

Τμήμα Ηλεκτρονικών Μηχανικών  
Πολυτεχνείο

& Μηχανικών Υπολογιστών  
Κρήτης



Χρήση παρατηρητή, βασισμένου σε νευρωνικά δίκτυα, για αναγνώριση  
φαινομένου “wing rock” σε δελταπτέρυγα αεροσκάφη 80 μοιρών

Χαβατζόπουλος Παρασκευάς Μάριος  
2005030102

**Εξεταστική Επιτροπή**

Μ. Χριστουδούλου(Επιβλέπων)

Π. Σταυρουλάκης

Χ. Ψυλλάκης

**Τοποθεσία**

Πολυτεχνειούπολη Πολυτεχνείου Κρήτης

Κουνουπιδιανά

Χανιά

**Ημερομηνία**

...../...../2011

## Πίνακας περιεχομένων

Ευχαριστίες.....	iii
Εισαγωγή .....	iv
1. Φαινόμενο Wing Rock .....	1
1.1 Άξονες κίνησης αεροσκάφους .....	2
1.2 Δυνάμεις που ασκούνται στο αεροσκάφος .....	5
1.3 Βασικές έννοιες .....	7
1.4 Slender Delta Wings $80^\circ$ .....	12
1.5 Εισαγωγή στο φαινόμενο wing rock .....	14
1.6 Διάφοροι τύποι wing rock.....	17
1.7 Βαθμοί ελευθερίας .....	22
1.8 Επίδραση ουραίου πτερυγίου στο φαινόμενο.....	24
1.9 Διεξαγωγή πειράματος .....	25
2. Διαφορικές Εξισώσεις στη MATLAB .....	27
2.1 Διαφορικές Εξισώσεις .....	28
2.2 Λύση διαφορικών εξισώσεων στη MATLAB .....	29
2.3 Βοηθήματα επίλυσης ODE .....	31
2.4 Βασική χρήση.....	32
2.5 Phase plane.....	35
2.6 Επιλογές βοηθημάτων επίλυσης .....	38
3. Προσομοίωση Wing Rock .....	39
3.1 Μαθηματικά μοντέλα που χρησιμοποιήθηκαν.....	40
3.2 Προσομοίωση με τη χρήση του μοντέλου (1) .....	41
3.3 Προσομοίωση με τη χρήση του μοντέλου (2) .....	43
3.4 Προσομοίωση με τη χρήση του μοντέλου (3) .....	45
3.5 Προσομοίωση με τη χρήση του μοντέλου (4α).....	47
3.6 Προσομοίωση με τη χρήση του μοντέλου (4β) .....	49
3.7 Σύγκριση προσομοιώσεων.....	51

3.9 Ανάλυση και επεξήγηση κώδικα MATLAB.....	57
4. Νευρωνικό Δίκτυο .....	66
4.1 Ανθρώπινος εγκέφαλος .....	67
4.2 Νευρωνικό δίκτυο.....	71
4.3 Πλεονεκτήματα νευρωνικού δικτύου .....	73
4.4 Μοντέλο νευρώνα .....	76
4.5 Συναρτήσεις ενεργοποίησης.....	78
4.6 Αρχιτεκτονικές δικτύου.....	81
4.7 RISE Observer.....	84
4.8 Patch Neural Network.....	87
4.9 Ανάλυση και επεξήγηση κώδικα MATLAB.....	92
5. Τελικά Συμπεράσματα .....	98
5.1 Συμπεράσματα σχετικά με το φαινόμενο wing rock.....	99
5.2 Συμπεράσματα σχετικά με τη προσομοίωση του φαινομένου ...	100
5.3 Συμπεράσματα σχετικά με το Patchy Neural Network.....	101
5.4 Τελικά Συμπεράσματα .....	102
Βιβλιογραφία.....	103
Παράρτημα Α:Γραφικές Παραστάσεις .....	- 1 -
Παράρτημα Β:Κώδικας MATLAB .....	- 8 -

## Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω τον κ. Χριστοδούλου, που μου έδωσε την ευκαιρία να ασχοληθώ με ένα τόσο ενδιαφέρον θέμα στη διπλωματική εργασία μου.

Επίσης, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον κ. Γιώτη για όλη του τη βοήθεια στην επίτευξη των στόχων που απαιτούνταν για την ολοκλήρωση αυτής της διπλωματικής.

Ιδιαίτερες ευχαριστίες πρέπει να υποβληθούν στον κ. Ψυλλάκη για την εκτεταμένη βοήθειά του στη συγγραφή των κωδίκων MATLAB για τη προσομοίωση του φαινομένου wing rock, για την δημιουργία του παρατηρητή του νευρωνικού δικτύου και για την ανανέωση των βαρών του δικτύου αυτού.

## Εισαγωγή

Η παρούσα διπλωματική εργασία πραγματεύεται την αναγνώριση του φαινομένου “wing rock” σε slender delta πτερύγια  $80^\circ$  με τη χρήση νευρωνικού δικτύου. Χρησιμοποιείται το νευρωνικό δίκτυο Patchy Neural Network, όπως αυτό προτείνεται στη δημοσίευση [30]. Για την δημιουργία αυτού και την ανανέωση των βαρών του, απαιτείται πρώτα η κατασκευή του RISE παρατηρητή, ο οποίος εκτιμά τη κίνηση του αεροσκάφους κατά τη διάρκεια του φαινομένου με αρωγό τη προσομοίωση του φαινομένου από το μοντέλο που προτείνεται στη δημοσίευση [2].

Στο πρώτο κεφάλαιο, παρουσιάζεται το φαινόμενο “wing rock” όπως αυτό παρατηρείται σε μαχητικά αεροσκάφη υψηλών ταχυτήτων με οπισθοκλινή πτερύγια. Επίσης, επεξηγούνται και αναλύονται αεροναυπηγικοί όροι που είναι ιδιαίτερα χρήσιμοι για τη κατανόηση των μοντέλων προσομοίωσης του φαινομένου, που παρουσιάζονται στο κεφάλαιο 3. Τα μοντέλα προσομοίωσης που χρησιμοποιήθηκαν είναι για slender delta πτερύγιο  $80^\circ$ . Περαιτέρω, φαίνεται γραφικά η αλληλεπίδραση της γωνίας επιθέσεως του αεροσκάφους με το μέγεθος της ταλάντωσης που εμφανίζεται κατά τη διάρκεια του φαινομένου.

Στο δεύτερο κεφάλαιο, δίνονται περιληπτικά πληροφορίες σχετικά με την επίλυση συνήθων διαφορικών εξισώσεων στη MATLAB. Αυτό είναι σημαντικό, καθώς τα μοντέλα προσομοίωσης και ο RISE παρατηρητής είναι διαφορικές εξισώσεις που επιλύθηκαν με τη βοήθεια της MATLAB.

Στο κεφάλαιο 3, παρουσιάζονται τα μοντέλα προσομοίωσης, οι όροι που τα αποτελούν και οι τιμές αυτών όπως δίνονται από τις αντίστοιχες δημοσιεύσεις μελέτης του φαινομένου. Επίσης, δίνεται η γραφική απεικόνιση των αποτελεσμάτων των μοντέλων. Μέτα από σύγκριση αυτών, διαπιστώνεται ότι για τη κατασκευή του παρατηρητή και κατ’ επέκταση του νευρωνικού δικτύου, μπορεί να χρησιμοποιηθεί οποιοδήποτε από τα μοντέλα και επιλέγεται τυχαία το μοντέλο που παρουσιάζεται στη δημοσίευση [2].

Στο κεφάλαιο 4, αναλύεται η λειτουργία των νευρωνικών δικτύων προκειμένου να εισαχθεί ο μελετητής στο αντικείμενο αυτό. Έπειτα, δίνονται οι λεπτομέρειες του νευρωνικού δικτύου Patchy Neural Network(PNN) και του RISE παρατηρητή βάσει της δημοσίευσης [30].

Στο τελευταίο κεφάλαιο, δίνονται τα συμπεράσματα που μπορούν εξαχθούν από το κάθε κομμάτι της διπλωματικής εργασίας. Επίσης, δίνεται μία

ολοκληρωμένη εικόνα των στόχων που έχει αυτή η εργασία. Στόχος αυτής της διπλωματικής είναι η αναγνώριση του φαινομένου “wing rock”. Άρα, χρησιμοποιείται το μοντέλο προσομοίωσης για να υπάρχει εικόνα του φαινομένου και πως αυτό επιδράει στο αεροσκάφος. Έπειτα, παρατηρείται η κίνηση του φαινομένου από το RISE observer. Τέλος, χρησιμοποιώντας το Patchy Neural Network, δημιουργείται ένα νευρωνικό δίκτυο για την αναγνώριση του φαινομένου. Η ανανέωση των βαρών σε αυτό το δίκτυο γίνεται με τη συνδρομή του RISE observer.

Η οργάνωση κεφαλαίων βασίστηκε στο τρόπο διεξαγωγής του στόχου της διπλωματικής. Δηλαδή, ακολουθεί τη ροή εργασίας που απαιτείται για την αναγνώριση του φαινομένου “wing rock” με τη χρήση του PNN.



# Κεφάλαιο 1

## Φαινόμενο Wing Rock

### Περίληψη

Σε αυτό το κεφάλαιο παρουσιάζονται κάποια γενικά στοιχεία περί αεροναυπηγικής που είναι χρήσιμα για τη κατανόηση των μοντέλων που χρησιμοποιούνται για τη προσομοίωση του φαινομένου “wing rock”. Αυτές οι ταλαντώσεις, που αποκαλούνται “wing rock”, παρατηρούνται συνήθως σε μαχητικά αεροσκάφη υψηλών ταχυτήτων με οπισθοκλινή πτερύγια.

Περαιτέρω, θα γίνει μία αναφορά στο φαινόμενο “wing rock”, στα αίτια εμφάνισης αυτού και τις συνέπειές του. Το υπόψη φαινόμενο είναι ένα απαιτητό αντικείμενο μελέτης για τα σημερινά, αλλά και τα μελλοντικά, αεροσκάφη καθώς αποδεικνύεται ένας σοβαρός περιορισμός στην εκτέλεση ελιγμών. Η δυνατότητα των σημερινών μαχητικών αεροσκαφών να εκτελούν ελιγμούς μεγάλης επιδεξιότητας υπό μεγάλες γωνίες επιθέσεως, όπως ο ελιγμός “point and shoot” ή ο ελιγμός “positioning”, θα περιορισθεί δραστικά αν εμφανιστεί wing rock, καθώς μειώνει την τακτική αποτελεσματικότητα. Επιπλέον, το φαινόμενο αυτό μπορεί να προκαλέσει απώλεια του ελέγχου του αεροσκάφους και μπορεί να αποβεί μοιραίο. Επίσης, θα γίνει λόγος στα είδη “wing rock” που υπάρχουν και θα εξηγηθεί ο τρόπος εξαγωγής των μοντέλων προσομοίωσης.

Τέλος, θα γίνει αναφορά στον τρόπο διεξαγωγής του πειράματος για την καταγραφή του φαινομένου και των παραμέτρων που το ορίζουν.

### Πίνακας περιεχομένων

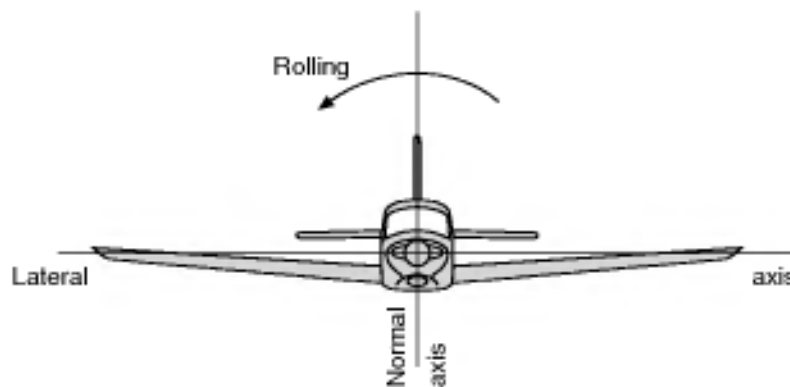
1.1 Άξονες κίνησης αεροσκάφους .....	2
1.2 Δυνάμεις που ασκούνται στο αεροσκάφος.....	5
1.3 Βασικές έννοιες.....	7
1.4 Slender Delta Wings 80°.....	12
1.5 Εισαγωγή στο φαινόμενο wing rock.....	14
1.6 Διάφοροι τύποι wing rock.....	17
1.7 Βαθμοί ελευθερίας .....	22
1.8 Επίδραση ουραίου πτερυγίου στο φαινόμενο.....	24
1.9 Διεξαγωγή πειράματος .....	25



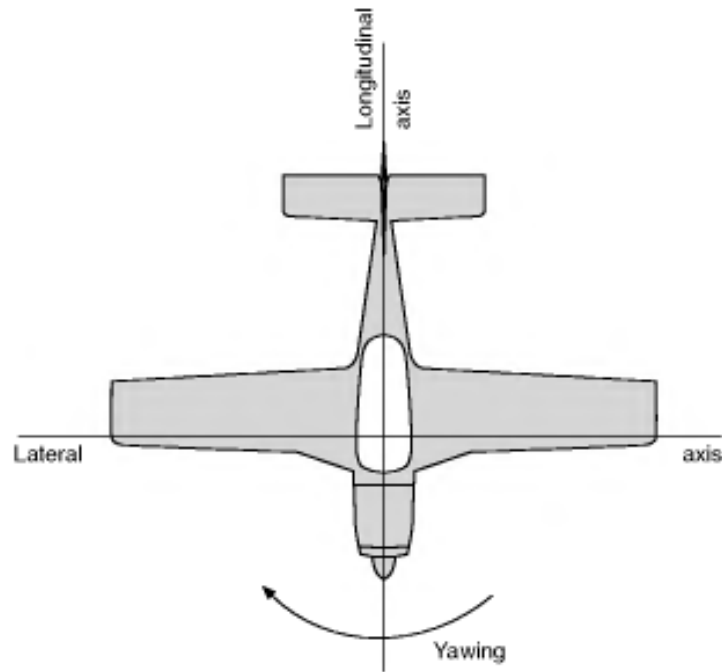
## 1.1 Άξονες κίνησης αεροσκάφους

Το αεροσκάφος έχει ελευθερία κινήσεων όπως κανένα άλλο μέσο μεταφοράς. Κατά μία έννοια, κάθε κίνηση ενός αεροσκάφους μπορεί να θεωρηθεί ελιγμός. Ένα αεροπλάνο έχει έξι βαθμούς ελευθερίας οι οποίοι περιγράφονται σε σχέση με τους τρεις άξονες του που παρουσιάζονται παρακάτω.

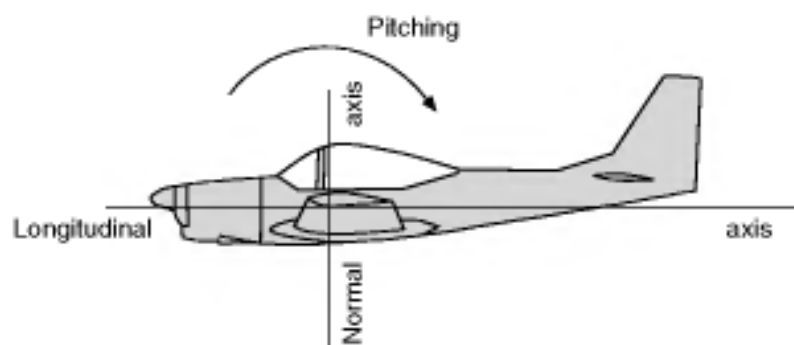
Ο διαμήκης άξονας(longitudinal axis) είναι μία ευθεία γραμμή που διατρέχει κατά μήκος το αεροσκάφος διαμέσου του κέντρου βαρύτητας αυτού. Είναι οριζόντιος όταν το αεροπλάνο βρίσκεται σε θέση “rigging”. Το αεροσκάφος μπορεί να ταξιδεύει προς τα εμπρός ή προς τα πίσω πάνω σε αυτό τον άξονα. Η κίνηση προς τα πίσω είναι ένας από τους πιο σπάνιους ελιγμούς, αλλά η κίνηση προς τα εμπρός κατά μήκος αυτού του άξονα είναι ο πιο κοινός ελιγμός. Οποιαδήποτε περιστροφική κίνηση γύρω από αυτό τον άξονα αποκαλείται rolling.



Ο κάθετος άξονας(normal axis) είναι μία ευθεία γραμμή διαμέσου του κέντρου βαρύτητας του αεροσκάφους, η οποία είναι κάθετη όταν το αεροσκάφος βρίσκεται σε θέση “rigging”. Άρα, βρίσκεται σε κάθετη γωνία ως προς το διαμήκη άξονα. Ένα αεροπλάνο μπορεί να κινείται προς τα πάνω ή προς τα κάτω κατά μήκος αυτού του άξονα. Αλλά στη πράξη αυτή η κίνηση δεν είναι ιδιαίτερα συνήθης, καθώς η άνοδος και η κάθοδος πραγματοποιούνται κυρίως με τη κλίση του διαμήκους άξονα προς τον οριζόντιο άξονα, ακολουθούμενου από μία ευθεία κίνηση κατά μήκος του τελευταίου. Η περιστροφική κίνηση του αεροσκάφους γύρω από το κάθετο άξονα αποκαλείται yawing.

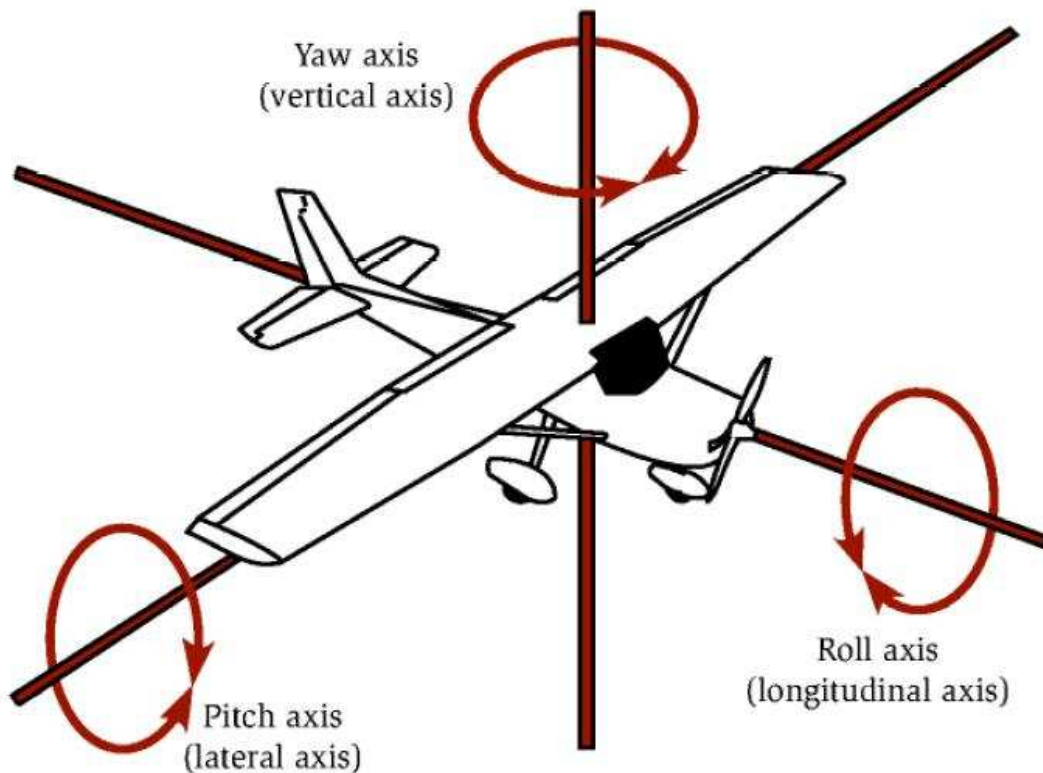


Ο πλευρικός άξονας(lateral axis) είναι μία ευθεία γραμμή διαμέσου του κέντρου βαρύτητας του αεροσκάφους σε κάθετη γωνία ως προς το κάθετο και το διάμηκες άξονα. Είναι οριζόντιος όταν το αεροπλάνο βρίσκεται σε θέση “rigging” και παράλληλος προς τη γραμμή που ενώνει τις άκρες των πτερυγίων. Το αεροσκάφος μπορεί να κινηθεί δεξιά ή αριστερά ως προς το πλευρικό άξονα. Οποιαδήποτε περιστροφική κίνηση γύρω από αυτό τον άξονα αποκαλείται pitching.



Αυτοί οι άξονες μπορεί να θεωρηθούν ότι κινούνται με το αεροσκάφος και ότι πάντα παραμένουν αμετάβλητοι σε σχέση με το αεροσκάφος. Για παράδειγμα, ο κάθετος άξονας θα παραμείνει παράλληλος ως προς τη γραμμή που ενώνει τις άκρες των πτερυγίων σε όποια θέση και να βρίσκεται το αεροπλάνο στο χώρο. Ή ένα άλλο παράδειγμα, κατά τη διάρκεια μίας κάθετης βουτιάς με τη μύτη, ο διάμηκης άξονας θα είναι κάθετος, ενώ ο κάθετος και ο πλευρικός άξονας θα είναι οριζόντιοι.

Γενικά, ο διαμήκης άξονας(longitudinal axis) συναντάται και ως άξονας roll. Ο κάθετος άξονας(normal axis) αποκαλείται και άξονας yaw, ενώ μπορεί να γίνει αναφορά στο πλευρικό άξονα(lateral axis) και ως άξονας pitch.

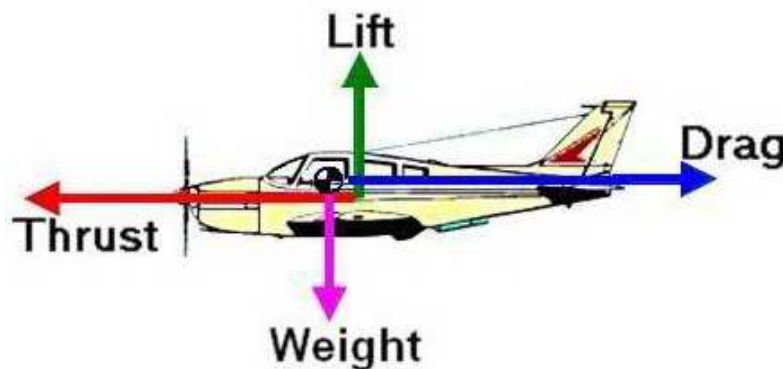


Η θέση “rigging” είναι η θέση του αεροσκάφους στην οποία ο διαμήκης άξονας και ο πλευρικός άξονας του αεροσκάφους βρίσκονται σε οριζόντιο επίπεδο. Είναι ένας όρος που χρησιμοποιείται στη αεροναυπηγική και σημαίνει ότι το αεροπλάνο έχει απογειωθεί και βρίσκεται καθέτως και διαμήκως στο υψόμετρο που θα είχε σε μία σταθερή και επίπεδη πτήση(level flight).

## 1.2 Δυνάμεις που ασκούνται στο αεροσκάφος

Όταν ένα αντικείμενο κινείται στον αέρα, ασκούνται πάνω του δύο δυνάμεις που προσπαθούν να το τραβήξουν κάτω και να το σταματήσουν να κινείται. Αυτές οι δυνάμεις είναι το βάρος(weight) και η αντίσταση του αέρα(drag) αντίστοιχα. Για να επιτευχθεί πτήση, πρέπει να ασκηθούν δύο δυνάμεις που θα αναιρέσουν και θα ξεπεράσουν το βάρος και την αντίσταση του αέρα. Αυτές οι δυνάμεις είναι η άνωση(lift) και η ώση(thrust).

Όταν η ώση ξεπερνάει την αντίσταση του αέρα και η άνωση υπερβαίνει τη βαρυτική έλξη, ένα αεροδυναμικό αντικείμενο θα επιταχύνει προς τα μπρος και πάνω. Στην σταθερή και επίπεδη πτήση με σταθερή ταχύτητα, η άνωση είναι ίση με το βάρος και η αντίσταση του αέρα ισοδυναμεί με την ώση.



Η **ώση** είναι η αεροδυναμική δύναμη που δημιουργείται από το κινητήρα του αεροσκάφους. Είναι παράλληλη με τη κίνηση του σκάφους.

Η **άνωση** είναι η δύναμη που απευθείας αντιστέκεται στο βάρος του αεροσκάφους και το κρατάει στον αέρα. Η άνωση παράγεται από κάθε κομμάτι του αεροσκάφους, αλλά το μεγαλύτερο μέρος αυτής παράγεται από τα πτερύγια. Είναι μία μηχανική αεροδυναμική δύναμη που παράγεται από τη κίνηση του αεροπλάνου στον αέρα. Η άνωση δρα μέσω του σημείου πίεσης του αντικειμένου και είναι κάθετο στη κατεύθυνση της ροής του αέρα.

Η άνωση προκαλείται όταν η ροή στρέφεται σε μία κατεύθυνση και η άνωση παράγεται στην αντίθετη κατεύθυνση, σύμφωνα με το τρίτο νόμο του Νεύτωνα (δράση και αντίδραση). Καθώς, ο αέρας είναι αέριο και τα σωματίδια είναι ελεύθερα να κινούνται, οποιαδήποτε στέρεη επιφάνεια μπορεί να εκτρέψει μία ροή. Για το πτερύγιο ενός αεροσκάφους, η επάνω και η κάτω επιφάνειες συνεισφέρουν στην εκτροπή της ροής.

Η **αντίσταση του αέρα** είναι μία αεροδυναμική δύναμη που αντιστέκεται στη κίνηση του αεροσκάφους διαμέσου του αέρα. Η αντίσταση αυτή δημιουργείται από κάθε κομμάτι του αεροσκάφους, ακόμα και από τις μηχανές. Η αντίσταση μπορεί να παρουσιασθεί σαν μία αεροδυναμική τριβή. Η

αντίσταση του αέρα προκαλείται από την επιφανειακή τριβή μεταξύ των σωματιδίων του αέρα και της επιφάνειας του αεροσκάφους.

Η αντίσταση του αέρα μπορεί επίσης να χαρακτηριστεί ως η αεροδυναμική αντίσταση στη κίνηση του αεροσκάφους δια μέσου του αέρα και εξαρτάται από τη μορφή του αεροσκάφους.

Η άνωση και η αντίσταση του αέρα δημιουργείται από την αλληλεπίδραση και την επαφή ενός στερεού αντικειμένου με ένα ρευστό, υγρό ή αέριο. Δεν παράγεται από ένα δυναμικό πεδίο, με την έννοια του βαρυτικού πεδίου ή ενός ηλεκτρομαγνητικού πεδίου, όπου ένα αντικείμενο επηρεάζεται χωρίς να υπάρχει φυσική επαφή. Για να παραχθεί η άνωση ή η αντίσταση, το στερεό σώμα πρέπει να βρίσκεται σε επαφή με το ρευστό. Δηλαδή, χωρίς κάποιο ρευστό μέσα στο οποίο θα κινείται το αντικείμενο δεν μπορεί να υπάρξει άνωση ή αντίσταση. Ένα διαστημικό όχημα δεν μένει στο διάστημα λόγω της άνωσης των πτερυγίων, αλλά λόγω περιστροφικής μηχανικής σχετικής με την ταχύτητά του.

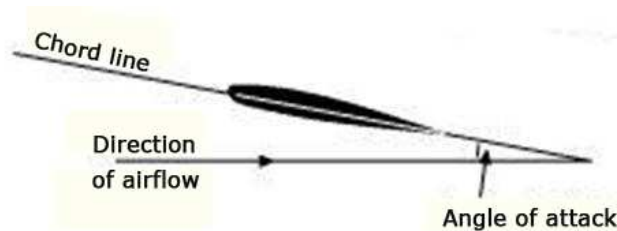
Για να υπάρξει άνωση ή αντίσταση, πρέπει να υπάρχει διαφορά ταχύτητας μεταξύ του αντικειμένου και του ρευστού. Πρέπει να υπάρχει κίνηση μεταξύ του αντικειμένου και του ρευστού. Δηλαδή, χωρίς κίνηση δεν μπορεί να υπάρξει οποιαδήποτε από τις δύο δυνάμεις. Η άνωση είναι κάθετη στη κατεύθυνση της κίνησης, ενώ η αντίσταση του αέρα είναι αντίθετη στη κατεύθυνση της κίνησης.

Καθώς η άνωση και η αντίσταση του αέρα είναι δυνάμεις, είναι διανυσματικά μεγέθη, τα οποία έχουν μέγεθος και διεύθυνση.

### 1.3 Βασικές έννοιες

Υπάρχουν κάποιες έννοιες που πρέπει να περιγραφούν, οι οποίες κάνουν την εμφάνισή τους στην εξίσωση περιγραφής κίνησης του αεροσκάφους όταν συμβαίνει το φαινόμενο “wing rock”.

Η **γωνιά επιθέσεως** (angle of attack,  $\alpha$ ) χρησιμοποιείται για να περιγράψει τη γωνία ανάμεσα στη γραμμή της χορδής του πτερυγίου ενός αεροσκάφους και στη κατεύθυνση του σχετικού ανέμου (relative wind). Η μέτρησή της γίνεται σε μοίρες ( $^{\circ}$ ).



Η κρίσιμη γωνία επιθέσεως (critical angle of attack) είναι η γωνία στην οποία ο συντελεστής ανύψωσης είναι μέγιστος. Αποκαλείται επίσης και γωνία επιθέσεως απώλειας στήριξης (stall angle of attack). Για γωνίες μικρότερες της κρίσιμης γωνίας επιθέσεως, όσο αυξάνεται η γωνία επιθέσεως αυξάνεται ο συντελεστής ανύψωσης. Επιπλέον, ο αέρας αρχίζει να ρέει λιγότερο ομαλά στη πάνω επιφάνεια του πτερυγίου και αρχίζει να διαχωρίζεται από την επιφάνεια αυτή.

Στις περισσότερες μορφές πτερυγίου, καθώς αυξάνει η γωνία επιθέσεως, το σημείο διαχωρισμού της ροής αέρα στην επάνω επιφάνεια μετακινείται από το απώτατο άκρο στο μπροστινό άκρο. Στη κρίσιμη γωνία επιθέσεως η ροή της επάνω επιφάνειας είναι περισσότερο διαχωρισμένη και το πτερύγιο παράγει το μέγιστο συντελεστή άνωσης. Καθώς η γωνία επιθέσεως αυξάνει περαιτέρω, η ροή της επάνω επιφάνειας διαχωρίζεται πλήρως όλο και περισσότερο από το πτερύγιο και παράγει λιγότερο συντελεστή άνωσης. Πάνω από αυτή τη κρίσιμη γωνία το αεροπλάνο λέγεται ότι βρίσκεται σε απώλεια στήριξης (stall).

Ένα αεροσκάφος βρίσκεται, εξ' ορισμού, σε απώλεια στήριξης όταν είναι γωνία επιθέσεως ίση ή μεγαλύτερη της κρίσιμης γωνία επιθέσεως παρά όταν έχει ταχύτητα μικρότερη ή ίση ενός ορίου. Η ταχύτητα στην οποία το αεροσκάφος θα βρεθεί σε απώλεια στήριξης εξαρτάται από βάρος αυτού, το συντελεστή βάρους, το κέντρο βαρύτητας και άλλους παράγοντες. Εν τούτοις, το αεροσκάφος βρίσκεται πάντα σε απώλεια στήριξης στην ίδια κρίσιμη γωνία επιθέσεως.

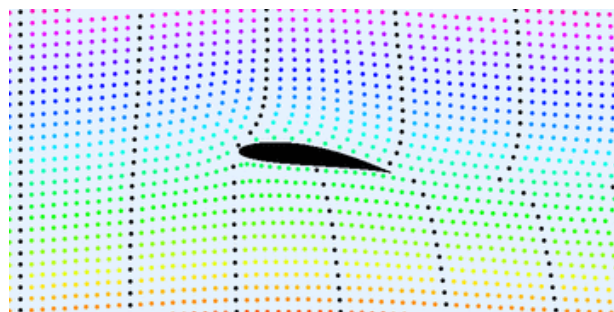


Η κρίσιμη γωνία ή γωνία απώλειας στήριξης είναι τυπικά στις 15 μοίρες για αρκετά αεροσκάφη. Τα μαχητικά αεροσκάφη, χρησιμοποιώντας μία ποικιλία επιπρόσθετων αεροδυναμικών επιφανειών (γνωστές ως high-lift devices), όπως για παράδειγμα προεκτάσεις του μπροστινού άκρου του πτερυγίου (leading edge wing root extensions), έχουν αυξήσει τη κρίσιμη γωνία σε πάνω από 45 μοίρες.

Ο **σχετικός άνεμος** (relative wind) είναι η κατεύθυνση της κίνησης της ατμόσφαιρας αναφορικά με ένα αεροσκάφος ή ένα πτερόγιο. Είναι αντίθετος με τη κατεύθυνση της κίνησης του αεροσκάφους ή του πτερυγίου ως προς την ατμόσφαιρα.

Κοντά σε οποιοδήποτε σημείο στην επιφάνεια του αεροσκάφους, ο αέρας κινείται παράλληλα με την επιφάνεια, αλλά σε μεγαλύτερη απόσταση από το αεροσκάφος η κίνηση του αέρα μπορεί να αναπαρασταθεί σαν ένα διάνυσμα. Αυτό το διάνυσμα είναι ο σχετικός άνεμος ή free stream velocity διάνυσμα. Ο σχετικός άνεμος διαφέρει από τον άνεμο στη μετεωρολογία στο γεγονός ότι το αεροσκάφος κινείται μέσα στον αέρα, εν αντιθέσει με το να κινείται ο αέρας γύρω από το αντικείμενο. Ο σχετικός άνεμος είναι μεγάλης σημασίας για τους πιλότους, καθώς αν υπερβούν τη κρίσιμη γωνία επιθέσεως θα έχει ως αποτέλεσμα την απώλεια στήριξης του αεροσκάφους, ανεξαρτήτως της ταχύτητας αυτού.

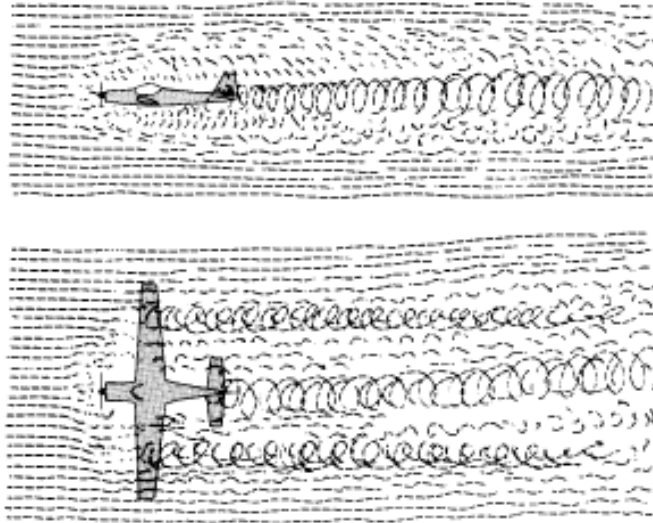
Οι **συνθήκες free stream** συνήθως δηλώνονται με το δείκτη “ $\infty$ ” εννοώντας τη ταχύτητα free stream. Free stream είναι ο απερίσπαστος αέρας κινούμενος σε αντίθετη κατεύθυνση και σε μεγάλη απόσταση από ένα αεροδυναμικό σώμα, προτού να έχει τη δυνατότητα το σώμα αυτό να αποκλίνει, να επιβραδύνει ή να συμπιέσει τον αέρα. Συνθήκες free stream θεωρούνται οι αντίστοιχες συνθήκες της ατμόσφαιρας.



Η **πυκνότητα**  $\rho$  καθορίζεται ως η μάζα ανά μονάδα όγκου του υλικού και η μονάδα μέτρησής του είναι  $\text{kg/m}^3$ . Η πυκνότητα του αέρα είναι μικρή σχετικά με αυτή του νερού (η μάζα ενός κυβικού μέτρου αέρα σε ύψος εδάφους είναι 1,226 kg ενώ η μάζα ενός κυβικού μέτρου νερού είναι 1000kg, περίπου 815 φορές παραπάνω) και παρόλα αυτά αυτή η ιδιότητα είναι που κάνει τις



εναέριες πτήσεις εφικτές. Η πυκνότητα του αέρα επηρεάζεται από το ύψος και τις καιρικές συνθήκες. Όσο μικρότερη η πυκνότητα του αέρα, τόσο πιο δύσκολη γίνεται η πτήση.



Το **άνοιγμα πτερυγίων**(wingspan ή span) ενός αεροσκάφους είναι η απόσταση από την άκρη του ενός πτερυγίου έως την άκρη του άλλου πτερυγίου. Δηλαδή, όπως φαίνεται στη παρακάτω εικόνα, το wingspan του παρακάτω αεροπλάνου είναι η απόσταση από το σημείο *A* μέχρι το σημείο *B*.



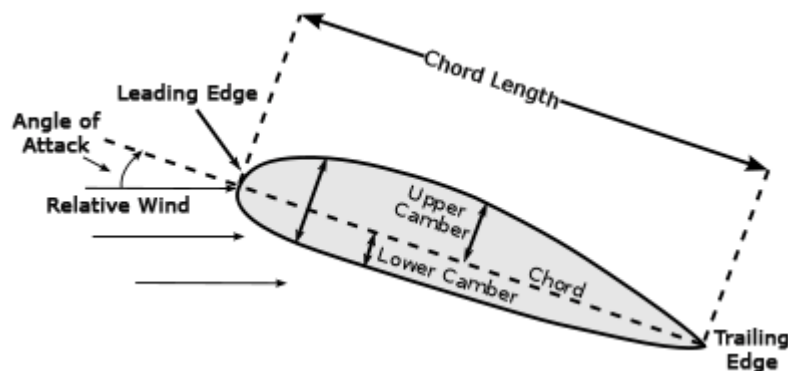
**Φορτίο πτερυγίου**(wing loading) είναι το φορτωμένο βάρος του αεροσκάφους διαιρεμένο με το εμβαδόν του πτερυγίου. Όσο πιο γρήγορα ένα αεροσκάφος πετάει, τόσο μεγαλύτερη είναι η άνωση που παράγεται ανά μονάδα εμβαδού πτερυγίου. Έτσι, ένα μικρότερο πτερύγιο μπορεί να μεταφέρει το ίδιο βάρος σε επίπεδη πτήση, λειτουργώντας σε ένα υψηλότερο φορτίο πτερυγίου. Αντίστοιχα, οι ταχύτητες απογείωσης και προσγείωσης θα είναι μεγαλύτερες. Το υψηλό φορτίο μειώνει και τη δυνατότητα ελιγμών. Το φορτίο πτερυγίου δίνεται σε  $\text{lb/ft}^2$ ,  $\text{kg/m}^2$  ή  $\text{N/m}^2$ . Για παράδειγμα,  $10 \text{ lb/ft}^2$ ,  $48.8 \text{ kg/m}^2$  ή  $479 \text{ N/m}^2$  είναι το ίδιο φορτίο πτερυγίου. Το φορτίο πτερυγίου είναι ένα χρήσιμο μέτρο για τη γενική επίδοση ενός αεροσκάφους στους ελιγμούς.

Η **ορμή αδρανείας**(moment of inertia)  $I_{xx}$ , ή ορμή αδρανείας μάζας(mass moment of inertia), είναι η αντίσταση ενός αντικειμένου σε αλλαγές στο ρυθμό περιστροφής. Η μονάδα μέτρησής του στο SI είναι  $\text{kg}\cdot\text{m}^2$ .

Το μπροστινό άκρο(leading edge) είναι το κομμάτι του πτερυγίου που συναντά πρώτο τη ροή αέρα και τη διαχωρίζει.

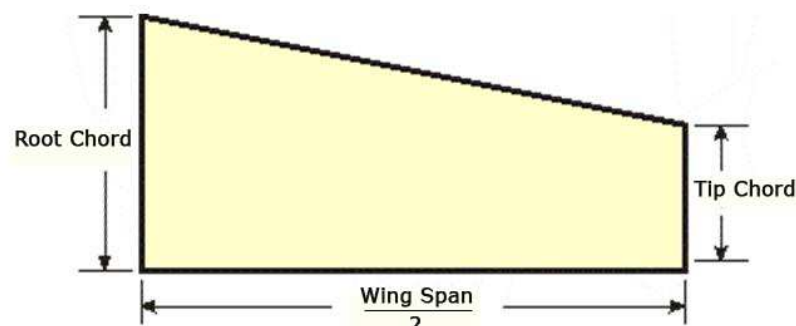
Το απώτατο άκρο(trailing edge) ενός πτερυγίου είναι το πίσω μέρος αυτού. Είναι εκεί όπου η ροή αέρα, που έχει διαχωριστεί από το μπροστινό άκρο, επανενώνεται αφού περάσει από τη πάνω και κάτω επιφάνεια του πτερυγίου.

Η **χορδή**  $c$  αναφέρεται στη νοητή ευθεία γραμμή που ενώνει το απώτατο άκρο(trailing edge) με το κέντρο καμπυλότητας του μπροστινού άκρου(leading edge) της διατομής του πτερυγίου. Το μήκος της χορδής είναι η απόσταση μεταξύ του απώτατου άκρου και του σημείου στο μπροστινό άκρο που η χορδή το διαπερνά.



Η χορδή βάσης(root chord) αναφέρεται στην ευθεία μεταξύ του απώτατου και μπροστινού άκρου του πτερυγίου που εφάπτεται στο αεροσκάφος και είναι παράλληλη σε αυτό.

Η χορδή μύτης(tip chord) αναφέρεται την άκρη του πτερυγίου, αυτή που είναι μακριά από το σώμα του αεροσκάφους, που ενώνει το μπροστινό και το απώτατο άκρο του πτερυγίου.



Το **εμβαδόν του πτερυγίου**  $S$  υπολογίζεται για να καθοριστεί το φορτίο του πτερυγίου, το οποίο είναι πολύ σημαντικό. Για να το υπολογίσουμε, αρχικά βρίσκουμε τη μέση τιμή της χορδής (average chord) με τη χρήση της παρακάτω εξίσωσης.

$$\text{average chord} = \frac{\text{root chord} + \text{tip chord}}{2}$$

Έπειτα, πολλαπλασιάζουμε τη μέση τιμή της χορδής με το άνοιγμα των πτερυγίων και υπολογίζουμε το εμβαδόν πτερυγίου, όπως φαίνεται παρακάτω.

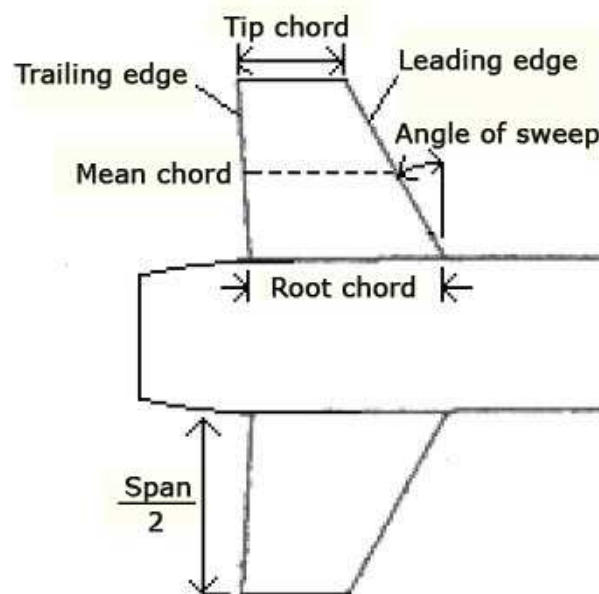
$$\text{wing area} = \text{wing span} * \text{average chord}$$

Η μονάδα μέτρησής του είναι τα τετραγωνικά μέτρα ( $\text{m}^2$ ). Για να βρούμε τη συνολική επιφάνεια πτερυγίου, υπολογίζουμε το εμβαδόν για κάθε πτερύγιο ξεχωριστά και μετά τα προσθέτουμε.

Το **χαρακτηριστικό μήκος**  $L$  είναι μία σημαντική διάσταση, η οποία καθορίζει τη κλίμακα ενός φυσικού συστήματος. Συχνά χρησιμοποιείται ως είσοδος σε ένα μοντέλο για τη πρόβλεψη ορισμένων χαρακτηριστικών του συστήματος.

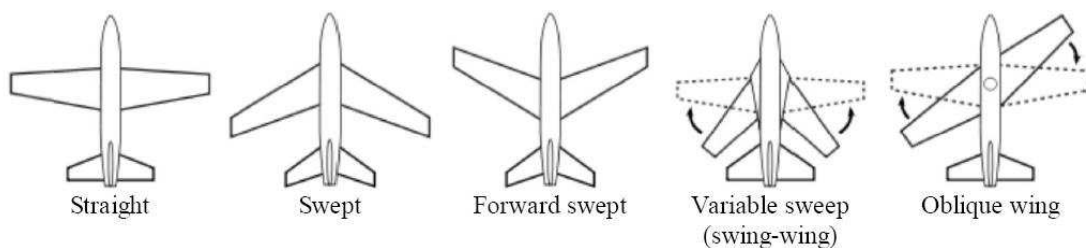
Ο **αεροδυναμικός συντελεστής ορμής roll**  $c_l$  είναι ο συντελεστής που μας δείχνει την αεροδυναμική πίεση που ασκείται σε απόσταση από το κέντρο μάζας του αεροσκάφους και κάνει το αεροσκάφος να υποβληθεί σε μία γωνιακή επιτάχυνση στον διαμήκη άξονα (άξονας roll).

Ο **συντελεστής απόσβεσης πλάτους ταλάντωσης**  $\mu_x$  είναι μία επιπρόσθετη επίδραση σταθεροποίησης που αντιστέκεται στη περιστροφή.



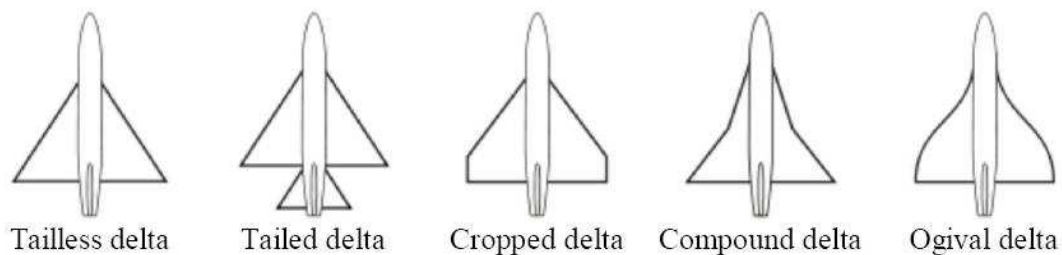
## 1.4 Slender Delta Wings 80°

Τα πτερύγια του αεροσκάφους μπορεί να είναι λοξά προς τα μπρος ή προς τα πίσω για διάφορους λόγους. Μία μικρή γωνία κλίσης των πτερυγίων χρησιμοποιείται συχνά για να ρυθμίσει το κέντρο ανύψωσης του αεροσκάφους όταν το πτερύγιο δεν μπορεί να τοποθετηθεί στην ιδανική θέση για κάποιο λόγο. Μπορεί να είναι οπισθοκλινές (swept back ή swept), εμπροσθοκλινές (forward swept) ή ευθύ(straight), ή μπορεί να είναι μεταβλητής γεωμετρίας (variable sweep).



Στο οπισθοκλινές(swept back) πτερύγιο, ξεκινώντας από το κορμό του αεροσκάφους το στέλεχος του πτερυγίου σχηματίζει γωνία προς τα πίσω προς το άκρο του. Στις υπερηχητικές ταχύτητες, τα συγκεκριμένα πτερύγια έχουν μικρότερη αντίσταση αέρα, αλλά δε συμπεριφέρονται καλά όταν υπάρχει απώλεια στήριξης του αεροσκάφους και απαιτούν μεγάλη ανθεκτικότητα για να αντέξουν την δυναμική ελαστικότητα(aeroelasticity) σε μεγάλες ταχύτητες.

Το δέλτα πτερύγιο έχει τριγωνικό σχήμα με οπισθοκλινές μπροστινό άκρο και κάθετο απώτατο άκρο. Ονοματίστηκε έτσι από το ελληνικό κεφαλαίο γράμμα δέλτα(Δ) και με το οποίο μοιάζει. Προσφέρει τα πλεονεκτήματα ενός οπισθοκλινούς πτερυγίου με καλή δομική συμπεριφορά. Υπάρχουν διάφοροι τύποι, όπως χωρίς ουρά(tailless delta), με ουρά(tailed delta), με σχήμα «s» (ogival delta), κεκομμένο(cropped delta) και άλλα.



Θεωρείται πτερύγιο δέλτα χωρίς ουρά που αποτελεί το πιο απλό τύπο και έχει κλασικό σχεδιασμό υψηλών ταχυτήτων. Η ροή γύρω από ένα πτερύγιο δέλτα

σε μεγάλη γωνία επιθέσεως χαρακτηρίζεται από τη δημιουργία δυνατών δινών στο μπροστινό άκρο του πτερυγίου.

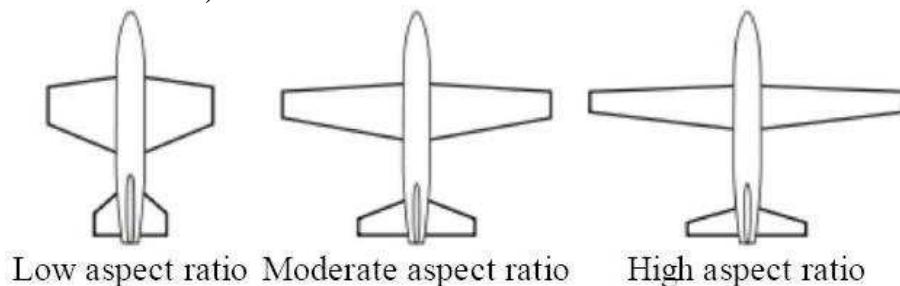
Περαιτέρω, το πτερύγιο που θα χρησιμοποιηθεί θα είναι slender, είναι επίμηκες σε σχέση με το άνοιγμα των πτερυγίων (wingspan) του αεροσκάφους. Τα slender πτερύγια είναι τα πιο αποδοτικά σε αεροδυναμικό επίπεδο, αλλά προσφέρουν μικρό χώρο ωφέλιμου φορτίου. Όσο ο λόγος δύο διαστάσεων (aspect ratio) μικραίνει, το πτερύγιο γίνεται πλέον επίμηκες.

Ο λόγος δύο διαστάσεων είναι το άνοιγμα πτερυγίων διαιρεμένο με τη μέση τιμή της χορδής. Είναι ένα μέγεθος που δείχνει πόσο μακρύ και πόσο λυγρό φαίνεται ένα πτερύγιο, κοιτάζοντας από πάνω ή από κάτω.

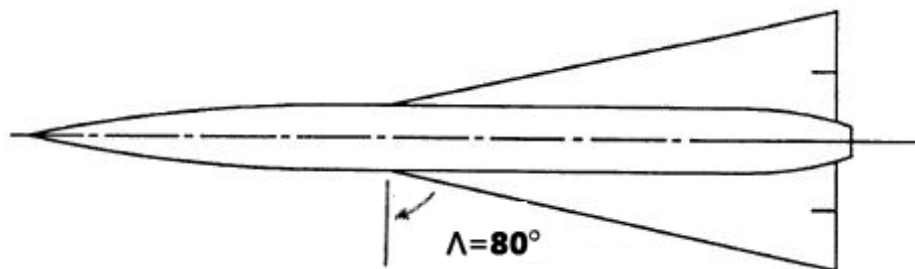
Για χαμηλό λόγο δύο διαστάσεων το πτερύγιο εμφανίζεται κοντό και παχύ. Είναι δομικά πιο αποδοτικό, έχει μεγαλύτερη δυνατότητα ελιγμών και μικρότερη αντίσταση αέρα σε μεγάλες ταχύτητες. Χρησιμοποιούνται κυρίως από πολεμικά αεροσκάφη, όπως το Lockheed F-104 Starfighter, και από αεροσκάφη υψηλών ταχυτήτων, όπως το North American X-15.

Τα πτερύγια γενικής χρήσης εμφανίζουν μέτριο λόγο δύο διαστάσεων, όπως για παράδειγμα είναι τα πτερύγια του Lockheed P-80 Shooting Star.

Όταν ένα πτερύγιο έχει υψηλό aspect ratio, εμφανίζεται μακρύ και λυγρό. Είναι αεροδυναμικά πιο αποδοτικό, έχοντας μικρότερη αντίσταση αέρα σε χαμηλές ταχύτητες. Χρησιμοποιούνται σε υπερηχητικά αεροσκάφη μεγάλου υψόμετρου (όπως το Lockheed U-2), υπερηχητικά αεροσκάφη (όπως το Bombardier Dash 8) και από υψηλών αποδόσεων ανεμοπλάνα (όπως το Glaser-Dirks DG-500).



Το πτερύγιο που μας ενδιαφέρει, έχει μία ακόμα ιδιότητα, ότι  $\Lambda=80^\circ$ . Αυτό σημαίνει ότι η γωνία  $\Lambda$  που σχηματίζεται μεταξύ της γραμμής του μπροστινού άκρου του πτερυγίου πλευρικά και της νοητής καθέτου στο σημείο εφαρμογής του πτερυγίου στην άτρακτο, είναι 80 μοίρες.



Άρα, θα ασχοληθούμε με το φαινόμενο “wing rock” που παρατηρείται σε slender δελταπτέρυγο  $80^\circ$  αεροσκάφος.



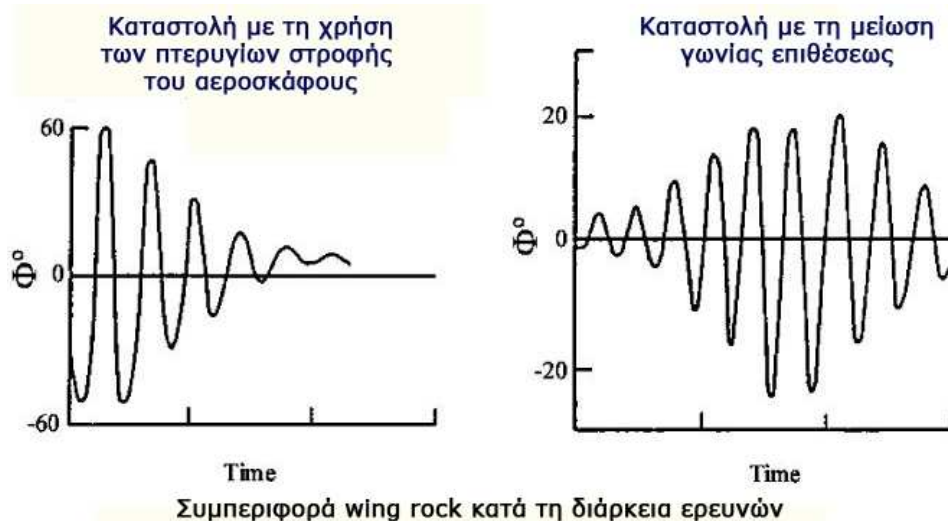
## 1.5 Εισαγωγή στο φαινόμενο wing rock

Πρέπει να σημειωθεί ότι το φαινόμενο wing rock δεν περιορίζεται σε ορισμένα αεροσκάφη, αλλά είναι ένα φαινόμενο που εντοπίζεται σε πρώιμα οπισθοκλινή αεροσκάφη. Συγκεκριμένα, έχουν καταγραφεί πάνω από δέκα σύγχρονα αεροσκάφη να παρουσιάζουν το συγκεκριμένο φαινόμενο.

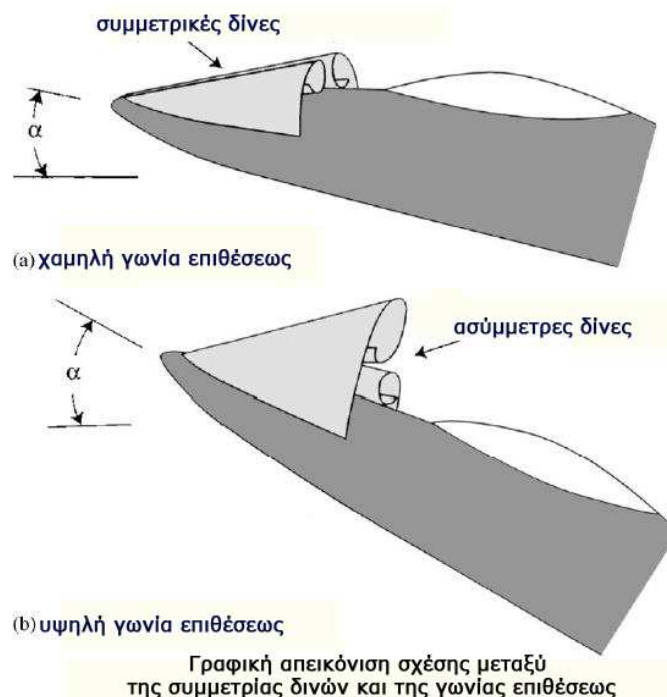
Τα slender πτερύγια είναι ικανά να δημιουργήσουν δίνη άνωσης σε μεγαλύτερες γωνίες επιθέσεως. Αυτό το φαινομενικά ευνοϊκό χαρακτηριστικό είναι επιρρεπές στο φαινόμενο “wing rock”. Το συγκεκριμένο φαινόμενο μπορεί να κάνει το αεροσκάφος να φτάσει σε μία περιορισμένου κύκλου ταλάντωση λόγω της ασυμμετρίας του στροβίλου. Έχουν μέχρι σήμερα κατασκευασθεί μοντέλα σταθερότητας που προβλέπουν τη κίνηση του αεροσκάφους όταν συμβαίνει το “wing rock”.

Αυτό το φαινόμενο είναι παρενέργεια του στροβίλου άνωσης, ο οποίος είναι παρών σε συγκεκριμένες συνθήκες πτήσης. Όταν υπάρξει θέμα ασυμμετρίας στη δομή της δίνης άνωσης, προκαλείται αυτή η ταλάντωση περιορισμένου κύκλου στο roll. Αυτή η κίνηση μπορεί να συνδυαστεί με κίνηση στους άλλους άξονες και να προκαλέσει απώλεια ελέγχου στο αεροπλάνο. Καθώς αυτό το φαινόμενο εμφανίζεται κατά τη προσγείωση και κατά τη διάρκεια πτητικών ελιγμών, το “wing rock” είναι μία πολύ επικίνδυνη κατάσταση και αποτελεί ένα μεγάλο πρόβλημα κατά τη παρακολούθηση ενός εχθρικού στόχου. Το φαινόμενο αυτό είναι ιδιαίτερο πρόβλημα για μαχητικά αεροσκάφη όπως το F-5, το F-8 και το F-15.

Η κίνηση του wing rock μπορεί να επηρεάσει αρνητικά τους ελιγμούς των σύγχρονων πολεμικών αεροσκαφών και να ελαττώσει τις προσεγγιζόμενες μεγάλες γωνίες επιθέσεως των πολιτικών αεροσκαφών. Έρευνες που σχεδιάστηκαν για τη μελέτη της ποιότητας αεροδυναμικής και χειρισμού των αεροσκαφών slender πτερυγίων σε χαμηλής ταχύτητας συνθήκες πτήσης, έδειξαν ότι το αεροσκάφος υπόκειται σε κίνηση wing rock σε γωνία επιθέσεως που ξεπερνάει περίπου τις  $20^\circ$ . Η κίνηση ήταν στην ουσία μία ταλάντωση roll στον διαμήκη άξονα. Η μεγαλύτερη γωνία roll ήταν  $+40^\circ$  σε μία γωνία επιθέσεως της τάξης των  $30^\circ$ . Οι ταλαντώσεις στον κάθετο άξονα βρέθηκαν να είναι λιγότερο από  $\pm 3^\circ$ . Ο πιλότος είχε τη δυνατότητα να καταστείλει το φαινόμενο με την είσοδο των πτερυγίων στροφής του σκάφους (aileron) ή μειώνοντας τη γωνία επιθέσεως.

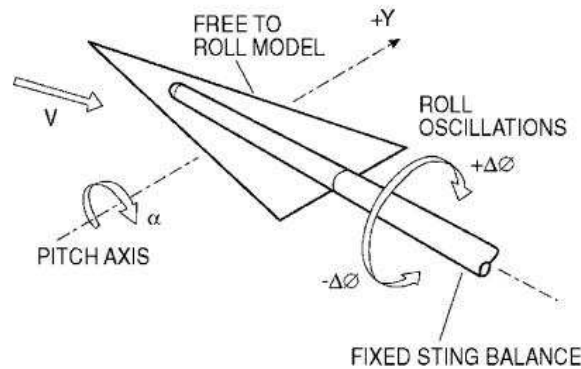


Είναι το πιο κοινό δυναμικό φαινόμενο στο οποίο υπόκειται ένα αεροσκάφος slender πτερυγίου που βρίσκεται σε μεγάλη γωνία επιθέσεως. Το wing rock είναι περίπλοκη κίνηση η οποία τυπικά επηρεάζει αρκετούς βαθμούς ελευθερίας ταυτόχρονα, αν και η κύρια κίνηση που προκαλεί είναι ταλάντωση στον άξονα roll. Σε κάποια κρίσιμη γωνία επιθέσεως, μία ταλάντωση στον άξονα roll αρχίζει να μεγαλώνει σε πλάτος μέχρι να φτάσει ένα μέγιστο πλάτος, στο οποίο το αεροσκάφος συνεχίζει να λικνίζεται μπρος και πίσω. Η κίνηση κύλισης παρακινείται από μόνη της και αντιπροσωπεύει μία κλασική συμπεριφορά limit cycle. Η έναρξη του φαινομένου συνδέεται συχνά με την απώλεια απόσβεσης ταλάντωσης στο roll σε υψηλές γωνίες επιθέσεως. Το φαινόμενο wing rock ανέρχεται από την ασταθή συμπεριφορά των πεδίων στροβιλωδών ροών που συνδέονται με τις μεγάλης γωνίας οπισθοκλινή πτερύγια, σε συνδυασμό με το βαθμό ελευθερίας του roll του αεροσκάφους.



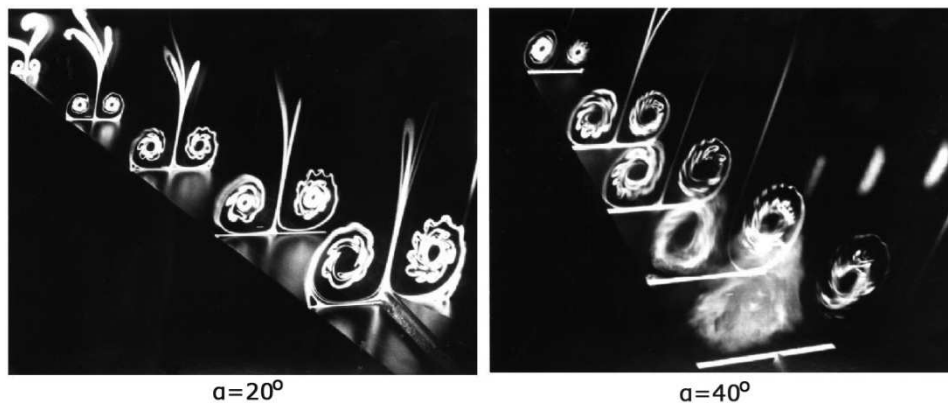


Σημαντική μελέτη έχει γίνει πάνω στη κίνηση των  $80^\circ$  οπισθοκλινών δέλτα πτερυγίων για να γίνουν κατανοητοί οι μηχανισμοί που προκαλούν το wing rock. Πειράματα με μοντέλα ελεύθερα να κινηθούν στον άξονα roll (free to roll model) χρησιμοποιούνται συνήθως για να καθοριστούν χαρακτηριστικά που προκαλούν και διατηρούν το φαινόμενο.



Σχηματική αναπαράσταση πειράματος free to roll

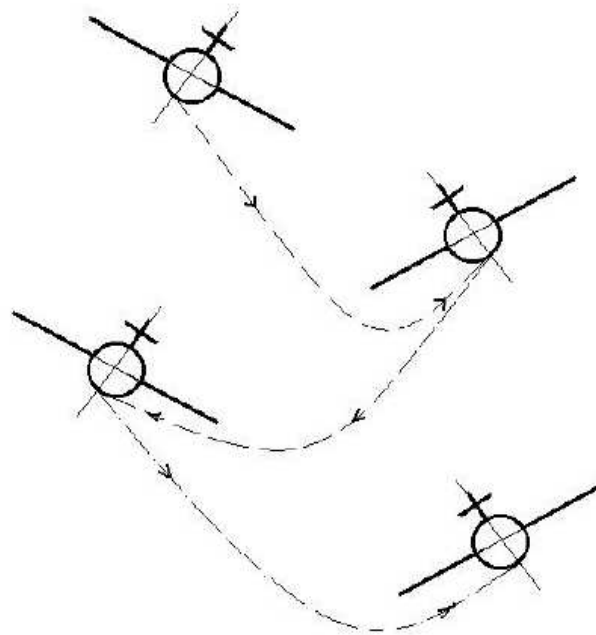
Αυτά τα αποτελέσματα αποκαλύπτουν ότι το μέγεθος των ταλαντώσεων διαφέρει ανάλογα με τη γωνία επιθέσεως  $\alpha$ . Περαιτέρω, τα πειράματα ιχνηλάτησης των πρωτευόντων θέσεων των στροβίλων στο μοντέλο παρέχουν δεδομένα για το μηχανισμό που οδηγεί στο wing rock. Σημειώνεται ότι παρατηρείται υστέρηση μεταξύ της γωνίας roll και στην ορμή στον άξονα του roll, η οποία παρέχει στοιχεία που εξηγούν το φαινόμενο.



Φωτισμός με τη χρήση φωτός laser των δινών στο μπροστινό άκρο ενός slender delta πτερύγιο για διαφορετικές γωνίες επιθέσεως

## 1.6 Διάφοροι τύποι wing rock

Η στροβιλώδης ροή πάνω από τα μεγάλης κλίσης οπισθοκλινή ή δέλτα πτερύγια σε μεγάλες γωνίες επιθέσεως είναι υψηλώς μη γραμμική λόγω της ασυμμετρίας της δίνης, τη διάσπαση της συνεχούς ροής και του σπασίματος της δίνης. Η πολυπλοκότητα της αλληλεπίδρασης ενός ή περισσοτέρων τέτοιων φαινομένων με τη κίνηση του αεροσκάφους έχει προκαλέσει πολλές μελέτες για την κατανόηση της φυσικής των φαινομένων αυτών.

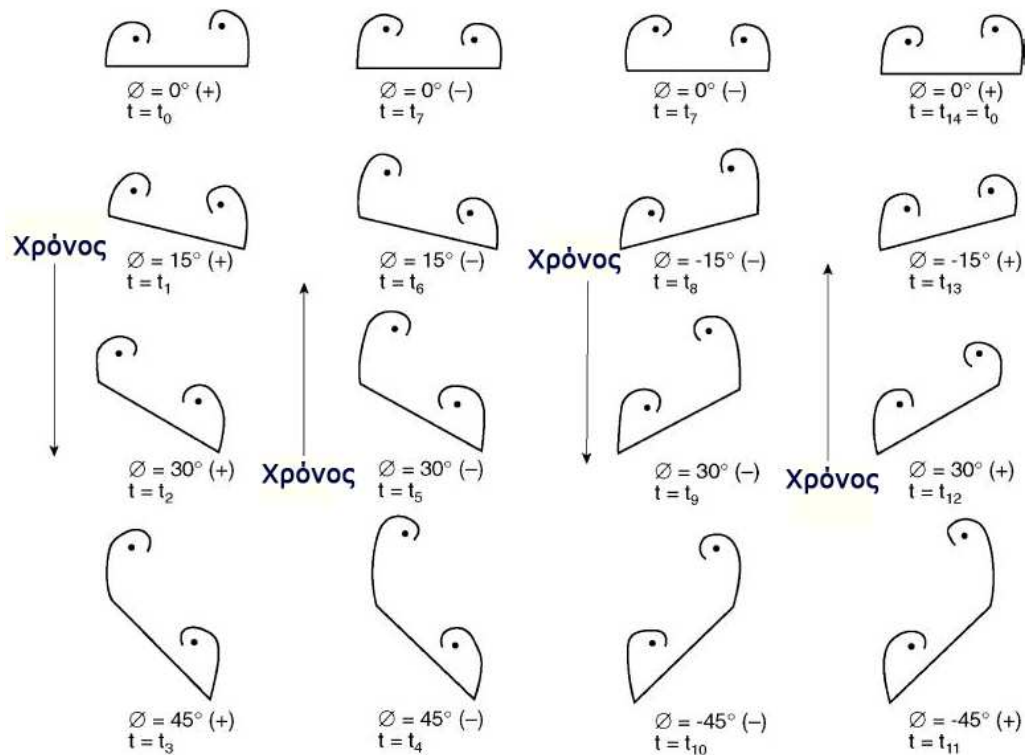


Σχηματική αναπαράσταση της κίνησης στο wing rock

Το slender wing rock είναι η περίπτωση του φαινομένου wing rock σε οπισθοκλινή δέλτα πτερύγια. Προκαλείται σε αρκετά υψηλές γωνίες επιθέσεως από την ασυμμετρία της απορροής της δίνης στο μπροστινό άκρο του πτερυγίου. Η ασύμμετρη απορροή της δίνης μπορεί να είναι αποτέλεσμα συνθηκών πτήσης. Επίσης, η πτήση σε μεγάλες γωνίες επιθέσεως με συνθήκες ασύμμετρης ροής (τυπικό σε μία προσγείωση αντίθετα στον άνεμο) ή παρακινημένες πλευρικές ταλαντώσεις λόγω ασταθούς ροής πάνω από το πτερύγιο μπορούν να οδηγήσουν σε απορροή ασύμμετρης δίνης.

Σαν αποτέλεσμα, η δίνη στη υπήνεμη πλευρά του μπροστινού άκρου του πτερυγίου μετατοπίζεται στα άκρα του φτερού και η δίνη της προσήνεμης πλευράς του μπροστινού άκρου μετατοπίζεται προς το κέντρο του αεροσκάφους προκαλώντας αρχικά τη κίνηση του πτερυγίου στον άξονα του roll προς τα θετικά. Η ξαφνική κίνηση προκαλεί τη συμπίεση της υπήνεμης

δίνης στο πτερύγιο που κινείται προς τα πάνω και την επέκταση της προσήνεμης δίνης στο πτερύγιο που κινείται προς τα κάτω. Καθώς η γωνία στο διαμήκη άξονα αυξάνεται, το κινηματικό ζευγάριωμα μεταξύ της γωνίας επιθέσεως και της πλευρικής ολίσθησης προξενεί τη δραστική γωνία επιθέσεως στο πτερύγιο να μειωθεί και τη δραστική γωνία πλευρικής ολίσθησης να αυξηθεί. Η επαυξημένη πλευρική ολίσθηση στο πτερύγιο κατά τη διάρκεια του roll έχει ως αποτέλεσμα η προσήνεμη δίνη στο πτερύγιο που κινείται προς τα κάτω να κινηθεί προς το κέντρο του αεροσκάφους και προς την επιφάνεια και η υπήνεμη δίνη στο πτερύγιο προς τα πάνω να κινηθεί προς τα άκρα του πτερυγίου και να απογειωθεί. Η μεταδιδόμενη χρονική υστέρηση που σχετίζεται με τη κίνηση της ανυψωμένης δίνης προκαλεί τη συνέχιση της βύθισης του δεξιού πτερυγίου μέχρι η ανυψωμένη δίνη να λάβει τη τελική θέση. Έπειτα, η άνοση στο πτερύγιο που κινείται προς τα κάτω αυξάνεται, ενώ η άνοση στο πτερύγιο που κινείται προς τα πάνω μειώνεται.

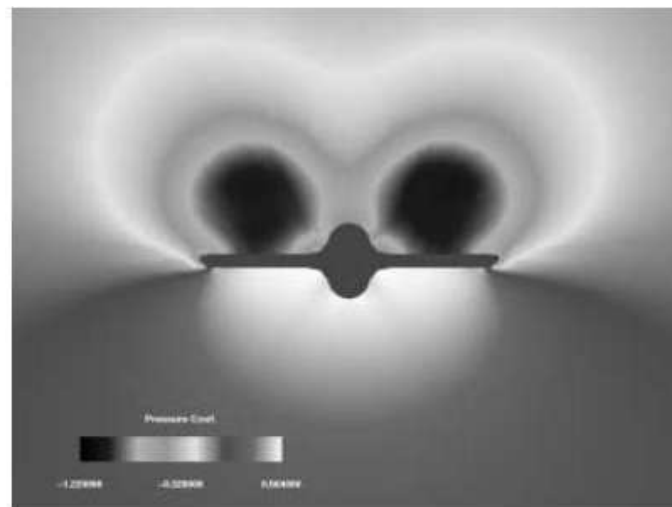


**Σχηματική αναπαράσταση δινών  
κατά τη διάρκεια ενός κύκλου wing rock**

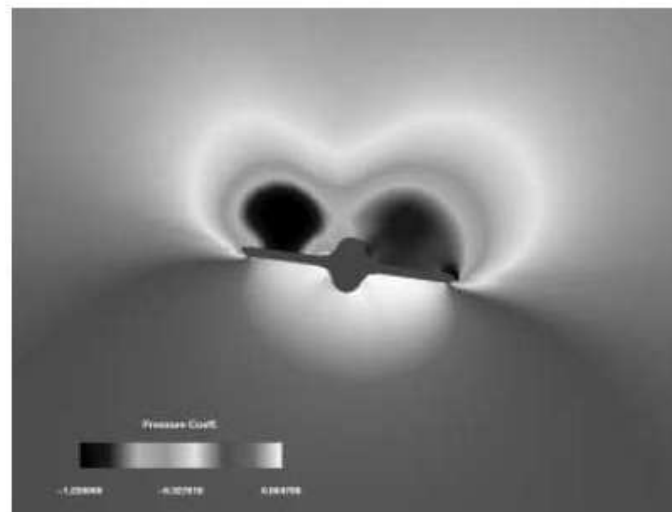
Η προηγούμενη επίδραση της δίνης ανύψωσης σε συνδυασμό με την ελάττωση της δύναμης του στροβίλου, λόγω της μείωσης της δραστικής γωνίας επιθέσεως, προξενεί τη στάση του πτερυγίου σε μία πεπερασμένη γωνία στον άξονα roll (το πλάτος της ταλάντωσης) και μετά αντιστρέφεται η κίνηση. Καθώς το πτερύγιο αντιστρέφει τη κίνηση, η γωνία της πλευρικής ολίσθησης μειώνεται και ο ανυψούμενος στροβίλος αρχίζει να επανέρχεται. Η

μεταδιδόμενη χρονική υστέρηση της κίνησης του στροβίλου βοηθάει στη σταδιακή αύξηση της ορμής στον άξονα roll στην αντίθετη κατεύθυνση μέχρις ότου η δίνη να επανασυνδεθεί πλήρως με την υπήνεμη πλευρά του αριστερού πτερυγίου.

Άλλος τύπος είναι το τυπικό wing rock και είναι το wing rock που σχετίζεται με αεροσκάφη ευθέων ή σχετικά κεκλιμένων πτερυγίων και με μέτριο προς υψηλό λόγο δύο διαστάσεων. Είναι η περίπτωση στην οποία η αεροδυναμική του πτερυγίου επιβάλλεται από τη δυσδιάστατη συνεχή ροή του αέρα και το wing rock συσχετίζεται με τη δυναμική απώλεια στήριξης.



(a)  $\phi = 0^\circ$

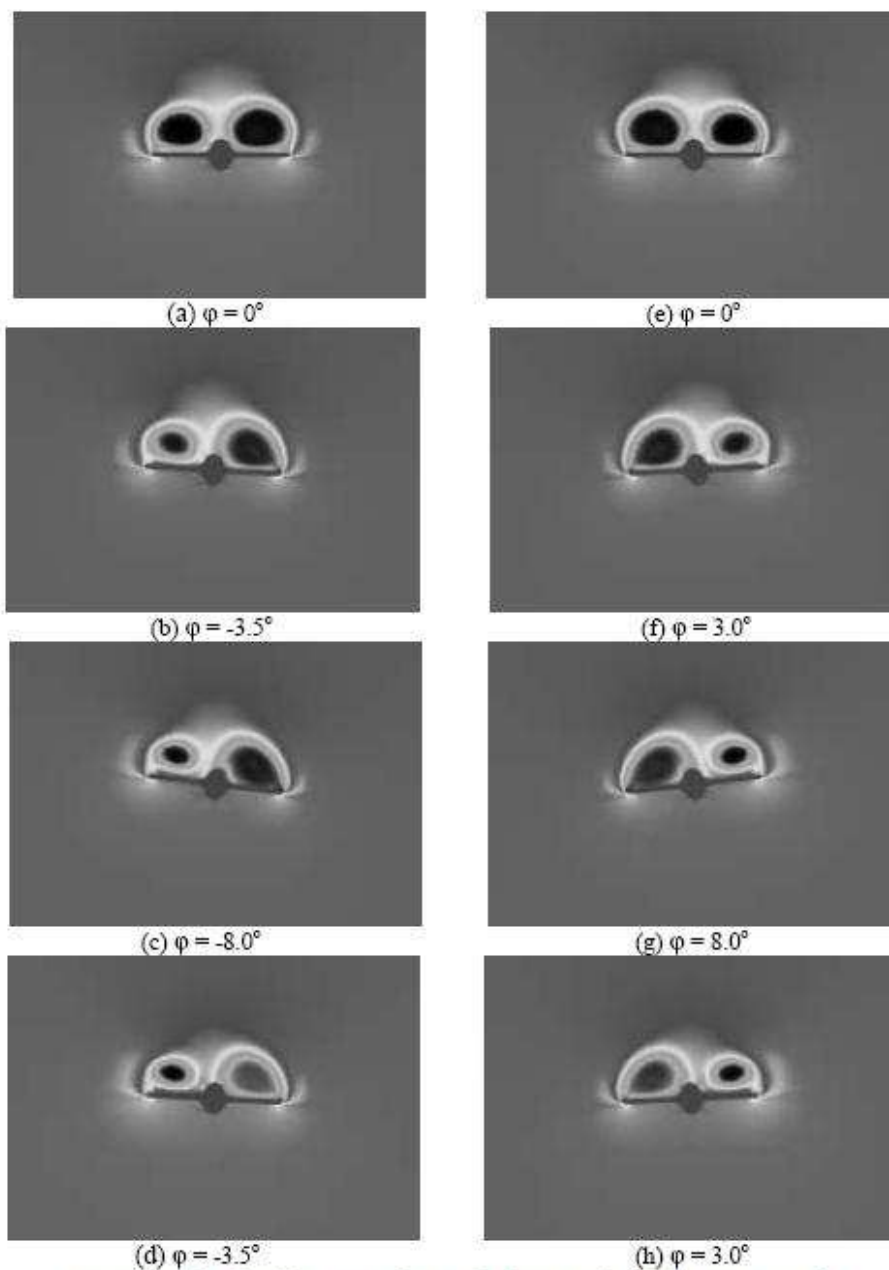


(b)  $\phi = 8^\circ$

#### Κατανομή πίεσης για δύο γωνίες roll

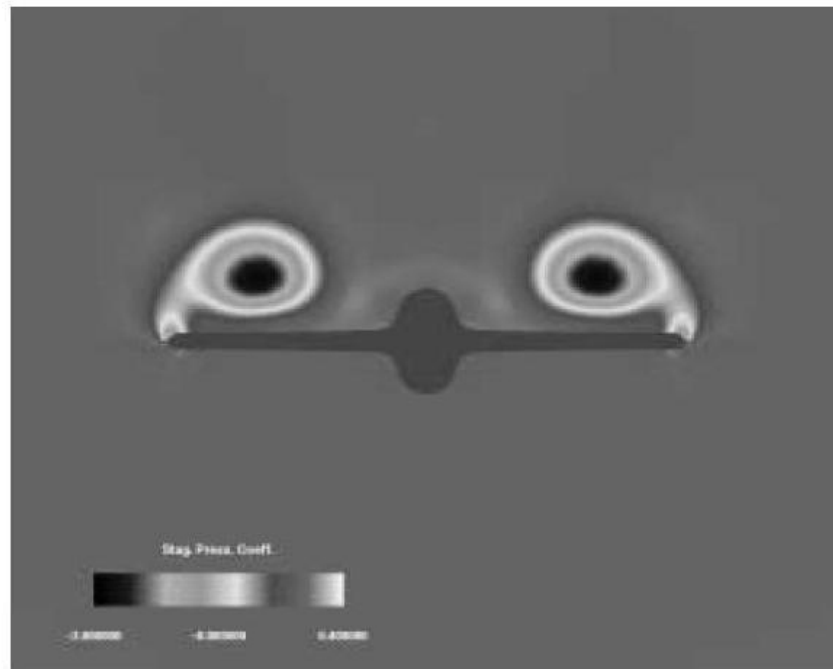
Ο άλλος τύπος wing rock είναι ο wing-body rock. Είναι πολύ σημαντικός, γιατί είναι φανερά η πιο συνεπής διαμόρφωση που απαντάται στα πραγματικά οχήματα πτήσης. Περαιτέρω, πειραματικά αποτελέσματα έδειξαν

ότι το φαινόμενο wing rock που προκαλείται από τις δίνες του μπροστινού μέρους του σώματος του αεροσκάφους είναι πιο βίαιο από εκείνους που προκαλούνται μόνο από το μπροστινό άκρο του πτερυγίου. Τυπικές μετρήσεις σε γενικού τύπου αεροσκάφους δείχνουν πλάτος  $30^\circ$  με  $40^\circ$  στο κύκλο ταλάντωσης μέσα σε κάτι λιγότερο από τρεις κύκλους. Αυτό είναι πολύ επικίνδυνο με την έννοια ότι δεν επιτρέπει στο πιλότο αρκετό χρόνο να επαναφέρει το αεροσκάφος πριν την ανάπτυξη της ταλάντωσης. Σύμφωνα με εικόνες απεικόνισης της ροής κατά τη διάρκεια του φαινομένου, ένας μηχανισμός ασύμμετρης ενεργοποίησης των δινών του μπροστινού σώματος του αεροσκάφους απαιτείται με τον ίδιο τρόπο όπως και στις δίνες του μπροστινού άκρου των slender delta πτερυγίων.



**Δυναμική δινών για ένα πλήρη κύκλο wing rock**

Η δυναμική της έκρηξης στροβίλου είναι αυτή που παράγει τη κινητήρια ορμή της κίνησης στις μικρές γωνίες, όπου η ασυμμετρία στη δομή των δινών και τη θέση δεν είναι σημαντική. Καθώς η περιδίνηση συνεχίζεται, η γωνία roll αυξάνει και οι ασυμμετρίες στη δομή και θέση των δινών γίνεται σημαντική και έτσι η ορμή αποκατάστασης αυξάνεται. Σε μία πεπερασμένη γωνία roll, η ορμή αποκατάστασης γίνεται ικανοποιητικά δυνατή για να σταματήσει το rolling και έπειτα ακόμα και να αντιστρέψει τη κατεύθυνση του roll.



Λίμνες κατανομής πίεσης σε γενικού τύπου αεροσκάφος

## 1.7 Βαθμοί ελευθερίας

Πρέπει να μελετηθεί η επίδραση της προσθήκης του βαθμού ελευθερίας της πλευρικής ολίσθησης στη ανάλυση του ξεκινήματος του wing rock και των χαρακτηριστικών του. Καθώς η κίνηση του πραγματικού wing rock είναι ένα συνδυασμός της περιδίνησης, της πλευρικής ολίσθησης και του κάθετου κατεβάσματος, και οι τρεις αυτοί βαθμοί ελευθερίας πρέπει να συμπεριληφθούν για την εξαγωγή ενός ολοκληρωμένου μοντέλου προσομοίωσης του φαινομένου.

Αρχικά, θα παρουσιαστεί η δυναμική του wing rock ενός αεροσκάφους με μόνο δύο βαθμούς ελευθερίας περιστροφής στον άξονα roll και στον άξονα του pitch. Αυτή η υπόθεση είναι καλή για αμελητέα δυναμική στον άξονα του yaw κατά τη διάρκεια της κίνησης. Οι μελέτες έχουν δείξει ότι υπάρχει αλληλεξάρτηση του βαθμού ελευθερίας στον άξονα του pitch και της κίνησης του wing rock. Παρακάτω φαίνεται η εξίσωση που πρέπει να λυθεί για τη προσομοίωση του φαινομένου με δύο βαθμούς ελευθερίας.

$$\begin{aligned}\ddot{\phi} + \omega^2 \phi &= \tilde{\mu} \dot{\phi} + \tilde{c}_1 \phi^3 + \tilde{c}_2 \phi^2 \dot{\phi} + \tilde{c}_3 \phi \dot{\phi}^2 + \tilde{c}_4 \dot{\phi}^3 + \tilde{c}_5 \phi \dot{\theta} + \tilde{c}_6 \phi \dot{\theta}^2 + \\ &\quad \tilde{c}_7 \dot{\phi} \dot{\theta} + \tilde{c}_8 \dot{\phi} \dot{\theta}^2 + \tilde{c}_9 \phi \dot{\theta}^2 + \tilde{c}_{10} \phi \dot{\theta}^3 + \tilde{c}_{11} \dot{\phi} \dot{\theta}^2 + \tilde{c}_{12} \dot{\phi} \dot{\theta}^3 + \\ &\quad \tilde{c}_{13} \phi \dot{\theta} \dot{\theta} + \tilde{c}_{14} \dot{\phi} \dot{\theta} \dot{\theta} \\ \ddot{\theta} + \Omega^2 \theta &= \tilde{\nu} \dot{\theta} + \tilde{d}_1 \theta^2 + \tilde{d}_2 \theta \dot{\theta} + \tilde{d}_3 \dot{\theta}^2 + \tilde{d}_4 \theta^3 + \tilde{d}_5 \theta^2 \dot{\theta} + \tilde{d}_6 \theta \dot{\theta}^2 + \tilde{d}_7 \dot{\theta}^3 + \\ &\quad \tilde{d}_8 \theta \phi^2 + \tilde{d}_9 \theta \phi \dot{\phi} + \tilde{d}_{10} \theta \dot{\phi}^2 + \tilde{d}_{11} \dot{\theta} \phi^2 + \tilde{d}_{12} \dot{\theta} \phi \dot{\phi} + \tilde{d}_{13} \dot{\theta} \dot{\phi}^2 + \\ &\quad \tilde{d}_{14} \phi^2 + \tilde{d}_{15} \phi \dot{\phi} + \tilde{d}_{16} \dot{\phi}^2\end{aligned}$$

Όπως φαίνεται κάτι τέτοιο είναι αρκετά πολύπλοκο, αν και ιδιαίτερα χρήσιμο για την ανάπτυξη του μοντέλου τριών βαθμών ελευθερίας.

Τώρα παρατηρείται η δυναμική του wing rock έχοντας τρεις περιστροφικούς βαθμούς ελευθερίας στον άξονα του roll, του pitch και του yaw. Ο επιπλέον βαθμός ελευθερίας προσθέτει σημαντική πολυπλοκότητα και κάνει την ανάλυση αρκετά επιμήκη από τη περίπτωση των δύο βαθμών ελευθερίας. Παρόλα αυτά, υπάρχουν φυσικά φαινόμενα που λαμβάνονται υπόψη από αυτό το μοντέλο και τα οποία δεν εντοπίζονται στα μικρότερου βαθμού ελευθερίας μοντέλα.

Παρουσιάζονται οι εξισώσεις του μοντέλου με τρεις βαθμούς ελευθερίας.



$$\begin{aligned}
\ddot{\beta} + \omega_1^2 \beta &= \tilde{\eta}_1 \dot{\beta} + \tilde{\kappa}_2 \phi + \tilde{\eta}_2 \dot{\phi} + \\
&\quad \tilde{e}_1 \phi^3 + \tilde{e}_2 \phi^2 \dot{\phi} + \tilde{e}_3 \phi \dot{\phi}^2 + \tilde{e}_4 \dot{\phi}^3 + \tilde{e}_5 \beta^3 + \tilde{e}_6 \beta^2 \dot{\beta} + \\
&\quad \tilde{e}_7 \beta \dot{\beta}^2 + \tilde{e}_8 \dot{\beta}^3 + \tilde{e}_9 \phi^2 \beta + \tilde{e}_{10} \phi^2 \dot{\beta} + \tilde{e}_{11} \dot{\phi}^2 \beta + \tilde{e}_{12} \dot{\phi}^2 \dot{\beta} + \\
&\quad \tilde{e}_{13} \phi \beta^2 + \tilde{e}_{14} \phi \dot{\beta}^2 + \tilde{e}_{15} \dot{\phi} \beta^2 + \tilde{e}_{16} \dot{\phi} \dot{\beta}^2 + \tilde{e}_{17} \phi \theta + \tilde{e}_{18} \phi \dot{\theta} + \\
&\quad \tilde{e}_{19} \dot{\phi} \theta + \tilde{e}_{20} \dot{\phi} \dot{\theta} + \tilde{e}_{21} \theta \beta + \tilde{e}_{22} \theta \dot{\beta} + \tilde{e}_{23} \dot{\theta} \beta + \tilde{e}_{24} \dot{\theta} \dot{\beta} + \\
&\quad \tilde{e}_{25} \phi \theta^2 + \tilde{e}_{26} \phi \dot{\theta}^2 + \tilde{e}_{27} \dot{\phi} \theta^2 + \tilde{e}_{28} \dot{\phi} \dot{\theta}^2 + \tilde{e}_{29} \theta^2 \beta + \tilde{e}_{30} \theta^2 \dot{\beta} + \\
&\quad \tilde{e}_{31} \dot{\theta}^2 \beta + \tilde{e}_{32} \dot{\theta}^2 \dot{\beta} + \tilde{e}_{33} \phi \dot{\phi} \beta + \tilde{e}_{34} \phi \dot{\phi} \dot{\beta} + \tilde{e}_{35} \phi \beta \dot{\beta} + \\
&\quad \tilde{e}_{36} \dot{\phi} \beta \dot{\beta} + \tilde{e}_{37} \phi \theta \dot{\theta} + \tilde{e}_{38} \dot{\phi} \theta \dot{\theta} + \tilde{e}_{39} \theta \dot{\theta} \beta + \tilde{e}_{40} \theta \dot{\theta} \dot{\beta} \\
\ddot{\phi} &= \tilde{\kappa}_1 \beta + \tilde{\kappa}_3 \phi + \tilde{\xi}_1 \dot{\phi} + \tilde{\xi}_2 \dot{\beta} + \\
&\quad \tilde{c}_1 \phi^3 + \tilde{c}_2 \phi^2 \dot{\phi} + \tilde{c}_3 \phi \dot{\phi}^2 + \tilde{c}_4 \dot{\phi}^3 + \tilde{c}_5 \beta^3 + \tilde{c}_6 \beta^2 \dot{\beta} + \\
&\quad \tilde{c}_7 \beta \dot{\beta}^2 + \tilde{c}_8 \dot{\beta}^3 + \tilde{c}_9 \phi^2 \beta + \tilde{c}_{10} \phi^2 \dot{\beta} + \tilde{c}_{11} \dot{\phi}^2 \beta + \tilde{c}_{12} \dot{\phi}^2 \dot{\beta} + \\
&\quad \tilde{c}_{13} \phi \beta^2 + \tilde{c}_{14} \phi \dot{\beta}^2 + \tilde{c}_{15} \dot{\phi} \beta^2 + \tilde{c}_{16} \dot{\phi} \dot{\beta}^2 + \tilde{c}_{17} \phi \theta + \tilde{c}_{18} \phi \dot{\theta} + \\
&\quad \tilde{c}_{19} \dot{\phi} \theta + \tilde{c}_{20} \dot{\phi} \dot{\theta} + \tilde{c}_{21} \theta \beta + \tilde{c}_{22} \theta \dot{\beta} + \tilde{c}_{23} \dot{\theta} \beta + \tilde{c}_{24} \dot{\theta} \dot{\beta} + \\
&\quad \tilde{c}_{25} \phi \theta^2 + \tilde{c}_{26} \phi \dot{\theta}^2 + \tilde{c}_{27} \dot{\phi} \theta^2 + \tilde{c}_{28} \dot{\phi} \dot{\theta}^2 + \tilde{c}_{29} \theta^2 \beta + \tilde{c}_{30} \theta^2 \dot{\beta} + \\
&\quad \tilde{c}_{31} \dot{\theta}^2 \beta + \tilde{c}_{32} \dot{\theta}^2 \dot{\beta} + \tilde{c}_{33} \phi \dot{\phi} \beta + \tilde{c}_{34} \phi \dot{\phi} \dot{\beta} + \tilde{c}_{35} \phi \beta \dot{\beta} + \\
&\quad \tilde{c}_{36} \dot{\phi} \beta \dot{\beta} + \tilde{c}_{37} \phi \theta \dot{\theta} + \tilde{c}_{38} \dot{\phi} \theta \dot{\theta} + \tilde{c}_{39} \theta \dot{\theta} \beta + \tilde{c}_{40} \theta \dot{\theta} \dot{\beta} \\
\ddot{\theta} + \Omega^2 \theta &= \tilde{\nu} \dot{\theta} + \tilde{d}_4 \phi^2 + \tilde{d}_5 \phi \dot{\phi} + \tilde{d}_6 \dot{\phi}^2 + \tilde{d}_7 \beta^2 + \tilde{d}_8 \beta \dot{\beta} + \tilde{d}_9 \dot{\beta}^2 + \\
&\quad \tilde{d}_{10} \phi \beta + \tilde{d}_{11} \phi \dot{\beta} + \tilde{d}_{12} \dot{\phi} \beta + \tilde{d}_{13} \dot{\phi} \dot{\beta} + \\
&\quad \tilde{d}_1 \theta^2 + \tilde{d}_2 \theta \dot{\theta} + \tilde{d}_3 \dot{\theta}^2 + \tilde{d}_{14} \theta^3 + \tilde{d}_{15} \theta^2 \dot{\theta} + \tilde{d}_{16} \theta \dot{\theta}^2 + \tilde{d}_{17} \dot{\theta}^3 + \\
&\quad \tilde{d}_{18} \phi^2 \theta + \tilde{d}_{19} \phi^2 \dot{\theta} + \tilde{d}_{20} \dot{\phi}^2 \theta + \tilde{d}_{21} \dot{\phi}^2 \dot{\theta} + \tilde{d}_{22} \theta \beta^2 + \tilde{d}_{23} \theta \dot{\beta}^2 + \\
&\quad \tilde{d}_{24} \dot{\theta} \beta^2 + \tilde{d}_{25} \dot{\theta} \dot{\beta}^2 + \tilde{d}_{26} \phi \dot{\phi} \theta + \tilde{d}_{27} \phi \dot{\phi} \dot{\theta} + \tilde{d}_{28} \theta \beta \dot{\beta} + \\
&\quad \tilde{d}_{29} \dot{\theta} \beta \dot{\beta} + \tilde{d}_{30} \phi \theta \beta + \tilde{d}_{31} \phi \theta \dot{\beta} + \tilde{d}_{32} \phi \dot{\theta} \beta + \tilde{d}_{33} \phi \dot{\theta} \dot{\beta} + \\
&\quad \tilde{d}_{34} \dot{\phi} \theta \beta + \tilde{d}_{35} \dot{\phi} \theta \dot{\beta} + \tilde{d}_{36} \dot{\phi} \dot{\theta} \beta + \tilde{d}_{37} \dot{\phi} \dot{\theta} \dot{\beta}
\end{aligned}$$

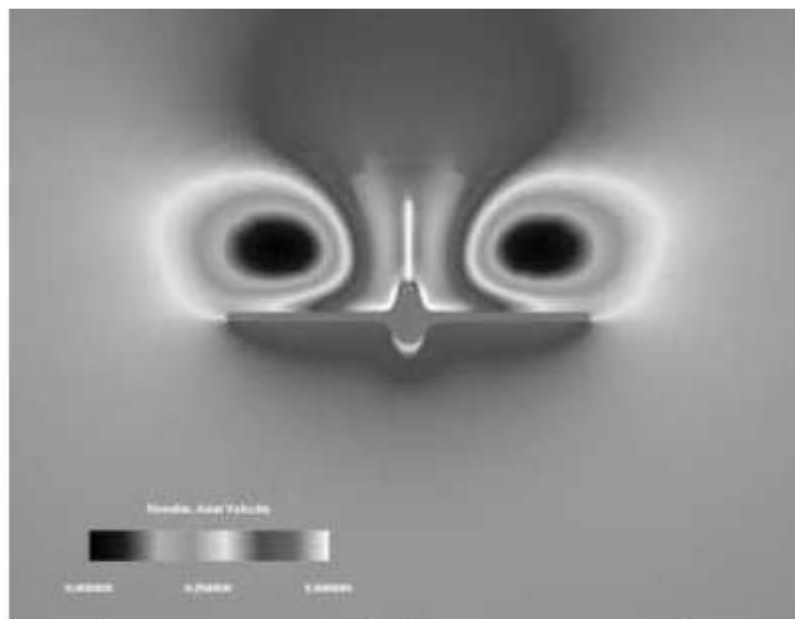
Παραδείγματα φαινομένων που παρατηρούνται από αυτό το μοντέλο και όχι από τα μοντέλα μικρότερου βαθμού είναι η παρουσία του ρυθμού λόγω του συνδυασμού roll και yaw στη απόκριση του roll και τη πιθανή πρόκληση wing rock λόγω της σημαντικής κυβικής εκτροπής των παράλληλων ορμών με τη πλευρική ολίσθηση.

Όπως είναι φανερό, για τη προσομοίωση του φαινομένου θα χρησιμοποιήσουμε μοντέλο πρώτου βαθμού ελευθερίας για μεγαλύτερη ευκολία στους υπολογισμούς και τη παραγωγή του νευρωνικού δικτύου.

## 1.8 Επίδραση ουραίου πτερυγίου στο φαινόμενο

Το πτερύγιο σταθερότητας μπορεί να συμβάλει σημαντικά στη δύναμη της πλευρικής ολίσθησης, πρέπει να γίνουν προσομοιώσεις με και χωρίς το ουραίο πτερύγιο για να μελετηθεί η επίδρασή του. Παρόλα αυτά, το αποτέλεσμα περιορίζεται από τη γεωμετρία του πτερυγίου που χρησιμοποιείται στη μελέτη, καθώς η επίδραση του πτερυγίου εξαρτάται σε ένα μεγάλο βαθμό από τη γεωμετρία του και την αναλογία του εμβαδού του ουραίου πτερυγίου προς το πτερύγιο του αεροσκάφους (fin to wing area ratio).

Για τη περίπτωση ενός βαθμού ελευθερίας, μελέτες δείχνουν ότι ουραία με μικρό λόγο εμβαδού προκαλούν καθυστέρηση στην έναρξη του φαινομένου και μειώνουν το πλάτος ταλάντωσης. Ενώ τα ουραία πτερύγια με μεγάλο λόγο εμβαδού είναι πιο πιθανό να διαχωριστούν και να έχουν αντίθετα αποτελέσματα. Αναλύσεις με τρεις βαθμούς ελευθερίας του φαινομένου με ουραίο, δείχνουν μία σημαντική αύξηση στη συχνότητα της ταλάντωσης. Κάτι παρόμοιο για ένα βαθμό ελευθερίας έχει εμφανιστεί μόνο για διπλό ουραίο.



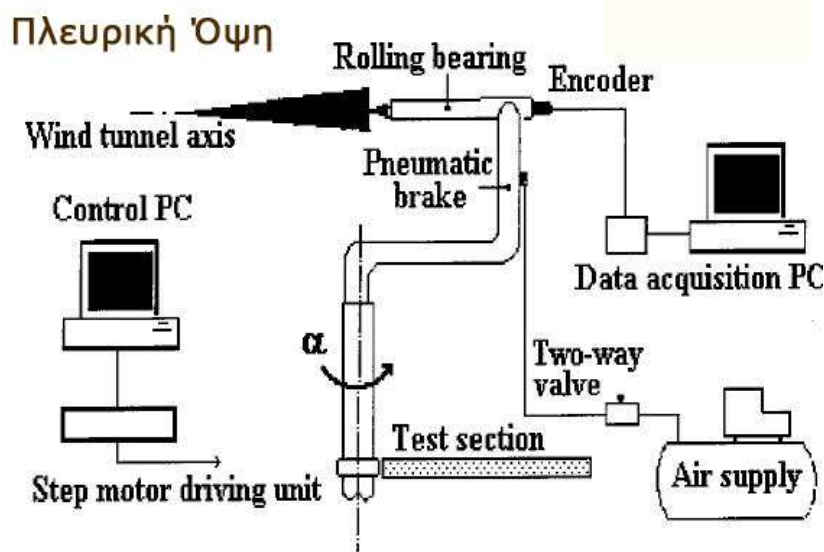
**Λίμνες κατανομής πίεσης σε γενικού τύπου αεροσκάφος με ουραίο πτερύγιο**

Το ουραίο πτερύγιο έχει δύο συνεισφορές, μία λόγω της αεροδυναμικής αλληλεπίδρασης μεταξύ της επιφανείας του ουραίου και της ροής πάνω από σώμα του πτερυγίου και η άλλη λόγω της πλευρικής δύναμης που παράγεται από αυτό. Η κύρια αεροδυναμική επίδραση του ουραίου που παρατηρείται είναι η σημαντική καθυστέρηση της έκρηξης της δίνης.

## 1.9 Διεξαγωγή πειράματος

Η συστηματική προσέγγιση της μελέτης του φαινομένου wing rock βασίζεται σε πειράματα που διεξάγονται σε αεροσήραγγες και ασχολούνται με τη μελέτη της δυναμικής του roll για μεγάλης γωνίας κλίσης πτερυγίων. Αυτές οι απλοποιημένες γεωμετρίες εμφανίζουν σταθερούς, περιορισμένου πλάτους κύκλους και αναπαράγουν το κυρίαρχο παράγοντα των βασικών δυνάμεων αέρα. Διαφορετικά, η ανάλυση της πλήρους δυναμικής roll στο αεροσκάφος είναι αρκετά δύσκολη, καθώς οι σχετικές αεροδυναμικές αλληλεπιδράσεις μεταξύ του κυρίου σώματος, του αεροσκάφους, των επιφανειών ανύψωσης και των πτερυγίων μπορεί να αλλάξει το μηχανισμό του φαινομένου.

Το μοντέλο που χρησιμοποιείται είναι 80° δελταπτέρυγο με αιχμηρές μπροστινά και απώτατα άκρα, φτιαγμένο από κράμα αλουμινίου. Ο διαμήκης άξονας πτερυγίου και ο άξονας στήριξης ταυτίζονται. Το σύστημα περιστροφής είναι στατικά ισορροπημένο.



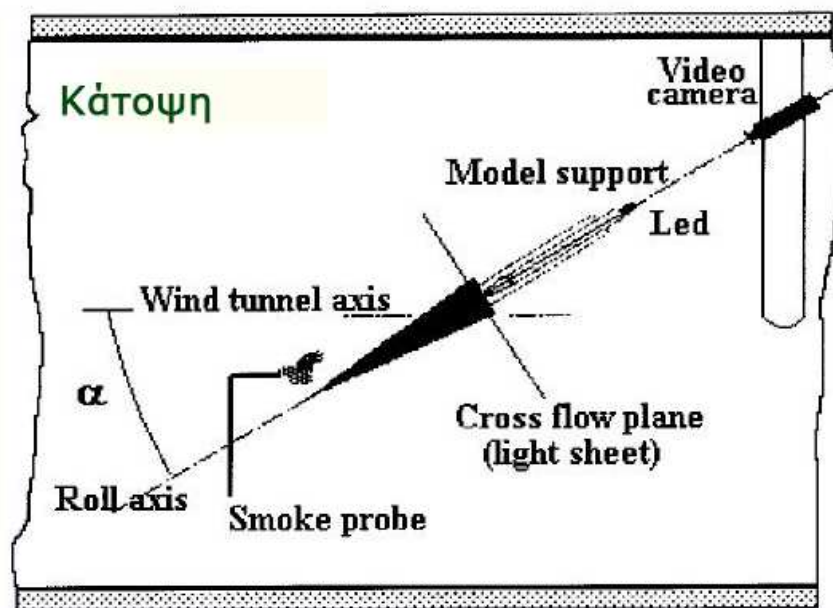
Η στήριξη με τη μορφή C είναι τοποθετημένη πάνω σε ένα κάθετο δοκό, ο οποίος έχει τη δυνατότητα περιστροφής έτσι ώστε η γωνία επιθέσεως να αλλάζει ενόσω το κέντρο μάζας του μοντέλου παραμένει στο κέντρο της περιοχής του πειράματος.

Το μοντέλο είναι συνδεδεμένο σε ένα οριζόντιο άξονα υποστηριζόμενο από κυλιόμενα στηρίγματα. Για να μειωθεί η αντίσταση της γωνιακής διάταξης μετατροπής, η κίνηση του πτερυγίου μετράται από έναν οπτικό κωδικοποιητή συνδεδεμένο με ένα περιστρεφόμενο άξονα χρησιμοποιώντας ένα ελαστικό

σύνδεσμο, ο οποίος δεν αντιδρά ξαφνικά. Αυτή η ψηφιακή γωνιακή διάταξη έχει τη δυνατότητα να παρέχει ανάλυση  $0.45^\circ/\text{bit}$ .

Ένα φρένο, που λειτουργεί με αέρα, υιοθετείται για να διατηρεί το πτερύγιο στην αρχική γωνιακή θέση. Κατά τη διάρκεια παροχής του αέρα, ένα σήμα ενεργοποίησης στέλνεται από τον χειριστή στη μονάδα απόκτησης δεδομένων και το μοντέλο ελευθερώνεται από το αερολειτουργούμενο κύλινδρο που είναι προσαρμοσμένος μέσα στο κάθετο βραχίονα της στήριξης με σχήμα C.

Τα ψηφιακά σήματα παράγονται από το κωδικοποιητή, ο οποίος αναγνωρίζει το σήμα και την αύξηση του  $\varphi(t)$ , είναι ρυθμιζόμενα από μία ηλεκτρονική συσκευή που αποτελείται από ένα μετρητή προσαύξησης και ένα ψηφιακό σε αναλογικό μετατροπέα 12 bits. Το σύστημα απόκτησης δεδομένων βασίζεται σε ένα αναλογικό σε ψηφιακό μετατροπέα 12 bits και ένα παλμογράφο για τη παρακολούθηση του σήματος σε πραγματικό χρόνο.



Το πλάτος και η συχνότητα της περιοδικής μεταβολής των οριακών κύκλων χαρακτηρίζεται μετά από την αριθμητική επεξεργασία της  $\varphi(t)$  με ένα φασματικό αναλυτή. Ο γωνιακός ρυθμός υπολογίζεται αριθμητικά.

Το πείραμα μπορεί να διεξαχθεί με τη χρήση σήραγγας νερού, το οποίο θα δώσει παρόμοια αποτελέσματα.

# Κεφάλαιο 2

## Διαφορικές Εξισώσεις στη MATLAB

### Περίληψη

Σε αυτό το κεφάλαιο αναφέρεται ο τρόπος χρήσης της MATLAB για την επίλυση προβλημάτων αρχικής τιμής των συνήθων διαφορικών εξισώσεων. Περιγράφεται ο τρόπος παρουσίασης των προβλημάτων αυτών και πως εφαρμόζονται τα βοηθήματα επίλυσης συνήθων διαφορικών εξισώσεων που υπάρχουν στη MATLAB σε αυτά.

Γίνεται αναφορά στη χρήση phase plane, η οποία είναι μία γραφική που στον οριζόντιο άξονα είναι η μεταβλητή που χρησιμοποιούμε και στο κάθετο άξονα είναι η παράγωγος αυτής. Τη γραφική αυτή τη χρησιμοποιούμε στα αποτελέσματα που λαμβάνουμε από τον ODE solver.

Τέλος, εξηγείται η επιλογή βοηθήματος επίλυσης (ODE solver) και πως γίνεται να καθορίζονται κάποιες επιλογές στα βοηθήματα αυτά για αποτελεσματική και προσαρμοσμένη εκτέλεση.

### Πίνακας περιεχομένων

2.1 Διαφορικές Εξισώσεις .....	28
2.2 Λύση διαφορικών εξισώσεων στη MATLAB .....	29
2.3 Βοηθήματα επίλυσης ODE .....	31
2.4 Βασική χρήση .....	32
2.5 Phase plane .....	35
2.6 Επιλογές βοηθημάτων επίλυσης .....	38

## 2.1 Διαφορικές Εξισώσεις

Μία διαφορική εξίσωση είναι οποιαδήποτε εξίσωση η οποία συνδέει κάποια μεταβλητή στη παραγωγό της. Για παράδειγμα, η εξίσωση  $\frac{dy}{dt} = -5y$  συσχετίζει τη παράγωγο της  $y$  σε σχέση με το χρόνο  $t$  με τη μεταβλητή  $y$ . Μία συνήθης διαφορική εξίσωση (ODE<sup>1</sup>) περιλαμβάνει συνήθεις παραγώγους. Κάποιες ODE μπορούν να λυθούν με το χέρι, ενώ σε άλλες είναι απαραίτητη η χρήση αριθμητικών τεχνικών σε ηλεκτρονικό υπολογιστή για να προσεγγιστεί η λύση τους.

Η βασική ιδέα είναι η χρήση μιας προσέγγισης της παραγώγου, όπως  $\frac{dy}{dt} \approx \frac{\Delta y}{\Delta t}$ , το οποίο είναι λογικό για όσο διάστημα, το χρονικό βήμα  $\Delta t$  είναι πολύ μικρό. Ο υπολογισμός χρησιμοποιεί τη τρέχουσα τιμή της μεταβλητής και της παραγώγου για να προβλέψει τη νέα τιμή της μεταβλητής μετά από ένα μικρό χρονικό διάστημα. Ο ηλεκτρονικός υπολογιστής το κάνει αυτό ταχύτατα πολλές φορές στη σειρά χρησιμοποιώντας πολύ μικρά χρονικά βήματα.

Η πιο απλή μέθοδος για να γίνει αυτός ο υπολογισμός αποκαλείται μέθοδος Euler και περιλαμβάνει μία ακριβής πρόβλεψη της νέας τιμής της μεταβλητής, η οποία είναι

$$y(t + \Delta t) \approx y(t) + \Delta y, \quad \text{όπου } \Delta y = \Delta t \frac{dy}{dt}$$

Αυτή είναι η τιμή της  $y$  μετά από ένα πολύ μικρό χρονικό διάστημα  $\Delta t$ , η οποία είναι η τιμή της  $y$  τη δεδομένη χρονική στιγμή προστιθέμενης της μικρής αλλαγής  $\Delta y$ , που είναι η κλίση  $\frac{dy}{dt}$  της καμπύλης της μεταβλητή  $y$  σε σχέση με το χρόνο  $t$ , πολλαπλασιασμένης με το χρόνο που έχει διανυθεί.

Η μέθοδος του Euler κάνει καλή δουλειά για όσο χρόνο το χρονικό βήμα είναι αρκετά μικρό, αλλά υπάρχουν πολλοί περισσότεροι και πιο πολύπλοκοι τρόποι για να γίνει αυτού του τύπου οι προβλέψεις. Παρακάτω παρουσιάζονται κάποιοι από αυτούς που χρησιμοποιεί η MATLAB για να τρέξει τέτοιες προσομοιώσεις.

<sup>1</sup> Ordinary Differential Equation (ODE)



## 2.2 Λύση διαφορικών εξισώσεων στη MATLAB

Στη MATLAB υπάρχει ενσωματωμένη από το 1995 μία σουίτα με το όνομα ODE, για την επίλυση συνήθων διαφορικών εξισώσεων. Θα παρουσιαστεί ο τρόπος επίλυσης προβλημάτων αρχικής τιμής (IVP<sup>2</sup>) των συνήθων διαφορικών εξισώσεων.

Τα βοηθήματα επίλυσης προβλημάτων αρχικών τιμών στη MATLAB υπολογίζουν το ιστορικό στο χρόνο ενός συστήματος διαφορικών εξισώσεων πρώτου βαθμού με γνωστές αρχικές συνθήκες. Σε μαθηματικούς όρους, αυτά τα προβλήματα έχουν τη μορφή

$$\dot{y} = f(t, y) \quad y(t_0) = y_0$$

που είναι η διανυσματική σημειογραφία για το σύστημα των διαφορικών εξισώσεων

$$\dot{y}_1 = f_1(t, y_1, y_2, \dots, y_n) \quad y(t_0) = y_{10}$$

$$\dot{y}_2 = f_2(t, y_1, y_2, \dots, y_n) \quad y(t_0) = y_{20}$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$\dot{y}_n = f_n(t, y_1, y_2, \dots, y_n) \quad y(t_0) = y_{n0}$$

όπου  $\dot{y}_i = dy_i/dt$ , η ο αριθμός των διαφορικών εξισώσεων πρώτου βαθμού και  $y_{i0}$  είναι η αρχική συνθήκη που αφορά την εξίσωση  $i$ . Όταν ένα σύστημα δεν ορίζεται ως σύστημα διαφορικών εξισώσεων πρώτου βαθμού, πρέπει να γραφτεί με αυτό τον τρόπο. Δηλαδή, όλες οι εξισώσεις θα έπρεπε να είναι πρώτης τάξεως, αλλά μεγαλύτερης τάξης διαφορικές εξισώσεις μπορούν πάντα να γραφτούν σαν ένα σύνολο πολλαπλών εξισώσεων πρώτης τάξης.

Για να μπορεί να λυθεί ένα σύστημα διαφορικών εξισώσεων, πρέπει να κωδικοποιηθούν οι διαφορικές εξισώσεις σε ένα αρχείο .m ως `ydot=odefile(t,y)`. Δηλαδή, το αρχείο πρέπει να δέχεται ένα χρόνο  $t$  και μία λύση  $y$ , και να επιστρέφει τιμές για τις παραγώγους.

Τα βοηθήματα επίλυσης διαφορικών εξισώσεων, ODE solvers, της MATLAB είναι σχεδιασμένα ώστε να διαχειρίζονται συνήθεις διαφορικές εξισώσεις. Αυτές είναι διαφορικές εξισώσεις που περιέχουν μία ή παραπάνω παραγώγους μίας εξαρτημένης μεταβλητής  $y$  σε σχέση με μία ανεξάρτητη

<sup>2</sup> Initial Value Problem (IVP)

μεταβλητή  $t$ , κατά το σύνηθες αναφερόμενη ως χρόνος. Η παράγωγος της  $y$  σε σχέση με το  $t$  αναγράφεται ως  $\dot{y}$  και η δεύτερη παράγωγος ως  $\ddot{y}$ .

Οι συνήθεις διαφορικές εξισώσεις συχνά περιλαμβάνουν έναν αριθμό από εξαρτημένες μεταβλητές, όπως επίσης και παραγώγους μεγαλύτερης της πρώτης τάξης. Για να χρησιμοποιηθούν οι ODE solvers της MATLAB, πρέπει οι εξισώσεις να ξαναγραφτούν σαν ένα ισοδύναμο σύστημα πρώτης τάξεως διαφορικών εξισώσεων όσον αφορά ένα διάνυσμα  $y$  και τη πρώτη παράγωγό του.

$$\dot{y} = F(t, y)$$

Μόλις αναπαρασταθεί η εξίσωση με αυτό τον τρόπο, μπορεί να τη κωδικοποιηθεί σε ένα ODE αρχείο m που μπορεί να χρησιμοποιήσει ένα βοήθημα επίλυσης (ODE solver).

Γενικά, υπάρχουν πολλές συναρτήσεις  $y(t)$  οι οποίες ικανοποιούν μία δεδομένη συνήθης διαφορική εξίσωση, οπότε είναι απαραίτητες περαιτέρω πληροφορίες για να καθορίσουν τη ζητούμενη λύση. Σε ένα πρόβλημα αρχικών τιμών, η ζητούμενη λύση έχει μία συγκεκριμένη αρχική συνθήκη. Δηλαδή, η μεταβλητή  $y$  ισούται με  $y_0$  σε μία δεδομένη αρχική χρονική στιγμή  $t_0$ . Ένα πρόβλημα αρχικής τιμής για ένα ODE είναι

$$\dot{y} = F(t, y) \quad y(t_0) = y_0$$

Αν η συνάρτηση  $F(t, y)$  είναι αρκετά λεία, το πρόβλημα έχει μία και μοναδική λύση. Γενικά, δεν υπάρχει αναλυτική έκφραση για τη λύση, οπότε είναι αναγκαίο να προσεγγιστεί η  $y(t)$  με αριθμητικούς μέσους, όπως ένα από τα βοηθήματα επίλυσης της σουίτας ODE της MATLAB.

Για παράδειγμα, θεωρείται η κλασική εξίσωση van der Pol

$$\ddot{x} - \mu(1 - x^2)\dot{x} + x = 0$$

όπου  $\mu$  είναι μια παράμετρος μεγαλύτερης από μηδέν. Αν επιλέξουμε  $y_1 = x$  και  $y_2 = dx/dt$ , η εξίσωση van der Pol γίνεται

$$\dot{y}_1 = y_2$$

$$\dot{y} = \mu(1 - y_1^2)y_2 - y_1$$

## 2.3 Βοηθήματα επίλυσης ODE

Η σουίτα ODE της MATLAB διαθέτει οκτώ βοηθήματα επίλυσης προβλημάτων αρχικής τιμής. Κάθε ένα έχει δυνατότητες κατάλληλες για διαφορετικά προβλήματα αρχικών τιμών. Η σύνταξη για την κλήση κάθε βοηθήματος επίλυσης είναι παρόμοια, πράγμα που κάνει σχετικά εύκολη την αλλαγή βοηθήματος για ένα δεδομένο πρόβλημα.

Τα βοηθήματα επίλυσης προβλημάτων αρχικών τιμών των συνήθων διαφορικών εξισώσεων που υπάρχουν στη MATLAB είναι τα παρακάτω.

Βοήθημα	Περιγραφή
<i>ode23</i>	Βοήθημα επίλυσης διαφορικών εξισώσεων Runge-Kutta ενός βήματος μικρού βαθμού( $2^{ov}$ - $3^{ov}$ ). Κατάλληλο για προβλήματα ήπιας δυσκαμψίας, προβλήματα όπου είναι αποδεκτή μικρότερη ακρίβεια, όπου η $f(t,y)$ δεν είναι λεία (για παράδειγμα, ασυνεχής).
<i>ode23s</i>	Βοήθημα επίλυσης πεπλεγμένων διαφορικών εξισώσεων Rosenbrock τροποποιημένου ενός βήματος, δευτέρου βαθμού. Κατάλληλο για δύσκαμπτα <sup>3</sup> (stiff) προβλήματα όπου είναι αποδεκτή μικρότερη ακρίβεια ή όπου η $f(t,y)$ είναι ασυνεχής.
<i>ode23t</i>	Πεπλεγμένος κανόνας τραπεζίου ενός βήματος που χρησιμοποιεί ελεύθερη συνάρτηση παρεμβολής. Κατάλληλος για προβλήματα μέτριας δυσκαμψίας. Μπορεί να χρησιμοποιηθεί στην επίλυση διαφορικών αλγεβρικών εξισώσεων(DAE <sup>4</sup> ).
<i>ode23tb</i>	Πεπλεγμένος κανόνας τραπεζίου ακολουθούμενος από μια αναδρομική παραγωγή δευτέρου βαθμού. Παρόμοιο με το <i>ode23s</i> . Μπορεί να είναι πιο αποδοτικό από το <i>ode15s</i> για χονδροειδείς ανοχές.
<i>ode45</i>	Βοήθημα επίλυσης διαφορικών εξισώσεων Runge-Kutta ενός βήματος μέσου βαθμού( $4^{ov}$ - $5^{ov}$ ). Κατάλληλο για προβλήματα τα οποία απαιτούν μέτρια ακρίβεια.
<i>ode113</i>	Βοήθημα επίλυσης διαφορικών εξισώσεων Adams-Bashforth-Moulton PECE μεταβλητού βαθμού( $1^{ov}$ - $3^{ov}$ ). Κατάλληλο για προβλήματα που δεν παρουσιάζουν δυσκαμψία και τα οποία απαιτούν μέση ως υψηλή ακρίβεια, μεταξύ των οποίων προβλήματα όπου ο υπολογισμός της $f(t,y)$ είναι ακριβός. Ακατάλληλο για προβλήματα όπου η $f(t,y)$ δεν είναι λεία.
<i>ode15s</i>	Βοήθημα επίλυσης πεπλεγμένης αριθμητικής παραγωγής πολλών βημάτων μεταβλητού βαθμού( $1^{ov}$ - $5^{ov}$ ). Κατάλληλο για δύσκαμπτα προβλήματα τα οποία απαιτούν μέτρια ακρίβεια.
<i>ode15i</i>	Βοήθημα μεταβλητού βαθμού( $1^{ov}$ - $5^{ov}$ ) για την επίλυση πλήρως πεπλεγμένων διαφορικών εξισώσεων.

Πίνακας 2-1 Τα βοηθήματα επίλυσης διαφορικών εξισώσεων (ODE solvers) που υπάρχουν στην σουίτα ODE της MATLAB

<sup>3</sup> Δύσκαμπτα προβλήματα λέγονται γενικά τα προβλήματα στα οποία οι υποκείμενες χρονικές σταθερές μεταβάλλονται κατά πολλές τάξεις μεγέθους.

<sup>4</sup> Differential Algebraic Equation(DAE)

## 2.4 Βασική χρήση

Αρχικά, γράφουμε τη συνήθη διαφορική εξίσωση

$$y^{(n)} = f(t, y, \dot{y}, \dots, y^{(n-1)})$$

σαν ένα σύστημα εξισώσεων πρώτης τάξης κάνοντας τις αντικαταστάσεις

$$y_1 = y$$

$$y_2 = \dot{y}$$

$$\vdots$$

$$y_n = y^{(n-1)}$$

Έπειτα,

$$\dot{y}_1 = y_2$$

$$\dot{y}_2 = y_3$$

$$\vdots$$

$$\dot{y}_n = f(t, y_1, y_2, \dots, y_n)$$

είναι ένα σύστημα  $n$  συνήθων διαφορικών εξισώσεων (ODE) πρώτης τάξης.

Για παράδειγμα, δίνεται το πρόβλημα αρχικής τιμής

$$\ddot{y} - 3\dot{y} - \dot{y}y = 0$$

με αρχικές τιμές  $y(0) = 0$ ,  $\dot{y}(0) = 1$  και  $\ddot{y}(0) = -1$ . Λύνεται αυτή τη διαφορική εξίσωση ως προς τη παράγωγο μεγαλύτερης τάξης, γράφοντας τη παράγωγο  $\ddot{y}$  σε όρους του  $t$  και των παραγώγων χαμηλότερης τάξης, άρα  $\ddot{y} = 3\dot{y} + \dot{y}y$ . Αν θέσουμε  $y_1 = y$ ,  $y_2 = \dot{y}$  και  $y_3 = \ddot{y}$ , τότε

$$\dot{y}_1 = y_2$$

$$\dot{y}_2 = y_3$$

$$\dot{y}_3 = 3y_3 + y_2y_1$$

είναι ένα σύστημα τριών ODE πρώτης τάξης με αρχικές συνθήκες

$$y_1(0) = 0$$

$$y_2(0) = 1$$

$$y_3(0) = -1$$

Οπότε, το πρόβλημα αρχικών συνθηκών (IVP) έχει τώρα τη μορφή

$$\dot{Y} = F(t, Y)$$

με  $Y(0) = 0$ , όπου  $Y = [y_1, y_2, y_3]$ .

Στο επόμενο βήμα, κωδικοποιείται το σύστημα πρώτης τάξης σε ένα αρχείο m, το οποίο δέχεται δύο ορίσματα, t και y, και επιστρέφει ένα διάνυσμα στήλης.

```
function dy=F(t,y)
dy=[y(2);y(3);3y(3)+y(2)*y(1)];
```

Ένας άλλος τρόπος κωδικοποίησης μπορεί να είναι και ο παρακάτω.

```
function dy=F(t,y)
dy=zeros(3,1);
dy(1)=y(2);
dy(2)=y(3);
dy(3)=3y(3)+y(2)*y(1);
```

Αυτό το ODE αρχείο πρέπει να δέχεται τα ορίσματα t και y, παρότι δεν χρειάζεται να τα χρησιμοποιήσει. Το διάνυσμα dy πρέπει να είναι διάνυσμα στήλης.

Τελικά, εφαρμόζεται ένα από τα βοηθήματα επίλυσης ODE που προσφέρει η MATLAB στο πρόβλημα. Η σύνταξη για τη κλήση για τον ODE solver είναι η εξής

```
[T,Y]=ODEsolver('F',tspan,y0);
```

όπου ODEsolver είναι ένα από τα βοηθήματα επίλυσης. Τυπικά, το πρώτο βοήθημα επίλυση που πρέπει να δοκιμαστεί είναι το ode45. Σε περίπτωση που αυτό αποτύχει ή δεν είναι αρκετά αποδοτικό, χρησιμοποιούμε το ode15s.

Τα ορίσματα εισόδου που χρησιμοποιούνται φαίνονται στο πίνακα παρακάτω.

Όρισμα	Περιγραφή
$F$	Ένα αλφαριθμητικό που περιέχει το όνομα του ODE αρχείου.
$tspan$	Διάνυσμα με χρονικές τιμές πάνω στις οποίες ολοκληρώνει το βοήθημα επίλυσης. Δηλαδή, όταν tspan είναι [t0 tfinal] το βοήθημα επίλυσης ολοκληρώνει από t0 μέχρι tfinal.
$y0$	Διάνυσμα στήλης που περιέχει τις αρχικές συνθήκες για την αρχική χρονική στιγμή t0.

Πίνακας 2-2 Ορίσματα εισόδου για όλα τα βοηθήματα επίλυσης

Για παράδειγμα, για να χρησιμοποιηθεί το βοήθημα επίλυσης ode45 για να βρούμε λύση στο πρόβλημα αρχικών τιμών, που αναφέρθη προηγουμένως, στο χρονικό διάστημα  $[0 \ 1]$ , καλούμε

```
[T,Y]=ode45('F',[0 1],[0 1 -1]);
```

Κάθε στήλη στο διάνυσμα λύσης Y αντιστοιχεί σε μία χρονική στιγμή από το διάνυσμα στήλης T. Επίσης, στο συγκεκριμένο πρόβλημα αρχικών τιμών, Y(:,1) είναι η λύση, Y(:,2) είναι η πρώτη παράγωγος της λύσης και Y(:,3) είναι δεύτερη παράγωγος της λύσης.

Για να εμφανιστεί τη γραφική της λύσης σε σχέση με το χρόνο, χρησιμοποιούμε τη παρακάτω γραμμή κώδικα

```
plot(T,Y(:,1));
```

και στη περίπτωση που επιθυμείται η προβολή το phase plane τότε χρησιμοποιούμε

```
plot(Y(:,1),Y(:,2));
```

κάτι που θα εξηγήσουμε παρακάτω.



## 2.5 Phase plane

Πολύ λίγες συνήθεις διαφορικές εξισώσεις έχουν σαφείς λύσεις εκφρασμένες με πεπερασμένες όρους. Αυτό συμβαίνει γιατί η πλειάδα των καθιερωμένων συναρτήσεων (πολυωνυμικές, εκθετικές, ημιτονοειδείς) που χρησιμοποιούνται στην έκφραση των λύσεων είναι πολύ περιορισμένες για να αντιμετωπίσουν τη ποικιλία των διαφορικών εξισώσεων που χρησιμοποιούνται στη πράξη. Ακόμα και αν μπορεί να βρεθεί η λύση, ο τύπος συχνά είναι αρκετά περίπλοκος για να απεικονιστούν καθαρά τα βασικά χαρακτηριστικά της λύσης. Κάτι που είναι ιδιαίτερα αληθές στη περίπτωση των εν δυνάμει λύσεων που είναι στη μορφή ολοκληρωμάτων ή άπειρων σειρών.

Η ποσοτική μελέτη των διαφορικών εξισώσεων είναι επικεντρωμένη στο τρόπο εξαγωγής σημαντικών χαρακτηριστικών των λύσεων των διαφορικών χωρίς να χρειάζεται να λυθούν στη πραγματικότητα. Ένας γεωμετρικός μηχανισμός που χρησιμοποιείται ευρέως για τη απευθείας λήψη ιδιότητες από τη διαφορική εξίσωση, όπως το σημείο ισορροπίας, τη περιοδικότητα, την άνευ ορίων ανάπτυξη, τη σταθερότητα, είναι το phase plane.

Η δεύτερης τάξης διαφορική εξίσωση με γενικό τύπο

$$\ddot{x} = f(x, \dot{x}, t)$$

με αρχικές συνθήκες  $x(t_0)$  και  $\dot{x}(t_0)$ , είναι ένα παράδειγμα δυναμικού συστήματος. Η εξέλιξη ή οι μελλοντικές καταστάσεις του συστήματος δίνονται από  $x(t)$  και  $\dot{x}(t)$ . Γενικά, τα δυναμικά συστήματα είναι προβλήματα αρχικών τιμών ελεγχόμενα συχνά από συνήθεις διαφορικές εξισώσεις.

Η παραπάνω εξίσωση μπορεί να θεωρηθεί σαν εξίσωση κίνησης ενός μηχανικού συστήματος, στο οποίο  $x$  αντιπροσωπεύει τη μετατόπιση μίας μονάδας μάζας σώματος,  $\dot{x}$  είναι η ταχύτητά του,  $\ddot{x}$  η επιτάχυνσή του και  $f$  η ασκούμενη δύναμη.

Ένα μηχανικό σύστημα βρίσκεται σε ισορροπία εάν η κατάσταση του δεν αλλάζει με τη πάροδο του χρόνου. Δηλαδή, ένα σημείο ισορροπίας αντιστοιχεί σε μία σταθερή λύση της διαφορικής εξίσωσης και αντίστροφα. Μία σταθερή λύση υπονοεί ότι  $\dot{x}$  και  $\ddot{x}$  πρέπει να είναι ταυτόχρονα μηδέν. Αν  $\dot{x} = 0$  δεν είναι αρκετό για ισορροπία. Τέτοιες σταθερές λύσεις, αν υπάρχουν, είναι οι λύσεις της εξίσωσης

$$f(x, 0, t) = 0$$

Υπάρχουν δύο κατηγορίες διαφορικών εξισώσεων, οι αυτόνομες και οι μη-αυτόνομες(ή εξαναγκασμένες). Στις διαφορικές εξισώσεις αυτόνομου τύπου η συνάρτηση  $f$  δεν εξαρτάται ρητά από το  $t$ , ενώ στις εξαναγκασμένες εξισώσεις το  $t$  εμφανίζεται σαφώς στη συνάρτηση  $f$ .

Ένα αυτόνομο σύστημα δίνεται από τη διαφορική εξίσωση

$$\ddot{x} = f(x, \dot{x})$$

στο οποίο το  $t$  δεν εμφανίζεται στο δεξιό μέλος. Για την απεικόνιση του phase plane, θεωρούμε

$$\dot{x} = y$$

έτσι ώστε

$$\dot{y} = f(x, y)$$

Αυτό είναι ένα ζευγάρι πρώτης τάξης εξισώσεων, ισοδύναμο με τη δευτέρας τάξης εξίσωση, που φαίνεται παραπάνω.

Η κατάσταση του συστήματος σε μία χρονική στιγμή  $t_0$  αποτελείται από ένα ζεύγος αριθμών  $(x(t_0), \dot{x}(t_0))$ , το οποίο μπορεί να θεωρηθεί σαν ένα ζεύγος αρχικών συνθηκών για την αρχική διαφορική εξίσωση. Οπότε, η αρχική κατάσταση καθορίζει όλες τις επακόλουθες καταστάσεις αυτής για μία συγκεκριμένη ελεύθερη κίνηση.

Στο phase plane με άξονες  $x$  και  $y$ , η κατάσταση τη χρονική στιγμή αποτελείται  $t_0$  από το ζευγάρι τιμών  $(x(t_0), y(t_0))$ . Αυτές οι τιμές του  $x$  και του  $y$ , απεικονίζουν ένα σημείο  $P$  πάνω στο phase plane το οποίο λειτουργεί σαν αρχικές συνθήκες για το ζευγάρι πρώτης τάξεως εξισώσεις. Άρα, το σημείο  $P$  καθορίζει όλες τις καταστάσεις από τις οποίες περνάει το σύστημα σε μία δεδομένη κίνηση. Η διαδοχή καταστάσεων δίνεται παραμετρικά από  $x = x(t)$  και  $y = y(t)$ , που διαγράφει μία καμπύλη από το αρχικό σημείο  $P: (x(t_0), y(t_0))$ . Η καμπύλη αυτή καλείται phase path ή τροχιά. Η διεύθυνση που ανατίθεται στην τροχιά λαμβάνεται από τη σχέση  $\dot{x} = y$ . Όταν  $y > 0$  τότε  $x > 0$ , έτσι ώστε το  $x$  αυξάνει με το χρόνο. Όταν  $y < 0$ ,  $x$  μειώνεται με το χρόνο. Άρα, οι κατευθύνσεις είναι από αριστερά προς τα δεξιά στο πάνω μισό του phase plane και από δεξιά προς τα αριστερά στο κάτω μισό του phase plane.

Για να εξαχθεί μία σχέση μεταξύ  $x$  και  $y$  που καθορίζουν τις τροχιές (phase paths), εξαλείφεται η παράμετρος  $t$  από τα διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξης. Για να γίνει αυτό, χρησιμοποιείται την ταυτότητα

$$\frac{\dot{x}}{\dot{y}} = \frac{dy}{dx}$$

Οπότε, η διαφορική εξίσωση για τις τροχιές γίνονται

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x, y)}{y}$$

Ένα συγκριμένο phase path ξεχωρίζει κάνοντας να περάσει μέσα από ένα συγκεκριμένο σημείο  $P: (x, y)$ , το οποίο αντιστοιχεί στην αρχική κατάσταση  $(x_0, y_0)$ , όπου  $y(x_0) = y_0$ . Το σύνολο των τροχιών συμπεριλαμβανομένων των κατευθυντήριων βελών αποτελούν το phase diagram. Η παράμετρος χρόνου  $t$  δεν απεικονίζεται σε αυτό το διάγραμμα.

Τα σημεία ισορροπίας στο phase diagram ανταποκρίνονται σε σταθερές λύσεις της διαφορικής λύσης δευτέρου βαθμού και αντίστοιχα στο ζεύγος διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης. Αυτό συμβαίνει όταν  $\dot{x}$  και  $\dot{y}$  είναι ταυτόχρονα μηδέν, δηλαδή όταν  $y = 0$  και  $f(x, 0) = 0$ .

## 2.6 Επιλογές βοηθημάτων επίλυσης

Εκτός από την απλή σύνταξη για τη χρήση των βοηθημάτων επίλυσης διαφορικών εξισώσεων (ODE solvers) που παρουσιάστηκε προηγουμένως, μπορεί να χρησιμοποιηθεί μία ελάχιστη διαφορετική σύνταξη για να αλλάξουμε τις προκαθορισμένες παραμέτρους ολοκλήρωσης. Η μόνη διαφορά στη σύνταξη είναι η προσθήκη του τέταρτου ορίσματος options. Δηλαδή, η σύνταξη γίνεται

```
[T,Y]=ODEsolver('F',tspan,y0,options);
```

Αυτή η χρήση γίνεται για να βελτιωθεί η επίδοση του βοηθήματος επίλυσης, ρυθμίζοντας τις παραμέτρους του βοηθήματος. Οι προκαθορισμένες, από το σύστημα, παράμετροι είναι επιλεγμένοι ώστε να διαχειρίζονται κοινά προβλήματα. Έτσι η ρύθμιση κάποιων παραμέτρων για ένα δεδομένο πρόβλημα μπορεί να αυξήσει σημαντικά την επίδοση. Οι τιμές των παραμέτρων μέσα στο όρισμα options δημιουργούνται με συνάρτηση odeset, με την οποία δίνονται τιμές στις καλούμενες ιδιότητες. Οι παράμετροι αυτοί μπορεί να είναι για την ανοχή στα σφάλματα (RelTol, AbsTol), στο μέγεθος του χρονικού βήματος (InitialStep, MaxStep) και σε άλλες κατηγορίες ρυθμίζοντας τις κατάλληλες ιδιότητες.

Εκτός από τη συνάρτηση odeset, υπάρχει και η συνάρτηση odeget η οποία εμφανίζει τις τρέχουσες παραμέτρους επιλογής που χρησιμοποιούνται από το βοήθημα επίλυσης.

Εκτός από τις παραμέτρους για τη βελτίωση της απόδοσης, υπάρχει και η παράμετρος OutputFcn με την οποία μπορούμε να προβάλουμε γραφική χωρίς τη κλήση της plot. Παρακάτω φαίνεται η σύνταξή της, την οποία γράφουμε πριν καλέσουμε το βοήθημα με τη χρήση της σύνταξης που είδαμε παραπάνω.

```
options = odeset('OutputFcn',@ode_output_function)
```

όπου στο όρισμα ode\_output\_function θέτουμε ένα από τα ονόματα συναρτήσεων που φαίνονται στο παρακάτω πίνακα.

Συνάρτηση	Περιγραφή
<i>odeplot</i>	Γράφημα όλων των συνιστωσών της λύσης σε σχέση με το χρόνο
<i>odephas2</i>	Γραφήματα phase plane δύο διαστάσεων
<i>odephas3</i>	Γραφήματα phase plane τριών διαστάσεων
<i>odeprint</i>	Εκτυπώνει στο command window

Πίνακας 2-3 Συναρτήσεις που μπορούν να χρησιμοποιηθούν από τα βοηθήματα επίλυσης για αναπαράσταση της λύσης σε γραφικές

# Κεφάλαιο 3

## Προσομοίωση Wing Rock

### Περίληψη

Σε αυτό το κεφάλαιο περιγράφεται ο τρόπος προσομοίωσης του αεροναυπηγικού φαινομένου wing rock. Χρησιμοποιούνται πέντε διαφορετικές εξισώσεις που μελετήθηκαν από τρεις επιστημονικές δημοσιεύσεις.

Για κάθε μία από αυτές, γίνεται ανάλυση εύρεσης της διαφορικής εξίσωσης που θα χρησιμοποιηθεί και αναφέρονται όλες οι τιμές των παραμέτρων που θα χρησιμοποιηθούν. Επίσης, παρουσιάζεται για μία συγκεκριμένη τιμή της γωνίας επιθέσεως του αεροσκάφους ένα phase plane, δηλαδή η γραφική μεταξύ της παραγώγου της γωνίας στον άξονα roll με τη γωνία αυτή. Περαιτέρω, γίνεται μία σύγκριση μεταξύ αυτών των προσομοιώσεων, όπου παρατηρείται ότι όλες δίνουν κοινά αποτελέσματα. Αυτό επιτρέπει τη χρησιμοποίηση οποιαδήποτε από αυτές για την εξαγωγή του observer, για το οποίο γίνεται λόγος στο επόμενο κεφάλαιο.

Στο τέλος του κεφαλαίου παρουσιάζεται μία ανάλυση του κώδικα MATLAB που χρησιμοποιήθηκε για τη προσομοίωση του πρώτου μοντέλου. Αναλύεται ο κώδικας του πρώτου μοντέλου, γιατί είναι και το μοντέλο που θα χρησιμοποιηθεί παρακάτω στην ανάπτυξη του observer.

### Πίνακας περιεχομένων κεφαλαίου

3.1 Μαθηματικά μοντέλα που χρησιμοποιήθηκαν.....	39
3.2 Προσομοίωση με τη χρήση του μοντέλου (1) .....	41
3.3 Προσομοίωση με τη χρήση του μοντέλου (2) .....	43
3.4 Προσομοίωση με τη χρήση του μοντέλου (3) .....	45
3.5 Προσομοίωση με τη χρήση του μοντέλου (4α) .....	47
3.6 Προσομοίωση με τη χρήση του μοντέλου (4β) .....	49
3.7 Σύγκριση προσομοιώσεων.....	51
3.8 Ανάλυση και επεξήγηση κώδικα MATLAB .....	56

### 3.1 Μαθηματικά μοντέλα που χρησιμοποιήθηκαν

Για τη προσομοίωση χρησιμοποιήθηκαν μαθηματικά μοντέλα από τρεις διαφορετικές επιστημονικές δημοσιεύσεις πάνω στο φαινόμενο wing rock για slender 80° delta πτερύγια.

Αρχικά, χρησιμοποιήθηκε ο τύπος<sup>5</sup> που προτείνεται στη δημοσίευση [2], “*Analytical Study of the Subsonic Wing-Rock Phenomenon for Slender Delta Wings*”.

Έπειτα, χρησιμοποιήθηκαν οι δύο μαθηματικοί τύποι<sup>6</sup> που προτείνονται στη δημοσίευση [4], “*Development of an Analytical Model of Wing Rock for Slender Delta Wings*”.

Τελικά, χρησιμοποιήθηκαν οι μαθηματικοί τύποι<sup>7</sup> που προτείνονται στη δημοσίευση [3], “*Supervisory Recurrent Fuzzy Neural Network Control of Wing Rock for Slender Delta Wings*”.

Σε όλες τις παραπάνω δημοσιεύσεις παραθέτονταν τα δεδομένα που χρησιμοποιήθηκαν από τους συγγραφείς και είναι τα ίδια που χρησιμοποιήθηκαν για τη προσομοίωση του φαινομένου σε κώδικα MATLAB.

---

<sup>5</sup> Μοντέλο (1)

<sup>6</sup> Μοντέλα (2) και (3)

<sup>7</sup> Μοντέλα (4α) και (4β)



### 3.2 Προσομοίωση με τη χρήση του μοντέλου (1)

Στη δημοσίευση [2] προτείνεται η παρακάτω εξίσωση

$$\ddot{\varphi} = c_1 c_l - c_2 \dot{\varphi} \quad (1)$$

όπου  $\varphi$  η γωνία στον άξονα του roll,  $\dot{\varphi}$  η πρώτη παράγωγος σε σχέση με το χρόνο<sup>8</sup>,  $\ddot{\varphi}$  η δεύτερη παράγωγος ως προς το χρόνο,

$$c_1 = \frac{\rho S c L_c^2}{2 I_{xx}} \quad (2)$$

$$c_2 = \frac{\mu_x L_c}{I_{xx} U_c} \quad (3)$$

και ο αεροδυναμικός συντελεστής αδράνειας στον άξονα του roll

$$c_l = a_1 \varphi + a_2 \dot{\varphi} + a_3 \varphi^3 + a_4 \varphi^2 \dot{\varphi} + a_5 \varphi \dot{\varphi}^2 \quad (4)$$

Όπου  $\rho$  είναι η πυκνότητα του αέρα,  $S$  η επιφάνεια του πτερυγίου,  $c$  η χορδή του πτερυγίου,  $L$  το χαρακτηριστικό μήκος,  $I_{xx}$  η ορμή της αδράνειας σε σχέση με τον άξονα κατά μήκος της χορδής,  $\mu_x$  ο συντελεστής απόσβεσης πλάτους ταλάντωσης και  $U_c$  είναι η χαρακτηριστική ταχύτητα.

Αντικαθιστώντας την εξίσωση (4) στην εξίσωση (1) προκύπτει

$$\ddot{\varphi} + \omega^2 \varphi = \mu_1 \dot{\varphi} + b_1 \dot{\varphi}^3 + \mu_2 \varphi^2 \dot{\varphi} + b_2 \varphi \dot{\varphi}^2 \quad (5)$$

όπου

$$\omega^2 = -c_1 a_1 \quad (6)$$

$$\mu_1 = c_1 a_2 - c_2 \quad (7)$$

$$b_1 = c_1 a_3 \quad (8)$$

$$\mu_2 = c_1 a_4 \quad (9)$$

$$b_2 = c_1 a_5 \quad (10)$$

Οι συντελεστές  $a_i$ , όπου  $i=1,2,...,5$ , εξαρτώνται από τη γωνία επιθέσεως του αεροσκάφους(γωνία στον άξονα pitch). Στη δημοσίευση δίνονται τα  $a_i$  για

<sup>8</sup> Η δημοσίευση δηλώνει ότι η παράγωγος υπολογίζεται ως προς το μη-διάστατο χρόνο  $t^* = (\frac{U_c}{L_c})t$

τέσσερις διαφορετικές γωνίες επιθέσεως  $\alpha$ , οι οποίες παρατίθεται στο παρακάτω πίνακα.

$\alpha$	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\alpha_3$	$\alpha_4$	$\alpha_5$
15	-0.01026	-0.02117	-0.14181	0.99735	-0.83478
21.5	-0.04207	0.01456	0.04714	-0.18583	0.24234
22.5	-0.04681	0.01966	0.05671	-0.22691	0.59065
25	-0.05686	0.03254	0.07334	-0.3597	1.4681

**Πίνακας 3-1 Τιμές των συντελεστών  $\alpha_i$  για διάφορες τιμές angle of attack**

Μεταβλητή	Χαρακτηρισμός	Τιμή
$\rho$	πυκνότητα του αέρα	$1.1955 \text{ kg/m}^3$
$S$	εμβαδόν πτερυγίου	$0.0324 \text{ m}^2$
$c$	χορδή πτερυγίου	$0.429 \text{ m}$
$L_c$	χαρακτηριστικό μήκος ( $L_c=c/4$ )	$0.10725 \text{ m}$
$I_{xx}^c$	ορμή αδράνειας μάζας	$0.27 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$
$\mu_x$	συντελεστής απόσβεσης πλάτους ταλάντωσης	$0.378 \cdot 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$
$U_c$	χαρακτηριστική ταχύτητα	$15 \text{ m/s}$

**Πίνακας 3-2 Τιμές των μεταβλητών που χρησιμοποιούνται<sup>9</sup>**

Ακολουθώντας τα βήματα που ακολουθεί και η δημοσίευση, δίνεται η γραφική αναπαράσταση των συντελεστών  $\omega^2$ ,  $\mu_1$ ,  $b_1$ ,  $\mu_2$  και  $b_2$ . Πρώτα, υπολογίζονται οι τιμές των  $c_1$  και  $c_2$  χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις (2) και (3) αντίστοιχα, καθώς επίσης και τις τιμές των μεταβλητών από το **Πίνακα 2**. Έπειτα, με τη χρήση των τιμών  $c_1$  και  $c_2$  που έχουν υπολογιστεί, στις εξισώσεις (6) μέχρι (10) και τις τιμές των συντελεστών  $\alpha_i$  από το **Πίνακα 1**, υπολογίζονται οι τιμές των συντελεστών  $\omega^2$ ,  $\mu_1$ ,  $b_1$ ,  $\mu_2$  και  $b_2$ .

Αφού έχουν υπολογίσει οι τιμές των παραπάνω μεταβλητών που χρειάζονται για να λυθεί η εξίσωση (5), καθορίζονται οι αρχικές τιμές των  $y$  και  $\dot{y}$ . Καλώντας τη συνάρτηση που λύνει την εξίσωση με τη χρήση της ode15s<sup>10</sup>, λαμβάνονται ως αποτέλεσμα το διάνυσμα χρόνου  $T$  και το δισδιάστατο πίνακα  $Y$ , που η μία στήλη  $Y(:,1)$  είναι οι τιμές του  $\phi$  σε rad και η άλλη στήλη είναι οι τιμές του  $\dot{\phi}$  σε rad/sec. Έστερα, μετατρέπονται τα rad σε degrees πολλαπλασιάζοντας το διάνυσμα  $Y(:,1)$  με  $180/\pi$  και λαμβάνονται οι γραφικές παραστάσεις της γωνίας στον άξονα roll με το χρόνο και της παραγώγου της γωνίας αυτής με τη γωνία, το λεγόμενο phase plane.

<sup>9</sup> Οι τιμές αυτού του πίνακα παραμένουν οι ίδιες και για τις υπόλοιπες δημοσιεύσεις

<sup>10</sup> Ο λόγος που χρησιμοποιείται ο συγκεκριμένος solver της MATLAB είναι ότι έχει τη δυνατότητα να λύσει το μεγαλύτερο εύρος διαφορικών εξισώσεων από όλους τους άλλους. Ένας καλός αντικαταστάτης του θα ήταν ο ode45.

### 3.3 Προσομοίωση με τη χρήση του μοντέλου (2)

Στη δημοσίευση [4] παρουσιάζονται δύο μοντέλα προσομοίωσης του φαινομένου wing rock. Η πρώτη εξίσωση που δίνεται είναι η εξής

$$\ddot{\phi} = \frac{pU_{\infty}^2 Sb}{2I_{\chi\chi}} + C_l + D\dot{\phi} \quad (1)$$

όπου  $\phi$  είναι η γωνία στον άξονα του roll,  $p$  είναι η πυκνότητα του αέρα,  $U_{\infty}$  είναι η ταχύτητα freestream,  $S$  είναι η επιφάνεια του πτερυγίου και  $b$  η χορδή αυτού.  $C_l$  είναι ο αεροδυναμικός συντελεστής αδράνειας στον άξονα του roll, ενώ  $I_{\chi\chi}$  είναι η ορμή της αδράνειας σε σχέση με τον άξονα κατά μήκος της χορδής. Ο τελευταίος όρος μοντελοποιεί τα αποτελέσματα των (απότομων) απωλειών στη στήριξη.

Ο αεροδυναμικός συντελεστής αδράνειας γύρω από τη μέση της χορδής δίνεται από την εξίσωση

$$C_l = a_1\phi + a_2\dot{\phi} + a_3|\phi|\dot{\phi} + a_4|\dot{\phi}|\phi \quad (2)$$

Έπειτα, αντικαθιστώντας την εξίσωση (2) στην εξίσωση (1) και επαναδιαευθετείται το αποτέλεσμα και λαμβάνουμε

$$\ddot{\phi} + \omega^2 = \mu\dot{\phi} + b_1|\phi|\dot{\phi} + b_2|\dot{\phi}|\phi \quad (3)$$

όπου

$$\omega^2 = -Ca_1 \quad (4)$$

$$\mu = Ca_2 - D \quad (5)$$

$$b_1 = Ca_3 \quad (6)$$

$$b_2 = Ca_4 \quad (7)$$

$$\text{και ξέρουμε ότι } C = \frac{pU_{\infty}^2 Sb}{I_{xx}} = 0.354 \text{ και } D = 0.001 \quad (8).$$

Υστερα, η δημοσίευση λαμβάνει τιμές για τους συντελεστές  $a_i$  προσαρμόζοντας την εξίσωση (2) στα πειραματικά αποκτηθέντα αριθμητικά δεδομένα χρησιμοποιώντας το κριτήριο ελαχίστων τετραγώνων. Ο πίνακας των τιμών  $a_i$  που χρησιμοποιείται φαίνεται παρακάτω για τέσσερις διαφορετικές γωνίες επιθέσεως του αεροσκάφους  $\alpha$ .

$\alpha$	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\alpha_3$	$\alpha_4$
<b>15.0</b>	-0.0106857	-0.02192166	0.11961137	-0.3317292
<b>21.5</b>	-0.03518571	0.01595784	-0.0688440	0.05353120
<b>22.5</b>	-0.03557399	0.02891174	-0.10454088	-0.02906233
<b>25</b>	-0.03881275	0.065991965	-0.1942874	-0.27968228

**Πίνακας 3-3 Τιμές των συντελεστών  $\alpha_i$  για διάφορες τιμές angle of attack**

Ακολουθώντας τα βήματα που ακολουθάει και η δημοσίευση, δίνεται η γραφική αναπαράσταση των συντελεστών  $\omega^2$ ,  $\mu$ ,  $b_1$  και  $b_2$ . Αντικαθιστώντας τις τιμές των μεταβλητών  $C$  και  $D$ , που δίνονται στη σχέση (8) και τις τιμές των συντελεστών  $\alpha_i$  από το **Πίνακα 3**, στις εξισώσεις (4) μέχρι (7) υπολογίζονται οι τιμές των συντελεστών  $\omega^2$ ,  $\mu$ ,  $b_1$  και  $b_2$ .

Αφού έχουν υπολογίσει οι τιμές των παραπάνω μεταβλητών που χρειάζονται για να λυθεί η εξίσωση (3), καθορίζονται οι αρχικές τιμές των  $y$  και  $\dot{y}$ . Καλώντας τη συνάρτηση που λύνει την εξίσωση με τη χρήση της ode15s, δίνονται ως αποτέλεσμα το διάνυσμα χρόνου  $T\_without\_phi3$  και το δισδιάστατο πίνακα  $Y\_without\_phi3$ , που η μία στήλη  $Y\_without\_phi3(:,1)$  είναι οι τιμές του  $\phi$  σε rad και η άλλη στήλη είναι οι τιμές του  $\dot{\phi}$  σε rad/sec. Έστερα, μετατρέπονται τα rad σε degrees πολλαπλασιάζοντας το διάνυσμα  $Y\_without\_phi3(:,1)$  με  $180/\pi$  και παρουσιάζονται οι γραφικές παραστάσεις της γωνίας στον άξονα roll με το χρόνο και το phase plane.

### 3.4 Προσομοίωση με τη χρήση του μοντέλου (3)

Στην ίδια δημοσίευση όπου υπάρχει η εξίσωση που χρησιμοποιήθηκε προηγουμένως, παρατίθεται και μία ακόμα εξίσωση για τη μοντελοποίηση του φαινομένου wing rock. Σε αυτή την εξίσωση προσθέτεται ένας κυβικός όρος στην μαθηματική έκφραση της αδράνειας  $C_l$ .

Έτσι, η καινούργια εξίσωση για τον αεροδυναμικό συντελεστή αδράνειας στον άξονα του roll είναι

$$C_l = a_1\varphi + a_2\dot{\varphi} + a_3|\varphi|\dot{\varphi} + a_4|\dot{\varphi}|^3 + a_5\varphi^3 \quad (1)$$

Αντικαθιστώντας αυτή την εξίσωση στην εξίσωση

$$\ddot{\varphi} = \frac{pU_\infty^2 S b}{2I_{xx}} + C_l + D\dot{\varphi} \quad (2)$$

λαμβάνουμε τη παρακάτω έκφραση

$$\ddot{\varphi} + \omega^2\varphi = \mu\dot{\varphi} + b_1|\varphi|\dot{\varphi} + b_2|\dot{\varphi}|^3 + b_3\varphi^3 \quad (3)$$

όπου οι συντελεστές  $\omega^2$ ,  $\mu$ ,  $b_1$  και  $b_2$  υπολογίζονται από τις ίδιες εκφράσεις με το προηγούμενο μοντέλο. Δηλαδή,

$$\omega^2 = -Ca_1 \quad (4)$$

$$\mu = Ca_2 - D \quad (5)$$

$$b_1 = Ca_3 \quad (6)$$

$$b_2 = Ca_4 \quad (7)$$

Ο καινούργιος όρος  $b_3$  δίνεται από την εξίσωση

$$b_3 = Ca_5 \quad (8)$$

Ενώ οι όροι  $C$  και  $D$  διατηρούν τις ίδιες τιμές, δηλαδή  $C = \frac{pU_\infty^2 S b}{I_{xx}} = 0.354$  και  $D = 0.001$  (9).

Για την εύρεση των τιμών των συντελεστών  $a_i$ , η δημοσίευση λειτουργεί με τον ίδιο τρόπο, μόνο που αυτή τη φορά προσαρμόζει τη καινούργια εξίσωση υπολογισμού του  $C_l$  στα ίδια πειραματικά αριθμητικά δεδομένα.

$\alpha$	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\alpha_3$	$\alpha_4$	$\alpha_5$
<b>15</b>	-0.0102590	-0.0214337	0.05711631	-0.0619253	-0.14664512
<b>21.5</b>	-0.04177563	0.01461574	-0.06732727	0.08415139	0.04606465
<b>22.5</b>	-0.04569571	0.0235172	-0.09944902	0.06890047	0.05315907
<b>25</b>	-0.0525606	0.04568407	-0.17652355	0.0269855	0.06063813

**Πίνακας 3-4 Τιμές των συντελεστών  $\alpha_i$  για διάφορες τιμές angle of attack**

Ακολουθώντας τα βήματα που ακολουθάει και η δημοσίευση λαμβάνεται η γραφική αναπαράσταση των συντελεστών  $\omega^2$ ,  $\mu$ ,  $b_1$ ,  $b_2$  και  $b_3$ . Αντικαθίστανται οι τιμές των μεταβλητών  $C$  και  $D$ , που δίνονται στη σχέση (9) και τις τιμές των συντελεστών  $\alpha_i$  από το **Πίνακα 4**, στις εξισώσεις (4) μέχρι (8) υπολογίζοντας τις τιμές των συντελεστών  $\omega^2$ ,  $\mu$ ,  $b_1$ ,  $b_2$  και  $b_3$ .

Αφού υπολογιστούν οι τιμές των παραπάνω μεταβλητών που χρειάζονται για να λυθεί η εξίσωση (3), ορίζονται οι αρχικές τιμές των  $\mathbf{y}$  και  $\dot{\mathbf{y}}$ . Καλώντας τη συνάρτηση που λύνει την εξίσωση με τη χρήση της ode15s, δίνονται ως αποτέλεσμα το διάνυσμα χρόνου T\_with\_phi3 και το δισδιάστατο πίνακα Y\_with\_phi3, που η μία στήλη Y\_with\_phi3(:,1) είναι οι τιμές του  $\phi$  σε rad και η άλλη στήλη είναι οι τιμές του  $\dot{\phi}$  σε rad/sec. Έστερα, μετατρέπονται τα rad σε degrees πολλαπλασιάζοντας το διάνυσμα Y\_with\_phi3(:,1) με **180/π** και δίνονται οι γραφικές παραστάσεις της γωνίας στον άξονα roll με το χρόνο και το phase plane.



### 3.5 Προσομοίωση με τη χρήση του μοντέλου (4α)

Στη δημοσίευση [3], προτείνεται η παρακάτω διαφορική εξίσωση που περιγράφει τη κίνηση wing rock

$$\ddot{\varphi} = \left( \frac{pU_{\infty}^2 S b}{I_{xx}} \right) + u \quad (1)$$

όπου  $\varphi$  είναι η γωνία στον άξονα roll,  $\dot{\varphi}$  είναι η παράγωγος ως προς το χρόνο,  $u$  είναι ο έλεγχος,  $p$  είναι η πυκνότητα του αέρα,  $U_{\infty}$  είναι ταχύτητα του αέρα,  $S$  είναι επιφάνεια του πτερυγίου,  $b$  είναι η χορδή αυτού,  $I_{xx}$  είναι ορμή της αδράνειας της μάζας και  $C_l$  είναι συντελεστής ορμής στον άξονα του roll.

Ο αεροδυναμικός συντελεστής αδράνειας στον άξονα του roll εκφράζεται ως

$$C_l = c_0 + c_1\varphi + c_2\dot{\varphi} + c_3|\varphi|\dot{\varphi} + c_4|\dot{\varphi}|\dot{\varphi} + c_5\varphi^3 \quad (2)$$

Οι αεροδυναμικοί συντελεστές  $c_i$  είναι μη γραμμικές συναρτήσεις της γωνίας επιθέσεως του αεροσκάφους και εξάγονται από πειράματα.

Αντικαθιστώντας την εξίσωση του συντελεστή αδράνειας (εξίσωση (2)) στη διαφορική εξίσωση περιγραφής της κίνησης του wing rock (εξίσωση (1)), η τελευταία γίνεται

$$\ddot{\varphi} = f(\varphi, \dot{\varphi}) + u \quad (3)$$

όπου

$$f(\varphi, \dot{\varphi}) = b_0 + b_1\varphi + b_2\dot{\varphi} + b_3|\varphi|\dot{\varphi} + b_4|\dot{\varphi}|\dot{\varphi} + b_5\varphi^3 \quad (4)$$

Θεωρείται ότι  $u = 0$ , δηλαδή ότι βρισκόμαστε σε ανοικτού βρόχου σύστημα. Οπότε, η εξίσωση (3) με την αντικατάσταση της εξίσωσης (4) σε αυτή γίνεται

$$\ddot{\varphi} = b_0 + b_1\varphi + b_2\dot{\varphi} + b_3|\varphi|\dot{\varphi} + b_4|\dot{\varphi}|\dot{\varphi} + b_5\varphi^3 \quad (5)$$

Οι αεροδυναμικοί συντελεστές του δελταπτέτυγου αεροσκάφους για γωνία επιθέσεως ίση με  $25^\circ$  δίνονται από τη συγκεκριμένη δημοσίευση και χρησιμοποιούνται στη προσομοίωση του φαινομένου. Οι τιμές των συντελεστών  $b_i$  φαίνονται στο παρακάτω πίνακα.

$b_0$	$b_1$	$b_2$	$b_3$	$b_4$	$b_5$
0	-0.01859521	0.015162375	-0.06245153	0.00954708	0.02145291

**Πίνακας 3-5 Τιμές των συντελεστών  $b_i$  για διάφορες τιμές angle of attack  $\alpha=25^\circ$**

Αντικαθιστώντας τις τιμές των συντελεστών  $b_i$  από το **Πίνακα 5** στην εξίσωση (5), έχουμε τη διαφορική εξίσωση που θέλουμε να λύσουμε.

Καθορίζοντας τις αρχικές τιμές των  $y$  και  $\dot{y}$  και με τη κλήση της συνάρτησης που λύνει την εξίσωση με τη χρήση της ode15s, λαμβάνονται ως αποτέλεσμα το διάνυσμα χρόνου `T_with_b_parameters` και το δισδιάστατο πίνακα `Y_with_b_parameters`, που η μία στήλη `Y_with_b_parameters(:,1)` είναι οι τιμές του  $\phi$  σε rad και η άλλη στήλη είναι οι τιμές του  $\dot{\phi}$  σε rad/sec. Έπειτα, μετατρέπονται τα rad σε degrees πολλαπλασιάζοντας το διάνυσμα `Y_with_b_parameters(:,1)` με  $180/\pi$  και παρουσιάζονται οι γραφικές παραστάσεις της γωνίας στον άξονα roll με το χρόνο και το phase plane.

### 3.6 Προσομοίωση με τη χρήση του μοντέλου (4β)

Στην δημοσίευση στην οποία υπήρχε το μαθηματικό μοντέλο που χρησιμοποιήθηκε πρωτύτερα, αναλύεται ο τρόπος υπολογισμού των συντελεστών  $b_i$  αντί για την απευθείας ανάθεση τιμών, αν και σε αυτή τη περίπτωση απαιτείται η παροχή των τιμών των συντελεστών  $c_i$ . Δηλαδή, χρησιμοποιείται η ίδια εξίσωση

$$\ddot{\varphi} = \left( \frac{pU_{\infty}^2 S b}{I_{xx}} \right) + u \quad (1)$$

Ο αεροδυναμικός συντελεστής αδράνειας στον άξονα του roll εκφράζεται ακριβώς το ίδιο, δηλαδή

$$C_l = c_0 + c_1 \varphi + c_2 \dot{\varphi} + c_3 |\varphi| \dot{\varphi} + c_4 |\dot{\varphi}| \dot{\varphi} + c_5 \varphi^3 \quad (2)$$

Οπότε, η αντικατάσταση τους μας δίνει τη παρακάτω διαφορική εξίσωση

$$\ddot{\varphi} = f(\varphi, \dot{\varphi}) + u \quad (3)$$

όπου

$$f(\varphi, \dot{\varphi}) = b_0 + b_1 \varphi + b_2 \dot{\varphi} + b_3 |\varphi| \dot{\varphi} + b_4 |\dot{\varphi}| \dot{\varphi} + b_5 \varphi^3 \quad (4)$$

Δηλαδή, η διαφορική εξίσωση που περιγράφει τη κίνηση του φαινομένου wing rock είναι η παρακάτω για την οποία θεωρούμε  $u = 0$ .

$$\ddot{\varphi} = b_0 + b_1 \varphi + b_2 \dot{\varphi} + b_3 |\varphi| \dot{\varphi} + b_4 |\dot{\varphi}| \dot{\varphi} + b_5 \varphi^3 \quad (5)$$

όπου

$$b_i = \left( \frac{pU_{\infty}^2 S b}{2I_{xx}} \right) c_i \quad (6)$$

Για τη συγκεκριμένη προσομοίωση, θα υπολογιστεί η διαφορική εξίσωση με τη χρήση των συντελεστών  $c_i$  για να δούμε αν τα αποτελέσματα είναι τα αναμενόμενα. Θα αντικατασταθεί η εξίσωση (6) στην εξίσωση (5). Έτσι, η διαφορική εξίσωση που θα χρησιμοποιηθεί θα είναι η εξής

$$\ddot{\varphi} = \left( \frac{pU_{\infty}^2 S b}{2I_{xx}} \right) (c_0 + c_1 \varphi + c_2 \dot{\varphi} + c_3 |\varphi| \dot{\varphi} + c_4 |\dot{\varphi}| \dot{\varphi} + c_5 \varphi^3) \quad (7)$$

Οι τιμές των συντελεστών  $c_i$  δίνονται από το παρακάτω τύπο

$$c_i = \left( \frac{2I_{xx}}{\rho U_\infty^2 S b} \right) b_i \quad (8)$$

όπου οι τιμές των συντελεστών  $b_i$  είναι ίδιες με το μοντέλο (4α) και είναι οι κάτωθι

$b_0$	$b_1$	$b_2$	$b_3$	$b_4$	$b_5$
0	-0.01859521	0.015162375	-0.06245153	0.00954708	0.02145291

**Πίνακας 3-6 Τιμές των συντελεστών  $b_i$  για διάφορες τιμές angle of attack  $\alpha=25^\circ$**

ενώ οι τιμές των μεταβλητών για τον υπολογισμό του όρου

$$\left( \frac{2I_{xx}}{\rho U_\infty^2 S b} \right) \quad (9)$$

δίνονται στον επόμενο πίνακα.

$\rho$	πυκνότητα του αέρα	$1.1955 \text{ kg/m}^3$
$S$	εμβαδόν πτερυγίου	$0.0324 \text{ m}^2$
$b$	χορδή πτερυγίου	$0,429 \text{ m}$
$U_\infty$	ταχύτητα	$15 \text{ m/s}$
$I_{xx}$	ορμή της αδράνειας της μάζας	$0.27 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$

**Πίνακας 3-7 Τιμές των μεταβλητών που χρησιμοποιούνται στην εξίσωση (8)**

Αντικαθιστώντας τις τιμές των συντελεστών  $b_i$  από το **Πίνακα 6** στην εξίσωση (8), λαμβάνονται τις τιμές των  $c_i$ . Έπειτα, υπολογίζεται ο όρος (9) με τη χρήση των τιμών των μεταβλητών από το **Πίνακα 7**. Χρησιμοποιώντας τις τιμές αυτές στην εξίσωση (7), λαμβάνεται η διαφορική εξίσωση που πρέπει να υπολογιστεί.

Καθορίζονται οι αρχικές τιμές των  $y$  και  $\dot{y}$  και καλείται η συνάρτηση που λύνει την εξίσωση με τη χρήση της ode15s, δίνονται ως αποτέλεσμα το διάνυσμα χρόνου  $T\_with\_c\_parameters$  και το δισδιάστατο πίνακα  $Y\_with\_c\_parameters$ , που η μία στήλη  $Y\_with\_c\_parameters(:,1)$  είναι οι τιμές του  $\phi$  σε rad και η άλλη στήλη είναι οι τιμές του  $\dot{\phi}$  σε rad/sec. Ύστερα, μετατρέποντας τα rad σε degrees πολλαπλασιάζοντας το διάνυσμα  $Y\_with\_c\_parameters(:,1)$  με  $180/\pi$  και λαμβάνονται οι γραφικές παραστάσεις της γωνίας στον άξονα roll με το χρόνο και το phase plane.

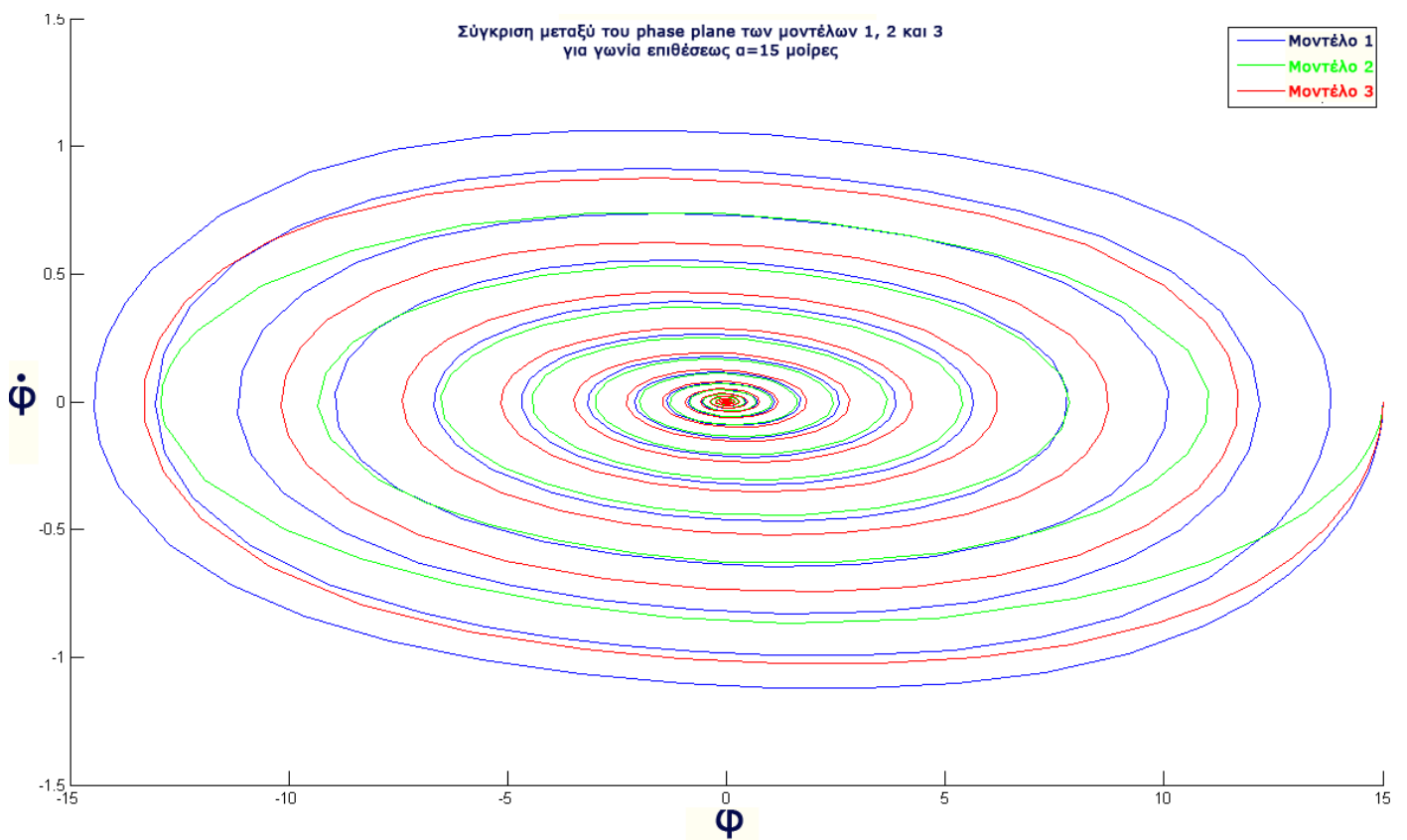
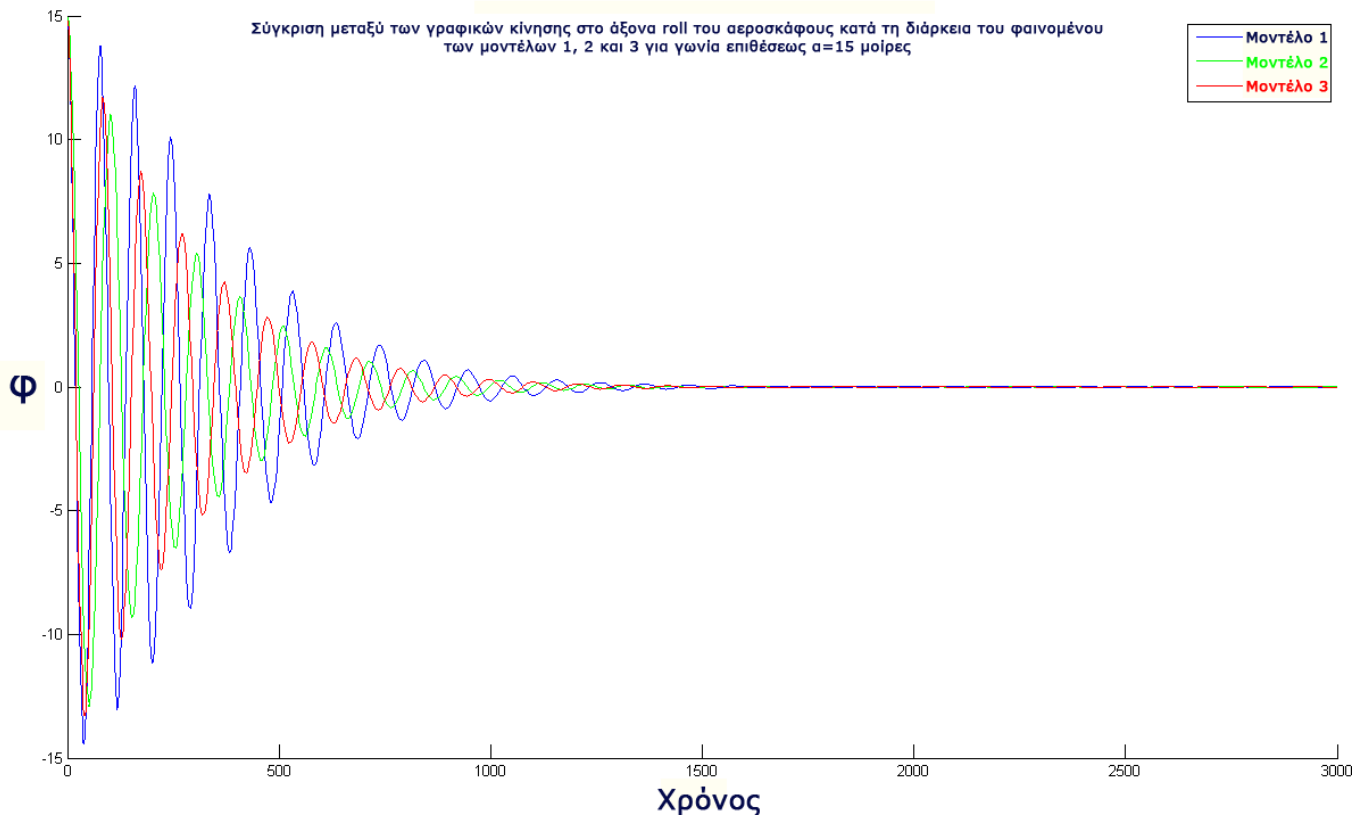
### 3.7 Σύγκριση προσομοιώσεων

Καθώς, στη τελευταία δημοσίευση υπάρχουν τιμές για τους συντελεστές της διαφορικής εξίσωσης μόνο για γωνία επιθέσεως ίση με  $25^\circ$ , η σύγκριση των προσομοιώσεων χωρίζεται σε δύο αρχεία. Για γωνία επιθέσεως ίση με  $15^\circ$  συγκρίνονται τα μοντέλα που εμφανίζονται στις δύο πρώτες δημοσιεύσεις, δηλαδή τα μοντέλα (1), (2) και (3). Ενώ, για γωνία επιθέσεως ίση με  $25^\circ$ , συγκρίνονται τα τρία παραπάνω μοντέλα και τα δύο μοντέλα (4α) και (4β) που εμφανίζονται στη τελευταία δημοσίευση.

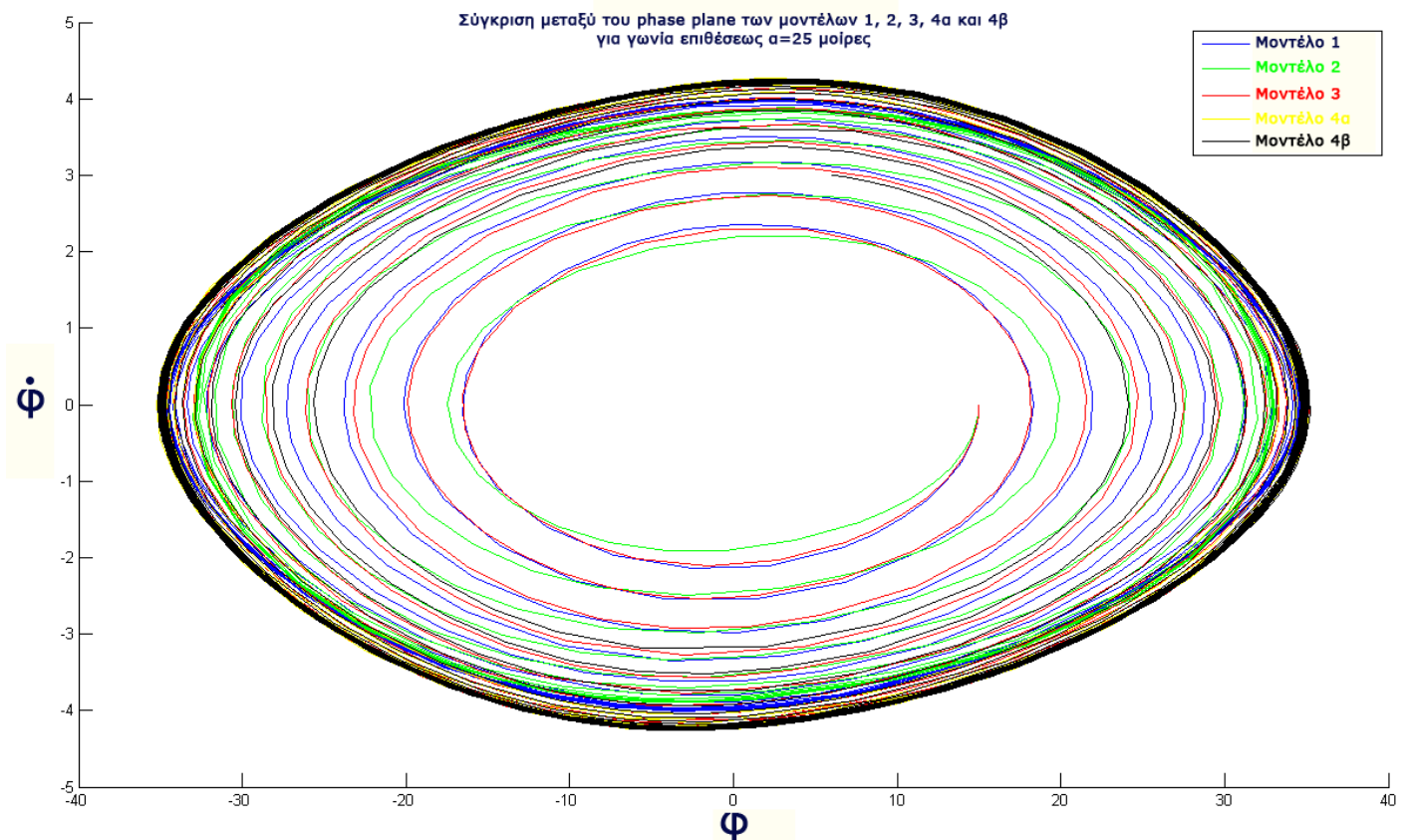
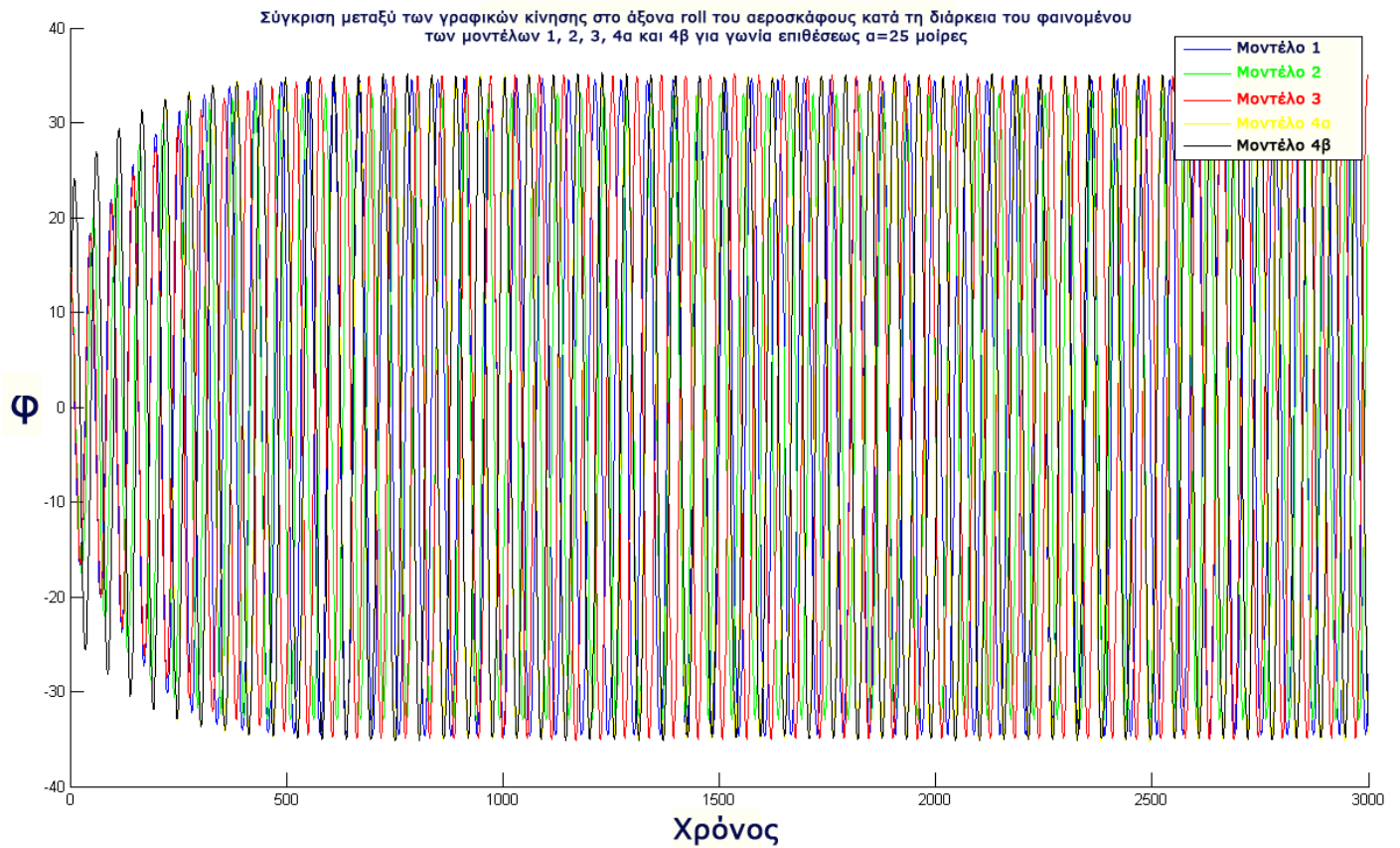
Επίσης, γίνεται σύγκριση των phase planes και των γραφικών κίνησης στον άξονα roll του αεροσκάφους κατά τη διάρκεια του φαινομένου για τα μοντέλα (2) και (3) για να παρατηρηθεί η συμμετοχή του όρου  $\varphi^3$  στην εξίσωση του φαινομένου.

Τέλος, συγκρίνονται τα μοντέλα (4α) και (4β) και παρατηρείται η διαφορά μεταξύ των παραμέτρων c και των παραμέτρων b.

### Μοντέλα (1), (2) και (3) για γωνία επιθέσεως $\alpha=15$ μοίρες



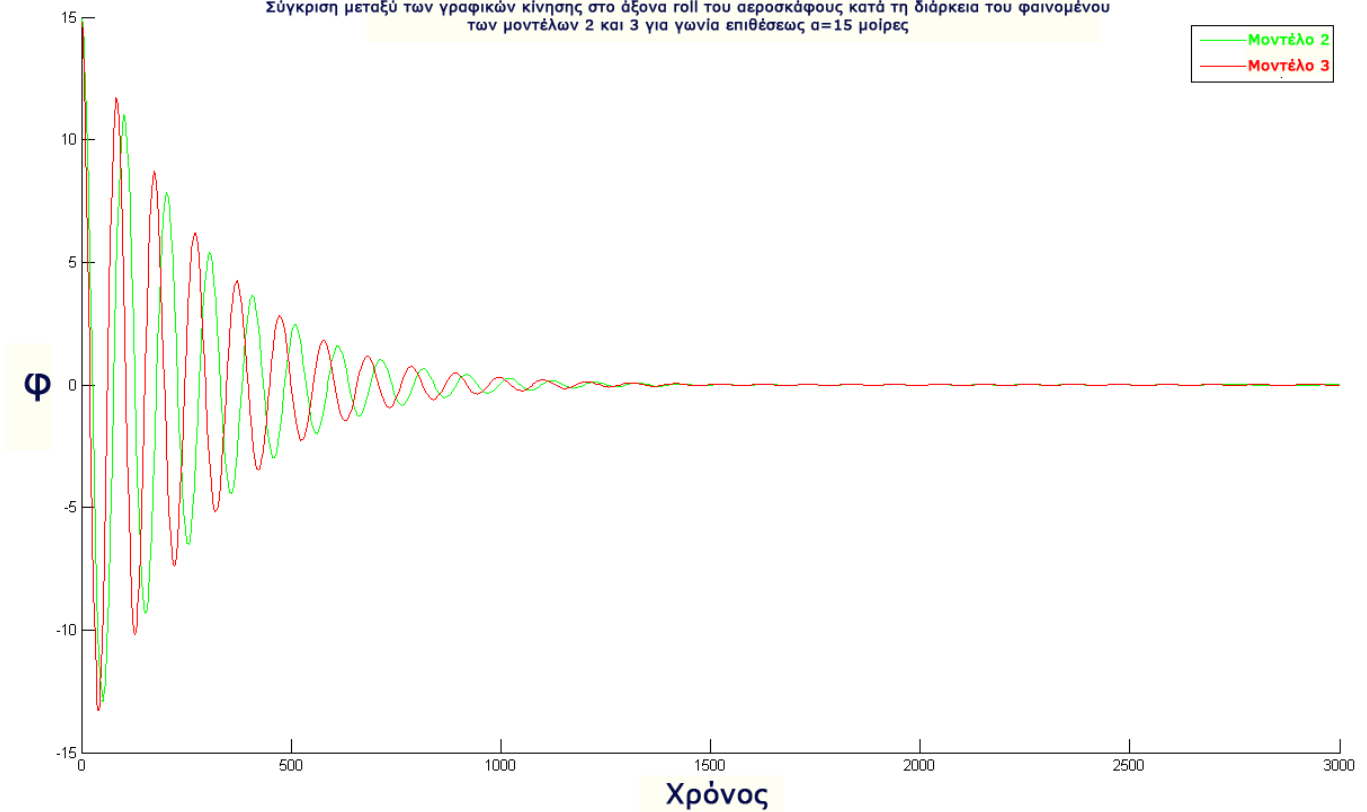
### Μοντέλα (1), (2), (3), (4α) και (4β) για γωνία επιθέσεως $\alpha=25$ μοίρες



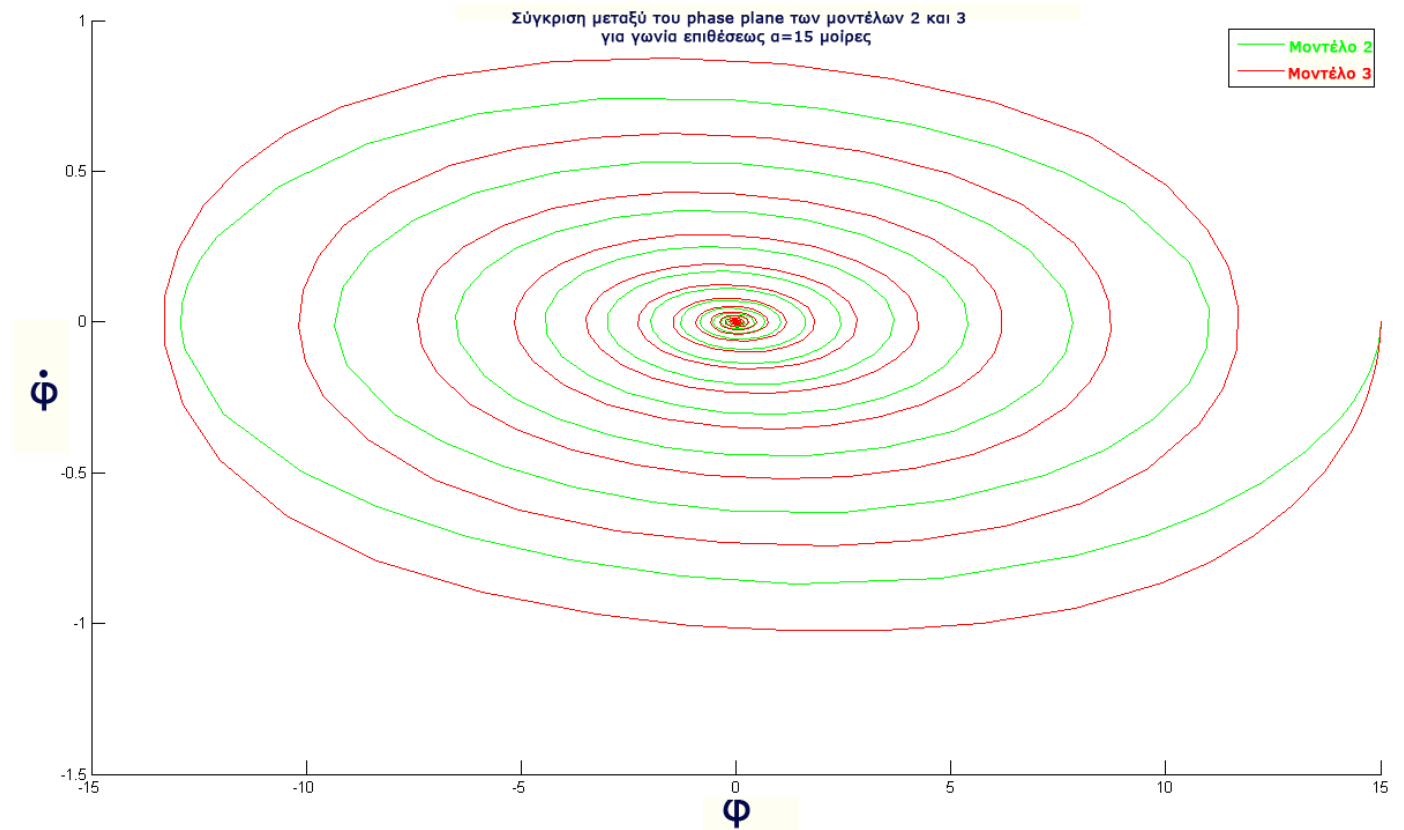


### Μοντέλα (2) και (3) για γωνία επιθέσεως $\alpha=15$ μοίρες

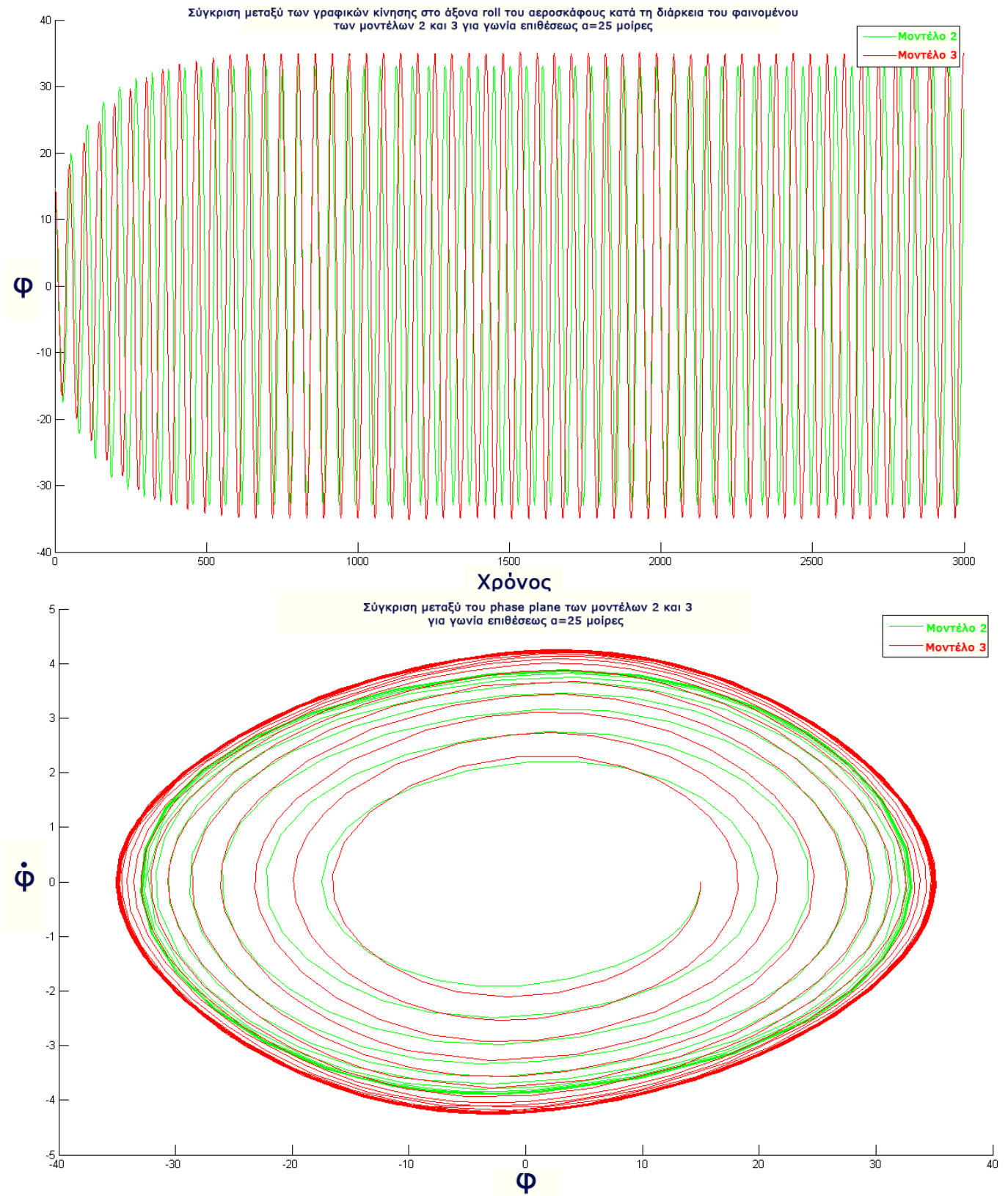
Σύγκριση μεταξύ των γραφικών κίνησης στο άξονα roll του αεροσκάφους κατά τη διάρκεια του φαινομένου των μοντέλων 2 και 3 για γωνία επιθέσεως  $\alpha=15$  μοίρες



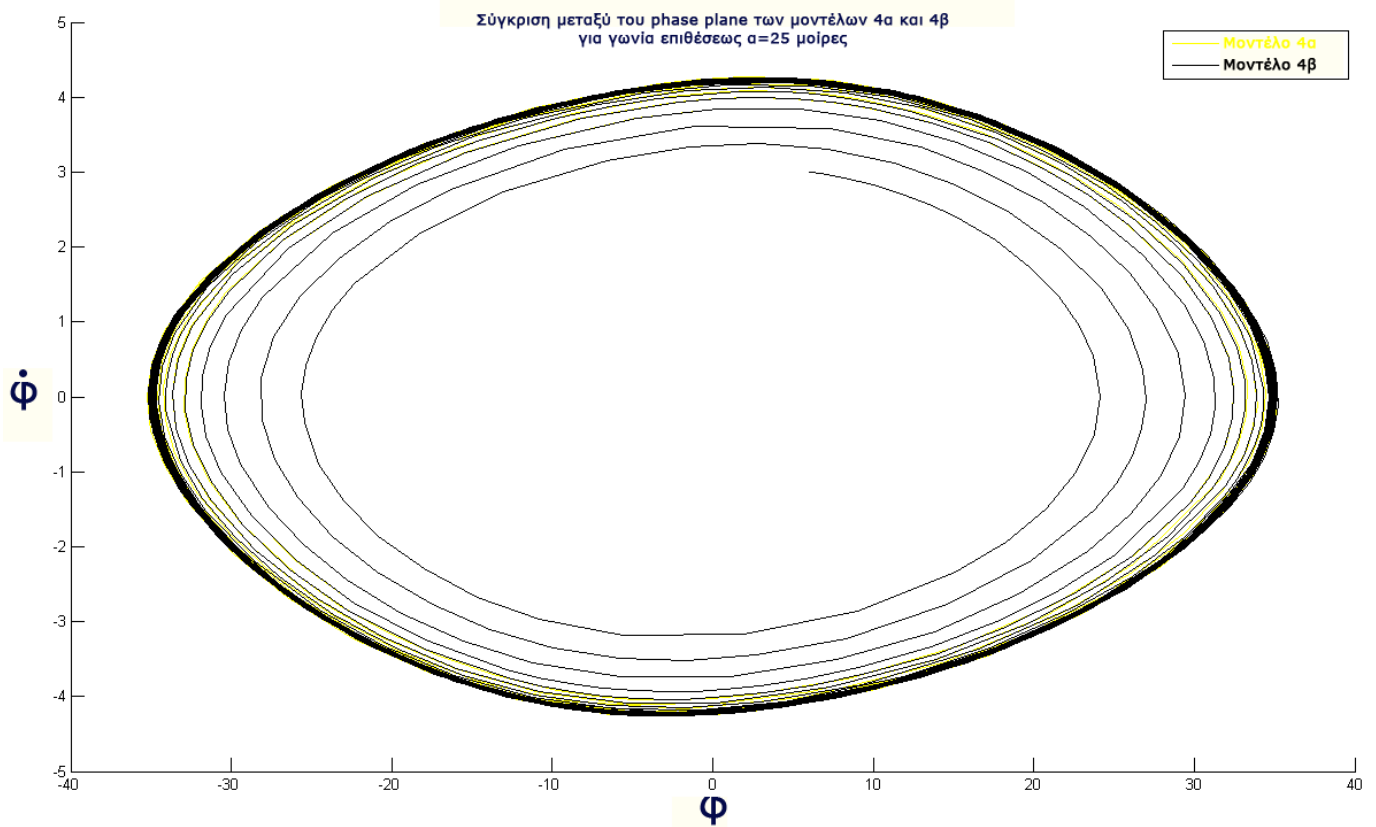
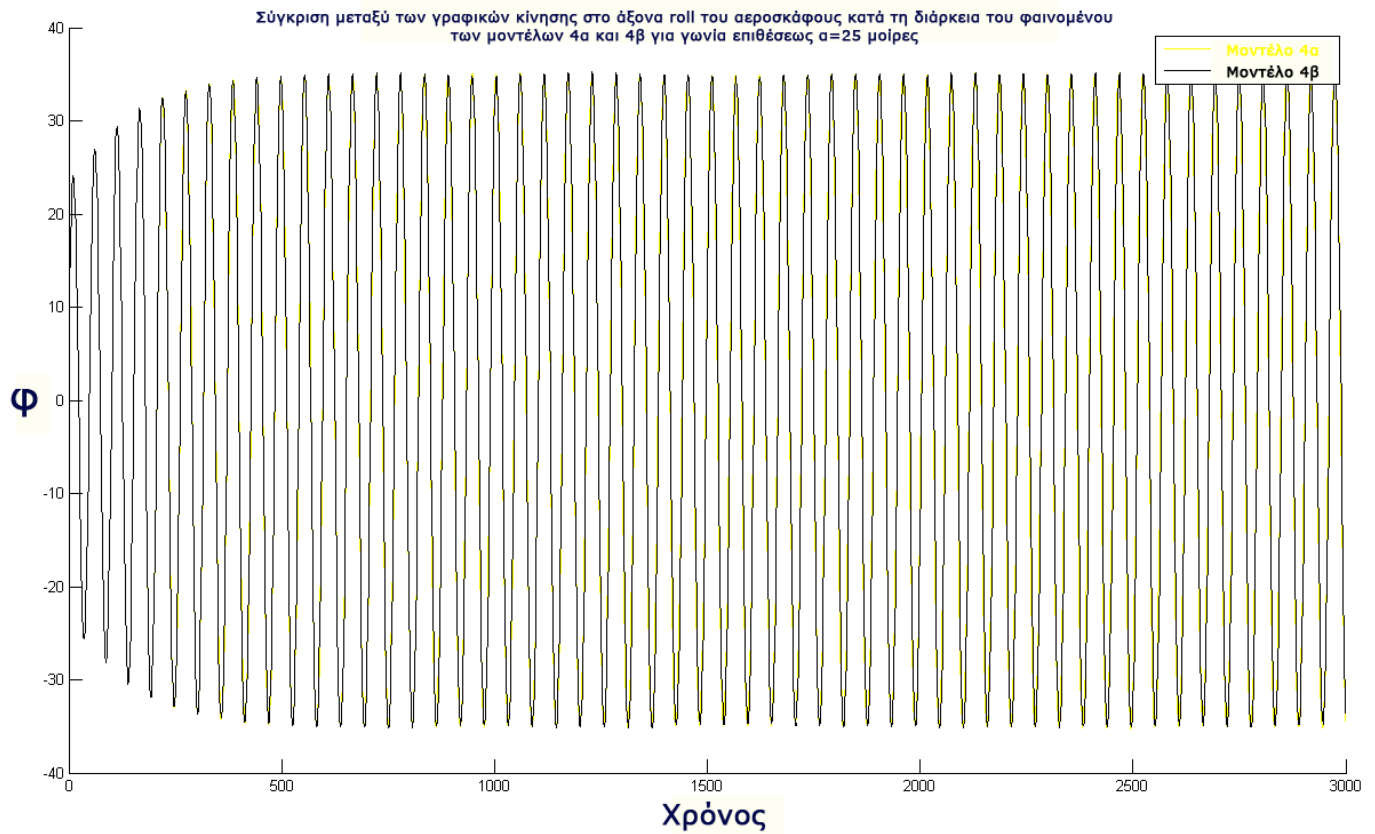
Σύγκριση μεταξύ του phase plane των μοντέλων 2 και 3 για γωνία επιθέσεως  $\alpha=15$  μοίρες



### Μοντέλα (2) και (3) για γωνία επιθέσεως $\alpha=25$ μοίρες



### Μοντέλα (4α) και (4β) για γωνία επιθέσεως $\alpha=25$ μοίρες



### 3.9 Ανάλυση και επεξήγηση κώδικα MATLAB

Η ανάλυση και επεξήγηση θα γίνει πάνω στο κώδικα MATLAB που χρησιμοποιήθηκε για τη προσομοίωση του φαινομένου wing rock με τη χρήση του πρώτου μοντέλου. Αυτό συμβαίνει γιατί, πρώτον, ο κώδικας MATLAB των υπολοίπων προσομοιώσεων έχει ακριβώς την ίδια δομή με τη διαφορά ότι αλλάζει η εξίσωση που χρησιμοποιείται και οι τιμές των συντελεστών που εισάγονται και δεύτερον για την ανάπτυξη του observer στο επόμενο σκέλος θα χρησιμοποιηθεί η πρώτη προσομοίωση.

Επιπροσθέτως, θα γίνει ανάλυση του κώδικα του αρχείου *simulation\_all\_models\_25d.m*, που χρησιμοποιείται στη σύγκριση όλων των μοντέλων που χρησιμοποιήθηκαν για γωνία επίθεσης ίση με  $25^\circ$ . Το αρχείο *simulation\_all\_models\_15d.m* είναι ακριβώς το ίδιο με την εξαίρεση ότι δεν συμπεριλαμβάνονται τα μοντέλα (4α) και (4β) και είναι για γωνία επίθεσης ίση με  $15^\circ$ .

Πρώτα θα γίνει ανάλυση του κώδικα του αρχείου *simulation\_model1.m* και έπειτα του αρχείου *fi\_2nd\_derivative.m*, που είναι τα δύο αρχεία που χρησιμοποιούνται για την προσομοίωση του φαινομένου. Το αρχείο της συνάρτησης, δηλαδή το αρχείο *fi\_2nd\_derivative.m*, βρίσκεται υποχρεωτικά στον ίδιο φάκελο με το αρχείο προσομοίωσης, ώστε να είναι δυνατή η εκτέλεση αυτού

### Αρχείο simulation\_model1.m

Αρχικά, εισάγονται οι τιμές σε μοίρες που μπορεί να λάβει η γωνία επιθέσεως του αεροσκάφους.

```
aoa = [15 21.5 22.5 25];
```

Έπειτα, χρησιμοποιείται μία global μεταβλητή<sup>11</sup> που την ονομάζουμε `index_angle`. Αυτή η μεταβλητή χρησιμοποιείται για να επιλεγεί για ποια γωνία επιθέσεως προσομοιώνεται το φαινόμενο. Χρησιμοποιείται για να γίνει επιλογή της κατάλληλης τιμής για κάθε συντελεστή όταν χρησιμοποιηθεί η συνάρτηση για την επίλυση της διαφορικής εξίσωσης.

```
global index_angle;
index_angle=1;
```

Εισάγονται οι τιμές των παραμέτρων  $a_i$  που δίνονται από τη δημοσίευση. Κάθε  $a_i$  είναι ένα διάνυσμα τεσσάρων(4) τιμών, κάθε τιμή αντιστοιχεί σε μία γωνία επιθέσεως ίση με αυτή που δίνεται από τη μεταβλητή `aoa` στη συγκεκριμένη θέση.

```
a1=[-0.01026 -0.04207 -0.04681 -0.05686];
a2=[-0.02117 0.01456 0.01966 0.03254];
a3=[-0.14181 0.04714 0.05671 0.07334];
a4=[0.99735 -0.18583 -0.22691 -0.3597];
a5=[-0.83478 0.24234 0.59065 1.4681];
```

Εισάγονται οι τιμές των μεταβλητών που θα χρησιμοποιηθούν παρακάτω στο κώδικα μας. Δηλαδή, θέτονται οι τιμές για την πυκνότητα του αέρα  $p$ , την επιφάνεια του πτερυγίου  $S$ , τη χορδή του πτερυγίου  $c$ , το χαρακτηριστικό μήκος  $L$ , την ορμή της αδράνειας σε σχέση με τον άξονα κατά μήκος της χορδής  $I_{xx}$ , το συντελεστή απόσβεσης πλάτους ταλάντωσης  $\mu_x$  και τη χαρακτηριστική ταχύτητα  $U_c$ .

```
%density of air
p=1.1955;
%moment of inertia with respect to the midspan axis along the
chord
Ixx=0.27*10^-3;
%damping coefficient for the sting bearing
mx=0.378*10^-4;
%chord
c=0.429;
%characteristic length
Lc=c/4;
%area of the pplanform
S=0.0324;
%characteristic speed
```

<sup>11</sup> Μεταβλητή η οποία μπορεί να κληθεί από οποιαδήποτε .m αρχείο, χρησιμοποιώντας φυσικά τη κατάλληλη δήλωση

```
Uc=15;
```

Μετά, υπολογίζονται οι τιμές των σταθερών  $c_1$  και  $c_2$ , οι οποίες δίνονται από τις εξισώσεις (2) και (3) αντίστοιχα.

```
c1=(p*S*c*(Lc^2))/(2*Ixx);
c2=(mx*Lc)/(Ixx*Uc);
```

Υπολογίζονται οι συντελεστές  $\omega^2$ ,  $\mu_1$ ,  $b_1$ ,  $\mu_2$  και  $b_2$  με τη χρήση των εξισώσεων (6) μέχρι (10) αντίστοιχα.

```
omega_2nd_power=-c1*a1;
m1=c1*a2-c2;
b1=c*a3;
m2=c1*a4;
b2=c1*a5;
```

Συμπυκνώνονται τα δεδομένα των  $a_i$  και των συντελεστών σε δύο πίνακες για πιο εύκολη χρήση αυτών.

```
a_data=[a1;a2;a3;a4;a5];
coefficient_data=[omega_2nd_power;m1;b1;m2;b2];
```

Προβάλλονται οι γραφικές των συντελεστών ως προς τις γωνίες επιθέσεως για τις οποίες τους έχουμε υπολογίσει. Χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση της MATLAB plot() για αυτό και θέτοντας όρια στους άξονες ίδια με αυτά που τίθενται από τη δημοσίευση και ενεργοποιώντας την επιλογή grid στο γράφημα για μία πιο εύκολη σύγκριση.

```
%Coefficient w^2
figure();
plot(aoa,omega_2nd_power);
axis([10 28 0 0.03]);
xlabel('Angle of attack(deg)');
ylabel('Coefficient w ^2');
title('w^2 as a function of angle of attack');
grid on;
```

```
%Coefficient m1
figure();
plot(aoa,m1);
axis([10 28 -0.02 0.02]);
xlabel('Angle of attack(deg)');
ylabel('Coefficient m_1');
title('m_1 as a function of angle of attack');
grid on;
```

```
%Coefficient b1
figure();
plot(aoa,b1);
axis([10 28 -0.05 0.05]);
```

```

xlabel('Angle of attack(deg)');
ylabel('Coefficient b_1');
title('b_1 as a function of angle of attack');
grid on;

%Coefficient m2
figure();
plot(aoa,m2);
axis([10 28 -0.4 0.4]);
xlabel('Angle of attack(deg)');
ylabel('Coefficient m_2');
title('m_2 as a function of angle of attack');
grid on;

%Coefficient b2
figure();
plot(aoa,b2);
axis([10 28 -0.4 0.6]);
xlabel('Angle of attack(deg)');
ylabel('Coefficient b_2');
title('b_2 as a function of angle of attack');
grid on;

```

Για τη λύση της διαφορικής εξίσωσης, χρησιμοποιείται η συνάρτηση της MATLAB ode15s. Δηλώνονται οι αρχικές τιμές για το  $\varphi$  και το  $\dot{\varphi}$ . Η MATLAB όμως δουλεύει σε rad, οπότε οι είσοδοι των αρχικών τιμών στη συνάρτηση πρέπει να είναι σε degrees, για αυτό το λόγο και πολλαπλασιάζονται με  $180/\pi$ . Η διαφορική εξίσωση βρίσκεται στο αρχείο *fi\_2nd\_derivative.m*, το οποίο είναι και η είσοδος στη συνάρτηση.

```

Y0=10;
Y0_1st=0;

[T,Y] = ode15s(@fi_2nd_derivative,[0 3000],[Y0*pi/180
Y0_1st*pi/180]);

```

Η παραπάνω συνάρτηση μας επιστρέφει δύο διανύσματα. Το διάνυσμα του χρόνου T και ένα δισδιάστατο διάνυσμα Y που η μία στήλη Y(:,1) είναι οι τιμές του  $\varphi$  σε rad και η άλλη στήλη είναι οι τιμές του  $\dot{\varphi}$  σε rad/sec.

Οπότε, πολλαπλασιάζοντας το διάνυσμα Y με  $180/\pi$  μετατρέπονται τα rad σε degrees.

```
Y=Y*(180/pi);
```

Τέλος, δίνονται οι γραφικές παραστάσεις της γωνίας στον άξονα roll με το χρόνο και της παραγώγου της γωνίας αυτής με τη γωνία, το λεγόμενο phase plane.

```

%Roll angle as a function of time
figure();

```



```
plot(T,Y(:,1));  
xlabel('Time');  
ylabel('Phi');  
title('Roll angle as a function of time');  
%Phase Plane  
figure();  
plot(Y(:,1),Y(:,2));  
xlabel('Phi');  
ylabel('Phi ^(^1^)^');  
title('Phase Plane');
```

### Αρχείο *fi\_2nd\_derivative.m*

Ξεκινώντας δηλώνεται ότι το συγκεκριμένο αρχείο είναι ένα function είσοδο ένα διάνυσμα  $dy$  το οποίο είναι οι αρχικοποιήσεις των  $\varphi$  και  $\dot{\varphi}$ . Επίσης, δηλώνεται ότι η έξοδος της συνάρτησης είναι τα διανύσματα  $t$  και  $y$ .

```
function dy = fi_2nd_derivative(t,y)
```

Έπειτα, πρέπει να εισαχθούν οι τιμές των συντελεστών που χρειαζόμαστε για την επίλυση της διαφορικής εξίσωσης (5). Αυτό μπορεί να γίνει δημιουργώντας τα διανύσματα στα οποία ορίζουμε τις τιμές των συντελεστών  $\omega^2$ ,  $\mu_1$ ,  $b_1$ ,  $\mu_2$  και  $b_2$  έτσι όπως τις παίρνουμε από την εκτέλεση των γραμμών κώδικα 45 μέχρι και 76 του παραπάνω αρχείου. Είτε, μπορεί να γίνει global μεταβλητή η μεταβλητή `coefficient_data` του παραπάνω αρχείου και γράφοντας τη παρακάτω γραμμή κώδικα

```
% global coefficient_data;
% omega_2nd_power=coefficient_data(1,:);
% m1=coefficient_data(2,:);
% b1=coefficient_data(3,:);
% m2=coefficient_data(4,:);
% b2=coefficient_data(5,:);
```

όπου κάθε μεταβλητή είναι μία γραμμή του πίνακα.

```
omega_2nd_power=[0.0036316 0.014891 0.010569 0.020126];
m1=[-0.0084943 0.0041526 0.0059578 0.010517];
b1=[-0.060836 0.020223 0.024329 0.031463];
m2=[0.35302 -0.065776 -0.080317 -0.12732];
b2=[-0.29548 0.085778 0.20907 0.51965];
```

Καλείται η τιμή της `index_angle` που έχει δοθεί από το παραπάνω αρχείο, το οποίο γνωστοποιεί για τι γωνία επιθέσεως εκτελείται η προσομοίωση.

```
global index_angle;
```

Ορίζεται ότι το διάνυσμα  $dy$  έχει δύο τιμές, δηλαδή εξηγείται στη MATLAB ότι θα υπάρχουν δύο παράγωγοι, μία για το  $y(1)$  και μία για το  $y(2)$ .

```
dy = zeros(2,1);
```

Με τη παρακάτω γραμμή κώδικα δηλώνεται η σχέση που υπάρχει ανάμεσα στις δύο αυτές παραγώγους. Η παράγωγος της  $y(1)$  είναι η  $y(2)$ . Το  $y(1)$  είναι το  $\varphi$ , ενώ το  $y(2)$  είναι το  $\dot{\varphi}$ . Οπότε, όταν μετά χρησιμοποιείται  $dy(2)$  εννοείται η παράγωγος της  $y(2)$ , η οποία είναι η παράγωγος της  $y(1)$ .

Δηλαδή,  $dy(2)=d(dy(1))=ddy(1)$ , το οποίο σημαίνει ότι η  $dy(2)$  είναι η δεύτερη παράγωγος της  $y(1)$ .

$$dy(1) = y(2)$$

Τέλος, με τη παρακάτω έκφραση δηλώνεται ποια είναι η διαφορική εξίσωση δευτέρου βαθμού της οποίας η λύση απαιτείται. Δηλαδή, είναι η διαφορική εξίσωση (5), όπου  $\varphi$  είναι  $y(1)$ ,  $\dot{\varphi}$  είναι  $y(2)$  και  $\ddot{\varphi}$  είναι  $dy(2)$ .

$$\begin{aligned} dy(2) = & -\text{omega\_2nd\_power}(\text{index\_angle}) * y(1) + m1(\text{index\_angle}) * y(2) + \\ & b1(\text{index\_angle}) * y(1)^3 + m2(\text{index\_angle}) * y(1)^2 * y(2) + \\ & b2(\text{index\_angle}) * y(1) * y(2)^2; \end{aligned}$$

### Αρχείο simulation\_all\_models\_25d.m

Αρχικά, δηλώνεται η global μεταβλητή που υποδηλώνει τι γωνία επιθέσεως χρησιμοποιείται για τη προσομοίωση. Για το συγκεκριμένο αρχείο, η μεταβλητή `index_angle` είναι ίση με 4, δηλαδή η τέταρτη θέση στη μεταβλητή `aoa` που υπάρχει σε κάθε αρχείο προσομοίωσης, δηλαδή για γωνία επιθέσεως ίση με  $25^\circ$ . Στο αρχείο `simulation_all_models_15d.m` η μεταβλητή αυτή έχει τιμή ίση με 1, δηλαδή η προσομοίωση γίνεται για γωνία επιθέσεως ίση με  $15^\circ$ .

```
global index_angle;
index_angle=4;
```

Υστερα, χρησιμοποιούμε τη συνάρτηση `run` της MATLAB. Θεωρείται ότι το συγκεκριμένο αρχείο βρίσκεται στον ίδιο φάκελο με τα αρχεία προσομοίωσης, το οποίο υποδηλώνεται από `.\` που δίνει εντολή στη MATLAB να πάει στο φάκελο που βρίσκεται το αρχείο. Έτσι, καλούνται διαδοχικά κάθε ένα από τα αρχεία που περιέχουν τα μοντέλα προσομοίωσης, ονοματίζοντας διαφορετικά σε καθένα από αυτά τα αποτελέσματα που λαμβάνονται από τη συνάρτηση `fi_2nd_derivative.m` και στο τέλος της εκτέλεσης καθενός από αυτά δεν γίνεται εκκαθάριση του χώρου εργασίας της MATLAB.

Τρέχοντας το αρχείο προσομοίωσης για το μοντέλο (1), δίνοντα τα διανύσματα `T` και `Y`.

```
run .\simulation_model1;
```

Εκτελείται το αρχείο προσομοίωσης για το μοντέλο (2), το οποίο δίνει τα διανύσματα `T_without_phi3` και `Y_without_phi3`, και το μοντέλο (3), το οποίο δίνει τα διανύσματα `T_with_phi3` και `Y_with_phi3`.

```
run .\simulation_model2_and_3;
```

Εκτελείται το αρχείο προσομοίωσης για το μοντέλο (4α), το οποίο δίνει τα διανύσματα `T_with_b_parameters` και `Y_with_b_parameters`, και το μοντέλο (4β), το οποίο δίνει τα διανύσματα `T_with_c_parameters` και `Y_with_c_parameters`.

```
run .\simulation_model4a_and_4b;
```

Μετά, έχοντας τα δεδομένα προσομοίωσης από κάθε μοντέλο προσομοίωσης, λαμβάνονται κοινές γραφικές παραστάσεις για τη γωνία στον άξονα `roll` με το χρόνο και για τη παράγωγο της γωνίας αυτής με τη γωνία, το λεγόμενο `phase plane`.

```
%Second derivative as a function of time
figure();
hold on;
```

```

plot(T,Y(:,1));
plot(T_without_phi3,Y_without_phi3(:,1),'g');
plot(T_with_phi3,Y_with_phi3(:,1),'r');
plot(T_with_b_parameters,Y_with_b_parameters(:,1),'y');
plot(T_with_c_parameters,Y_with_c_parameters(:,1),'k');
legend('N.E.M.', 'without      phi^3', 'with      phi^3', 'with      b
parameters', 'with c parameters');
xlabel('Time');
ylabel('Phi ^(^2^)' );
title('Comprarison between the second derivative as a function
of time');
hold off;
%Phase Plane
figure();
hold on;
plot(Y(:,1),Y(:,2));
plot(Y_without_phi3(:,1),Y_without_phi3(:,2),'g');
plot(Y_with_phi3(:,1),Y_with_phi3(:,2),'r');
plot(Y_with_b_parameters(:,1),Y_with_b_parameters(:,2),'y');
plot(Y_with_c_parameters(:,1),Y_with_c_parameters(:,2),'k');
legend('N.E.M', 'without      phi^3', 'with      phi^3', 'with      b
parameters', 'with c parameters');
xlabel('Phi');
ylabel('Phi ^(^1^)' );
title('Comprarison between the phase planes');
hold off;

```

# Κεφάλαιο 4

## Νευρωνικό Δίκτυο

### Περίληψη

Σε αυτό το κεφάλαιο, παρουσιάζεται το νευρωνικό δίκτυο Patchy Neural Network(PNN) και ο παρατηρητής RISE που είναι απαραίτητος για τη δημιουργία του δικτύου.

Αρχικά, παρουσιάζεται η δομή του ανθρώπινου εγκεφάλου και η ομοιότητα του προς τα νευρωνικά. Δίνονται βασικά στοιχεία για τη κατανόηση των νευρωνικών δικτύων και τον τρόπο λειτουργίας τους.

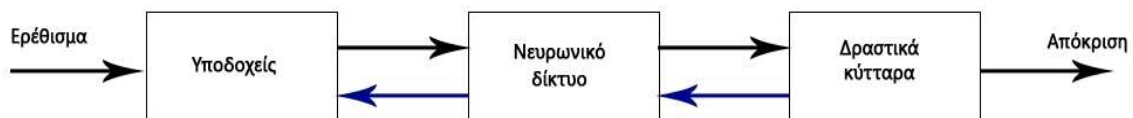
Τέλος, αναλύεται και επεξηγείται ο κώδικας που χρησιμοποιείται για τη δημιουργία του παρατηρητή και του νευρωνικού δικτύου.

### Πίνακας περιεχομένων

4.1 Ανθρώπινος εγκέφαλος .....	67
4.2 Νευρωνικό δίκτυο .....	71
4.3 Πλεονεκτήματα νευρωνικού δικτύου .....	73
4.4 Μοντέλο νευρώνα.....	76
4.5 Συναρτήσεις ενεργοποίησης.....	78
4.6 Αρχιτεκτονικές δικτύου .....	81
4.7 RISE Observer .....	84
4.8 Patch Neural Network.....	87
4.9 Ανάλυση και επεξήγηση κώδικα MATLAB	<b>Σφάλμα! Δεν έχει οριστεί σελιδοδείκτης.</b>

## 4.1 Ανθρώπινος εγκέφαλος

Το ανθρώπινο νευρικό σύστημα μπορεί να αντιμετωπιστεί ως ένα σύστημα τριών σταδίων. Το κέντρο του συστήματος είναι ο εγκέφαλος, ο οποίος αναπαρίσταται από το νευρωνικό (νευρικό) δίκτυο, το οποίο προσλαμβάνει διαρκώς πληροφορίες, τις επεξεργάζεται και λαμβάνει κατάλληλες αποφάσεις. Οι υποδοχείς μετατρέπουν τα ερεθίσματα που προέρχονται από το ανθρώπινο σώμα ή το εξωτερικό περιβάλλον σε ηλεκτρικά σήματα που μεταφέρουν πληροφορία στο νευρικό δίκτυο. Τα δραστικά κύτταρα μετατρέπουν τα ηλεκτρικά σήματα που παράγονται από το νευρικό δίκτυο σε αισθητές αποκρίσεις.



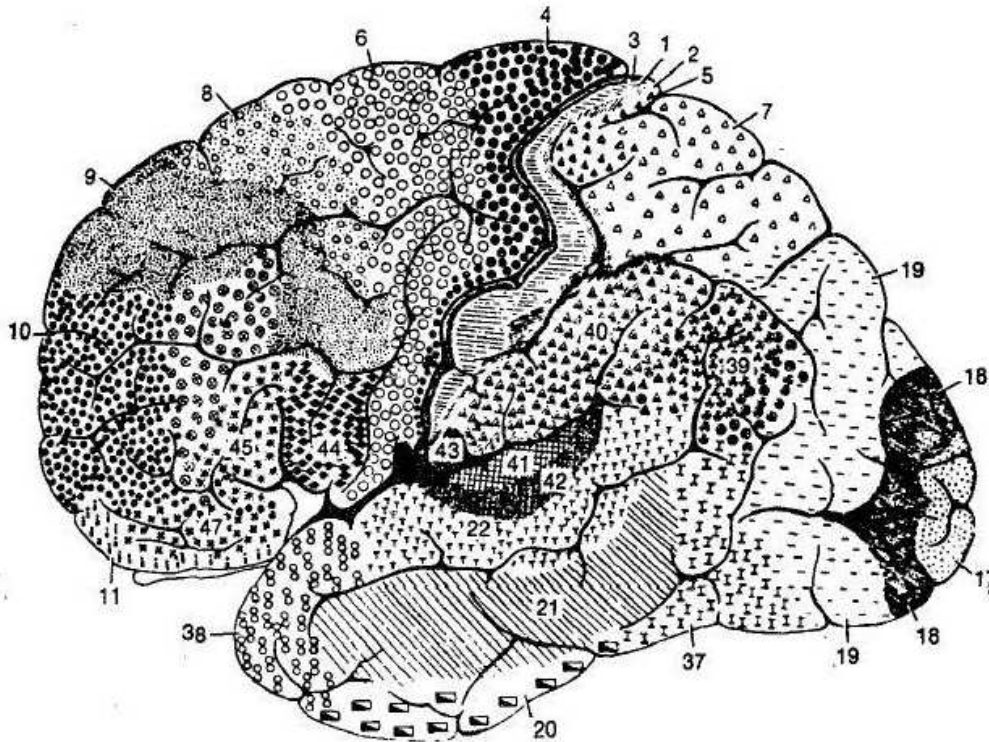
Τα βέλη με κατεύθυνση από τα αριστερά προς τα δεξιά υποδεικνύουν τη μετάδοση των σημάτων πληροφορίας, δηλαδή τη δείχνουν τη πρόσθια τροφοδότηση του συστήματος. Ενώ τα βέλη με κατεύθυνση από δεξιά προς τα αριστερά, σηματοδοτούν την παρουσία ανάδρασης (feedback) στο σύστημα.

Οι νευρώνες είναι πέντε έως έξι τάξεις μεγέθους αργότεροι από τις λογικές πύλες που υλοποιούνται με τεχνολογία πυριτίου. Σε ένα ολοκληρωμένο κύκλωμα τα συμβάντα λαμβάνουν χώρα στην κλίμακα των νανοδευτερολέπτων, ενώ στο ανθρώπινο νευρικό δίκτυο λαμβάνουν χώρα στη κλίμακα των χιλιοστών του δευτερολέπτου. Ωστόσο, ο εγκέφαλος αντισταθμίζει το σχετικό αργό ρυθμό λειτουργίας ενός νευρώνα με την ύπαρξη ενός τεραστίου πλήθους νευρώνων με εξίσου τεράστιο αριθμό διασυνδέσεων μεταξύ τους. Εκτιμάται ότι ο εγκέφαλος φλοιός του ανθρώπου αποτελείται από 100 δισεκατομμύρια νευρώνες και 60 τρισεκατομμύρια συνάψεις. Η ενεργειακή αποδοτικότητα του εγκεφάλου είναι περίπου  $10^{-16}$  joules ανά λειτουργία ανά δευτερόλεπτο, ενώ η αντίστοιχη τιμή για τους καλύτερους υπολογιστές είναι τάξεις μεγέθους μεγαλύτερη. Το τελικό αποτέλεσμα είναι ότι ο εγκέφαλος αποτελεί μία εκπληκτικά αποτελεσματική και αποδοτική δομή και αυτός είναι ο λόγος που προσπαθούμε να τον αναπαράγουμε ως προς τις διεργασίες και το δομή.

Οι νευρώνες, ή νευρικές απολήξεις, είναι οι στοιχειώδεις δομικές και λειτουργικές μονάδες που παίζουν διαμεσολαβητικό ρόλο κατά τις αλληλεπιδράσεις μεταξύ των νευρώνων. Μία σύναψη μετατρέπει ένα



προσυναπτικό ηλεκτρικό σήμα σε ένα χημικό σήμα και κατόπιν μετατρέπει ξανά το χημικό σήμα σε ένα μετασυναπτικό ηλεκτρικό σήμα. Μία προσυναπτική διεργασία απελευθερώνει μία χημική ουσία, νευροδιαβιβαστής, η οποία διαχέεται στη συναπτική ένωση μεταξύ των νευρώνων και έπειτα επενεργεί σε μία μετασυναπτική διεργασία.



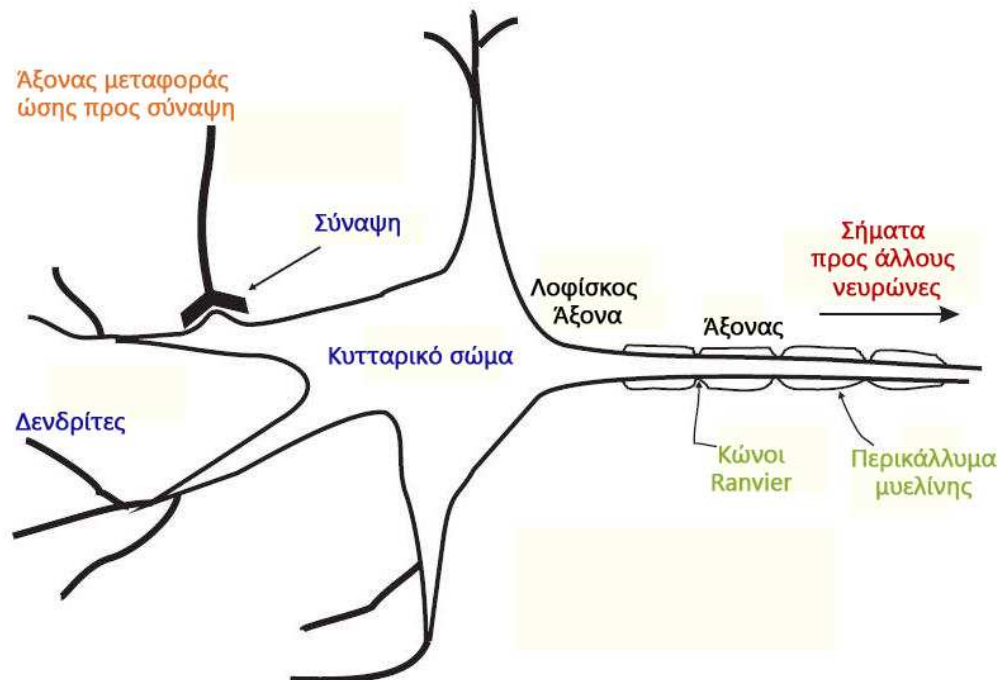
Κυτταρική αρχιτεκτονική του εγκεφαλικού φλοιού. Οι διάφορες περιοχές ταυτοποιούνται από το πάχος των στρώσεων τους και τα είδη των κυττάρων που περιέχουν. Ορισμένες από τις βασικές αισθητηριακές περιοχές είναι οι εξής:

Κινητικός φλοιός: περιοχές 4, 6 και 8  
 Σωματοαισθητικός φλοιός: περιοχές 1, 2 και 3  
 Οπτικός φλοιός: περιοχές 17, 18 και 19  
 Ακουστικός φλοιός: περιοχές 41 και 42

Στον εγκέφαλο ενός ενήλικα η πλαστικότητα μπορεί να αποδοθεί είτε στη δημιουργία νέων συναπτικών συνδέσεων μεταξύ νευρώνων είτε στη τροποποίηση των υφιστάμενων συνάψεων. Οι άξονες (οι γραμμές μετάδοσης) και οι δενδρίτες (οι ζώνες αποδεκτών) είναι δύο είδη μορφολογικά διαφορετικών νηματίων των κυττάρων. Ένας άξονας έχει πιο ομαλή επιφάνεια, λιγότερους κλάδους και μεγαλύτερο μήκος, ενώ ένας δενδρίτης έχει ακανόνιστη επιφάνεια και περισσότερους κλάδους. Οι νευρώνες που υπάρχουν σε διάφορα μέρη του εγκεφάλου ποικίλουν σε μέγεθος και σχήμα.

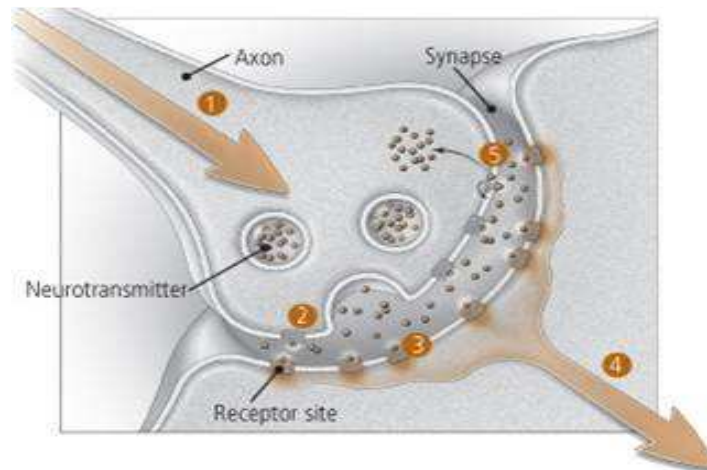
Στην πλειονότητα τους οι νευρώνες κωδικοποιούν τις εξόδους τους σαν μία σειρά παλμών τάσης σύντομης διάρκειας. Αυτοί οι παλμοί, οι οποίοι είναι γνωστοί ως δυναμικά δράσης, ξεκινούν από το κυτταρικό σώμα των νευρώνων και κατόπιν διαδίδονται διαμέσου μεμονωμένων νευρώνων με

σταθερή ταχύτητα και πλάτος σήματος. Οι λόγοι χρήσης των δυναμικών δράσης για την επικοινωνία μεταξύ των νευρώνων βασίζονται στη φυσική των αξόνων. Ο άξονας ενός νευρώνα είναι πολύ μακρύς και λεπτός και χαρακτηρίζεται από υψηλή ηλεκτρική αντίσταση και πολύ μεγάλη χωρητικότητα. Αυτά τα δύο στοιχεία κατανέμονται σε όλη την έκταση του άξονα. Άρα, ο άξονας μπορεί να μοντελοποιηθεί ως μία γραμμή μετάδοσης, υλοποιημένη με μία αντίσταση και μία χωρητικότητα. Η ανάλυση του μηχανισμού μετάδοσης σήματος αποκαλύπτει ότι όταν εφαρμόζεται μία τάση (ένα δυναμικό) στο ένα άκρο του άξονα, η τιμή της εξασθενεί εκθετικά με την απόσταση, φτάνοντας σε αμελητέα στάθμη στο άλλο άκρο. Τα δυναμικά δράσης παρέχουν ένα τρόπο παράκαμψης αυτού του προβλήματος κατά τη μετάδοση των σημάτων.



Οι τεχνητοί νευρώνες που χρησιμοποιούνται επί του παρόντος για την κατασκευή νευρωνικών δικτύων είναι κυριολεκτικά πρωτόγονοι συγκριτικά με αυτούς του ανθρώπινου εγκεφάλου. Τα νευρωνικά δίκτυα που είναι εφικτό να σχεδιαστούν είναι εξίσου πρωτόγονα σε σχέση με τα τοπικά και διαπεριφερειακά κυκλώματα του εγκεφάλου. Ωστόσο, έχει γίνει σημαντική πρόοδος. Με τη χρήση μίας μεγάλης συλλογής θεωρητικών και υπολογιστικών εργαλείων, καθώς επίσης και τις γνώσεις πάνω στη νευροφυσιολογία του εγκεφάλου, είναι σίγουρο ότι οι γνώσεις μας πάνω στα τεχνητά νευρωνικά δίκτυα και τις εφαρμογές τους θα συνεχίσουν να αυξάνονται, τόσο σε βάθος όσο και σε εύρος.

Εν κατακλείδι, τα σήματα μεταφέρονται μεταξύ των νευρώνων με ηλεκτρικούς παλμούς(δυναμικά δράσης), τα οποία κινούνται κατά μήκος του άξονα. Αυτού οι παλμοί προσκρούουν στο νευρώνα που μεταφέρει ώση στο νευρικό κέντρο στα τερματικά, που αποκαλούνται συνάψεις. Οι συνάψεις βρίσκονται κατά κύριο λόγο σε ένα σύνολο από διακλαδωμένες διεργασίες που αναδύονται από το κυτταρικό σώμα, το οποίο ονομάζεται δενδρίτης.



Κάθε παλμός που φτάνει σε μία σύναψη, απελευθερώνει μία μικρή ποσότητα μίας χημικής ουσίας που αποκαλείται νευροδιαβιβαστής, η οποία ταξιδεύει κατά μήκος της συναπτικής σχισμής και η οποία λαμβάνεται στη μετασυναπτική τοποθεσία δεκτών στη δενδριτική πλευρά της σύναψης. Ο νευροδιαβιβαστής δεσμεύεται από τα μόρια εκεί, τα οποία με τη σειρά τους αρχίζουν μία αλλαγή στο δυναμικό της δενδριτικής μεμβράνης. Αυτή αλλαγή στο μετασυναπτικό δυναμικό εξυπηρετεί στην αύξηση ή τη μείωση της πόλωσης της μετασυναπτικής μεμβράνης. Στη περίπτωση της υπερπόλωσης, το μετασυναπτικό δυναμικό τείνει να αναστείλει τη παραγωγή παλμών στο νευρώνα μεταφοράς ώσης, ενώ στη περίπτωση της μείωσης της πόλωσης τείνει να διεγείρει τη παραγωγή παλμών. Το μέγεθος και ο τύπος του δυναμικού αυτού εξαρτάται από παράγοντες όπως η γεωμετρία της σύναψης και ο τύπος του νευροδιαβιβαστή. Κάθε μετασυναπτικό δυναμικό ταξιδεύει κατά μήκος του δενδρίτη και διαδίδεται μέσα στο κυτταρικό σώμα, τελικά φθάνοντας στη βάση του άξονα, το λοφίσκο του άξονα.

Ο νευρώνας που μεταφέρει την ώση στο νευρικό κέντρο αθροίζει ή ολοκληρώνει την επίδραση χιλιάδων μετασυναπτικών δυναμικών πάνω στη δομή του δενδρίτη και σε βάθος χρόνου. Αν το ολοκληρωμένο δυναμικό στο λοφίσκο του άξονα υπερβαίνει ένα κατώφλι, τότε το κύτταρο παράγει ένα δυναμικό δράσης, το οποίο ταξιδεύει κατά μήκος του άξονα. Αυτό ξεκινάει όλη τη διαδικασία των γεγονότων από την αρχή στους νευρώνες που βρίσκονται πάνω στο μονοπάτι μεταφοράς της ώσης στο νευρικό κέντρο.

## 4.2 Νευρωνικό δίκτυο

Το επιστημονικό πεδίο των τεχνητών νευρωνικών δικτύων, ή συνήθως αποκαλούμενα νευρωνικά δίκτυα, βασίστηκε στη δομή και στις λειτουργίες του ανθρώπινου εγκεφάλου. Ο ανθρώπινος εγκέφαλος εκτελεί εντελώς διαφορετικά τους υπολογισμούς με εντελώς διαφορετικό τρόπο από το συμβατικό ψηφιακό υπολογιστή. Ο εγκέφαλος είναι ένα εξαιρετικά πολύπλοκο, μη γραμμικό, σύστημα παράλληλης επεξεργασίας πληροφοριών.

Το δομικό στοιχείο του εγκεφάλου είναι οι νευρώνες, οι οποίοι οργανώνονται με συγκεκριμένο τρόπο ανάλογα με την εκτέλεση συγκεκριμένων υπολογισμών, όπως η αντίληψη και ο έλεγχος της κίνησης. Αυτοί οι υπολογισμοί γίνονται με ταχύτητα πολλαπλάσια αυτής του γρηγορότερου σύγχρονου ψηφιακού υπολογιστή. Από τη στιγμή της γέννησης, ο εγκέφαλος έχει ήδη σημαντική δομή και τη δυνατότητα να κατασκευάζει δικούς του κανόνες συμπεριφοράς μέσω της εμπειρίας.

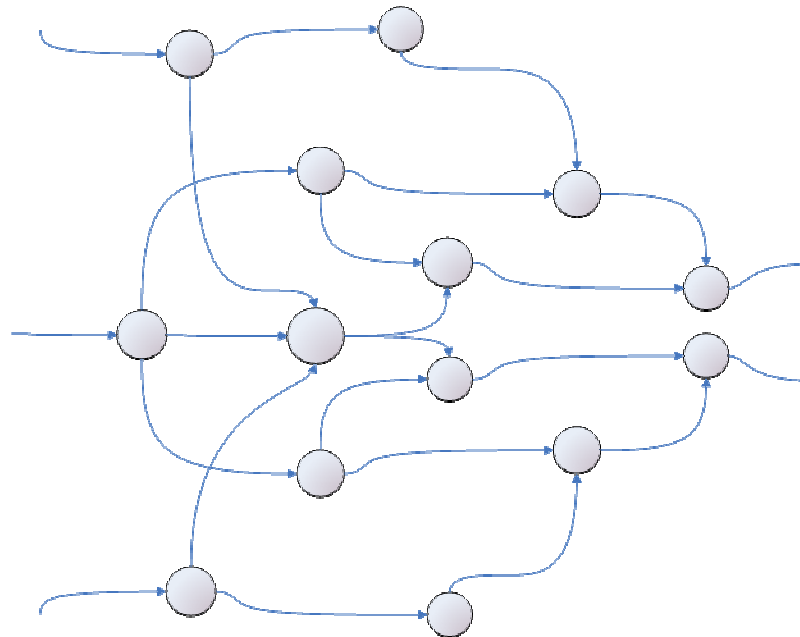
Ένα νευρικό σύστημα έχει τη δυνατότητα να προσαρμόζεται ανάλογα με το περιβάλλον του, δηλαδή χαρακτηρίζεται από τη πλαστικότητα του. Όπως ακριβώς είναι ζωτικής σημασίας οι νευρώνες ως κέντρα επεξεργασίας πληροφοριών για τον ανθρώπινο εγκέφαλο, είναι εξίσου σημαντικοί οι τεχνητοί νευρώνες για τα τεχνητά νευρωνικά δίκτυα. Στην γενική του μορφή του, ένα νευρωνικό δίκτυο είναι μία μηχανή σχεδιασμένη ώστε να μοντελοποιεί τον τρόπο με τον οποίο ο εγκέφαλος εκτελεί μία συγκεκριμένη λειτουργία ή εργασία. Το δίκτυο υλοποιείται με τη χρήση ηλεκτρονικών συστατικών ή προσομοιώνεται με τη χρήση λογισμικού σε έναν υπολογιστή.

Ένα νευρωνικό δίκτυο είναι ένας τεράστιος παράλληλος επεξεργαστής με κατανεμημένη αρχιτεκτονική, ο οποίος αποτελείται από απλές μονάδες επεξεργασίας και έχει από τη φύση του τη δυνατότητα να αποθηκεύει εμπειρική γνώση και να την καθιστά διαθέσιμη για χρήση. Μοιάζει στον ανθρώπινο εγκέφαλο σε δύο σημεία. Αρχικά, στο γεγονός ότι το δίκτυο προσλαμβάνει τη γνώση από το περιβάλλον του, μέσω μίας διαδικασίας μάθησης και δευτερευόντως στο γεγονός ότι η ισχύς των συνδέσεων μεταξύ των νευρώνων, το αποκαλούμενο συναπτικό βάρος, χρησιμοποιείται για την αποθήκευση της γνώσης που αποκτιέται.

Η κατηγορία νευρωνικών δικτύων που θα χρησιμοποιηθεί είναι εκείνη των νευρωνικών δικτύων που εκτελούν χρήσιμους υπολογισμούς αφού εκπαιδευτούν μέσω μίας διαδικασίας μάθησης. Τα νευρωνικά δίκτυα, για να επιτύχουν καλή απόδοση, χρησιμοποιούν τεράστιο αριθμό απλών,



διασυνδεδεμένων μεταξύ τους υπολογιστικών κυττάρων, τα οποία αποκαλούνται νευρώνες ή μονάδες επεξεργασίας.



Η διαδικασία μέσω της οποίας επιτυγχάνεται η μάθηση αποκαλείται αλγόριθμος μάθησης και η λειτουργία του είναι να τροποποιεί τα συναπτικά βάρη του δικτύου με τον κατάλληλο τρόπο για την επίτευξη του επιθυμητού στόχου. Η τροποποίηση των συναπτικών βαρών αποτελεί τη πεπατημένη οδό μεθόδου σχεδιασμού νευρωνικών δικτύων. Ωστόσο, ένα νευρωνικό δίκτυο έχει τη δυνατότητα να τροποποιεί τη τοπολογία του, θέτοντας ουσιαστικά το συναπτικό βάρος με μηδέν. Αυτό μιμείται το θάνατο κάποιων νευρώνων του εγκεφάλου, ενώ μπορούν επίσης να αναπτύσσονται νέες συναπτικές συνδέσεις.

Η γενική αποδοχή είναι ότι χρειάζεται πολύς δρόμος ακόμα μέχρι να κατασκευαστεί μία αρχιτεκτονική που θα μιμείται τον ανθρώπινο εγκέφαλο.

### 4.3 Πλεονεκτήματα νευρωνικού δικτύου

Είναι προφανές ότι ένα νευρωνικό δίκτυο οφείλει την υπολογιστική του ισχύ στην παράλληλη, κατανεμημένη δομή του και στην ικανότητά του να εκπαιδεύεται και να διαφοροποιείται. Δηλαδή, το δίκτυο έχει τη δυνατότητα να παράγει λογικές εξόδους σε εισόδους που δεν είχε συναρτήσει κατά την εκπαίδευσή του, ή αλλιώς τη διαφοροποίηση της τοπολογίας του με την πρόσθεση ή αφαίρεση νευρώνων.

Αυτές οι δύο δυνατότητες δίνουν στα νευρωνικά δίκτυα τη δυνατότητα να βρίσκουν καλές προσεγγιστικές λύσεις σε πολύπλοκα, μεγάλης κλίμακας προβλήματα, τα οποία δεν επιδέχονται λύσης. Ένα πολύπλοκο πρόβλημα αποσυντίθεται σε έναν αριθμό σχετικά απλών εργασιών και τα νευρωνικά δίκτυα αναλαμβάνουν ένα υποσύνολο των εργασιών που ταιριάζουν με τις εγγενείς τους δυνατότητες. Αυτό συμβαίνει γιατί τα δίκτυα δεν μπορούν να παρέχουν λύση δουλεύοντας ατομικά, αλλά πρέπει να ενταχθούν σε μία ευρύτερη και συνεπή προσέγγιση ανάπτυξης ενός συστήματος.

Πρωταρχικά, τα νευρωνικά δίκτυα έχουν την ιδιότητα της μη γραμμικότητας. Ένας τεχνητός νευρώνας μπορεί να είναι είτε γραμμικός, είτε μη γραμμικός. Ένα νευρωνικό δίκτυο αποτελούμενο από διασυνδεδεμένους μη γραμμικούς νευρώνες είναι φύσει μη γραμμικό και η μη γραμμικότητα αυτή είναι κατανεμημένη σε όλη την έκταση του δικτύου. Η ιδιότητα αυτή είναι εξαιρετικά σημαντική εάν ο υποκείμενος φυσικός μηχανισμός που είναι υπεύθυνος για την παραγωγή του σήματος εισόδου είναι εκ φύσεως μη γραμμικός.

Η τροποποίηση των συναπτικών βαρών ενός νευρωνικού δικτύου επιτυγχάνεται εφαρμόζοντας ένα σύνολο παραδειγμάτων εκπαίδευσης. Η συγκεκριμένη διαδικασία αποκαλείται μάθηση με εκπαιδευτή ή επιβλεπόμενη μάθηση. Κάθε παράδειγμα αποτελείται από ένα μοναδικό σήμα και μία αντίστοιχη επιθυμητή απόκριση. Στο δίκτυο παρουσιάζεται ένα παράδειγμα επιλεγμένο τυχαία από το σύνολο και τα συναπτικά βάρη του δικτύου τροποποιούνται ώστε να ελαχιστοποιηθεί η διαφορά μεταξύ της επιθυμητής απόκρισης και της πραγματικής απόκρισης που παράγεται από το σήμα εισόδου, βάσει ενός στατιστικού κριτηρίου. Η εκπαίδευση του δικτύου επαναλαμβάνεται για πολλά παραδείγματα του συνόλου εκπαίδευσης, έως ότου το δίκτυο να φτάσει σε μία ευσταθή κατάσταση, όπου δεν υπάρχουν περαιτέρω σημαντικές μεταβολές στα συναπτικά βάρη. Τα ήδη εφαρμοσθέντα παραδείγματα θα μπορούσαν να εφαρμοστούν εκ νέου, αλλά με διαφορετική σειρά. Έτσι, το δίκτυο μαθαίνει από τα παραδείγματα, κατασκευάζοντας μία

αντιστοίχιση εισόδου-εξόδου για το συγκεκριμένο πρόβλημα. Οπότε, ένα νευρωνικό δίκτυο θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί για την ταξινόμηση προτύπων, όπου απαιτείται η αντιστοίχιση ενός σήματος το οποίο αντιπροσωπεύει ένα φυσικό αντικείμενο ή συμβάν σε μία από τις προκαθορισμένες κατηγορίες.

Ένα άλλο πλεονέκτημα των δικτύων αυτών είναι η εγγενής δυνατότητα τους να προσαρμόζουν τα συναπτικά βάρη τους ανάλογα με τις μεταβολές που γίνονται στο περιβάλλον τους. Συγκεκριμένα, ένα νευρωνικό δίκτυο εκπαιδευμένο να λειτουργεί σε συγκεκριμένο περιβάλλον, μπορεί εύκολα να επανεκπαιδευτεί ώστε να μπορεί να χειρίζεται μικρής σημασίας μεταβολές στις συνθήκες του περιβάλλοντος λειτουργίας. Επιπλέον, όταν λειτουργεί σε ένα περιβάλλον όπου τα στατιστικά στοιχεία μεταβάλλονται στη διάρκεια του χρόνου, ένα νευρωνικό δίκτυο μπορεί να σχεδιαστεί ώστε να μεταβάλλει τα συναπτικά του βάρη σε πραγματικό χρόνο. Όσο πιο προσαρμοστικό κάνουμε ένα σύστημα, διασφαλίζοντας ότι παραμένει διαρκώς σταθερό, τόσο πιο εύρωστο θα είναι και τόσο καλύτερα θα αποδίδει όταν κληθεί να λειτουργήσει σε ένα μη σταθερό περιβάλλον. Παρόλα αυτά, θα πρέπει να επισημανθεί ότι η προσαρμοστικότητα δεν οδηγεί πάντα στην ευρωστία, αλλά μπορεί να οδηγήσει σε αντίθετα αποτελέσματα. Παραδείγματος χάριν, ένα προσαρμοστικό σύστημα με σταθερές χρόνου μικρής διάρκειας μπορεί να αλλάζει κατάσταση πολύ γρήγορα και, λόγω αυτού, να αποκρίνεται σε πλασματικές διαταραχές, γεγονός που προκαλεί σημαντική μείωση της απόδοσής του. Για την αξιοποίηση όλων των πλεονεκτημάτων της προσαρμοστικότητας, οι κύριες σταθερές χρόνου του συστήματος θα πρέπει να έχουν επαρκή διάρκεια έτσι ώστε το σύστημα να αγνοεί τις πλασματικές διαταραχές, και ταυτόχρονα επαρκώς μικρή διάρκεια ώστε το σύστημα να αποκρίνεται σε μεταβολές του περιβάλλοντος που έχουν πραγματική σημασία. Το συγκεκριμένο πρόβλημα αναφέρεται ως το δίλημμα σταθερότητας-πλαστικότητας και διατυπώθηκε από τον Grossberg το 1988.

Στο πλαίσιο της ταξινόμησης, έναν νευρωνικό δίκτυο μπορεί να σχεδιαστεί ώστε να παρέχει πληροφορία όχι μόνο για το ποιο συγκεκριμένο πρότυπο θα επιλεγεί, αλλά επίσης σχετικά με το βαθμό εμπιστοσύνης της απόφασης αυτής βάσει της ενδεικτικής απόκρισης. Η πληροφορία σχετικά με το βαθμό εμπιστοσύνης μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την απόρριψη των διφορούμενων μοτίβων, εάν αυτά προκύψουν, και τη βελτίωση της απόδοσης του δικτύου.

Ένα άλλο θετικό στοιχείο του νευρωνικού δικτύου είναι το γεγονός ότι το νευρωνικό δίκτυο χειρίζεται με φυσικό τρόπο τη σχετική με το περιεχόμενο



πληροφορία. Η γνώση αντιπροσωπεύεται από την ίδια τη δομή και τη κατάσταση ενεργοποίησης ενός νευρωνικού δικτύου. Κάθε νευρώνας στο δίκτυο ενδεχομένως να επηρεάζεται από τη συνολική δραστηριότητα όλων των άλλων νευρώνων του δικτύου. Οπότε, η πληροφορία είναι σχετική με το περιεχόμενο.

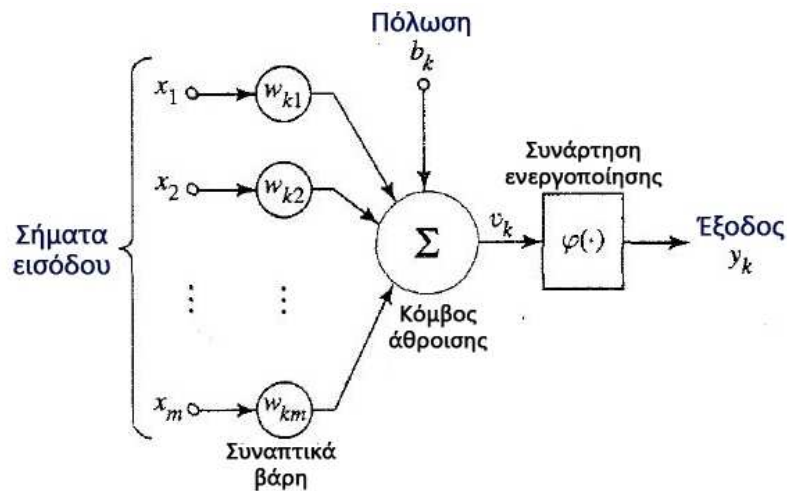
Το πιο σημαντικό πλεονέκτημα του νευρωνικού δικτύου είναι η ανοχή του σε βλάβες. Ένα νευρωνικό δίκτυο, υλοποιημένο με μορφή hardware, έχει την εγγενή δυνατότητα να είναι ανεκτικό σε βλάβες, ή εύρωστο, υπό την έννοια ότι η απόδοσή του μειώνεται βαθμιαία και ομαλά υπό αντίξοες συνθήκες λειτουργίας και δεν αποτυγχάνει καταστροφικά. Λόγω της κατανευμένης φύσης της πληροφορίας που αποθηκεύεται στο δίκτυο, μία βλάβη σε ένα νευρώνα ή στις συνδέσεις του θα πρέπει να λάβει μεγάλη έκταση πριν αρχίσει να μειώνεται σοβαρά η συνολική απόκριση του δικτύου. Υπάρχουν ορισμένα στοιχεία για την εκτίμηση της ευρωστίας του, αλλά συνήθως δεν είναι ελέγξιμη. Για να διασφαλιστεί ότι ένα νευρωνικό δίκτυο είναι πράγματι ανεκτικό στις βλάβες, μπορεί να χρειαστεί να ληφθούν διορθωτικά μέτρα στη σχεδίαση του αλγορίθμου που χρησιμοποιείται για τη σχεδίαση του δικτύου (Kerlizin και Vallet, 1993).

Τα νευρωνικά δίκτυα απολαμβάνουν καθολικής αποδοχής ως επεξεργαστές πληροφοριών, υπό την έννοια ότι χρησιμοποιείται η ίδια σημειογραφία σε όλα τα πεδία εφαρμογής των νευρωνικών δικτύων. Οι νευρώνες, σε οποιαδήποτε μορφή, αντιπροσωπεύουν ένα κοινό συστατικό σε όλα τα νευρωνικά δίκτυα. Ο κοινός χαρακτήρας καθιστά εφικτή τη χρήση των ίδιων θεωριών και αλγορίθμων μάθησης σε διαφορετικές εφαρμογές των νευρωνικών δικτύων. Δηλαδή, υπάρχει ομοιομορφία στην ανάλυση και στη σχεδίαση των νευρωνικών δικτύων.

Τέλος, η σχεδίαση του νευρωνικού δικτύου δανείζεται στοιχεία από τη λειτουργία του ανθρώπινου εγκεφάλου, ο οποίος αποδεικνύει ότι εύρωστη, παράλληλη επεξεργασία είναι φυσικά εφικτή, γρήγορη και ισχυρή. Οι νευροβιολόγοι αντιμετωπίζουν τα τεχνητά νευρωνικά δίκτυα ως ένα νευρωνικό δίκτυο για την ερμηνεία νευροβιολογικών φαινομένων, ενώ οι μηχανικοί αναζητούν στο τομέα της νευροβιολογίας νέες ιδέες για την επίλυση προβλημάτων πολύ πιο πολύπλοκα από αυτά που βασίζονται στις συμβατικές τεχνικές σχεδίασης.

#### 4.4 Μοντέλο νευρώνα

Ένας νευρώνας είναι μία μονάδα επεξεργασίας πληροφορίας, η οποία είναι θεμελιώδης για τη λειτουργία ενός νευρωνικού δικτύου. Το σχηματικό διάγραμμα παρακάτω παρουσιάζει το μοντέλο ενός νευρώνα που αποτελεί τη βάση για τη σχεδίαση νευρωνικών δικτύων. Υπάρχουν τρία βασικά στοιχεία αυτού του μοντέλου.



Ένα σύνολο συνάψεων, κάθε μία εκ των οποίων χαρακτηρίζεται από το δικό της βάρος. Συγκεκριμένα, ένα σήμα  $x_j$  στην είσοδο της σύναψης  $j$  που συνδέεται με το νευρώνα  $k$  πολλαπλασιάζεται με το συναπτικό βάρος  $w_{jk}$ . Ο πρώτος δείκτης στο  $w_{jk}$  αναφέρεται στον εν λόγω νευρώνα και ο δεύτερος δείκτης αναφέρεται στο άκρο εισόδου της σύναψης στην οποία αναφέρεται το βάρος. Ανόμοια με το βάρος μίας σύναψης στον ανθρώπινο εγκέφαλο, το συναπτικό βάρος ενός τεχνητού νευρώνα μπορεί να λαμβάνει και αρνητικές και θετικές τιμές.

Δεύτερο βασικό στοιχείο αυτού του μοντέλου είναι ένας αθροιστής για την άθροιση των σημάτων εισόδου, σταθμισμένων από τα αντίστοιχα συναπτικά βάρη του νευρώνα.

Τελευταίο βασικό στοιχείο του συστήματος είναι για τον περιορισμό του πλάτους σήματος εξόδου ενός νευρώνα. Η συνάρτηση ενεργοποίησης αναφέρεται επίσης και ως συνάρτηση περιορισμού, επειδή περιορίζει το επιτρεπτό εύρος πλάτους σήματος εξόδου σε κάποια πεπερασμένη τιμή.

Το μοντέλο περιλαμβάνει και μία εξωτερική εφαρμοζόμενη πόλωση, η οποία συμβολίζεται ως  $b_k$ . Η πόλωση αυτή έχει ως αποτέλεσμα την αύξηση ή τη μείωση της δικτυακής διέγερσης της συνάρτησης ενεργοποίησης, ανάλογα με το αν είναι θετική ή αρνητική, αντίστοιχα.

Με μαθηματικούς όρους μπορεί να περιγραφεί ο νευρώνας  $k$  που απεικονίζεται γράφοντας το ακόλουθο ζεύγος συναρτήσεων

$$u_k = \sum_{j=1}^m w_{kj} x_j$$

και

$$y_k = \varphi(u_k + b_k)$$

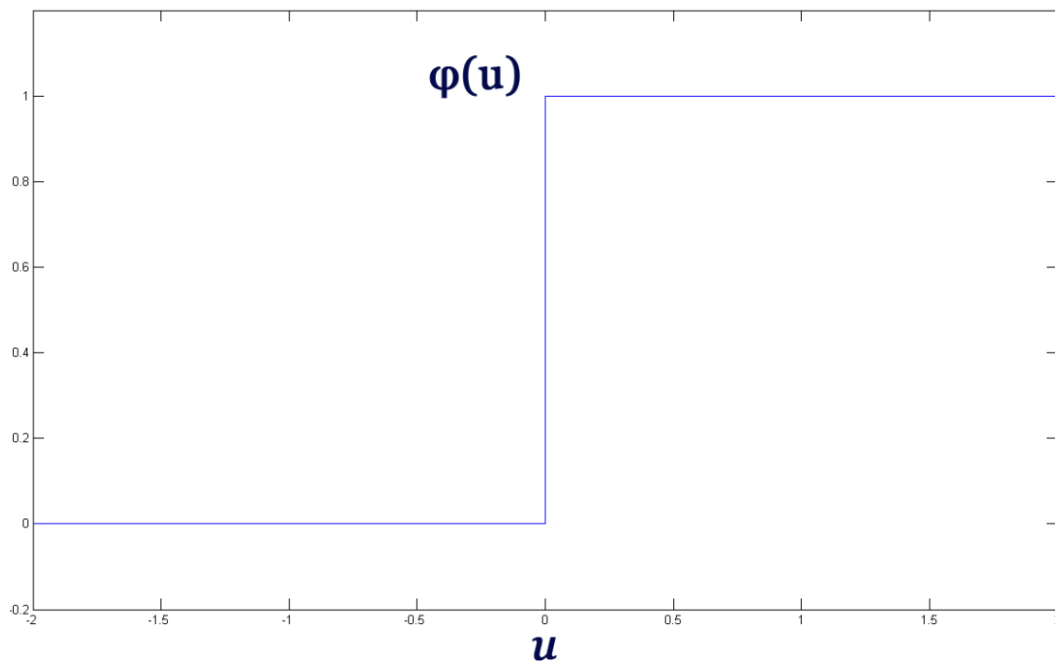
όπου  $x_1, x_2 \dots, x_m$  είναι τα σήματα εισόδου και  $w_{k1}, w_{k2} \dots, w_{km}$  είναι τα αντίστοιχα συναπτικά βάρη του νευρώνα  $k$ . Το  $u_k$  είναι η έξοδος του γραμμικού συνδυαστή που οφείλεται στα σήματα εισόδου,  $b_k$  είναι η πόλωση,  $\varphi(\cdot)$  είναι η συνάρτηση ενεργοποίησης και  $y_k$  είναι το σήμα εξόδου του νευρώνα.

## 4.5 Συναρτήσεις ενεργοποίησης

Η συνάρτηση, η οποία συμβολίζεται ως  $\varphi(u)$ , ορίζει την έξοδο ενός νευρώνα βάσει του τοπικού πεδίου  $u$ . Υπάρχουν τρεις βασικοί τύποι συναρτήσεων ενεργοποίησης.

Αρχικά, υπάρχει η συνάρτηση κατωφλίου. Για αυτό τον τύπο συνάρτησης ενεργοποίησης έχουμε

$$\varphi(u) = \begin{cases} 1, & \text{εάν } u \geq 0 \\ 0, & \text{εάν } u < 0 \end{cases}$$



Στους κλάδους της μηχανικής, αυτή η μορφή συνάρτησης κατωφλίου αναφέρεται ως συνάρτηση Heaviside. Αντίστοιχα, η έξοδος του νευρώνα  $k$  που χρησιμοποιεί μια τέτοια συνάρτηση κατωφλίου εκφράζεται ως

$$y_k = \begin{cases} 1, & \text{εάν } u_k \geq 0 \\ 0, & \text{εάν } u_k < 0 \end{cases}$$

όπου  $u_k$  είναι το τοπικό πεδίο του νευρώνα, δηλαδή

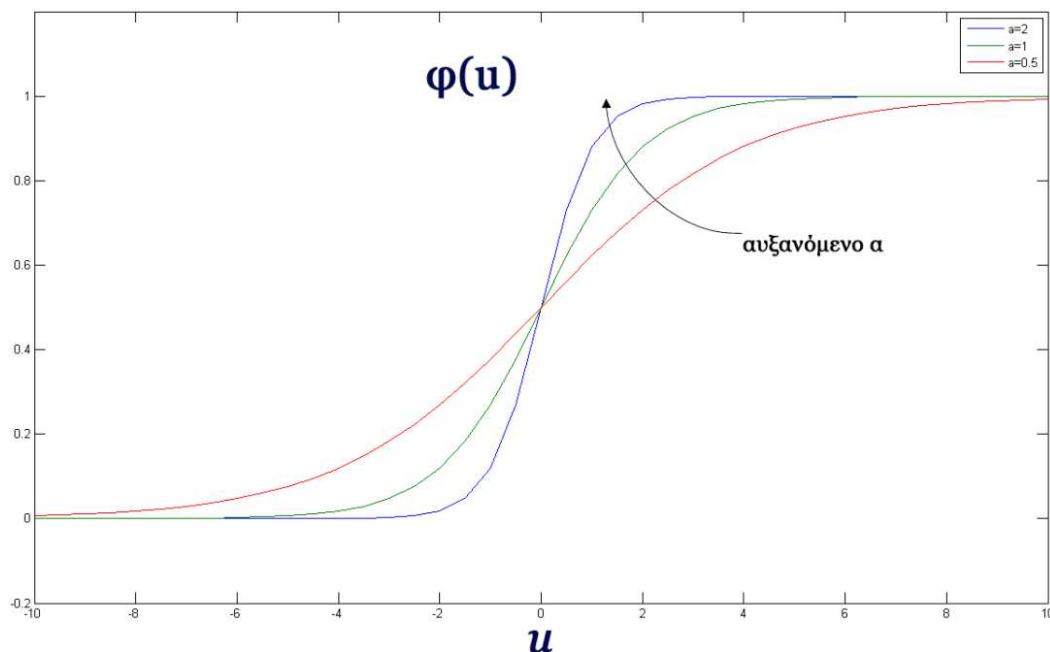
$$u_k = \sum_{j=1}^m w_{kj} x_j + b_k$$

Το παραπάνω μοντέλο νευρώνα αναφέρεται ως μοντέλο McCulloch-Pitts. Σε αυτό το μοντέλο, η έξοδος του νευρώνα λαμβάνει τιμή 1 εάν το τοπικό πεδίο του συγκεκριμένου νευρώνα είναι μη αρνητικό και τιμή 0 σε κάθε άλλη περίπτωση.

Άλλη βασική συνάρτηση ενεργοποίησης είναι η σιγμοειδής συνάρτηση. Η συνάρτηση αυτή έχει γραφική παράσταση με σχήμα S και είναι η πλέον κοινή μορφή συνάρτησης ενεργοποίησης που χρησιμοποιείται στη κατασκευή νευρωνικών δικτύων. Ορίζεται ως η αυστηρά αύξουσα συνάρτηση που επιδεικνύει κομψή ισορροπία μεταξύ γραμμικής και μη γραμμικής συμπεριφοράς. Ένα παράδειγμα της σιγμοειδούς συνάρτησης είναι η αποκαλούμενη λογιστική συνάρτηση, η οποία ορίζεται ως

$$\varphi(u) = \frac{1}{1 + e^{-au}}$$

όπου  $a$  είναι η παράμετρος κλίσης της σιγμοειδούς.

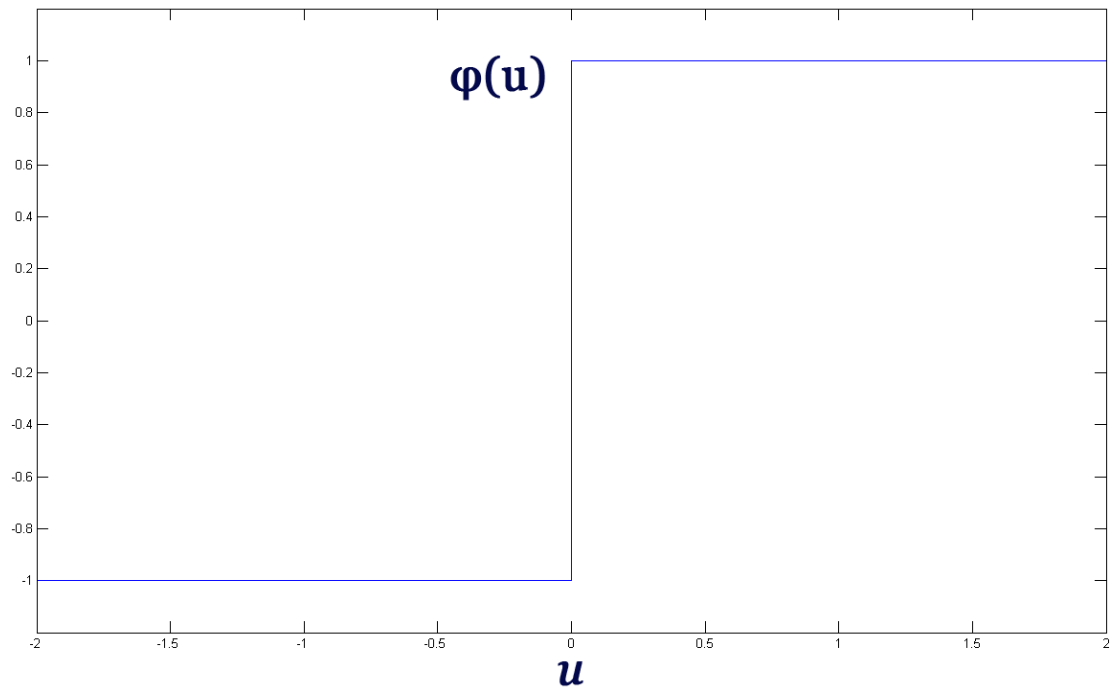


Μεταβάλλοντας την παράμετρο  $a$ , λαμβάνονται σιγμοειδείς συναρτήσεις διαφορετικών κλίσεων. Στο όριο, καθώς η παράμετρος κλίσης προσεγγίζει το άπειρο, η σιγμοειδής συνάρτηση γίνεται απλώς μία συνάρτηση κατωφλίου. Ενώ μία συνάρτηση κατωφλίου λαμβάνει τιμή 0 ή 1, μία σιγμοειδής μπορεί να λαμβάνει τιμές από ένα συνεχές πεδίο τιμών, από 0 έως 1.

Οι δύο παραπάνω συναρτήσεις ενεργοποίησης έχουν πεδίο τιμών από 0 μέχρι και +1. Σε ορισμένες περιπτώσεις, είναι επιθυμητό να δίνεται για τη συνάρτηση ενεργοποίησης πεδίο τιμών από -1 έως +1. Τότε, η συνάρτηση ενεργοποίησης είναι μία περιττή συνάρτηση του τοπικού πεδίου. Συγκεκριμένα, η συνάρτηση ορίζεται

$$\varphi(u) = \begin{cases} 1, & \text{εάν } u > 0 \\ 0, & \text{εάν } u = 0 \\ -1, & \text{εάν } u < 0 \end{cases}$$

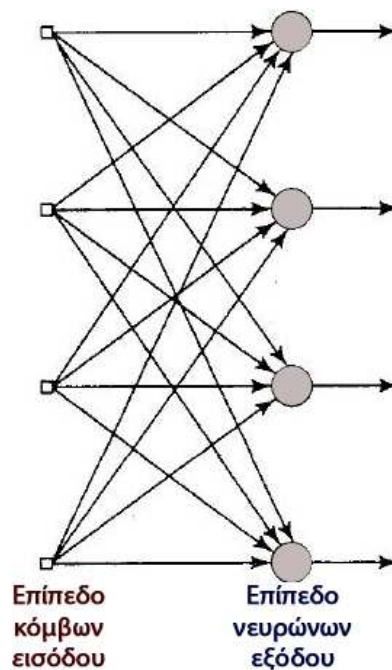
η οποία είναι γνωστή ως συνάρτηση προσήμου.



## 4.6 Αρχιτεκτονικές δικτύου

Ο τρόπος με τον οποίο είναι δομημένοι οι νευρώνες ενός δικτύου σχετίζεται στενά με τον αλγόριθμο μάθησης που χρησιμοποιείται για την εκπαίδευση του δικτύου. Υπάρχουν τρεις θεμελιώδεις κατηγορίες αρχιτεκτονικής δικτύων.

Πρώτη κατηγορία είναι αρχιτεκτονική ενός επιπέδου δικτύων πρόσθιας τροφοδότησης. Σε ένα νευρωνικό δίκτυο, οι νευρώνες οργανώνονται σε μορφή επιπέδων. Στην απλούστερη δυνατή μορφή ενός δικτύου, υπάρχει ένα επίπεδο εισόδου, το οποίο αποτελείται από πηγαίους κόμβους και συνδέεται απευθείας με ένα επίπεδο νευρώνων εξόδου (υπολογιστικοί κόμβοι), αλλά όχι αντίστροφα και αυτό είναι που του δίνει το χαρακτηρισμό πρόσθιας τροφοδότησης (feedforward).



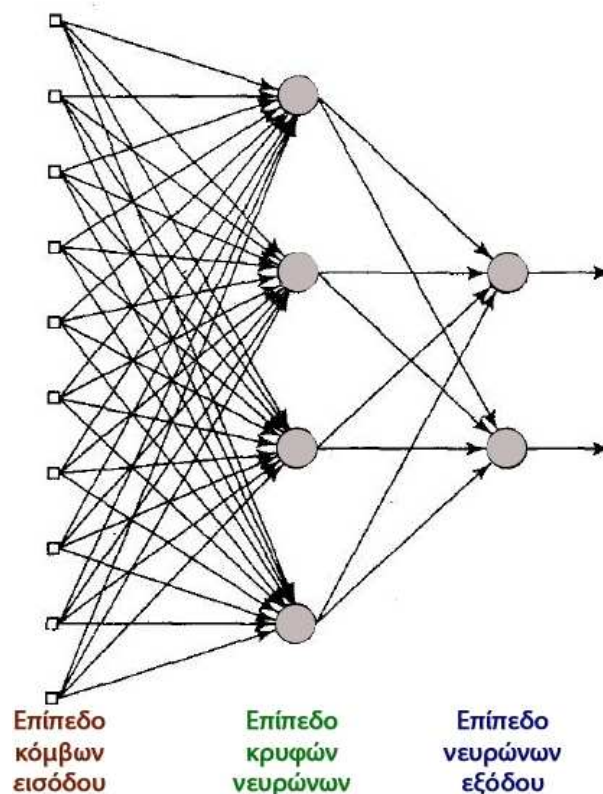
Ο χαρακτηρισμός ενός επιπέδου αναφέρεται στο επίπεδο εξόδου, των υπολογιστικών κόμβων. Το επίπεδο εισόδου δεν προσμετρείται επειδή δεν εκτελείται κανένας υπολογισμός σε αυτό.

Η δεύτερη κατηγορία νευρωνικών δικτύων πρόσθιας τροφοδότησης χαρακτηρίζεται από την παρουσία ενός ή περισσότερων κρυφών επιπέδων, των οποίων οι υπολογιστικοί κόμβοι αποκαλούνται κρυφοί νευρώνες ή κρυφές μονάδες. Ο όρος κρυφός αναφέρεται στο γεγονός ότι αυτό το μέρος του νευρωνικού δικτύου δεν είναι άμεσα ορατό ούτε από την είσοδο, ούτε από την έξοδο του δικτύου. Η λειτουργία των κρυφών νευρώνων είναι να παρεμβαίνουν μεταξύ της εξωτερικά προερχόμενης εισόδου και της εξόδου



του δικτύου με κάποιο χρήσιμο τρόπο. Προσθέτοντας ένα ή περισσότερα κρυφά επίπεδα, το δίκτυο αποκτά μία γενική προοπτική, παρά το τοπικό χαρακτήρα των συνδέσεων το, λόγω του επιπλέον συνόλου συναπτικών συνδέσεων και της επιπλέον διάστασης νευρωνικών αλληλεπιδράσεων.

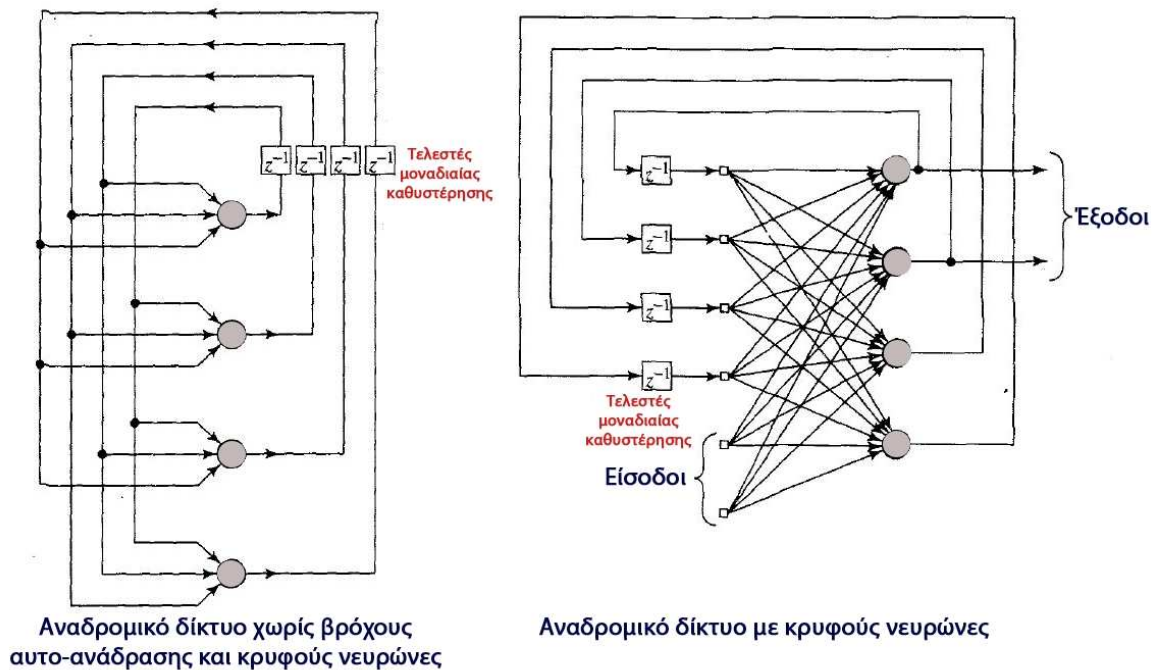
Οι πηγαίοι κόμβοι στο επίπεδο εισόδου του δικτύου παρέχουν αντίστοιχα στοιχεία του προτύπου ενεργοποίησης, τα οποία συνιστούν τα σήματα εισόδου που εφαρμόζονται στους νευρώνες του δεύτερου επιπέδου, δηλαδή του πρώτου κρυφού επιπέδου. Τα σήματα εξόδου του δεύτερου επιπέδου χρησιμοποιούνται ως είσοδοι στο τρίτο επίπεδο και αυτό συνεχίζεται για όλα τα υπόλοιπα επίπεδα του δικτύου. Τυπικά, οι νευρώνες σε κάθε επίπεδο του δικτύου έχουν ως εισόδους τα σήματα εξόδου μόνο του προηγούμενου επιπέδου. Το σύνολο των σημάτων εξόδου των νευρώνων στο επίπεδο εξόδου του δικτύου συνιστά την συνολική απόκριση του δικτύου στο πρότυπο ενεργοποίησης που παρέχεται από τους πηγαίους κόμβους στο επίπεδο εισόδου. Ένα δίκτυο πρόσθιας τροφοδότησης με  $m$  πηγαίους κόμβους,  $h_1$  νευρώνες στο πρώτο κρυφό επίπεδο,  $h_2$  νευρώνες στο δεύτερο κρυφό επίπεδο και  $q$  νευρώνες στο επίπεδο εξόδου, αναφέρεται ως δίκτυο  $m - h_1 - h_2 - q$ .



Το νευρωνικό δίκτυο λέγεται ότι είναι πλήρως συνδεδεμένο όταν κάθε κόμβος σε κάθε επίπεδο συνδέεται με κάθε άλλο κόμβο του επόμενου, προς τα

εμπρός, επιπέδου. Εάν, όμως, λείπουν ορισμένες συνδέσεις επικοινωνίας (συναπτικές συνδέσεις) από το δίκτυο, τότε είναι μερικώς συνδεδεμένο.

Τελευταία βασική κατηγορία αρχιτεκτονικής είναι τα αναδρομικά δίκτυα. Διαφέρουν από τα δίκτυα πρόσθιας τροφοδότησης στο ότι έχουν τουλάχιστον ένα βρόχο ανάδρασης. Μπορεί να περιέχουν και βρόχους αυτο-ανάδρασης, που αναφέρεται σε μία κατάσταση όπου η έξοδος ενός νευρώνα ανατροφοδοτείται στην είσοδο του ίδιου του νευρώνα.



Οι βρόχοι ανάδρασης προϋποθέτουν τη χρήση συγκεκριμένων κλάδων, αποτελούμενων από στοιχεία μοναδιαίας χρονικής καθυστέρησης (συμβολίζονται ως  $z^{-1}$ ), τα οποία έχουν ως αποτέλεσμα μη γραμμική δυναμική συμπεριφορά, εάν υποθέσουμε ότι το νευρωνικό δίκτυο περιέχει μη γραμμικές μονάδες.

## 4.7 RISE Observer

Όταν είναι διαθέσιμες μόνο μερικές μετρήσεις ή μετρήσεις εξόδου για αναγνώριση και έλεγχο, απαιτείται συνήθως να εκτιμηθούν οι υπόλοιπες καταστάσεις του συστήματος. Αυτό οδηγεί στην ανάπτυξη γραμμικών και μη γραμμικών τεχνικών με τη χρήση παρατηρητών(observers) ή εκτιμητών(estimators).

Οι παρατηρητές παρέχουν μία εκτίμηση των μη μετρήσιμων καταστάσεων, επομένως οι εκτιμημένες καταστάσεις πρέπει να είναι ακριβείς στην ανίχνευση πιθανών σφαλμάτων και αποτυχιών.

Μία προσέγγιση σχεδίασης μη γραμμικών παρατηρητών είναι η λεγόμενη κατηγορία «υψηλού κέρδους» (high-gain). Η σχεδίαση αυτών στοχεύει στο διαχωρισμό της μη γραμμικής συμπεριφοράς σε ένα γραμμικό και ένα μη γραμμικό κομμάτι. Έπειτα, επιλέγεται το κέρδος του παρατηρητή ώστε το γραμμικό κομμάτι να επικρατεί έναντι του μη γραμμικού κομματιού. Επιλέγοντας το κέρδος του παρατηρητή αρκετά υψηλό, το λάθος παρατήρησης μπορεί να γίνει σχετικά μικρό. Το υψηλό κέρδος, όμως, μπορεί να επιφέρει μεγάλες ταλαντώσεις στο θόρυβο του συστήματος.

Τα επίπεδα θορύβου και η δυναμική του συστήματος αλλάζουν με το πέρασμα του χρόνου και η ακρίβεια των μεθόδων εκτίμησης χαλάει. Οπότε, είναι απαραίτητη η χρήση σθεναρών (robust) παρατηρητών ή μεθόδων εκτίμησης που έχουν ανοχή στο θόρυβο, τις ταραχές και τη μη μοντελοποιημένη δυναμική. Μία καλή μέθοδος για την ανάπτυξη σθεναρών παρατηρητών είναι η χρήση δομής RISE(robust integral of sing error). Η συγκεκριμένη μέθοδος αυξάνει την ευρωστία του παρατηρητή και παράλληλα αυξάνει την απόδοση για την ανίχνευση σφαλμάτων σε σχέση με τους τυπικούς παρατηρητές.

Ο προτεινόμενος παρατηρητής παρέχει, εκτός από εύρωστη εκτίμηση στη περίπτωση του θορύβου, μία περιοχή ασυμπτωτικής σταθερότητας για την εκτίμηση καταστάσεων. Προσομοιώσεις έχουν δείξει ότι είναι ικανός να εκτιμήσει καταστάσεις με 25% ακρίβεια με αυξανόμενα επίπεδα θορύβου.

Για την υπόψη εργασία αναπτύσσεται ένας παρατηρητής που χρησιμοποιεί ένα νευρωνικό δίκτυο για μάθηση και χαρακτηρισμό των άγνωστων δυναμικών του συστήματος και ανάδραση RISE για ευρωστία. Η προσέγγιση του ασυμπτωτικού παρατηρητή βασισμένου στο εύρωστο ολοκλήρωμα του λάθους προσήμου (robust integral of sign error, RISE) πλήρους κατάστασης  $\xi(t)$  δίνεται από τη παρακάτω εξίσωση.

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}}(t) = \xi(t) = & k(x(t) - \hat{x}(t)) + \lambda \kappa \int_0^t (x(s) - \hat{x}(s)) ds \\ & + \beta \int_0^t \text{sgn}(x(s) - \hat{x}(s)) ds\end{aligned}$$

όπου  $k, \lambda, \beta > 0$ . Όπου  $\dot{x}$  είναι το  $\ddot{\phi}$  και  $x$  είναι το  $\dot{\phi}$ . Για την ανάπτυξη του συγκεκριμένου παρατηρητή για την ανάπτυξη του Patchy Neural Network για την αναγνώριση του φαινομένου wing rock οι μεταβλητές αυτές παίρνουν τις παρακάτω τιμές.

$$k = 2$$

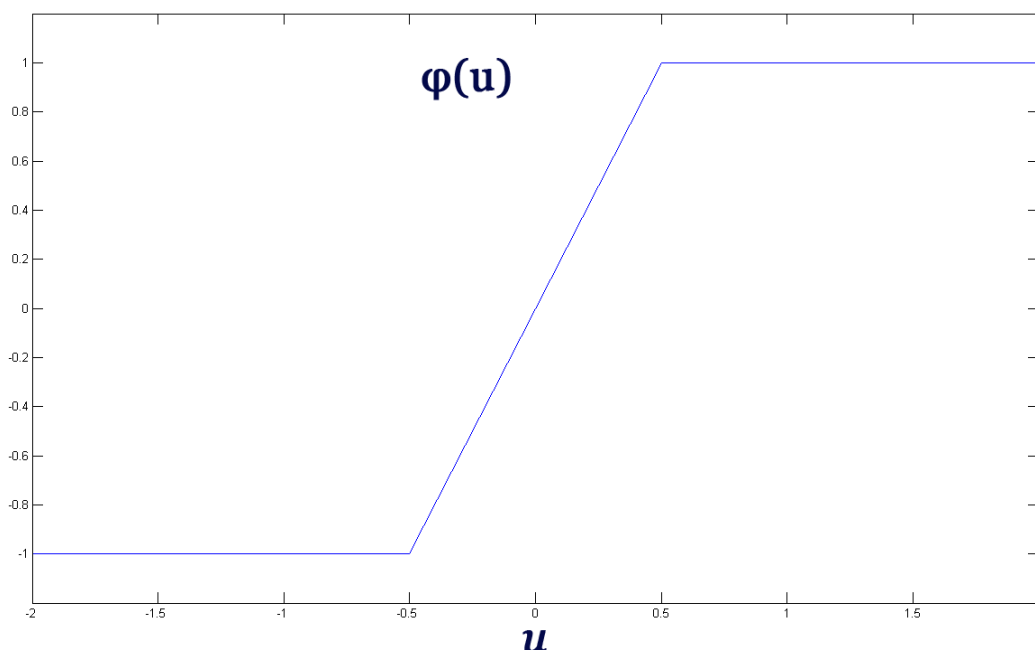
$$\lambda = 1$$

$$\beta = 20$$

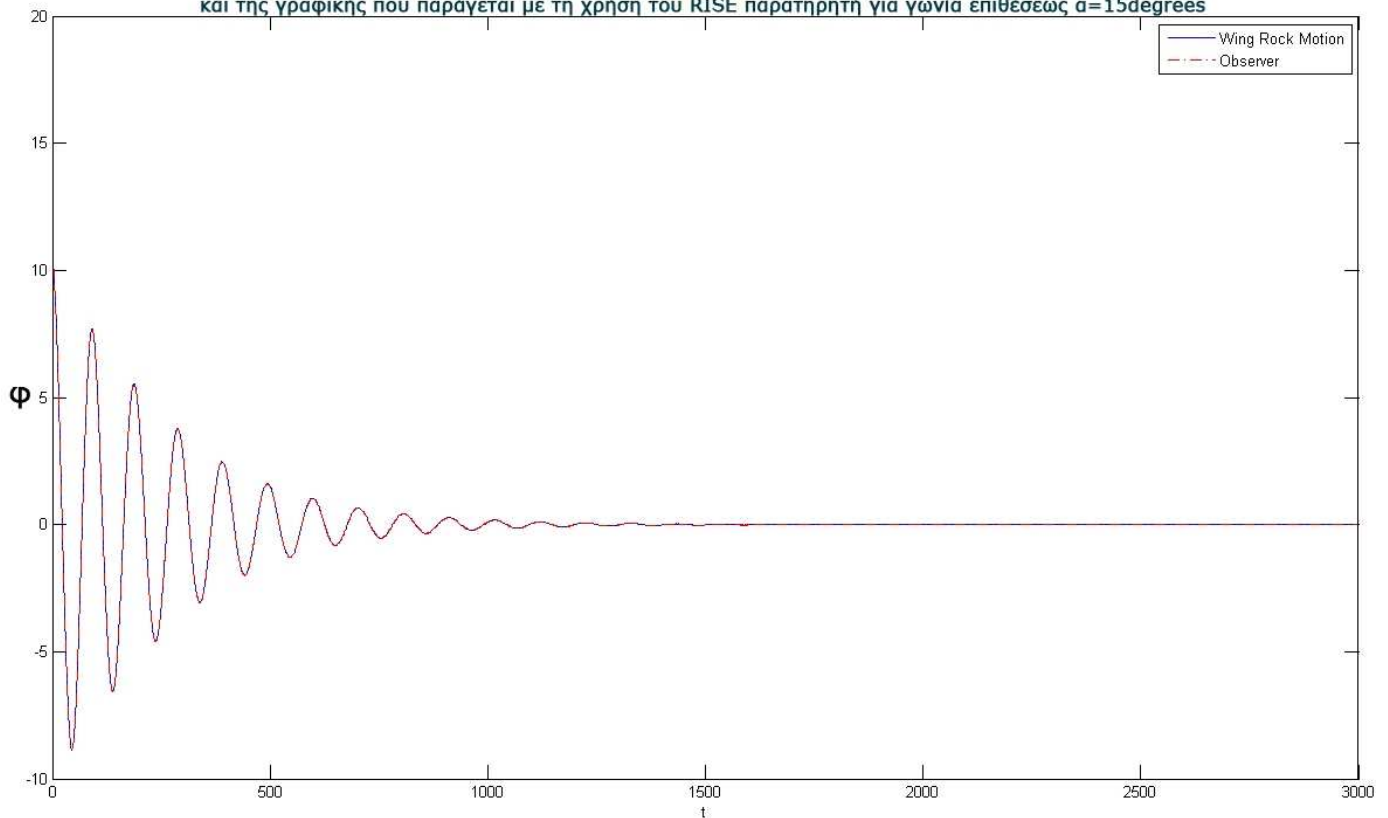
Η δημιουργία του παρατηρητή γίνεται με τη χρήση κώδικα MATLAB, όπως παρουσιάζεται και αναλύεται παρακάτω. Οι γραφικές που φαίνονται παρακάτω είναι αποτέλεσμα αυτού του κώδικα.

Για τη δημιουργία του παρατηρητή απαιτείται η χρήση των τιμών της  $\dot{\phi}$  από τη προσομοίωση του φαινομένου. Η χρήση του πρώτου μοντέλου προσομοίωσης για τη δημιουργία του παρατηρητή προήλθε τυχαία και δεν επηρεάζει καθόλου τη δομή και τη συμπεριφορά του observer.

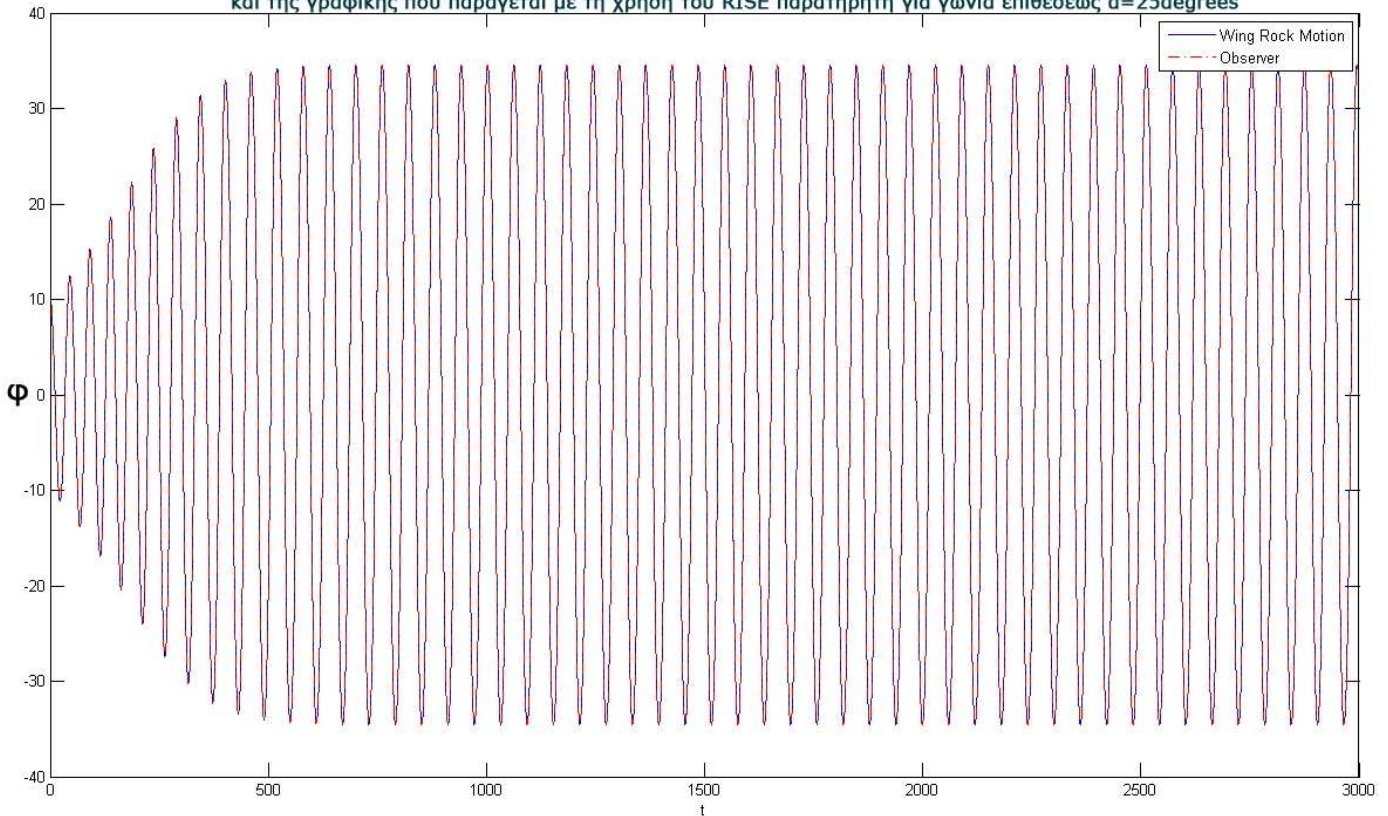
Η συνάρτηση μοναδιαίου βήματος ( $\text{sgn}(\cdot)$ ) που χρησιμοποιείται για την κατασκευή του observer μηδενίζει μόνο στο σημείο (0,0). Δηλαδή, δεν εφαρμόζεται η συνάρτηση που παρουσιάστηκε πρωτύτερα, αλλά μία παρόμοια με συνάρτηση που παρουσιάζεται παρακάτω.



Σύγκριση μεταξύ της γραφικής που παράγεται από τη προσομοίωση του φαινομένου wing rock και της γραφικής που παράγεται με τη χρήση του RISE παρατηρητή για γωνία επιθέσεως  $\alpha=15\text{degrees}$



Σύγκριση μεταξύ της γραφικής που παράγεται από τη προσομοίωση του φαινομένου wing rock και της γραφικής που παράγεται με τη χρήση του RISE παρατηρητή για γωνία επιθέσεως  $\alpha=25\text{degrees}$





## 4.8 Patch Neural Network

Για τη κατασκευή του νευρωνικού δικτύου χρησιμοποιείται μία νέα κατηγορία τοπικών δικτύων που αποκαλούνται patchy neural networks(PNN)<sup>12</sup> με συναρτήσεις βάσης που είναι «μπαλώματα»(patches) του χώρου καταστάσεων. Το συγκεκριμένο δίκτυο με ένα επαρκή αριθμό κόμβων μπορεί να προσεγγίσει μία γενικευμένη λεία μη γραμμική συνάρτηση πάνω από μία δεδομένη συμπαγή περιοχή με την επιθυμητή ακρίβεια.

Το δίκτυο PNN χρησιμοποιείται για την εξαγωγή και την αποθήκευση πληροφορίας που αποκτήθηκε από την εκτίμηση του παρατηρητή, χρησιμοποιώντας ένα απλά εφαρμόσιμο αλγεβρικό νόμο ανανέωσης των βαρών.

Τώρα θα παρουσιαστεί ο τρόπος δημιουργίας και λειτουργίας του patchy neural network.

Έστω κάποια  $n$ -διάστατα τετράγωνα

$$I := I_1 \times I_2 \times \cdots \times I_n$$

και  $\delta$  κομμάτια του κάθε διαστήματος  $I_i$  που δίνεται από το τύπο

$$I_i = \bigcup_{j=1}^{N_i} A_{i,j} = \bigcup_{j=1}^{N_i} [a_{i,j-1}, a_{i,j}]$$

με

$$a_{i,j} = a_{i,0} + j\delta, \quad 1 \leq i \leq n$$

Ορίζονται οι συναρτήσεις patch πάνω στα σύνολα  $A_{1,i_1} \times \cdots \times A_{n,i_n}$ , όπου  $1 \leq i_j \leq N_i$  και  $1 \leq i \leq n$

$$p_{i_1,i_2,\dots,i_n}(x) = \begin{cases} 1, & \text{αν } x \in A_{1,i_1} \times \cdots \times A_{n,i_n} \\ 0, & \text{αλλιού} \end{cases}$$

Ένα νευρωνικό δίκτυο patchy είναι νευρωνικό δίκτυο με ένα κρυφό επίπεδο νευρώνων και διάνυσμα βάσεων που αποτελείται από συναρτήσεις patch με έξοδο που δίνεται από τη σχέση

$$y = \sum_{i_1=1}^{N_1} \cdots \sum_{i_n=1}^{N_n} w_{i_1,\dots,i_n} p_{i_1,\dots,i_n}(x) = W^T P(x)$$

όπου

<sup>12</sup> Δημοσίευση [30]

$$W = [w_{1,\dots,1}, \dots, w_{N_1,\dots,N_n}]^T \in \mathbb{R}^{N_1 \times \dots \times N_n}$$

και

$$P(x) = [p_{1,\dots,1}, \dots, p_{N_1,\dots,N_n}]^T$$

Τα βάρη του δικτύου ανανεώνονται αλγεβρικά με τη παρακάτω σχέση

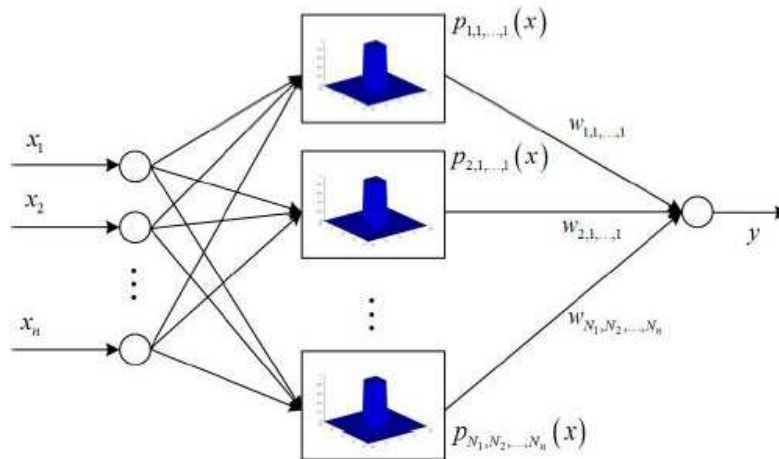
$$\hat{w}_{i_1,\dots,i_n}^j(t) = (1 - p_{i_1,\dots,i_n}(x(t))) \hat{w}_{i_1,\dots,i_n}^j(t^-) + p_{i_1,\dots,i_n}(x(t)) \xi(t)$$

ή ισοδύναμα

$$\hat{w}_{i_1,\dots,i_n}^j(t) = \begin{cases} \hat{w}_{i_1,\dots,i_n}^j(t^-), & \text{αν } p_{i_1,\dots,i_n}(x(t)) = 0 \\ \xi_j(t), & \text{αν } p_{i_1,\dots,i_n}(x(t)) = 1 \end{cases}$$

όπου  $j = 1, 2, \dots, n$  με αρχικές τιμές  $\hat{w}_{i_1,\dots,i_n}^j(0) = 0$  για  $1 \leq i_1 \leq N_1, \dots, 1 \leq i_n \leq N_n$  και  $1 \leq j \leq n$ .

Το διάνυσμα  $\hat{W}^T P(x)$  με  $\hat{W} := [\hat{W}_1 \dots \hat{W}_n]$ , όπου  $\hat{W}_i = [\hat{w}_{1,\dots,1}^i, \dots, \hat{w}_{N_1,\dots,N_n}^i]^T$  μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την εκτίμηση του  $f(x)$ .



**Δομή Patchy Neural Network(PNN)**

Συγκεκριμένα, δίνεται η γραφική της εξίσωσης που θα εκτιμηθεί. Το  $I_i$  αντιστοιχεί στον  $i$  άξονα. Ο άξονας αυτός αποτελείται από  $N_i$  κομμάτια  $A_{i,j}$ . Το κάθε κομμάτι είναι η περιοχή  $[a_{i,j-1}, a_{i,j}]$  απόστασης  $\delta$ . Δηλαδή, το κάθε patch είναι ένα τέτοιο κομμάτι και η ένωση των κομματιών  $\bigcup_{j=1}^{N_i} A_{i,j} = \bigcup_{j=1}^{N_i} [a_{i,j-1}, a_{i,j}]$  είναι το  $I_i$ . Αν υπάρχει σημείο του  $x$  μέσα σε αυτό το κομμάτι πάνω στη γραφική, τότε το  $p$  γίνεται ένα, αλλιώς είναι μηδέν.

Για την ανανέωση των βαρών, ελέγχεται η τιμή του  $p$ . Αν αυτή είναι μηδέν, τότε διατηρείται το βάρος που ήταν στη προηγούμενη χρονική στιγμή



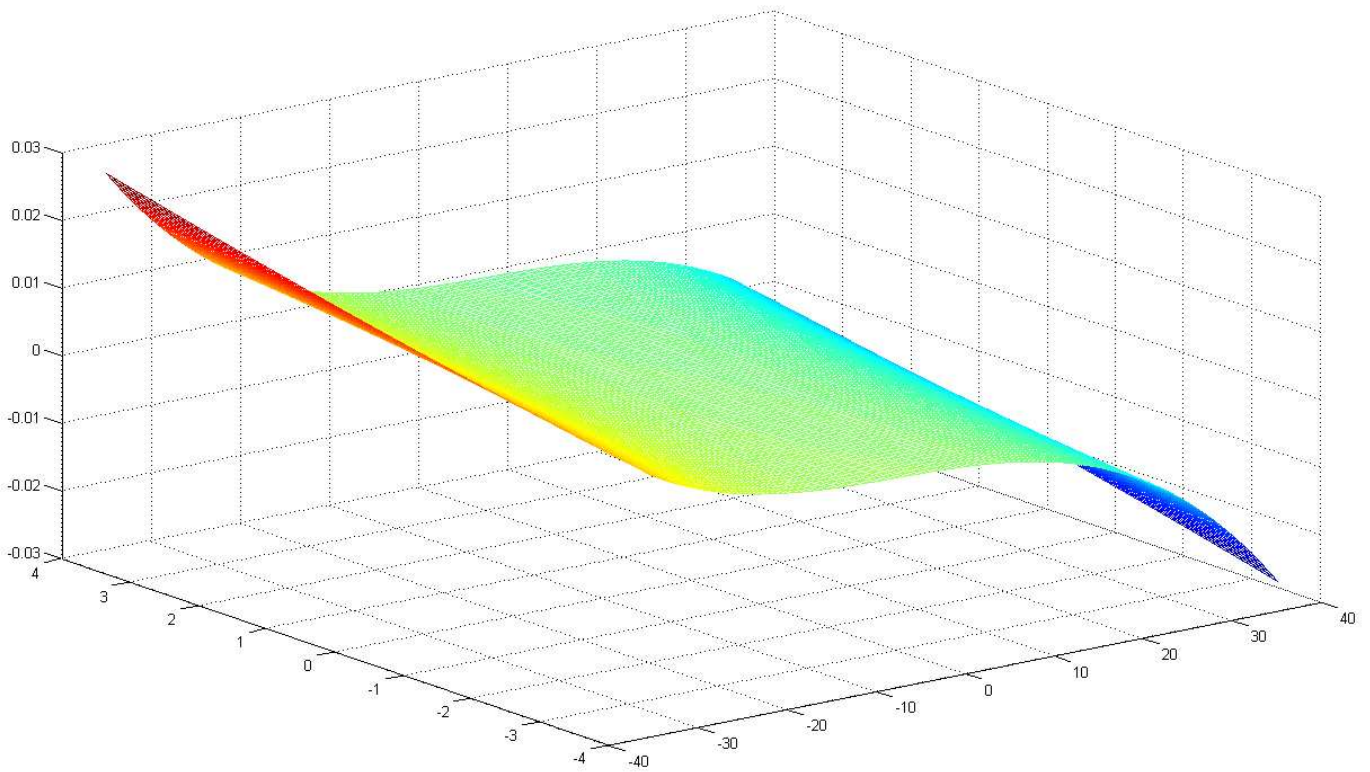
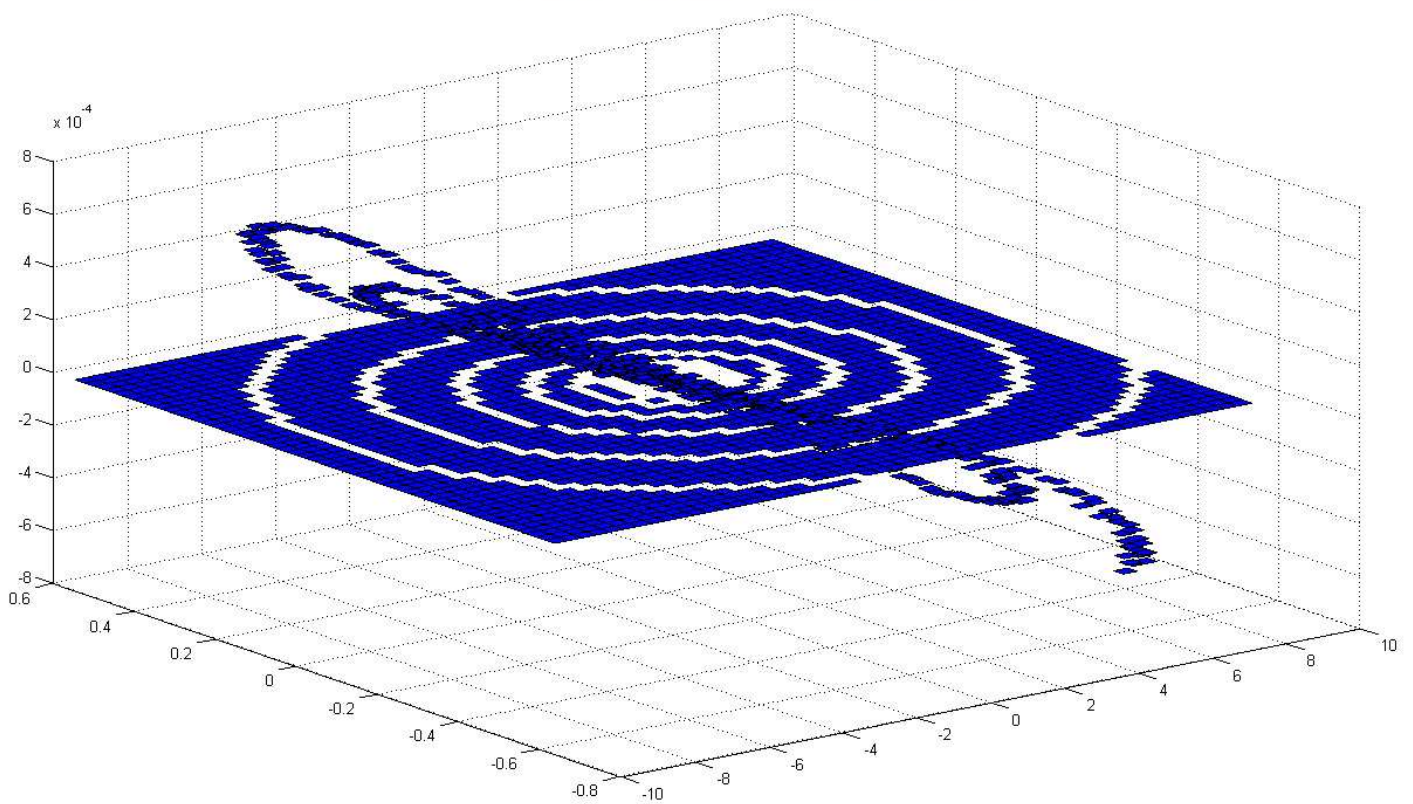
για το συγκεκριμένο patch, αλλιώς παίρνει τη τιμή του παρατηρητή στο δεδομένο σημείο.

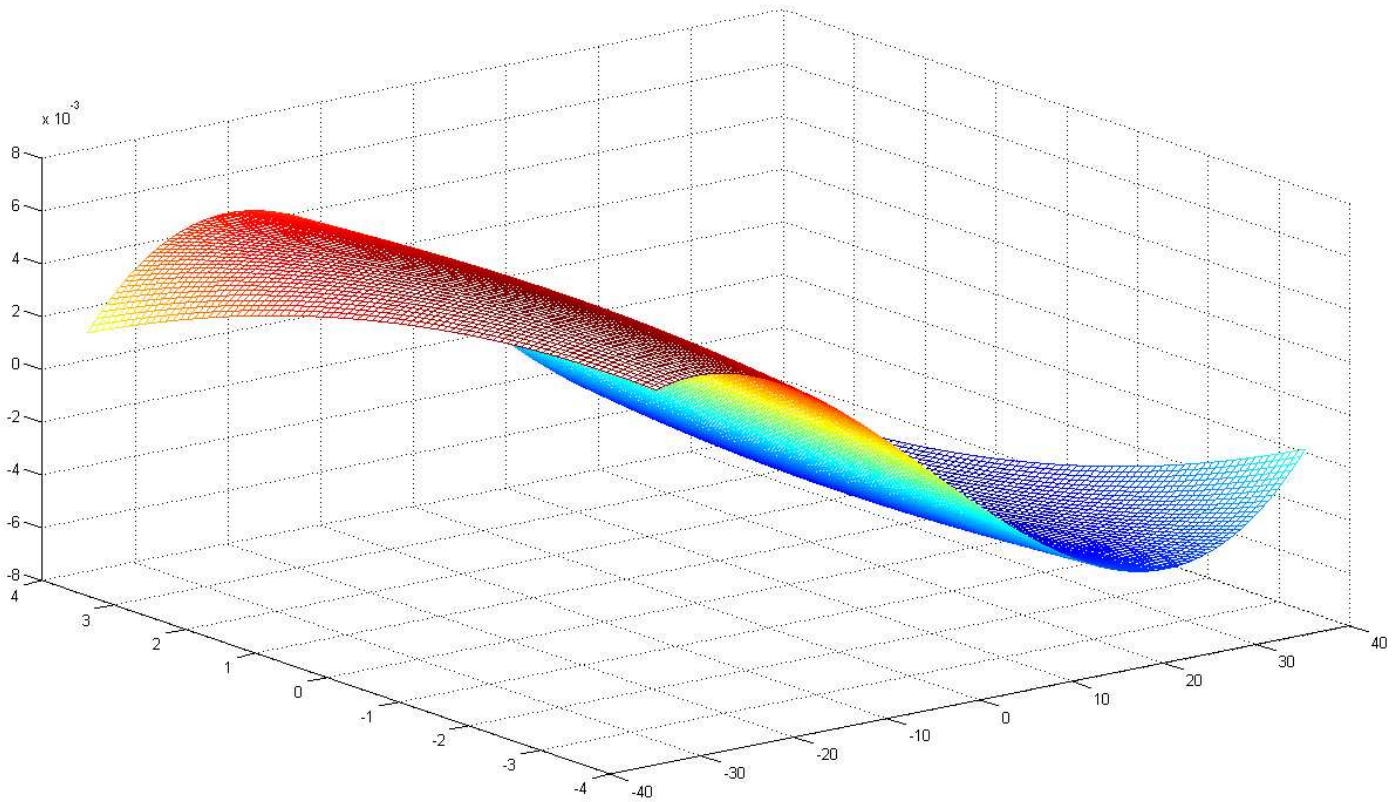
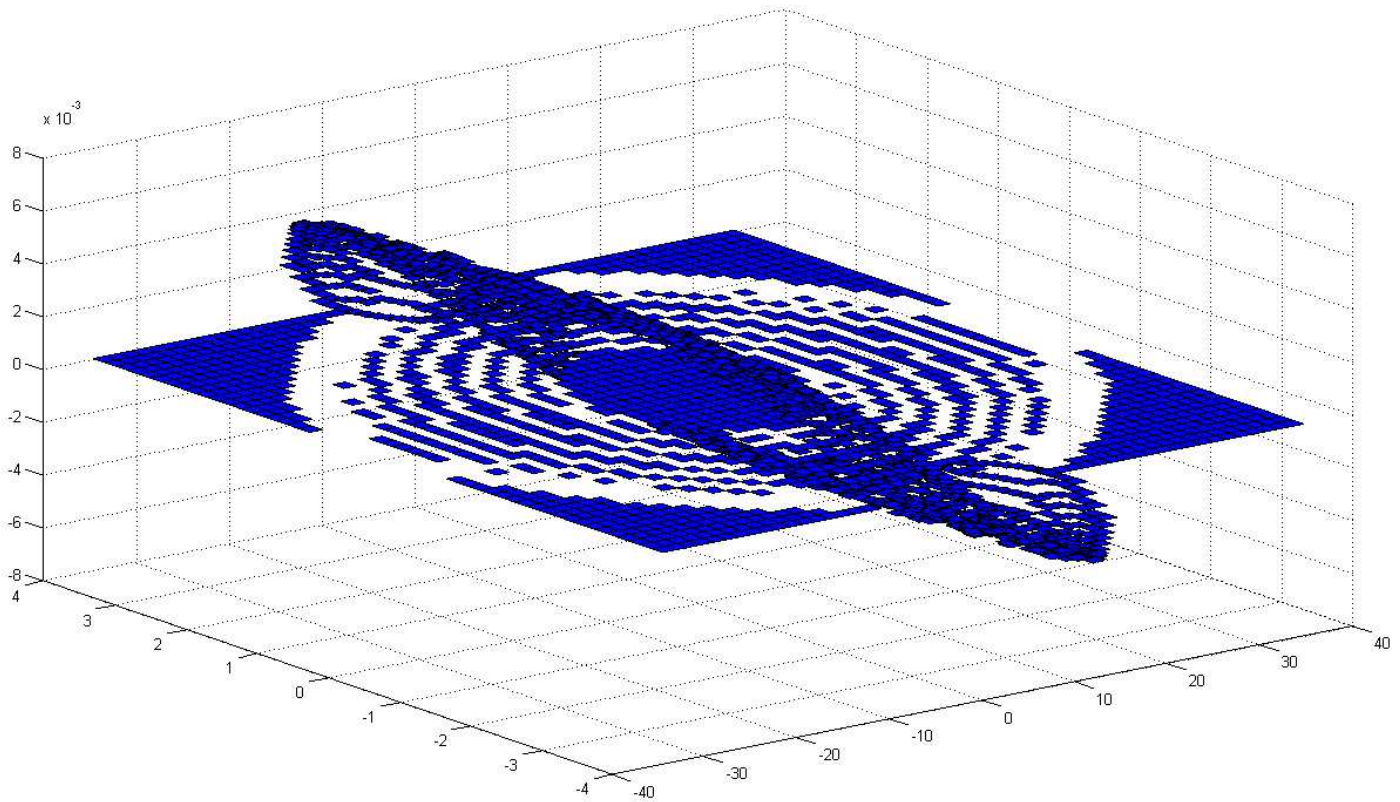
Για τη συγκεκριμένη εργασία, έχει θεωρηθεί ότι ο κάθε άξονας θα είναι από τη μικρότερη τιμή μέχρι τη μεγαλύτερη τιμή που υπάρχει στον άξονα. Κάθε άξονας θα χωριστεί στον ίδιο αριθμό patches, δηλαδή  $N_i = N_j$ . Θα έχουν όμως διαφορετικό  $\delta$ , το οποίο θα εξαρτάται από το μέγεθος του άξονα. Άρα, το  $\delta$ , για κάθε άξονα, θα υπολογιστεί

$$\delta_{\text{άξονα}} = \frac{\max(\text{άξονα}) - \min(\text{άξονα})}{N_{\text{άξονα}}}$$

Για τη κατασκευή του νευρωνικού δικτύου, δίνεται ως είσοδος στον εκτιμητή το  $\phi$ .

Η γραφική που χρησιμοποιείται είναι το phase plane που δίνεται από το πρώτο μοντέλο.

Συνάρτηση  $f(\varphi, \phi)$  για γωνία επιθέσεως  $\alpha=15\text{degrees}$ Έξοδος PNN για γωνία επιθέσεως  $\alpha=15\text{degrees}$ 

Συνάρτηση  $f(\phi, \psi)$  για γωνία επιθέσεως  $\alpha=25\text{degrees}$ Έξοδος PNN για γωνία επιθέσεως  $\alpha=25\text{degrees}$ 

## 4.9 Ανάλυση και επεξήγηση κώδικα MATLAB

Η ανάλυση και επεξήγηση θα γίνει πάνω στο κώδικα MATLAB που χρησιμοποιήθηκε για τη δημιουργία του RISE observer. Ο κώδικας αυτός έχει την ίδια δομή με το κώδικα που χρησιμοποιήθηκε για τη προσομοίωση του φαινομένου wing rock. Η μόνη διαφορά είναι στο αρχείο της συνάρτησης για την επίλυση της διαφορικής εξίσωσης και στα ορίσματα των αρχικών τιμών στην κλίση της συνάρτησης. Επίσης, παρουσιάζεται και η εντολή για την δημιουργία του γραφήματος του παρατηρητή.

Έπειτα, αναλύεται ο κώδικας που χρησιμοποιήθηκε για τη κατασκευή του νευρωνικού δικτύου PNN και την ανανέωση των βαρών για την αναγνώριση του φαινομένου wing rock.



### Αρχείο *observer.m*

Ο κώδικας είναι βασισμένος στο αρχείο κώδικα για τη προσομοίωση του φαινομένου με τη χρήση του πρώτου μοντέλου. Στη συγκεκριμένη περίπτωση δεν ενδιαφέρει η ακριβής αναπαράσταση του φαινομένου, οπότε όποιο από τα μοντέλα προσομοίωσης και να χρησιμοποιηθεί θα δώσει παρόμοια αποτελέσματα. Παραλείπονται κομμάτια κώδικα που είναι ίδια με το αρχείο κώδικα προσομοίωσης του φαινομένου.

Για τη λύση της διαφορικής εξίσωσης, χρησιμοποιείται η συνάρτηση της MATLAB ode15s. Δηλώνονται οι αρχικές τιμές για το  $\varphi$  και το  $\dot{\varphi}$ . Η MATLAB όμως δουλεύει σε rad, οπότε οι είσοδοι των αρχικών τιμών στη συνάρτηση πρέπει να είναι σε degrees, για αυτό το λόγο και τα πολλαπλασιάζουμε με  $180/\pi$ . Η διαφορική εξίσωση βρίσκεται στο αρχείο *fi\_2nd\_derivative\_observer.m*, το οποίο είναι και η είσοδος στη συνάρτηση.

```
Y0=10;
Y0_1st=0;

[T,Y] = ode15s(@fi_2nd_derivative_observer,[0 3000],[Y0*pi/180
Y0_1st*pi/180 0 0 0 0 0 0]);
```

Η παραπάνω συνάρτηση μας επιστρέφει δύο διανύσματα. Το διάνυσμα του χρόνου T και ένα δισδιάστατο διάνυσμα Y που η μία στήλη Y(:,1) είναι οι τιμές του  $\varphi$  σε rad και η άλλη στήλη είναι οι τιμές του  $\dot{\varphi}$  σε rad/sec. Η στήλη Y(:,3) περιέχει τις τιμές του παρατηρητή RISE για το  $\varphi$  σε rad, ενώ η στήλη Y(:,6) περιέχει τις τιμές του παρατηρητή RISE για το  $\dot{\varphi}$  σε rad/sec.

Οπότε, μετατρέπονται τα rad σε degrees πολλαπλασιάζοντας το διάνυσμα Y με  $180/\pi$ .

```
Y(:,1)=Y(:,1)*(180/pi);
Y(:,2)=Y(:,2)*(180/pi);
Y(:,3)=Y(:,3)*(180/pi);
Y(:,6)=Y(:,6)*(180/pi);
```

Τέλος, δίνεται η γραφική παράσταση σύγκρισης μεταξύ των αποτελεσμάτων που λαμβάνονται από το παρατηρητή και των αποτελεσμάτων που λαμβάνονται χρησιμοποιώντας το μοντέλο προσομοίωσης του φαινομένου wing rock.

```
figure();
plot(T,Y(:,1),T,Y(:,3),'red-.');
xlabel('t');
ylabel('Phi');
legend('Wing Rock Motion','Observer');
title('observer');
```

### Αρχείο *fi\_2nd\_der\_observer.m*

Το αρχείο αυτό είναι και αυτό ίδιο με το αντίστοιχο αρχείο προσομοίωσης του φαινομένου και για αυτό έχει παραληφθεί η τοποθέτηση των παραμέτρων που χρειάζονται από την εξίσωση προσομοίωσης, αφού είναι ίδιες.

Αρχικά δηλώνεται ότι το συγκεκριμένο αρχείο είναι ένα function είσοδο ένα διάνυσμα  $dy$  το οποίο είναι οι αρχικοποιήσεις των  $\varphi$  και  $\dot{\varphi}$ . Επίσης, δηλώνεται ότι η έξοδος της συνάρτησης είναι τα διανύσματα  $t$  και  $y$ .

```
function dy = fi_2nd_der_observer(t,y)
```

Έπειτα, δηλώνονται οι τιμές των συντελεστών  $k, \lambda, \beta$  που χρησιμοποιούνται για τη δημιουργία του observer.

```
k=2;
lamda=1;
beta=20;
```

Ορίζεται ότι το διάνυσμα  $dy$  έχει πέντε τιμές, δηλαδή εξηγείται στη MATLAB ότι θα υπάρχουν πέντε παράγωγοι.

```
dy = zeros(5,1);
```

Με τη παρακάτω γραμμή κώδικα δηλώνεται η σχέση που υπάρχει ανάμεσα στις παραγώγους.

```
dy(1) = y(2)
```

Τέλος, με τη παρακάτω έκφραση δηλώνονται ποιες είναι οι διαφορικές εξισώσεις που θα λυθούν.

```
dy(2) = -omega_2nd_power(index_angle)*y(1) +m1(index_angle)*y(2)
+b1(index_angle)*y(1)^3+m2(index_angle)*y(1)^2*y(2)
+b2(index_angle)*y(1)*y(2)^2;
dy(3)=k*(y(1)-y(3))+lamda*k*y(4)+beta*y(5); % y(3) is the estimation
of y(1)
dy(4) = y(1)-y(3); % y(4) returns the integral of the error
dy(5) = min(1,max(-1,400*(y(1)-y(3))))); % y(5) returns the integral
of the sign of the error
```

Η πρώτη διαφορική εξίσωση χρησιμοποιείται για την επίλυση της εξίσωσης προσομοίωσης του φαινομένου. Η δεύτερη είναι η εξίσωση που δημιουργεί το παρατηρητή, ενώ η τρίτη είναι ο όρος που περιέχεται στο ολοκλήρωμα που πολλαπλασιάζεται με το  $\lambda k$  και η τελευταία εξίσωση μας δίνει τη μοναδιαία συνάρτηση του σφάλματος, ο όρος που πολλαπλασιάζεται με το  $\beta$ . Δηλαδή, στην εξίσωση δημιουργία του observer τοποθετούνται οι  $y(4)$  και  $y(5)$ , οπότε η MATLAB επιλύει το ολοκλήρωμα που υπάρχει το τύπο. Πρέπει να γίνει με αυτό τον τρόπο ώστε να δοθεί στην εξίσωση του παρατηρητή η τιμή του  $\varphi$  κάθε χρονική στιγμή.

Έπειτα, κατασκευάζεται ο παρατηρητής για το  $\dot{\varphi}$  με τον ίδιο ακριβώς τρόπο όπως και ο παρατηρητής για το  $\varphi$ . Αυτός είναι και ο παρατηρητής που ενδιαφέρει και χρησιμοποιείται για τη κατασκευή του νευρωνικού δικτύου.

```
dy(6)=k*(y(2)-y(6))+lamda*k*y(7)+beta*y(8); % y(6) is the  
estimation of y(2)  
dy(7) = y(2)-y(6); % y(7) returns the integral of the error  
dy(8) = min(1,max(-1,400*(y(2)-y(6))))); % y(8) returns the  
integral of the sign of the error
```



### Αρχείο *neural\_net.m*

Δηλώνονται οι τιμές των συντελεστών  $k, \lambda, \beta$  που χρησιμοποιούνται για τη δημιουργία του *observer*.

```
k = 2;
lamda = 1;
beta = 20;
```

Ορίζονται οι μεταβλητές που περιέχουν τις τιμές του  $\varphi(Y(:,1))$ ,  $\dot{\varphi}(Y(:,2))$  και του παρατηρητή (*observer*). Ορίζεται το μέγεθος του  $T, t$ , που χρησιμοποιείται αργότερα για το *for loop*. Επίσης, ορίζεται ότι και οι δύο άξονες χωρίζονται σε 50 patches.

```
all = (max(abs(phi)));
al2 = max(abs(phi_der));
delta1 = (max(phi)-min(phi))/(N_I1);
delta2 = (max(phi_der)-min(phi_der))/(N_I2);
a_i0_I1=-all;
a_i0_I2 = -al2;
patches=N_I1*N_I2;
```

Ορίζονται τα κομμάτια  $A_{i,j}$  για κάθε άξονα.

```
A_I1=zeros(N_I1,2);
for k=1:1:N_I1
    A_I1(k,1)=a_i0_I1+(k-1)*delta;
    A_I1(k,2)=a_i0_I1+k*delta;
end
A_I2=zeros(N_I2,2);
for k=1:1:N_I2
    A_I2(k,1)=a_i0_I2+(k-1)*delta;
    A_I2(k,2)=a_i0_I2+k*delta;
end
```

Για να βρεθεί το  $P(x)$ , ελέγχεται αν υπάρχει σημείο της  $f(\varphi, \dot{\varphi})$  μέσα σε κάθε ένα patch. Δεδομένου των όσων έχουν ήδη αναφερθεί, το  $p_{i_1, i_2}$  παίρνει τις κατάλληλες τιμές. Υπολογίζονται τα βάρη του νευρωνικού δικτύου ανάλογα με τη τιμή που έχει το  $p_{i_1, i_2}$ .

```
p=zeros(N_I1,N_I2);
w=zeros(N_I1,N_I2);
for temp=1:1:t
    for k=1:1:N_I1
        for l=1:1:N_I2
            if ((A_I1(k,1)<=phi(temp) && phi(temp)<=A_I1(k,2)) &&
                ((A_I2(l,1)<=phi_der(temp) && phi_der(temp)<=A_I2(l,2))))
                p(k,1)=1;
                w(k,1)=observer(temp);
                break;
            else
                p(k,1)=0;
                w(k,1)=w(k,1);
            end
        end
    end
end
end
```

Δημιουργείται το `meshgrid` της γραφικής της κίνησης κατά τη διάρκεια του φαινομένου. Αρχικά, δίνονται τα όρια των αξόνων  $x$  και  $y$  σε μοίρες. Έπειτα, δίνεται στο  $z$  την εξίσωση της κίνησης. Αντί επίλυσης της διαφορικής εξίσωσης, τοποθετούνται στη θέση του  $\varphi$  και του  $\dot{\varphi}$ , οι μεταβλητές `xgrid` και `ygrid` αντίστοιχα, πολλαπλασιασμένα με το  $\pi/180$ , δηλαδή σε rad. Με την εντολή `mesh`, εκτιμάται και δίνεται το `plot` της εξίσωσης.

```
figure;
[xgrid , ygrid] = meshgrid(-35:.5:35 , -4:.1:4);
zgrid = - omega_2nd_power(index_angle)*(xgrid*pi/180)
+m1(index_angle)*(ygrid*pi/180) +b1(index_angle)*((xgrid*pi/180).^3)
+m2(index_angle)*((xgrid*pi/180).^2).*(ygrid*pi/180)
+b2(index_angle)*(xgrid*pi/180).*((ygrid*pi/180).^2);
mesh(xgrid,ygrid, zgrid)
```

Τέλος, απεικονίζεται η έξοδος του νευρωνικού δικτύου. Χρησιμοποιείται η εντολή `fill3`, η οποία δημιουργεί ένα πολύγωνο βασισμένο στα κομμάτια  $A_{i,j}$  του κάθε άξονα μαζί με το βάρος στο δεδομένο `patch`. Καθώς παράγει ένα πολύγωνο για κάθε `patch`, χρησιμοποιείται ένα `for loop` για να παρθούν τα πολύγωνα για όλα τα `patches`. Γίνεται χρήση του `hold on` για να παρουσιαστούν στο ίδιο γράφημα τα πολύγωνα. Η γραφική είναι χρώματος μπλε.

```
figure;
for k=1:1:N_I1
    for l=1:1:N_I2
        fill3([A_I1(k,1) A_I1(k,2) A_I1(k,2) A_I1(k,1)], [A_I2(l,1)
A_I2(l,1) A_I2(l,2) A_I2(l,2)], w(k,l)*[1 1 1 1], 'blue')
        hold on;
    end
end
grid on;
```

# Κεφάλαιο 5

## Τελικά συμπεράσματα

---

### Περίληψη

Σε αυτό το τελευταίο κεφάλαιο, περιλαμβάνονται τα συμπεράσματα που μπορούν να εξαχθούν από κάθε βήμα που έχει ήδη αναλυθεί. Παρουσιάζονται τα συμπεράσματα για το φαινόμενο wing rock, τα συμπεράσματα που εξάγονται από τη προσομοίωση του φαινομένου και αυτά που συμπεραίνονται για το Patchy Neural Network και το RISE observer.

Επίσης, γίνεται συνολική αναφορά στα τελικά αποτελέσματα.

### Πίνακας περιεχομένων

5.1 Συμπεράσματα σχετικά με το φαινόμενο wing rock.....	99
5.2 Συμπεράσματα σχετικά με τη προσομοίωση του φαινομένου.....	100
5.3 Συμπεράσματα σχετικά με το Patchy Neural Network .....	101
5.4 Τελικά Συμπεράσματα .....	102

## 5.1 Συμπεράσματα σχετικά με το φαινόμενο wing rock

Η ανάλυση της κίνησης κατά τη διάρκεια του φαινομένου wing rock για ένα πλήρες κύκλο δείχνει ότι η δυναμική της απότομης δίνης είναι η πηγή της ορμής της κίνησης που διατηρεί τη κίνηση, ενόσω η δίνη απογείωσης στη ανοδική κίνηση του πτερυγίου δημιουργεί την ορμή επαναφοράς.

Σε υπολογιστικές προσομοιώσεις, ο βαθμός ελευθερίας προς το πλάι και ο κάθετος βαθμός ελευθερίας πρέπει να λαμβάνονται υπόψη για να ληφθεί μία ακριβής πρόβλεψη της αρχής του φαινομένου και των χαρακτηριστικών του περιοδικού κύκλου. Οι δύο βαθμοί ελευθερίας αν συμπεριληφθούν θα έχουν μηδαμινό υπολογιστικό κόστος. Παρόλα αυτά, οι προβλεπόμενες τιμές για ένα βαθμό ελευθερίας μόνο στον άξονα roll είναι ασφαλείς και ικανοποιητικές, καθώς προβλέπουν την αρχή του φαινομένου σε προγενέστερη χρονική τιμή και χαρακτηριστικά μεγαλύτερου πλάτους ταλάντωσης.

Η παράβλεψη του ουραίου πτερυγίου στη πρόβλεψη του φαινομένου οδηγεί σε διαφορετικά αποτελέσματα. Αντίθετα με την υπόθεση να συμπεριληφθούν οι τρεις βαθμοί ελευθερίας στη προσομοίωση του φαινομένου, οι οποίοι είναι ανεξάρτητοι του μοντέλου, η επίδραση του ουραίου πτερυγίου εξαρτάται αρκετά από τη γεωμετρία και δε μπορεί να γενικευθεί.

Η δύναμη των δινών του μπροστινού άκρου εξαρτάται από τη γωνία επιθέσεως και από τη γωνία κλίσης του πτερυγίου. Για μία δεδομένη γωνία επιθέσεως, η δύναμη της δίνης μειώνεται αυξάνοντας τη κλίση sweep του πτερυγίου.

Παρόλο που ο στρόβιλος ανύψωσης δεν προκαλεί το φαινόμενο wing rock, παίζει σημαντικό ρόλο στη παραγωγή του μέγιστου πλάτους ταλάντωσης στη διάρκεια της κίνησης του φαινομένου. Αν και η κίνηση limit cycle μπορεί να εδραιωθεί χωρίς το σπάσιμο της δίνης, η ελάττωση του μεγέθους του μέγιστου πλάτους ταλάντωσης εξαρτάται από τον διαχωρισμό της δίνης.

Συμπερασματικά το φαινόμενο wing rock μπορεί να αντιμετωπιστεί με τη χρήση των πτερυγίων στροφής του αεροσκάφους ή μειώνοντας τη γωνία επιθέσεως.

## 5.2 Συμπεράσματα σχετικά με τη προσομοίωση του φαινομένου

Αριθμητικές προσομοιώσεις του φαινομένου για slender delta πτερύγια, που προσεγγίζουν τις πειραματικές μετρήσεις με τη χρήση αεροσήραγγας, δίνουν την ορμή στο διαμήκη άξονα σε σχέση με το χρόνο. Αυτά τα αριθμητικά δεδομένα μπορούν να περιγραφούν ακριβώς με τη χρήση με πολώνυμα τρίτης τάξης τεσσάρων ή πέντε όρων στη γωνία roll και στο ρυθμό μεταβολής της γωνίας. Τα πολώνυμα αυτά χρησιμοποιούνται για τη σχεδίαση του phase plain, το οποίο δείχνει τις θέσεις των σημείων ισορροπίας, τα limit cycles και πεδία ορισμού αρχικών συνθηκών που οδηγούν σε διαφορετικές πιθανές κινήσεις. Η χρήση ενός από τα πολώνυμα στην εξίσωση της κίνησης δίνει τη δυνατότητα να ανακτηθούν ασυμπτωτικές προσεγγίσεις στην έκφραση του πλάτους και της περιόδου της ταλάντωσης.

Τα δεδομένα από τα μοντέλα (2) και (3) υπονοούν ότι η χρήση όρων που περιλαμβάνουν απόλυτες τιμές ( $|\varphi|$ ) δεν οδηγεί σε αποτελέσματα με τόση ακρίβεια με όση έχουν τα αποτελέσματα που προέρχονται από αναλυτικούς όρους. Επίσης, φαίνεται ότι οι κυβικοί όροι είναι απαραίτητη, καθώς χωρίς αυτούς δεν προβλέπεται η απόκλιση. Πάνω από τη κρίσιμη γωνία επιθέσεως, οι κυβικοί όροι είναι υπεύθυνοι για τα επιπλέον σημεία ευσταθείας και αποκλίσεως.

Παρόλα αυτά, τα μοντέλα που χρησιμοποιούνται παρουσιάζουν όμοια συμπεριφορά και παρόμοια αποτελέσματα. Οπότε, για την ανάπτυξη του PNN χρησιμοποιήθηκε το πρώτο μοντέλο.

Φαίνεται ότι για γωνία επιθέσεως μικρότερη των 20 μοιρών, η κίνηση κατά τη διάρκεια του wing rock εξασθενεί με τη πάροδο του χρόνου. Ενώ σε γωνία επιθέσεως μεγαλύτερη των 20 μοιρών, η ταλάντωση ξεκινά με σχετικά μικρό πλάτος και αυξάνεται με τη πάροδο του χρόνου μέχρι να φτάσει το μέγιστο πλάτος και να συνεχίσει ταλάντωση με σταθερό αυτό το πλάτος.

Οι εσωτερικές τροχιές στο phase plane είναι ελλειπτικές. Το πλάτος και η συχνότητα της ταλάντωσης στη τελική κατάσταση δεν εξαρτάται από τις αρχικές συνθήκες, αλλά από τη γωνία επιθέσεως.

Η χρήση των παραμέτρων  $b$  και  $c$  για τα μοντέλα (4α) και (4β) αντίστοιχα, οδηγούν σε ταυτόσημα αποτελέσματα.

### 5.3 Συμπεράσματα σχετικά με το Patchy Neural Network

Είναι σχετικά εύκολο και απλό στην εκπαίδευσή του.

Μία σημαντική ιδιότητα είναι η δυνατότητά τους να προσεγγίζουν γενικευμένες μη γραμμικές συναρτήσεις.

Η χρήση το νευρωνικό δίκτυο patchy δίνει κάποια πλεονεκτήματα έναντι των υπολοίπων νευρωνικών. Το δίκτυο είναι ικανό να μάθει την άγνωστη μη γραμμικότητα σε κάποια περιοχή του χώρου καταστάσεων με ένα μόνο πέρασμα από τα patches πάνω στις τροχιές κατάστασης.

Η ανανέωση των βαρών καθορίζεται από νόμους αλγεβρικής μορφής και δε δίνονται σε μορφή συνήθων διαφορικών εξισώσεων. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα τη σημαντική μείωση του υπολογιστικού κόστους, αφού λύνουμε μόνο  $n$  συνήθειες διαφορικές για τη κατασκευή του observer, αντί  $N_1 \times \dots \times N_n$  διαφορικές εξισώσεις για την εκπαίδευση ενός δικτύου με  $N_1 \times \dots \times N_n$  κόμβους.

Για τη δημιουργία του παρατηρητή απαιτείται η χρήση των τιμών της  $\varphi$  και  $\dot{\varphi}$  από τη προσομοίωση του φαινομένου. Η χρήση του πρώτου μοντέλου προσομοίωσης για τη δημιουργία του παρατηρητή έγινε τυχαία και δεν επηρεάζει καθόλου τη δομή και τη συμπεριφορά του observer.

Οι άξονες αποτελούνται από τον ίδιο αριθμό patches, αλλά από διαφορετικό  $\delta$ . Ο παρατηρητής αρχικά εφαρμόζεται πάνω στο  $\varphi$  για την εκτίμηση της κίνησης που προκαλείται από το φαινόμενο. Έπειτα, εφαρμόζεται πάνω στο  $\dot{\varphi}$  ώστε να κατασκευαστεί το νευρωνικό δίκτυο.

## 5.4 Τελικά Συμπεράσματα

Η συγκεκριμένη εργασία αποσκοπεί στην παρουσίαση της χρήσης του Patchy Neural Network, με τη βοήθεια του RISE παρατηρητή, για την αναγνώριση του φαινομένου wing rock σε slender δελταπτέρυγα αεροσκάφη 80 μοιρών.

Με τη χρήση του κώδικα που δημιουργήθηκε κατά την εκπόνηση της εργασίας, καθίσταται δυνατή η προσομοίωση του φαινομένου ώστε να δημιουργηθεί ο παρατηρητής και να κατασκευασθεί το νευρωνικό δίκτυο PNN για την αναγνώριση του φαινομένου.

Ο RISE παρατηρητής ακολουθεί τη κίνηση του αεροσκάφους κατά τη διάρκεια του φαινομένου wing rock και την απεικονίζει σε ένα διάνυσμα. Το διάνυσμα αυτό χρησιμοποιείται από το νευρωνικό δίκτυο για την ανανέωση των βαρών μέσω των απλών αλγεβρικών εξισώσεων που έχουν παρουσιαστεί.

Άρα, συμπεραίνεται ότι η αναγνώριση του φαινομένου wing rock με τη χρήση του νευρωνικού δικτύου PNN, με τη βοήθεια του RISE observer, είναι εφικτή, ιδιαίτερα εύκολη και υλοποιήσιμη με τη χρήση κώδικα MATLAB.



## Βιβλιογραφία

1. **G. Guglieri, F. B. Quagliotti.** Analytical and experimental analysis of wing rock. *Nonlinear Dynamics*. 2001, 24, σσ. 129-146.
2. **A. H. Nayfeh, J. M. Elzebda, D. T. Mook.** Analytical study of the subsonic wing-rock phenomenon for slender delta wings. *Journal of Aircraft*. Σεπτέμβριος 1989, Τόμ. 26, 9, σσ. 805-809.
3. **Chih-Min Lin, Chun-Fei Hsu.** Supervisory recurrent fuzzy neural network control of wing rock for slender delta wings. *IEEE Transactions in fuzzy systems*. Οκτώβριος 2004, Τόμ. 12, 5, σσ. 733-741.
4. **J. M. Elzebda, A. H. Nayfeh, D. T. Mook.** Development of an analytical model of wing rock for slender delta wings. *Journal of Aircraft*. Αύγουστος 1989, Τόμ. 26, 8, σσ. 737-743.
5. **G. Guglieri, F. Quagliotti.** Experimental observation of the wing rock phenomenon. *Aerospace science and tecnology*. 1997, 2, σσ. 111-123.
6. **R. C. Nelson, A. Pelletier.** The unsteady aerodynamics of slender wings and aircraft undergoing large amplitude maneuvers. *Progress in aerospace sciences*. 2003, 39, σσ. 185-248.
7. **Katz, J.** Wing/vortex interactions and wing rock. *Progress in aerospace science*. 1999, 35, σσ. 727-750.
8. **Ericsson, L. E.** Wing rock analysis of slender delta wins review and extension. *Journal of Aircraft*. Νοέμβριος-Δεκέμβριος 1995, Τόμ. 32, 6.
9. **R. E. Gordnier, M. R. Visbal.** Numerical simulation of delta-wing roll. *Aerospace science and technology*. 1998, 6, σσ. 347-357.
10. *Aircraft wing rock dynamics due to rolling moment hysteresis.* **Go Tiau Hiong, Fidelis Adhika Pradipta Lie.**
11. *Simulation and analysis of wing rock physics for a generic fighter model with three degrees of freedom.* **A., Saad Ahmed.** Wright-Patterson Air Force Base, Dayton, Ohio : Air Force Institute of Techonology, Ιούλιος 2000.
12. *Aircraft wing rock dynamics and control.* **Hiong, Go Taiuw.** s.l. : Massachusetts Institute of Technology, Σεπτέμβριος 1999.

13. **Duane Hanselman, Bruce Littlefield.** *Μάθετε το MATLAB*. s.l. : Εκδόσεις ΚΛΕΙΔΑΡΙΘΜΟΣ, 2006. Τόμ. Α.
14. **Kermode, A. C.** *Mechanics of flight*. 11η Έκδοση. 2006.
15. **Haykin, Simon.** *Νευρωνικά δίκτυα και μηχανική μάθηση*. 3η Έκδοση. s.l. : Εκδόσεις ΠΑΠΑΣΩΤΗΡΙΟΥ, 2009.
16. **M. T. Hagan, H. B. Demuth, M. Beale.** *Neural network design*. 1996.
17. **Gurney, K.** *Introduction to neural network*.
18. Support-Differential Equations in MATLAB. *The Mathworks*. [Ηλεκτρονικό] <http://www.mathworks.com>.
19. **Abbasi, Nasser.** *Small note on using Matlab ode45 to solve differential equations*. August 2006.
20. Examples ODE. [Ηλεκτρονικό] <http://coweb.cc.gatech.edu>.
21. The Phase Plane - Course on modeling and simulation. [Ηλεκτρονικό] <http://virtual.cvut.cz/>.
22. Flight. [Ηλεκτρονικό] <http://resources.yesican-science.ca>.
23. Wing Geometry. [Ηλεκτρονικό] <http://adg.stanford.edu>.
24. **D. F. Anderson, S. Eberhardt.** *Understanding flight*. s.l. : Εκδότης McGraw-Hill, 2001.
25. Slender Wing Theory. [Ηλεκτρονικό] <http://soliton.ae.gatech.edu>.
26. Forces on aircraft. *National Aeronautics and Space Administration*. [Ηλεκτρονικό] <http://www.grc.nasa.gov/>.
27. **MATLAB, The Language of Technical Computing.** *Getting Started with MATLAB*. Version 5.
28. Phase Plane and ODE. *Wikipedia*. [Ηλεκτρονικό] <http://en.wikipedia.org/wiki/>.
29. Aeronautics. *Wikipedia*. [Ηλεκτρονικό] <http://en.wikipedia.org/wiki/>.
30. **H. E. Psillakis, M. A. Christodoulou, T. Giotis, Y. Boutalis.** An observer approach for deterministic learning with patchy neural network.

31. **C. Wang, D. J. Hill.** *Deterministic learning theory for identification, recognition and control.*
32. **J.W. Fonda, S. Jagannathan, S. E. Watkins.** Robust neural network RISE observer based fault diagnostics and prediction.

# Παράρτημα Α

## Γραφικές Παραστάσεις

---

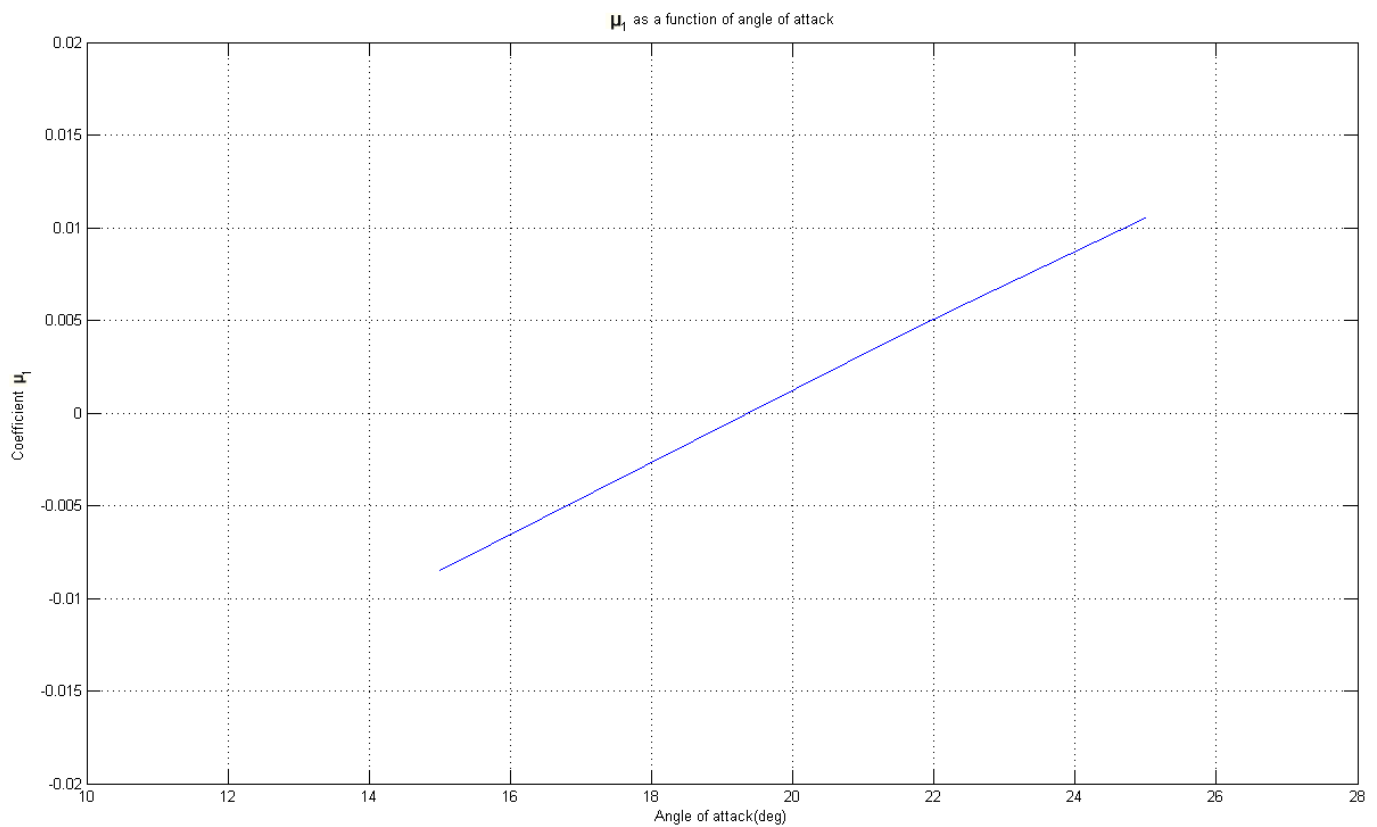
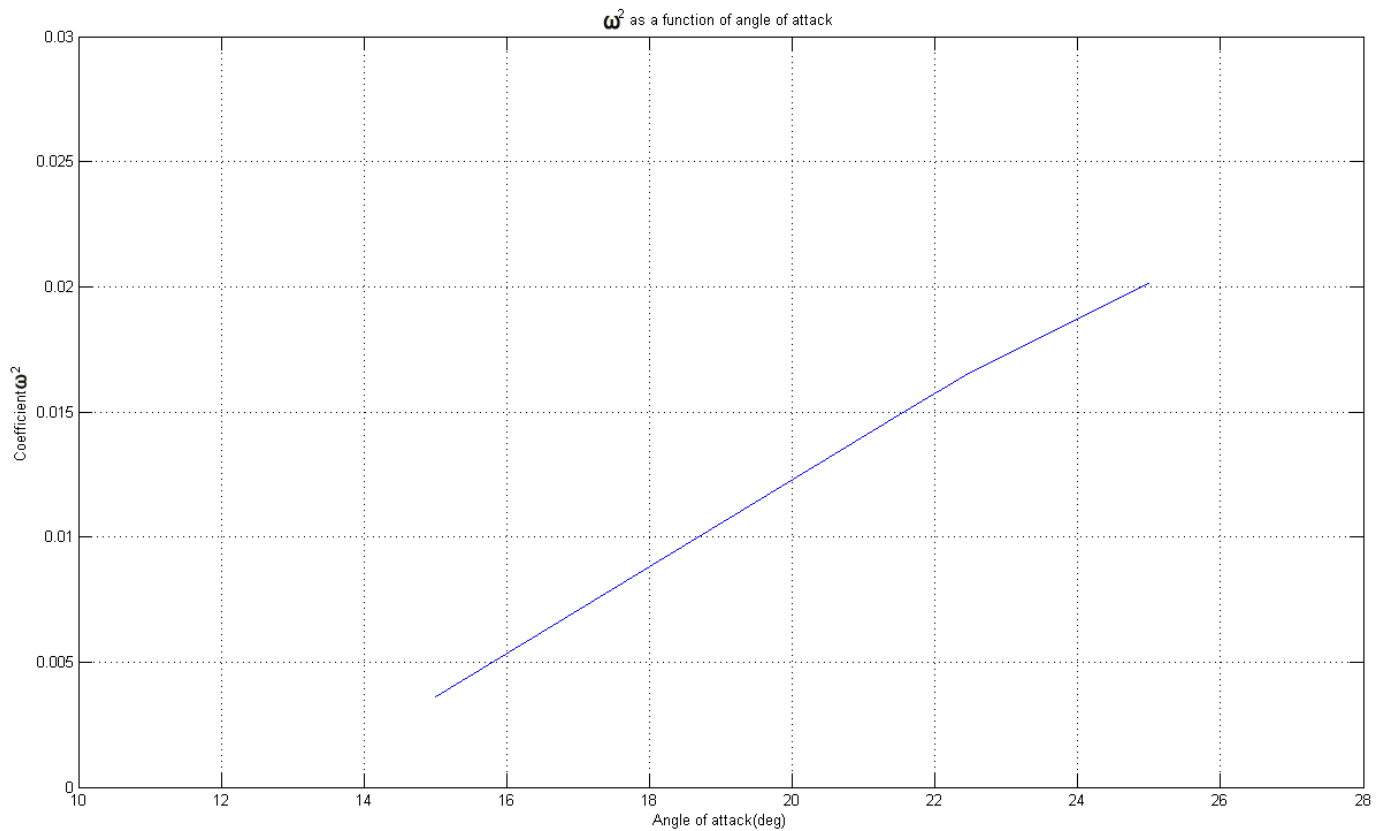
Σε αυτό το παράρτημα, παρουσιάζονται οι γραφικές των παραμέτρων των μοντέλων προσομοίωσης του φαινομένου wing rock σε σχέση με τη γωνία επιθέσεως του αεροσκάφους, όπως αυτά παρουσιάζονται στο **Κεφάλαιο 3**.

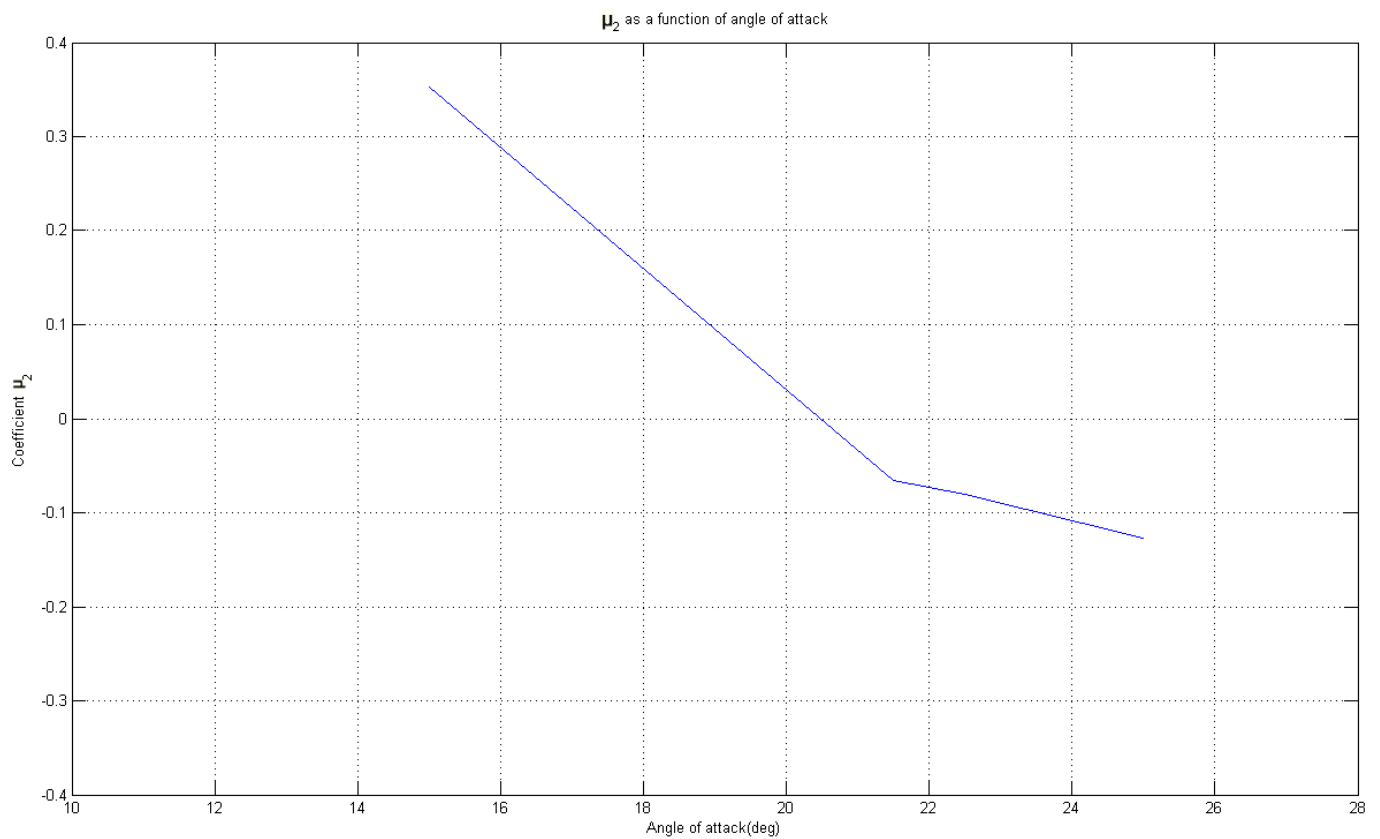
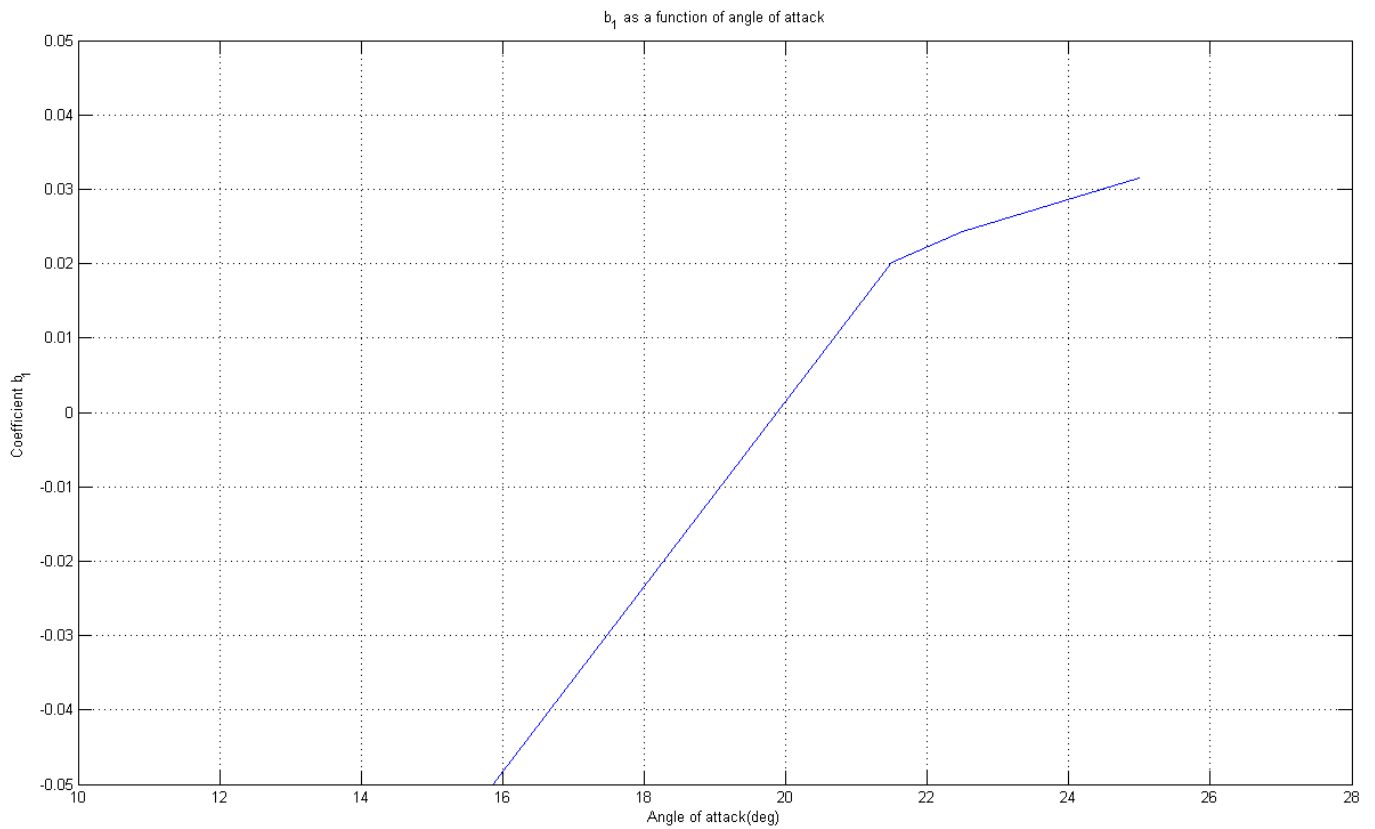
Για το μοντέλο (1), παρουσιάζονται οι παράμετροι  $\omega^2$ ,  $\mu_1$ ,  $\mu_2$ ,  $b_1$ ,  $b_2$ .

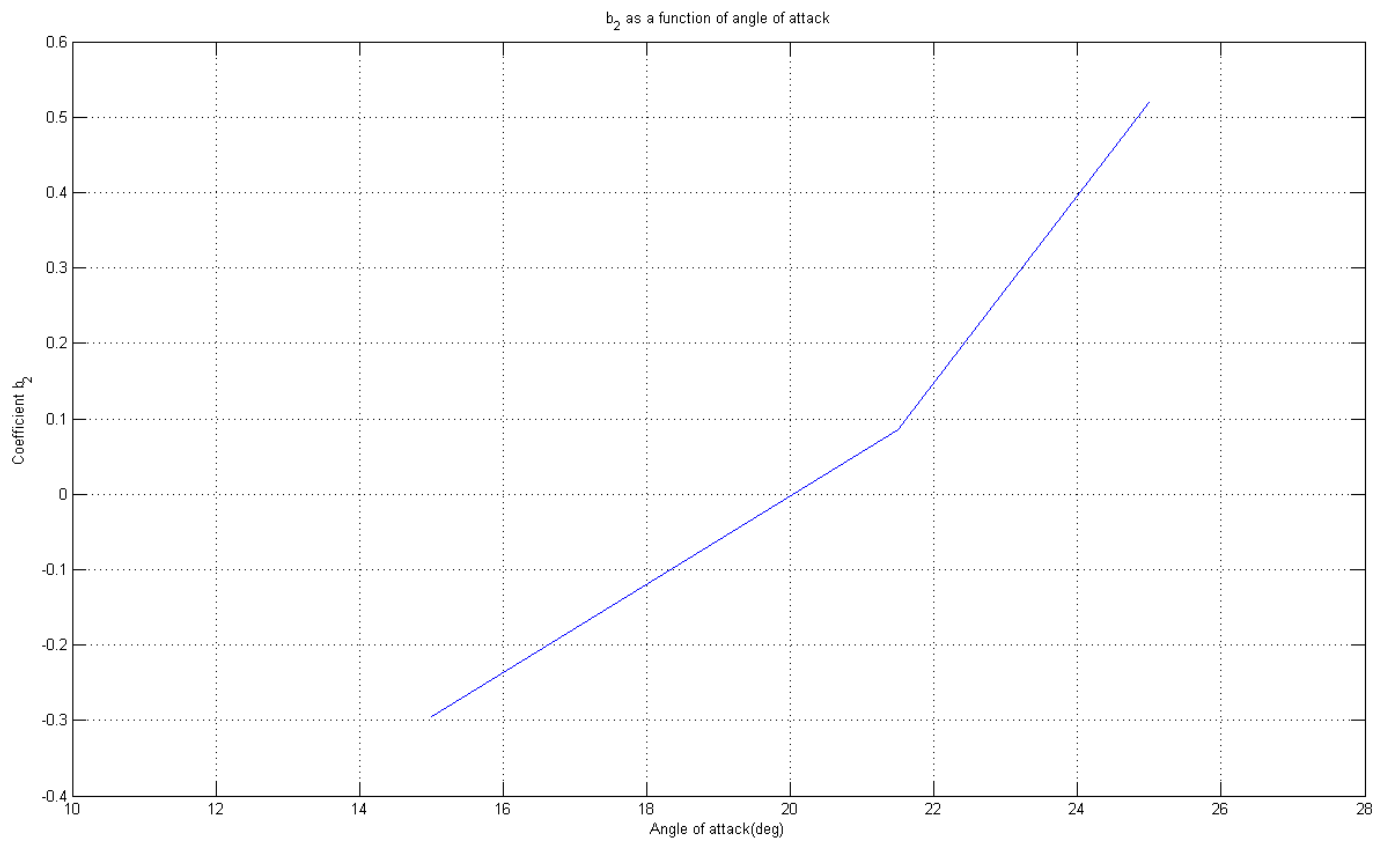
Για τα μοντέλα (2) και (3) δίνονται οι γραφικές των παραμέτρων  $\omega^2$ ,  $\mu$ ,  $b_1$ ,  $b_2$ ,  $b_3$  σε κοινό γράφημα για να φανεί η διαφορά μεταξύ τους.

Τέλος, για τα μοντέλα (4α) και (4β) δεν δίνεται κάποια γραφική, καθώς οι παράμετροι που χρησιμοποιούνται είναι μόνο για μία γωνία επιθέσεως.

### Μοντέλο Προσομοίωσης 1

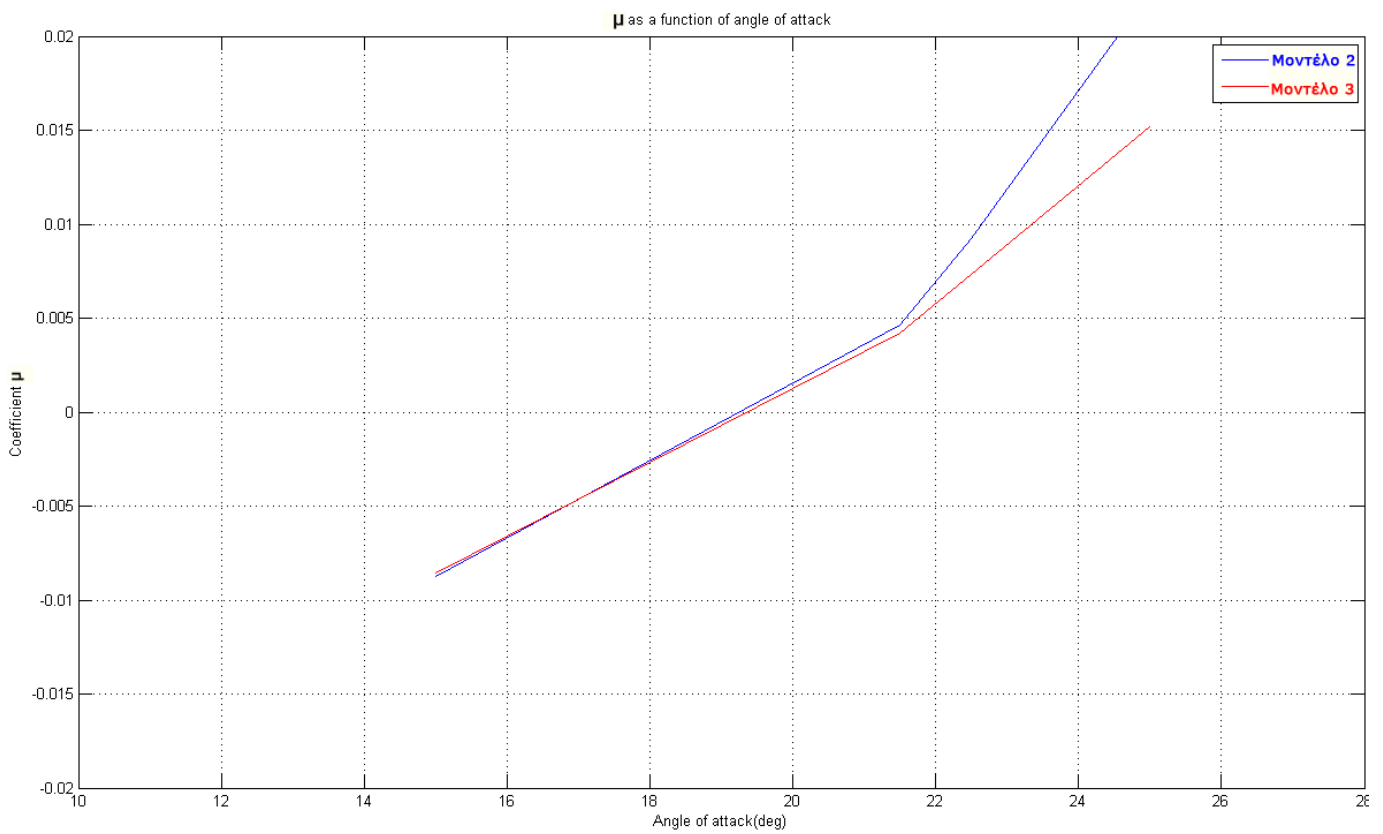
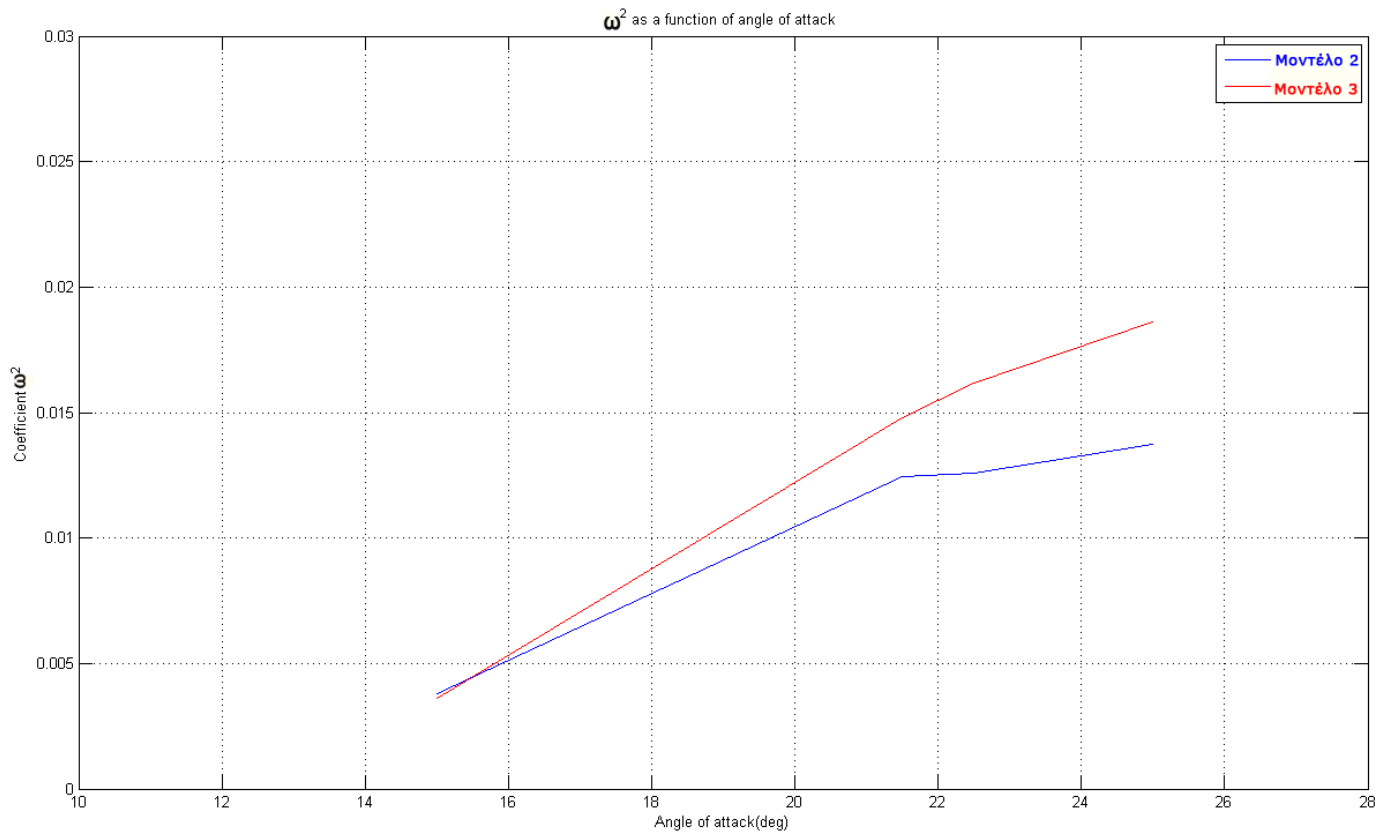


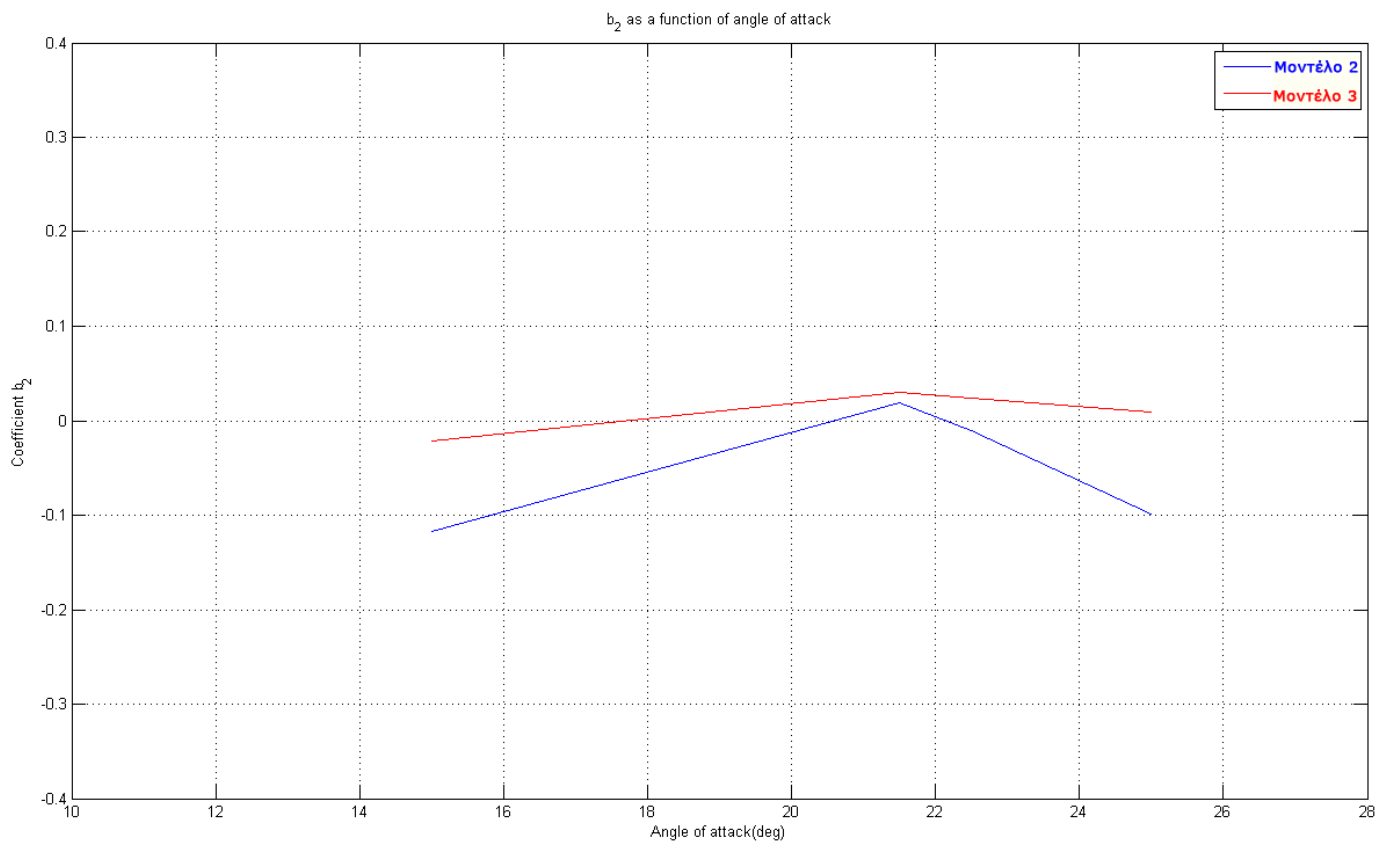
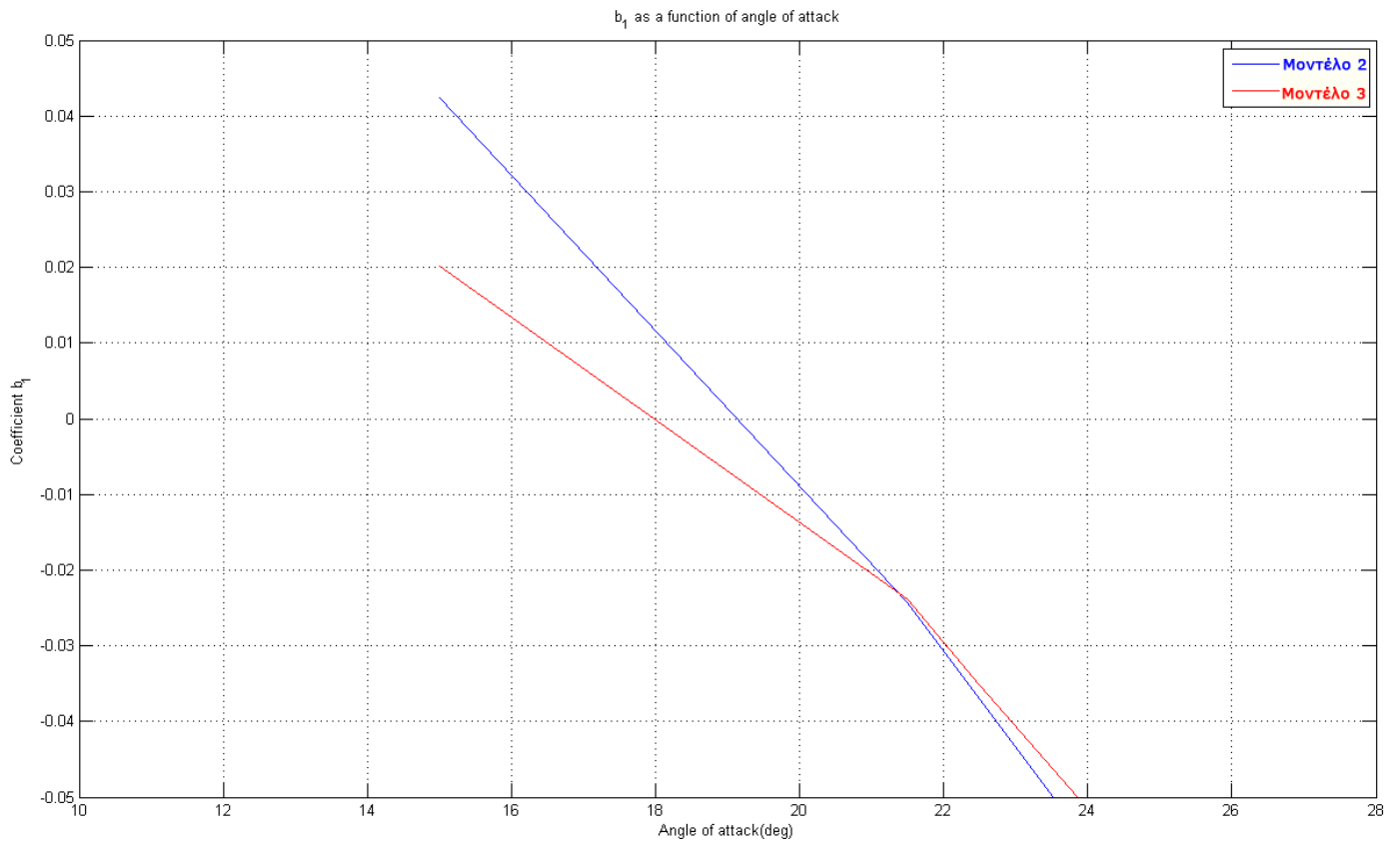


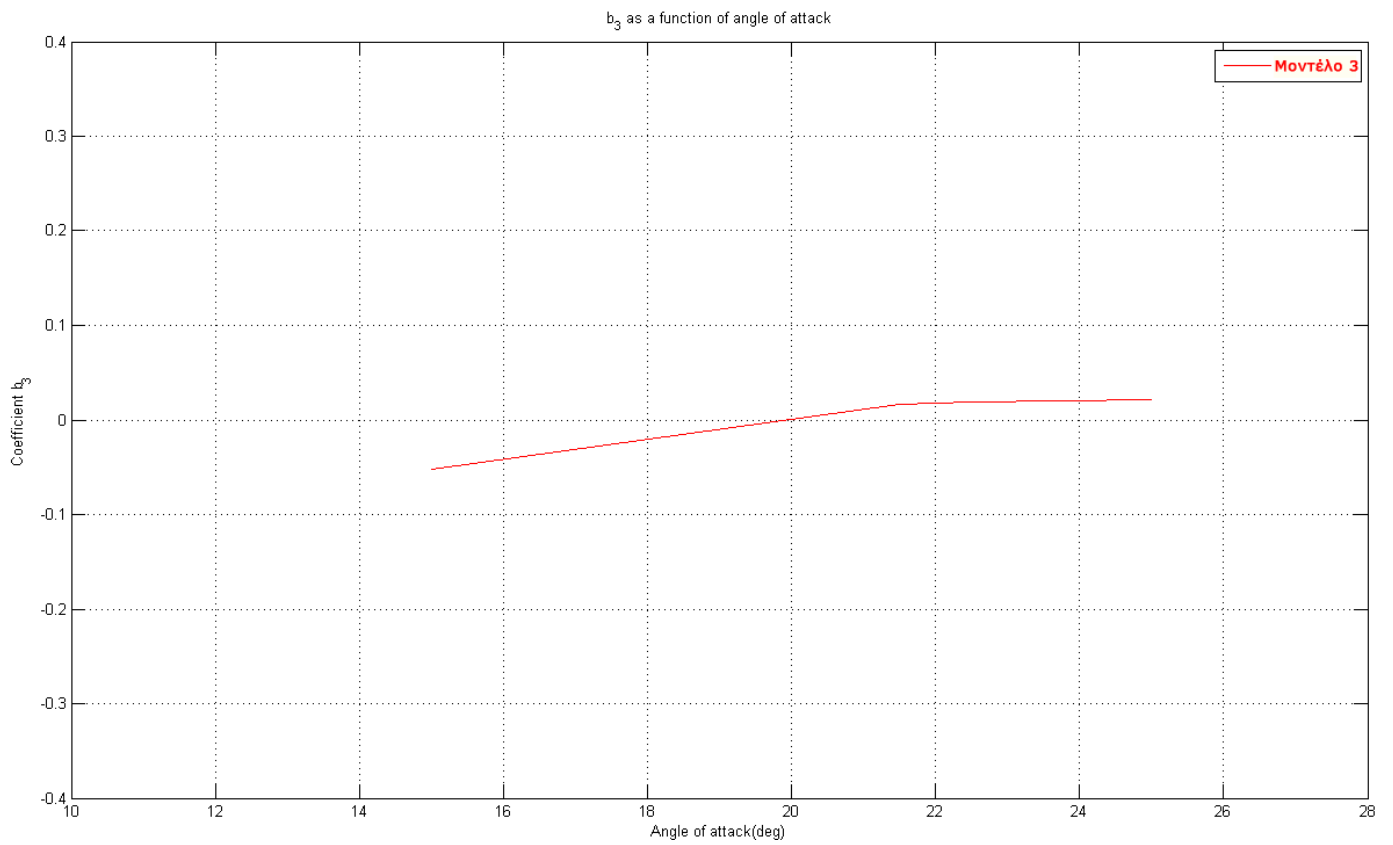




### Μοντέλα Προσομοίωσης 2 και 3







# Παράρτημα Β

## Κώδικας MATLAB

---

Σε αυτό το παράρτημα, παρουσιάζονται τα αρχεία MATLAB που χρησιμοποιούνται στο *Κεφάλαιο 3* και στο *Κεφάλαιο 4*.

Πρώτα, εμφανίζονται τα αρχεία MATLAB που αναφέρονται στο *Κεφάλαιο 3* και χρησιμοποιούνται στη προσομοίωση του φαινομένου wing rock. Συγκεκριμένα, παρουσιάζονται το αρχείο προσομοίωσης του φαινομένου με τη χρήση του πρώτου μοντέλου και τη συνάρτηση που αυτό απαιτεί για τη σωστή λειτουργία. Τα υπόλοιπα μοντέλα έχουν ίδια δομή και αλλάζουν μόνο οι παράμετροι και η εξίσωση που υπάρχει στο αρχείο της συνάρτησης.

Έπειτα, παρουσιάζονται τα αρχεία MATLAB που χρησιμοποιούνται για τη κατασκευή του observer και την ανανέωση των βαρών του νευρωνικού δικτύου στο *Κεφάλαιο 4*. Γίνεται χρήση του πρώτου μοντέλου, όπως έχει ήδη αναφερθεί.

## Αρχεία MATLAB Κεφαλαίου 3

### Αρχείο *simulation\_model1.m*

---

```
%-----
%Χαβατζόπουλος Παρασκευάς Μάριος
%2005030102
%
%Chavatzopoulos Paraskevas Marios
%2005030102
%
%In this script, I am trying to simulate the wing rock phenomenon. This
%phenomenon is non linear and happens to aircrafts while at angle of
%attack.
%I will simulate this phenomenon for 80 grades (slender) delta wings, as
%it was proposed in the paper
%
% "Analytical study of the subsonic wing-rock phenomenon for slender
% delta wings", Journal of Aircraft, vol 26, No 9, pp 805-809, 1989
% written by A.H. Nayfeh, J.M. Elzebda and D.T. Mook
%
%-----

%-----
% clear all;
close all;
clc;
%-----

%%% Input of parameters
%%angle of attack(degrees)
aoa = [15 21.5 22.5 25];

%%it is used either this one or the one used in
%%the script to simulate all of the scripts
%%the other one is in comments
global index_angle;
index_angle=4;
%%index to point to which of the data used
%%value 1 is for 15 degrees angle of attack data
%%value 2 is for 21.5 degrees angle of attack data
%%value 3 is for 22.5 degrees angle of attack data
%%value 4 is for 25 degrees angle of attack data

%%a parameters for roll moment coefficient
%%the values of a(i) depend on the angle of attack
%a parameters
a1=[-0.01026 -0.04207 -0.04681 -0.05686];
a2=[-0.02117 0.01456 0.01966 0.03254];
a3=[-0.14181 0.04714 0.05671 0.07334];
a4=[0.99735 -0.18583 -0.22691 -0.3597];
a5=[-0.83478 0.24234 0.59065 1.4681];

%%%Input of variables
%density of air
p=1.1955;
%moment of inertia with respect to the midspan axis along the chord
```

```

Ixx=0.27*10^-3;
%damping coefficient for the sting bearing
mx=0.378*10^-4;
%chord
c=0.429;
%characteristic length
Lc=c/4;
%area of the pplanform
S=0.0324;
%characteristic speed
Uc=15;

%%%Calculate constants c1 and c2, used in the equation f''=c1*c1-c2*f'
c1=(p*S*c*(Lc^2))/(2*Ixx);
c2=(mx*Lc)/(Ixx*Uc);

%%%Calculate coefficients
omega_2nd_power=-c1*a1;
m1=c1*a2-c2;
b1=c*a3;
m2=c1*a4;
b2=c1*a5;

%%%Assembly of all data used and calculated
a_data=[a1;a2;a3;a4;a5];
coefficient_data=[omega_2nd_power;m1;b1;m2;b2];

%%%Plot of coefficients calculated above
%Coefficient w^2
figure();
plot(aoa,omega_2nd_power);
axis([10 28 0 0.03]);
xlabel('Angle of attack(deg)');
ylabel('Coefficient w ^2');
title('w^2 as a function of angle of attack');
grid on;
%Coefficient m1
figure();
plot(aoa,m1);
axis([10 28 -0.02 0.02]);
xlabel('Angle of attack(deg)');
ylabel('Coefficient m_1');
title('m_1 as a function of angle of attack');
grid on;
%Coefficient b1
figure();
plot(aoa,b1);
axis([10 28 -0.05 0.05]);
xlabel('Angle of attack(deg)');
ylabel('Coefficient b_1');
title('b_1 as a function of angle of attack');
grid on;
%Coefficient m2
figure();
plot(aoa,m2);
axis([10 28 -0.4 0.4]);
xlabel('Angle of attack(deg)');
ylabel('Coefficient m_2');
title('m_2 as a function of angle of attack');

```

```

grid on;
%Coefficient b2
figure();
plot(aoa,b2);
axis([10 28 -0.4 0.6]);
xlabel('Angle of attack(deg)');
ylabel('Coefficient b_2');
title('b_2 as a function of angle of attack');
grid on;

%%%Function fi_2nd_derivative
% code for the function used to evaluate the differential equation
% Function fi_2nd_derivative
% index_angle=4;
% dy = zeros(2,1);
% dy(1) = y(2);
% dy(2) = -
omega_2nd_power(index_angle)*y(1)+m1(index_angle)*y(2)+b1(index_angle)*y(1)^3+m2(i
ndex_angle)*y(1)^2*y(2)+b2(index_angle)*y(1)*y(2)^2;

%%%Solution of the differential equation with the help of ode15s
%%initial values for phi and phi'
Y0=15;
Y0_1st=0;
[T,Y] = ode15s(@fi_2nd_derivative,[0 3000],[Y0*pi/180 Y0_1st*pi/180]);
%%%Converting the results from rads to degrees
Y=Y*(180/pi);

%%%Plot results returned above
%Roll angle as a function of time
figure();
plot(T,Y(:,1));
xlabel('Time');
ylabel('Phi');
title('Roll angle as a function of time');
%Phase Plane
figure();
plot(Y(:,1),Y(:,2));
xlabel('Phi');
ylabel('Phi ^(^1^)');
title('Phase Plane');

pause();
close all;
clc;

%%Simulation of wing rock phenomenon
%-----
%Χαβατζόπουλος Παρασκευάς Μάριος
%2005030102
%
%Chavatzopoulos Paraskevas Marios
%2005030102
%-----

```



### *Αρχείο fi\_2nd\_derivative.m*

---

```
%-----
%Χαβατζόπουλος Παρασκευάς Μάριος
%2005030102
%
%Chavatzopoulos Paraskevas Marios
%2005030102
%-----

function dy = fi_2nd_derivative(t,y)

%coefficients used in differential equation
omega_2nd_power=[0.0036316 0.014891 0.010569 0.020126];
m1=[-0.0084943 0.0041526 0.0059578 0.010517];
b1=[-0.060836 0.020223 0.024329 0.031463];
m2=[0.35302 -0.065776 -0.080317 -0.12732];
b2=[-0.29548 0.085778 0.20907 0.51965];

%%another way to input the values in the function
% global coefficient_data;
% omega_2nd_power=coefficient_data(1,:);
% m1=coefficient_data(2,:);
% b1=coefficient_data(3,:);
% m2=coefficient_data(4,:);
% b2=coefficient_data(5,:);

%specifies which of the values of each coefficient above to be used,
%depending on the angle of attack that they were calculated for
global index_angle;

dy = zeros(2,1);
dy(1) = y(2);
dy(2) = -
omega_2nd_power(index_angle)*y(1)+m1(index_angle)*y(2)+b1(index_angle)*y(1)^3
+m2(index_angle)*y(1)^2*y(2)+b2(index_angle)*y(1)*y(2)^2;

%-----
%Χαβατζόπουλος Παρασκευάς Μάριος
%2005030102
%
%Chavatzopoulos Paraskevas Marios
%2005030102
%-----
```

## Αρχεία MATLAB Κεφαλαίο 4

### Αρχείο *observer.m*

---

```
%-----
%Χαβατζόπουλος Παρασκευάς Μάριος
%2005030102
%
%Chavatzopoulos Paraskevas Marios
%2005030102
%
% Σε αυτό το κώδικα, εξάγεται ο RISE παρατηρητής που χρησιμοποιείται
% από το PNN. Για το παρατηρητή χρησιμοποιείται το μοντέλο, όπως αυτό
% προτείνεται από τη δημοσίευση
%
% "Analytical study of the subsonic wing-rock phenomenon for slender
%   delta wings", Journal of Aircraft, vol 26, No 9, pp 805-809, 1989
%   written by A.H. Nayfeh, J.M. Elzebda and D.T. Mook
%
%-----

%-----
% clear all;
close all;
clc;
%-----

%%% Input of parameters
%%angle of attack(degrees)
aoa = [15 21.5 22.5 25];

%%it is used either this one or the one used in
%%the script to simulate all of the scripts
%%the other one is in comments
global index_angle;
index_angle=1;
%%index to point to which of the data used
%%value 1 is for 15 degrees angle of attack data
%%value 2 is for 21.5 degrees angle of attack data
%%value 3 is for 22.5 degrees angle of attack data
%%value 4 is for 25 degrees angle of attack data

%%a parameters for roll moment coefficient
%%the values of a(i) depend on the angle of attack
%a parameters
a1=[-0.01026 -0.04207 -0.04681 -0.05686];
a2=[-0.02117 0.01456 0.01966 0.03254];
a3=[-0.14181 0.04714 0.05671 0.07334];
a4=[0.99735 -0.18583 -0.22691 -0.3597];
a5=[-0.83478 0.24234 0.59065 1.4681];

%%%Input of variables
%density of air
p=1.1955;
%moment of inertia with respect to the midspan axis along the chord
Ixx=0.27*10^-3;
%damping coefficient for the sting bearing
mx=0.378*10^-4;
```

```

%chord
c=0.429;
%characteristic length
Lc=c/4;
%area of the pplanform
S=0.0324;
%characteristic speed
Uc=15;

%%%Calculate constants c1 and c2, used in the equation f'=c1*c1-c2*f'
c1=(p*S*c*(Lc^2))/(2*Ixx);
c2=(mx*Lc)/(Ixx*Uc);

%%%Calculate coefficients
omega_2nd_power=-c1*a1;
m1=c1*a2-c2;
b1=c*a3;
m2=c1*a4;
b2=c1*a5;

%%%Assembly of all data used and calculated
a_data=[a1;a2;a3;a4;a5];
coefficient_data=[omega_2nd_power;m1;b1;m2;b2];

%%%Plot of coefficients calculated above
%Coefficient w^2
figure();
plot(aoa,omega_2nd_power);
axis([10 28 0 0.03]);
xlabel('Angle of attack(deg)');
ylabel('Coefficient w ^2');
title('w^2 as a function of angle of attack');
grid on;
%Coefficient m1
figure();
plot(aoa,m1);
axis([10 28 -0.02 0.02]);
xlabel('Angle of attack(deg)');
ylabel('Coefficient m_1');
title('m_1 as a function of angle of attack');
grid on;
%Coefficient b1
figure();
plot(aoa,b1);
axis([10 28 -0.05 0.05]);
xlabel('Angle of attack(deg)');
ylabel('Coefficient b_1');
title('b_1 as a function of angle of attack');
grid on;
%Coefficient m2
figure();
plot(aoa,m2);
axis([10 28 -0.4 0.4]);
xlabel('Angle of attack(deg)');
ylabel('Coefficient m_2');
title('m_2 as a function of angle of attack');
grid on;
%Coefficient b2
figure();

```

```

plot(aoa,b2);
axis([10 28 -0.4 0.6]);
xlabel('Angle of attack(deg)');
ylabel('Coefficient b_2');
title('b_2 as a function of angle of attack');
grid on;

%%%Function fi_2nd_derivative

% code for the function used to evaluate the differential equation
% Function fi_2nd_derivative
% index_angle=4;
% dy = zeros(2,1);
% dy(1) = y(2);
% dy(2) = -
omega_2nd_power(index_angle)*y(1)+m1(index_angle)*y(2)+b1(index_angle)*y(1)^3+m2(index_angle)*y(1)^2*y(2)+b2(index_angle)*y(1)*y(2)^2;

%%%Solution of the differential equation with the help of ode15s
%%initial values for phi and phi'
Y0=10;
Y0_1st=0;

[T,Y] = ode15s(@fi_2nd_der_observer,[0 500],[Y0*pi/180 Y0_1st*pi/180 0 0 0 0 0]);

%%%Converting the results from rads to degrees
Y(:,1)=Y(:,1)*(180/pi);
Y(:,2)=Y(:,2)*(180/pi);
Y(:,3)=Y(:,3)*(180/pi);
Y(:,6)=Y(:,6)*(180/pi);

%%%Plot results returned above
%Roll angle as a function of time
figure();
plot(T,Y(:,1));
xlabel('Time');
ylabel('Phi');
title('Roll angle as a function of time');
%Phase Plane
figure();
plot(Y(:,1),Y(:,2));
xlabel('Phi');
ylabel('Phi ^(^1^)');
title('Phase Plane');
figure();
plot(T,Y(:,1),T,Y(:,3),'red-.');
xlabel('t');
title('observer');
pause();

close all;
clc;
%-----
%Χαβατζόπουλος Παρασκευάς Μάριος
%2005030102
%
%Chavatzopoulos Paraskevas Marios
%2005030102
%-----

```

### Αρχείο fi\_2nd\_der\_observer.m

```
function dy = fi_2nd_derivative1(t,y)

%coefficients used in differential equation
omega_2nd_power=[0.0036316 0.014891 0.010569 0.020126];
m1=[-0.0084943 0.0041526 0.0059578 0.010517];
b1=[-0.060836 0.020223 0.024329 0.031463];
m2=[0.35302 -0.065776 -0.080317 -0.12732];
b2=[-0.29548 0.085778 0.20907 0.51965];

k=2;
lamda=1;
beta=20;

%specifies which of the values of each coefficient above to be used,
%depending on the angle of attack that they were calculated for
global index_angle;

dy = zeros(5,1);
dy(1) = y(2);
dy(2) = -omega_2nd_power(index_angle)*y(1) +m1(index_angle)*y(2)
+b1(index_angle)*y(1)^3 +m2(index_angle)*y(1)^2*y(2) +b2(index_angle)*y(1)*y(2)^2;
dy(3)=k*(y(1)-y(3))+lamda*k*y(4)+beta*y(5); % y(3) is the estimation of y(1)
dy(4) = y(1)-y(3); % y(4) returns the integral of the error
dy(5) = min(1,max(-1,400*(y(1)-y(3)))); % y(5) returns the integral of the sign of
the error
dy(6)=k*(y(2)-y(6))+lamda*k*y(7)+beta*y(8); % y(6) is the estimation of y(2)
dy(7) = y(2)-y(6); % y(7) returns the integral of the error
dy(8) = min(1,max(-1,400*(y(2)-y(6)))); % y(8) returns the integral of the sign of
the error
```

**Αρχείο neural\_net.m**

```

k = 2;
lamda = 1;
beta = 20;

phi=Y(:,1);
phi_der=Y(:,2);
observer=k*(Y(:,2)-Y(:,6))*pi/180+lamda*ko*Y(:,7)+beta*Y(:,8);
t=length(T);

N_I1 = 50; N_I2 = 50;
all = (max(abs(phi)));
al2 = max(abs(phi_der));
delta1 = (max(phi)-min(phi))/(N_I1);
delta2 = (max(phi_der)-min(phi_der))/(N_I2);

a_i0_I1=-all;

a_i0_I2 = -al2;

patches=N_I1*N_I2;

A_I1=zeros(N_I1,2);
for k=1:1:N_I1
    A_I1(k,1)=a_i0_I1+(k-1)*delta1;
    A_I1(k,2)=a_i0_I1+k*delta1;
end

A_I2=zeros(N_I2,2);
for k=1:1:N_I2
    A_I2(k,1)=a_i0_I2+(k-1)*delta2;
    A_I2(k,2)=a_i0_I2+k*delta2;
end

p=zeros(N_I1,N_I2);
w=zeros(N_I1,N_I2);
for temp=1:1:t
    for k=1:1:N_I1
        for l=1:1:N_I2
            if((A_I1(k,1)<=phi(temp) && phi(temp)<=A_I1(k,2)) &&
((A_I2(l,1)<=phi_der(temp) && phi_der(temp)<=A_I2(l,2))))
                p(k,l)=1;
                w(k,l)=observer(temp);
                break;
            else
                p(k,l)=0;
                w(k,l)=w(k,l);
            end
        end
    end
end

figure;
[xgrid , ygrid] = meshgrid(-35:.5:35 , -4:.1:4);
zgrid = - omega_2nd_power(index_angle)*(xgrid*pi/180) +m1(index_angle)*(ygrid*pi/180)
+b1(index_angle)*((xgrid*pi/180).^3)
+m2(index_angle)*((xgrid*pi/180).^2).*(ygrid*pi/180)

```

```
+b2(index_angle)*(xgrid*pi/180).*((ygrid*pi/180).^2);
mesh(xgrid,ygrid, zgrid)
figure();
for k=1:1:N_I1
    for l=1:1:N_I2
        fill3([A_I1(k,1) A_I1(k,2) A_I1(k,2) A_I1(k,1)], [A_I2(l,1) A_I2(l,1)
A_I2(l,2) A_I2(l,2)], w(k,l)*[1 1 1 1], 'blue')
        hold on;
    end
end
grid on;
```