογίζει τους ασαφείς βαθμούς συμμετοχής. Το τρίτο επίπεδο περιλαμβάνει κόμβους ασαφών κανόνων που αναπαριστούν τα πρότυπα των δεδομένων εισόδου και εξόδου ως μία σχέση υπερσφαιρών (hyper-spheres) ανάμεσα στους χώρους των δεδομένων εισόδου και εξόδου. Κάθε κόμβος κανόνα προσδιορίζεται από δύο διανύσματα συνδετικών βαρών, τα οποία προσαρμόζονται μέσα από μία υβριδική διαδικασία μάθησης. Το τέταρτο επίπεδο αναπαριστά την ασαφή ποσοτικοποίηση των μεταβλητών εξόδου και το πέμπτο επίπεδο διεξάγει την αποασαφοποίηση και υπολογίζει τις ακριβείς τιμές για τις μεταβλητές εξόδου.

Το Dynamic Evolving Fuzzy Neural Network (dmEFuNN) (Kasabov και Qun Song, 1999) αποτελεί μία τροποποιημένη εκδοχή του EfuNN, όπου ένα σύνολο από κόμβους κανόνων επιλέγεται δυναμικά για κάθε νέο διάνυσμα εισόδου. Οι τιμές ενεργοποίησης των κόμβων αυτών χρησιμοποιούνται για τον υπολογισμό των δυναμικών παραμέτρων της συνάρτησης εξόδου. Επιπλέον το EfuNN εφαρμόζει ασαφείς κανόνες τύπου Mamdani, ενώ το dmEFuNN υπολογίζει τους ασαφείς κανόνες τύπου Takagi-Sugeno με βάση έναν αλγόριθμο ελαχίστων τετραγώνων.

5. Εφαρμογές τεχνικών από το χώρο της στατιστικής, της μηχανικής μάθησης και της τεχνητής νοημοσύνης στην πιστοληπτική βαθμολόγηση (credit scoring).

5.1. Εισαγωγή

Οι ραγδαίοι ρυθμοί ανάπτυξης του τομέα των πιστωτικών καρτών και ο αυξανόμενος ανταγωνισμός των χρηματοπιστωτικών ιδρυμάτων κατέστησαν αναγκαία την ανάπτυξη μεθόδων για τη μοντελοποίηση του πιστωτικού κινδύνου των πελατών τους.

Υπάρχουν διάφοροι τρόποι για την αξιολόγηση μίας αίτησης για τη χορήγηση πίστωσης σε έναν ιδιώτη ή μια επιχείρηση. Τα χρηματοπιστωτικά ιδρύματα (X.I. εφεξής) προσδιορίζουν διαφορετικές συναρτήσεις κόστους προς βελτιστοποίηση στο σύστημα υποβοήθησης απόφασης που χρησιμοποιούν. Μπορεί να επιθυμούν να μεγιστοποιήσουν τα κέρδη τους, να ελαχιστοποιήσουν τα κόστη μη-αποπληρωμής ή να ελαχιστοποιήσουν τις καθυστερήσεις πληρωμών κλπ. Παρόλα αυτά τα επιμέρους προβλήματα, ο κυριότερος στόχος παραμένει η λήψη απόφασης σχετικά με το κατά πόσο θα χορηγηθεί πίστωση στον αιτούντα ή όχι.

Συνεπώς, υπάρχουν δύο ειδών αποφάσεις που τα X.I. θα πρέπει να λάβουν υπόψη τους. Η πρώτη αφορά το κατά πόσο θα πρέπει να χορηγηθεί πίστωση σε μία νέα αίτηση. Τα βοηθητικά εργαλεία σε μια τέτοια περίπτωση αποκαλούνται μέθοδοι πιστοληπτικής βαθμολόγησης (credit scoring methods). Το δεύτερο είδος απόφασης αφορά τον τρόπο χειρισμού των υπαρχόντων δανειοληπτών. Τέτοιου είδους απόφαση λαμβάνεται από το X.I. στην περίπτωση που ένας δανειολήπτης επιθυμεί να αυξήσει το πιστωτικό του όριο. Σε αυτήν την κατηγορία αποφάσεων υπάγεται και η αντιμετώπιση του προβλήματος της καθυστέρησης της αποπληρωμής των οφειλών από την πλευρά του δανειολήπτη. Η συμπεριφορική βαθμολόγηση (behavioral scoring) περιλαμβάνει τις τεχνικές εκείνες που χρησιμοποιούνται στη λήψη τέτοιου είδους αποφάσεων. Η παρούσα εργασία επικεντρώνεται στην πιστοληπτική βαθμολόγηση.

5.2. Πιστοληπτική Βαθμολόγηση (credit scoring)

Η πιστοληπτική βαθμολόγηση αποτελεί μία μέθοδο αξιολόγησης του πιστωτικού κινδύνου των αιτήσεων για τη λήψη χορήγησης. Τα μοντέλα πιστοληπτικής βαθμολόγησης αποτελούν ποσοτικά μοντέλα που χρησιμοποιούν χαρακτηριστικά του υποψήφιου πελάτη είτε για τον υπολογισμό ενός σκορ που θα αναπαριστά την πιθανότητα αθέτησης των υποχρεώσεών του, είτε μέσα από την ταξινόμηση του σε κάποια από τις διαφορετικές κατηγορίες κινδύνου αθέτησης (Saunders, 2000). Με αυτόν τον τρόπο ο διαχειριστής ενός X.I. μπορεί να:

1. Καθορίσει αριθμητικά ποιοι παράγοντες είναι σημαντικοί στον προσδιορισμό του πιστωτικού κινδύνου.
2. Αξιολογήσει το σχετικό βαθμό ή τη σημασία αυτών των παραγόντων.
3. Βελτιώσει την πολιτική αποτίμησης των χορηγούμενων δανείων.
4. Διακρίνει τους υποψήφιους δανειολήπτες που ενδεχομένως θα αθετήσουν τις υποχρεώσεις τους σε περίπτωση χορήγησης της πίστωσης.
5. Υπολογίσει αποτελεσματικότερα τις ανάγκες του X.I. σε αποθέματα για την κάλυψη πιθανών μελλοντικών απωλειών από το χαρτοφυλάκιο των δανείων που διατηρεί.

Για την εφαρμογή αυτού του είδους των μεθόδων ο διαχειριστής του Χ.Ι. θα πρέπει να αναγνωρίσει αντικειμενικά οικονομικά και χρηματοοικονομικά μέτρα κινδύνου για την κάθε κατηγορία δανειστών. Συγκεκριμένα, όσον αφορά τα καταναλωτικά δάνεια, τα αντικειμενικά χαρακτηριστικά που θα ληφθούν υπόψη για την κατασκευή ενός μοντέλου πιστοληπτικής βαθμολόγησης μπορούν να περιλαμβάνουν το εισόδημα, τα περιουσιακά στοιχεία, την ηλικία, το επάγγελμα, το χρονικό διάστημα παραμονής στην ίδια εργασία, το κατά πόσο ο υποψήφιος είναι ιδιοκτήτης κατοικίας ή όχι, το είδος του τραπεζικού του λογαριασμού, το ανεξόφλητο χρέος του κατά το χρόνο της αίτησής του, καθώς και το κατά πόσο στο παρελθόν έχει αθετήσει τις υποχρεώσεις του ως δανειολήπτης. Για την κατασκευή ενός μοντέλου πιστοληπτικής βαθμολόγησης στην περίπτωση της χορήγησης προς επιχειρήσεις λαμβάνονται υπόψη πληροφορίες σχετικά με τον προβλεπόμενο ρυθμό των ταμειακών εισροών και εκροών (cash flow) και με τους χρηματοοικονομικούς δείκτες, όπως είναι ο λόγος των δανειακών υποχρεώσεων προς την τρέχουσα αξία των μετοχών (debt-equity ratio).

Τα δεδομένα αυτά αξιοποιούνται κατάλληλα από κάποια μέθοδο από το χώρο της στατιστικής ή της τεχνητής νοημοσύνης και της μηχανικής μάθησης, για την ποσοτικοποίηση της πιθανότητας του κινδύνου αθέτησης ή για την ταξινόμηση του κινδύνου αθέτησης σε διαφορετικές κατηγορίες.

Η πιστοληπτική βαθμολόγηση προσπαθεί να απομονώσει τις επιδράσεις των διαφορετικών χαρακτηριστικών των αιτούντων ως προς την αθέτηση των υποχρεώσεών τους. Η πιστοληπτική βαθμολόγηση κατά κύριο λόγο συνίσταται στον υπολογισμό ενός σκορ, το οποίο η τράπεζα μπορεί να χρησιμοποιήσει για να κατατάξει τους υποψήφιους δανειολήπτες της σε όρους κινδύνου. Συνήθως ο υπολογισμός αυτός βασίζεται σε δεδομένα παρελθόντων αιτήσεων για τον προσδιορισμό εκείνων των χαρακτηριστικών που είναι χρήσιμα στην πρόβλεψη της φερεγγυότητας των δανειοληπτών. Σε πραγματικές εφαρμογές η πιστοληπτική βαθμολόγηση αποτελεί εκείνον τον τρόπο αναγνώρισης διαφορετικών ομάδων σε ένα πληθυσμό, όπου μόνο τα χαρακτηριστικά που συσχετίζουν τις ομάδες μπορούν να παρατηρηθούν, ενώ δεν είναι εύκολο να διακριθεί το χαρακτηριστικό που τις διαχωρίζει.

Την ιδέα αυτής της διάκρισης σε έναν πληθυσμό την εισήγαγε στη στατιστική ο Fisher (1936). Ο Durand (1941) ήταν ο πρώτος που αναγνώρισε ότι υπάρχουν τεχνικές που θα μπορούσαν να διακρίνουν τα «καλά» από τα «κακά» δάνεια. Στα τέλη του 1960 η εισαγωγή των πιστωτικών καρτών στον τομέα των χρηματοπιστωτικών υπηρεσιών υποχρέωσε τα Χ.Ι. να συνειδητοποιήσουν τη σημασία της πιστοληπτικής βαθμολόγησης (credit scoring). Ο αυξανόμενος αριθμός των καταναλωτών που έκαναν αίτηση για πιστωτική κάρτα κατέστησε αναγκαία την αυτοματοποίηση της διαδικασίας χορήγησης. Η επιτυχία των μεθόδων πιστοληπτικής βαθμολόγησης που αναπτύχθηκαν στη δεκαετία του '80 οδήγησε τις τράπεζες στην εφαρμογή ανάλογων τακτικών και σε άλλα προϊόντα τους, όπως είναι τα προσωπικά δάνεια, ενώ τα τελευταία χρόνια παρόμοιες μέθοδοι βαθμολόγησης χρησιμοποιούνται σε στεγαστικά δάνεια και σε δάνεια για μικρές επιχειρήσεις. Την περίοδο αυτή χρησιμοποιήθηκαν οι τεχνικές του γραμμικού προγραμματισμού και της λογιστικής παλινδρόμησης (logistic regression). Οι πιο πρόσφατες τεχνικές προέρχονται από το χώρο της τεχνητής νοημοσύνης.

5.3. Επισκόπηση τεχνικών πιστοληπτικής βαθμολόγησης (credit scoring)

Η αρχική προσέγγιση της χορήγησης πίστωσης βασιζόταν στην κρίση του ειδικού. Οι αναλυτές εξέταζαν την αίτηση και ενέκριναν ή απέρριπταν τον υποψήφιο

δανειολήπτη. Οι αποφάσεις τους βασίζονταν σε πέντε κύρια χαρακτηριστικά, που στη διεθνή βιβλιογραφία συναντώνται ως τα 5 C's (Thomas, 2000):

1. Character: Ο χαρακτήρας του αιτούντα
2. Capital: Το κεφάλαιο που ζητά να του χορηγηθεί
3. Collateral: Οι εγγυήσεις που παρέχει
4. Capacity: Η ικανότητα αποπληρωμής του χρέους με βάση το διαθέσιμο εισόδημά του
5. Condition: Οι συνθήκες της αγοράς

Σήμερα η πιστοληπτική βαθμολόγηση βασίζεται σε μεθόδους της στατιστικής και της επιχειρησιακής έρευνας. Τα στατιστικά εργαλεία περιλαμβάνουν τη διακριτική ανάλυση (discriminant analysis), τη λογιστική παλινδρόμηση (logistic regression) και τα δένδρα ταξινόμησης (classification trees ή αλλιώς recursive partitioning algorithms). Η επιχειρησιακή έρευνα χρησιμοποιεί παραλλαγές του γραμμικού προγραμματισμού. Παράλληλα υπάρχουν και μη παραμετρικές στατιστικές τεχνικές, καθώς και τεχνικές από το χώρο της τεχνητής νοημοσύνης (νευρωνικά δίκτυα-neural networks, έμπειρα συστήματα-expert systems, γενετικοί αλγόριθμοι-genetic algorithms και μέθοδοι βασισμένοι στον πλησιέστερο γείτονα-nearest neighbour methods).

Τα δύο βασικά γραμμικά στατιστικά εργαλεία που χρησιμοποιήθηκαν αρχικά ως μοντέλα πιστοληπτικής βαθμολόγησης είναι η διακριτική ανάλυση και η λογιστική παλινδρόμηση. Η γραμμική διακριτική ανάλυση (linear discriminant analysis) αποτελεί ένα απλό παραμετρικό στατιστικό μοντέλο που αποτέλεσε την πρώτη μέθοδο πιστοληπτικής βαθμολόγησης. Ο Fisher (1936) ήταν ο πρώτος που πρότεινε τη διακριτική ανάλυση ως εργαλείο διάκρισης και ταξινόμησης. Σύμφωνα με την έρευνα των Lee, Sung και Chang (1999) η διακριτική ανάλυση έχει καταγραφεί ως η πιο συχνά χρησιμοποιούμενη στατιστική μέθοδος στην ταξινόμηση. Η διακριτική ανάλυση με βάση κάποια χαρακτηριστικά των μεταβλητών πρόβλεψης αναζητά τον καλύτερο γραμμικό συνδυασμό τους για την ταξινόμηση των υπό εξέταση στοιχείων σε δύο ή περισσότερες ομάδες με τη μεγαλύτερη δυνατή ακρίβεια (Johnson και Wichern, 1998). Η μέθοδος αυτή απαιτεί τα δεδομένα να είναι ανεξάρτητα και να ακολουθούν την κανονική κατανομή, ενώ ο πίνακας συνδιακύμανσης απαιτείται να ακολουθεί την υπόθεση της ομοιογενούς διακύμανσης (variation homogeneity assumption). Η κριτική που ασκείται πάνω στην εφαρμογή της γραμμικής διακριτικής ανάλυσης, οφείλεται στην υπόθεση της κατηγορικής φύσης (categorical nature) των δεδομένων πίστωσης και στο ότι οι πίνακες συνδιακύμανσης μεταξύ των κατηγοριών της καλής και της κακής πίστωσης είναι απίθανο να είναι ίσοι (Reichert et al., 1983).

Για διαφορετικές συνδιακυμάνσεις των πληθυσμών των «καλών» και «κακών» υποψηφίων ακολουθείται η μέθοδος της τετραγωνικής διακριτικής ανάλυσης (quadratic discriminant analysis) στην πιστοληπτική βαθμολόγηση, καθώς η επιφάνεια διαχωρισμού της διακριτικής συνάρτησης είναι τετραγωνική. Η γραμμική διακριτική ανάλυση αποτελεί μια ειδική περίπτωση της τετραγωνικής διακριτικής ανάλυσης (Smith, 1947) με ισχυρότερες υποθέσεις, που θα περιόριζαν ενδεχομένως το πεδίο εφαρμογών της. Όμως στην πραγματικότητα, η γραμμική διακριτική ανάλυση έχει αποδειχτεί περισσότερο ισχυρή και συγκροτημένη ως μέθοδος, όταν οι θεωρητικές υποθέσεις παραβιάζονται (Sharma, 1996). Δεδομένου ότι οι πίνακες συνδιακύμανσης ακολουθούν την υπόθεση της ομοιογενούς

διακύμανσης, έχουμε την ακόλουθη έκφραση για τη γραμμική διακριτική συνάρτηση του Fisher:

$$D = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \dots + \beta_n X_n$$

Όπου το D αναπαριστά το σκορ διάκρισης (discriminant score), β_0 είναι ο σταθερός όρος (intercept term) και β_i ($i = 1, \dots, n$) ο συντελεστής β που σχετίζεται με την αντίστοιχη ανεξάρτητη μεταβλητή X_i ($i = 1, \dots, n$). Η διακριτική ανάλυση έχει χρησιμοποιηθεί για τις ανάγκες πιστοληπτικής βαθμολόγησης, τόσο για τη χορήγηση πιστωτικής κάρτας, όσο και για άλλα τραπεζικά προϊόντα, από τους Eisenbeis (1978), Grablowsky και Talley (1981), Martell και Fitts (1981), Reichart et al. (1983), Falbo (1991), Titterington (1992), Overstreet, Bradley και Kemp (1992), Overstreet και Bradley (1994), Desai et al. (1996) και Bardos (1998).

Η λογιστική παλινδρόμηση αποτελεί μία ευρέως χρησιμοποιούμενη στατιστική τεχνική, όπου η πιθανότητα ενός αποτελέσματος διχοτόμησης σχετίζεται με ένα σύνολο πιθανών μεταβλητών πρόβλεψης μέσω της σχέσης:

$$\log[p/(1-p)] = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \dots + \beta_i x_i$$

Όπου p είναι η πιθανότητα να συμβεί το αποτέλεσμα που μας ενδιαφέρει (π.χ. η πιθανότητα αθέτησης των υποχρεώσεων από τον υποψήφιο), β_0 είναι ο σταθερός όρος και β_i ($i = 1, \dots, n$) ο συντελεστής β που σχετίζεται με την αντίστοιχη επεξηγηματική μεταβλητή x_i ($i = 1, \dots, n$). Η εξαρτημένη μεταβλητή είναι ο λογάριθμος των πιθανοτήτων, $\{\log[p/(1-p)]\}$, ο οποίος είναι ο λογάριθμος του πηλίκου της πιθανότητας να συμβεί το ενδεχόμενο που μας ενδιαφέρει προς την πιθανότητα να μη συμβεί. Με αυτόν τον τρόπο ο λογάριθμος του πηλίκου των πιθανοτήτων αντιστοιχεί σε ένα γραμμικό συνδυασμό των χαρακτηριστικών του υποψηφίου. Με βάση την παραπάνω εξίσωση η λογιστική παλινδρόμηση μπορεί να θεωρηθεί ως γραμμική παλινδρόμηση, όπου η εξαρτημένη μεταβλητή είναι κάποια μη-γραμμική συνάρτηση της πιθανότητας να είναι καλός ο υποψήφιος. Μία δυσκολία που συχνά συνδέεται με τη λογιστική παλινδρόμηση είναι ότι για τον υπολογισμό των συντελεστών β θα πρέπει να χρησιμοποιηθεί η μέγιστη πιθανότητα (maximum likelihood), η οποία απαιτεί τεχνικές μη-γραμμικής βελτιστοποίησης που μπορούν να είναι χρονοβόρες σε υπολογιστικό χρόνο. Η λογιστική παλινδρόμηση έχει χρησιμοποιηθεί στη δημιουργία μεθόδων πιστοληπτικής βαθμολόγησης, που εφαρμόστηκαν στη χορήγηση προσωπικών δανείων, επιχειρηματικών δανείων και πιστωτικών καρτών. Ενδεικτικές είναι οι μελέτες από τους Wiginton (1980), Joanes (1993), Henley (1995), Laitinen (1999), και Westgaard και van der Wijst (2001).

Το κανονικό υπόδειγμα πιθανότητας (probit analysis) αποτελεί μία άλλη μορφή μη-γραμμικής παλινδρόμησης που έχει χρησιμοποιηθεί στην πιστοληπτική βαθμολόγηση (Grablowsky et al, 1981). Το $N(x)$ αποτελεί την αθροιστική συνάρτηση κανονικής κατανομής όπου:

$$N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-y^2/2} dy$$

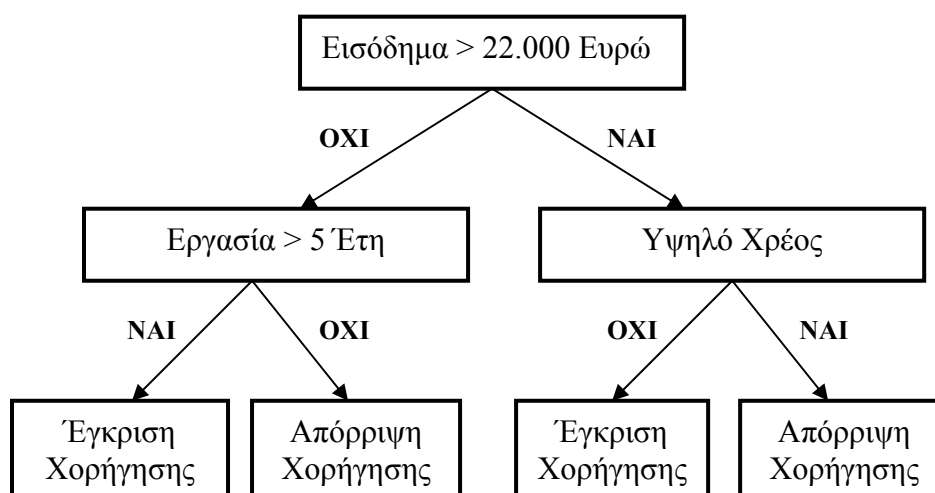
Ο στόχος είναι η εκτίμηση του $N^{-1}(p_i)$ ως μία γραμμική συνάρτηση των χαρακτηριστικών του υποψηφίου, οπότε

$$N^{-1}(p_i) = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \dots + \beta_i x_i$$

Η παραπάνω σχέση ισοδυναμεί με την πρόταση ότι κάποιος υποψήφιος θεωρείται καλός, εφόσον το σκορ του ξεπερνά ένα συγκεκριμένο επίπεδο, το οποίο όμως ποικίλει από άτομο σε άτομο και το οποίο έχει κανονική κατανομή.

Τα δέντρα απόφασης (decision trees) έχουν επίσης χρησιμοποιηθεί με μεγάλη επιτυχία στην πιστοληπτική βαθμολόγηση. Ένα δέντρο απόφασης διαχωρίζει το χώρο των χαρακτηριστικών ενός συνόλου δεδομένων σε αμοιβαία αποκλειόμενες περιοχές,

σε κάθε μία από τις οποίες ανατίθεται μία ονομασία ή αριθμητική τιμή. Το δένδρο απόφασης αποτελείται από εσωτερικούς (internal) και εξωτερικούς (external) κόμβους (nodes) που συνδέονται με διακλαδώσεις (branches). Ο εσωτερικός κόμβος αποτελεί μία μονάδα λήψης απόφασης που υπολογίζει τη συνάρτηση απόφασης για τον προσδιορισμό του επόμενου απόγονου-κόμβου (child node) με τον οποίο θα συνδεθεί. Αντίθετα, ο εξωτερικός κόμβος δεν έχει απόγονους κόμβους, αλλά συνδέεται με μία ονομασία ή τιμή που χαρακτηρίζει τα δεδομένα που οδηγούν σε αυτόν. Αρχικά παρουσιάζεται ένα διάγραμμα αποτελούμενο από διαφορετικά χαρακτηριστικά στον αρχικό-κόμβο (κόμβο-ρίζα, root-node) του δέντρου απόφασης. Με βάση το αποτέλεσμα μίας συνάρτησης απόφασης, που χρησιμοποιείται από τον εσωτερικό κόμβο, το δέντρο θα διακλαδωθεί με τους απόγονους-κόμβους. Η διαδικασία αυτή επαναλαμβάνεται μέχρις ότου να καταλήξει σε έναν τερματικό κόμβο (terminal node), που θα αποδώσει μία ονομασία ή τιμή στα δεδομένα εισόδου. Στην περίπτωση ενός δυαδικού δέντρου απόφασης (binary decision tree), όπως είναι τα δένδρα CART (Classification and Regression Trees) (Breiman et al., 1984), ο κάθε εσωτερικός κόμβος έχει ακριβώς δύο απόγονους-κόμβους, για κάθε έναν από τους οποίους μπορεί να αποδοθεί η ερμηνεία «αληθές» και «ψευδές» αντίστοιχα. Άλλοι αλγόριθμοι που χρησιμοποιούνται για την κατασκευή δέντρων απόφασης είναι οι Random Forest (Breiman, 2001), CHAID (*Chi-squared Automatic Interaction Detection*) (Magidson, 1993), Quest (*Quick, Unbiased, & Efficient Statistical Trees*) (Loh και Shih, 1997) και ο αλγόριθμος C5.0 (Quinlan, 1993). Τα δέντρα απόφασης που χρησιμοποιούνται για την πρόβλεψη κατηγορικών μεταβλητών ονομάζονται δέντρα ταξινόμησης (classification trees), ενώ τα δέντρα απόφασης που χρησιμοποιούνται για την πρόβλεψη συνεχών μεταβλητών ονομάζονται δέντρα παλινδρόμησης (regression trees). Τα δέντρα απόφασης κατασκευάζονται μέσα από έναν επαναληπτικό διαχωρισμό των δεδομένων σε διακριτές ομάδες, όπου ο στόχος είναι η μεγιστοποίηση της «απόστασης» μεταξύ των ομάδων σε κάθε έναν από τους διαχωρισμούς που λαμβάνουν χώρα. Το αποτέλεσμα είναι μία καλή σχηματική αναπαράσταση των κανόνων που οδηγούν σε μία κατηγορία ή τιμή, που αποδεικνύεται ιδιαίτερα χρήσιμη κατά την πιστοληπτική βαθμολόγηση. Ένα απλό παράδειγμα της ταξινόμησης ανάμεσα σε καλούς και κακούς υποψήφιους δανειολήπτες, θα μπορούσε να γίνει μέσω ενός δέντρου απόφασης με τον παρακάτω τρόπο (βλέπε σχήμα 32):



Σχήμα 32: Σχηματική αναπαράσταση ενός απλού δέντρου απόφασης

Ο αρχικός κόμβος προσδιορίζει την πρώτη ερώτηση που πρέπει να απαντηθεί, που στη συγκεκριμένη περίπτωση είναι το κατά πόσο ισχύει η πρόταση «Εισόδημα > 22.000 Ευρώ». Τα αποτελέσματα αυτού του ελέγχου οδηγούν στη διαίρεση του δέντρου σε διακλαδώσεις, από τις οποίες η κάθε μία αναπαριστά μία από τις πιθανές απαντήσεις, όπου για την περίπτωσή μας είναι τα δύο κλαδιά που αντιστοιχούν στο «ναι» και το «όχι». Τα δέντρα ταξινόμησης ταξινομούν τους υποψήφιους σε ομάδες, όπου η κάθε ομάδα είναι ομοιογενής ως προς τον κίνδυνο αθέτησης, και όσο το δυνατόν διαφορετική ως προς τους κινδύνους αθέτησης των άλλων ομάδων. Οι Mehta (1968), Makowski (1985), Coffmann (1986), Carter και Catlett (1987), Boyle et al. (1992) και Davis et al. (1992) ήταν από τους πρώτους που εφάρμοσαν τα δέντρα απόφασης στην πιστοληπτική βαθμολόγηση. Συγκεκριμένα, ο Coffmann (1986) πρότεινε τη χρησιμοποίηση των δέντρων ταξινόμησης, αντί της διακριτικής ανάλυσης, στην περίπτωση που υφίσταται αλληλεπίδραση μεταξύ των ανεξάρτητων μεταβλητών. Η μελέτη των Galindo και Tamayo (1997) επικεντρώνεται στον πιστωτικό κίνδυνο ενυπόθηκων δανείων, αλλά οι συγγραφείς ισχυρίζονται ότι ανάλογη μεθοδολογία μπορεί να εφαρμοστεί και στην αξιολόγηση πιστωτικών καρτών. Τα αποτελέσματα της σύγκρισης ανάμεσα σε διαφορετικές μεθόδους ταξινόμησης έδειξαν ότι τα δέντρα CART παρέχουν την καλύτερη εκτίμηση για αθέτηση. Στην ίδια μελέτη οι μέθοδοι που ακολουθούσαν σε αποτελεσματικότητα μικρότερου μέσου σφάλματος εκτίμησης ήταν τα νευρωνικά δίκτυα, ο αλγόριθμος των k-πλησιέστερων γειτόνων και το κανονικό υπόδειγμα πιθανότητας (probit).

Η μέθοδος των πλησιέστερων γειτόνων (nearest neighbors) αποτελεί μια μη παραμετρική στατιστική προσέγγιση που χρησιμοποιήθηκε σε προβλήματα πιστοληπτικής βαθμολόγησης αρχικά από τους Chatterjee και Barcun (1970). Η μέθοδος βασίζεται στη χρησιμοποίηση μίας μετρικής μονάδας (metric), που προσδιορίζει την απόσταση ανάμεσα σε ένα νέο παράδειγμα και ένα σύνολο παλαιών παραδειγμάτων (exemplars). Το νέο παράδειγμα ταξινομείται με βάση την κατηγορία στην οποία ανήκει ο πλησιέστερος γείτονας. Σε ένα σύστημα πλησιέστερων γειτόνων, όλα τα παλαιά παραδείγματα (δείγμα εκμάθησης) αποθηκεύονται στη μνήμη και τα νέα παραδείγματα ταξινομούνται μέσω της εύρεσης της παραπλήσιας περίπτωσης στη μνήμη, στην κατηγορία της οποίας ταξινομείται. Για τον προσδιορισμό του βαθμού ομοιότητας μεταξύ νέων και παλαιών περιπτώσεων, εφαρμόζεται μία συνάρτηση απόστασης, η οποία συνήθως βασίζεται στην Ευκλείδεια απόσταση, όταν πρόκειται για αριθμητικά χαρακτηριστικά. Σε αυτήν την περίπτωση το κάθε παράδειγμα λαμβάνεται ως ένα σημείο σε ένα n-διαστάσεων χώρο χαρακτηριστικών. Όσον αφορά στην πιστοληπτική βαθμολόγηση, οι υποψήφιοι δανειολήπτες είναι τα σημεία στο χώρο των χαρακτηριστικών, και ο κάθε νέος υποψήφιος ταξινομείται στους «καλούς» ή «κακούς» υποψηφίους με βάση την κατηγορία στην οποία ανήκει η πλειοψηφία των πλησιέστερων γειτόνων του. Οι Henley και Hand (1996) έδειξαν ότι η ταξινόμηση με τέτοιου είδους συστήματα παρουσιάζει σχετική σταθερότητα ως προς την επιλογή του αριθμού των γειτόνων που θα ληφθούν υπόψη, και ότι ένα μεγάλο πλεονέκτημα αυτής της μεθόδου αποτελεί το γεγονός ότι μπορούν να προστεθούν και νέα δεδομένα στο σύστημα, χωρίς να διαταραχθεί η δομή του, με αποτέλεσμα να μπορεί να διατηρείται ενημερωμένο (updated).

Οι γενετικοί αλγόριθμοι υποθέτουν την ύπαρξη ενός τυχαία καθορισμένου πληθυσμού δυαδικών συμβολοσειρών (string), ο οποίος εξελίσσεται μέσα από φυσικούς γενετικούς μηχανισμούς. Ένα άτομο του πληθυσμού, που ονομάζεται χρωμόσωμα (chromosome), παριστάνει ένα σημείο του χώρου λύσης ενός προβλήματος. Η εκτίμηση της καταλληλότητας των χρωμοσωμάτων γίνεται με βάση μια συνάρτηση προσαρμογής (fitness function), η οποία καθορίζει την ισχύ ενός

χρωμοσώματος κατά τη διάρκεια του πληθυσμιακού ανταγωνισμού. Σε κάθε γενετικό βήμα παράγονται καινούρια μέλη του πληθυσμού εφαρμόζοντας γενετικούς τελεστές, όπως είναι η αναπαραγωγή (reproduction), η διασταύρωση (crossover) και η μετάλλαξη (mutation) σε κατάλληλα επιλεγμένες συμβολοσειρές. Οι γενετικοί αλγόριθμοι έχουν αποδειχθεί ιδιαίτερα χρήσιμοι στην κατασκευή υβριδικών συστημάτων υπολογιστικής νοημοσύνης, όπως είναι τα ασαφές-γενετικά συστήματα και τα νευρωνικά-γενετικά συστήματα. Οι Desai, Crook και Overstreet (1997) σύγκριναν τους γενετικούς αλγόριθμους και τα νευρωνικά δίκτυα πρόσθιας τροφοδότησης με τη διακριτική ανάλυση και τη λογιστική παλινδρόμηση στην ταξινόμηση δανείων σε τρεις κατηγορίες: σε δάνεια προς έγκριση, σε δάνεια προς απόρριψη και σε δάνεια προς επανεξέταση. Παρά το ότι οι γενετικοί αλγόριθμοι απέδωσαν ικανοποιητικά, προτείνουν στο μέλλον να χρησιμοποιηθούν υβριδικές τεχνικές βασισμένες σε διαφορετικές μεθόδους από το χώρο της τεχνητής νοημοσύνης.

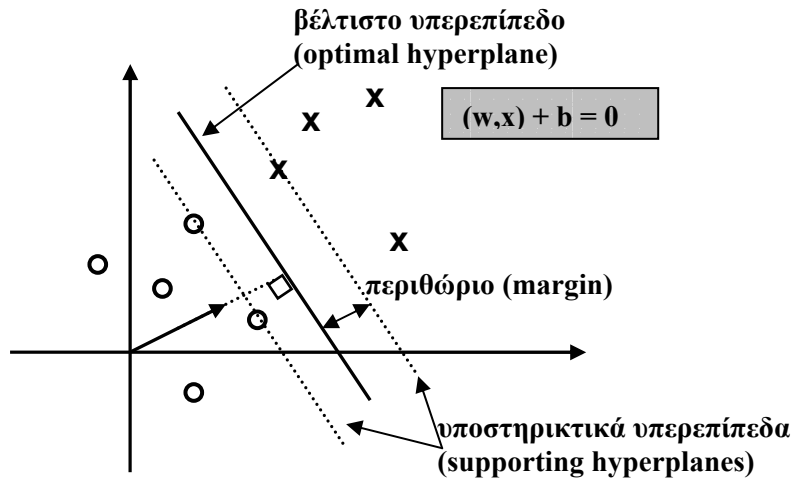
Οι Jagielska et al. (1999) χρησιμοποίησαν τους γενετικούς αλγόριθμους μέσα στα πλαίσια ενός συστήματος ασαφούς συμπερασμού με ικανοποιητικά ποσοστά ακρίβειας σε τρία προβλήματα ταξινόμησης, ένα εκ των οποίων αφορά δεδομένα από ένα σύνολο αιτήσεων για πιστωτικές κάρτες. Εκτός από το ασαφές-γενετικό σύστημα, στη μελέτη των Jagielska et al (1999) χρησιμοποιήθηκαν ένα νευροασαφές σύστημα, ο αλγόριθμος C4.5 και μία μέθοδος βασισμένη στη θεωρία των προσεγγιστικών συνόλων. Συνολικά, το ασαφές γενετικό σύστημα είχε την πιο ικανοποιητική επίδοση. Τα προσεγγιστικά σύνολα ξεπέρασαν σε ακρίβεια ταξινόμησης το ασαφές-γενετικό σύστημα μόνο στα δεδομένα των πιστωτικών καρτών.

Η θεωρία των προσεγγιστικών συνόλων (rough sets) αναπτύχθηκε από τον Pawlak (1982). Η χρησιμότητα των προσεγγιστικών συνόλων στην πιστοληπτική βαθμολόγηση αποδίδεται στην ικανότητά τους να αντιμετωπίζουν ατελή (incomplete), ανακριβή (imprecise) και ασυνεπή (inconsistent) δεδομένα. Τα προσεγγιστικά σύνολα βασίζονται στο ότι η μείωση της ακρίβειας στην αναπαράσταση των δεδομένων καθιστά δυνατή την εύρεση προτύπων στα δεδομένα, που διαφορετικά θα εμποδιζόταν από την υπερβολική λεπτομέρεια. Η ανάλυση των ορίων της διακριτότητας (discernibility) ενός υποσυνόλου X αντικειμένων του συνόλου αναφοράς U , που καθορίζονται από ένα σύνολο χαρακτηριστικών A , αποτελεί τη βάση της θεωρίας των προσεγγιστικών συνόλων. Οι διακριτές ομάδες αντικειμένων ονομάζονται στοιχειώδη σύνολα (elementary sets). Κάθε στοιχειώδες σύνολο περιλαμβάνει αντικείμενα με τα ίδια χαρακτηριστικά. Τα ακόλουθα υποσύνολα σχετίζονται με κάθε σύνολο X : η κάτω προσέγγιση του X , η οποία περιλαμβάνει την ένωση εκείνων των στοιχειωδών συνόλων που περιλαμβάνονται εξολοκλήρου στο X , και η άνω προσέγγιση του X , η οποία εμπεριέχει την ένωση εκείνων των στοιχειωδών συνόλων, που πιθανόν να ανήκουν στο X . Η περιοχή αδιαφορίας (boundary region) αποτελεί το σύνολο στο οποίο ανήκουν εκείνα τα αντικείμενα της άνω προσέγγισης, που δεν είναι στοιχεία της κάτω προσέγγισης. Το σύνολο X ονομάζεται προσεγγιστικό εφόσον η άνω προσέγγιση του X δεν είναι ίση με την κάτω προσέγγιση του X , ή εφόσον η περιοχή αδιαφορίας δεν είναι κενό σύνολο. Οι κανόνες που προκύπτουν από την κάτω προσέγγιση ενός συνόλου είναι βέβαιοι κανόνες (certain rules), ενώ οι κανόνες που προκύπτουν από την άνω προσέγγιση του συνόλου είναι πιθανοί κανόνες (possible rules). Ελάχιστο σύνολο (reduct) είναι εκείνο το ελάχιστο σύνολο χαρακτηριστικών που μπορεί να ταξινομήσει τα αντικείμενα με την ίδια ακρίβεια με το αρχικό σύνολο χαρακτηριστικών. Η εξάλειψη των πλεονασματικών χαρακτηριστικών συμβάλλει

στην αναγνώριση ισχυρών και μη-πλεονασματικών κανόνων ταξινόμησης. Τα προσεγγιστικά σύνολα εφαρμόστηκαν στην αξιολόγηση χρηστών πιστωτικών καρτών από τον Matsatsinis (2003) μέσα στα πλαίσια ενός ευφυούς συστήματος υποστήριξης αποφάσεων. Συγκεκριμένα, αναπτύχθηκε το σύστημα Credit Card Assessment System - CCAS που συνδυάζει τον αλγόριθμο Composite Rule Induction System (CRIS) με στοιχεία της θεωρίας των προσεγγιστικών συνόλων (Rough Sets). Τα αποτελέσματα αυτής της μεθόδου συγκρίθηκαν με τα αποτελέσματα που έδωσαν η διακριτική ανάλυση και οι πολυκριτήριες μέθοδοι ELECTRE TRI, UTADIS, UTADIS I, UTADIS II και MIP (mixed integer programming) σε ένα πρόβλημα ταξινόμησης υποψηφίων για τη χορήγηση πιστωτικών καρτών σε δύο κατηγορίες. Το συμπέρασμα στο οποίο καταλήγει η μελέτη είναι ότι αναγνωρίζει στο νέο αυτό σύστημα την ικανοποιητική ακρίβεια ταξινόμησης και την ικανότητά του να ενσωματώνει ποιοτικές μεταβλητές, που στην αξιολόγηση πιστωτικών καρτών έχει ιδιαίτερη σημασία.

Από το χώρο της πολυκριτήριας ανάλυσης, ο Δαμάσκος (1997) χρησιμοποίησε την μέθοδο ELECTRE TRI (Yu, 1992) στην ταξινόμηση αιτήσεων για πιστωτικές κάρτες σε κατηγορίες αποδοχής και απόρριψής τους. Οι Zorounidis και Doumpos (2002) χρησιμοποίησαν μία νέα πολυκριτήρια μέθοδο διάκρισης σε πολλές ομάδες (multi-group discrimination) μέσα από μία διαδικασία επαναληπτικού διαχωρισμού σε δύο κατηγορίες, πάνω σε ένα δείγμα 150 αιτήσεων για πιστωτικές κάρτες, με 7 κριτήρια αξιολόγησης και 3 ομάδες ταξινόμησης. Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι η προτεινόμενη τεχνική είχε μεγαλύτερη ακρίβεια ταξινόμησης από ό,τι η διακριτική ανάλυση και η πολυκριτήρια μέθοδος UTADIS.

Οι Μηχανές Διανύσματος Υποστήριξης (Support Vector Machines, SVM) αποτελούν μία τεχνική μηχανικής μάθησης με ρίζες στη στατιστική ανάλυση. Έστω το πρόβλημα του διαχωρισμού δύο κατηγοριών, που αναπαρίστανται με σταυρούς και κύκλους στο παρακάτω σχήμα. Τα δεδομένα εκμάθησης δίνονται από τα ζεύγη $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$, όπου n είναι ο αριθμός των δεδομένων, x_i τα δεδομένα εισόδου, που ονομάζονται πρότυπα (patterns) και y_i οι έξοδοι ή ονομασίες (labels). Στην περίπτωση δύο κατηγοριών προτύπων έχουμε τις ονομασίες +1, -1 αντίστοιχα. Σκοπός των γραμμικών ταξινομητών (linear classifiers) είναι η εύρεση εκείνης της γραμμής, που ονομάζεται υπερεπίπεδο (hyperplane) ή επιφάνεια απόφασης (decision surface) στην περίπτωση πολλών διαστάσεων. Το υπερεπίπεδο (hyperplane) διαχωρίζει βέλτιστα τις δύο κατηγορίες. Η απόσταση ανάμεσα στο υπερεπίπεδο και το πλησιέστερο σημείο ονομάζεται περιθώριο (margin). Το βέλτιστο υπερεπίπεδο (optimal hyperplane) είναι εκείνο για το οποίο παρατηρείται το μεγαλύτερο περιθώριο διαχωρισμού. Τα πρότυπα που βρίσκονται πάνω στα όρια των υποστηρικτικών γραμμών απόφασης (supporting hyperplanes) ονομάζονται διανύσματα υποστήριξης (support vectors).



Σχήμα 33: Ένα πρόβλημα ταξινόμησης σε δύο κατηγορίες διαχωρισμένων από το βέλτιστο υπερεπίπεδο.

Ένα υπερεπίπεδο ικανοποιεί την εξίσωση $\langle w, x \rangle + b = 0$, όπου w είναι το κανονικό του διάνυσμα (normal vector) και b είναι η παράμετρος πραγματικής μετατόπισης. Στην περίπτωση δυαδικής ταξινόμησης το αριστερό τμήμα της παραπάνω εξίσωσης είναι θετικό από τη μία πλευρά του υπερεπιπέδου και αρνητικό από την άλλη πλευρά. Για τη μεγιστοποίηση του περιθωρίου (margin) και την εύρεση του βέλτιστου υπερεπιπέδου θα πρέπει να ελαχιστοποιηθεί το μήκος του κανονικού διανύσματος. Μαθηματικά το πρόβλημα διατυπώνεται ως εξής:

$$\begin{aligned} &\text{Ελαχιστοποίηση} && \frac{1}{2} \|w\|^2 \\ &\text{υ.π.} && y_i (\langle w, x_i \rangle + b) \geq 1 \end{aligned}$$

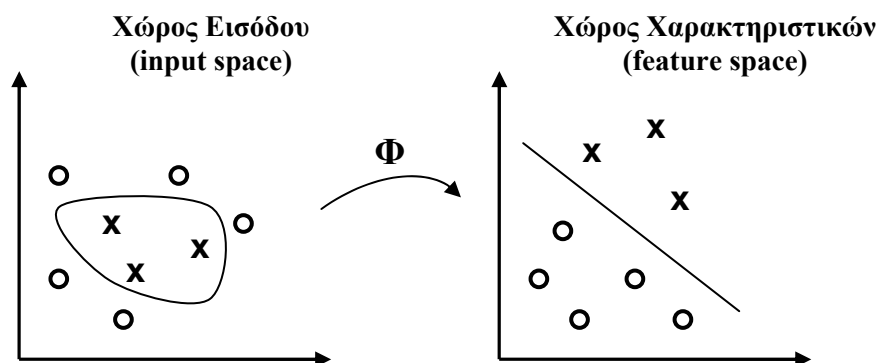
Το πρόβλημα του μη-πλήρως διαχωρισμού των κατηγοριών από ένα υπερεπίπεδο αντιμετωπίζεται με την παροχή της δυνατότητας παραβίασης του διαχωριστικού περιορισμού στο παραπάνω πρόβλημα. Η εισαγωγή των χαλαρών μεταβλητών (slack variables) $\xi_i \geq 0$ οδηγεί στην παρακάτω μετατροπή του προβλήματος:

$$\begin{aligned} &\text{Ελαχιστοποίηση} && \frac{1}{2} \|w\|^2 + C \sum_{i=1}^n \xi_i \\ &\text{υ.π.} && y_i (\langle w, x_i \rangle + b) \geq 1 - \xi_i \end{aligned}$$

Η παράμετρος $C > 0$ ονομάζεται παράμετρος κόστους (cost parameter), και η τιμή της ελέγχει την ισορροπία ανάμεσα στους συγκρουόμενους στόχους της ελαχιστοποίησης του σφάλματος εκπαίδευσης και της μεγιστοποίησης του περιθωρίου διαχωρισμού.

Τα SVM αποδεικνύονται ιδιαίτερα χρήσιμα στα προβλήματα πιστοληπτικής βαθμολόγησης, όπου οι δύο κατηγορίες υποψηφίων δεν είναι γραμμικά διαχωρίσιμες. Η λύση που παρέχουν είναι η αντιστοίχιση των δεδομένων εκπαίδευσης σε ένα χώρο χαρακτηριστικών με μεγαλύτερες διαστάσεις, όπου το πρόβλημα μετατρέπεται σε γραμμικό και άρα μπορούν να εφαρμοστούν τα όσα αναφέραμε στις δύο προηγούμενες παραγράφους (σχήμα 34). Έπειτα η λύση μεταφέρεται στον αρχικό χώρο των δεδομένων εισόδου. Η εύρεση της κατάλληλης συνάρτησης αντιστοίχισης

Φ μπορεί να αποδειχτεί δύσκολη. Για αυτόν το λόγο χρησιμοποιείται η συνάρτηση πυρήνα (kernel function) από τα SVM, η οποία δεν απαιτεί τον προκαθορισμό αυτής της αντιστοίχισης. Η διαχωριστική γραμμή απόφασης που υπολογίζεται στο χώρο των χαρακτηριστικών οδηγεί σε μία μη-γραμμική περιοχή απόφασης στο χώρο των δεδομένων εισόδου.



Σχήμα 34: Απεικόνιση της βασικής ιδέας των SVM για την επίλυση μη-γραμμικών προβλημάτων ταξινόμησης. Τα δεδομένα, που είναι μη-γραμμικά διαχωρίσιμα στο χώρο της εισόδου, αντιστοιχίζονται από τη συνάρτηση Φ στο χώρο των χαρακτηριστικών, όπου τα δεδομένα είναι γραμμικά διαχωρίσιμα. Το γραμμικό πρόβλημα που προκύπτει μπορεί εύκολα να επιλυθεί.

Η συνάρτηση πυρήνα k προσδιορίζεται έτσι ώστε:

$$\langle \Phi(x), \Phi(x_i) \rangle = k(x, x_i)$$

Από τη στιγμή που τα διανύσματα εμφανίζονται μόνο σε εσωτερικά γινόμενα, καθίσταται εύκολη η γενίκευση για τις μη-γραμμικές περιπτώσεις με βάση την παραπάνω συνάρτηση πυρήνα. Η αντιστοίχιση προκύπτει από την αντικατάσταση του x με $\Phi(x)$ και την αντικατάσταση του εσωτερικού γινομένου με τη συνάρτηση πυρήνα. Η επιλογή της συνάρτησης πυρήνα προσδιορίζει το είδος της επιφάνειας απόφασης και άρα επηρεάζει τις εκτιμήσεις. Τέσσερις συχνά χρησιμοποιούμενοι πυρήνες είναι ο γραμμικός πυρήνας (linear kernel)

$$k_{lin}: k(x, x_i) = x \cdot x_i$$

ο πυρήνας με βάση τη συνάρτηση ακτινικής βάσης (radial basis function kernel)

$$k_{RBF}(x, x_i) = e^{-\gamma |x - x_i|^2}$$

ο πολυώνυμος πυρήνας (polynomial kernel)

$$k_{poly}(x, x_i) = (\gamma x \cdot x_i + r)^d$$

και ο σιγμοειδής πυρήνας (sigmoid kernel)

$$k_{sig}(x, x_i) = \tanh(\gamma x \cdot x_i + r)$$

όπου γ και r είναι θετικές παράμετροι και d είναι ο βαθμός του πολυωνύμου.

Όσον αφορά το πρόβλημα της πιστοληπτικής βαθμολόγησης τα SVM χρησιμοποιούνται με επιτυχία από την Fair Isaac (2003), μία από τις μεγαλύτερες εταιρίες αξιολόγησης πιστωτικού κινδύνου, η οποία πρώτη εφάρμοσε σύστημα πιστοληπτικής βαθμολόγησης για την ταξινόμηση υποψηφίων στη χορήγηση πιστωτικών καρτών. Οι Schebesch και Stecking (2003) έδειξαν ότι τα SVM μπορούν να χρησιμοποιηθούν αποτελεσματικά στην πιστοληπτική βαθμολόγηση, χωρίς να απαιτούν ισχυρές υποθέσεις αναφορικά με τη δομή του μοντέλου βαθμολόγησης.

Τα νευρωνικά δίκτυα μπορούν να θεωρηθούν ως μία τεχνική μη-γραμμικής παλινδρόμησης (Cheng και Titterington, 1994) και έχουν εφαρμοστεί με αποτελεσματικότητα στην πιστοληπτική βαθμολόγηση. Τα νευρωνικά δίκτυα είναι

ιδιαίτερα χρήσιμα σε περιπτώσεις, όπου εξαρτημένες και ανεξάρτητες μεταβλητές παρουσιάζουν περίπλοκες μη-γραμμικές σχέσεις.

Ενδεικτικό της απήχησης που είχε η χρησιμοποίηση των ΤΝΔ είναι το γεγονός ότι η American Express χρησιμοποιεί ένα σύστημα βασισμένο σε νευρωνικά δίκτυα, προκειμένου να εντοπίζει περιπτώσεις απάτης μέσω πιστωτικών καρτών, ενώ η Security Pacific Bank (SPB) χρησιμοποιεί ένα ευφύες σύστημα νευρωνικού δικτύου για την πιστοληπτική βαθμολόγηση στη δανειοδότηση μικρών επιχειρήσεων. Η συγκεκριμένη εφαρμογή αφορά έναν πολυεπίπεδο perceptron (MLP - multi-layer perceptron), που χρησιμοποιεί ως διαδικασία μάθησης τον αλγόριθμο της ανάστροφης διάδοσης του σφάλματος (back-propagation learning algorithm). Η συχνή χρήση του MLP σε πραγματικές εφαρμογές αποδίδεται στη βελτιωμένη συναρτησιακή προσαρμοστικότητα, που οφείλεται στην ικανότητα της εσωτερικής μη-γραμμικής αναγνώρισης προτύπων. Οι Vellido et al. (1999) κάνουν μία εκτεταμένη αναφορά στην εφαρμογή των ΤΝΔ σε επιχειρηματικές εφαρμογές.

Τα ΤΝΔ έχουν χρησιμοποιηθεί για την εκτίμηση πιστωτικού κινδύνου στις μελέτες των Arminger, Enache, και Bonne (1997), Barney, Graves, και Johnson (1999), Borowsky (1995), Cheng και Hwang (2003), Deng (1993), Desai et al. (1997), Desai et al. (1996), Glorfeld (1996), Glorfeld και Hardgrave (1996), Hand και Henley (1997), Jagielska και Jaworski (1996), Jensen (1992), Piramuthu (1999), Piramuthu, Shaw, και Gentry (1994), Richeson, Zimmermann, και Barnett (1994), Robins (1993), Torsun (1996) και West (2000), και Williamson (1995). Τα νευρωνικά δίκτυα έχουν αποδειχθεί στις περισσότερες από τις παραπάνω περιπτώσεις ότι έχουν καλύτερη ικανότητα πιστοληπτικής βαθμολόγησης από τη γραμμική διακριτική ανάλυση και τη λογιστική παλινδρόμηση (Desai, Conway, & Overstreet, 1997; Desai, Crook, & Overstreet, 1996; Jensen, 1992; Piramuthu, 1999; West, 2000). Παρόλα αυτά δεν ξεφεύγουν της κριτικής πάνω στο ζήτημα της μακράς διαδικασίας εκπαίδευσης (training process) στο σχεδιασμό της βέλτιστης τοπολογίας του δικτύου, καθώς αυτό συνεπάγεται περιορισμένη δυνατότητα εφαρμογής στην αντιμετώπιση πραγματικών προβλημάτων πιστοληπτικής βαθμολόγησης.

Οι Desai et al. (1996) συνέκριναν τα ΤΝΔ με κλασικές στατιστικές τεχνικές και έδειξαν την καλύτερη επίδοσή τους όταν το μέτρο αποτελεσματικότητας είναι το ποσοστό των «κακών» δανείων που ταξινομούνται σωστά. Η λογιστική παλινδρόμηση αποδείχτηκε εξίσου καλή με τα ΤΝΔ, στην περίπτωση που λαμβάνεται ως μέτρο αποτελεσματικότητας το ποσοστό των σωστά ταξινομημένων αιτήσεων στο σύνολο των αιτήσεων. Όσον αφορά στην πιστοληπτική βαθμολόγηση, το ποσοστό των σωστά ταξινομημένων «κακών» δανείων αποτελεί, σύμφωνα με τους Desai et al. (1996), το σημαντικότερο μέτρο αποτελεσματικότητας, λόγω του ότι το κόστος της χορήγησης ενός δανείου σε έναν αφερέγγυο πελάτη είναι πολύ μεγαλύτερο από εκείνο της απόρριψης δανειοδότησης ενός φερέγγυου πελάτη.

Σύμφωνα με τον West (2000) τα ΤΝΔ μπορούν να βελτιώσουν την ακρίβεια στην πιστοληπτική βαθμολόγηση σε σύγκριση με τη γραμμική διακριτική ανάλυση, τους k-πλησιέστερους γείτονες και τα δέντρα CART. Παράλληλα η μελέτη αποδεικνύει ότι μια καλή εναλλακτική μέθοδος, ως προς αυτή των νευρωνικών δικτύων, είναι η λογιστική παλινδρόμηση. Οι k-πλησιέστεροι γείτονες και τα δέντρα CART δεν εμφάνισαν ενθαρρυντικά αποτελέσματα, αλλά αυτό πιθανότατα οφείλεται στο ότι είναι καταλληλότερα σε πολύ μεγάλα σύνολα δεδομένων. Συγκεκριμένα χρησιμοποιήθηκαν 5 αρχιτεκτονικές ΤΝΔ οι οποίες είναι ο πολυεπίπεδος perceptron (MLP), το mixture of experts (MOE), το radial basis function (RBF), το learning vector quantization (LVQ) και το fuzzy adaptive resonance (FAR). Οι διαφορετικοί αλγόριθμοι, που χρησιμοποιούν τα μοντέλα αυτά για την εκτίμηση της συνάρτησης

πιστοληπτικής βαθμολόγησης, και η εφαρμογή από μέρους τους διαφορετικών μεθόδων εκπαίδευσης για την εξαγωγή της πληροφορίας από τα διαθέσιμα παραδείγματα πιστοληπτικής βαθμολόγησης, έχουν ως αναπόφευκτο αποτέλεσμα να δώσει το κάθε ένα από αυτά διαφορετικούς βαθμούς ακρίβειας πρόβλεψης. Το συμπέρασμα της μελέτης σε πραγματικά δεδομένα από την γερμανική και αυστραλιανή αγορά πιστωτικών καρτών, είναι ότι η χρήση ΤΝΔ μπορεί να επιτύχει βελτίωση στην ακρίβεια της πιστοληπτικής βαθμολόγησης σε ποσοστό 0.5 - 3%. Η χρησιμοποίηση πάντως των ΤΝΔ απαιτεί ικανότητες μοντελοποίησης για την ανάπτυξη τοπολογιών δικτύου και την επινόηση ανώτερων μεθόδων εκπαίδευσης. Αν και το MLP αποτελεί τον συχνότερα χρησιμοποιούμενο τύπο ΤΝΔ, παρόλα αυτά τα μοντέλα MOE και RBF θα έπρεπε να θεωρούνται προτιμότερα σε περιπτώσεις πιστοληπτικής βαθμολόγησης. Το MOE αποδεικνύεται οριακά καλύτερο στα δύο σύνολα δεδομένων που χρησιμοποιήθηκαν, πιθανότατα λόγω της ικανότητάς του να διαχωρίζει το χώρο των δεδομένων εισόδου, καθώς με αυτόν τον τρόπο η εκπαίδευση του δικτύου συγκλίνει στο ολικό ελάχιστο της επιφάνειας σφάλματος.

Ο Piramuthu (1999) προτείνει τη χρησιμοποίηση των ΤΝΔ στη διαδικασία λήψης αποφάσεων που σχετίζονται με την αξιολόγηση πιστωτικού κινδύνου, λόγω του ότι αυτή είναι περίπλοκη και μη δομημένη. Για παράδειγμα τα νευρωνικά δίκτυα πρόσθιας τροφοδότησης έχουν το πλεονέκτημα της γενίκευσης, που είναι ιδιαίτερα χρήσιμο σε εφαρμογές με ατελή δεδομένα. Τέτοιου είδους εφαρμογές είναι κατεξοχήν οι χρηματοοικονομικές, όπως είναι η εκτίμηση πιστωτικού κινδύνου, όπου τα δεδομένα που χρησιμοποιούνται για την εκτίμηση του πιστωτικού κινδύνου ενός νέου πελάτη δεν συμπίπτουν απαραίτητα με τα διαθέσιμα στοιχεία των πιστωτών για άλλους πελάτες. Επιπλέον, τα νευρωνικά δίκτυα πρόσθιας τροφοδότησης είναι ανεκτικά στο «θόρυβο», εξαιτίας της κατανεμημένης αναπαράστασης της γνώσης ανάμεσα στους διάφορους συνδέσμους τους. Επίσης δεν απαιτούν ιδιαίτερες υποθέσεις σχετικά με την κατανομή των δεδομένων και των αλληλεπιδράσεων μεταξύ των μεταβλητών, σε αντίθεση με τον τρόπο λειτουργίας αρκετών τεχνικών από το χώρο της στατιστικής ανάλυσης.

Ένα πρόβλημα που συνδέεται με τα ΤΝΔ οφείλεται στο γεγονός ότι είναι εξαιρετικά δύσκολο να εξηγηθεί το σκεπτικό πίσω από την απόφαση στην οποία καταλήγουν, εξαιτίας των κρυφών σταθμίσεων στους συνδέσμους τους. Οι προτεινόμενες μέθοδοι εξαγωγής κανόνων μέσω νευρωνικών δικτύων για την επεξήγηση της συλλογιστικής, που κρύβεται πίσω από ένα αποτέλεσμα στο οποίο καταλήγουν δεν κρίνονται αρκετά ικανοποιητικές, καθώς οι κανόνες που χρησιμοποιούνται, δεν αναπαριστούν την αποκτηθείσα γνώση με κατάλληλο τρόπο.

Η πρόσφατη ανάπτυξη των νευροασαφών συστημάτων που ενσωματώνουν τις επιθυμητές αρχές τόσο των ασαφών συστημάτων, όσο και των νευρωνικών δικτύων, μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την ανάπτυξη ασαφών κανόνων με «φυσικό» τρόπο. Και αυτό γιατί η μάθηση στα νευροασαφή συστήματα καταλήγει σε κατανοήσιμους λεκτικούς κανόνες της μορφής if-then. Τα νευροασαφή συστήματα είναι εξαιρετικά χρήσιμα στην επεξήγηση της συλλογιστικής που κρύβεται πίσω από κάθε αποτέλεσμά τους, ενώ οι κανόνες IF-THEN που παράγουν είναι αρκετά απλοί, ώστε να μπορούν να χρησιμοποιηθούν σε ένα έμπειρο σύστημα, σε περίπτωση που χρειαστεί. Οι κανόνες αυτής της μορφής επίσης επιτρέπουν την χρησιμοποίηση τόσο ποιοτικών, όσο και ποσοτικών δεδομένων. Το χαρακτηριστικό αυτό καθιστά τα νευροασαφή συστήματα ιδιαίτερα χρήσιμα στην πιστοληπτική βαθμολόγηση.

Πέρα από τους κανόνες στους οποίους καταλήγουν τα νευροασαφή συστήματα, εξωτερικά καθορισμένες οδηγίες μπορούν να εισαχθούν ως IF-THEN κανόνες. Το σύστημα χρησιμοποιεί και τα δύο σύνολα, δηλαδή εκείνα που

δημιουργούνται από παραδείγματα εκμάθησης και εκείνα που καθορίζονται από τον χρήστη ως οδηγίες για σκοπούς ταξινόμησης. Η διαδικασία παροχής οδηγιών είναι εξαιρετικά χρήσιμη σε περιπτώσεις όπου πρόσθετη πληροφόρηση παρέχεται από τον ειδικό στο συγκεκριμένο αντικείμενο που εξετάζεται. Συνήθως στις πραγματικές εφαρμογές, οι οδηγίες αυτές παρέχουν πληροφορίες που δεν είναι διαθέσιμες στο σύνολο των δεδομένων εκμάθησης, και είναι το αποτέλεσμα της εμπειρικής γνώσης του ειδικού, που ασχολείται πολλά χρόνια με το συγκεκριμένο αντικείμενο. Ανάλογη παροχή οδηγιών σε νευρωνικό δίκτυο δεν είναι εύκολο να υπάρξει, παρά το ότι με μια χρονοβόρα κατάλληλη προσαρμογή των βαρών από τον χρήστη θα μπορούσε να καταστεί δυνατή. Εξαιτίας της ασαφопоίησης των δεδομένων εισόδου, οι μεταβλητές εισόδου στο νευροασαφές σύστημα παίρνουν μερικές ασαφοποιημένες τιμές (π.χ. μικρό, μεσαίο, μεγάλο), αντί για μια μεγάλη γκάμα πραγματικών αριθμητικών τιμών. Το γεγονός αυτό συνεπάγεται μεγάλη μείωση του χρόνου μάθησης για το νευροασαφές σύστημα.

Ο Piramuthu (1999) παραθέτει τρεις πραγματικές εφαρμογές των νευρωνικών δικτύων και των ασαφών νευρωνικών δικτύων. Καταλήγει στο συμπέρασμα ότι υπάρχει παραχώρηση (tradeoff) ανάμεσα στην αποτελεσματικότητα της ταξινόμησης και την κατανόηση των αποτελεσμάτων. Τα αποτελέσματα με τη χρήση νευροασαφών συστημάτων είναι κατανοήσιμα από κάθε χρήστη, καθώς είναι της μορφής IF-THEN κανόνων. Κάθε απόφαση που εξάγεται μπορεί να ερμηνευτεί. Στα νευρωνικά δίκτυα αντίθετα το αποτέλεσμα θεωρείται αυτόματα το καλύτερο δυνατό, χωρίς να εξηγείται το πώς κατέληξαν σε αυτό. Όμως σε πραγματικές συνθήκες ο αποφασίζοντας θα πρέπει να είναι σε θέση να διευκρινίσει γιατί μια συγκεκριμένη αίτηση εγκρίνεται ή απορρίπτεται. Συνολικά βρέθηκε ότι τα νευρωνικά δίκτυα είχαν καλύτερη επίδοση από τα νευροασαφή σε όρους ακρίβειας ταξινόμησης, τόσο στα δεδομένα εκμάθησης, όσο και στα δεδομένα ελέγχου. Το αποτέλεσμα αυτό δεν θα πρέπει να μας εκπλήσσει δεδομένου των πολλών υπολογισμών που γίνονται κατά την ασαφопоίηση και την αποασαφопоίηση, αλλά και των υπολογισμών που γίνονται στην ασαφή αριθμητική, κατά την εκμάθηση των κανόνων στο νευροασαφές σύστημα. Ο Piramuthu (1999) καταλήγει ότι τα νευρωνικά δίκτυα είναι προτιμότερα στην εκτίμηση του πιστωτικού κινδύνου, εφόσον δεν μας ενδιαφέρει ο τρόπος με τον οποίο κατέληξαν στην απόφασή. Διαφορετικά τα νευροασαφή συστήματα, μπορεί να μην είναι εξίσου αποτελεσματικά στην ταξινόμηση, αλλά παράγουν τους εύκολα κατανοήσιμους κανόνες IF-THEN. Τα συμπεράσματα αυτά προέκυψαν από τρεις εφαρμογές των δύο συστημάτων. Η πρώτη αφορούσε την περίπτωση δεδομένων από αιτήσεις για τη χορήγηση πιστωτικών καρτών, η δεύτερη την περίπτωση αθέτησης δανείου και η τρίτη αφορούσε την πρόβλεψη πτώχευσης τραπεζών.

Οι Hoffmann et al. (2002) σύγκριναν δύο είδη ασαφών ταξινομητών για πιστοληπτική βαθμολόγηση. Δύο τύποι μάθησης χρησιμοποιήθηκαν για την εκπαίδευση των ταξινομητών. Ο ένας χρησιμοποιούσε γενετικού τύπου βελτιστοποίηση, ενώ ο άλλος βασιζόταν σε μια αναπαράσταση νευρωνικού δικτύου. Ο γενετικός-ασαφής ταξινομητής καταλήγει σε προσεγγιστικούς ασαφείς κανόνες, όπου ο κάθε κανόνας έχει τους δικούς του ορισμούς συναρτήσεων συμμετοχής. Ο νευροασαφής αλγόριθμος καταλήγει σε περιγραφικούς ασαφείς κανόνες, όπου όλοι οι ασαφείς κανόνες έχουν ένα κοινό χαρακτηριστικό, το οποίο είναι οι λεκτικά μεταφράσιμοι ορισμοί των συναρτήσεων συμμετοχής. Ο νευροασαφής ταξινομητής NEFCLASS που χρησιμοποιήθηκε αποτελεί ένα τριών επιπέδων ασαφή perceptron. Το σύνολο δεδομένων που χρησιμοποιήθηκε αφορούσε πραγματικές βαθμολογήσεις αιτήσεων χορήγησης πίστωσης. Αποδεικνύεται ότι ο γενετικός ασαφής ταξινομητής παρουσιάζει μεγαλύτερη ακρίβεια ταξινόμησης, παρά το ότι οι προσεγγιστικοί

ασαφείς κανόνες στους οποίους καταλήγει είναι λιγότερο κατανοητοί για τον ειδικό που θα διεξάγει την πιστοληπτική βαθμολόγηση από ό,τι οι περιγραφικοί ασαφείς κανόνες, στους οποίους καταλήγει ο νευροασαφής ταξινομητής.

Σκοπός της μελέτης των Lee et al. (2002) είναι να διερευνήσει την αποτελεσματικότητα της πιστοληπτικής βαθμολόγησης μέσω μιας υβριδικής μεθοδολογίας μοντελοποίησης δύο σταδίων, που συνδυάζει την προσέγγιση της διακριτικής ανάλυσης με την τεχνική των ΤΝΔ. Η διακριτική ανάλυση χρησιμοποιείται αρχικά για την πιστοληπτική βαθμολόγηση, το αποτέλεσμα της οποίας καθορίζει τις σημαντικές μεταβλητές πρόβλεψης, που θα χρησιμοποιηθούν ως είσοδοι στο ΤΝΔ. Η ενσωμάτωση του αποτελέσματος της διακριτικής ανάλυσης ως επιπλέον πληροφορίας στο επίπεδο εισόδου αποδείχτηκε ότι συνέβαλε στη διαμόρφωση καλύτερης αρχικής λύσης του ΤΝΔ, στην απλοποίηση της δομής του δικτύου και στη βελτίωση της ακρίβειάς του στην πιστοληπτική βαθμολόγηση. Τα αναλυτικά αποτελέσματα αποδεικνύουν ότι το υβριδικό αυτό μοντέλο παρουσιάζει τη μεγαλύτερη μέση ακρίβεια στην ταξινόμηση δεδομένων πιστωτικών καρτών σε σύγκριση με τις μεθόδους της διακριτικής ανάλυσης και της λογιστικής παλινδρόμησης. Επιπλέον, το συγκεκριμένο μοντέλο έχει το χαμηλότερο σφάλμα ταξινόμησης ενός αφερέγγυου πελάτη ως φερέγγυου.

Οι Malhotra και Malhotra (2002) βρήκαν ότι η συνολική ακρίβεια στην ταξινόμηση καταναλωτικών δανείων του νευροασαφούς συστήματος ANFIS είχε στατιστικά σημαντική διαφορά ως προς την αντίστοιχη της διακριτικής ανάλυσης. Επιπλέον το ANFIS είχε καλύτερη επίδοση στην αναγνώριση πιθανών αφερέγγυων δανειοληπτών. Ένα πρόσθετο πλεονέκτημα του νευροασαφούς συστήματος είναι ότι ο αναλυτής μπορεί μέσω της εισαγωγής ασαφών κανόνων να προσαρμόσει τη διαδικασία χορήγησης δανείων στις ανάγκες του. Οι Malhotra και Malhotra (2003) έδειξαν ότι ένα ΤΝΔ με ανάστροφη διάδοση του σφάλματος έχει μεγαλύτερη ικανότητα στην αναγνώριση προβληματικών δανείων από ό,τι η διακριτική ανάλυση. Οι δύο τεχνικές δεν εμφάνισαν στατιστικά σημαντική διαφορά στα ποσοστά ακρίβειας αναφορικά με την αναγνώριση ομαλών δανείων.

Οι Chen και Huang (2003) χρησιμοποίησαν ένα ΤΝΔ με ανάστροφη διάδοση του σφάλματος και ένα υπολογιστικό μοντέλο βασισμένο σε γενετικούς αλγόριθμους για δύο διαφορετικούς σκοπούς στο χώρο της πιστοληπτικής βαθμολόγησης. Συγκεκριμένα, το ΤΝΔ αποδείχτηκε ακριβέστερο στην ταξινόμηση των προβληματικών δανείων εν συγκρίσει με τη γραμμική διακριτική ανάλυση και τα δέντρα CART. Οι γενετικοί αλγόριθμοι χρησιμοποιούνται στα πλαίσια μίας τεχνικής ανάστροφης ταξινόμησης (inverse classification, για λεπτομέρειες βλέπε Mannino και Koushik, 2000) για την καλύτερη επεξεργασία των απορριφθέντων αιτήσεων, ώστε να βοηθήσουν τους πιστωτές να καθορίσουν ποια μπορεί να είναι μία δεσμευτική αποδοχή χορήγησης της πίστωσης υπό όρους, καθώς και να επεξηγήσουν στους υποψήφιους πελάτες γιατί απερρίφθη τελικά η χορήγηση της πίστωσης. Επιπλέον οι υποψήφιοι πελάτες μπορούν να εξετάσουν μέσω της προτεινόμενης διαδικασίας το ενδεχόμενο βελτίωσης των αιτήσεών τους για μία μελλοντική έγκριση της δανειοδότησής τους. Η ανάστροφη ταξινόμηση με βάση γενετικούς αλγόριθμους αποτελεί μία τεχνική που προσδιορίζει την εναλλακτική με το ελάχιστο κόστος, βάσει της οποίας μπορούν να μεταβληθούν τα χαρακτηριστικά μίας απορριφθείσας αίτησης, προκειμένου αυτή να γίνει αποδεκτή. Συνδυάζοντας μία τεχνική καλής πιστοληπτικής βαθμολόγησης με μία τεχνική ανάστροφης ταξινόμησης, οι πιστωτές μπορούν να αυξήσουν σημαντικά τα κέρδη τους από το χαρτοφυλάκιο των δανείων τους.

6. Εφαρμογή Νευροασαφούς Συστήματος στην Πιστοληπτική Βαθμολόγηση για την Ταξινόμηση Αιτήσεων Πιστωτικών Καρτών

6.1. Περιγραφή των Δεδομένων και Διατύπωση του Προβλήματος

Τα δεδομένα, που χρησιμοποιήθηκαν μέσα στα πλαίσια της παρούσας εργασίας, αντλήθηκαν από 150 αιτήσεις πιστωτικών καρτών που έγιναν στην Εθνική Τράπεζα της Ελλάδος Α.Ε. κατά την περίοδο 1995-1996 (Δαμάσκος 1997, Zorounidis et al., 1998). Για κάθε αίτηση έπρεπε να συμπληρωθούν 25 πεδία από τον υποψήφιο πελάτη. Οι υπεύθυνοι χορηγήσεων της τράπεζας χρησιμοποίησαν τα 7 πιο σημαντικά πεδία στην ανάλυσή τους, τα οποία θεώρησαν ότι είναι τα παρακάτω:

- **Οικογενειακή Κατάσταση:** Η οικογενειακή κατάσταση του υποψηφίου λαμβάνεται υπόψη από τον υπεύθυνο χορήγησης για την εκτίμηση των οικονομικών υποχρεώσεών του, καθώς και για τον προσδιορισμό της κοινωνικής θέσης και στάσης του. Οι δυνατές τιμές αυτού του κριτηρίου δίδονται στον πίνακα 3.
- **Ηλικία:** Η ηλικία των υποψηφίων του δείγματος που χρησιμοποιήθηκε λαμβάνει συνεχείς τιμές στο διάστημα [20, 86]. Με βάση την ηλικία μπορεί να καθοριστεί το εάν ο υποψήφιος βρίσκεται στην παραγωγική περίοδο της ζωής του. Οι πολύ νεαρές ηλικίες δεν εμπνέουν στους αναλυτές την απαραίτητη εμπιστοσύνη αναφορικά με την υπευθυνότητα του υποψηφίου για την εκπλήρωση των υποχρεώσεών του. Από την άλλη πλευρά οι τράπεζες επιδιώκουν μέσα από τη χορήγηση πιστωτικής κάρτας σε νεαρούς πελάτες να μεγαλώσουν το πελατολόγιο τους, προκειμένου να ενισχύσουν τις σταυροειδείς πωλήσεις τους (cross selling). Οι ηλικιωμένοι υποψήφιοι αντίθετα, δεν προσφέρονται για μελλοντική ενίσχυση της συνεργασίας τους με την τράπεζα.
- **Επάγγελμα:** Το επάγγελμα αποτελεί για τους αναλυτές της τράπεζας το σημαντικότερο κριτήριο στη λήψη απόφασης σχετικά με την έγκριση της χορήγησης πιστωτικής κάρτας. Το επάγγελμα αποτελεί την καλύτερη ένδειξη της οικονομικής επιφάνειας του υποψηφίου, αλλά και του κοινωνικού του προφίλ. Στο σύνολο των 150 αιτήσεων εντοπίστηκαν 58 διαφορετικά επαγγέλματα, τα οποία κατηγοριοποιήθηκαν από τους υπεύθυνους χορηγήσεων σε μία 10βαθμη διακριτή κλίμακα από το 1 έως το 8, με δύο ενδιάμεσες τιμές (το 2,5 και το 4,5) για ορισμένα από αυτά τα επαγγέλματα.
- **Χρόνια στο Επάγγελμα:** Για τους ελεύθερους επαγγελματίες καταγράφεται ο συνολικός χρόνος άσκησης του επαγγέλματος, ενώ για τους υπαλλήλους καταγράφεται ο χρόνος εργασίας στον τελευταίο εργοδότη.
- **Τηλέφωνο εργασίας:** Η δήλωση του τηλεφώνου εργασίας στην αίτηση που συμπληρώνει ο πελάτης θεωρείται από τους υπεύθυνους χορηγήσεων ως μία ένδειξη των προθέσεών του για καλή συνεργασία με την τράπεζα. Το είδος του επαγγέλματος ορισμένων υποψηφίων είναι τέτοιο (π.χ. συνταξιούχος, εισοδηματίας, ναυτικός κλπ), ώστε να μην απαιτείται η συμπλήρωση της ύπαρξης ή μη τηλεφώνου εργασίας στην αίτηση. Για αυτόν το λόγο το

συγκεκριμένο ποιοτικό χαρακτηριστικό μπορεί να πάρει τρεις τιμές (βλέπε πίνακα 3).

- **Στοιχεία Κατοικίας:** Η ύπαρξη ιδιόκτητης κατοικίας αποτελεί ένα είδος εγγύησης για την εκπλήρωση των υποχρεώσεων του υποψηφίου απέναντι στην τράπεζα. Στην περίπτωση που ο υποψήφιος ενοικιάζει την κατοικία του, φανερώνεται μέρος των οικονομικών υποχρεώσεων που έχει ήδη αναλάβει.
- **Δήλωση Λογαριασμού για την πληρωμή των δόσεων:** Η αποδοχή από πλευράς του πελάτη να χρεώνεται ο λογαριασμό του για την πληρωμή των μηνιαίων δόσεων της πιστωτικής κάρτας καταδεικνύει την καλή του προαίρεση για την εκπλήρωση των υποχρεώσεων του απέναντι στην τράπεζα.

Πίνακας 3: Μεταβλητές αξιολόγησης των αιτήσεων για λήψη πιστωτικής κάρτας.

Οικογενειακή Κατάσταση	(1) Διαζευγμένος (2) Άγαμος (3) Παντρεμένος ή Χήρος
Ηλικία	Συνεχής Κλίμακα [20 – 86]
Επάγγελμα	(1) Άνεργοι (2) Ελεύθεροι Επαγγελματίες, Εισοδηματίες, Επιχειρηματίες (2.5) Εστιάτορες, Αρτοποιές, Κρεοπώλες (3) Έμποροι, Καταστηματάρχες (4) Ασφαλιστές, Οινοποιοί, Κατασκευαστές Καλλυντικών (4.5) Αγρότες, Εργολάβοι, Τεχνικοί, Απασχολούμενοι σε Οικοδομικές Εργασίες (5) Ιδιωτικοί Υπάλληλοι (6) Μηχανικοί, Δημόσιοι/Δημοτικοί Υπάλληλοι, Αξιωματικοί (7) Συνταξιούχοι (8) Γιατροί, Νοσοκόμοι, Δικηγόροι, Δικαστικοί, Δάσκαλοι, Καθηγητές, Φαρμακοποιοί
Χρόνια στο Επάγγελμα	Συνεχής Κλίμακα [0 – 35]
Τηλέφωνο Εργασίας	(1) Δεν υπάρχει (2) Δεν απαιτείται (3) Υπάρχει
Στοιχεία Κατοικίας	(1) Ενοικιαζόμενη (2) Άλλη περίπτωση (π.χ. συγκατοίκηση με γονείς κλπ) (3) Ιδιόκτητη
Λογαριασμός Καταθέσεων	Πληρωμή των δόσεων μέσω υπάρχοντος λογαριασμού καταθέσεων (1) Δεν υπάρχει (2) Υπάρχει

Όσον αφορά τις ποιοτικές μεταβλητές, όπως είναι η «οικογενειακή κατάσταση», το «επάγγελμα», το «τηλέφωνο εργασίας», τα «στοιχεία κατοικίας» και ο «λογαριασμός καταθέσεων», οι κλίμακες που επιλέχθηκαν ήταν κατά αύξουσα σειρά προτίμησης από την πλευρά των υπεύθυνων χορηγήσεων. Οι μικρότερες τιμές των χαρακτηριστικών υποδηλώνουν χαμηλότερο βαθμό προτίμησης για χορήγηση

πίστωσης, και οι μεγαλύτερες τιμές αξιολογούνται ως περισσότερο ευνοϊκές για τον υποψήφιο. Το δηλωθέν ετήσιο εισόδημα δεν συμπεριλήφθηκε στις προς εξέταση παραμέτρους, καθώς η μελέτη αφορά κυλιόμενες πιστώσεις σχετικά μικρού πιστωτικού ορίου. Εν συγκρίσει με τα υπόλοιπα ποιοτικά χαρακτηριστικά, το «επάγγελμα» έχει περισσότερες διαβαθμίσεις, λόγω της μεγάλης ποικιλίας και διαφορετικότητας των επαγγελμάτων των υποψηφίων.

Η αξιολόγηση των 150 αιτήσεων οδήγησε στην ταξινόμησή τους σε τρεις κατηγορίες:

- (1) Οι *αποδεκτές αιτήσεις*, για τις οποίες χορηγήθηκε η πιστωτική κάρτα, ήταν συνολικά 74.
- (2) Οι *αιτήσεις προς επανεξέταση* ήταν συνολικά 52. Οι συγκεκριμένες αιτήσεις δεν μπορούσαν με βεβαιότητα να ταξινομηθούν από τους υπεύθυνους χορηγήσεων στις αποδεκτές ή στις απορριφθείσες.
- (3) Οι *απορριφθείσες αιτήσεις* ήταν συνολικά 24.

Η ταξινόμηση των αιτήσεων σε τρεις κατηγορίες συνιστά μία πιο ευέλικτη διαδικασία για τους αναλυτές, έναντι της ταξινόμησης σε δύο κατηγορίες, λόγω του ότι τους επιτρέπει να προσδιορίσουν μία αβέβαιη περιοχή απόφασης. Οι αιτήσεις για πιστωτικές κάρτες, που υπάγονται σε αυτήν την αβέβαιη περιοχή απόφασης, θα πρέπει να επανεξεταστούν μέσα στα πλαίσια μίας δεύτερης ανάλυσης για την τελική κατηγοριοποίησή τους.

Τα επτά κριτήρια του πίνακα 3 χρησιμοποιήθηκαν για την ανάπτυξη των μοντέλων ταξινόμησης. Στην παράγραφο 6.2 αναλύεται η επιλογή των παραμέτρων για το νευροασαφές σύστημα και στην παράγραφο 6.3 παρουσιάζονται οι παράμετροι των μεθόδων με τις οποίες συγκρίθηκε η αποτελεσματικότητα του νευροασαφούς συστήματος.

Για την αξιολόγηση της αποτελεσματικότητας των μεθόδων, εφαρμόστηκε η διαδικασία cross-validation (Stone, 1974). Συγκεκριμένα χρησιμοποιήθηκε η διαδικασία 10-fold cross-validation, βάσει της οποίας διασπάται τυχαία το σύνολο των 150 δεδομένων σε 10 αλληλοαποκλειόμενα υποσύνολα μεγέθους 15 στοιχείων το καθένα. Αρχικά χρησιμοποιήθηκαν 9 από τα 10 υποσύνολα για την εκπαίδευση του συστήματος. Το εναπομείναν υποσύνολο χρησιμοποιήθηκε για τον έλεγχο του συστήματος, ώστε να καταγραφεί το ποσοστό ακρίβειας ταξινόμησης στα «νέα» δεδομένα. Η διαδικασία αυτή επαναλήφθηκε άλλες 9 φορές, όσα δηλαδή ήταν και τα υπόλοιπα υποσύνολα που μπορούσαν να χρησιμοποιηθούν ως δείγματα ελέγχου. Ως μέτρο σφάλματος σε κάθε επανάληψη χρησιμοποιήθηκε το ποσοστό που προέκυπτε από το λόγο των εσφαλμένων ταξινομήσεων προς το σύνολο των περιπτώσεων που έπρεπε να ταξινομηθούν. Ως συνολικό μέτρο σφάλματος χρησιμοποιήθηκε το μέσο ποσοστιαίο σφάλμα των ταξινομήσεων που πραγματοποιήθηκαν στα 10 διαφορετικά δείγματα ελέγχου. Η ακρίβεια ταξινόμησης προκύπτει αν από τη μονάδα αφαιρεθεί το ποσοστό που εκφράζει το συνολικό μέτρο σφάλματος³.

6.2. Παράμετροι Νευροασαφούς Συστήματος

Το πρόβλημα της πιστοληπτικής βαθμολόγησης στην προκειμένη περίπτωση συνιστά ένα πρόβλημα ταξινόμησης των 150 αιτήσεων στις τρεις κατηγορίες, που περιγράφηκαν στην παράγραφο 6.1, με βάση τις 7 ανεξάρτητες μεταβλητές του

³ Σημείωση: Τα συστήματα NEFClass και Weka, που χρησιμοποιήθηκαν μέσα στα πλαίσια αυτής της εργασίας, περιλαμβάνουν την επιλογή για τη διαδικασία 10-fold cross-validation. Για λόγους σύγκρισης των αποτελεσμάτων, η συγκεκριμένη επιλογή δεν χρησιμοποιήθηκε για κανένα από τα δύο συστήματα.

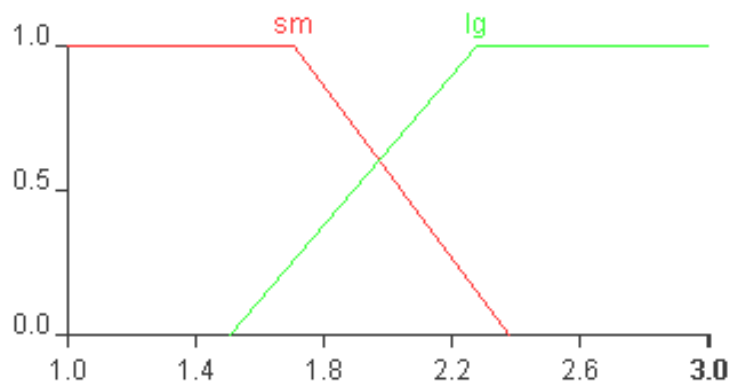
πίνακα 3. Για την υλοποίηση του νευροασαφούς συστήματος χρησιμοποιήθηκε το σύστημα NEFCLASS (Nauck et al., 1997). Για κάθε ανεξάρτητη μεταβλητή προσδιορίζεται ο αριθμός και το είδος των ασαφών συνόλων, που διαμερίζουν το πεδίο τιμών της. Κάθε μεταβλητή (βλέπε πίνακα 4) διαμερίζεται σε ένα ή περισσότερα ασαφή σύνολα. Κάθε ασαφές σύνολο περιγράφει ένα πεδίο τιμών της μεταβλητής, αποδίδοντάς του μία λεκτική ερμηνεία. Οι λεκτικοί προσδιορισμοί που χρησιμοποιήθηκαν είναι οι «πάρα πολύ μικρός-xsm» (extra small), «πολύ μικρός-vsm» (very small), «μικρός-sm» (small), «μεσαίος-md» (medium), «μεγάλος-lg» (large), «πολύ μεγάλος-vlg» (very large) και «πάρα πολύ μεγάλος-xlg» (extra large). Οι προσδιορισμοί αυτοί εκφράζουν τις τιμές που παίρνουν οι ανεξάρτητες μεταβλητές. Όσον αφορά τη μεταβλητή επάγγελμα, τα 15 ασαφή σύνολα λαμβάνουν τις ονομασίες τους βάσει των θέσεων τους από τα αριστερά στα δεξιά, έτσι ώστε οι μικρότερες τιμές της μεταβλητής να προσδιορίζονται από το ασαφές σύνολο fs0 και οι μεγαλύτερες τιμές να προσδιορίζονται από το ασαφές σύνολο fs14 (βλέπε σχήμα 37).

Ο αριθμός και το είδος των ασαφών συνόλων προσδιορίστηκαν μετά από μία διαδικασία δοκιμής και σφάλματος, προκειμένου να επιτευχθεί η μεγαλύτερη δυνατή ακρίβεια στην ταξινόμηση των αιτήσεων στις τρεις κατηγορίες. Για τον προσδιορισμό των ασαφών συνόλων των ανεξάρτητων μεταβλητών χρησιμοποιήθηκε ένας συνδυασμός τριγωνικών και καμπανοειδών συναρτήσεων. Ο πίνακας 4 παρουσιάζει τον αριθμό και το είδος των ασαφών συνόλων (Α.Σ.) που τελικά χρησιμοποιήθηκαν. Τόσο η τριγωνική μορφή ασαφών συνόλων, όσο και η καμπανοειδής, συμβάλλουν στην αναπαράσταση ασαφών αριθμών. Παρά το γεγονός ότι ο κατάλληλος αριθμός των ασαφών συνόλων καθορίστηκε εμπειρικά, υπάρχει μία λογική πίσω από την αρχική επιλογή ενός αριθμού ασαφών συνόλων, προκειμένου να προσδιοριστεί ευκολότερα ο τελικός τους αριθμός. Συγκεκριμένα, οι μεταβλητές «οικογενειακή κατάσταση», «τηλέφωνο εργασίας», «στοιχεία κατοικίας» και «λογαριασμός καταθέσεων» αναμενόταν ότι θα λάμβαναν ένα μικρό αριθμό ασαφών συνόλων, λόγω του ότι το πεδίο τιμών τους είναι περιορισμένου εύρους. Για αυτόν το λόγο επιλέχθηκαν αρχικά δύο έως τέσσερα ασαφή σύνολα, τα οποία θα έπρεπε να καλύψουν το πεδίο τιμών των συγκεκριμένων μεταβλητών. Αναφορικά με τις μεταβλητές «ηλικία», «επάγγελμα» και «χρόνια στο επάγγελμα», αναμενόταν ότι θα χρειαστούν ένα μεγάλο αριθμό ασαφών συνόλων, τόσο γιατί το εύρος των τιμών που λαμβάνουν είναι μεγάλο, όσο και γιατί η συμβολή τους στην πιστοληπτική βαθμολόγηση κρίθηκε σημαντική. Για παράδειγμα, για το διαμερισμό της μεταβλητής «επάγγελμα» επιλέχτηκε τελικά ένας μεγάλος αριθμός ασαφών συνόλων, λόγω της μεγάλης επίδρασης που ασκεί η κάθε μία από τις 10 κατηγορίες επαγγελμάτων στο αποτέλεσμα της πιστοληπτικής αξιολόγησης του υποψηφίου.

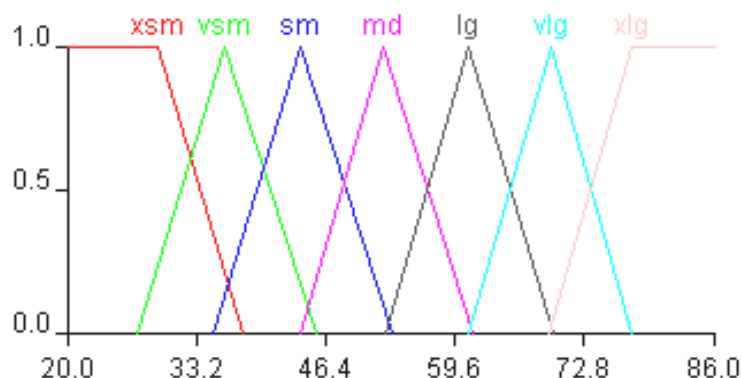
Πίνακας 4: Αριθμός και μορφή ασαφών συνόλων για το διαμερισμό του πεδίου τιμών των ανεξάρτητων μεταβλητών του προβλήματος ταξινόμησης.

Μεταβλητές	Αριθμός Α.Σ.	Μορφή Α.Σ.
Οικογενειακή Κατάσταση	2	Τριγωνική
Ηλικία	7	Τριγωνική
Επάγγελμα	15	Καμπανοειδής
Χρόνια στο Επάγγελμα	5	Καμπανοειδής
Τηλέφωνο Εργασίας	2	Τριγωνική
Στοιχεία Κατοικίας	3	Καμπανοειδής
Λογαριασμός Καταθέσεων	2	Τριγωνική

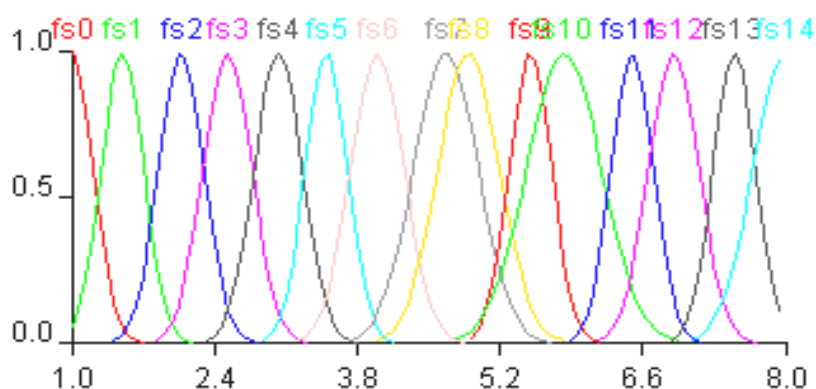
Ο διαμερισμός του πεδίου τιμών για κάθε μία από τις ανεξάρτητες μεταβλητές παρουσιάζεται στα σχήματα 35-41. Τα ασαφή σύνολα κατά την εκπαίδευσή τους καθορίστηκε να διατηρούν την αρχική τους διάταξη, προκειμένου να μην ξεπερνάνε τα γειτονικά τους ασαφή σύνολα, και να διασφαλίζεται η δυνατότητα ερμηνείας των κανόνων. Για την πλήρη κάλυψη του πεδίου τιμών των μεταβλητών και την αποφυγή δημιουργίας κενών στον ασαφή διαμερισμό των μεταβλητών, κρίθηκε αναγκαίο τα ασαφή σύνολα να επικαλύπτονται μεταξύ τους μερικά.



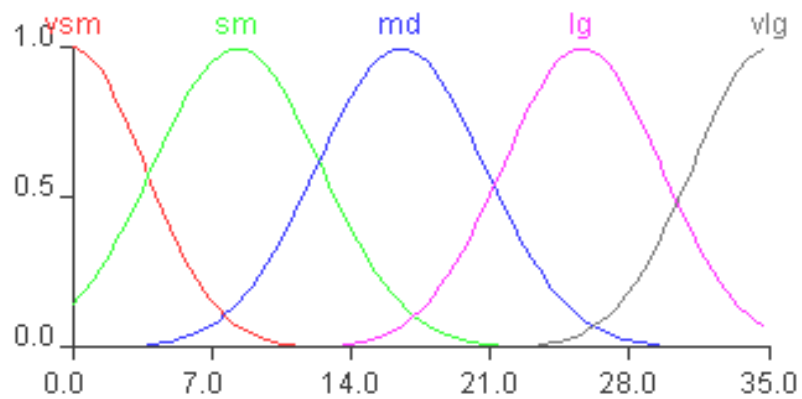
Σχήμα 35: Ασαφή Σύνολα της μεταβλητής «Οικογενειακή Κατάσταση»



Σχήμα 36: Ασαφή Σύνολα της μεταβλητής «Ηλικία»



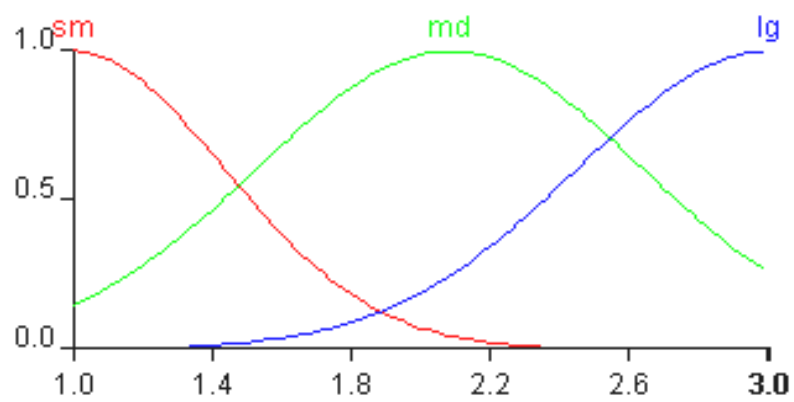
Σχήμα 37: Ασαφή Σύνολα της μεταβλητής «Επάγγελμα»



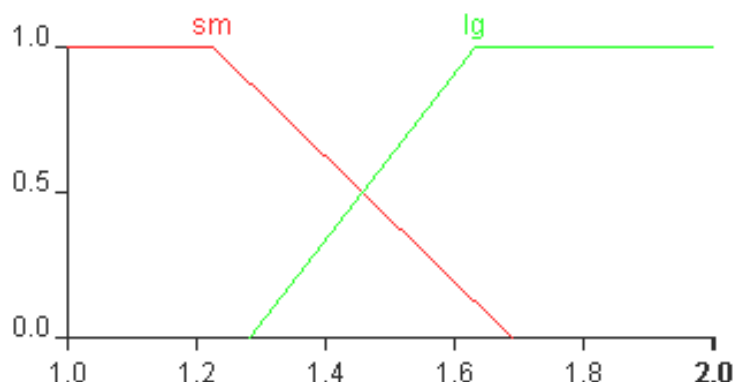
Σχήμα 38: Ασαφή Σύνολα της μεταβλητής «Χρόνια στο Επάγγελμα»



Σχήμα 39: Ασαφή Σύνολα της μεταβλητής «Τηλέφωνο Εργασίας»



Σχήμα 40: Ασαφή Σύνολα της μεταβλητής «Στοιχεία Κατοικίας»

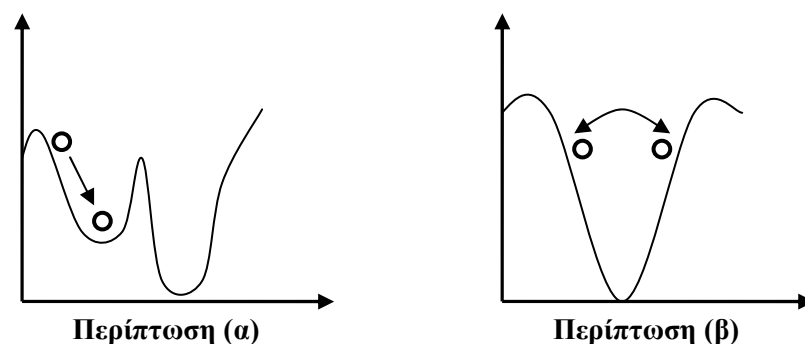


Σχήμα 41: Ασαφή Σύνολα της μεταβλητής «Λογαριασμός Καταθέσεων»

Η τοπολογία του NEFCLASS επιτρέπει σε πολλές μονάδες κανόνων (rule units) του κρυμμένου επιπέδου να συνδεθούν με μία συγκεκριμένη μονάδα του επιπέδου εξόδου (class unit), που καθορίζει την κατηγορία στην οποία ταξινομείται η κάθε εναλλακτική. Η έξοδος μίας μονάδας κανόνα αποτελεί το βαθμό εκπλήρωσής του. Οι μονάδες κανόνων στέλνουν τις τιμές τους στις μονάδες εξόδου. Βάσει αυτών, η *συνάρτηση συνάθροισης* (aggregation function) κάθε μονάδας εξόδου υπολογίζει μία τιμή, που θα αποτελέσει την τελική έξοδο της. Ως συνάρτηση συνάθροισης επιλέχτηκε το σταθμισμένο άθροισμα των εξόδων των μονάδων κανόνων. Για τη μετατροπή του αποτελέσματος της συνάρτησης συνάθροισης σε κατηγορία, στην οποία θα ταξινομηθεί η εναλλακτική, χρησιμοποιήθηκε η μόνη διαθέσιμη δυνατότητα του συστήματος, που ονομάζεται «ο νικητής τα παίρνει όλα» (winner takes all). Με βάση αυτήν, η μεγαλύτερη τιμή της μονάδας εξόδου επιλέγεται για να προσδιορίσει την κατηγορία ταξινόμησης της εναλλακτικής.

Η χρησιμοποίηση, ή μη, *σταθμισμένων κανόνων* κατά τη διαδικασία μάθησης επιδρά διαφορετικά στη σημασιολογία της βάσης των ασαφών κανόνων που δημιουργεί το νευροασαφές σύστημα. Σύμφωνα με τους Nauck et al. (1997), η μη χρησιμοποίηση διαφορετικών βαρών στάθμισης στους κανόνες κατά τη διαδικασία μάθησης επιτυγχάνεται θέτοντας όλα τα βάρη ίσα με τη μονάδα, γεγονός που επιτρέπει στους κανόνες να διατηρούν τη σημασιολογία τους και να μπορούν να ερμηνευτούν χωρίς προβλήματα. Αντίθετα, η χρησιμοποίηση διαφορετικών βαρών στάθμισης, που μπορούν να λάβουν οποιαδήποτε πραγματική τιμή, οδηγεί σε έναν ταξινομητή, του οποίου οι κανόνες δεν μπορούν να ερμηνευτούν. Συγκεκριμένα, η χρησιμοποίηση διαφορετικών βαρών στους κανόνες κατά τη διαδικασία μάθησης οδηγεί σε πολλαπλές αναπαραστάσεις του ίδιου λεκτικού όρου, που καθιστούν δύσκολη, ή και αδύνατη, τη λεκτική επεξήγηση της βάσης κανόνων (Nauck, 2000). Συνεπώς, το νευροασαφές σύστημα καταλήγει να παρουσιάζει χαρακτηριστικά «μαύρου κουτιού». Από την άλλη πλευρά η χρησιμοποίηση διαφορετικών βαρών στους κανόνες οδηγεί σε μεγαλύτερη αποτελεσματικότητα στην ταξινόμηση, καθώς το σύστημα αποκτά μεγαλύτερη ευελιξία στη διαμόρφωση των κανόνων. Ο λόγος είναι ότι η ίδια λεκτική τιμή, που χαρακτηρίζει μία ανεξάρτητη μεταβλητή, μπορεί να αναπαρίσταται από διαφορετικά ασαφή σύνολα για διαφορετικούς κανόνες. Προκειμένου να διερευνηθεί η σχέση παραχώρησης ανάμεσα στην ακρίβεια ταξινόμησης και στη δυνατότητα επεξήγησης του αποτελέσματος μέσα από μία συνεπή βάση κανόνων, δοκιμάστηκε τόσο η ύπαρξη διαφορετικών βαρών στάθμισης στους κανόνες του νευροασαφούς συστήματος, όσο και η μη χρησιμοποίησή τους.

Όσον αφορά το *ρυθμό μάθησης*, επιλέχτηκε η τιμή 0,1 μέσα από μία διαδικασία δοκιμής και σφάλματος. Ο ρυθμός μάθησης ελέγχει το ρυθμό με τον οποίο τα σφάλματα αλλάζουν τα βάρη του δικτύου. Μικρές τιμές του ρυθμού μάθησης μπορούν να καθυστερήσουν τη διαδικασία μάθησης και τη σύγκλιση του αλγορίθμου, ιδιαίτερα σε περιπτώσεις όπου το σφάλμα εγκλωβίζεται ανάμεσα σε τοπικά ελάχιστα (βλέπε περίπτωση α, σχήμα 42). Μεγάλες τιμές του ρυθμού μάθησης οδηγούν σε ταχύτερη μάθηση, αλλά και στον κίνδυνο να υπερπηδηθεί το ελάχιστο της συνάρτησης σφάλματος (βλέπε περίπτωση β, σχήμα 42) και ο αλγόριθμος να συγκλίνει σε κάποια ανεπιθύμητη λύση.



Σχήμα 42: (α) Η διαδικασία μάθησης παγιδεύεται σε τοπικά ελάχιστα της συνάρτησης σφάλματος, λόγω μικρού ρυθμού μάθησης. (β) Η διαδικασία μάθησης δυσκολεύεται να ολοκληρωθεί με τον εντοπισμό του ολικού ελαχίστου της συνάρτησης σφάλματος, λόγω της μεγάλης τιμής του ρυθμού μάθησης.

Κατά τη μάθηση το δίκτυο τροφοδοτείται συνεχώς με το πρότυπο εισόδων–εξόδων. Κάθε πλήρης προβολή του συνόλου εκπαίδευσης καλείται περίοδος (epoch). Η εκπαίδευση του δικτύου γίνεται μέσα από διαδοχικές περιόδους, ο αριθμός των οποίων επηρεάζει το χρονικό διάστημα ολοκλήρωσης της διαδικασίας μάθησης. Στα πλαίσια της παρούσας ανάλυσης χρησιμοποιήθηκαν 100 περίοδοι ως ο μέγιστος αριθμός περιόδων. Επιπλέον, χρησιμοποιήθηκαν 10 περίοδοι, ως ο πρόσθετος αριθμός τροφοδότησης των προτύπων μετά από μία αύξηση του σφάλματος.

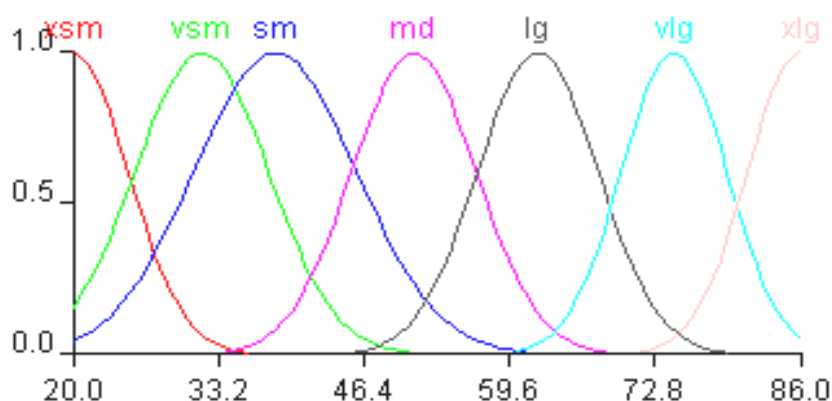
6.3. Αποτελέσματα της εφαρμογής του Νευροασαφούς Συστήματος

Παραπάνω προσδιορίστηκαν όλες οι απαραίτητες παράμετροι του συστήματος που απέδωσε τη μεγαλύτερη ακρίβεια ταξινόμησης, εκτός από το κατά πόσο θα χρησιμοποιούνταν διαφορετικά βάρη στους κανόνες κατά τη διαδικασία μάθησης. Στον πίνακα 6 παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της εφαρμογής τεσσάρων νευροασαφών συστημάτων με διαφορετικές παραμέτρους, τα οποία ονομάζονται NEF I, NEF II, NEF III και NEF IV. Οι παράμετροι, που έχουν περιγραφεί έως τώρα, περιελήφθησαν στα συστήματα NEF I και NEF II, με τη διαφορά ότι το πρώτο χρησιμοποιεί διαφορετικά βάρη στάθμισης στους κανόνες, ενώ το δεύτερο χρησιμοποιεί μη σταθμισμένους κανόνες.

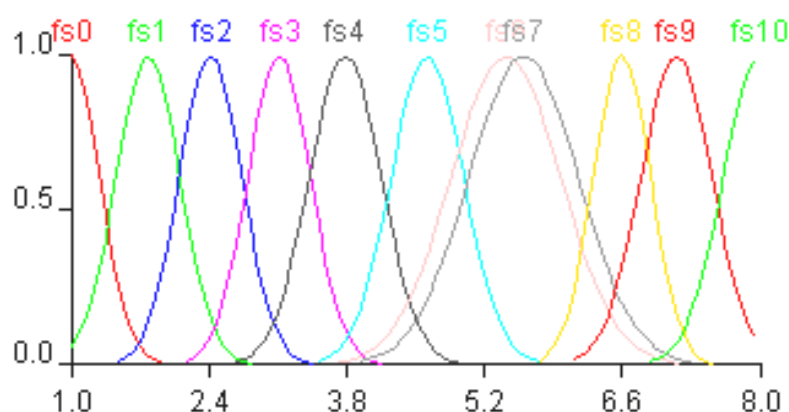
Οι παράμετροι του NEF III (βλέπε πίνακα 5) διαφέρουν με εκείνες του NEF I στα εξής δύο σημεία:

1. Χρησιμοποιείται η καμπανοειδής μορφή ασαφών συνόλων, αντί της τριγωνικής, για το διαμερισμό του πεδίου τιμών της μεταβλητής «Ηλικία» (βλέπε σχήμα 43).
2. Χρησιμοποιούνται 11 ασαφή σύνολα, αντί για 17, για το διαμερισμό του πεδίου τιμών της μεταβλητής «Επάγγελμα» (βλέπε σχήμα 44).

Οι παράμετροι του NEF IV παραμένουν οι ίδιες με εκείνες του NEF III, με εξαίρεση τη χρησιμοποίηση βαρών στους κανόνες κατά τη διαδικασία μάθησης.



Σχήμα 43: Διαμερισμός ασαφών συνόλων της μεταβλητής «Ηλικία» για τα συστήματα NEF III και NEF IV.



Σχήμα 44: Διαμερισμός ασαφών συνόλων της μεταβλητής «Επάγγελμα» για τα συστήματα NEF III και NEF IV.

Πίνακας 5: Αριθμός και μορφή ασαφών συνόλων για το διαμερισμό του πεδίου τιμών των ανεξάρτητων μεταβλητών στα συστήματα NEF I, NEF II, NEF III και NEF IV.

Μεταβλητές	Συστήματα NEF I και NEF II		Συστήματα NEF III και NEF IV	
	Αριθμός Α.Σ.	Μορφή Α.Σ.	Αριθμός Α.Σ.	Μορφή Α.Σ.
Οικογενειακή Κατάσταση	2	Τριγωνική	2	Τριγωνική
Ηλικία	7	Τριγωνική	7	Καμπανοειδής
Επάγγελμα	15	Καμπανοειδής	11	Καμπανοειδής
Χρόνια στο Επάγγελμα	5	Καμπανοειδής	5	Καμπανοειδής
Τηλέφωνο Εργασίας	2	Τριγωνική	2	Τριγωνική
Στοιχεία Κατοικίας	3	Καμπανοειδής	3	Καμπανοειδής
Λογαριασμός Καταθέσεων	2	Τριγωνική	2	Τριγωνική

Τα μεγαλύτερα ποσοστά ακρίβειας ταξινόμησης, σύμφωνα με τον πίνακα 6, παρατηρούνται στα συστήματα NEF I και NEF III. Ο λόγος είναι ότι τα συστήματα αυτά επιτρέπουν στα βάρη των κανόνων τους να λάβουν οποιαδήποτε πραγματική τιμή, εξασφαλίζοντας μεγαλύτερη ευελιξία στη διαδικασία μάθησης, αλλά στερώντας από τους αναλυτές τη δυνατότητα ερμηνείας των κανόνων που διαμορφώνουν. Τα συστήματα NEF II και NEF IV, προέκυψαν από τα NEF I και NEF III αντίστοιχα, με τη διαφορά ότι η μη χρησιμοποίηση βαρών στους κανόνες, επιτρέπει σε αυτά να διατηρούν τη σημασιολογία της βάσης των ασαφών κανόνων ταξινόμησης. Το χαρακτηριστικό τους αυτό είναι που τα οδηγεί στο να παρουσιάζουν μικρότερα ποσοστά ακρίβειας ταξινόμησης ως προς τα NEF I και NEF III. Κατά συνέπεια, τα αποτελέσματα του πίνακα 6 δίνουν μία εικόνα του προβλήματος της παραχώρησης που υφίσταται ανάμεσα στην ακρίβεια ταξινόμησης και τη δυνατότητα επεξήγησης του τρόπου ταξινόμησης. Κανένα από τα συστήματα δεν ταξινόμησε μία αίτηση προς έγκριση, ως απορριφθείσα, ή το αντίστροφο, κατά την 10-fold cross validation διαδικασία.

Πίνακας 6: Αποτελέσματα νευροασαφών συστημάτων με διαφορετικές παραμέτρους.

Συστήματα	C ₁ Αποδεκτές Αιτήσεις	C ₂ Αιτήσεις προς Επανεξέταση	C ₃ Απορριφθείσες Αιτήσεις	C Σύνολο Αιτήσεων
NEF I	97,92%	90,33%	95%	94%
NEF II	95,83%	88,33%	78,33%	90,67%
NEF III	97,92%	88,74%	89,44%	92,67%
NEF IV	94,17%	89,33%	81,11%	92%

Με βάση τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι εφόσον ο αναλυτής ενδιαφέρεται περισσότερο για τη μεγαλύτερη δυνατή ακρίβεια ταξινόμησης, θα επιτρέψει στο νευροασαφές σύστημα να χρησιμοποιήσει σταθμισμένους κανόνες στη διαδικασία της μάθησης. Από την άλλη πλευρά, η μη χρησιμοποίηση σταθμισμένων κανόνων δεν οδηγεί σε σημαντική μείωση της ακρίβειας ταξινόμησης, ενώ ταυτόχρονα εξασφαλίζει λεκτικά κατανοητούς κανόνες της μορφής if-then, οι οποίοι χρησιμεύουν στην επεξήγηση του τρόπου ταξινόμησης των αιτήσεων.

Σε κάθε στάδιο της cross-validation διαδικασίας του συστήματος NEF IV δημιουργήθηκαν κατά μέσο όρο 78 κανόνες, εκ των οποίων οι 38 αφορούσαν την κατηγορία των αποδεκτών αιτήσεων, οι 27 αφορούσαν την κατηγορία των αιτήσεων που θα έπρεπε να επανεξεταστούν και οι 13 αφορούσαν την κατηγορία των αιτήσεων που έπρεπε να απορριφθούν. Οι πιο αποτελεσματικοί κανόνες ταξινόμησης των αιτήσεων, όπως προέκυψαν από την εκπαίδευση του NEF IV, παρουσιάζονται παρακάτω:

Κατηγορία Αποδεκτών Αιτήσεων (Class 1)

1. if (Οικογενειακή Κατάσταση) is large and (Ηλικία) is very small and (Επάγγελμα) is fuzzy7 and (Χρόνια στο Επάγγελμα) is small and (Κατοικία) is small and (Τραπεζικός Λογ/σμός) is small then Class 1
2. if (Οικογενειακή Κατάσταση) is large and (Ηλικία) is small and (Επάγγελμα) is fuzzy7 and (Χρόνια στο Επάγγελμα) is small and (Κατοικία) is large and (Τραπεζικός Λογ/σμός) is small then Class 1

3. if (Οικογενειακή Κατάσταση) is large and (Ηλικία) is small and (Επάγγελμα) is fuzzy7 and (Χρόνια στο Επάγγελμα) is medium and (Κατοικία) is large and (Τραπεζικός Λογ/σμός) is small then Class 1
4. if (Οικογενειακή Κατάσταση) is large and (Ηλικία) is small and (Επάγγελμα) is fuzzy6 and (Χρόνια στο Επάγγελμα) is small and (Κατοικία) is medium and (Τραπεζικός Λογ/σμός) is small then Class 1
5. if (Οικογενειακή Κατάσταση) is large and (Ηλικία) is small and (Επάγγελμα) is fuzzy6 and (Χρόνια στο Επάγγελμα) is medium and (Κατοικία) is large and (Τραπεζικός Λογ/σμός) is small then Class 1

Κατηγορία Αιτήσεων προς Επανεξέταση (Class 2)

1. if (Οικογενειακή Κατάσταση) is large and (Ηλικία) is very small and (Επάγγελμα) is fuzzy3 and (Χρόνια στο Επάγγελμα) is very small and (Κατοικία) is large and (Τραπεζικός Λογ/σμός) is small then Class 2
2. if (Οικογενειακή Κατάσταση) is large and (Ηλικία) is very small and (Επάγγελμα) is fuzzy3 and (Χρόνια στο Επάγγελμα) is very small and (Κατοικία) is medium and (Τραπεζικός Λογ/σμός) is small then Class 2
3. if (Οικογενειακή Κατάσταση) is large and (Ηλικία) is very small and (Επάγγελμα) is fuzzy3 and (Χρόνια στο Επάγγελμα) is very small and (Κατοικία) is large and (Τραπεζικός Λογ/σμός) is small then Class 2
4. if (Οικογενειακή Κατάσταση) is large and (Ηλικία) is small and (Επάγγελμα) is fuzzy3 and (Χρόνια στο Επάγγελμα) is small and (Κατοικία) is large and (Τραπεζικός Λογ/σμός) is small then Class 2
5. if (Οικογενειακή Κατάσταση) is large and (Ηλικία) is small and (Επάγγελμα) is fuzzy4 and (Χρόνια στο Επάγγελμα) is very small and (Κατοικία) is medium and (Τραπεζικός Λογ/σμός) is small then Class 2

Κατηγορία Απορριφθέντων Αιτήσεων (Class 3)

1. if (Οικογενειακή Κατάσταση) is large and (Ηλικία) is very small and (Επάγγελμα) is fuzzy1 and (Χρόνια στο Επάγγελμα) is small and (Κατοικία) is small and (Τραπεζικός Λογ/σμός) is small then Class 3
2. if (Οικογενειακή Κατάσταση) is large and (Ηλικία) is very small and (Επάγγελμα) is fuzzy1 and (Χρόνια στο Επάγγελμα) is very small and (Κατοικία) is small and (Τραπεζικός Λογ/σμός) is small then Class 3
3. if (Οικογενειακή Κατάσταση) is large and (Ηλικία) is small and (Επάγγελμα) is fuzzy1 and (Χρόνια στο Επάγγελμα) is small and (Κατοικία) is small and (Τραπεζικός Λογ/σμός) is small then Class 3
4. if (Οικογενειακή Κατάσταση) is large and (Ηλικία) is small and (Επάγγελμα) is fuzzy1 and (Χρόνια στο Επάγγελμα) is very small and (Κατοικία) is small and (Τραπεζικός Λογ/σμός) is small then Class 3

Όπως γίνεται φανερό, η εκπαίδευση του νευροασαφούς συστήματος κατέληξε σε κανόνες, οι οποίοι δεν περιείχαν όλες τις ανεξάρτητες μεταβλητές του πίνακα. Ο λόγος είναι ότι τόσο για το σύστημα NEF IV, όσο και για τα υπόλοιπα, επιλέχτηκε να αφαιρούνται από τους κανόνες οι μεταβλητές που δεν συμβάλλουν σημαντικά στην αύξηση της αποτελεσματικότητάς τους κατά τη διαδικασία της μάθησης. Αποδείχτηκε ότι το σύστημα δεν χρησιμοποίησε σε κανέναν από τους κανόνες του τη μεταβλητή «Τηλέφωνο εργασίας», ενώ οι μεταβλητές «Ηλικία» και «Στοιχεία Κατοικίας» χρησιμοποιήθηκαν στο 88,9% και στο 93,3% του συνόλου των κανόνων που καταγράφηκαν κατά τη διαδικασία cross-validation.

6.4. Σύγκριση του Νευροασαφούς συστήματος με τεχνικές από το χώρο της μηχανικής μάθησης και της στατιστικής ανάλυσης.

Τα αποτελέσματα του νευροασαφούς συστήματος συγκρίθηκαν με τέσσερις τεχνικές της μηχανικής μάθησης και μία τεχνική της στατιστικής ανάλυσης, οι παράμετροι των οποίων περιγράφονται σε αυτήν την παράγραφο. Οι τιμές των παραμέτρων καθορίστηκαν πειραματικά μέσα από τη διαδικασία δοκιμής και σφάλματος. Οι τεχνικές που παρουσιάζονται παρακάτω υλοποιήθηκαν στο σύστημα WEKA (Witten και Frank, 2000).

Αλγόριθμος NNge (non-nested generalized exemplars)

Ο αλγόριθμος NNge (Brent, 1995) αποτελεί μία τροποποίηση της μεθόδου των πλησιέστερων γειτόνων. Οι πλησιέστεροι γείτονες υπάγονται στις μεθόδους μάθησης βάσει περιπτώσεων (instance-based learning). Οι μέθοδοι αυτής της κατηγορίας αποθηκεύουν στη μνήμη τους τις περιπτώσεις με τις οποίες τροφοδοτούνται αρχικά και ταξινομούν κάθε νέα περίπτωση ανακαλώντας από τη μνήμη την πιο παραπλήσιά της. Οι αποθηκευμένες στη μνήμη περιπτώσεις ονομάζονται *παραδείγματα* (exemplars). Η βάση των παραδειγμάτων μεγαλώνει, καθώς καταχωρούνται σε αυτήν όσες νέες περιπτώσεις ταξινομούνται από το σύστημα. Η συνεχιζόμενη αύξηση της βάσης των παραδειγμάτων, καθιστά αναγκαίο το κλάδεμά της (pruning), προκειμένου να μην επιβαρύνεται η μνήμη του συστήματος και να μην παρατηρείται σημαντική καθυστέρηση στην ταξινόμηση νέων περιπτώσεων. Αντί για το κλάδεμα της βάσης παραδειγμάτων, μπορούν να χρησιμοποιηθούν τα *γενικευμένα παραδείγματα* (generalized exemplars), που δεν επιφέρουν το πρόβλημα της μειωμένης ακρίβειας στην ταξινόμηση, στο οποίο οδηγούνται οι μέθοδοι κλαδέματος (Aha, 1992). Τα γενικευμένα παραδείγματα αναπαριστούν περισσότερα από ένα από τα αρχικά παραδείγματα του δείγματος μάθησης. Εάν το σύνολο των περιπτώσεων αναπαρασταθεί ως ένα σύνολο από σημεία σε ένα χώρο n διαστάσεων, με n τον αριθμό των χαρακτηριστικών (ανεξάρτητων μεταβλητών) του κάθε παραδείγματος, τότε το γενικευμένο παράδειγμα ορίζεται, γεωμετρικά, ως μία n -διαστάσεων περιοχή που καλύπτει μία πεπερασμένη περιοχή του χώρου του προβλήματος.

Ο αλγόριθμος NNge μαθαίνει σταδιακά, ταξινομώντας αρχικά κάθε νέο παράδειγμα, και έπειτα γενικεύοντάς το. Τα γενικευμένα παραδείγματα αναπαρίσταται από n -διαστάσεων ορθογώνια, που ονομάζονται υπερορθογώνια (hyperrectangles). Για την ταξινόμηση κάθε νέου παραδείγματος χρησιμοποιείται μία τροποποιημένη συνάρτηση Ευκλείδειας απόστασης. Κατά την ταξινόμηση ενός παραδείγματος, μπορεί να βρεθεί ότι αυτό ανήκει σε ένα ή περισσότερα υπερορθογώνια (hyperrectangles), τα οποία όμως αντιστοιχούν σε διαφορετική κατηγορία, από εκείνη του παραδείγματος. Σε αυτήν την περίπτωση, ο αλγόριθμος NNge κλαδεύει τα υπερορθογώνια, προκειμένου το συγκεκριμένο παράδειγμα να μην ανήκει πλέον σε αυτά. Η γενίκευση του νέου παραδείγματος, που έχει πλέον

ταξινομηθεί, επιτυγχάνεται με την ομαδοποίησή του με το πλησιέστερο παράδειγμα της ίδιας κατηγορίας. Η ομαδοποίηση αυτή οδηγεί στη διαμόρφωση νέων υπερορθογωνίων ή στην επέκταση υπαρχόντων υπερορθογωνίων. Η γενίκευση του νέου παραδείγματος εγκαταλείπεται από τον αλγόριθμο μόνο στην περίπτωση που υπάρχουν παραδείγματα στη συγκεκριμένη περιοχή του χώρου των χαρακτηριστικών, τα οποία έρχονται σε σύγκρουση με τα υπερορθογώνια, που τείνουν να διαμορφωθούν. Στην περίπτωση αυτή το παράδειγμα αποθηκεύεται στη μνήμη. Στα πλαίσια της εφαρμογής της μεθόδου επιλέχθηκαν να παρουσιαστούν 5 σύνολα παραδειγμάτων για τη μάθηση του αλγορίθμου, τα οποία αποτελούνται από 27 στοιχεία το καθένα. Τέλος, οι προσπάθειες που θα έκανε ο αλγόριθμος, προκειμένου να επιτύχει τη γενίκευση των νέων παραδειγμάτων, καθορίστηκαν να είναι 5.

Δέντρα Random Forest

Τα δέντρα Random Forest (Breiman, 2001) αποτελούνται από ένα σύνολο ανεξάρτητων δέντρων ταξινόμησης. Τα δέντρα Random Forest λειτουργούν ως εξής:

1. Αρχικά επιλέγεται ο αριθμός των δέντρων που θα αναπτυχθούν, και που στην προκειμένη περίπτωση είναι 30. Επιπλέον, επιλέγεται ένας αριθμός, ο οποίος δεν πρέπει να είναι μεγαλύτερος από τον αριθμό των ανεξάρτητων μεταβλητών. Στην παρούσα ανάλυση χρησιμοποιήθηκε ο αριθμός που προέκυψε από τον τύπο $\log(M+1)$, όπου $M=7$ είναι ο αριθμός των ανεξάρτητων μεταβλητών.
2. Για τις τιμές από $i=1$ έως 30, επιλέγεται ένα δείγμα bootstrap από τα δεδομένα. Όσα δεδομένα δεν ανήκουν στο δείγμα bootstrap ονομάζονται “out-of-bag” δεδομένα.
3. Αναπτύσσεται ένα «τυχαίο» (random) δέντρο, σε κάθε κόμβο του οποίου επιλέγεται ο καλύτερος διαχωρισμός ανάμεσα από $\log(M+1)$ τυχαία επιλεγμένες μεταβλητές. Ο αριθμός (seed) που θέτει σε εκκίνηση τη γεννήτρια τυχαίων αριθμών επιλέχθηκε να είναι το 14. Το δέντρο αναπτύσσεται στο μέγιστο μέγεθος που μπορεί να λάβει, χωρίς να κλαδευτεί.
4. Το δέντρο που δημιουργήθηκε χρησιμοποιείται στην πρόβλεψη των out-of-bag δεδομένων.
5. Με βάση τις προβλέψεις στα out-of-bag δεδομένα, διαμορφώνονται οι ψήφοι πλειοψηφίας.
6. Με βάση τις ψήφους πλειοψηφίας, που προέρχονται από τις προβλέψεις των δέντρων που απαρτίζουν το Random Forest, διαμορφώνεται η πρόβλεψη των δεδομένων ελέγχου. Η ακρίβεια ταξινόμησης των δέντρων Random Forest οφείλεται στο ότι ελαχιστοποιούν τη συσχέτιση μεταξύ των δέντρων ταξινόμησης.

Μηχανές Διανύσματος Υποστήριξης

Για την εφαρμογή των μηχανών διανύσματος υποστήριξης (Support Vector Machines, SVM) στο πρόβλημα ταξινόμησης σε τρεις κατηγορίες, χρησιμοποιήθηκε η τροποποίηση των Hastie και Tibshirani (1996), σύμφωνα με την οποία αρχικά πραγματοποιείται ταξινόμηση ανά ζεύγη κατηγοριών. Οι έξοδοι του SVM για κάθε ταξινόμηση ανά ζεύγος κατηγοριών αντιστοιχίζονται, μέσω λογιστικών συναρτήσεων, σε πιθανότητες για την κάθε κατηγορία (Platt, 1999). Οι πιθανότητες αυτές, που προκύπτουν από τις ταξινομήσεις ανά ζεύγη κατηγοριών, συνδυάζονται προκειμένου να επιτευχθεί η τελική ταξινόμηση στις τρεις κατηγορίες.

Οι είσοδοι του SVM κανονικοποιήθηκαν, προκειμένου να διευκολυνθούν οι υπολογισμοί και να αποφευχθεί η κυριάρχηση των μεταβλητών με το μεγαλύτερο εύρος τιμών έναντι των μεταβλητών με το μικρότερο εύρος τιμών (Hsu et al., 2003).

Για την εκπαίδευση του SVM χρησιμοποιήθηκε ο αλγόριθμος sequential minimal optimization (SMO, Platt, 1998). Ο πυρήνας που επιλέχτηκε βασίζεται στη συνάρτηση ακτινικής βάσης (radial basis function kernel). Η ακρίβεια ταξινόμησης και ο χρόνος υπολογισμού του SVM εξαρτώνται σημαντικά από το άνω όριο τιμών των συντελεστών της εξίσωσης εκείνης που προσδιορίζει το υπερεπίπεδο (σταθερά πολυπλοκότητας), και από το συντελεστή γ του πυρήνα. Η σταθερά πολυπλοκότητας καθορίστηκε στο 70, και ο συντελεστής γ τέθηκε ίσος με 0.09.

Ο αλγόριθμος SMO παρέχει μία μονάδα αποθήκευσης των λαθών ταξινόμησης του SVM (error cache), με σκοπό τη μείωση των παρατεταμένων υπολογισμών του πυρήνα. Το μέγεθος της μονάδας αποθήκευσης του πυρήνα καθορίστηκε στο 1.000.003, η παράμετρος ανοχής του σφάλματος τέθηκε ίση με 0,001 και ο συντελεστής ϵ (epsilon) του σφάλματος στρογγυλοποίησης τέθηκε ίσος με $1.0E^{-6}$.

Νευρωνικό Δίκτυο

Το νευρωνικό δίκτυο αποτελείται από 5 επίπεδα και χρησιμοποιεί την ανάστροφη διάδοση του σφάλματος για την ταξινόμηση των περιπτώσεων. Όλοι οι κόμβοι του χρησιμοποιούν τη σιγμοειδή συνάρτηση ενεργοποίησης, εκτός από τους κόμβους εξόδου, οι οποίοι χρησιμοποιούν τη γραμμική συνάρτηση. Ο ρυθμός μάθησης επιλέχτηκε να είναι 0,3 και ο συντελεστής ορμής (momentum) τέθηκε ίσος με 0,05. Ο αριθμός (seed) που θέτει σε εκκίνηση τη γεννήτρια τυχαίων αριθμών επιλέχτηκε να είναι το 2. Οι τυχαίοι αριθμοί καθορίζουν τα αρχικά βάρη των συνδέσμων μεταξύ των κόμβων του δικτύου. Τέλος, χρησιμοποιήθηκαν 1.000 περίοδοι (epochs) για την εκπαίδευση του νευρωνικού δικτύου.

Λογιστική Παλινδρόμηση

Η αποτελεσματικότητα της λογιστικής παλινδρόμησης αποτελεί το σημαντικότερο σημείο αναφοράς στην αξιολόγηση του νευροασαφούς συστήματος. Ο λόγος είναι ότι θεωρείται μία από τις «παραδοσιακές» μεθόδους πιστοληπτικής βαθμολόγησης. Σύμφωνα με τον West (2000), η λογιστική παλινδρόμηση αποτελεί την καλύτερη μέθοδο πιστοληπτικής βαθμολόγησης από το χώρο των κλασικών παραμετρικών μοντέλων. Το σύστημα WEKA εφαρμόζει την τροποποίηση της πολυώνυμης λογιστικής παλινδρόμησης που πρότειναν οι Cessie και Houwelingen (1992). Σύμφωνα με αυτήν την τροποποίηση της λογιστικής παλινδρόμησης, η σταθεροποίηση των συντελεστών παλινδρόμησης επιτυγχάνεται μέσα από τη χρησιμοποίηση μίας παραμέτρου κορυφής (ridge parameter) για την εκτίμηση της λογαριθμικής πιθανότητας (log-likelihood). Η τιμή της παραμέτρου κορυφής τέθηκε ίση με $1.0E^{-8}$.

Συγκριτικά Αποτελέσματα

Τα συγκριτικά αποτελέσματα της ακρίβειας ταξινόμησης των διαφορετικών μεθόδων που εφαρμόστηκαν στο πρόβλημα πιστοληπτικής βαθμολόγησης παρουσιάζονται στον πίνακα 7.

Πίνακας 7: Παρουσίαση συγκριτικών αποτελεσμάτων ακρίβειας ταξινόμησης.

Συστήματα	C ₁ Αποδεκτές Αιτήσεις	C ₂ Αιτήσεις προς Επανεξέταση	C ₃ Απορριφθείσες Αιτήσεις	C Σύνολο Αιτήσεων
NEF I	97,92%	90,33%	95%	94%
NEF IV	94,17%	89,33%	83,9%	92%
Nnge	96,9%	92,4%	86,3%	93,3%
Random Forest	96,9%	92,4%	81,11%	92,66%
SVM	94,23%	89,31%	93,52%	92%
Νευρωνικό Δίκτυο	94,23%	87,07%	97,22%	92%
Λογιστική Παλινδρόμηση	92,98%	82,74%	89,44%	88%

Από την πλευρά των νευροασαφών συστημάτων, η σύγκριση πραγματοποιήθηκε με τα συστήματα NEF I και NEF IV. Ο λόγος είναι ότι το NEF I αποδείχτηκε το καλύτερο από τα νευροασαφή συστήματα που χρησιμοποιούν σταθμισμένους κανόνες και το NEF IV αποδείχτηκε το αποτελεσματικότερο από τα νευροασαφή συστήματα που δεν χρησιμοποιούν σταθμισμένους κανόνες.

Με βάση τον πίνακα 7 προκύπτει ότι το NEF I παρουσιάζει τη μεγαλύτερη συνολική ακρίβεια ταξινόμησης, ενώ παράλληλα παρουσιάζει σημαντικά ποσοστά ταξινόμησης ανά κατηγορία αιτήσεων. Πρέπει να σημειώσουμε ότι οι μέθοδοι NEF I, NEF IV, Nnge και Random Forest δεν ταξινόμησαν σε κανένα στάδιο της cross-validation διαδικασίας κάποια αποδεκτή αίτηση στις απορριφθείσες, ή το αντίστροφο.

Οι πρώτες έξι μέθοδοι του πίνακα 7 δεν παρουσιάζουν σημαντικές διαφορές στην ακρίβεια ταξινόμησης νέων αιτήσεων. Από την άλλη πλευρά και οι έξι αυτές μέθοδοι, υπερέχουν σημαντικά σε συνολική ακρίβεια ταξινόμησης ως προς τη λογιστική παλινδρόμηση. Κατά συνέπεια, το σύστημα NEF IV συνδυάζει τα ικανοποιητικά αποτελέσματα ακρίβειας με την ικανότητα επεξήγησης του τρόπου ταξινόμησης μέσα από τους λεκτικά κατανοήσιμους κανόνες if-then που διαμορφώνει.

Ο πίνακας 8 παρουσιάζει τον έλεγχο στατιστικής σημαντικότητας της διαφοράς της μέσης συνολικής ακρίβειας ταξινόμησης για κάθε ζεύγος μεθόδων, με βάση το t-test. Ο έλεγχος t-test έγινε πάνω στα ποσοστά ακρίβειας των μεθόδων κατά τη διαδικασία cross-validation. Από τον πίνακα 8 προκύπτει ότι στατιστικά σημαντική διαφορά στην αποτελεσματικότητα των μεθόδων παρατηρείται μόνο ανάμεσα στο NEF I και τη λογιστική παλινδρόμηση, καθώς για αυτό το ζεύγος μεθόδων υπολογίστηκε ότι $t = 2,377$, $\text{sig. (2-tailed)} = 0,041 < 0,05$ και το κάτω όριο του διαστήματος εμπιστοσύνης της διαφοράς δεν λαμβάνει αρνητικές τιμές σε επίπεδο σημαντικότητας 95%. Όσον αφορά στο NEF IV, παρατηρούμε ότι η μικρότερη μέση ακρίβεια ταξινόμησης που παρουσιάζει ως προς το NEF I, τα δέντρα Random Forest και τον αλγόριθμο Nnge, δεν είναι στατιστικά σημαντική. Από την άλλη πλευρά το NEF IV, δεν σημειώνει στατιστικά σημαντική υπεροχή ως προς τη λογιστική παλινδρόμηση.

Πίνακας 8: Έλεγχος στατιστικής σημαντικότητας t-test της διαφοράς της μέσης συνολικής ακρίβειας ταξινόμησης για κάθε ζεύγος μεθόδων

	Διαφορές Ανά Ζεύγη (Paired Differences)				
	Μέση Διαφορά	95% Διάστημα Εμπιστοσύνης της Διαφοράς		t	Sig. (2-tailed)
		Κάτω όριο	Άνω όριο		
NEF I - Λογ. Παλινδρ.	0,0600	0,0029	0,1171	2,377	0,041
NEF IV - Λογ. Παλινδρ.	0,0400	-0,0203	0,1003	1,500	0,168
Nnge - Λογ. Παλινδρ.	0,0533	-0,0053	0,1120	2,058	0,070
Random Forest - Λογ. Παλινδρ	0,0467	-0,0086	0,1020	1,909	0,089
SVM - Λογ. Παλινδρ.	0,0400	-0,0244	0,1044	1,406	0,193
Νευρ. Δίκτυο - Λογ. Παλινδρ.	0,0400	-0,0244	0,1044	1,406	0,193
NEF I – Νευρωνικό Δίκτυο	0,0200	-0,0513	0,0913	0,635	0,541
NEF IV – Νευρωνικό Δίκτυο	0,0000	-0,0746	0,0746	0,000	1,000
Nnge – Νευρωνικό Δίκτυο	0,0133	-0,0495	0,0761	0,480	0,642
Random Forest – Νευρ. Δίκτυο	0,0067	-0,0504	0,0638	0,264	0,798
SVM – Νευρωνικό Δίκτυο	0,0000	-0,0450	0,0450	0,000	1,000
NEF I – SVM	0,0200	-0,0580	0,0980	0,580	0,576
NEF IV – SVM	0,0000	-0,0899	0,0899	0,000	1,000
Nnge – SVM	0,0133	-0,0453	0,0720	0,514	0,619
Random Forest – SVM	0,0067	-0,0408	0,0541	0,318	0,758
NEF I – Random Forest	0,0133	-0,0495	0,0761	0,480	0,642
NEF IV - Random Forest	-0,0067	-0,0827	0,0694	-0,198	0,847
Nnge - Random Forest	0,0067	-0,0204	0,0337	0,557	0,591
NEF I – Nnge	0,0067	-0,0587	0,0720	0,231	0,823
NEF IV – Nnge	-0,0133	-0,0938	0,0671	-0,375	0,716
NEF I - NEF IV	0,0200	-0,0193	0,0593	1,152	0,279

Συμπεραίνουμε από τα παραπάνω ότι τα νευροασαφή συστήματα μπορούν να χρησιμοποιηθούν με επιτυχία στην πιστοληπτική βαθμολόγηση. Τα νευροασαφή συστήματα συγκεντρώνουν χαρακτηριστικά που αποδεικνύονται ιδιαίτερα χρήσιμα σε προβλήματα ταξινόμησης, όπως είναι αυτό της πιστοληπτικής βαθμολόγησης, καθώς δεν περιορίζονται από στατιστικές υποθέσεις σχετικά με τη δομή των δεδομένων. Έννοιες, όπως είναι ο υψηλός και χαμηλός κίνδυνος αθέτησης σε ένα δάνειο, μπορούν να μοντελοποιηθούν μέσα από τις συναρτήσεις συμμετοχής του νευροασαφούς συστήματος και να αναπαρασταθούν με τη χρήση ασαφών κανόνων. Οι if-then κανόνες του νευροασαφούς συστήματος είναι αρκετά απλοί και μπορούν να χρησιμοποιηθούν μέσα στα πλαίσια ενός έμπειρου συστήματος για την επεξεργασία ποιοτικών και ποσοτικών δεδομένων. Η λεκτικά κατανοήσιμη βάση κανόνων μπορεί να ενισχυθεί από τον υπεύθυνο χορηγήσεων, καθώς επιτρέπεται η εισαγωγή ασαφών κανόνων στο νευροασαφές σύστημα. Σε αυτές τις περιπτώσεις, το κίνητρο του ειδικού για την εισαγωγή των κανόνων είναι ότι μέσω αυτών μπορεί να συμπεριλάβει πληροφορίες, που δεν περιέχονται στο δείγμα εκπαίδευσης, με το οποίο τροφοδοτείται το σύστημα. Το χαρακτηριστικό αυτό είναι ιδιαίτερα χρήσιμο στην περίπτωση που το δείγμα της τράπεζας δεν είναι αντιπροσωπευτικό του συνόλου των

υποψήφιων πελατών της. Η δυνατότητα αυτή δεν περιλαμβάνεται σε καμία από τις υπόλοιπες μεθόδους που εξετάσαμε σε αυτήν την εργασία. Με αυτόν τον τρόπο, οι κανόνες που καθορίστηκαν «εξωτερικά» από τον ειδικό, συνδυάζονται κατά την ταξινόμηση με αυτούς που προκύπτουν από τη μάθηση του δείγματος με το οποίο τροφοδοτείται το νευροασαφές σύστημα. Η γνώση του πεδίου τιμών των ανεξάρτητων μεταβλητών συμβάλλει στο γρήγορο εντοπισμό των παραμέτρων που δίνουν ένα καλό αποτέλεσμα ακρίβειας ταξινόμησης, καθώς καθίσταται ευκολότερη η επιλογή του αριθμού των ασαφών συνόλων για το διαμερισμό τους. Το χαρακτηριστικό αυτό προσδίδει μεγαλύτερη ευκολία στη χρήση του νευροασαφούς συστήματος σε σύγκριση με τις υπόλοιπες τεχνικές, όπου η επιλογή των αρχικών παραμέτρων για την εκκίνηση της διαδικασίας δοκιμής και σφάλματος δεν είναι τόσο ξεκάθαρη.

7. Συμπεράσματα - Προοπτικές

Μέσα στα πλαίσια της παρούσας εργασίας παρουσιάστηκε το θεωρητικό υπόβαθρο των νευροασαφών συστημάτων και η εφαρμογή τους σε ένα πρόβλημα πιστοληπτικής βαθμολόγησης.

Τα νευροασαφή συστήματα δεν προϋποθέτουν προηγούμενη γνώση της στατιστικής κατανομής των δεδομένων, ενώ διακρίνονται για την ικανότητα μοντελοποίησης σύνθετων και μη-γραμμικών συστημάτων μέσα από τη χρησιμοποίηση των λεκτικά κατανοητών κανόνων της μορφής if-then. Τα νευροασαφή συστήματα δεν απαιτούν την ακρίβεια της πληροφορίας και προσφέρουν στον χρήστη τη δυνατότητα να εισάγει σε αυτά τη γνώση του για το πρόβλημα μέσα από τη δημιουργία των δικών του κανόνων.

Τα παραπάνω χαρακτηριστικά καθιστούν τα νευροασαφή συστήματα ιδιαίτερα χρήσιμα σε χρηματοοικονομικά προβλήματα, όπως είναι αυτό της πιστοληπτικής βαθμολόγησης, όπου απαιτείται ο συνδυασμός της ακρίβειας ταξινόμησης με τη δυνατότητα επεξήγησης της διαδικασίας λήψης απόφασης.

Δείξαμε ότι τα νευροασαφή συστήματα μπορούν να χρησιμοποιηθούν αποτελεσματικά στην ταξινόμηση 150 αιτήσεων για τη χορήγηση πιστωτικής κάρτας. Η μη χρησιμοποίηση σταθμισμένων κανόνων οδηγεί το νευροασαφές σύστημα στο να συνδυάζει την ερμηνευτική ικανότητα των ασαφών κανόνων με τα ικανοποιητικά ποσοστά ακρίβειας ταξινόμησης των αιτήσεων. Η σύγκριση με μεθόδους της μηχανικής μάθησης και της στατιστικής ανάλυσης έδειξε ότι τα νευροασαφή συστήματα συγκαταλέγονται στο σύνολο εκείνων των σύγχρονων τεχνικών ταξινόμησης που αποδεικνύονται χρήσιμες σε εφαρμογές εκτίμησης κινδύνου.

Η χρησιμοποίηση σταθμισμένων κανόνων στη διαδικασία μάθησης του νευροασαφούς συστήματος θα πρέπει να προτιμάται μόνο στην περίπτωση που ο χρήστης επιθυμεί αποκλειστικά τη μεγαλύτερη δυνατή ακρίβεια ταξινόμησης. Σε αυτήν την περίπτωση όμως, οι προσεγγιστικοί ασαφείς κανόνες που δημιουργούνται ερμηνεύουν μερικώς μόνο τον τρόπο με τον οποίο το σύστημα ταξινομεί τις αιτήσεις, καθώς ο καθένας από αυτούς εφαρμόζει τους δικούς του ορισμούς συναρτήσεων συμμετοχής.

Μελλοντικά τα χρηματοπιστωτικά ιδρύματα θα μπορούσαν να ωφεληθούν από την ανάπτυξη έμπειρων συστημάτων βασισμένων σε νευροασαφή συστήματα, που θα προσδιορίζουν την ομάδα κινδύνου στην οποία ανήκουν οι πελάτες τους, με βάση τα ποιοτικά και ποσοτικά δεδομένα που διατηρούν για αυτούς. Η κατηγοριοποίηση των πελατών σε διαφορετικές ομάδες πιστωτικού κινδύνου θα συμβάλει στην καλύτερη παρακολούθηση του χαρτοφυλακίου των δανείων των τραπεζών και στην καλύτερη άσκηση της πιστωτικής πολιτικής τους.

8. Βιβλιογραφία

1. Aha, D. (1992). Tolerating noisy, irrelevant and novel attributes in instance-based learning algorithms. *International Journal of Man-Machine Studies*, 36: 267– 287.
2. Armingier, G., Enache, D., Bonne, T. (1997). Analyzing credit risk data: A comparison of logistic discrimination classification tree analysis and feedforward networks. *Computational Statistics*, 12, 293–310.
3. Bardos, M. (1998). Detecting the risk of company failure at the Banque de France. *Journal of Banking and Finance*, 22, 1405–1419.
4. Barney, D. K., Graves, O. F., Johnson, J. D. (1999). The farmers home administration and farm debt failure prediction. *Journal of Accounting and Public Policy*, 18, 99–139.
5. Bellman R, Kalaba L, Zadeh LA. (1966). Abstraction and pattern classification. *J Math Anal Appl*;13:1–7
6. Bellman, R., Zadeh L.A. (1970). Decision-making in a Fuzzy Environment, *Management Science*, Vol.17.
7. Bherenji, H. R., Khedkar, P. (1992). Learning and Tuning Fuzzy Logic Controllers through Reinforcements. *IEEE Transactions on Neural Networks*. Vol (3), pp. 724-740.
8. Borowsky, M. (1995). Scoring puts up higher numbers. *US Banker*, 105(1), 63.
9. Boyle, M., Crook, J.N., Hamilton, R., Thomas, L.C. (1992). Methods for credit scoring applied to slow payers in Credit scoring and Credit Control. ed. L.C.Thomas, J.N.Crook, D.B.Edelman, Oxford University Press, Oxford, pp 75-90.
10. Breiman, L. (2001). Random forests. *Machine Learning*, 45(1):5.32.
11. Breiman, L., Friedman, J. H., Olshen, R.A., Stone, C.J. (1984). *Classification and Regression Trees*. Wadsworth Inc.
12. Brent, M. (1995). Instance-Based learning: Nearest Neighbor With Generalization. Master Thesis, University of Waikato, Hamilton, New Zealand.
13. Brown, M., Harris, C. (1994). *Neuro-fuzzy adaptive modelling and control*. New York: Prentice-Hall.
14. Buckley, J.J., Hayashi, Y. (1994). Fuzzy neural networks: a survey. *Fuzzy Sets and Systems* 66 1–13.

15. Carpenter, G., Grossberg, S. (1987). A Massive Parallel Architecture for a Self Organizing Neural Pattern Recognition Machine, *Computer Vision, Graphics and Image Processing*, 37: 54-115.
16. Carter, C., Catlett, J. (1987). Assessing credit card applications using machine learning. *IEEE Expert* 2, 71-79.
17. Carter, C., Catlett, J. (1987). Assessing credit card applications using machine learning. *IEEE Expert* 2, 71-79.
18. Cessie, S., van Houwelingen, J.C. (1992). Ridge Estimators in Logistic Regression. *Applied Statistics*, Vol. 41, No. 1, pp. 191-201.
19. Chatterjee, S., Barcun, S., (1970) A nonparametric approach to credit screening, *J. American Statistical Assoc.* 65, 150-154.
20. Chen, M.C., Huang, S.H. (2003). Credit scoring and rejected instances reassigning through evolutionary computation techniques. *Expert Systems with Applications* 24, 433–441.
21. Cheng, B., Titterington, D.M. (1994). Neural Networks: A review from a Statistical Perspective. *Statistical Science* 9, 2-30.
22. Coffman, J.Y., (1986). The proper role of tree analysis in forecasting the risk behaviour of borrowers. *MDS Reports, Management Decision Systems*, Atlanta, 3,4,7 and 9.
23. Craven, M.P. (1997). A faster learning neural network classifier using selective backpropagation. *Proceedings of the fourth IEEE International Conference on Electronics, Circuits and Systems*, Volume 1, pp 254-258.
24. Davis, R.H., Edelman, D.B., Gammerman, A.J. (1992). Machine-learning algorithms for credit-card applications. *IMA J. Mathematics applied in Business and Industry* 4, 43-52.
25. Deng, P.-S. (1993). Automatic knowledge acquisition and refinement for decision support: A connectionist inductive inference model. *Decision Sciences*, 24(2), 371–393.
26. Desai, V. S., Crook, J. N., Overstreet, G. A., Jr. (1996). A comparison of neural networks and linear scoring models in the credit union environment. *European Journal of Operational Research*, 95, 24–37
27. Desai, V.S., Conway, D.G., Crook, J.N., Overstreet, G.A. (1997). Credit scoring models in the credit union environment using neural networks and genetic algorithms. *IMA J. Mathematics applied in Business and Industry* 8, 323-346.
28. Dorsey, R. E., Johnson, J. D., Walter J. Mayer, (1994). A Genetic Algorithm for the Training of Feedforward Neural Networks. *Advances in Artificial Intelligence in Economics, Finance and Management*, Vol. 1, Edited by Whinston, A. and Johnson, J. D. JAI Press pp. 93-111.

29. Durand, D. (1941). Risk elements in consumer instalment financing. National Bureau of Economic Research, New York.
30. Eisenbeis, R. A. (1978). Problems in applying discriminant analysis in credit scoring models. *Journal of Banking and Finance*, 2, 205–219.
31. Fair Isaak (2003). A Discussion of Data Analysis, Prediction and Decision Techniques. A Fair Isaak white paper, May 2003.
32. Falbo, P. (1991). Credit scoring by enlarged discriminant analysis. *OMEGA*, 19(4), 275–289.
33. Fisher, R.A. (1936) The use of multiple measurements in taxonomic problems, *Annals of Eugenics* 7, 179-188.
34. Freat, M., (1990). The Upstart Algorithm: a Method for Constructing and Training Feedforward Neural Networks. *Neural Computation* 2:198-209.
35. Freeman, J. A., Skapura, D. M. (1992). *Neural networks algorithm, application and programming techniques*. MI, USA: Addison-Wesley.
36. Gaines, B. R. (1976). Foundations of fuzzy reasoning. *Intern. J. of Man-Machine Studies*, 8(6), pp. 623-668. 9
37. Galindo, J., Tamayo, P. (1997). Credit Risk Assessment using Statistical and Machine Learning Basic Methodology and Risk Modeling Application. In: *Proceedings of Computational Economics'97 conference*.
38. Glorfeld, L. W. (1996). A methodology for simplification and interpretation of backpropagation-based neural network models. *Expert Systems With Applications*, 10 (1), 37–54.
39. Glorfeld, L.W., Hardgrave, B.C. (1996). An improved method for developing neural networks: The case of evaluating commercial loan creditworthiness. *Computer Operation Research*, 23 (10), 933-944.
40. Grablowsky, B. J., Talley, W. K. (1981). Probit and discriminant factors for classifying credit applicants: A comparison. *Journal of Economics and Business*, 33, 254–261.
41. Hand, D.J., Henley, W.E. (1997). Statistical classification methods in consumer credit. *J. Royal Stat. Soc., Series A*, 160, 523-541.
42. Hastie, T., Tibshirani, R. (1998). Classification by pairwise coupling. In M. I. Jordan, M. J. Kearns, and S. A. Solla (eds.) *Advances in Neural Information Processing Systems 10 (NIPS-97)*, pp. 507-513. MIT Press.
43. Henley, W. E. (1995). Statistical aspects of credit scoring. Doctoral Dissertation. Milton Keynes, UK: The Open University.
44. Henley, W.E., Hand, D.J. (1996). A k-NN classifier for assessing consumer credit risk. *The Statistician* 65, 77-95.

45. Hoffmann, F., Baesens, B., Martens, J., Put, F., J. Vanthienen, J. (2002). Comparing a genetic fuzzy and a neurofuzzy classifier for credit scoring. *International Journal of Intelligent Systems*, vol. 17, 1067-1083.
46. Hopfield, J.J., (1982). Neural networks and physical systems with emergent collective computational abilities. *Proceedings of the National Academy of the Sciences of the U.S.A.* 79, 2554–2558.
47. Hsu, C.-W., Chang, C.-C., Lin, C.-J. (2003). A practical guide to support vector classification. Technical report, Department of Computer Science & Information Engineering, National Taiwan University, July 2003
48. Jagielska, I., Jaworski, J. (1996). Neural network for predicting the performance of credit card accounts. *Computational Economics*, 9 (1), 77–82.
49. Jagielska, I., Matthews, C., T. Whitfort, T. (1999). An investigation into the application of neural networks, fuzzy logic, genetic algorithms, and rough sets to automated knowledge acquisition for classification problems, *Neurocomputing*, vol. 24, pp. 37-54.
50. Jain, R. (1976). Decisionmaking in the presence of fuzzy variables. *IEEE Trans. on Systems, Man, and Cybernetics*, 6(10), pp. 698-702.
51. Jain, R. (1977). A procedure for multi-aspect decision-making using fuzzy sets. *Intern. J. of Systems Science*, 8(1), pp. 1-7.
52. Jang, J.-S. R. (1993). ANFIS: Adaptive-Network-based Fuzzy Inference Systems. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, Vol. 23, No.3, pp. 665-685.
53. Jang, J.-S. R., Sun, C.-T. (1995). Neuro-fuzzy modeling and control. *Proceedings of the IEEE*, March 1995.
54. Jang, R. (1992). *Neuro-Fuzzy Modeling: Architectures, Analyses and Applications*. PhD Thesis, University of California, Berkeley.
55. Joanes, D. N. (1993). Rejecting inference applied to logistic regression for credit scoring. *IMA Journal of Mathematics Applied in Business and Industry*, 5, 35–43.
56. Johnson, R. A., Wichern, D. W. (1998). *Applied multivariate statistical analysis* (Fourth Edition). Upper Saddle River, NJ: Prentice-Hall.
57. Kasabov, N., Qun Song (1999). Dynamic Evolving Fuzzy Neural Networks with 'm-out-of-n' Activation Nodes for On-line Adaptive Systems. Technical Report TR99/04, Department of information science, University of Otago.
58. Keerthi, S.S., Shevade, S.K., Bhattacharyya, C., Murthy, K.R.K. (2001). Improvements to Platt's SMO Algorithm for SVM Classifier Design. *Neural Computation*, 13(3), pp 637-649, 2001.

59. Laitinen, E. K. (1999). Predicting a corporate credit analyst's risk estimate by logistic and linear models. *International Review of Financial Analysis*, 8(2), 97–121.
60. Lee, G., Sung, T. K., Chang, N. (1999). Dynamics of modeling in data mining: interpretive approach to bankruptcy prediction. *Journal of Management Information Systems*, 16, 63–85.
61. Lee, T. S., Chiu, C. C., Lu, C. J., Chen, I. F. (2002). Credit scoring using the hybrid neural discriminant technique. *Expert Systems with Applications*, 23, 245–254.
62. Lin, C.T., Lee, C.S.G. (1991). Neural-Network-Based Fuzzy Logic Control and Decision Systems. *IEEE Trans. on Computers*, 40(12):1320-1336.
63. Loh, W.-Y., Shih, Y.-S. (1997). Split selection methods for classification trees, *Statistica Sinica* 7: 815–840.
64. Magidson, J., (1993). The Use of the New Ordinal Algorithm in CHAID to Target Profitable Segments." *Journal of Database Marketing*, London: Henry Stewart Publication.
65. Makowski, P. (1985). Credit scoring branches out, *The Credit world*. 75, 30-37
66. Malhotra, R., Malhotra, D. K. (2002). Differentiating between good credits and bad credits using neuro-fuzzy systems. *European Journal of Operational Research*, 136(2), 90–211.
67. Malhotra, R., Malhotra, D. K. (2003). Evaluating consumer loans using neural networks. *Omega*, 31, 83–96.
68. Mamdani, E. H. (1976). Advances in the linguistic synthesis of fuzzy controllers. *Intern. J. of ManMachine Studies*, 8(6), pp. 669-678.
69. Mannino, M. V., Koushik, M. (2000). The cost-minimizing inverse classification problem: a genetic algorithm approach. *Decision Support Systems*, 29(2), 283–300.
70. Martell, T. F., Fitts, R. L. (1981). A quadratic discriminant analysis of bank credit card user characteristics. *Journal of Economics and Business*, 33, 153–159.
71. Matsatsinis, N. (2002). CCAS: An Intelligent Decision Support System for Credit Card Assessment. *Journal of Multi-Criteria Decision Analysis*. 11: 213–235.
72. Mehta, D. (1968). The formulation of credit policy models. *Management Science* 15, 30-50.
73. Mezard, M., Nadal, J.-P. (1989). Learning in Feedforward Layered Networks: the Tiling Algorithm. *Journal of Physics A*, 22:2191-2204.

74. Nauck D., Kruse, R. (1993). A Fuzzy Neural Approach Learning Fuzzy Control Rules and Membership Functions by Fuzzy Error Backpropagation. In Proc. IEEE Int. Conf. on Neural Networks, pp. 1022-1027. San Francisco.
75. Nauck, D. (2000). Adaptive Rule Weights in Neuro-Fuzzy Systems. *Neural Computing & Applications* 9:60–70.
76. Nauck, D., Klawonn, F., Kruse, R. (1997). *Foundations of Neuro-Fuzzy Systems*. Wiley, Chichester.
77. Nauck, D., Kruse, R. (1995). NEFCLASS - A Neuro-Fuzzy Approach for the Classification of Data. In K. George, J.H.Carrol, E. Deaton, D. Oppenheim and J. Heightower, eds: *Applied Computing 1995. Proc. 1995 ACM Symposium on Applied Computing*, Nashville, Feb. 26-28, pp. 461-465. ACM Press, New York.
78. Overstreet, G. A., Jr., Bradley, E. L., Jr. (1994). Applicability of generic linear scoring models in the USA credit union environment: Further analysis. Working Paper, University of Virginia.
79. Overstreet, G. A., Jr., Bradley, E. L., Jr., Kemp, R. S. (1992). The flat-maximum effect and generic linear scoring model: A test. *IMA Journal of Mathematics Applied in Business and Industry*, 4, 97–109.
80. Parker, D. B. (1987). Optimal Algorithms For Adaptive Networks: Second Order Back 31 Propagation, Second Order Direct Propagation, And Second Order Hebbian Learning. *Proceedings of IEEE International Conference on Neural Networks*, 593-600.
81. Pawlak, Z. (1982). Rough Sets. *International Journal of Information and Computer Sciences* 1 (5): 341–356.
82. Piramuthu, S. (1999). Financial credit-risk evaluation with neural and neurofuzzy systems. *European Journal of Operational Research*, 112, 310–321.
83. Piramuthu, S., Shaw, M. J., Gentry, J. A. (1994). A Classification approach using multi-layered neural networks. *Decision Support Systems*, 11, 509–525.
84. Platt, J. (1998). Fast Training of Support Vector Machines using Sequential Minimal Optimization. *Advances in Kernel Methods - Support Vector Learning*, B. Schölkopf, C. Burges, and A. Smola, eds., MIT Press.
85. Platt, J.C. (1999). Probabilistic Outputs for Support Vector Machines and Comparisons to Regularized Likelihood Methods. In *Advances in Large Margin Classifiers*, A. Smola, P. Bartlett, B. Schölkopf, D. Schuurmans, eds., pp. 61-74, MIT Press.
86. Quinlan, J. (1993). *C4.5: Programs for Machine Learning*, Morgan Kaufmann, San Mateo.

87. Reichert A.K., Cho C-C, Wagner G.M. (1983). An examination of the conceptual issues involved in developing credit scoring models, *J. Business and Economic Statistics* 1, 101-114.
88. Richeson, L., Zimmermann, R. A., & Barnett, K. G. (1994). Predicting consumer credit performance: can neural networks outperform traditional statistical methods?. *International Journal of Applied Expert Systems*, 2 (2), 116–130.
89. Robins, G. (1993). Neural networks—Automatic data analysis finds retail applications. *Stores*, January, pp. 39–42.
90. Rosenblatt, F. (1958). The Perceptron: A Probabilistic Model for Information Storage and Organisation in the Brain. In *Psychological Review*, 65:386-408.
91. Rosenblatt, F. (1961). *Principles of Neurodynamics*. Washington D.C.: Spartan Press.
92. Rosenblatt, F. (1962) *Principle of Neurodynamics: Perceptron and the theory of Brain Mechanisms*, Washington, DC: Spartan Books.
93. Rumelhart, D.E., Hinton, G.E., Williams, R.J. (1986). Learning internal representation by back-propagating errors. In: Rumelhart, D.E., McClelland, J.L., the PDP Research Group (Eds.), *Parallel Distributed Processing: Explorations in the Microstructure of cognition*. MIT Press, MA
94. Rumelhart, D.E., McClelland, J.L. eds. (1986). *Parallel Distributed Processing: Explorations in the Microstructures of Cognition*. Foundations, Band 1. MIT Press, Cambridge.
95. Schebesch, K., Stecking, R. (2003). Support Vector Machines for Classifying and Describing Credit Applicants: Detecting Typical and Critical Regions. Credit Research Centre Conference, Credit Scoring & Credit Control VIII.
96. Schweizer, B., Sklar, A. (1963). Associative functions and abstract semigroups, *Publ.*
97. Sharma, S. (1996). *Applied multivariate techniques*. New York, NY: Wiley.
98. Smith, C.A.B. (1947). Some examples of discrimination. *Annals of Eugenics* 13, 272-282.
99. Stone, M. (1974). Cross-validatory choice and assessment of statistical predictions, *Journal of the Royal Statistical Society B* 36, 111-147.
100. Sulzberger, S.M., Tschicholig-Gurman, N.N., Vestli, S.J. (1993). FUN: Optimization of Fuzzy Rule Based Systems Using Neural Networks. In *Proceedings of IEEE Conference on Neural Networks*, San Francisco, pp 312-316.

101. Takagi, T and M. Sugeno (1985). Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control. *IEEE Trans. on Systems, Man, and Cybernetics*,
102. Takagi, T., Sugeno, M. (1985). Fuzzy Identification of Systems and its Application to Modeling and Control. *IEEE Trans. on Systems, Man and Cybernetics*, 15:116-132.
103. Thomas, L. C. (2000). A survey of credit and behavioral scoring: forecasting financial risk of lending to consumers, *International Journal of Forecasting*. 16, Pg. 149–172.
104. Titterington, D. M. (1992). Discriminant analysis and related topics. In J. N. Crook, & D. B. Edelman (Eds.), *Credit scoring and credit control* (pp. 53–73). Oxford: Oxford University Press.
105. Torsun, I. S. (1996). A neural network for a loan application scoring system. *The New Review of Applied Expert Systems*, 2, 47–62.
106. Vellido, A., Lisboa, P. J. G., Vaughan, J. (1999). Neural networks in business: A survey of applications (1992–1998). *Expert Systems With Applications*, 17, 51–70.
107. Wasserman, P.D. (1989). *Neural Computing: Theory and Practice*. Van Nostrand, Reinhold, New York.
108. Werbos, P. (1974). *Beyond Regression: New Tools for Predictions and Analysis in the Behavioral Science*. Ph.D. thesis, Harvard University, Cambridge, MA.
109. West, D. (2000). Neural network credit scoring models. *Computers and Operations Research*, 27, 1131–1152.
110. Westgaard, S., van der Wijst, N. (2001). Default probabilities in a corporate bank Portfolio: A logistic model approach. *European Journal of Operational Research*, 135(2), 338–349.
111. Widrow, B. and Angell, J. B. (1962). Reliable, Trainable Networks for Computing and Control. *Aerospace Eng.*, 21 (September issue), 78-123.
112. Widrow, B., Hoff, M.E. (1960). Adaptive switching circuits. In *IRE WESCON Convention Record*, pages 96-104, New York.
113. Wiginton, J. C. (1980). A note on the comparison of logit and discriminant models of consumer credit behavior. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 15, 757–770.
114. Witten, I.H., Frank, E., (2000). *Data Mining - Practical Machine Learning Tools and Techniques with Java Implementations*. Morgan Kaufmann.

115. Williamson, A. G. (1995). Refining a neural network credit application system with a genetic algorithm. *Journal of Microcomputer Applications*, 18, 261–277.
116. Wong, B. K., Bodnovich, A. T., Selvi, Y. (1997). Neural network applications in business: a review and analysis of the literature (1988–1995). *Decision Support Systems*, 19, 301–320.
117. Yu, W. (1992). ELECTRE TRI: Aspects Methodologiques et Manuel d'Utilisation, Document du Lamsade. Universite' de Paris - Dauphine 74.
118. Zadeh, L. A. (1962). From circuit theory to systems theory. *IRE Proc.*, 50, pp. 856-865.
119. Zadeh, L. A. (1965). Fuzzy sets and systems. In: Fox, J., ed., *System Theory*. Polytechnic Press, Brooklyn, NY, pp. 29-37.
120. Zadeh, L. A. (1972). A fuzzy set interpretation of linguistic hedges. *Journal of Cybernetics*, 2(3), pp. 4-34.
121. Zadeh, L. A. (1973). Outline of a new approach to the analysis of complex systems and decision processes. *IEEE Trans. on Systems, Man, and Cybernetics*, 1(1), pp. 28-44.
122. Zhang, G., Patuwo, B. E., Hu, M. Y. (1998). Forecasting with artificial neural networks: The state of the art. *International Journal of Forecasting*, 14, 35–62.
123. Zopounidis, C., Doumpos, M. (2002). Multi-group discrimination using multicriteria analysis: Illustrations from the field of finance. *European Journal of Operational Research* 139 (2): 371–389.
124. Zurada, J.M., Lozowski, A. (1996). Generating linguistic rules from data using neuro-fuzzy framework. *Proc. 4th Int. Conf. on Soft Computing*, Iizuka, pp. 618-621.
125. Δαμάσκος, Ξ. (1997). Μοντέλα αποφασεων στην πιστοδότηση ιδιωτών, εφαρμογή της μεθόδου Electre Tri στη χορήγηση πιστωτικών καρτών. Μεταπτυχιακή διατριβή, Τμήμα Μηχανικών Παραγωγής και Διοίκησης, Πολυτεχνείο Κρήτης.