



ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ ΚΡΗΤΗΣ

ΒΕΛΤΙΣΤΟΣ ΕΛΕΓΧΟΣ ΣΗΜΑΤΟΔΟΤΗΣΗΣ
ΑΣΤΙΚΩΝ ΟΔΙΚΩΝ ΔΙΚΤΥΩΝ

Διατριβή που υπεβλήθη για την μερική ικανοποίηση
των απαιτήσεων για την απόκτηση
Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης

υπό

Κωνσταντίνου Μ. Αμπουντώλα

Χανιά, Ιανουάριος 2003

Η διατριβή του Κωνσταντίνου Μ. Αμπουντώλα εγκρίνεται από :

Καθ. Μάρκος Παπαγεωργίου _____

Καθ. Αναστάσιος Πουλιέζος _____

Αν. Καθ. Αθανάσιος Μυγδαλάς _____

Πίνακας Περιεχομένων

Πίνακας Περιεχομένων	iv
Σύντομο Βιογραφικό Σημείωμα	viii
Περίληψη	ix
Εισαγωγή	1
1 Έλεγχος κυκλοφορίας αστικών οδικών δικτύων	4
1.1 Εισαγωγή	4
1.1.1 Κυκλοφοριακή συμφόρηση	4
1.1.2 Η ανάγκη ελέγχου της κυκλοφορίας	5
1.1.3 Ο βρόχος ελέγχου	5
1.2 Έλεγχος κυκλοφορίας	6
1.2.1 Βασικές έννοιες	6
1.2.2 Τρόποι ελέγχου κυκλοφορίας μέσω σηματοδοτών	8
1.2.3 Ταξινόμηση των στρατηγικών ελέγχου	9
1.3 Επισκόπηση προηγμένων στρατηγικών ελέγχου	10
1.4 Εισαγωγή στην προτεινόμενη μεθοδολογία	12
2 Μοντελοποίηση κυκλοφοριακής ροής αστικών οδικών δικτύων	14
2.1 Εισαγωγή	14
2.2 Σχεδιασμός του μοντέλου ελέγχου	15
2.2.1 Το μαθηματικό πρότυπο αποθήκευσης-και-προώθησης	15
2.2.2 Ανάπτυξη του μαθηματικού μοντέλου	17

2.3	Διατύπωση του προβλήματος βέλτιστου ελέγχου	22
2.4	Γενικές παρατηρήσεις	24
3	Βέλτιστος έλεγχος συστημάτων διακριτού χρόνου	26
3.1	Εισαγωγή	26
3.1.1	Ιστορική ανασκόπηση	26
3.1.2	Γενικοί ορισμοί	27
3.1.3	Το πρόβλημα του βέλτιστου ελέγχου	29
3.2	Το πρόβλημα βέλτιστου ελέγχου διακριτού χρόνου με περιορισμούς	30
3.3	Επίλυση του προβλήματος	31
3.3.1	Συνθήκες βελτιστοποίησης	31
3.3.2	Ένας αλγόριθμος για την αριθμητική επίλυση προβλημάτων βέλτιστου ελέγχου δια- κριτού χρόνου	33
3.3.3	Προσδιορισμός της κατεύθυνσης αναζήτησης	35
3.3.4	Το πρόβλημα αναζήτησης επί γραμμής	38
3.3.5	Επανατοποθέτηση της κατεύθυνσης αναζήτησης	39
3.3.6	Η μέθοδος RPROP	40
3.4	Γενικές παρατηρήσεις	42
4	Παραδείγματα εφαρμογής	47
4.1	Απαιτούμενα δεδομένα	47
4.2	Δίκτυο 1	48
4.3	Δίκτυο 2	48
4.4	Δίκτυο 3	49
4.5	Δίκτυο 4	51
5	Αποτελέσματα διερευνήσεων	58
5.1	Εφαρμογή στο Δίκτυο 1	58
5.2	Εφαρμογή στο Δίκτυο 2	60
5.3	Εφαρμογή στο Δίκτυο 3	64
5.4	Εφαρμογή στο Δίκτυο 4	80

6 Συμπεράσματα και μελλοντική έρευνα	89
6.1 Σύνοψη	89
6.2 Παρατηρήσεις και μελλοντικές εργασίες	90
A' Θεωρία βελτιστοποίησης	92
A'.1 Βασικές αρχές	92
A'.2 Κυρτός προγραμματισμός	94
A'.3 Ιδιότητες αλγορίθμων	95
A'.4 Μέθοδοι συνάρτησης τιμωρίας	95
Βιβλιογραφία	97

"What's new?" is an interesting and broadening eternal question, but one which, if pursued exclusively, results only in an endless parade of trivia and fashion, the silt of tomorrow. I would like, instead, to be concerned with the question "What is best?", a question which cuts deeply rather than broadly, a question whose answers tend to move the silt downstream.

— Robert M. Pirsig
"Zen and the Art of Motorcycle Maintenance"

Σύντομο Βιογραφικό Σημείωμα

Αμπουντώλας, Κωνσταντίνος Μ. (1976–)

Ο Κωνσταντίνος Μ. Αμπουντώλας είναι γεννημένος στις 5 Μαΐου του 1976, στην Κατερίνη του Νομού Πιερίας. Έχει σπουδάσει Μηχανικός Παραγωγής και Διοίκησης στο Πολυτεχνείο Κρήτης την περίοδο 1994–1999. Επί του παρόντος, είναι μεταπτυχιακός φοιτητής του τμήματος Μηχανικών Παραγωγής και Διοίκησης στον τομέα Επιχειρησιακής Έρευνας. Κατά την περίοδο 01/01/2000 μέχρι 31/06/2001 είναι υπότροφος επιμόρφωσης στο Ινστιτούτο Ηλεκτρονικής Δομής και Λέιζερ του Ιδρύματος Τεχνολογίας και Έρευνας (Ι.Τ.Ε.), ενώ από 01/09/2001 μέχρι και σήμερα είναι ειδικός μεταπτυχιακός υπότροφος του τμήματος Μ.Π.Δ.

Στα ερευνητικά του ενδιαφέροντα περιλαμβάνονται η επιχειρησιακή έρευνα, ο βέλτιστος και αυτόματος έλεγχος δυναμικών συστημάτων, η θεωρία βελτιστοποίησης καθώς και η μοντελοποίηση και ο έλεγχος αστικών οδικών δικτύων μεγάλης κλίμακας. Έχει συν-δημοσιεύσει επιστημονικές εργασίες σε διεθνή περιοδικά και συνέδρια με θέμα τον έλεγχο αστικών οδικών δικτύων. Τα τελευταία τρία χρόνια ως επιστημονικός συνεργάτης στο Εργαστήριο Δυναμικών Συστημάτων και Προσομοίωσης έχει αποκτήσει σημαντική εμπειρία στην ανάπτυξη και προσομοίωση στρατηγικών ελέγχου αστικών οδικών δικτύων μεγάλης κλίμακας. Είναι μέλος του Τ.Ε.Ε.

Περίληψη

Τα συστήματά ελέγχου αστικής κυκλοφορίας αποτελούν ένα επιστημονικό χώρο με μακρόχρονη και πλούσια ερευνητική δραστηριότητα. Πολλές μεθοδολογίες έχουν προταθεί, αλλά μέχρι σήμερα δεν έχει βρεθεί μια στρατηγική που να ικανοποιεί όλες τις ανάγκες που κατά καιρούς έχουν εκφραστεί σχετικά με το συντονισμένο έλεγχο μεγάλων αστικών δικτύων σε πραγματικό χρόνο. Ευρέως χρησιμοποιημένες στρατηγικές συντονισμένου ελέγχου κυκλοφορίας μεγάλων δικτύων σε πραγματικό χρόνο, οι οποίες αναπτύχθηκαν στις αρχές της δεκαετίας του '80, όπως το SCOOT και το SCATS έχουν κριθεί ότι δεν ανταποκρίνονται ικανοποιητικά σε απότομες μεταβολές των κυκλοφοριακών συνθηκών. Άλλες προηγμένες μέθοδοι που αναπτύχθηκαν στη συνέχεια, όπως για παράδειγμα OPAC, PROLYN, CRONOS και UTOPIA, χρησιμοποιούν αλγόριθμους η εκθετική πολυπλοκότητα των οποίων δεν επιτρέπει την άμεση εφαρμογή τους σε επίπεδο δικτύου. Κατά συνέπεια, οι μέθοδοι αυτές χρησιμοποιούνται σε επίπεδο κόμβου, ενώ για το συντονισμό σε επίπεδο δικτύου υιοθετούν κάποια ιεραρχικά ανώτερα επίπεδα ελέγχου. Όμως, λόγω της ευρετικής φύσης αυτών των ιεραρχικά ανώτερων επιπέδων ελέγχου, ο επιθυμητός συντονισμός σε επίπεδο δικτύου τελικά δεν διασφαλίζεται επαρκώς.

Η παρούσα διατριβή διαπραγματεύεται την ανάπτυξη μιας νέας στρατηγικής ελέγχου, η οποία επιλύει το πρόβλημα ρύθμισης σηματοδότησης ως ένα μη γραμμικό πρόβλημα βέλτιστου ελέγχου μαζί με όλους τους περιορισμούς. Η ανάπτυξη του μοντέλου ελέγχου στηρίζεται στις βασικές αρχές του μαθηματικού προτύπου αποθήκευσης-και-προώθησης που περιγράφει τη διεργασία της κυκλοφοριακής ροής με τρόπο που επιτρέπει τη χρήση μεθόδων βελτιστοποίησης και ελέγχου πολυωνυμικής πολυπλοκότητας για την επίλυση του προβλήματος φωτεινής σηματοδότησης αστικών δικτύων. Αντικειμενικός στόχος του μη γραμμικού προβλήματος βέλτιστου ελέγχου είναι η ελαχιστοποίηση και εξισορρόπηση των ουρών του ελεγχόμενου δικτύου. Για την επίλυση του μη γραμμικού προβλήματος βέλτιστου ελέγχου χρησιμοποιείται ένας αποτελεσματικός αλγόριθμος εφικτής κατεύθυνσης. Ωστόσο, λόγω της μετατροπής του δυναμικού προβλήματος σε ένα στατικό πρόβλημα μη γραμμικής βελτιστοποίησης, ο παραγόμενος βέλτιστος έλεγχος οδηγεί σε μια στρατηγική ελέγχου ανοιχτού βρόχου. Ως εκ τούτου, για την εφαρμογή της προτεινόμενης μεθοδολογίας σε πραγματικό χρόνο ως κλειστού βρόχου το πρόβλημα πρέπει να επιλυθεί σε κυλιόμενο ορίζοντα, ενώ απαιτείται η πρόβλεψη της ζήτησης για δεδομένο ορίζοντα βελτιστοποίησης.

Η αποτελεσματικότητα του μη γραμμικού βέλτιστου ελέγχου στην επίλυση του προβλήματος της βέλτιστης σηματοδότησης αστικών δικτύων εξετάζεται για δίκτυα μικρής και μεγάλης κλίμακας με τυχαία

τοπολογία και χαρακτηριστικά. Τα αποτελέσματα από την εφαρμογή του μη γραμμικού βέλτιστου ελέγχου μπορούν να χαρακτηρισθούν αρκετά ικανοποιητικά ενώ ο απαιτούμενος υπολογιστικός φόρτος είναι της τάξης μερικών λεπτών. Η ανάλυση των βέλτιστων τροχιών των ουρών στους συνδέσμους των δικτύων που διερευνήθηκαν καθώς και των τροχιών ελέγχου καταδεικνύουν την αποτελεσματικότητα της προσέγγισης του βέλτιστου ελέγχου για την επίλυση του προβλήματος της βέλτιστης σηματοδότησης αστικών δικτύων.

Εισαγωγή

Η εκθετική αύξηση των οχημάτων ιδιωτικής χρήσης τις τελευταίες τρεις δεκαετίες, καθώς και η μετακίνηση μεγάλων μαζών πληθυσμού από την ύπαιθρο στις αστικές μητροπόλεις είχε ως αποτέλεσμα την παρουσίαση έντονων φαινομένων συμφόρησης στα αστικά οδικά δίκτυα. Ιδιαίτερα προβλήματα συμφόρησης παρουσιάζονται κατά την διάρκεια των ωρών αιχμής (πρωί, απόγευμα κατά την ώρα έναρξης και τερματισμού της εργασίας), όπως και σε περιπτώσεις ατυχημάτων και άλλων επεισοδίων. Αποτέλεσμα των φαινομένων αυτών είναι η μείωση της ποιότητας ζωής στα αστικά κέντρα καθώς και η υποβάθμιση του περιβάλλοντος. Εξ ίσου σημαντικά είναι και τα οικονομικά στοιχεία που αφορούν την κινητικότητα ανθρώπων και αγαθών. Στην Αμερική το 20% του Ακαθάριστου Εθνικού Προϊόντος καταναλώνεται για τις μεταφορές, ενώ στην Ευρώπη το αντίστοιχο ποσοστό είναι 6% με τις οικογένειες να διαθέτουν το 10% των ετήσιων εσόδων τους για την μεταφορά τους. Ως εκ τούτου, λόγω των παραπάνω οικονομικών λόγων και της καθημερινής αντιμετώπισης των προβλημάτων αυτών από εκατομμύρια ανθρώπων σε παγκόσμιο επίπεδο πολιτικοί, οργανισμοί και φορείς άρχισαν με αργούς ρυθμούς την αναζήτηση τρόπων επίλυσης και την χρηματοδότηση ερευνητικών έργων.

Για τους παραπάνω λόγους τα συστήματα ελέγχου αστικής κυκλοφορίας είναι μια περιοχή έρευνας με μακρόχρονη και πλούσια δραστηριότητα. Πολλές προσεγγίσεις έχουν προταθεί, αλλά μέχρι σήμερα δεν έχει βρεθεί μια στρατηγική που να ικανοποιεί όλες τις ανάγκες που κατά καιρούς έχουν εκφραστεί σχετικά με το συντονισμένο έλεγχο μεγάλων αστικών δικτύων σε πραγματικό χρόνο. Οι προσεγγίσεις αυτές χρησιμοποιούν μεθόδους βελτιστοποίησης, έμπειρα συστήματα, συστήματα βασισμένα σε ασαφή λογική, νευρωνικά δίκτυα, γενετικούς αλγορίθμους καθώς και κλασικό αναδραστικό έλεγχο. Μια εναλλακτική προσέγγιση του προβλήματος είναι η χρήση μεθόδων βέλτιστου ελέγχου και αντίστοιχων αριθμητικών αλγορίθμων επίλυσης. Οι βέλτιστες αποφάσεις που προκύπτουν από την επίλυση του διατυπωμένου προβλήματος βέλτιστου ελέγχου μπορεί σε πολλές περιπτώσεις να εκπλήσσουν τον σχεδιαστή καθώς και να τον αναγκάζουν σε μια εκ των υστέρων επεξήγηση των αποτελεσμάτων. Η προσεκτική επεξήγηση των αποτελεσμάτων συχνά δίνει την δυνατότητα επέκτασης, κατανόησης ή και διόρθωσης της γνώσης η οποία είναι αποτέλεσμα της εμπειρίας.

Στην πραγματικότητα, οι λύσεις που προκύπτουν από την προσέγγιση αυτή είναι πιο αποτελεσματικές επειδή οι αποφάσεις ελέγχου βασίζονται σε μια ακριβή ελαχιστοποίηση ενός κατάλληλου κριτηρίου και

μια ακριβή θεώρηση όλων των μη γραμμικοτήτων της διαδικασίας και των μεταβλητών ελέγχου.

Στην παρούσα διατριβή εφαρμόζεται μια προσέγγιση βέλτιστου ελέγχου (διατύπωση διακριτού χρόνου) για την σχεδίαση συντονισμένων στρατηγικών ελέγχου αστικής κυκλοφορίας. Ένας αλγόριθμος εφικτής κατεύθυνσης χρησιμοποιείται για την αριθμητική επίλυση του προβλήματος βέλτιστου ελέγχου διακριτού χρόνου [67]. Στην μέχρι τώρα βιβλιογραφία δεν υπάρχει καμιά αναφορά για την εφαρμογή μη γραμμικού βέλτιστου ελέγχου με περιορισμούς για τον συντονισμένο έλεγχο αστικών δικτύων. Η συνεισφορά της παρούσας διατριβής στο πεδίο των συστημάτων αυτομάτου ελέγχου αστικής κυκλοφορίας συνοψίζεται στα εξής σημεία :

- Το προτεινόμενο μοντέλο ελέγχου δεν χρησιμοποιεί δυαδικές μεταβλητές ενώ κάνει χρήση μη γραμμικών συναρτήσεων προτείνοντας ένα πιο ρεαλιστικό μοντέλο αποθήκευσης-και-προώθησης για την περιγραφή της διεργασίας της κυκλοφοριακής ροής.
- Επίλυση του μη γραμμικού προβλήματος μαζί με όλους τους περιορισμούς χωρίς γραμμικοποίηση του αρχικού μοντέλου.
- Δυνατότητα αυθαίρετης επιλογής του διακριτού διαστήματος ελέγχου.
- Ο παραγόμενος βέλτιστος έλεγχος δίνει λύσεις οι οποίες μπορούν να χρησιμοποιηθούν ως σημείο αναφοράς κατά την σχεδίαση συστημάτων ελέγχου ενώ επιτρέπουν την εξέταση του βαθμού υποβελτιστότητας των άλλων προτεινόμενων μεθόδων ελέγχου.
- Δυνατότητα εφαρμογής της στρατηγικής ελέγχου σε δίκτυα μεγάλης κλίμακας με τυχαία τοπολογία και χαρακτηριστικά.

Η οργάνωση της διατριβής έχει ως εξής :

- Στο Κεφάλαιο 1 ορίζονται οι βασικές έννοιες που αφορούν τον έλεγχο κυκλοφοριακών δικτύων μέσω σηματοδοτών, ενώ γίνεται και η ανασκόπηση των κυριότερων προηγμένων συστημάτων ελέγχου αστικής κυκλοφορίας. Έμφαση δίνεται στα συντονισμένα συστήματα πραγματικού χρόνου που αποτελούν και το αντικείμενο της παρούσας εργασίας. Επίσης, γίνεται μια εισαγωγή στην προτεινόμενη μεθοδολογία για τον έλεγχο κυκλοφορίας αστικών δικτύων.
- Στο Κεφάλαιο 2 περιγράφονται βασικές έννοιες που αφορούν την ανάπτυξη στρατηγικών ελέγχου κυκλοφορίας, ενώ παρουσιάζεται το προτεινόμενο μοντέλο ελέγχου το οποίο βασίζεται στο μαθηματικό πρότυπο αποθήκευσης-και-προώθησης. Στην παρούσα διατριβή το πρότυπο αποθήκευσης-και-προώθησης τροποποιείται κατάλληλα ώστε το διακριτό διάστημα του μαθηματικού προτύπου να μπορεί να είναι μικρότερο από την περίοδο σηματοδότησης των ελεγχόμενων κόμβων.

- Στο Κεφάλαιο 3 γίνεται η διατύπωση του μη γραμμικού προβλήματος βέλτιστου ελέγχου, ενώ περιγράφεται ένας αλγόριθμος εφικτής κατεύθυνσης για την επίλυση του. Ακόμη αναλύεται η συμπεριφορά του αλγορίθμου εφικτής κατεύθυνσης ως προς τον υπολογιστικό φόρτο και την σύγκλιση.
- Στο Κεφάλαιο 4 παρουσιάζονται τα αστικά δίκτυα μικρής και μεγάλης κλίμακας για τα οποία θα εξεταστεί η αποτελεσματικότητα του αλγορίθμου επίλυσης του προβλήματος βέλτιστου ελέγχου.
- Στο Κεφάλαιο 5 παρουσιάζονται τα αποτελέσματα διερευνήσεων από την εφαρμογή του αλγορίθμου εφικτής κατεύθυνσης στα δίκτυα που παρουσιάστηκαν στο Κεφάλαιο 4. Η ανάλυση των βέλτιστων τροχιών κατάστασης και ελέγχου καταδεικνύουν την αποτελεσματικότητα του βέλτιστου ελέγχου για την επίλυση του προβλήματος της βέλτιστης σηματοδότησης αστικών δικτύων.
- Στο Κεφάλαιο 6 γίνεται σύνοψη της παρούσας εργασίας και έκθεση των συμπερασμάτων που προέκυψαν από αυτήν. Ακόμη προτείνονται κατευθύνσεις μελλοντικής έρευνας που μπορούν συνεισφέρουν στην επέκταση της παρούσας διατριβής.

Κεφάλαιο 1

Έλεγχος κυκλοφορίας αστικών οδικών δικτύων

Σκοπός του παρόντος κεφαλαίου είναι ο ορισμός των βασικών εννοιών που αφορούν τον έλεγχο κυκλοφοριακών δικτύων μέσω σηματοδοτών καθώς και η ανασκόπηση των κυριότερων προηγμένων συστημάτων ελέγχου αστικής κυκλοφορίας. Το κεφάλαιο αυτό εστιάζεται κυρίως γύρω από τα συντονισμένα συστήματα ελέγχου ενώ παρουσιάζονται τα κύρια μειονεκτήματα των πιο διαδεδομένων συστημάτων τα οποία είναι σήμερα σε εφαρμογή. Επιπλέον, γίνεται η εισαγωγή στην προτεινόμενη μεθοδολογία προσδιορίζοντας τα πλεονεκτήματα και μειονεκτήματα που αυτή προσφέρει σε σχέση με τα υπάρχοντα συστήματα.

1.1 Εισαγωγή

1.1.1 Κυκλοφοριακή συμμόρφωση

Επί αιώνες, οι μεταφορές ήταν μια από τις σημαντικότερες δραστηριότητες του ανθρωπίνου πολιτισμού. Ωστόσο, μόνο μετά το δεύτερο μισό του προηγούμενου αιώνα άρχισαν να εμφανίζονται φαινόμενα συμμόρφωσης λόγω της ταχύτατης αύξησης του αριθμού των οχημάτων και της συνεχούς αύξησης των μετακινήσεων για την μεταφορά αγαθών, ανθρώπων κ.λπ. Κυκλοφοριακή συμμόρφωση παρουσιάζεται όταν μεγάλος αριθμός οχημάτων (« πελάτης ») προσπαθεί να χρησιμοποιήσει μια κοινή υποδομή (« εξυπηρετητής ») μετακίνησης με περιορισμένη χωρητικότητα. Στην καλύτερη περίπτωση, η συμμόρφωση οδηγεί σε φαινόμενα σχηματισμού ουρών (και αντίστοιχων καθυστερήσεων) ενώ η χωρητικότητα της υποδομής χρησιμοποιείται πλήρως. Στην χειρότερη (και πολύ πιο συχνή) περίπτωση, η συμμόρφωση οδηγεί στη μειωμένη χρήση της διαθέσιμης υποδομής (μείωση εξυπηρέτησης η οποία μπορεί να οδηγήσει σε μπλοκάρισμα μέρος του δικτύου) με επακόλουθα καθυστερήσεις, μειωμένη οδική ασφάλεια, αυξημένη κατανάλωση καυσίμων και σοβαρή ατμοσφαιρική ρύπανση.

1.1.2 Η ανάγκη ελέγχου της κυκλοφορίας

Η εμφάνιση κυκλοφορίας (δηλαδή, πολλά οχήματα τα οποία αλληλεπιδρούν μεταξύ τους χρησιμοποιώντας μια κοινή υποδομή) και συνακόλουθα η κυκλοφοριακή συμφόρηση (όπου η ζήτηση ξεπερνά τη χωρητικότητα της υποδομής) έδωσε ισχυρή ώθηση στην ανάπτυξη καινοτόμων ιδεών στον τομέα των οδικών μεταφορών. Η ενεργειακή κρίση την δεκαετία του '70, το έντονο ενδιαφέρον για το περιβάλλον και τα όρια των φυσικών και οικονομικών πόρων είναι μεταξύ των πιο σημαντικών λόγων που οδήγησαν στην αλλαγή του τρόπου αντιμετώπισης των προβλημάτων συμφόρησης με άμεσους τρόπους (δηλαδή, η συνεχής επέκταση της υπάρχουσας υποδομής). Ο μυωπικός αυτός τρόπος αντιμετώπισης του προβλήματος της αύξησης των αναγκών μεταφοράς και κινητικότητας των σύγχρονων κοινωνιών δεν μπορούσε πλέον να είναι η μόνη λύση. Μια εναλλακτική και εφικτή προσέγγιση προς την επίλυση των κυκλοφοριακών προβλημάτων, η οποία δέχθηκε ισχυρή ώθηση με τις αλματώδεις εξελίξεις στην τεχνολογία των επικοινωνιών και των ηλεκτρονικών υπολογιστών (τηλεματική), είναι η ορθολογική και πλήρης αξιοποίηση και χρήση της υπάρχουσας υποδομής μέσω της ανάπτυξης και υλοποίησης σύγχρονων μορφών ελέγχου και διαχείρισης.

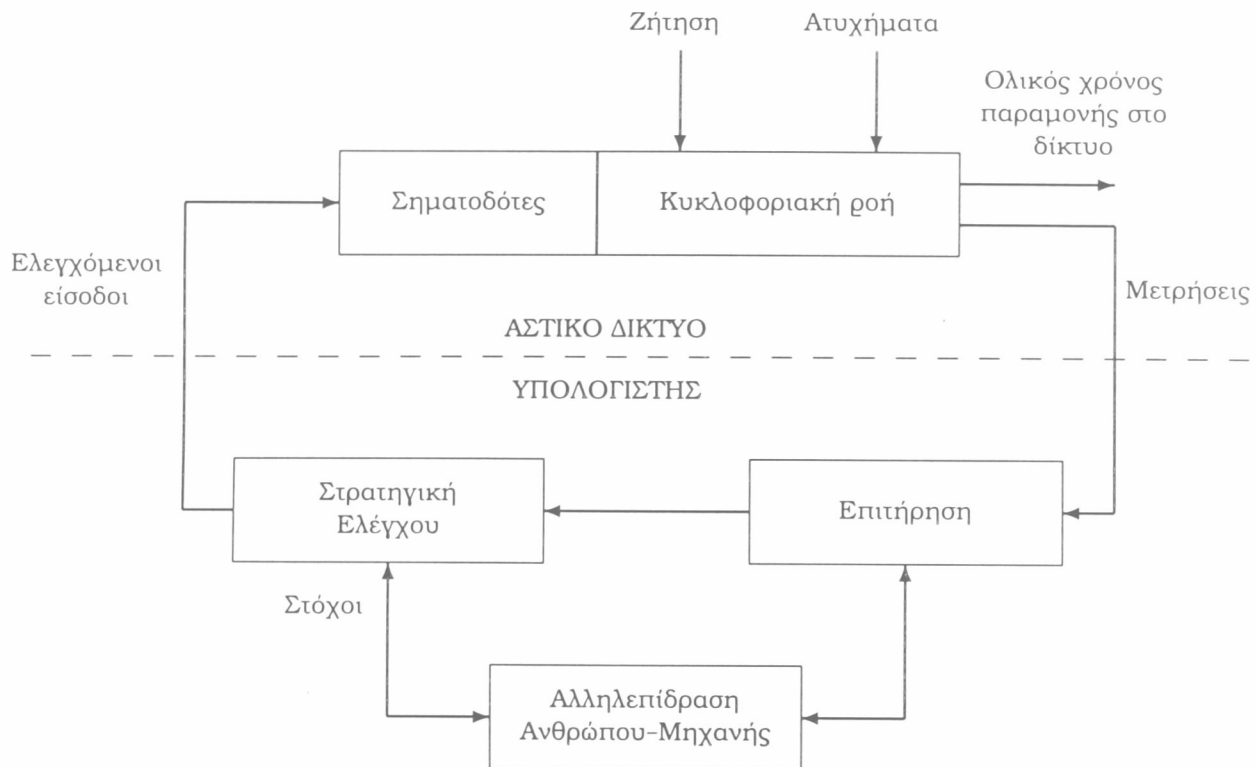
1.1.3 Ο βρόχος ελέγχου

Το Σχήμα 1.1 παρουσιάζει τα βασικά στοιχεία του βρόχου ελέγχου. Η συμπεριφορά της κυκλοφοριακής ροής στο δίκτυο (αστικό, αυτοκινητόδρομος ή μεικτό) εξαρτάται από κάποιες εξωτερικές ποσότητες οι οποίες ταξινομούνται σε δύο κατηγορίες:

- *Ελεγχόμενοι εισόδοι* οι οποίοι άμεσα αφορούν κάποια αντίστοιχη διάταξη ελέγχου όπως φωτεινοί σηματοδότες, πίνακες μεταβλητών μηνυμάτων, κ.λπ. Οι ελεγχόμενοι εισόδοι μπορεί να επιλέγονται από μια επιτρεπτή περιοχή ελέγχου υπό τεχνικούς, φυσικούς και λειτουργικούς περιορισμούς.
- *Διαταραχές* των οποίων οι τιμές δεν μπορούν να είναι άμεσες προς διαχείριση. Εν τούτοις μπορεί να είναι μετρήσιμες (π.χ., ζήτηση) ή ανιχνεύσιμες (π.χ., ατύχημα) ή προβλέψιμες για ένα μελλοντικό χρονικό ορίζοντα.

Η αποτελεσματικότητα ή απόδοση ενός δικτύου είναι μετρήσιμη μέσω κατάλληλων δεικτών, όπως ο ολικός χρόνος παραμονής όλων των οχημάτων μέσα στο δίκτυο για δεδομένο χρονικό ορίζοντα. Ο στόχος της *Επιτήρησης* είναι η διαχείριση της πληροφορίας που προέρχεται από τις συσκευές μετρήσεων (π.χ., φωρατές) πριν αυτή διοχετευθεί στην στρατηγική ελέγχου και τον άνθρωπο ο οποίος αλληλεπιδρά με το σύστημα. Ο πυρήνας του βρόχου ελέγχου είναι η *Στρατηγική Ελέγχου* η οποία έχει ως στόχο:

«Τον προσδιορισμό των *ελεγχόμενων εισόδων* βάσει διαθέσιμων *μετρήσεων, εκτιμήσεων, προβλέψεων* έτσι ώστε να επιτευχθεί ο προκαθορισμένος στόχος (π.χ., ελαχιστοποίηση του ολικού



Σχήμα 1.1: Ο βρόχος ελέγχου.

χρόνου παραμονής στο δίκτυο) υπό οποιεσδήποτε συνθήκες διαταραχών. »

Αν τη διαδικασία αυτή αναλάμβανε ένας άνθρωπος τότε θα είχαμε ένα χειροκίνητο σύστημα ελέγχου. Στα συστήματα αυτομάτου ελέγχου τη δουλειά αυτή αναλαμβάνει ένας αλγόριθμος¹. Η αποτελεσματικότητα της στρατηγικής ελέγχου κατά μεγάλο ποσοστό καθορίζει την αποτελεσματικότητα όλου του συστήματος ελέγχου. Ως εκ τούτου, όταν είναι δυνατό οι στρατηγικές ελέγχου πρέπει να σχεδιάζονται με προσοχή μέσω της εφαρμογής ισχυρών και συστηματικών μεθόδων βελτιστοποίησης και αυτομάτου ελέγχου παρά μέσω ευρετικών μεθόδων με αμφισβητήσιμη αποτελεσματικότητα [64, 65].

1.2 Έλεγχος κυκλοφορίας

1.2.1 Βασικές έννοιες

Τα κύρια εργαλεία ελέγχου σε αστικά δίκτυα είναι οι φωτεινοί σηματοδότες. Οι σηματοδότες είχαν χρησιμοποιηθεί αρχικά για να εξασφαλίζουν την ασφαλή διασταύρωση ανταγωνιστικών ρευμάτων οχημάτων και πεζών. Όμως με τη σταθερά αυξανόμενη κυκλοφοριακή ζήτηση κατέστη σαφές ότι η ρύθμιση της κυκλοφορίας επιδρά όχι μόνο στην ασφάλεια αλλά και στην αποτελεσματικότητα της ροής, με την έννοια

¹ Η στρατηγική ελέγχου.

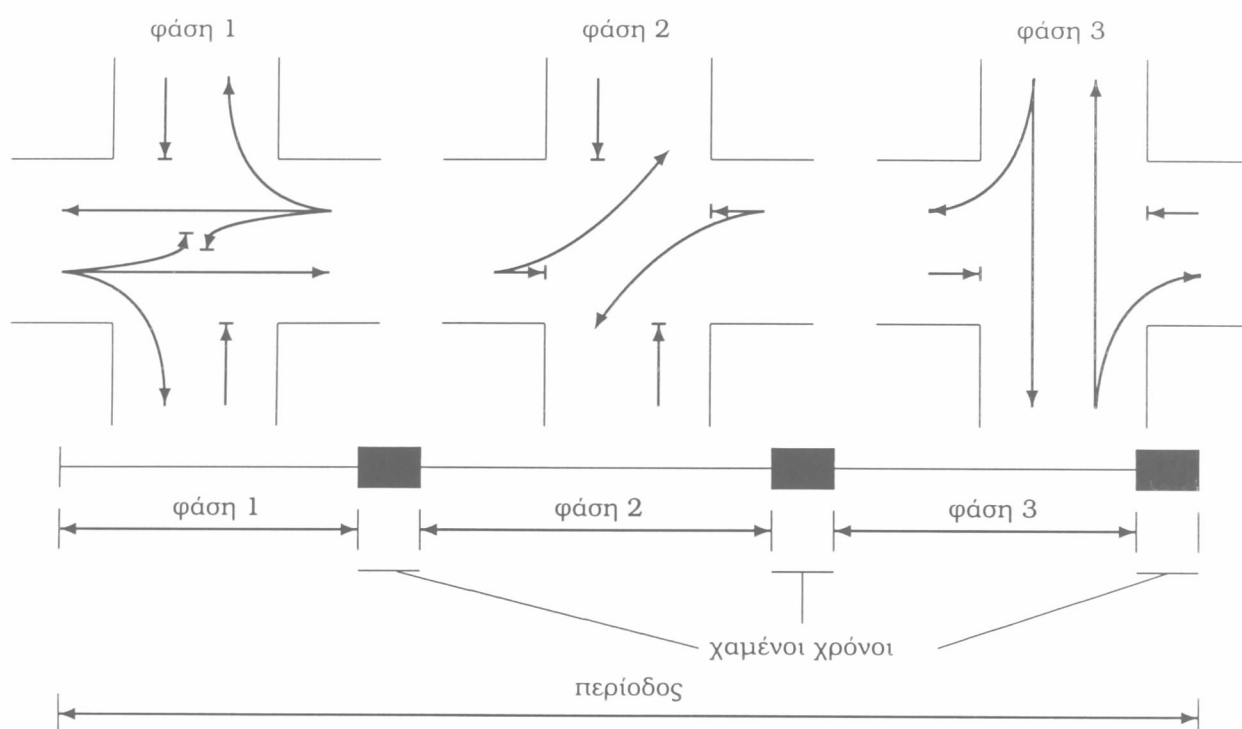
του μέσου χρόνου διαδρομής των οχημάτων στο δίκτυο. Με άλλα λόγια έγινε φανερό ότι διαφορετικά, εξίσου ασφαλή, σχέδια ρύθμισης της κυκλοφορίας μπορούν να οδηγήσουν σε υψηλότερους ή χαμηλότερους μέσους χρόνους, και άρα θα πρέπει να υπάρχει ένα βέλτιστο σχέδιο ρύθμισης που οδηγεί στην ελαχιστοποίηση του μέσου χρόνου διαδρομής των οχημάτων μέσα στο δίκτυο.

Αν και το αντίστοιχο πρόβλημα βέλτιστου ελέγχου μπορεί εύκολα να διατυπωθεί για οποιοδήποτε οδικό δίκτυο, η επίλυση του σε πραγματικό χρόνο και η εφαρμογή του σε ένα βρόχο ελέγχου σαν αυτό του Σχήματος 1.1 αντιμετωπίζει ένα αριθμό δυσκολιών οι οποίες είναι φαινομενικά ανυπέρβλητες:

- Η εναλλαγή κόκκινης-πράσινης ένδειξης των σηματοδοτών απαιτεί την εισαγωγή δυαδικών μεταβλητών, που ως αποτέλεσμα έχουν την επίλυση ενός προβλήματος συνδυαστικής βελτιστοποίησης.
- Το μέγεθος του προβλήματος για ένα δίκτυο είναι πολύ μεγάλο.
- Πολλές μη προβλέψιμες και δύσκολα μετρήσιμες διαταραχές (ατυχήματα, παράνομο παρκάρισμα, μπλοκάρισμα κόμβου, κ.λπ.) μπορούν να διαταράσσουν την κυκλοφοριακή ροή.
- Οι μετρήσεις των συνθηκών κυκλοφορίας που επικρατούν στο δίκτυο συνήθως είναι τοπικές (μέσω φωρατών) και ανακριβείς λόγω διαφόρων φυσικών επιπτώσεων.
- Υπάρχουν αυστηροί περιορισμοί κατά την εφαρμογή σε πραγματικό χρόνο, π.χ., προηγμένα συστήματα ελέγχου λαμβάνουν αποφάσεις μέσα σε 2 sec.

Ο συνδυασμός των δυσκολιών αυτών έχει ως αποτέλεσμα η επίλυση του προβλήματος βέλτιστου ελέγχου να μην είναι εφικτή για πάνω από ένα κόμβο. Συνεπώς, οι προτεινόμενες στρατηγικές ελέγχου αστικών δικτύων εισάγουν έναν αριθμό απλοποιήσεων διαφορετικού είδους η κάθε μια ή απευθύνονται μόνο σε ένα κομμάτι του προβλήματος ελέγχου κυκλοφορίας.

Ένας αστικός κόμβος αποτελείται από ένα σύνολο συνδέσμων και μια κοινή διασταύρωση. Ένας σύνδεσμος είναι μέρος ενός δρόμου που αποτελείται από μια ή παραπάνω λωρίδες (veh/h). Η κυκλοφορία σε ένα κόμβο διαιρείται σε ρεύματα όπου κάθε σύνδεσμος χρησιμοποιείται από ένα αντίστοιχο ρεύμα και κάθε ρεύμα έχει ιδιαίτερη σηματοδότηση. Δύο ή παραπάνω ρεύματα καλούνται *συμβατά* (compatible) όταν μπορούν να διασχίσουν τον κόμβο ταυτόχρονα με ασφάλεια, αλλιώς καλούνται *ασύμβατα* ή *ανταγωνιστικά* (antagonistic). *Ροή κορεσμού* (saturation flow) είναι η μέση ροή που περνάει τη γραμμή διακοπής πορείας ενός συνδέσμου όταν το αντίστοιχο ρεύμα έχει προτεραιότητα και η ανάντη ζήτηση (ή η ουρά αναμονής) είναι αρκούντως μεγάλη. Μια *περίοδος* σηματοδότησης είναι μια επανάληψη της βασικής σειράς των συνδυασμών σημάτων σε ένα κόμβο. Η διάρκειά της καλείται *διάρκεια περιόδου* ή *κύκλος* (cycle). Μια *φάση* (stage ή phase) είναι ένα μέρος της περιόδου κατά το οποίο έχει προτεραιότητα ένα σύνολο ρευμάτων (Σχήμα 1.2). Οι φάσεις διαδέχονται η μια την άλλη κατά προκαθορισμένη κυκλική σειρά (sequence of phases).



Σχήμα 1.2: Δομή σηματοδότησης κόμβου.

Προκειμένου να αποφευχθεί η παρεμβολή μεταξύ ανταγωνιστικών ρευμάτων σε διαδοχικές φάσεις, προβλέπονται σταθεροί *χαμένοι χρόνοι* (lost times) λίγων δευτερολέπτων ανάμεσα στις φάσεις (Σχήμα 1.2). Ο χρόνος που προκύπτει αν αφαιρεθεί από την περίοδο ο χαμένος χρόνος ονομάζεται *αποτελεσματικός χρόνος* (effective time). Είναι ο χρόνος που χρησιμοποιείται για την κίνηση των οχημάτων και υποδιαιρείται στις διάφορες φάσεις για την εξυπηρέτηση των αντίστοιχων κινήσεων. Σε κόμβους με μεγάλη κίνηση πεζών είναι δυνατή η δημιουργία μιας ιδιαίτερης φάσης για την αποτελεσματική εξυπηρέτηση των πεζών που μπορούν έτσι να κινηθούν ταυτόχρονα σε όλες τις κατευθύνσεις, ακόμα και διαγώνια. Κατά την διάρκεια αυτής της φάσης, όλοι οι σηματοδότες οχημάτων παρουσιάζουν κόκκινη ένδειξη που ονομάζεται *καθολική κόκκινη ένδειξη* (all red period).

1.2.2 Τρόποι ελέγχου κυκλοφορίας μέσω σηματοδοτών

Ο έλεγχος της κυκλοφορίας με φωτεινή σηματοδότηση μπορεί να επιτευχθεί με έναν από τέσσερις διαφορετικούς τρόπους [66]:

- Ο πρώτος τρόπος έγκειται στον καθορισμό του αριθμού και της σύστασης των φάσεων κυκλοφορίας σε κάθε διασταύρωση (δηλαδή στην επιλογή των κινήσεων που λαμβάνουν πράσινο ή κόκκινο σε κάθε φάση). Ο αριθμός των φάσεων σε ένα σηματοδοτούμενο κόμβο καθορίζεται από τον αριθμό και το μέγεθος των κυκλοφοριακών ρευμάτων οχημάτων και πεζών που πρόκειται να εξυπηρετηθούν.

- Ο δεύτερος και ίσως σημαντικότερος τρόπος έγκειται στον προσδιορισμό της σχετικής διάρκειας κάθε φάσης. Η σχετική διάρκεια ισούται με τη διάρκεια της φάσης δια τη διάρκεια της περιόδου σηματοδότησης.
- Ο τρίτος τρόπος έγκειται στη μεταβολή της χρονικής διάρκειας της περιόδου σηματοδότησης. Η αύξηση της διάρκειας της περιόδου οδηγεί συνήθως, υπό σταθερές συνθήκες, στην αύξηση της κυκλοφοριακής ικανότητας του κόμβου λόγω της σχετικής μείωσης των μεταβατικών σταδίων. Ωστόσο, μεγάλες περίοδοι δημιουργούν και μεγαλύτερες καθυστερήσεις.
- Ο τέταρτος τρόπος αναφέρεται μόνο σε συντονισμένα συστήματα και αφορά στον καθορισμό της χρονικής μετατόπισης μεταξύ της έναρξης των περιόδων γειτονικών διασταυρώσεων. Ο σωστός καθορισμός της χρονικής μετατόπισης είναι απαραίτητος για τη δημιουργία του λεγόμενου « πράσινου κύματος » κατά μήκος μιας οδικής αρτηρίας.

1.2.3 Ταξινόμηση των στρατηγικών ελέγχου

Τα συστήματα ελέγχου που βρίσκονται σήμερα σε εφαρμογή ή υπό ανάπτυξη μπορούν να ταξινομηθούν με βάση τα εξής τρία κριτήρια [66]:

- Συστήματα *σταθερού χρόνου* (fixed-time) λειτουργούν καθημερινά κατά τον ίδιο τρόπο, σύμφωνα με ένα προκαθορισμένο ημερήσιο πρόγραμμα, ενώ συστήματα *πραγματικού χρόνου* (traffic responsive ή real-time) προσαρμόζουν τις αποφάσεις τους στις εκάστοτε επικρατούσες κυκλοφοριακές συνθήκες.
- *Μεμονωμένα* (isolated) συστήματα περιορίζουν το πεδίο δράσης τους σε μια μόνο διασταύρωση, ενώ *συντονισμένα* (coordinated) συστήματα αναφέρονται σε μια περιοχή ή κι ένα ολόκληρο δίκτυο αποτελούμενο από πολλές διασταυρώσεις.
- Κάποια συστήματα είναι εφαρμόσιμα μόνο σε συνθήκες *ακόρεσης* (undersaturated) κυκλοφορίας όταν δηλαδή η ζήτηση είναι χαμηλότερη από την κυκλοφοριακή ικανότητα διασταύρωσης ή του δικτύου, ενώ άλλα είναι εφαρμόσιμα σε περίπτωση *κορεσμένης* (oversaturated) κυκλοφορίας.

Το σημαντικότερο μειονέκτημα των συστημάτων σταθερού χρόνου πηγάζει από το γεγονός ότι οι ρυθμίσεις γίνονται βάσει ιστορικών μετρήσεων και όχι με δεδομένα πραγματικού χρόνου. Η απλοποίηση αυτή μειώνει την αποτελεσματικότητα των συστημάτων σταθερού χρόνου επειδή:

- Η ζήτηση δεν είναι σταθερή, δηλαδή μπορεί να μεταβάλλεται από μέρα σε μέρα ή σε διαφορετικές περιόδους του έτους.
- Η ζήτηση αλλάζει μακροπρόθεσμα και οδηγεί στην « παλαίωση » των βέλτιστων ρυθμίσεων.

- Τα ποσοστά στροφής επίσης μεταβάλλονται με τους ίδιους τρόπους που μεταβάλλεται και η ζήτηση.
- Ατυχήματα και περαιτέρω διαταραχές μπορούν να διαταράσσουν τις επικρατούσες κυκλοφοριακές συνθήκες με τέτοιο τρόπο ώστε αυτές να μην είναι δυνατόν να είναι προβλέψιμες.

Για τους λόγους αυτούς, τα συντονισμένα συστήματα αν σχεδιαστούν κατάλληλα είναι πιο αποτελεσματικά. Εν τούτοις, είναι επίσης και πιο δαπανηρά, αφού απαιτούν εγκατάσταση, λειτουργία και συντήρηση ενός συστήματος το οποίο λειτουργεί σε πραγματικό χρόνο και περιλαμβάνει συσκευές μετρήσεων, επικοινωνίας, τοπικούς ελεγκτές και ειδικότερα στην περίπτωση του συντονισμένου ελέγχου, ένα κεντρικό χώρο ελέγχου.

1.3 Επισκόπηση προηγμένων στρατηγικών ελέγχου

Η πολύχρονη έρευνα, σε παγκόσμιο επίπεδο, στην ερευνητική περιοχή των συστημάτων ελέγχου κυκλοφορίας σε πραγματικό χρόνο, είχε ως αποτέλεσμα την ανάπτυξη ενός αριθμού στρατηγικών ελέγχου οι οποίες υιοθετούν διαφορετική φιλοσοφία σχεδιασμού και έχουν διάφορα κοινά και ξεχωριστά χαρακτηριστικά. Γενικά, τα συστήματα αυτά επιτυγχάνουν βελτίωση του μέσου χρόνου διαδρομής στο δίκτυο από 0 ως 20%. Εν τούτοις, έχει βρεθεί ότι η αποδοτικότητα τους μειώνεται αισθητά κάτω από συνθήκες κυκλοφοριακού κορεσμού, ενώ σε μερικές περιπτώσεις οδηγούν στο μπλοκάρισμα μέρους του δικτύου (gridlocks).

Οι πρώτες στρατηγικές ελέγχου αστικής κυκλοφορίας σε πραγματικό χρόνο εμφανίστηκαν στη δεκαετία του '80 με την ανάπτυξη και εφαρμογή του βρετανικού συστήματος SCOOT [32] και του αυστραλέζικου συστήματος SCATS [44].

Τόσο το SCOOT όσο και το SCATS στοχεύουν στο συντονισμένο έλεγχο αστικών δικτύων με το SCATS να υιοθετεί μια ιεραρχική δομή στην εφαρμογή του ελέγχου κατά την οποία ένα ανώτερο επίπεδο είναι υπεύθυνο για το συντονισμό σε επίπεδο δικτύου, ενώ σε ένα κατώτερο επίπεδο τροποποιείται η σηματοδότηση κάθε κόμβου μεμονωμένα ώστε να ανταποκριθεί στις επικρατούσες τοπικές κυκλοφοριακές συνθήκες.

Τόσο το SCOOT όσο και το SCATS επιχειρούν σε πραγματικό χρόνο μικρές αλλαγές στη σχετική διάρκεια των φάσεων, στη διάρκεια της περιόδου σηματοδότησης και στη χρονική μετατόπιση της έναρξης περιόδων διαδοχικών κόμβων. Το αποτέλεσμα είναι να θεωρούνται από κάποιους ανεπαρκή [18], ιδιαίτερα κατά τις ταχέως μεταβαλλόμενες κυκλοφοριακές συνθήκες στις ώρες αιχμής ή σε περίπτωση συμβάντων που μειώνουν την κυκλοφοριακή ικανότητα του ελεγχόμενου δικτύου. Αυτός είναι ενδεχομένως κι ένας από τους λόγους για τους οποίους παρά τη μακρόχρονη ανάπτυξη, διερεύνηση και εφαρμογή τους, τα συστήματα αυτά εξακολουθούν να συμπεριφέρονται άλλοτε καλύτερα και άλλοτε χειρότερα από τα παραδοσιακά συστήματα ελέγχου σταθερού χρόνου [25, 29].

Ο προσδιορισμός της χρονικής μετατόπισης σε πραγματικό χρόνο είναι το αντικείμενο του γερμανικού MOTION [10] το οποίο όμως προς το παρόν δεν έχει εφαρμοστεί και διερευνηθεί επαρκώς. Πρόσφατα προτάθηκαν επίσης μια σειρά από προηγμένα συστήματα ελέγχου αστικής κυκλοφορίας σε πραγματικό χρόνο όπως τα OPAC [23, 24], RHODES [57], PRODYN [20, 37], CRONOS [11], UTOPIA [49], CLAIRE [5]. Ωστόσο, όπως και στην περίπτωση του MOTION, κανένα απ' αυτά δεν έχει ακόμα εφαρμοστεί και διερευνηθεί επαρκώς. Αυτά τα νέα συστήματα δε λαμβάνουν υπόψη τους ρητά τις χρονικές μετατοπίσεις και την περίοδο σηματοδότησης. Βασισμένα σε προκαθορισμένο αριθμό και σύσταση φάσεων επιχειρούν σε πραγματικό χρόνο να προσδιορίσουν βέλτιστα τις επόμενες εναλλαγές κόκκινου-πράσινου ξεκινώντας από τον τρέχοντα χρόνο και την τρέχουσα φάση. Για τον καθορισμό των βέλτιστων αυτών εναλλαγών, οι μέθοδοι που υλοποιούν τα προαναφερόμενα συστήματα επιλύουν σε πραγματικό χρόνο ένα δυναμικό πρόβλημα βελτιστοποίησης χρησιμοποιώντας ιδιαιτέρως ρεαλιστικά μοντέλα για την περιγραφή της διεργασίας της κυκλοφοριακής ροής τα οποία περιλαμβάνουν δυαδικές μεταβλητές με στόχο την αναπαράσταση της επίδρασης των εναλλαγών κόκκινου-πράσινου στην κυκλοφοριακή ροή.

Άλλα συστήματα, όπως το TASS [55] επιλέγουν με βάση μετρήσεις πραγματικού χρόνου ένα προϋπολογισμένο πλάνο από μια βιβλιοθήκη αποθηκευμένων πλάνων, ενώ το BALANCE [22] αναπτύχθηκε αρχικά ως ένα εργαλείο βελτιστοποίησης για την παροχή προτεραιότητας στις δημόσιες μεταφορές. Τα συστήματα αυτά είναι σχεδιασμένα κυρίως για συνθήκες ακόρεστης και βραχυπρόθεσμης κορεσμένης κυκλοφορίας ενώ έχουν αυστηρές απαιτήσεις όσο αφορά τις μετρήσεις δεδομένων σε πραγματικό χρόνο.

Πρόσφατα προτάθηκε η στρατηγική ελέγχου TUC [17] η οποία είναι εφαρμόσιμη σε πραγματικό χρόνο σε μεγάλα δίκτυα και κύρια χαρακτηριστικά της είναι η ευρωστία, η απλότητα και αποτελεσματικότητα σε συνθήκες γενικευμένης κυκλοφοριακής συμφόρησης. Ωστόσο, η μέθοδος αυτή έχει ως κύρια μειονεκτήματα το ότι δεν λαμβάνει υπόψη την ύπαρξη περιορισμών κατά την επίλυση του προβλήματος βέλτιστου ελέγχου (προβάλλονται εκ των υστέρων).

Για την εφαρμογή πολλών από τις παραπάνω μεθοδολογίες σε πραγματικό χρόνο, υιοθετείται η αρχή του κυλιόμενου ορίζοντα σύμφωνα με την οποία το πρόβλημα βελτιστοποίησης επιλύεται, εκκινώντας από μετρήσεις της τρέχουσας κατάστασης, για μια αρκετά μακρά χρονική περίοδο (π.χ., 60 sec), τα αποτελέσματα, όμως, εφαρμόζονται για ένα συντομότερο διάστημα (π.χ., 4 sec) το οποίο ακολουθείται από νέα επίλυση με χρήση πιο πρόσφατων μετρήσεων κ.ο.κ. Με εξαίρεση το σύστημα CRONOS, τα συστήματα αυτά είναι κατά ουσία μεμονωμένα αφού ο υπέρμετρος υπολογιστικός φόρτος δεν επιτρέπει επέκτασή τους σε παραπάνω από ένα κόμβο. Έτσι υιοθετούν μια ιεραρχική δομή για την πρακτική εφαρμογή τους, όπου ένα ανώτερο επίπεδο ελέγχου είναι υπεύθυνο για το συντονισμό σε επίπεδο δικτύου, ενώ οι μεθοδολογίες βελτιστοποίησης που υλοποιούν εφαρμόζονται σε ένα κατώτερο επίπεδο με στόχο το μεμονωμένο έλεγχο των κόμβων. Σε αυτό το κατώτερο επίπεδο ελέγχου υιοθετούνται οι ακόλουθες μεθοδολογίες για την επίλυση του προβλήματος βελτιστοποίησης:

- Το OPAC υιοθετεί έναν αλγόριθμο εξαντλητικής απαρίθμησης με τον οποίο παράγει μια βέλτιστη ακολουθία εναλλαγών κόκκινου-πράσινου σε πραγματικό χρόνο.
- Το PROLYN εφαρμόζει δυναμικό προγραμματισμό.
- Το RHODES εφαρμόζει τον COP [79], έναν αλγόριθμο που εφαρμόζει επίσης δυναμικό προγραμματισμό.
- Το UTOPIA εφαρμόζει κάποια μορφή βελτιστοποίησης που όμως δεν περιγράφεται σαφώς στη σχετική βιβλιογραφία.
- Το CRONOS εφαρμόζει μια μεθοδολογία ευρετικής βελτιστοποίησης με πολυωνυμική πολυπλοκότητα που επιτρέπει την ταυτόχρονη εφαρμογή του σε άνω της μιας διασταύρωσης. Οδηγεί όμως σε υποβέλτιστες λύσεις και προς το παρόν δεν έχει εφαρμοστεί σε δίκτυα που περιλαμβάνουν περισσότερους από 6-8 κόμβους.
- Το CLAIRE είναι ένα έμπειρο σύστημα που διαθέτει ένα εργαλείο διαχείρισης της συμφόρησης.

Τέλος μια σειρά από νέες προσεγγίσεις στο χώρο των συστημάτων ελέγχου αστικών δικτύων είναι συστήματα που βασίζονται σε ασαφή έλεγχο και γενετικούς αλγορίθμους [60], γενετικούς αλγορίθμους [2], νευρωνικά δίκτυα [81], νευρο-ασαφή έλεγχο [30], ασαφή έλεγχο [59], δυναμικό προγραμματισμό [42] (παρόμοια με τον COP), γραμμικό προγραμματισμό [43], τεχνικές τεχνητής νοημοσύνης και μηχανικής μάθησης [33, 1]. Επίσης οι [48] προτείνουν ένα πολυεπίπεδο σύστημα που βασίζεται σε ευφυείς πράκτορες, ενώ στα κατώτερα επίπεδα χρησιμοποιούνται αλγόριθμοι αναζήτησης (Branch-and-Bound, BFS, Shortest path) για την επίλυση στατικών προβλημάτων σε κυλιόμενο ορίζοντα.

1.4 Εισαγωγή στην προτεινόμενη μεθοδολογία

Η παρούσα διατριβή πραγματεύεται την ανάπτυξη ενός συστήματος ελέγχου κυκλοφορίας που επιλύει το πρόβλημα ρύθμισης σηματοδότησης ως ένα μη γραμμικό πρόβλημα βέλτιστου ελέγχου λαμβάνοντας υπόψη όλους τους περιορισμούς. Για την επίλυση του μη γραμμικού προβλήματος βέλτιστου ελέγχου χρησιμοποιείται ένας αποτελεσματικός αλγόριθμος εφικτής κατεύθυνσης. Η ανάπτυξη του μοντέλου ελέγχου βασίζεται στην επανομαζόμενη προσέγγιση αποθήκευσης-και-προώθησης η οποία περιγράφει τη διεργασία της κυκλοφοριακής ροής με τρόπο που επιτρέπει τη χρήση μεθόδων βελτιστοποίησης και ελέγχου πολυωνυμικής πολυπλοκότητας για την επίλυση του αντίστοιχου προβλήματος, με αποτέλεσμα να δίνει την δυνατότητα ανάπτυξης συντονισμένων συστημάτων ελέγχου που είναι εφαρμόσιμες σε μεγάλα δίκτυα. Αντικειμενικός στόχος του μη γραμμικού προβλήματος βέλτιστου ελέγχου μπορεί να είναι η ελαχιστοποίηση του συνολικού χρόνου παραμονής στο ελεγχόμενο δίκτυο ο οποίος αντιστοιχεί στο άθροισμα των

οχημάτων σε όλους τους συνδέσμους του δικτύου, ή η ελαχιστοποίηση και εξισορρόπηση των ουρών που επιτυγχάνεται με την ελαχιστοποίηση του αθροίσματος των τετραγώνων των ουρών όλων των συνδέσμων του ελεγχόμενου δικτύου καθ' όλη τη διάρκεια του ορίζοντα βελτιστοποίησης.

Η διαφορά της προτεινόμενης μεθοδολογίας, από παλαιότερες εργασίες που αφορούν την ανάπτυξη συντονισμένων συστημάτων ελέγχου και βασίζονται στο ίδιο μαθηματικό πρότυπο, έγκειται στο γεγονός ότι επιτρέπει τη χρήση μη γραμμικών συναρτήσεων και άρα ενός πιο ρεαλιστικού μοντέλου αποθήκευσης-και-προώθησης για την περιγραφή της διεργασίας της κυκλοφοριακής ροής. Η επίλυση του προβλήματος μέσω μη γραμμικού βέλτιστου ελέγχου απαιτεί την μετατροπή ενός δυναμικού προβλήματος σε ένα στατικό πρόβλημα μη γραμμικής βελτιστοποίησης, ενώ ο παραγόμενος βέλτιστος έλεγχος είναι ανοιχτού βρόχου. Για την εφαρμογή της μεθοδολογίας αυτής σε πραγματικό χρόνο μέσω ενός συστήματος κλειστού βρόχου το πρόβλημα πρέπει να επιλυθεί σε κυλιόμενο ορίζοντα χρησιμοποιώντας:

- Μετρήσεις ουρών οχημάτων στους συνδέσμους του ελεγχόμενου δικτύου.
- Πρόβλεψη της μελλοντικής ζήτησης στις εισόδους του ελεγχόμενου δικτύου.
- Μετρήσεις ή εκτιμήσεις ποσοστών στροφής σε κάθε διασταύρωση αν κριθεί απαραίτητο.

Η παραπάνω προσέγγιση παρουσιάζει έναν αριθμό προβλημάτων που κατά κύριο λόγο απορρέουν από την επίλυση του προβλήματος μέσω του κυλιόμενου ορίζοντα. Τα προβλήματα αυτά είναι η πολυπλοκότητα του πηγαίου κώδικα του αλγορίθμου εφικτής κατεύθυνσης, ο υπολογιστικός φόρτος, η διαδικασία της υλοποίησης ενός συστήματος ελέγχου που απαιτεί την εφαρμογή σε πραγματικό χρόνο ενός μοντέλου² για την περιγραφή της διεργασίας της κυκλοφοριακής ροής και η μέτρηση ποσοτήτων, κατά τακτά χρονικά διαστήματα, όπως των ουρών των οχημάτων στους συνδέσμους του ελεγχόμενου δικτύου.

²Σε αντίθεση με ελεγκτές που σχεδιάζονται εκ των προτέρων στο εργαστήριο και υλοποιούνται στην συνέχεια σε πραγματικό χρόνο με εξαιρετική απλότητα και μικρό κόστος.

Κεφάλαιο 2

Μοντελοποίηση κυκλοφοριακής ροής αστικών οδικών δικτύων

Σκοπός αυτού του κεφαλαίου είναι η περιγραφή του μοντέλου ελέγχου το οποίο βασίζεται στο μαθηματικό πρότυπο αποθήκευσης-και-προώθησης. Η §2.1 παρουσιάζει βασικές έννοιες που αφορούν την ανάπτυξη στρατηγικών ελέγχου κυκλοφορίας, ενώ η §2.2 παρουσιάζει τον σχεδιασμό του μοντέλου ελέγχου. Τέλος, στην §2.3 διατυπώνεται το πρόβλημα βέλτιστης σηματοδότησης δικτύων που απορρέει από τον σχεδιασμό του πρότυπου μοντέλου ελέγχου, ενώ στην §2.4 εξετάζονται κάποιες αδυναμίες του προτεινόμενου μοντέλου.

2.1 Εισαγωγή

Η ανάπτυξη στρατηγικών ελέγχου κυκλοφορίας, σε μεγάλο βαθμό, δεν θα ήταν δυνατή χωρίς την γνώση των φαινομένων της κυκλοφοριακής ροής όσο και της συμπεριφοράς των οδηγών. Για το λόγο αυτό, οι πρώτες προσπάθειες κατανόησης και περιγραφής των φαινομένων της κυκλοφοριακής ροής άρχισαν ήδη από την δεκαετία του '30 [62] με την ανάπτυξη απλών μαθηματικών μοντέλων κυκλοφοριακής ροής. Στις μέρες μας, υπάρχουν διάφορα εργαλεία μοντελοποίησης της κυκλοφοριακής ροής τα οποία επίσης χρησιμεύουν και σε άλλους τομείς όπως:

- Βραχυπρόθεσμη πρόβλεψη και επιτήρηση της κυκλοφορίας σε περίπλοκα οδικά δίκτυα.
- Αξιολόγηση της επίδρασης νέων κατασκευών, σύγκριση εναλλακτικών λύσεων.
- Αξιολόγηση της επίδρασης γεγονότων που οδηγούν στην μείωση της χωρητικότητας του δικτύου (π.χ., εργασίες, ατυχήματα και/ή επεισόδια) ή την αύξηση της ζήτησης κ.λπ.

Γενικά, το *μαθηματικό μοντέλο* μιας διαδικασίας είναι η περιγραφή της διαδικασίας με χρήση μαθηματικών εξισώσεων. Οι εξισώσεις αυτές, περιγράφουν (μιμούνται) σημαντικά μέρη της συμπεριφοράς της διαδικασίας. Η επιλογή ενός συγκεκριμένου μοντέλου εξαρτάται από τις απαιτήσεις μιας συγκεκριμένης εφαρμογής και συνεπώς διαφορετικά μοντέλα της ίδιας διαδικασίας μπορούν να χρησιμοποιηθούν για διαφορετικούς σκοπούς. Στην πραγματικότητα ο ρόλος των μαθηματικών μοντέλων στην διαδικασία ανάπτυξης στρατηγικών ελέγχου οδικής κυκλοφορίας είναι διπλός. Από την μια πλευρά, ένα (πιθανώς απλοποιημένο) μοντέλο χρησιμοποιείται για το σχεδιασμό της στρατηγικής ελέγχου και από την άλλη, ένα (ενδεχομένως διαφορετικό, δηλαδή πιο ρεαλιστικό) μοντέλο χρησιμοποιείται για σύγκριση και εξέταση της στρατηγικής που αναπτύχθηκε, κάτω από διαφορετικά σενάρια ζήτησης και επεισοδίων πριν την υλοποίηση σε πραγματικές συνθήκες. Μια τέτοια προσέγγιση είναι προφανές ότι μειώνει το απαιτούμενο κόστος, απαιτεί λιγότερο χρόνο και είναι πιο ασφαλής και εύκολη προσέγγιση συγκριτικά με την απευθείας διερεύνηση στρατηγικών ελέγχου σε πραγματικές συνθήκες.

2.2 Σχεδιασμός του μοντέλου ελέγχου

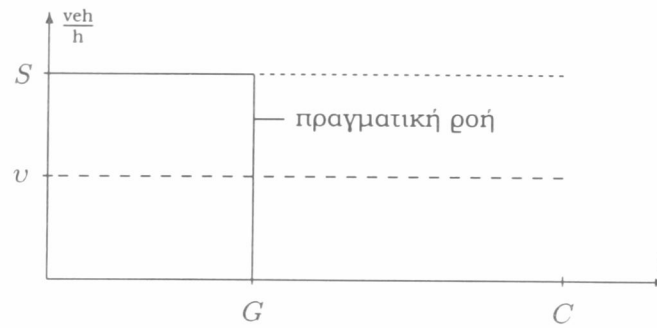
2.2.1 Το μαθηματικό πρότυπο αποθήκευσης-και-προώθησης

Η μαθηματικό πρότυπο αποθήκευσης-και-προώθησης προτάθηκε αρχικά στην [27] και έκτοτε χρησιμοποιήθηκε σε διάφορες εργασίες για τον έλεγχο κυκλοφορίας σε οδικά δίκτυα [26, 3, 80, 53, 54, 41, 16, 68, 71, 38]. Σύμφωνα με την προσέγγιση αυτή, τα οχήματα ταξιδεύουν κατά μήκος ενός συνδέσμου για κάποιο σταθερό χρόνο και συσσωρεύονται στην έξοδο του συνδέσμου αν η εισροή είναι μεγαλύτερη από την εκροή. Η εκροή προωθείται σύμφωνα με την εκάστοτε εφαρμοζόμενη ρύθμιση σηματοδότησης.

Το κύριο χαρακτηριστικό που κάνει την συγκεκριμένη προσέγγιση ιδιαίτερα ενδιαφέρουσα, είναι η εισαγωγή ενός απλοποιημένου μοντέλου που επιτρέπει τη μαθηματική περιγραφή της διεργασίας της κυκλοφοριακής ροής χωρίς την χρήση δυαδικών μεταβλητών. Η απλοποίηση αφορά την μοντελοποίηση της εκροής ενός συνδέσμου. Υποθέτοντας ότι η ανάντη ζήτηση του συνδέσμου είναι αρκούντως μεγάλη, η εκροή v κατά το διακριτό διάστημα k τίθεται ίση προς

$$v(k) = \frac{S G(k)}{C} \quad (2.2.1)$$

όπου S είναι η ροή κορεσμού του συνδέσμου, G είναι η διάρκεια του πρασίνου για το αντίστοιχο ρεύμα κυκλοφορίας και C η διάρκεια της περιόδου σηματοδότησης του κόμβου. Σύμφωνα με την (2.2.1), αν η περίοδος του μοντέλου T ισούται με C , η εκροή v ισούται με μια μέση ροή καθ' όλη τη διάρκεια της περιόδου σηματοδότησης αντί να ισούται με S όταν ο σύνδεσμος δέχεται προτεραιότητα (πράσινο) και με μηδέν διαφορετικά (κόκκινο) όπως δείχνει το Σχήμα 2.1. Με άλλα λόγια, η (2.2.1) υποθέτει την ύπαρξη



Σχήμα 2.1: Απλοποιημένη μοντελοποίηση της εκροής v ενός συνδέσμου.

μιας συνεχούς εκροής από τον σύνδεσμο (όσο βέβαια υπάρχει επαρκής ζήτηση). Ως συνέπεια αυτής της θεώρησης έχουμε τα εξής [66]:

- Η περίοδος του μοντέλου T δεν μπορεί να είναι μικρότερη από την περίοδο σηματοδότησης C , όλων των ελεγχόμενων κόμβων. Συνεπώς, οι αποφάσεις ελέγχου δεν μπορούν να λαμβάνονται συχνότερα από τη διάρκεια της μεγαλύτερης χρονικά περιόδου σηματοδότησης που χρησιμοποιείται στο ελεγχόμενο αστικό δίκτυο.
- Το μοντέλο υποθέτει την ύπαρξη μιας συνεχούς εκροής ανταγωνιστικών ρευμάτων.
- Το μοντέλο δεν περιγράφει τις περιοδικές μεταβολές των ουρών στους συνδέσμους που απορρέουν από την εναλλαγή κόκκινης-πράσινης ένδειξης.
- Η επίδραση της χρονικής μετατόπισης μεταξύ γειτονικών κόμβων δεν μπορεί να ληφθεί υπόψη, ενώ η χρονική διάρκεια της περιόδου σηματοδότησης δεν μπορεί να μεταβληθεί.

Παρά τα παραπάνω μειονεκτήματα, η εισαγωγή της παραπάνω απλούστευσης δίνει την δυνατότητα αποφυγής δυαδικών μεταβλητών και ανοίγει τον δρόμο για την εφαρμογή αποτελεσματικών μεθόδων βελτιστοποίησης και ελέγχου (όπως γραμμικός προγραμματισμός, τετραγωνικός προγραμματισμός, μη γραμμικός προγραμματισμός και πολυμεταβλητοί ρυθμιστές) πολυωνυμικής πολυπλοκότητας.

Στην παρούσα διατριβή το μαθηματικό μοντέλο αποθήκευσης-και-προώθησης τροποποιείται κατάλληλα ώστε το διακριτό διάστημα μοντελοποίησης T να μπορεί να είναι μικρότερο από την περίοδο σηματοδότησης C των ελεγχόμενων κόμβων. Επιπλέον, το προτεινόμενο μοντέλο δεν χρησιμοποιεί δυαδικές μεταβλητές ενώ κάνει χρήση μη γραμμικών συναρτήσεων προτείνοντας ένα πιο ρεαλιστικό μοντέλο αποθήκευσης-και-προώθησης για την περιγραφή της διεργασίας της κυκλοφοριακής ροής. Ωστόσο οι παραπάνω τροποποιήσεις οδηγούν σ' ένα μη γραμμικό μοντέλο που για την επίλυσή του απαιτούνται προηγμένες μεθοδολογίες από το χώρο της βελτιστοποίησης και του βέλτιστου ελέγχου που θα εξετάσουμε στο Κεφάλαιο 3.

2.2.2 Ανάπτυξη του μαθηματικού μοντέλου

Ένα αστικό δίκτυο μπορεί να αναπαρασταθεί σε ένα διάγραμμα με τους συνδέσμους $z \in Z$ και τους κόμβους $j \in J$. Θεωρούμε ένα ελεγχόμενο σηματοδοτούμενο κόμβο j ορίζοντας I_j και O_j τους συνδέσμους εισόδου και εξόδου αντίστοιχα. Ακόμη ορίζουμε για κάθε σύνδεσμο $z \in Z$ το σύνολο P_z με στοιχεία τους συνδέσμους στους οποίους έχει την δυνατότητα να προωθήσει τη ροή του. Επιπλέον υποθέτουμε τα ακόλουθα:

- Η διάρκεια της περιόδου σηματοδότησης C_j και ο συνολικός χαμένος χρόνος L_j του κόμβου j έχουν σταθερές τιμές. Για απλότητα και συντονισμό του αστικού δικτύου υποθέτουμε ότι $C_j = C$ για όλους τους κόμβους $j \in J$.
- Οι χρονικές μετατοπίσεις είναι σταθερές (δηλαδή το ξεκίνημα της κύριας φάσης για κάθε περίοδο σηματοδότησης είναι σταθερό).
- Ο έλεγχος των σηματοδοτών του κόμβου j βασίζεται σε σταθερό αριθμό φάσεων που ανήκουν στο σύνολο F_j , ενώ v_z είναι το σύνολο των φάσεων στις οποίες έχει προτεραιότητα ο σύνδεσμος z .
- Οι ροές κορεσμού και η μέγιστη χωρητικότητα (μετρημένη σε αριθμό οχημάτων) των συνδέσμων S_z και $x_{z,\max}$, $z \in I_j$ αντίστοιχα, είναι γνωστές για κάθε κόμβο $j \in J$.
- Τα ποσοστά στροφής για κάθε κίνηση t_{zw} , $z \in I_j$, $w \in O_j$, $j \in J$ είναι γνωστά και μπορούν να μεταβάλλονται με το χρόνο. Στην περίπτωση εφαρμογής του μοντέλου μέσω της διαδικασίας του κυλιόμενου οριζοντα, τα ποσοστά στροφής για κάθε κίνηση μπορεί να μετρώνται ή να εκτιμώνται σε πραγματικό χρόνο, αν αυτό κριθεί απαραίτητο.

Για κάθε κόμβο j βάση του ορισμού ισχύει ο περιορισμός

$$C = \sum_{i \in F_j} g_{j,i} + L_j \quad (2.2.2)$$

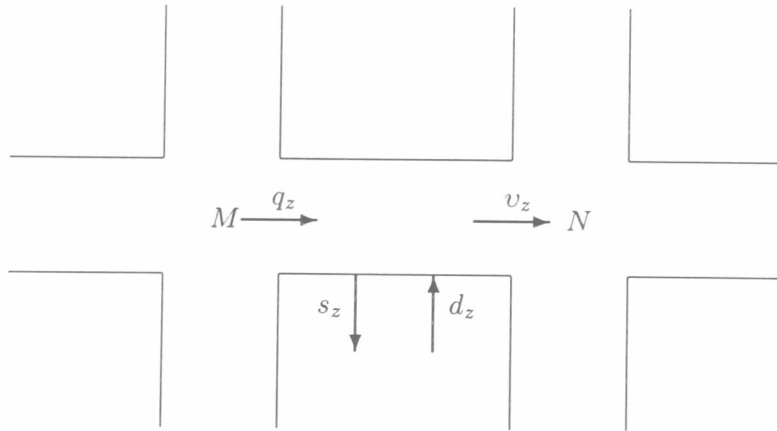
όπου $g_{j,i}$ είναι ο αποτελεσματικός χρόνος πρασίνου της φάσης i στον κόμβο j . Επίσης, εισάγεται ο παρακάτω περιορισμός για να εγγυηθεί την κατανομή χρόνου πρασίνου σε όλες τις φάσεις

$$g_{j,i} \geq g_{j,i,\min}, \quad \forall i \in F_j \quad (2.2.3)$$

όπου $g_{j,i,\min}$ είναι ο μικρότερος δυνατός αποτελεσματικός χρόνος πρασίνου για την φάση i στον κόμβο j . Σε μερικές περιπτώσεις περιορισμοί όπως ο ακόλουθος μπορούν να εφαρμοστούν

$$g_{j,i} \leq g_{j,i,\max}, \quad \forall i \in F_j \quad (2.2.4)$$

όπου $g_{j,i,\max}$ είναι ο μεγαλύτερος δυνατός αποτελεσματικός χρόνος πρασίνου για την φάση i στον κόμβο j .



Σχήμα 2.2: Σύνδεσμος αστικού οδικού δικτύου που συνδέει τους κόμβους M και N .

Έστω ο σύνδεσμος z που συνδέει δυο κόμβους M, N τέτοιους ώστε $z \in O_M$ και $z \in I_N$ (Σχήμα 2.2). Η δυναμική του συνδέσμου z διατυπώνεται από την εξίσωση

$$x_z(k+1) = x_z(k) + T [q_z(k) - s_z(k) + d_z(k) - v_z(k)] \quad (2.2.5)$$

όπου x_z είναι ο αριθμός των οχημάτων στον σύνδεσμο z , q_z και v_z η εισροή και εκροή αντίστοιχα στον ίδιο σύνδεσμο κατά την διάρκεια $[kT, (k+1)T]$, με T την περίοδο του μοντέλου και $k = 0, 1, \dots, K$ είναι ο δείκτης διακριτού διαστήματος ελέγχου. Τέλος d_z και s_z είναι η ζήτηση και η ροή εξόδου του συνδέσμου z , αντίστοιχα. Η ροή εξόδου στο σύνδεσμο z είναι

$$s_z(k) = t_{z0} q_z(k). \quad (2.2.6)$$

Τα ποσοστά στροφής t_{z0} υποθέτουμε ότι είναι γνωστά ή μπορούν να μετρηθούν σε πραγματικό χρόνο, ενώ η ζήτηση της ροής $d_z(k)$ μπορεί να προέρχεται από ιστορικές μετρήσεις που με κατάλληλη επεξεργασία μέσω ειδικών προγραμμάτων είναι διαθέσιμη για ένα δεδομένο δίκτυο. Η εξίσωση (2.2.5) λαμβάνοντας υπόψη την εξίσωση (2.2.6) δίνει

$$x_z(k+1) = x_z(k) + T [(1 - t_{z0}) q_z(k) + d_z(k) - v_z(k)]. \quad (2.2.7)$$

Η εισροή στο σύνδεσμο z είναι

$$q_z(k) = \sum_{w \in I_M} t_{wz} v_w(k) \quad (2.2.8)$$

όπου t_{wz} με $w \in I_M$, είναι τα ποσοστά στροφής των συνδέσμων εισόδου στον κόμβο M προς τον σύνδεσμο z .

Σύμφωνα με το μαθηματικό πρότυπο αποθήκευσης-και-προώθησης, αν η περίοδος του μοντέλου T είναι ίση με την περίοδο C , τότε η μέση τιμή της εκροής του συνδέσμου z από την εφαρμογή της (2.2.1) είναι

$$v_z(k) = \frac{S_z G_z(k)}{C} \quad (2.2.9)$$

όπου ο αποτελεσματικός χρόνος πρασίνου G_z του συνδέσμου z υπολογίζεται ως

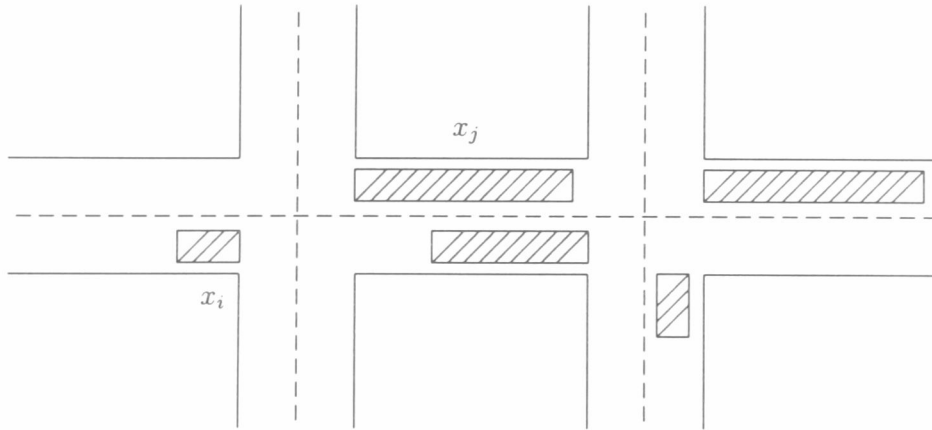
$$G_z(k) = \sum_{i \in v_z} g_{N,i}(k) + e_z \quad (2.2.10)$$

όπου e_z σταθερά που μπορεί να πάρει αρνητικές ή θετικές τιμές. Στην περίπτωση που ο σύνδεσμος z δέχεται προτεραιότητα σε περισσότερες από μια φάσεις, τότε χρησιμοποιεί τους ενδιάμεσους χρόνους μαζί με τους χρόνους πρασίνου και/ή ο χρόνος πρασίνου του συνδέσμου z αρχίζει νωρίτερα ή τελειώνει αργότερα στην αντίστοιχη φάση (ή φάσεις) που έχει προτεραιότητα, και έτσι το e_z λαμβάνει θετικές τιμές που αντιστοιχούν στον επιπρόσθετο χρόνο που χρησιμοποιείται από τον σύνδεσμο. Στην περίπτωση που ο χρόνος πρασίνου του συνδέσμου z αρχίζει αργότερα ή τελειώνει νωρίτερα στην αντίστοιχη φάση (ή φάσεις) που έχει προτεραιότητα, το e_z λαμβάνει αρνητικές τιμές. Σε οποιαδήποτε άλλη περίπτωση, το e_z είναι ίσο με μηδέν.

Η παραπάνω θεώρηση της εκροής του συνδέσμου z μέσω της εξίσωσης (2.2.9) υποθέτει ότι η περίοδος του μοντέλου T δεν μπορεί να είναι μικρότερη από την περίοδο σηματοδότησης C . Ωστόσο, αυτή η υπόθεση του κλασσικού μοντέλου αποθήκευσης-και-προώθησης σε συνδυασμό με τον περιορισμό χωρητικότητας των συνδέσμων $0 \leq x_z \leq x_{z,\max}$, $\forall z \in Z$ που εγγυάται ότι ο αριθμός οχημάτων σ' αυτούς δεν θα ξεπεράσει την μέγιστη χωρητικότητα τους, δημιουργούν το εξής πρόβλημα: αν θεωρήσουμε ότι κανένας περιορισμός χωρητικότητας των συνδέσμων δεν είναι ενεργός, τότε αφού η περίοδος του μοντέλου T δεν μπορεί να είναι μικρότερη από την περίοδο C , η εκροή θα έχει την μέση τιμή (2.2.9)· στην περίπτωση αυτή και αν η ουρά $x_z(k)$ δεν είναι αρκετά μεγάλη ή ακόμα και μηδέν, ή εάν η ουρά που σχηματίζεται στον κατάντη σύνδεσμο είναι πολύ μεγάλη για να εξυπηρετήσει μεγάλες εισροές οχημάτων, θα ενεργοποιηθούν οι περιορισμοί χωρητικότητας με αποτέλεσμα την μείωση του αποτελεσματικού χρόνου πρασίνου G_z .

Ας δούμε ένα απλό παράδειγμα που κάνει πιο ξεκάθαρο το πρόβλημα αυτό· ας υποθέσουμε ότι για μια δεδομένη περίοδο σηματοδότησης δύο σύνδεσμοι $i, j \in Z$ λαμβάνουν ταυτοχρόνως προτεραιότητα και ότι $x_i \simeq 0$ ενώ $x_j \gg 0$ (βλέπε Σχήμα 2.3). Στην περίπτωση αυτή αν τα G_i και G_j δεν είναι ανεξάρτητα τότε εξ ορισμού έχουμε $G_i = G_j$. Ωστόσο, η ουρά στο σύνδεσμο i είναι πολύ μικρή ($x_i \simeq 0$) με αποτέλεσμα να ενεργοποιηθεί ο περιορισμός $x_i \geq 0$ και συνεπώς να μειωθεί ο αποτελεσματικός χρόνος G_i . Η μείωση αυτή όμως δεν επιτρέπει την διάλυση της ουράς του συνδέσμου j (αφού $G_i = G_j$) που απαιτεί περισσότερο αποτελεσματικό χρόνο.

Για την αντιμετώπιση αυτής της δυσκολίας μπορούμε να θεωρήσουμε ότι τα G_i και G_j είναι ανεξάρτητα ώστε το μοντέλο να εγγυάται ότι $x_i \geq 0$ επιλέγοντας G_i αρκετά μικρό χωρίς να περιορίζει το G_j . Η προσέγγιση αυτή έχει διερευνηθεί στο παρελθόν σε άλλες εργασίες και μπορεί να υλοποιηθεί μέσω γνωστών μεθόδων βελτιστοποίησης, όπως ο γραμμικός ή τετραγωνικός προγραμματισμός (ανάλογα με το κριτήριο κόστους που θα επιλεγεί).



Σχήμα 2.3: Απλοποιημένη μοντελοποίηση της εκροής v ενός συνδέσμου.

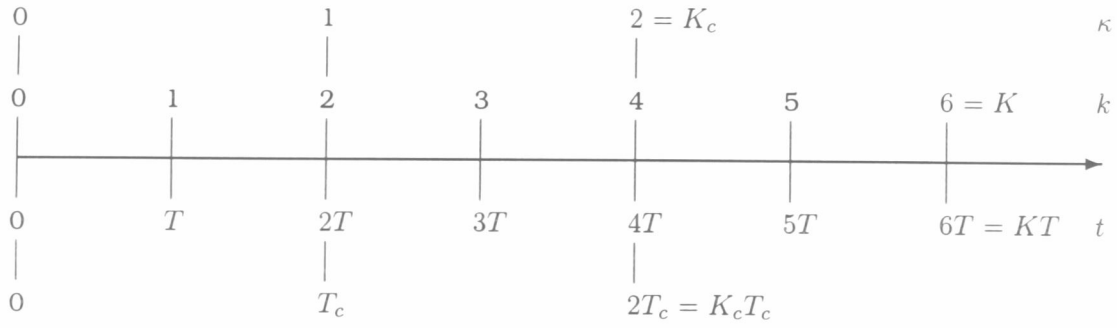
Στην παρούσα διατριβή το πρόβλημα αυτό αντιμετωπίζεται αντικαθιστώντας τη γραμμική συνάρτηση της εκροής (2.2.9) με μια μη γραμμική συνάρτηση, θεωρώντας ότι η περίοδος του μοντέλου είναι πολύ μικρότερη από την περίοδο σηματοδότησης, ήτοι $T \ll C$. Για το σκοπό αυτό η εκροή $v_z(k)$ του συνδέσμου $z \in I_N$ στην εξίσωση (2.2.7) δίδεται από την μη γραμμική συνάρτηση

$$v_z(k) = \begin{cases} 0 & \text{αν } x_i(k) \geq cx_{i,\max}, \text{ για κάποιο } i \in O_N \text{ και } i \in P_z \\ \min \left\{ \frac{x_z(k)}{T}, \frac{S_z G_z(k)}{C} \right\} & \text{αλλιώς} \end{cases} \quad (2.2.11)$$

όπου $c \in (0, 1]$ δηλώνει ποσοστό της μέγιστης χωρητικότητας. Με άλλα λόγια, αν για κάποιο σύνδεσμο i ο οποίος είναι εξερχόμενος στον κόμβο N και η ροή του μπορεί να προέλθει από τον σύνδεσμο z , ο αριθμός των οχημάτων είναι μεγαλύτερος ή ίσος από ένα ποσοστό της μέγιστης χωρητικότητάς του, τότε η εκροή $v_z(k)$ είναι ίση με μηδέν και συνεπώς προστατεύεται ο σύνδεσμος i από υπερχειλίση. Διαφορετικά, η εκροή $v_z(k)$ τίθεται ίση προς το ελάχιστο της μέσης τιμής (2.2.9) και της ροής στο σύνδεσμο $x_z(k)/T$, έτσι ώστε στην περίπτωση που η μέση εκροή που υποθέτει το πρότυπο αποθήκευσης-και-προώθησης είναι μεγαλύτερη από την ουρά στο σύνδεσμο z να μην απαιτείται η ενεργοποίηση του περιορισμού $x_z \geq 0$.

Η καταστατική εξίσωση (2.2.7) μαζί με τις εξισώσεις ροών (2.2.8) και (2.2.11), μπορούν να περιγράψουν την δυναμική εξέλιξη των ουρών στους συνδέσμους $z \in Z$ για ένα δίκτυο με τυχαία τοπολογία και χαρακτηριστικά. Το μοντέλο αυτό είναι πιο ρεαλιστικό για την περιγραφή της διεργασίας της κυκλοφοριακής ροής από το κλασσικό πρότυπο αποθήκευσης-και-προώθησης, ενώ εμμέσως λαμβάνει υπόψη του τους περιορισμούς χωρητικότητας των συνδέσμων. Ας σημειωθεί εδώ, ότι σε αντίθεση με άλλες εφαρμογές της μοντελοποίησης αποθήκευσης-και-προώθησης [26, 3, 80], το x_z δηλώνει τον αριθμό των οχημάτων αντί το μήκος της ουράς στον σύνδεσμο z .

Στο σημείο αυτό θεωρούμε T περίοδο του μοντέλου, T_c περίοδο του ελέγχου και K ορίζοντα βελτιστοποίησης του προβλήματος. Υποθέτουμε ότι $T_c = \tau T$, $\tau \in \mathbb{N}$ και $K_c = \frac{K}{\tau} - 1$, $\frac{K}{\tau} \in \mathbb{N}$. Από την διατύπωση



Σχήμα 2.4: Σχηματική αναπαράσταση του μοντέλου για την περίπτωση $\tau = 2$, $K = 6$.

του προβλήματος ελέγχου που έγινε παραπάνω θεωρούμε ως μεταβλητές κατάστασης τον αριθμό των οχημάτων x_z , $z \in Z$ και ως μεταβλητές ελέγχου τους αποτελεσματικούς χρόνους πρασίνου $g_{j,i}$, $j \in J$ και $i \in F_j$. Στο Σχήμα 2.4 παρουσιάζεται ένα απλό παράδειγμα για το οποίο $\tau = 2$, $K = 6$, $K_c = \lceil \frac{6}{2} \rceil - 1 = 2$. Οι μεταβλητές κατάστασης $x_z(k)$, $k = 0, \dots, K - 1$ ενημερώνονται κάθε περίοδο T , ενώ οι μεταβλητές ελέγχου $g_{j,i}(\kappa)$, $\kappa = 0, \dots, K_c$ ενημερώνονται κάθε περίοδο T_c . Αποτέλεσμα της τροποποίησης αυτής που αφορά την περίοδο του μοντέλου και την περίοδο του ελέγχου είναι η δυνατότητα του μοντέλου πλέον να λαμβάνει αποφάσεις ελέγχου κάθε περίοδο T_c που είναι ανεξάρτητη από τη διάρκεια της μεγαλύτερης χρονικά περιόδου σηματοδότησης στο ελεγχόμενο δίκτυο.

Από τους παραπάνω ορισμούς η καταστατική εξίσωση (2.2.7) και οι εξισώσεις ροών (2.2.8) και (2.2.11) γίνονται

$$x_z(k+1) = x_z(k) + T[(1 - t_{z0})q_z(\kappa) + d_z(\kappa) - v_z(\kappa)] \quad (2.2.12)$$

$$q_z(\kappa) = \sum_{w \in I_M} t_{wz} v_w(\kappa) \quad (2.2.13)$$

$$v_z(\kappa) = \begin{cases} 0 & \text{αν } x_i(k) \geq cx_{i,\max}, \text{ για κάποιο } i \in O_N \text{ και } i \in P_z \\ \min \left\{ \frac{x_z(k)}{T}, \frac{S_z G_z(\kappa)}{C} \right\} & \text{αλλιώς} \end{cases} \quad (2.2.14)$$

για κάθε $k = 0, \dots, K - 1$ και $\kappa = 0, \dots, K_c$.

Εφαρμόζοντας τις παραπάνω εξισώσεις σε ένα δίκτυο με τυχαία τοπολογία και χαρακτηριστικά που αποτελείται από τους κόμβους $j \in J$ και υποθέτοντας ότι τα ποσοστά στροφής για κάθε κίνηση t_{zw} , $z \in I_j$, $w \in O_j$, $j \in J$ μεταβάλλονται με το χρόνο, προκύπτει η ακόλουθη καταστατική εξίσωση (σε διανυσματική μορφή) που περιγράφει την δυναμική εξέλιξη του αριθμού των οχημάτων στο χρόνο

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{f}[\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(\kappa), \mathbf{d}(\kappa), k], \quad k = 0, \dots, K - 1, \kappa = 0, \dots, K_c. \quad (2.2.15)$$

Το διάνυσμα κατάστασης \mathbf{x} έχει για στοιχεία του τους αριθμούς των οχημάτων x_z στους συνδέσμους $z \in Z$, ενώ το διάνυσμα ελέγχου \mathbf{u} έχει για στοιχεία του τους αποτελεσματικούς χρόνους πρασίνου $g_{j,i}$, για κάθε

$i \in F_j, j \in J$. Ακόμη το διάνυσμα \mathbf{d} έχει στοιχεία του τις ζητήσεις d_z στους συνδέσμους $z \in Z$, ενώ η \mathbf{f} είναι μια μη γραμμική διανυσματική συνάρτηση, με στοιχεία f_z , για κάθε σύνδεσμο $z \in Z$.

Το μαθηματικό μοντέλο δοσμένο από την (2.2.15) περιγράφει την δυναμική της κυκλοφοριακής ροής, θεωρώντας την επίδραση της ζήτησης \mathbf{d} . Ωστόσο, η ζήτηση αυτή μπορεί να θεωρηθεί ως διαταραχή του δυναμικού συστήματος. Η εφαρμογή του βέλτιστου ελέγχου λαμβάνει υπόψη την παρουσία διαταραχών, οδηγώντας σε στρατηγικές ελέγχου που προβλέπουν ενδεχόμενες μελλοντικές διαταραχές στην εξέλιξη του ελέγχου. Για την εφαρμογή σε πραγματικό χρόνο τέτοιων συστημάτων απαιτείται η ακριβής πρόβλεψη των διαταραχών, γεγονός που δεν είναι εύκολο να γίνει στην περίπτωση της αστικής κυκλοφορίας. Για το λόγο αυτό, στην εξίσωση (2.2.15) αφαιρείται ο όρος των διαταραχών θεωρώντας $\mathbf{d} = \mathbf{0}$ και συνεπώς

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{f}[\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(\kappa), k], \quad k = 0, \dots, K-1, \kappa = 0, \dots, K_c. \quad (2.2.16)$$

Θεωρούμε το τετραγωνικό κριτήριο που διατυπώνει τον αντικειμενικό στόχο για τον έλεγχο κυκλοφορίας με την μορφή

$$\mathcal{J} = \sum_{z \in Z} \frac{x_z^2(K)}{x_{z,\max}} + \sum_{k=0}^{K-1} \sum_{z \in Z} \frac{x_z^2(k)}{x_{z,\max}}. \quad (2.2.17)$$

Η συνάρτηση κόστους (2.2.17) διατυπώνει τον αντικειμενικό στόχο του ελέγχου με μαθηματικούς όρους, που είναι η ελαχιστοποίηση και εξισορρόπηση των ουρών όλων των συνδέσμων του ελεγχόμενου δικτύου καθ' όλη τη διάρκεια του ορίζοντα βελτιστοποίησης K . Μια άλλη μορφή του κριτηρίου κόστους που οδηγεί σε μια γραμμική συνάρτηση κόστους, θα μπορούσε να είναι η ελαχιστοποίηση του συνολικού χρόνου παραμονής στο ελεγχόμενο δίκτυο ο οποίος αντιστοιχεί στο άθροισμα των ουρών όλων των συνδέσμων του δικτύου καθ' όλη τη διάρκεια του ορίζοντα βελτιστοποίησης.

2.3 Διατύπωση του προβλήματος βέλτιστου ελέγχου

Η διατύπωση ενός προβλήματος βέλτιστου ελέγχου αποτελείται από την ελαχιστοποίηση μιας συνάρτησης κόστους (ή συναρτησιακού) υπό ένα αριθμό περιορισμών, που μπορεί να αφορούν τις μεταβλητές ελέγχου ή/και τις μεταβλητές κατάστασης. Το πρόβλημα ελέγχου κυκλοφορίας που περιγράφεται από το μοντέλο ελέγχου που αναπτύχθηκε στην §2.2 αποτελείται από:

- Την συνάρτηση κόστους (2.2.17).
- Το μαθηματικό μοντέλο εξέλιξης του αριθμού των οχημάτων στους συνδέσμους του ελεγχόμενου δικτύου που βασίζεται στην καταστατική εξίσωση (2.2.16).
- Τους περιορισμούς των μεταβλητών ελέγχου που δίδονται από τις εξισώσεις (2.2.2)–(2.2.4).

Η επίλυση ενός προβλήματος βέλτιστου ελέγχου λαμβάνοντας υπόψη άμεσα τους παραπάνω περιορισμούς αντιμετωπίζει ένα αριθμό δυσκολιών που πολλές φορές είναι ανυπερέβλητες. Για το λόγω αυτό οι περιορισμοί του προβλήματος είτε εισάγονται έμμεσα στο πρόβλημα είτε λαμβάνονται υπόψη μέσω κατάλληλων μεθοδολογιών μη γραμμικής βελτιστοποίησης όπως η συνάρτηση τιμωρίας (βλέπε Παράρτημα Α').

Για την απλοποίηση των περιορισμών των μεταβλητών ελέγχου (2.2.2)-(2.2.4) θεωρούμε $|F_j| - 1$ ανεξάρτητες μεταβλητές σε κάθε κόμβο $j \in J$, με $|F_j|$ το πλήθος των στοιχείων του συνόλου F_j . Συνεπώς, θεωρούμε ότι σε κάθε κόμβο j μια μεταβλητή $g_{j,i}$ εξαρτάται από τις υπόλοιπες. Ως εκ τούτου θέτουμε από την εξίσωση (2.2.2)

$$g_{j,i} = C_j - L_j - \sum_{i \in F_j, i \neq \iota} g_{j,i}, \quad \forall j \in J \quad (2.3.1)$$

και εισάγουμε τους περιορισμούς ισότητας στην καταστατική εξίσωση (2.2.16). Από τους δείκτες ι της εξίσωσης (2.3.1) ορίζουμε το σύνολο F_j^- των εξαρτημένων μεταβλητών για κάθε $j \in J$. Η παραπάνω απαλοιφή των περιορισμών ισότητας οδηγεί σε μείωση των μεταβλητών ελέγχου κατά $|J|$, με $|J|$ το πλήθος των στοιχείων του συνόλου J .

Με την απλοποίηση των περιορισμών των μεταβλητών ελέγχου, έχουμε τους περιορισμούς $g_{j,i,\min} \leq g_{j,i} \leq g_{j,i,\max}$, για κάθε $i \in F_j \setminus F_j^-$. Οι περιορισμοί αυτοί μπορεί να γραφούν στη γενική διανυσματική μορφή

$$\mathbf{u}_{\min} \leq \mathbf{u}(\kappa) \leq \mathbf{u}_{\max}, \quad \forall \kappa = 0, \dots, K_c \quad (2.3.2)$$

και να ληφθούν άμεσα υπόψη κατά την επίλυση του προβλήματος βελτιστοποίησης ενώ οι αντίστοιχοι περιορισμοί για τις μεταβλητές u_i , $i \in F_j^-$, λαμβάνονται υπόψη μέσω της συνάρτησης τιμωρίας. Επιπλέον, για την αποφυγή έντονων διακυμάνσεων των τροχιών ελέγχου στον ορίζοντα βελτιστοποίησης εισάγεται στο πρόβλημα κατάλληλος τετραγωνικός περιορισμός τιμωρίας των διακυμάνσεων αυτών.

Συνοπτικά η διατύπωση του προβλήματος βέλτιστου ελέγχου είναι

Ελαχιστοποίηση

$$\mathcal{J} = \sum_{z \in Z} \frac{x_z^2(K)}{x_{z,\max}} + \sum_{k=0}^{K-1} \left\{ \sum_{z \in Z} \frac{x_z^2(k)}{x_{z,\max}} + a_f \sum_{i=1}^m [u_i(\kappa) - u_i(\kappa-1)]^2 + a_{w_\iota} \sum_{i=1}^{|J|} \phi[\mathbf{u}(\kappa)] + a_{w_u} \sum_{i=1}^{|J|} \psi[\mathbf{u}(\kappa)] \right\}, \quad \kappa = \left[\frac{k}{\tau} \right] \quad (2.3.3)$$

υπό τους περιορισμούς

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{f}[\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(\kappa), k], \quad k = 0, \dots, K-1, \quad \kappa = \left[\frac{k}{\tau} \right] \quad (2.3.4)$$

$$\mathbf{u}_{\min} \leq \mathbf{u}(\kappa) \leq \mathbf{u}_{\max}, \quad \kappa = 0, \dots, K_c, \quad \forall i \in F_j \setminus F_j^- \quad (2.3.5)$$



όπου ϕ και ψ συναρτήσεις που ικανοποιούν τις ακόλουθες σχέσεις

$$\phi[\mathbf{u}(\kappa)] = \max \left\{ 0, u_{j,\min} + \sum_{i \in F_j \setminus F_j^-} u_i(\kappa) + L_j - C_j \right\}^2 \quad (2.3.6)$$

$$\psi[\mathbf{u}(\kappa)] = \max \left\{ 0, C_j - L_j - \sum_{i \in F_j \setminus F_j^-} u_i(\kappa) - u_{j,\max} \right\}^2. \quad (2.3.7)$$

Στην συνάρτηση κόστους (2.3.3) a_f, a_{w_ℓ}, a_{w_u} είναι θετικές παράμετροι βάρους, που προσδιορίζονται από μια διαδικασία δοκιμής-και-σφάλματος (trial-and-error) έτσι ώστε να επιτευχθεί μια ικανοποιητική συμπεριφορά ελέγχου για ένα δοσμένο δίκτυο. Ο όρος με βάρος a_f προστίθεται στην συνάρτηση κόστους για την αποφυγή έντονων διακυμάνσεων των τροχιών ελέγχου στον ορίζοντα βελτιστοποίησης. Τέλος, οι δύο τελευταίοι όροι είναι συναρτήσεις τιμωρίας που εγγυώνται την ικανοποίηση των περιορισμών (2.3.5).

2.4 Γενικές παρατηρήσεις

Όπως είδαμε στην §2.2.2 το μαθηματικό μοντέλο αποθήκευσης-και-προώθησης τροποποιείται κατάλληλα ώστε η περίοδος του μοντέλου T να μπορεί να είναι μικρότερη από την περίοδο σηματοδότησης C των ελεγχόμενων κόμβων. Το μοντέλο αυτό όμως, ενώ είναι πιο ρεαλιστικό για την περιγραφή της εξέλιξης των ουρών σε ένα δίκτυο, παρουσιάζει μια αδυναμία στην περίπτωση που η περίοδος του μοντέλου T επιλεγεί να είναι πολύ μικρή και το ελεγχόμενο δίκτυο αποτελείται από συνδέσμους με μεγάλο μήκος.

Για να κατανοήσουμε την αδυναμία αυτή, ας υποθέσουμε ότι έχουμε τον σύνδεσμο z ενός αστικού δικτύου με μεγάλο μήκος που έχει εισροή $q_{z,in}$ και εκροή $q_{z,out}$ όπως αυτός του Σχήματος 2.5. Η δυναμική του συνδέσμου z διατυπώνεται από μια απλοποιημένη μορφή της εξίσωσης (2.2.5), δηλαδή:

$$x_z(k+1) = x_z(k) + T[q_{z,in}(k) - q_{z,out}(k)]. \quad (2.4.1)$$

Αν τώρα η περίοδος T είναι πολύ μικρή ($T \simeq 5 \text{ sec}$), το μοντέλο θεωρεί ότι η εισροή $q_{z,in}$ «ταξιδεύει» κατά μήκος του συνδέσμου z για το πολύ μικρό σταθερό χρόνο T και συσσωρεύεται στην έξοδο του συνδέσμου αν η εισροή $q_{z,in}$ είναι μεγαλύτερη από την εκροή $q_{z,out}$ · γεγονός που δεν ανταποκρίνεται στην πραγματικότητα αφού ο σύνδεσμος z έχει μεγάλο μήκος και συνεπώς αρκετά μεγάλο χρόνο ταξιδιού.

Η εγγενής αυτή αδυναμία του μοντέλου μπορεί να αντιμετωπισθεί θεωρώντας ότι η εισροή $q_{z,in}$ έχει χρονική υστέρηση (time delay) για συνδέσμους z με αρκετά μεγάλο μήκος. Στην περίπτωση αυτή η απλοποιημένη εξίσωση (2.4.1) γίνεται:

$$x_z(k+1) = x_z(k) + T[q_{z,in}(k-\kappa) - q_{z,out}(k)] \quad (2.4.2)$$



Σχήμα 2.5: Απλοποιημένη απεικόνιση συνδέσμου αστικού δικτύου. Ο σύνδεσμος δέχεται την εισροή $q_{z,in}$ από τον κόμβο M και έχει εκροή $q_{z,out}$ στον κόμβο N .

όπου κ ο δείκτης διακριτού διαστήματος υστέρησης και κT ο χρόνος ταξιδιού για τον σύνδεσμο z .

Ας δούμε τώρα ένα απλό παράδειγμα που κάνει πιο ξεκάθαρη αυτή την τροποποίηση της εξίσωσης (2.4.1). Έστω ο σύνδεσμος z με μήκος $\delta_z = 200\text{ m}$ και σταθερή ταχύτητα κίνησης των οχημάτων $V_z = 40\text{ km/h}$. Ακόμη θεωρούμε την περίοδο του μοντέλου να είναι αρκετά μικρή π.χ., $T = 5\text{ sec}$. Ο χρόνος ταξιδιού στον σύνδεσμο z είναι ίσος με:

$$\kappa T = \frac{\delta_z}{V_z} = \frac{200}{40 \frac{1000}{3600}} = 18\text{ sec}$$

ενώ το διακριτού διαστήματος υστέρησης για χρόνο ταξιδιού 18 sec και περίοδο του μοντέλου $T = 5\text{ sec}$, είναι:

$$\kappa T = 18 \Rightarrow \kappa = \left\lceil \frac{18}{5} \right\rceil = 3.$$

Συνεπώς η εισροή έχει χρονική υστέρηση ίση με $\kappa T = 15\text{ sec}$ και η εξίσωση κατάστασης για τον σύνδεσμο z είναι:

$$x_z(k+1) = x_z(k) + T [q_{z,in}(k-3) - q_{z,out}(k)] \quad (2.4.3)$$

με αποτέλεσμα το μαθηματικό μοντέλο πλέον να λαμβάνει υπόψη του τον χρόνο ταξιδιού του συνδέσμου.

Στην παρούσα εργασία η καταστατική εξίσωση (2.2.12), που περιγράφει την δυναμική των συνδέσμων, δεν λαμβάνει υπόψη την χρονική υστέρηση που πρέπει να έχει η εισροή των συνδέσμων με μεγάλο μήκος. Η επέκταση αυτή του μοντέλου θα διερευνηθεί σε μελλοντικές εργασίες.

Κεφάλαιο 3

Βέλτιστος έλεγχος συστημάτων διακριτού χρόνου

Σκοπός του κεφαλαίου είναι η διατύπωση του προβλήματος βέλτιστου ελέγχου (ΠΒΕ), που περιλαμβάνει την ελαχιστοποίηση (ή μεγιστοποίηση) μιας συνάρτησης κόστους για ένα σύστημα που μεταβάλλεται δυναμικά στο χρόνο. Για την επίλυση του μη γραμμικού ΠΒΕ χρησιμοποιείται ένας αλγόριθμος εφικτής κατεύθυνσης [63] που βασίζεται στην Αρχή του Μεγίστου του Pontryagin [70].

Στην παρούσα διατριβή χρησιμοποιείται η διατύπωση της αρχής του μεγίστου για συστήματα διακριτού χρόνου [19, 12]. Στην πραγματικότητα, η αρχή του μεγίστου δεν ισχύει πάντοτε για συστήματα διακριτού χρόνου [76] λόγω περιορισμών που υφίστανται από ενδεχόμενες μεταβολές των μεταβλητών ελέγχου. Στην περίπτωση αυτή η αρχή του μεγίστου πρέπει να τροποποιηθεί κατάλληλα [34], ενώ είναι δυνατή και η διατύπωση του κάτω από κάποιες υποθέσεις κυρτότητας [31, 7]. Στην παρούσα διατριβή χρησιμοποιείται μια διατύπωση της αρχής του μεγίστου για συστήματα διακριτού χρόνου που βασίζεται στο μη γραμμικό προγραμματισμό [69]. Στο Παράρτημα Α' γίνεται μια σύντομη ανασκόπηση των συνθηκών βελτιστοποίησης του μη γραμμικού προγραμματισμού, ενώ για περισσότερες λεπτομέρειες δίδεται ενδεικτική βιβλιογραφία [21, 4, 8, 45, 46, 28, 56, 51, 47].

3.1 Εισαγωγή

3.1.1 Ιστορική ανασκόπηση

Οι μέθοδοι επίλυσης των προβλημάτων ελέγχου μπορούν να διακριθούν σε κλασικές και σε σύγχρονες. Οι κλασικές μέθοδοι αναπτύχθηκαν κυρίως από το 1930 έως το 1950 και περιλαμβάνουν τα διαγράμματα Nyquist, Bode και Nichols, τον γεωμετρικό τόπο ριζών, κ.λπ. Οι σύγχρονες μέθοδοι αναπτύχθηκαν κυρίως από το τέλος της δεκαετίας του '50 και μετά και περιλαμβάνουν την περιγραφή των συστημάτων στο χώρο

κατάστασης, τον βέλτιστο έλεγχο, την εκτίμηση του διανύσματος κατάστασης, τον στοχαστικό έλεγχο και τον προσαρμοστικό έλεγχο. Σημαντική ώθηση στην εξέλιξη των μεν κλασικών μεθόδων ελέγχου έδωσε ο δεύτερος παγκόσμιος πόλεμος, των δε σύγχρονων μεθόδων ελέγχου τα διαστημικά προγράμματα της Σοβιετικής Ένωσης και των Η.Π.Α. κατά τις δεκαετίες '50 και '60.

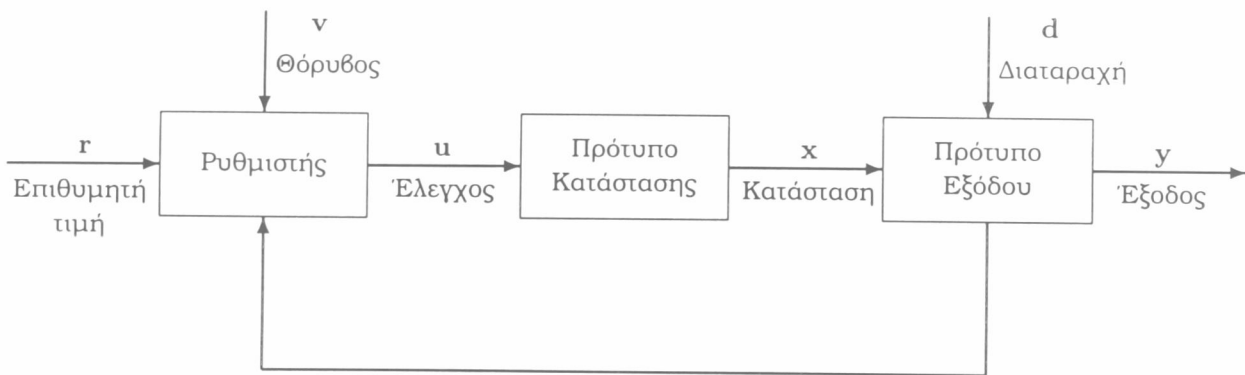
Οι περισσότερες από τις κλασικές μεθόδους σχεδίασης συστημάτων αυτομάτου ελέγχου είναι γραφικές μέθοδοι στο πεδίο της συχνότητας και η επιτυχία τους στηρίζεται κατά πολύ στην ικανότητα και στην πείρα σχεδίασης του ερευνητή. Τα κριτήρια αποδεκτής συμπεριφοράς ενός συστήματος, ορίζονται τόσο στο πεδίο του χρόνου (όπως π.χ., χρόνος ανύψωσης, χρόνος αποκατάστασης, χρόνος υπερύψωσης, κ.λπ.), όσο και στο πεδίο της συχνότητας (όπως π.χ., εύρος ζώνης, περιθώρια φάσης, κ.λπ.).

Οι περισσότερες από τις σύγχρονες τεχνικές σχεδίασης συστημάτων αυτομάτου ελέγχου είναι στο πεδίο του χρόνου και έχουν ως στόχο την σχεδίαση μιας βέλτιστης στρατηγικής ελέγχου. Η στρατηγική αυτή συνίσταται στον προσδιορισμό ενός βέλτιστου σήματος ελέγχου τέτοιου ώστε να καθιστά ένα συγκεκριμένο κριτήριο κόστους ελάχιστο. Η λύση του προβλήματος συνήθως απαιτεί τη χρήση κατάλληλων επαναληπτικών αλγορίθμων, ενώ για μερικές ειδικές περιπτώσεις, που από μόνες τους είναι πολύ σημαντικές, μπορεί να προσδιορισθεί μια αναλυτική λύση.

Οι αριθμητικοί αλγόριθμοι επίλυσης ΠΒΕ, δυστυχώς, αποτελούνται από πολύπλοκους αλγόριθμους με υψηλό υπολογιστικό φόρτο που έχουν ως αποτέλεσμα την δυσκολία εφαρμογής τους σε πρακτικά προβλήματα. Ωστόσο, τις τελευταίες τέσσερις δεκαετίες η συνεχής ανάπτυξη των υπολογιστικών συστημάτων καθώς και η κατανόηση από τους ερευνητές ότι ο βέλτιστος έλεγχος παρέχει πολύ χρήσιμες και εφαρμόσιμες στην πράξη τεχνικές, είχε ως αποτέλεσμα την ευρεία εφαρμογή του βέλτιστου ελέγχου σε πρακτικές εφαρμογές. Εξίσου σημαντικό είναι το γεγονός ότι σε πολλές πρακτικές εφαρμογές τα αποτελέσματα που απορρέουν εκπλήσσουν τον ερευνητή. Επιπλέον τον οδηγούν σε μια εκ των υστέρων επεξήγηση των αποτελεσμάτων που δίνει την δυνατότητα επέκτασης, κατανόησης ή και διόρθωσης της γνώσης η οποία είναι αποτέλεσμα της εμπειρίας.

3.1.2 Γενικοί ορισμοί

Ονομάζουμε σύστημα ένα σύνολο πραγματικών φαινομένων ή μαθηματικών σχηματισμών με συγκεκριμένη εσωτερική λειτουργία και σαφείς αλληλεπιδράσεις με το εξωσυστημικό περιβάλλον. Το διάγραμμα του Σχήματος 3.1 χρησιμοποιείται συνήθως για την κατανόηση των βασικών εννοιών στα συστήματα αυτομάτου ελέγχου. Οι εισοδοί του συστήματος μπορούν να ταξινομηθούν σε ελεγχόμενες εισόδους ή εισόδους ελέγχου ή κατ' εξοχήν εισόδους $u \in \mathbb{R}^m$ και σε μη ελεγχόμενες εισόδους (θόρυβο και διαταραχές) $v \in \mathbb{R}^q$ και $d \in \mathbb{R}^p$. Πέραν αυτού διακρίνουμε τις εσωτερικές μεταβλητές κατάστασης του συστήματος $x \in \mathbb{R}^n$ από τις (συνήθως μετρήσιμες) εξόδους $y \in \mathbb{R}^q$ και τη δεδομένη είσοδο αναφοράς $r \in \mathbb{R}^n$, δηλαδή την



Σχήμα 3.1: Τυπικό διάγραμμα συστήματος αυτομάτου ελέγχου.

επιθυμητή κατάσταση του συστήματος.

Ένα φυσικό ή τεχνητό σύστημα που περιγράφεται από ένα μαθηματικό πρότυπο (μοντέλο) μπορεί να ταξινομηθεί με διάφορους τρόπους σε ζεύγη κατηγοριών. Τέτοια ζεύγη συστημάτων είναι η διάκριση σε γραμμικά και μη γραμμικά, σε στατικά και δυναμικά, σε αιτιοκρατικά και στοχαστικά. Μαθηματικοί υπολογισμοί των αλληλεπιδράσεων είναι δυνατοί μέσω του μαθηματικού προτύπου του συστήματος. Ονομάζουμε συστήματα μιας εισόδου ελέγχου ($m = 1$) και μιας εξόδου ($q = 1$) SISO-συστήματα (Single-Input-Single-Output) και συστήματα πολλαπλών εισόδων ελέγχου και πολλαπλών εξόδων MIMO-συστήματα (Multiple-Input-Multiple-Output). Δυναμικά συστήματα μπορούν να περιγραφούν σε συνεχή χρόνο ή σε διακριτό χρόνο. Περιοριζόμαστε εδώ σε δυναμικά συστήματα συγκεντρωμένων παραμέτρων, που μπορούν να περιγραφούν μέσω εξισώσεων διαφορών.

Το πρόβλημα του ελέγχου έχει ως εξής: ποιο είναι το κατάλληλο σήμα ελέγχου u έτσι ώστε η έξοδος y να συμβαδίζει με την επιθυμητή τιμή της, r , παρ' όλες τις εξωτερικές διαταραχές d και ανακρίβεια στην πληροφορία, που προέρχεται από το θόρυβο v , περί της πραγματικής κατάστασης της εξόδου. Όπως είναι φανερό αυτό μπορεί να είναι ένα πολύ δύσκολο πρόβλημα. Η δυσκολία εξαρτάται από την πολυπλοκότητα της διαδικασίας υπό έλεγχο, από το μέγεθος και τη προβλεψιμότητα των εξωτερικών διαταραχών, και το μέγεθος του θορύβου.

Η διάταξη του Σχήματος 3.1 είναι σε δομή ανατροφοδότησης (feedback) ή κλειστού βρόχου (closed loop). Το βασικό του χαρακτηριστικό είναι η συνεχής πληροφόρηση του ρυθμιστή για την κατάσταση του συστήματος. Σε αντίθεση με ένα σύστημα ανοιχτού βρόχου (open loop), το σύστημα κλειστού βρόχου έχει πιθανότητες να επιλύσει το πρόβλημα του ελέγχου. Αν οι διαταραχές απουσίαζαν, τότε τα δύο συστήματα θα ήταν ισοδύναμα, αφού το μέλλον θα ήταν απόλυτα προβλέψιμο και η πληροφόρηση περί της κατάστασης περιττή.

3.1.3 Το πρόβλημα του βέλτιστου ελέγχου

Ο στόχος του βέλτιστου ελέγχου είναι να υπολογίσει τη βέλτιστη τροχιά ελέγχου που θα ελαχιστοποιεί ή μεγιστοποιεί κάποια συνάρτηση κόστους για ένα σύστημα που ικανοποιεί δεδομένες μαθηματικές σχέσεις. Είναι γεγονός ότι οποιοδήποτε φυσικό ή τεχνητό σύστημα που μπορεί να περιγραφεί από ένα σύνολο μαθηματικών σχέσεων (σε κατάλληλη μορφή) μπορεί να αναλυθεί και ελεγχθεί μέσω της θεωρίας του βέλτιστου ελέγχου.

Τα προβλήματα του βέλτιστου ελέγχου μπορούν να επιλυθούν μέσω δύο εναλλακτικών μεθόδων. Η πρώτη μέθοδος είναι η *Αρχή του Μεγίστου* (Pontryagin Maximum Principle) που αναπτύχθηκε από την ομάδα του σοβιετικού μαθηματικού Pontryagin [70] το 1956 και στηρίζεται στη θεωρία του *Λογισμού Μεταβολών* (Calculus of Variations). Η δεύτερη μέθοδος είναι ο *Δυναμικός Προγραμματισμός* (Dynamic Programming) που αναπτύχθηκε από τον αμερικάνο μαθηματικό Bellman [6] στην αρχή της δεκαετίας του 1950. Κάθε μια από τις δύο μεθόδους έχει τα πλεονεκτήματα και μειονεκτήματά της. Η αρχή του μεγίστου καταλήγει σε έλεγχο ανοικτού βρόχου και είναι ιδιαίτερα εφαρμόσιμη σε αιτιοκρατικά συστήματα. Ο δυναμικός προγραμματισμός καταλήγει σε έλεγχο κλειστού βρόχου που είναι προτιμότερος του ελέγχου ανοικτού βρόχου. Για περισσότερες πληροφορίες όσο αφορά την ιστορική εξέλιξη του βέλτιστου ελέγχου βλέπε [13, 82, 78].

Η Αρχή του Μεγίστου

Η εφαρμογή της αρχής του μεγίστου για τον προσδιορισμό βέλτιστων τροχιών ελέγχου οδηγεί σε ένα μη γραμμικό συνοριακό πρόβλημα τιμών δύο σημείων (Two-Point Boundary-Value Problem) το οποίο απαιτεί για την επίλυση του τη χρήση κατάλληλων επαναληπτικών αριθμητικών αλγορίθμων. Όπως προαναφέρθηκε ο βέλτιστος έλεγχος που απορρέει από την εφαρμογή της αρχής του ελαχίστου είναι ανοικτού βρόχου.

Αν η διαδικασία περιγράφεται από μια γραμμική καταστατική εξίσωση (ή γίνει γραμμικοποίηση) και η συνάρτηση είναι τετραγωνικής μορφής, ο βέλτιστος κανόνας ελέγχου μπορεί να προσδιορισθεί αριθμητικά ολοκληρώνοντας μια διαφορική εξίσωση πινάκων που έχει τη μορφή της εξίσωσης Riccati.

Ο Δυναμικός Προγραμματισμός

Ο δυναμικός προγραμματισμός είναι κατά βάση ένας έξυπνος τρόπος εξέτασης όλων των υποψηφίων τροχιών ελέγχου. Η επίτευξη αυτού με απευθείας απαρίθμηση όλων των δυνατοτήτων είναι ένας τρόπος που απαιτεί μεγάλο υπολογιστικό φόρτο. Αντίθετα ο δυναμικός προγραμματισμός κάνει χρήση της *Αρχής του Βέλτιστου* μετατρέποντας μια διαδικασία αποφάσεων πολλαπλών βαθμίδων σε μια ακολουθία διαδικασιών απόφασης μιας βαθμίδας, ενώ μπορεί να παραχθεί και ένας κανόνας ελέγχου ο οποίος θα λαμβάνει

αποφάσεις σε πραγματικό χρόνο.

Ο αλγόριθμος του δυναμικού προγραμματισμού επιλύει μια αναδρομική εξίσωση με απευθείας αναζήτηση στην επιτρεπτή περιοχή ελέγχου. Η εμφάνιση περιορισμών στα διανύσματα κατάστασης και ελέγχου, γενικά, δυσκολεύει την επίλυση προβλημάτων μέσω μεθόδων που βασίζονται στο λογισμό μεταβολών. Ωστόσο, στο δυναμικό προγραμματισμό τέτοιας μορφής περιορισμοί μειώνουν το εύρος της επιτρεπτής περιοχής και συνεπώς εξυπηρετούν την επίλυση του προβλήματος. Επιπλέον, αφού ο αλγόριθμος κάνει αναζήτηση και σύγκριση όλων των δυνατών επιλογών στην επιτρεπτή περιοχή ελέγχου, εγγυάται (υπό την προϋπόθεση ύπαρξης ενός γενικού ελαχίστου) τον προσδιορισμό γενικού ελαχίστου. Τέλος το κύριο μειονέκτημα του δυναμικού προγραμματισμού είναι ο υπολογιστικός φόρτος που αυξάνει εκθετικά με τις διαστάσεις του προβλήματος (curse of dimensionality).

3.2 Το πρόβλημα βέλτιστου ελέγχου διακριτού χρόνου με περιορισμούς

Το ΠΒΕ για συστήματα διακριτού χρόνου διατυπώνεται ως

Ελαχιστοποίηση του συναρτησιακού

$$\mathcal{J} = \vartheta[\mathbf{x}(K)] + \sum_{k=0}^{K-1} \varphi[\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k), k] \quad (3.2.1)$$

υπό τους περιορισμούς

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \quad (3.2.2)$$

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{f}[\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k), k], \quad k = 0, \dots, K-1 \quad (3.2.3)$$

$$\mathbf{u}_{\min} \leq \mathbf{u}(k) \leq \mathbf{u}_{\max}, \quad k = 0, \dots, K-1, \quad \kappa = \left\lceil \frac{k}{\tau} \right\rceil \quad (3.2.4)$$

όπου $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ είναι το διάνυσμα κατάστασης που χαρακτηρίζει τη διαδικασία, $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$ είναι το διάνυσμα ελέγχου, k είναι ο δείκτης διακριτού χρόνου και K είναι η τιμή του δείκτη στο τέλος του δεδομένου χρονικού ορίζοντα βελτιστοποίησης. Η συνάρτηση κόστους (3.2.1) διατυπώνει τον αντικειμενικό στόχο του ελέγχου με μαθηματικούς όρους όπου ϑ , φ είναι αυθαίρετες, μη γραμμικές συναρτήσεις κόστους στο χρονικό ορίζοντα βελτιστοποίησης. Η εξίσωση (3.2.2) καθορίζει την αρχική κατάσταση, ενώ η εξίσωση κατάστασης (3.2.3) περιγράφει τη δυναμική εξέλιξη του συστήματος και είναι ένα σύστημα n μη γραμμικών, χρονικά μεταβαλλόμενων εξισώσεων διαφορών πρώτης τάξης. Ακόμη, η $\mathbf{f} \in \mathbb{R}^n$ είναι μια διανυσματική συνάρτηση. Η εξίσωση (3.2.4) περιγράφει τους περιορισμούς των μεταβλητών ελέγχου και είναι της γενικής μορφής $\mathbf{h}[\mathbf{u}(k), k] \leq \mathbf{0}$, $k = 0, \dots, K-1$, $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^q$. Οι συναρτήσεις ϑ , φ , \mathbf{h} και $\mathbf{f} \in \mathbb{C}^2$, δηλαδή είναι

συνεχείς και διαφορίσιμες δύο φορές.

Το ΠΒΕ διατυπώνεται ως η εύρεση του ελέγχου $\mathbf{u}^*(\kappa)$ που ικανοποιεί την (3.2.4) στο χρονικό διάστημα $[0, K]$, ο οποίος ξεκινώντας από την αρχική κατάσταση (3.2.2) θα οδηγήσει το σύστημα (3.2.3) κατά μήκος της τροχιάς $\mathbf{x}^*(k)$ έτσι ώστε η συνάρτηση κόστους (3.2.1) να ελαχιστοποιηθεί.

3.3 Επίλυση του προβλήματος

3.3.1 Συνθήκες βελτιστοποίησης

Στο σημείο αυτό θα επιλύσουμε το ΠΒΕ για το γενικό μη γραμμικό σύστημα (3.2.3) που συσχετίζεται με την συνάρτηση κόστους (3.2.1). Για τον προσδιορισμό της βέλτιστης ακολουθίας τροχιών ελέγχου $\mathbf{u}^*(0), \mathbf{u}^*(1), \dots, \mathbf{u}^*(K_c)$ για την ελαχιστοποίηση της \mathcal{J} , θα χρησιμοποιήσουμε την θεωρία βελτιστοποίησης του μη γραμμικού προγραμματισμού για προβλήματα με περιορισμούς ισότητας και ανισότητας.

Η διανυσματική συνάρτηση των περιορισμών $\mathbf{f}[\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(\kappa), k]$ ορίζεται σε κάθε διακριτή χρονική στιγμή k στο διάστημα $[0, K]$ του ορίζοντα βελτιστοποίησης και συνεπώς απαιτείται ένας πολλαπλασιαστής Lagrange για κάθε χρονική στιγμή. Συνεπώς, το διάνυσμα των πολλαπλασιαστών Lagrange είναι $\boldsymbol{\lambda}(k) \in \mathbb{R}^n$. Ομοίως, οι περιορισμοί ανισότητας (3.2.4) ορίζονται για κάθε κ και απαιτείται ένας πολλαπλασιαστής Karush-Kuhn-Tucker (KKT) για κάθε χρονική στιγμή, δηλαδή $\boldsymbol{\mu}(\kappa) \in \mathbb{R}^q$.

Οι αναγκαίες συνθήκες βελτιστοποίησης (τοπικής) προκύπτουν από την επαυξημένη Χαμιλτονιανή συνάρτηση (Hamiltonian) διακριτού χρόνου που ορίζεται ως

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{H}}[\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(\kappa), \boldsymbol{\lambda}(k+1), \boldsymbol{\mu}(\kappa), k] &= \varphi[\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(\kappa), k] \\ &+ \boldsymbol{\lambda}(k+1)^T \mathbf{f}[\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(\kappa), k] \\ &+ \boldsymbol{\mu}(\kappa)^T \mathbf{h}[\mathbf{u}(\kappa), k]. \end{aligned} \quad (3.3.1)$$

Για μια δεδομένη αρχική τροχιά $\mathbf{u}(\kappa), \kappa = 1, \dots, K_c$, η αντίστοιχη τροχιά του διανύσματος κατάστασης $\mathbf{x}(k)$ μπορεί να προσδιορισθεί από την επίλυση της (3.2.3) ξεκινώντας από την γνωστή αρχική κατάσταση (3.2.2) και συνεπώς η συνάρτηση κόστους μπορεί να θεωρηθεί ότι εξαρτάται μόνο από την μεταβλητές ελέγχου, δηλαδή $\mathcal{J} = \bar{\mathcal{J}}(\mathbf{u})$. Η μειωμένη κλίση της $\bar{\mathcal{J}}$ ως προς \mathbf{u} στην επιφάνεια των περιορισμών ισότητας είναι

$$\mathbf{g}(\kappa) = \frac{\partial \bar{\mathcal{J}}}{\partial \mathbf{u}(\kappa)} = \sum_{k=\kappa\tau}^{(\kappa+1)\tau-1} \left\{ \frac{\partial \varphi[\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(\kappa), k]}{\partial \mathbf{u}(\kappa)} + \left[\frac{\partial \mathbf{f}[\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(\kappa), k]}{\partial \mathbf{u}(\kappa)} \right]^T \boldsymbol{\lambda}(k+1) \right\}, \quad \kappa = 0, \dots, K_c \quad (3.3.2)$$

όπου το διάνυσμα $\lambda \in \mathbb{R}^n$ ικανοποιεί τις εξισώσεις (σημείωση: $x_y = \frac{\partial x}{\partial y}$)

$$\lambda(k) = \tilde{\mathcal{H}}_{\mathbf{x}(k)}, \quad k = 0, \dots, K-1 \quad (3.3.3)$$

$$\lambda(K) = \vartheta_{\mathbf{x}(K)} \quad (3.3.4)$$

Η προβολή της μειωμένης κλίσης στους περιορισμούς ανισότητας (3.2.4) συμβολίζεται ως $\gamma(\kappa) \in \mathbb{R}^m$ και έχει στοιχεία

$$\gamma_i(\kappa) = \begin{cases} 0 & \text{αν } u_i(\kappa) = u_{i,\min} \text{ και } p_i(\kappa) < 0 \\ 0 & \text{αν } u_i(\kappa) = u_{i,\max} \text{ και } p_i(\kappa) > 0 \\ g_i(\kappa) & \text{αλλιώς} \end{cases} \quad (3.3.5)$$

όπου $p_i(\kappa)$ είναι μια κατεύθυνση αναζήτησης. Το βαθμωτό γινόμενο δύο διανυσμάτων $\eta(k), \xi(k)$ για $k = 0, \dots, K-1$ ορίζεται ως

$$[\eta(K), \xi(K)] = \sum_{k=0}^{K-1} \eta(k)^T \xi(k), \quad (3.3.6)$$

ενώ η διανυσματική συνάρτηση κορεσμού (saturation vector function) $\text{sat}(\eta)$ ορίζεται να έχει στοιχεία

$$\text{sat}_i(\eta) = \begin{cases} \eta_{i,\max} & \text{αν } \eta_i > \eta_{i,\max} \\ \eta_{i,\min} & \text{αν } \eta_i < \eta_{i,\min} \\ \eta_i & \text{αλλιώς} \end{cases} \quad (3.3.7)$$

Από τους παραπάνω ορισμούς, οι συνθήκες βελτιστοποίησης που πρέπει να ικανοποιούνται είναι

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \quad (3.3.8)$$

$$\mathbf{x}(k+1) = \frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial \lambda(k+1)} = \mathbf{f}[\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(\kappa), k], \quad k = 0, \dots, K-1 \quad (3.3.9)$$

$$\lambda(k) = \frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial \mathbf{x}(k)} = \frac{\partial \varphi[\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(\kappa), k]}{\partial \mathbf{x}(k)} + \left[\frac{\partial \mathbf{f}[\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(\kappa), k]}{\partial \mathbf{x}(k)} \right]^T \lambda(k+1), \quad k = 0, \dots, K-1 \quad (3.3.10)$$

$$(3.3.11)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial \mathbf{u}(\kappa)} = \sum_{k=\kappa\tau}^{(\kappa+1)\tau-1} \left\{ \frac{\partial \varphi[\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(\kappa), k]}{\partial \mathbf{u}(\kappa)} + \left[\frac{\partial \mathbf{f}[\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(\kappa), k]}{\partial \mathbf{u}(\kappa)} \right]^T \lambda(k+1) \right. \\ \left. + \left[\frac{\partial \mathbf{h}[\mathbf{u}(\kappa), k]}{\partial \mathbf{u}(\kappa)} \right]^T \mu(\kappa) \right\}, \quad \kappa = 0, \dots, K_c \end{aligned} \quad (3.3.12)$$

$$\lambda(K) = \frac{\partial \vartheta[\mathbf{x}(K)]}{\partial \mathbf{x}(K)} \quad (3.3.13)$$

$$\mathbf{h}[\mathbf{u}(\kappa), k] \leq \mathbf{0}, \quad k = 0, \dots, K-1 \quad (3.3.14)$$

$$\mu(\kappa)^T \mathbf{h}[\mathbf{u}(\kappa), k] = 0, \quad k = 0, \dots, K-1 \quad (3.3.15)$$

$$\mu(\kappa) \geq \mathbf{0}, \quad \kappa = 0, \dots, K_c \quad (3.3.16)$$

και επομένως αν οι παραπάνω εξισώσεις ισχύουν ταυτοχρόνως για κάποιες τροχιές $\mathbf{x}(k)$, $\mathbf{u}(k)$, $\boldsymbol{\lambda}(k)$ και $\boldsymbol{\mu}(k)$ έχουμε προσδιορίσει ένα στάσιμο σημείο του ΠΒΕ. Οι περιορισμοί ανισότητας είναι δυνατόν να γραφούν με τη μορφή

$$\mathbf{h}[\mathbf{u}(k), k] = (u_i(k) - u_{i,\min})(u_i(k) - u_{i,\max}) \quad (3.3.17)$$

και ως εκ τούτου από τις εξισώσεις (3.3.2) και (3.3.12) προκύπτει

$$\mu_i(k) = \begin{cases} \frac{-g_i(k)}{2u_i(k) - u_{i,\min} - u_{i,\max}} & \text{αν } u_i(k) = u_{i,\min} \text{ ή } u_i(k) = u_{i,\max} \\ 0 & \text{αλλιώς.} \end{cases} \quad (3.3.18)$$

3.3.2 Ένας αλγόριθμος για την αριθμητική επίλυση προβλημάτων βέλτιστου ελέγχου διακριτού χρόνου

Οι αναγκαίες συνθήκες βελτιστοποίησης που διατυπώθηκαν παραπάνω αποτελούν ένα πρόβλημα συνοριακών τιμών δύο σημείων (Two-Point Boundary-Value Problem). Για την επίλυση των προβλημάτων αυτών έχουν αναπτυχθεί διάφορων ειδών επαναληπτικοί αλγόριθμοι οι οποίοι κατά κύριο λόγο βασίζονται σε τεχνικές μη γραμμικής βελτιστοποίησης και ολοκλήρωσης διαφορικών και αλγεβρικών εξισώσεων. Στην παρούσα διατριβή για την επίλυση του ΠΒΕ διακριτού χρόνου που διατυπώθηκε στην §3.2 χρησιμοποιείται ένας αλγόριθμος εφικτής κατεύθυνσης (για περισσότερες λεπτομέρειες βλέπε [63, 67]).

Για την επίλυση του προβλήματος συνοριακών τιμών δύο σημείων απαιτείται ο προσδιορισμός:

- των n μεταβλητών κατάστασης $\mathbf{x}(k)$, $k = 1, \dots, K$
- των n πολλαπλασιαστών Lagrange $\boldsymbol{\lambda}(k)$, $k = 1, \dots, K$
- των m μεταβλητών ελέγχου $\mathbf{u}(k)$, $k = 1, \dots, K_c$
- των q πολλαπλασιαστών KKT $\boldsymbol{\mu}(k)$, $k = 1, \dots, K_c$

ώστε ταυτοχρόνως να ικανοποιούνται

- οι n εξισώσεις διαφορών πρώτης τάξης (3.3.9)
- οι n εξισώσεις διαφορών πρώτης τάξης των πολλαπλασιαστών Lagrange (3.3.10)
- οι m συνθήκες βελτιστοποίησης (3.3.12)
- οι $3q$ συνθήκες βελτιστοποίησης (3.3.14)–(3.3.16)
- οι $2n$ συνοριακές συνθήκες (3.3.8) και (3.3.13).

Ένας τρόπος επίλυσης του παραπάνω προβλήματος είναι η επιλογή μιας τυχαίας επιτρεπτής αρχικής τροχιάς ελέγχου και η χρήση ενός αριθμητικού επαναληπτικού αλγορίθμου, που βασίζεται σε γνωστές μεθόδους κλίσεων, ώστε από επανάληψη σε επανάληψη να βελτιώνει την αρχική τροχιά και να ικανοποιούνται οι παραπάνω συνθήκες βελτιστοποίησης. Ο αλγόριθμος για τον προσδιορισμό της νέας τροχιάς ελέγχου αναζητεί μια επιτρεπτή κατεύθυνση στην επιτρεπτή περιοχή ελέγχου. Στην παρούσα διατριβή ο αλγόριθμος επίλυσης που χρησιμοποιείται βασίζεται στην προσέγγιση αυτή, ωστόσο σε αυτό το ερευνητικό πεδίο έχουν αναπτυχθεί και άλλες μέθοδοι οι οποίες παρουσιάζουν μειονεκτήματα και πλεονεκτήματα [77, 15, 39, 83, 14, 9].

Ο αλγόριθμος επίλυσης του ΠΒΕ έχει την ακόλουθη δομή:

Βήμα 1 Επέλεξε μια αρχική επιτρεπτή τροχιά ελέγχου $\mathbf{u}^{(0)}(\kappa)$, $\kappa = 0, \dots, K_c$, η οποία ικανοποιεί την (3.2.4); θέσε τον δείκτη επανάληψης $\ell = 0$, $\ell \in \mathbb{N}$.

Βήμα 2 Χρησιμοποιώντας $\mathbf{u}^{(\ell)}(\kappa)$, $\kappa = 0, \dots, K_c$ λύσε την (3.2.3) από την γνωστή αρχική συνθήκη (3.2.2) και υπολόγισε $\mathbf{x}^{(\ell)}(k+1)$, $k = 0, \dots, K-1$; χρησιμοποιώντας $\mathbf{x}^{(\ell)}(k+1)$ και $\mathbf{u}^{(\ell)}(\kappa)$ λύσε την (3.3.10) από την τελική συνθήκη (3.3.13) και υπολόγισε $\lambda^{(\ell)}(k+1)$, $k = 0, \dots, K-2$.

Βήμα 3 Χρησιμοποιώντας $\mathbf{x}^{(\ell)}(k+1)$, $\mathbf{u}^{(\ell)}(\kappa)$ και $\lambda^{(\ell)}(k+1)$, υπολόγισε τις κλίσεις $\mathbf{g}^{(\ell)}(\kappa)$ και $\gamma^{(\ell)}(\kappa)$, $\kappa = 0, \dots, K_c$ από τις εξισώσεις (3.3.2) και (3.3.5), αντίστοιχα; υπολόγισε τους πολλαπλασιαστές ΚΚΤ $\mu^{(\ell)}(\kappa)$ από την (3.3.18).

Βήμα 4 Καθόρισε μια κατεύθυνση αναζήτησης $\mathbf{p}^{(\ell)}(\kappa)$, $\kappa = 0, \dots, K_c$.

Βήμα 5 Επίλυσε το πρόβλημα αναζήτησης επί γραμμής (line search) κατά μήκος της κατεύθυνσης αναζήτησης $\mathbf{p}^{(\ell)}$ για την εύρεση μιας νέας βελτιωμένης επιτρεπτής τροχιάς ελέγχου $\mathbf{u}^{(\ell+1)}(\kappa)$, δηλαδή

$$\alpha^{(\ell)} = \arg \min_{\alpha \in \mathbb{R}_+} \bar{\mathcal{J}} \left[\text{sat} \left(\mathbf{u}^{(\ell)}(\kappa) + \alpha \mathbf{p}^{(\ell)}(\kappa) \right) \right]$$

όπου $\alpha^{(\ell)} > 0$ είναι το βέλτιστο βήμα του προβλήματος αναζήτησης επί γραμμής και

$$\mathbf{u}^{(\ell+1)}(\kappa) = \text{sat} \left(\mathbf{u}^{(\ell)}(\kappa) + \alpha^{(\ell)} \mathbf{p}^{(\ell)}(\kappa) \right), \quad \forall \kappa = 0, \dots, K_c$$

είναι η νέα βελτιωμένη επιτρεπτή τροχιά ελέγχου.

Βήμα 6 Αν για δεδομένο πραγματικό $\varepsilon > 0$, τα κριτήρια σύγκλισης $[\gamma^{(\ell)}(K_c), \gamma^{(\ell)}(K_c)] < \varepsilon$ και $\mu^{(\ell)}(\kappa) \geq 0$ ικανοποιούνται, τότε STOP; διαφορετικά θέσε $\ell := \ell + 1$ και πήγαινε στο **Βήμα 2**. (Όλες οι αναγκαίες συνθήκες βελτιστοποίησης ικανοποιούνται από τον αλγόριθμο αν $\gamma(\kappa) = 0$ και $\mu(\kappa) = 0$, για κάθε $\kappa = 0, \dots, K_c$ [67]).

Ο αλγόριθμος που περιγράφηκε είναι γνωστό ότι δεν παρουσιάζει ευαισθησία όσο αφορά την τυχαία επιλογή της αρχικής τροχιάς ελέγχου $\mathbf{u}^{(0)}(\kappa)$, ενώ ο υπολογιστικός φόρτος για την επίλυση του προβλήματος αυξάνεται πολυωνυμικά σε σχέση με τις διαστάσεις του. Στην περίπτωση που η συνάρτηση κόστους

(3.2.1) είναι κυρτή (δηλαδή οι συναρτήσεις ϑ, φ είναι κυρτές), τα στοιχεία $f_i, i = 1, \dots, n$ της καταστατικής εξίσωσης (3.2.3) είναι γραμμικά, και τα διανύσματα \mathbf{x}, \mathbf{u} ανήκουν σε συμπαγή κυρτά σύνολα ο αλγόριθμος συγκλίνει σε ένα γενικό ελάχιστο. Αντιθέτως στην περίπτωση ενός γενικού μη γραμμικού μοντέλου, ο αλγόριθμος συγκλίνει σε τουλάχιστον ένα τοπικό ελάχιστο.

Κύρια χαρακτηριστικά του αλγορίθμου βέλτιστου ελέγχου που παρουσιάστηκε είναι η ευρωστία (όσο αφορά την σύγκλιση) και η αποτελεσματικότητα (όσο αφορά τον υπολογιστικό φόρτο). Λόγω του χαμηλού υπολογιστικού φόρτου, ο αλγόριθμος μπορεί να χρησιμοποιηθεί σε δομή κλειστού βρόχου μέσω βελτιστοποίησης σε κυλιόμενο ορίζοντα. Η βελτιστοποίηση σε κυλιόμενο ορίζοντα δίνει την δυνατότητα χρήσης ενός αρχικού προβλήματος ελέγχου ανοικτού βρόχου σε δομή κλειστού βρόχου χρησιμοποιώντας μετρήσεις πραγματικού χρόνου (βλέπε [36, 58, 50]).

3.3.3 Προσδιορισμός της κατεύθυνσης αναζήτησης

Για τον καθορισμό της κατεύθυνσης αναζήτησης $\mathbf{p}^{(\ell)}$ στο **Βήμα 4** του αλγορίθμου υπάρχουν μια σειρά εναλλακτικών μεθόδων από το χώρο της θεωρίας βελτιστοποίησης [21, 4, 8]. Όλες οι μέθοδοι χρησιμοποιούν μια κατεύθυνση αναζήτησης που ικανοποιεί την ιδιότητα κατάβασης $\mathbf{p}^{(\ell)T} \mathbf{g}^{(\ell)} < 0$ που εγγυάται ότι η κλίση $d\mathcal{J}/d\alpha$ είναι πάντοτε αρνητική για $\alpha = 0$ (εκτός αν το $\mathbf{u}^{(\ell)}$ είναι στάσιμο σημείο) και άρα η αντικειμενική συνάρτηση είναι βελτιώσιμη για κάποιο $\alpha^{(\ell)} > 0$. Οι περιορισμοί του διανύσματος ελέγχου λαμβάνονται υπόψη από τον αλγόριθμο σε όλες τις μεθόδους μέσω των μειωμένων κλίσεων $\gamma^{(\ell)}$.

Η πιο απλή μέθοδος που μπορεί να εφαρμοσθεί είναι η μέγιστη κατάβαση (Steepest Descent), ενώ υπάρχει και μια σειρά άλλων πιο πολύπλοκων μεθόδων, όπως μέθοδοι συζυγών κλίσεων (Conjugate Gradient) και Σχεδόν-Newton (Quasi-Newton).

Μέθοδος μέγιστης κατάβασης

Η μέγιστη κατάβαση είναι η πιο απλή αλλά και λιγότερο αποτελεσματική μέθοδος κατάβασης. Βασίζεται στο γεγονός, ότι η κλίση σε κάποιο σημείο «δείχνει» πάντοτε προς την μέγιστη αύξηση της αντικειμενικής συνάρτησης. Για το λόγω αυτό, η κατεύθυνση αναζήτησης επιλέγεται ίση με (για λόγους ευκρίνειας παραλείπεται ο δείκτης κ , αλλά όλες οι σχέσεις εκτελούνται για κάθε $\kappa = 0, \dots, K_c$)

$$\mathbf{p}^{(\ell)} = -\mathbf{g}^{(\ell)}. \quad (3.3.19)$$

Παρόλο που η επιλογή αυτή φαίνεται καταρχήν εύλογη, στην πράξη οδηγεί σε ταλαντώσεις όσο η ακολουθία $\{\mathbf{u}^{(\ell)}\}$ συγκλίνει στο τοπικό ελάχιστο \mathbf{u}^* . Ωστόσο, είναι αρκετά αποτελεσματική όταν η αρχική τροχιά ελέγχου $\mathbf{u}^{(0)}$ είναι μακριά από το τοπικό ελάχιστο \mathbf{u}^* . Έτσι η μέθοδος μέγιστης κατάβασης δεν ανήκει στις μεθόδους υψηλής αποτελεσματικότητας, αλλά αποτελεί την βάση (π.χ., θεωρώντας κατευθύνσεις

αναζήτησης της μορφής $\mathbf{p}^{(\ell)} = -\mathbf{\Gamma}^{(\ell)} \mathbf{g}^{(\ell)}$ για την δημιουργία πολυπλοκότερων και αποτελεσματικότερων μεθόδων.

Μέθοδοι συζυγών κλίσεων

Οι μέθοδοι συζυγών κλίσεων βασίζονται σε ένα συνδυασμό μέγιστης κατάβασης και ιδιοτήτων συζυγίας μιας ακολουθίας κατευθύνσεων αναζήτησης $\{\mathbf{p}^{(\ell)}\}$. Ο συνδυασμός αυτός οδηγεί σε μια σειρά μεθόδων που σε επίπεδο απλότητας είναι εφάμιλλες της μέγιστης κατάβασης, ενώ η αποτελεσματικότητά τους βρίσκεται σε υψηλά επίπεδα.

Δύο από τις πιο γνωστές μεθόδους συζυγών κλίσεων είναι οι Fletcher-Reeves (FR) και Polak-Ribiere (PR). Η κατεύθυνση αναζήτησης $\mathbf{p}^{(\ell)}$ για τις μεθόδους συζυγών κλίσεων καθορίζεται ως εξής

$$\mathbf{p}^{(\ell)} = -\mathbf{g}^{(\ell)} + \beta^{(\ell)} \mathbf{p}^{(\ell-1)} \quad (3.3.20)$$

όπου $\beta^{(0)} = 0$, δηλαδή στην επανάληψη $\ell = 0$ η κατεύθυνση αναζήτησης είναι $\mathbf{p}^{(0)} = -\mathbf{g}^{(0)}$. Οι δύο μέθοδοι διαφέρουν στον τρόπο καθορισμού του $\beta^{(\ell)}$ για κάθε $\ell > 0$. Η μέθοδος Fletcher-Reeves έχει

$$\beta^{(\ell)} = \frac{\gamma^{(\ell)T} \gamma^{(\ell)}}{\gamma^{(\ell-1)T} \gamma^{(\ell-1)}} \quad (3.3.21)$$

ενώ η μέθοδος Polak-Ribiere

$$\beta^{(\ell)} = \frac{(\gamma^{(\ell)} - \gamma^{(\ell-1)})^T \gamma^{(\ell)}}{\gamma^{(\ell-1)T} \gamma^{(\ell-1)}}. \quad (3.3.22)$$

Η αποτελεσματικότητα των παραπάνω δύο μεθόδων έχει βρεθεί από πρακτικές εφαρμογές ότι βρίσκεται σε υψηλά επίπεδα, ενώ απαιτείται ακριβή αναζήτηση επί γραμμής. Ωστόσο, η ακρίβεια της αναζήτησης επί γραμμής είναι καλό να διερευνάται για κάθε συγκεκριμένη εφαρμογή. Επιπλέον, οι μέθοδοι Fletcher-Reeves και Polak-Ribiere απαιτούν την αποθήκευση τριών και τεσσάρων, αντιστοίχως πινάκων διαστάσεων $m \times K_c$. Για τους λόγους αυτούς οι μέθοδοι συζυγών κλίσεων είναι εφαρμόσιμες σε μεγάλα προβλήματα εκατοντάδων ή και χιλιάδων μεταβλητών.

Μέθοδοι Σχεδόν-Newton

Οι μέθοδοι Σχεδόν-Newton απαιτούν πολύπλοκους υπολογισμούς για τον προσδιορισμό μιας κατεύθυνσης αναζήτησης. Στις μεθόδους αυτές χρησιμοποιούνται κατευθύνσεις αναζήτησης της μορφής $\mathbf{p}^{(\ell)} = -\mathbf{\Gamma}^{(\ell)} \mathbf{g}^{(\ell)}$, όπου ο πίνακας $\mathbf{\Gamma}^{(\ell)}$ μεταβάλλεται από επανάληψη σε επανάληψη.

Δύο από τις πιο γνωστές μεθόδους Σχεδόν-Newton είναι οι DFP που προτάθηκε το 1963 από τους Davidon, Fletcher και Powell και BFGS που προτάθηκε το 1970 από τους Broyden, Fletcher, Goldfard και Shanno.

Η κατεύθυνση αναζήτησης $\mathbf{p}^{(\ell)}$ για την επανάληψη $\ell = 0$ στις μεθόδους Σχεδόν-Newton προσδιορίζεται από την μέγιστη κατάβαση, δηλαδή $\mathbf{p}^{(0)} = -\mathbf{g}^{(0)}$. Επίσης, για $\ell > 0$ υπολογίζονται και για τις δύο μεθόδους DFP και BFGS οι σχέσεις

$$\delta^{(\ell-1)} = \mathbf{u}^{(\ell)} - \mathbf{u}^{(\ell-1)} \quad (3.3.23)$$

$$\mathbf{y}^{(\ell-1)} = \boldsymbol{\gamma}^{(\ell)} - \boldsymbol{\gamma}^{(\ell-1)} \quad (3.3.24)$$

$$\mathbf{v}^{(\ell-1)} = \frac{\delta^{(\ell-1)}}{\sqrt{\delta^{(\ell-1)T} \mathbf{y}^{(\ell-1)}}} \quad (3.3.25)$$

$$\mathbf{w}^{(\ell-1)} = \frac{\mathbf{z}^{(\ell-1)}}{\sqrt{\mathbf{z}^{(\ell-1)T} \mathbf{y}^{(\ell-1)}}} \quad (3.3.26)$$

Για τη μέθοδο DFP και για $\ell > 0$ η κατεύθυνση αναζήτησης υπολογίζεται από τις σχέσεις

$$\mathbf{z}^{(\ell-1)} = \mathbf{y}^{(\ell-1)} + \sum_{i=0}^{\ell-2} \left\{ \left(\mathbf{v}^{(i)T} \mathbf{y}^{(\ell-1)} \right) \mathbf{v}^{(i)} - \left(\mathbf{w}^{(i)T} \mathbf{y}^{(\ell-1)} \right) \mathbf{w}^{(i)} \right\} \quad (3.3.27)$$

$$\mathbf{p}^{(\ell)} = -\boldsymbol{\gamma}^{(\ell)} - \sum_{i=0}^{\ell-1} \left\{ \left(\mathbf{v}^{(i)T} \boldsymbol{\gamma}^{(\ell)} \right) \mathbf{v}^{(i)} - \left(\mathbf{w}^{(i)T} \boldsymbol{\gamma}^{(\ell)} \right) \mathbf{w}^{(i)} \right\} \quad (3.3.28)$$

ενώ για τη μέθοδο BFGS από τις σχέσεις

$$\mathbf{z}^{(\ell-1)} = \mathbf{y}^{(\ell-1)} + \sum_{i=0}^{\ell-2} \left\{ \left(\mathbf{v}^{(i)T} \mathbf{y}^{(\ell-1)} \right) \mathbf{v}^{(i)} - \left(\mathbf{w}^{(i)T} \mathbf{y}^{(\ell-1)} \right) \mathbf{w}^{(i)} + \left(\mathbf{b}^{(i)T} \mathbf{y}^{(\ell-1)} \right) \mathbf{b}^{(i)} \right\} \quad (3.3.29)$$

$$\mathbf{b}^{(\ell-1)} = \frac{\sqrt{\mathbf{y}^{(\ell-1)T} \mathbf{z}^{(\ell-1)}}}{\sqrt{\delta^{(\ell-1)T} \mathbf{y}^{(\ell-1)}}} \mathbf{v}^{(\ell-1)} - \mathbf{w}^{(\ell-1)} \quad (3.3.30)$$

$$\mathbf{p}^{(\ell)} = -\boldsymbol{\gamma}^{(\ell)} - \sum_{i=0}^{\ell-1} \left\{ \left(\mathbf{v}^{(i)T} \boldsymbol{\gamma}^{(\ell)} \right) \mathbf{v}^{(i)} - \left(\mathbf{w}^{(i)T} \boldsymbol{\gamma}^{(\ell)} \right) \mathbf{w}^{(i)} + \left(\mathbf{b}^{(i)T} \boldsymbol{\gamma}^{(\ell)} \right) \mathbf{b}^{(i)} \right\} \quad (3.3.31)$$

Από τις παραπάνω σχέσεις είναι φανερό ότι οι μέθοδοι Σχεδόν-Newton παρουσιάζουν πολυπλοκότητα ενώ ο υπολογιστικός φόρτος που απαιτείται σε κάθε επανάληψη είναι μεγάλος. Λόγω των αθροισμάτων που παρουσιάζονται στις εξισώσεις (3.3.27), (3.3.28) είναι φανερό ότι η μέθοδος DFP απαιτεί την αποθήκευση των διανυσμάτων \mathbf{v}, \mathbf{w} για τις επαναλήψεις $i = 0, \dots, \ell - 1$. Παρομοίως, η μέθοδος BFGS απαιτεί την αποθήκευση των διανυσμάτων $\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{b}$ για τις επαναλήψεις $i = 0, \dots, \ell - 1$. Από τις παραπάνω διαπιστώσεις είναι φανερό ότι οι μέθοδοι Σχεδόν-Newton αυξάνουν τον υπολογιστικό φόρτο ανά επανάληψη και μάλιστα η μέθοδος DFP είναι οικονομικότερη έναντι της BFGS αφού απαιτεί την αποθήκευση δύο διανυσμάτων, ενώ η τελευταία τριών. Ωστόσο οι μέθοδοι αυτές χρειάζονται συνήθως λιγότερες επαναλήψεις από τις μεθόδους συζυγών κλίσεων. Επίσης είναι δυνατή η μείωση του υπολογιστικού φόρτου με περιοδική επανατοποθέτηση (restart, βλέπε §3.3.5) της κατεύθυνσης αναζήτησης στη μέγιστη κατάβαση.

Η αποτελεσματικότητα των παραπάνω δύο μεθόδων έχει βρεθεί από πρακτικές εφαρμογές ότι είναι υψηλότερη από τις μεθόδους συζυγών κλίσεων, ενώ δουλεύουν πολύ καλά (κυρίως η BFGS) για σχετικά ανακριβή αναζήτηση επί γραμμής.

3.3.4 Το πρόβλημα αναζήτησης επί γραμμής

Η αναζήτηση επί γραμμής στο **Βήμα 5** του αλγορίθμου χρησιμοποιεί υπολογισμούς τιμών της συνάρτησης $\overline{\mathcal{J}} [\text{sat} (\mathbf{u}^{(\ell)} + \alpha \mathbf{p}^{(\ell)})]$ και της παραγώγου της $d\overline{\mathcal{J}} [\text{sat} (\mathbf{u}^{(\ell)} + \alpha \mathbf{p}^{(\ell)})] / d\alpha$ για αντίστοιχες τιμές του α . Το ελάχιστο γραμμής ικανοποιεί προφανώς τη συνθήκη $d\overline{\mathcal{J}} / d\alpha = 0$ η οποία δίνει

$$\gamma^{(\ell+1)T} \mathbf{p}^{(\ell)} = 0. \quad (3.3.32)$$

Με άλλα λόγια, το διάνυσμα κλίσης $\gamma^{(\ell+1)}$ στο ελάχιστο γραμμής είναι ορθογώνιο στην κατεύθυνση αναζήτησης $\mathbf{p}^{(\ell)}$. Στην πράξη το επιλεγόμενο βήμα $\alpha^{(\ell)}$ συνήθως δεν επιλύει με ακρίβεια το πρόβλημα αναζήτησης επί γραμμής καθότι αυτό μπορεί να αυξήσει υπέρμετρα τον υπολογιστικό φόρτο χωρίς ουσιαστικό αντίκρυσμα. Η ευστάθεια όμως μιας μεθόδου εξαρτάται από την ουσιαστική βελτίωση της αντικειμενικής συνάρτησης σε κάθε επανάληψη, πράγμα που επιτυγχάνεται μέσω κατάλληλων συνθηκών.

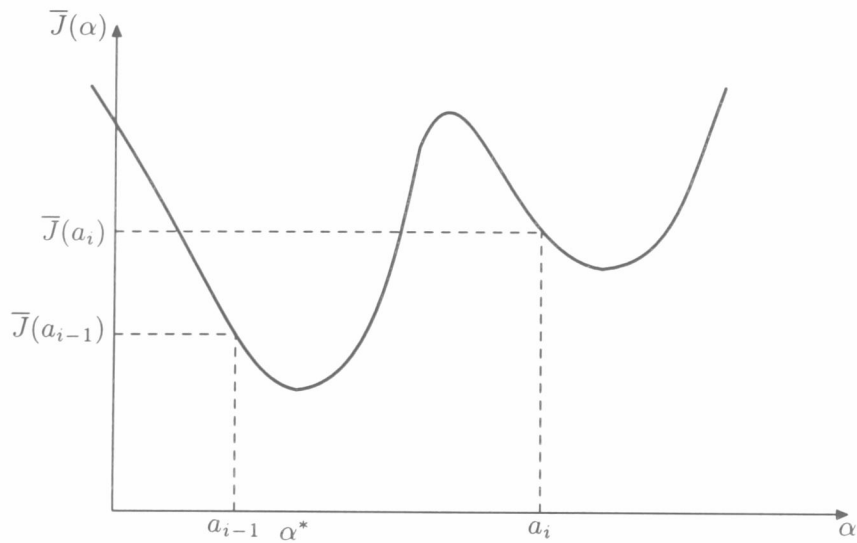
Ένας αλγόριθμος αναζήτησης επί γραμμής υπολογίζει μια ακολουθία $\{\alpha_i\}$ βημάτων και τερματίζει όταν μια επανάληψη προσδιορίζει ένα αποδεκτό σημείο που ικανοποιεί τις συνθήκες ευστάθειας [21]

$$\overline{\mathcal{J}}(\alpha) \leq \overline{\mathcal{J}}(0) + \alpha \rho \overline{\mathcal{J}}'(0) \quad (3.3.33)$$

$$|\overline{\mathcal{J}}'(\alpha)| \leq -\sigma \overline{\mathcal{J}}'(0) \quad (3.3.34)$$

όπου $\rho \in [0, \frac{1}{2}]$, $\rho \leq \sigma < 1$ προκαθορισμένες παράμετροι και $\overline{\mathcal{J}}(\alpha) = \overline{\mathcal{J}} [\text{sat} (\mathbf{u}^{(\ell)} + \alpha \mathbf{p}^{(\ell)})]$. Η συνθήκη (3.3.33) δίνει ένα ανώτερο όριο στην αναζήτηση βήματος επί γραμμής ενώ η (3.3.34) εγγυάται μη αμελητέα βελτίωση της αντικειμενικής συνάρτησης στην αντίστοιχη επανάληψη. Ακριβή αναζήτηση επί γραμμής επιτυγχάνεται με τιμές της παραμέτρου σ κοντά στο μηδέν. Ωστόσο η ακριβής αναζήτηση επί γραμμής είναι δαπανηρή και μπορεί να μειώσει την αποτελεσματικότητα του συνολικού αλγορίθμου. Για το λόγω αυτό η τιμή της παραμέτρου σ πρέπει να διερευνάται για κάθε συγκεκριμένη εφαρμογή, ενώ εξαρτάται άμεσα από την μέθοδο προσδιορισμού της κατεύθυνσης αναζήτησης που χρησιμοποιείται.

Ο αλγόριθμος αναζήτησης επί γραμμής που χρησιμοποιείται στον αλγόριθμο εφικτής κατεύθυνσης που περιγράφηκε εκτελείται σε δύο φάσεις. Έχουμε καταρχήν μια φάση εντοπισμού αγκύλης [21] που προσδιορίζει μια αγκύλη $[a_i, b_i]$ (η αγκύλη χαρακτηρίζεται από $\mathcal{J}'(a_i) < 0$ και $\mathcal{J}'(b_i) > 0$) εμπεριέχουσα το υπό αναζήτηση ελάχιστο επί γραμμής. Η φάση αυτή ακολουθείται από την φάση υποδιαίρεσης [21] κατά την οποία η αγκύλη υποδιαιρείται οδηγώντας σε μια ακολουθία αγκυλών $[a_j, b_j]$ με μήκος τείνον προς το μηδέν. Η υποδιαίρεση αυτή μπορεί να επιτευχθεί με χρήση κάποιας μορφής παρεμβολής [21, 8]. Στην παρούσα εργασία στο **Βήμα 5** του αλγορίθμου γίνεται χρήση τετραγωνικής παρεμβολής (Quadratic Interpolation).



Σχήμα 3.2: Αναζήτηση επί γραμμής για μη κυρτή συνάρτηση που παρουσιάζει δυο τοπικά ελάχιστα.

3.3.5 Επανατοποθέτηση της κατεύθυνσης αναζήτησης

Η εφαρμογή μεθόδων Σχεδόν-Newton και συζυγών κατευθύνσεων σε μη τετραγωνικές συναρτήσεις παρουσιάζει προβλήματα κατά την διάρκεια των επαναλήψεων λόγω παραγωγής κατευθύνσεων ανάβασης. Για το λόγο αυτό σε κάθε επανάληψη του αλγορίθμου ελέγχεται η συνθήκη αρνητικότητας (Negativity Condition)

$$\mathbf{p}^{(\ell)T} \boldsymbol{\gamma}^{(\ell)} \leq -\varrho \sqrt{(\mathbf{p}^{(\ell)T} \mathbf{p}^{(\ell)}) (\boldsymbol{\gamma}^{(\ell)T} \boldsymbol{\gamma}^{(\ell)})} \quad (3.3.35)$$

όπου $\varrho > 0$ κατάλληλη προκαθορισμένη παράμετρος. Αν η (3.3.35) παραβιάζεται τότε η κατεύθυνση αναζήτησης επανατοποθετείται στην μέγιστη κατάβαση.

Ανεξάρτητα από την (3.3.35) έχει βρεθεί από πρακτικές εφαρμογές και θεωρητικά αποτελέσματα ότι ο αλγόριθμος είναι αποτελεσματικότερος αν η κατεύθυνση αναζήτησης επανατοποθετείται στην μέγιστη κατάβαση κάθε N επαναλήψεις, όπου $N \ll mK_c$.

Εξάλλου, η αποτελεσματικότητα του αλγορίθμου μπορεί να βελτιωθεί, αν η επανατοποθέτηση της κατεύθυνσης αναζήτησης ενεργοποιείται στην επανάληψη i της φάσης εντοπισμού αγκύλης όταν για δεδομένο βήμα a_i η κλίση $\bar{\mathcal{J}}'(a_i)$ είναι αρνητική ενώ η τιμή του συναρτησιακού $\bar{\mathcal{J}}(a_i)$ είναι μεγαλύτερη από $\bar{\mathcal{J}}(a_{i-1})$ (βλέπε Σχήμα 3.2). Παρόμοια διαδικασία ακολουθείται και κατά την διάρκεια της φάσης υποδιαίρεσης όταν ο αριθμός επαναλήψεων (ακολουθία αγκυλών) υπερβαίνει ένα προκαθορισμένο αριθμό (τυπική τιμή 10-30 επαναλήψεις) ενώ οι συνθήκες ευστάθειας (3.3.33) και (3.3.34) δεν ικανοποιούνται ακόμη.

3.3.6 Η μέθοδος RPROP

Ένας εναλλακτικός απλούστερος τρόπος για τον προσδιορισμό των τροχιών ελέγχου σε κάθε επανάληψη, είναι η αντικατάσταση των βημάτων 4 και 5 του αλγορίθμου από ένα απλό κανόνα που καλείται RPROP (Resilient BackPROPagation) [74, 72]. Η μέθοδος RPROP αποτελείται από ένα προσαρμοστικό αλγόριθμο που δεν χρησιμοποιεί την τιμή της κλίσης g αλλά μόνο το πρόσημο της. Η μέθοδος RPROP δεν χρειάζεται την αναζήτηση επί γραμμής στο **Βήμα 5** μειώνοντας έτσι τον υπολογιστικό φόρτο του αλγορίθμου που παρουσιάστηκε στην §3.3.2.

Στη μέθοδο RPROP μια νέα επιτρεπτή τροχιά ελέγχου προσδιορίζεται από την σχέση

$$\mathbf{u}^{(\ell+1)}(\kappa) = \text{sat} \left(\mathbf{u}^{(\ell)}(\kappa) + \Delta \mathbf{u}^{(\ell)}(\kappa) \right) \quad (3.3.36)$$

όπου $\Delta \mathbf{u}^{(\ell)}$ η μεταβολή της τροχιάς ελέγχου στην επανάληψη ℓ του αλγορίθμου. Η μεταβολή πραγματοποιείται για κάθε στοιχείο $u_i^{(\ell)}$, ενώ το μέγεθος της συμβολίζεται ως $\Delta_i^{(\ell)}$ για κάθε $i = 1, \dots, m$. Η μεταβολή $\Delta u_i^{(\ell)}$ δίδεται από την σχέση

$$\Delta u_i^{(\ell)}(\kappa) = \begin{cases} -\text{sgn} \left(g_i^{(\ell)}(\kappa) \right) \Delta_i^{(\ell)}(\kappa) & \text{αν } g_i^{(\ell-1)}(\kappa) g_i^{(\ell)}(\kappa) \geq 0 \\ -\Delta u_i^{(\ell-1)}(\kappa) & \text{αλλιώς} \end{cases}, \quad \forall \kappa = 0, \dots, Kc \quad (3.3.37)$$

όπου η συνάρτηση sgn (προφέρεται sig-num) μιας πραγματικής μεταβλητής x ορίζεται ως

$$\text{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{αν } x > 0 \\ 0 & \text{αν } x = 0 \\ -1 & \text{αν } x < 0 \end{cases} \quad (3.3.38)$$

Από την εξίσωση (3.3.37) απορρέει ότι όταν η κλίση $g_i^{(\ell)}$ δεν αλλάζει πρόσημο, έχουμε τις εξής υποπεριπτώσεις: αν η κλίση είναι θετική, η μεταβλητή ελέγχου $u_i^{(\ell)}$ μειώνεται κατά $\Delta_i^{(\ell)}$; αν η κλίση είναι αρνητική, η μεταβλητή ελέγχου $u_i^{(\ell)}$ αυξάνεται κατά $\Delta_i^{(\ell)}$; και αν η κλίση είναι μηδέν, η μεταβλητή ελέγχου $u_i^{(\ell)}$ παραμένει σταθερή δηλαδή $\Delta u_i^{(\ell)} = 0$. Όταν η κλίση $g_i^{(\ell)}$ αλλάζει πρόσημο, η μεταβολή είναι ίση με το αρνητικό της μεταβολής στην προηγούμενη επανάληψη.

Το μέγεθος της μεταβολής $\Delta_i^{(\ell)}$ στην εξίσωση (3.3.37) δίδεται από την σχέση

$$\Delta_i^{(\ell)}(\kappa) = \begin{cases} \min \left\{ \eta^+ \Delta_i^{(\ell-1)}(\kappa), \Delta_{\max} \right\} & \text{αν } g_i^{(\ell-1)}(\kappa) g_i^{(\ell)}(\kappa) > 0 \\ \max \left\{ \eta^- \Delta_i^{(\ell-1)}(\kappa), \Delta_{\min} \right\} & \text{αν } g_i^{(\ell-1)}(\kappa) g_i^{(\ell)}(\kappa) < 0 \\ \Delta_i^{(\ell-1)}(\kappa) & \text{αλλιώς} \end{cases}, \quad \forall \kappa = 0, \dots, Kc \quad (3.3.39)$$

όπου $0 < \eta^- < 1 < \eta^+$ και Δ_{\min} , Δ_{\max} η ελάχιστη και μέγιστη δυνατή μεταβολή, αντίστοιχα. Κατά την πρώτη επανάληψη $\ell = 0$ του αλγορίθμου το μέγεθος των μεταβολών $\Delta_i^{(\ell)}$, $i = 1, \dots, m$ τίθεται ίσο προς Δ_0 . Η τιμή του Δ_0 αποτελεί μια εκτίμηση της αναμενόμενης βελτίωσης. Ωστόσο έχει βρεθεί από πρακτικές

εφαρμογές και αριθμητικά πειράματα ότι η επιλογή της παραμέτρου Δ_0 δεν επηρεάζει την σύγκλιση του αλγορίθμου. Τυπικές τιμές των παραπάνω παραμέτρων είναι $\eta^- = 0.5$, $\eta^+ = 1.2$, $\Delta_{\min} = 10^{-6}$, $\Delta_{\max} = 50$ και $\Delta_0 = 0.1$ [74, 73].

Από την εξίσωση (3.3.39) απορρέει ότι αν σε κάποια επανάληψη ℓ η κλίση $g_i^{(\ell)}$ αλλάζει πρόσημο τότε στην προηγούμενη επανάληψη η μεταβολή της μεταβλητής ελέγχου $u_i^{(\ell-1)}$ ήταν μεγάλη και ο αλγόριθμος ξεπέρασε ένα ελάχιστο στον άξονα i . Για το λόγω αυτό, η νέα μεταβολή μειώνεται κατά η^- σε σχέση με την μεταβολή της προηγούμενης επανάληψης $\Delta_i^{(\ell-1)}$. Αντίθετα αν η κλίση δεν αλλάζει πρόσημο η νέα μεταβολή αυξάνεται κατά η^+ σε σχέση με την μεταβολή της προηγούμενης επανάληψης, ώστε να επιταχυνθεί η σύγκλιση.

Για την αριθμητική επίλυση του ΠΒΕ που διατυπώθηκε στην §3.2 μέσω της μεθόδου RPROP, ο αλγόριθμος εφικτής κατεύθυνσης της §3.3.2 τροποποιείται και έχει την ακόλουθη δομή:

Βήμα 1 Επέλεξε μια αρχική τροχιά ελέγχου $\mathbf{u}^{(0)}(\kappa)$, η οποία ικανοποιεί την (3.2.4) και μια αρχική τιμή του μεγέθους των μεταβολών $\Delta^{(0)}(\kappa)$ για κάθε $\kappa = 0, \dots, K_c$; θέσε τον δείκτη επανάληψης $\ell = 0$, $\ell \in \mathbb{N}$.

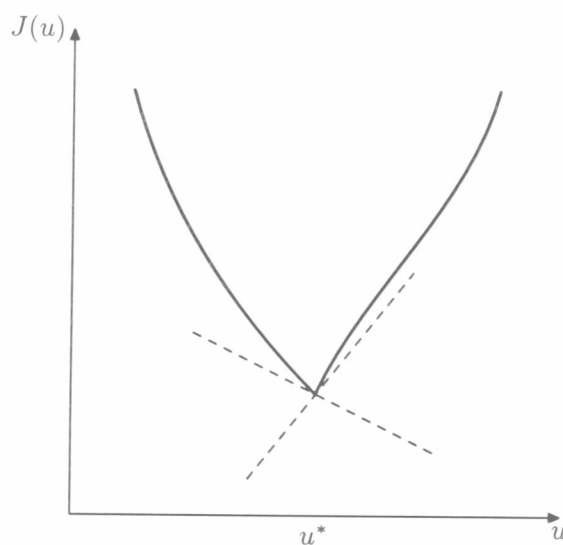
Βήμα 2 Χρησιμοποιώντας $\mathbf{u}^{(\ell)}(\kappa)$, $\kappa = 0, \dots, K_c$ λύσε την (3.2.3) από την γνωστή αρχική συνθήκη (3.2.2) και υπολόγισε $\mathbf{x}^{(\ell)}(k+1)$, $k = 0, \dots, K-1$; χρησιμοποιώντας $\mathbf{x}^{(\ell)}(k+1)$ και $\mathbf{u}^{(\ell)}(\kappa)$ λύσε την (3.3.10) από την τελική συνθήκη (3.3.13) και υπολόγισε $\lambda^{(\ell)}(k+1)$, $k = 0, \dots, K-2$.

Βήμα 3 Χρησιμοποιώντας $\mathbf{x}^{(\ell)}(k+1)$, $\mathbf{u}^{(\ell)}(\kappa)$ και $\lambda^{(\ell)}(k+1)$, υπολόγισε τις κλίσεις $\mathbf{g}^{(\ell)}(\kappa)$ και $\gamma^{(\ell)}(\kappa)$, $\kappa = 0, \dots, K_c$ από τις εξισώσεις (3.3.2) και (3.3.5), αντίστοιχα; υπολόγισε τους πολλαπλασιαστές ΚΚΤ $\mu^{(\ell)}(\kappa)$ από την (3.3.18). (Στον υπολογισμό της κλίσης $\gamma^{(\ell)}(\kappa)$ από την (3.3.5) η κατεύθυνση αναζήτησης $\mathbf{p}^{(\ell)}(\kappa)$ τίθεται ίση με το διάνυσμα μεταβολών $\Delta \mathbf{u}^{(\ell)}(\kappa)$ που υπολογίζεται από την σχέση (3.3.37)).

Βήμα 4 Καθόρισε το μέγεθος των μεταβολών $\Delta^{(\ell)}(\kappa)$ και τις μεταβολές $\Delta \mathbf{u}^{(\ell)}(\kappa)$, $\kappa = 0, \dots, K_c$ από τις σχέσεις (3.3.39) και (3.3.37), αντίστοιχα.

Βήμα 5 Υπολόγισε μια νέα επιτρεπτή τροχιά ελέγχου $\mathbf{u}^{(\ell+1)}(\kappa)$, από την σχέση (3.3.36).

Βήμα 6 Αν για δεδομένο πραγματικό $\varepsilon > 0$, τα κριτήρια σύγκλισης $[\gamma^{(\ell)}(K_c), \gamma^{(\ell)}(K_c)] < \varepsilon$ και $\mu^{(\ell)}(\kappa) \geq 0$ ικανοποιούνται, τότε STOP; διαφορετικά θέσε $\ell := \ell + 1$ και πήγαινε στο **Βήμα 2**.



Σχήμα 3.3: Μη λεία αντικειμενική συνάρτηση κόστους.

3.4 Γενικές παρατηρήσεις

Στο τομέα της βελτιστοποίησης η ανάπτυξη επαναληπτικών αλγορίθμων, στις περισσότερες των περιπτώσεων, πραγματοποιείται κάτω από ιδανικές συνθήκες, ήτοι με μοντέλα τετραγωνικά. Το ερώτημα που τίθεται, είναι αν οι αλγόριθμοι αυτοί μπορούν να δουλέψουν σε πραγματικά προβλήματα με μοντέλα που κατά κανόνα δεν είναι τετραγωνικά. Επιπλέον, η επίλυση ενός πραγματικού προβλήματος συχνά θέτει το ερώτημα του απαιτούμενου υπολογιστικού φόρτου. Στην παρούσα παράγραφο είναι σημαντικό να μνημονευθούν κάποιες γενικές παρατηρήσεις για τον αλγόριθμο εφικτής κατεύθυνσης που παρουσιάστηκε στο παρόν κεφάλαιο και αφορούν τα παραπάνω ερωτήματα.

Όλες οι αριθμητικές μέθοδοι που χρησιμοποιούνται στην παρούσα διατριβή υποθέτουν ότι η αντικειμενική συνάρτηση κόστους και οι συναρτήσεις των περιορισμών είναι λείες συναρτήσεις (smooth functions). Όταν όμως εμφανίζονται στο πρόβλημα μη λείες συναρτήσεις (non smooth functions) σαν αυτή του Σχήματος 3.3, τα λεία πρότυπα που αποτελούν την βάση των πιο πολλών μεθόδων κλίσεων (μη γραμμικού προγραμματισμού) δεν είναι πλέον κατάλληλα. Στην πραγματικότητα οι αναγκαίες συνθήκες βελτιστοποίησης δεν ισχύουν σε μη διαφορίσιμα σημεία. Ωστόσο έχει αποδειχθεί στην πράξη από παλαιότερες εργασίες, ότι παρά τις θεωρητικές δυσκολίες που μπορεί να παρουσιάζουν οι κλασικές μέθοδοι κλίσεων σε τέτοιου είδους προβλήματα είναι κατάλληλες ως ένα βαθμό για την πρακτική επίλυση τους.

Όσο αφορά στο πρόβλημα της ρύθμισης φωτεινής σηματοδότησης που πραγματεύεται η παρούσα εργασία, η καταστατική εξίσωση (2.2.12) περιέχει την μη λεία συνάρτηση (2.2.14) (στην οποία εμφανίζεται η συνάρτηση \min) που εντάσσει το πρόβλημα στην κατηγορία των προβλημάτων μη λείου προγραμματισμού. Εξίσου σημαντική είναι και η ύπαρξη των όρων τιμωρίας στην αντικειμενική συνάρτηση κόστους που για υψηλές τιμές των παραμέτρων βάρους μπορούν να επιβαρύνουν επιπλέον το πρόβλημα με αποτέλεσμα

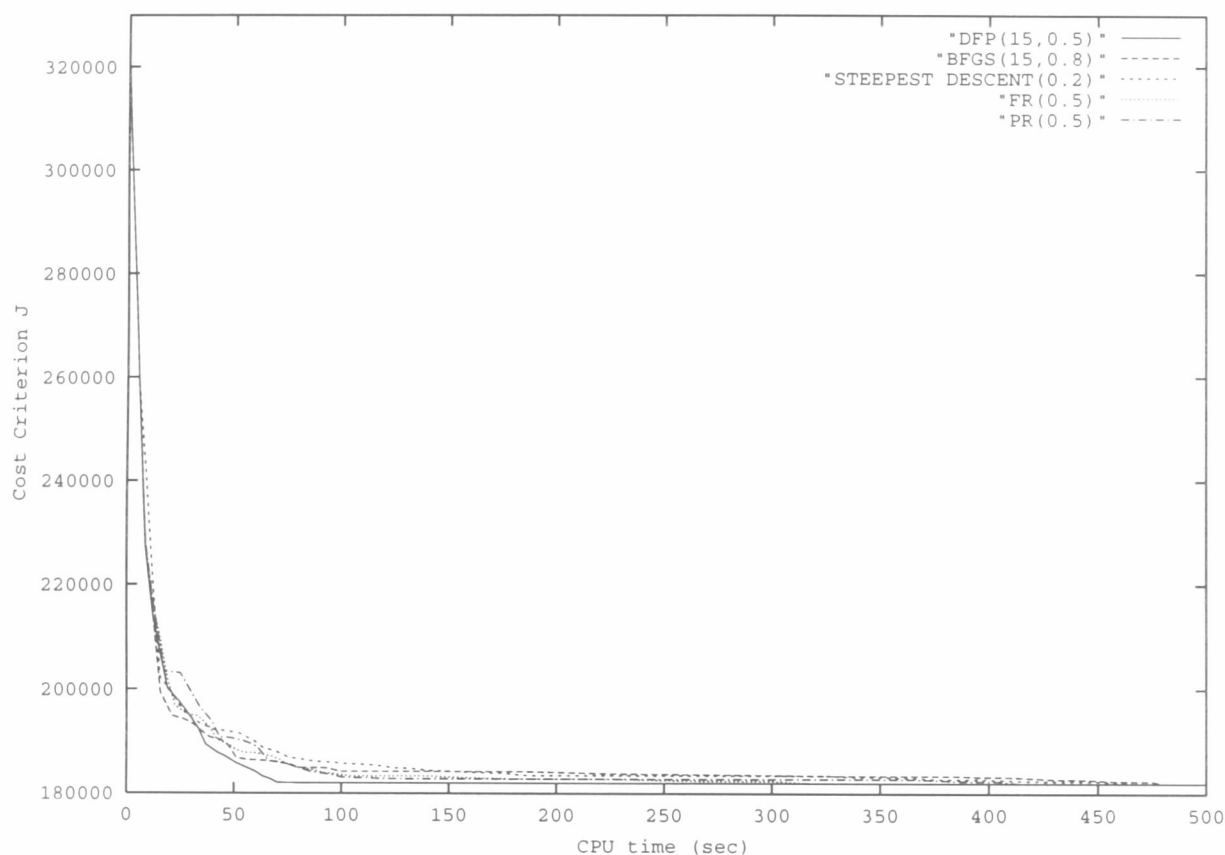
την δημιουργία ενός προβλήματος νοσηρής κατάστασης. Κάτω από τις συνθήκες αυτές, τα πιο συχνά εμφανιζόμενα συμπτώματα του αλγορίθμου εφικτής κατεύθυνσης για προβλήματα μεγάλων διαστάσεων είναι:

- Αργή σύγκλιση ή και μη σύγκλιση.
- Προσδιορισμός μικρών βημάτων ($\alpha \simeq 0$) στο πρόβλημα αναζήτησης επί γραμμής.
- Προσδιορισμός τεχνητών τοπικών ελαχίστων που δημιουργούνται από την ύπαρξη των όρων τιμωρίας στην αντικειμενική συνάρτηση κόστους.

Όσον αφορά τον προσδιορισμό των θετικών παραμέτρων βάρους a_f , a_{w_ℓ} , a_{w_u} για δεδομένο δίκτυο, στην συνάρτηση κόστους (2.3.3), αυτοί προσδιορίζονται από μια διαδικασία δοκιμής-και-σφάλματος λαμβάνοντας υπόψη τον βαθμό προτεραιότητας του κάθε όρου τιμωρίας και τις φυσικές διαστάσεις του προβλήματος, έτσι ώστε να επιτευχθεί μια ικανοποιητική συμπεριφορά ελέγχου. Η διαδικασία δοκιμής-και-σφάλματος ξεκινά δίνοντας κάποιες αρχικές τιμές στις παραμέτρους βάρους. Στην συνέχεια το μη γραμμικό πρόβλημα βέλτιστου ελέγχου επιλύεται για διάφορα σενάρια αρχικής κατάστασης x_0 και ζήτησης $d(k)$, $k = 0, \dots, K - 1$, και αν το αποτέλεσμα του ελέγχου δεν είναι ικανοποιητικό, οι τιμές των παραμέτρων βάρους μεταβάλλονται κατάλληλα· το πρόβλημα επιλύεται ξανά, κ.ο.κ. Ας σημειωθεί ότι η ακριβής ικανοποίηση των περιορισμών απαιτεί υψηλές τιμές των παραμέτρων βάρους, πράγμα που πολλές φορές έχει ως αποτέλεσμα την μη σύγκλιση του αλγορίθμου εφικτής κατεύθυνσης όπως αναφέρθηκε προηγουμένως. Για το λόγο αυτό, κατά την διαδικασία προσδιορισμού των παραμέτρων αυτών γίνεται ένας κατάλληλος συμβιβασμός μεταξύ ταχύτητας σύγκλισης αφ' ενός και ακρίβειας ικανοποίησης των περιορισμών αφ' ετέρου. Πιο συγκεκριμένα, ιδιαίτερα δύσκολος είναι ο προσδιορισμός των παραμέτρων βάρους a_{w_ℓ} και a_{w_u} που αφορούν τους περιορισμούς (2.3.5). Έτσι σε πολλές περιπτώσεις, προκειμένου ο αλγόριθμός να προσδιορίσει γρήγορα ένα τοπικό ελάχιστο, οι περιορισμοί αυτοί παραβιάζονται επιλέγοντας χαμηλές τιμές των αντίστοιχων παραμέτρων βάρους.

Στο σημείο αυτό αξίζει να σημειωθεί ότι οι περιορισμοί ανισότητας (2.3.5) μπορούν να ληφθούν υπόψη άμεσα στον αλγόριθμο εφικτής κατεύθυνσης μέσω της μεθόδου προβολής κλίσεων (gradient projection) [75, 39, 67] και όχι έμμεσα μέσω της συνάρτησης τιμωρίας. Ωστόσο, οι αλλαγές που απαιτούνται για την ενσωμάτωση της μεθόδου προβολής κλίσεων στον αλγόριθμο, αυξάνουν σημαντικά τον πηγαίο κώδικα, ενώ η διαδικασία της προβολής αυξάνει τον υπολογιστικό φόρτο από επανάληψη σε επανάληψη. Για το λόγο αυτό, σε εφαρμογές πραγματικών προβλημάτων όπως είναι αυτό της ρύθμισης φωτεινής σηματοδότησης, πρέπει να διερευνάται αν η έμμεση χρήση της συνάρτησης τιμωρίας είναι καταλληλότερη όσον αφορά τον υπολογιστικό φόρτο. Η διερεύνηση αυτή αποτελεί μια μελλοντική επέκταση της παρούσας εργασίας.

Για τον υπολογισμό του υπολογιστικού φόρτου που απαιτεί ο αλγόριθμος εφικτής κατεύθυνσης πραγματοποιείται μια σύγκριση των διαφόρων μεθόδων προσδιορισμού της κατεύθυνσης αναζήτησης, δηλαδή



Σχήμα 3.4: Μείωση της αντικειμενικής συνάρτησης κόστους σε σχέση με τον υπολογιστικό χρόνο για τις διάφορες μεθόδους κατεύθυνσης αναζήτησης.

των μεθόδων μέγιστης κατάβασης, συζυγών κλίσεων (FR, PR) και Σχεδόν-Newton (DFP, BFGS). Οι μέθοδοι αυτές διερευνώνται όσον αφορά τον υπολογιστικό φόρτο που απαιτούν για την επίλυση του προβλήματος βέλτιστης φωτεινής σηματοδότησης αστικών δικτύων.

Οι μέθοδοι προσδιορισμού της κατεύθυνσης αναζήτησης διαφέρουν μεταξύ τους όσον αφορά τον μέσο υπολογιστικό φόρτο που απαιτούν και τη μέση βελτίωση που επιφέρουν στην αντικειμενική συνάρτηση κόστους σε κάθε επανάληψη. Το Σχήμα 3.4 παρουσιάζει την απόδοση των διάφορων μεθόδων για το πρόβλημα της βέλτιστης φωτεινής σηματοδότησης (αστικό δίκτυο της Γλασκώβης, βλέπε §4.5), όπου ο οριζόντιος άξονας αναπαριστά τον απαιτούμενο υπολογιστικό φόρτο σε δευτερόλεπτα ενώ ο κάθετος άξονας την τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης κόστους (σ' ένα Pentium III 667 MHz).

Από το υπόμνημα του Σχήματος 3.4 είναι φανερό ότι η κάθε μέθοδος αναπαρίσταται από κάποιο είδος γραμμής ενώ τα νούμερα που βρίσκονται στην παρένθεση αναφέρονται στον αριθμό των επαναλήψεων για τον οποίο γίνεται περιοδικά επανατοποθέτηση της κατεύθυνσης αναζήτησης στην μέγιστη κατάβαση (βλέπε §3.3.5), και την τιμή της παραμέτρου σ στο πρόβλημα αναζήτησης επί γραμμής (βλέπε §3.3.4), αντίστοιχα. Οι παράμετροι αυτοί έχουν επίδραση στην απόδοση της κάθε μεθόδου και για το λόγο αυτό οι τιμές τους προσδιορίζονται μετά από κατάλληλη διερεύνηση μέσω της διαδικασίας δοκιμής-και-σφάλματος έτσι ώστε

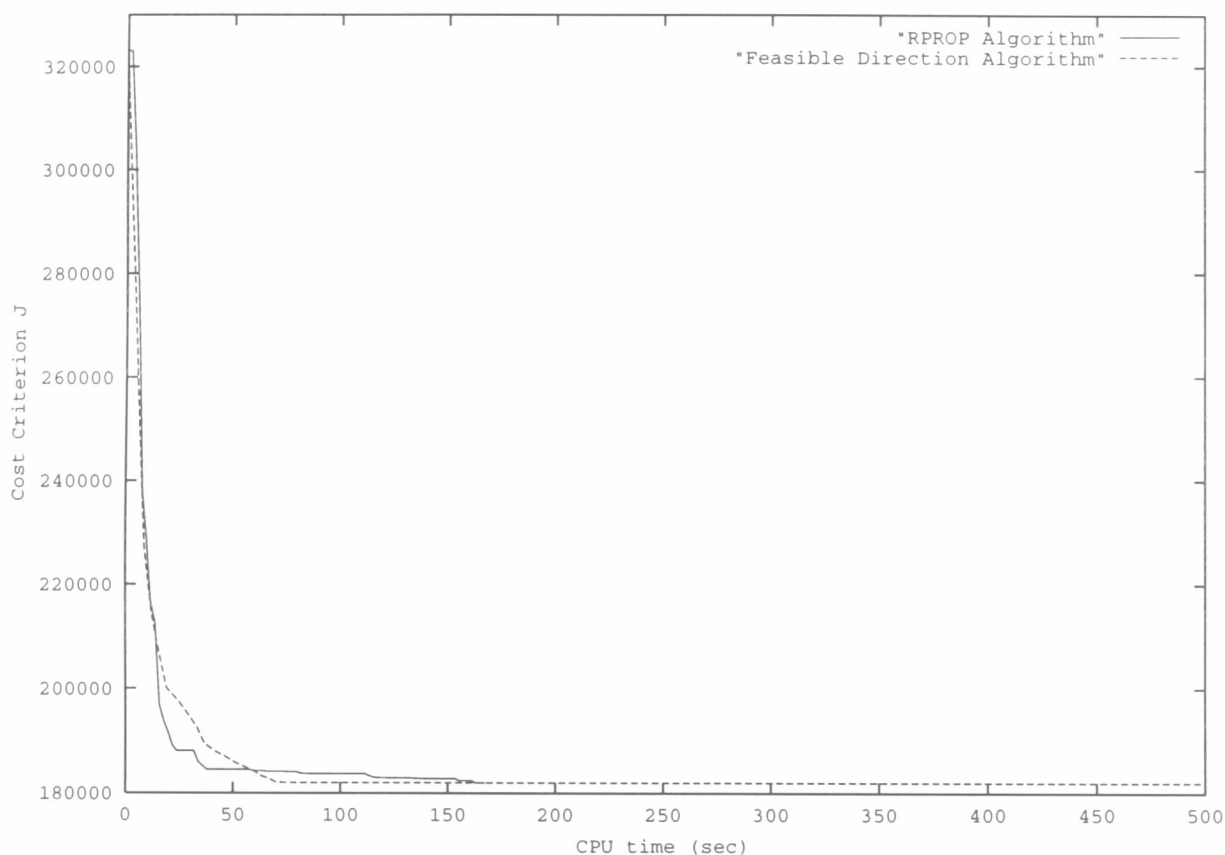
να επιτευχθεί η μέγιστη αποδοτικότητα για την κάθε μέθοδο αναζήτησης.

Από το Σχήμα 3.4 και λαμβάνοντας υπόψη την βελτίωση της συνάρτησης κόστους και τον απαιτούμενο υπολογιστικό χρόνο, μπορούμε να πούμε ότι η μέθοδος DFP (15, 0.5) έχει την καλύτερη απόδοση για το δεδομένο πρόβλημα βελτίστου ελέγχου φωτεινής σηματοδότησης. Η μέθοδος DFP (15, 0.5) μειώνει την συνάρτησης κόστους στην ελάχιστη τιμή της, σε $76 \text{ sec} \simeq 1.25 \text{ min}$, ενώ στην συνέχεια δεν επιφέρει επιπλέον βελτίωση. Οι υπόλοιπες μέθοδοι έχουν σχεδόν παραπλήσια συμπεριφορά, αφού στο σημείο που η DFP (15, 0.5) έχει προσεγγίσει την ελάχιστη τιμή του κριτηρίου κόστους, αυτές βρίσκονται μεταξύ τους στα ίδια περίπου επίπεδα απόδοσης με την μέθοδο μέγιστης κατάβασης (STEEPEST DESCENT (0.2)) να υστερεί έναντι των άλλων. Από το σημείο αυτό (1.25 min) και μετά, οι μέθοδοι αυτές παρουσιάζουν σε μεγάλο χρονικό διάστημα μικρή βελτίωση έως ότου προσεγγίσουν την ελάχιστη τιμή του κριτηρίου κόστους, με πιο αργή την μέθοδο BFGS (15, 0.8). Στο σημείο αυτό πρέπει να σημειωθεί ότι ο αλγόριθμος μπορεί να διακοπεί (π.χ., μετά από ένα μέγιστο χρονικό διάστημα), εάν παρουσιάζει προβλήματα σύγκλισης που οδηγούν σε μεγάλο υπολογιστικό φόρτο για τον προσδιορισμό ενός τοπικού ελαχίστου, με βέλτιστη λύση την τελευταία που είχε προσδιοριστεί πριν διακοπεί. Αυτό είναι δυνατόν να γίνει αφού ο αλγόριθμος σε κάθε επανάληψη προσδιορίζει ένα εφικτό σημείο στο οποίο όλοι οι περιορισμοί ικανοποιούνται.

Όπως είδαμε στην §3.3.6 ένας εναλλακτικός τρόπος για τον προσδιορισμό του βέλτιστου ελέγχου σε κάθε επανάληψη, είναι η αντικατάσταση των βημάτων 4 και 5 του αλγορίθμου εφικτής κατεύθυνσης με τη μέθοδο RPROP. Η μέθοδος RPROP, θεωρητικά, πλεονεκτεί του αλγορίθμου εφικτής κατεύθυνσης όσο αφορά τον υπολογιστικό φόρτο ανά επανάληψη, λόγω του γεγονότος ότι δεν επιλύει το πρόβλημα αναζήτησης επί γραμμής. Για το λόγο αυτό διερευνήθηκε η συμπεριφορά του αλγορίθμου εφικτής κατεύθυνσης και της μεθόδου RPROP, σε σχέση με τον υπολογιστικό φόρτο που απαιτούν για την επίλυση του προβλήματος βέλτιστης φωτεινής σηματοδότησης αστικών δικτύων.

Το Σχήμα 3.5 παρουσιάζει την απόδοση του αλγορίθμου εφικτής κατεύθυνσης και της μεθόδου RPROP¹ για το πρόβλημα της βέλτιστης φωτεινής σηματοδότησης αστικών δικτύων. Από το Σχήμα 3.5 είναι φανερό ότι ο αλγόριθμος RPROP μειώνει κατά μεγάλο ποσοστό την αντικειμενική συνάρτηση κόστους σε μικρότερο υπολογιστικό χρόνο από τον αλγόριθμο εφικτής κατεύθυνσης (περίπου στα 25 sec). Ωστόσο, ο αλγόριθμος εφικτής κατεύθυνσης προσδιορίζει πολύ πιο γρήγορα την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης κόστους ($76 \text{ sec} \simeq 1.25 \text{ min}$) σε αντίθεση με τον αλγόριθμο RPROP που στην περιοχή της ελάχιστης τιμής της συνάρτησης κόστους βελτιώνει με πολύ αργό ρυθμό ($160 \text{ sec} \simeq 2.65 \text{ min}$). Αυτό είναι και το κύριο χαρακτηριστικό του αλγορίθμου RPROP, δηλαδή μειώνει δραματικά την συνάρτηση κόστους σε μικρό υπολογιστικό χρόνο ενώ συγκλίνει στην ελάχιστη τιμή με αργό ρυθμό. Για το λόγο αυτό θα πρέπει να διερευνάται για κάθε περίπτωση εφαρμογής η σχέση κέρδους-ζημιάς του υπολογιστικού φόρτου που

¹Υλοποιείται με βάση τον τροποποιημένο αλγόριθμο της §3.3.6. Η μέθοδος RPROP δεν εγγυάται την ιδιότητα κατάβασης $\mathbf{p}^{(\ell)T} \mathbf{g}^{(\ell)} < 0$ με αποτέλεσμα η αντικειμενική συνάρτηση να μην βελτιώνεται αυστηρά σε κάθε επανάληψη. Για το λόγο αυτό αν για ένα προκαθορισμένο αριθμό διαδοχικών επαναλήψεων η συνάρτηση κόστους δεν μειώνεται ο αλγόριθμος αυτομάτως προσδιορίζει μία εφικτή κατεύθυνση.



Σχήμα 3.5: Σύγκριση του αλγορίθμου εφικτής κατεύθυνσης και του αλγορίθμου υλοποίησης της μεθόδου RPROP.

απαιτείται για την βελτίωση της συνάρτησης κόστους. Παραδείγματος χάριν στον συγκεκριμένο παράδειγμα, ο αλγόριθμος RPROP θα μπορούσε να τερματιστεί από τον χρήστη περίπου στα 30 sec, αφού μέχρι το σημείο εκείνο έχει επέλθει μια δραματική μείωση της συνάρτησης κόστους και δεν υπάρχει λόγος να δαπανηθεί αρκετά μεγάλος υπολογιστικός φόρτος για μια πολύ μικρή μείωση της συνάρτησης κόστους. Από την παραπάνω ανάλυση είναι φανερό ότι η μέθοδος RPROP είναι ιδιαίτερα αποτελεσματική για την αριθμητική επίλυση του προβλήματος της βέλτιστης φωτεινής σηματοδότησης αστικών δικτύων.

Παραδείγματα εφαρμογής

Στο παρόν κεφάλαιο παρουσιάζονται αστικά οδικά δίκτυα για τα οποία θα εξεταστεί η αποτελεσματικότητα του βέλτιστου ελέγχου που παρουσιάσθηκε στα Κεφάλαια 2 και 3. Για το σκοπό αυτό θα γίνει εφαρμογή του αλγορίθμου εφικτής κατεύθυνσης σε δίκτυα μικρής και μεγάλης κλίμακας με τυχαία τοπολογία και χαρακτηριστικά. Αρχικά εξετάζονται τρία μικρά οδικά δίκτυα με τις διαστάσεις τους να αυξάνονται από δίκτυο σε δίκτυο ενώ τέλος εξετάζεται ένα μέρος του οδικού αστικού δικτύου της Γλασκώβης. Τα αποτελέσματα των διερευνήσεων αυτών για τυχαίες αρχικές συνθήκες θα παρουσιαστούν στο Κεφάλαιο 5.

4.1 Απαιτούμενα δεδομένα

Για την εφαρμογή του αλγορίθμου εφικτής κατεύθυνσης σε δίκτυα τυχαίας τοπολογίας, σύμφωνα με το μοντέλο ελέγχου που αναπτύχθηκε στο Κεφάλαιο 2 απαιτούνται τα ακόλουθα δεδομένα :

- Για τους συνδέσμους απαιτούνται η χωρητικότητα, η ροή κορεσμού, τα ποσοστά στροφής και οι φάσεις κατά τις οποίες τα οχήματα επί συνδέσμων έχουν δικαίωμα κυκλοφορίας.
- Για τους κόμβους απαιτούνται η περίοδος σηματοδότησης, ο χαμένος χρόνος, ο αριθμός των φάσεων, οι ελάχιστοι και μέγιστοι χρόνοι πρασίνων.
- Για το μοντέλο ελέγχου απαιτούνται η περίοδος του μοντέλου T , η περίοδος του ελέγχου T_c καθώς και ο ορίζοντας βελτιστοποίησης K . Από τα δεδομένα αυτά στην συνέχεια υπολογίζεται ο ορίζοντας ελέγχου K_c όπως παρουσιάσθηκε στην §2.2.2. Επίσης πρέπει να καθορισθεί το ποσοστό της μέγιστης χωρητικότητας $c \in (0, 1]$.

Κόμβος	Σύνολο φάσεων	Περίοδος	Χαμένος χρόνος	Ελάχιστος χρόνος πρασίνου				Μέγιστος χρόνος πρασίνου			
				$g_{j,i}(sec)$				$g_{j,i}(sec)$			
j	F_j	$C_j(sec)$	$L_j(sec)$	$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$	$i = 4$	$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$	$i = 4$
1	{1, 2, 3, 4}	120	34	7	7	7	7	65	65	65	65

Πίνακας 4.1: Περιγραφή της σηματοδότησης των κόμβων του Δικτύου 1.

- Για τον αλγόριθμο εφικτής κατεύθυνσης απαιτούνται η αρχική κατάσταση $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ και η αρχική επιτρεπτή τροχιά ελέγχου $\mathbf{u}^{(0)}(\kappa), \kappa = 0, \dots, K_c$.

Επιπλέον, για κάθε δίκτυο εφαρμογής απαιτείται ο προσδιορισμός των θετικών παραμέτρων βάρους a_f, a_{w_l}, a_{w_u} στην συνάρτηση κόστους (2.3.3). Οι παράμετροι αυτοί προσδιορίζονται από μια διαδικασία δοκιμής-και-σφάλματος έτσι ώστε να επιτευχθεί μια ικανοποιητική συμπεριφορά ελέγχου για το κάθε δίκτυο.

4.2 Δίκτυο 1

Το πρώτο δίκτυο που εξετάζεται στην παρούσα διατριβή είναι ένα απλό δίκτυο με ένα κόμβο και 5 συνδέσμους που εισέρχονται στον κόμβο. Το δίκτυο αυτό όπως και αυτά που παρουσιάζονται στις επόμενες δύο παραγράφους, λόγω των μικρών τους διαστάσεων μας παρέχουν την δυνατότητα της εύκολης διερεύνησης και επεξήγησης των αποτελεσμάτων από την εφαρμογή του βέλτιστου ελέγχου. Είναι φανερό ότι σε ένα δίκτυο μεγάλης κλίμακας, όπως είναι αυτό της Γλασκώβης που παρουσιάζεται στην §4.5 είναι πολύ δύσκολη η εξαγωγή ασφαλών συμπερασμάτων για το πώς « αποφασίζει » ο βέλτιστος έλεγχος ότι μια συγκεκριμένη τροχιά ελέγχου είναι βέλτιστη.

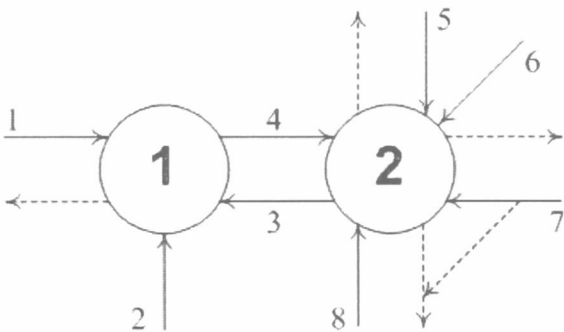
Σύμφωνα με την μεθοδολογία που παρουσιάστηκε στο Κεφάλαιο 2 ορίζονται τα παρακάτω σύνολα για το συγκεκριμένο δίκτυο: το σύνολο των ελεγχόμενων σηματοδοτημένων κόμβων $J = \{1\}$, και το σύνολο των ελεγχόμενων συνδέσμων $Z = \{1, 2, \dots, 5\}$. Ο Πίνακας 4.1 παρουσιάζει στοιχεία του ελεγχόμενου κόμβου που χρησιμοποιούνται από το μοντέλο ελέγχου. Ο Πίνακας 4.2 παρουσιάζει στοιχεία που αφορούν τους συνδέσμους του δικτύου, όπως τη χωρητικότητα, τη ροή κορεσμού και τις φάσεις κατά τις οποίες έχει δικαίωμα κυκλοφορίας. Τα ποσοστά στροφής και εξόδου για κάθε σύνδεσμο είναι όλα μηδέν αφού όλοι οι σύνδεσμοι είναι εισερχόμενοι στον κόμβο.

4.3 Δίκτυο 2

Στο δίκτυο αυτό έχει προστεθεί ένας επιπλέον κόμβος σε αυτόν του Δικτύου 1. Συνεπώς, και το δίκτυο αυτό είναι απλό με 2 κόμβους και 8 συνδέσμους. Το Σχήμα 4.1 παρουσιάζει την τοπολογία του δικτύου.

Σύνδεσμος	Χωρητικότητα	Ροή κορεσμού	Σύνολο φάσεων με προτεραιότητα
z	$x_{z,max}(veh)$	$S_z(veh/h)$	v_z
1	53	4000	{1}
2	73	4000	{3}
3	33	2000	{4}
4	73	3000	{2}
5	66	4000	{3}

Πίνακας 4.2: Περιγραφή των συνδέσμων του Δικτύου 1.



Σχήμα 4.1: Σχηματική αναπαράσταση του μοντέλου ελέγχου για το Δίκτυο 2.

Ο σύνδεσμος 4 δέχεται οχήματα από τους συνδέσμους 1 και 2, ενώ ο σύνδεσμος 3 από τους 5, 7 και 8. Όπως και στο Δίκτυο 1 ορίζονται τα παρακάτω τα σύνολα: το σύνολο των ελεγχόμενων σηματοδοτημένων κόμβων $J = \{1, 2\}$, και το σύνολο των ελεγχόμενων συνδέσμων $Z = \{1, 2, \dots, 8\}$.

Ο Πίνακας 4.3 παρουσιάζει στοιχεία των ελεγχόμενων κόμβων που χρησιμοποιούνται από το μοντέλο ελέγχου, ενώ ο Πίνακας 4.4 παρουσιάζει στοιχεία που αφορούν τους συνδέσμους του δικτύου, όπως τον κόμβο στον οποίο ανήκουν, τη χωρητικότητα, τη ροή κορεσμού και τις φάσεις κατά τις οποίες έχει δικαίωμα κυκλοφορίας. Τέλος ο Πίνακας 4.5 παρουσιάζει τα ποσοστά στροφής και εξόδου για κάθε σύνδεσμο.

4.4 Δίκτυο 3

Το δίκτυο αυτό αποτελείται από 3 κόμβους και 11 συνδέσμους. Οι διαστάσεις του είναι αυξημένες σε σχέση με τα δύο προηγούμενα δίκτυα, ωστόσο είναι και αυτό ένα σχετικά μικρό δίκτυο. Το Σχήμα 4.2 παρουσιάζει την τοπολογία του δικτύου. Ο σύνδεσμος 4 δέχεται οχήματα απο τους συνδέσμους 1 και 2

Κόμβος	Σύνολο φάσεων	Περίοδος $C_j(sec)$	Χαμένος χρόνος $L_j(sec)$	Ελάχιστος χρόνος πρασίνου $g_{j,i}(sec)$				Μέγιστος χρόνος πρασίνου $g_{j,i}(sec)$			
				$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$	$i = 4$	$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$	$i = 4$
1	{1, 2}	120	21	7	7	—	—	92	92	—	—
2	{1, 2, 3, 4}	120	34	7	7	7	7	65	65	65	65

Πίνακας 4.3: Περιγραφή της σηματοδότησης των κόμβων του Δικτύου 2.

Σύνδεσμος	Ελεγχόμενος κόμβος	Χωρητικότητα	Ροή κορεσμού	Σύνολο φάσεων με προτεραιότητα
z	j	$x_{z,\max}(veh)$	$S_z(veh/h)$	v_z
1	1	60	4000	{1}
2	1	133	8000	{2}
3	1	53	4000	{1}
4	2	53	4000	{1}
5	2	73	4000	{3}
6	2	33	2000	{4}
7	2	73	3000	{2}
8	2	66	4000	{3}

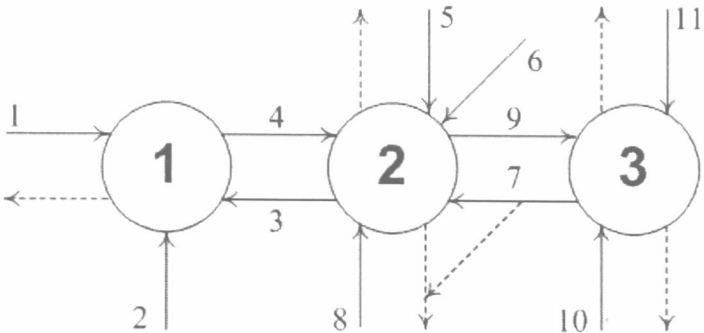
Πίνακας 4.4: Περιγραφή των συνδέσμων του Δικτύου 2.

Σύνδεσμος	1	2	3	4	5	6	7	8	$t_{z,0}$
1	0	0	0	1	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0.51	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5	0	0	0.17	0	0	0	0	0	0
6	0	0	0	0	0	0	0	0	0
7	0	0	0.59	0	0	0	0	0	0.19
8	0	0	0.23	0	0	0	0	0	0

Πίνακας 4.5: Ποσοστά στροφής και εκροής των συνδέσμων του Δικτύου 2.

και τα διοχετεύει κατά το μεγαλύτερο ποσοστό στον σύνδεσμο 9. Ο σύνδεσμος 3 δέχεται οχήματα από τους 5, 8 και 7, ενώ ο τελευταίος δέχεται οχήματα από τους συνδέσμους 10 και 11. Για το δίκτυο αυτό ορίζονται τα σύνολα: το σύνολο των ελεγχόμενων σηματοδοτημένων κόμβων $J = \{1, 2, 3\}$, και το σύνολο των ελεγχόμενων συνδέσμων $Z = \{1, 2, \dots, 11\}$.

Ο Πίνακας 4.6 παρουσιάζει στοιχεία των ελεγχόμενων κόμβων που χρησιμοποιούνται από το μοντέλο ελέγχου, ενώ ο Πίνακας 4.7 παρουσιάζει στοιχεία που αφορούν τους συνδέσμους του δικτύου, όπως τη χωρητικότητα τη ροή κορεσμού και τις φάσεις κατά της οποίες έχει δικαίωμα κυκλοφορίας. Επίσης, στον πίνακα αυτό δίδεται για κάθε σύνδεσμο ο κόμβος στον οποίο ανήκουν. Τέλος ο Πίνακας 4.8 παρουσιάζει



Σχήμα 4.2: Σχηματική αναπαράσταση του μοντέλου ελέγχου για το Δίκτυο 3.

Κόμβος	Σύνολο φάσεων	Περίοδος	Χαμένος χρόνος	Ελάχιστος χρόνος πρασίνου				Μέγιστος χρόνος πρασίνου			
j	F_j	$C_j(sec)$	$L_j(sec)$	$g_{j,i}(sec)$				$g_{j,i}(sec)$			
				$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$	$i = 4$	$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$	$i = 4$
1	{1, 2}	120	21	7	7	—	—	92	92	—	—
2	{1, 2, 3, 4}	120	34	7	7	7	7	65	65	65	65
3	{1, 2, 3}	120	22	7	7	7	—	84	84	84	—

Πίνακας 4.6: Περιγραφή της σηματοδότησης των κόμβων του Δικτύου 3.

Σύνδεσμος	Ελεγχόμενος κόμβος	Χωρητικότητα	Ροή κορεσμού	Σύνολο φάσεων με προτεραιότητα
z	j	$x_{z,max}(veh)$	$S_z(veh/h)$	v_z
1	1	60	4000	{1}
2	1	133	8000	{2}
3	1	53	4000	{1}
4	2	53	4000	{1}
5	2	73	4000	{3}
6	2	33	2000	{4}
7	2	73	3000	{2}
8	2	66	4000	{3}
9	3	66	3500	{3}
10	3	66	3850	{1}
11	3	85	4800	{1, 2}

Πίνακας 4.7: Περιγραφή των συνδέσμων του Δικτύου 3.

τα ποσοστά στροφής και εξόδου για κάθε σύνδεσμο.

4.5 Δίκτυο 4

Το μικτό οδικό δίκτυο M8 διασχίζει από άκρο σε άκρο την πόλη της Γλασκώβης εξυπηρετώντας τόσο μεγάλες διαδρομές στην Σκωτία όσο και την τοπική κυκλοφορία μεταξύ του ανατολικού και δυτικού τομέα στην Γλασκώβη. Κατά την διάρκεια των ωρών αιχμής η τοπική κυκλοφορία αλληλεπιδρά λόγω της κυκλοφορίας στους κόμβους προξενώντας σημαντική καθυστέρηση στην κυκλοφορία του αυτοκινητοδρόμου. Το

Σύνδεσμος	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	$t_{z,0}$
1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0.51	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0	0	0	0	0.48	0	0	0
5	0	0	0.17	0	0	0	0	0	0.3	0	0	0
6	0	0	0	0	0	0	0	0	0.5	0	0	0
7	0	0	0.59	0	0	0	0	0	0	0	0	0.19
8	0	0	0.23	0	0	0	0	0	0.26	0	0	0
9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
10	0	0	0	0	0	0	0.22	0	0	0	0	0
11	0	0	0	0	0	0	0.23	0	0	0	0	0

Πίνακας 4.8: Ποσοστά στροφής και εκροής των συνδέσμων του Δικτύου 3.

Κόμβος	Εύνολο φάσεων	Περίοδος	Χαμένος χρόνος	Ελάχιστος χρόνος πρασίνου				Μέγιστος χρόνος πρασίνου			
j	F_j	$C_j(sec)$	$L_j(sec)$	$g_{j,i}(sec)$				$g_{j,i}(sec)$			
				$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$	$i = 4$	$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$	$i = 4$
1	{1, 2, 3}	120	21	7	7	7	—	85	85	85	—
2	{1, 2, 3}	120	21	8	8	8	—	83	83	83	—
3	{1, 2, 3, 4}	120	24	7	3	7	10	76	72	76	79
4	{1, 2}	120	21	7	7	—	—	92	92	—	—
5	{1, 2, 3, 4}	120	34	7	7	7	7	65	65	65	65
6	{1, 2, 3}	120	22	7	7	7	—	84	84	84	—
7	{1, 2, 3}	120	34	7	7	7	—	72	72	72	—
8	{1, 2, 3, 4}	120	33	7	7	7	7	66	66	66	66
9	{1, 2}	120	33	10	10	—	—	77	77	—	—
10	{1, 2, 3}	120	13	10	10	10	—	87	87	87	—
11	{1, 2, 3, 4}	120	20	10	7	10	7	76	73	76	73
12	{1, 2, 3, 4}	120	37	3	3	3	3	74	74	74	74
13	{1, 2, 3, 4}	120	33	3	3	3	3	78	78	78	78

Πίνακας 4.9: Περιγραφή της σηματοδότησης των κόμβων του αστικού δικτύου της Γλασκώβης.

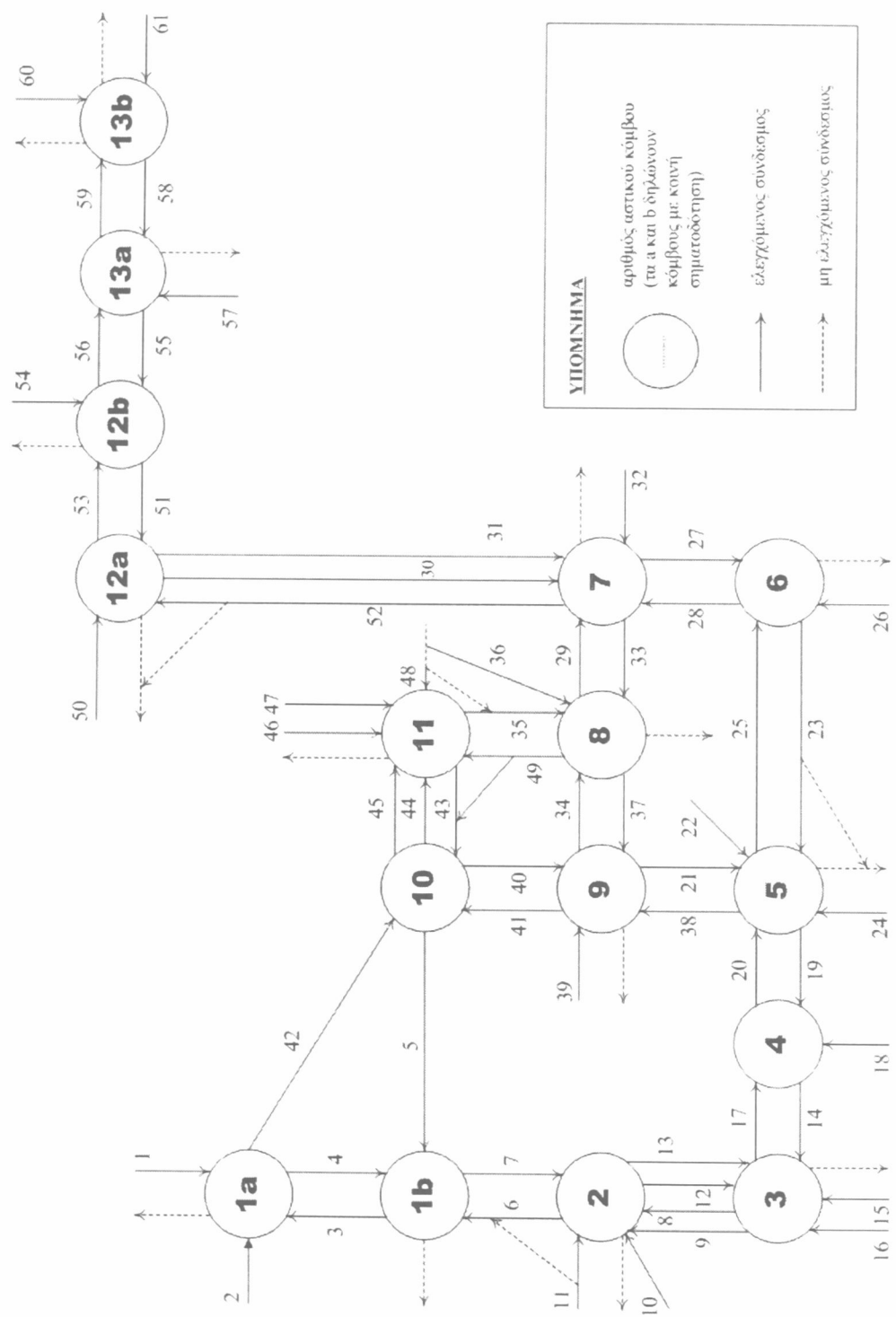
στον πίνακα αυτό δίδεται ο κόμβος με τον οποίο συνδέεται ο κάθε σύνδεσμος. Τέλος το Σχήμα 4.5 παρουσιάζει τα ποσοστά στροφής και εξόδου για κάθε σύνδεσμο. Τα στοιχεία των Πινάκων 4.9-4.11, προέρχονται από πραγματικές μετρήσεις στο δίκτυο της Γλασκώβης, ενώ τα ποσοστά στροφής από παλιότερη μελέτη του δικτύου με το μοντέλο TRANSYT [52].

Σύνδεσμος	Ελεγχόμενος κόμβος	Χωρητικότητα	Ροή κορεσμού	Σύνολο φάσεων με προτεραιότητα
z	j	$x_{z,max}(veh)$	$S_z(veh/h)$	v_z
1	1(a)	185	4800	{1, 3}
2	1(a)	173	3700	{2}
3	1(a)	20	4300	{1, 3}
4	1(b)	20	4300	{1, 2}
5	1(b)	100	3600	{3}
6	1(b)	82	4400	{1, 2}
7	2	88	4000	{2}
8	2	13	2000	{2}
9	2	13	2000	{1, 2}
10	2	66	4000	{3}
11	2	201	4000	{1}
12	3	13	2000	{1, 2}
13	3	13	2000	{1, 2, 4}
14	3	60	4000	{1}
15	3	33	2000	{1, 3}
16	3	33	2000	{2, 3}
17	4	60	4000	{1}
18	4	133	8000	{2}
19	4	53	4000	{1}
20	5	53	4000	{1}
21	5	73	4000	{3}
22	5	33	2000	{4}
23	5	73	3000	{2}
24	5	66	4000	{3}
25	6	66	3500	{3}
26	6	66	3850	{1}
27	6	85	4800	{1, 2}
28	7	85	3100	{1}
29	7	83	3650	{3}
30	7	116	1800	{2}
31	7	116	1800	{1, 2}

Πίνακας 4.10: Περιγραφή των συνδέσμων του αστικού δικτύου της Γλασκώβης.

Σύνδεσμος	Ελεγχόμενος κόμβος	Χωρητικότητα	Ροή κορεσμού	Σύνολο φάσεων με προτεραιότητα
z	j	$x_{z,max}(veh)$	$S_z(veh/h)$	v_z
32	7	12	1550	{3}
33	8	83	3900	{1, 3}
34	8	45	1950	{2, 4}
35	8	43	2750	{1, 3}
36	8	28	1680	{2, 4}
37	9	45	3500	{2}
38	9	73	4100	{1}
39	9	66	4000	{2}
40	9	63	4500	{1}
41	10	63	3100	{3}
42	10	106	2950	{1, 2}
43	10	76	4000	{1}
44	11	40	1700	{3}
45	11	40	1700	{2, 3}
46	11	10	1700	{2}
47	11	10	1950	{1, 2}
48	11	83	3600	{4}
49	11	43	3900	{1}
50	12(a)	256	3200	{4}
51	12(a)	30	3400	{1, 2, 3}
52	12(a)	233	3750	{1}
53	12(b)	30	3850	{1, 4}
54	12(b)	75	4500	{3}
55	12(b)	30	2250	{1, 2, 4}
56	13(a)	30	2500	{1, 2, 3}
57	13(a)	86	2450	{4}
58	13(a)	13	3800	{1, 2}
59	13(a)	13	3850	{1, 3, 4}
60	13(b)	43	3400	{2}
61	13(b)	63	3000	{1, 4}

Πίνακας 4.11: Περιγραφή των συνδέσμων του αστικού δικτύου της Γλασκώβης (συνέχεια).



Σχήμα 4.4: Σχηματική αναπαράσταση του μοντέλου ελέγχου του αστικού οδικού δικτύου της Γλασκώβης.

Αποτελέσματα διερευνήσεων

Στο παρόν κεφάλαιο παρουσιάζονται τα αποτελέσματα των διερευνήσεων με τα οποία εξετάζεται η αποτελεσματικότητα του βέλτιστου ελέγχου στην επίλυση του προβλήματος βέλτιστης σηματοδότησης αστικών δικτύων. Τα αποτελέσματα αφορούν τα τέσσερα αστικά δίκτυα που παρουσιάστηκαν στο Κεφάλαιο 4.

5.1 Εφαρμογή στο Δίκτυο 1

Το Δίκτυο 1 είναι ένα απλό δίκτυο με ένα κόμβο και 5 συνδέσμους προέλευσης. Τα ποσοστά στροφής και εξόδου για κάθε σύνδεσμο είναι όλα μηδέν αφού όλοι οι σύνδεσμοι είναι εισερχόμενοι στον κόμβο. Συνεπώς, δεν υπάρχει μεταφορά ροής από ένα σύνδεσμο σε άλλον με αποτέλεσμα να μας ενδιαφέρει η διερεύνηση της εξέλιξης των ουρών για διάφορα σενάρια της αρχικής κατάστασης $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$.

Σύμφωνα με την §4.1 τα απαραίτητα δεδομένα που χρησιμοποιούνται για την εφαρμογή του αλγορίθμου εφικτής κατεύθυνσης έχουν τις ακόλουθες τιμές: $T = 5 \text{ sec}$, $T_c = 120 \text{ sec}$, $K = 120$, $K_c = 4$, $c = 0.9$. Ο κόμβος που εξετάζεται έχει τέσσερις φάσεις σηματοδότησης και συνεπώς σύμφωνα με την μεθοδολογία που αναπτύχθηκε στην §2.3 θεωρούμε $|F_j| - 1$ ανεξάρτητες μεταβλητές σε κάθε κόμβο, δηλαδή τρεις μεταβλητές ελέγχου που αντιστοιχούν στις φάσεις 1, 2 και 3. Ως εκ τούτου το διάνυσμα ελέγχου θα είναι $\mathbf{u}(\kappa) = [u_1(\kappa) \ u_2(\kappa) \ u_3(\kappa)]^T = [g_{1,1}(\kappa) \ g_{1,2}(\kappa) \ g_{1,3}(\kappa)]^T$, $\kappa = 0, \dots, 4$, ενώ το διάνυσμα κατάστασης είναι $\mathbf{x}(k) = [x_1(k) \ \dots \ x_5(k)]^T$, $k = 0, \dots, 119$. Η αρχική κατάσταση \mathbf{x}_0 και η αρχική επιτρεπτή τροχιά ελέγχου $\mathbf{u}^{(0)}(\kappa)$, $\kappa = 0, \dots, 4$ παρουσιάζονται στον Πίνακα 5.1 ενώ η ζήτηση $d(k)$ θεωρείται ίση με μηδέν. Οι παράμετροι βάρους στην συνάρτηση κόστους (2.3.3) έχουν τιμές $a_f = 0.001$, $a_{w_f} = a_{w_u} = 0.5$. Οι παράμετροι αυτοί επιλέχθηκαν από μια διαδικασία δοκιμής-και-σφάλματος έτσι

Σύνδεσμος	Αριθμός οχημάτων	Μεταβλητή ελέγχου	Διάρκεια πρασίνου
z	$x_z(0) (veh)$	i	$u_i^{(0)}(\kappa) (sec)$
1	50	1	28
2	55	2	22
3	30	3	27
4	55		
5	28		

Πίνακας 5.1: Η αρχική κατάσταση x_0 και η αρχική επιτρεπτή τροχιά ελέγχου $u^{(0)}(\kappa)$, $\kappa = 0, \dots, 4$ για το δίκτυο εφαρμογής 1.

ώστε αρχικά να ικανοποιούνται οι περιορισμοί (2.3.5) και εν συνεχεία την αποφυγή έντονων διακυμάνσεων των μεταβλητών ελέγχου.

Τα Σχήματα 5.1(α) και 5.1(β) απεικονίζουν την βέλτιστη τροχιά ελέγχου και την εξέλιξη των ουρών στους συνδέσμους του Δικτύου 1, αντιστοίχως. Από την εξέταση των σχημάτων αυτών μπορούμε συνοψίζοντας να κάνουμε τις ακόλουθες παρατηρήσεις:

- Η βελτιστοποίηση διαχειρίζεται τις ουρές των συνδέσμων με τέτοιο τρόπο (ομοιογενώς) ώστε να επιτυγχάνεται ο αντικειμενικός στόχος του μη γραμμικού βέλτιστου ελέγχου που είναι η ελαχιστοποίηση και εξισορρόπηση των ουρών. Η διαπίστωση αυτή προέρχεται από το γεγονός ότι όλες οι ουρές (εκτός από την ουρά x_5 που αντιστοιχεί στο σύνδεσμο 5) μηδενίζονται συγχρόνως για $k_c = 2$.
- Ευνοείται η διάλυση των ουρών στους συνδέσμους 1 (ποσοστό φόρτου 94%), 2 (75%) και 5 (42.5%). Η διαχείριση αυτή των ουρών από τη βελτιστοποίηση, με μια πρώτη ματιά, δείχνει να μην είναι και τόσο λογική αφού κάλλιστα θα μπορούσε να ευνοήσει την μείωση των ουρών στους συνδέσμους 3 (90%) και 4 (75%). Η βέλτιστη αυτή πολιτική μπορεί να ερμηνευθεί αφού ο σύνδεσμος 1 έχει υψηλό φόρτο 94% ενώ οι σύνδεσμοι 2 και 5 (η ουρά του διαλύεται για $k_c = 0$) δέχονται ταυτοχρόνως προτεραιότητα στην φάση 3 (βλέπε Πίνακα 4.2) με αποτέλεσμα η βελτιστοποίηση να αυξάνει τις φάσεις 1 και 3 (βλέπε Πίνακα 5.1(α) χρονική στιγμή $k_c = 0$) και όχι τις φάσεις 1, 2 και 4 (ή οποία για $k_c = 0$ παραβιάζει την ελάχιστη διάρκειά της). Στην περίπτωση που η βελτιστοποίηση έδινε περισσότερο χρόνο στις φάσεις 1, 2 και 4 τότε: (α) θα έπρεπε να καταναίμει το μεγαλύτερο ποσοστό του χρόνου πρασίνου σε τρεις φάσεις αντί σε δύο (η ουρά στο σύνδεσμο 1 θα διαλυόταν με αργότερο ρυθμό) με αποτέλεσμα να είναι μεγαλύτερη η επιθάρυνση της συνάρτησης κόστους από ενδεχόμενη ενεργοποίηση των όρων τιμωρίας, (β) η ουρά του συνδέσμου 5 δεν θα διαλυόταν τη χρονική στιγμή $k_c = 0$ με αποτέλεσμα να συνεισφέρει στο κριτήριο κόστους και την χρονική στιγμή $k_c = 1$.
- Από την παραπάνω ανάλυση είναι φανερό ότι η βελτιστοποίηση λαμβάνει υπόψη τις την συνεισφορά των ουρών στην αύξηση η μείωση του κριτηρίου κόστους, δηλαδή θεωρεί ότι η συνεισφορά στην αύξηση του κριτηρίου κόστους των ουρών στους συνδέσμους 2 και 5 είναι μεγαλύτερη από αυτή

Σύνδεσμος	Αριθμός οχημάτων	Μεταβλητή ελέγχου	Διάρκεια πρασίνου
z	$x_z(0) (veh)$	i	$u_i^{(0)}(\kappa) (sec)$
1	30	1	54
2	50	2	28
3	45	3	22
4	15	4	27
5	20		
6	20		
7	15		
8	25		

Πίνακας 5.2: Η αρχική κατάσταση \mathbf{x}_0 και η αρχική επιτρεπτή τροχιά ελέγχου $\mathbf{u}^{(0)}(\kappa)$, $\kappa = 0, \dots, 4$ για το δίκτυο εφαρμογής 2.

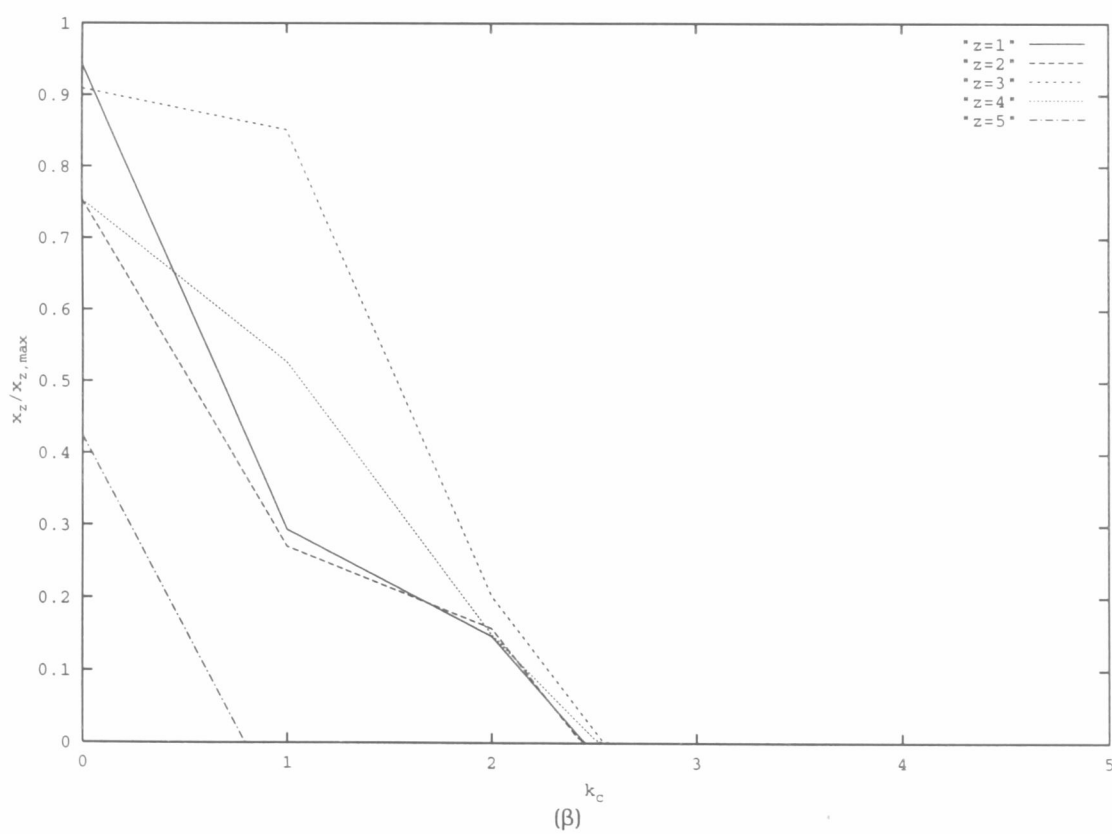
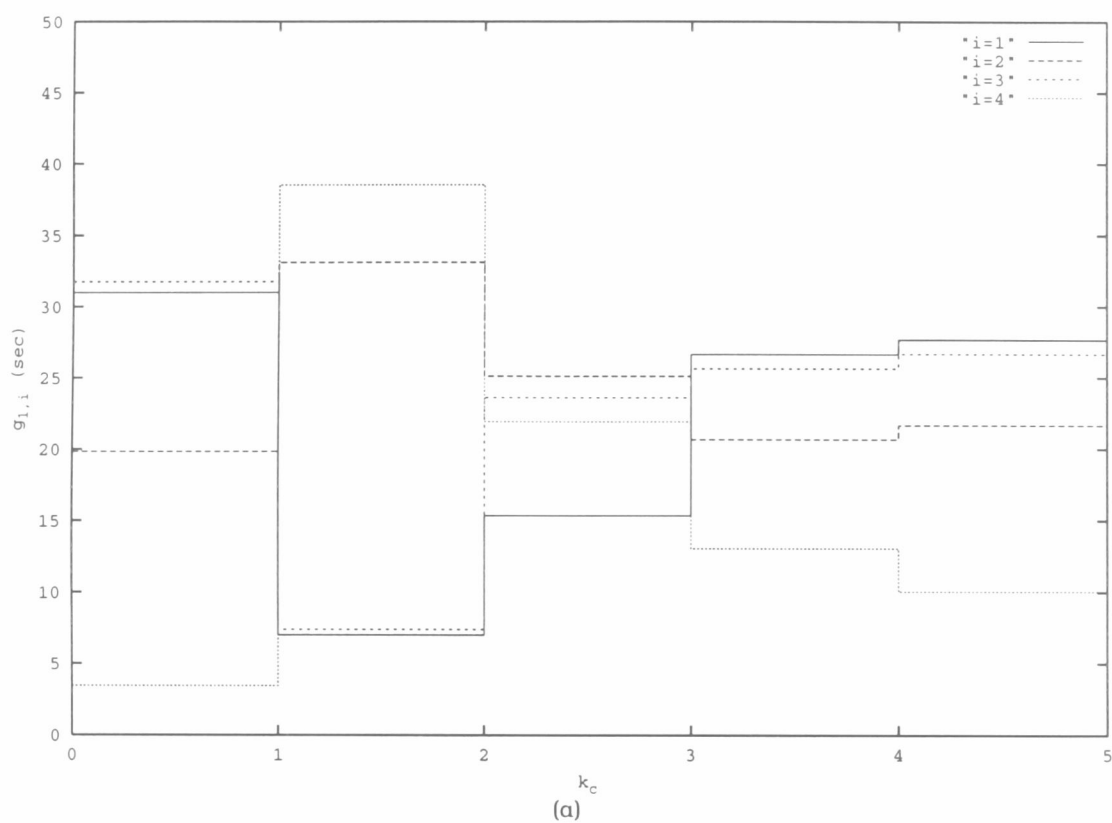
των 3 και 4. Επομένως προσπαθεί να μειώσει ταχύτερα τις ουρές στους συνδέσμους 2 και 5 και όχι στους 3 και 4 (που επιπλέον έχουν και μικρότερη ροή κορεσμού).

5.2 Εφαρμογή στο Δίκτυο 2

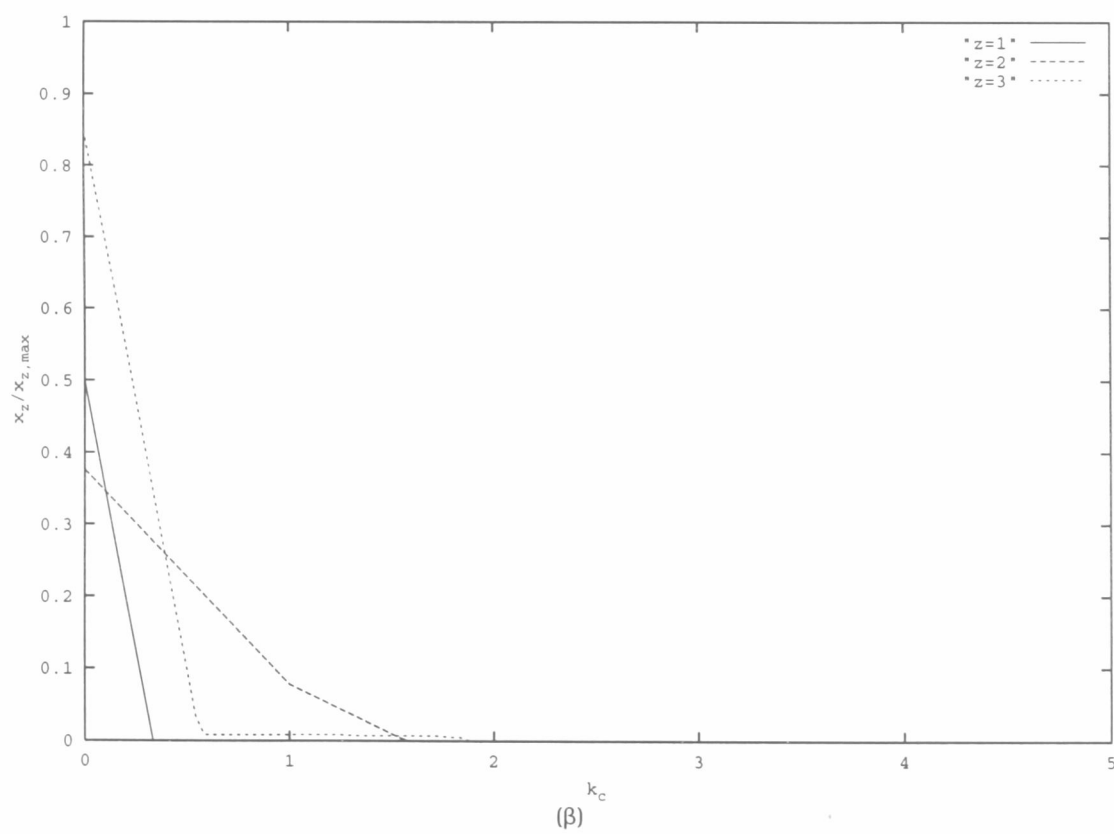
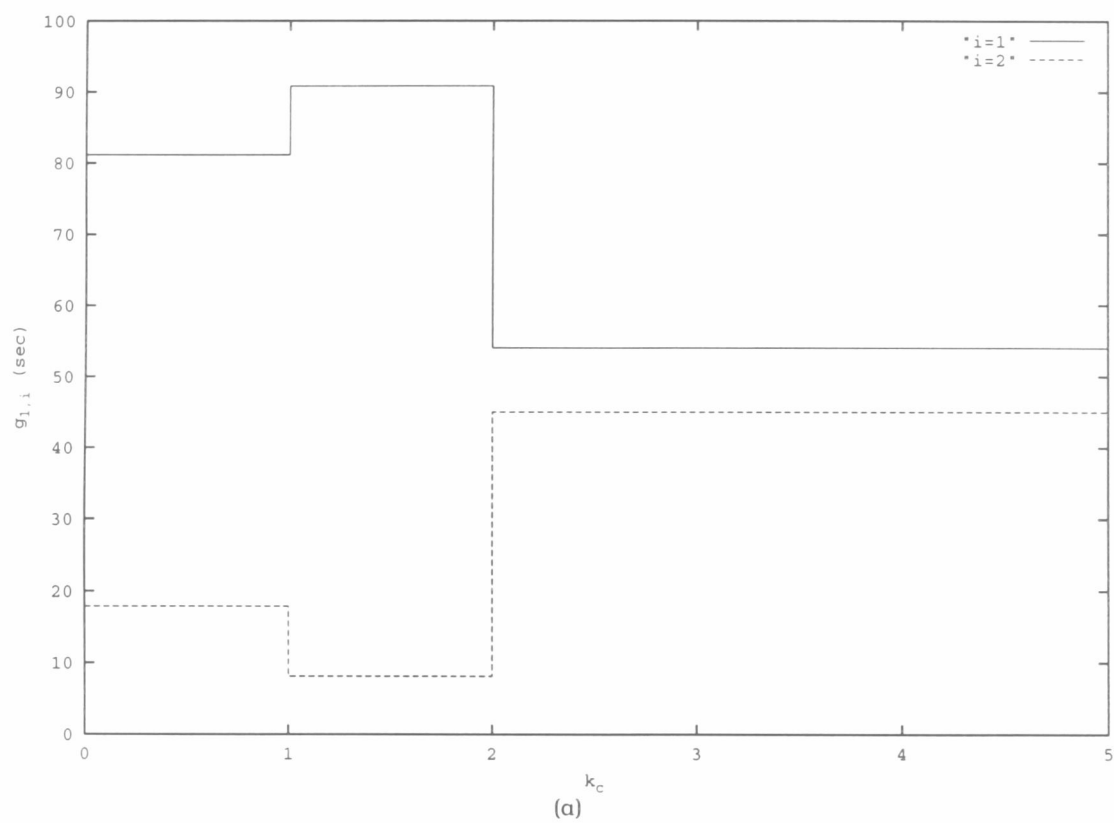
Το Δίκτυο 2 είναι ένα δίκτυο που αποτελείται από δύο κόμβους και 8 συνδέσμους (Σχήμα 4.1). Ο κόμβος 1 έχει δύο φάσεις σηματοδότησης ενώ ο κόμβος 2 τέσσερις φάσεις. Σύμφωνα με την μεθοδολογία που αναπτύχθηκε στην §2.3 θεωρούμε $|F_j| - 1$ ανεξάρτητες μεταβλητές σε κάθε κόμβο, δηλαδή μία μεταβλητή ελέγχου για τον κόμβο 1 (φάση 1) και τρεις μεταβλητές ελέγχου για τον κόμβο 2 (φάσεις 1, 2 και 3).

Τα δεδομένα που χρησιμοποιούνται για για την εφαρμογή του αλγορίθμου εφικτής κατεύθυνσης έχουν τις ακόλουθες τιμές: $T = 5 sec$, $T_c = 120 sec$, $K = 120$, $K_c = 4$, $c = 0.9$. Το διάνυσμα ελέγχου θα είναι $\mathbf{u}(\kappa) = [u_1(\kappa) \ u_2(\kappa) \ u_3(\kappa) \ u_4(\kappa)]^T = [g_{1,1}(\kappa) \ g_{2,1}(\kappa) \ g_{2,2}(\kappa) \ g_{2,3}(\kappa)]^T$, $\kappa = 0, \dots, 4$, ενώ το διάνυσμα κατάστασης είναι $\mathbf{x}(k) = [x_1(k) \ \dots \ x_8(k)]^T$, $k = 0, \dots, 119$. Η αρχική κατάσταση \mathbf{x}_0 και η αρχική επιτρεπτή τροχιά ελέγχου $\mathbf{u}^{(0)}(\kappa)$, $\kappa = 0, \dots, 4$ παρουσιάζονται στον Πίνακα 5.2 ενώ η ζήτηση $\mathbf{d}(k)$ θεωρείται ίση με μηδέν. Οι παράμετροι βάρους στην συνάρτηση κόστους (2.3.3) έχουν τιμές $a_f = 0.0005$, $a_{w_e} = a_{w_u} = 0.5$. Οι παράμετροι αυτοί επιλέχθηκαν από μια διαδικασία δοκιμής-και-σφάλματος έτσι ώστε αρχικά να ικανοποιούνται οι περιορισμοί (2.3.5) και εν συνεχεία την αποφυγή έντονων διακυμάνσεων των μεταβλητών ελέγχου.

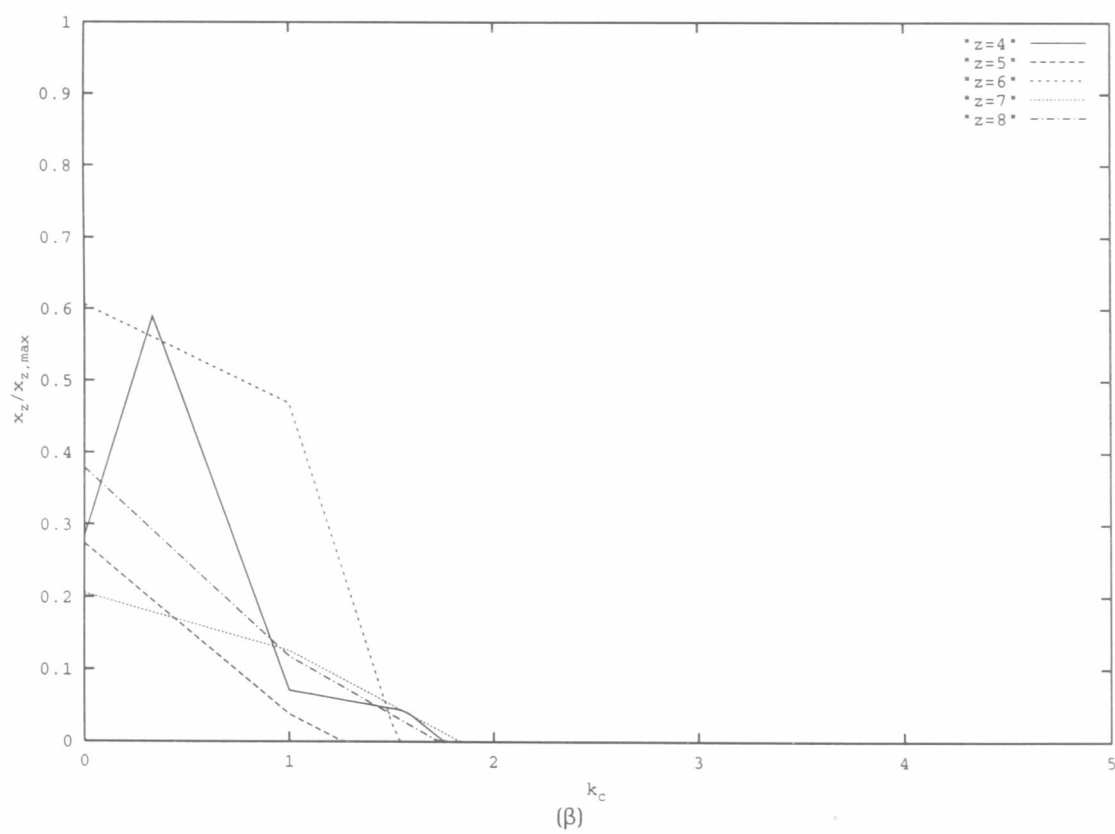
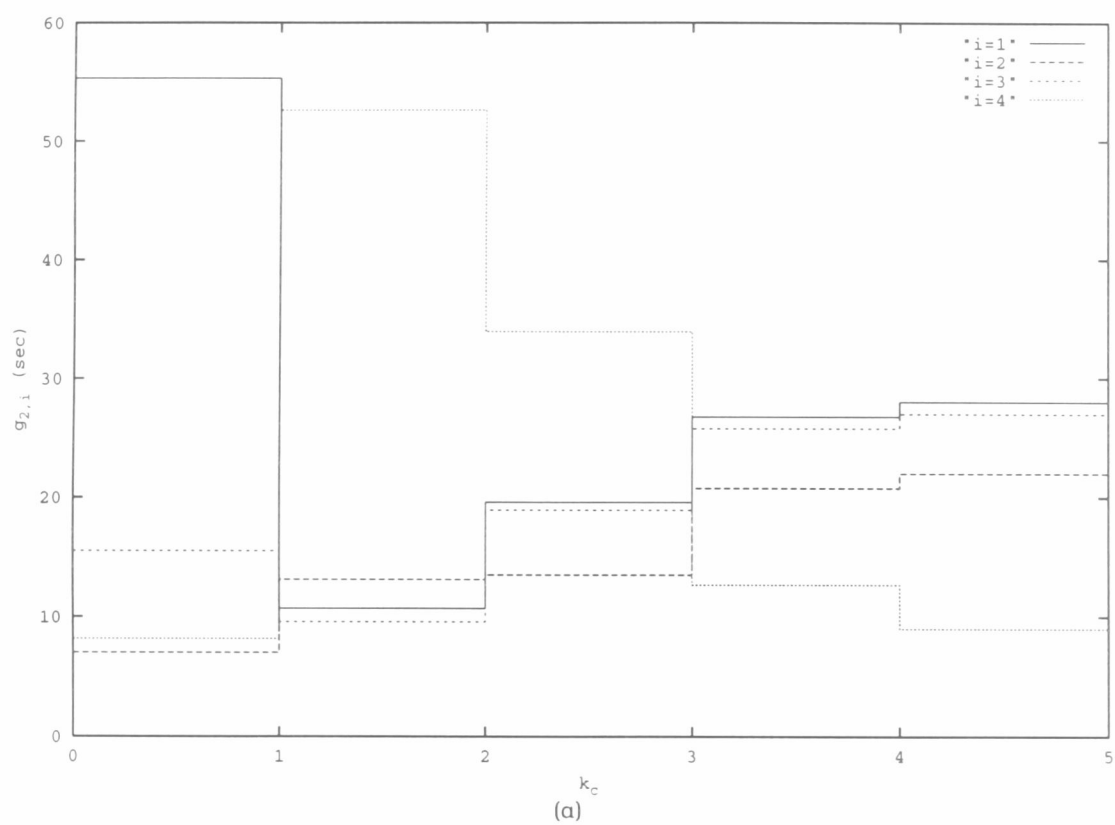
Τα Σχήματα 5.2(α) και 5.2(β) απεικονίζουν την βέλτιστη τροχιά ελέγχου και την εξέλιξη των ουρών στους συνδέσμους του κόμβου 1 του Δικτύου 2, αντιστοίχως. Ομοίως τα Σχήματα 5.3(α) και 5.3(β) απεικονίζουν την βέλτιστη τροχιά ελέγχου και την εξέλιξη των ουρών στους συνδέσμους του κόμβου 2, αντιστοίχως. Από την εξέταση των σχημάτων αυτών μπορούμε συνοψίζοντας να κάνουμε τις ακόλουθες παρατηρήσεις:



Σχήμα 5.1: Δίκτυο 1: (α) η βέλτιστη τροχιά ελέγχου $u(\kappa)$, $\kappa = 0, \dots, 4$, (β) η εξέλιξη των ουρών ($x_z/x_{z,max}$) στους συνδέσμους.



Σχήμα 5.2: Δίκτυο 2, κόμβος 1: (α) η βέλτιστη τροχιά ελέγχου $u(k)$, $k = 0, \dots, 4$, (β) η εξέλιξη των ουρών ($x_z/x_{z,max}$) στους συνδέσμους.



Σχήμα 5.3: Δίκτυο 2, κόμβος 2: (α) η βέλτιστη τροχιά ελέγχου $u(\kappa)$, $\kappa = 0, \dots, 4$, (β) η εξέλιξη των ουρών $(x_z/x_{z,\max})$ στους συνδέσμους.

- Η βελτιστοποίηση και εδώ διαχειρίζεται τις ουρές των συνδέσμων με τέτοιο τρόπο (ομοιογενώς) ώστε να επιτυγχάνεται ο αντικειμενικός στόχος του μη γραμμικού βέλτιστου ελέγχου που είναι η ελαχιστοποίηση και εξισορρόπηση των ουρών. Σημειώνεται ότι οι περισσότερες ουρές διαλύονται συγχρόνως για $k_c = 1$.
- Στον κόμβο 1 ευνοείται η διάλυση των ουρών στους συνδέσμους 1 (ποσοστό φόρτου 50%) και 3 (85%). Η ουρά του συνδέσμου 2 μειώνεται με χαμηλότερο ρυθμό. Από το Σχήμα 5.2(β) είναι φανερό ότι η βελτιστοποίηση τη χρονική στιγμή $k_c = 0$ έχει μηδενίσει τις ουρές στους συνδέσμους 1 και 3 με αποτέλεσμα ο χρόνος πρασίνου στην φάση 1 (82 sec) να φαίνεται χαμένος.
- Στον κόμβο 2 ο σύνδεσμος 4 δέχεται τον φόρτο από τους συνδέσμους 1 και 2 με αποτέλεσμα να αυξάνει η ουρά του (από 28% σε 60%) παρ' όλο το γεγονός ότι η φάση στην οποία δέχεται προτεραιότητα αυξήθηκε στα 55 sec.
- Το ερώτημα που τίθεται είναι γιατί η διαχείριση αυτή των ουρών είναι βέλτιστη, αφού στον κόμβο 1 έχουμε απώλεια χρόνου πρασίνου που θα μπορούσε να κατανεμηθεί για την μείωση της ουράς στον σύνδεσμο 2. Η απάντηση στο ερώτημα αυτό βρίσκεται στην διαχείριση από την βελτιστοποίηση της ουράς στον σύνδεσμο 4. Η ουρά στον σύνδεσμο 4 αυξάνεται την χρονική στιγμή $k_c = 0$ με αποτέλεσμα ενδεχόμενη εύνοια στην διάλυση της ουράς στον σύνδεσμο 2 θα είχε ως αποτέλεσμα: (α) αύξηση της συνάρτησης κόστους αφού οι ουρές στους συνδέσμους 1 και 3 θα μειωνόταν με μικρότερο ρυθμό, (β) ενδεχόμενη ενεργοποίηση των περιορισμών χωρητικότητας με αποτέλεσμα το μπλοκάρισμα των συνδέσμων 1 και 2.

5.3 Εφαρμογή στο Δίκτυο 3

Το Δίκτυο 3 είναι ένα δίκτυο που αποτελείται από τρεις κόμβους και 11 συνδέσμους (Σχήμα 4.2). Ο κόμβος 1 έχει δύο φάσεις σηματοδότησης, ο κόμβος 2 τέσσερις φάσεις, ενώ ο κόμβος 3 έχει τρεις φάσεις. Όπως και στα δύο προηγούμενα δίκτυα εφαρμογής, θεωρούμε $|F_j| - 1$ ανεξάρτητες μεταβλητές σε κάθε κόμβο, δηλαδή μία μεταβλητή ελέγχου για τον κόμβο 1 (φάση 1), τρεις μεταβλητές ελέγχου για τον κόμβο 2 (φάσεις 1, 2 και 3) και δύο μεταβλητές ελέγχου για τον κόμβο 3 (φάσεις 1 και 2).

Στο Δίκτυο 3 θα εξετάσουμε την αποτελεσματικότητα του βέλτιστου ελέγχου στην περίπτωση που η ζήτηση $d(k)$ είναι διάφορη του μηδενός. Επιπλέον, διερευνάται η επίδραση της περιόδου ελέγχου¹ στην αποτελεσματικότητα του βέλτιστου ελέγχου. Για το σκοπό αυτό, δημιουργήθηκαν τρία διαφορετικά σενάρια ζήτησης στους συνδέσμους προέλευσης του δικτύου, με τα ακόλουθα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά:

¹ Η περίοδος ελέγχου T_c όπως είδαμε στην §2.2.2 μπορεί πλέον να είναι ανεξάρτητη από τη διάρκεια της μεγαλύτερης χρονικά περιόδου σηματοδότησης στο ελεγχόμενο δίκτυο.

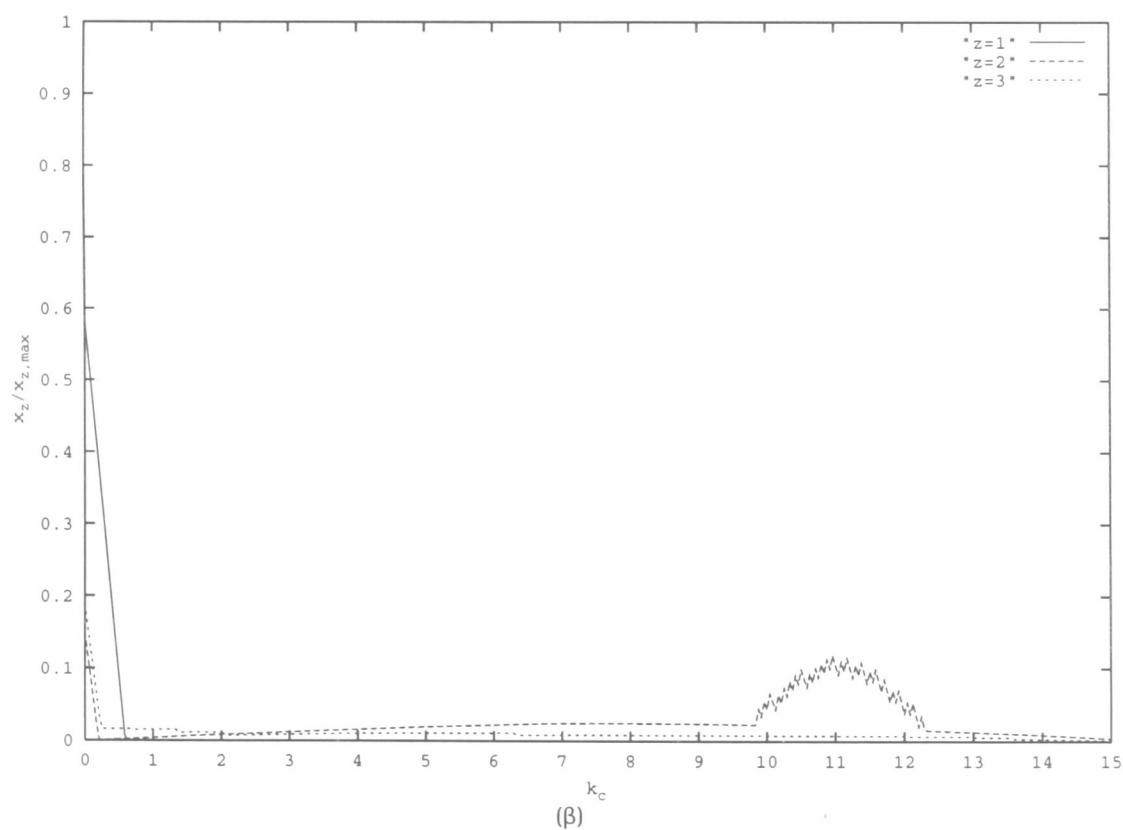
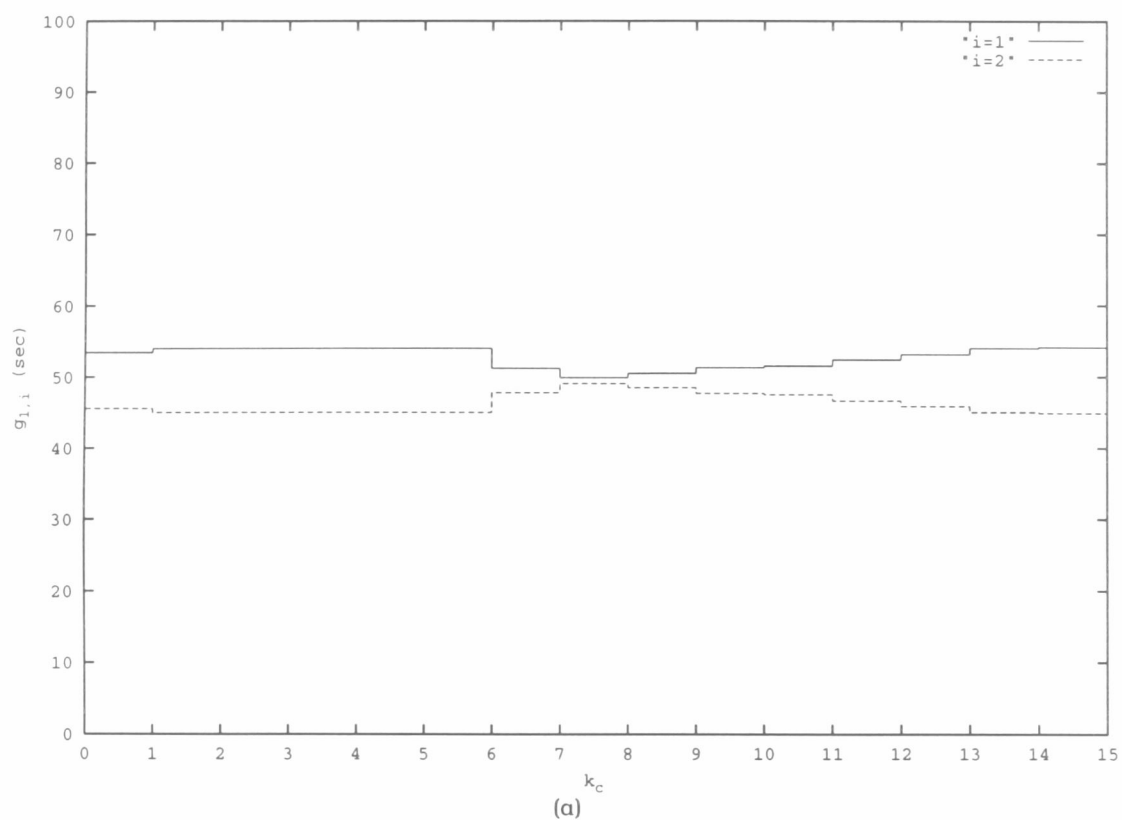
1. Υψηλή ζήτηση αναπτύσσεται στους συνδέσμους προέλευσης 2 και 5. Η ζήτηση στους υπόλοιπους συνδέσμους του δικτύου είναι ίση με μηδέν.
2. Υψηλή ζήτηση αναπτύσσεται στους συνδέσμους προέλευσης 5, 10 και 11. Η ζήτηση στους υπόλοιπους συνδέσμους του δικτύου είναι ίση με μηδέν.
3. Γίνεται συνδυασμός των σεναρίων 1 και 2 δημιουργώντας μέτρια ζήτηση στους συνδέσμους προέλευσης 2, 5, 10 και 11. Η ζήτηση στους υπόλοιπους συνδέσμους του δικτύου είναι ίση με μηδέν.

Η εξέλιξη της ζήτησης στον ορίζοντα βελτιστοποίησης K έχει την μορφή της κανονικής κατανομής. Από τις επικρατούσες συνθήκες στο υπό εξέταση δίκτυο από την εφαρμογή των τριών σεναρίων μπορούν να εξαχθούν τα ακόλουθα συμπεράσματα:

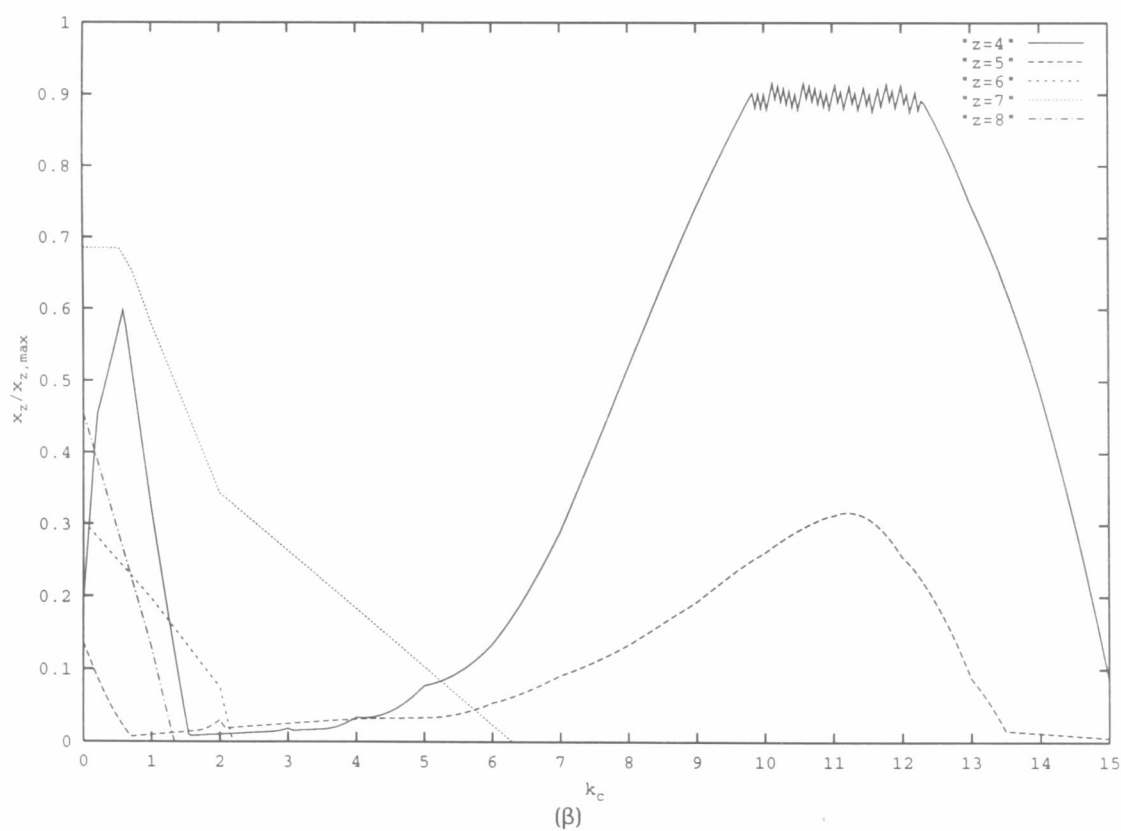
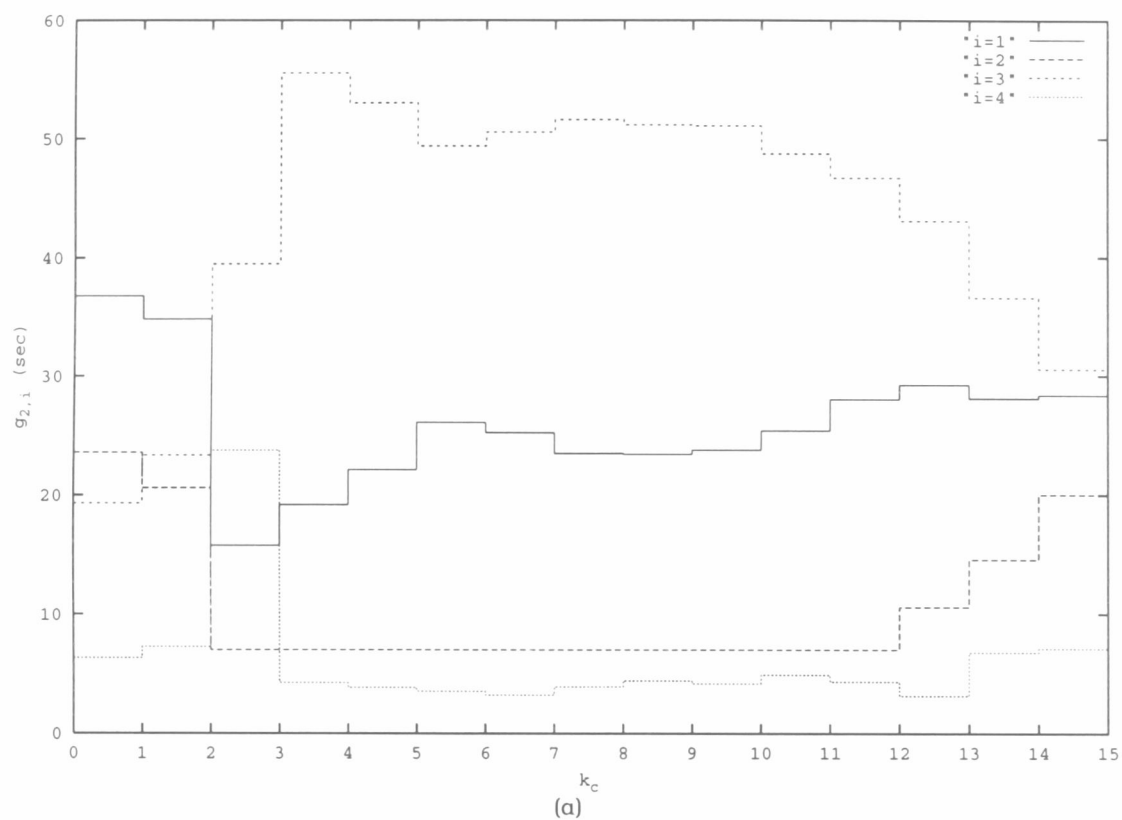
- Στο σενάριο ζήτησης 1, αναπτύσσεται συμφόρηση στους συνδέσμους 2 και 5. Αποτέλεσμα, η διάχυση της συμφόρησης από τον σύνδεσμο 2 προς τα εμπρός μέσω των συνδέσμων 4 και 9, ενώ η διάχυση της συμφόρησης στον σύνδεσμο 5 γίνεται στους συνδέσμους 3 και 9.
- Στο σενάριο ζήτησης 2, αναπτύσσεται συμφόρηση στους συνδέσμους 5, 10 και 11. Αποτέλεσμα, η διάχυση της συμφόρησης από τους συνδέσμους 10 και 11 προς τα εμπρός μέσω των συνδέσμων 7 και 3, ενώ η διάχυση της συμφόρησης στον σύνδεσμο 5 γίνεται στους συνδέσμους 3 και 9.
- Στο σενάριο ζήτησης 3, οι κυκλοφοριακές συνθήκες έχουν συνδυασμό χαρακτηριστικών από τα προηγούμενα δύο σενάρια.

Τα δεδομένα που χρησιμοποιούνται σε όλα τα σενάρια ζήτησης για την εφαρμογή του αλγορίθμου εφικτής κατεύθυνσης έχουν τις ακόλουθες τιμές: $T = 5 \text{ sec}$, $T_c = 120 \text{ sec}$, $K = 360$, $K_c = 14$, $c = 0.9$. Το διάνυσμα ελέγχου θα είναι $\mathbf{u}(\kappa) = [u_1(\kappa) \ u_2(\kappa) \ u_3(\kappa) \ u_4(\kappa) \ u_5(\kappa) \ u_6(\kappa)]^T = [g_{1,1}(\kappa) \ g_{2,1}(\kappa) \ g_{2,2}(\kappa) \ g_{2,3}(\kappa) \ g_{3,1}(\kappa) \ g_{3,2}(\kappa)]^T$, $\kappa = 0, \dots, 14$, ενώ το διάνυσμα κατάστασης είναι $\mathbf{x}(k) = [x_1(k) \ \dots \ x_{11}(k)]^T$, $k = 0, \dots, 359$. Η αρχική κατάσταση \mathbf{x}_0 και η αρχική επιτρεπτή τροχιά ελέγχου $\mathbf{u}^{(0)}(\kappa)$, $\kappa = 0, \dots, 14$ παρουσιάζονται στον Πίνακα 5.3. Οι παράμετροι βάρους στην συνάρτηση κόστους (2.3.3) έχουν τιμές $a_f = 0.0001$, $a_{w_t} = a_{w_u} = 1$. Οι παράμετροι αυτοί επιλέχθηκαν από μια διαδικασία δοκιμής-και-σφάλματος έτσι ώστε αρχικά να ικανοποιούνται οι περιορισμοί (2.3.5) και εν συνεχεία την αποφυγή έντονων διακυμάνσεων των μεταβλητών ελέγχου.

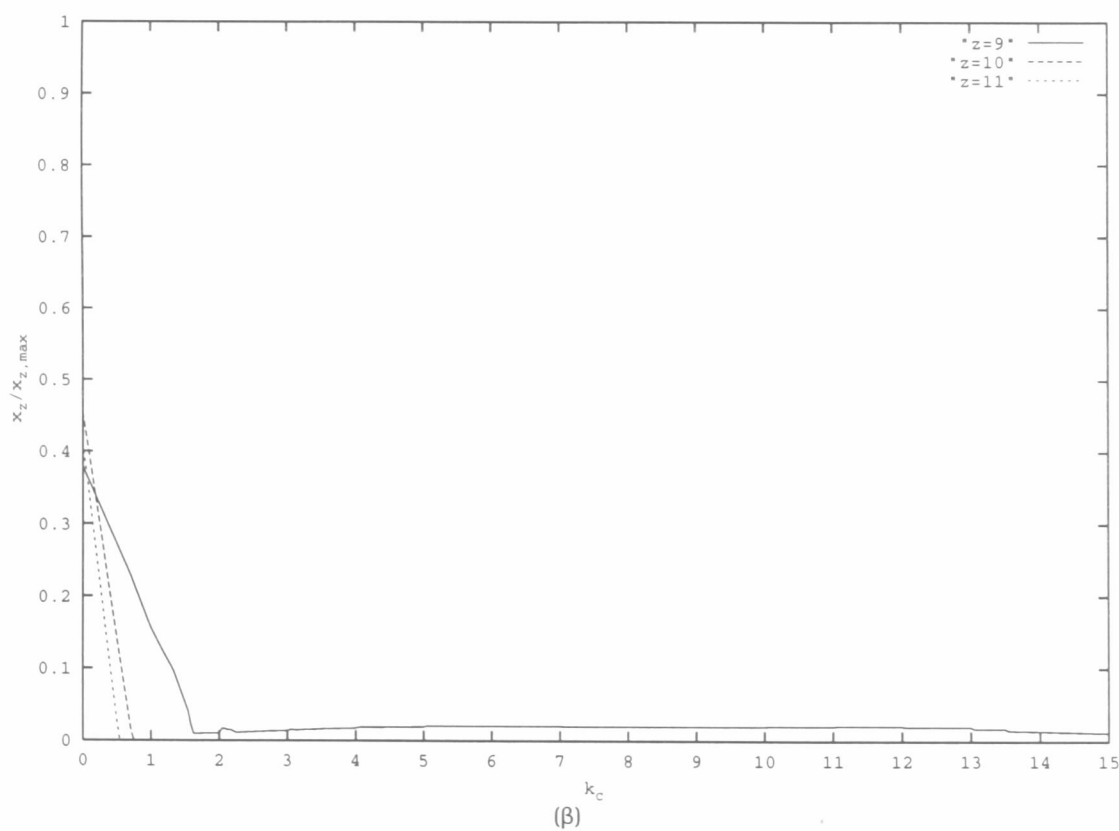
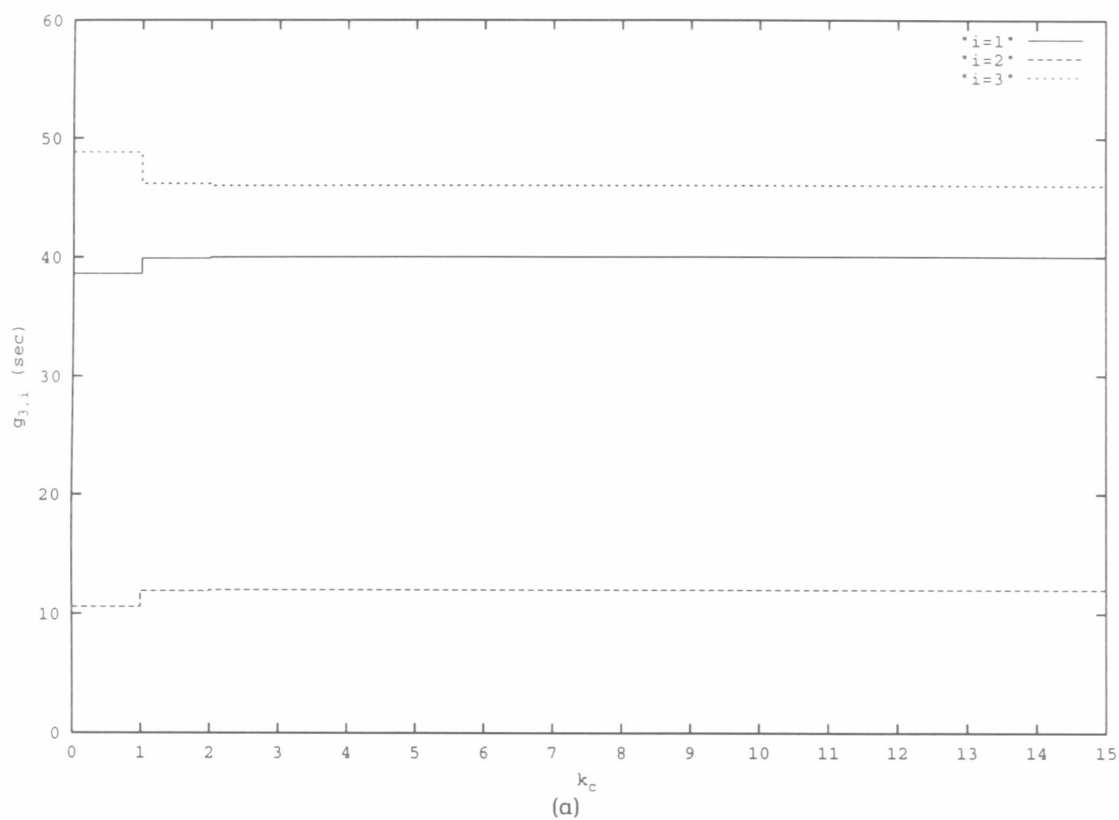
Τα Σχήματα 5.4(α) και 5.4(β), 5.5(α) και 5.5(β), 5.6(α) και 5.6(β), απεικονίζουν την βέλτιστη τροχιά ελέγχου και την εξέλιξη των ουρών στους συνδέσμους των κόμβων 1, 2 και 3 του Δικτύου 3 για το σενάριο ζήτησης 1, αντιστοίχως. Ομοίως τα Σχήματα 5.7(α) και 5.7(β), 5.8(α) και 5.8(β), 5.9(α) και 5.9(β), απεικονίζουν την βέλτιστη τροχιά ελέγχου και την εξέλιξη των ουρών στους συνδέσμους των κόμβων 1, 2 και 3 του Δικτύου 3 για το σενάριο ζήτησης 2, αντιστοίχως. Τέλος, τα Σχήματα 5.10(α) και 5.10(β), 5.11(α) και



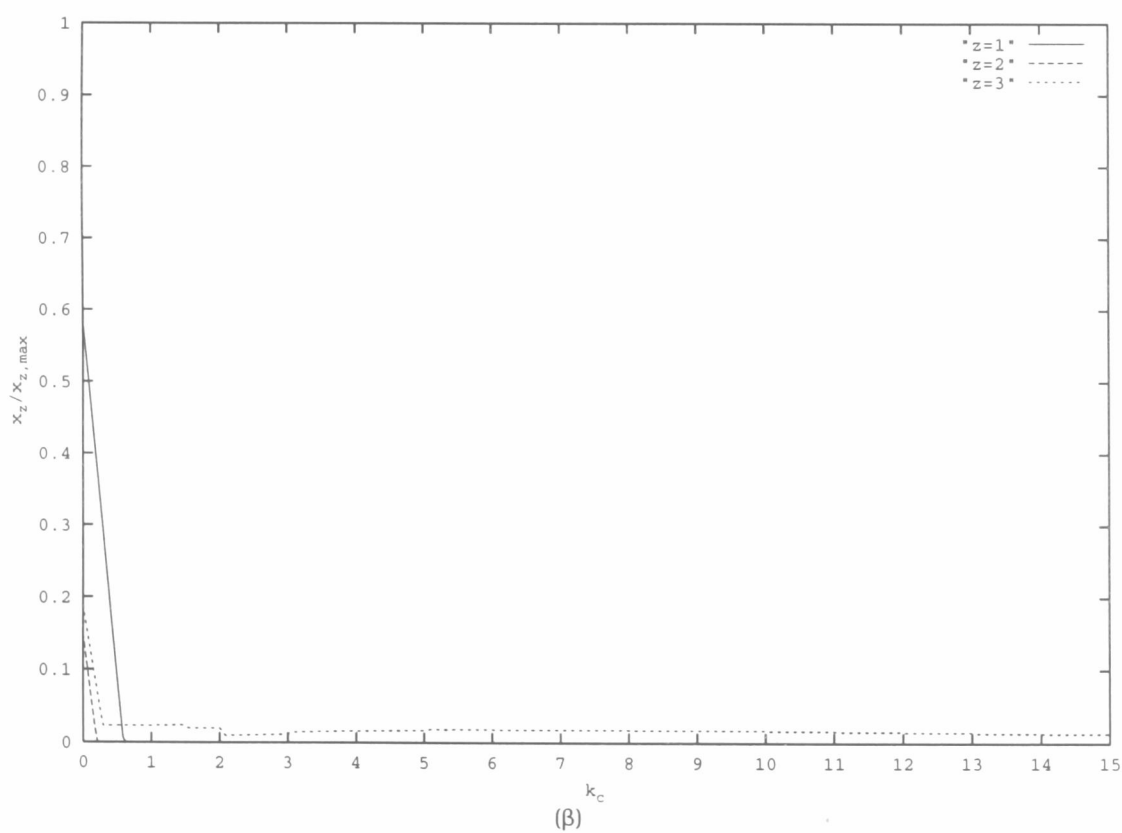
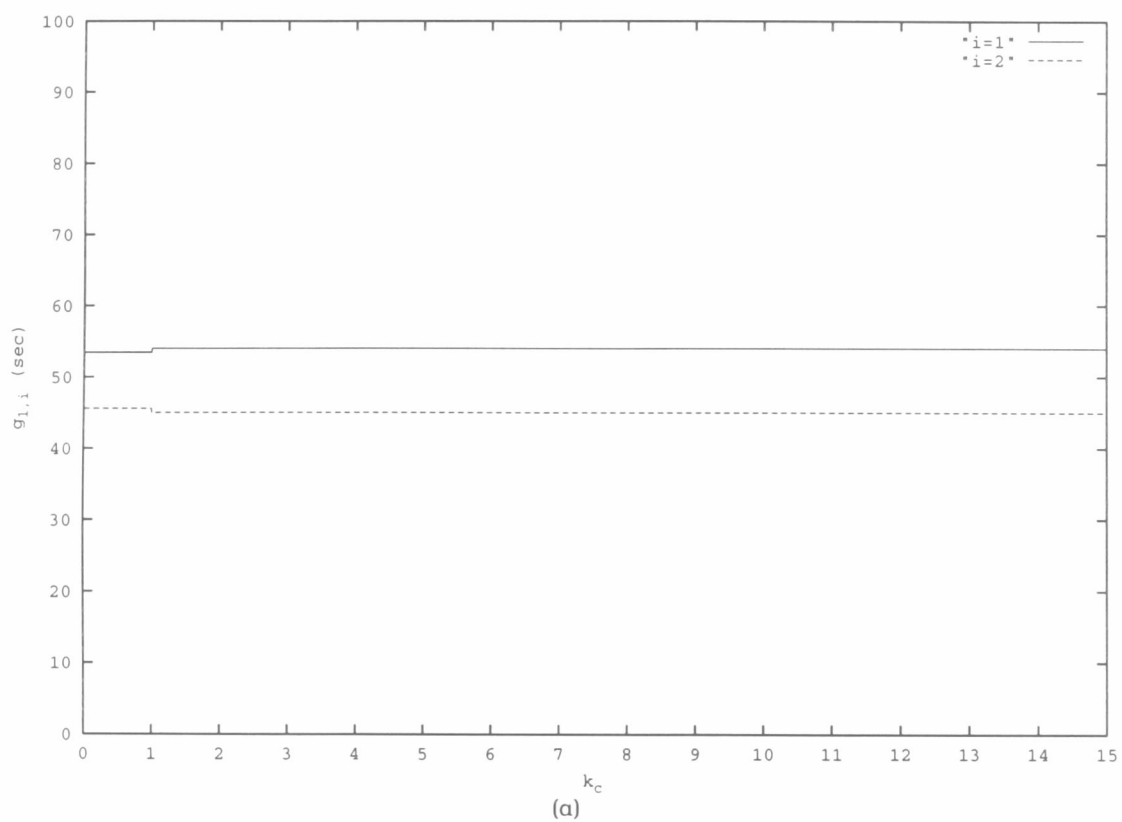
Σχήμα 5.4: Δίκτυο 3, κόμβος 1, σενάριο 1: (α) η βέλτιστη τροχιά ελέγχου $u(k)$, $k = 0, \dots, 14$, (β) η εξέλιξη των συρών $(x_z/x_{z,max})$ στους συνδέσμους.



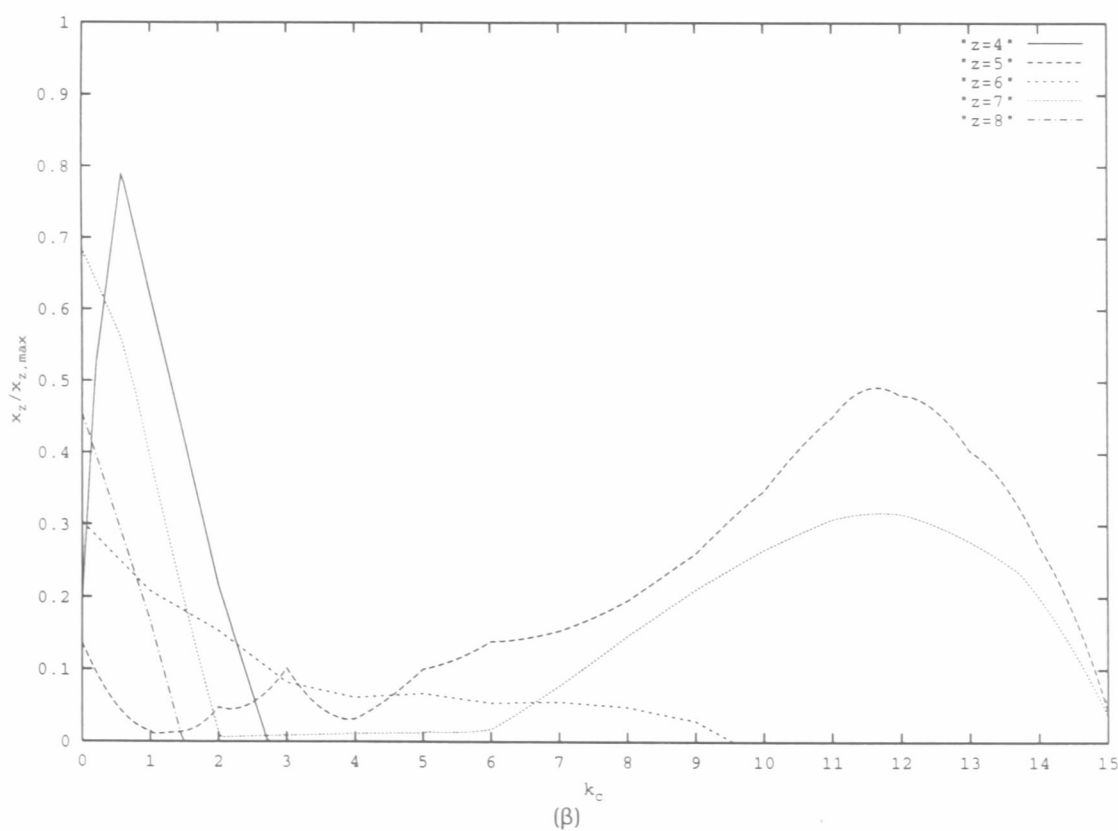
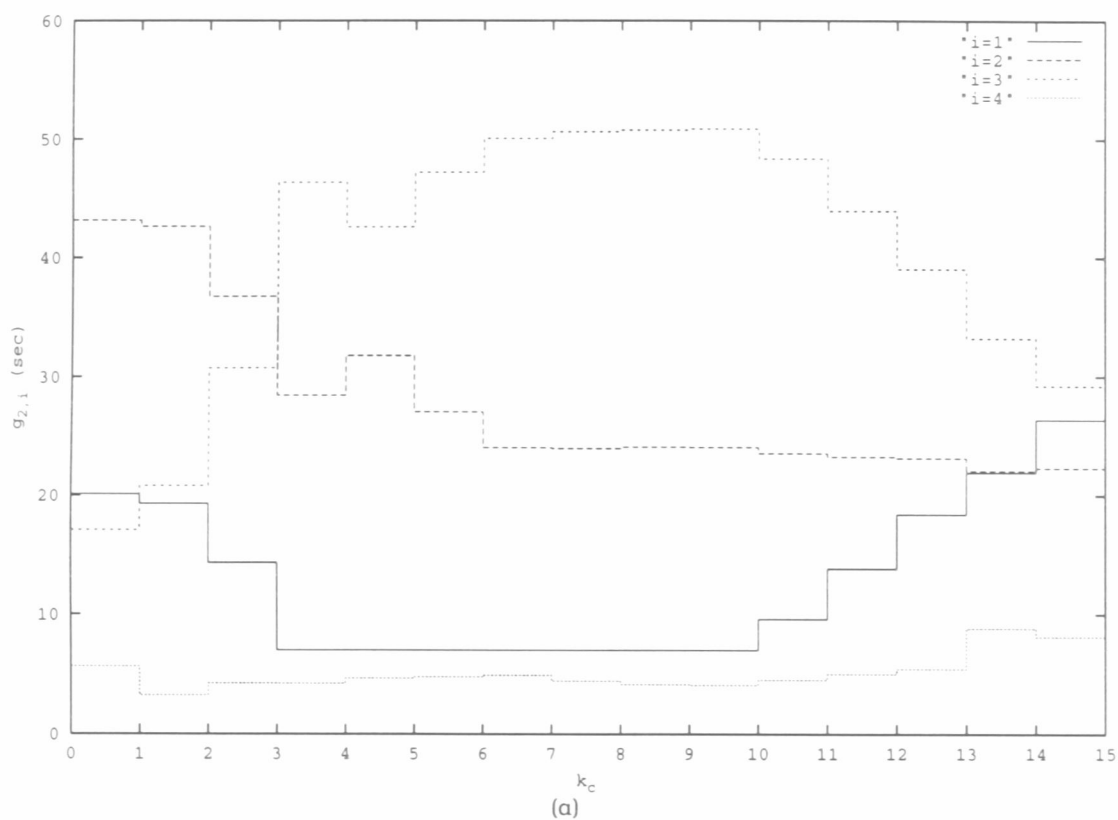
Σχήμα 5.5: Δίκτυο 3, κόμβος 2, σενάριο 1: (α) η βέλτιστη τροχιά ελέγχου $u(\kappa)$, $\kappa = 0, \dots, 14$, (β) η εξέλιξη των ουρών $(x_z/x_{z,max})$ στους συνδέσμους.



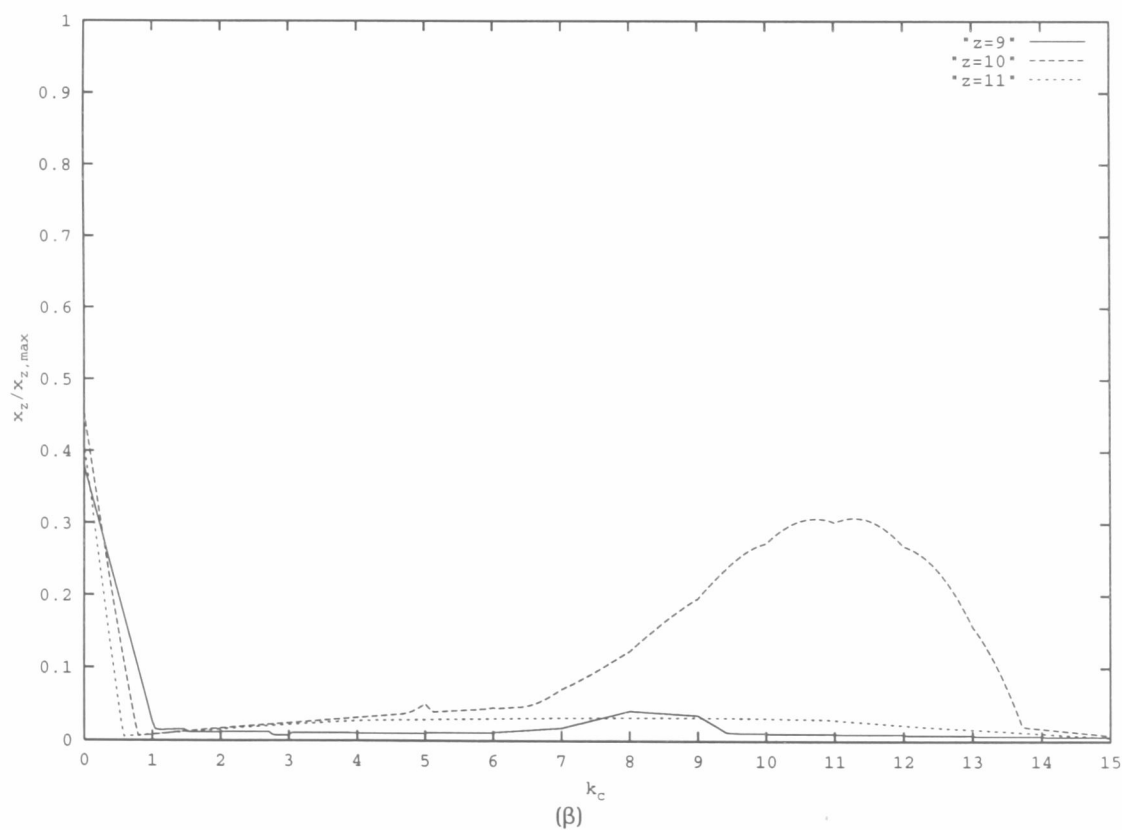
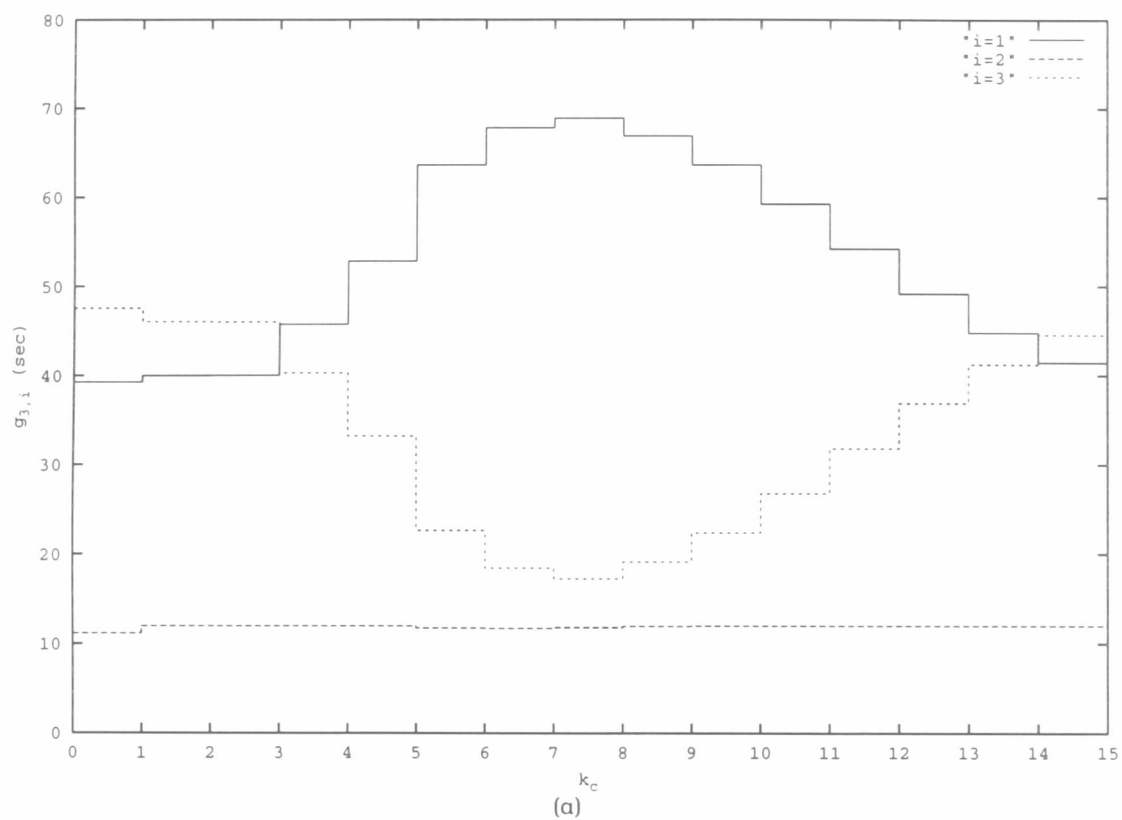
Σχήμα 5.6: Δίκτυο 3, κόμβος 3, σενάριο 1: (α) η βέλτιστη τροχιά ελέγχου $u(\kappa)$, $\kappa = 0, \dots, 14$, (β) η εξέλιξη των ουρών ($x_z / x_{z,max}$) στους συνδέσμους.



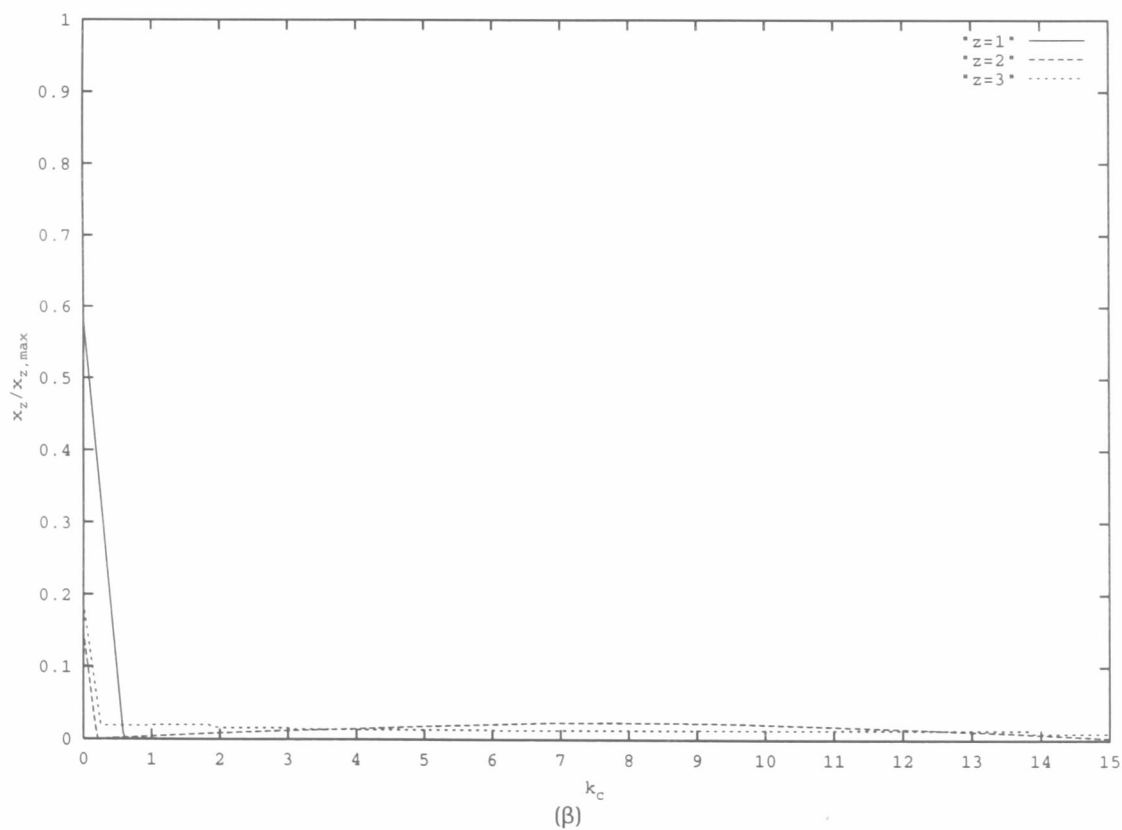
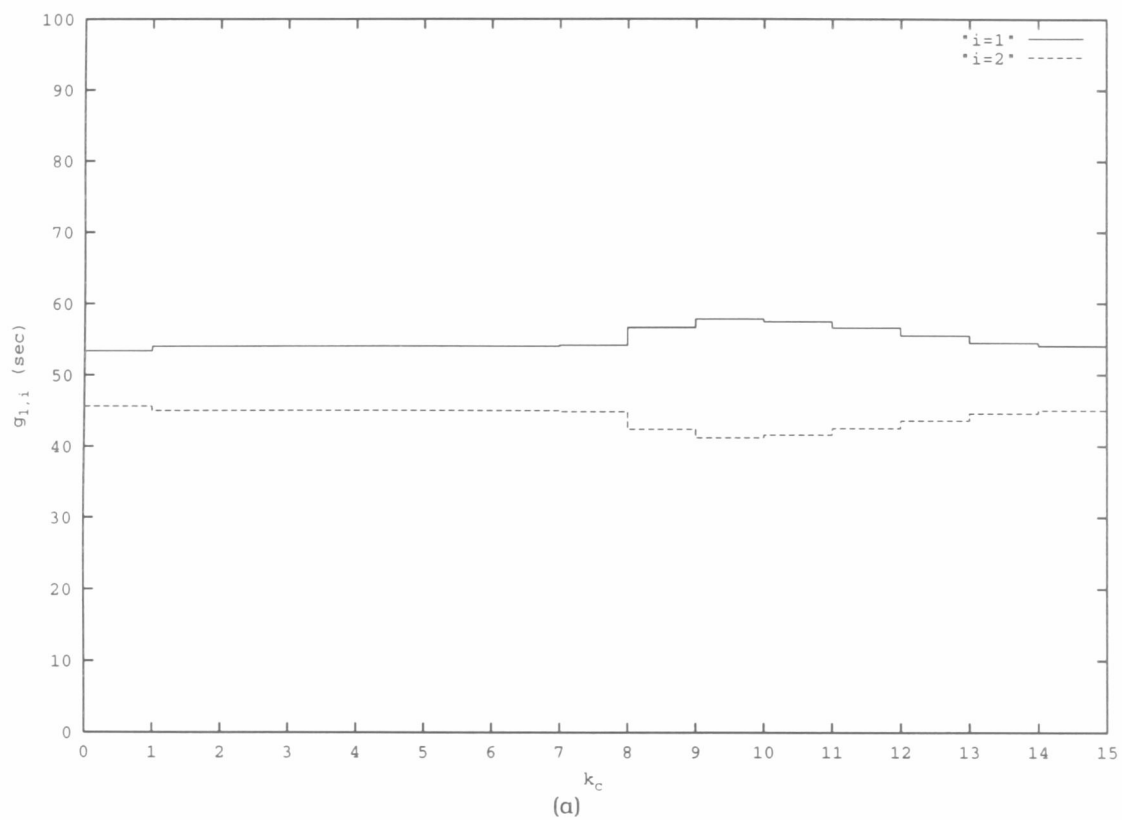
Σχήμα 5.7: Δίκτυο 3, κόμβος 1, σενάριο 2: (α) η βέλτιστη τροχιά ελέγχου $u(k)$, $k = 0, \dots, 14$, (β) η εξέλιξη των ουρών ($x_z/x_{z,max}$) στους συνδέσμους.



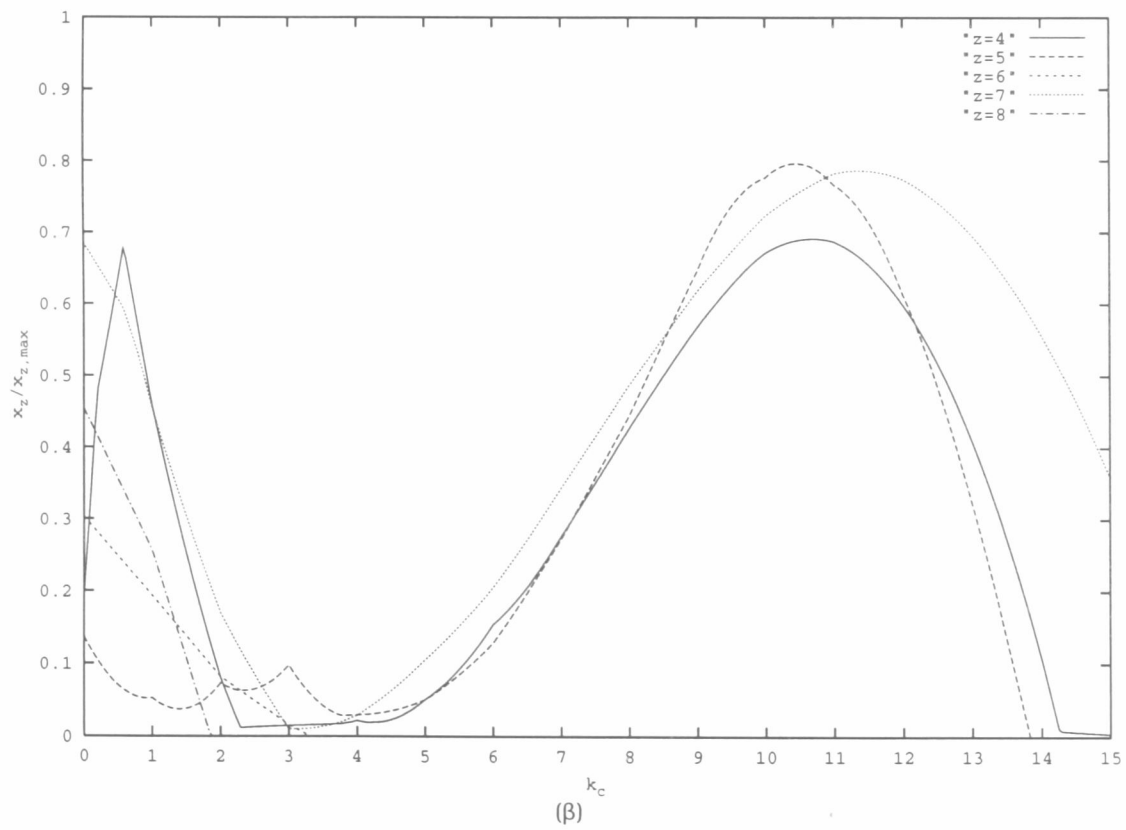
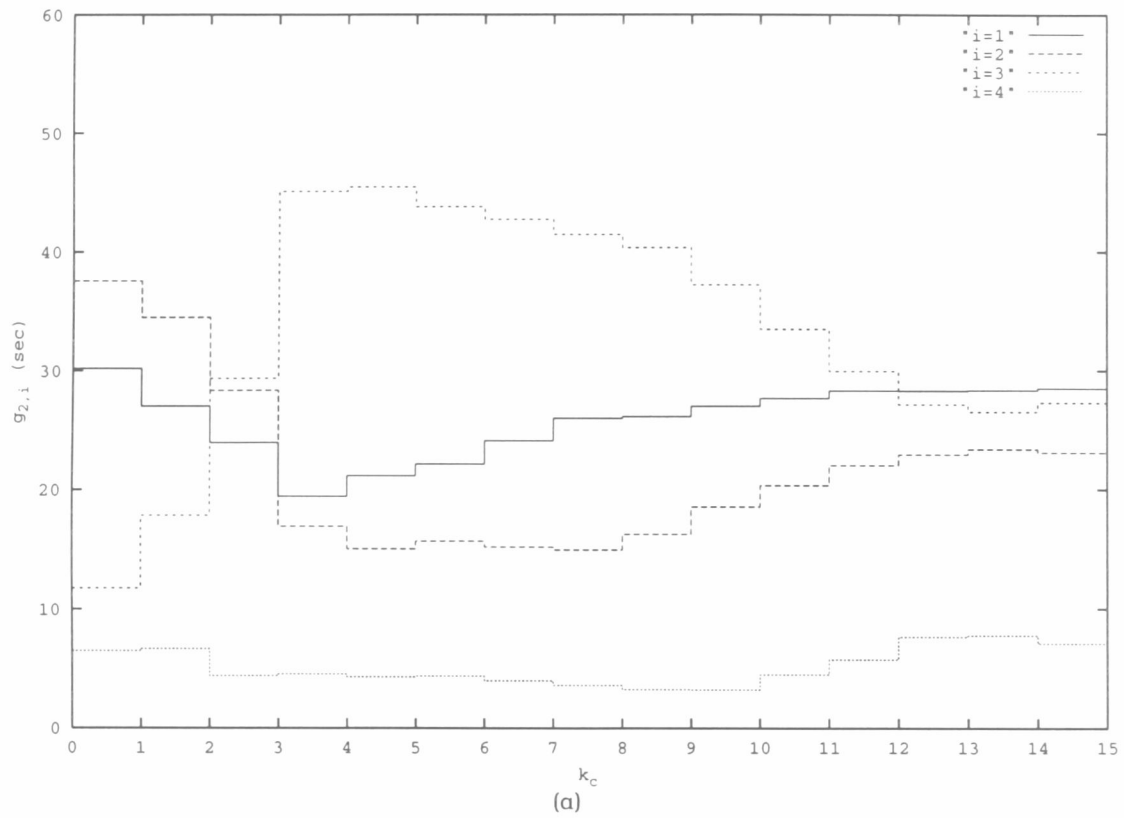
Σχήμα 5.8: Δίκτυο 3, κόμβος 2, σενάριο 2: (α) η βέλτιστη τροχιά ελέγχου $u(\kappa)$, $\kappa = 0, \dots, 14$, (β) η εξέλιξη των ουρών ($x_z/x_{z,\max}$) στους συνδέσμους.



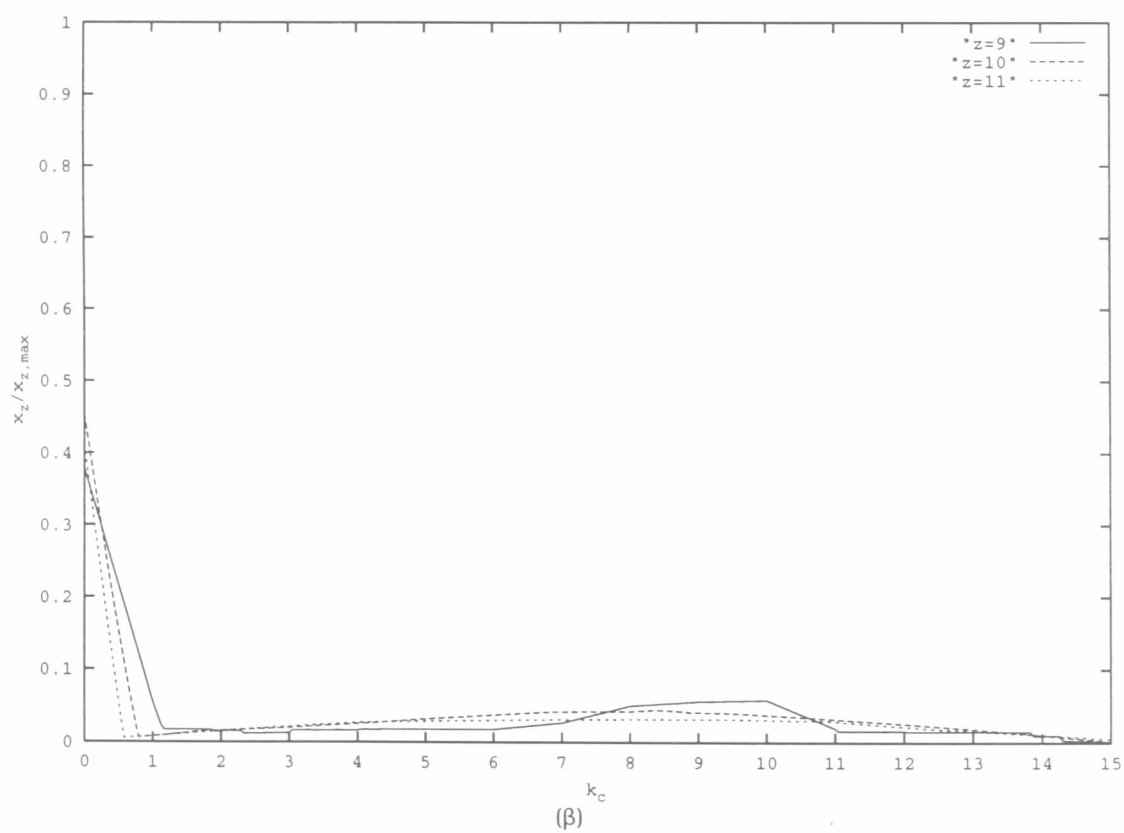
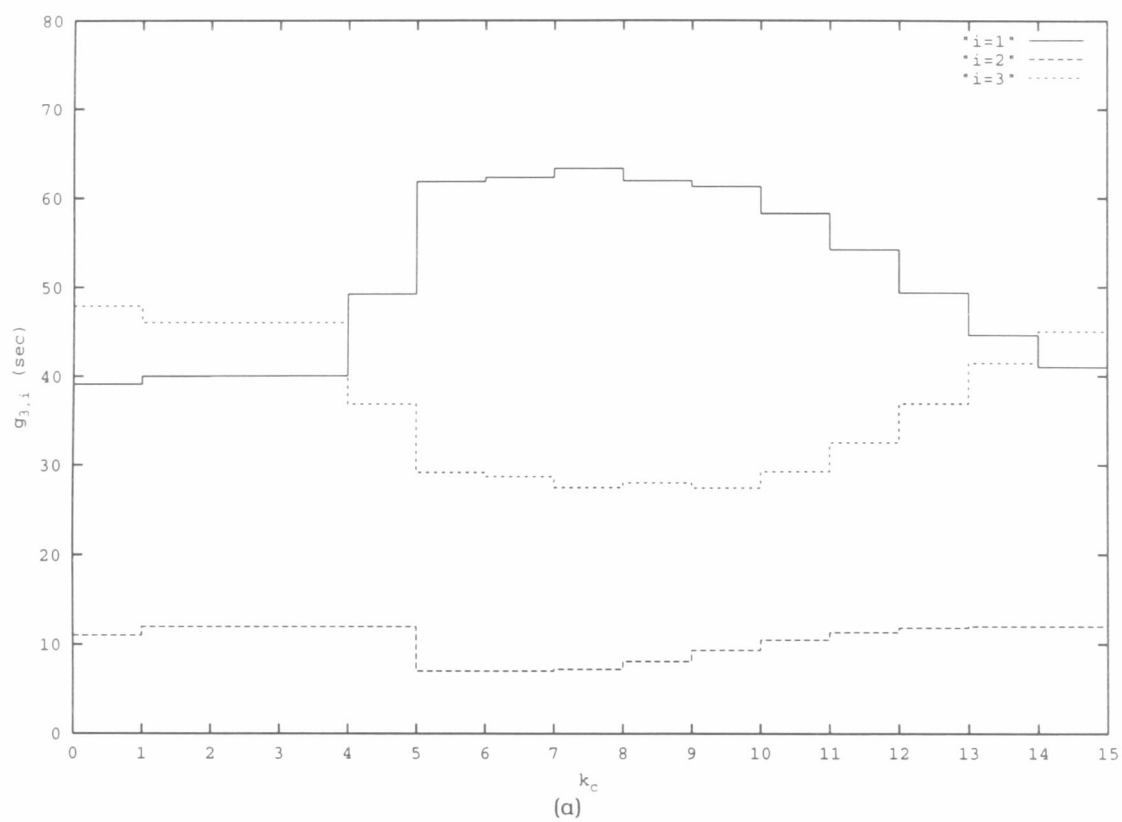
Σχήμα 5.9: Δίκτυο 3, κόμβος 3, σενάριο 2: (α) η βέλτιστη τροχιά ελέγχου $u(k)$, $k = 0, \dots, 14$, (β) η εξέλιξη των ουρών $(x_z/x_{z,max})$ στους συνδέσμους.



Σχήμα 5.10: Δίκτυο 3, κόμβος 1, σενάριο 3: (α) η βέλτιστη τροχιά ελέγχου $u(k)$, $k = 0, \dots, 14$, (β) η εξέλιξη των ουρών $(x_z/x_{z,max})$ στους συνδέσμους.



Σχήμα 5.11: Δίκτυο 3, κόμβος 2, σενάριο 3: (α) η βέλτιστη τροχιά ελέγχου $u(\kappa)$, $\kappa = 0, \dots, 14$, (β) η εξέλιξη των ουρών $(x_z/x_{z,\max})$ στους συνδέσμους.



Σχήμα 5.12: Δίκτυο 3, κόμβος 3, σενάριο 3: (α) η βέλτιστη τροχιά ελέγχου $u(k)$, $k = 0, \dots, 14$, (β) η εξέλιξη των ουρών $(x_z/x_{z,max})$ στους συνδέσμους.

Σύνδεσμος	Αριθμός οχημάτων	Μεταβλητή ελέγχου	Διάρκεια πρασίνου
z	$x_z(0) (veh)$	i	$u_i^{(0)}(\kappa) (sec)$
1	35	1	54
2	20	2	28
3	10	3	22
4	10	4	27
5	10	5	40
6	10	6	12
7	50		
8	30		
9	25		
10	30		
11	35		

Πίνακας 5.3: Η αρχική κατάσταση x_0 και η αρχική επιτρεπτή τροχιά ελέγχου $u^{(0)}(\kappa)$, $\kappa = 0, \dots, 14$ για το δίκτυο εφαρμογής 3.

5.11(β), 5.12(α) και 5.12(β), απεικονίζουν την βέλτιστη τροχιά ελέγχου και την εξέλιξη των ουρών στους συνδέσμους των κόμβων 1, 2 και 3 του Δικτύου 3 για το σενάριο ζήτησης 3, αντιστοίχως. Από την εξέταση των σχημάτων αυτών μπορούμε να κάνουμε τις ακόλουθες παρατηρήσεις:

- Η βελτιστοποίηση ευνοεί την μείωση της συμφόρησης στον σύνδεσμο 5 αυξάνοντας την διάρκεια της φάσης 3 στον κόμβο 2 για όλα τα σενάρια ζήτησης (βλέπε Σχήματα 5.5(α) και 5.5(β), 5.8(α) και 5.8(β), 5.11(α) και 5.11(β)).
- Αντίθετα, στο σενάριο 1 η βελτιστοποίηση δεν ευνοεί την μείωση της συμφόρησης που διαχέεται από τον σύνδεσμο 2 στον σύνδεσμο 4, με αποτέλεσμα ο σύνδεσμος 4 να βρίσκεται στο επίπεδο της μέγιστης χωρητικότητας του ($c = 0.9$) για $k_c = 9, \dots, 12$ (βλέπε Σχήματα 5.4(α) και 5.4(β), 5.5(α) και 5.5(β)). Ομοίως στο σενάριο 2 η βελτιστοποίηση δεν ευνοεί την μείωση της συμφόρησης που διαχέεται από τους συνδέσμους 10 και 11 στον σύνδεσμο 7 (βλέπε Σχήματα 5.8(α) και 5.8(β), 5.9(α) και 5.9(β)). Και στις δύο αυτές περιπτώσεις η βελτιστοποίηση αυξάνει την φάση 3 στον κόμβο 2 ενώ δεν δείχνει να αυξάνει ιδιαίτερα την φάση 1 (δέχεται προτεραιότητα κυκλοφορίας ο σύνδεσμος 4) στο σενάριο 1 και την φάση 2 (δέχεται προτεραιότητα κυκλοφορίας ο σύνδεσμος 7) στο σενάριο 2. Ωστόσο ο σύνδεσμος 4 έχει μικρή χωρητικότητα (βλέπε Πίνακα 4.7) με αποτέλεσμα η βελτιστοποίηση για να μειώσει την συμφόρηση να χρειάζεται μεγάλη αύξηση της φάσης 1, που πιθανότατα οδηγεί και σε αύξηση του κριτηρίου κόστους.
- Στο σενάριο ζήτησης 3 η βελτιστοποίηση δείχνει να διαχειρίζεται τις ουρές των συνδέσμων με τέτοιο τρόπο ώστε να επιτυγχάνεται ο αντικειμενικός στόχος του μη γραμμικού βέλτιστου ελέγχου που είναι η ελαχιστοποίηση και εξισορρόπηση των ουρών.

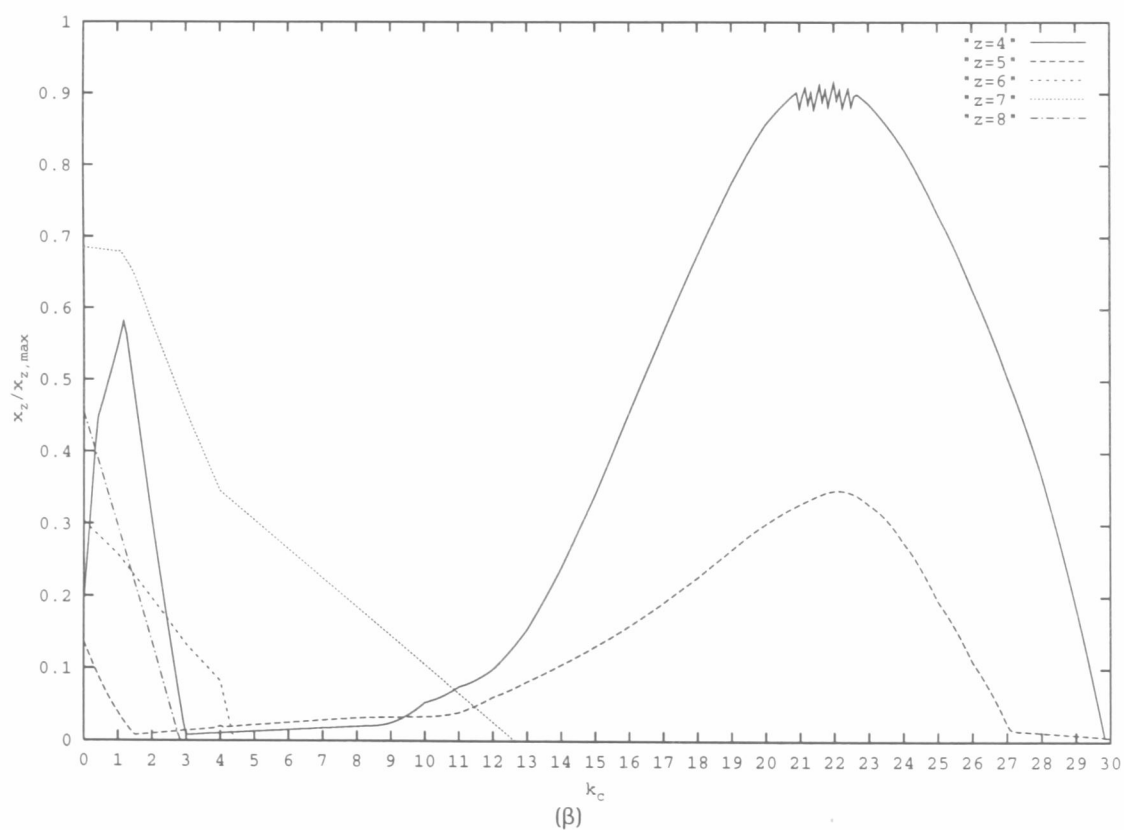
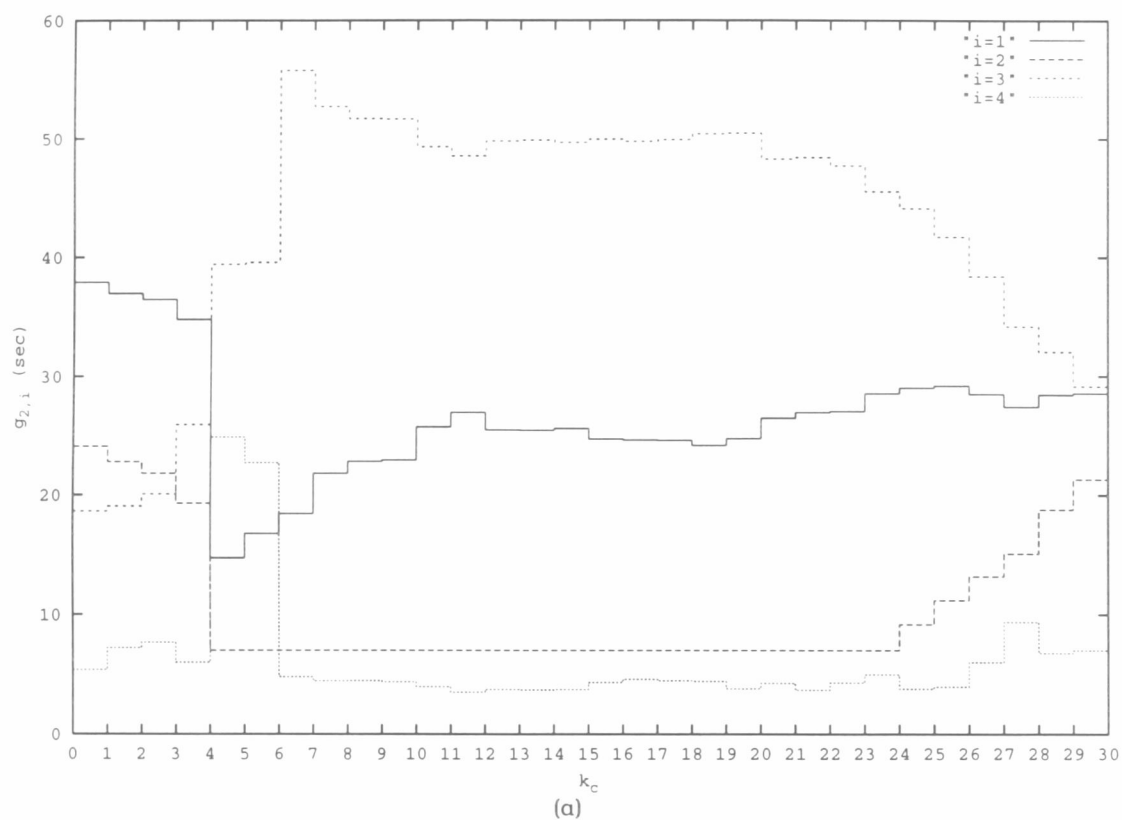
Ας δούμε τώρα πως επιδρά η περίοδος ελέγχου T_c στην αποτελεσματικότητα του βέλτιστου ελέγχου.

Περίοδος μοντέλου	Περίοδος ελέγχου	Ορίζοντας βελτιστοποίησης	Ορίζοντας ελέγχου
$T(sec)$	$T_c(sec)$	K	K_c
5	15	360	119
5	30	360	59
5	60	360	29

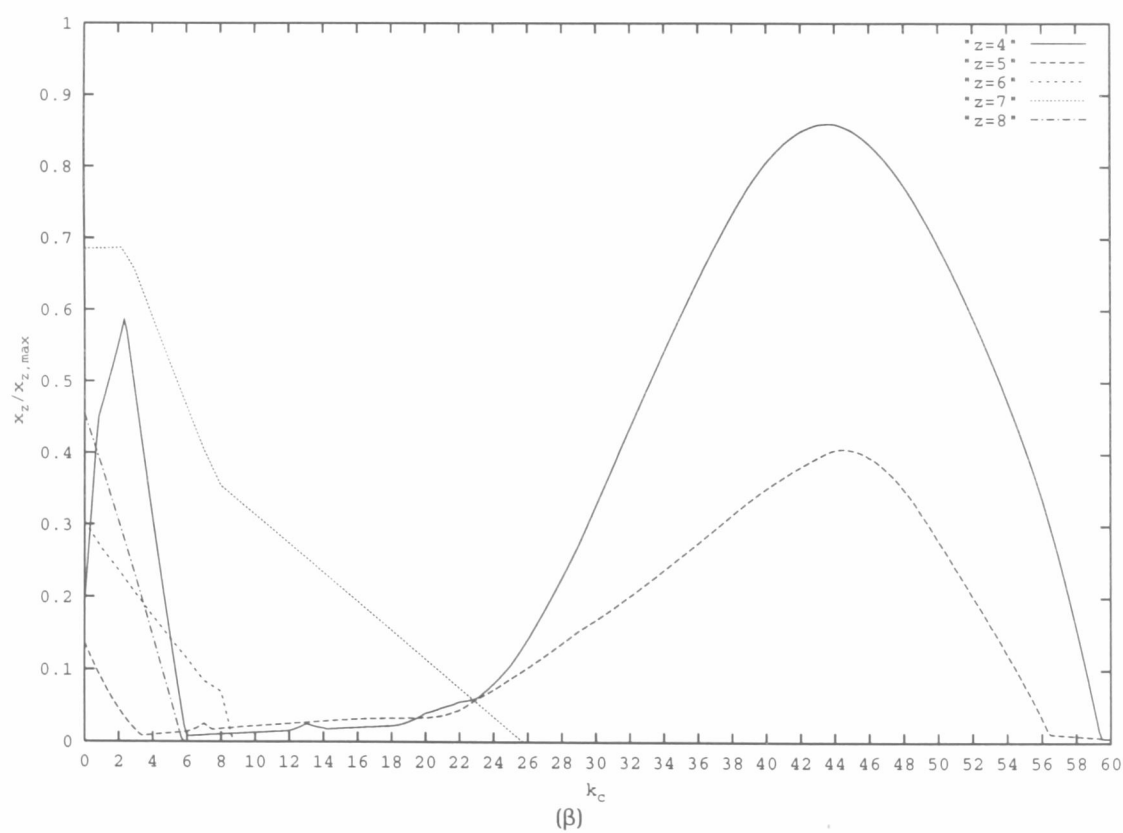
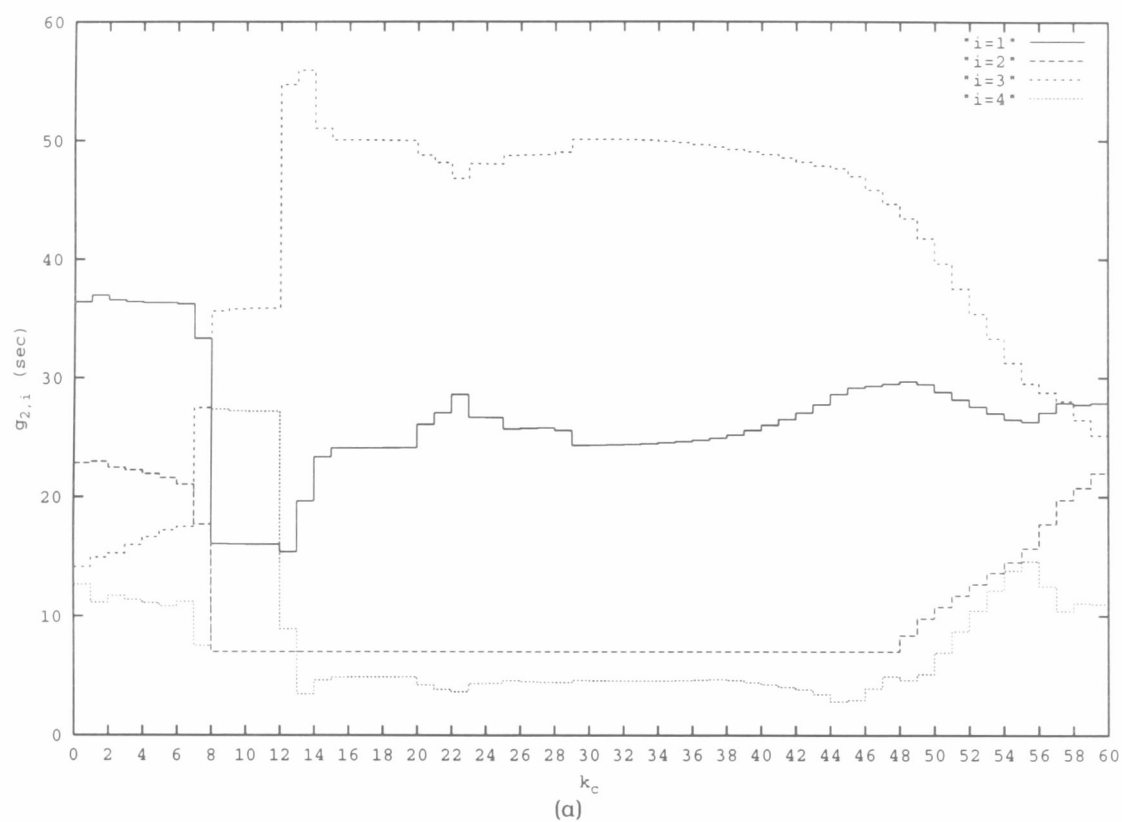
Πίνακας 5.4: Τιμές της περιόδου ελέγχου T_c για τις οποίες διερευνάται η συμπεριφορά του βέλτιστου ελέγχου στο σενάριο ζήτησης 1.

Για το σκοπό αυτό διερευνάται περαιτέρω η συμφόρηση που δημιουργείται στον σύνδεσμο 4 για το σενάριο ζήτησης 1. Όπως αναφέρθηκε παραπάνω η περίοδος ελέγχου που χρησιμοποιήθηκε είναι $T_c = 120 sec$, ενώ η περίοδος του μοντέλου είναι $T = 5 sec$. Ως εκ τούτου, οι μεταβλητές κατάστασης ενημερώνονται κάθε περίοδο $T = 5 sec$, ενώ οι μεταβλητές ελέγχου ενημερώνονται κάθε περίοδο $T_c = 120 sec$. Όπως είδαμε κατά την ανάπτυξη του μοντέλου ελέγχου στην §2.2.2, η περίοδος ελέγχου T_c είναι ανεξάρτητη από τη διάρκεια της μεγαλύτερης χρονικά περιόδου σηματοδότησης στο ελεγχόμενο δίκτυο. Για το λόγο αυτό εξετάζονται επιπλέον οι περιπτώσεις $T_c = 60 sec$, $T_c = 30 sec$ και $T_c = 15 sec$ (βλέπε Πίνακα 5.4).

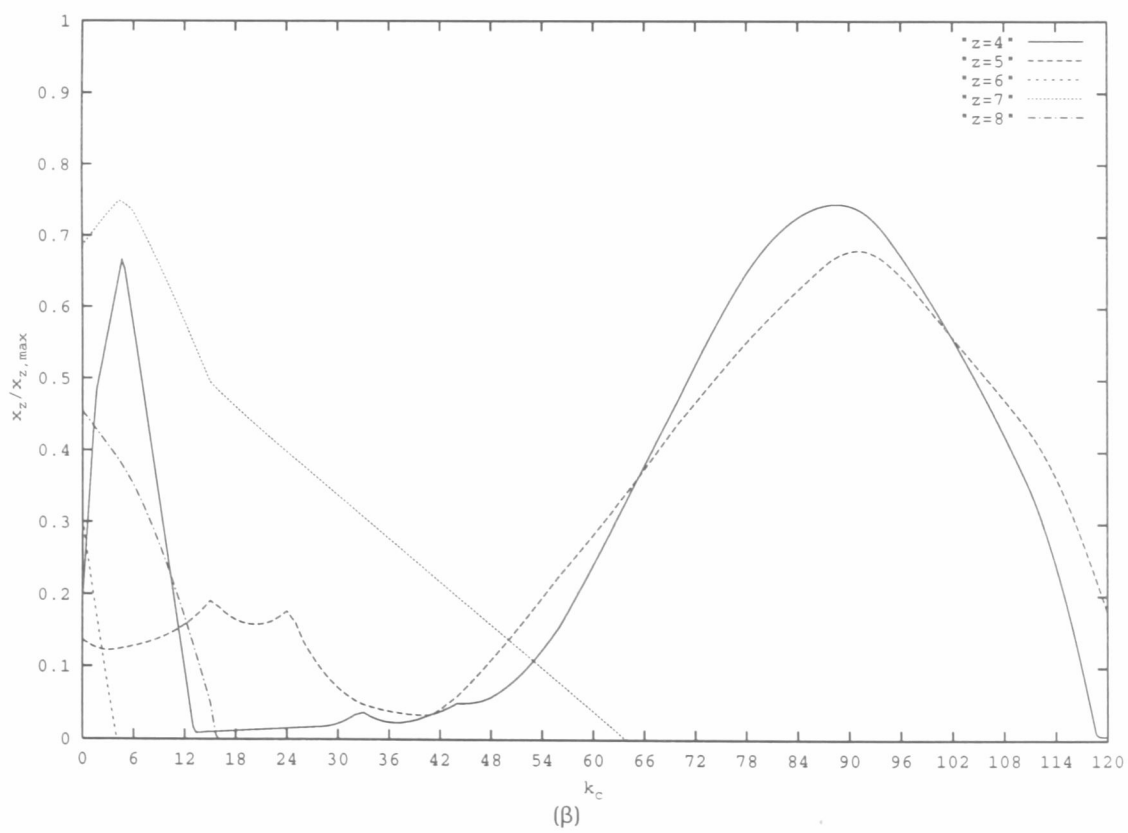
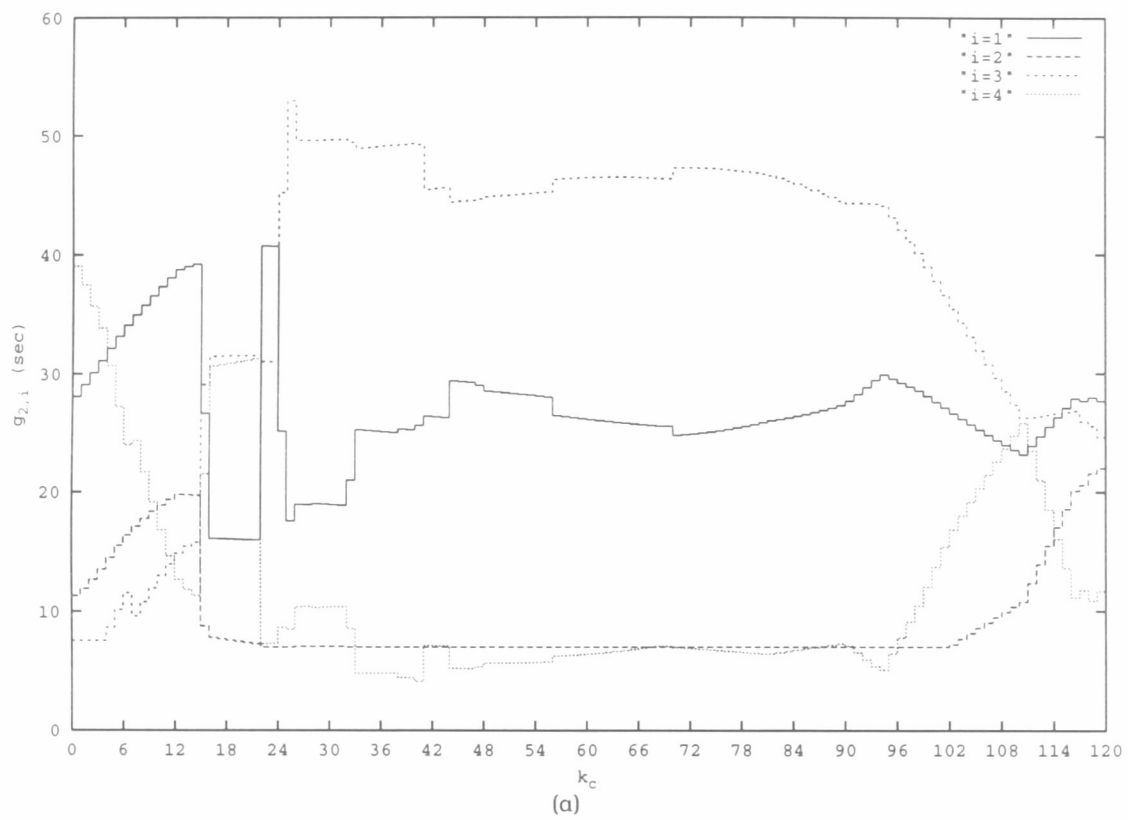
Τα Σχήματα 5.13(α) και 5.13(β), 5.14(α) και 5.14(β), 5.15(α) και 5.15(β), απεικονίζουν την βέλτιστη τροχιά ελέγχου και την εξέλιξη των ουρών στους συνδέσμους του κόμβου 2 για περίοδο ελέγχου $T_c = 60 sec$, $T_c = 30 sec$ και $T_c = 15 sec$, αντιστοίχως. Από τα σχήματα που απεικονίζουν την εξέλιξη των ουρών είναι φανερό ότι όσο μειώνεται η περίοδος ελέγχου, δηλαδή όσο πιο συχνά το μοντέλο λαμβάνει αποφάσεις ελέγχου, η βελτιστοποίηση διαχειρίζεται αποτελεσματικότερα την συμφόρηση που αναπτύσσεται στον σύνδεσμο 4 (βλέπε Σχήμα 5.5(β)). Έτσι για $T_c = 60 sec$ (βλέπε Σχήμα 5.13(β)) η συμφόρηση στον σύνδεσμο 4 μειώνεται σημαντικά με αποτέλεσμα να αγγίζει το ποσοστό μέγιστης χωρητικότητας για $k_c = 20, \dots, 22$. Τα αποτελέσματα είναι ακόμη πιο ενθαρρυντικά στις περιπτώσεις $T_c = 30 sec$ και $T_c = 15 sec$ αφού ο σύνδεσμος 4 δεν προσεγγίζει το ποσοστό μέγιστης χωρητικότητας (βλέπε Σχήματα 5.14(β) και 5.15(β)). Εξίσου σημαντικό είναι το γεγονός ότι με την μείωση της περιόδου ελέγχου η βελτιστοποίηση διαχειρίζεται ακόμη αποτελεσματικότερα τις ουρές των συνδέσμων ώστε να επιτυγχάνεται ο αντικειμενικός στόχος του μη γραμμικού βέλτιστου ελέγχου που είναι η ελαχιστοποίηση και εξισορρόπηση των ουρών. Αυτό είναι φανερό αφού για $T_c = 30 sec$ και $T_c = 15 sec$ οι ουρές των συνδέσμων 4 και 5 μειώνονται με τέτοιο τρόπο ώστε να εξαλειφθούν σχεδόν ταυτοχρόνως. Για την επίτευξη του σκοπού αυτού η βελτιστοποίηση διαχειρίζεται αποτελεσματικότερα τις φάσεις 1 και 3 στον κόμβο 2, με αποτέλεσμα την αύξηση της ουράς στον σύνδεσμο 5 (σε αντίθεση με την περίπτωση $T_c = 120 sec$) και την μείωση της συμφόρησης που αναπτύσσεται στον σύνδεσμο 4.



Σχήμα 5.13: Δίκτυο 3, κόμβος 2, σενάριο 1, $T_c = 60 \text{ sec}$: (α) η βέλτιστη τροχιά ελέγχου $u(k)$, $k = 0, \dots, 29$, (β) η εξέλιξη των ουρών ($x_z/x_{z,\max}$) στους συνδέσμους.



Σχήμα 5.14: Δίκτυο 3, κόμβος 2, σενάριο 1, $T_c = 30$ sec: (α) η βέλτιστη τροχιά ελέγχου $u(k)$, $k = 0, \dots, 59$, (β) η εξέλιξη των ουρών $(x_z/x_{z,max})$ στους συνδέσμους.



Σχήμα 5.15: Δίκτυο 3, κόμβος 2, σενάριο 1, $T_c = 15 \text{ sec}$: (α) η βέλτιστη τροχιά ελέγχου $u(\kappa)$, $\kappa = 0, \dots, 119$, (β) η εξέλιξη των ουρών ($x_z/x_{z,\max}$) στους συνδέσμους.

5.4 Εφαρμογή στο Δίκτυο 4

Το Δίκτυο 4 που μελετάται στην παρούσα διατριβή αποτελεί ένα μέρος του οδικού αστικού δικτύου της Γλασκώβης. Το δίκτυο αυτό αποτελείται από 13 κόμβους και 61 συνδέσμους (βλέπε §4.5, Σχήμα 4.4) και θεωρείται ως ένα παράδειγμα αρκετά μεγάλου αστικού οδικού δικτύου. Για το λόγο αυτό είναι αρκετά δύσκολο να εξαχθούν ασφαλή συμπεράσματα για το πως ο βέλτιστος έλεγχος λαμβάνει τις αποφάσεις ελέγχου. Επιπλέον, υπάρχουν κόμβοι που λειτουργούν με κοινή περίοδο (π.χ., ο κόμβος 1a και 1b), ενώ μερικοί σύνδεσμοι λαμβάνουν προτεραιότητα σε περισσότερες από μια φάσεις (π.χ., ο σύνδεσμος 13) και κάποιοι άλλοι λαμβάνουν προτεραιότητα ταυτοχρόνως με άλλους συνδέσμους (π.χ., ο σύνδεσμος 21 και 24). Αποτέλεσμα αυτών η ανάπτυξη πολύπλοκων σχέσεων μεταξύ των μεταβλητών κατάστασης και ελέγχου του προβλήματος.

Για την εξέταση της αποτελεσματικότητας του βέλτιστου ελέγχου στο δίκτυο της Γλασκώβης θεωρούμε ένα σενάριο υψηλής ζήτησης στους συνδέσμους προέλευσης του δικτύου (σύνδεσμοι 1, 2, 10, 11, 15, 16, 18, 22, 24, 32, 36, 39, 46, 47, 48, 50, 54, 57, 60 και 61) ώστε στο εσωτερικό του δικτύου να αναπτυχθεί συμφόρηση. Η εξέλιξη της ζήτησης στον ορίζοντα βελτιστοποίησης K έχει την μορφή της κανονικής κατανομής. Για το σενάριο αυτό μελετάται η διαχείριση της συμφόρησης από τον βέλτιστο έλεγχο.

Από τα δεδομένα του Πίνακα 4.9 για τον αριθμό των φάσεων σε κάθε κόμβο του δικτύου θεωρούμε $|F_j| - 1$ ανεξάρτητες μεταβλητές σε κάθε κόμβο. Τα απαραίτητα δεδομένα που χρησιμοποιούνται για την εφαρμογή του αλγορίθμου εφικτής κατεύθυνσης έχουν τις ακόλουθες τιμές: $T = 5 \text{ sec}$, $T_c = 30 \text{ sec}$, $K = 720$, $K_c = 119$, $c = 0.9$. Το διάνυσμα ελέγχου θα είναι $\mathbf{u}(\kappa) \in \mathbb{R}^{30}$, $\kappa = 0, \dots, 119$ ενώ το διάνυσμα κατάστασης είναι $\mathbf{x}(k) \in \mathbb{R}^{61}$, $k = 0, \dots, 719$. Από τις διαστάσεις των διανυσμάτων κατάστασης και ελέγχου του προβλήματος είναι φανερό ότι επιλύεται ένα πρόβλημα μεγάλης κλίμακας, αφού οι μεταβλητές του προβλήματος είναι $720 \times 61 + 120 \times 30 = 47520$. Η αρχική κατάσταση \mathbf{x}_0 και η αρχική επιτρεπτή τροχιά ελέγχου $\mathbf{u}^{(0)}(\kappa)$, $\kappa = 0, \dots, 119$ παρουσιάζονται στον Πίνακα 5.5. Οι παράμετροι βάρους στην συνάρτηση κόστους (2.3.3) έχουν τιμές $a_f = 0.0001$, $a_{w_\ell} = a_{w_u} = 1$.

Τα Σχήματα 5.16(a) και 5.16(β), 5.17(a) και 5.17(β), 5.18(a) και 5.18(β), 5.19(a) και 5.19(β), 5.20(a) και 5.20(β), 5.21(a) και 5.21(β), απεικονίζουν την βέλτιστη τροχιά ελέγχου και την εξέλιξη των ουρών στους συνδέσμους των κόμβων 1, 10, 11, 3, 4 και 5 για το αστικό δίκτυο της Γλασκώβης, αντιστοίχως. Από τις επικρατούσες συνθήκες στο δίκτυο της Γλασκώβης (βλέπε Σχήμα 4.4) με την εφαρμογή του σεναρίου ζήτησης στους συνδέσμους προέλευσης, μπορούν να εξαχθούν τα ακόλουθα συμπεράσματα:

- Στον κόμβο 1 του δικτύου αναπτύσσεται συμφόρηση στον σύνδεσμο 2. Αποτέλεσμα, η διάχυση της συμφόρησης από το σύνδεσμο αυτό προς τα εμπρός μέσω των συνδέσμων 42 και 45 μέχρι τον κόμβο 11 (βλέπε Σχήματα 5.16(β), 5.17(β), 5.18(β)).

Σύνδεσμος	Αριθμός οχημάτων	Σύνδεσμος	Αριθμός οχημάτων	Μεταβλητή ελέγχου	Διάρκεια πρασίνου
z	$x_z(0) (veh)$	z	$x_z(0) (veh)$	i	$u_i^{(0)}(\kappa) (sec)$
1	40	32	5	1	41
2	40	33	20	2	12
3	10	34	15	3	11
4	10	35	15	4	70
5	20	36	15	5	30
6	20	37	20	6	26
7	10	38	30	7	20
8	5	39	25	8	21
9	5	40	30	9	28
10	20	41	30	10	22
11	10	42	40	11	27
12	8	43	30	12	40
13	7	44	10	13	12
14	20	45	10	14	31
15	10	46	5	15	16
16	10	47	5	16	27
17	20	48	30	17	12
18	50	49	20	18	31
19	20	50	70	19	64
20	20	51	15	20	17
21	20	52	100	21	17
22	3	53	10	22	38
23	25	54	30	23	29
24	15	55	10	24	19
25	25	56	10	25	23
26	25	57	40	26	14
27	20	58	5	27	18
28	20	59	5	28	11
29	25	60	20	29	26
30	30	61	30	30	7
31	30				

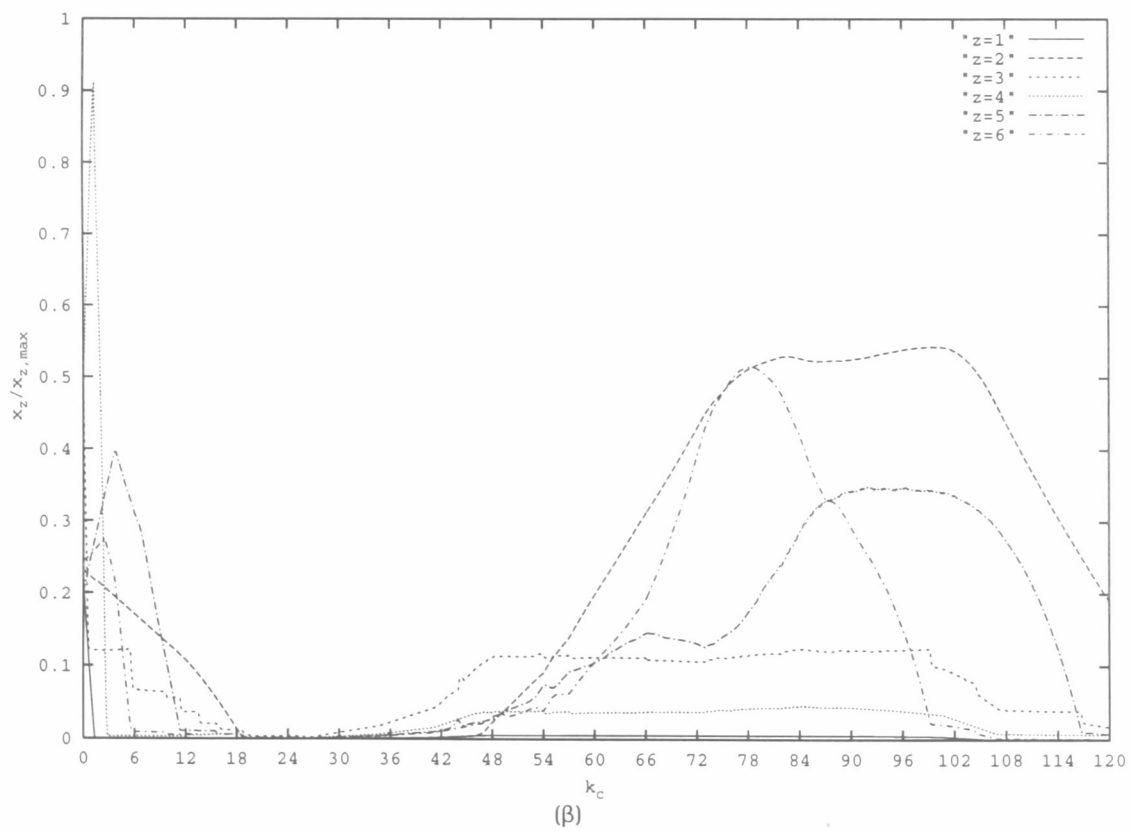
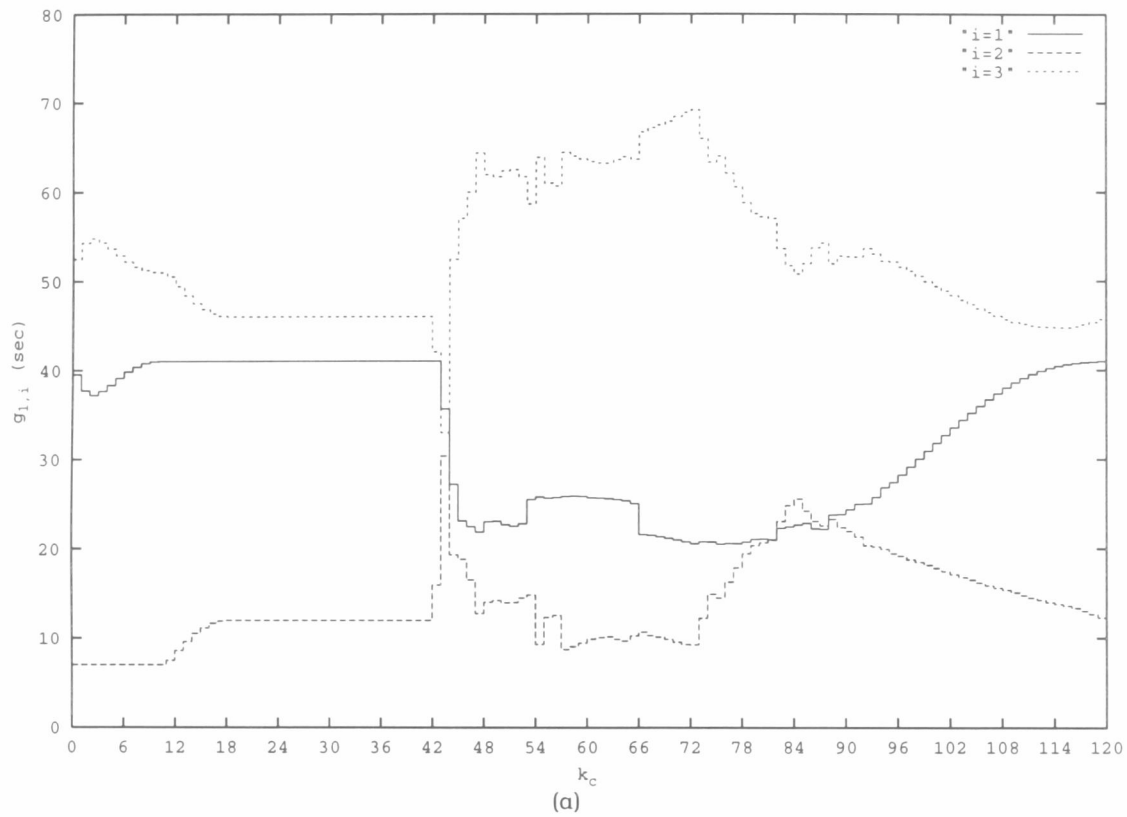
Πίνακας 5.5: Η αρχική κατάσταση x_0 και η αρχική επιτρεπτή τροχιά ελέγχου $u^{(0)}(\kappa)$, $\kappa = 0, \dots, 119$ για το αστικό δίκτυο της Γλασκώβης.

- Στην αντίθετη κατεύθυνση, στο κόμβο 11, αναπτύσσεται συμφόρηση στον σύνδεσμο 48 που διαχέεται προς τα εμπρός μέσω των συνδέσμων 43 και 5 μέχρι τον κόμβο 1.
- Στο κόμβο 3 του δικτύου αναπτύσσεται συμφόρηση στον σύνδεσμο 15. Αποτέλεσμα, η διάχυση της συμφόρησης από το σύνδεσμο αυτό προς τα εμπρός μέσω των συνδέσμων 17 και 20 μέχρι τον κόμβο 5 (βλέπε Σχήματα 5.19(β), 5.20(β), 5.21(β)).
- Στο υπόλοιπο μέρος του δικτύου, ενώ αναπτύσσεται υψηλή ζήτηση στις εισόδους του δικτύου, παρατηρούνται πολύ μικρές ουρές σε ορισμένους συνδέσμους χωρίς όμως να δημιουργούνται σοβαρά κυκλοφοριακά προβλήματα.

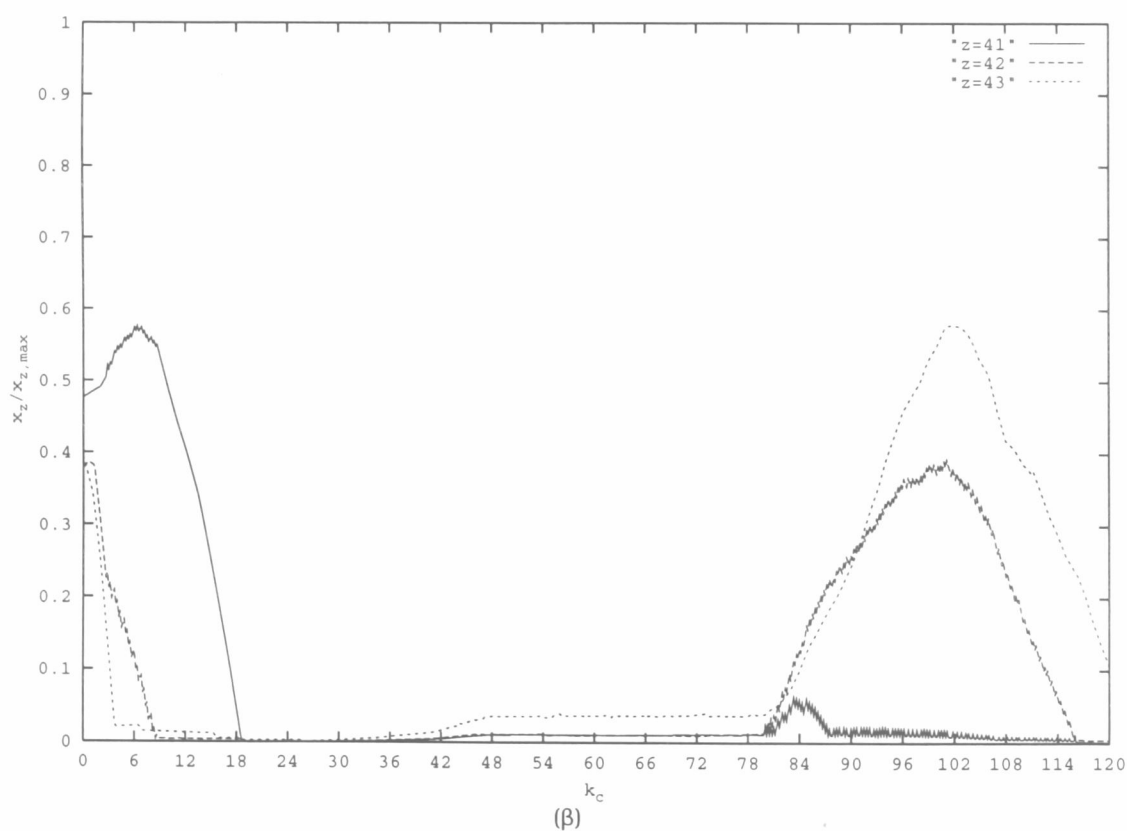
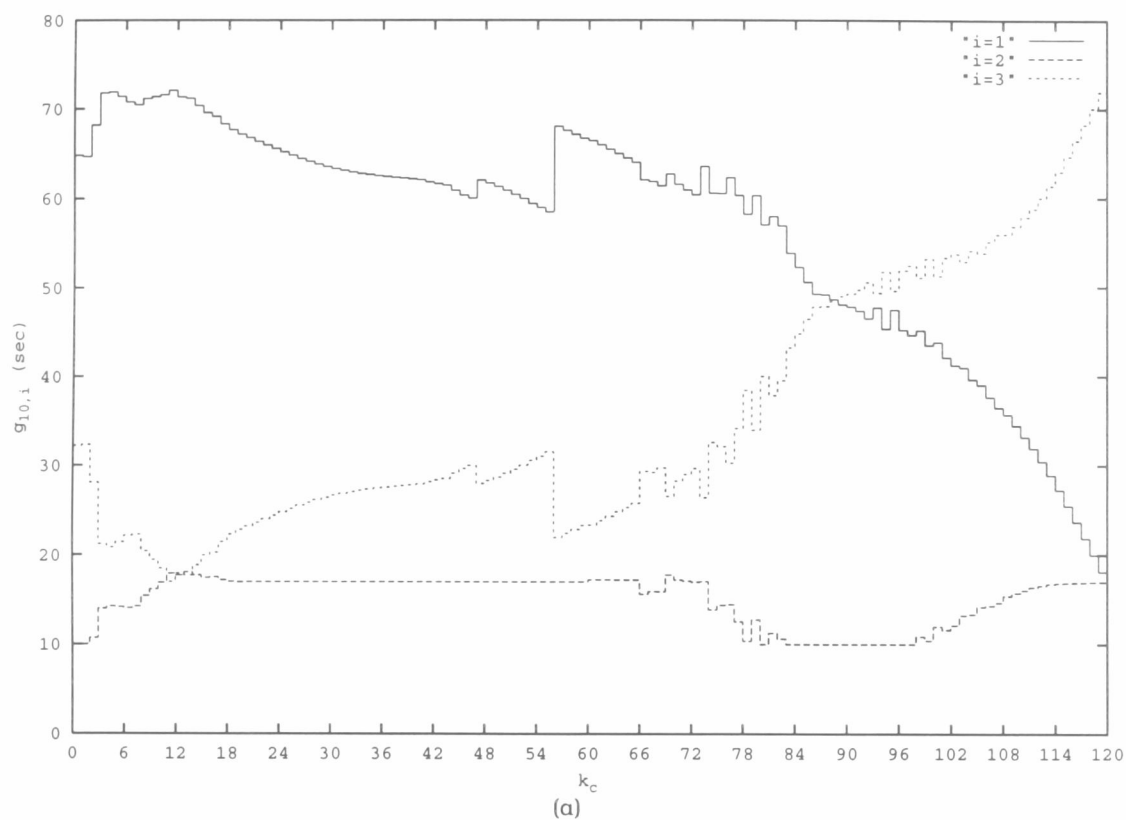
Μια προσεκτική μελέτη των σχημάτων οδηγεί στα ακόλουθα συμπεράσματα :

- Στον κόμβο 1 η βελτιστοποίηση δεν ευνοεί την διάχυση της ουράς από τον σύνδεσμο 2 στον σύνδεσμο 42, μειώνοντας τη φάση 2 στον κόμβο 1 για την οποία έχει προτεραιότητα κυκλοφορίας ο σύνδεσμος 2 (βλέπε Σχήμα 5.16(α)). Έπιπλέον ευνοεί την διάλυση της υσχυρής συμφόρησης που δημιουργείται στους συνδέσμους 42 (αυξάνει την φάση 1 στον κόμβο 10) και 45 (αυξάνει την φάση 2 στον κόμβο 11). Η διαχείριση αυτή των ουρών έχει τα εξής πλεονεκτήματα: (α) προφυλάσσει την περαιτέρω συμφόρηση στον σύνδεσμο 42 (αυξάνοντας την φάση 3 στον κόμβο), (β) ευνοεί την διάλυση της συμφόρησης από τον σύνδεσμο 47 (αυξάνει την φάση 2 στον κόμβο 11) προς τα εμπρός μέσω των συνδέσμων 43 στον κόμβο 10 (αυξάνοντας την φάση 1 για την οποία δέχεται προτεραιότητα κυκλοφορίας) και 5 στον κόμβο 1 (αυξάνοντας την φάση 3 για την οποία δέχεται προτεραιότητα κυκλοφορίας μαζί με τον σύνδεσμο 3). (Βλέπε Σχήματα 5.16(α), 5.17(α), 5.18(α).)
- Στους κόμβους 3, 4 και 5 όπου αναπτύσσεται υψηλή ζήτηση μέσω των συνδέσμων 15, 16, 18 και 24, ευνοείται η διάλυση της ζήτησης στους συνδέσμους 17, 19 (αύξηση της φάσης 1 στον κόμβο 4) και 20 (αύξηση της φάσης 1 στον κόμβο 5). (Βλέπε Σχήματα 5.20(α), 5.21(α).)

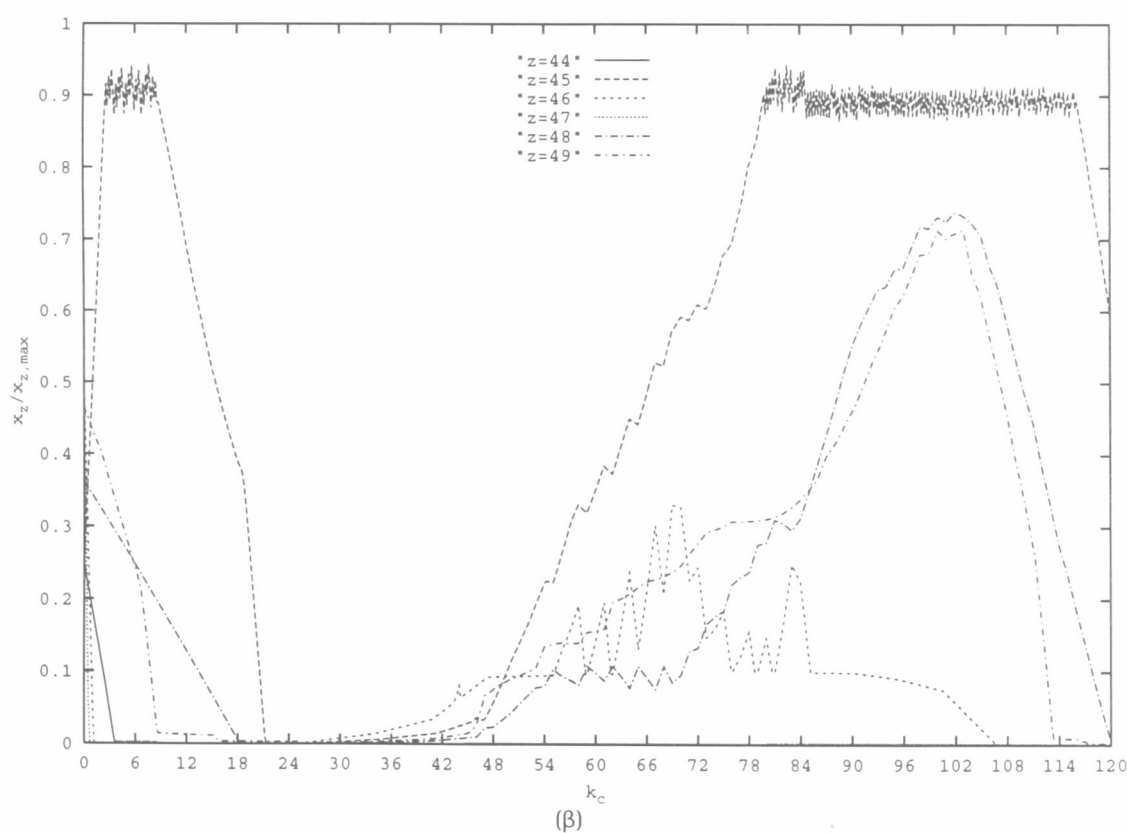
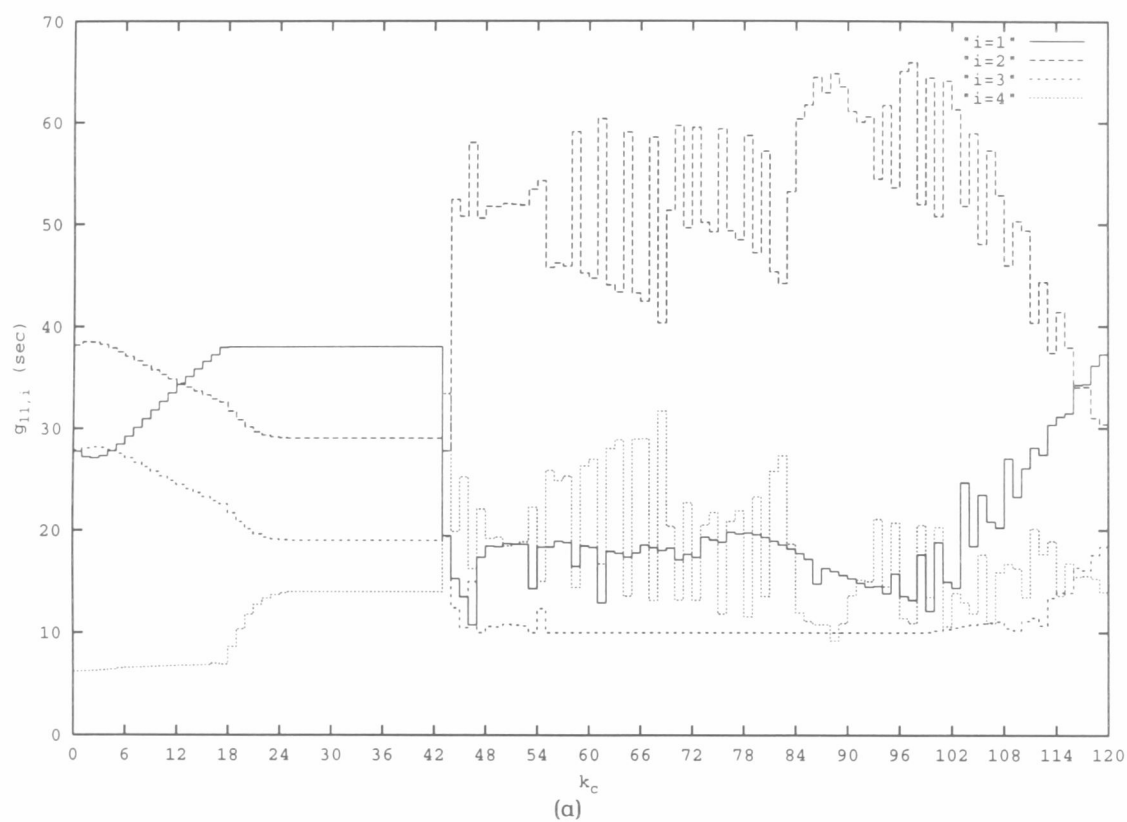
Από τις παραπάνω παρατηρήσεις είναι φανερό ότι η βελτιστοποίηση διαχειρίζεται τις ουρές στους συνδέσμους με τέτοιο τρόπο που με μια πρώτη ματιά δείχνει να μην είναι κατανοητός. Η δυσκολία αυτή είναι γεγονός ότι γίνεται ακόμη μεγαλύτερη όσο η διαστάσεις του δικτύου αυξάνονται όπως στην συγκεκριμένη περίπτωση που εξετάζεται. Η πολυπλοκότητα των σχέσεων που αναπτύσσεται μεταξύ των μεταβλητών κατάστασης και ελέγχου του προβλήματος καθώς και οι τιμές των κυκλοφοριακών παραμέτρων (όπως ροή κορεσμού, χωρητικότητα και ποσοστά στροφής) μπορούν να επηρεάσουν τον παραγόμενο βέλτιστο έλεγχο. Εν κατακλείδι, ο μη γραμμικός βέλτιστος έλεγχος είναι μια αποτελεσματική μεθοδολογία που λαμβάνει αποφάσεις ελέγχου μέσα σε μερικά λεπτά ακόμη και για δίκτυα μεγάλης κλίμακας όπως αυτό που εξετάστηκε στην παρούσα παράγραφο.



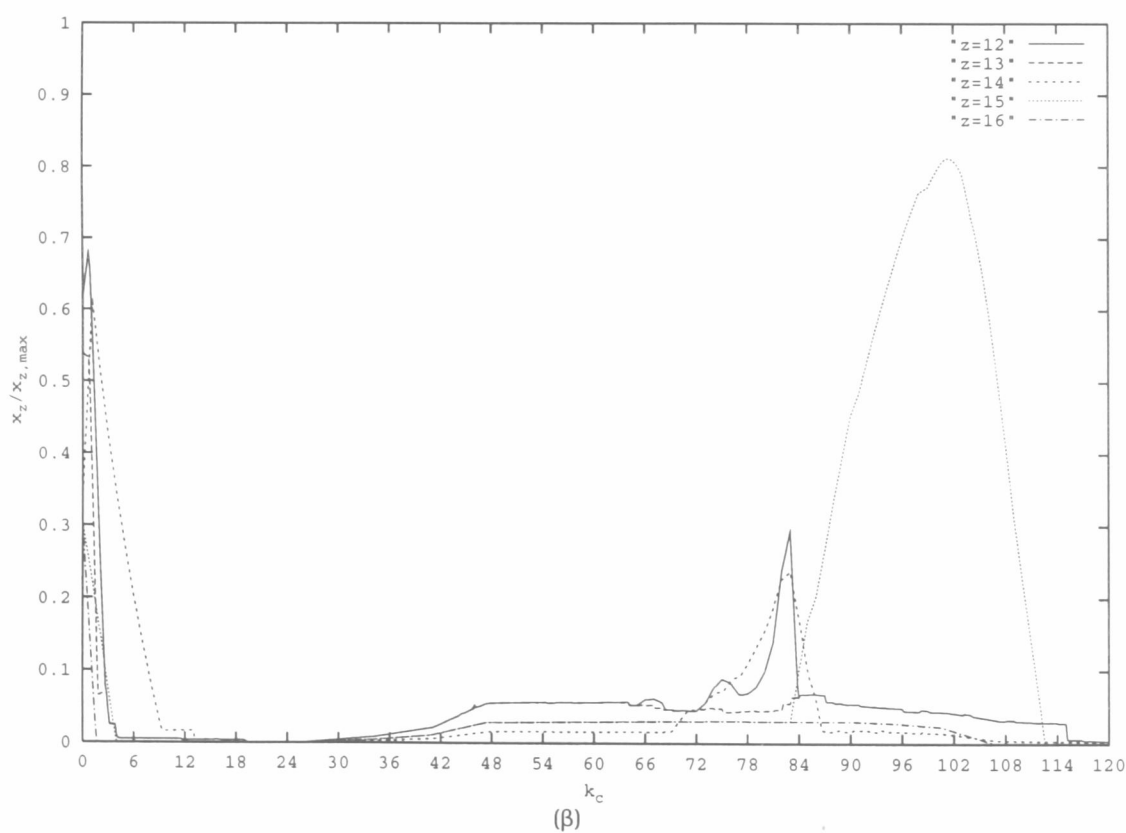
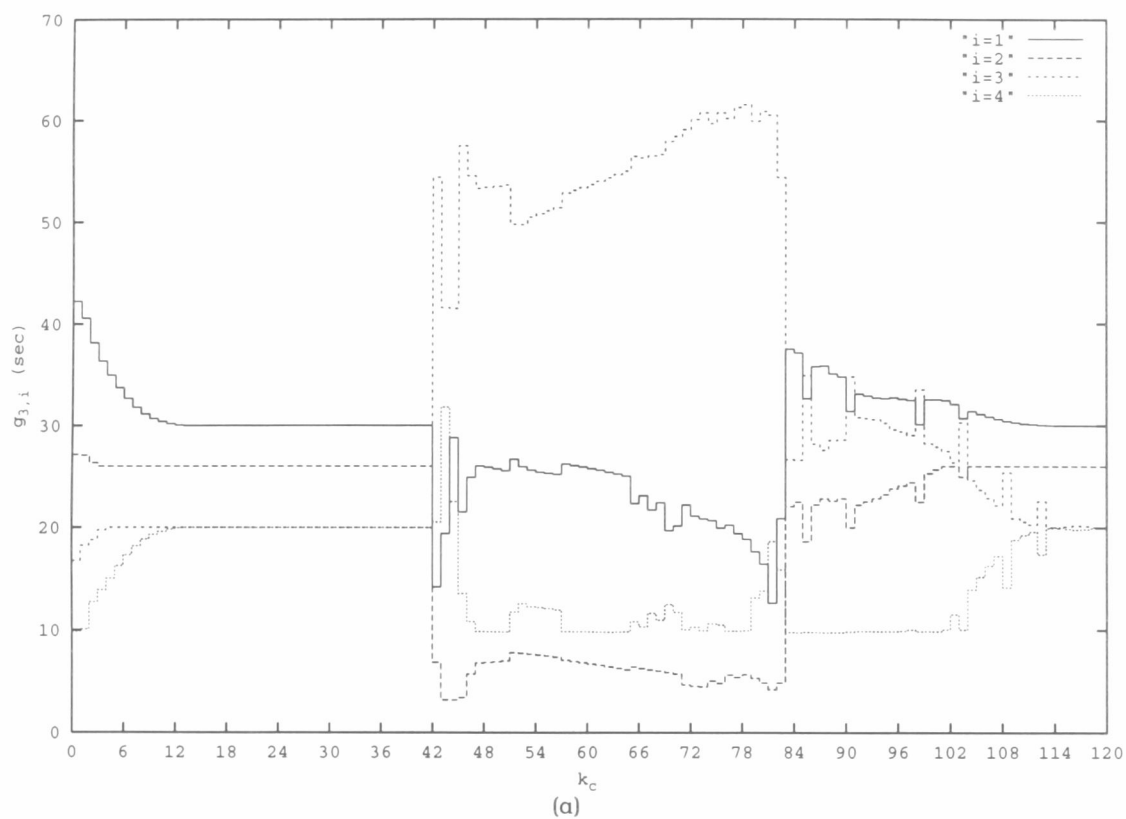
Σχήμα 5.16: Δίκτυο 4, κόμβος 1: (α) η βέλτιστη τροχιά ελέγχου $u(k)$, $k = 0, \dots, 119$, (β) η εξέλιξη των ουρών $(x_z/x_{z,max})$ στους συνδέσμους.



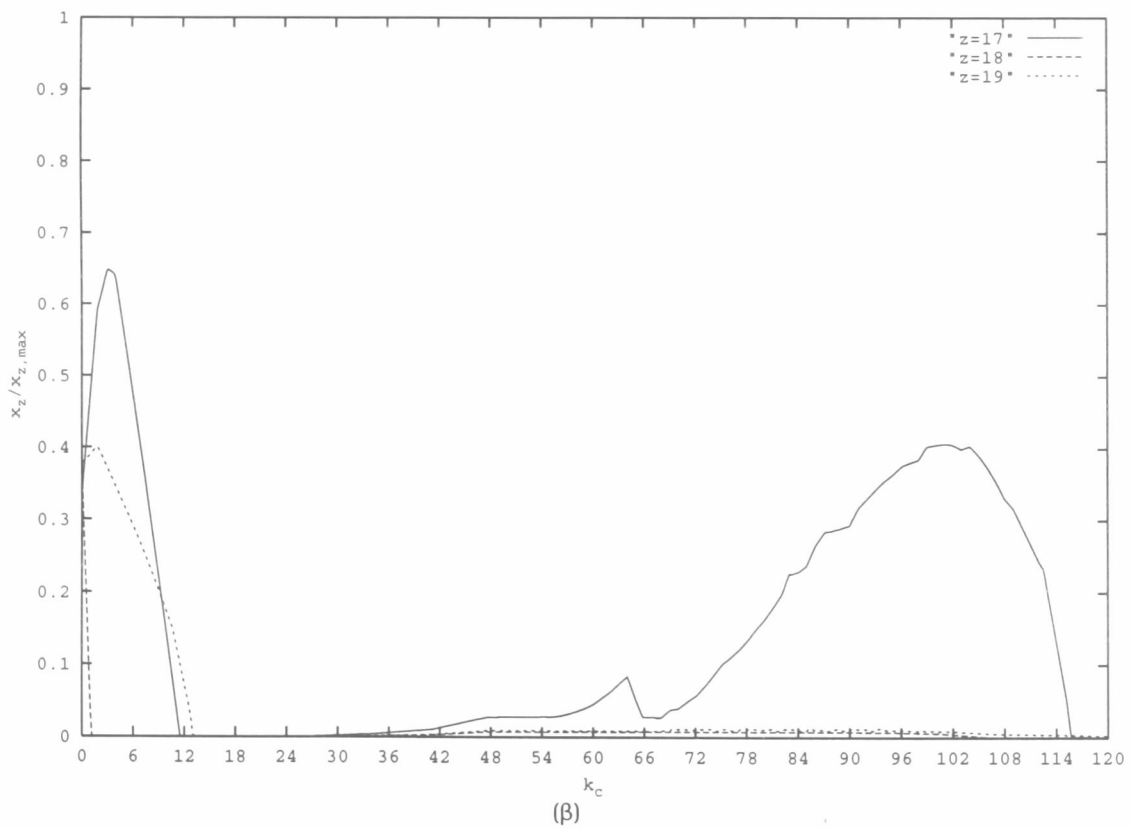
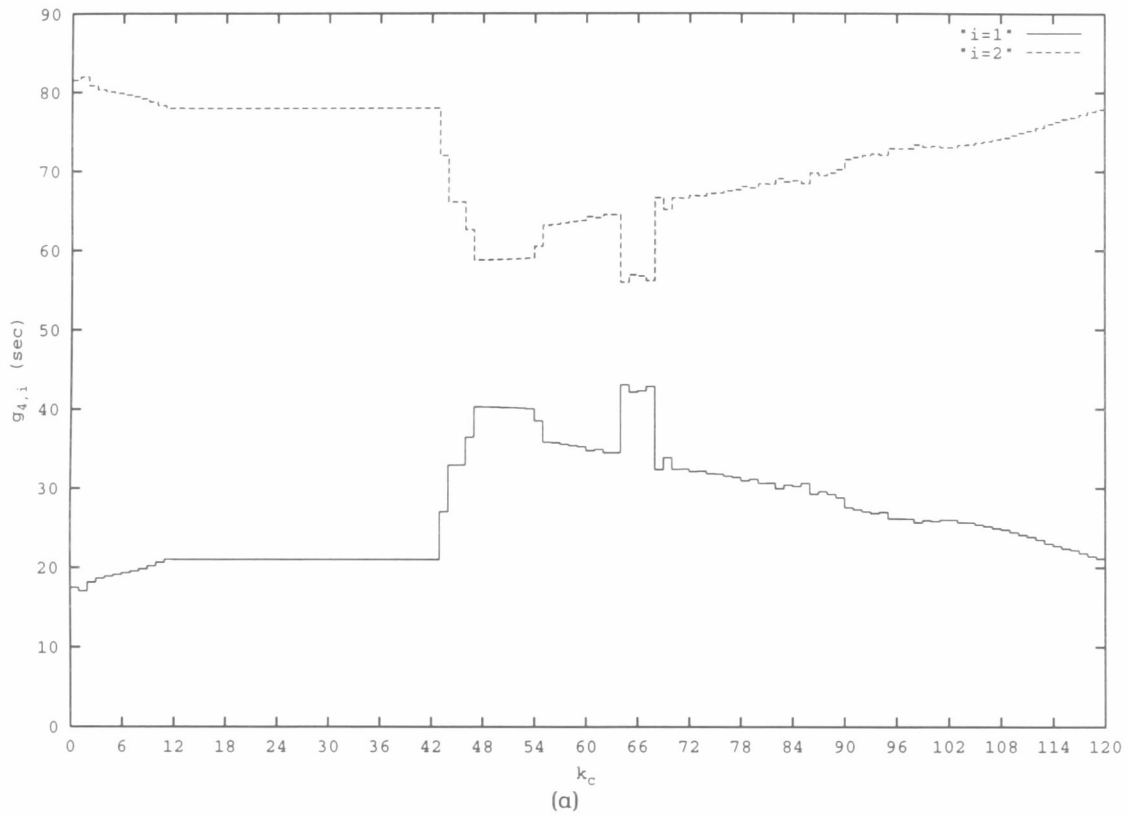
Σχήμα 5.17: Δίκτυο 4, κόμβος 10: (α) η βέλτιστη τροχιά ελέγχου $u(\kappa)$, $\kappa = 0, \dots, 119$, (β) η εξέλιξη των ουρών $(x_z/x_{z,\max})$ στους συνδέσμους.



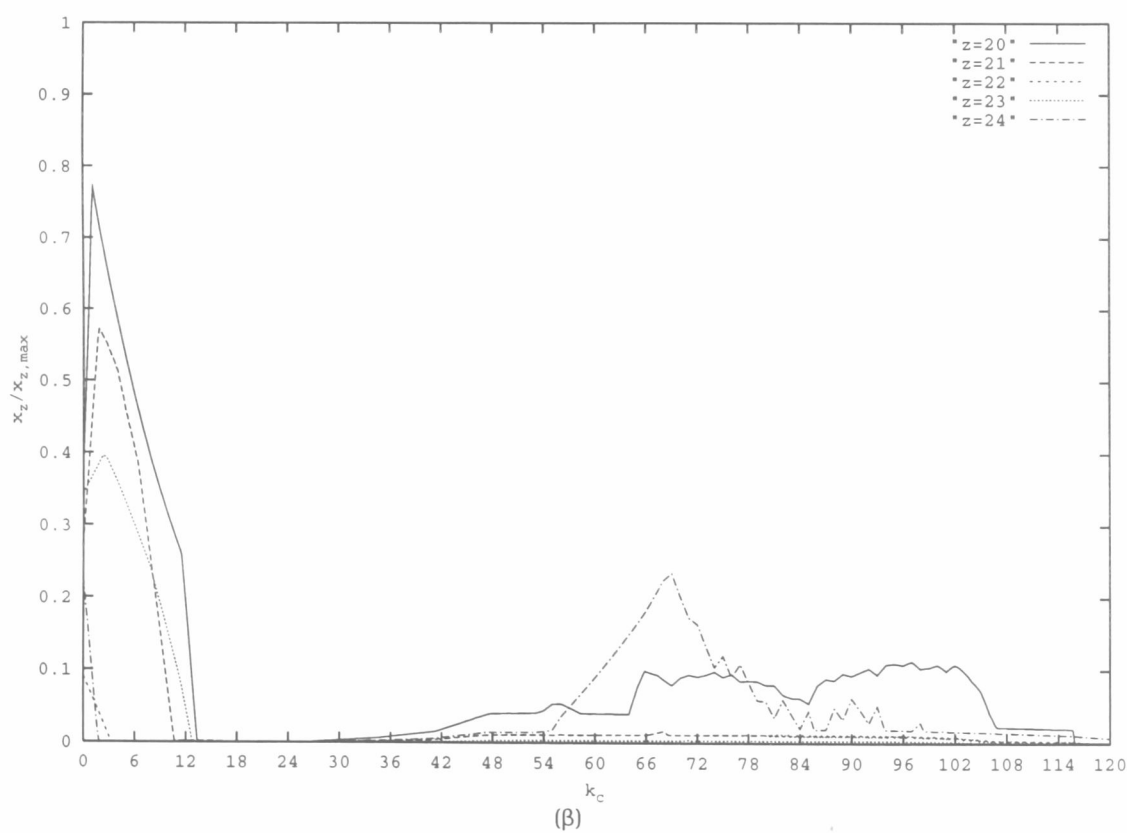
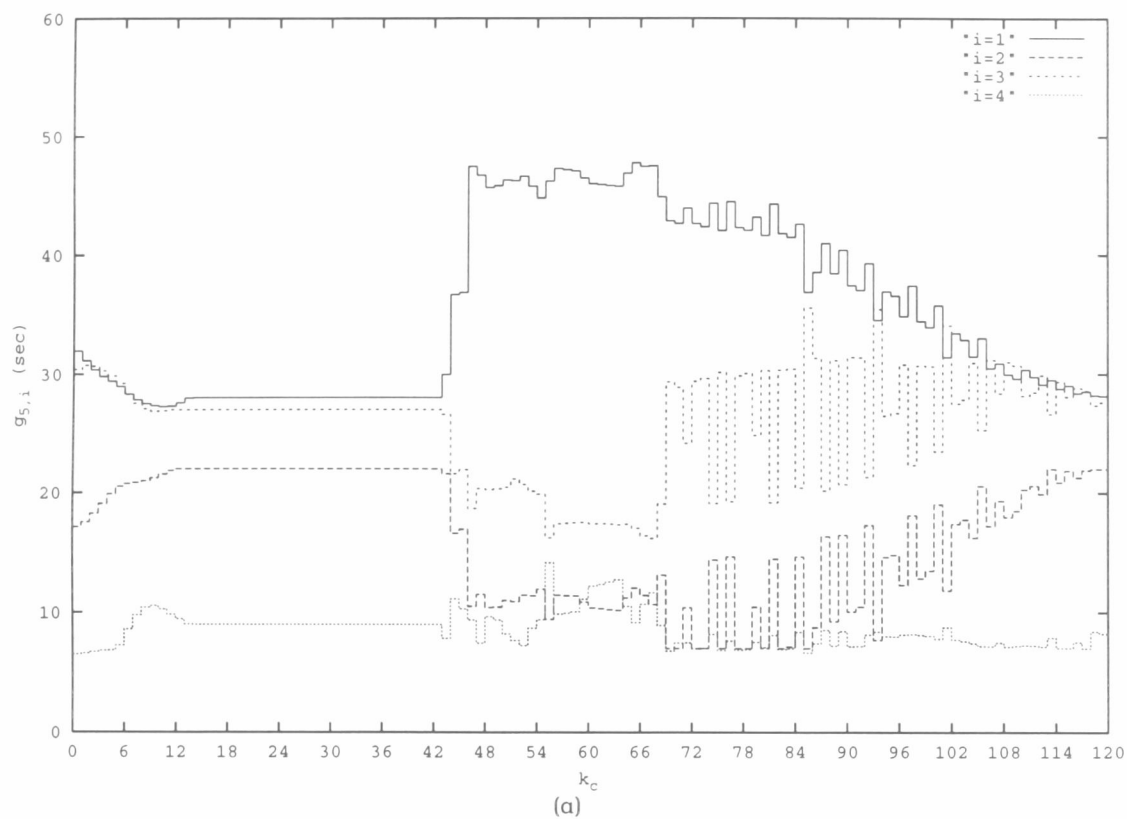
Σχήμα 5.18: Δίκτυο 4, κόμβος 11: (α) η βέλτιστη τροχιά ελέγχου $u(k)$, $k = 0, \dots, 119$, (β) η εξέλιξη των ουρών ($x_z/x_{z,max}$) στους συνδέσμους.



Σχήμα 5.19: Δίκτυο 4, κόμβος 3: (α) η βέλτιστη τροχιά ελέγχου $u(\kappa)$, $\kappa = 0, \dots, 119$, (β) η εξέλιξη των ουρών $(x_z/x_{z,\max})$ στους συνδέσμους.



Σχήμα 5.20: Δίκτυο 4, κόμβος 4: (α) η βέλτιστη τροχιά ελέγχου $u(k)$, $k = 0, \dots, 119$, (β) η εξέλιξη των ουρών ($x_z/x_{z,max}$) στους συνδέσμους.



Σχήμα 5.21: Δίκτυο 4, κόμβος 5: (α) η βέλτιστη τροχιά ελέγχου $u(\kappa)$, $\kappa = 0, \dots, 119$, (β) η εξέλιξη των ουρών $(x_z/x_{z,\max})$ στους συνδέσμους.

Συμπεράσματα και μελλοντική έρευνα

6.1 Σύνοψη

Κατά την διάρκεια των δυο περασμένων δεκαετιών, υπήρξε μια αξιοσημείωτη αύξηση του ενδιαφέροντος και της έρευνας σχετικά με την επίλυση σοβαρών προβλημάτων κυκλοφοριακής συμφόρησης, ως αποτέλεσμα της εκθετικής αύξησης του αριθμού των οχημάτων και της αναγνώρισης του γεγονότος ότι τα προβλήματα υπερφόρτωσης δεν μπορούν να λύνονται έπ' αόριστο με τη συνεχή αύξηση των υποδομών των δικτύων. Πιο συγκεκριμένα, έγινε κατανοητή η ανάγκη της επαρκούς και αποτελεσματικής χρήσης των υπάρχοντων υποδομών μέσω της ανάπτυξης και υλοποίησης σύγχρονων μορφών ελέγχου.

Όσον αφορά στη ρύθμιση σηματοδότησης αστικών δικτύων, είναι φανερό ότι διαφορετικά σχέδια σηματοδότησης, που ανταποκρίνονται όλα εξ' ίσου στην ανάγκη ασφαλούς ροής, μπορούν να οδηγήσουν σε καλύτερη ή χειρότερη αποτελεσματικότητα της κυκλοφοριακής ροής. Εξάλλου, ο προσδιορισμός του βέλτιστου σχεδίου κυκλοφορίας αποτελεί συνάρτηση πολλών στατικών και δυναμικών παραγόντων ενός συγκεκριμένου δικτύου. Ως εκ τούτου, είναι αναγκαία η αναζήτηση του συστήματος ελέγχου που θα προσδιορίζει αυτόματα το βέλτιστο σχέδιο σηματοδότησης ως συνάρτηση αυτών των παραγόντων.

Η παρούσα διατριβή επικεντρώθηκε στην ανάπτυξη ενός συστήματος ελέγχου το οποίο επιλύει το πρόβλημα ρύθμισης φωτεινής σηματοδότησης ως ένα μη γραμμικό πρόβλημα βέλτιστου ελέγχου μαζί με όλους τους περιορισμούς. Για την επίλυση του μη γραμμικού προβλήματος βέλτιστου ελέγχου χρησιμοποιήθηκε ένας αποτελεσματικός αλγόριθμος εφικτής κατεύθυνσης. Η ανάπτυξη του μοντέλου ελέγχου στηρίχτηκε στις βασικές αρχές του μαθηματικού προτύπου αποθήκευσης-και-προώθησης που περιγράφει τη διεργασία της κυκλοφοριακής ροής με τρόπο που επιτρέπει τη χρήση μεθόδων βελτιστοποίησης και ελέγχου πολυωνυμικής πολυπλοκότητας για την επίλυση του προβλήματος φωτεινής σηματοδότησης αστικών δικτύων. Αντικειμενικός στόχος του μη γραμμικού προβλήματος βέλτιστου ελέγχου ήταν η ελαχιστοποίηση

και εξισορρόπηση των ουρών του ελεγχόμενου δικτύου καθ' όλη τη διάρκεια του ορίζοντα βελτιστοποίησης.

Η αποτελεσματικότητα του αλγορίθμου εφικτής κατεύθυνσης για την επίλυση του προβλήματος βέλτιστης σηματοδότησης αστικών δικτύων εξετάστηκε σε δίκτυα μικρής και μεγάλης κλίμακας με τυχαία τοπολογία και χαρακτηριστικά. Τα αποτελέσματα των διερευνήσεων αυτών έδειξαν ότι οι βέλτιστες αποφάσεις που προκύπτουν από την επίλυση του διατυπωμένου προβλήματος βέλτιστου ελέγχου σε πολλές περιπτώσεις εκπλήσσουν τον σχεδιαστή καθώς και τον αναγκάζουν σε μια εκ των υστέρων επεξήγηση των αποτελεσμάτων. Αυτό είναι αποτέλεσμα του γεγονότος ότι η βελτιστοποίηση μπορεί και λαμβάνει βέλτιστες αποφάσεις σε πολύ μικρό χρονικό διάστημα που ο ανθρώπινος νους δυσκολεύεται να συλλάβει. Η προσεκτική επεξήγηση των αποτελεσμάτων αυτών, συχνά δίνει την δυνατότητα στον σχεδιαστή επέκτασης, κατανόησης ή και διόρθωσης της γνώσης η οποία είναι αποτέλεσμα της εμπειρίας.

Η συνεισφορά της παρούσας διατριβής στο πεδίο των συστημάτων αυτομάτου ελέγχου αστικής κυκλοφορίας συνοψίζεται στα εξής σημεία :

- Τροποποίηση του μαθηματικού προτύπου αποθήκευσης-και-προώθησης με τη χρήση μη γραμμικών συναρτήσεων με αποτέλεσμα την δημιουργία ενός πιο ρεαλιστικού μοντέλου για την περιγραφή της διεργασίας της κυκλοφοριακής ροής.
- Δυνατότητα τυχαίας επιλογής του διακριτού διαστήματος ελέγχου.
- Επίλυση του μη γραμμικού προβλήματος μαζί με όλους τους περιορισμούς χωρίς γραμμικοποίηση του αρχικού μοντέλου.
- Ο παραγόμενος βέλτιστος έλεγχος δίνει λύσεις οι οποίες μπορούν να χρησιμοποιηθούν ως σημείο αναφοράς κατά την σχεδίαση συστημάτων ελέγχου ενώ επιτρέπουν την εξέταση του βαθμού υποβελτιστότητας των άλλων προτεινόμενων μεθόδων ελέγχου.
- Δυνατότητα εφαρμογής της στρατηγικής ελέγχου σε δίκτυα μεγάλης κλίμακας με τυχαία τοπολογία και χαρακτηριστικά.

6.2 Παρατηρήσεις και μελλοντικές εργασίες

Τα αποτελέσματα της παρούσας εργασίας μπορούν να χαρακτηρισθούν αρκετά ικανοποιητικά. Ωστόσο, υπάρχουν ακόμη ανοικτές κατευθύνσεις έρευνας που μπορούν να συνεισφέρουν στην περαιτέρω μελέτη του προβλήματος βέλτιστης σηματοδότησης αστικών δικτύων. Ζητήματα στα οποία μπορεί να στραφεί η μελλοντική έρευνα είναι :

- Τροποποίηση του προτεινόμενου μη γραμμικού μοντέλου στο μαθηματικό πρότυπο αποθήκευσης-και-προώθησης ώστε να ξεπεραστούν προβλήματα σύγκλισης του αλγορίθμου εφικτής κατεύθυνσης. Στην κατεύθυνση αυτή μπορεί να εξετασθεί η επίλυση του μη γραμμικού προβλήματος βέλτιστου ελέγχου μέσω μεθόδων βελτιστοποίησης που ανήκουν στον τομέα του μη λείου προγραμματισμού.
- Τροποποίηση του μοντέλου ελέγχου ώστε να λαμβάνει υπόψην του την χρονική υστέρηση της εισροής όπως συζητήθηκε στην §2.4.
- Ενσωμάτωση των περιορισμών ανισότητας (2.3.5) στον αλγόριθμο εφικτής κατεύθυνσης μέσω της μεθόδου προβολής κλίσεων και διερεύνηση για το αν η έμμεση χρήση της συνάρτησης τιμωρίας είναι καταλληλότερη όσο αφορά τον υπολογιστικό φόρτο.
- Διερεύνηση του βαθμού υποβελτιστότητας άλλων προτεινόμενων μεθόδων ελέγχου (π.χ., Γραμμικός-Τετραγωνικός έλεγχος) σε σύγκριση με τις λύσεις που απορρέουν από την επίλυση του μη γραμμικού βέλτιστου ελέγχου.
- Εφαρμογή της προτεινόμενης μεθοδολογίας σε πραγματικό χρόνο μέσω ενός συστήματος κλειστού βρόχου. Για το σκοπό αυτό το πρόβλημα πρέπει να επιλυθεί σε κυλιόμενο ορίζοντα όπως συζητήθηκε στην §1.4.

Παράρτημα A'

Θεωρία βελτιστοποίησης

A'.1 Βασικές αρχές

Έστω \mathbb{R}^n ο n -διάστατος Ευκλείδειος χώρος και $\mathcal{X} \in \mathbb{R}^n$ ένα μη κενό ανοικτό σύνολο. Το σύνολο των συναρτήσεων που είναι k φορές συνεχείς και διαφορίσιμες ορίζεται ως

$$\mathbb{C}^k = \{\phi \mid \phi \text{ είναι συνεχής και παραγωγίσιμη } k \text{ φορές στον } \mathbb{R}^n\}. \quad (\text{A'.1.1})$$

Έστω οι συναρτήσεις $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$, $\mathbf{g} : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$ και $\mathbf{h} : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^r$ που ανήκουν στο σύνολο \mathbb{C}^2 . Το γενικό μη γραμμικό πρόβλημα βελτιστοποίησης με περιορισμούς διατυπώνεται ως

$$\begin{aligned} \min & f(\mathbf{x}) \\ \text{υπό} & \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \\ & \mathbf{h}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{0} \\ & \mathbf{x} \in \mathcal{X} \end{aligned} \quad (\text{A'.1.2})$$

και είναι γνωστό ως πρόβλημα μη γραμμικού προγραμματισμού. Η $f(\mathbf{x})$ ονομάζεται αντικειμενική συνάρτηση, ενώ οι διανυσματικές συναρτήσεις

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} g_1(\mathbf{x}) & \cdots & g_m(\mathbf{x}) \end{bmatrix}^T, \quad (\text{A'.1.3})$$

$$\mathbf{h}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} h_1(\mathbf{x}) & \cdots & h_r(\mathbf{x}) \end{bmatrix}^T \quad (\text{A'.1.4})$$

περιγράφουν τους περιορισμούς ισότητας και ανισότητας του προβλήματος, αντίστοιχα.

Ένα σημείο \mathbf{x} που ικανοποιεί όλους τους περιορισμούς ονομάζεται επιτρεπτό σημείο και το σύνολο όλων αυτών των σημείων είναι η επιτρεπτή περιοχή \mathcal{R} που ορίζεται ως

$$\mathcal{R} = \{\mathbf{x} \in \mathcal{X} \mid \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}, \mathbf{h}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{0}\} \quad (\text{A'.1.5})$$

Ένας περιορισμός είναι ενεργός στο σημείο \mathbf{x} αν το \mathbf{x} βρίσκεται στο όριο της επιτρεπτής περιοχής του συγκεκριμένου περιορισμού (δηλαδή ισχύει αυστηρή ισότητα). Οι ενεργοί περιορισμοί σε κάποιο σημείο \mathbf{x} ορίζονται από το σύνολο

$$\mathcal{A} = \{\mathbf{x} \in \mathcal{X} \mid \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \text{ και } \mathbf{h}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\}. \quad (\text{A'.1.6})$$

Ένα γενικό ελάχιστο του προβλήματος (A'.1.2) ορίζεται από το σημείο \mathbf{x}^* που ικανοποιεί

$$f(\mathbf{x}^*) < f(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{R} \quad (\text{A'.1.7})$$

ενώ ένα αυστηρά τοπικό ελάχιστο \mathbf{x}^* ορίζεται ως το σημείο για το οποίο η $f(\mathbf{x}^*)$ είναι αυστηρά μικρότερη στην επιτρεπτή περιοχή \mathcal{R} για μια αρκούντως μικρή περιοχή περί του \mathbf{x}^* , δηλαδή

$$f(\mathbf{x}^*) < f(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in \{\mathbf{x} \in \mathcal{R} \mid \|\mathbf{x} - \mathbf{x}^*\| < \delta, \mathbf{x} \neq \mathbf{x}^*\} \quad (\text{A'.1.8})$$

για κάποιο πραγματικό $\delta > 0$.

Οι συνθήκες βελτιστοποίησης που πρέπει να ικανοποιούνται ώστε το \mathbf{x}^* να είναι ένα αυστηρά τοπικό ελάχιστο του προβλήματος (A'.1.2) μπορούν να εκφρασθούν μέσω της κλασσικής μεθόδου πολλαπλασιαστών Lagrange για την επίλυση προβλημάτων ελαχιστοποίησης με περιορισμούς ισότητας και ανισότητας. Η συνάρτηση Lagrange για το πρόβλημα (A'.1.2) είναι

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) = f(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{g}(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\mu}^T \mathbf{h}(\mathbf{x}) \quad (\text{A'.1.9})$$

όπου τα διανύσματα

$$\boldsymbol{\lambda} = [\lambda_1 \quad \dots \quad \lambda_m]^T \in \mathbb{R}^m \quad (\text{A'.1.10})$$

και

$$\boldsymbol{\mu} = [\mu_1 \quad \dots \quad \mu_r]^T \in \mathbb{R}_+^r = \{\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^r \mid \boldsymbol{\mu} \geq \mathbf{0}\} \quad (\text{A'.1.11})$$

είναι γνωστά ως πολλαπλασιαστές Karush-Kuhn-Tucker ή γενικευμένοι πολλαπλασιαστές Lagrange. Οι αναγκαίες συνθήκες πρώτου βαθμού για να είναι το \mathbf{x}^* ένα αυστηρό τοπικό ελάχιστο του προβλήματος (A'.1.2) απαιτούν την ύπαρξη των διανυσμάτων \mathbf{x}^* , $\boldsymbol{\lambda}^*$, $\boldsymbol{\mu}^*$ που εκπληρούν τις ακόλουθες συνθήκες

$$\nabla \mathcal{L}(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*, \boldsymbol{\mu}^*) = \nabla f(\mathbf{x}^*) + \nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}^*)^T \boldsymbol{\lambda}^* + \nabla \mathbf{h}(\mathbf{x}^*)^T \boldsymbol{\mu}^* = \mathbf{0} \quad (\text{A'.1.12})$$

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0} \quad (\text{A'.1.13})$$

$$\mathbf{h}(\mathbf{x}^*) \leq \mathbf{0} \quad (\text{A'.1.14})$$

$$\boldsymbol{\mu}^{*T} \mathbf{h}(\mathbf{x}^*) = 0 \quad (\text{A'.1.15})$$

$$\boldsymbol{\mu}^* \geq \mathbf{0}. \quad (\text{A'.1.16})$$

Οι παραπάνω συνθήκες καλούνται αναγκαίες συνθήκες πρώτου βαθμού Karush-Kuhn-Tucker, αφού διατυπώθηκαν αρχικά από τον Karush [35] και αργότερα από τους Kuhn και Tucker [40]. Ο πίνακας

$N(\mathbf{x}^*) \in \mathbb{R}^{n \times r}$ αποτελείται από τις στήλες των ενεργών περιορισμών \mathcal{A} της συνάρτησης \mathbf{h} στο σημείο \mathbf{x}^*

$$N(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \nabla h_1(\mathbf{x}) & \cdots & \nabla h_r(\mathbf{x}) \end{bmatrix}^T, \quad (\text{A'.1.17})$$

ενώ οι στήλες του πίνακα $\nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ορίζονται ως

$$\nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \nabla g_1(\mathbf{x}) & \cdots & \nabla g_m(\mathbf{x}) \end{bmatrix}^T. \quad (\text{A'.1.18})$$

Οι στήλες των παραπάνω πινάκων πρέπει να ικανοποιούν την συνθήκη καταλληλότητας, δηλαδή πρέπει να είναι γραμμικά ανεξάρτητες στο σημείο \mathbf{x}^* . Συχνά ένα τέτοιο σημείο καλείται κανονικό.

Οι αναγκαίες συνθήκες πρώτου βαθμού ώστε το σημείο \mathbf{x}^* να είναι αυστηρό τοπικό ελάχιστο του προβλήματος (A'.1.2) δίδονται από τις (A'.1.12) έως (A'.1.16). Για την εξαγωγή συνθηκών δευτέρου βαθμού έστω το σύνολο δεικτών $I = \{i \mid h_i(\mathbf{x}^*) = 0\}$ και $I^+ = \{i \in I \mid \mu_i^* > 0\}$, $I^0 = \{i \in I \mid \mu_i^* = 0\}$ τα σύνολα των αυστηρά ενεργών και ασθενώς ενεργών περιορισμών, αντίστοιχα. Οι ικανές συνθήκες δευτέρου βαθμού ώστε το σημείο \mathbf{x}^* να είναι αυστηρό τοπικό ελάχιστο του προβλήματος (A'.1.2) δίδονται από τις (A'.1.12) έως (A'.1.16) και

$$\mathbf{v}^T \nabla^2 \mathcal{L}(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*, \boldsymbol{\mu}^*) \mathbf{v} > 0 \quad (\text{A'.1.19})$$

για κάθε μη μηδενικό διάνυσμα $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ που ανήκει στον υποχώρο

$$\begin{aligned} \mathcal{C} = \{ \mathbf{v} \neq \mathbf{0} \mid \nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}^*)^T \mathbf{v} = \mathbf{0}, \nabla h_i(\mathbf{x}^*)^T \mathbf{v} = 0 \ \forall i \in I^+, \\ \nabla h_i(\mathbf{x}^*)^T \mathbf{v} \leq 0 \ \forall i \in I^0 \} \end{aligned} \quad (\text{A'.1.20})$$

όπου $\nabla^2 \mathcal{L}(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*, \boldsymbol{\mu}^*)$ στην (A'.1.19) ο Χεσιανός πίνακας της (A'.1.9) ως προς \mathbf{x}^* .

A'.2 Κυρτός προγραμματισμός

Η κυρτότητα είναι μια μαθηματική έννοια με ιδιαίτερη σημασία για την βελτιστοποίηση, αφού οδηγεί στον προσδιορισμό μιας κατηγορίας προβλημάτων, για τα οποία οι προσδιορισθείσες αναγκαίες συνθήκες πρώτου βαθμού είναι αναγκαίες και ικανές συνθήκες για γενικό ελάχιστο.

Στο πρόβλημα (A'.1.2) της προηγούμενης παραγράφου, οι περιορισμοί ισότητας $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ μπορούν να θεωρηθούν ως ειδική περίπτωση περιορισμών ανισότητας. Ως εκ τούτου, η επιτρεπτή περιοχή \mathcal{R} μπορεί να ξαναορισθεί ως

$$\mathcal{R} = \{ \mathbf{x} \in \mathcal{X} \mid \mathbf{h}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{0} \} \quad (\text{A'.2.1})$$

Αν τα στοιχεία $h_i(\mathbf{x})$ της συνάρτησης $\mathbf{h}(\mathbf{x})$ είναι κυρτά για κάθε $i \in I$ και αν $g_i(\mathbf{x})$ είναι κυρτά αν $\lambda_i > 0$ και κοίλα αν $\lambda_i < 0$ η επιτρεπτή περιοχή \mathcal{R} είναι κυρτή. Έχοντας την επιτρεπτή περιοχή \mathcal{R} κυρτή και υποθέτοντας ότι η συνάρτηση $f(\mathbf{x})$ είναι και αυτή κυρτή τότε κάθε τοπικό ελάχιστο \mathbf{x}^* του προβλήματος

$$\min \{ f(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in \mathcal{R} \} \quad (\text{A'.2.2})$$

είναι και γενικό ελάχιστο. Κάτω από αυτές τις υποθέσεις κυρτότητας του προβλήματος οι αναγκαίες συνθήκες Karush-Kuhn-Tucker του προβλήματος (A'.2.2)

$$\nabla f(\mathbf{x}^*) + \mathbf{N}(\mathbf{x}^*)\boldsymbol{\mu}^* = \mathbf{0} \quad (\text{A'.2.3})$$

$$\mathbf{h}(\mathbf{x}^*) \leq \mathbf{0} \quad (\text{A'.2.4})$$

$$\boldsymbol{\mu}^{*T} \mathbf{h}(\mathbf{x}^*) = 0 \quad (\text{A'.2.5})$$

$$\boldsymbol{\mu}^* \geq \mathbf{0} \quad (\text{A'.2.6})$$

είναι επίσης και ικανές συνθήκες ώστε το \mathbf{x}^* να είναι γενικό ελάχιστο του περιορισμένου προβλήματος.

A'.3 Ιδιότητες αλγορίθμων

Για την επίλυση προβλημάτων της μορφής (A'.1.2) συνήθως χρησιμοποιούνται επαναληπτικοί αριθμητικοί αλγόριθμοι. Οι αλγόριθμοι αυτοί παράγουν μια ακολουθία σημείων $\{\mathbf{x}^{(k)} \mid k = 0, 1, \dots\}$ ή συντομότερα $\{\mathbf{x}^{(k)}\}$ που πρέπει να συγκλίνει σε ένα τοπικό ελάχιστο \mathbf{x}^* . Ο αλγόριθμος διακόπτεται όταν ικανοποιηθεί ένα κατάλληλο κριτήριο σύγκλισης [61, 21, 4, 8].

Μια ακολουθία διανυσμάτων $\{\mathbf{x}^{(k)}\}$ που ανήκουν στον n -διάστατο Ευκλείδειο χώρο συγκλίνει σε ένα διάνυσμα $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, αν η συντεταγμένη i του $\mathbf{x}^{(k)}$ συγκλίνει στην συντεταγμένη i του \mathbf{x} , για κάθε $i = 1, \dots, n$. Αν η $\{\mathbf{x}^{(k)}\}$ συγκλίνει στο \mathbf{x} γράφουμε $\mathbf{x}^{(k)} \rightarrow \mathbf{x}$ ή $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{x}$.

A'.4 Μέθοδοι συνάρτησης τιμωρίας

Η αριθμητική επίλυση προβλημάτων της μορφής (A'.1.2) μη γραμμικού προγραμματισμού, όπου τόσο η αντικειμενική συνάρτηση όσο και οι περιορισμοί είναι μη γραμμικοί, είναι η δυσκολότερη περίπτωση λείων προβλημάτων βελτιστοποίησης. Μια αποτελεσματική και απλή μέθοδος για την επίλυση τέτοιων προβλημάτων είναι η μέθοδος της συνάρτησης τιμωρίας.

Οι μέθοδοι συνάρτησης τιμωρίας επιχειρούν να ανάγουν το πρόβλημα περιορισμένης βελτιστοποίησης σε ένα πρόβλημα απεριορίστης βελτιστοποίησης που μπορεί να επιλυθεί μέσω γνωστών επαναληπτικών μεθόδων. Προς το σκοπό αυτό, η μέθοδος συνάρτησης τιμωρίας επεκτείνει την αντικειμενική συνάρτηση $f(\mathbf{x})$ με κατάλληλους όρους τιμωρίας, κατά τρόπο ώστε να επιβάλλεται η ικανοποίηση των περιορισμών ισότητας και ανισότητας.

Γενικά, μια κατάλληλη συνάρτηση τιμωρίας πρέπει να τιμωρεί την παραβίαση περιορισμών μέσω κατάλληλων παραμέτρων βάρους. Αν οι περιορισμοί είναι της μορφής του προβλήματος (A'.1.2) τότε μια

κατάλληλη συνάρτηση τιμωρίας $\pi(\mathbf{x})$ ορίζεται ως

$$\pi(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^m \phi[g_i(\mathbf{x})] + \sum_{i=1}^r \psi[h_i(\mathbf{x})] \quad (\text{A'.4.1})$$

όπου ϕ και ψ συνεχείς συναρτήσεις που ικανοποιούν τις ακόλουθες σχέσεις

$$\phi(y) = 0 \quad \text{αν} \quad y = 0 \quad \text{και} \quad \phi(y) > 0 \quad \text{αν} \quad y \neq 0 \quad (\text{A'.4.2})$$

$$\psi(y) = 0 \quad \text{αν} \quad y \leq 0 \quad \text{και} \quad \psi(y) > 0 \quad \text{αν} \quad y > 0 \quad (\text{A'.4.3})$$

Μια τυπική μορφή των συναρτήσεων ϕ και ψ είναι

$$\phi(y) = |y|^p \quad (\text{A'.4.4})$$

$$\psi(y) = [\max\{0, y\}]^p \quad (\text{A'.4.5})$$

όπου p θετικός ακέραιος αριθμός. Η πιο γνωστή μορφή της συνάρτησης τιμωρίας είναι αυτή για $p = 2$, όπου τετραγωνικοί όροι «τιμωρούν» την παραβίαση των περιορισμών.

Το πρόβλημα περιορισμένης βελτιστοποίησης (A'.1.2) μετατρέπεται πλέον στο πρόβλημα απεριορίστης βελτιστοποίησης

$$\begin{aligned} \min \quad & f(\mathbf{x}) + w \pi(\mathbf{x}) \\ \text{υπό} \quad & \mathbf{x} \in \mathcal{X} \end{aligned} \quad (\text{A'.4.6})$$

όπου w θετική παράμετρος βάρους. Οι όροι της συνάρτησης $\pi(\mathbf{x})$ «τιμωρούν» την παραβίαση των περιορισμών, έτσι ώστε, για $w \rightarrow \infty$, η απεριορίστη ελαχιστοποίηση της $f(\mathbf{x}) + w\pi(\mathbf{x})$ να οδηγεί όχι μόνο στην ελαχιστοποίηση της $f(\mathbf{x})$, αλλά και σε $\mathbf{g}(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{0}$ και $\mathbf{h}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{0}$. Η σχετική ακριβής ικανοποίηση των περιορισμών απαιτεί υψηλές τιμές της παραμέτρου βάρους w , πράγμα που πολλές φορές έχει ως αποτέλεσμα την δημιουργία «τεχνητών» τοπικών ελαχίστων και οδηγεί σε ένα πρόβλημα απεριορίστης ελαχιστοποίησης «νοσηρής» κατάστασης. Για το λόγο αυτό, η μέθοδοι συνάρτησης τιμωρίας παρουσιάζουν σημαντικά προβλήματα σύγκλισης προς την λύση \mathbf{x}^* του περιορισμένου προβλήματος βελτιστοποίησης.

Για την αποφυγή των παραπάνω προβλημάτων η παράμετρος βάρους w θα πρέπει να αντανakλά ένα κατάλληλο συμβιβασμό μεταξύ ταχύτητας σύγκλισης αφ' ενός και ακρίβειας ικανοποίησης των περιορισμών αφ' ετέρου. Επιπλέον, η συνάρτηση τιμωρίας μπορεί να χρησιμοποιηθεί για ένα μέρος μόνο των περιορισμών του προβλήματος (A'.1.2), ενώ οι υπόλοιποι να ληφθούν υπόψη μέσω κατάλληλων μεθοδολογιών περιορισμένης βελτιστοποίησης.

Βιβλιογραφία

- [1] B. Abdulhai, R. Pringle, and G. Karakoulas, *Reinforcement Learning for ITS: Introduction and a Case Study on Adaptive Traffic Signal Control*, Proc. of the 80th Transportation Research Board Annual Meeting (Washington, D.C., U.S.A.), January 7-11 2001.
- [2] G. Abu-Lebdeh and R. F. Benekohal, *Development of Traffic Control and Queue Management Procedures for Oversaturated Arterials*, Transportation Research Record **1603** (1997), 119-127.
- [3] G. C. D'Ans and D. C. Gazis, *Optimal Control of Oversaturated Store-and-forward Transportation Networks*, Transportation Science **10** (1974), 1-19.
- [4] M. S. Bazaraa, H. D. Sherali, and C. M. Shetty, *Nonlinear Programming: Theory and Algorithms*, 2nd ed., John Wiley & Sons, Inc., New York, 1993.
- [5] M. C. Bell, G. Scemama, and L. J. Iccetson, *CLAIRE—An Expert System for Congestion Management*, Proc. of the DRIVE Conference (Brussels, Belgium), 1991, pp. 596-614.
- [6] R. Bellmann, *Dynamic Programming*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1957.
- [7] D. P. Bertsekas, *Dynamic Programming and Optimal Control*, Athena Scientific, Belmont, Massachusetts, 1995.
- [8] ———, *Nonlinear Programming*, 2nd ed., Athena Scientific, Belmont, Massachusetts, 1999.
- [9] J. T. Betts, *Practical Methods for Optimal Control using Nonlinear Programming*, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, 2001.
- [10] C. Bielefeldt and F. Busch, *MOTION—A New On-line Model for Urban Traffic Signal Control*, Proc. of the 7th IFAC/IFORS Symposium on Transportation Systems: Theory and Applications of Advanced Technology (Tianjin, China), 1994, pp. 603-607.

- [11] F. Boillot, J.M. Blosseville, J.B. Lesort, V. Motyka, M. Papageorgiou, and S. Sellam, *Optimal Signal Control of Urban Traffic Networks*, Proc. of the 6th IEE International Conference on Road Traffic Monitoring and Control (London, England), 1992, pp. 75-79.
- [12] V. G. Boltyanskii, *Optimal Control of Discrete Systems*, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1978.
- [13] A. E. Jr. Bryson, *Optimal Control—1950 to 1985*, IEEE Control Systems (1996), 26-33.
- [14] A. E. Jr. Bryson and Y. C. Ho, *Applied Optimal Control*, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1975.
- [15] M. P. Canon, C. D. Cullum, and E. Polak, *Theory of Optimal Control and Mathematical Programming*, McGraw-Hill, Inc., New York, 1970.
- [16] E. J. Davison and Ü. Özgüner, *Decentralized Control of Traffic Networks*, IEEE Transactions on Automatic Control **28** (1983), 677-688.
- [17] C. Diakaki, *Integrated Control of Traffic Flow in Corridor Road Networks*, Ph.D. Thesis, Technical University of Crete, Department of Production Engineering and Management, Chania, Greece, 1999.
- [18] F. Dion and S. Yagar, *Real-time Control of Signalised Networks—Different Approaches for Different Needs*, Proc. of the 8th IEE International Conference on Road Traffic Monitoring and Control (Savoy Place, London, England), 1996, pp. 56-60.
- [19] L. T. Fan and C. S. Wang, *The Discrete Maximum Principle*, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1964.
- [20] J. L. Farges, J. J. Henry, and J. Tufal, *The PRODYN Real-Time Traffic Algorithm*, Proc. of the 4th IFAC Symposium on Transportation Systems (Baden-Baden, Germany), 1983, pp. 307-312.
- [21] R. Fletcher, *Practical Methods of Optimization*, 2nd ed., John Wiley & Sons, Inc., Chichester, 1987.
- [22] B. Friedrich and O. Ernhöfer, *Adaptive Signal Control Method BALANCE Traffic and Control Models*, Proc. of the 7th ITS World Congress (Turin, Italy), 2000.
- [23] N. H. Gartner, *OPAC: A Demand-Responsive Strategy for Traffic Signal Control*, Transportation Research Record **906** (1983), 75-84.
- [24] N. H. Gartner, F. J. Pooran, and C. M. Andrews, *Implementation of the OPAC Adaptive Control Strategy in a Traffic Signal Network*, Proc. of the 2001 IEEE Intelligent Transportation Systems Conference (Oakland (CA), U.S.A.), August 25-29 2001.

- [25] N. H. Gartner, C. Stamatiadis, and P. J. Tarnoff, *Development of Advanced Traffic Signal Control Strategies for Intelligent Transportation Systems: Multilevel Design*, Transportation Research Record **1494** (1994), 98-105.
- [26] D. C. Gazis, *Optimum Control of a System of Oversaturated Intersections*, Operation Research **12** (1964), 815-831.
- [27] D. C. Gazis and R. B. Potts, *The Oversaturated Intersection*, Proc. of the 2nd International Symposium on Traffic Theory (London, UK), 1963, pp. 221-237.
- [28] P. E. Gill, W. Murray, and M. H. Wright, *Practical Optimization*, Academic Press, New York, 1981.
- [29] R. L. Gordon, R. A. Reiss, H. Haenel, E. R. Case, R. L. French, A. Mohaddes, and R. Wolcott, *Traffic Control Systems Handbook*, FHWA-SA-95-032, Federal Highway Administration, Washington, DC, U.S.A., 1996.
- [30] J. J. Henry, J. L. Farges, and J. L. Gallego, *Neuro-fuzzy Techniques for Traffic Control*, Control Engineering Practice **6** (1998), 755-761.
- [31] J. M. Holtzman, *Convexity and the Maximum Principle for Discete Systems*, IEEE Transactions on Automatic Control **11** (1966).
- [32] P. B. Hunt, D. L. Robertson, R. D. Bretherton, and M. C. Royle, *The SCOOT On-Line Traffic Signal Optimisation Technique*, Traffic Engineering & Control **23** (1982), 190-199.
- [33] H. Ishidara and T. Fukuda, *Proposal of New Traffic Signal System using Emotional Algorithm*, Proc. of the 2000 IEEE Intelligent Transportation Systems Conference (Dearborn, USA), 2000, pp. 370-375.
- [34] B. W. Jordan and E. Polak, *Theory of a Class of Discrete Optimal Control Systems*, Journal of Electronics Control **17** (1964).
- [35] W. Karush, *Minima of Functions of Several Variables with Inequalities as Side Conditions*, M. s. thesis, Department of Mathematics, University of Chicago, 1939.
- [36] S. S. Keerthi and E. G. Gilbert, *Optimal, Infinite Horizon Feedback Laws for a General Class of Constained Discrete Time Systems: Stability and Moving-horizon Approximations*, Journal of Optimization Theory and Application **57** (1988), 265-293.

- [37] A. Kessaci, J. L. Farges, and J.J. Henry, *Upper Level for Real Time Urban Traffic Control Systems*, Preprints of the 11th IFAC World Congress (Tallinn, Estonia), vol. 10, 1990, pp. 226-229.
- [38] K. J. Kim and M. G. H. Bell, *Development of an Integrated Traffic Control Strategy for both Urban Signalised and Motorway Networks*, Proc. of the 1st Meeting of the EURO Working Group on Urban Traffic and Transportation (Landshut, Germany), 1992.
- [39] D. E. Kirk, *Optimal Control Theory: An Introduction*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1970.
- [40] H. W. Kuhn and A. W. Tucker, *Nonlinear Programming*, Proc. of the Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability (Berkeley, California) (J. Neyman, ed.), University of California Press, 1951.
- [41] J. H. Lim, S. H. Hwang, I. H. Suh, and Z. Bien, *Hierarchical Optimal Control of Oversaturated Urban Networks*, International Journal of Control **33** (1981), 727-737.
- [42] S. M. Lin, *A Distributed Optimum Signal Scheme for Dynamic Traffic Control*, Proc. of 2001 Transportation Research Board Annual Meeting (Washington, D.C., U.S.A.), November 20 2000.
- [43] H. Liu and M. Kuwahara, *An Approach on Network Traffic Signal Control under the Real-time and Oversaturated Flow Condition*, Proc. of the 2001 Transportation Research Board Annual Meeting (Washington, D.C., U.S.A.), November 20 2000.
- [44] P. R. Lowrie, *SCATS: The Sydney Co-ordinated Adaptive Traffic System—Principles, Methodology, Algorithms*, Proc. of the IEE International Conference on Road Traffic Signalling (London, England), 1982, pp. 67-70.
- [45] D. G. Luenberger, *Optimization by Vector Space Methods*, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1969.
- [46] ———, *Introduction to Linear and Nonlinear Programming*, 2nd ed., Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1984.
- [47] O. L. Mangasarian, *Nonlinear Programming*, McGraw-Hill, Inc., New York, 1969.
- [48] V. Manikonda, R. Levy, G. Satapathy, D. J. Lovell, P. C. Chang, and A. Teittinen, *Autonomous Agents for Traffic Simulation and Control*, Proc. of the 2001 Transportation Research Board Annual Meeting (Washington, D.C., U.S.A.), November 20 2000.

- [49] V. Mauro and C. Di Taranto, *UTOPIA*, Proc. of the 6th IFAC/IFIP/IFORS Symposium on Control, Computers, Communications on Transportations (Paris, France), 1989, pp. 245-252.
- [50] D. Q. Mayne, J. B. Rawlings, C. V. Rao, and P. O. M. Scokaert, *Constrained Model Predictive Control: Stability and Optimality*, *Automatica* **36** (2000), 789-814.
- [51] G. P. McCormick, *Nonlinear Programming*, Wiley-Interscience, New York, 1983.
- [52] T. McLean, C. Brader, C. Diakaki, M. Papageorgiou, S. Hangleiter, M. Tsavahidis, C. Damas, and B. Maxwell, *Sites, User Needs and Traffic Model Verification Report*, Deliverable 8.1, Project TABASCO (TR1054), Transport Telematics Office, Brussels, Belgium, 1997.
- [53] P. G. Michalopoulos and G. Stephanopoulos, *Oversaturated Signal Systems with Queue Length Constraints—I: Single Intersection*, *Transportation Research* **11** (1977), 413-421.
- [54] ———, *Oversaturated Signal Systems with Queue Length Constraints—II: System of Intersections*, *Transportation Research* **11** (1977), 423-428.
- [55] MIGRA Central, *TASS—Verkehrsabhängige Signalprogrammawahl*, Planungshandbuch, Siemens AG I&S ITS, München, 1999.
- [56] M. Minoux, *Mathematical Programming: Theory and Algorithms*, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1986.
- [57] P. Mirchandani and L. Head, *RHODES—A Real-time Traffic Signal Control System: Architecture, Algorithms, and Analysis*, TRISTAN (Triennial Symposium on Transportation Analysis) (San Juan, Puerto Rico), vol. 2, 1998.
- [58] M. Morari and J. H. Lee, *Model Predictive Control: Past, Present and Future*, *Computers and Chemical Engineering* **23** (1999), 667-682.
- [59] E. L. Muñoz-Marrero and G. Beauchamp-Bàez, *Design of a Fuzzy Logic Based Traffic Controller for an Arterial Street*, TRISTAN (Triennial Symposium on Transportation Analysis) (San Juan, Puerto Rico), vol. 2, 1998.
- [60] I. Nainar, M. Mohammadian, and J. Millar, *Adaptive Control of Traffic Signals using Fuzzy Logic and Genetic Algorithms*, Proc. of the 4th International Conference of Control, Automation, Robotics, and Vision (Singapore), 1996, pp. 573-577.

- [61] J. M. Ortega and W. C. Rheinboldt, *Iterative Solution of Nonlinear Equations in Several Variables*, Academic Press, New York, 1970.
- [62] M. Papageorgiou, *Applications of Automatic Control Concepts to Traffic Flow Modelling and Control*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo, 1983.
- [63] ———, *Optimierung*, 2nd ed., Oldenbourg, Munich, Germany, 1996.
- [64] ———, *Optimal Control as a Source of Intelligent Behaviour*, Proc. of the 12th IEEE International Symposium on Intelligent Control (Istanbul, Turkey), 1997, pp. 383-389.
- [65] ———, *Automatic Control Methods in Traffic and Transportation*, Operations Research and Decision Aid Methodologies in Traffic and Transportation Management (P. Toint, M. Labbe, K. Tanczos, and G. Laporte, eds.), Springer Verlag, New York, 1998, pp. 46-83.
- [66] ———, *Traffic Control*, Handbook of Transportation Engineering (R.W. Hall, ed.), Kluwer Academic Publishers, Boston, 1999, pp. 233-267.
- [67] M. Papageorgiou and M. Marinaki, *A Feasible Direction Algorithm for the Numerical Solution of Optimal Control Problems*, Internal Report 1995-4, Dynamic Systems and Simulation Laboratory, Technical University of Crete, Chania, Greece, 1995.
- [68] E. S. Park, J. H. Lim, I. H. Suh, and Z. Bien, *Hierarchical Optimal Control of Urban Traffic Networks*, International Journal of Control **40** (1984), 813-829.
- [69] J. B. Pearson and R. Sridhar, *A Discrete Optimal Control Problem*, IEEE Transactions on Automatic Control **11** (1966), no. 2, 171-174.
- [70] L. S. Pontryagin, V. Boltyanskii, R. Gamkrelidze, and E. Mishchenko, *The Mathematical Theory of Optimal Process*, Interscience Publishers, Inc., New York, 1962.
- [71] A. K. Rathi, *A Control Scheme for High Traffic Density Sectors*, International Journal of Control **22B** (1988), 81-101.
- [72] M. Riedmiller, *Advanced Supervised Learning in Multi-layer Perceptions—From Backpropagation to Adaptive Learning Algorithms*, International Journal of Computer Standards and Interfaces, Special Issue on Neural Networks **16** (1994).
- [73] ———, *RPROP—Description and Implementation Details*, Technical Report, University of Karlsruhe, Institut für Logik, Komplexität und Deduktionssysteme, Karlsruhe, Germany, 1994.

- [74] M. Riedmiller and H. Braun, *A Direct Adaptive Method for Faster Backpropagation Learning: The RPROP Algorithm*, Proc. of the IEEE International Conference on Neural Networks (ICNN) (San Francisco, CA, USA) (H. Ruspini, ed.), 1993, pp. 586-591.
- [75] J. B. Rosen, *The Gradient Projection Method for Nonlinear Programming—Part I: Linear Constraints*, Journal of Society of Industrial and Applied Mathematics **8** (1960), no. 1, 181-217.
- [76] L. I. Rozonoer, *L. S. Pontryagin's Maximum Principle in Optimal Control Theory*, Automation and Remote Control **1** (1959), no. 20.
- [77] A. D. Sage, *Optimum Systems Control*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1968.
- [78] R. H. W. Sargent, *Optimal Control*, Journal of Computational and Applied Mathematics **124** (2000), 361-371.
- [79] S. Sen and K. L. Head, *Controlled Optimization of Phases at an Intersection*, Transportation Science **31** (1997), no. 1, 5-17.
- [80] M. G. Singh and H. Tamura, *Modelling and Hierarchical Optimisation of Oversaturated Urban Traffic Networks*, International Journal of Control **20** (1974), 269-280.
- [81] J. C. Spall and D. C. Chin, *Traffic-responsive Signal Timing for System-wide Traffic Control*, Transportation Science **5C** (1997), 269-280.
- [82] H. J. Sussman and J. C. Willems, *300 Years of Optimal Control: From the Brachistochrone to the Maximum Principle*, IEEE Control Systems (1997), 32-44.
- [83] D. Tabak and B. C. Kuo, *Optimal Control by Mathematical Programming*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1971.

