

# ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ ΤΥΠΟΥ ΧΑΛΑΡΩΣΗΣ ΓΙΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ ΦΕΡΤΩΝ.

ΙΩΑΝΝΗΣ Κ. ΠΑΠΟΓΛΟΥ

ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ ΚΡΗΤΗΣ

ΓΕΝΙΚΟ ΤΜΗΜΑ - ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ



Χανιά - Μάρτιος 2006

## ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Καταρχάς θα ήθελα να ευχαριστήσω τον σύμβουλο καθηγητή μου, Λέκτορα Ανάργυρο Δελή ο οποίος μου παρείχε την άρτια επιστημονική καθοδήγηση για την ολοκλήρωση της παρούσας διατριβής.

Τους καθηγητές μου στο Γενικό Τμήμα και ιδιαίτερα τον Καθηγητή Ιωάννη Σαριδάκη και τον Λέκτορα Εμμανουήλ Μαθιουδάκη, για την συμμετοχή τους στην τριμελή επιτροπή.

Τους συναδέλφους μου μεταπτυχιακούς φοιτητές για την ηθική συμπαράσταση που μου παρείχαν.

Τέλος ευχαριστώ την οικογένεια μου για την αμέριστη συμπαράσταση που μου έδειξε κατά την διάρκεια των σπουδών μου.

# Περιεχόμενα

<b>1</b>	<b>Εισαγωγή</b>	<b>4</b>
<b>2</b>	<b>Περιγραφή του Μαθηματικού Μοντέλου</b>	<b>8</b>
2.1	Το πρόβλημα . . . . .	8
2.2	Παραγωγή Των Εξισώσεων . . . . .	9
2.2.1	Διατήρηση Της Μάζας . . . . .	10
2.2.2	Διατήρηση Της Ορμής . . . . .	11
2.2.3	Η Εξίσωση Συνέχειας του Πυθμένα . . . . .	12
2.3	Η Συνάρτηση Στερεοπαροχής . . . . .	13
2.4	Διαφορετικές Μορφές Του Μαθηματικού Μοντέλου . . . . .	15
2.4.1	Μορφή A . . . . .	15
2.4.2	Μορφή B . . . . .	17
2.4.3	Μορφή C . . . . .	18
<b>3</b>	<b>Αριθμητικά Σχήματα</b>	<b>20</b>
3.1	Αριθμητικά Σχήματα Σε Συντηρητική Μορφή . . . . .	20
3.2	C-Ιδιότητα . . . . .	22
3.3	Το Αριθμητικό Σχήμα του Roe . . . . .	22
3.4	Το σχήμα χαλάρωσης των Jin-Xin. . . . .	25
3.4.1	Γενική Περιγραφή . . . . .	25
3.5	Γενίκευση . . . . .	29
3.5.1	Το Σύστημα Χαλάρωσης Των Εξισώσεων Μεταφοράς Ιζήματος . . . . .	31
3.6	Ημιδιακριτά σχήματα . . . . .	32
3.6.1	Το σχήμα τύπου upwind . . . . .	33
3.6.2	Το σχήμα MUSCL-TVD . . . . .	34
3.7	Πλήρως διακριτά σχήματα . . . . .	36
<b>4</b>	<b>Αριθμητικά Αποτελέσματα σε μία διάσταση</b>	<b>39</b>
4.1	Πρόβλημα 1 . . . . .	39

---

4.1.1	Αριθμητικά αποτελέσματα για μικρό πυθμένα ο οποίος αλληλεπιδρά αργά με την ροή νερού . . . . .	40
4.1.2	Αριθμητικά αποτελέσματα για πυθμένα ο οποίος αλληλεπιδρά γρήγορα με την ροή νερού . . . . .	45
4.1.3	Αριθμητικά αποτελέσματα για μεγάλη ταχύτητα με πυθμένα ο οποίος αλληλεπιδρά αργά με την ροή νερού . . . . .	45
4.2	Πρόβλημα 2 . . . . .	49
4.3	Πρόβλημα 3 . . . . .	53
<b>5</b>	<b>Το Μαθηματικό Μοντέλο και το Σχήμα Χαλάρωσης σε Δύο Διαστάσεις</b>	<b>57</b>
5.1	Οι Μορφές A-SF και C του Μαθηματικού Μοντέλου στις 2 Διαστάσεις .	58
5.2	Το Σχήμα Του Roe σε 2 Διαστάσεις . . . . .	59
5.3	Το Σχήμα Χαλάρωσης Για το Δυδιάστατο Πρόβλημα . . . . .	61
5.4	Ημιδιακριτά Σχήματα Χαλάρωσης Σε 2 Διαστάσεις . . . . .	64
5.5	Πλήρως Διακριτά Σχήματα . . . . .	66
<b>6</b>	<b>Αριθμητικά Αποτελέσματα σε Δύο Διαστάσεις</b>	<b>70</b>
6.1	Αριθμητικά Αποτελέσματα σε 2Δ για το Σχήμα Χαλάρωσης . . . . .	72
6.1.1	Αριθμητικά αποτελέσματα για πυθμένα που αλληλεπιδρά αργά με την ροή νερού . . . . .	73
6.1.2	Αριθμητικά αποτελέσματα για πυθμένα που αλληλεπιδρά γρήγορα με την ροή νερού . . . . .	77
6.2	Τελικά Συμπεράσματα . . . . .	85
	<b>Βιβλιογραφία</b>	<b>87</b>

---

# Κεφάλαιο 1

## Εισαγωγή

Τα τελευταία χρόνια η μελέτη των μορφοδυναμικών αλλαγών στην τοπογραφία του πυθμένα ποταμών, αγωγών και παράκτιων περιοχών λόγω της κίνησης φερτών υλικών (sediment transport) έχει γίνει θέμα μεγάλου ενδιαφέροντος στην κοινότητα της μηχανικής. Η κατανόηση για το πως οι μορφοδυναμικές αλλαγές επιδρούν στο περιβάλλον αποτελεί ένα σημαντικό ζήτημα για το περιβάλλον και για τις επιχειρήσεις. Για παράδειγμα, η μεταφορά ιζήματος επιδρά στον τρόπο κατασκευής των λιμανιών αλλά και στην τοποθεσία που θα επιλεγεί για την κατασκευή του, διότι αν μεγάλες ποσότητες άμμου μπορούν και εισέρχονται μέσα στο λιμάνι τότε το κόστος εκβάθυνσης και συντήρησης του λιμανιού θα είναι δυσβάσταχτο με αποτέλεσμα η πραγματοποίηση ή η συντήρηση του έργου να είναι ασύμφορη. Επίσης, η μετακίνηση της άμμου από μία τουριστική παραλία λόγω των θαλάσσιων ρευμάτων θα έχει ως αποτέλεσμα την μείωση της προσέλευσης τουριστών και την αρνητική επίδραση στην οικονομία της τοπικής κοινωνίας. Επιπλέον, η μετακίνηση φερτών υλών μπορεί να μειώσει δραματικά τη χωρητικότητα (φυσικών) ταμιευτήρων νερού και να επιφέρει αλλαγές στην κοίτη χειμάρων κατά τη διάρκεια ενός πλημμυρικού γεγονότος.

Η παρούσα εργασία αφορά την αριθμητική επίλυση ενός κατάλληλου μορφολογικού μοντέλου το οποίο (κάτω από κάποιες παραδοχές) μπορεί να περιγράψει τα παραπάνω φαινόμενα. Το μοντέλο αυτό αποτελείται από το υδραυλικό μέρος και το μέρος που αφορά στην κίνηση των φερτών υλών (στερεομεταφορά). Το υδραυλικό μέρος περιγράφεται από τις υδροδυναμικές εξισώσεις ρηχών υδάτων (shallow water equations). Στις περασμένες δεκαετίες το μοντέλο των ρηχών υδάτων χρησιμοποιήθηκε και χρησιμοποιείται εκτεταμένα για να περιγράψει φυσικά φαινόμενα ροών ελεύθερης επιφάνειας και υδροδυναμικής γενικότερα.

Οι διαφορικές εξισώσεις που περιγράφουν στο μαθηματικό μοντέλο την αλληλεπίδραση της κίνησης του νερού και της κίνησης των φερτών υλών δεν επιδέχονται αναλυτική λύση και γι' αυτό όλοι οι ερευνητές καταφεύγουν στη χρήση αριθμητικών λύσεων για την επίλυση του προβλήματος. Το μοντέλο αποτελεί ένα μη γραμμικό υπερβολικό σύστημα νόμων διατήρησης, όπως θα περιγραφεί στη συνέχεια στη μονοδιάστατη και δυδιάστατη μορφή του.

Τα τελευταία είκοσι χρόνια έχει γίνει μεγάλη ερευνητική προσπάθεια να αναπτυχθούν αποδοτικά αριθμητικά σχήματα πεπερασμένων διαφορών και όγκων για την επίλυση νόμων διατήρησης με σημαντικές εφαρμογές στους τομείς της αεροδυναμικής και της υδροδυναμικής, (βλ. για παράδειγμα [28, 29, 21]). Η προσπάθεια αυτή έχει οδηγήσει σε έναν σχετικά μεγάλο αριθμό από μεθόδους κατάλληλες για τη αριθμητική επίλυση νόμων διατήρησης με πολύ καλά αποτελέσματα. Από τα περισσότερο καθιερωμένα αριθμητικά σχήματα είναι τα σχήματα τύπου Godunov που στηρίζονται στην επίλυση ακριβώς ή προσεγγιστικά τοπικών προβλημάτων τύπου Riemann (επιλυτές Riemann). Επίσης σχήματα υψηλής χωρικής τάξης που απαιτούν ακριβής επιλυτές Riemann και τοπική ανάλυση ιδιοτιμών αναπτύχθηκαν παράλληλα. Τα παραπάνω σχήματα διακρίνονται για τις καλές τους ιδιότητες, είναι συντηρητικά και προσεγγίζουν τυχόν ασυνέχειες (shocks) με πολύ μεγάλη ακρίβεια. Παρόλα αυτά, όλα σχεδόν έχουν το μεγάλο μειονέκτημα ότι η θεωρητική τους μελέτη όσο και η υλοποίησή τους μπορεί να είναι μια πολύ χρονοβόρα και επίπονη διαδικασία, ιδιαίτερα για την επίλυση προβλημάτων σε πολλές διαστάσεις.

Γενικά μπορούμε να κατατάξουμε τα διαθέσιμα (ή πιά ευρέως διαδεδομένα) αριθμητικά σχήματα σε τρεις κατηγορίες. Στην πρώτη κατηγορία ανήκουν οι μέθοδοι οι οποίες παράγουν προσεγγίσεις της λύσης λύνοντας τοπικά μη γραμμικά προβλήματα Riemann. Στην δεύτερη κατηγορία ανήκουν κεντρικά σχήματα που στηρίζονται σε μεθόδους τύπου Godunov τα οποία λύνουν πάνω σε πλέγματα ισαπεχόντων γραμμών με επικαλυπτόμενη διάταξη (staggered grids). Στην τρίτη κατηγορία (και την πλέον νέα) ανήκουν σχήματα τα οποία υπολογίζουν τις μη γραμμικές ροές μέσω των σχημάτων χαλάρωσης (relaxation). Η ιδέα των σχημάτων χαλάρωσης βρίσκεται στη προσέγγιση των αρχικών μη γραμμικών διαφορικών εξισώσεων (πριν γίνει οποιαδήποτε διακριτοποίηση) από ένα γραμμικό σύστημα νόμων διατήρησης, το οποίο υπό προϋποθέσεις μπορεί να είναι υπερβολικό. Αυτό μας παρέχει πολύ μεγάλη ευκολία ιδιαίτερα σε πολύπλοκες εξισώσεις, όπου η εφαρμογή των μεθόδων των δυο πρώτων κατηγοριών είναι δύσκολη έως αδύνατη. Σχήματα των δυο

πρώτων κατηγοριών για την αποφυγή ταλαντώσεων στην αριθμητική λύση (όταν προσεγγίζουν μη ομαλές λύσεις) και για να επιτύχουν μεγάλου βαθμού ακρίβεια απαιτούν ανακατασκευή των τοπικών χαρακτηριστικών μεταβλητών, αντί των συντηρητικών, με μετασχηματισμούς οι οποίοι είναι πολύ ακριβοί στον υπολογισμό τους. Οι μέθοδοι που στηρίζονται στα σχήματα χαλάρωσης αποφεύγουν τέτοιες διαδικασίες.

Αρχικά η ιδέα των σχημάτων χαλάρωσης χρησιμοποιήθηκε για καθαρά θεωρητικούς σκοπούς, ως μία εναλλακτική μέθοδος για την επίλυση των μερικών διαφορικών εξισώσεων. Πρώτοι οι Jin και Xin [30] χρησιμοποίησαν την ιδέα ως μία νέα υπολογιστική μέθοδο για εξισώσεις σε αυθαίρετες διαστάσεις. Έκτοτε η συγκεκριμένη μέθοδος εξετάστηκε και χρησιμοποιήθηκε από ερευνητές, κυρίως εξαιτίας της ευκολίας που μας παρέχει, μιας και δεν απαιτεί αυτά που προαναφέραμε ότι απαιτούν άλλες μέθοδοι. Πέραν της απλότητας της μεθόδου, αυτό που μας προσφέρει επιπλέον είναι, εύκολη γενίκευση σε μεγαλύτερες διαστάσεις καθώς και εύκολη προσαρμογή της μεθόδου στο εκάστοτε πρόβλημα. Το κλειδί βρίσκεται στο γεγονός ότι εισάγουμε στην εξίσωση καινούργιες μεταβλητές (relaxation μεταβλητές) οι οποίες προσεγγίζουν την ροή (ή τις ροές σε μεγαλύτερες διαστάσεις) του νόμου διατήρησης. Εφόσον η συνάρτηση ροής ικανοποιεί κάποιες προϋποθέσεις (βλ. για παράδειγμα στο [23]) μπορούμε να εφαρμόσουμε την μέθοδο, και με κατάλληλες διακριτοποιήσεις στο χώρο και χρόνο να πετύχουμε σύγκλιση, [27, 3].

Επισημαίνουμε εδώ ότι, η παρούσα εργασία αποτελεί την πρώτη προσπάθεια για την αριθμητική επίλυση του μοντέλου μεταφοράς φερτών με κατάλληλη εφαρμογή σχημάτων τύπου χαλάρωσης και ακολουθεί τις πολύ πρόσφατες εργασίες [17, 5, 18] όπου εκεί υλοποιούνται κλασσικές μέθοδοι πεπερασμένων διαφορών, των δύο πρώτων κατηγοριών της προηγούμενης παραγράφου, για την επίλυση του μορφοδυναμικού μαθηματικού μοντέλου.

Στην εργασία θα ασχοληθούμε αρχικά με την εξαγωγή των εξισώσεων που διέπουν το φαινόμενο και θα περιγράψουμε διάφορες μορφές (παραλλαγές) του μαθηματικού μοντέλου. Στη συνέχεια, θα περιγράψουμε το αριθμητικό σχήμα που βασίζεται στον προσεγγιστικό επιλυτή Riemann του Roe και στη συνέχεια το σχήμα χαλάρωσης των Jin-Xin στην μία διάσταση. Μέσω τριών προβλημάτων θα συγκρίνουμε τα δύο σχήματα εξάγοντας κατάλληλα συμπεράσματα. Ανάλογα θα κινηθούμε και για τις δύο διαστάσεις. Πρώτα θα περιγράψουμε τις εξισώσεις που διέπουν το φαινόμενο και τις μορφές των εξισώσεων με τις

οποίες θα ασχοληθούμε. Κατόπιν, θα παρουσιαστεί το σχήμα χαλάρωσης για το διδιάστατο πρόβλημα της μεταφοράς ιζήματος και τέλος θα παρουσιάσουμε αποτελέσματα της μεθόδου μας σε συγκεκριμένο πρόβλημα.



## Κεφάλαιο 2

# Περιγραφή του Μαθηματικού Μοντέλου

### 2.1 Το πρόβλημα

Σ' αυτό το κεφάλαιο θα περιγράψουμε το σύστημα των διαφορικών εξισώσεων που περιγράφουν τη μεταφορά ιζήματος, αλλά και γενικότερα φερτών υλών. Το μαθηματικό αυτό μοντέλο θα χρησιμοποιηθεί για να επιλυθεί αριθμητικά.

Οι εξισώσεις που κατευθύνουν την μεταφορά ιζήματος μέσα σε αγωγούς, ποτάμια και παράκτιες περιοχές περιέχουν:

την εξίσωση της διατήρησης της μάζας,

$$h_t + (uh)_x = 0, \quad (2.1)$$

την εξίσωση διατήρησης της ορμής,

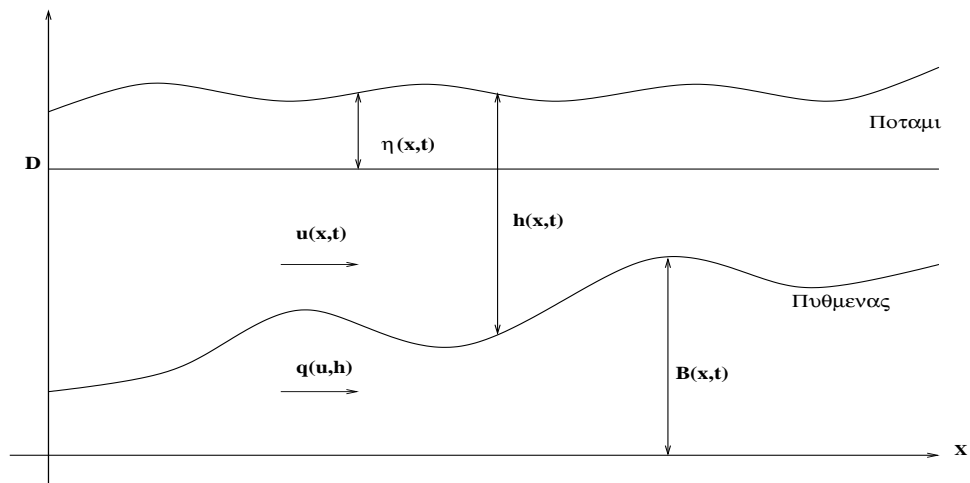
$$(uh)_t + \left[ hu^2 + \frac{1}{2}gh^2 \right]_x = -gB_x, \quad (2.2)$$

και την εξίσωση μεταβολής της μορφολογίας του πυθμένα,

$$(B)_t + \xi q_x = 0. \quad (2.3)$$

Η (2.1) και (2.2) αποτελούν το υδροδυναμικό μοντέλο της ροής του νερού και είναι οι γνωστές εξισώσεις ρηχών υδάτων (shallow water equations) ή αλλιώς σύστημα Saint-Venant. Η εξίσωση (2.3) περιγράφει την κίνηση των φερτών υλικών. Το  $h(x, t)$  αντιπροσωπεύει

το συνολικό βάθος από τον πυθμένα,  $B(x, t)$  είναι το ύψος από την επιφάνεια του πυθμένα,  $u(x, t)$  είναι η ταχύτητα προς την κατεύθυνση του  $x$  και  $q(u, h)$  είναι ο συνολικός ογκομετρικής του βαθμού μεταφοράς ιζήματος προς την  $x$  κατεύθυνση (εκροή ιζήματος), βλέπε το Σχ. 2.1. Με  $\eta(x, t)$  θα συμβολίσουμε το ύψος της επιφάνειας από ένα σταθερό σημείο αναφοράς  $D$ . Τέλος,  $\xi = \frac{1}{1 - \sigma}$  όπου  $\sigma$  είναι ένα μονοδιάστατο μέγεθος που μας δείχνει πόσο πορώδες είναι τα υλικά του πυθμένα (βλ. Cunge et al. [6]), με  $0 \leq \sigma < 1$ . Σ' αυτήν την εργασία χρησιμοποιούμε την τιμή  $\sigma = 0.4$ . Γενικά, η ροή της μεταφοράς ιζήματος,  $q(u, h)$  δεν προκύπτει άμεσα από την συνάρτηση του  $B$ , με αποτέλεσμα να γίνετε η αιτία ώστε να προκύπτουν δυσκολίες στην ακριβή εύρεση προσεγγιστικής λύσης σε κάποια αριθμητικά σχήματα (ειδικά αν η συνάρτηση της μεταφοράς ιζήματος είναι αλγεβρικά πολύπλοκη).



Σχήμα 2.1: Το χωρίο της μεταφοράς ιζήματος

## 2.2 Παραγωγή Των Εξισώσεων

Σκοπός αυτής της παραγράφου είναι να παράγουμε τις εξισώσεις που διέπουν την ροή ρευστών για την μεταφορά ιζήματος όπως αναφέρθηκαν στην προηγούμενη ενότητα. Μελετώντας την περιοχή ανάμεσα σε δύο σημεία  $x_1$  και  $x_2$  σε χωρίο μίας διάστασης του Σχ. 2.1, θα παράγουμε τις εξισώσεις που διέπουν το φαινόμενο.

### 2.2.1 Διατήρηση Της Μάζας

Στην περιοχή από το  $x_1$  έως το  $x_2$ , μπορούμε να καθορίσουμε

$$\left[ \begin{array}{l} \text{Το καθαρό ποσό του όγκου} \\ \text{ροής που διέρχεται από την} \\ \text{περιοχή } x_1 \text{ και } x_2 \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{l} \text{Με τον βαθμό αλλαγής του} \\ \text{συνολικού όγκου της ροής} \\ \text{στην περιοχή } x_1 \text{ έως το } x_2 \end{array} \right].$$

Τώρα, η συνολική ποσότητα του όγκου ροής στην περιοχή από το  $x_1$  έως το  $x_2$  είναι :

$$\int_{x_1}^{x_2} \int_B^{h+B} dy dx = \int_{x_1}^{x_2} (h + B - B) dx = \int_{x_1}^{x_2} h dx$$

και παραγωγίζοντας ως προς το χρόνο  $t$ , παίρνουμε

$$\left[ \begin{array}{l} \text{Τον βαθμό αλλαγής του} \\ \text{συνολικού όγκου της ροής} \\ \text{στην περιοχή } x_1 \text{ έως το } x_2 \end{array} \right] = \frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} h dx.$$

Επίσης,

$$\left[ \begin{array}{l} \text{Ο συνολικός όγκος της} \\ \text{ροής που εισέρχεται από} \\ \text{το } x_1 \end{array} \right] = (uh)_{x_1} \text{ και } \left[ \begin{array}{l} \text{Ο συνολικός όγκος της} \\ \text{ροής που εξέρχεται από} \\ \text{το } x_2 \end{array} \right] = (uh)_{x_2},$$

γί' αυτό το λόγο

$$\left[ \begin{array}{l} \text{Το καθαρό ποσό του όγκου} \\ \text{ροής που διέρχεται από την} \\ \text{περιοχή } x_1 \text{ και } x_2 \end{array} \right] = (uh)_{x_1} - (uh)_{x_2}.$$

Επομένως, παίρνουμε την ολοκληρωτική μορφή της εξίσωσης της διατήρησης της μάζας

$$\frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} h dx + [uh]_{x_1}^{x_2} = 0. \quad (2.4)$$

Για να λάβουμε την διαφορική μορφή ολοκληρώνουμε την (2.4) ως προς  $t$  στο διάστημα  $[t_1, t_2]$ , όπου  $t_2 > t_1$ ,

$$\int_{x_1}^{x_2} h(x, t_2) dx - \int_{x_1}^{x_2} h(x, t_1) dx + \int_{t_1}^{t_2} [uh]_{x_1}^{x_2} dt = 0.$$

Έπειτα, υποθέτουμε ότι οι συναρτήσεις  $h(x, t)$  και  $u(x, t)$  είναι παραγωγίσιμες συναρτήσεις και χρησιμοποιώντας

$$h(x, t_2) - h(x, t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial h}{\partial t} dt \text{ και } [uh]_{x_1}^{x_2} = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial uh}{\partial x} dx.$$

παίρνουμε

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} \left\{ \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(uh)}{\partial x} \right\} dx dt = 0.$$

Επειδή  $x_1$ ,  $x_2$  και  $t_1$ ,  $t_2$  είναι αυθαίρετες σταθερές, παίρνουμε την διαφορική μορφή της εξίσωσης διατήρησης της μάζας,

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(uh)}{\partial x} = 0.$$

Σημειώνουμε ότι μία κοινή πρακτική για την γραφή με διαφορετικό τρόπο της παραπάνω εξίσωσης είναι

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial(u(\eta - B))}{\partial x} = \frac{\partial B}{\partial t}$$

για την περίπτωση του σταθερού πυθμένα, δεν είναι όμως σωστή η χρησιμοποίηση του για την περίπτωση του κινούμενου πυθμένα που μελετάμε εδώ διότι  $B_t \neq 0$ .

### 2.2.2 Διατήρηση Της Ορμής

Στην περιοχή από το  $x_1$  έως το  $x_2$ , μπορούμε να καθορίσουμε ότι

$$\left[ \begin{array}{l} \text{Ο συνολικός βαθμός αλλαγής της} \\ \text{ορμής στην κατεύθυνση του } x \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{l} \text{Με την δύναμη που εφαρμόζεται} \\ \text{στην κατεύθυνση του } x \end{array} \right].$$

Τώρα,

$$\begin{aligned} \left[ \begin{array}{l} \text{Ο συνολικός βαθμός αλλαγής της} \\ \text{ορμής στην κατεύθυνση του } x \end{array} \right] &= \frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} \int_B^{h+B} u dy dx + (hu^2)_{x_2} - (hu^2)_{x_1} \\ &= \frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} uh dx + (hu^2)_{x_2} - (hu^2)_{x_1}. \end{aligned}$$

Επίσης

$$\begin{aligned} \left[ \begin{array}{l} \text{Η δύναμη της πίεσης} \\ \text{από τα άκρα} \end{array} \right] &= g \left[ \int_B^{h+B} (y - (h + B)) dy \right]_{x_1}^{x_2} \\ &= g \left[ \left[ \frac{1}{2} y^2 - (h + B)y \right]_B^{h+B} \right]_{x_1}^{x_2} \\ &= \left[ -\frac{1}{2} gh^2 \right]_{x_1}^{x_2} \end{aligned}$$

και

$$\left[ \begin{array}{l} \text{Η δύναμη της πίεσης} \\ \text{από τα άκρα} \end{array} \right] = -g \int_{C_{B1,2}} h dy,$$

όπου  $C_{B1,2}$  είναι το διάστημα ολοκλήρωσης και δηλώνουμε την καμπύλη του πυθμένα στην περιοχή  $x_1$  έως  $x_2$ . Από τη υπόθεση ότι δεν έχουμε ασυνέχειες στον πυθμένα προκύπτει

$$\left[ \begin{array}{l} \text{Η δύναμη της πίεσης} \\ \text{από τον πυθμένα} \end{array} \right] = -g \int_{x_1}^{x_2} h \frac{dB}{dx} dx,$$

και παίρνουμε

$$\left[ \begin{array}{l} \text{Η δύναμη που εφαρμόζεται} \\ \text{στην κατεύθυνση του } x \end{array} \right] = \left[ -\frac{1}{2}gh^2 \right]_{x_1}^{x_2} - g \int_{x_1}^{x_2} h \frac{dB}{dx} dx.$$

Επομένως,

$$\frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} uh dx + (hu^2)_{x_2} - (hu^2)_{x_1} = \left[ -\frac{1}{2}gh^2 \right]_{x_1}^{x_2} - g \int_{x_1}^{x_2} h \frac{dB}{dx} dx$$

και παίρνουμε την ολοκληρωτική μορφή της εξίσωσης της διατήρησης της ορμής,

$$\frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} uh dx + \left[ hu^2 + \frac{1}{2}gh^2 \right]_{x_1}^{x_2} = -g \int_{x_1}^{x_2} h \frac{dB}{dx} dx. \quad (2.5)$$

Για να πάρουμε την διαφορική μορφή της εξίσωσης διατήρησης της ορμής χρησιμοποιούμε την ίδια προσέγγιση όπως κάναμε και για την εξίσωση διατήρησης της μάζας. Υποθέτοντας ότι οι συναρτήσεις  $h(x, t)$  και  $u(x, t)$  είναι παραγωγίσιμες συναρτήσεις παίρνουμε

$$\frac{\partial(uh)}{\partial t} + \frac{[hu^2 + \frac{1}{2}gh^2]}{\partial x} = -ghB_x. \quad (2.6)$$

### 2.2.3 Η Εξίσωση Συνέχειας του Πυθμένα

Στην περιοχή από το  $x_1$  έως το  $x_2$  μπορούμε να ορίσουμε ότι

$$\left[ \begin{array}{l} \text{Το σύνολο της εκροής} \\ \text{της μάζας στην περιοχή} \\ \text{από το } x_1 \text{ έως το } x_2 \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{l} \text{Με τον βαθμό αλλαγής της} \\ \text{συνολικής μάζας στην περιοχή} \\ \text{από το } x_1 \text{ έως το } x_2 \end{array} \right].$$

Τώρα, ο συνολικός όγκος του ιζήματος στην περιοχή από το  $x_1$  έως το  $x_2$  είναι

$$\int_{x_1}^{x_2} \int_0^B dy dx = \int_{x_1}^{x_2} B dx$$

και παραγωγίζοντας το ως προς  $t$ , παίρνουμε

$$\left[ \begin{array}{l} \text{Τον βαθμό αλλαγής της} \\ \text{συνολικής μάζας στην περιοχή} \\ \text{από το } x_1 \text{ έως το } x_2 \end{array} \right] = \frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} B dx.$$

Επιπρόσθετα έχουμε,

$$\left[ \begin{array}{l} \text{Ο συνολικός όγκος του} \\ \text{ιζήματος που εισέρχεται} \\ \text{από το } x_1 \end{array} \right] = \xi q(u, h)_{x_1} \quad \text{και} \quad \left[ \begin{array}{l} \text{Ο συνολικός όγκος του} \\ \text{ιζήματος που εξέρχεται} \\ \text{από το } x_2 \end{array} \right] = \xi q(u, h)_{x_2},$$

Έτσι,

$$\left[ \begin{array}{l} \text{Η συνολική ροή της μάζας στην} \\ \text{περιοχή από το } x_1 \text{ έως το } x_2 \end{array} \right] = \xi (q(u, h)_{x_1} - q(u, h)_{x_2}).$$

Επομένως, παίρνουμε την ολοκληρωτική μορφή της εξίσωσης του πυθμένα,

$$\frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} B \, dx + \xi [q(u, h)]_{x_1}^{x_2} = 0. \quad (2.7)$$

Για να πάρουμε την διαφορική μορφή της εξίσωσης του πυθμένα, χρησιμοποιούμε την ίδια προσέγγιση όπως κάναμε και για την εξίσωση διατήρησης της μάζας. Υποθέτοντας ότι οι συναρτήσεις  $h(x, t)$  και  $u(x, t)$  είναι παραγωγίσιμες συναρτήσεις, παίρνουμε

$$\frac{\partial B}{\partial t} + \xi \frac{\partial q}{\partial x} = 0. \quad (2.8)$$

## 2.3 Η Συνάρτηση Στερεοπαροχής

Η συνολική επιβάρυνση στο φαινόμενο της μεταφοράς ιζήματος περιλαμβάνει δύο φαινόμενα την ανασταλτικότητα και την μεταφορά φορτίου. Η μεταφορά φορτίου περιέχει τις επιδράσεις του κόκκου της άμμου η οποία μεταφέρεται στην επιφάνεια του πυθμένα από την τριβή και την βαρύτητα. Η ανασταλτικότητα στη μεταφορά ιζήματος περιέχει τις επιδράσεις του κόκκου της άμμου οι οποίες αυξάνουν από την ροή του νερού και την μεταφορά πάνω απ' τον πυθμένα. Για αργή ροή νερού, η μεταφορά φορτίου είναι ποίο επικρατούσα καθώς όχι μεγάλη ποσότητα ιζήματος μεταφέρεται από την ροή του νερού, αλλά καθώς η ροή του νερού αυξάνει η ανασταλτικότητα του ιζήματος γίνεται ποιο επικρατούσα και το ίζημα μπορεί να μεταφερθεί πάρα πολλά μέτρα ειδικά αν το μέγεθος του κόκκου είναι μικρό (βλ. Soulsby [25] για περισσότερες λεπτομέρειες).

Πολυάριθμες αναλυτικές μορφές της συνάρτησης στερεοπαροχής έχουν παραχθεί οι οποίες περιέχουν και τα δύο φαινόμενα. Η επιλογή για το ποια θα χρησιμοποιήσουμε συνήθως καθορίζεται από το πρόβλημα που έχουμε να μοντελοποιήσουμε. Σ' αυτήν την εργασία θα χρησιμοποιήσουμε την ποίο βασική από όλες τις συναρτήσεις στερεομεταφοράς η οποία ακολουθεί έναν απλό νόμο ισχύς (βλ. [13, 16])

$$q(u) = Au|u|^{m-1}. \quad (2.9)$$

Όπου,  $A$  είναι μία σταθερά ( $s^2/m$ ), που περικλείει την επίδραση του μεγέθους του κόκκου και της κίνησης του ιζώδους η οποία καθορίζεται από πειραματικά δεδομένα με  $m$  να είναι  $1 \leq m \leq 4$ . Η (2.9) δεν μπορεί να παραγωγιστεί ως προς το  $u$ , εκτός αν το  $u$  δεν επιτρέπεται να αλλάξει πρόσημο. Ωστόσο, μελετώντας μόνο τις ακέραιες τιμές του  $m$ , η (2.9) μπορεί να παραγωγιστεί και ισχύει για όλες τις τιμές του  $u$ . Για τον σκοπό αυτής της εργασίας, παίρνουμε  $m = 3$  και η (2.9) μας δίνει

$$q(u) = Au^3. \quad (2.10)$$

όπου τώρα μπορούμε να το παραγωγίσουμε ως προς το  $u$ .

Μέχρι πρόσφατα, το σύστημα των εξισώσεων (2.1) έως (2.3), προσεγγίζονταν χρησιμοποιώντας μια σταθερή προσέγγιση που είχε προταθεί από τους Cunge et al. [6]. Η υπόθεση της σταθερής προσέγγισης είναι ότι οι αλλαγές του πυθμένα έχουν μηδαμινή επίδραση στην ροή του νερού και επομένως και στο σύστημα. Το σύστημα μετατρέπεται σε μία προσέγγιση της ροής του νερού, που υποθέτουμε ότι βρίσκετε σε κατάσταση ισορροπίας, ακολουθούμενο από την κίνηση του πυθμένα και προσεγγίζεται αριθμητικά με το κλασσικό σχήμα των Lax-Wendroff, το οποίο όμως υποφέρει από διασπορά ψευδών αποτελεσμάτων με ταλαντώσεις που επιδρούν στα αποτελέσματα, βλ. Damgaard [8]. Πολλές τεχνικές, που περιέχουν και υψηλής ανάλυσης μεθόδους έχουν χρησιμοποιηθεί για να απαλείψουν αυτές τις ταλαντώσεις. Δυστυχώς οι ταλαντώσεις δεν απαλείφονται οριστικά και μάλιστα γίνονται πιο πολλές όταν εφαρμοστούν για μεγάλα χρονικά διαστήματα.

Γενικότερα, υπάρχουν τρεις βασικές πηγές δυσκολιών όταν αριθμητικά θέλουμε να υπολογίσουμε λύσεις των παραπάνω εξισώσεων :

- (α) Η μη-γραμμικότητα του συστήματος,
- (β) Η εμφάνιση ασυνεχών λύσεων, που όμως έχουν φυσικό νόημα και
- (γ) Η ύπαρξη πηγαίων όρων (μη ομογενές σύστημα εξισώσεων).

Γενικά το σύστημα των τριών εξισώσεων αποτελεί ένα μη-γραμμικό υπερβολικό σύστημα νόμων διατήρησης το οποίο μπορεί να εμφανίσει ασυνέχειες (shocks) ακόμη και για ομαλές αρχικές συνθήκες.

## 2.4 Διαφορετικές Μορφές Του Μαθηματικού Μοντέλου

Υπάρχουν δύο είδη προσεγγίσεων τα οποία μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να προσεγγίσουμε τις εξισώσεις που κατευθύνουν την μεταφορά ιζήματος (βλ. Hudson και Sweby [17]).

- (I) Η στάσιμη προσέγγιση (steady approach) όπου η ροή του νερού υποθέτουμε ότι είναι σταθερή και οι αλλαγές στον πυθμένα έχουν μηδενική επίδραση στην ροή του νερού π.χ. η ταχύτητα του κύματος της εξίσωσης του πυθμένα είναι αξιοσημείωτα μικρή ποσότητα σε σχέση με την ταχύτητα της ροής του νερού. Κάνοντας αυτήν την υπόθεση το σύστημα μετατρέπεται σε προσέγγιση της ροής του νερού, και επαναλαμβάνετε μέχρι να έρθει σε κατάσταση ισορροπίας, ακολουθούμενο από μεταβολή του πυθμένα.
- (II) Στην μη στάσιμη προσέγγιση (unsteady approach) δεν γίνεται καμία υπόθεση και η ροή του νερού και ο πυθμένας υπολογίζονται ταυτοχρόνως. Με αυτού του είδους την προσέγγιση η ροή του νερού μπορεί να είναι ή στάσιμη ή όχι και οι αλλαγές στον πυθμένα είναι σημαντικές και έχουν νόημα π.χ. η ταχύτητα του κυματισμού της εξίσωσης του πυθμένα είναι όμοιας σημασίας με την ταχύτητα ροής του νερού. Γίγνεται αυτήν την προσέγγιση, το σύστημα των εξισώσεων διακριτοποιείται ταυτοχρόνως.

### 2.4.1 Μορφή A

Οι εξισώσεις (2.1) έως (2.3) μπορούν να χρησιμοποιηθούν όπως γράφτηκαν με τρεις διαφορετικούς τρόπους :

1. Μορφή A-CV: Η ακόλουθη μέθοδος είναι βασική για τις μεθόδους στάσιμης προσέγγισης και αποτελείται από :
    - Στάδιο Στάσιμου Πυθμένα, όπου οι εξισώσεις (2.1) έως (2.2) των ρηχών υδάτων επαναλαμβάνονται μέχρι να φτάσουν σε μία στάσιμη κατάσταση κρατώντας τον πυθμένα σταθερό.
    - Στάδιο Μεταβλητού Πυθμένα, όπου ο πυθμένας μεταβάλλεται καθώς κρατάμε όλες τις άλλες μεταβλητές σταθερές.
-



Για κάθε χρονικό βήμα οι εξισώσεις των ρηχών υδάτων επιλύονται μέχρι να έρθει σε σταθερή κατάσταση ακολουθούμενη από μεταβολή του πυθμένα. Το συνολικό χρονικό βήμα αυτής της μορφής είναι το μορφολογικό χρονικό βήμα της εξίσωσης μεταβολής του πυθμένα.

2. Μορφή A-NC: Εδώ, οι εξισώσεις των ρηχών υδάτων και η εξίσωση μεταβολής του πυθμένα επιλύονται με διαδοχικές αριθμητικές προσεγγίσεις χρησιμοποιώντας το ίδιο χρονικό βήμα. Αυτή η Μορφή είναι όμοια με την Μορφή A-CV καθώς η ροή του νερού υπολογίζεται ακόμη ξεχωριστά από τον πυθμένα. Ωστόσο, η ροή του νερού δεν φτάνει πλέον σε κατάσταση ισορροπίας ή σε στάσιμη κατάσταση έπειτα από κάθε βήμα.

3. Μορφή A-SF: Οι εξισώσεις (2.1) έως (2.3) γράφονται σε μορφή συστήματος,

$$\begin{bmatrix} h \\ hu \\ B \end{bmatrix}_t + \begin{bmatrix} hu \\ hu^2 + \frac{1}{2}gh^2 \\ \xi q \end{bmatrix}_x = \begin{bmatrix} 0 \\ -ghB_x \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

και όλο το σύστημα προσεγγίζεται αριθμητικά ταυτοχρόνως.

Όλες οι μορφές που αναφέρθηκαν προηγουμένως μπορούν να γραφούν σε μορφή συστήματος που ικανοποιεί τον νόμο διατήρησης,

$$\mathbf{w}_t + \mathbf{F}(\mathbf{w})_x = \mathbf{R}, \quad (2.12)$$

όπου  $\mathbf{w}$  είναι το διάνυσμα που περιέχει τους αγνώστους,  $\mathbf{F}(\mathbf{w})$  είναι η συνάρτηση ροής (flux-function) και το διάνυσμα  $\mathbf{R}$  περιέχει τον μη ομογενή όρο (πηγαίο όρο) που συστήνεται ως RHS και πρέπει να τον χειριστούμε προσεκτικά για να αποφύγουμε αριθμητικές δυσκολίες για να λάβουμε μία ακριβή προσέγγιση.

Ο Ιακωβιανός πίνακας της συνάρτησης ροής θα χρειαστεί σε όλες τις περιπτώσεις των Μορφών A. Για τις Μορφές A-CV και A-NC, ο Ιακωβιανός πίνακας των εξισώσεων των ρηχών υδάτων είναι,

$$\mathbf{A} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{w}} = \begin{bmatrix} 0 & h \\ c^2 - u^2 & 2u \end{bmatrix}$$

όπου  $c = \sqrt{gh}$ , και έχουν ιδιοτιμές τις

$$\lambda_1 = u - c \quad \text{και} \quad \lambda_2 = u + c$$

με αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα

$$\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ u - c \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ u + c \end{bmatrix}$$

Για την Μορφή A-SF, αν η συνάρτηση στερεοπαροχής (2.9) χρησιμοποιείται, τότε ο Ιακωβιανός πίνακας είναι

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ c^2 - u^2 & 2u & 0 \\ -ud & d & 0 \end{bmatrix},$$

όπου  $c = \sqrt{gh}$  και  $d = \frac{\xi}{h} Am|u|^{m-1}$ . Σημειώνουμε ότι ο Ιακωβιανός πίνακας είναι ιδιόμορφος. Οι ιδιοτιμές του Ιακωβιανού πίνακα είναι

$$\lambda_1 = u - c, \quad \lambda_2 = 0 \quad \text{και} \quad \lambda_3 = u + c$$

με αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα

$$\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ u - c \\ \frac{-cd}{u - c} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \mathbf{e}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ u + c \\ \frac{cd}{u + c} \end{bmatrix}.$$

Σημειώνουμε ότι η ιδιοτιμή που σχετίζεται με την εξίσωση συνέχειας του πυθμένα είναι μηδενική, λόγω της ιδιομορφίας του Ιακωβιανού πίνακα, και αυτό συνεπάγεται ότι η όποια κίνηση του πυθμένα δημιουργείται μόνο από την κίνηση του νερού.

### 2.4.2 Μορφή B

Μια άλλη προσέγγιση που μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να επανεγράψουμε την εξίσωση διατήρησης της ορμής (2.2) είναι

$$u_t + \left[ \frac{1}{2}u^2 + g(h + B) \right]_x = 0, \quad (2.13)$$

όπου προκύπτει από την (2.1). Αν συνδυάσουμε την (2.1) με τις (2.13) και (2.3) παίρνουμε την μορφή του συστήματος B,

$$\begin{bmatrix} h \\ u \\ B \end{bmatrix}_t + \begin{bmatrix} hu \\ \frac{1}{2}u^2 + g(h + B) \\ \xi q \end{bmatrix}_x = 0. \quad (2.14)$$

Σημειώνουμε ότι αυτή η Μορφή δεν έχει μη ομογενή όρο, επομένως η Μορφή B θα ήταν πιθανών πιο εύκολο να υπολογιστεί αριθμητικά. Ωστόσο η Μορφή B δεν έχει την συνηθισμένη συντηρητική μορφή, με αποτέλεσμα οι ασυνέχειες να διαδίδονται με λάθος ταχύτητα. Αν η συνάρτηση της στερεομεταφοράς (2.9) χρησιμοποιείται τότε ο Ιακωβιανός πίνακας της Μορφής B είναι

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} u & h & 0 \\ g & u & g \\ 0 & d & 0 \end{bmatrix},$$

όπου  $d = \frac{\xi}{h} Am|u|^{m-1}$ . Σημειώνουμε ότι ο Ιακωβιανός πίνακας της Μορφής B δεν είναι ιδιόμορφος. Οι ιδιοτιμές,  $\lambda$ , του Ιακωβιανού πίνακα δεν είναι εύκολο να γραφούν σε αναλυτική μορφή, επειδή είναι ρίζες του πολυνύμου

$$P(\lambda, w) = \lambda^3 - 2u\lambda^2 + [u^2 - g(h + B)]\lambda + gud = 0. \quad (2.15)$$

Ωστόσο τις ρίζες της (2.15) μπορούν να υπολογιστούν αν χρησιμοποιήσουμε την προσέγγιση που αναφέρετε στην εργασία [17], Παράρτημα A, όπου αποδεικνύεται ότι οι ιδιοτιμές είναι πραγματικές και διαφορετικές μεταξύ τους. Έστω μια ιδιοτιμή,  $\lambda_k$ , τότε υπολογίζουμε το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα ως

$$\mathbf{e}_k = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{h}(\lambda_k - u) \\ \frac{(u - \lambda_k)^2 - gh}{gh} \end{bmatrix}.$$

Η μορφή B δεν θα αναλυθεί περαιτέρω σ' αυτήν την εργασία, και αναφέρεται εδώ προς χάριν πληρότητας.

### 2.4.3 Μορφή C

Όταν έχουμε μία μορφή της οποίας ο Ιακωβιανός πίνακας δεν είναι ιδιόμορφος (όπως είναι στην μορφή B), τότε χρησιμοποιώντας τον κανόνα παράγωγου γινομένου,  $(hB)_x = hB_x + h_x B$ , και γράφουμε την εξίσωση διατήρησης της ορμής (2.2) ως

$$(uh)_t + \left[ hu^2 + \frac{1}{2}gh^2 + ghB \right]_x = gBh_x. \quad (2.16)$$

Τώρα συνδυάζοντας τις εξισώσεις (2.1), (2.16) και (2.3), τις γράφουμε σε μορφή συστήματος και παίρνουμε

$$\begin{bmatrix} h \\ hu \\ B \end{bmatrix}_t + \begin{bmatrix} hu \\ hu^2 + \frac{1}{2}gh^2 + ghB \\ \xi q \end{bmatrix}_x = \begin{bmatrix} 0 \\ gBh_x \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

Παρατηρούμε ότι η μορφή C έχει και μη ομογενή όρο. Αν η συνάρτηση της στερεοπαροχής (2.9) χρησιμοποιείται, τότε ο Ιακωβιανός πίνακας της μορφής C είναι

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ g(h+B) - u^2 & 2u & gh \\ -ud & d & 0 \end{bmatrix},$$

όπου  $d = \frac{\xi}{h} Am|u|^{m-1}$ . Οι ιδιοτιμές,  $\lambda$ , του Ιακωβιανού πίνακα δεν είναι και πάλι εύκολο να γραφούν σε αναλυτική μορφή, επειδή είναι ρίζες του πολυωνύμου

$$P(\lambda, w) = \lambda^3 - 2u\lambda^2 + [u^2 - g(h+B+hd)]\lambda + ghud = 0. \quad (2.18)$$

Ωστόσο τις ρίζες της (2.18) μπορούν να υπολογιστούν αν χρησιμοποιήσουμε πάλι την προσέγγιση που αναφέρετε στην εργασία [17], Παράρτημα A, όπου αποδεικνύεται επίσης ότι οι ιδιοτιμές είναι πραγματικές και διαφορετικές μεταξύ τους όταν  $h(x, t) + B(x, t) > 0$ . Επιπλέον, καθώς η παράμετρος  $A \rightarrow 0$ , οι ιδιοτιμές

$$\lambda_1 \rightarrow u - c, \quad \lambda_2 \rightarrow 0, \quad \text{και} \quad \lambda_3 \rightarrow u + c.$$

Έστω μια ιδιοτιμή,  $\lambda_k$ , τότε υπολογίζουμε το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα ως

$$\mathbf{e}_k = \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda_k \\ \frac{u^2 - g(h+B) + (\lambda_k - 2u)\lambda_k}{gh} \end{bmatrix}.$$

Στην παρούσα εργασία θα αναπτύξουμε και θα εφαρμόσουμε αριθμητικά σχήματα για τις μορφές A-SF και C του μαθηματικού μοντέλου.

## Κεφάλαιο 3

### Αριθμητικά Σχήματα

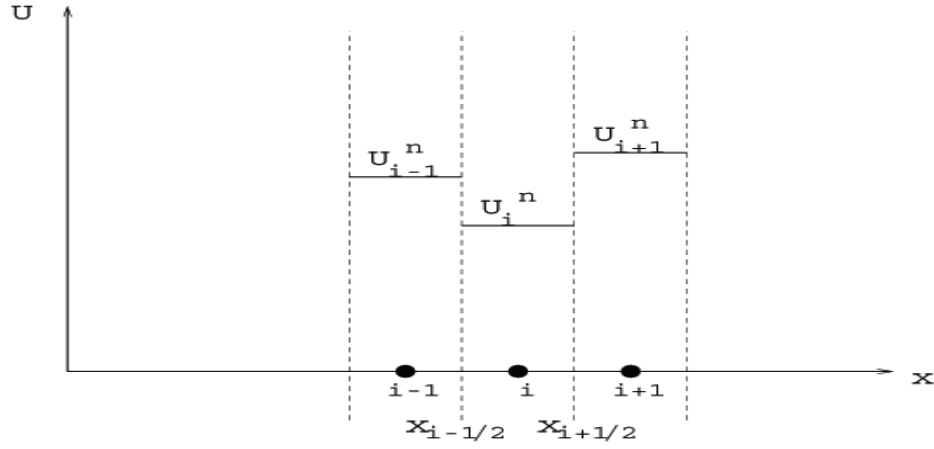
Μέχρι τώρα έχουμε αναφέρει τις διαφορετικές μορφές του μαθηματικού μοντέλου. Σ' αυτό το κεφάλαιο θα περιγράψουμε αριθμητικά σχήματα, που μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την επίλυση του μοντέλου μεταφοράς ιζήματος.

Η προσπάθεια κατασκευής προσεγγιστικών λύσεων του συστήματος των νόμων διατήρησης και ειδικότερα αυτών με πηγαίους όρους είναι ένα σημαντικό θέμα ενδιαφέροντος στην επιστημονική κοινότητα (βλ. για παράδειγμα [24, 12, 19, 20, 2]). Πρόσφατα, ένα πλήθος από σχήματα υψηλής τάξης έχουν κατασκευασθεί προσθέτοντας οριοθέτες στον μη ομογενή όρο όπως επίσης και στην αριθμητική συνάρτηση ροής (βλ. για παράδειγμα [15, 20]) όπως θα παρουσιάσουμε παρακάτω. Για τις διάφορες μορφές, αυτή η προσέγγιση επιτρέπει στα υψηλής τάξης σχήματα να διατηρούν μια φυσική ισορροπία ανάμεσα στην αριθμητική συνάρτηση ροής και στον αριθμητικό μη ομογενή όρο για την περίπτωση της σταθερής κατάστασης (βλ. Παρ. 3.2).

#### 3.1 Αριθμητικά Σχήματα Σε Συντηρητική Μορφή

Για τη διακριτοποίηση του συστήματος (2.12) θεωρούμε τη χωρική διαμέριση  $\{x_i\}$  με  $\Delta x = x_{i+1/2} - x_{i-1/2}$  ( όπου  $x_{i+1/2} = x_i + \frac{1}{2}\Delta x$ ,  $x_i = i\Delta x$  για  $i = 1, \dots, n$  ) και χρονικό βήμα  $\Delta t = t^{n+1} - t^n$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Η μεταβλητή  $\mathbf{w}$  στο υπολογιστικό κελί  $C_i = [x_{i-1/2}, x_{i+1/2}]$  σε χρόνο  $t = t^n$ , προσεγγίζεται από τη μέση τιμή της στο  $C_i$ ,  $\mathbf{w}_i^n$ . Η  $\mathbf{w}_i^n$  αποτελεί τη προσεγγιστική λύση του προβλήματος (βλέπε το Σχ. 3.1) με

$$\mathbf{w}_i^n \simeq \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \mathbf{w}(x, t^n) dx.$$



Σχήμα 3.1: Προσεγγιστική λύση του προβλήματος.

Στο σημείο  $x = x_{i+1/2}$ ,  $t = t^n$  η τιμή της  $w$  συμβολίζεται με  $w_{i+1/2}^n$ .

Η γενική μορφή του συντηρητικού σχήματος είναι,

$$w_i^{n+1} = w_i^n - s \left( F_{i+\frac{1}{2}}^* - F_{i-\frac{1}{2}}^* \right) + s R_i^*, \quad (3.1)$$

όπου  $s = \frac{\Delta t}{\Delta x}$  και  $w_i^n \approx w(x_i, t^n)$  είναι η αριθμητική προσέγγιση. Εδώ  $F_{i+\frac{1}{2}}^*$  είναι η αριθμητική προσέγγιση της συνάρτησης ροής και  $R_i^*$  περιλαμβάνει την προσέγγιση του μη ομογενή όρου. Όταν παραγωγίζουμε την αριθμητική συνάρτηση ροής, η ιδιότητα της συνέπειας πρέπει επίσης να ικανοποιείται,

$$F_{i+\frac{1}{2}}^* \rightarrow F(\bar{w}) \quad \text{καθώς} \quad w_i^n \rightarrow \bar{w} \quad \forall i,$$

όπου  $\bar{w}$  είναι ένα διάνυσμα που οι συνιστώσες του είναι σταθερές. Για να είμαστε σίγουροι ότι το σχήμα παραμένει ευσταθές, το χρονικό βήμα υπολογίζεται χρησιμοποιώντας

$$\Delta t = \frac{\nu \Delta x}{\max(|\lambda|)},$$

όπου  $\max(|\lambda|)$  είναι η μέγιστη ταχύτητα κυματισμού (ιδιοτιμές) και ως  $\nu$  συμβολίζουμε τον αριθμό CFL.

## 3.2 C-Ιδιότητα

Τα μη ομογενή συστήματα των νόμων διατήρησης (2.12) συχνά οδηγούν σε στάσιμη κατάσταση για την οποία όταν η παράγωγος του χρόνου είναι μικρή (ή μηδέν),  $\mathbf{w}_t \approx \mathbf{0}$ , υπάρχει μία φυσική ισορροπία ανάμεσα στις συναρτήσεις ροής και του μη ομογενή όρου δηλ.,

$$\mathbf{F}_x = \mathbf{R}.$$

Ωστόσο, μερικά αριθμητικά σχήματα δεν ικανοποιούν αυτήν τη φυσική ισορροπία όταν  $\mathbf{w}_t \approx \mathbf{0}$ ,

$$\mathbf{F}_{i+\frac{1}{2}}^* - \mathbf{F}_{i-\frac{1}{2}}^* = \mathbf{R}_i^*, \quad (3.2)$$

οπότε οδηγούμαστε σε λανθασμένα αποτελέσματα, λόγω του ότι τα αριθμητικά σχήματα δεν μπορούν για μεγάλο χρονικό διάστημα να μιμηθούν την συμπεριφορά των εξισώσεων.

Οι Bermúdez και Vázquez [2] κατασκεύασαν σχήματα τα οποία διατηρούν την ισορροπία ανάμεσα στις αριθμητικές συναρτήσεις ροής και στους μη ομογενείς όρους για την σταθερή κατάσταση, τα οποία ικανοποιούν την λεγόμενη C-Ιδιότητα. Επομένως, αν ένα αριθμητικό σχήμα (3.1) ικανοποιεί την (3.2) ακριβώς ή προσεγγιστικά όταν εφαρμόζεται στην στάσιμη κατάσταση, λέμε ότι ικανοποιεί την C-Ιδιότητα.

## 3.3 Το Αριθμητικό Σχήμα του Roe

Θα αναπτύξουμε συνοπτικά το σχήμα πεπερασμένων διαφορών-όγκων του Roe (βλ. Roe[24], Hubbard και Garcia-Navarro [15] και Hudson [16]) ώστε να χρησιμοποιηθεί για την διακριτοποίηση του συστήματος.

Ο Roe [24] κατασκεύασε μία μέθοδο η οποία επιλύει συστήματα νόμων διατήρησης χρησιμοποιώντας μία κλαδική σταθερή προσέγγιση

$$\mathbf{w}(x, t_n) = \begin{cases} \mathbf{w}_L & \text{αν } x_L - \frac{\Delta x}{2} \leq x \leq x_L + \frac{\Delta x}{2} \\ \mathbf{w}_R & \text{αν } x_R - \frac{\Delta x}{2} \leq x \leq x_R + \frac{\Delta x}{2} \end{cases}$$

όπου  $\mathbf{w}_L$  και  $\mathbf{w}_R$  αποτελούν τις κλαδικές σταθερές καταστάσεις στο χρόνο  $t_n$ , και καθορίζουν την ακριβή λύση ενός γραμμικοποιημένου προβλήματος Riemann το οποίο

συσχετίζεται με την (2.12)

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + \tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{w}_L, \mathbf{w}_R) \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x} = 0. \quad (3.3)$$

όπου

$$\tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{w}_L, \mathbf{w}_R) = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{w}}$$

είναι ένας γραμμικοποιημένος Ιακωβιανός πίνακας και με  $\tilde{\cdot}$  συμβολίζουμε μέσες τιμές που αντιστοιχούν στον πίνακα  $\tilde{\mathbf{A}}$ . Οι όροι  $\tilde{\lambda}$ ,  $\tilde{\mathbf{e}}$  και  $\tilde{a}$  είναι οι ιδιοτιμές, τα ιδιοδιανύσματα και τα βάρη των κυμάτων του γραμμικοποιημένου Ιακωβιανού πίνακα του Roe,  $\tilde{\mathbf{A}}$ , που προκύπτει από την διάσπαση,

$$\Delta \mathbf{F} = \sum_{k=1}^p \tilde{a}_k \tilde{\lambda}_k \tilde{\mathbf{e}}_k = \tilde{\mathbf{A}} \Delta \mathbf{w} \quad \text{όπου} \quad \Delta \mathbf{w} = \mathbf{w}_R - \mathbf{w}_L.$$

Τώρα, χρησιμοποιώντας την προσέγγιση του Roe (βλ. [24], και [15], για περισσότερες λεπτομέρειες), παίρνουμε την αριθμητική συνάρτηση ροής (βλέπε το Σχ. 3.2)

$$\mathbf{F}_{i+\frac{1}{2}}^* = \frac{1}{2} (\mathbf{F}_{i+1}^n + \mathbf{F}_i^n) - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^p \left[ \tilde{a}_k |\tilde{\lambda}_k| (1 - \Phi(\theta_k)(1 - |\nu_k|)) \tilde{\mathbf{e}}_k \right]_{i+\frac{1}{2}},$$

όπου

$$s = \frac{\Delta t}{\Delta x}, \quad \nu_k = s \tilde{\lambda}_k, \quad \theta_k = \frac{(\tilde{a}_k)_{I+\frac{1}{2}}}{(\tilde{a}_k)_{i+\frac{1}{2}}}, \quad I = i - \text{sgn}(\nu_k)_{i+\frac{1}{2}},$$

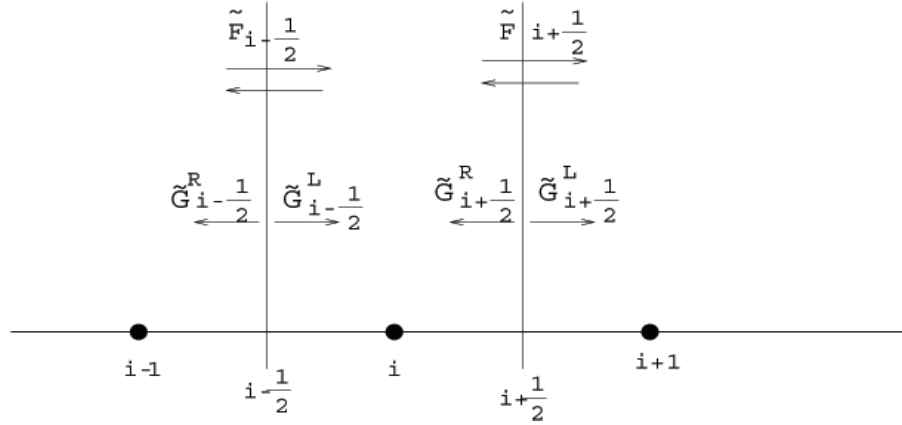
$p$  είναι ο αριθμός των συνιστωσών του συστήματος ( $p = 2$  ή  $3$ , εξαρτάται από την μορφή του) και  $\Phi(\theta_k)$  είναι ο οριοθέτης ροής (flux limiter) MinMode,

$$\Phi(\theta_k) = \max(0, \min(1, \theta_k)).$$

Ο οριοθέτης χρησιμοποιείται για να δώσει στο αριθμητικό σχήμα δεύτερης τάξης ακρίβεια στο χώρο (χωρίς την εμφάνιση ταλαντώσεων), μια που τώρα ικανοποιεί την ιδιότητα της Ολικής Ελάττωσης της Μεταβολής (Total Variation Diminishing) ή αλλιώς την ιδιότητα TVD (βλ. Harten [14] και Sweby [26]).

Χρειαζόμαστε τώρα μία προσέγγιση για τους μη ομογενείς όρους,  $\mathbf{R}_i^*$  η οποία να μας εξασφαλίσει ότι το σχήμα μας ικανοποιεί την C-Ιδιότητα. Αυτό μπορούμε να το πετύχουμε εφαρμόζοντας τον οριοθέτη στην προσέγγιση του μη ομογενή όρου, έτσι ώστε να επέλθει ισορροπία στο σύστημα με τις αριθμητικές συναρτήσεις ροής. Οι Hubbard και





Σχήμα 3.2: Προσέγγιση της συνάρτησης ροής και του μη ομογενή όρου.

Garcia-Navarro [15], και ο Hudson [16] συζήτησαν την παρακάτω προσέγγιση για να προσεγγίσουν τους μη ομογενείς όρους, (βλέπε το Σχ. 3.2)

$$\mathbf{R}_i^* = \mathbf{R}_{i+\frac{1}{2}}^- - \mathbf{R}_{i-\frac{1}{2}}^+,$$

όπου

$$\mathbf{R}_i^\pm = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^p \left[ \tilde{\beta}_k \tilde{\mathbf{e}}_k \left( 1 \pm \text{sgn}(\tilde{\lambda}_k) (1 - \Phi(\theta_k) (1 - |\nu_k|)) \right) \right]_{i+\frac{1}{2}}$$

και οι τιμές του  $\tilde{\beta}$  προκύπτουν από την ανάλυση του

$$\frac{1}{\Delta x} \sum_{k=1}^p \tilde{\beta}_k \tilde{\mathbf{e}}_k = \tilde{\mathbf{R}},$$

όπου  $\tilde{\mathbf{R}}$  είναι η κατά υπολογιστικό χωρίο διακριτοποίηση του μη ομογενή όρου, που προκύπτει χρησιμοποιώντας τους μέσους όρους του Roe και τις παράγωγους κατά σημείο. Για την μορφή A-SF ο πίνακας  $\tilde{\mathbf{R}}$ , είναι:

$$\tilde{\mathbf{R}} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{g}{2} \tilde{h} (B_{i+1} - B_i) \\ 0 \end{bmatrix},$$

και για την μορφή C, είναι:

$$\tilde{\mathbf{R}} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{g}{2}\tilde{B}(h_{i+1} - h_i) \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Οι μορφές A-SF και C μπορούν να διακριτοποιηθούν από την μέθοδο του σχήματος Roe με τον οριοθέτη MinMode χρησιμοποιώντας τις μέσες τιμές για τα  $\tilde{\lambda}$  και  $\tilde{\epsilon}$  που βλέπουμε στους πίνακες (3.1) και (3.2) αντιστοίχως, που προκύπτουν από την συνάρτηση στερεοπαροχής (2.9).

Το παραπάνω σχήμα είναι από τα πλέον διαδεδομένα και εφαρμόσιμα, [17, 15], και για επίλυση προβλημάτων νόμων διατήρησης με πηγαίους όρους. Εδώ θα υλοποιηθεί στη μορφή C για να αποτελέσει το μέτρο σύγκρισης για τα σχήματα τύπου χαλάρωσης, που παρουσιάζονται στη συνέχεια.

### 3.4 Το σχήμα χαλάρωσης των Jin-Xin.

Στην ενότητα αυτή θα μελετήσουμε την μέθοδο τύπου χαλάρωσης (relaxation) για έναν γενικό νόμο διατήρησης. Η γενίκευση της μεθόδου, όπως αναφέρεται στις [30], [9] και [10], είναι εφικτή για συστήματα εξισώσεων αλλά και για διανυσματικές συναρτήσεις.

#### 3.4.1 Γενική Περιγραφή

Θα εξετάσουμε την ιδέα της χαλάρωσης μελετώντας έναν γενικό βαθμωτό νόμο διατήρησης της μορφής

$$u_t + [f(u)]_x = 0 \quad (3.4)$$

με αρχικά δεδομένα

$$u(x, 0) = u_0(x).$$

Για κάθε νόμο διατήρησης μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα γραμμικό υπερβολικό σύστημα με άκαμπτο πηγαίο όρο. Το σύστημα αυτό για την εξίσωση (3.4) είναι το εξής

$$u_t + v_x = 0, \quad u \in \mathbb{R}, \quad (3.5\alpha')$$

$$v_t + c^2 u_x = -\frac{1}{\epsilon}(v - f(u)), \quad (3.5\beta')$$

---

Ιδιοτιμές	$\tilde{\lambda}_1 = \tilde{u} - \tilde{c}, \quad \tilde{\lambda}_2 = 0, \quad \text{και} \quad \tilde{\lambda}_3 = \tilde{u} + \tilde{c}$
Ιδιοδιανύσματα	$\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ u - c \\ -cd \\ u - c \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \mathbf{e}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ u + c \\ cd \\ u + c \end{bmatrix}$
Συντελεστές βάρους	$\tilde{a}_{1,3} = \frac{1}{2}\Delta h \mp \frac{1}{2\tilde{c}}(\Delta(uh) - \tilde{u}\Delta h)$ και $\tilde{a}_2 = \Delta B - \frac{\tilde{d}(\Delta(uh) - (\tilde{u}^2 + \tilde{c}^2)\Delta h)}{(\tilde{u} + \tilde{c})(\tilde{u} - \tilde{c})}$
Συντελεστές βάρους για Μη Ομογενής όρους	$\tilde{\beta}_1 = \frac{\tilde{c}\Delta B}{2}, \quad \tilde{\beta}_2 = \frac{\tilde{d}\tilde{u}\tilde{c}^2\Delta B}{(\tilde{u} + \tilde{c})(\tilde{u} - \tilde{c})}, \quad \text{και} \quad \tilde{\beta}_3 = -\frac{\tilde{c}\Delta B}{2}$
Οι μέσες τιμές του Roe	$\tilde{u} = \frac{\sqrt{h_R}u_R + \sqrt{h_L}u_L}{\sqrt{h_R} + \sqrt{h_L}}, \quad \tilde{h} = \frac{1}{2}(h_R + h_L), \quad \tilde{c} = \sqrt{g\tilde{h}}$ και $\tilde{d} = \frac{A\xi\Delta(u u ^{m-1})}{\Delta(uh) - \tilde{u}\Delta h}. \quad \text{Για } m = 3, \text{ έχουμε}$ $\tilde{d} = \frac{A\xi(\sqrt{h_R} + \sqrt{h_L})}{\sqrt{h_L}h_R + \sqrt{h_R}h_L}(u_R^2 + u_Ru_L + u_L^2)$

---

Πίνακας 3.1: Οι μέσες τιμές του Roe για την Μορφή A-SF

το οποίο θα το αποκαλούμε σύστημα χαλάρωσης. Η παράμετρος  $\epsilon$  ονομάζεται ρυθμός του σχήματος χαλάρωσης και είναι θετική ποσότητα μικρότερη (συνήθως πολύ μικρότερη) της μονάδας. Η σταθερά  $c$  είναι θετική και θα πρέπει να ικανοποιεί την σχέση

$$-c \leq f'(u) \leq c \quad (3.6)$$

την οποία ονομάζουμε υποχαρακτηριστική συνθήκη. Θα δούμε στη συνέχεια το κίνητρο

---

Ιδιοτιμές	$\tilde{\lambda}^3 - 2\tilde{u}\tilde{\lambda}^2 + [\tilde{u}^2 - g(\tilde{h} + \tilde{B} + \tilde{h}\tilde{d})] + g\tilde{h}\tilde{u}\tilde{d} = 0$
Ιδιοδιανύσματα	$\tilde{\mathbf{e}}_k = \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda_k \\ \frac{\tilde{u}^2 - g(\tilde{h} + \tilde{B}) + (\tilde{\lambda}_k - 2\tilde{u})\tilde{\lambda}_k}{g\tilde{h}} \end{bmatrix}.$
Συντελεστές βάρους	$\tilde{a} = \frac{(\tilde{\lambda}_a\tilde{\lambda}_b + g(\tilde{h} + \tilde{B}) - \tilde{u}^2) + (2\tilde{u} - \tilde{\lambda}_a - \tilde{\lambda}_b)\Delta(uh) + g\tilde{h}\Delta B}{(\tilde{\lambda}_k - \tilde{\lambda}_a)(\tilde{\lambda}_k - \tilde{\lambda}_b)}$ όπου $a \neq k \neq b$
Συντελεστές βάρους για	
Μη Ομογενής όρους	$\tilde{\beta}_k = \frac{g\tilde{B}(2\tilde{u} - \tilde{\lambda}_a - \tilde{\lambda}_b)\Delta h}{(\tilde{\lambda}_k - \tilde{\lambda}_a)(\tilde{\lambda}_k - \tilde{\lambda}_b)} \quad \text{όπου} \quad a \neq k \neq b$
Οι μέσες τιμές του Roe	$\tilde{u} = \frac{\sqrt{h_R}u_R + \sqrt{h_L}u_L}{\sqrt{h_R} + \sqrt{h_L}}, \quad \tilde{h} = \frac{1}{2}(h_R + h_L),$ $\tilde{B} = \frac{1}{2}(B_R + B_L) \quad \text{και} \quad \tilde{d} = \frac{A\xi\Delta(u u ^{m-1})}{\Delta(uh) - \tilde{u}\Delta h}.$ Για $m = 3$ , έχουμε: $\tilde{d} = \frac{A\xi(\sqrt{h_R} + \sqrt{h_L})}{\sqrt{h_L}h_R + \sqrt{h_R}h_L}(u_R^2 + u_Ru_L + u_L^2)$

---

Πίνακας 3.2: Οι μέσες τιμές του Roe για την Μορφή C

που μας οδήγησε στην θεώρηση της (3.6). Αρχική συνθήκη για το σύστημα (3.5) θεωρούμε την

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad (3.7\alpha')$$

$$v(x, 0) = f(u_0(x)). \quad (3.7\beta')$$

Με την επιλογή αυτή, θεωρούμε ότι το σύστημα βρίσκεται αρχικά σε ισορροπία. Κατά τον ίδιο τρόπο σε προβλήματα συνοριακών τιμών, τις τιμές της relaxation μεταβλητής στο σύνορο τις παίρνουμε με τον ίδιο τρόπο ώστε το σύστημα στα σημεία αυτά να βρίσκεται σε ισορροπία.

Στο σύστημα εξισώσεων (3.5), παίρνοντας το όριο για  $\epsilon \rightarrow 0^+$  η σχέση (3.5α')

καταλήγει στην

$$v = f(u), \quad (3.8\alpha')$$

ενώ η δεύτερη σχέση του συστήματος

$$u_t + f(u)_x = 0. \quad (3.8\beta')$$

Η κατάσταση που ικανοποιεί την (3.8α') ονομάζεται κατάσταση τοπικής ισορροπίας και η (3.8β') είναι ο αρχικός νόμος διατήρησης (3.4).

Ας δούμε όμως λίγο πιο προσεκτικά την ουσία της μεθόδου. Θα χρησιμοποιήσουμε το ανάπτυγμα,

$$v(x, t) = f(u(x, t)) + \epsilon v_1(x, t) + \epsilon^2 v_2(x, t) + O(\epsilon^3) \quad (3.9)$$

το οποίο είναι γνωστό ως ανάπτυγμα Chapman-Enskog και η μορφή του αιτιολογείται από το γεγονός ότι για  $\epsilon$  μικρό η  $v$  συγκλίνει στην  $f(u)$ . Αντικαθιστούμε την παραπάνω σχέση στην (3.5α'),

$$u_t + [f(u) + \epsilon v_1 + \epsilon^2 v_2 + O(\epsilon^3)]_x = 0, \quad (3.10)$$

ή

$$u_t + f(u)_x = -\epsilon v_{1x} + O(\epsilon^2). \quad (3.11)$$

Θα θέλαμε όμως να προσδιορίσουμε την συνάρτηση  $v_1(x, t)$ . Για να το πετύχουμε αυτό, εισάγουμε την (3.9) στην (3.5β'),

$$(f'(u)u_t + \epsilon v_{1t} + O(\epsilon^2)) + c^2 u_x = -(v_1 + \epsilon v_2 + O(\epsilon^2)). \quad (3.12)$$

Μπορούμε να απαλείψουμε την  $u(x, t)$  αντικαθιστώντας την στην σχέση από την (3.11)

$$(f'(u)(-f(u)_x - \epsilon v_{1x} + O(\epsilon^2)) + \epsilon v_{1t} + O(\epsilon^2)) + c^2 u_x = -(v_1 + \epsilon v_2 + O(\epsilon^2)) \quad (3.13)$$

Οπότε κρατώντας όρους μόνο πρώτης τάξης,

$$-f'(u)f(u)_x + c^2 u_x = -v_1$$

η οποία καταλήγει στην σχέση που ζητάμε,

$$v_1 = -(c^2 - f'(u)^2) u_x$$


---

Με αντικατάσταση στην σχέση (3.11), καταλήγουμε στην

$$u_t + f(u)_x = \epsilon (g(u)u_x)_x + O(\epsilon^2), \quad (3.14)$$

όπου

$$g(u) = c^2 - (f'(u))^2. \quad (3.15)$$

Από την σχέση (3.14) μπορούμε να δούμε ότι όταν το  $\epsilon$  είναι θετικό, παίζει τον ρόλο του ιξώδους. Αυτό συμβαίνει ακριβώς όταν ικανοποιείται η συνθήκη (3.6), όταν δηλαδή η  $g(u) > 0$ . Την εξίσωση (3.14) μπορούμε να την δούμε και ως,

$$u_t + f(u)_x = \epsilon (c^2 u_{xx} - u_{tt}).$$

έχουμε εισάγει δηλαδή στην αρχική εξίσωση ένα κύμα υψηλότερης τάξης, το οποίο ταξιδεύει με ταχύτητα  $\pm c$ . Όταν η ταχύτητα διάδοσης του αρχικού κύματος, δηλαδή η  $f'(u)$ , είναι φραγμένη από την  $\pm c$ , τότε εξασφαλίζεται ευστάθεια.

### 3.5 Γενίκευση

Η βασική ιδέα για τη μελέτη μιας κατηγορίας μη-ταλαντευόμενων αριθμητικών σχημάτων σε σύστημα νόμων διατήρησης, είναι να χρησιμοποιηθεί μια τοπική προσέγγιση. Για οποιοδήποτε σύστημα νόμων διατήρησης, θα κατασκευάσουμε ένα γραμμικό υπερβολικό σύστημα μ' έναν άκαμπτο όρο πηγής, το οποίο θα προσεγγίζει το αρχικό μας μη γραμμικό, με μια μικρή διαχυτική διόρθωση. Η ειδική δομή που έχει το νέο σύστημα επιτρέπει τη χωρική λύση, χωρίς τη χρήση επιλυτών Riemann (άρα και τον δύσκολο υπολογισμό των ιδιοτιμών και ιδιοδιανυσμάτων) στο χώρο ή την επίλυση μη-γραμμικών αλγεβρικών συστημάτων.

Θεωρούμε το σύστημα νόμων διατήρησης:

$$\mathbf{u}_t + [\mathbf{F}(\mathbf{u})]_x = 0, \quad (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+, \quad \mathbf{u} \in \mathbb{R}^n, \quad (3.16)$$

όπου  $\mathbf{F}(\mathbf{u}) \in \mathbb{R}^n$  είναι ομαλή διανυσματική συνάρτηση. Το αντίστοιχο σύστημα χαλάρωσης (relaxation system), των Jin και Xin [30], είναι:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{u} + \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{v} &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{v} + \mathbf{C}^2 \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{u} &= -\frac{1}{\epsilon} (\mathbf{v} - \mathbf{F}(\mathbf{u})), \end{aligned} \quad (3.17)$$

όπου  $\epsilon > 0$  είναι η παράμετρος χαλάρωσης και  $\mathbf{C}^2 = \text{diag}(c_1^2, c_2^2, \dots, c_n^2)$  θετικός διαγώνιος πίνακας. Για μικρό  $\epsilon$ , χρησιμοποιώντας την ανάπτυξη Chapman-Enskog για το σύστημα χαλάρωσης (3.17) βλέπουμε ότι το  $\mathbf{u}$ , ικανοποιεί:

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{u} + \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{F}(\mathbf{u}) = \epsilon \frac{\partial}{\partial x} \left( (\mathbf{C}^2 - \mathbf{F}'(\mathbf{u})^2) \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{u} \right) + O(\epsilon^2), \quad (3.18)$$

όπου  $\mathbf{F}'(\mathbf{u})$  είναι ο Ιακωβιανός πίνακας της συνάρτησης ροής  $\mathbf{F}$ . Το σύστημα χαλάρωσης (3.17) είναι πρώτης τάξεως προσέγγιση ως προς  $\epsilon$  του (3.16), λόγω της εξίσωσης (3.18). Για την εξασφάλιση του φυσικού όρου διάχυσης στη (3.18), είναι απαραίτητο να ισχύει η υποχαρακτηριστική συνθήκη:

$$\mathbf{C} - \mathbf{F}'(\mathbf{u}) \geq 0 \quad \text{για όλα τα } \mathbf{u}. \quad (3.19)$$

Είναι σαφές ότι για το  $\mathbf{u}$  που ποικίλλει στο φραγμένο πεδίο, η εξίσωση (3.19) μπορεί πάντα να ικανοποιηθεί με την επιλογή ενός αρκετά μεγάλου  $\mathbf{C}$ . Εντούτοις, λόγω των περιορισμών της CFL συνθήκης για την αριθμητική ευστάθεια, είναι επιθυμητό να ληφθεί ο μικρότερος  $\mathbf{C}$  που ικανοποιεί το κριτήριο (3.19). Έστω το εντροπικό ζεύγος  $(\eta(\mathbf{u}), q(\mathbf{u}))$ , τότε

$$\eta'(\mathbf{u})\mathbf{F}'(\mathbf{u}) = \mathbf{q}'(\mathbf{u}), \quad \eta'' > 0. \quad (3.20)$$

Ο δεύτερος τόνος συμβολίζει τον πίνακα Hessian. Εύκολα προκύπτει από την (3.20) ότι οι  $\eta''\mathbf{F}'$  και  $\mathbf{F}'(\eta'')^{-1}$  είναι συμμετρικοί πίνακες. Έστω  $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots \leq \lambda_n$  και  $\mu_1 \leq \mu_2 \leq \mu_3 \leq \dots \leq \mu_n$  είναι οι ιδιοτιμές των  $\eta''\mathbf{F}'$  και  $\mathbf{F}'(\eta'')^{-1}$  αντίστοιχα. Μπορούν να είναι γενικευμένες ιδιοτιμές του  $\mathbf{F}'$  όσον αφορά τους πίνακες  $\eta''$  και  $(\eta'')^{-1}$  αντίστοιχα, υπό την έννοια:

$$\det(\mathbf{F}' - \lambda_i \eta'') = 0, \quad \det(\mathbf{F}' - \mu_i (\eta'')^{-1}) = 0, \quad 1 \leq i \leq n. \quad (3.21)$$

Έστω,

$$\lambda = \max_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i|, \quad \mu = \max_{1 \leq i \leq n} |\mu_i|.$$

Για απλότητα θα υποθέσουμε ότι το  $\mathbf{C}^2$  έχει την ειδική μορφή,

$$\mathbf{C}^2 = c^2 \mathbf{I}, \quad c > 0, \quad (3.22)$$

όπου  $\mathbf{I}$  είναι ο  $n \times n$  μοναδιαίος πίνακας. Σημειώνουμε ότι το σχήμα χαλάρωσης έχει πάντοτε ένα πλήρες σύνολο ιδιοδιανυσμάτων, που είναι οι χαρακτηριστικές μεταβλητές  $\mathbf{v} \pm \mathbf{C}\mathbf{u}$ , με το  $\mathbf{C}^2$  όπως στη (3.22).

### 3.5.1 Το Σύστημα Χαλάρωσης Των Εξισώσεων Μεταφοράς Ιζήματος

Μια εφαρμογή των νόμων διατήρησης αποτελούν και οι εξισώσεις της μεταφοράς ιζήματος, όπως περιγράφηκαν στην μορφή A-SF (2.11) (αντίστοιχα μπορεί να γραφεί και για την μορφή C (2.17) ). Για να λύσουμε το πρόβλημα θα κατασκευάσουμε το σύστημα χαλάρωσης, όπως αναφέρθηκε στην προηγούμενη παράγραφο. Στην περίπτωση της (2.11) παίρνουμε το παρακάτω σύστημα χαλάρωσης,

$$\begin{aligned} h_t + v_x &= 0, \\ \tilde{q}_t + w_x &= -ghB_x, \\ v_t + c_1^2 h_x &= -\frac{1}{\epsilon}(v - \tilde{q}), \\ w_t + c_2^2 \tilde{q}_x &= -\frac{1}{\epsilon} \left( w - \left( \frac{\tilde{q}^2}{h} + \frac{1}{2}gh^2 \right) \right), \\ B_t + r_x &= 0, \\ r_t + c_3^2 B_x &= -\frac{1}{\epsilon}(r - \xi q) \end{aligned} \quad (3.23)$$

όπου  $\tilde{q} = hu$  η εκροή του νερού.

Θέτοντας,

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} h \\ \tilde{q} \\ B \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} v \\ w \\ r \end{bmatrix}, \quad (3.24)$$

το σύστημα (3.23) γράφεται ως:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_t + \mathbf{v}_x &= \mathbf{R}(\mathbf{u}), \\ \mathbf{v}_t + \mathbf{C}^2 \mathbf{u}_x &= -\frac{1}{\epsilon}(\mathbf{v} - (\mathbf{F}(\mathbf{u}))), \end{aligned} \quad (3.25)$$

όπου  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$  και  $\mathbf{C}^2 \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  θετικός διαγώνιος πίνακας. Ψποθέτουμε ότι ο πίνακας  $\mathbf{C}$  έχει θετικές ιδιοτιμές  $c_j > 0$  για  $j = 1, 2, 3$ . Ισοδύναμα, το (3.25) μπορεί να γραφτεί ως:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \end{bmatrix}_t + \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{I} \\ \mathbf{C}^2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \end{bmatrix}_x = \begin{bmatrix} \mathbf{R}(\mathbf{u}) \\ -\frac{1}{\epsilon}(\mathbf{v} - \mathbf{F}(\mathbf{u})) \end{bmatrix}. \quad (3.26)$$

Επίσης, θα μελετήσουμε μία παραλλαγή του παραπάνω συστήματος των Delis και



Katsaounis [9] για την εισαγωγή του πηγαίου όρου, όπου :

$$\begin{aligned}
 h_t + v_x &= 0, \\
 \tilde{q}_t + w_x &= 0, \\
 v_t + c_1^2 h_x &= -\frac{1}{\epsilon}(v - \tilde{q}), \\
 w_t + c_2^2 \tilde{q}_x &= -\frac{1}{\epsilon} \left( w - \left( \frac{\tilde{q}^2}{h} + \frac{1}{2} g h^2 \right) \right) + \frac{1}{\epsilon} \int^x g h B'(y) dy, \\
 B_t + r_x &= 0, \\
 r_t + c_3^2 B_x &= -\frac{1}{\epsilon}(r - \xi q)
 \end{aligned} \tag{3.27}$$

ή σε διανυσματική μορφή

$$\begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \end{bmatrix}_t + \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{I} \\ \mathbf{C}^2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \end{bmatrix}_x = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{\epsilon}(\mathbf{v} - \mathbf{F}(\mathbf{u})) - \frac{1}{\epsilon} \tilde{\mathbf{R}}(\mathbf{u}) \end{bmatrix} \tag{3.28}$$

όπου

$$\tilde{\mathbf{R}}(\mathbf{u}) = \begin{bmatrix} 0 \\ -\int^x g h B'(y) dy \end{bmatrix} \tag{3.29}$$

Ο αρχικός νόμος διατήρησης, και στις δύο μορφές, έχει τώρα αντικατασταθεί από ένα γραμμικό υπερβολικό σύστημα με έναν όρο πηγής ο οποίος ταχύτατα οδηγεί το  $\mathbf{v} \rightarrow \mathbf{F}(\mathbf{u})$  (για το σύστημα (3.25) ) και το  $\mathbf{v} \rightarrow \mathbf{F}(\mathbf{u}) - \tilde{\mathbf{R}}(\mathbf{u})$  (για το σύστημα (3.28) ), καθώς το όριο  $\epsilon \rightarrow 0^+$ .

Οι σταθερές  $c_1, c_2, c_3$  προκύπτουν από απλές εκτιμήσεις μέσω των ιδιοτιμών του Ιακωβιανού πίνακα τους  $\mathbf{F}(\mathbf{u})$ , αντιστοιχίζοντας κάθε ιδιοτιμή με την αντίστοιχη σταθερά  $c$  προσέχοντας να ικανοποιείται η υποχαρακτηριστική συνθήκη, δηλαδή να ισχύει

$$\forall \lambda, \quad |\lambda| \leq c_{\max}, \tag{3.30}$$

και  $c_{\max} = \max_j c_j$ .

Σημειώνεται ότι όπως δείχθηκε στο [9] η εισαγωγή του πηγαίου όρου όπως στο (3.27) ικανοποιεί προσεγγιστικά τη C-Ιδιότητα για τις εξισώσεις ρηχών υδάτων.

### 3.6 Ημιδιακριτά σχήματα

Θα αρχίσουμε τη μελέτη μας κατασκευάζοντας το ημι-διακριτό σχήμα, για το σύστημα χαλάρωσης (3.26). Θεωρούμε το κλασσικό upwind σχήμα πρώτης τάξεως και το δεύτερης τάξης τύπου MUSCL (Monotonic Upstream Scheme for Conservation Laws) σχήμα.

### 3.6.1 Το σχήμα τύπου upwind

Αρχικά θεωρούμε το ομογενές σύστημα χαλάρωσης, δηλαδή χωρίς όρους πηγής:

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_t + \mathbf{v}_x &= 0, \\ \mathbf{v}_t + \mathbf{C}^2 \mathbf{u}_x &= -\frac{1}{\epsilon}(\mathbf{v} - \mathbf{F}(\mathbf{u})).\end{aligned}$$

Η ημιδιακριτή μορφή του συστήματος είναι:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{u}_i + \frac{1}{\Delta x} (\mathbf{v}_{i+1/2} - \mathbf{v}_{i-1/2}) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{v}_i + \frac{\mathbf{C}^2}{\Delta x} (\mathbf{u}_{i+1/2} - \mathbf{u}_{i-1/2}) &= -\frac{1}{\epsilon}(\mathbf{v}_i - \mathbf{F}(\mathbf{u}_i)).\end{aligned}\tag{3.31}$$

Το γραμμικό υπερβολικό μέρος του (3.31) έχει δύο Riemann αναλλοίωτες χαρακτηριστικές ταχύτητες

$$\mathbf{v} \pm \mathbf{C}\mathbf{u},$$

που συσχετίζονται με τα χαρακτηριστικά πεδία  $\pm \mathbf{C}$ , αντίστοιχα. Με τον όρο,  $k$ -Riemann αναλλοίωτες, καλούμε μία ομαλή συνάρτηση  $w : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  αν ικανοποιεί τη σχέση:

$$Dw(u)r_k(u) = 0, \quad \forall u \in \Omega.$$

Η  $k$ -Riemann αναλλοίωτη  $w$  είναι σταθερή πάνω στην καμπύλη  $v : \xi \in \mathbb{R} \rightarrow v(\xi) \in \mathbb{R}^p$ , όπου  $v$  ολοκληρώσιμη στα ιδιοδιανύσματα  $r_k$ , (δηλαδή,  $v'(\xi) = r_k(v(\xi))$ ), αν και μόνο αν ισχύει:

$$\frac{d}{d\xi} w(v(\xi)) = Dw(v(\xi))v'(\xi) = 0.$$

Αυτό σημαίνει ότι η  $k$ -Riemann αναλλοίωτη είναι σταθερή κατά μήκος του εφαπτομενικού διανυσματικού πεδίου  $r_k$ , [7]. Οπότε, η πρώτη τάξεως προσέγγιση upwind για τις χαρακτηριστικές ταχύτητες,  $\mathbf{v} \pm \mathbf{C}\mathbf{u}$ , δίνεται από τις:

$$(\mathbf{v} + \mathbf{C}\mathbf{u})_{i+1/2} = (\mathbf{v} + \mathbf{C}\mathbf{u})_i \quad \text{και} \quad (\mathbf{v} - \mathbf{C}\mathbf{u})_{i+1/2} = (\mathbf{v} - \mathbf{C}\mathbf{u})_{i+1},\tag{3.32}$$

και από την οποία παίρνουμε

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_{i+1/2} &= \frac{1}{2}(\mathbf{u}_i + \mathbf{u}_{i+1}) - \frac{1}{2}\mathbf{C}^{-1}(\mathbf{v}_{i+1} - \mathbf{v}_i), \\ \mathbf{v}_{i+1/2} &= \frac{1}{2}(\mathbf{v}_i + \mathbf{v}_{i+1}) - \frac{1}{2}\mathbf{C}(\mathbf{u}_{i+1} - \mathbf{u}_i).\end{aligned}\tag{3.33}$$

Αν αντικαταστήσουμε την (3.33) στην (3.31), θα πάρουμε την ημι-διακριτή προσέγγιση upwind, πρώτης τάξεως, για το (3.25) εισάγοντας και τον πηγαίο όρο  $\mathbf{R}$  για το σύστημα (3.26):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{u}_i + \frac{1}{2\Delta x} (\mathbf{v}_{i+1} - \mathbf{v}_{i-1}) - \frac{1}{2\Delta x} \mathbf{C}(\mathbf{u}_{i+1} - 2\mathbf{u}_i + \mathbf{u}_{i-1}) &= \mathbf{R}(\mathbf{u}_i), \\ \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{v}_i + \frac{1}{2\Delta x} \mathbf{C}^2(\mathbf{u}_{i+1} - \mathbf{u}_{i-1}) - \frac{1}{2\Delta x} \mathbf{C}(\mathbf{v}_{i+1} - 2\mathbf{v}_i + \mathbf{v}_{i-1}) &= -\frac{1}{\epsilon}(\mathbf{v}_i - \mathbf{F}(\mathbf{u}_i)). \end{aligned} \quad (3.34)$$

### 3.6.2 Το σχήμα MUSCL-TVD

Το σχήμα upwind είναι 1<sup>ης</sup> τάξεως ως προς τη χωρική μεταβλητή. Ένα σχήμα υψηλότερης τάξης είναι το σχήμα τύπου MUSCL, το οποίο είναι 2<sup>ης</sup> τάξης και προσεγγίζει τη λύση σε κάθε υπολογιστικό κελί με γραμμικά πολυώνυμα, ενώ πριν είχαμε προσεγγίση με κατά τμήματα σταθερές συναρτήσεις. Συνεπώς οι  $k$ -συνιστώσες του  $\mathbf{v} \pm \mathbf{C}\mathbf{u}$ , υπολογίζονται αντίστοιχα :

$$\begin{aligned} (v + c_k u)_{i+1/2} &= (v + c_k u)_i + \frac{1}{2} \Delta x s_i^+, \\ (v - c_k u)_{i+1/2} &= (v - c_k u)_{i+1} - \frac{1}{2} \Delta x s_{i+1}^-, \end{aligned} \quad (3.35)$$

όπου  $u, v$  είναι οι  $k$ -συνιστώσες των  $\mathbf{u}, \mathbf{v}$  αντίστοιχα και  $s_i^\pm$  οι κλίσεις στο  $i$ -οστό υπολογιστικό κελί:

$$s_i^\pm = \frac{1}{\Delta x} (v_{i+1} \pm c_k u_{i+1} - v_i \mp c_k u_i) \phi(\theta_i^\pm), \quad (3.36)$$

με

$$\theta_i^\pm = \frac{v_i \pm c_k u_i - v_{i-1} \mp c_k u_{i-1}}{v_{i+1} \pm c_k u_{i+1} - v_i \mp c_k u_i}, \quad (3.37)$$

όπου  $\phi$  είναι ο οριοθέτης κλίσης (slope limiter), όπως ορίζεται από τον Sweby [26], και ικανοποιεί τη σχέση:

$$0 \leq \phi(\theta) \leq \minmod(2, 2\theta). \quad (3.38)$$

Για οριοθέτη μπορούμε να επιλέξουμε τις ακόλουθες συναρτήσεις:

#### 1. MinMod(MM) limiter

$$\phi(\theta) = \max(0, \min(1, \theta)).$$


---

## 2. Superbee(SB) limiter

$$\phi(\theta) = \max(0, \min(1, 2\theta), \min(2, \theta)).$$

## 3. VanLeer(VL) limiter

$$\phi(\theta) = \frac{|\theta| + \theta}{1 + |\theta|}.$$

## 4. Monotonized Central (MC) limiter

$$\phi(\theta) = \max(0, \min\left(\frac{1+\theta}{2}, 2, 2\theta\right)).$$

Οι συναρτήσεις περιορισμού SB, VL και MC δίνουν την οξύτερη λύση στις ασυνέχειες, δεδομένου ότι δεν εξομαλύνουν την κλίση τόσο πολύ, όσο ο MM. Σημειώνουμε ότι, η σχέση (3.38) μπορεί να θεωρηθεί το ικανό φράγμα για να ικανοποιείται η συνθήκη TVD, αλλά δεν εγγυάται 2<sup>ης</sup> τάξης ακρίβεια, ιδίως σε περιοχές όπου η λύση έχει τοπικά ακρότατα, και στα σημεία αυτά το σχήμα MUSCL είναι 1<sup>ης</sup> τάξης. Ωστόσο αν χρησιμοποιήσει κανείς οριοθέτη ροής, το 2<sup>ης</sup> τάξης σχήμα MUSCL διατηρεί την υψηλή ακρίβεια σε όλα τα σημεία του χωρίου.

Οι σχέσεις (3.35) γράφονται ισοδύναμα:

$$\begin{aligned} (v + c_k u)_{i+1/2} &= (v + c_k u)_i + \frac{1}{2} \Delta x s_i^+, \\ (v - c_k u)_{i+1/2} &= (v - c_k u)_{i+1} - \frac{1}{2} \Delta x s_{i+1}^-, \end{aligned}$$

άρα

$$\begin{aligned} u_{i+1/2} &= \frac{1}{2}(u_i + u_{i+1}) - \frac{1}{2c_k}(v_{i+1} - v_i) + \frac{\Delta x}{4c_k}(s_i^+ + s_{i+1}^-), \\ v_{i+1/2} &= \frac{1}{2}(v_i + v_{i+1}) - \frac{c_k}{2}(u_{i+1} - u_i) + \frac{\Delta x}{4}(s_i^+ - s_{i+1}^-). \end{aligned} \quad (3.39)$$

Τότε, το 2<sup>ης</sup> τάξης στο χώρο ημιδιακριτό σχήμα χαλάρωσης δίνεται κατά συνιστώσες από το σύστημα (3.40), εισάγοντας και τον πηγαίο όρο, για παράδειγμα στην μορφή (3.29):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} u_i + \frac{1}{2\Delta x}(v_{i+1} - v_{i-1}) - \frac{c_k}{2\Delta x}(u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}) \\ - \frac{1}{4}(s_{i+1}^- - s_i^- + s_{i-1}^+ - s_i^+) = 0, \\ \frac{\partial}{\partial t} v_i + \frac{c_k^2}{2\Delta x}(u_{i+1} - u_{i-1}) - \frac{c_k}{2\Delta x}(v_{i+1} - 2v_i + v_{i-1}) \\ + \frac{c_k}{4}(s_{i+1}^- - s_i^- - s_{i-1}^+ + s_i^+) = -\frac{1}{\epsilon}(v_i - F_k(u_i)) - \frac{1}{\epsilon}\tilde{R}_k(u_i), \end{aligned} \quad (3.40)$$

όπου  $\tilde{R}_k$ ,  $F_k$  είναι οι  $k$ -συνιστώσες των  $\mathbf{R}$ ,  $\mathbf{F}$  αντίστοιχα. Στην περίπτωση που η κλίση  $s^\pm = 0$  ή  $\phi = 0$ , το MUSCL σχήμα (3.40) είναι ισοδύναμο με το upwind σχήμα (3.34).

### 3.7 Πλήρως διακριτά σχήματα

Η χρονική διακριτοποίηση για το ημιδιακριτό σχήμα χαλάρωσης εφαρμοζόμενο στις εξισώσεις μεταφοράς ιζήματος γίνεται με τη βοήθεια έμμεσων-άμεσων μεθόδων, Runge-Kutta. Στο πρόβλημά μας θα συγκρίνουμε τις δύο χωρικές διακριτοποιήσεις upwind και MUSCL κάνοντας χρήση της Άμεσης - Έμμεσης (explicit-implicit) Runge-Kutta μεθόδου για τη μετάβαση της λύσης από το χρόνο  $t$  στο  $t + \Delta t$  ([1], [22]). Για χάρη ευκολίας, υποθέτουμε αρχικά ότι ο βυθός είναι επίπεδος,  $B \equiv 0$ . Τότε το σχήμα χαλάρωσης για τις εξισώσεις μεταφοράς φερτών δίνεται από:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_t &= -\mathbf{v}_x, \\ \mathbf{v}_t &= -\mathbf{C}^2 \mathbf{u}_x - \frac{1}{\epsilon}(\mathbf{v} - F(\mathbf{u})). \end{aligned} \quad (3.41)$$

Η διακριτοποίηση για τη πρώτη εξίσωση θα γίνει με χρήση μιας άμεσης μεθόδου Runge-Kutta (ERK), ενώ για τη δεύτερη θα χρησιμοποιήσουμε μία διαγώνια πεπλεγμένη μέθοδο (DIRK). Με δεδομένα τα  $\mathbf{u}^n, \mathbf{v}^n$  τα ενδιάμεσα βήματα  $(\mathbf{u}^{n,i}, \mathbf{v}^{n,i})$  υπολογίζονται από το ακόλουθο σύστημα  $s$ -εξισώσεων:

$$\mathbf{u}^{n,i} = \mathbf{u}^n + \Delta t \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}(-\mathbf{v}_x^{n,j}), \quad (3.42)$$

$$\mathbf{v}^{n,i} = \mathbf{v}^n + \Delta t \sum_{j=1}^i \tilde{a}_{ij} \left[ -c^2 \mathbf{u}_x^{n,j} + \frac{1}{\epsilon} F(\mathbf{u}^{n,j}) - \frac{1}{\epsilon} \mathbf{v}^{n,j} \right], \quad (3.43)$$

όπου  $i = 1, \dots, s$ . Ισοδύναμα η εξίσωση (3.43) μπορεί να γραφτεί:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}^{n,i} &= \frac{1}{1 + \frac{\Delta t}{\epsilon} \tilde{a}_{ii}} \left\{ \mathbf{v}^n + \Delta t \sum_{j=1}^i \tilde{a}_{ij} \left( -c^2 \mathbf{u}_x^{n,j} + \frac{1}{\epsilon} F(\mathbf{u}^{n,j}) \right) \right. \\ &\quad \left. + \Delta t \sum_{j=1}^{i-1} \tilde{a}_{ij} \left( -\frac{1}{\epsilon} \mathbf{v}^{n,j} \right) \right\}, \quad i = 1, \dots, s. \end{aligned} \quad (3.44)$$

Ο υπολογισμός της λύσης τη χρονική στιγμή  $t^{n+1}$  δίνεται από:

$$\mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{u}^n + \Delta t \sum_{i=1}^s b_i(-\mathbf{v}_x^{n,i}), \quad (3.45)$$

$$\mathbf{v}^{n+1} = \mathbf{v}^n + \Delta t \sum_{i=1}^s \tilde{b}_i \left( -c^2 \mathbf{u}_x^{n,i} - \frac{1}{\epsilon} \mathbf{v}^{n,i} + \frac{1}{\epsilon} F(\mathbf{u}^{n,i}) \right), \quad (3.46)$$

όπου

$$A = (a_{i,j}), \quad b = (b_1, \dots, b_s), \quad \tilde{A} = (\tilde{a}_{i,j}), \quad \tilde{b} = (\tilde{b}_1, \dots, \tilde{b}_s), \quad i, j = 1, \dots, s, \quad (3.47)$$

οι σταθερές που ορίζουν τις μεθόδους (ERK) και (DIRK) αντίστοιχα. Στα παραδείγματα μας θα χρησιμοποιήσουμε τα ακόλουθα ζευγάρια μεθόδων (ERK) και (DIRK):

a.

$$\begin{aligned} A &= [0], & \tilde{A} &= [1] \\ b &= (1), & \tilde{b} &= (1) \end{aligned} \quad (3.48)$$

b.

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, & \tilde{A} &= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\ b &= \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}, & \tilde{b} &= \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.49)$$

Το ζεύγος (a) χρησιμοποιείται όταν υλοποιούμε το πρώτης τάξης upwind σχήμα (για πρώτη τάξη στο χρόνο) και το ζεύγος (b) για το δεύτερης τάξης σχήμα MUSCL.

Αποδεικνύεται ότι το σχήμα χαλάρωσης πρώτης τάξεως (upwind) είναι μονότονο όταν ικανοποιείται η παρακάτω συνθήκη CFL:

$$\max(c_1, c_2) \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1,$$

όπου τα  $c_1, c_2$  καθορίζονται από την υποχαρακτηριστική συνθήκη (3.30). Το δεύτερας τάξης σχήμα χαλάρωσης MUSCL είναι TVD κάτω από την CFL (βλ. Jin και Xin [30]),

$$\max(c_1, c_2) \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq \frac{1}{2}.$$

Αναλυτικά οι εξισώσεις που περιγράφουν τα βήματα και τη διακριτοποίηση στο δεύτερης τάξης σχήμα χαλάρωσης για το σύστημα (3.41) με χρήση του ζεύγους (b) για την μέθοδο Runge-Kutta είναι:

$$\mathbf{u}^{n,1} = \mathbf{u}^n, \quad (3.50\alpha')$$

$$\mathbf{v}^{n,1} = \mathbf{v}^n + \frac{\Delta t}{\epsilon}(\mathbf{v}^{n,1} - \mathbf{F}(\mathbf{u}^{n,1})), \quad (3.50\beta')$$

$$\mathbf{u}^{(1)} = \mathbf{u}^{n,1} - \Delta t \Delta_+^x \mathbf{v}^{n,1} + \Delta t \mathbf{S}(\mathbf{u}^{n,1}), \quad (3.50\gamma')$$

$$\mathbf{v}^{(1)} = \mathbf{v}^{n,1} - \Delta t \mathbf{C}^2 \Delta_+^x \mathbf{u}^{n,1}, \quad (3.50\delta')$$

$$\mathbf{u}^{n,2} = \mathbf{u}^{(1)}, \quad (3.50\epsilon')$$

$$\mathbf{v}^{n,2} = \mathbf{v}^{(1)} - \frac{\Delta t}{\epsilon}(\mathbf{v}^{n,2} - \mathbf{F}(\mathbf{u}^{n,2})) - \frac{2\Delta t}{\epsilon}(\mathbf{v}^{n,1} - \mathbf{F}(\mathbf{u}^{n,1})), \quad (3.50\zeta')$$

$$\mathbf{u}^{(2)} = \mathbf{u}^{n,2} - \Delta t \Delta_+^x \mathbf{v}^{n,2} + \Delta t \mathbf{S}(\mathbf{u}^{n,2}), \quad (3.50\eta')$$

$$\mathbf{v}^{(2)} = \mathbf{v}^{n,2} - \Delta t \mathbf{C}^2 \Delta_+^x \mathbf{u}^{n,2}, \quad (3.50\theta')$$

$$\mathbf{u}^{n+1} = \frac{1}{2}(\mathbf{u}^n + \mathbf{u}^{(2)}), \quad (3.50\iota')$$

$$\mathbf{v}^{n+1} = \frac{1}{2}(\mathbf{v}^n + \mathbf{v}^{(2)}), \quad (3.50\kappa')$$

όπου

$$\Delta_+^x \mathbf{p} = \frac{1}{\Delta x}(\mathbf{p}_{i+\frac{1}{2}} - \mathbf{p}_{i-\frac{1}{2}}), \quad (3.51)$$

Είναι σημαντικό να σημειώσουμε ότι δεν χρειαζόμαστε καμία πληροφορία για τις ιδιοτιμές του Ιακωβιανού πίνακα των μη γραμμικών ροών, εκτός από ένα άνω φράγμα της μεγαλύτερης ιδιοτιμής σε απόλυτη τιμή, τέτοιας τάξης ώστε να ρυθμίσουμε τις παραμέτρους του  $\mathbf{C}$  σύμφωνα με την υποχαρακτηριστική συνθήκη. Στο περιβάλλον των σχημάτων χαλάρωσης οι χαρακτηριστικές μεταβλητές ορίζονται από μια συνολική μετατροπή σε αντίθεση με τις χαρακτηριστικές μεταβλητές των μη γραμμικών νόμων διατήρησης. Οι χαρακτηριστικές μεταβλητές είναι ακόμη ποιο απλές από αυτές των μη γραμμικών νόμων διατήρησης, επειδή το σχήμα χαλάρωσης έχει γραμμικές χαρακτηριστικές μεταβλητές  $\mathbf{v} \pm \mathbf{C}\mathbf{u}$ . Δεν χρειάζεται η επίλυση μη γραμμικών εξισώσεων μια που ο πηγαίος όρος δεν εμφανίζεται ούτε ως μια αλγεβρική εξίσωση ούτε ως μη γραμμικός όρος.

Αναφέρουμε ότι αυτή είναι η πρώτη εργασία όπου εφαρμόζονται κατάλληλα αριθμητικά σχήματα τύπου χαλάρωσης για την επίλυση των εξισώσεων μεταφοράς ιζήματος.

## Κεφάλαιο 4

# Αριθμητικά Αποτελέσματα σε μία διάσταση

Για να συγκρίνουμε σε μια διάσταση την συμπεριφορά του σχήματος χαλάρωσης χρησιμοποιήσαμε τρία προβλήματα. Αναπαράγαμε πρώτα αποτελέσματα για κάθε ένα από τα τρία παρακάτω προβλήματα, χρησιμοποιώντας την καλύτερη μέθοδο (βλ. Hudson και Sweby [17]) την Μορφή C που προκύπτει από την εκδοχή του σχήματος Roe με οριοθέτες ροής και τα συγκρίναμε με τα αριθμητικά αποτελέσματα του δευτέρας τάξης σχήματος χαλάρωσης (MUSCL) επίσης στη Μορφή C χρησιμοποιώντας την παραλλαγή των Delis και Katsaounis [9] που αναφέρθηκε στην παράγραφο (3.5.1). Αναφέρουμε ότι τα αποτελέσματα για την μορφή A ήταν συγκρίσιμα με αυτά της μορφής C.

Για την καλύτερη ανάγνωση των αποτελεσμάτων στα δύο σχήματα που συγκρίνουμε, αναφέρουμε ότι χρησιμοποιήθηκαν οι ίδιες τιμές για τα  $\Delta x$ , CFL και τα ίδια αρχικά δεδομένα που χρειάζονται στο κάθε πρόβλημα.

### 4.1 Πρόβλημα 1

Το πρώτο πρόβλημα είναι σε κανάλι μήκος  $1000m$  με τις ακόλουθες τεχνικές αρχικές συνθήκες

$$h^*(x, 0) = 10 - B(x, 0) \quad \text{και} \quad u^*(x, 0) = \frac{Q_c}{h^*(x, 0)}$$

όπου  $Q_c$  είναι μια σταθερά εκροής και η μορφολογία του πυθμένα είναι

$$B(x, 0) = \begin{cases} \sin^2\left(\frac{\pi(x-300)}{200}\right) & \text{αν } 300 \leq x \leq 500, \\ 0 & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$



Για να πάρουμε τις αρχικές συνθήκες, εκτελούμε το απλό σχήμα του Roe έτσι ώστε η ροή του νερού, με τις τεχνικές αρχικές συνθήκες, να επαναλαμβάνεται μέχρι να έρθει σε κατάσταση ισορροπίας κρατώντας τον πυθμένα αμετάβλητο,

$$|\mathbf{w}_i^{n+1} - \mathbf{w}_i^n| \leq tol,$$

όπου ο  $tol$  είναι ένα επιθυμητό επίπεδο ανοχής. Αυτό μας εξασφαλίζει ότι οι αρχικές συνθήκες της ροής νερού και του πυθμένα είναι συνεπής και σε μεγάλο βαθμό μειώνεται η πιθανότητα για ένα αυθόρμητο ξεκίνημα που συμβαίνει για μεγάλες τιμές του  $A$ . Σ' αυτήν την εργασία χρησιμοποιούμε  $tol = 10^{-6}$ . Οι αρχικές συνθήκες με  $Q_c = 10$  είναι εικονογραφημένες στα σχήματα (4.1) και (4.2)

Για όλες τις μεταβολές του Προβλήματος 1, χρησιμοποιείται η συνάρτηση της μεταφοράς ιζήματος (2.10). Στο σχήμα χρησιμοποιούμε  $\Delta x = 10m$  και  $CFL = 0.4$  με τις βασικές ελεύθερης ροής συνοριακές συνθήκες

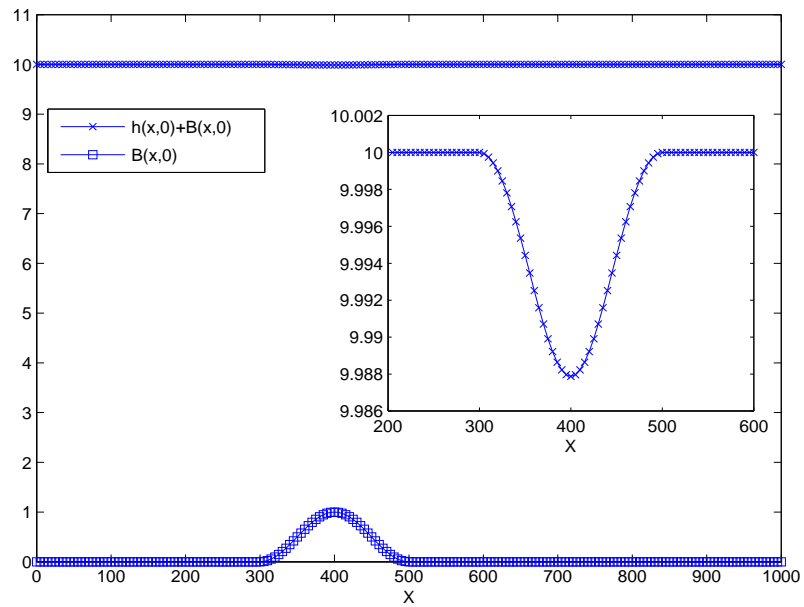
$$\mathbf{w}_{-i}^{n+1} = \mathbf{w}_0^n \quad \text{και} \quad \mathbf{w}_{I+i}^{n+1} = \mathbf{w}_I^n,$$

όπου  $i = 1$  έως 2. Σ' αυτό το πρόβλημα παίρνουμε  $\sigma = 0.4$ .

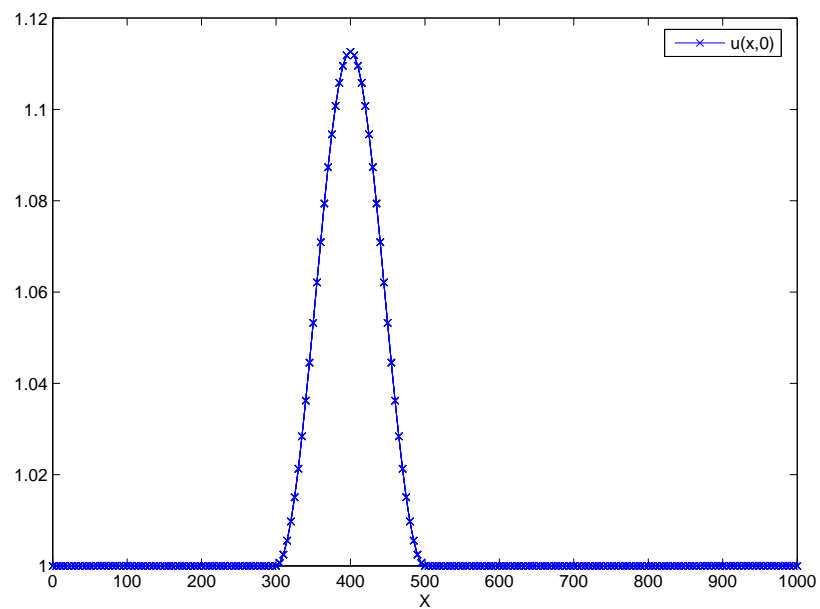
#### 4.1.1 Αριθμητικά αποτελέσματα για μικρό πυθμένα ο οποίος αλληλεπιδρά αργά με την ροή νερού

Για το πρώτο πρόβλημα προσομοιώσαμε ένα μικρό παλμό στον πυθμένα, ο οποίος αλληλεπιδρά αργά με την ροή του νερού, όπου η ροή του νερού κινείται αργά. Για να πετύχουμε την προσομοίωση αυτή χρησιμοποιήσαμε τις τιμές,  $A = 0.001$  και  $Q = 10$ . Στα Σχήματα από (4.3) έως (4.5) εμφανίζονται τα αποτελέσματα των αριθμητικών λύσεων για  $t = 238079s$ . Εδώ, παρατηρούμε ότι και τα δύο σχήματα παρήγαγαν συγκρίσιμα αριθμητικά αποτελέσματα και ως προς τους τρεις αγνώστους (βάθος νερού, ταχύτητα, πυθμένας).

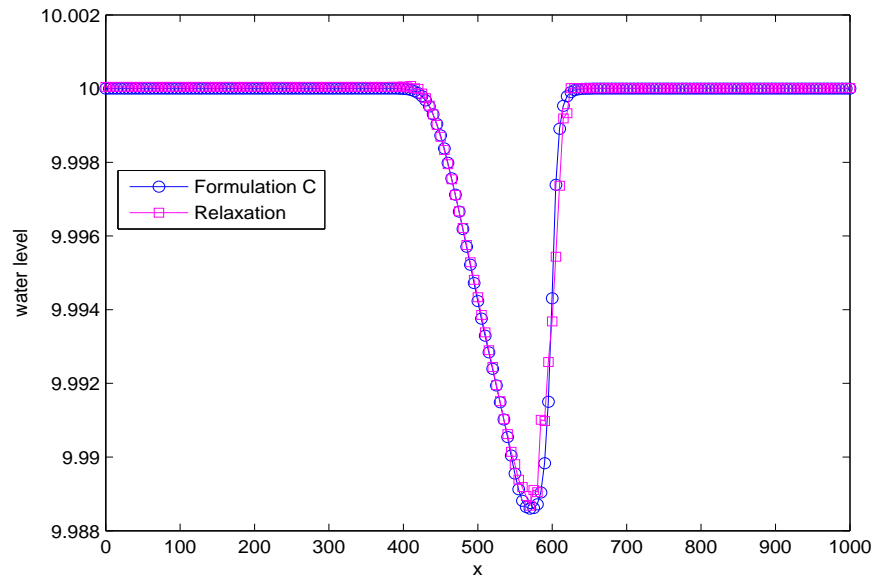
Για να παρατηρήσουμε αν τα αριθμητικά σχήματα γίνουν ασταθή για μεγαλύτερους υπολογισμούς καθώς ο χρόνος μεγαλώνει, τρέχουμε το πρόβλημα για τις ίδιες τιμές μέχρι  $t = 150$  ώρες (540,000 δευτερόλεπτα). Στα Σχήματα (4.6) έως (4.8) εμφανίζονται τα αποτελέσματα των αριθμητικών σχημάτων. Εδώ, παρατηρούμε ότι και πάλι τα δύο σχήματα παρήγαγαν χωρίς κανένα είδος αστάθειας (ταλαντώσεις, υπερδιάχυση της λύσης) συγκρίσιμα αριθμητικά αποτελέσματα και ως προς τους τρεις αγνώστους.



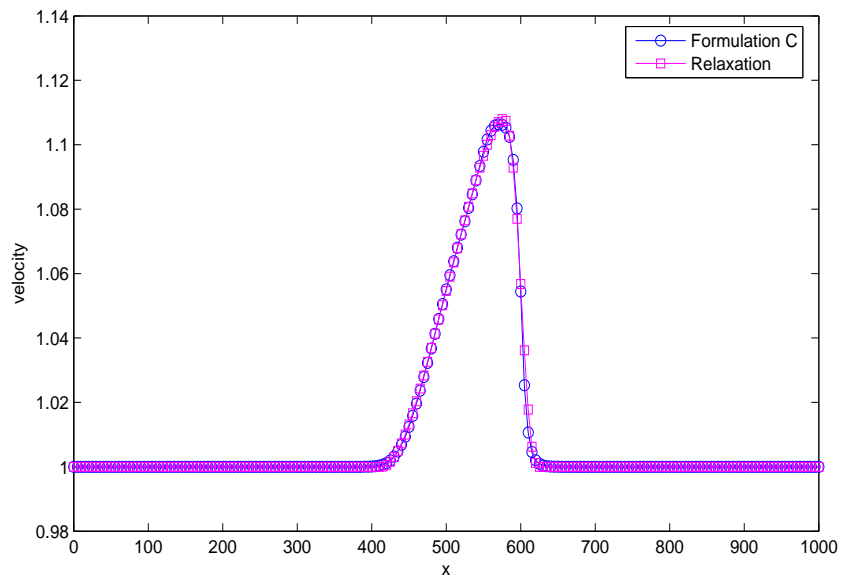
Σχήμα 4.1: Οι αρχικές τιμές του πυθμένα ( $B$ ) και της επιφάνειας του νερού ( $h + B$ ) για το Πρόβλημα 1.



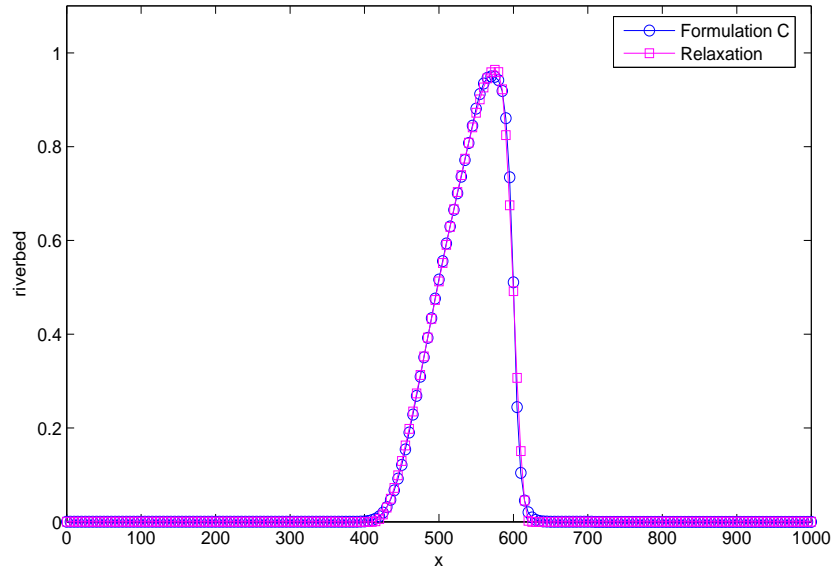
Σχήμα 4.2: Οι αρχικές τιμές της ταχύτητας ( $u$ ) για το Πρόβλημα 1.



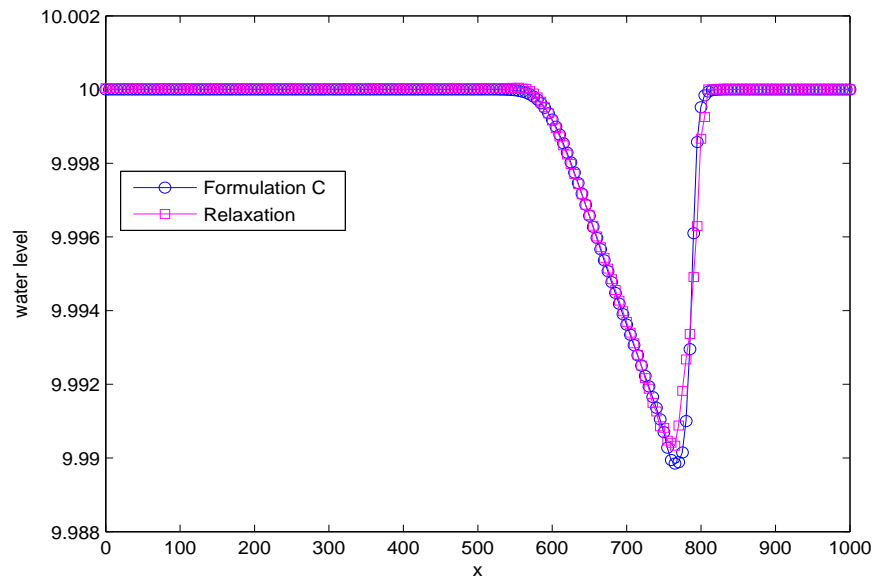
Σχήμα 4.3: Σύγκριση των διαφορετικών αριθμητικών λύσεων για την επιφάνεια ( $h + B$ ) με  $A = 0.001$  και  $Q = 10$  για  $t = 238079sec$  (Πρόβλημα 1).



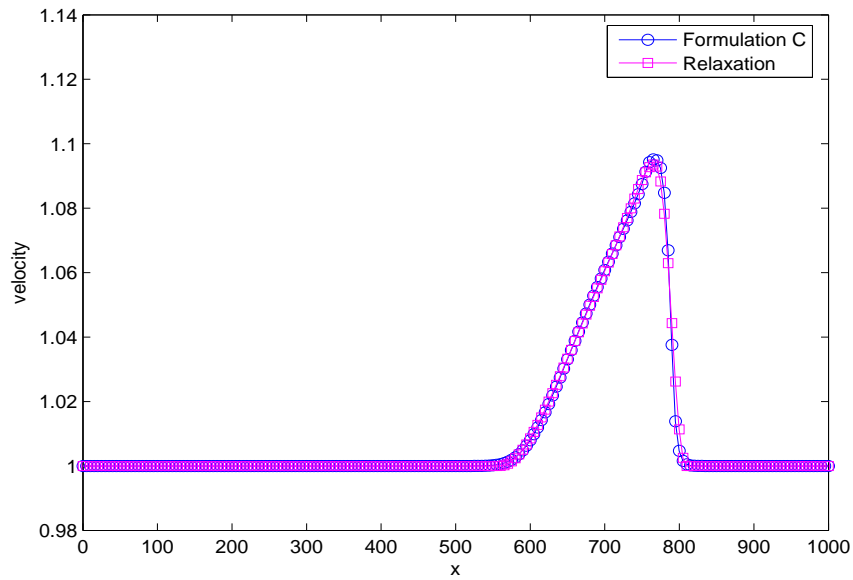
Σχήμα 4.4: Σύγκριση των διαφορετικών αριθμητικών λύσεων για την ταχύτητα ( $u$ ) με  $A = 0.001$  και  $Q = 10$  για  $t = 238079sec$  (Πρόβλημα 1).



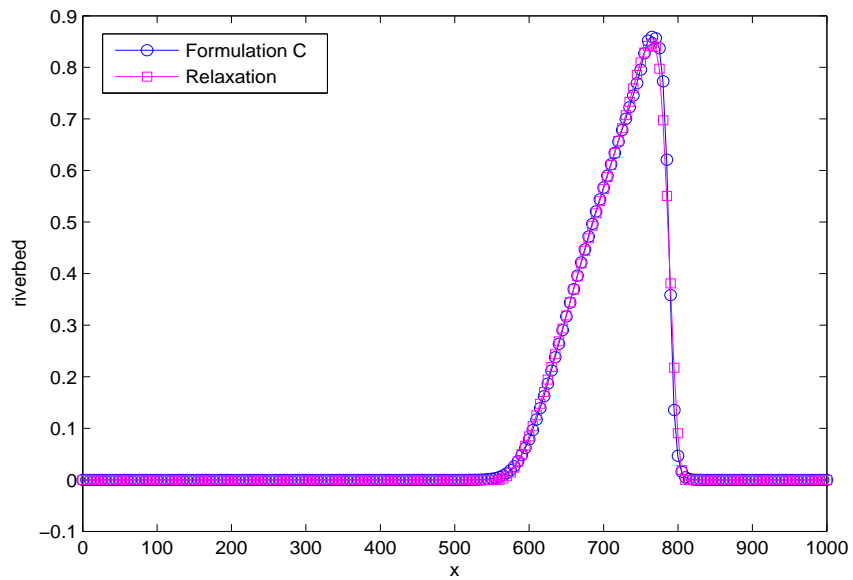
Σχήμα 4.5: Σύγκριση των διαφορετικών αριθμητικών λύσεων για τον πυθμένα ( $B$ ) με  $A = 0.001$  και  $Q = 10$  για  $t = 238079 \text{ sec}$  (Πρόβλημα 1).



Σχήμα 4.6: Σύγκριση των διαφορετικών αριθμητικών λύσεων για την επιφάνεια του νερού ( $h + B$ ) με  $A = 0.001$  και  $Q = 10$  για  $t = 150h$  (Πρόβλημα 1).



Σχήμα 4.7: Σύγκριση των διαφορετικών αριθμητικών λύσεων για την ταχύτητα ( $u$ ) με  $A = 0.001$  και  $Q = 10$  για  $t = 150h$  (Πρόβλημα 1).



Σχήμα 4.8: Σύγκριση των διαφορετικών αριθμητικών λύσεων για τον πυθμένα ( $B$ ) με  $A = 0.001$  και  $Q = 10$  για  $t = 150h$  (Πρόβλημα 1).

### 4.1.2 Αριθμητικά αποτελέσματα για πυθμένα ο οποίος αλληλεπιδρά γρήγορα με την ροή νερού

Σ' αυτήν την παράγραφο θα χρησιμοποιήσουμε την τιμή  $A = 1$ , που αντιπροσωπεύει την υπόθεση ότι ο κινούμενος πυθμένας αλληλεπιδρά γρήγορα με την ροή του νερού. Δυστυχώς όταν χρησιμοποιούμε μεγάλες τιμές για το  $A$ , οι αρχικές συνθήκες που χρησιμοποιούνται παράγουν μια ενστικτώδη αρχή για όλες τις ασταθής προσεγγίσεις λόγω του ότι οι αρχικές συνθήκες δεν αντιπροσωπεύουν μια γρήγορη κίνηση του πυθμένα.

Χρησιμοποιώντας  $Q = 10$  και  $A = 1$  με τελικό χρόνο  $t = 238s$ , παίρνουμε αριθμητικά αποτελέσματα που παρουσιάζονται στα Σχήματα (4.9) έως (4.12). Σημειώνουμε ότι ο παλμός στον πυθμένα κινείται με μια αξιοσημείωτα γρήγορη ταχύτητα κύματος σε σχέση με την μικρή τιμή του  $A$ . Τα αποτελέσματα για την μέθοδο χαλάρωσης όπως και στη μέθοδο του Roe είναι ομαλά και δεν επηρεάζονται από τις αρχικές συνθήκες.

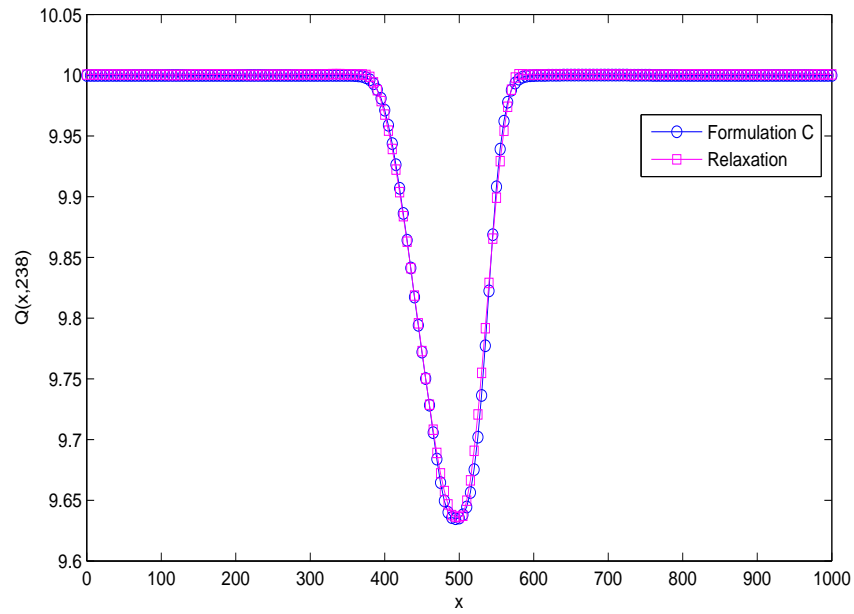
### 4.1.3 Αριθμητικά αποτελέσματα για μεγάλη ταχύτητα με πυθμένα ο οποίος αλληλεπιδρά αργά με την ροή νερού

Όλες οι μεταβολές του Προβλήματος 1 έχουν γίνει με μικρή ταχύτητα με αποτέλεσμα έναν μικρό Froude αριθμό,

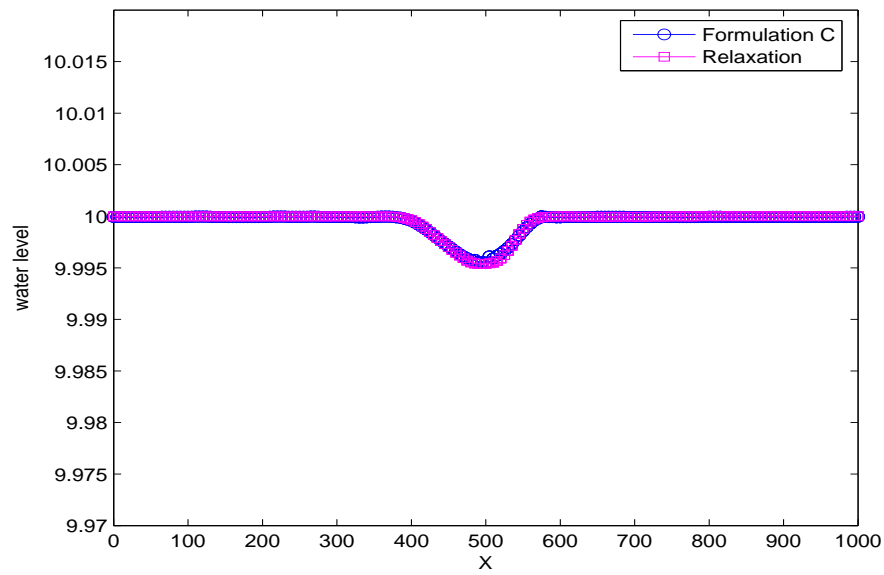
$$F_r = \frac{u}{\sqrt{gh}}.$$

ο οποίος χαρακτηρίζει το είδος της ροής υποκρίσιμη - υπερκρίσιμη (αν  $F_r < 1$  και  $F_r > 1$  αντίστοιχα). Εδώ χρησιμοποιούμε  $Q = 50$  και  $A = 0.001$  για να προσομοιώσουμε ένα μικρό παλμό στον πυθμένα αυτό ακόμη αλληλεπιδρά αργά με την ροή του νερού, αλλά η ταχύτητα της ροής του νερού αυξάνεται. Γί αυτό το πρόβλημα ο Fr αριθμός προσεγγίζει το 0.5, και η ροή παραμένει υποκρίσιμη. Στο Σχήμα (4.13) έως (4.15) εμφανίζονται τα αποτελέσματα των αριθμητικών λύσεων, για χρόνο  $t = 1904$  δευτερόλεπτα. Εδώ, παρατηρούμε ότι και τα δύο σχήματα παρήγαγαν πολύ συγκρίσιμα αριθμητικά αποτελέσματα, και για τους τρεις αγνώστους.

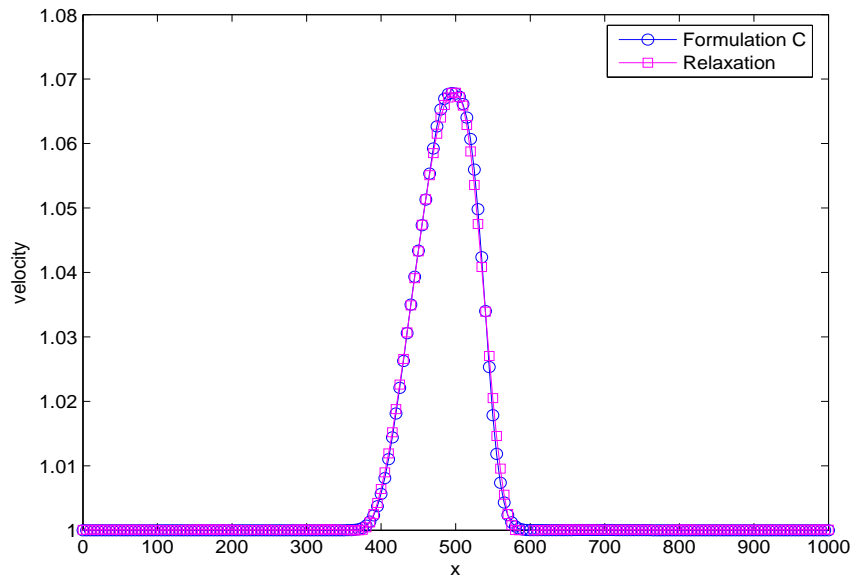
Επομένως, τα σχήματα μας έδωσαν ομαλά αριθμητικά αποτελέσματα με καθόλου ταλαντώσεις.



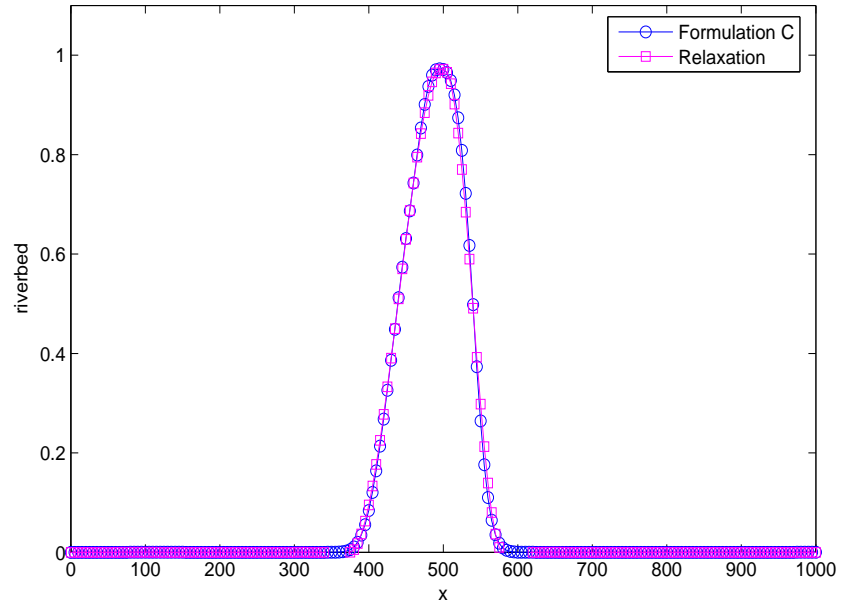
Σχήμα 4.9: Σύγκριση των διαφορετικών αριθμητικών λύσεων για την εκροή με  $A = 1$  και  $Q = 10$  για  $t = 238\text{sec}$  (Πρόβλημα 1).



Σχήμα 4.10: Σύγκριση των διαφορετικών αριθμητικών λύσεων για την επιφάνεια του νερού ( $h + B$ ) με  $A = 1$  και  $Q = 10$  για  $t = 238\text{sec}$  (Πρόβλημα 1).

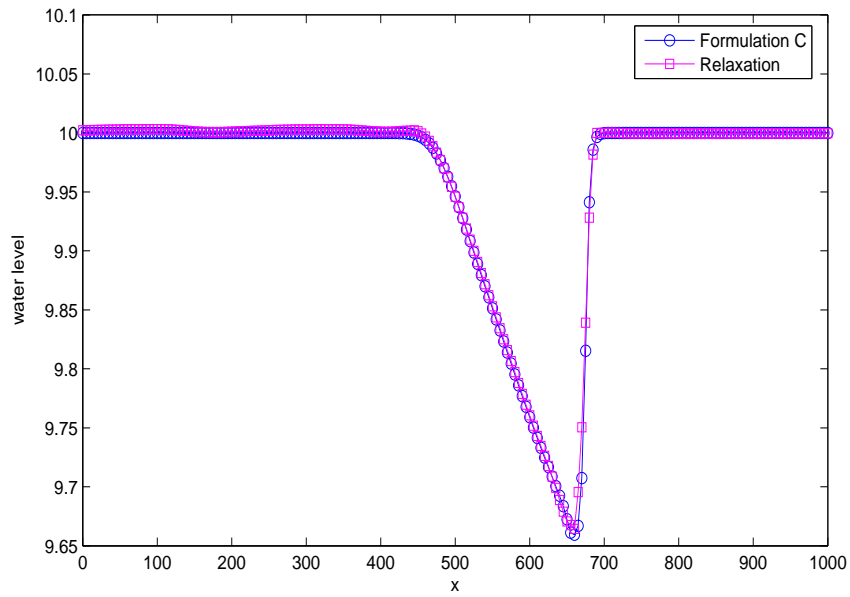


Σχήμα 4.11: Σύγκριση των διαφορετικών αριθμητικών λύσεων για την ταχύτητα ( $u$ ) με  $A = 1$  και  $Q = 10$  για  $t = 238sec$  (Πρόβλημα 1).

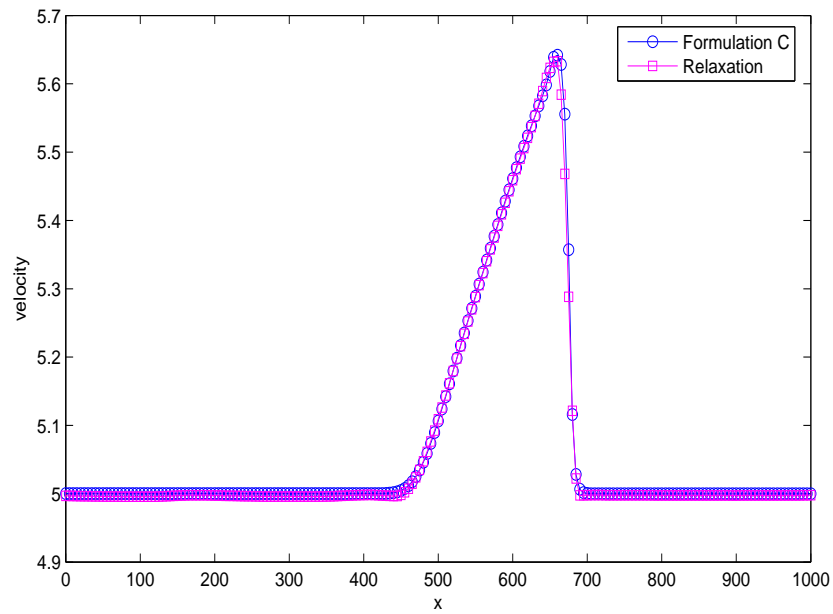


Σχήμα 4.12: Σύγκριση των διαφορετικών αριθμητικών λύσεων για τον πυθμένα ( $B$ ) με  $A = 1$  και  $Q = 10$  για  $t = 238sec$  (Πρόβλημα 1).

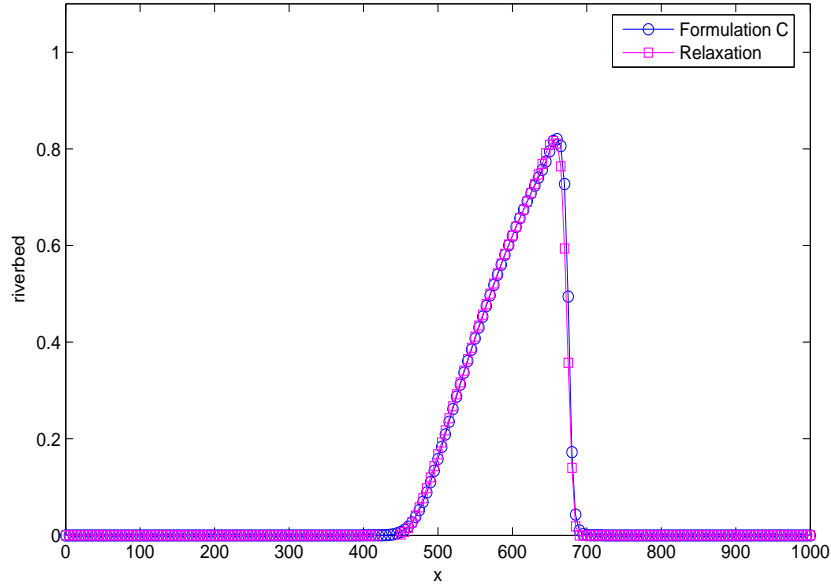




Σχήμα 4.13: Σύγκριση των διαφορετικών αριθμητικών λύσεων για την επιφάνεια του νερού ( $h + B$ ) με  $A = 0.001$  και  $Q = 50$  για  $t = 1904sec$  (Πρόβλημα 1).



Σχήμα 4.14: Σύγκριση των διαφορετικών αριθμητικών λύσεων για την ταχύτητα ( $u$ ) με  $A = 0.001$  και  $Q = 50$  για  $t = 1904sec$  (Πρόβλημα 1).



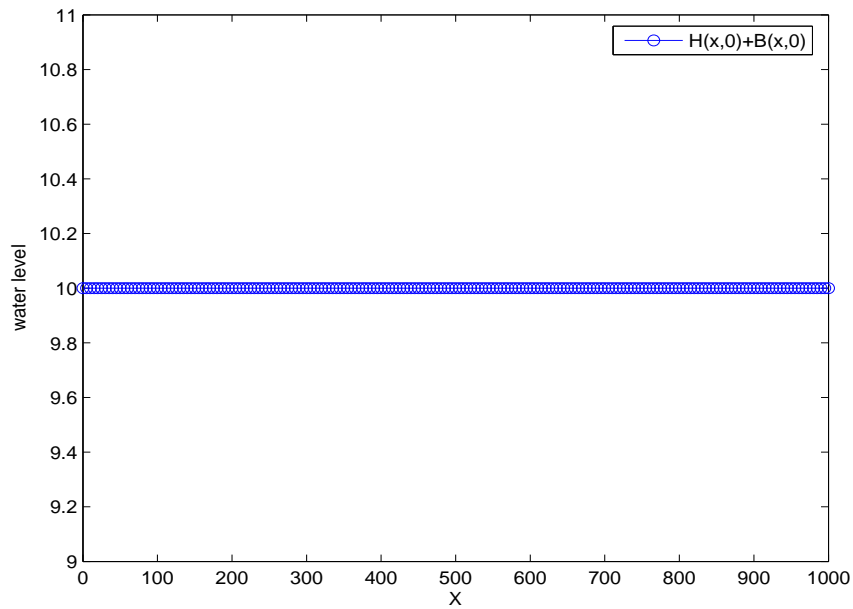
Σχήμα 4.15: Σύγκριση των διαφορετικών αριθμητικών λύσεων για τον πυθμένα ( $B$ ) με  $A = 0.001$  και  $Q = 50$  για  $t = 1904\text{sec}$  (Πρόβλημα 1).

## 4.2 Πρόβλημα 2

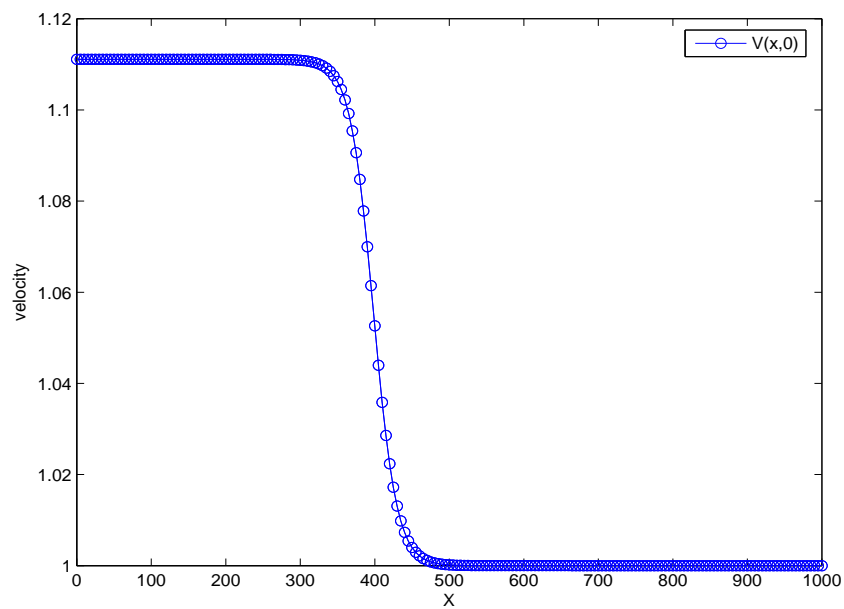
Οι αρχικές τιμές του πυθμένα σ' αυτό το πρόβλημα (βλ. Crnjaric-Zic et al. [5] ) είναι

$$B(x, 0) = \frac{1}{1 + \exp\left(\frac{x - 400}{5\pi}\right)},$$

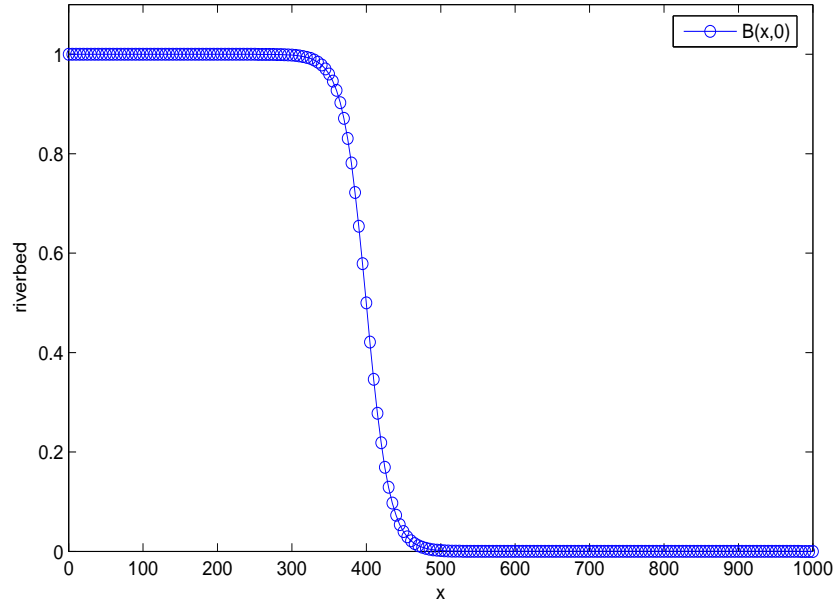
και μελετούμε την περίπτωση της ιζηματικής ασυνέχειας που αλληλεπιδρά γρήγορα με την ροή του νερού. Σ' αυτήν την περίπτωση παίρνουμε  $Q = 10$ ,  $A = 1$  και  $\sigma = 0.2$ . Οι αρχικές τιμές δίνονται στα Σχήματα (4.16)-(4.18). Τα αποτελέσματα στα Σχήματα (4.19)-(4.21) λαμβάνονται για  $\Delta x = 10m$ ,  $CFL = 0.4$  και  $t = 700\text{sec}$ . Από το Σχήματα (4.19)-(4.21) μπορούμε να καταλάβουμε ότι το σχήμα χαλάρωσης συμπεριφέρεται πολύ καλά κοντά στις ασυνέχειες διότι τα αποτελέσματα που παίρνουμε είναι πολύ καθαρά, ακριβή και συγκρίσιμα με δημοσιευμένα αποτελέσματα, βλ. [5], αλλά και με αυτά του σχήματος Roe με μια μικρή απόκλιση στα αποτελέσματα του βάθους νερού και της ταχύτητας.



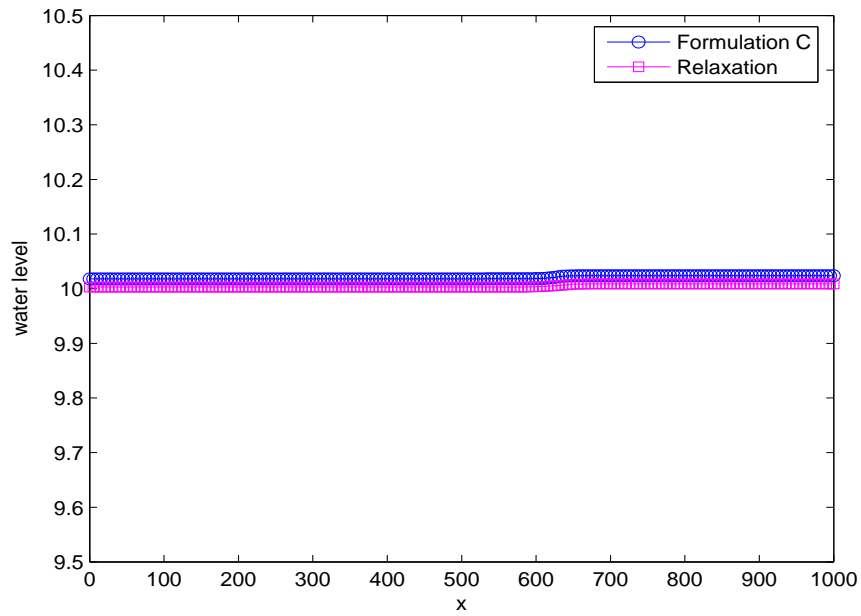
Σχήμα 4.16: Οι αρχικές τιμές της επιφάνειας του νερού ( $h + B$ ) για το Πρόβλημα 2.



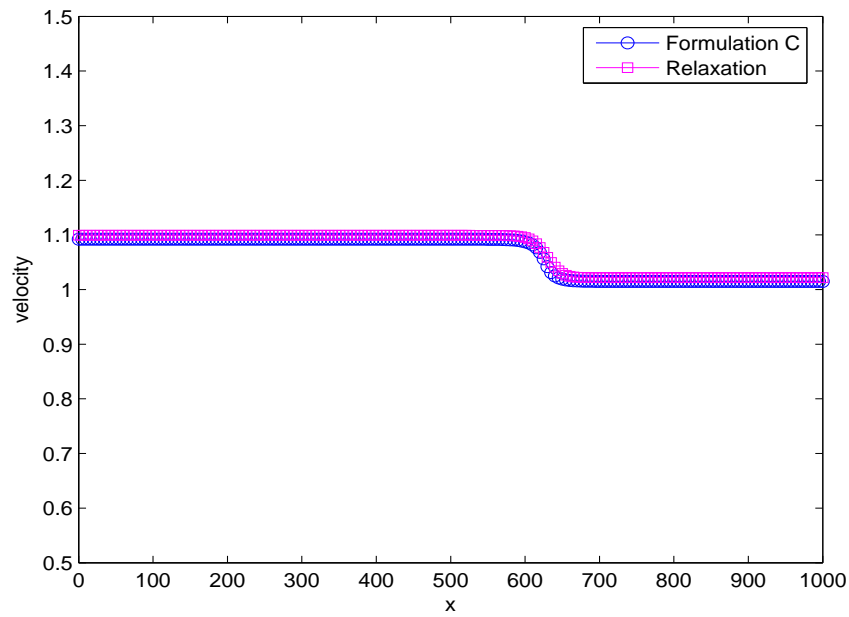
Σχήμα 4.17: Οι αρχικές τιμές της ταχύτητα ( $u$ ) για το Πρόβλημα 2.



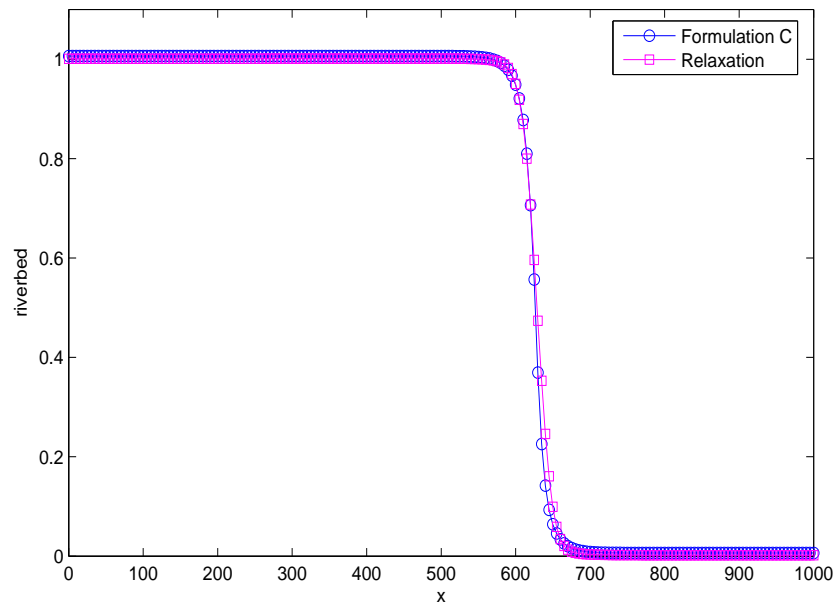
Σχήμα 4.18: Οι αρχικές τιμές του πυθμένα για το Πρόβλημα 2.



Σχήμα 4.19: Σύγκριση των μεθόδων για την επιφάνεια του νερού ( $h + B$ ) με  $A = 1$  και  $Q = 10$  για  $t = 700\text{sec}$  (Πρόβλημα 2).



Σχήμα 4.20: Σύγκριση των μεθόδων για την ταχύτητα ( $u$ ) με  $A = 1$  και  $Q = 10$  για  $t = 700\text{sec}$  (Πρόβλημα 2).



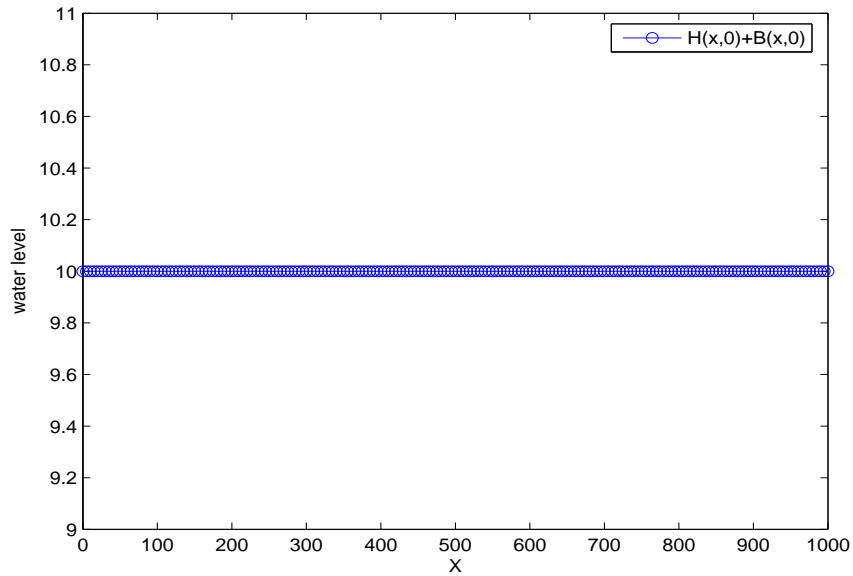
Σχήμα 4.21: Σύγκριση των μεθόδων για τον πυθμένα ( $B$ ) με  $A = 1$  και  $Q = 10$  για  $t = 700\text{sec}$  (Πρόβλημα 2).

### 4.3 Πρόβλημα 3

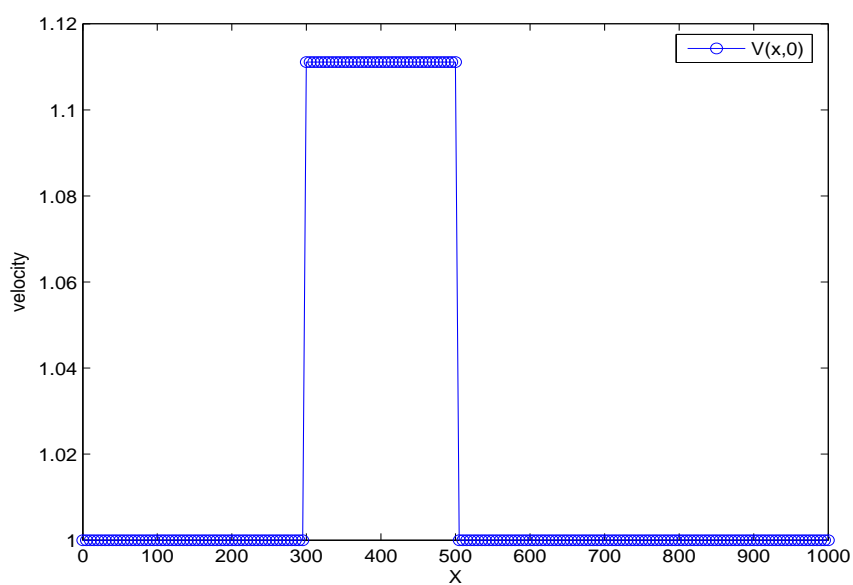
Το τρίτο πρόβλημα (βλ. Crnjaric-Zic et al. [5] ) δείχνει την συμπεριφορά των αρ-  
 ιθμητικών μας σχημάτων όταν ο πυθμένας είναι ασυνεχής. Οι αρχικές συνθήκες είναι  
 ορισμένες ως

$$B(x, 0) = \begin{cases} 1, & \text{αν } 300 \leq x \leq 500, \\ 0, & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

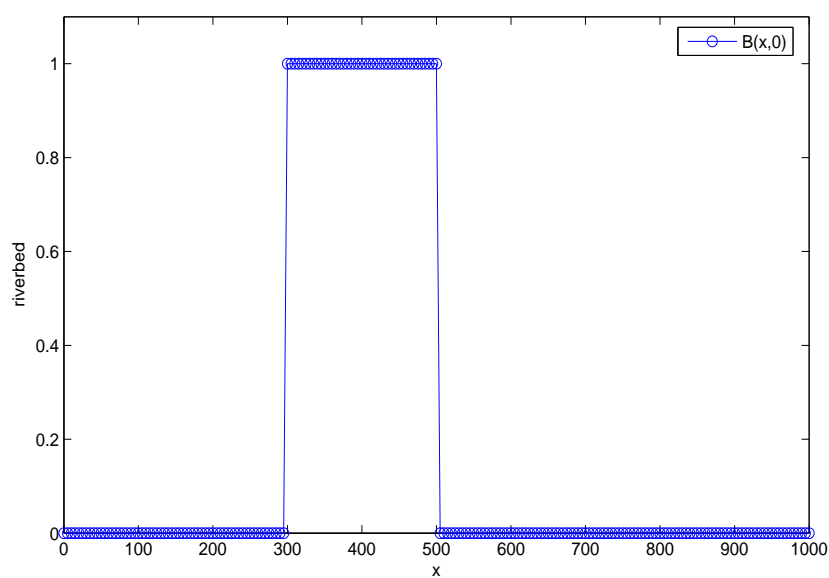
Εδώ μελετάμε μια αργή αλληλεπίδραση του πυθμένα με την ροή του νερού. Παίρνουμε  
 $Q = 10$ ,  $A = 0.001$  και  $\sigma = 0.4$ . Για να πάρουμε τα αποτελέσματα που βλέπουμε σ-  
 τα Σχήματα (4.25)-(4.27) χρησιμοποιήσαμε  $\Delta x = 5m$ ,  $CFL = 0.4$  και  $t = 238.000sec$ .  
 Όπως βλέπουμε στο Σχήμα (4.25) μπορούμε να καταλήξουμε ότι πήραμε καλά αποτελέσ-  
 ματα αντίστοιχα με την εκδοχή του σχήματος Roe στην Μορφή C και συγκρίσιμα με  
 δημοσιευμένα αποτελέσματα [5], ακόμα και όταν οι αρχικές μας συνθήκες είναι ασυνεχής.



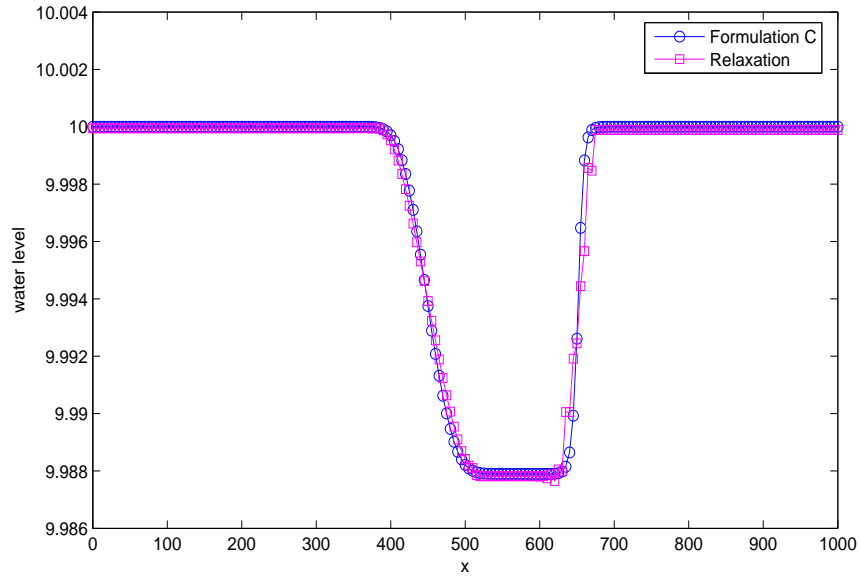
Σχήμα 4.22: Οι αρχικές τιμές της επιφάνεια του νερού ( $h + B$ ) για το Πρόβλημα 3.



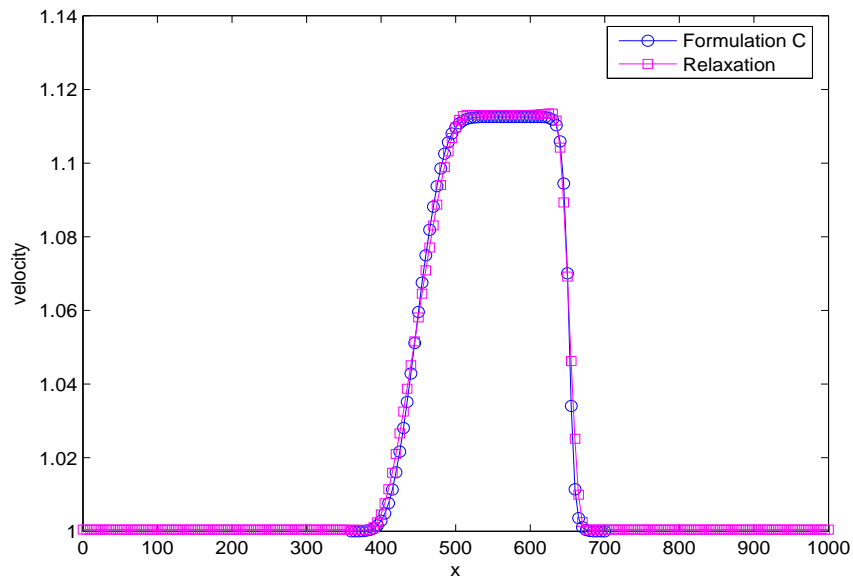
Σχήμα 4.23: Οι αρχικές τιμές της ταχύτητας ( $u$ ) για το Πρόβλημα 3.



Σχήμα 4.24: Οι αρχικές τιμές του πυθμένα ( $B$ ) για το Πρόβλημα 3.

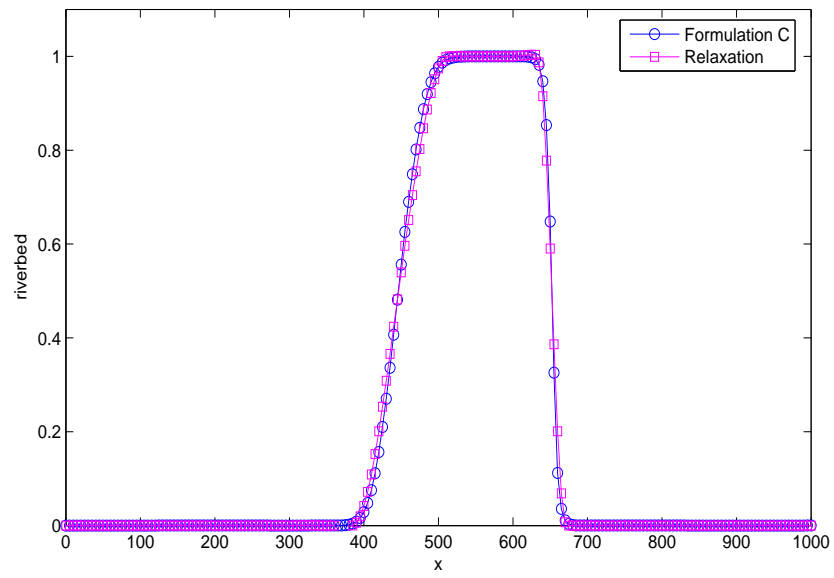


Σχήμα 4.25: Σύγκριση των μεθόδων για την επιφάνεια του νερού ( $h + B$ ) του νερού με  $A = 0.001$  και  $Q = 10$  για  $t = 238.000sec$  (Πρόβλημα 3).



Σχήμα 4.26: Σύγκριση των μεθόδων για την ταχύτητα ( $u$ ) με  $A = 0.001$  και  $Q = 10$  για  $t = 238.000sec$  (Πρόβλημα 3).





Σχήμα 4.27: Σύγκριση των μεθόδων για τον πυθμένα ( $B$ ) με  $A = 0.001$  και  $Q = 10$  για  $t = 238.000sec$  (Πρόβλημα 3).

## Κεφάλαιο 5

# Το Μαθηματικό Μοντέλο και το Σχήμα Χαλάρωσης σε Δύο Διαστάσεις

Σ' αυτό το κεφάλαιο, θα παρουσιάσουμε το μοντέλο της μεταφοράς ιζήματος σε δύο διαστάσεις. Στο δυδιάστατο μοντέλο, κάνοντας την υπόθεση ότι ο πυθμένας έχει πάλι σταθερή πορώδη επιφάνεια, αποτελείται από την εξίσωση διατήρησης της μάζας

$$h_t + (uh)_x + (vh)_y = 0, \quad (5.1)$$

την εξίσωση διατήρησης της ορμής στην κατεύθυνση του  $x$ ,

$$(uh)_t + \left[ hu^2 + \frac{1}{2}gh^2 \right]_x + (huv)_y = -ghB_x, \quad (5.2)$$

την εξίσωση διατήρησης της ορμής στην κατεύθυνση του  $y$ ,

$$(uh)_t + (huv)_x + \left[ hu^2 + \frac{1}{2}gh^2 \right]_y = -ghB_y, \quad (5.3)$$

και την εξίσωση της μορφολογίας του πυθμένα,

$$(B)_t + \xi(p_1)_x + \xi(p_2)_y = 0, \quad (5.4)$$

Εδώ,  $h(x, y, t)$ ,  $u(x, y, t)$ ,  $v(x, y, t)$ ,  $B(x, y, t)$ ,  $p_1(x, y, t)$  και  $p_2(x, y, t)$  σημαίνουν το ύψος του νερού, η ταχύτητα στις κατευθύνσεις  $x$ , και  $y$ , η μορφολογία του πυθμένα και η μεταφορά του ιζήματος προς την  $x$ , και  $y$  κατεύθυνση, αντίστοιχα.

Για να παρουσιάσουμε τις αριθμητικές τεχνικές σ' αυτήν την εργασία, χρησιμοποιούμε τις βασικές συναρτήσεις στερεομεταφοράς του Grass [13] στις δυο διαστάσεις, και παίρνουμε

$$p_1(u, v) = Au(u^2 + v^2)^{\frac{1}{2}(m-1)} \quad \text{και} \quad p_2(u, v) = Av(u^2 + v^2)^{\frac{1}{2}(m-1)} \quad (5.5)$$

κατά τη  $x$  και  $y$  κατεύθυνση αντίστοιχα. Σημειώνουμε ότι οι δυδιάστατες συναρτήσεις στερεομεταφοράς έχουν γίνει περισσότερο πολύπλοκες από ότι στη μία διάσταση πράγμα που δημιουργεί περισσότερες δυσκολίες στην προσπάθεια υπολογισμού αριθμητικών λύσεων. Σ' αυτήν την εργασία, θα χρησιμοποιούμε  $m = 3$ .

Το αντίστοιχο με το μονοδιάστατο σύστημα του νόμου διατήρησης είναι

$$\mathbf{w}_t + \mathbf{F}(\mathbf{w})_x + \mathbf{G}(\mathbf{w})_y = \mathbf{R}, \quad (5.6)$$

όπου  $\mathbf{F}(\mathbf{w})$  και  $\mathbf{G}(\mathbf{w})$  είναι οι συναρτήσεις ροής, το διάνυσμα  $\mathbf{R}$  περιέχει τους μη ομογενείς όρους. Η (5.6) ορίζει ένα γενικό σύστημα εξισώσεων που δεν είναι επιλύσιμο αλγεβρικά και επομένως αριθμητικές μέθοδοι υλοποιούνται για να προσεγγίσουν τη λύση.

## 5.1 Οι Μορφές A-SF και C του Μαθηματικού Μοντέλου στις 2 Διαστάσεις

Οι εξισώσεις (5.1) έως (5.4) γράφονται στην μορφή συστήματος A-SF,

$$\begin{bmatrix} h \\ uh \\ vh \\ B \end{bmatrix}_t + \begin{bmatrix} uh \\ hu^2 + \frac{1}{2}gh^2 \\ huv \\ \xi p_1 \end{bmatrix}_x + \begin{bmatrix} vh \\ huv \\ hv^2 + \frac{1}{2}gh^2 \\ \xi p_2 \end{bmatrix}_y = \begin{bmatrix} 0 \\ -ghB_x \\ -ghB_y \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.7)$$

και όλο το σύστημα προσεγγίζεται αριθμητικά ταυτοχρόνως. Θα ονομάσουμε κατ' αντιστοιχία με τη μία διάσταση την μορφή αυτή ως μορφή A.

Η δυδιάστατη μορφή C του συστήματος (έχοντας χρησιμοποιήσει τον κανόνα της αλυσίδας στις εξισώσεις διατήρησης της ορμής στη  $x$  και  $y$  κατεύθυνση) έχει την παρακάτω μορφή,

$$\begin{bmatrix} h \\ uh \\ vh \\ B \end{bmatrix}_t + \begin{bmatrix} uh \\ hu^2 + \frac{1}{2}gh^2 + ghB \\ huv \\ \xi p_1 \end{bmatrix}_x + \begin{bmatrix} vh \\ huv \\ hv^2 + \frac{1}{2}gh^2 + ghB \\ \xi p_2 \end{bmatrix}_y = \begin{bmatrix} 0 \\ gBh_x \\ gBh_y \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.8)$$

Και οι δύο παραπάνω μορφές ανήκουν στη κατηγορία της μη στάσιμης προσέγγισης του προβλήματος (unsteady approach), όπως αναλύθηκε στη παράγραφο 2.4. Βασικός στόχος μας είναι να παρουσιάσουμε και να συγκρίνουμε τα αριθμητικά αποτελέσματα των σχημάτων χαλάρωσης για τις δύο αυτές μορφές, ακολουθώντας τα ακριβή αποτελέσματα της μίας διάστασης.

## 5.2 Το Σχήμα Του Roe σε 2 Διαστάσεις

Στη παρούσα ενότητα παρουσιάζουμε συνοπτικά, και για λόγους πληρότητας, το σχήμα του Roe στις δύο διαστάσεις. Το σχήμα αυτό θα χρησιμοποιηθεί στη συνέχεια για την αριθμητική λύση των δυδιάστατων εξισώσεων ρηχών υδάτων με σταθερή τοπογραφία ( $B_t=0$ ) και με στόχο την δημιουργία κατάλληλων αρχικών τιμών για τα προβλήματα του επόμενου κεφαλαίου.

Το TVD-Roe σχήμα για τις δύο διαστάσεις ([15],[18]) μπορεί τώρα να γραφή (για ένα ορθογώνιο πλέγμα βλ. σχήμα 5.1) ως,

$$\mathbf{w}_{i,j}^{n+1} = \mathbf{w}_{i,j}^n - s_x \left( \mathbf{F}_{i+\frac{1}{2},j}^* - \mathbf{F}_{i-\frac{1}{2},j}^* \right) + s_x \left( \mathbf{f}_{i+\frac{1}{2},j}^- + \mathbf{f}_{i-\frac{1}{2},j}^+ \right) - s_y \left( \mathbf{G}_{i,j+\frac{1}{2}}^* - \mathbf{G}_{i,j-\frac{1}{2}}^* \right) + s_y \left( \mathbf{g}_{i,j+\frac{1}{2}}^- + \mathbf{g}_{i,j-\frac{1}{2}}^+ \right) \quad (5.9)$$

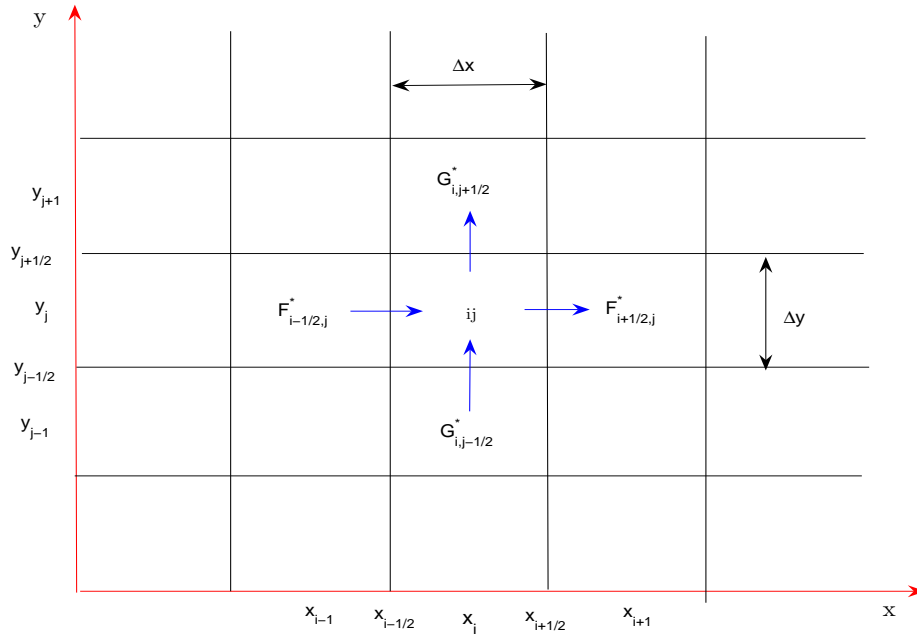
όπου  $\mathbf{F}^*, \mathbf{G}^*$  οι αριθμητικές συναρτήσεις ροής και  $\mathbf{f}^\pm, \mathbf{g}^\pm$  οι διακριτοποιήσεις του πηγαιού όρου δίνονται ως,

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{i+\frac{1}{2},j}^* &= \frac{1}{2} (\mathbf{F}_{i+1,j}^n + \mathbf{F}_{i,j}^n) - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^3 \left[ \tilde{a}_k^F |\tilde{\lambda}_k^F| \left( 1 - \Phi(\tilde{\theta}_k^F)(1 - |\tilde{\nu}_k^F|) \right) \tilde{\mathbf{e}}_k^F \right]_{i+\frac{1}{2},j} \\ \mathbf{f}_{i+\frac{1}{2},j}^\pm &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^3 \left[ \tilde{\beta}_k^F \tilde{\mathbf{e}}_k^F \left( 1 \pm \text{sgn}(\tilde{\lambda}_k^F)(1 - \Phi(\tilde{\theta}_k^F)(1 - |\tilde{\nu}_k^F|)) \right) \right]_{i+\frac{1}{2},j} \\ \tilde{\nu}_k^F &= s_x \tilde{\lambda}_k^F, \quad \tilde{\theta}_k^F = \frac{(\tilde{\alpha}_k)^F_{I+1/2,j}}{(\tilde{\alpha}_k)^F_{i+1/2,j}}, \quad I = i - \text{sgn}(\tilde{\nu}_k^F)_{i+1/2,j}, \quad s_x = \frac{\Delta t}{\Delta x}, \quad s_y = \frac{\Delta t}{\Delta y} \end{aligned}$$

όπου  $\Phi(\tilde{\theta}_k)$  είναι ο minmod οριοθέτης ροής. Οι προσεγγίσεις των  $\mathbf{G}_{i,j+1/2}^n$  και  $\mathbf{g}_{i,j+1/2}^\pm$  προκύπτουν με παρόμοιο τρόπο. Όπου με  $\tilde{\phantom{x}}$  συμβολίζονται οι μέσες τιμές του Roe για τις ιδιοτιμές ( $\lambda$ ), ιδιοδιανύσματα ( $\mathbf{e}$ ) και τα βάρη ( $\alpha, \beta$ ).

Για να εξασφαλίσουμε ότι το σχήμα θα παραμένει ευσταθές, χρησιμοποιούμε μεταβλητό χρονικό βήμα (βάση της συνθήκης CFL)

$$\Delta t = \frac{\nu \min(\Delta x, \Delta y)}{2 \max_{i,j} (|\lambda^F|, |\lambda^G|)}.$$



Σχήμα 5.1: Υπολογιστικό πλέγμα στις δύο διαστάσεις

Το σχήμα ισορροπεί την προσέγγιση των μη ομογενών όρων με τις αριθμητικές συναρτήσεις ροής για προβλήματα ισορροπίας,

$$\mathbf{F}_x + \mathbf{G}_y = \mathbf{R}$$

και λόγω αυτού ικανοποιούν την ιδιότητα C των Bermúdez και Vázquez [2]. Για να εξασφαλίσουμε αυτήν την ισορροπία, το αριθμητικό σχήμα χωρίζει τους μη ομογενείς όρους,

$$\mathbf{R} = \mathbf{f} + \mathbf{g} \Rightarrow \mathbf{F}_x = \mathbf{f} \text{ και } \mathbf{G}_y = \mathbf{g}$$

όπου  $\mathbf{f}$  και  $\mathbf{g}$  περιέχουν τους όρους που έχουν προκύψει παραγωγίζοντας τους ως προς την  $x$  και  $y$  κατεύθυνση, αντίστοιχα.

### 5.3 Το Σχήμα Χαλάρωσης Για το Δυδιάστατο Πρόβλημα

Το σχήμα χαλάρωσης για το πρόβλημα της μεταφοράς ιζήματος, προκύπτει από το σχήμα χαλάρωσης του [30] για τους νόμους διατήρησης στις δύο διαστάσεις. Έστω το κλασσικό δυδιάστατο πρόβλημα των νόμων διατήρησης

$$u_t + f(u)_x + g(u)_y = 0, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad t > 0, \quad (5.10)$$

$$u(x, y, 0) = u_0(x, y), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

Εισάγουμε τις βοηθητικές μεταβλητές  $u$ ,  $w$  στο (5.10), και το γραμμικό σύστημα χαλάρωσης δίνεται ως,

$$u_t + v_x + w_y = 0,$$

$$v_t + c^2 u_x = -\frac{1}{\epsilon}(v - f(u)), \quad (5.11)$$

$$w_t + d^2 u_y = -\frac{1}{\epsilon}(w - g(u)),$$

με αρχικές συνθήκες

$$u(x, y, 0) = u_0(x, y),$$

$$v(x, y, 0) = v_0(x, y) = f(u_0(x, y)),$$

$$w(x, y, 0) = w_0(x, y) = g(u_0(x, y)),$$

όπου οι μικρές παράμετροι  $\epsilon$  είναι ο βαθμός χαλάρωσης ( $0 \ll \epsilon \ll 1$ ) και  $c, d$  θετικές σταθερές. Το σύστημα (5.11) πρέπει να ικανοποιεί την παρακάτω υποχαρακτηριστική συνθήκη

$$\frac{f'(u)^2}{c^2} + \frac{g'(u)^2}{d^2} \leq 1 \quad \forall u, \quad (5.12)$$

η οποία εγγυάται ότι το σύστημα (5.11) είναι μη γραμμικά ευσταθές, οπότε για μικρό βαθμό χαλάρωσης ( $\epsilon \rightarrow 0^+$ ) ξαναπαίρνουμε το σύστημα (5.10).

Ακολουθώντας την προηγούμενη μετατροπή και εργαζόμενοι όπως στο [9], γενικεύουμε και επεκτείνουμε το σχήμα χαλάρωσης για την μεταφορά ιζήματος στις δύο διαστάσεις με τον πηγαίο όρο της τοπογραφίας του πυθμένα. Θεωρώντας ότι

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} h \\ q_1 \\ q_2 \\ B \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{bmatrix}, \quad (5.13)$$

μπορούμε να γράψουμε το σύστημα ως

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_t + \mathbf{v}_x + \mathbf{w}_y &= \mathbf{R}(\mathbf{u}), \\ \mathbf{v}_t + \mathbf{C}^2 \mathbf{u}_x &= -\frac{1}{\epsilon}(\mathbf{v} - \mathbf{F}(\mathbf{u})), \\ \mathbf{w}_t + \mathbf{D}^2 \mathbf{u}_y &= -\frac{1}{\epsilon}(\mathbf{w} - \mathbf{G}(\mathbf{u})), \end{aligned} \quad (5.14)$$

όπου τώρα  $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in R^3$  και  $\mathbf{C}^2, \mathbf{D}^2 \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  είναι θετικοί διαγώνιοι πίνακες. Υποθέτουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι οι  $\mathbf{C}, \mathbf{D}$  έχουν θετικές ιδιοτιμές  $c_j, d_j > 0$  για  $j = 1, 2, 3, 4$ . Επομένως, καθώς το όριο  $\epsilon \rightarrow 0^+$  το σύστημα (5.14) προσεγγίζει το πραγματικό σύστημα (5.6) με τοπική ισορροπία  $\mathbf{v} \rightarrow \mathbf{F}(\mathbf{u})$  και  $\mathbf{w} \rightarrow \mathbf{G}(\mathbf{u})$ . Το σύστημα (5.14) μπορεί επίσης να γραφεί σε διανυσματική μορφή

$$\begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \\ \mathbf{w} \end{bmatrix}_t + \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{I} & 0 \\ \mathbf{C}^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \\ \mathbf{w} \end{bmatrix}_x + \begin{bmatrix} 0 & 0 & \mathbf{I} \\ 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{D}^2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \\ \mathbf{w} \end{bmatrix}_y = \begin{bmatrix} \mathbf{R}(\mathbf{u}) \\ -\frac{1}{\epsilon}(\mathbf{v} - \mathbf{F}(\mathbf{u})) \\ -\frac{1}{\epsilon}(\mathbf{w} - \mathbf{G}(\mathbf{u})) \end{bmatrix}. \quad (5.15)$$

Επίσης μελετούμε μια παραλλαγή του παραπάνω συστήματος χαλάρωσης που σε διανυσματική μορφή γράφεται ως

$$\begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \\ \mathbf{w} \end{bmatrix}_t + \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{I} & 0 \\ \mathbf{C}^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \\ \mathbf{w} \end{bmatrix}_x + \begin{bmatrix} 0 & 0 & \mathbf{I} \\ 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{D}^2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \\ \mathbf{w} \end{bmatrix}_y = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{\epsilon}(\mathbf{v} - \mathbf{F}(\mathbf{u})) - \frac{1}{\epsilon} \tilde{\mathbf{R}}(\mathbf{u}) \\ -\frac{1}{\epsilon}(\mathbf{w} - \mathbf{G}(\mathbf{u})) - \frac{1}{\epsilon} \tilde{\tilde{\mathbf{R}}}(\mathbf{u}) \end{bmatrix}. \quad (5.16)$$

όπου

$$\tilde{\mathbf{R}}(\mathbf{u}) = \begin{bmatrix} 0 \\ -\int^x gh(s, y) \frac{\partial B}{\partial x}(s, y) ds \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \tilde{\tilde{\mathbf{R}}}(\mathbf{u}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\int^y gh(x, s) \frac{\partial B}{\partial y}(x, s) ds \\ 0 \end{bmatrix},$$

ή

$$\tilde{\mathbf{R}}(\mathbf{u}) = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \int^x gh(s, y) \frac{\partial B}{\partial x}(s, y) ds \\ -\frac{1}{2} \int^x gh(s, y) \frac{\partial B}{\partial y}(s, y) ds \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \tilde{\tilde{\mathbf{R}}}(\mathbf{u}) = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \int^y gh(x, s) \frac{\partial B}{\partial x}(x, s) ds \\ -\frac{1}{2} \int^y gh(x, s) \frac{\partial B}{\partial y}(x, s) ds \\ 0 \end{bmatrix}$$

Το σχήμα χαλάρωσης (5.16), προσεγγίζει καθώς το όριο  $\epsilon \rightarrow 0^+$  το πραγματικό σύστημα (5.6) με τοπική ισορροπία

$$\mathbf{v} = \mathbf{F}(\mathbf{u}) - \tilde{\mathbf{R}}(\mathbf{u}) \quad \text{και} \quad \mathbf{w} = \mathbf{G}(\mathbf{u}) - \tilde{\tilde{\mathbf{R}}}(\mathbf{u}).$$

Ο πραγματικός νόμος διατήρησης, σε όλες τις μορφές, έχει τώρα αντικατασταθεί από ένα γραμμικό υπερβολικό σύστημα με έναν πηγαίο όρο του σχήματος χαλάρωσης το οποίο ταχύτητα κατευθύνεται σε μία κατάσταση τοπικής ισορροπίας καθώς ο βαθμός χαλάρωσης κατευθύνεται στο μηδέν ( $\epsilon \rightarrow 0^+$ ). Σε μερικές περιπτώσεις μπορεί ναδειχθεί αναλυτικά ότι οι λύσεις του συστήματος (5.15) προσεγγίζουν τις λύσεις του πραγματικού συστήματος των νόμων διατήρησης.

Μία γενική και απαραίτητη συνθήκη η οποία πρέπει να ικανοποιείται για συγκλίνει το σχήμα είναι η υποχαρακτηριστική συνθήκη. Για τα συστήματα (5.15) και (5.16) χρειαζόμαστε την

$$\frac{\lambda_i^2}{c_i^2} + \frac{\mu_i^2}{d_i^2} \leq 1, \quad \forall i = 1, 2, 3, 4 \quad (5.17)$$

με  $\lambda_i, \mu_i$  να είναι οι ιδιοτιμές των  $\partial \mathbf{F}(\mathbf{u})/\partial \mathbf{u}$  και  $\partial \mathbf{G}(\mathbf{u})/\partial \mathbf{u}$  αντίστοιχα. Με αυτόν τον τρόπο εξασφαλίζουμε ότι οι χαρακτηριστικές ταχύτητες των υπερβολικών μερών της (5.15) ή (5.16) είναι τόσο μικρές όσο μεγάλες είναι οι χαρακτηριστικές ταχύτητες του πραγματικού προβλήματος. Επομένως, επιλέγοντας τις κατάλληλες σταθερές  $c_j, d_j$  έτσι ώστε η υποχαρακτηριστική συνθήκη να ισχύει καθώς ο βαθμός χαλάρωσης  $\epsilon \rightarrow 0^+$ , ξαναπέρνω την (5.10) και για τα δύο σχήματα χαλάρωσης (5.15) και (5.16).



## 5.4 Ημιδιακριτά Σχήματα Χαλάρωσης Σε 2 Διαστάσεις

Η γενική μορφή του δυδιάστατου σχήματος σε συντηρητική μορφή (αρχικά χωρίς πηγαίους όρους) δίνεται ως

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{u}_{ij} + \frac{1}{\Delta x} (\mathbf{v}_{i+\frac{1}{2},j} - \mathbf{v}_{i-\frac{1}{2},j}) + \frac{1}{\Delta y} (\mathbf{w}_{i,j+\frac{1}{2}} - \mathbf{w}_{i,j-\frac{1}{2}}) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{v}_{ij} + \frac{1}{\Delta x} \mathbf{C}^2 (\mathbf{u}_{i+\frac{1}{2},j} - \mathbf{u}_{i-\frac{1}{2},j}) &= -\frac{1}{\epsilon} (\mathbf{v}_{ij} - \mathbf{F}(\mathbf{u}_{ij})), \\ \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{w}_{ij} + \frac{1}{\Delta y} \mathbf{D}^2 (\mathbf{u}_{i,j+\frac{1}{2}} - \mathbf{u}_{i,j-\frac{1}{2}}) &= -\frac{1}{\epsilon} (\mathbf{w}_{ij} - \mathbf{G}(\mathbf{u}_{ij})). \end{aligned} \quad (5.18)$$

Εδώ για συντομία θα περιγράψουμε μόνο το σχήμα τύπου MUSCL. Για να κατασκευάσουμε ένα σχήμα δευτέρας τάξης ακρίβειας, η σταθερή προσέγγιση κατά σημείο

$$\begin{aligned} (\mathbf{v} + \mathbf{Cu})_{i+1/2,j} &= (\mathbf{v} + \mathbf{Cu})_{ij}, \quad (\mathbf{v} - \mathbf{Cu})_{i+1/2,j} = (\mathbf{v} - \mathbf{Cu})_{i+1,j}, \\ (\mathbf{w} + \mathbf{Du})_{i,j+1/2} &= (\mathbf{w} + \mathbf{Du})_{ij}, \quad (\mathbf{w} - \mathbf{Du})_{i,j+1/2} = (\mathbf{w} - \mathbf{Du})_{i,j+1}. \end{aligned} \quad (5.19)$$

αντικαθίσταται από τη MUSCL κατά σημείο γραμμική παρεμβολή η οποία εφαρμόζεται στην  $k$ -οστή συνιστώσα των  $\mathbf{v} \pm \mathbf{Cu}$  και  $\mathbf{w} \pm \mathbf{Du}$  δίνει αντιστοίχως

$$\begin{aligned} (v + c_k u)_{i+\frac{1}{2},j} &= (v + c_k u)_{ij} + \frac{1}{2} \Delta x s_{ij}^{x,+}, \\ (v - c_k u)_{i+\frac{1}{2},j} &= (v - c_k u)_{i+1,j} - \frac{1}{2} \Delta x s_{i+1,j}^{x,-}, \\ (w + d_k u)_{i,j+\frac{1}{2}} &= (w + d_k u)_{ij} + \frac{1}{2} \Delta y s_{ij}^{y,+}, \\ (w - d_k u)_{i,j+\frac{1}{2}} &= (w - d_k u)_{i,j+1} - \frac{1}{2} \Delta y s_{i,j+1}^{y,-}, \end{aligned} \quad (5.20)$$

όπου  $u$ ,  $v$  και  $w$  είναι η  $k$ -οστή ( $1 \leq k \leq 4$  για το πρόβλημα της μεταφοράς ιζήματος) συνιστώσα των  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$  και  $\mathbf{w}$  αντιστοίχως, με  $s$  να είναι η κλήση στο  $(i, j)$  υπολογιστικό κελί, και ορίζεται ως

$$s_{ij}^{x,\pm} = \frac{1}{\Delta x} (v_{i+1,j} \pm c_k u_{i+1,j} - v_{ij} \mp c_k u_{ij}) \phi(\theta_{ij}^{x,\pm}), \quad (5.21)$$

με

$$\theta_{ij}^{x,\pm} = \frac{v_{ij} \pm c_k u_{ij} - v_{i-1,j} \mp c_k u_{i-1,j}}{v_{i+1,j} \pm c_k u_{i+1,j} - v_{i,j} \mp c_k u_{ij}}, \quad (5.22)$$

και

$$s_{ij}^{y,\pm} = \frac{1}{\Delta y} (w_{i,j+1} \pm d_k u_{i,j+1} - w_{ij} \mp d_k u_{ij}) \phi(\theta_{ij}^{y,\pm}), \quad (5.23)$$

με

$$\theta_{ij}^{y,\pm} = \frac{w_{ij} \pm d_k u_{ij} - v_{i,j-1} \mp d_k u_{i,j-1}}{w_{i,j+1} \pm d_k u_{i,j+1} - v_{i,j} \mp d_k u_{ij}}, \quad (5.24)$$

όπου  $\phi$  είναι ο οριοθέτης ροής ( βλ. παράγραφο (3.6.2) ). Υπάρχουν αρκετές επιλογές για να επιλέξουμε έναν οριοθέτη ροής, όπως είδαμε και στην μία διάσταση.

Επομένως, από την (5.19) παίρνουμε:

$$u_{i+\frac{1}{2},j} = \frac{1}{2}(u_{ij} + u_{i+1,j}) - \frac{1}{2c_k}(v_{i+1,j} - v_{ij}) + \frac{\Delta x}{4c_k}(s_{ij}^{x,+} + s_{i+1,j}^{x,-}), \quad (5.25)$$

$$v_{i+\frac{1}{2},j} = \frac{1}{2}(v_{ij} + v_{i+1,j}) - \frac{c_k}{2}(u_{i+1,j} - u_{ij}) + \frac{\Delta x}{4}(s_{ij}^{x,+} - s_{i+1,j}^{x,-}),$$

$$u_{i,j+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(u_{ij} + u_{i,j+1}) - \frac{1}{2c_k}(w_{i,j+1} - w_{ij}) + \frac{\Delta y}{4d_k}(s_{ij}^{y,+} + s_{i,j+1}^{y,-}), \quad (5.26)$$

$$w_{i,j+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(w_{ij} + w_{i,j+1}) - \frac{d_k}{2}(u_{i,j+1} - u_{ij}) + \frac{\Delta y}{4}(s_{ij}^{y,+} - s_{i,j+1}^{y,-}).$$

Το δεύτερης τάξης (ως προς τον χώρο) ημιδιακριτό σχήμα χαλάρωσης, δίνεται από

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} u_{ij} + \frac{1}{2\Delta x} (v_{i+1,j} - v_{i-1,j}) + \frac{1}{2\Delta y} (w_{i,j+1} - w_{i,j-1}) \\ & - \frac{c_k}{2\Delta x} (u_{i+1,j} - 2u_{ij} + u_{i-1,j}) - \frac{d_k}{2\Delta y} (w_{i,j+1} - 2w_{ij} + w_{i,j-1}) \\ & + \frac{1}{4} (s_{ij}^{x,+} - s_{i+1,j}^{x,-} - s_{i-1,j}^{x,+} + s_{ij}^{x,-} + s_{ij}^{y,+} - s_{i,j+1}^{y,-} - s_{i,j-1}^{y,+} + s_{ij}^{y,-}) = 0, \\ & \frac{\partial}{\partial t} v_{ij} + \frac{c_k^2}{2\Delta x} (u_{i+1,j} - u_{i-1,j}) - \frac{c_k}{2\Delta x} (v_{i+1,j} - 2v_{ij} + v_{i-1,j}) \\ & + \frac{c_k}{4} (s_{ij}^{x,+} + s_{i+1,j}^{x,-} - s_{i-1,j}^{x,+} - s_{ij}^{x,-}) = -\frac{1}{2} (v_{ij} - F_k(u_{ij})) - \frac{1}{2} \tilde{R}_k(u_{ij}), \\ & \frac{\partial}{\partial t} w_{ij} + \frac{d_k^2}{2\Delta y} (u_{i,j+1} - u_{i,j-1}) - \frac{d_k}{2\Delta y} (w_{i,j+1} - 2w_{ij} + w_{i,j-1}) \\ & + \frac{d_k}{4} (s_{ij}^{y,+} + s_{i+1,j}^{y,-} - s_{i-1,j}^{y,+} - s_{ij}^{y,-}) = -\frac{1}{2} (w_{ij} - G_k(u_{ij})) - \frac{1}{2} \tilde{\tilde{R}}_k(u_{ij}), \end{aligned} \quad (5.27)$$

με  $\tilde{R}_k, \tilde{\tilde{R}}_k, F_k, G_k$  είναι οι  $k$ -οστές συντεταγμένες των  $\tilde{\mathbf{R}}, \tilde{\tilde{\mathbf{R}}}, \mathbf{F}$  και  $\mathbf{G}$ , αντιστοίχως. Σημειώνουμε ότι στην περίπτωση όπου η κλήση  $s^\pm = 0$  ή  $\phi = 0$ , το MUSCL σχήμα (5.27) μετατρέπεται σε σχήμα UPWIND, πρώτης χωρικής τάξης.

## 5.5 Πλήρως Διακριτά Σχήματα

Σ' αυτήν την παράγραφο θα παρουσιάσουμε την διακριτοποίηση ως προς τον χρόνο των ημιδιακριτών σχημάτων χαλάρωσης που εφαρμόζονται στο πρόβλημα της μεταφοράς ιζήματος. Το προφανές πλεονέκτημα, όπως και στη μία διάσταση, για τα σχήματα χαλάρωσης είναι ότι ο διαφορικός τελεστής είναι γραμμικός και μπορεί εύκολα να διαγωνιοποιηθεί. Επί πλέον, η συνήθη διαφορική εξίσωση που καθορίζεται απ' την δεξιά μεριά είναι ένα δύσκαμπτο αλλά γραμμικό σύστημα. Σημειώνουμε ότι  $\mathbf{u}_t = 0$  και γι' αυτό το λόγο οι έμμεσες μέθοδοι μπορούν να εφαρμοστούν χωρίς να λυθεί το γραμμικό σύστημα των εξισώσεων. Αυτό είναι που κάνει τα σχήματα χαλάρωσης τόσο ελκυστικά.

Για να απλοποιήσουμε την παρουσίαση, υποθέτουμε ότι  $B \equiv 0$ , και

- (A) Δίνονται οι αρχικές τιμές των  $\mathbf{u}^n, \mathbf{v}^n, \mathbf{w}^n$  και εφαρμόζουμε μια μέθοδο πεπερασμένων χωρίων (UPWIND, MUSCL) για να προσεγγίσουμε τα  $\mathbf{u}, \mathbf{v}$  και  $\mathbf{w}$  ως προς τον χρόνο  $\Delta t$  λύνοντας το ομογενές γραμμικό υπερβολικό σύστημα

$$\begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \\ \mathbf{w} \end{bmatrix}_t + \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{I} & 0 \\ \mathbf{C}^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \\ \mathbf{w} \end{bmatrix}_x + \begin{bmatrix} 0 & 0 & \mathbf{I} \\ 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{D}^2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \\ \mathbf{w} \end{bmatrix}_y = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (5.28)$$

και παίρνουμε τις νέες τιμές  $\mathbf{u}^{(1)}, \mathbf{v}^{(1)}$  και  $\mathbf{w}^{(1)}$

- (B) ανανεώνουμε τις  $\mathbf{u}^{(1)}, \mathbf{v}^{(1)}, \mathbf{w}^{(1)}$  στις  $\mathbf{u}^{n+1}, \mathbf{v}^{n+1}, \mathbf{w}^{n+1}$  λύνοντας το σύστημα:

$$\mathbf{u}_t = 0,$$

$$\mathbf{v}_t = -\frac{1}{\epsilon}(\mathbf{v} - \mathbf{F}(\mathbf{u})),$$

$$\mathbf{w}_t = -\frac{1}{\epsilon}(\mathbf{w} - \mathbf{G}(\mathbf{u})).$$

Για την επίλυση του παραπάνω συστήματος χρησιμοποιείται η έμμεση-άμεση (implicit-explicit) Runge-Kutta που έχει προταθεί στο [30], και εφαρμόστηκε στη μία διάσταση για τη MUSCL διακριτοποίηση. Η μέθοδος διαχωρίζει το σύστημα και χειρίζεται χωριστά τους άκαμπτους και μή όρους. Τους άκαμπτους όρους  $(\frac{1}{\epsilon}(\mathbf{v} - \mathbf{F}(\mathbf{u})), \frac{1}{\epsilon}(\mathbf{w} - \mathbf{G}(\mathbf{u})))$  τους χειρίζεται έμμεσα και τους μη άκαμπτους άμεσα. Η γραμμικότητα όμως των άκαμπτων όρων μας δίνει την δυνατότητα να λύσουμε τους όρους αυτούς άμεσα. Έτσι έχουμε ένα πλήρως διακριτό σχήμα το οποίο είναι τελικώς άμεσο και εύκολο στη λύση (κατ' αντιστοιχία της μίας διάστασης).

Οι εξισώσεις που ακολουθούν περιγράφουν το τελικό σχήμα για το σύστημα (5.15), έχοντας αφαιρέσει προσωρινά τους κάτω δείκτες  $i, j$ ,

$$\mathbf{u}^{n,1} = \mathbf{u}^n, \quad (5.29\alpha')$$

$$\mathbf{v}^{n,1} = \mathbf{v}^n + \frac{\Delta t}{\epsilon}(\mathbf{v}^{n,1} - \mathbf{F}(\mathbf{u}^{n,1})), \quad (5.29\beta')$$

$$\mathbf{w}^{n,1} = \mathbf{w}^n + \frac{\Delta t}{\epsilon}(\mathbf{w}^{n,1} - \mathbf{G}(\mathbf{u}^{n,1})); \quad (5.29\gamma')$$

$$\mathbf{u}^{(1)} = \mathbf{u}^{n,1} - \Delta t(\Delta_+^x \mathbf{v}^{n,1} + \Delta_+^y \mathbf{w}^{n,1}) + \Delta t \mathbf{R}(\mathbf{u}^{n,1}), \quad (5.29\delta')$$

$$\mathbf{v}^{(1)} = \mathbf{v}^{n,1} - \Delta t \mathbf{C}^2 \Delta_+^x \mathbf{u}^{n,1}, \quad (5.29\epsilon')$$

$$\mathbf{w}^{(1)} = \mathbf{w}^{n,1} - \Delta t \mathbf{D}^2 \Delta_+^y \mathbf{u}^{n,1}; \quad (5.29\zeta')$$

$$\mathbf{u}^{n,2} = \mathbf{u}^{(1)}, \quad (5.29\eta')$$

$$\mathbf{v}^{n,2} = \mathbf{v}^{(1)} - \frac{\Delta t}{\epsilon}(\mathbf{v}^{n,2} - \mathbf{F}(\mathbf{u}^{n,2})) - \frac{2\Delta t}{\epsilon}(\mathbf{v}^{n,1} - \mathbf{F}(\mathbf{u}^{n,1})), \quad (5.29\theta')$$

$$\mathbf{w}^{n,2} = \mathbf{w}^{(1)} - \frac{\Delta t}{\epsilon}(\mathbf{w}^{n,2} - \mathbf{G}(\mathbf{u}^{n,2})) - \frac{2\Delta t}{\epsilon}(\mathbf{w}^{n,1} - \mathbf{G}(\mathbf{u}^{n,1})); \quad (5.29\iota')$$

$$\mathbf{u}^{(2)} = \mathbf{u}^{n,2} - \Delta t(\Delta_+^x \mathbf{v}^{n,2} + \Delta_+^y \mathbf{w}^{n,2}) + \Delta t \mathbf{R}(\mathbf{u}^{n,2}), \quad (5.29\kappa')$$

$$\mathbf{v}^{(2)} = \mathbf{v}^{n,2} - \Delta t \mathbf{C}^2 \Delta_+^x \mathbf{u}^{n,2}, \quad (5.29\lambda')$$

$$\mathbf{w}^{(2)} = \mathbf{w}^{n,2} - \Delta t \mathbf{D}^2 \Delta_+^y \mathbf{u}^{n,2}; \quad (5.29\mu')$$

$$\mathbf{u}^{n+1} = \frac{1}{2}(\mathbf{u}^n + \mathbf{u}^{(2)}), \quad (5.29\nu')$$

$$\mathbf{v}^{n+1} = \frac{1}{2}(\mathbf{v}^n + \mathbf{v}^{(2)}), \quad (5.29\omega')$$

$$\mathbf{w}^{n+1} = \frac{1}{2}(\mathbf{w}^n + \mathbf{w}^{(2)}), \quad (5.29\phi')$$

όπου

$$\Delta_+^x \mathbf{p}_{ij} = \frac{1}{\Delta x}(\mathbf{p}_{i+\frac{1}{2},j} - \mathbf{p}_{i-\frac{1}{2},j}), \quad (5.30)$$

και

$$\Delta_+^y \mathbf{p}_{ij} = \frac{1}{\Delta y}(\mathbf{p}_{i,j+\frac{1}{2}} - \mathbf{p}_{i,j-\frac{1}{2}}). \quad (5.31)$$

Μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι οι τρεις πρώτες εξισώσεις αν και είναι έμμεσες μπορούν να μετατραπούν σε άμεσες λόγω της γραμμικότητας του συστήματος. Το ίδιο ισχύει και για τις εξισώσεις (5.29η) και (5.29θ). Είναι σημαντικό να σημειώσουμε ότι δεν χρειαζόμαστε καμία πληροφορία για τις ιδιοτιμές του Ιακωβιανού πίνακα των μη γραμμικών ρών εκτός από ένα άνω φράγμα, έτσι ώστε να ρυθμίσουμε τις παραμέτρους των  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{D}$  σύμφωνα με την υποχαρακτηριστική συνθήκη. Τέλος οι παραπάνω εξισώσεις δεν παράγουν

μη γραμμικούς όρους και δεν απαιτούν επίλυση γραμμικών συστημάτων. Επιπρόσθετα, το δεύτερης τάξης σχήμα χαλάρωσης είναι σταθερό αν ικανοποιεί την *CFL* συνθήκη

$$\max \left( (\max_i c_i) \frac{\Delta t}{\Delta x}, (\max_i d_i) \frac{\Delta t}{\Delta y} \right) \leq 1. \quad (5.32)$$

Εάν θέλουμε το αριθμητικό σχήμα (βλ. [30, 27, 3]) να είναι TVD ευσταθές, μία περισσότερη περιοριστική συνθήκη απαιτείται για τον σωστό προσδιορισμό του χρονικού βήματος  $\Delta t$

$$\max \left( (\max_i c_i) \frac{\Delta t}{\Delta x}, (\max_i d_i) \frac{\Delta t}{\Delta y} \right) \leq \frac{1}{2}.$$

Για τις αρχικές συνθήκες στα σχήματα χαλάρωσης επιλέγουμε να χρησιμοποιούμε τις παρακάτω σχέσεις

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(x, y, 0) &= \mathbf{u}_0(x, y), \\ \mathbf{v}(x, y, 0) &= \mathbf{v}_0(x, y) \equiv \mathbf{F}(\mathbf{u}_0(x, y)), \\ \mathbf{w}(x, y, 0) &= \mathbf{w}_0(x, y) \equiv \mathbf{G}(\mathbf{u}_0(x, y)). \end{aligned}$$

Για μικρές τιμές του βαθμού χαλάρωσης ( $\epsilon \rightarrow 0^+$ ) το σχήμα χαλάρωσης μας δείχνει εδώ ότι ικανοποιεί την τοπική ισορροπία, και επιλέγοντας τα παραπάνω  $\mathbf{v}$  και  $\mathbf{w}$  αποφεύγουμε να εισάγουμε έναν αρχικό στρώμα (initial layer) μέσα στο σχήμα χαλάρωσης. Ανάλογα δουλεύουμε και με τις συνοριακές συνθήκες ώστε να αποφύγουμε την εμφάνιση τεχνητών συνοριακών στρωμάτων (boundary layers).

Γενικά η επιλογή των σταθερών  $c_k, d_k, k = 1, 2, 3, 4$  βασίζεται σε πρόχειρους υπολογισμούς των Ιακωβιανών πινάκων του αρχικού μη γραμμικού συστήματος  $\partial \mathbf{F}(\mathbf{u})/\partial \mathbf{u}$ ,  $\partial \mathbf{G}(\mathbf{u})/\partial \mathbf{u}$ .

Μια άλλη επιλογή για τις σταθερές  $c_i, d_i$  είναι να υπολογίζονται τοπικά σε κάθε υπολογιστικό κελί οι ιδιοτιμές των Ιακωβιανών (όταν είναι σχετικά εύκολο να υπολογιστούν και με μικρό κόστος) και τελικά να παίρνουμε το μέγιστο αυτών των ιδιοτιμών από το κάθε κελί ως,

$$\begin{aligned} c_{i+\frac{1}{2},j} &= \max_{u \in \{u_{i+\frac{1}{2},j}, u_{i-\frac{1}{2},j}\}} |\partial \mathbf{F}(\mathbf{u})/\partial \mathbf{u}_k|, \quad d_{i,j+\frac{1}{2}} = \max_{u \in \{u_{i,j+\frac{1}{2}}, u_{i,j-\frac{1}{2}}\}} |\partial \mathbf{G}(\mathbf{u})/\partial \mathbf{u}_k| \\ c_k &= d_k = \max_{i,j} (c_{i+\frac{1}{2},j}, d_{i,j+\frac{1}{2}}). \end{aligned}$$

Οι τιμές αυτές δεν πρέπει να απέχουν πολύ από τις ιδιοτιμές, διότι εισάγουν στο σχήμα αριθμητικό ιξώδες. Η πρώτη επιλογή για τον υπολογισμό των χαρακτηριστικών

ταχυτήτων αποδεικνύετε αρκετά επαρκείς για τους υπολογισμούς μας, όλα αυτά αποτελούν μια ενδιαφέρουσα περιοχή της αριθμητικής ανάλυσης στην οποία υπάρχει χώρος για επί πλέον διερεύνηση.

## Κεφάλαιο 6

# Αριθμητικά Αποτελέσματα σε Δύο Διαστάσεις

Για να καθορίσουμε τη συμπεριφορά του σχήματος χαλάρωσης και για τις δύο μορφές του μαθηματικού μοντέλου στις δύο διαστάσεις χρησιμοποιούμε ένα πρόβλημα όπου ο πυθμένας προσομοιώνει έναν κωνικό σωρό άμμου, όπως εξετάστηκε στα Chesher et al. [4], De Vriend [11] και Hudson [16]. Το πρόβλημα παρουσιάζεται σε ένα κανάλι μήκους  $1000m \times 1000m$  με τεχνητές αρχικές συνθήκες

$$h^*(x, y, 0) = 10 - B(x, y, 0) \quad u^*(x, y, 0) = \frac{Q}{h^*(x, y, 0)}, \quad u^*(x, y, 0) = 0$$

και με αρχικές συνθήκες του πυθμένα του κωνικού σωρού άμμου,

$$B(x, y, 0) = \begin{cases} \sin^2\left(\frac{\pi(x-300)}{200}\right) \sin^2\left(\frac{\pi(y-400)}{200}\right) & \text{αν } 300 \leq x \leq 500, 400 \leq y \leq 600 \\ 0 & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

όπως βλέπουμε στα σχήματα (6.1).

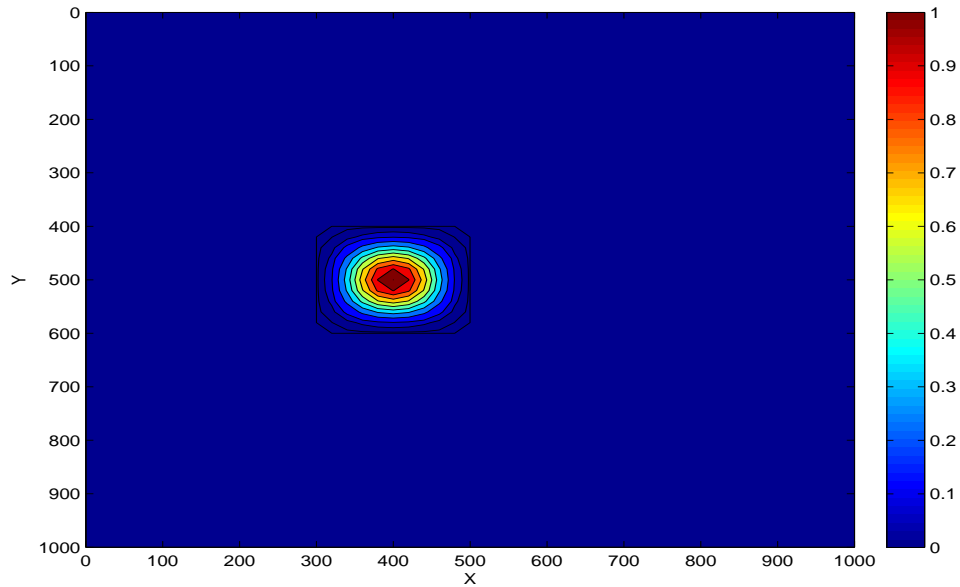
Οι συνοριακές συνθήκες στο πάνω σύνορο είναι

$$h_{-i,j}^{n+1} = h_{0,j}^n, \quad (uh)_{-i,j}^{n+1} = Q, \quad (vh)_{-i,j}^{n+1} = (vh)_{0,j}^n, \quad \text{και} \quad Q_{-i,j}^{n+1} = Q_{0,j}^n,$$

όπου  $Q$  είναι μια σταθερή τιμή και οι κάτω συνοριακές συνθήκες είναι

$$\mathbf{w}_{I+i,j}^{n+1} = \mathbf{w}_{I,j}^n, \quad \mathbf{w}_{i,-j}^{n+1} = \mathbf{w}_{i,0}^n, \quad \text{και} \quad \mathbf{w}_{i,J+j}^{n+1} = \mathbf{w}_{i,J}^n,$$

όπου  $i, j = 1, 2$ .



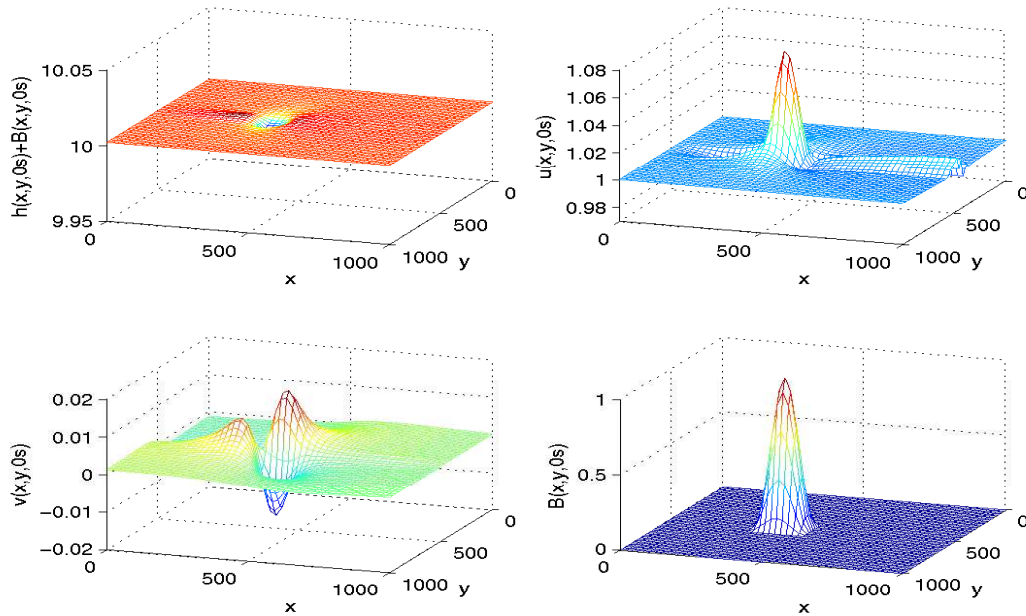
Σχήμα 6.1: Αρχική τιμή για τον πυθμένα  $B$  στο δυδιάστατο πρόβλημα

Για να πάρουμε τις αρχικές συνθήκες, από τις παραπάνω τεχνικές αρχικές, υπολογίζουμε τη ροή του νερού επαναλαμβάνοντας το σχήμα του Roe (όπως παρουσιάστηκε στη παράγραφο 5.2) για τις εξισώσεις ρηχών υδάτων σε δύο διαστάσεις, μέχρι η ροή να έρθει σε στάσιμη κατάσταση ( $\mathbf{w}_t = 0$ ), κρατώντας δηλαδή πάντα τον πυθμένα σταθερό ( $B_t = 0$ ). Θεωρούμε ότι έχουμε πετύχει το παραπάνω αν

$$|\mathbf{w}_{i,j}^{n+1} - \mathbf{w}_{i,j}^n| \leq tol,$$

όπου  $tol$  είναι μια επιθυμητή ανοχή. Σ' αυτήν την εργασία παίρνουμε  $Q = 10$  και με τιμή για τον αριθμό  $CFL = 0.5$ ,  $tol = 10^{-6}$  ή σταματάμε τον χρόνο επανάληψης στα 15 λεπτά αν η ροή του νερού είναι αργή και υποθέτουμε ότι έχει έρθει πλέον σε στάσιμη κατάσταση. Το αποτέλεσμα με βάση τα παραπάνω για τις πραγματικές αρχικές συνθήκες παρουσιάζονται στο σχήμα (6.2). Σημειώνουμε ότι μικρά εξογκώματα που εμφανίζονται στις αρχικές συνθήκες, δεν αναπτύσσονται στην εξέλιξη του χρόνου. Οι παραπάνω αρχικές τιμές θα χρησιμοποιηθούν στο σχήμα χαλάρωσης για το δυδιάστατο πρόβλημά μας.





Σχήμα 6.2: Αρχικές τιμές για το πρόβλημα.

## 6.1 Αριθμητικά Αποτελέσματα σε 2Δ για το Σχήμα Χαλάρωσης

Στις επόμενες παραγράφους θα χρησιμοποιήσουμε το δευτεροβάθμιο σχήμα χαλάρωσης (τύπου MUSCL) και για τις δύο μορφές A και C για να πάρουμε την προσεγγιστική λύση του προβλημάτος. Το δυδιάστατο πρόβλημά μας (βλ. Hudson [16]) χρησιμοποιείται με τον πυθμένα να αλληλεπιδρά αργά ή γρήγορα με την ροή του νερού, και στις δύο μορφές A και C για να τις συγκρίνουμε. Οι συναρτήσεις της μεταφοράς ιζήματος (5.5) χρησιμοποιούνται με βαθμό πορόδους  $\sigma = 0.4$ .

Για όλα τα αριθμητικά σχήματα σ' αυτήν την παράγραφο χρησιμοποιούμε  $\Delta x = \Delta y = 20m$  και τον minmod οριοθέτη ροής. Στο αριθμητικό μας σχήμα χρησιμοποιούμε το CFL = 0.45. Τέλος αναφέρουμε ότι δεν χρησιμοποιούμε το τροποποιημένο σχήμα χαλάρωσης όπως κάναμε για να πάρουμε τα αποτελέσματα στο πρωτοβάθμιο σχήμα.

### 6.1.1 Αριθμητικά αποτελέσματα για πυθμένα που αλληλεπιδρά αργά με την ροή νερού

Πρώτα μελετήσαμε το πρόβλημά μας με τον πυθμένα να αλληλεπιδρά αργά με την ροή νερού,  $A = 0.001$ . Παρουσιάζουμε αποτελέσματα σε δύο χρονικές στιγμές  $t = 24h$  και  $t = 100h$ , για τις δύο μορφές  $A$  και  $C$ , συγκρίνοντας τα αποτελέσματα για την κίνηση του πυθμένα, την επιφάνεια του νερού και της ταχύτητας  $u$ .

Ο De Vriend [11], αναζήτησε μία προσεγγιστική λύση για την γωνία διάχυσης ενός όγκου στον πυθμένα. Για το παράδειγμα του κώνου άμμου, ο όγκος στον πυθμένα συνεχώς αλλάζει μορφή με συγκεκριμένο τρόπο καθώς περνάει ο χρόνος, σχηματίζοντας μια μορφή “αστεριού” (star shape pattern). Μία προσεγγιστική λύση για την γωνία διάχυσης για την συγκεκριμένη μορφή, μπορεί να βρεθεί υποθέτοντας ότι ο πυθμένας αλληλεπιδρά αργά με την ροή του νερού (δηλ.  $A < 0.01$ ) και η ροή του νερού βρίσκεται σε στάσιμη κατάσταση. Η αναλυτική προσέγγιση της λύσης της γωνίας διάχυσης με την συγκεκριμένη μορφή (βλ. Hudson [16]) είναι

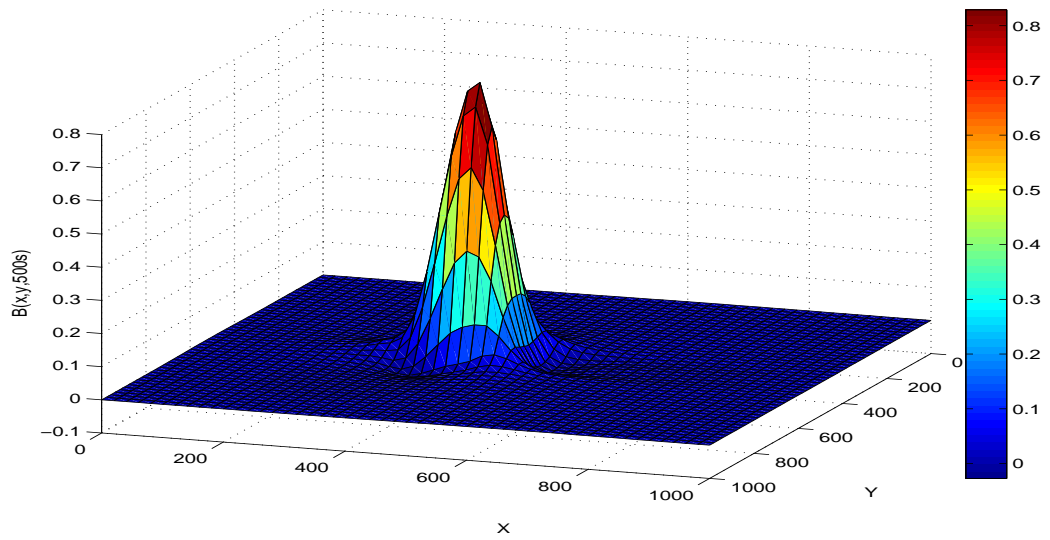
$$\tan \alpha = \frac{3\sqrt{3}(m-1)}{9m-1}$$

και αν  $m = 3$  η γωνία διάχυσης είναι

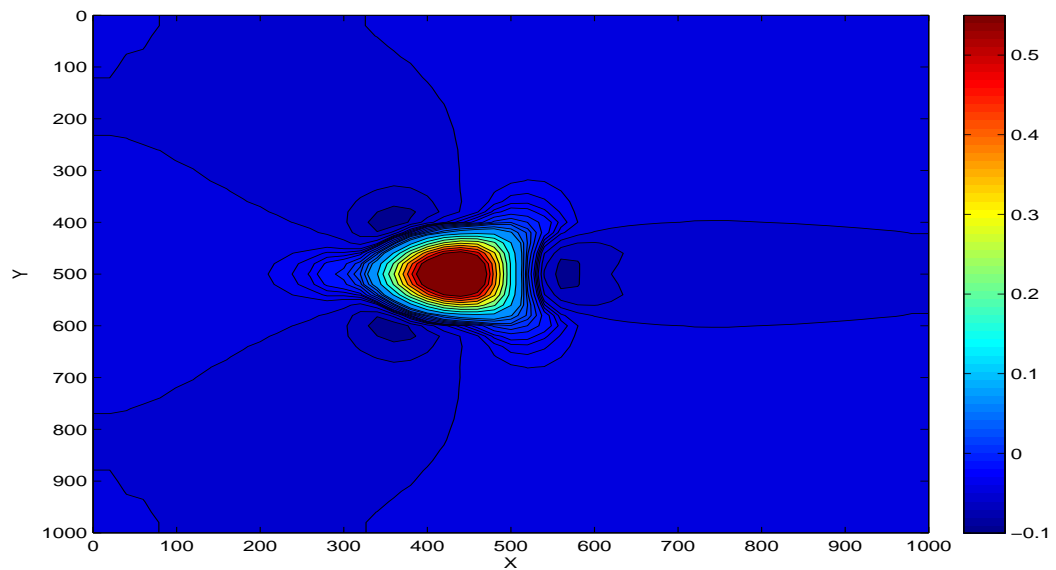
$$\alpha = \tan^{-1} \left( \frac{3\sqrt{3}}{13} \right) = 21.7867893^\circ.$$

Τα αριθμητικά αποτελέσματα από τη μορφή  $A$  για το  $B$  και για  $t = 24h$  παρουσιάζονται στα σχήματα (6.3)-(6.5), και αντίστοιχα για τη μορφή  $C$  στα σχήματα (6.6)-(6.8). Για τις δύο μορφές η αρχική μορφή του πυθμένα έχει αρχίσει να μεταφέρεται κατά μήκος του καναλιού και να διαχέεται στη μορφή “αστεριού” αυξάνοντας το συνολικό βάθος του νερού με ταυτόχρονη μείωση της  $u$  ταχύτητας σε σχέση με τις αρχικές τιμές. Τα αποτελέσματα και για τις δύο μορφές παραμένουν ομαλά με την μορφή  $C$  να εμφανίζει μεγαλύτερη διασπορά ως προς το αποτέλεσμα του πυθμένα αλλά κρατώντας τα επίπεδα του βάθους και της ταχύτητας  $u$  πλησιέστερα στα αρχικά δεδομένα.

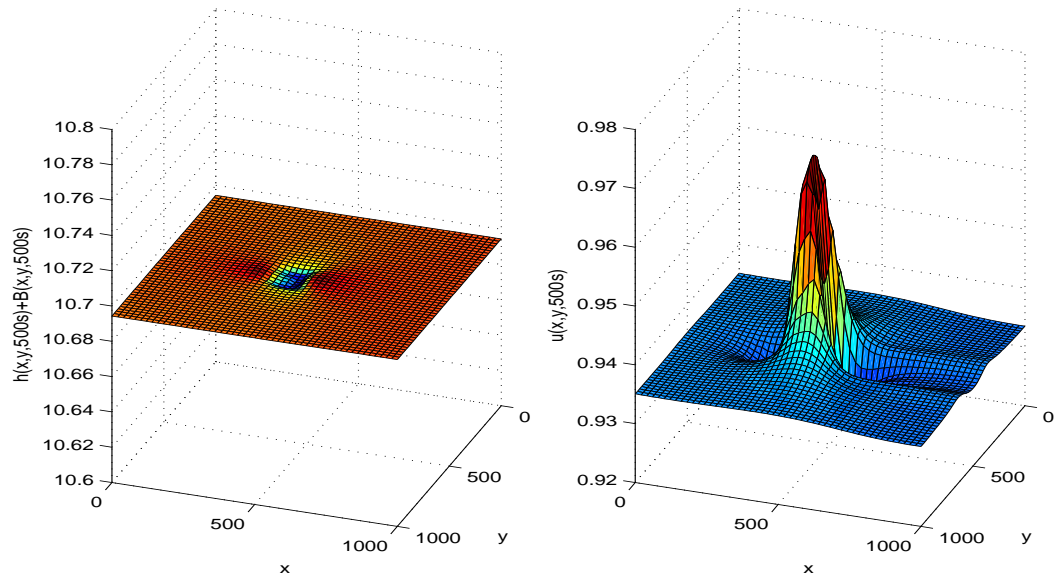
Τα αριθμητικά αποτελέσματα και των δύο μορφών για χρόνο  $t = 100h$  παρουσιάζονται στα σχήματα (6.9) έως (6.14) και παρατηρούμε ότι οι δύο μορφές μας παράγουν ομαλά αποτελέσματα και συγκρίσιμα. Η μορφή του “αστεριού” για τις δύο μορφές έχει σχηματιστεί σχεδόν στην ίδια έκταση και για τις δύο μορφές, αυξάνοντας ταυτόχρονα



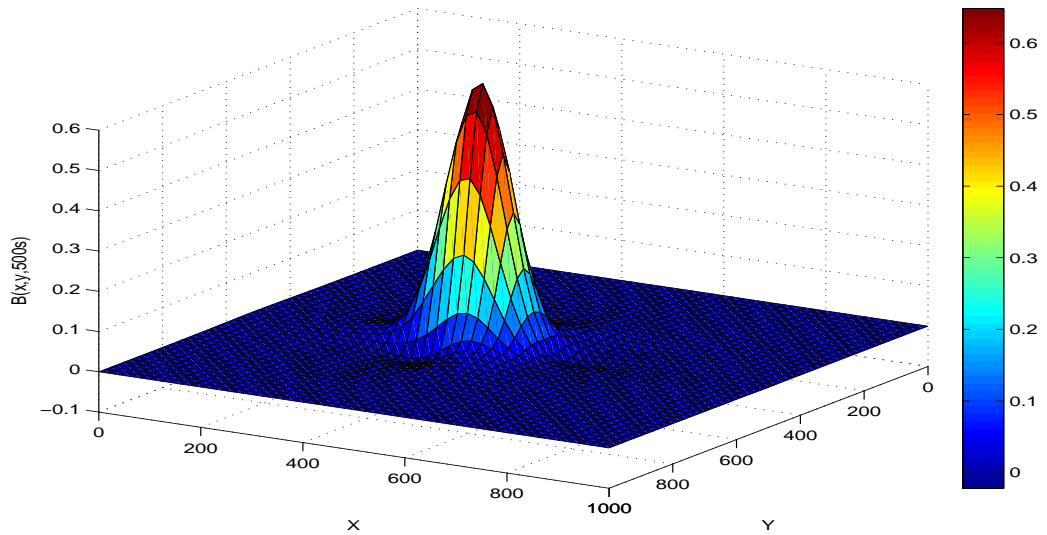
Σχήμα 6.3: Αριθμητικό αποτέλεσμα για το  $B$  (μορφή A και  $A = 0.001$ ) για  $t = 24h$



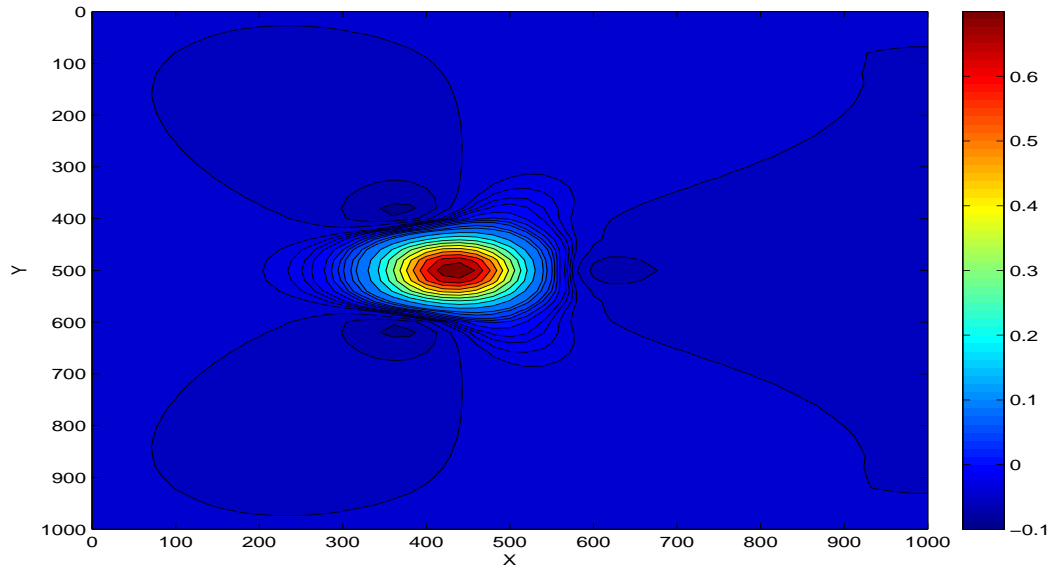
Σχήμα 6.4: Ισοϋψής καμπύλες για το  $B$  (μορφή A και  $A = 0.001$ ) για  $t = 24h$



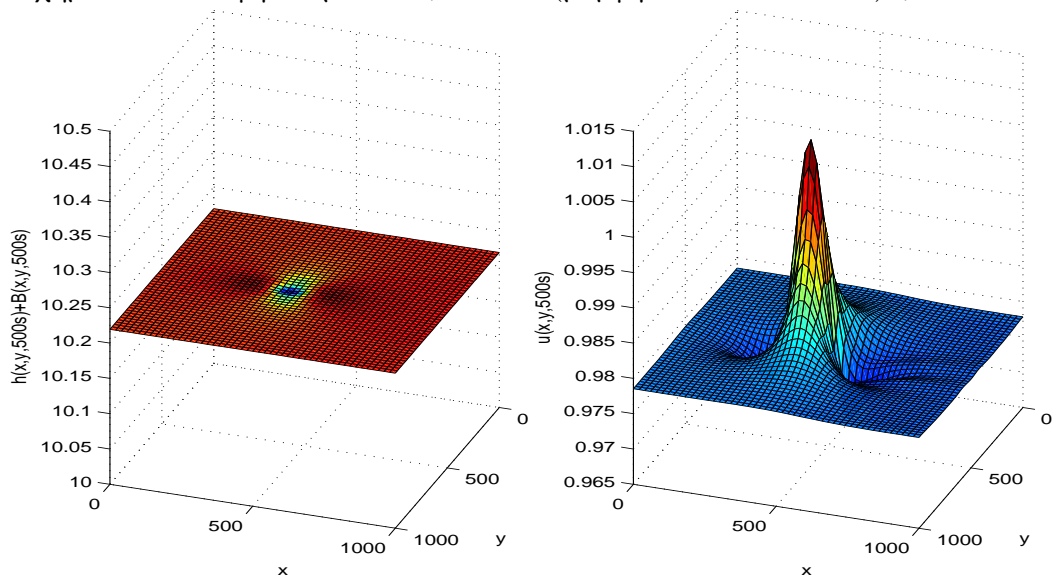
Σχήμα 6.5: Αριθμητικά αποτελέσματα για το  $h + B$  και  $u$  (μορφή A και  $A = 0.001$ ) για  $t = 24h$



Σχήμα 6.6: Αριθμητικό αποτέλεσμα για το  $B$  (μορφή C και  $A = 0.001$ ) για  $t = 24h$



Σχήμα 6.7: Ισοϋψής καμπύλες για το  $B$  (μορφή C και  $A = 0.001$ ) για  $t = 24h$



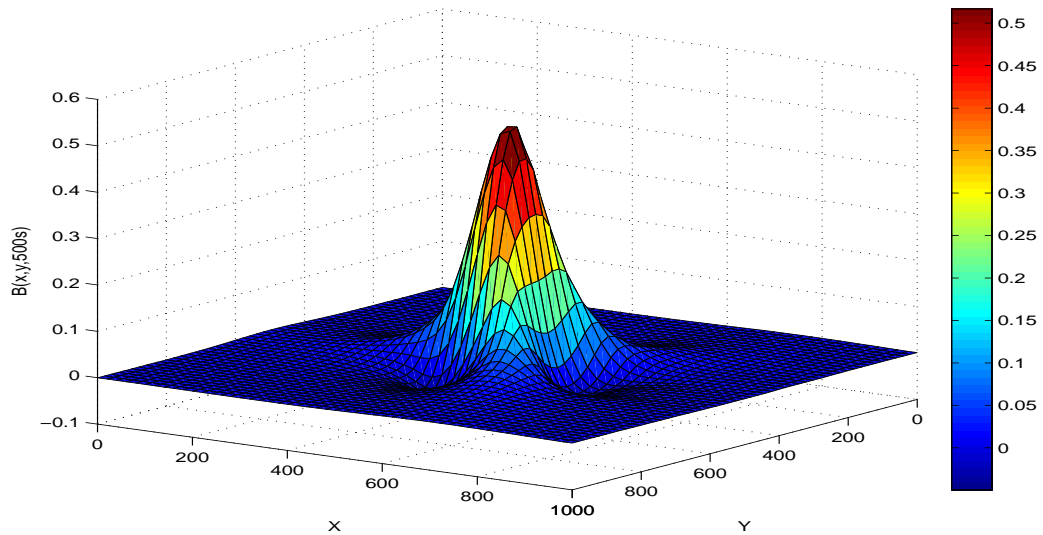
Σχήμα 6.8: Αριθμητικά αποτελέσματα για το  $h + B$  και  $u$  (μορφή C και  $A = 0.001$ ) για  $t = 24h$

το συνολικό βάθος του νερού. Σημειώνουμε εδώ ότι η αύξηση αυτή οφείλεται στο πολύ μεγάλο αριθμό χρονικών υπολογιστικών βημάτων μέχρι του τελικού χρόνου των 100 ωρών με ταυτόχρονη χρήση σταθερής εκροής σαν πάνω συνοριακή συνθήκη.

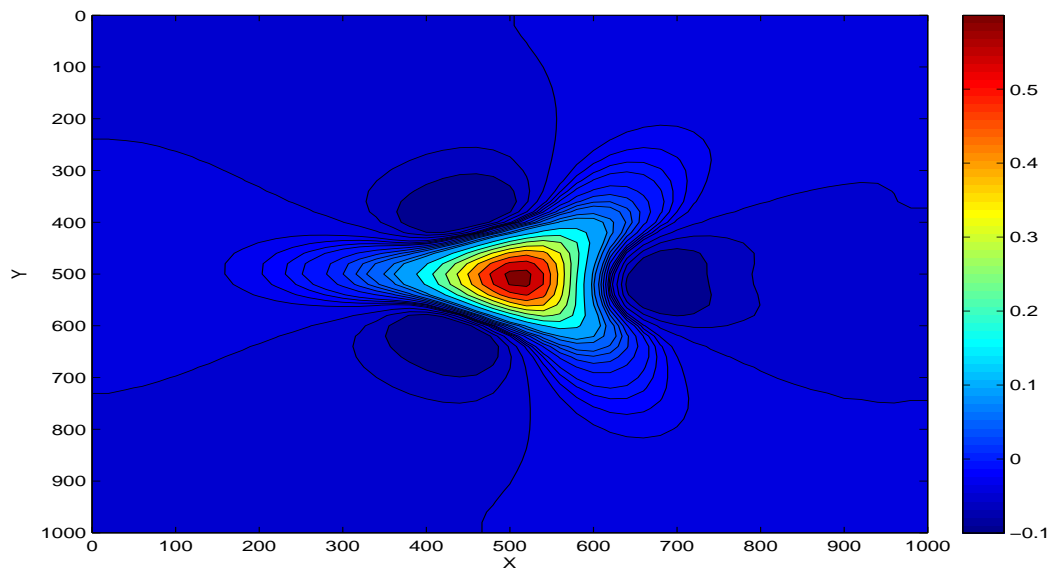
Τα αποτελέσματα είναι σχεδόν συγκρίσιμα μεταξύ τους αλλά και με τα αποτελέσματα δημοσιεύσεων (βλ. Hudson [16]). Επιπλέον όπως δείχνουμε στα σχήματα (6.15) και (6.16) τα αποτελέσματα και των δύο μορφών ακολουθούν τη γωνία διάδοσης του πυθμένα.

### 6.1.2 Αριθμητικά αποτελέσματα για πυθμένα που αλληλεπιδρά γρήγορα με την ροή νερού

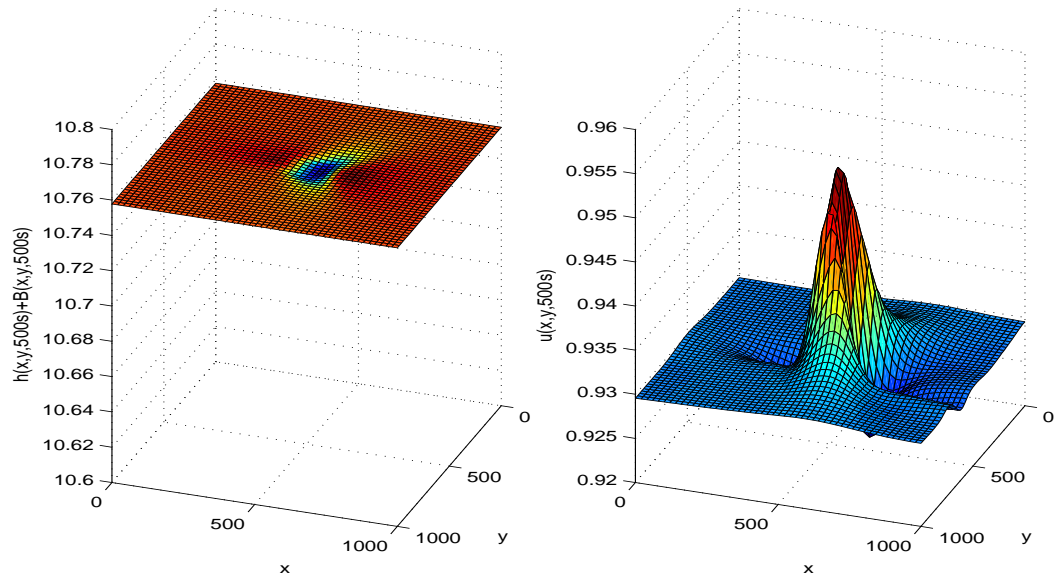
Σε αυτή τη παράγραφο θα μελετήσουμε τώρα το πρόβλημά μας με τον πυθμένα να αλληλεπιδρά γρήγορα με την ροή νερού,  $A = 1$ . Χρησιμοποιήσαμε ως τελικό χρόνο  $t = 500$  δευτερόλεπτα. Τα αριθμητικά αποτελέσματα με την μέθοδο του relaxation για τις μορφές A (βλ. σχήματα (6.17)-(6.19) είναι συγκρίσιμα και μεταξύ τους και με δημοσιευμένα αποτελέσματα (βλ. Hudson [16]). Στα σχήματα (6.17) και (6.21) βλέπουμε ότι το αριθμητικό σχήμα χλάρωσης μας δίνει ομαλά χωρίς ταλαντώσεις αποτελέσματα και στις δύο μορφές. Στα σχήματα (6.18) και (6.22) παρατηρούμε ότι για το ολικό ύψος του ποταμού τα αποτελέσματα μας έχουν μείνει κοντά στις αρχικές τιμές, ενώ η μέγιστη τιμή της ταχύτητας και στις δύο μορφές έχει ελάχιστα μικρύνει.



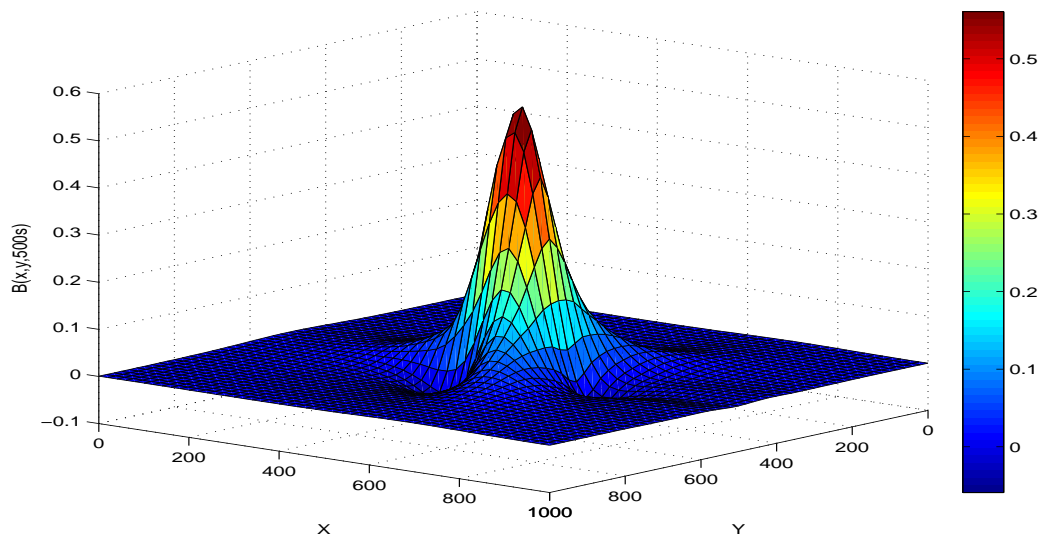
Σχήμα 6.9: Αριθμητικό αποτέλεσμα για το  $B$  (μορφή A και  $A = 0.001$ ) για  $t = 100h$



Σχήμα 6.10: Ισοϋψής καμπύλες για το  $B$  (μορφή A και  $A = 0.001$ ) για  $t = 100h$

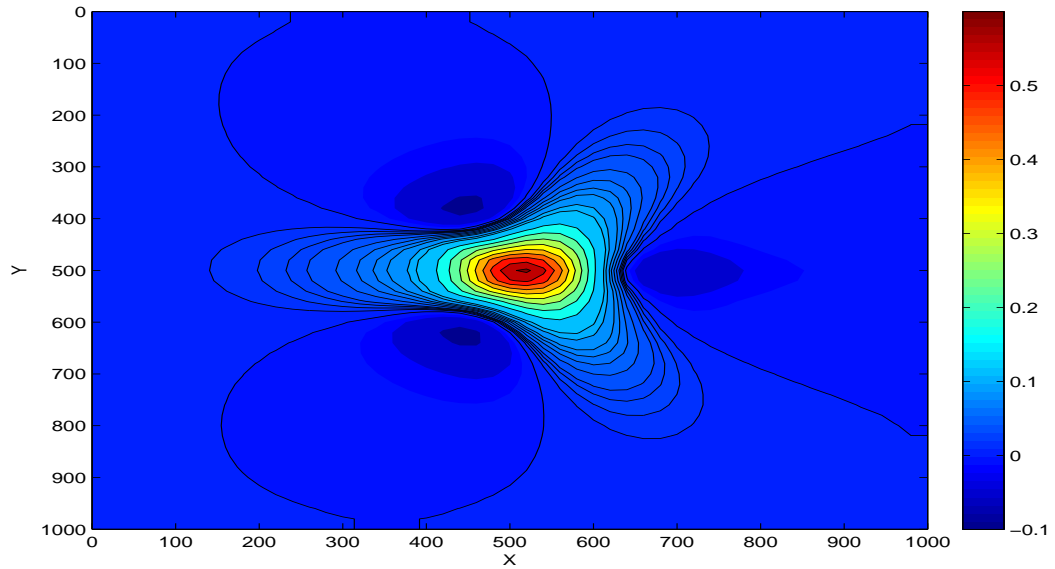


Σχήμα 6.11: Αριθμητικά αποτελέσματα για το  $h + B$  και  $u$  (μορφή A και  $A = 0.001$ ) για  $t = 100h$

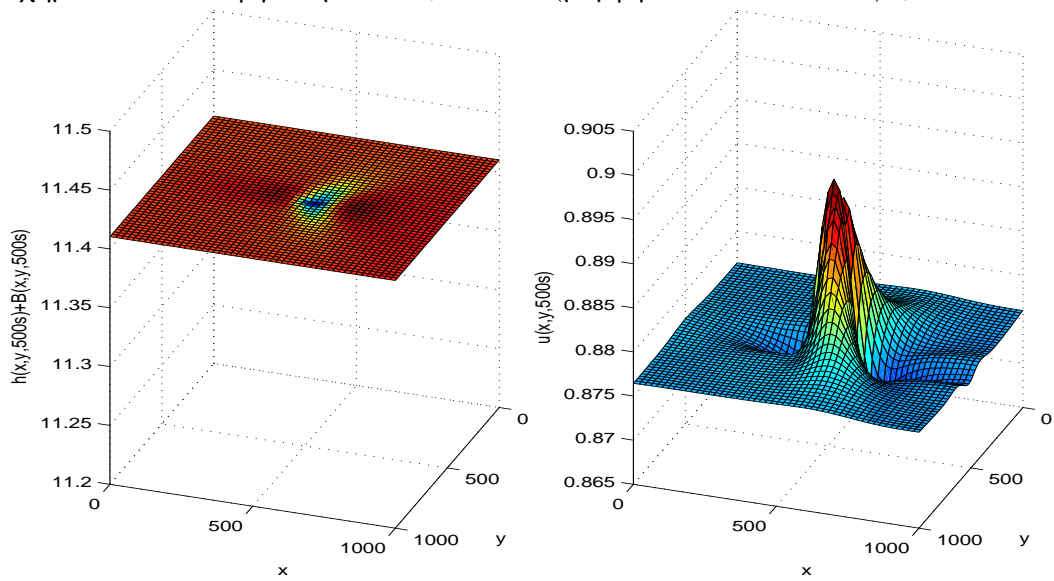


Σχήμα 6.12: Αριθμητικό αποτέλεσμα για το  $B$  (μορφή C και  $A = 0.001$ ) για  $t = 100h$

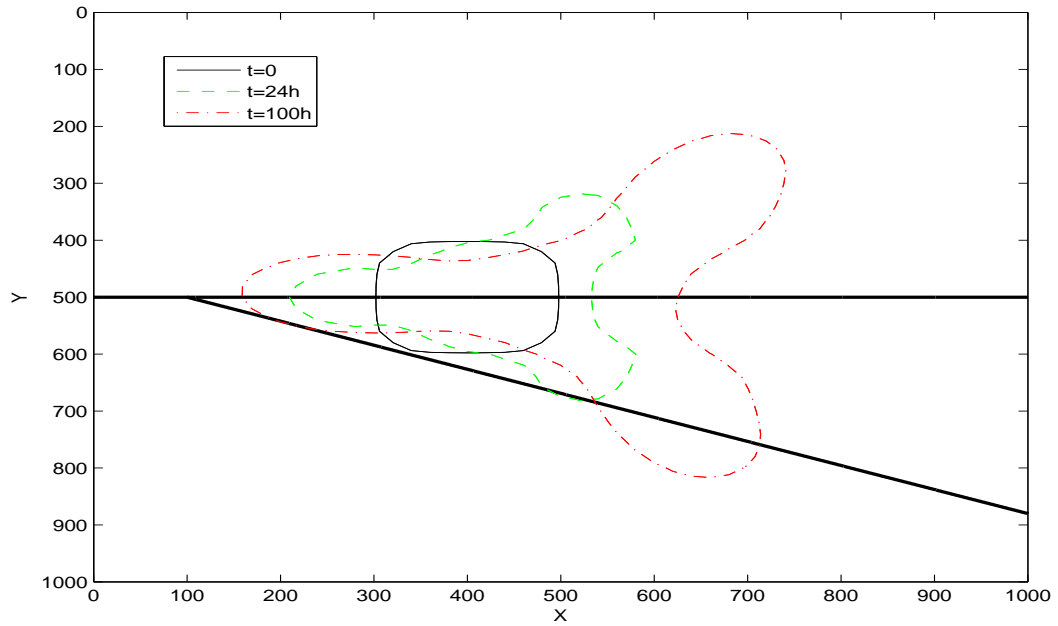




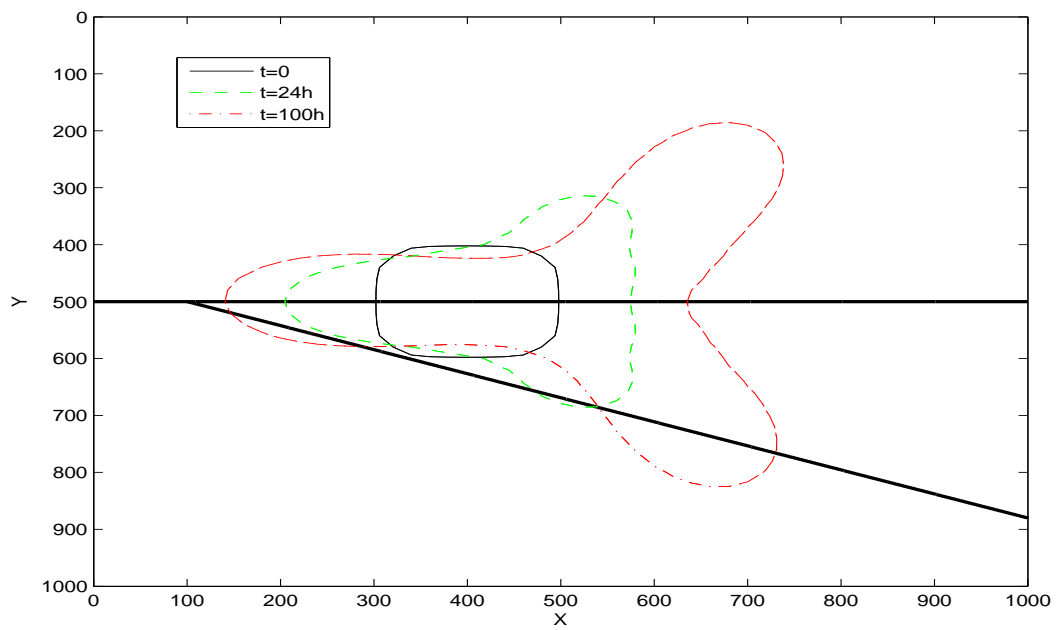
Σχήμα 6.13: Ισοϋψής καμπύλες για το  $B$  (μορφή C και  $A = 0.001$ ) για  $t = 100h$



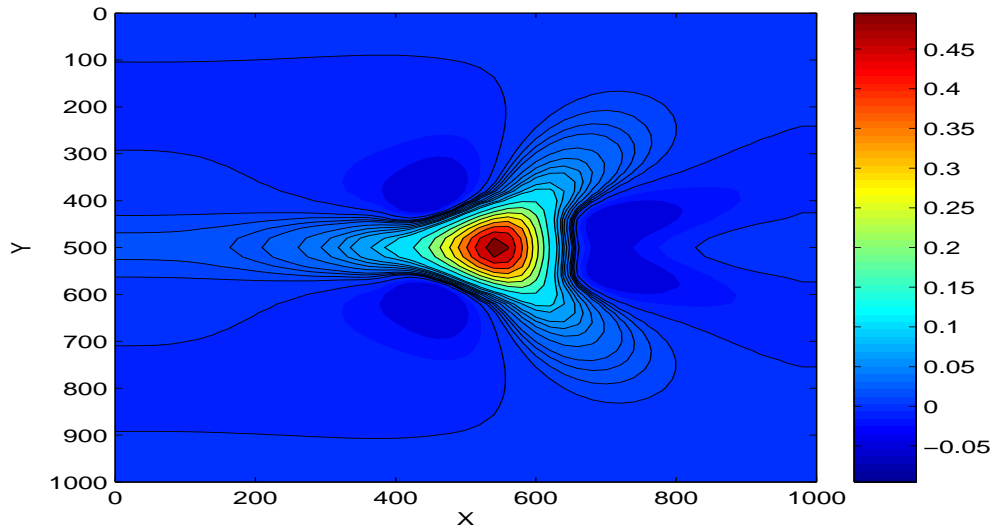
Σχήμα 6.14: Αριθμητικά αποτελέσματα για το  $h + B$  και  $u$  (μορφή C και  $A = 0.001$ ) για  $t = 100h$



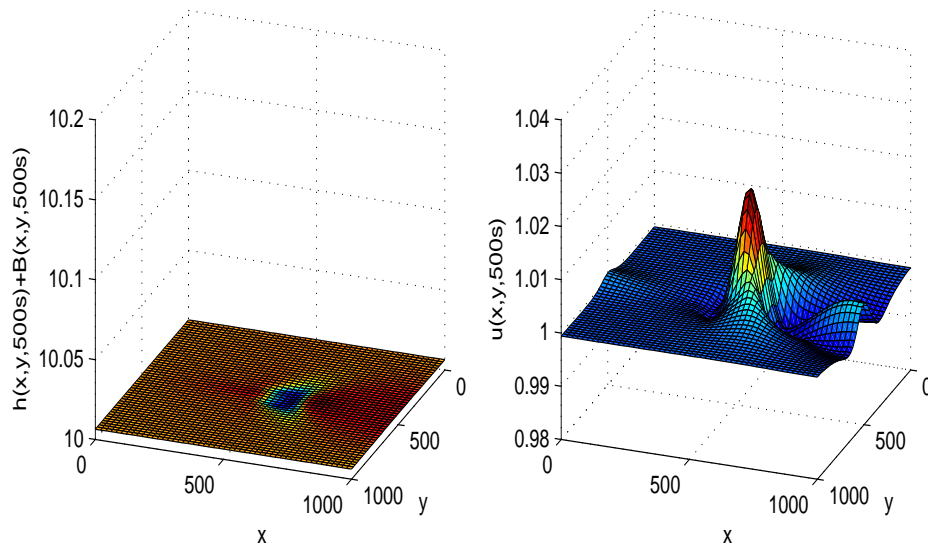
Σχήμα 6.15: Η γωνία διάδοσης και τα αποτελέσματα για τη μορφή A



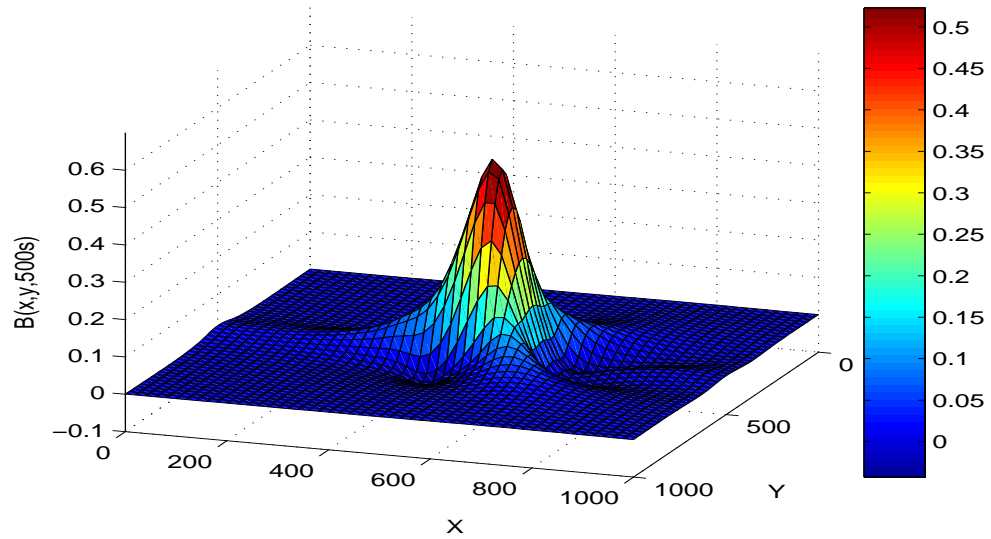
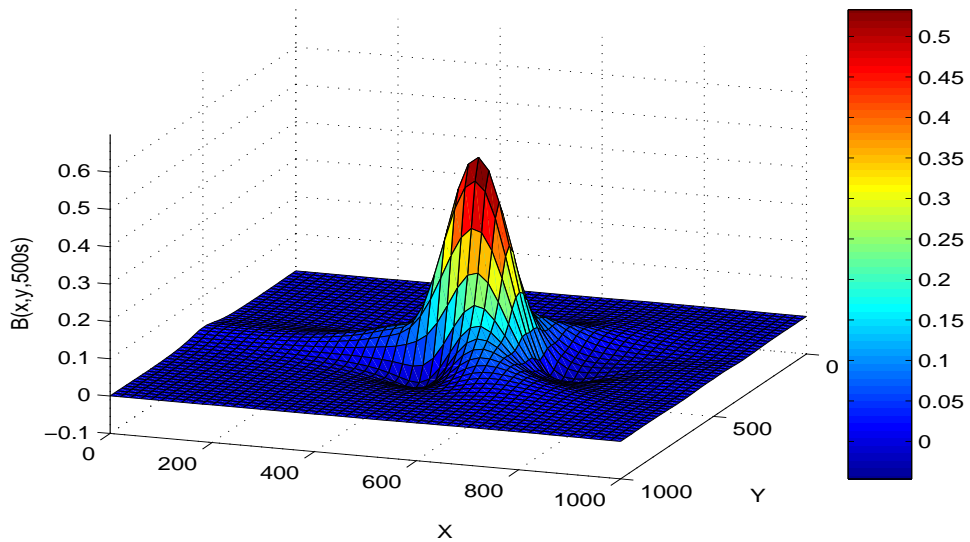
Σχήμα 6.16: Η γωνία διάδοσης και τα αποτελέσματα για τη μορφή C

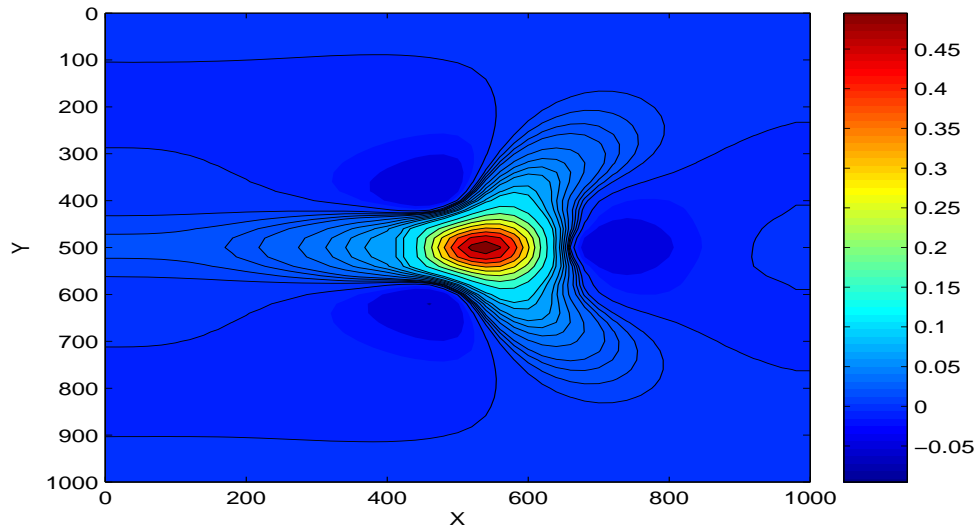


Σχήμα 6.17: Ισοϋψής καμπύλες για το  $B$  (μορφή  $A$  και  $A = 1$ ) για  $t = 500s$

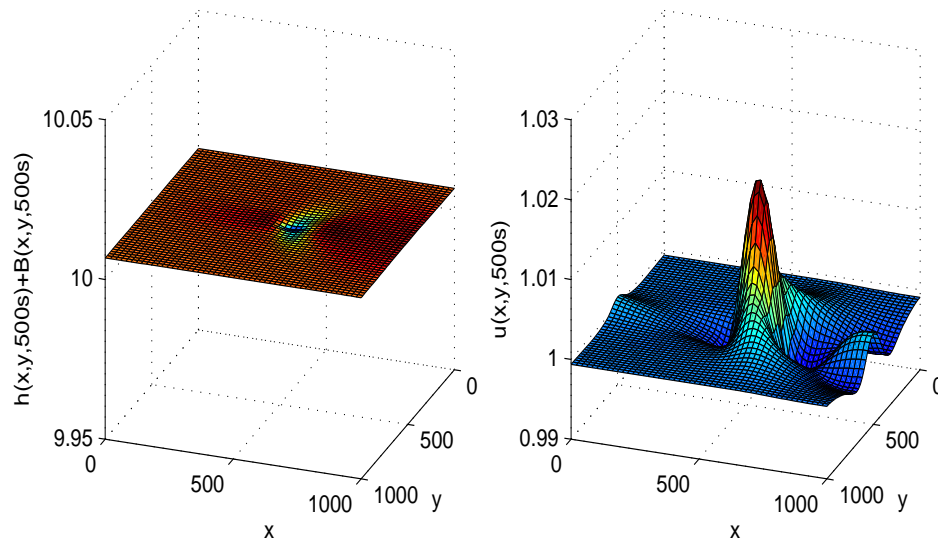


Σχήμα 6.18: Αριθμητικά αποτελέσματα για το  $h + B$  και  $u$  (μορφή  $A$  και  $A = 1$ ) για  $t = 500s$

Σχήμα 6.19: Αριθμητικό αποτέλεσμα για το  $B$  (μορφή A και  $A=1$ ) για  $t=500s$ Σχήμα 6.20: Αριθμητικό αποτέλεσμα για το  $B$  (μορφή C και  $A=1$ ) για  $t=500s$



Σχήμα 6.21: Ισοϋψής καμπύλες για το  $B$  (μορφή C και  $A = 1$ ) για  $t = 500s$



Σχήμα 6.22: Αριθμητικά αποτελέσματα για το  $h + B$  και  $u$  (μορφή C και  $A = 1$ ) για  $t = 500s$

## 6.2 Τελικά Συμπεράσματα

Στην παρούσα εργασία παρουσιάστηκε ένα απλοποιημένο μορφοδυναμικό μοντέλο που, κάτω από κάποιες παραδοχές, μπορεί να περιγράψει τις αλλαγές στη τοπογραφία του πυθμένα σε υδροδυναμικές ροές. Το μοντέλο αυτό αποτελείται από το υδραυλικό μέρος (που περιγράφεται από τις πλήρεις υδροδυναμικές εξισώσεις ρηχών υδάτων) και το μέρος που αφορά στην κίνηση των φερτών υλών.

Ακολουθώντας πρόσφατες ερευνητικές εργασίες, αρχικά παρουσιάστηκαν τρεις διαφορετικές μορφές του παραπάνω μοντέλου στη μία διάσταση και επιλέχθηκαν δύο από αυτές για να επιλυθούν αριθμητικά, οι μορφές A-SF και C, όπου έχουν σχετικά διαφορετικές συναρτήσεις ροής (flux functions) και μή ομογενής (πηγαίους) όρους. Οι δύο αυτές μορφές ανήκουν στη κατηγορία της μη στάσιμης προσέγγισης, όπου η ροή του νερού και οι μεταβολές του πυθμένα υπολογίζονται ταυτόχρονα και για αυτή την προσέγγιση το σύστημα των εξισώσεων διακριτοποιείται ταυτοχρόνως.

Στη συνέχεια παρουσιάστηκε και υλοποιήθηκε το δεύτερης, χωρικής, τάξης upwind αριθμητικό σχήμα του Roe, που βασίζεται στην προσεγγιστική λύση μη-γραμμικών προβλημάτων τύπου Riemann, κατάλληλα τροποποιημένο ώστε να επιλύει τις παραπάνω μορφές του μοντέλου. Αναπαράχθηκαν τα καλύτερα αριθμητικά αποτελέσματα, με χρήση αυτού το σχήματος, ώστε να αποτελέσουν ένα μέτρο σύγκρισης για το σχήμα τύπου χαλάρωσης που παρουσιάστηκε στη συνέχεια, αλλά και για να υπολογιστούν κατάλληλες αρχικές τιμές για κάθε προσομοίωση.

Τα αριθμητικά σχήματα χαλάρωσης, όπως παρουσιάστηκαν στη συνέχεια, βασίζονται στον μετασχηματισμό χαλάρωσης των μη-γραμμικών υπερβολικών νόμων διατήρησης σε ένα γραμμικό σύστημα νόμων διατήρησης, όπου δεν χρειάζεται πλέον η επίλυση μη-γραμμικών προβλημάτων τύπου Riemann. Το πλεονέκτημα αυτό των σχημάτων χαλάρωσης είναι σημαντικό όταν το μαθηματικό μοντέλο είναι πολύπλοκο και είναι δύσκολη ή έχει μεγάλο υπολογιστικό κόστος η λύση προβλημάτων τύπου Riemann. Η προσέγγιση χαλάρωσης μπορεί να θεωρηθεί και σαν προσέγγιση της συνάρτησης ροής (flux function) και είναι δυνατόν να εφαρμοστεί για όποια συνάρτηση ροής, όπως φάνηκε για τις δύο μορφές, A-SF και C, του μοντέλου μεταφοράς φερτών. Θα μπορούσαμε να πούμε ότι η προσέγγιση χαλάρωσης γραμμικοποιεί το πρόβλημα Riemann. Τα αριθμητικά αποτελέσματα για το δεύτερης τάξης σχήμα χαλάρωσης τύπου MUSCL και για τις δύο μορφές και

για όλα τα προβλήματα που παρουσιάστηκαν έδωσαν ομαλά αποτελέσματα και απολύτως συγκρίσιμα με αυτά του σχήματος του Roe.

Η επέκταση και εφαρμογή του μοντέλου χαλάρωσης στις δύο διαστάσεις παρουσιάστηκε στη συνέχεια και για τις δύο μορφές, A-SF και C, δίνοντας σχεδόν συγκρίσιμα μεταξύ τους αποτελέσματα και συγκρίσιμα με αντίστοιχα δημοσιευμένα αποτελέσματα.

Φυσικά πρέπει να γίνουν εφαρμογές του μοντέλου και του σχήματος χαλάρωσης και σε άλλες περιπτώσεις και πιθανές συγκρίσεις με δεδομένα πεδίου ή σε εργαστηριακές περιπτώσεις, ώστε να ελεγχθεί η αξιοπιστία των παρεχόμενων προβλέψεων. Πρέπει, επίσης, να δοκιμαστούν και άλλοι τύποι στερεομεταφοράς, ώστε το μοντέλο να δώσει πλέον αξιόπιστα αποτελέσματα.

Επιπλέον ερευνητικές κατευθύνσεις, ως προς το σχήμα χαλάρωσης, μπορεί να αποτελέσουν η κατασκευή τρίτης τάξης ακρίβειας σχημάτων καθώς και η κατασκευή και μελέτη κατάλληλων Runge-Kutta μεθόδων προς την κατεύθυνση των πεπλεγμένων (implicit) στο χρόνο σχημάτων όπου δεν περιορίζονται από την συνθήκη CFL και επιτρέπουν μεγαλύτερα υπολογιστικά χρονικά βήματα, πράγμα ιδιαίτερα χρήσιμο με προσομοιώσεις μεγάλης χρονικής διάρκειας.

# Βιβλιογραφία

- [1] Ascher U., Ruuth S., Spiteri R., (1997). *Implicit-Explicit Runge Kutta Methods for time dependet partial differential equations*, Appl. Numer. Math., **25**:251-167.
- [2] Bermúdez and Vázquez M. E., (1994). *Upwind methods for hyperbolic conservation laws with source terms*. Computers and Fluids, **23**:1049-1071.
- [3] Chaladi A., (1999). *Convergence of relaxation schemes for hyperbolic conservation laws with stiff source terms*, Math. Comput., **68**:955-970.
- [4] Chesher T.J, Wallace H.M, Meadowcroft I.C. & Southgate H.N., (1993). *PISCES: A Morphodynamic Coastal Area Model First Annual Report*, HR Wallingford, Report SR **337**.
- [5] Crnjaric-Zic N., Vukovic S., Sopta L., (2004). *Extension of ENO and WENO schemes to one-dimensional sediment transport equations*. Computers & Fluids, **33**:31-56.
- [6] Cunge J. A., Holly F. M., and Verway A., (1980). *Practical Aspects of Computational River Hydraulics*, Pitman.
- [7] Dafermos C., (2000). *Hyperbolic Conservation Laws in Continuum Physics*, Grundlehren Math. Wiss BD:**325**.
- [8] Damgaard J. S., (1998). *Numerical Schemes for Morphodynamic Simulations*, HR Wallingford, Report IT **459**.
- [9] Delis A.I., Katsaounis Th., (2003). *Relaxation schemes for the shallow water equations*. Int. J. Numer. Methods Fluid, **41**:695-719.



- 
- [10] Delis A.I., Katsaounis Th., (2005). *Numerical solution of the two-dimensional shallow water equations by the application of relaxation methods*. Appl. Math. Model., **29**:754-783.
- [11] De Vriend H.J., (1987). *2DH Mathematical Modelling of Morphological Evolutions in Shallow Water*, Coastal Engineering, **11**:1-27.
- [12] Embid P., Goodman J. and Majda A., (1984). *Multiple steady state for 1D transonic flow*. SIAM J. Sci. Stat. Comput., **8**:21-24.
- [13] Grass A.J., (1981). *Sediment Transport by Waves and Currents*, SERC London, Cent. Mar. Technol, Report No: **FL29**.
- [14] Harten A., (1983). *High resolution schemes for conservation laws*. J. Comput. Phys., **49**:357-393.
- [15] Hubbard M. E. and Garcia-Navarro P., (2000). *Flux difference splitting and the balancing of source terms and flux gradients*. J. Comput. Phys., **165**:89-125.
- [16] Hudson J., (2001). *Numerical Techniques for Morphodynamic Modelling*. Ph.D. Thesis, University of Reading.
- [17] Hudson J. and Sweby P.K., (2003). *Formulations for Numerically Approximating Hyperbolic Systems Governing Sediment Transport*. Journal of Scientific Computing, **19**:225-252.
- [18] Hudson J. and Sweby P.K., (2005). *A high-resolution scheme for the equations governing 2D bed-load sediment transport* Int. J. Numer. Methods Fluid, **47**:1085-1091.
- [19] LeVeque R. J., Yee H.C., (1990). *A study of numerical methods for hyperbolic conservation laws with stiff source term*. J. Comput. Phys., **86**:187-210.
- [20] LeVeque R. J., (1998). *Balancing source terms and flux gradients in high-resolution Godunov methods: The quasi-steady wave-propagation algorithm*. J. Comput. Phys., **146**:346-365.
-

- 
- [21] LeVeque R.J., (2002). *Finite Volume Methods for Hyperbolic Problems*, Cambridge University Press, Cambridge.
- [22] Pareschi L., Russo G., (2005). *Implicit-explicit Runge-Kutta schemes and applications to hyperbolic systems with relaxation*, Journal of Scientific Computing, **25**:129-155.
- [23] Roberto Natalini, (1996). *Convergence to equilibrium for the relaxation approximations of conservation laws*. Comm. Pure Appl. Math., **49**:795-823.
- [24] Roe P. L., (1981). *Approximate Riemann solvers, parameter vectors and difference schemes*. J. Comput. Phys., **43**:357-372.
- [25] Soulsby R. L., (1997). *Dynamics of Marine Sands, A Manual for Practical Applications*, HR Wallingford, Report SR **466**.
- [26] Sweby P. K., (1984). *High resolution schemes using flux limiters for hyperbolic conservation laws*. SIAM J. Num. Anal., **21**:995-1011
- [27] Tang T., Wang J., (2000). *Convergence of MUSCL relaxing schemes to the relaxed schemes for conservation laws with stiff source terms*, J. Sci. Comput., **15**:173-195.
- [28] Toro E.F., (1999). *Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics* Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg.
- [29] Toro E.F., (2001). *Shock Capturing Methods for Free-Surface Flows*. Wiley, New York.
- [30] Jin S. and Xin. Z., (1995). *The relaxing schemes of conservation laws in arbitrary space dimensions*. Comm. Pure Appl. Math., **48**:235-277.
-