



**ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ ΚΡΗΤΗΣ**

**ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΠΑΡΑΓΩΓΗΣ  
ΚΑΙ ΔΙΟΙΚΗΣΗΣ**

**ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΙΚΑ ΜΟΝΤΕΛΑ  
ΑΝΑΛΥΣΗΣ ΔΙΚΤΥΩΝ ΠΑΡΑΓΩΓΗΣ**

**Βασίλειος Σ. Κουϊκόγλου**

**Χανιά, Νοέμβριος 1989**



**ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ ΚΡΗΤΗΣ**

**ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΠΑΡΑΓΩΓΗΣ**

**ΚΑΙ ΔΙΟΙΚΗΣΗΣ**

**ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΙΚΑ ΜΟΝΤΕΛΑ  
ΑΝΑΛΥΣΗΣ ΔΙΚΤΥΩΝ ΠΑΡΑΓΩΓΗΣ**

Διατριβή που υπεβλήθη για την μερική ικανοποίηση των απαιτήσεων για την  
απόκτηση Διδακτορικού Διπλώματος

υπό

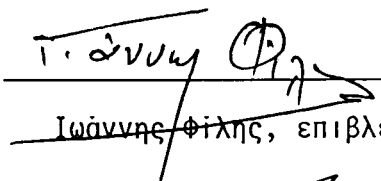
**Βασιλείου Σταύρου Κουϊκόγλου**


**Χανιά, Νοέμβριος 1989**

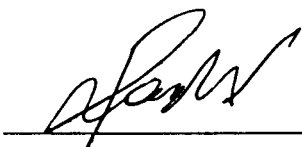
© Copyright υπο Βασιλείου Σ. Κουϊκόγλου

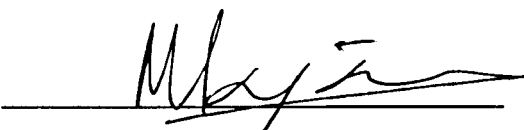
Χανιά, 1989

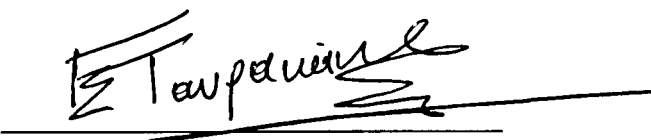
Η διδακτορική διατριβή του Βασιλείου Σταύρου Κουϊκόγλου  
εγκρίνεται. Τα μέλη της εξεταστικής επιτροπής:

  
Ιωάννης Φίλης, επιβλέπων

  
Ιωάννης Σίσκος

  
Γεώργιος Κονταξής

  
Νικόλαος Μαράτος

  
Γεώργιος Σταυρακάκης

*Στη μνήμη του Henry D'Angelo*

*Καθηγητή του Πανεπιστημίου της Βοστώνης,  
βασικές ιδέες του οποίου καρποφορούν στην εργασία αυτή.*

## Πρόλογος

Με το μικρό αυτό πρόλογο θέλω να ευχαριστήσω τα μέλη της εξεταστικής επιτροπής του διδακτορικού και όσους με βοήθησαν κατά τη διάρκεια της έρευνας:

Τους Καθηγητές Ι. Σίσκο, Γ. Κονταξή, Ν. Μαράτο και Γ. Σταυρακάκη για την παρακολούθηση της εργασίας μου και την συμμετοχή τους στην εξεταστική επιτροπή. Τον επιβλέποντα Καθηγητή Ι. Φίλη, δάσκαλο και φίλο, ακούραστο πεζοπόρο στις ορειβάσιες μας και άριστο chef, για την αμέριστη ηθική και τεχνική στήριξη που μου παρείχε σε όλη τη διάρκεια της εργασίας.

Τους γονείς μου Σοφία και Σταύρο για την αγάπη, την ηθική και υλική υποστήριξή τους.

Τους φίλους Ηλέκτρα και Μιχάλη Λάμπρου για την επί πολλές εβδομάδες διάθεση του υπολογιστή των, από τον οποίο πήρα τα πρώτα αποτελέσματα της έρευνας· επίσης τους Γιάννη Καμπούρη και Έλσα Ανδριανού για την επιμέλεια του κειμένου της διατριβής.

Τέλος, την κ. Αγάπη Μαυράκη για την προσεκτική δακτυλογράφηση των χειρογράφων (όλα τα λάθαι προέρχονται από δικές μου αβλεψίες), και τις φίλες και φίλους που εργάζονται στο Πολυτεχνείο Κρήτης οι οποίοι με βοήθησαν σε πολλά ζητήματα κατά τη διάρκεια της εκπόνησης της διατριβής.

### **Σύντομο Βιογραφικό Σημείωμα**

Ο Βασίλειος Σ. Κουϊκόγλου γεννήθηκε στο Ναύπλιον το 1961. Το 1985 έλαβε το δίπλωμα ηλεκτρολόγου μηχανικού απο το Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο. Απο το 1986 μέχρι σήμερα (1989) είναι ειδικός μεταπτυχιακός υπότροφος στο Τμήμα Μηχανικών Παραγωγής και Διοίκησης του Πολυτεχνείου Κρήτης. Τα επιστημονικά του ενδιαφέροντα εστιάζονται σε προβλήματα ανάλυσης, προσομοίωσης και βελτιστοποίησης συστημάτων παραγωγής.

## ΠΕΡΙΛΗΨΗ ΤΗΣ ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗΣ ΔΙΑΤΡΙΒΗΣ

### Αποτελεσματικά Μοντέλα Ανάλυσης Δικτύων Παραγωγής

του

Βασιλείου Σταύρου Κουϊκόγλου,

ΕΜΥ Πολυτεχνείου Κρήτης

Επιβλέπων Καθηγητής: Ιωάννης Α. Φίλης

Το πρόβλημα της ανάλυσης συστημάτων παραγωγής εξετάζεται με τη βοήθεια υβριδικών μεθόδων οι οποίες συνδυάζουν αναλυτικές τεχνικές και προσομοίωση. Ανάλυση είναι η μέθοδος βάσει της οποίας υπολογίζονται οι μέσοι ρυθμοί παραγωγής, μέσες στάθμες των αποθηκών και άλλες παράμετροι ενός συστήματος παραγωγής.

Το σύστημα αποτελείται από μηχανές για τη διαδοχική κατεργασία και μετατροπή ακατέργαστων, αρχικά, κομματιών σε έτοιμα προϊόντα. Στα ενδιάμεσα στάδια της παραγωγής τα κομμάτια αποθηκεύονται σε χώρους πεπερασμένης χωρητικότητας. Κατά τη διάρκεια της λειτουργίας του συστήματος οι μηχανές παθαίνουν βλάβες και επισκευάζονται τυχαία· οι χώροι των αποθηκών γεμίζουν ή αδειάζουν. Για την παράσταση των γεγονότων αυτών χρησιμοποιείται κατάλληλος συμβολισμός. Στη συνέχεια εξετάζεται διεξοδικά η επίδραση των γεγονότων στον τρόπο λειτουργίας των μηχανών και εξάγονται οι εξισώσεις καταστάσεως του δικτύου παραγωγής. Κάποιες από τις εξισώσεις αυτές είναι αιτιοκρατικές και λύνονται αναλυτικά. Οι υπόλοιπες είναι στοχαστικές εξισώσεις διακεκριμένων γεγονότων και πραγματοποιούνται με την προσομοίωση του συστήματος στον υπολογιστή.



Εξετάζονται πρώτα γραμμές παραγωγής οι οποίες παράγουν ένα είδος προϊόντος κατά τεμάχια. Αναπτύσσεται ένας αλγόριθμος για την μελέτη της μεταβατικής και μόνιμης κατάστασης. Προηγούμενα αναλυτικά αποτελέσματα για την μελέτη της παραγωγικότητας τέτοιων συστημάτων αφορούν τη λειτουργία στη μόνιμη κατάσταση και δεν είναι πάντοτε ακριβή. Εξ άλλου οι αλγόριθμοι προσομοίωσης που έχουν αναπτυχθεί εμφανίζονται είτε εξαιρετικά ακριβείς αλλά αργοί, ή, αντιθέτως, ταχείς αλλά όχι αξιόπιστοι. Ο αναπτυχθείς αλγόριθμος συνδυάζει την ακρίβεια με την ταχύτητα εκτέλεσης στον υπολογιστή και υπερτερεί ενός αργού αλλά ακριβούς κλασσικού αλγορίθμου προσομοίωσης και ενός προσεγγιστικού, ο οποίος είναι κατάλληλος για την μελέτη της μόνιμης κατάστασης και ταχύς αλλά όχι πάντοτε ακριβής.

Εξετάζονται επίσης γενικότερα δίκτυα παραγωγής στη μόνιμη κατάσταση, τα οποία παράγουν διάφορα είδη προϊόντων. Το πρόβλημα εδώ εμφανίζει μεγαλύτερες δυσκολίες από το προηγούμενο, λόγω της περίπλοκης γεωμετρίας των συστημάτων αυτών. Θεωρώντας την παραδοχή ότι στο δίκτυο έχουμε συνεχή ροή προϊόντων και όχι κίνηση διακεκριμένων κομματιών, εξάγονται οι εξισώσεις καταστάσεως για το μοντέλο διακεκριμένων γεγονότων του συστήματος. Ο αντίστοιχος υβριδικός αλγόριθμος εμφανίζεται εξαιρετικά ταχύς σε σύγκριση με έναν κλασσικό αλγόριθμο προσομοίωσης, για μία σειρά πειραμάτων που αφορούν συστήματα παραγωγής με ρεαλιστικές παραμέτρους. Επίσης είναι ακριβής όσον αφορά στην εκτίμηση των μέσων ρυθμών παραγωγής για το κάθε προϊόν του δικτύου.

## Περιεχόμενα

### I. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

1.1 Βασικοί ορισμοί και προβλήματα των συστημάτων παραγωγής	1
1.2 Ιστορική ανασκόπηση	3

### II. ΓΡΑΜΜΕΣ ΠΑΡΑΓΩΓΗΣ

2.1 Περιγραφή και τεμάχιο-προς-τεμάχιο προσομοίωση του συστήματος	13
2.2 Συμβολισμός για την περιγραφή της λειτουργίας του συστήματος	19
2.3 Μοντέλο διακεκριμένων γεγονότων	22
2.4 Προγραμματισμός γεγονότων	26
2.4 (Α) Χώρος_γεμίζει	27
2.4 (Β) Χώρος_αδειάζει	32
2.4 (Γ) Χώρος_ελευθερώνεται και χώρος_τροφοδοτείται	35
2.5 (Δ) Μηχανές που είναι ταυτοχρόνως αποστερημένες και αποκλεισμένες	37
2.4 (Ε) Γεγονότα στις μηχανές	46
2.5 Ενημέρωση και αλλαγή των μεταβλητών καταστάσεως	47
2.5 (Α) Εξισώσεις ενημέρωσης	48
2.5 (Β) Μεταβολές λόγω γεγονότων στις μηχανές	50
2.5 (Γ) Μεταβολές λόγω γεγονότων στις αποθήκες	52
2.5 (Δ) Προτεραιότητες μεταξύ ταυτόχρονων γεγονότων	54
2.6 Ο αλγόριθμος	55
2.7 Αριθμητικά αποτελέσματα	62

2.7 (Α) Σύγκριση με άλλους αλγόριθμους	62
2.7 (Β) Καθορισμός αρχικών σταθμών για τη μελέτη μόνιμης κατάστασης	71
2.8 Συμπεράσματα	77
 <b>III. ΔΙΚΤΥΑ ΠΑΡΑΓΩΓΗΣ</b>	
3.1 Περιγραφή	78
3.2 Μοντέλο διακεκριμένων γεγονότων	86
3.3 Προγραμματισμός γεγονότων	94
3.3 (Α) Γεγονότα στις αποθήκες	94
3.3 (Β) Γεγονότα στις μηχανές	96
3.4 Ενημέρωση και αλλαγή των μεταβλητών καταστάσεως	96
3.4 (Α) Εξισώσεις ενημέρωσης	97
3.4 (Β) Μεταβολές λόγω γεγονότων στις μηχανές	97
3.4 (Γ) Μεταβολές λόγω γεγονότων στις αποθήκες	102
3.5 Ο αλγόριθμος	107
3.6 Αριθμητικά αποτελέσματα	110
3.7 Συμπεράσματα	117
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α: Μεταβατικοί χρόνοι στο συνεχές σύστημα	119
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Β: Το πρωτόκολλο ΜΚΠΦ στο συνεχές σύστημα	122
 <b>ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ</b>	 126

# Ι. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

## 1.1 ΒΑΣΙΚΟΙ ΟΡΙΣΜΟΙ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΤΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΠΑΡΑΓΩΓΗΣ

Στην παράγραφο αυτή περιγράφονται τα βασικά στοιχεία από τα οποία αποτελούνται τα συστήματα παραγωγής και οι τύποι συστημάτων που χρησιμοποιούνται στη βιομηχανία. Κατόπιν διατυπώνονται τα προβλήματα της ανάλυσης και σύνθεσης που αφορούν τη βέλτιστη λειτουργία τέτοιων συστημάτων· τέλος περιγράφονται συνοπτικά δύο κατηγορίες μεθόδων (αναλυτικές μέθοδοι και τεχνικές προσομοίωσης) που χρησιμοποιούνται για την επίλυση του προβλήματος της ανάλυσης.

Οι σταθμοί παραγωγής αποτελούνται από μία ή περισσότερες μηχανές οι οποίες δέχονται ακατέργαστα κομμάτια ή πρώτες ύλες και παράγουν έτοιμα προϊόντα.

Χώροι εναποθήκευσης διαμορφώνονται μεταξύ των σταθμών παραγωγής συμβάλλοντας στον συγχρονισμό των λειτουργιών των σταθμών και την αύξηση της παραγωγικότητας.

Γραμμή παραγωγής είναι ένα σύνολο από σταθμούς παραγωγής συνδεδεμένους εν σειρά με ενδιάμεσες αποθήκες, στην οποία κάποιο είδος δέχεται διαδοχικές κατεργασίες μέχρι τον τελευταίο σταθμό και κατόπιν φεύγει από το σύστημα.

Το δίκτυο παραγωγής περιέχει σταθμούς και αποθήκες συνδεδεμένες εν σειρά και παράλληλα και παράγει διαφορετικά είδη προϊόντων.

Ευέλικτο βιομηχανικό σύστημα (Flexible Manufacturing System-FMS) είναι ένα δίκτυο παραγωγής στο οποίο κάθε σταθμός μπορεί να κάνει ταυτόχρονα διαφορετικές εργασίες σε πολλούς τύπους προϊόντων. Το είδος των εργασιών και η μετακίνηση των κομματιών μέσα στο δίκτυο ελέγχονται κάθε στιγμή από έναν κεντρικό υπολογιστή, ώστε να βελτιστοποιείται το μέτρο απόδοσης του συστήματος. Το τελευταίο καθορίζεται από την βραδύτητα, το κόστος παραγωγής, την παραγωγικότητα, ή συνδυασμό τους.

Δύο είναι τα προβλήματα που αφορούν τη λειτουργία των συστημάτων παραγωγής: η **ανάλυση** και η **σύνθεση**. Ανάλυση είναι ο προσδιορισμός των μέσων τιμών των ρυθμών παραγωγής, των αποθεμάτων και άλλων λειτουργικών παραμέτρων του συστήματος, ενώ σύνθεση το σύνολο των αποφάσεων που λαμβάνονται για την σχεδίαση ενός νέου συστήματος, τη μεταβολή ενός υπάρχοντος και τον προγραμματισμό της λειτουργίας του. Η λήψη αποφάσεων για το μέγεθος των αποθηκών, το είδος των μηχανών και τον τρόπο με τον οποίο κυκλοφορούν τα προϊόντα μέσα στο δίκτυο επηρεάζει τους ρυθμούς παραγωγής, τις μέσες στάθμες αποθηκών και κατά συνέπεια το κόστος λειτουργίας του. Έτσι, τις τελευταίες δεκαετίες υπάρχει συνεχές ερευνητικό ενδιαφέρον σχετικά με την ανάλυση συστημάτων παραγωγής. Ωστόσο η πρόοδος σ' αυτήν την περιοχή είναι περιορισμένη λόγω των μεγάλων διαστάσεων των μοντέλων τα οποία απαιτούνται για την περιγραφή τέτοιων συστημάτων. Τα μοντέλα αυτά είναι στοχαστικά επειδή οι μηχανές

τών σταθμών παραγωγής παθαίνουν βλάβες και επισκευάζονται σε τυχαίες χρονικές στιγμές.

Η κατάσταση του συστήματος κάποια χρονική στιγμή περιγράφεται συνήθως από τις στάθμες των αποθηκών και τις καταστάσεις των μηχανών (λειτουργικές, ή υπό επισκευήν).

Για την επίλυση του προβλήματος χρησιμοποιούνται οι αναλυτικές μέθοδοι, καθώς επίσης και τεχνικές προσομοίωσης στον υπολογιστή. Η πρώτη κατηγορία μεθόδων περιλαμβάνει τη θεωρία αλυσίδων Markov, σύμφωνα με την οποία η κατάσταση του συστήματος είναι στοχαστική διαδικασία χωρίς μνήμη. Τα προκύπτοντα αναλυτικά μοντέλα μπορεί να είναι ακριβή ή προσεγγιστικά ανάλογα με την πολυπλοκότητα του συστήματος και δίνουν τις εκφράσεις για τις πιθανότητες μόνιμης καταστάσης. Η προσομοίωση είναι μία άλλη τεχνική με την οποία το μοντέλο μιμείται τη λειτουργία του συστήματος για μία ορισμένη χρονική περίοδο. Ο υπολογιστής παράγει μία ακολουθία "τυχαίων αριθμών", οι οποίοι αντιστοιχούν στις διαδοχικές χρονικές στιγμές κατά τις οποίες επισκευάζονται ή υφίστανται βλάβη οι μηχανές. Ο συνδυασμός μαθηματικής ανάλυσης και προσομοίωσης οδηγεί σε υβριδικά μοντέλα· τέτοια μοντέλα αναπτύσσονται στην εργασία αυτή για την μελέτη γραμμών και δικτύων παραγωγής.

## **1.2 ΙΣΤΟΡΙΚΗ ΑΝΑΣΚΟΠΗΣΗ**

Στην παράγραφο αυτή παρουσιάζεται η βιβλιογραφία που αναφέρεται στην

ερευνητική δραστηριότητα σχετικά με την ανάλυση συστημάτων παραγωγής και τα βασικά προβλήματα τα οποία λύνονται με την μέθοδο που θα αναπτυχθεί στη συνέχεια. Παρουσιάζονται πρώτα οι εργασίες που αναφέρονται στις γραμμές και κατόπιν στα δίκτυα παραγωγής.

Στην αρχή μελετήθηκαν αναμονητικά συστήματα, στα οποία οι εξυπηρετούμενοι (πελάτες) σχηματίζουν ουρές περιμένοντας μπροστά από τις βαθμίδες εξυπηρέτησης (ταμεία κλπ.). Οι πελάτες επισκέπτονται διάφορες βαθμίδες εξυπηρέτησης και τέλος φεύγουν από το σύστημα. Η αναλογία των βαθμίδων εξυπηρέτησης με τις μηχανές και των ουρών αναμονής των πελατών με τα αποθηκευμένα κομμάτια στα ενδιάμεσα στάδια της παραγωγής είναι προφανής. Τα πρώτα αποτελέσματα αφορούν σειριακά συστήματα με δύο ή τρεις βαθμίδες εξυπηρέτησης. Η κατάσταση του συστήματος περιγράφεται από το πλήθος των πελατών πριν από κάθε βαθμίδα. Με την παραδοχή ότι οι αφίξεις των πελατών στην πρώτη βαθμίδα γίνονται κατά Poisson και οι χρόνοι κατεργασίας των κομματιών είναι εκθετικά κατανομημένοι προκύπτουν μοντέλα Markov με λύσεις κλειστής μορφής για τις πιθανότητες μόνιμης κατάστασης (Burke 1956, Hunt 1956, Avi-Itzak and Yadin 1965). Γραμμές παραγωγής μπορούν να περιγραφούν από τέτοια μοντέλα με την παραδοχή ότι οι μηχανές δεν υφίστανται βλάβες και η διάρκεια του κύκλου παραγωγής κάθε μηχανής είναι τυχαία μεταβλητή με εκθετική κατανομή.

Ένα ακριβές μοντέλο Markov, για σύστημα με μία αποθήκη που βρίσκεται ανάμεσα σε δύο μηχανές με αιτιοκρατικούς και ίσους κύκλους παραγωγής οι οποίες παθαίνουν βλάβες, είχε επίσης λύση κλειστής μορφής (Artamonov

1976). Γενικότερες παραδοχές που αφορούσαν τους χρόνους βλαβών και τυχαίους χρόνους παραγωγής των κομματιών οδήγησαν σε προσεγγιστικές εκφράσεις για τις πιθανότητες μόνιμης κατάστασης (Gershwin and Berman 1981, Gershwin and Schick 1983). Ένα παρόμοιο σύστημα αποτελούμενο από δύο μηχανές των οποίων η παραγωγή είναι συνεχής και όχι κατά τεμάχια, περιγράφεται από ένα σύνολο διαφορικών εξισώσεων το οποίο λύνεται με μεθόδους αριθμητικής ανάλυσης (Wijngaard 1979).

Στα αναφερθέντα συστήματα η μηχανή εμφανίζεται σε δύο καταστάσεις: λειτουργική με κάποιο μέσο ρυθμό παραγωγής και υπό επισκευή με ρυθμό παραγωγής 0. Μηχανές με φασική κατανομή (Ph) χρόνων παραγωγής ονομάζονται εκείνες που έχουν δύο ή περισσότερες καταστάσεις. Οι αντίστοιχοι οι χρόνοι παραγωγής είναι τυχαίες μεταβλητές εκθετικά κατανομημένες με διαφορετικές αναμενόμενες τιμές σε κάθε κατάσταση. Ένα αναμονητικό σύστημα  $Ph|Ph|1|K$  με αφίξεις τύπου Ph, εξυπηρετήσεις τύπου Ph από μία μηχανή και K θέσεις εναποθήκευσης μπροστά από τη μηχανή, εξετάστηκε πρόσφατα (Bocharov 1986). Η ανάλυση είναι ακριβής, αλλά το μοντέλο Markov του συστήματος είναι μεγάλης διαστάσεως.

Μεγαλύτερες γραμμές παραγωγής χωρίς αποθήκες έχουν εξετασθεί στις εργασίες των Buzacott (1968) και Phillis (1982). Η ανάλυση γραμμών με άπειρες χωρητικότητες ανάμεσα στις μηχανές είναι επίσης υπολογιστικά εφικτή (Buzacott 1967). Το πρόβλημα με τις αποθήκες πεπερασμένης χωρητικότητας είναι οι μεγάλοι χρόνοι υπολογισμών, αφού οι διαστάσεις του μοντέλου Markov είναι τεράστιες ακόμη και για μικρά συστήματα. Σε ένα απλό σύστημα με δύο μηχανές και μία ενδιάμεση αποθήκη χωρητικότητας



$K$  κομματιών, μπορεί να υπάρχουν  $0, 1, \dots, \eta (K+2)$  κομμάτια, αφού κάθε μηχανή έχει θέση για ένα κομμάτι. Οι πιθανές καταστάσεις κάθε μηχανής είναι δύο: λειτουργική και υπό επισκευήν. Επομένως το μοντέλο Markov του συστήματος είναι διαστάσεως  $4(K+3)$ . Σε μία γραμμή με  $N$  μηχανές και  $N-1$  αποθήκες το πλήθος των καταστάσεων είναι της τάξεως του:

$$2^N \prod_{i=1}^{N-1} (K_i+3), \text{ όπου } K_i \text{ είναι η χωρητικότητα της αποθήκης } -i.$$

Έτσι π.χ. για ένα σύστημα με 10 μηχανές και 9 αποθήκες χωρητικότητας 10 κομματιών η κάθε μία, προκύπτει ένα σύστημα εξισώσεων με  $10^{13}$  αγνώστους. Η ακριβής επίλυση του προβλήματος αυτού είναι αδύνατη με τις σημερινές υπολογιστικές δυνατότητες, αλλά και μ' εκείνες του αμέσου μέλλοντος.

Ενδιαφέρον παρουσιάζουν οι μέθοδοι προσεγγιστικών **Διασπάσεων** (Decompositions) για συστήματα με συνεχή παραγωγή (De Koster 1987) ή κατά τεμάχια (Hillier and Boling 1977, Sheskin 1976, και Choong and Gershwin 1987). Σύμφωνα με τις μεθόδους αυτές η γραμμή χωρίζεται σε τόσα υποσυστήματα, όσες και οι αποθήκες της. Ένα υποσύστημα αποτελείται από μία αποθήκη και δύο ισοδύναμες μηχανές. Γίνεται η παραδοχή ότι κάθε ισοδύναμη μηχανή περιγράφει τη λειτουργία ολόκληρου του τμήματος της γραμμής το οποίο τροφοδοτεί ή τροφοδοτείται από την αποθήκη. Οι παράμετροι των ισοδύναμων μηχανών ενός υποσυστήματος εξαρτώνται από τις παραμέτρους των πραγματικών μηχανών της γραμμής οι οποίες περιέχουν την αντίστοιχη αποθήκη· επίσης σχετίζονται και με τις παραμέτρους των ισοδύναμων μηχανών των γειτονικών υποσυστημάτων. Για την εύρεση της μορφής των συναρτήσεων αυτών είναι επί πλέον αναγκαίο να γίνει η εξής

παραδοχή: η πιθανότητα κάποια αποθήκη να γεμίσει ενώ η προηγούμενη είναι άδεια είναι 0. Με αυτόν τον τρόπο μπορεί να γίνει ξεχωριστά η ανάλυση κάθε υποσυστήματος βάσει της χωρητικότητας της αποθήκης και των παραμέτρων των δύο ισοδυνάμων μηχανών του. Οι μέθοδοι διασπάσεων διαφέρουν μεταξύ τους ως προς τον τρόπο που υπολογίζουν τις παραμέτρους αυτές. Στην εργασία των Choong and Gershwin (1987) για την ανάλυση μίας γραμμής με  $N$  μηχανές και  $N-1$  αποθήκες, απαιτείται η λύση ενός συστήματος  $9N$  μη γραμμικών εξισώσεων.

Για τη λύση προβλημάτων σχεδίασης γραμμών παραγωγής απαιτείται ο υπολογισμός της ευαισθησίας του μέσου ρυθμού παραγωγής στις μεταβολές διαφόρων παραμέτρων των συνιστωσών του συστήματος (χωρητικότητες των αποθηκών, ρυθμοί παραγωγής, βλαβών και επισκευής των μηχανών και θέση των μηχανών και αποθηκών). Στην αρχή, επειδή για μεγάλα συστήματα δεν υπήρχαν τα αναλυτικά εργαλεία για την επίλυση του πρόβληματος, χρησιμοποιήθηκαν μέθοδοι προσομοίωσης (Barten 1962, Freeman 1964, Anderson and Moodie 1969). Με την τεχνική αυτή περιγράφεται η λειτουργία του συστήματος για κάποια χρονική περίοδο. Συγκεκριμένα, καταγράφονται οι χρόνοι στους οποίους τα κομμάτια εισέρχονται στις μηχανές και αποθήκες, καθώς επίσης και οι χρόνοι βλαβών και επισκευών των μηχανών. Αυτοί οι χρόνοι εξαρτώνται από τις παραμέτρους του συστήματος αλλά και από τυχαίους παράγοντες. Για τον υπολογισμό των μέτρων ευαισθησίας ως προς μία μόνο παράμετρο πρέπει να εκτελεστούν δύο προσομοιώσεις στον υπολογιστή. Στη δεύτερη προσομοίωση μεταβάλλεται η τιμή της παραμέτρου. Για τη μελέτη της επίδρασης κάθε καινούργιας παραμέτρου στο μέσο ρυθμό παραγωγής απαιτείται και μία νέα προσομοίωση του συστήματος. Το πρόβλημα

σε τέτοιες περιπτώσεις είναι οι μεγάλοι χρόνοι στον υπολογιστή, λόγω του μεγάλου αριθμού των αναγκαίων προσομοιώσεων και χρόνου που απαιτείται για κάθε μία απ' αυτές.

Αξιόλογες προσπάθειες για τη λύση αυτού του προβλήματος γίνονται στις αρχές της τελευταίας δεκαετίας. Μία νέα τεχνική υπολογισμού των κλίσεων με το όνομα **Ανάλυση Διαταραχών** (Perturbation Analysis) μειώνει σημαντικά τον αριθμό των απαιτούμενων προσομοιώσεων (Ho et al 1979 και 1983). Η αξία της μεθόδου βρίσκεται στην ανάγκη μιας μόνο εκτέλεσης προσομοίωσης για τον υπολογισμό των κλίσεων του μέσου ρυθμού παραγωγής (ως προς τις παραμέτρους του συστήματος). Η τεχνική αυτή ανήκει στην γενικότερη κατηγορία μεθόδων με το όνομα **υβριδικές**. Αυτές οι μέθοδοι συνδυάζουν αναλυτικά μοντέλα και προσομοίωση.

Για μεγάλες γραμμές παραγωγής οι χρόνοι προσομοίωσης στον υπολογιστή είναι τεράστιοι. Η μόνη προσπάθεια για την μείωση των υπολογιστικών απαιτήσεων (D'Angelo et al 1988) έδωσε ένα πολύ ταχύ υβριδικό μοντέλο, που είναι ακριβές για την ανάλυση μόνιμης κατάστασης συστημάτων με πολλές μηχανές και μεγάλες χωρητικότητες αποθηκών.

Η δεύτερη κατηγορία εργασιών αφορά την ανάλυση δικτύων παραγωγής. Από τα αναμονητικά συστήματα, τα δίκτυα Jackson είναι τα πρώτα που μελετήθηκαν (Jackson 1957, Gordon and Newell 1967). Τα αντίστοιχα μοντέλα μπορούν να περιγράψουν συστήματα παραγωγής με τις παραδοχές ότι οι μηχανές δεν παθαίνουν βλάβες, έχουν εκθετικά κατανεμημένους χρόνους παραγωγής και οι αποθήκες έχουν άπειρες χωρητικότητες. Οι μεταβάσεις των κομματιών από

μία μηχανή στις υπόλοιπες, γίνονται με κάποιες πιθανότητες που είναι ίσες για όλα τα κομμάτια. Η πιθανότητα μόνιμης κατάστασης του συστήματος είναι το γινόμενο των πιθανοτήτων μόνιμης κατάστασης των επί μέρους μηχανών. Οι τελευταίες προκύπτουν εξετάζοντας ξεχωριστά κάθε στοιχειώδες τμήμα αποτελούμενο από μία μηχανή με την αποθήκη της. Μέχρι το 1975 τα δίκτυα Jackson ήταν τα μόνα που χρησιμοποιήθηκαν για την περιγραφή συστημάτων παραγωγής. Αργότερα εξετάστηκαν δίκτυα με διαφορετικά είδη προϊόντων και πεπερασμένες χωρητικότητες (Basket et al 1975). Το πρόβλημα των μεθόδων αυτών είναι και πάλι οι μεγάλες διαστάσεις των μοντέλων.

Για την ανάλυση μεγάλων δικτύων παραγωγής αναπτύχθηκαν αρκετές προσεγγιστικές μέθοδοι. Οι μέθοδοι διασπάσεων (Courtois 1977, Kuehn 1979, Takahashi et al 1980, Vinod and Altiok 1986, Bocharov 1987) χωρίζουν το δίκτυο σε υποσυστήματα, συνήθως μίας μηχανής μαζί με την αποθήκη της. Χρησιμοποιώντας μία ή περισσότερες ροπές προσεγγίζουν την κατανομή των χρόνων παραγωγής των προϊόντων στις μηχανές. Για τους ρυθμούς αφίξεων στις αποθήκες λύνουν εξισώσεις οι οποίες εκφράζουν τη διατήρηση των προϊόντων στο σύστημα, αλλά και σε κάθε υποσύστημα, χρησιμοποιώντας προσεγγιστικούς τύπους από τη θεωρία αναμονητικών συστημάτων ή ακριβή μοντέλα για απλά συστήματα με δύο μηχανές και ενδιάμεση αποθήκη, όπως αυτά που περιγράφηκαν προηγουμένως.

Η **Ανάλυση Μέσης Τιμής** (Mean Value Analysis) είναι μία άλλη μέθοδος που αναπτύχθηκε πιο πρόσφατα (Reiser 1979 and Lavenberg 1980) για την ανάλυση αρχικά δικτύων υπολογιστών. Στις εργασίες αυτές απεδείχθη ότι

τα προβλήματα αναμονητικών δικτύων μπορούν να λυθούν με σχέσεις που περιέχουν μόνο τις μέσες στάθμες αποθηκών και τους μέσους χρόνους αναμονής και εξυπηρέτησης. Μία τέτοια σχέση για απλά συστήματα δύο μηχανών με ενδιάμεση αποθήκη είναι γνωστή ως τύπος του Little. Η Ανάλυση Μέσης Τιμής δίνει ακριβή αποτελέσματα για δίκτυα Jackson. Γενικότερα δίκτυα παραγωγής προσεγγίζονται ικανοποιητικά με αυτήν τη μέθοδο (Suri and Hildebrant 1984).

Τα τελευταία χρόνια με τη ραγδαία ανάπτυξη των αυτοματοποιημένων βιομηχανικών συστημάτων, η προσομοίωση γίνεται ένα εργαλείο που χρησιμοποιείται συχνότερα από μηχανικούς και επιχειρησιακούς ερευνητές. Αυτό φαίνεται από την αύξηση του αριθμού των γλωσσών προγραμματισμού οι οποίες είναι κατασκευασμένες για το σκοπό αυτό. Γλώσσες όπως οι SLAM, SIMSCRIPT, GASP, GPSS κλπ., χαρακτηρίζονται κυρίως από τον βαθμό της προγραμματιστικής ευκολίας στην προσομοίωση περίπλοκων συστημάτων.

Το δεύτερο στοιχείο που κάνει την προσομοίωση ελκυστική για την ανάλυση δικτύων παραγωγής, είναι η ανάπτυξη υβριδικών μεθόδων και μοντέλων με τα οποία μειώνονται οι υπολογιστικές απαιτήσεις του προβλήματος. Στην κατηγορία αυτή ανήκει η **Αναγεννητική Προσομοίωση** (Regenerative Simulation) και η Ανάλυση Διαταραχών που αναφέρθηκε προηγουμένως.

Η πρώτη μέθοδος βασίζεται σε οριακά θεωρήματα για αναγεννητικές στοχαστικές διαδικασίες οι οποίες έχουν την ιδιότητα σε κάποιες τυχαίες χρονικές στιγμές να επιστρέφουν σε μία συγκεκριμένη κατάσταση. Έτσι, η προσομοίωση αρχίζει με το σύστημα στην κατάσταση αυτή και τερματίζεται

όταν η κατάσταση γίνει ίδια με την αρχική. Το πλήθος των προσομοιώσεων για την εκτίμηση των μέσων τιμών των χαρακτηριστικών του συστήματος, εξαρτάται από το βαθμό της επιθυμούμενης ακρίβειας (Iglehart and Shedler 1980).

Η Ανάλυση Διαταραχών εφαρμόζεται επίσης στα δίκτυα παραγωγής (Ho and Cao 1983, Cao 1987, Heidelberger et al 1988). Αν και σε πολλές εφαρμογές η σύγκλιση της μεθόδου δεν έχει αποδειχθεί θεωρητικά (Ho 1987), εν τούτοις οι εκτιμήσεις είναι ακριβείς για αρκετές κατηγορίες συστημάτων.

Στην παρούσα εργασία προτείνονται δύο αποτελεσματικοί αλγόριθμοι για την προσομοίωση γραμμών και δικτύων παραγωγής. Η μέθοδος στηρίζεται στη χρησιμοποίηση ανάλυσης κατά τη διάρκεια της προσομοίωσης του συστήματος και επομένως ανήκει στην κατηγορία των υβριδικών μεθόδων. Η βασική αυτή ιδέα εφαρμόστηκε για την ανάλυση γραμμών παραγωγής στη μόνιμη κατάσταση από τους D'Angelo et al (1988) και έδωσε έναν ταχύ αλγόριθμο σε σύγκριση με τους κλασσικούς αλγορίθμους προσομοίωσης.

Στο δεύτερο κεφάλαιο αναπτύσσεται ο ακριβής αλγόριθμος για την ανάλυση γραμμών παραγωγής στη μεταβατική και μόνιμη κατάσταση και συγκρίνεται με τον αντίστοιχο ταχύ και έναν κλασσικό αλγόριθμο. Η προτεινόμενη μέθοδος συνδυάζει την ακρίβεια με την ταχύτητα και επομένως υπερέχει των άλλων στη μελέτη των συνήθων συστημάτων παραγωγής.

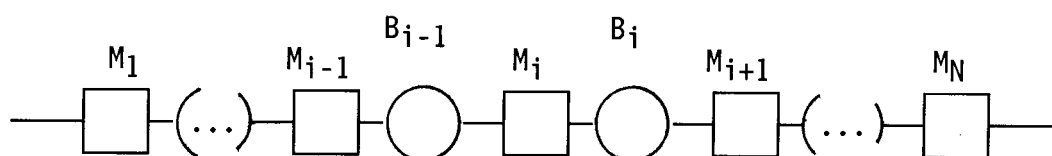
Στο τρίτο κεφάλαιο γίνεται μία παρόμοια ανάλυση για δίκτυα παραγωγής. Το μοντέλο εδώ είναι προσεγγιστικό γιατί το σύστημα είναι περίπλοκο και το

πλήθος των μεταβατικών φαινομένων που μπορεί να συμβούν στο δίκτυο είναι απαγορευτικό για την ακριβή επίλυση του προβλήματος. Έτσι ο αλγόριθμος είναι κατάλληλος μόνο για την ανάλυση μόνιμης κατάστασης, αλλά είναι εξαιρετικά ταχύς συγκρινόμενος με έναν τυπικό αλγόριθμο προσομοίωσης.

## II. ΓΡΑΜΜΕΣ ΠΑΡΑΓΩΓΗΣ

### 2.1 ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΚΑΙ ΤΕΜΑΧΙΟ-ΠΡΟΣ-ΤΕΜΑΧΙΟ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΤΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ

Η γραμμή παραγωγής αποτελείται από μηχανές και ενδιάμεσες αποθήκες διατεταγμένες σε σειρά, όπως φαίνεται στο Σχ. 1.



Σχήμα 1. Γραμμή παραγωγής  $N$  μηχανών.

Για κάθε ζεύγος μηχανής-αποθήκης  $(M_i, B_i)$  θα λέμε ότι ο χώρος εναποθήκευσης  $B_i$  ευρίσκεται στα κατάντη (προς τα κάτω) της μηχανής  $M_i$ , ή ισοδύναμα ότι η μηχανή ευρίσκεται στα ανάντη (προς τα επάνω) του χώρου. Τα ακατέργαστα κομμάτια εισέρχονται στην πρώτη μηχανή  $M_1$  και διαμορφώνονται διαδοχικά από τις υπόλοιπες έως ότου φύγουν από το σύστημα. Κατά την έξοδο του από μία μηχανή  $M_i$ , κάποιο κομμάτι μπορεί να βρει το χώρο εναποθήκευσης  $B_i$  γεμάτο, οπότε η μηχανή μένει **αποκλεισμένη**. Επίσης όταν μία αποθήκη  $B_i$  αδειάσει δεν μπορεί να τροφοδοτήσει την μηχανή  $M_{i+1}$ . Όταν η  $M_{i+1}$  είναι έτοιμη να δεχθεί ένα κομμάτι, τότε λέμε ότι μένει **αποστερημένη**.



Τέτοιες ασυνέχειες στη ροή συμβαίνουν λόγω των διαφορετικών ρυθμών παραγωγής των μηχανών και των βλαβών τις οποίες παθαίνουν σε τυχαίες χρονικές στιγμές. Είναι φανερό ότι αν δεν υπήρχαν ενδιάμεσες αποθήκες, η γραμμή θα έπρεπε να διακόπτει την παραγωγή της σε κάθε βλάβη μηχανής και η παραγωγικότητα του συστήματος θα ήταν πολύ μικρή. Επομένως, οι αποθήκες (buffers) μικραίνουν τις αλληλεπιδράσεις μεταξύ των μηχανών. Όταν η χωρητικότητα των αποθηκών απειριστεί, ο μέσος ρυθμός παραγωγής της γραμμής μεγιστοποιείται. Όμως λόγω του περιορισμένου χώρου και κόστους που διατίθεται για την κατασκευή του συστήματος, οι χωρητικότητες δεν μπορεί να είναι άπειρες. Συνοψίζοντας αναφέρουμε τις βασικές υποθέσεις για την κατηγορία των γραμμών που θα εξετάσουμε.

1. Η γραμμή αποτελείται από  $N$  μηχανές και  $N+1$  αποθήκες. Υπάρχει μία αποθήκη πεπερασμένης χωρητικότητας στην αρχή και μία άλλη άπειρης χωρητικότητας στο τέλος της γραμμής. Μηχανές και αποθήκες αναφέρονται ως στοιχεία ή συνιστώσες του συστήματος.
2. Οι μηχανές παράγουν τεμάχια με αιτιοκρατικούς αλλά διαφορετικούς εν γένει ρυθμούς. Το συνολικό πλήθος των κομματιών που παράγεται από μία μηχανή μέχρις ότου πάθει βλάβη, είναι τυχαία μεταβλητή, γεωμετρικά κατανομημένη. Οι χρόνοι επισκευής των μηχανών είναι εκθετικά κατανομημένοι.
3. Κάθε μηχανή έχει χώρο για ένα μόνον κομμάτι, αυτό που επεξεργάζεται. Η μηχανή  $M_i$  γίνεται αποστερημένη όταν είναι έτοιμη να δεχθεί ένα κομμάτι και ο χώρος  $B_{i-1}$  είναι άδειος. Επίσης η  $M_i$  αποκλείεται όταν δεν μπορεί να προωθήσει ένα επεξεργασμένο κομμάτι γιατί ο χώρος  $B_i$  είναι πλήρης.

Στη συνέχεια, οι χαρακτηρισμοί αποστερημένη και αποκλεισμένη μηχανή θα είναι ισοδύναμοι αντιστοίχως με τους όρους άδειος και γεμάτος χώρος.

4. Αποστερημένες ή αποκλεισμένες μηχανές παραμένουν αδρανείς, έως ότου κάποιο κομμάτι ή μία θέση αποθήκης αντιστοίχως, είναι διαθέσιμα. Κατά την διάρκεια περιόδων αδράνειας οι μηχανές δε φθείρονται.

5. Οι χρόνοι μεταφοράς των κομματιών από τις μηχανές στις αποθήκες και δια μέσου των αποθηκών, είναι αμελητέοι ή περιλαμβάνονται στους χρόνους παραγωγής.

Η υπόθεση της γεωμετρικής κατανομής για το πλήθος των κομματιών που παράγονται από μία μηχανή μέχρι αυτή να πάθει βλάβη προκύπτει από την παραδοχή ότι ο χρόνος ζωής της είναι εκθετικά κατανεμημένος όταν αυτή λειτουργεί συνεχώς. Αυτό αποδεικνύεται ως εξής: Έστω  $1/\rho$  ο μέσος χρόνος ζωής, και  $R$  ο ρυθμός παραγωγής μίας μηχανής. Χωρίζουμε το χρόνο σε διαστήματα  $T_n = [n/R, (n+1)/R)$ ,  $n=0,1,\dots$  και έχουμε την εξής ισότητα:

$$\begin{aligned} P_n &= \text{πιθανότητα \{η μηχανή παράγει } n \text{ κομμάτια και παθαίνει βλάβη κατά} \\ &\quad \text{την διάρκεια της επεξεργασίας του } (n+1)\text{-οστού\}} \\ &= \text{πιθανότητα \{ο χρόνος ζωής της ανήκει στο διάστημα } T_n\}, \end{aligned}$$

από την οποία για χρόνους ζωής εκθετικά κατανεμημένους προκύπτει

$$\begin{aligned} P_n &= \text{πιθανότητα \{ο χρόνος ζωής της μηχανής είναι } \geq n/R\}} \\ &\times \text{πιθανότητα \{η μηχανή να χαλάσει στο διάστημα } T_n \mid \text{ο χρόνος ζωής} \\ &\quad \text{της μηχανής είναι } \geq n/R\} = \end{aligned}$$

$$= \int_{n/R}^{\infty} p e^{-pt} dt \cdot \int_0^{1/R} p e^{-pt} dt = q^n (1-q),$$

όπου  $q=\exp(-p/R)$  είναι η παράμετρος της γεωμετρικής κατανομής. Γενικότερες κατανομές των χρόνων ζωής και επισκευής των μηχανών, όπως η Γάμμα και η Weibull, μπορούν να συμπεριληφθούν στο μοντέλο. Επίσης η υπόθεση ότι οι αδρανείς μηχανές δεν παθαίνουν βλάβες, μπορεί να μην ισχύει για ορισμένα είδη συστημάτων. Για παράδειγμα στην περίπτωση δύο γραμμών παραγωγής της Chrysler Corporation, εκτεταμένη μελέτη (Hanifin 1975) έδειξε ότι το 84% των βλαβών συνέβαιναν εξ αιτίας της φθοράς λόγω λειτουργίας των μηχανών και το 16% εξ αιτίας άλλων φαινομένων εκτός της φθοράς, τα οποία μπορούν να προκαλέσουν βλάβες και σε αδρανείς μηχανές. Ωστόσο, για ευκολία στην παρουσίαση της μεθόδου θα θεωρήσουμε ότι η λειτουργία των γραμμών παραγωγής καθορίζεται από τις αρχικές υποθέσεις.

Η υπόθεση ότι οι χρόνοι παραγωγής των κομματιών είναι αιτιοκρατικοί είναι κεντρικό σημείο για το μοντέλο του συστήματος. Τα στοιχειώδη φαινόμενα τα οποία συμβαίνουν στη γραμμή είναι οι εισοδοί των κομματιών στις μηχανές και τις αποθήκες. Αυτά τα φαινόμενα ονομάζονται **διακεκριμένα γεγονότα** ή απλώς **γεγονότα**. Οι κλασσικοί αλγόριθμοι προσομοίωσης περιγράφουν το σύστημα εξετάζοντας δύο γεγονότα: κομμάτι\_εισέρχεται\_στην\_μηχανή, και κομμάτι\_εισέρχεται\_στην\_αποθήκη. Οι αλγόριθμοι αυτοί πραγματοποιούνται ως εξής:

1. Όταν ένα γεγονός έχει εκτελεσθεί, συγκρίνονται οι χρόνοι των

επόμενων γεγονότων τα οποία έχουν προγραμματισθεί να συμβούν σε κάθε στοιχείο της γραμμής. Βρίσκεται το γεγονός με το μικρότερο χρόνο, το οποίο είναι το επόμενο γεγονός του συστήματος.

2. Καλείται η ρουτίνα εκτέλεσης του γεγονότος.

- α. Κομμάτι\_εισέρχεται\_στη\_μηχανή  $M_i$ : Το επόμενο γεγονός είναι το κομμάτι\_εισέρχεται\_στην\_αποθήκη  $B_i$ . Αυτό θα συμβεί μετά από χρόνο που είναι ίσος με το άθροισμα χρόνων επεξεργασίας, επισκευής (αν χαλάσει η μηχανή) και αδράνειας (αν αποκλειστεί η μηχανή).
- β. Κομμάτι\_εισέρχεται\_στην\_αποθήκη  $B_i$ . Το επόμενο γεγονός που θα συμβεί στην ανάντη μηχανή  $M_i$  είναι το α. Αν η  $M_i$  δεν τροφοδοτείται από τον χώρο  $B_{i-1}$  το γεγονός αυτό θα συμβεί όταν κάποιο κομμάτι είναι διαθέσιμο στην είσοδο της μηχανής. Διαφορετικά, αν υπάρχει κομμάτι διαθέσιμο το επόμενο γεγονός θα συμβεί χωρίς καθυστέρηση.

Το πλήθος των εντολών που εκτελούνται σε μία προσομοίωση του συστήματος μ' αυτόν τον αλγόριθμο είναι ανάλογο του πλήθους των κομματιών που θα παραχθούν, αφού κάθε μετακίνηση κομματιού είναι ένα διακεκριμένο γεγονός. Γι' αυτό και το είδος αυτό της προσομοίωσης λέγεται **τεμάχιο-προς-τεμάχιο**. Υπάρχουν αρκετοί αλγόριθμοι για την προσομοίωση γραμμών παραγωγής οι οποίοι αν και δουλεύουν με την φιλοσοφία που αναφέρθηκε, εν τούτοις διαφέρουν ως προς τον τρόπο που παρατηρούν το σύστημα. Για παράδειγμα, σε μερικούς αλγορίθμους η λίστα των επομένων γεγονότων αφορά όλες τις διαδοχικές θέσεις που έχει ένα κομμάτι κατά μήκος της γραμμής έως ότου φύγει από το σύστημα οπότε αρχίζει να καταγράφεται η κίνηση του κομματιού που το ακολουθεί.

Είναι φανερό ότι η δεύτερη κατηγορία αλγορίθμων δεν εξετάζει το σύστημα σε πραγματικό χρόνο και το πλεονέκτημά της είναι ο μικρός αριθμός εντολών προγράμματος που απαιτούνται σε σχέση με αυτές της πρώτης κατηγορίας. Ωστόσο για τις περισσότερες εφαρμογές των γραμμών παραγωγής οι πρώτοι αλγόριθμοι είναι ταχύτεροι. Γενικά όμως όλοι οι τεμάχιο-προς-τεμάχιο αλγόριθμοι είναι πολύ αργοί για την ανάλυση μεγάλων γραμμών παραγωγής και γι' αυτό χρησιμοποιούνται μόνον όταν οι εκτιμήσεις από τα αναλυτικά μοντέλα δεν είναι ακριβείς .

Η υβριδική προσομοίωση είναι το εργαλείο το οποίο θα χρησιμοποιήσουμε για την επίλυση του προβλήματος. Στην πρόσφατη εργασία τους οι D'Angelo et al (1988) ανέπτυξαν ένα παρόμοιο μοντέλο το οποίο ήταν προσεγγιστικό, με την παραδοχή ότι η ροή προϊόντος κατά μήκος της γραμμής είναι συνεχής και όχι κατά τεμάχια. Η προσέγγιση αυτή έδωσε έναν ταχύ αλγόριθμο ο οποίος όμως δεν είναι πάντοτε ακριβής, ενώ είναι κατάλληλος μόνο για τη μελέτη συστημάτων στη μόνιμη κατάσταση λειτουργίας. Στο κεφάλαιο αυτό θα λύσουμε το πρόβλημα της μόνιμης και μεταβατικής κατάστασης χωρίς απλουστευτικές παραδοχές. Χρησιμοποιώντας κατάλληλο συμβολισμό για την περιγραφή του συστήματος, θα κατασκευάσουμε το μοντέλο λειτουργίας της γραμμής για μία ορισμένη περίοδο παραγωγής.

Το μαθηματικό μοντέλο ανήκει στην γενική κατηγορία των στοχαστικών μοντέλων τα οποία περιγράφουν δυναμικά συστήματα διακεκριμένων γεγονότων (Discrete Event Dynamic Systems-DEDS).

## 2.2 ΣΥΜΒΟΛΙΣΜΟΣ ΓΙΑ ΤΗΝ ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΤΗΣ ΛΕΙΤΟΥΡΓΙΑΣ ΤΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ

Χρησιμοποιούμε τον ακόλουθο συμβολισμό για τις παραμέτρους της γραμμής:

$NR_i$ : ονομαστικός ρυθμός παραγωγής (κομμάτια/μονάδα χρόνου) της μηχανής  $M_i$ ,  $i=1, \dots, N$ ,

$1/p_i$ : μέσος χρόνος μέχρι τη βλάβη της μηχανής  $M_i$  όταν λειτουργεί χωρίς διακοπές, δηλαδή παράγει με τον ονομαστικό της ρυθμό,

$1/r_i$ : μέσος χρόνος επισκευής της  $M_i$ ,

$BC_j$ : χωρητικότητα της αποθήκης  $B_j$ ,  $j=0, \dots, N$ .

Οι μηχανές έχουν δύο καταστάσεις: λειτουργικές (α) και υπό επισκευήν (β). Οι χώροι αποθηκών έχουν τρεις καταστάσεις: άδαιοι (γ), ενδιάμεσοι (δ), και γεμάτοι (ε). Το διάνυσμα κατάστασης του συστήματος αποτελείται από τις καταστάσεις των μηχανών και των αποθηκών. Η αλλαγή ενός τουλάχιστον στοιχείου του διανύσματος κάποια χρονική στιγμή, αντιστοιχεί σε κάποιο διακεκριμένο γεγονός. Τα γεγονότα αυτά είναι τα ακόλουθα:

1. Μηχανή\_χαλάει, που αντιστοιχεί στην αλλαγή από την κατάσταση α στην β.
2. Μηχανή\_επισκευάζεται, για την αλλαγή από την β κατάσταση στην α.
3. Χώρος\_αδειάζει, που αντιστοιχεί στην αλλαγή από την κατάσταση δ της αποθήκης στην γ.
4. Χώρος\_γεμίζει, για την αλλαγή από την δ στην ε.
5. Χώρος\_τροφοδοτείται, για την αλλαγή από την γ στην δ.

6. Χώρος\_ελευθερώνεται, για την αλλαγή από την ε στη δ.

Η κατάσταση της γραμμής τη χρονική στιγμή t περιγράφεται από τις ακόλουθες μεταβλητές:

$$M(i,t) = \begin{cases} 1, & \text{αν η μηχανή } M_i \text{ είναι λειτουργική,} \\ 0, & \text{αν η } M_i \text{ είναι χαλασμένη.} \end{cases}$$

$$B(j,t) = \begin{cases} 0, & \text{αν ο χώρος } B_j \text{ είναι άδειος,} \\ 1, & \text{αν η στάθμη του } B_j \text{ είναι ενδιάμεση,} \\ 2, & \text{αν ο } B_j \text{ είναι γεμάτος.} \end{cases}$$

Στο διάστημα μεταξύ δύο γεγονότων οι καταστάσεις παραμένουν σταθερές και περιγράφουν τη μακροπρόθεσμη συμπεριφορά του συστήματος. Επίσης ορίζονται και οι δείκτες των γεγονότων τη χρονική στιγμή t:

$$BA_j(t) = \begin{cases} 1, & \text{αν ο χώρος } B_j \text{ αδειάζει} \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

και ανάλογα ορίζονται οι υπόλοιποι δείκτες:

$B\Gamma_j(t)$  : ο  $B_j$  γεμίζει,

$BT_j(t)$  : ο  $B_j$  τροφοδοτείται με ένα κομμάτι,

$BE_j(t)$  : ο  $B_j$  αποκτά μία θέση ελεύθερη,

$MX_i(t)$  : η μηχανή  $M_i$  παθαίνει βλάβη,

$ME_i(t)$  : η  $M_i$  επισκευάζεται.

Αν και οι καταστάσεις των στοιχείων παραμένουν αμετάβλητες μέχρις ότου συμβεί κάποιο γεγονός, το δυναμικό σύστημα που μελετάμε έχει μία συνιστώσα η οποία μεταβάλλεται συχνότερα και καθορίζει τη βραχυπρόθεσμη συμπεριφορά του. Συγκεκριμένα ορίζουμε τις ακόλουθες μικροσκοπικές καταστάσεις:

$B_S(j,t)$  : πλήθος των κομματιών (στάθμη) του χώρου  $B_j$ ,

$\tau_{1,j}(t)$  : χρόνος καθυστέρησης μέχρι την άφιξη ενός νέου κομματιού στον  $B_j$ ,

$\tau_{2,j}(t)$  : χρόνος καθυστέρησης μέχρι την επόμενη αναχώρηση από τον  $B_j$ ,

$\Sigma P(i,t)$  : συνολική παραγωγή της μηχανής  $M_i$  μέχρι τη στιγμή  $t$ ,

$KB(i,t)$  : αριθμός των κομματιών που θα παράγει η  $M_i$  στο διάστημα από τη χρονική στιγμή  $t$  μέχρις ότου χαλάσει,

$\chi E(i,t)$ : χρόνος επισκευής, το χρονικό διάστημα μεταξύ της  $t$  και της στιγμής της επισκευής της  $M_i$ .

Στο εξής, για την πιο απλή παρουσίαση της μεθόδου, η μεταβλητή  $t$  θα παραλείπεται όπου δεν υπάρχει περίπτωση σύγχυσης. Οι μικροσκοπικές μεταβλητές του συστήματος μεταβάλλονται συνεχώς στο διάστημα ανάμεσα σε διαδοχικά γεγονότα. Για παράδειγμα το πλήθος των παραχθέντων κομματιών από μία μηχανή αυξάνει κατά μία μονάδα στο τέλος κάθε κύκλου παραγωγής και οι στάθμες των χώρων εναποθήκευσης αυξομειώνονται στους χρόνους αφίξεων ή αναχωρήσεων των προϊόντων από αυτούς. Στην επόμενη παράγραφο παρουσιάζεται η μέθοδος με την οποία υπολογίζονται οι μεταβολές αυτές, κατά τη χρονική στιγμή που κάποιο γεγονός συμβαίνει σε μία μηχανή ή



αποθήκη. Αυτή είναι η βασική διαφορά της μεθόδου με την τεμάχιο-προς-τεμάχιο προσομοίωση.

### 2.3 ΜΟΝΤΕΛΟ ΔΙΑΚΕΚΡΙΜΕΝΩΝ ΓΕΓΟΝΟΤΩΝ

Στην παράγραφο αυτή θα εξετάσουμε αναλυτικά τον τρόπο με τον οποίο συμβαίνουν τα γεγονότα 1 έως 6 τα οποία ορίσθηκαν προηγουμένως. Στη συνέχεια θα δείξουμε πώς μεταβάλλονται οι κύκλοι παραγωγής των μηχανών εξ αιτίας των γεγονότων τα οποία τις επηρεάζουν και θα εξηγήσουμε την έννοια του ρυθμού παραγωγής μίας μηχανής. Τέλος θα περιγράψουμε τη λειτουργία της γραμμής με ένα μαθηματικό μοντέλο διακεκριμένων γεγονότων, στο οποίο παριστάνονται ξεχωριστά οι μικροσκοπικές και οι τις μακροσκοπικές συνιστώσες του συστήματος.

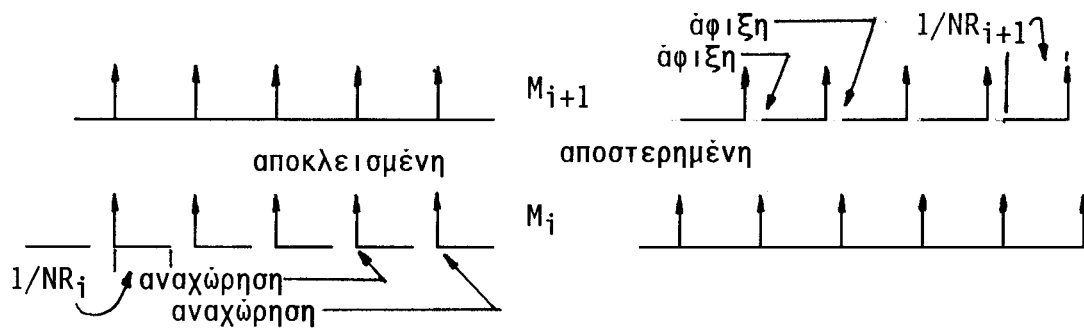
Τα γεγονότα τα οποία συμβαίνουν σε κάποια μηχανή ή αποθήκη επηρεάζουν και τα γειτονικά της στοιχεία. Αυτή η μετάδοση των διαταραχών ακολουθεί τους εξής κανόνες:

- (1) Αν μία μηχανή  $M_i$  πάθει βλάβη τότε παύει να αφαιρεί κομμάτια από τον χώρο  $B_{i-1}$  και επίσης παύει να τροφοδοτεί τον  $B_i$ . Ο χώρος  $B_{i-1}$  θα τείνει επομένως να γεμίσει, ενώ ο  $B_i$  θα τείνει να αδειάσει.
- (2) Όταν η  $M_i$  παράγει με μεγαλύτερο ρυθμό από την  $M_{i+1}$ , ο ενδιάμεσος χώρος  $B_i$  θα γεμίσει και η  $M_i$  θα αναγκαστεί να ανακόψει τον ρυθμό της. Το γεγονός αυτό θα μεταδοθεί στα ανάντη της μηχανής  $M_i$  αφού ο χώρος  $B_{i-1}$  θα τείνει να γεμίσει, κ.ο.κ. Γεμάτοι χώροι

εναποθήκευσης αναγκάζουν τις ανάντεις μηχανές των να εναλλάσσουν καταστάσεις. Για παράδειγμα, αν στο τέλος ενός κύκλου παραγωγής της  $M_i$  ο χώρος  $B_i$  είναι γεμάτος, η μηχανή δε θα μπορέσει να προωθήσει το κατεργασμένο κομμάτι προς τα κατάντη. Θα μείνει επομένως αδρανής για κάποιο διάστημα μέχρις ότου η  $M_{i+1}$  ελευθερώσει μία θέση του χώρου παίρνοντας ένα κομμάτι για επεξεργασία. Αρα οι γεμάτοι χώροι των αποθηκών αναγκάζουν τις μηχανές στα ανάντη να παράγουν και να αδρανούν διαδοχικά.

- (3) Το δυαδικό φαινόμενο συμβαίνει όταν η  $M_{i-1}$  είναι ταχύτερη από την  $M_i$ . Κάποια στιγμή ο χώρος  $B_{i-1}$  θα αδειάσει και η  $M_i$  θα επιβραδύνει. Η επιβράδυνση αυτή γίνεται επειδή ο κύκλος παραγωγής είναι το άθροισμα του ονομαστικού χρόνου παραγωγής της  $M_i$  ( $1/NR_i$ ) και του χρόνου που αυτή μένει αδρανής περιμένοντας ένα τεμάχιο. Η επιβράδυνση της  $M_i$  στη συνέχεια συνεπάγεται τη μείωση του ρυθμού τροφοδοσίας του χώρου  $B_i$ . Ο  $B_i$  θα τείνει να αδειάσει κλπ., και το φαινόμενο μεταδίδεται στα κατάντη.

Στο Σχ. 2 φαίνεται ο τρόπος λειτουργίας μίας αποκλεισμένης και μίας αποστερημένης μηχανής αντίστοιχα. Η συνεχής γραμμή δηλώνει ότι η μηχανή επεξεργάζεται κάποιο κομμάτι ενώ τα κενά διαστήματα συμβολίζουν τους χρόνους κατά τους οποίους η μηχανή περιμένει να ελευθερωθεί μία θέση του κατάντη χώρου ή να δεχθεί ένα κομμάτι από την ανάντη μηχανή. Τα βέλη σημειώνουν τους χρόνους στους οποίους κάποιο κομμάτι μεταφέρεται από μία μηχανή στον κατάντη χώρο εναποθήκευσης.



Σχήμα 2. Αποκλεισμένη μηχανή  $M_i$ , και αποστερημένη μηχανή  $M_{i+1}$ .

Όταν κάποιος χώρος αδειάσει ή γεμίσει, οι κύκλοι παραγωγής της γειτονικής μηχανής που έχει μεγάλο ρυθμό παραγωγής προσαρμόζονται στους κύκλους της πιο αργής μηχανής. Ορίζουμε λοιπόν το **ρυθμό παραγωγής**  $R_i$  της μηχανής  $M_i$  από τα ακόλουθα:

- 1) Όταν μία μηχανή δεν είναι αποκλεισμένη ούτε αποστερημένη, τότε παράγει με τον ονομαστικό της ρυθμό.
- 2) Ο κύκλος παραγωγής μίας αποστερημένης μηχανής  $M_{i+1}$  είναι ο χρόνος ανάμεσα σε δύο διαδοχικές αφίξεις κομματιών σ' αυτήν. Ο νέος ρυθμός παραγωγής  $R_{i+1}$  είναι ίσος με το αντίστροφο του κύκλου παραγωγής της και συνεπώς ίσος με τον μικρότερο των ρυθμών των  $M_{i+1}$  και  $M_i$ .
- 3) Ο κύκλος παραγωγής μίας αποκλεισμένης μηχανής  $M_i$  είναι ο χρόνος ανάμεσα σε δύο διαδοχικές αναχωρήσεις κομματιών απ' αυτήν. Ομοίως ο νέος ρυθμός παραγωγής είναι ο μικρότερος των ρυθμών των  $M_i$  και  $M_{i+1}$ .

Ο ρυθμός παραγωγής ανήκει στις μακροσκοπικές καταστάσεις του συστήματος,

αφού εξ ορισμού μεταβάλλεται μόνο στους χρόνους κατά τους οποίους συμβαίνουν κάποια γεγονότα στις μηχανές.

Εξετάζουμε ένα σύστημα με  $N$  μηχανές και  $N+1$  αποθήκες. Έστω  $X(t)$  το διάνυσμα μεγέθους  $2N+1$  που περιέχει τις μακροσκοπικές και μικροσκοπικές καταστάσεις του συστήματος, οι οποίες περιγράφουν αντιστοίχως τις αργές ( $S$ ) και ταχείες ( $F$ ) συνιστώσες του. Χωρίζουμε το  $X(t)$  στα διανύσματα  $X_S(t)$  και  $X_F(t)$  και συμβολίζουμε με  $ΓΕ(t)$  το διάνυσμα που αποτελείται από τα γεγονότων τα οποία πρόκειται να συμβούν σε κάθε μηχανή και χώρο μετά την χρονική στιγμή  $t$ . Τα γεγονότα αυτά είναι σημειακές στοχαστικές διαδικασίες και έστω  $ΤΕ(t)$  το διάνυσμα των χρόνων στους οποίους αντιστοιχούν. Η στοχαστική είσοδος της διαδικασίας  $ΓΕ(t)$  συμβολίζεται με το διάνυσμα  $Ξ(t)$  το οποίο εκφάζει την τυχαιότητα των χρόνων βλάβης ή επισκευής των μηχανών. Τη χρονική στιγμή  $t_k^+$  αφού συμβεί το  $k$ -οστό γεγονός ορισμένα στοιχεία των διανυσμάτων  $X_S(t_k^+)$ ,  $ΓΕ(t_k^+)$  και  $ΤΕ(t_k^+)$  μεταβάλλονται. Ο χρόνος  $t_{k+1}$  του επόμενου γεγονότος είναι το μικρότερο στοιχείο του  $ΤΕ(t_k^+)$ . Είναι δυνατόν στο χρόνο αυτό να αντιστοιχούν περισσότερα του ενός γεγονότα. Σε επόμενη παράγραφο θα δούμε τους κανόνες βάσει των οποίων ο αλγόριθμος επιλέγει το  $(k+1)$ -οστό γεγονός που θα συμβεί στο σύστημα. Το γεγονός αυτό συμβολίζεται με  $E(t_{k+1}^+)$ .

Έστω το διάνυσμα  $\mathbf{1}$  του οποίου τα  $(2N+1)$  στοιχεία είναι μονάδες και  $ΤΕ(t)=[ΤΕ_1(t), \dots, ΤΕ_{2N+1}(t)]^T$  το διάνυσμα των χρόνων των επόμενων γεγονότων κάθε μηχανής και αποθήκης. Έχουμε το ακόλουθο μοντέλο συστήματος διακεκριμένων γεγονότων:

$$X_F(t) = X_F(t_k) + \Delta(X(t_k^+), t) (t - t_k) \quad (2.1)$$

$$X_S(t_k^+) = \theta(X(t_k), E(t_k^+), \xi(t_k)), \quad (2.2)$$

$$E(t_k^+) = \Omega(\Gamma E(t_k)), \quad (2.3)$$

$$\Gamma E(t) = \Phi(X(t_k^+)), \quad (2.4)$$

$$TE(t) = 1t_k + \Pi(X(t_k^+)), \quad (2.5)$$

$$t_{k+1} = \min_{i=1, \dots, 2N+1} TE_i(t_k^+), \quad (2.6)$$

όπου  $t \in [t_k, t_{k+1})$  είναι ο χρόνος μεταξύ διαδοχικών γεγονότων·  $\Delta$ ,  $\theta$ ,  $\Omega$ ,  $\Phi$  και  $\Pi$  είναι μη γραμμικές συναρτήσεις των οποίων οι εκφράσεις θα εξαχθούν σε επόμενες παραγράφους. Η Εξ. (2.1) περιγράφει την εξέλιξη των μικροσκοπικών καταστάσεων μεταξύ διαδοχικών γεγονότων και χρησιμεύει για την ενημέρωση των μεταβλητών του συστήματος, ενώ η Εξ. (2.2) χρησιμεύει για την αλλαγή των μακροσκοπικών καταστάσεων στους χρόνους  $t_k$  κατά τους οποίους συμβαίνει κάποιο γεγονός. Τέλος, η (2.3) εκφράζει τις προτεραιότητες ταυτόχρονων γεγονότων και οι τρεις τελευταίες εξισώσεις χρησιμεύουν για τον προγραμματισμό του επόμενου γεγονότος. Η σημασία των (2.1)-(2.6) θα εξηγηθεί καθώς θα αναπτύσσουμε το μοντέλο στις επόμενες παραγράφους.

## 2.4 ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ ΓΕΓΟΝΟΤΩΝ

Στην παράγραφο αυτή βρίσκουμε τις εκφράσεις των Εξ. (2.4)-(2.6), οι οποίες είναι μη γραμμικές και αιτιοκρατικές. Μελετάμε πρώτα τα γεγονότα στους χώρους εναποθήκευσης.

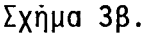
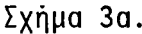
### A. ΧΩΡΟΣ\_ΓΕΜΙΖΕΙ

Θεωρούμε ένα τμήμα της γραμμής το οποίο αποτελείται από δύο μηχανές και μία αποθήκη το οποίο εξετάζουμε κάποια στιγμή  $t$  μεταξύ διαδοχικών γεγονότων. Όταν οι αναχωρήσεις από την μηχανή  $M_i$  συμβαίνουν συχνότερα από τις αφίξεις στην  $M_{i+1}$ , τότε ο χώρος  $B_i$  θα γεμίσει.

Δύο τυπικά σενάρια που αντιστοιχούν σ' αυτό το γεγονός φαίνονται στα σχήματα 3. Η κυματοειδής γραμμή παριστάνει μία μηχανή υπό επισκευήν. Παρατηρώντας το Σχ. 3β, τη στιγμή  $TE'$  η μηχανή  $M_i$  είναι έτοιμη να προωθήσει ένα κομμάτι στα κατάντη, αλλά ο χώρος  $B_i$  τυχαίνει να είναι γεμάτος και το γεγονός χώρος\_γεμίζει (ή ισοδύναμα μηχανή\_αποκλείεται) συμβαίνει ακαριαία. Εν τούτοις σημειώνουμε το **συμβατικό χρόνο του γεγονότος**  $TE$  ως τη στιγμή κατά την οποία το κομμάτι που θα αποκλειστεί πρώτο εισέρχεται στην μηχανή  $M_i$ . Στο εξής αυτός ο χρόνος θα αναφέρεται ως ο χρόνος του γεγονότος. Έστω  $N_i$  ο αριθμός των κομματιών που θα παράγει η  $M_i$  μέχρι να συμβεί το γεγονός. Εξετάζουμε δύο διαφορετικές περιπτώσεις. Στην πρώτη περίπτωση ο χώρος γεμίζει σε χρόνο μικρότερο του  $\tau_{2,i}$ , δηλαδή πριν συμβεί μία αναχώρηση, ενώ στην δεύτερη περίπτωση το γεγονός σημειώνεται αργότερα.

Περίπτωση α: Η καθυστέρηση  $\tau_{2,i}$  μέχρι την αναχώρηση κάποιου κομματιού από τον χώρο  $B_i$  είναι μεγάλη και οι ελεύθερες θέσεις του χώρου αυτού βαθμιαία καταλαμβάνονται από τα κομμάτια που προωθεί η  $M_i$ . Η συνθήκη για το γεγονός αυτό εξάγεται εποπτικά από το σχήμα 3α:

$$(\tau_{2,i} - \tau_{1,i}) R_i > BC_i - B\Sigma(i). \quad (2.7)$$



Σχήματα 3α, 3β: Γεγονότα  $\chi\acute{o}\rho o s_{\gamma\epsilon\mu\acute{\iota}z\epsilon\iota}$  και  $\chi\acute{o}\rho o s_{\epsilon\lambda\epsilon\upsilon\theta\epsilon\rho\acute{o}\nu\epsilon\tau\alpha\iota}$ .

Οι εξισώσεις για τον υπολογισμό του (συμβατικού) χρόνου επόμενου γεγονότος προκύπτουν αμέσως:

$$TE = \begin{cases} t, & \text{αν } B\Sigma(i) = BC_i \\ t + \tau_{1,i} + \frac{BC_i - B\Sigma(i) - 1}{R_i}, & \text{διαφορετικά,} \end{cases}$$

και οι παραγωγές των  $M_i$  και  $M_{i+1}$  μέχρι τη στιγμή  $TE$  είναι:

$$\begin{aligned} N_i &= BC_i - B\Sigma(i), \\ N_{i+1} &= 0. \end{aligned} \tag{2.8}$$

**Περίπτωση β:** Ο χώρος  $B_i$  (βλέπε Σχ. 3β) έχει αρκετές ελεύθερες θέσεις για να δεχθούν τα κομμάτια που παράγει η  $M_i$ . Η  $M_i$  όμως παράγει ταχύτερα από την  $M_{i+1}$  και ο ενδιάμεσος χώρος θα γεμίσει. Η συνθήκη γι' αυτό το σενάριο είναι

$$\sim (2.7) \wedge (R_i > R_{i+1}), \tag{2.9}$$

όπου  $\{\sim, \vee, \wedge, \implies\}$  είναι οι συνηθείς λογικές πράξεις: άρνηση, διάζευξη, σύζευξη και συνεπαγωγή. Στην περίπτωση αυτή ισχύει η ακόλουθη παρατήρηση:

**Παρατήρηση 1:** Όταν σημειώνεται το γεγονός  $B_i$  γεμίζει (κατά τον συμβατικό χρόνο  $TE$ ), το διάστημα  $\tau'_{2,i}$  που θα μεσολαβήσει μέχρι να προωθήσει η  $M_i$  το κομμάτι (το οποίο είναι το πρώτο που αποκλείεται) στα κατάντη, βρίσκεται εντός ενός διαστήματος μεταξύ διαδοχικών αναχωρήσεων



από την  $M_{i+1}$ .

Άμεση συνέπεια της παρατήρησης αυτής είναι η σχέση

$$\frac{1}{R_i} < \tau'_{2,i} \leq \frac{1}{R_{i+1}}. \quad (2.10)$$

Το γεγονός  $\chi\acute{o}\rho o s_{\gamma e\mu\acute{i}z e i}$  συμβαίνει, σύμφωνα με τη σύμβαση, όταν το  $N_i$ -οστό κομμάτι φεύγει από την  $M_i$ . Από το Σχ. 3β βλέπουμε ότι το πλήθος των κομματιών που θα παράγει η  $M_i$  μετά την χρονική στιγμή  $t+\tau_{1,i}$  είναι  $N_i-1$ .

**Πρόταση 1:** Για τις συνθήκες της περίπτωσης β ισχύει ότι:

$$N_i = 1 + \text{INT} \left\{ [BC_i - B\Sigma(i) + R_{i+1} (\tau_{1,i} - \tau_{2,i})] \frac{R_i}{R_i - R_{i+1}} \right\}, \quad (2.11)$$

όπου  $\text{INT}(x)$  είναι το ακέραιο μέρος του  $x$ .

**Απόδειξη:** Από το Σχ. 3β προκύπτουν τα ακόλουθα:

$$N_i - N_{i+1} = BC_i - B\Sigma(i), \quad (2.12)$$

$$N_i = 1 + (TE - t - \tau_{1,i}) R_i, \quad (2.13)$$

$$N_{i+1} = (TE - t - \tau_{2,i} + \tau'_{2,i}) R_{i+1} \quad (2.14)$$

Λύνουμε τις (2.13) και (2.14) ως προς  $TE - t$  και έχουμε αντίστοιχα:

$$TE-t = \tau_{1,i} + \frac{-1+N_i}{R_i} ,$$

$$TE-t = \tau_{2,i} + \frac{N_{i+1}}{R_{i+1}} - \tau'_{2,i} ,$$

από τις οποίες χρησιμοποιώντας και την (2.12) προκύπτουν διαδοχικά

$$\begin{aligned} \tau'_{2,i} &= (\tau_{2,i} - \tau_{1,i}) + \frac{N_{i+1}}{R_{i+1}} - \frac{N_i}{R_i} + \frac{1}{R_i} = \\ &= (\tau_{2,i} - \tau_{1,i}) + N_i \left( \frac{1}{R_{i+1}} - \frac{1}{R_i} \right) + \frac{B\Sigma(i) - BC_i}{R_{i+1}} + \frac{1}{R_i} . \end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας την τελευταία έκφραση του  $\tau'_{2,i}$  στην ανισότητα (2.10) έχουμε:

$$\begin{aligned} (\tau_{1,i} - \tau_{2,i}) + \frac{BC_i - B\Sigma(i)}{R_{i+1}} &< N_i \left( \frac{1}{R_{i+1}} - \frac{1}{R_i} \right) \leq \\ &\leq \left( \frac{1}{R_{i+1}} - \frac{1}{R_i} \right) + (\tau_{1,i} - \tau_{2,i}) + \frac{BC_i - B\Sigma(i)}{R_{i+1}} \end{aligned}$$

από την οποία προκύπτει η (2.11), ΟΕΔ.

## **B. ΧΩΡΟΣ ΑΔΕΙΑΖΕΙ**

Το γεγονός αυτό πρόκειται να συμβεί τη στιγμή  $TE$  (βλέπε Σχ. 4α και β) όταν ο χώρος  $B_i$  αδειάσει και η κατάντης μηχανή  $M_{i+1}$  είναι έτοιμη να δεχθεί ένα νέο κομμάτι απ' αυτόν. Το φαινόμενο αυτό είναι δυαδικό του προηγούμενου. Θα εξετασθούν πάλι δύο αντίστοιχες περιπτώσεις.

**Περίπτωση α:** Αν ο χρόνος καθυστέρησης  $\tau_{1,i}$  από τη στιγμή  $t$  μέχρι την άφιξη ενός κομματιού στον χώρο  $B_i$  είναι παρατεταμένος (π.χ. η μηχανή  $M_i$  είναι υπό επισκευήν όπως φαίνεται στο Σχ. 4α), το περιεχόμενό του μπορεί να εξαντληθεί. Από το σχήμα έχουμε τη συνθήκη:

$$R_{i+1} (\tau_{1,i} - \tau_{2,i}) > B\Sigma(i). \quad (2.15)$$

Ο χρόνος κατά τον οποίο θα συμβεί το γεγονός και οι παραγωγές των  $M_i$  και  $M_{i+1}$  μέχρι τότε προκύπτουν εποπτικά:

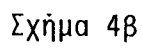
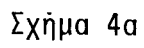
$$TE = t + \tau_{2,i} + \frac{B\Sigma(i)}{R_{i+1}},$$

$$N_i = 0,$$

$$N_{i+1} = B\Sigma(i). \quad (2.16)$$

**Περίπτωση β:** Ο χώρος  $B_i$  (Σχ. 4β) έχει αρκετά κομμάτια για τη μεταβατική περίοδο  $\tau_{1,i}$ , ωστόσο η  $M_{i+1}$  είναι ταχύτερη από τη  $M_i$  και ο χώρος θα αδειάσει. Η συνθήκη για το γεγονός αυτό είναι:

$$\sim(2.15) \wedge (R_i < R_{i+1}) \quad (2.17)$$



33

και ισχύει η ακόλουθη παρατήρηση:

**Παρατήρηση 2:** Το διάστημα ανάμεσα στις αναχωρήσεις των κομματιών  $(-1+N_{i+1})$  και  $N_{i+1}$  από τη  $M_{i+1}$ , βρίσκεται μέσα στο διάστημα μεταξύ δύο αφίξεων στον  $B_i$ . Άμεση συνέπεια αυτού είναι η σχέση:

$$0 < \tau'_{1,i} \leq \frac{1}{R_i} - \frac{1}{R_{i+1}} . \quad (2.18)$$

Για την περίπτωση αυτή ισχύει η εξής:

**Πρόταση 2:** Η παραγωγή της μηχανής  $M_{i+1}$  στο διάστημα  $(t, TE]$  είναι:

$$N_{i+1} = 2 + \text{INT} \left\{ [B\Sigma(i) + R_i (\tau_{2,i} - \tau_{1,i})] + \frac{R_{i+1}}{R_{i+1} - R_i} \right\} . \quad (2.19)$$

**Απόδειξη:** Από το Σχ. 4β προκύπτει ότι οι παραγωγές των  $M_i$  και  $M_{i+1}$  ικανοποιούν τις σχέσεις:

$$N_{i+1} - N_i = B\Sigma(i) + 1 , \quad (2.20)$$

$$N_{i+1} = 1 + (TE - t - \tau_{2,i})R_{i+1} , \quad (2.21)$$

$$N_i = (TE - t - \tau_{1,i} + \tau'_{1,i})R_i . \quad (2.22)$$

Από τις δύο τελευταίες εξισώσεις έχουμε:

$$TE - t = \tau_{2,i} + \frac{-1 + N_{i+1}}{R_{i+1}} \text{ και}$$

$$TE-t = \tau_{1,i} + \frac{N_i}{R_i} - \tau'_{1,i}.$$

Από τις ανωτέρω σχέσεις και την (2.20) προκύπτουν διαδοχικά:

$$\begin{aligned} \tau'_{1,i} &= (\tau_{1,i} - \tau_{2,i}) + \frac{N_i}{R_i} - \frac{N_{i+1}}{R_{i+1}} + \frac{1}{R_{i+1}} \\ &= (\tau_{1,i} - \tau_{2,i}) + N_{i+1} \left( \frac{1}{R_i} - \frac{1}{R_{i+1}} \right) - \left( \frac{1}{R_i} - \frac{1}{R_{i+1}} \right) - \frac{B\Sigma(i)}{R_i}. \end{aligned}$$

Αντικαθιστούμε την τελευταία έκφραση για το  $\tau'_{1,i}$  στην (2.18)

$$\begin{aligned} (\tau_{2,i} - \tau_{1,i}) + \left( \frac{1}{R_i} - \frac{1}{R_{i+1}} \right) + \frac{B\Sigma(i)}{R_i} &< N_{i+1} \left( \frac{1}{R_i} - \frac{1}{R_{i+1}} \right) \\ &\leq (\tau_{2,i} - \tau_{1,i}) + 2 \left( \frac{1}{R_i} - \frac{1}{R_{i+1}} \right) + \frac{B\Sigma(i)}{R_i} \end{aligned}$$

από την οποία προκύπτει η (2.19), ΟΕΔ.

#### Γ. ΧΩΡΟΣ\_ΕΛΕΥΘΕΡΩΝΕΤΑΙ ΚΑΙ ΧΩΡΟΣ\_ΤΡΟΦΟΔΟΤΕΙΤΑΙ

Θεωρούμε την αποκλεισμένη μηχανή  $M_i$  του σχήματος 3α κατά τη χρονική στιγμή  $t'$ . Ο χώρος  $B_i$  έχει γεμίσει διότι η  $M_{i+1}$ , αν και ταχύτερη της  $M_i$ ,

είναι υπό επισκευήν. Όταν η  $M_{i+1}$  αρχίσει πάλι να παράγει, τότε θα δημιουργούνται κενές θέσεις στον  $B_i$ . Το γεγονός χώρος\_ελευθερώνεται παρατηρείται κατά σύμβαση τη στιγμή  $TE'$ , όταν η  $M_i$  προωθεί το τελευταίο αποκλεισμένο της κομμάτι στον χώρο  $B_i$ . Στη συνέχεια, επειδή η  $M_{i+1}$  παράγει πιο γρήγορα από τη  $M_i$ , ο  $B_i$  θα ευρίσκεται σε ενδιάμεση κατάσταση, δηλαδή  $B(i,t) = 1$  για  $t \geq TE'$ . Για να συμβεί λοιπόν αυτό το φαινόμενο έχουμε την ικανή και αναγκαία συνθήκη:

$$(B(i,t') = 2) \wedge (R_i < R_{i+1}), \quad (2.23)$$

και ο αντίστοιχος χρόνος στον οποίο θα παρατηρηθεί είναι:

$$TE' = t' + \tau'_{2,i}. \quad (2.24)$$

Παρόμοια εξετάζουμε το δυαδικό σύστημα που φαίνεται στο Σχ. 4α. Ο χώρος  $B_i$  είναι κενός και η  $M_i$ , η οποία είναι ταχύτερη της  $M_{i+1}$ , έχει χαλάσει. Η  $M_{i+1}$  μένει αδρανής. Η κατάσταση αλλάζει μετά την επισκευή της  $M_i$ . Όταν αυτή παράγει το πρώτο κομμάτι και το προωθεί στα κατάντη, ελευθερώνεται μία θέση στον  $B_i$ . Έχουμε λοιπόν τη συνθήκη:

$$(B(i,t') = 0) \wedge (R_i > R_{i+1}), \quad (2.25)$$

και ο χρόνος του γεγονότος χώρος\_τροφοδοτείται είναι:

$$TE' = t' + \tau'_{1,i}. \quad (2.26)$$

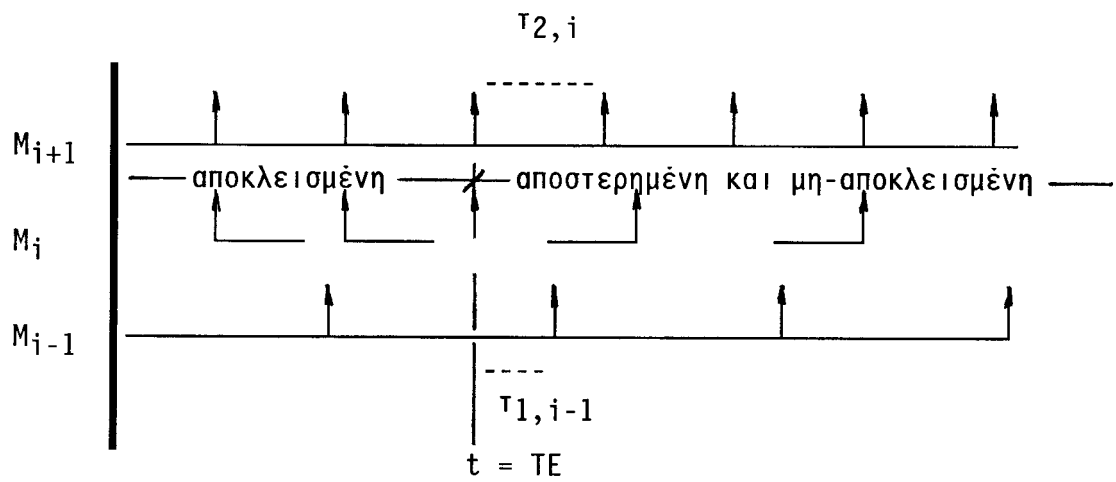
#### Δ. ΜΗΧΑΝΕΣ ΠΟΥ ΕΙΝΑΙ ΤΑΥΤΟΧΡΟΝΩΣ ΑΠΟΣΤΕΡΗΜΕΝΕΣ ΚΑΙ ΑΠΟΚΛΕΙΣΜΕΝΕΣ

Εξετάζουμε τώρα την λειτουργία μίας μηχανής  $M_i$  η οποία ευρίσκεται μεταξύ ενός άδειου και ενός γεμάτου χώρου. Όταν η μηχανή είναι έτοιμη να δεχθεί ένα κομμάτι, περιμένει την  $M_{i-1}$  να παράγει και στο μεσοδιάστημα παραμένει αδρανής. Επί πλέον όταν είναι έτοιμη να προωθήσει ένα κομμάτι, μένει αποκλεισμένη έως ότου η  $M_{i+1}$  πάρει ένα κομμάτι από τον χώρο  $B_i$  και ελευθερώσει μία θέση του. Το φαινόμενο αυτό συμβαίνει όταν η  $M_i$  είναι ταχύτερη από τις γειτονικές της μηχανές.

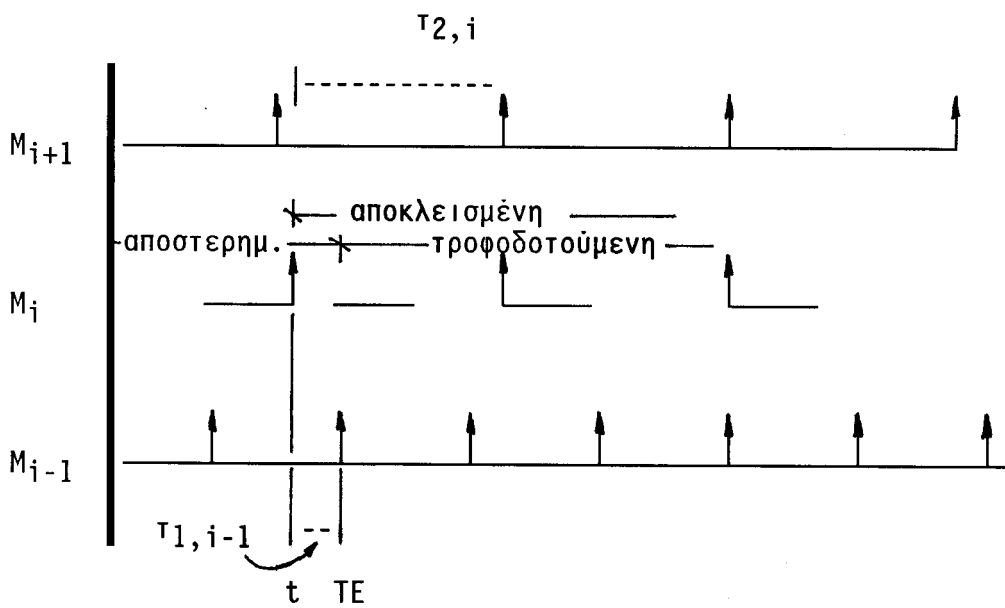
Θεωρούμε δύο πιθανά συμβάντα: μία μηχανή  $M_i$ , αν και έχει επιβραδύνει την παραγωγή της λόγω αποκλεισμού, εξαντλεί το απόθεμα του χώρου  $B_{i-1}$  ο οποίος την τροφοδοτεί (οι περιπτώσεις α και γ που ακολουθούν) και τη δυαδική περίπτωση όπου μία αποστερημένη μηχανή γεμίζει το χώρο  $B_i$  (περιπτώσεις β και δ). Σε όλες τις περιπτώσεις η αρχή του φαινομένου σημειώνεται όταν η μηχανή  $M_i$  προωθήσει ένα κομμάτι στον κατάντη χώρο (χρόνοι  $t$  στα Σχ. 5α-5δ). Η μηχανή στην πραγματικότητα εναλλάσσεται ανάμεσα στις δύο καταστάσεις, έως ότου κάποια από αυτές υπερισχύσει της άλλης, δηλαδή κάποιο από τα φαινόμενα  $\chi\acute{o}\rho\omicron\varsigma\_ε\lambda\epsilon\upsilon\theta\epsilon\rho\acute{o}\nu\epsilon\tau\alpha\iota$  και  $\chi\acute{o}\rho\omicron\varsigma\_τ\omicron\phi\omicron\delta\omicron\tau\epsilon\acute{\iota}\tau\alpha\iota$  εντοπισθεί στον κατάντη ή ανάντη χώρο αντίστοιχα.

Εξετάζουμε ένα τμήμα της γραμμής το οποίο αποτελείται από τρεις μηχανές  $M_{i-1}$ ,  $M_i$  και  $M_{i+1}$  και τις αποθήκες  $B_{i-1}$  και  $B_i$ . Έστω  $t$  ο χρόνος κατά τον οποίο στη μηχανή εμφανίζονται και οι δύο καταστάσεις και  $TE$  ο χρόνος κατά τον οποίο θα συμβεί το επόμενο γεγονός, οπότε η μία κατάσταση θα υπερισχύσει της άλλης και η μηχανή θα μείνει είτε



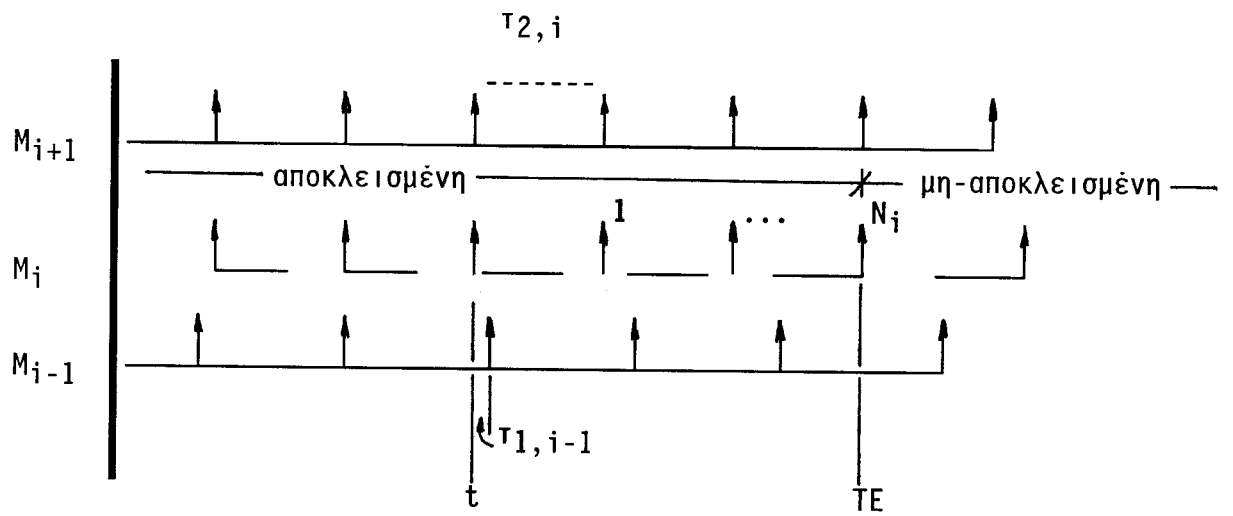


Σχήμα 5α

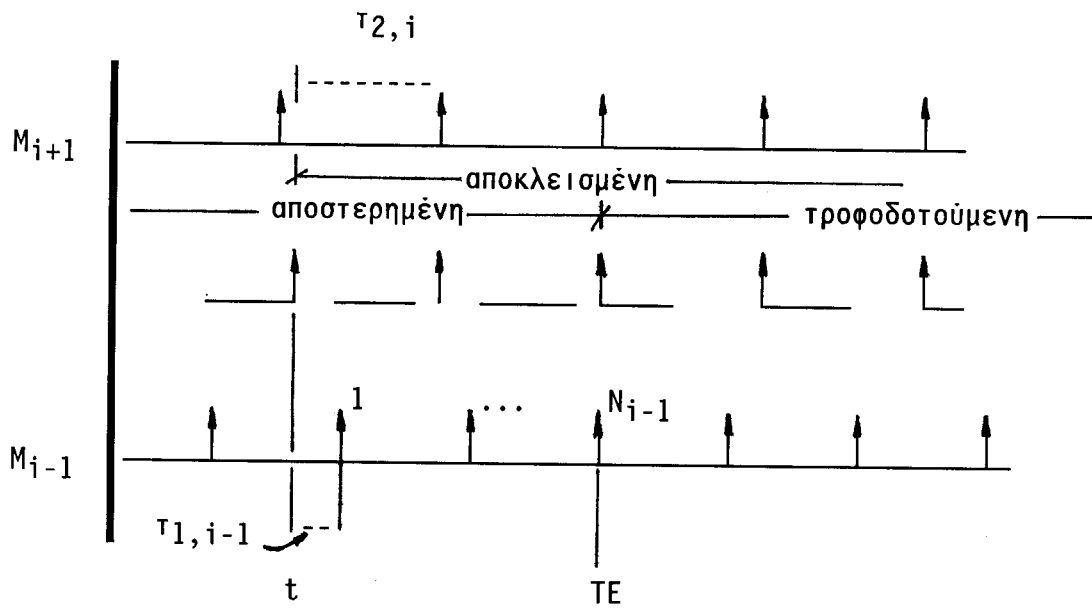


Σχήμα 5β

Σχήματα 5α, 5β: Αλλαγές στις καταστάσεις αποστερημένων και αποκλεισμένων μηχανών κατά την διάρκεια των μεταβατικών χρόνων.



Σχήμα 5γ



Σχήμα 5δ

Σχήματα 5γ, 5δ: : Αλλαγές στις καταστάσεις αποστερημένων και αποκλεισμένων μηχανών μετά την πάροδο των μεταβατικών χρόνων.

αποστερημένη είτε μόνο αποκλεισμένη. Οι ακόλουθες περιπτώσεις (Σχ. 5α και β) αφορούν την διάρκεια  $TE-t$  του φαινομένου.

1. Μία μηχανή  $M_i$  γίνεται ταυτόχρονα αποκλεισμένη και αποστερημένη και αμέσως μετά, δηλαδή στο διάστημα κάποιου μεταβατικού χρόνου  $\tau_{1,i}$  ή  $\tau_{2,i}$ , κάποια από τις δύο καταστάσεις υπερισχύει της άλλης. Τέτοια παραδείγματα αναφέρονται στις περιπτώσεις α και β.
2. Η  $M_i$  εναλλάσσεται στις δύο καταστάσεις για αρκετό χρόνο και παράγει έναν αριθμό κομματιών πριν υπερισχύσει κάποια κατάσταση. Τέτοιες περιπτώσεις είναι οι γ και δ.
3. Οι ρυθμοί παραγωγής των  $M_{i-1}$  και  $M_{i+1}$  είναι ίσοι και κανένα φαινόμενο δεν υπερισχύει του άλλου. Η μηχανή  $M_i$  θα λειτουργεί μέχρι το τέλος της περιόδου παραγωγής έχοντας τη δυνατότητα να βρίσκεται σε δύο καταστάσεις (περίπτωση ε).

Περίπτωση α: Όπως φαίνεται στο Σχ. 5α, η μηχανή  $M_i$  είναι αποκλεισμένη και ο ρυθμός της έχει μειωθεί και είναι ίσος με το ρυθμό της  $M_{i+1}$ . Ωστόσο η  $M_{i-1}$  είναι πιο αργή και ο χώρος  $B_{i-1}$  αδειάζει τη χρονική στιγμή  $t$ . Μετά από χρόνο  $\tau_{2,i}$  μία θέση ελευθερώνεται στον  $B_i$ . Την ίδια στιγμή όμως η μηχανή  $M_i$  δεν έχει τελειώσει την επεξεργασία του κομματιού της, επειδή η καθυστέρηση  $\tau_{1,i-1}$  μέχρι να το δεχθεί ήταν μεγάλη. Έτσι στο τέλος της επεξεργασίας η μηχανή εμφανίζεται μη αποκλεισμένη. Η συνθήκη για το γεγονός αυτό εκφράζεται ως εξής:

$$\tau_{2,i} < \tau_{1,i-1} + \frac{1}{NR_i} = \tau_{2,i-1} + \frac{1}{NR_i}. \quad (2.27)$$

Σημειώνουμε ότι όταν ένας χώρος  $B_{i-1}$  είναι άδειος οι αφίξεις και αναχωρήσεις κομματιών συμβαίνουν ταυτόχρονα. Δηλαδή ισχύει ότι  $\tau_{1,i-1} = \tau_{2,i-1}$  και αυτό δικαιολογεί την ισότητα στην παραπάνω σχέση. Βλέπουμε εδώ ότι το γεγονός χώρος\_αδειάζει αλλάζει ακαριαία την κατάσταση της μηχανής από αποκλεισμένη σε αποστερημένη και το γεγονός χώρος\_ελευθερώνεται στον  $B_i$  συμβαίνει στιγμιαία, δηλαδή:

$$TE = t . \quad (2.28)$$

Το γεγονός χώρος\_ελευθερώνεται μπορεί επίσης να συμβεί όταν η μηχανή  $M_i$  είναι αποκλεισμένη και πρόκειται να πάθει βλάβη. Τότε στον χρόνο  $\tau_{2,i-1}$ , που είναι το διάστημα μέχρι την επόμενη αναχώρηση από τον χώρο  $B_{i-1}$  ή ισοδύναμα μέχρι την αναχώρηση από την μηχανή  $M_i$ , προστίθεται και η καθυστέρηση λόγω επισκευής της μηχανής. Αν η νέα τιμή του μεταβατικού χρόνου  $\tau_{2,i-1}$  ικανοποιεί την ανισότητα της (2.27), τότε ελευθερώνεται μία θέση στον κατάντη χώρο  $B_i$  και η μηχανή παύει να είναι αποκλεισμένη.

**Περίπτωση β:** Εδώ συμβαίνει το δυαδικό γεγονός, δηλαδή ο χώρος  $B_{i-1}$  είναι άδειος και η μηχανή  $M_i$  αναγκάζεται να παράγει με ρυθμό μικρότερο από τον ονομαστικό της (Σχ. 5β). Εν τούτοις, επειδή η  $M_{i+1}$  είναι αργή, η  $M_i$  αποκλείεται τη στιγμή  $t$ . Ο χρόνος αυτός είναι ο συμβατικός χρόνος του γεγονότος και σημειώνεται στην αρχή της επεξεργασίας του κομματιού που πρόκειται να αποκλειστεί. Το διάστημα  $\tau_{2,i}$  μέχρις ότου ελευθερωθεί μία θέση στον  $B_i$  είναι μεγαλύτερο από το άθροισμα του χρόνου επεξεργασίας του κομματιού στην  $M_i$  και του χρόνου αναμονής μέχρι την άφιξη του

επόμενου κομματιού στην  $M_i$ . Έτσι η  $M_i$  θα μείνει αποκλεισμένη για αρκετό χρόνο και κατά συνέπεια ο χώρος  $B_{i-1}$  θα αρχίσει πάλι να τροφοδοτείται. Εδώ η συνθήκη είναι:

$$\tau_{2,i} = \tau_{1,i} > \tau_{1,i-1} + \frac{1}{R_{i-1}} . \quad (2.29)$$

Σημειώνουμε ότι όταν ένας χώρος  $B_i$  είναι γεμάτος οι αφίξεις και αναχωρήσεις κομματιών συμβαίνουν ταυτόχρονα. Δηλαδή ισχύει ότι  $\tau_{1,i} = \tau_{2,i}$  και αυτό δικαιολογεί την ισοότητα στην παραπάνω σχέση. Το γεγονός χώρος\_τροφοδοτείται θα συμβεί στο χρόνο:

$$TE = t + \tau_{1,i-1} . \quad (2.30)$$

Επίσης, κατ' αντιστοιχία με την προηγούμενη περίπτωση α, όταν μία αποστερημένη μηχανή πάθει βλάβη, τότε το διάστημα  $\tau_{1,i}$  το οποίο μεσολαβεί μέχρι την επόμενη άφιξη στον  $B_i$  ή ισοδύναμα μέχρι να παράγει η  $M_i$  κάποιο κομμάτι, παρατείνεται και η ανισότητα (2.29) είναι δυνατόν να ικανοποιείται. Επομένως, κατά την χρονική στιγμή  $TE$  το γεγονός χώρος\_τροφοδοτείται θα συμβεί στον  $B_{i-1}$ .

Περίπτωση γ: Εδώ η μηχανή  $M_i$  εναλλάσσεται ανάμεσα στις δύο καταστάσεις για κάποιο χρονικό διάστημα, παράγοντας έναν αριθμό κομματιών. Όταν η  $M_{i-1}$  είναι πιο αργή από την  $M_{i+1}$ , τότε η πρώτη κατάσταση θα υπερισχύσει τελικά (Σχ. 5γ). Έχουμε τη συνθήκη:

$$\sim[(2.27) \vee (2.29)] \wedge (R_{i+1} > R_{i-1}) . \quad (2.31)$$

Ο χώρος  $B_i$  πρόκειται να αλλάξει κατάσταση, από γεμάτος σε ενδιάμεσης στάθμης. Το γεγονός χώρος\_ελευθερώνεται θα συμβεί τη στιγμή κατά την οποία το τελευταίο αποκλεισμένο κομμάτι φεύγει από την  $M_i$ . Έστω  $N_i$  η παραγωγή της  $M_i$  μέχρι το γεγονός αυτό. Τότε από το σχήμα προκύπτει η ακόλουθη παρατήρηση:

**Παρατήρηση 3:** Ο χρόνος κατά τον οποίο η  $M_i$  περατώνει την επεξεργασία του  $(N_i+1)$ -οστού κομματιού είναι μεγαλύτερος του χρόνου κατά τον οποίο ελευθερώνεται μία θέση για το κομμάτι αυτό στο χώρο  $B_i$ . Το αντίθετο συμβαίνει για τα πρώτα  $N_i$  κομμάτια. Ισοδύναμα,

$$t+\tau_{2,i} + \frac{N_i}{R_{i+1}} < t+\tau_{1,i-1} + \frac{N_i}{R_{i-1}} + \frac{1}{NR_i} , \quad (2.32)$$

και

$$TE=t+\tau_{2,i} + \frac{-1+N_i}{R_{i+1}} \geq t+\tau_{1,i-1} + \frac{-1+N_i}{R_{i-1}} + \frac{1}{NR_i} . \quad (2.33)$$

Η ακόλουθη πρόταση οδηγεί στον υπολογισμό του χρόνου  $TE$  για το επόμενο γεγονός:

**Πρόταση 3:** Για την περίπτωση που εξετάζουμε ισχύει:

$$N_i = 1 + \text{INT} \left\{ \frac{-1/NR_i + \tau_{2,i} - \tau_{1,i-1}}{1/R_{i-1} - 1/R_{i+1}} \right\} . \quad (2.34)$$

Απόδειξη: Οι (2.32) και (2.33) συνδυάζονται στην:

$$\begin{aligned} \tau_{2,i} - \tau_{1,i-1} - \frac{1}{NR_i} &< N_i \left( \frac{1}{R_{i-1}} - \frac{1}{R_{i+1}} \right) \leq \\ &\leq \tau_{2,1} - \tau_{1,i-1} - \frac{1}{NR_i} + \left( \frac{1}{R_{i-1}} - \frac{1}{R_{i+1}} \right) , \end{aligned}$$

και η εξίσωση (2.34) είναι προφανής, ΟΕΔ.

Το επόμενο γεγονός θα συμβεί την χρονική στιγμή  $T_E$  που δίνεται από την εξίσωση (2.37).

Περίπτωση δ: Θεωρούμε τη δυαδική κατάσταση της προηγούμενης· η  $M_{i+1}$  είναι πιο αργή από την  $M_{i-1}$ , δηλαδή:

$$\sim [(2.26) \vee (2.29)] \wedge (R_{i+1} < R_{i-1}) . \quad (2.35)$$

Το επόμενο γεγονός είναι το χώρος\_τροφοδοτείται και συμβαίνει στον  $B_{i-1}$  όταν η μηχανή  $M_{i-1}$  έχει παράγει  $N_{i-1}$  κομμάτια. Από το Σχ. 5δ προκύπτει η ακόλουθη παρατήρηση:

Παρατήρηση 4: Η άφιξη του  $(1+N_{i-1})$ -οστού κομματιού στον χώρο  $B_{i-1}$

γίνεται νωρίτερα από την ετοιμασία της μηχανής  $M_i$  να δεχθεί το κομμάτι· επομένως ο χώρος  $B_{i-1}$  τροφοδοτείται. Το αντίθετο συμβαίνει κατά την επεξεργασία των  $N_{i-1}$  πρώτων κομματιών. Ισοδύναμα:

$$t + \tau_{2,i} + \frac{-1 + N_{i-1}}{R_{i+1}} > t + \tau_{1,i-1} + \frac{N_{i-1}}{R_{i-1}}, \text{ και} \quad (2.36)$$

$$t + \tau_{2,i} + \frac{-2 + N_{i-1}}{R_{i+1}} \leq t + \tau_{1,i-1} + \frac{-1 + N_{i-1}}{R_{i-1}} = TE. \quad (2.37)$$

Για τον υπολογισμό του χρόνου  $TE$  χρειαζόμαστε τον αριθμό κομματιών  $N_{i-1}$  το οποίο προκύπτει από την επόμενη πρόταση.

**Πρόταση 4:** Για την περίπτωση που εξετάζουμε ισχύει:

$$N_{i-1} = 1 + \text{INT} \left\{ \frac{\tau_{1,i-1} - \tau_{2,i} + 1/R_{i+1}}{1/R_{i+1} - 1/R_{i-1}} \right\}. \quad (2.38)$$

**Απόδειξη:** Από την παρατήρηση 4 προκύπτει η σχέση:

$$\begin{aligned} \tau_{1,i-1} - \tau_{2,i} + \frac{1}{R_{i+1}} &< \left( \frac{1}{R_{i+1}} - \frac{1}{R_{i-1}} \right) N_{i-1} \leq \\ &\leq \tau_{1,i-1} - \tau_{2,i} + \frac{1}{R_{i+1}} + \left( \frac{1}{R_{i+1}} - \frac{1}{R_{i-1}} \right), \end{aligned}$$



και η εξίσωση (2.38) είναι προφανής, ΟΕΔ.

Περίπτωση ε: Αν οι ρυθμοί των  $M_{i-1}$  και  $M_{i+1}$  είναι ίσοι και οι συνθήκες (2.27) και (2.29) δεν ισχύουν, τότε έχουμε τα ακόλουθα:

$$\sim[(2.27) \vee (2.29)] \wedge (R_{i+1} = R_{i-1}), \quad (2.39)$$

$$TE = \infty. \quad (2.40)$$

Η τελευταία εξίσωση προκύπτει από τις (2.37) και (2.38) βρίσκοντας το όριο καθώς  $R_{i+1} \rightarrow R_{i-1}$  και κρατώντας την ανισότητα  $R_{i+1} < R_{i-1}$ . Η μηχανή δηλαδή θα βρίσκεται περιοδικά σε δύο καταστάσεις μέχρι το τέλος της περιόδου παραγωγής, εκτός εάν συμβεί κάποιο από τα γεγονότα: βλάβη στις  $M_{i-1}$  και  $M_{i+1}$ , ή αδειάσει ο χώρος  $B_{i-2}$ , ή γεμίσει ο  $B_{i+1}$ , οπότε κάποιος ρυθμός παραγωγής θα μεταβληθεί.

#### Ε. ΓΕΓΟΝΟΤΑ ΣΤΙΣ ΜΗΧΑΝΕΣ

Ο χρόνος ζωής μίας μηχανής εξαρτάται από τον αριθμό των κομματιών τα οποία παράγει και συνεπώς από το ρυθμό παραγωγής της. Κάθε φορά που σημειώνεται μία αλλαγή στο ρυθμό, ο χρόνος ζωής της μηχανής μεταβάλλεται. Αν η  $M_i$  είναι λειτουργική, τότε ο χρόνος κατά τον οποίο θα εμφανίσει βλάβη είναι:

$$TE = t + \tau_{1,i} + \frac{KB(i)-1}{R_i}, \quad (2.42)$$

αφού το κομμάτι που επεξεργάζεται η  $M_i$  περιλαμβάνεται στο πλήθος  $KB(i)$  κομματιών που παράγει μέχρι να πάθει βλάβη και η μηχανή χρειάζεται χρόνο  $\tau_{1,i}$  για να το ελευθερώσει προς τα κατόντη.

Αν η  $M_i$  είναι υπό επισκευήν, τότε ο χρόνος επισκευής δε μεταβάλλεται. Οι χρόνοι επισκευής υπολογίζονται τις στιγμές που εμφανίζονται οι βλάβες χρησιμοποιώντας γεννήτριες ακολουθιών τυχαίων αριθμών. Αυτές περιγράφονται στην παράγραφο που αναφέρεται στον αλγόριθμο προσομοίωσης.

## **2.5 ΕΝΗΜΕΡΩΣΗ ΚΑΙ ΑΛΛΑΓΗ ΤΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ ΚΑΤΑΣΤΑΣΗΣ**

Στην προηγούμενη παράγραφο αναπτύχθησαν οι εξισώσεις καταστάσεως για τον προγραμματισμό του επόμενου γεγονότος. Οι διαταραχές τις οποίες προκαλεί ένα γεγονός σε κάποιο σημείο της γραμμής συνεπάγονται απότομες μεταβολές στις καταστάσεις των γειτονικών μηχανών ή χώρων εναποθήκευσης. Οι μεταβολές αυτές αλλάζουν τον ορίζοντα λειτουργίας του συστήματος και επομένως είναι αναγκαίο να υπολογισθούν οι τιμές των μικροσκοπικών μεταβλητών κατά τη στιγμή του γεγονότος. Είναι πιθανόν επίσης οι χρόνοι δύο γεγονότων να είναι ίσοι. Αν τα γεγονότα αυτά σχετίζονται με γειτονικά στοιχεία της γραμμής, τότε κάποιο από τα δύο υπερισχύει του άλλου. Στην παράγραφο αυτή θα μελετηθούν τέτοιες περιπτώσεις. Αρχίζουμε πρώτα με τις εξισώσεις ενημέρωσης οι οποίες αντιστοιχούν στην (2.1).

## A. ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΕΝΗΜΕΡΩΣΗΣ

Εξετάζουμε την εξέλιξη των μικροσκοπικών καταστάσεων για τα ζεύγη  $(M_i, B_i)$ , τα οποία στο εξής θα ονομάζονται **στοιχειώδη τμήματα**  $S_i$ . Έστω  $t_j^+$  η χρονική στιγμή αμέσως μετά την παρατήρηση του γεγονότος στο οποίο οφείλεται η τελευταία αλλαγή στις μεταβλητές του  $S_i$ , και  $t_k$  ο χρόνος του αμέσως επόμενου γεγονότος (η αρίθμηση  $j, \dots, k$  αφορά το συνολικό πλήθος γεγονότων στο σύστημα και επομένως δύο διαδοχικά γεγονότα στο στοιχειώδες τμήμα δεν είναι αναγκαίο να είναι διαδοχικά γεγονότα του συστήματος). Επίσης,

$n_1$ : αριθμός αφίξεων στον  $B_i$  στο διάστημα  $(t_j, t_k)$

$n_2$ : αριθμός αναχωρήσεων από τον  $B_i$ .

Αναφερόμαστε στο Σχ. 4β και ορίζουμε τις μεταβλητές

$$a_1 = (t_k - t_j - \tau_{1,i}) R_i ,$$

$$a_2 = (t_k - t_j - \tau_{2,i}) R_{i+1} , \quad (2.43)$$

όπου  $t_k$  και  $t_j$  αντιστοιχούν στους χρόνους ΤΕ και  $t$  του σχήματος. Κάθε μία από τις μεταβλητές ισούται με τον αριθμό κομματιών τα οποία παράγονται από την  $M_i$ , ή την  $M_{i+1}$  στο διάστημα  $(t_j, t_k]$  επαυξημένο κατά το κλάσμα του κομματιού το οποίο έχει κατεργασθεί τη χρονική στιγμή  $t_k$ . Από το σχήμα προκύπτουν εύκολα οι αριθμοί  $n_1$  και  $n_2$

$$n_m = \begin{cases} 1 + \text{INT}\{a_m\} & , \text{ αν } t_k - t_j \geq \tau_{m,i} \\ 0 & , \text{ διαφορετικά,} \end{cases} \quad m=1,2 \quad (2.44)$$

επειδή το χρονικό διάστημα το οποίο μεσολαβεί ανάμεσα στα γεγονότα  $j$  και  $k$  μπορεί να μην υπερβαίνει κάποιο μεταβατικό χρόνο και επομένως δεν παράγεται κανένα κομμάτι. Η συνολική παραγωγή της  $M_i$ , ο αριθμός κομματιών μέχρι να χαλάσει η μηχανή και η νέα στάθμη του χώρου  $B_i$  υπολογίζονται από τις σχέσεις

$$\Sigma\pi(i, t_k) = \Sigma\pi(i, t_j^+) + n_1, \quad (2.45)$$

$$KB(i, t_k) = KB(i, t_j^+) - n_1, \quad (2.46)$$

$$B\Sigma(i, t_k) = B\Sigma(i, t_j^+) + n_1 - n_2. \quad (2.47)$$

Τέλος, οι εξισώσεις για τους νέους χρόνους καθυστέρησης  $\tau_{m,i}(t_k)$  είναι

$$\tau_{m,i}(t_k) = \begin{cases} \frac{n_m - a_m}{R_{i+m-1}}, & , \text{ αν } t_k - t_j \geq \tau_{m,i} \\ \tau_{m,i} - (t_k - t_j), & , \text{ διαφορετικά.} \end{cases} \quad m=1,2 \quad (2.44)$$

Οι υπολογισμοί αυτοί πρέπει να γίνονται για τις δύο τιμές του  $m$ , κάθε φορά που συμβαίνει ένα γεγονός. Ωστόσο αν ο χώρος  $B_i$  είναι γεμάτος ή άδειος και επί πλέον οι μεταβατικοί χρόνοι  $\tau_{1,i}(t_j^+)$  και  $\tau_{2,i}(t_j^+)$  και οι ρυθμοί εισόδου και εξόδου κομματιών από αυτόν είναι ίσοι, τότε ισχύουν οι σχέσεις

$$n_1 = n_2,$$

$$\tau_{1,i}(t_k) = \tau_{2,i}(t_k) , \quad (2.49)$$

και το πλήθος των πράξεων περιορίζεται για μία μόνον τιμή του  $m$ .

## **B. ΜΕΤΑΒΟΛΕΣ ΛΟΓΩ ΓΕΓΟΝΟΤΩΝ ΣΤΙΣ ΜΗΧΑΝΕΣ**

Μία μηχανή στο διάστημα ανάμεσα σε δύο διαδοχικές αναχωρήσεις κομματιών είναι ένα παθητικό στοιχείο της γραμμής, δηλαδή δε μπορεί ούτε να δεχθεί ούτε να προωθήσει άλλο κομμάτι. Αν και οι μηχανές είναι δυνατόν να παθαίνουν βλάβες οποιαδήποτε στιγμή κατά τη διάρκεια της κατεργασίας κάποιου κομματιού, οι υπολογισμοί στις εξισώσεις ενημέρωσης απλουστεύονται όταν η βλάβη σημειώνεται ακριβώς μετά την αναχώρηση από τη μηχανή του προηγούμενου κομματιού, δηλαδή του τελευταίου πριν τη βλάβη. Για παράδειγμα, αν η μηχανή πρόκειται να πάθει βλάβη μετά την παραγωγή 5.3 κομματιών, θα θεωρήσουμε ότι το γεγονός αυτό θα συμβεί αμέσως μετά το πέρας της κατεργασίας και την αναχώρηση του πέμπτου. Ωστόσο, για να είναι ακριβής ο αλγόριθμος, αυτή η διαφορά των 0.3 κομματιών προστίθεται στο νέο αριθμό κομματιών τα οποία θα παράγει η μηχανή μέχρι την επόμενη βλάβη της.

Αν κατά το συμβατικό χρόνο  $t_k$  στον οποίο σημειώνεται η βλάβη της μηχανής  $M_i$  ο χώρος  $B_{i-1}$  είναι άδειος, τότε η μηχανή θα μείνει αδρανής για μία περίοδο  $d=\tau_{2,i-1}$  και κατόπιν θα πάρει το κομμάτι στη διάρκεια κατεργασίας του οποίου θα χαλάσει. Στην περίπτωση αυτή οι μεταβατικοί χρόνοι του  $B_{i-1}$  είναι ίσοι μεταξύ τους και παριστάνουν το χρόνο μέχρι την επόμενη άφιξη στην  $M_i$ . Εκτός από την περίοδο αδράνειας στον κύκλο

παραγωγής της μηχανής προστίθεται επίσης το χρονικό διάστημα  $XE(i, t_k^+)$  της επισκευής. Αυτή η καθυστέρηση τις περισσότερες φορές προκαλεί αλλαγή στην στάθμη του  $B_{i-1}$  και επομένως, σύμφωνα με την περίπτωση β του εδαφίου 2.4(E), το γεγονός  $\chi\acute{o}\rho\omicron\varsigma\_τροφοδοτείται$  θα σημειωθεί τη χρονική στιγμή  $t_{k+d}$ . Για να μειωθούν οι υπολογισμοί τους οποίους συνεπάγεται η εκτέλεση του νέου αυτού γεγονότος, κάνουμε τις ακόλουθες αλλαγές:

$$\begin{aligned} B(i-1) &= 1 , \\ \tau_{2,i-1}(t_k^+) &= d + XE(i, t_k^+) + 1/NR_i , \\ BC_{i-1}(t_k^+) &= BC_{i-1}(t_k) + 1 . \end{aligned} \quad (2.50)$$

Η νέα τιμή του  $\tau_{2,i-1}$  αναφέρεται στην αναχώρηση από τον  $B_{i-1}$  του επόμενου κομματιού μετά την επισκευή της μηχανής. Ωστόσο κατά το διάστημα  $\tau_{2,i-1}(t_k^+)$  ανάμεσα στο συμβατικό χρόνο βλάβης  $t_k$  και τον χρόνο  $t_{k+}$  συμβαίνει ακόμη μία αναχώρηση από τον  $B_{i-1}$  προς τη μηχανή (τη στιγμή  $d+t_k$ ). Επειδή αγνοούμε αυτήν τη μετακίνηση, ενώ ο μεταβατικός χρόνος άφιξης  $\tau_{1,i-1}$  μένει αμετάβλητος, η στάθμη του χώρου θα μεταβληθεί από 0 σε 1. Για τον ακριβή επομένως υπολογισμό των ελευθέρων θέσεων του χώρου  $B_{i-1}$  εκτελούμε και την τρίτη αλλαγή της (2.50). Ο χρόνος επισκευής  $XE(i, t_k^+)$  υπολογίζεται από την αντίστοιχη γεννήτρια τυχαίων αριθμών.

Οι νέες τιμές των υπόλοιπων μεταβλητών είναι

$$\begin{aligned} M(i, t_k^+) &= 0 , \\ R_i(t_k^+) &= NR_i , \\ \tau_{1,i}(t_k^+) &= \tau_{2,i-1}(t_k^+) , \end{aligned} \quad (2.51)$$

Όταν ο  $B_{i-1}$  δεν είναι άδειος, στην τελευταία ισότητα αντικαθιστούμε τη δεύτερη ισότητα της (2.50) με  $d=0$ .

Όταν η μηχανή  $M_i$  επισκευάζεται, τότε με μία άλλη γεννήτρια τυχαίων αριθμών υπολογίζεται ο νέος αριθμός κομματιών  $KB(i)$  τα οποία θα παραχθούν μέχρι την επόμενη βλάβη. Αν είχαν προηγηθεί οι αλλαγές (2.50), τότε η χωρητικότητα και η στάθμη του χώρου  $B_{i-1}$  μειώνονται κατά 1.

Οι μεταβλητές  $XE(i)$  και  $KB(i)$  είναι η στοχαστική είσοδος του μοντέλου και αντιστοιχούν στο διάνυσμα  $\xi$  της εξίσωσης (2.2).

#### Γ. ΜΕΤΑΒΟΛΕΣ ΛΟΓΩ ΓΕΓΟΝΟΤΩΝ ΣΤΙΣ ΑΠΟΘΗΚΕΣ

Όταν ο χώρος  $B_i$  γεμίσει, τότε οι μεταβατικοί χρόνοι αφίξεως και αναχωρήσεως απ' αυτόν γίνονται ίσοι, αφού η μηχανή  $M_i$  αποκλείεται και αναγκάζεται να παρατείνει τον κύκλο παραγωγής της. Έτσι το γεγονός αυτό συνεπάγεται τις ακόλουθες αλλαγές:

$$B(i) = 2 ,$$

$$\tau_{1,i} = \tau_{2,i} ,$$

$$R_i = \min(R_i, R_{i+1}) . \quad (2.52)$$

Επίσης αν ο χώρος  $B_{i-1}$  δεν είναι άδειος, τότε θέτουμε  $\tau_{2,i-1} = \tau_{1,i}$ .

Όταν ο  $B_i$  αδειάσει εργαζόμαστε ανάλογα:

$$B(i) = 1 ,$$

$$\tau_{2,i} = \tau_{1,i} ,$$

$$R_i = \min(R_i, R_{i-1}) , \quad (2.53)$$

και αν ο  $B_{i+1}$  δεν είναι γεμάτος, τότε θέτουμε  $\tau_{1,i+1} = \tau_{2,i} + 1/NR_{i+1}$ .

Σημειώνεται πάλι ότι ο χώρος  $B_i$  λέγεται γεμάτος ή άδειος όταν και μόνον όταν είτε η  $M_i$  είναι αποκλεισμένη, είτε η  $M_{i+1}$  είναι αποστερημένη αντίστοιχα.

Στην περίπτωση που η εμφάνιση ενός από αυτά τα γεγονότα συνεπάγεται κάποια μηχανή να βρεθεί σε δύο καταστάσεις ταυτοχρόνως, τότε ο προγραμματισμός του επόμενου γεγονότος γίνεται σύμφωνα με το εδάφιο 2.4(Δ).

Αν ο  $B_i$  είναι γεμάτος και η κατάντη μηχανή αρχίσει να του ελευθερώνει θέσεις, τότε:

$$B(i) = 1 ,$$

$$\tau_{1,i} = \tau_{2,i-1} . \quad (2.54)$$

Αν ο  $B_{i-1}$  είναι άδειος, θέτουμε  $R_i = \min(NR_i, R_{i-1})$ , διαφορετικά  $R_i = NR_i$ .

Τέλος όταν ο  $B_i$  είναι άδειος και αρχίσει να τροφοδοτείται από τα ανάντη, τότε:



$$B(i) = 1 ,$$

$$T_{2,i} = T_{1,i+1} . \quad (2.55)$$

Αν η  $M_{i+1}$  είναι αποκλεισμένη, τότε θέτουμε  $R_i = \min(NR_i, R_{i+1})$ , διαφορετικά  $R_i = NR_i$ .

#### Δ. ΠΡΟΤΕΡΑΙΟΤΗΤΕΣ ΜΕΤΑΞΥ ΤΑΥΤΟΧΡΟΝΩΝ ΓΕΓΟΝΟΤΩΝ

Επειδή οι βλάβες στις μηχανές και τα γεγονότα στους χώρους εναποθήκευσης συμβαίνουν τις στιγμές των αναχωρήσεων ή των αφίξεων κάποιων κομματιών στους τελευταίους, υπάρχει πιθανότητα μία μετακίνηση κομματιού να προκαλέσει δύο γεγονότα ταυτοχρόνως.

Εξετάζουμε τρία φαινόμενα. Έστω ότι ένας χώρος αδειάζει και ταυτοχρόνως η μηχανή την οποία τροφοδοτεί παθαίνει βλάβη. Τότε το πρώτο γεγονός θα εκτελεσθεί πριν από το δεύτερο. Επίσης στην περίπτωση κατά την οποία κάποια μηχανή  $M_i$  αποκλείεται ενώ παθαίνει βλάβη, το δεύτερο γεγονός έχει προτεραιότητα. Η τελευταία περίπτωση αναφέρεται σε μία αποθήκη  $B_i$  η οποία προγραμματίζεται να αδειάσει, ενώ αρχίζει ακαριαία να ελευθερώνεται χώρος από την κατάντη αποθήκη  $B_{i+1}$ . Τότε εκτελείται το πρώτο γεγονός και ο χρόνος μέχρι την επόμενη άφιξη κάποιου κομματιού στην  $B_{i+1}$  παρατείνεται λόγω επισκευής. Έτσι ενισχύεται η συνθήκη (2.27) η οποία είναι προϋπόθεση του δεύτερου γεγονότος. Οι τρεις κανόνες που αναφέρθηκαν εκφράζονται ως εξής:

$$\begin{aligned}
[ \{BA_{i-1}(t)=1\} \wedge \{MX_i(t)=1\} ] & \implies \{BA_{i-1}(t^+)=1\} , \\
[ \{MX_i(t)=1\} \wedge \{B\Gamma_i(t)=1\} ] & \implies \{MX_i(t^+)=1\} , \\
[ \{BA_i(t)=1\} \wedge \{BE_{i+1}(t)=1\} ] & \implies \{BA_i(t^+)=1\} .
\end{aligned}
\tag{2.56}$$

Σύμφωνα με τον πρώτο κανόνα, εκτελείται πρώτα το γεγονός χώρος\_αδειάζει με το οποίο υπολογίζεται ο χρόνος καθυστέρησης  $t_{2,i-1}$  και στη συνέχεια απ' αυτόν προκύπτει ο χρόνος  $d$ , ο οποίος χρειάζεται για τις μεταβολές (2.50) του γεγονότος μηχανή\_χαλάει. Ο δεύτερος κανόνας δηλώνει ότι μία χαλασμένη μηχανή μπορεί να έχει παρατεταμένο χρόνο επισκευής, ώστε να αδειάσει κάποια θέση στον κατάντη χώρο  $B_i$ . Έτσι το γεγονός χώρος\_γεμίζει μπορεί να μη συμβεί τελικά. Ο τελευταίος κανόνας επιβάλλει τον υπολογισμό του συνολικού χρόνου παράτασης του κύκλου παραγωγής μίας μηχανής  $M_i$ , εκτελώντας πρώτα το γεγονός χώρος\_αδειάζει και κατόπιν τον προγραμματισμό του γεγονότος χώρος\_ελευθερώνεται για την αποθήκη  $B_{i+1}$ .

## 2.6. Ο ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ

Στις παραγράφους 2.4 και 2.5 εξήχθησαν οι ακριβείς εκφράσεις των εξισώσεων καταστάσεως του συστήματος παραγωγής. Το μέγεθος του διανύσματος καταστάσεως  $X$  και η μορφή των εξισώσεων (2.1)-(2.6) καθιστούν την αναλυτική επίλυση του προβλήματος αδύνατη. Ωστόσο από το χωρισμό του  $X$  σε δύο διανύσματα, των μικροσκοπικών και μακροσκοπικών μεταβλητών, προκύπτει ένα **αποξεύξιμο** (decomposable) σύστημα. Μία ακόμη ιδιότητα εξάγεται από τους κανόνες μετάδοσης των διαταραχών της παραγράφου 2.3 και αφορά τον τρόπο με τον οποίο μεταβάλλεται η κατάσταση

του συστήματος. Όταν συμβεί κάποιο γεγονός, τότε μερικά μόνον στοιχεία του διανύσματος  $X$  αλλάζουν. Έτσι το πλήθος των εξισώσεων από τις (2.1) και (2.2), οι οποίες υπολογίζονται την στιγμή που συμβαίνει κάποιο γεγονός, είναι μικρό.

Με βάση τις δύο αυτές ιδιότητες και χρησιμοποιώντας τις κατάλληλες σχέσεις και προτάσεις των προηγούμενων παραγράφων προχωρούμε στα βήματα του αλγορίθμου διακεκριμένων γεγονότων.

**Βήμα 1. Αρχικές συνθήκες.** Όρισε τον συνολικό χρόνο προσομοίωσης, το πλήθος πρώτων υλών στον χώρο  $B_0$ , τις αρχικές στάθμες στους υπόλοιπους χώρους, τους ρυθμούς παραγωγής βλαβών και επισκευών των μηχανών, και το μήκος  $N$  της γραμμής παραγωγής. Ξεκινώντας από την αρχή της γραμμής υπολόγισε τα επόμενα γεγονότα για κάθε στοιχείο της.

**Βήμα 2. Επόμενο γεγονός.** Βρες το μικρότερο από τους χρόνους επόμενων γεγονότων. Αν ο χρόνος αυτός είναι μικρότερος του συνολικού χρόνου προσομοίωσης, τότε επέλεξε το επόμενο γεγονός σύμφωνα με τις προτεραιότητες μεταξύ ταυτοχρόνων γεγονότων και εκτέλεσε το βήμα 3, διαφορετικά τερμάτισε την προσομοίωση εκτελώντας το βήμα 4.

**Βήμα 3. Υπορουτίνα γεγονότος.**

**Βήμα 4. Τέλος προσομοίωσης.** Για κάθε στοιχείο της γραμμής ενημέρωσε όλες τις μεταβλητές του συστήματος. Έξοδος αποτελεσμάτων.

Κάθε υπορουτίνα γεγονότος εκτελεί τρία καθήκοντα: την ενημέρωση, την αλλαγή μεταβλητών και τον προγραμματισμό των επόμενων γεγονότων για τις αντίστοιχες μηχανές ή αποθήκες. Υπάρχουν συνολικά έξι υπορουτίνες:

1. Μηχανή  $M_i$  χαλάει.

- α. Ενημέρωσε τα στοιχειώδη τμήματα  $S_i$  και  $S_{i-1}$ . Αν η  $M_{i+1}$  είναι ταυτοχρόνως αποστερημένη και αποκλεισμένη, τότε ενημέρωσε το τμήμα  $S_{i+1}$  και θέσε  $\tau_{2,i} = \tau_{1,i+1}$ .
- β. Άλλαξε τις μεταβλητές όπως προτείνεται στην 2.5 (B).
- γ. Προγραμμάτισε τα επόμενα γεγονότα στα  $S_{i-1}$  και  $S_i$  σύμφωνα με τις παραγράφους 2.4 (Α)-(Γ).

2. Μηχανή  $M_i$  επισκευάζεται.

- α. Υπολόγισε τον αριθμό κομματιών που θα παράγει η μηχανή μέχρι την επόμενη βλάβη της και χρησιμοποιώντας την (2.42) προγραμμάτισε το χρόνο της βλάβης.
- β. Αν τη στιγμή που είχε συμβεί η βλάβη ίσχυαν οι συνθήκες οι οποίες επέβαλαν τον υπολογισμό των εξισώσεων (2.50), τότε ενημέρωσε το τμήμα  $S_{i-1}$ , μείωσε τη χωρητικότητα  $BC_{i-1}$  και τη στάθμη  $B\Sigma_{i-1}$  κατά μία μονάδα και προγραμμάτισε το  $S_{i-1}$ .

3. Χώρος  $B_i$  γεμίζει.

- α. Ενημέρωσε τα  $S_i$  και  $S_{i-1}$ .
- β. Άλλαξε το ρυθμό  $R_i$  σύμφωνα με την Εξ. (2.52).
- γ. Αν ο χώρος  $B_{i-1}$  είναι άδειος τότε προγραμμάτισε τα επόμενα γεγονότα στα  $S_i$  και  $S_{i-1}$  σύμφωνα με την παράγραφο 2.4 (Δ), αλλιώς άλλαξε τους χρόνους καθυστέρησης κατά την εξίσωση (2.52) και προγραμμάτισε τα  $S_i$  και  $S_{i-1}$  σύμφωνα με τις παραγράφους 2.4 (Α)-(Γ).

4. Χώρος  $B_i$  αδειάζει.

Κατά δυαδικό τρόπο

- α. Ενημέρωσε τα  $S_i$  και  $S_{i-1}$ .
- β. Άλλαξε τον  $R_i$  κατά την εξίσωση (2.53).
- γ. Αν ο χώρος  $B_{i+1}$  είναι γεμάτος τότε προγραμμάτισε τα επόμενα γεγονότα στα  $S_i$  και  $S_{i+1}$  σύμφωνα με την 2.4 (Δ), αλλιώς άλλαξε τους χρόνους καθυστέρησης κατά την (2.53) και προγραμμάτισε τα  $S_i$  και  $S_{i+1}$ , σύμφωνα με τις 2.4 (Α)-(Γ).

5. Χώρος  $B_i$  ελευθερώνεται.

- α. Ενημέρωσε τα  $S_i$ ,  $S_{i-1}$ .
- β. Άλλαξε το ρυθμό της  $M_i$  και τους χρόνους καθυστέρησης σύμφωνα με την 2.5 (Γ).
- γ. Προγραμμάτισε τα επόμενα γεγονότα στα  $S_i$  και  $S_{i-1}$  σύμφωνα με τις 2.4 (Α)-(Γ).

6. Χώρος  $B_i$  τροφοδοτείται.

Κατά δυαδικό τρόπο

- α. Ενημέρωσε τα  $S_i$ ,  $S_{i+1}$ .
- β. Άλλαξε τον ρυθμό της  $M_i$ , και τους χρόνους καθυστέρησης όπως στην 2.5 (Γ).
- γ. Προγραμμάτισε τα επόμενα γεγονότα στα  $S_i$  και  $S_{i+1}$  σύμφωνα με τις 2.4 (Α)-(Γ).

Για την πραγματοποίηση του αλγόριθμου στον υπολογιστή χρειάζονται τρεις

ακόμη υπορουτίνες. Η πρώτη είναι η γεννήτρια των τυχαίων αριθμών οι οποίοι σχετίζονται με τις βλάβες και τις επισκευές κάθε μηχανής. Ο αριθμός των κομματιών που παράγονται από μία μηχανή μέχρι να χαλάσει και ο χρόνος επισκευής της υπολογίζονται αντιστοίχως από τις σχέσεις:

$$KB(i) = \text{INT} \left\{ - \frac{NR_i}{P_i} \ln x \right\}$$

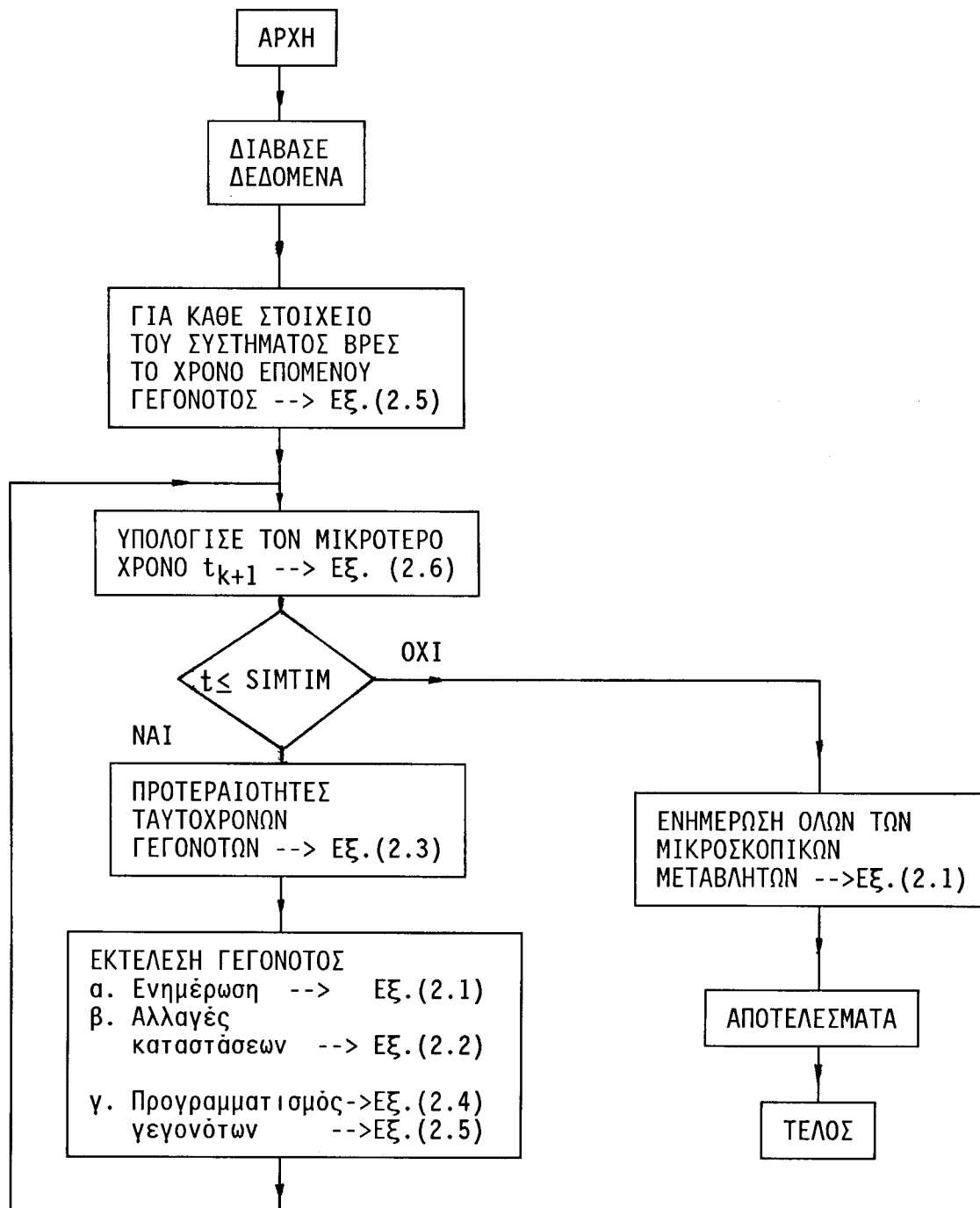
$$XE(i) = - \frac{1}{r_i} \ln x ,$$

όπου  $\ln$  παριστάνει το φυσικό λογάριθμο και  $x$  μία μεταβλητή ομοιόμορφα κατανεμημένη στο διάστημα  $(0,1)$ . Γεννήτριες για την  $x$  υπάρχουν σχεδόν σε όλες τις βιβλιοθήκες των γλωσσών προγραμματισμού, ή είναι εύκολο να προγραμματισθούν.

Η δεύτερη ρουτίνα ξεχωρίζει γεγονότα τα οποία φαινομενικά συμβαίνουν ταυτόχρονα. Για παράδειγμα ας υποθέσουμε ότι τη στιγμή  $t$  θέλουμε να ενημερώσουμε τις μεταβλητές οι οποίες αφορούν κάποιο τμήμα  $S_i$  του οποίου η μηχανή  $M_i$  έχει μόλις παράγει κάποιο κομμάτι. Έστω επίσης ότι ο χώρος  $B_{i-1}$  είναι άδειος και ότι θα τροφοδοτηθεί με το επόμενο κομμάτι τη στιγμή  $t+\delta$ . Αν το  $\delta$  είναι πολύ μικρό σε σχέση με το  $t$ , τότε λόγω του περιορισμού στο συνολικό πλήθος ψηφίων με τα οποία παριστάνεται ένας πραγματικός αριθμός, ο υπολογιστής αποκόπτει το  $\delta$  από τον αριθμό  $t+\delta$  και τα δύο γεγονότα φαίνεται ότι συμβαίνουν ταυτόχρονα. Αυτό μπορεί να είναι αιτία για την εσφαλμένη ακύρωση ή προγραμματισμό γεγονότων κατά τη λειτουργία του συστήματος. Για να μειωθεί αυτή η πιθανότητα οι χρόνοι επόμενων γεγονότων παριστάνονται με πραγματικούς αριθμούς διπλής

ακρίβειας. Το αντίθετο φαινόμενο παρατηρείται όταν δύο γεγονότα προγραμματίζονται να συμβούν κατά τη μετακίνηση κάποιου κομματιού από μία μηχανή στην κατάντη αποθήκη (είναι δηλαδή ταυτόχρονα). Πάλι εξ αιτίας του περιορισμένου πλήθους ψηφίων στον υπολογιστή, υπάρχει πιθανότητα οι εκτιμήσεις για τους χρόνους των να μην είναι ίδιες. Για την εξαλείψη του σφάλματος αυτού, αφού υπολογιστεί ο χρόνος επόμενου γεγονότος  $t$  και εντοπιστεί η θέση του, γίνεται έλεγχος των αντίστοιχων χρόνων των γεγονότων που αντιστοιχούν στα γειτονικά στοιχεία. Αν κάποιος από αυτούς βρίσκεται στο διάστημα  $(t, t+\epsilon]$ , όπου  $\epsilon$  ένας μικρός θετικός αριθμός, τότε το αντίστοιχο γεγονός θεωρείται ταυτόχρονο με το αρχικό. Η τιμή του  $\epsilon$  είναι της τάξης του  $10^{-n}$  όπου  $n$  το πλήθος των δεκαδικών ψηφίων τα οποία διαθέτει ο υπολογιστής για την παράσταση του  $t$ .

Το σχήμα 6 στην επόμενη σελίδα παριστάνει το διάγραμμα ροής του προτεινόμενου αλγόριθμου διακεκριμένων γεγονότων για την ανάλυση γραμμών παραγωγής, όπου SIMTIM συμβολίζει το συνολικό χρόνο προσομοίωσης.



Σχήμα 6. Ο αλγόριθμος διακεκριμένων γεγονότων.



## 2.7 ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

### A. ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΜΕ ΑΛΛΟΥΣ ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΥΣ

Στο εδάφιο αυτό εξετάζονται η ακρίβεια και η ταχύτητα του αλγόριθμου. Το μοντέλο περιγράφει γραμμές παραγωγής διακεκριμένων κομματιών χωρίς καμμία απλουστευτική παραδοχή και επομένως είναι κατάλληλο για την ανάλυση της λειτουργίας συστημάτων στη μόνιμη και μεταβατική περίοδο.

Όταν ένα σύστημα αρχίζει να λειτουργεί, τότε για κάποιο μεταβατικό διάστημα έχει διαφορετική παραγωγικότητα απ' αυτήν που αντιστοιχεί στη μόνιμη κατάσταση λειτουργίας του. Η ανάγκη της μελέτης των μεταβατικών φαινομένων οφείλεται στο ότι πολλά από τα υπάρχοντα συστήματα δε φθάνουν ποτέ σε μόνιμη κατάσταση λειτουργίας. Αυτό συμβαίνει όταν η περίοδος παραγωγής είναι μικρής διάρκειας (π.χ. ένα εικοσιτετράωρο), οι ρυθμοί των μηχανών είναι μικροί και αρχικά οι χώροι των αποθηκών είναι άδειοι. Στην περίπτωση αυτή προς το τέλος της περιόδου παραγωγής σταματάει η τροφοδοσία του συστήματος με πρώτες ύλες και ο ίδιος κύκλος λειτουργίας επαναλαμβάνεται στην επόμενη περίοδο. Αναλυτικές εκφράσεις για τις πιθανότητες μεταβατικής κατάστασης υπάρχουν μόνο για απλά συστήματα δύο μηχανών. Για τη μελέτη μεσαίων και μεγάλων γραμμών παραγωγής το μόνο εργαλείο είναι η τεμάχιο-προς-τεμάχιο (τ-τ) προσομοίωση. Θα δούμε ότι ο προτεινόμενος αλγόριθμος διακεκριμένων γεγονότων (δ-γ) είναι ακριβής και πολύ πιο αποτελεσματικός για τέτοιες εφαρμογές. Για τη μελέτη μόνιμης κατάστασης έχει ήδη αναπτυχθεί ο ταχύς αλλά προσεγγιστικός αλγόριθμος διακεκριμένων γεγονότων από τους D'Angelo

et al. [22].

Στη συνέχεια οι τρεις αλγόριθμοι θα συγκριθούν ως προς την ταχύτητα και την ακρίβειά τους. Για το σκοπό αυτό γράφτηκαν τρία προγράμματα σε κώδικα FORTRAN 77. Για τη σύγκριση των μοντέλων κάτω από τις ίδιες πειραματικές συνθήκες, εφαρμόστηκε η τεχνική των κοινών τυχαίων αριθμών (common random numbers technique-CRN) ([41], σελ. 350). Περιγράφεται σύντομα η τεχνική αυτή. Έστω  $P_{1i}$  και  $P_{2i}$  οι εκτιμήσεις των μέσων ρυθμών παραγωγής μίας γραμμής για ένα καθορισμένο χρονικό διάστημα λειτουργίας, κατά την  $i$ -οστή προσομοίωση της από δύο διαφορετικούς αλγόριθμους, τον A1 και τον A2. Υποθέτουμε ότι ο αλγόριθμος A1 είναι ακριβής και ο A2 είναι προσεγγιστικός. Για να εκτιμήσουμε την ακρίβεια του A2, εκτελούμε  $n$  το πλήθος προσομοιώσεις με κάθε έναν και έστω  $e_i = P_{1i} - P_{2i}$ ,  $i=1,2,\dots,n$  οι αποκλίσεις των εκτιμήσεων των δύο αλγορίθμων. Η εκτίμηση για το μέσο σφάλμα  $E[e]$  του αλγορίθμου A2 είναι:

$$\hat{e} = (1/n) \sum_{i=1}^n e_i ,$$

και η διασπορά της:

$$\text{Var}(\hat{e}) = \frac{1}{n^2} n \cdot \text{Var}(e_i) = \frac{\text{Var}(P_{1i}) + \text{Var}(P_{2i}) - 2\text{Cov}(P_{1i}, P_{2i})}{n} .$$

Αν οι προσομοιώσεις με τους δύο αλγόριθμους γίνονται ανεξάρτητα, δηλαδή με διαφορετικές ακολουθίες τυχαίων αριθμών, τότε η συμμεταβλητότητα

$Cov(P_{1i}, P_{2i})=0$ . Για να μειωθεί η διασπορά της εκτίμησης του  $e$  πρέπει να αυξηθεί είτε το πλήθος προσομοιώσεων, είτε η συμμεταβλητότητα. Η πρώτη αύξηση έχει υπολογιστικό κόστος. Για τη δεύτερη, θα πρέπει τα  $P_{1i}$  και  $P_{2i}$  να έχουν θετική συσχέτιση. Οι τυχαίοι αριθμοί που παράγονται κατά την προσομοίωση επηρεάζουν ως ένα βαθμό και την εκτίμηση που προκύπτει απ' αυτήν. Εν τούτοις δύο προσομοιώσεις χρησιμοποιώντας τον ίδιο αλγόριθμο και την ίδια ακολουθία τυχαίων αριθμών δίνουν ακριβώς ίδια αποτελέσματα· έχουν επομένως συσχέτιση ίση με 1 και μέγιστη δυνατή συμμεταβλητότητα. Η απλή αυτή παρατήρηση δικαιολογεί την αποτελεσματικότητα της τεχνικής CRN για την σύγκριση "παρόμοιων" αλγορίθμων. Αν και δεν υπάρχει αυστηρή απόδειξη για την αποτελεσματικότητά της, η ευρωστία της μεθόδου στην προσομοίωση αναμονητικών συστημάτων έχει εξακριβωθεί πειραματικά [41].

Στο συγκεκριμένο πρόβλημα της γραμμής παραγωγής, για κάθε μηχανή παράγονται δύο ακολουθίες τυχαίων αριθμών: μία για τους χρόνους ζωής και μία για τους χρόνους επισκευής. Οι ακολουθίες αυτές είναι κοινές και για τα δύο μοντέλα, παράγονται στην αρχή της εκτέλεσης της προσομοίωσης και φυλάσσονται στη μνήμη του υπολογιστή. Όταν εξαντληθούν, ο αλγόριθμος τους χρησιμοποιεί πάλι από την αρχή κ.ό.κ.

Ως μέτρα σύγκρισης των μοντέλων θεωρούμε την ταχύτητα εκτέλεσης μίας προσομοίωσης και το σφάλμα σε σχέση με τον τ-τ αλγόριθμο,

$$CI = \frac{(\text{CPU χρόνος του } \tau\text{-}\tau)}{(\text{CPU χρόνος του } \delta\text{-}\gamma)},$$

$$ERR = \frac{(\text{εκτίμηση με το } \delta-\gamma) - (\text{εκτίμηση με το } \tau-\tau)}{(\text{εκτίμηση με το } \tau-\tau)} \cdot 100\% .$$

Το φαινόμενο του αποκλεισμού πρέπει επίσης να διασαφηνιστεί. Στις εργασίες [9], [10] εξετάστηκαν συστήματα χωρίς ενδιάμεσες αποθήκες στα οποία όταν μία μηχανή παθαίνει βλάβη, όλο το τμήμα της γραμμής στα ανάντη αποκλείεται το τμήμα στα κατάντη δεν τροφοδοτείται. Επομένως η λειτουργία του συστήματος διακόπτεται ακαριαία. Στα συστήματα τα οποία εξετάζονται εδώ, οι μηχανές έχουν χώρο για ένα κομμάτι και επομένως δεν συμβαίνουν τόσο συχνές διακοπές στην παραγωγή τους. Ορίζουμε τη χωρητικότητα  $SC_i$  του θεμελιώδους τμήματος  $S_i$ :  $SC_i = BC_i + 1$ . Όταν η στάθμη του τμήματος ισούται με  $BC_i$  και η μηχανή  $M_i$  τελειώνει την επεξεργασία κάποιου κομματιού, τότε δεν μπορεί να το προωθήσει στα κατάντη και μένει αποκλεισμένη. Αυτή η παραδοχή ανταποκρίνεται στα συνήθη συστήματα παραγωγής και είναι σύμφωνη με τον ορισμό του φαινομένου χώρος\_γεμίζει όπως προτείνεται στην εργασία [42].

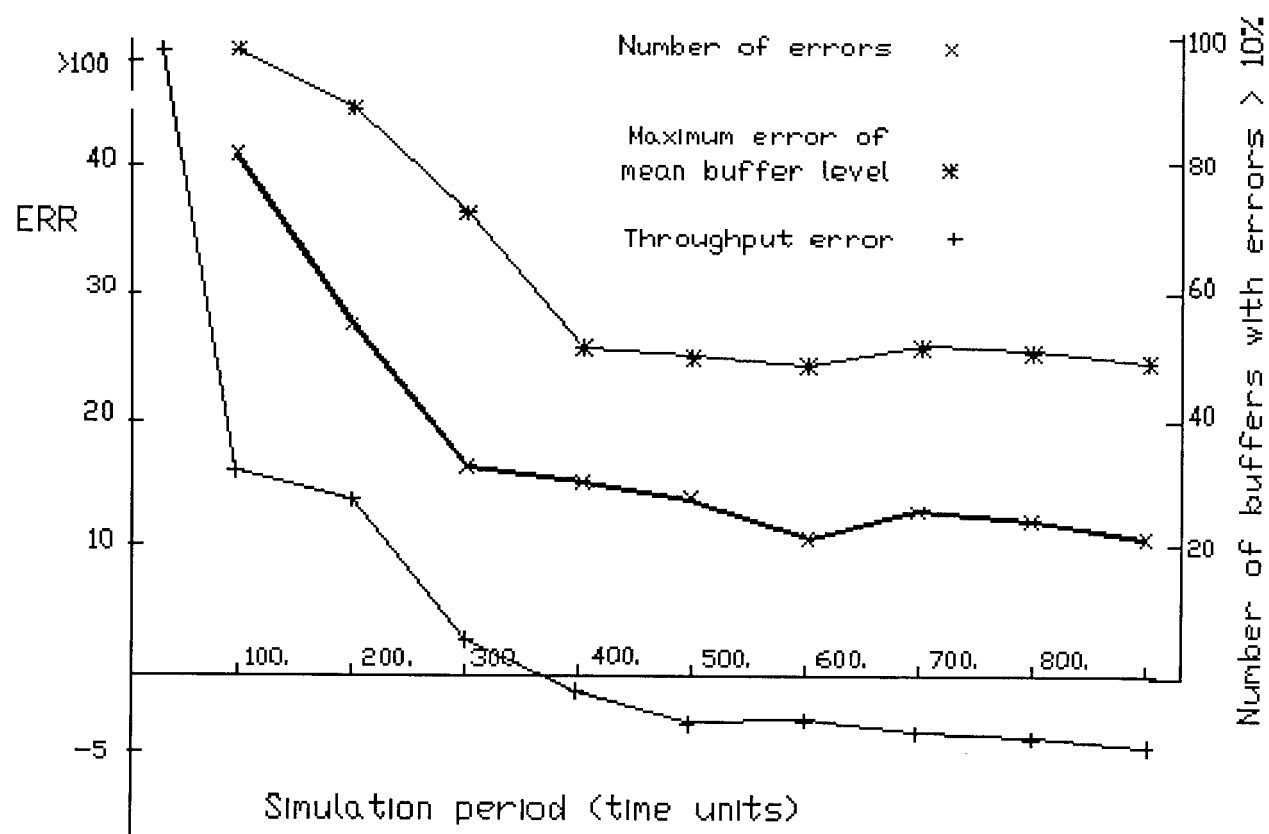
Για τη σύγκριση των μοντέλων χρησιμοποιούμε δύο γραμμές παραγωγής. Στη γραμμή A οι πρώτες πέντε μηχανές έχουν ονομαστικούς ρυθμούς παραγωγής  $NR_1=5$ ,  $NR_2=4$ ,  $NR_3=6$ ,  $NR_4=7$ ,  $NR_5=8$ , ρυθμούς βλαβών και επισκευών αντίστοιχα  $p_i=0.05$  και  $r_i=0.5$  αντιστοίχως. Η έκτη μηχανή είναι όμοια με την  $M_1$ , η έβδομη μηχανή όμοια με την  $M_2$  κ.ο.κ. Η γραμμή συμπληρώνεται με την περιοδική σύνδεση συστοιχιών των πέντε μηχανών με ενδιάμεσους χώρους εναποθήκευσης. Η γραμμή B αποτελείται πάλι από συστοιχίες των πέντε μηχανών η κάθε μία, με ενδιάμεσες αποθήκες και τις ακόλουθες παραμέτρους

$NR_1=10$ ,  $NR_2=8$ ,  $NR_3=12$ ,  $NR_4=15$ ,  $NR_5=16$ ,  $p_i=0.1$  και  $r_i=1$ .

Μελετάμε πρώτα τη μεταβατική κατάσταση. Υποθέτουμε ότι αρχικά οι χώροι είναι άδειοι και η πρώτη μηχανή αρχίζει να τροφοδοτεί το σύστημα. Σύμφωνα με το μοντέλο συνεχούς ροής [22] ωστόσο, ο χρόνος που απαιτείται ώστε μία μηχανή να παράγει ποσότητα προϊόντος  $\Delta q$  τείνει στο 0, καθώς  $\Delta q \rightarrow 0$ . Επομένως, στην αρχή της λειτουργίας του συστήματος όλες οι μηχανές λειτουργούν, ενώ στο αντίστοιχο διακεκριμένο σύστημα παραμένουν αδρανείς (εκτός από την πρώτη) για κάποιο χρονικό διάστημα μέχρις ότου αρχίσουν να τροφοδοτούνται από τα ανάντη.

Το γεγονός αυτό συνεπάγεται ότι στο συνεχές σύστημα οι βλάβες των μηχανών θα συμβούν νωρίτερα όπως επίσης και ένα πλήθος γεγονότων στις αποθήκες σύμφωνα με τους κανόνες μετάδοσης των διαταραχών. Αναμένεται επομένως ότι ο αντίστοιχος αλγόριθμος θα δίνει εσφαλμένες εκτιμήσεις για τις μέσες στάθμες των αποθηκών και το ρυθμό παραγωγής της γραμμής.

Μελετήθηκε το σύστημα A με  $N=100$  μηχανές και χωρητικότητες  $SC_i=3$ . Το προτεινόμενο μοντέλο δ-γ δεν είχε σφάλματα, αφού είναι πλήρως συμβατό με το μοντέλο τ-τ (για κοινή είσοδο  $\xi$  παρουσιάζει ακριβώς την ίδια απόκριση). Όσον αφορά την ταχύτητα εκτέλεσης, κατά μέσον όρο 5.39 φορές ταχύτερο. Το μοντέλο συνεχούς ροής είχε  $CI=7.82$  αλλά παρουσίασε σοβαρές ανακρίβειες, όπως φαίνεται στο Σχ. 7. Το μεγαλύτερο μειονέκτημα είναι τα σφάλματα στις μέσες στάθμες αποθηκών, ενώ το σφάλμα για το ρυθμό παραγωγής πέφτει γρήγορα στο 5%.



Σχήμα 7. Σφάλματα του αλγορίθμου συνεχούς ροής στη μεταβατική περίοδο.

Γενικά, γραμμές με μικρές χωρητικότητες αποθηκών έχουν συντομότερες μεταβατικές περιόδους. Εν τούτοις όμως, τα σφάλματα μόνιμης κατάστασης του μοντέλου συνεχούς ροής είναι πολύ μεγάλα όπως θα δούμε στη συνέχεια.

Στη συνέχεια μελετώνται γραμμές στη μόνιμη κατάσταση λειτουργίας. Για το σύστημα B με  $N=40$  μηχανές, υποθέτουμε ότι η συνολική παραγωγή είναι 10.000 κομμάτια και οι αποθήκες είναι στην αρχή άδειες. Για μικρές χωρητικότητες ( $SC_i < 4$ ) το μοντέλο υπερέχει σαφώς των άλλων δύο λόγω της ακρίβειας, και επειδή η σχετική του ταχύτητα CI είναι περίπου ίδια με αυτή του προσεγγιστικού. Το τελευταίο (για  $SC_i > 6$ ) είναι ακριβές στον υπολογισμό του μέσου ρυθμού παραγωγής (βλέπε πίνακα 1), ενώ δεν είναι πάντοτε αξιόπιστο για την εκτίμηση των μέσων σταθμών των αποθηκών.

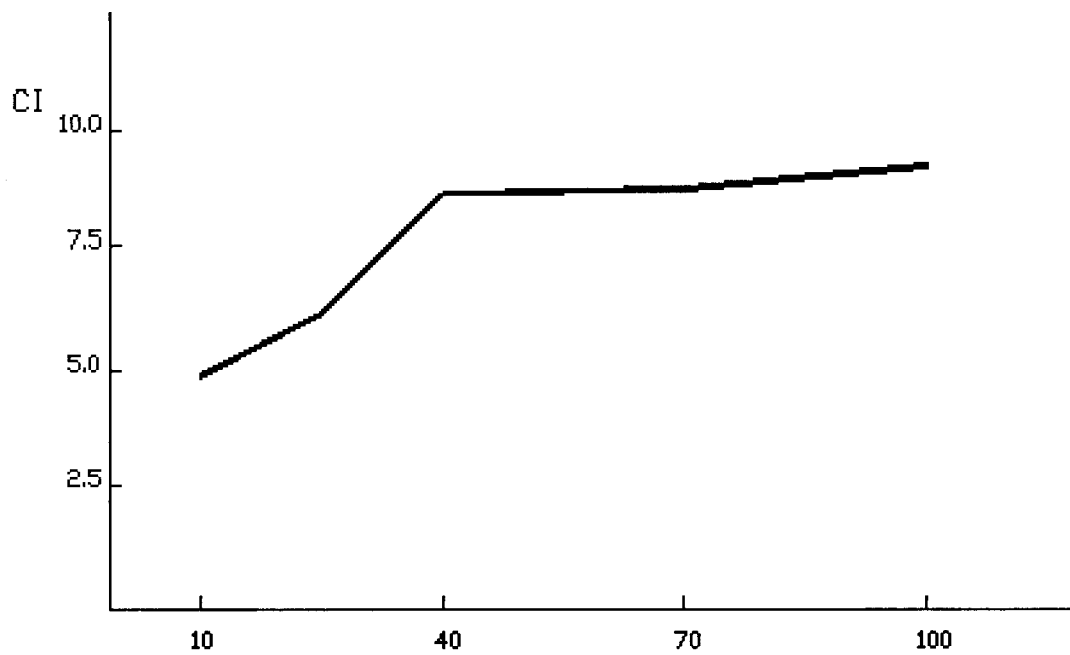
ΠΙΝΑΚΑΣ 1. Σχετικές ταχύτητες και σφάλματα εκτίμησης ρυθμών των μοντέλων διακεκριμένων γεγονότων για διάφορες χωρητικότητες του συστήματος B.

ΧΩΡΗΤΙΚΟΤΗΤΑ $SC_i$	ΑΚΡΙΒΕΣ ΜΟΝΤΕΛΟ $\delta$ - $\gamma$		ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΤΙΚΟ $\delta$ - $\gamma$	
	CI	ERR %	CI	ERR %
1	2.650	0.	2.686	-60.686
2	3.492	0.	4.744	-11.700
3	4.407	0.	6.310	-6.818
4	5.016	0.	7.308	-3.806
5	5.673	0.	8.244	-3.378
6	6.186	0.	8.697	2.207
11	8.402	0.	11.426	-0.622

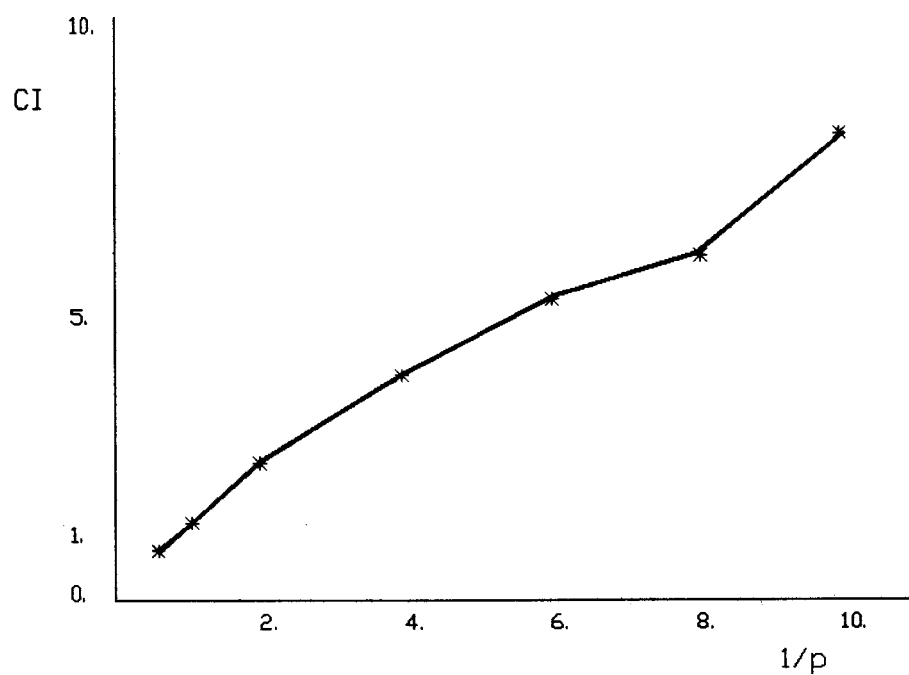
Το επόμενο Σχ. 8, περιγράφει τη συμπεριφορά του αλγορίθμου σε σχέση με τον τ-τ όταν αυξάνεται το μέγεθος του συστήματος. Για μικρές ή μεσαίες γραμμές ( $N < 40$ ) ο δείκτης CI αυξάνεται με το N, ενώ σε μεγαλύτερα συστήματα η σχετική ταχύτητα του αλγορίθμου είναι περίπου σταθερή. Για το σύστημα A και με  $N=100$  μηχανές και  $SC_i=11$ , ο προτεινόμενος αλγόριθμος είχε σχετική ταχύτητα  $CI=9.1$ .

Η τελευταία σειρά πειραμάτων αφορά τη διερεύνηση της σχέσης της ταχύτητας του αλγορίθμου με την αξιοπιστία του συστήματος που εξετάζεται. Μικροί ρυθμοί βλαβών στις μηχανές συνεπάγονται μεγάλη αξιοπιστία και μικρό αριθμό γεγονότων κατά την προσομοίωση. Οι μηχανές παθαίνουν βλάβες και επισκευάζονται σε αραιές χρονικές στιγμές. Επιπλέον, επειδή τα φαινόμενα τα οποία σχετίζονται με τη διαθεσιμότητα των αποθηκών σε κομμάτια ή ελεύθερο χώρο εξαρτώνται και από τη συχνότητα των βλαβών στις γειτονικές μηχανές, ο αριθμός και αυτών των μακροσκοπικών φαινομένων θα είναι μικρός. Αντιθέτως, μεγάλοι ρυθμοί βλαβών επιβαρύνουν τον υπολογιστή λόγω των εξισώσεων (2.1)-(2.6) οι οποίες υπολογίζονται κάθε φορά που συμβαίνει κάποιο γεγονός. Το Σχ. 9 δείχνει τα αντίστοιχα αποτελέσματα για το σύστημα A με  $N=40$  μηχανές,  $SC_i=11$ ,  $r_i=1$  και διάφορες τιμές των  $p_i$ . Για συστήματα με δυνατότητα επισκευής των βλαβών, όπως αυτά που μελετάμε, η αξιοπιστία μίας μηχανής ορίζεται από την ποσότητα  $r_i/(r_i+p_i)$  η οποία εκφράζει το ποσοστό του χρόνου που η μηχανή λειτουργεί. Καθώς η ποσότητα αυτή μικραίνει για κάθε μηχανή του συστήματος, μειώνεται και η σχετική ταχύτητα του αλγορίθμου ως προς τον τ-τ. Όταν  $p_i=r_i=1$  οι αντίστοιχοι





Σχήμα 8. Σχέση του CI με το μήκος της γραμμής B, με  $SC_i=11.N$



Σχήμα 9. Επίδραση του ρυθμού βλαβών στην σχετική ταχύτητα του αλγορίθμου για τη γραμμή B με 40 μηχανές και  $SC_i=11$ .

CPU χρόνοι είναι περίπου ίσοι. Ωστόσο, τα υπάρχοντα συστήματα έχουν σχετικά αξιόπιστες μηχανές· έτσι οι βλάβες δεν είναι συχνό φαινόμενο και επομένως αυτά μπορούν να μελετηθούν αποτελεσματικά χρησιμοποιώντας το ακριβές μοντέλο διακεκριμένων γεγονότων.

## **B. ΚΑΘΟΡΙΣΜΟΣ ΑΡΧΙΚΩΝ ΣΤΑΘΜΩΝ ΓΙΑ ΤΗ ΜΕΛΕΤΗ ΜΟΝΙΜΗΣ ΚΑΤΑΣΤΑΣΗΣ**

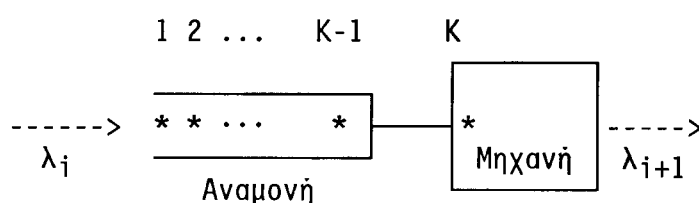
Στο προηγούμενο εδάφιο αναφέρθηκε ότι όταν ένα άδειο σύστημα αρχίζει να λειτουργεί, χρειάζεται μία μεταβατική περίοδο ώστε να φτάσει στη μόνιμη κατάσταση. Όταν ενδιαφέρει η μελέτη αυτής της κατάστασης, τότε αν οι αρχικές τιμές των σταθμών των αποθηκών είναι κοντά στις μέσες τιμές τους αποφεύγεται όλο υπολογιστικό βάρος που αντιστοιχεί στη μεταβατική περίοδο. Επίσης επιτυγχάνεται μεγαλύτερη ακρίβεια αφού στις εκτιμήσεις δεν υπεισέρχονται τα μεταβατικά φαινόμενα. Θα αναπτύξουμε στη συνέχεια μία απλή μέθοδο διάσπασης της γραμμής σε στοιχειώδη τμήματα  $(M_i - B_i - M_{i+1})$ , καθένα από τα οποία θεωρείται ως σύστημα αναμονής  $M|M|1|BC_i+2$ , για την εκτίμηση των μέσων σταθμών των αποθηκών. Η μέθοδος βασίζεται στις εξής παραδοχές:

- α. Ολόκληρο το τμήμα της γραμμής στα ανάντη ή κατόντη κάποιας αποθήκης μπορεί να περιγραφεί χρησιμοποιώντας μία ισοδύναμη μηχανή.
- β. Κάθε μηχανή  $M_i$  (και ισοδύναμη μηχανή) ισοδυναμεί με έναν κόμβο εξυπηρέτησης που έχει εκθετικό χρόνο παραγωγής και μέσο ρυθμό  $e_i$  που δίνεται από την ακόλουθη σχέση [11]:

$$e_i = NR_i \frac{r_i}{r_i + p_i}.$$

Οι ρυθμοί  $NR_i$ ,  $p_i$ ,  $r_i$  είναι οι γνωστές παράμετροι της  $M_i$  και η σχέση αυτή εκφράζει την παραγωγικότητα της μηχανής, όταν αυτή δεν είναι ποτέ αδρανής (έχει άπειρη τροφοδοσία από τα ανάντη και αποθήκη άπειρης χωρητικότητας στα κατόντη).

Για την ανάλυση της γραμμής απαιτείται η μελέτη στοιχειωδών αναμονητικών συστημάτων  $M|M|1|K$  (Σχ. 10α), αποτελούμενων από έναν κόμβο εξυπηρέτησης και μία αποθήκη. Η συνολική χωρητικότητα του συστήματος είναι  $K$ .



Σχήμα 10α. Το αναμονητικό σύστημα  $M|M|1|K$ .

Οι αφίξεις και επεξεργασίες κομματιών στο σύστημα γίνονται τυχαία και χωρίς μνήμη με μέσους ρυθμούς  $\lambda_i$  και  $\lambda_{i+1}$  αντιστοίχως, δηλαδή:

πιθανότητα {αφίξη (ή επεξεργασία) ενός κομματιού στο διάστημα  $(t, t+\Delta t)$ }  
 $= \lambda_i \Delta t + o(\Delta t)$  (ή  $\lambda_{i+1} \Delta t + o(\Delta t)$ ),

$$\text{όπου } \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{o(\Delta t)}{\Delta t} = 0.$$

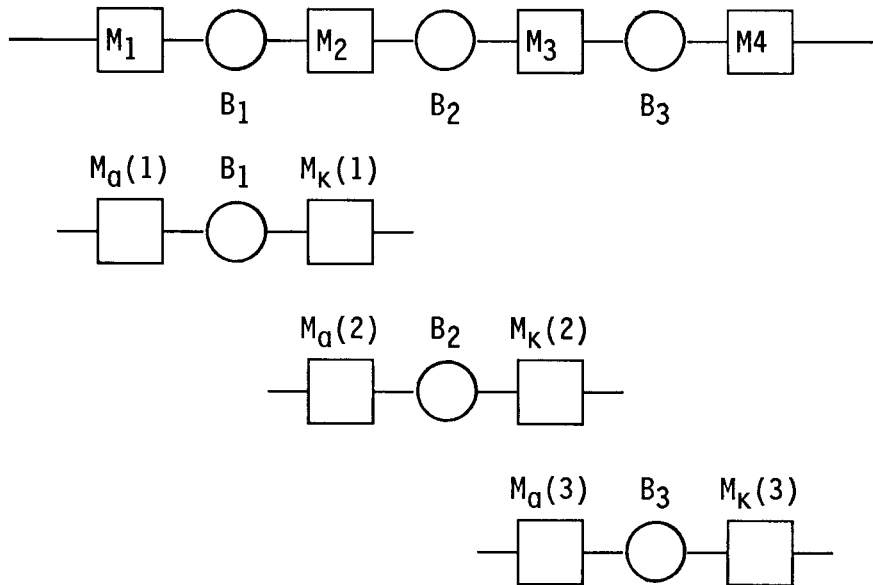
Η πιθανότητα δύο γεγονότα να συμβούν στο ίδιο διάστημα  $(t, t+\Delta t)$  είναι  $o(\Delta t)$ . Για το σύστημα αυτό οι πιθανότητες μόνιμης κατάστασης  $P_n$  είναι:

$P_n$  = πιθανότητα {στο σύστημα υπάρχουν  $n$  κομμάτια} ,

$$P_n = \begin{cases} \frac{1-\rho}{1-\rho^{K+1}} \rho^n, & \rho = \frac{\lambda_i}{\lambda_{i+1}} \neq 1 \\ \frac{1}{K+1}, & \rho = 1 \end{cases} \quad n=0,1,\dots,K \quad (2.57)$$

Στη συνέχεια θα περιγράψουμε τη μέθοδο διάσπασης του συστήματος δίνοντας ένα παράδειγμα. Θεωρούμε μία γραμμή παραγωγής με  $N=4$  μηχανές. Από την παραδοχή α προκύπτει ότι το σύστημα μπορεί να περιγραφεί από τα τρία ισοδύναμα συστήματα του σχήματος 10β. Σε κάθε χώρο  $B_i$  αντιστοιχεί το τμήμα της γραμμής προς τα ανάντη  $M_a(i)$  και το τμήμα προς τα κατόντη  $M_k(i)$ , τα οποία παριστάνονται με ισοδύναμες μηχανές. Παρόμοια μέθοδος έχει εφαρμοστεί [12], για την μελέτη γραμμών συνεχούς παραγωγής.

Κάθε ισοδύναμη μηχανή αφαιρεί ή προσθέτει κομμάτια στο χώρο στον οποίο αντιστοιχεί. Έτσι η  $M_a(i)$  προσθέτει κομμάτια στον  $B_i$  με μέσο ρυθμό  $\lambda_a(i)$  και η  $M_k(i)$  του αφαιρεί με μέσο ρυθμό  $\lambda_k(i)$ . Αν αντικαταστήσουμε



Σχήμα 10β. Διάσπαση της γραμμής (N=4) σε τρία ισοδύναμα τμήματα.

στις εξισώσεις (2.57) τους ρυθμούς κάθε ισοδύναμου συστήματος  $\lambda_i = \lambda_a(i)$ ,  $\lambda_{i+1} = \lambda_k(i)$  και  $K = BC_i + 2$ , παίρνουμε τις πιθανότητες  $P_n$  για κάθε χώρο  $B_i$ ,  $i=1, \dots, N-1$  και οι μέσες στάθμες υπολογίζονται από την

$$\bar{n} = \sum_{n=1}^K n \cdot P_n. \quad (2.58)$$

Στη συνέχεια δίνουμε μία απλή μέθοδο για τον υπολογισμό των παραμέτρων  $\lambda_a(i)$ . Κάθε ισοδύναμη μηχανή  $M_a(i)$ ,  $i=2, \dots, N$ , θεωρούμε ότι περιγράφεται από το τμήμα  $M_a(i-1) - B_{i-1} - M_i$ . Οι πιθανότητες μόνιμης του τμήματος υπολογίζονται από τις εξισώσεις (2.57) με  $\lambda_i = \lambda_a(i-1)$ ,  $\lambda_{i+1} = e_i$  και  $K = BC_{i-1} + 2$ , όπου  $e_i$  είναι η παραγωγικότητα της μηχανής  $M_i$ . Ο μέσος ρυθμός

παραγωγής της  $M_a(i)$  ισούται με το γινόμενο της παραγωγικότητας  $e_i$  επί την πιθανότητα  $1-A_{i-1}$  ο χώρος  $B_{i-1}$  να μην είναι άδειος:

$$\lambda_a(i) = e_i (1-A_{i-1}), \quad (2.59)$$

και  $\lambda_a(1)=e_1$ ,  $A_0=0$ . Κατ' ανάλογο τρόπο αρχίζοντας από το τέλος και προχωρώντας προς την αρχή της γραμμής μελετώνται τα τμήματα  $M_{i+1}-B_{i+1}-M_K(i+1)$  τα οποία περιγράφουν τις ισοδύναμες μηχανές  $M_K(i)$ . Ο μέσος ρυθμός της  $M_K(i)$  ισούται με το γινόμενο του  $e_{i+1}$  επί την πιθανότητα  $1-\Gamma_{i+1}$  ο χώρος  $B_{i+1}$  να μην είναι γεμάτος:

$$\lambda_K(i) = e_{i+1} (1-\Gamma_{i+1}), \quad (2.60)$$

όπου  $\lambda_K(N)=e_N$  και  $\Gamma_{N+1}=0$ .

Από πειράματα που έγιναν προέκυψε ότι η ακρίβεια της μεθόδου στην εκτίμηση των μέσων σταθμών των αποθηκών συνήθως κυμαίνεται στο 80-90%. Ωρισμένες φορές παρατηρήθηκαν σφάλματα της τάξης του 40%. Ωστόσο, ακόμη και αυτές οι αποκλίσεις δεν είναι μακριά από τη μόνιμη κατάσταση. Οι χρόνοι που απαιτούνται για τους υπολογισμούς (2.57)-(2.60) είναι πολύ μικροί σε σύγκριση με τους χρόνους προσομοίωσης· επομένως η μέθοδος επιταχύνει σημαντικά την εκτέλεση του προγράμματος. Παρατηρήθηκε επίσης ότι σε γραμμές στις οποίες οι γειτονικές μηχανές δεν είναι όμοιες, η εκτίμηση του μέσου ρυθμού παραγωγής ήταν αρκετά ακριβής (βλ. Πίνακα 2).

Οι μέσοι ρυθμοί  $E_i$  προκύπτουν από τις

$$E_i = \lambda_K(i) (1-P_{ni=0}) , \quad (2.61)$$

όπου η  $P_{ni=0}$  είναι η πιθανότητα το σύστημα  $M_a(i)-B_i-M_K(i)$  να είναι κενό.

ΠΙΝΑΚΑΣ 2: Γραμμή οκτώ μηχανών με $r_i=1$ , $p_i=3$ , $BC_i=10$			
NR <sub>i</sub>	% Σ Φ Α Λ Μ Α		
	Μ Ε Σ Ο Σ Ρ Υ Θ Μ Ο Σ	Μ Ε Σ Η Σ Τ Α Θ Μ Η $\bar{n}_i$	i
10	3.14	9.16	1
6	3.14	30.28	2
10	3.14	- 6.68	3
6	3.07	37.05	4
10	3.07	- 0.99	5
6	3.14	34.79	6
10	3.14	21.57	7
6	3.14		

## 2.8 ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάστηκε ένας ακριβής υβριδικός αλγόριθμος για την ανάλυση σειριακών συστημάτων παραγωγής. Οι παραδοχές που έγιναν

είναι:

οι μηχανές παράγουν διακεκριμένα κομμάτια με αιτιοκρατικούς ρυθμούς,  
οι μηχανές παθαίνουν βλάβες και επισκευάζονται τυχαία και  
οι ενδιάμεσοι χώροι εναποθήκευσης είναι πεπερασμένοι.

Στη συνέχεια δόθηκε το γενικό μαθηματικό μοντέλο διακεκριμένων γεγονότων του συστήματος. Ακολούθησε ο χωρισμός του διανύσματος κατάστασης σε δύο μέρη για τις μικροσκοπικές και μακροσκοπικές μεταβλητές και αναπτύχθηκαν οι ακριβείς τύποι των εξισώσεων του μοντέλου. Ο αλγόριθμος βασίζεται στο συνδυασμό προσομοίωσης και μαθηματικής ανάλυσης για την περιγραφή της εξέλιξης των μακροσκοπικών και μικροσκοπικών μεταβλητών αντιστοίχως.

Σε σύγκριση με έναν αλγόριθμο τεμάχιο-προς-τεμάχιο προσομοίωσης και έναν αλγόριθμο διακεκριμένων γεγονότων για συστήματα των οποίων η παραγωγή είναι συνεχής, η προτεινόμενη μέθοδος συνδυάζει την ακρίβεια με την ταχύτητα. Έτσι, στις περισσότερες πρακτικές περιπτώσεις εμφανίζεται πολύ καλύτερη από αυτούς. Το μοντέλο μπορεί να ενσωματωθεί σε αλγορίθμους οι οποίοι χρησιμοποιούν προσομοίωση με σκοπό την βέλτιστη σχεδίαση γραμμών παραγωγής.



### III. ΔΙΚΤΥΑ ΠΑΡΑΓΩΓΗΣ

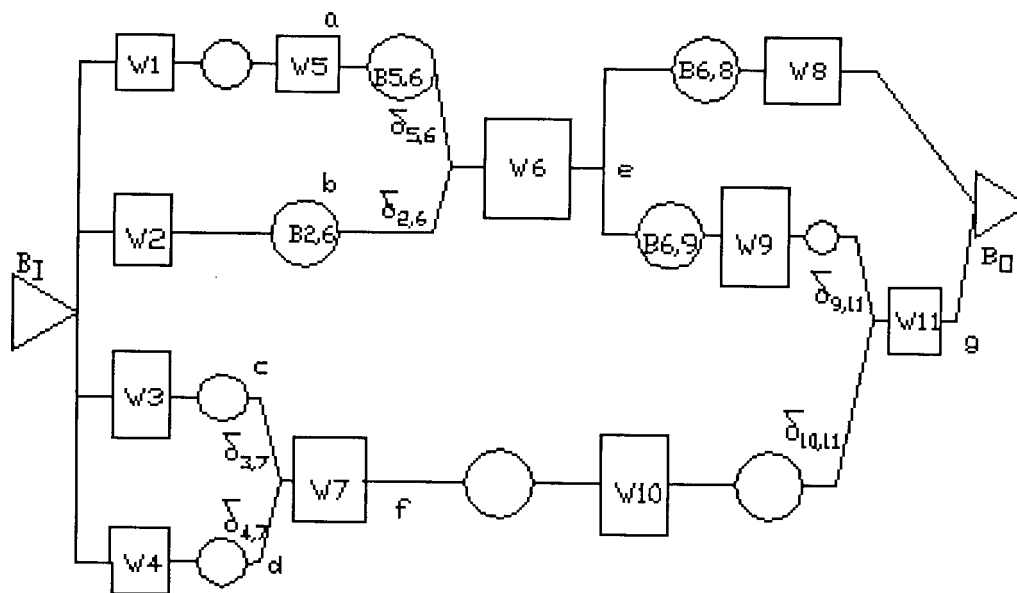
#### 3.1 ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ

Στο κεφάλαιο αυτό εξετάζονται συστήματα σύνθετης γεωμετρίας, στα οποία διάφορα είδη κομματιών υπόκεινται σε μιὰ σειρά κατεργασιών. Στην κατηγορία αυτή ανήκουν τα δίκτυα συναρμολόγησης (Assembly), και τα FMS.

Θεωρούμε το σύστημα παραγωγής το οποίο περιγράφεται από το δίκτυο του Σχ. 11. Αποτελείται από ένδεκα κόμβους οι οποίοι συνδέονται με κλάδους. Οι κόμβοι συμβολίζουν τους σταθμούς παραγωγής  $W_1, W_2, \dots, W_{11}$ . Σε κάθε κλάδο υπάρχει μιὰ αποθήκη πεπερασμένης χωρητικότητας. Έτσι ο χώρος  $B_{3,7}$  δέχεται κομμάτια από το σταθμό  $W_3$  και τροφοδοτεί τον  $W_7$ . Οι σταθμοί  $W_3$  και  $W_7$  λέγονται γειτονικοί.

Οι πρώτες ύλες εισέρχονται στο δίκτυο από ένα χώρο  $B_I$  με άπειρη ικανότητα τροφοδοσίας και αφού υποστούν μιὰ σειρά από κατεργασίες, εισέχονται τελικά στον χώρο  $B_O$  ο οποίος έχει άπειρη χωρητικότητα. Ένας σταθμός  $W_j$  αποτελείται από παράλληλες μηχανές  $M_{i,j}$ , οι οποίες μπορεί να έχουν διαφορετικούς ρυθμούς παραγωγής, βλαβών και επισκευών. Κάθε σταθμός επιτελεί ένα συγκεκριμένο είδος κατεργασίας.

Στο σύστημα υπάρχουν διάφορα είδη κομματιών  $a, b, \dots, f, g$ . Τα  $e$  και  $g$  είναι τα τελικά προϊόντα τα οποία παράγονται. Κάποιο τελικό προϊόν μπορεί να αποτελείται από δύο ή περισσότερα είδη κομματιών, των οποίων η



Σχήμα 11. Δίκτυο παραγωγής με 11 σταθμούς.

συναρμολόγηση γίνεται σε κατάλληλους σταθμούς. Για παράδειγμα οι σταθμοί  $W_6$ ,  $W_7$  και  $W_{11}$  επεξεργάζονται ταυτόχρονα πολλά είδη κομματιών παράγοντας νέα σύνθετα κομμάτια. Ο αριθμός κομματιών ενός είδους τα οποία απαιτούνται για τη συναρμολόγηση ενός σύνθετου κομματιού είναι σταθερός και ονομάζεται **συντελεστής συναρμολόγησης**. Για την παραγωγή κάποιου τελικού προϊόντος απαιτείται ένα σταθερό σύνολο κομματιών τα οποία υφίστανται κατεργασίες και συναρμολογούνται ακολουθώντας μία

καθορισμένη διαδρομή στο δίκτυο. Έτσι για την παραγωγή μίας μονάδας προϊόντος τύπου  $e$  απαιτούνται  $\delta_{2,6}$  κομμάτια από τον  $W_2$  τα οποία συναρμολογούνται στον  $W_6$ . Το τελικό προϊόν  $e$  αποτελείται από τα κομμάτια που πηγαίνουν από τον  $W_6$  στον  $W_8$ . Ένας σταθμός μπορεί να είναι κέντρο συναρμολόγησης ακόμη και αν επεξεργάζεται ένα μόνο είδος. Για παράδειγμα αν είχαμε  $\delta_{6,8} > 1$ , τότε ο  $W_8$  θα ήταν τέτοιος σταθμός. Στο Σχ. 11 η ύπαρξη των συντελεστών  $\delta_{j,k}$  σημαίνει ότι οι σταθμοί προς τα κατάντη είναι κέντρα συναρμολόγησης. Ομοίως με τον  $W_6$ , στους  $W_7$  και  $W_{11}$  συναρμολογούνται κομμάτια τα οποία προέρχονται αντιστοίχως από τα ζεύγη των σταθμών  $(W_3, W_4)$  και  $(W_9, W_{10})$ .

Στη συνέχεια περιγράφουμε την κυκλοφορία των κομματιών μέσα στο δίκτυο. Όταν κάποιο κομμάτι μπορεί να κατευθυνθεί σε περισσότερα του ενός μονοπάτια, τότε επιλέγεται εκείνο στο οποίο έχει μεσολαβήσει το μεγαλύτερο διάστημα από την τελευταία επίσκεψη κομματιού. Αυτόν τον κανόνα θα τον αναφέρουμε με το όνομα **ΜΚΠΦ** (Μεγαλύτερη Καθυστέρηση Πρώτη Φόρτωση, ή Εκφόρτωση κομματιού), και, όπως θα δούμε, από αυτόν προκύπτουν διάφορα πρωτόκολλα κυκλοφορίας των κομματιών. Όλα τα είδη πρώτων υλών διατίθενται από τον  $B_1$  και ο  $B_0$  στην έξοδο μπορεί να δεχτεί όλα τα είδη προϊόντων. Στο τέλος μιας περιόδου παραγωγής το πλήθος προϊόντων τύπου  $g$  στον  $B_0$  ισούται με την συνολική παραγωγή των μηχανών του  $W_{11}$  κατά την ίδια περίοδο. Η διαδρομή ενός είδους κομματιών μπορεί να απεικονίζεται από ένα δένδρο μάλλον, παρά από ένα απλό μονοπάτι. Αυτό επιτυγχάνεται συνδέοντας κάποιο σταθμό με περισσότερους του ενός χώρους εναποθήκευσης στα κατάντη. Τέτοιοι σταθμοί λέγονται **σταθμοί (ή κέντρα) διανομής** και στο δίκτυο του Σχ. 11 ο  $W_6$  είναι ο μοναδικός αυτού του

τύπου. Έστω ότι κάποιο κομμάτι από το σταθμό  $W_6$  πηγαίνει στον χώρο  $B_{6,8}$ . Το επόμενο κομμάτι που θα παραχθεί από μία μηχανή  $M_{i,6}$  του σταθμού θα κατευθυνθεί προς τον  $B_{6,9}$ . Αν αυτός ο χώρος είναι γεμάτος τότε θα συμβεί το εξής: αν ο άλλος χώρος  $B_{6,8}$  δεν είναι γεμάτος, τότε θα δεχθεί το κομμάτι, διαφορετικά η μηχανή  $M_{i,6}$  αποκλείεται. Η κατανομή κομματιών στις αποθήκες γίνεται επομένως σύμφωνα με κυκλικό πρωτόκολλο. Το δεύτερο πρωτόκολλο αφορά την κατανομή κομματιών ανάμεσα στις μηχανές μιας συστοιχίας. Όταν κάποιο κομμάτι είναι διαθέσιμο στην είσοδο ενός σταθμού και περισσότερες της μίας μηχανές του είναι έτοιμες να το δεχθούν, τότε αυτό θα οδηγηθεί στη μηχανή η οποία είχε μείνει περισσότερο χρόνο αδρανής περιμένοντας να τροφοδοτηθεί. Ανάλογα συμβαίνουν και στη δυαδική περίπτωση, όταν δηλαδή μερικές μηχανές μίας συστοιχίας είναι αποκλεισμένες και ελευθερώνεται μία θέση στα κατάντη.

Εκτός από δίκτυα με πρωτόκολλο κυκλοφορίας ΜΚΠΦ είναι δυνατόν να περιγραφούν και συστήματα παραγωγής στα οποία η ροή των κομματιών ελέγχεται από κάποιον υπολογιστή. Έστω για παράδειγμα ότι οι ρυθμοί εισόδου κομματιών στους χώρους  $B_{6,9}$  και  $B_{6,8}$  είναι 5 ο καθένας και αποφασίζεται να αλλάξουν σε 2 και 8 αντιστοίχως. Τότε μπορούμε να θεωρήσουμε ότι ο χώρος  $B_{6,8}$  έχει γεμίσει (ενώ αυτό ίσως να μη συμβαίνει στην πραγματικότητα) και επομένως συμφώνως προς το κυκλικό πρωτόκολλο θα αυξηθεί στιγμιαία η ροή κομματιών προς τον χώρο  $B_{6,9}$ . Για να διατηρηθεί αυτή η διαφορετική κατανομή στους ρυθμούς, μειώνουμε το συνολικό ρυθμό παραγωγής του σταθμού  $W_8$  στην τιμή 2. Έτσι, αφού ο χώρος  $B_{6,8}$  είναι γεμάτος, η ροή εισόδου σ' αυτόν γίνεται και αυτή ίση με 2. Κάνοντας τέτοιες μεταβολές στις παραμέτρους των μηχανών και αποθηκών είναι

δυνατόν να ελεγχθούν οι λειτουργίες και επομένως η παραγωγικότητα του συστήματος για κάθε προϊόν κατά τη διάρκεια μιας περιόδου λειτουργίας.

Συνοψίζοντας δίνουμε μία λίστα των βασικών παραδοχών:

1. Το δίκτυο παραγωγής επεξεργάζεται διάφορα είδη κομματιών και παριστάνεται με έναν ακυκλικό γράφο. Κάθε είδος ακολουθεί ένα μονοπάτι από ένα σύνολο δυνατών διαδρομών. Συναρμολογήσεις ή διανομές κομματιών είναι λειτουργίες οι οποίες γίνονται κατά την διάρκεια, ή μετά το τέλος της επεξεργασίας των κομματιών από κατάλληλους σταθμούς παραγωγής αντιστοίχως.
2. Σε κάθε σταθμό μπορεί να υπάρχει ένα πλήθος μηχανών, με διαφορετικούς εν γένει αλλά αιτιοκρατικούς ρυθμούς παραγωγής, οι οποίες λειτουργούν εν παραλλήλω κάνοντας το ίδιο είδος επεξεργασίας. Μία μηχανή μπορεί να πάθει βλάβη κατά τη διάρκεια της επεξεργασίας ενός κομματιού. Το πλήθος των κομματιών που παράγονται μέχρι να συμβεί η βλάβη ακολουθεί γεωμετρική κατανομή ενώ οι χρόνοι επισκευής ακολουθούν εκθετική κατανομή.
3. Το πρωτόκολλο κυκλοφορίας είναι το ΜΚΠΦ.
4. Μεταξύ γειτονικών σταθμών υπάρχει ένας χώρος πεπερασμένης χωρητικότητας στον οποίο αποθηκεύεται ένα μόνο είδος κομματιών. Υπάρχει ένας κόμβος  $B_I$  άπειρης ικανότητας τροφοδοσίας και ένας κόμβος  $B_0$  άπειρης χωρητικότητας έτοιμων προϊόντων. Οι κόμβοι  $B_I$  και  $B_0$  είναι οι εξωτερικοί κόμβοι του δικτύου. Έτσι οι μηχανές οι οποίες τροφοδοτούνται από τον  $B_I$  ποτέ δεν μένουν αποστερημένες, ενώ εκείνες που τροφοδοτούν τον  $B_0$  ποτέ δεν αποκλείονται.

Όπως και στην παράγραφο 1 του προηγούμενου κεφαλαίου, για την παραδοχή 2 μπορούμε να θεωρήσουμε γενικότερες κατανομές χρόνων ζωής και επισκευής, και πιθανόν, βλάβες οι οποίες εξαρτώνται και από τους χρόνους κατά τους οποίους οι μηχανές μένουν αδρανείς.

Οι κλασσικοί αλγόριθμοι προσομοίωσης δικτύων παραγωγής βασίζονται, όπως και στην περίπτωση των γραμμών παραγωγής, στην παρατήρηση των στοιχειωδών γεγονότων τα οποία συμβαίνουν στο σύστημα, δηλαδή την είσοδο κάποιου κομματιού σε μία μηχανή ή μία αποθήκη. Στα δίκτυα παραγωγής όμως συμβαίνουν δύο λειτουργίες επιπλέον: η συναρμολόγηση και η διανομή κομματιών. Εξ αιτίας αυτών το υπολογιστικό κόστος εκτέλεσης των αλγορίθμων αυξάνεται.

Στο μοντέλο το οποίο θα αναπτύξουμε, μελετώνται όπως και στο μοντέλο της γραμμής τα εξής διακεκριμένα γεγονότα:

- α. μηχανή\_χαλάει,
- β. μηχανή\_επισκευάζεται,
- γ. χώρος\_αδειάζει,
- δ. χώρος\_γεμίζει,
- ε. χώρος\_ελευθερώνεται,
- ζ. χώρος\_τροφοδοτείται.

Κάθε γεγονός αντιστοιχεί σε μία μεταβολή της κατάστασης κάποιας συνιστώσας του συστήματος. Μία μηχανή μπορεί να είναι υπό επισκευή ή

λειτουργική αφού συμβούν τα γεγονότα  $\alpha$  ή  $\beta$  αντιστοίχως. Ένας χώρος εναποθήκευσης είναι γεμάτος, άδειος ή έχει ενδιάμεση στάθμη αμέσως μετά τα γεγονότα  $\gamma$ ,  $\delta$  ή το ζευγάρι  $(\epsilon, \zeta)$  αντιστοίχως. Όταν ένα γεγονός συμβεί σε κάποιο στοιχείο του συστήματος τότε, μπορεί μετά την πάροδο κάποιων μεταβατικών χρόνων να προκαλέσει την εκδήλωση νέων γεγονότων στα ανάντη ή τα κατόντη τμήματα του δικτύου.

Στην περίπτωση των γραμμών, αυτή η μετάδοση των διαταραχών γίνεται κατά μήκος μίας γραμμής. Στην εργασία [22] έγινε η παραδοχή ότι οι μεταβατικοί χρόνοι είναι μηδέν, σαν αποτέλεσμα της υπόθεσης ότι η παραγωγή είναι συνεχής. Έτσι για παράδειγμα όταν κάποια μηχανή  $M_i$  επισκευάζεται και ο ανάντη χώρος  $B_{i-1}$  είναι γεμάτος (ή ισοδύναμα η  $M_{i-1}$  είναι αποκλεισμένη), τότε η μηχανή θα αρχίσει αμέσως να παράγει μία απειροστή ποσότητα προϊόντος αφαιρώντας την από τον  $B_{i-1}$ . Επομένως, θα συμβεί ταυτόχρονα το γεγονός χώρος\_ελευθερώνεται και εάν οι  $B_{i-2}$ ,  $B_{i-3}$ , ... είναι γεμάτοι το γεγονός αυτό μεταδίδεται στα ανάντη μέχρις ότου βρεθεί κάποιος χώρος ενδιάμεσης στάθμης. Το δυαδικό γεγονός θα συμβεί στον κατόντη χώρο  $B_{i+1}$  αν αυτός είναι άδειος εξ αιτίας της βλάβης της  $M_i$ . Μία απειροστή ποσότητα προϊόντος προερχόμενη από την  $M_i$  εισέρχεται στον  $B_{i+1}$  και αμέσως σημειώνεται το γεγονός χώρος\_τροφοδοτείται το οποίο μεταδίδεται στους  $B_{i+2}$ ,  $B_{i+3}$ , ... μέχρις ότου βρεθεί κάποιος χώρος ενδιάμεσης στάθμης. Επίσης, όταν κάποιος χώρος γεμίσει (αδειάσει), τότε γεμίζουν (αδειάζουν) διαδοχικά και οι χώροι στα ανάντη (κατόντη) μέχρις ότου βρεθεί χώρος ενδιάμεσης στάθμης. Στην περίπτωση αυτή κάποια μηχανή δε μπορεί να είναι ταυτοχρόνως αποστερημένη και αποκλεισμένη. Αυτή είναι βασική ιδιότητα των συστημάτων

συνεχούς παραγωγής. Στο μοντέλο της [22] η μετάδοση των διαταραχών σημειώνεται ακαριαία. Η απόδειξη αυτής της ιδιότητας βασίζεται στην παρατήρηση ότι το συνεχές σύστημα είναι το όριο μίας ακολουθίας διακριτών συστημάτων όταν η ποσότητα που αντιστοιχεί σε μία μονάδα προϊόντος τείνει στο 0 (βλ. Παράρτημα Α). Έτσι όταν γεμίσει (αδειάσει) ένας χώρος  $B_i$ , τότε αν ο ανάντη  $B_{i-1}$  (κατάντη  $B_{i+1}$ ) χώρος είναι άδειος (γεμάτος) το γεγονός χώρος\_τροφοδοτείται (χώρος\_ελευθερώνεται) θα συμβεί ταυτόχρονα.

Από τα ανωτέρω φαίνεται ότι τα γεγονότα  $\varepsilon, \zeta$  είναι πάντοτε συνέπειες των  $\alpha$ - $\delta$ . Γι' αυτό, στο μοντέλο της γραμμής συνεχούς παραγωγής μόνο τα τελευταία θεωρούνται ως διακεκριμένα γεγονότα. Έτσι, όταν κάποιο από τα  $\alpha$ - $\delta$  συμβεί, ελέγχονται διαδοχικά οι χώροι εναποθήκευσης προς τα ανάντη ή κατάντη και εκτελούνται οι κατάλληλες μεταβολές καταστάσεων, μεταξύ των οποίων είναι εκείνες τις οποίες συνεπάγονται τα  $\varepsilon$  και  $\zeta$ .

Η παραδοχή συνεχούς παραγωγής προϊόντων θα γίνει και στη μελέτη των δικτύων παραγωγής. Επειδή η γεωμετρία των συστημάτων είναι γενική, οι διαταραχές που προκαλούνται από τα γεγονότα διασπείρονται προς διάφορες κατευθύνσεις μέσω διακλαδώσεων μάλλον, παρά κατά μήκος μιας γραμμής. Αυτή είναι η βασική διαφορά των δικτύων από τις γραμμές παραγωγής. Για να αποφύγουμε την χρησιμοποίηση συνδυαστικών τεχνικών αναζήτησης για τον εντοπισμό όλων των ταυτόχρονων γεγονότων προτείνουμε μία απλούστερη διαδικασία η οποία παρακολουθεί τη γέννηση αυτών των γεγονότων στο χώρο του δικτύου βήμα-προς-βήμα. Μετά τον καθορισμό του επόμενου γεγονότος το οποίο θα συμβεί στο σύστημα, εκτελείται η αντίστοιχη ρουτίνα και τα



ταυτόχρονα γεγονότα προγραμματίζονται σύμφωνα με τους κανόνες διάδοσης των διαταραχών. Στη συνέχεια κάθε ένα από τα γεγονότα αυτά εκτελείται διαδοχικά.

Η αποτελεσματικότητα της μεθόδου οφείλεται και εδώ στη χρησιμοποίηση της ανάλυσης για τον προγραμματισμό του επόμενου μακροσκοπικού γεγονότος και όχι στην παρατήρηση των μετακινήσεων κάθε κομματιού ξεχωριστά από τις αποθήκες στις μηχανές και αντιστρόφως. Κατά δεύτερον οφείλεται στη βασική παραδοχή 3, βάσει της οποίας καθορίζεται η κατανομή των ρυθμών μεταξύ παράλληλων μηχανών και των ρυθμών εισόδου των χώρων οι οποίοι βρίσκονται στα κατάντη ενός σταθμού. Στο Παράρτημα Β δίνουμε μία διαισθητική ερμηνεία της ιδιότητας των συνεχών συστημάτων σύμφωνα με την οποία το ποσοστό του φορτίου που είναι στην είσοδο κάποιου σταθμού κατανέμεται στις μηχανές του ανάλογα με τους ονομαστικούς ρυθμούς παραγωγής των· επίσης όταν οι χώροι στα κατάντη των σταθμών δεν είναι γεμάτοι, οι ρυθμοί εισροών είναι ίσοι μεταξύ τους. Έτσι αποφεύγεται ένας σημαντικός αριθμός υπολογισμών που απαιτείται για να εντοπισθεί η μηχανή ή η αποθήκη για την οποίαν ικανοποιείται ο κανόνας φόρτωσης ΜΚΠΦ, όταν ένα κομμάτι είναι αντίστοιχα στην είσοδο ή έξοδο κάποιου σταθμού.

### **3.2 ΜΟΝΤΕΛΟ ΔΙΑΚΕΚΡΙΜΕΝΩΝ ΓΕΓΟΝΟΤΩΝ**

Θεωρούμε ένα δίκτυο παραγωγής με  $N$  σταθμούς και  $K$  χώρους εναποθήκευσης. Χρησιμοποιούμε τον ακόλουθο συμβολισμό:

- $n_j$ : πλήθος παράλληλων μηχανών στο σταθμό  $W_j$ ,  $j=1, \dots, N$ ,  
 $NR_{i,j}$ : ονομαστικός ρυθμός παραγωγής της μηχανής  $M_{i,j}$ ,  $i=1, \dots, n_j$ ,  
 $1/p_{i,j}$ : μέσος χρόνος ζωής της  $M_{i,j}$ , όταν παράγει με τον ονομαστικό ρυθμό,  
 $1/r_{i,j}$ : μέσος χρόνος επισκευής της  $M_{i,j}$ ,  
 $BC_{i,q}$ : χωρητικότητα της αποθήκης  $B_{j,q}$  η οποία συνδέει το σταθμό  $W_j$  με τον  $W_q$ ,  $j,q=1, \dots, N$ ,  
 $\delta_{j,q}$ : συντελεστής συναρμολόγησης κάποιου προϊόντος το οποίο από τον σταθμό  $W_j$  μεταφέρεται στον  $W_q$ , όπου συναρμολογείται με άλλα είδη σε ένα σύνθετο τύπο προϊόντος.

Κατ' ανάλογο τρόπο με τις γραμμές παραγωγής, τα δίκτυα περιγράφονται από μοντέλα διακεκριμένων γεγονότων. Τη χρονική στιγμή  $t$  οι καταστάσεις των μηχανών και αποθηκών εκφράζονται ως εξής:

$$M(i,j,t) = \begin{cases} 1, & \text{αν η μηχανή } M_{i,j} \text{ είναι λειτουργική,} \\ 0, & \text{αν η } M_{i,j} \text{ είναι υπό επισκευήν.} \end{cases}$$

$$B(j,q,t) = \begin{cases} 1, & \text{αν ο χώρος } B_{j,q} \text{ έχει ενδιάμεση στάθμη,} \\ 2, & \text{αν ο } B_{j,q} \text{ είναι γεμάτος,} \\ 0, & \text{αν ο } B_{j,q} \text{ είναι άδειος.} \end{cases}$$

Οι μεταβλητές αυτές περιγράφουν το σύστημα μακροσκοπικά επειδή έχουν σταθερές τιμές στους χρόνους μεταξύ διαδοχικών γεγονότων. Τα γεγονότα δημιουργούν αλληλεπιδράσεις μεταξύ των σταθμών, οι οποίες προκαλούν νέα

γεγονότα κ.ο.κ. Οι αλληλεπιδράσεις ή διαταραχές μεταδίδονται στο δίκτυο σύμφωνα με τους ακόλουθους κανόνες:

(1) Έστω ότι κάποια μηχανή ενός σταθμού είναι έτοιμη να προωθήσει ένα κομμάτι σε μία αποθήκη η οποία είναι γεμάτη. Το κομμάτι θα κατευθυνθεί στις άλλες αποθήκες στα κατάντη του σταθμού σύμφωνα με το κυκλικό πρωτόκολλο κυκλοφορίας. Αν βρεθεί χώρος με ελεύθερη θέση, τότε αυτή θα καταληφθεί απ' αυτό το κομμάτι. Επομένως, όταν γεμίσει ένας χώρος στα κατάντη κάποιου σταθμού, προκαλείται αύξηση στους ρυθμούς εισόδου των υπολοίπων κατάντη χώρων οι οποίοι στη συνέχεια τείνουν να γεμίσουν, ενώ δε θα υπάρχει διαταραχή στους χώρους στα ανάντη του σταθμού. Ωστόσο, αν όλοι οι κατάντεις χώροι είναι πλήρεις, τότε η μηχανή θα αποκλειστεί. Εξ αιτίας αυτού οι ρυθμοί εξόδου κομματιών από τους ανάντεις χώρους θα μειωθούν και οι χώροι αυτοί θα τείνουν να γεμίσουν. Έτσι το γεγονός χώρος\_γεμίζει μεταδίδεται στα ανάντη.

(2) Όταν ένας χώρος αδειάσει, οι μηχανές του κατάντη σταθμού παύουν να τροφοδοτούνται με κομμάτια κάποιου τύπου προϊόντος. Η παραγωγή του σταθμού θα ελαττωθεί και οι χώροι στα κατάντη θα τείνουν να αδειάσουν. Έτσι το γεγονός χώρος\_αδειάζει μεταδίδεται στα κατάντη. Ένα δεύτερο επακόλουθο του αρχικού γεγονότος είναι ότι αν ο σταθμός είναι κέντρο συναρμολόγησης, τότε οι ρυθμοί εξόδου των άλλων τύπων κομματιών από τις υπόλοιπες αποθήκες στα ανάντη του σταθμού μειώνονται, οι χώροι των θα τείνουν να γεμίσουν, και η διαταραχή μεταδίδεται στα ανάντη.

(3) Για λόγους οι οποίοι διευκολύνουν την παρουσίαση της μεθόδου θα υποθέσουμε ότι οι μηχανές φθείρονται μόνο όταν εργάζονται, και όχι όταν μένουν αδρανείς. Όταν ένας χώρος αδειάσει ή γεμίσει τότε αναγκάζει

κάποιες μηχανές στα κατάντη ή ανάντη αντίστοιχα να μειώσουν το ρυθμό τους. Στην πραγματικότητα οι μηχανές λειτουργούν κατ' διαστήματα στα οποία παρεμβάλλονται περίοδοι αδράνειας. Επομένως οι χρόνοι κατ' τους οποίους θα συμβούν οι βλάβες στις μηχανές παρατείνονται κατ' ένα διάστημα ίσο με τη συνολική περίοδο αδράνειας.

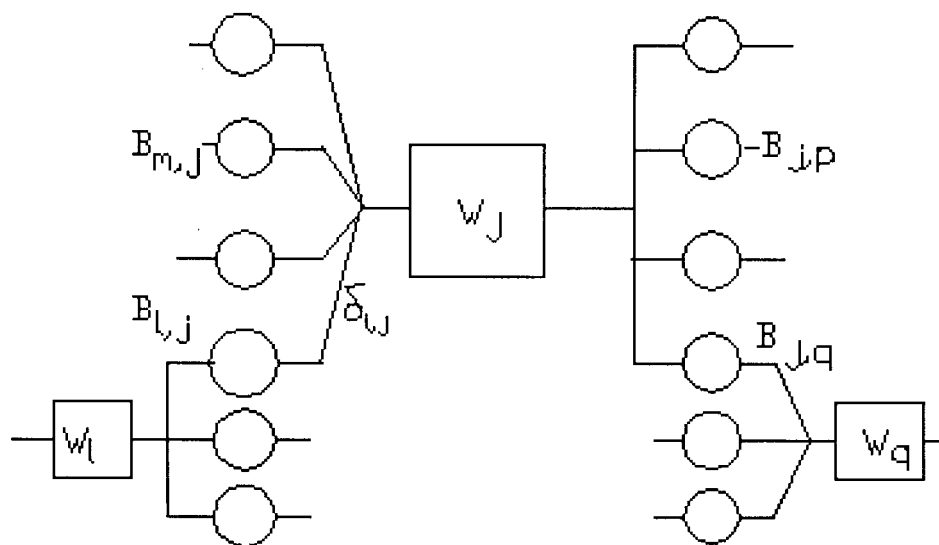
(4) Όταν οι μηχανές ενός σταθμού λειτουργούν με τους ονομαστικούς των ρυθμούς για κάποια περίοδο, τότε δεν είναι ούτε αποκλεισμένες ούτε αποστερημένες. Αν μία απ' αυτές πάθει βλάβη, τότε ο συνολικός ρυθμός παραγωγής του σταθμού μειώνεται, οι ανάντεις χώροι τείνουν να γεμίσουν και οι κατάντεις να αδειάσουν.

(5) Κατ' δυαδικό τρόπο, όταν η μηχανή επισκευάζεται, αυξάνει ο ρυθμός παραγωγής του σταθμού, οι ανάντεις χώροι τείνουν να αδειάσουν και οι κατάντεις να γεμίσουν.

Οι χρόνοι οι οποίοι απαιτούνται για την αλληλεπίδραση των σταθμών εξ αιτίας των γεγονότων `χώρος_αδειάζει` και `χώρος_γεμίζει` δεν είναι αμελητέοι. Για παράδειγμα θεωρούμε δύο μηχανές σε σειρά και μία ενδιάμεση αποθήκη η οποία είναι άδεια. Έστω ότι η πρώτη μηχανή παθαίνει βλάβη τη στιγμή  $t$ , ενώ η δεύτερη θα τελειώσει την επεξεργασία του κομματιού της στο χρόνο  $t+\tau$ . Τότε το γεγονός `χώρος_αδειάζει` (ή ισοδύναμα, `μηχανή_δεν_τροφοδοτείται`) θα συμβεί μετά την πάροδο της μεταβατικής περιόδου  $\tau$ , όπως προκύπτει από την ανάλυση που έγινε στο προηγούμενο κεφάλαιο. Τέτοια φαινόμενα βρέθηκε ότι είναι σημαντικά για τη μελέτη μεγάλων γραμμών παραγωγής με μικρούς χώρους εναποθήκευσης. Ωστόσο, η γενίκευση του μοντέλου στην περίπτωση των δικτύων γίνεται απαγορευτική εξ αιτίας των συνδυαστικών προβλημάτων τα οποία

προκύπτουν. Γι' αυτό θα κάνουμε την υπόθεση ότι οι μεταβατικοί χρόνοι είναι απειροστοί και αυτή η παραδοχή ισχύει για συστήματα συνεχούς παραγωγής. Το μοντέλο είναι επομένως προσεγγιστικό. Ωστόσο, όπως θα δούμε, η ακρίβειά του αποδεικνύεται ότι είναι πολύ μεγάλη για ένα ευρύ φάσμα πρακτικών εφαρμογών οι οποίες αναφέρονται σε συστήματα παραγωγής κατά τεμάχια.

Τώρα περιγράψουμε πώς εφαρμόζεται η παραδοχή της στιγμιαίας αλληλεπίδρασης μεταξύ μηχανών ή σταθμών στον προγραμματισμό γεγονότων του δικτύου παραγωγής του Σχ. 12.



Σχήμα 12. Δένδρο γενικού δικτύου παραγωγής.

Έστω ότι τη χρονική στιγμή  $t$  αδειάζει ο χώρος  $B_{l,j}$ . Τότε η ροή προϊόντων προς τα κατάντη του χώρου μειώνεται και συνεπώς μειώνεται και ο συνολικός ρυθμός παραγωγής του σταθμού  $W_j$  σύμφωνα με το πρωτόκολλο συναρμολόγησης. Αυτές οι δύο μειώσεις συμβαίνουν ταυτοχρόνως. Αν επί πλέον και ο χώρος  $B_{m,j}$  είναι άδειος τη στιγμή  $t$  τότε ο ρυθμός εκροής προϊόντος προς τον  $W_j$  θα μειωθεί με αποτέλεσμα η στάθμη του να τείνει να αυξηθεί και το γεγονός χώρος\_τροφοδοτείται παρατηρείται ταυτοχρόνως. Το δυαδικό φαινόμενο θα συμβεί όταν ο χώρος  $B_{j,q}$  γεμίζει τη στιγμή  $t$ . Ο ρυθμός εισροής προϊόντων του μειώνεται αμέσως και τα αποκλεισμένα κομμάτια κατανέμονται στους υπόλοιπους χώρους με ενδιάμεση στάθμη. Τώρα οι χώροι αυτοί θα τείνουν να γεμίσουν. Ωστόσο, αν όλοι οι χώροι που τροφοδοτούνται από τον  $W_j$  είναι γεμάτοι τη στιγμή  $t$ , ο συνολικός ρυθμός του  $W_j$  μειώνεται αμέσως. Οι ρυθμοί παραγωγής των μηχανών του  $W_j$  μεταβάλλονται τότε ανάλογα με τους ονομαστικούς τους ρυθμούς, ώστε το άθροισμά τους να ισούται με το συνολικό ρυθμό του σταθμού.

Όταν κάποια μηχανή πάθει βλάβη, τότε ο ρυθμός της ισούται με μηδέν. Οι ρυθμοί ροής των προϊόντων δια μέσου των μηχανών και των χώρων εναποθήκευσης παραμένουν σταθεροί στα χρονικά διαστήματα μεταξύ διαδοχικών γεγονότων. Επομένως ανήκουν στο σύνολο των μακροσκοπικών καταστάσεων και συμβολίζονται ως εξής:

$R(i,j,t)$ : ρυθμός παραγωγής της  $M_{i,j}$  τη στιγμή  $t$ ,

$RW(i,j,t)$ : συνολικός ρυθμός του σταθμού  $W_j$  τη στιγμή  $t$ ,

$RI(j,q,t)$ : ρυθμός εισροής προϊόντος στην αποθήκη  $B(j,q)$  τη στιγμή  $t$ ,

$RO(j,q,t)$ : ρυθμός εκροής προϊόντος από την  $B_{j,q}$  τη στιγμή  $t$ .

Η δυναμική του συστήματος κατά το χρονικό διάστημα μεταξύ διαδοχικών γεγονότων περιγράφεται από τις μικροσκοπικές μεταβλητές.

$BΣ(j,q,t)$ : η στάθμη του  $B_{j,q}$  τη στιγμή  $t$ ,

$ΣΠ(i,j,t)$ : συνολική παραγωγή της μηχανής  $M_{i,j}$ , μέχρι τη στιγμή  $t$ ,

$KB(i,j,t)$ : αριθμός κομματιών που θα παράγει η  $M_{i,j}$  από τη στιγμή  $t$  μέχρις ότου πάθει βλάβη,

$ΧΕ(i,j,t)$ : χρόνος επισκευής, το διάστημα μεταξύ της στιγμής  $t$  και της στιγμής της επισκευής της  $M_{i,j}$ .

Στο εξής, όπου είναι δυνατόν, η μεταβλητή  $t$  θα παραλείπεται. Το σύστημα αποτελείται από  $K$  αποθήκες και  $M = \sum_{j=1}^N n_j$  μηχανές.

Έστω  $Χ_L(t)$  και  $Χ_S(t)$  αντιστοίχως τα διανύσματα των μακροσκοπικών και μικροσκοπικών καταστάσεων του μοντέλου διακεκριμένων γεγονότων του συστήματος. Έστω επίσης  $E(t)$  το διάνυσμα των σημειακών διαδικασιών για τα επόμενα γεγονότα τα οποία προγραμματίζονται να συμβούν μετά το χρόνο  $t$  και  $TE(t)$  το διάνυσμα των αντίστοιχων χρόνων τους. Η είσοδος της διαδικασίας  $E(t)$  είναι ένα διάνυσμα  $ξ(t)$  τυχαίων μεταβλητών οι οποίες περιγράφουν την επίδραση των βλαβών και επισκευών των μηχανών στο σύστημα. Τη στιγμή  $t_k$  κατά την οποία συμβαίνει το  $k$ -οστό γεγονός, μερικά στοιχεία των διανυσμάτων  $Χ_L(t_k)$ ,  $E(t_k)$  και  $TE(t_k)$  μεταβάλλονται. Στα διαστήματα  $[t_k, t_{k+1})$  το  $Χ_L(t_k)$  είναι γραμμική συνάρτηση.

Ο χρόνος του επόμενου γεγονότος  $t_{k+1}$  είναι το μικρότερο στοιχείο του

$TE(t_k)$ .

Έστω  $\mathbf{1}$  το διάνυσμα διαστάσεως  $K+M$  με στοιχεία ίσα προς 1, και  $TE(t)=[\tau_1(t), \dots, \tau_{K+M}(t)]^T$  το διάνυσμα των χρόνων επόμενων γεγονότων. Θα δείξουμε ότι το στοχαστικό μοντέλο του συστήματος είναι:

$$X_S(t) = X_S(t_k) + \Gamma(X_L(t_k)) (t-t_k), \quad (3.1)$$

$$X_L(t_{k+1}) = \theta(X_L(t_k), E(t_k), TE(t_k)), \quad (3.2)$$

$$E(t_k) = \phi(X_S(t_k), X_L(t_k)), \quad (3.3)$$

$$TE(t_k) = \mathbf{1}t_k + \Pi(X_S(t_k), X_L(t_k), \xi(t_k)), \quad (3.4)$$

$$t_{k+1} = \min_{i=1, \dots, K+M} \tau_i(t_k), \quad (3.5)$$

όπου  $t \in [t_k, t_{k+1})$  ο χρόνος μεταξύ διαδοχικών γεγονότων. το  $\Gamma$  είναι διάνυσμα γραμμικών συναρτήσεων και τα  $\theta$ ,  $\phi$  και  $\Pi$  είναι διανύσματα μη γραμμικών συναρτήσεων των οποίων οι ακριβείς εκφράσεις θα εξαχθούν από την ανάλυση σε επόμενες παραγράφους. Όπως και στην παράγραφο 2.3 η Εξ. (3.1) χρησιμεύει για την ενημέρωση των μικροσκοπικών μεταβλητών, η (3.2) για την αλλαγή των μακροσκοπικών μεταβλητών του συστήματος, και οι (3.3)-(3.5) για τον προγραμματισμό του επόμενου γεγονότος. Το σύστημα είναι αποζεύξιμο και η ιδιότητα αυτή θα χρησιμοποιηθεί για την κατασκευή ενός υβριδικού αλγόριθμου διακεκριμένων γεγονότων. Στις επόμενες δύο παραγράφους περιγράφουμε την εξέλιξη του συστήματος σε μία περίοδο λειτουργίας.



### 3.3 ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ ΓΕΓΟΝΟΤΩΝ

Στην παράγραφο αυτή δίνουμε τις ακριβείς εκφράσεις των εξισώσεων προγραμματισμού γεγονότων (3.3) και (3.4). Οι εξισώσεις αυτές είναι αιτιοκρατικές και περιγράφουν την εξέλιξη του συστήματος μακροπρόθεσμα. Λύνονται κάθε φορά που, εξ αιτίας κάποιου γεγονότος, έχουν γίνει αλλαγές σε ορισμένες μακροσκοπικές μεταβλητές καταστάσεως. Εξετάζουμε το σύστημα του Σχ. 12 κάποια χρονική στιγμή  $t_k$ .

#### A. ΓΕΓΟΝΟΤΑ ΣΤΙΣ ΑΠΟΘΗΚΕΣ

Για την αποθήκη  $B_{j,q}$  έστω  $\tau_{j,q}$  ο χρόνος επόμενου γεγονότος.

Περίπτωση α: Αν ο ρυθμός εισροής προϊόντων στο χώρο  $B_{j,q}$  είναι μεγαλύτερος του ρυθμού εκροής τότε ο χώρος θα γεμίσει τη στιγμή:

$$\tau_{j,q} = t_k + \frac{BC_{j,q} - BS(j,q)}{RI(j,q) - RO(j,q)}, \quad (3.6)$$

και  $RI(j,q) > RO(j,q)$ .

Περίπτωση β: Αν ο ρυθμός εκροής είναι μεγαλύτερος του ρυθμού εισροής τότε ο χώρος θα αδειάσει τη στιγμή:

$$\tau_{j,q} = t_k + \frac{BS(j,q)}{RO(j,q) - RI(j,q)}, \quad (3.7)$$

και  $RO(j,q) > RI(j,q)$ .

Περίπτωση γ: Εφόσον οι ρυθμοί στην αποθήκη μένουν ίσοι, τότε η στάθμη της θα παραμένει σταθερή και η κατάσταση της (γεμάτη άδεια ή ενδιάμεσης στάθμης) αμετάβλητη δηλαδή:

$$\tau_{j,q} = \infty, \quad \text{για } RI(j,q) = RO(j,q). \quad (3.8)$$

Περίπτωση δ: Στην περίπτωση αυτή θεωρούμε ότι ο  $B_{j,q}$  έχει γεμίσει γιατί ο σταθμός  $W_q$  είτε είναι αποκλεισμένος, είτε κάποια μηχανή του έχει χαλάσει. Ο ρυθμός εισροής στο χώρο  $B_{j,q}$  έχει μειωθεί και είναι ίσος με τον ρυθμό εκροής. Τη στιγμή  $t_k$  υποθέτουμε ότι ο συνολικός ρυθμός του σταθμού αυξάνεται επειδή αυτός δεν είναι πλέον αποκλεισμένος ή επειδή η μηχανή επισκευάζεται. Τότε το γεγονός\_χώρος\_ελευθερώνεται θα συμβεί στον  $B_{j,q}$  ταυτόχρονα,

$$\tau_{j,q} = t_k, \quad \text{όταν } RO(j,q) > RI(j,q). \quad (3.9)$$

Το δυαδικό του ανωτέρω συμβαίνει όταν ο χώρος  $B_{l,j}$  έχει αδειάσει και τη στιγμή  $t$  ο ρυθμός παραγωγής του σταθμού  $W_l$  αυξάνεται. Το γεγονός\_χώρος\_τροφοδοτείται συμβαίνει ταυτόχρονα:

$$\tau_{l,j} = t_k, \quad \text{όταν } RI(l,j) > RO(l,j). \quad (3.10)$$

## **B. ΓΕΓΟΝΟΤΑ ΣΤΙΣ ΜΗΧΑΝΕΣ**

Ο χρόνος βλάβης  $\tau_{Mi,j}$  της μηχανής  $M_{i,j}$  εξαρτάται από τον αριθμό κομματιών  $KB(i,j)$  τα οποία θα παραχθούν μέχρι τότε. Ο τελευταίος είναι μία τυχαία μεταβλητή γνωστής κατανομής και επομένως ο χρόνος επόμενου γεγονότος μιας μηχανής η οποία λειτουργεί είναι:

$$\tau_{Mi,j} = t_k + \frac{KB(i,j)}{R(i,j)}. \quad (3.11)$$

Όταν η μηχανή είναι αποκλεισμένη και οι χώροι στα ανάντη δεν απορροφούν την παραγωγή της, τότε  $R(i,j)=0$  και η μηχανή δε θα υποστεί ποτέ βλάβη.

Όταν η μηχανή είναι υπό επισκευήν, τότε η διάρκεια  $XE(i,j)$  της επισκευής μετά τη στιγμή  $t_k$  είναι επίσης τυχαία μεταβλητή με γνωστή κατανομή, άρα:

$$\tau_{Mi,j} = t_k + XE(i,j). \quad (3.12)$$

### **3.4 ΕΝΗΜΕΡΩΣΗ ΚΑΙ ΑΛΛΑΓΗ ΤΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ ΚΑΤΑΣΤΑΣΗΣ**

Αφού υπολογισθεί ο χρόνος  $t_k$  του επόμενου γεγονότος το οποίο θα συμβεί στο σύστημα, γίνεται η ενημέρωση ορισμένων μικροσκοπικών μεταβλητών για το διάστημα που μεσολαβεί μέχρι τη στιγμή  $t_k$ . Αυτό γίνεται επειδή το  $k$ -

οστό γεγονός θα προκαλέσει αλλαγές στις μακροσκοπικές καταστάσεις (ρυθμοί μηχανών, αποθηκών) του συστήματος οι οποίες σχετίζονται με αυτό. Για παράδειγμα, όταν παθαίνει βλάβη μία μηχανή, τότε ο ρυθμός της γίνεται μηδέν. Στη συνέχεια, για τον προγραμματισμό του  $(k+1)$ -οστού γεγονότος (ο οποίος θα γίνει τη στιγμή  $t_k$ ) απαιτείται η γνώση των τιμών των μικροσκοπικών μεταβλητών όπως φαίνεται από τις (3.6)-(3.12). Μετά την ενημέρωση του συστήματος εκτελούνται οι αλλαγές των μακροσκοπικών μεταβλητών.

#### A. ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΕΝΗΜΕΡΩΣΗΣ

Έστω  $t$  ο χρόνος του τελευταίου γεγονότος εξ αιτίας του οποίου έχει αλλάξει ο ρυθμός παραγωγής της μηχανής  $M_{i,j}$ . Τότε η εξίσωση (3.1) έχει τη μορφή:

$$\Sigma\Pi(i,j,t) = \Sigma\Pi(i,j,t_k) + R(i,j,t_k) (t-t_k), \text{ και} \quad (3.13\alpha)$$

$$KB(i,j,t)=KB(i,j,t_k)-R(i,j,t_k)(t-t_k), \text{ όταν η } M_{i,j} \text{ λειτουργεί, ή} \quad (3.13\beta)$$

$$XE(i,j,t) = XE(i,j,t_k)-(t-t_k), \text{ όταν η } M_{i,j} \text{ είναι υπό επισκευήν.} \quad (3.13\gamma)$$

Επίσης η στάθμη του ανάντη χώρου  $B_{l,j}$  είναι:

$$B\Sigma(l,j,t)=B\Sigma(l,j,t_k)+[R_I(l,j,t_k)-R_O(l,j,t_k)] (t-t_k) . \quad (3.14)$$

#### B. ΜΕΤΑΒΟΛΕΣ ΛΟΓΩ ΓΕΓΟΝΟΤΩΝ ΣΤΙΣ ΜΗΧΑΝΕΣ

Στα δύο επόμενα εδάφια περιγράφονται οι εξισώσεις (3.2). Ονομάζουμε

διαθεσιμότητα  $\Delta(j,t)$  ενός σταθμού  $W_j$  το άθροισμα των ονομαστικών ρυθμών παραγωγής των μηχανών οι οποίες δεν είναι χαλασμένες τη χρονική στιγμή  $t$ . Η διαθεσιμότητα ανήκει επομένως στις μακροσκοπικές μεταβλητές του συστήματος. Όταν ο σταθμός μένει αδρανής τότε ο συνολικός ρυθμός παραγωγής του  $RW(j,t)$  είναι μικρότερος της διαθεσιμότητάς του. Αναγκαία συνθήκη για να συμβαίνει αυτό είναι είτε κάποιος χώρος  $B_{1,j}$  στα ανάντη να έχει αδειάσει μειώνοντας το ρυθμό εισόδου πρώτων υλών στο σταθμό, είτε όλοι οι χώροι στα κατόντη ( $B_{j,q}$ ) να είναι γεμάτοι· έτσι μειώνονται οι ρυθμοί εισροών προϊόντων σ' αυτούς. Αναφερόμενοι πάντα στο Σχ. 12, εξετάζουμε πρώτα τις μεταβολές στους ρυθμούς ενός σταθμού και των γειτονικών του χώρων όταν κάποια μηχανή του πάθει βλάβη.

Περίπτωση α: Έστω  $t_{k-1}$  ο χρόνος του προηγούμενου  $(k-1)$ -οστού γεγονότος το οποίο είχε σχέση με τον σταθμό  $W_j$ , δηλαδή προκάλεσε μεταβολή στο ρυθμό του. Επίσης συμβολίζουμε με  $t_k$  το χρόνο στον οποίο η μηχανή  $M_{i,j}$  επισκευάζεται και είναι έτοιμη να λειτουργήσει (αυτός ο συμβολισμός υιοθετείται για απλούστευση στην παρουσίαση, αφού δεν είναι αναγκαίο δύο διαδοχικά γεγονότα του συστήματος, το  $(k-1)$  και το  $k$ , να συμβαίνουν στον ίδιο σταθμό). Σημειώνουμε την αλλαγή κατάστασης της μηχανής και τη νέα τιμή της διαθεσιμότητας του  $W_j$ :

$$\begin{aligned} M(i,j,t_k) &= 1 , \\ \Delta(j,t_k) &= \Delta(j,t_{k-1}) + NR_{i,j} . \end{aligned} \quad (3.14)$$

Υπολογίζουμε κατόπιν τον αριθμό κομματιών τα οποία θα παράγει η μηχανή μέχρι να πάθει βλάβη. Από την βασική παραδοχή 3 και την παράγραφο 2.1, ο

αριθμός αυτός είναι τυχαία μεταβλητή η οποία ακολουθεί γεωμετρική κατανομή με παράμετρο  $\exp(-NR_{i,j}/p_{i,j})$ , επομένως η αντίστοιχη γεννήτρια τυχαίων τιμών του είναι [41]:

$$KB(i,j,t_k) = - \frac{NR_{i,j}}{p_{i,j}} \ln \xi(t_k) , \quad (3.15)$$

όπου η  $\xi(t_k)$  είναι ομοιόμορφα κατανεμημένη στο διάστημα (0,1).

Διακρίνουμε τώρα δύο περιπτώσεις. Αν ο ρυθμός παραγωγής  $RW(j)$  του σταθμού ήταν μικρότερος από τη διαθεσιμότητά του στο διάστημα  $[t_{k-1}, t_k)$ , τότε μετά την επισκευή της μηχανής ο ρυθμός αυτός δε θα μεταβληθεί ενώ οι ρυθμοί των μηχανών της συστοιχίας θα προσαρμοσθούν ως εξής:

$$\lambda = \frac{RW(j)}{\Delta(j,t_k)} < 1,$$

$$R(n,j,t_k) = \lambda NR_{n,j} ,$$

γιά κάθε λειτουργική μηχανή  $M_{n,j}$ ,  $n=1,\dots,n_j$ . δηλαδή οι ρυθμοί των μηχανών είναι ανάλογοι των ονομαστικών ρυθμών παραγωγής (βλ. Ιδιότητα 2 του Παραρτήματος Β).

Αν  $\lambda=1$ , τότε ο σταθμός δεν έχει επιβραδυνθεί. Επομένως οι ρυθμοί των υπολοίπων μηχανών της συστοιχίας μένουν αμετάβλητοι, και η  $M_{i,j}$  αρχίζει να παράγει με τον ονομαστικό της ρυθμό:

$$\begin{aligned}
 RW(j, t_k) &= RW(j) + NR_{i,j} , \\
 R(i, j, t_k) &= NR_{i,j} .
 \end{aligned}
 \tag{3.17}$$

Σύμφωνα με το πρωτόκολλο συναρμολόγησης οι νέοι ρυθμοί εκροής των αποθηκών προς την είσοδο του σταθμού δίνονται από τις:

$$RO(m, j, t_k) = \delta_{m,j} RW(j, t_k), \quad m=1, \dots, l, \tag{3.18a}$$

ενώ κατά το πρωτόκολλο κυκλικής κυκλοφορίας οι ρυθμοί εισροών ισοκατανέμονται στις  $h$  αποθήκες που είναι στα κατάντη του σταθμού,

$$RI(j, p, t_k) = \frac{RW(j, t_k)}{h}, \quad p=1, \dots, q. \tag{3.18\beta}$$

Περίπτωση β: Έστω ότι τη στιγμή  $t_k$  η μηχανή  $M_{i,j}$  παθαίνει βλάβη. Οι νέες μεταβλητές καταστάσεως γίνονται:

$$\begin{aligned}
 M(i, j, t_k) &= 0, \\
 R(i, j, t_k) &= 0, \\
 \Delta(j, t_k) &= \Delta(j, t_{k-1}) - NR_{i,j},
 \end{aligned}
 \tag{3.19}$$

και ο χρόνος επισκευής, ο οποίος είναι εκθετικά κατανεμημένος, υπολογίζεται από την:

$$XE(i, j, t_k) = - \frac{1}{r_{i,j}} \ln \xi(t_k). \tag{3.20}$$

Αν κατά το διάστημα  $[t_{k-1}, t_k)$  ο σταθμός έχει επιβραδυνθεί λόγω αποκλεισμού ή μικρού ρυθμού τροφοδοσίας από τα ανάντη, τότε ισχύει ότι  $\lambda < 1$ . Η νέα κατανομή των ρυθμών στις μηχανές υπολογίζεται από τις (3.16), ενώ δεν υπάρχει μεταβολή στους ρυθμούς των γειτονικών αποθηκών.

Αν στο ίδιο διάστημα οι μηχανές του σταθμού λειτουργούσαν με τους ονομαστικούς των ρυθμούς, τότε η βλάβη της  $M_{i,j}$  θα προκαλέσει μείωση στο συνολικό ρυθμό παραγωγής του σταθμού και επομένως μείωση στους ρυθμούς των γειτονικών αποθηκών. Για τον υπολογισμό των ρυθμών εισροής στους κατάντεις χώρους εναποθήκευσης θα πρέπει να ληφθεί υπόψη η πιθανότητα κάποιои, αλλά όχι όλοι, από τους χώρους αυτούς να είναι γεμάτοι. Επειδή τέτοιοι υπολογισμοί θα χρειαστεί να γίνουν κατά την εκτέλεση και άλλων γεγονότων τα οποία αναλύονται στο επόμενο εδάφιο, θα περιγράψουμε στη συνέχεια ένα γενικό επαναληπτικό σχήμα για την κατανομή των εισροών στις αποθήκες.

Έστω  $F_j$  το σύνολο των γεμάτων χώρων στα κατάντη του σταθμού  $W_j$  και  $G_j$  το σύνολο εκείνων που είναι άδειοι ή έχουν ενδιάμεση στάθμη. Οι ρυθμοί εισροών των γεμάτων χώρων δεν πρέπει να υπερβαίνουν τους ρυθμούς εκροών, ενώ οι χώροι του συνόλου  $G_j$  μπορούν να δεχτούν προϊόντα με ρυθμούς οιασδήποτε τιμής. Όταν το σύνολο  $G_j$  είναι κενό, τότε η συνολική ικανότητα εισροών των κατάντη χώρων είναι πεπερασμένη και ο συνολικός ρυθμός του  $W_j$  δεν μπορεί να την υπερβαίνει. Η **ρουτίνα κατανομής εισροών** είναι η εξής:



1. Αρχή. Το αρχικό σύνολο των χώρων στους οποίους θα κατανεμηθεί η παραγωγή του σταθμού είναι  $D = F_j \cup G_j$  και το πλήθος τους  $L = h$ . Ο ρυθμός που πρόκειται να κατανεμηθεί είναι  $R_a = \Delta(j)$ .
2. Οι ρυθμοί εισροών για όλους τους χώρους του συνόλου  $D$  τίθενται ίσοι με  $R_a/h$ .
3. Εξετάζονται τα στοιχεία του  $D$ . Αν μία αποθήκη  $B_{j,q}$  είναι γεμάτη και ο ρυθμός εισροής είναι μεγαλύτερος του ρυθμού εκροής της, τότε ο πρώτος γίνεται ίσος με τον δεύτερο, μειώνεται το μέγεθος  $R_a$  κατά μία ποσότητα ίση με τον ρυθμό εισροής της αποθήκης, ο χώρος  $B_{j,q}$  εξαιρείται από το σύνολο  $D$  και το  $L$  μειώνεται κατά μία μονάδα.
4. Κανόνας τερματισμού του σχήματος. Αν  $L > 0$ , τότε εκτελείται το βήμα 2, άλλως τερματίζεται η κατανομή ρυθμών. Αν  $L = 0$  και υπάρχει ακόμη κάποια ποσότητα  $R_a$  η οποία δεν έχει διατεθεί στα κατάντη τότε ο σταθμός  $W_j$  είναι αποκλεισμένος και ο συνολικός ρυθμός παραγωγής του ισούται με το άθροισμα των εισροών στους κατάντεις χώρους, ή ισοδύναμα  $RW(j) = \Delta(j) - R_a$ .

Οι ρυθμοί εκροών προς τον σταθμό  $W_j$  από τις ανάντεις αποθήκες υπολογίζονται από τις σχέσεις (3.18α).

### Γ. ΜΕΤΑΒΟΛΕΣ ΛΟΓΩ ΓΕΓΟΝΟΤΩΝ ΣΤΙΣ ΑΠΟΘΗΚΕΣ

Εξετάζουμε τα τέσσερα γεγονότα: χώρος\_γεμίζει, χώρος\_ελευθερώνεται, χώρος\_αδειάζει και χώρος\_τροφοδοτείται.

Περίπτωση α: Ο αλγόριθμος του γεγονότος χώρος\_γεμίζει: Αν ο χώρος  $B_{j,q}$  γεμίζει τη στιγμή  $t_k$ , ο ρυθμός εισροής προϊόντων του γίνεται ίσος με τον

ρυθμό εκροής:

$$\begin{aligned} B(j,q,t_k) &= 2 , \\ RI(j,q,t_k) &= RO(j,q,t_k) . \end{aligned} \quad (3.21)$$

Αυτή η μεταβολή προκαλεί κάποια διαταραχή στο τμήμα του δικτύου στα ανάντη σύμφωνα με τον κανόνα 1 της μετάδοσης διαταραχών της παραγράφου 3.2. Αν η συστοιχία των μηχανών  $W_j$  μπορεί να ανακατανείμει το πλεόνασμα της παραγωγής της στους  $h$  κατάντεις χώρους ενδιάμεσης στάθμης, τότε οι ρυθμοί εισροών των χώρων αυτών θα αυξηθούν ομοιόμορφα, σύμφωνα με την (3.18β) και δεν θα υπάρξει περαιτέρω διαταραχή στο δίκτυο. Ωστόσο, αν όλοι οι κατάντεις χώροι είναι γεμάτοι, τότε οι ρυθμοί των μηχανών μειώνονται:

$$RW(j,t_k) = RW(j,t_k) + RI(j,q,t_k) - RI(j,q,t_{k-1}) ,$$

$$\lambda = \frac{RW(j,t_k)}{RW(j,t_{k-1})} ,$$

$$R(i,j,t_k) = \lambda R(i,j,t_{k-1}), \quad i=1,\dots,n_j . \quad (3.22)$$

Αυτή η διαταραχή μεταδίδεται στο μέρος του δικτύου στα ανάντη του σταθμού  $W_j$ . Έτσι οι ρυθμοί εκροής από τις ανάντεις αποθήκες  $B_{1,j}$  γίνονται:

$$RO(1,j,t_k) = \delta_{1,j} RW(j,t_k), \quad (3.23)$$

και αν μία ή περισσότερες απ' αυτές είναι γεμάτες, τότε αντίστοιχα τα γεγονότα  $\chi\acute{o}\rho\omicron\varsigma\_γεμίζει$  προγραμματίζονται να συμβούν την στιγμή  $t_k$ .

**Περίπτωση β:** Ο αλγόριθμος του γεγονότος  $\chi\acute{o}\rho\omicron\varsigma\_ελευθερώνεται$ : Για την καλύτερη περιγραφή των μεταβολών τις οποίες επιβάλλει αυτό το γεγονός θα αναφερθούμε σε ένα παράδειγμα.

Έστω ότι κάποια μηχανή  $M_{i,q}$  της συστοιχίας  $W_q$  παθαίνει βλάβη και εξ αιτίας της μείωσης του ρυθμού  $RW(q)$  της ο  $\chi\acute{o}\rho\omicron\varsigma\ B_{j,q}$  στα ανάντη γεμίζει τη στιγμή  $t_{k-1}$ . Αμέσως μετά την επισκευή της μηχανής τη στιγμή  $t_k$ , ο σταθμός αυξάνει το ρυθμό ζήτησης προϊόντος από τον  $B_{j,q}$  και έτσι το γεγονός  $\chi\acute{o}\rho\omicron\varsigma\_ελευθερώνεται$  θα συμβεί ταυτόχρονα. Τώρα μελετάμε τη λειτουργία του σταθμού  $W_j$  στα ανάντη (Σχ. 12) κατά το χρονικό διάστημα  $(t_{k-1}, t_k]$ .

Αρχικά υποθέτουμε ότι ο συνολικός ρυθμός  $RW_j$  στο χρόνο  $t_k$  είναι ίσος με τη διαθεσιμότητα του σταθμού. Χρησιμοποιώντας την τιμή αυτή υπολογίζουμε τους ρυθμούς εκροής των ανάντη αποθηκών από τις εξισώσεις (3.23). Για τον υπολογισμό των ρυθμών εισροής στους  $\chi\acute{o}\rho\omicron\varsigma\ B_{j,p}$ ,  $p=1, \dots, q$  στα κατάντη του  $W_j$  εκτελούμε τον αλγόριθμο της περιπτώσεως (B)β.

**Περίπτωση γ:** Ο αλγόριθμος του γεγονότος  $\chi\acute{o}\rho\omicron\varsigma\_αδειάζει$ : Όταν η αποθήκη  $B_{1,j}$  αδειάζει τη στιγμή  $t_k$  δεν υπάρχει μεταβολή των ρυθμών στους κλάδους του δικτύου στα ανάντη, αφού η αποθήκη μπορεί να δεχθεί προϊόντα με οποδήποτε μεγάλο ρυθμό. Ωστόσο ο ρυθμός εκροής της μειώνεται:

$$\begin{aligned}
B(1,j,t_k) &= 0, \\
RO(1,j,t_k) &= RI(1,j,t_k),
\end{aligned}
\tag{3.24}$$

$$\text{και } \lambda = \frac{RO(1,j,t_k)}{RO(1,j,t_{k-1})},$$

είναι ο συντελεστής προσαρμογής των νέων ρυθμών και  $t_{k-1}$  ο χρόνος του προηγούμενου γεγονότος. Οι ρυθμοί της συστοιχίας  $W_j$  και κάθε μιας μηχανής  $M_{i,j}$  μειώνονται. Σύμφωνα με το πρωτόκολλο συναρμολόγησης αυτή η μείωση επηρεάζει τους ρυθμούς εκροών των χώρων  $B_{m,j}$ ,  $m \neq 1$  στα ανάντη και έτσι έχουμε:

$$\begin{aligned}
RW(j,t_k) &= \lambda RW(j,t_{k-1}), \\
R(i,j,t_k) &= \lambda R(i,j,t_{k-1}), \\
RO(m,j,t_k) &= \lambda RO(m,j,t_{k-1}).
\end{aligned}
\tag{3.25}$$

Αν κάποιος χώρος  $B_{m,j}$  ήταν άδειος μέχρι τη στιγμή  $t_k$ , η κατάστασή του θα αλλάξει  $B(m,j,t_k)=1$ , εξ αιτίας της ελάττωσης του ρυθμού εκροής του και η στάθμη του θα τείνει να αυξηθεί. Το επαναληπτικό σχήμα της περιπτώσεως (B)β εφαρμόζεται και εδώ για τον υπολογισμό των εισροών στους χώρους  $B_{j,q}$  στα κατάντη του  $W_j$ .

**Περίπτωση δ:** Ο αλγόριθμος του γεγονότος χώρος\_τροφοδοτείται· το αντίθετο του φαινομένου της περιπτώσεως γ συμβαίνει όταν κάποια μηχανή της συστοιχίας  $W_l$  επισκευασθεί και η στάθμη χώρου  $B_{l,j}$  αρχίζει να αυξάνεται.

Ταυτόχρονα αυξάνεται η παροχή πρώτων υλών του  $B_{l,j}$  προς τον σταθμό  $W_j$ , και ο ρυθμός παραγωγής του τελευταίου. Οι νέες τιμές των μεταβλητών αυτών καθορίζονται από τη διαθεσιμότητα του σταθμού  $\Delta(j,t_k)$  και το πρωτόκολλο συναρμολόγησης κομματιών:

$$RO(l,j,t_k) = \min (RI(l,j,t_k), \Delta(j,t_k) \delta_{l,j}),$$

$$RW(j,t_k) = \frac{RO(l,j,t_k)}{\delta_{l,j}},$$

$$R(i,j,t_k) = \frac{RW(j,t_k)}{\Delta(j,t_k)} NR_{i,j} \text{ αν η } M_{ij} \text{ λειτουργεί.} \quad (3.26)$$

Οι ρυθμοί εκροής των άλλων χώρων  $B_{m,j}$ ,  $m \neq l$ , στα ανάντη του σταθμού  $W_j$  αυξάνονται:

$$RO(m,j,t_k) = \delta_{m,j} RW(j,t_k). \quad (3.27)$$

Όπως και στις προηγούμενες περιπτώσεις προσαρμόζονται οι ρυθμοί εισροής των αποθηκών  $B_{j,p}$  στα κατάντη του  $W_j$ .

Τα γεγονότα  $\chi\acute{o}\rho\omicron\varsigma\_τροφοδοτε\acute{\iota}\tau\alpha\iota$  και  $\chi\acute{o}\rho\omicron\varsigma\_ελευθερ\acute{o}\nu\epsilon\tau\alpha\iota$  εκτελούνται σύμφωνα με όσα αναφέρθηκαν στις περιπτώσεις  $\gamma$  και  $\delta$  **μόνον** όταν αντιστοίχως οι ρυθμοί εισροής και εκροής των χώρων **αυξάνονται** λόγω αυξήσεως του συνολικού ρυθμού παραγωγής μίας συστοιχίας μηχανών. Τα γεγονότα αυτά προκαλούν την εμφάνιση νέων γεγονότων του ίδιου τύπου. Ωστόσο υπάρχουν περιπτώσεις κατά τις οποίες τα δύο αυτά γεγονότα συμβαίνουν όταν, λόγω κάποιας βλάβης, **μειωθεί** ο ρυθμός εκροής ή εισροής

αντιστοίχως κάποιας άδειας ή γεμάτης αποθήκης.

Ας εξετάσουμε ένα παράδειγμα. Όταν ένας σταθμός είναι αποκλεισμένος και κάποια μηχανή του χαλάσει, τότε οι υπόλοιπες μηχανές θα μπορούν να παράγουν με μεγαλύτερους ρυθμούς οι οποίοι είναι δυνατόν να γίνουν ίσοι με τους ονομαστικούς των. Σ' αυτήν την περίπτωση μπορεί ο ρυθμός με τον οποίον ελευθερώνεται χώρος από τις κατάντεις γεμάτες αποθήκες να υπερβαίνει τη διαθεσιμότητα του σταθμού, οπότε η στάθμη των θα αρχίσει να μειώνεται. Το φαινόμενο αυτό δεν έχει καμμία επίδραση στα κατάντη ή τα ανάντη των αποθηκών· προκαλεί μόνο μεταβολές στις καταστάσεις των, οι οποίες σημειώνονται κατά την εκτέλεση του αλγορίθμου του γεγονότος μηχανή\_χαλάει. Το δυαδικό γεγονός συμβαίνει αν κάποια αποθήκη στα ανάντη είναι άδεια κατά τη στιγμή της βλάβης και ισχύει ανάλογη συνθήκη για την νέα τιμή της διαθεσιμότητάς του σταθμού. Η κατάσταση της αποθήκης θα γίνει 1 και η στάθμη της θα αρχίσει να αυξάνεται.

### 3.5 Ο ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ

Στις προηγούμενες παραγράφους βρέθηκαν οι ακριβείς εκφράσεις των εξισώσεων καταστάσεως του μοντέλου διακεκριμένων γεγονότων του συστήματος. Οι εξισώσεις αυτές προέκυψαν από την παραδοχή ότι οι μεταβατικοί χρόνοι μετάδοσης των διαταραχών είναι αμελητέοι. Στη συνέχεια παρουσιάζονται τα βήματα του υβριδικού αλγορίθμου για την περιγραφή της λειτουργίας δικτύων παραγωγής.

**Βήμα 1. Αρχικές συνθήκες:** Καθόρισε τη συνολική περίοδο παραγωγής, το πλήθος σταθμών, αποθηκών, τη χωρητικότητα και αρχική στάθμη κάθε αποθήκης. Δώσε τη γεωμετρία του δικτύου, τον αριθμό και παραμέτρους των μηχανών κάθε κόμβου (σταθμού) και τους συντελεστές συναρμολόγησης. Προγραμματίσε τα επόμενα γεγονότα σε κάθε μηχανή και αποθήκη.

**Βήμα 2. Εκτέλεση επόμενου γεγονότος:** Βρες ποιό γεγονός θα συμβεί πρώτο. Αν το γεγονός αυτό συμβαίνει πριν το τέλος της περιόδου παραγωγής, εκτέλεσε την κατάλληλη υπορουτίνα γεγονότος και κατόπιν εκτέλεσε πάλι το βήμα 2. Αν ο χρόνος του γεγονότος είναι μεγαλύτερος της περιόδου παραγωγής τερμάτισε την προσομοίωση.

**Βήμα 3. Τέλος της προσομοίωσης:** Για κάθε μηχανή και αποθήκη υπολόγισε τις νέες τιμές όλων των μικροσκοπικών μεταβλητών.

Το διάγραμμα ροής του αλγορίθμου είναι παρόμοιο με εκείνο του μοντέλου γραμμών παραγωγής του Σχ. 7, χωρίς τις εξισώσεις (2.4) για τις προτεραιότητες ταυτόχρονων γεγονότων. Οι υπορουτίνες γεγονότων είναι οι ακόλουθες:

**1. Μηχανή  $M_{i,j}$  επισκευάζεται:**

- α. Ενημέρωσε όλες τις μηχανές του σταθμού  $W_j$ , σύμφωνα με το εδάφιο 3.4 (Α).
- β. Εκτέλεσε τον αλγόριθμο της περιπτώσεως α του 3.4 (Β).
- γ. Προγραμματίσε τα επόμενα γεγονότα των μηχανών. Αν  $\lambda=1$  οι ρυθμοί των αποθηκών μεταβάλλονται· ενημέρωσε και προγραμματίσε όλες τις

αποθήκες στα ανάντη και τα κατάντη του σταθμού, σύμφωνα με το εδάφιο 3.3 (Α).

**2. Μηχανή  $M_{i,j}$  χαλαρεί:**

- α. Ενημέρωσε τις μηχανές του  $W_j$ .
- β. Άλλαξε τις μεταβλητές καταστάσεως σύμφωνα με τον αλγόριθμο της περιπτώσεως β του 3.4 (Β).
- γ. Προγραμμάτισε τα επόμενα γεγονότα στον  $W_j$ . Αν  $\lambda=1$ , ενημέρωσε όλους τους ανάντεις και κατάντεις χώρους σύμφωνα με την 3.3(Α) και προγραμμάτισε τα επόμενα γεγονότα σ' αυτούς.

**3. Χώρος  $B_{i,j}$  γεμίζει:**

- α. Ενημέρωσε το σταθμό  $W_j$  και τους κατάντεις χώρους  $B_{j,p}$ .
- β. Εκτέλεσε τον αλγόριθμο της περιπτώσεως α του 3.4 (Γ).
- γ. Αν  $\lambda=1$ , δηλαδή τουλάχιστον ένας  $B_{j,p}$  δεν είναι γεμάτος, προγραμμάτισε τους χώρους σύμφωνα με την 3.3(Α). Αν  $\lambda < 1$ , ενημέρωσε τους ανάντεις χώρους του  $W_j$ . Προσάρμοσε τους ρυθμούς των σύμφωνα με την Εξ. (3.23) και προγραμμάτισε τα επόμενα γεγονότα στον σταθμό  $W_j$  και τους ανάντεις χώρους σύμφωνα με την παράγραφο 3.3.

**4. Χώρος  $B_{i,j}$  ελευθερώνεται:**

- α. Ενημέρωσε τους χώρους στα κατάντη του σταθμού  $W_j$ .
- β. Προσάρμοσε τους ρυθμούς των χώρων αυτών σύμφωνα με την περίπτωση α του εδαφίου 3.4 (Γ).
- γ. Αν υπάρχει κάποια επίδραση στα ανάντη του  $W_j$ , ενημέρωσε τις μηχανές του και τους χώρους  $B_{m,j}$  και υπολόγισε τους νέους ρυθμούς



των χώρων αυτών από την ΕΞ. (3.23).

- δ. Προγραμματίσε όλα τα στοιχεία του δικτύου στα οποία έγινε ενημέρωση, σύμφωνα με την 3.3.

**5. Χώρος  $B_{i,j}$  αδειάζεται:**

- α. Ενημέρωσε το σταθμό  $W_j$  και όλες τις αποθήκες στα ανάντη και κατόντη.
- β. Δώσε νέες τιμές στις μεταβλητές καταστάσεων των ανωτέρω, σύμφωνα με την περίπτωση γ του 3.4 (Γ).
- γ. Προγραμματίσε τα επόμενα γεγονότα σύμφωνα με την 3.3.

**6. Χώρος  $B_{i,j}$  τροφοδοτείται:**

- α. Ενημέρωσε τον  $W_j$  και όλες τις αποθήκες στα ανάντη και τα κατόντη.
- β. Αλλάξε τις μεταβλητές καταστάσεων σύμφωνα με την ανωτέρω περίπτωση δ του εδαφίου 3.4 (Γ).
- γ. Προγραμματίσε τα επόμενα γεγονότα σύμφωνα με την 3.3.

**3.6 ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ**

Στην παράγραφο αυτή παρουσιάζονται τα πειραματικά αποτελέσματα από τη σύγκριση του αλγορίθμου διακεκριμένων γεγονότων (δ-γ) με έναν αλγόριθμο τεμάχιο-προς-τεμάχιο προσομοίωσης (τ-τ). Για το σκοπό αυτό γράφτηκαν δύο προγράμματα σε κώδικα FORTRAN 77. Εφαρμόστηκε πάλι η τεχνική κοινών τυχαίων αριθμών για την μελέτη των αλγορίθμων κάτω από τις ίδιες πειραματικές συνθήκες.

Ο αλγόριθμος δ-γ δεν είναι ακριβής, επειδή όπως αναφέρθηκε θεωρήσαμε συνεχές σύστημα παραγωγής. Στην περίπτωση αυτή οι στάθμες στους χώρους εναποθήκευσης είναι συνεχείς συναρτήσεις του χρόνου. Αντιθέτως, στο διακεκριμένο σύστημα αυτές παρουσιάζουν βηματικά άλματα στους χρόνους αφίξεων και αναχωρήσεων των κομματιών ενώ είναι σταθερές στα ενδιάμεσα διαστήματα. Επομένως και οι μέσες τιμές των θα είναι διαφορετικές για τα δύο συστήματα.

Μελετάμε πρώτα ένα σειριακό σύστημα το οποίο αποτελείται από  $n$  σταθμούς και  $n-1$  ενδιάμεσες αποθήκες χωρητικότητας 20 κομματιών η κάθε μία. Κάθε σταθμός έχει τρεις όμοιες μηχανές σε παράλληλη σύνδεση με ρυθμούς παραγωγής, βλάβης και επισκευής 10, 0.1 και 1 αντίστοιχα. Υπάρχουν αρχικά 10 κομμάτια σε κάθε αποθήκη και η περίοδος παραγωγής είναι 3000 μονάδες χρόνου.

Το Σχ. 13 δείχνει τη μεταβολή της σχετικής ταχύτητας CI του αλγόριθμου ο οποίος περιγράφηκε στην προηγούμενη παράγραφο ως προς τον  $\tau$ - $\tau$ , συναρτήσει του μεγέθους  $n$  του συστήματος. Αρχίζοντας από  $CI=13$  για μία γραμμή με δύο σταθμούς, ο αλγόριθμος γίνεται 22.7 φορές ταχύτερος του  $\tau$ - $\tau$  για μία γραμμή με  $n=50$  σταθμούς παραγωγής. Φαίνεται πως ο δεύτερος αλγόριθμος δαπανά πολύ χρόνο κάνοντας τους απαραίτητους υπολογισμούς για τη διανομή κάθε κομματιού από τις αποθήκες προς μία, κάθε φορά, μηχανή των κατάντη σταθμών. Δοθέντος επίσης ότι οι γειτονικοί σταθμοί έχουν τα ίδια χαρακτηριστικά, το σύστημα δεν έχει κόμβους επιβραδύνσεως της ροής και επομένως οι στάθμες των αποθηκών έχουν μικρές αυξομειώσεις. Αυτό για

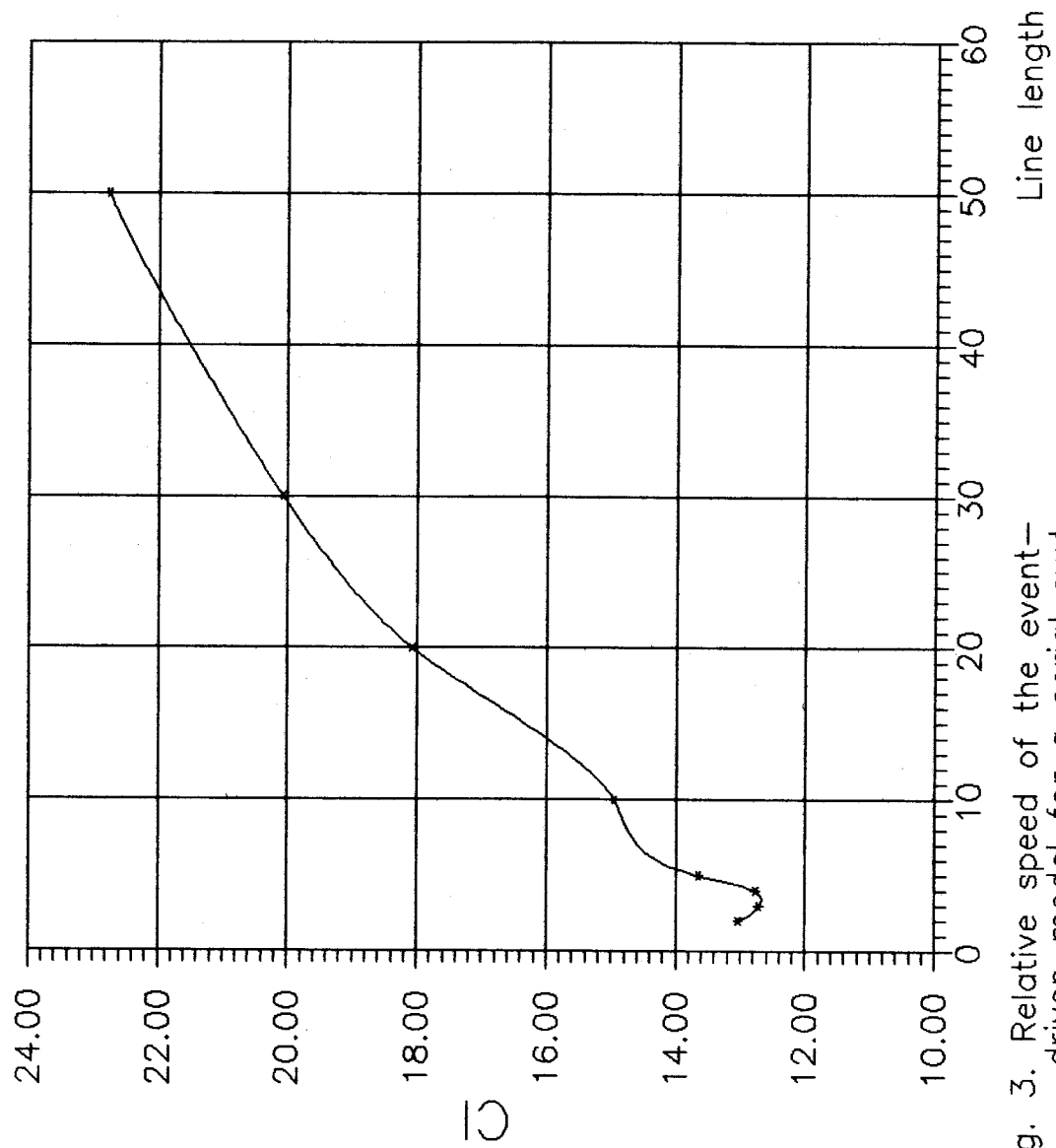


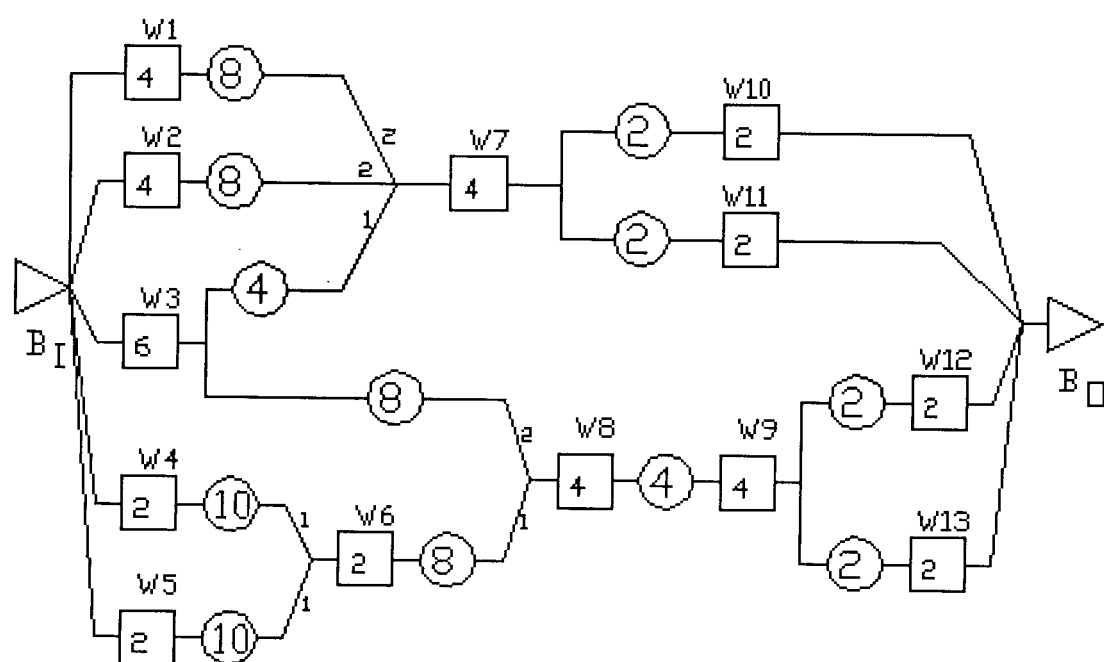
Fig. 3. Relative speed of the event-driven model for a serial system.

Σχήμα 13. Σχέση της σχετικής ταχύτητας με το πλήθος των μηχανών

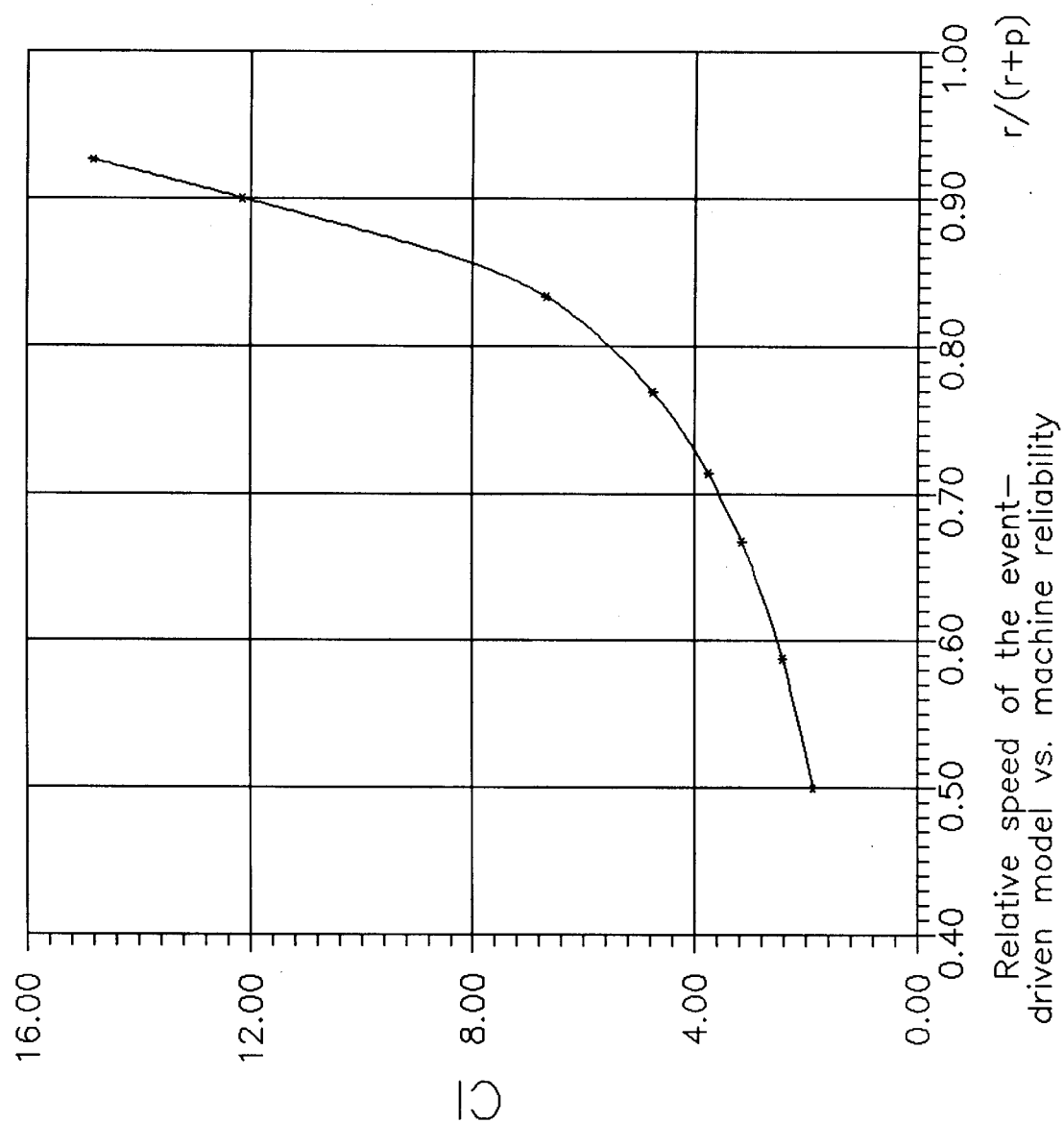
τον αλγόριθμο δ-γ συνεπάγεται μειωμένο αριθμό γεγονότων στις αποθήκες και δικαιολογεί τη μεγάλη του ταχύτητα.

Για το ίδιο σύστημα η προσέγγιση συνεχούς παραγωγής είναι εύρωστη. Τα σχετικά σφάλματα εκτίμησης των μέσων ρυθμών παραγωγής για όλες τις περιπτώσεις γραμμών που εξετάστηκαν ( $2 \leq n \leq 50$ ) δεν υπερέβησαν το 0.08%. Επί πλέον το μέγιστο σφάλμα για τις μέσες στάθμες ήταν 2%. Η μεγάλη αυτή ακρίβεια δικαιολογείται από τη γεωμετρία του συστήματος. Στην περίπτωση που εξετάζουμε, κάθε σταθμός παραγωγής τροφοδοτεί μία μόνο αποθήκη και οι ροές προϊόντων στα κατάντη των μηχανών συγκλίνουν. Από τη θεωρία μοντέλων διαχύσεως για την προσέγγιση σημειακών διαδικασιών (diffusion approximations of point processes) και τα οριακά θεωρήματα συστημάτων μεγάλης κυκλοφορίας (heavy traffic theorems) [44], προκύπτει ότι η ακρίβεια της προσέγγισης συνεχούς συστήματος αυξάνεται όταν μεγαλώνει ο αριθμός των παράλληλων μηχανών κάθε σταθμού και η διαθεσιμότητά του.

Στη συνέχεια εξετάζουμε ένα γενικότερο σύστημα το οποίο φαίνεται στο Σχ. 14. Οι αριθμοί μέσα στα τετράγωνα συμβολίζουν το πλήθος παράλληλων μηχανών κάθε σταθμού και οι αριθμοί μέσα στους κύκλους τις χωρητικότητες των αντίστοιχων αποθηκών. Οι συντελεστές συναρμολόγησης διαβάζονται κατά μήκος των κλάδων στα ανάντη των σταθμών. Οι ρυθμοί παραγωγής και επισκευής των μηχανών είναι 10 και 1 αντιστοίχως, ενώ οι ρυθμοί βλάβων παίρνουν τιμές στο διάστημα  $[0.008, 1]$ . Η αξιοπιστία μιας μηχανής  $M_{i,j}$  είναι το μέγεθος  $r_{i,j}/(r_{i,j}+p_{i,p})$ , και καθώς ο ρυθμός βλάβης μεταβάλλεται, κυμαίνεται στο διάστημα  $[0.5, 0.926]$ . Στο Σχ. 15 φαίνεται πώς αυξάνεται η σχετική ταχύτητα του αλγορίθμου δ-γ με την αξιοπιστία. Η



Σχήμα 14. Δίκτυο παραγωγής για τη σύγκριση των αλγορίθμων



Σχήμα 15. Σχέση της σχετικής ταχύτητας με την αξιοπιστία των μηχανών

μεταβολή αυτή είναι περίπου εκθετική. Για την περίπτωση  $r_{i,j}=r_{i,j=1}$ , η οποία είναι και η πιο δυσμενής για τον αλγόριθμο δ-γ, η σχετική ταχύτητα είναι 1.88. Τα γεγονότα μηχανή\_χαλάει, και μηχανή\_επισκευάζεται συμβαίνουν πολύ συχνά και προκαλούν διαταραχές στο δίκτυο (γειτονικές αποθήκες αδειάζουν ή γεμίζουν κ.ο.κ.), αυξάνοντας το υπολογιστικό φορτίο λόγω των σχέσεων (3.1)-(3.5) οι οποίες πρέπει να εκτελούνται σε κάθε γεγονός. Ωστόσο, τα υπάρχοντα συστήματα παραγωγής έχουν σχετικά αξιόπιστες μηχανές και μπορούν να αναλυθούν αποτελεσματικά από το προτεινόμενο μοντέλο.

Οι αποκλίσεις των εκτιμήσεων για το μέσο πλήθος κομματιών στις αποθήκες σε καμία περίπτωση δεν υπερέβησαν τα 0.8 κομμάτια. Οι χώροι που βρίσκονται κοντά στον  $B_0$ , δηλαδή την έξοδο του συστήματος, είχαν μικρές μέσες στάθμες και γι' αυτό οι τιμές των σχετικών σφαλμάτων εκεί έφθασαν μέχρι και 20%. Αντίθετα στους άλλους χώρους τα σχετικά σφάλματα ήταν μικρότερα του 5%. Επί πλέον η ακρίβεια στην εκτίμηση των μέσων ρυθμών παραγωγής των προϊόντων του συστήματος, η οποία είναι η βασικότερη παράμετρος του συστήματος, ήταν πολύ μεγάλη. Το μέγιστο σφάλμα για όλα τα είδη προϊόντων και επίπεδα αξιοπιστίας ήταν 1.77%.

Σε γενικές γραμμές η μέθοδος είναι πολύ πιο αποτελεσματική από την τεμάχιο-προς-τεμάχιο προσομοίωση και ιδιαίτερα ακριβής για μία μεγάλη ποικιλία από γεωμετρίες και παραμέτρους συστημάτων.

### 3.7 ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Τα διακεκριμένα δίκτυα παραγωγής είναι περίπλοκα συστήματα διακεκριμένων γεγονότων. Στο κεφάλαιο αυτό έγινε η προσέγγισή τους από συστήματα συνεχούς παραγωγής και προέκυψε ένα στοχαστικό μοντέλο της ίδιας μορφής με εκείνο των γραμμών παραγωγής. Οι εξισώσεις του μοντέλου είναι πολύ απλές και ο αντίστοιχος αλγόριθμος υβριδικής προσομοίωσης είναι εύκολο να γραφεί σε κάποιον κώδικα για τον υπολογιστή.

Το μοντέλο είναι αποτελεσματικό για την ανάλυση της μόνιμης κατάστασης συστημάτων παραγωγής τα οποία συναντώνται στην πράξη. Η βασική συνεισφορά στη λύση τέτοιων προβλημάτων είναι η ρεαλιστική παραδοχή πεπερασμένης χωρητικότητας στους χώρους παραγωγής και η δυνατότητα περιγραφής συστημάτων στα οποία η ροή προϊόντων ελέγχεται από υπολογιστή. Έχει αποδειχθεί [45] ότι η βέλτιστη πολιτική για τη λειτουργία συστημάτων παραγωγής είναι συνάρτηση των διακεκριμένων γεγονότων τα οποία εξετάσαμε. Σε κάθε κατάσταση του συστήματος  $X(t)$  οι ρυθμοί παραγωγής των μηχανών ρυθμίζονται βάσει του πρωτοκόλλου ελέγχου ώστε οι στάθμες των αποθηκών να φθάσουν σε κάποια οριακά επίπεδα όσο το δυνατόν γρηγορότερα και κατόπιν, εφ' όσον οι καταστάσεις των μηχανών μένουν αμετάβλητες, οι στάθμες διατηρούνται σταθερές. Τέτοιου είδους ρυθμίσεις μπορούν να ενσωματωθούν στον αλγόριθμο δ-γ εισάγοντας μία τέταρτη κατάσταση για τις αποθήκες, αυτήν η οποία αντιστοιχεί στις οριακές στάθμες. Με αυτόν τον τρόπο είναι δυνατό να περιγραφεί η λειτουργία αυτοματοποιημένων συστημάτων.



Με την επαναληπτική εκτέλεση του αλγορίθμου, ή την εφαρμογή της μεθόδου ανάλυσης διαταραχών, είναι επίσης δυνατή η εκτίμηση των κλίσεων της παραγωγικότητας ενός συστήματος ως προς τις παραμέτρους των μηχανών και αποθηκών του (ρυθμοί παραγωγής, αξιοπιστίες, και χωρητικότητες). Ο αλγόριθμος αποτελεί επομένως ένα αναλυτικό εργαλείο για τη σχεδίαση δικτύων παραγωγής.

## ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α: Μεταβατικοί χρόνοι στο συνεχές σύστημα

**Ιδιότητα 1:** Σε συστήματα συνεχούς παραγωγής οι επιβραδύνσεις των μηχανών λόγω των διαταραχών τις οποίες προκαλεί η εμφάνιση διακεκριμένων γεγονότων γίνονται ακαριαία.

Αποδεικνύουμε πρώτα μίαν άλλη ιδιότητα των συνεχών συστημάτων:

**Ιδιότητα 0:** Στο συνεχές σύστημα οι μεταβατικοί χρόνοι εισόδου και εξόδου των κομματιών από τις αποθήκες είναι 0 και επομένως δεν είναι απαραίτητοι για την περιγραφή της λειτουργίας του.

**Απόδειξη:** Το συνεχές σύστημα  $S$  είναι το όριο μιας ακολουθίας διακεκριμένων συστημάτων  $S_n$  όταν η μονάδα προϊόντος  $\Delta q = q_n = 1/n$  ( $n=1,2,\dots$ ) τείνει στο 0 και επομένως οι κύκλοι παραγωγής μίας μονάδας του νέου προϊόντος από τις μηχανές είναι αντιστρόφως ανάλογοι του  $n$ :

$$k_{i,n} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{NR_i} \quad (A.1)$$

Η σχέση αυτή δικαιολογείται από το γεγονός ότι αφού μία μηχανή  $M_i$  παράγει ένα κομμάτι σε χρόνο  $1/NR_i$ , θα χρειαστεί χρόνο  $(1/n)/NR_i$  για το κλάσμα  $1/n$  του κομματιού.

Αναφερόμαστε τώρα σε κάποια γραμμή παραγωγής  $S_n$  με  $N$  μηχανές όπως αυτές

που μελετήθηκαν στο Κεφάλαιο II. Σε κάθε αποθήκη  $B_i$  οι καθυστερήσεις μεταξύ διαδοχικών αφίξεων ή αναχωρήσεων οφείλονται στη διάρκεια είτε των κύκλων παραγωγής είτε των χρόνων επισκευής των γειτονικών μηχανών.

Στην πρώτη περίπτωση για τους χρόνους αυτούς ισχύει:

$$\tau_{m,i}^{(n)} \leq \max_{j=1,\dots,N} (k_{j,n}) = \max_j [1/(nNR_j)], \quad (A.2)$$

$m=1,2$  (αντίστοιχα για τους χρόνους αφίξεων και αναχωρήσεων) όπου  $k_{j,n}$  είναι η διάρκεια του κύκλου παραγωγής της  $M_{j,n}$ . Η δεξιά ποσότητα της παραπάνω σχέσης εκφράζει τη διάρκεια του κύκλου παραγωγής της πιο αργής μηχανής του συστήματος  $S_n$ . Καθώς  $n \rightarrow \infty$  η διάρκεια αυτή τείνει στο 0, άρα  $\tau_{m,i}=0$  για το συνεχές σύστημα. Η λειτουργία του συστήματος  $S$  λοιπόν περιγράφεται μόνο από τους ρυθμούς των μηχανών και τους μεταβατικούς χρόνους των επισκευών. Αν τώρα θεωρήσουμε ότι οι χαλασμένες μηχανές ισοδυναμούν με λειτουργικές οι οποίες κατά το ίδιο διάστημα επισκευής παράγουν με ρυθμό 0, τότε όλοι οι μεταβατικοί χρόνοι του συστήματος είναι 0, ΟΕΔ.

**Απόδειξη της Ιδιότητας 1:** Θεωρούμε το συνεχές σύστημα  $S$  και εξετάζουμε τις αλλαγές στους ρυθμούς παραγωγής των μηχανών εξ αιτίας των γεγονότων που συμβαίνουν.

Οι αλλαγές λόγω γεγονότων (εδάφια 2.5 (B) και (Γ)) αφορούν τους μεταβατικούς χρόνους των αντίστοιχων αποθηκών και τους ρυθμούς των μηχανών. Επειδή οι πρώτοι είναι 0 λόγω της προηγούμενης ιδιότητας, η

Ιδιότητα 1 είναι προφανής.

Εξετάζουμε μηχανές που βρίσκονται σε δύο καταστάσεις ταυτοχρόνως και αναφερόμενοι στο εδάφιο 2.5 (Δ) θα αποδείξουμε ότι η διάρκεια  $T$  ταυτόχρονων καταστάσεων είναι 0. Η πρόταση αυτή συμπληρώνει την Ιδιότητα 1 αφού η περίοδος  $T$  είναι ο χρόνος μετάδοσης της διαταραχής στο σύστημα. Χρησιμοποιώντας το συμβολισμό του εδαφίου αυτού,  $T = TE - t$ . Για τις περιπτώσεις  $\alpha$  και  $\beta$  από τις (2.28) και (2.30) βάσει της Ιδιότητας 0 προκύπτει ότι  $T=0$ .

Στην περίπτωση  $\gamma$  ο αριθμός  $N_i$  μονάδων προϊόντος ( $1/n$ ) οι οποίες θα παραχθούν από την  $M_i$  στο διάστημα  $T$  έχει ένα άνω φράγμα αφού από την Εξ. (2.34) προκύπτει για το σύστημα  $S_n$ :

$$-1+N_i \leq \text{INT} \left\{ \frac{\max[\tau_{2,i}] - \min[1/(nR_i)]}{\min[1/(nR_{i-1}) - 1/(nR_{i+1})]} \right\}, \quad i=2, \dots, N-1. \quad (\text{A.3})$$

Λόγω της (A.2)  $\max[\tau_{2,i}] = \varepsilon/n$ ,  $\varepsilon > 0$ . Πολλαπλασιάζοντας τους όρους μέσα στα  $\min$  και  $\max$  επί  $n$ , προκύπτει ότι οι νέες ποσότητες μέσα στις αγκύλες είναι φραγμένες αφού ο παρονομαστής είναι  $\neq 0$  (δοθέντος ότι ισχύει η (2.31) και ο  $N_i$  είναι άνω φραγμένος). Από τις (2.33) και (A.1) η διάρκεια ταυτόχρονων καταστάσεων

$$T = TE - t = \tau_{2,i} + \frac{-1+N_i}{n R_{i+1}} \quad (\text{A.4})$$

τείνει στο 0 καθώς  $n \rightarrow \infty$ .

Ομοίως και για τη δυαδική περίπτωση  $\delta$  προκύπτει ότι  $T \rightarrow 0$ . Τέλος η περίπτωση  $\varepsilon$  αναφέρεται σε μηχανές οι οποίες βρίσκονται και στις δύο καταστάσεις για άπειρο χρόνο. Αυτό συμβαίνει όταν οι μηχανές  $M_{i-1}$  και  $M_{i+1}$  έχουν ίσους ρυθμούς ενώ η  $M_i$  είναι ταχύτερη. Τότε αποκλείεται η ταυτόχρονη εμφάνιση των γεγονότων  $\chi\omega\rho\omicron\varsigma\_γεμίζει$  ή  $\chi\omega\rho\omicron\varsigma\_αδειάζει$ , αφού στο συνεχές σύστημα οι μεταβατικοί χρόνοι είναι 0 και όταν συμβεί κάποιο από τα γεγονότα αυτά ο ρυθμός της  $M_i$  προσαρμόζεται αμέσως στον ρυθμό της πιο αργής γειτονικής μηχανής, ΟΕΔ.

Από τη Ιδιότητα 1 προκύπτει επίσης ότι όταν το γεγονός  $\chi\omega\rho\omicron\varsigma\_γεμίζει$  υπερिशύει του γεγονότος  $\chi\omega\rho\omicron\varsigma\_αδειάζει$  ή αντίστροφα, τότε ταυτόχρονα συμβαίνουν και τα δευτερεύοντα γεγονότα  $\chi\omega\rho\omicron\varsigma\_τροφοδοτείται$  ή  $\chi\omega\rho\omicron\varsigma\_ελευθερώνεται$  αντιστοίχως, τα οποία είναι δυνατόν να εκτελεσθούν από τους αλγόριθμους των πρώτων. Για το λόγο αυτό ο αλγόριθμος [22] για συνεχείς γραμμές παραγωγής δεν εξετάζει τα δευτερεύοντα αυτά φαινόμενα ως ξεχωριστά γεγονότα.

## ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Β: Το πρωτόκολλο ΜΚΠΦ στο συνεχές σύστημα

Ιδιότητα 2: Ο κανόνας κυκλοφορίας ΜΚΠΦ στο δίκτυο παραγωγής συνεπάγεται κυκλικό πρωτοκόλλο φόρτωσης κομματιών στις κατάντεις αποθήκες ενός σταθμού. Επίσης στο αντίστοιχο συνεχές σύστημα, οι λειτουργικές μηχανές

των σταθμών έχουν ρυθμούς παραγωγής ανάλογους με τους ονομαστικούς των.

Εξετάζουμε πρώτα το πρωτόκολλο φόρτωσης στις αποθήκες  $B_{j,p}$ ,  $p=1,\dots,q$  του Σχ. 12 σελ. 90, οι οποίες βρίσκονται στα κατάντη ενός σταθμού  $W_j$ . Υποθέτουμε ότι είναι δεδομένες οι αρχικές συνθήκες για τη φόρτωση των  $q$  πρώτων κομματιών, τα οποία φθάνουν από το σταθμό με ρυθμό  $R$ . Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε επίσης ότι το πρώτο κομμάτι εισέρχεται στον  $B_{j,1}$  τη στιγμή  $1/R$ , το δεύτερο στον  $B_{j,2}$  τη στιγμή  $2/R$ , κ.ο.κ. Τη χρονική στιγμή  $(q+1)/R$  οι καθυστερήσεις από την τελευταία άφιξη σε κάθε αποθήκη είναι:

$(q+1)/R - 1/R$  , για την πρώτη αποθήκη,

$(q+1)/R - 2/R$  , για την δεύτερη, κλπ.,

και επομένως το κυκλικό σενάριο φόρτωσης θα επαναληφθεί σύμφωνα με τον κανόνα ΜΚΠΦ για τις αφίξεις των κομματιών  $(q+1) \div 2q$  κ.ο.κ.

Το ίδιο συμβαίνει κατά την άφιξη κομματιών με ρυθμό  $R$  στις παράλληλες μηχανές  $M_i$  ενός σταθμού από τα ανάντη, όταν οι ονομαστικοί των ρυθμοί είναι ίσοι. Οι μηχανές τροφοδοτούνται κυκλικά και, ανεξαρτήτως της τιμής του  $R$ , οι νέοι ρυθμοί παραγωγής των είναι ίσοι (και μικρότεροι από τους ονομαστικούς). Έχουμε επομένως κατανομή ανάλογα με τους ονομαστικούς ρυθμούς. Αν οι μηχανές έχουν διαφορετικούς ονομαστικούς ρυθμούς  $NR_i$  και ο ρυθμός τροφοδοσίας  $R$  είναι τουλάχιστον ίσος με την διαθεσιμότητα του σταθμού τότε οι ρυθμοί των μηχανών είναι  $NR_i$  και η Ιδιότητα 2 ικανοποιείται προφανώς.

Όταν οι ονομαστικοί ρυθμοί παραγωγής είναι διαφορετικοί τότε η καταγραφή των μεταβατικών χρόνων σε συστοιχίες μηχανών είναι περίπλοκη. Για παράδειγμα, θεωρούμε μία συστοιχία  $K$  παράλληλων μηχανών  $M_i$ ,  $i=1, \dots, K$  τη χρονική στιγμή  $t$ . Κάθε μηχανή  $M_i$  έχει ονομαστικό ρυθμό  $NR_i$  και έστω  $\tau_i(j)$ ,  $j=1, \dots, N_i$  το διάστημα που είναι αδρανής περιμένοντας το  $j$ -οστό κομμάτι. Υποθέτουμε ότι υπάρχει ένας χώρος άπειρης χωρητικότητας στα κατάντη, δηλαδή οι μηχανές δεν αποκλείονται, ενώ η τροφοδοσία τους από τα ανάντη γίνεται με ρυθμό  $R$  ο οποίος είναι μικρότερος του συνολικού ρυθμού παραγωγής (διαθεσιμότητα) της συστοιχίας  $\Delta$ . Τη στιγμή  $t$  κάποιες μηχανές περιμένουν ένα κομμάτι για να αρχίσουν να λειτουργούν, ενώ κάποιες άλλες βρίσκονται σε ένα ενδιάμεσο στάδιο επεξεργασίας του κομματιού των. Ο αριθμός των πιθανών καταστάσεων του συστήματος είναι τεράστιος λόγω του πλήθους των συνδυασμών οι οποίοι είναι δυνατόν να προκύψουν.

Για τη διαισθητική επιβεβαίωση της ιδιότητας 2 κάνουμε τώρα το εξής νοητικό πείραμα. Υποθέτουμε ότι το ανωτέρω τμήμα ανήκει σε κάποιο δίκτυο  $S_n$  και ο σταθμός έχει διαθεσιμότητα  $\Delta$ . Κάθε φορά που έρχεται μία μονάδα προϊόντος  $q=1/n$  στην είσοδο του σταθμού, τη χωρίζουμε σε  $K$  μέρη  $q_i$ ,  $i=1, \dots, K$  ώστε  $q_i=NR_i/(n\Delta)$ , τα οποία διοχετεύονται στις αντίστοιχες μηχανές διαδοχικά. Τότε οι χρόνοι επεξεργασίας κάθε μέρους είναι ίσοι μεταξύ τους:

$$\tau_{\varepsilon} = \frac{\text{(ποσότητα)}}{\text{(ρυθμός μηχανής } NR_i)} = \frac{NR_i/n\Delta}{NR_i} = \frac{1}{n\Delta} \quad (B.1)$$

Ωστόσο ο χρόνος  $\tau_a$  μεταξύ διαδοχικών αφίξεων μονάδων προϊόντος είναι  $1/(nR)$  και οι περίοδοι αδράνειας των μηχανών ίσες μεταξύ τους:

$$\tau_i = \tau_e - \tau_a \quad (B.2)$$

Επομένως, σύμφωνα με τον κανόνα ΜΚΠΦ, το ίδιο σενάριο επαναλαμβάνεται κατά την άφιξη του επόμενου κομματιού στην είσοδο του σταθμού. Στην περίπτωση αυτή η λειτουργία της συστοιχίας είναι περιοδική και ικανοποιούνται ταυτοχρόνως το κυκλικό πρωτόκολλο κυκλοφορίας κομματιών και η κατανομή φορτίου ανάλογα με τους ονομαστικούς ρυθμούς των μηχανών. Όταν  $n \rightarrow \infty$  τα ίδια ισχύουν και για το σύστημα S.

Το δυαδικό φαινόμενο συμβαίνει όταν η συστοιχία είναι αποκλεισμένη. Και πάλι οι ρυθμοί κατανέμονται ανάλογα.



## ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- [1] G.C. Hunt, "Sequential arrays of waiting lines", Operations Research, Vol. 4, No. 6, pp. 674-683, 1956.
- [2] P.J. Burke, "The output of a queueing system", Operations Research, Vol. 4, No. 6, pp. 699-704, 1956.
- [3] B. Avi-Itzak, and M. Yadin, "A sequence of two servers with no intermediate queue", Management Science, Vol. 11, No. 5, pp. 553-564, 1965.
- [4] G.T. Artamonov, "Productivity of a two-instrument discrete processing line in the presence of failures", Cybernetics (English translation), Vol. 12, No. 3, pp. 464-468, 1977.
- [5] S.B. Gershwin, and I.C. Schick, "Modeling and analysis of three-stage transfer lines with unreliable machines and finite buffers", Operations Research, Vol. 31, No. 2, pp. 354-380, 1983.
- [6] S.B. Gershwin, and O. Berman "Analysis of transfer lines consisting of two unreliable machines with random processing times and finite storage buffers", AIIE Transactions, Vol. 13, No. 1, pp. 1-11, 1981.
- [7] J. Wijngaard, "The effect of interstage buffer storage on the output of two unreliable production units in series, with different production rates", AIIE Transactions, Vol. 11, pp. 42-47, 1979.
- [8] P.P. Bocharov, "Queueing system of limited capacity with state dependent distributions of phase type", Automation and Remote Control (English translation), No. 10, pp. 31-38, 1985.
- [9] J.A. Buzacott, "Prediction of the efficiency of production

- systems without internal storage", International Journal of Production Research, Vol. 6, No. 3, pp. 173-188, 1968.
- [10] Y.A. Phillis, "A mathematical study of unreliable production systems", 16th Conference on Information Sciences and Systems, Princeton University, pp. 364-369, 1982.
  - [11] J.A. Buzacott, "Automatic transfer lines with buffer stocks", International Journal of Production Research, Vol. 5, No. 3, pp. 183-200, 1967.
  - [12] M.B. M. De Koster, "Estimation of line efficiency by aggregation", International Journal of Production Research, Vol. 25, No. 4, pp. 615-626, 1987.
  - [13] F.S. Hillier and R. Boling, "Toward characterizing the optimal allocation of work in production lines with variable operation times", in Advances in Operation Research of EURO II, Marc Reubens, Editor, North-Holland, Amsterdam.
  - [14] T.J. Sheskin, "Allocation of interstage storage along an automatic production line", AIIE Transactions, Vol. 8, No 1, pp. 146-152, 1976.
  - [15] B. L. N. Sastry, *Analysis of Two-machine Markovian Production Lines and Decomposition of Longer Lines*, Ph. D. Thesis, Department of Mechanical Engineering, Indian Institute of Technology, Bombay, India, 1985.
  - [16] Y.F. Choong and S.B. Gershwin, "A decomposition method for the approximate evaluation of capacitated transfer lines with unreliable machines and random processing times", IIE Transactions, Vol. 19, No. 2, pp. 150-159, 1987.
  - [17] K. Barten, "A queueing simulator for determining optimum inventory

- models in a sequential process", Journal of Industrial Engineering, Vol. 13, No. 4, pp. 245-252, 1962.
- [18] M.C. Freeman, "The effects of breakdowns and interstage storage on production line capacity", Journal of Industrial Engineering, Vol. 15, No 4, pp. 194-200, 1964.
- [19] D.R. Anderson, C.L.Moodie, "Optimal buffer storage capacity in production line systems", International Journal of Production Research, Vol. 7, No. 3, pp. 233-240, 1969.
- [20] Y.C. Ho, M.A. Eyler, and T.T. Chien, "A gradient technique for general buffer storage design in a production line", International Journal of Production Research, Vol. 27, No. 6, pp. 557-580, 1979.
- [21] Y.C. Ho, M.A. Eyler, T.T. Chien, "A new approach to determine parameter sensitivities of transfer lines", Management Science, Vol. 29, No. 6, pp. 700-714, 1983.
- [22] H. D'Angelo, M. Caramanis, S. Finger, A. Mavretic, Y. Phillis, and E. Ramsden, "Event-driven model of unreliable production lines with storage", International Journal of Production Research, Vol. 26, No. 7, pp. 1173-1182, 1988.
- [23] J.R. Jackson, "Networks of waiting lines", Operations Research, Vol. 5, pp. 518-521, 1957.
- [24] W.J. Gordon, and G.F. Newell, "Closed queueing systems with exponential servers", Operations Research, Vol. 15, pp. 254-265, 1967.
- [25] F. Baskett, K.M. Chandy, R.R. Muntz, and F.G. Palacios, "Open, closed and mixed networks of queues with different classes of customers", Journal of the Association for Computing Machinery, Vol. 22, pp. 248-260, 1975.

- [26] P.J. Courtois, *DECOMPOSABILITY: Queueing and Computer System Applications*, Academic Press, New York, 1977.
- [27] P.J. Kuehn, "Approximate analysis of general queueing networks by decomposition", *IEEE Transactions on Communications*, Vol. 27, No. 1, pp. 113-126, 1979.
- [28] Y. Takahashi, H. Miyahara, and T. Hasegawa, "An approximation method for open restricted queueing networks", *Operations Research*, Vol. 28, pp. 594-602, 1980.
- [29] B. Vinod, and T. Altiok, "Approximating unreliable queueing networks under the assumption of exponentiality", *Journal of the Operational Research Society*, Vol. 37, No. 3, pp. 309-316, 1986.
- [30] P.P. Bocharov, "Approximate method of design of open nonexponential queueing networks of finite capacity with losses or blocking", *Automation and Remote Control (English translation)*, No. 1, pp. 55-65, 1987.
- [31] M. Reiser, "A queueing network analysis of computer communication networks with window flow control", *IEEE Transactions on Communications*, Vol. 27, No. 8, pp. 1199-1209, 1979.
- [32] M. Reiser, and S.S. Lavenberg, "Mean-Value Analysis of closed multichain queueing networks" *Journal of the Association for Computing Machinery*, Vol. 27, No. 2, pp. 313-322, 1980.
- [33] R. Suri, R.R. Hildebrant, "Modeling flexible manufacturing systems using Mean-Value Analysis", *Journal of Manufacturing Systems*, Vol. 3, No. 1, pp. 27-38, 1984.
- [34] D.L. Iglehart, and G.S. Shedler, *Regenerative Simulation of Response Times in Networks of Queues*, *Lecture Notes in Control and Informaiton Sciences*, Springer-Verlag, New York, Vol. 26,

1980.

- [35] Y.C. Ho, and X.R.Cao, "Perturbation analysis and optimization of queueing networks", Journal of Optimization Theory and Applications, Vol. 40, No 4, pp. 559-582, 1983.
- [36] X.R. Cao, "Realization probability in closed Jackson queueing networks and its application", Advances in Applied Probability, Vol. 19, pp. 708-738, 1987.
- [37] P. Heidelberger, X.R. Cao, M.A. Zazanis, and R. Suri, "Convergence properties of infinitesimal perturbation analysis estimates", Management Science, Vol. 34, No 11, pp. 1281-1302, 19.
- [38] Y.C. Ho, "Performance evaluation and perturbation analysis of discrete event dynamic systems", IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 32, No. 7, pp. 563-572, 1987.
- [39] A.A.B. Pritsker, and C.G. Pegden, *Introduction to Simulation and SLAM*, Systems Publishing Company, West Lafayette, Indiana, 1979.
- [40] L.E. Hanifin, *Increased Transfer Line Productivity Utilizing Systems Simulation*, D. Eng. thesis, University of Detroit, 1975.
- [41] A. Law, and D. Kelton, *Simulation Modeling and Analysis*, McGraw-Hill, New York, 1982.
- [42] T. Altiok and S. Stidham, "A note on transfer lines with unreliable machines, random processing times, and finite buffers", IIE Transactions, Vol. 14, No. 2, pp. 125-127, 1982.
- [43] D.L. Iglehart, and W. Whitt, "Multiple channel queues in heavy traffic II. Sequences, networks and batches", Advances in Applied Probability, Vol. 2, No 2, pp. 355-369, 1970.