



Πολυτεχνείο Κρήτης
Τμήμα Μηχανικών Παραγωγής και Διοίκησης
Τομέας Επιστήμης Αποφάσεων
Εργαστήριο Συστημάτων Υποστήριξης Αποφάσεων

Συντονισμός και Ανταγωνισμός στην Εφοδιαστική
Αλυσίδα: Προσεγγίσεις Βελτιστοποίησης και
Θεωρίας Παιγνίων

Διατριβή που υπεβλήθη για την μερική ικανοποίηση των απαιτήσεων για την
απόκτηση Διδακτορικού Διπλώματος

Υπό της

Αθανασίας Καρακίτσιου

Χανιά, 2007



**Technical University of Crete
Department of Production Engineering and Management
Decision Support System Laboratory**

Coordination and Competition in Supply Chain: Optimization and Game Theoretic Approaches

Thesis submitted in partial fulfillment of the requirements for the degree of
Doctor of Philosophy

by

Athanasia Karakitsiou

Chania, Greece, 2007

.....
Αθανασία Καρακίτσιου
© (2007) Πολυτεχνείο Κρήτης. All rights reserved.



Πολυτεχνείο Κρήτης
Τμήμα Μηχανικών Παραγωγής και Διοίκησης
Τομέας Επιστήμης Αποφάσεων
Εργαστήριο Συστημάτων Υποστήριξης Αποφάσεων

**Συντονισμός και Ανταγωνισμός στην Εφοδιαστική Αλυσίδα: Προσεγγίσεις
Βελτιστοποίησης και Θεωρίας Παιγνίων**

Διδακτορική Διατριβή

της

Αθανασίας Καρακίτσιου

Εγκρίθηκε από την επταμελή εξεταστική επιτροπή την 08/03/2007.

Ονοματεπώνυμο	Υπογραφή
Μυγδαλάς Αθανάσιος Καθηγητής, Π.Κ. (Επιβλέπων)	:
Τσούρος Κωνσταντίνος Καθηγητής, Α.Π.Θ.	:
Ματσατσίνης Νικόλαος Αν. Καθηγητής, Π.Κ.	:
Ζοπουνίδης Κωνσταντίνος Καθηγητής, Π.Κ.	:
Κουϊκόγλου Βασίλειος Καθηγητής, Π.Κ.	:
Σταυρουλάκης Γεώργιος Καθηγητής, Π.Κ.	:
Παπαρρίζος Κωνσταντίνος Καθηγητής, Παν. Μακεδονίας	:

*Στον Σάκη, που κάνει την ζωή μου βέλτιστη,
με την ελπίδα να φανώ αντάξια
των προσδοκιών του.*

αὐτό δέ τὸ δέον ἐντί ὅπερ δεῖ ἡμεν, τὸ δέ μὴ δέον
ὅπερ οὐ δεῖ ἡμεν. τῷ δέ μὴ δέοντος εἶδεε δύο, τὸ μὲν ὑπερβολὴ τὸ δ' ἐλλείψις. καὶ ὑπερβολὴ μὲν ἐντί τὸ πλέον
τῷ δέοντος, ἐλλείψις δέ τὸ ἔλαττον τῷ δέοντος. τὸ δέ δέον αὐτὸ ἐόν ὅπερ δεῖ ἡμεν καὶ ἄκρον ἂν ὑπάρχοι καὶ
μέσον· ἄκρον μὲν ὅτι οὐτ' ἀφαιρέσις οὔτε προσθέσις δέεται, μέσον δέ ὅτι μεταξὺ ἐντι τῆς ὑπερβολῆς καὶ τῆς
ἐλλείψεως. ἔχει δέ τὸ δέον καὶ τὸ μὴ δέον πρὸς ἀλλήλα οὕτως ὥσπερ τὸ ἴσον καὶ τὸ ἀνίσον, καὶ το τεταγμένον καὶ
τὸ ἀτακτον

ΣΤΟΒΑΙΟΣ : Ἀνθολόγιον, Θεαγούς Πυθαγορείου ἐκ τοῦ περὶ ἀρετῆς

Περιεχόμενα

Ευχαριστίες	ix
Σύντομο Βιογραφικό	xi
Περίληψη	xiii
1 Εισαγωγή	1
1.1 Θεωρητικό Πλαίσιο της Διατριβής	1
1.2 Στόχοι και Συνεισφορά της Διατριβής	3
2 Συντονισμός και Βελτιστοποίηση της Εφοδιαστικής Αλυσίδας με την Χρήση Μεθόδων Αποσύνθεσης	8
2.1 Εισαγωγή	8
2.2 Διαμόρφωση του Προβλήματος	11
2.2.1 Σύντομη Βιβλιογραφική Επισκόπηση	13
2.2.2 Γραμμικά Κόστη	17
2.2.3 Μη Φθίνων Οριακό Κόστος Παραγωγής	19
2.3 Μέθοδος Αποσύνθεσης με Διαχωρισμό Δραστηριοτήτων και μη Ιεραρχικός Συντονισμός Μέσω Αλγορίθμου Υποκλίτους	20
2.4 Μη-Ιεραρχικός Συντονισμός με Χρήση της Επαυξημένης Συνάρτησης Lagrange	29
2.5 Ιεραρχικός Συντονισμός μέσω της αποσύνθεσης Dantzig-Wolfe	34
2.6 Υπολογιστική Προσομοίωση του Λαγκρανζιανού Συντονισμού	40
2.7 Σύστημα Αποφάσεων Βασισμένο στην Θεωρία Πρακτόρων	45
2.8 Συμπεράσματα	46

3 Ανταγωνισμός Πελατών Εφοδιαστικής Αλυσίδας για το Προσφερόμενο Επίπεδο Εξυπηρέτησης: Μια Προσέγγιση Βασισμένη στην Θεωρία Παιγνίων	50
3.1 Εισαγωγή	50
3.2 Μαθηματική Διαμόρφωση του προβλήματος	55
3.3 Βέλτιστη Καταχώριση Πελατών από το Σύστημα	60
3.4 Ανταγωνιστική Κατανομή Πελατών	65
3.5 Βέλτιστο Σύστημα έναντι Ατομικού βέλτιστου: Τα αποτελέσματα .	69
3.6 Ανταγωνιστική Κατανομή Πελατών με Ελαστική Ζήτηση	72
3.6.1 Η Επίδραση της Ελαστικής Ζήτησης στο Βέλτιστο Σύστημα και Ατομικό Βέλτιστο	77
3.7 Συμπεράσματα	79
4 Κυρτά Προβλήματα Παραγωγής Μεταφοράς και Αλγόριθμοι Επίλυσης Βασισμένοι στην Μέθοδο Frank-Wolfe	81
4.1 Εισαγωγή	81
4.2 Πρόβλημα Μεταφοράς με Αθέτατα Ζήτηση	81
4.3 Πρόβλημα Παραγωγής Μεταφοράς με Μεσάζοντα	84
4.3.1 Σχέση Ανάμεσα στο Κόστος Παραγωγής και την Συνάρτηση Τιμολόγησης	90
4.3.2 Επεκτάσεις του Προβλήματος	93
4.4 Αλγόριθμοι Επίλυσης	95
4.4.1 Η Μέθοδος Frank-Wolfe	96
4.4.2 Βελτιώσεις Εφικτής Κατεύθυνσης	100
4.4.3 Απέρριπτη Αποσύνθεση (Simplicial Decomposition)	101
4.4.4 Κυκλική Αποσύνθεση (Cyclic Decomposition)	103
4.4.4.1 Γενικές Ιδιότητες	105
4.4.4.2 Ο Αλγόριθμος Κυκλικής Γραμμικοποίησης	106
4.4.4.3 Μη Ακριβής Γραμμικοποιημένη Αντιμετώπιση της Κυκλικής Αποσύνθεσης	110
4.5 Ανάπτυξη ενός Αλγόριθμου Απέρριπτης Αποσύνθεσης Βασισμένου στην Κανονικοποιημένη Μέθοδο Frank-Wolfe	112
4.5.1 Η Θεωρητική Μορφή του Αλγορίθμου Αποσύνθεσης και η Σύγκλιση του	113

4.5.1.1	Σύγκλιση με Ακριβείς Γραμμικές Αναζητήσεις (exact line searches)	116
4.5.1.2	Σύγκλιση με Μη-ακριβείς Γραμμικές Αναζητήσεις	117
4.5.1.3	Δυσκοί Αλγόριθμοι Πολυωνυμικής Πολυπλοκότητας για την Επίλυση των Υποπροβλημάτων.	118
4.6	Υπολογιστικά Αποτελέσματα	122
4.7	Συμπεράσματα	125
5	Ανταγωνιστική Χωροθέτηση Εγκαταστάσεων υπό Ανταγωνισμό Πελατών για το Προσφερόμενο Επίπεδο Εξυπηρέτησης	128
5.1	Εισαγωγή	128
5.2	Σύντομη Επισκόπηση του Διεπίπεδου Προγραμματισμού	131
5.3	Βέλτιστη Χωροθέτηση Εγκαταστάσεων και Ανάθεση Δυναμικότητας υπό Ανταγωνισμό Πελατών	132
5.3.1	Βέλτιστη Χωροθέτηση του Συστήματος	133
5.3.2	Διεπίπεδη Διαμόρφωση των Προβλημάτων υπό Ανταγωνισμό Πελατών	135
5.3.3	Αριθμητική Σύγκριση των Δύο Προτύπων	137
5.4	Δυοπώλειο	140
5.4.1	Ανταγωνιστική Χωροθέτηση Εγκαταστάσεων Όταν οι Πελάτες Παίζουν το Δικό τους Ανταγωνιστικό Παίγνιο	141
5.4.2	Οι Επιπτώσεις του Δυοπωλείου στο Επίπεδο Εξυπηρέτησης	143
5.5	Συμπεράσματα	148
6	Συμπεράσματα και Μελλοντικές Επεκτάσεις	151
	Βιβλιογραφία	154

Κατάλογος Σχημάτων

2.1 Δικτυακή Αναπαράσταση του Προβλήματος [IPTP1]	14
2.2 Δικτυακή Αναπαράσταση του Προβλήματος [IPTP2]	19
2.3 Δικτυακή Αναπαράσταση του προβλήματος [LS1]	22
2.4 Δικτυακή Αναπαράσταση του προβλήματος [SUB11] όταν ισχύει η (2.42) (δύο εγκαταστάσεις, τέσσερις περίοδοι).	23
2.5 Δικτυακή Αναπαράσταση του Προβλήματος [TP1]	24
2.6 Συντονισμός σε όρους των υποπροβλημάτων Lagrange [LS1] και [TP1]	25
2.7 Συντονισμός σε όρους υποπροβλημάτων Lagrange [SUB11] και [TP1]	25
2.8 Δικτυακή Αναπαράσταση του προβλήματος [TP2]	28
2.9 Συντονισμός σε όρους των υποπροβλημάτων Lagrange [SUB11] , [TP2] και [LS2]	29
2.10 Ιεραρχικός Συντονισμός μέσω Τιμών βάση των υποπροβλημάτων [LS1] και [TP1]	36
2.11 Ιεραρχικός Συντονισμός μέσω Τιμών βάση των υποπροβλημάτων [SUB11] και [TP1]	37
2.12 Ιεραρχικός Συντονισμός μέσω Τιμών βάση των υποπροβλημάτων [SUB11] , [LS2] και [TP2]	39
2.13 Η Σύγκλιση σε Απόλυτα Σφάλματα	42
2.14 Η Σύγκλιση σε Σχετικά σφάλματα	42
2.15 Αποτελέσματα Λαγκρανζιανού Συντονισμού	42
2.16 Συνεργασία Πρακτορικού Συστήματος Υποστήριξης Αποφάσεων και Μεθόδου Βελτιστοποίησης	46
3.1 Μια διημερής Γραφική Αναπαράσταση της Εξεταζόμενης Εφοδιαστι- κής Αλυσίδας	56
3.2 Η συνάρτηση Απόδοσης	58

3.3	Παράδειγμα Εφοδιαστικής Αλυσίδας	69
3.4	Βέλτιστη Κατανομή της ζήτησης Πελατών	70
3.5	Βέλτιστη Κατανομή Πελατών των Προβλημάτων (SO-TPE) και (UO-TPE)	78
4.1	Η Κινήσεις του Αλγόριθμου Frank-Wolfe στο Διάστημα των Υποπροβλημάτων	99
4.2	Κινήσεις του Αλγόριθμου Μερικής Γραμμικοποίησης	102
4.3	Η Τμηματική Γραμμική Μονοτονική μη-Αύξουσα Παράγωγος $g(\lambda)$ και τα σημεία θλάσης	120
4.4	Μέγεθος του Περιορισμένου Κυρίαρχου Προβλήματος σε Στήλες Έναντι Σχετικής Ακρίβειας	124
4.5	Σύγκριση Υπολογιστικού Χρόνου και Μεγέθους Προβλήματος με Σχετική Ακρίβεια 0.01 %	125
4.6	Υπολογιστικός Χρόνος έναντι της Απαιτούμενης Σχετικής Ακρίβειας .	126
5.1	Βέλτιστη Χωροθέτηση Συστήματος και Χωροθέτηση Βασισμένη στον Ανταγωνισμό των Πελατών	138
5.2	Σύνολο Εκβάσεων (όλα τα σημεία EV πλὴν του MP1 και MP2) και τα Σημεία Ισορροπίας EP	145
5.3	Ανταγωνιστική Χωροθέτηση Εγκαταστάσεων	147

Κατάλογος Πινάκων

2.1	Επεξήγηση των Τίτλων των Γραφικών	41
2.2	Σύγκριση Υπολογιστικών Αποτελεσμάτων Λαγρανζιανού Συντονισμού με τα αποτελέσματα του glpk	44
2.3	Σύγκριση Υπολογιστικών Αποτελεσμάτων Λαγρανζιανού Συντονισμού με Ευρετικό Βήμα (2.113) με τα Αποτελέσματα του glpk	45
3.1	Πίνακας Παραμέτρων Παραδείγματος με Σταθερή Ζήτηση	70
3.2	Αποτελέσματα της Επίλυσης των Προβλημάτων (SO-TP) και (UO-TP)	72
3.3	Βέλτιστες Ποσότητες Αγοράς	77
3.4	Αποτελέσματα Επίλυσης των Προβλημάτων (SO-TPE) και (UO-TPE)	79
4.1	Επαναλήψεις του Αλγόριθμου Frank-Wolfe	99
4.2	Επαναλήψεις του Αλγόριθμου Μερικής Γραμμικοποίησης	101
4.3	Σύγκριση Χρόνων Εκτέλεσης των Αλγορίθμων	122
4.4	Χρόνος CPU (σε δευτερόλεπτα), αριθμός επαναλήψεων (MI), αριθμός γραμμών αναζήτησης (LS) των αλγορίθμων DSD και DSD-RFW. Σχετικό αντικειμενικό σφάλμα 0.5%.	126
4.5	Χρόνος CPU (σε δευτερόλεπτα), αριθμός επαναλήψεων (MI), αριθμός γραμμών αναζήτησης (LS) των αλγορίθμων DSD και DSD-RFW. Σχετικό αντικειμενικό σφάλμα 0.1%.	127
4.6	Χρόνος CPU (σε δευτερόλεπτα), αριθμός επαναλήψεων (MI), αριθμός γραμμών αναζήτησης (LS) των αλγορίθμων DSD και DSD-RFW. Σχετικό αντικειμενικό σφάλμα 0.05%.	127
5.1	Πίνακας Παραμέτρων Παραδείγματος	138
5.2	Αποτελέσματα της Επίλυσης των Προβλημάτων (SO-FL) και (BSO-FL)	139
5.3	Οι Στρατηγικές των Παικτών	144

5.4	Μήτρα Απώλειας Παραγωγού 1	146
5.5	Μήτρα Απώλειας Παραγωγού 2	146
5.6	Η Επίδραση των Σημείων Ισορροπίας (S_{13}, S_{24}) και (S_{14}, S_{23}) στο Παί- γνιο των Πελατών	150

Ευχαριστίες

Όταν φτάνεις επιτέλους στο τέλος ενός μεγάλου στόχου και κοιτάς πίσω μόνο τότε συνειδητοποιείς την συνολική σου πορεία και τους ανθρώπους που την επηρέασαν. Σε αυτούς θέλω να αναφερθώ σε αυτές τις λίγες γραμμές και να τους ευχαριστήσω θερμά για την σημαντική βοήθεια που μου πρόσφεραν στα διάφορα στάδια αυτής της πορείας.

Αρχικά θέλω να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα καθηγητή μου κ. Αθανάσιο Μυγδαλά όχι μόνο γιατί στάθηκε η αφορμή να ασχοληθώ με τον χώρο της Επιχειρησιακής Έρευνας αλλά και γιατί στήριξε την προσπάθεια μου στις δύσκολες στιγμές, με καθοδήγησε και αφιέρωσε πολύ από τον πολύτιμο χρόνο του για να φτάσουμε ως εδώ.

Θα ήθελα να ευχαριστήσω τα μέλη της συμβουλευτικής επιτροπής κ. Κ. Τσούρο, Καθηγητή του Α.Π.Θ. και τον κ. Ν. Ματσατσίνη, Αναπληρωτή Καθηγητή του Πολυτεχνείου Κρήτης καθώς και τα υπόλοιπα μέλη της εξεταστικής επιτροπής για τις υποδείξεις και παρατηρήσεις τους στην διάρκεια εκπόνησης της παρούσα εργασίας.

Επίσης θέλω να ευχαριστήσω όλους τους συναδέλφους στο ΕΡΓΑ.Σ.Υ.Α. για την καλή συνεργασία που είχαμε όλο αυτό το χρονικό διάστημα. Ιδιαίτερα την Δρ. Αθανασία Μαυρομμάτη, τους υποψήφιους Διδάκτορες Μάρκο Κουργιαντάκη και Ηρακλή Μανδαλιανό, τον Κώστα Καραγκιοζόπουλο και τον Δρ. Γιάννη Μαρινάκη για τις συζητήσεις και την ανταλλαγή απόψεων καθ' όλη την διάρκεια πραγματοποίησης της παρούσας εργασίας.

Ευχαριστώ περισσότερο από όλους την οικογένεια μου τον πατέρα μου Χρήστο, την μητέρα μου Χρυσούλα και τον αδερφό μου Κώστα για την συμπαράσταση τους, την κατανόηση τους και την υπομονή τους σε όλη την διάρκεια αυτής της εργασίας και ιδιαίτερα στις δύσκολες στιγμές της. Είμαι ιδιαίτερα ευγνώμων για όσα μου έχουν προσφέρει όλα αυτά τα χρόνια και σίγουρα σε αυτούς χρωστάω τα πάντα. Τους ευχαριστώ για όλες τις θυσίες που έχουν κάνει ώστε να μου δώσουν την δυνατότητα να ασχοληθώ απερίσπαστη με κάτι τόσο συναρπαστικό όσο η αναζήτηση της γνώσης.

Σύντομο Βιογραφικό

Η Αθανασία Καρακίτσιου γεννήθηκε στην Τερπνή Σερρών το 1974. Το 1996 απέκτησε το πτυχίο Οικονομικών Επιστημών του Τμήματος Οικονομικών Επιστημών του Πανεπιστημίου Πατρών. Το 1998 απέκτησε το Μεταπτυχιακό Δίπλωμα Ειδίκευσης του Μεσογειακού Αγρονομικού Ινστιτούτου Χανίων. Είναι υποψήφια διδάκτωρ του Τμήματος Μηχανικών Παραγωγής και Διοίκησης του Πολυτεχνείου Κρήτης υπό την επίβλεψη του καθηγητή κ. Α. Μυγδαλά.

Το ακαδημαϊκό έτος 1994-1996 έλαβε υποτροφία από τον Εθνικό Ίδρυμα Υποτροφιών για άριστη επίδοση στο 2^ο και 3^ο έτος σπουδών. Ενώ τα ακαδημαϊκά έτη 1996-1996 υπήρξε μεταπτυχιακή υπότροφος του οργανισμού International Center for Advanced Mediterranean Agronomic Studies (CIHEAM). Την περίοδο 2005-2006 είναι ειδική μεταπτυχιακή υπότροφος στο Πολυτεχνείο Κρήτης.

Είναι μέλος του Εργαστηρίου Σχεδιασμού και Αποφάσεων (ΕΡΓΑ.Σ.Υ.Α) του Τμήματος Μηχανικών Παραγωγής και Διοίκησης του Πολυτεχνείου Κρήτης από τον Μάρτιο του 2001. Σαν μέλος του εργαστηρίου έχει προσφέρει επικουρικό εκπαιδευτικό έργο και συμμετείχε στην επίβλεψη διπλωματικών εργασιών. Συμμετείχε στη συγγραφή ερευνητικών εκθέσεων και άρθρων σε επιστημονικά περιοδικά, βιβλία και πρακτικά συνεδρίων. Έχει εκπονήσει αρκετές μελέτες και έχει συμμετάσχει σε ερευνητικά προγράμματα. Στα ερευνητικά της ενδιαφέροντα περιλαμβάνονται θέματα σχετικά με την διαχείριση της εφοδιαστικής αλυσίδας, τον γραμμικό, μη-γραμμικό και διεπίπεδο προγραμματισμό, την θεωρία παιγνίων, την συνδυαστική βελτιστοποίηση κ.α.

Περίληψη

Η Εφοδιαστική αλυσίδα ορίζεται σαν μια ολοκληρωμένη διαδικασία όπου διάφορες οντότητες όπως προμηθευτές, παραγωγοί και διανομείς συνεργάζονται για να συντονίσουν την ροή υλικών και πληροφοριών από την παραγωγή στην κατανάλωση.

Η διαχείριση της εφοδιαστικής αλυσίδας (Supply Chain Management), δηλαδή ο έλεγχος της ροής των υλικών από τους προμηθευτές έως και τους καταναλωτές, αποτελεί ένα σημαντικό ζήτημα για όλους τους οργανισμούς και σε οποιοδήποτε τομέα της οικονομίας.

Σκοπός της παρούσας διατριβής είναι η ανάπτυξη μαθηματικών προτύπων και η εφαρμογή μεθόδων βελτιστοποίησης και θεωρίας παιγνίων για την διαχείριση και το συντονισμό αποφάσεων που λαμβάνονται στα πλαίσια της εφοδιαστικής αλυσίδας.

Στην παρούσα διατριβή η εφοδιαστική αλυσίδα που εξετάζεται αποτελείται από μια επιχείρηση «παραγωγός», η οποία λειτουργεί σε περισσότερες από μια εγκαταστάσεις και έχει στην διάθεση της περιορισμένους παραγωγικούς πόρους, παράγει/προμηθεύει ένα προϊόν στους «πελάτες». Οι πελάτες της μπορεί να είτε τελικοί χρήστες του προϊόντος, είτε άλλοι ενδιαμέσοι παραγωγοί που χρησιμοποιούν το προϊόν κατά την παραγωγική τους διαδικασία.

Στα πλαίσια αυτού του δικτύου, εξετάζονται δύο διαφορετικοί τρόποι συντονισμού των αποφάσεων που λαμβάνονται από τα μέλη της. Συγκεκριμένα εξετάζεται ο ιεραρχικός (ή κεντροποιημένος) συντονισμός των αποφάσεων όπου υπάρχει ένας κεντρικός συντονιστής ο οποίος αναλαμβάνει να συντονίσει τις επιμέρους αποφάσεις των μελών έτσι ώστε να επιτευχθεί το ολικό βέλτιστο του υπό εξέταση δικτύου ανεφοδιασμού. Ο δεύτερος τρόπος συντονισμού που αντιμετωπίζεται είναι ο μη ιεραρχικός (ή αποκεντροποιημένος) συντονισμός σύμφωνα με τον οποίο τα μέλη της εφοδιαστικής δρώντας ανεξάρτητα το ένα από το άλλο λαμβάνουν αποφάσεις για την επίτευξη των στόχων τους. Οι επιπτώσεις του ανταγωνισμού, τόσο ανάμεσα στους παραγωγούς όσο και ανάμεσα στους πελάτες, στην διαδικασία λήψης αποφάσεων αποτελεί επίσης αντικείμενο της διατριβής. Χρησιμοποιώντας μεθόδους της βελτιστοποίησης και της θεωρίας παιγνίων προτείνονται μαθηματικά πρότυπα και μηχανισμοί συντονισμού που είναι σε θέση να βελτιστοποιήσουν την λειτουργία της εφοδιαστικής αλυσίδας βελτιώνοντας τόσο τις δαπάνες της όσο και το επίπεδο

ικανοποίησης των πελατών της.

Αρχικά εξετάζουμε γραμμικά και κυρτά προβλήματα παραγωγής-μεταφοράς- αποθεματοποίησης που συσχετίζονται άμεσα με το ζήτημα του συντονισμού της εφοδιαστικής αλυσίδας. Χρησιμοποιώντας αυτά τα προβλήματα αναπτύσσουμε ένα μηχανισμό ανατροφοδότησης των πληροφοριών κατά την διαδικασία λήψης αποφάσεων στα πλαίσια της εφοδιαστικής αλυσίδας που στηρίζεται στην θεωρία Lagrange. Το κύριο πλεονέκτημα της νέας προσέγγισης είναι η δραστική απλοποίηση που επιφέρει στη διαχείριση πληροφοριών, περιορίζοντας την ανταλλαγή τους μόνο σε πληροφορίες που αφορούν ποσότητες παραγωγής και μεταφοράς.

Στην συνέχεια αντικείμενο μελέτης είναι οι συνέπειες του ανταγωνισμού των πελατών για την εξασφάλιση ενός συγκεκριμένου επίπεδου εξυπηρέτησης σε ένα δίκτυο ανεφοδιασμού όπου το κόστος μεταφοράς το επιβαρύνονται οι ίδιοι. Το πρόβλημα διαμορφώνεται σαν πρόβλημα μη γραμμικού προγραμματισμού ανάλογο αυτών που αντιμετωπίζονται στα δίκτυα κυκλοφορίας. Μέσα σε αυτό το πλαίσιο εξετάζονται δύο διαφορετικές μορφές διαχείρισης του συστήματος ανεφοδιασμού. Πρώτα εξετάζεται η περίπτωση όπου το σύστημα έχει την δυνατότητα να κατευθύνει το ίδιο τους πελάτες στα κέντρα διανομής για εξυπηρέτηση, καθορίζουμε τις συνθήκες βελτιστότητας του συστήματος και αποδεικνύουμε την μοναδικότητα της βέλτιστης λύσης. Σε ένα επόμενο βήμα υποθέτουμε ότι οι πελάτες έχουν την δυνατότητα να επιλέξουν τα κέντρα διανομής από τα οποία θα εξυπηρετηθούν. Αποδεικνύουμε ότι το παίγνιο στο οποίο εμπλέκονται οι πελάτες είναι ισότιμο με ένα πρόβλημα μη γραμμικού προγραμματισμού. Αποδεικνύουμε επίσης την ύπαρξη και μοναδικότητα ισορροπίας και την διαφοροποίηση της από την βέλτιστη καταχώρηση του συστήματος. Για την επίλυση των μη γραμμικών προβλημάτων αναπτύσσεται μέσω μίας διαδικασίας συνεχούς εκλέπτυνσης μια αποτελεσματική μέθοδος εφικτής κατεύθυνσης που στηρίζεται στην γνωστή μέθοδο Frank-Wolfe. Αναπτύσσουμε επίσης παιγνιοθεωρητικές ερμηνείες για κάποιες μορφές της μεθόδου.

Οι επιπτώσεις που έχει ο ανταγωνισμός στην εξασφάλιση του επιθυμητού επιπέδου υπηρεσιών στην χωροθέτηση των κέντρων διανομής και τη κατανομή δυναμικότητας σε αυτά αποτελούν επίσης αντικείμενο μελέτης της διατριβής. Για την διερεύνηση αυτών των επιπτώσεων διαμορφώνονται 6 διαφορετικά πρότυπα. Ξεκινάμε την ανάλυσή μας υποθέτοντας ότι ο παραγωγός ελέγχει το δίκτυο ανεφοδιασμού και προσπαθεί να εξασφαλίσει το καλύτερο κατά την άποψή του επίπεδο υπηρεσιών. Στην συνέχεια υποθέτουμε ότι οι πελάτες εμπλέκονται σε ένα παίγνιο τύπου Nash στην προσπάθειά τους να εξασφαλίσουν το καλύτερο για αυτούς επίπεδο υπηρεσιών στο ελάχιστο προσωπικό τους κόστος. Για να λάβουμε υπόψη την επίδραση που έχει το παίγνιο των πελατών στις αποφάσεις χωροθέτησης και κατανομής δυναμικότητας του παραγωγού διαμορφώνουμε το πρότυπο σαν πρόβλημα διεπίπεδου προγραμματισμού. Επεκτείνοντας την ανάλυση μας υποθέτουμε ότι στο σύστημα ανεφοδιασμού δραστηριοποιούνται δύο παραγωγοί οι οποίοι συνιστούν δυοπώλειο και ανταγωνίζονται μεταξύ τους για την προσέλκυση πελατών μέσω του επιπέδου υπηρεσιών που προσφέρουν. Για την διαμόρφωση της ανταγωνιστικής χωροθέτη-

σης και κατανομής δυναμικότητας διατυπώνουμε το πρόβλημα σαν ένα διεπίπεδο πρότυπο με δύο ηγέτες.

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

1.1 Θεωρητικό Πλαίσιο της Διατριβής

Η διαχείριση της εφοδιαστικής αλυσίδας είναι ένα επιστημονικό πεδίο για το οποίο έχει εκδηλωθεί ιδιαίτερο ενδιαφέρον τόσο από την πλευρά των επιχειρήσεων όσο και από την πλευρά των ερευνητών. Αρχικά προσέλκυσε το ενδιαφέρον των επιχειρήσεων όταν στις αρχές τις δεκαετίας του 1990 άρχισαν να συνειδητοποιούν τα δυνητικά οφέλη που μπορούν να προκύψουν από τον συντονισμό των αποφάσεων των μελών που την αποτελούν. Τα οφέλη αυτά αναφέρονται κυρίως στην μείωση του ολικού κόστους της παραγωγικής διαδικασίας που επιτελείται στα πλαίσια της εφοδιαστικής αλυσίδας. Οι επιμέρους παράγοντες που επηρεάζουν το ολικό κόστος της παραγωγικής διαδικασίας είναι το κόστος παραγωγής, μεταφοράς και αποθεμάτων. Η αποτελεσματική διαχείριση της αλυσίδας ανεφοδιασμού θα πρέπει να ενσωματώνει τις επιθυμίες και τους στόχους όλων των μελών της και παράλληλα να εξασφαλίζει την επίτευξη αυτών των στόχων.

Η εμπειρία έδειξε ότι η ικανότητα μιας εταιρείας να διαχειριστεί αποτελεσματικά την εφοδιαστική αλυσίδα της, της εξασφαλίζει συγκριτικό πλεονέκτημα έναντι των ανταγωνιστών της. Αυτός είναι ο σημαντικότερος λόγος για την ιδιαίτερη έμφαση που δίνεται στην διαχείριση της εφοδιαστικής αλυσίδας τόσο από την βιομηχανία όσο και τον ακαδημαϊκό χώρο. Όμως για να εκμεταλλευτούν οι επιχειρήσεις τις δυνατότητες που τους παρέχονται για την βελτίωση της κερδοφορίας τους είναι απαραίτητη η ανάπτυξη εργαλείων υποστήριξης αποφάσεων που βασίζονται σε πρότυπα βελτιστοποίησης.

Χαρακτηριστικό αυτών των μαθηματικών προτύπων είναι το μέγεθος τους, η πολυπλοκότητά τους, η ιεραρχική τάξη των λαμβανομένων αποφάσεων, και οι μη-γραμμικές συναρτήσεις κόστους. Επομένως απαιτείται για την επίλυση τους η ύπαρξη πολύπλοκων αλγορίθμων που συχνά συνδυάζουν κλασσική μη-γραμμική βελτιστοποίηση, ολικό μαθηματικό προγραμματισμό και συνδυαστικό προγραμ-

ματισμό. Η επιπλέον ύπαρξη πολλών κέντρων αποφάσεων απαιτεί κατανόηση και έρευνα στο πεδίο των θεωρητικών παιγνίων, ιδίως δε των προτεινόμενων υπό Nash και Stackelberg.

Οι Bhatnagar *et al.* [27] κατηγοριοποίησαν την επιστημονική έρευνα στο πεδίο της εφοδιαστικής αλυσίδας σε τρεις κατηγορίες. Αυτές οι κατηγορίες αντιπροσωπεύουν γενικότερα το συντονισμό που λαμβάνει χώρα στο πλαίσιο διαχείρισης της εφοδιαστικής αλυσίδας ο οποίος σχετίζεται με:

1. Τον συντονισμό παραγωγής και ανεφοδιασμού.
2. Τον συντονισμό διατήρησης αποθέματος και σχεδιασμού της διανομής.
3. Τον συντονισμό παραγωγής και σχεδιασμού διανομής.

Στην πρώτη κατηγορία εντάσσονται μελέτες που επικεντρώνονται στον προσδιορισμό της ποσότητας παραγγελίας που είναι ταυτόχρονα βέλτιστη και για τον παραγωγό και για τον προμηθευτή του.

Οι μελέτες της δεύτερης κατηγορίας ασχολούνται με το πρόβλημα συντονισμού των αποφάσεων διατήρησης αποθεμάτων και το σχεδιασμό της διανομής των προϊόντων. Αυτού του είδους τα προβλήματα προκύπτουν όταν ένας αριθμός πελατών πρέπει να εφοδιαστεί με προϊόντα από ένα ή περισσότερα κέντρα διανομής. Σκοπός τους είναι ο καθορισμός της πολιτικής ανεφοδιασμού τόσο των κέντρων διανομής όσο και των πελατών έτσι ώστε να ελαχιστοποιείται το συνολικό κόστος αποθεμάτων και διανομής. Η αλληλεξάρτηση που παρατηρείται σε αυτού του είδους τα προβλήματα είναι ότι η μείωση του κόστους αποθεμάτων συνεπάγεται αύξηση του κόστους μεταφοράς. Για παράδειγμα η διανομή μικρότερων ποσοτήτων σε συχνότερη βάση συνεπάγεται μείωση του επιπέδου αποθεμάτων στα κέντρα διανομής αλλά ταυτόχρονα και αύξησης του κόστους μεταφοράς.

Οι ερευνητικές μελέτες της τρίτης κατηγορίας επικεντρώνονται στην ολοκληρωμένη αντιμετώπιση του σχεδιασμού παραγωγής και μεταφοράς των προϊόντων. Ο υπεύθυνος για το σχεδιασμό της παραγωγής έχει στόχο σε κάθε περίοδο τον προσδιορισμό του βέλτιστου επιπέδου παραγωγής και αποθεμάτων για κάθε προϊόν έτσι ώστε το συνολικό κόστος παραγωγής και αποθεμάτων να ελαχιστοποιείται. Από την άλλη πλευρά ο υπεύθυνος του τομέα μεταφοράς πρέπει να προσδιορίσει το πρόγραμμα διανομής των προϊόντων στους πελάτες έτσι ώστε να ελαχιστοποιείται το συνολικό κόστος μεταφοράς. Αυτές οι δύο επιχειρηματικές δραστηριότητες μπορούν να συνυπάρξουν και να λειτουργήσουν ανεξάρτητα εάν υπάρχει ένα επίπεδο αποθέματος ικανό να τις αποσυνδέσει πλήρως αφού ο υπεύθυνος διανομής θα προτιμούσε μεγάλες ποσότητες μεταφοράς και μικρό αριθμό στάσεων. Όμως η ύπαρξη μεγάλων ποσοτήτων αποθέματος αυξάνει το κόστος διατήρησης αποθέματος. Έτσι η πίεση για μείωση των αποθεμάτων και του χρόνου παράδοσης επιβάλλει στις σύγχρονες επιχειρήσεις την όσο το δυνατό καλύτερη συνεργασία ανάμεσα σε αυτούς τους δύο τομείς.

Σύμφωνα με τους Hax και Candea [81] οι αποφάσεις για την διαχείριση της εφοδιαστικής αλυσίδας μπορούν να ταξινομηθούν σε τρεις μεγάλες κατηγορίες.

Το στρατηγικό επίπεδο (strategic level). Οι αποφάσεις που λαμβάνονται στο στρατηγικό επίπεδο αφορούν τον καθορισμό μακροπρόθεσμων στόχων. Τυπικό παράδειγμα τέτοιων αποφάσεων είναι η χωροθέτηση νέων εγκαταστάσεων, ο καθορισμός της δυναμικότητας τους και γενικότερα αποφάσεις που επηρεάζουν την υποδομή και το σχεδιασμό ολόκληρης της εφοδιαστικής αλυσίδας.

Το τακτικό επίπεδο (tactical level). Το τακτικό επίπεδο αντιπροσωπεύει το ενδιάμεσο επίπεδο στην διαδικασία λήψης αποφάσεων. Στο επίπεδο αυτό οι αποφάσεις επικεντρώνονται στην κατανομή και χρησιμοποίηση των πόρων.

Το λειτουργικό επίπεδο (operational level). Στο επίπεδο αυτό λαμβάνονται βραχυπρόθεσμες αποφάσεις που αφορούν καθημερινές δραστηριότητες της επιχείρησης όπως ο προγραμματισμός της δρομολόγησης των οχημάτων και η διεκπεραίωση των παραγγελιών των πελατών.

1.2 Στόχοι και Συνεισφορά της Διατριβής

Στις απαρχές της καινούριας χιλιετίας ο επιχειρηματικός κόσμος χαρακτηρίζεται από συνεχείς και θεαματικές μεταβολές. Ο ανταγωνισμός είναι υψηλός και οι επιχειρήσεις βρίσκονται σε συνεχή προσπάθεια εύρεσης τεχνικών και μεθόδων προκειμένου να εξασφαλίσουν την επιβίωση και ανάπτυξη τους. Οι αλλαγές στο εξωτερικό επιχειρηματικό περιβάλλον συνοδεύονται από αλλαγές στην εσωτερική δομή, τις λειτουργίες και διαδικασίες, τους ρόλους και τις στρατηγικές των επιχειρήσεων.

Επιπλέον η συνεχώς αυξανόμενη παγκοσμιοποίηση της αγοράς και οι συνεχώς αυξανόμενες απαιτήσεις των πελατών για βελτίωση της ποιότητας και μείωση του κόστους των προϊόντων επιβάλλουν στις επιχειρήσεις να γίνουν πιο ευέλικτες τόσο ως προς το χρόνο παράδοσης όσο και ως προς το κόστος παραγωγής ικανοποιώντας έτσι τις απαιτήσεις τους.

Οι δύο αυτές παρατηρήσεις αποτέλεσαν πηγή έμπνευσης για την παρούσα διατριβή, το αντικείμενο οποίας είναι η ανάπτυξη μαθηματικών προτύπων και η εφαρμογή μεθόδων βελτιστοποίησης και θεωρίας παιγνίων για την διαχείριση και το συντονισμό αποφάσεων που λαμβάνονται στα πλαίσια της εφοδιαστικής αλυσίδας.

Σύμφωνα με την κατηγοριοποίηση των Bhatnagar *et al.* [27] τα αποτελέσματα της συγκεκριμένης εργασίας συνεισφέρουν στην τελευταία κατηγορία της μελέτης της εφοδιαστικής αλυσίδας. Η εφοδιαστική αλυσίδα που εξετάζεται στην παρούσα διατριβή υποθέτει ότι μια επιχείρηση «παραγωγός», η οποία λειτουργεί σε περισσότερες από μια εγκαταστάσεις και έχει στην διάθεση της περιορισμένους παραγωγικούς πόρους, παράγει/προμηθεύει ένα προϊόν στους «πελάτες». Οι πελάτες της, μπορεί να είναι είτε τελικοί χρήστες του προϊόντος, είτε άλλοι ενδιάμεσοι παραγωγοί

που χρησιμοποιούν το προϊόν κατά την παραγωγική τους διαδικασία. Στα πλαίσια αυτού του δικτύου, εξετάζονται δύο διαφορετικοί τρόποι συντονισμού των αποφάσεων που λαμβάνονται από τα μέλη της. Συγκεκριμένα εξετάζεται ο ιεραρχικός (ή κεντρικοποιημένος) συντονισμός των αποφάσεων όπου ένας κεντρικός συντονιστής αναλαμβάνει να συντονίσει τις επιμέρους αποφάσεις των μελών έτσι ώστε να επιτευχθεί το ολικό βέλτιστο του υπό εξέταση δικτύου ανεφοδιασμού. Ο δεύτερος τρόπος συντονισμού που αντιμετωπίζεται είναι ο μη ιεραρχικός συντονισμός σύμφωνα με τον οποίο τα μέλη της εφοδιαστικής αλυσίδας δρώντας ανεξάρτητα το ένα από το άλλο λαμβάνουν αποφάσεις για την επίτευξη των στόχων τους. Οι επιπτώσεις του ανταγωνισμού, τόσο ανάμεσα στους παραγωγούς όσο και ανάμεσα στους πελάτες, στην διαδικασία λήψης αποφάσεων αποτελεί επίσης αντικείμενο της διατριβής. Χρησιμοποιώντας μεθόδους βελτιστοποίησης και της θεωρίας παιγνίων προτείνονται μαθηματικά πρότυπα και μηχανισμοί συντονισμού που είναι σε θέση να βελτιστοποιήσουν την λειτουργία της εφοδιαστικής αλυσίδας βελτιώνοντας τόσο τις δαπάνες της όσο και το επίπεδο ικανοποίησης των πελατών της.

Τα πρότυπα που εξετάζουμε επικεντρώνονται όχι μόνο στις στρατηγικές αποφάσεις χωροθέτησης εγκαταστάσεων, κατανομής δυναμικότητας και καταχώρισης πελατών σε αυτές αλλά και σε τακτικές αποφάσεις που σχετίζονται με το σχεδιασμό της παραγωγής και διατήρησης αποθέματος. Επομένως τα προτεινόμενα πρότυπα θα βοηθήσουν την συνολική λειτουργία της εφοδιαστικής αλυσίδας των επιχειρήσεων μέσω του συντονισμού που προτείνεται.

Η εφοδιαστική αλυσίδα που εξετάζεται στο Κεφάλαιο 2 αποτελείται από έναν αριθμό εγκαταστάσεων και πελατών. Προτείνεται ένα ολοκληρωμένο μαθηματικό πρότυπο συντονισμού της παραγωγής, μεταφοράς και διατήρησης αποθέματος ενός προϊόντος. Το πρότυπο έχει στόχο την εκτίμηση του συνολικού κόστους του δικτύου ανεφοδιασμού που αποτελείται από το κόστος παραγωγής, μεταφοράς και αποθεμάτων. Η εκτίμηση λαμβάνει χώρα σε δεδομένο χρονικό ορίζοντα, T περιόδων. Το προϊόν αποθηκεύεται στις εγκαταστάσεις παραγωγής μέχρι να υπάρξει ζήτηση για αυτό. Επιπλέον οι πελάτες που προμηθεύονται το προϊόν έχουν την δυνατότητα να διατηρούν και οι ίδιοι αποθέματα στις δικίες τους εγκαταστάσεις.

Οι δαπάνες που αντιμετωπίζονται στο προτεινόμενο πρότυπο θεωρούνται ότι είναι γραμμικές ή κυρτές συναρτήσεις. Αν και τα γραμμικά και κυρτά πρότυπα είναι οι απλούστερες περιπτώσεις που μπορούν να αντιμετωπιστούν σε μια ολοκληρωμένη εφοδιαστική αλυσίδα, η ταχύτητα και η ποιότητα της λύσης γραμμικών προβλημάτων επιτρέπουν στους αρμόδιους για το συντονισμό να ερευνήσουν τις επιπτώσεις που έχουν διαφορετικά δεδομένα εισόδου του προβλήματος (π.χ διαφορετική ζήτηση, διαφορετικές δυναμικότητες παραγωγής, μεταφοράς, διατήρησης αποθεμάτων) στην βέλτιστη λύση και να κατανοήσουν την εξάρτηση των σχεδίων παραγωγής, μεταφοράς, αποθεμάτων από αυτούς τους παράγοντες. Έτσι δεν είναι τυχαίο ότι εφαρμογές γραμμικών προβλημάτων για την διαχείριση και το συντονισμό της εφοδιαστικής αλυσίδας έχουν ήδη αναφερθεί στην διεθνή βιβλιογραφία. [133, 137, 156, 3, 188, 13]

Στα προβλήματα προγραμματισμού παραγωγής κυριές συναρτήσεις κόστους εμφανίζονται όταν το πάγιο κόστος είναι πολύ μικρό ή υπάρχουν περισσότερα από ένα κέντρα παραγωγής με περιορισμένη δυναμικότητα παραγωγής η χρήση των οποίων αυξάνει το κόστος. Για την επίλυση προβλημάτων προγραμματισμού παραγωγής κυριές συναρτήσεις έχουν χρησιμοποιηθεί από τους [209, 178, 180, 219, 39].

Αντικειμενικός σκοπός του προβλήματος είναι εύρεση των ποσοτήτων παραγωγής, μεταφοράς, αποθεμάτων που ικανοποιούν την ζήτηση στο ελάχιστο δυνατό κόστος. Αποδεικνύουμε ότι κάτω από συγκεκριμένες υποθέσεις, μέθοδοι βελτιστοποίησης είναι ικανές να παρέχουν ένα συντονιστικό μηχανισμό για την διαχείριση της εφοδιαστικής αλυσίδας. Πιο συγκεκριμένα, αποδεικνύουμε ότι η χαλάρωση Langrange σε συνδυασμό με την μέθοδο βελτιστοποίησης του υποκλίτους στο δυικό πρόβλημα Lagrange μπορούν να παρέχουν έναν μηχανισμό αποσύνθεσης και συντονισμού μέσα στα πλαίσια της μη-ιεραρχικής ή «οριζόντιας» μεθοδολογία προγραμματισμού των υποκείμενων περιοχών απόφασης στην εφοδιαστική αλυσίδα. Ο συντονιστικός μηχανισμός που παρέχεται από την μέθοδο της επαυξημένης χαλάρωσης (Augmented Lagrangian) είναι παρόμοιος αλλά πιο εύρωστος.

Η κύρια συμβολή της μεθοδολογίας που προτείνεται σε αυτή την διατριβή είναι ότι η ανταλλαγή των πληροφοριών μεταξύ των μελών της εφοδιαστικής αλυσίδας είναι η ελάχιστη και περιορίζεται μόνο στην ανταλλαγή πληροφοριών που σχετίζονται με ποσότητες παραγγελίας και μεταφοράς.

Από την άλλη πλευρά η αποσύνθεση Dantzig-Wolfe [112], η οποία μπορεί επίσης να χρησιμοποιηθεί για να παράσχει ένα μηχανισμό συντονισμού και ανταλλαγής πληροφοριών, απαιτεί έναν συντονιστή ή ένα κεντρικό πράκτορα για να συντονίζει την ροή των πληροφοριών ανάμεσα στις διαφορετικές περιοχές λήψης αποφάσεων στα πλαίσια της εφοδιαστικής αλυσίδας, επιβάλλοντας έτσι μια ιεραρχία στην διαδικασία λήψης αποφάσεων. Αυτό σε γενικές γραμμές περιορίζει το μηχανισμό συντονισμού σε μια μοναδική περιοχή αποφάσεων της εφοδιαστικής αλυσίδας.

Στο κεφάλαιο 3 εξετάζεται μια πελατοκεντρική εφοδιαστική αλυσίδα. Ο όρος πελατοκεντρική εφοδιαστική αλυσίδα (customer driven supply chain) αναφέρεται σε μια αλυσίδα ανεφοδιασμού όπου η αγοραστική συμπεριφορά των τελικών χρηστών του προϊόντος επηρεάζει τις αποφάσεις που λαμβάνονται από τα μέλη της.

Υποθέτουμε ότι ο παραγωγός προσπαθεί να παρέχει στους πελάτες το καλύτερο επίπεδο των υπηρεσιών του στο ελάχιστο κόστος. Η μέτρηση των παρεχόμενων υπηρεσιών γίνεται από το επίπεδο καθυστέρησης της εξυπηρέτησης που αντιμετωπίζεται σε κάθε επιχείρηση.

Από την άλλη πλευρά, οι πελάτες, αφού το προϊόν δεν είναι διαθέσιμο σε απεριόριστες ποσότητες, ανταγωνίζονται για την ικανοποίηση της ζήτησης τους και κάνουν τις επιλογές τους έτσι ώστε να ελαχιστοποιηθούν οι προσωπικές τους δαπάνες. Συγκεκριμένα, υποθέτουμε ότι οι πελάτες ανταγωνίζονται μεταξύ τους εμπλεκόμενοι σε ένα παίγνιο τύπου Nash.

Στο κεφάλαιο 3, εξετάζονται δύο διαφορετικές μορφές οργάνωση και συντονισμού της εφοδιαστικής αλυσίδας από τις οποίες προκύπτουν δύο διαφορετικοί τρόποι εκχώρησης των κέντρων διανομής στους πελάτες. Πρώτα εξετάζεται η περίπτωση όπου ολόκληρη η εφοδιαστική αλυσίδα διαχειρίζεται από έναν κεντρικό υπεύθυνο ο οποίος έχει την δυνατότητα να κατευθύνει ο ίδιος τους πελάτες στα κέντρα διανομής. Η δεύτερη μορφή διαχείρισης που εξετάζεται αντιστοιχεί σε μια εφοδιαστική αλυσίδα η οποία χαρακτηρίζεται από αποκεντριοποιημένη διοίκηση, όπου οι πελάτες είναι ελεύθεροι να επιλέξουν οι ίδιοι το κέντρο διανομής από το οποίο θα εξυπηρετηθούν. Το κριτήριο στο οποίο στηρίζουν τις επιλογές τους είναι το ατομικό κόστος που αντιμετωπίζουν σε κάθε κέντρο διανομής.

Εμπνευσμένοι από την αναλογία που υπάρχει ανάμεσα στον ανταγωνισμό που παρατηρείται στην πλευρά των πελατών και αυτόν που παρατηρείται σε ένα πρόβλημα δικτύων κυκλοφορίας καθώς και την ταύτιση των υποθέσεων που διέπουν τις αρχές Wardrop (Οι αρχές καθορίζουν τις διαδρομές που πρέπει να ακολουθήσουν οι χρήστες ενός συμφορισμένου δικτύου οδικής κυκλοφορίας) και τους δύο αυτούς τύπους συντονισμού της εφοδιαστικής αλυσίδας, διαμορφώνουμε το πρόβλημα σας ένα πρόβλημα δικτύου κυκλοφορίας.

Μέσα σε αυτό το μεθοδολογικό πλαίσιο προσδιορίζονται οι συνθήκες βελτιστότητας και καθορίζονται οι συνθήκες ισορροπίας του συνολικού προτύπου.

Στο Κεφάλαιο 4 παρουσιάζονται μέθοδοι επίλυσης των προβλημάτων του Κεφαλαίου 3 τόσο για την περίπτωση δεδομένης ζήτησης όσο και για την περίπτωση ελαστικής ζήτησης. Ο αλγόριθμος που αναπτύσσεται στηρίζεται στην έννοια της μερικής γραμμικοποίησης, της κανονικοποίησης, μη-γραμμικών προβλημάτων πάνω σε εφικτά σύνολα και της δημιουργίας στηλών. Η υπολογιστική σύγκριση του προτεινόμενου αλγορίθμου με έναν ήδη αναγνωρισμένο για την αποτελεσματικότητα του αλγόριθμο καταδεικνύει ότι η συνολική αποδοτικότητα της μεθόδου είναι κατά 50% υψηλότερη. Αναδεικνύεται επίσης το ευρύ φάσμα εφαρμογής των προτεινόμενων μεθόδων μέσω της μορφοποίησης δύο ακόμα προβλημάτων της εφοδιαστικής αλυσίδας: (α) του κλασσικού προβλήματος μεταφοράς υπό αβέβαια ζήτηση και (β) ενός νέου προβλήματος, του προβλήματος παραγωγής-μεταφοράς όταν η ανάθεση της ζήτησης στις παραγωγικές μονάδες γίνεται μέσω μεσαζόντων.

Στο Κεφάλαιο 5 εξετάζουμε το δίκτυο ανεφοδιασμού που μελετήθηκε στο Κεφάλαιο 3 στην περίπτωση όπου ο παραγωγός επιθυμεί να προσδιορίσει τον αριθμό των εγκαταστάσεων και την συνολική δυναμικότητα παραγωγής του έτσι ώστε να εξασφαλίσει ένα συγκεκριμένο επίπεδο ικανοποίησης των πελατών λαμβάνοντας υπόψη του και το χρόνο αναμονής των πελατών στο σύστημα.

Υπό αυτό το καθεστώς προτείνονται προβλήματα χωροθέτησης εγκαταστάσεων και κατανομής δυναμικότητας σε συνθήκες ανταγωνισμού ως προς το επίπεδο ποιότητας στην εξυπηρέτηση, και εξετάζονται οι επιπτώσεις που έχουν στην ισορροπία του συστήματος.

Στα πρότυπα που προτείνονται αρχικά, ο παραγωγός προσπαθεί, μέσα από τις επι-

λογές χωροθέτησης και δυναμικότητας που κάνει για τα κέντρα διανομής, να εξασφαλίσει ένα συγκεκριμένο επίπεδο υπηρεσιών στους πελάτες του. Στην συνέχεια τα πρότυπα επεκτείνονται στην περίπτωση όπου οι πελάτες συνιστούν ολιγοψώνιο ως προς το επίπεδο εξυπηρέτησης. Η ολιγοψωνιακή οργάνωση των πελατών επιβάλλει στον παραγωγό να λάβει άμεσα υπόψη τις αγοραστικές επιλογές τους στην τελική χωροθέτηση και κατανομή δυναμικότητας. Διατυπώνουμε τα πρότυπα αυτά σαν προβλήματα διεπίπεδου προγραμματισμού. Τα συμπεράσματα που λαμβάνονται από την αριθμητική ανάλυση των προτεινόμενων προτύπων καταδεικνύουν ότι η ύπαρξη ολιγοψωνιακής συμπεριφοράς των πελατών ως προς το επίπεδο της ποιότητας των παρεχόμενων υπηρεσιών βελτιώνει την ποιότητα των υπηρεσιών που παρέχονται αφού επιβάλλει την προσαρμογή του παραγωγού στις ανάγκες τις αγοράς.

Η τελευταία μορφή ανταγωνισμού ως προς το επίπεδο των υπηρεσιών που εξετάζεται είναι αυτή της ολιγοπωλιακής οργάνωσης των παραγωγών. Υποθέτουμε ότι οι παραγωγοί συνιστούν ένα δυοπώλειο το οποίο ανταγωνίζεται για την προσέλκυση πελατών μέσω του παρεχόμενου επιπέδου εξυπηρέτησης στα πλαίσια ενός παιγνίου Nash. Για την διαμόρφωση του ανταγωνισμού των παραγωγών προτείνεται ένα διεπίπεδο πρόβλημα με δυο ηγέτες και αποδεικνύεται ότι η συμπεριφορά και οι επιλογές των ανταγωνιζόμενων παραγωγών στο διεπίπεδο παίγνιο είναι σημαντικά διαφορετική από αυτές του μονοπωλείου. Η προτεινόμενη διεπίπεδη διαμόρφωση είναι η πρώτη στην βιβλιογραφία που ασχολείται με την ανταγωνιστική χωροθέτηση και την καταχώρηση δυναμικότητας, στα πλαίσια ολιγοπωλιακής οργάνωσης των προμηθευτών της εφοδιαστικής αλυσίδας.

Τέλος στο κεφάλαιο 6 παρουσιάζονται τα συμπεράσματα καθώς και οι μελλοντικές ερευνητικές επεκτάσεις της διατριβής.

Κεφάλαιο 2

Συντονισμός και Βελτιστοποίηση της Εφοδιαστικής Αλυσίδας με την Χρήση Μεθόδων Αποσύνθεσης

ἐπειδὴ πᾶσαν πόλιν ὁρώμεν κοινωνίαν τινὰ οὖσαν καὶ πᾶσαν κοινωνίαν ἀγαθοῦ τιнос ἔνεκεν συνεστηκυῖαν (τοῦ γὰρ εἶναι δοκοῦντος ἀγαθοῦ χάριν πάντα πράττουσι πάντες), δηλοῦν ὡς πᾶσαι μὲν ἀγαθοῦ τινος στοχάζονται

ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΟΥΣ: Πολιτικά, Βιβλίον Α', § 1

2.1 Εισαγωγή

Η διαχείριση της Εφοδιαστικής Αλυσίδας, αφορά την διαχείριση υλικών και την ροή πληροφοριών ανάμεσα στα διάφορα επίπεδα που την αποτελούν όπως για παράδειγμα οι προμηθευτές, οι κατασκευαστές, οι συναρμολογητές καθώς επίσης και τα κέντρα διανομής. Γενικά υπάρχουν τρία κύρια στάδια στην εφοδιαστική αλυσίδα: ο ανεφοδιασμός (procurement), η παραγωγή, και η διανομή κάθε ένα από τα οποία διενεργείται από διαφορετικά τμήματα μιας επιχείρησης ή από πολλές διαφορετικές επιχειρήσεις. Είναι προφανές επομένως, ότι υπάρχουν περισσότερες από μια περιοχές λήψης αποφάσεων, με αποτέλεσμα την αναγκαιότητα ύπαρξης ενός μηχανισμού ο οποίος θα είναι σε θέση να συντονίζει αυτές τις δραστηριότητες. Η ανταλλαγή πληροφοριών (information sharing) στα πλαίσια ενός τέτοιου συντονιστικού μηχανισμού αποτελεί τον ακρογωνιαίο λίθο για την επιτυχή λειτουργία της εφοδιαστικής αλυσίδας.

Στα πλαίσια μια τέτοιας θεώρησης εγείρονται δύο βασικά ζητήματα: (α) ο καθορισμός των δεσμευτικών συμφωνιών (binding agreements) ανάμεσα στα μέλη της αλυσίδας και (β) των κινήτρων τα οποία θα υποβάλλουν τα μέλη να ανταλλάσσουν πληροφορίες, κάτι που αν δρούσαν μεμονωμένα θα είχαν ενδιασμό να κάνουν, αφού αυτές οι πληροφορίες ενδεχομένως θα τους εξασφάλιζαν ανταγωνιστικό πλεονέκτημα έναντι των ανταγωνιστών.

Αφού η ροή πληροφοριών είναι ουσιαστικός παράγοντας για την αποτελεσματική διαχείριση της εφοδιαστικής αλυσίδας, και για την υπέρβαση το φόβου απώλειας των συγκριτικών πλεονεκτημάτων από τα μέλη της, η ανταλλαγή των πληροφοριών θα πρέπει να περιορίζεται στο ελάχιστο δυνατό. Σε γενικές γραμμές ο συντονισμός μιας πολυμελούς εφοδιαστικής αλυσίδας μπορεί να επιτευχθεί με συμβολαιακές συμφωνίες ή με μηχανισμούς συντονισμού που παρέχονται από μεθοδολογίες βελτιστοποίησης.

Η ολοκληρωμένη θεώρηση των προβλημάτων που αντιμετωπίζονται στα πλαίσια της εφοδιαστικής αλυσίδας οδηγεί σε πολύπλοκα, μεγάλης κλίμακας προβλήματα, που είναι δύσκολο να λυθούν βέλτιστα σε πραγματικές συνθήκες [56]. Συνεπώς, είναι απαραίτητη η ανάπτυξη εναλλακτικών μεθοδολογιών που θα είναι ικανές να παρέχουν βέλτιστες ή σχεδόν βέλτιστες λύσεις για όλες τις αποφάσεις που λαμβάνονται.

Η οργανωτική δομή της εφοδιαστικής αλυσίδας παίζει σημαντικό ρόλο κατά την διαδικασία επεξεργασίας και διαχείριση της ροής των πληροφοριών ανάμεσα στα διάφορα στάδια της. Έχει ήδη συζητηθεί στο βιβλίο των Burton και Obel [32] η αναγκαιότητα αναδόμησης των οργανισμών σε μία πιο αποκεντροποιημένη βάση σύμφωνα με αυτή που προκύπτει από την εφαρμογή μεθόδων αποσύνθεσης της θεωρίας βελτιστοποίησης, αφού η πολυπλοκότητα, η αποκεντροποίηση, και η ανταλλαγή πληροφοριών που χαρακτηρίζει τις συγκεκριμένες μεθόδους συνδέεται άμεσα με τα πολύπλοκα μαθηματικά πρότυπα που περιγράφουν την δομή της εφοδιαστικής αλυσίδας των σύγχρονων οργανισμών. Με αυτόν τον τρόπο οι οικονομικοί οργανισμοί θα είναι σε θέση να εκμεταλλευτούν τα πλεονεκτήματα που προκύπτουν από την εφαρμογή των συγκεκριμένων μεθόδων. Με άλλα λόγια η δομή της επιχείρησης θα πρέπει να βασίζεται σε μαθηματικά εύρωστες (robust) και αποτελεσματικές μεθόδους αποσύνθεσης.

Το παρόν κεφάλαιο ασχολείται μόνο με γραμμικά και κυρτά πρότυπα του συνολικού προβλήματος σχεδιασμού παραγωγής-αποθεμάτων-μεταφοράς ενός ομοιογενούς προϊόντος τα οποία μπορούν εύκολα να επεκταθούν και στην περίπτωση πολλών ετερογενών προϊόντων. Αν και τα γραμμικά και κυρτά πρότυπα είναι οι απλούστερες περιπτώσεις που μπορούν να αντιμετωπιστούν σε μια ολοκληρωμένη εφοδιαστική αλυσίδα, πετυχημένες εφαρμογές τους έχουν ήδη αναφερθεί στη βιβλιογραφία (για παράδειγμα από [133]).

Αποδεικνύουμε ότι κάτω από συγκεκριμένες υποθέσεις, μέθοδοι βελτιστοποίησης είναι ικανές να παρέχουν ένα συντονιστικό μηχανισμό για την διαχείριση της εφοδιαστικής αλυσίδας, ένα πεδίο έρευνας που τα τελευταία χρόνια έχει ελκύσει το ενδιαφέρον πολλών ερευνητών, (ενδεικτικά [27, 33, 40, 59, 195, 196]).

Πιο συγκεκριμένα, αποδεικνύουμε ότι η χαλάρωση Langrange [12, 177, 184] σε συνδυασμό με την μέθοδο βελτιστοποίησης του υποκλίτους [184] στο δυικό πρόβλημα Lagrange μπορούν να παρέχουν έναν μηχανισμό αποσύνθεσης και συντονισμού μέσα στα πλαίσια της μη-ιεραρχικής ή «οριζόντιας» μεθοδολογία προγραμματισμού των υποκείμενων περιοχών απόφασης στην εφοδιαστική αλυσίδα. Ακριβέστερα,

τα αποτελέσματα που προκύπτουν κατά την διαδικασία ανάπτυξης της μεθόδου ομοιάζουν με αυτά του φαινομενικού παιζίματος (fictitious (pre-) play) της θεωρίας παιγνίων [165, 108, 65], και κατ' επέκταση εμπεριέχουν μια διαδικασία εκμάθησης κατά την διάρκεια της οποίας τα μέλη της εφοδιαστικής αλυσίδας καταβάλουν προσπάθειες συντονισμού λαμβάνοντας υπόψη προηγούμενες εμπειρίες. Ο συντονιστικός μηχανισμός που παρέχεται από την μέθοδο της επαυξημένης χαλάρωσης (Langrange) (Augmented Lagrangian) [17, 23, 122] είναι παρόμοιος αλλά πιο εύρωστος.

Η κύρια συμβολή της μεθοδολογίας που προτείνεται σε αυτό το κεφαλαίο είναι ότι η ανταλλαγή των πληροφοριών μεταξύ των μελών της εφοδιαστικής αλυσίδας είναι η ελάχιστη και περιορίζεται μόνο στην ανταλλαγή πληροφοριών που σχετίζονται με ποσότητες παραγγελίας και μεταφοράς. Αυτό έρχεται σε αντίθεση με προηγούμενες εφαρμογές της μεθόδου Lagrange όπου ένας κεντρικός συντονιστής υιοθετεί την διαδικασία υποκλίτους προκειμένου να συντονίσει την ανταλλαγή πληροφοριών ανάμεσα στην παραγωγή και την μεταφορά.

Επιπρόσθετα ο προτεινόμενος μηχανισμός συντονισμού έχει την ικανότητα να ανταποκρίνεται άμεσα σε ξαφνικές αλλαγές του οικονομικού περιβάλλοντος εξασφαλίζοντας έτσι ευελιξία.

Από την άλλη πλευρά η αποσύνθεση Dantzig-Wolfe [112], που μπορεί επίσης να χρησιμοποιηθεί για να παρέχει ένα μηχανισμό συντονισμού και ανταλλαγής πληροφοριών, απαιτεί έναν συντονιστή ή ένα κεντρικό πράκτορα για να συντονίζει την ροή των πληροφοριών ανάμεσα στις διαφορετικές περιοχές λήψης αποφάσεων της εφοδιαστικής αλυσίδας, επιβάλλοντας έτσι ιεραρχία στην διαδικασία λήψης αποφάσεων. Αυτό σε γενικές γραμμές περιορίζει το μηχανισμό συντονισμού σε μια μοναδική περιοχή λήψης αποφάσεων.

Αυτά τα αποτελέσματα δεν επεκτείνονται εύκολα σε μή-κυρτά πρότυπα δηλαδή όταν λαμβάνονται υπόψη οικονομίες κλίμακας ή πάγια δαπάνες. Προηγούμενες προσπάθειες συντονισμού της εφοδιαστικής αλυσίδας, αν και ιεραρχικές, έχουν αναλυθεί από τους [9, 59]. Αλλά όπως επισημαίνεται σε αυτές τις εργασίες, η εφαρμογή της μεθόδου υποκλίτους σπάνια δίνει συνεπείς λύσεις.

Επιπλέον, για την επίλυση προβλημάτων που είναι από την φύση τους πολύπλοκα και ετερογενή όπως αυτά που εξετάζονται στην παρούσα ενότητα, έχουν προταθεί υπολογιστικές μέθοδοι που στηρίζονται στη θεωρία πρακτόρων (agent-based computing). Είναι κοινά αποδεκτό ότι συστήματα λήψης αποφάσεων που στηρίζονται στην θεωρία πρακτόρων συμβάλουν στην αντιμετώπιση ραγδαίων αλλαγών που μπορούν να προκύψουν στο περιβάλλον μια επιχείρησης αφού είναι σε θέση να ανταποκριθούν άμεσα σε αυτές επιτρέποντας με αυτό τον τρόπο τον επαναπροσδιορισμό των επιχειρηματικών στόχων της. Μπορούν επίσης να βοηθήσουν τους διαχειριστές στην λήψη κατάλληλων αποφάσεων όταν δεν υπάρχει πλήρης πληροφόρηση

Επομένως, πολυπρακτορικά συστήματα, όπως το δίκτυο της εφοδιαστικής αλυσίδας, μπορούν να επωφεληθούν από το συντονισμό των πρακτόρων για την επίτευξη

του βέλτιστου του συστήματος εξασφαλίζοντας ταυτόχρονα και την ικανοποίηση των ενδοπρακτορικών περιορισμών.

Έχουν προταθεί πολλές μορφές συντονισμού των πολυπρακτόρων οι οποίες υπάγονται σε τρεις ευρείες κατηγορίες:

Κεντρικός Συντονισμός (Centralized coordination) στον οποίον ένας κεντρικός αποφασίζων λαμβάνει αποφάσεις για όλους τους πράκτορες έχοντας στην διάθεση του πληροφορίες για τους στόχους και τους περιορισμούς κάθε πράκτορα ξεχωριστά.

Ιεραρχικός Συντονισμός (Hierarchical coordination) ο οποίος επιτρέπει στον κάθε πράκτορα να λαμβάνει αποφάσεις ξεχωριστά αλλά ταυτόχρονα απαιτεί κάποιον κεντρικό συντονισμό στην διαδικασία λήψης αποφάσεων για την υποστήριξη ενός ολοκληρωμένου μαθηματικού προτύπου.

Κατανεμημένος Συντονισμός (Distributed coordination) ο οποίος εξαλείφει τις απαιτήσεις για κεντρικό συντονισμό και επιτρέπει κάθε πράκτορα να καθορίζει τις δράσεις του βασιζόμενος σε τοπικά διαθέσιμες πληροφορίες.

Στις μεθόδους που θα αναλυθούν στην συνέχεια οι λύσεις των υποπροβλημάτων παρέχουν έναν συντονιστικό μηχανισμό που μπορεί να υποστηρίξει την συνεργασία των πρακτόρων στην προσπάθεια εύρεσης βέλτιστης λύσης για το σύστημα.

Το υπόλοιπο αυτού του κεφαλαίου οργανώνεται ως εξής: Στην Ενότητα 2.2 παρουσιάζονται οι υποθέσεις και η μαθηματική διατύπωση του προβλήματος που εξετάζεται. Η Ενότητα 2.3 ασχολείται με τον τον προτεινόμενο μη-ιεραρχικό συντονισμό της εφοδιαστικής αλυσίδας, ο οποίος στηρίζεται σε έναν συνδυασμό της χαλάρωσης Lagrange και της μεθόδου αποσύνθεσης με διαχωρισμό δραστηριοτήτων (Activity directive decomposition method), ενώ η μέθοδος συντονισμού που προτείνεται στην Ενότητα 2.4 στηρίζεται στην μέθοδο της επαυξημένης Lagrange. Στην Ενότητα 2.5 πρότείνει και υποστηρίζεται μαθηματικά ένας ιεραρχικός τρόπος συντονισμού της εφοδιαστικής αλυσίδας ο οποίος βασίζεται στην μέθοδο αποσύνθεσης Dantzig-Wolfe (Dantzig-Wolfe decomposition). Η Ενότητα 2.6 παρουσιάζει τα αποτελέσματα της υπολογιστικής προσομοίωσης του Λαγκρανζιανού συντονισμού. Τέλος στην Ενότητας 2.7 εξετάζεται ο τρόπος με τον οποίο οι προτεινόμενες μορφές συντονισμού μπορούν να συνεργαστούν και να συνυπάρξουν με ένα σύστημα αποφάσεων βασισμένο στην θεωρία πρακτόρων.

2.2 Διαμόρφωση του Προβλήματος

Στο σχεδιασμό των πρότυπων της εφοδιαστικής αλυσίδας που θα εξεταστούν υποθέτουμε ότι:

- υπάρχει μόνο ένα (ομογενές) προϊόν,

- δεν υπάρχει πάγιο κόστος στην παραγωγή,
- δεν υπάρχει πάγιο κόστος στην μεταφορά,
- δεν υπάρχει πάγιο κόστος στην διατήρηση αποθεμάτων,
- δεν υφίστανται οικονομίες κλίμακας ή εκπτώσεις ποσοτήτων,
- οι παραγωγικοί πόροι υποτίθεται ότι είναι σταθεροί, δηλαδή εξωγενείς από το σύστημα.

Το πρόβλημα που προκύπτει είναι ένα δυναμικό πρόβλημα το οποίο έχει αντικειμενικό στόχο την ικανοποίηση της ζήτησης n πελατών για ένα προϊόν που παράγεται στις m κέντρων παραγωγής (εγκαταστάσεις) στην διάρκεια ενός χρονικού ορίζοντα T στο ελάχιστο κόστος παραγωγής, αποθεμάτων και μεταφοράς. Μια ολοκληρωμένη ανασκόπηση των προβλημάτων παραγωγής και αποθεμάτων δίδεται στους [96].

Υποθέτοντας επιπλέον ότι

- s_i^t η παραγόμενη ποσότητα στην εγκατάσταση i την περίοδο t ,
- x_{ij}^t η μεταφερόμενη ποσότητα από την εγκατάσταση i στον πελάτη j στην περίοδο t ,
- I_i^t το απόθεμα στην εγκατάσταση i στην διάρκεια της περιόδου t ,
- u_i^t η δυναμικότητα παραγωγής στην εγκατάσταση i στην περίοδο t ,
- f_{ij}^t η δυναμικότητα μεταφοράς από την εγκατάσταση i στον πελάτη j την περίοδο t ,
- w_i^t η αποθεματική δυναμικότητα της εγκατάστασης i στην περίοδο t ,
- g_i^t το μοναδιαίο κόστος παραγωγής στην εγκατάσταση i στην περίοδο t ,
- c_{ij}^t το μοναδιαίο κόστος μεταφοράς από την εγκατάσταση i στον πελάτη j την περίοδο t ,
- h_i^t το ανά μονάδα κόστος διατήρησης αποθέματος στην εγκατάσταση i για την περίοδο t ,
- d_j^t η ζήτηση του πελάτη j την περίοδο t ,
- σ_i^t το ελάχιστο απόθεμα ασφαλείας στην εγκατάσταση i την περίοδο t ,
- I_i^0 το αρχικό απόθεμα ασφαλείας στην εγκατάσταση i την περίοδο t ,

Η μαθηματική διατύπωση του προβλήματος είναι η ακόλουθη:

$$\textbf{[P1]} \quad \min \sum_{t=1}^T \left\{ \sum_{i=1}^m p_i^t s_i^t + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij}^t x_{ij}^t + \sum_{i=1}^m h_i^t I_i^t \right\} \quad (2.1)$$

$$\text{υπό} \quad I_i^{t-1} + s_i^t - I_i^t - \sum_{j=1}^n x_{ij}^t = 0, \quad \forall i, \quad \forall t \quad (2.2)$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij}^t = d_j^t, \quad \forall j, \quad \forall t \quad (2.3)$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij}^t \leq f_i^t, \quad \forall i, \quad \forall t \quad (2.4)$$

$$0 \leq s_i^t \leq u_i^t, \quad \forall i, \quad \forall t \quad (2.5)$$

$$\sigma_i^t \leq I_i^t \leq w_i^t, \quad \forall i, \quad \forall t \quad (2.6)$$

$$0 \leq x_{ij}^t, \quad \forall i, \quad \forall j, \quad \forall t \quad (2.7)$$

Η αντικειμενική συνάρτηση (2.1) ελαχιστοποιεί το συνολικό κόστος παραγωγής, μεταφοράς και αποθεμάτων. Οι (2.2-2.3) είναι οι περιορισμοί ισορροπίας της ροής, ενώ οι (2.4-2.6) είναι οι περιορισμοί δυναμικότητας.

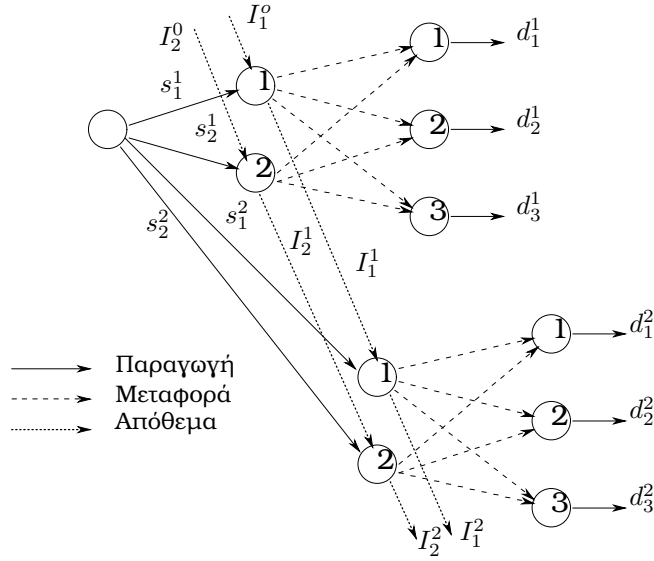
Η γραφική αναπαράσταση του προβλήματος φαίνεται στο Σχήμα 2.1. Το δίκτυο του σχήματος είναι ένα κατευθυνόμενο γράφημα (directed graph) το οποίο αποτελείται από δύο επίπεδα. Ο κόμβος της προσφοράς εφοδιάζει την συνολική ζήτηση κάθε περιόδου. Κάθε επίπεδο του γραφήματος αναπαριστά μια χρονική περίοδο. Το διμερές γράφημα κάθε επιπέδου αναπαριστά το δίκτυο μεταφοράς ανάμεσα στις εγκαταστάσεις της επιχείρησης και τους πελάτες. Οι εγκαταστάσεις σε κάθε περίοδο συνδέονται με τόξα διατήρησης αποθεμάτων.

2.2.1 Σύντομη Βιβλιογραφική Επισκόπηση

Προβλήματα σαν το **[P1]** είναι προβλήματα μεγάλης κλίμακας στα οποία η βέλτιστη λύση είναι υπολογιστικά χρονοβόρα να βρεθεί. Είναι δε ιδιαίτερος δύσκολη η επίλυση εάν κάποιες από κάποιες από τις τιθέμενες υποθέσεις δεν ισχύουν.

Στην εργασία των Eksioğlu *et al.* [55], η συνάρτηση κόστους μεταφοράς θεωρείται ότι εμπεριέχει πάγιο κόστος. Τα προβλήματα αυτής της κατηγορίας είναι ΜΠ-δύσκολα προβλήματα¹ (NP-hard), όπως απέδειξαν οι Wu και Golbasi [223], και κατά συνέπεια είναι απαραίτητη η ανάπτυξη εναλλακτικών τεχνικών επίλυσης που θα είναι σε θέση να βρουν μια καλή (κοντά στην βέλτιστη) λύση για όλους τους οργανισμούς που συνθέτουν την αλυσίδα της εφοδιαστικής. Δεδομένης όμως της πολυπλοκότητας του προβλήματος, δεν εκπλήσσει το γεγονός ότι ο αριθμός αυτών των τεχνικών είναι περιορισμένος. Για την επίλυση του προβλήματος προτείνεται

¹Μη-αιτιοκρατικά Πολυωνυμικά δύσκολα προβλήματα

Σχήμα 2.1: Δικτυακή Αναπαράσταση του Προβλήματος **[IPTP1]**

μια ευρετική διαδικασία σύμφωνα με την οποία μια αρχική λύση του προβλήματος δημιουργείται ύστερα από την εφαρμογή της μεθόδου δυναμικής κλιμάκωσης της κλίσης (Dynamic Slope Scaling Procedure) **[DSSP]** [105], στην συνέχεια χρησιμοποιούνται τρεις διαφορετικές παραλλαγές της διαδικασία τοπικής αναζήτησης (Local Search) για την βελτίωση της αρχικής λύσης. Η ποιότητα των λύσεων που παρέχονται από τον προτεινόμενο αλγόριθμο ελέγχονται συγκρίνοντας την ευρετική λύση με την ακριβή λύση του προβλήματος στην περίπτωση όπου το δίκτυο της εφοδιαστικής αλυσίδας είναι μικρό, ενώ στην περίπτωση μεγάλων δικτύων χρησιμοποιείται σαν κάτω όριο η λύση της γραμμικής χαλάρωσης του προβλήματος. Οι Eksioğlu *et al.* [57] επέκτειναν τον αλγόριθμο στην περίπτωση πολλαπλών προϊόντων.

Στους Eksioğlu *et al.* [56], όχι μόνο η συνάρτηση του κόστους παραγωγής αλλά και η συνάρτηση του κόστους μεταφοράς εμπεριέχουν πάγιο κόστος. Για την επίλυση του προβλήματος παρουσιάζονται δύο προσεγγίσεις: η πρώτη βασίζεται στην ευρετική διαδικασία **[DSSP]** και η δεύτερη στην διαδικασία άπληστης αναζήτησης (Greedy Randomized Adaptive Search Procedure) **[GRASP]** [158]. Σύμφωνα με την πρώτη, η λύση της **[DSSP]** αποτελεί την αρχική λύση η οποία βελτιώνεται με τοπική αναζήτηση. Η λύση της **[DSSP]** αποτελεί το άνω όριο ενώ για την εύρεση του κάτω ορίου εφαρμόζεται γραμμική χαλάρωση σε αναδιατύπωση του προβλήματος. Στην δεύτερη προσέγγιση η αρχική λύση και κατά συνέπεια το άνω όριο βρίσκεται με την διαδικασία **[GRASP]**.

Ευρετικοί Αλγόριθμοι Αποσύνθεσης του προβλήματος: Στους ευρετικούς αυτής της κατηγορίας το αρχικό πρόβλημα διασπάται (αποσυντίθεται) σε υποπροβλήματα τα οποία είναι ευκολότερο να αντιμετωπιστούν. Στην συνέχεια επιστρατεύεται ένας

μηχανισμός ο οποίος συντονίζει την διαδικασία επίλυσης των υποπροβλημάτων.

Στην εργασία των Barbarosoğlu και Özgür [9] χρησιμοποιείται η χαλάρωση Lagrange για το συντονισμό των δράσεων των οργανισμών στα πλαίσια μιας εφοδιαστικής αλυσίδας στην οποία οι αποφάσεις λαμβάνονται ιεραρχικά, δηλαδή υπάρχει ένας κεντρικός οργανισμός που συντονίζει την ροή των πληροφοριών ανάμεσα στα μέλη της εφοδιαστικής αλυσίδας. Στην συγκεκριμένη περίπτωση η χαλάρωση εφαρμόζεται στους περιορισμούς της αποθεματικής ισορροπίας, οι οποίοι συνδέουν τις ποσότητες παραγωγής, αποθεμάτων και μεταφοράς. Σαν αποτέλεσμα το πρόβλημα αποσυντίθεται σε υποπροβλήματα τόσο για την παραγωγή τόσο και για την μεταφορά. Από οργανωτική άποψη αυτό σημαίνει ότι οι αποφάσεις για το επίπεδο παραγωγή λαμβάνονται από τον τμήμα παραγωγής το οποίο επιλύει το αντίστοιχο πρόβλημα ενώ οι αποφάσεις που αφορούν την μεταφορά του προϊόντος από το τμήμα μεταφοράς. Για τον συντονισμό των δύο αυτών υποπροβλημάτων ο κεντρικός συντονιστής χρησιμοποιεί την μέθοδο του υποκλίτους.

Σε γενικές ο αλγόριθμος που χρησιμοποιούν μπορεί να περιγραφεί ως :

Βήμα 1 Αρχικοποίηση των πολλαπλασιαστών Lagrange (λ), του βέλτιστου άνω ορίου (UB_s^*), του αριθμού των επαναλήψεων (s) και του μεγέθους του βήματος του υποκλίτους (u_s).

Βήμα 2 Επίλυση των υποπροβλημάτων και υπολογισμός του κάτω ορίου από την επίλυση του δυικού προβλήματος Lagrange για την τρέχουσα επανάληψη.

Βήμα 3 Επίλυση του προβλήματος παραγωγής και υπολογισμός του νέου ορίου UB_s . Εάν $UB_s - UB_{s-1} < \epsilon$ ο αλγόριθμος τερματίζει διαφορετικά συνέχεια στο βήμα 4.

Βήμα 4 Ανανέωση των πολλαπλασιαστών.

Βήμα 5 Τερματισμός εάν ένας προκαθορισμένος αριθμός των επαναλήψεων επιτευχθεί, διαφορετικά επιστροφή στο βήμα 2.

Η ίδια ακριβώς διαδικασία χρησιμοποιείται και από τους και οι Ertogral και Wu [59]. Βέβαια όπως αναφέρεται και στις δύο περιπτώσεις, η προσέγγιση της υποκλίτου δύσκολα παράγει εφικτές λύσεις για τα υποπροβλήματα, εξαιτίας την ύπαρξης των δυαδικών μεταβλητών.

Από την άλλη πλευρά η ταχύτητα και η ποιότητα της λύσης γραμμικών προβλημάτων επιτρέπουν στους αρμόδιους για το συντονισμό να ερευνήσουν τις επιπτώσεις που έχουν διαφορετικά δεδομένα εισόδου του προβλήματος (π.χ διαφορετική ζήτηση, διαφορετικές δυναμικότητες παραγωγής, μεταφοράς, διατήρησης αποθεμάτων) στην βέλτιστη λύση και να κατανοήσουν την εξάρτηση των σχεδίων παραγωγής, μεταφοράς, αποθεμάτων από αυτούς τους παράγοντες. Επιπλέον, ένα γραμμικό πρόβλημα επιτρέπει την εξέλιξη του συντονιστικού μηχανισμού μέσω της τροποποίησης

των υπάρχοντων περιορισμών και την προσθήκη νέων όταν οι επιχειρησιακές ανάγκες αλλάζουν.

Έτσι δεν είναι τυχαίο ότι έχουν ήδη αναφερθεί στην διεθνή βιβλιογραφία εφαρμογές γραμμικών προβλημάτων για την διαχείριση και το συντονισμό της εφοδιαστικής αλυσίδας στην πράξη. Οι Martin *et al.* [133] πρότειναν ένα γραμμικό πρότυπο που για τον συντονισμό της παραγωγής μεταφοράς και αποθεμάτων της εταιρείας Libbey-Owens-Ford. Ενώ οι Mehring και Gutterman [137] για το σχεδιασμό της παραγωγής της Amoco (U.K.) Limited. Πρόσφατες εφαρμογές του γραμμικού προγραμματισμού για την προτυποποίηση της εφοδιαστικής αλυσίδας μπορούν να βρεθούν στις εργασίες [156, 3, 188, 13]

Στα προβλήματα προγραμματισμού παραγωγής, κοίλες συναρτήσεις κόστους εμφανίζονται συχνότερα από τις κυρτές, κυρίως εξαιτίας της ύπαρξης οικονομιών κλίμακας. Υπάρχουν όμως περιπτώσεις όπου οι συναρτήσεις είναι κυρτές, αυτό συμβαίνει κυρίως στις περίπτωση όπου το πάγιο κόστος είναι πολύ μικρό ή υπάρχουν περισσότερες από ένα κέντρα παραγωγής με περιορισμένη δυναμικότητα παραγωγής η χρήση των οποίων αυξάνει το κόστος. Οι κυρτές συναρτήσεις κόστους χρησιμοποιούνται επομένως προκειμένου να απεικονιστεί ένα λογικό περιθώριο κέρδους της υπό εξέταση επιχείρησης [117]) .

Για την επίλυση προβλημάτων προγραμματισμού παραγωγής με κυρτές συναρτήσεις ο Veinott [209] πρότεινε έναν παραμετρικό αλγόριθμο (Parametric Algorithm). Οι Sharp κ.α. [178], λαμβάνοντας υπόψη την σχέση δυϊκότητας του προβλήματος μεταφοράς, ανέπτυξαν έναν αλγόριθμο για την επίλυση του συγκεκριμένου κυρτού προβλήματος ελαχιστοποίησης ο οποίος βασίζεται στις συνθήκες Βελτισιότητας KKT (Karush-Kuhn-Tucker Optimality Condition). Επιπλέον, ο Shetty [180] ανέπτυξε μια γραφική μέθοδο επίλυσης του προβλήματος. Ο William [219] αντιμετώπισε την περίπτωση όπου το κόστος παραγωγής είναι μια γραμμικώς τμηματική κυρτή συνάρτηση (piecewise linear convex function), ο αλγόριθμος που προτείνει στηρίζεται στην μέθοδο αποσύνθεσης Dantzig Wolfe και ο οποίος αφού αρχικά επιλύει το πρόβλημα μεταφοράς στην συνέχεια τροποποιείται έτσι ώστε να μπορεί να χειρίζεται την ιδιαίτερη συνάρτηση κόστους παραγωγής.

Στην διατύπωση που προτείνεται από τους Chandra και Fisher [39], ένα εργοστάσιο με περιορισμένη δυναμικότητα παράγει r διαφορετικά προϊόντα τα οποία μεταφέρονται σε n πελάτες από ένα στόλο οχημάτων. Η παραγωγική διαδικασία προτυποποιείται σαν Πρόβλημα Προγραμματισμού Παραγωγής Περιορισμένης Δυναμικότητας **[CLSP]** (Capacitated Lotsizing Problem) και η διαδικασία μεταφοράς σαν Πρόβλημα Δρομολόγησης Οχημάτων **[VRP]** (Vehicle Routing Problem). Αρχικά κάθε υποπρόβλημα επιλύεται ξεχωριστά. Για το μεν **[CLSP]** η λύση βρίσκεται με την χρήση της μεθόδου των Barany *et al.* [8], για το δε **[VRP]** με τους ευρετικούς των [73, 167, 38] από τους οποίους επιλέγεται η καλύτερη. Στην συνέχεια για τον συντονισμό της παραγωγής και της μεταφοράς εφαρμόζεται μια διαδικασία τοπικής βελτίωσης (Local Improvement).

2.2.2 Γραμμικά Κόστη

Σε αυτό το σημείο θα ασχοληθούμε με την περίπτωση όπου οι δαπάνες παραγωγής, μεταφοράς και διατήρησης αποθεμάτων είναι γραμμικές συναρτήσεις. Είναι δυνατόν να απαλείψουμε τις μεταβλητές x_{ij} από τον περιορισμό (2.2), διατηρώντας τον παράλληλα ρητό και σαφή στο πρόβλημα, με την εισαγωγή μιας νέας μεταβλητής r_i^t η οποία εκφράζει την συνολική ποσότητα που μεταφέρεται από την εγκατάσταση i την περίοδο t δηλαδή,

$$r_i^t = \sum_{j=1}^n x_{ij}^t, \forall i, \forall t \quad (2.8)$$

$$f_i^t \geq r_i^t \geq 0, \forall i, \forall t, \quad (2.9)$$

απομακρύνοντας τον (2.4), και αντικαθιστώντας την (2.2) με

$$I_i^{t-1} + s_i^t - I_i^t - r_i^t = 0, \forall i, \forall t, \quad (2.10)$$

όπου υποτίθεται ότι

$$\sum_{i=1}^m r_i^t = \sum_{j=1}^n d_j^t, \forall t, \quad (2.11)$$

δηλαδή η συνολική αποσταλόμενη ποσότητα ισούται με την συνολική ζήτηση στην περίοδο t .

Το **[IPTP1]** μπορεί ενδεχομένως να περιλαμβάνει και ένα σύνολο περιορισμών διαθεσιμότητας πόρων όπως για παράδειγμα διαθέσιμη εργασία, πρώτες ύλες κτλ. Τέτοιοι περιορισμοί επιβάλουν την συναθροιστική ποσότητα (joint production) παραγωγής να ορίζεται από την διαθεσιμότητα των κοινώς χρησιμοποιούμενων πόρων. Έτσι αν υποτεθεί ότι μια μονάδα τελικού προϊόντος στην εγκατάσταση i την περίοδο t απαιτεί a_{ki}^t μονάδες του πόρου k από το οποίο είναι συνολικά διαθέσιμες L_k^t μονάδες και ότι συνολικά K πόροι χρησιμοποιούνται, τότε οι κάτωθι περιορισμοί θα πρέπει να περιληφθούν στο πρότυπο **[IPTP1]** και σε καθένα από τα επόμενα.

$$\sum_{i=1}^m a_{ki}^t s_i^t \leq L_k^t, \forall k, \forall t \quad (2.12)$$

Αν αποθέματα διατηρούνται και απο πλευράς πελατών, θα υποθέσουμε επιπλέον τα ακόλουθα σαν δεδομένα :

- J_j^o το αρχικό επίπεδο αποθέματος του πελάτη j
- q_j^t το μοναδιαίο κόστος διατήρησης αποθεμάτων του πελάτη j την περίοδο t

- v_j^t η δυναμικότητα διατήρησης αποθεμάτων του πελάτη j την περίοδο t
- π_j^t το ελάχιστο απόθεμα ασφαλείας του πελάτη j την περίοδο t
- o_j^t η δυναμικότητα παραλαβής του πελάτη j την περίοδο t

και θα εισάγουμε τις μεταβλητές:

- J_j^t το τελικό απόθεμα που διατηρεί ο πελάτης j την περίοδο t
- g_j^t η ποσότητα παραλαβής του πελάτη j την περίοδο t

Επιπλέον η σημασία του d_j^t διαφοροποιείται καθώς τώρα εκφράζει τη ποσότητα που καταναλώνεται από τον πελάτη j την περίοδο t . Αυτή η ποσότητα ικανοποιείται είτε από την παραλαμβανόμενη ποσότητα g_j^t ή/και το διατηρηθέν απόθεμα J_j^{t-1} . Οι περιορισμοί (2.15) εκφράζουν αυτό το γεγονός. Το μαθηματικό πρότυπο λαμβάνει την ακόλουθη μορφή:

$$\textbf{[IPTP2]} \quad \min \quad \sum_{t=1}^T \left\{ \sum_{i=1}^m p_i^t s_i^t + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij}^t x_{ij}^t + \sum_{i=1}^m h_i^t I_i^t + \sum_{j=1}^n q_j^t J_j^t \right\} \quad (2.13)$$

$$\text{υπό } I_i^{t-1} + s_i^t - I_i^t - r_i^t = 0, \quad \forall i, \quad \forall t \quad (2.14)$$

$$J_j^{t-1} + g_j^t - J_j^t - d_j^t = 0, \quad \forall j, \quad \forall t \quad (2.15)$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij}^t = r_i^t, \quad \forall i, \quad \forall t \quad (2.16)$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij}^t = g_j^t, \quad \forall j, \quad \forall t \quad (2.17)$$

$$0 \leq s_i^t \leq u_i^t, \quad \forall i, \quad \forall t \quad (2.18)$$

$$\sigma_i^t \leq I_i^t \leq w_i^t, \quad \forall i, \quad \forall t \quad (2.19)$$

$$\pi_j^t \leq J_j^t \leq v_j^t, \quad \forall j, \quad \forall t \quad (2.20)$$

$$0 \leq x_{ij}^t, \quad \forall i, \quad \forall j, \quad \forall t \quad (2.21)$$

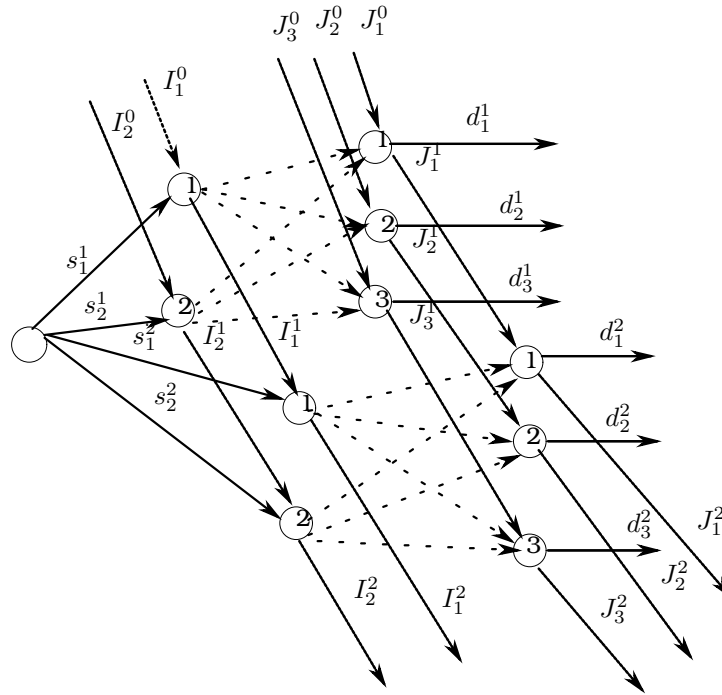
$$0 \leq r_i^t \leq f_i^t, \quad \forall i, \quad \forall t \quad (2.22)$$

$$0 \leq g_j^t \leq o_j^t, \quad \forall j, \quad \forall t \quad (2.23)$$

επιπλέον ισχύει ότι η συνολική αποσταλόμενη ποσότητα ισούται με την παραλαμβανόμενη ποσότητα την περίοδο t

$$\sum_{i=1}^m r_i^t = \sum_{j=1}^n g_j^t, \quad \forall t, \quad (2.24)$$

Το πρόβλημα διαμορφώνεται σαν ένα πρόβλημα ροής σε δίκτυα όπως αυτό που απεικονίζεται στο Σχήμα 2.2. Το δίκτυο του σχήματος είναι ένα κατευθυνόμενο



Σχήμα 2.2: Δικτυακή Αναπαράσταση του Προβλήματος [IPTP2]

γράφημα (directed graph) το οποίο αποτελείται από δύο επίπεδα. Ο κόμβος της προσφοράς εφοδιάζει την συνολική ζήτηση κάθε περιόδου. Κάθε επίπεδο του γραφήματος αναπαριστά μια χρονική περίοδο. Το διμερές γράφημα κάθε επιπέδου αναπαριστά το δίκτυο μεταφοράς ανάμεσα στις εγκαταστάσεις της επιχείρησης και τους πελάτες. Τόσο οι εγκαταστάσεις παραγωγής όσο και οι εγκαταστάσεις αποθεματοποίησης των πελατών σε κάθε περίοδο συνδέονται με τόξα αποθεματοποίησης.

Στην περίπτωση όπου η αποσταλόμενη ποσότητα από μια εγκατάσταση i σε έναν πελάτη j την περίοδο t δεν φτάνει απαραίτητα στον προορισμό της εγκαίρως πρέπει να εισάγουμε μια καινούρια μεταβλητή $z_{ij}^t \geq 0$ η οποία θα εκφράζει την παραδιδόμενη ποσότητα στον πελάτη j από την εγκατάσταση i , ενώ η μεταβλητή x_{ij}^t εκφράζει τώρα την συνολική απεσταλμένη ποσότητα από την εγκατάσταση i στον πελάτη j την περίοδο t . Οι περιορισμοί (2.17) και το κόστος μεταφοράς στην (2.13) θα πρέπει να αλλάξουν αναλογικά και η σχέση (2.24) δεν θα ισχύει.

2.2.3 Μη Φθίνων Οριακό Κόστος Παραγωγής

Όταν μια επιχείρηση έχει στην διάθεση της διαφορετικές επιλογές παραγωγής οι οποίες μπορούν να καταταχθούν με βάση το μεταβλητό κόστος παραγωγής που συνεπάγονται, τότε αντιμετωπίζεται η περίπτωση του μη φθίνοντος οριακού κόστους. Παράδειγμα τέτοιας περίπτωσης είναι η χρήση υπερωριακής αντί κανονικής

εργασίας όπου συνήθως η χρήση της πρώτης συνεπάγεται συνήθως υψηλότερο μεταβλητό κόστος. Ένα άλλο παράδειγμα προέρχεται από την δυνατότητα χρήσης υπο-εργολαβιών κατά την παραγωγική διαδικασία η οποία συνεπάγεται διαφορετικό οριακό κόστος από ότι η παραγωγή στα πλαίσια της επιχείρησης.

Αν υποθέτουμε ότι το οριακό κόστος παραγωγής στην εγκατάσταση i είναι μία μη-αρνητική και μονοτονικά μη-φθίνουσα συνάρτηση του επιπέδου παραγωγής, δηλαδή, $p_i^t(s_i^t) \geq 0$ και $s_i^t \leq \hat{s}_i^t \Rightarrow p_i^t(s_i^t) \leq p_i^t(\hat{s}_i^t)$. Τότε το συνολικό κόστος παραγωγής, $P_i^t(s_i^t)$, είναι μια κυρτή συνάρτηση του επιπέδου παραγωγής s_i^t όπου $p_i^t(s_i^t) = \frac{dP_i^t(s_i^t)}{ds_i^t}$. Συνεπώς ο όρος $\sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^m p_i^t s_i^t$ στην αντικειμενική συνάρτηση των προτύπων **[PTRP1]** και **[PTRP2]** αντικαθίσταται από

$$\sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^m P_i^t(s_i^t). \quad (2.25)$$

Τα νέα πρότυπα που προκύπτουν συμβολίζονται με **[CPTP1]** και **[CPTP2]** αντίστοιχα. Μια ιδιαίτερη περίπτωση του (2.25) προκύπτει όταν η $P_i^t(s_i^t)$ είναι μια γραμμικώς τμηματική κυρτή συνάρτηση δηλαδή,

$$P_i^t(s_i^t) = \sum_{\ell=1}^L c_{i\ell}^t s_{i\ell}^t, \quad \forall i, \quad \forall t \quad (2.26)$$

$$s_i^t = \sum_{\ell=1}^L s_{i\ell}^t, \quad \forall i, \quad \forall t \quad (2.27)$$

$$0 \leq s_{i\ell}^t \leq U_{i\ell}^t, \quad \forall \ell, \quad \forall i, \quad \forall t \quad (2.28)$$

όπου

$$0 < c_{i1}^t \leq c_{i2}^t \leq \dots \leq c_{iL}^t \quad \forall i, \quad \forall t, \quad (2.29)$$

2.3 Μέθοδος Αποσύνθεσης με Διαχωρισμό Δραστηριοτήτων και μη Ιεραρχικός Συντονισμός Μέσω Αλγορίθμου Υποκλίτους

Η μέθοδος αποσύνθεσης με διαχωρισμό δραστηριοτήτων [111] επιχειρεί να αποσυνθέσει ένα πρόβλημα σε σχέση με τις δραστηριότητες που εμπεριέχει. Κατ' ουσίαν η μέθοδος προσπαθεί να διαμοιράσει τις μεταβλητές που αντιστοιχούν σε συγκεκριμένες δραστηριότητες (και πιθανώς να διαμοιράσει και τους περιορισμούς που περιέχουν αυτές της μεταβλητές). Στην συνέχεια εφαρμόζεται η χαλάρωσης Lagrange στον περιορισμό ισότητας ο οποίος συνδέει τις δύο μεταβλητές (την αρχική και την διαμοιρασμένη). Η μεθοδολογία αυτή έχει αρχικά προταθεί στα πλαίσια του μεικτού ακέραιου προγραμματισμού με την ονομασία *Διαχωρισμός Μεταβλητών* (variable splitting) από τους [97, 98] και ανεξάρτητα από τους [78] σαν αποσύνθεση

Lagrange για την παροχή ισχυρότερων κατώτερων ορίων από ότι αυτά της χαλάρωσης Lagrange. Αυτό όμως δεν ισχύει στη περίπτωση γραμμικών ή μη γραμμικών κυρτών συναρτήσεων. Στο παρόν κεφάλαιο παρουσιάζεται αποσύνθεση των ολοκληρωμένων προτύπων αναφορικά με της δραστηριότητες που εμπεριέχουν.

Τα προβλήματα **[IPTP1]** και **[CPTP1]** διαφέρουν μόνο ως προς την συνάρτηση παραγωγής (γραμμική έναντι κυρτή και διαχωρίσιμη) κατά συνέπεια η μεθοδολογία θα αναλυθεί βασικά σε όρους του **[IPTP1]**.

Τα τμήματα παραγωγής και μεταφοράς του προβλήματος διατηρούνται μαζί από την εξίσωση εξισορρόπησης (2.10) όπου η συνολική αποσταλόμενη ποσότητα r_i^t εμφανίζεται στη ίδια εξίσωση με την ποσότητα παραγωγής s_i^t και τα επίπεδα αποθέματος I_i^{t-1} και I_i^t .

Εισάγοντας την μεταβλητή z_i^t , η (2.10) αντικαθίσταται από

$$I_i^{t-1} + s_i^t - I_i^t - z_i^t = 0, \forall i, \forall t \quad (2.30)$$

$$z_i^t = r_i^t, \forall i, \forall t \quad (2.31)$$

$$f_i^t \geq z_i^t \geq 0, \forall i, \forall t \quad (2.32)$$

Συνδέοντας τον πολλαπλασιαστή Lagrange λ_i^t με τις ισότητες (2.31) και χαλαρώνοντας τις τελευταίες λαμβάνουμε τα κάτωθι υποπροβλήματα Lagrange **[SUB11]** και **[SUB12]**:

$$\textbf{[SUB11]} \quad \min \sum_{t=1}^T \left\{ \sum_{i=1}^m p_i^t s_i^t + \sum_{i=1}^m \lambda_i^t z_i^t + \sum_{i=1}^m h_i^t I_i^t \right\} \quad (2.33)$$

$$\text{υπό } (2.30), (2.5), (2.6), (2.32) \quad (2.34)$$

$$\textbf{[SUB12]} \quad \min \sum_{t=1}^T \left\{ \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij}^t x_{ij}^t - \sum_{i=1}^m \lambda_i^t r_i^t \right\} \quad (2.35)$$

$$\text{υπό } (2.3), (2.8), (2.7), (2.9), (2.11) \quad (2.36)$$

Απόντων άλλων περιορισμών το υποπρόβλημα **[SUB11]** διαχωρίζεται σε m υποπροβλήματα ένα για κάθε εγκατάσταση, τα οποία εάν αγνοήσουμε το δείκτη i έχουν την μορφή:

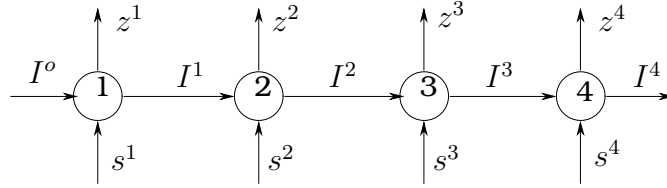
$$\textbf{[LS1]} \quad \min \sum_{t=1}^T \{ p^t s^t + \lambda^t z^t + h^t I^t \} \quad (2.37)$$

$$\text{υπό } I^{t-1} + s^t - I^t - z^t = 0, \forall t \quad (2.38)$$

$$0 \leq s^t \leq u^t, \forall t \quad (2.39)$$

$$\sigma^t \leq I^t \leq w^t, \forall t \quad (2.40)$$

$$0 \leq z^t \leq f^t, \forall t \quad (2.41)$$



Σχήμα 2.3: Δικτυακή Αναπαράσταση του προβλήματος **[LS1]**

Τα προβλήματα αυτά τα οποία αντιστοιχούν σε ένα δίκτυο ανάλογο του Σχήματος 2.3 απαιτούν $\lambda^t < 0$ για να αποσταλεί μία ποσότητα z^t .

Αν όμως διατηρηθεί στο πρόβλημα **[SUB11]** η ισότητα

$$\sum_{i=1}^m z_i^t = \sum_{j=1}^n d_j^t, \forall t \quad (2.42)$$

τότε αυτό δεν μπορεί να διαχωριστεί ούτε ως προς t ούτε ως προς i και η υποκείμενη δομή του περιγράφεται από ένα δίκτυο ανάλογο του Σχήματος 2.4. Η παρουσία της (2.42) κάνει το **[SUB11]** πιο ουσιαστικό από πλευράς συντονισμού. Επιπλέον οι περιορισμοί των πόρων, εάν υπάρχουν, συνεπάγονται μη-διαχωρισιμότητα του προβλήματος ως προς t και i .

Το υποπρόβλημα **[SUB12]** διαχωρίζεται σε T υποπροβλήματα, ένα για κάθε χρονική περίοδο, που αν αγνοήσουμε τον δείκτη t έχουν την μορφή:

$$\textbf{[TP1]} \quad \min \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} - \sum_{i=1}^m \lambda_i r_i \quad (2.43)$$

$$\text{υπό} \quad \sum_{j=1}^n x_{ij} = r_i, \forall i \quad (2.44)$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = d_j, \forall j \quad (2.45)$$

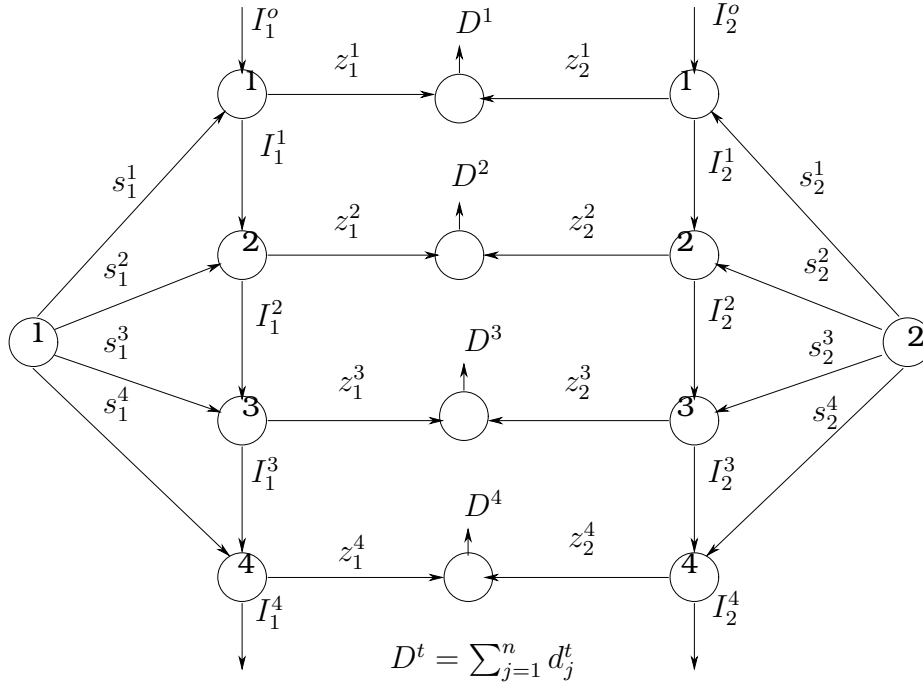
$$\sum_{i=1}^m r_i = \sum_{j=1}^n d_j \quad (2.46)$$

$$x_{ij} \geq 0, \forall i, \forall j \quad (2.47)$$

$$f_i \geq r_i \geq 0, \forall i \quad (2.48)$$

Η δικτυακή αναπαράσταση του **[TP1]** φαίνεται στο Σχήμα 2.5.

Από διαχειριστική άποψη, η διευθυνόμενη μέσω δραστηριότητας χαλάρωση Lagrange (activity directed Lagrangian relaxation) συνεπάγεται ότι οι αποφάσεις που αφορούν την παραγωγή και την διατήρηση αποθεμάτων λαμβάνονται στις εγκαταστάσεις παραγωγής, ενώ οι αποφάσεις που αφορούν την μεταφορά λαμβάνονται



Σχήμα 2.4: Δικτυακή Αναπαράσταση του προβλήματος **[SUB11]** όταν ισχύει η (2.42) (δύο εγκαταστάσεις, τέσσερις περίοδοι).

από το τμήμα διανομής ή το γραφείο μεταφορών. Με άλλα λόγια το αντίστοιχο τμήμα της επιχείρησης ή/και εξωτερικός συνεργάτης της επιλύουν το δικό τους χαλαρωμένο υποπρόβλημα ανεξάρτητα με πλήρως κατανομημένο τρόπο.

Η αποσύνθεση του **[CPTP1]** επιτυγχάνεται ακριβώς με τον ίδιο τρόπο. Εξυπακούεται ότι τα **[SUB11]** και **[LS1]** θα έχουν σε αυτή την περίπτωση κυρτές αντί για γραμμικές συναρτήσεις κόστους παραγωγής και θα συμβολίζονται σαν **[CSUB11]** και **[CLS1]**. Όπως και προηγουμένως εάν ισχύει η (2.42) ή/και η (2.12) τότε αυτά δεν μπορούν να αποσυνθεθούν σε υποπρόβλήματα του τύπου **[CLS1]**. Και στις δύο περιπτώσεις το **[TP1]** παραμένει αμετάβλητο. Το δυικό πρόβλημα Lagrange είναι

$$\mathbf{[LD1]} \quad \max_{\lambda} \quad \Theta(\lambda), \quad (2.49)$$

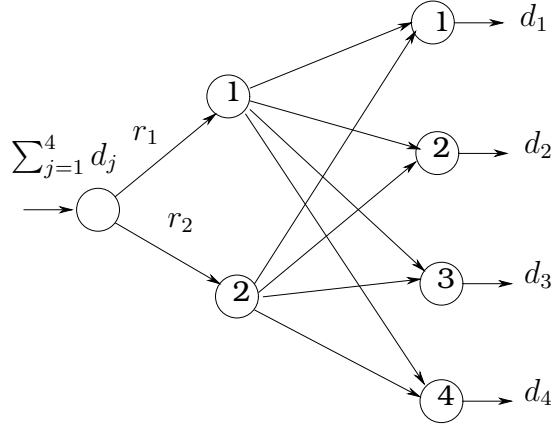
όπου $\lambda = [\lambda_i^t]$ και $\Theta(\lambda) = \text{val}(\mathbf{SUB11}) + \text{val}(\mathbf{SUB12})$.

Υποθέτουμε ότι το δυικό πρόβλημα Lagrange βελτιστοποιείται από μία απλή διαδικασία υποκλίτους [184], δηλαδή:

$$\lambda(k+1) = \lambda(k) + \alpha(k)\xi(\lambda(k)), \text{ για } k \geq 1, \quad (2.50)$$

όπου

$$\xi(\lambda(k)) = \mathbf{z}(k) - \mathbf{r}(k), \quad (2.51)$$



Σχήμα 2.5: Δικτυακή Αναπαράσταση του Προβλήματος **[TP1]**

$$\alpha(k) \geq 0, \quad (2.52)$$

$$\alpha(k) \rightarrow 0, \quad (2.53)$$

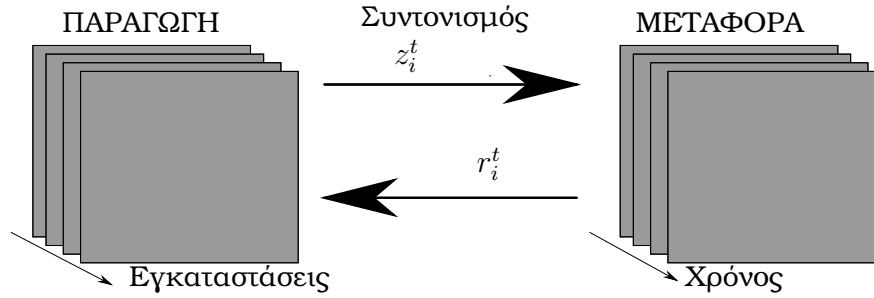
$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha(k) = \infty, \quad (2.54)$$

και όπου $\mathbf{z}(k) = [z_i^t(k)]$, $\mathbf{r}(k) = [r_i^t(k)]$, $\mathbf{s}(k) = [s_i^t(k)]$, $\mathbf{I}(k) = [I_i^t(k)]$, και $\mathbf{x}(k) = [x_{ij}^t(k)]$ είναι οι λύσεις των **[SUB11]** και **[SUB12]** που λαμβάνονται για πολλαπλάσιους Lagrange $\boldsymbol{\lambda}(k)$.

Πρόταση 2.1 Ο αλγόριθμος (2.50)-(2.54) συγκλίνει με την έννοια $\lim_{k \rightarrow \infty} \min_{\boldsymbol{\lambda} \in \mathcal{L}} \|\boldsymbol{\lambda}(k) - \boldsymbol{\lambda}\| = 0$ και $\lim_{k \rightarrow \infty} \Theta(\boldsymbol{\lambda}(k)) = \Theta^*$, όπου \mathcal{L} είναι το σύνολο των μέγιστων σημείων $\Theta(\boldsymbol{\lambda})$, και Θ^* είναι η βέλτιστη αντικειμενική στο **[LD1]**.

Απόδειξη: Η συνάρτηση $\Theta(\boldsymbol{\lambda})$ είναι κυρτή, πεπερασμένη και τμηματικώς γραμμική αφού το πρωτεύον πρόβλημα είναι γραμμικό και η εφικτή του περιοχή κλειστή και φραγμένη [177, Λήμμα 5.1, σελίδα 146] και κατά συνέπεια συνεχής. Επιπλέον η ακολουθία των υποκλίτων $\{\boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{\lambda}(k))\}$ που ορίζεται από την (2.51) είναι φραγμένη. Κατά συνέπεια, σύμφωνα με το [184, Θεώρημα 2.3, σελίδα 26], ο αλγόριθμος συγκλίνει. \square

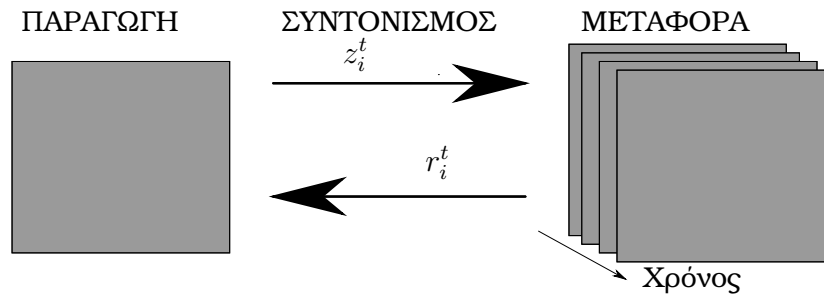
Εμφανώς, εφόσον οι $\mathbf{z}(k)$ έχουν υπολογιστεί από τον επιβλέποντα την παραγωγή και τα αποθέματα λύνοντας το **[SUB11]** ή από m επιβλέποντες για κάθε εγκατάσταση με την επίλυση m **[LS1]**, η «πρόταση» για την ποσότητα που μπορεί να μεταφερθεί την περίοδο t στέλνεται στο υπεύθυνο του τμήματος μεταφοράς της εφοδιαστικής αλυσίδας. Ο τελευταίος έχει ετοιμάσει την δική του πρόταση $\mathbf{r}(k)$ επιλύοντας το **[TP1]**. Άπαξ γίνει ανταλλαγή αυτών των πληροφοριών, κάθε τμήμα ανεξάρτητα και σε συνέπεια με τα παραπάνω αξιολογεί την πρόταση του άλλου συνεργάτη συγκρίνοντάς την με την δική του και αν αυτές διαφέρουν δηλαδή εάν $z_i^t \neq r_i^t$,



Σχήμα 2.6: Συντονισμός σε όρους των υποπροβλημάτων Lagrange **[LS1]** και **[TP1]**

τότε υπολογίζει νέες τιμές Lagrange και προετοιμάζει νέα πρόταση επιλύοντας το αντίστοιχο υποπρόβλημα.

Αυτή η προσπάθεια συντονισμού ανάμεσα στα μέλη της εφοδιαστικής απεικονίζεται στο Σχήμα 2.6 όταν η παραγωγή και τα αποθέματα εποπτεύονται από m φορείς, ενώ στο Σχήμα 2.7 απεικονίζεται ο μηχανισμός συντονισμού όταν ένας μόνο φορέας εμπλέκεται στο σχεδιασμό της παραγωγής και αποθεμάτων ο οποίος επιλύει ένα **[SUB11]**. Αυτό που πρέπει να γίνει κατανοητό σε αυτό το σημείο είναι ότι η προτεινόμενη μέθοδο αντιστοιχεί σε ένα τελείως καταναεμημένο τρόπο συντονισμού όπου υπολογισμοί που συνεπάγονται οι σχέσεις (2.50)-(2.51) δεν γίνονται από κάποιο κεντρικό επιβλέποντα αλλά κάθε μέλος της αλυσίδας υπολογίζει τις τιμές Lagrange που το αφορούν τελείως ανεξάρτητα. Αυτό βρίσκεται σε αντιδιαστολή με τις προηγούμενες ιεραρχικές θεωρήσεις της χρήσης της μεθόδου Lagrange στην προσπάθεια διαχείρισης της εφοδιαστικής αλυσίδας (για παράδειγμα [32, 9]).



Σχήμα 2.7: Συντονισμός σε όρους υποπροβλημάτων Lagrange **[SUB11]** και **[TP1]**

Μπορούν όμως τα ανεξαρτήτως δρώντα μέλη να συντονίσουν τις δράσεις τους; Είναι γνωστό ότι η εφαρμογή της χαλάρωσης Lagrange με την προσέγγιση του υποκλίτους σε προβλήματα γραμμικού προγραμματισμού μπορεί να οδηγήσει σε «αποτέλεσμα ταλάντευσης» (oscillation effect). Δηλαδή τα υποπροβλήματα Lagrange δεν παράγουν νέες λύσεις αλλά μάλλον ταλαντεύονται ανάμεσα σε λύσεις που έχουν δημιουργηθεί σε προηγούμενα στάδια της διαδικασίας του αλγορίθμου [177, Παράδειγμα 6.1, σελίδες 187-191]. Επιπλέον ελλείπει αυστηρούς κυρτότητας, το πέρασμα του

βέλτιστου πολλαπλασιαστή Lagrange στο υποπρόβλημα δεν οδηγεί απαραίτητα σε μία βέλτιστη ή ακόμα και εφικτή λύση στο πρωταρχικό πρόβλημα [12]. Συνεπώς, τα μέλη της εφοδιαστικής αλυσίδας θα αποτύχουν να συντονίσουν τις αποφάσεις τους εάν υιοθετήσουν είτε το σχέδιο του Σχήματος 2.6 είτε του Σχήματος 2.7 κατά την διαδικασία εφαρμογής της μεθοδολογίας του υποκλίτους.

Στα πλαίσια της Θεωρίας Παιγνίων υπάρχει παρόμοιο φαινόμενο μή σύγκλησης αποφάσεων. Το πρόβλημα αυτό αντιμετωπίζεται, με τον γνωστό αλγόριθμο του φαινομενικού παιχνιδιού των Brown-Robinson [165, 65], το ζητούμενο σημείο ισορροπίας λαμβάνεται εάν αντί της ακολουθίας των αποφάσεων λάβουμε υπόψη τις «μέσες αποφάσεις» (averaged decisions), οι οποίες κάτω από ορισμένες συνθήκες συγκλίνουν προς αυτό. Μέσα σε αυτό το πλαίσιο, οι ταλαντεύσεις που παρατηρούνται κατά την διαδικασία λήψης αποφάσεων αντιμετωπίζονται σαν μια διαδικασία «εκμάθησης» της συχνότητας κατανομής των αποφάσεων των μελών (παικτών) του παιγνίου.

Σύμφωνα με ένα λιγότερο γνωστό αποτέλεσμα του Shor [184], παρόμοιας αντιμετώπισης μπορεί να υιοθετηθεί και στην χαλάρωσης Lagrange με βελτιστοποίηση υποκλίτους. Όντως, εισάγοντας τα σταθμά

$$\beta(N; k) = \frac{\alpha(k)}{\sum_{\nu=1}^N \alpha(\nu)}, \quad (2.55)$$

όπου $\sum_{k=1}^N \beta(N; k) = 1$ και $\beta(N; k) \geq 0$ για $k = 1, \dots, N$, και ορίζοντας τις μέσες σταθμισμένες αποφάσεις

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{z}(N) &= \sum_{k=1}^N \beta(N; k) \mathbf{z}(k), \\ \mathbf{r}(N) &= \sum_{k=1}^N \beta(N; k) \mathbf{r}(k), \\ \mathbf{s}(N) &= \sum_{k=1}^N \beta(N; k) \mathbf{s}(k), \\ \mathbf{I}(N) &= \sum_{k=1}^N \beta(N; k) \mathbf{I}(k), \\ \mathbf{x}(N) &= \sum_{k=1}^N \beta(N; k) \mathbf{x}(k), \end{aligned} \right\} \quad (2.56)$$

μπορούμε να αποδείξουμε τα παρακάτω αποτελέσματα :

Πρόταση 2.2 Η ακολουθία $\{\mathbf{z}(N) - \mathbf{r}(N)\}$ τείνει στο 0 καθώς $N \rightarrow \infty$, δηλαδή το πρωτεύον πρόβλημα **[IPTP1]** επιλύεται από κάθε σημείο συσσώρευσης (accumulation point) της ακολουθίας $\{\mathbf{z}(N), \mathbf{r}(N), \mathbf{s}(N), \mathbf{I}(N), \mathbf{x}(N)\}$.

Πρόταση 2.3 Η ακολουθία $\{\mathbf{z}(N) - \mathbf{r}(N)\}$ τείνει στο 0 καθώς $N \rightarrow \infty$, δηλαδή το πρωτεύον πρόβλημα **[CPTP1]** επιλύεται από κάθε σημείο συσσώρευσης της ακολουθίας $\{\mathbf{z}(N), \mathbf{r}(N), \mathbf{s}(N), \mathbf{I}(N), \mathbf{x}(N)\}$.

Οι αποδείξεις των παραπάνω προτάσεων δίνονται στο παράρτημα της σελίδας 48. Και πάλι, οι αποφασίζοντες μπορούν να υπολογίσουν τις μέσες σταθμισμένες αποφάσεις που τους αφορούν τελείως ανεξάρτητα.

Έτσι, υιοθετώντας είτε το σχέδιο συντονισμού του Σχήματος 2.6 είτε του σχήματος 2.7, μπορούν μακροπρόθεσμα να εναρμονίσουν τις αποφάσεις τους καθώς «μαθαίνουν» την κατανομή συχνότητας των αποφάσεων των συνεργατών τους εφόσον όλοι ακολουθούν την διαδικασία των μέσων σταθμισμένων αποφάσεων. Το αξιοσημείωτο όλης αυτής της διαδικασίας είναι ότι η ανταλλαγή πληροφοριών ανάμεσα στα μέλη της εφοδιαστικής αλυσίδας είναι η ελάχιστη δυνατή και περιορίζεται μόνο στην ανταλλαγή που αφορούν ποσότητες παραγγελίας ή ποσότητες αποστολής.

Στην συνέχεια θα ασχοληθούμε με το πρόβλημα **[IPTP2]**. Για την αποσύνθεση του σε υποπροβλήματα σχεδιασμού παραγωγής/αποθεμάτων/αποστολής ποσοτήτων, σχεδιασμού μεταφοράς, και σχεδιασμού παραγγελιών/ αποθεμάτων, εκτός των μεταβλητών z_i^t που ικανοποιούν τις (2.30)-(2.32), εισάγονται οι μεταβλητές e_j^t και οι περιορισμοί (2.15) αντικαθίστανται από:

$$J_j^{t-1} + e_j^t - J_j^t - d_j^t = 0, \forall j, \forall t \quad (2.57)$$

$$e_j^t = g_j^t, \forall j, \forall t \quad (2.58)$$

$$0 \leq e_j^t \leq o_j^t, \forall j, \forall t \quad (2.59)$$

Διατηρώντας τους πολλαπλασιαστές λ_i^t και συνδέοντας νέους πολλαπλασιαστές μ_j^t με τους περιορισμούς (2.58), λαμβάνουμε ξανά το υποπρόβλημα Lagrange **[SUB11]**, συν τα κάτωθι υποπροβλήματα Lagrange **[SUB22]** και **[SUB23]**:

$$\textbf{[SUB22]} \quad \min \sum_{t=1}^T \left\{ \sum_{j=1}^n q_j^t J_j^t + \sum_{j=1}^n \mu_j^t e_j^t \right\} \quad (2.60)$$

$$\text{υπό} \quad (2.57), (2.59), (2.18), (2.20) \quad (2.61)$$

$$\textbf{[SUB23]} \quad \min \sum_{t=1}^T \left\{ \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij}^t x_{ij} - \sum_{i=1}^m \lambda_i^t r_i^t - \sum_{j=1}^n \mu_j^t g_j^t \right\} \quad (2.62)$$

$$\text{υπό} \quad (2.16), (2.17), (2.21), (2.22), (2.23), (2.24) \quad (2.63)$$

Το πρόβλημα **[SUB22]** αποσυντίθεται σε n υποπροβλήματα ένα για κάθε πελάτη:

$$\textbf{(LS2)} \quad \min \sum_{t=1}^T \{ q^t J^t + \mu^t e^t \} \quad (2.64)$$

$$\text{υπό} \quad J^{t-1} + e^t - J^t - d^t = 0, \forall t \quad (2.65)$$

$$\pi^t \leq J^t \leq v^t, \forall t \quad (2.66)$$

$$0 \leq e^t \leq o^t, \forall t \quad (2.67)$$

Αν και το **[LS2]** ομοιάζει με το **[LS1]**, εξαιτίας της παρουσίας της σταθερής ζήτησης d^t έχει περισσότερο νόημα καθώς παραγγελία ποσότητας $e^t > 0$ μπορεί να τεθεί για την ικανοποίηση της ακόμα και αν το $\mu^t > 0$.

Το πρόβλημα **[SUB23]** διαιρείται σε T υποπροβλήματα ένα για κάθε χρονική περίοδο.

$$\textbf{[TP2]} \quad \min \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} - \sum_{i=1}^m \lambda_i r_i - \sum_{j=1}^n \mu_j g_j \quad (2.68)$$

$$\text{υπό} \quad \sum_{j=1}^n x_{ij} = r_i, \quad \forall i \quad (2.69)$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = g_j, \quad \forall j \quad (2.70)$$

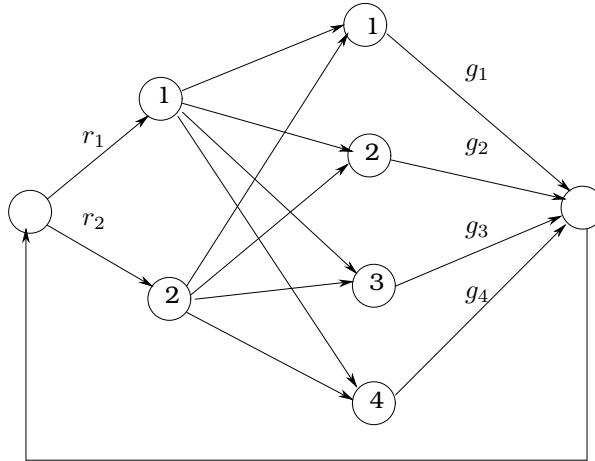
$$\sum_{i=1}^m r_i = \sum_{j=1}^n g_j \quad (2.71)$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad \forall i, \quad \forall j \quad (2.72)$$

$$f_i \geq r_i \geq 0, \quad \forall i \quad (2.73)$$

$$o_j \geq g_j \geq 0, \quad \forall j \quad (2.74)$$

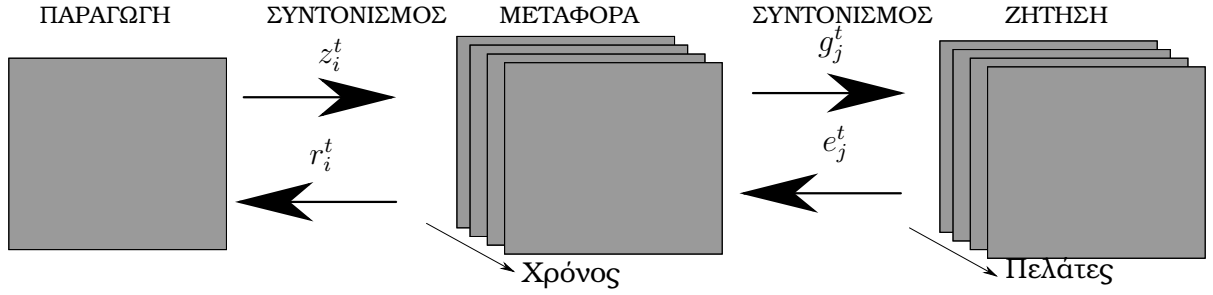
Προφανώς το **TP2** είναι ένα πρόβλημα κυκλικής ροής ελαχίστου κόστους (mincost circulation flow problem) όπως αυτό του Σχήματος 2.8. Το πρόβλημα έχει σημασία όσο υπάρχουν θετικά λ_i και μ_j .



Σχήμα 2.8: Δικτυακή Αναπαράσταση του προβλήματος **[TP2]**

Η διαδικασία συντονισμού μπορεί να οριστεί όπως και στην περίπτωση του προβλήματος **[IPTP1]**. Όμως στην παρούσα περίπτωση οι πελάτες εισέρχονται άμεσα στο παίγνιο, όπως απεικονίζεται και στο Σχήμα 2.9. Κατά συνέπεια οι πελάτες θέτουν «δοκιμαστικές» παραγγελίες e_j^t μονάδων, ο υπεύθυνος του τομέα μεταφοράς απαντά θέτοντας g_j^t μονάδες προς παράδοση, ο υπεύθυνος παραγωγής (έναν εάν επιλύεται το υποπρόβλημα **[SUB11]** ή περισσότεροι εάν επιλύονται τα υποπροβλήματα **[LS1]**)

ζητά την αποστολή z_i^t μονάδων και ο τομέας μεταφοράς ανταποκρίνεται ορίζοντας r_i^t μονάδες παραλαβής. Όλη αυτή η διαδικασία γίνεται ανεξάρτητα, ταυτόχρονα, και χωρίς την ανταλλαγή καμίας άλλης πληροφορίας. Είναι εύκολο να διαπιστωθεί



Σχήμα 2.9: Συντονισμός σε όρους των υποπροβλημάτων Lagrange **[SUB11]**, **[TP2]** και **[LS2]**

ότι τα μέλη της εφοδιαστικής αλυσίδας μπορούν να συντονιστούν σε όρους μέσω σταθμισμένων αποφάσεων, δηλαδή αποτελέσματα αντίστοιχα των προτάσεων (2.1-2.3) μπορούν να διατυπωθούν και για το πρόβλημα **[IPTP2]**

2.4 Μη-Ιεραρχικός Συντονισμός με Χρήση της Επαυξημένης Συνάρτησης Lagrange

Η εφαρμογή της επαυξημένης μεθόδου Lagrange [17, 122] σε συνδυασμό με την μέθοδο αποσύνθεσης με διαχωρισμό δραστηριοτήτων της ενότητας (2.3) στο πρόβλημα **[IPTP1]** οδηγεί στο κάτωθι υποπρόβλημα :

$$\begin{aligned} \Theta_{\tau_1}(\lambda) &= \\ \min_{[s, x, I, z, r]} L(\lambda, s, x, I, z, r) &= \sum_{t=1}^T \left\{ \sum_{i=1}^m p_i^t s_i^t + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij}^t x_{ij}^t + \sum_{i=1}^m h_i^t I_i^t \right. \\ &\quad + \sum_{i=1}^m \lambda_i^t z_i^t - \sum_{i=1}^m \lambda_i^t r_i^t \\ &\quad \left. + \frac{\tau_1}{2} \sum_{i=1}^m (z_i^t - r_i^t)^2 \right\} \end{aligned} \quad (2.75)$$

$$\text{υπό } I_i^{t-1} + s_i^t - I_i^t - z_i^t = 0, \forall i, \forall t \quad (2.76)$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij}^t = r_i^t, \forall i, \forall t \quad (2.77)$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij}^t = d_j^t, \forall j, \forall t \quad (2.78)$$

$$0 \leq r_i^t \leq f_i^t, \forall i, \forall t \quad (2.79)$$

$$0 \leq z_i^t \leq f_i^t, \forall i, \forall t \quad (2.80)$$

$$0 \leq s_i^t \leq u_i^t, \forall i, \forall t \quad (2.81)$$

$$\sigma_i^t \leq I_i^t \leq w_i^t, \forall i, \forall t \quad (2.82)$$

$$0 \leq x_{ij}^t, \forall i, \forall j, \forall t \quad (2.83)$$

στο οποίο υποτίθεται ότι ισχύει η (2.11) και μπορεί να περιλαμβάνονται και οι περιορισμοί πόρων (2.12).

Το δυικό πρόβλημα της επαυξημένης μεθόδου Lagrange είναι:

$$[\text{ALD1}] \quad \max_{\lambda} \quad \Theta_{\tau_1}(\lambda), \quad (2.84)$$

όπου $\lambda = [\lambda_i^t]$.

Πρόταση 2.4 Το πρόβλημα **[ALD1]** έχει βέλτιστη λύση. Επιπλέον, για κάθε βέλτιστη λύση του **[IPTP1]** και για κάθε βέλτιστη λύση του **[ALD1]** ισχύει η ισότητα στις βέλτιστες τιμές των αντικειμενικών συναρτήσεων δηλαδή $\text{val}[\text{ALD1}] = \text{val}[\text{IPTP1}]$. Επιπρόσθετα εάν λ^* είναι μία βέλτιστη λύση του **[ALD1]** τότε η εκτίμηση του $\Theta_{\tau_1}(\lambda^*)$ παρέχει μία βέλτιστη λύση στο **[IPTP1]**.

Απόδειξη: Το συμπέρασμα αυτό εξάγεται από το γεγονός ότι οι περιορισμοί (2.77)-(2.83), που μπορούν να επεκταθούν και από τους (2.11) και (2.12), ορίζουν ένα φραγμένο πολύεδρο, και από το γεγονός ότι το **[ALD1]** αντιστοιχεί στο δυικό πρόβλημα Lagrange του **[IPTP1]** το οποίο στην συγκεκριμένη περίπτωση επαυξάνεται με τον τετραγωνικό όρο της ποινής

$$\frac{\tau_1}{2} \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^m (z_i^t - r_i^t)^2 \quad (2.85)$$

□

Η Πρόταση 2.4 συνεπάγεται ότι η εύρεση μίας βέλτιστης λύσης λ^* και η εκτίμηση του $\Theta_{\tau_1}(\lambda^*)$ προμηθεύουν μια βέλτιστη λύση στο **[IPTP1]**. Τότε για την επίλυση του προβλήματος **[ALD1]** μπορούν να χρησιμοποιηθούν επαναλήψεις της μορφής [17, 122]:

$$[s(k), x(k), I(k), z(k), r(k)] = \arg \min_{[s, x, I, z, r]} L(\lambda(k), s, x, I, z, r) \quad (2.86)$$

$$\lambda(k+1) = \lambda(k) + \tau_1(k) (z(k) - r(k)), \quad (2.87)$$

Αφού το **[IPTP1]** είναι ένα γραμμικό πρόβλημα ισχύει το παρακάτω αποτέλεσμα [23, σελίδα 245]:

Πρόταση 2.5 Η μέθοδος των πολλαπλασιαστών (2.86)-(2.87) συγκλίνει σε μια βέλτιστη λύση του **[ALD1]** σε πεπερασμένο αριθμό επαναλήψεων.

Κατά συνέπεια, από την Πρόταση 2.4 και 2.5 προκύπτει ότι η μέθοδος των πολλαπλασιαστών (2.86)-(2.87) παρέχει μια βέλτιστη λύση στο **[IPTP1]** ύστερα από πεπερασμένο αριθμό επαναλήψεων.

Στην περίπτωση του προβλήματος **[CPTP1]**, η διαχωρίσιμη κυρτή συνάρτηση παραγωγής (2.25) εμφανίζεται στην αντικειμενική συνάρτηση του υποπροβλήματος (2.75) στην θέση του γραμμικού όρου $\sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^m p_i^t s_i^t$. Σε αυτή την περίπτωση αν και η Πρόταση 2.4 ισχύει, η μέθοδος των πολλαπλασιαστών δεν συγκλίνει απαραίτητα ύστερα από πεπερασμένο αριθμό επαναλήψεων. Αντ' αυτού μπορεί να αποδειχθεί ότι η ακολουθία $\{\lambda(k)\}$ των πολλαπλασιαστών Lagrange που δημιουργείται από την μέθοδο συγκλίνει στην βέλτιστη λύση του δυικού προβλήματος και ότι κάθε σημείο συσσώρευσης της ακολουθίας $\{[s(k), x(k), I(k), z(k), r(k)]\}$ είναι μια βέλτιστη λύση του πρωταρχικού προβλήματος **[CPTP1]** [17, 23, 122].

Αυτό που διακρίνει το επαυξημένο πρόβλημα Lagrange (2.75)-(2.83) από το αντίστοιχο της προηγούμενης παραγράφου είναι η παρουσία του τετραγωνικού όρου ποινής (2.85) ο οποίος επιβάλλει την μη-διαχωρισιμότητα του προβλήματος τόσο ως προς t όσο και ως προς i αν και οι περιορισμοί παραμένουν διαχωρίσιμοι. Υπάρχουν τουλάχιστον δύο τρόποι για την επιβολή διαχωρισιμότητας· η κυκλική προσέγγιση που συνεπάγεται η μέθοδο Gauss-Seidel [23] και η παράλληλη προσέγγιση που συνεπάγεται η μη-γραμμική μέθοδος Jacobi [168].

Στην προσέγγιση Gauss-Seidel για δεδομένο $\lambda(k)$, το τμήμα (τμήματα) παραγωγής θέτει (θέτουν) αρχικά ($\nu = 1$) τις ποσότητες $z_i^t(\nu, k)$ προς αποστολή, και το τμήμα μεταφοράς, θεωρώντας αυτές τις ποσότητες δεδομένες, επιλύει για κάθε περίοδο t το υποπρόβλημα **[QTP1]** το οποίο ορίζεται σαν το υποπρόβλημα **[TP1]** με την προσθήκη του όρου της ποινής, ανταποκρίνεται δηλαδή προτείνοντας ποσότητες $r_i^t(\nu, k)$. Αυτές οι ποσότητες στην συνέχεια μεταφέρονται πίσω στο τμήμα (τμήματα) παραγωγής, που με την σειρά του επιλύει (επιλύουν) είτε ένα υποπρόβλημα **[QSUB11]**, το οποίο ορίζεται σαν το υποπρόβλημα **[SUB11]** μετά την προσθήκη της τετραγωνικής ποινής, είτε m υποπροβλήματα **[QLS1]**, τα οποία ορίζονται σαν το υποπρόβλημα **[LS1]** μετά την προσθήκη της ποινής, θεωρώντας τις ποσότητες $r_i^t(\nu, k)$ δεδομένες, για να προτείνει ποσότητες $z_i^t(\nu + 1, k)$ προς αποστολή. Αυτή η διαδικασία επαναλαμβάνεται μέχρι να επιλυθεί το επαυξημένο υποπρόβλημα Lagrange $\Theta_{\tau_1}(\lambda(k))$. Μετά την επίλυση του υποπροβλήματος οι πολλαπλασιαστές ενημερώνονται σύμφωνα με τη (2.87) και η διαδικασία επαναλαμβάνεται. Όπως και στην περίπτωση της μεθοδολογίας του υποκλίτους, οι πολλαπλασιαστές Lagrange μπορούν να υπολογιστούν από κάθε τμήμα ανεξάρτητα και σύμφωνα με την διαδικασία που αναφέρθηκε παραπάνω και επομένως δεν είναι απαραίτητη η ύπαρξη ενός κεντρικού οργανισμού ο οποίος θα συντονίζει την διαδικασία. Στην ακραία περίπτωση ο αριθμός των επαναλήψεων περιορίζεται σε μια. Το ν δηλαδή δεν αυξάνει πάνω από το 1. Επακόλουθο είναι τότε η μέθοδος εναλλακτικών κατευθύνσεων (alternating direction) [23].

Η διαδικασία συντονισμού που αναφέρθηκε μπορεί να αναπαρασταθεί γραφικά από τα Σχήματα 2.6 και 2.7. Βέβαια, αν και τα τμήματα δρουν ανεξάρτητα μόλις

μάθουν τις προτάσεις των συνεργατών τους, πρέπει να περιμένουν την σειρά τους για να τοποθετήσουν τις προτάσεις τους για τις ποσότητες που πρέπει να μεταφερθούν.

Στην διαδικασία Jacobi για δεδομένο $\lambda(k)$, και ανεξάρτητες αρχικές ($\nu = 1$) προτάσεις $z_i^t(\nu, k)$ $r_i^t(\nu, k)$ κάθε ένα από τα τμήματα επιλύει ανεξάρτητα το υποπρόβλημα **[QTP1]** και **[QSUB11]** (ή **[QLS1]**) αντίστοιχα για να προετοιμάσει νέα προσχέδια προτάσεων ή «προ-προτάσεις» (pre-suggestions) $\hat{z}_i^t(\nu, k)$ και $\hat{r}_i^t(\nu, k)$. Αν αυτά δεν συμπίπτουν τότε τα τμήματα προχωρούν στον υπολογισμό νέων δοκιμαστικών ποσοτήτων χρησιμοποιώντας το κάτωθι σχέδιο υποχαλάρωσης (under-relaxation scheme):

$$z_i^t(\nu + 1, k) = z_i^t(\nu, k) + \rho (\hat{z}_i^t(\nu, k) - z_i^t(\nu, k)), \quad (2.88)$$

$$r_i^t(\nu + 1, k) = r_i^t(\nu, k) + \rho (\hat{r}_i^t(\nu, k) - r_i^t(\nu, k)), \quad (2.89)$$

όπου η παράμετρος υποχαλάρωσης ρ ικανοποιεί την ανισότητα:

$$0 < \rho < 1. \quad (2.90)$$

Η διαδικασία Jacobi επαναλαμβάνεται για $\nu = \nu + 1$ μέχρι να επιλυθεί το επαυξημένο πρόβλημα Lagrange $\Theta(\lambda(k))$. Στην συνέχεια, αφού γίνει η ενημέρωση των πολλαπλασιαστών σύμφωνα με την (2.87), η συνολική διαδικασία επαναλαμβάνεται.

Πρόταση 2.6 Η διαδικασία Jacobi όπως περιγράφηκε παραπάνω ορίζει μια ακολουθία $\{[s(\nu, k), x(\nu, k), I(\nu, k), z(\nu, k), r(\nu, k)]\}$ κάθε σημείο συσώρευσης της οποίας είναι μια λύση στο υποπρόβλημα $\Theta_{\tau_1}(\lambda(k))$. Επιπλέον το $\Theta_{\tau_1}(\lambda(\nu, k))$ προσεγγίζει το $\Theta_{\tau_1}(\lambda(k))$ με τετραγωνικό ρυθμό σύγκλισης.

Απόδειξη: Δεδομένου ότι το **[IPTP1]** είναι γραμμικό και αφού οι χαλαρωμένοι περιορισμοί $z_i^t - r_i^t = 0$ αντιστοιχούν σε μια μήτρα συντελεστών που αποτελείται από δύο διαγώνια τμήματα (blocks), ο μέγιστος αριθμός των τμημάτων που συνδέονται από έναν απλό περιορισμό, μειωμένος κατά ένα, είναι 1. Άρα, η εγκυρότητα της πρότασης απορρέει από τα αποτελέσματα στο [168]. Στην περίπτωση του **[CPTP1]**, η σύγκλιση με τετραγωνικό ρυθμό επιτυγχάνεται μόνο όταν το κόστος παραγωγής στην (2.25) είναι τετραγωνική συνάρτηση. \square

Η συγκεκριμένη διαδικασία συντονισμού της εφοδιαστικής αλυσίδας, μοιάζει περισσότερο με αυτή που προτείνεται στα Σχήματα 2.6 και 2.7, αφού τα τμήματα που απαρτίζουν την εφοδιαστική αλυσίδα, αμέσως μόλις γίνουν γνωστές οι προτάσεις των συνεργατών τους, δρουν ανεξάρτητα το ένα από το άλλο, σύμφωνα με τις προδιαγραφές των επαναλήψεων της διαδικασίας Jacobi και μπορούν ανεξάρτητα να ενημερώσουν τους πολλαπλασιαστές Lagrange σύμφωνα με την (2.87).

Είναι πιθανό να κατασκευαστεί μία διαδικασία συντονισμού Gauss-Seidel στην οποία τα μέλη της εφοδιαστικής δεν είναι απαραίτητα να ακολουθούν κάποια συγκεκριμένη σειρά κατά την διαδικασία λήψης αποφάσεων. Για το λόγο αυτό πρέπει

εισάγουμε μια επιπλέον μη περιορισμένη μεταβλητή ω_i^t και να εξισώσουμε τις μεταβλητές z_i^t και r_i^t με αυτήν, στην συνέχεια να χαλαρώσουμε τους συνεπαγόμενους περιορισμούς ισότητας $\omega_i^t = z_i^t$ και $\omega_i^t = r_i^t$. Με αυτό τον τρόπο λαμβάνεται το ακόλουθο επαυξημένο πρόβλημα Lagrange [23, σελίδες 246-247]:

$$\begin{aligned} \Theta_{\tau_1}(\boldsymbol{\lambda}) &= \\ \min_{[\mathbf{s}, \mathbf{x}, \mathbf{I}, \mathbf{z}, \mathbf{r}, \boldsymbol{\omega}]} L(\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{s}, \mathbf{x}, \mathbf{I}, \mathbf{z}, \mathbf{r}, \boldsymbol{\omega}) &= \sum_{t=1}^T \left\{ \sum_{i=1}^m p_i^t s_i^t + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij}^t x_{ij}^t + \sum_{i=1}^m h_i^t I_i^t \right. \\ &\quad + \sum_{i=1}^m (\lambda_i^t + \mu_i^t) \omega_i^t - \sum_{i=1}^m \lambda_i^t r_i^t - \sum_{i=1}^m \mu_i^t z_i^t \\ &\quad + \frac{\tau_1}{2} \sum_{i=1}^m (\omega_i^t - r_i^t)^2 \\ &\quad \left. + \frac{\tau_1}{2} \sum_{i=1}^m (\omega_i^t - z_i^t)^2 \right\} \end{aligned} \quad (2.91)$$

$$\text{υπό } (2.76) - (2.83), \quad (2.92)$$

όπου υποτίθεται ότι ισχύει η σχέση (2.11) και πιθανώς να περιλαμβάνονται περιορισμοί στην χρήση παραγωγικών πόρων (2.12).

Για δεδομένους πολλαπλασιαστές $\boldsymbol{\lambda}(k)$, πρώτα εκχωρούνται ποσότητες στις μεταβλητές ω_i^t οι οποίες υπολογίζονται από το μέσο άθροισμα των μεταβλητών $z_i^t(k-1)$ και $r_i^t(k-1)$ σύμφωνα με την σχέση

$$\omega_i^t(k) = \frac{z_i^t(k-1) + r_i^t(k-1)}{2} - \frac{\lambda_i^t(k) + \mu_i^t(k)}{2\tau_1(k)} \quad (2.93)$$

και εν συνεχεία υπολογίζονται νέες προτάσεις για τις μεταβλητές $z_i^t(k)$ και $r_i^t(k)$ από τα αντίστοιχα τμήματα. Ο υπολογισμός των νέων προτάσεων γίνεται ανεξάρτητα σε κάθε τμήμα αφού το επαυξημένο πρόβλημα Lagrange διαχωρίζεται σε προβλήματα που αντιστοιχούν στα προηγούμενα **[QTP1]** και **[QSUB11]**. Προφανώς όχι μόνο η (2.87) αλλά και η (2.93) μπορεί να εκτιμηθεί ανεξάρτητα από τα αντίστοιχα τμήματα αμέσως μόλις οι προτάσεις των συνεργατών τους γίνονται διαθέσιμες σε αυτούς. Άρα, τα τμήματα μπορούν να συντονιστούν σύμφωνα με την διαδικασία που εμφανίζεται στα Σχήματα 2.6 και 2.7 με την απλή δηλαδή ανταλλαγή πληροφοριών που αφορούν μόνο ποσότητες και χωρίς κάποια συγκεκριμένη επίβλεψη ή καμία επιβαλλόμενη σειρά στην διαδικασία λήψης αποφάσεων.

Είναι εμφανές ότι η περιγραφόμενη έως τώρα διαδικασία διατηρεί τις ιδιότητες της όταν εφαρμόζεται στο πρόβλημα **[CPTP1]** και ότι αυτές μπορούν εύκολα να επεκταθούν στην περίπτωση των προβλημάτων **[IPTP2]** και **[CPTP2]** όπου η διαδικασία συντονισμού του Σχήματος 2.9 σε μεγάλο βαθμό διατηρείται και οι ερμηνείες που δόθηκαν παραπάνω εξακολουθούν να ισχύουν.

2.5 Ιεραρχικός Συντονισμός μέσω της αποσύνθεσης Dantzig-Wolfe

Ο ιεραρχικός συντονισμός που παρέχεται από την μέθοδο αποσύνθεσης Dantzig-Wolfe έχει ευρέως ερμηνευτεί από την σχετική βιβλιογραφία σε όρους μίας ιεραρχικά οργανωμένης αλλά αποκεντρωμένης επιχείρησης [93, 100]. Στην παρούσα ενότητα χρησιμοποιείται για να δείξει την διαφορά ανάμεσα στον ιεραρχικό και τον οριζόντιο συντονισμό στα πλαίσια της εφοδιαστικής αλυσίδας.

Αν υποθεθεί ότι υπάρχουν διαθέσιμες N λύσεις $[s(k), x(k), I(k), r(k), z(k)]$, $k = 1, \dots, N$ των προβλημάτων **[SUB11]** και **[SUB12]**, τότε το περιορισμένο κυρίαρχο πρόβλημα Dantzig-Wolfe προτυποποιείται ως:

$$\mathbf{[RMP1]} \quad \min \sum_{k=1}^N \beta(N; k) \{ \mathbf{p}^T \mathbf{s}(k) + \mathbf{c}^T \mathbf{x}(k) + \mathbf{h}^T \mathbf{I}(k) \} \quad (2.94)$$

$$\text{υπό} \quad \sum_{k=1}^N \beta(N; k) = 1 \quad (2.95)$$

$$\sum_{k=1}^N \beta(N; k) (\mathbf{z}(k) - \mathbf{r}(k)) = \mathbf{0} \quad (2.96)$$

$$\beta(N; k) \geq 0, \quad \forall k \quad (2.97)$$

Δηλαδή, το **[RMP1]** προσπαθεί να δημιουργήσει ένα σημείο $[s(N), x(N), I(N), r(N), z(N)]$, σύμφωνα με τους περιορισμούς (2.95) και (2.97) σαν τον κυρτό συνδυασμό των N λύσεων των υποπροβλημάτων, που να είναι εφικτό στις ισότητες απαιτώντας την ικανοποίηση του περιορισμού (2.96):

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{z}(N) &= \sum_{k=1}^N \beta(N; k) \mathbf{z}(k), \\ \mathbf{r}(N) &= \sum_{k=1}^N \beta(N; k) \mathbf{r}(k), \\ \mathbf{s}(N) &= \sum_{k=1}^N \beta(N; k) \mathbf{s}(k), \\ \mathbf{I}(N) &= \sum_{k=1}^N \beta(N; k) \mathbf{I}(k), \\ \mathbf{x}(N) &= \sum_{k=1}^N \beta(N; k) \mathbf{x}(k), \end{aligned} \right\} \quad (2.98)$$

Σαφώς, η (2.98) είναι παρόμοια με την (2.56), η διαφορά τους έγκειται μόνο στον τρόπο με τον οποίο υπολογίζονται τα σταθμά στον κυρτό συνδυασμό. Επιπλέον, το σημείο που ορίζετε από την (2.98) είναι εφικτό για το **[IPTP1]**, όταν υπάρχουν εφικτά σταθμά $\beta(N; k)$ ενώ αυτό δεν είναι απαραίτητο για το σημείο που ορίζετε από την (2.56). Συγκεκριμένα εάν ένα εφικτό σημείο $[s(0), x(0), I(0), r(0), z(0)]$ είναι γνωστό τότε αυτό μπορεί να περιληφθεί στο **[IPTP1]** επιτρέποντας το k να εκτείνεται από το 0 στο N . Επομένως το σημείο της (2.98) παρέχει ένα άνω όριο (ubd) για την βέλτιστη λύση του **[IPTP1]**.

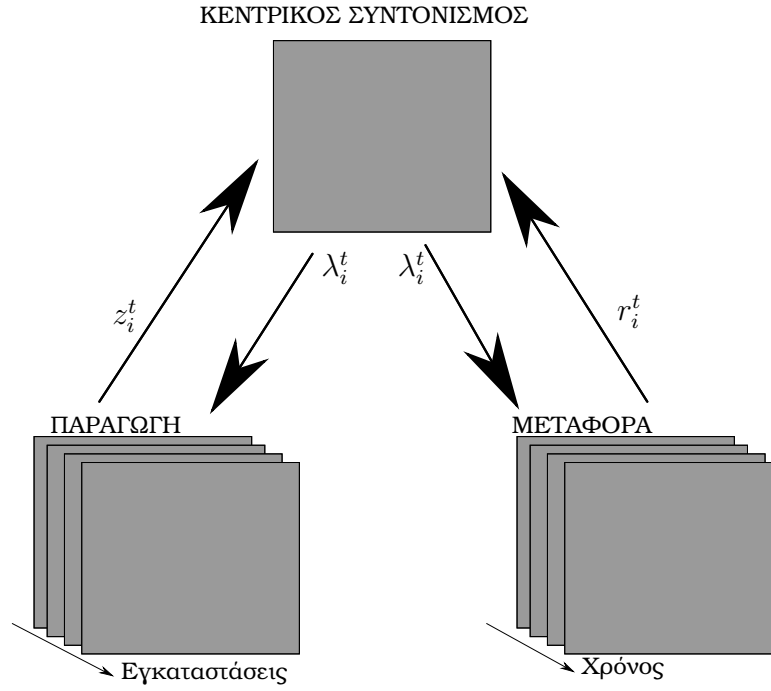
Το πρόβλημα **[RMP1]** μπορεί να περιλάβει οποιουσδήποτε μη χαλαρωμένους περιορισμούς οι οποίοι δεν περιλαμβάνονται στα υποπροβλήματα. Για παράδειγμα οι περιορισμοί στην χρήση πόρων (2.12) ή/και οι περιορισμοί (2.42) μπορούν να περιληφθούν στο **[RMP1]** επιβάλλοντας έτσι στο **SUB11** να διαχωριστεί σε απλούστερα υποπροβλήματα **LS1**.

Αν $\lambda(N) = [\lambda_i^t(N)]$ είναι οι δυικές μεταβλητές που αντιστοιχούν στους περιορισμούς (2.96) του γραμμικού προβλήματος **[RMP1]** και $\gamma(N)$ η δυική μεταβλητή του περιορισμού της κυρτότητας (2.95), τότε η μέθοδος Dantzig-Wolfe αντιστοιχεί σε μία διαδικασία συντονισμού μέσω τιμής (price directive coordination approach) όπου ο επικεφαλής συντονισμού στην διάρκεια της επανάληψης k λαμβάνει πληροφορίες από το τμήμα μεταφοράς για την ποσότητα που $\mathbf{r}(k) = [r_i^t(k)]$ που μπορεί να μεταφερθεί από την εγκατάσταση i την περίοδο t και από τον υπεύθυνο της εγκατάστασης i για την ποσότητα $\mathbf{z}(k) = [z_i^t(k)]$ που μπορεί να παραχθεί την περίοδο t . Ο συντονιστής κάνει την καλύτερη χρήση των πληροφοριών που έχει για τις συγκεκριμένες ποσότητες. Δηλαδή κατά την ελαχιστοποίηση του συνολικού κόστους λαμβάνει υπόψη όλους τους κυρτούς συνδυασμούς των διαφορών $\mathbf{z}(k) - \mathbf{r}(k)$, η διαδικασία αυτή του παρέχει όλα τα σύνολα των εφικτών ποσοτήτων για τα τμήματα των υπόλοιπων εγκαταστάσεων.

Ο υπεύθυνος συντονισμού για να ελέγξει την παραπάνω περιγραφή παρέχει στο κάθε τμήμα τις βέλτιστες τιμές των προσφερομένων ποσοτήτων όπως αυτές περιγράφονται από το δυικό διάνυσμα $\lambda(N)$. Καθένα από τα σχετικά τμήματα ανταποκρίνεται επιλύοντας το δικό του υποπρόβλημα Lagrange και έτσι προετοιμάζουν νέες προτάσεις ποσοτήτων $\mathbf{r}(N+1)$ και $\mathbf{z}(N+1)$ οι οποίες στην συνέχεια διαβιβάζονται στον κεντρικό συντονιστή. Ο οποίος αφού συλλέξει τις απαραίτητες πληροφορίες για τις ποσότητες από όλα τα τμήματα καθορίζει νέες τιμές για τις ποσότητες που πρέπει να αποσταλούν επιλύοντας το περιορισμένο κυρίαρχο πρόβλημα **[RMP1]**, οι οποίες με την σειρά τους μεταβιβάζονται πίσω στα αντίστοιχα τμήματα. Καθώς τα τμήματα ενημερώνουν τις προτεινόμενες προτάσεις τους λαμβάνουν υπόψη έμμεσα τις αντιδράσεις των συνεργατών τους σε αυτές, εξαιτίας των νέων τιμών. Ο ρόλος του κεντρικού συντονιστή είναι να μετρήσει τις διαφορές στις προτεινόμενες ποσότητες και να ανανεώσει τις τιμές βασιζόμενος στις παρούσες και παρελθοντικές διαφορές επιλύοντας το περιορισμένο κυρίαρχο πρόβλημα **[RMP1]**.

Εάν το **[SUB11]** αποσυντίθεται σε m υποπροβλήματα **[LS1]**, ένας ιεραρχικός συντονισμός ο οποίος περιγράφεται στο Σχήμα 2.10 προκύπτει στην θέση του οριζόντιου συντονισμού που προτείνεται από το Σχήμα 2.6. Εάν από την άλλη πλευρά στο **[SUB11]** εμπεριέχονται περιορισμοί που επιβάλουν την αδιαιρετότητα του, ο ιεραρχικός συντονισμός που προτείνεται από το Σχήμα 2.11 αντικαθιστά τον οριζόντιο συντονισμό του Σχήματος 2.7.

Οι νέες προτάσεις $\mathbf{z}(N+1)$ και $\mathbf{r}(N+1)$ από τα τμήματα εκτιμούνται από τον συντονιστή της εφοδιαστικής αλυσίδας για να εξακριβώσει εάν μπορούν να βελτιώσουν το συνολικό κόστος του συστήματος. Η εκτίμηση αυτή στηρίζεται στο ακόλουθο αποτέλεσμα :



Σχήμα 2.10: Ιεραρχικός Συντονισμός μέσω Τιμών βάση των υποπροβλημάτων **[LS1]** και **[TP1]**

Πρόταση 2.7 Εάν $\gamma(N)$ είναι η βέλτιστη σκιάδης τιμή του περιορισμού της κυρτότητας στο περιορισμένο κυρίαρχο πρόβλημα **[RMP1]** και $\lambda(N)$ οι βέλτιστες δυικές τιμές των περιορισμών (2.96) και εάν $\beta(N; k) > 0$ για κάποιο k , τότε

$$\gamma(N) = \mathbf{p}^T \mathbf{s}(k) + \mathbf{h}^T \mathbf{I}(k) + \mathbf{c}^T \mathbf{x}(k) - \lambda(N)^T (\mathbf{z}(k) - \mathbf{r}(k)) \quad (2.99)$$

Απόδειξη: Απορρέει από το γεγονός ότι το οριακό κόστος των βασικών μεταβλητών είναι μηδέν. \square

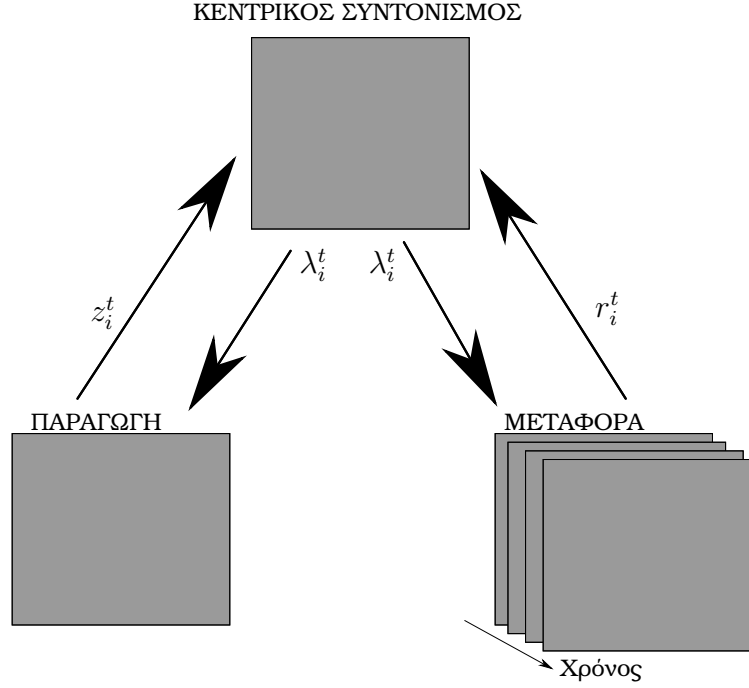
Πρόταση 2.8 Το $\gamma(N)$ παρέχει ένα άνω όριο (ubd) για την βέλτιστη αντικειμενική τιμή του **[IPTP1]**.

Απόδειξη: Επακόλουθο της ισχυράς δυϊκότητας και της μορφής του **[RMP1]**. \square

Πρόταση 2.9 Ας είναι $\mathbf{z}(N+1)$ και $\mathbf{r}(N+1)$ οι προτάσεις που λαμβάνονται επιλύοντας τα υποπροβλήματα Lagrange **[SUB11]** και **[SUB12]** για $\lambda = \lambda(N)$. Εάν

$$\begin{aligned} &\mathbf{p}^T \mathbf{s}(N+1) + \mathbf{h}^T \mathbf{I}(N+1) + \mathbf{c}^T \mathbf{x}(N+1) \\ &\quad - \lambda(N)^T (\mathbf{z}(N+1) - \mathbf{r}(N+1)) < \gamma(N) \end{aligned} \quad (2.100)$$

τότε οι ποσότητες $\mathbf{z}(N+1)$ και $\mathbf{r}(N+1)$ μπορούν να χρησιμοποιηθούν από τον κεντρικό συντονιστή για να μειώσει το συνολικό κόστος στο περιορισμένο κυρίαρχο πρόβλημα



Σχήμα 2.11: Ιεραρχικός Συντονισμός μέσω Τιμών βάση των υποπροβλημάτων **[SUB11]** και **[TP1]**

[RMP1] επεκτείνοντας το πρόβλημα με την στήλη

$$\begin{bmatrix} \mathbf{p}^T \mathbf{s}(N+1) + \mathbf{h}^T \mathbf{I}(N+1) + \mathbf{c}^T \mathbf{x}(N+1) \\ \mathbf{z}(N+1) - \mathbf{r}(N+1) \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.101)$$

Απόδειξη: Η πρόταση αυτή απορρέει από το γεγονός ότι η (2.100) συνεπάγεται ότι το οριακό της κόστος της στήλης (2.101) είναι αρνητικό και κατά συνέπεια είναι υποψήφια για είσοδο στην τρέχουσα βέλτιστη βάση του περιορισμένου κυρίαρχου προβλήματος **[RMP1]**. \square

Πρόταση 2.10 Εάν ισχύει ισότητα στην σχέση (2.100) τότε ο συντονιστής καταλήγει στο συμπέρασμα ότι οι

$$\mathbf{r}(N) = \sum_{k=1}^N \beta(N; k) \mathbf{r}(k) = \mathbf{z}(N) \quad (2.102)$$

είναι οι βέλτιστες ποσότητες που πρέπει να αποσταθούν και ότι οι

$$\mathbf{s}(N) = \sum_{k=1}^N \beta(N; k) \mathbf{s}(k) \quad (2.103)$$

$$\mathbf{I}(N) = \sum_{k=1}^N \beta(N; k) \mathbf{I}(k) \quad (2.104)$$

$$\mathbf{x}(N) = \sum_{k=1}^N \beta(N; k) \mathbf{x}(k) \quad (2.105)$$

καθορίζουν το βέλτιστο επίπεδο παραγωγής και αποθεμάτων καθώς και το βέλτιστο πρότυπο μεταφοράς που ελαχιστοποιούν το συνολικό κόστος του συστήματος.

Απόδειξη: Συνεπάγεται από το γεγονός ότι σε όρους γραμμικού προγραμματισμού το οριακό κόστος της νέας στήλης (2.101) είναι μηδέν. Κατά συνέπεια ο συντονιστής μπορεί να συμπεράνει ότι έχει τις απαιτούμενες πληροφορίες για τις εφικτές ποσότητες που προτείνουν τα εμπλεκόμενα τμήματα επειδή αυτά δεν μπορούν να μεταβιβάσουν προτάσεις οι οποίες θα μπορούσαν σύμφωνα με την (2.100) να μειώσουν το συνολικό κόστος του συστήματος στο περιορισμένο κυρίαρχο πρόβλημα **[RMP1]**. \square

Είναι γνωστό ότι κάτω από την υπόθεση του μη-εκφυλισμού (non-degeneration assumption) η διαδικασία συντονισμού που στηρίζεται στην μέθοδο Dantzig-Wolfe συγκλίνει σε μια βέλτιστη λύση του πρωταρχικού προβλήματος **[IPTP1]** ύστερα από πεπερασμένο αριθμό επαναλήψεων, δηλαδή μεταβολών στην επίλυση του περιορισμένου κυρίαρχου προβλήματος και των υποπροβλημάτων Lagrange, επειδή κάθε φορά που επιλύεται ένα πρόβλημα **[RMP1]**, μια καινούρια στήλη (2.101), που αντιστοιχεί σε μία νέα λύση ακρότατου από τα υποπροβλήματα προστίθεται σύμφωνα με την (2.100). Ο αριθμός αυτών των ακρότατων είναι περιορισμένος.

Η διαδικασία μπορεί να επεκταθεί και στην περίπτωση του προβλήματος **[IPTP2]**. Σε αυτή όμως την περίπτωση θα πρέπει να χρησιμοποιηθούν δύο περιορισμοί κυρτότητας στο περιορισμένο κυρίαρχο πρόβλημα του κεντρικού συντονιστή:

$$\begin{aligned} \textbf{[RMP2]} \quad \min \quad & \sum_{k=1}^N \beta(N; k) \{ \mathbf{p}^T \mathbf{s}(k) + \mathbf{c}^T \mathbf{x}(k) + \mathbf{h}^T \mathbf{I}(k) \} \\ & + \sum_{\ell=1}^M \delta(M; \ell) \{ \mathbf{q}^T \mathbf{J}(\ell) \} \end{aligned} \quad (2.106)$$

$$\text{υπό} \quad \sum_{k=1}^N \beta(N; k) = 1 \quad (2.107)$$

$$\sum_{\ell=1}^M \delta(M; \ell) = 1 \quad (2.108)$$

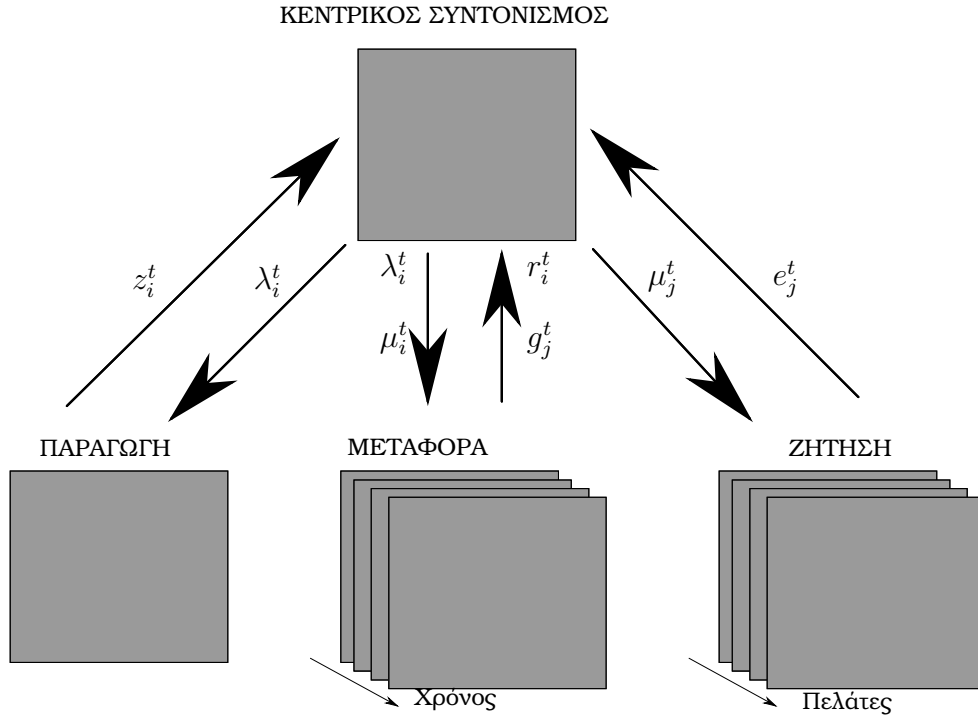
$$\sum_{k=1}^N \beta(N; k) (\mathbf{z}(k) - \mathbf{r}(k)) = \mathbf{0} \quad (2.109)$$

$$\sum_{\ell=1}^M \delta(M; \ell) (\mathbf{e}(\ell) - \mathbf{g}(\ell)) = \mathbf{0} \quad (2.110)$$

$$\beta(N; k) \geq 0, \quad \forall k \quad (2.111)$$

$$\delta(M; \ell) \geq 0, \quad \forall \ell \quad (2.112)$$

Η αντίστοιχη διαδικασία συντονισμού απεικονίζεται στο σχήμα 2.12.



Σχήμα 2.12: Ιεραρχικός Συντονισμός μέσω Τιμών βάση των υποπροβλημάτων **[SUB11]**, **[LS2]** και **[TP2]**

Παρατηρούμε ότι το **[RMP2]** έχει έναν περιορισμό κυρτότητας για κάθε διεπαφή συντονισμού της οριζόντιας προσέγγισης. Επιπλέον σε κάθε επανάληψη δύο υποψήφιας στήλες δημιουργούνται από τα υποπροβλήματα **[SUB11]**, **[SUB22]**, και **[SUB23]** ή τα αντίστοιχα **[LS1]**, **[LS2]** και **[TP2]**:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{p}^T \mathbf{s}(N+1) + \mathbf{h}^T \mathbf{I}(N+1) + \mathbf{c}^T \mathbf{x}(N+1) \\ 1 \\ 0 \\ \mathbf{z}(N+1) - \mathbf{r}(N+1) \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \mathbf{q}^T \mathbf{J}(M+1) \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \mathbf{e}(M+1) - \mathbf{g}(M+1) \end{bmatrix}$$

Εμφανώς η πρώτη αντιστοιχεί στον τύπο της στήλης (2.101). Αφού δεν είναι απαραίτητο να εισέλθουν στην βάση και οι δύο, γενικά ισχύει $N \neq M$.

Η προσέγγιση Dantzig-Wolfe μπορεί να εφαρμοστεί επίσης στην περίπτωση των προβλημάτων **[CPTP1]** και **[CPTP2]**. Στην περίπτωση της τμηματικώς γραμμικής κυρτής συνάρτησης (2.26)-(2.28), ουσιαστικά πρόκειται για την απευθείας εφαρμογή της παραπάνω περιγραφόμενης μεθόδου. Διαφορετικά, οι $P_i(s_i)$ γραμμικοποιούνται σε πλέγμα και εφαρμόζεται η μη γραμμική αποσύνθεση Dantzig-Wolfe[112]. Η ερμηνείες παραμένουν οι ίδιες.

2.6 Υπολογιστική Προσομοίωση του Λαγρανζιανού Συντονισμού

Για να προβούμε στην λεπτομερέστερη εξέταση του Λαγρανζιανού Συντονισμού υλοποιήσαμε στην γλώσσα προγραμματισμού Fortran 95 μια γεννήτρια τυχαιοποιημένων υποδειγμάτων του εξεταζόμενου γραμμικού προβλήματος. Με δεδομένους τους κόμβους παραγωγής, τους κόμβους ζήτησης και του χρονικού ορίζοντα, η γεννήτρια δημιουργεί ένα δίκτυο ανάλογο του Σχήματος 2.2. Για δεδομένα διαστήματα τιμών τελικών αποθεμάτων, κόστους παραγωγής, κόστους μεταφοράς, κόστους αποθεμάτων και ποσοτήτων ζήτησης η γεννήτρια δημιουργεί ένα εγγυημένα εφικτό υπόδειγμα κατανέμοντας τις ζητήσεις πελατών και τα τελικά αποθέματα πελατών και μονάδων παραγωγής μέσω μιας διαδικασίας αναζήτησης πρώτα κατά πλάτος (Breadth First Search) εκκινώντας από τους τελικούς κόμβους και προχωρώντας προς τους αρχικούς του ορίζοντα. Ο διαμερισμός της ροής μεταξύ των τόξων με κατάληξη τον ίδιο τον κόμβο γίνεται μέσω τυχαιοποίησης. Τα τελικά αποθέματα πελατών και μονάδων παραγωγής επιλέγονται μέσω τυχαιοποίησης από τα δεδομένα διαστήματα. Τα ποσοστά ικανοποίησης της ζήτησης των πελατών από τα ίδια αποθέματά τους επιλέγονται τυχαία από δεδομένο διάστημα. Ανάλογος είναι ο χειρισμός των προσφερομένων ποσοτήτων στις μονάδες παραγωγής. Υπάρχει η δυνατότητα επιλογής μη-μηδενικών αρχικών αποθεμάτων τόσο για τους πελάτες όσο και για τις μονάδες παραγωγής. Εάν απαιτηθεί, η γεννήτρια παράγει υποδείγματα με περιορισμούς δυναμικότητας τόσο στην ποσότητα παραλαβής από τον κάθε πελάτη για κάθε περίοδο όσο και στην ποσότητα διακίνησης από κάθε μονάδα παραγωγής. Οι μέγιστες ποσότητες βασίζονται στην προαναφερθείσα τυχαία κατανομή και εγγυώνται έτσι την ύπαρξη τουλάχιστον μίας εφικτής λύσης.

Για την υλοποίηση του Λαγρανζιανού αλγορίθμου χρησιμοποιήθηκε η γλώσσα προγραμματισμού Fortran 95 και υπολογιστής με λειτουργικό σύστημα Suse Linux 9.1 και επεξεργαστή Pentium IV στα 3.02 GHz χρησιμοποιώντας μεταγλωττιστή (compiler) Lahey/Fujitsu If95 version 6.2. Στην υλοποίηση αυτή τα Λαγρανζιανά υποπροβλήματα **[LS1]** (ή το **[LS2]**) και **[TP1]** (ή το **[TP2]**) επιλύονται με την μέθοδο out of kilter. Αν και η μέθοδος αυτή είναι κατά τι λιγότερο ταχεία από άλλες γνωστές μεθόδους [20, 76, 2] έχει το πλεονέκτημα της επαναβελτιστοποίησης (reoptimization) ενός προβλήματος εκκινώντας από αρχικές λύσεις που δεν είναι κατά ανάγκη εφικτές για το δεδομένο πρόβλημα. Ο υλοποιημένος αλγόριθμος εκμεταλλεύεται την δυνατότητα επαναβελτιστοποίησης μεταξύ διαδοχικών επαναλήψεων αποβλέποντας στην μείωση του αθροιστικά ολικού χρόνου επίλυσης.

$\ \text{subgr}\ $	Ευκλείδιο μέτρο των διαφορών στις τιμές των μεταβλητών
$\text{SUM}(\text{subgr})$	Άθροισμα των απόλυτων διαφορών στις τιμές των εξισωμένων μεταβλητών
$\text{SUM}(\text{ACC.DIF})$	Άθροισμα των απόλυτων διαφορών των σταθμισμένων προσεγγίσεων στις εξισωμένες μεταβλητές
UBD-LBD	Απόλυτο αντικειμενικό σφάλμα
SUM/SUPPLY	Για το πρόβλημα [IPTP1] $\sum_{i=1}^m z_i^t / \sum_{j=1}^n d_j, \forall t$ (πβλ. (2.42)). Αναλόγως για το [IPTP2] .
$\text{ACC.SUM}/\text{SUPPLY}$	Για το πρόβλημα [IPTP1] $\sum_{i=1}^m \hat{z}_i^t / \sum_{j=1}^n d_j, \forall t$. Αναλόγως για το [IPTP2] .
$\frac{\text{UBD-LBD}}{\text{UBD}}$	Σχετικό αντικειμενικό σφάλμα.
UBD	Τρέχον άνω φράγμα στην βέλτιστη αντικειμενική τιμή.
CUR. LBD	Τρέχον κάτω φράγμα στην βέλτιστη αντικειμενική τιμή
LBD	Κάτω φράγμα
1ST ACC. COS	Τρέχον κόστος για τις σταθμισμένες τιμές (πβλ. (2.56)) των
2ST ACC. COST	εξισωμένων μεταβλητών που βρίσκονται στην αριστερή πλευρά (δεξιά πλευρά) των εξισώσεων (2.31) και (2.58)

Πίνακας 2.1: Επεξήγηση των Τίτλων των Γραφικών

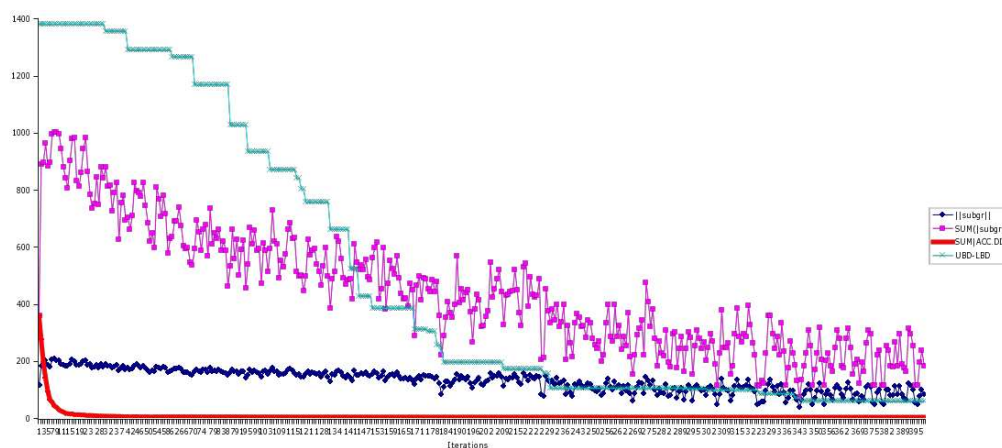
Ο αλγόριθμος των υποκλίτων (subgradient algorithm) δύναται να εκτελεσθεί είτε για βήματα που ικανοποιούν τις προϋποθέσεις της Πρότασης 2.2, π.χ. h/κ ή $h/(\kappa + k)$ όπου h και k είναι σταθερές και κ ο δείκτης επανάληψης, ή για ευρετικά βήματα που έχουν αποδειχθεί ιδιαίτερα αποτελεσματικά σε εφαρμογές ακέραιου προγραμματισμού π.χ.

$$\gamma \frac{\text{ubd} - \text{lbd}}{\|\xi^\kappa\|^2}, \quad (2.113)$$

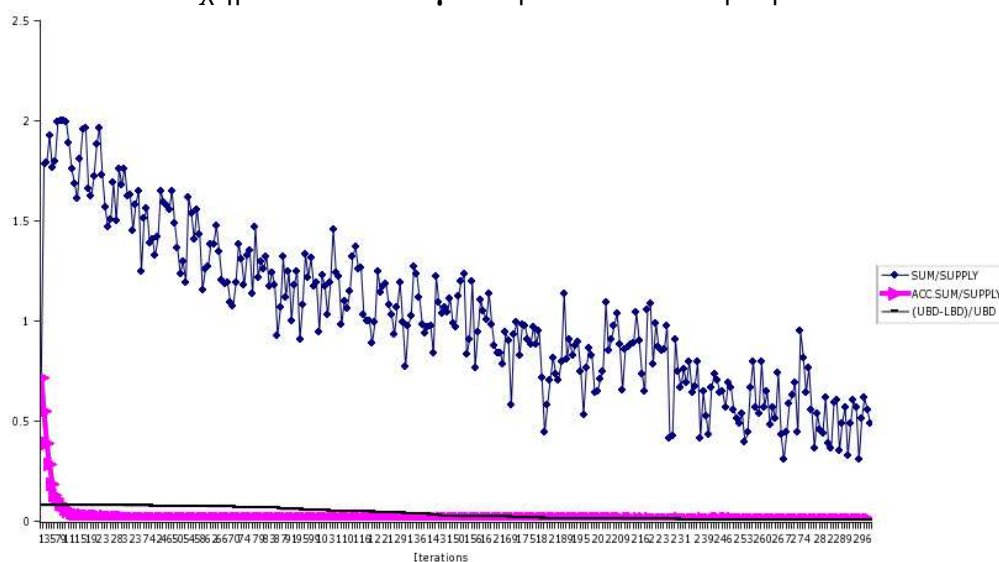
όπου γ είναι μια σταθερά στο διάστημα $(0, 2)$, ubd είναι μία άνω εκτίμηση της βέλτιστης αντικειμενικής τιμής, lbd είναι μια κάτω εκτίμηση της βέλτιστης αντικειμενικής τιμής και ξ^κ είναι το υποκλίτος (subgradient) στην κ -επανάληψη [177].

Η θεωρητική σύγκλιση του αλγορίθμου, όπως αυτή αποδίδεται από την Πρόταση 2.2, επιβεβαιώνεται και υπολογιστικά όπως δύναται να διαπιστωθεί και από τα Σχήματα 2.13, 2.14 και 2.15. Συγκεκριμένα, στο Σχήμα 2.13 παρουσιάζεται η σύγκλιση σε απόλυτα σφάλματα, στο Σχήμα 2.15 σε σχετικά σφάλματα, ενώ στο 2.15 δίνονται οι συγκεκριμένες τιμές για ένα τυχαίο υπόδειγμα του προβλήματος. Η συμπεριφορά του Λαγρανζιανού συντονισμού είναι ανάλογη για όλα τα τυχαioποιημένα υποδείγματα όπου δοκιμάστηκε. Η επεξήγηση των τίτλων των γραφικών δίνεται στον Πίνακα 2.1.

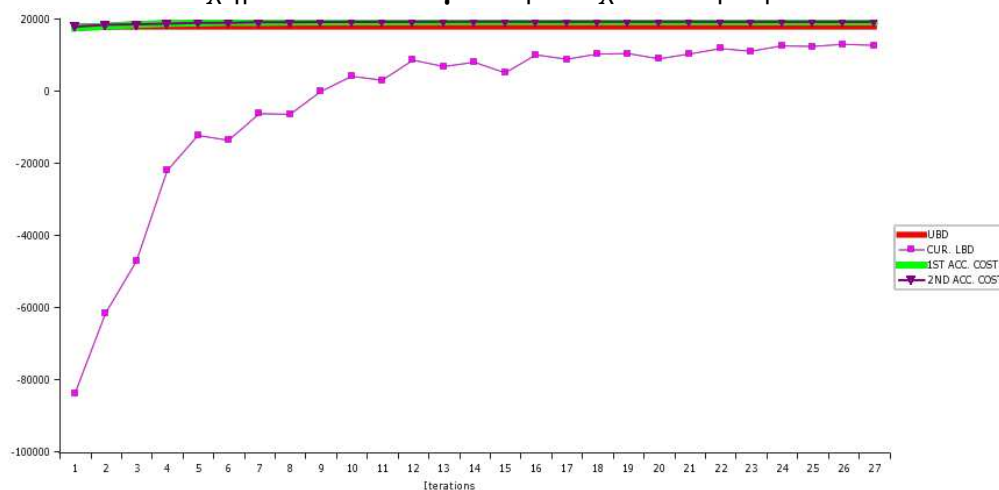
Για να αποφανθούμε περί της ποιότητας των λύσεων που παράγονται μέσω του Λαγρανζιανού συντονισμού συγκρίνοντάς τις με την βέλτιστη λύση του κάθε υποδείγματος στραφήκαμε σε έναν από τους καλύτερους επιλυτές προβλημάτων βελ-



Σχήμα 2.13: Η Σύγκλιση σε Απόλυτα Σφάλματα



Σχήμα 2.14: Η Σύγκλιση σε Σχετικά σφάλματα



Σχήμα 2.15: Αποτελέσματα Λαγρανζιανού Συντονισμού

τιστοποίησης, στον `glpk`, έκδοση 4.8.2.5 της GNU [228], που είναι ανοικτό και ελεύθερο λογισμικό. Στον Πίνακα 2.2 παρουσιάζουμε τα συγκριτικά αποτελέσματα για 6 προβλήματα που δημιουργήθηκαν με την γεννήτρια που αναφέραμε. Τα προβλήματα 1 και 2 αποτελούνται από δίκτυα 30 κόμβων, τα προβλήματα 3, 4 και 5 από δίκτυα 250 κόμβων και το πρόβλημα 6 από συνολικά 1200 κόμβους. Το ανά μονάδα παραγωγής και μεταφοράς κόστος έχει επιλεγεί τυχαία στο διάστημα $[10,50]$ για το πρόβλημα 1, 3 και 6, στο διάστημα $[50,100]$ για το πρόβλημα 2 και 4, στο διάστημα $[100,150]$ για το πρόβλημα 5. Ο αλγόριθμος Λαγκρανζιανού συντονισμού έχει εκτελεστεί για το θεωρητικά ορθό βήμα h/κ με $h = 10$. Τόσο οι μονάδες παραγωγής όσο και οι πελάτες υπόκεινται σε περιορισμούς διακίνησης και παραλαβής αντίστοιχα.

Παρατηρούμε ότι ο συντονισμός των μονάδων παραγωγής και των πελατών αν και προσεγγιστικός είναι πολύ ικανοποιητικός καθώς τόσο η απόκλιση από την βέλτιστη λύση όσο και η σχετική απόκλιση μεταξύ των ubd και lbd είναι σε όλες τις περιπτώσεις πολύ μικρή ($\leq 0.5\%$ για $\kappa \geq 500$ και $\leq 1.5\%$ για $\kappa \leq 100$).

Η ποιότητα του Λαγκρανζιανού συντονισμού μεταβάλλεται ελαφρώς για διαφορετικές επιλογές του Λαγκρανζιανού βήματος (και άρα των βαρών στάθμισης (2.55)). Ο Πίνακας 2.3 παρουσιάζει αποτελέσματα αντίστοιχα με του Πίνακα 2.2 για την ευρετική επιλογή του Λαγκρανζιανού βήματος (2.113).

Ο λόγος που ο Πίνακας 2.3 δεν περιέχει όλες τις περιπτώσεις του Πίνακα 2.2 είναι ότι το ευρετικό βήμα (2.113) προϋποθέτει διαφορετικούς κανόνες τερματισμού της διαδικασίας συντονισμού. Μάλιστα ο αριθμός επαναλήψεων του Πίνακα 2.3 αναφέρεται στον μέγιστο αριθμό επαναλήψεων που επιτρέπει χωρίς αυτό να σημαίνει ότι πράγματι εκτελέσθηκαν όλες αφού όπως άλλωστε προκύπτει και από τους χρόνους εκτέλεσης η διαδικασία των επαναλήψεων μπορεί να τερματιστεί πρώιμα είτε λόγω του ότι το γ στο (2.113) έχει μειωθεί πολύ είτε λόγω το ότι το $\|\xi^\kappa\|$ ή το $ubd-lbd$ είναι πολύ μικρά.

Συμπερασματικά μπορούμε να πούμε ότι όπως προκύπτει από τους Πίνακες 2.2 και 2.3, το ευρετικό βήμα (2.113) οδηγεί σε τουλάχιστον τόσο καλό συντονισμό όσο και το θεωρητικό της Πρότασης 2.2 και ότι η υλοποίηση του συντονισμού μέσω του ευρετικού βήματος πλεονεκτεί και υπολογιστικά σε σύγκριση ακόμη και με την απευθείας βελτιστοποίηση.

	glpk	Langrangean Coordination				glpk
Πρόβλημα	opt	lbd	ubd	iter. κ	CPU	CPU
1	10640	9852.5	11423	100	0.006	0.0
		10571.6	11276	500	0.02	
		10627.67	11276	1000	0.04	
		10634.42	11276	2000	0.08	
2	45066	43687.54	45563	100	0.005	0.0
		44949.65	45397	500	0.02	
		44989.58	45397	1000	0.05	
		45003	45397	2000	0.09	
3	8275	8099.5	8661	100	0.66	2
		8252.33	8743	500	1.27	
		8264.13	8743	1000	2.6	
		8269.61	8743	2000	4.4	
4	50781	50412	51920	100	1.56	2
		50750	51687	500	2.20	
		50765.66	51687	1000	4.2	
		50773	51674	2000	4	
5	101035	100535	102433	100	1.57	2
		100993.75	102367	500	2	
		101023.42	102367	1000	3.8	
		101029.72	102345	2000	5.3	
6	200198	200099	206402	100	280.98	244
		200099	204211	500	314.85	
		200099	203420	1000	335.26	
		200099	203010	2000	350.16	

Πίνακας 2.2: Σύγκριση Υπολογιστικών Αποτελεσμάτων Λαγρανζιανού Συντονισμού με τα αποτελέσματα του glpk

	glpk	Langrangean Coordination				glpk
Πρόβλημα	opt	lbd	ubd	iter. κ	CPU	CPU
1	10640	10637	11387	100	0.005	0.0
		10639.13	11387	500	0.005	
2	45066	45058.69	45480	100	0.005	0.0
3	8275	8267.24	87001	100	1.18	2
		8272.73	8650	500	1.53	
4	50781	50774.12	51893	100	1.60	2
		50775	51782	500	1.67	
5	101035	101029	102482	100	1.60	2
		101032	102433	500	2.3	
		101034.99	102339	1000	2.8	
6	200198	200099	2054600	100	48.50	244

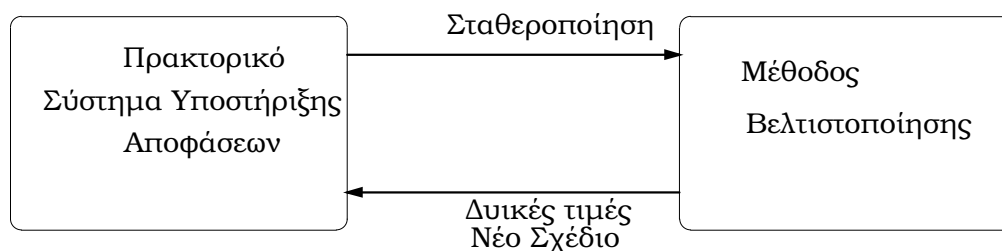
Πίνακας 2.3: Σύγκριση Υπολογιστικών Αποτελεσμάτων Λαγρανζιανού Συντονισμού με Ευρετικό Βήμα (2.113) με τα Αποτελέσματα του glpk

2.7 Σύστημα Αποφάσεων Βασισμένο στην Θεωρία Πρακτόρων

Όπως έχει αναφερθεί αυτό που σκιαγραφεί τα προβλήματα της εφοδιαστικής αλυσίδας είναι η κατανομημένη φύση που χαρακτηρίζει την διαδικασία λήψης αποφάσεων που τα αφορούν. Η τεχνολογία των πρακτόρων μπορεί να προσφέρει μέσα σε αυτά τα πλαίσια νέα μέσα και εργαλεία για το συντονισμό των δραστηριοτήτων που εμπεριέχονται στα πλαίσια διαχείρισης της εφοδιαστικής αλυσίδας. Ένας πράκτορας είναι ένα ολοκληρωμένο πρόγραμμα ικανό να ελέγχει τις αποφάσεις που λαμβάνει και να δρα για την επίτευξη ενός ή περισσότερων στόχων σύμφωνα με την αντίληψη που έχει για το περιβάλλον μέσα στο οποίο λειτουργεί [224].

Όπως έχει επίσης επισημανθεί οι δυικές τιμές που λαμβάνονται από τις προτεινόμενες μεθοδολογίες συντονισμού είναι ακριβείς ακόμα και σε περιπτώσεις ξαφνικών αλλαγών όπως για παράδειγμα στις αλλαγές στην ζήτηση των πελατών, εξασφαλίζοντας έτσι ευελιξία στην διαδικασία διαχείρισης της αλυσίδας. Συνεπώς, τα συστήματα υποστήριξης αποφάσεων που βασίζονται στην θεωρία των πρακτόρων μπορούν να εκτελούνται παράλληλα με την υιοθετούμενη μεθοδολογία βελτιστοποίησης όπως απεικονίζεται και στο Σχήμα 2.16.

Σε αυτό το πλαίσιο, το πρακτορικό σύστημα υποστήριξης αποφάσεων ανταλλάσσει πληροφορίες με το σύστημα βελτιστοποίησης, δηλαδή στέλνει πληροφορίες για τις σταθεροποιήσεις (fixations) που πρέπει να γίνουν και λαμβάνει δυικές τιμές και μια νέα λύση. Στην πραγματικότητα στην περίπτωση της διαδικασίας συντονισμού που στηρίζεται στην μέθοδο Lagrange ή στην επαυξημένη Lagrange, οι πράκτορες



Σχήμα 2.16: Συνεργασία Πρακτορικού Συστήματος Υποστήριξης Αποφάσεων και Μεθόδου Βελτιστοποίησης

μπορούν να υιοθετήσουν τα αντίστοιχα υποπροβλήματα σαν μηχανισμό λήψης αποφάσεων. Στην περίπτωση της αποσύνθεσης Dantzig-Wolfe τέτοια υιοθέτηση είναι πιθανή μόνο προσωρινά, καθώς απαιτείται ο συντονισμός μέσω του περιορισμένου κυρίαρχου προβλήματος δηλαδή ενός κεντρικού πράκτορα. Είναι επίσης πιθανόν οι πράκτορες να μεταβιβάζουν όχι μόνο σταθεροποιήσεις που επιβάλλεται να γίνουν αλλά και ποινές για την μη επίτευξη στόχων, αυξάνοντας έτσι την δυνατότητα για πλήρη εκμετάλλευση των δυνατοτήτων βελτίωσης της τρέχουσας λύσης.

2.8 Συμπεράσματα

Το συγκεκριμένο κεφάλαιο εστίασε στην μελέτη ενός παραδείγματος αποκεντροποιημένης διαδικασίας λήψης αποφάσεων.

Ειδικότερα, εξετάσαμε γραμμικά και κυρτά προβλήματα παραγωγής-μεταφοράς-αποθεμάτων που συσχετίζονται άμεσα με το ζήτημα του συντονισμού της εφοδιαστικής αλυσίδας.

Χρησιμοποιώντας αυτά τα πρόβλημα καταδείξαμε ότι μια μέθοδος αποσύνθεσης που στηρίζεται στην θεωρία Lagrange είναι σε θέση να παρέχει έναν ισχυρό μηχανισμό σε ένα αποκεντριοποιημένο σύστημα λήψης αποφάσεων κάθε μέλος του οποίου ενεργεί και λαμβάνει αποφάσεις στοχεύοντας στην επίτευξη των δικών του στόχων.

Ένα κύριο πλεονέκτημα της νέας προσέγγισης είναι η δραστική απλοποίηση που επιφέρει στη διαχείριση πληροφοριών, περιορίζοντας την ανταλλαγή τους μόνο σε πληροφορίες που αφορούν ποσότητες παραγωγής και μεταφοράς. Με αυτό τον τρόπο η προτεινόμενη μέθοδος είναι σε θέση να αυξήσει την ευελιξία της λειτουργίας της εφοδιαστικής αλυσίδας.

Η αποσύνθεση Dantzig-Wolfe η οποία απαιτεί έναν κεντρικό συντονιστή χρησιμοποιήθηκε για να δείξει την διαφορά ανάμεσα στον ιεραρχικό και τον οριζόντιο συντονισμό στα πλαίσια της εφοδιαστικής αλυσίδας και να επιβεβαιώσει την ευελιξία και την απλότητα της προτεινόμενης μεθόδου Lagrange.

Παράρτημα

Θεωρούμε το γραμμικό πρόβλημα

$$\begin{aligned}
 (\Pi 1) \quad & \min \quad \mathbf{c}^T \mathbf{x} \quad + \quad \mathbf{d}^T \mathbf{y} \\
 \text{υπό} \quad & \mathbf{Ax} \quad + \quad \mathbf{By} \quad \geq \quad \mathbf{b} \\
 & \mathbf{A}_1 \mathbf{x} \quad \geq \quad \mathbf{b}_1 \\
 & \mathbf{B}_1 \mathbf{y} \quad \geq \quad \mathbf{b}_2 \\
 & \mathbf{x} \in \mathcal{X} \\
 & \mathbf{y} \in \mathcal{Y}
 \end{aligned}$$

το οποίο ξαναγράφουμε στην ισοδύναμη μορφή του

$$\begin{aligned}
 (\Pi 2) \quad & \min \quad \mathbf{c}^T \mathbf{x} \quad + \quad \mathbf{d}^T \mathbf{y} \\
 \text{υπό} \quad & \mathbf{Ax} \quad + \quad \mathbf{Bz} \quad \geq \quad \mathbf{b} \\
 & \mathbf{A}_1 \mathbf{x} \quad \geq \quad \mathbf{b}_1 \\
 & \mathbf{B}_1 \mathbf{y} \quad \geq \quad \mathbf{b}_2 \\
 & \mathbf{x} \in \mathcal{X} \\
 & \mathbf{y} \in \mathcal{Y} \\
 & \mathbf{z} \in \mathcal{Y} \\
 & -\mathbf{y} \quad + \quad \mathbf{z} \quad = \quad \mathbf{0}
 \end{aligned}$$

Θα υποθέσουμε ότι το \mathcal{X} και \mathcal{Y} είναι πολύτοπα δηλαδή κλειστά και φραγμένα πολυεδρικά κυρτά σύνολα. Εφαρμόζοντας την μέθοδο χαλάρωσης Lagrange στον περιορισμό της ισότητας, το πρόβλημα διασπάται σε δύο υποπροβλήματα Lagrange

$$\begin{aligned}
 \text{val}_1(\mathbf{v}) \quad & = \min \quad \mathbf{c}^T \mathbf{x} \quad + \quad \mathbf{v}^T \mathbf{z} \\
 \text{υπό} \quad & \mathbf{Ax} \quad + \quad \mathbf{Bz} \quad \geq \quad \mathbf{b} \\
 & \mathbf{A}_1 \mathbf{x} \quad \geq \quad \mathbf{b}_1 \\
 & \mathbf{x} \in \mathcal{X} \quad , \quad \mathbf{z} \in \mathcal{Y}
 \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}
 \text{val}_2(\mathbf{v}) \quad & = \min \quad (\mathbf{d} - \mathbf{v})^T \mathbf{y} \\
 \text{υπό} \quad & \mathbf{By} \quad \geq \quad \mathbf{b}_2 \\
 & \mathbf{y} \in \mathcal{Y}
 \end{aligned}$$

Το δυικό πρόβλημα Lagrange θα είναι

$$\max_{\mathbf{v}} \min_{(\mathbf{x}, \mathbf{z}, \mathbf{y})} L(\mathbf{x}, \mathbf{z}, \mathbf{y}, \mathbf{v})$$

όπου

$$L(\mathbf{x}, \mathbf{z}, \mathbf{y}, \mathbf{v}) = \text{val}_1(\mathbf{v}) + \text{val}_2(\mathbf{v}).$$

Αν υποθέσουμε ότι το επιλύουμε με το αλγόριθμο του υποκλίτους δημιουργώντας μια ακολουθία $\{\mathbf{v}(k)\}$, όπου

$$\mathbf{v}(k+1) = \mathbf{v}(k) + \alpha(k)\mathbf{g}(k), \quad k \geq 1,$$

$$\mathbf{g}(k) = \mathbf{z}(k) - \mathbf{y}(k),$$

με τις

$$(\mathbf{x}(k), \mathbf{z}(k), \mathbf{y}(k))$$

να είναι οι λύσεις των υποπροβλημάτων και το $\alpha(k) \geq 0$ να ικανοποιεί τις σχέσεις

$$\alpha(k) \rightarrow 0$$

και

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha(k) = \infty,$$

οπότε $\{\mathbf{v}(k)\} \rightarrow \mathbf{v}^*$, όπου \mathbf{v}^* είναι βέλτιστη δυική λύση.

Στην συνέχεια εισάγουμε τα σταθμά

$$\beta(N; k) = \frac{\alpha(k)}{\sum_{i=1}^N \alpha(i)}$$

και ορίζουμε την σταθμισμένη ακολουθία ως

$$\{(\mathbf{x}(N), \mathbf{z}(N), \mathbf{y}(N))\},$$

όπου

$$\mathbf{x}(N) = \sum_{k=1}^N \beta(N; k) \mathbf{x}(k),$$

$$\mathbf{z}(N) = \sum_{k=1}^N \beta(N; k) \mathbf{z}(k),$$

$$\mathbf{y}(N) = \sum_{k=1}^M \beta(N; k) \mathbf{y}(k).$$

Από την κυρτότητα των \mathcal{X} και \mathcal{Y} και αφού

$$\sum_{k=1}^N \beta(N; k) = 1, \beta(N; k) \geq 0,$$

συνεπάγεται ότι $\{\mathbf{x}(N)\} \in \mathcal{X}$, $\{\mathbf{z}(N)\} \in \mathcal{Y}$ και $\{\mathbf{y}(N)\} \in \mathcal{Y}$.

Άρα η $\{(\mathbf{x}(N), \mathbf{z}(N), \mathbf{y}(N))\}$ έχει ένα σημείο συσσώρευση $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{z}}, \hat{\mathbf{y}}) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \times \mathcal{Y}$. Επιπλέον ας είναι $\mathbf{g}(N)$ το υποκλίτος στο $(\mathbf{x}(N), \mathbf{z}(N), \mathbf{y}(N))$, τότε από τον ορισμό της $(\mathbf{x}(N), \mathbf{z}(N), \mathbf{y}(N))$,

$$\mathbf{g}(N) = \sum_{k=1}^N \beta(N; k) (\mathbf{z}(k) - \mathbf{y}(k)).$$

Συνεπώς αφού $\mathbf{v}(k+1) = \mathbf{v}(k) + \alpha(k)\mathbf{g}(k)$, $k \geq 1$, θα έχουμε

$$\sum_{k=1}^N \beta(N; k) \mathbf{g}(k) = \frac{\mathbf{v}(k+1) - \mathbf{v}(1)}{\sum_{i=1}^N \alpha(i)}$$

το οποίο προσεγγίζει το 0 αφού $\{\mathbf{v}(k)\} \rightarrow \mathbf{v}^*$ καθώς $k \rightarrow \infty$ και $\sum_{i=1}^N \alpha(i) \rightarrow \infty$ καθώς $N \rightarrow \infty$. Άρα $\{\mathbf{g}(N)\} \rightarrow 0$ και κατά συνέπεια το σημείο συσσώρευσης της ακολουθίας $\{(\mathbf{x}(N), \mathbf{z}(N), \mathbf{y}(N))\}$ επιλύει το **Π2** και άρα το $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}})$ επιλύει το πρόβλημα **Π1**. Τα παραπάνω αποδεικνύουν την Πρόταση 2.2. \square

Για την απόδειξη της Πρότασης 2.3 αρκεί να παρατηρήσουμε ότι η υπόθεση για την γραμμικότητα της αντικειμενικής συνάρτησης των προβλημάτων **Π1** (και **Π2**) αναιρείται όπου χρειάζεται. \square

Κεφάλαιο 3

Ανταγωνισμός Πελατών Εφοδιαστικής Αλυσίδας για το Προσφερόμενο Επίπεδο Εξυπηρέτησης: Μια Προσέγγιση Βασισμένη στην Θεωρία Παιγνίων

Τὰ δ' αὖ τῶν στρατιωτῶν ὁπότε ἐνθυμοίμην, ὅτι τῶν μὲν ἀγαθῶν τούτων οὐδενὸς ἡμῖν μετεῖη, εἰ μὴ πριαίμεθα ὅτου δ' ὠνησόμεθα ἥδειν ἔτι ὀλίγους ἔχοντας, ἄλλῃως δέ πως πορίζεσθαι τὰ ἐπιτήδεια ἢ ὠνουμένους ὄρκους ἤδη κατέχοντας ἡμᾶς. ταῦτ' οὖν λογιζόμενος ἐνίοτε τὰς σπονδὰς μᾶλλον ἐφοδουμην ἢ νῦν τὸν πολέμον.

ΞΕΝΟΦΩΝΤΟΣ : Κύρου Ἀνάβασις, Βιβλίον Γ' , § 1.20

3.1 Εισαγωγή

Παραδοσιακά, η λειτουργία την εφοδιαστικής αλυσίδας επικεντρώνεται στις προσπάθειες που καταβάλουν τα διάφορα τμήματα που την αποτελούν να συντονιστούν για να οδηγήσουν ένα προϊόν στην αγορά. Όμως, ένα από τα πιο σημαντικά σημεία που χαρακτηρίζουν την πορεία των επιχειρήσεων τη δεκαετία του 2000 είναι η μεγάλη ανάγκη που έχει διαπιστωθεί για μια νέου τύπου σχέση με τους πελάτες τους. Ο ρόλος του πελάτη έχει αναβαθμισθεί και αναβαθμίζεται καθημερινά μιας και τόσο η πίεση του ανταγωνισμού εντείνεται όσο και οι απαιτήσεις των πελατών αυξάνουν. Επακόλουθο των προσπαθειών σχεδιασμού και υλοποίησης πελατοκεντρικών συστημάτων παροχής υπηρεσιών προς τους πελάτες είναι η δημιουργία αξιόπιστων μηχανισμών συνεχούς παρακολούθησης των προσδοκιών, αναγκών και αξιών των πελατών, καθώς και αποτίμησης της ανταπόκρισης των προσφερομένων υπηρεσιών σε αυτές τις προσδοκίες.

Έτσι τα τελευταία χρόνια, γίνεται έντονη συζήτηση για την ανάγκη επαναπροσδιορισμού της λειτουργίας και των στόχων του δικτύου ανεφοδιασμού της επιχείρησης. Ο όρος προσαρμοσμένη στις ανάγκες των πελατών εφοδιαστική αλυσίδα (customer

driven supply chain) αναφέρεται σε μια αλυσίδα ανεφοδιασμού όπου οι τελικοί χρήστες του προϊόντος είναι αυτοί που καθορίζουν και συντονίζουν όλες τις λειτουργίες ανάμεσα στους εταίρους της.

Αποτέλεσμα όλων αυτών είναι ότι η εξυπηρέτηση και η ικανοποίηση των πελατών αποτελούν καθοριστικό παράγοντα διαφοροποίησης και διάκρισης μεταξύ των επιχειρήσεων του ίδιου τομέα. Μεγάλος αριθμός επιχειρήσεων εστιάζει την αποστολή του στην ικανοποίηση των πελατών τους. Οι βασικές κατηγορίες κριτηρίων που χρησιμοποιούνται για τη μέτρηση της ικανοποίησης είναι η εξυπηρέτηση, η τιμή, η αξιοπιστία. Για τον λόγο αυτό χρειάζονται μετρήσεις που να απεικονίζουν τα βασικά σημεία που ενδιαφέρουν τους πελάτες τους. Αυτές συνήθως είναι τα εξής : ο χρόνος, η απόδοση, η ποιότητα και το κόστος.

Η ποσοτικοποίηση της αξιολόγησης της ποιότητας των παρεχομένων υπηρεσιών είναι συνήθως συνδυασμός αντικειμενικών και υποκειμενικών κριτηρίων και βασίζεται στην ικανότητα της επιχείρησης να ανταποκριθεί στις ανάγκες των πελατών στις οποίες απευθύνεται. Η ποιότητα υπηρεσιών αναφέρεται στη βιβλιογραφία σαν μη συγκεκριμένη έννοια. Οι αντιλήψεις αυτών που παρέχουν τις υπηρεσίες μπορεί να είναι διαφορετικές από αυτές των ανθρώπων που τις δέχονται. Σε κάθε περίπτωση πλεονεκτήματα της υψηλής ποιότητας υπηρεσιών είναι ότι εξασφαλίζουν υψηλή ζήτηση.

Στην βιβλιογραφία η μέτρηση της ποιότητας των υπηρεσιών που παρέχονται στον πελάτη από τα μέλη της εφοδιαστικής αλυσίδας γίνεται συνήθως με την μέτρηση της ικανότητας της να καλύψει την ζήτηση την χρονική στιγμή που αυτή λαμβάνει χώρα, χωρίς να λαμβάνεται υπόψη το γεγονός ότι οι πελάτες στις περισσότερες περιπτώσεις εμπλέκονται άμεσα στην διαδικασία εξυπηρέτησης τους. Η εμπλοκή αυτή μπορεί να είναι παθητική, δηλαδή ο πελάτης δεν κάνει τίποτα αλλά από να περιμένει να αρχίσει η διαδικασία και στην συνέχεια να περιμένει να τελειώσει, (π.χ η επίσκεψη σε ένα εστιατόριο), ή ενεργητική δηλαδή ο πελάτης εμπλέκεται άμεσα σε αυτήν (π.χ υπεραγορές, εστιατόρια μαζικής εστίασης). Σε κάθε περίπτωση, η παρέκκλιση ανάμεσα στην προσφορά και την ζήτηση δημιουργεί συμφόρηση. Το επίπεδο της συμφόρησης με την σειρά του έχει επιπτώσεις τόσο στην πλευρά της επιχείρησης (παραγωγού) επηρεάζοντας την αποδοτικότητα και τα κέρδη της όσο και στην πλευρά του πελάτη επηρεάζοντας την καταναλωτική του συμπεριφορά.

Επιπλέον, εμπειρικές μελέτες [87, 77] έχουν δείξει ότι όταν οι πελάτες είναι αυτοί που μετακινούνται, επιλέγουν εκείνη την εγκατάσταση για την οποία ελαχιστοποιείται ο χρόνος μετακίνησης και ο χρόνος αναμονής. Συνεπώς, ένας χρήστης μπορεί να επιλέξει να μην μετακινηθεί στην πιο κοντινή εγκατάσταση αλλά σε κάποια άλλη η οποία αν και είναι μακρύτερα είναι λιγότερο κορεσμένη. Επομένως είναι λογικό να υποτεθεί ότι, σε καταστάσεις όπως αυτές που εξετάζονται, κάθε πελάτης θα επιλέξει την εγκατάσταση που ελαχιστοποιεί το χρόνο μετακίνησης (travel time) και παραμονής του στην εγκατάσταση.

Ορισμός 3.1 Σύστημα του Δικτύου Ανεφοδιασμού

Στο παρόν κεφάλαιο, η εφοδιαστική αλυσίδα που εξετάζεται προϋποθέτει ότι μια επιχείρηση «παραγωγός», η οποία λειτουργεί σε περισσότερες από μια εγκαταστάσεις και έχει στην διάθεση της περιορισμένους παραγωγικούς πόρους, παράγει/προμηθεύει ένα προϊόν στους «πελάτες». Οι πελάτες της, που μπορεί να είτε τελικοί χρήστες του προϊόντος, είτε άλλοι ενδιάμεσοι παραγωγοί που χρησιμοποιούν το προϊόν κατά την παραγωγική τους διαδικασία, επιβαρύνονται το κόστος μεταφοράς, αφού είναι αυτοί που ταξιδεύουν προκειμένου να λάβουν την εξυπηρέτηση που ζητούν. Ορίζουμε το δίκτυο αυτών των αλληλοεξαρτώμενων οικονομικών μονάδων ως Σύστημα του Δικτύου Ανεφοδιασμού.

Υποθέτουμε ότι ο παραγωγός προσπαθεί να παρέχει στους πελάτες το καλύτερο επίπεδο των υπηρεσιών του στο ελάχιστο κόστος. Η μέτρηση των παρεχόμενων υπηρεσιών γίνεται από το επίπεδο καθυστέρησης της εξυπηρέτησης που αντιμετωπίζεται σε κάθε επιχείρηση.

Από την άλλη πλευρά, οι πελάτες, αφού το προϊόν δεν είναι διαθέσιμο σε απεριόριστες ποσότητες, ανταγωνίζονται για την ικανοποίηση της ζήτησης τους και κάνουν τις επιλογές τους έτσι ώστε να ελαχιστοποιηθούν οι προσωπικές τους δαπάνες. Οι επιλογές των πελατών για την εξασφάλιση ενός προϊόντος ή μιας υπηρεσίας επηρεάζονται σε μεγάλο βαθμό από το συνολικό κόστος που προκύπτει κατά την διαδικασία συναλλαγής του με την επιχείρηση/παροχέα. Το συνολικό αυτό κόστος περιλαμβάνει εκτός από το κόστος παραγωγής όπως αυτό εκφράζεται από την τιμή του προϊόντος, το κόστος πρόσβασης (κόστος μεταφοράς) που απαιτείται να καταβάλλει ο πελάτης για την εξασφάλιση του προϊόντος καθώς και το κόστος που δημιουργείται εξαιτίας της καθυστέρησης που παρατηρείται κατά την διαδικασία της εξυπηρέτησης. Οι πελάτες μπορεί να θεωρηθούν ως μια «αφετηρία» η οποία δημιουργεί την ροή του προϊόντος από τα διάφορα κέντρα διανομής που είναι ο προορισμός τους για να ικανοποιήσουν την ζήτηση τους. Επομένως, οι πελάτες, ανταγωνίζονται μεταξύ τους για την εξασφάλιση της καλύτερης δυνατής εξυπηρέτησης από το προορισμό. Συγκεκριμένα, υποθέτουμε ότι οι πελάτες ανταγωνίζονται μεταξύ τους εμπλεκόμενοι σε ένα παίγνιο τύπου Nash.

Υπάρχει μια ενδιαφέρουσα αναλογία ανάμεσα στον ανταγωνισμό που παρατηρείται στην πλευρά των πελατών και αυτόν που παρατηρείται σε ένα πρόβλημα δικτύων κυκλοφορίας. Το βασικό πρόβλημα που αντιμετωπίζεται σε ένα δίκτυο κυκλοφορίας είναι ο καθορισμός των διαδρομών που πρέπει να ακολουθήσουν οι χρήστες που μετακινούνται σε ένα συμφορισμένο δίκτυο μεταφοράς προκειμένου να φτάσουν από προκαθορισμένες αφετηρίες (Origins) σε προκαθορισμένους προορισμούς (Destinations). Οι αρχές που πρέπει να διέπουν τον καθορισμό αυτό είναι γνώστες σαν αρχές Wardrop [216] (αν και οι Pigou [157] και Knight[107] τις διατύπωσαν πριν από αυτόν χρησιμοποιώντας παρόμοιους όρους):

Πρώτη Αρχή Wardrop: Εάν ο χρήστης του δικτύου είναι αυτός που επιλέγει την διαδρομή που θα ακολουθήσει, τότε για να υπάρξει ισορροπία στο δίκτυο, η

διαδρομή που θα επιλεγεί από κάθε έναν από τους χρήστες θα πρέπει να είναι τέτοια ώστε κανένας χρήστης δεν μπορεί να μειώσει το χρόνο ταξιδιού του με τη χρησιμοποίηση μιας εναλλακτικής διαδρομής. Η αρχή αυτή είναι γνωστή και ως *ισορροπία χρήστη* (user equilibrium).

Η δεύτερη αρχή Wardrop αντίθετα, υποθέτει ότι υπάρχει ένας κεντρικός συντονιστικός μηχανισμός ο οποίος καθορίζει την διαδρομή που θα ακολουθήσει ο κάθε χρήστης. Σύμφωνα με την δεύτερη αρχή ο συντονιστής επιλέγει τις διαδρομές που θα ακολουθήσουν οι χρήστες έτσι ώστε να ελαχιστοποιείται ο συνολικός χρόνος ταξιδιού όλων των χρηστών. Η αρχή αυτή είναι γνωστή ως *Βέλτιστο Συστήματος* (System Optimum).

Οι Beckmann *et al.* [14] στο κλασσικό πλέον βιβλίο τους *Studies in the Economics of Transportation* παρείχαν την μαθηματική διατύπωση της πρώτης συνθήκης Wardrop. Συγκεκριμένα έδειξαν ότι ένα πρόβλημα οδικού δικτύου στο οποίο υπάρχουν πολλοί αποφασίζοντες που ενεργούν ανεξάρτητα, μπορεί να αναδιατυπωθεί σαν ένα κυρτό πρόβλημα βελτιστοποίησης. Ειδικότερα έδειξαν ότι η συνθήκες βελτιστότητας Kurush-Kuhn-Tucker του συγκεκριμένου κυρτού προβλήματος βελτιστοποίηση ταυτίζονται με την πρώτη συνθήκη Wardrop.

Απο την άλλη πλευρά η διαχείριση της εφοδιαστικής αλυσίδας όπως έχει ήδη αναφερθεί, μπορεί να επιτευχθεί (α) είτε μέσω κεντρικού συντονισμού, ο οποίος απαιτεί έναν κεντρικό υπεύθυνο που ελέγχει και συντονίζει όλες τις αποφάσεις που λαμβάνονται στα διάφορα στάδια της είτε (β) μέσω αποκεντροποιημένου συντονισμού, σύμφωνα με τον οποίο τα μέλη της, δρώντας ανεξάρτητα το ένα από το άλλο λαμβάνουν αποφάσεις για την επίτευξη των στόχων τους, περιοριζόμενα μόνο στην ανταλλαγή πληροφοριών. Είναι λοιπόν εμφανές ότι υπάρχει ταύτιση των υποθέσεων που διέπουν τις αρχές Wardrop και τους δύο αυτούς τύπους συντονισμού της εφοδιαστικής αλυσίδας.

Αυτή η αναλογία υποθέσεων μας ενέπνευσε να «μεταφράσουμε» της βασικές αρχές Wardrop σε όρους του συστήματος που εξετάζουμε.

Έτσι, στην παρούσα εργασία, εξετάζονται δύο διαφορετικές μορφές οργάνωση και συντονισμού της εφοδιαστικής αλυσίδας από τις οποίες προκύπτουν δυο διαφορετικοί τρόποι εκχώρηση των κέντρων διανομής στους πελάτες. Πρώτα εξετάζεται η περίπτωση όπου ολόκληρη η εφοδιαστική αλυσίδα διαχειρίζεται από έναν κεντρικό υπεύθυνο ο οποίος έχει την δυνατότητα να κατευθύνει ο ίδιος τους πελάτες στα κέντρα διανομής. Η δεύτερη μορφή διαχείρισης που εξετάζεται αντιστοιχεί σε μια εφοδιαστική αλυσίδα η οποία χαρακτηρίζεται από αποκεντριοποιημένη διοίκηση, όπου οι πελάτες είναι ελεύθεροι να επιλέξουν οι ίδιοι το κέντρο διανομής από το οποίο θα εξυπηρετηθούν. Το κριτήριο στο οποίο στηρίζουν τις επιλογές τους είναι το κόστος που αντιμετωπίζουν σε κάθε κέντρο διανομής. Μέσα σε αυτό το μεθοδολογικό πλαίσιο προσδιορίζονται οι συνθήκες βελτιστότητας και καθορίζονται οι συνθήκες ισορροπίας του συνολικού προτύπου.

Ορισμός 3.2 Βέλτιστο Συστήματος

Ως βέλτιστο του συστήματος ορίζεται η καταχώρηση των πελατών στα κέντρα διανομής που στηρίζεται στη ελαχιστοποίηση του ολικού κόστους του συστήματος. Η καταχώρηση αυτή προκύπτει στα πλαίσια του κεντρικά διαχειριζόμενου συστήματος.

Ορισμός 3.3 Ατομικό Βέλτιστο

Ορίζεται η ανταγωνιστική κατανομή των πελατών στα κέντρα διανομής στα πλαίσια μιας αποκεντριοποιημένης διαχείρισής του συστήματος. Η κατανομή αυτή αντιστοιχεί σε ένα σημείο ισορροπίας του συστήματος

Ορισμός 3.4 Σημείο Ισορροπίας

Το σύστημα που εξετάζουμε βρίσκεται σε ισορροπία όταν οι πελάτες εξασφαλίζουν το επίπεδο εξυπηρέτησης που επιθυμούν στο ελάχιστο δυνατό ατομικό κόστος και συνεπώς κανένας δεν μπορεί να βελτιώσει την θέση του αλληλάζοντας μονομερώς τις συναλλαγές του με τα κέντρα διανομής.

Προφανώς, ένα σημείο ισορροπίας μπορεί να επιτευχθεί στα πλαίσια μιας αποκεντριοποιημένης διαχείρισής του συστήματος, και προφανώς όταν οι πελάτες είναι ελεύθεροι να επιλέξουν το κέντρο διανομής από όπου θα κάνουν τις αγορές τους οι επιλογές τους οδηγούν αθροιστικά σε υπο-βέλτιστες λύσεις σε σχέση με το βέλτιστο του συστήματος το οποίο όπως αναφέρθηκε και προηγουμένως ελαχιστοποιεί το κόστος για όλους τους χρήστες.

Πρόσφατα προτάθηκε ένα πρότυπο δικτύου εφοδιαστικής αλυσίδας που αποτελείται από παραγωγούς, λιανοπωλητές και καταναλωτές στο [147]. Κάθε μέλος της εφοδιαστικής αντιστοιχεί σε διαφορετικά επίπεδα του δικτύου. Υποθέτουν ότι τα μέλη της εφοδιαστικής ανταγωνίζονται μέσα σε ένα επίπεδο αλλά πρέπει να συνεργαστούν μεταξύ των επιπέδων έτσι ώστε τα προϊόντα να προχωρήσουν από τους παραγωγούς στους καταναλωτές. Διατύπωσαν το πρόβλημα σαν πρόβλημα δικτύου μεταφοράς και διατύπωσαν τους όρους ισορροπίας του δικτύου σαν πρόβλημα μεταβαλλόμενων ανισοτήτων (variational inequality).

Βασικές διαφορές του προτεινόμενου πρότυπου με αυτό του [147] είναι στο [147] δεν λαμβάνεται υπόψη το φαινόμενο της συμφόρησης και τις επιπτώσεις που έχει στις αποφάσεις των πελατών. Αντίθετα στο προτεινόμενο η καθυστέρηση στην εξυπηρέτηση εξαιτίας της συμφόρησης και το κόστος που αυτή συνεπάγεται αποτελεί κριτήρια για της επιλογές των πελατών.

Επίσης, στο πρότυπο του [147] ο ανταγωνισμός λαμβάνει χώρα ανάμεσα στους παραγωγούς οι οποίοι προσπαθούν να μεγιστοποιήσουν τα κέρδη τους. Σε αντίθεση στο προτεινόμενο πρότυπο οι πελάτες είναι αυτοί που ανταγωνίζονται για την ικανοποίηση της ζήτησης τους στο ελάχιστο δυνατό κόστος. Επιπλέον, οι παραγωγοί που συμμετέχουν στο δίκτυο της εφοδιαστικής αλυσίδας λαμβάνουν μέρος σε ένα παίγνιο Cournot-Nash [48, 148] δηλαδή στην προσπάθεια τους να μεγιστοποιήσουν

τα κέρδη τους ανταγωνίζονται ως προς την ποσότητα παραγωγής. Κάθε παραγωγός αποφασίζει τη ποσότητα που μεγιστοποιεί τα κέρδη του λαμβάνοντας υπόψη την βέλτιστη ποσότητα του αντιπάλου. Στο πρότυπο που προτείνουμε οι πελάτες εμπλέκονται σε ένα παίγνιο τύπου Bertrand-Nash [16, 148] όπου ανταγωνίζονται μεταξύ τους λαμβάνοντας υπόψη τις επιπτώσεις που έχουν οι επιλογές των υπόλοιπων πελατών στο κόστος που αντιμετωπίζουν για την ικανοποίηση της ζήτησης τους.

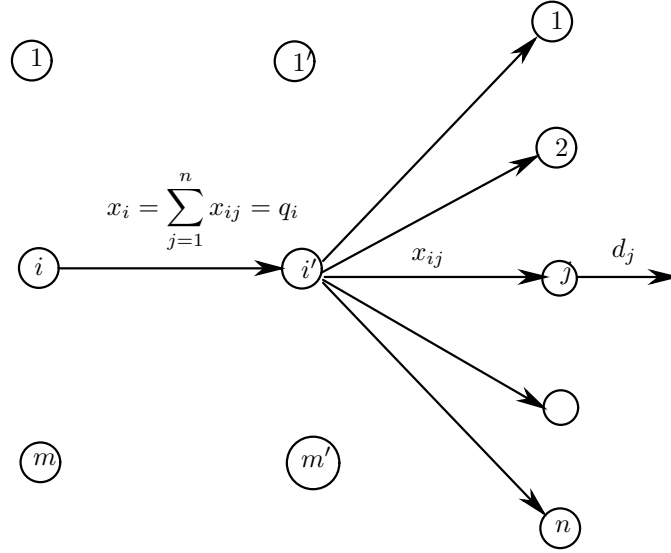
Το υπόλοιπο του κεφαλαίου οργανώνεται ως εξής στην Ενότητα 3.2 διατυπώνεται μαθηματικά το προτεινόμενο πρότυπο. Στις Ενότητες 3.3 και 3.4 εξετάζονται οι συνθήκες βελτιστότητας και η ισορροπία των δύο διαφορετικών μορφών κατανομή των πελατών στα κέντρα διανομής τα οποία προτείνονται. Στην συνέχεια στην Ενότητα 3.5 παρατίθενται οι βασικές διαφορές τους με την βοήθεια ενός παραδείγματος και καθορίζεται αυτή που τελικά θα επικρατήσει. Τέλος στην Ενότητα 3.6 το πρόβλημα επεκτείνεται στην περίπτωση της ελαστικής ζήτησης των πελατών.

3.2 Μαθηματική Διαμόρφωση του προβλήματος

Στην συγκεκριμένη εργασία θα αναπτύξουμε μια εναλλακτική μεθοδολογία για την καλύτερη κατανόηση των αλληλεπιδράσεων που υπάρχουν ανάμεσα στις αποφάσεις των μελών της εφοδιαστικής αλυσίδας και το συνθηκών που πρέπει να διέπουν την λειτουργία της έτσι ώστε να υπάρχει ισορροπία σε όλο το φάσμα της. Για το σκοπό αυτό υποθέτουμε ότι οι επιλογές των πελατών της εφοδιαστικής αλυσίδας επηρεάζονται από το φαινόμενο της συμφόρησης. Για την εξαγωγή συμπερασμάτων και την πρόταση λύσεων που θα είναι εύκολο να εφαρμοστούν και σε πραγματικές συνθήκες θα υιοθετήσουμε την δικτυακή αναπαράσταση της εφοδιαστικής αλυσίδας.

Το πρόβλημα μπορεί να διατυπωθεί ως πρόβλημα ροής δικτύων παρόμοιο με αυτό στο Σχήμα 3.1 στο οποίο η τριμερής γραφική παράσταση αντιπροσωπεύει τους κόμβους πελατών και τους κόμβους των εγκαταστάσεων τα οποία συνδέονται μεταξύ τους από ψευδοκόμβους. Οι ψευδοκόμβοι χρησιμοποιούνται για να δείξουν την δημιουργία του φαινομένου της συμφόρησης σε κάθε κέντρο διανομής. Η προσέγγιση αυτή θα μας επιτρέψει να έχουμε αναλυτική πρόσβαση στην βέλτιστη στρατηγική που θα πρέπει να εφαρμοστεί από την εφοδιαστική αλυσίδα. Επιπλέον θα μας επιτρέψει να λάβουμε υπόψη τον ανταγωνισμό που εμφανίζεται στην πλευρά των πελατών.

Υποθέτουμε ότι ένα προϊόν διατίθεται από m κέντρα διανομής και καταναλώνεται από n πελάτες. Έστω ότι x_{ij} είναι η ποσότητα που ο πελάτης j αγοράζει από το κέντρο διανομής i . Αν r_j είναι η ζήτηση του πελάτη j ($j = 1, \dots, n$) για το προϊόν και q_i η δυναμικότητα του κέντρου διανομής i ($i = 1, \dots, m$), τότε το πρόβλημα μπορεί να διατυπωθεί σαν ένα κλασσικό πρόβλημα μεταφοράς :



Σχήμα 3.1: Μια τριμερής Γραφική Αναπαράσταση της Εξεταζόμενης Εφοδιαστικής Αλυσίδας

$$(\text{TP}) \min \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n t_{ij} x_{ij} \quad (3.1)$$

$$\text{υπό} \quad \sum_{i=1}^m x_{ij} = r_j, \quad \forall j \quad (3.2)$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} \leq q_i, \quad \forall i \quad (3.3)$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad \forall i, \quad \forall j \quad (3.4)$$

Συνήθως υποτίθεται ότι το κόστος που αντιμετωπίζει ο πελάτης j για την αγοράς μιας μονάδας προϊόντος από το κέντρο διανομής i είναι σταθερό και ίσο με t_{ij} , γνωστό και ως κόστος μεταφοράς. Το κόστος αυτό εμπεριέχει και το κόστος παραγωγής ή/και το αποθεματικό κόστος στις εγκαταστάσεις διανομής ή/και στους πελάτες. Συνεπώς αυτό που συχνά αναφέρεται ως κόστος μεταφορά μπορεί ν' αντιπροσωπεύει το συνολικό κόστος που απαιτείται για να ικανοποιηθεί μία μονάδα από την ζήτηση κάποιου πελάτη από το συγκεκριμένο κέντρο διανομής.

Η υπόθεση του σταθερού κόστους είναι υπεραπλουστευτική σε πολλές περιπτώσεις. Όπως για παράδειγμα όταν οι πελάτες είναι αυτοί που ταξιδεύουν για να λάβουν την εξυπηρέτηση που ζητούν. Σε αυτή την περίπτωση η απόφαση τους για το πια εγκατάσταση θα χρησιμοποιήσουν επηρεάζεται όχι μόνο από το κόστος μεταφοράς προς την εγκατάσταση αλλά και από τον χρόνο παραμονής τους στην εγκατάσταση.

Χαρακτηριστικό παράδειγμα τέτοιων περιπτώσεων είναι οι πελάτες των εμπορικών κέντρων, των καταστημάτων cash and carry, των πρατηρίων καυσίμων κτλ. Σε όλες αυτές τις περιπτώσεις το κόστος μεταφοράς μετατίθεται από τα κέντρα διανομής στους πελάτες οι οποίοι επιβαρύνονται και με το επιπλέον κόστος που συνεπάγεται η μη έγκαιρη ικανοποίηση τους.

Σε αυτές τις περιπτώσεις οι πελάτες πρέπει να θεωρηθούν ως ορθολογικοί αποφασίζοντες που επιθυμούν την βελτιστοποίηση της χρησιμότητας τους. Κατά συνέπεια οι αποφάσεις τους επηρεάζονται τόσο από τις δαπάνες μεταφοράς όσο και από τις υπηρεσίες που παρέχονται από τα κέντρα διανομής. Με άλλα λόγια κάθε πελάτης θα επιλέξει να αγοράσει από ένα συγκεκριμένο κέντρο διανομής λαμβάνοντας υπόψη όχι μόνο την τιμή του προϊόντος αλλά και το κόστος μεταφοράς και το αναμενόμενο κόστος παραμονής σε αυτό.

Είναι προφανές ότι ο χρόνος εξυπηρέτησης ενός πελάτη στο σύστημα εξαρτάται όχι μόνο από την απόφαση του για το πια εγκατάσταση θα επιλέξει για να εξυπηρετηθεί αλλά και από την επιλογή των υπολοίπων. Στην πραγματικότητα όσο πιο πολλοί πελάτες επιλέξουν μια συγκεκριμένη εγκατάσταση για την εξυπηρέτηση τους τόσο μεγαλύτερος είναι το κόστος παραμονής για το σύνολο των πελατών στο σύστημα, καθώς εμφανίζεται το φαινόμενο της συμφόρησης.

Υποθέτουμε ότι το μοναδιαίο κόστος μεταφοράς t_{ij} εμπεριέχει όλες της δαπάνες που σχετίζονται με την μετακίνηση του πελάτη j στην την εγκατάσταση i . Οι δαπάνες αυτές μπορεί να περιλαμβάνουν για παράδειγμα το κόστος καυσίμων, την φθορά που υφίστανται τα μέσα μετακίνησης που χρησιμοποιούν κτλ.

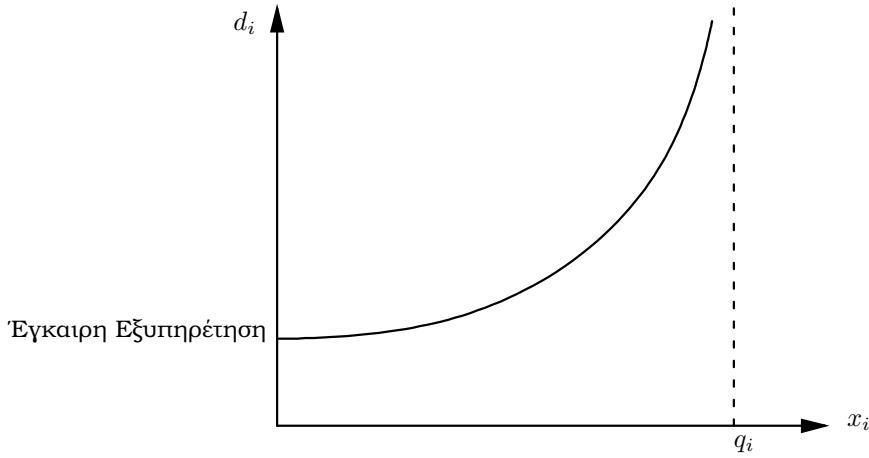
Το συνολικό κόστος που συνεπάγεται η εξυπηρέτηση των πελατών σε ένα κέντρο διανομής θα πρέπει να εμπεριέχει όλα τα στοιχεία ικανοποίησης της ζήτησης των πελατών, από το κόστος που συνεπάγεται η προετοιμασίας της παραγγελίας του πελάτη (π.χ συσκευασία) έως το κόστος που συνεπάγεται η παραμονή του πελάτη στο ταμείο (π.χ έκδοση τιμολογίου/απόδειξης), λίγο πριν αναχωρήσει από το κέντρο διανομής.

Υποθέτοντας ότι οι πελάτες έχουν πλήρη πληροφόρηση για τα τεκτονώμενα κάθε εγκατάσταση και με βάση αυτές τις πληροφορίες αποφασίζει από ποια εγκατάσταση θα ζητήσει την εξυπηρέτηση του, η συνολική ποσότητα που θα διατεθεί από το κέντρο διανομής i θα είναι,

$$x_i = \sum_{j=1}^n x_{ij}. \quad (3.5)$$

Η καθυστέρηση $d_i(x_i)$ που αντιμετωπίζει ο πελάτης j στην εξυπηρέτηση του από το συγκεκριμένο κέντρο διανομής είναι συνάρτηση της συνολικής ποσότητας x_i .

Υπόθεση 3.1 Η συνάρτηση απόδοσης $d_i(x_i)$, μετράει το επίπεδο εξυπηρέτησης που προσφέρεται από το κέντρο διανομής i . Θεωρείται ότι είναι παραγωγόσιμη και αύξουσα συνάρτηση του φόρτου x_i . Η συνάρτηση απόδοσης είναι ασυμπτωτική ενός



Σχήμα 3.2: Η συνάρτηση Απόδοσης

συγκεκριμένου επίπεδου προϊόντος που αντιστοιχεί στην δυναμικότητα της συγκεκριμένης εγκατάστασης. Το επίπεδο εξυπηρέτησης στο κέντρο διανομής i εξαρτάται μόνο από τον φόρτο που αντιμετωπίζει το συγκεκριμένο κέντρο διανομής δηλαδή ισχύει ότι:

$$\frac{\partial d_i(x_i)}{\partial x_k} = 0 \quad \forall i \neq k \quad (3.6)$$

$$\frac{\partial d_i(x_i)}{\partial x_i} > 0 \quad \forall i \quad (3.7)$$

Μια τυπική συνάρτηση απόδοσης απεικονίζεται στο σχήμα (3.2). Όταν το φόρτος της εγκατάστασης i είναι μηδέν μπορεί να θεωρηθεί ότι εξυπηρέτηση γίνεται χωρίς καθυστέρηση αφού δεν υπάρχει καμία αλληλεπίδραση μεταξύ των πελάτες. Η μόνη καθυστέρηση που μπορεί να παρατηρηθεί αφορά την παραλαβή της παραγγελίας και την πιθανότητα αστοχιών στο σύστημα εξυπηρέτησης. Όσο αυξάνει ο αριθμός των πελατών που επισκέπτονται το κέντρο διανομής, η καθυστέρηση στην εξυπηρέτηση αυξάνει, καθώς η απόδοση του συστήματος μειώνεται λόγω της δημιουργίας σειρών αναμονής.

Πολλά ερευνητικά ρεύματα, έχουν χρησιμοποιήσει διαφορετικές συναρτήσεις απόδοσης προκειμένου να ποσοτικοποιήσουν την μέτρηση του επίπεδου υπηρεσιών που παρέχουν.

Έτσι για παράδειγμα ο τομέας των τηλεπικοινωνιών, εξετάζει τον αντίκτυπο που έχει η μη έγκαιρη εξυπηρέτηση των πελατών στο κόστος αναμονής των πελατών με την βοήθεια της θεωρίας σειρών αναμονής [171, 18]

Η θεωρία αναμονής περιγράφει τα αποτελέσματα του ανταγωνισμού των πελατών για την ίδια περιορισμένη υπηρεσία. Αυτό εξηγεί γιατί η θεωρία σειρών αναμονής

έχει γίνει ένα ουσιαστικό εργαλείο για τον σχεδιασμό την ανάπτυξη μηχανισμών διαφοροποίησης ως προς την ποιότητα των υπηρεσιών που παρέχονται. Επομένως, μπορεί να χρησιμοποιηθεί και στην δική μας περίπτωση σαν ένα μέτρο της συνάρτησης απόδοσης.

Έτσι αν υποθέσουμε ότι η άφιξη των πελατών σε ένα κέντρο διανομής i είναι μια διαδικασία Poisson με μέσο ρυθμό άφιξης πελατών,

$$x_i = \sum_{j=1}^n x_{ij} \quad (3.8)$$

Επιπλέον υποτίθεται ότι ο χρόνος εξυπηρέτησης ακολουθεί την εκθετική κατανομή με μέση τιμή $1/\mu_i$ δηλαδή ο ρυθμός που εξυπηρετούνται οι πελάτες ακολουθεί την κατανομή Poisson με μέση τιμή μ_i πελάτες. Μπορεί να θεωρηθεί ότι ο ρυθμός με τον οποίον εξυπηρετούνται οι πελάτες αντικατοπτρίζεται από την δυναμικότητα παραγωγής q_i . Επομένως θα ισχύει ότι

$$\mu_i = q_i \quad (3.9)$$

Μια από τις θεμελιώδεις αρχές για την ύπαρξη ισορροπίας στο δίκτυο είναι η ανεξαρτησία του ρυθμού άφιξης στον κόμβο προορισμού από τον χρόνο εξυπηρέτησης σε αυτόν. Στο πρόβλημα που εξετάζουμε ρυθμός άφιξης σε κάθε τέτοιο κόμβο εξαρτάται από τον χρόνο εξυπηρέτησης του αφού όπως έχει υποθεθεί κάθε πελάτης επιλέγει την εγκατάσταση την οποία θα επισκεφτεί βασιζόμενος στις άποψη που έχει διαμορφώσει για την συσσώρευσης που υπάρχει σε αυτή και κατά συνεπεία του χρόνου εξυπηρέτησης. Για την επίλυση του προβλήματος έχει προταθεί από τον Kleinrock [104] η *προσέγγιση ανεξαρτησίας*. Η προσέγγιση ανεξαρτησίας Kleinrock (Kleinrock independence approximation) είναι βασισμένη στην υπόθεση ότι η συγχώνευση διάφορων σειρών αναμονής Poisson αποκαθιστά την ανεξαρτησία μεταξύ του ρυθμού άφιξης και του χρόνου εξυπηρέτησης. Υποθέτοντας επιπλέον ότι οι πελάτες εξυπηρετούνται με βάση τη σειρά προσέλευσης, μπορούμε να υιοθετήσουμε ένα πρότυπο $M/M/1$ για κάθε σειρά αναμονής που δημιουργείται σε κάθε κέντρο διανομής i χωρίς να λάβουμε υπόψη την αλληλεπίδραση που έχουν μεταξύ τους.

Επομένως για κάθε κέντρο διανομής i καθυστέρησης της εξυπηρέτησης των πελατών (ο μέσος χρόνος παραμονής των πελατών) θα είναι :

$$d_i(x_i) = \frac{1}{q_i - x_i} \quad (3.10)$$

Ένα άλλο παράδειγμα συνάρτησης απόδοσης που χρησιμοποιείται στα προβλήματα κυκλοφορίας και μπορεί να έχει εφαρμογή και στο πρόβλημα του αντιμετωπίζεται εδώ είναι η εξίσωση που προτάθηκε από το γραφείο της Υπηρεσίας Δημοσίων Δρόμων των ΗΠΑ (U.S Bureau of Public Road) [181, 138]. Η εξίσωση αυτή εκφρασμένη σε όρους του προβλήματος μας δίνεται από :

$$d_i(x_i) = a_i \left[1 + b_i \left(\frac{x_i}{q_i} \right)^m \right] \quad (3.11)$$

όπου

- a_i , σταθερά η οποία δίνει το χρόνο εξυπηρέτησης χωρίς την ύπαρξη φόρτου στο κέντρο διανομής.
- b_i , σταθερά.
- m , θετικός ακέραιος μεγαλύτερος ή ίσο της μονάδος.

Οι σταθερές αυτές εκτιμούνται πειραματικά ανάλογα με το πρόβλημα που εξετάζεται.

Επομένως το μοναδιαίο κόστος για την αγορά μιας μονάδας του προϊόντος θα είναι της μορφής

$$c_{ij}(x_i) = \alpha_i p_i + \beta_{ij} t_{ij} + \mu_i d_i(x_i) \quad (3.12)$$

όπου

- p_i , η τιμή ανά μονάδα προϊόντος που επιβάλλεται από την εγκατάσταση i
- t_{ij} , το οριακό κόστος μεταφοράς
- $d_i(x_i)$, το κόστος καθυστέρησης στην εξυπηρέτηση.
- α_i , β_{ij} και μ_i είναι συντελεστές μετατροπής όλων των παραγόντων που διαμορφώνουν το κόστος στην ίδια μονάδα μέτρησης.

3.3 Βέλτιστη Καταχώριση Πελατών από το Σύστημα

Εδώ αντιμετωπίζεται η περίπτωση όπου υπάρχει κάποιος κεντρικός συντονιστής, ο παραγωγός, που αναλαμβάνει να συντονίσει όλες τις δραστηριότητες του συστήματος ανεφοδιασμού και κατά συνέπεια είναι αυτός που κατευθύνει τους πελάτες στα κέντρα στα οποία θα εξυπηρετηθούν. Πρόκειται με άλλα λόγια για μια αλυσίδα που λειτουργεί σε ένα πλήρως κεντρικοποιημένο πλαίσιο συντονισμού (centralized coordination). Είναι επίσης αντιληπτό ότι υπάρχει πλήρη αντιστοιχία ανάμεσα στην κεντρικοποιημένη μορφή συντονισμού και στην δεύτερη συνθήκη Wardrop αφού και οι δύο στηρίζονται στην ίδια υπόθεση. Κατ' επέκταση και σε συνέπεια με την δεύτερη συνθήκη Wardrop το συντονιστής θα προσπαθήσει να καταχωρήσει τους πελάτες έτσι ώστε να ελαχιστοποιείται το ολικό κόστος τους συστήματος. Θα προσπαθήσει δηλαδή να επιλύσει το κάτωθι πρόβλημα :

$$(\text{SO} - \text{TP}) \min \sum_{i=1}^m d_i(x_i) x_i + \sum_{i=1}^m p_i x_i + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n t_{ij} x_{ij} \quad (3.13)$$

$$\text{υπό } \sum_{i=1}^m x_{ij} = r_j, \forall j \quad (3.14)$$

$$x_i \leq q_i, \forall i \quad (3.15)$$

$$x_i - \sum_{j=1}^n x_{ij} = 0, \forall i \quad (3.16)$$

$$x_{ij} \geq 0, \forall i, \forall j \quad (3.17)$$

Η αντικειμενική συνάρτηση του προβλήματος (3.13) ελαχιστοποιεί το ολικό κόστος καθυστέρησης, τις δαπάνες μεταφοράς και αγοράς του προϊόντος των πελατών. Οι περιορισμοί (3.14) εξασφαλίζουν ότι οι ποσότητες που αγοράζει ο πελάτης j από τις εγκαταστάσεις ικανοποιεί την συνολική του ζήτηση. Οι περιορισμοί (3.15) επιβάλλουν την συνολική ποσότητα που διατίθεται από κάθε κέντρο διανομής i να μην υπερβαίνει την δυναμικότητα του κέντρου διανομής. Οι σχέσεις (3.16) αποτελούν τους προσδιοριστικούς περιορισμούς του προτύπου, που διασφαλίζουν την συντήρηση της ροής στο δίκτυο.

Θεώρημα 3.1 Το πρόβλημα **(SO-TP)** που περιγράφεται από τις (3.13-3.17) είναι ένα κυρτό πρόβλημα βελτιστοποίησης.

Απόδειξη: Για να αποδείξουμε ότι το πρόβλημα **(SO-TP)** είναι κυρτό αρκεί να αποδείξουμε ότι η αντικειμενική συνάρτηση (3.13) είναι κυρτή και ότι η εφικτή περιοχή που ορίζεται από τους περιορισμούς (3.14-3.17) είναι επίσης κυρτή.

Οι κυρτότητα της εφικτής περιοχής εξασφαλίζεται από την γραμμικότητα των περιορισμών (3.14-3.17).

Για την κυρτότητα της αντικειμενικής συνάρτησης θα πρέπει να αποδείξουμε ότι η μήτρα των δεύτερων μερικών παραγώγων της αντικειμενικής συνάρτησης ως προς x_i (Hessian Matrix) είναι θετικά ορισμένη (positive definite).

Αφού

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sum_{i=1}^m d_i(x_i)x_i + \sum_{i=1}^m p_i x_i + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n t_{ij}x_{ij} \right) = d_i(x_i) + x_i \frac{\partial d_i(x_i)}{\partial x_i} + p_i, \quad (3.18)$$

συνεπάγεται από την (3.6) και την (3.18) ότι

$$\frac{\partial}{\partial x_i x_k} \left(d_i(x_i) + x_i \frac{\partial d_i(x_i)}{\partial x_i} + p_i \right) = \begin{cases} 2 \frac{\partial d_i(x_i)}{\partial x_i} + x_i \frac{\partial^2 d_i(x_i)}{\partial x_i^2} & \text{εάν } i = k, \forall i, k \\ 0 & \text{διαφορετικά} \end{cases} \quad (3.19)$$

Το αποτέλεσμα αυτό καταδεικνύει ότι η μήτρα των δεύτερων μερικών παραγώγων είναι διαγώνια μήτρα τα στοιχεία της οποίας δίνονται από την (3.19). Επομένως η

μήτρα των δευτέρων μερικών παραγώγων της αντικειμενικής συνάρτησης θα είναι,

$$\begin{bmatrix} 2\frac{\partial d_1(x_1)}{\partial x_1} + x_1 \frac{\partial^2 d_1(x_1)}{\partial x_1^2} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 2\frac{\partial d_2(x_2)}{\partial x_2} + x_2 \frac{\partial^2 d_2(x_2)}{\partial x_2^2} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \ddots & \\ \vdots & \vdots & & 2\frac{\partial d_m(x_m)}{\partial x_m} + x_m \frac{\partial^2 d_m(x_m)}{\partial x_m^2} \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

Όλα τα διαγώνια στοιχεία της (3.20) είναι θετικά αφού,

1. $\frac{\partial d_i(x_i)}{\partial x_i} > 0$ όπως προκύπτει από τις (3.6-3.7)
2. $\frac{\partial^2 d_i(x_i)}{\partial x_i^2} > 0$ όπως εξασφαλίζει η Υπόθεση 3.1.

Επομένως η μήτρα είναι θετικά ορισμένη. Άρα η αντικειμενικής συνάρτησης (3.13) είναι κυρτή. Οι περιορισμοί (3.14-3.17) είναι γραμμικοί και επομένως το πρόβλημα **(SO-TP)** (3.13-3.17) είναι ένα κυρτό πρόβλημα βελτιστοποίησης. \square

Λεδομένου ότι

1. $\frac{\partial}{\partial x_{ij}} \left(\sum_{i=1}^m d_i(x_i)x_i \right) = \frac{\partial}{\partial x_{ij}} d_i(x_i)x_i = \left(\frac{\partial}{\partial x_i} d_i(x_i)x_i \right) \frac{\partial x_i}{\partial x_{ij}} = d_i(x_i) + x_i \frac{\partial d_i(x_i)}{\partial x_i}.$
2. $\frac{\partial}{\partial x_{ij}} \left(\sum_{i=1}^m p_i x_i \right) = \frac{\partial}{\partial x_{ij}} (p_i x_i) = \left(\frac{\partial}{\partial x_i} p_i x_i \right) \frac{\partial x_i}{\partial x_{ij}} = p_i.$
3. $\frac{\partial}{\partial x_{ij}} \left(\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n t_{ij} x_{ij} \right) = t_{ij}.$

το μοναδιαίο ολικό κόστος του πελάτη j στην εγκατάσταση i θα είναι,

$$\tilde{c}_{ij}(x_i) = d_i(x_i) + x_i \frac{\partial d_i(x_i)}{\partial x_i} + p_i + t_{ij} \quad (3.21)$$

Με άλλα λόγια το μοναδιαίο ολικό που αντιμετωπίζει ο πελάτης j στην εγκατάσταση i λαμβάνει υπόψη την οριακή συμβολή που επιφέρει η εκχώρηση του πελάτη j στην εγκατάσταση i στον ολικό κόστος εξυπηρέτησης $d_i(x_i) + x_i \frac{\partial d_i(x_i)}{\partial x_i}$ που παρατηρείται στην εγκατάσταση αυτή. Αποτελείται από το άθροισμα δύο επιμέρους όρων: το $d_i(x_i)$ που είναι η καθυστέρηση που αντιμετωπίζει ο πελάτης j όταν η συνολική ποσότητα που διατίθεται από την εγκατάσταση i είναι x_i και $\partial d_i(x_i)/\partial x_i$ είναι η

επιπλέον καθυστέρηση που ο συγκεκριμένος πελάτης επιφέρει σε κάθε έναν από τους πελάτες που έχουν ήδη εκχωρηθεί στην εγκατάσταση i .

Ο συντονιστής του συστήματος προκειμένου να βελτιστοποιήσει το όφελος του συστήματος, να ελαχιστοποιήσει δηλαδή το «μέσο» κόστος για όλους τους χρήστες θα καταχωρήσει τον πελάτη j στην εγκατάσταση i μόνο εάν το μοναδιαίο ολικό κόστος $\tilde{c}_{ij}(x_i)$ που αντιμετωπίζει στην συγκεκριμένη εγκατάσταση είναι ίσο με το ελάχιστο οριακό κόστος. Δηλαδή για να υπάρξει οποιαδήποτε συναλλαγή ανάμεσα στο πελάτη j και την εγκατάσταση i θα πρέπει να ισχύει ότι:

$$x_{ij} > 0 \Rightarrow d_i(x_i) + x_i \frac{\partial d_i(x_i)}{\partial x_i} + p_i + t_{ij} = \tilde{c}_{ij} \quad \forall i, j \quad (3.22)$$

$$x_{ij} = 0 \Rightarrow d_i(x_i) + x_i \frac{\partial d_i(x_i)}{\partial x_i} + p_i + t_{ij} \geq \tilde{c}_{ij} \quad \forall i, j \quad (3.23)$$

Εισάγοντας της συνθήκες εφικτότητας που επιβάλλονται από την ζήτηση των πελατών και την δυναμικότητα των κέντρων παραγωγής το πρόβλημα μπορεί να διατυπωθεί από τις κάτωθι σχέσεις που είναι ένα πρόβλημα μη-γραμμικής συμπληρωματικότητας (Nonlinear Complementarity Problem).

$$\left[d_i(x_i) + x_i \frac{\partial d_i(x_i)}{\partial x_i} + p_i + t_{ij} - \tilde{c}_{ij} \right] x_{ij} = 0, \quad \forall i, \forall j \quad (3.24)$$

$$d_i(x_i) + x_i \frac{\partial d_i(x_i)}{\partial x_i} + p_i + t_{ij} - \tilde{c}_{ij} \geq 0, \quad \forall i, \forall j \quad (3.25)$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = x_i \leq q_i, \quad \forall i \quad (3.26)$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = r_j, \quad \forall j \quad (3.27)$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad \forall i, \forall j \quad (3.28)$$

Θα δείξουμε ότι οι συνθήκες (3.24-3.28) ταυτίζονται με τις συνθήκες βελτιστότητας Karush-Kuhn-Tucker του προβλήματος **(SO-TP)**.

Θεώρημα 3.2 Οι συνθήκες βελτιστότητας Karush-Kuhn-Tucker του προβλήματος (3.13-3.17) είναι ικανές και αναγκαίες συνθήκες για να έχει το πρόβλημα (3.13-3.17) ελάχιστο [12] εάν $\tilde{c}_{ij} = w_j - \pi_i$.

Απόδειξη: Εισάγοντας τους πολλαπλασιαστές Lagrange $\pi_i \geq 0$, για τους περιορισμούς (3.15) και $w_j \leq 0$ για τους περιορισμούς (3.14), οι KKT συνθήκες είναι:

1. Συνθήκες δυϊκότητας

$$d_i(x_i) + x_i \frac{\partial d_i(x_i)}{\partial x_i} + p_i + t_{ij} + \pi_i - w_j \geq 0, \quad \forall i, j \quad (3.29)$$

$$\pi_i \geq 0, \quad \forall i \quad (3.30)$$

$$w_j \leq 0, \quad \forall j \quad (3.31)$$

2. Συνθήκες Συμπληρωματικότητας

$$\left[d_i(x_i) + x_i \frac{\partial d_i(x_i)}{\partial x_i} + p_i + t_{ij} + \pi_i - w_j \right] x_{ij} = 0, \quad \forall i, \forall j \quad (3.32)$$

$$[q_i - x_i] \pi_i = 0, \quad \forall i \quad (3.33)$$

3. Πρωτεύουσες Συνθήκες (Περιορισμοί Μεταφοράς)

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = r_j, \quad x_i \leq q_i, \quad (3.34)$$

$$x_i - \sum_{j=1}^n x_{ij} = 0, \quad \forall i, \forall j \quad (3.35)$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad \forall i, \forall j \quad (3.36)$$

Οι πολλαπλασιαστές w_j εκφράζουν το κόστος που είναι διατεθειμένος να επωμιστεί ο πελάτης j προκειμένου να αυξήσει την ζήτηση του κατά μια μονάδα. Ενώ οι πολλαπλασιαστές π_i , το ποσό που είναι διατεθειμένη να καταβάλλει η εγκατάσταση i για να αυξήσει την δυναμικότητα της κατά μία μονάδα. Επομένως η διαφορά $w_j - \pi_i$ είναι το κέρδος ή η ζημία που θα έχει το κέντρο διανομής i εάν αυξήσει την δυναμικότητα του κατά μία μονάδα. Εξυπακούεται ότι μια εγκατάσταση θα έχει κίνητρο να αυξήσει την δυναμικότητα της εάν και μόνο εάν $w_j - \pi_i \geq 0$ έχει δηλαδή κέρδος.

Οι πολλαπλασιαστές π_i μπορούν επίσης να έχει και μια πιο ενδιαφέρουσα οικονομική ερμηνεία, μπορεί να θεωρηθεί ότι εκφράζουν το χρόνο εξυπηρέτησης που «κερδίζει» ο πελάτης μιας εγκατάστασης που λειτουργεί στα όρια της δυναμικότητας της έναντι μιας λιγότερο κορεσμένης, καθώς η πρώτη είναι αυτή που ενδεχομένως να έχει συμφέρον να αυξήσει την δυναμικότητα της και κατά συνέπεια το ρυθμό με τον οποίο εξυπηρετεί τους πελάτες. Η ερμηνεία αυτή συνεπάγεται από τις συνθήκες (3.30) και (3.33). Επομένως οι διαφορά $w_j - \pi_i = \tilde{c}_{ij}$ εκφράζει επίσης το ελάχιστο οριακό κόστος που αντιμετωπίζει ο πελάτης j στην εγκατάσταση i . \square

Οι συνθήκες (3.29) και (3.32) εξασφαλίζουν επομένως ότι στο βέλτιστο, ο πελάτης j θα καταχωρηθεί από το σύστημα στην εγκατάσταση i μόνο εάν το μοναδιαίο ολικό κόστος $\tilde{c}_{ij}(x_i)$ που αντιμετωπίζει στην συγκεκριμένη εγκατάσταση είναι ίσο με το ελάχιστο οριακό κόστος. Επιπλέον στο βέλτιστο το ελάχιστο οριακό κόστος του πελάτη ισούται με το μοναδιαίο κέρδος της εγκατάστασης.

Οι βέλτιστες ποσότητες x_{ij} που προκύπτουν από το πρόβλημα δεν αντιπροσωπεύουν γενικά μια κατάσταση ισορροπίας δηλαδή μπορεί να μην ελαχιστοποιούν το κόστος που αντιμετωπίζει κάθε μεμονωμένος πελάτης. Με άλλα λόγια οι πελάτες μπορούν να μειώσουν το κόστος που αντιμετωπίζουν αν μονομερώς αλλάξουν το κέντρο διανομής από το οποίο εξυπηρετούνται. Η επιθυμητή κατάσταση ισορροπίας μπορεί να προκύψει μόνο μετά από διαπραγματεύσεις και κοινή συμφωνία ανάμεσα στον υπεύθυνο της εφοδιαστικής αλυσίδας και το σύνολο των πελατών.

Η σημαντικότητα του προβλήματος (3.13-3.17) έγκυται στο ότι μπορεί να χρησιμοποιηθεί σαν κριτήριο για την αξιολόγηση των επιπτώσεων που έχουν στο για συνολικό όφελος του συστήματος διαφορετικά σημεία ισορροπίας του.

Μοναδικότητα της Λύσης

Θεώρημα 3.3 Το πρόβλημα (SO-TP) (3.13-3.17) έχει μοναδική λύση.

Απόδειξη: Η μοναδικότητα της λύσης προκύπτει από την κυρτότητα του προβλήματος που αποδείχτηκε στο Θεώρημα 3.1.

3.4 Ανταγωνιστική Κατανομή Πελατών

Σε αυτή την ενότητα θα εξετάσουμε την περίπτωση όπου οι πελάτες αποφασίζουν ατομικά το κέντρο διανομής από το οποίο θα εξυπηρετηθούν. Η περίπτωση αυτή αντιστοιχεί επομένως σε μια εφοδιαστική αλυσίδα η οποία λειτουργεί μέσα σε ένα πλήρως ανταγωνιστικό πλαίσιο όπου κάθε μέλος της προσπαθεί να μεγιστοποιήσει το προσωπικό του όφελος. Πρόκειται επίσης για μια εφοδιαστική αλυσίδα που λειτουργεί σύμφωνα με την υπόθεση που διέπει την πρώτη αρχή Wardrop η οποία εξασφαλίζει την ισορροπία σε ένα δίκτυο μεταφορών.

Σε αυτή την περίπτωση κάθε πελάτης θα προσπαθήσει να επιλέξει για εξυπηρέτηση εκείνο το κέντρο διανομής που θεωρεί το πιο συμφέρων για τον ίδιο. Η επιλογή αυτή θα γίνει σε ανταγωνισμό με τους άλλους πελάτες. Για την προτυποποίηση αυτής της περίπτωσης υποθέτουμε ότι \hat{c}_{ij} είναι το μέγιστο κόστος το οποίο ο πελάτης j είναι διατεθειμένος να καταβάλλει για την απόκτηση μιας μονάδας προϊόντος. Τότε για κάθε πελάτη j και για κάθε κέντρο διανομής i θα ισχύουν οι κάτωθι σχέσεις:

$$x_{ij} > 0 \Rightarrow d_i(x_i) + p_i + t_{ij} = \hat{c}_{ij} \quad \forall i, j \quad (3.37)$$

$$x_{ij} = 0 \Rightarrow d_i(x_i) + p_i + t_{ij} \geq \hat{c}_{ij} \quad \forall i, j \quad (3.38)$$

Δηλαδή κάθε πελάτης j επιλέγει να εξυπηρετηθεί από το κέντρο διανομής i αν το μοναδιαίο κόστος $c_{ij}(x_i)$ που αντιμετωπίζει στη συγκεκριμένη εγκατάσταση ισούται με το κόστος \hat{c}_{ij} που είναι διατεθειμένος να πληρώσει. Επιπλέον το οριακό κόστος των κέντρων διανομής που θα επιλεγούν από τον πελάτη j για την εξυπηρέτηση του θα ισούται με το κόστος που αυτός είναι διατεθειμένος να πληρώσει και κατά συνέπεια ίσα μεταξύ τους. Από την δεύτερη ισότητα συνεπάγεται επίσης το οριακό κόστος των μη επιλεγμένων κέντρων διανομής θα είναι μεγαλύτερο από αυτό που είναι διατεθειμένος να καταβάλλει ο πελάτης j .

Εισάγοντας τις συνθήκες εφικτότητας που επιβάλλονται από την ζήτηση των πελατών και την δυναμικότητα των κέντρων παραγωγής το πρόβλημα μπορεί να διατυπωθεί από τις κάτωθι σχέσεις που είναι ένα πρόβλημα μη-γραμμικής συμπληρωματικότητας (Nonlinear Complementarity Problem).

$$[d_i(x_i) + p_i + t_{ij} - \hat{c}_{ij}] x_{ij} = 0, \quad \forall i, \forall j \quad (3.39)$$

$$d_i(x_i) + p_i + t_{ij} - \hat{c}_{ij} \geq 0, \quad \forall i, \forall j \quad (3.40)$$

$$x_i \leq q_i, \quad \forall i \quad (3.41)$$

$$x_i - \sum_{j=1}^n x_{ij} = 0, \quad \forall i \quad (3.42)$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = r_j, \quad \forall j \quad (3.43)$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad \forall i, \forall j \quad (3.44)$$

Στην συνέχεια θα δείξουμε ότι οι συνθήκες (3.67-3.73), αντιστοιχούν στις συνθήκες βελτιστότητας Karush-Kuhn-Tucker ενός κυρτού προβλήματος που αντικειμενικό στόχο έχει την ικανοποίηση της ζήτησης των πελατών ελαχιστοποιώντας μια κυρτή συνάρτηση.

Θεώρημα 3.4 Έστω, το κυρτό πρόβλημα βελτιστοποίησης:

$$(\text{UO} - \text{TP}) \min \sum_{i=1}^m \int_0^{x_i} d_i(t) dt + \sum_{i=1}^m p_i x_i + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n t_{ij} x_{ij} \quad (3.45)$$

$$\text{υπό} \quad \sum_{i=1}^m x_{ij} = r_j, \quad \forall j \quad (3.46)$$

$$x_i \leq q_i, \quad \forall i \quad (3.47)$$

$$x_i - \sum_{j=1}^n x_{ij} = 0, \quad \forall i \quad (3.48)$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad \forall i, \forall j \quad (3.49)$$

τότε

$$\hat{c}_{ij} = w_j - \pi_i \quad \forall i, j$$

και οι (3.39-3.44) είναι οι συνθήκες βελτιστότητας Karush-Kuhn-Tucker του προβλήματος (UO-TP).

Απόδειξη: Εισάγοντας του πολλαπλασιαστές Lagrange $\pi_i \geq 0$, για τους περιορισμούς (3.47) και $w_j \leq 0$ για τους περιορισμούς (3.46) και αφού

$$\frac{\partial}{\partial x_{ij}} \left(\sum_{i=1}^m \int_0^{x_i} d_i(t) dt \right) = \frac{\partial}{\partial x_{ij}} \int_0^{x_i} d_i(t) dt = \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \int_0^{x_i} d_i(t) dt \right) \frac{\partial x_i}{\partial x_{ij}} = d_i(x_i),$$

οι ΚΚΤ συνθήκες είναι :

1. Συνθήκες δυϊκότητας

$$d_i(x_i) + p_i + t_{ij} + \pi_i - w_j \geq 0, \forall i, j \quad (3.50)$$

$$\pi_i \geq 0, \forall i \quad (3.51)$$

$$w_j \leq 0, \forall j \quad (3.52)$$

2. Συνθήκες Συμπληρωματικότητας

$$[d_i(x_i) + p_i + t_{ij} + \pi_i - w_j] x_{ij} = 0, \forall i, \forall j \quad (3.53)$$

$$[q_i - x_i] \pi_i = 0, \forall i \quad (3.54)$$

3. Πρωτεύουσες Συνθήκες (Περιορισμοί Μεταφοράς)

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = r_j, \quad x_i \leq q_i, \quad (3.55)$$

$$x_i - \sum_{j=1}^n x_{ij} = 0, \forall i, \forall j \quad (3.56)$$

$$x_{ij} \geq 0 \forall i, \forall j \quad (3.57)$$

Από τις σχέσεις (3.50) συνεπάγεται ότι $d_i(x_i) + p_i + t_{ij} = w_j - \pi_i$. Επιπλέον εάν $x_{ij} > 0$ από τις (3.53) προκύπτει ότι $d_i(x_i) + p_i + t_{ij} = w_j - \pi_i$. Κατά συνέπεια

$$w_j - \pi_i = \hat{c}_{ij}$$

□

Όπως και στην περίπτωση της βέλτιστης καταχώρισης πελατών, η διαφορά $w_j - \pi_i$ είναι το κέρδος ή η ζημία που θα έχει το κέντρο διανομής i εάν αυξήσει την δυναμικότητα της κατά μία μονάδα ή το **ελάχιστο οριακό κόστος** που αντιμετωπίζει ο πελάτης j στην εγκατάσταση i .

Οι συνθήκες (3.50) και (3.53) συνεπάγονται δυο διαφορετικά σενάρια συναλλαγής ανάμεσα σε κάθε πελάτη j και κέντρο διανομής i . Η ποσότητα x_{ij} μπορεί να είναι (α) είτε μηδέν (και άρα ισχύει η (3.50)), σε αυτή την περίπτωση το οριακό κόστος του πελάτη j στο κέντρο διανομής i θα είναι μεγαλύτερο από το ελάχιστο κόστος που θα μπορούσε να αντιμετωπίσει και που είναι διατεθειμένος να καταβάλλει, όπως απαιτεί η συνθήκη (3.53) (β) είτε μεγαλύτερη του μηδενός, σε αυτή την περίπτωση το οριακό κόστος του πελάτη j στο κέντρο διανομής i θα είναι ίσο με το ελάχιστο κόστος που θα μπορούσε να αντιμετωπίσει και που είναι διατεθειμένος να καταβάλλει και οι (3.50) και (3.53) ισχύουν σαν ισότητες. Επομένως εάν η κατανομή της x_{ij} ικανοποιεί τις δύο αυτές συνθήκες, κανένας πελάτης δεν μπορεί να βελτιώσει την θέση του αλλάζοντας μονομερώς το σενάριο με βάση το οποίο συναλλάσσεται με τα m κέντρα

διανομής. Γίνεται επομένως αντιληπτό ότι οι συνθήκες (3.50-3.57) ορίζουν την συνθήκη ισορροπίας των πελατών όταν αυτοί ανταγωνίζονται για την απόκτηση του ίδιου προϊόντος το οποίο είναι διαθέσιμο σε περιορισμένη ποσότητα. Στο σημείο ισορροπίας κάθε πελάτης ικανοποιεί την ζήτηση του για το προϊόν με το ελάχιστο δυνατό για αυτόν κόστος.

Μοναδικότητα της Λύσης

Θεώρημα 3.5 Το πρόβλημα (UO-TP) (3.45-3.49) έχει μοναδική λύση.

Απόδειξη: Για να αποδείξουμε ότι το πρόβλημα (UO-TP) έχει μόνο μία λύση αρκεί να αποδείξουμε ότι η αντικειμενική συνάρτηση (3.45) είναι αυστηρώς κυρτή (strict convex) και ότι η εφικτή περιοχή που ορίζεται από τους περιορισμούς (3.46-3.49) είναι επίσης κυρτή.

Οι κυρτότητα της εφικτής περιοχής εξασφαλίζεται από την γραμμικότητα των περιορισμών (3.46-3.49).

Για την κυρτότητα της αντικειμενικής συνάρτησης θα πρέπει να αποδείξουμε ότι η μήτρα των δευτέρων μερικών παραγώγων της αντικειμενικής συνάρτησης ως προς x_i (Hessian Matrix) είναι θετικά ορισμένη (positive definite) εξασφαλίζοντας έτσι την κυρτότητα της.

Δεδομένης της γραμμικότητας του δεύτερου και τρίτου όρου της (3.45) και αφού $\frac{\partial}{\partial x_i} \int_0^{x_i} d_i(t) dt = d_i(x_i)$ συνεπάγεται ότι

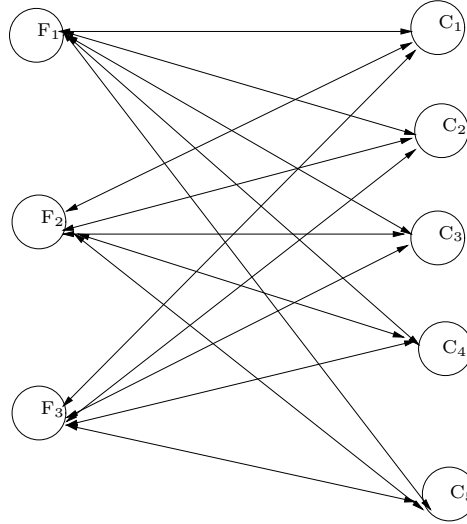
$$\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k} \left(\sum_{i=1}^m \int_0^{x_i} d_i(t) dt + \sum_{i=1}^m p_i x_i + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n t_{ij} x_{ij} \right) = \frac{\partial d_i(x_i)}{\partial x_k} \quad (3.58)$$

και από την (3.6) προκύπτει ότι,

$$\frac{\partial d_i(x_i)}{\partial x_k} = \begin{cases} \frac{\partial d_k(x_k)}{\partial x_k} & \text{εάν } i = k \\ 0 & \text{διαφορετικά} \end{cases} \quad (3.59)$$

Επομένως η μήτρα των δευτέρων μερικών παραγώγων της αντικειμενικής συνάρτησης θα είναι

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial d_1(x_1)}{\partial x_1} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \frac{\partial d_2(x_2)}{\partial x_2} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \ddots & \\ \vdots & \vdots & & \frac{\partial d_m(x_m)}{\partial x_m} \end{bmatrix} \quad (3.60)$$



Σχήμα 3.3: Παράδειγμα Εφοδιαστικής Αλυσίδας

Η μήτρα είναι ορισμένη θετικά αφού όλα τα στοιχεία της διαγωνίου είναι θετικά, όπως προκύπτει από την (3.7). Επομένως, η (3.45) είναι αυστηρώς κυρτή και αφού και η εφικτή περιοχή είναι επίσης κυρτή το πρόβλημα (3.45-3.49) έχει μοναδικό ελάχιστο. \square

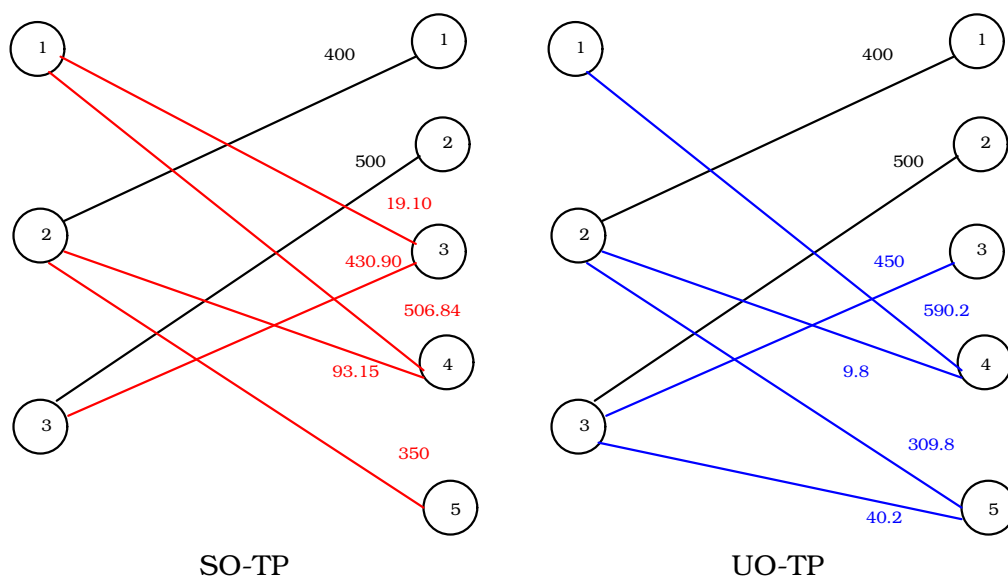
Πόρισμα 3.1 Το σημείο ισορροπίας είναι καλώς ορισμένο.

3.5 Βέλτιστο Συστήματος έναντι Ατομικού βέλτιστου : Τα αποτελέσματα

Σε αυτή την ενότητα θα εξετάσουμε τις διαφορές που συνεπάγονται οι δύο διαφορετικές μορφές συντονισμού στον τρόπο με τον οι πελάτες εξυπηρετούνται από τα κέντρα διανομής. Στην συνέχεια θα εξετάσουμε την επίδραση που αυτές έχουν στο όφελος των πελατών. Με αυτό τον τρόπο θα είμαστε σε θέση να εξάγουμε χρήσιμα συμπεράσματα για τις επιπτώσεις που έχουν οι δύο διαφορετικές μορφές διαχείρισης της εφοδιαστικής στην ικανοποίηση του πελάτη.

Για το σκοπό αυτό θα ασχοληθούμε με την περίπτωση όπου η υπο εξέταση εφοδιαστική αλυσίδα αποτελείται από 3 κέντρα διανομής και τροφοδοτεί 5 πελάτες όπως αυτή που απεικονίζεται στο Σχήμα 3.3.

Η συνάρτηση απόδοσης δίνεται από την (3.10). Το μοναδιαίο ολικό κόστος $\tilde{c}_{ij}(x_i)$ υπολογίζεται από την σχέση (3.21) και το μοναδιαίο κόστος στην περίπτωση ανταγωνιστικής κατανομής των πελατών από την σχέση (3.12). Οι παράμετροι που χρησιμοποιούνται εμφανίζονται στον Πίνακα 3.1.



Σχήμα 3.4: Βέλτιστη Κατανομή της ζήτησης Πελατών

Τα προβλήματα **(SO-TP)** και **(UO-TP)** διαμορφώθηκαν σύμφωνα με την γλώσσα προτυποποίησης προβλημάτων βελτιστοποίησης **AMPL** και για την επίλυσή τους χρησιμοποιήθηκε ο επιλυτής **MINOS 5.5**. Το σχήμα (3.4) απεικονίζει την ροή των πελατών στα κέντρα διανομής όπως προκύπτει ύστερα από την επίλυση των δύο προβλημάτων.

Όπως φαίνεται και από το σχήμα όταν η ανάθεση των πελατών στα κέντρα διανομής γίνεται από το σύστημα (δηλαδή επιλύεται το πρόβλημα **(SO-TP)**),

- Ο C_1 θα κατευθυνθεί στο κέντρο διανομής F_2 από όπου ικανοποιεί το σύνολο της ζητούμενης ποσότητας του (400 μονάδες) με ολικό κόστος ανά μονάδα 38.28.
- Ο C_2 θα κατευθυνθεί στο κέντρο διανομής F_3 από όπου ικανοποιεί το σύνολο

	t_{ij}					p_i	q_i
	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5		
F_1	22	20	23	24	28	15	600
F_2	19	25	30	26	17	16	1200
F_3	27	15	21	29	16	14	1000
r_j							
	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5		
	400	500	450	600	350		

Πίνακας 3.1: Πίνακας Παραμέτρων Παραδείγματος με Σταθερή Ζήτηση

της ζητούμενης ποσότητας του (500 μονάδες) με ολικό κόστος ανά μονάδα 35.28.

- Ο C_3 θα κατευθυνθεί στο κέντρο διανομής F_1 από όπου αγοράζει 19.1 μονάδες (από το σύνολο των 450) ενώ για την αγορά των υπόλοιπων 430.9 στο κέντρων διανομής F_3 αντιμετωπίζοντας ολικό μοναδιαίο κόστος 38.28 και 41.28 αντίστοιχα.
- Ο C_4 θα κατευθυνθεί στο κέντρο διανομής F_1 από όπου αγοράζει 506.84 μονάδες (από το σύνολο των 600) ενώ για την αγορά των υπόλοιπων 93.15 στο κέντρων διανομής F_2 αντιμετωπίζοντας ολικό μοναδιαίο κόστος 39.28 και 45.28 αντίστοιχα.
- Ο C_5 θα κατευθυνθεί στο κέντρο διανομής F_2 από όπου ικανοποιεί το σύνολο της ζητούμενης ποσότητας του (350 μονάδες) με ολικό κόστος ανά μονάδα 36.28.

Στον Πίνακα 3.2 παρουσιάζεται τόσο η ροή των πελατών σε κάθε κέντρο διανομής όσο και οι μοναδιαίες δαπάνες που αντιμετωπίζει σε κάθε περίπτωση. Παρατηρούμαι ότι η ανάθεση, για παράδειγμα, του C_3 στα κέντρα διανομής F_1 και F_3 συνεπάγεται δύο διαφορετικά μοναδιαία κόστη 38.38 και 41.28 αντίστοιχα. Όμως αφού ο C_3 είναι ορθολογικά σκεπτόμενος επιθυμεί και τελικά μεταθέτει την ικανοποίηση της ζήτησης των 430.9 μονάδων από το κέντρο διανομής F_3 στο F_1 όπου το μοναδιαίο κόστος είναι μικρότερο. Για τον ίδιο λόγο, ο C_4 επιθυμεί την μετάθεση των 93.15 μονάδων από το F_2 στο F_1 και ο C_5 το σύνολο της ζητούμενης ποσότητας του. Η μετάθεση όμως αυτή από το ένα κέντρο διανομής στο άλλο θα μεταβάλλει και τον αντίστοιχο χρόνο εξυπηρέτησης του κέντρου και κατά συνέπεια το κόστος που αυτός συνεπάγεται. Στην περίπτωση ορθολογικών πελατών που επωμίζονται το κόστος μεταφοράς-αναμονής παρατηρείται ότι δηλαδή ανισότητα στην λύση που προτείνεται από το σύστημα. Οι τάσεις «φυγής» θα ισορροποήσουν μόνον εάν η λύση επιβληθεί από τους ίδιους τους πελάτες.

Το αποτέλεσμα αυτής της ανταγωνιστικής διαδικασίας είναι η κατανομή των πελατών που παρουσιάζεται στην τελευταία στήλη του πίνακα. Έτσι,

- Ο C_1 θα απευθυνθεί στο κέντρο διανομής F_2 από όπου ικανοποιεί το σύνολο της ζητούμενης ποσότητας του (400 μονάδες) με μοναδιαίο κόστος 35.06
- Ο C_2 θα απευθυνθεί στο κέντρο διανομής F_3 από όπου ικανοποιεί το σύνολο της ζητούμενης ποσότητας του (500 μονάδες) με κόστος ανά μονάδα 32.06.
- Ο C_3 θα απευθυνθεί στο κέντρο διανομής F_3 από όπου αγοράζει τώρα το σύνολο της ζητούμενης ποσότητας (450 έναντι 430.9 μονάδες στην περίπτωση του **(SO-TP)**) με μοναδιαίο κόστος 38.06.

	SO-TP		UO-TP	
	Μοναδιαίο Κόστος	Ποσότητα	Μοναδιαίο Κόστος	Ποσότητα
C_{11}	37.28	0	40.00	0
C_{21}	38.28	400	35.06	400
C_{31}	47.29	0	44.06	0
C_{12}	35.28	0	38.00	0
C_{22}	44.28	0	41.06	0
C_{32}	35.28	500	32.06	500
C_{13}	38.28	19.1	41.00	0
C_{23}	49.28	0	46.06	0
C_{33}	41.28	430.9	38.06	450
C_{14}	39.28	506.84	42.00	590.2
C_{24}	45.28	93.15	42.00	9.8
C_{34}	49.28	0	46.06	0
C_{15}	43.28	0	46.00	0
C_{25}	36.28	350	33.06	309.8
C_{35}	30.29	0	33.06	40.2

Πίνακας 3.2: Αποτελέσματα της Επίλυσης των Προβλημάτων (SO-TP) και (UO-TP)

- Ο C_4 θα απευθυνθεί στο κέντρο διανομής F_1 από όπου αγοράζει 590.2 μονάδες (έναντι 506.84) ενώ για την αγορά των υπόλοιπων 9.8 στο κέντρο διανομής F_2 αντιμετωπίζοντας μοναδιαίο κόστος 42 σε κάθε περίπτωση.
- Ο C_5 θα κατευθυνθεί στο κέντρο διανομής F_2 από όπου αγοράζει 309.8 μονάδες (έναντι 350) ενώ για την αγορά των υπόλοιπων 40.2 στο κέντρο διανομής F_3 αντιμετωπίζοντας μοναδιαίο κόστος 33.06 σε κάθε περίπτωση.

Παρατηρούμαι ότι αυτή είναι η πιο συμφέρουσα κατανομή για κάθε πελάτη αφού καθένας αντιμετωπίζει το ελάχιστο δυνατό κόστος. Συνεπώς, κανένας δεν μπορεί να βελτιώσει το μοναδιαίο κόστος αγοράς του προϊόντος αλλάζοντας την στρατηγική αγοράς του μονομερώς. Η «λύση» αυτή προέρχεται πράγματι από την επίλυση του **(UO-TP)**.

3.6 Ανταγωνιστική Κατανομή Πελατών με Ελαστική Ζήτηση

Η διατύπωση του προβλήματος της ανταγωνιστικής κατανομής των πελατών της Ενότητας 3.4 υποθέτει ότι η ζήτηση r_j του πελάτη j είναι γνωστή και προκαθορισμένη, και ότι πελάτης αποφασίζει την κατανομή της βασιζόμενος στις συνθήκες που περιγράφονται εκεί. Στην πραγματικότητα, εντούτοις, η ζήτηση μπορεί να επηρεαστεί από το κόστος που απαιτείται για την αγορά του προϊόντος. Σε αυτή την

ενότητα επεκτείνουμε την ανάλυση στην περίπτωση όπου η ζήτηση του πελάτη j δεν είναι δεδομένη αλλά εξαρτάται από το μέγιστο κόστος \bar{c}_j που είναι διατεθειμένος να πληρώσει για να αποκτήσει r_j μονάδες του προϊόντος. Δηλαδή ισχύει ότι η ζήτηση είναι συνάρτηση του \bar{c}_j :

$$r_j = g_j(\bar{c}_j). \quad (3.61)$$

Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση ζήτηση $g_j(\bar{c}_j)$ είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα και συνεπώς αντιστρέψιμη με αντίστροφη συνάρτηση ζήτησης,

$$\bar{c}_j = g_j^{-1}(r_j). \quad (3.62)$$

Το πρόβλημα που εξετάζεται σε αυτή την ενότητα έχει ως στόχο την εύρεση του τρόπου με τον οποίο οι n πελάτες κατανέμουν την ζήτηση τους στις m εγκαταστάσεις λαμβάνοντας υπόψη το μέγιστο ατομικό κόστος που είναι διατεθειμένοι να καταβάλουν για την ικανοποίηση της. Σε αυτή την περίπτωση ο πελάτης j , θα αποφασίσει την αγορά r_j μονάδων όταν το κόστος που απαιτείται για την απόκτηση τους ισούται με την άποψη του έχει διαμορφώσει ο πελάτης θα πρέπει να κοστίζουν (\bar{c}_j). Στην συνέχεια, όντας ορθολογικά σκεπτόμενος, θα επιλέξει να ικανοποιήσει την ζήτηση του από εκείνες τις εγκαταστάσεις στις οποίες βελτιστοποιεί την χρησιμότητα του. Με άλλα λόγια θα επιλέξει να εξυπηρετηθεί από τα κέντρα διανομής στα οποία το μοναδιαίο κόστος που αντιμετωπίζει ισούται με το μέγιστο κόστος που είναι διατεθειμένος να πληρώσει σε αυτά. Έπεται ότι το οριακό κόστος που αντιμετωπίζει στα επιλεγμένα κέντρα διανομής είναι ίσα μεταξύ τους και ότι το μοναδιαίο κόστος στα κέντρα διανομής που δεν έχουν επιλεγεί είναι υψηλότερο από το μέγιστο που είναι διατεθειμένος να καταβάλλει. Θα πρέπει να τονιστεί ότι το μέγιστο κόστος \bar{c}_j είναι αυτό που δημιουργεί την ζήτηση r_j μονάδων και το μέγιστο κόστος \hat{c}_{ij} αυτό το καθορίζει την κατανομή των r_j μονάδων στα m κέντρα διανομής. Συνεπώς, οι συνθήκες ισορροπίας στην περίπτωση αυτή λαμβάνουν την μορφή:

$$x_{ij} > 0 \Rightarrow d_i(x_i) + p_i + t_{ij} = \hat{c}_{ij} \quad \forall i, j \quad (3.63)$$

$$x_{ij} = 0 \Rightarrow d_i(x_i) + p_i + t_{ij} \geq \hat{c}_{ij} \quad \forall i, j \quad (3.64)$$

$$r_j > 0 \Rightarrow \bar{c}_j = g_j^{-1}(r_j) \quad (3.65)$$

$$r_j = 0 \Rightarrow \bar{c}_j \geq g_j^{-1}(r_j) \quad (3.66)$$

Εισάγοντας της συνθήκες εφικτότητας που επιβάλλονται από την ζήτηση των πελατών και την δυναμικότητα των κέντρων παραγωγής, το πρόβλημα μπορεί να διατυπωθεί από τις κάτωθι σχέσεις που είναι ένα πρόβλημα μη-γραμμικής συμπληρωματικότητας (Nonlinear Complementarity Problem).

$$[d_i(x_i) + p_i + t_{ij} - \hat{c}_{ij}] x_{ij} = 0, \quad \forall i, \forall j \quad (3.67)$$

$$d_i(x_i) + p_i + t_{ij} - \hat{c}_{ij} \geq 0, \quad \forall i, \forall j \quad (3.68)$$

$$[\bar{c}_j - g_j^{-1}(r_j)] r_j = 0, \quad \forall j \quad (3.69)$$

$$\bar{c}_j - g_j^{-1}(r_j) \geq 0, \quad \forall j \quad (3.70)$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = x_i \leq q_i, \quad \forall i \quad (3.71)$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = r_j, \quad \forall j \quad (3.72)$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad \forall i, \forall j \quad (3.73)$$

Στην συνέχεια θα δείξουμε ότι οι συνθήκες (3.39-3.44), βάση των οποίων γίνεται η κατανομή των πελατών στα κέντρα διανομής αντιστοιχούν στις συνθήκες βελτιστότητας Karush-Kuhn-Tucker ενός προβλήματος που ελαχιστοποιεί μια κυρτή συνάρτηση.

Θεώρημα 3.6 Έστω το κυρτό πρόβλημα βελτιστοποίησης

$$\begin{aligned} (\text{UO} - \text{TPE}) \quad \min \quad & \sum_{i=1}^m \int_0^{x_i} d_i(t) dt + \sum_{i=1}^m p_i x_i + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n t_{ij} x_{ij} \\ & - \sum_{j=1}^n \int_0^{r_j} g_j^{-1}(t) dt \end{aligned} \quad (3.74)$$

$$\text{υπό} \quad \sum_{i=1}^m x_{ij} = r_j, \quad \forall j \quad (3.75)$$

$$x_i \leq q_i \quad \forall i \quad (3.76)$$

$$x_i - \sum_{j=1}^n x_{ij} = 0, \quad \forall i \quad (3.77)$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad \forall i, \forall j \quad (3.78)$$

τότε $\hat{c}_{ij} = w_j - \pi_i \quad \forall i, \forall j$, $\bar{c}_j = w_j \quad \forall j$ και οι (3.67-3.73) είναι οι συνθήκες βελτιστότητας KKT του προβλήματος (UO-TPE).

Απόδειξη: Εισάγοντας του πολλαπλασιαστές Lagrange $\pi_i \geq 0$, για τους περιορισμούς (3.76) και $w_j \leq 0$ για τους περιορισμούς (3.75) και αφού

$$\frac{\partial}{\partial x_{ij}} \left[\sum_{i=1}^m \int_0^{x_i} d(t) dt \right] = \frac{\partial}{\partial x_{ij}} \int_0^{x_i} d(t) dt = \frac{\partial}{\partial x_i} \int_0^{x_i} d(t) dt \frac{\partial x_i}{\partial x_{ij}} = d_i(x_i)$$

και

$$\frac{\partial}{\partial r_j} \left[- \sum_{j=1}^n \int_0^{r_j} g_j^{-1}(t) dt \right] = - \frac{\partial}{\partial r_j} \int_0^{r_j} g_j^{-1}(t) dt = -g_j^{-1}(r_j),$$

οι ΚΚΤ συνθήκες είναι :

1. Συνθήκες δυϊκότητας

$$d_i(x_i) + p_i + t_{ij} + \pi_i - w_j \geq 0, \forall i, j \quad (3.79)$$

$$-g_j^{-1}(r_j) + w_j \geq 0, \forall j \quad (3.80)$$

$$\pi_i \geq 0, \forall i \quad (3.81)$$

$$w_j \leq 0, \forall j \quad (3.82)$$

2. Συνθήκες Συμπληρωματικότητας

$$[d_i(x_i) + p_i + t_{ij} + \pi_i - w_j] x_{ij} = 0, \forall i, \forall j \quad (3.83)$$

$$[-g_j^{-1}(r_j) + w_j] r_j = 0, \forall j \quad (3.84)$$

$$[q_i - x_i] \pi_i = 0, \forall i \quad (3.85)$$

3. Πρωτεύουσες Συνθήκες (Περιορισμοί Μεταφοράς)

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = r_j, \quad x_i \leq q_i \quad \forall i, \quad (3.86)$$

$$x_i - \sum_{j=1}^n x_{ij} = 0, \quad \forall i, \quad \forall j \quad (3.87)$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad \forall i, \quad \forall j \quad (3.88)$$

Άρα, αν $r_j > 0$ τότε $\bar{c}_j = w_j$ και κατά συνέπεια αναγκαστικά $x_{ij} > 0$ από κάποια κέντρα διανομής i . Αν όμως $x_{ij} > 0$ συνεπάγεται ότι $\hat{c}_{ij} = w_j - \pi_i$. Επιπλέον, εάν $\pi_i = 0$, τότε

$$\hat{c}_{ij} = \bar{c}_j = w_j.$$

□

Μοναδικότητα της Λύσης

Θεώρημα 3.7 Το πρόβλημα **(UO-TPE)** (3.74-3.78) έχει μοναδική λύση.

Απόδειξη: Για την απόδειξη του θεωρήματος αρκεί να δείξουμε ότι η αντικειμενική συνάρτηση (3.74) είναι αυστηρώς κυρτή.

Η αντικειμενική συνάρτηση του προβλήματος **(UO-TPE)** διαφέρει από αυτή του **(UO-TP)** μόνο ως προς τον όρο

$$\sum_{j=1}^n \int_0^{r_j} g_j^{-1}(t) dt. \quad (3.89)$$

Έχουμε ήδη αποδείξει (Θεώρημα 3.7 σελίδα 76) ότι η

$$\sum_{i=1}^m \int_0^{x_i} d_i(t) dt + \sum_{i=1}^m p_i x_i + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n t_{ij} x_{ij}$$

είναι αυστηρώς κυρτή.

Η συνάρτηση ζήτησης είναι γνησίως φθίνουσα συνάρτηση του ελάχιστου κόστους \bar{c}_j και κατά συνέπεια η αντίστροφη της θα πρέπει επίσης να είναι φθίνουσα συνάρτηση. Επιπλέον είναι γνωστό ότι το ολοκλήρωμα μιας φθίνουσας συνάρτησης είναι αυστηρώς κοίλη συνάρτηση. Επομένως η (3.89) είναι αυστηρώς κοίλη. Το αρνητικό μιας αυστηρώς κοίλης συνάρτησης είναι αυστηρώς κυρτή συνάρτηση. Κατά συνέπεια η αντικειμενική συνάρτηση είναι το άθροισμα δύο αυστηρώς κυρτών συναρτήσεων και άρα μια αυστηρώς κυρτή συνάρτηση. Έπεται ότι το πρόβλημα (3.74-3.78) έχει μοναδική λύση. \square

Πόρισμα 3.2 Το σημείο ισορροπίας είναι καλώς ορισμένο.

Σε αναλογία με την ενότητα (3.3) όταν η ζήτηση των πελατών είναι ελαστική ο συντονιστής του συστήματος θα κλιθεί να επιλύσει το κάτωθι πρόβλημα προκειμένου να αναθέσει τους πελάτες στα κέντρα διανομής για εξυπηρέτηση

$$(\text{SO} - \text{TPE}) \min \quad \sum_{i=1}^m d_i(x_i) x_i + \sum_{i=1}^m p_i x_i + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n t_{ij} x_{ij} - \sum_{j=1}^n \int_0^{r_j} g_j^{-1}(t) dt \quad (3.90)$$

$$(3.91)$$

$$\text{υπό} \quad \sum_{i=1}^m x_{ij} = r_j, \quad \forall j \quad (3.92)$$

$$x_i \leq q_i, \quad \forall i \quad (3.93)$$

$$x_i - \sum_{j=1}^n x_{ij} = 0, \quad \forall i \quad (3.94)$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad \forall i, \quad \forall j \quad (3.95)$$

και προκειμένου να ελαχιστοποιήσει τις ολικές δαπάνες των πελατών η ανάθεση του θα στηρίζεται στις κάτωθι συνθήκες:

$$\left[d_i(x_i) + x_i \frac{\partial d_i(x_i)}{\partial x_i} + p_i + t_{ij} - \tilde{c}_{ij} \right] x_{ij} = 0, \quad \forall i, \quad \forall j \quad (3.96)$$

$$d_i(x_i) + x_i \frac{\partial d_i(x_i)}{\partial x_i} + p_i + t_{ij} - \tilde{c}_{ij} \geq 0, \quad \forall i, \quad \forall j \quad (3.97)$$

$$[\bar{c}_j - g_j^{-1}(r_j)] r_j = 0, \forall j \quad (3.98)$$

$$\bar{c}_j - g_j^{-1}(r_j) \geq 0, \forall j \quad (3.99)$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = x_i \leq q_i, \forall i \quad (3.100)$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = r_j, \forall j \quad (3.101)$$

$$x_{ij} \geq 0, \forall i, \forall j \quad (3.102)$$

3.6.1 Η Επίδραση της Ελαστικής Ζήτησης στο Βέλτιστο Συστήματος και Ατομικό Βέλτιστο

Σε αυτό το μέρος επεκτείνουμε την ανάλυση της Ενότητας 3.5 στην περίπτωση όπου η ζήτηση είναι συνάρτηση του μέγιστου κόστους που κάθε πελάτης θέλει να καταβάλλει για την ικανοποίηση της για τον σκοπό αυτό υποθέτουμε ότι η αντίστροφη συνάρτηση ζήτηση κάθε πελάτη j είναι της μορφής,

$$\bar{c}_1(r_1) = 400 - 0.5r_1, \quad \bar{c}_2(r_2) = 500 - 0.3r_2, \quad (3.103)$$

$$\bar{c}_3(r_3) = 450 - 0.5r_3, \quad \bar{c}_4(r_4) = 600 - 0.1r_4, \quad (3.104)$$

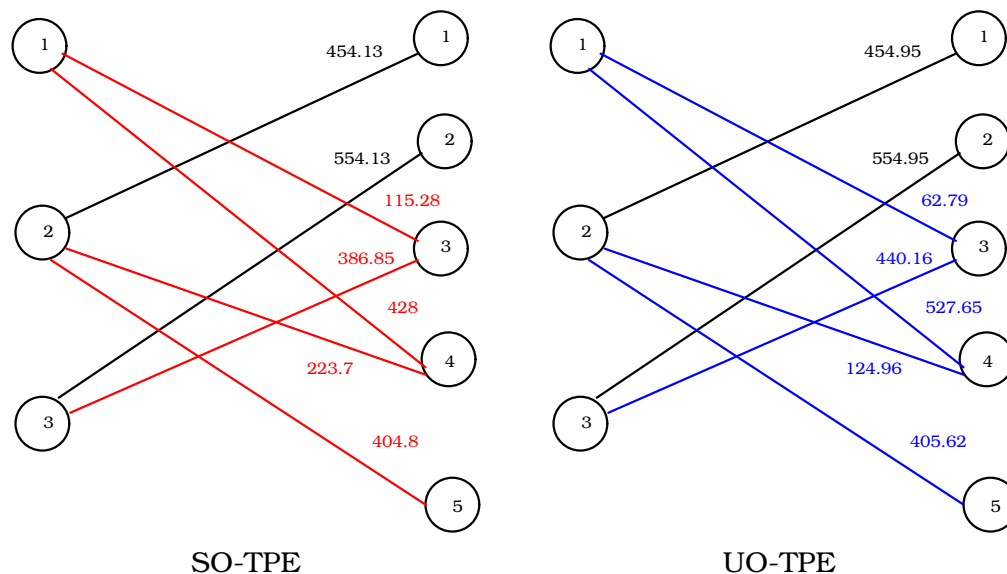
$$\bar{c}_5(r_5) = 350 - 0.4r_5. \quad (3.105)$$

Χρησιμοποιώντας τις ίδιες παραμέτρους που αναφέρονται στον Πίνακα (3.1) οι συναρτήσεις αυτές δημιουργούν για κάθε πελάτη τις ποσότητες αγοράς που αναφέρονται στο Πίνακα 3.3.

	SO-TPE Ποσότητα Αγοράς	UO-TPE Ποσότητα Αγοράς
C_1	454.13	454.95
C_2	554.13	554.95
C_3	502.13	617.75
C_4	651.8	652.62
C_5	404.8	405.62

Πίνακας 3.3: Βέλτιστες Ποσότητες Αγοράς

Τα προκύπντα προβλήματα διαμορφώθηκαν σύμφωνα με την γλώσσα προτυποποίησης προβλημάτων βελτιστοποίησης **AMPL** και για την επίλυσή τους χρησιμοποιήθηκε ο επιλυτής MINOS 5.5.



Σχήμα 3.5: Βέλτιστη Κατανομή Πελατών των Προβλημάτων **(SO-TPE)** και **(UO-TPE)**

Το Σχήμα 3.5 απεικονίζει την ροή των πελατών στα κέντρα διανομής όπως προκύπτει ύστερα από την επίλυση των **(SO-TPE)** και **(UO-TPE)**. Όπως φαίνεται και από το σχήμα όταν η ανάθεση των πελατών στα κέντρα διανομής γίνεται από το σύστημα (δηλαδή επιλύεται το πρόβλημα **(SO-TPE)**),

- Ο C_1 θα κατευθυνθεί στο κέντρο διανομής F_2 από όπου ικανοποιεί το σύνολο της ζητούμενης ποσότητας του (454.13 μονάδες) με κόστος ανά μονάδα 37.53.
- Ο C_2 θα κατευθυνθεί στο κέντρο διανομής F_3 από όπου ικανοποιεί το σύνολο της ζητούμενης ποσότητας του (554.13 μονάδες) με μοναδιαίο κόστος ανά μονάδα 29.51.
- Ο C_3 θα κατευθυνθεί στο κέντρο διανομής F_1 από όπου αγοράζει 115.28 μονάδες (από το σύνολο των 502.13) ενώ για την αγορά τον υπόλοιπων 386.85 στο κέντρων διανομής F_3 αντιμετωπίζοντας μοναδιαίο κόστος 38.53 και 35.51 αντίστοιχα.
- Ο C_4 θα κατευθυνθεί στο κέντρο διανομής F_1 από όπου αγοράζει 506.84 μονάδες (από το σύνολο των 651.8) ενώ για την αγορά τον υπόλοιπων 223.7 στο κέντρων διανομής F_2 αντιμετωπίζοντας μοναδιαίο κόστος 39.53 και 42.26 αντίστοιχα.
- Ο C_5 θα κατευθυνθεί στο κέντρο διανομής F_2 από όπου ικανοποιεί το σύνολο της ζητούμενης ποσότητας του (404. 8 μονάδες) με κόστος ανά μονάδα 36.28.

Όπως και στη περίπτωση της σταθερής ζήτησης η καταχώρηση των πελατών σε κέντρα διανομής που συνεπάγονται υψηλότερο κόστος από το ελάχιστο θα επιβάλει τους πελάτες να αλλάξουν το προτεινόμενο σενάριο αγοράς. Το ανταγωνιστικό

	SO-TPE		UO-TPE	
	Μοναδιαίο Κόστος	Ποσότητα	Μοναδιαίο Κόστος	Ποσότητα
C ₁₁	37.53	0	40.14	0
C ₂₁	35.26	454.13	35.14	454.95
C ₃₁	41.51	0	47.17	0
C ₁₂	35.53	0	38.14	0
C ₂₂	41.26	0	41.14	0
C ₃₂	29.51	554.13	35.17	554.95
C ₁₃	38.53	115.28	41.14	62.79
C ₂₃	46.26	0	46.14	0
C ₃₃	35.51	386.85	41.17	440.16
C ₁₄	39.53	428.1	42.14	527.65
C ₂₄	42.26	223.7	42.14	124.97
C ₃₄	43.51	0	49.17	0
C ₁₅	43.53	0	46.14	0
C ₂₅	33.26	404.8	33.14	405.62
C ₃₅	30.51	0	36.17	0

Πίνακας 3.4: Αποτελέσματα Επίλυσης των Προβλημάτων **(SO-TPE)** και **(UO-TPE)**

πλαίσιο μέσα στο οποίο κινούνται οι πελάτες θα αναγκάσει τους πελάτες να κατανείμουν την ζήτηση τους σε εκείνες τις εγκαταστάσεις που τους εξασφαλίζουν το ελάχιστο δυνατό κόστος ανά μονάδα.

Η ανταγωνιστική κατανομή της ζήτησης προκύπτει από την επίλυση του **(UO-TPE)** και καταχωρείται στον Πίνακα 3.4. Παρατηρούμε ότι οι μοναδιαίες δαπάνες που προκύπτουν δεν συνηγορούν για την απομάκρυνση κάποιου πελάτη από την συγκεκριμένη κατανομή εάν όλοι οι άλλοι αποδέχθουν την κατανομή, Το σημείο ισορροπίας είναι καλώς ορισμένο.

3.7 Συμπεράσματα

Σε αυτό το κεφάλαιο εξετάζονται οι συνέπειες του ανταγωνισμού των πελατών για την εξασφάλιση ενός συγκεκριμένου επιπέδου εξυπηρέτησης σε ένα δίκτυο ανεφοδιασμού όπου το κόστος μεταφοράς το επιβαρύνεται ο πελάτης και όχι το σύστημα.

Το πρόβλημα διαμορφώνεται σαν ένα πρόβλημα μη-γραμμικού προγραμματισμού ανάλογο αυτών που αντιμετωπίζονται στα δίκτυα κυκλοφορίας.

Μέσα σε αυτό το πλαίσιο εξετάζονται δυο διαφορετικές μορφές διαχείρισης του συστήματος ανεφοδιασμού. Πρώτα εξετάζεται η περίπτωση όπου το σύστημα έχει την δυνατότητα να κατευθύνει το ίδιο τους πελάτες στα κέντρα διανομής για εξυπηρέ-

τηση, καθορίσαμε τις συνθήκες βελτιστότητας του συστήματος και αποδείξαμε την μοναδικότητα της βέλτιστης λύσης.

Στην συνέχεια εξετάστηκε η περίπτωση όπου οι πελάτες έχουν την δυνατότητα να επιλέξουν τα κέντρο διανομής από τα οποία θα εξυπηρετηθούν. Αποδεικνύεται ότι το παίγνιο στο οποίο εμπλέκονται οι πελάτες είναι ισότιμο με ένα πρόβλημα μη-γραμμικού προγραμματισμού. Αποδεικνύεται επίσης η ύπαρξη και μοναδικότητα ισορροπίας και η διαφοροποίηση της από την βέλτιστη καταχώρηση του συστήματος.

Κεφάλαιο 4

Κυρτά Προβλήματα Παραγωγής Μεταφοράς και Αλγόριθμοι Επίλυσης Βασισμένοι στην Μέθοδο Frank-Wolfe

ναυσί τε καί πολύ περιεῖναι, ἵνα καί τα ἐπιτήδεια ῥᾶον ἐσκομιζόμεθα, τόν δέ καί αὐτόθεν σίτον ἐν ὀλίκῃσι, πυρούς καί πεφρυγμένας κριθάς, ἄγειν, καί σιτοποιούς ἐκ τῶν μυλίωνων πρὸς μέρος ἡναγκασμένους ἐμμίσθους, ἵνα ἦν που ὑπὸ ἀπλοίας ἀπολαμβάνόμεθα, ἔχῃ ἡ στρατιὰ τὰ ἐπιτήδεια

ΘΟΥΚΙΔΙΔΟΥ: 'Ιστορίαι, Βιβλίον Ζ'

4.1 Εισαγωγή

Στο προηγούμενο κεφάλαιο αναπτύξαμε, μορφοποιήσαμε και αναλύσαμε το πρόβλημα παραγωγής μεταφοράς κάτω από συνθήκες ανταγωνισμού των πελατών για υπηρεσίες. Στο παρόν κεφάλαιο θα αναπτύξουμε μεθόδους επίλυσης του προβλήματος τόσο για την περίπτωση δεδομένης ζήτησης όσο και για την περίπτωση ελαστικής ζήτησης. Θα αναδείξουμε επίσης το ευρύ φάσμα εφαρμογής των προτεινόμενων μεθόδων μέσω της μορφοποίησης δύο ακόμα προβλημάτων της εφοδιαστικής αλυσίδας: (α) του κλασσικού προβλήματος μεταφοράς υπό αβέβαια ζήτηση και (β) ενός νέου προβλήματος, του προβλήματος παραγωγής μεταφοράς όταν η ανάθεση της ζήτησης στις παραγωγικές μονάδες γίνεται μέσω μεσαζόντων.

4.2 Πρόβλημα Μεταφοράς με Αβέβαια Ζήτηση

Το πρόβλημα μεταφοράς με αβέβαια ζήτηση (Stochastic Transportation Problem **(STP)** [113]) αφορά στην επιλογή των ποσοτήτων που πρέπει να μεταφερθούν από m σημεία διάθεσης ενός προϊόντος (κέντρα διανομής, εργοστάσια) σε n σημεία ζήτησης (πελάτες), όταν η ζήτηση r_j του πελάτη j δεν μπορεί να προσδιοριστεί με

ακρίβεια και επομένως μπορεί να θεωρηθεί ότι είναι μια συνεχής τυχαία μεταβλητή, με αντίστοιχη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (probability density function) $\varphi_j(r_j)$. Θα υποθέσουμε ότι όλες οι μεταβλητές r_j είναι ανεξάρτητες, δηλαδή η ζήτηση του πελάτη ℓ δεν επηρεάζει την ζήτηση του πελάτη j , για $j \neq \ell$.

Έστω ότι t_{ij} είναι το οριακό κόστος μεταφοράς από το σημείο διάθεσης i στο κέντρο ζήτησης j , και $x_j = \sum_{i=1}^m x_{ij}$ οι συνολικές μονάδες προϊόντος που μεταφέρονται στο κέντρο ζήτησης j . Από την στιγμή που η ζήτηση δεν είναι γνωστή εκ των προτέρων, εάν μία συγκεκριμένη ποσότητα του προϊόντος x_j μεταφερθεί σε κάποιον από τους προορισμούς μπορεί να διαπιστωθεί ότι ισχύουν οι εξής περιπτώσεις:

1. $x_j < r_j$ δηλαδή η μεταφερόμενη ποσότητα να υστερεί της πραγματικής ζήτησης, το οποίο δημιουργεί κόστος/ποινή $g_j(r_j - x_j)$ από τις χαμένες πωλήσεις.
2. $x_j > r_j$ δηλαδή η μεταφερόμενη ποσότητα να υπερτερεί της πραγματικής ζήτησης, το οποίο δημιουργεί κόστος/ποινή $\varpi_j(x_j - r_j)$ από την δέσμευση της ποσότητας $(x_j - r_j)$ στο πελάτη j .
3. $x_j = r_j$ η οποία δεν συνεπάγεται κανένα κόστος.

Συνεπώς εξαιτίας της τυχειότητας του r_j το προσδοκώμενο κόστος μη κάλυψης της ζήτησης του πελάτη j θα είναι $[4, 218]$,

$$g_j \int_{q_j}^{\infty} (r_j - x_j) \varphi_j(r_j) dr_j, \quad (4.1)$$

ενώ

$$\varpi_j \int_0^{x_j} (x_j - r_j) \varphi_j(r_j) dr_j \quad (4.2)$$

θα είναι το κόστος υπερκάλυψης της ζήτησης του πελάτη j .

Υποθέτοντας επιπλέον ότι κάθε κέντρο προσφοράς έχει δυναμικότητα παραγωγής q_i το πρόβλημα μπορεί να διατυπωθεί ως,

$$\begin{aligned} \text{[STP]} \quad \min \quad & \sum_{j=1}^n \left\{ g_j \int_{q_j}^{\infty} (r_j - x_j) \varphi_j(r_j) dr_j + \varpi_j \int_0^{x_j} (x_j - r_j) \varphi_j(r_j) dr_j \right\} \\ & + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n t_{ij} x_{ij} \end{aligned} \quad (4.3)$$

$$\text{υπό} \quad \sum_{j=1}^n x_{ij} \leq q_i, \quad \forall i \quad (4.4)$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = x_j, \quad \forall j \quad (4.5)$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad \forall i, \forall j, \quad (4.6)$$

Το πρόβλημα θεωρείται ότι είναι κυρτό [46, 114, 91, 92], όμως καμία από τις αναφορές αυτές δεν αποδεικνύει την κυρτότητα του προβλήματος. Αντιθέτως, για το πρόβλημα σχεδιασμού οικονομικής ποσότητας παραγγελίας με αβέβαια ζήτηση (Economic Lot Scheduling Problem with Random Demand), όπου στόχος είναι η ελαχιστοποίηση του μακροχρόνιου μέσου κόστους (long-run average cost) εκκίνησης της παραγωγής και διατήρησης αποθέματος, απόδειξη της κυρτότητας παραδίδεται από τον G. Gallego [66]. Στην συνέχεια θα αποδείξουμε ότι το δικό μας πρόβλημα είναι κυρτό.

Λήμμα 4.1 *Ισχύει ότι*

$$\int_0^{x_j} (x_j - r_j) \varphi_j(r_j) dr_j = x_j - v_j + \int_{x_j}^{\infty} (r_j - x_j) \varphi_j(r_j) dr_j,$$

όπου v_j είναι η προσδοκώμενη ζήτηση του πελάτη j

Απόδειξη: Εξ ορισμού [4, 218]

$$\begin{aligned} v_j &= \int_{-\infty}^{+\infty} r_j \varphi_j(r_j) dr_j \\ &= \int_{-\infty}^0 r_j \varphi_j(r_j) dr_j + \int_0^{x_j} r_j \varphi_j(r_j) dr_j + \int_{x_j}^{\infty} r_j \varphi_j(r_j) dr_j. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Επίσης

$$\int_{x_j}^{\infty} (r_j - x_j) \varphi_j(r_j) dr_j = \int_{x_j}^{\infty} r_j \varphi_j(r_j) dr_j - x_j \int_{x_j}^{\infty} \varphi_j(r_j) dr_j. \quad (4.8)$$

Τέλος

$$x_j = x_j \int_0^{\infty} \varphi_j(r_j) dr_j = x_j \int_0^{x_j} \varphi_j(r_j) dr_j + x_j \int_{x_j}^{\infty} \varphi_j(r_j) dr_j. \quad (4.9)$$

Αφού $\int_{-\infty}^0 r_j \varphi_j(r_j) dr_j = 0$, προσθέτοντας την (4.8) στην (4.9) και αφαιρώντας την (4.7) λαμβάνουμε την ισότητα του λήμματος. \square

Πόρισμα 4.1 *Η συνολητική ποινή είναι*

$$\sum_{j=1}^n \varpi_j (x_j - v_j) + \sum_{j=1}^n (\varpi_j + g_j) \int_{x_j}^{\infty} (r_j - x_j) \varphi_j(r_j) dr_j. \quad (4.10)$$

Επομένως το πρόβλημα μπορεί να αναδιατυπωθεί ως:

$$\begin{aligned} (\overline{\text{STP}}) \quad \min \quad & \sum_{j=1}^n \left\{ \varpi_j x_j + (\varpi_j + g_j) \int_{x_j}^{\infty} (r_j - x_j) \varphi_j(r_j) dr_j \right\} \\ & + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n t_{ij} x_{ij} \end{aligned} \quad (4.11)$$

$$\text{υπό } (4.4) - (4.6) \quad (4.12)$$

όπου ο σταθερός όρος $-\sum_{j=1}^n \varpi_j v_j$ έχει απαλειφθεί.

Θεώρημα 4.1 Το πρόβλημα $(\overline{\text{STP}})$ είναι ένα πρόβλημα κυρτού προγραμματισμού.

Απόδειξη: Για την απόδειξη του θεωρήματος αρκεί να δείξουμε την κυρτότητα του όρου

$$f(x_j) = \int_{x_j}^{\infty} (r_j - x_j) \varphi_j(r_j) dr_j.$$

Έχουμε

$$f'(x_j) = - \int_{x_j}^{\infty} \varphi_j(r_j) dr_j$$

και συνεπώς

$$f''(x_j) = \varphi_j(r_j).$$

Αφού εξ' ορισμού [4, 218] $\varphi_j(r_j) \geq 0$, συνεπάγεται ότι $f''(x_j) \geq 0$ και επομένως η $f(x_j)$ είναι κυρτή [12]. \square

Πόρισμα 4.2 Το πρόβλημα $(\overline{\text{STP}})$ είναι ένα πρόβλημα κυρτού προγραμματισμού.

4.3 Πρόβλημα Παραγωγής Μεταφοράς με Μεσάζοντα

Στην ενότητα αυτή θα εξετάσουμε το πρόβλημα παραγωγής μεταφοράς όταν η αγορά βασίζεται στην παρουσία μεσάζοντα. Ανάλογα προβλήματα έχουν προταθεί από τους Chen *et al.* [43]. Υποθέτουμε ότι υπάρχουν $|M|$ περιοχές προσφοράς και $|N|$ περιοχές ζήτησης ενός προϊόντος. Οι περιοχές προσφοράς ανήκουν σε $|K|$ παραγωγούς (με M_k να δηλώνει τις εγκαταστάσεις παραγωγής που ανήκουν στον παραγωγό k) ενώ οι περιοχές ζήτησης ανήκουν αποκλειστικά σε έναν αγοραστή. Η ζήτηση του αγοραστή είναι ένα διάνυσμα $\mathbf{r} = [r_j]$. Για την ικανοποίηση της ο αγοραστής απευθύνεται σε έναν διαμεσολαβητή. Ο διαμεσολαβητής με την σειρά του έχει την δυνατότητα να απευθυνθεί στους $|K|$ παραγωγούς προκειμένου να προμηθευτεί το προϊόν και να ικανοποιήσει την ζήτηση του πελάτη. Κάθε παραγωγός k αντιμετωπίζει μια διαφορετική συνάρτηση παραγωγής $p_k(\mathbf{s}_k)$ κατά την παραγωγική διαδικασία και τιμολογεί το προϊόν με βάση μια συνάρτηση τιμολόγησης $o_k(\mathbf{s}_k)$, όπου $\mathbf{s}_k = [x_i]_{i \in M_k}$ είναι ένα διάνυσμα στο $\mathbb{R}^{|M_k|}$ που περιλαμβάνει τις παραγόμενες ποσότητες x_i σε κάθε εγκατάσταση i που ανήκει στον προμηθευτή k .

Υπόθεση 4.1 Η συνάρτηση $p_k(\cdot)$ είναι μία κυρτή (μή-φθίνουσα), παραγωγίσιμη συνάρτηση ≥ 0 με $p(\mathbf{0}) = 0$

Η κυρτότητα της συνάρτησης παραγωγής συνεπάγεται μη φθίνον οριακό κόστος παραγωγής. Τέτοιου είδους οριακές δαπάνες παραγωγής μπορεί να περιλαμβάνουν την περίπτωση όπου χρησιμοποιείται υπερωριακή απασχόληση της οποίας το

οριακό κόστος είναι υψηλότερο σε σύγκριση με το οριακό κόστος της κανονικής (οκτάωρης) απασχόλησης.

Υπόθεση 4.2 Η συνάρτηση $o_k(\cdot)$ είναι μία κυρτή (μνή-φθίνουσα), παραγωγίσιμη συνάρτηση ≥ 0 με $o(0) = 0$

Επομένως, για δεδομένη ποσότητα ζήτησης \mathbf{r} , το πρόβλημα του διαμεσολαβητή είναι να επιλέξει τις ποσότητες που θα παραγγείλει από κάθε παραγωγό έτσι ώστε να ικανοποιήσει την ζήτηση στο ελάχιστο δυνατό κόστος.

Αν επιπλέον υποθέσουμε ότι ο πελάτης επιβαρύνεται το κόστος μεταφοράς του προϊόντος από τα κέντρα παραγωγής στα κέντρα ζήτησης ($t_{ij}x_{ij}$), όπου t_{ij} είναι το οριακό κόστος μεταφοράς και x_{ij} η μεταφερόμενη ποσότητα, τότε το πρόβλημα του διαμεσολαβητή μπορεί να διατυπωθεί ως:

$$\text{[ITP]} \quad \min \sum_{k=1}^{|K|} o_k(\mathbf{s}_k) + \sum_{i=1}^{|M|} \sum_{j=1}^{|N|} t_{ij}x_{ij} \quad (4.13)$$

$$\text{υπό} \quad \sum_{j=1}^{|N|} x_{ij} = x_i, \quad \forall i \quad (4.14)$$

$$\sum_{i=1}^{|M|} x_{ij} = r_j, \quad \forall j \quad (4.15)$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad \forall i, \forall j \quad (4.16)$$

Έστω ότι $w(\mathbf{r})$ είναι η βέλτιστη αντικειμενική τιμή του προβλήματος [ITP] για δεδομένο $\mathbf{r} \in \mathfrak{R}$, όπου $\mathfrak{R} = \{\mathbf{r} : \mathbf{r} > 0, \mathbf{r} < \infty\}$, και έστω ότι $w_{-\bar{k}}(\mathbf{r})$ είναι η βέλτιστη τιμή του ίδιου προβλήματος ύστερα από το αποκλεισμό του παραγωγού \bar{k} , δηλαδή απαλοίζοντας τον παραγωγό \bar{k} από τα αθροίσματα της (4.13) και τους περιορισμούς (4.14-4.15).

Πρόταση 4.1 Ισχύει ότι $w_{-\bar{k}}(\mathbf{r}) \geq w(\mathbf{r})$.

Απόδειξη: Απορρέει από το γεγονός ότι το $w_{-\bar{k}}(\mathbf{r})$ προκύπτει ύστερα από την προσθήκη του περιορισμού $\mathbf{s}_{\bar{k}} = 0$, $\forall i \in |M|_{\bar{k}}$ στο [ITP]. Το $w_{-\bar{k}}(\mathbf{r})$ είναι δηλαδή η βέλτιστη αντικειμενική τιμή ενός περιορισμένου προβλήματος (restricted problem) του [ITP].

□

Αν υποθέσουμε επιπλέον ότι $(\mathbf{x}^*, \mathbf{s}^*)$ είναι η βέλτιστη λύση του προβλήματος [ITP] τότε η σχέση

$$f_{-\bar{k}}(\mathbf{r}) = w_{-\bar{k}}(\mathbf{r}) - w(\mathbf{r}) + o_{\bar{k}}(\mathbf{s}_{\bar{k}}) \quad (4.17)$$

εκφράζει το ποσό που καταβάλλει ο αγοραστής στον παραγωγό \bar{k} . Δηλαδή ο αγοραστής καταβάλλει στον παραγωγό \bar{k} την τιμή που αυτός θέτει $o_k(\mathbf{s}_{\bar{k}}^*)$ συν την προσιθέμενη αξία $w_{-\bar{k}}(\mathbf{r}) - w(\mathbf{r})$ της συμμετοχής του παραγωγού στο σύστημα.

Πρόταση 4.2 Το συνολικό κόστος που αντιμετωπίζει ο πελάτης του συστήματος ανεφοδιασμού είναι το συνολικό άθροισμα των πληρωμών που καταβάλλει στους παραγωγούς συν το κόστος ανεφοδιασμού. Δηλαδή,

$$c(\mathbf{r}) = \sum_{k=1}^{|K|} f_k(\mathbf{r}) + \sum_{i=1}^{|M|} \sum_{j=1}^{|N|} t_{ij} x_{ij}^* = \sum_{k=1}^{|K|} w_{-\bar{k}}(\mathbf{r}) - (|K| - 1)w(\mathbf{r}) \quad (4.18)$$

Απόδειξη: Από τον ορισμό της $f_{-\bar{k}}(\mathbf{r})$ θα έχουμε,

$$\sum_{k=1}^{|K|} f_k(\mathbf{r}) = w_{-1}(\mathbf{r}) - w(\mathbf{r}) + o_1(\mathbf{s}_1^*) \quad (4.19)$$

$$+ w_{-2}(\mathbf{r}) - w(\mathbf{r}) + o_2(\mathbf{s}_2^*) \quad (4.20)$$

$$+ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad (4.21)$$

$$+ w_{-|K|}(\mathbf{r}) - w(\mathbf{r}) + o_k(\mathbf{s}_k^*) \quad (4.22)$$

$$= \sum_{i=1}^{|K|} w_{-\bar{k}}(\mathbf{r}) - |K|w(\mathbf{r}) + \sum_{i=1}^{|K|} o_k(\mathbf{s}_i^*) \quad (4.23)$$

αλλά

$$w(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^{|M|} \sum_{j=1}^{|N|} t_{ij} x_{ij}^* + \sum_{i=1}^{|M|} o_i(\mathbf{s}_i^*) \Rightarrow \quad (4.24)$$

$$\sum_{i=1}^{|M|} \sum_{j=1}^{|N|} t_{ij} x_{ij}^* = w(\mathbf{r}) - \sum_{i=1}^{|M|} o_i(\mathbf{s}_i^*) = \quad (4.25)$$

και κατά συνέπεια

$$c(\mathbf{r}) = \sum_{k=1}^{|K|} f_k(\mathbf{r}) + \sum_{i=1}^{|M|} \sum_{j=1}^{|N|} t_{ij} x_{ij}^* = \sum_{k=1}^{|K|} w_{-\bar{k}}(\mathbf{r}) - (|K| - 1)w(\mathbf{r}) \quad (4.26)$$

□

Πρόταση 4.3 Οι συναρτήσεις $w(\mathbf{r})$ και $w_{-\bar{k}}(\mathbf{r})$ είναι κυρτές συναρτήσεις του \mathbf{r} .

Απόδειξη: Η $w(\mathbf{r})$ είναι η συνάρτηση τιμής (value function) του προβλήματος [ITP], το οποίο έχει κυρτή αντικειμενική συνάρτηση και γραμμικούς περιορισμούς.

Έστω \mathbf{r}^1 και \mathbf{r}^2 δύο οποιαδήποτε σημεία στο $\mathbb{R}^{|M|}$. Για να είναι η $w(\mathbf{r})$ κυρτή θα πρέπει να ισχύει ότι για $\mathbf{r} = \delta\mathbf{r}^1 + (1 - \delta)\mathbf{r}^2$ με $\delta \in [0, 1]$ $w(\mathbf{r}) = w[\delta\mathbf{r}^1 + (1 - \delta)\mathbf{r}^2] \leq \delta w(\mathbf{r}^1) + (1 - \delta)w(\mathbf{r}^2)$

Εάν $w(\mathbf{r}^1)$ ή $w(\mathbf{r}^2) = +\infty$, τότε ισχύει άμεσα ότι $w[\delta\mathbf{r}^1 + (1 - \delta)\mathbf{r}^2] \leq \delta w(\mathbf{r}^1) + (1 - \delta)w(\mathbf{r}^2)$ για $0 \leq \delta \leq 1$. Κατά συνέπεια, υποθέτουμε ότι $w(\mathbf{r}^1) < +\infty$ και $w(\mathbf{r}^2) < +\infty$. Εάν είτε το $w(\mathbf{r}^1)$ ή το $w(\mathbf{r}^2) = -\infty$, τότε δεν υπάρχει εφικτή λύση και δεν υπάρχει κάτι προς απόδειξη.

Θα πρέπει να σημειωθεί ότι οι περιορισμοί

$$\sum_{j=1}^{|N|} x_{ij} = x_i \quad \forall i$$

είναι προσδιοριστικοί δηλαδή μπορεί να αφαιρεθούν από το πρότυπο. Σε αυτή την περίπτωση το πρόβλημα μετασχηματίζεται στο εξής:

$$w(\mathbf{r}) = \min \left\{ \sum_{k=1}^{|K|} o_k \left(\left[\sum_{j=1}^{|N|} x_{ij} \right]_{i \in N_k} \right) + \sum_{i=1}^{|M|} \sum_{j=1}^{|N|} t_{ij} x_{ij} \right. \\ \left. \begin{array}{l} \text{υπό} \quad \sum_i x_{ij} = r_j, \quad \forall j \\ x_{ij} \geq 0, \quad \forall i, j \end{array} \right\} \quad (4.27)$$

όπου έχουμε αντικαταστήσει κάθε x_i στα υποδιανύσματα \mathbf{s}_k , με $\sum_{j=1}^{|N|} x_{ij}$. Εμφανώς, η $o_k(\cdot)$ παραμένει κυρτή στο x_{ij} .

Έστω $w(\mathbf{r}^1)$ είναι αντικειμενική τιμή του προβλήματος (4.27) για $\mathbf{r} = \mathbf{r}^1$ και $\mathbf{x}^{*1} = [x_{ij}^{*1}]$ είναι η αντίστοιχη βέλτιστη λύση, ας είναι $w(\mathbf{r}^2)$ και $\mathbf{x}^{*2} = [x_{ij}^{*2}]$ οι αντίστοιχες τιμές για $\mathbf{r} = \mathbf{r}^2$

Παρατηρούμαι ότι

$$\sum_{i=1}^{|M|} [\delta x_{ij}^{*1} + (1 - \delta)x_{ij}^{*2}] = \delta \sum_{i=1}^{|M|} x_{ij}^{*1} + (1 - \delta) \sum_{i=1}^{|M|} x_{ij}^{*2}$$

δηλαδή, το σημείο $\bar{\mathbf{x}} = \delta\mathbf{x}^{*1} + (1 - \delta)\mathbf{x}^{*2}$ είναι ένα βέλτιστο σημείο του (4.27) για $\mathbf{r} = \delta\mathbf{r}^1 + (1 - \delta)\mathbf{r}^2$. Συνεπώς ή το $\bar{\mathbf{x}}$ είναι εφικτό σημείο του (4.27) ή όχι. Επομένως,

$$w(\mathbf{r}) = w[\delta\mathbf{r}^1 + (1 - \delta)\mathbf{r}^2] \leq \sum_{k=1}^{|K|} o_k \left(\left[\sum_{j=1}^{|N|} \bar{x}_{ij} \right]_{i \in N_k} \right) + \sum_{i=1}^{|M|} \sum_{j=1}^{|N|} t_{ij} \bar{x}_{ij} \\ \leq \delta \left\{ \sum_{k=1}^{|K|} o_k \left(\left[\sum_{j=1}^{|N|} x_{ij}^{*1} \right]_{i \in N_k} \right) + \sum_{i=1}^{|M|} \sum_{j=1}^{|N|} t_{ij} x_{ij}^{*1} \right\}$$

$$\begin{aligned}
& + (1 - \delta) \left\{ \sum_{k=1}^{|K|} o_k \left(\left[\sum_{j=1}^{|N|} x_{ij}^{*2} \right]_{i \in N_k} \right) + \sum_{i=1}^{|M|} \sum_{j=1}^{|N|} t_{ij} x_{ij}^{*2} \right\} \\
& = \delta w(\mathbf{r}^1) + (1 - \delta) w(\mathbf{r}^2)
\end{aligned}$$

όπου η δεύτερη ανισότητα προκύπτει από την κυρτότητα της $o_k(\cdot)$ □

Πρόταση 4.4 Αν (\mathbf{x}, \mathbf{s}) είναι η βέλτιστη λύση του προβλήματος για δεδομένο $\mathbf{r} \in \mathfrak{R}$, τότε υπάρχουν πολλαπλασιαστές Lagrange β_j και α_i για τους περιορισμούς (4.15) και (4.14) αντίστοιχα για τους οποίους ισχύει ότι:

$$\alpha_i = \frac{\partial o_{k_i}(\mathbf{s}_{k_i})}{\partial x_i}, \quad (4.28)$$

όπου το k_i , δηλώνει τον παραγωγό k που είναι ιδιοκτήτης της εγκατάστασης παραγωγής i , και

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial o_{k_i}(\mathbf{s}_{k_i})}{\partial x_i} + t_{ij} &= \frac{\partial w(\mathbf{r})}{\partial r_j} \quad \text{εάν } x_{ij} > 0 \\ \frac{\partial o_{k_i}(\mathbf{s}_{k_i})}{\partial x_i} + t_{ij} &\geq \frac{\partial w(\mathbf{r})}{\partial r_j} \quad \text{εάν } x_{ij} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.29)$$

Απόδειξη: Εισάγοντας πολλαπλασιαστές Lagrange β_j και α_i για τους περιορισμούς (4.15) και (4.14) οι KKT συνθήκες θα είναι

1. Συνθήκες Δυσκότητας

$$\frac{\partial w(\mathbf{r})}{\partial x_i} = \frac{\partial o_{k_i}(\mathbf{s}_{k_i})}{\partial x_i} - \alpha_i \geq 0, \quad \forall i \quad (4.30)$$

$$\frac{\partial w(\mathbf{r})}{\partial x_{ij}} = t_{ij} + \alpha_i + \beta_j \geq 0, \quad \forall i, \forall j \quad (4.31)$$

$$\frac{\partial w(\mathbf{r})}{\partial r_j} = -\beta_j \geq 0, \quad \forall j \quad (4.32)$$

2. Συνθήκες Συμπληρωματικότητας

$$x_i \left[\frac{\partial o_{k_i}(\mathbf{s}_{k_i})}{\partial x_i} - \alpha_i \right] = 0, \quad \forall i \quad (4.33)$$

$$x_{ij} [t_{ij} + \alpha_i + \beta_j] = 0, \quad \forall i, \forall j \quad (4.34)$$

$$r_j (-\beta_j) \geq 0, \quad \forall j \quad (4.35)$$

Με κατάλληλες αντικαταστάσεις προκύπτει το επιθυμητό αποτέλεσμα. \square

Πόρισμα 4.3

$$\beta_j = \min_{i \in |M|} \{a_i + t_{ij}\} \quad (4.36)$$

Πρόταση 4.5 Το διάνυσμα $\beta = [\beta_j]$ είναι ένα υποκλίτος (subgradient) της $w(\mathbf{r})$ δηλαδή,

$$\beta \in \partial w(\mathbf{r}) \quad (4.37)$$

Επιπλέον

$$\beta \in \partial w_{-\bar{k}}(\mathbf{r} - \mathbf{R}_{\bar{k}}), \quad (4.38)$$

όπου

$$\mathbf{R}_{\bar{k}} = [r_{\bar{k}j}]_{j \in |N|} \quad (4.39)$$

και

$$r_{\bar{k}j} = \sum_{i \in M_k} x_{ij} \quad (4.40)$$

είναι δηλαδή η συνολική παραγόμενη ποσότητα που διατίθεται στην περιοχή ζήτηση j από τον παραγωγό k .

Απόδειξη: Από τον ορισμό του υποκλίτους [177, 12] αρκεί να δείξουμε ότι,

$$w(\mathbf{r}') - w(\mathbf{r}) \geq v^T(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) \quad (4.41)$$

Έχουμε επομένως,

$$\begin{aligned} w(\mathbf{r}') - w(\mathbf{r}) &= \sum_k [o_k(\mathbf{s}_k(\mathbf{r}')) - o_k(\mathbf{s}_k(\mathbf{r}))] + \sum_i \sum_j t_{ij} [x_{ij}(\mathbf{r}') - x_{ij}(\mathbf{r})] \\ &\geq \sum_k \alpha_k^T [\mathbf{s}_k(\mathbf{r}') - \mathbf{s}_k(\mathbf{r})] + \sum_i \sum_j t_{ij} [x_{ij}(\mathbf{r}') - x_{ij}(\mathbf{r})] \\ &= \sum_i \alpha_i \sum_j [x_{ij}(\mathbf{r}') - x_{ij}(\mathbf{r})] + \sum_i \sum_j t_{ij} [x_{ij}(\mathbf{r}') - x_{ij}(\mathbf{r})] \\ &= \sum_i \sum_j (\alpha_i + t_{ij}) [x_{ij}(\mathbf{r}') - x_{ij}(\mathbf{r})] \\ &= \sum_{i,j: \mathbf{y}_{ij}(\mathbf{r}') > 0} \beta_j [x_{ij}(\mathbf{r}') - x_{ij}(\mathbf{r})] + \sum_{i,j: \mathbf{y}_{ij}(\mathbf{r}') = 0} (\alpha_i + t_{ij}) x_{ij}(\mathbf{r}') \quad (4.42) \\ &\quad + \sum_{i,j: \mathbf{y}_{ij}(\mathbf{r}') > 0} \beta_j [x_{ij}(\mathbf{r}') - x_{ij}(\mathbf{r})] + \sum_{i,j: \mathbf{y}_{ij}(\mathbf{r}') = 0} \beta_j x_{ij}(\mathbf{r}') \\ &= \sum_j \beta_j \sum_i [x_{ij}(\mathbf{r}') - x_{ij}(\mathbf{r})] \\ &= \sum_j \beta_j (\mathbf{r}' - \mathbf{r}) = \beta^T (\mathbf{r}' - \mathbf{r}) \end{aligned}$$

όπου για τις ανισότητες κάναμε χρήση των προηγούμενων αποτελεσμάτων (προτάσεων) και του γεγονότος ότι $x_{ij}(\mathbf{r}') \geq 0$. Η απόδειξη της (4.38) είναι παρόμοια για αυτό παραλείπεται. \square

Οικονομική Ερμηνεία των Αποτελεσμάτων του πορίσματος 4.3 και της πρότασης 4.4. Από οικονομικής άποψης, τα αποτελέσματα των προτάσεων που αναφέρθηκαν μέχρι τώρα συνεπάγονται ότι:

- Η προμήθεια κάθε κέντρου ζήτησης j γίνεται από από παραγωγούς που έχουν το ίδιο οριακό κόστος. Οι παραγωγοί που δεν εφοδιάζουν το κέντρο ζήτησης j έχουν υψηλότερο.
- Στην περίπτωση που η $w(\mathbf{r})$ είναι διαφορίσιμη (differentiable) σε κάποια περιοχή γύρω από ένα διάνυσμα \mathbf{r} , τότε $\nabla w(\mathbf{r}) = \beta$, [177, 12]. Κατά συνέπεια από τη πρόταση (4.5) θα έχουμε ότι:

$$\beta = \nabla w(\mathbf{r}) = \nabla w_{-\bar{k}}(\mathbf{r}) \quad (4.43)$$

Η τελευταία σχέση εξασφαλίζει ότι το οριακό κόστος όλης της αλυσίδας ανεφοδιασμού παραμένει αμετάβλητο αν ο παραγωγός \bar{k} και η ποσότητα που παράγεται από αυτόν αποκλειστούν από το σύστημα.

Τα δύο αυτά αποτελέσματα ορίζουν τις σχέσεις με βάση τις οποίες καθορίζονται οι συναλλαγές στα πλαίσια της αλυσίδας ανεφοδιασμού που εξετάζεται.

Στην συνέχεια θα εξετάσουμε περισσότερο την σχέση που υπάρχει ανάμεσα στην συνάρτηση παραγωγής $p_k(\mathbf{s}_k)$ και την συνάρτηση $o_k(\mathbf{s}_k)$ με βάση την οποία τιμολογεί ο κάθε παραγωγός το προϊόν στον ενδιαμέσο. Η σχέση αυτή θα μας βοηθήσει να αναλύσουμε καλύτερα τα αποτελέσματα για τις σχέσεις που διέπουν τις συναλλαγές ανάμεσα στις περιοχές παραγωγής και τις περιοχές ζήτησης.

4.3.1 Σχέση Ανάμεσα στο Κόστος Παραγωγής και την Συνάρτηση Τιμολόγησης

Για να μπορέσουμε να εξετάσουμε την σχέση ανάμεσα στο κόστος παραγωγής των παραγωγών και τον τρόπο που αυτοί τιμολογούν το προϊόν τους στον διαμεσολαβητή θα χρησιμοποιήσουμε στοιχεία της θεωρίας παιγνίων και ιδιαίτερα των δημοπρασιών. Σε αυτή την περίπτωση θα πρέπει να θεωρήσουμε τον διαμεσολαβητή σαν ένα δημοπράτη και την συνάρτηση τιμολόγησης των παραγωγών σαν την προσφορά τους στην δημοπρασία.

Είναι εμφανές από την προηγούμενη ανάλυση και από τον ορισμό του $f_{-\bar{k}}(\mathbf{r})$ (βλέπε 4.17) ότι οι πληρωμές που καταβάλλει ο αγοραστής σε οποιονδήποτε παραγωγό k στηρίζονται όχι μόνο στην προσφορά του στον δημοπράτη αλλά και στη αξία που

προσθέτει στο σύστημα η συμμετοχή του στην δημοπρασία. Αυτού του είδους οι δημοπρασίες ανήκουν στην κατηγορία των δημοπρασιών με την την ευρύτερη ονομασία δημοπρασίες τύπου Vickrey-Clark-Groves (VCG) [152]. Οι δημοπρασίες αυτού του είδους είναι *συμβατές κινήτρων* (incentives compatible) και *αποτελεσματικές* (efficient), δηλαδή εξασφαλίζουν ότι όλοι οι συμμετέχοντες στην δημοπρασία έχουν κίνητρο να είναι *ειλικρινείς* (truth-telling) και σαν αποτέλεσμα μεγιστοποιείται το κοινωνικό όφελος. Οι συμβατότητα κινήτρων απαιτείται συνήθως για να είναι μια δημοπρασία αποτελεσματική.

Ορισμός 4.1 Έστω ότι:

1. Στην δημοπρασία λαμβάνουν μέρος n ($i = 1, 2, \dots, n$) συμμετέχοντες.
2. Κάθε ένας από αυτούς έχει στην διάθεση του κάποιες ιδιωτικές πληροφορίες $t_i \in T_i$ που καθορίζουν τον τύπο του.
3. Οι στρατηγικές του κάθε συμμετέχοντα είναι να δηλώσει τον τύπο του δηλαδή να αποκαλύψει αν οι πληροφορίες που παρέχει είναι αληθείς ή ψευδείς. $\mathbf{t} = (t_i, \mathbf{t}_{-i})$ είναι το διάνυσμα των στρατηγικών των n συμμετεχόντων.
4. $\rho(\mathbf{t})$ είναι η έκβαση της δημοπρασίας για κάθε τύπο των συμμετεχόντων.
5. π_i είναι η αμοιβή του συμμετέχοντος i
6. Οι προτιμήσεις κάθε συμμετέχοντα δίνονται από την συνάρτηση $u_i(t_i, \rho)$. Με αλληλά λογία η $u_i(t_i, \rho)$ ορίζει την αξία που έχει για κάθε τύπο συμμετέχοντος η έκβαση της δημοπρασίας.
7. Επομένως η χρησιμότητα που αντιλεί κάθε συμμετέχων από την δημοπρασία είναι $U_i = \pi_i + u_i(t_i, \rho)$. Αυτή την χρησιμότητα είναι που προσπαθεί να βελτιστοποιήσει ο κάθε συμμετέχων.

Λέγεται ότι ένας τέτοιος μηχανισμός δημοπρασιών ανήκει στην οικογένεια των δημοπρασιών τύπου VCG εάν

(α)

$$\rho(\mathbf{t}) \in \arg \max_{\rho} \left(\sum_{i=1}^n u_i(t_i, \rho(\mathbf{t})) \right), \text{ και} \quad (4.44)$$

(β) υπάρχει i τέτοιο ώστε

$$\pi_i(\mathbf{t}) = \sum_{j \neq i} u_j(t_j, \rho(\mathbf{t})) + h_i(\mathbf{t}_{-i}) \quad (4.45)$$

Όταν ο συμμετέχων i εξασφαλίζει αμοιβή που ικανοποιεί την (4.45) τότε λέγεται ότι εξασφαλίζει αμοιβή VCG [152].

Πρόταση 4.6 Στα πλαίσια ενός μηχανισμού δημοπρασιών τύπου VCG η ειλικρίνεια είναι η κυρίαρχη στρατηγική του συμμετέχοντα που λαμβάνει αμοιβή VCG.

Απόδειξη: Αν υποθέσουμε ότι ένας συμμετέχων που δηλώνει αληθείς πληροφορίες θ_i λαμβάνει αμοιβή VCG. Αν η ειλικρίνεια δεν είναι η κυρίαρχη στρατηγική του συμμετέχοντος τότε θα υπάρχει t_i και \mathbf{t}_{-i} με $\theta_i \neq t_i$ για το οποίο θα ισχύει ότι

$$\pi_i(t_i, \mathbf{t}_{-i}) + u_i(\theta_i, \rho(t_i, \mathbf{t}_{-i})) > \pi_i(\theta_i, \mathbf{t}_{-i}) + u_i(\theta_i, \rho(\theta_i, \mathbf{t}_{-i})). \quad (4.46)$$

Η αντικατάσταση των $\pi_i(t_i, \mathbf{t}_i)$ και $\pi_i(\theta_i, \mathbf{t}_{-i})$ στην (4.45) συνεπάγεται ότι,

$$\sum_{j \neq i} u_j(t_j, \rho(t_i, \mathbf{t}_{-i})) + u_i(\theta_i, \rho(t_i, \mathbf{t}_{-i})) > \quad (4.47)$$

$$\sum_{j \neq i} u_j(t_j, \rho(\theta_i, \mathbf{t}_{-i})) + u_i(\theta_i, \rho(\theta_i, \mathbf{t}_{-i})). \quad (4.48)$$

κάτι που έρχεται σε αντίθεση με την πρώτη συνθήκη (4.44) του μηχανισμού δημοπρασιών τύπου VCG. Επομένως η ειλικρίνεια είναι η κυρίαρχη στρατηγική του συμμετέχοντος i . \square

Μπορούμε συνεπώς να πούμε ότι οι δημοπρασίες τύπου VCG χαρακτηρίζονται από την ύπαρξη *αποτελεσματικού ανταγωνισμού* (effective competition) αφού μεταξύ των συμμετεχόντων παραγωγών υπάρχει έντονος ανταγωνισμός έτσι ώστε κάθε ένας από αυτούς θα πρέπει να καταβάλλει την μέγιστη δυνατή προσπάθεια για να επιτύχει τα μέγιστα δυνατά αποτελέσματα. Κανένας από τους παραγωγούς δεν είναι σε θέση να τιμολογήσει το προϊόν πάνω από το κόστος παραγωγής.

Από την παραπάνω ανάλυση προκύπτει ότι η κυρίαρχη στρατηγική κάθε ορθολογικά σκεπτόμενου παραγωγού είναι να τιμολογήσει το προϊόν του με βάση το κόστος παραγωγής του ανεξάρτητα από το τι κάνουν οι υπόλοιποι παραγωγοί. Θα ισχύει επομένως ότι $p_k(\mathbf{s}_k) = o_k(\mathbf{s}_k)$, $\forall k$.

Συνεπώς, το $c(\mathbf{r})$ (βλέπε 4.18) ή ισοδύναμα το

$$w(\mathbf{r}) = \sum_{k=1}^{|K|} p_k(\mathbf{s}_k) + \sum_{i=1}^{|M|} \sum_{j=1}^{|N|} t_{ij} x_{ij} \quad (4.49)$$

εκφράζει το ελάχιστο συνολικό κόστος που αντιμετωπίζεται στην αλυσίδα ανεφοδιασμού για δεδομένη ζήτηση \mathbf{r} .

Ο τύπος της αμοιβής που λαμβάνουν οι παραγωγοί στα πλαίσια της δημοπρασίας τύπου VCG τους επιβάλλει να βελτιώσουν την αποτελεσματικότητα της επιχειρησιακής λειτουργίας τους ανακατανέμοντας τους παραγωγικούς τους πόρους με τέτοιο

τρόπο ώστε να μεγιστοποιείται το παραγωγικό τους αποτέλεσμα, τους επιβάλλει δηλαδή να μειώσουν το κόστος παραγωγής, επιτυγχάνοντας έτσι *διανεμητική αποτελεσματικότητα* (allocative efficiency). Η επίτευξη της αποτελεσματικότητας διανομής οδηγεί σε *μεγιστοποίηση του πλεονάσματος του αγοραστή*.

Υποθέτοντας επιπλέον ότι ο αγοραστής είναι ορθολογικά σκεπτόμενος και θέλει να ικανοποιήσει την ζήτηση κάθε περιοχής στο ελάχιστο κόστος που μπορεί να πετύχει και κάνοντας χρήση των μέχρι τώρα αποτελεσμάτων, οι συνθήκες που καθορίζουν της συναλλαγές ανάμεσα σε κάθε παραγωγό και τον αγοραστή μπορούν να περιγραφούν από τις κάτωθι σχέσεις:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_{k_i}(\mathbf{s}_{k_i})}{\partial x_i} + t_{ij} &= \frac{\partial w(\mathbf{r})}{\partial r_j}, \quad \forall x_{ij} > 0 \\ \frac{\partial p_{k_i}(\mathbf{s}_{k_i})}{\partial x_i} + t_{ij} &\geq \frac{\partial w(\mathbf{r})}{\partial r_j}, \quad \forall x_{ij} = 0. \end{aligned} \tag{4.50}$$

Για να υπάρξει επομένως ισορροπία στο σύστημα που εξετάζεται, θα πρέπει το ελάχιστο κόστος που καταβάλλει ο αγοραστής για την ικανοποίηση της ζήτησης μιας δεδομένης περιοχής j να ισούται με το άθροισμα του οριακού κόστος παραγωγής και μεταφοράς του προϊόντος για κάθε περιοχής προσφοράς. Ισορροπία δεν μπορεί να υπάρξει εφ' όσον υπάρχουν περιοχές προσφοράς που διαφοροποιούνται ως προς το κόστος. Με άλλα λόγια αν η συνθήκη ισορροπίας δεν ικανοποιείται ο αγοραστής θα ρυθμίζει εκ νέου την ζήτηση τους υπέρ των περιοχών ανεφοδιασμού με το χαμηλότερο κόστος. Κατά συνέπεια, σύμφωνα με το πρότυπο στην ισορροπία καθορίζονται ταυτόχρονα, οι παραγόμενες ποσότητες, ο όγκος και το κόστος συναλλαγών ανάμεσα σε κάθε περιοχή προσφοράς και ζήτησης. Μπορούμε επομένως να πούμε ότι οι συνθήκες ισορροπίας που ορίζονται από την (4.50) αποτελούν μια γενίκευση των συνθηκών ισορροπίας που προτείνονται από το πρότυπο της *χωρικής ισορροπίας τιμών* (Spatial Price Equilibrium Model) [169, 191, 193].

Ένα από τα προβλήματα των δημοπρασιών τύπου VCG, όπως διαπιστώθηκε και από τον Vickrey [211], είναι ότι να είναι δαπανηρές για τον αγοραστή αφού είναι αναγκασμένος να καταβάλλει στον παραγωγό όχι μόνο το κόστος παραγωγής του αλλά και την αξία που δίνει η συμμετοχή του στο σύστημα. Αν υποθέσουμε ότι ο αριθμός των παραγωγών είναι πολύ μεγάλος, όπως στην περίπτωση της *πλήρους ανταγωνιστικής αγοράς* (perfect competition) τότε η συνεισφορά του καθενός στο σύστημα είναι πολύ μικρή, δηλαδή $w_{-\bar{k}}(\mathbf{r}) - w(\mathbf{r}) \rightarrow 0$ καθώς $K \rightarrow \infty$. Σε αυτή την περίπτωση και σύμφωνα με τις συνθήκες ισορροπίας της τέλει ανταγωνιστικής αγοράς, $\frac{\partial p_{k_i}(\mathbf{s}_{k_i})}{\partial x_i} = p_{k_i}$ δηλαδή ο αγοραστής θα καταβάλλει στον παραγωγό μόνο το οριακό κόστος παραγωγής του. Στην ακραία αυτή περίπτωση η συνθήκη ισορροπίας που περιγράφεται από την (4.50) ταυτίζεται πλήρως με την συνθήκη ισορροπίας του πρότυπου χωρικής ισορροπίας τιμών. Επίσης, η κατανομή των πόρων του συστήματος σε αυτή την περίπτωση είναι αποτελεσματική κατά Pareto

αφού κανένα από τα μέλη του συστήματος δεν μπορεί να βελτιώσει την θέση του χωρίς να χειροτερεύσει την θέση κάποιου άλλου.

4.3.2 Επεκτάσεις του Προβλήματος

Στην ενότητα αυτή υποθέτουμε ότι υπάρχουν $|M|$ περιοχές προσφοράς και $|N|$ περιοχές ζήτησης ενός προϊόντος. Οι περιοχές προσφοράς ανήκουν σε $|K|$ παραγωγούς, έστω M_k οι εγκαταστάσεις παραγωγής που ανήκουν στον παραγωγό k . Επιπλέον υποτίθεται ότι σε κάθε περιοχή ζήτησης j δραστηριοποιούνται $|L|$ αγοραστές. Όπως και προηγουμένως ο αγοραστής μιας περιοχής προκειμένου να ικανοποιήσει την ζήτηση του r_j^ℓ απευθύνεται σε έναν διαμεσολαβητή. Επομένως η συνολική ζήτηση που αντιμετωπίζει ο διαμεσολαβητής είναι ένα διάνυσμα $\mathbf{r} = [r_j^\ell]$.

Ξανά ο διαμεσολαβητής έχει την δυνατότητα να απευθυνθεί στους $|K|$ παραγωγούς προκειμένου να προμηθευτεί το προϊόν και να ικανοποιήσει την ζήτηση του πελάτη. Κάθε παραγωγός k αντιμετωπίζει μια διαφορετική συνάρτηση παραγωγής $p_k(\mathbf{s}_k)$ κατά την παραγωγική διαδικασία και τιμολογεί το προϊόν με βάση μια συνάρτηση τιμολόγησης $o_k(\mathbf{s}_k)$, όπου $\mathbf{s}_k = [x_i]_{i \in M_k}$ είναι ένα διάνυσμα στο $\mathbb{R}^{|M_k|}$ που περιλαμβάνει τις παραγόμενες ποσότητες σε κάθε εγκατάσταση i που ανήκει στον προμηθευτή k , δηλαδή $x_i = \sum_{\ell=1}^{|L|} x_{ij}^\ell$. Οι συναρτήσεις $o_k(\cdot)$ και $p_k(\cdot)$ θεωρούνται ότι είναι κυρτές (μη φθίνουσες) και παραγωγίσιμες.

Επομένως, για δεδομένη ποσότητα ζήτησης \mathbf{r} , το πρόβλημα του διαμεσολαβητή είναι να επιλέξει τις ποσότητες που θα παραγγείλει από κάθε παραγωγό έτσι ώστε να ικανοποιήσει την ζήτηση κάθε αγοραστή κάθε περιοχής στο ελάχιστο δυνατό κόστος. Το οποίο μαθηματικά μπορεί να διατυπωθεί ως:

$$(\mathbf{MITP}) \quad \min \sum_{k=1}^{|K|} o_k(\mathbf{s}_k) + \sum_{i=1}^{|M|} \sum_{j=1}^{|N|} t_{ij} \left(\sum_{\ell=1}^{|L|} t_{ij} x_{ij}^\ell \right) \quad (4.51)$$

$$\text{υπό} \quad \sum_{j=1}^{|N|} \sum_{\ell=1}^{|L|} x_{ij}^\ell = x_i, \quad \forall i \quad (4.52)$$

$$\sum_{i=1}^{|M|} x_{ij}^\ell = r_j^\ell, \quad \forall j, \quad \forall \ell \quad (4.53)$$

$$x_{ij}^\ell \geq 0, \quad \forall i, \forall j \quad (4.54)$$

Αν υποθεθεί ότι ο κάθε παραγωγός έχει την δυνατότητα να τιμολογήσει το προϊόν χωριστά για κάθε αγοραστή αν δηλαδή η $o_k(\mathbf{s}_k)$ και η $p_k(\mathbf{s}_k)$ είναι διαχωρίσιμες ως προς ℓ τότε το πρόβλημα χωρίζεται σε ℓ προβλήματα ένα για κάθε αγοραστή. Είναι επομένως λογικό να υποθεθεί ότι οι συναρτήσεις αυτές είναι μη-διαχωρίσιμες ως προς ℓ . Το πρόβλημα **(MITP)** είναι ένα κυρτό πρόβλημα μεταφοράς-παραγωγής πολλών προϊόντων (multicommodity). Οι περιορισμοί (4.52) είναι προσδιοριστικοί

και δύναται να απαλειφθούν. Οι περιορισμοί (4.53) αντιστοιχούν σε καρτεσιανό γινόμενο. Η μή διάσπαση του προβλήματος οφείλεται στην μή προσθετική διαχωρισιμότητα της συνάρτησης (4.51).

4.4 Αλγόριθμοι Επίλυσης

Τόσο τα προβλήματα **SO-TP**, **UO-TP**, **SO-TPE**, **UO-TPE** του προηγούμενου κεφαλαίου όσο και τα προβλήματα **STP**, **ITP**, και **MITP** του παρόντος κεφαλαίου αφορούν την ελαχιστοποίηση μίας παραγωγίσιμης κυρτής συνάρτησης υπο γραμμικούς περιορισμούς. Είναι δηλαδή της μορφής:

$$\begin{aligned} \text{(P1)} \quad & \min f(\mathbf{x}) \\ & \text{υπό } \mathbf{x} \in \mathcal{X}, \end{aligned}$$

όπου το $\mathcal{X} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$ είναι ένα μη κενό πολυεδρικό σύνολο.

Όπως ήδη έχει αναφερθεί ορισμένοι από τους περιορισμούς αυτών των προβλημάτων, π.χ οι περιορισμοί (4.52), του **MITP**, είναι προσδιοριστικοί και δύναται να απαλειφθούν. Η απάλειψη των προσδιοριστικών περιορισμών προσδίδει στα προβλήματα μια ιδιαίτερη μορφή. Η μορφή αυτή είναι παρούσα στα προβλήματα **UO-TP** και **UO-TPE** του προηγούμενου κεφαλαίου και μέσω της παιγνιοθεωρητικής τους προέλευσης, της παρουσίας δηλαδή ανταγωνισμού των πελατών. Ο κάτωθι ορισμός καθορίζει την σχέση των ανταγωνιστικών παιγνίων με την ιδιαίτερη μορφή που προκύπτει από την εξάλειψη των προσδιοριστικών περιορισμών.

Ορισμός 4.2 Η λύση x^* είναι ένα σημείο ισορροπίας Nash του παιγνίου $\mathcal{G} = [\mathcal{N}, \{\mathcal{X}_i\}_{i \in \mathcal{N}}, \{f_i\}_{i \in \mathcal{N}}]$ εάν

$$f_i(\mathbf{x}^*) = \min_{\mathbf{x}_i \in \mathcal{X}_i} f_i(\mathbf{x}_{i-}^*, \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_{i+}^*), \quad \forall i \in \mathcal{N} \quad (4.55)$$

Όπου \mathbf{x}_{i-} το μερικό διάνυσμα των στρατηγικών $[\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{i-1}]$ και \mathbf{x}_{i+} το μερικό διάνυσμα των στρατηγικών $[\mathbf{x}_{i+1}, \dots, \mathbf{x}_n]$.

Το παίγνιο \mathcal{G} είναι ένα **ομαδικό παίγνιο (team game)** εάν $f_i(\cdot) = f(\cdot)$, $\forall i \in \mathcal{N}$, δηλαδή, αν όλοι οι παίκτες μοιράζονται την ίδια συνάρτηση απώλειας (loss function). Σε αυτή την περίπτωση ένα σημείο ισορροπίας Nash μπορεί να βρεθεί επιλύοντας το κάτωθι πρόβλημα

$$\text{(CPP)} \quad \min f(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n) \quad (4.56)$$

$$\text{υπό } \mathbf{x}_i \in \mathcal{X}_i, \quad \forall i \in \mathcal{N}, \quad (4.57)$$

το οποίο είναι ένα πρόβλημα βελτιστοποίηση που ορίζεται πάνω σε ένα καρτεσιανό γινόμενο συνόλων, (Cartesian product of sets).

Τα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά των προβλημάτων είτε της μορφής **P1** είτε της μορφής **CPP** τα καθιστούν επιλύσιμα με την μέθοδο Frank-Wolfe καθώς και με βελτιωμένες εκδοχές της μεθόδου. Στις παραγράφους που ακολουθούν αναπτύσσουμε την μέθοδο Frank-Wolfe λεπτομερώς, εντοπίζουμε τα πλεονεκτήματα της και τα μειονεκτήματά της και προχωρούμε σε βελτιώσεις της με σκοπό την απαλοιφή ορισμένων από τα μειονεκτήματά της.

4.4.1 Η Μέθοδος Frank-Wolfe

Ο αλγόριθμος Frank and Wolfe [63], που αρχικά διατυπώθηκε για τετραγωνική αντικειμενική συνάρτηση $f(\mathbf{x}) = \mathbf{q}^T \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x}$, είναι μια από τις πλέον πολυ-χρησιμοποιημένες τεχνικές για την εύρεσης λύσης συγκεκριμένων μη-γραμμικών προβλημάτων όπως το **P1**. Η δημοτικότητα της τεχνικής οφείλεται εν μέρει στη δυνατότητά της να εκμεταλλευτεί την ειδική δομή κάποιων περιορισμών όπως είναι για παράδειγμα οι περιορισμοί δικτύου, [24, 37, 49, 50, 64, 71, 115], και εν μέρει στο γεγονός ότι έχει την δυνατότητα να αποσυνθέτει μη-διαχωρίσιμα προβλήματα (non separable problems) πάνω σε καρτεσιανά γινόμενα συνόλων (βλ. [110], [139]). Επίσης η εφαρμογή της είναι γενικά αρκετά απλή. Ο αλγόριθμος προτάθηκε ως τεχνική δρομολόγησης στα δίκτυα δεδομένων (data networks) με το όνομα της μεθόδου απόκλισης ροής (flow deviation method) από τον [64], και ανεξάρτητα για το πρόβλημα ανάθεσης κυκλοφορίας στα οδικά δίκτυα από [115].

Ο αλγόριθμος στηρίζεται στην γραμμικοποίηση της αντικειμενικής συνάρτησης. Δηλαδή, για δεδομένο σημείο $\mathbf{x}^k \in \mathcal{X}$, ο αλγόριθμος προσεγγίζει την αντικειμενική συνάρτηση με ένα πρώτης τάξης ανάπτυγμα Taylor στο \mathbf{x}^k , δημιουργώντας το γραμμικό υποπρόβλημα

$$\begin{aligned} (\mathbf{FW-SUB}^k) \quad & \min \quad \nabla f(\mathbf{x}^k)^T \mathbf{x} \\ & \text{υπό} \quad \mathbf{x} \in \mathcal{X}, \end{aligned} \quad (4.58)$$

όπου ο σταθερός όρος έχει εξαιρεθεί από την αντικειμενική συνάρτηση. Η λύση $\bar{\mathbf{x}}^k$ του υποπροβλήματος χρησιμοποιείται για την κατασκευή κατωφούς κατεύθυνσης αναζήτησης (search direction of descent) $\mathbf{d}^k = \bar{\mathbf{x}}^k - \mathbf{x}^k$. Το επόμενο σημείο επανάληψης \mathbf{x}^{k+1} , δημιουργείται από μία γραμμική αναζήτηση στο διάστημα $[0, 1]$ δηλαδή, $\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k + \alpha_k \mathbf{d}^k$, όπου $\alpha_k \in \arg \min_{\alpha \in [0,1]} f(\mathbf{x}^k + \alpha \mathbf{d}^k)$, και στην συνέχεια η διαδικασία επαναλαμβάνεται.

Εάν η f στο **P1** είναι κυρτή τότε μία ενδιαφέρουσα πλευρά της εφαρμογής του αλγορίθμου στο **P1** είναι η δημιουργία ενός κάτω ορίου στο $f(\mathbf{x}^*)$ για κάθε σημείο επανάληψης \mathbf{x}^k . Δεδομένης της κυρτότητας της συνάρτησης $f(x)$ και της ελαχιστοποίησης στο πρόβλημα **(FW-SUB)^k** το κάτω όριο δίνεται σε κάθε επανάληψη από την $f(\mathbf{x}^k) + \nabla f(\mathbf{x}^k)^T (\bar{\mathbf{x}}^k - \mathbf{x}^k)$. Όμως, αυτά τα κάτω όρια δεν αυξάνονται μονοτονικά. Επομένως, σε κάθε επανάληψη k , το τρέχων κάτω όριο ορίζεται σαν $\text{lb}d^k = \max\{\text{lb}d^{k-1}, f(\mathbf{x}^k) + \nabla f(\mathbf{x}^k)^T (\bar{\mathbf{x}}^k - \mathbf{x}^k)\}$, όπου $\text{lb}d^{k-1}$ είναι το υπάρχον κάτω όριο, το οποίο αρχικά τίθεται ίσο με $-\infty$. Στην πράξη ο αλγόριθμος τερματίζει

εφόσον $f(\mathbf{x}^k) - \text{lbd}^k \leq \epsilon_1$ ή $\frac{f(\mathbf{x}^k) - \text{lbd}^k}{f(\mathbf{x}^k)} \leq \epsilon_2$ για καταλλήλως επιλεγμένα $\epsilon_1 > 0$ και $\epsilon_2 > 0$.

Επιπλέον, παρατηρούμαι ότι όταν ο αλγόριθμος εφαρμόζεται σε ομαδικά παίγνια **CPP**, το υποπρόβλημα **FW-SUB**^k διασπάται σε n προβλήματα ένα για κάθε παράγοντα του καρτεσιανού γινομένου εξαιτίας της γραμμικής αντικειμενικής συνάρτησης στο **FW-SUB**^k:

$$\left. \begin{array}{l} \min \quad \nabla_i f(\mathbf{x}^k)^T \mathbf{x}_i \\ \text{υπό} \quad \mathbf{x}_i \in \mathcal{X}_i \end{array} \right\} \forall i \in \mathcal{N}, \quad (4.59)$$

όπου $\nabla_i f(\mathbf{x})$ είναι το κλίτος της f ως προς το i ο τμήμα του $\mathbf{x} = [\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_i, \dots, \mathbf{x}_n]$, που είναι το i ο τμήμα του κλίτος της f . Επομένως η εφαρμογή του αλγόριθμου Frank-Wolfe στο **CPP** λειτουργεί σαν ένα παράλληλο σχέδιο αποσύνθεσης του προβλήματος αφού τα υποπροβλήματα (4.59) δεν αλληλεπιδρούν.

Υπάρχουν διάφορα αποτελέσματα σύγκλισης του αλγορίθμου στην μορφή που αυτός έχει περιγραφεί παραπάνω καθώς επίσης και για αρκετές από τις ειδικές μορφές του [36, 134, 161, 49, 50, 84]. Για την πληρότητα της ανάλυσης που παρουσιάζεται θα καταδείξουμε στην συνέχεια την ολική σύγκλιση του αλγορίθμου σε ένα ολικό ελάχιστο του **(P1)** υπό της ακόλουθες υποθέσεις:

(A1) Η $f(\mathbf{x})$ είναι συνεχώς παραγωγίσιμη στο \mathcal{X} ,

(A2) Η $f(\mathbf{x})$ είναι ψευδοκυρτή (pseudoconvex) στο \mathcal{X} , και

(A3) Το \mathcal{X} είναι κλειστό και φραγμένο είναι δηλαδή ένα πολύτοπο.

Η υπόθεση **A2** είναι απαραίτητη για την επαλήθευση της ολικής βελτιστότητας κάθε σημείου συσσώρευσης της ακολουθίας $\{\mathbf{x}^k\}$. Ενώ η υπόθεση **A3** εξασφαλίζει ότι το πρόβλημα **P1** και το υποπρόβλημα **FW-SUB**^k έχουν πεπερασμένα βέλτιστα. Μπορεί να αντικατασταθεί από την υπόθεση της «απόθησης» (coercivity) $\lim_{\|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty} f(\mathbf{x}) = \infty$ στο \mathcal{X} , και την υπόθεση ότι η $\nabla f(\mathbf{x}^k)^T \mathbf{x}$ είναι φραγμένη από κάτω στο \mathcal{X} για όλα τα $\mathbf{x}^k \in \mathcal{X}$.

Θεώρημα 4.2 *Υπό τις επιβληθείσες υποθέσεις ο αλγόριθμος Frank-Wolfe είτε τερματίζει σε πεπερασμένο αριθμό επαναλήψεων παράγοντας μια βέλτιστη λύση του **P1** είτε δημιουργεί μια άπειρη ακολουθία εφικτών σημείων $\{\mathbf{x}^k\}$ στο \mathcal{X} της οποίας κάθε σημείο συσσώρευσης είναι μια βέλτιστη λύση του **P1**.*

Απόδειξη: Ο αλγόριθμος θα τερματίσει στην επανάληψη k εάν η λύση στο ακρότατο σημείο $\bar{\mathbf{x}}^k$ του **FW-SUB**^k είναι τέτοια ώστε $(\bar{\mathbf{x}}^k - \mathbf{x}^k)^T \nabla f(\mathbf{x}^k) = 0$, συνεπάγοντας ότι $\nabla f(\mathbf{x}^k)^T \bar{\mathbf{x}}^k = \nabla f(\mathbf{x}^k)^T \mathbf{x}^k$. Πράγματι, η βελτιστότητα του $\bar{\mathbf{x}}^k$ στο **FW-SUB**^k συνεπάγεται ότι $(\bar{\mathbf{x}}^k - \mathbf{x})^T \nabla f(\mathbf{x}^k) \leq 0$, $\forall \mathbf{x} \in \mathcal{X}$, και συνεπώς $(\mathbf{x} - \mathbf{x}^k)^T \nabla f(\mathbf{x}^k) \geq 0$, $\forall \mathbf{x} \in \mathcal{X}$. Άρα, το \mathbf{x}^k είναι βέλτιστο του **P1**. Επομένως υποθέτουμε ότι $(\bar{\mathbf{x}}^k - \mathbf{x}^k)^T \nabla f(\mathbf{x}^k) < 0$. Ορίζοντας την $\phi(\alpha) = f(\mathbf{x}^k + \alpha(\bar{\mathbf{x}}^k - \mathbf{x}^k))$, παρατηρούμαι ότι $\phi'(0) = (\bar{\mathbf{x}}^k - \mathbf{x}^k)^T \nabla f(\mathbf{x}^k)$, το οποίο συνεπάγεται ότι $\phi'(0) < 0$. Συνεπώς, $\phi(\alpha) <$

$\phi(0)$ για κάποια $\alpha \in [0, 1]$ οπότε $\phi(0) > \min_{\alpha \in [0, 1]} \phi(\alpha)$, όπου, από την υπόθεση της συνέχειας, υπάρχει κάποιο ελάχιστο α^* . Επομένως, $\phi(\alpha_k) < \phi(0)$ που συνεπάγεται ότι $f(\mathbf{x}^{k+1}) < f(\mathbf{x}^k)$. Άρα, $\{\mathbf{x}^k\}$ είναι μια ακολουθία εφικτών σημείων τέτοιων ώστε η $\{f(\mathbf{x}^k)\}$ να είναι μια αυστηρώς φθίνουσα ακολουθία η οποία είναι φραγμένη από κάτω εξαιτίας της συνέχειας της $f(\mathbf{x})$ και της συμπαγότητας (compactness) του \mathcal{X} . Επομένως, η $\{f(\mathbf{x}^k)\}$ έχει ένα πεπερασμένο όριο f^* και η ακολουθία $\{\mathbf{x}^k\}$ έχει ένα σημείο συσσώρευσης $\mathbf{x}^* \in \mathcal{X}$ τέτοιο ώστε $f(\mathbf{x}^*) = f^*$. Αν υποθέσουμε ότι η $\{\mathbf{x}^k\}$ είναι μια υπακολουθία τέτοια ώστε $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{x}^k = \mathbf{x}^*$, τότε πρέπει να έχει μια υπακολουθία $\{\bar{\mathbf{x}}^k\}$ έτσι ώστε η αντίστοιχη $\{\bar{\mathbf{x}}^k\}$ να έχει το ίδιο ακρότατο σημείο $\bar{\mathbf{x}}$ του \mathcal{X} για όλα τα k . Μια τέτοια υπακολουθία υπάρχει αφού ο αριθμός των ακρότατων είναι πεπερασμένος. Τότε, $(\bar{\mathbf{x}} - \mathbf{x})^T \nabla f(\mathbf{x}^k) \leq 0, \forall \mathbf{x} \in \mathcal{X}, \forall k$, το οποίο για $k \rightarrow \infty$ συνεπάγεται ότι

$$(\bar{\mathbf{x}} - \mathbf{x})^T \nabla f(\mathbf{x}^*) \leq 0, \forall \mathbf{x} \in \mathcal{X}. \quad (4.60)$$

Αφού η $\{f(\mathbf{x}^k)\}$ είναι φθίνουσα για κάποιο $\ell > k$ θα έχουμε $f(\mathbf{x}^\ell) \leq f(\mathbf{x}^{k+1}) < f(\mathbf{x}^k)$ το οποίο συνεπάγεται ότι $f(\mathbf{x}^k + \alpha(\bar{\mathbf{x}} - \mathbf{x}^k)) \geq f(\mathbf{x}^\ell)$ για κάποια $\alpha \in [0, 1]$. Παίρνοντας το όριο, όταν το k και ℓ τείνουν στο ∞ θα έχουμε $\mathbf{x}^k \rightarrow \mathbf{x}^*$ και $\mathbf{x}^\ell \rightarrow \mathbf{x}^*$, και κατά συνέπεια το $\frac{f(\mathbf{x}^* + \alpha(\bar{\mathbf{x}} - \mathbf{x}^*)) - f(\mathbf{x}^*)}{\alpha} \geq 0$ για $\alpha \in [0, 1]$. Επιτρέποντας το $\alpha \rightarrow 0^+$ (βλ. [12, 17, 23, 134]) λαμβάνουμε

$$(\bar{\mathbf{x}} - \mathbf{x}^*)^T \nabla f(\mathbf{x}^*) \geq 0. \quad (4.61)$$

Οι ανισότητες (4.60) και (4.61) συνεπάγονται ότι $(\mathbf{x} - \mathbf{x}^*)^T \nabla f(\mathbf{x}^*) \geq 0, \forall \mathbf{x} \in \mathcal{X}$ και συνεπώς το \mathbf{x}^* είναι βέλτιστο του **P1**. \square

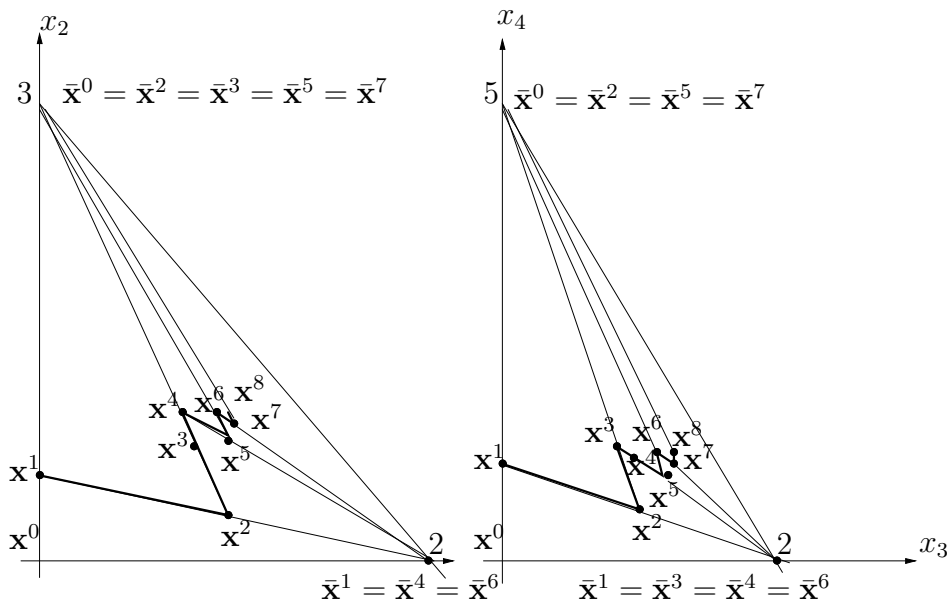
Αν και οι ελκυστικότερες ιδιότητες του αλγορίθμου εμπεριέχονται στα υποπροβλήματα **FW-SUB^k**, δεδομένου ότι είναι γραμμικά και αποσυντίθενται εύκολα, τα ίδια αυτά υποπροβλήματα συνδέονται με τα μειονεκτήματα που χαρακτηρίζουν τον αλγόριθμο. Εξαιτίας της γραμμικότητας τους παράγουν πάντα ακραίες λύσεις και οι κατευθύνσεις που λαμβάνονται μπορεί να εξαρτώνται περισσότερο από τις ιδιότητες της εφικτής περιοχής παρά από τις ιδιότητες της αντικειμενικής συνάρτησης. Επίσης από την παραπάνω απόδειξη της σύγκλιση είναι προφανές ότι ο πεπερασμένος αριθμός των ακρότατων του \mathcal{X} υπονοεί μια επαναλαμβανόμενη δημιουργία των ίδιων ακρότατων μέσα σε μια άπειρη ακολουθία. Συνεπώς θα πρέπει να αναμένεται μια ταλαντευόμενη προσέγγιση της βέλτιστης λύσης \mathbf{x}^* και συμφόρηση (jamming) του αλγορίθμου καθώς προσεγγίζεται το \mathbf{x}^* . Μια τέτοια ακραία περίπτωση περιγράφεται στο παρακάτω παράδειγμα.

Παράδειγμα 4.1 Έστω η ακόλουθη περίπτωση του προβλήματος **CPP**:

$$\begin{aligned} \min \quad & (x_1 - 2x_4)^2 + (3x_2 - x_3)^2 + (x_1 - 2)^2 + (x_3 - 2)^2 + (x_2 - 5)^2 + (x_4 - 3)^2 \\ \text{υπό} \quad & 3x_1 + 2x_2 \leq 6 \\ & 5x_3 + 2x_4 \leq 10 \\ & x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3, 4 \end{aligned}$$

Η βέλτιστη λύση του οποίου είναι $(1.407, 0.890, 1.583, 1.042)$ και η αντίστοιχη βέλτιστη αντικειμενική τιμή είναι 22.89. Αν ο αλγόριθμος αρχικοποιηθεί από την αρχή των αξόνων, θα πρέπει να προσεγγίζει την βέλτιστη λύση ακολουθώντας τις κατευθύνσεις οι οποίες βασίζονται στην εναλλασσόμενη δημιουργία των ακρότατων $(\bar{x}_1^1, \bar{x}_2^1) = (2, 0)$ και $(\bar{x}_1^2, \bar{x}_2^2) = (0, 3)$ και στην εναλλασσόμενη δημιουργία των δύο ακρότατων $(\bar{x}_3^1, \bar{x}_4^1) = (2, 0)$ και $(\bar{x}_3^2, \bar{x}_4^2) = (0, 5)$. Επομένως, καθώς ο αλγόριθμος προσεγγίζει την βέλτιστη ταλαντεύεται ανάμεσα σε αυτά τα ακρότατα.

Αυτό το φαινόμενο απεικονίζεται στο σχήμα 4.1. Η συμφύρση του αλγόριθμου αρχίζει καθώς το μέγεθος του βήματος του αλγορίθμου α_k γίνεται μικρότερο για κάθε νέα επανάληψη. Ο πίνακας 4.1 παρουσιάζει μερικές επαναλήψεις του αλγορίθμου. Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει η δραστική μείωση της αντικειμενικής τιμής στις αρχικές επαναλήψεις του αλγόριθμου σε αντίθεση με τις τελευταίες όπου η μείωση περιορίζεται μόνο σε μερικά δεκαδικά ψηφία. \square



Σχήμα 4.1: Η Κινήσεις του Αλγόριθμου Frank-Wolfe στο Διάστημα των Υποπροβλημάτων

Μπορεί επομένως ναδειχθεί ότι ο ρυθμός σύγκλισης του αλγόριθμου Frank-Wolfe είναι υπό-γραμμικός [36, 54]. Για αυτό λόγο τα τελευταία χρόνια έχουν προταθεί αρκετές βελτιώσεις του αρχικού αλγόριθμου που βασίζονται είτε στην έννοια της εφικτής κατωφερούς κατεύθυνσης είτε στην μέθοδο δημιουργίας στηλών. Οι βελτιώσεις αυτές εξετάζονται στην επόμενη ενότητα.

k	\mathbf{x}^k	$f(\mathbf{x}^k)$	$\bar{\mathbf{x}}_1^k$	$\bar{\mathbf{x}}_2^k$	lbd^k	\mathbf{d}^k	α_k
1	(0.000,0.000, 0.000,0.000)	42.000	(0.000,3.000)	(0.000,5.000)	-18.000	(0.000,3.000, 0.000,5.000)	0.139
2	(0.000,0.419, 0.000,0.695)	37.814	(2.000,0.000)	(2.000,0.000)	11.209	(2.000,-4.186, 2.000,-0.698)	0.432
3	(0.763,0.562, 0.763,0.936)	29.102					
33	(1.284,0.826, 1.428,1.015)	23.861	(0.000,3.000)	(2.000,0.000)	22.290	(-1.284,2.174, 0.572,-1.015)	0.0179
34	(1.261,0.865, 1.438,0.997)	23.847					

Πίνακας 4.1: Επαναλήψεις του Αλγόριθμου Frank-Wolfe

4.4.2 Βελτιώσεις Εφικτής Κατεύθυνσης

Η βασική ιδέα της μεθόδου βασίζεται στην παρεμπόδιση των παραγόμενων κατευθύνσεων να στηρίζονται στα ακρότατα της εφικτής περιοχής. Η παρεμπόδιση αυτή μπορεί να γίνει κυρίως με δυο τρόπους, (α) είτε με την αποφυγή της πλήρους γραμμικοποίησης της αντικειμενικής συνάρτησης ή (β) με τον εμπλουτισμό των υποπροβλημάτων Frank-Wolfe με κάποιο μη γραμμικό όρο. Σε κάθε περίπτωση το αρχικό πρόβλημα **P1** αντικαθίσταται σε κάθε επανάληψη από μια ακολουθία ευκολότερων (υπό-) προβλημάτων τα οποία λαμβάνονται με αντικατάσταση της αρχικής αντικειμενικής συνάρτησης από μια νέα που εξαρτάται από την τρέχουσα επανάληψη.

Όπως προτάθηκε από τους [110] η αρχική συνάρτηση $f(\cdot)$ μπορεί να γραμμικοποιηθεί μόνος μερικώς εάν η $f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n f_i(x_i) + e(\mathbf{x})$, όπου οι $f_i(\cdot)$ είναι αυστηρώς κυρτές συναρτήσεις και η $e(\cdot)$ δεν είναι αθροιστικώς διαχωρίσιμη. Σε μια τέτοια περίπτωση τότε μόνο η $e(\cdot)$ χρίζει γραμμικοποίησης. Ακόμα και αν η $f(\cdot)$ δεν έχει την απαραίτητη μορφή αυτή μπορεί να επιβληθεί με την εισαγωγή μιας δεύτερης συνάρτησης $\varphi(\cdot)$, που είναι αυστηρώς κυρτή και αθροιστικώς διαχωρίσιμη. Τότε η αρχική αντικειμενική συνάρτηση $f(\cdot)$ αντικαθίσταται από την ισοδύναμη συνάρτηση $\varphi(\cdot) + [f(\cdot) - \varphi(\cdot)]$ και γραμμαποιείται το σφάλμα $e(\cdot) = f(\cdot) - \varphi(\cdot)$.

Στην περίπτωση εφαρμογής της μεθόδου της μερικής γραμμικοποίησης σε προβλήματα των οποίων η εφικτή περιοχή είναι το καρτεσιανό γινόμενο πολυεδρικών συνόλων όπως για παράδειγμα το πρόβλημα **CPP**, η ιδιότητα της παράλληλης αποσύνθεσης του αρχικού προβλήματος Frank-Wolfe διατηρείται με την αντικατάσταση του (4.59) με τα αυστηρώς κυρτά προβλήματα

$$\left. \begin{array}{l} \min f_i(\mathbf{x}_j) + \nabla_i e(\mathbf{x}^k)^T \mathbf{x}_i \\ \text{υπό } \mathbf{x}_i \in \mathcal{X}_i \end{array} \right\} \forall i \in \mathcal{N}. \quad (4.62)$$

Αν $\bar{\mathbf{x}}^k = [\bar{\mathbf{x}}_1^k, \dots, \bar{\mathbf{x}}_n^k]$ είναι το σημείο που λαμβάνεται ύστερα από την επίλυση αυτών των υποπροβλημάτων, τότε μια εφικτή κατωφερής κατεύθυνση θα είναι η $\mathbf{d}^k = \bar{\mathbf{x}}^k - \mathbf{x}^k$ το επόμενο σημείο επανάληψης \mathbf{x}^{k+1} παράγεται από μια γραμμική αναζήτηση στο διάστημα $[0, \bar{\alpha}_k]$, όπου $\bar{\alpha}_k = \max\{\alpha \geq 0 | \mathbf{x}^k + \alpha \mathbf{d}^k \in \mathcal{X}\}$, δηλαδή,

k	\mathbf{x}^k	$f(\mathbf{x}^k)$	$\bar{\mathbf{x}}_1^k$	$\bar{\mathbf{x}}_2^k$	\mathbf{d}^k	α_k
0	(0.000,0.000, 0.000,0.000)	42.000	(1.000,0.500)	(1.000,0.600)	(1.000,0.500, 1.000,0.600)	1.500
1	(1.500,0.750, 1.500,0.900)	23.625	(1.410,0.885)	(1.556,1.109)	(-0.089,0.135, 0.056,0.209)	1.000
2	(1.410,0.885, 1.556,1.109)	22.913	(1.417,0.875)	(1.582,1.045)	(0.007,-0.010, 0.026,-0.064)	0.880
3	(1.416,0.876, 1.578,1.053)	22.894				

Πίνακας 4.2: Επαναλήψεις του Αλγόριθμου Μερικής Γραμμικοποίησης

$$\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k + \alpha_k \mathbf{d}^k, \text{ όπου } \alpha_k \in \arg \min_{\alpha \in [0, \bar{\alpha}_k]} f(\mathbf{x}^k + \alpha \mathbf{d}^k).$$

Η συμπεριφορά του αλγορίθμου παρουσιάζεται στο επόμενο παράδειγμα.

Παράδειγμα 4.2 Η μέθοδος της μερικής γραμμικοποίησης εφαρμόζεται στο πρόβλημα του παραδείγματος 4.1 ύστερα από την γραμμικοποίηση μόνο του μη διαχωρίσιμου τμήματος της αντικειμενικής συνάρτησης $-4x_1x_4 - 6x_2x_3$, οπότε λαμβάνουμε δύο υποπροβλήματα

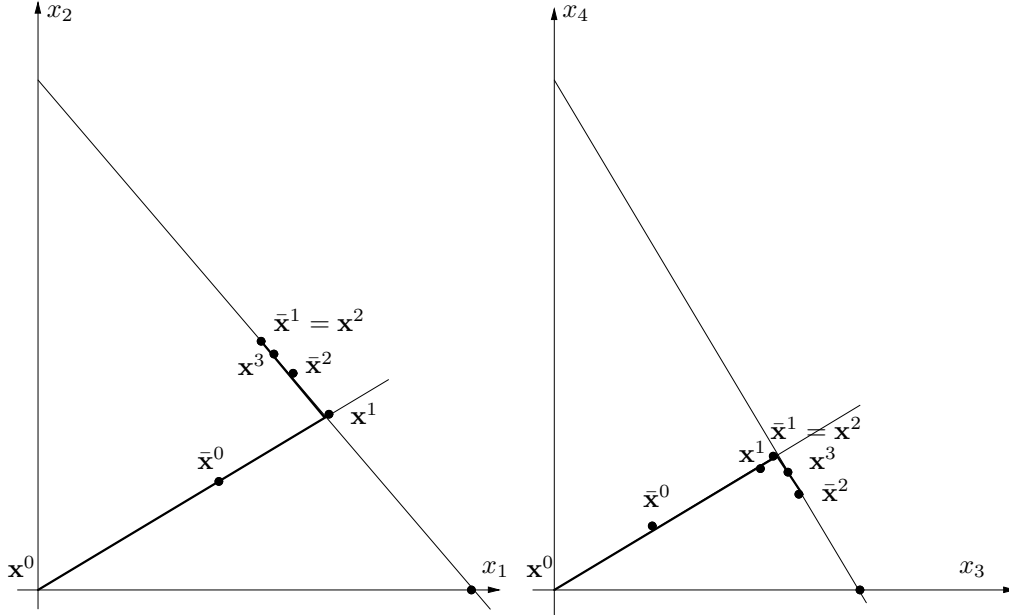
$$\begin{aligned} (\text{SUB}^1) \quad & \min \quad 2(x_1)^2 + 10(x_2)^2 - (4 + 4\bar{x}_4)x_1 - (10 + 6\bar{x}_3)x_2 \\ & \text{υπό} \quad 3x_1 + 2x_2 \leq 6 \\ & \quad \quad x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} (\text{SUB}^2) \quad & \min \quad 2(x_3)^2 + 5(x_4)^2 - (4 + 6\bar{x}_2)x_3 - (6 + 4\bar{x}_1)x_4 \\ & \text{υπό} \quad 5x_3 + 2x_4 \leq 10 \\ & \quad \quad x_3, x_4 \geq 0. \end{aligned}$$

Στον πίνακα 4.2 παρουσιάζονται τρεις επαναλήψεις του αλγορίθμου μερικής γραμμικοποίησης ενώ το σχήμα 4.2 αναπαριστά τις κινήσεις του αλγορίθμου στα εφικτά σύνολα simplices των υποπροβλημάτων. Σε σύγκριση με τον αλγόριθμο Frank-Wolfe παρατηρούμαι ότι η μέθοδος συγκλίνει ταχύτερα στο βέλτιστο. Από το σχήμα είναι επίσης εμφανές ότι ο αλγόριθμος μερικής γραμμικοποίησης εξαρτάται λιγότερο από το σχήμα της εφικτής περιοχής αφού διατηρεί στα υποπροβλήματα περισσότερες πληροφορίες σχετικά με την αρχική αντικειμενική συνάρτηση. \square

Μια σημαντική ιδιότητα του αλγορίθμου μερικής γραμμικοποίησης, η οποία δεν ισχύει για τον αλγόριθμο Frank-Wolfe, είναι ότι τα υποπροβλήματα (4.62) είναι ικανά να παρέχουν την βέλτιστη λύση του αρχικού προβλήματος.



Σχήμα 4.2: Κινήσεις του Αλγόριθμου Μερικής Γραμμικοποίησης

4.4.3 Απέρρικτη Αποσύνθεση (Simplicial Decomposition)

Έστω το πρόβλημα **P1**. Αφού το \mathcal{X} είναι ένα πολύεδρο, τότε από το θεώρημα Caratheodory [12, 17, 23, 134] συνεπάγεται ότι κάθε σημείο του \mathcal{X} μπορεί να εκφραστεί σαν το κυριό συνδυασμό των ακρότατων σημείων του συν το γραμμικό συνδυασμό των ακρότατων κατευθύνσεών του. Υποθέτουμε για χάρη απλούστευσης ότι το \mathcal{X} είναι ένα πολύτοπο και επομένως θα χρησιμοποιήσουμε μόνο το πρώτο μέρος του θεωρήματος Caratheodory. Το πρόβλημα **P1** μπορεί να αναδιατυπωθεί ως,

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{MP1}) \quad & \min_{\alpha} \quad f\left(\sum_{k=1}^K \alpha_k \bar{\mathbf{x}}^k\right), \\
 & \text{υπό} \quad \sum_{k=1}^K \alpha_k = 1, \\
 & \quad \alpha_k \geq 0, \quad k = 1, \dots, K,
 \end{aligned}$$

όπου τα $\bar{\mathbf{x}}^k$ είναι ακρότατα σημεία του \mathcal{X} . Αν α^* είναι μια βέλτιστη λύση του **MP1**, η βέλτιστη λύση του **P1** υπολογίζεται ως $\mathbf{x}^* = \sum_{k=1}^K \alpha_k^* \bar{\mathbf{x}}^k$. Αφού το $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$, σύμφωνα με το θεώρημα Caratheodory χρειάζονται το πολύ $n + 1$ ακρότατα σημεία για να αναπαραστήσουν το βέλτιστο σημείο \mathbf{x}^* .

Αν το \mathcal{X} ορίζεται σαν το καρτεσιανό γινόμενο πολυτόπων, όπως στην περίπτωση του προβλήματος **CPP**, ο παραπάνω μετασχηματισμός του προβλήματος εξακολουθεί

να ισχύει. Βέβαια μια άλλη δυνατότητα είναι η εφαρμογή του θεωρήματος Carathéodory σε κάθε πολύτοπο ξεχωριστά. Σε αυτή την περίπτωση το **CPP** μπορεί να αναδιατυπωθεί ως:

$$\begin{aligned}
 \text{(MP2)} \quad \min_{\alpha} \quad & f\left(\sum_{k=1}^{K_1} \alpha_k^1 \bar{x}_1^k, \dots, \sum_{k=1}^{K_n} \alpha_k^n \bar{x}_n^k\right), \\
 \text{υπό} \quad & \sum_{k=1}^{K_i} \alpha_k^i = 1, \quad i = 1, \dots, n, \\
 & \alpha_k^i \geq 0, \quad k = 1, \dots, K_i, \quad i = 1, \dots, n,
 \end{aligned}$$

όπου τα \bar{x}_i^k είναι τα ακραία σημεία του i ου πολύτοπου \mathcal{X} στο καρτεσιανό γινόμενο $\mathcal{X} = \mathcal{X}_1 \times \dots \times \mathcal{X}_n$. Εμφανώς, το **MP2** περιλαμβάνει έναν περιορισμό κυρτότητας για κάθε πολύτοπο στο καρτεσιανό γινόμενο και είναι επομένως ένα πρόβλημα ελαχιστοποίησης πάνω σε καρτεσιανό γινόμενο απέριτων συνόλων (simplices).

Η προσέγγιση της απέριτης αποσύνθεσης βασίζεται στην επίλυση μια περιορισμένης εκδοχής του **MP1** ή **MP2**, που καλείται περιορισμένο κυρίαρχο πρόβλημα. Ο περιορισμός αφορά τον αριθμό των ακρότατων σημείων που χρησιμοποιούνται, δηλαδή ο αριθμός ακρότατων \bar{K} που χρησιμοποιούνται είναι τελικά πολύ μικρότερος από τον πραγματικό αριθμό. Εάν η παραχθείσα λύση δεν είναι βέλτιστη για το αρχικό πρόβλημα, τότε νέα ακρότατα προστίθενται και το νέο περιορισμένο κυρίαρχο πρόβλημα ξαναεπιλύεται. Προκειμένου να παραχθούν τα απαραίτητα σε κάθε επανάληψη ακρότατα επιλύονται είτε τα υποπροβλήματα **FW-SUB^k** ή το (4.59). Κατά συνέπεια η απέριτη αποσύνθεση μπορεί να θεωρηθεί ως βελτιωμένη έκδοση του αρχικού αλγόριθμου Frank-Wolfe όπου η γραμμική αναζήτηση έχει αντικατασταθεί από ένα περιορισμένο κυρίαρχο πρόβλημα τύπου **MP1** ή **MP2**, ή σαν ένας μηχανισμός δημιουργίας στηλών, όπου οι στήλες (δηλ. τα ακρότατα) παράγονται όπως απαιτείται.

Ο αλγόριθμος έχει προταθεί και αναλυθεί για την επίλυση προβλημάτων ανάθεσης κυκλοφορίας και προβλημάτων ανάθεσης ροής από πολλούς ερευνητές [89, 37, 210, 85, 86, 109] και έχει αποδειχθεί ότι είναι πεπερασμένος από τους [85]. Παρ' όλα αυτά η επίλυση των περιορισμένων κυρίαρχων προβλημάτων απαιτεί την εφαρμογή απείρως συγκλίνοντων αλγορίθμων αρκετοί από τους οποίους έχουν προταθεί στην βιβλιογραφία συμπεριλαμβανομένων των μεθόδων προβολής δεύτερης τάξης (projected second-order methods) όπως είναι η μέθοδος Newton [19, 21, 22], η μέθοδος μειωμένου κλίτους (reduced gradient methods)[109].

4.4.4 Κυκλική Αποσύνθεση (Cyclic Decomposition)

Σε αυτή την ενότητα αντιμετωπίζουμε το πρόβλημα **CPP**. Οι τεχνικές για την επίλυση του προβλήματος **CPP** που παρουσιάζονται βασίζονται στην έννοια της γραμμικοποίησης της αντικειμενικής συνάρτησης στα πλαίσια του αλγορίθμου Frank-Wolfe [63] ενσωματωμένης στην μέθοδο της κυκλικής αποσύνθεσης (π.χ. [151]).

Όπως αναφέρθηκε κατά την εφαρμογή του αλγορίθμου Frank-Wolfe σε ομαδικά παίγνια **CPP**, το υποπρόβλημα **FW-SUB**^k διασπάται σε n προβλήματα του τύπου 4.59 ένα για κάθε παράγοντα του καρτεσιανού γινομένου εξαιτίας της γραμμικής αντικειμενικής συνάρτησης στο (4.58).

Στην προσέγγιση της κυκλικής αποσύνθεσης, δεδομένης μιας επανάληψης $\mathbf{x}^{(k)} \in \mathcal{X}$, η επόμενη λαμβάνεται με ανακύκλωση διαμέσου των παραγόντων του καρτεσιανού γινομένου ως εξής:

do for all $i \in \mathcal{N}$

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_i^{(k+1)} &\in \arg \min f(\mathbf{x}_{i-}^{(k+1)}, \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_{i+}^{(k)}) \\ \text{s.t.} & \\ &\mathbf{x}_i \in \mathcal{X}_i \end{aligned} \quad (4.63)$$

end do,

Όπου \mathbf{x}_{i-} το μερικό διάνυσμα των στρατηγικών $[\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{i-1}]$ και \mathbf{x}_{i+} το μερικό διάνυσμα των στρατηγικών $[\mathbf{x}_{i+1}, \dots, \mathbf{x}_n]$.

Η προσέγγιση της κυκλικής αποσύνθεσης μπορεί αν μεταφραστεί με όρους της θεωρίας παιγνίων σαν παίγνιο *φαινομενικού παιξίματος* (fictitious play). Πράγματι, δεδομένης μιας κατάστασης $[\mathbf{x}_{i-}^{(k)}, \mathbf{x}_i^{(k)}, \mathbf{x}_{i+}^{(k)}]$, ο παίκτης i επιλέγει την στρατηγική του $\mathbf{x}_i^{(k+1)}$ έτσι ώστε το διάνυσμα $[\mathbf{x}_{i-}^{(k+1)}, \mathbf{x}_i^{(k+1)}, \mathbf{x}_{i+}^{(k)}]$ να είναι μια επιθυμητή κατάσταση για αυτόν. Ο κύκλος (4.63) επαναλαμβάνεται μέχρι να επιτευχθεί μια κατάσταση η οποία είναι επιθυμητή για όλους τους παίκτες, δηλαδή μέχρι να βρεθεί ένα σημείο ισορροπίας Nash.

Η άμεση εφαρμογή του αλγορίθμου Frank-Wolfe στο πρόβλημα **CPP** λειτουργεί σαν ένα σχέδιο παράλληλης αποσύνθεσης αφού τα υποπροβλήματα δεν επιδρούν το ένα στο άλλο [155]. Απο την άλλη πλευρά η κυκλική αποσύνθεση είναι εγγενώς διαδοχική αφού για την επίλυση ως προς $\mathbf{x}_i^{(k+1)}$, απαιτεί την ύπαρξη του $\mathbf{x}_{i-}^{(k+1)}$ ως δεδομένου. Φυσικά, τα υποπροβλήματα Frank-Wolfe (4.59) θα πρέπει να επιλυθούν διαδοχικά σύμφωνα με μια προκαθορισμένη σειρά. Συνήθως η σειρά που επιλέγεται είναι η κυκλική σειρά που προσδιορίζεται από την (4.63). Είναι προφανές ότι στα πλαίσια μια τέτοιας αντιμετώπισης του αλγορίθμου Frank-Wolfe αν και δημιουργούνται νέες πληροφορίες στην διάρκεια ενός βρόχου, ο αλγόριθμος αποτυγχάνει να τις εκμεταλλευτεί. Σε αντίθεση, στην κυκλική αποσύνθεση οι νέες πληροφορίες που δημιουργούνται χρησιμοποιούνται άμεσα και πλήρως μέχρι τον τερματισμό του αλγορίθμου.

Τα προβλήματα της (4.59) είναι γραμμικά και επομένως μπορούν να επιλυθούν ευκολότερα συγκριτικά με τα αντίστοιχα μη γραμμικά της (4.63). Όπως αποδείξαμε στην §4.4.1 ο αλγόριθμος Frank-Wolfe συγκλίνει ολικά ενώ έχει αποδειχθεί ότι συγκλίνει με υπογραμμικό ρυθμός [36]. Η σύγκλιση του αλγορίθμου της κυκλικής

αποσύνθεσης παρατίθεται από τους [174] υπό την υπόθεση αυστηρής κυρτότητας και ακριβής επίλυσης των υποπροβλημάτων (4.63).

Το ερώτημα επομένως που προκύπτει είναι εάν κατά την προσεγγιστική επίλυση των υποπροβλημάτων που ορίζονται από την (4.63) αναπτύσσεται μια σχέση αλληλεξάρτησης ανάμεσα στην υπολογιστική εργασία που απαιτείται σε κάθε κύκλο και στον αριθμό των κύκλων και κατά πόσο μια τέτοια προσέγγιση συγκλίνει ολικά προς ένα βέλτιστο.

Σε αυτή την ενότητα και προκειμένου να απαντήσουμε σε αυτό το ερώτημα θα αντιμετωπίσουμε την συγχώνευση των δύο αλγορίθμων. Πιο συγκεκριμένα θα δείξουμε ότι αρκεί να εφαρμοστεί μια μόνο επανάληψη του αλγορίθμου Frank-Wolfe σε κάθε υποπρόβλημα της (4.63), προκειμένου να εξασφαλιστεί ολική σύγκλιση. Ονομάζουμε την προσέγγιση αυτή κυκλική γραμμικοποίηση. Η προσέγγιση αυτή μπορεί να θεωρηθεί επίσης σαν μια τροποποίηση του αλγορίθμου Frank-Wolfe υπό την έννοια ότι οι νέες πληροφορίες που παράγονται στην διάρκεια του βρόχου (4.59) χρησιμοποιούνται στην διάρκεια του βρόχου. Σε αυτή την περίπτωση θα ήταν προτιμότερο να αναφερόμαστε σε ένα κύκλο παρά σε έναν βρόχο.

4.4.4.1 Γενικές Ιδιότητες

Για δεδομένο $\mathbf{x}^* \in \mathcal{X}$, έστω ότι,

$$q_i(\mathbf{x}_i) = f(\mathbf{x}_{i-}^*, \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_{i+}^*), \quad \mathbf{x}_i \in \mathcal{X}_i. \quad (4.64)$$

είναι ένας περιορισμός της f στον i ο παράγοντα του καρτεσιανού γινομένου. Θα έχουμε τότε τα παρακάτω αποτελέσματα,

Πρόταση 4.7 *Η q_i είναι συνεχώς παραγωγίσιμη και κυρτή στο \mathcal{X}_i .*

Ορισμός 4.3 *Θα πούμε ότι ένα σημείο $\mathbf{x}^* \in \mathcal{X}$ είναι το i ο τμηματικό ελάχιστο της f στο \mathcal{X} εάν και μόνο εάν*

$$f(\mathbf{x}^*) \leq f(\mathbf{x}_{i-}^*, \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_{i+}^*), \quad \forall \mathbf{x}_i \in \mathcal{X}_i \quad (4.65)$$

Σε όρους παιγνίου, εάν \mathbf{x}^* είναι το i ο τμηματικό ελάχιστο τότε είναι μια επιθυμητή κατάσταση του παίκτη i . Τα ακόλουθα αποτελέσματα προκύπτουν από την (4.64) και την (4.65).

Πρόταση 4.8 *Το $\mathbf{x}^* \in \mathcal{X}$ είναι το i ο τμηματικό ελάχιστο της f στο \mathcal{X} εάν και μόνο εάν*

$$q_i(\mathbf{x}_i^*) \leq q_i(\mathbf{x}_i), \quad \forall \mathbf{x}_i \in \mathcal{X}_i \quad (4.66)$$

Πρόταση 4.9 Το $\mathbf{x}^* \in \mathcal{X}$ είναι το *ιο* τμηματικό ελάχιστο της f στο \mathcal{X} εάν και μόνο εάν ικανοποιείται η κάτωθι μεταβαλλόμενη ανισότητα (variational inequality):

$$\nabla_i f(\mathbf{x}^*)^T (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_i^*) \geq 0, \quad \forall \mathbf{x}_i \in \mathcal{X}_i \quad (4.67)$$

Αν το q_i ορίζεται από την (4.64). Τότε $q_i(\mathbf{x}_i^*) = f(\mathbf{x}^*)$ και $\nabla q_i(\mathbf{x}_i^*) = \nabla_i f(\mathbf{x}^*)$. Ικανή και αναγκαία συνθήκη για να ισχύει η (4.66) ([106, Κεφάλαιο I, Πρόταση 5.1]) είναι η

$$\nabla q_i(\mathbf{x}_i^*)^T (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_i^*) \geq 0, \quad \forall \mathbf{x}_i \in \mathcal{X}_i, \quad (4.68)$$

από την οποία συνεπάγεται η (4.67). \square

Πρόταση 4.10 Το $\mathbf{x}^* \in \mathcal{X}$ είναι ολικό ελάχιστο της f στο \mathcal{X} εάν και μόνο εάν είναι το *ιο* τμηματικό ελάχιστο της f στο \mathcal{X} ως προς όλα τα $i \in \mathcal{N}$.

Απόδειξη: Θα δείξουμε ότι αν

$$f(\mathbf{x}^*) \leq f(\mathbf{x}_{i-}^*, \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_{i+}^*), \quad \forall \mathbf{x}_i \in \mathcal{X}_i, \forall i \in \mathcal{N} \quad (4.69)$$

τότε $f(\mathbf{x}^*) \leq f(\mathbf{x})$, $\forall \mathbf{x} \in \mathcal{X}$. Το αντίστροφο είναι γίνεται αμέσως προφανές.

Από την πρόταση 4.9 και την (4.69), θα έχουμε

$$\nabla_i f(\mathbf{x}^*)^T (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_i^*) \geq 0, \quad \forall \mathbf{x}_i \in \mathcal{X}_i, \forall i \in \mathcal{N}. \quad (4.70)$$

Αθροίζοντας ως προς i στην (4.70) λαμβάνουμε

$$\sum_{i \in \mathcal{N}} [\nabla_i f(\mathbf{x}^*)^T (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_i^*)] \geq 0, \quad \forall \mathbf{x} = [\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n] \in \mathcal{X}, \quad (4.71)$$

το οποίο συνεπάγεται ότι $\nabla f(\mathbf{x}^*)^T (\mathbf{x} - \mathbf{x}^*) \geq 0$, $\forall \mathbf{x} \in \mathcal{X}$, και επομένως $f(\mathbf{x}^*) \leq f(\mathbf{x})$, $\forall \mathbf{x} \in \mathcal{X}$. \square

Η πρόταση 4.10 αναφέρει ότι το \mathbf{x}^* είναι ένα σημείο ισορροπίας Nash για το παίγνιο που προσδιορίζεται από το πρόβλημα **CPP** εάν και μόνο εάν το \mathbf{x}^* είναι επιθυμητό από όλους τους παίκτες.

4.4.4.2 Ο Αλγόριθμος Κυκλικής Γραμμικοποίησης

Ο αλγόριθμος που παρουσιάζεται σε αυτή την ενότητα αποτελεί έναν συνδυασμό του αλγορίθμου Frank-Wolfe και του αλγορίθμου της κυκλικής αποσύνθεσης. Δεδομένου ενός σημείου $\mathbf{x}^{(k)}$ η επίλυση του προβλήματος (4.59), παράγει μια λύση $\mathbf{y}_1^{(k)}$ και στην συνέχεια διενεργείται μια γραμμική αναζήτηση κατά μήκος της κατεύθυνση

$\mathbf{y}_1^{(k)} - \mathbf{x}_1^{(k)}$ η οποία παράγει ένα νέο σημείο $\mathbf{x}_1^{(k+1)}$. Στην συνέχεια αντιμετωπίζεται το δεύτερο πρόβλημα της (4.59) με την διαφορά ότι η αντικειμενική του συνάρτηση δεν περιγράφεται από την $\nabla_2 f(\mathbf{x}^{(k)})$ αλλά την $\nabla_2 f$ στο σημείο $[\mathbf{x}_1^{(k+1)}, \mathbf{x}_2^{(k)}, \mathbf{x}_{2+}^{(k)}]$ το οποίο περιέχει πιο πρόσφατες πληροφορίες συγκριτικά με το σημείο $\mathbf{x}^{(k)}$. Η διαδικασία επαναλαμβάνεται μέχρι να παραχθεί μια νέα επανάληψη $\mathbf{x}^{(k+1)}$. Η διαδικασία που περιγράφηκε μέχρι τώρα ολοκληρώνει έναν κύκλο. Στην συνέχεια αρχίζει ένας νέος κύκλος για το σημείο $\mathbf{x}^{(k+1)}$. Ο ακόλουθος ψευδοκώδικας περιγράφει την προσέγγιση:

algorithm \mathcal{A}

Initialize $\{ \mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{x}^{(0,0)} = [\mathbf{x}_1^{(0)}, \dots, \mathbf{x}_i^{(0)}, \dots, \mathbf{x}_n^{(0)}] \in \mathcal{X}; \quad k = 0 \}$

do for ever

do for all $i \in \mathcal{N}$

$$\mathbf{y}_i^{(k)} \in \arg \min_{\mathbf{x}_i \in \mathcal{X}_i} \nabla_i f(\mathbf{x}^{(i-1,k)})^T \mathbf{x}_i \quad (4.72)$$

$$a_i^k \in \arg \min_{a \in [0,1]} f(\mathbf{x}_{i-}^{(k+1)}, \mathbf{x}_i^{(k)} + a(\mathbf{y}_i^{(k)} - \mathbf{x}_i^{(k)}), \mathbf{x}_{i+}^{(k)}) \quad (4.73)$$

$$\mathbf{x}_i^{(k+1)} = \mathbf{x}_i^{(k)} + a_i^k (\mathbf{y}_i^{(k)} - \mathbf{x}_i^{(k)})$$

$$\mathbf{x}^{(i,k)} = [\mathbf{x}_{i-}^{(k+1)}, \mathbf{x}_i^{(k+1)}, \mathbf{x}_{i+}^{(k)}]$$

end do

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(0,k+1)} = \mathbf{x}^{(n,k)} \quad (4.74)$$

$$\text{if } (\mathbf{x}^{(k+1)} \text{ .eq. } \mathbf{x}^{(k)}) \text{ exit} \quad (4.75)$$

$$k = k + 1$$

end do

Η αλγοριθμική απεικόνιση σημείου σε σύνολο (point-to-set map) \mathcal{A} είναι μια σύνθεση n τμηματικών απεικονίσεων σημείου σε σύνολο $\{\mathcal{A}_i\}_{i=1}^n$, στην οποία κάθε τμήμα \mathcal{A}_i είναι επίσης μια σύνθεση δύο απεικονίσεων σημείου σε σύνολο, της \mathcal{L} και της \mathcal{D}_i , όπου \mathcal{L} είναι η απεικόνιση της γραμμικής αναζήτησης και \mathcal{D}_i η απεικόνιση της δημιουργίας κατεύθυνσης.

Πιο συγκεκριμένα, $\mathcal{D}_i(\mathbf{x}^{(i-1,k)}) = (\mathbf{x}^{(i-1,k)}, \mathbf{d}_i^{(k)})$, όπου η $\mathbf{d}_i^{(k)} = \mathbf{y}_i^{(k)} - \mathbf{x}_i^{(k)}$ και το $\mathbf{y}_i^{(k)}$ λαμβάνεται από την (4.72), ενώ η $\mathcal{L}(\mathbf{x}^{(i-1,k)}, \mathbf{d}_i^{(k)}) = \mathbf{x}_i^{(k+1)}$ από την (4.73), επομένως, $\mathcal{A}_i = \mathcal{L} \circ \mathcal{D}_i$ είναι η απεικόνιση η οποία δεδομένου του $\mathbf{x}^{(i-1,k)}$ ορίζει το $\mathbf{x}^{(i,k)}$.

Τέλος η μετατροπή του $\mathbf{x}^{(k)}$ σε $\mathbf{x}^{(k+1)}$, γίνεται, σύμφωνα με τη (4.74) από την συνολική απεικόνιση $\mathcal{A} = \mathcal{A}_n \circ \mathcal{A}_{n-1} \circ \dots \circ \mathcal{A}_2 \circ \mathcal{A}_1$, ή ισοδύναμα από την $\mathcal{A} = \mathcal{L} \circ \mathcal{D}_n \circ \dots \circ \mathcal{L} \circ \mathcal{D}_2 \circ \mathcal{L} \circ \mathcal{D}_1$.

Υπενθυμίζετε ότι μια απεικόνιση σημείο σε σύνολο \mathcal{A} , η οποία απεικονίζει σημεία ενός χώρου \mathcal{S}_1 σε υποσύνολα ενός άλλου χώρου \mathcal{S}_2 , λέγεται ημισυνεχής από τα άνω

(upper semicontinuous) (u.s.c) στο σημείο $\mathbf{x} \in \mathcal{S}_1$ εάν οι υποθέσεις:

$$\begin{aligned} (i) \quad & \mathbf{x}^{(k)} \rightarrow \mathbf{x}^*, \mathbf{x}^{(k)} \in \mathcal{S}_1, \text{ και} \\ (ii) \quad & \mathbf{y}^{(k)} \rightarrow \mathbf{y}^*, \mathbf{y}^{(k)} \in \mathcal{A}(\mathbf{x}^{(k)}) \subset \mathcal{S}_2 \end{aligned} \tag{4.76}$$

συνεπάγονται ότι

$$(iii) \quad \mathbf{y}^* \in \mathcal{A}(\mathbf{x}^*) \subset \mathcal{S}_2.$$

Εάν η \mathcal{A} είναι u.s.c. στο σημείο $\mathbf{x} \in \mathcal{S}_1$, τότε το σύνολο $\mathcal{A}(\mathbf{x})$ είναι κλειστό. Επομένως, η \mathcal{A} καλείται συχνά κλειστή στο σημείο $\mathbf{x} \in \mathcal{S}_1$. Εάν η \mathcal{A} είναι u.s.c. σε κάθε σημείο του χώρου \mathcal{S}_1 , τότε λέγεται ότι είναι u.s.c. ή κλειστή στον \mathcal{S}_1 και το γράφημα της είναι κλειστό στον $\mathcal{S}_1 \times \mathcal{S}_2$. Οι μονοσήμαντες συνεχείς απεικονίσεις είναι κλειστές.

Αν $\mathcal{S} = \{\mathbf{x} \in \mathcal{X} \mid \mathbf{x}_i \text{ είναι ένα } i\text{o τμηματικό ελάχιστο για όλα τα } i \text{ στο } \mathcal{N}\} \subset \mathcal{X}$. Θα αναφερόμαστε σε αυτό το σύνολο σαν σύνολο λύσεων του **CPP**.

Για να δείξουμε την ολική σύγκλιση του αλγορίθμου της κυκλικής γραμμικοποίησης χρειαζόμαστε λίγες ακόμα έννοιες και αποτελέσματα τα οποία μπορούν να βρεθούν για παράδειγμα στο [122, Ενότητα 6.6].

Ορισμός 4.4 Έστω ότι το $\mathcal{S} \subset \mathcal{X}$ είναι ένα δεδομένο σύνολο λύσεων και έστω ότι η \mathcal{A} είναι μια αλγοριθμική απεικόνιση σημείου σε σύνολο στο \mathcal{X} . Μια πραγματική συνάρτηση f στο \mathcal{X} λέγεται κατωφερής συνάρτηση για το \mathcal{S} και την \mathcal{A} εάν ικανοποιεί τις συνθήκες:

$$\begin{aligned} (i) \quad & f(\mathbf{x}_2) < f(\mathbf{x}_1), \text{ εάν } \mathbf{x}_1 \notin \mathcal{S} \text{ και } \mathbf{x}_2 \in \mathcal{A}(\mathbf{x}_1) \\ (ii) \quad & f(\mathbf{x}_2) \leq f(\mathbf{x}_1), \text{ εάν } \mathbf{x}_1 \in \mathcal{S} \text{ και } \mathbf{x}_2 \in \mathcal{A}(\mathbf{x}_1). \end{aligned} \tag{4.77}$$

Πρόταση 4.11 Αν $\mathcal{B}_1 : \mathcal{S}_1 \rightarrow \mathcal{S}_2$ και $\mathcal{B}_2 : \mathcal{S}_2 \rightarrow \mathcal{S}_3$ είναι δύο απεικονίσεις σημείου σε σύνολο και αν η \mathcal{B}_1 είναι κλειστή στο σημείο \mathbf{x} , η \mathcal{B}_2 είναι κλειστή στο $\mathcal{B}_1(\mathbf{x})$ και το \mathcal{S}_2 είναι συμπαγές τότε η σύνθετη απεικόνιση $\mathcal{B}_2 \circ \mathcal{B}_1$ είναι κλειστή στο \mathbf{x} .

Θεώρημα 4.3 Το Θεώρημα Ολικής Σύγκλισης

Έσ υποθέσουμε ότι \mathcal{A} είναι μια αλγοριθμική απεικόνιση στο \mathcal{X} και ότι, για δεδομένο $\mathbf{x}^{(0)}$, δημιουργείται η ακολουθία $\{\mathbf{x}^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$ με $\mathbf{x}^{(k+1)} \in \mathcal{A}(\mathbf{x}^{(k)}) \subset \mathcal{X}$. Ας είναι $\mathcal{S} \subset \mathcal{X}$ ένα σύνολο λύσεων. Αν

- (i) το \mathcal{X} είναι συμπαγές,
- (ii) υπάρχει μια κατωφερής συνάρτηση f για το \mathcal{S} και την \mathcal{A} , και

(iii) η απεικόνιση \mathcal{A} είναι κλειστή στο $\mathcal{X} \setminus \mathcal{S}$,

τότε το όριο κάθε συγκλίνουσας υπακολουθίας του $\{\mathbf{x}^{(k)}\}$ βρίσκεται μέσα \mathcal{S} .

Απόδειξη: Για να αποδείξουμε την σύγκλιση του αλγορίθμου κυκλικής γραμμικοποίησης θα δείξουμε ότι ικανοποιεί τις υποθέσεις του παραπάνω θεωρήματος.

Η συνθήκη (i) ικανοποιείται εξ υποθέσεως. Στην συνέχεια θα επιβεβαιώσουμε ότι η συνθήκη (ii) ικανοποιείται από την αντικειμενική συνάρτηση του **CPP**. Σύμφωνα με την υπόθεση 4.9, αν $\mathbf{x}_i^{(i-1,k)}$ δεν είναι το i ο τμηματικό ελάχιστο, η λύση $\mathbf{y}_i^{(k)}$ του (4.72) ικανοποιεί την σχέση $\nabla_i f(\mathbf{x}^{(i-1,k)})^T (\mathbf{y}_i^{(k)} - \mathbf{x}_i^{(k)}) < 0$, και επομένως η κατεύθυνση $\mathbf{d}_i^{(k)} = \mathbf{y}_i^{(k)} - \mathbf{x}_i^{(k)}$ είναι μια κατωφερής κατεύθυνση.

Συνεπάγεται επομένως από την (4.73) ότι $f(\mathbf{x}^{(i,k)}) < f(\mathbf{x}^{(i-1,k)})$. Αν αυτό ισχύει για όλα τα $i \in \mathcal{N}$, τότε $f(\mathbf{x}^{(k+1)}) = f(\mathbf{x}^{(n,k)}) < f(\mathbf{x}^{(n-1,k)}) < \dots < f(\mathbf{x}^{(i-1,k)}) < \dots < f(\mathbf{x}^{(0,k)}) = f(\mathbf{x}^{(k)})$. Επομένως η f ικανοποιεί την συνθήκη (i) στην (4.77).

Είναι επίσης εμφανές ότι αρκεί να ισχύει ότι $f(\mathbf{x}^{(i,k)}) < f(\mathbf{x}^{(i-1,k)})$ για τουλάχιστον ένα $i \in \mathcal{N}$, για να ισχύει ότι $f(\mathbf{x}^{(k+1)}) < f(\mathbf{x}^{(k)})$. Φυσικά, αν $\mathbf{x}^{(k)} \in \mathcal{S}$, τότε η πρόταση 4.10 εγγυάται ότι δεν δημιουργείται κατωφερής κατεύθυνση και ο αλγόριθμος εκτελεί την (4.75) και τερματίζει σε πεπερασμένες επαναλήψεις.

Για να επιβεβαιώσουμε ότι ισχύει η (iii), θα υποθέσουμε ότι η (4.75) και ο αλγόριθμος επαναλαμβάνεται άπειρα. Είναι γνωστό (για παράδειγμα από το [122, Άσκηση 7.12.8]) ότι η απεικόνιση της γραμμικής αναζήτησης \mathcal{L} στον διάστημα $[0, 1]$ είναι κλειστή ανεξάρτητα από το αν το $\mathbf{y}_i^{(k)} = \mathbf{x}_i^{(k)}$ εξαιτίας του ότι το $[0, 1]$ είναι συμπαγές.

Για να δείξουμε ότι η απεικόνιση \mathcal{D}_i είναι κλειστή θεωρούμε τις συγκλίνουσες υπακολουθίες $\mathbf{x}^{(i-1,k)} \rightarrow \mathbf{x}^*$ και $\mathbf{y}_i^{(k)} \rightarrow \mathbf{y}_i^*$, για $k \in \mathcal{K} \subseteq \{0, 1, 2, \dots\}$. Τότε $\mathbf{d}_i^{(k)} = \mathbf{y}_i^{(k)} - \mathbf{x}_i^{(k)} \rightarrow \mathbf{y}_i^* - \mathbf{x}_i^* \rightarrow \mathbf{d}_i^*$, για $k \in \mathcal{K}$.

Σημειώνεται ότι $\mathbf{x}^* \in \mathcal{X}$ και $\mathbf{y}_i^* \in \mathcal{X}_i$ αφού $\mathbf{x}^{(i-1,k)} \in \mathcal{X}$ και $\mathbf{y}_i^{(k)} \in \mathcal{X}_i$.

Για να δείξουμε ότι το $(\mathbf{x}^*, \mathbf{d}_i^*) \in \mathcal{D}_i(\mathbf{x}^*)$, αρκεί να δείξουμε ότι το \mathbf{y}_i^* είναι μια λύση του προβλήματος (4.72) όπου το $\mathbf{x}^{(i-1,k)}$ αντικαθίσταται από το \mathbf{x}^* .

Από την βελτιστότητα του $\mathbf{y}_i^{(k)}$, η ανισότητα $\nabla_i f(\mathbf{x}^{(i-1,k)})^T \mathbf{y}_i^{(k)} \leq \nabla_i f(\mathbf{x}^{(i-1,k)})^T \mathbf{x}_i$ ισχύει για όλα \mathbf{x}_i στο \mathcal{X}_i και για όλα τα k στο \mathcal{K} . Παίρνοντας το όριο, και από την συνέχεια του ∇f , προκύπτει ότι $\nabla_i f(\mathbf{x}^*)^T \mathbf{y}_i^* \leq \nabla_i f(\mathbf{x}^*)^T \mathbf{x}_i$, $\forall \mathbf{x}_i \in \mathcal{X}_i$. Συνεπώς, το \mathbf{y}_i^* επιλύει την (4.72) και επομένως $(\mathbf{x}^*, \mathbf{d}_i^* = \mathbf{y}_i^* - \mathbf{x}_i^*) \in \mathcal{D}_i(\mathbf{x}^*)$ όπως απαιτείται.

Η κλειστότητα του \mathcal{A}_i απορρέει από την κλειστότητα των \mathcal{L} και \mathcal{D}_i και την πρόταση 4.11. Τέλος, η κλειστότητα του \mathcal{A}_i , $\forall i \in \mathcal{N}$, και η πρόταση 4.11 συνεπάγονται την κλειστότητα του συνολικού αλγορίθμου \mathcal{A} . \square

Από το θεώρημα ολική σύγκλισης έχουμε αποδείξει επομένως ότι:

Πρόταση 4.12 Ο Αλγόριθμος είτε τερματίζει μετά από πεπερασμένο αριθμό επαναλήψεων ή δημιουργεί μια άπειρη ακολουθία $\{\mathbf{x}^{(k)}\}$ τέτοια ώστε κάθε σημείο συσσώρευσης είναι μια βέλτιστη λύση για το **CPP**.

Ο αλγόριθμος κυκλικής γραμμικοποίησης δείχνει στην πραγματικότητα ότι για ένα παίγνιο σαν αυτό του προβλήματος **CPP**, επιτυγχάνεται ένα σημείο ισορροπίας Nash αν και ο παίκτης i , $\forall i \in \mathcal{N}$, δεδομένης μιας κατάστασης $[\mathbf{x}_{i-}^{(k+1)}, \mathbf{x}_i^{(k)}, \mathbf{x}_{i+}^{(k)}]$ δεν επιλέγει της στρατηγική του $\mathbf{x}_i^{(k+1)}$ έτσι ώστε να κάνει το διάνυσμα $[\mathbf{x}_{i-}^{(k+1)}, \mathbf{x}_i^{(k+1)}, \mathbf{x}_{i+}^{(k)}]$ επιθυμητό αλλά ικανοποιείται με την στρατηγική η οποία μειώνει τις τρέχουσες απώλειες του, δηλαδή επιλέγει την $\mathbf{x}_i^{(k+1)}$ έτσι ώστε

$$f(\mathbf{x}_{i-}^{(k+1)}, \mathbf{x}_i^{(k+1)}, \mathbf{x}_{i+}^{(k)}) < f(\mathbf{x}_{i-}^{(k+1)}, \mathbf{x}_i^{(k)}, \mathbf{x}_{i+}^{(k)}).$$

4.4.4.3 Μη Ακριβής Γραμμικοποιημένη Αντιμετώπιση της Κυκλικής Αποσύνθεσης

Όπως έχει ήδη αναφερθεί, η απόδειξη σύγκλισης [174] της προσέγγισης της κυκλικής αποσύνθεσης βασίζεται στην ακριβή επίλυση των υποπροβλημάτων στην (4.63). Όμως, για την επίλυση τους είναι διαθέσιμοι μόνο επαναληπτικοί αλγόριθμοι εξαιτίας της μη γραμμικότητας αυτών των υποπροβλημάτων. Για παράδειγμα στην [151] για την επίλυση κάθε υποπροβλήματος της (4.63) εφαρμόζεται η *κυρτή μέθοδος simplex*. Στην πραγματικότητα η απαίτηση ακρίβειας στην λύση των υποπροβλημάτων μας επιβάλλει να χρησιμοποιήσουμε τις επαναληπτικές αυτές μεθόδους με τέτοιο τρόπο ώστε να λαμβάνεται μια ιδιαίτερα ακριβής λύση για κάθε υποπρόβλημα. Βέβαια αυτό μπορεί να είναι ιδιαίτερα δαπανηρό από άποψη υπολογιστικού χρόνου. Με άλλα λόγια, αν και με αυτό τον τρόπο ο ρυθμός σύγκλισης του αλγορίθμου της κυκλικής αποσύνθεσης είναι καλύτερος από τον αλγόριθμο Frank-Wolfe δηλαδή αν και ο συνολικός αριθμός των επαναλήψεων στο αλγόριθμο κυκλικής αποσύνθεσης είναι μικρότερος από τον αντίστοιχο του Frank-Wolfe, η συνολική προσπάθεια που απαιτείται από την μέθοδο της κυκλικής αποσύνθεσης για την εξασφάλιση μιας λύσης ίδιας ακρίβειας με αυτήν της μεθόδου Frank-Wolfe μπορεί να υπερβαίνει την συνολική υπολογιστική προσπάθεια τις τελευταίες εξαιτίας της αύξησης των υπολογισμών ανά επανάληψη στην μέθοδο της κυκλικής αποσύνθεσης.

Σε αυτή την ενότητα θα εξετάσουμε μια μορφή εκτέλεσης της κυκλικής αποσύνθεσης που βασίζεται σε μη ακριβείς λύσεις των υποπροβλημάτων της (4.63). Ο βαθμός της ανακρίβειας των λύσεων προσδιορίζεται από την *συνάρτηση χάσματος* (gap function) Hearn [83]. Η εκτέλεση του βασίζεται εξ ολοκλήρου σε μια κυκλική σειρά των υποπροβλημάτων.

Έστω ότι το $\mathbf{x}^* \in \mathcal{X}$ είναι δεδομένο και έστω η συνάρτηση $q_i(\mathbf{x}_i) = f(\mathbf{x}_i^*, \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_i^*)$, $\mathbf{x}_i \in \mathcal{X}_i$, για κάποια $i \in \mathcal{N}$.

Πρόταση 4.13 Αν για κάποια \mathbf{x}_i^ϵ , και κάποια $\epsilon > 0$ ισχύει ότι

$$\nabla_i q(\mathbf{x}_i^\epsilon)^T (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_i^\epsilon) \geq -\epsilon, \quad \forall \mathbf{x}_i \in \mathcal{X}_i \quad (4.78)$$

τότε

$$q(\mathbf{x}_i) + \epsilon \geq q_i(\mathbf{x}_i^\epsilon), \quad \forall \mathbf{x}_i \in \mathcal{X}, \quad (4.79)$$

δηλαδή το \mathbf{x}_i^ϵ είναι μια ϵ -βέλτιστη λύση του προβλήματος

$$\min_{\mathbf{x}_i \in \mathcal{X}_i} q_i(\mathbf{x}_i) \quad (4.80)$$

Απόδειξη: Όπως έχει οριστεί στην πρόταση 4.7, η q_i είναι κυρτή και παραγωγίσιμη. Επομένως θα είναι,

$$q_i(\mathbf{x}_i) \geq q_i(\mathbf{x}_i^\epsilon) + \nabla q_i(\mathbf{x}_i^\epsilon)^T (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_i^\epsilon), \quad \forall \mathbf{x}_i \in \mathcal{X}_i \quad (4.81)$$

και άρα ισχύει η πρόταση. \square

Σημειώνεται ότι το σημείο $\tau [\mathbf{x}_{i-}^*, \mathbf{x}_i^\epsilon, \mathbf{x}_{i+}^*]$ ορίζει μια ϵ -επιθυμητή στρατηγική για τον παίκτη i στην περίπτωση του παιγνίου του προβλήματος **CPP**. Συγκεκριμένα, αυτό σημαίνει ότι αν ο παίκτης i αποκλίνει από την ϵ επιθυμητή στρατηγική του, η απώλεια του μπορεί να μειωθεί το πολύ κατά ϵ

Στην συνέχεια ορίζεται η συνάρτηση

$$g_i(\mathbf{x}_i) = \min_{\mathbf{y}_i \in \mathcal{Y}} \nabla q_i(\mathbf{x}_i)^T (\mathbf{y}_i - \mathbf{x}_i) \quad (4.82)$$

Η συνάρτηση αυτή η οποία παρουσιάστηκε και μελετήθηκε από τον Hearn [83], καλείται συνάρτηση χάσματος

Στην συνέχεια θα αναφερθούμε δύο από τις ιδιότητες της:

$$g_i(\mathbf{x}_i) \leq 0, \quad \forall \mathbf{x}_i \in \mathcal{X} \quad (4.83)$$

και

$$g_i(\mathbf{x}_i) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x}_i \in \arg \min_{\mathbf{y}_i \in \mathcal{Y}_i} q_i(\mathbf{y}_i) \quad (4.84)$$

Συγκρίνοντας την (4.82) με την (4.78), λαμβάνουμε τα εξής αποτελέσματα.

Πρόταση 4.14 Αν για κάποια $\mathbf{x}_i^\epsilon \in \mathcal{X}_i$, και $\epsilon > 0$ η

$$g_i(\mathbf{x}_i^\epsilon) \geq -\epsilon \quad (4.85)$$

τότε

$$q_i(\mathbf{x}_i) + \epsilon \geq q_i(\mathbf{x}_i^\epsilon), \quad \forall \mathbf{x}_i \in \mathcal{X}_i$$

Ο έλεγχος της (4.85) απαιτεί την επίλυση του προβλήματος (4.82), το οποίο είναι ουσιαστικά το υποπρόβλημα δημιουργίας κατεύθυνσης όταν εφαρμοστεί η μέθοδος Frank-Wolfe στο πρόβλημα (4.80). Επομένως υπολογίζοντας την g_i στο σημείο \mathbf{x}_i^ϵ , ελέγχουμε εάν ισχύει (4.85). Αν δεν ισχύει, υποθέτοντας ότι το \mathbf{y}_i^ϵ είναι μια λύση του (4.82), θα έχουμε

$$g_i(\mathbf{x}_i^\epsilon) < -\epsilon < 0 \quad (4.86)$$

η οποία συνεπάγεται ότι η κατεύθυνση $\mathbf{d}_i = \mathbf{y}_i^\epsilon - \mathbf{x}_i^\epsilon$ είναι κατωφερής.

Από την (4.81), η λύση του (4.82) παρέχει ένα κάτω όριο, $\text{lb}d_i^\epsilon = q_i(\mathbf{x}_i^\epsilon) + g_i(\mathbf{x}_i^\epsilon)$, ενώ η $\text{ub}d_i^\epsilon = q_i(\mathbf{x}_i^\epsilon)$ είναι ένα άνω όριο. Αν ισχύει η (4.85) τότε,

$$\text{ub}d_i^\epsilon - \text{lb}d_i^\epsilon \leq \epsilon \quad (4.87)$$

Τα αποτελέσματα της παραπάνω ανάλυσης προτείνουν την ακόλουθη γραμμικοποιημένη εκδοχή του αλγορίθμου κυκλικής αποσύνθεσης:

algorithm \mathcal{B}

Initialize $\{\mathbf{x}^{(0)} = [\mathbf{x}_1^{(0)}, \dots, \mathbf{x}_i^{(0)}, \dots, \mathbf{x}_n^{(0)}] \in \mathcal{X}; \epsilon^{(0)} > 0; k = 0\}$

do for ever

do for all $i \in \mathcal{N}$

Initialize $\{\mathbf{y}_i^{(0)} = \mathbf{x}_i^{(k)}; \epsilon = \epsilon^{(k)}; \ell = 0\}$

repeat

$$\tilde{\mathbf{y}}_i^{(\ell)} \in \arg \min_{\mathbf{x}_i \in \mathcal{X}_i} \nabla_i f(\mathbf{x}_{i-}^{(k+1)}, \mathbf{y}_i^{(\ell)}, \mathbf{x}_{i+}^{(k)})^T \mathbf{x}_i$$

$$a_i^{(\ell)} \in \arg \min_{a \in [0,1]} f(\mathbf{x}_{i-}^{(k+1)}, \mathbf{y}_i^{(\ell)} + a_i(\tilde{\mathbf{y}}_i^{(\ell)} - \mathbf{y}_i^{(\ell)}), \mathbf{x}_{i+}^{(k)})$$

$$\mathbf{y}_i^{(\ell+1)} = \mathbf{y}_i^{(\ell)} + a_i^{(\ell)}(\tilde{\mathbf{y}}_i^{(\ell)} - \mathbf{y}_i^{(\ell)})$$

$$\ell = \ell + 1$$

until $(g_i(\mathbf{y}_i^{(\ell)}) \geq -\epsilon)$.or. $(\ell > \ell_{\max})$

$$\mathbf{x}_i^{(k+1)} = \mathbf{y}_i^{(\ell)}$$

end do

if $(\mathbf{x}^{(k+1)} \text{ .eq. } \mathbf{x}^{(k)})$ **exit**

Replace $\epsilon^{(k)}$ by $\epsilon^{(k+1)}$

$$k = k + 1$$

end do

Ο αλγόριθμος \mathcal{B} είναι το αποτέλεσμα της εφαρμογής μίας μη-ακριβής διαδικασίας Frank-Wolfe σε κάθε υποπρόβλημα της (4.63). Συγκεκριμένα, εάν η ακολουθία $\{\epsilon^{(k)}\}_{k=0}^\infty$ επιλεχθεί έτσι ώστε το $\lim_{k \rightarrow \infty} \epsilon^{(k)} = 0$, και η παράμετρος $\ell_{\max} = \infty$, ο αλγόριθμος \mathcal{B} προσεγγίζει, όπως προκύπτει από την πρόταση 4.78, την κυκλική αποσύνθεση οριακά. Από την άλλη πλευρά αν η $\ell_{\max} = 1$, ο αλγόριθμος \mathcal{B} είναι ισοδύναμος του αλγορίθμου \mathcal{A} του οποίου η σύγκλιση έχει δείχθει. Προκύπτει επομένως ότι για κάθε επιλογή της μη αρνητικής ακολουθίας $\{\epsilon^{(k)}\}_{k=0}^\infty$, όσο η $\ell_{\max} \geq 1$, η σύγκλιση του αλγορίθμου \mathcal{A} και το θεώρημα Spacer Step [122, Ενότητα 7.10]) εξασφαλίζουν την σύγκλιση του αλγορίθμου \mathcal{B} .

4.5 Ανάπτυξη ενός Αλγόριθμου Απέριττης Αποσύνθεσης Βασισμένου στην Κανονικοποιημένη Μέθοδο Frank-Wolfe

Σκοπός αυτής της ενότητας είναι η ανάπτυξη μιας αποτελεσματικής μεθόδου εφικτής κατεύθυνσης (πβλ. § 4.4.3) για τα προβλήματα που εξετάζονται. Η εφαρμογή της απέριττης αποσύνθεσης στα εν λόγω προβλήματα δημιουργεί κυρίως προβλήματα της κάτωθι μορφής στα οποία η $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχώς παραγωγίσιμη και μη-διαχωρίσιμη :

$$\begin{aligned} \text{[P]} \quad & \min_{\mathbf{y} \in \mathcal{Y}} f(\mathbf{y}), \\ & \text{υπό} \\ & \mathbf{y}_i \in \mathcal{Y}_i = \left\{ \mathbf{y}_i \mid \sum_{j=1}^{n_i} y_{ij} = 1, y_{ij} \geq 0 \right\}, \quad i = 1, \dots, m, \end{aligned}$$

όπου $\mathbf{y} = [\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_m]$, $\sum_{i=1}^m n_i = n$, και το $\mathcal{Y} = \prod_{i=1}^m \mathcal{Y}_i$ είναι το καρτεσιανό γινόμενο των m απέριτων συνόλων.

4.5.1 Η Θεωρητική Μορφή του Αλγορίθμου Αποσύνθεσης και η Σύγκλιση του

Στην ενότητα αυτή θα αναπτύξουμε μια τεχνική αποσύνθεσης του προβλήματος **P** η οποία το διασπά το προβλήματα σε m υποπροβλήματα ένα για κάθε απέριτο σύνολο (simplex). Μια προσέγγιση η οποία θα μπορούσε να συνδράμει προς αυτή την κατεύθυνση είναι η πλήρης γραμμικοποίηση της αντικειμενικής συνάρτησης σύμφωνα με το αλγόριθμο Frank-Wolfe. Πράγματι για κάθε εφικτή λύση $\mathbf{y}^k = [\mathbf{y}_1^k, \dots, \mathbf{y}_m^k]$, αν είναι $\mathbf{c}_i = \nabla_i f(\mathbf{y}^k)$, $i = 1, \dots, m$, το κλίτος της f ως προς \mathbf{y}_i στο \mathbf{y}^k , τότε το **P** προσεγγίζεται στο \mathbf{y}^k από m γραμμικά υποπροβλήματα :

$$\begin{aligned} \text{[FW]} \quad & \min \sum_{j=1}^{n_i} c_{ij} y_{ij} \\ & \text{υπό} \quad \sum_{j=1}^{n_i} y_{ij} = 1 \\ & y_{ij} \geq 0, \quad j = 1, \dots, n_i. \end{aligned} \tag{4.88}$$

Αν $\hat{\mathbf{y}}_i$ είναι η λύση κάθε **FW**, και αν $\hat{\mathbf{y}} = [\hat{\mathbf{y}}_1, \dots, \hat{\mathbf{y}}_m]$, τότε μπορεί να οριστεί μια κατεύθυνση αναζήτησης $\mathbf{d}^k = \hat{\mathbf{y}} - \mathbf{y}^k$ και να δημιουργηθεί μια νέα εφικτή λύση $\mathbf{y}^{k+1} = \mathbf{y}^k + \alpha_k \mathbf{d}^k$ ύστερα από την εύρεση του $\alpha_k \in [0, 1]$ το οποίο ελαχιστοποιεί την $f(\mathbf{y}^k + \alpha \mathbf{d}^k)$.

Αν και απλή η προσέγγιση της πλήρους γραμμικοποίησης έχει σημαντικά μειονεκτήματα. Ο ρυθμός σύγκλισης είναι υπο-γραμμικός και εμφανίζεται συμφόρηση

καθώς ο αλγόριθμος συγκλίνει προς μια λύση (πβλ. § 4.4.1). Επιπλέον στην περίπτωση που εξετάζεται εδώ, η λύση που παράγουν τα υποπροβλήματα **FW** είναι χωρίς ιδιαίτερο νόημα όσον αφορά το **P**. Υποθέτοντας ότι $c_{i1} \leq c_{i2} \leq \dots \leq c_{in}$, η βέλτιστη λύση κάθε υποπροβλήματος **FW** θα είναι $y_{i1} = 1, y_{ij} = 0, j = 2, \dots, n_i$. Σημειώνεται ότι η λύση είναι γνώστη μόλις ο συντελεστής με την μικρότερη τιμή είναι γνωστή. Αυτή η τιμή είναι γνωστή σε χρόνο $O(n_i)$.

Μια βασική ιδιότητα του προβλήματος είναι ότι στην περίπτωση μιας κυρτής f , η λύση των υποπροβλημάτων μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την κατασκευή ενός κάτω ορίου για την $f(\mathbf{y}^*)$, δηλαδή, $f(\mathbf{y}^*) \geq \text{LBD}^k \equiv f(\mathbf{y}^k) + \nabla f(\mathbf{y}^k)^T \mathbf{d}^k$. Σημειώνεται ότι το κάτω όριο μπορεί να υπολογιστεί σε χρόνο $\sum_{i=1}^m O(n_i) = O(n)$. Οι επαναλήψεις του αλγόριθμου τερματίζονται όποτε το $f(\mathbf{y}^k)$ είναι κοντά στο καλύτερο γνωστό κάτω όριο. Λαμβάνοντας υπόψη την ευκολία με την οποία μπορούν να υπολογιστούν αυτά τα κάτω όριο, ο συγκεκριμένος κανόνας τερματισμού μπορεί να χρησιμοποιηθεί σε οποιονδήποτε άλλο αλγόριθμο ο οποίος δεν εμφανίζει τα μειονεκτήματα της πλήρους γραμμικοποίησης. Θα εξετάσουμε στην συνέχεια μια τεχνική αποσύνθεσης η οποία αν και μοιάζει με αυτή της πλήρους γραμμικοποίησης, η κατεύθυνση δεν παράγεται από γραμμικά υποπροβλήματα:

$$\begin{aligned} [\mathbf{RFPW}] \quad & \min \sum_{j=1}^{n_i} c_{ij} y_{ij} + \phi_i(\mathbf{y}_i, \mathbf{y}_i^k) \\ & \text{υπό} \sum_{j=1}^{n_i} y_{ij} = 1 \\ & y_{ij} \geq 0, \quad j = 1, \dots, n_i \end{aligned} \quad (4.89)$$

Η συνάρτηση ϕ_i καλείται συνάρτηση κανονικοποίησης (regularization function) στην [139] και το υποπρόβλημα που αυτή συνεπάγεται κανονικοποιημένο (regularized) υποπρόβλημα Frank-Wolfe. Μια συνάρτηση κανονικοποίησης $\phi_i : \mathcal{Y}_i \times \mathcal{Z}_i \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχώς παραγωγίσιμη, μη αρνητική, κυρτή και αυστηρώς κυρτή χωριστά για κάθε παράμετρο της. Επιπλέον η $\nabla \phi_i(\mathbf{y}_i, \mathbf{z}_i) = \mathbf{0}$ εάν και μόνο εάν $\mathbf{y}_i = \mathbf{z}_i$. Το **RFPW** παράγεται από το **P** εάν θεωρήσουμε την προσέγγιση της f στο \mathbf{y}^k από μια συνάρτηση $\phi(\mathbf{y}, \mathbf{y}^k) = \sum_{i=1}^m \phi_i(\mathbf{y}_i, \mathbf{y}_i^k)$. Σε μια τέτοια προσέγγιση το σφάλμα είναι $\varepsilon(\mathbf{y}) = f(\mathbf{y}) - \phi(\mathbf{y}, \mathbf{y}^k)$ και κατά συνέπεια $f(\mathbf{y}) = \phi(\mathbf{y}, \mathbf{y}^k) + \varepsilon(\mathbf{y})$. Επομένως και αφού η $\nabla \phi_i(\mathbf{y}^k, \mathbf{y}^k) = \mathbf{0}$ το **RFPW** λαμβάνεται ύστερα από την γραμμικοποίηση του σφάλματος (πβλ. § 4.4.2).

Η συνάρτηση κανονικοποίησης μπορεί να θεωρηθεί σαν συνάρτηση απόστασης (distance function), η οποία όμως δεν χρειάζεται να ικανοποιεί την ανισότητα συμμετρίας η/και την τριγωνική ανισότητα (triangle inequality). Λαμβάνοντας αυτό υπόψη μπορεί να δοθεί η ακόλουθη ερμηνεία στο υποπρόβλημα **RFPW**: Στο πρόβλημα **FW**, αν και η γραμμικοποίηση ισχύει μόνο τοπικά σε μια περιοχή γύρω από το σημείο της τρέχουσας επανάληψης, το υποπρόβλημα δεν περιλαμβάνει περιορισμούς που να απαιτούν κάτι τέτοιο. Κατά συνέπεια η προσέγγιση πρώτης τάξης χρησιμοποιείται ολικά. Η εισαγωγή του όρου κανονικοποίησης στην αντικειμενι-

κή συνάρτηση στοχεύει στον περιορισμό της απόστασης ανάμεσα στο σημείο της τρέχουσας επανάληψης και της λύση του υποπροβλήματος. Με διατήρηση της μη γραμμικότητας στα υποπροβλήματα αποφεύγεται το φαινόμενο της συμφόρησης που είναι έμφυτο στην περίπτωση την πλήρους γραμμικοποίησης και προκαλείται από τις ακραίες λύσεις των υποπροβλημάτων καθώς και στο φαινόμενο της τάλαντευσης της κατεύθυνσης Frank-Wolfe (πβλ. Παράδειγμα 4.1). Επιπλέον το μη γραμμικό πρόβλημα του \mathbf{P} παράγει πιο ουσιαστικές λύσεις από αυτό του \mathbf{FW} . Στην πραγματικότητα η βέλτιστη λύση μπορεί να ληφθεί από τα υποπροβλήματα κάτι που δεν ισχύει στην περίπτωση \mathbf{FW} . Στην παρούσα εφαρμογή θα αντιμετωπιστούν μόνο τετραγωνικές συναρτήσεις κανονικοποίησης δηλαδή η $\phi_i(\mathbf{y})$ θα είναι την μορφής $\phi_i(\mathbf{y}, \mathbf{y}^k) = \frac{1}{2}(\mathbf{y} - \mathbf{y}^k)^T \mathbf{D}_i(\mathbf{y} - \mathbf{y}^k)$, με θετικά ορισμένες μήτρες \mathbf{D}_i . Συγκεκριμένοι τρόποι επιλογής των \mathbf{D}_i θα εξεταστούν στην ενότητα 4.5.1.3.

Πριν την παρουσίαση του ψευδοκώδικα του αλγορίθμου θα παραθέσουμε μερικές από τις ιδιότητες που εμπεριέχονται στο \mathbf{RFPW} . Υποθέτοντας ότι η f είναι ψευδοκυρτή το Θεώρημα 4.4 αποδεικνύει ότι η βέλτιστη λύση λαμβάνεται από τα κανονικοποιημένα υποπροβλήματα. Διαφορετικά, από τη Θεώρημα 4.5 δημιουργείται μια κατωφερής κατεύθυνση. Επιπλέον εξαιτίας του Θεωρήματος 4.6 μια τέτοια κατεύθυνση προσδιορίζεται μοναδικά και από το θεώρημα 4.7 εξασφαλίζεται ότι είναι επαρκώς κατωφερής.

Θεώρημα 4.4 Εάν το $\mathbf{y}^k = [\mathbf{y}_1^k, \dots, \mathbf{y}_m^k]$ επιλύει τα αντίστοιχα m υποπροβλήματα \mathbf{RFPW} , τότε το \mathbf{y}^k είναι επίσης μια λύση του προβλήματος \mathbf{P} . Το αντίστροφο ισχύει επίσης.

Απόδειξη: Από την βελτιστότητα του \mathbf{y}_i^k στο \mathbf{RFPW} , θα έχουμε $[\nabla_i f(\mathbf{y}^k) + \mathbf{D}_i(\mathbf{y}_i^k - \mathbf{y}_i^k)]^T (\mathbf{y}_i - \mathbf{y}_i^k) \geq 0, \forall \mathbf{y}_i \in \mathcal{Y}_i, i = 1, \dots, m$. Συνεπώς, $\nabla f(\mathbf{y}^k)^T (\mathbf{y} - \mathbf{y}^k) \geq 0, \forall \mathbf{y} \in \mathcal{Y}$, και επομένως το \mathbf{y}^k είναι βέλτιστο στο \mathbf{P} . Αντιστρόφως εάν το \mathbf{y}^k είναι βέλτιστο στο \mathbf{P} , τότε ισχύει η τελευταία ανισότητα. Προσθέτοντας στην τελευταία την ισότητα $[\mathbf{D}(\mathbf{y}^k - \mathbf{y}^k)]^T (\mathbf{y} - \mathbf{y}^k) = 0$, όπου \mathbf{D} είναι μια τμηματικά διαγώνια μήτρα (block diagonal matrix) με διαγώνια τμήματα $\mathbf{D}_i, i = 1, \dots, m$, λαμβάνουμε την βελτιστότητα του \mathbf{y}_i^k στο αντίστοιχο υποπρόβλημα \mathbf{RFPW} . \square

Θεώρημα 4.5 Για εφικτό $\mathbf{y}^k = [\mathbf{y}_1^k, \dots, \mathbf{y}_m^k]$, θεωρούμε ότι το $\hat{\mathbf{y}}^k = [\hat{\mathbf{y}}_1^k, \dots, \hat{\mathbf{y}}_m^k]$ επιλύει τα αντίστοιχα m υποπροβλήματα \mathbf{RFPW} , και υποθέτουμε ότι $\mathbf{y}^k \neq \hat{\mathbf{y}}^k$. Τότε η $\mathbf{d}^k = [\mathbf{d}_1^k, \dots, \mathbf{d}_m^k] = \hat{\mathbf{y}}^k - \mathbf{y}^k$ είναι μια εφικτή κατωφερής κατεύθυνση της f στο \mathbf{y}^k .

Απόδειξη: Από την κυρτότητα του \mathcal{Y} και την εφικτότητα του \mathbf{y}^k και του $\hat{\mathbf{y}}^k$, συνάγεται ότι το \mathbf{d}^k είναι μια εφικτή κατεύθυνση. Αφού το $\hat{\mathbf{y}}^k$ επιλύει τα υποπροβλήματα, $[\nabla f(\mathbf{y}^k) + \mathbf{D}(\hat{\mathbf{y}}^k - \mathbf{y}^k)]^T (\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}}^k) \geq 0, \forall \mathbf{y} \in \mathcal{Y}$. Επομένως $[\nabla f(\mathbf{y}^k) + \mathbf{D}(\hat{\mathbf{y}}^k - \mathbf{y}^k)]^T (\mathbf{y}^k - \hat{\mathbf{y}}^k) \geq 0$ αφού $\mathbf{y}^k \in \mathcal{Y}$. Η ιδιότητα της κατωφέρειας προκύπτει από το γεγονός ότι η \mathbf{D} είναι θετικά ορισμένη. \square

Θεώρημα 4.6 Για δεδομένο \mathbf{y}^k και οποιοδήποτε $i = 1, \dots, m$, το **RFWP** είναι εφικτό και η βέλτιστη λύση του είναι μοναδική.

Απόδειξη: Προκύπτει από το γεγονός ότι η \mathbf{D}_i είναι θετικά ορισμένη. \square

Θεώρημα 4.7 Αν είναι μ_i η μικρότερη ιδιοτιμή της \mathbf{D}_i , τότε $\nabla_i f(\mathbf{y}^k)^T \mathbf{d}_i^k \leq -\mu_i \|\mathbf{d}_i^k\|$.

Απόδειξη: Από το θετικό ορισμό της \mathbf{D}_i , συνεπάγεται ότι $\mathbf{d}_i^T \mathbf{D}_i \mathbf{d}_i > 0, \forall \mathbf{d}_i \in \mathbb{R}^{n_i}, \mathbf{d}_i^T \mathbf{d}_i \geq \mu_i \|\mathbf{d}_i\|^2$ και $\mu_i > 0$. Συνεπώς η αντικειμενική συνάρτηση του **RFWP** είναι ισχυρώς κυρτή. Από την απόδειξη του Θεωρήματος 4.5 προκύπτει ότι $\nabla_i f(\mathbf{y}^k)^T \mathbf{d}_i^k \leq (\mathbf{y}_i^k - \hat{\mathbf{y}}_i^k)^T \mathbf{D}_i (\hat{\mathbf{y}}_i^k - \mathbf{y}_i^k)$. \square

Θεώρημα 4.8 Το μέγιστο εφικτό μήκος βήματος στην γραμμική αναζήτηση είναι 1.

Απόδειξη: Αφού το $\hat{\mathbf{y}}^k$ είναι εφικτό επιτρέπεται πάντα η κίνηση από το \mathbf{y}^k στο $\hat{\mathbf{y}}^k$. Επομένως το μήκος βήματος είναι εφικτό. Επιπλέον προκειμένου να εξασφαλιστεί η μη αρνητικότητα το μέγιστο μήκος βήματος δεν πρέπει να ξεπερνάει το $\min\{-y_{ij}^k/d_{ij}^k \mid d_{ij}^k < 0\} \leq 1$. \square

Το αρχαίτυπο του αλγορίθμου παρουσιάζεται παρακάτω. Θα πρέπει να σημειωθεί ότι τα κάτω όρια, LBD^k , ισχύουν μόνο όταν η f είναι κυρτή συνάρτηση. Το κριτήριο τερματισμού το οποίο στηρίζεται στην διαφορά ανάμεσα στο άνω και κάτω όριο, μπορεί να τεθεί μη ενεργό με κατάλληλη επιλογή του ϵ .

Algorithm regularized_fw

Αρχικοποίηση των $\mathbf{y}^0 \in \mathcal{Y}$, $\text{LBD}^{-1} \leftarrow -\infty$, $k \leftarrow 0$

do

$\text{UBD}^k \leftarrow f(\mathbf{y}^k)$

επέλυσε όλα τα **FW** και υπολόγισε όλα τα LBD^k

Έστω ότι $\hat{\mathbf{y}}^k = [\hat{\mathbf{y}}_1^k, \dots, \hat{\mathbf{y}}_m^k]$ είναι η μοναδική λύση όλων των **RFWP**

$\mathbf{d}^k \leftarrow \hat{\mathbf{y}} - \mathbf{y}^k$

if ($\mathbf{d}^k = 0$) **exit**

$\text{LBD}^k \leftarrow \max\{\text{LBD}^{k-1}, \text{LBD}^k\}$

if ($(\text{UBD}^k - \text{LBD}^k)/\text{LBD}^k \leq \epsilon$) **exit**

$\alpha_k \leftarrow \arg \min_{\alpha \in [0,1]} f(\mathbf{y}^k + \alpha \mathbf{d}^k)$

$\mathbf{y}^{k+1} \leftarrow \mathbf{y}^k + \alpha_k \mathbf{d}^k$

$k \leftarrow k + 1$

end do

end regularized_fw

4.5.1.1 Σύγκλιση με Ακριβείς Γραμμικές Αναζητήσεις (exact line searches)

Υποθέτοντας ακριβείς γραμμικές αναζητήσεις θα δείξουμε παρακάτω την ολική σύγκλιση της μεθόδου. Στην ανάλυση που θα ακολουθήσει θα αγνοήσουμε τον κανόνα τερματισμού που στηρίζεται στον υπολογισμό του κάτω ορίου.

Θεώρημα 4.9 Ο αλγόριθμος `regularized_fw` είτε τερματίζει σε πεπερασμένο αριθμό επαναλήψεων ή δημιουργεί μια άπειρη ακολουθία $\{\mathbf{y}^k\}$ τέτοια ώστε κάθε σημείο συσσώρευσης της είναι μια βέλτιστη λύση του \mathbf{P} .

Απόδειξη: Από το Θεώρημα 4.4 προκύπτει ότι ο αλγόριθμος τερματίζει σε πεπερασμένο αριθμό επαναλήψεων όποτε $\mathbf{y} = \hat{\mathbf{y}}^k$, για κάποια k . Επομένως υποθέτουμε ότι $\hat{\mathbf{y}}^k \neq \mathbf{y}^k$ για όλα τα k . Επίσης από το Θεώρημα 4.5 προκύπτει ότι η ακολουθία $\{\mathbf{d}^k\}$ αποτελείται από εφικτές κατωφείς κατευθύνσεις. Επομένως, $f(\mathbf{y}^{k+1}) = f(\mathbf{y}^k + \alpha_k \mathbf{d}^k) < f(\mathbf{y}^k)$ και η $\{f(\mathbf{y}^k)\}$ είναι μια μονοτονικά φθίνουσα ακολουθία η οποία είναι φραγμένη από κάτω σύμφωνα με τις υποθέσεις μας. Αρά, $f(\mathbf{y}^k + \alpha_k \mathbf{d}^k) \geq f(\mathbf{y}^{k+1}), \forall \alpha_k \in [0, 1]$, που συνεπάγεται ότι $f(\mathbf{y}^k + \alpha_k \mathbf{d}^k) - f(\mathbf{y}^k) \geq f(\mathbf{y}^{k+1}) - f(\mathbf{y}^k), \forall \alpha_k \in [0, 1]$.

Αφού το \mathcal{Y} είναι συμπαγές, από το θεώρημα Weierstrass συνεπάγεται ότι η ακολουθία $\{\mathbf{y}^k\}$ έχει ένα τουλάχιστον σημείο συσσώρευσης, έστω $\mathbf{y}^* \in \mathcal{Y}$, το οποίο είναι το όριο σύγκλισης μιας συγκλίνουσας υπακολουθίας $\{\mathbf{y}^k\}_{k \in \mathcal{L}}$, όπου $\mathcal{L} \subseteq \mathbb{N}$. Θα έχουμε επομένως ότι $\lim_{k \rightarrow \infty, k \in \mathcal{L}} f(\mathbf{y}^k) = f(\mathbf{y}^*)$. Το οποίο συνεπάγεται ότι $\lim_{k \rightarrow \infty, k \in \mathcal{L}} [f(\mathbf{y}^{k+1}) - f(\mathbf{y}^k)] = 0$.

Από το θεώρημα Weierstrass, η ακολουθία $\{\hat{\mathbf{y}}^k\}$ έχει τουλάχιστον ένα σημείο συσσώρευσης, έστω $\hat{\mathbf{y}}$, το οποίο είναι το όριο της υπακολουθίας $\{\hat{\mathbf{y}}^k\}_{k \in \mathcal{M}}$, όπου $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{L}$. Από την τελευταία ανισότητα θα έχουμε επομένως, $\lim_{k \rightarrow \infty, k \in \mathcal{M}} [f(\mathbf{y}^k + \alpha_k (\hat{\mathbf{y}}^k - \mathbf{y}^k)) - f(\mathbf{y}^k)] \geq 0$, και, για κάθε ακολουθία $\{\alpha_k\} \in [0, 1]$ με $\lim_{k \rightarrow \infty, k \in \mathcal{M}} \alpha_k = 0$, θα ισχύει ότι, $\lim_{k \rightarrow \infty, k \in \mathcal{M}} \frac{f(\mathbf{y}^k + \alpha_k (\hat{\mathbf{y}}^k - \mathbf{y}^k)) - f(\mathbf{y}^k)}{\alpha_k} \geq 0$. Αυτό το όριο υπάρχει εξαιτίας της συνεχούς παραγωγισιμότητας της f και ισούται με την παράγωγο κατεύθυνσης της f ως προς το \mathbf{y}^* στην κατεύθυνση $\hat{\mathbf{y}} - \mathbf{y}^*$, δηλαδή, $\nabla f(\mathbf{y}^*)^T (\hat{\mathbf{y}} - \mathbf{y}^*) \geq 0$.

Από την βελτιστότητα των στοιχείων της $\hat{\mathbf{y}}^k$ στα κανονικοποιημένα υποπροβλήματα έχουμε (βλ. απόδειξη Θεωρήματος 4.5) $[\nabla f(\mathbf{y}^k) + \mathbf{D}(\hat{\mathbf{y}}^k - \mathbf{y}^k)]^T (\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}}^k) \geq 0, \forall \mathbf{y} \in \mathcal{Y}$. Παίρνοντας το όριο πάνω στο \mathcal{M} , λαμβάνουμε την ανισότητα $[\nabla f(\mathbf{y}^*) + \mathbf{D}(\hat{\mathbf{y}} - \mathbf{y}^*)]^T (\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}}) \geq 0, \forall \mathbf{y} \in \mathcal{Y}$. Αφού $\mathbf{y}^* \in \mathcal{Y}$, $[\nabla f(\mathbf{y}^*) + \mathbf{D}(\hat{\mathbf{y}} - \mathbf{y}^*)]^T (\mathbf{y}^* - \hat{\mathbf{y}}) \geq 0$. Άρα συνεπάγεται, από την ανισότητα της τελευταίας παραγράφου, ότι $(\hat{\mathbf{y}} - \mathbf{y}^*)^T \mathbf{D}(\mathbf{y}^* - \hat{\mathbf{y}}) \leq 0$.

Αφού η \mathbf{D} είναι θετικά ορισμένη θα πρέπει να έχουμε $(\hat{\mathbf{y}} - \mathbf{y}^*)^T \mathbf{D}(\mathbf{y}^* - \hat{\mathbf{y}}) = 0$, και άρα $\hat{\mathbf{y}} = \mathbf{y}^*$. Αντικαθιστώντας στην δεύτερη ανισότητα της προηγούμενης παραγράφου λαμβάνουμε το επιθυμητό αποτέλεσμα: $\nabla f(\mathbf{y}^*)^T (\mathbf{y} - \mathbf{y}^*) \geq 0, \forall \mathbf{y} \in \mathcal{Y}$. \square

4.5.1.2 Σύγκλιση με Μη-ακριβείς Γραμμικές Αναζητήσεις

Σε αυτή την ενότητα θα δείξουμε την σύγκλιση του αλγορίθμου `regularized_fw` στην περίπτωση μη ακριβών γραμμικών αναζητήσεων τύπου Armijo. Για το σκοπό αυτό θα πρέπει να υποθέσουμε επιπλέον ότι το κλίτος της f είναι συνεχείς κατά Lipschitz, δηλαδή υπάρχει σταθερά $\lambda > 0$ τέτοια ώστε $\|\nabla f(\mathbf{y}^1) - \nabla f(\mathbf{y}^2)\| \leq$

$$\lambda \|\mathbf{y}^1 - \mathbf{y}^2\|, \forall \mathbf{y}^1, \mathbf{y}^2 \in \mathcal{Y}.$$

Θεωρούμε την περίπτωση όπου η ακριβής γραμμική αναζήτηση αντικαθίσταται από ένα μήκος βήματος που ακολουθεί τον κανόνα Αρμίτζο. Σε αυτή την περίπτωση το α_k του αλγορίθμου θεωρείται ίσο με β^{-i_0} όπου i_0 είναι ο ακέραιος $i = 0, \dots$, ο οποίος ικανοποιεί πρώτος την ανισότητα $f(\mathbf{y}^{k+1}) = f(\mathbf{y}^k + \beta^{-i_0} \mathbf{d}^k) \leq f(\mathbf{y}^k) + \gamma \beta^{-i_0} \nabla f(\mathbf{y}^k)^T \mathbf{d}^k$, για $\gamma \in (0, 1)$ και $\beta > 1$. Για παράδειγμα στην εργασία των Pshenichny και Danilin [161] το $\gamma = 0.5$ και το $\beta = 2$.

Θεώρημα 4.10 Με την επιπλέον υπόθεση του συνεχούς κατά Lipschitz κλίτους, ο αλγόριθμος `regularized_fw` με βήματα Αρμίτζο συγκλίνει ολικά προς μία βέλτιστη λύση του \mathbf{P} .

Απόδειξη: Θα δείξουμε πρώτα ότι το i_0 είναι πεπερασμένο. Ας είναι $\mathbf{w}^k = \mathbf{y}^k + \xi(\hat{\mathbf{y}}^k - \mathbf{y}^k)$ για $\xi \in [0, 1]$. Από τον τύπο του Taylor και την συνέχεια κατά Lipschitz του κλίτους λαμβάνουμε για $\alpha \in [0, 1]$, $(f(\mathbf{y}^k + \alpha(\hat{\mathbf{y}}^k - \mathbf{y}^k)) - f(\mathbf{y}^k)) \equiv \int_0^\alpha \nabla f(\mathbf{w}^k)^T (\hat{\mathbf{y}}^k - \mathbf{y}^k) d\xi \leq \alpha \nabla f(\mathbf{y}^k)^T (\hat{\mathbf{y}}^k - \mathbf{y}^k) + \int_0^\alpha \lambda \xi \|\hat{\mathbf{y}}^k - \mathbf{y}^k\|^2 d\xi = \alpha \nabla f(\mathbf{y}^k)^T (\hat{\mathbf{y}}^k - \mathbf{y}^k) + 0.5\alpha^2 \lambda \|\hat{\mathbf{y}}^k - \mathbf{y}^k\|^2$.

Άρα, για $\alpha \leq 2(\gamma - 1) \frac{\nabla f(\mathbf{y}^k)^T (\hat{\mathbf{y}}^k - \mathbf{y}^k)}{\lambda \|\hat{\mathbf{y}}^k - \mathbf{y}^k\|^2}$, λαμβάνουμε την ανισότητα $f(\mathbf{y}^k + \alpha \mathbf{d}^k) - f(\mathbf{y}^k) \leq \gamma \alpha \nabla f(\mathbf{y}^k)^T \mathbf{d}^k$. Αφού i_0 είναι ο πρώτος ακέραιος που ικανοποιεί τον κανόνα Αρμίτζο αντικαθιστώντας στην πρώτη ανισότητα το α με β^{-i} , θα έχουμε $\beta \alpha_k = \beta^{-(i_0-1)} > 2(\gamma - 1) \frac{\nabla f(\mathbf{y}^k)^T (\hat{\mathbf{y}}^k - \mathbf{y}^k)}{\lambda \|\hat{\mathbf{y}}^k - \mathbf{y}^k\|^2}$, και επομένως $\alpha_k > \frac{2(\gamma-1)}{\beta} \frac{\nabla f(\mathbf{y}^k)^T (\hat{\mathbf{y}}^k - \mathbf{y}^k)}{\lambda \|\hat{\mathbf{y}}^k - \mathbf{y}^k\|^2}$. Συνεπώς, αν \mathbf{d}^k είναι μια εφικτή κατωφερής κατεύθυνσης, η ανισότητα Αρμίτζο θα ικανοποιείται μετά από πεπερασμένο αριθμό δοκιμών και το επιλεχθέν βήμα θα ικανοποιεί την τελευταία ανισότητα.

Στην συνέχεια θα αποδείξουμε την σύγκλιση του αλγορίθμου προς μία βέλτιστη λύση. Αφού το $\|\mathbf{y}\| \leq m, \forall \mathbf{y} \in \mathcal{Y}$, θα είναι $\|\hat{\mathbf{y}}^k - \mathbf{y}^k\| \leq 2m, \forall k$. Επομένως, $\alpha_k > \frac{2(\gamma-1)}{\beta} \frac{\nabla f(\mathbf{y}^k)^T (\hat{\mathbf{y}}^k - \mathbf{y}^k)}{4m^2 \lambda}$ και κατά συνέπεια, $f(\mathbf{y}^{k+1}) - f(\mathbf{y}^k) \leq \frac{2\gamma(\gamma-1)}{\beta} \frac{[\nabla f(\mathbf{y}^k)^T (\hat{\mathbf{y}}^k - \mathbf{y}^k)]^2}{4m^2 \lambda}$. Προσθέτοντας την τελευταία για $k = 0, 1, \dots, q-1$ λαμβάνουμε $f(\mathbf{y}^q) - f(\mathbf{y}^0) \leq \frac{2\gamma(\gamma-1)}{4m^2 \beta \lambda} \sum_{k=0}^{q-1} [\nabla f(\mathbf{y}^k)^T \mathbf{d}^k]^2$.

Αφού η $f(\mathbf{y})$ είναι φραγμένη από τα κάτω στο \mathcal{Y} από την ελάχιστη τιμή της f στο \mathcal{Y} , $f(\mathbf{y}^*)$, θα έχουμε $\sum_{k=0}^{q-1} [\nabla f(\mathbf{y}^k)^T \mathbf{d}^k]^2 \leq \frac{4m^2 \beta \lambda}{2\gamma(\gamma-1)} [f(\mathbf{y}^0) - f(\mathbf{y}^q)] \leq \frac{4m^2 \beta \lambda}{2\gamma(\gamma-1)} [f(\mathbf{y}^0) - f(\mathbf{y}^*)]$. Συνεπώς, η σειρά $\sum_{k=0}^{\infty} [\nabla f(\mathbf{y}^k)^T \mathbf{d}^k]^2$ συγκλίνει. Βέβαια, η σύγκλιση αυτή είναι εφικτή μόνο εάν $\nabla f(\mathbf{y}^k)^T \mathbf{d}^k \rightarrow 0$.

Επομένως όπως και στην απόδειξη του Θεωρήματος 4.9 υπάρχουν υποακολουθίες, $\{\mathbf{y}^k\}_{k \in \mathcal{M}} \rightarrow \mathbf{y}^*$ και $\{\hat{\mathbf{y}}^k\}_{k \in \mathcal{M}} \rightarrow \hat{\mathbf{y}}$ τέτοιες ώστε $\nabla f(\mathbf{y}^*)^T (\hat{\mathbf{y}} - \mathbf{y}^*) = 0$. Χρησιμοποιώντας την ίδια επιχειρηματολογία όπως και στην περίπτωση του Θεωρήματος 4.9 λαμβάνουμε το επιθυμητό αποτέλεσμα. \square

4.5.1.3 Δυσκοί Αλγόριθμοι Πολυωνυμικής Πολυπλοκότητας για την Επίλυση των Υποπροβλημάτων

Σε αυτή την ενότητα υποθέτουμε ότι στην επανάληψη k , έχουν επιλεγεί συναρτήσεις κανονικοποίησης $\phi_i(\mathbf{y}_i, \mathbf{y}_i^k) = \frac{1}{2}(\mathbf{y}_i - \mathbf{y}_i^k)^T \mathbf{D}_i(\mathbf{y}_i - \mathbf{y}_i^k)$ με διαγώνιες μήτρες \mathbf{D}_i , δηλαδή, $\mathbf{D}_i = \text{diag}(\nabla_i^2 f(\mathbf{y}^k))$, για κάθε $i \in \{1, \dots, m\}$, οι οποίες μπορεί να έχουν διαταραχθεί προκειμένου να εξασφαλιστεί ότι είναι θετικά ορισμένες. Απαλοίφοντας τους σταθερούς όρους και τους δείκτες κάθε υποπρόβλημα θα είναι της μορφής

$$\begin{aligned} [\mathbf{QP}] \quad & \min \sum_{j=1}^n \frac{1}{2} d_j y_j^2 - l_j y_j \\ & \text{υπό} \quad \sum_{j=1}^n y_j = 1 \\ & \quad 0 \leq y_j \leq 1, \quad j = 1, \dots, n \end{aligned} \quad (4.90)$$

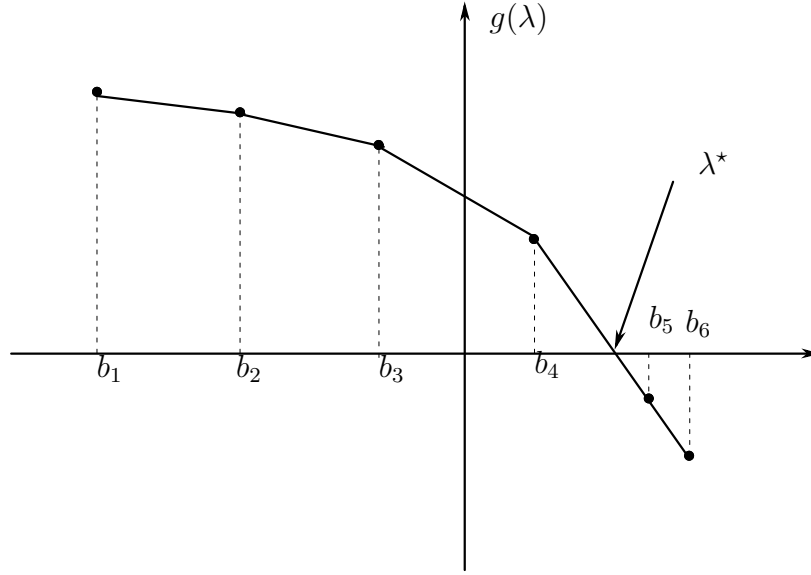
Προβλήματα παρόμοια με το \mathbf{QP} προκύπτουν ως υποπροβλήματα σε πολλές εφαρμογές της επιχειρησιακής έρευνα και επομένως έχουν προσελκύσει την προσοχή πολλών ερευνητών. Ο αλγόριθμος που αναπτύχθηκε από τους Helgason *et al.* [88] έχει υπολογιστική πολυπλοκότητα $O(n \log n)$ και υποθέτει αυθαίρετες τιμές για τα άνω όρια των μεταβλητών. Ακολούθως, ο αλγόριθμος που προτείνεται από τον Brucker [30] για την επίλυση του \mathbf{QP} έχει υπολογιστική πολυπλοκότητα $O(n)$ και υποθέτει αυθαίρετες τιμές για τα άνω και κάτω όρια των μεταβλητών καθώς και για τους συντελεστές και την δεξιά πλευρά του περιορισμού ισότητας. Αν και οι αλγόριθμοι που προτάθηκαν για την επίλυση του προβλήματος βασίζονται σε διαφορετικές τεχνικές, οι οποίες κυμαίνονται από τις συνθήκες βελτιστότητας Karush-Kuhn-Tucker [154] έως τον παραμετρικό προγραμματισμό [30] οι βασικές ιδέες τους είναι κοινές και μπορούν να εκφραστούν σε όρους της δυϊκότητας Lagrange.

Αν είναι $\lambda \in \mathbb{R}$ οι πολλαπλασιαστές Lagrange για τους περιορισμούς της ισότητας το υποπρόβλημα Lagrange θα είναι:

$$\begin{aligned} [\mathbf{QP}(\lambda)] \quad & \min \sum_{j=1}^n \frac{1}{2} d_j y_j^2 + (\lambda - l_j) y_j \\ & \text{υπό} \quad 0 \leq y_j \leq 1, \quad j = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (4.91)$$

Αφού $d_j > 0, \forall j$, το πρόβλημα $\mathbf{QP}(\lambda)$ έχει μοναδική πεπερασμένη λύση $y(\lambda)$ που ορίζεται από

$$y_j(\lambda) = \begin{cases} 0, & \text{εάν } (l_j - \lambda)/d_j \leq 0 \\ 1, & \text{εάν } (l_j - \lambda)/d_j \geq 1 \\ (l_j - \lambda)/d_j, & \text{διαφορετικά,} \end{cases} \quad (4.92)$$



Σχήμα 4.3: Η Τμηματική Γραμμική Μονοτονική μη-Αύξουσα Παράγωγος $g(\lambda)$ και τα σημεία θλάσης

Το δυϊκό πρόβλημα Lagrange θα είναι το :

$$[\mathbf{QPLD}] \quad \max \quad -\lambda + \sum_{j=1}^n \frac{1}{2} d_j y_j(\lambda)^2 + (\lambda - l)_j y_j(\lambda). \quad (4.93)$$

Το πρόβλημα **QP** είναι πάντα εφικτό αφού, εμπειρικά, το $y_j = \frac{1}{n}$, $j = 1, \dots, n$, είναι μια εφικτή λύση στο εσωτερικό της εφικτής περιοχής. Άρα, η βέλτιστη λύση του είναι πεπερασμένη. Επομένως, σύμφωνα με το [12, Θεώρημα 6.2.4], το **QPLD** έχει πεπερασμένο βέλτιστο λ^* , και επιπλέον η βέλτιστη αντικειμενική τιμή του **QP** και του **QPLD** είναι ίσες. Επιπρόσθετα, εξαιτίας της μοναδικότητας του $y(\lambda)$ στο **QP**, η δυϊκή συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη [12, Θεώρημα 6.3.3] με παράγωγο $g(\lambda) = \sum_{j=1}^n y_j(\lambda) - 1$. Επειδή η δυϊκή συνάρτηση είναι κοίλη [12, Θεώρημα 6.3.1], η παράγωγος είναι μονοτονικά μη-αύξουσα [12, Θεώρημα 3.3.4], συνεχής και όπως προκύπτει από τον ορισμό του $y(\lambda)$, τμηματικώς γραμμική. Άρα, το λ^* είναι η λύση της εξίσωσης $\sum_{j=1}^n y_j(\lambda) = 1$, και το $y(\lambda^*)$ επιλύει το **QP**. Τα σημεία θλάσης (δηλαδή τα σημεία που τα γραμμικά τμήματα αλλάζουν) καθορίζονται από τα $\alpha_j = l_j - d_j$ και $\beta_j = l_j$, $\forall j$. Τα σημεία αυτά μπορούν να αναζητηθούν προκειμένου να προσδιοριστεί το γραμμικό τμήμα $[\alpha, \beta]$ στο οποίο ισχύει ότι $\sum_{j=1}^n y_j(\lambda) = 1$, δηλαδή $\lambda^* \in [\alpha, \beta]$. Οι προαναφερθέντες αλγόριθμοι διαφέρουν ως προς το πως διενεργείται αυτή η αναζήτηση.

Συγκεκριμένα, οι αλγόριθμοι υπολογίζουν τα $2n$ σημεία θλάσης α_j και β_j που στο Σχήμα 4.3 αποδίδονται με το σύμβολο b_k . Ο αλγόριθμος των Helgason *et al.* [88] κατατάσσει τα σημεία θλάσης σε αύξουσα ακολουθία: $b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_k \leq$

$\dots \leq b_{2n}$. Εν συνεχεία επιχειρεί με αρχικό διάστημα $[a_0, b_0] \equiv [b_1, b_{2n}]$ μια δυαδική έρευνα (binary search) στην οποία ως μέσος του διαστήματος $[a_0, b_0]$ λαμβάνεται το διάμεσο σημείο θλάσης b_m . Η έρευνα επαναλαμβάνεται για διάστημα $[a_1, b_1]$ που ανάλογα με την τιμή $g(b_m)$ ισοδυναμεί είτε με το διάστημα $[b_1, b_m]$ είτε με το διάστημα $[b_m, b_{2n}]$. Η διαδικασία επαναλαμβάνεται έως ότου είτε $g(b_m) = 0$ είτε το διάστημα περιέχει μόνον ένα γραμμικό τμήμα (πβλ. $[b_4, b_5]$ στο Σχήμα 4.3) οπότε το ζητούμενο λ^* ταυτίζεται με την διάμεσο b_m στην πρώτη περίπτωση και υπολογίζεται μέσω γραμμικής παρεμβολής (linear interpolation).

Ο αλγόριθμος του Brucker [30] αποφεύγει την κατάταξη των σημείων θλάσης σε αύξουσα ακολουθία. Αντιθέτως βασίζεται στον υπολογισμό δύο ενδιαμέσων, έναν για τα σημεία θλάσης α_j και έναν για τα σημεία θλάσης β_j . Επειδή ο υπολογισμός ενδιαμέσου έχει χαμηλότερη πολυπλοκότητα από την κατάταξη των σημείων και επειδή τα σύνολα των σημείων θλάσης α_j και β_j φθίνουν τουλάχιστον κατά το $1/4$ σε κάθε επανάληψη, ο Brucker [30] είναι σε θέση να αποδείξει ότι ο αλγόριθμος του είναι πολυπλοκότητας $O(n)$ αντί της $O(n \log n)$ των Helgason *et al.* [88]. Οι Pardalos και Konoor [154] χρησιμοποιούν μια τυχαιοποιημένη (randomized) μορφή του αλγορίθμου του Brucker [30] στην οποία αντί της ακριβούς εκτίμησης του διαμέσου χρησιμοποιείται ταχύς προσεγγιστικός υπολογισμός του μέσω τυχαίας επιλογής του σε χρόνο $\Theta(1)$. Ενώ η πολυπλοκότητα χειρίστης περίπτωσης αυξάνει σε $\Theta(n^2)$, η κατά μέσο όρο πολυπλοκότητα του αλγορίθμου είναι $O(n)$. Οι εμπειρικές δοκιμές των Pardalos και Konoor [154] για $n=500$ έως και 4000 καταδεικνύουν την υπεροχή του αλγορίθμου τους σε σχέση με τον αλγόριθμο των Helgason *et al.* [88] με έναν παράγοντα της τάξης 5.

Τέλος, εξετάζουμε εδώ και την περίπτωση υπολογισμού του λ^* χωρίς να καταφύγουμε στον υπολογισμό σημείων θλάσης και σε αλγορίθμους διακριτού χαρακτήρα (discrete algorithms). Ο αλγόριθμος διαδοχικής διχοτόμησης (bisection algorithm) του μη-γραμμικού προγραμματισμού δύναται να εντοπίσει το λ^* εκκινώντας από κάποιο αρχικό διάστημα $[a_0, b_0]$ με $g(a_0) g(b_0) < 0$. Αντί για ενδιαμέσο, το μέσο σημείο $\frac{a_0+b_0}{2}$ που διχοτομεί το $[a_0, b_0]$ υπολογίζεται και δοκιμάζεται. Σε κάθε επανάληψη το διάστημα μειώνεται κατά το ήμισυ. Για μία επιθυμητή μείωση του αρχικού διαστήματος μήκους ε , ο μέγιστος αριθμός απαιτούμενων επαναλήψεων είναι $\lceil \log_2 \frac{\varepsilon}{b_0-a_0} \rceil$. Το τελικό λ^* λαμβάνεται μέσω γραμμικής παρεμβολής (linear interpolation) στο τελικό διάστημα $[a_k, b_k]$:

$$\lambda^* = a_k + \frac{(b_k - a_k)(1 - g(a_k))}{g(b_k) - g(a_k)} \quad (4.94)$$

Για την επιλογή του τελικού αλγορίθμου επίλυσης πραγματοποιήσαμε εκτεταμένο αριθμό δοκιμών για τυχαία δεδομένα μερικές εκ των οποίων παρουσιάζονται στον Πίνακα 4.3

Όλοι οι αλγόριθμοι υλοποιήθηκαν σε γλώσσα Fortran 95 σε υπολογιστή με λειτουργικό σύστημα Suse Linux 9.1 και επεξεργαστή Pentium IV στα 3.02 GHz χρησιμοποιώντας μεταγλωττιστή (compiler) Lahey/Fujitsu If95 version 6.2.

Μέγεθος προβλήματος	Χρόνος Εκτέλεσης (secs)			
n	Helgason	Brucker	Pardalos	Διχοτόμος ($\varepsilon = 0.00001$)
100	5.999E-3	3.000E-3	7.998E-3	1.000E-3
500	3.999E-2	4.099E-2	2.599E-2	2.000E-3
1000	9.299E-2	9.399E-2	6.499E-2	3.999E-3
2000	0.112	9.698E-2	7.099E-2	3.999E-3
5000	0.257	0.263	0.178	1.199E-2
7000	0.390	0.398	0.253	1.500E-2
10000	0.619	0.628	0.312	2.200E-2

Πίνακας 4.3: Σύγκριση Χρόνων Εκτέλεσης των Αλγορίθμων

Όπως φαίνεται από τον Πίνακα 4.3 οι διακριτοί αλγόριθμοι δεν είναι ταχύτεροι από την συνεχή μέθοδο διχοτόμησης και μάλιστα η διαφορά αυτή γίνεται εντονότερη καθώς το μέγεθος των προβλημάτων αυξάνει. Μεταξύ των διακριτών αλγορίθμων ο αλγόριθμος των Pardalos και Konoor [154] είναι πράγματι ταχύτερος από αυτόν των Helgason *et al.* [88] που όμως είναι ταχύτερος κατά τι από αυτόν του Brucker [30] παρ' ότι η θεωρητική πολυπλοκότητα του τελευταίου είναι κατά $\log n$ καλύτερη από αυτήν των Helgason *et al.* [88]. Θα πρέπει να τονιστεί ότι αυξάνοντας κατά τι το ε στην συνεχή μέθοδο διχοτόμησης η πρακτική ακρίβεια του υπολογισμού του λ^* μειώνεται ελάχιστα ενώ η εκτέλεση του αλγορίθμου επιταχύνεται αισθητά.

4.6 Υπολογιστικά Αποτελέσματα

Κατά την εφαρμογή της μεθόδου της απέρριπτης αποσύνθεσης στο πρόβλημα **STP** ή **UO-TPE** λαμβάνονται υποπροβλήματα δημιουργίας στηλών του τύπου:

$$(\text{CGS}) \quad \min \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \bar{c}_{ij}^{(k)} x_{ij} \quad (4.95)$$

$$\text{υπό} \quad \sum_{j=1}^n x_{ij} \leq q_i, \quad \forall i \quad (4.96)$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad \forall i, \quad \forall j, \quad (4.97)$$

όπου

$$\bar{c}_{ij}^{(k)} = \frac{\partial f(x^{(k)}, r^{(k)})}{\partial x_{ij}} + \frac{\partial f(x^{(k)}, r^{(k)})}{\partial r_j}, \quad \forall i, \quad \forall j \quad (4.98)$$

με

$$r_j^{(k)} = \sum_{i=1}^m x_{ij}^{(k)}, \quad \forall j, \quad (4.99)$$

και $f(x, r)$ είναι η αντικειμενική συνάρτηση των αρχικών προβλημάτων.

Εμφανώς, το **CGS** διαχωρίζεται σε m γραμμικά προβλήματα σακιδίου (knapsack problems) τα οποία είναι εύκολα απο υπολογιστικής άποψης να επιλυθούν. Αυτή η ιδιότητα χρησιμοποιήθηκε τους Cooper και LeBlanc [46] κατά την υλοποίηση ενός αλγόριθμου βασισμένου στην μέθοδο Frank-Wolfe για την επίλυση του **STP**. Τα πλεονεκτήματα και τα μειονεκτήματα της μεθόδου έχουν ήδη αναφερθεί στις προηγούμενες ενότητες.

Τα δεδομένα που χρησιμοποιούνται για την εξαγωγή των υπολογιστικών αποτελεσμάτων που παρουσιάζονται σε αυτό το μέρος δημιουργήθηκαν τυχαία και σύμφωνα με τις βασικές αρχές που προτείνονται από τους Cooper και LeBlanc [46] και τους LeBlanc κ.α. [114] αντίστοιχα.

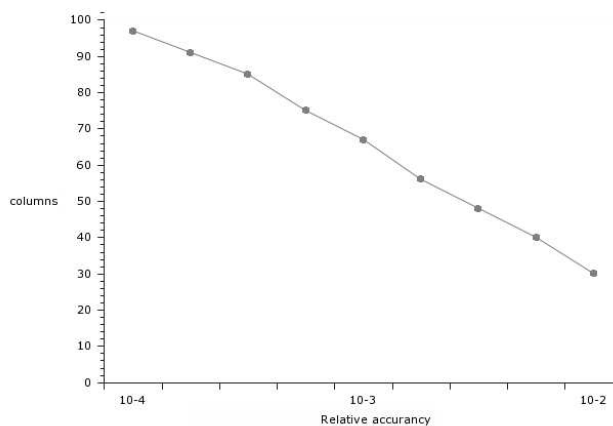
Η πρώτη αρχή δημιουργεί προβλήματα μεγέθους 200 προορισμών και 5 έως 25 πηγών. Η χωροθέτηση των σημείων προσφοράς και ζήτησης λαμβάνονται από μία ομοιόμορφη κατανομή στο πλέγμα $[0, 100] \times [0, 100]$, ενώ το μοναδιαίο κόστος μεταφοράς είναι 1.1 επί την Ευκλείδεια απόσταση των σημείων. Το μοναδιαίο κόστος έλλειψης και το μοναδιαίο κόστος διατήρησης κατανέμονται σύμφωνα με την ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα $[20, 60]$ και $[3, 6]$ αντίστοιχα. Ενώ κάθε ζήτηση κατανέμεται εκθετικά, δηλαδή, $\varphi_j(t) = \lambda_j e^{-\lambda_j t}$, όπου το λ_j λαμβάνεται από το διάστημα $[\frac{1}{200}, \frac{1}{40}]$. Οι ποσότητες προσφοράς κατανέμονται ομοιόμορφα στο διάστημα $[125, 175]$.

Η δεύτερη αρχή δημιουργεί προβλήματα με 100 προορισμούς και 5 έως 25 πηγές. Η χωροθέτηση δημιουργείται όπως και στην προηγούμενη περίπτωση ενώ ο συντελεστής κλίμακας λαμβάνεται τυχαία στο διάστημα $[0.4, 0.8]$. Το κόστος έλλειψης και διατήρησης είναι τυχαίοι αριθμοί στο διάστημα $[75, 115]$ και $[3, 6]$ αντίστοιχα. Το λ_j λαμβάνεται τυχαία στο διάστημα $[\frac{1}{50}, \frac{1}{40}]$, ενώ οι προσφερόμενες ποσότητες στο διάστημα $[300, 500]$.

Για ένα πρόβλημα μεγέθους 25×200 το οποίο δημιουργήθηκε σύμφωνα με την πρώτη αρχή, περίπου το 96% της βέλτιστης αντικειμενικής τιμής προκύπτει από τους μη γραμμικούς όρους του κόστους έλλειψης και κόστους διατήρησης. Για τα προβλήματα μεγέθους 25×100 το ποσοστό αυτό είναι περίπου 60%.

Η αρχική λύση του προβλήματος **STP** λαμβάνεται με την ακόλουθη διαδικασία: Αρχικά η αντικειμενική συνάρτηση ελαχιστοποιείται μόνο ως προς τις μεταβλητές ζήτησης. Η λύση που προκύπτει αναβαθμίζεται σε μια λύση όπου χρησιμοποιούνται όλες οι μεταβλητές της προσφοράς. Οι τιμές που προκύπτουν για τις μεταβλητές ζήτησης χρησιμοποιούνται για την δημιουργία ενός κλασσικού προβλήματος μεταφοράς το οποίο επιλύεται προσεγγιστικά με την χρήση του κανόνα ελαχίστου κόστους. Για τα προβλήματα δοκιμής της πρώτης περίπτωσης τα οποία είναι ισχυρώς μη γραμμικά αυτή η διαδικασία παράγει μια ποιοτική αρχική λύση. Αντίθετα, αυτό δεν ισχύει γενικότερα για τα προβλήματα δοκιμής της δεύτερης περίπτωσης.

Ο αλγόριθμος υλοποιήθηκε στην γλώσσα προγραμματισμού Fortran 95 σε υπο-



Σχήμα 4.4: Μέγεθος του Περιορισμένου Κυρίαρχου Προβλήματος σε Στήλες Έναντι Σχετικής Ακρίβειας

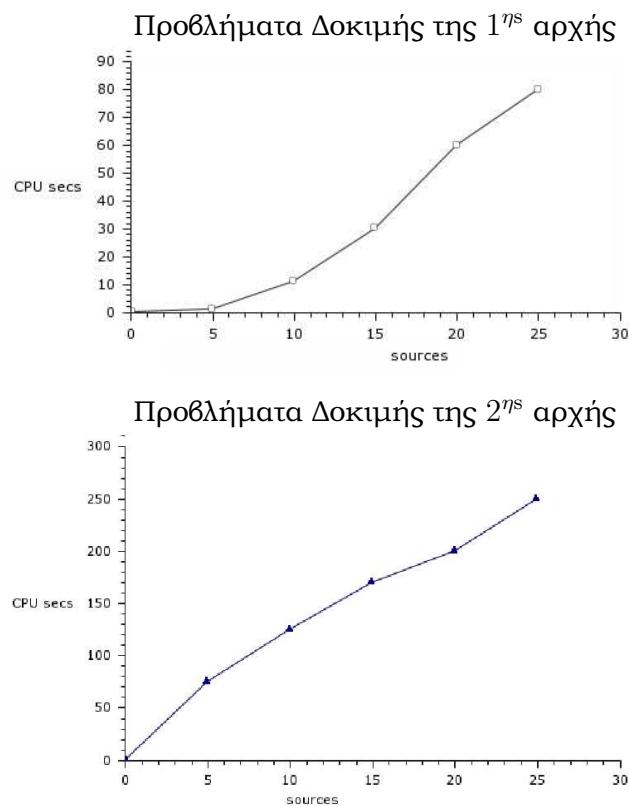
λογιστή με λειτουργικό σύστημα Suse Linux 9.1 και επεξεργαστή Pentium IV στα 3.02 GHz χρησιμοποιώντας μεταγλωττιστή (compiler) Lahey/Fujitsu lf95 version 6.2.

Το διάγραμμα 4.4 απεικονίζει την μέση τιμή των μέγιστων μεγεθών των κυρίαρχων προβλημάτων έναντι της σχετικής ακρίβειας που απαιτείται για την λύση τους.

Ο υπολογιστικός χρόνος που απαιτείται για την επίλυση των προβλημάτων δοκιμής με σχετική ακρίβεια 0.01% παρουσιάζεται στο διάγραμμα 4.5. Τέλος, στο διάγραμμα 4.6, παρουσιάζεται ο υπολογιστικός χρόνος που απαιτείται για την επίλυση των μεγαλύτερων προβλημάτων που δημιουργήθηκαν σύμφωνα με την δεύτερη αρχή για μεγάλο εύρος ακρίβειας.

Ολοκληρώνουμε το κεφάλαιο με την παρουσίαση των αποτελεσμάτων που λαμβάνονται από τον προτεινόμενο αλγόριθμο υστέρτα από την εφαρμογή του σε ένα άλλο μη συνεργατικό παίγνιο, τον καθορισμό ισορροπίας χρήστη στο Πρόβλημα Ανάθεσης Κυκλοφορίας [102]. Αποσκοπούμε έτσι στην υπολογιστική σύγκριση του προτεινόμενου αλγορίθμου με έναν ήδη αναγνωρισμένο για την αποτελεσματικότητά του αλγόριθμο. Ο κάτωθι πίνακας συγκρίνει την αποτελεσματικότητα του αλγορίθμου με τα αποτελέσματα της καλύτερης υλοποίησης της απέριτης αποσύνθεσης για το οδικό δίκτυο των πόλεων που παρουσιάζεται στην εργασία [109]. Συγκεκριμένα οι πόλεις που εξετάζονται είναι:

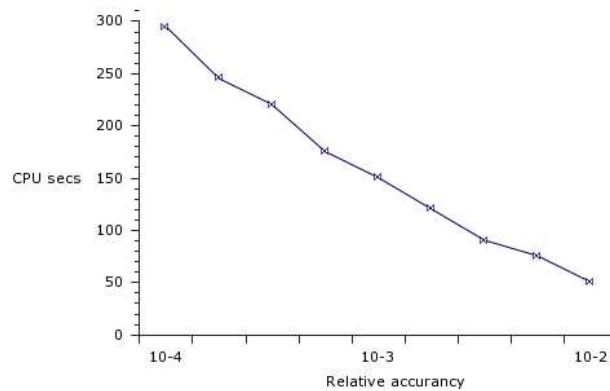
- (i) Η πόλη της Βαρκελώνης της Ισπανία, το οποίο περιλαμβάνει 1020 κόμβους, 2522 τόξα και 7922 ζεύγη αφετηρίας προορισμού (O-D).
- (ii) Η πόλη του Linköping, της Σουηδίας, το οποίο περιλαμβάνει 335 κόμβους, 882 τόξα και 12372 ζεύγη αφετηρίας προορισμού (O-D) και
- (iii) Η πόλη του Winnipeg, στον Καναδά, το οποίο περιλαμβάνει 1052 κόμβους, 2836 τόξα και 4344 ζεύγη αφετηρίας προορισμού (O-D),



Σχήμα 4.5: Σύγκριση Υπολογιστικού Χρόνου και Μεγέθους Προβλήματος με Σχετική Ακρίβεια 0.01 %

Όπως φαίνεται και από τους Πίνακες 4.4, 4.5 και 4.6 ο προτεινόμενος αλγόριθμος (DSD-RFW) είναι κατά μέσω όρο 1.7 φορές ταχύτερος από τον αλγόριθμο των [109], (DSD). Η συμπεριφορά αυτή οφείλεται στο γεγονός ότι ο DSD-RFW χρησιμοποιεί μικρότερο αριθμό γραμμικών αναζητήσεων για την επίτευξη του σχετικού λάθους.

Μπορούμε επίσης να παρατηρήσουμε ότι ο αριθμός των επαναλήψεων είναι εν γένει υψηλότερος για τον DSD-RFW. Το φαινόμενο αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι οι δύο αλγόριθμοι χρησιμοποιούν διαφορετικές στρατηγικές τερματισμού της επίλυσης του κυρίαρχου προβλήματος. Το κριτήριο τερματισμού που χρησιμοποιεί ο DSD-RFW στηρίζεται στην διαφορά ανάμεσα στο άνω και κάτω όριο που λαμβάνονται κατά την επίλυση των κυρίαρχων προβλημάτων ενώ ο DSD τερματίζει όταν η διαφορά ανάμεσα σε δύο συνεχείς αντικειμενικές τιμές του κυρίαρχου είναι μικρότερη μιας σταθεράς η οποία ενημερώνεται με μια προκαθορισμένη διαδικασία.



Σχήμα 4.6: Υπολογιστικός Χρόνος έναντι της Απαιτούμενης Σχετικής Ακρίβειας

4.7 Συμπεράσματα

Τόσο τα προβλήματα του προηγούμενου κεφαλαίου όσο και τα προβλήματα που μορφοποιήθηκαν στο παρόν κεφαλαίου αφορούν την ελαχιστοποίηση μίας παραγωγίσιμης κυρτής συνάρτησης υπο γραμμικούς περιορισμούς.

Σε αυτό το κεφάλαιο αναπτύχθηκε μέσα από μια διαδικασία εκλέπτυνσης και βελτίωσης της γνωστής μεθόδου Frank-Wolfe μια αποτελεσματική μέθοδος εφικτής κατεύθυνσης για την επίλυση προβλημάτων αυτής της κατηγορίας. Ο αλγόριθμος που αναπτύχθηκε στηρίζεται στην έννοια της κανονικοποίησης, της μερικής γραμμικοποίησης μη-γραμμικών προβλημάτων πάνω σε εφικτά σύνολα και της δημιουργίας στηλών.

Η υπολογιστική σύγκριση του προτεινόμενου αλγορίθμου με έναν ήδη αναγνωρισμένο για την αποτελεσματικότητά του αλγόριθμο καταδεικνύει ότι η συνολική αποδοτικότητα της μεθόδου είναι κατά 50% υψηλότερη όταν χρησιμοποιείται η κανονικοποιημένη μέθοδος Frank-Wolfe στην επίλυση του κυρίαρχου προβλήματος αντί της μεθόδου του μειωμένου κλίτους (reduced gradient) που χρησιμοποιείται από τους Larsson και Patriksson [109].

Δίκτυο	Αλγόριθμος	CPU	MI	LS
Βαρκελώνη	DSD	61.3	5	100
	DSD-RFW	31.3	10	28
Linköping	DSD	54.2	4	20
	DSD-RFW	48.3	6	12
Winnipeg	DSD	53.8	6	114
	DSD-RFW	30.4	12	35

Πίνακας 4.4: Χρόνος CPU (σε δευτερόλεπτα), αριθμός επαναλήψεων (MI), αριθμός γραμμών αναζήτησης (LS) των αλγορίθμων DSD και DSD-RFW. Σχετικό αντικειμενικό σφάλμα 0.5%.

Δίκτυο	Αλγόριθμος	CPU	MI	LS
Βαρκελώνη	DSD	92.6	6	149
	DSD-RFW	58.8	10	59
Linköping	DSD	53.8	7	94
	DSD-RFW	31.7	6	36
Winnipeg	DSD	135.5	7	281
	DSD-RFW	59.6	11	81

Πίνακας 4.5: Χρόνος CPU (σε δευτερόλεπτα), αριθμός επαναλήψεων (MI), αριθμός γραμμών αναζήτησης (LS) των αλγορίθμων DSD και DSD-RFW. Σχετικό αντικειμενικό σφάλμα 0.1%.

Δίκτυο	αλγόριθμος	CPU	MI	LS
Βαρκελώνη	DSD	114.3	7	181
	DSD-RFW	81.3	12	83
Linköping	DSD	106.3	7	185
	DSD-RFW	65.9	8	77
Winnipeg	DSD	187.7	8	382
	DSD-RFW	114.3	15	159

Πίνακας 4.6: Χρόνος CPU (σε δευτερόλεπτα), αριθμός επαναλήψεων (MI), αριθμός γραμμών αναζήτησης (LS) των αλγορίθμων DSD και DSD-RFW. Σχετικό αντικειμενικό σφάλμα 0.05%.

Κεφάλαιο 5

Ανταγωνιστική Χωροθέτηση Εγκαταστάσεων υπό Ανταγωνισμό Πελατών για το Προσφε- ρόμενο Επίπεδο Εξυπηρέτησης

*ἀλλῆλ' αἰνὸν ἄχος κραδίην καὶ θυμὸν ἰκάνει,
ὅππότε δὴ τὸν ὁμοῖον ἀνὴρ ἐδέξθησιν ἀμέρσαι
καὶ γέρας ἄψ' ἀφελέσθαι, ὃ τε κράτει προθεθήκη*

ΟΜΗΡΟΣ: Ἰλιάς, Παρωδία II, στίχος 53-54

5.1 Εισαγωγή

Η χωροθέτηση των εγκαταστάσεων, ο καθορισμός δηλαδή των καλύτερων θέσεων για τις εγκαταστάσεις παραγωγής, τις αποθήκες ή τα ενδιαμέσα κέντρα διανομής, είναι ένα κρίσιμο θέμα του στρατηγικού προγραμματισμού που καλύπτει τον πυρήνα του σχεδιασμού της εφοδιαστικής αλυσίδας.

Τα προβλήματα της χωροθέτησης εγκαταστάσεων (Facility Location Problem) και η καταχώρηση δυναμικότητας σε αυτές για την εξυπηρέτηση της ζήτησης πελατών αποτελούν μια από τις πιο κλασσικές περιοχές έρευνας του τομέα της βελτιστοποίησης. Αναφέρονται στην περίπτωση όπου ο αποφασίζων πρέπει να επιλέξει την τοποθεσία νέων εγκαταστάσεων από ένα δεδομένο σύνολο εναλλακτικών, και την δυναμικότητα τους προκειμένου να ικανοποιήσει τις απαιτήσεις των πελατών του με το μικρότερο δυνατό κόστος [52, 53].

Επομένως κατά την δημιουργία μιας νέας εγκατάστασης παράγοντες όπως η επιλογή της κατάλληλης δυναμικότητας, και η τοποθεσία της εγκατάστασης χρίζουν ιδιαίτερης προσοχής και θα πρέπει να ληφθούν σοβαρά υπόψη. Η επιλογή της θέσης των εγκαταστάσεων επηρεάζει όχι μόνο την απόσταση που οι χρήστες θα διανύσουν προς αυτές αλλά και, σε συνδυασμό με τις αποφάσεις σχετικά με την δυναμικότητα, τον χρόνο που οι πελάτες αναμένουν στις εγκαταστάσεις πριν λάβουν

την εξυπηρέτηση. Οι συνθήκες κάτω από τις οποίες οι πελάτες κάνουν την επιλογή των εγκαταστάσεων εξυπηρέτησης είναι περίπλοκες, αλλά είναι γενικά λογικό να υποθετηθεί ότι κάθε πελάτης θα επιλέξει την εγκατάσταση που ελαχιστοποιεί το κόστος μεταφοράς και αναμονής του σε αυτήν.

Η αντιμετώπιση παρόμοιων καταστάσεων από μαθηματικά πρότυπα (για παράδειγμα [130, 131, 132]) που ασχολούνται με την χωροθέτηση εγκαταστάσεων, γίνεται μέσω κατευθυνόμενης επιλογής (*directed choice*), δηλαδή οι εγκαταστάσεις εκχωρούνται στους πελάτες από το σύστημα. Στα πρότυπα αυτά, η εκχώρηση των πελατών γίνεται στην πιο κοντινή σε αυτούς εγκατάσταση, και ολόκληρη η ζητούμενη ποσότητα του πελάτη κατευθύνεται σε αυτήν. Η συμφόρηση στις εγκαταστάσεις ελέγχεται με την ενσωμάτωση περιορισμών για την εξασφάλιση ενός επιθυμητού επιπέδου χρόνου αναμονής ή αριθμού πελατών σε αυτές. Τέτοιοι περιορισμοί, τείνουν να εξισώσουν το επίπεδο συμφόρησης στις διαφορετικές εγκαταστάσεις, είτε αυτό μετράται με τον αριθμό των χρηστών που περιμένουν είτε με τον χρόνο αναμονής. Εμπειρικές όμως μελέτες [87, 77] έχουν δείξει ότι όταν οι πελάτες είναι αυτοί που μετακινούνται, τότε επιλέγουν εκείνη την εγκατάσταση για την οποία ελαχιστοποιείται ο χρόνος μετακίνησης και ο χρόνος αναμονής. Είναι συνεπώς πιθανό, ένας χρήστης να επιλέξει να μην μετακινηθεί στην πιο κοντινή εγκατάσταση αλλά σε κάποια άλλη η οποία αν και είναι μακρύτερα είναι λιγότερο κορεσμένη.

Σε αυτό το κεφάλαιο εξετάζουμε το δικτύου ανεφοδιασμού που μελετήθηκε στο Κεφάλαιο 3 στην περίπτωση όπου ο παραγωγός επιθυμεί να προσδιορίσει τον αριθμό των εγκαταστάσεων και την συνολική δυναμικότητα παραγωγής του έτσι ώστε να εξασφαλίσει ένα συγκεκριμένο επίπεδο ικανοποίησης των πελατών λαμβάνοντας υπόψη του και το χρόνο αναμονής των πελατών στο σύστημα.

Στα μαθηματικά πρότυπα που παρουσιάζονται αρχικά ένας κεντρικός συντονιστής, που υποθέτουμε ότι είναι ο παραγωγός, έχει την δυνατότητα να κατευθύνει τους πελάτες στα κέντρα διανομής που θα χωροθετηθούν. Όπως και στην περίπτωση του Κεφαλαίου 3, η χωροθέτηση που θα επιλέγει με βάση αυτήν την προοπτική εντάσσεται στο πλαίσιο της κεντρικής διαχείρισης της εφοδιαστικής αλυσίδας. Αντιμετωπίζοντας το δίκτυο ανεφοδιασμού ως μια ενιαία αγορά, ο παραγωγός μπορεί να θεωρηθεί ως μονοπωλητής που εξουσιάζει την αγορά και που προσπαθεί, μέσα από τις επιλογές χωροθέτησης και δυναμικότητα που κάνει για τα κέντρα διανομής, να εξασφαλίσει ταυτόχρονα και ένα συγκεκριμένο επίπεδο υπηρεσιών στους πελάτες του.

Στην συνέχεια τα μαθηματικά πρότυπα επεκτείνονται στην περίπτωση που οι πελάτες έχουν την δυνατότητα οι ίδιοι να αποφασίζουν το κέντρο διανομής από το οποίο θα ζητήσουν την ικανοποίηση της ζήτησης τους. Οι επιλογές των πελατών για την εξασφάλιση ενός προϊόντος ή μιας υπηρεσίας επηρεάζονται από το συνολικό ατομικό κόστος που προκύπτει κατά την διαδικασία συναλλαγής του με την επιχείρηση/παροχέα. Το συνολικό ατομικό κόστος περιλαμβάνει εκτός από την τιμή του προϊόντος, το κόστος πρόσβασης (κόστος μεταφοράς) που απαιτείται να καταβάλλει ο πελάτης για την εξασφάλιση του προϊόντος καθώς και το κόστος που

δημιουργείται εξαιτίας της καθυστέρησης που παρατηρείται κατά την διαδικασία της εξυπηρέτησης. Η επιλογή εγκατάστασης για την εξυπηρέτηση του γίνεται συνεπώς ανταγωνιστικά προς τους υπόλοιπους με απώτερο σκοπό την ελαχιστοποίηση του συνολικού ατομικού του κόστους.

Όπως τεκμηριώθηκε στο Κεφάλαιο 3, οι επιλογές των πελατών, όταν οι πελάτες ανταγωνίζονται μεταξύ τους για το επίπεδο εξυπηρέτησης που λαμβάνουν, διαφέρουν από τις αναθέσεις που προκύπτουν σύμφωνα με το ολικό βέλτιστο του συστήματος. Λειτουργούν δηλαδή ως ολιγοψώνιο ως προς το επίπεδο εξυπηρέτησης. Επομένως, η ανταγωνιστική αυτή συμπεριφορά των πελατών θα πρέπει να ληφθεί υπόψη από τον παραγωγό κατά την διαδικασία λήψης αποφάσεων χωροθέτησης και καθορισμού των κέντρων διανομής. Υποθέτοντας ότι οι πελάτες παρατηρούν την απόφαση χωροθέτησης του παραγωγού και ότι έχουν πλήρη πληροφόρηση για τα τεκτονόμενα σε κάθε κέντρο διανομής, διαμορφώνουμε το πρόβλημα χωροθέτησης των κέντρων διανομής σαν ένα πρόβλημα διεπίπεδου προγραμματισμού.

Εξετάζουμε συγκεκριμένα δύο τύπους αποφασιζόντων οι οποίοι έχουν διαφορετικούς στόχους και βρίσκονται σε διαφορετικά επίπεδα ιεραρχίας. Στο πρώτο επίπεδο, ο παραγωγός (ο ηγέτης) παρέχει στις εγκαταστάσεις το καλύτερο επίπεδο υπηρεσιών σύμφωνα με την αντιλήψή του, συμπεριλαμβανομένης της χωροθέτησης, στο ελάχιστο κόστος. Στο δεύτερο επίπεδο οι πελάτες (οι ακόλουθοι) κάνουν τις επιλογές τους ανταγωνιστικά (μορφή παιγνίου Nash) προκειμένου να ελαχιστοποιηθούν οι προσωπικές δαπάνες τους.

Τα δύο αυτά επίπεδα ιεραρχίας εμπλέκονται σε ένα παίγνιο Stackelberg. Πρώτος αποφασίζει ο ηγέτης καθορίζοντας το επίπεδο των υπηρεσιών που ελαχιστοποιεί το κόστος του, στην συνέχεια αντιδρούν οι ακόλουθοι έχοντας πλήρη πληροφόρηση για τις αποφάσεις του ηγέτη. Ο ηγέτης το γνωρίζει αυτό και το λαμβάνει υπόψη του πριν ανακοινώσει την στρατηγική του.

Τα συμπεράσματα που λαμβάνονται από την αριθμητική ανάλυση των προτεινόμενων προτύπων καταδεικνύουν ότι η ύπαρξη ολιγοψωνιακής συμπεριφοράς των πελατών ως προς το επίπεδο της ποιότητας των παρεχόμενων υπηρεσιών βελτιώνει την ποιότητα των υπηρεσιών που παρέχονται αφού επιβάλει την προσαρμογή του παραγωγού στις ανάγκες της αγοράς. Αυξάνει δηλαδή την ευελιξία της αγοράς. Το συμπέρασμα ανοίγει μια νέα περιοχή έρευνας στην κλασική μελέτη της ολιγοψωνιακής οργάνωσης αγοράς, η οποία τις τελευταίες δεκαετίες έχει δεχθεί πολλές κριτικές [135].

Στο τελευταίο μέρος αυτού του κεφαλαίου υποθέτουμε ότι τα κέντρα διανομής διανέμονται μεταξύ δύο παραγωγών. Συγκεκριμένα στα πρότυπα αυτά υποθέτουμε ότι οι παραγωγοί συνιστούν ένα δυοπώλειο το οποίο ανταγωνίζεται για την προσέλκυση πελατών μέσω του παρεχόμενου επιπέδου εξυπηρέτησης εμπλεκόμενοι σε ένα παίγνιο Nash. Σε αντίθεση με τα ήδη υπάρχοντα πρότυπα στην βιβλιογραφία που εξετάζουν τον ανταγωνισμό των προμηθευτών στα πλαίσια της εφοδιαστικής αλυσίδας (π.χ. [146]), διαμορφώνουμε το πρόβλημα του ανταγωνισμού των προμηθευτών

ως προς το επίπεδο εξυπηρέτησης που προσφέρουν σαν ένα διεπίπεδο πρόβλημα με δύο ανταγωνιζόμενους ηγέτες. Εξαιτίας της ανταγωνιστικής φύσης του δυοπωλείου, η διεπίπεδη διαμόρφωση των προβλημάτων είναι πολυπλοκότερη της περίπτωσης του ενός παραγωγού. Αποδεικνύεται επίσης ότι η συμπεριφορά και οι επιλογές των ανταγωνιζόμενων παραγωγών στο διεπίπεδο παίγνιο είναι σημαντικά διαφορετική από αυτές του μονοπωλείου.

Η προτεινόμενη διεπίπεδη διαμόρφωση είναι η πρώτη στην βιβλιογραφία που ασχολείται με την ανταγωνιστική χωροθέτηση και την καταχώρηση δυναμικότητας, στα πλαίσια ολιγοπωλιακής οργάνωσης των προμηθευτών της εφοδιαστικής αλυσίδας.

Το υπόλοιπο του κεφαλαίου οργανώνεται ως εξής: Στην Ενότητα 5.2 δίδεται μια σύντομη επισκόπηση του διεπίπεδου προγραμματισμού. Στην Ενότητα 5.3 διατυπώνονται μαθηματικά τα προβλήματα χωροθέτησης και κατανομής δυναμικότητας όταν ένας παραγωγός ελέγχει το δίκτυο ανεφοδιασμού. Συγκεκριμένα στο πρότυπο της Υποενότητας 5.3.1 ο παραγωγός λαμβάνει τις σχετικές αποφάσεις αγνοώντας την ανταγωνιστική συμπεριφορά των πελατών, ενώ αντίθετα στην χωροθέτηση που προκύπτει από το πρότυπο της Υποενότητας 5.3.2 η συμπεριφορά αυτή λαμβάνεται υπόψη άμεσα. Η σύγκριση των δύο αυτών διαφορετικών σχεδίων χωροθέτησης παρατίθεται στην Υποενότητα 5.3.3. Στην Ενότητα 5.4 εξετάζονται η περίπτωση όπου υπάρχουν περισσότεροι του ενός παραγωγοί που διοχετεύουν το προϊόν στην αγορά, οι οποίοι ανταγωνίζονται, μέσω του επιπέδου υπηρεσιών που παρέχουν, για την προσέλκυση πελατών στα κέντρα διανομής τους.

5.2 Σύντομη Επισκόπηση του Διεπίπεδου Προγραμματισμού

Τα προβλήματα διεπίπεδου προγραμματισμού περιγράφουν ένα ιεραρχικό σύστημα στο οποίο εμπλέκονται δύο επίπεδα αποφάσεων με διαφορετικούς, συχνά αντικρουόμενους, στόχους [141, 11]. Το πρώτο επίπεδο ο ηγέτης (Leader) ελέγχει την μεταβλητή απόφασης x . Το δεύτερο επίπεδο ο ακόλουθος (follower) ελέγχει τη μεταβλητή απόφασης y . Οι αντίστοιχες συναρτήσεις απωλειών (loss functions) $\phi_L(x, y)$ και $\phi_F(x, y)$ περιγράφουν την αλληλεπίδραση των αποφάσεων των δύο επιπέδων. Τα δύο αυτά επίπεδα ιεραρχίας εμπλέκονται συνήθως σε ένα παίγνιο Stackelberg. Η βασική ιδέα του παιγνίου αυτού μπορεί να περιγραφεί ως εξής:

Ο ηγέτης καθορίζει την στρατηγική x που ελαχιστοποιεί την συνάρτηση απώλειας του $\phi_L(x, y)$ και ο ακόλουθος, έχοντας πλήρη πληροφόρηση για τις αποφάσεις του ηγέτη, αντιδρά επιλέγοντας την στρατηγική του που ελαχιστοποιεί την δική του συνάρτηση απώλειας $\phi_F(x, y)$. Επομένως οι επιλογές του ακόλουθου εξαρτώνται από τις επιλογές του ηγέτη, δηλαδή $y = y(x)$. Ο ηγέτης το γνωρίζει αυτό και το λαμβάνει υπόψη του πριν ανακοινώσει την στρατηγική του. Το διεπίπεδο πρόβλημα μπορεί να γραφτεί με την εξής γενική μορφή:

$$[\mathbf{BP}] \min_{\mathbf{x} \in \mathcal{X}} \phi_L(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad (5.1)$$

$$\text{υπό } \varphi_L(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq 0, \quad (5.2)$$

όπου $\mathbf{y}(\mathbf{x})$ επιλύει

$$\min_{\mathbf{y} \in \mathcal{Y}} \phi_F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad (5.3)$$

$$\text{υπό } \varphi_F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq 0, \quad (5.4)$$

$$(5.5)$$

όπου $\mathbf{x} \in \mathcal{X} \subset R^n, \mathbf{y} \in \mathcal{Y} \subset R^m$ και τα \mathcal{X}, \mathcal{Y} είναι κλειστά σύνολα και οι $\varphi_L : \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \rightarrow R^p, \varphi_F : \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \rightarrow R^q$.

Το ανώτερο επίπεδο του προβλήματος (5.1)-(5.2) αντιστοιχεί στο πρόβλημα του ηγέτη, ενώ τον κατώτερο επίπεδο (5.3)-(5.4) στο πρόβλημα του ακόλουθου. Το σύνολο $\mathcal{S} = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) : \mathbf{x} \in \mathcal{X}, \mathbf{y} \in \mathcal{Y}, \phi_L(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq 0, \phi_F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq 0\}$ καλείται *κοινό σύνολο περιορισμών* (constraint set). Το σύνολο $\mathcal{Y}(\mathbf{x}) = \{\mathbf{y} \in \mathcal{Y} : \phi_F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq 0\}$ είναι το *εφικτό σύνολο του ακόλουθου* για κάθε σταθερό $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$. Το σύνολο των *ορθολογικών αντιδράσεων του ακόλουθου* είναι το $\mathcal{R}(\mathbf{x}) = \{\mathbf{y} \in \mathcal{Y} : \mathbf{y} \in \arg \min_{\mathbf{z} \in \mathcal{Y}(\mathbf{x})} \phi_F(\mathbf{z}, \mathbf{y})\}$, ενώ το σύνολο $\mathcal{F} = \{\mathbf{x}, \mathbf{y} : (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathcal{S}, \mathbf{y} \in \mathcal{R}(\mathbf{x})\}$ είναι η *περιοχή των εφικτών λύσεων του [BP]*. Ένα εφικτό σημείο $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*) \in \mathcal{F}$ είναι σημείο ισορροπίας Stackelberg εάν $\phi_L(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*) \leq \phi_L(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \forall (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathcal{F}$. Το σημείο αυτό περιγράφει την βέλτιστη στρατηγική του ηγέτη.

Αρχικά διατυπωμένο και μελετημένο ως μαθηματικό πρότυπο από τον Bracken και McGill[28, 29], το [BP] έχει γίνει ένα θέμα εκτενούς έρευνας κατά τη διάρκεια των τελευταίων δύο δεκαετιών λόγω των πολυάριθμων εφαρμογών του [141, 11, 140, 103].

Τα μαθηματικά υποδείγματα διεπίπεδου προγραμματισμού μπορεί να είναι γραμμικού, μη γραμμικού, τετραγωνικού ή οποιουδήποτε άλλου είδους προγραμματισμού ανάλογα με το πρόβλημα που σχεδιάζεται κάθε φορά. Για την επίλυση όλων αυτών των υποδειγμάτων έχουν αναπτυχθεί διάφορες μεθοδολογικές προσεγγίσεις και αλγόριθμοι και εφαρμόζονται ανάλογα. Πρόσφατες εφαρμογές του διεπίπεδου προγραμματισμού μπορούν να βρεθούν στις [140, 103].

5.3 Βέλτιστη Χωροθέτηση Εγκαταστάσεων και Ανάθεση Δυναμικότητας υπό Ανταγωνισμό Πελατών

Σε αυτή την ενότητα θα εξετάσουμε την περίπτωση όπου ο παραγωγός έχει την δυνατότητα να κατευθύνει ο ίδιος τους n πελάτες στα κέντρα διανομής για την ικανοποίηση της ζήτησης τους. Αντιμετωπίζοντας το δίκτυο ανεφοδιασμού ως μια ενιαία αγορά, ο προμηθευτής μπορεί να θεωρηθεί ως ο μονοπωλητής που εξουσιάζει την

αγορά. Επομένως, με δεδομένη την συνολική ζήτηση της αλυσίδας, θα μπορούσε αυτόνομα να καθορίσει την βέλτιστη χωροθέτηση των κέντρων διανομής και την συνολική δυναμικότητα τους εφαρμόζοντας έναν συνδυασμό της τυπικής οικονομικής θεωρίας της μονοπωλιακής οργάνωσης αγοράς και των προτύπων χωροθέτησης εγκαταστάσεων (βλ π.χ. [135] και [53] αντίστοιχα).

Μόλις όμως χωροθετηθούν τα κέντρα διανομής και γίνει εκχώρηση δυναμικότητας σε αυτά, ο ανεφοδιασμός των πελατών περιορίζεται από τις συγκεκριμένες αποφάσεις καθώς οι πωλήσεις των προϊόντων στους πελάτες είναι στην πραγματικότητα μια διαδικασία κατανομής της δυναμικότητας στα κέντρα διανομής. Από την άλλη πλευρά, όπως έχει ήδη αποδειχθεί στο Κεφάλαιο 3, η επιλογή της δυναμικότητας θα επηρεάσει το προσφερόμενο επίπεδο εξυπηρέτησης στα κέντρα διανομής που με την σειρά του θα επηρεάσει τις πωλήσεις. Το φαινόμενο αυτό είναι ιδιαίτερα έντονο όταν οι πελάτες ανταγωνίζονται για την εξασφάλιση του καλύτερου δυνατού επιπέδου εξυπηρέτησης, λειτουργούν δηλαδή ως ολιγοψώνιο ως προς το επίπεδο εξυπηρέτησης. Έχει αποδειχθεί στο Κεφάλαιο 3 ότι στην περίπτωση αυτή οι πελάτες πλεονεκτούν σε σχέση με τον παραγωγό αφού έχουν την δυνατότητα να μεταφερθούν από το ένα κέντρο διανομής στο άλλο. Με αυτόν τον τρόπο ελαχιστοποιούν τις δαπάνες τους ενώ παράλληλα υπαγορεύουν τις ακριβείς προδιαγραφές του επιπέδου εξυπηρέτησης που επιθυμούν.

Το κύριο πρόβλημα επομένως της διαχείρισης του δικτύου ανεφοδιασμού που εξετάζουμε είναι η εύρεση ενός κατάλληλου μηχανισμού λήψης αποφάσεων σύμφωνα με τον οποίο η χωροθέτηση των εγκαταστάσεων θα είναι συμφέρουσα για όλα τα μέλη του δικτύου σε ατομικό επίπεδο.

5.3.1 Βέλτιστη Χωροθέτηση του Συστήματος

Υποθέτουμε ότι ο παραγωγός προσπαθεί να παρέχει σε n πελάτες το καλύτερο κατά την δικιά του άποψη επίπεδο των υπηρεσιών του στο ελάχιστο κόστος. Η μέτρηση των παρεχόμενων υπηρεσιών γίνεται από το επίπεδο καθυστέρησης της εξυπηρέτησης που αντιμετωπίζεται σε κάθε κέντρο διανομής i . Αν x_{ij} είναι η ποσότητα που ο πελάτης j αγοράζει από το κέντρο διανομής i , τότε η συνάρτηση απόδοσης $d_i(x_i)$ μετράει το επίπεδο εξυπηρέτησης που προσφέρεται από το κέντρο διανομής i , όπου $x_i = \sum_{j=1}^n x_{ij}$.

Έστω ότι m είναι το σύνολο των δυνητικών τοποθεσιών για την χωροθέτηση των κέντρων διανομής, υποθέτουμε ότι η επιλογή δημιουργίας ενός κέντρου διανομής στην υποψήφια τοποθεσία i συνεπάγεται ένα πάγιο κόστος χωροθέτησης F_i . Ας υποθέσουμε επιπλέον ότι r_j είναι η ζήτηση του πελάτη j ($j = 1, \dots, n$) για το προϊόν, p_i η τιμή ανά μονάδα που καταβάλουν οι πελάτες στο κέντρο διανομής και q_i η δυναμικότητα του κέντρου διανομής i ($i = 1, \dots, m$). Ο κεντρικός συντονιστής (παραγωγός), θα πρέπει να επιλέξει την χωροθέτηση των κέντρων διανομής έτσι ώστε να βελτιστοποιήσει το όφελος του συστήματος. Στόχος του θα είναι δηλαδή η εύρεση των τοποθεσιών των εγκαταστάσεων και η εκχώρηση των πελατών σε αυτές

έτσι ώστε να ελαχιστοποιείται το ολικό κόστος του συστήματος. Μαθηματικά το πρότυπο μπορεί να διαμορφωθεί ως:

$$(\text{SO} - \text{FL}) \quad \min \quad \sum_{i=1}^m d_i(x_i)x_i + \sum_{i=1}^m p_i x_i + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n t_{ij}x_{ij} + \sum_{i=1}^m F_i y_i \quad (5.6)$$

$$\text{υπό} \quad \sum_{i=1}^m x_{ij} = r_j, \quad \forall j \quad (5.7)$$

$$x_i \leq y_i q_i, \quad \forall i \quad (5.8)$$

$$x_i - \sum_{i=1}^m x_{ij} = 0, \quad \forall i \quad (5.9)$$

$$y_i \in \{0, 1\}, \quad \forall i \quad (5.10)$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad \forall i, \quad \forall j \quad (5.11)$$

Η αντικειμενική συνάρτηση του προβλήματος (5.6) ελαχιστοποιεί το ολικό κόστος που αποτελείται από το συνολικό κόστος καθυστέρησης συν τις δαπάνες μεταφοράς και αγοράς του προϊόντος των πελατών συν το κόστος που συνεπάγεται η δημιουργία των κέντρων διανομής. Οι περιορισμοί (5.7) εξασφαλίζουν ότι οι ποσότητες που αγοράζει ο πελάτης j από τις εγκαταστάσεις ικανοποιεί την συνολική του ζήτηση. Οι περιορισμοί (5.8) επιβάλλουν την συνολική ποσότητα που διατίθεται από κάθε κέντρο διανομής i να μην υπερβαίνει την δυναμικότητα του κέντρου διανομής και επιτρέπουν την ανάθεση της ζήτησης των πελατών μόνο σε κέντρα διανομής που έχουν χωροθετηθεί. Οι σχέσεις (5.9) αποτελούν τους προσδιοριστικούς περιορισμούς του προτύπου, που διασφαλίζουν την συντήρηση της ροής στο δίκτυο.

Μια σημαντική απόφαση που καλείται να λάβει ο παραγωγός του δικτύου ανεφοδιασμού που εξετάζουμε είναι ο καθορισμός της δυναμικότητας των κέντρων διανομής. Αν η δυναμικότητα καθοριστεί σε επίπεδα πολύ υψηλότερα από την συνολική ζήτηση που θα αντιμετωπίσει το κέντρο παραγωγής, ο παραγωγός θα επωμιστεί το κόστος που συνεπάγεται η δέσμευση κεφαλαίου σε αυτήν. Από την άλλη πλευρά, η χαμηλή δυναμικότητα παραγωγής συνεπάγεται αύξηση του χρόνου εξυπηρέτησης των πελατών και κατά συνέπεια χαμένες πωλήσεις αφού οι πελάτες θα αναγκαστούν να ζητήσουν την εξυπηρέτηση τους από άλλα κέντρα διανομής. Στο προηγούμενο πρότυπο η δυναμικότητα των δυνητικών κέντρων διανομής είναι εκ των προτέρων δεδομένη. Είναι δυνατόν να εξεταστεί και η περίπτωση όπου η δυναμικότητα παραγωγής δεν είναι δεδομένη αλλά πρέπει να αποφασισθεί κατά την διαδικασία διαμόρφωσης του δικτύου. Η συνάρτηση απόδοσης θα εξαρτάται τότε όχι μόνο από την συνολική ποσότητα x_i που θα διατεθεί από το κέντρο διανομής αλλά και από την απόφαση που παραγωγού για το ύψος της δυναμικότητας, έστω q_i , δηλαδή $d(x_i q_i)$. Η καταχώρηση δυναμικότητας στα κέντρα διανομής ουσιαστικά συνεπάγεται και χωροθέτηση των κέντρων διανομής αφού μηδενική δυναμικότητα συνεπάγεται και μη χωροθέτηση του αντίστοιχου κέντρου.

Επομένως, όταν ο παραγωγός έχει την δυνατότητα να καταχωρήσει στα κέντρα δια-

νομής τόσο δυναμικότητα όσο και ζήτηση πελατών προς εξυπηρέτηση θα κλιθεί να επιλύσει ένα πρόβλημα της μορφής:

$$(\text{SO} - \text{CA}) \min \sum_{i=1}^m d_i(x_i, q_i)x_i + \sum_{i=1}^m p_i x_i + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n t_{ij} x_{ij} \quad (5.12)$$

$$\text{υπό} \quad \sum_{i=1}^m x_{ij} = r_j, \quad \forall j \quad (5.13)$$

$$x_i \leq q_i, \quad \forall i \quad (5.14)$$

$$x_i - \sum_{j=1}^n x_{ij} = 0, \quad \forall i \quad (5.15)$$

$$\sum_{i=1}^m \alpha_i q_i \leq B \quad (5.16)$$

$$0 \leq q_i \leq U_i, \quad \forall i \quad (5.17)$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad \forall i, \quad \forall j \quad (5.18)$$

Η αντικειμενική συνάρτηση του προβλήματος (5.12) ελαχιστοποιεί το ολικό κόστος που αποτελείται από το ολικό κόστος καθυστέρησης συν τις δαπάνες μεταφοράς και αγοράς του προϊόντος των πελατών. Οι περιορισμοί (5.13) εξασφαλίζουν ότι οι ποσότητες που αγοράζει ο πελάτης j από τις εγκαταστάσεις ικανοποιούν την συνολική του ζήτηση. Οι περιορισμοί (5.14) επιβάλλουν ότι η συνολική ποσότητα που διατίθεται από κάθε κέντρο διανομής i δεν υπερβαίνει την δυναμικότητα του κέντρου διανομής. Οι σχέσεις (5.15) αποτελούν τους προσδιοριστικούς περιορισμούς του προτύπου, που διασφαλίζουν την συντήρηση της ροής στο δίκτυο. Οι περιορισμοί (5.16) επιβάλλουν το συνολικό ποσό που θα δαπανηθεί για τις επενδύσεις σε δυναμικότητα στα m κέντρα διανομής να μην υπερβαίνει τον προϋπολογισμό ύψους B , ενώ οι περιορισμοί (5.17) εξασφαλίζουν ότι η δυναμικότητα του κέντρου παραγωγής i δεν θα ξεπερνά τις U_i μονάδες. Είναι δυνατόν αντί του περιορισμού (5.16) να προστεθεί στην αντικειμενική συνάρτηση κόστος αντίστοιχο του προηγούμενου προτύπου (5.6)-(5.11) δηλαδή $\sum_{i=1}^m F_i(q_i)$ όπου οι $F_i(\cdot)$ είναι συνεχείς συναρτήσεις, συνήθως κοίλες, για να διατυπώσουν τις οικονομίες κλίμακας που συνεπάγονται οι καταχωρίσεις διαφορετικών επιπέδων δυναμικότητας.

5.3.2 Διεπίπεδη Διαμόρφωση των Προβλημάτων υπό Ανταγωνισμό Πελατών

Όπως έχει ήδη αποδειχθεί στο Κεφάλαιο 3, οι επιλογές των πελατών δεν συμπίπτουν εν γένει με τις αναθέσεις που προκύπτουν από την επίλυση των προβλημάτων της προηγούμενης υποενότητας.

Σε μια τέτοια περίπτωση, ο παραγωγός θα πρέπει να λάβει υπόψη του τις αντιδράσεις των πελατών σε κάθε απόφαση που λαμβάνει και να καθορίσει με βάση αυτές

τις αντιδράσεις την τελική χωροθέτηση των κέντρων διανομής. Με άλλα λόγια, ο παραγωγός κατανοώντας ότι δεν μπορεί να ελέγξει τις επιλογές των πελατών του, θα πρέπει να χρησιμοποιήσει το παίγνιο Nash των πελατών του ως ένα μαντείο για να μπορεί να προβλέψει τις επιλογές του σε κάθε πιθανή χωροθέτηση εκ μέρους του. Θα πρέπει δηλαδή να υπολογίσει το συνολικό κόστος του συστήματος με βάση αυτές τις αντιδράσεις των πελατών του για κάθε δική του επιλογή και να συλλέξει έτσι την ποίο ικανοποιητική. Το πρόβλημα μπορεί να διατυπωθεί ως ένα πρόβλημα διεπίπεδου προγραμματισμού

$$(\text{BSO} - \text{FL}) \min_{[y_i]} \sum_{i=1}^m F_i y_i + \sum_{i=1}^m d_i(\bar{x}_i) \bar{x}_i + \sum_{i=1}^m p_i \bar{x}_i + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n t_{ij} \bar{x}_{ij} \quad (5.19)$$

$$\text{υπό } y_i \in \{0, 1\}, \forall i \quad (5.20)$$

όπου $[\bar{x}_i]$ και $[\bar{x}_{ij}]$ επιλύουν

$$(\text{UO} - \text{TP}) \min \sum_{i=1}^m \int_0^{x_i} d_i(t) dt + \sum_{i=1}^m p_i x_i + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n t_{ij} x_{ij} \quad (5.21)$$

$$\text{υπό } \sum_{i=1}^m x_{ij} = r_j, \forall j \quad (5.22)$$

$$x_i \leq q_i y_i, \forall i \quad (5.23)$$

$$x_i - \sum_{j=1}^n x_{ij} = 0, \forall i \quad (5.24)$$

$$x_{ij} \geq 0 \forall i, j \quad (5.25)$$

Σύμφωνα με το πρότυπο, ο ηγέτης (παραγωγός) αποφασίζει την χωροθέτηση των κέντρων διανομής επιλύοντας το πρόβλημα (5.19-5.20), όπου όμως δεν ελέγχει τις μεταβλητές x_i και x_{ij} καθώς αυτές περιγράφουν τις επιλογές των πελατών του. Οι τιμές $[\bar{x}_i]$ και $[\bar{x}_{ij}]$ των μεταβλητών αυτών προέρχονται από το πρότυπο (5.21)-(5.25) που αντιστοιχεί σε μαντείο. Με άλλα λόγια, ο ηγέτης χρησιμοποιεί το (5.21)-(5.25) σαν ένα μαντείο για να ανακαλύψει τις τάσεις/αντιδράσεις των πελατών του σε κάθε δυνητική χωροθέτηση και προσπαθεί να ελαχιστοποιήσει το ολικό κόστος του συστήματος με βάση αυτές τις ανακαλύψεις.

Σε αναλογία, το διεπίπεδο πρόβλημα καθορισμού δυναμικότητας μπορεί να διαμορφωθεί ως:

$$(\text{SO} - \text{CA}) \min_{[q_i]} \sum_{i=1}^m d_i(\bar{x}_i, q_i) \bar{x}_i + \sum_{i=1}^m p_i \bar{x}_i + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n t_{ij} \bar{x}_{ij} \quad (5.26)$$

$$\text{υπό } \sum_{i=1}^m \alpha_i q_i \leq B \quad (5.27)$$

$$0 \leq q_i \leq U_i, \forall i \quad (5.28)$$

όπου $[\bar{x}_i]$ και $[\bar{x}_{ij}]$ επιλύει

$$(\mathbf{UO} - \mathbf{TP}) \min \sum_{i=1}^m \int_0^{x_i} d_i(t) d(t) + \sum_{i=1}^m p_i x_i + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n t_{ij} x_{ij} \quad (5.29)$$

$$\text{υπό } \sum_{i=1}^m x_{ij} = r_j, \forall j \quad (5.30)$$

$$x_i \leq q_i, \forall i \quad (5.31)$$

$$x_i - \sum_{j=1}^n x_{ij} = 0, \forall i \quad (5.32)$$

$$x_{ij} \geq 0, \forall i, j \quad (5.33)$$

Σύμφωνα με το πρότυπο, ο παραγωγός καθορίζει την δυναμικότητα των κέντρων διανομής επιλύοντας το πρόβλημα (5.26-5.28). Οι πελάτες έχοντας πλήρη πληροφόρηση για τις αποφάσεις του παραγωγού επιλέγουν το κέντρο διανομής που τους εξασφαλίζει το βέλτιστο επίπεδο εξυπηρέτησης, επιλύοντας το πρόβλημα (5.29-5.33). Ο ηγέτης, γνωρίζοντας το κριτήριο βάσης του οποίο γίνεται η επιλογή των πελατών, χρησιμοποιεί το (5.21)-(5.25) σαν ένα μαντείο για να ανακαλύψει τις τάσεις/αντιδράσεις των πελατών του σε κάθε δυνητική χωροθέτηση.

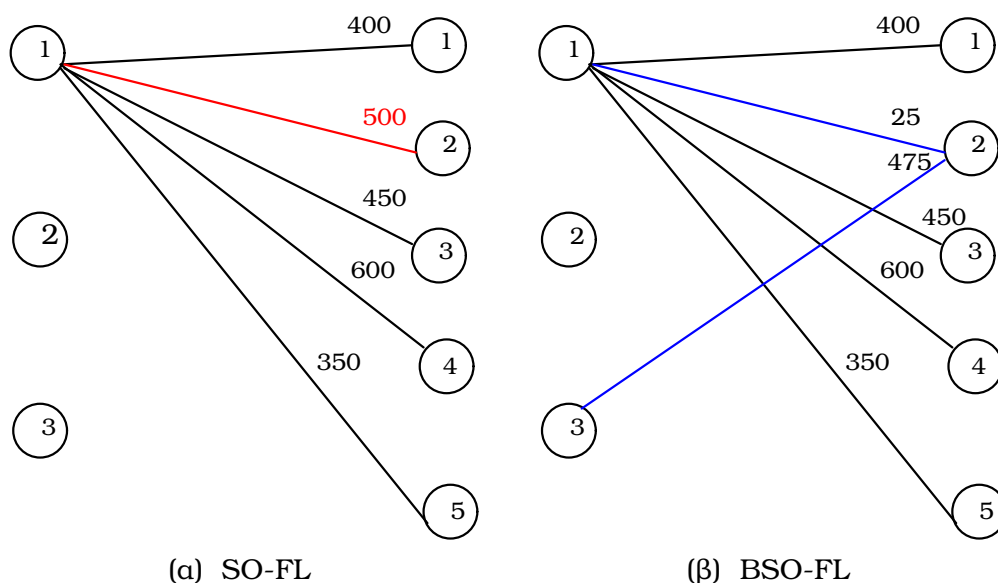
5.3.3 Αριθμητική Σύγκριση των Δύο Προτύπων

Ο σκοπός της υποενότητας αυτής είναι να διαλευκάνουμε και να διαφωτίσουμε τις διαφορές που συνεπάγονται οι προτυποποιήσεις (5.6)-(5.11) και (5.19)-(5.25) στην λήψη αποφάσεων μέσω ενός αριθμητικού παραδείγματος καθώς και τις συνέπειες που θα αντιμετώπιζε κανείς επιλέγοντας εσφαλμένη προσέγγιση της χωροθέτησης εγκαταστάσεων.

Θεωρούμαι ένα παράδειγμα όπου ο παραγωγός έχει στην διάθεσή του 3 δυνητικές τοποθεσίες για την εγκατάσταση των κέντρων διανομής τα οποία θα πρέπει να ικανοποιήσουν την ζήτηση 5 πελατών. Κάθε μια από τις τοποθεσίες διαφοροποιείται τόσο ως προς την δυναμικότητα που εξασφαλίζει στο κέντρο διανομής όσο και ως προς το πάγιο κόστος που συνεπάγεται η χωροθέτηση του.

Η συνάρτηση απόδοσης δίνεται από την (3.10). Το μοναδιαίο ολικό κόστος $\tilde{c}_{ij}(x_i)$ υπολογίζεται από την σχέση (3.21) και το μοναδιαίο κόστος στην περίπτωση ορθολογικών πελατών που επωμίζονται το κόστος μεταφοράς από την σχέση (3.12). Οι παράμετροι που χρησιμοποιούνται εμφανίζονται στον Πίνακα 5.1.

Τα προβλήματα **(SO-FL)** και **(BSO-FL)** διαμορφώθηκαν σύμφωνα με την γλώσσα προτυποποίησης προβλημάτων βελτιστοποίησης **AMPL** και για την επίλυσή τους



Σχήμα 5.1: Βέλτιστη Χωροθέτηση Συστήματος και Χωροθέτηση Βασισμένη στον Ανταγωνισμό των Πελατών

χρησιμοποιήθηκε ο επιλυτής MINOS 5.5 στα πλαίσια μια διαδικασίας διακλάδωσης και οριοθέτησης (branch and bound). Το Σχήμα 5.1 απεικονίζει την ροή των πελατών στα κέντρα διανομής όπως προκύπτει ύστερα από την επίλυση των δύο προβλημάτων.

Όπως φαίνεται από το Σχήμα 5.1 (α), όταν ο παραγωγός ενδιαφέρεται για την χωροθέτηση που ελαχιστοποιεί το «μέσο» κόστος που αντιμετωπίζουν οι πελάτες συν το κόστος χωροθέτησης (επιλύεται δηλαδή το πρόβλημα **(SO-FL)**), θα αποφασίσει την χωροθέτηση ενός μόνο κέντρου διανομής στο οποίο θα κατευθύνει τους πελάτες για την ικανοποίηση της ζήτησης τους.

Ικανοποιεί όμως αυτή η ανάθεση πράγματι όλους τους πελάτες; Αν εξετάσουμε το μοναδιαίο κόστος της λύσης στον Πίνακα 5.2 θα παρατηρήσουμε ότι η ανάθεση,

	t_{ij}					p_i	q_i	F_i
	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5			
F_1	15	16	15	13	17	14	2350	950
F_2	19	25	30	26	17	16	1350	1600
F_3	27	15	21	29	16	15	1000	1700
r_j								
	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5			
	400	500	450	600	350			

Πίνακας 5.1: Πίνακας Παραμέτρων Παραδείγματος

	SO-FL		BSO-FL	
	Συνολικό Κόστος: 68630		Συνολικό Κόστος: 69051.25	
	Μοναδιαίο Κόστος	Ποσότητα	Μοναδιαίο Κόστος	Ποσότητα
C_{11}	28.60	400	28.06	400
C_{21}	35.00	0	34.02	0
C_{31}	42.00	0	43.06	0
C_{12}	30.60	500	30.06	25
C_{22}	41.00	0	40.02	0
C_{32}	30.00	0	30.06	475
C_{13}	29.60	450	29.057	450
C_{23}	46.00	0	45.02	0
C_{33}	36.00	0	37.06	0
C_{14}	27.60	600	27.06	600
C_{24}	42.00	0	42.02	0
C_{34}	44.00	0	45.06	0
C_{15}	31.60	350	31.05	350
C_{25}	33.00	0	32.02	0
C_{35}	31.00	0	32.06	0

Πίνακας 5.2: Αποτελέσματα της Επίλυσης των Προβλημάτων (SO-FL) και (BSO-FL)

για παράδειγμα, του C_2 στο κέντρο διανομής F_1 συνεπάγεται μοναδιαίο κόστος 30.60, το οποίο δεν είναι το ελάχιστο δυνατό που θα μπορούσε να αντιμετωπίσει ο συγκεκριμένος πελάτης αφού στο κέντρο διανομής F_3 το μοναδιαίο κόστος του είναι μικρότερο (30 έναντι 30.6).

Επιλύοντας την δεύτερη περίπτωση όπου ο παραγωγός χρησιμοποιεί το (5.21)-(5.25) σαν ένα μαντρίο για να ανακαλύψει τις τάσεις/αντιδράσεις των πελατών του σε κάθε δυνητική χωροθέτηση, ανακαλύπτουμε ότι η βέλτιστη χωροθέτηση είναι αυτή που δίδεται στο Σχήμα 5.1 (β), όπου δύο κέντρα εξυπηρέτησης ανοίγονται και όπου η κατανομή των πελατών συνεπάγεται ότι ο πελάτης 2 επιλέγει να ικανοποιήσει το μέγιστο της ζήτησης του από το δεύτερο κέντρο εξυπηρέτησης.

Από άποψη καθαρού κόστους χωροθέτησης, η χωροθέτηση της δεύτερης περίπτωσης είναι ακριβότερη, οπότε φυσιολογικά γεννάται το ερώτημα για ποίον λόγο ο αποφασίζων θα πρέπει να λάβει υπόψη του την συμπεριφορά των πελατών και να μην προβεί στην χωροθέτηση της πρώτης περίπτωσης.

Συγκρίνοντας τα δύο σχήματα μπορούμε να αποφανθούμε ότι ο πελάτης 2 έχει τάσεις «φυγής». Εάν δηλαδή ανοίξει ένα δεύτερο κέντρο εξυπηρέτησης (είτε ο ίδιος παραγωγός ή ακόμη χειρότερα κάποιος ανταγωνιστής που πουλά το ίδιο προϊόν) τότε ο πελάτης 2 (και η ζήτηση του) χάνεται κατά το μεγαλύτερο μέρος.

Στην επόμενη ενότητα εξετάζουμε λεπτομερέστερα την χωροθέτηση όταν υφίσταται ανταγωνισμός μεταξύ παραγωγών.

5.4 Δυοπώλειο

Σε ένα δίκτυο ανεφοδιασμού που δραστηριοποιούνται περισσότεροι από ένας παραγωγοί κανένας από αυτούς δεν έχει την δυνατότητα (μονοπωλιακή δύναμη) να κατευθύνει τους πελάτες στα κέντρα διανομής που θα χωροθετηθούν, με αποτέλεσμα η εξυπηρέτηση και η ικανοποίηση των πελατών να αποτελούν καθοριστικό παράγοντα διαφοροποίησης και διάκρισης μεταξύ αυτών των οικονομικών μονάδων του ίδιου τομέα.

Στην ενότητα αυτή εξετάζουμε τις επιπτώσεις που έχει στις αποφάσεις χωροθέτησης και καθορισμού δυναμικότητας των κέντρων διανομής ο ανταγωνισμός των παραγωγών για την προσέλκυση πελατών. Υποθέτουμε ότι στο σύστημα δραστηριοποιούνται 2 παραγωγοί, αντιμετωπίζουμε επομένως την περίπτωση της δυοπωλειακής οργάνωσης του δικτύου ανεφοδιασμού όπου οι παραγωγοί ανταγωνίζονται λαμβάνοντας μέρος σε ένα παίγνιο Nash με σκοπό να προσελκύσουν την ζήτηση των πελατών παρέχοντας ένα επίπεδο εξυπηρέτησης που ελαχιστοποιεί τα αντίστοιχα κόστη όπως αυτά υπολογίζονται από τις αντιδράσεις των πελατών που με την σειρά τους συμμετέχουν σε ένα δεύτερο παίγνιο Nash.

Ορισμός 5.1 Ένα σημείο ισορροπίας Nash στο παίγνιο του δυοπωλείου που εξετάζεται αντιστοιχεί σε ένα ζεύγος επιλογών χωροθέτησης ή δυναμικοτήτων που εξασφαλίζει ότι κανείς των παικτών δεν ευεργετείται από εκούσια μονομερή αλληλαγή στρατηγικής.

Διαμορφώνουμε το πρόβλημα σαν διεπίπεδο πρότυπο, όπου οι δυο παραγωγοί καθορίζουν την βέλτιστη χωροθέτηση και δυναμικότητα για τα κέντρα διανομής τους λαμβάνοντας υπόψη τις επιλογές και τις έμμεσες προδιαγραφές που θέτουν οι πελάτες για το προσφερόμενο επίπεδο εξυπηρέτησης.

Ο ανταγωνισμός μεταξύ των μελών της εφοδιαστικής αλυσίδας για την επίτευξη παρόμοιων στόχων έχει μελετηθεί εκτεταμένα στην διεθνή βιβλιογραφία, [146, 34, 35, 213, 44] στα κλασσικά πλαίσια του οικονομικού δυοπωλείου. Σε όλες αυτές τις εργασίες ο ανταγωνισμός λαμβάνει χώρα είτε μέσω καθορισμού του επίπεδου τιμών είτε μέσω προσδιορισμού επιπέδων παραγωγής που μεγιστοποιούν το κέρδος του παραγωγού. Σε όλες αυτές τις εργασίες ο ανταγωνισμός είναι μονό-επίπεδος και επίσης δεν αναφέρονται στην ανταγωνιστική διαμόρφωση της εφοδιαστικής αλυσίδας. Σε αντίθεση ο ανταγωνισμός στο προτεινόμενο πρότυπο λαμβάνει χώρα μέσω επιπέδου προσφερομένων υπηρεσιών. Το προτεινόμενο πρότυπο είναι το πρώτο που αντιμετωπίζει τον ανταγωνισμό των παραγωγών ως προς το επίπεδο εξυπηρέτησης που παρέχουν διαμορφώνοντας τόσο την χωροθέτηση των κέντρων διανομής όσο και τον καθορισμό του επίπεδου δυναμικότητας. Επιπρόσθετα είναι το πρώτο πρότυπο

που εμπεριέχει τον ανταγωνισμό των πελατών για την εξυπηρέτηση ως μέρος του γενικού προβληματισμού.

Τα πρότυπα ανταγωνισμού που θα διαμορφωθούν στην συνέχεια αναφέρονται στον ανταγωνισμό δύο παραγωγών αλλά μπορούν εύκολα να επεκταθούν και στην περίπτωση περισσότερων των δύο παραγωγών.

5.4.1 Ανταγωνιστική Χωροθέτηση Εγκαταστάσεων Όταν οι Πελάτες Παίζουν το Δικό τους Ανταγωνιστικό Παίγνιο

Αν υποθέσουμε ότι τα κέντρα διανομής $i = 1, \dots, m$ διανέμονται μεταξύ δύο παραγωγών εταιρειών οι οποίες εμπλέκονται σε ανταγωνισμό για την προσέλκυση πελατών μέσω του επιπέδου υπηρεσιών που προσφέρουν. Ας είναι M_1 και M_2 ($m = |M_1| + |M_2|$) αντίστοιχα οι κόμβοι των δυο εταιρειών.

Τότε, υπό την προϋπόθεση ότι οι εταιρείες "ανακοινώνουν τις στρατηγικές τους ταυτοχρόνως", έχουμε ένα παίγνιο Nash με δύο παίκτες οι οποίοι αντιμετωπίζουν για $k = 1, 2$ το αντίστοιχο από τα κάτωθι προβλήματα:

Το πρόβλημα χωροθέτησης του παραγωγού 1

$$(\text{CFL}_1) \min \sum_{i \in M_1} F_i y_i + \sum_{i \in M_1} d_i(\bar{x}_i) \bar{x}_i + \sum_{i \in M_1} p_i \bar{x}_i + \sum_{i \in M_1} \sum_{j=1}^n t_{ij} \bar{x}_{ij} \quad (5.34)$$

$$\text{υπό } y_i \in \{0, 1\}, \forall i \in M_1 \quad (5.35)$$

Το πρόβλημα χωροθέτησης του παραγωγού 2

$$(\text{CFL}_2) \min \sum_{i \in M_2} F_i y_i + \sum_{i \in M_2} d_i(\bar{x}_i) \bar{x}_i + \sum_{i \in M_2} p_i \bar{x}_i + \sum_{i \in M_2} \sum_{j=1}^n t_{ij} \bar{x}_{ij} \quad (5.36)$$

$$\text{υπό } y_i \in \{0, 1\}, \forall i \in M_2 \quad (5.37)$$

όπου $[\bar{x}_i]$ και $[\bar{x}_{ij}]$ επιλύουν (5.21)-(5.25)

Ας είναι $Y_k = \{y_i | y_i \in \{0, 1\}, \forall i \in M_k\}$ τα εφικτά σύνολα των παικτών για $k = 1, 2$, $y_k = [y_i]_{i \in M_k}$ και $y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$. Έχουμε ήδη αποδείξει στο Κεφάλαιο 3 την ύπαρξη βέλτιστων λύσεων \bar{x}_i και \bar{x}_{ij} για δεδομένες δυναμικότητες $[\bar{q}_i]$. Υπάρχει επομένως

μία συνάρτηση από το \mathbb{R}^m στο \mathbb{R}^m η οποία για δεδομένο \bar{y} επιστρέφει το μοναδικό σημείο ισορροπίας $[\bar{x}_i]$ από το (5.21)-(5.25) και κάποια αντίστοιχη απεικόνιση από το \mathbb{R}^m στο $\mathbb{R}^{m \cdot n}$ η οποία για δεδομένο \bar{y} επιστρέφει ένα βέλτιστο σχέδιο μεταφοράς $[\bar{x}_{ij}]$ που αντιστοιχεί στο σημείο ισορροπίας $[\bar{x}_i]$, συνεπώς θα ισχύει ότι $\bar{x}_i = x_i(\bar{y})$ και $\bar{x}_{ij} = x_{ij}(\bar{y})$ αντίστοιχα.

Αρά τα προβλήματα (CFL_k) μπορούν να διατυπωθούν ως προβλήματα ενός επιπέδου:

$$(\text{SCFL}_k) \quad \min_{\mathbf{y}_k \in Y_k} \sum_{i \in M_k} d_i(x_i(\mathbf{y}), y_i) x_i(\mathbf{y}) + \sum_{i \in M_k} p_i x_i(\mathbf{y}) \quad (5.38)$$

$$+ \sum_{i \in M_k} \sum_{j=1}^n t_{ij} x_{ij}(\mathbf{y}) \quad (5.39)$$

Κάθε πρόβλημα (CFL_k) αντιστοιχεί στον παίκτη k που εμπλέκεται στο παίγνιο Nash.

Με παρόμοιο τρόπο μπορούμε να διαμορφώσουμε το ανταγωνιστικό πρόβλημα χωροθέτησης των κέντρων διανομής των δύο παραγωγών:

Το πρόβλημα του παραγωγού 1

$$(\text{P}_1) \quad \min_{[q_i]} \sum_{i \in M_1} d_i(\bar{x}_i, q_i) \bar{x}_i \sum_{i \in M_1} p_i \bar{x}_i + \sum_{i \in M_1} \sum_{j=1}^n t_{ij} \bar{x}_{ij} \quad (5.40)$$

$$\text{υπό} \quad \sum_{i \in M_1} \alpha_i q_i \leq B, \quad (5.41)$$

$$0 \leq q_i \leq U_i, \quad \forall i \in M_1 \quad (5.42)$$

Το πρόβλημα του παραγωγού 2

$$(\text{P}_2) \quad \min_{[q_i]} \sum_{i \in M_2} d_i(\bar{x}_i, q_i) \bar{x}_i \sum_{i \in M_2} p_i \bar{x}_i + \sum_{i \in M_2} \sum_{j=1}^n t_{ij} \bar{x}_{ij} \quad (5.43)$$

$$\text{υπό} \quad \sum_{i \in M_2} \alpha_i q_i \leq B, \quad (5.44)$$

$$0 \leq q_i \leq U_i, \quad \forall i \in M_2 \quad (5.45)$$

όπου $[\bar{x}_i]$ και $[\bar{x}_{ij}]$ επιλύουν (5.29) – (5.33)

Ας είναι $Q_k = \{q_i \in \mathbb{R} \mid \sum_{i \in M_k} \alpha_i q_i \leq B, 0 \leq q_i \leq U_i, \forall i \in M_k\}$ για $k = 1, 2$, τα εφικτά σύνολα των παικτών, $\mathbf{q}_k = [q_i]_{i \in M_k}$ και $\mathbf{q} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_1 \\ \mathbf{q}_2 \end{bmatrix}$. Έχουμε ήδη αποδείξει

στο Κεφάλαιο 3 την ύπαρξη βέλτιστων λύσεων \bar{x}_i και \bar{x}_{ij} για δεδομένες δυναμικότητες $[\bar{q}_i]$. Υπάρχει επομένως μία συνάρτηση από το \mathbb{R}^m στο \mathbb{R}^m η οποία για δεδομένο \bar{q} επιστρέφει το μοναδικό σημείο ισορροπίας $[\bar{x}_i]$ από το (5.29)-(5.33) και κάποια αντίστοιχη απεικόνιση από το \mathbb{R}^m στο $\mathbb{R}^{m \cdot n}$ η οποία για δεδομένο \bar{q} επιστρέφει ένα βέλτιστο σχέδιο μεταφοράς $[\bar{x}_{ij}]$ που αντιστοιχεί στο σημείο ισορροπίας $[\bar{x}_i]$. Μπορούμε άρα να γράψουμε ότι $\bar{x}_i = x_i(\bar{q})$ και $\bar{x}_{ij} = x_{ij}(\bar{q})$. Επομένως το πρόβλημα (P_k) δύνανται να τεθούν ως προβλήματα ενός επιπέδου. Για $k = 1, 2$ έχουμε δηλαδή:

$$(SLP_k) \quad \min_{\mathbf{q}_k \in Q_k} \sum_{i \in M_k} d_i(x_i(\mathbf{q}), q_i) x_i(\mathbf{q}) + \sum_{i \in M_k} p_i x_i(\mathbf{q}) + \sum_{i \in M_k} \sum_{j=1}^n t_{ij} x_{ij}(\mathbf{q}) \quad (5.46)$$

όπου το πρόβλημα (SLP_k) αντιμετωπίζεται από τον παίκτη k του παιγνίου Nash.

5.4.2 Οι Επιπτώσεις του Δυοπωλείου στο Επίπεδο Εξυπηρέτησης

Σε αυτό το μέρος επεκτείνουμε την ανάλυση της Ενότητας 5.3.3 για να εξάγουμε συμπεράσματα για τις επιπτώσεις του ανταγωνισμού των παραγωγών στο επίπεδο των προσφερόμενων υπηρεσιών. Θα υποθέσουμε ότι και οι δύο παραγωγοί έχουν την δυνατότητα να χωροθετήσουν τα κέντρα διανομής στις ίδιες τοποθεσίες όπου αντιμετωπίζουν ακριβώς το ίδιο σταθερό κόστος χωροθέτησης.

Τα προβλήματα που προκύπτουν χρησιμοποιώντας τις ίδιες παραμέτρους που αναφέρονται στον Πίνακα (5.1) διαμορφώθηκαν σύμφωνα με την γλώσσα προτυποποίησης προβλημάτων βελτιστοποίησης **AMPL** και για την επίλυσή τους χρησιμοποιήθηκε ο επιλυτής MINOS 5.5.

Για να μπορέσουμε να βρούμε τα σημεία ισορροπίας Nash του παιγνίου θα μεταφέρουμε το παίγνιο στην κανονική (normal) του μορφή πινακοπαιγνίου.

Υπενθυμίζεται ότι τα πινακοπαίγνια σε στρατηγική ή *κανονική μορφή* που μορφοποιούν μία μη επαναλαμβανόμενη κατάσταση, όπου οι παίκτες επιλέγουν τις στρατηγικές των *ανεξάρτητα* (independently) και *ταυτόχρονα* (simultaneously), γνωρίζουν τις λεπτομέρειες του παιγνίου και επίσης όλοι τους λειτουργούν ορθολογικά. Πιο συγκεκριμένα, έκαστος είναι *πλήρως πληροφορημένος*, γνωρίζει δηλαδή (α) το σύνολο των παικτών, (β) όλες τις στρατηγικές για όλους τους παίκτες, και (γ) όλες τις δυνατές εκβάσεις του παιγνίου, και η γνώση αυτή είναι *αμοιβαία* και *κοινή*, είναι δηλαδή γνωστή σ' όλους τους παίκτες, και όλοι τους γνωρίζουν ότι οι άλλοι το γνωρίζουν, κ.ο.κ. Επειδή οι παίκτες πρέπει ν' αποφασίσουν ταυτόχρονα, ουδείς γνωρίζει την επιλογή των άλλων όταν επιλέγει την δική του στρατηγική. Με άλλα λόγια, όταν ένας παίκτης επιλέγει την στρατηγική του δεν γνωρίζει εκ των προτέρων με βεβαιότητα τις επιλογές των αντιπάλων του, μπορεί όμως να υποθέσει ότι οι αντίπαλοί του γνωρίζουν τους κανόνες του παιγνίου και ότι είναι το ίδιο ευφυείς μ' αυτόν, πρέπει δε να λάβει υπόψη του τον διαλογισμό των αντιπάλων του.

S_{k1}	(0,0,0)
S_{k2}	(1,0,0)
S_{k3}	(0,1,0)
S_{k4}	(0,0,1)
S_{k5}	(1,1,0)
S_{k6}	(1,0,1)
S_{k7}	(0,1,1)
S_{k8}	(1,1,1)

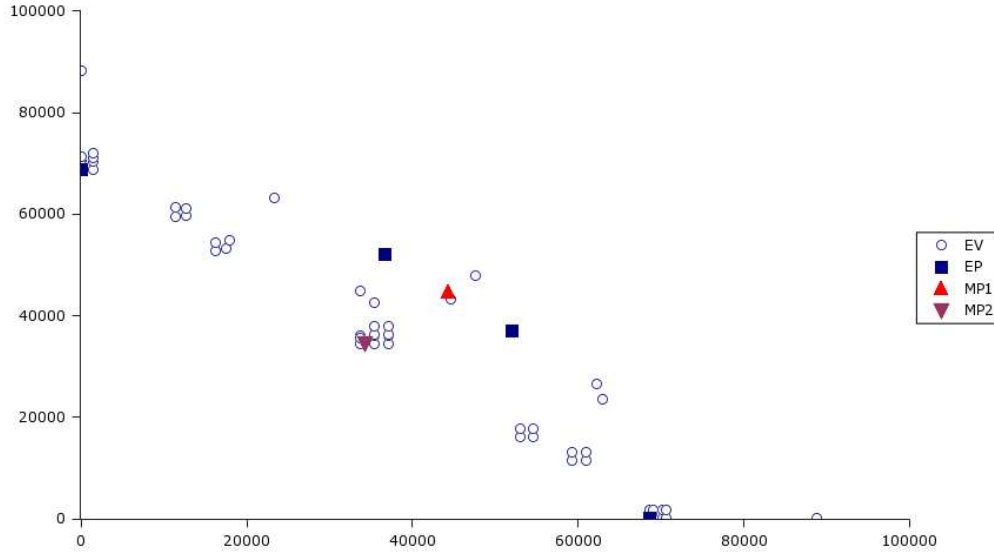
Πίνακας 5.3: Οι Στρατηγικές των Παικτών

Οι στρατηγικές που έχουν οι παίκτες στην διάθεση τους είναι οι επιλογές που έχουν για την χωροθέτηση ή όχι ενός κέντρου διανομής στην υποψήφια περιοχή i . Αν υποθέσουμε ότι οι τοποθεσίες είναι καταχωρημένες κατ' αύξοντα αριθμό, ο Πίνακας 5.3 παρουσιάζει το σύνολο των στρατηγικών για κάθε παίκτη, όπου το 1 συνεπάγεται ότι ο παίκτης k ανοίγει το αντίστοιχο κέντρο διανομής ενώ το 0 ότι το αντίστοιχο κέντρο παραμένει κλειστό και άρα ο παίκτης δεν επωμίζεται το πάγιο κόστος. Ύστερα από την επίλυση των προβλημάτων CFL_k για όλα τα ζεύγη στρατηγικών προκύπτουν οι μήτρες απωλειών των δύο παικτών που εμφανίζονται στους Πίνακες 5.4 και 5.5 αντίστοιχα. Οι πίνακες αυτοί παρουσιάζουν το κόστος που συνεπάγεται για κάθε παραγωγό κάθε πιθανή έκβαση του παιγνίου. Από τους πίνακες προκύπτει ότι υπάρχουν 4 σημεία ισορροπίας Nash.

1. Το ζεύγος στρατηγικών (S_{11}, S_{22}) , σύμφωνα με το οποίο ο μόνο ο παίκτης 2 ανοίγει το κέντρο διανομής στην περιοχή 1.
2. Το ζεύγος στρατηγικών (S_{12}, S_{21}) σύμφωνα με το οποίο ο μόνο ο παίκτης 1 ανοίγει το κέντρο διανομής στην περιοχή 1.
3. Το ζεύγος στρατηγικών (S_{13}, S_{24}) σύμφωνα με το οποίο ο παραγωγός 1 ανοίγει το κέντρο διανομής στην περιοχή 2 και ο παίκτης 2 στην περιοχή 3.
4. Το ζεύγος στρατηγικών (S_{14}, S_{23}) σύμφωνα με το οποίο ο παίκτης 1 ανοίγει το κέντρο διανομής στην περιοχή 3 και ο παίκτης 2 στην περιοχή 2.

Τα σημεία ισορροπίας Nash εμφανίζονται συμμετρικά, φυσιολογικό επακόλουθο της συμμετρίας των παικτών τόσο ως προς τις επιλογές όσο και ως προς τις συναρτήσεις κόστους.

Στο Σχήμα 5.2 παρουσιάζει της δυνητικές εκβάσεις του παιγνίου στον Καρτεσιανό χώρο. Τα σημεία αυτά συμβολίζονται με το EV και EP. Τα σημεία EP αντιστοιχούν στα τέσσερα σημεία ισορροπίας Nash. Είναι εμφανές από το σχήμα ότι κανένα σημείο ισορροπίας δεν κυριαρχείται από κάποιο άλλο σημείο ισορροπίας. Το *φαινόμενο της απροσδιοριστίας*, συχνά έμφυτο στα παίγνια Nash, δεν μας επιτρέπει να



Σχήμα 5.2: Σύνολο Εκβάσεων (όλα τα σημεία EV πλὴν του MP1 και MP2) και τα Σημεία Ισορροπίας EP

αποφανθούμε ευθέως για την πραγματική τελική έκβαση του παιγνίου. Μάλιστα *έκβαση ανισορροπίας* είναι πιθανή, π.χ εάν ο πρώτος παίκτης επιμείνει στην στρατηγική S_{12} , ενώ ο δεύτερος παίκτης επιμείνει στην στρατηγική ισορροπίας S_{24} . Το ζεύγος στρατηγικών (S_{12}, S_{24}) δεν ανταποκρίνεται σε σημείο ισορροπίας.

Παρ' όλα αυτά, μπορούμε να υποθέσουμε οι σε μία πραγματική κατάσταση, οι παίκτες θα εστιάσουν σε κάποια από τα σημεία ισορροπίας και θα αγνοήσουν άλλα. Τα σημεία ισορροπίας στα οποία οι παίκτες θα αγνοήσουν άλλα. Τα σημεία ισορροπίας στα οποία οι παίκτες θα εστιάζουν την προσοχή τους αναφέρονται ως *εστιασμένα σημεία ισορροπίας*.

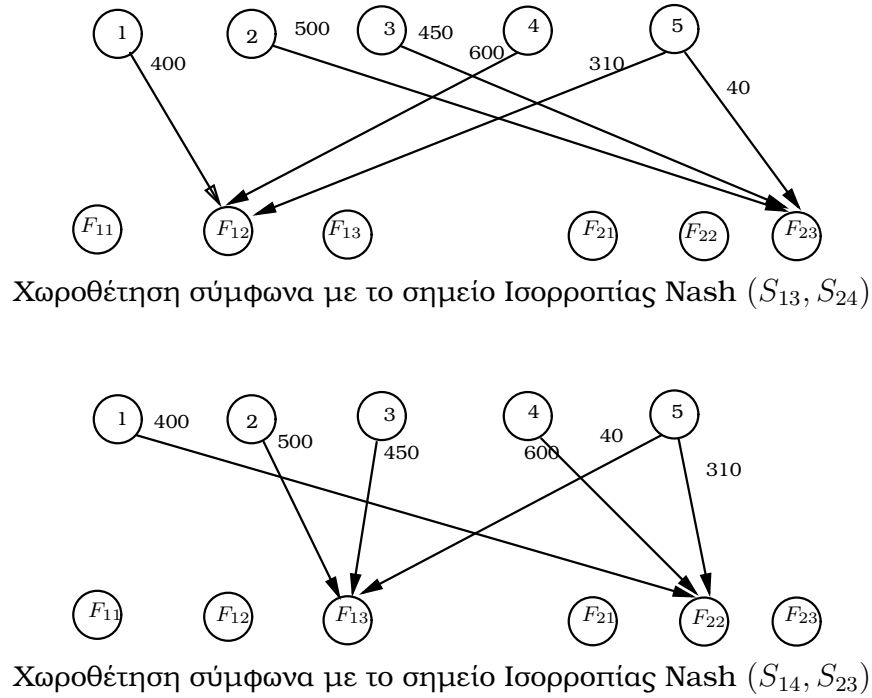
Στην συγκεκριμένη περίπτωση μπορούμε εύκολα να αποφανθούμε ότι τα σημεία (S_{11}, S_{22}) και (S_{12}, S_{21}) όπου μόνον ο ένας των παικτών προβαίνει στην εγκατάσταση ενός μόνον κέντρου διανομής δεν μπορούν να αποτελούν εστιασμένα σημεία ισορροπίας. Ένας λόγος είναι ότι και μόνον το γεγονός ότι κάποιος παίκτης *εξετάζει* *που* και *πόσα* κέντρα διάθεσης θα ανοίξει σηματοδοτεί για τον αντίπαλο του ότι η απόφαση να ανοίξει *κάπου κάποιου* κέντρο είναι σχεδόν ειλημμένη. Θέτοντας δηλαδή τον εαυτό του και στην θέση του αντιπάλου του θα απορρίψει το ενδεχόμενο να επιτρέψει το άνοιγμα κέντρου μόνο από τον ανταγωνιστή του. Μάλιστα προβαίνοντας σε πλήρη ανάλυση του παιγνίου θα αντιληφθεί ότι η ύπαρξη ενός μόνον κέντρου διανομής δεν ικανοποιεί όλους τους πελάτες και ότι υπάρχουν τάσεις φυγής από τους πελάτες όπως έχουμε καταγράψει στην Υποενότητα 5.3.3 και στο Σχήμα 5.1. Θα θελήσει συνεπώς ο αντιπαλός του να εκμεταλλευτεί αυτές τις τάσεις φυγής. Άρα τα εστιασμένα σημεία ισορροπίας του παιγνίου είναι τα (S_{13}, S_{24}) και (S_{14}, S_{23}) .

	S_{21}	S_{22}	S_{23}	S_{24}	S_{25}	S_{26}	S_{27}	S_{28}
S_{11}	—	0	—	—	0	0	0	0
S_{12}	68630	33828.75	68630	53104.29	33828.75	33828.75	53104.29	33828.75
S_{13}	—	1600	47722.5	52071.46	1600	1600	1600	1600
S_{14}	—	16327.14	36806.27	—	16327.14	11509.86	23405.71	11509.86
S_{15}	70230	35428.75	70230	54704.29	35428.75	35428.75	54704.29	35428.75
S_{16}	69081.43	35528.75	69081.43	59392.99	35528.75	35528.75	59392.99	35528.75
S_{17}	88877.73	17577.14	62351.44	63041.43	18041.29	12823.92	44773.36	12823.92
S_{18}	70681.43	37128.75	70681.43	60962.93	37128.75	37128.75	60962.93	37128.75

Πίνακας 5.4: Μήτρα Απώλειας Παραγωγού 1

	S_{21}	S_{22}	S_{23}	S_{24}	S_{25}	S_{26}	S_{27}	S_{28}
S_{11}	—	68630	—	—	70230	69556.4	88227.7	71156.43
S_{12}	0	34428.75	1600	15977.14	36028.75	35528.75	17577.14	44853.75
S_{13}	—	68630	47772.5	36806.27	70230	70330	70980	71930
S_{14}	—	52754.29	52071.46	—	54354.29	59375.99	63041.43	61122.28
S_{15}	0	34428.75	1600	15977.14	36028.75	36128.75	17577.14	37728.75
S_{16}	0	34428.75	1600	11356.92	36028.75	36128.75	12926.86	42482.61
S_{17}	0	53104.29	26464.53	23405.71	54704.29	59495.93	43223.36	61095.93
S_{18}	0	34428.75	1600	11356.92	36028.75	36128.75	12956.92	37728.75

Πίνακας 5.5: Μήτρα Απώλειας Παραγωγού 2



Σχήμα 5.3: Ανταγωνιστική Χωροθέτηση Εγκαταστάσεων

Σύμφωνα με την ανάλυση αυτή, τα δύο πρώτα ζεύγη στρατηγικών αν και αποτελούν σημείο ισορροπίας δεν πρόκειται να ακολουθηθούν από τους παίκτες. Οι παίκτες λαμβάνουν μέρος στο παίγνιο έχοντας είδη αποφασίσει την είσοδο τους στο δίκτυο επομένως η επιλογή είτε της στρατηγικής S_{11} από τον παραγωγό 1 είτε της S_{21} από τον παραγωγό 2 δεν είναι συμβατή με μια τέτοια απόφασή τους. Επομένως, μόνον τα σημεία ισορροπίας (S_{13}, S_{24}) και (S_{14}, S_{23}) αποτελούν πιθανές εκβάσεις σε πραγματικές συνθήκες.

Παρατηρούμε ότι οι παραγωγοί, λαμβάνοντας υπόψη τον ανταγωνισμό των πελατών ως προς το επίπεδο εξυπηρέτησης, θα επιλέξουν να λειτουργήσουν τα κέντρα διανομής τους σε διαφορετικές τοποθεσίες αποσκοπώντας στην προσέλκυση των μη ικανοποιημένων πελατών των ανταγωνιστών τους. Θα πρέπει να σημειωθεί ότι και τα δυο ζεύγη χωροθέτησης εξασφαλίζουν στους πελάτες την ικανοποίηση της ζήτησης στο ίδιο ελάχιστο κόστος ικανοποιώντας παράλληλα τις απαιτήσεις τους για το επίπεδο εξυπηρέτησης που λαμβάνουν όπως μπορεί να διαπιστωθεί από τον Πίνακα 5.6.

Συγκρίνοντας τους Πίνακες 5.2, 5.4 και 5.5 προκύπτει ότι από άποψη συνολικού κόστους η ανταγωνιστική χωροθέτηση είναι πιο συμφέρουσα για κάθε παραγωγό αφού όποιο και να είναι το σημείο ισορροπίας που τελικά θα επιλεγεί, το κόστος που θα αντιμετωπίσει είναι μικρότερο συγκριτικά με την βέλτιστη λύση του συστήματος όσο και με την μονοπωλιακή λύση που λαμβάνει υπόψη την συμπεριφορά των πελατών.

Η απροσδιοριστία όμως μεταξύ των εστιασμένων σημείων ισορροπίας δεν είναι εύκολο να εξαλειφθεί. Τα δύο σημεία είναι συμμετρικά από άποψη συνολικού κόστους (36806, 52071.46) και (52071.46, 36806) αντίστοιχα. Όπως φαίνεται από το Σχήμα 5.3 αμφότερες οι διαμορφώσεις του δικτύου κατανέμουν την ζήτηση των πελατών συμμετρικά και η κατανομή αυτή είναι εύρωστη ισορροπία για τους πελάτες στο δικό τους παίγνιο καθώς από τον Πίνακα 5.6 δεν υπάρχουν τάσεις φυγής. Η εγγύηση αυτή των μόνιμων πελατών θα έπρεπε να ικανοποιεί τους ανταγωνιστές παραγωγούς για οποιαδήποτε από τις δύο εστιασμένες εκβάσεις.

Θα πρέπει να τονιστεί ότι δεν εξετάζουμε σημεία ισορροπίας σε μικτές στρατηγικές αν και θα μπορούσαμε να διατυπώσουμε την ύπαρξη τους χρησιμοποιώντας το ελεύθερο και ανοικτού κώδικα λογισμικό Gambit έκδοση 0.97.0.6 [229].

Ο λόγος που αγνοούμε τις μικτές στρατηγικές είναι ότι τα προσδοκώμενα κόστη των ανταγωνιστών παραγωγών δεν αντιστοιχούν εν γένει σε κόστη που προέρχονται από καταστάσεις ισορροπίας των πελατών. Για τον ίδιο λόγο μπορούμε να αγνοήσουμε και την λύση της διαμεσολάβησης ή διαιτησίας Nash. Μια απλή προσέγγιση όπου λαμβάνεται το ενδιάμεσο σημείο (MP1 και MP2) στο Σχήμα 5.2 μπορεί να μας πείσει. Κατ' αρχάς το σημείο MP1 κυριαρχείται κατά Pareto από το MP2 και άρα δεν μπορεί να αποτελέσει σημείο συμφωνίας κατά Nash. Από την άλλη πλευρά το σημείο MP2 που αντιστοιχεί στο ζεύγος ολικών κοστών (33315, 34315) δεν αντιστοιχεί σε κόστη (5.34) και (5.36) που έχουν υπολογιστεί για κάποιο σημείο ισορροπίας των πελατών. Μια τέτοια προσέγγιση από τους ανταγωνιστές παραγωγούς θα οδηγούσε σε κατάσταση όπου οι πελάτες έχουν τάσεις φυγής. Το πλησιέστερο σημείο στο (34315, 34315) που έχει υπολογιστεί βάσει της ισορροπίας των πελατών είναι το (33828, 34428.75) που αντιστοιχεί στο ζεύγος (S_{12}, S_{22}) όπου αμφότεροι οι ανταγωνιστές ανοίγουν από ένα κέντρο. Το πρώτο. Σε ένα ανταγωνιστικό περιβάλλον όμως δεν θα έπρεπε να υπάρχουν δυνατότητες τέτοιων συμφωνιών μεταξύ των ανταγωνιστών.

5.5 Συμπεράσματα

Σε αυτό το κεφάλαιο διατυπώσαμε τα προβλήματα χωροθέτησης και καθορισμού δυναμικότητας που προκύπτουν όταν ο παραγωγός επιθυμεί να εξασφαλίσει ένα συγκεκριμένο επίπεδο εξυπηρέτησης στους πελάτες του. Μέσα σε αυτό το πλαίσιο εξετάστηκαν δυο διαφορετικές μορφές χωροθέτησης. Αρχικά εξετάστηκε η περίπτωση όπου ο παραγωγός ελέγχει το δίκτυο εφοδιασμού και προσπαθεί να επιλέξει το σχέδιο χωροθέτησης και καθορισμού δυναμικότητας που ελαχιστοποιεί το ολικό κόστος του συστήματος. Στην συνέχεια εξετάστηκε το πρόβλημα της χωροθέτησης και κατανομής δυναμικότητας όταν ο παραγωγός λαμβάνει υπόψη την αγοραστική συμπεριφορά των πελατών. Τα προβλήματα αυτής της περίπτωσης διαμορφώθηκαν ως προβλήματα διεπίπεδου προγραμματισμού.

Στην συνέχεια προτείνεται ένα διεπίπεδο πρόβλημα με δύο ηγέτες που διατυπώνει

τον ανταγωνισμό των παραγωγών για την προσέλκυση των πελατών μέσω του επιπέδου υπηρεσιών που παρέχουν. Τα αποτελέσματα της αριθμητικής ανάλυσης καταδεικνύουν ότι το ανταγωνιστικό σχέδιο χωροθέτησης είναι το αποτελεσματικότερο αφού είναι αυτό που ελαχιστοποιεί το κόστος του συστήματος όπως το αντιλαμβάνονται οι παραγωγοί και ταυτόχρονα εγγυάται την αντιμετώπιση της συμπεριφοράς των πελατών. Συμπερασματικά μπορούμε να πούμε ότι σε αγορές που χαρακτηρίζει ο ανταγωνισμός των παραγωγών ως προς το επίπεδο εξυπηρέτησης προσφέρει πολλές αγοραστικές ευκαιρίες και αυξάνει το όφελος των αγοραστών αφού εξασφαλίζουν:

1. Υψηλό επίπεδο εξυπηρέτησης.
2. Χαμηλό κόστος με τάσεις συνεχούς μείωσης.
3. Αύξηση της ευελιξίας των προμηθευτών και προσαρμογής στις ανάγκες της αγοράς.

Σημείο Ισορροπίας (S_{13}, S_{24})				
Παραγωγός 1			Παραγωγός 2	
	Μοναδιαίο Κόστος	Ποσότητα	Μοναδιαίο Κόστος	Ποσότητα
C_{11}	35.76	0	35.76	0
C_{21}	35.76	400	35.76	0
C_{31}	35.76	0	35.76	0
C_{12}	32.76	0	32.76	0
C_{22}	32.76	0	32.76	0
C_{32}	32.76	0	32.76	500
C_{13}	38.76	0	38.76	
C_{23}	38.76	0	38.76	0
C_{33}	38.76	0	38.76	450
C_{14}	42.76	0	42.76	0
C_{24}	42.76	600	42.76	0
C_{34}	42.76	0	42.76	0
C_{15}	33.76	0	33.76	0
C_{25}	33.76	311	33.76	0
C_{35}	33.76	0	33.76	39
Σημείο Ισορροπίας (S_{14}, S_{23})				
Παραγωγός 1			Παραγωγός 2	
	Μοναδιαίο Κόστος	Ποσότητα	Μοναδιαίο Κόστος	Ποσότητα
C_{11}	35.76	0	35.76	0
C_{21}	35.76	0	35.76	400
C_{31}	35.76	0	35.76	0
C_{12}	32.76	0	32.76	0
C_{22}	32.76	0	32.76	0
C_{32}	32.76	500	32.76	0
C_{13}	38.76	0	38.76	
C_{23}	38.76	0	38.76	0
C_{33}	38.76	450	38.76	0
C_{14}	42.76	0	42.76	0
C_{24}	42.76	0	42.76	600
C_{34}	42.76	0	42.76	0
C_{15}	33.76	0	33.76	0
C_{25}	33.76	0	33.76	311
C_{35}	33.76	39	33.76	0

Πίνακας 5.6: Η Επίδραση των Σημείων Ισορροπίας (S_{13}, S_{24}) και (S_{14}, S_{23}) στο Παίγνιο των Πελατών

Κεφάλαιο 6

Συμπεράσματα και Μελλοντικές Επεκτάσεις

Οι επιπτώσεις του ανταγωνισμού, τόσο ανάμεσα στους παραγωγούς όσο και ανάμεσα στους πελάτες, στην διαδικασία λήψης αποφάσεων της εφοδιαστικής αλυσίδας αποτελεί το αντικείμενο της διατριβής. Χρησιμοποιώντας μεθόδους βελτιστοποίησης και τις θεωρίας παιγνίων προτείνονται μαθηματικά πρότυπα και μηχανισμοί συντονισμού που είναι σε θέση να βελτιστοποιήσουν την λειτουργία της εφοδιαστικής αλυσίδας βελτιώνοντας τόσο τις δαπάνες της όσο και το επίπεδο ικανοποίησης των πελατών της.

Στο Κεφάλαιο 2 εξετάστηκε μια αλυσίδα ανεφοδιασμού όπου τα μέλη της προσπαθούν να συντονιστούν για να οδηγήσουν ένα προϊόν στην αγορά. Μέσα σε αυτό το θεωρητικό πλαίσιο, η διατριβή εστίασε στην μελέτη ενός παραδείγματος αποκεντροποιημένης διαδικασίας λήψης αποφάσεων. Ειδικότερα, εξετάσαμε γραμμικά και κυρτά προβλήματα παραγωγής-μεταφοράς-αποθεματοποίησης που συσχετίζονται άμεσα με το ζήτημα του συντονισμού της εφοδιαστικής αλυσίδας. Χρησιμοποιώντας αυτά τα προβλήματα καταδείξαμε ότι μια μέθοδος αποσύνθεσης που στηρίζεται στην θεωρία Lagrange είναι σε θέση να παρέχει έναν ισχυρό μηχανισμό σε ένα αποκεντρωμένο σύστημα λήψης αποφάσεων κάθε μέλος του οποίου ενεργεί και λαμβάνει αποφάσεις στοχεύοντας στην επίτευξη των δικών του στόχων. Ένα κύριο πλεονέκτημα της νέας προσέγγισης είναι η δραστική απλοποίηση που επιφέρει στη διαχείριση πληροφοριών, περιορίζοντας την ανταλλαγή τους μόνο σε πληροφορίες που αφορούν ποσότητες παραγωγής και μεταφοράς. Με αυτό τον τρόπο η προτεινόμενη μέθοδος είναι σε θέση να αυξήσει την ευελιξία της λειτουργίας της εφοδιαστικής αλυσίδας. Η αποσύνθεση Dantzig-Wolfe η οποία απαιτεί έναν κεντρικό συντονιστή χρησιμοποιήθηκε για να δείξει την διαφορά ανάμεσα στον ιεραρχικό και τον οριζόντιο συντονισμό στα πλαίσια της εφοδιαστικής αλυσίδας και να επιβεβαιώσει την ευελιξία και την απλότητα της προτεινόμενης μεθόδου Lagrange.

Στο Κεφάλαιο 3 εξετάστηκαν οι συνέπειες του ανταγωνισμού των πελατών για την εξασφάλιση ενός συγκεκριμένου επιπέδου εξυπηρέτησης σε ένα δίκτυο ανεφοδιασμού όπου το κόστος μεταφοράς το επιβαρύνονται οι ίδιοι. Το πρόβλημα δια-

μορφώθηκε σαν πρόβλημα μη-γραμμικού προγραμματισμού ανάλογο αυτών που αντιμετωπίζονται στα δίκτυα κυκλοφορίας. Μέσα σε αυτό το πλαίσιο εξετάστηκαν δυο διαφορετικές μορφές διαχείρισης του συστήματος ανεφοδιασμού. Πρώτα εξετάζεται η περίπτωση όπου το σύστημα έχει την δυνατότητα να κατευθύνει το ίδιο τους πελάτες στα κέντρα διανομής για εξυπηρέτηση. Καθορίσαμε τις συνθήκες βελτιστότητας του συστήματος και αποδείξαμε την μοναδικότητα της βέλτιστης λύσης. Σε ένα επόμενο βήμα εξετάστηκε η περίπτωση όπου οι πελάτες έχουν την δυνατότητα να επιλέξουν τα κέντρα διανομής από τα οποία θα εξυπηρετηθούν. Αποδείχθηκε ότι το παίγνιο στο οποίο εμπλέκονται οι πελάτες είναι ισότιμο με ένα πρόβλημα μη-γραμμικού προγραμματισμού. Αποδείχθηκε επίσης η ύπαρξη και η μοναδικότητα ισορροπίας και η διαφοροποίηση της από την βέλτιστη καταχώρηση του συστήματος. Τέλος η προαναφερθείσα ανάλυση επεκτάθηκε στην περίπτωση της ελαστικής ζήτησης πελατών.

Στο Κεφάλαιο 4 αναπτύχθηκε μέσα από μια διαδικασία εκλέπτυνσης και βελτίωσης της γνωστής μεθόδου Frank-Wolfe μια αποτελεσματική μέθοδος εφικτής κατεύθυνσης για την επίλυση των προβλημάτων του Κεφαλαίου 3. Ο αλγόριθμος που αναπτύχθηκε στηρίζεται στην έννοια της μερικής γραμμικοποίησης και της κανονικοποίησης, μη-γραμμικών προβλημάτων πάνω σε εφικτά σύνολα και της δημιουργίας στηλών. Η υπολογιστική σύγκριση του προτεινόμενου αλγορίθμου με έναν ήδη αναγνωρισμένο για την αποτελεσματικότητα του αλγόριθμο κατέδειξε την υπολογιστική ανωτερότητα της μεθόδου.

Στο κεφάλαιο 5 εξετάσαμε τα προβλήματα χωροθέτησης και καθορισμού δυναμικότητας που προκύπτουν όταν ο παραγωγός επιθυμεί να εξασφαλίσει ένα συγκεκριμένο επίπεδο εξυπηρέτησης στους πελάτες του. Εξετάστηκαν δύο διαφορετικές μορφές χωροθέτησης. Αρχικά εξετάστηκε η περίπτωση που ο παραγωγός ελέγχει το δίκτυο εφοδιασμού και προσπαθεί να επιλέξει το σχέδιο χωροθέτησης και καθορισμού δυναμικότητας που ελαχιστοποιεί το ολικό κόστος του συστήματος. Στην συνέχεια εξετάστηκε το πρόβλημα της χωροθέτησης και κατανομής δυναμικότητας όταν ο παραγωγός λαμβάνει υπόψη την αγοραστική συμπεριφορά των πελατών. Τα προβλήματα διαμορφώθηκαν ως προβλήματα διεπίπεδου προγραμματισμού. Επιπρόσθετα, διαμορφώθηκε ένα διεπίπεδο πρόβλημα με δύο ηγέτες που μοντελοποιεί τον ανταγωνισμό των παραγωγών για την προσέλκυση των πελατών μέσω του επιπέδου υπηρεσιών που παρέχουν. Τα αποτελέσματα της αριθμητικής ανάλυσης καταδεικνύουν ότι το ανταγωνιστικό σχέδιο χωροθέτησης είναι το αποτελεσματικότερο αφού είναι αυτό που ελαχιστοποιεί το κόστος του συστήματος όπως το αντιλαμβάνονται οι παραγωγοί και ταυτόχρονα εγγυάται την αντιμετώπιση της συμπεριφοράς των πελατών.

Προεκτάσεις και μελλοντικές ερευνητικές κατευθύνσεις της διατριβής της συγκεκριμένης διατριβής θα μπορούσαν να αποτελέσουν οι ακόλουθες:

Επεκτάσεις του Κεφαλαίου 2:

- Η υπολογιστική υλοποίηση της μεθόδου για το επαυξημένο πρόβλημα Lagrange και η σύγκριση της με την εξετασθείσα.
- Η υπολογιστική υλοποίηση της μεθόδου στα κυρτά προβλήματα και η σύγκριση της με την εξετασθείσα.
- Επέκταση του συντονισμού και σε διακριτά προβλήματα για παράδειγμα εισαγωγή συναρτήσεων κόστους που εμπεριέχουν πάγιο κόστους ή οικονομίες κλίμακας. Μια ενδιαφέρουσα επίσης περίπτωση είναι η εξέταση κλιμακωτών (straircase) συναρτήσεων κόστους.

Επεκτάσεις του Κεφαλαίου 4:

- Η περαιτέρω ανάπτυξη προτύπων παραγωγής-μεταφοράς με άλλες μορφές διαμεσολάβησης, η προσαρμογή της προτεινόμενης μεθοδολογίας επίλυσης σε αυτά ή ανάπτυξη νέων μεθοδολογιών επίλυσης.
- Η εξέταση εάν η χρήση κανονικοποιημένων αντί γραμμικών υποπροβλημάτων θα μειώσει τον αριθμό στηλών που απαιτούνται για την σύγκλιση σε μια προκαθορισμένη ακριβείας λύση και εάν θα μειώσει περαιτέρω το χρόνο εκτέλεσης.

Επεκτάσεις του Κεφαλαίου 5:

- Να εξετασθεί θεωρητικά υπό ποιές συνθήκες μπορεί να εξασφαλιστεί η ύπαρξη και ίσως η μοναδικότητα του σημείου ισορροπίας και να αναπτυχθούν αριθμητικές μέθοδοι επίλυσης.
- Τόσο στο Κεφάλαιο 5 όσο και στο Κεφάλαιο 3 έχουμε υποθέσει την συμμετρία/ομοιότητα των παικτών. Πιθανώς όμως ορισμένοι πελάτες να είναι «μεγαλύτεροι» από τους άλλους ή κάποιος παραγωγός έχει ηγετική θέση στην αγορά. Υποθέσαμε επίσης ότι η καθυστέρηση σε ένα κέντρο δεν επηρεάζει και δεν επηρεάζεται από την καθυστέρηση σε κάποιο άλλο. Αναίρεση αυτών των υποθέσεων απαιτεί την διατύπωση και την επανεξέταση των όρων ισορροπίας του δικτύου σαν μεταβαλλόμενες ανισότητες (variational inequality).

Στα πρότυπα που εξετάστηκαν στην διατριβή η ζήτηση υποτίθεται ότι είναι είτε δεδομένη είτε ελαστική. Μια ενδιαφέρουσα επέκταση των προτύπων αυτών θα ήταν η αντιμετώπιση αβέβαιης ζήτησης, η μελέτη της συμπεριφοράς των προτύπων σε αυτή την περίπτωση καθώς και η ανάπτυξη μεθόδων επίλυσης τους.

Επιπλέον όλα τα πρότυπα της διατριβής θα μπορούσαν να επεκταθούν σε προβληματισμούς με περισσότερα, διαφοροποιημένα προϊόντα, όπως και σε δίκτυα με πολλά στρώματα (echelons).

Βιβλιογραφία

- [1] Aardal, K. and T. Larsson (1990). A Benders Decomposition Based Heuristic for the Hierarchical Production Planning Problem, *European Journal of Operational Research*, 45, pp. 4–14
- [2] Ahuja K.R., T.L. Magnati and J.B. Orlin (1993). *Network Flow: Theory, Algorithms and Applications* Prentice Hall N.J
- [3] Ahuja, K. R and D. S. Hochbaum (2004). Solving Linear Cost Dynamic Lot Sizing Problems in $O(n \log n)$ Time, Working Paper, Department of Industrial and Systems Engineering University of Florida.
- [4] Allen, O.A (1978). Probability, Statistics and Queueing Theory with Computer Science Applications, Academic Press.
- [5] Anily, S. and A. Federgruen (1990). One warehouse multiple retailer system with vehicle routing costs, *Management Science*, 36, pp. 92–114
- [6] Aggarwal, A., and J. Park (1993). Improved Algorithms for the Economic Lot-Size Problem, *Operations Research*, 41, pp. 549–571.
- [7] Baker, K.R., P. Dixon, M.J. Magazine and E.A. Silver (1978). An Algorithm for the dynamic lot-size problem with time varying production capacity constraints, *Management Science*, 24, pp. 1710–1720.
- [8] Barany, I., T.J. van Roy and L.A. Wolsey (1984). Uncapacitated lot-sizing: the convex Hull of Solutions *Mathematical Programming Study*, 22, pp. 32–43.
- [9] Barbarosoğlu G. and D. Özgür (1999). Hierarchical design of an integrated production and 2-echelon distribution system, *European Journal of Operational Research*, 118, pp. 464–484.
- [10] Barbarosoğlu, G. (1995) Hierarchical production planning, in: R.M. Burton and B. Obel (eds.), *Design Models for Hierarchical Organizations: Computation, Information and Decentralization*, pp. 181–206, Kluwer Academic Publishers, The Netherlands.

-
- [11] Bard, F.J (1998). *Practical Bilevel Optimization, Algorithms and Applications*, Kluwer Academic Publishers
- [12] Bazaraa, M.S. and C.M. Shetty (1979). *Nonlinear Programming - Theory and Algorithms*, John Wiley & Sons, N.Y.
- [13] Bean, W.J., A. Devpura, M. O’Abrien, and S. Shirodkar (2005). Optimizing Supply-Chain Planning, *Intel Technology Journal*, 9, pp. 223-232
- [14] Beckmann, M., C. B. McGuire and C. B. Winsten (1956). *Studies in the Economics of Transportation*, with an Introduction by T. C. Koopmans, Yale University Press, New Haven.
- [15] Bernstein, F. and A. Federgruen (2003). Pricing and replenishment strategies in a distribution system with competing retailers, *Naval Research Logistics*, 51, pp. 409-426.
- [16] Bertrand, J., (1883) Théorie Mathématique de la Richesse Sociale, *Journal des Savants*, pp. 499-508
- [17] Bertsekas, D.P. (1982). *Constrained Optimization and Lagrange Multiplier Methods*, Academic Press, N.Y.
- [18] Bertsekas, D.P and R. Gallager (1992). *Data Network*, Prentice-Hall, New Jersey.
- [19] Bertsekas, D.P. (1982). Projected Newton methods for optimization problems with simple constraints, *SIAM Journal on Control and Optimization*, 20, pp. 221-246.
- [20] Bertsekas, D.P. (1991). *Linear Network Optimization*, MIT Press, Mass.
- [21] Bertsekas, D.P and E.M. Gafni (1983). Projected Newton methods and optimization of multicommodity flows, *IEEE Trans. Automat. Control*, AC-28, pp. 1090-1096.
- [22] Bertsekas, D.P., E.M. Gafni, and R.G. Gallager (1984). Second derivative algorithms for minimum delay distributed routing in networks, *IEEE Trans. Comm.*, COM-32, pp. 911-919.
- [23] Bertsekas, D.P. and J.N. Tsitsiklis (1989). *Parallel and Distributed Computation - Numerical Methods*, Prentice-Hall, London.
- [24] Bienstock, B. and O. Raskina (2002). Asymptotic Analysis of the flow deviation method for the maximum concurrent flow problem, *Mathematical Programming*, 91, pp.479-492

-
- [25] Bitran, G.R. and H. Matsuo (1986). The multi-item Capacitated lot size problem: Error bounds of Manne's formulation, *Management Science*, 32, pp. 350-359.
- [26] Bitran, G.R., and H.H. Yanasse (1982). Computational Complexity of the Capacitated Lot Size Problem, *Management Science*, 28, pp. 1174-1186.
- [27] Bhatnagar, R., P. Candra and S.K. Goyal (1993). Models for Multi-Plan Coordination. *European Journal of Operational Research*, 67, pp. 141-160.
- [28] Bracken, J. and J.M McGill (1973). Mathematical Programs with Optimization Problems in the Constraints, *Operations Research*, 21, pp. 37-44.
- [29] Bracken, J. and J.M McGill (1973). A method for Solving Mathematical Problems with Nonlinear Programs in the Constrains, *Operations Research*, 22, pp. 1097-1101.
- [30] Brucker, P. (1984). An $O(n)$ algorithm for quadratic knapsack problems. *Operations Research Letters*, 3, pp. 163-166.
- [31] Burns, L.D., R.W. Hall, D.E. Blumenfeld, and C. F. Daganzo (1985). Distribution strategies that minimize transportation and inventory costs, *Operations Research*, 33, pp. 469-490.
- [32] Burton, R.M. and B. Obel (1995) *Design Models for Hierarchical Organizations: Computation, Information and Decentralization*, Kluwer Academic Publishers, Boston, Mass.
- [33] Cachon, G.P. and M. Fischer (2000). Supply chain inventory management and the value of shared information, *Management Science*, 46, pp. 1032-1048.
- [34] Cachon, G.P (2003) Supply Chain with Contracts. In *Handbooks in Operations Research and Management Science: Supply Chain Management*, S. Graves, T. de Kok (Eds). North-Holland, pp. 229-340
- [35] Cachon, G.P., and M. Lariviere (1999) Capacity choice and allocation: strategic behavior and supply chain performance. *Management Science*, 45, pp. 1091-1108
- [36] Canon, M.D. and C.D. Cullum (1968). A tight upper bound on the rate of convergence of the Frank-Wolfe algorithm, *SIAM Journal on Control*, 6 pp. 509-516
- [37] Cantor, D.C. and M. Gerla (1974). Optimal routing in a packet-switched computer network, *IEEE Transactions on Computers*, C-23, pp. 1062-1069.

- [38] Chandra, P. (1989). On coordination of production and distribution decisions, Ph.D. Dissertation, Department of Decision Sciences, The Wharton School, University of Pennsylvania, Philadelphia.
- [39] Chandra, P., and M.L. Fisher (1994). Coordination of production and Distribution planning, *European Journal of Operational Research*, 72, pp. 503–517.
- [40] Chen, F., A. Federgruen and Y.S. Zheng (2001) Coordination mechanisms for a distribution system with one supplier and multiple retailers, *Management Science*, 47, pp. 691–708.
- [41] Chen, H.D., D. Hearn and C.Y. Lee (1994). A new dynamic programming algorithm for the single item Capacitated dynamic lot size model, *Journal of Global Optimization*, 4, pp. 285–300.
- [42] Chen, H.D., D. Hearn and C.Y. Lee (1994). A Dynamic Programming Algorithm for Dynamic Lot Size Models with Piecewise Linear Costs, *Journal of Global Optimization*, 4, pp. 397–413.
- [43] Chen, R.R., R.O. Roundy, R.Q. Zhang and G. Janakiraman (2005). Efficient Auction Mechanism for Supply Chain Procurement, *Management Science*, 51, pp. 467–482.
- [44] Chinchuluun, A., A. Karakitsiou and A. Mavrommati, Game Theory Models and their Application in Inventory Management and Supply Chain, accepted for publication in *Pareto Optimality, Game Theory and Equilibria* A. Migdalas, P.M. Pardalos and L. Pitsoulis (eds).
- [45] Clark, A. and H. Scarf (1960). Optimal Policies for a Multi-Echelon Inventory Problem, *Management Science*, 6, pp. 474–490
- [46] Cooper L., and L.J. LeBlanc (1977). Stochastic Transportation Problems and other Network Related Convex Problems, *Naval Research Logistics Quarterly*, 24, pp. 327–336.
- [47] Corbett, C.J. and U.S. Karmarkar (2001). Competition and structure in serial supply chains with deterministic demand, *Management Science*, 47, pp. 966–978.
- [48] Cournot, A. A., (1838). Researches into the Mathematical Principles of the Theory of Wealth. English translation, MacMillan, England.
- [49] Daganzo, C.F. (1977). On the traffic assignment problem with flow dependent costs - I, *Transportation Research*, 11, pp. 433–437.
- [50] Daganzo, C.F. (1977). On the traffic assignment problem with flow dependent costs - II, *Transportation Research*, 11, pp. 439–441.

- [51] Damberg, O. and A. Migdalas (1997). Distributed Disaggregate Simplicial Decomposition - A Parallel Algorithm for Traffic Assignment, in O. D. Hearn et. al. (eds) *Network Optimization, (Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems 450*, pp.172-193 Springer-Verlag.
- [52] Daskin, M.S. (1995) *Network and Discrete Location: Models Algorithms and Applications*, Wiley, New York.
- [53] Drezner, Z. and H.W. Hamacher (2003), *Facility Location: Applications and Theory*, Springer-Verlag, Berlin.
- [54] Dunn, J.C. (1979). Rate of convergence of conditional gradient algorithms near singular and nonsingular extremals, *SIAM Journal on Control and Optimization*, 17, pp. 187-211.
- [55] Ekşioğlu, B., S.D Ekşioğlu and P.M Pardalos (2001). Solving Large Scale Fixed Charge Network Flow Problems, in: P. Daniele and A. Maugeri (eds.) *Variational Inequalities and Equilibrium Models*, pp. 163-183, Kluwer Academic Publishers, The Netherlands.
- [56] Ekşioğlu B., A. Migdalas and P.M. Pardalos (2003). Heuristic Approaches to Production Distribution Problems in Supply Chain, in P.M Pardalos and V. Korotkish (eds.) *Optimization and Industry: New Frontiers*, pp. 15-37, Kluwer Academic Publisher, The Netherlands.
- [57] Ekşioğlu S.D., P.M. Pardalos and H.E Romeijn (2002). A Dynamic Slope Scaling Procedure for the Fixed Charge Cost Multi-Commodity Network Flow Problem, in P.M Pardalos and V.K Tsitsiringos (eds.) *Financial Engineering, E-Commerce and Supply Chain*, pp. 247-270, Kluwer Academic Publisher, The Netherlands.
- [58] Erengüç, S.S. and Y. Aksoy (1990). A Branch and Bound Algorithm for a Single Item Nonconvex Dynamic Lot Sizing Problem with Capacity Constraints, *Computers and Operations Research*, 17, pp. 199-210.
- [59] Ertogal, K. and S.D. Wu (2000). Auction-theoretic coordination of production planning in the supply chain, *IIE Transactions*, 32, pp. 931-940.
- [60] Federgruen, A. and M. Tzur (1991). Simple Forward algorithm to solve general dynamic lot sizing models with n periods in $o(n \log n)$ or $o(n)$ time, *Management Science*, 37, pp. 909-925.
- [61] Florian, M., and M. Klein (1971). Deterministic Production Planning with Concave Costs and Capacity Constraints, *Management science*, 18, pp. 12-20.
- [62] Florian, M., J.K. Lenstra and A.H.G. Rinnooy Kan (1980). Deterministic Production Planning: Algorithms and Complexity, *Management Science*, 26, pp. 669-679.

- [63] Frank, M. and P. Wolfe (1956). An algorithm for quadratic programming , *Naval Research Logistics Quarterly*, 3, pp. 95-110.
- [64] Fratta, L., M. Gerla and L. Kleinrock (1973). The flow deviation method. An approach to store-and-forward communication network design, *Networks*, 3, pp. 97-133.
- [65] Fudenberg D. and D.K. Levine (1999). *The Theory of Learning in Games*, MIT Press, Cambridge, Mass.
- [66] Gallego, G. (1990). Scheduling The Production of Several Items with Random Demands in a Single Facility, *Management Science*, 36, pp. 1579-1592.
- [67] Ganeshan, R. (1999). Managing supply chain inventories: A multiple retailer, one warehouse, multiple supplier model, *International Journal of Production Economics* , 59, pp. 341-354.
- [68] Gartner, N.H. (1980)/ Optimal Traffic Assignment with Elastic Demands: a review. part I: Analysis Aramework, *Transportation Science* , 14, pp. 174-191.
- [69] Gartner, N.H. (1980)/ Optimal Traffic Assignment with Elastic Demands: a Eeview. part II: Algorithmic Approaches, *Transportation Science* , 14, pp. 192-208.
- [70] Gavish, G. and R.E. Johnson (1990). A fully polynomial approximation scheme for single product scheduling in a finite capacity facility, *Operations Research*, 38, pp. 70-83.
- [71] Gerla, M. (1981). Routing and flow control , in F.F. Kuo (ed.), *Protocols and techniques for data communication networks*, (Prentice-Hall, pp. 122-173.
- [72] Geunes J. and P.M. Pardalos (2003). Networks Optimization in supply Chain Management and Financial Engineering: An Annotated Bibliography, *Networks*, 42, pp. 66-84.
- [73] Gillet, B. and L. Miller (1974). A heuristic algorithm for the vehicle dispatch problem, *Operations Research*, 22, pp. 340-349.
- [74] Ghannadan, S., H. Tuy, A. Migdalas and P. Värbrand (1996). Tabu Meta-Heuristic Based on Local Search for the Concave Production-Transportation Problem, *Studies in Location Analysis*, issue 8 pp. 33-47.
- [75] Goldengorin, B., D. Ghosh and G. Sierksma (2003). Branch and Peg Algorithms for the Simple Plant Location Problem, *Computers & Operations Research*, 30, pp. 967-981.
- [76] Grigoriadis, M.D (1986). An efficient Implementation of the Network Simplex Method, *Mathematical Programming Study*, 26, pp. 83-111.

- [77] Grossman Jr., T.A. and M.L. Brandeau (2002). Optimal pricing for service facilities with self-optimizing customers, *European Journal of Operational Research*, 141, pp. 39–57
- [78] Guignard, M. and S. Kim (1987). Lagrangean decomposition: A model yielding stronger Lagrangean bounds, *Mathematical Programming*, 39 pp. 215–228.
- [79] Hall, N.G and M.E. Posner (2001). Generating Experimental Data for Computational Testing with Machine Scheduling Applications *Operations Research*, 49, pp. 854–865.
- [80] Harris F.W. (1913). How many parts to make at once, *Factory: The Magazine of Management*, 10, pp. 135–136, Reprint, *Operations Research*, 38, pp. 947–950.
- [81] Hax, A.C and D. Candea (1984). Production and inventory management. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ.
- [82] Hax, A.C. and H.C. Meal (1975). Hierarchical integration of production planning and scheduling, in: *Studies in Management Science*, 1, pp. 53–69, North-Holland, Amsterdam.
- [83] Hearn, D. W. (1982). The Gap Function of a Convex Program. *Operations Research Letters*, 1, pp. 67–71.
- [84] Hearn D.W. and J. Ribeiro (1981). Convergence of the Frank-Wolfe method for certain bounded variable traffic assignment problems, *Transportation Research*, 15B, pp. 437–442.
- [85] Hearn, D.W., S. Lawphongpanich, and J.A. Ventura (1985). Finiteness in restricted simplicial decomposition, *Operations Research Letters*, 4, pp. 125–130.
- [86] Hearn, D.W., S. Lawphongpanich, and J.A. Ventura (1987). Restricted simplicial decomposition: computation and extensions, *Mathematical Programming Study*, 31, pp. 99–118.
- [87] Heinhold, M. (1978). An operational research approach to allocation of clients to a certain class of service institutions, *Journal of Operation Research Society*, 29, pp. 273–276.
- [88] Helgason, K., J. Kennington, and H. Lall. (1980). A polynomially bounded algorithm for a singly constrained quadratic program. *Mathematical Programming*, 18, pp. 123–133.
- [89] Holloway, C.A (1974). An extension of the Frank and Wolfe method of feasible directions, *Mathematical Programming*, 6, pp. 14–27.

- [90] Holmberg, K. (1984). Separable Programming applied to the Stochastic Transportation Problem. Research Report LiTH-MAT-R-1984-15. Department of Mathematics, Linköping Institute of Technology, Sweden.
- [91] Holmberg, K. and J. Jornsten (1984). Cross Decomposition applied to the Stochastic Transportation Problem, *European Journal of Operational Research*, 17 pp. 361-368.
- [92] Holmberg, K. (1995). Efficient Decomposition and Linearization Method for the Stochastic Transportation Problem, *Computational Optimization and Applications*, 4, pp. 293-316.
- [93] Holmberg, K. (1995). Primal and dual decomposition as organizational design: Price and/or resource directive decomposition, in [32], 61-92.
- [94] Hölmqvist K., A. Migdalas and P.M Pardalos (1997). Greedy Randomized Adaptive Search for a Location Problem with Economies of Scale, in I.M Bomze *et al.* (eds.) *Developments in Global Optimization* pp. 301-313 Kluwer Academic Publisher, The Netherlands.
- [95] Jagannathan, R. and M.R. Rao (1973). A Class of Deterministic Planning Problems, *Management science*, 19, pp. 1295-1300.
- [96] Johnson, L.A and D.C. Montgomery (1974). *Operations Research in Production Planning, Scheduling, and Inventory Control*, John Wiley & Sons, N.Y.
- [97] Jörnsten, K., M. Näsberg and P. Smeds (1985). Variable splitting - A new lagrangean relaxation to some mathematical programming models, *Report LiTH-MAT-R-85-04*, Linköping Institute of Technology, Sweden.
- [98] Jörnsten K. and M. Näsberg (1986). A new Lagrangian approach to the generalized assignment problem, *European Journal of Operational Research*, 27, pp. 313-323.
- [99] Jörnsten K. and A. Migdalas (1988). Designing a minimum spanning tree network subject to a budget constraint, *Optimization*, 19, 475-484.
- [100] Jörnsten K. and R. Leisten (1995). Aggregation approaches to decentralized planning structures, in [32], 93- 120.
- [101] Kao, E.P.C. (1979). A Multi-product Dynamic Lot-Sizing Model with Individual and Joint Set-Up Costs, *Operations Research*, 27, pp. 279-284.
- [102] Karakitsiou, A., A. Mavrommati, and A. Migdalas (2005). Efficient minimization over products of simplices and its application to nonlinear multicommodity network problems, *Operationa Research Journal*, 4, pp.99-118.λ

- [103] Karakitsiou, A. and O. A. Prokopye. Special issue in Multilevel Optimization: Algorithms and Applications, *Journal of Global Optimization* υπό δημοσίευση.
- [104] Kleinrock, L. (1964). Communication Nets: Stochastic Message Flow and Delay, McGraw-Hill, New York.
- [105] Kim D. and P.M. Pardalos (1999). A solution Approach to the Fixed Charge Network Flow Problem using Dynamic slope Scaling Procedure, *Operation Research Letters*, 24, pp. 195-203 .
- [106] Kinderlehrer, D. and G. Stampacchia (1980). An Introduction to Variational Inequalities and their Applications . Academic Press, New York.
- [107] Knight F. H. (1924) Some fallacies in the interpretation of social costs, *Quarterly Journal of Economics*, 38, pp. 582-606.
- [108] Kuhn H. W. [ed.] (1997) *Classics in Game Theory*, Princeton University Press, Princeton, N.J.
- [109] Larsson, T. and M. Patriksson (1992). Simplicial decomposition with disaggregated representation for traffic assignment problem, *Transportation Science*, 26, pp. 4-17.
- [110] Larsson, T. and A. Migdalas (1990). An algorithm for nonlinear programs over Cartesian product sets, *Optimization*, 21, pp. 535-542.
- [111] Larsson, T., A. Migdalas and M. Rönnqvist (1994). A Lagrangean heuristic for the capacitated concave minimum cost network flow problem, *European Journal of Operational Research*, 78, 116-129.
- [112] Lasdon L.S. (1970). *Optimization Theory of Large Systems*, Macmillan, N.Y.
- [113] LeBlanc, L.J. and L. Cooper (1974). A Production-Transportation Problem, *Transportation Science*, 8, pp. 344-354.
- [114] LeBlanc, L.J., R.V. Helgason and D.E. Boyce (1985). Improved Efficiency of the Frank-Wolf Algorithm for Convex Network Programs, *Transportation Science*, 19, pp. 445-462
- [115] Leblanc, L.J., E.K. Morlok, and W.P. Pierskalla (1975). An efficient approach to solving the road network equilibrium traffic assignment problem, *Transportation Research*, 9, pp. 308-318.
- [116] Lederer, P.J and L. Li (1997). Pricing, production, scheduling, and delivery-time competition. *Operations Research*, 4, pp. 407-420.

- [117] Leontief W. (1947). Multiple-Plant Firms: Comments, *Quarterly Journal of Economics*, 61, pp. 650-651.
- [118] Leung, J.M., T.L. Magnanti and R. Vachani (1989). Facets and algorithms for Capacitated lot sizing, *Mathematical Programming*, 45, pp. 331-359.
- [119] Lotfi, V., and Y.S. Yoon (1994). An algorithm for the single-item Capacitated lot-sizing problem with concave production and holding costs, *Journal of Operational Research Society*, 45, pp. 934-941.
- [120] Loparic, M., H. Marchand and L.A. Wolsey (2000). Dynamic knapsack sets and Capacitated lot-sizing, *Technical Report 47*, Catholique de Louvain, Center for Operations Research and Economics.
- [121] Love, S.F (1979). *Inventory Control*. McGraw Hill, New York.
- [122] Luenberger D.G. (1984) . *Linear and Nonlinear Programming*, Second Edition, Addison-Wesley, Reading, Mass.
- [123] Maes, J., J.O. McClain and L.N. van Wassenhove (1991). Multilevel Capacitated Lotsizing Complexity and LP-Based Heuristics, *European Journal of Operational Research*, 53, pp. 131-148.
- [124] Maes, J. and L.N. van Wassenhove (1988). Multi-item Single-level Capacitated Dynamic Lot-sizing Heuristics: a General Review, *Journal of the Operational Research Society*, 39, pp. 991-1004.
- [125] Maes J. and L.N. van Wassenhove (1986). A simple heuristic for the multi-item single level Capacitated lot sizing problem, *Operations Research Letters*, 4, pp. 265-273.
- [126] Magnanti, T. L. and R.T Wong, (1981). Accelerating Benders Decomposition: Algorithmic Enhancement and Model Selection Criteria, *Operations Research*, 29, pp. 464-484.
- [127] Magnanti, T.L. and R.T Wong (1984). Network Design and Transportation Planning: Models and Algorithms, *Transportation Science*, 18, pp. 1-55.
- [128] Mahdian, M., Y. Ye and J. Zhang (2002). Improved approximation algorithms for metric facility location problems, In Proceedings of the 5th International Workshop on Approximation Algorithms for Combinatorial Optimization, pp. 229-242.
- [129] Manne, A.S. (1958). Programming of Economic Lot Sizes, *Management Science*, 4, pp. 115-135.

- [130] Marianov, V. and M. Rios (2000). A probabilistic quality of service constraint for a location model of switches in ATM communications networks, *Annals of Operations Research*, 96, pp. 237–243.
- [131] Marianov, V. and D. Serra (1998) . Probabilistic maximal covering location-allocation for congested systems, *Journal of Regional Science*, 38, pp. 401–424.
- [132] Marianov, V. and D. Serra (2001). Hierarchical location-allocation models for congested systems, *European Journal of Operational Research*, 135, pp. 196–209.
- [133] Martin, C.H., D.C. Dent and J.C. Eckhart (1993). Integrated production, distribution and inventory planning at Libbey-Owens-Ford, *Interfaces*, 23, pp. 68–78.
- [134] Martos, B. (1975) *Nonlinear programming: Theory and methods* North-Holland, Amsterdam.
- [135] Mas-Colell, A., M. D. Whinston, and J. R. Green (1995). *Microeconomic Theory*, Oxford University Press, New York, 1995.
- [136] Mehra, A., I. Minis and J. M. Proth (1996). Hierarchical Production Planning for Complex Manufacturing Systems *Advances in Engineering Software*, 26, pp. 209–218.
- [137] Mehring, J.S. and M.M. Guttermann (1990). Supply and distribution planning support for Amoco (U.K.) Limited, *Interfaces*, 2, pp. 95–104.
- [138] Migdalas, A. (1988). Mathematical Programming Techniques in the Analysis and Design of Transportation and Communication Networks, *PhD Thesis, LiTH, Sweden*
- [139] Migdalas, A. (1994). A regularization of the Frank-Wolfe method and unification of certain nonlinear programming methods, *Mathematical Programming*, 65, pp. 331–345.
- [140] Migdalas A. and P.M. Pardalos (1996). Special issue in Global Optimization and Hierarchical Decision Making, *Journal of Global Optimization*
- [141] A. Migdalas, P.M. Pardalos & P. Värbrand (1997). *Multilevel Optimization - Algorithms and Applications*, Kluwer Academic Publishers
- [142] Miller, A.J., G.L. Nemhauser and M.W. Savelsbergh (2000). On the capacitated lot-sizing and continuous 0-1 knapsack polyhedra, *European Journal of Operational Research*, 125, pp. 298–315.

- [143] Millar, H.H. and M. Yang (1994). Lagrangian heuristics for the capacitated multi-item lot-sizing problem with backordering, *International Journal of Production Economics*, 34, pp. 1–15.
- [144] Miller, T. (2002). Hierarchical Operations and Supply Chain Planning. Springer-Verlag, London
- [145] McKeown P.G. (1981). A Branch and Bound Algorithm for Solving Fixed Charge Problems, *Naval Research Logistics*, 28, pp. 607–617.
- [146] Nagurney, A., Dong, J., and Zhang, D. (2002). A Supply Chain Network Equilibrium Model, *Transportation Research E* 38, pp. 281–303.
- [147] Nagurney, A. (2003). Innovations in Financial and Economic Networks, Edward Elgar Publishing.
- [148] Nash, J. F., (1951). Noncooperative games, *Annals of Mathematics*, 54, pp. 286–298.
- [149] Newson, E.F.P. (1975). Multi-Item Lot Size Scheduling by Heuristic Part I: with Fixed Resources, *Management Science*, 21, pp. 1186–1193.
- [150] Newson, E.F.P. (1975). Multi-Item Lot Size Scheduling by Heuristic Part II: with Variable Resources, *Management Science*, 21, pp. 1194–1203.
- [151] Nguyen, S. (1974) . An Algorithm for the Traffic Assignment Problem. *Transportation Science*, 8, pp. 203–216.
- [152] Nisan, N., and A. Ronen (2001). Algorithmic Mechanism Design, *Games Economic Behaviour*, 35, pp. 166–196.
- [153] Palekar, U.S., A.K. Karwan and S. Zionts (1990). A Branch and Bound Method for the Fixed Charge Transportation Problem, *Management Science*, 36, pp. 1092–1105.
- [154] Pardalos, P.M. and N. Kovoov (1990). An Algorithm for a singly constrained class of quadratic programs subject to upper and lower bounds. *Mathematical Programming*, 46 pp, 321–328.
- [155] Pardalos, P.M., G. Xue, and P.D Panagiotopoulos (1995). Parallel Algorithm for Global Optimization. In A. Ferreira and P.M. Pardalos, (eds.), *Solving Irregular Problems in Parallel: State of the Art*, Springer-Verlag, Berlin.
- [156] Parsons, J.D and A.J. Siprelle (2000). A Supply Chain Case Study of a Food Manufacturing Merger, in J. A. Joines, R. R. Barton, K. Kang, and P. A. Fishwick, eds. *Proceedings of the 2000 Winter Simulation Conference*, pp. 1990–1994.

- [157] Pigou A. C. (1920) The Economics of welfare. Macmillan, London, England.
- [158] Pitsoulis, L. and M.G.C. Resende (2001). Greedy randomized adaptive search procedures, *In Handbook of Applied Optimization*, P.M.Pardalos and M.G.C.Resende (eds), , pp. 168–181, Oxford University Press.
- [159] Perez-Moreno J.A., J.L.R Garcia and J.M. Moreno (1994). A Parallel Genetic Algorithm for the Discrete P-Median Problem, *Studies in Location Analysis*, 7, pp. 131–141
- [160] Pochet, Y. (1988). Valid Inequalities and Separation for Capacitated Economic Lot Sizing, *Operations Research Letters*, 7, pp. 109–115.
- [161] Pshenichny, B.N and Y.M. Danilin (1978). Numerical methods in extremal problems Mir Publishers, Moscow. Translated from the Russian in 1982 by V. Zhitomirsky.
- [162] Qi, L. (1985). Forest iteration method for Stochastic Transportation Problem, *Mathematical Programming Study*, 25, pp.142–163.
- [163] Qui, M. M. and E. E. Burch (1997). Hierarchical Production Planning and Scheduling in a Multi-product, Multi- machine Environment, *International Journal of Production Research*, 35, pp. 3023–3042.
- [164] Robinson, E.P. and L. Gao (1996). A Dual Ascent Procedure for Multiproduct Dynamic Demand Coordinated Replenishment with Backlogging, *Management science*, 42, pp. 1556–1564.
- [165] Robinson J. (1951). An iterative method of solving a game, *Annals of Mathematics*, 54, pp. 296–301. Reprinted in [108], pp. 27–35.
- [166] Rosing, K.E. (1992). An Optimal Method for Solving the (generalized) Multi-Weber Problem, *European Journal of Operational Research*, 58, pp. 414–426.
- [167] Rosencrantz, D.J., R.E. Stearns and P.M Lewis (1974). Approximate algorithms for the TSP, in *Proceedings 15th IEEE Symposium on Switching and Automata Theory*, pp. 33–42.
- [168] Ruszczyński A. (1992). Augmented Lagrangian decomposition for sparse convex optimization, *Working Paper WP-92-75*, IIASA, Laxenburg.
- [169] Samuelson, P.A. (1952) Spatial Price Equilibrium and Linear programming, *American Economic Review*, 42, pp. 283–303.
- [170] Schilling, D.A., V. Jayaraman and R. Barkhi (1993). A Review of Covering Problems in Facility Location, *Location Science*, 1, pp. 25–55.

- [171] Schwartz, M., (1977). *Computer Communication Network Design and Analysis*, Prentice-Hall, New Jersey.
- [172] Selen, W.J. and R.M Heuts (1989). A modified priority index for Gunther's lot-sizing heuristic under capacitated single stage production, *European Journal of Operational Research*, 41, pp. 181-185.
- [173] Sengurta, S. and J. Turnbull (1996). Seamless Optimization, *IIE Sol*, October. pp. 369-373.
- [174] Serra, P. and W. Weintraub (1981) Convergence of Decomposition Algorithm for Traffic Assignment Problem, *Annals of Discrete Mathematics*, 11 pp. 313-318.
- [175] Sethi, S. P., H. Zhang and Q. Zhang (2000). Hierarchical Production Control in a Stochastic N-machine Flow Shop with Limited Buffers, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 246, pp. 28-57
- [176] Shetty, B. (1990). Approximate Solutions to Large Scale Capacitated Facility Location Problems, *Applied Mathematics and Computation*, 39, pp. 159-175.
- [177] Shapiro J.F. (1979). *Mathematical Programming - Structures and Algorithms*, John Wiley & Sons, N.Y.
- [178] Sharp, J.F., J.C. Snyder and J.H. Greene (1970). A Decomposition Algorithm for Solving the Multifacility Production-Transportation Problem with Nonlinear Production Costs, *Econometrica*, 38, pp. 490-506.
- [179] Shaw D.X. and A.P. Wagelmans (1998). An algorithm for single-item capacitated economic lot sizing with piecewise linear production costs and general holding costs, *Management Science*, 44, pp. 831-838.
- [180] Sheetty C.M. (1959). A solution to the Transportation Problem with Nonlinear Costs, *Operations Research*, 7, pp. 571-580.
- [181] Sheffi, Y., (1985). *Urban Transportation Networks: Equilibrium Analysis with Mathematical Programming Methods*, Prentice -Hall, New Jersey.]
- [182] Shmoys, D. B., É. Tardos and K. Aardal (1997). Approximation Algorithms for Facility Location Problems. In Proceedings of the 29th ACM Symposium on Theory of Computing, pp. 265-274.
- [183] Shu J., C.P. Teo, and Z.J Shen (). Stochastic Transportation-Inventory Network Design Problem. To appear in Operations Research.
- [184] Shor, N.Z. (1985). *Minimization Methods for Non-Differential Functions*, Springer-Verlag, Berlin.

- [185] Silver, E.A. and H.C. Meal (1973). A heuristic for Selecting Lot-Size Quantities for the Case of a Deterministic Time-Varying Demand Rate and Discrete Opportunities for Replenishment, *Production and Inventory Management*, 14, pp. 64–77.
- [186] Silver E.A. (1979). Coordinated Replenishment of Items Under Time-Varying Demand: A Dynamic Programming Formulation, *Naval Research Logistics Quarterly*, 26, pp. 141–151.
- [187] Soland, R.M. (1974). Optimal Facility Location with Concave costs, *Operations Research*, 22, pp. 373–382.
- [188] Spitter, J.M C.A.J. Hurkens, A.G. de Kok , J.K. Lenstra, and E.G. Negenman (2005). Linear programming models with planned lead times for supply chain operations planning *European Journal of Operational Research*, 163, pp. 706–720.
- [189] Sridharan, R. (1993). A Lagrangian Heuristic for the Capacitated Plant Location Problem with Single Source Constraints, *European Journal of Operational Research*, 66, pp. 305–C312.
- [190] Stenross, F. M., and G. J. Sweet (1991). Implementing an Integrated Supply Chain in *Annual Conference Proceedings, Oak Brook, Ill: Council of Logistics Management*, 2, pp. 341–351.
- [191] Takayama, T. and G.G. Judge (1964). Equilibrium among spatially separated markets: A reformulation, *Econometrica*, 32, pp. 510–524.
- [192] Takayama, T. and G.G. Judge (1970) Alternative spatial equilibrium models, *Journal of Regional Science* , 10, pp. 1–12.
- [193] Takayama, T. and G.G. Judge (1971). Spatial and temporal price and allocation models, North- Holland, Amsterdam.
- [194] Taillard, E. (1996) . Heuristic Methods for Large Multi-source Weber Problems. Technical Report IDSIA96-96, IDSIA, Lugano.
- [195] Thomas D. J. and P.M. Griffin (1996). Coordinated supply chain management, *European Journal of Operational Research*, 94, pp. 1–15.
- [196] Thonemann U.W. (2002). Improving supply-chain performance by sharing advance demand information, *European Journal of Operational Research*, 142, pp. 81–107.
- [197] Thizy. J.M. and L.N. van Wassenhove (1985). Lagrangean relaxation for the multi-item capacitated lot-sizing problem: a heuristic implementation, *IIE Transactions*, 17, pp. 308–313.

- [198] Toregas, C., R. Swain, C. ReVelle and L. Bergman (1971). The Location of Emergency Service Facilities, *Operations Research*, 19, pp. 1363–1373.
- [199] Trigeiro, W.W. (1989). A simple heuristic for lot-sizing with setup times, *Decision Science*, 20, pp. 294–303.
- [200] Trigeiro, W.W., L.J. Thomas and J.O. Mc Clain (1989). Capacitated Lot Sizing with Setup Times, *Management science*, 35 pp. 353–366.
- [201] Tuy, H. (1992). The Complementarity Convex Structure in Global Optimization, *Journal of Global Optimization*, 2, pp. 21–40
- [202] Tuy, H., S. Ghannadan, A. Migdalas and P. Värbrand (1993). Strongly Polynomial Algorithm for a Production-Transportation Problem with Concave Production Cost, *Optimization*, 27, pp. 205–227.
- [203] Tuy, H., S. Ghannadan, A. Migdalas and P. Värbrand (1995). The Minimum Concave Cost Network Flow Problem with Fixed Numbers of Sources and Nonlinear Arc Costs, *Journal of Global Optimization*, 6, pp. 135–151.
- [204] Tuy, H., S. Ghannadan, A. Migdalas and P. Värbrand (1996). Strongly Polynomial Algorithm for a Concave Production-Transportation Problem with a Fixed Number of Nonlinear Variables *Mathematical Programming*, 72, pp. 229–258.
- [205] van Hoesel, C.P. and A.P. Wagelmans (2001). Fully polynomial approximation schemes for single-item capacitated economic lot-sizing problems, *Mathematics of Operations Research*, 26, pp. 339–357.
- [206] van Vyve, M. and F. Ortega (2004). Lot-Sizing with Fixed Charges on Stocks: the Convex Hull, *Discrete Optimization*, 1, pp. 189–203.
- [207] Vasko, F.J. and G.R Wilson (1984). An efficient Heuristic for Large Set Covering Problems, *Naval Research Logistics Quarterly*, 31, pp. 163–171.
- [208] Vasko, F.J. and G.R Wilson (1986). Hybrid Heuristics for Minimum Cardinality Set Covering Problems, *Naval Research Logistics Quarterly*, 33, pp. 241–249.
- [209] Veinott, A.F. (1964). Production Planning with Convex Costs: A Parametric Study, *Management Science*, 10, pp. 441–460.
- [210] von Hohenbalken, B. (1977). Simplicial decomposition in nonlinear programming algorithms, *Mathematical Programming*, 13, pp. 49–68.
- [211] Vickrey, W. (1961) Counterspeculation, Auctions and Competitive Sealed Tenders. *Journal of Finance*, 16, pp. 8–37.

- [212] Wagelmans, A., S. van Hossel and A. Kolen(1992). Economic Lot-sizing: An $O(n \log n)$ Algorithm that Runs in Linear Time in the Wagner-Whitin Case, *Operational Research*, 40, pp. 145-156.
- [213] Van Mieghem, J., and M. Dada (1999) Price versus production postponement: capacity and competition. *Management Science*, 45 pp. 1631– 1649
- [214] Walker, W.E. (1976). A Heuristic Adjacent Extreme Point Algorithm for the Fixed Charge Problem, *Management Science*, 22, pp. 587-596.
- [215] Wagner, H.M. and T.M. Whitin (1958). Dynamic Version of the Economic Lot Size Model, *Management Science*, 5, pp. 89-96
- [216] Wardrop, J.G (1952). Some theoretical aspects of road traffic research, *Proceeding of the institute of civil engineers Part II*, pp 325-378.
- [217] Wentges, P. (1996). Accelerating Benders Decomposition for the Capacitated Facility Location Problem, *Mathematical Methods of Operations Research*, 44, pp. 267-290.
- [218] Wentzel, E. and L. Ovcharov (1986). Applied Problems in Probability Theory, Mir Publishers.
- [219] Williams, A.C. (1962). A Treatment of Transportation Problem by Decomposition, *SIAM Journal*, 10, pp. 35-48.
- [220] Williams, J.E. (1981). A Hybrid Algorithm for Simultaneous Scheduling of Production and Distribution in Multi-Echelon structures, *Management Science*, 29, pp. 77-92.
- [221] Wright, D. and C. Haehling von Lanzenauer (1989). Solving the fixed charge problem with lagrangian relaxation and cost allocation heuristics, *European Journal of Operational Research*, 42, pp. 304-312.
- [222] Wright, D. and C. Haehling von Lanzenauer (1991). COLE: A new heuristic approach for solving the fixed charge problem Computational results, *European Journal of Operational Research*, 52, pp. 235-246.
- [223] Wu, S.D. and H. Golbasi (2002). Manufacturing planning over alternative facilities: Modelling, analysis and algorithms, in J. Geunes, P.M Pardalos and H.E Romeijnm (eds.) *Supply Chain management: Models, applications and research directions*, pp. 279-316. Kluwer Academic Publisher.
- [224] Woolbridge, M. (2002). *An Introduction to Multi-Agent Systems*, John Wiley & Sons.
- [225] Zangwill, W.I.(1966). A Deterministic Multiproduct, Multifacility Production and Inventory Model, *Operations. Research*, 14, pp. 486-507.

-
- [226] Zangwill, W.I. (1968). Minimum Concave Cost Flow in Certain Networks, *Management Science*, 14, pp. 429–450.
- [227] Zangwill, W.I. (1969). A Backlogging Model and a Multi-Echelon Model for a Dynamic Lot Size Production System: A Network Approach, *Management Science*, 15, pp. 509–527.
- [228] <http://www.gnu.org/software/glpk/>
- [229] <http://econweb.tamu.edu/gambit/>

