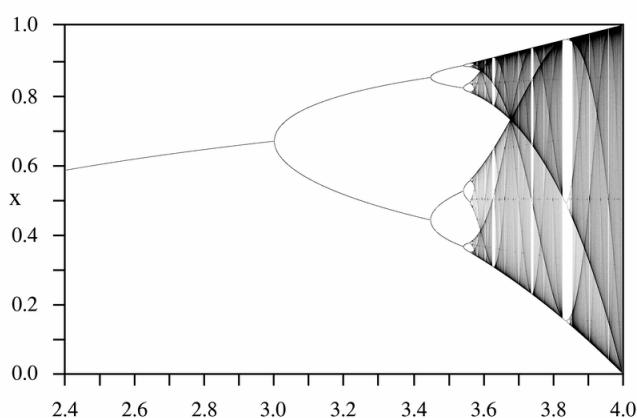




Πολυτεχνείο Κρήτης

**Τμήμα Μηχανικών Παραγωγής &
Διοίκησης**

Μεθοδολογική Ανάπτυξη & Ανάλυση Χαοτικών Μοντέλων



**Διατριβή που υπεβλήθη για την μερική ικανοποίηση των απαιτήσεων για
την απόκτηση Διδακτορικού Διπλώματος**

υπό

Ιωάννη Κ. Ρομπογιαννάκη

Χανιά Φεβρουάριος 2006

Copyright © 2006 Ιωάννης Κ. Ρομπογιαννάκης

Η διατριβή του Ιωάννη Κ. Ρομπογιαννάκη εγκρίνεται ομόφωνα (σύμφωνα με την απόφαση της εξεταστικής επιτροπής της 17-10-2006):

Η ΕΠΙΤΡΟΠΗ

ΥΠΟΓΡΑΦΗ

1. Χρήστος Σκιαδάς

2. Αθανάσιος Μυγδαλάς

3. Κωνσταντίνος Ζοπουνίδης

4. Εμμανουήλ Πετράκης

5. Νικόλαος Μπιλάλης

6. Βασίλειος Μουστάκης

7. Ευάγγελος Γρηγορούδης

Στην οικογένεια μου

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ	9
ΣΥΝΤΟΜΟ ΒΙΟΓΡΑΦΙΚΟ ΣΗΜΕΙΩΜΑ	10
ΠΕΡΙΛΗΨΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗΣ	12
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1	14
Η Χαοτική Θεωρία από την Κίνηση του Ηλιακού μας Συστήματος στην Διοίκηση Επιχειρήσεων ..	14
1.1 Εισαγωγή – Ιστορική αναδρομή.....	14
1.2 Η νέα πραγματικότητα στη διοίκηση και η εφαρμογή της χαοτικής θεωρίας	17
1.2.1 Η χρησιμότητα της θεωρίας των χαοτικών συστημάτων.....	18
1.2.2 Γραμμικά και μη-γραμμικά μοντέλα	18
1.2.3 Οι επιπτώσεις της χαοτικής θεωρίας στο μάνατζμεντ.....	19
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2	20
Κρίσιμα Σημεία Μη-Γραμμικών Δυναμικών Συστημάτων	20
Εισαγωγή	20
2.1 Ύπαρξη και μοναδικότητα.....	21
2.2 Αυτόνομα συστήματα.....	21
2.2.1 Χώρος φάσης – τροχιές – κρίσιμα σημεία	22
2.2.2 Κρίσιμα σημεία και γραμμικοποίηση	23
2.2.3 Ταξινόμηση κρίσιμων σημείων	24
2.3 Γραμμικά συστήματα	25
2.3.1 Γραμμικά συστήματα δύο διαστάσεων	25
2.3.2 Γραμμικά συστήματα τριών διαστάσεων	29
2.4 Κρίσιμα σημεία για μη γραμμικά συστήματα	30
2.5 Ένα παράδειγμα εφαρμογής.....	32
2.6 Ανάλυση ευστάθειας λύσεων ισορροπίας	34

2.6.1 Ευστάθεια των περιοδικών λύσεων	35
2.6.2 Εξισώσεις με σταθερούς συντελεστές	35
2.6.3 Εξισώσεις με περιορισμένους συντελεστές	37
2.6.4 Εξισώσεις με περιοδικούς συντελεστές	37
2.6.4.1 Γραμμικοποίηση περιοδικών λύσεων	39
2.6.5 Ανάλυση ευστάθειας μέσω γραμμικοποίησης	40
2.6.5.1 Ασυμπτωτική ευστάθεια της ς λύσης $x = 0$	40
2.6.5.2 Αστάθεια της τετριμμένης λύσης	41
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3	42
Η Ταυτότητα των Χαστικών Μοντέλων	42
3.1 Ανάπτυξη της Χαστικής Θεωρίας	42
3.2 Διακριτά συστήματα	43
3.2.1 Κρίσιμα σημεία διακριτού συστήματος	44
3.2.2 Ταξινόμηση κρίσιμων σημείων γραμμικών συστημάτων	44
3.2.2.1 Μονοδιάστατα γραμμικά διακριτά συστήματα	44
3.2.2.2 Γραμμικά διακριτά συστήματα περισσοτέρων διαστάσεων	46
3.2.3 Μη γραμμικά διακριτά συστήματα	46
3.2.3.1 Μονοδιάστατα μη γραμμικά διακριτά συστήματα	46
3.2.3.1 Μη γραμμικά διακριτά συστήματα μεγαλύτερων διαστάσεων	49
3.3 Δευτεροβάθμιες απεικονίσεις	49
3.3.1 Η γέννηση μιας περιόδου – 2 τροχιάς	51
3.3.2 Η γέννηση μιας περιόδου – 4 τροχιάς	52
3.3.3 Υπερβαίνοντας την οριακή τιμή c_{∞}	54
3.3.4 Το θεώρημα περιόδου-3	55
3.3.5 Το θεώρημα του Sarkovosky	55
3.4 Εκθέτες Liapunov	56
3.5 Το λογιστικό μοντέλο	61
3.5.1 Ανάλυση συμπεριφοράς της λογιστικής εξίσωσης	61
3.5.2 Το φαινόμενο του δυϊσμού	64
3.5.3 Ευαισθησία στις αρχικές συνθήκες	65
3.5.4 Περιπτώσεις όπου $k > 4$	66
3.5.5 Συμπεράσματα-ιδιότητες των χαστικών συστημάτων	68
3.6 Η λογιστική οικογένεια των χαστικών μοντέλων	69
3.6.1 The stock (or partial) adjustment model	69
3.6.2 The “Roos” logistic or modified stock-adjustment model	69
3.6.3 The “Mansfield” logistic model	70

3.6.4 The “Simple” logistic model.....	71
3.6.5 Δυναμικές ιδιότητες των μοντέλων	72
3.6.6 Ανάλυση του stock adjustment model	73
3.6.7 The simple logistic model.....	74
3.6.8 Δυναμική συμπεριφορά του Mansfield logistic	76
3.6.9 Η δυναμική του Roos logistic μοντέλου	76
3.7 Ελκυστές.....	77
3.7.1 Ο ελκυστής Ikeda.....	78
3.7.2 Ο ελκυστής Henon	80
3.7.3 Το μοντέλο του Holmes.....	82
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4.....	83
Ανάπτυξη και Μελέτη Χαοτικών Μοντέλων	83
Εισαγωγή	83
4.1 Περιστροφή και μεταφορά συστήματος.....	83
4.2 Ανάκλαση συστήματος.....	91
4.3 Η σημασία της χρονικής υστέρησης στα χαοτικά συστήματα	94
4.3.1 Εξισώσεις χρονικής υστέρησης.....	94
4.3.2 Χαοτικά μοντέλα με χρονική υστέρηση.....	96
4.4 Λογιστικό μοντέλο στο οποίο εφαρμόζεται χρονική υστέρηση.....	100
4.5 Περιπτώσεις με μεγάλη χρονική υστέρηση.....	104
4.5.1 Το μοντέλο Glass.....	104
4.5.2 Σύγκριση λογιστικού με το μοντέλο Glass	106
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5.....	108
Μια Νέα Μεθοδολογία Ανάλυσης Χαοτικών Συστημάτων	108
Εισαγωγή	108
5.1 Το αντίστροφο λογιστικό μοντέλο.....	108
5.1 Γεωμετρικές ιδιότητες του λογιστικού μοντέλου.....	111
5.3.1 Το διάγραμμα δυϊσμού.....	115
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6.....	119
Η Οικογένεια των GRM1 Μοντέλων.....	119
Εισαγωγή	119
6.1 Η οικογένεια των GRM μοντέλων.....	121
6.1.2 Η λύση της διαφορικής εξίσωσης του GRM μοντέλου	122
6.1.3 Η περίπτωση $n = 1$	123
6.2 Το μοντέλο GRM1	124
6.2.1 Καθορισμός των παραμέτρων του μοντέλου.....	128
6.2.2 Προσομοιώσεις.....	129

6.3 Έλεγχος χαστικών συστημάτων	134
6.3.1 Η μέθοδος OGY	135
6.3.1.1 Η βασική ιδέα	135
6.3.1.2 Μια μονοδιάστατη εφαρμογή	136
6.3.2 Η διαδικασία ελέγχου για συστήματα δύο διαστάσεων	138
6.3.2.1 Σταθεροποίηση ενός κρίσιμου σημείου	138
6.4 Έλεγχος της χαστικής δυναμικής του GRM1 μοντέλου	142
6.4.1 Περιγραφή της χαστικής δυναμικής	142
6.4.2 Έλεγχος της χαστικής δυναμικής	143
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7	147
Συμπεράσματα και Μελλοντικές Επεκτάσεις	147
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ	149
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ	155
Αλγόριθμοι Προσομοίωσης Χαστικών Μοντέλων	155

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Με την ολοκλήρωση της διατριβής αυτής αισθάνομαι την ανάγκη να εκφράσω τις ιδιαίτερες ευχαριστίες μου στον επιβλέποντα καθηγητή κ. Χρήστο Σκιαδά για την συνεχή καθοδήγηση και υποστήριξη του. Επίσης ευχαριστώ τα μέλη της τριμελούς συμβουλευτικής επιτροπής, τον Καθηγητή κ. Αθανάσιο Μυγδαλά και τον Λέκτορα κ. Ευάγγελο Γρηγορούδη.

Οφείλω επίσης να ευχαριστήσω την σύζυγο μου Βέτα, τον γιό μου Κωνσταντίνο για την υποστήριξή τους καθώς και τους συναδέλφους και φίλους κ. Αποστόλου Απόστολο και κ. Βιδάκη Νεκτάριο για τη συνεργασία, τις συμβουλές και τη στήριξή τους στη διάρκεια εκπόνησης της παρούσας διατριβής.

Τέλος θα ήθελα να ευχαριστήσω τα μέλη του εργαστηρίου Ανάλυσης Δεδομένων και Πρόβλεψης του Πολυτεχνείου Κρήτης για την συνεχή υποστήριξή τους και βοήθειά τους σε πλήθος καθημερινών προβλημάτων που προέκυπταν κατά τη διάρκεια εκπόνησης της διατριβής, και ιδιαίτερα τον κ. Γεώργιο Ατσαλάκη και τον κ. Ματαλιωτάκη Γεώργιο.

ΣΥΝΤΟΜΟ ΒΙΟΓΡΑΦΙΚΟ ΣΗΜΕΙΩΜΑ

Ο Ιωάννης Κ. Ρομπογιαννάκης γεννήθηκε στο Ηράκλειο της Κρήτης τον Φεβρουάριο του 1973. Το 1996 απέκτησε το Δίπλωμα του Ηλεκτρονικού και Μηχανικού Υπολογιστών από το αντίστοιχο τμήμα του Πολυτεχνείου Κρήτης και το 1998 το Μεταπτυχιακό Δίπλωμα Ειδίκευσης του Τμήματος Ηλεκτρονικών και Μηχανικών Υπολογιστών του Πολυτεχνείου Κρήτης.

Είναι μέλος του Τεχνικού Επιμελητηρίου Ελλάδας, ενώ διαθέτει πτυχίο μελετητή Β΄ τάξης από το ΥΠΕΧΩΔΕ στις κατηγορίες Μελέτες Οργάνωσης & Επιχειρησιακής Έρευνας και Ηλεκτρολογικές & Ηλεκτρονικές Μελέτες ενώ είναι πιστοποιημένος εισηγητής επαγγελματικής κατάρτισης από το Ε.ΚΕ.ΠΙΣ. Είναι αξιολογητής του Υπουργείου Ανάπτυξης για τα πολυετή επιχειρηματικά σχέδια του νέου αναπτυξιακού νόμου Ν.3299/2004, και αξιολογητής της Κοινωνίας της Πληροφορίας ΑΕ για τα έργα Ιδιωτικού Τομέα.

Διαθέτει μεγάλη εκπαιδευτική πείρα καθώς από το 1996 έως το 1998 προσέφερε επικουρικό εκπαιδευτικό έργο στα πλαίσια μαθημάτων του Τμήματος Ηλεκτρονικής και Μηχανικών Υπολογιστών και από το 1998 - 2003 του Τομέα Οργάνωσης και Διοίκησης του Τμήματος Μηχανικών Παραγωγής και Διοίκησης του Πολυτεχνείου Κρήτης. Επίσης από το 2002 έως και σήμερα διδάσκει ανελλιπώς το μάθημα των Πληροφοριακών Συστημάτων Διοίκησης στο Τμήμα Οργάνωσης και Διοίκησης και το μάθημα του Προγραμματισμού Ι στο Τμήμα Ηλεκτρολογίας του ΑΤΕΙ Κρήτης.

Έχει συμμετάσχει ως επιστημονικός συνεργάτης σε αρκετά ερευνητικά προγράμματα με σημαντικότερα: α) το πρόγραμμα **HERMES** για **Συστήματα Πολυμέσων Υψηλής Απόδοσης (High Performance Multimedia Information Systems)** από τον Οκτώβριο του 1997 έως τον Ιούνιο του 1998 με αντικείμενο απασχόλησης την ανάπτυξη και την μελέτη νέων αλγορίθμων ταυτόχρονης δρομολόγησης / εξυπηρέτησης χρονικά ευαίσθητων και μη ευαίσθητων αιτήσεων για πρόσβαση σε μοντέρνα συστήματα αποθήκευσης μέσω ενός δικτύου διασυνδεδεμένων εξυπηρετητών αποθήκευσης (Storage Servers), β) το πρόγραμμα **ECOS OUVERTURE SME-ISO** από τον Φεβρουάριο του 1999 έως τον Ιούνιο του 1999 με αντικείμενο απασχόλησης την διοικητική και τεχνική υποστήριξη του προγράμματος καθώς και τη σχεδίαση και την ανάπτυξης εφαρμογής πολυμέσων για τη διάχυση και τη διάδοση των αποτελεσμάτων του προγράμματος, γ) το πρόγραμμα **RECITE II - INNOREGIO** από τον Οκτώβριο του 1999 έως τον Ιούνιο 2002 με αντικείμενο απασχόλησης την διοικητική και τεχνική υποστήριξη του προγράμματος καθώς και την οργάνωση και λειτουργία του Παρατηρητηρίου Καινοτομίας της Περιφέρειας Κρήτης δ) το πρόγραμμα **ΑΡΧΙΜΗΔΗΣ II** από τον Ιούνιο του 2005 έως τον Δεκέμβριο του 2006 με αντικείμενο ενασχόλησης την ανάπτυξη αλγορίθμων στα

πλαίσια του έργου «Βελτιστοποίηση Τεχνολογικών Παραμέτρων Υψηλόστροφων Κατεργασιών – Super Cutters».

Από το 2001 έως το 2002 διετέλεσε Γενικός Διευθυντής της εταιρείας συμβούλων **THEMA Ανάπτυξη Κρήτης ΕΠΕ** ενώ από το 2002 έως το 2004 εργάστηκε στην **Αναπτυξιακή Κρήτης** (Ενδιάμεσο Φορέα Διαχείρισης του Υπουργείου Ανάπτυξης για το ΕΠΑΝ στην Περιφέρεια Κρήτης) ως υπεύθυνος διαχείρισης και υλοποίησης των προγραμμάτων τουρισμού και μεταποίησης (συνολικού προϋπολογισμού 30.000.000 €). Σήμερα εργάζεται ως τεχνικός σύμβουλος για την εταιρεία **Unitech Hellas Ltd** αναλαμβάνοντας την ανάπτυξη και διαχείριση μεγάλων ιδιωτικών έργων καθώς και την υποστήριξη δημοσίων φορέων για την διαχείριση έργων του Γ΄ ΚΠΣ (τεχνικός σύμβουλος διαχείρισης ΠΕΠ Στερεάς Ελλάδας). Επίσης εκ μέρους της εταιρείας **Apintech Ltd** έχει αναλάβει υπεύθυνος υλοποίησης για την Περιφέρεια της Κρήτης του έργου «Κοινωνική Οικονομία στην Ελλάδα – Πλαίσιο, Πιλοτικές Δοκιμές και Δομές Στήριξης» (προϋπολογισμού 400.000 €) στα πλαίσια δράσης του προγράμματος Equal του οποίου ηγείται ο ΕΟΜΜΕΧ.

Είναι συγγραφέας ή συμμετείχε στη συγγραφή ερευνητικών εκθέσεων και άρθρων σε επιστημονικά περιοδικά και πρακτικά συνεδρίων. Έχει συμμετάσχει στη διοργάνωση αρκετών επιστημονικών συνεδρίων και έχει αρκετές παρουσιάσεις σε επιστημονικά συνέδρια.

Τα ερευνητικά του ενδιαφέροντα περιλαμβάνουν τα χαστικά συστήματα, την ανάλυση δεδομένων και την πρόβλεψη, την διαχείριση μεγάλων έργων και τον σχεδιασμό και την μελέτη απόδοσης συστημάτων επικοινωνίας υπολογιστών και πληροφοριακών συστημάτων.

Για αρκετά χρόνια υπήρξε μέλος των οργάνων διοίκησης του Πολυτεχνείου Κρήτης, μέλος της Γενικής Συνέλευσης και της Γενικής Συνέλευσης Ειδικής Σύθεσης του Τμήματος Μηχανικών Παραγωγής & Διοίκησης του Πολυτεχνείου Κρήτης (1999 – 2003) καθώς και μέλος της Συγκλήτου του Πολυτεχνείου Κρήτης (1999 – 2003).

ΠΕΡΙΛΗΨΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗΣ

Τα τελευταία χρόνια υπάρχει ένα έντονο ενδιαφέρον από διάφορους τομείς της επιστήμης για την θεωρία των χαστικών συστημάτων, ένα νέο ουσιαστικά πεδίο έρευνας και μελέτης το οποίο έχει την δυνατότητα να προσφέρει μια διαφορετική εξήγηση για φαινομενικά τυχαίες συμπεριφορές διαφόρων παραμέτρων και μεταβλητών σε συστήματα που περιγράφουν φαινόμενα των παραπάνω επιστημονικών πεδίων. Σε αντίθεση με αυτό που αντιλαμβάνεται κάποιος όταν ακούσει την λέξη χάος, η συμπεριφορά μιας μεταβλητής ή ενός χαστικού μοντέλου δεν είναι τυχαία αλλά ντετερμινιστική, κάτι το οποίο συνεπάγεται την δυνατότητα της προβλεψιμότητας στο χρόνο.

Αν θέλαμε λοιπόν μέσα σε λίγες γραμμές να καθορίσουμε τις βασικές αρχές ή ιδιότητες μιας χαστικής χρονοσειράς ή ενός χαστικού συστήματος θα λέγαμε ότι καταρχάς ορισμένες από τις συμπεριφορές μιας χαστικής χρονοσειράς φαίνονται τυχαίες. Οι χαστικές διακυμάνσεις, όμως, διαφέρουν από τις τυχαίες διακυμάνσεις. Η τιμή της παραμέτρου ενός τυχαίου συστήματος στο χρόνο $t+1$ δεν εξαρτάται από την τιμή της παραμέτρου στο χρόνο t ή οποιαδήποτε άλλη στιγμή. Η τιμή της παραμέτρου ενός χαστικού συστήματος στο χρόνο $t+1$ εξαρτάται από την τιμή της παραμέτρου του συστήματος στο χρόνο t . Επομένως, σε αντίθεση με την τυχαία συμπεριφορά, η χαστική συμπεριφορά είναι αιτιοκρατική. Δεύτερον, ποιοτικές αλλαγές συμπεριφοράς παρακινήμενες από τη μη γραμμική δυναμική μπορούν να εξακριβωθούν μόνο με την εξέταση της χρονοσειράς για ένα πολύ μεγάλο χρονικό διάστημα. Σε σύντομα διαλείμματα, η σειρά μπορεί να φανεί είτε σταθερή ή εξαιρετικά κυμαινόμενη και η πραγματική υποκειμενική της δομή μπορεί να παρεξηγηθεί. Τρίτον, οι συμπεριφορές δεν παραμένουν σταθερές αλλά φαίνονται δυναμικές και συνεχώς μεταβαλλόμενες από την μία κατάσταση στην άλλη. Τέταρτον, επειδή οι αλλαγές συμπεριφοράς είναι το αποτέλεσμα εσωτερικής δυναμικής, είναι δύσκολο να μοντελοποιηθούν οι συμπεριφορές μέσω ενός συστήματος γραμμικών εξισώσεων. Πέμπτον, καθώς η μη γραμμικότητα είναι απαραίτητη για να οριστεί ένα σύστημα ως χαστικό, όλα τα μη γραμμικά συστήματα δεν είναι χαστικά. Έκτον, ένα χαστικό σύστημα επηρεάζεται από τις αρχικές τιμές των παραμέτρων του. Ακόμη και οι ασήμαντες αλλαγές στις αρχικές τιμές των παραμέτρων προκαλούν δραστικές αλλαγές στην συμπεριφορά του. Το συμπέρασμα είναι ότι πολύ μικρές αλλαγές στην είσοδο μπορούν να επιφέρουν πολύ μεγάλες αλλαγές στην έξοδο. Όμως, αυτή η ακραία ευαισθησία στις αρχικές συνθήκες είναι χαρακτηριστικό μόνο των χαστικών συστημάτων και όχι όλων των μη γραμμικών συστημάτων. Τέλος, επειδή η αρχική αιτία αλλαγών στην συμπεριφορά οφείλεται στην εσωτερική δυναμική του συστήματος, χαστικές συμπεριφορές υπάρχουν ακόμη και όταν δεν αλλάζει το εξωτερικό περιβάλλον.

Βασικός στόχος της παρούσας διατριβής ήταν:

- **Η ανάπτυξη μιας νέας μεθοδολογίας δημιουργίας και ανάλυσης χαστικών μοντέλων** που θα έχουν την δυνατότητα να περιγράψουν με συγκεκριμένο μαθηματικό τρόπο φαινόμενα και καταστάσεις που σε διαφορετική περίπτωση δεν υπάρχει η δυνατότητα περιγραφής τους. Για το σκοπό αυτό αναπτύχθηκαν **νέες μέθοδοι**, όπως αυτή της μεταφοράς και της στροφής μιας απλής μαθηματικής απεικόνισης και της προσθήκης μικρών ή μεγάλων παραγόντων χρονικής υστέρησης

για την ανάπτυξη ενός χαστικού μοντέλου. Στην περίπτωση της στροφής η συνάρτηση περιγραφής της γωνίας στροφής είναι το βασικό εργαλείο, με την κατάλληλη χρήση του οποίου μπορεί να αναπτυχθεί μια μεγάλη σειρά από νέα χαστικά μοντέλα πολύπλοκα και μη που έχουν την δυνατότητα περιγραφής πολύπλοκων φαινομένων και καταστάσεων. Χρησιμοποιήθηκαν διάφορες συναρτήσεις για την γωνία στροφής και τα αποτελέσματα τα οποία παρουσιάζονται είναι ιδιαίτερα εντυπωσιακά (κεφάλαιο 4).

- ▶ **Η ανάπτυξη και απόδειξη μιας νέας προσέγγισης της σημασίας ύπαρξης χρονικής υστέρησης στην συμπεριφορά των χαστικών συστημάτων.** Η χρονική υστέρηση είναι ένα από τα βασικότερα εργαλεία τα οποία χρησιμοποιήσαμε στην μεθοδολογία μας. Η χρονική υστέρηση είναι ένα φαινόμενο που εμφανίζεται σε όλα σχεδόν τα οικονομικά, κοινωνικά, φυσικά, πολιτικά συστήματα. Ως απλά παραδείγματα μπορούν να αναφερθούν η επίδραση που μπορεί να έχει μια παραγγελία η οποία δόθηκε μια χρονική στιγμή και εξυπηρετήθηκε μια άλλη (εφοδιαστική αλυσίδα), η μεταγενέστερη κατανάλωση των αγαθών που αποκτά κάποιος, η επέμβαση μιας κεντρικής τράπεζας για να ισορροπήσει την ισοτιμία ενός νομίσματος, κ.τ.λ. Η ύπαρξη χρονικής υστέρησης σε ένα σύστημα είναι ένας σημαντικός παράγοντας εμφάνισης της χαστικής του συμπεριφοράς αλλά και, όπως συμπερασματικά καταλήγουμε στο αντίστοιχο κεφάλαιο, έχει τόσο μεγάλη επιρροή στην τελική συμπεριφορά, που υπερκαλύπτει την ίδια την εξίσωσης περιγραφής. Θα δούμε δηλαδή πώς δύο διαφορετικά μοντέλα, με την εφαρμογή των κατάλληλων όρων χρονικής υστέρησης, συμπεριφέρονται πανομοιότυπα (κεφάλαιο 4).
- ▶ **Η ανάδειξη των προβλημάτων που παρουσιάζει το λογιστικό μοντέλο και η ανάπτυξη εναλλακτικών μοντέλων** που εμφανίζουν παρόμοια συμπεριφορά, για την αντιμετώπιση των προβλημάτων αυτών. Το τμήμα αυτό θεωρείται πολύ σημαντικό καθώς λόγω της απλότητας της λογιστικής εξίσωσης σε πολλές πραγματικές εφαρμογές (κυρίως οικονομικές) το τελικό δυναμικό μοντέλο περιγραφής της εφαρμογής ανάγεται τελικά σε μια μορφή του λογιστικού μοντέλου (κεφάλαιο 5).
- ▶ **Η ανάπτυξη μιας νέας μεθοδολογίας ανάλυσης χαστικών συστημάτων. Προτείνεται και εφαρμόζεται η έννοια της αντίστροφης εξίσωσης με σκοπό την γραφική εύρεση των σημείων διίσμού ενός χαστικού μοντέλου.** Το αντίστροφο λογιστικό μοντέλο αποδεικνύεται ότι είναι ένα χρήσιμο εργαλείο για την ανάλυση και του κλασικού λογιστικού μοντέλου για την εύρεση των σημείων διίσμού διαφόρων τάξεων με μεγάλη ακρίβεια. Για την εύρεση των σημείων διίσμού χρησιμοποιούνται τόσο τα σημεία τομής του λογιστικού και του αντίστροφου λογιστικού όσο και της κύριας διαγώνιου και του σημείου που η εφαπτομένη στο σημείο τομής της διαγώνιου και του λογιστικού μοντέλου είναι -1 (κεφάλαιο 5).
- ▶ **Στην παρούσα διατριβή τέλος προτείνουμε και μελετάμε ένα μοντέλο το οποίο στην χαστική περιοχή λειτουργίας του μπορεί να εκφράσει την ασυμμετρία κατά την διάρκεια της διαδικασίας διάχυσης μιας καινοτομίας,** πράγμα που αδυνατούν να πράξουν σχεδόν όλα τα υπόλοιπα προτεινόμενα μοντέλα. Η δυνατότητα αυτή αποδεικνύεται με την προσομοίωση του μοντέλου και την σύγκριση με τα πραγματικά δεδομένα μιας διαδικασίας διάχυσης καινοτομίας. Τέλος αναπτύσσεται και εφαρμόζεται η μεθοδολογία ελέγχου της χαστικής περιοχής και η σταθεροποίηση της συμπεριφοράς του προτεινόμενου μοντέλου σε μια εκ των προτέρων καθορισμένη κατάσταση (κεφάλαιο 6).

Για την παρουσίαση των αποτελεσμάτων χρησιμοποιήθηκε η μέθοδος της προσομοίωσης της εξίσωσης ή των εξισώσεων περιγραφής των χαστικών μοντέλων. Αναπτύχθηκαν τα αντίστοιχα τμήματα λογισμικού σε γλώσσες κυρίως QBASIC και STATISTICA BASIC και δημιουργήθηκαν τα αντίστοιχα γραφήματα. Είναι αναγκαίο να σημειωθεί στο σημείο αυτό ότι τα αποτελέσματα που παρουσιάζονται είναι ένα μικρό δείγμα καθώς προσομοιώθηκαν πάνω από 5.000 συστήματα και δημιουργήθηκαν πάνω από 1.500 γραφήματα κατά την διαδικασία ανάπτυξης και μελέτης. Επίσης μπορεί η εξίσωση περιγραφής ενός συστήματος να είναι απλή αλλά, λόγω της ιδιομορφίας και της δυναμικής των χαστικών μοντέλων, για να καταστεί δυνατή η επαρκής περιγραφή τους ήταν αναγκαία η προσομοίωσή τους για πολύ μεγάλο χρονικό διάστημα. Αρκετοί από τους χαστικούς ελκυστές οι οποίοι παρουσιάζονται αποτελούνται από 15.000 – 20.000 σημεία.

Η μέθοδος της προσομοίωσης και της γραφικής ανάλυσης και απεικόνισης ήταν στις περισσότερες περιπτώσεις η μόνη δυνατότητα που υπήρχε στην προσπάθεια να μελετήσουμε τα προτεινόμενα μοντέλα καθώς η μαθηματική τους ανάλυση ήταν αδύνατη λόγω της πολυπλοκότητας των εξισώσεών τους.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Η ΧΑΟΤΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ ΑΠΟ ΤΗΝ ΚΙΝΗΣΗ ΤΟΥ ΗΛΙΑΚΟΥ ΜΑΣ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΣΤΗΝ ΔΙΟΙΚΗΣΗ ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΕΩΝ

1.1 Εισαγωγή – Ιστορική αναδρομή

Ο Γάλλος μαθηματικός Πιερ Σιμόν, μαρκήσιος Ντε Λαπλάς είχε γράψει στην εισαγωγή του βιβλίου που πραγματευόταν τη θεωρία των πιθανοτήτων: «Αν κάποιος γνώριζε, σε μια συγκεκριμένη στιγμή όλες τις δυνάμεις της φύσης, καθώς και τις θέσεις και τις ταχύτητες των σωμάτων που υπάρχουν στο Σύμπαν, θα είχε πλήρη γνώση του παρελθόντος και του μέλλοντος κάθε αντικειμένου, ζωντανού ή άψυχου». Το συμπέρασμα αυτό το στήριζε στην πίστη του ότι η ισχύς των νόμων της φυσικής είναι παγκόσμια και ότι οι μαθηματικές εξισώσεις που περιγράφουν αυτούς τους νόμους είναι δυνατόν να λυθούν ακριβώς. Κατά τον Λαπλάς, λοιπόν, η έννοια της πιθανότητας οφείλεται μόνο στην ατελή γνώση που έχουμε για τους νόμους και τις αρχικές συνθήκες δημιουργίας του Σύμπαντος. Στη συγκεκριμένη περίπτωση ο νόμος που είχε κατά νου ο Λαπλάς ήταν ο τρίτος νόμος της κίνησης του Νεύτωνα, σύμφωνα με τον οποίον η κίνηση οποιουδήποτε σώματος είναι δυνατόν να περιγραφεί με μια εξίσωση που περιλαμβάνει τη θέση, την ταχύτητα και την επιτάχυνσή του, αν είναι γνωστή η δύναμη που ασκείται σε αυτό. Η σημασία του συμπεράσματος είναι προφανής για τη φιλοσοφία και την ηθική: αν οι κινήσεις όλων των σωμάτων, από τα μικρότερα άτομα στο σώμα μας ως τα μεγαλύτερα αστέρια σε έναν γαλαξία, καθοδηγούνται από αυστηρούς μαθηματικούς νόμους, τότε δεν υπάρχει η ελευθερία βούλησης των ανθρώπων!

Εκατό χρόνια περίπου μετά τον Λαπλάς ο μεγάλος Γάλλος μαθηματικός και αστρονόμος Πουανκαρέ ανακάλυψε ένα φαινόμενο που θα μπορούσε να αποκαταστήσει την αξία της ανθρώπινης βούλησης. Το φαινόμενο αυτό είναι η ύπαρξη χαοτικών κινήσεων ακόμη και στα απλούστερα συστήματα της κλασικής μηχανικής. Δυστυχώς, το σημαντικότερο αυτό αποτέλεσμα, στο οποίο ο Γάλλος μαθηματικός κατέληξε βασιζόμενος μόνο σε ποιοτικούς γεωμετρικούς συλλογισμούς και χωρίς να χρησιμοποιήσει σχήματα, δεν ήταν δυνατόν να εκτιμηθεί στην εποχή του αφού έλειπε ακριβώς ο τρόπος με τον οποίον θα μπορούσε

κανείς να αποκτήσει μια ποσοτική αντίληψη του φαινομένου. Έτσι αυτή η ανακάλυψη του Πουανκαρέ έμεινε στην ιστορία της μηχανικής ως ένα θεωρητικό παράδοξο, χωρίς προφανή σχέση με το οικοδόμημα της φυσικής του 19^{ου} αιώνα. Πενήντα χρόνια μετά τον Πουανκαρέ έκαναν την εμφάνισή τους οι ηλεκτρονικοί υπολογιστές. Τότε οι επιστήμονες αποφάσισαν να χρησιμοποιήσουν το καινούργιο αυτό εργαλείο στην αριθμητική επίλυση των προβλημάτων που ως τότε δεν μπορούσε να λύσει κανείς αναλυτικά.

Το 1963 ο μετεωρολόγος Λόρεντς δοκίμασε να λύσει τις εξισώσεις του απλούστερου δυνατού μοντέλου περιγραφής της ατμόσφαιρας ακολουθώντας τη γενικά παραδεκτή στη σύγχρονη επιστήμη στρατηγική επίλυσης πολύπλοκων προβλημάτων: πρώτα λύνουμε το απλούστερο πρόβλημα και μετά εισάγουμε διαδοχικά όλο και περισσότερες «λεπτομέρειες». Για παράδειγμα, αν θέλουμε να υπολογίσουμε την τροχιά της Γης, στην αρχή υποθέτουμε ότι την έλκει μόνο ο Ήλιος, που είναι το μεγαλύτερο σώμα στο ηλιακό σύστημα, θεωρώντας ότι όλα τα υπόλοιπα σώματα προκαλούν μόνο μικρές μεταβολές. Στη συνέχεια υπολογίζουμε τις διορθώσεις της αρχικής τροχιάς που προκύπτουν αν προσθέσουμε την έλξη της Σελήνης, των άλλων πλανητών κτλ. Συνήθως υποθέτουμε ότι τα υπόλοιπα μικρά σώματα του ηλιακού συστήματος, αστεροειδείς και κομήτες, καθώς και όλα τα απομακρυσμένα αστέρια, έχουν ασήμαντη επίδραση στη Γη.

Προς μεγάλη απογοήτευσή του ο Λόρεντς διαπίστωσε ότι κάτι δεν πήγαινε καλά με τις λύσεις που υπολόγιζε: μικρές αλλαγές στις αρχικές συνθήκες οδηγούσαν σε ολοκληρωτικά διαφορετικές καταστάσεις της ατμόσφαιρας. Αφού προσπάθησε με διάφορους τρόπους να διορθώσει οποιοδήποτε πιθανό λάθος στη μέθοδο λύσης που χρησιμοποιούσε, κατέληξε σε ένα επαναστατικό συμπέρασμα: *η κλασική μέθοδος λύσης πολύπλοκων συστημάτων που είχε ξεκινήσει από τον Νεύτωνα πριν από 300 χρόνια δεν μπορούσε να χρησιμοποιηθεί στο συγκεκριμένο πρόβλημα της πρόγνωσης του καιρού αφού ασήμαντες αλλαγές στις αρχικές συνθήκες οδηγούσαν σε ριζικά διαφορετικές λύσεις!* Στο συμπέρασμα αυτό στηρίχτηκε η γνωστή σε πολλούς παραδοξολογία, σύμφωνα με την οποία το χτύπημα των φτερών μιας πεταλούδας στην Κίνα μπορεί να προκαλέσει έπαιτα από έναν μήνα καταιγίδα στην Ευρώπη. Αυτή ήταν η αρχή της θεωρίας του χάους στη σύγχρονη εποχή.

Στα χρόνια που ακολούθησαν την ανακάλυψη του Λόρεντς, η θεωρία του χάους αναπτύχθηκε αλματωδώς βασισμένη τόσο σε πειράματα (είτε πραγματικά είτε προσομοιώσεις με ηλεκτρονικούς υπολογιστές) όσο και στην ανάμιξη νέων θεωρητικών εργαλείων και εννοιών. Σήμερα η αντίληψή μας για τη φύση και τις λύσεις των εξισώσεων που περιγράφουν τη χρονική εξέλιξη φαινομένων είναι ριζικά αντίθετη από ό,τι πιστεύαμε πριν από 50 χρόνια. *Χαοτικά Φαινόμενα*, ανάλογα με αυτά που διαπίστωσε ο Λόρεντς, παρατηρήθηκαν σχεδόν σε όλες τις εξισώσεις αυτής της κατηγορίας, από την κίνηση των πλανητών γύρω από τον ήλιο ως τις διακυμάνσεις των χρηματιστηριακών δεικτών. Έτσι η ελευθερία της βούλησης των ανθρώπων απέκτησε και πάλι νόημα.

Οι βασικές χαρακτηριστικές ιδιότητες όλων των χαοτικών δυναμικών συστημάτων, όπως ονομάζονται, είναι δύο. *Πρώτη ιδιότητα*, είναι η ύπαρξη γεωμετρικής πολυπλοκότητας, αυτής ακριβώς που δεν επέστρεψε στον Πουανκαρέ να χρησιμοποιήσει σχήματα. *Δεύτερη ιδιότητα*, είναι η ευαίσθητη εξάρτηση από τις αρχικές συνθήκες. Η ιδιότητα αυτή μας επιβάλλει να γνωρίζουμε με ακρίβεια τόσο περισσότερων δεκαδικών ψηφίων τις αρχικές τιμές των ποσοτήτων που περιγράφει το δυναμικό σύστημα (π.χ., πίεση και θερμοκρασία στην περίπτωση της ατμόσφαιρας) όσο μεγαλύτερο είναι το χρονικό διάστημα για το οποίο θέλουμε να υπολογίσουμε τη λύση του προβλήματος. Επειδή η ακρίβεια ενός θερμομέτρου ή ενός βαρομέτρου, π.χ., περιορίζεται το πολύ στα δύο δεκαδικά ψηφία, προκύπτει ότι το χρονικό διάστημα για το οποίο μπορούμε να κάνουμε αξιόπιστη πρόγνωση του καιρού είναι εκ των πραγμάτων περιορισμένο, συνήθως τρεις ημέρες. Έτσι εξηγήθηκε θεωρητικά το - παράδοξο για την εποχή του - πειραματικό αποτέλεσμα του Λόρεντς.

Σήμερα η παγκόσμια επιστημονική κοινότητα όχι μόνο έχει αντιληφθεί τη σημασία της ανακάλυψης του φαινομένου του χάους από τον Πουανκαρέ, αλλά και προσπαθεί χρησιμοποιώντας το να δώσει την απάντηση και σε ένα από τα παλιότερα άλυτα προβλήματα της φυσικής, αυτό της σχέσης της Θερμοδυναμικής με την υπόλοιπη φυσική. Στα τέλη του 19^{ου} αιώνα δύο από τους μεγαλύτερους φυσικούς όλων των εποχών, ο Σκωτσέζος Γουίλιαμ Τόμσον (μετέπειτα λόρδος Κέλβιν, γνωστός από το όνομα της μονάδας της θερμοκρασίας που δόθηκε προς τιμήν του) και ο Γερμανός Χέλμχολτς, προσπάθησαν, μάταια, να ενσωματώσουν τη θερμοδυναμική στο τότε ενιαίο οικοδόμημα της κλασικής φυσικής.

Τελικά, ο Χέλμχολτς κατέληξε στο συμπέρασμα ότι το δεύτερο θερμοδυναμικό αξίωμα που ορίζει ότι η θερμότητα ρέει από τα ζεστά σώματα στα κρύα δεν προκύπτει από τους νόμους της μηχανικής του Νεύτωνα. Αυτό φαίνεται παράδοξο αφού η θερμότητα είναι ουσιαστικά μια ποσότητα που μετράει πόσο γρήγορα κινούνται τα άτομα ή τα μόρια ενός σώματος, η κίνηση των οποίων φυσικά ακολουθεί τους νόμους του Νεύτωνα.

Σήμερα, πιστεύεται ότι η ιδιότητα της ευαισθητής εξάρτησης από τις αρχικές συνθήκες μπορεί να αποτελέσει τη λύση σε αυτό το ανοιχτό πρόβλημα. Αν ένα σύστημα, που αποτελείται από λίγα σώματα, μπορεί να έχει και κανονικές και χαοτικές κινήσεις, τότε είναι λογικό να αναμένουμε ότι ένα σύστημα που αποτελείται από πάρα πολλά σώματα θα έχει σχεδόν αποκλειστικά χαοτικές κινήσεις. Αν λάβουμε υπόψη ότι σε κάθε κυβικό εκατοστό του ατμοσφαιρικού αέρα υπάρχουν ένα τρισεκατομμύριο μόρια, καταλαβαίνουμε το βάσιμο του επιχειρήματος.

Τις τελευταίες δεκαετίες έχουν γίνει πάρα πολλές προσπάθειες από πειραματικούς και θεωρητικούς φυσικούς και μαθηματικούς για να αποδειχθεί αυτή η υπόθεση. Ήδη το 1970 ο Ρώσος μαθηματικός Σινάι απέδειξε ότι ένα μαθηματικά τέλειο αέριο έχει μόνο χαοτικές κινήσεις. Δυστυχώς το αέριο αυτό είναι ένα ιδανικό μοντέλο, μιας και υποτίθεται ότι τα μόριά του δεν έχουν διαστάσεις και πως δεν εξασκούν το ένα στο άλλο δυνάμεις παρά μόνο όταν συγκρούονται. Αντίθετα, όσα συστήματα έχουν δοκιμαστεί μέχρι σήμερα έχουν βρεθεί να έχουν πάντα έστω και λίγες μη χαοτικές κινήσεις. Η απόδειξη ότι το δεύτερο θερμοδυναμικό αξίωμα είναι συνέπεια της θεωρίας του χάους και άρα των νόμων της κλασικής μηχανικής θα αποτελέσει ένα από τα σημαντικότερα βήματα των φυσικών στην προσπάθειά τους να επινοήσουν τους νόμους της φυσικής.

Ο άνθρωπος από πολύ νωρίς άρχισε να μελετά τη φύση και να προσπαθεί να ερμηνεύσει τα διάφορα φαινόμενα που παρατηρούσε γύρω του. Ήταν φυσικό να αρχίσει τη μελέτη από τα απλούστερα φαινόμενα, όπου εμφανίζονταν κάποια κανονικότητα, γιατί αυτά τα φαινόμενα μπορούσε να τα εξετάσει με τα διαθέσιμα μέσα (μαθηματική θεωρία, πειραματικές μέθοδοι μετρήσεων κ.α.). Τα πλέον εμφανή από αυτά τα φαινόμενα, που από πολύ νωρίς τράβηξαν την προσοχή του ανθρώπου, είναι οι κινήσεις των ουρανίων σωμάτων. Οι κινήσεις αυτές εμφανίζουν στην καθημερινή ζωή μια τέλεια κανονικότητα. Πάντοτε ο Ήλιος θα ανατέλλει στην αρχή της ημέρας και θα δύει στο τέλος της, επαναλαμβάνοντας αυτή την κίνηση, την ίδια πάντοτε, κάθε ημέρα. Το ίδιο συμβαίνει και με την κίνηση της Σελήνης, η οποία ακολουθεί μια συγκεκριμένη πορεία στην ουράνια σφαίρα επαναλαμβάνοντας την ίδια πορεία κάθε έναν μήνα περίπου. Η ανατολή και η δύση των αστερισμών κάθε βράδυ, καθώς και η εναλλαγή των εποχών ακολουθούν επίσης την ίδια κανονικότητα, όπως διαπιστώθηκε από τη συσσωρευμένη πείρα χιλιάδων ετών. Οι παραπάνω κανονικές κινήσεις είναι συνέπεια της κανονικότητας της περιστροφής της Γης γύρω από τον άξονά της και της περιφοράς της γύρω από τον Ήλιο, καθώς επίσης και της κανονικότητας της κίνησης της Σελήνης γύρω από τη Γη. Αυτή η κανονικότητα των κινήσεων των ουρανίων σωμάτων κατέστησε δυνατή την πρόβλεψη των εκλείψεων της Σελήνης ήδη από την αρχαιότητα.

Αποκορύφωμα αυτής της εμπειρίας ήταν η διατύπωση από τον Νεύτωνα, τον 17^ο αιώνα, των νόμων της κινήσεως των σωμάτων και του νόμου της παγκοσμίου έλξεως. Έτσι εξηγήθηκαν οι κινήσεις των πλανητών, οι οποίοι κινούνται σε ελλειπτικές τροχιές γύρω από τον Ήλιο, όπως είχε παρατηρηθεί από τον Kepler. Οι νόμοι του Νεύτωνα διατυπώνονται υπό την μορφή συνήθων διαφορικών εξισώσεων και είναι νόμοι καθαρά αιτιοκρατικοί. Αυτό σημαίνει ότι σε μια συγκεκριμένη αιτία αντιστοιχεί ένα και μοναδικό αποτέλεσμα, το οποίο είναι πάντοτε το ίδιο, εφόσον ξεκινάμε με την ίδια αρχική κατάσταση (αιτία). Έτσι μπορούμε να υπολογίσουμε τις θέσεις των πλανητών στην τροχιά τους γύρω από τον ήλιο για τα επόμενα χρόνια και να προβλέψουμε τα διάφορα αστρονομικά φαινόμενα που θα συμβούν στο μέλλον, όπως π.χ. μια έκλειψη Ηλίου ή Σελήνης, την εμφάνιση ενός κομήτη ή ακόμη και την τροχιά ενός αστεροειδούς ο οποίος ακολουθεί μια πορεία συγκρούσεως με τη Γη. Σε όλες αυτές τις περιπτώσεις η τροχιά υπολογίζεται ακριβώς με τη βοήθεια των αιτιοκρατικών νόμων του Νεύτωνα και θεωρείτο αυτονόητο ότι αρκεί να αναπτύξουμε την κατάλληλη μαθηματική θεωρία και να χρησιμοποιήσουμε ισχυρούς ηλεκτρονικούς υπολογιστές για τους αριθμητικούς υπολογισμούς ώστε να προβλέψουμε, με όση ακρίβεια επιθυμούμε, την κίνηση ενός σώματος - είτε πρόκειται για τη Σελήνη, έναν πλανήτη ή ένα διαστημόπλοιο - και μάλιστα για οσονδήποτε μεγάλο χρονικό διάστημα. Η επιτυχία αυτών των υπολογισμών στην πρόβλεψη της θέσεως ενός σώματος για μεγάλα χρονικά διαστήματα απετέλεσε τον θρίαμβο της αιτιοκρατίας. Η αιτιοκρατία και η προβλεψιμότητα θεωρήθηκαν έννοιες ταυτόσημες, εφόσον η εξέλιξη του φαινομένου διέπεται από καθαρά αιτιοκρατικούς νόμους, όπως είναι οι νόμοι του Νεύτωνα. Αυτό δημιούργησε την εικόνα, κυρίως κατά τον 19^ο αιώνα και στις αρχές του 20^{ου} αιώνα, ενός καθαρά μηχανιστικού κόσμου όπου τα πάντα είναι προβλέψιμα, με επιπτώσεις ακόμη και στη φιλοσοφική αντίληψη του κόσμου.

Είναι όμως όντως έτσι; Μπορούμε πράγματι να κάνουμε προβλέψεις όλων των φαινομένων τα οποία διέπονται από αιτιοκρατικούς νόμους; Είναι γνωστό ότι εκτός από τις κανονικές κινήσεις, όπως είναι η περιστροφή της Γης γύρω από τον άξονά της και η κίνηση των πλανητών γύρω από τον Ήλιο καθώς και των δορυφόρων τους γύρω από τον αντίστοιχο πλανήτη, υπάρχουν και φαινόμενα που είναι απρόβλεπτα, διότι η εξέλιξή τους δεν παρουσιάζει καμία κανονικότητα. Τα φαινόμενα αυτά ονομάζονται χαοτικά. Τέτοια φαινόμενα είναι η τυρβώδης ροή ενός ρευστού, η κίνηση της μπάλας του μπιλιάρδου ή η εξέλιξη του καιρού.

Και όμως όλα αυτά τα φαινόμενα διέπονται από τους ίδιους αιτιοκρατικούς νόμους του Νεύτωνα. Τότε γιατί η κίνηση δεν είναι στην περίπτωση αυτή κανονική και συνεπώς προβλέψιμη; Γιατί μπορούμε, π.χ., να προβλέψουμε τη θέση ενός πλανήτη μετά από χιλιάδες χρόνια και δεν μπορούμε να προβλέψουμε τι καιρό θα κάνει μετά από δύο μήνες, εφόσον και τα δύο αυτά φαινόμενα καθορίζονται από τους ίδιους αιτιοκρατικούς νόμους του Νεύτωνα;

Όλα τα προηγούμενα αναφερθέντα φαινόμενα όπως π.χ. οι κινήσεις των πλανητών και οι κινήσεις των αερίων μαζών στην ατμόσφαιρα (που καθορίζουν την εξέλιξη του καιρού), έχουν ένα κοινό χαρακτηριστικό: είναι φαινόμενα μη γραμμικά, δηλαδή η σχέση αίτια και αποτέλεσμα δεν είναι αναλογική (αναλογική είναι μια σχέση όπου σε διπλάσια αίτια αντιστοιχεί διπλάσιο αποτέλεσμα κ.ο.κ., όπως π.χ. με τη δύναμη που ασκεί ένα ελατήριο, όπου για διπλάσια επιμήκυνση έχουμε διπλάσια δύναμη), αλλά πιο πολύπλοκη. *Σχεδόν όλα τα δυναμικά συστήματα στη φύση είναι μη γραμμικά.* (Με τον όρο δυναμικό σύστημα εννοούμε, με απλά λόγια, ένα σύνολο σωμάτων που αλληλεπιδρούν μεταξύ τους και η θέση τους εξελίσσεται στον χρόνο). Δυναμικά σύστημα είναι και το ηλιακό σύστημα, το οποίο είναι μη γραμμικό, και όπως θα αναφέραμε στη συνέχεια στα μη γραμμικά δυναμικά συστήματα εμφανίζονται χαστικές κινήσεις. Κάτι τέτοιο αποτελεί γενική ιδιότητα των μη γραμμικών συστημάτων. Συνεπώς, πρέπει να περιμένουμε χαστικές κινήσεις και στο ηλιακό σύστημα.

Η βασική ιδιότητα μιας χαστικής κίνησης είναι η ευαίσθητη εξάρτησή της από τις αρχικές συνθήκες. Αυτό σημαίνει ότι δύο τροχιές που ξεκινούν με αρχικές συνθήκες οι οποίες ελάχιστα διαφέρουν μεταξύ τους, μετά από λίγο απομακρύνονται εκθετικά, με αποτέλεσμα η τελική κατάσταση να είναι τελείως διαφορετική για τις δύο αυτές τροχιές. Ο όρος εκθετική απομάκρυνση σημαίνει ότι, αν αρχικά η διαφορά είναι ίση προς 1, στις επόμενες χρονικές στιγμές η απομάκρυνση θα γίνει 2, μετά 4, 8 κ.ο.κ., έτσι ώστε μετά από κάποιο χρονικό διάστημα η απομάκρυνση να γίνει τεράστια. Αυτό συμβαίνει με τις χαστικές κινήσεις και γι' αυτόν το λόγο η κίνηση εμφανίζεται ως χαστική. Στην πραγματικότητα η κίνηση είναι πάντοτε αιτιοκρατική, δηλαδή στην ίδια αρχική κατάσταση αντιστοιχεί πάντοτε η ίδια τελική κατάσταση. Αν ήμασταν σε θέση να γνωρίζουμε ακριβώς την αρχική κατάσταση με απέραντη ακρίβεια και επιπλέον αν είχαμε τη δυνατότητα να εκτελέσουμε τους αριθμητικούς υπολογισμούς με απόλυτη ακρίβεια (χωρίς να στρογγυλεύουμε το αριθμητικό αποτέλεσμα, π.χ. στο 20^ο δεκαδικό ψηφίο), τότε δεν θα είχαμε κανένα πρόβλημα στην πρόβλεψη ενός φαινομένου και δεν θα κάναμε διάκριση μεταξύ κανονικών και χαστικών κινήσεων. Ποτέ όμως δεν είναι δυνατόν να κάνουμε μετρήσεις, π.χ. της θέσης και της ταχύτητας ενός σώματος, με απόλυτη ακρίβεια. Αυτό σημαίνει ότι δεν γνωρίζουμε, αν κάνουμε τους υπολογισμούς μας, για το πραγματικό φυσικό πρόβλημα, π.χ. την κίνηση της Γης, ή αν υπολογίζουμε την τροχιά μιας φανταστικής Γης, που βρίσκεται πολύ κοντά στη δική μας. Αν βρισκόμαστε σε χαστική περιοχή, δηλαδή, όπως αναφέραμε πιο πάνω, σε μια περιοχή όπου μια μικρή αλλαγή στην αρχική κατάσταση επιφέρει τεράστια αλλαγή στο αποτέλεσμα, μετά από κάποιο χρόνο δεν θα είναι δυνατόν να προβλέψουμε τη θέση της Γης στο μέλλον, διότι σε κάθε διαφορετική αρχική κατάσταση, ανάλογα με την ακρίβεια των μετρήσεων, θα έχουμε και διαφορετική πρόβλεψη για την τελική θέση της Γης επί της τροχιάς της! Και πράγματι αυτό πρέπει να περιμένουμε σύμφωνα με τη θεωρία του χάους, διότι το φυσικό σύστημα στο οποίο κινείται η Γη είναι μη γραμμικό και συνεπώς χαστικό. Το ίδιο θα λέγαμε και για την πρόβλεψη της θέσεως της Σελήνης και των πλανητών. Στο σημείο αυτό, με βάση όσα αναφέραμε παραπάνω, τίθεται ένα εύλογο ερώτημα: αφού και το ηλιακό σύστημα και το σύστημα της μετεωρολογίας είναι μη γραμμικά, και συνεπώς χαστικά, γιατί στο ηλιακό σύστημα μπορούμε να προβλέψουμε την κίνηση ενός πλανήτη για χιλιάδες χρόνια και στη μετεωρολογία δεν μπορούμε να προβλέψουμε τι καιρό θα κάνει μετά από τρεις μήνες; Η απάντηση βρίσκεται στον χρόνο που χρειάζεται ώστε να «χαθεί» η σχέση μεταξύ αιτίας και αποτελέσματος. Εφόσον ξεκινάμε πολύ κοντά προς την πραγματική τροχιά, η «λανθασμένη» τροχιά που υπολογίζουμε θα είναι κοντά στην πραγματική τροχιά για κάποιο χρονικό διάστημα, μέσα στο οποίο η εκθετική απομάκρυνση δεν έχει γίνει ακόμη αισθητή και η διαφορά είναι μέσα στα επιτρεπτά όρια της ακρίβειας που επιθυμούμε. Εδώ ακριβώς βρίσκεται η διαφορά από χαστικό σε χαστικό σύστημα. Στη μετεωρολογία το χρονικό διάστημα μέσα στο οποίο μπορούμε να κάνουμε προβλέψεις δεν είναι μεγαλύτερο από δύο εβδομάδες, ενώ το αντίστοιχο χρονικό διάστημα για το ηλιακό σύστημα είναι της τάξεως των 100 εκατομμυρίων ετών (διάστημα μικρό για τα αστρονομικά δεδομένα!). Σε ένα μη γραμμικό σύστημα συνυπάρχουν, εν γένει, η τάξη και το χάος. Αυτό συμβαίνει και με το ηλιακό σύστημα.

1.2 Η νέα πραγματικότητα στη διοίκηση και η εφαρμογή της χαστικής θεωρίας

Στις προηγούμενες παραγράφους μιλήσαμε για το χάος και την κίνηση των πλανητών, ωστόσο οι εφαρμογές είναι σχετικά περιορισμένες σε καθημερινά οικονομικά προβλήματα και διοικητικά θέματα [Glas96]. Το αποτέλεσμα είναι η περιοχή αυτή να θεωρείται πολύπλοκη και απρόσιτη για το ευρύ κοινό.

Παρακάτω θα παρουσιαστεί μία πρώτη θεωρητική προσέγγιση του τρόπου με τον οποίο μπορούν αυτές οι εφαρμογές γρήγορα να χρησιμοποιηθούν και να υπάρξει ωφέλεια από τη χρήση αυτών των συστημάτων.

Τα μη γραμμικά συστήματα και τα χαστικά μοντέλα μπορούν να βοηθήσουν τους μάνατζερ να βελτιώσουν τον τρόπο διοίκησής τους. Όπως όλα τα δυναμικά μοντέλα, έτσι και αυτά έχουν την δυνατότητα να μας βοηθήσουν να κατανοήσουμε ό,τι έχει παρατηρηθεί, να μας εκφράσουν τι διαισθητικά έχουμε νιώσει για ό,τι συμβαίνει γύρω μας και να μας βοηθήσουν να αναπτύξουμε νέες προτάσεις και ιδέες για το πώς πρέπει να διοικείται μια επιχείρηση.

Από την άλλη μεριά πρέπει να γίνει κατανοητό ότι η θεωρία των χαστικών συστημάτων δε δίνει απάντηση στα προβλήματα όλων των επιχειρήσεων και πως οι νέες θεωρίες δεν αντικαθιστούν παρά επεκτείνουν τις παλιές. Πολλές φορές οι εφαρμογές αυτών των θεωριών αναγκαστικά εμπλέκουν ανώτερα μαθηματικά στην ανάλυσή τους κάνοντας τα πράγματα πολύπλοκα, ενδιαφέροντα μεν για τους ακαδημαϊκούς, αδιάφορα όμως και δυσνόητα για το ευρύ κοινό.

1.2.1 Η χρησιμότητα της θεωρίας των χαστικών συστημάτων

Οι περισσότεροι άνθρωποι παραδέχονται ότι το περιβάλλον μιας επιχείρησης, είτε είναι ανταγωνιστικό είτε όχι, έχει καταλήξει να είναι πολύπλοκο και επιρρεπές σε απρόβλεπτες αλλαγές. Σε ένα λογικό σταθερό περιβάλλον, μια επιχείρηση μπορεί να διοικηθεί με τον παραδοσιακό ιεραρχικό μηχανοκρατικό τρόπο. Η ανώτερη διοικητική εξουσία υποστηριζόμενη από τους συμβούλους καθορίζει την στρατηγική. Η μέση διοικητική εξουσία την εκτελεί ενώ οι επόπτες και επιτηρητές ενημερώνουν την διοίκηση για την πρόοδο του συστήματος.

Δυστυχώς το μοντέλο αυτό δε φαίνεται να λειτουργεί πολύ καλά πια, διότι βασίζεται στις τρεις παρακάτω υποθέσεις:

- i. Η επιχείρηση είναι ένα κλειστό σύστημα. Γενικά ό,τι αποφασίσει να κάνει, θα το πραγματοποιήσει χωρίς το φόβο αποδιοργάνωσης λόγω επίδρασης εξωτερικών παραγόντων.
- ii. Το λειτουργικό περιβάλλον είναι αρκετά ευσταθές και σταθερό. Η διοίκηση το κατανοεί πλήρως και αναπτύσσει ανάλογες στρατηγικές.
- iii. Σε μια επιχείρηση ή μια οικονομία υπάρχει μια σειρά ξεκάθαρων μεθόδων με τη βοήθεια των οποίων μπορεί κανείς να προκαλέσει συγκεκριμένα αποτελέσματα και αντιδράσεις. Για παράδειγμα, αν αυξηθούν τα επιτόκια θα έχουμε ως αποτέλεσμα να αυξηθεί η τιμή της νομισματικής κυκλοφορίας.

Αυτές όμως οι υποθέσεις έχουν αντικατασταθεί από τρεις νέες προτάσεις οι οποίες αναφέρονται παρακάτω:

- i. Μία επιχείρηση είναι ένα σύνθετο ανοιχτό σύστημα που συνεχώς επηρεάζει και επηρεάζεται από το περιβάλλον του. Συχνά προσχεδιασμένες ενέργειες θα αναπροσαρμοστούν λόγω εξωτερικών ή ακόμη και εσωτερικών αιτιών και γεγονότων.
- ii. Το περιβάλλον αλλάζει πολύ γρήγορα. Συνεχώς εμφανίζονται νέες ευκαιρίες αλλά και απειλές, γεγονός που δυσκολεύει την διοίκηση στο να έχει μία σαφή αίσθηση των αποτελεσμάτων και των συνεπειών.
- iii. Τα αίτια και οι επιδράσεις που προκύπτουν από την εφαρμογή των απλών γραμμικών μοντέλων καταρρίπτονται και πολλές ενέργειες μπορούν να οδηγήσουν σε εντελώς απρόβλεπτα αποτελέσματα.

1.2.2 Γραμμικά και μη-γραμμικά μοντέλα

Ένα γραμμικό μοντέλο είναι όπως ένας θερμοστάτης σε ένα δωμάτιο. Μία ενέργεια θα προκαλέσει άμεσα προβλέψιμα αποτελέσματα. Το άνοιγμα του διακόπτη και το άναμμα της λάμπας θα προκαλέσει αύξηση της θερμοκρασίας του δωματίου και ως εκ τούτου ο θερμοστάτης θα πρέπει να μειώσει την θερμοκρασία ώστε αυτή να διατηρηθεί σταθερή. Αντίθετα, το άνοιγμα ενός παραθύρου και η εισαγωγή κρύου αέρα θα προκαλέσει μείωση της θερμοκρασίας του δωματίου και ως εκ τούτου ο θερμοστάτης θα πρέπει να αυξήσει την θερμοκρασία.

Ένα παράδειγμα μη-γραμμικού συστήματος θα μπορούσε να είναι μία τηλεοπτική διαφημιστική καμπάνια. Για το λανσάρισμα της καμπάνιας κάποιος ξοδεύει 10 εκατομμύρια και σχεδιάζει να κερδίσει το 1/3 του μεριδίου της αγοράς. Αυτή είναι μια καθαρά γραμμική σκέψη και συνήθως τα πράγματα εξελίσσονται όπως αναμενόταν.

Στην πραγματικότητα όμως υπάρχουν ένα σωρό από άλλα πιθανά αποτελέσματα, τα οποία δεν αναμενόταν και ως εκ τούτου είναι απρόσμενα. Για παράδειγμα ένας ανταγωνιστής μπορεί να μας βγάλει εκτός συναγωνισμού κάνοντας μία πιο εφευρετική καμπάνια ή προσφέροντας δύο στην τιμή του ενός, ικανοποιώντας τη ζήτηση της αγοράς. Επίσης με αθέμιτο ανταγωνισμό μπορεί να διαδώσει φήμες για την κακή ποιότητα των προϊόντων μας. Ακόμη ο καιρός μπορεί να είναι πολύ καλός με αποτέλεσμα ελάχιστοι άνθρωποι να βλέπουν τηλεόραση, άρα και την καμπάνια μας. Το αποτέλεσμα για εμάς θα είναι οι μειωμένες πωλήσεις και τα χαμηλά κέρδη.

1.2.3 Οι επιπτώσεις της χαστικής θεωρίας στο μάνατζμεντ

Αν αποδεχτούμε τη χαστική θεωρία, ανακαλύπτουμε ότι υπάρχει ένας μεγάλος αριθμός επιπτώσεων στο τρόπο με τον οποίο διοικούμε την επιχείρησή μας και τους υπαλλήλους μας.

Στα γραμμικά συστήματα αντιδρούμε αρνητικά προκειμένου να προσαρμόσουμε το σύστημα στην προηγούμενη κατάσταση ισορροπίας. Σαφές είναι η πεποίθηση πως υπάρχει μια κατάσταση ισορροπίας και όλα πρέπει να λειτουργούν προκειμένου το σύστημα να βρίσκεται στην κατάσταση αυτή.

Στα μη γραμμικά συστήματα αντιδρούμε με έναν θα λέγαμε θετικό τρόπο. Καθώς ο κόσμος είναι εν γένει ασταθής και ευμετάβλητος πολύ μικρές ενέργειες μπορεί να επιφέρουν σημαντικά αποτελέσματα. Κανένας δε θα μπορούσε να πιστέψει πως ο Honda ένας ουσιαστικά άγνωστος Ιάπωνας κατασκευαστής, εστιάζοντας τις εξαγωγές του σε μηχανές μικρού και όχι μεγάλου κυβισμού κατάφερε να κατακλύσει την Αμερικάνικη αγορά [Glas96].

Ξαφνικές αλλαγές και τροποποιήσεις στην τεχνολογία, (έχουμε γίνει μάρτυρες πολλών τέτοιων τα τελευταία χρόνια), ενισχύουν και διευρύνουν την ιδέα της επικράτησης αυτών των μικρών ενεργειών. Ο ξέφρενος ρυθμός ανάπτυξης της Apple και της Microsoft ήταν ένα αποτέλεσμα τεχνολογικών καινοτομιών οι οποίες δημιούργησαν μία αγορά πολύ αξιοποιήσιμη και εκμεταλλεύσιμη [Glas96].

Ο τρόπος διοίκησης και σκέψης ενός μάνατζερ είναι εντελώς διαφορετικός, για κάποιον που αντιλαμβάνεται τον κόσμο σαν κάτι σταθερό και ισορροπημένο, σε σχέση με κάποιον που πιστεύει ότι τα πράγματα λειτουργούν χαστικά. Ο πρώτος συνεχώς προσπαθεί να φέρει την κατάσταση σε ένα συγκεκριμένο καθεστώς (κατάσταση ισορροπίας) ενώ ο δεύτερος έχει στόχους και αναζητά νέα είδη παρεμβάσεων τα οποία θα αποφέρουν εξαιρετικά αποτελέσματα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΚΡΙΣΙΜΑ ΣΗΜΕΙΑ ΜΗ-ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΔΥΝΑΜΙΚΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ

Εισαγωγή

Δυναμικά συστήματα ονομάζονται τα φυσικά εκείνα φαινόμενα και οι φυσικές διεργασίες που περιγράφονται από συστήματα διαφορικών εξισώσεων (ή εξισώσεων διαφορών) των οποίων η ανεξάρτητη μεταβλητή είναι ο χρόνος. Οι εξισώσεις αυτές είναι συνήθως μη γραμμικές και γενικά μη επιλύσιμες από τις μέχρι σήμερα γνωστές μεθόδους μαθηματικής ανάλυσης, για κάθε τιμή του χρόνου και οποιοσδήποτε αρχικές συνθήκες.

Ίσως η πιο σημαντική ιδιότητα των μη γραμμικών δυναμικών συστημάτων είναι η ύπαρξη περιοχών στο χώρο των εξαρτημένων μεταβλητών τους, μέσα στις οποίες η κίνηση εξελίσσεται στο χρόνο «ακανόνιστα», «απρόβλεπτα», ή όπως λέμε *χαστικά*. Τα παραδείγματα των φυσικών φαινομένων ή διεργασιών, στα οποία παρατηρείται μια τέτοια χαστική συμπεριφορά είναι όπως ήδη έχουμε αναφέρει ανεξάντλητα: από τον καιρό, τις καρδιακές παθήσεις και τις αυξομειώσεις οικονομικών μεγεθών μέχρι το βράσιμο ενός υγρού, την κίνηση των μορίων ενός αερίου σε ένα δοχείο ή το παιχνίδι της ρουλέτας [Boud95].

Το βασικό ερώτημα στα δυναμικά συστήματα είναι: ποια είναι η συμπεριφορά των λύσεων τους καθώς ο χρόνος t τείνει προς το άπειρο; Στις κανονικές περιοχές της κίνησης, όπου η συμπεριφορά του συστήματος είναι προβλέψιμη, η απάντηση είναι γνωστή. Τι γίνεται όμως στις χαστικές περιοχές, όπου η χρονική εξέλιξη του συστήματος εξαρτάται με πολύ μεγάλη ευαισθησία από τις αρχικές συνθήκες που επιλέγονται κάθε φορά;

Το κεφάλαιο αυτό αποτελεί μια αναλυτική εισαγωγή στις βασικές μαθηματικές αρχές και τεχνικές οι οποίες είναι απαραίτητες για την περιγραφή και την ανάλυση των μη γραμμικών δυναμικών συστημάτων. Ιδιαίτερη βαρύτητα θα δώσουμε στην ανάλυση ευστάθειας και την κατάταξη των κρίσιμων σημείων τόσο των γραμμικών όσο και των μη γραμμικών δυναμικών συστημάτων.

2.1 Ύπαρξη και μοναδικότητα

Θεωρούμε τη διαφορική εξίσωση της μορφής

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x) \quad (2.1)$$

Η μεταβλητή t είναι βαθμωτή, $t \in \mathbb{R}$ ενώ το διάνυσμα της συνάρτησης $f: G \rightarrow \mathbb{R}^n$ είναι συνεχές στο t και x , το G είναι ένα ανοικτό υποσύνολο του \mathbb{R}^{n+1} , οπότε το $x \in \mathbb{R}^n$. Το διάνυσμα $x(t)$ είναι μία λύση της Εξ. (2.1) σε ένα διάστημα $I \subset \mathbb{R}$ αν $x: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ είναι συνεχόμενα διαφοροποιήσιμο και το $x(t)$ ικανοποιεί την Εξ. (2.1).

Ορισμός

Θεωρείστε τη συνάρτηση $f(x, t)$ με $f: \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$, $|t - t_0| \leq a$, $x \in D \subset \mathbb{R}^n$, τότε η $f(x, t)$ ικανοποιεί τη συνθήκη Lipschitz σχετικά προς το x αν στο $[t_0 - a, t_0 + a] \times D$ έχουμε

$$\|f(t, x_1) - f(t, x_2)\| \leq L \|x_1 - x_2\|$$

όπου $x_1, x_2 \in D$ και L μια σταθερά (το L ονομάζεται σταθερά του Lipschitz).

Πολλές φορές αντί να αναφέρουμε ότι η $f(x, t)$ ικανοποιεί τη συνθήκη Lipschitz χρησιμοποιούμε την έκφραση: η $f(x, t)$ είναι Lipschitz συνεχής στο x .

Θεώρημα 2.1

Υποθέτουμε το πρόβλημα αρχικών συνθηκών

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t), \quad x(t_0) = x_0$$

με $x \in D \subset \mathbb{R}^n$, $|t - t_0| \leq a$, $D = \{x \mid \|x - x_0\| \leq d\}$, όπου a και d θετικές σταθερές. Η διανυσματική συνάρτηση $f(t, x)$ ικανοποιεί τις ακόλουθες συνθήκες:

α) $f(t, x)$ είναι συνεχής στο $G = [t_0 - a, t_0 + a] \times D$,

β) $f(t, x)$ είναι Lipschitz συνεχής στο x .

Τότε το πρόβλημα αρχικών συνθηκών έχει μία και μοναδική λύση για $|t - t_0| \leq \min\left(a, \frac{d}{M}\right)$ με $M = \sup_G \|f\|$ (απόδειξη [GoLe55]).

Το παραπάνω θεώρημα εγγυάται την ύπαρξη της λύσης σε μια γειτονική περιοχή του $t = t_0$, το μέγεθος της οποίας εξαρτάται από τη \sup norm M του διανύσματος της συνάρτησης $f(x, t)$. Συχνά έχουμε τη δυνατότητα να επεκτείνουν τη λύση και πέρα από αυτή τη γειτονική περιοχή.

2.2 Αυτόνομα συστήματα

Θεωρούμε μια εξίσωση στην οποία η ανεξάρτητη μεταβλητή t δεν εμφανίζεται ξεκάθαρα:

$$\frac{dx}{dt} = f(x) \quad (2.2)$$

Μία διανυσματική εξίσωση της παραπάνω μορφής ονομάζεται *αυτόνομη* (*autonomous*).

Ιδιότητα της Μετατόπισης

Υποθέτουμε ότι έχουμε μια λύση $\Phi(t)$ της Εξ. (2.2) στο πεδίο $D \subset \mathbb{R}^n$, τότε το $\Phi(t - t_0)$ με το t_0 μια σταθερά είναι και αυτό μια λύση της εξίσωσης, [FeVe96].

2.2.1 Χώρος φάσης – τροχιές – κρίσιμα σημεία

Θεωρούμε πάλι της Εξ. (2.2) $\frac{dx}{dt} = f(x)$ με $x \in D \subset \mathbb{R}^n$ όπου το D ονομάζεται χώρος φάσης (phase space).

Στην συνέχεια θα προσπαθήσουμε να προσδιορίσουμε την έννοια του χώρου-φάσης όπως και αυτές του κρίσιμου σημείου – σταθερού σημείου (critical point) και της τροχιάς (orbit).

Για να γίνουν περισσότερο κατανοητές οι παραπάνω έννοιες θεωρούμε την παρακάτω αρμονική εξίσωση

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} = 0$$

Η παραπάνω εξίσωση είναι αυτόνομη και για να υπολογίσουμε την αντίστοιχη διανυσματική συνάρτηση θέτουμε $x = x_1$ και $\frac{dx}{dt} = x_2$ οπότε έχουμε το παρακάτω σύστημα

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2, \quad \frac{dx_2}{dt} = -x_1.$$

Όπως γνωρίζουμε η λύση της βαθμωτής εξίσωσης είναι ένας γραμμικός συνδυασμός του $\cos t$ και του $\sin t$.

Αν σχεδιάσουμε το χώρο των λύσεων $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$ μπορούμε να προβάλουμε τις λύσεις σε ένα $x, \frac{dx}{dt}$ πλάνο, το οποίο θα ονομάζουμε *πλάνο-φάσης* (phase-plane).

Καθώς η παράμετρος του χρόνου δεν υπάρχει με σαφήνεια στην Εξ. (2.2) μπορούμε να εφαρμόσουμε αυτή την προβολή για τις λύσεις της γενικής μορφής μιας αυτόνομης εξίσωσης. Ο χώρος στον οποίο μπορούμε να περιγράψουμε την συμπεριφορά των μεταβλητών x_1, \dots, x_n παραμετροποιημένος κατά t ονομάζεται *χώρος-φάσης* (phase-space).

Ένα σημείο στο χώρο-φάσης με συντεταγμένες $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ για καθορισμένο t ονομάζεται *σημείο-χώρου* (phase point). Στη γενική των περιπτώσεων αυξάνοντας το t ένα σημείο-χώρου θα κινείται διαμέσου του χώρου-φάσης.

Όταν εφαρμόσαμε την προβολή στο χώρο-φάσης δεν γνωρίζαμε, γενικά, τις καμπύλες λύσεων της Εξ. (2.2). Ωστόσο, είναι αρκετά απλό να διατυπώσουμε την διαφορική εξίσωση η οποία περιγράφει την συμπεριφορά των τροχιών στο χώρο-φάσης.

Γράφοντας την Εξ. (2.2) με τέτοιο τρόπο που να φαίνονται οι συνιστώσες της θα έχουμε:

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x), \quad i = 1, \dots, n.$$

Θα χρησιμοποιήσουμε μία από τις συνιστώσες του x , έστω τη x_1 ως μια νέα ανεξάρτητη μεταβλητή προϋποθέτοντας βέβαια ότι $f_1(x) \neq 0$. Οπότε μπορούμε να υπολογίσουμε $(n-1)$ εξισώσεις της μορφής:

$$\begin{aligned} \frac{dx_2}{dx_1} &= \frac{f_2(x)}{f_1(x)} \\ &\vdots \\ \frac{dx_n}{dx_1} &= \frac{f_n(x)}{f_1(x)} \end{aligned} \quad (2.3)$$

Οι λύσεις του συστήματος (2.3) στο χώρο-φάσης ονομάζονται *τροχιές (orbits)*. Εφόσον η ύπαρξη και η μοναδικότητα η οποία περιγράφεται στο Θεώρημα 2.1 μπορεί να εφαρμοστεί στην Εξ. (2.2) τότε μπορεί επίσης να εφαρμοστεί και στο σύστημα (2.3). Αυτό συνεπάγεται ότι τροχιές στο χώρο-φάσης δεν θα τέμνονται.

Φυσικά στην παραπάνω ανάλυσή μας ξεχάσαμε την περίπτωση όπου $f_1(x) = 0$. Σε αυτή την περίπτωση θα μπορούσαμε να πάρουμε το x_2 σαν ανεξάρτητη μεταβλητή ανταλλάσσοντας τους ρόλους των $f_1(x)$ και $f_2(x)$. Αν τα μηδενικά των $f_1(x)$ και $f_2(x)$ συμπίπτουν, μπορούμε να πάρουμε σαν ανεξάρτητη μεταβλητή το x_3 κ.τ.λ. Το πραγματικό πρόβλημα αυτής της ανάλυσης προκύπτει σε σημεία της μορφής $a = (a_1, \dots, a_n)$ τέτοια ώστε

$$f_1(a) = f_2(a) = \dots = f_n(a) = 0$$

Ένα τέτοιο σημείο $a \in R^n$ είναι μηδενικό της διανυσματικής συνάρτησης $f(x)$ και στη συνέχεια θα το ονομάζουμε *κρίσιμο σημείο (critical point)* ή *σημείο ισορροπίας (equilibrium point)*.

2.2.2 Κρίσιμα σημεία και γραμμικοποίηση

Θεωρούμε ξανά την εξίσωση $\frac{dx}{dt} = f(x)$ με $x \in D \subset R^n$ και υποθέτουμε ότι το διάνυσμα της συνάρτησης $f(x)$ έχει ένα μηδενικό $x = a$ στο D . Σε αυτή την περίπτωση το σημείο $x = a$ με $f(a) = 0$ ονομάζεται κρίσιμο (σταθερό) σημείο της εξίσωσης $\frac{dx}{dt} = f(x)$.

Ένα κρίσιμο (σταθερό) σημείο στο χώρο-φάσης μπορεί να θεωρηθεί σαν μία τροχιά η οποία εκφυλίζεται σε ένα σημείο. Είναι αναγκαίο εδώ να παρατηρήσουμε ότι ένα κρίσιμο (σταθερό) σημείο αντιστοιχεί με μια λύση ισορροπίας της εξίσωσης $x(t) = a$, ικανοποιώντας την εξίσωση για κάθε χρονική στιγμή. Συνέχεια όμως του θεωρήματος της μοναδικότητας είναι ότι δεν μπορούμε ποτέ να φθάσουμε μια λύση ισορροπίας σε πεπερασμένο χρόνο (αν αυτό μπορούσε να επιτευχθεί τότε θα είχαμε την τομή δύο διαφορετικών λύσεων).

Πριν προχωρήσουμε θα δώσουμε ένα σημαντικό ορισμό για τη θεωρία των μη γραμμικών δυναμικών συστημάτων και κατ' επέκταση των χαστικών συστημάτων αυτόν του *ελκυστή (attractor)*. Ένα κρίσιμο σημείο

$x = a$ της εξίσωσης $\frac{dx}{dt} = f(x)$ στο R^n ονομάζεται θετικός ελκυστής (positive attractor) αν υπάρχει μια γειτονική περιοχή $\Omega_a \subset R^n$ του $x = a$ τέτοια ώστε $x(t_0) \in \Omega_a$ και ισχύει ότι $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = a$. Αν το κρίσιμο σημείο $x = a$ έχει την ιδιότητα αυτή για $t \rightarrow -\infty$ τότε το $x = a$ ονομάζεται αρνητικός ελκυστής (negative attractor).

Η μεθοδολογία η οποία ακολουθείται, [Fev96] συνήθως στην ανάλυση των κρίσιμων σημείων και των λύσεων ισορροπίας είναι να ξεκινάμε γραμμικοποιώντας την υπό μελέτη εξίσωση σε μια γειτονική περιοχή του κρίσιμου σημείου. Υποθέτουμε ότι η $f(x)$ μπορεί να εκφραστεί ως μια σειρά Taylor στο σημείο $x = a$.

Έτσι λοιπόν για την γενική μορφή της εξίσωσης $\frac{dx}{dt} = f(x)$ θα μπορούμε να γράψουμε για μια γειτονική περιοχή του κρίσιμου σημείου $x = a$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}(a)(x - a) + \text{όροι υψηλότερης τάξης}.$$

Έτσι λοιπόν μπορούμε να πούμε ότι θα μελετήσουμε μια γραμμική εξίσωση με σταθερούς συντελεστές της μορφής

$$\frac{dy}{dt} = \frac{\partial f}{\partial y}(a)(y - a)$$

και για να απλοποιήσουμε το συμβολισμό μπορούμε να μετατοπίσουμε το σημείο a στην αρχή των αξόνων του χώρου-φάσης, οπότε θέτοντας $\bar{y} = y - a$ έχουμε την νέα μορφή της εξίσωσής μας

$$\frac{d\bar{y}}{dt} = \frac{\partial f}{\partial y}(a)\bar{y}.$$

Επίσης μπορούμε να κάνουμε την αντικατάσταση $\frac{\partial f}{\partial y}(a) = A$ ένα $n \times n$ πίνακα με σταθερούς συντελεστές και επίσης παραλείπουμε το συμβολισμό με την $(-)$ οπότε καταλήγουμε σε μια εξίσωση της μορφής

$$\frac{dy}{dt} = Ay$$

2.2.3 Ταξινόμηση κρίσιμων σημείων

Συνεχίζοντας, θα αναλύσουμε την εξίσωση της μορφής στην οποία καταλήξαμε στο τέλος της προηγούμενης παραγράφου. Θα αποκλείσουμε την περίπτωση σε αυτή την παράγραφο του μη ιδιόμορφου πίνακα A , γεγονός που σημαίνει ότι υπάρχει ο αντίστροφος πίνακας A^{-1} και

$$\det A \neq 0$$

Αν ο πίνακας A είναι μη ιδιόμορφος τότε η αρχή των αξόνων είναι η μόνη λύση της εξίσωσης. Αν από την άλλη μεριά ο πίνακας A είναι ιδιόμορφος τότε υπάρχει ένα μη μηδενικό κρίσιμο σημείο x_f τέτοιο ώστε $Ax_f = 0$. Στην πραγματικότητα κάθε βαθμωτό πολλαπλάσιο του x_f της μορφής $x = ax_f$ είναι επίσης λύση της εξίσωσης $Ax = 0$. Υπάρχει λοιπόν μια ολόκληρη γραμμή κρίσιμων σημείων η οποία περνά από την αρχή των αξόνων.

Ένα κρίσιμο σημείο λέμε ότι είναι απομονωμένο (isolated) αν δεν υπάρχει άλλο κρίσιμο σημείο κοντά σε αυτό (σε μια μικρή γειτονική περιοχή γύρω από αυτό). Ένα κρίσιμο σημείο είναι απομονωμένο αν ο πίνακας A είναι μη ιδιόμορφος και άρα υπάρχει ο αντίστροφός του. Ένα γραμμικό σύστημα με ένα μη ιδιόμορφο πίνακα σταθερών συντελεστών ονομάζεται απλό (simple) και ένα τέτοιο σύστημα έχει ένα απομονωμένο κρίσιμο σημείο στην αρχή των αξόνων [Berry96].

Εξετάζοντας τα παραπάνω από μια άλλη σκοπιά μπορούμε να πούμε ότι το κρίσιμο σημείο είναι μη αναγεννήσιμο (non-degenerated).

Συνεχίζοντας την ανάλυσή μας για το κρίσιμο σημείο ενός γραμμικού συστήματος ξεκινάμε με τον υπολογισμό των ιδιοτιμών $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ του πίνακα A από την χαρακτηριστική εξίσωση

$$\det(A - \lambda I) = 0.$$

Υπάρχει ένας πραγματικός μη ιδιόμορφος πίνακας T τέτοιος ώστε ο πίνακας $T^{-1}AT$ να είναι στη μορφή Jordan, [Hale69]. Αν οι n ιδιοτιμές είναι διαφορετικές τότε ο $T^{-1}AT$ είναι διαγώνιος με τα στοιχεία της διαγωνίου να είναι οι ιδιοτιμές. Ακόμη όμως και στην περίπτωση που υπάρχουν κάποιες ιδιοτιμές ίδιες, ο γραμμικός μετασχηματισμός $y = Tz$ μπορεί να μας οδηγήσει σε μια πολύ σημαντική απλοποίηση. Βρίσκουμε λοιπόν ότι

$$T \frac{dz}{dt} = ATz \Rightarrow$$

$$\frac{dz}{dt} = T^{-1}ATz.$$

Οπότε αν συμβολίσουμε με $D = T^{-1}AT$ έχουμε καταλήξει στην εξίσωση $\frac{dz}{dt} = Dz$ το οποίο ονομάζεται *κανονικό σύστημα (canonical system)* και είναι αρκετά πιο εύκολο να λυθεί. Στη συνέχεια για να χαρακτηρίσουμε το κρίσιμο σημείο και την αντίστοιχη ροή-φάσης θα θεωρήσουμε ότι έχουμε ήδη υπολογίσει την παραπάνω εξίσωση.

2.3 Γραμμικά συστήματα

Στη συνέχεια θα προσπαθήσουμε να περιγράψουμε τη θέση των ιδιοτιμών ενός γραμμικού συστήματος μέσω ενός διαγράμματος στο μιγαδικό επίπεδο (πραγματικό οριζόντιο άξονα, φανταστικό κατακόρυφο άξονα). Στην ανάλυσή μας θα εξετάσουμε τις περιπτώσεις των γραμμικών συστημάτων δύο και τριών διαστάσεων αντίστοιχα.

2.3.1 Γραμμικά συστήματα δύο διαστάσεων

Στη συγκεκριμένη περίπτωση των γραμμικών συστημάτων δύο διαστάσεων οι ιδιοτιμές είναι δύο λ_1, λ_2 και θα είναι και οι δύο πραγματικές ή μιγαδικές.

Στην περίπτωση που $\lambda_1 \neq \lambda_2$ (πραγματικές ή μιγαδικές) τότε ο πίνακας $D = T^{-1}AT$ θα έχει την μορφή

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

ενώ για τη γενική λύση της εξίσωσης $\frac{dz}{dt} = Dz$ θα έχουμε ότι

$$z(t) = \begin{bmatrix} c_1 e^{\lambda_1 t} \\ c_2 e^{\lambda_2 t} \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

όπου τα c_1, c_2 σταθερές. Η συμπεριφορά των λύσεων του συστήματος (2.4) είναι πολύ διαφορετική για όλες τις δυνατές επιλογές των λ_1 και λ_2 . Θα έχουμε τις παρακάτω διαφορετικές περιπτώσεις για την συμπεριφορά του κρίσιμου σημείου:

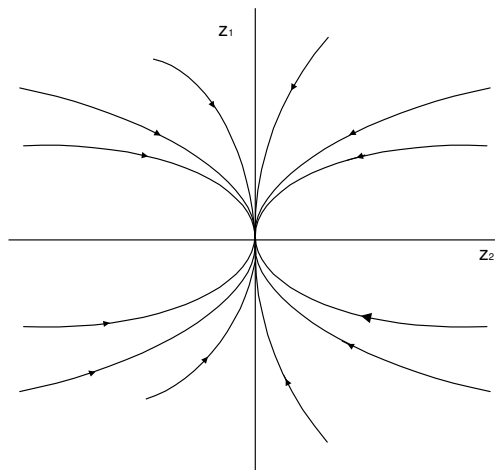
α. Κόμβος (node)

Σε αυτή την πρώτη περίπτωση οι ιδιοτιμές είναι πραγματικές και έχουν το ίδιο πρόσημο. Αν $\lambda_1 \neq \lambda_2$ έχουμε την πραγματική λύση $z = (z_1, z_2)$ με $z_1(t) = ce^{\lambda_1 t}$ και $z_2(t) = ce^{\lambda_2 t}$. Απαλείφοντας το t έχουμε ότι $|z_1| = c|z_2|^{\lambda_1/\lambda_2}$ με το c μια σταθερά. Έτσι το διάγραμμα φάσης θα αποτελείται από τροχιές οι οποίες είναι παραβολές όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.

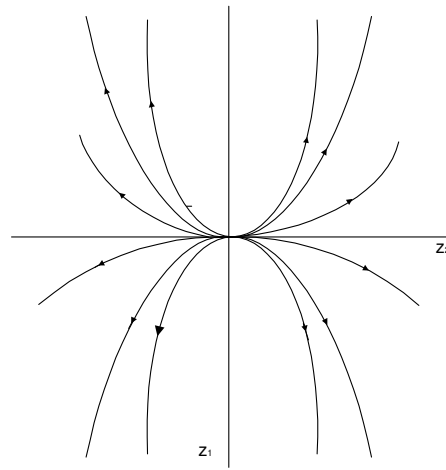
Το κρίσιμο σημείο σε αυτή την περίπτωση το ονομάζουμε κόμβο. Αν $\lambda_1, \lambda_2 < 0$ το κρίσιμο σημείο είναι ένας θετικός ελκυστής και κατ' επέκταση ένας ευσταθής κόμβος (stable node), ενώ αν $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ το κρίσιμο σημείο είναι ένας αρνητικός ελκυστής και κατ' επέκταση ένας ασταθής κόμβος (unstable node).

Στην περίπτωση που οι δύο ιδιοτιμές είναι ίσες, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, ο πίνακας $D = T^{-1}AT$ έχει την κανονική μορφή (canonical form), υπό την προϋπόθεση ότι τα ιδιοδιανύσματα δεν είναι γραμμικά ανεξάρτητα

$$\begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$$



$$\lambda_1 = -1 \quad \lambda_2 = -3 \text{ (stable)}$$



$$\lambda_1 = 2 \quad \lambda_2 = 1 \text{ (unstable)}$$

Σχήμα 2.1: Η Απεικόνιση ενός κόμβου,[Fene96].

οπότε οι λύσεις του συστήματος θα είναι της μορφής

$$z_1(t) = c_1 e^{\lambda t} + c_2 t e^{\lambda t}$$

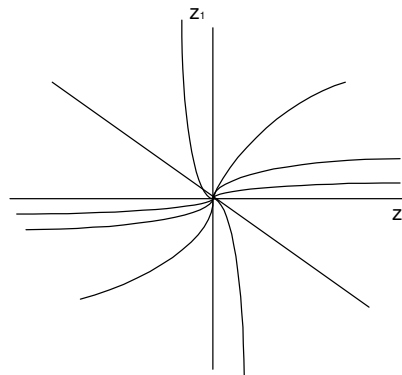
$$z_2(t) = c_2 e^{\lambda t}$$

με τα c_1, c_2 σταθερές. Το διάγραμμα φάσης σε αυτή την περίπτωση θα αποτελείται από τροχιές όπως φαίνεται στο Σχήμα 2.2.

Για την ειδική περίπτωση μάλιστα που οι δύο ιδιοτιμές είναι ίδιες και υπάρχουν δυο γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα, ο πίνακας $D = T^{-1}AT$ θα είναι ένας διαγώνιος πίνακας της μορφής

$$\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

οπότε οι λύσεις του συστήματος θα είναι της μορφής



Σχήμα 2.2: Η Απεικόνιση ενός κόμβου για $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$

$$z_1(t) = c_1 e^{\lambda t}$$

$$z_2(t) = c_2 e^{\lambda t}$$

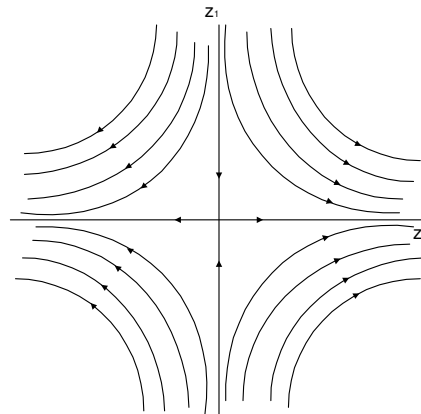
με τα c_1, c_2 σταθερές. Το διάγραμμα φάσης σε αυτή την περίπτωση θα αποτελείται από ευθείες γραμμές που διέρχονται από την αρχή των αξόνων.

Επίσης και στις δύο περιπτώσεις που οι ιδιοτιμές είναι ίδιες μεταξύ τους αν $\lambda < 0$ το κρίσιμο σημείο είναι ένας θετικός ελκυστής, ενώ αν $\lambda > 0$ το κρίσιμο σημείο είναι ένας αρνητικός ελκυστής.

β. Σαγματικό σημείο (saddle point)

Κατόπιν εξετάζουμε την περίπτωση που οι δύο ιδιοτιμές είναι πραγματικές αλλά έχουν διαφορετικό πρόσημο. Οι λύσεις περιγράφονται και σε αυτή την περίπτωση από το σύστημα (2.4) ενώ το διάγραμμα φάσης θα αποτελείται από τροχιές που περιγράφονται από τη σχέση $|z_1| = c|z_2|^{-|\lambda_1/\lambda_2|}$ με το c μια σταθερά. Η συμπεριφορά των τροχιών είναι υπερβολική όπως φαίνεται στο Σχήμα 2.3, ενώ το κρίσιμο σημείο $(0, 0)$ δεν είναι ελκυστής. Ένα τέτοιο κρίσιμο σημείο θα το αποκαλούμε σαγματικό σημείο.

Επίσης είναι αναγκαίο σε αυτό το σημείο να παρατηρήσουμε ότι υπάρχουν δύο λύσεις με την ιδιότητα $(z_1(t), z_2(t)) \rightarrow (0, 0)$ καθώς $t \rightarrow \infty$ οι οποίες ονομάζονται *ευσταθή πολύμορφα* (stable manifolds) και δύο λύσεις με την ιδιότητα $(z_1(t), z_2(t)) \rightarrow (0, 0)$ καθώς $t \rightarrow -\infty$ οι οποίες ονομάζονται *μη ευσταθή πολύμορφα* (unstable manifolds).



Σχήμα 2.3: Η Απεικόνιση ενός σαγματικού σημείου

γ. Εστία (focus)

Στη συνέχεια θα δούμε την περίπτωση όπου οι δύο ιδιοτιμές λ_1 και λ_2 είναι μιγαδικές της μορφής $\lambda_{1,2} = \mu \pm \omega i$ με $\mu \neq 0$. Η κανονική μορφή σε αυτή την περίπτωση είναι ο πίνακας

$$D = \begin{bmatrix} \mu & -\omega \\ \omega & \mu \end{bmatrix}$$

Η κανονική μορφή συνεπάγεται το παρακάτω ζευγάρι διαφορικών εξισώσεων

$$\frac{dz_1}{dt} = \mu z_1 - \omega z_2$$

$$\frac{dz_2}{dt} = \omega z_1 + \mu z_2$$

για να λύσουμε το παραπάνω σύστημα εισάγουμε την έννοια των πολικών συντεταγμένων και έχουμε $z_1 = r \cos \theta$ και $z_2 = r \sin \theta$ οπότε αντικαθιστώντας παίρνουμε το παρακάτω σύστημα

$$\frac{dr}{dt} \cos \theta - r \sin \theta \frac{d\theta}{dt} = \mu r \cos \theta - \omega r \sin \theta \quad (E_1)$$

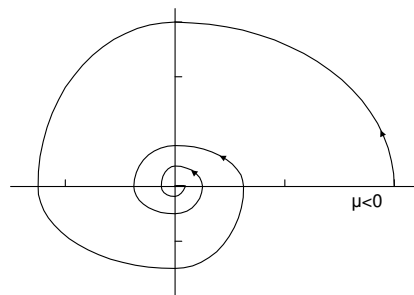
$$\frac{dr}{dt} \sin \theta + r \cos \theta \frac{d\theta}{dt} = \omega r \cos \theta + \mu r \sin \theta \quad (E_2)$$

κάνοντας τις παρακάτω πράξεις καταλήγουμε στο τελικό σύστημα

$$(E_1) \times \cos \theta + (E_2) \times \sin \theta \Rightarrow \frac{dr}{dt} = \mu r \Rightarrow r = r_0 e^{\mu t}$$

$$(E_2) \times \cos \theta - (E_1) \times \sin \theta \Rightarrow r \frac{d\theta}{dt} = \omega r \Rightarrow \theta = \theta_0 + \omega t.$$

Απαλείφοντας την μεταβλητή του χρόνου στις δύο παραπάνω εξισώσεις παίρνουμε ότι $r = r_0 e^{\mu(\theta_0 + \theta)/\omega}$ οπότε οι τροχιές στο διάγραμμα-φάσης θα έχουν τη μορφή σπирάλ, Σχήμα 2.4, από και προς το κρίσιμο σημείο (0,0) το οποίο ονομάζεται *εστία* (focus).

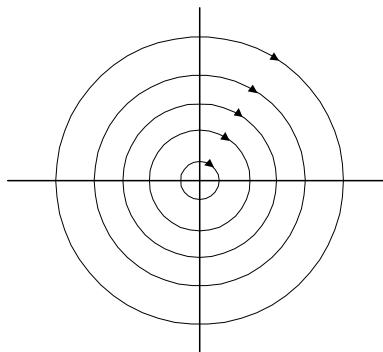


Σχήμα 2.4: Η Απεικόνιση ενός σημείου εστίας

Αν τώρα $\mu < 0$ το κρίσιμο σημείο είναι ένας θετικός ελκυστής και κατ' επέκταση ένα ευσταθές σπирάλ, ενώ αν $\mu > 0$ το κρίσιμο σημείο είναι ένας αρνητικός ελκυστής και κατ' επέκταση ένα μη ευσταθές σπирάλ.

δ. Κέντρο (center)

Η ειδική περίπτωση που οι ιδιοτιμές έχουν μόνο φανταστικό μέρος συναντάται πολύ σπάνια σε εφαρμογές. Αν λοιπόν $\lambda_{1,2} = \pm \omega i$, ω πραγματικό, τότε το κρίσιμο σημείο (0,0) ονομάζεται *κέντρο* (center) και οι τροχιές στο διάγραμμα φάσης είναι κύκλοι με κέντρο το κρίσιμο σημείο όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Σχήμα 2.3: Η Απεικόνιση ενός κέντρου

Είναι προφανές ότι σε αυτή την περίπτωση το κρίσιμο σημείο (0,0) δεν είναι ελκυστής.

Μια σημαντική ιδιότητα

Όπως φάνηκε στην παραπάνω ανάλυση, η κατηγοριοποίηση των κρίσιμων σημείων και η συμπεριφορά των τροχιών στο διάγραμμα-φάσης για ένα απλό γραμμικό σύστημα δύο διαστάσεων εξαρτάται από την μορφή των ιδιοτιμών. Έτσι λοιπόν ένα τέτοιο σύστημα $\frac{dx}{dt} = Ax$ όπου A ένας πίνακας της μορφής $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$.

Οι ιδιοτιμές του παραπάνω πίνακα δίδονται από την εξίσωση

$$\begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^2 - (a + d)\lambda + ad - bc = 0.$$

Λύνοντας ως προς λ παίρνουμε ότι

$$\lambda = (a + d) \pm \sqrt{(a + d)^2 - 4(ad - bc)} \quad \text{ή}$$

$$\lambda = \text{tr}(A) \pm \sqrt{(\text{tr}(A))^2 - 4\det(A)}$$

όπου $\text{tr}(A) = (a + d)$ ονομάζεται το *ίχνος* του πίνακα A και $\det(A) = (ad - bc)$ η ορίζουσα του ίδιου πίνακα.

Μπορούμε επομένως να πούμε ότι η μορφή των ιδιοτιμών εξαρτάται από το πρόσημο του όρου $R = (\text{tr}(A))^2 - 4\det(A)$. Έτσι λοιπόν οι ιδιοτιμές θα είναι:

α) πραγματικές διαφορετικές αν $R > 0$

β) πραγματικές ίσες μεταξύ τους αν $R = 0$

γ) μιγαδικές αν $R < 0$.

2.3.2 Γραμμικά συστήματα τριών διαστάσεων

Αυξάνοντας τον αριθμό n των διαστάσεων ενός γραμμικού συστήματος της μορφής $\frac{dz}{dt} = Az$ αυξάνουν πολύ και οι διαφορετικές περιπτώσεις που πρέπει να εξετάσουμε. Στο σημείο αυτό θα προσπαθήσουμε να κάνουμε μια εισαγωγική (και περιληπτική) ανάλυση για την περίπτωση που $n=3$. Οι ιδιοτιμές λ_1 , λ_2 και λ_3 μπορεί να είναι πραγματικές ή η μια πραγματική και οι δύο μιγαδικές κ.τ.λ. ενώ πρέπει να επισημάνουμε ότι και το διάγραμμα φάσης των τροχιών θα είναι πλέον τριών διαστάσεων.

Αν οι ιδιοτιμές είναι όλες διαφορετικές μεταξύ τους όπως στην περίπτωση της μίας πραγματικής και των δύο μιγαδικών ιδιοτιμών, τότε ο πίνακας $T^{-1}AT$ θα είναι διαγώνιος και θα έχουμε τη γενική λύση να έχει τη μορφή

$$z(t) = (c_1 e^{\lambda_1 t}, c_2 e^{\lambda_2 t}, c_3 e^{\lambda_3 t})$$

όπου c_1 , c_2 και c_3 σταθερές. Θεωρούμε τις παρακάτω περιπτώσεις:

α. Τρεις πραγματικές ιδιοτιμές

Αν οι ιδιοτιμές λ_1 , λ_2 και λ_3 έχουν το ίδιο πρόσημο τότε θα έχουμε ένα κόμβο τριών διαστάσεων.

Αν οι ιδιοτιμές δεν έχουν όλες το ίδιο πρόσημο, τότε θα έχουμε ένα σαγματικό κόμβο. Οι ιδιοτιμές με το ίδιο πρόσημο θα σχηματίζουν ένα κόμβο και σε συνδυασμό με την ιδιοτιμή που θα έχει διαφορετικό πρόσημο θα δίνουν ένα σαγματικό κόμβο.

Στην περίπτωση που κάποιες από τις ιδιοτιμές είναι ίδιες (ακόμη και οι τρεις) υπάρχουν αρκετές πιθανότητες για τον πίνακα $T^{-1}AT$ κάτι που δεν είναι του παρόντος να αναλύσουμε.

β. Δύο μιγαδικές ιδιοτιμές

Εξετάζουμε τώρα την περίπτωση που δύο από τις ιδιοτιμές, λ_2, λ_3 είναι μιγαδικές και μία, η λ_1 , πραγματική. Η ανάλυση μας σε αυτή την περίπτωση θα βασιστεί στο αν η πραγματική ιδιοτιμή και το πραγματικό μέρος των μιγαδικών ιδιοτιμών έχουν το ίδιο πρόσημο ή όχι.

β1. Ίδιο πρόσημο

Αν η πραγματική ιδιοτιμή και το φανταστικό μέρος των μιγαδικών ιδιοτιμών έχουν το ίδιο πρόσημο μπορούμε να διακρίνουμε τις περιπτώσεις: α) αν λ_1 και $\text{Re}(\lambda_2, \lambda_3) > 0$ τότε το κρίσιμο σημείο (0,0) θα είναι ένας αρνητικός ελκυστής, και β) αν λ_1 και $\text{Re}(\lambda_2, \lambda_3) < 0$ όπου το κρίσιμο σημείο (0,0) θα είναι ένας θετικός ελκυστής.

β2. Διαφορετικό πρόσημο

Αντίστοιχα για την περίπτωση που η πραγματική ιδιοτιμή και το φανταστικό μέρος των μιγαδικών ιδιοτιμών έχουν διαφορετικό πρόσημο, μπορούμε να διακρίνουμε τις παρακάτω περιπτώσεις: α) αν $\text{Re}(\lambda_2, \lambda_3) > 0$ και $\lambda_1 < 0$ θα έχουμε θετική έλκυση ως προς τη μια κατεύθυνση και αρνητική ως προς την άλλη, και β) αν $\text{Re}(\lambda_2, \lambda_3) < 0$ και $\lambda_1 > 0$ θα έχουμε αρνητική έλκυση ως προς τη μια κατεύθυνση και θετική έλκυση ως προς τις άλλες δύο κατευθύνσεις (συμπληρωματική της προηγούμενης περίπτωσης).

γ. Δύο φανταστικές ιδιοτιμές

Για την ειδική περίπτωση που οι δύο ιδιοτιμές είναι φανταστικές θα έχουμε έλκυση μόνο προς μια κατεύθυνση. Η έλκυση λοιπόν στο διάγραμμα-φάσης των τροχιών θα είναι θετική αν η πραγματική ιδιοτιμή είναι αρνητική και αρνητική αν η πραγματική ιδιοτιμή είναι θετική.

2.4 Κρίσιμα σημεία για μη γραμμικά συστήματα

Στη μέχρι τώρα ανάλυσή μας αναφερθήκαμε στα κρίσιμα σημεία μιας αυτόνομης εξίσωσης της μορφής $\frac{dx}{dt} = f(x)$ χρησιμοποιώντας τη γραμμική ανάλυση. Υποθέτουμε τώρα ότι το κρίσιμο σημείο έχει μετατοπιστεί στο (0,0) και η παραπάνω εξίσωση μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$\frac{dx}{dt} = Ax + g(x) \quad (2.5)$$

όπου A ένας μη-ιδιόμορφος πίνακας και

$$\lim_{\|x\| \rightarrow 0} \frac{\|g(x)\|}{\|x\|} = 0.$$

Η τελευταία συνθήκη ισχύει κάτω από σχετικά γενικές συνθήκες, για παράδειγμα όταν η $f(x)$ είναι συνεχόμενα διαφοροποιήσιμη σε μια κοντινή περιοχή γύρω από το σημείο (0,0).

Η ανάλυση των μη γραμμικών εξισώσεων ξεκινά συνήθως με τη γραμμική ανάλυση (όπως την περιγράψαμε στις προηγούμενες παραγράφους) και στη συνέχεια γίνεται προσπάθεια να βγουν κάποια συμπεράσματα για το αρχικό μη γραμμικό σύστημα. Πολλές φορές οι ιδιότητες των γραμμικοποιημένων συστημάτων ισχύουν και για τα αντίστοιχα μη γραμμικά συστήματα αλλά υπάρχουν και αρκετές περιπτώσεις που οι ιδιότητες δεν μπορούν να μεταφερθούν από τα γραμμικά στα αντίστοιχα μη γραμμικά συστήματα.

Το πρώτο πρόβλημα που έχουμε να λύσουμε είναι αυτό της ονοματολογίας και του ορισμού του χαρακτηρισμού ενός κρίσιμου σημείου ως κόμβο, σαγματικό σημείο, εστία και κέντρο για την περίπτωση των μη γραμμικών εξισώσεων. Για την περίπτωση των μη γραμμικών συστημάτων δύο διαστάσεων μπορούμε να επεκτείνουμε με σχετική ευκολία αυτή την ονοματολογία. Για παράδειγμα, κόμβος είναι ένα κρίσιμο σημείο στο οποίο όλες οι τροχιές φτάνουν μέσω μιας βασικής εφαπτομένης για $t \rightarrow \infty$ ή $t \rightarrow -\infty$, κέντρο είναι ένα κρίσιμο σημείο για το οποίο υπάρχει μια κοντινή περιοχή γύρω από αυτό όπου όλες οι τροχιές είναι κλειστές γύρω από το κρίσιμο σημείο. Για μη γραμμικά συστήματα μεγαλύτερων των δύο διαστάσεων όλη η ονοματολογία συναντά μεγάλα προβλήματα και σε αυτές τις περιπτώσεις θα χαρακτηρίζουμε ένα κρίσιμο σημείο με ιδιότητες όπως αυτές της έλκυσης, της ιδιοτιμής, της ύπαρξης ευσταθούς (μη ευσταθούς) πολύμορφου κ.τ.λ. Στην συνέχεια θα παρουσιάσουμε δύο βασικά θεωρήματα.

Θεώρημα 2.2

Θεωρήστε την Εξ. (2.5), αν το $x=0$ είναι ένας θετικός (ή αρνητικός) ελκυστής για τη γραμμικοποιημένη εξίσωση το $x=0$ είναι ένας θετικός (ή αρνητικός) ελκυστής για τη μη γραμμική εξίσωση (2.5).

Από την άλλη μεριά αν το κρίσιμο σημείο είναι ένα σαγματικό σημείο τότε δεν μπορεί να είναι ελκυστής για τη μη γραμμική εξίσωση.

Θεώρημα 2.3

Θεωρήστε την Εξ. (2.5) αν ο πίνακας A έχει μια ιδιοτιμή με θετικό πραγματικό μέρος, τότε το κρίσιμο σημείο $x=0$ δεν είναι ένας θετικός ελκυστής για την Εξ. (2.5).

Πρώτα θα εξετάσουμε την περίπτωση για τα γραμμικά συστήματα στο R^n

$$\frac{dy}{dt} = Ay$$

Υποθέτουμε ότι $E(\lambda)$ είναι ο γενικευμένος ιδιοχώρος των ιδιοτιμών λ του $n \times n$ πίνακα A . Τώρα ο R^n είναι ίσος με το κατευθείαν άθροισμα του $E(\lambda)$ πάνω στις ιδιοτιμές του A υπό την έννοια ότι παίρνουμε

$$\begin{aligned} E(\lambda) \cap R^n & \quad \text{αν το } \lambda \text{ είναι πραγματικό} \\ (E(\lambda) + E(\bar{\lambda})) \cap R^n & \quad \text{αν } \text{Im } \lambda \neq 0 \end{aligned}$$

Το *ευσταθές πολύμορφο* (stable manifolds) του γραμμικού συστήματος $\frac{dy}{dt} = Ay$ ορίζεται τώρα σαν το γραμμικό υπό-χώρο E_s του R^n ο οποίος είναι ίσος με το άθροισμα των ιδιοτιμών με αρνητικό πραγματικό μέρος του γενικευμένου ιδιοχώρου. Όμοια το μη ευσταθές πολύμορφο E_u του παραπάνω γραμμικού συστήματος ορίζεται από το άθροισμα των ιδιοτιμών οι οποίες έχουν θετικό πραγματικό μέρος.

Είναι ξεκάθαρο ότι E_s και E_u είναι σταθερά σύνολα του γραμμικού συστήματος. Οι λύσεις είναι περιορισμένες για $t \rightarrow \infty$ μόνο αν $y(t_0) \in E_s$. Λύσεις που ξεκινούν συμπληρωματικά του $E_s \cup E_u$ «έρχονται από το άπειρο και τρέχουν μακριά στο άπειρο»

Στη συνέχεια θα δούμε ένα θεώρημα το οποίο αναφέρεται στην ύπαρξη ευσταθών και μη ευσταθών πολύμορφων και αποτελεί ένα πολύ σημαντικό γενικευμένο συμπέρασμα για την περίπτωση των μη γραμμικών συστημάτων ([Hart64] κεφάλαιο 9).

Θεώρημα 2.4

Θεωρήστε την εξίσωση

$$\frac{dx}{dt} = Ax + g(x), \quad x \in \mathbb{R}^n \quad (2.6)$$

στην οποία ο $n \times n$ πίνακας A έχει n ιδιοτιμές με μη μηδενικά πραγματικά μέρη, $g(x)$ είναι C^k σε μια γειτονική περιοχή του $x=0$ και

$$\lim_{\|x\| \rightarrow 0} \frac{\|g(x)\|}{\|x\|} = 0$$

Τότε υπάρχει ένα C^k πολύμορφο W_s το οποίο ονομάζεται *ευσταθές πολύμορφο* του $x=0$ με τις ακόλουθες ιδιότητες:

- ▶ Το $0 \in W_s$, W_s έχει την ίδια διάσταση με αυτή του E_s και ο εφαπτόμενος χώρος του W_s στο $x=0$ είναι ίσος με το E_s .
- ▶ Αν έχουμε ότι $x(t_0) \in W_s$ για μια λύση $x(t)$, τότε το $x(t) \in W_s$ για όλα τα $t \geq t_0$ και $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$ (εκθετική σύγκλιση).
- ▶ Αν $x(t_0) \notin W_s$ για μια λύση του $x(t)$, τότε το $\|x(t)\| \geq \delta$ για κάποιο πραγματικό θετικό δ , κατάλληλο $t_1 \geq t_0$ και $t \geq t_1$.

Όμοια υπάρχει ένα C^k πολύμορφο W_u το οποίο ονομάζεται *μη ευσταθές πολύμορφο* του $x=0$ με τις ακόλουθες ιδιότητες:

- ▶ Το $0 \in W_u$, W_u έχει την ίδια διάσταση με αυτή του E_u και ο εφαπτόμενος χώρος του W_u στο $x=0$ είναι ίσος με το E_u .
- ▶ Αν έχουμε ότι $x(t_0) \in W_u$ για μια λύση $x(t)$, τότε το $x(t) \in W_u$ για όλα τα $t \geq t_0$ και $\lim_{t \rightarrow -\infty} x(t) = 0$.
- ▶ Αν $x(t_0) \notin W_u$ για μια λύση του $x(t)$, τότε το $\|x(t)\| \geq \delta$ για κάποιο πραγματικό θετικό δ , κατάλληλο $t_1 \leq t_0$ και $t \leq t_1$.

2.5 Ένα παράδειγμα εφαρμογής

Έστω το λογιστικό μοντέλο το οποίο περιγράφει την ανάπτυξη του πληθυσμού κάποιου συγκεκριμένου είδους, [NuYo84]:

$$\frac{dP}{dt} = aP \left(1 - \frac{P}{M} \right)$$

όπου P είναι ο πληθυσμός του είδους, M είναι ο πληθυσμός ισορροπίας και a είναι ένας σταθερός, χαμηλός ρυθμός αύξησης του πληθυσμού.

Υποθέτουμε τώρα ότι έχουμε δύο διαφορετικά είδη ζώων τα οποία ζουν σε μια συγκεκριμένη περιοχή ανταγωνιστικά (το ένα είδος είναι αρπακτικό και χρησιμοποιεί το άλλο είδος σαν κύρια πηγή τροφής του). Έστω λοιπόν ότι έχουμε τον πληθυσμό αρπακτικών $P_1(t)$ και τον πληθυσμό $P_2(t)$ των θηραμάτων και θέλουμε να εξετάσουμε τη σχέση μεταξύ αυτών των δύο πληθυσμών. Πριν προχωρήσουμε είναι αναγκαίο να κάνουμε την υπόθεση πως κάθε χρονική στιγμή η αλλαγή του πληθυσμού των αρπακτικών – θηραμάτων είναι ανάλογη του γινομένου $P_1 P_2$.

Λαμβάνοντας υπόψη αυτή την υπόθεση για το λογιστικό μοντέλο, έχουμε τις παρακάτω εξισώσεις για τους πληθυσμούς των αρπακτικών και των θηραμάτων αντίστοιχα:

$$\frac{dP_1(t)}{dt} = P_1(\alpha - \beta P_1 - r P_2)$$

$$\frac{dP_2}{dt} = P_2(-\gamma - \delta P_2 + s P_1)$$

όπου $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ και s είναι θετικές σταθερές. Στη δεύτερη εξίσωση το P_2 πρέπει να μηδενιστεί αν δεν υπάρχουν καθόλου αρπακτικά P_1 , ο οποίος είναι και ο λόγος της ύπαρξης του παράγοντα $-\gamma P_2$ για μικρούς πληθυσμούς. Υπάρχει ένας αριθμός από πιθανά αποτελέσματα της αλληλεπίδρασης των δύο πληθυσμών όπως τα εξής:

- να πεθάνει ο πληθυσμός των θηραμάτων και τα αρπακτικά να επιβιώσουν σε ισορροπία,
- να πεθάνουν τα αρπακτικά και στην συνέχεια να πεθάνουν και τα θηράματα,
- τα δύο είδη να συνυπάρχουν σε ισορροπία.

Όλα τα πιθανά αποτελέσματα μπορούν να ερευνηθούν χρησιμοποιώντας την ανάλυση του κρίσιμου σημείου του παραπάνω συστήματος. Μια αναγκαία συνθήκη για ισορροπία των δύο πληθυσμών είναι ένα κρίσιμο σημείο τέτοιο ώστε $P_1 > 0$ και $P_2 > 0$. Για να βρούμε το κρίσιμο σημείο λύνουμε το παρακάτω σύστημα:

$$P_1(\alpha - \beta P_1 - r P_2) = 0$$

$$P_2(-\gamma - \delta P_2 + s P_1) = 0$$

Από την πρώτη εξίσωση του παραπάνω συστήματος έχουμε ότι $P_1 = 0$ ή $\alpha - \beta P_1 - r P_2 = 0$.

Ενώ από την δεύτερη εξίσωση έχουμε ότι $P_2 = 0$ ή $-\gamma - \delta P_2 + s P_1 = 0$.

Οπότε το $(0,0)$ είναι ένα κρίσιμο σημείο. Επίσης για $P_1 = 0$ έχουμε ότι $P_2 = -\frac{\gamma}{\delta} < 0$ το οποίο όμως δεν είναι ρεαλιστικό. Επίσης, για $P_2 = 0$ έχουμε ότι $P_1 = \frac{\alpha}{\beta} > 0$. Οπότε το $\left(\frac{\alpha}{\beta}, 0\right)$ είναι ένα κρίσιμο σημείο όπου ο πληθυσμός των θηραμάτων εξαφανίζεται ενώ ο πληθυσμός των αρπακτικών επιβιώνει σε ένα επίπεδο ισορροπίας ίσο με $\frac{\alpha}{\beta}$.

Ένα τέταρτο κρίσιμο σημείο είναι το $\left(\frac{\alpha\delta + \gamma r}{\beta\delta + rs}, \frac{\alpha s - \beta\gamma}{\beta\delta + rs}\right)$ το οποίο αντιστοιχεί στην επιβίωση και των δύο πληθυσμών σε ισορροπία υπό την προϋπόθεση ότι $\alpha s > \beta\gamma$.

Για να μπορέσουμε να ταξινομήσουμε τα κρίσιμα σημεία, βρίσκουμε τον πίνακα του γραμμικοποιημένου συστήματος υπολογισμένο σε κάθε σημείο.

$$A = \begin{bmatrix} \alpha - 2\beta P_1 - rP_2 & -rP_1 \\ sP_2 & -\gamma - 2\delta P_2 + sP_1 \end{bmatrix}$$

Στο σημείο (0,0) έχουμε τον πίνακα $A = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & -\gamma \end{bmatrix}$ και το κρίσιμο σημείο είναι ένα (μη ευσταθές) σαγματικό σημείο.

Στο σημείο $\left(\frac{\alpha}{\beta}, 0\right)$ έχουμε το πίνακα $A = \begin{bmatrix} -\alpha & -\frac{r\alpha}{\beta} \\ 0 & -\gamma + \frac{\alpha s}{\beta} \end{bmatrix}$ και το κρίσιμο σημείο είναι ένας ευσταθής

κόμβος υπό τον όρο $s < \frac{\beta\gamma}{\alpha}$.

Στο σημείο $\left(\frac{\alpha\delta + \gamma}{\beta\delta + rs}, \frac{\alpha s - \beta\gamma}{\beta\delta + rs}\right)$ έχουμε ότι $A = \frac{1}{\beta\delta - rs} \begin{bmatrix} -\beta(\alpha\delta + r\gamma) & -r(\alpha\delta + \gamma) \\ s(\alpha s - \beta\gamma) & -\delta(\alpha s - \beta\gamma) \end{bmatrix}$. Η ορίζουσα του παραπάνω πίνακα είναι $\det(A) = \frac{(\alpha\delta + \gamma)(\alpha s - \beta\gamma)}{(\beta\delta + rs)} < 0$ αν $s < \frac{\beta\gamma}{\alpha}$ και το κρίσιμο σημείο θα είναι ένα σαγματικό σημείο. Αν $s > \frac{\beta\gamma}{\alpha}$, το κρίσιμο σημείο είναι ένας ευσταθής κόμβος υπό την προϋπόθεση ότι $(tr(A))^2 - 4\det(A) \geq 0$. Σε διαφορετική περίπτωση το κρίσιμο σημείο είναι ένα κέντρο και ουσιαστικά δεν μπορούμε να κατατάξουμε το κρίσιμο σημείο χρησιμοποιώντας τον γραμμικοποιημένο πίνακα.

Από την αλγεβρική ανάλυση μπορούμε να συμπεράνουμε ότι αν $s < \frac{\beta\gamma}{\alpha}$ τότε η συνύπαρξη των δύο ειδών είναι εξαιρετικά απίθανη αφού η ευσταθής συνθήκη ισορροπίας είναι $P_1 = \frac{\alpha}{\beta}$ και $P_2 = 0$. Για $s > \frac{\beta\gamma}{\alpha}$ το αποτέλεσμα δεν είναι και τόσο εύκολο να το προβλέψουμε. Το κρίσιμο σημείο $\left(\frac{\alpha}{\beta}, 0\right)$ γίνεται ασταθές, οπότε η συνύπαρξη των δύο ειδών είναι τώρα πιθανή με $P_1 = \frac{\alpha s + \gamma}{\beta\delta + rs}$ και $P_2 = \frac{\alpha s - \beta\gamma}{\beta\delta + rs}$ να γίνεται ένας ευσταθής κόμβος, κέντρο ή ένα ατρακτοειδές σπирάλ.

2.6 Ανάλυση ευστάθειας λύσεων ισορροπίας

Μια διαφορική εξίσωση μπορεί να έχει μια λύση ισορροπίας ή μια περιοδική λύση. Αυτές είναι λύσεις που υφίστανται για μια χρονική στιγμή. Σε πολλές εφαρμογές πολλές φορές μας ενδιαφέρει η απάντηση του ερωτήματος του κατά πόσον η λύση που τη χρονική στιγμή $t = t_0$ ξεκινά από μια γειτονική περιοχή μια τέτοιας ειδικής λύσης (ισορροπίας ή περιοδική) θα παραμείνει σε αυτή την γειτονική περιοχή για $t > t_0$. Αν αυτό συμβαίνει, τότε η λύση αυτή ονομάζεται ευσταθής και κάποιος θα περίμενε στο πεδίο της εφαρμογής για μια τέτοια λύση ότι: μια μικρή διαταραχή δεν θα προκαλέσει την απομάκρυνση της λύσης μακριά από αυτή την ειδική λύση.

Στο συνέχεια θα προσπαθήσουμε να αναπτύξουμε τη βασική θεωρία με την οποία μπορούμε να μελετήσουμε και να αναλύσουμε την ευστάθεια μιας λύσης. Θεωρούμε λοιπόν την εξίσωση

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t), \quad x \in R^n, \quad t \in R \quad (2.7)$$

με $f(t, x)$ συνεχής στο t και x , και Lipschitz συνεχής στο x . Υποθέτουμε ότι το $x=0$ είναι ένα κρίσιμο σημείο της συνάρτησης $f(t, x)$, έτσι $f(t, 0) = 0$, $t \in R$. Τα κρίσιμα σημεία των μη αυτόνομων εξισώσεων είναι αρκετά σπάνια, συνήθως η εξίσωση είναι αυτόνομη. Η υπόθεση ότι το $x=0$ είναι ένα κρίσιμο σημείο δεν μας περιορίζει αφού μπορούμε να μεταφέρουμε οποιοδήποτε κρίσιμο σημείο στην αρχή του χώρου-φάσης.

Ορισμός

Θεωρείστε την Εξ. (2.7) και μια γειτονική περιοχή $D \subset R^n$ του $x=0$. Η λύση που ξεκινά από το $t=t_0$ για $x=x_0$ σημειώνεται ως $x(t; t_0, x_0)$. Η λύση $x=0$ ονομάζεται *ευσταθής υπό την έννοια Lyapunov* αν για κάθε $\varepsilon > 0$ και t_0 ένα $\delta(\varepsilon, t_0)$ μπορεί να βρεθεί τέτοιο ώστε για $\|x_0\| \leq \delta$ να υποχρεώνει το $\|x(t; t_0, x_0)\| \leq \varepsilon$ για $t \geq t_0$.

Μια λύση ισορροπίας $x=0$ της Εξ. (2.7) που δεν είναι ευσταθής υπό την έννοια Lyapunov ονομάζεται *ασταθής*.

Ορισμός

Η λύση ισορροπίας $x=0$ της Εξ. (2.7) ονομάζεται *ασυμπτωτικά ευσταθής (asymptotically stable)* αν το $x=0$ είναι ευσταθής και υπάρχει ένα $\delta(t_0) > 0$ τέτοιο ώστε

$$\|x_0\| \leq \delta(t_0) \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t; t_0, x_0)\| = 0.$$

2.6.1 Ευστάθεια των περιοδικών λύσεων

Θεωρούμε την Εξ. (2.7) η οποία υποθέτουμε ότι ικανοποιεί τα θεωρήματα της μοναδικότητας και της ύπαρξης των λύσεων. Έστω τώρα $\phi(t)$ η περιοδική λύση της παραπάνω εξίσωσης. Η περιοδική λύση είναι ευσταθής υπό την έννοια Lyapunov αν για κάθε t_0 και $\varepsilon > 0$ μπορούμε να βρούμε ένα $\delta(\varepsilon, t_0) > 0$ τέτοιο ώστε

$$\|x_0 - \phi(t_0)\| \leq \delta \Rightarrow \|x(t; t_0, x_0) - \phi(t)\| \leq \varepsilon \text{ για } t \geq t_0.$$

2.6.2 Εξισώσεις με σταθερούς συντελεστές

Θεωρούμε την γραμμική εξίσωση

$$\frac{dx}{dt} = Ax \tag{2.8}$$

με τον A ένα σταθερό $n \times n$ πίνακα. Οι ιδιοτιμές $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ είναι οι λύσεις της χαρακτηριστικής εξίσωσης

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

Υποθέτουμε ότι η ιδιοτιμή λ_k είναι διαφορετική με το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα c_k , $k = 1, \dots, n$. Σε αυτή την περίπτωση

$$c_k e^{\lambda_k t}, \quad k = 1, \dots, n$$

είναι n ανεξάρτητες λύσεις της Εξ. (2.8).

Υποθέτουμε τώρα ότι δεν είναι όλες οι ιδιοτιμές διαφορετικές, για παράδειγμα η ιδιοτιμή λ έχει πολλαπλότητα $m > 1$. Αυτή η ιδιοτιμή λ παράγει m ανεξάρτητες λύσεις της μορφής

$$P_0 e^{\lambda t}, P_1(t) e^{\lambda t}, P_2(t) e^{\lambda t}, \dots, P_{m-1}(t) e^{\lambda t}$$

όπου $P_k(t)$, $k = 0, 1, \dots, m-1$ είναι πολυωνυμικά διανύσματα βαθμού k ή μικρότερου.

Πολλές φορές είναι αρκετά χρήσιμο να συνθέτουμε τις n ανεξάρτητες λύσεις $x_1(t), \dots, x_n(t)$ της Εξ. (2.8) σε ένα πίνακα $\Phi(t)$ με στήλες αυτές τις λύσεις:

$$\Phi(t) = (x_1(t) x_2(t) \dots x_n(t)).$$

Ο $\Phi(t)$ ονομάζεται *θεμελιώδης πίνακας* της Εξ. (2.8) και κάθε λύση της μπορεί τώρα να γραφεί με τη μορφή

$$x(t) = \Phi(t)c$$

με το c ένα σταθερό διάνυσμα. Προσθέτοντας το πρόβλημα των αρχικών συνθηκών $x(t_0) = x_0$ στην Εξ. (2.8) έχουμε την λύση του προβλήματος των αρχικών συνθηκών να γράφεται ως

$$x(t) = \Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)x_0.$$

Όταν μελετάμε την ευστάθεια της λύσης $x=0$, είναι προφανές ότι αυτό καθορίζεται κυρίως από το πραγματικό μέρος των ιδιοτιμών. Για την Εξ. (2.8) και την αναλυτική μορφή των ανεξάρτητων λύσεων αυτής της εξίσωσης μπορούμε να διατυπώσουμε τα παρακάτω συμπεράσματα:

Θεώρημα 2.5

Θεωρήστε την Εξ. (2.8) $\frac{dx}{dt} = Ax$ με A ένα $n \times n$ πίνακα και $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ τις ιδιοτιμές του.

1. Αν $\operatorname{Re} \lambda_k < 0$, $k = 1, \dots, n$, τότε για κάθε $x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$ και κατάλληλα επιλεγμένα, θετική σταθερά C και μ έχουμε

$$\|x(t)\| \leq C \|x_0\| e^{-\mu t} \text{ και } \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$$

Σε αυτή την περίπτωση η λύση $x=0$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθής.

2. Αν $\operatorname{Re} \lambda_k \leq 0$, $k = 1, \dots, n$, όπου οι ιδιοτιμές με $\operatorname{Re} \lambda_k = 0$ είναι διαφορετικές τότε το $x(t)$ είναι περιορισμένο (bounded) για $t \geq t_0$, συγκεκριμένα

$$\|x(t)\| \leq C \|x_0\|$$

Σε αυτή την περίπτωση η λύση $x=0$ είναι Lyapunov-ευσταθής.

3. Αν υπάρχει μια ιδιοτιμή λ_k με $\operatorname{Re} \lambda_k > 0$ τότε σε κάθε γειτονική περιοχή του $x=0$ υπάρχουν αρχικές τιμές τέτοιες ώστε για την αντίστοιχη λύση να έχουμε

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t)\| = +\infty$$

Σε αυτή την περίπτωση η λύση $x=0$ είναι ασταθής.

Για να μπορέσουμε να υπολογίσουμε αν οι ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης έχουν αρνητικά πραγματικά μέρη ή όχι υπάρχουν αρκετά κριτήρια με πιο γνωστό το κριτήριο Routh-Hurwitz [Cesa71].

2.6.3 Εξισώσεις με περιορισμένους συντελεστές

Θεωρήστε την εξίσωση

$$\frac{dx}{dt} = Ax + B(t)x \quad (2.9)$$

με A ένα μη ιδιόμορφο, σταθερό $n \times n$ πίνακα και $B(t)$ ένα συνεχή $n \times n$ πίνακα.

Μια ιδέα θα ήταν αν $\lim_{t \rightarrow \infty} \|B(t)\| = 0$ οπότε και οι λύσεις της Εξ. (2.9) τείνουν στις λύσεις της Εξ. (2.8).

Θεώρημα 2.6

Θεωρήστε την Εξ. (2.9) με $B(t)$ ένα συνεχή για $t \geq t_0$ πίνακα και με τις ιδιότητες:

- i. οι ιδιοτιμές λ_k του A με $k = 1, \dots, n$ έχουν $Re \lambda_k \leq 0$, ενώ οι ιδιοτιμές για τις οποίες ισχύει $Re \lambda_k = 0$ είναι διαφορετικές
- ii. το $\int_{t_0}^{\infty} \|B\| dt$ είναι περιορισμένο

τότε οι λύσεις της Εξ. (2.9) είναι περιορισμένες και η λύση $x = 0$ είναι ευσταθής με την έννοια Lyapunov (απόδειξη [FeVe96] σελίδα 72).

Θεώρημα 2.7

Θεωρήστε την Εξ. (2.9) με $B(t)$ ένα συνεχή για $t \geq t_0$ πίνακα και με τις ιδιότητες:

- i. Ο A είναι ένας σταθερός πίνακας με ιδιοτιμές λ_k , $k = 1, \dots, n$ τέτοιες ώστε $Re \lambda_k < 0$
- ii. το $\lim_{t \rightarrow \infty} \|B(t)\| = 0$

τότε για όλες τις λύσεις της Εξ. (2.9) ισχύει ότι $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$ και η λύση $x = 0$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθής (απόδειξη [FeVe96] σελίδα 73-74).

Θεώρημα 2.8

Θεωρήστε την Εξ. (2.9) με $B(t)$ ένα συνεχή για $t \geq t_0$ πίνακα και με την ιδιότητα $\lim_{t \rightarrow \infty} \|B(t)\| = 0$. Αν μια τουλάχιστον ιδιοτιμή του πίνακα A έχει θετικό πραγματικό μέρος, τότε υπάρχουν σε κάποια γειτονική περιοχή του $x = 0$ λύσεις $x(t)$ για τις οποίες ισχύει ότι $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = +\infty$ και η λύση $x = 0$ είναι ασταθής (απόδειξη [FeVe96] σελίδα 75).

2.6.4 Εξισώσεις με περιοδικούς συντελεστές

Θεωρούμε την εξίσωση

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x, \quad t \in R \quad (2.10)$$

με τον $A(t)$ ένα συνεχή, T -περιοδικό $n \times n$ πίνακα, οπότε $A(t+T) = A(t)$, $t \in \mathbb{R}$. Μια εξίσωση όπως η Εξ. (2.10) μπορεί να έχει και περιοδικές και μη περιοδικές λύσεις. Ας πάρουμε για παράδειγμα την εξίσωση πρώτης τάξης $\frac{dx}{dt} = a(t)x$ με $a(t) = 1$, $t \in \mathbb{R}$ ή $a(t) = \sin^2 t$. Οι δύο παραπάνω περιπτώσεις μπορεί να έχουν μη περιοδικές λύσεις, ακόμη και μη περιορισμένες αν $x(t_0) \neq 0$.

Το θεώρημα του Floquet το οποίο θα δούμε παρακάτω καταλήγει σε ένα θεμελιώδες αποτέλεσμα για εξισώσεις με περιοδικούς συντελεστές, ότι δηλαδή ο θεμελιώδης πίνακας της Εξ. (2.10) μπορεί να γραφεί σαν το γινόμενο ενός T -περιοδικού πίνακα και ενός (γενικά) μη περιοδικού πίνακα.

Θεώρημα 2.9 (Floquet), [FeVe96]

Θεωρήστε την Εξ. (2.10) $\frac{dx}{dt} = A(t)x$ με τον $A(t)$ ένα συνεχή, T -περιοδικό $n \times n$ πίνακα. Κάθε θεμελιώδης πίνακας $\Phi(t)$ της παραπάνω εξίσωσης μπορεί να γραφεί σαν γινόμενο δύο $n \times n$ πινάκων

$$\Phi(t) = P(t)e^{Bt}$$

με το $P(t)$ ένα T -περιοδικό πίνακα και B ένα σταθερό $n \times n$ πίνακα ([FeVe96] σελίδα 76).

Ο πίνακας $C = e^{BT}$ ονομάζεται *μονόδρομος πίνακας* της Εξ. (2.10). Οι ιδιοτιμές ρ του πίνακα C ονομάζονται *χαρακτηριστικοί πολλαπλασιαστές*. Κάθε μιγαδικός αριθμός λ τέτοιος ώστε $\rho = e^{\lambda T}$ ονομάζεται *χαρακτηριστικός εκθέτης*.

Είναι ξεκάθαρο ότι η ύπαρξη περιοδικών λύσεων της Εξ. (2.10) και η ευστάθεια της λύσης $x = 0$ καθορίζονται και τα δύο από τις ιδιοτιμές του πίνακα B . Μια αναγκαία συνθήκη για την ύπαρξη T -περιοδικών λύσεων είναι, ότι ένας ή περισσότεροι χαρακτηριστικοί εκθέτες πρέπει να είναι φανταστικοί.

Μια ικανή και αναγκαία συνθήκη για την ασυμπτωτική ευστάθεια της λύσης $x = 0$ της Εξ. (2.10) είναι, όλοι οι χαρακτηριστικοί εκθέτες να έχουν αρνητικό πραγματικό μέρος. Ενώ μια ικανή και αναγκαία συνθήκη για την ευστάθεια της τετριμμένης λύσης είναι, όλοι οι χαρακτηριστικοί εκθέτες να έχουν πραγματικό μέρος ≤ 0 , ενώ οι εκθέτες με πραγματικό μέρος ίσο με το μηδέν να έχουν πολλαπλότητα ένα.

Ένα βασικό πρόβλημα των εξισώσεων με περιοδικούς συντελεστές είναι ότι δεν υπάρχει κάποια γενική μέθοδος για τον υπολογισμό του πίνακα $P(t)$ ή των χαρακτηριστικών εκθετών και πολλαπλασιαστών. Ωστόσο το παρακάτω γενικό θεώρημα είναι αρκετά χρήσιμο.

Θεώρημα 2.10

Η Εξ. (2.10) $\frac{dx}{dt} = A(t)x$ έχει χαρακτηριστικούς πολλαπλασιαστές ρ_i και χαρακτηριστικούς εκθέτες

λ_i , $i = 1, \dots, n$, $\rho_i = e^{\lambda_i T}$. Τότε μπορούμε να έχουμε την παρακάτω έκφραση για γινόμενο των πολλαπλασιαστών και το άθροισμα των εκθετών (απόδειξη [FeVe96] σελίδα 78)

$$\rho_1 \rho_2 \cdots \rho_n = \exp \left(\int_0^T \text{Tr} A(t) dt \right)$$

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i = \frac{1}{T} \int_0^T \text{Tr} A(t) dt \left(\bmod \frac{2\pi i}{T} \right)$$

Αν το παραπάνω άθροισμα των χαρακτηριστικών εκθετών είναι θετικό τότε η τετριμμένη λύση είναι ασταθής. Από την άλλη μεριά αν το άθροισμα είναι ≤ 0 έχουμε αρκετή πληροφορία για να καταλήξουμε σε ένα συμπέρασμα όσον αφορά την ευστάθεια της λύσης $x = 0$.

2.6.4.1 Γραμμικοποίηση περιοδικών λύσεων

Παράδειγμα

Έστω για παράδειγμα η εξίσωση της μορφής

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + f(x) \frac{dx}{dt} + g(x) = 0$$

αυτή έχει μια T -περιοδική λύση $x = \phi(t)$. Μετατοπίζοντας το $x = \phi(t) + y$ και αντικαθιστώντας στην παραπάνω εξίσωση έχουμε

$$\frac{d^2 \phi}{dt^2} + \frac{d^2 y}{dt^2} + f(\phi + y) \left(\frac{d\phi}{dt} + \frac{dy}{dt} \right) + g(\phi + y) = 0$$

αναπτύσσοντας τις f και g σε μια γειτονική περιοχή του $y = 0$, όπου οι μη γραμμικοί όροι των $\frac{dy}{dt}$ και y έχουν αντικατασταθεί με τελείες έχουμε

$$\frac{d^2 \phi}{dt^2} + \frac{d^2 y}{dt^2} + f(\phi) \frac{d\phi}{dt} + \frac{df}{dx}(\phi) y \frac{d\phi}{dt} + f(\phi) \frac{dy}{dt} + \dots + g(\phi) + \frac{dg}{dx}(\phi) y + \dots = 0$$

Τρεις όροι απαλείφονται καθώς η $\phi(t)$ ικανοποιεί την αρχική εξίσωση, οπότε έχουμε

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + f(\phi) \frac{dy}{dt} + \left[\frac{df}{dx}(\phi) \frac{d\phi}{dt} + \frac{dg}{dx}(\phi) \right] y = \dots$$

Γράφοντας την παραπάνω εξίσωση σε μορφή διανυσμάτων θέτοντας $y = y_1$ και $\frac{dy}{dt} = y_2$ βρίσκουμε

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{dt} &= y_2 \\ \frac{dy_2}{dt} &= - \left[\frac{df}{dx}(\phi) \frac{d\phi}{dt} + \frac{dg}{dx}(\phi) + \dots \right] y_1 \end{aligned}$$

Το ίχνος της γραμμικοποιημένης εξίσωσης είναι

$$\text{Tr}A(t) = -f(\phi(t)).$$

Η $\phi(t)$ είναι μια λύση της γραμμικοποιημένης εξίσωσης, οπότε μπορούμε να θέσουμε $\lambda_1 = 0$ και σύμφωνα με το θεώρημα 2.12 συνεπάγεται ότι

$$\lambda_2 = -\frac{1}{T} \int_0^T f(\phi(t)) dt \left(\bmod \frac{2\pi i}{T} \right).$$

Βρίσκουμε λοιπόν ότι θα έχουμε ευστάθεια της περιοδικής λύσης αν $\lambda_2 \leq 0$ ενώ θα έχουμε αστάθεια στην περίπτωση που $\lambda_2 > 0$.

2.6.5 Ανάλυση ευστάθειας μέσω γραμμικοποίησης

Η ευστάθεια των λύσεων ισορροπίας των περιοδικών λύσεων μπορεί να μελετηθεί με το να αναλύσουμε το σύστημα γραμμικοποιώντας το σε μια κοντινή γειτονική περιοχή αυτής της λύσης. Σε προηγούμενες παραγράφους είδαμε μερικά πράγματα για τη γραμμικοποίηση τα οποία αντίστοιχα ισχύουν και για μη αυτόνομα συστήματα καθώς και για περιοδικές λύσεις όπως είδαμε στην προηγούμενη παράγραφο. Στη συνέχεια θα αναπτύξουμε τη βασική θεωρία της ευστάθειας της τετριμμένης λύσης $x = 0$ για μη αυτόνομες εξισώσεις.

2.6.5.1 Ασυμπτωτική ευστάθεια της $x = 0$ λύσης

Θεώρημα 2.11 (Poincare-Lyapunov)

Θεωρήστε την εξίσωση στο R^n

$$\frac{dx}{dt} = Ax + B(t)x + f(t, x), \quad x(t_0), \quad t \in R.$$

Ο A είναι ένας $n \times n$ πίνακας με ιδιοτιμές οι οποίες έχουν όλες αρνητικά πραγματικά μέρη και $B(t)$ ένας συνεχής $n \times n$ πίνακας με την ιδιότητα $\lim_{t \rightarrow \infty} \|B(t)\| = 0$.

Η διανυσματική συνάρτηση $f(t, x)$ είναι συνεχής στο t και x και Lipschitz συνεχής στο x σε μια γειτονική περιοχή του $x = 0$. Επίσης ισχύει ότι $\lim_{\|x\| \rightarrow 0} \frac{\|f(t, x)\|}{\|x\|} = 0$ ομοιόμορφα στο t .

Τότε υπάρχουν θετικές σταθερές C, t_0, δ, μ τέτοιες ώστε $\|x_0\| \leq \delta$ το οποίο συνεπάγεται

$$\|x(t)\| \leq C\|x_0\|e^{-\mu(t-t_0)}, \quad t \geq t_0.$$

Η λύση $x = 0$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθής και η έλκυση είναι εκθετική σε μια δ γειτονική περιοχή του $x = 0$ (απόδειξη [FeVe96] σελίδα 84).

Παράδειγμα

Έστω λοιπόν η εξίσωση που περιγράφει το μαθηματικό εκκρεμές

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \mu x + \sin x = 0, \quad \mu > 0.$$

Μπορούμε να γράψουμε την παραπάνω εξίσωση με διανυσματική μορφή κάνοντας το μετασχηματισμό

$$x = x_1, \quad \frac{dx}{dt} = x_2 \quad \text{οπότε θα έχουμε το παρακάτω σύστημα:}$$

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} &= -x_1 - \mu x_2 + (x_1 - \sin x_1) \end{aligned}$$

Για την γραμμικοποιημένη εξίσωση βρίσκουμε τις ιδιοτιμές

$$\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2}\mu \pm \frac{1}{2}\sqrt{\mu^2 - 4}$$

οπότε $\operatorname{Re} \lambda_{1,2} < 0$. Το παραπάνω σύστημα ικανοποιεί τις απαιτήσεις του θεωρήματος 2.13 οπότε η λύση ισορροπίας $(0,0)$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθής.

Θεώρημα 2.12

Θεωρήστε την εξίσωση στο R^n

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + f(t, x)$$

με $A(t)$ ένα T -περιοδικό και συνεχή πίνακα. Η διανυσματική συνάρτηση $f(t, x)$ είναι συνεχής στο t και x και Lipschitz συνεχής στο x σε μια γειτονική περιοχή του $x=0$. Επίσης ισχύει ότι $\lim_{\|x\| \rightarrow 0} \frac{\|f(t, x)\|}{\|x\|} = 0$ ομοιόμορφα στο t .

Αν τα πραγματικά μέρη των χαρακτηριστικών εκθετών της γραμμικής περιοδικής συνάρτησης

$$\frac{dy}{dt} = A(t)y$$

είναι αρνητικά τότε η λύση $x=0$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθής και η έλκυση είναι εκθετική σε μια δ γειτονική περιοχή του $x=0$ (απόδειξη [FeVe96] σελίδα 86).

2.6.5.2 Αστάθεια της τετριμμένης λύσης

Όταν αναλύουμε ένα γραμμικοποιημένο σύστημα σε μια γειτονική περιοχή της λύσης ισορροπίας του, μπορούμε επίσης να καταλήξουμε στο συμπέρασμα ότι κάτω από συγκεκριμένες συνθήκες αυτή η λύση είναι ασταθής.

Θεώρημα 2.13

Θεωρήστε την εξίσωση στο R^n

$$\frac{dx}{dt} = Ax + B(t)x + f(t, x), \quad t \geq t_0.$$

Ο A είναι ένας $n \times n$ πίνακας με ιδιοτιμές από τις οποίες τουλάχιστον μία έχει θετικό πραγματικό μέρος, και $B(t)$ ένας συνεχής $n \times n$ πίνακας με την ιδιότητα $\lim_{t \rightarrow \infty} \|B(t)\| = 0$.

Η διανυσματική συνάρτηση $f(t, x)$ είναι συνεχής στο t και x και Lipschitz συνεχής στο x σε μια γειτονική περιοχή του $x=0$. Επίσης ισχύει ότι $\lim_{\|x\| \rightarrow 0} \frac{\|f(t, x)\|}{\|x\|} = 0$ ομοιόμορφα στο t . Αν ακόμη ισχύει ότι

$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\|f(t, x)\|}{\|x\|} = 0$ ομοιόμορφα στο t τότε λύση $x=0$ είναι ασταθής (απόδειξη [FeVe96] σελίδα 88).

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Η ΤΑΥΤΟΤΗΤΑ ΤΩΝ ΧΑΟΤΙΚΩΝ ΜΟΝΤΕΛΩΝ

3.1 Ανάπτυξη της Χαοτικής Θεωρίας

Η θεωρία του χάους εμπεριέχει τη μελέτη μη γραμμικών και δυναμικών συστημάτων. Η θεωρία αρχικά αναπτύχθηκε από φυσικούς ερευνητές, με σκοπό να μοντελοποιήσουν και να κατανοήσουν την αστάθεια και την μη προβλεψιμότητα των φυσικών συστημάτων. Ωστόσο για διάφορους λόγους η δημοτικότητα της θεωρίας ολοένα και αυξανόταν και οι εφαρμογές που έβρισκε κυρίως από ερευνητές των κοινωνικών αλλά και οικονομικών επιστημών ήταν σημαντικές. Με τη θεωρία αυτή μπορούμε να εξετάσουμε πολύπλοκες συμπεριφορές συστημάτων που έως τώρα ήταν αδύνατο να τις εξηγήσουμε. Η θεωρία παρέχει στατιστικές μεθόδους με τη βοήθεια των οποίων μπορούμε να διακρίνουμε την υποκειμενική δομή ενός φαινομενικά μη-ντετερμινιστικού, σύνθετου συστήματος. Επίσης μας βοηθάει να κατανοήσουμε τη λειτουργία ενός συστήματος καθώς και την προβλεψιμότητα της συμπεριφοράς του.

Όπως ήδη αναφέραμε, η αταξία που παράγεται από τα μη γραμμικά συστήματα αποτελεί το αντικείμενο μελέτης της χαοτικής θεωρίας, γεγονός εξαιρετικά ενδιαφέρον για τεχνικούς, κοινωνικούς και οικονομικούς αναλυτές καθώς οι παραπάνω εμπλέκονται με τη μη γραμμικότητα και αταξία. Τα τελευταία 30 χρόνια μαθηματικοί έχουν μελετήσει εκτενώς τα μη γραμμικά συστήματα στην προσπάθειά τους να ανοίξουν νέους ορίζοντες και να δώσουν νέες κατευθυντήριες γραμμές για την συμπεριφορά αυτών των συστημάτων. Η κλασσική έως τώρα προσέγγιση της ανάλυσης σύνθετων συστημάτων εκφράζεται μέσω της γραμμικοποίησης αυτών.

Ωστόσο η επιστήμη του χάους ασχολείται με την ανάλυση και την πρόβλεψη της συμπεριφοράς των συστημάτων, εστιάζοντας στην αταξία που παράγεται εξαιτίας της εσωτερικής μη γραμμικότητας που χαρακτηρίζουν αυτά. Τα μη γραμμικά συστήματα μπορούν να εμφανίσουν πολλά διαφορετικά είδη συμπεριφορών. Μπορεί να είναι σταθερά και να συγκλίνουν σε μία σταθερή τιμή, να ταλαντώνονται μέσα σε ένα συγκεκριμένο εύρος, να είναι ασταθή, ή χαοτικά, πλην όμως περιορισμένα.

Η ανάλυση των περισσοτέρων συστημάτων έως τώρα υπέθετε, ότι ένα σύστημα πρέπει να είναι σταθερό διότι μόνο μια σταθερή συμπεριφορά διατηρείται. Ένα ασταθές σύστημα που παρουσιάζει ισορροπία και σταθερότητα σύντομα θα «εκραγεί» και ως εκ τούτου έχει μόνο προσωρινό ενδιαφέρον. *Στη χαστική ανάλυση ασταθείς πλην όμως περιορισμένες συμπεριφορές συστημάτων μπορούν να διατηρηθούν, γεγονός που προσθέτει μία νέα διάσταση στην ανάλυση των μη γραμμικών συστημάτων.*

Το 1963 ο Edward Lorenz, μετεωρολόγος, δημοσίευσε ένα άρθρο, το οποίο γενικά θεωρήθηκε ως η έναρξη ενός νέου κύματος ενδιαφέροντος στην συμπεριφορά των μη γραμμικών συστημάτων, [Lore63]. Από τότε και έπειτα ο αριθμός των δημοσιευμάτων που εκδίδονται αυξάνει συνεχώς συναντώντας εφαρμογές σε πάρα πολλούς τομείς συμπεριλαμβανομένης της μηχανικής των ρευστών, της καρδιολογίας, της άντλησης πετρελαίου, της εξέλιξης δασικών πυρκαγιών, της πρόβλεψης σεισμών καθώς και της μακροχρόνιας πρόγνωσης του καιρού.

Στο κεφάλαιο αυτό θα δούμε τις βασικές αρχές της χαστικής θεωρίας μελετώντας την δομή και αποκαλύπτοντας τις ιδιότητες μερικών χαρακτηριστικών μη γραμμικών δυναμικών μοντέλων.

3.2 Διακριτά συστήματα

Στο προηγούμενο κεφάλαιο μελετήσαμε δυναμικά συστήματα στα οποία ο χρόνος είναι συνεχής και η γενική μορφή μια διαφορικής εξίσωσης ενός τέτοιου συστήματος ήταν η

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t). \quad (3.1)$$

Η άλλη μεγάλη κατηγορία δυναμικών συστημάτων είναι αυτή όπου ο χρόνος θεωρείται διακριτός και γι' αυτό ονομάζονται και διακριτά συστήματα. Η γενική μορφή μιας εξίσωσης διαφορών πρώτης τάξης ενός διακριτού συστήματος είναι:

$$x_{n+1} = F(x_n) \quad (3.2)$$

Στην Εξ. (3.2) η νέα τιμή του x υπολογίζεται από τις προηγούμενες τιμές του. Σε διακριτά συστήματα μεγαλύτερης τάξης μπορεί να χρειάζεται πληροφορία για αρκετές προηγούμενες τιμές για να υπολογίσουμε την τρέχουσα τιμή του x , όπως για παράδειγμα σε ένα σύστημα της μορφής $x_{n+1} = x_n - x_{n-1}$.

Η συνάρτηση F στην Εξ. (3.2) ονομάζεται *απεικόνιση* (map) ή συνάρτηση επανάληψης του συστήματος. Αν η συνάρτηση $F(x)$ είναι μια γραμμική συνάρτηση του x τότε το σύστημα είναι γραμμικό, ενώ σε διαφορετική περίπτωση είναι μη γραμμικό.

Η ακολουθία των τιμών που δημιουργείται από την εξίσωση διαφορών (3.2) μαζί με την αρχική τιμή x_0 ονομάζεται *τροχιά του x_0 υπό την απεικόνιση $F(x)$* ή απλώς τροχιά. Την αρχική τιμή x_0 την αποκαλούμε συχνά *σπόρο* (seed) της τροχιάς.

Η επαναληπτική διαδικασία της δημιουργίας μιας τροχιάς εμπεριέχει τον επαναληπτικό υπολογισμό της συνάρτησης $F(x)$. Ο συμβολισμός για αυτή τη διαδικασία γράφεται με τον ακόλουθο τρόπο:

$$\text{η δεύτερη επανάληψη της } F(x) \text{ είναι } F(F(x)) = F^2(x)$$

$$\text{η τρίτη επανάληψη της } F(x) \text{ είναι } F(F(F(x))) = F^3(x)$$

$$\text{η } n\text{-ιοστή επανάληψη της } F(x) \text{ είναι } F^n(x)$$

Είναι σημαντικό να μην συγχέουμε την $F^n(x)$ με την n -ιοστή δύναμη της $F(x)$.

3.2.1 Κρίσιμα σημεία διακριτού συστήματος

Τα κρίσιμα σημεία x_f ενός διακριτού συστήματος δίδονται από τις λύσεις της εξίσωσης:

$$x = F(x) \quad (3.3)$$

Έστω τώρα το σύστημα της μορφής

$$x_{n+1} = a - x_n \quad (3.4)$$

με αρχική τιμή το x_0 . Τότε $x_1 = a - x_0$ και $x_2 = x_0$, όπως παρατηρούμε το σύστημα μετά από δύο επαναλήψεις επιστρέφει στην τιμή x_0 . Αν συνεχίσουμε τις επαναλήψεις δημιουργούμε μια τροχιά η οποία αποτελείται από την εξής ακολουθία τιμών:

$$x_0, a - x_0, x_0, a - x_0, x_0, \dots$$

για κάθε αρχική τιμή x_0 .

Μια τέτοια τροχιά ονομάζεται *περιοδική τροχιά* ή *κύκλος με περίοδο 2*. Τα σημεία x_0 και $a - x_0$ ονομάζονται *περιοδικά σημεία*.

Γενικά το σημείο x_0 ονομάζεται *περιοδικό* με θεμελιώδη περίοδο k αν $F^k(x_0) = x_0$. Η τροχιά ονομάζεται *τροχιά με περίοδο k* ή *κύκλος - k* αν αυτή δεν επιστρέφει στην αρχική τιμή x_0 σε όχι λιγότερες από k επαναλήψεις.

3.2.2 Ταξινόμηση κρίσιμων σημείων γραμμικών συστημάτων

3.2.2.1 Μονοδιάστατα γραμμικά διακριτά συστήματα

Έστω η γενική μορφή μιας μονοδιάστατης γραμμικής εξίσωσης διαφορών

$$x_{n+1} = a + bx_n \quad (3.5)$$

όπου a και b είναι σταθερές. Η γραμμική απεικόνιση είναι η $F(x) = a + bx$.

Τα κρίσιμα σημεία της παραπάνω απεικόνισης δίδονται από τις λύσεις της εξίσωσης $x = a + bx$. Υπάρχει ένα κρίσιμο σημείο για κάθε ζευγάρι τιμών των a και b :

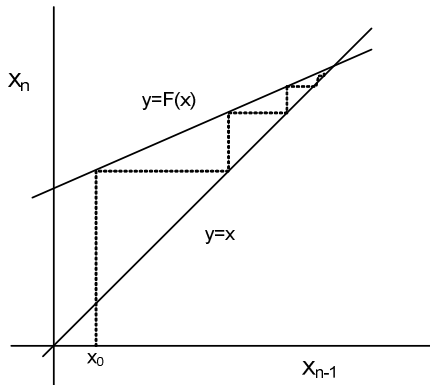
$$x_f = \frac{a}{1-b}, \quad b \neq 1. \quad (3.6)$$

Αν το $b = 1$ τα γραφήματα $y = x$ και $y = F(x)$ είναι παράλληλα και δεν υπάρχει κανένα κρίσιμο σημείο αν $a \neq 0$.

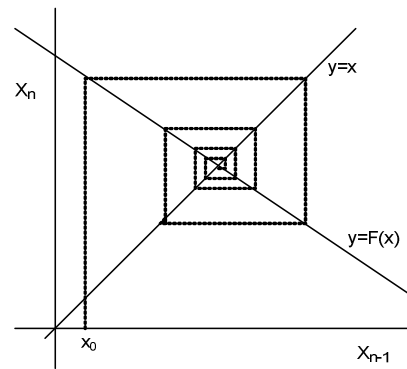
Ο τύπος της τροχιάς για μια γραμμική απεικόνιση εξαρτάται από το μέγεθος της σταθεράς b όπως φαίνεται και στο Σχήμα 3.1. Στα σχήματα που ακολουθούν ο οριζόντιος άξονας αντιστοιχεί στην εξέλιξη της συνάρτησης x_{n-1} ενώ ο κατακόρυφος στην εξέλιξη της συνάρτησης του x_n .

Επίσης για να προσδιοριστεί ο τύπος της τροχιάς που ακολουθεί το κρίσιμο σημείο χρησιμοποιούμε ως βοηθητικές, την απεικόνιση της κύριας διαγωνίου $y = x$ και την απεικόνιση της συνάρτησης $y = F(x)$. Στο

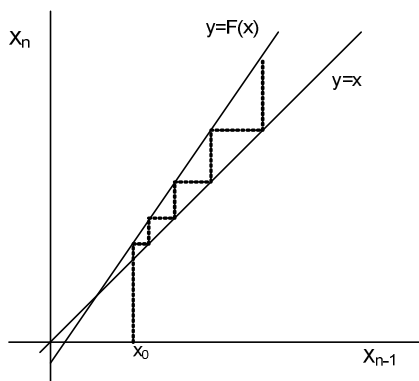
σχήμα 3.1 η διακεκομμένη γραμμή αντιστοιχεί στην πορεία που ακολουθεί το x_n έως ότου καταλήξει σε μια συγκεκριμένη κατάσταση (για παράδειγμα να αποκλίνει) ή σε κάποια συγκεκριμένη τιμή.



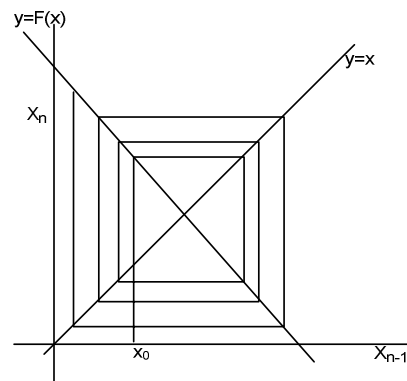
$$0 < b < 1$$



$$-1 < b < 0$$



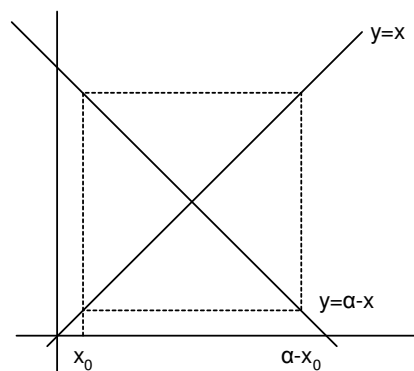
$$b > 1$$



$$b < -1$$

Σχήμα 3.1: Γραφική ανάλυση της απεικόνισης $x_{n+1} = a + bx_n$

Στην περίπτωση που $|b| < 1$ το κρίσιμο σημείο είναι ευσταθές και η τροχιά συγκλίνει στο x_f . Αυτό είναι ένα παράδειγμα ενός θετικού ελκυστή ή απλώς ελκυστή. Για $|b| > 1$ το κρίσιμο σημείο είναι μη ευσταθές και η τροχιά αποκλίνει από το x_f . Αυτό είναι ένα παράδειγμα ενός αρνητικού ελκυστή (απωθητή).



Σχήμα 3.2: Γραφική ανάλυση της απεικόνισης $x_{n+1} = a - x_n$

Στο Σχήμα 3.2 παρουσιάζεται η περίπτωση όπου $b = -1$ δηλαδή έχουμε το σύστημα $x_{n+1} = a - x_n$, όπου κάθε τροχιά είναι ένας κύκλος -2 . Στο σχήμα που ακολουθεί ο οριζόντιος άξονας αντιστοιχεί στην εξέλιξη της συνάρτησης x_{n-1} ενώ ο κατακόρυφος στην εξέλιξη της συνάρτησης του x_n .

3.2.2.2 Γραμμικά διακριτά συστήματα περισσοτέρων διαστάσεων

Η ταξινόμηση των κρίσιμων σημείων στα διακριτά συστήματα μεγαλύτερων διαστάσεων ακολουθεί την ίδια μεθοδολογία όπως και στα συνεχή συστήματα όπως την παρουσιάσαμε στην παράγραφο 2.4.

Έτσι λοιπόν, στα συνεχή συστήματα εξετάσαμε τις ιδιοτιμές λ του πίνακα A είτε του γραμμικού είτε του αντίστοιχου γραμμικοποιημένου συστήματος $\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t)$ για να καθορίσουμε τη μορφή των κρίσιμων σημείων. Διακρίναμε λοιπόν τις αντίστοιχες περιπτώσεις ανάλογα με το αν οι ιδιοτιμές είναι πραγματικές ή όχι και ανάλογα με το πρόσημο του πραγματικού μέρους τους.

Αντίστοιχα σε ένα διακριτό σύστημα, για να καθορίσουμε την μορφή των κρίσιμων σημείων, δεν έχουμε παρά να εξετάσουμε τις ιδιοτιμές λ του πίνακα A της εξίσωσης διαφορών $x_{n+1} = Ax_n$. Στην περίπτωση αυτή θα διακρίνουμε τις αντίστοιχες περιπτώσεις με αυτές των συνεχών συστημάτων με κριτήριο το αν η απόλυτη τιμή των ιδιοτιμών είναι μεγαλύτερη, μικρότερη ή ίση της μονάδας.

Έτσι ,μπορούμε να διακρίνουμε τις εξής γενικές περιπτώσεις:

α) όλες οι ιδιοτιμές με $|\lambda| < 1$ το κρίσιμο σημείο είναι ένας κόμβος (ευσταθής $x_n \rightarrow x_f$)

β) ορισμένες ιδιοτιμές με $|\lambda| > 1$ το κρίσιμο σημείο είναι ένας αρνητικός ελκυστής ($x_n \rightarrow \infty$)

γ) όλες οι ιδιοτιμές με $|\lambda| \leq 1$ και μερικές με $|\lambda| = 1$ το κρίσιμο σημείο είναι ένα σαγματικό σημείο (ασταθές $x_n \rightarrow \infty$)

3.2.3 Μη γραμμικά διακριτά συστήματα

Περισσότερο ενδιαφέρον και συχνά εντυπωσιακή συμπεριφορά παρουσιάζουν οι μη γραμμικές απεικονίσεις. Στη συνέχεια θα προσπαθήσουμε να δώσουμε μια αλγεβρική μεθοδολογία ανάλυσης που μαζί με την μέθοδο της γραφικής ανάλυσης μπορούν να μας περιγράψουν σε μεγάλο βαθμό τις ενδιαφέρουσες ιδιότητες των μη γραμμικών απεικονίσεων.

3.2.3.1 Μονοδιάστατα μη γραμμικά διακριτά συστήματα

Έστω ένα μη γραμμικό σύστημα της μορφής

$$x_{n+1} = F(x_n) \quad (3.7)$$

αυτό σημαίνει ότι η $F(x)$ είναι μια μη γραμμική συνάρτηση του x . Έστω τώρα x_f ένα κρίσιμο σημείο του συστήματος.

Παίρνοντας τη σειρά Taylor της $F(x)$ για το σημείο $x = x_f$ θα έχουμε

$$F(x) \approx F(x_f) + (x - x_f) \frac{dF(x_f)}{dx} + \frac{(x - x_f)^2}{2} \frac{d^2F(x_f)}{dx^2} + \dots \quad (3.8)$$

Επειδή το x_f είναι κρίσιμο σημείο, $F(x_f) = x_f$ η παραπάνω σχέση μπορεί να γραφεί ως

$$\begin{aligned}
 F(x) &\approx x_f + (x - x_f) \frac{dF(x_f)}{dx} + 0(x - x_f)^2 \\
 &= x_f \left(1 - \frac{dF(x_f)}{dx}\right) + x \frac{dF(x_f)}{dx} + 0(x - x_f)^2
 \end{aligned}
 \tag{3.9}$$

Για μια γειτονική περιοχή κοντά στο x_f η γραμμικοποιημένη προσέγγιση της $F(x)$ είναι

$$F(x) = x_f \left(1 - \frac{dF(x_f)}{dx}\right) + x \frac{dF(x_f)}{dx} \tag{3.10}$$

Συγκρίνοντας το γραμμικοποιημένο σύστημα

$$x_{n+1} = x_f \left(1 - \frac{dF(x_f)}{dx}\right) + x \frac{dF(x_f)}{dx} \tag{3.11}$$

με το $x_{n+1} = a + bx_n$

έχουμε $a = x_f \left(1 - \frac{dF(x_f)}{dx}\right)$ και $b = \frac{dF(x_f)}{dx}$.

Καταλήγουμε επομένως στο συμπέρασμα ότι το x_f είναι ευσταθές αν $\left| \frac{dF(x_f)}{dx} \right| < 1$ και είναι μη ευσταθές αν

$\left| \frac{dF(x_f)}{dx} \right| > 1$. Στην περίπτωση που $\left| \frac{dF(x_f)}{dx} \right| = 1$ τότε η γραμμικοποίηση δεν είναι μια ρεαλιστική μέθοδος

προσέγγισης. Ένα κρίσιμο σημείο για το οποίο $\left| \frac{dF(x_f)}{dx} \right| \neq \pm 1$ λέγεται ότι είναι απλό, ενώ αν $\left| \frac{dF(x_f)}{dx} \right| = \pm 1$ λέγεται μη απλό.



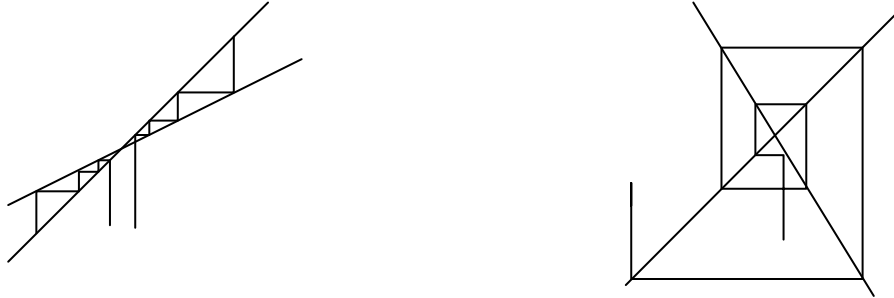
Σχήμα 3.3: Ένα κρίσιμο σημείο ελκυστής (θετικός ελκυστής)

Από όσα είδαμε μέχρι τώρα καταλαβαίνουμε ότι υπάρχουν δύο διαφορετικοί τύποι κρίσιμων σημείων.

Ένα κρίσιμο σημείο το οποίο *έλκει* όλα τα σημεία ικανοποιητικά κοντά του και το οποίο ονομάζεται *ελκυστής* (ή θετικός ελκυστής), όπως φαίνεται και στο παραπάνω σχήμα (Σχήμα 3.3).

Στη δεύτερη κατηγορία ανήκουν τα κρίσιμα σημεία τα οποία *απωθούν* ικανοποιητικά όλα τα σημεία απεικόνισης από κοντά τους. Ένα τέτοιο κρίσιμο σημείο ονομάζεται *απωθητής* (ή αρνητικός ελκυστής), Σχήμα 3.4.

Στην περίπτωση που $\frac{dF(x_f)}{dx} = 1$ η γραμμή $y = x$ είναι εφαπτόμενη στην απεικόνιση $F(x)$ στο κρίσιμο σημείο. Στο Σχήμα 3.5 παρουσιάζονται οι διαφορετικές περιπτώσεις που μπορούμε να έχουμε σε αυτή την περίπτωση και καταλήγουμε στα ακόλουθα κριτήρια όσον αφορά το κρίσιμο σημείο x_f



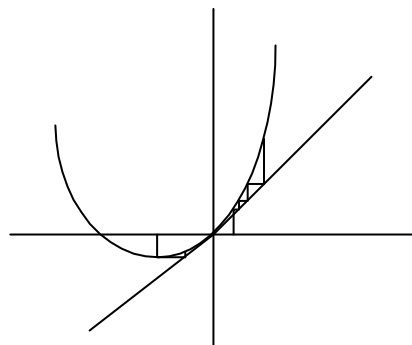
Σχήμα 3.4: Ένα κρίσιμο σημείο απωθητής (αρνητικός ελκυστής)

Αν $\frac{df(x_f)}{dx} = 1$ και $\frac{d^2 f(x_f)}{dx^2} > 0$ τότε η ακολουθία συγκλίνει από κάτω, δηλαδή για $x_0 < x_f$ και αποκλίνει από πάνω δηλ. για $x_0 > x_f$. Λέμε σε αυτή την περίπτωση ότι το x_f είναι *ημι-ευσταθής από κάτω* (semi-stable from below).

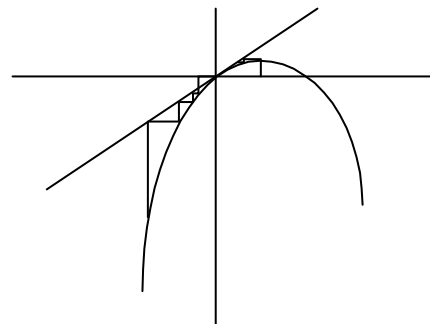
Αν $\frac{df(x_f)}{dx} = 1$ και $\frac{d^2 f(x_f)}{dx^2} < 0$ το x_f είναι *ημι-ευσταθής από πάνω* (semi-stable from above).

Στην περίπτωση τώρα που $\frac{df(x_f)}{dx} = 1$ και $\frac{d^2 f(x_f)}{dx^2} = 0$, αν $\frac{d^3 f(x_f)}{dx^3} > 0$ το x_f είναι μη ευσταθές και αν $\frac{d^3 f(x_f)}{dx^3} < 0$ το x_f είναι ευσταθές.

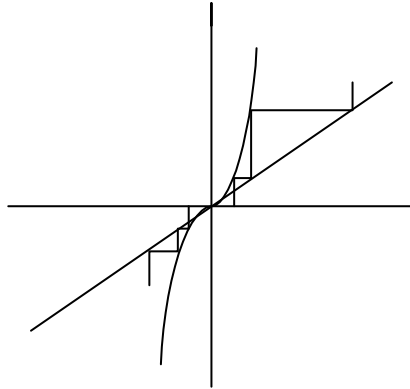
Σε πολλά συστήματα μπορούμε να ερμηνεύσουμε τη συμπεριφορά των τροχιών όλων των σημείων και να ταξινομήσουμε τα κρίσιμα σημεία. Όταν το κάνουμε αυτό λέμε ότι έχουμε ολοκληρώσει μια διαδικασία *ανάλυσης της τροχιάς* (orbit analysis).



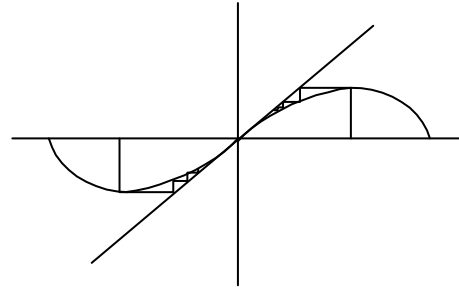
$$f''(x_f) > 0$$



$$f''(x_f) < 0$$



$$f''(x_f) = 0, f'''(x_f) > 0$$



$$f''(x_f) = 0, f'''(x_f) < 0$$

Σχήμα 3.5: Ένα κρίσιμο σημείο απωθητής (αρνητικός ελκυστής)

3.2.3.1 Μη γραμμικά διακριτά συστήματα μεγαλύτερων διαστάσεων

Στα μη γραμμικά διακριτά συστήματα μεγαλύτερων διαστάσεων, προκειμένου να αποφανθούμε για κάποιο κρίσιμο σημείο ακολουθούμε την ίδια μεθοδολογία που αναπτύξαμε στην παράγραφο 2.4.2. Όμως οι ιδιοτιμές λ τις οποίες εξετάζουμε είναι πλέον οι ιδιοτιμές της ορίζουσας Jacobi $JF(x_f)$ της συνάρτησης F

$$\text{στο } x_f \text{ δηλαδή } JF(x_f) = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \frac{\partial F_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} & \frac{\partial F_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial F_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial x_1} & \frac{\partial F_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial F_n}{\partial x_n} \end{bmatrix} \quad \text{όπου } F(x_f) = F \begin{bmatrix} x_{1,f} \\ x_{2,f} \\ \vdots \\ x_{n,f} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1(x_f) \\ F_2(x_f) \\ \vdots \\ F_n(x_f) \end{bmatrix}.$$

3.3 Δευτεροβάθμιες απεικονίσεις

Σε αυτή την παράγραφο θα αναλύσουμε μια από τις βασικές οικογένειες των μη γραμμικών πρώτης τάξεως συστημάτων, αυτές δηλαδή που ορίζονται από το δευτεροβάθμιο πολυώνυμο:

$$F(x) = x^2 - c \quad (3.12)$$

Τα κρίσιμα σημεία του συστήματος $x_{n+1} = x_n - c$ δίδονται από την εξίσωση $x = x^2 - c$. Λύνοντας την Εξ. (3.12) βρίσκουμε ότι

$$x_f = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{1+4c}) \quad (3.13)$$

Οι παραπάνω λύσεις είναι πραγματικές αν $1+4c \geq 0$ δηλαδή αν $c \geq -\frac{1}{4}$. Υπάρχουν δύο κρίσιμα σημεία και το επόμενο βήμα είναι να ταξινομήσουμε τα σημεία αυτά ως ευσταθή ή μη ευσταθή.

Για να ταξινομήσουμε τα κρίσιμα σημεία υποθέτουμε $\frac{dF(x)}{dx} = 2x$.

Για το πρώτο κρίσιμο σημείο: $x_f = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{1+4c})$ έχουμε ότι $\frac{dF(x_f)}{dx} = 1 + \sqrt{1+4c} > 1$ για κάθε $c > -\frac{1}{4}$ και κατά συνέπεια το $x_f = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{1+4c})$ είναι μη ευσταθές.

Για το δεύτερο κρίσιμο σημείο, το $x_f = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{1+4c})$ έχουμε ότι $\frac{dF(x_f)}{dx} = 1 - \sqrt{1+4c} < 0$. Το κρίσιμο σημείο είναι δηλαδή ευσταθές για

$$\begin{aligned} \frac{dF(x_f)}{dx} &> -1 \\ \Rightarrow 1 - \sqrt{1+4c} &> -1 \\ \Rightarrow c &< \frac{3}{4} \end{aligned}$$

Αν $c = \frac{3}{4}$ τότε $\frac{dF(x_f)}{dx} = -1$ και το κρίσιμο σημείο είναι μη – απλό.

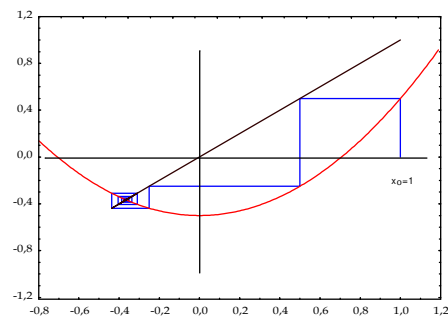
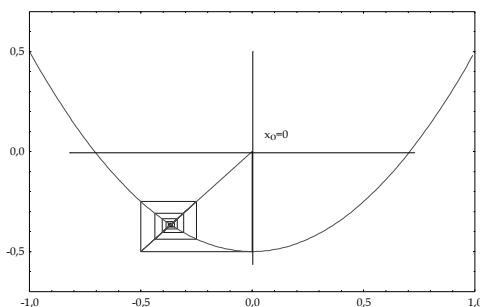
Αν $c > \frac{3}{4}$ τότε $\frac{dF(x_f)}{dx} < -1$ και το κρίσιμο σημείο είναι μη ευσταθές.

Ως εκ τούτου για $-\frac{1}{4} < c < \frac{3}{4}$ υπάρχουν δύο κρίσιμα σημεία:

α) το $x_f^+ = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{1+4c})$ το οποίο είναι μη ευσταθές

β) το $x_f^- = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{1+4c})$ το οποίο είναι ευσταθές.

Στο σημείο αυτό είναι σημαντικό να παρατηρήσουμε ότι αν $x_0 = -x_f^+$ τότε $x_1 = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{1+4c}) = x_f^+$. Μπορούμε να συμπεράνουμε ότι κάθε αρχικό σημείο μέσα στο διάστημα $-x_f^+ < x_0 < x_f^+$ παραμένει μέσα στο διάστημα και συγκλίνει στο κρίσιμο σημείο $x_f^- = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{1+4c})$. Το διάστημα $-x_f^+ < x_0 < x_f^+$ ονομάζεται *θεμελιώδες διάστημα*. Κάθε σημείο έξω από το θεμελιώδες διάστημα αποκλίνει προς το ∞ . Στο Σχήμα 3.6 παρουσιάζονται δύο τυπικές τροχιές του δευτεροβάθμιου χάρτη για $-\frac{1}{4} < c < \frac{3}{4}$.



Σχήμα 3.6: Το σύστημα $x_{n+1} = x_n - c$ για $c = 0.5$ με $x_0 = 0$ και $x_0 = 1$ (το x_n σε συνάρτηση με το x_{n+1})

3.3.1 Η γέννηση μιας περιόδου – 2 τροχιές

Η επόμενη ερώτηση είναι τι συμβαίνει στην περίπτωση που $c = \frac{3}{4}$. Γνωρίζουμε ότι το x_f^- παραμένει κρίσιμο σημείο αλλά είναι πλέον μη ευσταθές. Έτσι έχουμε δύο κρίσιμα μη ευσταθή. Στην συνέχεια θα μελετήσουμε τη γέννηση ενός περιόδου – 2 κύκλου και για το κάνουμε αυτό θεωρούμε $F^2(x) = x$.

$$F^2(x) = (x^2 - c)^2 - c = x^4 - 2x^2c + c^2 - c = x \quad (3.14)$$

άρα έχουμε να λύσουμε την πολυωνυμική εξίσωση

$$x^4 - 2x^2c - x + c^2 - c = 0 \quad (3.15)$$

Τα κρίσιμα σημεία της $F(x)$ θα ικανοποιούν την παραπάνω εξίσωση επειδή ένα κρίσιμο σημείο είναι ένας κύκλος – 1 και ως εκ τούτου είναι ένας κύκλος – k για κάθε θετικό ακέραιο k . Παραγοντοποιώντας την Εξ. (3.15) έχουμε

$$\underbrace{(x^2 - x - c)}_{\substack{\text{η εξίσωση για τα} \\ \text{κρίσιμα σημεία}}} \underbrace{(x^2 + x - (c - 1))}_{\substack{\text{η εξίσωση για τον} \\ \text{κύκλο περιόδου - 2}}} = 0$$

Οι κύκλοι περιόδου – 2 είναι λύσεις της

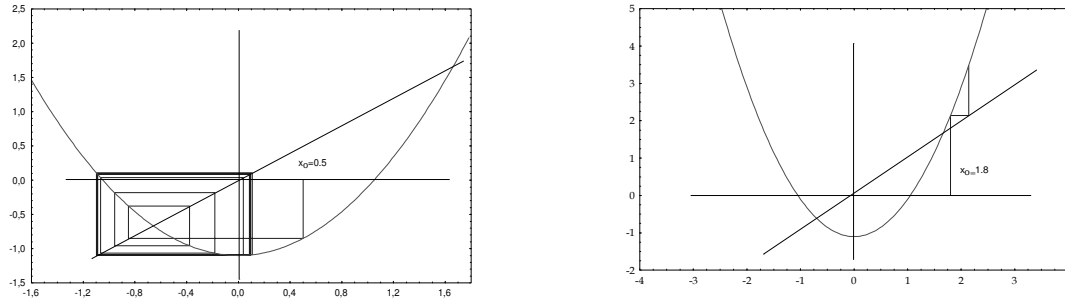
$$x^2 + x - (c - 1) = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{4c - 3})$$

το οποίο για να είναι πραγματικό πρέπει $c \geq \frac{3}{4}$. Ένας κύκλος περιόδου – 2 γεννιέται όταν $c = \frac{3}{4}$ και οι τροχιές είναι η $\frac{1}{2}(-1 - \sqrt{4c - 3})$ και η $\frac{1}{2}(-1 + \sqrt{4c - 3})$. Για παράδειγμα όταν $c = 1$ ο κύκλος – 2 αποτελείται από τα σημεία -1 και 0 .

Ο κύκλος – 2 αν $\left| \frac{dF^2(x)}{dx} \right| < 1$ έλκεται στα περιοδικά σημεία. Έτσι $\frac{dF^2(x)}{dx} = 4x(x^2 - c)$, και αν x_p^+ και x_p^- τα περιοδικά σημεία τότε

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} F^2(x) &= 4x_p^+ x_p^- \\ &= 4 \left[\frac{1}{2}(-1 - \sqrt{4c - 3}) \right] \left[\frac{1}{2}(-1 + \sqrt{4c - 3}) \right] \\ &= 1 - (4c - 3) \\ &= 4 - 4c \end{aligned} \quad (3.16)$$

και κατά συνέπεια ο κύκλος – 2 έλκεται αν $|4 - 4c| < 1 \Rightarrow \frac{3}{4} < c < \frac{5}{4}$. Ο κύκλος περιόδου – 2 υπάρχει για $c < \frac{5}{4}$.

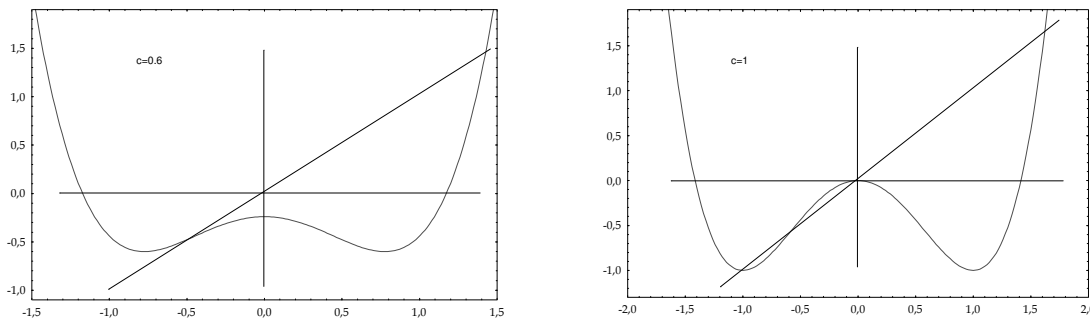


Σχήμα 3.7: Το σύστημα $x_{n+1} = x_n^2 - c$ για $c = 1.1$ με $x_0 = 0.5$ και $x_0 = 1.8$

Στο Σχήμα 3.7 απεικονίζεται το x_n σε συνάρτηση με το x_{n+1} ενώ παρατίθεται και η κύρια διαγώνιος. Σε αυτό παρουσιάζονται οι τροχιές για $\frac{3}{4} < c < \frac{5}{4}$. Τροχιές που ξεκινούν μέσα στο θεμελιώδες διάστημα, παραμένουν μέσα σε αυτό και έλκονται στο κύκλο περιόδου – 2.

3.3.2 Η γέννηση μιας περιόδου – 4 τροχιές

Για να δούμε τι ακριβώς συμβαίνει καθώς το c κινείται προς την κρίσιμη τιμή $c = \frac{5}{4}$ θεωρούμε τα γραφήματα των συναρτήσεων $y = x$ και $y = F^2(x)$ για τιμές του c λίγο μικρότερες, ίσες και μεγαλύτερες του $\frac{3}{4}$. Το Σχήμα 3.7 δείχνει την μετάβαση από το σημείο τομής x_f^- το οποίο είναι ευσταθές ($c < \frac{3}{4}$) σε τρία σημεία τομής: το x_f^- το οποίο είναι τώρα μη ευσταθές και τα x_p^+ και x_p^- τα οποία είναι τώρα ευσταθή.

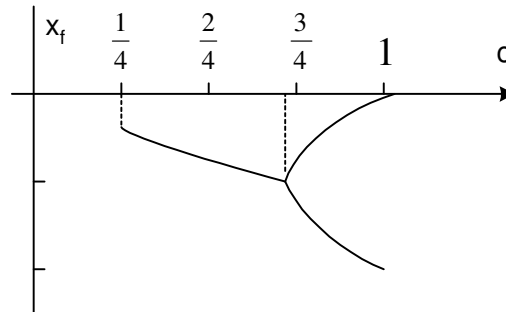


Σχήμα 3.8: Η $F^2(x)$ για $c < \frac{3}{4}$ και $c > \frac{3}{4}$

Όταν $c = \frac{3}{4}$ η γραμμή $y = x$ είναι εφαπτόμενη στην καμπύλη $y = F^2(x)$ και η μετάβαση σε μια περιόδου – 2 τροχιά είναι έτοιμη να συμβεί. Καθώς το c αυξάνει το σύστημα μεταβάλλεται όπως φαίνεται παρακάτω:

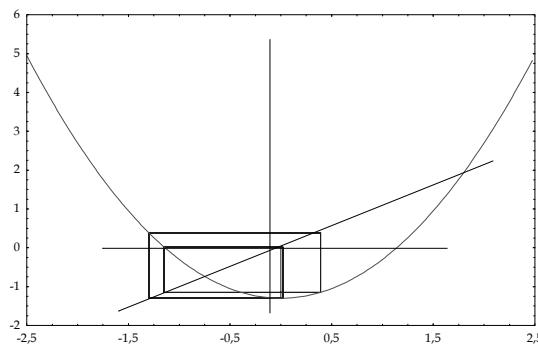
μη ευσταθές	$c < \frac{3}{4}$	μη ευσταθές	$c > \frac{3}{4}$
	$x_f^+ = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{1 + 4c})$		$x_f^+ = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{1 + 4c})$
ευσταθές	$x_f^- = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{1 + 4c})$	μη ευσταθές	$x_f^- = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{1 + 4c})$
			$x_p^+ = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{4c - 3})$
		Ελκτικό περιοδικό σημείο	$x_p^- = \frac{1}{2}(-1 - \sqrt{4c - 3})$

Η διαδικασία είναι γνωστή ως διίσμός και απεικονίζεται στο Σχήμα 3.9. Ο οριζόντιος άξονας αντιστοιχεί στις τιμές του c και ο κατακόρυφος άξονας είναι οι αντίστοιχες τιμές της τροχιάς για x_0 εντός του θεμελιώδους διαστήματος.



Σχήμα 3.9: Ο διίσμός όπου φαίνεται η γέννηση κύκλου περιόδου – 2.

Όταν το $c = \frac{5}{4}$ ο κύκλος περιόδου – 2 γίνεται απωθητικός και έτσι τώρα έχουμε δύο μη ευσταθή κρίσιμα σημεία και ένα απωθητικό κύκλο περιόδου – 2. Τα περιοδικά αυτά σημεία της περιόδου – 2 χωρίζονται το καθένα σε δύο νέα σημεία. Έχουμε έτσι πλέον ένα κύκλο περιόδου – 4. Η ανάλυση της τροχιάς περιόδου – 4 είναι περισσότερο απαιτητική, αφού η $F^4(x)$ είναι ένα πολυώνυμο 16^{ου} βαθμού και το ίδιο και η εξίσωση $F^4(x) = x$ που πρέπει να λυθεί για να βρούμε τα περιοδικά σημεία. Μετά από την αντίστοιχη ανάλυση βρίσκουμε ότι τα σημεία αυτά είναι τα 1.299, 0.389, 1.148, 0.019 όπως φαίνεται και στο επόμενο σχήμα (Σχήμα 3.11)



Σχήμα 3.11: Η περιόδου – 4 τροχιά της $x_{n+1} = x_n^2 - 1.3$

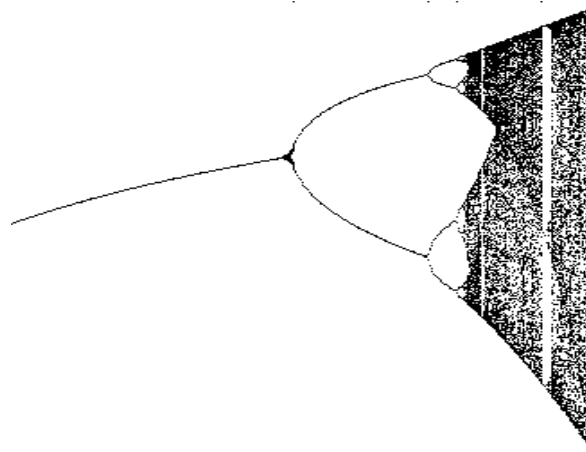
Για να συνεχιστεί η διαδικασία αυτή είναι αναγκαίο να χρησιμοποιήσουμε κάποια αριθμητική μέθοδο. Ο διπλασιασμός της περιόδου λαμβάνει χώρα για μικρότερες αυξήσεις της παραμέτρου c . Μπορούμε να υπολογίσουμε ότι η ακολουθία των κρίσιμων τιμών της παραμέτρου c , c_k , για 2^k κύκλους, συγκλίνει σε μια οριακή τιμή c_∞ . Στον Πίνακα 3.1 παρουσιάζεται η ακολουθία των τιμών c_k καθώς και η διαφορά τους.

k	Γέννηση του	c_k	$c_k - c_{k-1}$
1	Κύκλου περιόδου 2	0.75	-
2	Κύκλου περιόδου 4	1.25	0.5
3	Κύκλου περιόδου 8	1.368099	0.118099
4	Κύκλου περιόδου 16	1.394046	0.025947
5	Κύκλου περιόδου 32	1.399631	0.005585
6	Κύκλου περιόδου 64	1.400830	0.001199
7	Κύκλου περιόδου 128	1.401085	0.000255
8	Κύκλου περιόδου 256	1.401140	0.000055

Πίνακας 3.1: Η ακολουθία των τιμών c_k καθώς και η διαφορά τους.

Η οριακή τιμή της c_k είναι 1.401155 με ακρίβεια έξι δεκαδικών ψηφίων. Τη δεκαετία του 1970 ο μαθηματικός Mitchell Feigenbaum, [Feig80] βρήκε ότι το κλάσμα $\frac{c_{k+1} - c_k}{c_k - c_{k-1}}$ συγκλίνει σε ένα σταθερό αριθμό το

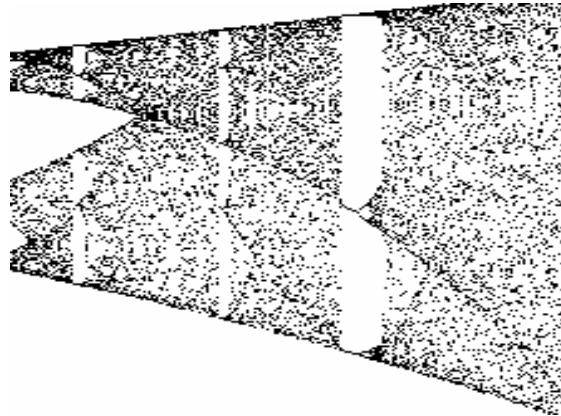
$\delta = 4.669202$ ο οποίος είναι γνωστός και ως σταθερά του Feigenbaum. Ο αριθμός αυτός είναι μια παγκόσμια σταθερά και ισχύει για οποιοδήποτε μη γραμμικό σύστημα, εμφανίζει δε το φαινόμενο του διπλασιασμού της περιόδου, δηλαδή το φαινόμενο του δυϊσμού. Στο Σχήμα 3.12 παρουσιάζεται το διάγραμμα δυϊσμού της συνάρτησης $F(x) = x^2 - c$ καθώς το c αυξάνει και παίρνει τιμές από το 0.75 έως την οριακή τιμή.



Σχήμα 3.12: Το διάγραμμα δυϊσμού για $0.75 < c < c_\infty$ [Berry96].

3.3.3 Υπερβαίνοντας την οριακή τιμή c_∞

Καθώς αυξάνεται το c παίρνει τιμές μεγαλύτερες της οριακής τιμής c_∞ . Οι επαναλήψεις έχουν μια εντυπωσιακή συμπεριφορά με περιοχές χαοτικής συμπεριφοράς και περιοδικούς κύκλους. Στο Σχήμα 3.13 παρουσιάζονται τα διαγράμματα για $c = 1.5$ και $c = 1.75$ με $x_0 = 0$.



Σχήμα 3.13: Το σύστημα $x_{n+1} = x_n^2 - c$ για $c = 1.5$ και $c = 1.75$ με $x_0 = 0$, [Berry96].

Το σύστημα $x_{n+1} = x_n^2 - 1.5$ είναι ένα παράδειγμα χαοτικής συμπεριφοράς, με επαναλήψεις να (επισκέπτονται) σημεία μέσα στο θεμελιώδες διάστημα με ένα τυχαίο τρόπο χωρίς να έλκονται σε κάποιο περιοδικό κύκλο. Από την άλλη μεριά το σύστημα $x_{n+1} = x_n^2 - 1.75$ παρουσιάζει ένα κύκλο περιόδου 3.

3.3.4 Το θεώρημα περιόδου-3

Το θεώρημα περιόδου - 3 αναπτύχθηκε από τους Li και York και δημοσιεύθηκε σε ένα άρθρο με τον τίτλο «Η περίοδος 3 συνεπάγεται χάος» το 1975 [LiYo75]. Η διατύπωση του θεωρήματος έχει ως εξής:

Υποθέτουμε ότι η $F(x)$ είναι μια συνεχής απεικόνιση με περιοδικά σημεία κύριας περιόδου 3.

Τότε η $F(x)$ εμφανίζει περιοδικά σημεία όλων των άλλων περιόδων.

Αυτό που μας λέει το συγκεκριμένο θεώρημα είναι πολύ σημαντικό. Για κάποιες τιμές του c η τετραγωνική απεικόνιση φαινόταν να έχει ένα κύκλο έλκυσης και όχι άλλους, αλλά αν μπορέσουμε να βρούμε ένα κύκλο περιόδου - 3 τότε μπορούμε να εγγυηθούμε ότι υπάρχουν άπειροι άλλοι κύκλοι με οποιαδήποτε πιθανή περίοδο.

Το συγκεκριμένο θεώρημα είναι μια ειδική περίπτωση του θεωρήματος του Sarkovsky.

3.3.5 Το θεώρημα του Sarkovsky

Υποθέτουμε ότι η $F(x)$ είναι μια συνεχής απεικόνιση. Ορίζουμε τους φυσικούς αριθμούς στην ακόλουθη σειρά (γνωστή ως σειρά του Sarkovsky):

3,	5,	7,	9,	...
$2 \times 3,$	$2 \times 5,$	$2 \times 7,$...	
$2^2 \times 3,$	$2^2 \times 5,$	$2^2 \times 7,$...	
$2^3 \times 3,$	$2^3 \times 5,$	$2^3 \times 7,$...	
\vdots				
...	$2^n,$	$2^{n-1},$...	2^3 2^2 2 1

Υποθέτουμε ότι η F έχει ένα περιοδικό σημείο με περίοδο n , όπου το n προηγείται του k στην σειρά του Sarkovsky. Τότε η F έχει ένα περιοδικό σημείο με κύρια περίοδο k .

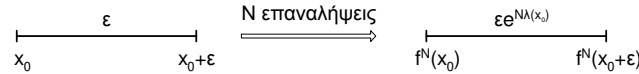
Είδαμε παραπάνω ότι αν η τετραγωνική απεικόνιση έχει ένα περιοδικό σημείο με περίοδο 2^5 τότε θα έχει και περιοδικά σημεία με περιόδους $2^4, 2^2, 2$, και 1 . Ο κύκλος περιόδου - 5 είναι ελκυστής ενώ οι άλλοι είναι απωθητές. Συνεχίζοντας τη συλλογιστική αυτή, αν η τετραγωνική απεικόνιση έχει ένα περιοδικό σημείο με περίοδο $28 = (2^2 \times 7)$ τότε η F θα έχει επίσης περιοδικά σημεία με περιόδους $36, 44, 52, \dots, 8, 4, 2, 1$.

3.4 Εκθέτες Liapunov

Έχουμε ήδη δει σε προηγούμενες παραγράφους ότι διπλανά σημεία αποχωρίζονται κατά την δράση της απεικόνισης

$$x_{n+1} = f(x_n)$$

γεγονός το οποίο οδηγεί σε χαοτική συμπεριφορά. Ο εκθέτης Liapunov $\lambda(x_0)$ που θα προσπαθήσουμε να οριοθετήσουμε στη συνέχεια είναι ένα μέτρο της εκθετικής απομάκρυνσης δύο τέτοιων σημείων, όπως φαίνεται και στο παρακάτω σχήμα.



Σχήμα 3.14: Γραφική αναπαράσταση της έννοιας του εκθέτη Liapunov

Από το παραπάνω σχήμα, εφόσον πάντα ζητάμε τροχιές που αρχίζουν πολύ κοντά να απομακρύνονται εκθετικά γρήγορα, μπορούμε να υπολογίσουμε ότι:

$$\varepsilon e^{N\lambda(x_0)} = |f^N(x_0 + \varepsilon) - f^N(x_0)| \quad (3.17)$$

Αυτή η σχέση, παίρνοντας τα όρια για $\varepsilon \rightarrow 0$ και $N \rightarrow \infty$, μας οδηγεί στην παρακάτω σχέση για το $\lambda(x_0)$:

$$\begin{aligned} \lambda(x_0) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{N} \log \left| \frac{f^N(x_0 + \varepsilon) - f^N(x_0)}{\varepsilon} \right| \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \log \left| \frac{df^N(x_0)}{dx_0} \right| \end{aligned} \quad (3.18)$$

Αυτό σημαίνει ότι το $e^{\lambda(x_0)}$ είναι ο μέσος παράγοντας κατά τον οποίο τροχιές που αρχίζουν πολύ κοντά απομακρύνονται μετά από μια επανάληψη.

Ο εκθέτης Liapunov είναι επίσης ένα μέτρο του μέσου όρου της χαμένης πληροφορίας (για την θέση ενός σημείου στο $[0, 1]$) μετά από μια επανάληψη. Για να μπορέσουμε να το δούμε αυτό εφαρμόζουμε τον κανόνα της αλυσίδας στην Εξ. (3.18):

$$\left| \frac{df^n(x)}{dx} \right|_{x_0} = \left| \frac{df(u)}{du} \right|_{u_0} \cdot \left| \frac{df^{n-1}}{dx} \right|_{x_0},$$

όπου $u = f^{n-1}(x)$ και $u_0 = f^{n-1}(x_0)$, οπότε θα έχουμε

$$\lambda(x_0) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \log \left| \frac{df^N(x_0)}{dx_0} \right| = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \log \left| \prod_{i=0}^{N-1} \frac{df(x_i)}{dx} \right|$$

επειδή όμως $\log \prod_{i=0}^{N-1} X_i = \sum_{i=0}^{N-1} \log X_i$ η προηγούμενη σχέση μπορεί να γραφεί ως:

$$\lambda(x_0) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \log \left| \frac{df(x_i)}{dx} \right| \quad (3.19)$$

Όπως φαίνεται καθαρά από την Εξ. (3.19) (αν υπάρχει όριο $N \rightarrow \infty$) ο εκθέτης Liapunov γενικά εξαρτάται από την αρχική συνθήκη και την συγκεκριμένη τροχιά που μελετάμε. Αν είναι $\lambda(x_0) < 0$, αυτό σημαίνει ότι οι αποστάσεις μεταξύ γειτονικών τροχιών (σε μια περιοχή του x_0) μειώνονται εκθετικά και επομένως η κίνηση εκεί είναι κάθε άλλο από απρόβλεπτη και χαστική. Αν όμως $\lambda(x_0) > 0$ για ένα άπειρο και πυκνό πλήθος αρχικών συνθηκών x_0 τότε έχουμε χάος. Δυστυχώς ο εκθέτης Liapunov πολύ σπάνια μπορεί να υπολογιστεί αναλυτικά για ένα δοσμένο δυναμικό σύστημα. Συνήθως υπολογίζεται αριθμητικά και βγαίνουν τα αντίστοιχα συμπεράσματα, αν οι αρχικές συνθήκες ανήκουν σε μια χαστική περιοχή ή όχι.

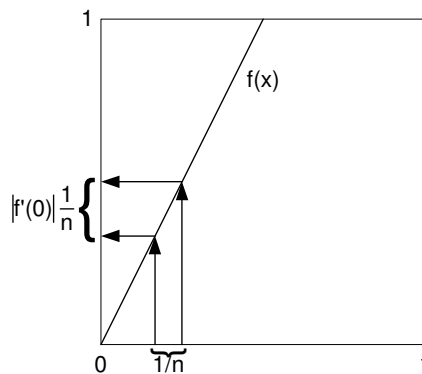
Στην συνέχεια θα δούμε το ποσό της πληροφορίας που χάνεται μετά από μια επανάληψη μιας γραμμικής απεικόνισης ως συνάρτηση των εκθετών Liapunov. Χωρίζουμε το $[0, 1]$ σε n ίσα διαστήματα και υποθέτουμε ότι το σημείο x_0 μπορεί να βρεθεί σε κάθε ένα από αυτά με ίδια πιθανότητα $\frac{1}{n}$. Μαθαίνοντας ποιο διάστημα περιέχει το x_0 , αποκτούμε την πληροφορία [Shan49]

$$I_0 = -\sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \log_2 \frac{1}{n} = \log_2 \frac{1}{n}$$

Μικραίνοντας το n , η πληροφορία I_0 μειώνεται, και γίνεται μηδέν για την περίπτωση που $n = 1$.

Όπως φαίνεται και στο παρακάτω σχήμα (Σχήμα 3.15) μια γραμμική απεικόνιση $f(x)$ αλλάζει το μήκος του ενός διαστήματος κατά ένα παράγοντα $\alpha = |f'(0)|$. Η αντίστοιχη μείωση της ανάλυσης οδηγεί σε μια απώλεια πληροφορίας [Schu95]:

$$\Delta I = -\sum_{i=1}^n \frac{\alpha}{n} \log_2 \frac{\alpha}{n} + \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \log_2 \frac{1}{n} = -\log_2 \alpha = -\log_2 |f'(0)| \quad (3.20)$$



Σχήμα 3.15: Η αύξηση του διαστήματος $\frac{1}{n}$ σε ένα γραμμικό χάρτη

Θεωρώντας την γενική περίπτωση της παραπάνω εξίσωσης για μια περίπτωση που η $|f'(x)|$ κινείται από σημείο σε σημείο και παίρνοντας το μέσο όρο για πολλές επαναλήψεις οδηγούμαστε στην ακόλουθη έκφραση για τη μέση τιμή της πληροφορίας που έχει χαθεί:

$$\overline{\Delta I} = -\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \log_2 |f'(x_i)|. \quad (3.21)$$

Από την Εξ. (3.19) και την Εξ. (3.21) μπορούμε πολύ εύκολα να δούμε ότι

$$\lambda(x_0) = (\log 2) \cdot |\overline{\Delta}|. \quad (3.22)$$

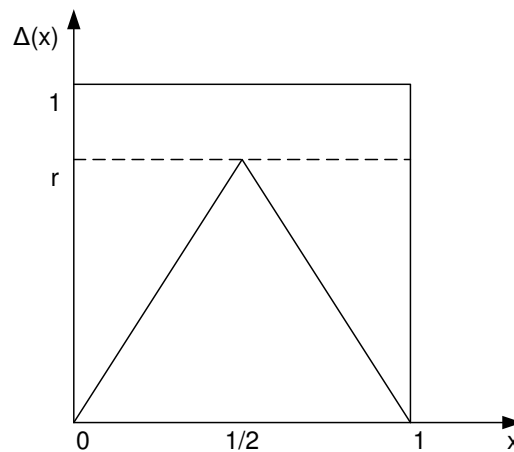
Η Εξ. (3.22) που περιγράφει την σχέση ανάμεσα στον εκθέτη Liapunov και στην πληροφορία που χάνεται είναι το πρώτο βήμα προς την κατεύθυνση χαρακτηρισμού μια χαστικής κίνησης¹, [Kolm59], [Pesi77].

Στη συνέχεια θα προσπαθήσουμε να βρούμε τον εκθέτη Liapunov για την τριγωνική απεικόνιση:

$$\Delta(x) = r \left(1 - 2 \left| \frac{1}{2} - x \right| \right) \quad (3.23)$$

η οποία φαίνεται στο Σχήμα 3.16.

Η συνάρτηση $\Delta(x)$ είναι ένα χρήσιμο μοντέλο επειδή για $r > \frac{1}{2}$ παράγει μια χαστική ακολουθία $x_0, \Delta(x_0), \Delta[\Delta(x_0)] \dots$, και λόγω της απλής μορφής του, όλες οι απαιτούμενες ποσότητες που χαρακτηρίζουν την χαστική κατάσταση μπορούν να υπολογιστούν αναλυτικά.



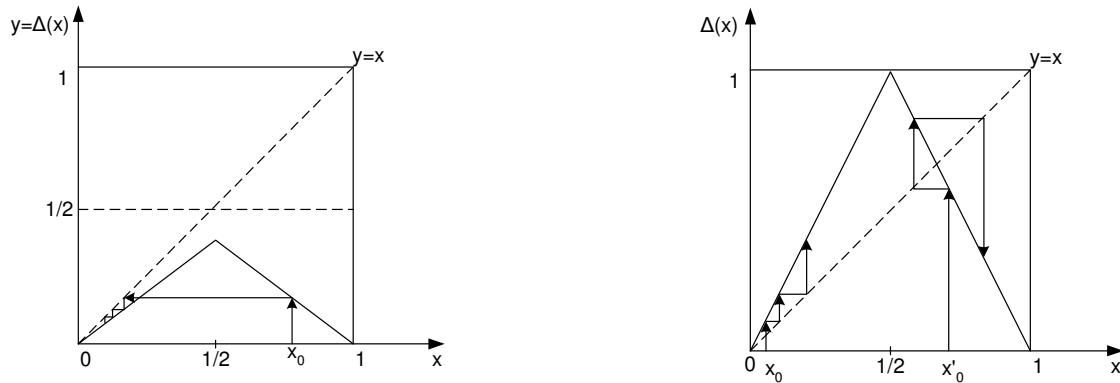
Σχήμα 3.16: Η τριγωνική απεικόνιση $\Delta(x)$.

Αρχικά για να εξοικειωθούμε με την απεικόνιση ας προσπαθήσουμε να δούμε τα κρίσιμα σημεία του και την ευστάθειά του για διάφορες τιμές του r . Έστω λοιπόν x^* ένα κρίσιμο σημείο της απεικόνισης. Τότε θα ισχύει ότι $x^* = \Delta(x^*)$ και στην γραφική αναπαράσταση το κρίσιμο αυτό σημείο θα είναι η τομή των συναρτήσεων $y = \Delta(x)$ και $y = x$. Επίσης το κριτήριο για τοπική ευστάθεια είναι

$$\left| \frac{d}{dx} f(x^*) \right| < 1. \quad (3.24)$$

Το Σχήμα 3.17α μας δείχνει ότι για $r < \frac{1}{2}$ η αρχή των αξόνων $x = 0$ είναι το μόνο κρίσιμο σημείο, στο οποίο όλα τα σημεία στο $[0, 1]$ έλκονται.

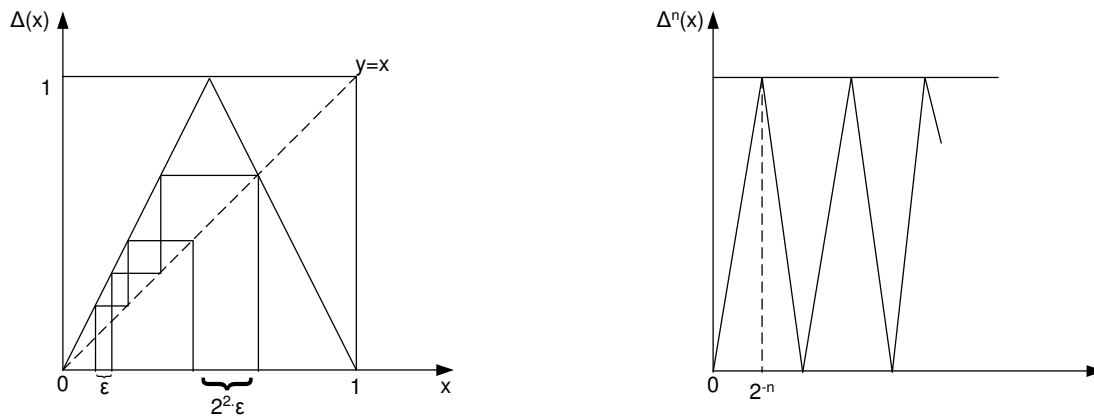
¹ Με τον όρο χαστική κίνηση εννοούμε την κίνηση δύο γειτονικών σημείων τα οποία ξεκινούν μαζί και απομακρύνονται εκθετικά γρήγορα.



Σχήμα 3.17 α): Ένα ευσταθές κρίσιμο σημείο στο **β):** Δύο μη ευσταθή κρίσιμα σημεία για $r = 1$
 $x^* = 0$ για $r < \frac{1}{2}$

Για $r > \frac{1}{2}$ εμφανίζονται δύο μη ευσταθή κρίσιμα σημεία. Το Σχήμα 3.17β δείχνει πως, για $r = 1$, οι επαναλήψεις των x_0 και x'_0 κινούνται μακριά από τα κρίσιμα σημεία $x_1 = 0$ και $x_2 = \frac{2}{3}$ αντίστοιχα. Στην συνέχεια θα θεωρήσουμε μόνο την περίπτωση $r = 1$ η οποία είναι αντιπροσωπευτική για $r > \frac{1}{2}$.

Κατόπιν θα προσπαθήσουμε να δούμε τι συμβαίνει για μια ακολουθία επαναλήψεων στην περίπτωση που δεν υπάρχει κανένα ευσταθές κρίσιμο σημείο. Καταρχάς παρατηρούμε ότι τα σημεία, τα οποία είναι πολύ κοντά, απομακρύνονται όλο και περισσότερο κατά την διάρκεια της πρώτης επανάληψης όπως φαίνεται και στο Σχήμα 3.18.



Σχήμα 3.18: α) Διαχωρισμός των σημείων

β) η - επανάληψη $\Delta^n(x)$

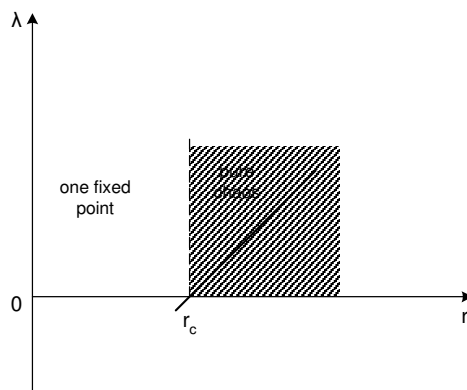
Αν σχεδιάσουμε την n-επανάληψη $\Delta^n(x)$, βλέπουμε από το Σχήμα 3.18 ότι είναι γραμμική και έχει κλίση $\left| \frac{d}{dx} \Delta^n(x) \right| = 2^n$, εκτός από ένα μετρήσιμο σύνολο σημείων $j \cdot 2^{-n}$ όπου $j = 0, 1, \dots, 2^n$. Επομένως ο

διαχωρισμός σχεδόν όλων των σημείων $x_0, x_0 + \varepsilon$ αυξάνει εκθετικά με το n μετά από n επαναλήψεις και ο εκθέτης Liapunov γίνεται (ανεξάρτητος του x_0):

$$\lambda = \log 2.$$

Για την γενική μορφή της απεικόνισης της Εξ. (3.23) ο εκθέτης Liapunov είναι $\lambda = \log 2r$ και για $r > \frac{1}{2}$ έχουμε ότι $\lambda > 0$ δηλαδή χάνουμε την πληροφορία για την θέση ενός σημείου στο $[0, 1]$ μετά από μια επανάληψη, σε αντίθεση με την περίπτωση που $r < \frac{1}{2}$ το οποίο συνεπάγεται $\lambda < 0$ και κερδίζουμε πληροφορία επειδή όλα τα σημεία έλκονται στο $x^* = 0$.

Ο εκθέτης Liapunov αλλάζει πρόσημο στο $r = \frac{1}{2}$ και κατά συνέπεια λειτουργεί ως παράγοντας αλλαγής κατάστασης, ο οποίος σηματοδοτεί την έναρξη της χαστικής κατάστασης όπως φαίνεται και στο Σχήμα 3.19.



Σχήμα 3.19: Ο εκθέτης Liapunov για την τριγωνική απεικόνιση ως συνάρτηση του r σε μια γειτονική περιοχή του r_c .

Ένα άλλο σημείο επίσης που χρήζει προσοχής είναι ότι κοντά στο κρίσιμο σημείο $r = r_c$ ο εκθέτης Liapunov είναι ανάλογος της διαφοράς

$$\lambda \propto (r - r_c)^d \text{ με } d = 1$$

Σχέσεις όπως την παραπάνω (με d κάποιο πραγματικό αριθμό) συναντάμε συχνά σε προβλήματα Στατιστικής Μηχανικής, όπου, συναρτήσει μιας παραμέτρου r η κατάσταση ενός συστήματος παρουσιάζει αλλαγή φάσεως σε κάποιο σημείο $r = r_c$ γίνεται δηλαδή από υγρό αέριο, κ.λ.π. Αυτό είναι αντικείμενο του κλάδου της Φυσικής των Κρίσιμων Φαινομένων [Ma76].

Ο εκθέτης Liapunov είναι συνδεδεμένος με εκθετικές αποκλίσεις όχι μόνο συνολικώς αλλά και ως προς τη διεύθυνση κατά την οποία μια τέτοια απόκλιση παρατηρείται. Για μονοδιάστατα συστήματα της μορφής $x_{n+1} = f(x_n)$ όπου $x_n \in R$, θα υπάρχει μόνο ένας $\lambda(x)$ για κάθε x . Όταν όμως πρόκειται για συστήματα μεγαλύτερων διαστάσεων

$$x_{n+1} = f(x_n), \quad x_n \in D \subset R^m$$

τότε για κάθε $x \in D$, υπάρχουν m διαφορετικοί εκθέτες Liapunov $\lambda_i(x)$, $i = 1, 2, \dots, m$. Είναι φανερό ότι, έστω και ένας από αυτούς αν είναι θετικός, για όλα τα $x \in D$, μπορούμε να μιλάμε για εκθετική απόκλιση γειτονικών τροχιών και επομένως για χαστική συμπεριφορά του D .

3.5 Το λογιστικό μοντέλο

Ένας γενικός ορισμός του χάους είναι οι ποιοτικές αλλαγές στην συμπεριφορά και σε ακραίες περιπτώσεις ακόμη και αστάθεια η οποία προκύπτει σε ένα σύστημα λόγω της εσωτερικής μη γραμμικής δυναμικής του. Επειδή η αιτία της αστάθειας είναι εσωτερική το χάος τυχαίνει ακόμα και όταν δεν υπάρχει αλλαγή στο εξωτερικό περιβάλλον ενός συστήματος. Ο τρόπος με τον οποίο προκύπτει το χάος, ακόμη και σε ένα απλό σύστημα, μπορεί να περιγραφεί από μια απλή μη γραμμική μονοδιάστατη εξίσωση που χρησιμοποιείται σε μελέτες πρόβλεψης όπως η αύξηση του πληθυσμού ή πωλήσεις νέων προϊόντων. Η εξίσωση αυτή η οποία επαληθεύει τα όσα έχουμε ήδη, αναφέρει, είναι η ακόλουθη γνωστή ως λογιστική εξίσωση:

$$X_t = kX_{t-1}(1 - X_{t-1}) \quad (3.25)$$

όπου k : σταθερά η οποία ελέγχει την ευστάθεια της εξίσωσης [Orme90], [Glei87].

Σκοπός είναι να παρουσιάσουμε κάποιες από τις «μαγικές» ιδιότητες αυτής της εξίσωσης δεδομένου ότι οι συνέπειες αυτών σε τεχνικά, κοινωνικά και οικονομικά θέματα είναι πραγματικά αξιοσημείωτες.

Μία απλή εξέταση της ευστάθειας του συστήματος γίνεται αν θέσουμε $X_t = X_{t-1}$

Η τιμή του X στην οποία συγκλίνει το σύστημα είναι το $X_e = 0$ ή το:

$$X_e = 1 - \frac{1}{k} \quad (3.26)$$

η οποία σε μορφή διαφορικής εξίσωσης γράφεται $\frac{dX_t}{dX_e} = k(1 - 2X_e)$. Αντικαθιστώντας την τιμή σύγκλισης στην προηγούμενη εξίσωση έχουμε:

$$\frac{dX_t}{dX_e} = k \left[1 - 2 \frac{k-1}{k} \right] = 2 - k \quad (3.27)$$

Η παραπάνω σχέση μας δίνει και την κλίση της εξίσωσης στην γειτονιάζουσα περιοχή του σημείου ισορροπίας.

3.5.1 Ανάλυση συμπεριφοράς της λογιστικής εξίσωσης

Έχουμε τη δυνατότητα να χωρίσουμε το σύνολο των τιμών που μπορεί να πάρει η παράμετρος ευστάθειας k του λογιστικού μοντέλου και που χωρίζεται στις εξής περιοχές:

Περιοχή 1: Για τιμές $k < 2.80$ η συμπεριφορά του X είναι "σταθερή".

Περιοχή 2: Για τιμές $2.80 \leq k \leq 3.10$ η συμπεριφορά του X είναι "σύνθετη".

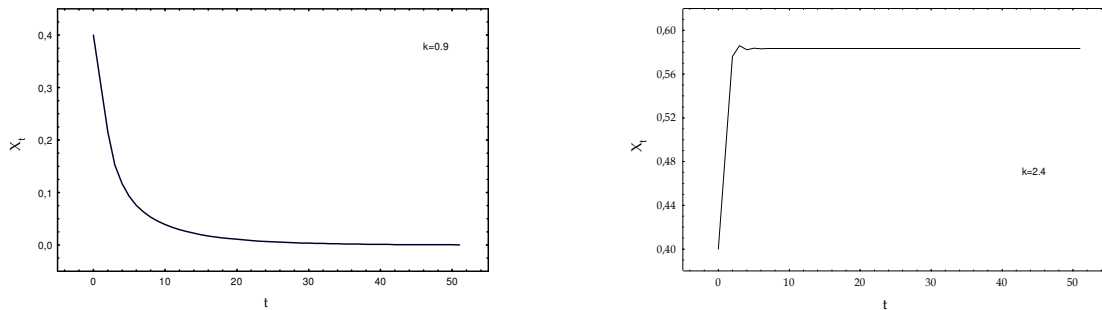
Περιοχή 3: Για τιμές $3.10 \leq k < 3.50$ η συμπεριφορά του X είναι "ταλαντωτική".

Περιοχή 4: Για τιμές $3.50 \leq k \leq 4$ η συμπεριφορά του X είναι "χαστική".

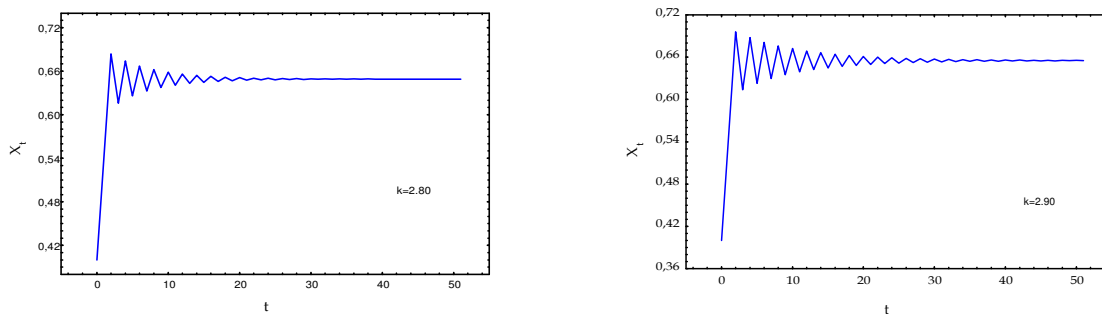
Περιοχή 5: Για τιμές $k > 4$ έχουμε αστάθεια.

Παρακάτω θα χρησιμοποιήσουμε την λογιστική εξίσωση προκειμένου να υπολογίσουμε την τιμή του X για 50 επαναλήψεις, υποθέτοντας ότι η αρχική τιμή είναι $X_0 = 0.4$ και για διάφορες τιμές της παραμέτρου k έτσι ώστε να δούμε την συμπεριφορά της λογιστικής εξίσωσης στις προαναφερθείσες περιοχές. Τα Σχήματα 20 έως 26 δείχνουν πώς με την πάροδο του χρόνου μεταβαίνουμε από σταθερές σε χαστικές συμπεριφορές, αλλάζοντας μόνο την τιμή μιας παραμέτρου.

Όταν η τιμή του $k \leq 1$ (περιοχή 1) η τιμή στην οποία συγκλίνει το X_t είναι το μηδέν, (Σχήμα 3.20). Όταν η τιμή του k είναι 2.40, το X_t ισορροπεί στην σταθερή τιμή του 0.580. Αυξάνοντας δε την τιμή του k έως το σημείο 2.80 η συμπεριφορά του X_t συνεχίζει να παραμένει σταθερή μετά από περίπου 5-10 επαναλήψεις. Όταν η τιμή της παραμέτρου k αυξηθεί πέρα της τιμής 2.80 η συμπεριφορά του X_t καταλήγει πολύπλοκη, αρχικά ταλαντώνεται και μετά από μικρό χρονικό διάστημα σταθεροποιείται (Σχήμα 3.21).



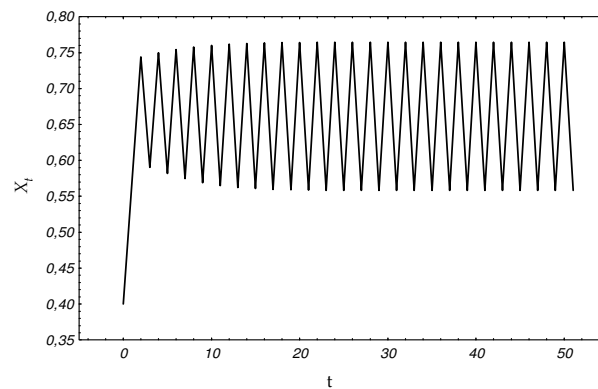
Σχήμα 3.20: Το λογιστικό μοντέλο για $k = 0.9$ και 2.4 αντίστοιχα



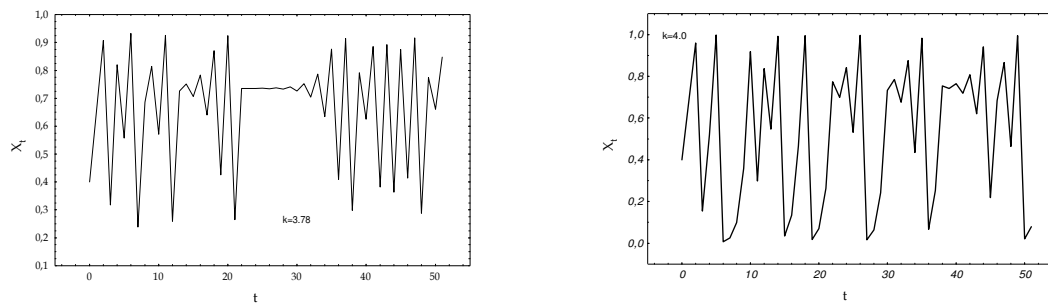
Σχήμα 3.21: Το λογιστικό μοντέλο για $k = 2.80$ και 2.90 αντίστοιχα

Για τιμές της παραμέτρου k που βρίσκονται στην περιοχή 3 η συμπεριφορά του X_t είναι ταλαντωτική όπως φαίνεται και στο Σχήμα 3.22. Όταν το k πάρει τιμές που ανήκουν στην περιοχή 4 η συμπεριφορά του X_t κυμαίνεται μεταξύ περιοδικής, σταθερής και ακανόνιστης. Στο σημείο αυτό το λογιστικό συμπεριφέρεται χαστικά, όπως μπορούμε να δούμε και στο Σχήμα 3.23.

Το Σχήμα 3.23 που παρουσιάζεται παρακάτω (για την περίπτωση $k = 3.78$) είναι ιδιαίτερως σημαντικό διότι δείχνει πώς η εσωτερική δυναμική του συστήματος προκαλεί ποιοτικές αλλαγές με την πάροδο του χρόνου χωρίς την επιρροή εξωτερικών παραγόντων. Για παράδειγμα στις πρώτες 21 επαναλήψεις το σύστημα ταλαντεύεται αλλά δεν εμφανίζει κάποια αιτιοκρατική διάταξη. Στις επόμενες επαναλήψεις 22-30 το σύστημα ισορροπεί και όλες οι διακυμάνσεις έχουν εξαφανιστεί. Στη συνέχεια, η συμπεριφορά του συστήματος αλλάζει ξανά, εμφανίζοντας ξανά έντονες διακυμάνσεις και ταλαντώσεις.

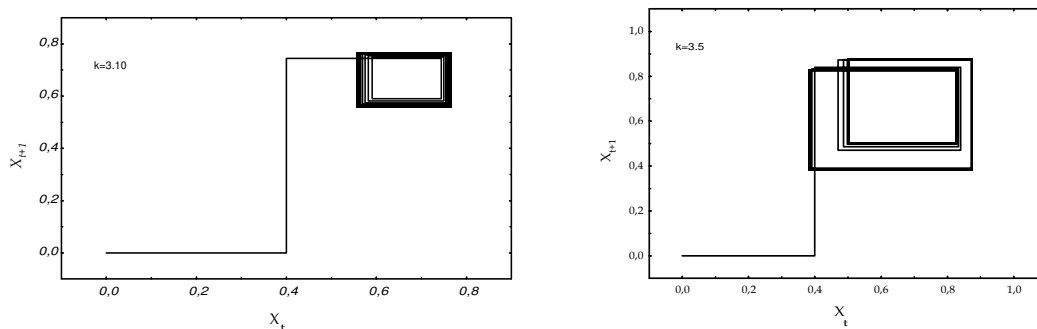


Σχήμα 3.22: Το λογιστικό μοντέλο για $k = 3.10$



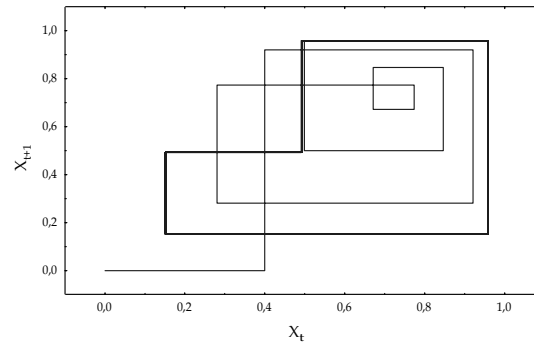
Σχήμα 3.23: Το λογιστικό μοντέλο για $k = 3.78$ και 4.0 αντίστοιχα

Αν το k αυξηθεί πάνω από 3 έχει βρεθεί ότι, ανεξάρτητα από την αρχική τιμή X_t , η χρονική περίοδος προσαρμόζεται σε ένα βρόχο γύρω από ένα σταθερό τετράγωνο. Αυτό σημαίνει ότι το X_t κυμαίνεται μεταξύ δύο τιμών, έχουμε δηλαδή ένα κύκλο δύο περιόδων. Για παράδειγμα αν $k = 3.10$ το X_t κυμαίνεται μεταξύ 0.56 και 0.76 (Σχήμα 3.24). Όταν το k φτάσει το 3.5 έχει βρεθεί ότι το σύστημα μεταβάλλεται γύρω από έναν κύκλο τεσσάρων περιόδων. Κατά συνέπεια εάν $k = 3.50$ το X_t κυμαίνεται μεταξύ 0.38, 0.83, 0.50, και 0.87. Αυτός ο κύκλος των τεσσάρων περιόδων φαίνεται στο Σχήμα 3.24. Όταν το k φτάσει το 3.544 το σύστημα προσαρμόζεται σε έναν κύκλο οκτώ περιόδων, ενώ για $k = 3.564$ εμφανίζεται κύκλος 16 περιόδων με γρήγορα διάκενα, έως ότου το k φτάσει την τιμή 3.57 όπου το σύστημα δεν προσαρμόζεται σε κανένα σταθερό κύκλο. Στο σημείο αυτό το σύστημα θεωρείται χαστικό.



Σχήμα 3.24: Το λογιστικό μοντέλο για $k = 3.10$ και 3.50 αντίστοιχα

Ένα άλλο αξιοσημείωτο χαρακτηριστικό είναι ότι το σύστημα δεν είναι χαοτικό για όλες τις τιμές του $k > 3.57$. Σε κάποια σημεία εμφανίζονται κύκλοι τριών περιόδων. Για παράδειγμα όταν $k = 3.836$ το X_t κυμαίνεται μεταξύ 0.1514, 0.4390, 0.9588, ανεξάρτητα από το αρχικό σημείο, όπως άλλωστε φαίνεται στο Σχήμα 3.25. Πολύ μικρή αύξηση του k παράγει ξανά διπλασιασμό των περιόδων σε 6, 12, 24, ... καταλήγοντας πάλι στο χάος.



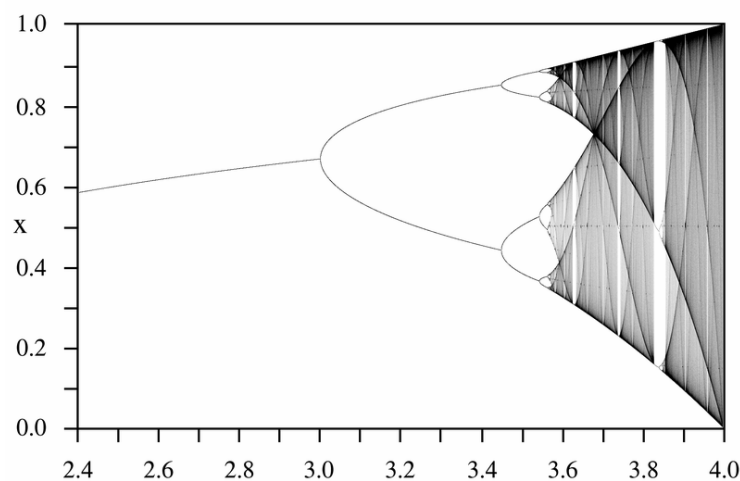
Σχήμα 3.25: Το λογιστικό μοντέλο για $k = 3.836$

Αν και οι αλλαγές της παραμέτρου k προκαλούν μεταβολές στην δυναμική του συστήματος, ωστόσο οι συχνές αλλαγές της συμπεριφοράς του συστήματος εμφανίζονται μόνο για συγκεκριμένες τιμές του k . Για άλλες τιμές του k το σύστημα είναι ευσταθές. Για παράδειγμα όταν $k \geq 0.9$ και $k \leq 2.4$ το σύστημα ισορροπεί και το X_t συγκλίνει σε μια σταθερή τιμή, (Σχήμα 3.20).

Διαπιστώνουμε επομένως πως για διάφορες τιμές της παραμέτρου k , μπορούν να παραχθούν τιμές του X_t που είναι σταθερές, σταθερά κυμαινόμενες μεταξύ δύο, τεσσάρων ή μεταξύ πολλών τιμών. Αξίζει να σημειωθεί ότι όλες αυτές οι συμπεριφορές προκαλούνται από μία και μόνο απλή μη γραμμική εξίσωση.

3.5.2 Το φαινόμενο του δυϊσμού

Το Σχήμα 3.26 παρουσιάζει μία άλλη εικόνα των πληροφοριών που παράγει η εξίσωση του λογιστικού μοντέλου, αυτή του δυϊσμού. Σε αυτήν την περίπτωση η παράμετρος k βρίσκεται στον οριζόντιο άξονα ενώ οι τιμές του X_t στον κάθετο άξονα. Μεγεθύνοντας ολοένα και περισσότερο το Σχήμα 3.26 θα βλέπουμε τα ίδια χαρακτηριστικά να επαναλαμβάνονται ξανά και ξανά. Το τελικό συμπέρασμα είναι ότι ο δυϊσμός είναι μία μορφοκλασματική διαδικασία (fractal process).



Σχήμα 3.26: Το διάγραμμα δυϊσμού του λογιστικού μοντέλου

Ας δούμε όμως πώς παράγεται ο δυϊσμός. Το λογιστικό μοντέλο έχει αναδρομικό χαρακτήρα, με την έννοια ότι οι τιμές που προκύπτουν είναι αποτέλεσμα παρελθουσών τιμών. Αυτό άλλωστε φαίνεται και από την Εξ. 3.25,.

Για $t = 1$ έχουμε μία εξίσωση δευτέρου βαθμού, άρα δύο λύσεις ($1^{\text{ος}}$ δυϊσμός).

Για $t = 2$ έχουμε μία εξίσωση τετάρτου βαθμού, άρα τέσσερις λύσεις ($2^{\text{ος}}$ δυϊσμός).

Για $t = 3$ έχουμε μία εξίσωση ογδόου βαθμού, άρα οκτώ λύσεις ($3^{\text{ος}}$ δυϊσμός).

.....

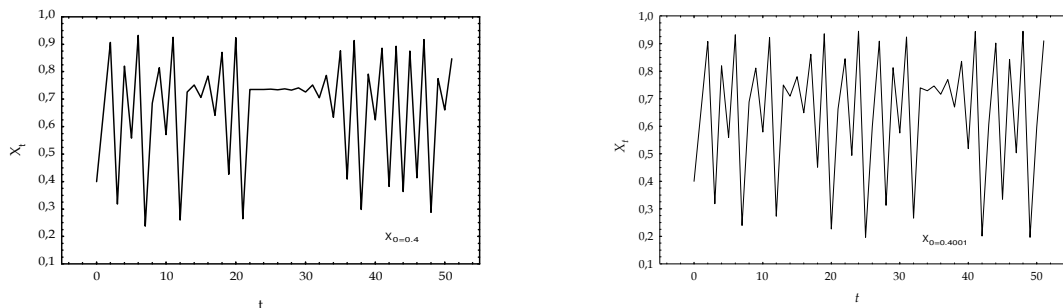
.....

Για $t = n$ έχουμε μία εξίσωση βαθμού 2^n και άρα 2^n λύσεις, πράγμα που σημαίνει ότι το σύστημά μας έχει φτάσει σε χαοτική κατάσταση και η συμπεριφορά του είναι εντελώς απρόβλεπτη. Θα μπορούσαμε να ισχυριστούμε δηλαδή ότι ο δυϊσμός αποτελεί προαναγγελία του χάους.

Ωστόσο παρατηρώντας το παραπάνω σχήμα και συγκεκριμένα τη χαοτική περιοχή, παρατηρούμε μία άσπρη λωρίδα. Στην πραγματικότητα, αν και αυτό δεν διακρίνεται, στην άσπρη λωρίδα έχουμε επανεκκίνηση της όλης διαδικασίας. Δηλαδή έχουμε ξανά σύγκλιση σε ένα σημείο, έπειτα παραγωγή δύο σημείων, τεσσάρων έως ότου φτάσουμε πάλι στο χάος. Παρατηρούμε ότι υπάρχουν αρκετές άσπρες λωρίδες στο διάγραμμα. Έχουμε λοιπόν ένα διάγραμμα το οποίο επαναλαμβάνεται, εμπεριέχοντας τον εαυτό του επανειλημμένως. Αυτή άλλωστε η «αυτό-ομοιότητα» (self-similarity) αποτελεί ένα σημαντικό χαρακτηριστικό του χάους.

3.5.3 Ευαισθησία στις αρχικές συνθήκες

Το Σχήμα 3.27 αποτυπώνει ένα από τα πιο σημαντικά χαρακτηριστικά των μη γραμμικών συστημάτων, την ευαισθησία τους στις αρχικές συνθήκες. Ας υποθέσουμε ότι η ακολουθία των X_t ξεκινά από δύο ελαφρώς διαφορετικές τιμές, 0.4000 και 0.4001, ενώ το k παραμένει σταθερό στην τιμή 3.78. Στο Σχήμα 3.27 παρουσιάζονται οι δύο αυτές διαφορετικές περιπτώσεις. Όπως μπορούμε πολύ εύκολα να διαπιστώσουμε οι συμπεριφορές των δύο συστημάτων αποκλίνουν εντελώς η μία από την άλλη, αν και η διαφορά στις αρχικές συνθήκες είναι μηδαμινή. Μετά από 15 επαναλήψεις όπου οι πορείες των δύο συστημάτων είναι σχεδόν ίδιες, οι δύο διαφορετικές περιπτώσεις αποκλίνουν και δίδουν εντελώς διαφορετικές συμπεριφορές.



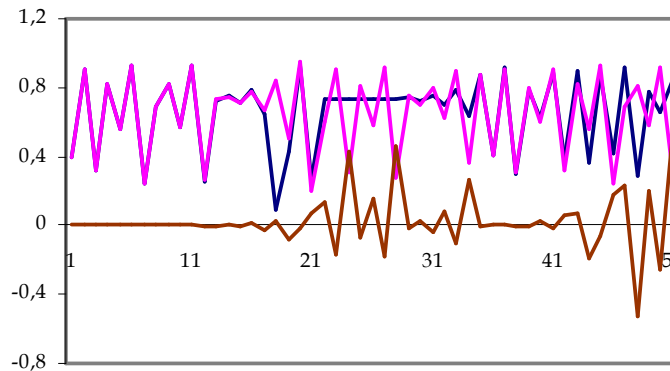
Σχήμα 3.27: Το λογιστικό μοντέλο για $X_0 = 0.4$ και $X_0 = 0.4001$ αντίστοιχα ($k = 3.78$).

Στο Σχήμα 3.28 που ακολουθεί παρουσιάζουμε τις 50 πρώτες επαναλήψεις του λογιστικού μοντέλου για $k = 3.78$ και αρχικές τιμές εκκίνησης τις 0.4000 και 0.4001 ενώ φαίνεται και η διαφορά των τιμών για κάθε επανάληψη. Καταλαβαίνουμε λοιπόν ότι οποιαδήποτε μακροχρόνια πρόβλεψη της συμπεριφοράς των συστημάτων αυτών θα ήταν αναξιόπιστη.

Ωστόσο η υπερβολική ευαισθησία στις αρχικές συνθήκες δεν εμποδίζει τις βραχυχρόνιες προβλέψεις. Όπως άλλωστε φαίνεται και στο Σχήμα 3.27 χρησιμοποιώντας τμήματα της χρονοσειράς του συστήματος είναι πιθανό να προβλέψουμε μία ή περισσότερες μεταγενέστερες τιμές στις οποίες συγκλίνει το σύστημα, [Gord91].

Για παράδειγμα όπως φαίνεται στο Σχήμα 3.27 υπάρχουν περίοδοι έντονης αστάθειας και περίοδοι ευστάθειας. Γνωρίζοντας επομένως το καθεστώς κάτω από το οποίο λειτουργεί το σύστημα σε μία δεδομένη στιγμή, βραχυχρόνιες προβλέψεις είναι εφικτές λαμβάνοντας υπόψη μόνο το καθεστώς αυτό.

Για το θέμα της ευαισθησίας στις αρχικές συνθήκες ο Henri Poincare το 1903 είχε πει:



Σχήμα 3.28: Οι 50 πρώτες επαναλήψεις του λογιστικού μοντέλου για $X_0 = 0.4$ και $X_0 = 0.4001$ με $k = 3.78$ και η διαφορά τους.

«Ένα πολύ μικρό αίτιο, το οποίο ξεφεύγει της παρατήρησής μας, μπορεί να καθορίσει ένα σημαντικό αποτέλεσμα, που είναι αδύνατο να μην το δούμε και ως εκ τούτου να λέμε ότι το αποτέλεσμα είναι τυχαίο. Αν ξέραμε ακριβώς τους νόμους της φύσης και την κατάσταση του σύμπαντος σε μία δεδομένη στιγμή θα μπορούσαμε να προβλέψουμε την κατάσταση του ίδιου σύμπαντος την επόμενη στιγμή. Ακόμα όμως και αν συνέβαινε αυτό εμείς θα μπορούσαμε να γνωρίζουμε την αρχική κατάσταση μόνο προσεγγιστικά, γεγονός που θα μας επέτρεπε να προβλέψουμε την επόμενη κατάσταση με μία ανάλογη προσέγγιση. Ωστόσο δεν είναι πάντα έτσι. Μία πολύ μικρή αλλαγή στην αρχική κατάσταση μπορεί να επιφέρει πολύ μεγάλη αλλαγή στο τελικό αποτέλεσμα. Έτσι η πρόβλεψη γίνεται αδύνατη, με συνέπεια να έχουμε απρόοπτα αποτελέσματα».

3.5.4 Περιπτώσεις όπου $k > 4$

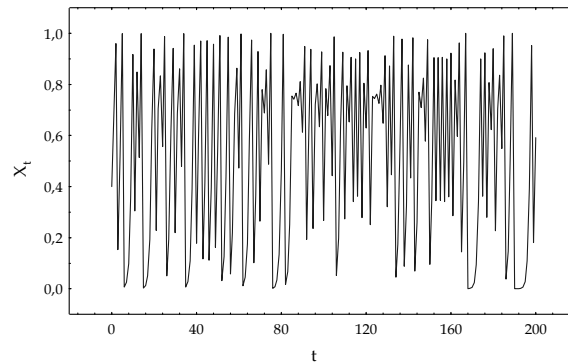
Έως τώρα ασχοληθήκαμε με τιμές της παραμέτρου $k < 4$. Ωστόσο η κατάσταση αλλάζει σημαντικά για τις περιπτώσεις που $k > 4$. Ας θεωρήσουμε λοιπόν την περίπτωση όπου $k = 4.000017$ και αρχική τιμή του μοντέλου την $X_0 = 0.4$ (Σχήμα 3.29). Παρατηρούμε ότι και για τις 200 επαναλήψεις οι τιμές του X_t παραμένουν στα αναμενόμενα όρια μεταξύ 0 και 1. Αλλάζοντας την τιμή του k σε $k = 4.0000178$ βλέπουμε ότι για τις πρώτες 84 επαναλήψεις οι τιμές του X_t παραμένουν ανάμεσα στα όρια 0 και 1 (Σχήμα 3.30), ωστόσο εντελώς ξαφνικά πέρα από το σημείο αυτό, οι τιμές του X_t γίνονται γρήγορα αρνητικές και ξεφεύγουν από την 97^η επανάληψη και πέρα στο $-\infty$ (Σχήμα 3.31).

Παίζοντας με ανάλογο τρόπο με τις τιμές του k προκύπτουν κάθε φορά άλλα αποτελέσματα. Έτσι για $k = 4.0000179$ οι τιμές του X_t παραμένουν ανάμεσα στα όρια 0 και 1 για τις πρώτες 172 επαναλήψεις ενώ από την 185^η επανάληψη και μετά οι τιμές έχουν ήδη φτάσει στο $-\infty$. Ακόμα για $k = 4.00001795$ οι τιμές του X_t παραμένουν ανάμεσα στα όρια 0 και 1 για τις πρώτες 77 επαναλήψεις ενώ από την 90^η επανάληψη και μετά οι τιμές έχουν ήδη φτάσει στο $-\infty$. Τέλος για $k = 4.00001797$ και για 500 επαναλήψεις οι τιμές του X_t παραμένουν ανάμεσα στα όρια 0 και 1 για τις πρώτες 368 επαναλήψεις ενώ από την 381^η επανάληψη και μετά οι τιμές έχουν ήδη φτάσει στο $-\infty$.

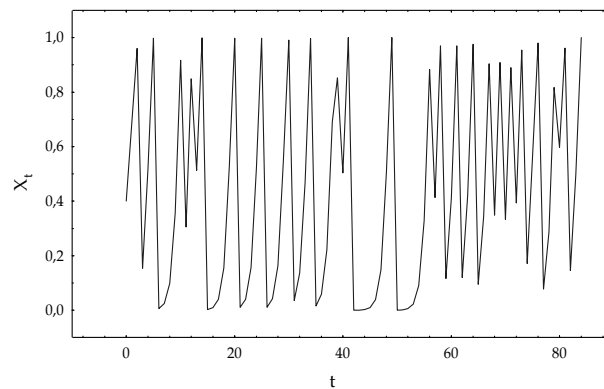
Παρατηρούμε λοιπόν ότι για $k > 4$ κάποιες χρονοσειρές τιμών θα παραμείνουν μεταξύ 0-1 ενώ κάποιες άλλες θα «ξεφύγουν» προς αρνητικές τιμές του X_t καταλήγοντας στο $-\infty$. Ωστόσο θα πρέπει να πούμε ότι η σειρά με την οποία «ξεφύγουν» είναι εντελώς απροσδόκητη. Η πρώτη χρονοσειρά που «ξεφεύγει» είναι αυτή που αντιστοιχεί στο $k = 4.00001795$ μετά η $k = 4.0000178$ μετά η $k = 4.0000179$ και τελευταία η $k = 4.00001797$. Αν και το βήμα αύξησης του k αλλάζει κάθε φορά, ωστόσο δεν διαφαίνεται κάποια λογική

που να εξηγήει την συμπεριφορά αυτή. Οι παραπάνω τιμές βρέθηκαν προσομοιώνοντας την λογιστική εξίσωση για τιμές του $k > 4$ και χρησιμοποιώντας ένα αρκετά μικρό βήμα αύξησης του k , ενώ η προσομοίωση της εξίσωσης σταμάτησε όταν η συμπεριφορά της εξίσωσης παρέμεινε αμετάβλητη.

Το μεσοδιάστημα μεταξύ δύο επαναλήψεων είναι ένα σοβαρό ζήτημα. Αν ένα σύστημα «ξεφεύγει» στην $192^{\text{η}}$ επανάληψη και η κάθε επανάληψη διαρκεί 1 χρόνο, αυτό σημαίνει ότι το σύστημα παραμένει σταθερό για περίπου 2 αιώνες. Αν όμως η κάθε επανάληψη διαρκεί μία εβδομάδα, η περίοδος ευστάθειας αυτομάτως μειώνεται αισθητά.

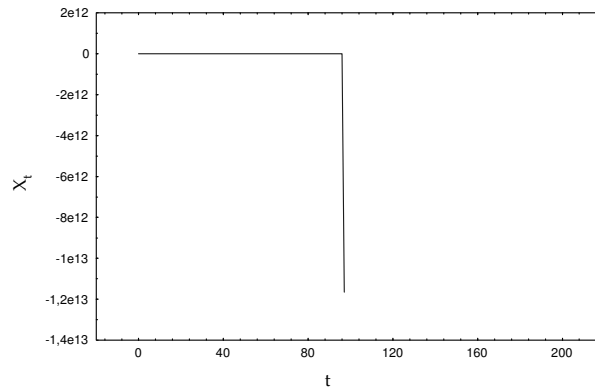


Σχήμα 3.29: Το λογιστικό μοντέλο για $k = 4.000017$ και $X_0 = 0.4$



Σχήμα 3.30: Το λογιστικό μοντέλο για $k = 4.0000178$ και $X_0 = 0.4$ για $t \leq 84$

Το συμπέρασμα που βγαίνει είναι ότι, καθώς τα μη γραμμικά συστήματα «επιταχύνουν», ο απαιτούμενος χρόνος για να φτάσουμε σε χαστικές ή ασταθείς καταστάσεις μειώνεται δραστικά. Ως εκ τούτου είναι επικίνδυνο να επιταχύνουμε τη ροή των πληροφοριών σε μη γραμμικά συστήματα, γεγονός που μπορεί να οδηγήσει σε αστάθεια.



Σχήμα 3.31: Το λογιστικό μοντέλο για $k = 4.0000178$ και $X_0 = 0.4$ για $t \leq 200$

3.5.5 Συμπεράσματα-ιδιότητες των χαστικών συστημάτων

Η θεωρία του χάους εξετάζει λεπτομερώς το πώς μία μικρή αστάθεια στην αρχική κατάσταση μιας ντετερμινιστικής εξέλιξης ενδέχεται να δώσει θέση σε μία αστάθεια προβλέψεων που με την πάροδο του χρόνου αυξάνεται ταχέως. Θα λέγαμε ότι υπάρχει εξάρτηση μεγάλης ευαισθησίας των αρχικών συνθηκών απέναντι στα πάντα. Μικρά αίτια μπορούν να προκαλέσουν μεγάλα φαινόμενα, όχι μόνο σε εξαιρετικές περιπτώσεις αλλά σε κάθε συνθήκη. Για να συνοψίσουμε, ο όρος χάος περιγράφει μία κατάσταση όπου ανεξαρτήτως της αρχικής συνθήκης η αβεβαιότητα της πρόβλεψης ολοένα και αυξάνεται.

Μέσα σε αυτές τις χαστικές περιοχές κίνησης, πρέπει να τονίσουμε, ότι δεν υπάρχει δυνατότητα πρόβλεψης ενός χαστικού συστήματος. Ο λόγος γι' αυτό είναι ότι οι αρχικές συνθήκες για τις οποίες κάναμε λόγο παραπάνω, μας είναι γνωστές μόνο προσεγγιστικά αφού είναι αδύνατο να γνωρίζουμε πάντα το άπειρο πλήθος των δεκαδικών ψηφίων των άρρητων αριθμών που τις περιγράφουν.

Μήπως όμως μπορούμε να γνωρίζουμε πόσο συχνά εμφανίζεται το χάος και πόσο μεγάλες είναι αυτές οι χαστικές περιοχές, ώστε να προσδιορίσουμε την πιθανότητα να βρεθούμε μέσα σε μία από αυτές; Η απάντηση και εδώ είναι αρνητική. Το χάος εμφανίζεται στην πλειοψηφία των δυναμικών συστημάτων και οι χαστικές περιοχές που δημιουργούνται μεγαλώνουν πολύ γρήγορα, καθώς αυξάνεται η «ενέργεια» των μη γραμμικών αλληλεπιδράσεων του συστήματος.

Βασίζόμενοι σε όσα αναφέραμε παραπάνω μπορούμε να συμπεράνουμε τα ακόλουθα για τα χαστικά συστήματα.

Καταρχάς ορισμένες από τις συμπεριφορές μιας χαστικής χρονοσειράς φαίνονται τυχαίες. Οι χαστικές διακυμάνσεις όμως, διαφέρουν από τις τυχαίες διακυμάνσεις. Η τιμή της παραμέτρου ενός τυχαίου συστήματος στο χρόνο $t+1$ δεν εξαρτάται από την τιμή της παραμέτρου στο χρόνο t ή οποιαδήποτε άλλη στιγμή. Η τιμή της παραμέτρου ενός χαστικού συστήματος στο χρόνο $t+1$ εξαρτάται από την τιμή της παραμέτρου του συστήματος στο χρόνο t . Επομένως, σε αντίθεση με την τυχαία συμπεριφορά, η χαστική συμπεριφορά είναι αιτιοκρατική.

Δεύτερον, ποιοτικές αλλαγές συμπεριφοράς παρακινήμενες από τη μη γραμμική δυναμική μπορούν να εξακριβωθούν μόνο με την εξέταση της χρονοσειράς για ένα πολύ μεγάλο χρονικό διάστημα. Σε σύντομα διαλείμματα, η σειρά μπορεί να φανεί είτε σταθερή ή εξαιρετικά κυμαινόμενη και η πραγματική υποκειμενική της δομή μπορεί να παρεξηγηθεί.

Τρίτον, οι συμπεριφορές δεν παραμένουν σταθερές αλλά φαίνονται δυναμικές και συνεχώς μεταβαλλόμενες από την μία κατάσταση στην άλλη.

Τέταρτον, επειδή οι αλλαγές συμπεριφοράς είναι το αποτέλεσμα εσωτερικής δυναμικής, είναι δύσκολο να μοντελοποιηθούν οι συμπεριφορές μέσω ενός συστήματος γραμμικών εξισώσεων.

Πέμπτον, καθώς η μη γραμμικότητα είναι απαραίτητη για να οριστεί ένα σύστημα ως χαστικό, όλα τα μη γραμμικά συστήματα δεν είναι χαστικά.

Έκτον, ένα χαστικό σύστημα επηρεάζεται από τις αρχικές τιμές των παραμέτρων του. Ακόμη και οι ασήμαντες αλλαγές στις αρχικές τιμές των παραμέτρων προκαλούν δραστικές αλλαγές στην συμπεριφορά του. Το συμπέρασμα είναι ότι πολύ μικρές αλλαγές στην είσοδο μπορούν να επιφέρουν πολύ μεγάλες αλλαγές στην έξοδο. Όμως, αυτή η ακραία ευαισθησία στις αρχικές συνθήκες είναι χαρακτηριστικό μόνο των χαστικών συστημάτων και όχι όλων των μη γραμμικών συστημάτων.

Τέλος, επειδή η αρχική αιτία αλλαγών στην συμπεριφορά οφείλεται στην εσωτερική δυναμική του συστήματος, χαστικές συμπεριφορές υπάρχουν ακόμη και όταν δεν αλλάζει το εξωτερικό περιβάλλον.

Μολονότι οι προαναφερόμενες ιδιότητες περιγράφουν το χάος, η παρουσία τους δεν υποδηλώνει αυτόματα ότι ένα σύστημα είναι σε χάος. Ένα σύστημα που επιδεικνύει αυτές τις ιδιότητες είναι χαστικό, δεδομένου ότι το επιτρέπουν και οι παράμετροι του συστήματος.

3.6 Η λογιστική οικογένεια των χαστικών μοντέλων

Στη συνέχεια θα παρουσιαστούν τέσσερα μοντέλα² που ανήκουν στη λογιστική οικογένεια των χαστικών μοντέλων και αποτελούν παραλλαγές του βασικού λογιστικού μοντέλου το οποίο είδαμε παραπάνω. Τα τέσσερα αυτά μοντέλα είναι ευρέως διαδεδομένα στο χώρο της οικονομίας και είναι τα εξής: Το “stock” adjustment model, το “Roos” logistic, το “Mansfield” logistic model, το “simple” logistic.

3.6.1 The stock (or partial) adjustment model

Η εξίσωση που περιγράφει το συγκεκριμένο μοντέλο ([Gril76], [Ston83]) είναι αναδρομικού τύπου, όπως ακριβώς και στο λογιστικό μοντέλο, και δίνεται από τη σχέση:

$$X_t - X_{t-1} = b_p(K - X_{t-1}) \quad (3.28)$$

ή διαφορετικά

$$X_t = b_p K + (1 - b_p)X_{t-1} \quad (3.29)$$

Το μοντέλο ισορροπεί όταν $X_t = X_{t-1}$ το οποίο συμβαίνει όταν $X = 0$ ή $X = K$

Το συγκεκριμένο μοντέλο είναι πολύ γνωστό στη μακροοικονομία, ωστόσο αυτό ίσως έχει να κάνει και με το γεγονός ότι είναι κατάλληλο για κάποιον που θέλει να επισυνάψει μία επιπρόσθετη παράμετρο σφάλματος σε μία εξίσωση.

3.6.2 The “Roos” logistic or modified stock-adjustment model

Το μοντέλο, [Roos34] αποτελεί μια διαφοροποίηση του προηγούμενου και η εξίσωση που το περιγράφει είναι:

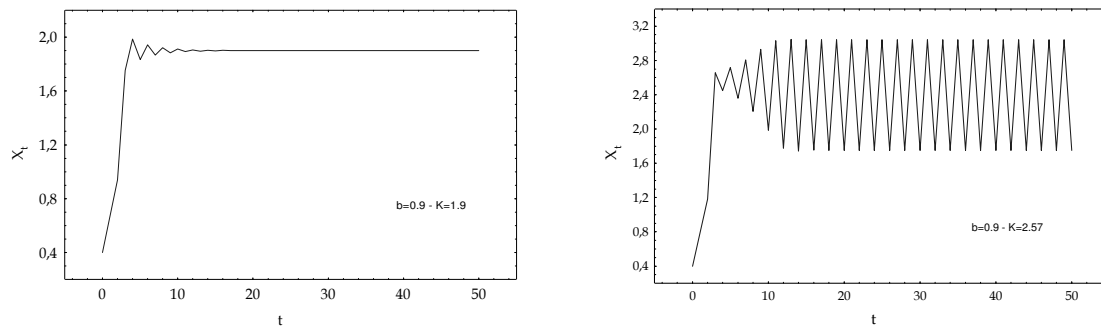
$$X_t - X_{t-1} = b_r X_{t-1} (K - X_{t-1}) \quad (3.30)$$

ή διαφορετικά

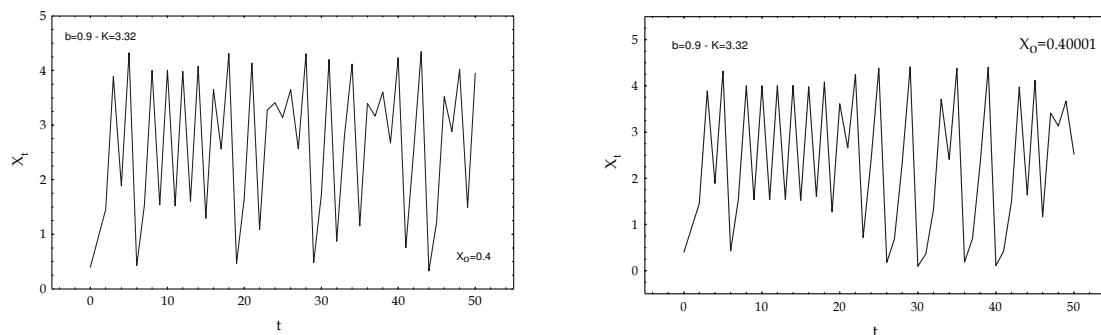
$$X_t = (1 + b_r K)X_{t-1} - b_r X_{t-1}^2 \quad (3.31)$$

² Ο αριθμός των μοντέλων που υπάρχει στην βιβλιογραφία και αφορά μοντέλα τα οποία προκύπτουν με βάση τη λογιστική εξίσωση είναι αρκετά μεγάλος.

Όπως και πριν, το μοντέλο ισορροπεί όταν $X_t = X_{t-1}$ το οποίο συμβαίνει όταν $X = 0$ ή $X = K$. Στο Σχήμα 3.32 μπορούμε να δούμε την απεικόνιση του μοντέλου για διάφορες τιμές των παραμέτρων K και b_r όπως έχει προκύψει από την προσομοίωση των αντίστοιχων εξισώσεων.



Σχήμα 3.32α: Το μοντέλο Roos logistic για διάφορες τιμές των παραμέτρων b_r και K και $x_0 = 0.4$



Σχήμα 3.32β: Το μοντέλο Roos logistic για διάφορες τιμές των παραμέτρων $b_r = 0.9$ και $K = 3.32$ και δύο διαφορετικές αρχικές τιμές $x_0 = 0.4$ (αριστερά) και $x_0 = 0.40001$ (δεξιά).

Η παραπάνω εξίσωση, Εξ. (3.31) αν τροποποιηθεί μας δίνει το ρυθμό αύξησης του X ο οποίος είναι:

$$\frac{X_t - X_{t-1}}{X_{t-1}} = b_r(K - X_{t-1}) \quad (3.32)$$

Μία σύγκριση της παραπάνω έκφρασης με την εξίσωση του simple stock-adjustment μοντέλου Εξ. (3.29) φανερώνει μία βασική διαφορά μεταξύ των δύο μοντέλων. Στο simple stock-adjustment μοντέλο η απόλυτη τιμή της μεταβολής του X είναι αυτή που είναι ανάλογη της ποσότητας $(K - X_{t-1})$ σε κάθε χρονική στιγμή ενώ στο μοντέλο του Roos ο ρυθμός αύξησης του X είναι ανάλογος της ίδιας ποσότητας.

3.6.3 The “Mansfield” logistic model

Η εξίσωση που περιγράφει το συγκεκριμένο μοντέλο, [Mans61] δίνεται από τη σχέση:

$$X_t - X_{t-1} = b_m \frac{X_{t-1}}{K} (K - X_{t-1}) = b_m X_{t-1} - \frac{b_m}{K} X_{t-1}^2 \quad (3.33)$$

ή διαφορετικά

$$X_t = (1 + b_m)X_{t-1} - \frac{b_m}{K}X_{t-1}^2 \quad (3.34)$$

Το μοντέλο ισορροπεί όταν $X_t = X_{t-1}$ το οποίο συμβαίνει όταν $X = 0$ ή $X = K$.

Το μοντέλο του Roos είναι όμοιο με αυτό του Mansfield μόνο στην περίπτωση που $K=1$. Ωστόσο ενδιαφέρον παρουσιάζει η σχέση των δύο μοντέλων όταν $K \neq 1$ και η οποία μπορεί να προκύψει ως ακολούθως. Διαιρώντας την εξίσωση του Roos, Εξ. (3.30) με $K - X_{t-1}$ έχουμε:

$$\frac{X_t - X_{t-1}}{K - X_{t-1}} = b_r X_{t-1} \quad (3.35)$$

Κάνοντας το ίδιο για την εξίσωση του Mansfield έχουμε:

$$\frac{X_t - X_{t-1}}{K - X_{t-1}} = b_m \frac{X_{t-1}}{K} \quad (3.36)$$

Μία σύγκριση των δύο τελευταίων εξισώσεων δείχνει ότι στο μοντέλο του Roos ο ρυθμός με τον οποίο η τιμή του X πλησιάζει την ανώτατη τιμή, εξαρτάται μόνο από το X ενώ στο μοντέλο του Mansfield ο ρυθμός εξαρτάται από το λόγο $\frac{X}{K}$. Ένας άλλος τρόπος να εκφράσουμε την διαφορά των δύο μοντέλων είναι αν υπολογίσουμε τον ρυθμό αύξησης του X . Στην περίπτωση του μοντέλου Roos logistic, ο ρυθμός αύξησης του X μπορεί να αποδειχθεί ότι είναι ανάλογος με την απόλυτη τιμή της διαφοράς του K και του X , το οποίο προκύπτει διαιρώντας και τα δύο μέλη της Εξ. (3.30) με X_{t-1} . Από την άλλη μεριά στο μοντέλο Mansfield logistic ο ρυθμός αύξησης του X είναι ανάλογος του $\frac{K - X_{t-1}}{K}$, το οποίο προκύπτει διαιρώντας την Εξ. (3.28) με το X_{t-1} .

3.6.4 The “Simple” logistic model

Σε αυτή την περίπτωση η μεταβολή του X στη διάρκεια του χρόνου μπορεί να εκφραστεί με την παρακάτω εξίσωση:

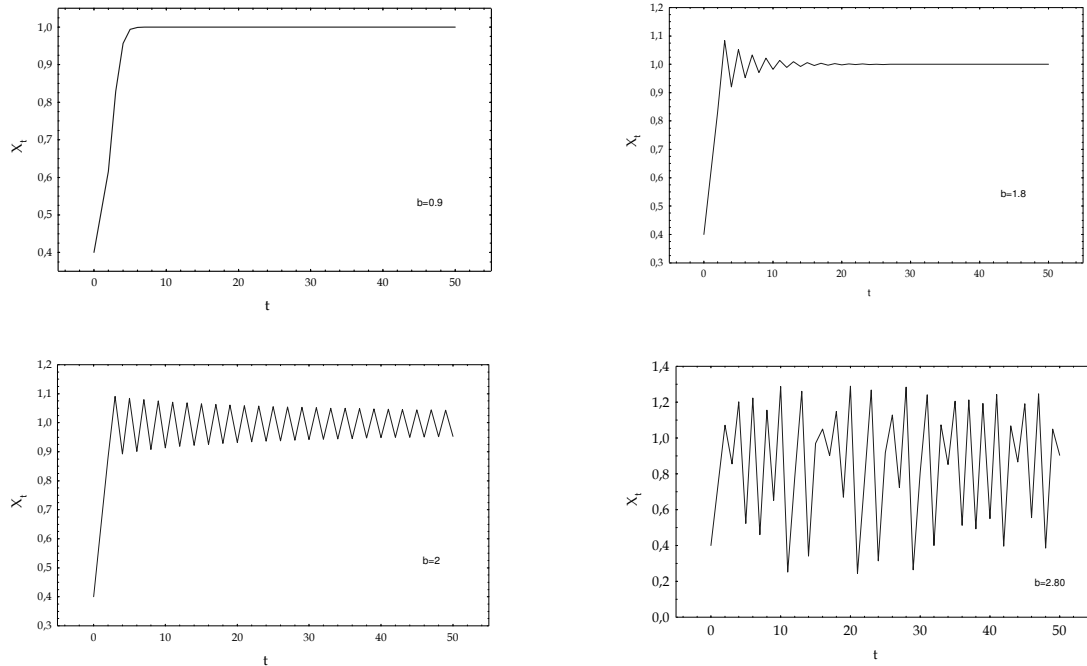
$$X_t - X_{t-1} = bX_{t-1}(1 - X_{t-1}) = bX_{t-1} - bX_{t-1}^2 \quad (3.37)$$

και εκφράζοντας το X_t σε σχέση με το X_{t-1} έχουμε την εξίσωση

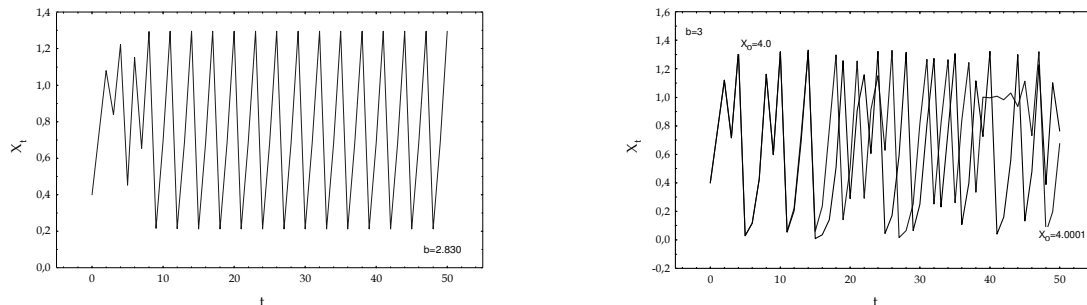
$$X_t = (1 + b)X_{t-1} - bX_{t-1}^2 \quad (3.38)$$

Ξανά, και σε αυτή την περίπτωση ευστάθεια έχουμε όταν $X = 0$ ή $X = 1$.

Στα παρακάτω σχήματα μπορούμε να δούμε την απεικόνιση του μοντέλου για διάφορες τιμές της παραμέτρου b και για αρχική τιμή $X_0 = 0.4$.



Σχήμα 3.33α: Το μοντέλο simple logistic για διάφορες τιμές της παραμέτρου b



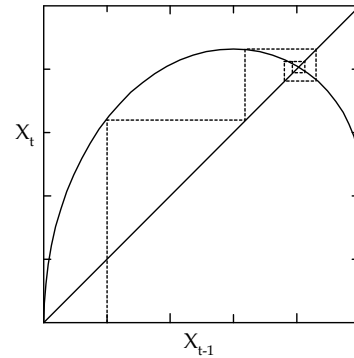
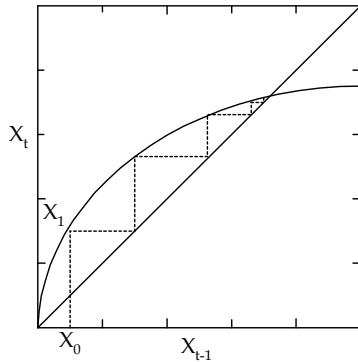
Σχήμα 3.33β: Το μοντέλο simple logistic για διάφορες τιμές της παραμέτρου b

3.6.5 Δυναμικές ιδιότητες των μοντέλων

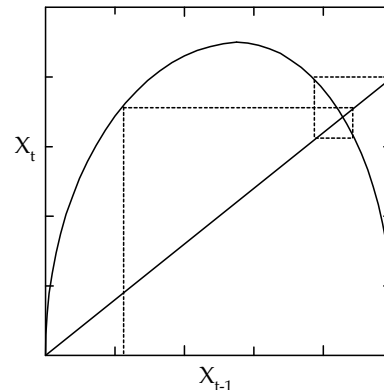
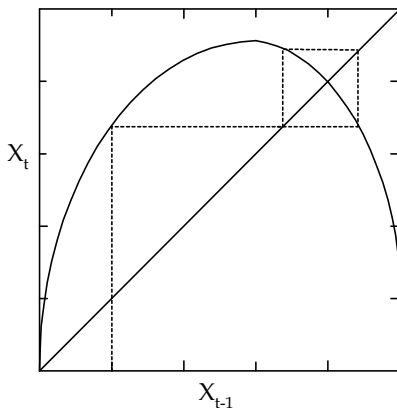
Γενικά, κάθε μια από τις λογιστικές εξισώσεις που είδαμε παραπάνω μπορεί να γραφτεί στη μορφή $X_t = f(X_{t-1})$. Είναι ευκολότερο να εξετάσουμε την δυναμική των παραπάνω μοντέλων γραφικά χρησιμοποιώντας το διάγραμμα των 45 μοιρών με τις τιμές του X_t στον κατακόρυφο άξονα και τις τιμές του X_{t-1} στον οριζόντιο άξονα. Σε ένα τέτοιο διάγραμμα η λύση ισορροπίας θα είναι το σημείο τομής της συνάρτησης $X_t = f(X_{t-1})$ με την γραμμή των 45 μοιρών. Θεωρούμε το παρακάτω σχήμα (Σχήμα 3.34) και παίρνουμε σαν αρχική τιμή του X την X_0 . Η δυναμική μπορεί να εκφραστεί σχεδιάζοντας την ακολουθία τιμών του X_t πάνω στο συγκεκριμένο γράφημα. Έτσι το X ξεκινώντας από την αρχική του τιμή X_0 θα κινηθεί κατακόρυφα μέχρι να συναντήσει την καμπύλη της συνάρτησης $X_t = f(X_{t-1})$ στο σημείο X_1 , στην συνέχεια θα κινηθεί οριζόντια μέχρι την γραμμή των 45 μοιρών και στην συνέχεια και πάλι κατακόρυφα προ την καμπύλη δίδοντας το σημείο X_2 . Αυτή η διαδικασία επαναλαμβάνεται αρκετές φορές και προκύπτει μια τεθλασμένη γραμμή (ένα ζικ-ζακ) όπως φαίνεται στο Σχήμα 3.34α. Σε αυτή την συγκεκριμένη περίπτωση το X συγκλίνει μονοτονικά σε μια λύση ισορροπίας. Μερικές άλλες πιθανές περιπτώσεις του ίδιου μοντέλου παρουσιάζονται στο Σχήμα 3.34β όπου μπορούμε να δούμε την σύγκλιση σε ένα μη μηδενικό σημείο

ισορροπίας μέσω μιας μετριασμένης ταλάντωσης, το μοντέλο να μην συγκλίνει και την ύπαρξη ενός κύκλου δύο περιόδων, και την μη σύγκλιση με μια εκρηκτική ταλάντωση.

Τα παραπάνω αποτελέσματα τα οποία απεικονίζονται και στα αντίστοιχα σχήματα εξαρτώνται από την κλίση της συνάρτησης $X_t = f(X_{t-1})$ όταν τέμνει την γραμμή των 45 μοιρών. Όπου η κλίση είναι μεγαλύτερη ή ίση του μηδενός το μοντέλο συγκλίνει σε μια λύση ισορροπίας όπως στην περίπτωση του Σχήματος 3.34α. Αν η κλίση της καμπύλης είναι μεταξύ μηδενός και -1 όταν τέμνει την γραμμή των 45 μοιρών τότε υπάρχουν μετριασμένες ταλαντώσεις όπως φαίνεται στο Σχήμα 3.34β. Όταν τώρα η κλίση είναι ίση με το -1 το αποτέλεσμα είναι η ύπαρξη ενός κύκλου δύο περιόδων με «κανονικό» πλάτος. Καθώς η κλίση γίνεται μεγαλύτερη, έστω ίση με -2 ή -3 εκρηκτικοί κύκλοι ενδιάμεσα άλλων καταστάσεων είναι το πιθανότερο αποτέλεσμα.



Σχήμα 3.34α: Γραφική ανάλυση της δυναμικής των μοντέλων



γ) Κύκλος δύο περιόδων

δ) Εκρηκτικοί κύκλοι

Σχήμα 3.34β: Γραφική ανάλυση της δυναμικής των μοντέλων

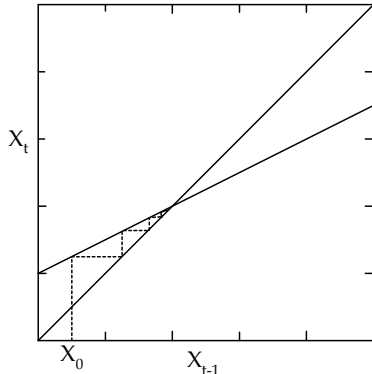
3.6.6 Ανάλυση του stock adjustment model

Παραγωγίζοντας την Εξ. (3.29) του μοντέλου έχουμε

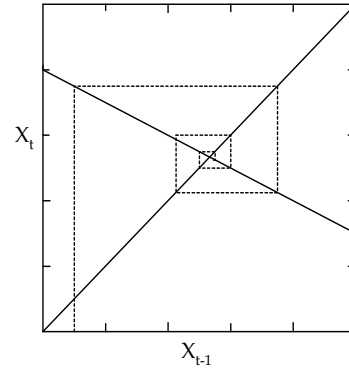
$$\frac{dX_t}{dX_{t-1}} = (1 - b_p) \quad (3.39)$$

Οπότε η κλίση της συνάρτησης στην γεινιάζουσα περιοχή του σημείου ισορροπίας όπου $X = K$ θα είναι $(1 - b_p)$, η δυναμική συμπεριφορά του X_t σε σχέση με το X_{t-1} εξαρτάται αποκλειστικά από το μέγεθος της

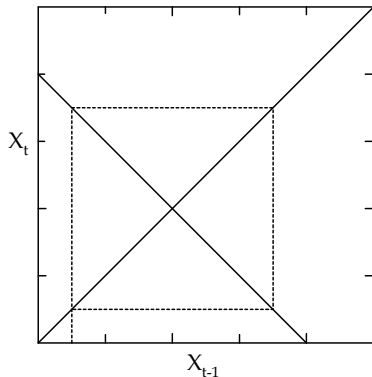
παραμέτρου b_p . Την επίδραση των διαφόρων τιμών της παραμέτρου b_p μπορεί να την δει κανείς στο Σχήμα 3.35 όπου απεικονίζεται το X_t σε σχέση με το X_{t-1} . Στο σχήμα αυτό η γραμμή των 45 μοιρών δείχνει τα πιθανά σημεία ισορροπίας. Μπορούμε να διακρίνουμε τέσσερις διαφορετικές περιπτώσεις. Αν $0 < b_p < 1$ η σύγκλιση προς το K είναι μονοτονική όπως παρουσιάζεται και στο Σχήμα 35α. Στην περίπτωση που $b_p = 1$ τότε το X συγκλίνει μονοτονικά προς το σημείο ισορροπίας K . Αν $1 < b_p < 2$ η σύγκλιση προς το K θα προέλθει εν μέσω ταλαντώσεων όπως φαίνεται στο Σχήμα 3.35β, ενώ στην περίπτωση που $b_p = 2$ θα έχουμε κανονικές ταλαντώσεις γύρω από το K όπως φαίνεται στο Σχήμα 3.35γ. Τέλος, στην περίπτωση που $b_p > 2$ εμφανίζονται εκρηκτικές ταλαντώσεις γύρω από το Σχήμα 3.35δ, το οποίο αργά ή γρήγορα θα συνεχιστεί με αρνητικές τιμές του X .



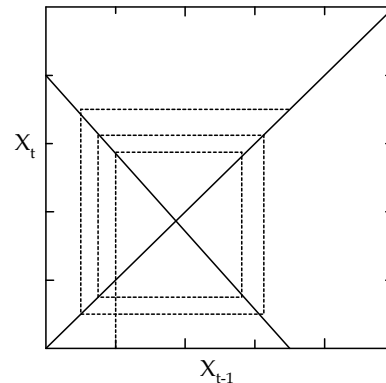
α) Μονοτονική σύγκλιση



β) μετριασμένη ταλάντωση



γ) Κύκλος δύο περιόδων



δ) Εκρηκτικοί κύκλοι

Σχήμα 3.35: Γραφική ανάλυση της δυναμικής των μοντέλων

3.6.7 The simple logistic model

Η δυναμική συμπεριφορά του μοντέλου αυτού είναι περισσότερο πολύπλοκη από την προηγούμενη περίπτωση λόγω του ότι εδώ το X_t είναι μια μη γραμμική συνάρτηση του X_{t-1} . Παραγωγίζοντας την Εξ. (3.38) έχουμε

$$\frac{dX_t}{dX_{t-1}} = (1 + b) - 2bX_{t-1} \quad (3.40)$$

Έτσι η δυναμική συμπεριφορά του X_t σχετικά με το X_{t-1} εξαρτάται από το μέγεθος της παραμέτρου b_p και από την προηγούμενη τιμή του X . Θέτοντας την Εξ. (3.40) ίση με μηδέν βρίσκουμε ότι η συνάρτηση φθάνει στην μέγιστη τιμή της όταν

$$X_{t-1} = \frac{1}{2} \left[\frac{1+b}{b} \right] \quad (3.41)$$

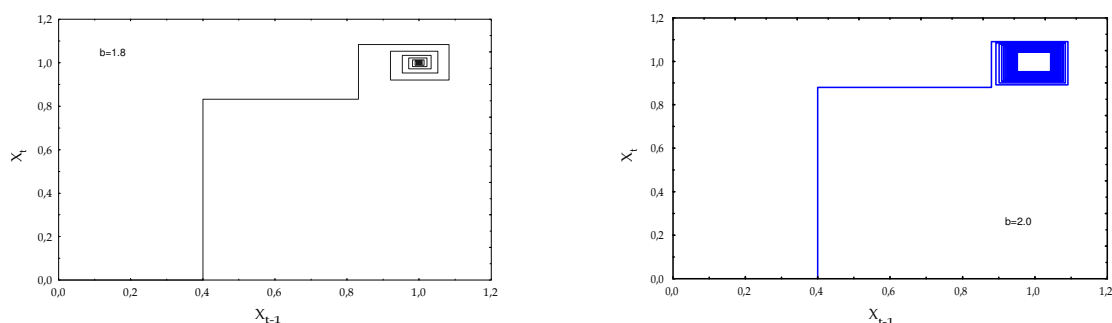
Αντικαθιστώντας την Εξ. (3.41) στην Εξ. (3.40) προκύπτει η μέγιστη τιμή του X_t

$$\max X_t = \frac{1}{4} \left[\frac{(1+b)^2}{b} \right] \quad (3.42)$$

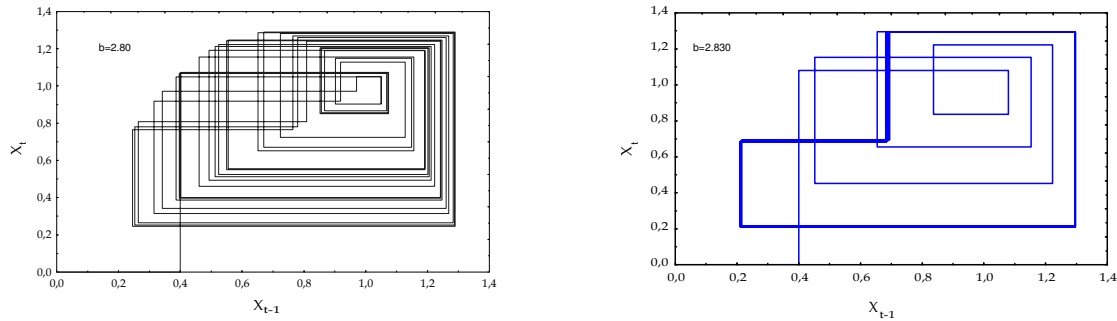
Όπως και στις προηγούμενες περιπτώσεις η δυναμική συμπεριφορά του μοντέλου θα εξετασθεί σε σχέση με την κλίση της γραμμής στη γειτονιάζουσα περιοχή του σημείου ισορροπίας ή της μέγιστης τιμής. Αντικαθιστώντας το $X_{t-1} = 1$ στην Εξ. (3.40) έχουμε την εξίσωση της κλίσης στο σημείο αυτό

$$\frac{dX_t}{dX_{t-1}} = (1-b). \quad (3.43)$$

Μπορούμε να ξεχωρίσουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις. Αν $0 < b \leq 1$ τότε θα έχουμε μια μονοτονική σύγκλιση στο σημείο ισορροπίας 1.0 και η κλίση στο σημείο αυτό είναι θετική. Αν $1 < b < 2$ τότε η κλίση στο σημείο ισορροπίας θα είναι αρνητική, πιο μικρή από αυτή των 45 μοιρών και το X θα συγκλίνει στο σημείο $X = 1$ εμφανίζοντας ταλαντώσεις, όπως φαίνεται στο Σχήμα 3.36. Αν $b = 2$ τότε η κλίση στο σημείο ισορροπίας θα είναι αρνητική και ίση με -1 . Ενδεχόμενα το X θα ισορροπήσει σε ένα κανονικό κύκλο δύο περιόδων γύρω από το $X = 1$, όπως φαίνεται στο Σχήμα 3.36. Αν το $2 < b < 3$ τότε η κλίση στο σημείο ισορροπίας είναι αρνητική και μεγαλύτερη από αυτή των 45 μοιρών. Σε αυτή την περίπτωση το X εμφανίζει μια μπερδεμένη δυναμική συμπεριφορά η οποία εξαρτάται από την ακριβή τιμή της παραμέτρου b . Σε αυτή την περίπτωση η διερεύνηση της συμπεριφοράς της δυναμικής του μοντέλου μπορεί να γίνει ικανοποιητικά μόνο μέσω αριθμητικής προσομοίωσης. Σε αυτή την περίπτωση για τιμές του b μεταξύ 2.000 και 2.449 έχουμε κανονικούς κύκλους δύο περιόδων, για τιμές του b μεταξύ 2.500 και 2.544 εμφανίζονται κανονικοί κύκλοι τεσσάρων περιόδων όπως φαίνεται στο Σχήμα 3.36. Για τιμές της παραμέτρου ανάμεσα στο 2.545 και το 2.570 αρχίζουμε να έχουμε κύκλους 8, 16, 32 κ.ο.κ περιόδων. Καθώς το b παίρνει τιμές μεγαλύτερες του 2.570 μπαίνουμε στην περιοχή χαστικής συμπεριφοράς του μοντέλου.



Σχήμα 3.36: Η δυναμική του μοντέλου simple logistic για διάφορες τιμές του b



Σχήμα 3.36: Η δυναμική του μοντέλου simple logistic για διάφορες τιμές του b

3.6.8 Δυναμική συμπεριφορά του Mansfield logistic

Παίρνοντας την παράγωγο της Εξ. (3.34) έχουμε

$$\frac{dX_t}{dX_{t-1}} = (1 + b_m) - 2 \frac{b_m}{K} X_{t-1} \quad (3.44)$$

Όπως μπορούμε να δούμε από την παραπάνω εξίσωση, η δυναμική συμπεριφορά του μοντέλου εξαρτάται από τις τιμές της παραμέτρου b_m καθώς επίσης και από το μέγεθος του X στην προηγούμενη περίοδο σε σχέση με το K . Θέτοντας την παραπάνω εξίσωση ίση με μηδέν μπορούμε να υπολογίσουμε την τιμή του X_{t-1} για την οποία το X_t γίνεται μέγιστο:

$$X_{t-1} = \frac{1}{2} \left[\frac{(1 + b_m)K}{b_m} \right] \quad (3.45)$$

Αντικαθιστώντας την παραπάνω εξίσωση στην Εξ. (3.44) παίρνουμε την ακόλουθη έκφραση για την μέγιστη τιμή του X_t .

$$\max X_t = \frac{1}{4} \left[\frac{(1 + b_m)^2 K}{b_m} \right] \quad (3.46)$$

Αντικαθιστώντας τώρα την συνθήκη $X = K$ στην Εξ. (3.44) παίρνουμε για την κλίση στο σημείο αυτό ότι

$$\frac{dX_t}{dX_{t-1}} = (1 - b_m) \quad (3.47)$$

Η παραπάνω σχέση της κλίσης είναι η ίδια με την περίπτωση του simple logistic μοντέλου, οπότε και η συμπεριφορά της δυναμικής των δύο μοντέλων θα είναι ανάλογη. Η μόνη διαφορά είναι ότι στην περίπτωση του simple logistic μοντέλου το σημείο ισορροπίας ήταν το 1 ενώ στο συγκεκριμένο μοντέλο το σημείο ισορροπίας είναι το K (που αποτελεί μια πιο γενική περίπτωση).

3.6.9 Η δυναμική του Roos logistic μοντέλου

Παραγωγίζοντας την Εξ. (3.31) έχουμε

$$\frac{dX_t}{dX_{t-1}} = 1 + b_r K - 2b_r X_{t-1} \quad (3.48)$$

Θέτοντας την παραπάνω εξίσωση ίση με μηδέν παίρνουμε την τιμή του X_{t-1} για την οποία έχουμε μέγιστο για την συνάρτηση:

$$X_{t-1} = \frac{1}{2} \left[\frac{1 + b_r K}{b_r} \right] \quad (3.49)$$

Αντικαθιστώντας την παραπάνω εξίσωση στην Εξ. (3.48) παίρνουμε το μέγιστο

$$\max X_t = \frac{1}{4} \left[\frac{(1 + b_r K)^2}{b_r} \right] \quad (3.50)$$

Η κλίση της εξίσωσης σε μια γειτονική περιοχή του σημείου ισορροπίας ($X = K$) δίδεται από την σχέση

$$\frac{dX_t}{dX_{t-1}} = 1 - b_r K \quad (3.51)$$

Σε αυτή την περίπτωση μπορούμε να διακρίνουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις. Αν $0 < b_r K \leq 1$ έχουμε μονοτονική σύγκλιση ως προς το σημείο ισορροπίας. Αν $1 < b_r K < 2$ η κλίση στο σημείο ισορροπίας είναι αρνητική και μικρότερη από αυτή των 45 μοιρών. Σε αυτή την περίπτωση το X συγκλίνει στο σημείο ισορροπίας εν μέσω ταλαντώσεων. Αν $b_r K = 2$ η κλίση στο σημείο ισορροπίας είναι αρνητική και ίση με -1 . Σε αυτή την περίπτωση το X καταλήγει σε ένα κύκλο δύο περιόδων γύρω από το K . Αν $2 < b_r K < 3$ η κλίση στο σημείο ισορροπίας είναι αρνητική και περισσότερο απότομη από αυτή των 45 μοιρών, οπότε το X δίνει μια ευρεία περιοχή δυναμικών συμπεριφορών οι οποίες εξαρτώνται κάθε φορά από την ακριβή τιμή του γινομένου $b_r K$ και τις αρχικές συνθήκες. Για τιμές του $b_r K$ μεταξύ 2.000 και 2.570, εμφανίζονται κανονικοί κύκλοι πλάτους 2, 4, 8, 16, 32, κ.ο.κ. Καθώς το $b_r K$ παίρνει τιμές μεγαλύτερες του 2.570 το μοντέλο εισέρχεται στην περιοχή χαστικής συμπεριφοράς του.

3.7 Ελκυστές

Η έννοια του ελκυστή σημαίνει κάτι που έλκει κάτι άλλο, και σε γενικές γραμμές, είναι ένα σύνολο στο οποίο όλες οι γειτονικές του τροχιές συγκλίνουν. Για ένα συνεχές δυναμικό σύστημα θα μπορούσαμε να δώσουμε τον εξής ορισμό:

Ένα κλειστό σύνολο A , υποσύνολο του χώρου φάσης καλείται **ελκυστής** αν έχει τις εξής ιδιότητες:

1. το A είναι *αναλλοίωτο* για τις τροχιές δηλαδή κάθε τροχιά $x(t)$ που αρχίζει μέσα στο A , μένει μέσα σε αυτό όλο το χρόνο εξέλιξης του συστήματος.
2. το A *έλκει ένα ανοικτό σύνολο αρχικών συνθηκών*, δηλαδή υπάρχει ανοικτό υπερσύνολο $U \supseteq A$: αν $x(0) \in U$, τότε η απόσταση από το $x(t)$ στο A τείνει στο 0 για $t \rightarrow \infty$. Αυτό σημαίνει ότι το A έλκει όλες τις τροχιές που αρχίζουν αρκετά κοντά σε αυτό.

Συχνά απαιτούμε και

3. το A να είναι *ελάχιστο*, δηλαδή να μην υπάρχει γνήσιο υποσύνολο του A που να πληροί τις ιδιότητες 1 και 2.

Ο παραπάνω ορισμός ισχύει με την ανάλογη διατύπωση και για διακριτά δυναμικά συστήματα: το A είναι ένα ελάχιστο κλειστό αναλλοίωτο υποσύνολο ($f(A) = A$), έτσι ώστε η απόσταση του $f^k(x)$ από το A , τείνει στο 0 για $k \rightarrow \infty$, $\forall x(0)$ σε ένα ανοικτό $U \supseteq A$.

Το μεγαλύτερο U καλείται *δεξαμενή έλξης* (*attraction basin*) του συστήματος.

Κατά την μελέτη των δυναμικών συστημάτων εμφανίζονται ελκυστές που έχουν παράξενη, περίεργη μορφή και γι' αυτό τους καλούμε *παράξενους ελκυστές*. Το παράξενο της μορφής του έγκειται στο ότι συχνά παρουσιάζουν αυτοομοιότητα και κλασματική διάσταση καθώς και ευαισθησία στις αρχικές συνθήκες το οποίο είναι ένα χαρακτηριστικό του χάους. Έτσι τους ελκυστές αυτούς του καλούμε *χαοτικούς ελκυστές*.

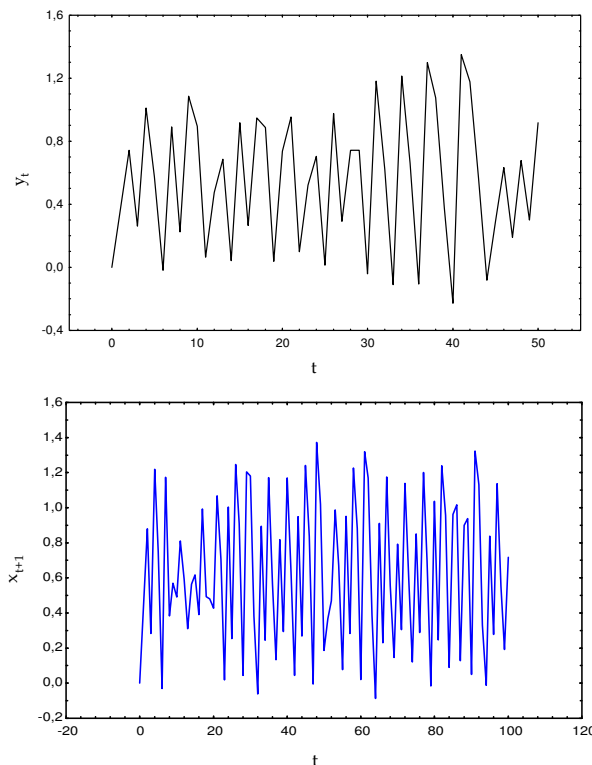
Στην συνέχεια θα παρουσιάσουμε έναν από τους κλασικούς χαοτικούς ελκυστές. Στα επόμενα κεφάλαια θα μελετήσουμε μια σειρά από άλλους γνωστούς και μη ελκυστές.

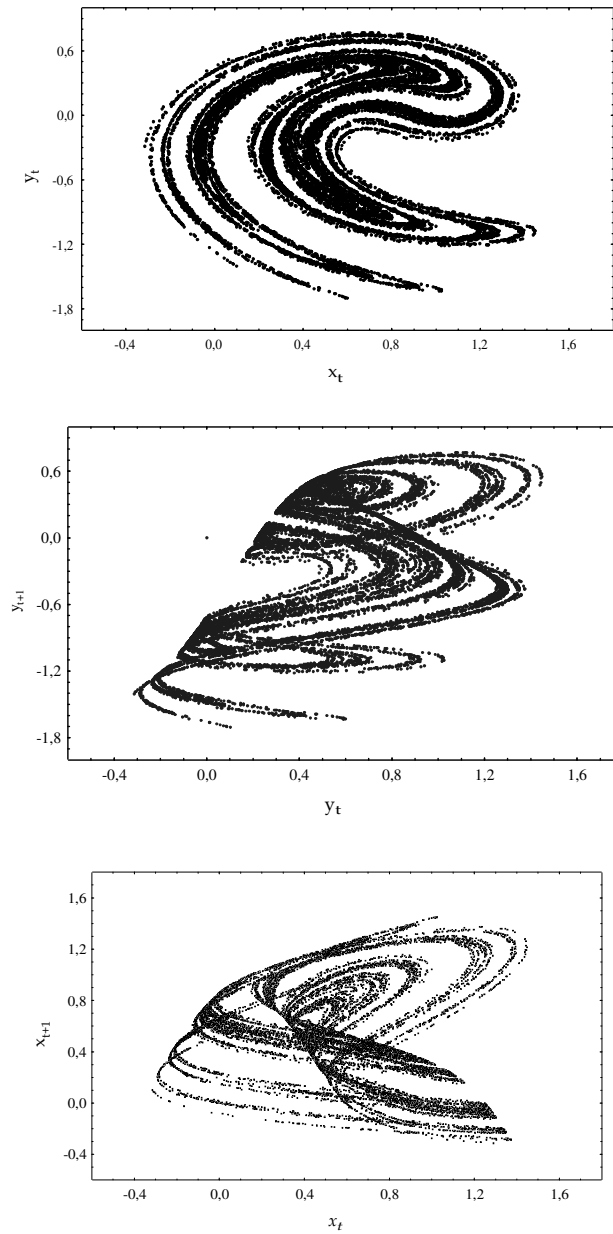
3.7.1 Ο ελκυστής Ikeda

Ο ελκυστής Ikeda είναι ένας πολυμεταβλητός χάρτης ο οποίος περιγράφεται από το ακόλουθο σύνολο μη γραμμικών εξισώσεων, [Ikeda79]:

$$\begin{aligned} t &= c - \frac{d}{1+x^2+y^2} \\ x &= a + b(x \cos(t) - y \sin(t)) \\ y &= b(x \sin(t) + y \cos(t)) \end{aligned} \quad (3.52)$$

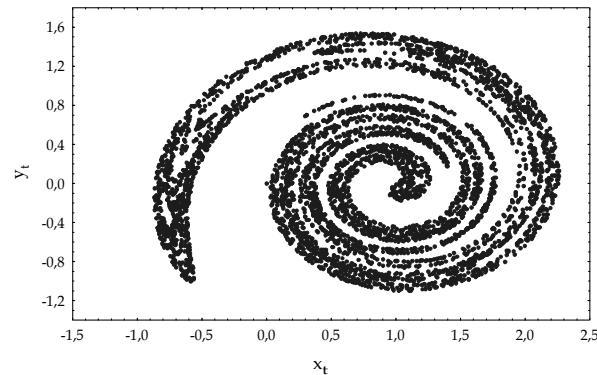
όπου a, b, c και d είναι θετικές παράμετροι. Στα επόμενα σχήματα παρουσιάζονται οι ιδιότητες του ελκυστή Ikeda για $a = 0.97, b = 0.83, c = 0.4$ και $d = 6$.





Σχήμα 3.37: Ο ελκυστής Ikeda για $a = 0.97, b = 0.83, c = 0.4$ και $d = 6$.

Αν η παράμετρος d πάρει μια αρκετά μεγαλύτερη τιμή τότε ο ελκυστής Ikeda παίρνει την μορφή που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Σχήμα 3.38: Ο ελκυστής Ikeda για $a = 0.97, b = 0.83, c = 0.4$ και $d = 18$.

3.7.2 Ο ελκυστής Henon

Ένα μοντέλο δύο διαστάσεων, το απλούστερο που μπορεί να υπάρξει, προτάθηκε από τον Henon, [Heno76]. Το μοντέλο αυτό μπορεί να εκφραστεί με την ακόλουθη εξίσωση διαφορών με υστέρηση:

$$x_{t+1} = bx_{t-1} + 1 - \alpha x_t^2 \quad (3.53)$$

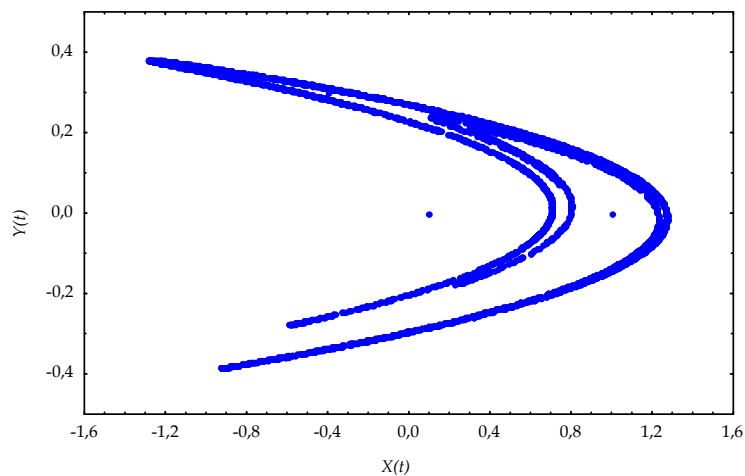
Εισάγοντας μία καινούργια μεταβλητή y , η παραπάνω εξίσωση διαφορών με υστέρηση μετατρέπεται σε ένα σύστημα δύο απλών εξισώσεων διαφορών:

$$\begin{aligned} x_{t+1} &= y_t + 1 - \alpha x_t^2 \\ y_{t+1} &= bx_t \end{aligned} \quad (3.54)$$

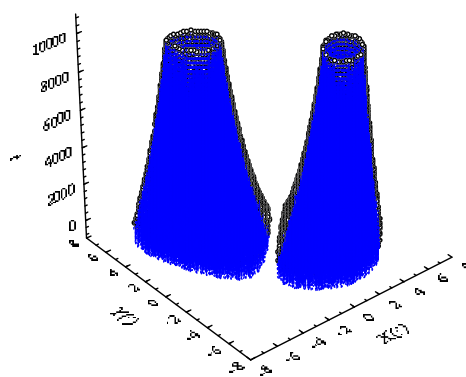
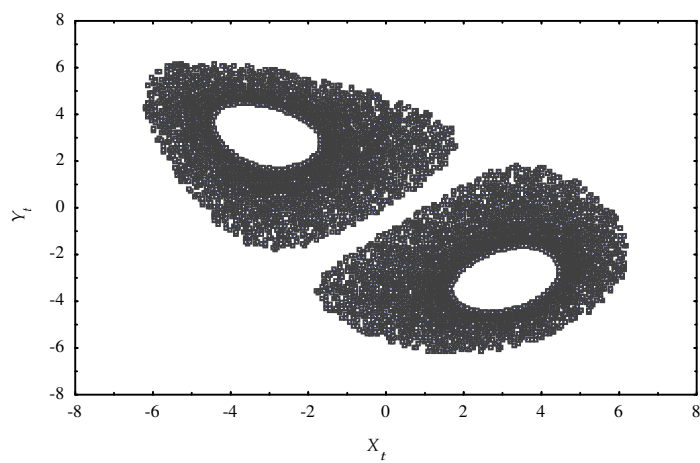
Η ορίζουσα του πίνακα Jacob αυτού του συστήματος είναι:

$$\det J = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial x_{t+1}}{\partial x_t} & \frac{\partial x_{t+1}}{\partial y_t} \\ \frac{\partial y_{t+1}}{\partial x_t} & \frac{\partial y_{t+1}}{\partial y_t} \end{bmatrix} = -b$$

Για $b = 1$ η μορφή που προκύπτει είναι μία κλειστή περιοχή, αλλά το σύστημα εμφανίζεται ασταθές. Το σύστημα εμφανίζεται σταθερό για τιμές $0 < b < 1$. Έχουμε την εμφάνιση μίας ποικιλίας μορφών όταν οι παράμετροι α και b πάρουν διάφορες τιμές, ενώ οι μορφές που σχηματίζονται οδηγούν προς χαστικούς ελκυστές. Ο πιο γνωστός χαστικός ελκυστής είναι το μοντέλο Henon, το οποίο σχηματίζεται όταν $\alpha = 1.4$ και $b = 0.3$, και παρουσιάζεται στο Σχήμα 3.39.



Σχήμα 3.38: Το μοντέλο Henon για $\alpha = 1.4$, $b = 0.3$ $x_0 = 0.1$.



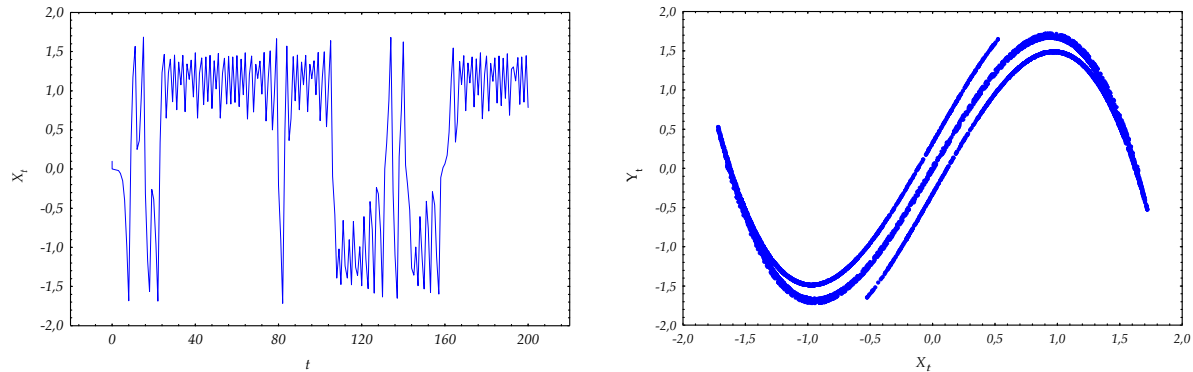
Σχήμα 3.38α: Το μοντέλο Henon για $\alpha = 0.1$, $b = 0.998$ $x_0 = 0.1$.

3.7.3 Το μοντέλο του Holmes

Πρόκειται για ένα μοντέλο το οποίο μπορεί να χαρακτηριστεί ως επέκταση του μοντέλου Henon, [Helu96]. Ο όρος υστέρησης πρώτης τάξης έχει μία σταθερή αρνητική παράμετρο ίση με -2 και οι δύο κανονικοί όροι είναι πρώτου και τρίτου βαθμού. Η πιο γενική εξίσωση διαφορών με υστέρηση έχει τη μορφή:

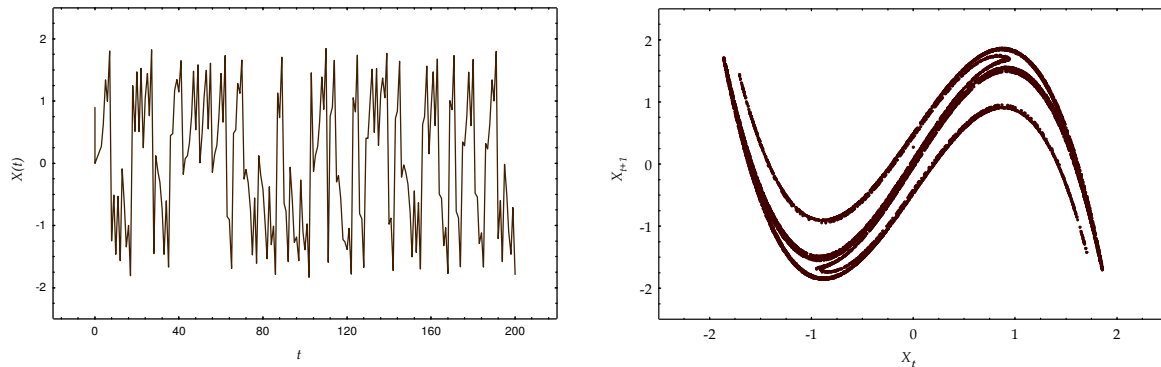
$$x_{t+1} = bx_{t-1} + ax_t - x_t^3 \quad (3.55)$$

Το μοντέλο του Holmes, όταν οι παράμετροι είναι $b = -0.2$ και $a = 2.76$, μας δίνει μία χαρακτηριστική σιγμοειδή μορφή και αρκετά πολύπλοκες ταλαντώσεις, όπως βλέπουμε και στο επόμενο Σχήμα 3.39.



Σχήμα 3.39: Το μοντέλο Holmes για $\alpha = 2.76$, $b = -0.2$ και $x_0 = 0.1$.

Ελέγχοντας το μοντέλο του Holmes, όταν η παράμετρος b είναι θετική, προκύπτει μία άλλη σιγμοειδής μορφή η οποία παρουσιάζεται στο Σχήμα 3.40 ($b = 0.3$ και $\alpha = 2.4$).



Σχήμα 3.40: Το μοντέλο Holmes για $\alpha = 2.4$, $b = 0.3$ και $x_0 = 0.1$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

ΑΝΑΠΤΥΞΗ ΚΑΙ ΜΕΛΕΤΗ ΧΑΟΤΙΚΩΝ ΜΟΝΤΕΛΩΝ

Εισαγωγή

Το κεφάλαιο αυτό αποτελεί βασικό τμήμα της συγκεκριμένης διατριβής καθώς θεωρώντας ως αφετηρία την απεικόνιση μιας απλής καμπύλης, και εφαρμόζοντας κάποιες καινούργιες ιδέες καταλήγουμε σε ένα σύνολο από σημαντικά συμπεράσματα για τις ιδιότητες αλλά και την δυνατότητα εφαρμογής των νέων πλέον χαστικών μοντέλων. Τα βασικά εργαλεία – νέες ιδέες τα οποία θα χρησιμοποιήσουμε στην συνέχεια είναι οι ιδιότητες της περιστροφής και της μεταφοράς καθώς και ο καθορισμός του ρόλου της χρονικής υστέρησης στην θεωρία των χαστικών μοντέλων.

Με την εφαρμογή των μετασχηματισμών (περιστροφή – μεταφορά) προσπαθούμε, έχοντας ως σημείο εκκίνησης την απεικόνιση μιας απλής καμπύλης, να οδηγηθούμε σε πολύπλοκες δομές οι οποίες θα έχουν τα χαρακτηριστικά των χαστικών ελκυστών. Θα είναι δηλαδή ευαίσθητες στις αλλαγές των παραμέτρων του συστήματος που τις περιγράφουν (εξισώσεων περιγραφής) και όλα τα σημεία τους θα έλκονται σε αυτή τη συγκεκριμένη δομή.

4.1 Περιστροφή και μεταφορά συστήματος

Θεωρούμε την απεικόνιση μια καμπύλης της μορφής $f(x, y)$ και ένα μετασχηματισμό της μορφής

$$\begin{aligned}x &= r \cos \theta \\ y &= r \sin \theta\end{aligned}\tag{4.1}$$

$$\text{όπου } r^2 = x^2 + y^2 \text{ και } \theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right).$$

Η στροφή του συστήματος με μια γωνία θ μας δίνει ένα νέο σύνολο συντεταγμένων x_1, y_1 όπως μπορεί να φανεί από τον βασικό μετασχηματισμό

$$\begin{aligned}x_1 &= x \cos \vartheta - y \sin \vartheta \\y_1 &= x \sin \vartheta + y \cos \vartheta\end{aligned}\quad (4.2\alpha)$$

ή αν γράψουμε την παραπάνω εξίσωση υπό μορφή πινάκων

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \vartheta & -\sin \vartheta \\ \sin \vartheta & \cos \vartheta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\quad (4.2\beta)$$

Μπορούμε επίσης να αλλάξουμε και το κέντρο των συντεταγμένων του συστήματος και έτσι να προκύψει μια μορφή του αρχικού συστήματος με ταυτόχρονη περιστροφή και μεταφορά. Θεωρούμε, λοιπόν ότι, εκτός από την περιστροφή, έχουμε οριζόντια και κατακόρυφη μετακίνηση του συστήματος, οπότε οι νέες συντεταγμένες του θα δίδονται από την σχέση

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \vartheta & -\sin \vartheta \\ \sin \vartheta & \cos \vartheta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}\quad (4.3\alpha)$$

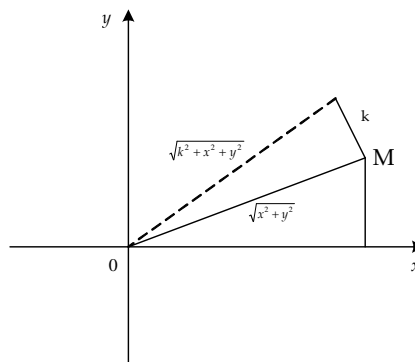
Αν θεωρήσουμε ότι $\beta = 0$, δηλαδή ότι έχουμε μόνο οριζόντια μετακίνηση της αρχής των συντεταγμένων, η σχέση που προκύπτει είναι πιο απλή και περισσότερο χρήσιμη σε πρακτικές εφαρμογές.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \vartheta & -\sin \vartheta \\ \sin \vartheta & \cos \vartheta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \end{pmatrix}\quad (4.3\beta)$$

Στη συνέχεια θα προσπαθήσουμε να διερευνήσουμε τη μορφή του χάρτη $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ όταν η γωνία περιστροφής είναι μια συνάρτηση των x, y και κυρίως όταν το ϑ είναι της μορφής $\vartheta = \vartheta(x^2 + y^2)$, $\vartheta = \vartheta(\sqrt{x^2 + y^2})$ και άλλων συναρτήσεων του των x, y .

Μια άλλη τέτοια συνάρτηση των x, y μπορεί να είναι της μορφής $(k^2 + x^2 + y^2)$ ή $(\sqrt{k^2 + x^2 + y^2})$. Όταν μελετάμε την χαστική πλευρά μιας απεικόνισης οι μορφές αυτές με $k = 1$ είναι η πιο απλή περίπτωση. Στο Σχήμα 4.1 απεικονίζεται η μορφή του μετασχηματισμού όπου η γωνία περιστροφής είναι $\vartheta = \vartheta(\sqrt{x^2 + y^2})$ ή $\vartheta = \vartheta(\sqrt{k^2 + x^2 + y^2})$. Δηλαδή η γωνία που θεωρούμε είναι συνάρτηση της απόστασης ενός σημείου από το κέντρο περιστροφής.

Επιστρέφοντας πίσω στην Εξ. (4.2β) που μας περιγράφει την περιστροφή του συστήματος είναι εύκολο να δείξουμε ότι $x_1^2 + y_1^2 = x^2 + y^2$ και κατά συνέπεια η απεικόνιση θα έχει τη μορφή ενός κύκλου με κέντρο την αρχή των αξόνων ($x=0, y=0$) και ακτίνας $\sqrt{x^2 + y^2}$, η οποία είναι δυνατό να υπολογιστεί από ένα σύνολο αρχικών συνθηκών.



Σχήμα 4.1: Ο μετασχηματισμός των συντεταγμένων υπό μια γωνία ϑ , όπου απεικονίζεται η απόσταση από το κέντρο περιστροφής.

Δραστικές αλλαγές στη μορφή της απεικόνισης εμφανίζονται όταν εφαρμόσουμε την σχέση που περιγράφει η Εξ. (4.3β). Η απεικόνιση που προκύπτει έχει ένα άξονα συμμετρίας κάθετο με τον οριζόντιο άξονα στο σημείο $\left(x = \frac{\alpha}{2}, y = 0\right)$, όταν χρησιμοποιήσουμε την ακόλουθη έκφραση για το \mathcal{G} :

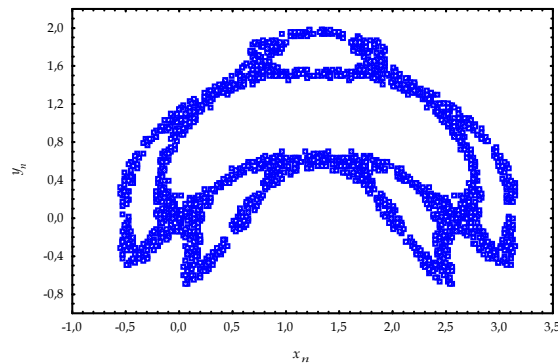
$$\mathcal{G} = d * \sqrt{x^2 + y^2}. \quad (4.4)$$

Η απεικόνιση είναι περιορισμένη σε μια συγκεκριμένη περιοχή, αφού μπορούμε εύκολα να αποδείξουμε ότι

$$\det J = \det \frac{\partial(x_{n+1}, y_{n+1})}{\partial(x_n, y_n)} = 1 \quad (4.5)$$

Μια πολύ ενδιαφέρουσα απεικόνιση παρουσιάζεται στα Σχήματα 4.2α-4.2β. Οι τιμές των παραμέτρων είναι $\alpha = 2.6$ και $d = 1$. Το σύνολο των αρχικών συνθηκών υπολογίζεται από μια τυχαία διαδικασία για τα (x, y) .

Η περίπτωση να είχαμε σταθερή γωνία περιστροφής δεν παρουσιάζει ενδιαφέρον για τις περιπτώσεις που εξετάζουμε καθώς οδηγεί σε μη χαστικά συστήματα. Σε αντίθεση, η περίπτωση που η γωνία περιστροφής θ έχει την μορφή κάποιας συνάρτησης όπως αυτή της Εξ. (4.4) ή όπως αυτές που θα παρουσιαστούν στην συνέχεια, τα συστήματα όπως αυτό της Εξ. (4.2β) παρουσιάζουν χαστική συμπεριφορά.



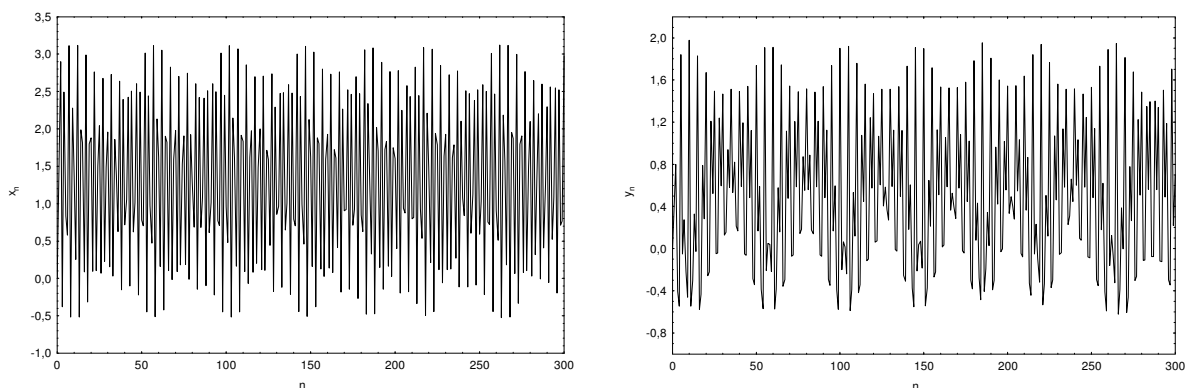
Σχήμα 4.2α: Η χαστική απεικόνιση του μοντέλου περιστροφής με $\alpha = 2.6$ και $d = 1$.

Η εξίσωση του μοντέλου που απεικονίζεται στα Σχήματα 4.2α-4.2β είναι της μορφής

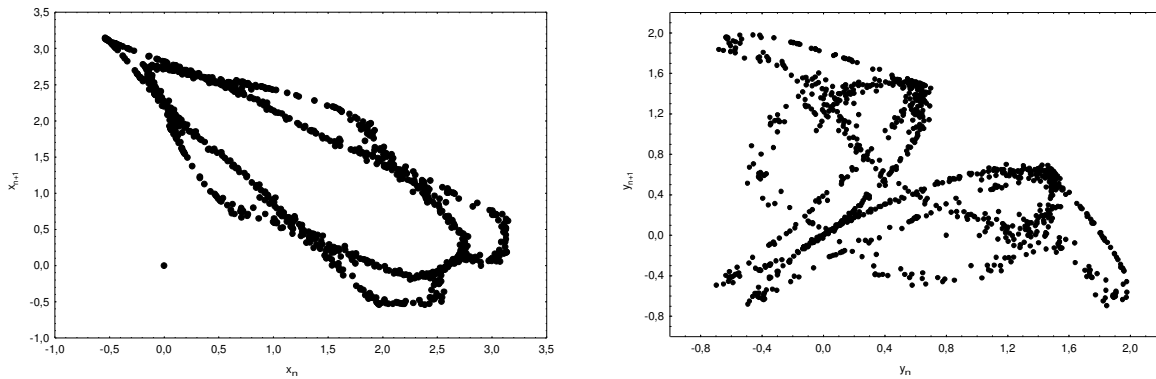
$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \alpha + x_n \cos \mathcal{G} - y_n \sin \mathcal{G} \\ y_{n+1} &= x_n \sin \mathcal{G} + y_n \cos \mathcal{G} \end{aligned} \quad (4.6)$$

Από την Εξ. (4.6) μπορεί εύκολα να προκύψει ότι

$$(x_{n+1} - \alpha)^2 + y_{n+1}^2 = x_n^2 + y_n^2 \quad (4.7)$$



Σχήμα 4.2β: Η χαστική απεικόνιση του μοντέλου περιστροφής με $\alpha = 2.6$ και $d = 1$.



Σχήμα 4.2β: Η χαστική απεικόνιση του μοντέλου περιστροφής με $\alpha = 2.6$ και $d = 1$.

Από την Εξ. (4.7) αναπτύσσοντας το άθροισμα και κάνοντας τις πράξεις έχουμε ότι

$$x_{n+1}^2 - 2ax_{n+1} + a^2 + y_{n+1}^2 = x_n^2 + y_n^2 \quad \text{ή}$$

Θεωρώντας n επαναλήψεις και παίρνοντας το άθροισμα έχουμε

$$\sum_1^n (x_{n+1}^2 + y_{n+1}^2) + na^2 - 2a \sum_1^n x_{n+1} = \sum_1^n (x_n^2 + y_n^2) \quad \text{ή}$$

$$\sum_1^n (x_{n+1}^2 + y_{n+1}^2) + na^2 - 2a\bar{x}n = \sum_1^n (x_n^2 + y_n^2) \quad \text{ή}$$

$$\frac{\sum_1^n (x_{n+1}^2 + y_{n+1}^2)}{n} + a^2 - 2a\bar{x} = \frac{\sum_1^n (x_n^2 + y_n^2)}{n}$$

υπολογίζοντας τη μέση τιμή έχουμε

$$\text{Όταν } n \rightarrow \infty \text{ έχουμε ότι } \bar{x} = \frac{\alpha}{2} \text{ όπου } \bar{x} = \frac{\sum_1^n x_n}{n} \quad (4.8)$$

Η Εξ. (4.8) σημαίνει ότι υπάρχει πάντα ένας άξονας συμμετρίας του χαστικού ελκυστή, ο οποίος έχει σχέση με τη μεταβλητή a και είναι ανεξάρτητος από την γωνία περιστροφής θ .

Μια άλλη πολύ ενδιαφέρουσα μορφή μπορεί να προκύψει αν θεωρήσουμε το $\mathcal{G}(x, y)$ ως μια συνάρτηση του $\sqrt{1+x^2+y^2}$ και συγκεκριμένα αν

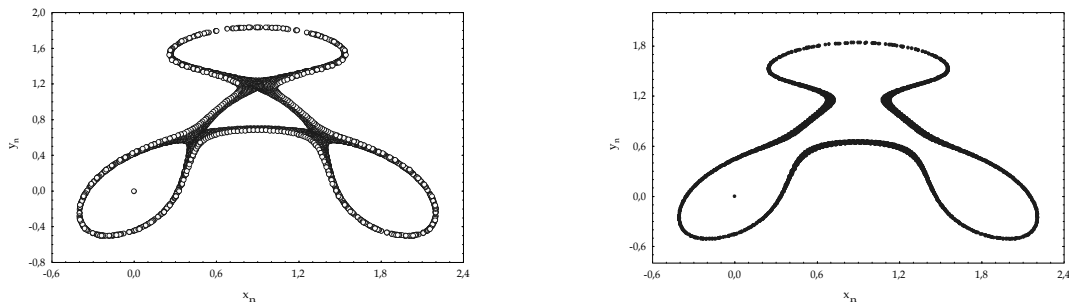
$$\mathcal{G} = d * \sqrt{1+x^2+y^2} \quad (4.9)$$

Οι χαστικοί ελκυστές που προκύπτουν σε αυτή την περίπτωση για $\alpha = 1.8, \alpha = 1.78$ και $d = 1$ και για διαφορετικές αρχικές τιμές παρουσιάζονται στο Σχήμα 4.3α και 4.3β.

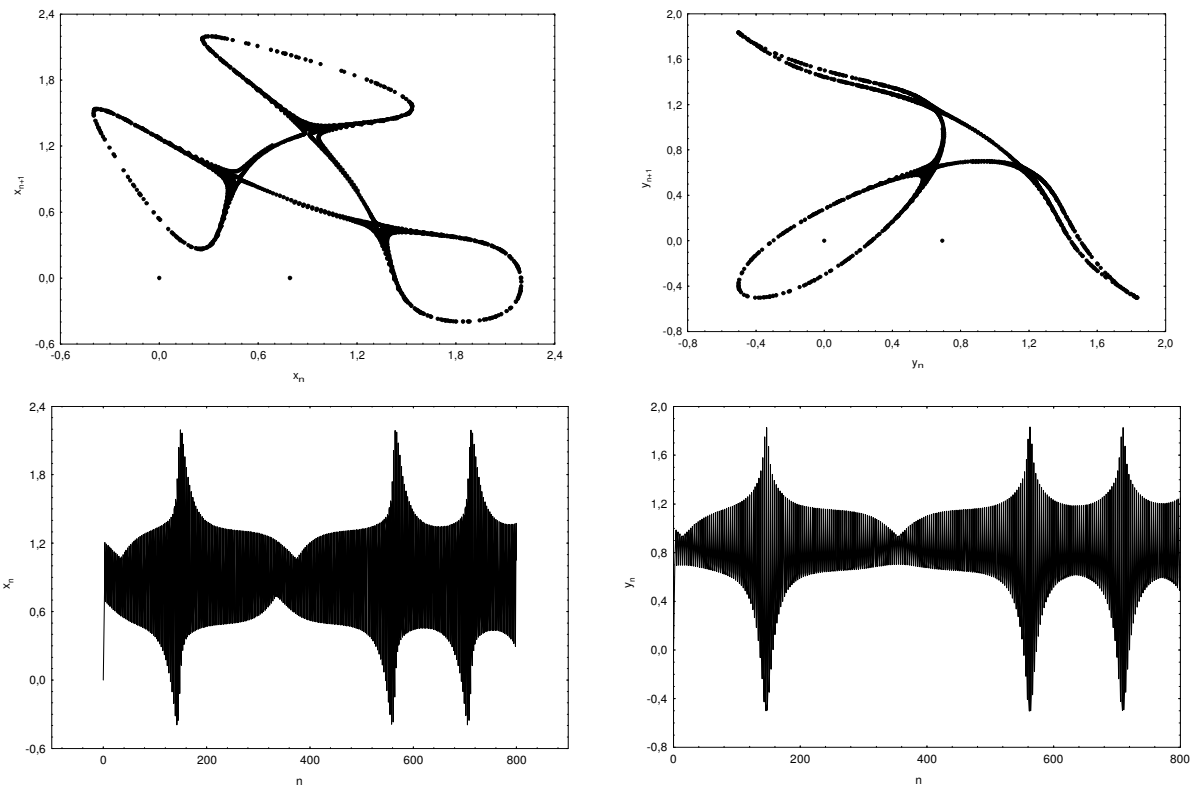
Η εξίσωση του χαστικού ελκυστή που απεικονίζεται στη Σχήμα 4.3α και 4.3β δίδεται από την Εξ. (4.6) και έχουμε εφαρμόσει και τον μετασχηματισμό της Εξ. (4.9). Όπως και στην προηγούμενη περίπτωση, έτσι και εδώ ο άξονας συμμετρίας είναι κάθετος με τον οριζόντιο άξονα σε μια απόσταση ίση με $\frac{\alpha}{2}$ από την αρχή των αξόνων.

Για την επιλογή των τιμών των παραμέτρων δεν υπάρχει κάποια καθιερωμένη μαθηματική μέθοδος επιλογής τους έτσι ώστε να προκύψει μια συγκεκριμένη δομή ενός χαστικού ελκυστή. Οι τιμές που χρησιμοποιούνται στην παρούσα διατριβή υπολογίζονται πειραματικά με την χρήση του ηλεκτρονικού

υπολογιστή. Θεωρούμε δηλαδή μια σειρά από τιμές των παραμέτρων, εκτελούμε τα πειράματα και παρατηρούμε την δομή του χαστικού ελκυστή που προκύπτει. Με τον τρόπο αυτό επιλέγουμε τις τιμές των παραμέτρων που οδηγούν στις δομές των συστημάτων των πειραματικών εξισώσεων και που με τη σειρά τους οδηγούν σε χαστικούς ελκυστές.



Σχήμα 4.3α: Οι χαστικοί ελκυστές για $\mathcal{G} = d * \sqrt{1 + x^2 + y^2}$, $\alpha = 1.8$ (αριστερά) και $\alpha = 1.78$ (δεξιά).

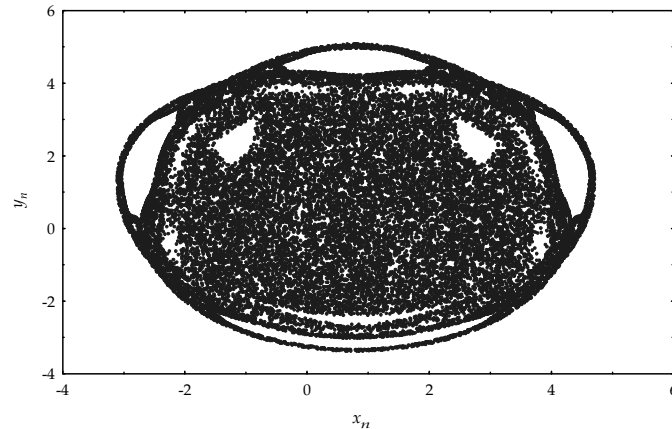


Σχήμα 4.3β: Απεικόνιση του μοντέλου της Εξ. 4.6 για $\mathcal{G} = d * \sqrt{1 + x^2 + y^2}$, $d = 1, a = 1.8$

Η περίπτωση του να εφαρμόσουμε μια αντίστροφη σχέση για το \mathcal{G} δείχνει πολύ ενδιαφέρουσα καθώς σχετίζεται με την συνάρτηση η οποία περιγράφει την έλξη μεταξύ δύο σωμάτων. Η πιο απλή μορφή σε αυτή την περίπτωση μπορεί να είναι η

$$\mathcal{G} = \frac{d}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad (4.10)$$

Ο χαστικός ελκυστής που προκύπτει σε αυτή την περίπτωση για $\alpha = 1.6$ και $d = 6.28$ παρουσιάζεται στο Σχήμα 4.4α.



Σχήμα 4.4α: Ο χαστικός ελκυστής για την περίπτωση της Εξ. (4.10)

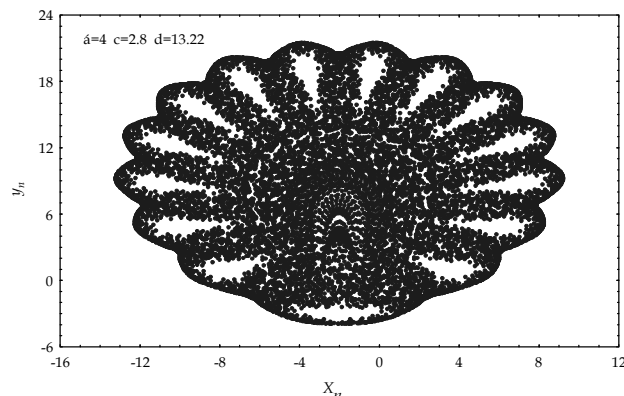
Θέλοντας να διερευνήσουμε ακόμη περισσότερο τις διάφορες μορφές που προκύπτουν από την μετατόπιση αλλά και την περιστροφή ενός συστήματος κατά μια γωνία ϑ θεωρούμε την παρακάτω εξίσωση διαφορών της Εξ. (4.3β)

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \cos \vartheta & -\sin \vartheta \\ \sin \vartheta & \cos \vartheta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.11)$$

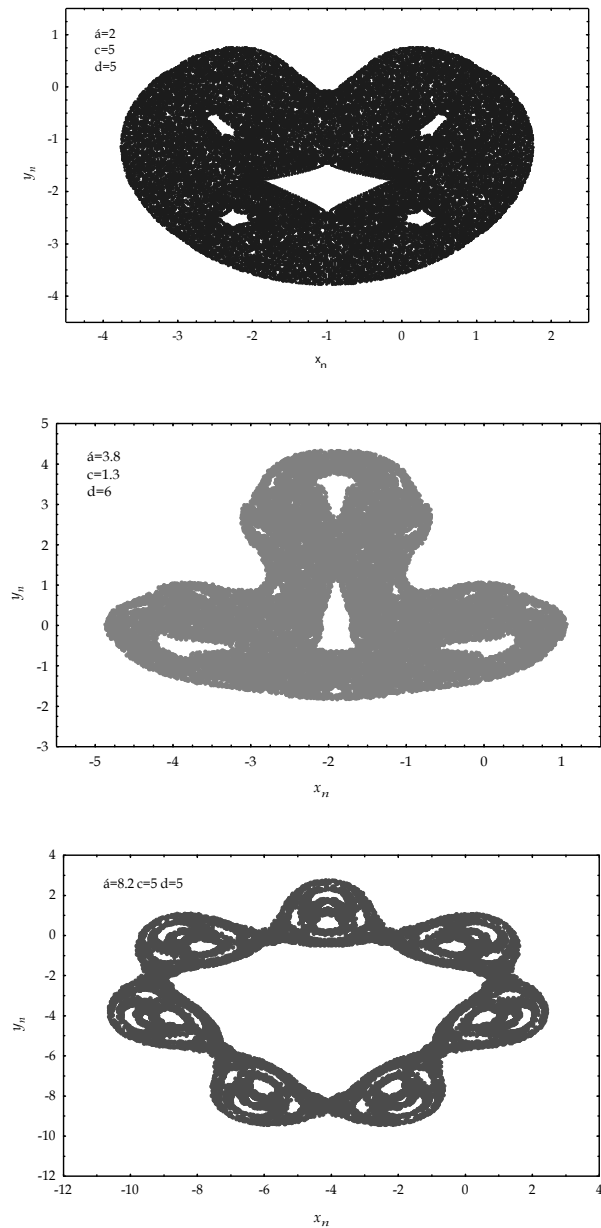
Ουσιαστικά δηλαδή έχουμε πάρει το σύστημα της Εξ. (4.3β) και το έχουμε περιστρέψει. Η γωνία περιστροφής σε αυτή την περίπτωση είναι η γωνία περιστροφής του χαστικού ελκυστή Ikeda, [Ikeda79] και περιγράφεται από την παρακάτω σχέση

$$\vartheta = c - \frac{d}{1 + x^2 + y^2} \quad (4.12)$$

Οι χαστικοί ελκυστές που μπορούν να προκύψουν και σε αυτή την περίπτωση για διάφορες τιμές των παραμέτρων α και d μεταβάλλοντας και τις αρχικές συνθήκες είναι πραγματικά εκπληκτικοί. Ένα μικρό δείγμα παρουσιάζεται στα επόμενα σχήματα. Στην πρώτη περίπτωση για τιμές των παραμέτρων $\alpha = 4, c = 2.8, d = 13.22$ απεικονίζεται και η εξέλιξη του x_n, y_n σε σχέση με το n καθώς και τα x_n, y_n σε σχέση με τα x_{n+1}, y_{n+1} .



Σχήμα 4.4β: Οι χαστικοί ελκυστές για τις Εξ. (4.11) και (4.12)



Σχήμα 4.4β: Οι χαστικοί ελκυστές για τις Εξ. (4.11) και (4.12)

Συνεχίζοντας, εξετάζουμε το μοντέλο που περιγράφεται από ένα διαφορετικό σύστημα εξισώσεων της Εξ. (4.11), το οποίο είναι:

$$x_{n+1} = \alpha + x_n \cos \vartheta - y_n \sin \vartheta$$

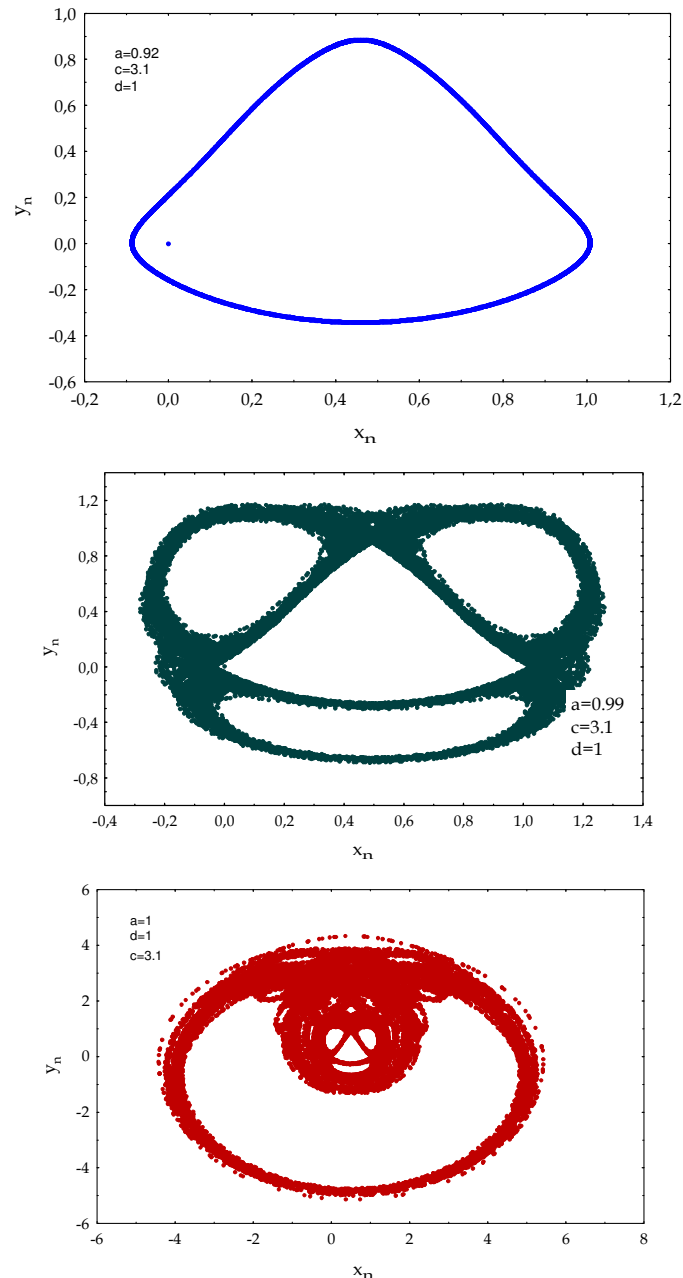
$$y_{n+1} = x_n \sin \vartheta + y_n \cos \vartheta$$

Η γωνία περιστροφής σε αυτή την περίπτωση δίνεται από την παρακάτω σχέση

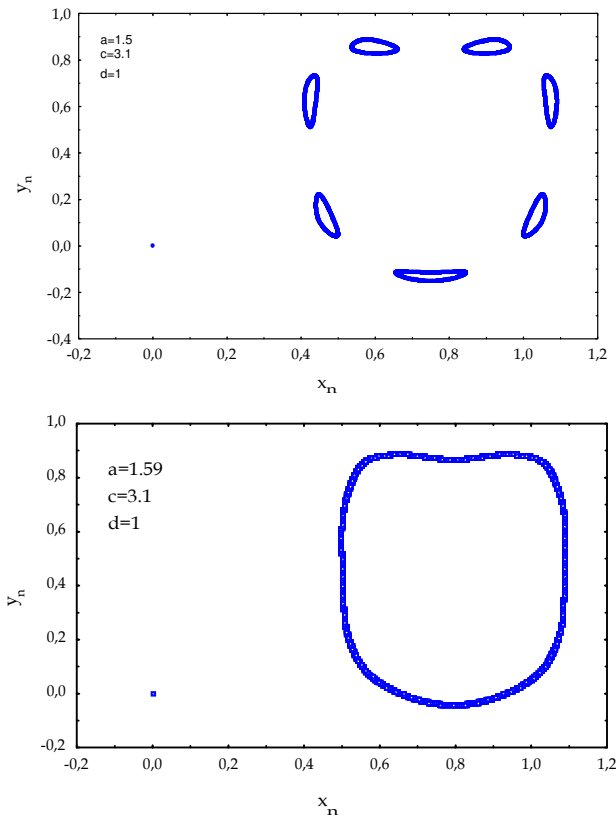
$$\vartheta = c - d * \sqrt{x_n^2 + y_n^2}$$

Οι χαστικοί ελκυστές που μπορούν να προκύψουν και σε αυτή την περίπτωση για διάφορες τιμές των παραμέτρων α και d μεταβάλλοντας και τις αρχικές συνθήκες εμφανίζουν μεγάλη ποικιλία και ιδιομορφία στα σχέδιά τους. Μερικές αντιπροσωπευτικές απεικονίσεις παρουσιάζονται στο παρακάτω σχήμα όπου

θεωρούμε σταθερές τις τιμές των παραμέτρων c και d καθώς και τις αρχικές συνθήκες $(\{x_0, y_0\} = \{0,0\})$ και μεταβάλλουμε την τιμή της παραμέτρου a . Όπως παρατηρούμε από το Σχήμα 4.5 ξεκινώντας από μια τιμή $a=0.92$ όλες οι τιμές έλκονται σε μια γραμμή που απεικονίζει κάτι σαν τρίγωνο, στην συνέχεια ο ελκυστής παίρνει εντελώς παράξενες μορφές και αυξάνοντας ακόμη περισσότερο την τιμή της παραμέτρου a έχουμε την διάσπαση του συνεχούς σχήματος σε επτά επιμέρους σχήματα και την επαναδημιουργία του στην συνέχεια.



Σχήμα 4.5: Οι χαστικοί ελκυστές για τις Εξ. (4.11) και (4.12)



Σχήμα 4.5: Οι χαστικοί ελκυστές για τις Εξ. (4.11) και (4.12)

Όπως μπορούμε να παρατηρήσουμε από το παραπάνω σχήμα, αλλάζοντας μία μόνο παράμετρο του μοντέλου σε μια μικρή περιοχή τιμών μπορούμε να πάρουμε πέντε εντελώς διαφορετικές απεικονίσεις του.

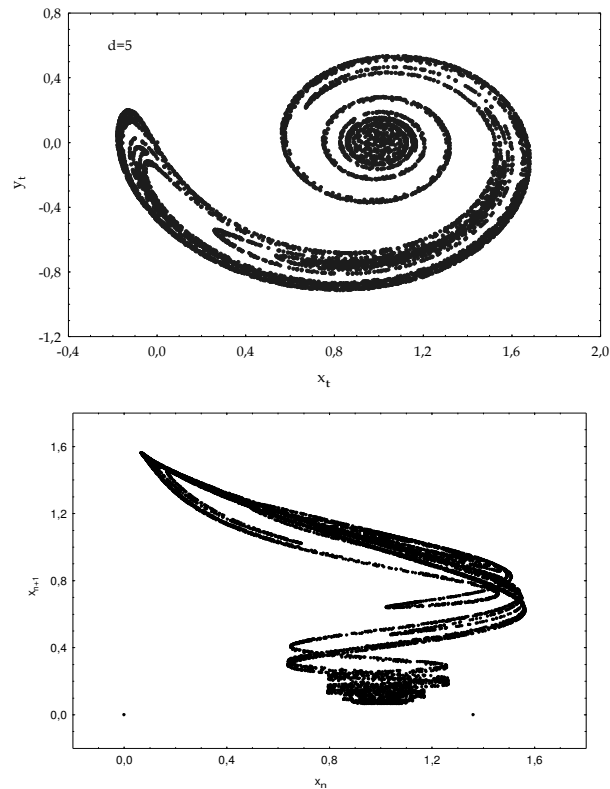
4.2 Ανάκλαση συστήματος

Ιδιαίτερη σημασία και ενδιαφέρον παρουσιάζει και η περίπτωση ενός επίσης πολύ απλού συστήματος που προκύπτει από πολύ μικρές επεμβάσεις στο σύστημα της Εξ. (4.3β). Ουσιαστικά στο σύστημα της Εξ. (4.3β) το έχουμε αλλάξει τα πρόσημα στην δεύτερη στήλη του πίνακα συντελεστών του συστήματος (ανάκλαση του συστήματος) και έχουμε πολλαπλασιάσει τον πίνακα των συντελεστών με μια σταθερά. Θεωρούμε λοιπόν το παρακάτω σύστημα

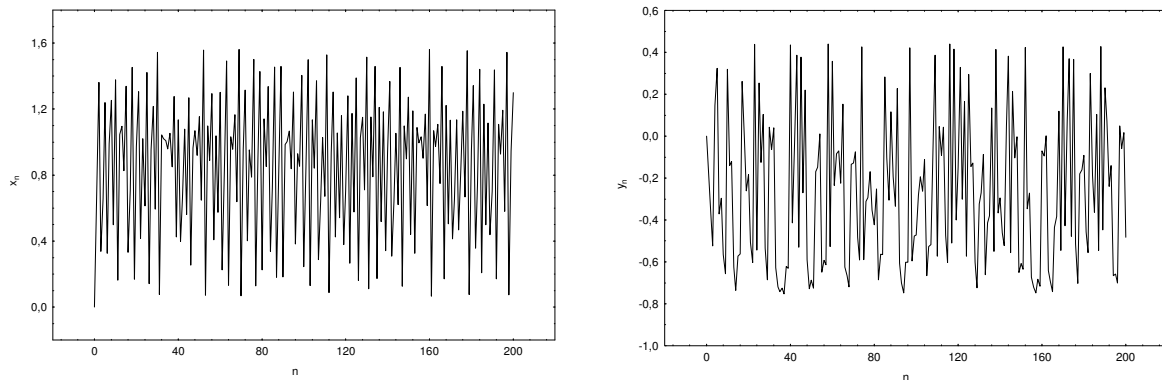
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = b * \begin{pmatrix} \cos \vartheta & \sin \vartheta \\ \sin \vartheta & -\cos \vartheta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.13)$$

Για να προκύψει το παραπάνω σύστημα έχουμε εφαρμόσει στο αρχικό μας σύστημα της Εξ. (4.2) την ιδιότητα της μεταφοράς σε ένα άξονα και τις ιδιότητες της ανάκλασης και του πολλαπλασιασμού.

Θεωρούμε επίσης μια γωνία περιστροφής του συστήματος της μορφής που περιγράφεται από την Εξ. (4.10). Ο χαστικός ελκυστής που προκύπτει απεικονίζεται στο Σχήμα 4.6α.



Σχήμα 4.6α: Ο χαστικός ελκυστής για την Εξ. (4.13)



Σχήμα 4.6α: Ο χαστικός ελκυστής για την Εξ. (4.13) για $a = 1$ και $b = 0.6$, $(x_0, y_0) = (0.8, 0.3)$

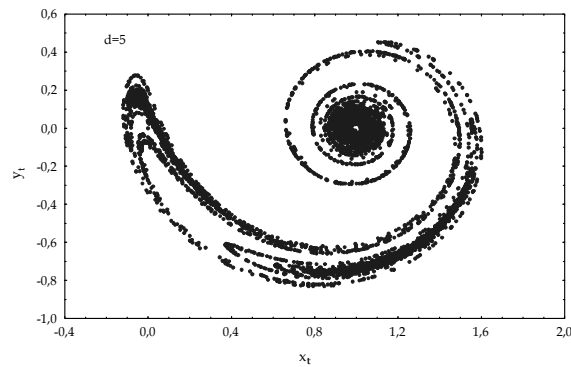
Η μορφή του χαστικού ελκυστή που προκύπτει παρουσιάζει μεγάλη αντιστοιχία με το χαστικό ελκυστή του συστήματος που προκύπτει αν πολλαπλασιάσουμε πριν τη μεταφορά και την περιστροφή το αρχικό μας σύστημα που περιγράφεται από την Εξ. (4.2β). Ένα τέτοιο σύστημα περιγράφεται από το εξής σύστημα εξισώσεων

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = b * \begin{pmatrix} \cos \vartheta & -\sin \vartheta \\ \sin \vartheta & \cos \vartheta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.14)$$

Η γωνία περιστροφής παραμένει και εδώ της μορφής $\vartheta = \frac{d}{\sqrt{x^2 + y^2}}$. Ο εν λόγω χαστικός ελκυστής

παρουσιάζεται στο Σχήμα 4.6β. Ουσιαστικά στο σύστημα της Εξ. 4.14 έχουμε εφαρμόσει, ξεκινώντας από το σύστημα της Εξ. 4.2 τις ιδιότητες της μεταφοράς και του πολλαπλασιασμού, δεν έχουμε εφαρμόσει δηλαδή της ιδιότητα της ανάκλασης.

Με μεγάλη ευκολία μπορεί κανείς να διακρίνει την ομοιότητα των δύο χαστικών ελκυστών που αντιστοιχούν στις Εξ. (4.13) και (4.14).



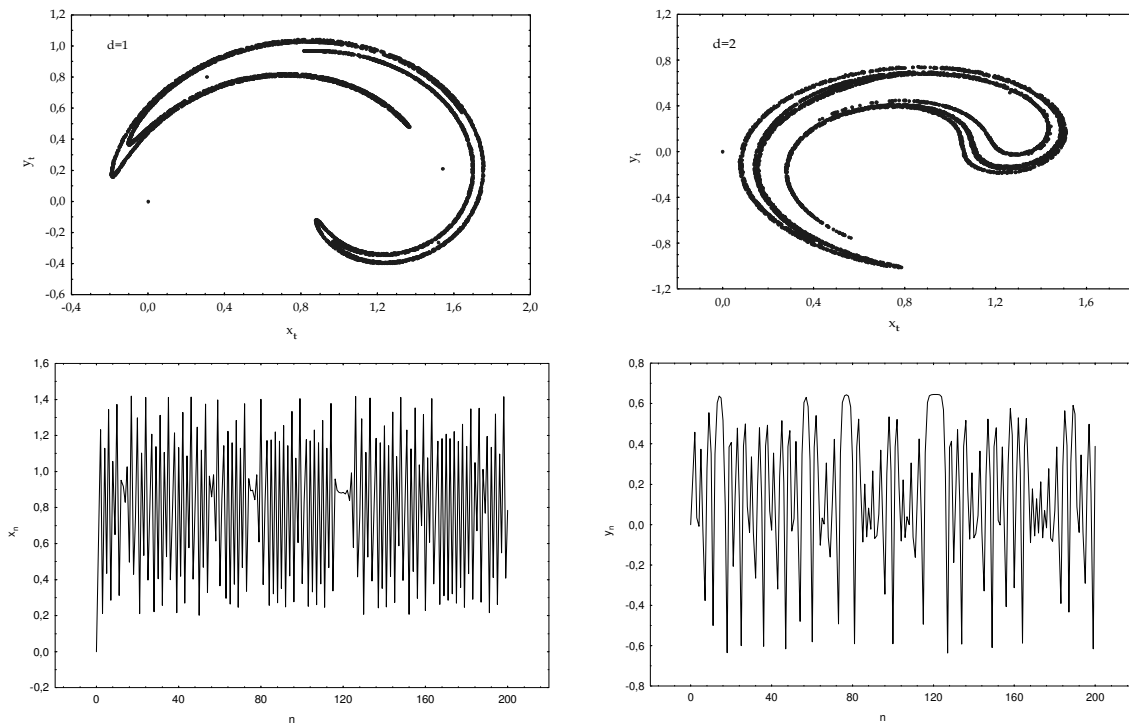
Σχήμα 4.6β: Ο χαστικός ελκυστής για την Εξ. (4.13) για $a = 1$ και $b = 0.7$, $(x_0, y_0) = (0.8, 0.05)$

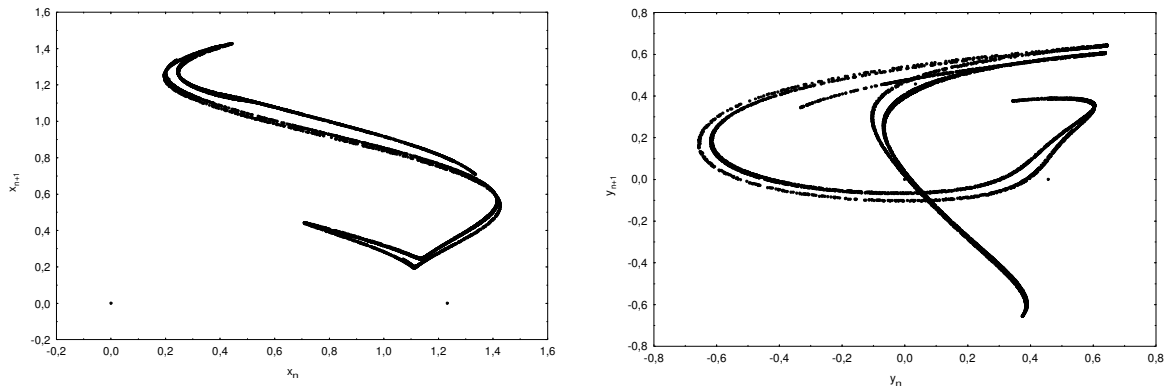
Η παραπάνω αντιστοιχία των δύο διαφορετικών συστημάτων δεν υφίσταται στην περίπτωση που θεωρήσουμε ότι η γωνία περιστροφής εκφράζεται με μια διαφορετική συνάρτηση των x και y .

Έτσι αν θεωρήσουμε ότι η γωνία περιστροφής δίνεται από την σχέση

$$\vartheta = d * (x^2 + y^2) \quad (4.15)$$

Ο χαστικός ελκυστής της Εξ. (4.13) παρουσιάζεται στο Σχήμα 4.7, ενώ για την Εξ. (4.14) δεν υπάρχει ο αντίστοιχος ελκυστής.





Σχήμα 4.7: Ο χαστικός ελκυστής για την Εξ. (4.13) για την γωνία περιστροφής της Εξ. (4.15) για δύο διαφορετικές τιμές του d (η απεικόνιση των x_n, y_n σε σχέση με το n καθώς και των x_n, y_n σε σχέση με τα x_{n+1}, y_{n+1} αφορά την περίπτωση $d = 1$)

4.3 Η σημασία της χρονικής υστέρησης στα χαστικά συστήματα

4.3.1 Εξισώσεις χρονικής υστέρησης

Μία γενική μορφή μίας εξίσωσης χρονικής υστέρησης δίνεται από την εξίσωση:

$$\frac{dx}{dt} = f[x_t, x_{t-T}] \quad (4.15)$$

Όπου $T > 0$ είναι η χρονική υστέρηση.

Η απλούστερη μορφή διαφορικής εξίσωσης με χρονική υστέρηση είναι η γραμμική εξίσωση:

$$\frac{dx}{dt} = -\alpha x_{t-1}. \quad (4.16)$$

Ο μετασχηματισμός

$$T = at$$

$$y_T = x_{T/a}$$

αλλάζει την προηγούμενη μορφή της Εξ. (3.57) σε:

$$\frac{dy}{dt} = -y_{T-a} \quad (4.17)$$

Η πολύ ενδιαφέρουσα παρατήρηση εδώ είναι ότι η παράμετρος α σχετίζεται άμεσα με τη χρονική υστέρηση. Η υστέρηση αυξάνει μαζί με το α . Η θεωρία μας λέει ότι για $a = \frac{\pi}{2}$ η εξίσωση υστέρησης μας

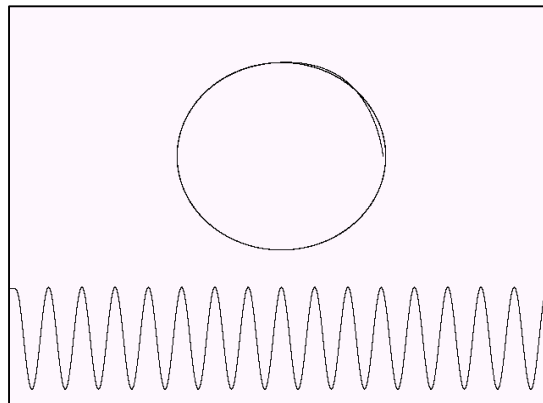
δίνει περιοδικές λύσεις, ενώ για $\alpha < \frac{\pi}{2}$ το $x(t)$ συγκλίνει προς το μηδέν και για $\alpha > \frac{\pi}{2}$ το $x(t)$ απομακρύνεται προς το άπειρο.

Η πιο πάνω απλή μορφή εξίσωσης με χρονική υστέρηση προσομοιάζεται χρησιμοποιώντας τη γραμμική μεθοδολογία προσέγγισης της καμπύλης. Η βασική ιδέα αυτής της μεθόδου είναι να πάρουμε το διάστημα υστέρησης T και να το χωρίσουμε σε έναν αριθμό n ίσων μερών.

Η επαναληπτική αυτή διαδικασία δίνεται από το ακόλουθο σύστημα:

$$\begin{aligned}\frac{dy_0}{dt} &= -\alpha y_n \\ \frac{dy_1}{dt} &= -n(y_1 - y_0) \\ &\vdots \\ \frac{dy_i}{dt} &= -n(y_i - y_{i-1}) \\ \frac{dy_n}{dt} &= -n(y_n - y_{n-1})\end{aligned}\tag{4.18}$$

Το σύστημα αυτό βρίσκει λύση με τη χρήση μίας τέταρτης τάξης αριθμητικής ολοκλήρωσης της μεθόδου των *Runge-Kutta*, η οποία προτάθηκε στο τέλος του 19^{ου} αιώνα από τους Γερμανούς μαθηματικούς Carl Runge και Wilhelm Kutta. Η μέθοδος αυτή χρησιμοποιείται ευρέως, και όταν εφαρμόζεται σωστά, μας δίνει ικανοποιητικά αποτελέσματα. Ο επιλεγμένος βαθμός αύξησης του χρόνου h θα πρέπει να είναι σημαντικά μικρός και ο αριθμός των διαστημάτων n της υστέρησης αρκετά μεγάλος. Έγινε προσπάθεια να δημιουργηθούν διάφορες μορφές, χρησιμοποιώντας διαφορετικές τιμές για τον αριθμό των διαστημάτων n . Όταν έχουμε τιμές $n = 15$ και $h = 0.001$ η ακρίβεια της μεθόδου ήταν ικανοποιητική. Στο Σχήμα 4.8 παρουσιάζεται η μορφή δύο διαστάσεων του Poincare, όπως επίσης και οι περιοδικές λύσεις του συστήματος όταν η παράμετρος α προσεγγίζει το $\frac{\pi}{2}$.

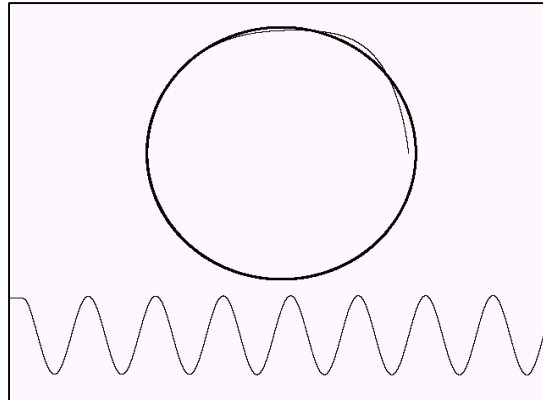


Σχήμα 4.8: Η μορφή δύο διαστάσεων του Poincare και οι λύσεις του συστήματος (4.18) όταν το α προσεγγίζει το $\pi/2$

Οι ταλαντώσεις δεν είναι σταθερές. Μικρές αποκλίσεις της παραμέτρου α από την τιμή $\frac{\pi}{2}$ οδηγούν αυτόματα σε συγκλίνουσες ή αποκλίνουσες ταλαντώσεις (Σχήμα 4.9).

Η συμπεριφορά του παρακάτω απλού σχήματος (Σχήμα 4.9) ταλαντώσεων μας δείχνει ότι είναι πολύ εύκολο να εμφανιστούν ταλαντώσεις σε ένα σύστημα που έχει μνήμη. Αυτό συμβαίνει διότι το μοντέλο το οποίο εκφράζει τη συμπεριφορά του συστήματος ενσωματώνει στις διαφορικές εξισώσεις ή στις εξισώσεις διαφορών του συστήματος το παρελθόν σε μία ή περισσότερες μεταβλητές χρονικής υστέρησης. *Κύρια συνέπεια είναι ότι η χρονική υστέρηση αυτόματα μας δίνει ταλαντώσεις.* Η εμπειρία που έχουμε από την πραγματική ζωή επικυρώνει την εμφάνιση ταλαντώσεων σε πάρα πολλά πεδία όπου εμφανίζονται χρονικές υστερήσεις. Υστερήσεις οι οποίες εμφανίζονται σε αποφάσεις που πρέπει να ληφθούν και μπορεί να αναφέρονται σε μία θεματολογία που περιλαμβάνει κοινωνικά, οικονομικά, τεχνολογικά, περιβαλλοντολογικά

ή και πολιτικά θέματα, μπορεί να οδηγήσουν σε ταλαντώσεις. Όταν είναι παρούσα η χρονική υστέρηση, είναι πολύ πιθανό να έχουμε την εμφάνιση βραχυχρόνιων ή μακροχρόνιων οικονομικών κύκλων, κοινωνικών ή πολιτικών αλλαγών, τεχνολογικών κύκλων ή κύκλων καινοτομίας. Επίσης, οι περιπτώσεις των βιολογικών κύκλων ή των βιολογικών ρολογιών, οι μηχανισμοί ταλάντωσης των ανθρώπων ή άλλων ζωντανών οργανισμών, είναι μερικές από τις περιπτώσεις στις οποίες έχουμε χρονική υστέρηση. Οι χημικές ταλαντώσεις και οι αντιδράσεις Belousov-Zabotinski οι οποίες μοντελοποιήθηκαν και μελετήθηκαν διεξοδικά από τον I. Prigogine και τους συνεργάτες του, είναι επίσης παραδείγματα του φαινομένου της υστέρησης κατά τη διάρκεια σχηματοποίησης των ενδιάμεσων έως και τη διάρκεια σχηματοποίησης των τελικών προϊόντων.



Σχήμα 4.9: Η μορφή δύο διαστάσεων του Poincaré και οι λύσεις του συστήματος (4.18) όταν το α αποκλίνει από το $\pi/2$

Ανάλογα παραδείγματα μπορούμε πολύ εύκολα να συναντήσουμε και στο χώρο των logistics, όπου οι αλληλεπιδράσεις μεταξύ διαφόρων παραγόντων και οι καθυστερήσεις που μπορεί να εμφανιστούν σε όλο το μήκος της εφοδιαστικής αλυσίδας ενδέχεται να οδηγήσουν σε αστάθεια του συστήματος.

4.3.2 Χαστικά μοντέλα με χρονική υστέρηση

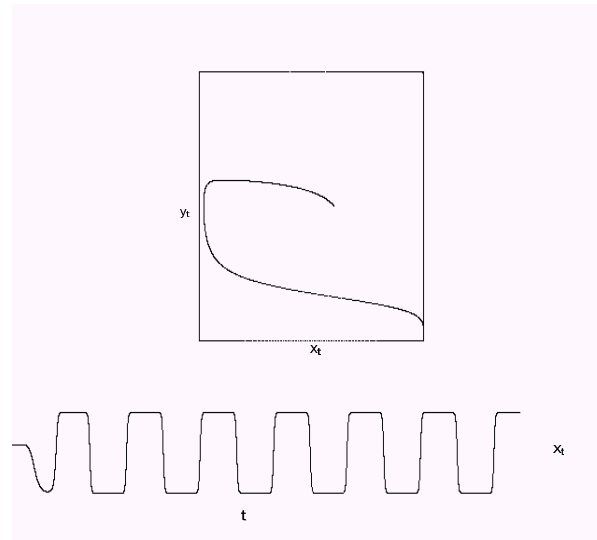
Η παρουσία χρονικής υστέρησης σε ένα σύστημα μπορεί να οδηγήσει σε ταλαντώσεις και αστάθειες όπως αναφέρθηκε στην προηγούμενη παράγραφο. Στην συνέχεια της ανάπτυξης και μελέτης νέων χαστικών μοντέλων και των ιδιοτήτων τους θα μελετήσουμε την επίδραση που έχει η παρουσία της χρονικής υστέρησης σε διάφορα συστήματα. Η σημασία της χρονικής υστέρησης είναι σημαντική καθώς συναντάται σε πολλά πραγματικά συστήματα.

Ένα περισσότερο πολύπλοκο μοντέλο το οποίο παρουσιάζει χρονική υστέρηση και το οποίο μελετήθηκε χρησιμοποιώντας την μεθοδολογία που αναπτύχθηκε στην παράγραφο 4.3.1 περιγράφεται στην Εξ. 4.24. Το μοντέλο αυτό παρουσιάζει μία περισσότερο σταθερή ταλαντωτική συμπεριφορά. Οι ταλαντώσεις

εμφανίζονται αρκετά σταθερές όταν η παράμετρος παίρνει τιμές $a > \frac{\pi}{2}$ και μας δείχνουν, για μερικές από τις τιμές της παραμέτρου, μία ιδιαίτερη μορφή. Μία περισσότερο γενική μορφή εξίσωσης με υστέρηση είναι:

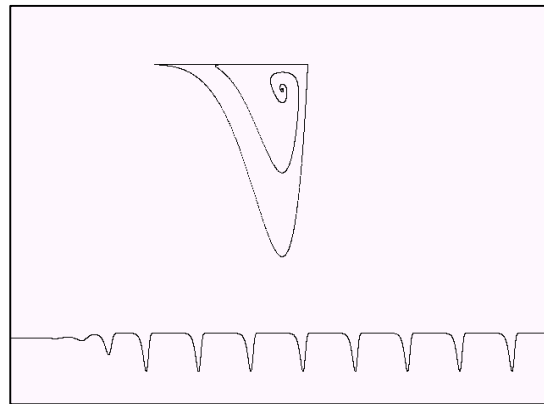
$$\frac{dx}{dt} = -ax_{t-1}(1 - x_t^b) \quad (4.24)$$

Η παράμετρος b είναι ακέραιος αριθμός. Διακρίνουμε δύο ξεχωριστές περιπτώσεις: *Πρώτη*, όταν η παράμετρος b είναι ένας άρτιος αριθμός. Ξεχωριστής σημασίας είναι το μοντέλο με $b = 2$. *Δεύτερη*, όταν η παράμετρος b είναι ένας περιττός αριθμός. Το απλούστερο μοντέλο, όταν $b = 1$, είναι το λογιστικό μοντέλο με χρονική υστέρηση (delay logistic model).



Σχήμα 4.10: Το μοντέλο της Εξ. (4.24) για $b = 2$, $n = 30$, $\alpha = 14$, $x = 0.2$ και $h = 0.001$

Όταν οι παράμετροι πάρουν τις τιμές $b=2$ και $\alpha=14$, η προσομοίωση μας δίνει την ιδιαίτερα ενδιαφέρουσα μορφή του προηγούμενου σχήματος. Η μορφή των δύο διαστάσεων είναι ένα περίπου τέλειο ορθογώνιο, ανεξάρτητα από την αρχική θέση του επιπέδου, εάν η θέση είναι στο εσωτερικό του ορθογώνιου. Αυτό σημαίνει ότι η αρχική τιμή πρέπει να είναι μεταξύ $0 < x < 1$. Επιλέγοντας την παράμετρο α σε ένα ευρύ πεδίο υψηλότερο του $\pi/2$ το μοντέλο μας δίνει την ορθογώνια μορφή με οξείς γωνίες ή όχι, κάτι το οποίο εξαρτάται από την επιλογή της τιμής της παραμέτρου. Στην συγκεκριμένη περίπτωση που εξετάσαμε, η γραμμική μέθοδος προσέγγισης της καμπύλης με $n = 30$, $h = 0.001$ και αρχική τιμή $x = 0.2$ μας έδωσε πολύ καλά αποτελέσματα. Οι ορθογώνιες ταλαντώσεις εμφανίστηκαν με σχεδόν τέλεια μορφή και αυτό μπορεί να είναι ιδιαίτερα χρήσιμο σε μία σειρά από εφαρμογές.



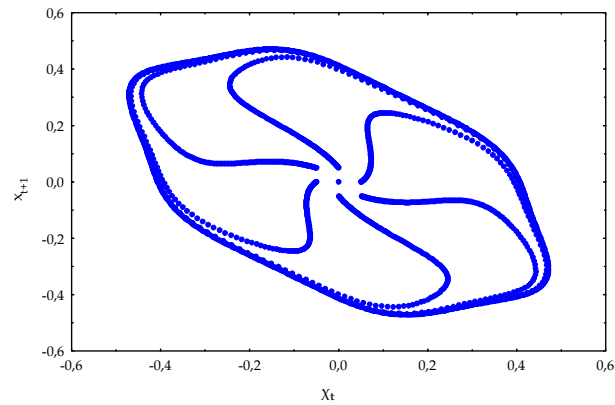
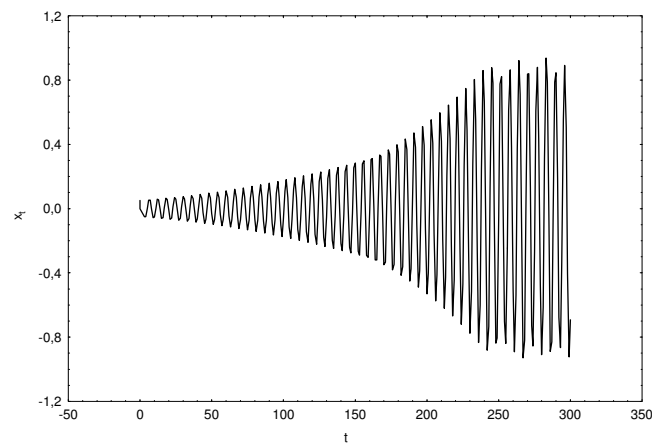
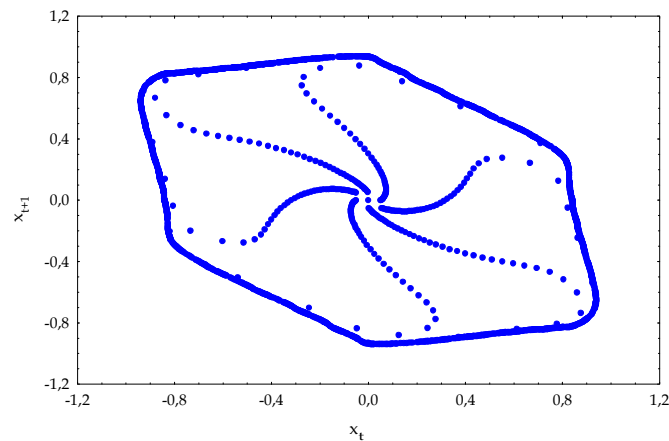
Σχήμα 4.11: Το μοντέλο της Εξ. (4.24) για $b = 1$, $n = 30$, $\alpha = 14$, $x = 0.2$ και $h = 0.001$

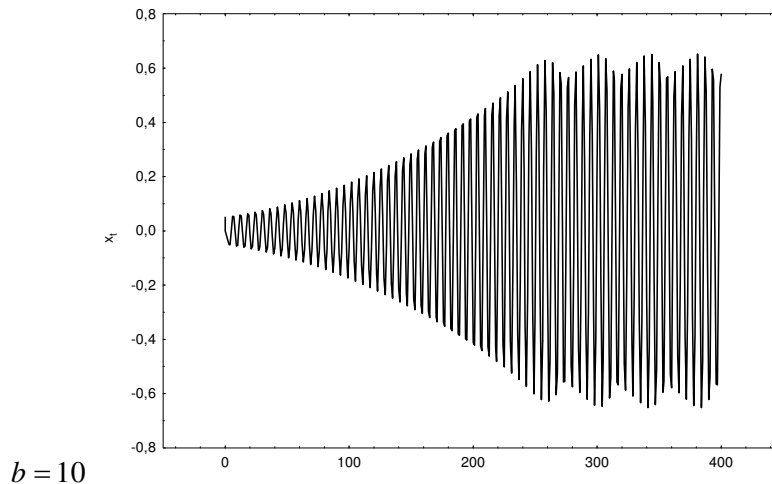
Οι ταλαντώσεις έχουν αρκετά διαφορετική μορφή, όπως μπορούμε να δούμε στο παραπάνω σχήμα, όταν η παράμετρος b είναι περιττός αριθμός.

Επίσης, πολύ σημαντικές απεικονίσεις δύο διαστάσεων, σχηματίζονται εάν έχουμε μία εξίσωση διαφορών με χρονική υστέρηση, όμοια με την προηγούμενη διαφορική εξίσωση:

$$x_{t+1} = x_t - \alpha x_{t-1} (1 - x_t^b) \quad (4.25)$$

Όπως και στην προηγούμενη περίπτωση, εξετάζονται δύο διαφορετικές οικογένειες εξισώσεων. Αυτές με περιπτές τιμές και αυτές με άρτιες τιμές της παραμέτρου b . Τα ευρήματα από την προσομοίωση παρουσιάζονται στο Σχήμα 4.12 όπου εξετάζονται άρτιες τιμές της παραμέτρου b . Οι τιμές που επιλέχθηκαν είναι $b = 4$ για το εξαγώνο και $b = 10$. Η παράμετρος α παίρνει τιμές στο διάστημα 1.06 και 1.01, και η αρχική τιμή είναι $x = 0.05$ και στις δύο περιπτώσεις. Ξεκινώντας από το κέντρο του εξαγώνου, το επαναληπτικό σχήμα συγκλίνει ταχύτατα σε έναν οριακό κύκλο ο οποίος έχει μία εξαγωνική μορφή. Στο Σχήμα 4.12 παρουσιάζονται πολύ σημαντικές ομοιότητες και για τις δύο καμπύλες. Η εξαγωνική μορφή παραμένει για όλους τους άρτιους αριθμούς του b οι οποίοι είναι μεγαλύτεροι του 4. Όταν έχουμε $b = 2$, η απεικόνιση δεν είναι τόσο καθαρή, καθώς οι γωνίες του εξαγώνου δεν είναι αρκετά οξείες.

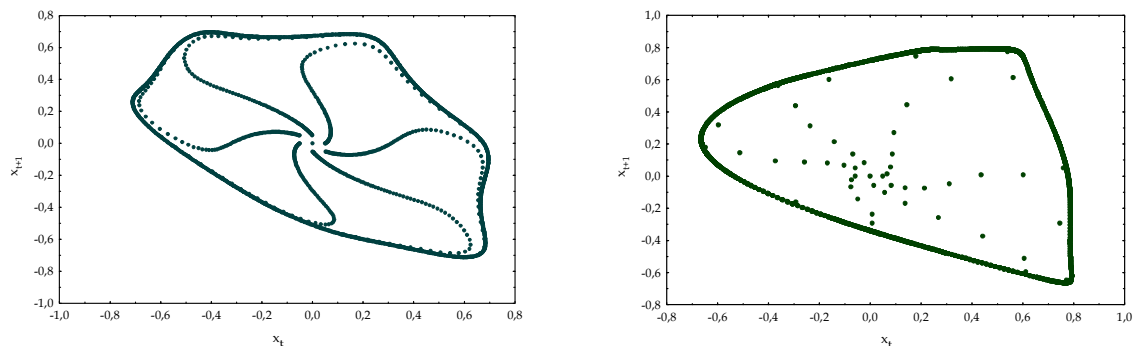
 $b = 4$  $b = 4$  $b = 10$



Σχήμα 4.12: Το μοντέλο της Εξ. (4.25) για άρτιες τιμές του b ($b = 4$ και $b = 10$) αντίστοιχα

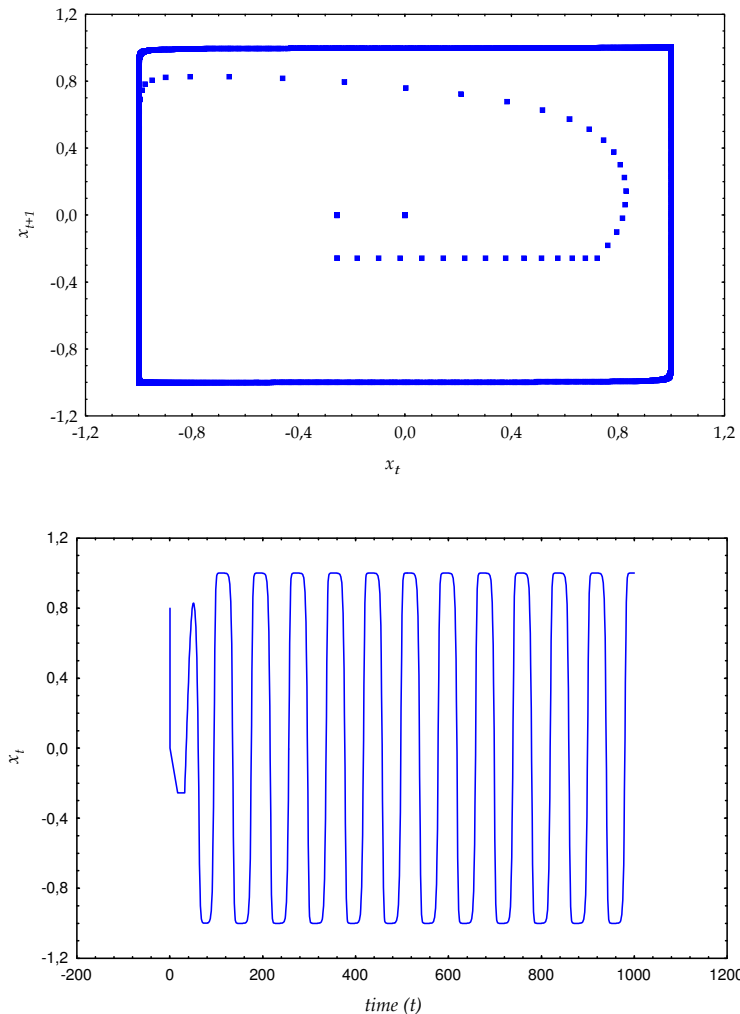
Εάν επιλέξουμε περιττούς αριθμούς για την παράμετρο b η μορφή της καμπύλης δύο διαστάσεων προσεγγίζει περισσότερο το τρίγωνο, όταν $b = 1$, και το πεντάγωνο όταν $b = 3$, όπως φαίνεται και στο Σχήμα 4.13. Όταν ασχολούμαστε με εξισώσεις διαφορών είναι πιο λογικό να διαλέγουμε μοντέλα στα οποία ο όρος που εκφράζει την υστέρηση να παίρνει τιμές μεγαλύτερες της μονάδας, διότι κάτι τέτοιο μας επιτρέπει να καλύπτουμε μία μεγάλη ποικιλία πρακτικών εφαρμογών. Τόσο στη βιολογία ή την κινηματική χημεία, όσο και στην οικονομία ή τις κοινωνικές επιστήμες, οι χρονικές υστερήσεις είναι δυνατόν να καλύπτουν ένα σημαντικό αριθμό μονάδων χρόνου, οι οποίες συνήθως επεκτείνονται σε ένα διάστημα δεκάδων ή εκατοντάδων μονάδων χρόνου. Οι χρονικές περιόδους σε ένα σύστημα logistics [will97], [wild98] μπορεί να αναφέρονται στις περιόδους ανεφοδιασμού, ή τις περιόδους εξυπηρέτησης της ζήτησης κ.ο.κ. Εάν οι χρονικές υστερήσεις υπολογίζονται σε m μονάδες χρόνου, μία περισσότερο πολύπλοκη μορφή εξίσωσης διαφορών είναι:

$$x_{t+1} = x_t - \alpha x_{t-m} (1 - x_t^b) \quad (4.26)$$



Σχήμα 4.13: Το μοντέλο της Εξ. (4.25) για περιττές τιμές του b ($b = 3$ και $b = 1$ αντίστοιχα).

Και σε αυτήν την περίπτωση υπάρχουν δύο κύριες ομάδες εξισώσεων, ανάλογα με τις περιττές και άρτιες τιμές της παραμέτρου b . Μία σημαντική ιδιότητα των μοντέλων τα οποία χαρακτηρίζονται από μία άρτια παράμετρο b είναι ο σχηματισμός ενός τετραγώνου στο δυσδιάστατο επίπεδο. Όταν η χρονική υστέρηση γίνεται υψηλότερη της μορφής του οριακού κύκλου, ξεφεύγει και σχηματίζει ένα σχεδόν τέλειο τετράγωνο, όπως φαίνεται και στο Σχήμα 4.14, όπου οι τιμές των παραμέτρων είναι, $m = 15$ και $b = 2$.



Σχήμα 4.14: Το μοντέλο της Εξ. (4.26) για $m = 15$, $x_0 = 0.8$, $\alpha = 0.32$, $b = 2$

4.4 Λογιστικό μοντέλο στο οποίο εφαρμόζεται χρονική υστέρηση

Η μορφή του λογιστικού μοντέλου στο οποίο εφαρμόζουμε χρονική υστέρηση μπορεί να εκφραστεί με την ακόλουθη εξίσωση διαφορών:

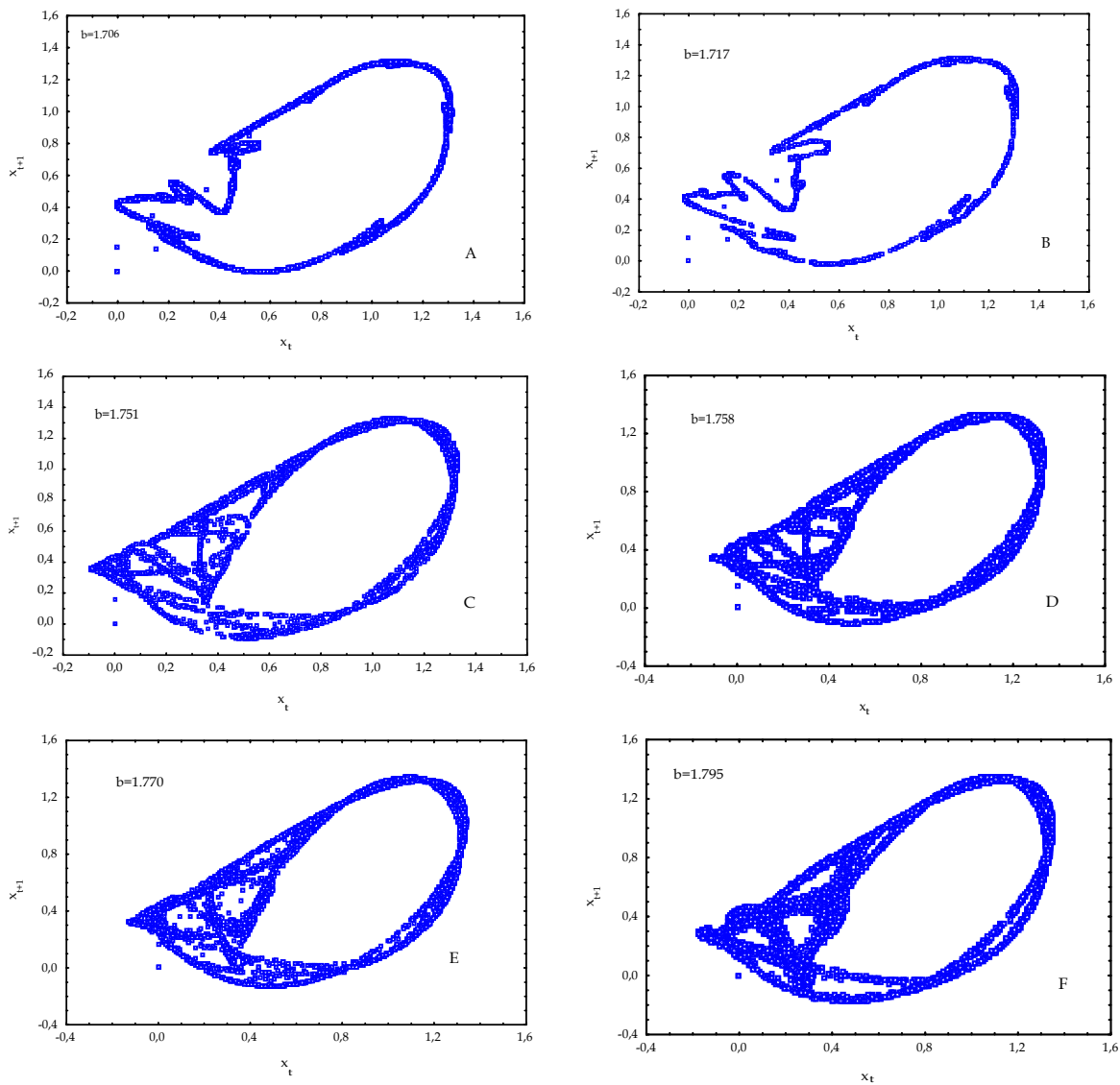
$$x_{t+1} = \alpha x_t + b x_{t-m} (1 - x_{t-m}) \quad (4.27)$$

Πρόκειται για ένα μοντέλο στο οποίο εφαρμόζεται χρονική υστέρηση και το οποίο ενσωματώνει την επιρροή μίας αλληλεπίδρασης λογιστικού μοντέλου στο μέλλον. Ως ένα απλό παράδειγμα μπορούμε να υποθέσουμε την επίδραση που μπορεί να έχει μία παραγγελία που δόθηκε κάποια συγκεκριμένη χρονική στιγμή, εξυπηρετήθηκε έπειτα από μία συγκεκριμένη χρονική περίοδο και τα αποτελέσματά της επηρεάζουν το σύστημα στο παρόν³. Το φαινόμενο αυτό εμφανίζεται πολύ συχνά στο marketing, την οικονομία, τα κοινωνικά ή τα πολιτικά συστήματα. Η επίδραση αυτής της χρονικής υστέρησης στην ανάπτυξη μίας μεταβλητής χρόνου x στο μέλλον θα εξεταστεί, μεταβάλλοντας το εύρος του διαστήματος υστέρησης m και τις τιμές των παραμέτρων α και b . Εμφανίζονται οριακοί κύκλοι, διακλαδώσεις και χαστική συμπεριφορά. Οι ταλαντώσεις και οι χαστικές ταλαντώσεις εμφανίζονται σε μία μεγάλη ποικιλία η οποία επίσης εξαρτάται

³ Skiadas C., Apostolou A., Kitsios F., Rompogiannakis I., "Supply Chain Management and Chaos", Proceedings of the LOGISTICS 2000 - Partnerships in the Supply Chain, Athens, Greece, 29-30, September 2000

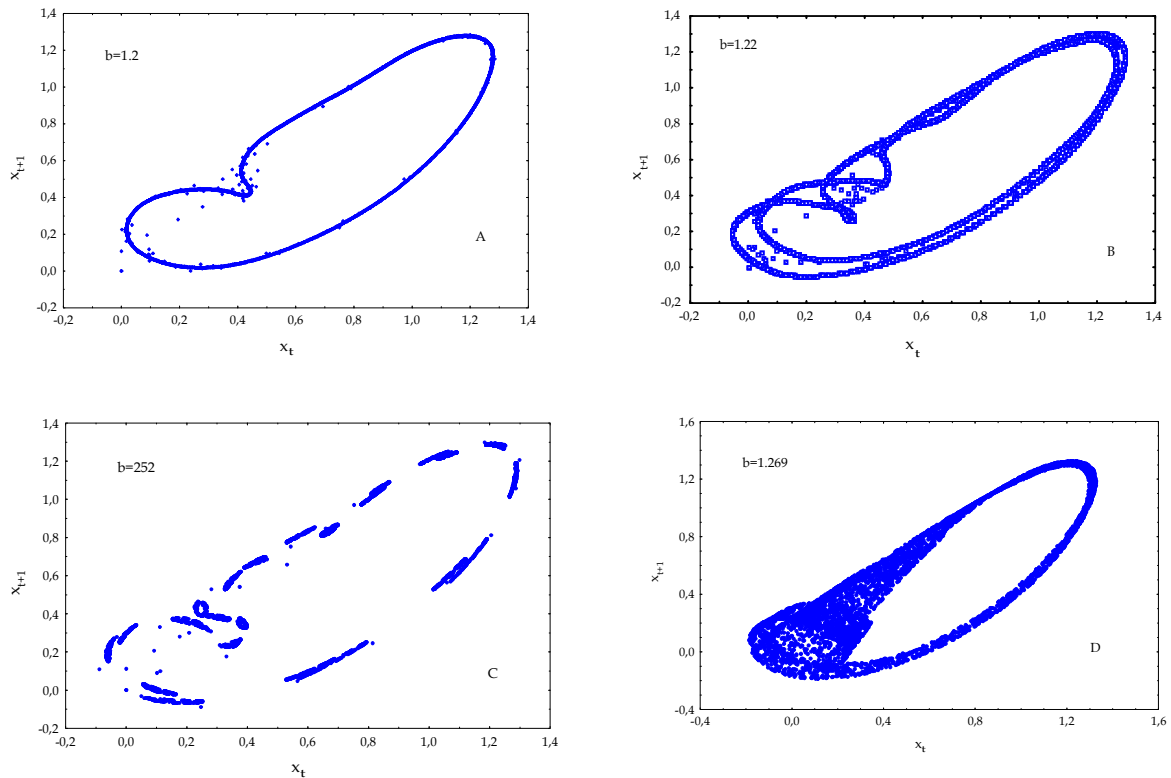
από το επίπεδο της χρονικής υστέρησης. Ακόμη όμως και στις απλούστερες των περιπτώσεων, όπου έχουμε μία ή δύο χρονικές περιόδους υστέρησης, η συμπεριφορά του συστήματος είναι αρκετά πολύπλοκη. Όταν βέβαια φτάσουμε σε υψηλά επίπεδα χρονικής υστέρησης, τότε αυτά σχεδόν εγγυώνται τη χαστική συμπεριφορά.

Η απλούστερη μορφή του συγκεκριμένου μοντέλου εμφανίζεται όταν η παράμετρος πάρει την τιμή $m = 1$. Έχουμε τη δημιουργία έξι διαφορετικών μορφών A, B, C, D, E και F οι οποίες εμφανίζονται όταν η παράμετρος b πάρει τις τιμές 1.706, 1.717, 1.751, 1.758, 1.770, 1.795 αντίστοιχα. Η παράμετρος $\alpha = 0.9$ και η αρχική τιμή $x_0 = 0.1$. Οι οριακοί κύκλοι ακολουθούνται από χαστική συμπεριφορά.



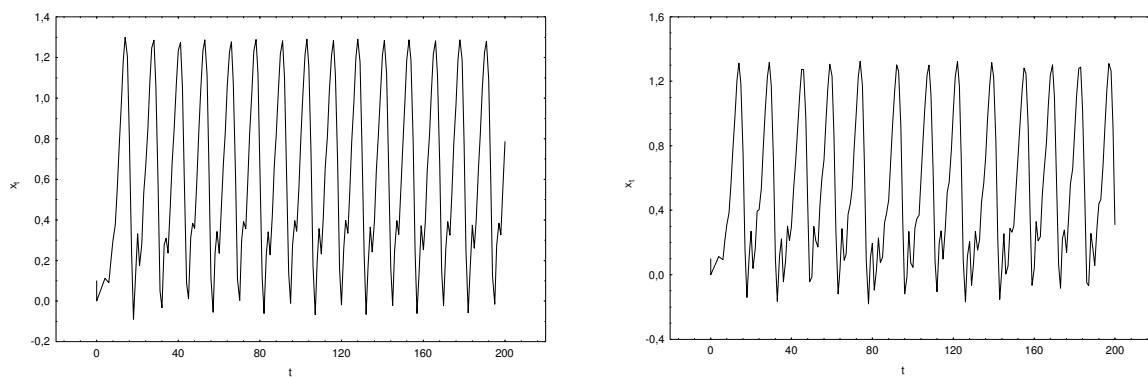
Σχήμα 4.15: Το Λογιστικό μοντέλο με χρονική υστέρηση για $m = 1$, $\alpha = 0.9$, $x_0 = 0.1$ και διάφορες τιμές της παραμέτρου b .

Η δεύτερη περίπτωση η οποία εξετάζεται περιλαμβάνει διακυμάνσεις όπου η χρονική υστέρηση είναι $m = 2$. Οριακοί κύκλοι, διακλαδώσεις και στη συνέχεια χάος εμφανίζονται στις μορφές A, B, C, και D για τις τιμές 1.2, 1.22, 1.252, και 1.259 αντίστοιχα της παραμέτρου b .

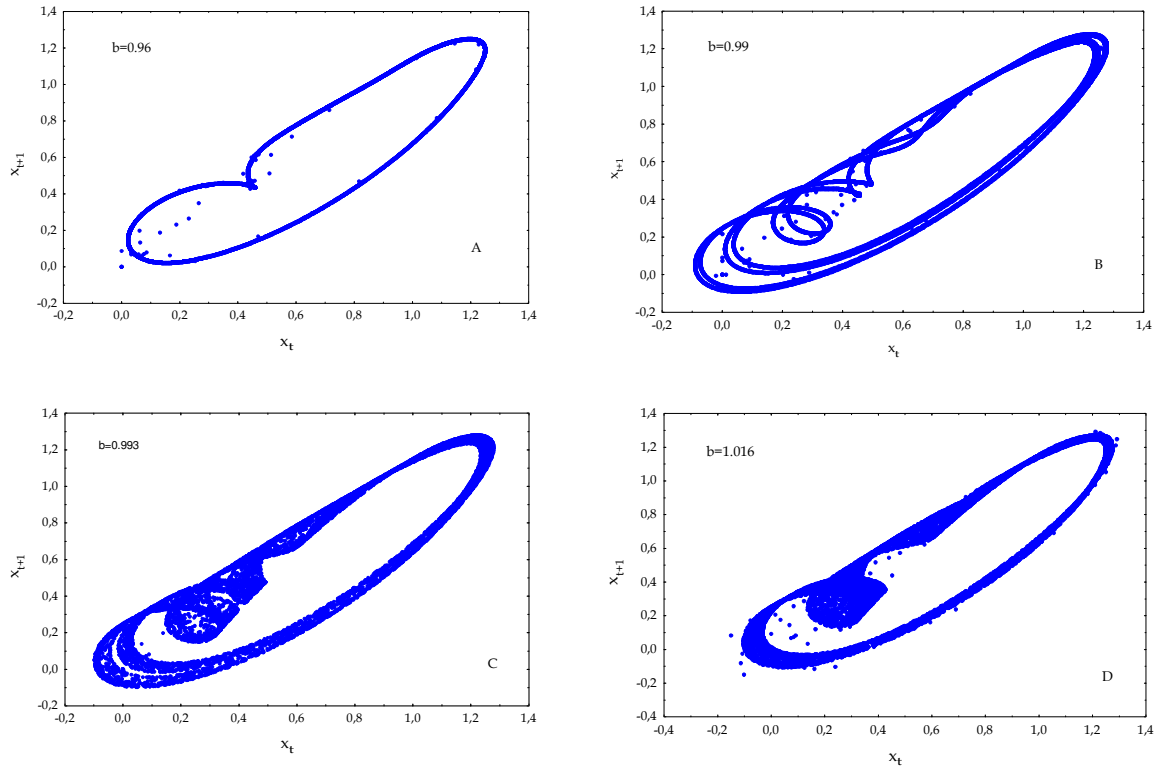


Σχήμα 4.16: Το Λογιστικό μοντέλο με χρονική υστέρηση για $m = 2$, $\alpha = 0.9$, $x_0 = 0.1$ και διάφορες τιμές της παραμέτρου b .

Όταν η παράμετρος χρονικής υστέρησης πάρει την τιμή $m = 3$ παρατηρούμε μία σημαντική επίδραση στο γράφημα δύο διαστάσεων. Η διακλάδωση εμφανίζεται αρκετά πιο πολύπλοκη και οδηγεί σε μία χαστική απεικόνιση μέσω μίας περιόδου διπλασιασμού. Η παράμετρος α και η αρχική τιμή επιλέγονται όπως και στο προηγούμενο παράδειγμα, όπου το b παίρνει τις τιμές 0.96, 0.99, 0.993 και 1.016 για τα σχήματα A, B, C, και D, αντίστοιχα.

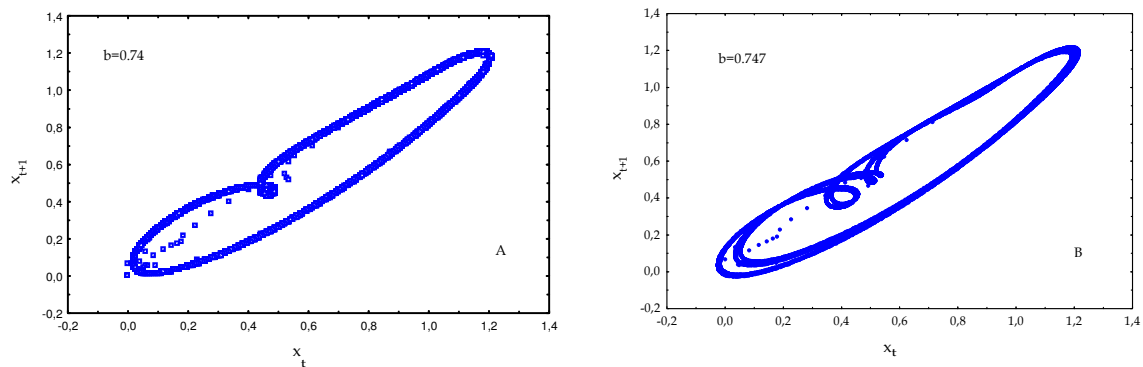


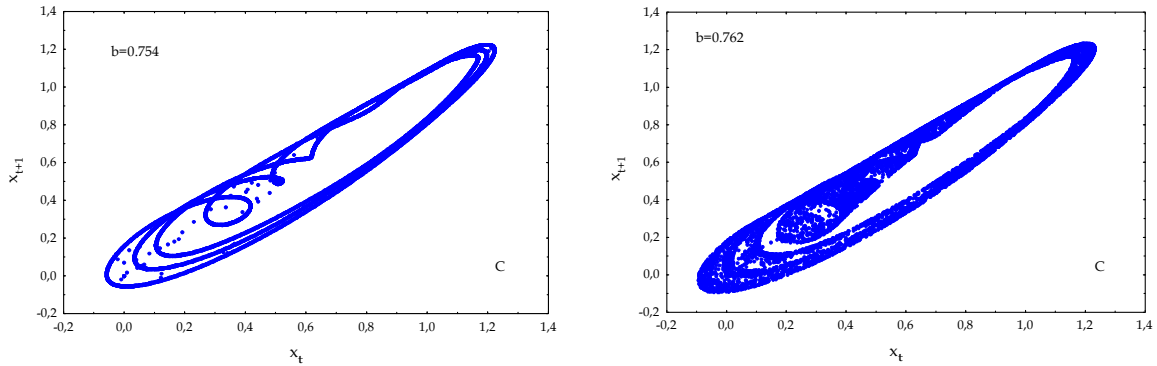
Σχήμα 4.16α: Το Λογιστικό μοντέλο με χρονική υστέρηση για $m = 1, b = 1.706$ (αριστερά) και $m = 2, b = 1.252$ (δεξιά), και $\alpha = 0.9$, $x_0 = 0.1$.



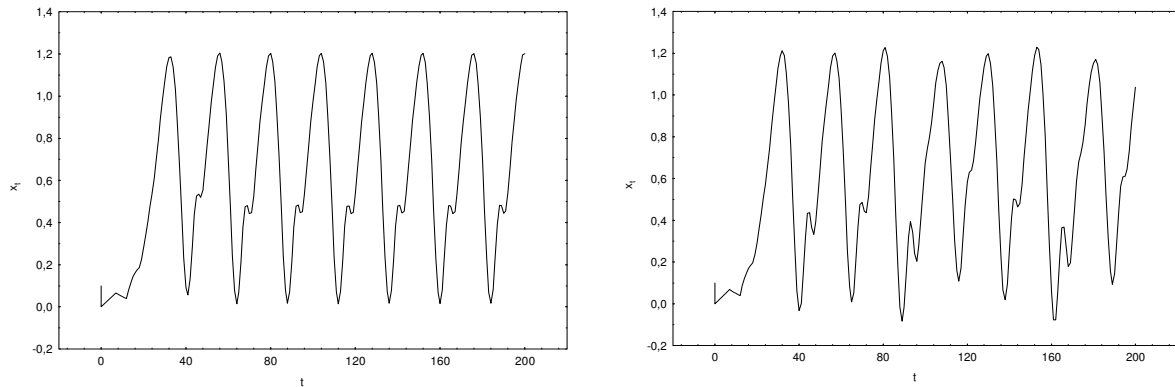
Σχήμα 4.16β: Το Λογιστικό μοντέλο με χρονική υστέρηση για $m = 3$, $\alpha = 0.9$, $x_0 = 0.1$ και διάφορες τιμές της παραμέτρου b .

Όταν οι παράμετροι πάρουν τις τιμές $m = 5$, $\alpha = 0.9$ και αρχική τιμή $x_0 = 0.95$ το φαινόμενο της χρονικής υστέρησης εμφανίζεται στο Σχήμα 4.17. Παρουσιάζονται τέσσερις διαφορετικές εκδοχές A, B, C και D, όταν η παράμετρος b πάρει τις τιμές 0.74, 0.747, 0.754, 0.762 αντίστοιχα. Η μορφή του σχήματος είναι παρόμοια με την προηγούμενη περίπτωση όπου $m = 3$. Οριακοί κύκλοι, διακλαδώσεις και χαοτική συμπεριφορά εμφανίζεται.





Σχήμα 4.17: Το Λογιστικό μοντέλο με χρονική υστέρηση για $m = 5$, $\alpha = 0.9$, $x_0 = 0.1$ και διάφορες τιμές της παραμέτρου b .



Σχήμα 4.17: Το Λογιστικό μοντέλο με χρονική υστέρηση για $m = 5$, $\alpha = 0.9$, $x_0 = 0.1$ και $b = 0.74$ (αριστερά), $b = 0.62$ (δεξιά),

4.5 Περιπτώσεις με μεγάλη χρονική υστέρηση

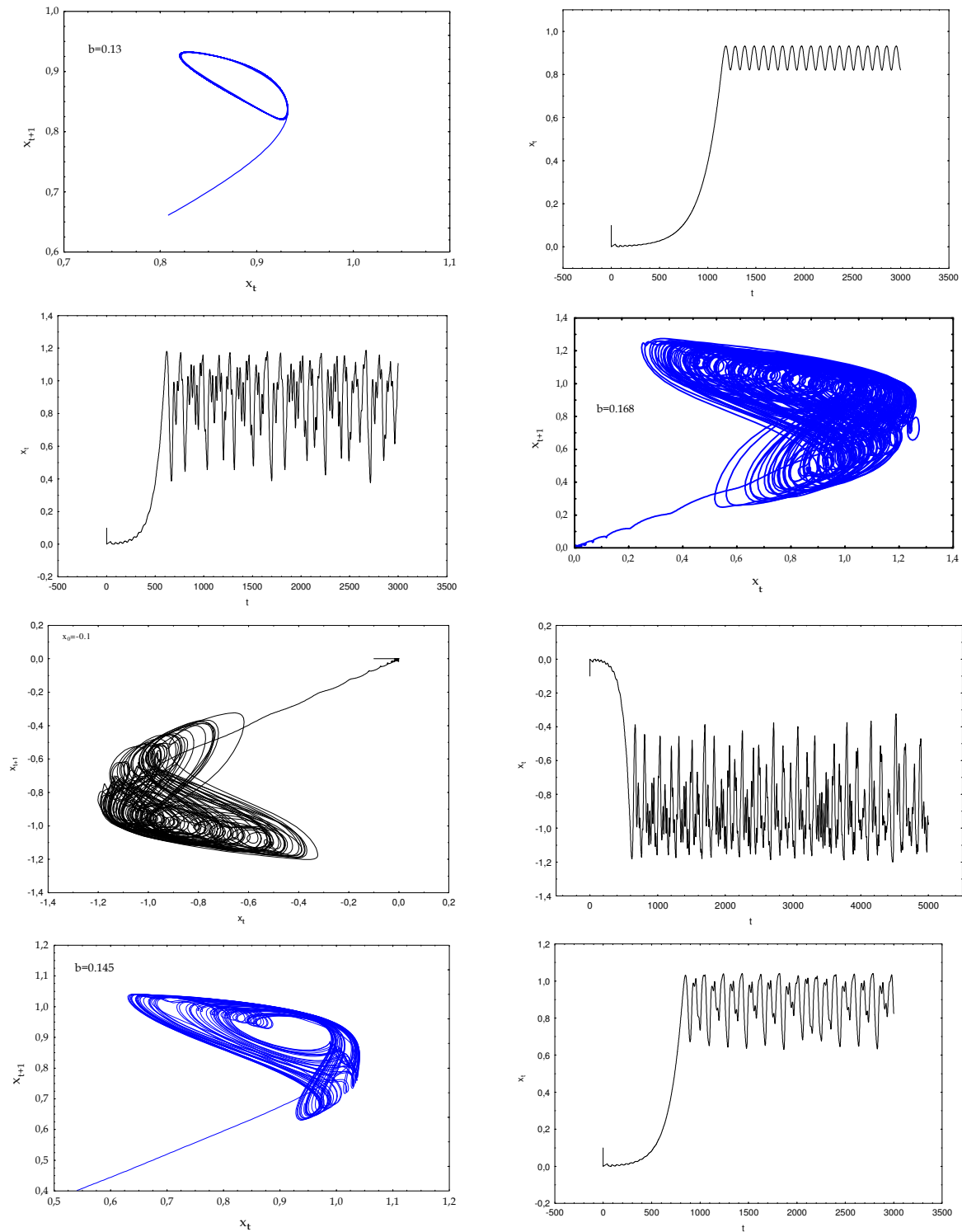
Στις περιπτώσεις όπου η παράμετρος χρονικής υστέρησης m είναι μεγάλη ή ιδιαίτερα μεγάλη, η μορφή των απεικονίσεων τείνει να παραμένει σταθερή στις αλλαγές των τιμών της παραμέτρου b . Το μοντέλο εμφανίζεται σε ένα χώρο πολλαπλών διαστάσεων, ενώ η μορφή των ελκυστών επηρεάζεται από τους μηχανισμούς υστέρησης και όχι ουσιαστικά από τη μορφή της εξίσωσης. Αυτό μπορούμε να το ελέγξουμε συγκρίνοντας τα μοντέλα λογιστικό και Glass, [GlMa88]. Τα δύο μοντέλα είναι εντελώς διαφορετικά ως προς τη μορφή των εξισώσεών τους, αλλά οι χαστικοί ελκυστές και οι χαστικές ταλαντώσεις που εμφανίζονται έχουν παρόμοια μορφή.

4.5.1 Το μοντέλο Glass

Το μοντέλο Glass περιγράφεται από την παρακάτω εξίσωση

$$x_{t+1} = \alpha x_t + b \frac{x_{t-m}}{1 + x_{t-m}^{10}} \quad (4.28)$$

Οι διάφορες μορφές της παραπάνω εξίσωσης παρουσιάζονται στο Σχήμα 4.18.



Σχήμα 4.18: Το μοντέλο του Glass με χρονική υστέρηση για $m = 40$, $\alpha = 0.9$, $x_0 = 0.1$ και διάφορες τιμές της παραμέτρου b .

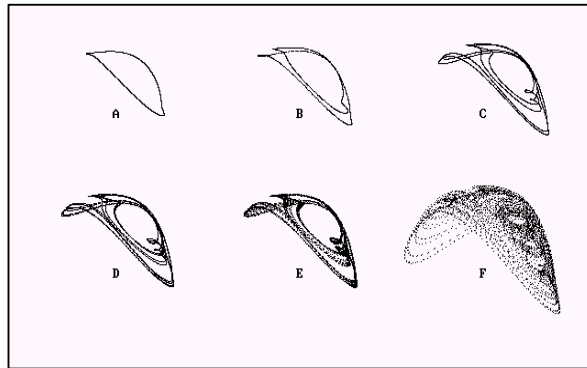
Όπως μπορούμε εύκολα να παρατηρήσουμε από τις παραπάνω απεικονίσεις του μοντέλου αρχικά έχουμε οριακούς κύκλους, ακολουθούν διακλαδώσεις και καταλήγουμε στην χαοτική κατάσταση του μοντέλου. Ιδιαίτερη σημασία έχει η περίπτωση όπου $x_0 = -0.1$ οπότε και η απεικόνιση του μοντέλου μεταφέρεται στο

τρίτο τεταρτημόριο του άξονα συντεταγμένων σε συμμετρία ως προς την αρχή των αξόνων με την περίπτωση $x_0 = 0.1$.

4.5.2 Σύγκριση λογιστικού με το μοντέλο Glass

Στο επόμενο σχήμα απεικονίζονται τα γραφήματα δύο διαστάσεων για το λογιστικό μοντέλο με χρονική υστέρηση, όταν οι παράμετροι έχουν τις τιμές $m = 40$, $\alpha = 0.9$, ενώ η αρχική τιμή του x είναι $x_0 = 0.95$. Οι έξι τιμές της παραμέτρου b είναι 0.36, 0.37, 0.38, 0.3813, 0.3818 και 0.41, ανταποκρίνονται δε στα σχήματα A, B, C, D, E και F αντίστοιχα.

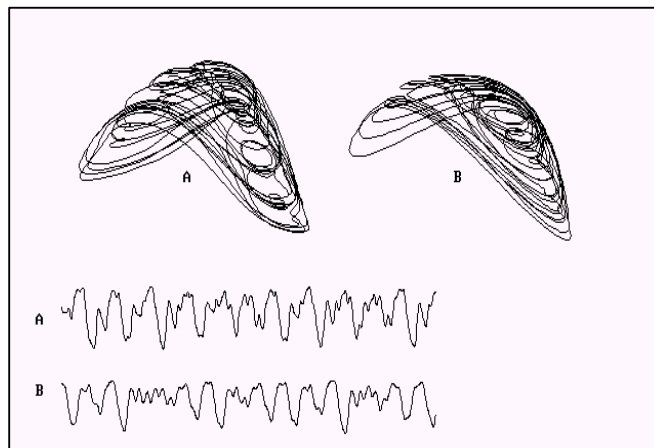
Το σχήμα A παρουσιάζει έναν κλασικό οριακό κύκλο, ενώ το σχήμα B ανταποκρίνεται σε μία διακλάδωση (δυϊσμό) πρώτης τάξης. Το σχήμα C μας δείχνει μία διακλάδωση δεύτερης τάξης και το σχήμα D μία διακλάδωση τρίτης τάξης. Διακλαδώσεις υψηλότερης τάξης εμφανίζονται στο σχήμα E, ενώ η χαστική συμπεριφορά εμφανίζεται στο Σχήμα F.



Σχήμα 4.19: Το Λογιστικό μοντέλο με χρονική υστέρηση για $m = 40$, $\alpha = 0.9$, $x_0 = 0.1$ και διάφορες τιμές της παραμέτρου b .

Το μοντέλο Glass (σχήμα A) και το λογιστικό μοντέλο (σχήμα B) παρουσιάζονται στο Σχήμα 4.20. Οι παράμετρος υστέρησης είναι $m = 40$ και οι άλλες παράμετροι είναι $b = 0.18$ για το μοντέλο Glass και $b = 0.4$ για το λογιστικό μοντέλο, ενώ και για τα δύο μοντέλα είναι $\alpha = 0.9$. Η πολύ μεγάλη ομοιότητα η οποία εμφανίζεται στους ελκυστές δύο διαστάσεων και οι χαστικές ταλαντώσεις που εμφανίζονται παρουσιάζονται επίσης στο Σχήμα 4.20. Ένας αριθμός άλλων μοντέλων τα οποία δίνουν παρόμοια αποτελέσματα έχουν την ακόλουθη μορφή:

$$x_{t+1} = \alpha x_t + F(x_{t-m}) \quad (4.29)$$



Σχήμα 4.20: Το μοντέλο Glass (A) και το λογιστικό (B) για $m = 40$, $\alpha = 0.9$, $x_0 = 0.1$ και $b = 0.18, 33$.

Η σημασία λοιπόν της μεγάλης χρονικής υστέρησης είναι καταλυτική για την συμπεριφορά του μοντέλου την οποία και καθορίζει σε μεγαλύτερο βαθμό από ό,τι και η εξίσωση περιγραφής του. Αρκετά άλλα γνωστά μοντέλα ελέγχθηκαν και παρουσίασαν και αυτά ανάλογη συμπεριφορά στην χαστική περιοχή τους με το μοντέλο του glass και το λογιστικό μοντέλο με χρονική υστέρηση, για περιπτώσεις πάντα που ο βαθμός της χρονικής υστέρησης ήταν αρκετά μεγάλος. Μερικές από τις πιο χαρακτηριστικές περιπτώσεις αφορούσαν τα μοντέλα που περιγράφονται από τις ακόλουθες εξισώσεις:

- ▶ Λογιστικό μοντέλο 2^{ου} βαθμού, [Roos34]: $x_{t+1} = ax_t + bx_{t-m}(1 - x_{t-m}^2)$, $a = 0.9$, $b = 0.3$
- ▶ Λογιστικό μοντέλο 3^{ου} βαθμού, [Roos34]: $x_{t+1} = ax_t + bx_{t-m}(1 - x_{t-m}^3)$, $a = 0.9$, $b = 0.243$
- ▶ Μοντέλο GRM1 με χρονική υστέρηση, [Skia85]: $a = 0.95$, $b = 0.1$, $c = 0.84$
- ▶ Μοντέλο Gauss με χρονική υστέρηση, [Bell86]: $x_{t+1} = ax_t + be^{-c(x_{t-m}-k)^2}$, $a = 0.9$, $c = 4$, $k = 0.7$
- ▶ Μοντέλο Gompertz με χρονική υστέρηση, [GoHo65]: $x_{t+1} = ax_t - bx_{t-m} \ln x_{t-m}$, $a = 0.9$, $b = 0.28$

Σε όλες τις παραπάνω περιπτώσεις οι μορφές των χαστικών ελκυστών είχαν μορφή ίδια με αυτή των χαστικών ελκυστών του μοντέλου του Glass και του λογιστικού μοντέλου με χρονική υστέρηση του σχήματος 4.20.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

ΜΙΑ ΝΕΑ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΑΝΑΛΥΣΗΣ ΧΑΟΤΙΚΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ

Εισαγωγή

Στο Κεφάλαιο 3 παρουσιάστηκε η ανάλυση της λογιστικής εξίσωσης, του πιο διαδεδομένου χαοτικού μοντέλου, καθώς και της οικογένειας των λογιστικών μοντέλων. Στο Κεφάλαιο 4 επίσης παρουσιάστηκε μια νέα μορφή της λογιστικής εξίσωσης, το λογιστικό μοντέλο με χρονική υστέρηση με πολύ ενδιαφέρουσες ιδιότητες. Στο παρόν κεφάλαιο θα αναπτυχθεί μια νέα μεθοδολογία ανάλυσης χαοτικών συστημάτων και εύρεσης των σημείων δυϊσμού. Η μεθοδολογία αυτή στηρίζεται στην ανάλυση της κοινής γραφικής απεικόνισης μιας συνάρτησης (της οποίας θέλουμε να καθορίσουμε τα σημεία δυϊσμού) και της αντίστροφής της. Η μεθοδολογία αυτή θα παρουσιαστεί με την χρησιμοποίηση του λογιστικού και του αντίστροφου λογιστικού μοντέλου.

5.1 Το αντίστροφο λογιστικό μοντέλο

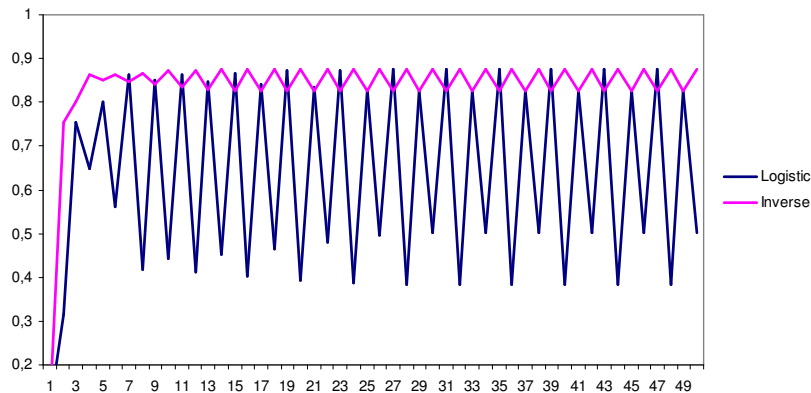
Η συνάρτηση $y = f(x) = rx(1-x)$ είναι η συνάρτηση περιγραφής του λογιστικού μοντέλου. Το αντίστροφο λογιστικό μοντέλο περιγράφεται από την εξίσωση

$$x = f(y) = by(1-y) \quad (5.1)$$

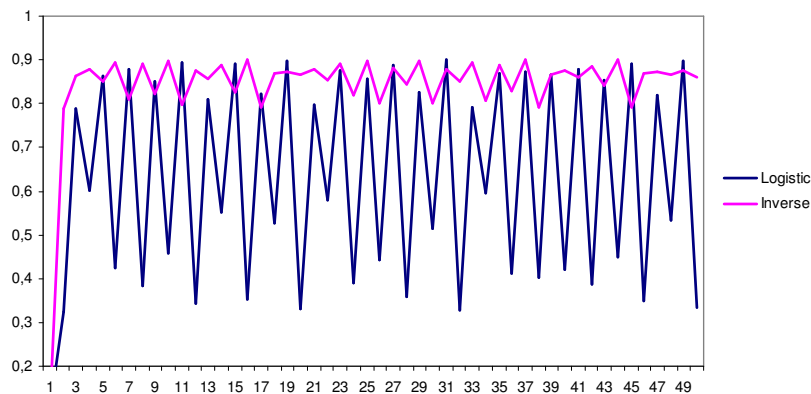
ή διαφορετικά

$$x = r^2 x(1-x)[1 - rx(1-x)]. \quad (5.2)$$

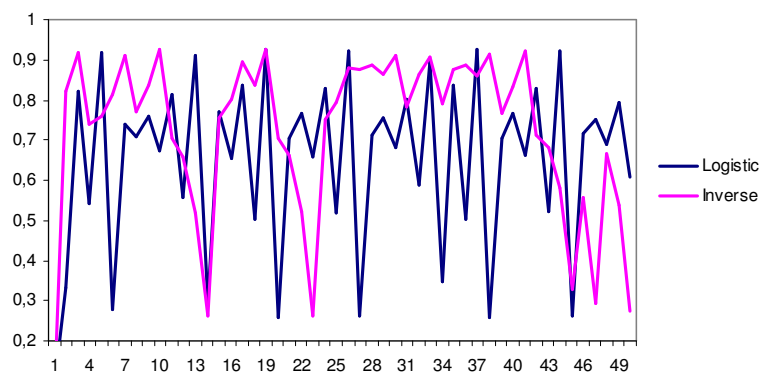
Χαρακτηριστικές μορφές του λογιστικού και του αντίστροφου λογιστικού μοντέλου απεικονίζονται στα Σχήματα 5.1 έως 5.3 όπου παρουσιάζεται και η μετάβαση των δύο μοντέλων από την περιοδική ταλάντωση στην χαστική συμπεριφορά όπου και η ευαισθησία στις αρχικές συνθήκες είναι χαρακτηριστική.



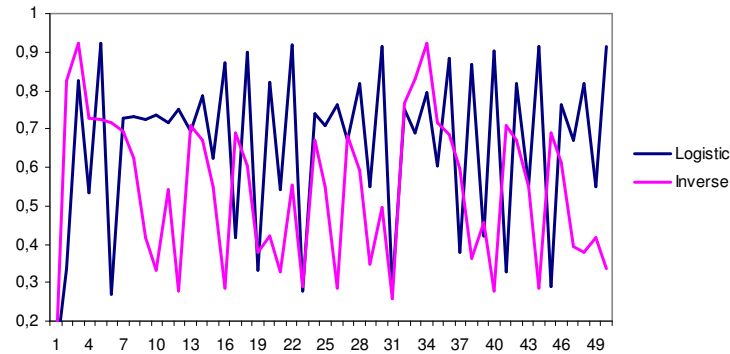
Σχήμα 5.1: Η εξέλιξη του λογιστικού και του αντίστροφου μοντέλου (κατακόρυφος άξονας) σε σχέση με το χρόνο (οριζόντιος άξονας) για $x_0 = 0.1$, $r = 3.5$.



Σχήμα 5.2: Η εξέλιξη του λογιστικού και του αντίστροφου μοντέλου (κατακόρυφος άξονας) σε σχέση με το χρόνο (οριζόντιος άξονας) για $x_0 = 0.1$, $r = 3.6$



Σχήμα 5.3: Η εξέλιξη του λογιστικού και του αντίστροφου μοντέλου (κατακόρυφος άξονας) σε σχέση με το χρόνο (οριζόντιος άξονας) για $x_0 = 0.1$, $r = 3.7$



Σχήμα 5.4: Η εξέλιξη του λογιστικού και του αντίστροφου μοντέλου (κατακόρυφος άξονας) σε σχέση με το χρόνο (οριζόντιος άξονας) για $x_0 = 0.101$, $r = 3.7$

Η Εξ. (5.2) έχει τέσσερις ρίζες οι οποίες αντιστοιχούν στα σημεία που η καμπύλη του λογιστικού μοντέλου τέμνεται με αυτή του αντίστροφου λογιστικού μοντέλου. Κατά συνέπεια είναι εύκολο να βρούμε τα πρώτα σημεία δυϊσμού του αντίστροφου λογιστικού μοντέλου σχεδιάζοντας τις καμπύλες των δύο εξισώσεων σε ένα (x, y) επίπεδο. Αντίστοιχα σημεία δυϊσμού υψηλότερης τάξης μπορούν να βρεθούν σχεδιάζοντας τα διαγράμματα των εξισώσεων

$$y = f^k(f(x))$$

και

$$x = f^m(f(x))$$

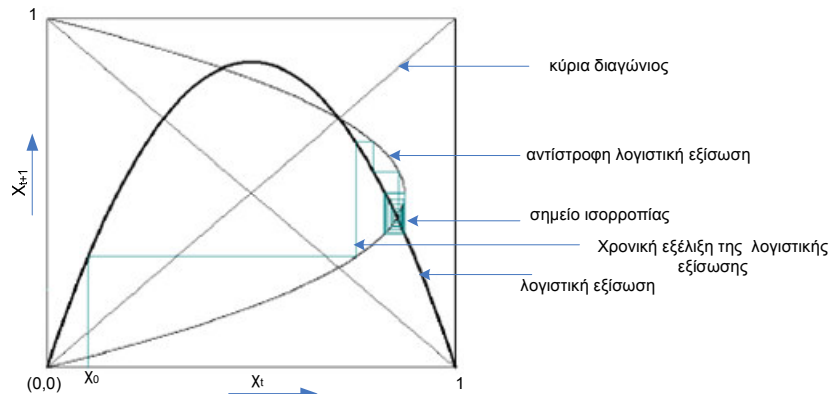
όπου $f^k(f(x))$ και $f^m(f^m(x))$

είναι συναρτήσεις της μορφής $f^k(f(x)) = f(f \dots (f(x)))$.

Στην γραφική ανάλυση που θα ακολουθήσει παρουσιάζονται οι καμπύλες της λογιστικής και της αντίστροφης λογιστικής εξίσωσης καθώς και οι συναρτήσεις υψηλότερων τάξεων σε ένα τετράγωνο στο (x, y) με μοναδιαία πλευρά (καθώς η μέγιστη τιμή τόσο της λογιστικής όσο και της αντίστροφης λογιστικής εξίσωσης είναι η μονάδα).

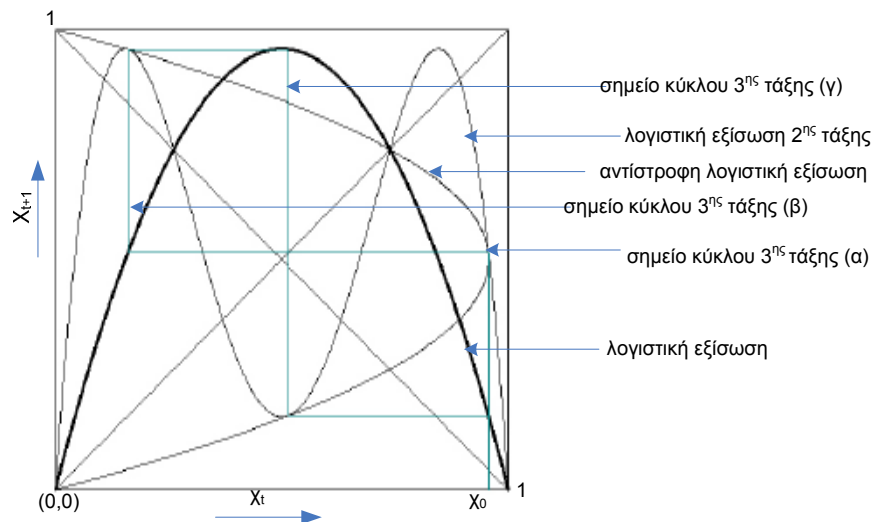
Ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα του κανονικού και του αντίστροφου λογιστικού μοντέλου απεικονίζεται στο Σχήμα 5.5, όπου το σημείο ισορροπίας είναι το ένα σημείο τομής των δύο μοντέλων. Όπως μπορούμε να παρατηρήσουμε η λογιστική εξίσωση ξεκινάει από την αρχική της τιμή και σε σύντομο χρονικό διάστημα

συγκλίνει στο σημείο ισορροπίας που είναι το $x^* = \frac{r-1}{r} = 0.714$.



Σχήμα 5.5: Το λογιστικό και το αντίστροφο μοντέλο για $x_0 = 0.1$, $r = 3.5$

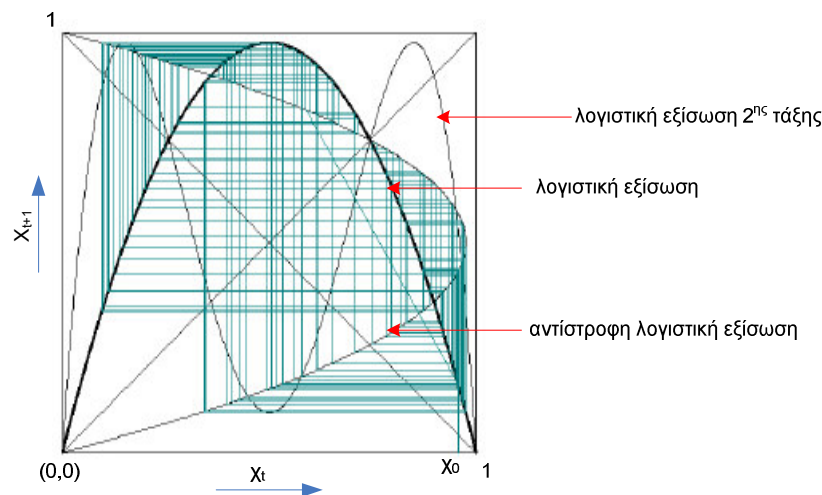
Στο Σχήμα 5.6 παρουσιάζεται ο κύκλος δυϊσμού 3^{ης} τάξης για $r = 1 + \sqrt{8}$, όπου χρησιμοποιούνται τα γραφήματα της πρώτης τάξης $y = f(x)$, δεύτερης τάξης $y = f(f(x))$ καθώς και το γράφημα της συνάρτησης του αντίστροφου λογιστικού μοντέλου.



Σχήμα 5.6: Ο κύκλος 3^{ης} τάξης για $r = 1 + \sqrt{8}$

Όπως μπορούμε να διακρίνουμε από το σχήμα 5.6 τα σημεία (α), (β) και (γ) του κύκλου 3^{ης} τάξης είναι τα σημεία τομής της αντίστροφης λογιστικής εξίσωσης και της λογιστικής εξίσωσης 2^{ης} τάξης.

Στο Σχήμα 5.7 απεικονίζεται η χαστική περιοχή λειτουργίας του λογιστικού και του αντίστροφου μοντέλου για $r = 3.9$, όπου το χαρακτηριστικό είναι ο σχηματισμός ενός μεγάλου αριθμού διαφορετικών μονοπατιών.



Σχήμα 5.7: Το λογιστικό και το αντίστροφο μοντέλο για $r = 3.9$ (χαστική περιοχή)

5.1 Γεωμετρικές ιδιότητες του λογιστικού μοντέλου

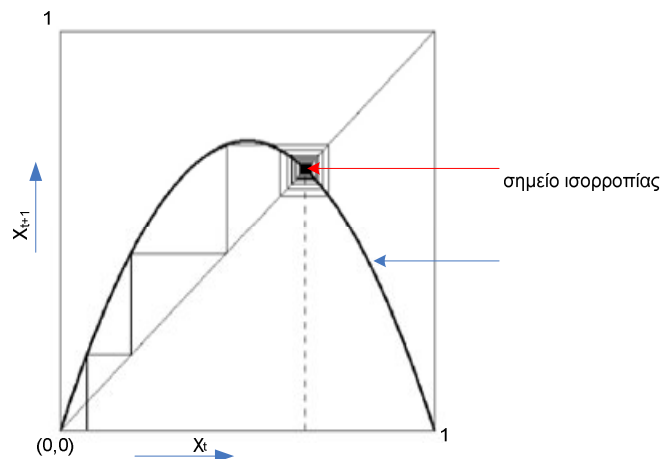
Μια απλή γεωμετρική παρουσίαση των γεωμετρικών ιδιοτήτων της λογιστικής απεικόνισης δίδεται στο Σχήμα 5.8. Η τιμή της παραμέτρου $r = 2.9$ και η αρχική τιμή $x_0 = 0.07$. Το σημείο ισορροπίας είναι το

$x_0 = 0.07$ το οποίο αντιστοιχεί στην κατάσταση ισορροπίας $x_{t+1} = x_t$. Δεδομένης της τιμής της παραμέτρου r όλες οι τιμές που μπορεί να πάρει η λογιστική εξίσωση είναι μια παραβολή που διέρχεται από την αρχή των αξόνων $(0,0)$ και το σημείο $(0,1)$. Το μέγιστο της παραβολής είναι το σημείο $\left(\frac{1}{2}, \frac{r}{4}\right)$ το οποίο είναι εύκολο να υπολογιστεί αν θεωρήσουμε την πρώτη παράγωγο της λογιστικής εξίσωσης

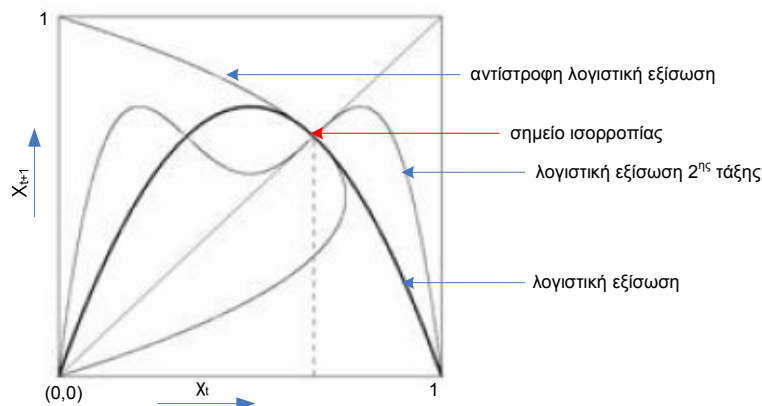
$$x'_{t+1} = r(1 - 2x_t) \quad (5.3)$$

και εξισώνοντάς την με το μηδέν οπότε και παίρνουμε ότι $x = \frac{r}{4}$. Λαμβάνοντας υπόψη ότι $0 \leq x \leq 1$, είναι ξεκάθαρο ότι το διάστημα τιμών της παραμέτρου r περιγράφεται από την ανισότητα $0 < r \leq 4$.

Ενδιαφέρουσες ιδιότητες του λογιστικού χάρτη μπορούν να προκύψουν από την γεωμετρική ανάλυση του τετραγώνου με μοναδιαίες πλευρές. Το πρώτο σημείο έλκυσης τοποθετείται στο $x_{t+1} = x_t = 1 - \frac{1}{r}$ το οποίο υπολογίζεται από την ισότητα $x = rx(1-x)$ η οποία μας δίνει σημεία το $(0,0)$ και το $\left(1 - \frac{1}{r}, 1 - \frac{1}{r}\right)$. Από τα δύο αυτά σημεία μόνο το δεύτερο είναι σημείο έλκυσης και τοποθετείται πάνω στη διαγώνιο του τετραγώνου όπου $x_{t+1} = x_t$ και υπάρχει όταν $b > 1$.



Σχήμα 5.8: Το λογιστικό μοντέλο για, $r = 2.9$ και $x_0 = 0.07$ (x_t vs x_{t+1})



Σχήμα 5.9: Το λογιστικό και το αντίστροφο μοντέλο για $x_0 = 0.1$, $r = 3$.

Εάν εισάγουμε την αντίστροφη συνάρτηση, όπως απεικονίζεται γραφικά στο Σχήμα 5.9 έχουμε την δυνατότητα με ένα κατάλληλο τρόπο να υπολογίσουμε τα σημεία έλκυσης του αντίστροφου λογιστικού μοντέλου για μια δεδομένη τιμή της παραμέτρου r . Για κάποιες μεγαλύτερες τιμές της παραμέτρου r το σημείο αυτό έλκυσης δεν υφίσταται ενώ εμφανίζονται δύο νέα σημεία έλκυσης.

Στο Σχήμα 5.9 απεικονίζεται επίσης και το διάγραμμα δεύτερης τάξης (x_t, x_{t+1}) . Στην περίπτωση που $r = 3$ όλες οι καμπύλες διέρχονται από το σημείο $\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$. Η κλίση της καμπύλης του αντίστροφου λογιστικού μοντέλου (δηλαδή η τιμή της πρώτης παραγώγου) είναι ίση με -1 και για τα δύο γραφήματα (x_t, x_{t+1}) και (x_{t+1}, x_t) και ίση με 1 για το (x_t, x_{t+2}) γράφημα. Το $r = 3$ είναι το ανώτατο όριο της παραμέτρου r για το οποίο υπάρχει το πρώτο σημείο έλκυσης.

Τα επόμενα δύο σύνολα σημείων έλκυσης είναι οι λύσεις της εξίσωσης

$$x_{t+2} = x_t = x$$

ή διαφορετικά της εξίσωσης

$$r^2 x(1-x)(1-rx(1-x)) = x. \quad (5.4)$$

Η παραπάνω εξίσωση έχει τέσσερις ρίζες, με τις δύο πρώτες να είναι οι ρίζες της εξίσωσης $x_{t+1} = x_t = x$

δηλαδή οι ρίζες $x_1 = 0$ και $x_2 = 1 - \frac{1}{r}$ ενώ οι δύο επόμενες είναι οι

$$x_{3,4} = \frac{(r+1) \pm \sqrt{(r+1)(r-3)}}{2r}. \quad (5.5)$$

Οπότε η ελάχιστη τιμή της παραμέτρου r για τα δύο αυτά σημεία είναι το $r = 3$, ενώ η μέγιστη τιμή υπολογίζεται στο σημείο που η κλίση του γραφήματος $2^{\text{ης}}$ τάξης είναι ίση με -1 . Η τελευταία συνθήκη οδηγεί στην εξίσωση

$$r^2 - 2r - 5 = 0 \quad (5.6)$$

η λύση της οποίας μας δίνει την μέγιστη τιμή της παραμέτρου r την $r = \frac{2 + \sqrt{24}}{2} \approx 3.4495$. Το Σχήμα

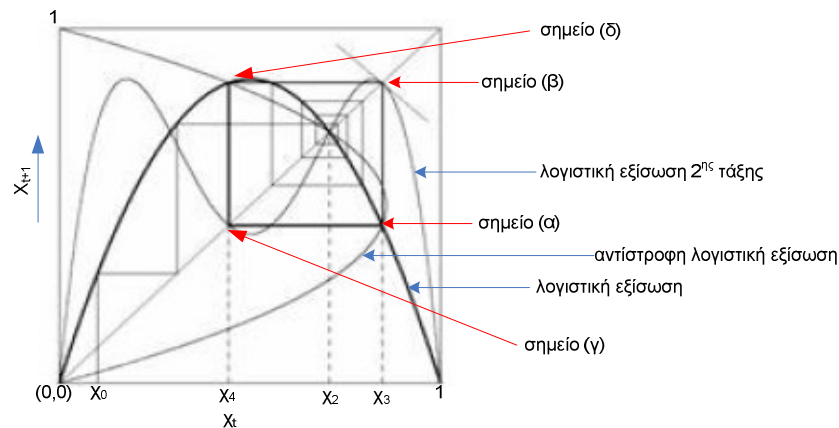
5.10 απεικονίζει τον $2^{\text{ης}}$ τάξης δυϊσμό για $r = 3.43$ και για μια αρχική τιμή της εξίσωσης $x_0 = 0.01$. Ο δεύτερης τάξης δυϊσμός απεικονίζεται με τη μορφή του τετραγώνου στα τέσσερα χαρακτηριστικά σημεία του γραφήματος. Στο σχήμα 5.10 φαίνονται χαρακτηριστικά τα σημεία αυτά. Τα σημεία (α) και (δ) είναι τα σημεία τομής της λογιστικής και της αντίστροφης λογιστικής εξίσωσης, ενώ τα σημεία (β) και (γ) είναι τα σημεία τομής της λογιστικής εξίσωσης $2^{\text{ης}}$ τάξης και της κύριας διαγωνίου του τετραγώνου με μοναδιαία πλευρά. Στην περίπτωση των σημείων δυϊσμού με την μέγιστη τιμή του x μια ευθεία γραμμή αντιστοιχεί στην κλίση του $2^{\text{ης}}$ τάξης γραφήματος.

Ένα άλλο σημαντικό σημείο είναι η εύρεση της τιμής στην οποία το αντίστροφο λογιστικό μοντέλο τέμνει το λογιστικό μοντέλο στο μέγιστό του. Τα σημεία αυτά είναι οι λύσεις της εξίσωσης

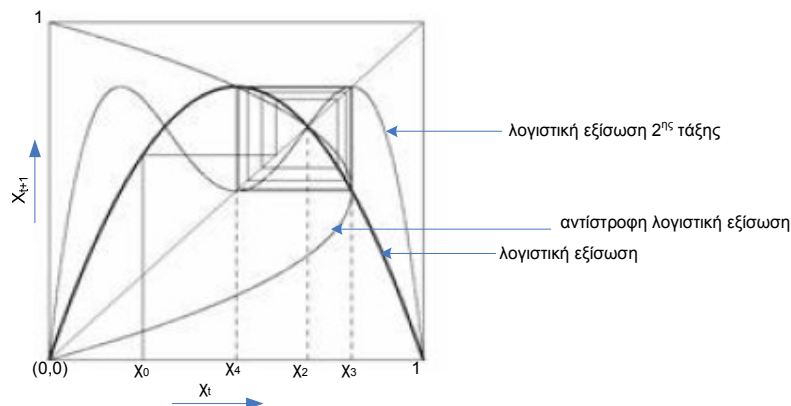
$$r^3 - 4r^2 + 8 \quad (5.7)$$

οι οποίες είναι τρεις πραγματικές. Οι δύο από αυτές είναι αποδεκτές $r = 2$ και $r = 1 + \sqrt{5}$. Για τις ίδιες τιμές η $2^{\text{ης}}$ τάξης καμπύλη τέμνει την κύρια διαγώνιο. Το Σχήμα 5.1 δείχνει την περίπτωση όπου $r = 1 + \sqrt{5}$ και $x_0 = 0.25$.

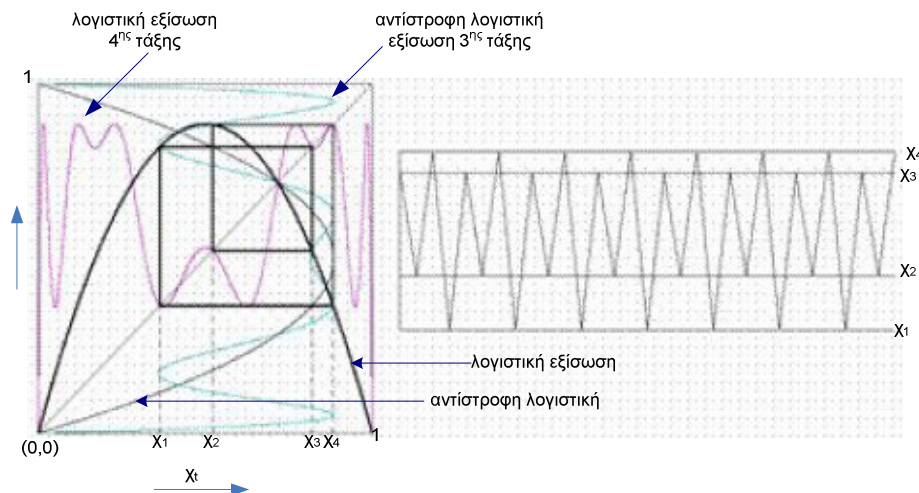
Ο 4^{ης} περιόδου δυϊσμός απεικονίζεται στο Σχήμα 5.11, όπου για καλύτερη απεικόνιση και για να υπολογίσουμε τα χαρακτηριστικά σημεία τοποθετούμε την αντίστροφη λογιστική εξίσωση (x_{t+3}, x_t) κατά μήκος με το γράφημα του (x_t, x_{t+4}) . Η παράμετρος r παίρνει τιμές στην περιοχή $1 + \sqrt{6} < r < 3.5440903$.



Σχήμα 5.10: Το λογιστικό και το αντίστροφο μοντέλο για $x_0 = 0.01$, $r = 3.43$ (2^{ης} τάξης δυϊσμός)



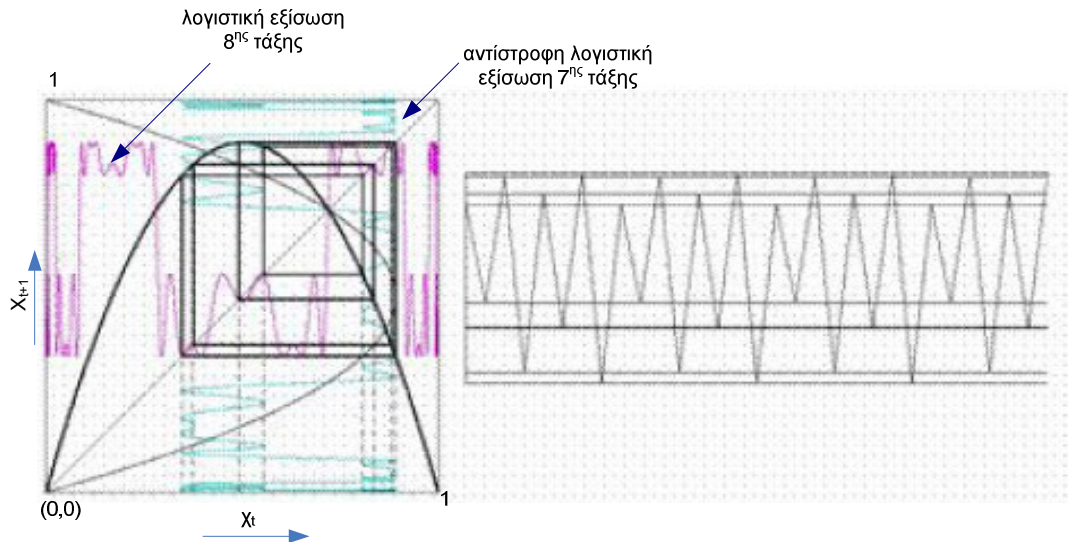
Σχήμα 5.11: Το λογιστικό και το αντίστροφο μοντέλο για $x_0 = 0.25$, $r = 3.23$ (2^{ης} τάξης δυϊσμός).



Σχήμα 5.12: Ο 4^{ης} τάξης δυϊσμός του λογιστικού μοντέλου

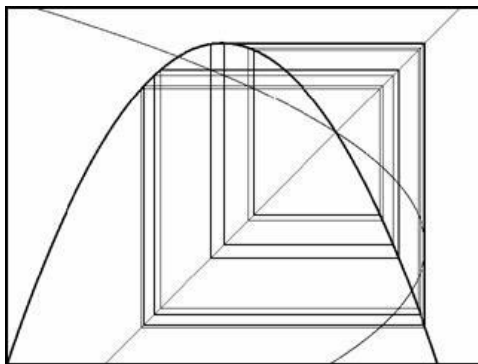
Όπως παρατηρούμε από το γράφημα του x_t σε σχέση με το χρόνο το μοντέλο ταλαντώνεται μεταξύ τεσσάρων σημείων (x_1, x_2, x_3, x_4) (Σχήμα 5.12).

Όταν $3.5644073 < r < 3.5687594$ εμφανίζεται ο $8^{\text{ης}}$ περιόδου διϊσμός. Το Σχήμα 5.13 απεικονίζει την περίπτωση αυτή για μια τιμή της χαστικής παραμέτρου $r = 3.5644$. Η αντίστροφη συνάρτηση δίνεται από το (x_{t+7}, x_t) γράφημα.

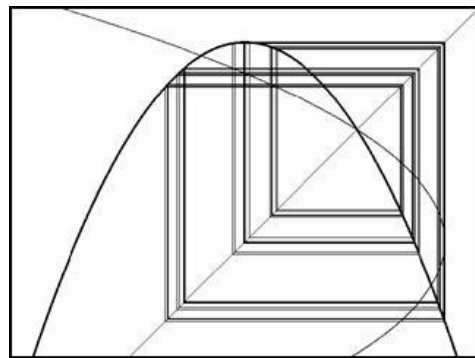


Σχήμα 5.13: Ο $8^{\text{ης}}$ τάξης διϊσμός του λογιστικού μοντέλου $r = 3.5687594$.

Ο $8^{\text{ης}}$ τάξης διϊσμός εκφράζεται με το (x_t, x_{t+8}) γράφημα. Ο $16^{\text{ης}}$ περιόδου διϊσμός απεικονίζεται στο Σχήμα 5.14α όπου η περιοχή των τιμών που καλύπτεται από την παράμετρο r είναι $3.5644073 < r < 3.5687594$. Αντίστοιχα ο $32^{\text{ης}}$ περιόδου διϊσμός απεικονίζεται στο Σχήμα 5.14β όπου η παράμετρος r παίρνει τιμές στην περιοχή $3.5687594 < r < 3.5696919$.



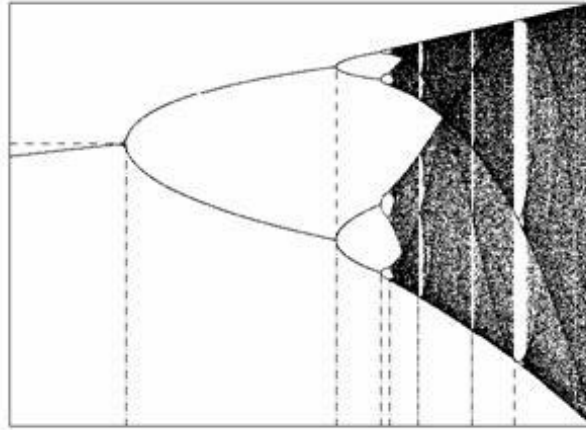
Σχήμα 5.14α: Ο $16^{\text{ης}}$ τάξης διϊσμός του λογιστικού μοντέλου $r = 3.5687594$



Σχήμα 5.14β: Ο $32^{\text{ης}}$ τάξης διϊσμός του λογιστικού μοντέλου $r = 3.56969$

5.3.1 Το διάγραμμα διϊσμού

Ο διπλασιασμός της περιόδου της λογιστικής απεικόνισης παρουσιάζεται σε αυτό που ονομάζουμε χαρακτηριστικά διάγραμμα διϊσμού. Το διάγραμμα διϊσμού είναι ένα δύο διαστάσεων γράφημα (r, x_t) το οποίο εκφράζει την τιμές του x_t ($t \rightarrow \infty$) ως συνάρτηση της παραμέτρου r . Το διάγραμμα διϊσμού της λογιστικής εξίσωσης παρουσιάζεται στο Σχήμα 5.15.



Σχήμα 5.15: Το διάγραμμα δυΐσμού της λογιστικής απεικόνισης

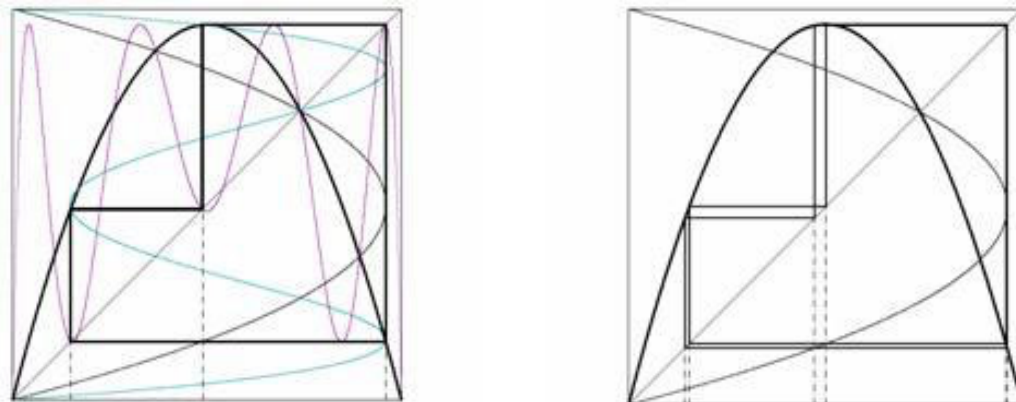
Το πρώτο σημείο δυΐσμού είναι το $\left(r = 3, x = 1 - \frac{1}{r}\right)$, τα δύο επόμενα στο $r = 3.4495$, τα τέσσερα επόμενα στο $r = 3.54409$ και ούτω καθεξής. Οι χαρακτηριστικές τιμές της παραμέτρου r για τις οποίες έχουμε δυΐσμό ακολουθούν τον νόμο του Feigenbaum (κεφάλαιο 3, παρ. 3.3.2). Σύμφωνα λοιπόν με αυτό τον νόμο η ακολουθία των διπλασιασμών της περιόδου η οποία απεικονίζεται στο Σχήμα 5.15 ως ένα δέντρο δυΐσμών είναι μια ποσοτική σύγκλιση των τιμών της παραμέτρου r σε μια παγκόσμια σταθερά $\delta = 4.6992016$ και η οποία περιγράφεται από την σχέση

$$\delta = \frac{r_{i-1} - r_i}{r_i - r_{i+1}}. \quad (5.8)$$

Η ύπαρξη της παραπάνω ακολουθίας δυΐσμών υπονοεί ότι υπάρχει ένας βαθμωτός νόμος ανάπτυξης και ότι μετά από κάθε δυΐσμό λαμβάνει χώρα μια διαδικασία ανασύνταξης με μια σταθερά α . Ο Feigenbaum, [Feig80] και αρκετοί άλλοι πρότειναν μια παγκόσμια συνάρτηση, την:

$$g(x) = -ag\left(g\left(\frac{-x}{\alpha}\right)\right). \quad (5.19)$$

Η Εξ. (5.9) είναι δυνατό να προσεγγιστεί από ένα πολυώνυμο και στη συνέχεια μπορεί να υπολογιστεί η τιμή της παραμέτρου $\alpha = 2.50290787...$ (υπό την προϋπόθεση κανονικοποίησης $g(0) = 1$).



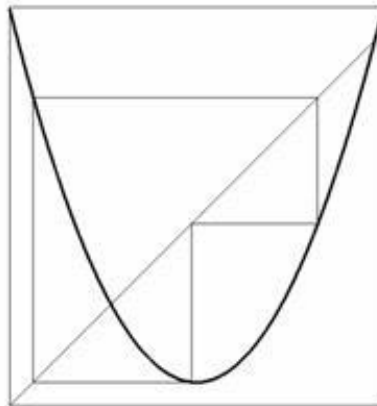
Σχήμα 5.16: Ο 3^{ης} τάξης δυΐσμός της λογιστικής απεικόνισης

Άλλες χρήσιμες ιδιότητες οι οποίες απορρέουν από το Σχήμα 5.16 έχουν να κάνουν με τα τρία παράθυρα τα οποία εμφανίζονται για μια περιοχή χαρακτηριστικών τιμών της παραμέτρου r γύρω από το $r_6 = 3.627$, $r_5 = 3.74$ και $r_3 = 1 + \sqrt{8}$ οι οποίες δίνουν τον 6^{ος}, 5^{ος} και 3^{ος} τάξης δυϊσμό αντίστοιχα. Οι σχετιζόμενοι με αυτές τις τιμές διπλασιασμοί οδηγούν στην 12^{ος}, 10^{ος}, 6^{ος}, και υψηλότερες μορφές δυϊσμού. Στο Σχήμα 5.17 απεικονίζεται ο 3^{ος} τάξης δυϊσμός για $r = 3.845$.

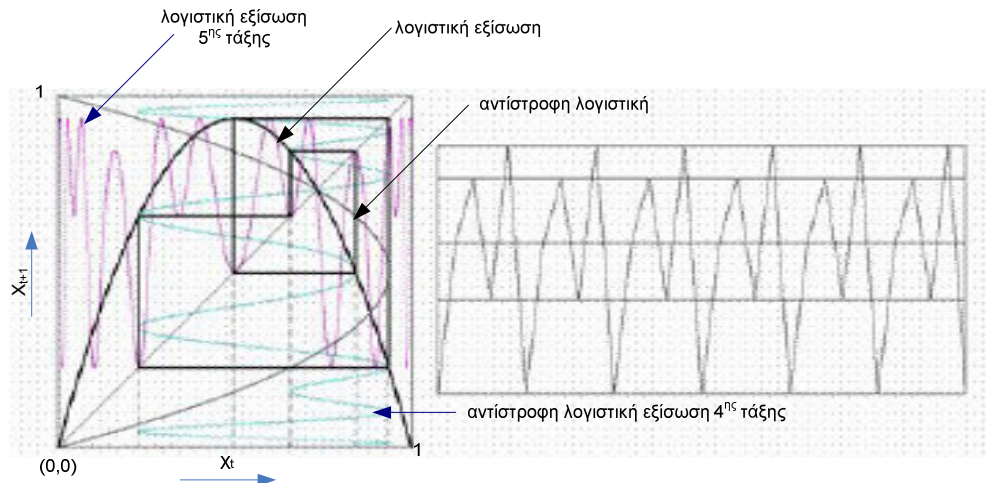
Αν χρησιμοποιήσουμε την αντικατάσταση $c = \frac{r}{2} - \frac{r^2}{4}$ και $z = \frac{1}{2}r(1 - 2r)$ η αρχική μορφή της λογιστικής εξίσωσης γίνεται

$$z_{t+1} = z_t^2 + c \quad (5.12)$$

η οποία είναι μια άλλη βολική μορφή της λογιστικής εξίσωσης. Στην περίπτωση αυτή ο πρώτος δυϊσμός εμφανίζεται όταν $c = -\frac{3}{4}$ το οποίο αντιστοιχεί στο $r = 3$. Ο δεύτερος διπλασιασμός της περιόδου εμφανίζεται στο $c = -\frac{5}{4}$ το οποίο αντιστοιχεί στο $r = 1 + \sqrt{6}$ ενώ αντίστοιχα ο 3^{ος} τάξης δυϊσμός στο $c = -\frac{5}{4}$ το οποίο αντιστοιχεί στο $r = 1 + \sqrt{8}$. Η απεικόνιση του δυϊσμού παρουσιάζεται στο Σχήμα 5.22.



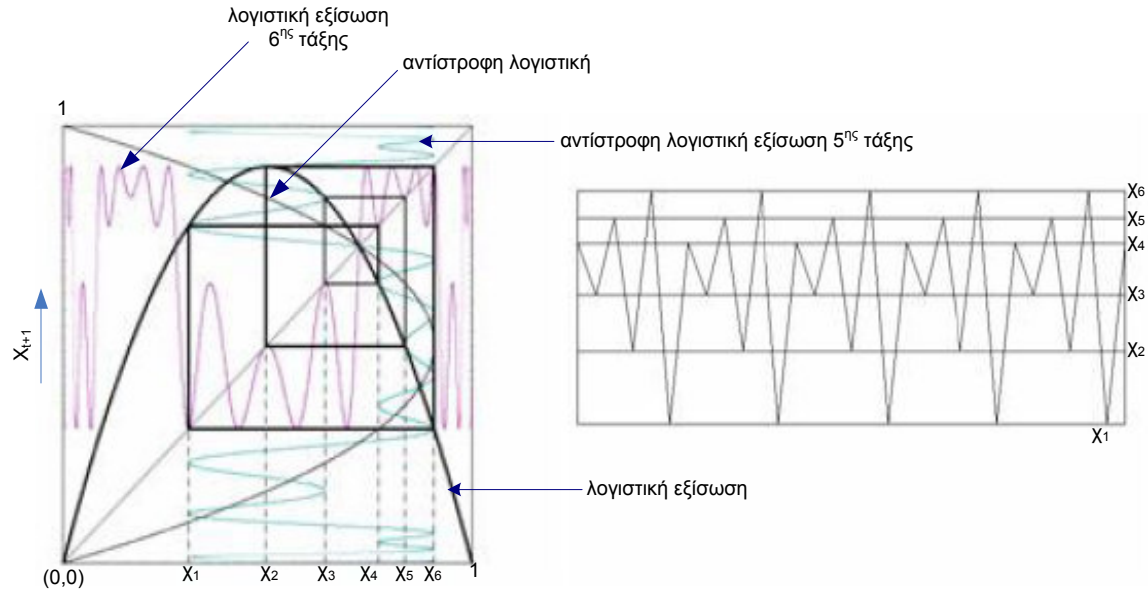
Σχήμα 5.17: Ο 3^{ος} τάξης δυϊσμός του λογιστικού μοντέλου της Εξ. (5.12)



Σχήμα 5.18: Ο 5^{ος} τάξης δυϊσμός του λογιστικού μοντέλου της Εξ. (5.12)

Ο 5^{ης} τάξης δυϊσμός απεικονίζεται στο Σχήμα 5.18. Η αντίστροφη συνάρτηση δίδεται από το διάγραμμα (x_{t+4}, x_t) ενώ ο 5^{ης} τάξης δυϊσμός από το διάγραμμα (x_t, x_{t+5}) .

Αντίστοιχα ο 6^{ης} τάξης δυϊσμός απεικονίζεται στο Σχήμα 5.19 για $r = 3.6267$. Η αντίστροφη συνάντηση δίδεται από το διάγραμμα (x_{t+5}, x_t) ενώ ο 5^{ης} τάξης δυϊσμός από το διάγραμμα (x_t, x_{t+6}) .



Σχήμα 5.19: Ο 6^{ης} τάξης δυϊσμός του λογιστικού μοντέλου της Εξ. (5.12)

Η μέθοδος της χρήσης της αντίστροφης εξίσωσης και της ταυτόχρονης απεικόνισής της με την κανονική εξίσωση ενός χαστικού μοντέλου μπορεί να εφαρμοστεί σε όλα εκείνα τα μοντέλα που η απεικόνιση του διαγράμματος (x_t, x_{t+1}) παρέχει την δυνατότητα γραφικής επίλυσης. Η μέθοδος μπορεί, με μικρό βαθμό πολυπλοκότητας, να μας δώσει τα σημεία δυϊσμού μιας χαστικής εξίσωσης που σε διαφορετική περίπτωση θα ήταν αρκετά δύσκολο ή και αδύνατο πολλές φορές να υπολογιστούν.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

Η ΟΙΚΟΓΕΝΕΙΑ ΤΩΝ GRM1 ΜΟΝΤΕΛΩΝ

Εισαγωγή

Η καινοτομία είναι ο βασικός κινητήριος μοχλός για την οικονομική εξέλιξη και την επέκταση των επιχειρηματικών δραστηριοτήτων μιας εταιρείας. Η παγκοσμιοποίηση των αγορών έχει επιφέρει ένα έντονο ανταγωνισμό μεταξύ των εταιρειών αλλά και των οικονομιών των διαφόρων χωρών. Η ραγδαία εξελισσόμενη τεχνολογία, οι γρήγορα μεταβαλλόμενες αγορές και οι όλο και πιο απαιτητικοί πελάτες ζητούν επιτακτικά την ανάπτυξη υψηλής ποιότητας νέων προϊόντων αποτελεσματικά και αποδοτικά, [BiMa2006]. Όταν μια καινοτομία στον τομέα της τεχνολογίας εισάγεται στην αγορά μιας χώρας ή ακόμα και στη διεθνή αγορά είναι αναγκαίο οι διαχειριστές την καινοτομίας αυτής να έχουν την δυνατότητα να κάνουν προβλέψεις ή εκτιμήσεις για την δυνατότητα διάχυσης της καινοτομίας αυτής, δηλαδή για το αν η καινοτομία αυτή γίνει αποδεκτή από το ευρύ κοινό, [Modi97].

Αρκετές διαδικασίες διάχυσης τεχνολογικών καινοτομιών ακολουθούν καλά ορισμένες συναρτήσεις οι οποίες περιγράφονται στο [ShHa77]. Αρκετά μοντέλα τα οποία βασίζονται σε αυτές τις συναρτήσεις ονομάζονται εξελικτικά μοντέλα (growth models). Ως εκ τούτου η λογιστική συνάρτηση είναι η βάση για αυτά τα μοντέλα καθώς και για εκείνα τα οποία έχουν προταθεί από τους Mansfield [Mans61], Blackman [Black72] και Fisher – Prey, [FiPr74]. Επίσης μια αντίστροφη αρνητική εκθετική συνάρτηση είναι η βάση για το μοντέλο διάχυσης καινοτομιών του Coleman, [ShRa81], [ShRa83], ενώ ένας συνδυασμός του μοντέλου του Coleman και της λογιστικής συνάρτησης είναι βάση για το γενικευμένο μοντέλο που προτείνεται από τους Bass, [Bass69], Mahajan και Shoeman, [MaSh77] και τον Oliver, [Oliv81]. Μια διαφορετική γενίκευση της λογιστικής συνάρτησης οδηγεί στο μοντέλο διάχυσης καινοτομιών που προτάθηκε από τον Sahal, [SaHa77]. Ένα επίσης γενικευμένο μοντέλο που βασίζεται στην λογιστική εξίσωση και στο μοντέλο του Floyd αναφέρεται ως Sharif – Kabir μοντέλο, [Shka78]. Γενικευμένα μοντέλα τα οποία ενσωματώνουν την μεγάλη ευελιξία των

παραπάνω απλών μοντέλων είναι και το NSRL μοντέλο (Nonsymmetric Responding Logistic), [EaMa81] και η οικογένεια των Generalized Rational Model, [Skia87], [Skia87].

Τα παραπάνω γενικευμένα μοντέλα περιγραφής διαδικασιών διάχυσης καινοτομιών έχουν αποτελέσει την βάση για διάφορα άλλα μοντέλα, Horsky [Hors90], Mahajan και Muller [MaMu90], Rogers [Roge95], Dekimpe και Parker [DePa00], Grubler [Grub01], Tacero και Garcia [TaGa03], Taylor και Raymond [TaRa04], Mohamed και Bodger [MoBo05], Liao Zhigao και Liu Ying [LiLi06].

Στην συνέχεια θα μελετήσουμε ένα μοντέλο⁴ το οποίο μπορεί να εκφράσει την ασυμμετρία κατά την διάρκεια της κορύφωσης της διαδικασίας διάχυσης μιας καινοτομίας, πράγμα που αδυνατούν τα πράξουν σχεδόν όλα τα υπόλοιπα προτεινόμενα μοντέλα, [Skia87], [Skia86], [Modi82]. Αντίστοιχη προσπάθεια δεν έχει πραγματοποιηθεί μέχρι σήμερα (δεν υπάρχει στη διεθνή βιβλιογραφία). Το μοντέλο αυτό ανήκει στην οικογένεια των Generalized Rational Model – GRM και παρόλο που η εμφάνισή του στη διεθνή βιβλιογραφία έγινε το 1985, μέχρι σήμερα αποτελεί αντικείμενο μελέτης και αναφοράς για ένα μεγάλο σύνολο επιστημόνων που ασχολούνται με την μαθηματική περιγραφή διαδικασιών διάχυσης καινοτομιών. Ενδεικτικά αναφέρουμε τις ακόλουθες βιβλιογραφικές αναφορές:

- ▶ **A dynamic Diffusion Model With Time – Delay for Color TV in China**, Zhigao Liao, Ying Liu, Min Wu, “*World Journal of Modelling and Simulation*”, Vol. 2 No 2, pp. 73-86, 2006.
- ▶ **An Empirical Study on the Innovation Diffusion Based on Leader- Imitator Structure Model**, YANG Chao-feng, “*CHINA SOFT SCIENCE*”, No.9 P.82-86, 2006.
- ▶ **A Piecewise – Diffusion Model of New Product Demand**, Shun – Chen Niu, to appear in “*Operations Research*”, 2005.
- ▶ **Asset pricing with unforeseen Contingencies**, “*Journal of Financial Economics*”, July, 2005.
- ▶ **A variable asymptote logistic (VAL) model to forecast electricity consumption**, Zaid Mohamed and Pat S. Bodger, “*International Journal of Technology*”, Volume 22, Number 2-3 / pp. 65-72, 2005.
- ▶ **Simulation of the solar hot water systems diffusion: the case of Greece**, D. Sidiras and E. Koukios, “*Renewable Energy*” Elsevier Volume 29, Issue 6 , May 2004, Pages 907-919
- ▶ **An XML Adoption Framework for Electronic Commerce**, Andrew N.K. Chen, Bencjamin Chao, “*Journal of Electronic Commerce Research*”, Vol. 4, No 1, 2003.
- ▶ **The Diffusion Process of Mobile Telephony in Europe**, Milagros Tacero, Julian Perez Garcia, “*Report of Instituto, L.R.Klein – Centro Stone – Madrid*”, December 2003.
- ▶ **The evolution of demand and pricing for internet services**, C. Campi, “*International Journal of Technology, Policy and Management*”, Volume 3, Number 2 pp.161-173, 2003.
- ▶ **Useful Work and Information as Drivers of Growth**, Robert U. Ayres, Benjamin Warr, *Center for the Management of Environmental Resources*, France, 2002.
- ▶ **Forecasting the Diffusion of Photovoltaic Systems in South Europe**, *Technological Forecasting and Social Change*, Vol. 70, pp. 39-65, 2002.
- ▶ **Internet Diffusion vs the Crisis of the New Economy**, Carlo Tesauro, Domenico Campisi, “*Technological Forecasting and Social Change*”, Vol. 27, pp. 39-61, 2002.
- ▶ **Antitrust as Consumer Protection in the new Economy: lessons from the Microsoft Case**, Mark Cooper, “*Hastings Law Review*”, 27 November 2001.
- ▶ **Diffusion, Long Term Patterns and Discontinuities**, Arnulf Grubler “*Technological Forecasting and Social Change*”, Vol. 39, pp. 159-128, 2001.
- ▶ **Modelling the growth of American aggregates based on the metalogistic time function**, Nicholas D. Diamantides, “*Kybernetes*”, *Emerald*, Mar 1997, **Volume: 26 Issue: 2 Page: 136 – 183.**
- ▶ **New Product Diffusion Models in Marketing: A Review and Directions for Research**, Vijay Mahajan, Eitan Muller, Frank M. Bass “*Journal of Marketing*”, Vol. 54, No. 1 (Jan., 1990), pp. 1-26.

⁴ Skiadas H. C., Rompogiannakis I. Apostolou A., Dimotikalis J., “*Chaotic Aspects of Generalized Rational Model*”, Proceedings of XIth International Conference on Applied Stochastic Model and Data Analysis, Brest, France, May 17-20, 2005.

- **Quantitative studies of science a current bibliography**, A. Schubert, “Scientometrics”, Volume 17, Numbers 1-2 / July, 1989, pp 171-180.

6.1 Η οικογένεια των GRM μοντέλων

Η οικογένεια των Γενικευμένων Ρητών Μοντέλων - Generalized Rational Model – GRM, [Skia85] εκφράζεται από την παρακάτω γενική εξίσωση

$$\frac{df}{dt} = b \frac{(F - f)^n}{F^{n-1} [F - (1 - \sigma)f]} f, \quad n = 1, 2, \dots \text{ και } 0 \leq \sigma < \infty \quad (6.1)$$

όπου f ο αριθμός αυτών που αποδέχονται την καινοτομία σε χρόνο t , F είναι ο μέγιστος αριθμός αυτών που μπορούν να υιοθετήσουν την καινοτομία, b μια παράμετρος διάχυσης και σ μια αδιάστατη παράμετρος.

Την Εξ. (6.1) μπορούμε να την γράψουμε και ως

$$\frac{df}{dt} = B(f)(F - f) \text{ με}$$

$$B(f) = b \frac{(F - f)^{n-1}}{F^{n-1} [F - (1 - \sigma)f]} f$$

Η εξίσωση $\frac{df}{dt} = B(f)(F - f)$ δείχνει ότι η επίδραση πάνω στους πιθανούς δέκτες μιας καινοτομίας $(F - f)$ προέρχεται από τον παράγοντα $B(f)$, οποίος χαρακτηρίζει όχι μόνο την ταχύτητα της διάδοσης αλλά και τον τρόπο με τον οποίο εκτυλίσσεται η διαδικασία.

Η περίπτωση $n = 1$

Για $n = 1$ έχουμε ότι $B(f) = b \frac{f}{F - (1 - \sigma)f}$ όπου φαίνεται ότι σε αυτή την περίπτωση ο κύριος παράγοντας επηρεασμού των πιθανών δεκτών είναι οι αποδέκτες f της καινοτομίας. Η αύξηση του αριθμού ή του ποσοστού των δεκτών f αυξάνει τον μεταβαλλόμενο συντελεστή διάδοσης $B(f)$. Εδώ κάποιο πλεονέκτημα που αποκτούν οι αποδέκτες της καινοτομίας ακολουθεί την όλη διαδικασία διάδοσης ενισχυόμενο. Η ενίσχυση αυτή είναι τόσο περισσότερο έντονη όσο η παράμετρος $\sigma \rightarrow 0$.

Όταν $\sigma = 0$ τότε $B(f) = b \frac{f}{F - f}$. Σε αυτή την περίπτωση το $B(f)$ αυξάνει καθώς πληθύνονται οι αποδέκτες f αλλά αυξάνει επίσης καθώς ελαττώνονται συνεχώς κατά την πορεία της διαδικασίας οι απομένοντες πιθανοί αποδέκτες $(F - f)$. Δέκτες και πιθανοί δέκτες δεν αλληλεπιδρούν αλλά επηρεάζουν ανεξάρτητα τη διαδικασία που χαρακτηρίζεται σαν θετική εκθετική. Κάτι τέτοιο μπορεί συνήθως να σημαίνει ότι η αποδοχή της καινοτομίας έδωσε κάποιο πλεονέκτημα στους αποδέκτες f που τους έκανε να αποχωρισθούν από το σύνολο F , ώστε να δημιουργήσουν μια ξεχωριστή ομάδα, που δεν αλληλεπιδρά με τους απομένοντες αποδέκτες $(F - f)$. Μια τέτοια εμφάνιση ξεχωριστής (υπερέχουσας) ομάδας από τους δέκτες υποχρεώνει τους πιθανούς δέκτες $(F - f)$ να αυξήσουν την ταχύτητα αποδοχής τους. Και αυτή η

ταχύτητα φθάνει σε πολύ υψηλά όρια κατά το τέλος της διαδικασίας ώστε να μπορεί τότε πλέον να χαρακτηριστεί ως μαζική αποδοχή.

Όταν $\sigma = 1$ τότε $B(f) = b \frac{f}{F}$. Σε αυτή την περίπτωση η αύξηση του $B(f)$ οφείλεται στην αύξηση των δεκτών f και όχι του σχετικού πλεονεκτήματος που έχει κάθε ένας από αυτούς έναντι των μη αποδεκτών.

Όταν τώρα $0 < \sigma < 1$ το πλεονέκτημα που έχουν οι δέκτες έναντι των μη – δεκτών αυξάνει καθώς αυξάνει το f και όσο περισσότερο το σ πλησιάζει το μηδέν.

6.1.2 Η λύση της διαφορικής εξίσωσης του GRM μοντέλου

Η Εξ. (6.1) της οικογένειας των GRM μοντέλων μπορεί να εκφραστεί ως

$$\frac{F^{n-1}[F - (1 - \sigma)f]}{f(F - f)^n} df = bdt \quad (\alpha.1)$$

ή ισοδύναμα

$$\frac{F^{n-1}(F - f) + \sigma F^{n-1}f}{f(F - f)^n} df = bdt \text{ η οποία δίνει}$$

$$\left[\frac{F^{n-1}}{f(F - f)^{n-1}} + \sigma \frac{F^{n-1}}{(F - f)^n} \right] df = bdt \quad (\alpha.2)$$

Αναπτύσσοντας το πρώτο μέλος της παραπάνω εξίσωσης έχουμε ότι

$$\left[\frac{1}{f} + \frac{1}{F - f} + \frac{F}{(F - f)^2} + \dots + \frac{F^{n-2}}{(F - f)^{n-1}} + \frac{\sigma F^{n-1}}{(F - f)^n} \right] df = bdt \quad (\alpha.3)$$

Ολοκληρώνοντας την παραπάνω εξίσωση έχουμε

$$\ln f - \ln(F - f) + \frac{F}{F - f} + \dots + \frac{F^{n-2}}{(n-2)(F - f)^{n-2}} + \sigma \frac{F^{n-1}}{(n-1)(F - f)^{n-1}} = c + bt \quad (\alpha.4)$$

όπου το c είναι μια σταθερά που η τιμή της προκύπτει θέτοντας $t = 0$ και $n = 2, 3, \dots$. Για την περίπτωση του $n = 1$ εξίσωση (α.2) γίνεται

$$\left(\frac{1}{f} + \frac{\sigma}{F - f} \right) df = bdt \quad (\alpha.5)$$

Ολοκληρώνοντας την παραπάνω εξίσωση (α.4) έχουμε

$$\ln f - \sigma \ln(F - f) = c + bt$$

6.1.3 Η περίπτωση $n = 1$

Στην περίπτωση που στην Εξ. (6.1) θεωρήσουμε ότι $n = 1$ έχουν την εξίσωση περιγραφής του GRM1 μοντέλου με του οποίου την χαοτική συμπεριφορά θα ασχοληθούμε στην συνέχεια. Για $n = 1$ Εξ. (6.1) μας δίνει

$$\frac{df}{dt} = b \frac{f(F-f)}{F-(1-\sigma)f} \quad (6.2)$$

όπου f ο αριθμός αυτών που αποδέχονται την καινοτομία σε χρόνο t , F είναι ο μέγιστος αριθμός αυτών που μπορούν να υιοθετήσουν την καινοτομία, b μια παράμετρος διάχυσης και σ μια αδιάστατη παράμετρος.

Το μοντέλο αυτό έχει ένα σημείο καμπής που κυμαίνεται από 0 έως F καθώς η παράμετρος σ μειώνεται από ∞ σε 0. Μία άλλη σημαντική ιδιότητα της παραμέτρου σ είναι ότι δίνει ένα μέτρο της ασυμμετρίας του μοντέλου. Απόλυτη συμμετρία εμφανίζεται όταν $\sigma = 1$ οπότε η παραπάνω εξίσωση παίρνει τη μορφή:

$$\frac{df}{dt} = bf \left(1 - \frac{f}{F} \right) \quad (6.3)$$

η οποία εκφράζει το γνωστό σε όλους μας λογιστικό μοντέλο, σε διαφορική μορφή. Η Εξ. (6.3) είναι εύκολο να δείξουμε ότι χρησιμοποιώντας τον μετασχηματισμό:

$$\frac{df}{dt} \approx \frac{\Delta f}{\Delta t} = \frac{f_{t+1} - f_t}{(t+1) - t} = f_{t+1} - f_t \quad (6.4)$$

εκφράζεται από την παρακάτω διαφορική εξίσωση:

$$f_{t+1} = f_t + bf_t \left(1 - \frac{f_t}{F} \right). \quad (6.5)$$

Ο δυϊσμός και η χαοτική συμπεριφορά στην περίπτωση του λογιστικού μοντέλου ($\sigma = 1$) εμφανίζονται όταν $2 \leq b \leq 3$. Πολλές εφαρμογές του λογιστικού μοντέλου, σε διάφορους επιστημονικούς κλάδους, έχουν δείξει ότι η παράμετρος b του λογιστικού μοντέλου απλώνεται σε πολύ χαμηλά επίπεδα ακόμη και κάτω από τη μονάδα. Χρησιμοποιώντας δηλαδή το λογιστικό μοντέλο δεν είναι δυνατό να εκφράσουμε την χαοτική συμπεριφορά σε πραγματικές καταστάσεις. Από την άλλη μεριά πραγματικά δεδομένα για πολλές εφαρμογές έχουν δείξει ότι ταλαντώσεις και χαοτική συμπεριφορά εμφανίζονται αρκετά συχνά και ειδικότερα όταν η διαδικασία διάχυσης της καινοτομίας είναι κοντά στο πάνω όριο F . Επίσης, όταν το λογιστικό μοντέλο εφαρμόζεται με την εξίσωση

$$x_{t+1} = bx_t(1-x_t) \quad (6.6)$$

όπου $x_t = \frac{f_t}{F}$, ο δυϊσμός και η χαοτική συμπεριφορά εμφανίζονται όταν $3 < b \leq 4$.

Η χαοτική συμπεριφορά δηλαδή, εμφανίζεται για πολύ υψηλές τιμές του b , το οποίο δεν είναι λογικό σε πραγματικές συνθήκες, [Blac70], [FiPr71], [Mans61], [Oliv81]. Αν θεωρήσουμε την περίπτωση όπου $b = 3$ το σημείο έναρξης του δυϊσμού αντιστοιχεί στο σημείο $x = 1 - \frac{1}{r}$ δηλαδή $x = \frac{2}{3}$ το οποίο αντιστοιχεί στο 66,66% της διαδικασίας εξέλιξης της σιγμοειδούς καμπύλης που περιγράφει την διαδικασία διάχυσης μιας καινοτομίας. Είναι αναγκαίο να σημειώσουμε επίσης ότι σε πολλές περιπτώσεις μη χαοτική ακόμη και

μη ταλαντωτική συμπεριφορά εμφανίζεται όταν η σιγμοειδής καμπύλη πλησιάζει τη μέγιστη τιμή που είναι η μονάδα ή διαφορετικά το 100%.

Βέβαια το μοντέλο της Εξ. (6.5) είναι περισσότερο αξιόπιστο ως ένα διακριτό λογιστικό μοντέλο για να εκφράσει μια συμπεριφορά παρόμοια με αυτή του συνεχούς μοντέλου που προκύπτει από την διαφορική Εξ. (6.3), [Nash76].

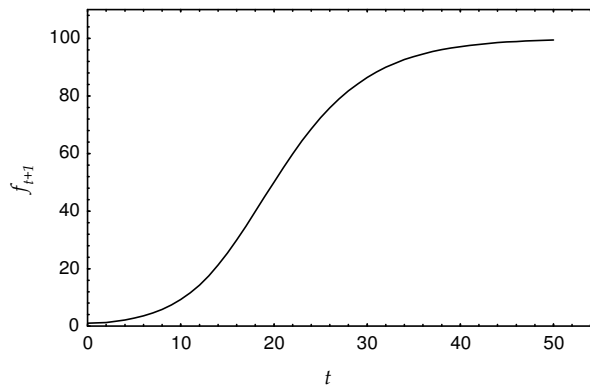
6.2 Το μοντέλο GRM1

Στη συνέχεια θα προσπαθήσουμε να δείξουμε ότι το προτεινόμενο μοντέλο παρουσιάζει χαστική συμπεριφορά για τιμές της παραμέτρου b που είναι πολύ μικρές. Αυτό επιτυγχάνεται με τη βοήθεια της ελαστικής παραμέτρου σ η οποία όπως έχουμε πει δίνει το μέτρο της ασυμμετρίας του μοντέλου.

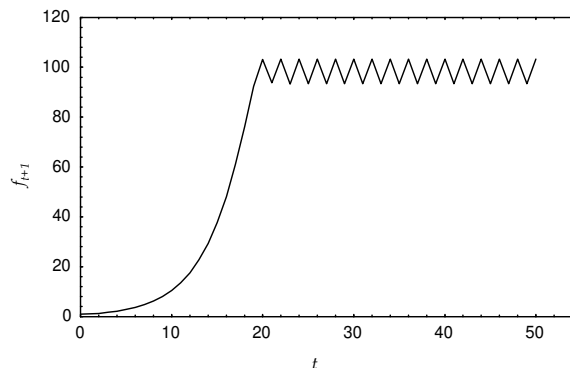
Το μοντέλο που προτείνουμε είναι μια διακριτή μορφή της Εξ. (6.2) και προκύπτει εισάγοντας τον μετασχηματισμό του $\frac{df}{dt}$ της Εξ. (6.4). Με τον τρόπο αυτό προκύπτει η παρακάτω εξίσωση:

$$f_{t+1} = f_t + b \frac{f_t(F - f_t)}{F - (1 - \sigma)f_t} \quad (6.6)$$

Μερικές από τις σημαντικές ιδιότητες της Εξ. (6.6) παρουσιάζονται στα παρακάτω σχήματα. Συγκεκριμένα στο Σχήμα 6.1 το μοντέλο απεικονίζει την κλασσική σιγμοειδή καμπύλη ενώ στο Σχήμα 6.2 έχουμε την εμφάνιση δυϊσμού υπό τη μορφή ταλάντωσης.

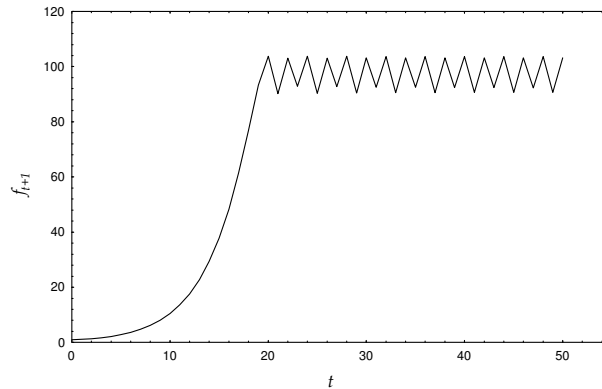


Σχήμα 6.1: Το Μοντέλο GRM1 $F = 100$, $f_0 = 1$, $b = 0.3$ και $\sigma = 2$



Σχήμα 6.2: Το Μοντέλο GRM1 $F = 100$, $f_0 = 1$, $b = 0.3$ και $\sigma = 0.13$

Στο Σχήμα 6.3 απεικονίζεται μία πιο σύνθετη ταλάντωση με τέσσερα επίπεδα διακύμανσης, ενώ στα Σχήματα 6.4 έως 6.6 έχουμε την εμφάνιση χαστικών καταστάσεων. Σε όλες τις περιπτώσεις που παρουσιάζονται η αρχική τιμή της μεταβλητής f είναι $f_0 = 1$, το άνω όριο $F = 100$, το $b = 0.3$ ενώ το σ παίρνει διάφορες τιμές. Η τιμή του $b = 0.3$ επιλέχτηκε τέτοια ώστε να εκφράζει «αληθινές» καταστάσεις. Οι τιμές που παίρνει η παράμετρος b είναι αναγκαίο να οδηγούν σε «πραγματικές» καταστάσεις δηλαδή σε καταστάσεις που η ταλάντωση αρχίζει κατά το στάδιο της ολοκλήρωσης της διαδικασίας διάχυσης της καινοτομίας. Επίσης είναι δεδομένο ότι το σ θέλουμε να παίρνει τιμές κοντά στο μηδέν για να υπάρχει ενίσχυση της διαδικασίας διάχυσης της καινοτομίας. Είναι σημαντικό εδώ να τονίσουμε ότι η αλλαγή της παραμέτρου σ είναι αυτή που μας δίνει τις διαφορετικές απεικονίσεις του μοντέλου που παρουσιάζονται στα διάφορα σχήματα.

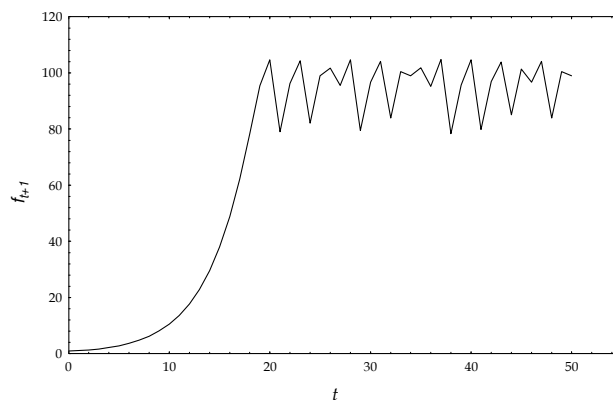


Σχήμα 6.3: Το Μοντέλο GRM1 $F = 100$, $f_0 = 1$, $b = 0.3$ και $\sigma = 0.10$

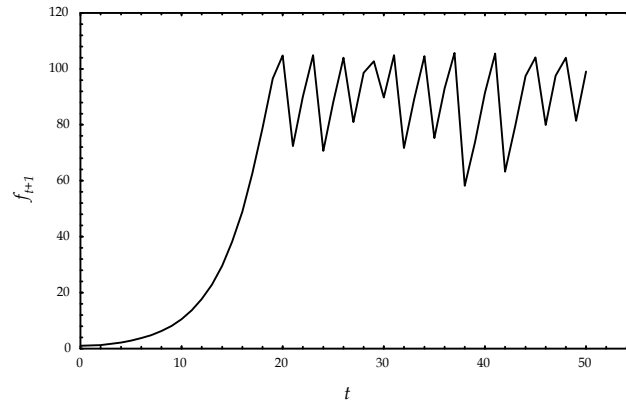
Ένα σημείο στο οποίο αξίζει να αναφερθούμε είναι για ποιες τιμές των παραμέτρων b και σ εμφανίζεται το φαινόμενο του δυϊσμού. Η εμφάνιση της πρώτης ταλάντωσης και η έναρξη του χάους αποτελούν ένα πολύ σημαντικό ζήτημα όταν μελετάμε μοντέλα διάδοσης καινοτομιών. Σύμφωνα με τη θεωρία των χαστικών μοντέλων ο δυϊσμός εμφανίζεται όταν:

$$\frac{df_{t+1}}{dt} = -1 \text{ και} \quad (6.7\alpha)$$

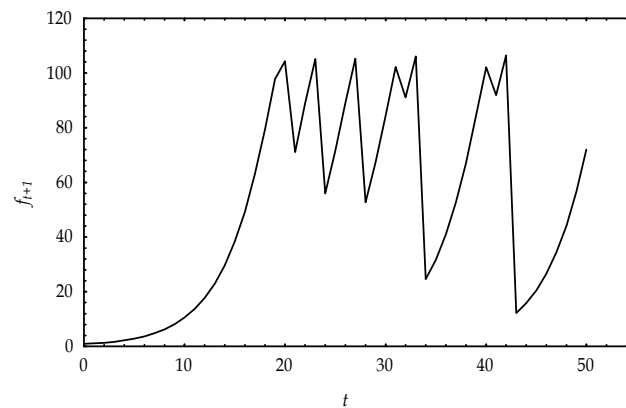
$$f_{t+1} = f_t \quad (6.7\beta)$$



Σχήμα 6.4: Το Μοντέλο GRM1 $F = 100$, $f_0 = 1$, $b = 0.3$ και $\sigma = 0.12$



Σχήμα 6.5: Το Μοντέλο GRM1 $F = 100$, $f_0 = 1$, $b = 0.3$ και $\sigma = 0.09$



Σχήμα 6.6: Το Μοντέλο GRM1 $F = 100$, $f_0 = 1$, $b = 0.3$ και $\sigma = 0.08$

Εφαρμόζοντας τις Εξ. (6.7α) και (6.7β) στην Εξ. (6.6) περνούμε την ακόλουθη σχέση για τα b και σ :

$$\frac{b}{\sigma} = 2 \quad (6.8)$$

Όταν $\frac{b}{\sigma} > 2$ τότε εμφανίζονται οι ταλαντώσεις και η χαστική συμπεριφορά καθώς προοδευτικά αυξάνουμε τον λόγο $\frac{b}{\sigma}$. Είναι επίσης δυνατόν να υπολογιστεί η αναλυτική τιμή για τις τιμές του f_t μετά το πρώτο σημείο διΐσμού και πριν το δεύτερο. Για να το υπολογίσουμε αυτό θεωρούμε ότι $f_{t+2} = f_t$ και παίρνουμε την παρακάτω εξίσωση:

$$f_t = F \frac{(b+2) \pm \sqrt{\frac{b(b+2)(b-2\sigma)}{(b-2\sigma+2)}}}{2(b+\sigma-1)} \quad (6.9)$$

Όταν $\sigma = 1$ οπότε και έχουμε την περίπτωση του λογιστικού μοντέλου ο διΐσμός εμφανίζεται για τιμές $b > 2$. Σε αυτή την περίπτωση η Εξ. (6.9) παίρνει τη μορφή:

$$f_t = F \frac{(b+2) \pm \sqrt{(b+2)(b-2)}}{2b} \quad (6.10)$$

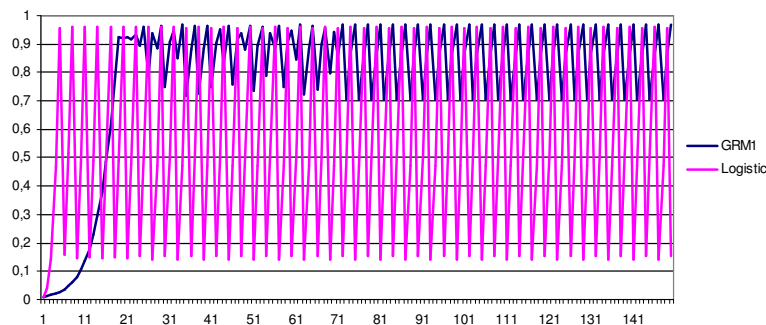
Για τις περιπτώσεις που μας ενδιαφέρουν δηλαδή, όταν το $b > 2\sigma$ (μοντέλο GRM1) στην Εξ. (6.9) ή $b > 2$ (λογιστική εξίσωση) στην Εξ. (6.10) το σύστημα ταλαντώνεται στις τιμές του f_t που περιγράφουν οι παραπάνω εξισώσεις, αντίστοιχα. Καθώς το b γίνεται μεγαλύτερο από τις παραπάνω τιμές, τα επίπεδα ταλάντωσης αυξάνονται από 2 σε 4 αργότερα σε 8 για να καταλήξουμε τελικά σε 2^n επίπεδα, οπότε και έχουμε φτάσει στο χάος (εξέλιξη του φαινομένου του δυΐσμου). Σε διαφορετικές περιπτώσεις, για παράδειγμα για $b < 2\sigma$, το μοντέλο GRM1 εξελίσσεται ως μια σιγμοειδή καμπύλη.

Όπως αναφέρθηκε και στο προηγούμενο κεφάλαιο, ένα βασικό πρόβλημα που εμφανίζεται όταν εφαρμόζουμε το λογιστικό μοντέλο σε μια πραγματική χρονοσειρά είναι ότι, όταν η παράμετρος r της εξίσωσης $x_{t+1} = rx_t(1-x_t)$ παίρνει μια αρκετά μεγάλη τιμή, τα ενδιάμεσα στάδια της διαδικασίας εξέλιξης του μοντέλου έχουν μεγάλη απόσταση μεταξύ τους με αποτέλεσμα να μη είναι δυνατό να έχουμε ένα ρεαλιστικό αποτέλεσμα προσομοίωσης. Για παράδειγμα αν θεωρήσουμε το λογιστικό μοντέλο για $r = 3$ και μια διαδικασία που ακολουθεί το μοντέλο αυτό ξεκινώντας από μια αρχική τιμή $x_0 = 0.10$. Την επόμενη χρονική διαδικασία η δεύτερη τιμή της λογιστικής εξίσωσης θα είναι $x_1 = 0.27$ ενώ αντίστοιχα $x_2 = 0.59$ και $x_3 = 0.7250$. Στην πραγματικότητα υπάρχουν πολύ λίγες διαδικασίες εξέλιξης οι οποίες έχουν την δυνατότητα να καλύψουν την απόσταση από το 10% έως το 74.50% της εξελικτικής διαδικασίας μόνο σε τρία βήματα. Ειδικότερα στις διαδικασίες διάχυσης και διάχυσης καινοτομιών τα βήματα της διαδικασίας είναι πολύ πιο κοντά το ένα με το άλλο αν και τελικά η διαδικασία πλησιάζει πολύ υψηλές τιμές οπότε εμφανίζονται ταλαντώσεις και τελικά η διαδικασία ακολουθεί χαστική συμπεριφορά.

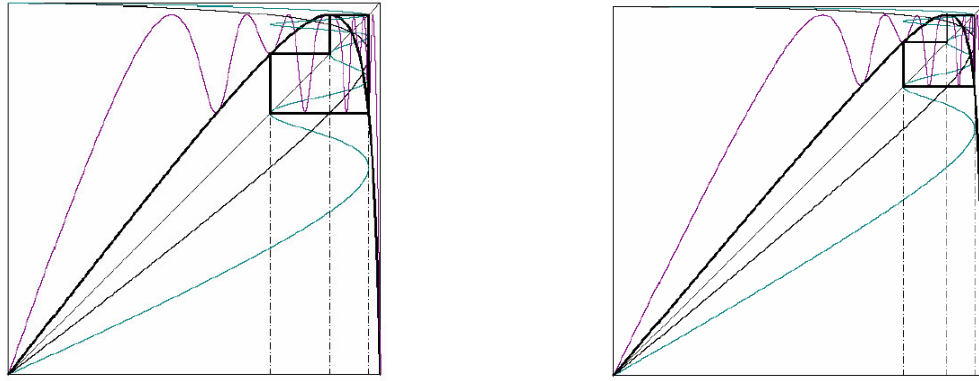
Ένα άλλο σημαντικό πρόβλημα που αντιμετωπίζει το λογιστικό μοντέλο είναι ότι η ταλάντωση που ακολουθεί την διαδικασία δυΐσμου είναι αρκετά μεγάλη για το σύνολο σχεδόν των πραγματικών περιπτώσεων.

Σε αντίθεση με το μοντέλο GRM1 το εύρος της ταλάντωσης μπορεί να μεταβληθεί σε σχέση με την παράμετρο σ του μοντέλου. Για να έχουμε ένα μέτρο σύγκρισης ας θεωρήσουμε τον 3^{ος} τάξης κύκλο του λογιστικού και GRM1 μοντέλου. Κατά την διάρκεια αυτού του κύκλου το λογιστικό μοντέλο ταλαντώνεται μεταξύ των τιμών 0.1494 και 0.9594, το οποίο σημαίνει ότι η ταλάντωση καλύπτει το 80% περίπου του συνολικού διαστήματος τιμών $[0,1]$.

Σε αντίθεση το μοντέλο GRM1 είναι πολύ πιο ευέλικτο. Για τιμές των παραμέτρων $b = 1.3$ και $\sigma = 0.025$ και κατά τη διάρκεια του 3^{ου} κύκλου η μέγιστη τιμή είναι 0.9693 ενώ η ελάχιστη 0.7047 το οποίο σημαίνει ότι το εύρος της ταλάντωσης καλύπτει μόνο το 27% του συνολικού εύρους τιμών της διαδικασίας. Αντίστοιχα για τιμές των παραμέτρων $b = 1.2$ και $\sigma = 0.01175$ η τρίτης τάξης ταλάντωση καλύπτει το μόνο το 19% του συνολικού εύρους τιμών της διαδικασίας (ελάχιστη τιμή 0.7846 και μέγιστη 0.9768). Η διαδικασία του 3^{ου} κύκλου για τις δύο παραπάνω περιπτώσεις του GRM1 μοντέλου απεικονίζονται στο ακόλουθο σχήμα 6.8. Στο σχήμα αυτό χρησιμοποιούμε και την τεχνική την ταυτόχρονη απεικόνισης και της αντίστροφης συνάρτησης για να μπορέσουμε να καθορίσουμε τα σημεία δυΐσμου.



Σχήμα 6.7: Το λογιστικό μοντέλο για $r = 3.845$ και το GRM1 για $b = 1.3$ και $\sigma = 0.025$



Σχήμα 6.8:Ο κύκλος 3^{ης} τάξης του μοντέλου GRM1 για $b = 1.3$ και $\sigma = 0.025$ (αριστερά και πάνω) και για $b = 1.2$ και $\sigma = 0.01175$ (δεξιά)

6.2.1 Καθορισμός των παραμέτρων του μοντέλου

Για να υπολογιστούν οι παράμετροι F , b και σ του GRM1 μοντέλου που μελετάμε αναπτύχθηκε ένας *μη γραμμικός επαναληπτικός αλγόριθμος* με βασικό στόχο την ελαχιστοποίηση του αθροίσματος των τετραγώνων του σφάλματος (Sum of Square of Errors – SSE), το οποίο περιγράφεται από την γνωστή μας σχέση, [Olive64], [PiRu81]:

$$SSE = \sum \varepsilon_t^2 = \sum_{t=1}^n (y_t - f_t)^2 \quad (6.11)$$

όπου ε_t^2 είναι ο παράγοντας σφάλματος της στοχαστικής εξίσωσης

$$y_t = f_t + \sum_{i=1}^m \frac{\partial f_t}{\partial \alpha_i} \Delta \alpha_i + \varepsilon_t. \quad (6.12)$$

Το y_t αντιπροσωπεύει τα πραγματικά δεδομένα για το χρόνο t ενώ το f_t την αντίστοιχη τιμή που υπολογίζεται από το GRM1 μοντέλο της Εξ. (6.6).

Η εκτίμηση των παραμέτρων είναι ιδιαίτερα ευαίσθητη στην ύπαρξη ταλαντώσεων και χαστικών ταλαντώσεων στα πραγματικά δεδομένα. Για περισσότερη ακρίβεια των υπολογισμών της Εξ. (6.12) εφαρμόστηκε η χρήση του υπολογισμού μη γραμμικών προσεγγίσεων του Nash για το διακριτό λογιστικό μοντέλο για τις παραμέτρους b , F και f_0 ενώ διατηρήσαμε σταθερή την παράμετρο σ . Αυτή η παράμετρος αλλάζει σταδιακά καθώς προχωράει η επαναληπτική διαδικασία έως ότου το SSE να ελαχιστοποιηθεί.

Οι αρχικές τιμές μερικών παραγώγων, για δεδομένες αρχικές τιμές των παραμέτρων του μοντέλου, υπολογίζονται από την ακόλουθη εξίσωση:

$$\frac{\partial f_1}{\partial b} = \frac{f_0(F - f_0)}{F - (1 - \sigma)f_0}$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial F} = 1 + b \frac{F^2 - 2Ff_0 + (1 - \sigma)f_0^2}{(F - (1 - \sigma)f_0)^2} \quad (6.13)$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial F} = b\sigma \left(\frac{f_0}{F} \right)^2$$

Μετά τον παραπάνω υπολογισμό των αρχικών τιμών των μερικών παραγώγων, ο επαναληπτικός αλγόριθμος συνεχίζει τον υπολογισμό των παραμέτρων b , F και f_0 χρησιμοποιώντας τις ακόλουθες εξισώσεις:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_{t+1}}{\partial b} &= \frac{\partial f_t}{\partial b} (1 + bk_t) + \frac{f_t(F - f_t)}{F - (1 - \sigma)f_t} \\ \frac{\partial f_{t+1}}{\partial f_0} &= \frac{\partial f_t}{\partial f_0} (1 + bk_t) \\ \frac{\partial f_{t+1}}{\partial F} &= \frac{\partial f_t}{\partial F} (1 + bk_t) + \frac{b\sigma f_t^2}{(F - (1 - \sigma)f_t)^2} \end{aligned} \quad (6.14)$$

όπου

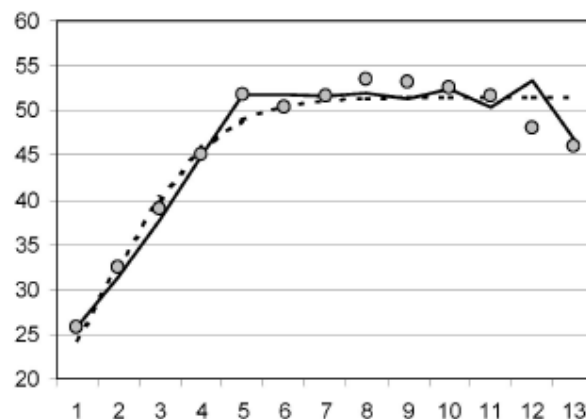
$$k_t = \left(F^2 - 2Ff_t + \frac{(1 - \sigma)f_t}{F - (1 - \sigma)f_t} \right)^2$$

Η διαδικασία επαναλαμβάνεται για τον αναγκαίο αριθμό των βημάτων έως το σφάλμα να συγκλίνει σε μια ελάχιστη τιμή.

6.2.2 Προσομοιώσεις

Τα πραγματικά δεδομένα, τα οποία θα χρησιμοποιηθούν στις προσομοιώσεις, εκφράζουν το συνολικό ποσοστό της παραγωγής σιδήρου με τη μέθοδο του οξυγόνου στις χώρες της Ισπανίας, της Ιαπωνίας και της Ρουμανίας, του Λουξεμβούργου και της Βουλγαρίας, [Pozn83].

Στο Σχήμα 6.9 απεικονίζεται η συνολική παραγωγή σιδήρου στην Ισπανία για ένα διάστημα 13 ετών από το 1968 έως το 1980. Μπορεί τα δεδομένα να είναι για 18 χρόνια αλλά περισσότερο ενδιαφέρον έχει η μελέτη του τελευταίου τμήματος της χρονοσειράς καθώς αυτό το τμήμα δείχνει μια χαρακτηριστική ταλάντωση που είναι και έχει και τη μεγαλύτερη σημασία για τη μελέτη μας. Οι μικροί κύκλοι αντιστοιχούν στα πραγματικά δεδομένα, η διακεκομμένη γραμμή στο λογιστικό μοντέλο και η συνεχής γραμμή στο μοντέλο GRM1.



Σχήμα 6.9: Η παραγωγή σιδήρου με τη μέθοδο του οξυγόνου, Ισπανία (1968-1980)

Πίνακας 6.1

Εκτίμηση των παραμέτρων και του SSE για το λογιστικό και το GRM1 μοντέλο για την Ισπανία (1968 – 1980)						
Μοντέλο	Παράμετροι					
	b	f_0	F	σ (b/σ)	SSE	
Logistic	0.6309	24.373	51.474	-	72.838	
GRM1	0.2331	25.779	51.736	0.084 (2.775)	41.748	

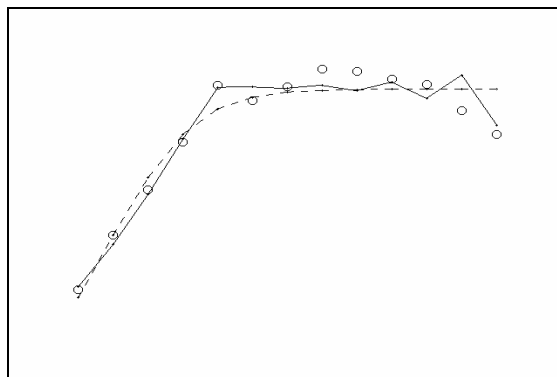
Η εκτίμηση των παραμέτρων για το λογιστικό και το GRM1 μοντέλο καθώς και το υπολογιζόμενο άθροισμα των τετραγώνων του σφάλματος για την περίπτωση της Ισπανίας απεικονίζονται στον Πίνακα 6.1. Η παράμετρος b του λογιστικού μοντέλου είναι αρκετά μεγάλη αλλά πολύ μακριά από την αντίστοιχη τιμή που είναι αναγκαία για την εκκίνηση του δυϊσμού ($b = 2$). Όπως φαίνεται και από το Σχήμα 6.9 το λογιστικό μοντέλο αποτυγχάνει να εκφράσει την πραγματική μεταβολή των πραγματικών δεδομένων. Αντίθετα το GRM1 μοντέλο για μια τιμή της παραμέτρου b μικρότερη από την αντίστοιχη του λογιστικού μοντέλου και

για μια τιμή της παραμέτρου σ ίση με 0.084 η οποία αντιστοιχεί σε μια τιμή $\frac{b}{\sigma} = 2.775 > 2$ (χαστική συμπεριφορά) καταφέρνει να προσεγγίσει με μεγαλύτερη ακρίβεια τα πραγματικά δεδομένα καθώς είναι σε θέση να ακολουθήσει την ταλαντωτική τους συμπεριφορά. Η ικανότητα αυτή του προτεινόμενου μοντέλου τεκμηριώνεται επίσης από την μικρή τιμή του σφάλματος σε σχέση με το λογιστικό μοντέλο.

Η ανάλυση των δεδομένων για την παραγωγή σιδήρου με την μέθοδο του οξυγόνου για μια μεγαλύτερη περίοδο των 17 ετών (1964 – 1980) απεικονίζεται στον Πίνακα 6.2 και στο Σχήμα 6.10 αντίστοιχα.

Πίνακας 6.2

Εκτίμηση των παραμέτρων και του SSE για το λογιστικό και το GRM1 μοντέλο για την Ισπανία (1964 – 1980)						
Μοντέλο	Παράμετροι					
	b	f_0	F	σ (b/σ)	SSE	
Logistic	0.5298	6.971	51.834	-	99.674	
GRM1	0.24253	10.5793	51.9413	0.071 (3.402)	49.441	



Σχήμα 6.10: Η παραγωγή σιδήρου με τη μέθοδο του οξυγόνου, Ισπανία (1964-1980)

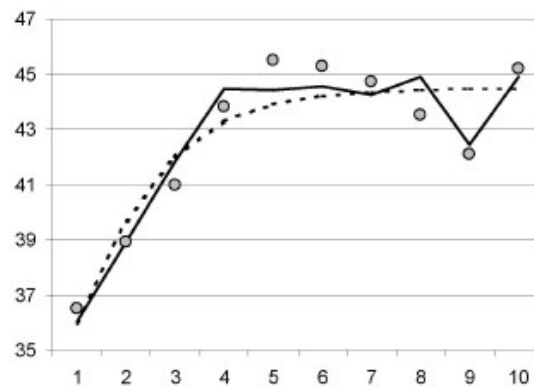
Τα συμπεράσματα και στην περίοδο αυτή των 17 ετών είναι αντίστοιχα με την περίοδο των 14 ετών που αναλύσαμε παραπάνω.

Στο Σχήμα 6.11 απεικονίζεται η περίπτωση της παραγωγής σιδήρου με την μέθοδο του οξυγόνου για την περίπτωση της Ιταλίας από το 1970 έως και το 1980. Αντίστοιχα στον Πίνακα 6.3 παρουσιάζονται οι τιμές των εκτιμώμενων παραμέτρων με βάση την μεθοδολογία που αναπτύξαμε παραπάνω για την περίπτωση του λογιστικού και του GRM1 μοντέλου αντίστοιχα. Όπως και στην προηγούμενη περίπτωση, το λογιστικό μοντέλο αποτυγχάνει να περιγράψει ικανοποιητικά τα πραγματικά δεδομένα. Σε αντιδιαστολή, το GRM1

μοντέλο παρουσιάζει μια μεγάλη ευελιξία στην ταλαντωτική μεταβολή των πραγματικών δεδομένων λειτουργώντας στην χαστική περιοχή αφού $\frac{b}{\sigma} = 3.5292 > 2$.

Πίνακας 6.3

Εκτίμηση των παραμέτρων και του SSE για το λογιστικό και το GRM1 μοντέλο για την Ιταλία (1970 – 1980)						
Μοντέλο	Παράμετροι					
	b	f_0	F	σ	(b/σ)	SSE
Logistic	0.5447	35.957	44.473	-	-	15.330
GRM1	0.08823	36.0402	44.4614	0.025	(3.5292)	7.431

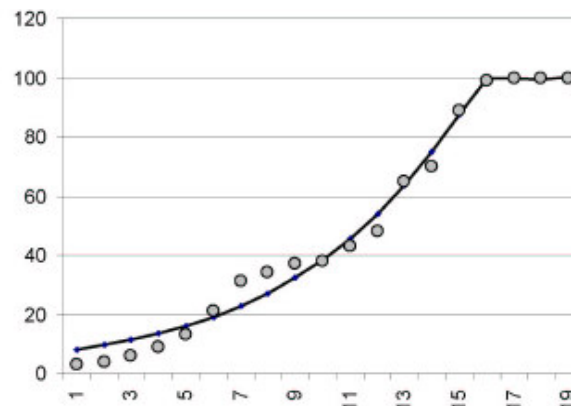


Σχήμα 6.11: Η παραγωγή σιδήρου με τη μέθοδο του οξυγόνου, Ιταλία (1970-1980)

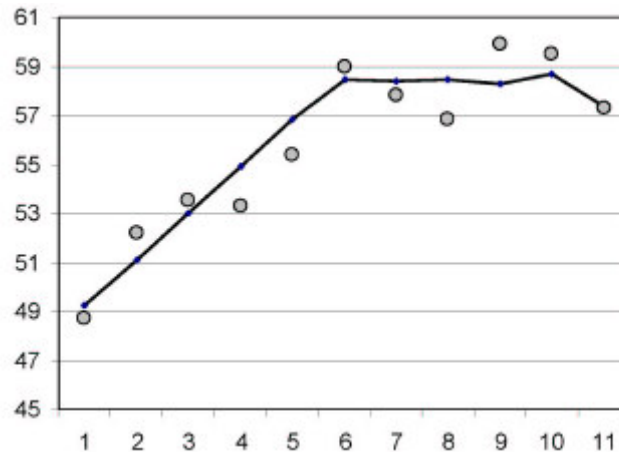
Στο Σχήμα 6.12 απεικονίζεται επίσης η περίπτωση του Λουξεμβούργου ($F = 99.669, f_0 = 7.968, b = 0.1931, \sigma = 0.535$) όπου το μέσο τετραγωνικό σφάλμα εκτιμάται ότι είναι 20.872.

Τέλος στο Σχήμα 6.13 παρουσιάζεται η περίπτωση της Βουλγαρίας για τις ακόλουθες εκτιμώμενες τιμές των παραμέτρων: $F = 58.412, f_0 = 49.2425, b = 0.4046, \sigma = 0.012$ με το εκτιμώμενο σφάλμα να είναι

21.341 και ο λόγος $\frac{b}{\sigma} = 3.3718$ (χαστική περιοχή συμπεριφοράς). Όπως και σε όλες τις προηγούμενες περιπτώσεις, έτσι και στην περίπτωση της Βουλγαρίας η ευελιξία του GRM1 μοντέλου είναι χαρακτηριστική.



Σχήμα 6.12: Η παραγωγή σιδήρου με τη μέθοδο του οξυγόνου, Λουξεμβούργο (1962-1980)



Σχήμα 6.13: Η παραγωγή σιδήρου με τη μέθοδο του οξυγόνου, Βουλγαρία (1962-1980)

Προσπαθώντας να προχωρήσουμε ακόμη περισσότερο, αναπτύχθηκε και ένας δεύτερος αναλυτικός επαναληπτικός αλγόριθμος για τον υπολογισμό των παραμέτρων του GRM1 μοντέλου ο οποίος περιγράφεται από τα ακόλουθα 4 βήματα:

Βήμα 1: Υπολογίζεται το SSE για τις τιμές των παραμέτρων $(f_0, F_0, b_0, \sigma_0)$ που περιγράφονται στο [Skia97]. Η τιμή του f_0 παραμένει σταθερή.

Βήμα 2: Για τις ίδιες τιμές των παραμέτρων (F_0, b_0) υπολογίζεται η τιμή της παραμέτρου σ, σ_1 η οποία κάνει ελάχιστο το SSE .

Βήμα 3: Για τις τιμές των παραμέτρων (b_0, σ_1) υπολογίζεται η τιμή της παραμέτρου F, F_1 που ελαχιστοποιεί το SSE .

Βήμα 4: Για τις τιμές των παραμέτρων (F_1, σ_1) υπολογίζεται η τιμή της παραμέτρου b, b_1 η οποία ελαχιστοποιεί το SSE .

Τα βήματα 2-4 επαναλαμβάνονται ώσπου ο αλγόριθμος να συγκλίνει σε ένα σύνολο παραμέτρων (F, b, σ) . Αυτό σημαίνει ότι οι τιμές των παραμέτρων (F, b, σ) στο βήμα n του αλγορίθμου διαφέρουν ελάχιστα από τις τιμές των παραμέτρων που υπολογίζονται στο βήμα $n+1$ του αλγορίθμου, δηλαδή:

$$|F_t - F_{t+1}| < \varepsilon_0, |b_t - b_{t+1}| < \varepsilon_0, |\sigma_t - \sigma_{t+1}| < \varepsilon_0$$

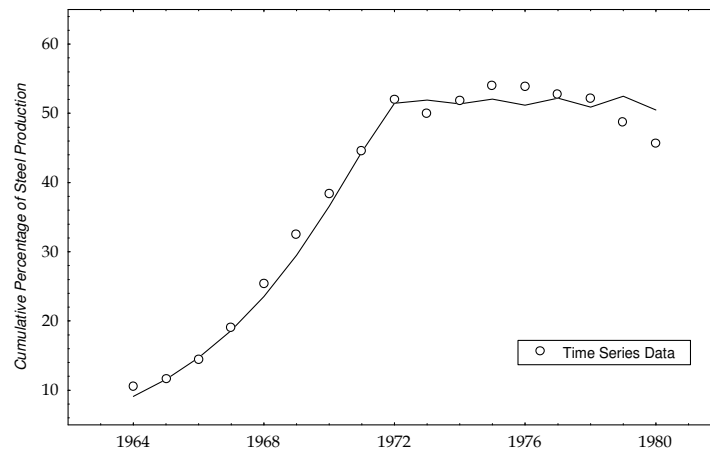
όπου $\varepsilon_0 \ll 1$.

Τα αποτελέσματα της προσομοίωσης του παραπάνω αλγορίθμου για τον προσδιορισμό των παραμέτρων F , b και σ παρουσιάζονται στον Πίνακα 6.4. Η χαστική συμπεριφορά στην περίπτωση της Ρουμανίας και της Ισπανίας εκφράζεται με την τιμή του λόγου b/σ ο οποίος είναι μεγαλύτερος από το όριο του δυισμού. Αντίθετα η περίπτωση της Ιαπωνίας παρουσιάζει ένα πολύ μικρό λόγο b/σ , γεγονός που φανερώνει ότι δεν έχουμε χαστική συμπεριφορά του μοντέλου.

Πίνακας 6.4

Βέλτιστες τιμές των παραμέτρων του μοντέλου GRM1						
Χώρα	Παράμετροι					SSE
	F	f_0	b	σ	b/σ	
Ισπανία (1964-78)	51.850	9.1026	0.2485	0.08	3.106	51.216
Ιταλία (1970-1980)	45.789	35.980	0.083	0.025	3.32	6.234
Ιαπωνία (1975-74)	79.930	3.3792	0.914	2.745	0.33	79.044
Ρουμανία (1969-75)	37.030	5.7773	0.705	0.247	2.85	40.676

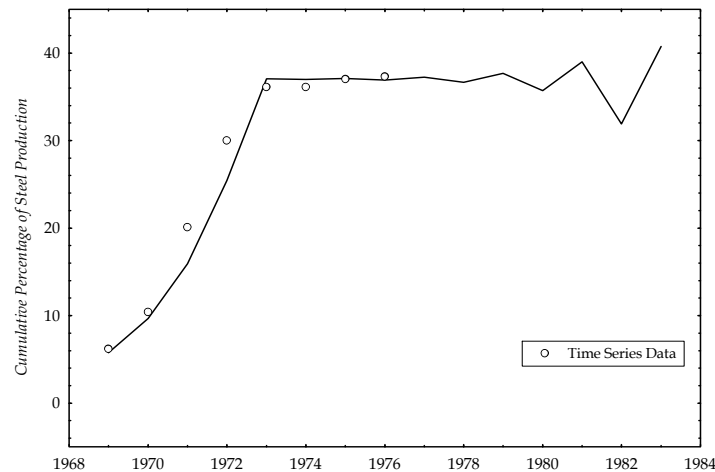
Στο Σχήμα 6.14 παρουσιάζονται τα πραγματικά δεδομένα σε σύγκριση με τα αναλυτικά αποτελέσματα του μοντέλου σύμφωνα με την Εξ. 6.6 και για τις τιμές των παραμέτρων του Πίνακα 6.4. Όπως μπορούμε να δούμε, η ανάπτυξη φαίνεται να ήταν πολύ δύσκολη για τα πρώτα δέκα χρόνια όπου μόνο το 52% της συνολικής παραγωγής σιδήρου είχε αντικατασταθεί με τη νέα μέθοδο παραγωγής, ενώ στη συνέχεια υπήρξε μια περίοδος στασιμότητας. Ο επαναληπτικός αλγόριθμος μας δίνει $F = 51.850$. Αυτό σημαίνει ότι το υπόλοιπο 48.22% αντιστάθηκε στη νέα μέθοδο παραγωγής.



Σχήμα 6.14: Η διαδικασία διάχυσης της καινοτομίας στην Ισπανία

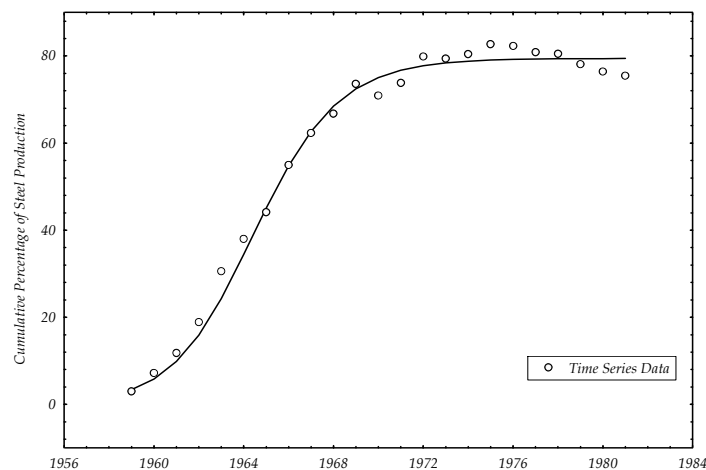
Ο λόγος b/σ είναι ίσος με 3.106 ($b/\sigma > 2$) οπότε έχουμε τη χαστική συμπεριφορά του μοντέλου GRM1 και την εμφάνιση ταλαντώσεων όπως μπορούμε να δούμε και στο Σχήμα 6.11.

Στο Σχήμα 6.15 παρουσιάζονται τα αποτελέσματα για την περίπτωση της Ρουμανίας. Εδώ ο ρυθμός διάχυσης ακολουθεί το μοντέλο GRM1 με τιμές παραμέτρων $F = 37.03$, $b = 0.705$ και $\sigma = 0.247$. Όπως και στην περίπτωση της Ισπανίας, και εδώ ο λόγος b/σ είναι ίσος με 2.85 και για αυτό το λόγο το μοντέλο παρουσιάζει χαστική συμπεριφορά. Ο επαναληπτικός αλγόριθμος δίνει ένα μέγιστο ποσοστό αποδοχής $F = 37.03$, γεγονός που σημαίνει ότι σε αυτή την περίπτωση έχουμε ένα παράδοξο φαινόμενο μιας αρνητικής αντίδρασης ως αποτέλεσμα του συστήματος διαχείρισης και του συγκεντρωτισμού της οικονομίας τη συγκεκριμένη χρονική περίοδο.



Σχήμα 6.15: Η διαδικασία διάχυσης της καινοτομίας στην Ρουμανία

Στο Σχήμα 6.16 παρουσιάζονται τα αποτελέσματα για την περίπτωση της Ιαπωνίας. Ο ρυθμός διάχυσης στην Ιαπωνία ακολουθεί ένα μοντέλο GRM1 με $F = 79.930$, $b = 0.914$ και $\sigma = 2.745$. Σε αυτή την περίπτωση επειδή ο λόγος b/σ είναι ίσος με 0.33, μικρότερος δηλαδή από το 2, το μοντέλο δεν εισέρχεται στην χαστική περιοχή, και έτσι έχουμε μια απλή σιγμοειδή συμπεριφορά.



Σχήμα 6.16: Η διαδικασία διάχυσης της καινοτομίας στην Ιαπωνία

Ο επαναληπτικός αλγόριθμος δίνει ένα πολύ υψηλό ποσοστό αποδοχής ($F = 80\%$), το οποίο επιτυγχάνεται μέχρι το έτος 1974. Στη συνέχεια παρατηρούμε μια μικρή πτώση του ποσοστού απόδοσης, το οποίο μπορεί να οφείλεται στις κακές συνθήκες που δημιουργήθηκαν λόγω της πετρελαϊκής κρίσης.

Συμπερασματικά λοιπόν μπορούμε να πούμε ότι το μοντέλο GRM1 που προτάθηκε και του οποίου η συμπεριφορά αναλύθηκε με βάση τα πραγματικά δεδομένα για την διάχυση της καινοτομίας της παραγωγής σιδήρου σε διάφορες χώρες στις περιπτώσεις της χαστικής συμπεριφοράς του παρουσίασε μεγάλη ευελιξία στην προσέγγιση των πραγματικών δεδομένων κατά το στάδιο της κορύφωσης της διαδικασίας διάχυσης σε σχέση με το κλασικό λογιστικό μοντέλο.

6.3 Έλεγχος χαστικών συστημάτων

Οι μέθοδοι για τον έλεγχο του χάους χωρίζονται σε δύο βασικές κατηγορίες:

- i. Μέθοδοι κλειστού βρόγχου ή ανάδρασης
(Closed loop or feedback methods)
- ii. Μέθοδοι ανοικτού βρόγχου ή μη ανάδρασης
(Open loop or non feedback methods)

Η πρώτη κατηγορία περιλαμβάνει μεθόδους στις οποίες η διαδικασία ελέγχου βασίζεται στην επιλογή και εφαρμογή κάποιας διαταραχής η οποία γίνεται με βάση τη γνώση της κατάστασης του συστήματος. Οι μέθοδοι αυτές προσανατολίζονται στον έλεγχο ενός συστήματος του οποίου η δυναμική είναι προδιαγεγραμμένη. Σε αυτή την κατηγορία ανήκει και η μέθοδος OGY, [OGY90, OGY90a] στην οποία θα αναφερθούμε αναλυτικότερα παρακάτω. Άλλες μέθοδοι έχουν περιγραφεί από τον Hunt ([Hunt91]), τον Showalter ([PeGa93]) η μέθοδος του Huebler ([PIHu90]), και η μέθοδος που αναπτύχθηκε από τον Pyragas ([Pyr94]), η οποία βασίζεται στην εφαρμογή μιας ανάδρασης με χρονική υστέρηση σε κάποια από τις μεταβλητές του συστήματος. Όλες οι παραπάνω μέθοδοι είναι ανεξάρτητες του μοντέλου, με την έννοια ότι η γνώση του συστήματος, που είναι απαραίτητη για να επιλέξουμε τη διαταραχή, μπορεί να προκύψει από απλή παρατήρηση του συστήματος για ένα κατάλληλο χρόνο παρατήρησης.

Η δεύτερη κατηγορία περιλαμβάνει μεθόδους οι οποίες θεωρούν την επίδραση μιας εξωτερικής διαταραχής (ανεξάρτητης της γνώσης της πραγματικής δυναμικής του συστήματος) στην εξέλιξη του συστήματος. Περιοδικές [LiPe90], ή στοχαστικές [BrGo91], διαταραχές μπορούν να προκαλέσουν δραστικές αλλαγές στην δυναμική του χαστικού συστήματος και τελικά να οδηγήσουν σε μια κατάσταση ισορροπίας κάποια περιοδική συμπεριφορά. Αυτές οι μέθοδοι, γενικά, περιορίζονται από το γεγονός ότι η δράση τους δεν μπορεί να προαποφασίσει το στόχο, δηλαδή η τελική περιοδική κατάσταση δεν μπορεί να αποφασιστεί από αυτόν που εφαρμόζει την διαδικασία ελέγχου.

6.3.1 Η μέθοδος OGY

6.3.1.1 Η βασική ιδέα

Εκτός από την ύπαρξη του χάους σε ένα μεγάλο αριθμό φυσικών διεργασιών, το χάος μπορεί να εμφανιστεί επειδή κάποιος μπορεί να επιθυμεί να σχεδιάσει ένα φυσικό, βιολογικό, χημικό, οικονομικό σύστημα ή να σχεδιάσει ένα βιομηχανικό πλάνο το οποίο να συμπεριφέρεται με χαστικό τρόπο. Η ιδέα των Ott, Grebogi και York βασίζεται στο ότι το χάος μπορεί στην πραγματικότητα να είναι επιθυμητό οπότε μπορεί να ελεγχθεί χρησιμοποιώντας μικρές διαταραχές σε κάποιες προσβάσιμες παραμέτρους ή σε κάποιες δυναμικές μεταβλητές του συστήματος.

Το κλειδί στην διαδικασία ελέγχου του χάους είναι η παρατήρηση ότι ένα χαστικό σύστημα στο οποίο υφίσταται η εξέλιξη μιας χαστικής διαδικασίας, αποτελείται από ένα μεγάλο αριθμό μη ευσταθείς, περιοδικές τροχιές (μικρής περιόδου). Επιπλέον λόγω της εργοδικότητας η τροχιά της διαδικασίας εξέλιξης του συστήματος επισκέπτεται ή προσεγγίζει την γειτονική περιοχή κάθε μιας από αυτές τις περιοδικές τροχιές. Κάποιες βέβαια από αυτές τις περιοδικές τροχιές μπορεί να αντιστοιχούν σε κάποια επιθυμητή παράσταση του συστήματος σύμφωνα με κάποιο κριτήριο.

Το δεύτερο δομικό στοιχείο είναι η κατανόηση του γεγονότος ότι στο χάος ενώ είναι δεδομένη η ευαισθητή εξάρτηση σε μικρές αλλαγές της τρέχουσας κατάστασης με αποτέλεσμα να μην υπάρχει δυνατότητα πρόβλεψης για μεγάλο χρόνο, από την άλλη μεριά αυτό συνεπάγεται ότι η συμπεριφορά του συστήματος μπορεί να μεταβληθεί χρησιμοποιώντας μικρές διαταραχές. Συνεπώς η δυνατότητα προσέγγισης ενός χαστικού συστήματος σε πολλές διαφορετικές περιοδικές τροχιές, συνδυαζόμενη με την ευαισθησία του συστήματος στις μικρές διαταραχές, δίνει την δυνατότητα για την εφαρμογή διαδικασιών ελέγχου και για την δυνατότητα κατάλληλου χειρισμού των χαστικών διαδικασιών.

Συγκεκριμένα η προσέγγιση της μεθόδου OGY έχει ως εξής:

- Αρχικά καθορίζονται κάποιες από τις μη ευσταθείς μικρής περιόδου περιοδικές τροχιές οι οποίες συμπεριλαμβάνονται μέσα στο χαστικό σύνολο.

- Εξετάζεται η θέση και η ευστάθεια αυτών των τροχιών και επιλέγεται μια η οποία προσεγγίζει την επιθυμητή κατάσταση του συστήματος.
- Εφαρμόζεται μια διαδικασία ελέγχου για να κάνει ευσταθή την επιθυμητή περιοδική τροχιά.

Ωστόσο όλα αυτά μπορούν να γίνουν από δεδομένα, χρησιμοποιώντας μη γραμμική ανάλυση των χρονοσειρών των παρατηρήσεων, κατανοώντας έτσι το σύστημα. Αυτό είναι πολύ σημαντικό αφού τα χαστικά συστήματα είναι αρκετά πολύπλοκα και η ακριβής γνώση των εξισώσεων των διαδικασιών τους δεν είναι πάντα δεδομένη.

6.3.1.2 Μια μονοδιάστατη εφαρμογή

Θεωρούμε το λογιστικό μοντέλο

$$x_{n+1} = f(x_n, r) = rx_n(1 - x_n) \quad (6.15)$$

όπου $x \in [0,1]$ και το r είναι η παράμετρος ελέγχου. Όπως έχουμε δει και στην ανάλυση του συγκεκριμένου μοντέλου σε προηγούμενο κεφάλαιο (παράγραφος 3.5.1 και 3.5.2) το χάος εκδηλώνεται διαμέσου του περιοδικού διπλασιασμού της ρίζας δυϊσμού. Έτσι για $0 < r < 1$ η ασυμπτωτική κατάσταση της απεικόνισης (ή ο ελκυστής της απεικόνισης) είναι το $x=0$. Για $1 < r < 3$ ο ελκυστής είναι ένα μη μηδενικό σταθερό σημείο $x^* = 1 - \frac{1}{r}$, ενώ για $3 < r < 1 + \sqrt{6}$ αυτό το σημείο είναι μη ευσταθές και ο ελκυστής είναι μια ευσταθής τροχιά περιόδου-2. Καθώς το r αυξάνει, μια σειρά από διπλασιασμούς της περιόδου – δυϊσμοί συμβαίνουν όπου συνεχόμενες τροχιές με διπλασιασμένη περίοδο γίνονται ευσταθείς. Ο διπλασιασμός της περιόδου συσσωρεύεται σαν καταρράκτης στο σημείο $r = 3.57$ μετά το οποίο έχουμε την εμφάνιση χάους.

Θεωρούμε την περίπτωση $r = 3.8$ όπου το σύστημα είναι ξεκάθαρα χαστικό. Όπως έχουμε ήδη αναφέρει ένα σημαντικό χαρακτηριστικό ενός χαστικού ελκυστή είναι ότι υπάρχει ένας μη πεπερασμένος αριθμός μη ευσταθών περιοδικών τροχιών ενσωματωμένων μέσα σε αυτόν. Για παράδειγμα, υπάρχουν ένα κρίσιμο σημείο $x^* = 0.7368$ και μια ακολουθία (τροχιά) $x(1) = 0.7368$ και $x(2) = 0.8894$ όπου $x(1) = f(x(2))$ και $x(2) = f(x(1))$.

Υποθέτουμε τώρα ότι θέλουμε να αποφύγουμε το χάος στην περίπτωση $r = 3.8$. Συγκεκριμένα θέλουμε οι τροχιές που είναι αποτέλεσμα μιας τυχαίας επιλεγμένης αρχικής συνθήκης x_0 να βρίσκονται όσο πιο κοντά γίνεται στην ακολουθία (τροχιά) περιόδου-2 υποθέτοντας ότι αυτή η ακολουθία δίνει την καλύτερη επιθυμητή κατάσταση του συστήματος. Φυσικά έχουμε την δυνατότητα να επιλέξουμε την επιθυμητή κατάσταση να είναι οποιαδήποτε από τις άπειρες μη ευσταθείς περιοδικές ακολουθίες. Υποθέτουμε ότι η παράμετρος r μπορεί να μεταβάλλεται με μικρή απόκλιση γύρω από την τιμή $r_0 = 3.8$. Συγκεκριμένα μπορεί να παίρνει τιμές σε μια περιοχή $[r_0 - \delta, r_0 + \delta]$ όπου $\delta \ll 1$. Λόγω της φύσης των χαστικών ελκυστών, μια τροχιά που ξεκινά από μια αυθαίρετη τιμή x_0 θα πέσει, με πιθανότητα ένα, σε μια γειτονική περιοχή της επιθυμητής τροχιάς περιόδου-2 λίγο αργότερα. Η τροχιά θα αποκλίνει γρήγορα από την ακολουθία περιόδου-2 αν δεν επεμβούμε. Σκοπός μας είναι να καθορίσουμε την μεταβολή της παραμέτρου ελέγχου έτσι ώστε η τροχιά να παραμείνει στην γειτονική περιοχή της ακολουθίας περιόδου-2 όσο χρόνο εφαρμόζουμε την διαδικασία ελέγχου. Γενικά οι μικρές διαταραχές παραμέτρων είναι χρονικά εξαρτημένες. Είναι αναγκαίο να δώσουμε έμφαση στο ότι είναι σημαντικό να εφαρμόζουμε μόνο μικρές διαταραχές παραμέτρων. Αν μεγάλες διαταραχές παραμέτρων ήταν επιτρεπτές, θα μπορούσαμε να εξαφανίσουμε το χάος μεταβάλλοντας το r από το 3.8 στο 2.0 για παράδειγμα. Τέτοιες αλλαγές όμως δεν έχουν ενδιαφέρον.

Ο λογιστικός χάρτης σε μια γειτονική περιοχή μιας περιοδικής τροχιάς μπορεί να προσεγγιστεί από μια γραμμική εξίσωση διευρυμένη γύρω από την περιοδική τροχιά. Σημειώνουμε εδώ ότι η τροχιά στόχος περιόδου- m μπορεί να ελεγχθεί σαν $x(i)$, $i = 1, 2, \dots, m$ όπου $x(i+1) = f(x(i))$ και $x(m+1) = x(1)$. Υποθέτουμε τώρα τη χρονική στιγμή n η τροχιά πέφτει μέσα στη γειτονική περιοχή της συνιστώσας i της

τροχιάς περιόδου- m . Η γραμμική μορφή του μοντέλου σε μια γειτονική περιοχή της $i+1$ συνιστώσας θα είναι τότε:

$$\begin{aligned} x_{n+1} - x(i+1) &= \frac{\partial f}{\partial x} [x_n - x(i)] + \frac{\partial f}{\partial r} \Delta r_n \\ &= r_0 [1 - 2x(i)] [x_n - x(i)] + x(i) [1 - x(i)] \Delta r_n \end{aligned} \quad (6.16)$$

όπου οι μερικές παράγωγοι υπολογίζονται στο $x = x(i)$ και $r = r_0$. Απαιτούμε το x_{n+1} να παραμείνει σε μια γειτονική περιοχή του $x(i+1)$ οπότε θέτουμε $x_{n+1} - x(i+1) = 0$, το οποίο μας δίνει

$$\Delta r_n = r_0 \frac{[2x(i) - 1][x_n - x(i)]}{x(i)[1 - x(i)]} \quad (6.17)$$

Η Εξ. (6.17) ισχύει μόνο όταν η τροχιά x_n μπαίνει σε μια μικρή γειτονική περιοχή της περιόδου- m ακολουθίας, δηλαδή όταν $|x_n - x(i)| \ll 1$, και ως εκ τούτου η απαιτούμενη παράμετρος διαταραχής Δr_n είναι μικρή. Έστω το μήκος ενός μικρού διαστήματος το οποίο ορίζει τη γειτονική περιοχή γύρω από κάθε συνιστώσα της περιόδου- m τροχιάς να είναι 2ε . Γενικά, η απαιτούμενη μέγιστη παράμετρος διαταραχής δ είναι ανάλογη του ε . Οπότε το ε μπορεί να επιλεγεί να είναι αυθαίρετα μικρό, οπότε και το δ μπορεί να γίνει αυθαίρετα μικρό. Όπως θα δούμε παρακάτω, ο μέσος χρόνος μετάβασης πριν μια τροχιά μπει σε μια μικρή γειτονική περιοχή της περιοδικής τροχιάς στόχου εξαρτάται από το ε (ή το δ). Όταν η τροχιά είναι μακριά από τη γειτονία της περιοδικής τροχιάς στόχου δεν μπορούμε να εφαρμόσουμε καμιά διαταραχή και το σύστημα εξελίσσεται κανονικά από την αρχική του τιμή r_0 . Έτσι θέτουμε $\Delta r_n = 0$ όταν $\Delta r_n > \delta$. Θα πρέπει να σημειωθεί εδώ ότι η παράμετρος διαταραχής Δr_n εξαρτάται από το x_n και είναι και χρονικά εξαρτώμενη.

Η παραπάνω μέθοδος ελέγχου μιας τροχιάς είναι αρκετά προσαρμοστική όσον αφορά στη σταθεροποίηση διαφορετικών περιοδικών τροχιών σε διαφορετικές χρονικές στιγμές. Υποθέτουμε ότι αρχικά θέλουμε να κάνουμε ευσταθή μια χαστική τροχιά γύρω από την τροχιά περιόδου-2. Στη συνέχεια, ίσως να θέλουμε να κάνουμε ευσταθές το σταθερό σημείο του λογιστικού χάρτη, υποθέτοντας ότι το σταθερό σημείο θα αντιστοιχεί σε καλύτερη απόδοση του συστήματος. Για να πετύχουμε αυτή την αλλαγή στη διαδικασία ελέγχου, απλά σταματάμε την παράμετρο ελέγχου που αντιστοιχεί στην τροχιά περιόδου-2. Χωρίς την ύπαρξη ελέγχου η τροχιά θα αποκλίνει από την τροχιά περιόδου-2 εκθετικά. Αφήνουμε το σύστημα να εξελιχθεί για την τιμή της παραμέτρου ελέγχου ίση με r_0 . Λόγω της φύσης του χάους μετά από λίγο χρόνο η χαστική τροχιά θα εισέλθει σε μια γειτονική περιοχή του σταθερού σημείου. Αυτή τη χρονική στιγμή μπορούμε να ενεργοποιήσουμε ένα σύνολο παραμέτρων διαταραχής για το σταθερό σημείο και η τροχιά να σταθεροποιηθεί γύρω από το σταθερό σημείο, [Lai94].

Στην περίπτωση παρουσίας θορύβου, η τροχιά που προσπαθούμε να ελέγξουμε μπορεί περιστασιακά να βρεθεί έξω από τη γειτονική περιοχή της περιοδικής τροχιάς. Αν συμβεί κάτι τέτοιο, σταματάμε να εφαρμόζουμε την παράμετρο διαταραχής και αφήνουμε το σύστημα να εξελιχθεί από μόνο του. Με πιθανότητα ένα η χαστική τροχιά θα μπει πάλι στην γειτονική περιοχή της επιθυμητής περιοδικής τροχιάς και η διαδικασία θα ενεργοποιηθεί και πάλι. Το αποτέλεσμα του θορύβου είναι να μεταβάλει μια ελεγχόμενη περιοδική τροχιά σε μια ασυνέχεια στην οποία οι χαστικές φάσεις (μη ελεγχόμενες τροχιές) διασπείρονται με μορφή στρωμάτων φάσεων (ελεγχόμενων περιοδικών τροχιών), [OGY90a]. Είναι εύκολο να αποδειχθεί ότι το μέσο μήκος των στρωμάτων φάσης αυξάνει καθώς το πλάτος του θορύβου μειώνεται, [Lai94].

Είναι ενδιαφέρον να εξετάσουμε πόσες επαναλήψεις απαιτούνται κατά μέσο όρο για μια χαστική τροχιά η οποία αρχικοποιείται από μια τυχαία επιλεγμένη αρχική συνθήκη, να εισέλθει σε μια γειτονική περιοχή ε της περιοδικής τροχιάς που θεωρούμε στόχο. Όπως καταλαβαίνουμε, όσο μικρότερη είναι η τιμή του ε , τόσο περισσότερες επαναλήψεις θα απαιτούνται. Στη γενική των περιπτώσεων ο μέσος χρόνος μετάβασης (*average transient time*) $\langle \tau \rangle$ πριν ενεργοποιήσουμε τη διαδικασία ελέγχου διάστασης δ είναι

$$\langle \tau \rangle \sim \delta^{-d} \quad (6.18)$$

όπου $d > 0$ είναι ένας εκθέτης κλιμάκωσης. Για ένα χάρτη μιας διάστασης η πιθανότητα μια τροχιά (trajectory) να εισέλθει σε μια γειτονική περιοχή μιας συγκεκριμένης συνιστώσας (συνιστώσα i) μιας περιοδικής τροχιάς δίνεται από τη σχέση:

$$P(\varepsilon) = \int_{x(i)-\varepsilon}^{x(i)+\varepsilon} \rho[x(i)] dx \approx 2\varepsilon \rho[x(i)], \quad (6.19)$$

όπου ρ είναι η συχνότητα με την οποία μια χαστική τροχιά επισκέπτεται μια μικρή γειτονική περιοχή του σημείου x στον ελκυστή. Έχουμε έτσι ότι $\langle \tau \rangle = \frac{1}{P(\varepsilon)} \sim \varepsilon^{-1} \sim \delta^{-1}$ για $d = 1$. Για μεγαλύτερης διάστασης χαστικά συστήματα ο εκθέτης d μπορεί να συσχετιστεί με τις ιδιοτιμές της περιοδικής τροχιάς που συμμετέχει στη διαδικασία ελέγχου.

Ένα βασικό πλεονέκτημα της μεθόδου ελέγχου τους χάους που περιγράψαμε είναι ότι μπορεί να εφαρμοστεί σε πειραματικά συστήματα στα οποία δεν υπάρχει προηγούμενη γνώση του συστήματος. Μια χρονοσειρά μπορεί να βρεθεί μετρώντας μια από τις δυναμικές μεταβλητές του συστήματος και σε συνάρτηση με τη μέθοδο ενσωμάτωσης χρονικής υστέρησης (time delay embedding method), [Take80] η οποία μετασχηματίζει μια βαθμωτή χρονοσειρά σε μια τροχιά στο χώρο-φάσης, είναι αρκετά για να υπολογίσουμε μια επιθυμητή μη ευσταθή περιοδική τροχιά για να εφαρμόσουμε την διαδικασία ελέγχου και τις σχετικές παραμέτρους που απαιτούνται για να υπολογίσουμε την παράμετρο διαταραχής, [OGY90a]. Ένα άλλο επιπλέον πλεονέκτημα της μεθόδου είναι η ευελιξία στην επιλογή της επιθυμητής περιοδικής τροχιάς που θα ελεγχθεί, όπως είδαμε και στην περίπτωση του λογιστικού μοντέλου.

6.3.2 Η διαδικασία ελέγχου για συστήματα δύο διαστάσεων

Η διαδικασία ελέγχου για συστήματα δύο διαστάσεων μπορεί να περιγραφεί αντίστοιχα με τα μονοδιάστατα συστήματα. Υποθέτουμε το ακόλουθο σύστημα

$$x_{n+1} = F(x_n, p) \quad (6.20)$$

όπου $x_n \in R^2$, F είναι μια ομαλή συνάρτηση και $p \in R$ είναι μια εξωτερικά καθοριζόμενη παράμετρος ελέγχου. Περιορίζουμε την παράμετρο διαταραχής να είναι μικρή σύμφωνα με τη σχέση

$$|p - \bar{p}| < \delta \quad (6.21)$$

όπου \bar{p} είναι μια ονομαστική τιμή της παραμέτρου και το $\delta < 1$ ορίζει την περιοχή μεταβολής της παραμέτρου. Θέλουμε να καθορίσουμε την παράμετρο p έτσι ώστε η χαστική τροχιά να γίνεται ευσταθής, να σταθεροποιείται δηλαδή, όταν εισέρχεται σε μια ε -γειτονική περιοχή της τροχιάς που είναι ο στόχος της διαδικασίας ελέγχου.

6.3.2.1 Σταθεροποίηση ενός κρίσιμου σημείου

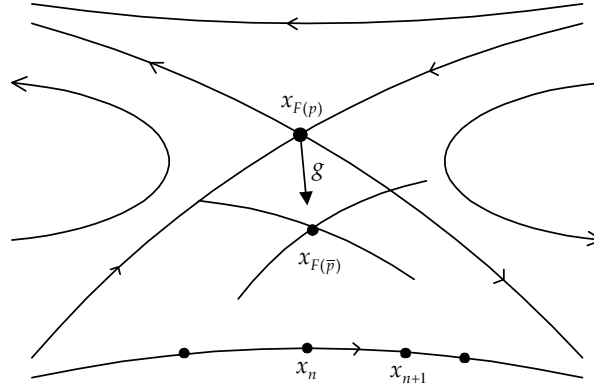
Νόμος ελέγχου: Έστω ότι $x_F(p)$ είναι ένα κρίσιμο σημείο της απεικόνισης $x_{n+1} = F(x_n, p)$ στην ονομαστική τιμή \bar{p} της παραμέτρου. Γενικά, η θέση του κρίσιμου σημείου στο χώρο φάσης εξαρτάται από την τιμή της παραμέτρου ελέγχου p . Κατά την εφαρμογή μιας μικρής διαταραχής Δp θα έχουμε ότι $p = \bar{p} + \Delta p$. Αφού όμως το Δp είναι μικρό περιμένουμε το $x_F(p)$ να είναι κοντά στο $x_F(\bar{p})$. Έτσι έχουμε

$$x_F(p) \approx x_F(\bar{p}) + g \Delta p \quad (6.22)$$

όπου το διάνυσμα g δίνεται από τη σχέση

$$g \equiv \left. \frac{\partial x_F}{\partial p} \right|_{p=\bar{p}} \approx \frac{x_F(p) - x_F(\bar{p})}{\Delta p} \quad (6.23)$$

Το διάνυσμα g απαιτείται να καθοριστεί πριν αναπτυχθεί ο νόμος ελέγχου για την σταθεροποίηση του σημείου $x_F(\bar{p})$.



Σχήμα 6.17: Η κίνηση του μη ευσταθούς κρίσιμου σημείου λόγω της αλλαγής της παραμέτρου p .

Ο πιο απλός τρόπος για να διατυπώσουμε ένα εφαρμόσιμο νόμο ελέγχου είναι να χρησιμοποιήσουμε το γεγονός ότι η δυναμική οποιουδήποτε ομαλού μη γραμμικού συστήματος είναι κατά προσέγγιση γραμμική σε μια μικρή ε -γειτονική περιοχή του κρίσιμου σημείου. Δηλαδή κοντά στο $x_F(\bar{p})$ μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την προσέγγιση του χάρτη

$$[x_{n+1} - x_F(p)] \approx M[x_F(p)] \cdot [x_n - x_F(p)] \quad (6.24)$$

όπου $M[x_F(p)]$ είναι ο 2×2 Jacobian πίνακας του χάρτη $F(x, p)$ υπολογιζόμενος στο σημείο $x_F(p)$ και ο οποίος ορίζεται από τη σχέση

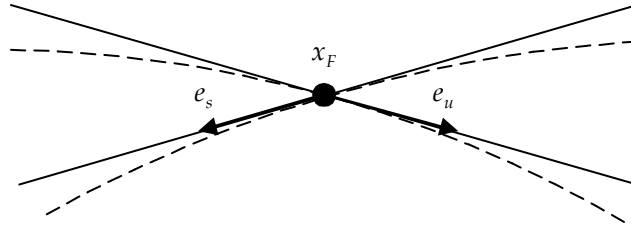
$$M[x_F(p)] = \left. \frac{\partial F}{\partial x} \right|_{x_F(p)} = M[x_F(\bar{p})] + \left. \frac{\partial M}{\partial p} \right|_{p=\bar{p}} \Delta p \quad (6.25)$$

Σημειώνουμε ότι $\Delta p \sim \varepsilon$ και $\|x_n(p) - x_F(p)\| \sim \varepsilon$, όπου ε είναι το μέγεθος της γειτονικής περιοχής στην οποία ισχύει η παραπάνω γραμμική προσέγγιση. Έχουμε λοιπόν από την Εξ. (6.23) ότι $x_F(p) \approx x_F(\bar{p}) + g\Delta p$ και αντικαθιστώντας την μαζί με την Εξ. (6.24) στην Εξ. (6.25) θα έχουμε

$$x_{n+1} - x_F(p) \approx g\Delta p + M[x_F(\bar{p})] \cdot [x_n - x_F(p) - g\Delta p]. \quad (6.26)$$

Στην Εξ. (6.26) ο Jacobian πίνακας M υπολογίζεται στο σημείο $x_F(\bar{p})$ του μη διαταραγμένου συστήματος. Το $x_F(\bar{p})$ είναι μέσα στο χαοτικό ελκυστή, είναι μη ευσταθές, και έχει μια ευσταθή και μια μη ευσταθή συνιστώσα.

Έστω e_s και e_u το ευσταθές και μη ευσταθές μοναδιαίο ιδιοδιάνυσμα αντίστοιχα στο $x_F(\bar{p})$ τα οποία ικανοποιούν την σχέση $e_u^T e_s \neq 0$ είναι δηλαδή μη ορθογώνια (Σχήμα 6.18).

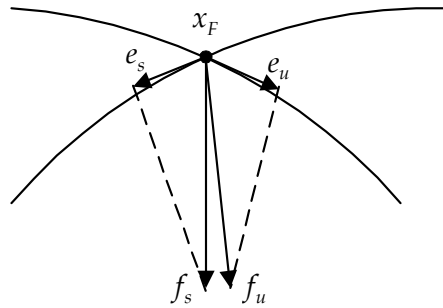


Σχήμα 6.18: Τα μη ορθογώνια ιδιοδιανύσματα γύρω από το κρίσιμο σημείο

Έστω επίσης f_s και f_u δύο μοναδιαία διανύσματα τα οποία ικανοποιούν τις σχέσεις:

$$f_s \cdot e_s = f_u \cdot e_u = 1 \text{ και } f_s \cdot e_u = f_u \cdot e_s = 0$$

από τις οποίες και μπορούν να υπολογιστούν τα διανύσματα f_s και f_u από τα ιδιοδιανύσματα e_s και e_u . Τα διανύσματα f_s και f_u είναι τα contravariant βασικά διανύσματα που σχετίζονται με τα e_s και e_u (Σχήμα 6.19).



Σχήμα 6.19: Τα διανύσματα f_s, f_u σε σχέση με τα ιδιοδιανύσματα e_s και e_u .

Μπορούμε λοιπόν να γράψουμε

$$\begin{bmatrix} f_u & f_s \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} e_u & e_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_u^T \\ f_s^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_u & e_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_u^T e_u & f_u^T e_s \\ f_s^T e_u & f_s^T e_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

και

$$\begin{bmatrix} f_u^T \\ f_s^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_u & e_s \end{bmatrix}^{-1}.$$

Λύνοντας τις παραπάνω εξισώσεις έχουμε

$$\begin{bmatrix} f_{u1} & f_{u2} \\ f_{s1} & f_{s2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_{u1} & e_{s1} \\ e_{u2} & e_{s2} \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{e_{u1}e_{s2} - e_{s1}e_{u2}} \begin{bmatrix} e_{s2} & -e_{s1} \\ -e_{u2} & e_{u1} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$f_{u1} = \frac{e_{s2}}{e_{u1}e_{s2} - e_{s1}e_{u2}} \text{ και } f_{u2} = \frac{-e_{s1}}{e_{u1}e_{s2} - e_{s1}e_{u2}},$$

$$f_{s1} = \frac{-e_{u2}}{e_{u1}e_{s2} - e_{s1}e_{u2}} \text{ και } f_{s2} = \frac{e_{u1}}{e_{u1}e_{s2} - e_{s1}e_{u2}}.$$

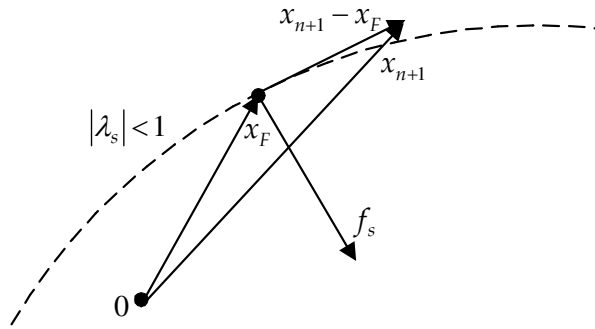
Ο Jacobian πίνακας $M[x_F(\bar{p})]$ μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$M[x_F(p)] = \lambda_u e_u f_u + \lambda_s e_s f_s \quad (6.27)$$

όπου λ_s και λ_u είναι οι ευσταθείς και μη ευσταθείς ιδιοτιμές στις ιδιοκατευθύνσεις e_s και e_u αντίστοιχα.

Όταν η τροχιά στο σημείο x_n εισέρχεται σε μια μικρή ε -γειτονική περιοχή του επιθυμητού σημείου $x_F(p)$ έτσι ώστε να ισχύει η Εξ. (6.24), μια μικρή παράμετρος διαταραχής Δp_n μπορεί να εφαρμοστεί στο χρονικό σημείο n για να κάνει το κρίσιμο σημείο να μετακινηθεί ελάχιστα έτσι ώστε στην επόμενη επανάληψη $n+1$, το x_{n+1} να πέσει στην ευσταθή κατεύθυνσή του $x_F(\bar{p})$. Για το λόγο αυτό επιλέγουμε την παράμετρο διαταραχής Δp_n τέτοια ώστε (Σχήμα 6.20)

$$f_u \cdot [x_{n+1} - x_F(\bar{p})] = 0 \quad (6.28)$$



Σχήμα 6.20: Γραφική αναπαράσταση μιας επανάληψης του χάρτη κοντά στο μη ευσταθές κρίσιμο σημείο. Ο έλεγχος επιτυγχάνεται αλλάζοντας μια παράμετρο του συστήματος έτσι ώστε η προβολή του $x_F - x_{n+1}$ πάνω στο f_u να είναι μηδέν.

Στην περίπτωση που το x_{n+1} πέσει στην ευσταθή κατεύθυνση του $x_F(\bar{p})$ μπορούμε τότε να μηδενίσουμε την διαταραχή ελέγχου και η τροχιά στην επόμενη χρονική στιγμή θα προσεγγίσει το κρίσιμο σημείο με το γεωμετρικό ρυθμό του λ_s . Έτσι για ένα ικανοποιητικά μικρό $[x_n - x_F(\bar{p})]$, μπορούμε να αντικαταστήσουμε την Εξ. (6.26) στην Εξ. (6.28) για να υπολογίσουμε $\Delta p_n = C_n$ με

$$C_n = \frac{\lambda_u f_u \cdot [x_n - x_F(\bar{p})]}{(\lambda_u - 1) f_u \cdot g} \equiv C \cdot [x_n - x_F(\bar{p})] \quad (6.29)$$

Στην παραπάνω εξίσωση υποθέτουμε ότι η βασική συνθήκη $g \cdot f_u \neq 0$ ικανοποιείται, έτσι $C_n \sim |x_n - x_F(\bar{p})|$ το οποίο είναι μικρό. Οι υποθέσεις που κάναμε παραπάνω έχουν εφαρμογή μόνο για μια μικρή γειτονική περιοχή του $x_F(\bar{p})$. Γενικά, μπορούμε να καθορίσουμε την παράμετρο διαταραχής $\Delta p_n = 0$ αν το $|C_n|$ είναι αρκετά μεγάλο, οπότε η περιοχή της παραμέτρου διαταραχής περιορίζεται από την Εξ. (6.21). Δηλαδή πρακτικά μπορούμε να πούμε ότι το Δp_n δίνεται από την σχέση

$$\Delta p_n = \begin{cases} C_n & \text{if } |C_n| \leq \delta \\ 0 & \text{if } |C_n| \geq \delta \end{cases} \quad (6.30)$$

όπου στον ορισμό του C_n στην Εξ. (6.30) δεν είναι αναγκαίο να καθορίσουμε το $|x_n - x_F(p)|$ να είναι μικρό.

Οι Εξ. (6.29) και (6.30) είναι μια από τις διατυπώσεις της μεθόδου OGY για τον έλεγχο του χάους, [OGY90, OGY90a]. Υπάρχουν πολλοί πρακτικοί παράγοντες τους οποίους πρέπει να εξετάσουμε όταν εφαρμόζεται η συγκεκριμένη μέθοδος. Οι βασικότεροι από αυτούς είναι οι παρακάτω:

- ▶ Η κατάσταση ελέγχου είναι πιθανή μόνο στην περίπτωση που η ποσότητα C_n όπως αυτή ορίζεται από την Εξ. (6.30) ικανοποιεί την συνθήκη $C_n < \delta$. Αυτή η συνθήκη μπορεί να παραβλεφθεί όταν το κρίσιμο σημείο του συστήματος είναι τέτοιο που τα διανύσματα g και f_u είναι σχεδόν ορθογώνια μεταξύ τους. Τέτοια κρίσιμα σημεία δεν μπορούν να ελεγχθούν (uncontrollable) χρησιμοποιώντας μικρές διαταραχές. Κατά κανόνα το πλάτος του ελέγχου $|C_n|$ μπορεί να γίνει αυθαίρετα μικρό, οπότε το $|x_n - x_F(\bar{p})|$ μπορεί επίσης να γίνει αυθαίρετα μικρό περιμένοντας την τροχιά x_n να έρθει ικανοποιητικά κοντά στο επιθυμητό σημείο $x_F(\bar{p})$. Οπότε ο μέσος χρόνος αναμονής που απαιτείται για να συμβεί αυτό είναι αρκετά μεγαλύτερος. Μεταξύ του πλάτους της διαταραχής και του μέσου χρόνου αναμονής υπάρχει μια σχέση αντιστρόφως ανάλογη. Υπάρχουν επίσης μη-γραμμικές διαφοροποιήσεις της Εξ. (6.24) οι οποίες είναι τυπικά τετραγωνικές στο $[x_n - x_F(\bar{p})]$. Οι δευτεροβάθμιες διορθώσεις είναι σημαντικές στον υπολογισμό του μέσου χρόνου αναμονής, ο οποίος δεν είναι τίποτα άλλο από το μέσο μήκος της χαστικής μετάβασης που περνά η τροχιά μέχρι να επιτευχθεί ο έλεγχος.
- ▶ Σε πραγματικά συστήματα έχουμε συνήθως την παρουσία θορύβου.
- ▶ Είναι δυνατό, επίσης, να υπάρχουν λάθη στην μέτρηση των καταστάσεων του συστήματος που χρησιμοποιούνται για την αναγνώριση του συστήματος. Οι συντεταγμένες του κρίσιμου σημείου το οποίο θέλουμε να ελέγξουμε μπορεί σε αυτή την περίπτωση να είναι διαφορετικές από τις πραγματικές. Το ίδιο μπορεί να συμβαίνει και με τις ποσότητες f_s, f_u, λ_s και λ_u που απαιτούνται για τον υπολογισμό της παραμέτρου διαταραχής και να περιέχουν και αυτές κάποιο σφάλμα.

6.4 Έλεγχος της χαστικής δυναμικής του GRM1 μοντέλου

6.4.1 Περιγραφή της χαστικής δυναμικής

Στην συνέχεια θα αναπτυχθεί η μεθοδολογία ελέγχου της χαστικής δυναμικής του GRM1 μοντέλου. Ξεκινώντας ως θεωρήσουμε την ακόλουθη μορφή του προτεινόμενου μοντέλου:

$$x_{n+1} = \frac{bx_n(1-x_n)}{1-(1-\sigma)x_n} \quad (6.30)$$

Τα δύο πρώτα σταθερά σημεία της παραπάνω εξίσωσης, τα οποία περιγράφονται ως x^* είναι εκείνα τα σημεία που ικανοποιούν την σχέση

$$x_{n+1} = x_n = x^* \quad (6.31)$$

Αντικαθιστώντας την Εξ. (6.30) στην Εξ. (6.31) προκύπτει η ακόλουθη εξίσωση καθορισμού των σταθερών σημείων:

$$x^* = \frac{bx^*(1-x^*)}{1-(1-\sigma)x^*} \quad (6.32)$$

Οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης είναι οι $x_1^* = 0$ και $x_2^* = \frac{b-1}{b-1+\sigma}$.

Τα επόμενα δύο σταθερά σημεία της Εξ. (6.30) είναι αντίστοιχα οι λύσεις της εξίσωσης $x_{n+2} = x_n = x^*$ η οποία μετασχηματιζόμενη μας δίνει την ακόλουθη εξίσωση:

$$x^* \left(x^* - \frac{b-1}{b-1+\sigma} \right) \left[b(b+1-\sigma)x^{*2} - (b+1-\sigma)(b+1)x + (b+1) \right] = 0 \quad (6.33)$$

Είναι ξεκάθαρο ότι ρίζες της παραπάνω τέταρτου βαθμού εξίσωσης είναι οι δύο προηγούμενες ρίζες x_1^* , x_2^* . Οι δύο άλλες ρίζες της Εξ. (6.33) περιγράφονται από την σχέση:

$$x_{3,4}^* = \frac{(b+1-\sigma)(b+1) \pm \sqrt{[-(b+1-\sigma)(b+1)]^2 - 4b(b+1-\sigma)(b+1)}}{2b(b+1-\sigma)}$$

Είναι αναγκαίο να σημειώσουμε εδώ ότι η εξίσωση που περιγράφει ένα δυϊσμό ανώτερης τάξης συμπεριλαμβάνει και τις λύσεις της εξίσωσης δυϊσμού χαμηλότερης τάξης.

Στον παρακάτω πίνακα φαίνονται οι ρίζες του GRM1 μοντέλου για διάφορες τιμές των παραμέτρων του μοντέλου.

Πίνακας 6.5

	x_1^*	x_2^*	x_3^*	x_4^*
$b=1.3, \sigma=0.028$	0	0.914	0.946	0.822
$b=1.27, \sigma=0.02$	0	0.931	0.959	0.828
$b=1.22, \sigma=0.015$	0	0.936	0.960	0.859
$b=1.15, \sigma=0.0057$	0	0.963	0.978	0.890

6.4.2 Έλεγχος της χαστικής δυναμικής

Σύμφωνα και με όσα έχουν αναφερθεί στην προηγούμενη παράγραφο για τις μεθοδολογίες ελέγχου χαστικών συστημάτων, είναι δυνατό να σταθεροποιηθεί ένα μη ευσταθές σταθερό σημείο με την εφαρμογή μιας πολύ μικρής διαταραχής σε κάποια παράμετρο ελέγχου του χαστικού συστήματος όταν η χαστική τροχιά βρίσκεται σε μια πολύ μικρή γειτονική περιοχή του σταθερού σημείου. Στην περίπτωση του GRM1 μοντέλου θα αναπτύξουμε μια απλή αλλά αποδοτική μέθοδο ελέγχου χρησιμοποιώντας ως παράμετρο ελέγχου την παράμετρο

$$b_n = b_0 + \Delta b_n \quad (6.34)$$

όπου

$$\Delta b_n = -\gamma(x_n - x^*) \quad (6.35)$$

Όταν το σύστημα βρίσκεται σε μια πολύ μικρή γειτονική περιοχή του σταθερού σημείου, δηλαδή όταν το x_n είναι κοντά στο x^* , η δυναμική του συστήματος είναι δυνατό να προσεγγιστεί από μια τοπικά γραμμική εξίσωση η οποία περιγράφεται από τη σχέση

$$x_{n+1} = x^* + \alpha(x_n - x^*) + \beta \Delta b_n \quad (6.36)$$

Ο πολλαπλασιαστής Floquet για την απεικόνιση χωρίς την εφαρμογή της διαδικασίας ελέγχου δίδεται από την εξίσωση:

$$\alpha = \left. \frac{\partial f(x, b)}{\partial x} \right|_{x=x^*} = \frac{(1-2x)[1-(1-\sigma)x] - (x-x^2)(\sigma-1)}{[1-(1-\sigma)x]^2} \bigg|_{x=x^*} \quad (6.37)$$

ενώ η παράμετρος ευαισθησίας της διαταραχής ελέγχου από την σχέση

$$\beta = \left. \frac{\partial f(x, b)}{\partial b} \right|_{x=x^*} = \frac{x(1-x)}{1-(1-\sigma)x} \bigg|_{x=x^*} \quad (6.38)$$

όπου έχουμε χρησιμοποιήσει το αποτέλεσμα ότι $\Delta b_n = 0$ όταν $x = x^*$. Ορίζοντας την απόκλιση από το σταθερό σημείο ως

$$y_n = x_n - x^* \quad (6.39)$$

η συμπεριφορά του συστήματος μετά την εφαρμογή της διαταραχής σε μια γειτονική περιοχή του σταθερού σημείου περιγράφεται από την σχέση

$$y_{n+1} = (\alpha + \beta\gamma)y_n \quad (6.40)$$

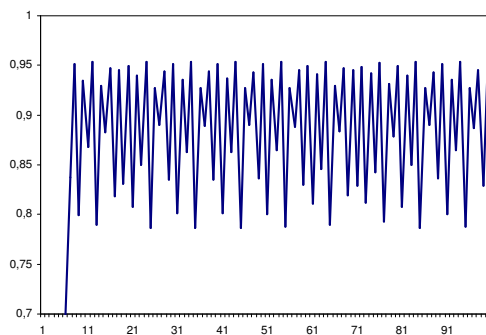
με το μέγεθος της διαταραχής να δίδεται από την εξίσωση

$$\Delta b_n = \beta\gamma y_n. \quad (6.41)$$

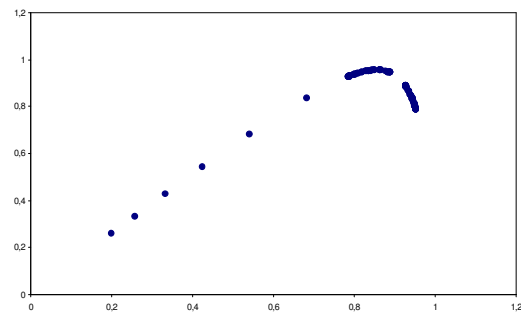
Κατά την εφαρμογή της διαδικασίας ελέγχου όπως φαίνεται και από την Εξ. (6.40) μια αρχική διαταραχή θα περιορίζεται όταν

$$|\alpha + \beta\gamma| < 0 \quad (6.42)$$

οπότε η διαδικασία ελέγχου σταθεροποιεί επιτυχώς το κρίσιμο σημείο όταν η συνθήκη που περιγράφεται από την Εξ. (6.42) ικανοποιείται. Κάθε τιμή του γ που ικανοποιεί την παραπάνω συνθήκη θα έχει την δυνατότητα ελέγχου της χαστικής δυναμικής του μοντέλου, αλλά ο χρόνος που απαιτείται για να επέλθει ο έλεγχος και η ευαισθησία του συστήματος στο θόρυβο επηρεάζεται άμεσα από την τιμή της συγκεκριμένης παραμέτρου. Για την μέθοδο ελέγχου με την εφαρμογή ανάδρασης που προτάθηκε για τον έλεγχο της χαστικής δυναμικής του GRM1 μοντέλου και περιγράφεται από την Εξ.(6.35), η βέλτιστη επιλογή για το κέρδος του ελέγχου είναι η περίπτωση $\gamma = \alpha/\beta$. Σε αυτή την περίπτωση, μια διαταραχή ελέγχου είναι αρκετή για να οδηγήσει την τροχιά στο σταθερό σημείο και καμιά άλλη διαταραχή ελέγχου δεν απαιτείται για να ελέγξει την τροχιά όταν αυτή είναι κοντά στο σταθερό σημείο (υπό την απουσία θορύβου). Στην περίπτωση που η διαδικασία ελέγχου ενεργοποιείται όταν το y_n δεν είναι αρκετά μικρό, τα μη γραμμικά φαινόμενα γίνονται υπολογίσιμα και απαιτούνται επιπλέον διαταραχές ελέγχου για την επιτυχία της διαδικασίας ελέγχου.



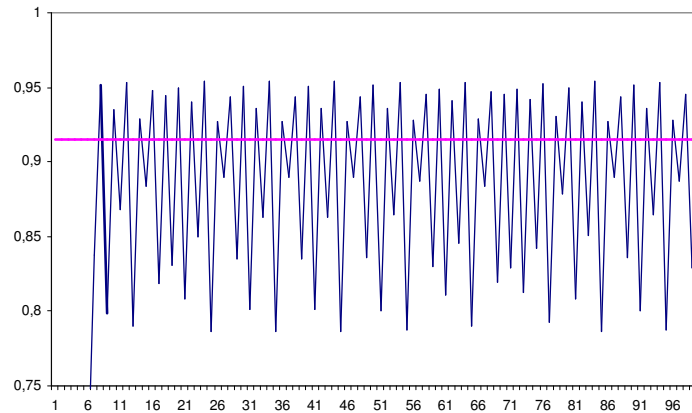
Η απεικόνιση του x_n σε συνάρτηση με το χρόνο



Το x_n σε συνάρτηση με το x_{n+1} (οριζόντιος άξονας)

Σχήμα 6.21: Το GRM1 μοντέλο για $b = 1.3$ και $\sigma = 0.028$

Θεωρούμε την περίπτωση του μοντέλου GRM1 όπου $b = 1.3$ και $\sigma = 0.028$ και η οποία απεικονίζεται στο Σχήμα 6.21. Για τις συγκεκριμένες τιμές των παραμέτρων τα δύο πρώτα σταθερά σημεία της Εξ. (6.30) είναι το $x^* = 0$ και το $x^* = 0.914$. Στον οριζόντιο άξονα απεικονίζεται ο χρόνος και στον κάθετο οι τιμές του μοντέλου GRM1.

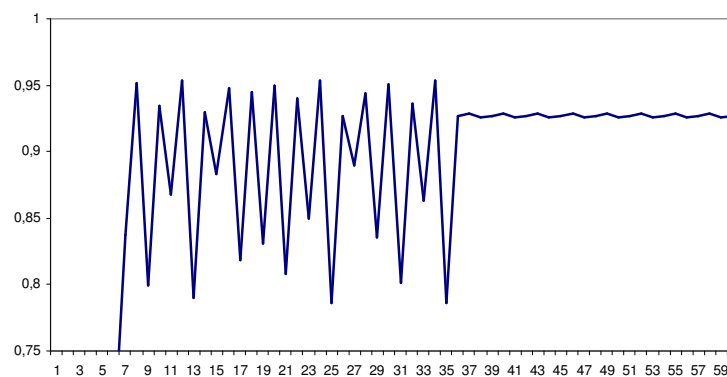


Σχήμα 6.22: Το GRM1 μοντέλο για $b = 1.3$ και $\sigma = 0.028$

Σύμφωνα με την Εξ. (6.37) ο πολλαπλασιαστής $a = -1.31$ ενώ η παράμετρος ευαισθησίας του συστήματος είναι αντίστοιχα $\beta = 0.7$.

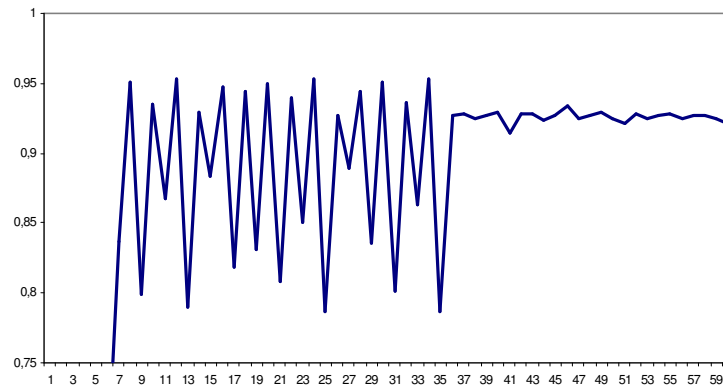
Όπως φαίνεται και από το Σχήμα 6.22 η τροχιά επισκέπτεται μια κοντινή περιοχή του σημείου $x^* = 0.914$ όταν $n \sim 16, n \sim 26, n \sim 36, \dots$ Στην συνέχεια θα εφαρμόσουμε μια διαταραχή σύμφωνα με την μέθοδο που περιγράψαμε παραπάνω για να σταθεροποιήσουμε το παραπάνω μη ευσταθές σημείο.

Το Σχήμα 6.12 απεικονίζει την εξέλιξη του ελεγχόμενου πλέον GRM1 μοντέλου για ίδιες τιμές των παραμέτρων και τις ίδιες αρχικές συνθήκες όπως και στα Σχήματα 6.21 και 6.22. Η διαδικασία ελέγχου ενεργοποιείται ξαφνικά όταν η τροχιά διέρχεται από μια γειτονική περιοχή του σημείου $x^* = 0.914$ δηλαδή όταν $n \sim 36$ με το κέρδος ελέγχου να παίρνει την τιμή $\gamma = -\alpha/\beta = 1.879$. Μερικές διαταραχές είναι αρκετές για να οδηγήσουν το σύστημα στο σταθερό σημείο x^* . Το αποτέλεσμα της διαδικασίας ελέγχου απεικονίζεται στο Σχήμα 6.23. Στον οριζόντιο άξονα απεικονίζεται ο χρόνος και στον κάθετο οι τιμές του μοντέλου GRM1.



Σχήμα 6.23: Το GRM1 μοντέλο για $b = 1.3$ και $\sigma = 0.028$ μετά την εφαρμογή της διαδικασίας ελέγχου

Στην περίπτωση που θεωρήσουμε την ύπαρξη ομοιόμορφα κατανομημένου θορύβου μεταξύ ± 1 , τα αντίστοιχα αποτελέσματα της εφαρμογής της διαδικασίας ελέγχου απεικονίζονται στο Σχήμα 6.24. Στον οριζόντιο άξονα απεικονίζεται ο χρόνος και στον κάθετο οι τιμές του μοντέλου GRM1.



Σχήμα 6.24: Το GRM1 μοντέλο για $b = 1.3$ και $\sigma = 0.028$ μετά την εφαρμογή της διαδικασίας ελέγχου με την παρουσία ομοιόμορφα κατανομημένου θορύβου

Τέλος στον Πίνακα 6.6 απεικονίζονται οι τιμές των παραμέτρων α , β , γ για την εφαρμογή της διαδικασίας ελέγχου που περιγράψαμε παραπάνω για οποιοδήποτε από τα κρίσιμα σημεία x_2^* , x_3^* , x_4^* της Εξ. (6.30) του GRM1 μοντέλου για διάφορες τιμές των παραμέτρων b και σ .

Πίνακας 6.6

$b = 1.3, \sigma = 0.028$			
	x_2^*	x_3^*	x_4^*
α	-1.310	-3.475	0.311
β	0.704	0.632	0.728
γ	1.879	5.504	-0.415
$b = 1.27, \sigma = 0.02$			
	x_2^*	x_3^*	x_4^*
α	-1.640	-4.666	0.446
β	0.733	0.652	0.755
γ	2.251	7.166	-0.575
$b = 1.22, \sigma = 0.015$			
	x_2^*	x_3^*	x_4^*
α	-1.496	-4.200	0.370
β	0.767	0.704	0.787
γ	1.960	5.975	-0.453
$b = 1.15, \sigma = 0.0057$			
	x_2^*	x_3^*	x_4^*
α	-2.229	-7.017	0.567
β	0.838	0.775	0.851
γ	2.675	9.079	-0.654

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ ΚΑΙ ΜΕΛΛΟΝΤΙΚΕΣ ΕΠΕΚΤΑΣΕΙΣ

Η θεωρία των χαστικών φαινομένων έχει εφαρμογές σε όλα σχεδόν τα φυσικά, κοινωνικά, οικονομικά συστήματα τα οποία ακολουθούν μια μη γραμμική εξέλιξη, και σίγουρα αυτό συμβαίνει στο σύνολο των πραγματικών συστημάτων. Στην πλειοψηφία των περιπτώσεων οι ερευνητές των περισσότερων επιστημονικών πεδίων αποφεύγουν να προσεγγίσουν και να λύσουν το πρόβλημα που αντιμετωπίζουν χρησιμοποιώντας τη θεωρία των χαστικών φαινομένων καθώς η περιγραφή τους από μαθηματικές εξισώσεις είναι αρκετά πολύπλοκη αλλά και γιατί η αναλυτική επίλυση των εξισώσεων αυτών είναι αρκετά δύσκολη και σε αρκετές περιπτώσεις πρακτικά αδύνατη. Ένα άλλο σημαντικό πρόβλημα είναι ο περιορισμένος αριθμός των χαστικών μοντέλων τα οποία έχουν χρησιμοποιηθεί στο σύνολο των επιστημονικών άρθρων καθώς και η αδυναμία τους να περιγράψουν ένα συγκεκριμένο πρόβλημα ή φαινόμενο. Οι τρόποι ανάπτυξης νέων χαστικών μοντέλων, χρησιμοποιώντας διάφορες τεχνικές ή/και ιδιότητες, είναι ένα πεδίο της χαστικής θεωρίας το οποίο είναι ακόμη σε εξέλιξη. Η συμβολή της παρούσας διατριβής σε αυτό το σημείο θεωρούμε ότι είναι σημαντική.

Συγκεκριμένα η συμβολή της διατριβής συνοψίζεται στα ακόλουθα:

- ▶ **Προτείνεται μια νέα μεθοδολογία ανάπτυξης και μελέτης χαστικών συστημάτων.** Χρησιμοποιώντας ως νέες ιδέες, τις μεθόδους στροφής μιας απεικόνισης $f(x, y)$ υπό μια μεταβλητή γωνία ϑ η οποία συνήθως είναι της μορφής $\vartheta = \vartheta(x^2 + y^2)$ προκύπτουν ιδιαιτέρως ενδιαφέροντες χαστικοί ελκυστές **οι οποίοι δεν ήταν γνωστοί μέχρι σήμερα** και που έχουν άμεση εξάρτηση από τη μορφή της συνάρτησης της γωνίας ϑ . Οι συναρτήσεις της γωνίας ϑ οι οποίες παρουσιάζουν το μεγαλύτερο ενδιαφέρον είναι οι $\vartheta = d\sqrt{x^2 + y^2}$, $\vartheta = d\sqrt{1 + x^2 + y^2}$, $\vartheta = \frac{d}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, $\vartheta = c - \frac{d}{1 + x^2 + y^2}$, $\vartheta = c - d\sqrt{x^2 + y^2}$. Η μετατόπιση επίσης της απεικόνισης $f(x, y)$ η οποία αρχικά έχει στραφεί για μια γωνία ϑ με την παραπάνω μορφή έχει ως αποτέλεσμα την δημιουργία επίσης πρωτόγνωρων χαστικών ελκυστών. Μια επιπλέον ιδιότητα, της οποίας η εφαρμογή προκύπτει ότι έχει ενδιαφέρον, είναι αυτή του πολλαπλασιασμού της συγκεκριμένης απεικόνισης όταν αυτή έχει στραφεί υπό μια συγκεκριμένη γωνία, την $\vartheta = \frac{d}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.
- ▶ **Τεκμηριώνεται και αποδεικνύεται μια νέα προσέγγιση της σημασίας ύπαρξης χρονικής υστέρησης.** Η ύπαρξη χρονικής υστέρησης σε ένα σύστημα είναι ένας σημαντικός παράγοντας

εμφάνισης χαστικής συμπεριφοράς. Ο βαθμός της χρονικής υστέρησης είναι ένα μέτρο καθορισμού της πολυπλοκότητας και του τρόπου συμπεριφοράς του αντίστοιχου συστήματος. Όπως επίσης προκύπτει από την σύγκριση μιας μορφής του λογιστικού μοντέλου και του μοντέλου του Glass αφού πρώτα έχει εφαρμοστεί χρονική υστέρηση μεγάλου βαθμού ($m = 40$) η συμπεριφορά τους εξαρτάται από τον βαθμό της υστέρησης και όχι από την εξίσωση περιγραφής του αντίστοιχου μοντέλου. Τα παραπάνω συμπεράσματα έχουν ιδιαίτερη βαρύτητα αν συνυπολογιστεί και το δεδομένο της εμφάνισης χρονικής υστέρησης στο σύνολο σχεδόν οικονομικών εφαρμογών.

- ▶ **Αναδεικνύονται οι αδυναμίες του λογιστικού μοντέλου και προτείνονται εναλλακτικές λύσεις.** Το λογιστικό μοντέλο είναι ένα ευρέως διαδεδομένο μοντέλο και σε πολλές εφαρμογές η εξίσωση περιγραφής ενός συστήματος ανάγεται σε αυτή του λογιστικού. Παρ' όλα αυτά η χρήση του σε πραγματικές εφαρμογές έχει δείξει την εμφάνιση ουσιαστικών μειονεκτημάτων. Πρώτον εμφανίζει ταλαντωτική συμπεριφορά μετά από ένα σχετικά μικρό επίπεδο (66.66%) του μέγιστου επιπέδου (100%) της σιγμοειδούς απεικόνισης. Τα περισσότερα πραγματικά συστήματα παρουσιάζουν ταλαντωτική συμπεριφορά για μεγαλύτερο επίπεδο. Δεύτερον, κατά την ταλαντωτική του συμπεριφορά το εύρος της ταλάντωσης είναι πολύ μεγάλο και μη ρεαλιστικό. Τα μειονεκτήματα αυτά είναι δυνατό να αντιμετωπιστούν με τις κατάλληλες τροποποιήσεις του λογιστικού μοντέλου και την δημιουργία νέων μοντέλων όπως το Gauss – λογιστικό μοντέλο, το τροποποιημένο – λογιστικό μοντέλο, το αντίστροφο – λογιστικό και το GRM1 μοντέλο. Τα νέα αυτά μοντέλα διατηρούν την απλότητα και τις ουσιαστικές ιδιότητες, καθώς και την γενική συμπεριφορά της λογιστικής εξίσωσης, ενώ ταυτόχρονα αντιμετωπίζουν και τα παραπάνω μειονεκτήματα.
- ▶ **Προτείνεται και εφαρμόζεται μια νέα μεθοδολογία με τη χρήση της έννοιας της αντίστροφης εξίσωσης με σκοπό την γραφική εύρεση των σημείων δυϊσμού ενός χαστικού μοντέλου.** Το αντίστροφο λογιστικό μοντέλο αποδεικνύεται ότι είναι ένα χρήσιμο εργαλείο για την ανάλυση και του κλασικού λογιστικού μοντέλου για την εύρεση των σημείων δυϊσμού διαφόρων τάξεων με μεγάλη ακρίβεια. Για την εύρεση των σημείων δυϊσμού χρησιμοποιούνται τόσο τα σημεία τομής του λογιστικού και του αντίστροφου λογιστικού όσο και της κύριας διαγωνίου και του σημείου που η εφαπτομένη στο σημείο τομής της διαγωνίου και του λογιστικού μοντέλου είναι -1. Η συγκεκριμένη μεθοδολογία είναι δυνατό να γενικευθεί χρησιμοποιηθεί για ένα μεγάλο σύνολο χαστικών μοντέλων.
- ▶ **Προτείνεται ένα μοντέλο για το οποίο για πρώτη φορά εξετάζονται και μελετώνται οι χαστικές του ιδιότητες με τη χρησιμοποίηση πραγματικών δεδομένων.** Το μοντέλο GRM1 και η δυνατότητά του να εκφράζει την ασυμμετρία κατά την διαδικασία διάχυσης καινοτομιών αναλύεται και τεκμηριώνεται με την εφαρμογή της περίπτωσης διάχυσης της καινοτομίας παραγωγής σιδήρου με την μέθοδο του οξυγόνου. Για τον υπολογισμό των παραμέτρων του GRM1 μοντέλου αναπτύχθηκε ένας μη γραμμικός επαναληπτικός αλγόριθμος με βασικό στόχο την ελαχιστοποίηση των τετραγώνων του σφάλματος. Με βάση τον αλγόριθμο αυτό, υπολογίστηκαν οι τιμές των παραμέτρων του μοντέλου για τις περιπτώσεις της παραγωγής σιδήρου με τη μέθοδο του οξυγόνου για τις χώρες της Ισπανίας, της Ιταλίας, του Λουξεμβούργου και της Βουλγαρίας. Με βάση την σύγκριση του λογιστικού και του GRM1 μοντέλου για τις παραπάνω περιπτώσεις προκύπτει η κατά μεγάλο βαθμό μεγαλύτερη δυνατή περιγραφή (με το μικρότερο σφάλμα) της διαδικασίας από το GRM1 μοντέλο από ό,τι με το λογιστικό μοντέλο. Το GRM1 μοντέλο δείχνει μια πολύ μεγάλη ευελιξία κατά την κορύφωση της διαδικασίας όπου έχει την δυνατότητα να ακολουθήσει την ταλαντωτική συμπεριφορά των πραγματικών δεδομένων. Η ευελιξία αυτή εμφανίζεται για τιμές των παραμέτρων του που αφορούν στη χαστική περιοχή συμπεριφοράς του.
- ▶ **Τέλος τεκμηριώνεται η δυνατότητα ελέγχου του GRM1 μοντέλου με την ανάπτυξη μιας μεθοδολογίας ελέγχου** βασισμένης στην εφαρμογή μιας μικρής κατάλληλης διαταραχής την χρονική στιγμή που η τροχιά εξέλιξης του GRM1 μοντέλου διέρχεται από μια μικρή γειτονική περιοχή του κρίσιμου σημείου στο οποίο θέλουμε να σταθεροποιήσουμε το μοντέλο.

Οι μέθοδοι ανάπτυξης αλλά και ανάλυσης των χαστικών μοντέλων που αναπτύχθηκαν στην διδακτορική διατριβή μπορούν να εφαρμοστούν από ένα σύνολο επιστημόνων οι οποίοι ασχολούνται με τον συγκεκριμένο αντικείμενο για τις εφαρμογές στα επιστημονικά πεδία στα οποία αναπτύσσουν την έρευνά τους. Ένα πεδίο, τέλος, που παρουσιάζει πολύ μεγάλο ενδιαφέρον για περαιτέρω έρευνα είναι η προσαρμογή των προτεινόμενων μοντέλων σε πραγματικές εφαρμογές όπως η εφαρμογή του μοντέλου GRM1 σε μια διαδικασία διάχυσης μιας καινοτομίας.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- [AlSa96] Kathleen T. Alligood, Tim D. Shauer, James A. Yorke, “*Chaos: An Introduction to Dynamical Systems*”, Springer Verlag, 1996.
- [BaCh98] Barnett W. and Chen P., “*Dynamic Econometric Models*”, Cambridge, Cambridge University Press, 1998.
- [BaJe91] O.E. Barndorft – Nielsen, J.L. Jensen, W.S. Kendall, “*Network and Chaos – Statistical and Probabilistic Aspects*”, Chapman & Hall Edditions, 1991.
- [Bake90] Baker, Gregory L., “*Chaotic Dynamics: An Introduction*”, Cambridge University Press, Cambridge, 1990.
- [Bass69] F. M. Bass, “A new product growth model for consumer durables” *Management Science*, Vol. 15, pp. 215-227, 1969.
- [Bell86] Bell, E. T.. “Ch. 14: The Prince of Mathematicians: Gauss”, *Men of Mathematics: The Lives and Achievements of the Great Mathematicians from Zeno to Poincaré*. New York: Simon and Schuster, pp. 218–269, 1986.
- [Beck91] Becker, Karl-Heinz, “*Dynamical Systems and Fractals: Computer Graphics*”, Cambridge University Press, Cambridge, 1991.
- [BeFu06] Berezowski M., Fudala E., “*Bifurcation analysis of the static and dynamics of a logistic model with two delays*”, *Chaos Solitons and Fractals*, 28, pp. 543-554, 2006.
- [Berry96] Berry J.S., “*Introductions to Non-Linear Systems*”, Arnold, Great Britain, 1996.
- [Blac72] Blackman, A.W.Jr., “*A Mathematical Model for Trends Forecasts*”, *Technological Forecasting and Social Change*, Vol.3, pp.441-452, 1972.
- [BiMa06] Bilalis Nikolaos, Maravelakis Emmanuel, “Analysing the dependencies between the innovation Attributes in NPD using Design Structure Matrix – the I-DMS tool”, *International Journal of Product Management*, Vol. 3 No. 3/4., 2006.
- [Boud95] Boudis Anastasios, “*Dynamical Systems and Chaos*”, Pasantotiriou, 1995.
- [BrGo91] Y. Braiman, J. Goldhirsch, *Taming Chaotic Dynamics with Weak Periodic*
- [BrHo93] Brock W.A., Hommes C., “*Heterogeneous beliefs and routes to chaos in a simple asset pricing model*”, *Journal of Economics Dynamics and Control*, Vol. 24, pp. 1235-1274.
- [Camb93] Cambel, Ali Bulnet, “*Applied Chaos Theory: A paradigm for Complexity*”, Academic Press, Boston, 1993.
- [Cesa71] Cesari, L., “*Asymptotic Behaviour and Stability Problems in Ordinary Differential Equations*”, Springer, Berlin, 1992.

- [DaHu90] Day R.H., Huang, W.H., *"Bulls, bears and market shop"*, Journal of Economics Behavior and Organization, Vol. 14, pp. 299-329, 1990.
- [DePa00] Dekimpe, M.G., Parker, P.M., Sarvary, M., *"Global diffusion of technological innovations: a couple-hazard approach"*, Journal of Marketing Research, Vol. 37, No.1, pp.47-60, 2000.
- [EaMa81] C. Easingwood, V. Mahajan, and Muller, *"A nonsymmetric responding logistic model for forecasting technological substitution"* Technological Forecasting and Social Change, Vol. 20, pp. 199-213. 1981.
- [Edga94] Edgar E. Peters, *"Fractal Market Analysis: Applying Chaos Theory to Investment and Economics"*, Wiley, New York, 1994.
- [FaJo02] Farmer D., Joshi S., *"The price dynamics of common trading strategies"*, Journal of Economics Behavior and Organization, Vol. 49, pp. 149-171, 2002.
- [Feic92] G. Feichtinger, in: G. Haag, U. Mueller, K.G. Troitzsch (Eds.), *"Economic Evolution and Demographic Change"*, Springer, Berlin, 1992.
- [Feig80] Feigenbaum, M. *"Universal Behavior in Nonlinear Systems."* Los Alamos Science 1, pp.4-27, 1980.
- [Feve96] Ferdinand Verchulst, *"Nonlinear Differential Equations and Dynamical Systems"*, Second Edition, Springer, Berlin, 1996.
- [FiPr71] Fisher, J.C., Pry, R.H. *"A Simple Substitution Model of Technological Change"*, Technological Forecasting and Social Change, Vol.3, pp.75-78, 1971.
- [Glas96] Glass, N. *"Chaos, Nonlinear System and Day-to-day Management."* European Management Journal. Vol.14, No. 1, pp.98-106 (1996).
- [GIMa88] L. Glass, Mackey M. C., *"From Clock to Chaos: The Rhythms of Life"*, Princeton, Princeton University Press, 1988.
- [Glei87] Gleick, J, *Chaos, Making a New Science*. New York: Penguin Books (1987).
- [GoLe55] Goddington, E.A. and Levinson, N., *"Theory of Ordinary Differential Equations"*, Mc-Graw – Hill Book Co., New York 1955.
- [GoHo65] Benjamin Gompertz, P F Hooker *Journal of the Institute of Actuaries* Vol.91, pp. 203-212, 1965.
- [Gord91] Gordon, T.J. *"Notes on forecasting a chaotic series using regression"*, Technological Forecasting and Social Change 39: pp.337-348 (1991).
- [GoMi91] De Coster G. P. and Mitchell D. W., *"Journal of Business and Economic Statistics"*, Vol 9, pp. 455, 1991.
- [Gril76] Griliches Z., *"Distributed Lags: A Survey"*, Econometrica, 35, pp.16-49 (1976).
- [Grin97] Grant Keith, *"Fuzzy Management: Contemporary Ideas and Practice at Work"*, Oxford University Press, Oxford, 1997.
- [Grub01] Arnulf Grubler, *"Diffusion, Long Term Patterns and Discontinuities"*, Technological Forecasting and Social Change, Vol. 39, pp. 159-128, 2001.
- [GrGr02] De Grauwe P. and Grimaldi D. W., *"The exchange rate and its fundamentals: a chaotic perspective"* CESifo W.P. pp. 639 Munich, 2002.
- [GrVa94] Greedy J., Vance L., *"Chaos and Non Linear Dynamics in Economics: Theory and Applications"*, Edward Elgar, 1994.
- [GrYo97] Grebogi and James A. York, *"The Impact of Chaos on Science and Society"*, United University Press, Tokyo, 1997.
- [Hale69] Hale J.K., *"Ordinary Differential Equations"*, Wiley – Interscience, New York, 1969.
- [Hart64] Hartman, P., *"Ordinary Differential Equations"*, Wiley, New York, 1964 (2nd ed. Birkhauser, Boston Basel Stutgard, 1982.
- [Heno76] Hennon, M., *Communication Mathematics*, Phys. Vol. 50, 69, (1976)

- [Hilb94] Hilborn Robert C., *“Chaos and Nonlinear Dynamics”*, Oxford University Press, New York, 1994.
- [Hors90] Horsky, D., *“A diffusion model incorporating product benefits, price, income, and information”*, Marketing Science, Vol. 9, No.4, pp.342-65, 1990.
- [HoHa96] Holyst J.A., Hagel T., Haag G., Weidlich W. *“How to control chaotic economy?”*, Journal of Evolutionary Economics 6, pp. 31-42, 1996.
- [HoLu96] Holmes P., Lumley J.L. and Berkoooc, *“Coherent Structures Dynamical Systems and Symmetry”*, Cambridge University Press, UK, 1996.
- [Huda93] Huang, W.H., Day R.H., *“Chaotically switching bear and bull market: the derivation of stock price distributions from behavioral rules”* in Non linear and Evolutionary Economics, Oxford University Press, Oxford, pp. 1-49, 1993.
- [Hopp93] Hoppensteadt Frank C., *“Analysis and Simulation of Chaotic Systems”*, Springer Verlag, New York, 1993.
- [Hunt91] E.R. Hunt, *“Stabilizing high-period orbits in a chaotic system - the diode resonator”*, Physics Review Letter, Vol. 67, pp.1953, 1991
- [Ikeda79] Ikeda, K., *“Multiple – Valued Stationary State and its Instability of the Transmitted Light by a Ring Cavity System”*, Opt. Commun. Vol. 30, pp. 257-261, 1976.
- [Infe90] Infeld E. (Eryk), *“Nonlinear Waves, Solitons and Chaos”*, Cambridge University Press, Cambridge, 1990.
- [Jong92] Jong Hyun Kim, *“Applied Chaos”*, Wiley, New York, 1992.
- [Kaas98] Kaas L., *“Stabilizing chaos in a dynamic macroeconomic model”*, Journal of Economics Behavior and Organization, Vol. 33, pp. 333-362, 1998.
- [Kapi92] Kapitaniak Tomas, *“Chaotic Oscillators: Theory and Applications”*, World Scientific, Singapore 1992.
- [KaSk02] Katsirikou A. Skiadas C. Apostolou A., Rompogiannakis I., *“Virtual Libraries Interactive Support Software and a Application in Chaotic Models”*, Campus-Wide Information Systems, Emerald, Vol. 19, No 1, 2002.
- [Kolm59] Kolmogorov, *“Entropy per unit time as a metric invariant of automorphisms”*, A. N. Dokl. Akad. Nauk., page 527, USSR, 1959.
- [Kope97] Kopel M., *“Improving performance of an economic system: controlling chaos”*, Journal of Evolutionary Economics 7, pp. 269-289, 1997.
- [Kuzn98] Kuznestov Y. A. *“Elements of Applied Bifurcation Theory”*, New York, Springer, 1998.
- [Lai94] Y.-C. Lai, *“Controlling Chaos”*, Comput. Physics, Vol. 8, pp.62-80, 1994.
- [LiLi06] Liao Zhigao, Liu Ying, Min Wu, *“A dynamic Diffusion Model With Time – Delay for Color TV iv China”*, Wold Journal of Modelling and Simulation, Vol. 2 No 2, pp. 73-86, 2006.
- [LiPe90] R. Lima, M. Pettini, *“Chaos in a Periodic Three-Particle System Under Yukawa Interaction”*, Physical Review A, Vol. 41, No 2, pp. 720-725, 1990.
- [LiYo75] Li T.Y. and York J.A. Am. Math. Monthly, Vol.82, pp. 985-992, 1975.
- [Lore63] Edward Lorenz, *“Deterministic Nonperiodic Flow”*, Journal of the Atmospheric Sciences, Vol. 20, Issue 2, pp. 130-141, March 1963.
- [LuMa00] Lux T., Marchesi M., *“Volatility clustering in financial markets: a micro-simulation of interacting agents”*, International Journal of Theoretical and Applied Finance, Vol. 3, pp. 675-702.
- [Mans61] Mansfield, E. *“Technical Change and the Rate of Imitation,”* Econometrica, 29, pp.741-766 (1961).
- [May76] May, R.M. *“Simple Mathematical Models with Very Complicated Dynamics”*, Nature, 261, pp.459-467 (1976).
- [Ma76] Ma, S. K., *“Modern Theory of Critical Phenomena”*, Benjamin, New York, 1976.

- [MaHa96] Maguire Miles and Hagen Mark, *"Explosion of New Products Creates Challenges"*, Quality Progress, Vol. 32, No 5, pp. 29-35, 1996.
- [MaMu90] Mahajan, Vijay, Eitan Muller and Frank M.Bass, *"New Product Diffusion Model in Marketing: A Review and Directions for Research"*, The Journal of Marketing, Vol. 14, pp. 1-26, 1990.
- [MaPe85] Mahajan, Vijay, and Robert A. Peterson, *"Models for Innovation Diffusion"*, Newbury Park: Sage Publishing, 1985.
- [MaSh77] V. Mahajan and M. E. F. Schoeman, *"Generalized model for pattern of the diffusion process"*, IEEE Trans. Eng. Manag. Vol. 1, pp12-19, 1977.
- [Medi92] Medio Alfredo, *"Chaotic Dynamics: Theory and Application"*, Cambridge University Press, Cambridge, 1992.
- [MeNe96] Medio A. and Negroni G, *"Chaotic Dynamics in Overlapping Generation Models with Production, in: Nonlinear Dynamics and Economics"*, William Barnett et. Al. (Eds.), Cambridge, Cambridge University Press, 1996.
- [Mees98] Mees A, 1998, Forward In: Chen G and Dong X.
- [Mend05] Mendes d.A, Mendes V., *"Control of chaotic dynamics in a OLG economic model"*, Journal of Physics: Conference Series 23, pp.158-181, 2005
- [MoBo05] Mohamed Zaid and Pat S. Bodger, *"A variable asymptote logistic (VAL) model to forecast electricity consumption"*, International Journal of Technology, Volume 22, Number 2-3 / pp. 65-72, 2005.
- [Modi82] Theodore Modis and Alain Debecker, *"Chaoslike States Can Be Expected Before and After Logistic Growth"*, Technological and Forecasting Social Change, No. 41, pp. 111-120, 1992.
- [Modi97] Theodore Modis, *"Genetic Re-Engineering of Corporations"*, Technological Forecasting and Social Change, No. 56, pp. 107-118, 1997.
- [Nasc90] Naschie M. S. *"Stress, Stability and Chaos in Structural Engineering"*, Mc Graw-Hill, London 1990.
- [Nash76] Nash, J.C., *"A Discrete Alternative to the Logistic Growth Function"*, Applied Statistics I, Vol. 22, pp. 9-14, 1976.
- [Nee01] Neely C., *"The practice of central bank intervention: looking under the hood"*, Federal Reserve Bank of St. Louis Review, 83, pp. 307-318, 2001.
- [OGY90] E. Ott, C. Grebogi, J.A. York, *"Controlling Chaos"*, Physical Review Letter, Vol. 64, No 11, pp. 1196-1199, 1990.
- [OGY90a] E. Ott, C. Grebogi, J.A. York, in : D. Campell (Ed.), *CHAOS/XAOC*, Soviet-American Perspective on Nonlinear Science, American Institute of Physics, New York, pp.153-172, 1990.
- [Oliv64] Oliver, F.R., *"Methods of estimating the logistic growth functions"*, Applied Statistics, Vol. 13, pp. 57-66, 1964.
- [Oliv81] Oliver, F.R., *"Tractors in Spain: A Further Logistic Analysis"*, Journal of the Operational Research Sociey, Vol. 32, pp. 499-502, 1981.
- [Orme90] Ormerod P, *"Future issues: Chaotic systems and neural networks in the planning process"*, Long Range Planning 23: pp.120-124 (1990).
- [Park89] Parker, Thomas S., *"Practical Numerical Algorithms for Chaos"*, Springer Verlang, Berlin 1992.
- [PaSa58] Samuelson, Paul A. *"An Exact Consumption-Loan Model of Interest with or without the social Contrivance of Money"*, Journal of Political Economy, 66 (3), 1958.
- [PeGa93] V. Petrov, V. Gaspar, J. Masere, K. Showalter, *Controlling Chaos in the Belousov-Zhabotinsky Reaction*, Nature, Vol. 362, pp. 240-243, 1993.
- [Pesi77] Pesin, Ya. B., Mathematical Survey (4), 32, page 55, 1977.

- [PIHu90] B.B. Plapp, A.W. Hubler, "Control and Synchronization of Chaotic Systems" Physics Review Letter, Vol. 65, pp. 2302, 1990
- [PiRu81] Pindyck R. S. and Rubinfeld D. L. "Econometric Model and Economic Forecasts", Tokyo, Japan, McGraw Hill, 1981.
- [Pozn83] Poznanski. K.Z., "International Diffusion of Steel Technologies. Time Lag and the speed of Diffusion", Technological Forecasting and Social Change, Vol. 23, pp. 305-323, 1983.
- [Pyr94] K. Pyragas, Physical Letter A, Vol.170, pp.421, 1992.
- [Pyr95] K. Pyragas, Physical Letter A, Vol.206, pp.323, 1995
- [RoMu92] R. Roy, T. W. Murphy, T. D. Maier, Z. Gills, "Dynamic Control of a Chaotic Laser: Experimental Stabilization of a Globally Coupled System", Physical Review Letter, Vol. 648 No 9, pp. 1259-1262, 1992.
- [RaRo94] Ramsey J. B. and Rothman P., Journal of Business and Economics Statistics, Vol 12, pp. 135, 1994.
- [RoAh03] Rosser J.B., Ahmed E., Hartmann G., "Volatility via social flaring", Journal of Economics Behavior and Organization, Vol. 50, pp. 77-87, 2003.
- [Roge95] Rogers, E.M., "Diffusion of Innovations", The Free Press, New York, 1995.
- [RoGr92] Romeiras F J, Grebogi C, Ott E and Dayawansa W P 1992, Phys. D 58 165.
- [Roos34] Roos, C. *Dynamic Economics*, Yale: Principal Press (1934).
- [Ross00] Rosser J.B., "From catastrophe to chaos: a general theory of economics discontinuities", Mathematics, Macroeconomics, and Finance, Vol.1, Second ed. Kluwer Academic Publisher, Boston, 2000.
- [ShHa76] M. N. Sharif and A. K. M. A. Haq, "A time-level model of technological transfer", IEEE Trans. Eng. Manag., Vol. 27, pp 49-59, 1976.
- [SaHa77] D. Sahal, "A generalized logistic model for technological changeling", Technological and Forecasting Social Change, Vol. 7, pp. 81-94, 1977.
- [ShKa76] M. N. Sharif and C. Kabir, "A generalized model for forecasting technological substitution", Technological and Forecasting Social Change, Vol. 8, pp. 353-364, 1976.
- [Schu95] Shuster, H. G., *Deterministic Chaos*, Third Edition, VCH, 1995.
- [Shan49] Shannon, C. E. and Weaver, W., "The Mathematical Theory of Information", Illinois Press, Urbana, 1949.
- [ShRa81] M. N. Sharif and K. Ramanathan, "Binomial innovation diffusion models with dynamic potential adopter population", Technological Forecasting and Social Change, Vol. 20, pp. 63-87, 1981.
- [ShRa83] M. N. Sharif and K. Ramanathan, "Temporal models of innovation diffusion", IEEE Trans. Eng. Manag. Vol. 31, pp.76-86, 1983.
- [Skia85] Christos . H. Skiadas, "Two Generalized Rational Models for Forecasting Innovation Diffusion", Technological Forecasting and Social Change, Vol. 27, pp. 63-87, 1985.
- [Skia86] Christos . H. Skiadas, "Innovation Diffusion Models Expressing Asymmetry and/or Positively or Negatively Influence Forces", Technological Forecasting and Social Change, Vol. 30, pp. 313-330, 1986.
- [Skia87] Christos . H. Skiadas, "Two Simple Models for the Early and Middle Stage Prediction of Innovation Diffusion", IEEE Transactions on Engineering Management, Vol. EM-34, No. 2, May 1987.
- [SkAp02] Skiadas C., Apostolou A., Kitsios F., Rompogiannakis I., "Supply Chain Management and Chaos", Proceedings of the LOGISTICS 2000 - Partnerships in the Supply Chain, Athens, Greece, 29-30, September 2000.

- [SkRo05] Skiadas H. C., Rompogiannakis I. Apostolou A., Dimotikalis J., “*Chaotic Aspects of Generalized Rational Model*”, Proceedings of XIth International Conference on Applied Stochastic Model and Data Analysis, Brest, France, May 17-20, 2005.
- [SOGY90] T. Shiobrot, E. Ott, C. Grebogi, J.A. York, “*Using Chaos to Direct Trajectories to Targets*”, Physical Review Letter, Vol. 65, No 26, pp. 3215-3218, 1990.
- [Spar82] Sparrow Colin, “*The Lorenz Equations: Bifurcation, Chaos and Strange Attractors*”, Springer – Verlag, New York, 1982.
- [Ston83] Stoneman, P. “*The Economic Analysis of Technological Change*”, Oxford: Oxford University Press (1983).
- [Stue03] Stuewer Roger H., “*Controlling Chaos*”, Am. J. Physics 71 (8), pp. 750-759, 2003.
- [TaGa03] Tacero Milagros, Garcia Julian Perez, “*The Diffusion Process of Mobile Telephony in Europe*”, Report of Instituto, L.R.Klein – Centro Stone – Madrid, December 2003.
- [Take80] F. Takens, “*Detecting Strange Attractors in Turbulence*”, in: D.A. Rand, L.-S Young (Eds.), Dynamical System and Turbulence, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 898, Springer, New York, pp.366-381, 1980.
- [TaRa04] Taylor E. Jonh, Raymond E. Levitt, “*A New Model for Systemic Innovation Diffusion in Project – based Industries*”, Working Paper of Center for Integrated Facility Engineering, Stanford University, May 2004.
- [Tsoni92] Tsonis Anastasios, “*Chaos: From Theory to Applications*”, Plenum Press, London, 1992.
- [Wiel02] Wieland C., “*Controlling chaos in higher dimensional maps with constant feedback: an analytical approach*”, Physical Review E, 66, 016205, pp. 1-8, 2002.
- [Wild97] Wilding, R.D., “*Chaos theory and the supply chain*”, Proceedings of the 1997 Logistics Research Network Conference, Institute of Logistics, UK, 1997.
- [Wild97] Wilding, R.D., “*Chaos theory: implications for supply chain management*”, International Journal of Logistics Management, 9, 1, pp. 43-56, 1998.
- [WiWe05] Wieland C., Westerhoff F., “*Exchange rate dynamics, central bank interventions and chaos control methods*”, Journal of Economic Behavior & Organization, Vol. 58, pp. 117-132, 2005.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΙ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ ΧΑΟΤΙΚΩΝ ΜΟΝΤΕΛΩΝ

Στο Παράρτημα αυτό παραθέτουμε ένα μικρό δείγμα των αλγορίθμων προσομοίωσης των χαστικών μοντέλων τα οποία παρουσιάστηκαν στα προηγούμενα κεφάλαια της διατριβής.

{Equation 4.3}

```
NoDataFileVariableNames;
const MAX_SIZE = 200000;
size:=2000;
if not DisplayNumericInputBox ('Equation 4.3',
                               'Enter number of points:', size) then
    Exit;
if (size <= 0) or (size > MAX_SIZE) then
begin
    Beep;
    Exit
end;
DisplayMessageBox (MB_OK, ' Equation 4.3',
                  'Warning: This program might take a few moments to execute. ');
redim h0(size), h1(size), h2(size),h3(size),h4(size),h5(size);
hh1:=0.7;
hh2:=1;
hh3:=0;
a:=1.8;
d:=1;
for i:=2 to size do
begin
```

```

h0(i) := i;
hh3:= d*sqrt(1+hh1^2 + hh2^2);
h1(i) := a + (hh1*cos(hh3)) - (hh2*sin(hh3)) ;
h2(i) := (hh1*sin(hh3)) + (hh2*cos(hh3));
hh1 := h1(i);
hh2 := h2(i);
h3(i):=h1(i-1);
h4(i):=h2(i-1);
end;
NewGraph (SCATTERPLOT, 'Equation 4.3, ?Left_Title$', "",size, h1, h2);
NewGraph (SCATTERPLOT, 'x', ?Left_Title$', "",size, h1,h3);
NewGraph (SCATTERPLOT, 'y', ?Left_Title$', "",size, h2,h4);
NewGraph (LINEPLOT, 'x', ?Left_Title$', "",size, h0,h1);
NewGraph (LINEPLOT, 'y', ?Left_Title$', "",size, h0,h2);

```

{Equation 4.4}

```

NoDataFileVariableNames;
const MAX_SIZE = 200000;
size:=2000;
if not DisplayNumericInputBox ('Equation 4.4',
                                'Enter number of points:', size) then
    Exit;
if (size <= 0) or (size > MAX_SIZE) then
begin
    Beep;
    Exit
end;
DisplayMessageBox (MB_OK, 'Equation 4.4',
                    'Warning: This program might take a few moments to execute. ');
redim h0(size), h1(size), h2(size),h3(size),h4(size),h5(size);
hh1:=1;
hh2:=0.05;
hh3:=0;
a:=1.6;
d:=6.28;
for i:=2 to size do
begin
    h0(i) := i;
    hh3:= d/sqrt(hh1^2 + hh2^2);
    h1(i) := a + (hh1*cos(hh3)) - (hh2*sin(hh3)) ;
    h2(i) := (hh1*sin(hh3)) + (hh2*cos(hh3));
    hh1 := h1(i);
    hh2 := h2(i);
    h3(i):=h1(i-1);
    h4(i):=h2(i-1);
end;
NewGraph (SCATTERPLOT, 'Equation 4.4', ?Left_Title$', "",size, h1, h2);
NewGraph (SCATTERPLOT, 'Equation 4.4', ?Left_Title$', "",size, h0,h1);
NewGraph (SCATTERPLOT, 'Equation 4.4', ?Left_Title$', "", size, h0,h2);
NewGraph (SCATTERPLOT, 'x', ?Left_Title$', "",size, h1,h3);
NewGraph (SCATTERPLOT, 'y', ?Left_Title$', "",size, h2,h4);

```

{Equation 4.11}

```

NoDataFileVariableNames;
const MAX_SIZE = 200000;
size:=2000;

```

```

if not DisplayNumericInputBox ('Equation 4.4',
                               'Enter number of points:', size) then
    Exit;
if (size <= 0) or (size > MAX_SIZE) then
begin
    Beep;
    Exit
end;
DisplayMessageBox (MB_OK, 'Equation 4.11,
                          'Warning: This program might take a few moments to execute. ');
redim h0(size), h1(size), h2(size),h3(size),h4(size),h5(size);
hh1:=0.1;
hh2:=0.2;
hh3:=0;
a:=4;
c:=2.8;
d:=13.22;
for i:=2 to size do
begin
    h0(i) := i;
    hh3:=c- d/(1+hh1^2 + hh2^2);
    h1(i) := -a - (hh1*cos(hh3)) + (hh2*sin(hh3)) ;
    h2(i) := -(hh1*sin(hh3)) - (hh2*cos(hh3));
    hh1 := h1(i);
    hh2 := h2(i);
    h3(i):=h1(i-1);
    h4(i):=h2(i-1);
end;
NewGraph (SCATTERPLOT, 'Equation 4.11', ?Left_Title$, "",size, h1, h2);
NewGraph (LINEPLOT, 'x', ?Left_Title$, "", size, h0,h1);
NewGraph (LINEPLOT, 'y', ?Left_Title$, "",size, h0,h2);}

```

{Ikeda Model}

```

NoDataFileVariableNames;
const MAX_SIZE = 200000;
size:=5000;
if not DisplayNumericInputBox ('Ikeda Model',
                               'Enter number of points:', size) then
    Exit;
if (size <= 0) or (size > MAX_SIZE) then
begin
    Beep;
    Exit
end;
DisplayMessageBox (MB_OK, 'Ikeda Model',
                          'Warning: This program might take a few moments to execute. ');
redim h0(size), h1(size), h2(size),h3(size),h4(size),h5(size);
hh1:=0.1;
hh2:=0.2;
hh3:=0;
a:=0.97;
b:=0.83;
c:=0.4;
d:=1;
for i:=2 to size do
begin
    h0(i) := i;
    hh3:= c - d/(1+hh1^2 + hh2^2);

```

```

h1(i) := a + b*(hh1*cos(hh3) - hh2*sin(hh3)) ;
h2(i) := b*(hh1*sin(hh3) + hh2*cos(hh3));
hh1 := h1(i);
hh2 := h2(i);
h3(i):=h1(i-1);
h4(i):=h2(i-1);
end;
NewGraph (SCATTERPLOT, 'Ikeda Model', ?Left_Title$, ",size, h1, h2);
NewGraph (LINEPLOT, 'Ikeda Model', ?Left_Title$, ",size, h1,h3);
NewGraph (LINEPLOT, 'Ikeda Model', ?Left_Title$, ",size, h2,h4);

```

{GRM1 Model}

```

NoDataFileVariableNames;
const MAX_SIZE = 500000;
size:=50;
if not DisplayNumericInputBox ('GRM1 Model',
                               'Enter number of points:', size) then
    Exit;
if (size <= 0) or (size > MAX_SIZE) then
begin
    Beep;
    Exit
end;
DisplayMessageBox (MB_OK, 'GRM1 Model',
                  'Warning: This program might take a few moments to execute. ');
redim h0(size), h1(size), h2(size),h3(size);
h1(1):=0.4;
hh1:=3.1;
hh2:=1.5;
h2(1):=0;
h3(1):=0;
for i:=2 to size do
begin
    h0(i) := i;
    h1(i) :=hh1*h1(i-1)*(1-h1(i-1))/(1-(1-hh2)*h1(i-1));
    h3(i) :=h1(i);
    h2(i) :=h1(i-1);
end;
NewGraph (LINEPLOT, 'GRM1 Model', ?Left_Title$, 'Figure 1: GRM1 Model',
          size,h0,h1);
NewGraph (LINEPLOT, 'GRM1 Model, ?X_Title$, ?Y_Title$,size, h2, h3);

```

{Logistic Model}

```

NoDataFileVariableNames;
const MAX_SIZE = 500000;
size:=51;
if not DisplayNumericInputBox ('Logistic Model',
                               'Enter number of points:', size) then
    Exit;
if (size <= 0) or (size > MAX_SIZE) then
begin
    Beep;
    Exit
end;
DisplayMessageBox (MB_OK, 'Logistic Model',
                  'Warning: This program might take a few moments to execute. ');

```

```

redim h0(size), h1(size);
hh1:=2.65;
h1(1):=0.4;
for i:=2 to size do
begin
  h0(i) := i;
  h1(i) :=hh1*(h1(i-1))*(1-h1(i-1));
end;
NewGraph (SCATTERPLOT, 'Logistic Model', ?Left_Title$, 'Figure 1: Logistic Model,size, h0, h1);

```

{Delay Logistic Model}

```

NoDataFileVariableNames;
const MAX_SIZE = 500000;
size:=10000;
if not DisplayNumericInputBox ('Delay Logistic Model',
                              'Enter number of points:', size) then
  Exit;
if (size <= 0) or (size > MAX_SIZE) then
begin
  Beep;
  Exit
end;
DisplayMessageBox (MB_OK, 'Delay Logistic Model',
                  'Warning: This program might take a few moments to execute.');
```

```

redim h0(size), h1(size), h2(size),h3(size);
hh1:=0.9;
h1(1):=0.1;
hh2:=1.706;
m:=1;
h3(1):=0;
h2(1):=0;
k:=m+1;
for i:=m+2 to size do
begin
  h2(i):=h1(i);
  h0(i) := i;
  h1(i) :=hh1*h1(i-1)+hh2*(h1(i-k))*(1-h1(i-k));
  h3(i):=h1(i);
  h2(i):=h1(i-1);
end;
NewGraph (LINEPLOT, 'HENON Strange Attractor', ?Left_Title$, 'Figure 1: Delay Logistic Model,size, h0, h1);
NewGraph (SCATTERPLOT, 'HENON Strange Attractor', ?Left_Title$, 'Figure 1: delay Logistic Model,size, h2, h3);

```

{Glass Model}

```

NoDataFileVariableNames;
const MAX_SIZE = 500000;
size:=5000;
size1:=size+100;
if not DisplayNumericInputBox ('Glass Model',
                              'Enter number of points:', size) then
  Exit;
if (size <= 0) or (size > MAX_SIZE) then
begin
  Beep;

```

```
Exit
end;
DisplayMessageBox (MB_OK, 'Glass Model',
    'Warning: This program might take a few moments to execute. ');
redim h0(size), h1(size), h2(size1), h3(size1);
hh1:=0.9;
hh2:=0.18;
h1(1):=0.1;
m:=40;
h3(1):=0;
h2(1):=0;
k:=m+1;
for i:=m+2 to size do
begin
    h2(i):=h1(i);
    h0(i) := i;
    h1(i) := hh1*h1(i-1) + hh2*h1(i-k) / (1+(h1(i-k)^10));
    h3(i):=h1(i-40);
    h2(i):=h1(i-1);
end;
NewGraph (LINEPLOT, 'Glass Model', ?Left_Title$, 'Figure 1: Glass Model', size, h0, h1);
NewGraph (SCATTERPLOT, 'Glass Model', ?Left_Title$, 'Figure 1: Glass Model', size, h1, h3);
```