

« ΣΥΓΚΡΙΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ,
ΜΗ-ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΚΑΙ ΝΕΥΡΟ-ΑΣΑΦΩΝ ΜΕΘΟΔΩΝ, ΓΙΑ ΤΗ ΒΡΑΧΥΠΡΟΘΕΣΜΗ
ΠΡΟΒΛΕΨΗ ΠΑΡΑΓΩΓΗΣ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ ΑΠΟ ΑΙΟΛΙΚΑ ΠΑΡΚΑ »

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Ευθύμιος Ι. Νικολάου

Επιβλέπων : Καθ. Γ. Σταυρακάκης

Εξεταστική επιτροπή: Καθ. Γ. Σταυρακάκης
Καθ. Κ. Καλαϊτζάκης
Καθ. Μ. Ζερβάκης

Χανιά, Νοέμβριος 2007

Στη Μαριγούλα και στη Σοφία

Πρόλογος

Η παρούσα διπλωματική εργασία εκπονήθηκε στο Τμήμα Ηλεκτρονικών Μηχανικών και Μηχανικών Ηλεκτρονικών Υπολογιστών του Πολυτεχνείου Κρήτης, στα πλαίσια του μαθήματος Ανανεώσιμες Πηγές Ενέργειας. Η εκκίνηση της διπλωματικής εργασίας τοποθετείται χρονικά τον Απρίλιο του 2007.

Στο σημείο αυτό θα ήθελα να ευχαριστήσω τον καθηγητή μου Γ. Σταυρακάκη για την καθοδήγησή του κατά την εκπόνηση της παρούσας διπλωματικής εργασίας. Την κα. Τ. Νικολάου για τις πολύτιμες γνώσεις και τη στήριξη που μου προσέφερε, τέλος, τον κ. Γ. Ατσαλάκη για τις πολύτιμες συμβουλές και την εμπειρία του στα ζητήματα υπολογιστικής νοημοσύνης.

Νοέμβριος 2007

Ευθύμιος Ι. Νικολάου

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ.....	9
2. ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΗ ΑΝΑΣΚΟΠΗΣΗ.....	12
2.1 Χρονική κατηγοριοποίηση προβλέψεων.....	12
2.2 Διάφορες προσεγγίσεις ανάλυσης χρονοσειρών.....	13
2.3 Διάφορες προσεγγίσεις Νευρωνικών Δικτύων.....	15
2.4 Συσχέτιση ταχύτητας ανέμου και παραγόμενης ισχύος.....	16
2.5 Περιγραφή δεδομένων.....	18
3. ΜΕΘΟΔΟΙ ΠΡΟΒΛΕΨΕΩΝ - ΧΡΟΝΟΣΕΙΡΕΣ.....	23
3.1 Βασικά στάδια στη διαδικασία πρόβλεψης.....	25
3.2 Ποιοτικά χαρακτηριστικά Χρονοσειρών - Στατιστικοί δείκτες & δείκτες σφαλμάτων.....	26
3.3 Μέθοδοι εξομάλυνσης.....	28
3.3.1 Η μέθοδος του κινητού μέσου (Moving average).....	29
3.3.2 Απλή εκθετική εξομάλυνση (Simple exponential smoothing).....	30
3.3.3 Διπλός κινητός μέσος (Double moving average).....	33
3.3.4 Διπλή εκθετική εξομάλυνση (Double exponential smoothing).....	34
3.3.5 Εκθετική εξομάλυνση με προσαρμογή στην τάση (Exponential smoothing adjusted for trend).....	35
3.3.6 Εκθετική εξομάλυνση με προσαρμογή στην τάση και στην εποχικότητα (Exponential smoothing adjusted for trend and seasonality).....	37
3.3.7 Εφαρμογή των μοντέλων.....	38
3.4 Διάσπαση χρονοσειρών.....	44
3.4.1 Ανάλυση και διαχωρισμός της εποχικότητας	47
3.4.2 Προσαρμογή και ανάλυση της τάσης.....	48
3.4.3 Το μοντέλο γραμμικής τάσης.....	49

3.4.4	Απομόνωση της κυκλικότητας.....	50
3.4.5	Εφαρμογή των μοντέλων.....	52
3.5	Ανάλυση ARIMA - Box Jenkins.....	56
3.5.1	Βασικές έννοιες προχωρημένης ανάλυσης.....	57
3.5.2	Μοντέλα χρονοσειρών ARIMA.....	63
3.5.3	Επιλογή του καλύτερου μοντέλου ARIMA.....	71
3.5.4	Διαγνωστικός έλεγχος.....	72
3.5.5	Πρόβλεψη με τη χρήση μοντέλων ARIMA.....	74
3.5.6	Εφαρμογή των μοντέλων.....	74

4. ΧΑΟΤΙΚΕΣ ΧΡΟΝΟΣΕΙΡΕΣ.....83

4.1	Γραμμική και μη-γραμμική ανάλυση χρονοσειρών.....	84
4.1.1	Δυναμικά συστήματα.....	86
4.1.2	Χρονοσειρές από δυναμικά συστήματα.....	88
4.1.3	Παρατήρηση χαοτικής συμπεριφοράς.....	92
4.1.4	Πως εργαζόμαστε με μια χαοτική χρονοσειρά.....	93
4.2	Ανακατασκευή χώρου καταστάσεων.....	95
4.2.1	Επιλογή της χρονικής υστέρησης.....	97
4.2.2	Επιλογή της διάστασης εμβύθισης.....	100
4.3	Εκτίμηση μη-γραμμικών χαρακτηριστικών του δυναμικού συστήματος.....	104
4.3.1	Διαστάσεις δυναμικού συστήματος.....	104
4.3.2	Εκθέτες Lyapunov	112
4.3.3	Γενικευμένη εντροπία.....	115
4.4	Μη-γραμμικά μοντέλα πρόβλεψη.....	116
4.5	Εφαρμογή του χαοτικού μοντέλου.....	119

5. ΝΕΥΡΟ-ΑΣΑΦΗ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ.....	132
5.1 Ασαφής λογική	133
5.1.1 Συνάρτηση συμμετοχής.....	134
5.1.2 Ιδιότητες ασαφών συνόλων.....	138
5.1.3 Λογικές πράξεις στα ασαφή σύνολα.....	140
5.1.4 Ασαφείς σχέσεις.....	144
5.1.5 Ασαφής συλλογιστική.....	146
5.2 Συστήματα Ασαφούς Συλλογιστικής (Fuzzy Inference Systems).....	148
5.2.1 Κανόνες αν-τότε (If-then rules).....	148
5.2.2 Ασαφή συστήματα τύπου Mamdani.....	151
5.2.3 Ασαφή συστήματα Τύπου Sugeno.....	155
5.3 Νευρωνικά δίκτυα.....	159
5.3.1 Νευρωνική δομή.....	160
5.3.2 Τοπολογίες πολυστρωματικών δικτύων.....	164
5.3.3 Διαδικασία μάθησης.....	165
5.3.4 Αλγόριθμοι μάθησης ΤΝΔ.....	168
5.4 Νευρό-Ασαφή συστήματα.....	169
5.4.1 Ασαφείς νευρώνες.....	170
5.4.2 Προσαρμοστικά δίκτυα (Adaptive Networks).....	171
5.4.3 Αρχιτεκτονική προσαρμοστικών δικτύων.....	172
5.4.4 Καταμερισμός παραμέτρων στο δίκτυο.....	174
5.4.5 Παραδείγματα προσαρμοστικών δικτύων.....	176
5.5 Περιγραφή του ANFIS.....	178
5.5.1 Αρχιτεκτονική του ANFIS.....	179
5.5.2 Εκτιμητής ελαχίστων τετραγώνων (Least-Squares Estimator).....	183
5.5.3 Κανόνας οπισθόδρομης εκμάθησης (Backpropagation Rule).....	186
5.5.4 Υβριδικός αλγόριθμος εκπαίδευσης.....	193
5.5.5 Περιορισμοί του ANFIS.....	196
5.6 Εφαρμογή του μοντέλου.....	197
5.6.1 Επιλογή εισόδων.....	197
5.6.2 Εκπαίδευση και προβλέψεις.....	198
5.6.3 Αποτελέσματα εφαρμογής.....	200

6. ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΤΩΝ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΩΝ

6.1	Γραμμική ανάλυση χρονοσειρών.....	211
6.2	Μη γραμμική ανάλυση χρονοσειρών.....	222
6.3	Νευρο-Ασαφή συστήματα.....	227
6.4	Σύνοψη.....	229

7. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ.....232

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ.....237

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η παραγωγή ηλεκτρικού ρεύματος από ανανεώσιμες πηγές ενέργειας όπως η ηλιακή, αιολική, γεωθερμική και ενέργεια βιομάζας έχουν τη μικρότερη επίδραση στο περιβάλλον. Αυτές οι "φιλικές προς το περιβάλλον" πηγές ενέργειας δίνουν στον καταναλωτή έναν εναλλακτικό τρόπο παραγωγής ηλεκτρικής ενέργειας από αυτόν με τη χρήση άνθρακα, πυρηνικής ενέργειας, φυσικού αερίου και πετρελαίου. Σήμερα οι μονάδες παραγωγής ηλεκτρικού ρεύματος που λειτουργούν με άνθρακα παράγουν το μεγαλύτερο ποσοστό ηλεκτρικής ενέργειας στον κόσμο. Όμως αυτή η φτηνή μέθοδος προκαλεί τη μεγαλύτερη καταστροφή στο περιβάλλον με την εκπομπή τοξικών αερίων. Αυτά τα τοξικά αέρια, διοξείδιο του θείου και οξείδια του αζώτου, σε συνδυασμό με το νερό της βροχής δημιουργούν την όξινη βροχή και συμβάλλουν στην αύξηση της θερμοκρασίας του πλανήτη. Η ανάγκη για τη χρήση των Ανανεώσιμων Πηγών Ενέργειας (ΑΠΕ) δημιουργήθηκε από αυτά ακριβώς τα μειονεκτήματα που παρουσιάζουν οι συμβατικές μέθοδοι παραγωγής ενέργειας. Μια από τις σημαντικότερες ανανεώσιμες πηγές ενέργειας είναι η αιολική.

Η αιολική ενέργεια είναι από τις πλέον γνωστές και από τις παλαιότερες χρησιμοποιούμενες μορφές ενέργειας. Η τεχνολογία των ανεμόμυλων, με τη βοήθεια των οποίων η ενέργεια του ανέμου μετατρέποταν σε μηχανική ενέργεια, ήταν αρκετά γνωστή από αιώνες. Είναι ακόμα γνωστό ότι οι αρχαίοι Έλληνες ανέπτυξαν τους πολιτισμούς τους βασιζόμενοι στη δύναμη του ανέμου, ο οποίος κινούσε τα πλοία με τα οποία έκαναν το εμπόριο στον τότε γνωστό κόσμο. Σήμερα, στη γενική τους μορφή οι ανεμοκινητήρες μετατρέπουν την κινητική ενέργεια του ανέμου σε άλλες, πιο χρήσιμες μορφές ενέργειας, όπως θερμική, ηλεκτρική και φυσικά μηχανική.

Αν υπήρχε η δυνατότητα, με τη σημερινή τεχνολογία, να καταστεί εκμεταλλεύσιμο το συνολικό αιολικό δυναμικό της γης, εκτιμάται ότι η παραγόμενη σε ένα χρόνο ηλεκτρική ενέργεια, θα ήταν υπερδιπλάσια από τις ανάγκες της ανθρωπότητας στο ίδιο διάστημα (Αιολική ενέργεια, ΚΑΠΕ 1998). Υπολογίζεται ότι στο 25% της επιφάνειας της γης επικρατούν άνεμοι μέσης ετήσιας ταχύτητας πάνω από 5,1 m/sec σε ύψος 10 m πάνω από το έδαφος. Όταν οι άνεμοι πνέουν με ταχύτητα μεγαλύτερη από αυτή την τιμή, τότε το αιολικό δυναμικό του τόπου θεωρείται εκμεταλλεύσιμο και οι απαιτούμενες εγκαταστάσεις μπορούν να

καταστούν οικονομικά βιώσιμες, σύμφωνα με τα σημερινά δεδομένα. Άλλωστε το κόστος κατασκευής των ανεμογεννητριών έχει μειωθεί σημαντικά και μπορεί να θεωρηθεί ότι η αιολική ενέργεια διανύει την "πρώτη" περίοδο ωριμότητας, καθώς είναι πλέον ανταγωνιστική των συμβατικών μορφών ενέργειας. Η χώρα μας διαθέτει εξαιρετικά πλούσιο αιολικό δυναμικό και η αιολική ενέργεια μπορεί να γίνει σημαντικός μοχλός ανάπτυξής της. Από το 1982, οπότε εγκαταστάθηκε από τη ΔΕΗ το πρώτο αιολικό πάρκο στην Κύθνο, μέχρι και σήμερα έχουν κατασκευασθεί στην Άνδρο, την Εύβοια, τη Λήμνο, τη Λέσβο, τη Χίο, τη Σάμο, την Κρήτη αλλά και σε άλλες περιοχές της χώρας, εγκαταστάσεις παραγωγής ηλεκτρικής ενέργειας από τον άνεμο συνολικής ισχύος πάνω από 30 MW.

Η αιολική ενέργεια προέρχεται έμμεσα από την ηλιακή ακτινοβολία, γιατί η ανομοιόμορφη θέρμανση της επιφάνειας της γης προκαλεί τη μετακίνηση μεγάλων μαζών αέρα από τη μια περιοχή στην άλλη, δημιουργώντας τους ανέμους. Για παράδειγμα κατά τη διάρκεια της ημέρας ο αέρας πάνω από τις λίμνες και τις θάλασσες παραμένει σχετικά κρύος, σε σχέση με τον αέρα της στεριάς που θερμαίνεται περισσότερο. Έτσι προκαλείται μείωση της πυκνότητάς του με αποτέλεσμα τη μετακίνηση αυτών των αέριων μαζών από την επιφάνεια της θάλασσας προς την ξηρά. Με τον τρόπο αυτό παράγονται τα τοπικά παραλιακά ρεύματα, τα οποία στη διάρκεια της νύχτας αντιστρέφονται, επειδή η θερμοκρασία της ξηράς ελαττώνεται πολύ γρηγορότερα από αυτή του νερού και έτσι οι αέριες μάζες κινούνται προς τη θάλασσα. Παρόμοια τοπικά ρεύματα συμβαίνουν στις βουνοπλαγιές, όπου κατά τη διάρκεια της ημέρας ο θερμός αέρας ανυψώνεται κατά μήκος των πλαγιών υπό την επίδραση του ήλιου. Κατά τη διάρκεια της νύχτας ο σχετικά κρύος αέρας των πλαγιών κινείται προς τις πεδιάδες. Κατά τον ίδιο τρόπο παράγονται και οι πλανητικοί άνεμοι, λόγω της μεγαλύτερης θερμότητας στην επιφάνεια της γης κοντά στον ισημερινό απ' ότι στους πόλους. Επίσης έχουμε και τους εποχιακούς ανέμους, όπως οι Μουσώνες, καθώς και τους ετήσιους (Μελέτμια). Οι τελευταίοι παρουσιάζουν μεγαλύτερο ενδιαφέρον, όσον αφορά στον ελλαδικό χώρο, αφού η παρουσία τους είναι πολύ συχνή στην περιοχή του Αιγαίου. Είναι άνεμοι του καλοκαιριού, Βόρειο-Βορειοανατολικής μέχρι και Βορειοδυτικής διεύθυνσης που αρχίζουν να πνέουν από τις αρχές του Μαΐου και εξασθενούν στα μέσα του Οκτωβρίου. Τη μεγαλύτερη ένταση και συχνότητα την παρουσιάζουν από τα μέσα του Ιουλίου έως τα μέσα του Σεπτεμβρίου, με μέγιστη ημερήσια διακύμανση τις απογευματινές ώρες, ενώ η ένταση τους ελαττώνεται τη νύχτα.

Όσο εντονότερος είναι ο άνεμος της εκάστοτε περιοχής τόσο αυξημένη η απόδοση και τόσο μεγαλύτερα τα οφέλη. Έτσι, η εγκατάσταση αιολικών πάρκων, κατ' αρχάς, ενδείκνυται σε μέρη όπου επικρατούν έντονοι άνεμοι. Τα μέρη αυτά θα πρέπει να αξιοποιηθούν στο πλαίσιο ενός συνολικού αειφόρου σχεδιασμού, λαμβάνοντας ταυτόχρονα υπόψη και την παράλληλη ανάπτυξη των τοπικών κοινωνιών και υποδομών, αλλά και τον αμιγώς περιβαλλοντικό χαρακτήρα των αιολικών έργων. Από την άλλη πλευρά, *η ενσωμάτωση ανεμογεννητριών σε μεγάλη κλίμακα επιφέρει τεχνολογικούς προβληματισμούς, ως προς τη μεταβλητότητα της παραγωγής, ακριβώς λόγω της στοχαστικής φύσης του ανέμου.*

Επομένως, τίθενται κάποια ζητήματα τα οποία θα πρέπει να απασχολήσουν a priori το γενικότερο ενεργειακό σχεδιασμό σε εθνικό επίπεδο. Αυτά σχετίζονται άμεσα με τη χωροταξική κατανομή των αιολικών πάρκων ανά την επικράτεια, καθώς και με τη δυνατότητα πρόγνωσης, με σχετική ακρίβεια, της παραγόμενης ισχύος στο άμεσο μέλλον. Η παροχή *εγγυημένης ισχύος* είναι ζήτημα μείζονος σημασίας, σε ένα Σύστημα όπως το ελληνικό, το οποίο σε περιόδους αιχμής χαρακτηρίζεται από αστάθεια. Σε κάθε τέτοια περίπτωση απαιτούνται ειδικά μέτρα και κατάλληλη διαχείριση για τη μη κατάρρευσή του [1]. Αυτό αναδεικνύει την αναγκαιότητα των μεθόδων και προτύπων πρόγνωσης ανέμου και τη χρησιμότητά τους σε ένα συνολικό σχεδιασμό, με σκοπό την επίτευξη των προαναφερθέντων στόχων. Γίνεται, λοιπόν, κατανοητό πως η στοχαστική φύση του ανέμου μπορεί να επιφέρει σημαντικά προβλήματα στη λειτουργία των αιολικών σταθμών και στα συστήματα ενέργειας, καθώς επίσης και στο ηλεκτρικό δίκτυο, εφόσον μιλάμε για αιολικούς σταθμούς διασυνδεδεμένους με το δίκτυο.

2. ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΗ ΑΝΑΣΚΟΠΗΣΗ

2.1 Χρονική κατηγοριοποίηση προβλέψεων

Έχουν γίνει διάφορες προσεγγίσεις στο παρελθόν σχετικά με το ζήτημα της πρόβλεψης της ταχύτητας του ανέμου. Οι προσεγγίσεις αυτές εστιάζουν στην περιοχή που βρίσκεται εγκατεστημένη μια Α/Γ και αφορούν στη συγκεκριμένη Α/Γ ή σε μια ευρύτερη περιοχή.

Όπως αναφέραμε και προηγουμένως ένα από τα μεγαλύτερα προβλήματα της αιολικής ενέργειας, σε σχέση με τις συμβατικές μορφές ενέργειας, είναι η άμεση εξάρτηση από τη μεταβλητότητα της ταχύτητας του ανέμου. Δύο από τα πιο σημαντικά προβλήματα που δημιουργεί αυτή η συμπεριφορά του ανέμου, είναι, πρώτον, ενέργειες που έχουν να κάνουν με την ίδια την Α/Γ και τον έλεγχό της και, δεύτερον, αποφάσεις που πρέπει να ληφθούν σχετικά με την προώθηση της παραγόμενης ενέργειας στο ηλεκτρικό δίκτυο. Στην πρώτη κατηγορία ο χρονικός ορίζοντας της πρόβλεψης απαιτείται να είναι μερικά δευτερόλεπτα, ενώ στη δεύτερη δευτερόλεπτα ως και εβδομάδες [2].

Μπορούμε να διακρίνουμε τις εξής κατηγορίες εφαρμογών:

- ο Εφαρμογές με στόχο τη βελτιστοποίηση του προγραμματισμού των εργοστασίων παραγωγής ενέργειας, π.χ. αποφάσεις σχετικά με την οικονομική διαχείριση. Ο χρονικός ορίζοντας της πρόβλεψης μπορεί να ποικίλει από 3 ως 10 ώρες ανάλογα με το μέγεθος του συστήματος και τον τύπο των συμβατικών μονάδων (π.χ. για συστήματα που περιλαμβάνουν μόνο γρήγορες συμβατικές μονάδες, όπως diesel gensets ή gas turbines, ο χρονικός ορίζοντας μπορεί να είναι μικρότερος των 3 ωρών). Ελάχιστες τέτοιες on-line εφαρμογές συναντάμε σήμερα, κυρίως σε νησιά και σε απομονωμένα συστήματα.
- ο Εφαρμογές που χρησιμεύουν στην εκτίμηση της αξίας της παραγόμενης ισχύος στην αγορά ηλεκτρικής ενέργειας. Τέτοιες προβλέψεις απαιτούνται από διάφορους φορείς ή εμπλεκόμενους στην αγορά ηλεκτρικής ενέργειας και από διάφορες λειτουργίες όπως, η οικονομική διαχείριση, η δυναμική

ασφάλεια του συστήματος, η συμμετοχή στην αγορά ηλεκτρικής ενέργειας κ.α. Ο χρονικός ορίζοντας αυτών των προβλέψεων μπορεί να φτάσει και τις 48 ώρες.

- Επίσης εφαρμογές προβλέψεων σε χρονικό ορίζοντα 5-7 ημερών είναι σημαντικές για το σχεδιασμό της συντήρησης των αιολικών πάρκων, των Α/Γ ή των γραμμών του δικτύου. Τέτοιες προβλέψεις, σε αυτό το βάθος χρόνου, είναι δυσκολότερο να γίνουν με καλή ακρίβεια.

Για προβλέψεις σε κοντινό βάθος χρόνου, τα σχετικά χρονικά διαστήματα δίνονται από τα εξής χαρακτηριστικά :

- τα μηχανικά μέρη των Α/Γ: χαρακτηριστικά της γεννήτριας, κιβώτιο ταχυτήτων, μηχανισμός παρεκκλίσεων και προ πάντων, τον κανονισμό της πτερωτής. Τα χρονικά διαστήματα που περιλαμβάνονται είναι της τάξεως των δευτερολέπτων και σκοπός είναι ο έλεγχος των ανεμοστρόβιλων.
- τον τύπο του συστήματος όπου οι Α/Γ είναι ενσωματωμένες. Όπως αναφέραμε προηγουμένως, στα μικρά ή απομονωμένα συστήματα το σχετικό χρονικό διάστημα καθορίζεται από τον τύπο των συμβατικών μονάδων ("γρήγορο" ή "αργό") και των λειτουργιών, για τις οποίες οι προβλέψεις απαιτούνται.

Οι πιο χαρακτηριστικές προσεγγίσεις στα ζητήματα πρόβλεψης χρησιμοποιούν τις τεχνικές ανάλυσης χρονολογικών σειρών ή τα νευρικά δίκτυα.

2.2 Διάφορες προσεγγίσεις ανάλυσης χρονοσειρών

Έχουν αναπτυχθεί διάφορες προσεγγίσεις που, σαν πρώτη ύλη για τη διενέργεια προβλέψεων, χρησιμοποιούν τα ιστορικά ανεμολογικά δεδομένα και τις τεχνικές της στατιστικής ανάλυσης και της ανάλυσης χρονοσειρών. Οι σπουδαιότερες από αυτές αναφέρονται περιληπτικά παρακάτω.

Ο Bossanyi [6] χρησιμοποίησε ένα φίλτρο Kalman με τις τελευταίες 6 τιμές ως είσοδο και πέτυχε βελτίωση μέχρι 10% στο λάθος RMS (για τα υπολογισμένα κατά μέσο όρο δείγματα ενός λεπτού) για την πρόβλεψη του επόμενου βήματος. Αυτή η

Βελτίωση μειώθηκε για τους πιο μακροχρόνιους μέσους όρους, και εξαφανίστηκε εντελώς για τους ωριαίους μέσους όρους. Μια παρόμοια προσέγγιση χρησιμοποίησε ο Wilhelmshaven [7] για την εκτίμηση της ταχύτητας του ανέμου. Ο Vihriälä [8] χρησιμοποίησε ένα φίλτρο Kalman για τον έλεγχο μιας Α/Γ μεταβλητής ταχύτητας.

Οι Dambrosio και Fortunato [9] χρησιμοποίησαν έναν one-step-ahead προσαρμοστικό έλεγχο, με τη βοήθεια ενός επαναλαμβανόμενου αλγορίθμου ελαχίστων τετραγώνων, για το ηλεκτρικό μέρος της Α/Γ. Ο Nogaret [10] αναφέρει ότι για το σύστημα ελέγχου ενός συστήματος νησιών μέσου μεγέθους, η πρόβλεψη είναι καλύτερη με έναν μέσο όρο των τελευταίων 2 ή 3 τιμών, δηλ. 20-30 λεπτά. Ο Tantareanu [11] διαπίστωσε ότι τα πρότυπα ARMA μπορούν να εκτελέσουν μέχρι 30% καλύτερα για 3-10 βήματα προβλέψεων με μέσους όρους 4 δευτερολέπτων.

Ο Dutton [12] χρησιμοποίησε ένα γραμμικό αυτοανάδρομο πρότυπο και ένα προσαρμοστικό fuzzy logic μοντέλο για τις περιπτώσεις της Κρήτης και Shetland. Βρήκε ελάχιστες βελτιώσεις για ένα βάθος χρόνου πρόβλεψης 2 ωρών, αλλά μέχρι και 20% βελτίωση του λάθους RMS για ένα βάθος χρόνου 8 ωρών. Εντούτοις, για ακόμα μεγαλύτερο βάθος χρόνου, η ζώνη εμπιστοσύνης 95% περιελάμβανε τις περισσότερες από τις πιθανές τιμές ταχύτητας ανέμου, και επομένως μια meteorological-based προσέγγιση κρίθηκε πιο ελπιδοφόρος.

Στην ίδια ομάδα, ο Kariniotakis [13,14] εξέτασε διάφορες μεθόδους για την περιοχή της Κρήτης. Αυτές περιέλαβαν τα προσαρμοστικά γραμμικά πρότυπα, τα προσαρμοστικά πρότυπα συγκεχυμένης λογικής καθώς και τα wavelet πρότυπα. Τα προσαρμοστικά πρότυπα συγκεχυμένης λογικής εγκαταστάθηκαν για την σε απευθείας σύνδεση και λειτουργία στο πλαίσιο του προγράμματος CARE (JOR3-CT96-0119).

Ο Fukuda [15] χρησιμοποίησε ένα AutoRegressive πρότυπο για τη βελτιστοποίηση της γωνίας της περρωτής. Χρησιμοποιώντας την ανάλυση δεδομένων (data mining), διαπίστωσαν ότι η χρήση των πρόσθετων μεταβλητών ήταν χρήσιμη μόνο τον Δεκέμβριο, αλλά όχι τον Ιούνιο. Οι Hunt και Nason [16] χρησιμοποίησαν μια ανάλυση των κύριων τμημάτων των wavelets που προήλθαν από τη χρονοσειρά ταχύτητας ανέμου και μια τεχνική measure-correlate-predict.

Επίσης αρκετές αναφορές περιλαμβάνουν χαρακτηριστικές αναλύσεις χρονοσειρών που οδηγούν σε διάφορα πρότυπα Box - Jenkins ARMA (p,q). Σε αυτές οι p πιο πρόσφατες ταχύτητες και τα q τα πιο πρόσφατα λάθη πρόβλεψης

χρησιμοποιούνται ως είσοδοι. Τα παραπάνω πρότυπα χρησιμοποιούν σπάνια την αρχική χρονοσειρά ως είσοδο (Contaxis και Kabouris [17]), στις περισσότερες από τις περιπτώσεις τα στοιχεία μετασχηματίστηκαν αρχικά προκειμένου να αποβληθεί η μη-στασιμότητα ή να επιβληθεί κατανομή κανονικού τύπου (HU et Al, 1991 Daniel και Chen, 1991 Desrochers et Al [18]).

Ο Beyer [5] επίσης χρησιμοποίησε τα φίλτρα Kalman και τεχνητά νευρικά δίκτυα (ANNs), αντίστοιχα, και πρότεινε ότι ο χρόνος δειγματοληψίας για τις εισόδους πρέπει να είναι πιο σύντομος από τον χρόνο πρόβλεψης (π.χ. $t=10$ s έως 1 min. για $T=10$ min.). Τα αναφερόμενα λάθη ήταν περίπου 5-10% καλύτερα.

2.3 Διάφορες προσεγγίσεις Νευρωνικών Δικτύων

Μια άλλη δυνατότητα για να αξιοποιήσουμε τις παρελθοντικές μετρήσεις της ταχύτητας του ανέμου και να εξάγουμε χρήσιμα συμπεράσματα για τις μελλοντικές διακυμάνσεις, είναι να χρησιμοποιηθούν τα τεχνητά νευρικά δίκτυα.

Ο Beyer [5] βρήκε βελτιώσεις στο λάθος RMS για την πρόβλεψη του επόμενου βήματος, είτε με μέσους όρους 1 λεπτού είτε 10 λεπτών, να είναι περίπου 10%. Αυτή η βελτίωση επιτεύχθηκε με μια μάλλον απλή τοπολογία, ενώ οι πιο σύνθετες νευρικές δομές δικτύων δε βελτίωσαν τα αποτελέσματα περαιτέρω. Ένας περιορισμός βρέθηκε στα ακραία γεγονότα που δεν περιλήφθηκαν στο σύνολο στοιχείων που χρησιμοποιήθηκε για να εκπαιδεύσει το νευρικό δίκτυο.

Ο Alexiadis και η ομάδα του [19] χρησιμοποίησαν τις διαφορές των ταχυτήτων αέρα από τους κινούμενους μέσους όρους τους (differenced pattern method) και βρήκαν ότι αυτή η τεχνική δίνει καλύτερα αποτελέσματα με τη χρήση της ταχύτητα του ανέμου ως είσοδο. Πέτυχαν βελτιώσεις μέχρι 13%, ενώ για την ίδια χρονοσειρά η τυποποιημένη νευρική προσέγγιση δικτύων παρήγαγε τη βελτίωση μόνο 9,5%.

Οι Bechrakis και Sparis [20] χρησιμοποίησαν τα νευρικά δίκτυα για να χρησιμοποιήσουν τις πληροφορίες από την αντίθετη στον άνεμο κατεύθυνση. Το έγγραφό τους δεν δίνει αριθμούς για το λάθος πρόβλεψης, δεδομένου ότι ο στόχος τους είναι να προβλέψουν τα αίτια, παρά να κάνουν βραχυπρόθεσμη πρόβλεψη.

Ο Sfetsos [21] εφάρμοσε μεθόδους ARIMA και feed-forward νευρωνικά δίκτυα σε χρονοσειρές ταχύτητας ανέμου με δεδομένα από την Αγγλία και την Ελλάδα, που συγκρίνουν τα αποτελέσματα της χρησιμοποίησης είτε των δεκάλεπτων είτε των ωριαίων υπολογισμένων κατά μέσο όρο στοιχείων για να κάνει πρόβλεψη για μια ώρα μπροστά. Και για τα δύο σύνολα στοιχείων, καμία μέθοδος πρόβλεψης δεν παρουσίασε σημαντική βελτίωση σε σχέση με τη χρήση των ανά μία ώρα-υπολογισμένων στοιχείων. Οι δύο προσεγγίσεις παρουσίασαν ουσιαστική βελτίωση (10-20%) χρησιμοποιώντας 10λεπτους τους μέσους όρους.

Τα πλεονεκτήματα της μεθόδου με νευρωνικά δίκτυα σε σχέση με άλλες μεθόδους πρόβλεψης όπως ARIMA, φίλτρα Kalman, εκθετική εξομάλυνση ή συστήματα μάθησης βασισμένα σε κανόνες είναι, πρώτον ότι πρόκειται για μια εξ ολοκλήρου αριθμητική μέθοδο σε αντιδιαστολή με τον υπονοούμενο συμβολισμό στα συστήματα μάθησης κανόνων και δεύτερον ότι δεν έχουν απαιτήσεις σε προηγούμενη γνώση του συστήματος που επιθυμούμε να προβλέψουμε και χαρακτηρίζονται από την ανοχή τους στο θόρυβο.

2.4 Συσχέτιση ταχύτητας ανέμου και παραγόμενης ισχύος

Όπως έγινε κατανοητό από τα προηγούμενα, η πρόβλεψη της παραγόμενης ισχύος αποτελεί σημαντικό κομμάτι για την ανάπτυξη και καλύτερη διαχείριση της αιολικής ενέργειας. Η πρόβλεψη, με σχετική ακρίβεια, μπορεί να βοηθήσει τόσο τους ιδιοκτήτες των αιολικών πάρκων, όσο και τους διαχειριστές του ηλεκτρικού δικτύου.

Για να υπολογίσουμε την ισχύ που θα παράξει μια ανεμογεννήτρια στο άμεσο μέλλον, χρειαζόμαστε μια σχετικά ακριβή πρόβλεψη της ταχύτητας του ανέμου, καθώς και τα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά της ανεμογεννήτριας. Γνωρίζουμε πως η μηχανική ενέργεια P_m που παράγεται από μια Α/Γ εξαρτάται άμεσα από την ακτίνα της πτερωτής της Α/Γ, τον συντελεστή ισχύος και την ταχύτητα με την οποία ο άνεμος προσκρούει στην πτερωτή [5].

$$P_m = \frac{\pi}{2} C_p(\lambda, \beta) \rho r^2 v^3, \quad \lambda = \omega_r r / v \quad (2.1)$$

όπου:

r	ακτίνα πτερωτής
C_p	συντελεστής ισχύος
v	ταχύτητα ανέμου
ω_r	κυκλική ταχύτητα
λ	tip speed ratio
β	pitch angle
ρ	air density

Για παράδειγμα ο συντελεστής ισχύος μιας Α/Γ 660 kW φαίνεται στο παρακάτω σχήμα (2.1). Γίνεται φανερό το γεγονός πως για κάθε τιμή της ταχύτητας του ανέμου, έχουμε μια κυκλική ταχύτητα, ω_r , που δίνει τη μέγιστη ενέργεια $P_m = P_{op}$.

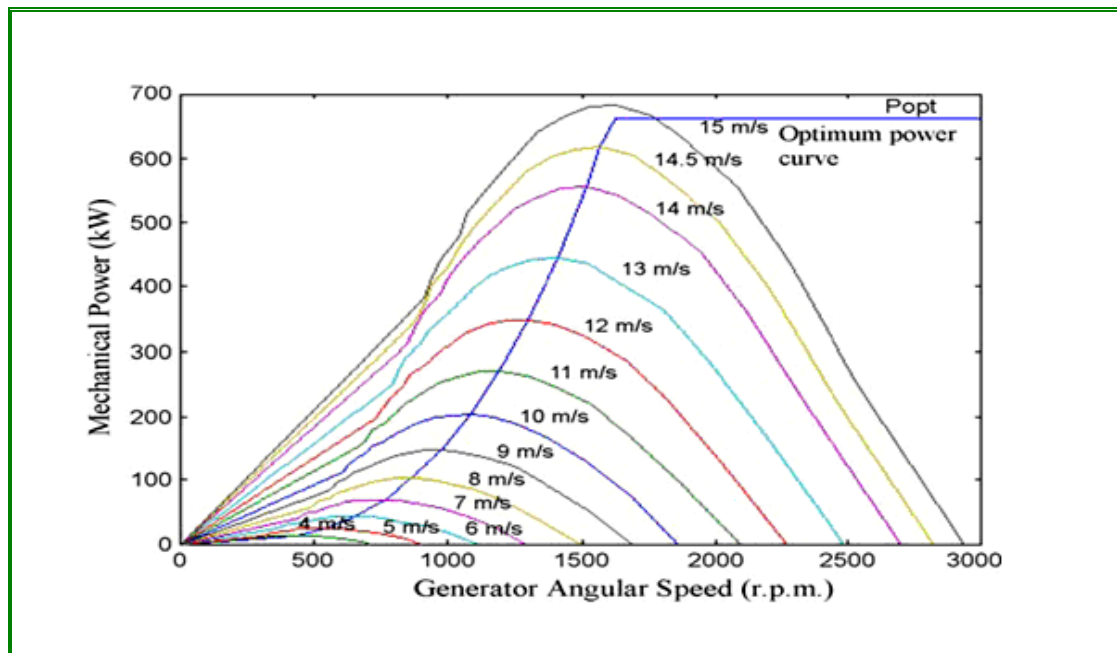
Επίσης είναι σημαντικό να λάβουμε υπόψη μας πως όταν η ταχύτητα του ανέμου αλλάζει, η κυκλική ταχύτητα ακολουθεί την αλλαγή. Επειδή, όμως, δε μπορούμε να έχουμε πάντα μια αξιόπιστη εκτίμηση της ταχύτητας πρόσκρουσης του ανέμου στην πτερωτή, η εξίσωση που δίνει την ισχύ P_{op} , μπορεί να επαναδιατυπωθεί, εξαλείφοντας την εξάρτηση από την ταχύτητα του ανέμου ως εξής:

$$P_m = P_{opt} = (\pi / 2 C_{p_opt} \rho r^2 (r / \lambda_{opt})^3) \omega_r^3 \quad (2.2)$$

Όπως φαίνεται από την παραπάνω εξίσωση, η παραγόμενη ισχύς είναι μια συνάρτηση της ταχύτητας του ρότορα της Α/Γ.

$$P_{opt} = k \omega_r^3$$

Παρόλο που θεωρητικά η παραγόμενη ισχύς δεν έχει κάποιο όριο μεγέθους, στην πράξη είναι περιορισμένη, επειδή τα ηλεκτρικά και μηχανικά μέρη της Α/Γ πρέπει να λειτουργούν μέσα σε κάποια προδιαγεγραμμένα όρια.



Σχήμα 2.1 Καμπύλη του συντελεστή ισχύος σε Α/Γ 660 kW

2.5 Περιγραφή δεδομένων

Όπως θα γίνει φανερό, τα δεδομένα αποτελούν την «πρώτη ύλη» για τη διαμόρφωση των προβλέψεων. Η συλλογή τους μπορεί να είναι σε ορισμένες περιπτώσεις μια δύσκολη και χρονοβόρα διαδικασία και για αυτό θα πρέπει να της δίνεται ιδιαίτερη βαρύτητα, ώστε να αντιμετωπίζονται πιθανά προβλήματα που σχετίζονται με τη διαθεσιμότητά τους, την ακρίβεια τους κ.α. Άλλωστε, το γεγονός ότι τις τελευταίες δεκαετίες χρησιμοποιούνται πακέτα Η/Υ που απλοποιούν σημαντικά την εφαρμογή των μεθόδων πρόβλεψης, προϋποθέτει ότι ο αναλυτής θα πρέπει να δίνει ακόμα μεγαλύτερη προσοχή στη συλλογή και καταγραφή των δεδομένων, για την περαιτέρω ανάλυσή τους.

Στην προσπάθεια μας να προσεγγίσουμε το πρόβλημα της πρόβλεψης της ταχύτητας του ανέμου, έχουμε στη διάθεσή μας τα ετήσια δεδομένα που συλλέχθηκαν από εγκαταστημένα συστήματα μετρήσεων ενός σταθμού στην περιοχή της Κρήτης. Στα δεδομένα μας συμπεριλαμβάνεται η μέση, η ελάχιστη και η μέγιστη ημερήσια ταχύτητα του ανέμου, η διεύθυνση του, καθώς και μετρήσεις θερμοκρασίας, βροχόπτωσης κ.α. Διαθέτουμε τα ημερήσια δεδομένα τριών ετών (2004-2006), έτσι ώστε να μπορούμε να εκτιμήσουμε τη συμβολή της εποχικότητας

στην πρόβλεψη, όπως θα παρατηρήσουμε στην παρουσίαση των διαφόρων μεθόδων.

Επίσης διαθέτουμε τα ωριαία δεδομένα από την ίδια περιοχή, για κάποιες ημέρες του έτους 2005 (1/1/05 έως 30/9/05). Αυτό σημαίνει πως έχουμε όλα τα απαραίτητα δεδομένα για την εξαγωγή δύο κατάλληλων χρονοσειρών που θα χρησιμοποιήσουμε, ώστε να ακολουθήσουμε την κατηγοριοποίηση που κάναμε στην παράγραφο 2.1, όσον αφορά στον χρονικό ορίζοντα της πρόβλεψης. Τα δεδομένα έχουν συλλεχθεί με προσοχή, με τη βοήθεια σύγχρονου και κατάλληλου εξοπλισμού.

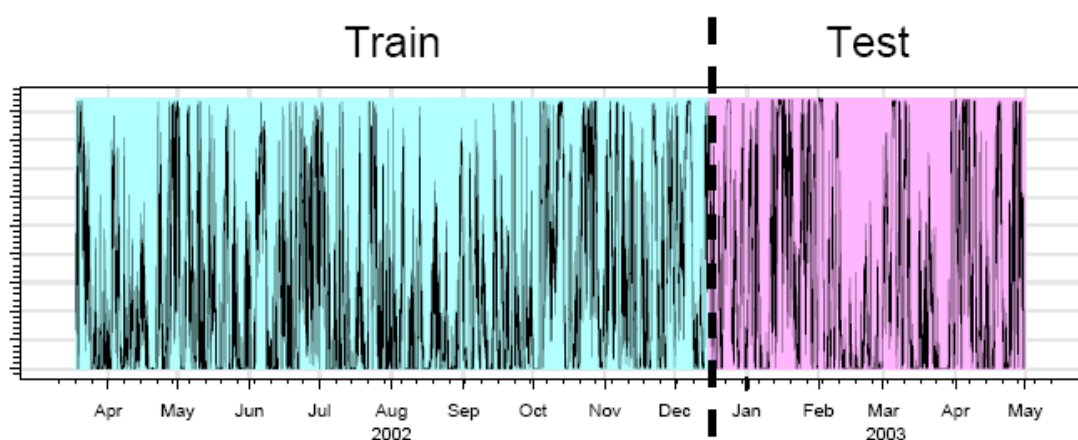
πρόβλεψη μερικών ημερών	←	ημερήσια δεδομένα	(Χρονοσειρά 1)
πρόβλεψη μερικών ωρών	←	ωριαία δεδομένα	(Χρονοσειρά 2)

Τα δεδομένα που χρειαζόμαστε για την εξαγωγή των χρονοσειρών ταχύτητας ανέμου, είναι η μέση ημερήσια /ωριαία ταχύτητα. Θα προσπαθήσουμε να προβλέψουμε-εκτιμήσουμε τη μέση ημερήσια /ωριαία ταχύτητα του ανέμου με σκοπό να εξάγουμε κρίσιμα συμπεράσματα, σχετικά με τις αποφάσεις που πρέπει να πάρουμε για τη διαχείριση αυτής της ενέργειας και τον τρόπο παροχής της στο δίκτυο. Θα μπορούσαμε ίσως να μην κάνουμε την ανάγωση στη μελέτη χρονοσειρών ανέμου και να χρησιμοποιήσουμε κατευθείαν χρονοσειρές παραγόμενης ισχύος, έτσι ώστε να προβλέψουμε την μέση παραγόμενη ισχύ. Κάτι τέτοιο, όμως, θα οδηγούσε σε μια πρόβλεψη που είναι λιγότερο γενική, αφού θα συνδεόταν άμεσα με τα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά της ανεμογεννήτριας. Η μελέτη, λοιπόν, των χρονοσειρών ανέμου αποδεικνύεται καλύτερη προσέγγιση, σε σχέση με τις χρονοσειρές ισχύος [5].

Οι μέσες τιμές των ημερήσιων δεδομένων, έχουν εξαχθεί από 700 περίπου μετρήσεις ημερησίως που σημαίνει ρυθμό δειγματοληψίας 1 δείγμα / 2λεπτά. Οι μετρήσεις προέρχονται, όπως είπαμε, από σύγχρονα συστήματα και έχουν συλλεχθεί με ακρίβεια και συστηματικότητα. Μπορούμε να ελπίζουμε πως ο παράγοντας «σφάλμα μετρήσεων» δε θα επηρεάσει τις προβλέψεις μας.

Για την αξιολόγηση της απόδοσης των μοντέλων πρόβλεψης, η κάθε χρονοσειρά χωρίζεται σε δύο τμήματα.

- Το πρώτο σύνολο σημείων για την εκμάθηση του μοντέλου (training set). Για τα διάφορα μοντέλα αυτό το σύνολο σημείων δίνει τις απαραίτητες παραμέτρους που θα χρησιμοποιηθούν στην εφαρμογή.
- Το δεύτερο σύνολο σημείων χρησιμοποιείται στην εκτίμηση του λάθους πρόβλεψης (test set). Αυτά είναι τα σημεία αναφοράς για τα οποία γίνεται πρόβλεψη και συγκρίνεται με τις πραγματικές παρατηρήσεις.



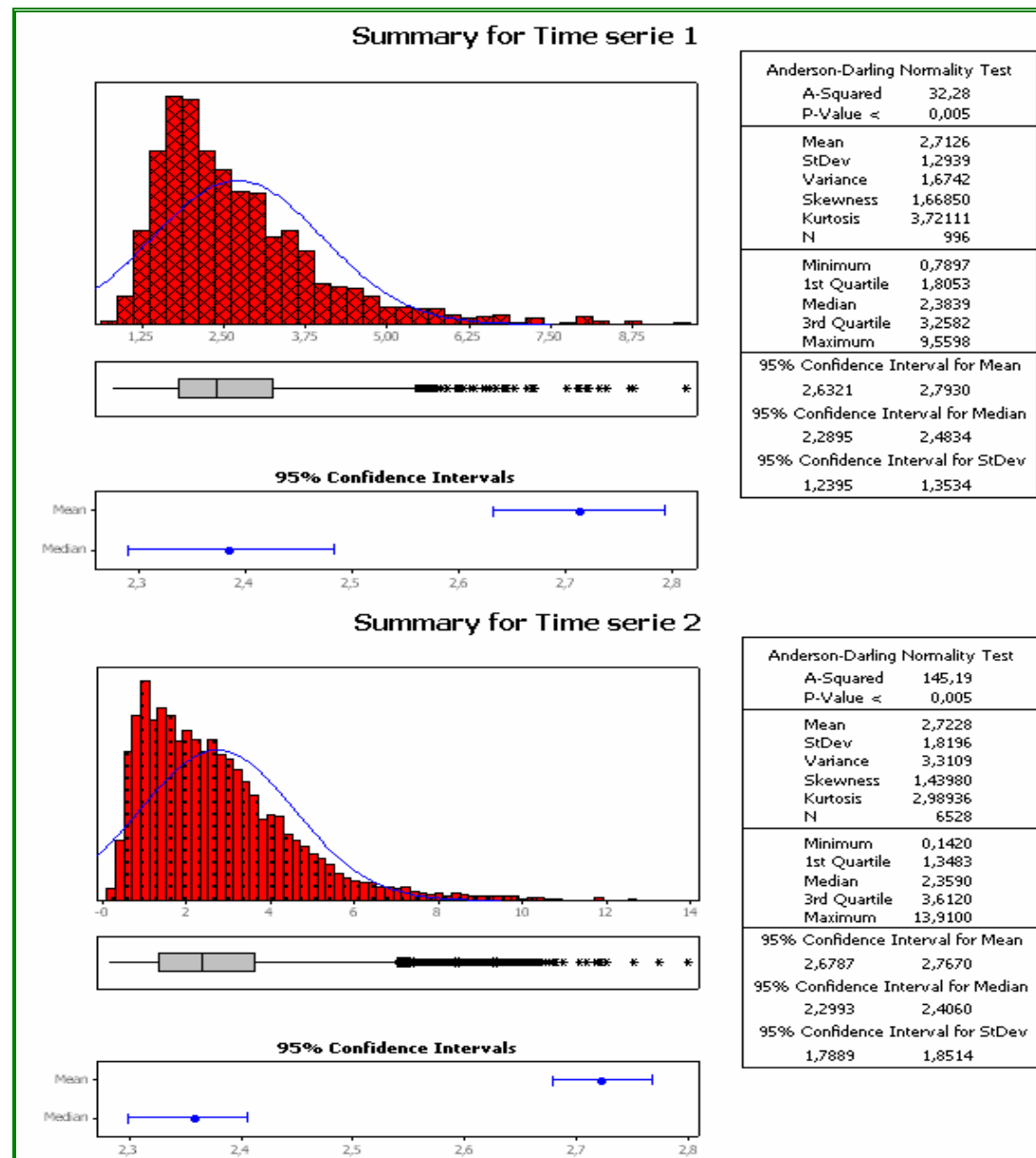
Σχήμα 2.2 Διαχωρισμός δεδομένων σε training και test set.

Είναι σύνηθες στη στατιστική ανάλυση των χρονοσειρών να χρησιμοποιούμε το 80% των δεδομένων για την προσαρμογή ή την εκμάθηση του μοντέλου (training set) και το 20% για την αξιολόγηση της προβλεπτικής του ικανότητας (test set). Στην παρούσα εργασία δε θα ακολουθήσουμε αυτή τη σύμβαση και θα χρησιμοποιήσουμε 30 τιμές για το training set της χρονοσειράς ημερησίων δεδομένων και 50 τιμές για το training set της χρονοσειράς ωριαίων δεδομένων. Με αυτό τον τρόπο κινούμαστε στο χρονικά διαστήματα που ορίσαμε στην παράγραφο 2.1 και αποφεύγουμε το γεγονός ότι ορισμένα μοντέλα πρόβλεψης δεν εγγυώνται σωστές προβλέψεις σε μεγάλο βάθος χρόνου.

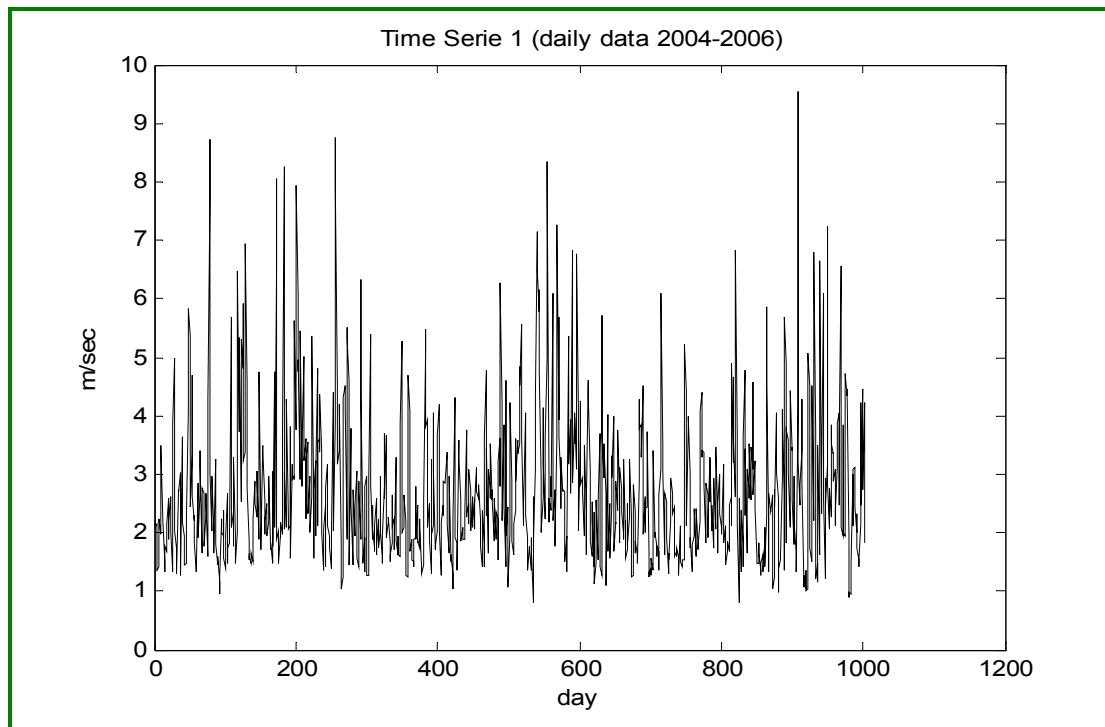
Αξίζει να σημειωθεί πως τα δεδομένα μας, και κατ' επέκταση οι χρονοσειρές μας, δεν προέρχονται από μετρήσεις σε κάποιο αιολικό σταθμό, όπου συνήθως επικρατούν ταχύτητες ανέμου μεγαλύτερες από τις συνηθισμένες, αλλά από μια περιοχή με συνήθεις ταχύτητες ανέμου. Αυτό δε μας εμποδίζει να εξάγουμε

συμπεράσματα σχετικά με τα μοντέλα πρόβλεψης, απλώς οι τιμές της χρονοσειράς κινούνται σε μικρότερη κλίμακα.

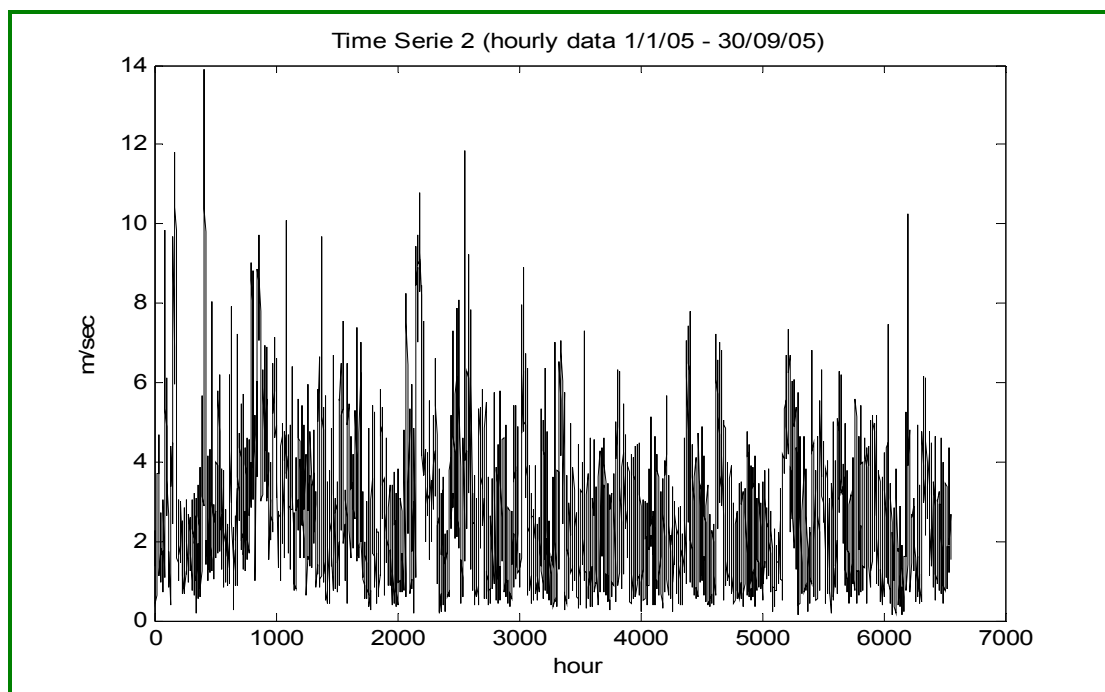
Παρακάτω ακολουθούν τα διαγράμματα των χρονοσειρών ανέμου, έτσι όπως προκύπτουν από τα δεδομένα μας. Επίσης, υπολογίσαμε και παραθέτουμε μερικούς βασικούς στατιστικούς δείκτες.



Σχήμα 2.3 Συγκεντρωτικοί πίνακες στατιστικής ανάλυσης των χρονοσειρών.



Σχήμα 2.4 Χρονοσειρά μέσω των ημερήσιων τιμών για 3 έτη (χρονοσειρά 1)



Σχήμα 2.5 Χρονοσειρά μέσω των ωριαίων τιμών για 9 μήνες (χρονοσειρά 2)

3. ΜΕΘΟΔΟΙ ΠΡΟΒΛΕΨΕΩΝ - ΧΡΟΝΟΣΕΙΡΕΣ

Οι μέθοδοι πρόβλεψης συμβάλλουν στη σωστή και έγκαιρη λήψη αποφάσεων και στον σωστό σχεδιασμό. Αν τα δεδομένα, που χρησιμοποιούμε στη διαδικασία της πρόβλεψης, είναι υψηλής ποιότητας, μπορούμε να έχουμε ικανοποιητικά ακριβείς προβλέψεις. Στην πράξη όμως, οι πρόβλεψεις που επιχειρούμε, επηρεάζονται από διάφορους παράγοντες. Για παράδειγμα, τα δεδομένα δεν είναι πάντα ακριβή και αξιόπιστα. Μπορεί, επίσης, να μην είναι και αρκετά για τη διενέργεια μιας σωστής πρόβλεψης-εκτίμησης. Ακόμη, είναι γνωστό, πως το παρελθόν δεν είναι πάντα ο σωστός οδηγός εκτίμησης για το μέλλον. Επίσης σημαντική επιρροή προς το υπό μελέτη φαινόμενο, έχουμε από πιθανές επιδράσεις απρόβλεπτων εξωτερικών παραγόντων.

Μπορούμε να θεωρήσουμε δύο κύριες κατηγορίες μεθόδων πρόβλεψης. Στην **πρώτη κατηγορία** έχουμε τις **ποσοτικές** οι οποίες χρησιμοποιούνται, όταν έχουμε διαθέσιμη πληροφορία για το παρελθόν (επαρκή δεδομένα), όταν μπορεί να γίνει ποσοτικοποίηση της πληροφορίας (αριθμητικά δεδομένα) και τέλος όταν θεωρούμε ότι το πρότυπο συμπεριφοράς θα διατηρηθεί και στο μέλλον. Οι ποσοτικές μέθοδοι πρόβλεψης περιλαμβάνουν :

- ο **Μοντέλο χρονοσειρών.**

Η πρόβλεψη γίνεται με χρήση των ιστορικών δεδομένων.

$$\text{Είσοδοι}(x_i) \Rightarrow \text{Σύστημα}(f) \Rightarrow \text{Έξοδος}(y)$$

- ο **Αιτιοκρατικό ή επεξηγηματικό μοντέλο.**

Γίνεται πρόβλεψη με χρήση ανεξάρτητων παραμέτρων (επεξηγηματικές μεταβλητές) οι οποίες επηρεάζουν το σύστημα (π.χ. η θερμοκρασία επηρεάζει την ταχύτητα του ανέμου). Χρησιμοποιείται με επιτυχία για χάραξη τακτικής και λήψης αποφάσεων.

$$\text{Ανεξάρτητες μεταβλητές}(x_i) \Rightarrow \text{Σύστημα}(f) \Rightarrow \text{Εξαρτημένη μεταβλητή}(y)$$

Πρέπει να σημειωθεί ότι τα παραπάνω μοντέλα μπορούν να συνδυαστούν, οδηγώντας σε πιο προχωρημένα μοντέλα πρόβλεψης.

Στη **δεύτερη κατηγορία** έχουμε τις *κριτικές (judgmental)* ή *ποιοτικές (qualitative)* μεθόδους οι οποίες χρησιμοποιούνται, όταν έχουμε διαθέσιμες λίγες ή καθόλου πληροφορίες για το παρελθόν. Σε αυτές τις περιπτώσεις απαιτείται εμπειρία, γνώση και κριτική ικανότητα. Χρησιμοποιούνται, κυρίως, σε συνδυασμό με τις ποσοτικές μεθόδους, ενώ δεν απαντούν μόνες σε αριθμητικές προβλέψεις. Οι ποσοτικές μέθοδοι προβλέψεων έχουν ως πρωταρχικό τους σκοπό τη διερεύνηση του τρόπου δημιουργίας των τιμών της υπό εξέταση μεταβλητής. Αν ο σκοπός αυτός επιτευχθεί με επιτυχία, τότε η χρησιμοποιούμενη μέθοδος μπορεί να εφαρμοστεί για τη διαμόρφωση προβλέψεων που αφορούν στη μελλοντική εξέλιξη των τιμών της συγκεκριμένης μεταβλητής. Αυτό σημαίνει ότι οι προβλέψεις (forecasts) δημιουργούνται από την εφαρμογή εκείνης της μεθόδου που ερμηνεύει με τον καλύτερο τρόπο τη συμπεριφορά των τιμών της μεταβλητής [23].

Η διαμόρφωση των προβλέψεων στηρίζεται κατά κανόνα σε δύο βασικές προϋποθέσεις. Η πρώτη αφορά στη χρησιμοποιούμενη ποσοτική μέθοδο και η δεύτερη στον τρόπο συμπεριφοράς της μεταβλητής. Με άλλα λόγια, η επιλεγόμενη μέθοδος θα πρέπει να προσδιορίζει με τον καλύτερο τρόπο, με τη στατιστική έννοια του όρου, τη συμπεριφορά των τιμών της μεταβλητής. Όσο καλύτερα αναγνωρίζεται ο τρόπος δημιουργίας των τιμών της μεταβλητής, τόσο καλύτερες προβλέψεις αναμένεται να διαμορφώνονται. Για να ισχύσει, όμως, κάτι τέτοιο, θα πρέπει, επιπροσθέτως, η υπάρχουσα δομή του τρόπου συμπεριφοράς των τιμών της μεταβλητής να παραμένει σταθερή ή περίπου σταθερή και στο άμεσο μέλλον.

Με βάση τη στατιστική ανάλυση, η συμπεριφορά των τιμών μιας μεταβλητής προσδιορίζεται από δύο μέρη, που είναι το **συστηματικό (systematic)** και το **τυχαίο (random)**. Το συστηματικό μέρος αναφέρεται σε όλους εκείνους τους παράγοντες που μπορούν να καθοριστούν και οι οποίοι ερμηνεύουν τον τρόπο συμπεριφοράς της μεταβλητής. Αντίθετα, το τυχαίο μέρος αφορά όλους εκείνους τους τυχαίους και απρόσμενους παράγοντες οι οποίοι, αν και επηρεάζουν τις τιμές της μεταβλητής, δεν μπορούν, ωστόσο, να προσδιοριστούν. Αυτό σημαίνει πως, όταν αναφερόμαστε στον προσδιορισμό του τρόπου συμπεριφοράς των τιμών μιας μεταβλητής, εννοούμε αποκλειστικά τον καθορισμό του συστηματικού μέρους. Έτσι, οι προβλέψεις που προέρχονται από τη χρησιμοποίηση των ποσοτικών μεθόδων, διαμορφώνονται με βάση το συστηματικό μέρος και όχι το τυχαίο, η συμπεριφορά

του οποίου δε μπορεί να προσδιοριστεί, αφού δεν παρατηρείται. Η διαδικασία διαμόρφωσης των προβλέψεων αποτελείται από κάποια στάδια, που θα αναλυθούν στην επόμενη ενότητα [4].

3.1 Βασικά στάδια στη διαδικασία πρόβλεψης

Τα βασικά στάδια σε μια διαδικασία πρόβλεψης είναι τα εξής [4]:

I. Καθορισμός Προβλήματος (Problem Definition)

Τις περισσότερες φορές είναι το πιο δύσκολο μέρος στη διαδικασία πρόβλεψης και ταυτόχρονα το πιο σημαντικό. Αυτό συμβαίνει διότι θα πρέπει να καταστούν σαφή και κατανοητά ορισμένα θέματα, όπως το πώς θα χρησιμοποιηθούν οι προβλέψεις και από ποιους.

II. Συγκέντρωση Πληροφοριών (Gathering Information)

Σε αυτό το βήμα απαιτούνται τουλάχιστον δύο είδη πληροφοριών. Το πρώτο είναι τα στατιστικά (συνήθως αριθμητικά) δεδομένα και το δεύτερο η κρίση, η πείρα και η εμπειρία του προσωπικού που ασχολούνταν με αυτή τη συλλογή για αυτό το χρονικό διάστημα. Επίσης οι παραπάνω πληροφορίες πρέπει να συλλεχθούν πριν ξεκινήσει η διαδικασία της πρόβλεψης.

III. Προκαταρκτική Ανάλυση (Exploratory Analysis)

Στο βήμα αυτό μας απασχολεί το είδος της πληροφορίας που αποκομίζουμε από τα ακατέργαστα ιστορικά δεδομένα. Αρχικά, αναπαριστούμε γραφικά τα δεδομένα και στη συνέχεια, υπολογίζουμε κάποιους βασικούς στατιστικούς δείκτες, όπως η μέση τιμή, η τυπική απόκλιση, ελάχιστο, μέγιστο και γραμμική τάση. Οι παραπάνω δείκτες αναδεικνύουν κάποια δευτερεύοντα χαρακτηριστικά της χρονοσειράς. Σκοπός μας είναι να αποκτήσουμε μία αίσθηση των δεδομένων, δίνοντας απαντήσεις σε ερωτήματα όπως αν υπάρχουν λανθασμένα πρότυπα, αν υπάρχει σημαντική τάση ή εποχικότητα και τέλος, αν υπάρχουν ασυνήθιστες τιμές (outliers). Η ανάλυση αυτή μας οδηγεί στην οικογένεια μοντέλων πρόβλεψης που λογικά αναμένεται να δώσει ικανοποιητικές προβλέψεις.

IV. Επιλογή και Προσαρμογή Μοντέλου (Choosing & Fitting models).

Εδώ γίνεται η επιλογή και καθορισμός των παραμέτρων διάφορων ποσοτικών μοντέλων πρόβλεψης που έχουν επιλεγεί στο προηγούμενο βήμα.

V. Χρήση και αποτίμηση του μοντέλου πρόβλεψης (*Using and Evaluating a forecasting model*).

Στο τελικό στάδιο, αφού ένα μοντέλο έχει επιλεγεί υποκειμενικά και οι παράμετροι του έχουν, προηγουμένως, καθοριστεί, χρησιμοποιείται ώστε να παραχθούν προβλέψεις. Κατά την εξέλιξη της διαδικασίας, γίνεται αποτίμηση των πλεονεκτημάτων και μειονεκτημάτων του μοντέλου και, εφόσον κριθεί απαραίτητο, επαναλαμβάνονται κάποια βήματα στη διαδικασία.

3.2 Ποιοτικά χαρακτηριστικά χρονοσειρών - Στατιστικοί δείκτες & δείκτες σφαλμάτων

Οι χρονοσειρές είναι ιστορικά δεδομένα που απαρτίζονται από διαδοχικές παρατηρήσεις μέσα σε ένα χρονικό διάστημα. Οι παρατηρήσεις γίνονται ανά σταθερό χρονικό βήμα και μπορούν να είναι ετήσιες, τριμηνιαίες, μηνιαίες, εβδομαδιαίες, ημερήσιες κτλ. Τα ποιοτικά χαρακτηριστικά αυτών των παρατηρήσεων είναι τα εξής [23]:

- Στασιμότητα (Stationary), όταν οι τιμές κυμαίνονται γύρω από μία μέση τιμή.
- Τάση (Trend) όταν υπάρχει μια μακροπρόθεσμη αύξηση ή μείωση του επιπέδου των τιμών.
- Εποχικότητα (Seasonal) όταν η χρονοσειρά επηρεάζεται από εποχιακούς παράγοντες.
- Κυκλικότητα (Cyclical) όταν οι τιμές αυξομειώνονται, αλλά όχι σε σταθερές περιόδους.
- Ασυνέχειες (outliers), οι οποίες οφείλονται είτε σε ασυνήθιστες τιμές, είτε σε αλλαγή επιπέδου (level shift).
- Τυχαιότητα (Irregular-Random), όταν έχουμε διακυμάνσεις λόγω τυχαίων γεγονότων.

Όπως αναφέραμε προηγουμένως, οι περισσότερες μέθοδοι προβλέψεων στηρίζονται, σε κάποιο βαθμό, στις βασικές έννοιες της στατιστικής ανάλυσης. Για αυτό το λόγο θα κάνουμε μια σύντομη αναφορά στους πιο βασικούς στατιστικούς δείκτες .

- Μέση τιμή (mean): $Mean = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$
- Διάμεσος (median):
 - η μεσαία παρατήρηση αν (n) περιττός
 - ο μέσος των δύο “μεσαίων” παρατηρήσεων αν (n) άρτιος
- Mean Absolute Deviation: $MAD = \frac{1}{n} \sum |Y_i - \bar{Y}|$
- Mean Square Deviation: $MSD = \frac{1}{n} \sum (Y_i - \bar{Y})^2$
- Διακύμανση (Variance): $S^2 = \frac{1}{n-1} \sum (Y_i - \bar{Y})^2$
- Τυπική Απόκλιση (Standard Deviation): $S = \sqrt{S^2} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum (Y_i - \bar{Y})^2}$
- Συνδιακύμανση (Covariance): $COV_{xy} = \frac{1}{n-1} \sum (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})$
- Συσχέτιση (Correlation): $r_{xy} = \frac{COV_{xy}}{S_x S_y} = \frac{\sum (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\sqrt{\sum (X_i - \bar{X})^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2}}, +1 \geq r_{xy} \geq -1$
- Αυτοδιακύμανση(Autocovariance): $C_k = \frac{1}{n} \sum_{t=k+1}^n (Y_t - \bar{Y})(Y_{t-k} - \bar{Y})$
- Αυτοσυσχέτιση (Autocorrelation lagged k): $r_k = \frac{\sum_{t=k+1}^n (Y_t - \bar{Y})(Y_{t-k} - \bar{Y})}{\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2}$

Επίσης, σκόπιμο είναι να παρουσιάσουμε τα κριτήρια αξιολόγησης των μεθόδων πρόβλεψης τα οποία χρησιμοποιούνται για την επιλογή της «κατάλληλης» μεθόδου. Τα κριτήρια αυτά βασίζονται στις τιμές των αποκλίσεων των προβλεπόμενων τιμών από τις αντίστοιχες πραγματικές τιμές της χρονοσειράς. Όσο πιο μικρές είναι οι αποκλίσεις αυτές, τόσο πιο καλή θεωρείται ότι είναι η μέθοδος πρόβλεψης που χρησιμοποιήθηκε, δεδομένου ότι είναι σε θέση να προσδιορίζει, με σχετικά μεγάλη ακρίβεια, τις τιμές της χρονοσειράς. Αντίθετα, όσο περισσότερο απέχουν οι

πραγματικές τιμές από τις προβλεπόμενες, τόσο λιγότερο αξιόλογη είναι η χρησιμοποιούμενη μέθοδος πρόβλεψης.

- Σφάλμα: $e_t = Act - F$
- Μέσο Σφάλμα: $ME = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n e_t$
- Μέσο Απόλυτο Σφάλμα: $MAE = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n |e_t|$
- Μέσο Τετραγωνικό Σφάλμα: $MSE = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n e_t^2$
- Μέσο Ποσοστιαίο Σφάλμα: $MPE = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n PE_t = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \left(\frac{Act - F}{Act} \right) 100$
- Μέσο Απόλυτο Ποσοστιαίο Σφάλμα: $MAPE = \frac{\sum_{i=1}^n \left| \frac{F_i - Act_i}{Act_i} \right|}{n} \cdot 100$

3.3 Μέθοδοι εξομάλυνσης

Για τη διενέργεια προβλέψεων υπάρχει ένας μεγάλος αριθμός μεθόδων που μπορούν να χρησιμοποιηθούν ανάλογα με την εξεταζόμενη περίπτωση. Οι περισσότερες από αυτές αναπτύχθηκαν πριν από μερικές δεκαετίες και εφαρμόστηκαν σε ευρεία κλίμακα λόγω της ραγδαίας ανάπτυξης κατάλληλων υπολογιστικών προγραμμάτων. Στόχος μας είναι η χρησιμοποίηση εκείνων των μεθόδων που είναι εύχρηστες, εφαρμόζονται συχνά και έχουν αποδειχθεί στην πράξη ότι δίνουν καλά αποτελέσματα. Μάλιστα, αν ληφθεί υπόψη η ευκολία με την οποία προσδιορίζονται οι προβλέψεις με τη χρήση των H/Y, τότε το κύριο βάρος της έρευνας θα πρέπει να εστιάζεται αφενός στην αξιολόγηση των αποτελεσμάτων και αφετέρου στην επιλογή της καταλληλότερης μεθόδου πρόβλεψης.

Η *ανάλυση χρονοσειρών (time series analysis)* ασχολείται αποκλειστικά με τη διερεύνηση της διαχρονικής συμπεριφοράς των τιμών μιας μεταβλητής, οι παρατηρήσεις της οποίας προέρχονται από χρονοσειρά. Η πρόβλεψη των μελλοντικών τιμών της μεταβλητής σύμφωνα με την γραμμική ανάλυση χρονοσειρών μπορεί να προέλθει από τις ακόλουθες τρεις κατηγορίες μεθόδων προβλέψεων [4]:

Μέθοδοι εξομάλυνσης (smoothing methods): είναι τεχνικές με τις οποίες προσδιορίζονται οι μελλοντικές τιμές μιας μεταβλητής με βάση τον τρόπο εφαρμογής τους. Οι τεχνικές αυτές ονομάζονται μέθοδοι εξομάλυνσης, διότι η δημιουργία των προβλέψεων προέρχεται από την εξομάλυνση της διαχρονικής εξέλιξης των τιμών της μεταβλητής, ώστε να αναγνωριστεί καλύτερα ο τρόπος συμπεριφοράς της. Ορισμένες από αυτές τις μεθόδους μπορούν να εφαρμοστούν και σε περιπτώσεις μικρού αριθμού παρατηρήσεων της μεταβλητής.

Διάσπαση Χρονοσειρών (time series decomposition): στηρίζεται στην υπόθεση ότι οι τιμές μιας χρονοσειράς σχηματίζονται από τα στοιχεία που τη συνθέτουν και τα οποία είναι η *τάση*, η *κυκλικότητα*, η *εποχικότητα* και η *μη-κανονικότητα*. Για τη δημιουργία των προβλέψεων με τη μέθοδο αυτή, η χρονοσειρά διασπάται στα ανωτέρω τέσσερα συνθετικά της στοιχεία και προσδιορίζεται η επιρροή που έχει καθένα από αυτά στη διαμόρφωση των τιμών της μεταβλητής.

Ανάλυση ARIMA (Autoregressive Intergated Moving Average Analysis): γνωστή και ως Box-Jenkins ανάλυση, είναι μια περισσότερο σύνθετη στατιστική μέθοδος από τις δύο προηγούμενες, με την οποία αναγνωρίζεται ο τρόπος δημιουργίας των τιμών της μεταβλητής. Με τη μέθοδο αυτή επιλέγεται από μια μεγάλη κατηγορία υποδειγμάτων, εκείνο που θεωρείται ως το πιο κατάλληλο για τη διαμόρφωση των προβλέψεων.

3.3.1 Η μέθοδος του κινητού μέσου (Moving average)

Η πρόβλεψη χρονοσειρών με τη μέθοδο των κινητών μέσων εμπεριέχει τον υπολογισμό του μέσου όρου του δείγματος παρατηρήσεων, καθώς και τη χρησιμοποίηση αυτού του μέσου σαν πρόβλεψη για την επόμενη περίοδο. Ο αριθμός των παρατηρήσεων του δείγματος που συμπεριλαμβάνονται στον υπολογισμό του μέσου προσδιορίζεται στην αρχή της διαδικασίας πρόβλεψης. Χρησιμοποιούμε τον όρο *κινητός μέσος* γιατί, καθώς κάθε νέα παρατήρηση γίνεται διαθέσιμη στο δείγμα, υπολογίζεται ένας νέος μέσος απορρίπτοντας την παλαιότερη παρατήρηση του δείγματος από τον μέσο και συμπεριλαμβάνοντας τη νεότερη. Καθώς υπολογίζεται κάθε νέος μέσος, γίνεται πρόβλεψη για την επόμενη περίοδο. Συνεπώς, κάθε πρόβλεψη χρησιμοποιεί τον ίδιο αριθμό παρατηρήσεων δείγματος από τη χρονοσειρά και περιλαμβάνει μόνο την πλέον πρόσφατη παρατήρηση.

Η μέθοδος του κινητού μέσου όρου, σε αλγεβρική μορφή, διατυπώνεται ως εξής:

$$F_{t+1} = \frac{X_t + X_{t+1} + \dots + X_{t-n+1}}{n} = \frac{1}{n} \left(\sum_{i=t-n+1}^t X_i \right) \quad (3.1)$$

όπου t είναι η πιο πρόσφατη παρατήρηση και $t+1$ είναι η επόμενη περίοδος. Ο τύπος αυτός απαιτεί ο προβλέπων να διαθέτει τις τιμές των παρατηρήσεων του παρελθόντος. Με την προσθήκη μιας νέας παρατήρησης και την εξάλειψη της παλαιότερης, μπορούμε να επαναδιατυπώσουμε τον τύπο ως εξής:

$$F_{t+1} = \frac{1}{n} \left(\sum_{i=t-n}^{t-1} X_i \right) + \frac{1}{n} (X_t - X_{t-n}) = F_t + \frac{X_t}{n} - \frac{X_{t-n}}{n} \quad (3.2)$$

Ο τύπος του κινητού μέσου όρου εκφράζει απλώς μια προσαρμογή στην πρόβλεψη (F_t) που έγινε την προηγούμενη περίοδο. Είναι φανερό πως αν αυξηθεί το n , το εξομαλυντικό αποτέλεσμα είναι μεγαλύτερο γιατί γίνεται μια πολύ μικρότερη προσαρμογή για κάθε νέα χρονική περίοδο. Εάν τα δεδομένα είναι πολύ άστατα, το γεγονός αυτό αποτελεί ένα πολύ ελκυστικό χαρακτηριστικό.

Η μέθοδος του κινητού μέσου όρου είναι μια πολύ εύκολη διαδικασία πρόβλεψης, αφού οι απαιτήσεις σε στατιστικά στοιχεία είναι μικρές. Εν τούτοις, η τεχνική αυτή δε χρησιμοποιείται ευρέως, δεδομένου ότι η προϋπόθεση να είναι τα δεδομένα *στάσιμα* είναι περιοριστική. Πάντως, η μέθοδος του κινητού μέσου όρου είναι πιο αποτελεσματική από τη χρησιμοποίηση του απλού αριθμητικού μέσου μιας ολόκληρης χρονοσειράς. Είναι πιο εύκαμπτη γιατί το n μπορεί να μεταβληθεί ώστε να ανταποκρίνεται στα παρατηρούμενα πρότυπα των δεδομένων [23].

3.3.2 Απλή εκθετική εξομάλυνση (Simple exponential smoothing)

Υπάρχουν σοβαροί περιορισμοί στη χρήση του κινητού μέσου όρου. *Πρώτον*, για τους σχετικούς υπολογισμούς απαιτούνται οι παρελθούσες n παρατηρήσεις του δείγματος. Αν πρόκειται να προβλεφθεί ένας μεγάλος αριθμός μεγεθών (μεταβλητών), τα δεδομένα απαιτούν μεγάλο αποθηκευτικό χώρο. *Δεύτερον*, δίνεται ίση στάθμιση σε όλες τις παρατηρήσεις που αφορούν το παρελθόν, χωρίς να δίνεται καμία στάθμιση στις παρατηρήσεις που είναι πριν από την περίοδο $(t-n+1)$. Οι πρόσφατες παρατηρήσεις, εν τούτοις, μπορεί να περιέχουν περισσότερες πληροφορίες από τις παλαιότερες, πράγμα που έχει σημασία για τις μελλοντικές

προβλέψεις. Έτσι, κάποιος μπορεί να θέλει να αποδώσει μεγαλύτερη στάθμιση στην πρόβλεψη η οποία βασίζεται στις πιο πρόσφατες παρατηρήσεις παρά στις παλαιότερες. Μια μέθοδος που απλοποιεί τους υπολογισμούς της πρόβλεψης και έχει μικρές απαιτήσεις σε δεδομένα, ονομάζεται *εκθετική εξομάλυνση*. Επίσης, η μέθοδος αυτή δίνει αυτοδιορθούμενες προβλέψεις αφού διαθέτει μηχανισμό ενσωματωμένων προσαρμογών, ο οποίος ρυθμίζει τις τιμές αλλάζοντάς αυτές, προς την αντίθετη κατεύθυνση από εκείνη που κινήθηκαν τα λάθη προηγούμενων περιόδων. Για να αναπτύξουμε αυτή τη μέθοδο αρχίζουμε με την εξίσωση (3.2) και την ξαναγράφουμε ως εξής:

$$F_{t+1} = \frac{X_t}{n} - \frac{F_t}{n} + F_t \quad (3.3)$$

εάν κάνουμε την αντικατάσταση $F_t = X_t - n^2$. Παραπέρα, η εξίσωση αυτή μπορεί να γραφεί ως:

$$F_{t+1} = \frac{1}{n}X_t + (1 - \frac{1}{n})F_t \quad (3.4)$$

Η εξίσωση (3.4) δίνει μια πρόβλεψη βασισμένη στη στάθμιση της πιο πρόσφατης παρατήρησης με συντελεστή $1/n$ και της πιο πρόσφατης πρόβλεψης με συντελεστή στάθμισης $[1-(1/n)]$. Από τη στιγμή που ο αριθμός των περιόδων, n , είναι σταθερός, το κλάσμα $1/n$ πρέπει να είναι μεγαλύτερο από το μηδέν και μικρότερο από τη μονάδα. Αν αντικαταστήσουμε το $1/n$ με a , το βασικό μοντέλο γράφεται ως εξής:

$$F_{t+1} = aX_t + (1-a)F_t \quad (3.5)$$

όπου t είναι η τρέχουσα περίοδος, τα F_{t+1} και F_t είναι τιμές πρόβλεψης για την επόμενη και την τρέχουσα περίοδο και X_t είναι η τιμή που παρατηρήθηκε την τρέχουσα περίοδο. Το a ονομάζεται σταθερά εξομάλυνσης και παίρνει τιμές από 0 έως 1. Αφού η παραπάνω εξίσωση περιλαμβάνει μόνο μία σταθερά, το μοντέλο αυτό είναι μοντέλο εκθετικής εξομάλυνσης μιας παραμέτρου.

Η εκθετική εξομάλυνση μιας παραμέτρου είναι πολύ απλή μέθοδος, αφού μόνο μια τιμή, η πρόβλεψη της τελευταίας περιόδου, είναι αυτή που πρέπει να διασωθεί. Στην ουσία, ολόκληρη η χρονοσειρά εμπεριέχεται σ' αυτή την πρόβλεψη. Εάν εκφράσουμε το F_t σε όρους της προηγούμενης παρατήρησης X_{t-1} και των τιμών της

πρόβλεψης F_{t-1} , τότε το ισοδύναμο για την πρόβλεψη της επόμενης περιόδου γίνεται:

$$F_{t+1} = aX_t + (1-a)[aX_{t-1} + (1-a)]F_{t-1} \quad (3.6)$$

ή πιο απλά

$$F_{t+1} = aX_t + a(1-a)X_{t-1} + (1-a)^2 F_{t-1} \quad (3.7)$$

Η νέα αυτή εξίσωση είναι μοντέλο δευτεροβάθμιας εκθετικής εξομάλυνσης μιας παραμέτρου. Μπορούμε να συνεχίσουμε έτσι για έναν αριθμό προηγούμενων περιόδων, πράγμα που δείχνει ότι όλες οι προηγηθείσες τιμές του X αντανακλώνται στην τρέχουσα πρόβλεψη. Έτσι, το όνομα αυτής της διαδικασίας προέρχεται από τις διαδοχικές σταθμίσεις α , $\alpha(1-\alpha)$, $\alpha(1-\alpha)^2$, $\alpha(1-\alpha)^3$, ..., οι οποίες μειώνονται εκθετικά. Οι πιο πρόσφατες περίοδοι στη χρονοσειρά λαμβάνουν μεγαλύτερη στάθμιση στον υπολογισμό της πρόβλεψης. Πρακτικά, οι αρκετά παλιές τιμές της X εξαιρούνται. Η διαδικασία πρόβλεψης μπορεί να τροποποιηθεί οποιαδήποτε στιγμή με τη μεταβολή της τιμής της α . Μπορούμε να ξαναγράψουμε την εξίσωση (3.5) ως εξής:

$$F_{t+1} = aF_t + a(X_t - F_t) \quad (3.8)$$

ή πιο απλά

$$F_{t+1} = F_t + ae_t \quad (3.9)$$

όπου ae_t το σφάλμα πρόβλεψης για την περίοδο t , είναι η πραγματική τιμή μείον την τιμή της πρόβλεψης. Επομένως, βλέπουμε ότι η πρόβλεψη που δίνεται από την εκθετική εξομάλυνση είναι η παλαιά πρόβλεψη συν μια προσαρμογή για το σφάλμα που έγινε στην τελευταία πρόβλεψη.

Όταν το α βρίσκεται πλησίον του 1, η νέα πρόβλεψη περιέχει μια ουσιώδη προσαρμογή για το σφάλμα της προηγούμενης πρόβλεψης. Αντίθετα, εάν το α βρίσκεται πολύ κοντά στο 0, η νέα πρόβλεψη θα περιέχει μικρή μόνο προσαρμογή για το σφάλμα. Επομένως, το αποτέλεσμα του μεγέθους του α είναι όμοιο με τα αποτελέσματα των διαφόρων τιμών για τον αριθμό των παρατηρήσεων του δείγματος όταν υπολογίζουμε τον κινητό μέσο όρο. Τέλος, η εκθετική εξομάλυνση

μιας παραμέτρου δίνει προβλέψεις που ακολουθούν το πρότυπο στα δεδομένα ενός δείγματος. Αυτό συμβαίνει γιατί η διαδικασία προσαρμόζει μόνο την επόμενη πρόβλεψη ως προς κάποιο ποσοστό του πιο πρόσφατου σφάλματος πρόβλεψης, και δεν μπορεί να προβλέψει μεταβολές στην κατεύθυνση της χρονοσειράς.

Για να λύσουμε το πρόβλημα της επιλογής εφαρμόζουμε την ανάλυση ευαισθησίας στις ιστορικές χρονοσειρές, χρησιμοποιώντας διαφορετικές τιμές για τη σταθερά της εξομάλυνσης. Για κάθε τιμή πάνω από ένα εύρος τιμών, προετοιμάζεται ένα πρότυπο πρόβλεψης με τη μέθοδο της εκθετικής εξομάλυνσης και υπολογίζεται το κατάλληλο μέτρο της ακριβείας της πρόβλεψης. Στην πράξη, μελέτες που έγιναν, δείχνουν ότι οι τιμές από 0.05 έως 0.30 ταιριάζουν πολύ καλά στα πρότυπα της εκθετικής εξομάλυνσης. Τιμές της α που είναι μεγαλύτερες από 0.30 συνήθως δείχνουν ότι κάποιο εναλλακτικό μοντέλο πρόβλεψης θα είναι περισσότερο κατάλληλο [23].

3.3.3 Διπλός κινητός μέσος (double moving average)

Η μέθοδος αυτή μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την πρόβλεψη των τιμών μιας χρονοσειράς, οι παρατηρήσεις της οποίας παρουσιάζουν ανοδική ή πτωτική πορεία που εκφράζεται από κάποια γραμμική τάση. Για τη διαμόρφωση των προβλέψεων με τη μέθοδο αυτή υπολογίζεται ένας δεύτερος κινητός από τον απλό κινητό μέσο, ενώ στη συνέχεια λαμβάνεται υπ' όψιν και η γραμμική τάση των παρατηρήσεων της χρονοσειράς. Για το λόγο αυτό η μέθοδος ονομάζεται πολύ συχνά και μέθοδος γραμμικού κινητού μέσου (linear moving average). Η εφαρμογή της μεθόδου του διπλού κινητού μέσου βασίζεται στην ακόλουθη διαδικασία [4]:

- ⊗ Υπολογίζεται ο απλός κινητός μέσος m -περιόδων, M_t , ως:

$$M_{t+1} = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m X_{t-j+1} \quad (3.10)$$

- ⊗ Υπολογίζεται ο διπλός κινητός μέσος m -περιόδων, M'_t , ως:

$$M'_{t+1} = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m M_{t-j+1} \quad (3.11)$$

⊗ Υπολογίζεται η διαφορά a_t ως:

$$a_t = 2M_t - M'_t \quad (3.12)$$

⊗ Υπολογίζεται ο παράγοντας προσαρμογής για τη τάση, b_t , ως:

$$b_t = \frac{2}{m-1}(M_t - M'_t) \quad (3.13)$$

⊗ Υπολογίζεται η πρόβλεψη F_{t+h} , για την h μελλοντική περίοδο ως:

$$F_{t+h} = a_t + hb_t \quad (3.14)$$

Η μέθοδος αυτή, σε αντίθεση με τις δύο προηγούμενες μεθόδους προβλέψεων που παρουσιάσαμε, μπορεί για $h>1$ να χρησιμοποιηθεί για τη διενέργεια προβλέψεων για περισσότερες από μια μελλοντικές περιόδους, ενώ για $h=1$ δίνει την πρόβλεψη για την επόμενη περίοδο. Βέβαια, η χρήση της προϋποθέτει την ύπαρξη μεγάλου αριθμού παρατηρήσεων, ιδιαίτερα μάλιστα όταν η τιμή του m είναι σχετικά μεγάλη. Όπως και στη μέθοδο του απλού κινητού μέσου, όταν η τιμή του m δεν είναι γνωστή, επιλέγουμε εκείνη την τιμή που ελαχιστοποιεί την τιμή του κριτηρίου MSE ή κάποιου άλλου κριτηρίου στα δεδομένα της χρονοσειράς.

3.3.4 Διπλή εκθετική εξομάλυνση (Double exponential smoothing)

Ονομάζεται επίσης μέθοδος Brown. Χρησιμοποιείται κυρίως σε σειρές που παρουσιάζουν τάση. Η βασική φιλοσοφία της μεθόδου είναι σχεδόν ίδια με αυτήν του διπλού κινητού μέσου, δηλαδή η εξομάλυνση των παρατηρήσεων της χρονοσειράς γίνεται δύο φορές, ενώ στη διαμόρφωση των προβλέψεων λαμβάνεται υπόψη και η τάση. Η εφαρμογή της μεθόδου στηρίζεται στην ακόλουθη διαδικασία[4]:

⊗ Εξομαλύνονται οι αρχικές παρατηρήσεις της χρονοσειράς με τη μέθοδο της απλής εκθετικής εξομάλυνσης ως ακολούθως:

$$A_t = aX_t + (1-a)A_{t-1} \quad (3.15)$$

όπου a είναι η σταθερά εξομάλυνσης, για $0 \leq a \leq 1$, A_t οι εξομαλυνθείσες τιμές της χρονοσειράς που προκύπτουν από την εξομάλυνση, για $t=2, 3, \dots$, η ενώ για $t=1$ ορίζεται ως αρχική συνθήκη $A_1 = X_1$.

- ⊗ Εξομαλύνονται οι εξομαλυνθείσες τιμές A_t της χρονοσειράς με τη μέθοδο της απλής εκθετικής εξομάλυνσης ως ακολούθως:

$$A'_t = aA_t + (1-a)A'_{t-1} \quad (3.16)$$

όπου A'_t οι εξομαλυνθείσες τιμές της χρονοσειράς που προκύπτουν από την δεύτερη εξομάλυνση, για $t=2, 3, \dots, n$ ενώ για $t=1$, $A'_1 = A_1$.

- ⊗ Υπολογίζεται η διαφορά a_t ως:

$$a_t = aA_t - A'_t \quad (3.17)$$

- ⊗ Υπολογίζεται ο παράγοντας προσαρμογής για τη τάση, b_t , ως:

$$b_t = \frac{a}{1-a} (A_t - A'_t) \quad (3.18)$$

- ⊗ Υπολογίζεται η πρόβλεψη F_{t+h} , για την h μελλοντική περίοδο ως:

$$F_{t+h} = a_t + hb_t \quad (3.19)$$

Σε αντίθεση με την απλή εκθετική εξομάλυνση, μπορούμε να εφαρμόσουμε αυτή τη μέθοδο για περισσότερες από μια μελλοντικές περιόδους. Επίσης, αν η τιμή της σταθεράς εξομάλυνσης a δεν είναι γνωστή, κάτι που συμβαίνει όταν εφαρμόζουμε τη μέθοδο για πρώτη φορά στα δεδομένα μιας χρονοσειράς, επιλέγουμε κατά τα γνωστά εκείνη την τιμή του a που ελαχιστοποιεί την τιμή του κριτηρίου MSE ή κάποιου άλλου κριτηρίου στα δεδομένα της χρονοσειράς. Σημειώνεται επίσης ότι ο αριθμός των παρατηρήσεων που απαιτούνται για την εφαρμογή της μεθόδου αυτής είναι αρκετά μικρότερος από τον αντίστοιχο αριθμό της μεθόδου του διπλού κινητού μέσου.

3.3.5 Εκθετική εξομάλυνση με προσαρμογή στην τάση (Exponential smoothing adjusted for trend)

Ονομάζεται επίσης μέθοδος Holt. Χρησιμοποιείται επίσης όταν υπάρχει τάση στις παρατηρήσεις της χρονοσειράς. Η μέθοδος Holt έχει δύο παραμέτρους εξομάλυνσης, την παράμετρο a για την εξομάλυνση των τιμών της χρονοσειράς και την παράμετρο b για την εξομάλυνση της τάσης, σε αντίθεση με τη μέθοδο της

διπλής εκθετικής εξομάλυνσης που έχει μόνο μια. Η εφαρμογή της μεθόδου βασίζεται στην ακόλουθη διαδικασία [4]:

⊗ Η εξομάλυνση των τιμών της χρονοσειράς γίνεται με την ακόλουθη σχέση:

$$A_t = aX_t + (1-a)(A_{t-1} + T_{t-1}) \quad (3.20)$$

όπου a είναι η σταθερά για την εξομάλυνση για $0 \leq a \leq 1$, A_t οι εξομαλυνθείσες τιμές της χρονοσειράς που προκύπτουν από την εξομάλυνση, για $t=2, 3, \dots, n$ ενώ για $t=1$ ορίζεται ως αρχική συνθήκη $A_1=X_1$.

⊗ Η εξομάλυνση της τάσης γίνεται ως εξής:

$$T_t = \beta(A_t - A_{t-1}) + (1-\beta)T_{t-1} \quad (3.21)$$

όπου β , για $0 \leq \beta \leq 1$, είναι η σταθερά για την εξομάλυνση της τάσης, T_t οι εξομαλυνθείσες τιμές της τάσης, για $t=2, 3, \dots, n$ ενώ για $t=1$ ορίζεται ως αρχική συνθήκη $T_1=0$.

⊗ Υπολογίζεται η πρόβλεψη F_{t+h} , για την h μελλοντική περίοδο ως:

$$F_{t+h} = A_t + hT_t \quad (3.22)$$

όπου $h=1, 2, 3, \dots$

Οι τιμές των παραμέτρων a και β για μια συγκεκριμένη χρονοσειρά είναι αυτές που ελαχιστοποιούν την τιμή του κριτηρίου MSE ή κάποιου άλλου κριτηρίου στα δεδομένα της χρονοσειράς. Αξίζει να σημειωθεί ότι με τη μέθοδο Holt οι τιμές της τάσης εξομαλύνονται απευθείας, ενώ με τη μέθοδο Brown η τάση προσδιορίζεται από τον παράγοντα bt , αφού προηγουμένως εξομαλυνθούν δύο φορές οι τιμές της χρονοσειράς. Αυτό σημαίνει ότι με τη μέθοδο Holt γίνεται καλύτερη εκτίμηση των τιμών της τάσης, απ' ό,τι με τη μέθοδο Brown που είναι πολύ ευαίσθητη στις τυχαίες διακυμάνσεις της χρονοσειράς. Για αυτό το λόγο, στην πράξη, η μέθοδος Holt εφαρμόζεται πιο συχνά.

3.3.6 Εκθετική εξομάλυνση με προσαρμογή στην τάση και στην εποχικότητα (Exponential smoothing adjusted for trend and seasonality)

Ο Winters ανέπτυξε μια μέθοδο για την προσαρμογή της εποχικής ή περιοδικής κίνησης μέσα στο πλαίσιο της γραμμικής εκθετικής εξομάλυνσης. Επομένως, η διαδικασία του Winters μπορεί να εφαρμοστεί για προβλέψεις με βάση μια χρονοσειρά που εμφανίζει και τάση και εποχικό πρότυπο. Η επέκταση συνίσταται στην ύπαρξη επιπλέον εξίσωσης για τον υπολογισμό της εποχικής συνιστώσας της χρονοσειράς. Προκειμένου να κάνουμε πρόβλεψη με αυτό το μοντέλο χρειαζόμαστε τέσσερις εξισώσεις [4]:

⊗ Κάνουμε επίκαιρη την εκθετικά εξομαλυνθείσα σειρά

$$S_t = a \frac{X_t}{I_{t-L}} + (1-a)(S_{t-1} + b_{t-1}) \quad (3.23)$$

όπου L είναι το εύρος της εποχικότητας, δηλαδή ο αριθμός των τριμήνων ή μηνών του έτους.

⊗ Κάνουμε επίκαιρη την εκτίμηση της εποχικότητας

$$I_t = \beta \frac{X_t}{S_t} + (1-\beta)I_{t-L} \quad (3.24)$$

όπου I είναι ο παράγοντας προσαρμογής της εποχικότητας.

⊗ Κάνουμε επίκαιρο τον εκτιμητή της τάσης

$$b_t = \nu(S_t + b_t \times m)I_{t-L+m} \quad (3.25)$$

⊗ Προβλέπουμε m περιόδους στο μέλλον

$$F_{t+m} = (S_t + b_t \times m)I_{t-L+m} \quad (3.26)$$

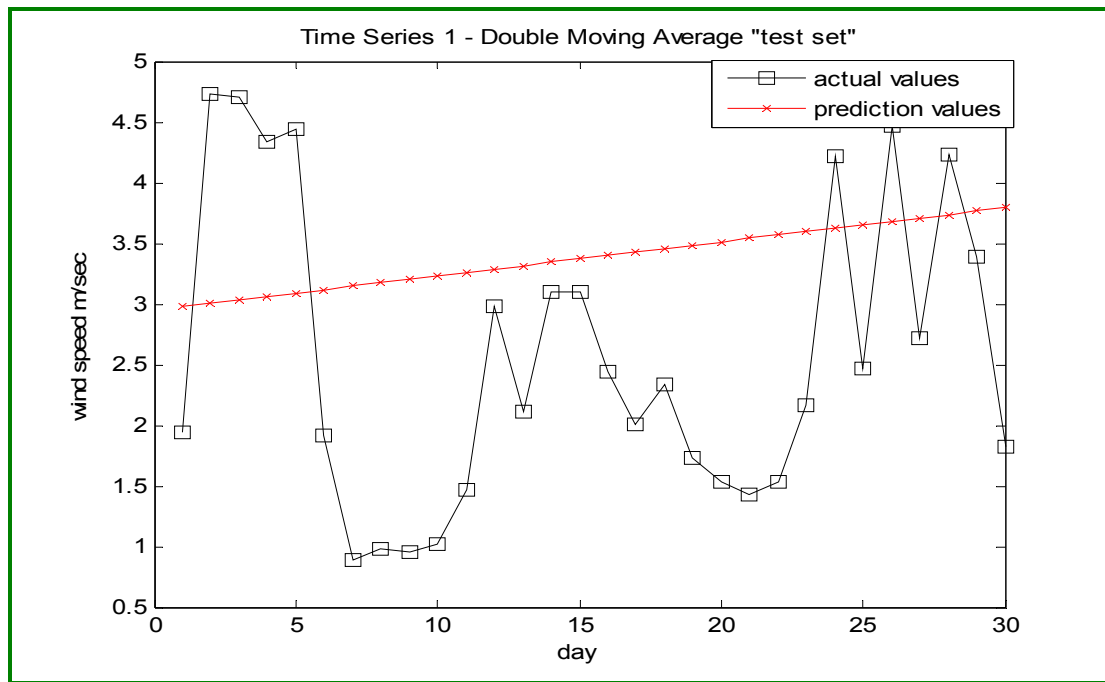
Με την εξίσωση (3.23) γίνονται επίκαιρες οι εξομαλυνθείσες τιμές της σειράς. Στην εξίσωση (3.23), το X_t διαιρείται δια του I_{t-L} που προσαρμόζει τις αρχικές

παρατηρήσεις, X_t για εποχικότητα και στη συνέχεια αναιρεί τις επιδράσεις της εποχικότητας όσο καλύτερα αυτές μπορεί να μετρηθούν από τη χρονολογική σειρά. Η εξίσωση (3.24) δίνει την εκτίμηση της εποχικής συνιστώσας, X_t / S_t πολλαπλασιασμένη επί τη σταθερά B συν την παλαιά εποχική εκτίμηση, I_{t-L} πολλαπλασιασμένη επί $(1-B)$. Επομένως, η επικαιροποίηση των εποχικών εκτιμήσεων είναι από μόνη της μια διαδικασία εκθετικής εξομάλυνσης. Επίσης, ο X_t διαιρείται με S_t προκειμένου να εκφραστεί η τιμή ως δείκτης παρά ως απόλυτο μέγεθος. Αυτό επιτρέπει την εύρεση του μέσου όρου των νέων εποχικών εκτιμήσεων με βάση τον εποχικό δείκτη της προηγούμενης περιόδου. Η εξίσωση (3.25) εκφράζει τη σύγχρονη τιμή της συνιστώσας της τάσης που επιτυγχάνεται με τη συνηθισμένη διαδικασία εκθετικής εξομάλυνσης. Τέλος, μετά την εξίσωση (3.25), λαμβάνουμε την εξίσωση (3.26) για τις μελλοντικές περιόδους. Η διαφορά είναι ότι αυτή η εκτίμηση για τη μελλοντική περίοδο, $t+m$, πολλαπλασιάζεται επί I_{t-L+m} . Αυτός είναι ο τελικός διαθέσιμος εποχικός δείκτης και αποτελεί την προσαρμογή της πρόβλεψης για εποχικότητα [23].

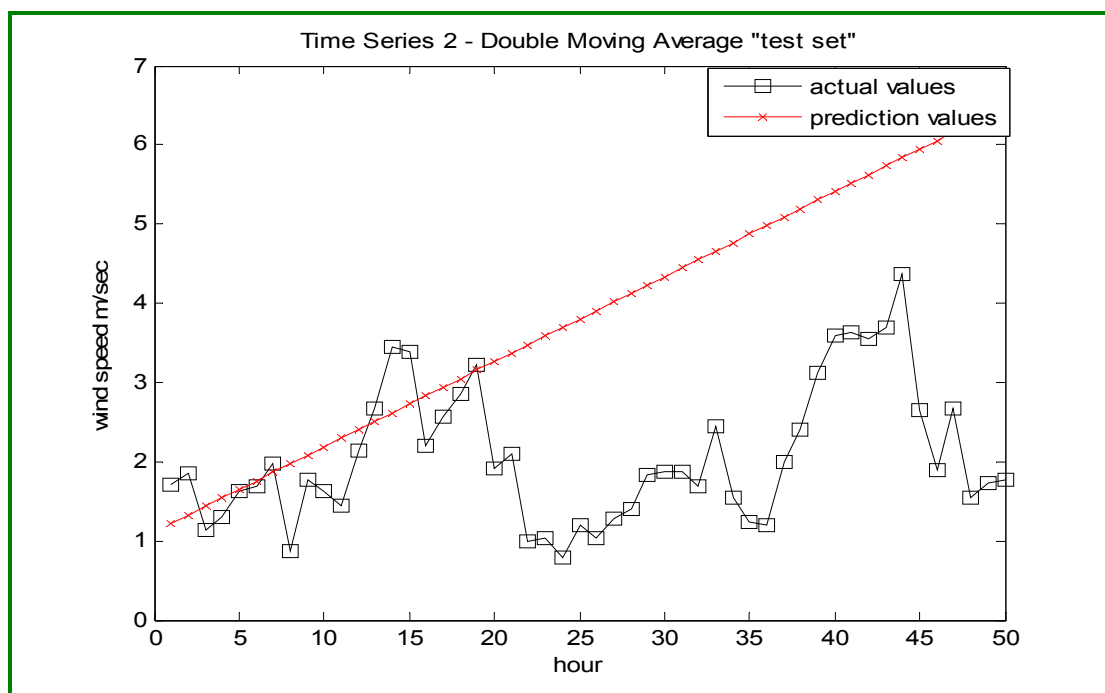
3.3.7 Εφαρμογή των μοντέλων

Τα παραπάνω μοντέλα πρόβλεψης αποτελούν κομμάτι της βασικής θεωρίας της ανάλυσης χρονοσειρών. Δε θα δώσουμε ιδιαίτερο βάρος σε αυτά, καθώς γνωρίζουμε ότι μια περίπλοκη χρονοσειρά όπως αυτή της ταχύτητας του ανέμου, θα χρειαστεί πολυπλοκότερη ανάλυση. Παρακάτω ακολουθούν τα αποτελέσματα από την εφαρμογή κάποιων από τις παραπάνω μεθόδους με τη βοήθεια ολοκληρωμένων λογισμικών πακέτων H/Y.

Στα δύο πρώτα διαγράμματα παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της εφαρμογής της μεθόδου του διπλού κινητού μέσου. Οι τιμές της παραμέτρου m σε κάθε περίπτωση, υπολογίστηκαν με δοκιμές και βάση του κριτηρίου που αναφέραμε στην ανάλυση της μεθόδου (ελαχιστοποίηση σφάλματος). Η εφαρμογή έγινε με το λογισμικό Minitab.

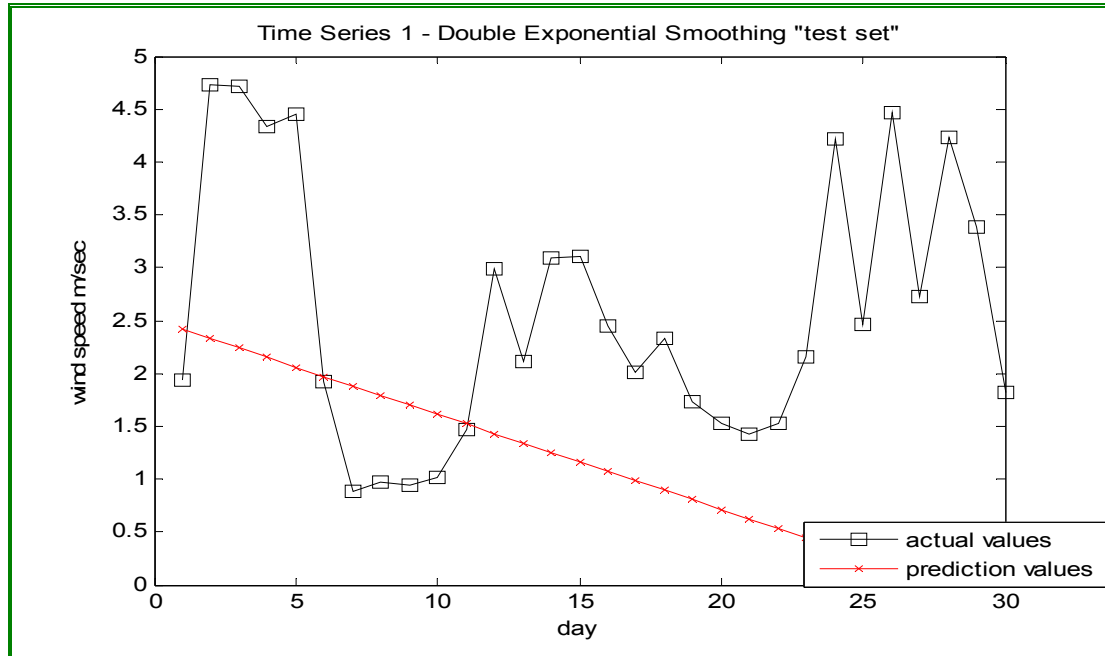


Σχήμα 3.1 Διπλός κινητός μέσος όρος ($m=2$), Χ.Σ.1 (test set)

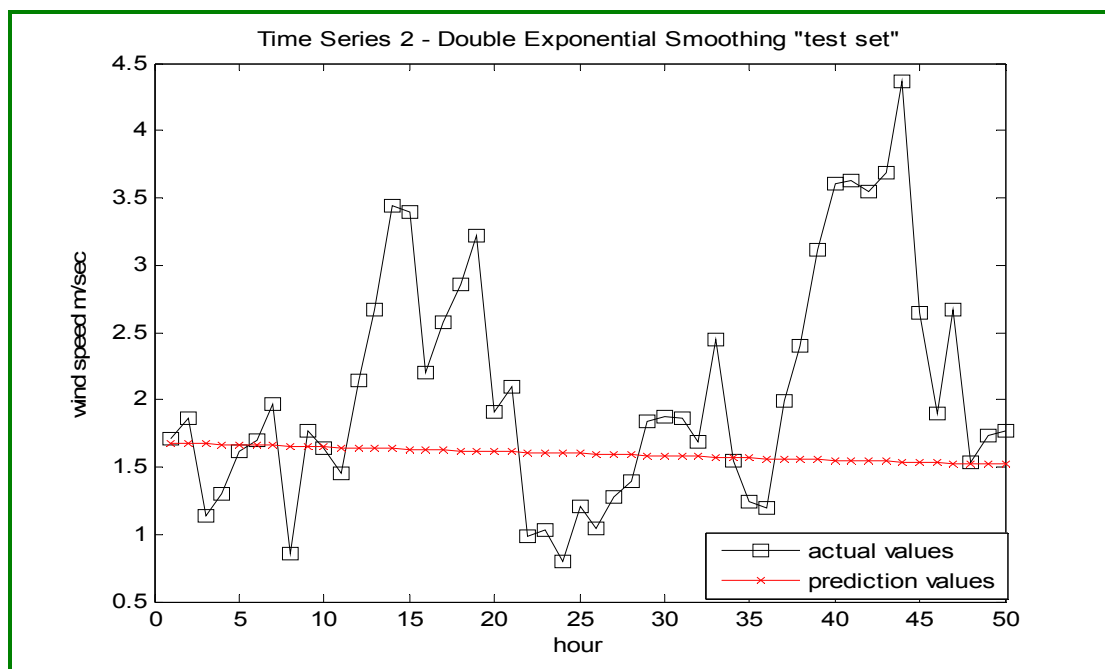


Σχήμα 3.2 Διπλός κινητός μέσος όρος ($m=2$), Χ.Σ.2 (test set)

Ακολουθούν τα αποτελέσματα από την εφαρμογή της μεθόδου της διπλής εκθετικής εξομάλυνσης στις δύο χρονοσειρές. Τα a και b υπολογίστηκαν με δοκιμές. Η εφαρμογή έγινε με το λογισμικό Minitab.

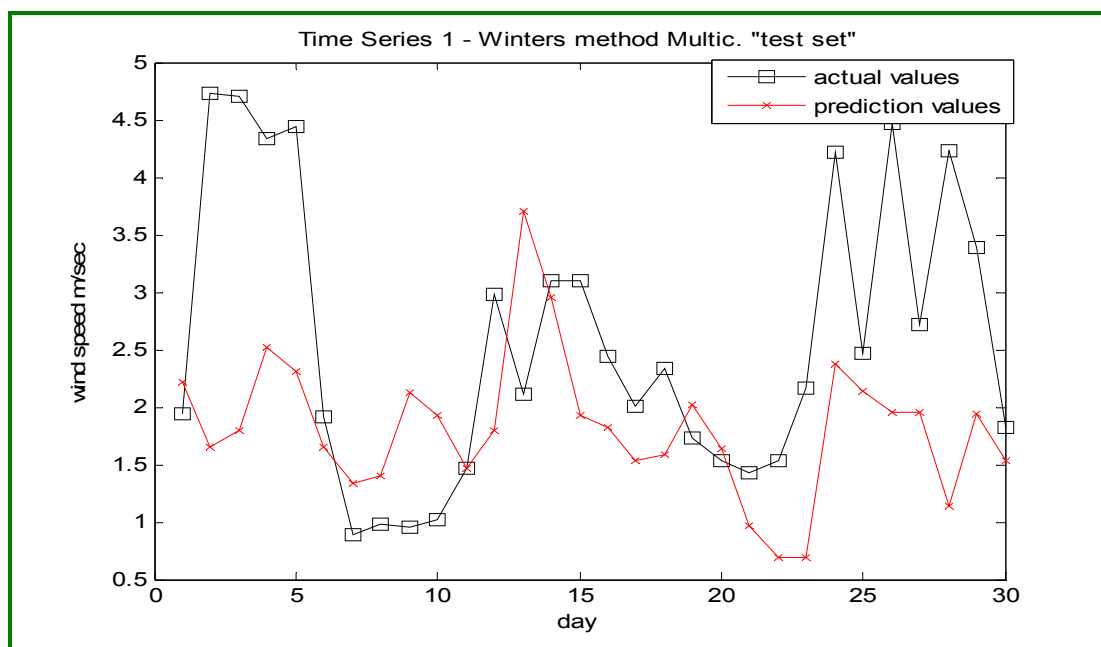


Σχήμα 3.3 Διπλή εκθετική εξομάλυνση Χ.Σ. 1 με $a=0,6$ και $b=0,1$.

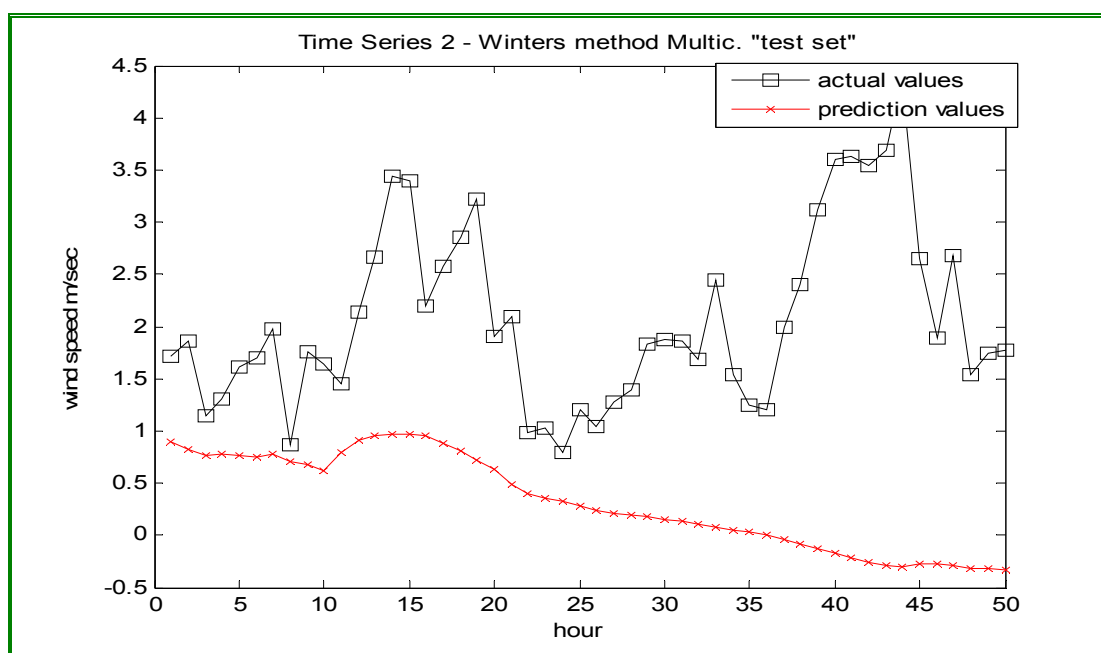


Σχήμα 3.4 Διπλή εκθετική εξομάλυνση Χ.Σ. 2 με $a=0,2$ και $b=0,005$

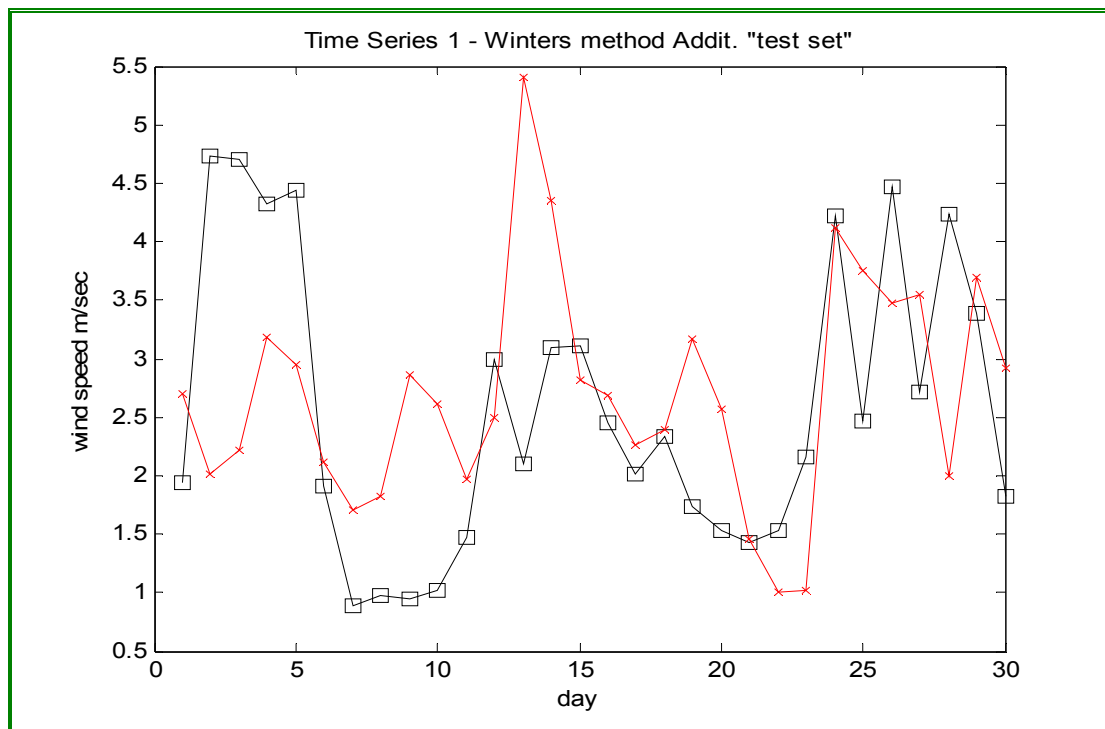
Στα επόμενα διαγράμματα παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της εφαρμογής της μεθόδου Winters. Σε αυτή τη μέθοδο χρησιμοποιούμε την εποχικότητα ως παράμετρο. Τα δεδομένα είναι ημερήσια και ωριαία επομένως η εποχικότητα είναι 365 και 24 αντίστοιχα. Θα αναφερθούμε λεπτομερέστερα στην έννοια της εποχικότητας, στην επόμενη παράγραφο.



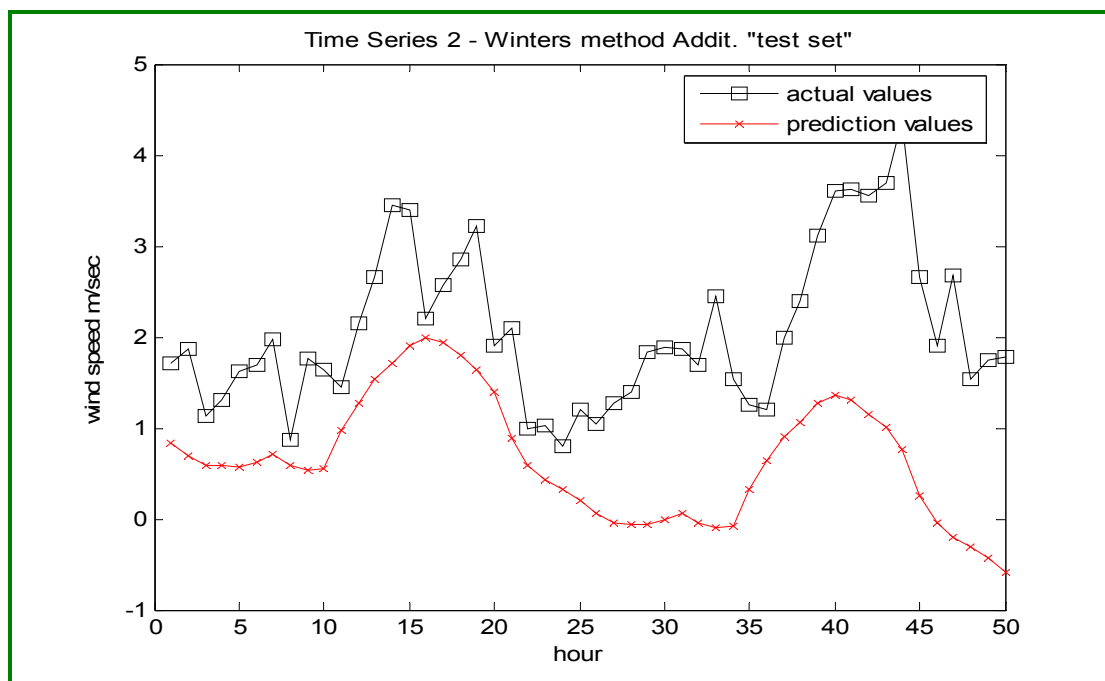
Σχήμα 3.5 Μέθοδος Winters (πολ/κο μοντέλο) στη Χ.Σ. 1 με $\alpha=0,9$ $\beta=0,05$ $\gamma=0,05$.



Σχήμα 3.6 Μέθοδος Winters (πολ/κο μοντέλο) στη Χ.Σ. 2 με $\alpha=0,9$ $\beta=0,05$ $\gamma=0,05$.



Σχήμα 3.7 Μέθοδος Winters (προσθετικό μοντέλο) στη Χ.Σ. 1 με $\alpha=0,6$ $\beta=0,05$ $\gamma=0,05$



Σχήμα 3.8 Μέθοδος Winters (προσθετικό μοντέλο) στη Χ.Σ. 2 με $\alpha=0,9$ $\beta=0,05$ $\gamma=0,05$.

ΜΕΘΟΔΟΣ	TRAINING SET			TEST SET		
	MSE	MAE	MAPE	MSE	MAE	MAPE
Διπλός Κινητός Μέσος	3.466	1.324	50.39	2.202	1.341	79.18
Διπλή Εκθετική Εξομάλυνση	1.689	0.922	34.77	4.184	1.703	64.87
Winters (multiplicative)	0.975	0.719	27.52	2.017	1.096	41.56
Winters (additive)	1.080	0.781	31.05	1.761	1.047	50.37

Πίνακας 3.1 Σύνοψη αποτελεσμάτων μεθόδων εξομάλυνσης για τη χρονοσειρά 1.

ΜΕΘΟΔΟΣ	TRAINING SET			TEST SET		
	MSE	MAE	MAPE	MSE	MAE	MAPE
Διπλός Κινητός Μέσος	1.209	0.790	39.63	5.496	1.896	114.87
Διπλή Εκθετική Εξομάλυνση	1.305	0.871	48.94	0.981	0.718	32.10
Winters (multiplicative)	0.698	0.592	29.14	4.130	1.748	80.20
Winters (additive)	0.668	0.581	28.87	2.544	1.409	69.29

Πίνακας 3.2 Σύνοψη αποτελεσμάτων μεθόδων εξομάλυνσης για τη χρονοσειρά 2.

3.4 Διάσπαση χρονοσειρών

Παραπάνω χρησιμοποιήσαμε απλές μεθόδους προεκβολής προκειμένου να προβλέψουμε μελλοντικές τιμές μιας χρονοσειράς από παρατηρηθείσες τιμές. Η χρονική περίοδος εκφραζόταν σε έτη, τρίμηνα ή μήνες. Οι χρονοσειρές μελετώνται κάτω από την υπόθεση ότι με βάση τη συμπεριφορά στο παρελθόν μπορεί να προβλεφθεί η μελλοντική πορεία της διακύμανσης της παρατηρούμενης μεταβλητής. Μολονότι η πρόβλεψη μελλοντικών καταστάσεων δεν γίνεται χωρίς σφάλμα, η ανάλυση και ο διαχωρισμός (decomposition) των χρονοσειρών έχει αξία στη διαδικασία της πρόβλεψης γιατί έτσι μπορεί να μειωθεί το σφάλμα πρόβλεψης. *Επισημαίνεται ότι είναι αδύνατο να προβλεφθεί το μέλλον με απόλυτη ακρίβεια και ότι πάντοτε θα υπάρχει, ως ένα βαθμό, σφάλμα στην πρόβλεψη.* Οι μέθοδοι για την ανάλυση και το διαχωρισμό χρονοσειρών είναι στατιστικές τεχνικές βελτίωσης των προβλέψεων μέσω της διάσπασης του προτύπου της χρονοσειράς σε υπο-πρότυπα που ονομάζονται συνιστώσες. Για το διαχωρισμό των χρονοσειρών δεχόμαστε ότι τα δεδομένα εμφανίζουν την εξής εικόνα:

$$\begin{aligned}\text{Δεδομένα} &= \text{πρότυπο} + \text{σφάλμα} = \\ &= f(\text{συστηματικές συνιστώσες}) + \text{σφάλμα}\end{aligned}$$

Το σφάλμα αυτό ή *υπολειπόμενη (residual) απόκλιση*, υποθέτουμε ότι μπορεί να εκφραστεί ως η διαφορά ανάμεσα στο συνδυασμένο αποτελεσμάτων υπομοντέλων της χρονοσειράς (συστηματικές συνιστώσες) και των παρατηρηθεισών τιμών της. Σ' αυτήν την παράγραφο θα μελετήσουμε τη φύση και την έκταση (scope) αυτών των συνιστωσών. Οι τεχνικές διαχωρισμού που χρησιμοποιούνται για τη μελέτη αυτών των συνιστωσών δεν αποτελούν ενιαίο σώμα της στατιστικής θεωρίας. Επίσης, δεν πληρούνται συνήθως όλες οι προϋποθέσεις για επιστημονική στατιστική διερεύνηση, όπως, για παράδειγμα, η ύπαρξη τυχαίας δειγματοληψίας. Επομένως, οι διαδικασίες διάσπασης των χρονοσειρών συχνά αξιολογούνται με κριτήρια που επηρεάζονται από την κρίση εκείνου που διενεργεί την πρόβλεψη. Το υπόλοιπο της παραγράφου αφιερώνεται σε συζητήσεις γύρω από την ανάλυση χρονοσειρών και τις εφαρμογές της στη διαδικασία της πρόβλεψης. Σε αντίθεση με τις μεθόδους εξομάλυνσης, δεν υπάρχει σώμα στατιστικής θεωρίας που να έχει αναπτυχθεί γι' αυτό ακριβώς το ζήτημα. Επομένως, απαιτείται καλή αξιολογική κρίση προκειμένου να χρησιμοποιηθούν οι μέθοδοι αυτές σε προβλήματα πρόβλεψης. Εν τούτοις, επισημαίνοντας τους στατιστικούς περιορισμούς αυτών των τεχνικών, μπορούμε να

μειώσουμε το διάστημα κατά το οποίο θα χρειαστεί να λειτουργήσει η υποκειμενική κρίση κι επομένως να βελτιώσουμε τη διαδικασία πρόβλεψης [23].

Οι υπεύθυνοι για την πρόβλεψη αναλύουν αυτές τις συνιστώσες για να καθορίσουν την επίδρασή τους πάνω στην εξέλιξη της χρονοσειράς. Οι τέσσερις συνιστώσες αλληλεπιδρούν για να εξηγήσουν τη διακύμανση στις τιμές των δεδομένων διαχρονικά. Οι επιδράσεις αυτές είναι υπεύθυνες για την συχνά ασταθή συμπεριφορά των χρονοσειρών.

Τάση

Τάση είναι η συνεχής κίνηση της χρονοσειράς κατά μήκος μιας χρονικής περιόδου. Η τάση μπορεί να εμφανιστεί με γραμμική ή καμπυλόγραμμη μορφή. Συνήθως, οι δυνάμεις που επηρεάζουν ή παράγουν αυτές τις διαχρονικές κινήσεις περιλαμβάνουν μεταβολές στην τεχνολογία, στην παραγωγικότητα, στον εξωτερικό ανταγωνισμό και άλλα (οικονομικές μεταβλητές).

Εποχικότητα

Τα εποχικά πρότυπα παρατηρούνται σε δεδομένα που έχουν ταξινομηθεί ανά τρίμηνο, μήνα ή εβδομάδα. Λαμβάνουν χώρα ή επανακυκλώνονται μέσα στην περίοδο ενός χρόνου, επαναλαμβάνονται από τον ένα χρόνο στον άλλο και είναι προβλέψιμα. Οι εποχικές διακυμάνσεις, επειδή παρουσιάζονται συνήθως με συστηματικό τρόπο, μπορούν σχετικά εύκολα να αναλυθούν και να προσδιοριστούν και κατά συνέπεια να χρησιμοποιηθούν για πρόβλεψη, και που συμβαίνει άλλωστε και με την τάση.

Κυκλικές κινήσεις

Οι κυκλικές κινήσεις αναφέρονται σε κυματοειδείς διακυμάνσεις (συχνά μη-κανονικές) που καλύπτουν χρονικό διάστημα μεγαλύτερο του έτους και προέρχονται από μεταβολές της γενικής δραστηριότητας. Αποτελούν τη διαφορά μεταξύ της αναμενόμενης τιμής της χρονοσειράς που προέρχεται από την τάση και την πραγματική τιμή της χρονοσειράς. Επομένως, η κυκλική κίνηση μπορεί να θεωρηθεί ως υπολειπόμενη απόκλιση κυμαινόμενη γύρω από την τάση που σχετίζεται με τη μεταβαλλόμενη γενική δραστηριότητα.

Μη κανονικότητα

Η μη-συστηματική συνιστώσα, ή μη-κανονικές αποκλίσεις, προκαλείται από μη-περιοδικά ή απρόβλεπτα γεγονότα. Τα γεγονότα αυτά περιλαμβάνουν απεργίες,

σεισμούς, πολέμους, καιρικές μεταβολές και αλλαγές νομοθεσίας που έχουν επιδράσεις στις τιμές της χρονοσειράς (οικονομικές μεταβλητές).

Στην ανάλυση χρονοσειρών (ιδιαίτερα οικονομικών), υποτίθεται ότι οι τρεις συστηματικές συνιστώσες και η τυχαία συνιστώσα είναι αποτέλεσμα διαφορετικών αιτίων. Διαχωρίζοντας τρεις συστηματικές συνιστώσες, ρίχνουμε κάποιο φως στη φύση των παραγόντων που τις προκαλούν. Η γνώση αυτή μας επιτρέπει να προβάλουμε την επίδραση της συστηματικής συνιστώσας στο μέλλον. Στη συνέχεια, κάνοντας εκτιμήσεις ή υποθέσεις για τη μη-κανονική συνιστώσα μπορούμε να προχωρήσουμε στην πρόβλεψη.

Εάν το Y_t συμβολίζει την πραγματική παρατήρηση σε χρόνο t , εκφράζουμε το Y_t σε όρους της τάσης της σειράς, T_t σε χρόνο t , τον εποχικό παράγοντα, S_t σε χρόνο t , την κυκλική συνιστώσα, C_t και τους μη-κανονικούς παράγοντες με I_t . Στη συνέχεια υποθέτουμε ότι η σχέση παίρνει την παρακάτω μορφή:

$$Y_t = S_t * T_t * C_t * I_t \quad (3.27)$$

Η ισότητα αυτή υποδηλώνει ότι η τιμή της μεταβλητής σε χρόνο t είναι το γινόμενο των τεσσάρων συνιστωσών που αναφέρθηκαν. Ακόμη, η εξίσωση δείχνει ότι τα T , S , C και αλληλοσχετίζονται. Εναλλακτικά, η σχέση μπορεί να υποτεθεί ότι είναι προσθετική ως εξής:

$$Y_t = S_t + T_t + C_t + I_t \quad (3.28)$$

Σε αυτή την εξίσωση οι συνιστώσες δεν αλληλοσχετίζονται. Το μέγεθος της μιας συνιστώσας είναι ασυσχέτιστο με το μέγεθος οποιασδήποτε άλλης. Από τα δυο μοντέλα διαχωρισμού, το προσθετικό είναι πιο δύσκολο για παραπέρα ανάλυση. Επίσης, το προσθετικό μοντέλο υποθέτει ότι οι συντελεστές μεταξύ τους είναι ανεξάρτητοι. Για παράδειγμα, αν χρησιμοποιήσουμε το προσθετικό μοντέλο, δεχόμαστε ότι η τάση δεν επηρεάζει τον εποχικό συντελεστή όσο υψηλός ή χαμηλός κι αν γίνεται. Κατά κανόνα, η παραδοχή αυτή δεν είναι ισχυρή, εκτός από την περίπτωση της πολύ βραχυχρόνιας πρόβλεψης. Επομένως, θα δώσουμε έμφαση στο πολλαπλασιαστικό μοντέλο, εφόσον στην πραγματικότητα όλοι οι χρήστες της διαχωριστικής (decomposition) ανάλυσης το βρίσκουν πιο ευλογοφανές.

3.4.1 Ανάλυση και διαχωρισμός της εποχικότητας

Η γνώση των εποχικών προτύπων είναι ζωτικός παράγοντας για τον σωστό και έγκυρο σχεδιασμό. Για παράδειγμα, η πληροφορία ότι οι πωλήσεις λουλουδιών θα είναι υψηλές τον Μάιο στις ΗΠΑ εξαιτίας της ημέρας της Μητέρας, λέει στον ανθοπώλη ότι τα αποθέματά του σε λουλούδια και σε άλλες κατασκευές του είδους θα πρέπει να είναι αυξημένα, προκειμένου να ανταποκριθεί στη ζήτηση.

Εκτός από την κατάστρωση ετήσιου επιχειρηματικού προγράμματος, η γνώση των εποχικών κινήσεων μας επιτρέπει να αναλύουμε τις επιδόσεις του παρελθόντος, να αλλάζουμε το διαχρονικό πρότυπο παραγωγής και διάθεσης κι ίσως ακόμα να μεταβάλλουμε και το ίδιο το εποχικό πρότυπο. Αν και υπάρχουν διάφορες μέθοδοι για τη μέτρηση της εποχικής διακύμανσης, θα εστιάσουμε την προσοχή μας σε μία, στη μέθοδο του λόγου της πραγματικής τιμής προς τον κινητό μέσο (ratio-to-moving average). Η λογική που βρίσκεται πίσω από αυτή και άλλες μεθόδους είναι η εξάλειψη της επίδρασης της τάσης, των κυκλικών και μη-κανονικών στοιχείων από τα αρχικά δεδομένα των χρονοσειρών, προκειμένου να διασφαλιστεί ότι παραμένει μόνο η επίδραση του εποχικού παράγοντα. Με δεδομένα σε τρίμηνη βάση, κατασκευάζουμε έναν κινητό μέσο όρο τεσσάρων τριμήνων για να εκτιμήσουμε τους εποχικούς παράγοντες από τις παρατηρήσεις της χρονοσειράς. Αν χρησιμοποιηθούν μηνιαία δεδομένα, μπορεί να κατασκευαστεί ένας κινητός μέσος όρος 12 μηνών.

Στόχος είναι η εξάλειψη των άλλων συνιστωσών έτσι ώστε να απομείνουν μόνο οι εποχικές διακυμάνσεις. Αυτοί οι κινητοί μέσοι όροι θα μπορούσαν να εξαλείψουν τις κυμάνσεις που οφείλονται σε εποχικότητα και συνυπάρχουν στα δεδομένα. Η βασική παραδοχή που βρίσκεται πίσω από τη μέθοδο του κινητού μέσου όρου είναι ότι το εποχικό πρότυπο επανεμφανίζεται σε κανονική βάση κάθε επόμενο έτος. Μολονότι το εποχικό πρότυπο δεν είναι απόλυτα ακριβές κατά τα διαδοχικά έτη, ωστόσο υπάρχει μέσα σε λογικά όρια και ο κινητός μέσος όρος ελαχιστοποιεί την επίδραση σε έναν τουλάχιστον βαθμό. Για να εξηγήσουμε τη θεωρία, θα υποθέσουμε ότι οι συνιστώσες της χρονοσειράς είναι πολλαπλασιαστικής μορφής (εξίσωση 3.27). Ο όρος ratio-to-moving-average χρησιμοποιείται επειδή παίρνουμε τη μεταβλητή Y_t της χρονοσειράς και τη διαιρούμε με τον κινητό μέσο όρο ως εξής:

$$\frac{Y_t}{MA} = \frac{S_t \times T_t \times C_t \times I_t}{T_t \times C_t \times I_t} = S_t \quad (3.29)$$

Η ποσότητα που βρίσκουμε, η S_t , είναι η καλύτερη δυνατή μέτρηση της εποχικής συνιστώσας στα δεδομένα της χρονοσειράς [23].

3.4.2 Προσαρμογή και Ανάλυση της Τάσης

Μελετούμε τις τάσεις για να προσδιορίσουμε τη μακρόχρονη κατεύθυνση της χρονοσειράς. Γενικά, αυτές οι εξελίξεις προέρχονται από μια ποικιλία αιτιών π.χ. στις οικονομικές χρονοσειρές τέτοιες αιτίες είναι οι μεταβολές της τεχνολογίας, των τιμών, του πληθυσμού και της παραγωγικότητας. Για παράδειγμα, το σύνολο των αποταμιευτικών καταθέσεων σε μια τράπεζα ταμιευτηρίου μπορεί να αυξάνεται από έτος σε έτος για ένα χρονικό διάστημα, επειδή ο αριθμός των καταθετών συνεχίζει να αυξάνεται. Παράπέρα, ο κάθε καταθέτης τείνει να έχει μεγαλύτερη αποταμίευση σε χρηματικές μονάδες, πράγμα που σχετίζεται με μια γενική αύξηση στα εισοδήματα των καταθετών. Εν μέρει, αυτό προέρχεται από μια γενική αύξηση των τιμών που ονομάζεται πληθωρισμός (τάση). Επίσης, το γενικό ανοδικό πρότυπο των εσόδων ενός νοσοκομείου σχετίζεται με τη γενική αύξηση (τάση) των τιμών ή των τιμών των νοσοκομειακών υπηρεσιών. Στην περίπτωση του ανέμου, μια ένδειξη τάσης, θα μπορούσε να παρατηρηθεί π.χ. όταν για κάποιες ημέρες ξεσπούν έντονα καιρικά φαινόμενα, στη υπό μελέτη περιοχή, και συνοδεύονται από ισχυρούς ανέμους.

Ένα πρώτο βήμα στην ανάλυση της συνιστώσας της τάσης είναι ο καθορισμός του λόγου για τον οποίο γίνεται η ανάλυσή της. Μπορεί κάποιος να θέλει να προβάλει την τάση στο μέλλον ή να την εξαλείψει από την αρχική χρονοσειρά. Φυσικά, ίσως κάποιος να επιθυμεί να πράξει και τα δυο μαζί. Η γνώση του σκοπού βοηθάει τον ασχολούμενο με τις προβλέψεις στην επιλογή της μεθόδου και του εύρους της χρονοσειράς που θα αναλύσει. Εάν ο σκοπός είναι η προβολή της τάσης στο μέλλον, είναι σημαντικό να γνωρίζει το πόσο μακριά στο μέλλον πρόκειται να γίνει αυτή η προβολή. Μια προβολή για 15 χρόνια κατά κανόνα απαιτεί τη χρησιμοποίηση χρονοσειράς μακρύτερης διάρκειας από ό,τι μια προβολή τριών μόνο χρόνων.

Το πρώτο βήμα για την ανάλυση της τάσης είναι η γραφική παράσταση της χρονοσειράς, τόσο σε αριθμητική όσο και σε ημι-λογαριθμική κλίμακα πριν την

επιλογή της μεθόδου μέτρησης. Αν και υπάρχουν στατιστικά κριτήρια για τον καθορισμό της «σπουδαιότητας» της τάσης, μια εξέταση της γραφικής παράστασης ως προς τον χρόνο θα είναι συνήθως επαρκής [23].

3.4.3 Το Μοντέλο Γραμμικής Τάσης

Η αξιολογική κρίση (judgement) χρησιμοποιείται πολύ συχνά ως κριτήριο για τον προσδιορισμό του μοντέλου με την καλύτερη προσαρμογή. Μερικές φορές ο διενεργών προβλέψεις χαράζει απλώς μια γραμμή διαμέσου της σειράς των παρατηρήσεων, προκειμένου να αποκαλύψει το σχήμα και την κατεύθυνση της τάσης της χρονοσειράς. Ο προβλέπων, χαράζοντας τη γραμμή της τάσης πρέπει να έχει την ικανότητα να αναγνωρίζει την επαναλαμβανόμενη εποχική διακύμανση και τους κύκλους μέσω των οποίων διέρχεται η τάση. Με άλλα λόγια, θα πρέπει ο προβλέπων να έχει εξοικειωθεί σημαντικά με αυτές τις συγκεκριμένες σειρές, διαφορετικά η διαδικασία αυτή μπορεί να αποδειχθεί εξαιρετικά δύσκολη. Γι' αυτό οι διενεργούντες προβλέψεις συνήθως εμπιστεύονται την αντικειμενική μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων για να αποφύγουν την υποκειμενικότητα που υπεισέρχεται στη μέθοδο που βασίζεται στην αξιολογική κρίση. Για να αρχίσουμε, θα ορίσουμε την εκτιμηθείσα γραμμική εξίσωση ως εξής:

$$\hat{Y}_t = a + bX_t \quad (3.30)$$

Υτ είναι η προβλεφθείσα τιμή τάσης για τη μεταβλητή Y για μια επιλεγείσα κωδικοποιημένη χρονική περίοδο X. α είναι η τιμή της τάσης όταν X=0 (η διαφορά ύψους). b είναι η κλίση της εξίσωσης (η μεταβολή στο \hat{Y} που σχετίζεται με μια μοναδιαία μεταβολή στη X). Το X παριστάνει την παρατήρηση για την κωδικοποιημένη χρονική περίοδο. Κατά την εκτίμηση της εξίσωσης της τάσης, ο τύπος για την κλίση είναι:

$$b = \frac{n \sum XY - \sum X \sum Y}{n \sum X^2 - (\sum X)^2} \quad (3.31)$$

Αντικαθιστούμε την κλίση στον τύπο, για να βρούμε τη διαφορά ύψους:

$$a = \frac{\sum Y}{n} - b \frac{\sum X}{n} \quad (3.32)$$

Αν και η εξίσωση της ευθύγραμμης τάσης εφαρμόζεται πιο συχνά στις χρονοσειρές από οποιοδήποτε άλλο μοντέλο για να περιγράψει μακροχρόνιες κινήσεις, η χρήση άλλων μοντέλων για την περιγραφή μεταβολών συχνά είναι πιο ενδεδειγμένες.

3.4.4 Απομόνωση της κυκλικότητας

Στη παράγραφο αυτή θα ασχοληθούμε με μια εφαρμογή της μεθόδου του κινητού μέσου όρου προκειμένου να απομονωθεί η κυκλική συνιστώσα. Αυτή η διαδικασία απομόνωσης είναι παρόμοια με τη θεωρία απομόνωσης της τάσης και της εποχικής συνιστώσας, με τις οποίες ασχοληθήκαμε νωρίτερα.

Η απομόνωση μιας κυκλικής συνιστώσας επιτυγχάνεται με την απάλειψη της εποχικότητας από τα αρχικά δεδομένα ως εξής:

$$\frac{Y_t}{\text{εποχικός δείκτης}} = \frac{S_t \times T_t \times C_t \times I_t}{S_t} = T_t \times C_t \times I_t \quad (3.33)$$

Τα δεδομένα αυτά, τα οποία είναι απαλλαγμένα από την εποχικότητα, μπορούν να απαλλαγούν από την τάση ως εξής:

$$\frac{T_t \times C_t \times I_t}{T_t} = C_t \times I_t \quad (3.34)$$

Οι σειρές που προκύπτουν περιλαμβάνουν μόνο την επίδραση που σχετίζεται με την κυκλική συνιστώσα και τη μη-κανονική διακύμανση. Η μη-κανονική διακύμανση μπορεί να εξαλειφθεί από τη χρονοσειρά μέσω υπολογισμού του κινητού μέσου όρου, που εξομαλύνει αυτές τις μη-κανονικές διακυμάνσεις από τα δεδομένα.

Ένα απλό μοντέλο κινητού μέσου, M_t , παρουσιάζεται στην ακόλουθη εξίσωση:

$$M_t = \frac{Z_t + Z_{t-1} + \dots + Z_{t-n+1}}{n} \quad (3.35)$$

όπου M_t , είναι ο κινητός μέσος όρος τον χρόνο t . Z_t είναι η τιμή στην περίοδο t , η απαλλαγμένη από την εποχικότητα και την τάση, δηλαδή $Z_t = C_t * I_t$ και n είναι ο αριθμός των όρων στον κινητό μέσο όρο. Για ευκολία στους υπολογισμούς, η εξίσωση μπορεί να ξαναγραφεί ως:

$$M_t = M_{t-1} + \frac{Z_t - Z_{t-n}}{n} \quad (3.36)$$

Επομένως, για τη χρονική περίοδο t , ο κινητός μέσος όρος είναι ο αριθμητικός μέσος των n πιο πρόσφατων παρατηρήσεων. Στις παραπάνω εξισώσεις, ορίζονται ίσοι συντελεστές στάθμισης σε κάθε μία από τις n πιο πρόσφατες παρατηρήσεις. Σε όλες τις άλλες ιστορικές παρατηρήσεις οι συντελεστές στάθμισης θεωρείται ότι είναι μηδενικοί. Σε κάθε παρατήρηση Z_t θα θεωρηθούν ως συντελεστές στάθμισης οι W_t . Οι τύποι ξαναγράφονται ως εξής:

$$M_t = \frac{W_t Z_t + W_{t-1} Z_{t-1} + \dots + W_{t-n+1} Z_{t-n+1}}{n} \quad (3.37)$$

και

$$M_t = M_{t-1} + \frac{W_t Z_t - W_{t-n} Z_{t-n}}{n} \quad (3.38)$$

όπου W_t είναι ο συντελεστής στάθμισης που αντιστοιχεί στην παρατήρηση Z_t σε χρόνο t . Καθώς θα έχουμε στη διάθεσή μας μια νέα τιμή των δεδομένων, αυτή θα περιλαμβάνεται στον μέσο όρο και η τιμή που αντιστοιχεί στη η-οστή προηγούμενη περίοδο θα αγνοείται. Επομένως, M_t , είναι μια επικαιροποιημένη έκδοση της αμέσως προηγούμενης εκτίμησης. Η δεύτερη μορφή του M_t τονίζει αυτό το σημείο.

Οι κινητοί μέσοι όροι θα ανταποκρίνονται στις μεταβολές στο πρότυπο των δεδομένων σε βαθμό που εξαρτάται τόσο από τον αριθμό των περιόδων που περιλαμβάνονται στον κινητό μέσο όρο όσο και από τους συντελεστές στάθμισης, που αντιστοιχούν στη φόρμουλα. Σημειωτέον, ότι εάν οι συντελεστές στάθμισης θεωρηθούν οι ίδιοι, τότε οι τύποι για τους σταθμισμένους και τους μη σταθμισμένους κινητούς μέσους όρους είναι ισοδύναμοι. Εάν δίνονται μεγάλοι συντελεστές στάθμισης στις τρέχουσες περιόδους και πολύ μικροί στις παλαιότερες, τότε η πρόσφατη παρατήρηση θα επιδρά περισσότερο στην τιμή του κινητού μέσου όρου. Επίσης, όταν συμπεριλαμβάνονται περισσότεροι περίοδοι στον κινητό μέσο (μεγαλύτερες τιμές του n), τόσο λιγότερο ευαίσθητος μπορεί να γίνει ο κινητός μέσος όρος στις μεταβολές του προτύπου της κυκλικής κίνησης. Αντιθέτως, μια

μικρή τιμή του n , οδηγεί σε έναν κινητό μέσο που ανταποκρίνεται πολύ γρήγορα στις μεταβολές. Τέλος, εάν κάποιος ήθελε να προβλέψει περιόδους πριν την τρέχουσα περίοδο t , η εξίσωση πρόβλεψης γίνεται:

$$\hat{Z}_{t+1} = M_t = \frac{W_t Z_t + W_{t-1} Z_{t-1} + \dots + W_{t-n+1} Z_{t-n+1}}{W_t + W_{t-1} + \dots + W_{t-n+1}} \quad (3.39)$$

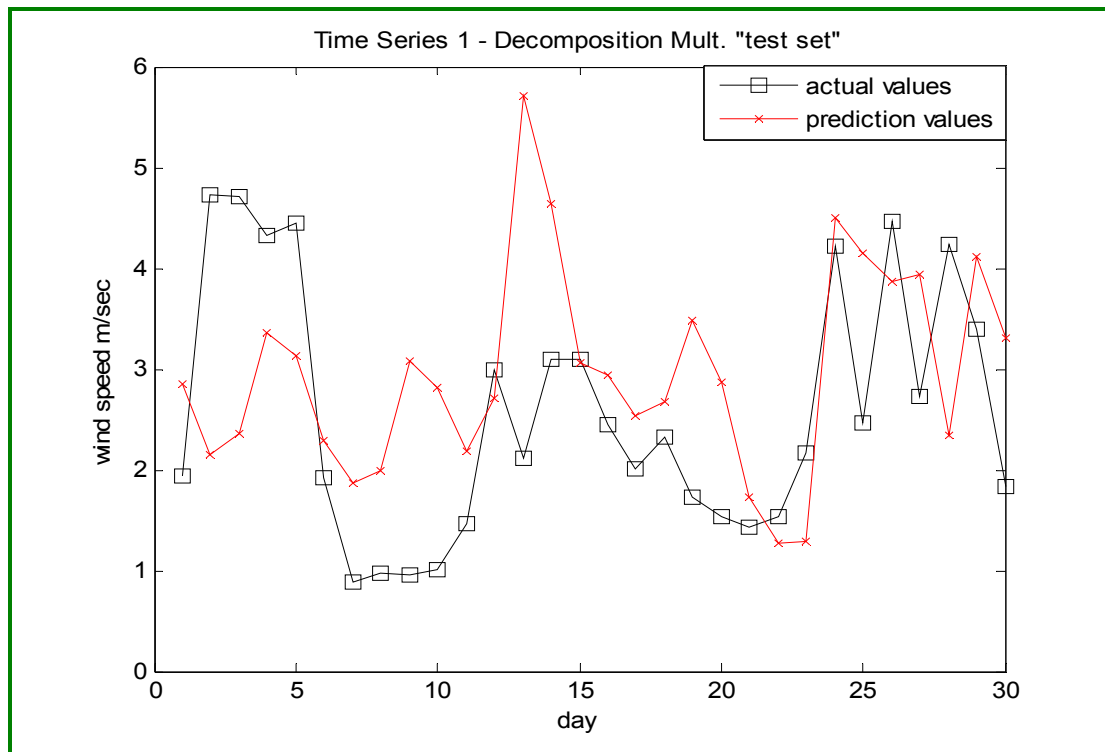
όπου \hat{Z} είναι η προβλεφθείσα τιμή του Z στο σημείο $t+1$.

Η γνώση της συνεισφοράς κάθε μιας από τις συστηματικές συνιστώσες, εποχική, τάση και κυκλικοί παράγοντες, που επιτυγχάνεται με την κλασική ανάλυση (classical decomposition) επιτρέπει στον προβλέποντα την επίτευξη του κυριότερου σκοπού της ανάλυσης χρονοσειρών. Ο σκοπός είναι η εξήγηση της διακύμανσης στα δεδομένα των παρατηρήσεων διαχρονικά.

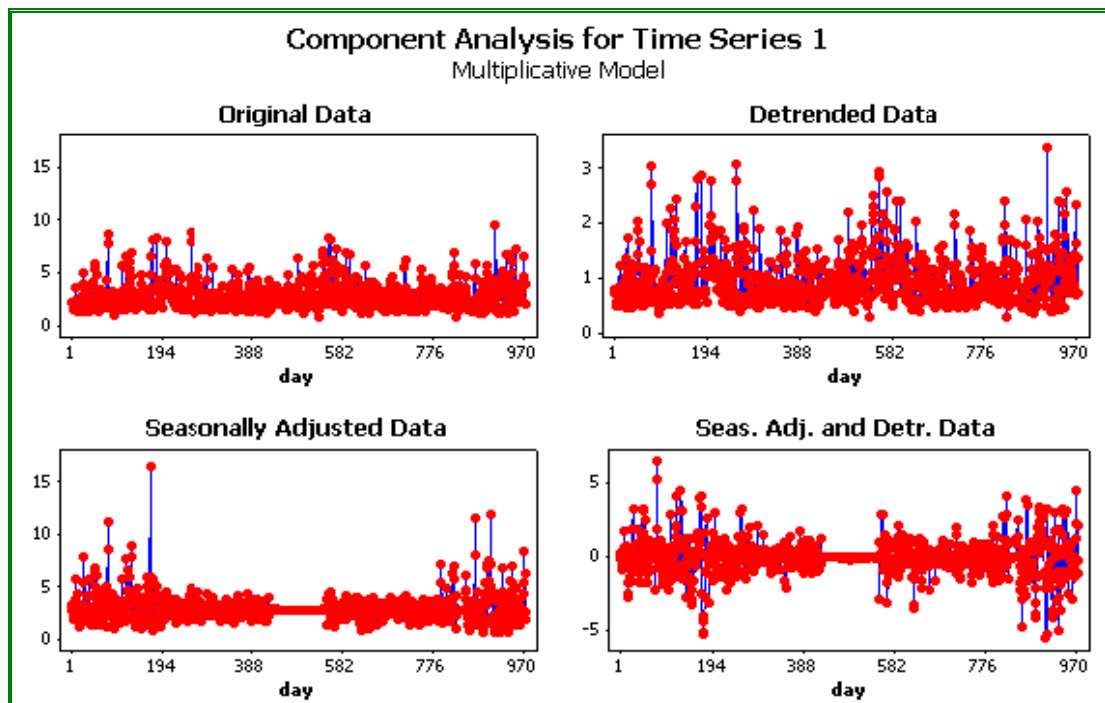
Από τα παραπάνω γίνεται φανερό ότι η διαμόρφωση των προβλέψεων εξαρτάται σε μεγάλο βαθμό από τη διαδικασία αναγνώρισης των συνθετικών στοιχείων της χρονοσειράς. Όσο καλύτερη είναι η αναγνώριση των στοιχείων αυτών, τόσο καλύτερη αναμένεται να είναι και η πρόβλεψη των τιμών της χρονοσειράς [23].

3.4.5 Εφαρμογή των μοντέλων

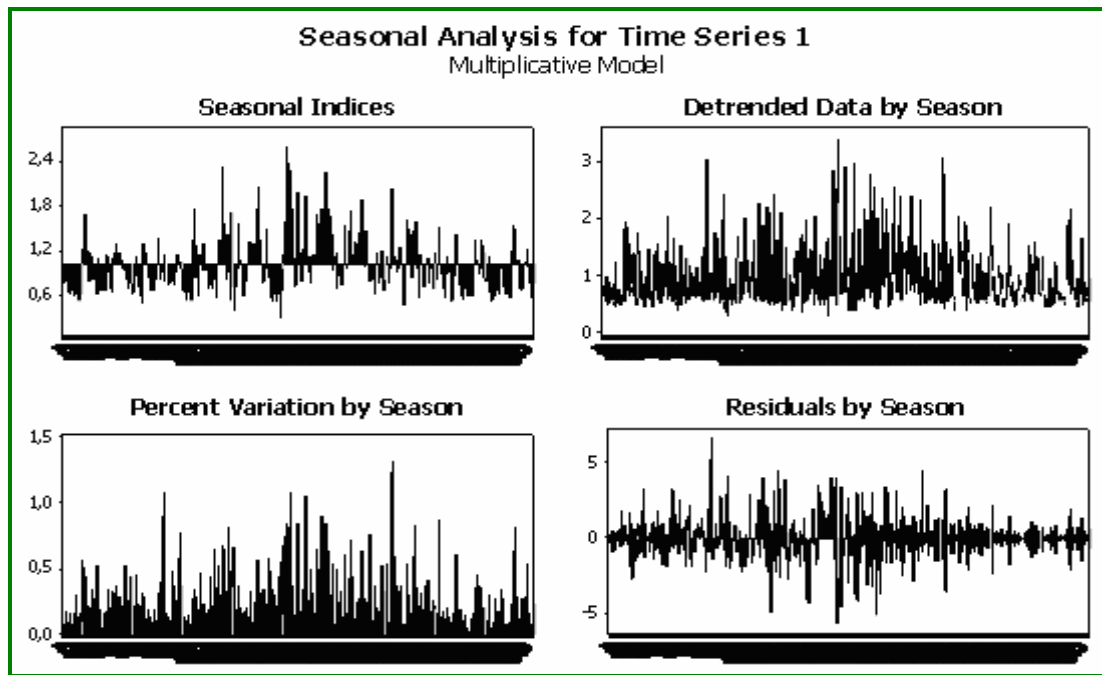
Στη συνέχεια ακολουθούν τα αποτελέσματα της εφαρμογής των παραπάνω μεθόδων με τη βοήθεια ολοκληρωμένων λογισμικών πακέτων Η/Υ. Χρησιμοποιήσαμε και πάλι το λογισμικό Minitab και παρουσιάζουμε συνοπτικά στα επόμενα διαγράμματα τη διάσπαση των χρονοσειρών μας στις συνιστώσες τους με βάση το πολλαπλασιαστικό μοντέλο.



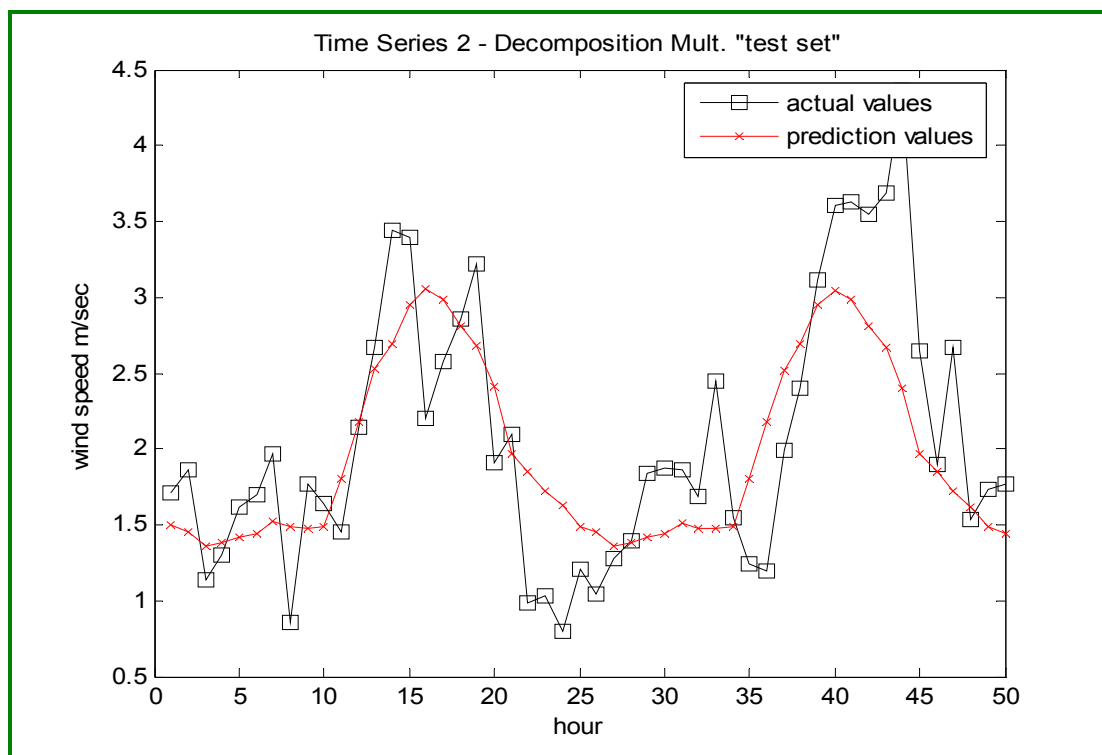
Σχήμα 3.9 Μέθοδος Διάσπασης Χρονοσειράς (πολλαπλασιαστικό μοντέλο) στη Χ.Σ. 1.



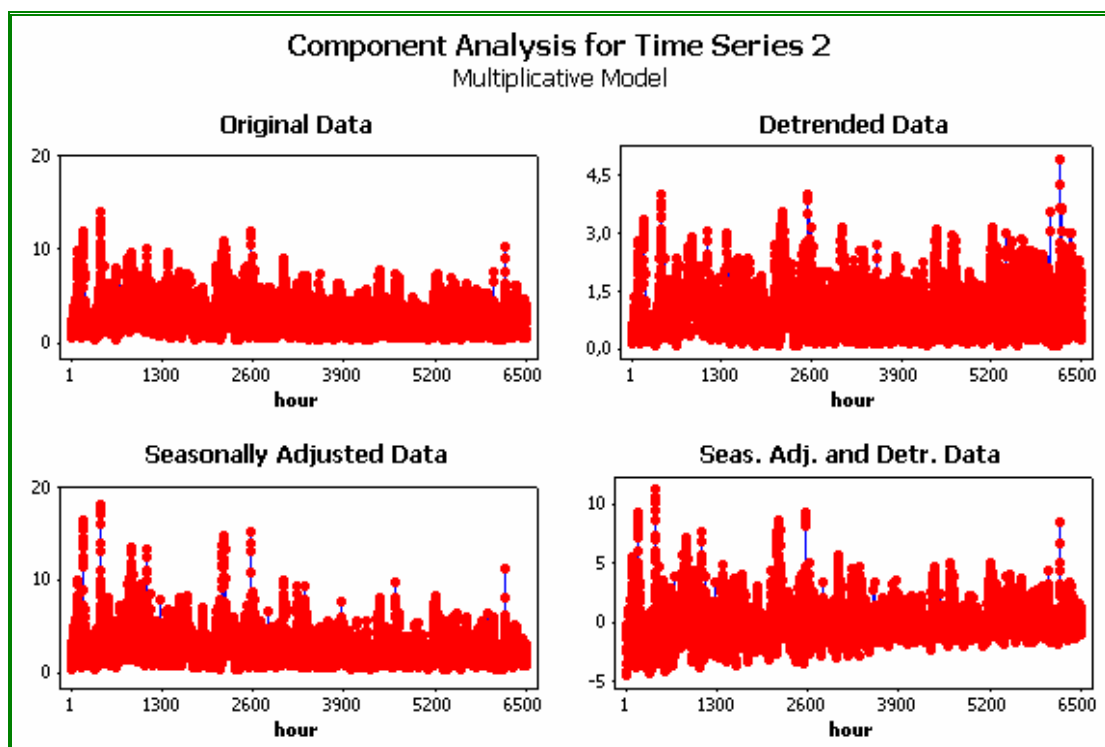
Σχήμα 3.10 Συνιστώσες Χρονοσειράς 1 (πολλαπλασιαστικό μοντέλο).



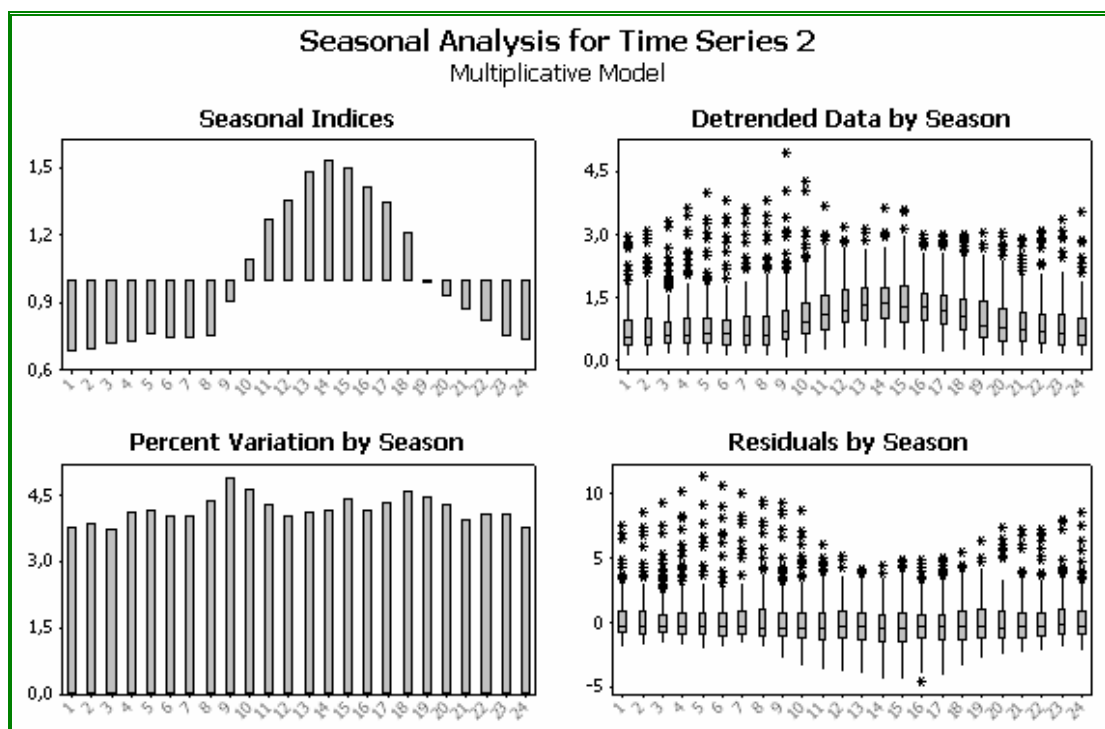
Σχήμα 3.11 Ανάλυση εποχικότητας Χρονοσειράς 1 (πολλαπλασιαστικό μοντέλο).



Σχήμα 3.12 Μέθοδος Διάσπασης Χρονοσειράς (πολλαπλασιαστικό μοντέλο) στη Χ.Σ. 2.



Σχήμα 3.13 Συνιστώσες Χρονοσειράς 2 (πολλαπλασιαστικό μοντέλο).



Σχήμα 3.14 Ανάλυση εποχικότητας Χρονοσειράς 2 (πολλαπλασιαστικό μοντέλο).

<i>Μέθοδος Διάσπασης Χρονοσειράς</i>	<i>TRAINING SET</i>			<i>TEST SET</i>		
	<i>MSE</i>	<i>MAE</i>	<i>MAPE</i>	<i>MSE</i>	<i>MAE</i>	<i>MAPE</i>
<i>Χρονοσειρά 1</i>	1.549	0.808	34.49	1.969	1.146	57.67
<i>Χρονοσειρά 2</i>	2.891	1.257	71.51	0.329	0.450	24.58

Πίνακας 3.3 Σύνοψη αποτελεσμάτων μεθόδου διάσπασης.

3.5 Ανάλυση ARIMA - Box Jenkins

Τα μοντέλα πρόβλεψης που παρουσιάστηκαν αποτελούν τις βασικές τεχνικές χρονοσειρών. Σε αυτή την παράγραφο θα κάνουμε μια μικρή αναφορά σε πιο προχωρημένες προσεγγίσεις της ανάλυσης χρονοσειρών. Παρουσιάζονται οι μέθοδοι αυτοπαλινδρόμησης κινητού μέσου (ARMA) χρονοσειρών. Αυτές οι μέθοδοι πρόβλεψης περιλαμβάνουν γενικευμένες μεθόδους αναπροσαρμοζόμενου φιλτραρίσματος και τεχνικές Box-Jenkins.

Τα ολοκληρωμένα αυτοπαλινδρομικά μοντέλα κινητού μέσου όρου (AutoRegressive Integrated-Moving Average) είναι στοχαστικά μαθηματικά μοντέλα με τα οποία προσπαθούμε να περιγράψουμε τη διαχρονική εξέλιξη κάποιου φυσικού μεγέθους. Δεδομένου ότι για την πλειοψηφία των φυσικών μεγεθών είναι αδύνατη η πλήρης γνώση και καταγραφή όλων των παραγόντων που επηρεάζουν την εξέλιξη τους στο χρόνο, είναι πολύ δύσκολη η διαχρονική περιγραφή του μεγέθους από ένα ντετερμινιστικό μοντέλο. Από την άλλη μεριά, η εξάρτηση τέτοιων μεγεθών από μη ντετερμινιστικούς παράγοντες καθιστά δυνατή την περιγραφή της διαχρονικής τους εξέλιξης από ένα στοχαστικό μοντέλο, με το οποίο μπορεί να υπολογιστεί η πιθανότητα με την οποία η τιμή του μεγέθους βρίσκεται σε κάποιο διάστημα.

Τα στοχαστικά μοντέλα περιέχουν τον τυχαίο παράγοντα (τυχαίο σφάλμα ή σφάλμα πρόβλεψης), τις τιμές του μεγέθους οι οποίες εμφανίστηκαν σε προηγούμενες χρονικές στιγμές και ίσως κάποιους άλλους στοχαστικούς

παράγοντες. Το μοντέλο που προκύπτει είναι ένας γραμμικός συνδυασμός των παραπάνω ποσοτήτων. Γενικά, έχουν αναπτυχθεί πολλά και ποικίλα τέτοια μοντέλα για την περιγραφή των διακυμάνσεων κάποιου μεγέθους μέσα στο χρόνο. Τα μοντέλα ARIMA χρησιμοποιούνται ευρύτατα γιατί βρίσκουν εφαρμογή στη μελέτη πολλών μεγεθών και φαίνεται να δίνουν μια "καλή" εικόνα της διαχρονικής τους συμπεριφοράς, καθώς και ικανοποιητικά αποτελέσματα στην πρόβλεψη των μελλοντικών τιμών του μεγέθους.

Τα μοντέλα ARIMA έχουν μελετηθεί εκτεταμένα από τους Box και Jenkins, σε βαθμό που τα ονόματα των παραπάνω να είναι σχεδόν συνώνυμα με τις ARIMA διαδικασίες και τις εφαρμογές τους στην ανάλυση και την πρόβλεψη χρονοσειρών. Οι Box-Jenkins πρότειναν μια οικογένεια αλγεβρικών μοντέλων πρόβλεψης, από τα οποία μπορεί κάποιος να διαλέξει το "καταλληλότερο" για την πρόβλεψη μιας δεδομένης χρονοσειράς. Στα μοντέλα αυτά οι προβλέψεις βασίζονται αποκλειστικά στις παρελθούσες τιμές και τα εμφανισθέντα πρότυπα συμπεριφοράς της χρονοσειράς που εξετάζεται.

Επειδή το θεωρητικό υπόβαθρο των μοντέλων ARIMA είναι αρκετά σύνθετο, είναι προτιμότερο θα δοθεί έμφαση στην προσπάθεια κατανόησης της ουσίας της μεθοδολογίας [24].

3.5.1 Βασικές έννοιες προχωρημένης ανάλυσης

Η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης (autocorrelation function)

Ο πλέον χρήσιμος στατιστικός δείκτης στην ανάλυση χρονοσειρών είναι ο συντελεστής αυτοσυσχέτισης (ή η συσχέτιση της χρονοσειράς με τον εαυτό της, για παρατηρήσεις που απέχουν μεταξύ τους 1,2 ή περισσότερες περιόδους). Ο συντελεστής αυτοσυσχέτισης (autocorrelation coefficient) ορίζεται:

$$r_k = \frac{\sum_{t=k+1}^n (Y_t - \bar{Y})(Y_{t-k} - \bar{Y})}{\sum_{t=1}^n (Y_{t-k} - \bar{Y})^2} \quad (3.40)$$

Ο r_1 υποδηλώνει πώς οι διαδοχικές παρατηρήσεις (καθυστέρηση 1) της χρονοσειράς σχετίζονται μεταξύ τους, ο r_2 πώς σχετίζονται οι παρατηρήσεις που

απέχουν δύο χρονικές περιόδους (καθυστέρηση 2) κλπ. Οι συντελεστές αυτοσυσχέτισης για καθυστερήσεις $1, 2, \dots$, δημιουργούν τη συνάρτηση αυτοσυσχέτισης (autocorrelation function) ή ACF.

Μοντέλο "λευκού θορύβου" (white noise model)

Η σχέση $Y_t = c + e_t$ περιγράφει ένα απλό τυχαίο μοντέλο, όπου η παρατήρηση Y_t εκφράζεται από δύο μέρη: ένα συνολικό επίπεδο c και μια συνιστώσα τυχαίου σφάλματος e_t . Ένα τέτοιο μοντέλο, το οποίο συχνά καλείται μοντέλο "λευκού θορύβου" και αποτελεί θεμελιώδες μοντέλο σε πολλές τεχνικές ανάλυσης χρονοσειρών.

Δειγματική κατανομή των αυτοσυσχετίσεων

Για ένα μοντέλο "λευκού θορύβου" η δειγματική θεωρία του r_k είναι γνωστή και συνεπώς μπορούν να μελετηθούν οι ιδιότητες της ACF. Γενικότερα, ένας τρόπος προσέγγισης του προβλήματος είναι να εξετασθεί καθεμιά από τις τιμές του r_k και με βάση το τυπικό σφάλμα (standard error) να ελεγχθεί εάν η τιμή αυτή είναι σημαντικά διάφορη του μηδενός.

Θεωρητικά, όλοι οι συντελεστές αυτοσυσχέτισης μια σειράς τυχαίων αριθμών πρέπει να είναι ίσοι με το μηδέν, αλλά στην πράξη, οι συντελεστές αυτοσυσχέτισης του δείγματος δεν είναι ακριβώς μηδέν επειδή τα δείγματα είναι πεπερασμένα. Έχει δειχθεί, ότι για ένα μοντέλο λευκού θορύβου η κατανομή των συντελεστών αυτοσυσχέτισης μπορεί να προσεγγισθεί από την καμπύλη της κανονικής κατανομής με μέση τιμή 0 και τυπικό σφάλμα $1/\sqrt{n}$ όπου n ο αριθμός των παρατηρήσεων. Η πληροφορία αυτή μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την ανάπτυξη ελέγχων υποθέσεων. Για παράδειγμα, 95% των συντελεστών αυτοσυσχέτισης του δείγματος πρέπει να ανήκουν στο διάστημα που ορίζεται από τη μέση τιμή συν ή πλην 1.96 standard errors, δηλαδή για ένα μοντέλο λευκού θορύβου στο $\pm 1.96/\sqrt{n}$. Εάν αυτό δεν συμβαίνει τότε πιθανώς δεν πρόκειται για μοντέλο λευκού θορύβου.

Στατιστικοί δείκτες Q , Q^* (Box-Pierce, Ljung-Box)

Ο δείκτης Q εξετάζει συνολικά τους συντελεστές αυτοσυσχέτισης και ελέγχει εάν το σύνολο είναι σημαντικά διάφορο του μηδενός.

$$Q = n \sum_{i=1}^h r_k^2 \quad (3.41)$$

όπου h η τάξη των μεταβλητών καθυστέρησης και n το πλήθος των παρατηρήσεων. Συνήθως $h \approx 20$ ή $h \approx 36$. Ο Q ακολουθεί την κατανομή χ^2 με $h-m$ βαθμούς ελευθερίας όπου m οι παράμετροι του μοντέλου, και η τιμή του συγκρίνεται με τις τιμές του πίνακα χ^2 για να εκτιμηθεί το επίπεδο της σημαντικότητάς του. Για ένα μοντέλο λευκού θορύβου $m=0$, έτσι σαν εναλλακτικός δείκτης χρησιμοποιείται ο δείκτης Q^* ο οποίος επίσης εξετάζει συνολικά τους συντελεστές αυτοσυσχέτισης.

$$Q^* = n(n+2) \sum_{k=1}^h (n-k)^{-1} r_k^2 \quad (3.42)$$

Ο Q^* ακολουθεί την ίδια κατανομή με τον Q .

Συντελεστής μερικής αυτοσυσχέτισης (Partial Autocorrelation Coefficient)

Ο συντελεστής μερικής αυτοσυσχέτισης χρησιμοποιείται σαν μέτρο του βαθμού της σχέσης ανάμεσα στην Y_t και την Y_{t-k} , όταν οι επιδράσεις όλων των άλλων μεταβλητών καθυστέρησης $1, 2, 3, \dots, k-1$ έχουν αφαιρεθεί. Ο συντελεστής μερικής αυτοσυσχέτισης τάξης k (για καθυστέρηση k), συμβολίζεται με a_k και μπορεί να υπολογισθεί εφαρμόζοντας τη μέθοδο της πολλαπλής γραμμικής παλινδρόμησης με εξαρτημένη μεταβλητή την Y_t και ανεξάρτητες μεταβλητές τις Y_{t-1}, \dots, Y_{t-k} :

$$Y_t = b_0 + b_1 Y_{t-1} + \dots + b_k Y_{t-k} \quad (3.43)$$

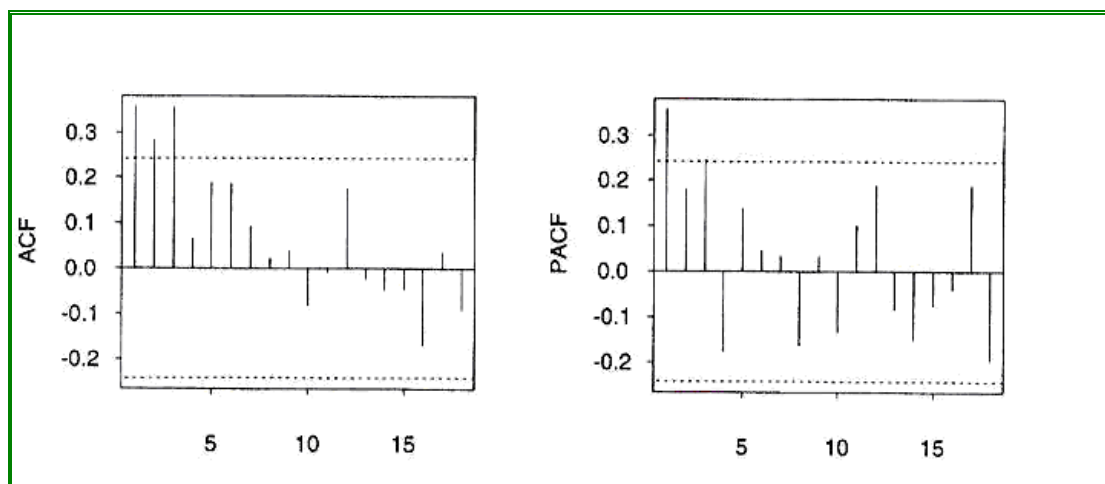
Ο συντελεστής a_k ισούται με τον συντελεστή b_k . Πρέπει να σημειωθεί ότι ο πρώτος συντελεστής μερικής αυτοσυσχέτισης a_1 είναι πάντα ίσος με τον πρώτο συντελεστή αυτοσυσχέτισης r_1 .

Αναγνώριση Εποχικότητας

Η ύπαρξη εποχικότητας σε μια χρονοσειρά, μπορεί να αναγνωρισθεί από τις υψηλές τιμές των συντελεστών αυτοσυσχέτισης ή μερικής αυτοσυσχέτισης για τις αντίστοιχες εποχιακές καθυστερήσεις. Συχνά σημαντικές είναι και οι

αυτοσυσχετίσεις για καθυστερήσεις πολλαπλάσιες των εποχιακών καθυστερήσεων. Έτσι, για μηνιαία δεδομένα που παρουσιάζουν εποχικότητα (εποχικότητα 12), υψηλές αυτοσυσχετίσεις μπορούν να παρατηρηθούν για καθυστέρηση 12 αλλά και για καθυστερήσεις 24 και 36.

Στο παρακάτω σχήμα, στην ACF όμως παρατηρούνται υψηλές αυτοσυσχετίσεις για καθυστερήσεις 1,2 και 3 και στην PACF σημαντικές μερικές αυτοσυσχετίσεις για καθυστερήσεις 1 και 3. Αυτό αποτελεί ένδειξη ότι η χρονοσειρά δεν είναι λευκού θορύβου. Επίσης η αυτοσυσχέτιση για καθυστέρηση 12 είναι σχετικά υψηλή αν και δεν είναι στατιστικά σημαντική. Αυτό ίσως υποδηλώνει την ύπαρξη κάποιας εποχικότητας στη χρονοσειρά αν και δεν μπορεί να εξαχθεί κάποιο ασφαλές συμπέρασμα.



Σχήμα 3.15 ACF - PACF.

Έλεγχος της στασιμότητας της χρονοσειράς

Εάν η χρονοσειρά είναι στάσιμη, τότε τα δεδομένα κυμαίνονται γύρω από ένα σταθερό μέσο, ανεξάρτητα του χρόνου, και η διακύμανση παραμένει σταθερή. Συνήθως είναι δυνατόν να ελεγχθεί η στασιμότητα με τη χρήση της γραφικής παράστασης της χρονοσειράς :

- Εάν δεν παρατηρείται αλλαγή της μέσης τιμής κατά μήκος του χρόνου, τότε η χρονοσειρά είναι στάσιμη ως προς τη μέση τιμή.
- Εάν δεν παρατηρείται αλλαγή της διακύμανσης κατά μήκος του χρόνου, τότε η χρονοσειρά είναι στάσιμη ως προς τη διακύμανση.

Το διάγραμμα των αυτοσυσχετίσεων μπορεί επίσης να χρησιμοποιηθεί για τον έλεγχο της στασιμότητας ως προς τη μέση τιμή. Οι αυτοσυσχετίσεις στάσιμων χρονοσειρών φθίνουν στο μηδέν με γρήγορο ρυθμό, ενώ για μη στάσιμες χρονοσειρές φθίνουν με αργό ρυθμό καθώς αυξάνει ο αριθμός των καθυστερήσεων.

Μετατροπή μη στάσιμης χρονοσειράς σε στάσιμη

Τάσεις ή άλλα μη στάσιμα πρότυπα στο επίπεδο της χρονοσειράς, έχουν σαν αποτέλεσμα θετικές αυτοσυσχετίσεις οι οποίες επικρατούν στο διάγραμμα των αυτοσυσχετίσεων. Για το λόγο αυτό, είναι σημαντικό να αφαιρεθούν τα μη στάσιμα πρότυπα ώστε να εμφανισθεί η πραγματική δομή των συσχετίσεων και να αναπτυχθεί το κατάλληλο μοντέλο. Ένας τρόπος να επιτευχθεί αυτό είναι με τη χρήση της μεθόδου της διαφορίσης.

Οι σειρές διαφορών πρώτης τάξης προκύπτουν από τις διαφορές των διαδοχικών παρατηρήσεων της αρχικής χρονοσειράς :

$$Y'_t = Y_t - Y_{t-1} \quad (3.44)$$

Μερικές φορές η διαφορίση πρώτης τάξης δεν αρκεί για τη μετατροπή μιας μη στάσιμης χρονοσειράς σε στάσιμη και είναι αναγκαίο να διαφοριστούν τα δεδομένα για δεύτερη φορά :

$$Y''_t = Y'_t - Y'_{t-1} = (Y_t - Y_{t-1}) - (Y_{t-1} - Y_{t-2}) = Y_t - 2Y_{t-1} + Y_{t-2} \quad (3.45)$$

Η σειρά διαφορών δεύτερης τάξης έχει n-2 δεδομένα

Μοντέλο τυχαίου περιπάτου (random walk)

Ένα μοντέλο μπορεί να γραφεί σαν :

$$Y_t = Y_{t-1} + e_t \quad (3.46)$$

όπου e_t είναι λευκός θόρυβος.

Το μοντέλο είναι ευρέως γνωστό σαν μοντέλο τυχαίου περιπάτου και χρησιμοποιείται για μη στάσιμα δεδομένα. Τα μοντέλα τυχαίου περιπάτου παρουσιάζουν μεγάλες περιόδους εμφανών τάσεων, οι οποίες μπορούν να αλλάξουν κατεύθυνση με απρόβλεπτο τρόπο.

Εποχιακή διαφύριση

Για μη στάσιμα εποχιακά δεδομένα, η στάσιμη χρονοσειρά προκύπτει με τη χρήση των εποχιακών διαφορών. Σαν εποχιακή διαφορά ορίζεται η διαφορά μιας παρατήρησης και της αντίστοιχης παρατήρησης του προηγούμενου έτους. Έτσι για μηνιαία δεδομένα που παρουσιάζουν εποχικότητα, η εποχιακή διαφορά ορίζεται :

$$Y'_t = Y_t - Y_{t-12} \quad (3.47)$$

Γενικά, οι σειρές εποχιακών διαφορών προκύπτουν από τις διαφορές μεταξύ δεδομένων που απέχουν μεταξύ τους s χρονικές περιόδους, όπου s η εποχικότητα. Για μηνιαία δεδομένα $s = 12$, για τριμηνιαία $s = 4$ κλπ. Όμοια με τις διαφορές πρώτης τάξης, η διαφύριση μπορεί να επαναληφθεί ώστε να προκύψουν δεύτερης τάξης εποχιακές διαφορές, αν και αυτό σπάνια κρίνεται αναγκαίο.

Τελεστής Ολίσθησης B

Μια πολύ χρήσιμη σημειογραφική επινόηση είναι ο τελεστής ολίσθησης B ο οποίος ορίζεται ως :

$$BY_t = Y_{t-1} \quad (3.48)$$

Όπως προκύπτει από τον ορισμό, ο χρονικός δείκτης κάθε μεταβλητής η οποία πολλαπλασιάζεται με τον τελεστή, "ολισθαίνει" τόσες περιόδους προς τα πίσω, όσος είναι ο εκθέτης k του τελεστή. Ισχύει γενικότερα

$$B^k Y_t = Y_{t-k} \quad (3.49)$$

Ας σημειωθεί ότι ο τελεστής B δεν έχει καμιά επίδραση όταν εφαρμόζεται σε σταθερές ποσότητες. Με τη χρήση του τελεστή ολίσθησης είναι εύκολο να περιγραφεί η διαδικασία της διαφύρισης.

Για διαφόριση πρώτης τάξης είναι :

$$Y'_t = Y_t - Y_{t-1} = Y_t - BY_t = (1-B)Y_t \quad (3.50)$$

Όμοια για διαφόριση δεύτερης τάξης :

$$\begin{aligned} Y''_t &= Y'_t - Y'_{t-1} = (Y_t - Y_{t-1}) - (Y_{t-1} - Y_{t-2}) = Y_t - 2Y_{t-1} + Y_{t-2} = \\ &= (1 - 2B + B^2)Y_t = (1-B)^2 Y_t \end{aligned} \quad (3.51)$$

Γενικότερα η διαφόριση d τάξης μπορεί να περιγραφεί ως $(1-B)^d Y_t$. Για εποχιακή διαφόριση πρώτης τάξης δεδομένων με μηνιαία εποχικότητα είναι:

$$Y'_t = Y_t - Y_{t-12} = Y_t - B^{12}Y_t = (1-B^{12})Y_t \quad (3.52)$$

και γενικότερα για εποχιακή διαφόριση πρώτης τάξης δεδομένων μη εποχικότητα s είναι:

$$Y'_t = Y_t - Y_{t-s} = Y_t - B^s Y_t = (1-B^s)Y_t \quad (3.53)$$

Η εποχιακή διαφόριση η οποία ακολουθείται από διαφόριση πρώτης τάξης γράφεται ως:

$$(1-B)(1-B^s)Y_t \quad (3.54)$$

3.5.2 Μοντέλα χρονοσειρών ARIMA

Τα μοντέλα πολλαπλής γραμμικής παλινδρόμησης περιγράφονται από την εξίσωση [24]:

$$Y = b_0 + b_1 X_1 + b_2 X_2 + \dots + b_p X_p + e \quad (3.55)$$

όπου Y η εξαρτημένη μεταβλητή (υπό πρόβλεψη μεταβλητή) και X_1, X_2, \dots, X_p οι ανεξάρτητες μεταβλητές (επεξηγηματικές μεταβλητές).

Η εξίσωση $Y_t = c + \varphi_1 Y_{t-1} + e_t$ είναι μια εξίσωση πολλαπλής γραμμικής παλινδρόμησης, με τη διαφορά ότι οι ανεξάρτητες μεταβλητές είναι προηγούμενες τιμές της υπό πρόβλεψη μεταβλητής ή οι τιμές της μεταβλητής για χρονικές καθυστερήσεις 1, 2, ..., p. Το μοντέλο καλείται αυτοπαλινδρομικό (autoregression ή AR).

Τα αυτοπαλινδρομικά μοντέλα πρέπει να τύχουν διαφορετικού χειρισμού από τα κλασσικά παλινδρομικά μοντέλα για δύο λόγους :

- ο Η βασική υπόθεση της ανεξαρτησίας των σφαλμάτων (υπολοίπων) μπορεί εύκολα να παραβιαστεί στα αυτοπαλινδρομικά μοντέλα, αφού οι επεξηγηματικές μεταβλητές έχουν συνήθως μια εξαρτημένη σχέση καθώς περιγράφουν την εξέλιξη του ίδιου μεγέθους.
- ο Ο τρόπος προσδιορισμού του πλήθους των προηγούμενων τιμών της υπό πρόβλεψη μεταβλητής δεν είναι πάντοτε "ευθύς".

Όμοια είναι δυνατόν να θεωρηθεί ένα παλινδρομικό μοντέλο της μορφής :

$$Y = b_0 + b_1 e_{t-1} + b_2 e_{t-2} + \dots + b_p e_{t-p} + e_t \quad (3.56)$$

όπου οι επεξηγηματικές μεταβλητές, είναι οι τιμές των προηγούμενων σφαλμάτων.

Εδώ, σαφώς υπάρχει μια σχέση εξάρτησης μεταξύ διαδοχικών σφαλμάτων, και το μοντέλο καλείται κινητού μέσου όρου (moving average ή MA), επειδή ορίζεται σαν κινητός μέσος όρος της σειράς σφαλμάτων, et.

Τα αυτοπαλινδρομικά μοντέλα (AR) μπορούν να ενωθούν αποτελεσματικά με τα μοντέλα κινητού μέσου όρου (MA) και να σχηματίσουν μια χρήσιμη ομάδα μοντέλων χρονοσειρών, τα οποία ονομάζονται αυτοπαλινδρομικά μοντέλα κινητού μέσου όρου (autoregressive moving average ή ARMA models). Τα μοντέλα αυτά μπορούν να χρησιμοποιηθούν μόνο για στάσιμες χρονοσειρές αλλά μπορούν να επεκταθούν και σε μη στάσιμες χρονοσειρές, με τη χρήση της μεθόδου της διαφορίσης. Τότε ονομάζονται ολοκληρωμένα (integrated ή I) αυτοπαλινδρομικά μοντέλα κινητού μέσου όρου (autoregressive integrated moving average ή ARIMA models).

Τα μη εποχιακά ARIMA μοντέλα είναι γνωστά σαν ARIMA(p, d, q) όπου:

AR : p = η τάξη του AR όρου

I : d = η τάξη της διαφορίσης

MA : q = η τάξη του MA όρου

Το μοντέλο λευκού θορύβου ταξινομείται σαν ARIMA(0,0,0), ενώ το μοντέλο τυχαίου περιπάτου σαν ARIMA(0,1,0) [24].

Αυτοπαλινδρομικά μοντέλα πρώτης τάξης

Τα ARIMA(1,0,0) ή AR(1) περιγράφονται από την εξίσωση :

$$Y_t = c + \phi_1 Y_{t-1} + e_t \quad (3.57)$$

Η παρατήρηση Y_t εξαρτάται από την Y_{t-1} , ενώ ο συντελεστής ϕ_1 παίρνει τιμές ανάμεσα στο -1 και 1. Για $\phi_1=0$ το μοντέλο είναι ισοδύναμο με ένα μοντέλο λευκού θορύβου, ενώ για $\phi_1=1$ το μοντέλο είναι ισοδύναμο με ένα μοντέλο τυχαίου περιπάτου. Γενικά, μπορεί να χρησιμοποιηθεί ένα AR(1) μοντέλο εάν :

- οι συντελεστές αυτοσυσχέτισης φθίνουν εκθετικά
- υπάρχει μόνο ένας στατιστικά σημαντικός συντελεστής μερικής αυτοσυσχέτισης.

Μοντέλα Κινητού Μέσου Όρου πρώτης τάξης

Τα ARIMA(0,0,1) ή MA(1) περιγράφονται από την εξίσωση :

$$Y_t = c + e_t - \theta_1 e_{t-1} \quad (3.58)$$

Η παρατήρηση Y_t εξαρτάται από τον όρο σφάλματος e_t και το προηγούμενο σφάλμα e_{t-1} , ενώ ο συντελεστής θ_1 παίρνει τιμές ανάμεσα στο -1 και 1. Τα σφάλματα e_t ακολουθούν την κανονική κατανομή με μέση τιμή 0 και διακύμανση 1. Οι συντελεστές μερικής αυτοσυσχέτισης φθίνουν εκθετικά στο μηδέν, ενώ υπάρχει μόνο μία σημαντική αυτοσυσχέτιση.

Αυτοπαλινδρομικά μοντέλα μεγαλύτερης τάξης

Γενικότερα, ένα αυτοπαλινδρομικό μοντέλο p-τάξης ορίζεται ως εξής :

$$Y_t = c + \phi_1 Y_{t-1} + \phi_2 Y_{t-2} + \dots + \phi_p Y_{t-p} + e_t \quad (3.59)$$

όπου

c = ο σταθερός όρος

ϕ_j = η παράμετρος j

e_t = ο όρος σφάλματος τη χρονική στιγμή t.

Οι τιμές των παραμέτρων ϕ_j ακολουθούν συγκεκριμένους περιορισμούς.

Για $p = 1$, $-1 < \phi_1 < 1$

Για $p = 2$, $-1 < \phi_2 < 1$, $\phi_2 + \phi_1 < 1$, $\phi_2 - \phi_1 < 1$.

Για $p \geq 3$, επικρατούν πολυπλοκότερες συνθήκες.

Με τη χρήση του τελεστή ολίσθησης B, το μοντέλο μπορεί να γραφεί ως :

$$\begin{aligned} Y_t - \phi_1 Y_{t-1} - \dots - \phi_p Y_{t-p} &= c + e_t \\ \text{ή} \\ (1 - \phi_1 B - \dots - \phi_p B^p) Y_t &= c + e_t \end{aligned} \quad (3.60)$$

Μοντέλα Κινητού Μέσου Όρου μεγαλύτερης τάξης

Ένα μοντέλο κινητού μέσου όρου q-τάξης ορίζεται ως εξής :

$$Y_t = c + e_t - \theta_1 e_{t-1} + \theta_2 e_{t-2} + \dots + \theta_p e_{t-p} \quad (3.61)$$

όπου

c = ο σταθερός όρος

θ_j = η παράμετρος j

e_{t-k} = ο όρος σφάλματος τη χρονική στιγμή t-k.

Οι περιορισμοί που απαιτούνται για τα AR απαιτούνται και για τα MA μοντέλα.

Για $q = 1$, $-1 < \theta_1 < 1$

Για $q = 2$, $-1 < \theta_2 < 1$, $\theta_2 + \theta_1 < 1$, $\theta_2 - \theta_1 < 1$.

Για $q \geq 3$, επικρατούν πολυπλοκότερες συνθήκες.

Με τη χρήση του τελεστή ολίσθησης B , το μοντέλο μπορεί να γραφεί ως :

$$Y_t = c + (1 - \theta_1 B - \dots - \theta_q B^q) e_t. \quad (3.62)$$

Διαδικασίες ARMA

Τα βασικά στοιχεία των AR και MA μοντέλων μπορούν να συνδυαστούν για την ανάπτυξη πλήθους μοντέλων. Για παράδειγμα η παρακάτω εξίσωση συνδυάζει ένα AR μοντέλο πρώτης τάξης και ένα MA μοντέλο πρώτης τάξης. Το μοντέλο ονομάζεται ARMA(1,1) ή ARIMA(1,0,1), και χρησιμοποιείται για χρονοσειρές στάσιμες ως προς τη μέση τιμή και την διακύμανση.

$$Y_t = c + \phi_1 Y_{t-1} + e_t - \theta_1 e_{t-1} \quad (3.63)$$

Εδώ η Y_t εξαρτάται από την προηγούμενη τιμή Y_{t-1} και το προηγούμενο σφάλμα e_{t-1} . Με τη χρήση του τελεστή ολίσθησης B , το μοντέλο μπορεί να γραφεί ως :

$$(1 - \phi_1 B) Y_t = c + (1 - \theta_1 B) e_t \quad (3.64)$$

Η εξίσωση ενός ARMA μοντέλου με όρους μεγαλύτερης τάξης είναι :

$$(1 - \phi_1 B - \dots - \phi_p B^p) Y_t = c + (1 - \theta_1 B - \dots - \theta_p B^p) e_t \quad (3.65)$$

Για τις παραμέτρους ενός ARMA μοντέλου ισχύουν οι περιορισμοί που ισχύουν για τις παραμέτρους των AR και MA μοντέλων.

Αναγνώριση της κατάλληλης AR ή MA διαδικασίας

Με τη χρήση των ACF και PACF, είναι δυνατή η αναγνώριση της κατάλληλης AR ή MA διαδικασίας. Στον ακόλουθο πίνακα περιγράφονται τα αναλυτικά χαρακτηριστικά των ACF και PACF των διαδικασιών αυτών.

Διαδικασία	ACF		PACF	
AR(1)	Εκθετική μείωση : θετικές τιμές αν $\phi_1 > 0$ εναλλαγή πρόσημου ξεκινώντας από αρνητική τιμή, αν $\phi_1 < 0$		Απότομος μηδενισμός μετά την περίοδο 1. Η τιμή την περίοδο 1 είναι : θετική αν $\phi_1 > 0$ αρνητική αν $\phi_1 < 0$	
AR(p)	Εκθετική μείωση ή πρότυπο φθίνουσας ημιτονοειδούς συνάρτησης. Το ακριβές πρότυπο εξαρτάται από το πρόσημο και το μέγεθος των $\phi_1 \phi_2, \dots, \phi_p$.		Μη μηδενικές τιμές για τις πρώτες p περιόδους και στη συνέχεια απότομος μηδενισμός.	
MA(1)	Απότομος μηδενισμός μετά την περίοδο 1. Η τιμή την περίοδο 1 είναι : θετική αν $\theta_1 < 0$ αρνητική αν $\theta_1 > 0$		Εκθετική μείωση : εναλλαγή πρόσημου ξεκινώντας από θετική τιμή αν $\theta_1 < 0$ αρνητικές τιμές αν $\theta_1 > 0$	
MA(q)	Μη μηδενικές τιμές για τις πρώτες q περιόδους και στη συνέχεια απότομος μηδενισμός.		Εκθετική μείωση ή πρότυπο φθίνουσας ημιτονοειδούς συνάρτησης. Το ακριβές πρότυπο εξαρτάται από το πρόσημο και το μέγεθος των $\theta_1 \theta_2, \dots, \theta_q$.	

Πίνακας 3.4 Εκτίμηση της τάξης των AR και MA με τη βοήθεια των ACF-PACF.

Διαδικασίες ARIMA

Εάν η χρονοσειρά είναι μη στάσιμη τότε αντί για ένα ARMA μοντέλο, εφαρμόζεται ένα μοντέλο ARIMA(p,d,q). Η πιο απλή περίπτωση είναι το ARIMA(1,1,1) με εξίσωση :

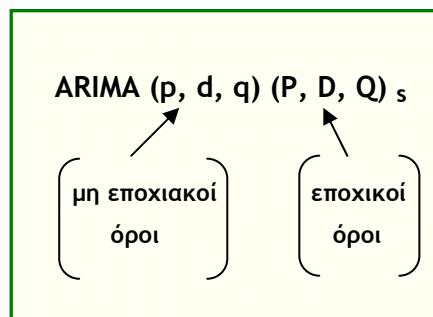
$$(1 - \phi_1 B)(1 - B)Y_t = c + (1 - \theta_1 B)e_t \quad (3.66)$$

Οι συναρτήσεις αυτοσυσχέτισης (ACF) και μερικής αυτοσυσχέτισης (PACF) των μοντέλων ARIMA(p,d,q) ακολουθούν ένα πλήθος προτύπων που καθιστά αδύνατη τη

θέσπιση κανόνων για την αναγνώριση του καταλληλότερου μοντέλου. Η επιλογή όμως ενός κατάλληλου μοντέλου δεν είναι τόσο δύσκολη καθώς διαφορετικά μοντέλα είναι δυνατόν να παράγουν "καλές" προβλέψεις. Στην πράξη σπάνια χρησιμοποιούνται μοντέλα με τιμές p, d, q διαφορετικές από 0, 1 και 2.

Εποχικότητα και μοντέλα ARIMA.

Με τον ίδιο ακριβώς τρόπο που ακόλουθα δεδομένα παρουσιάζουν AR, MA, ARMA και ARIMA ιδιότητες, έτσι και δεδομένα που απέχουν s περιόδους (s η εποχικότητα) είναι δυνατόν να παρουσιάζουν τέτοιες ιδιότητες. Τα μοντέλα ARIMA που έχουν επεκταθεί ώστε να χειρίζονται την εποχικότητα συμβολίζονται ως :



όπου s η εποχικότητα.

Ακολούθως περιγράφεται ένα μοντέλο ARIMA(1,1,1)(1,1,1)₄ με τη χρήση του τελεστή ολίσθησης B .

$$(1 - \phi_1 B)(1 - \Phi_1 B^4)(1 - B)(1 - B^4)Y_t = (1 - \theta_1 B)(1 - \Theta_1 B^4)e_t$$

εποχιακοί
όροι

Οι εποχιακοί όροι μπορούν να αναγνωρισθούν από τις ACF και PACF.

Για παράδειγμα η ACF ενός εποχιακού MA μοντέλου, ARIMA(0,0,0)(0,0,1)₁₂, θα παρουσιάζει μόνο μια στατιστικά σημαντική τιμή για καθυστέρηση 12 και η PACF θα φθίνει εκθετικά στις εποχιακές καθυστερήσεις 12, 24, 36, Όμοια για ένα

εποχιακό AR μοντέλο, $ARIMA(0,0,0)(1,0,0)_{12}$, η ACF θα φθίνει εκθετικά στις εποχιακές καθυστερήσεις ενώ η PACF θα παρουσιάζει μόνο μια στατιστικά σημαντική τιμή για καθυστέρηση 12.

Εκτίμηση των παραμέτρων

Η μέθοδος ελαχίστων τετραγώνων μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την εκτίμηση των παραμέτρων ενός ARIMA μοντέλου, αλλά η εφαρμογή της είναι αρκετά δύσκολη όταν στο μοντέλο συμπεριλαμβάνονται MA όροι ($q > 0$). Αντίθετα μπορεί να χρησιμοποιηθεί μια επαναληπτική μέθοδος. Αφού επιλεχθούν αρχικές τιμές για τις παραμέτρους, στη συνέχεια βελτιώνονται μέσω μιας επαναληπτικής διαδικασίας μέχρι να ελαχιστοποιηθεί το άθροισμα των τετραγώνων των σφαλμάτων.

Μια άλλη επαναληπτική μέθοδος η οποία χρησιμοποιείται συχνά είναι η μέθοδος μεγίστης πιθανοφάνειας. Η πιθανοφάνεια ενός συνόλου δεδομένων συμβολίζεται με L και είναι ανάλογη με την πιθανότητα να παραχθούν τα πραγματικά δεδομένα από το μοντέλο. Η μέθοδος μεγίστης πιθανοφάνειας χρησιμοποιείται για την εκτίμηση των τιμών των παραμέτρων που μεγιστοποιούν την πιθανότητα L .

Κάθε εκτιμώμενος συντελεστής έχει ένα τυπικό σφάλμα γιατί είναι μια στατιστική τιμή που βασίζεται σε πληροφορία από ένα μόνο δείγμα. Ένα διαφορετικό δείγμα πιθανόν να έδινε διαφορετικές εκτιμήσεις για τους συντελεστές του μοντέλου. Η σημαντικότητα των συντελεστών ελέγχεται μέσω του στατιστικού δείκτη t . Στην πράξη απορρίπτουμε κάθε εκτιμώμενη τιμή συντελεστή με απόλυτη t -τιμή μικρότερη του 2.0. Κάθε συντελεστής με απόλυτη τιμή $t < 2$ δεν είναι σημαντικά διάφορος του μηδενός για επίπεδο σημαντικότητας 5% και οδηγεί στη δημιουργία μη φειδωλών μοντέλων και άρα σε λιγότερο ακριβείς προβλέψεις.

Τα περισσότερα στατιστικά υπολογιστικά πακέτα προσαρμόζουν αυτόματα ένα μοντέλο ARIMA σε μια χρονοσειρά, εκτελούν όλους τους αναγκαίους στατιστικούς ελέγχους και παράγουν εκθέσεις με τις τιμές των παραμέτρων, το τυπικό τους σφάλμα, την t -τιμή τους, το επίπεδο σημαντικότητας, την διακύμανση των υπολοίπων και γενικότερα τις τιμές όλων των στατιστικών δεικτών που χρησιμοποιούνται για τον έλεγχο της καταλληλότητας του μοντέλου [24].

3.5.3 Επιλογή του καλύτερου μοντέλου ARIMA

Μετά την εκτίμηση των παραμέτρων ενός μοντέλου ARIMA είναι αναγκαία η εκ νέου αναγνώριση προκειμένου να διαπιστωθεί εάν το επιλεγμένο μοντέλο μπορεί να βελτιωθεί. Συγκεκριμένα σε αυτό το στάδιο της διαδικασίας μοντελοποίησης πρέπει:

- ο Εάν προκύψουν συντελεστές στατιστικά μη σημαντικοί, οι αντίστοιχοι όροι πρέπει να αφαιρεθούν από το μοντέλο.
- ο Οι ACF και PACF παρέχουν κάποια καθοδήγηση στην επιλογή ενός απλού AR ή MA μοντέλου. Εάν το καταλληλότερο μοντέλο είναι ένα σύνθετο ARMA μοντέλο, αυτό είναι πολύ δύσκολο να αναγνωρισθεί από τις ACF και PACF. Μετά την επιλογή ενός απλού μοντέλου πρέπει να μελετηθεί εάν αυτό μπορεί να επεκταθεί σε ένα σύνθετο ARMA μοντέλο.
- ο Εάν έχουν εκτιμηθεί περισσότερα από ένα "καλά" μοντέλα, πρέπει να εφαρμοσθεί μια μέθοδος επιλογής του καλύτερου από αυτά.

Ένα ικανοποιητικό κριτήριο για την επιλογή του καλύτερου μοντέλου θα μπορούσε να είναι η ελαχιστοποίηση του αθροίσματος ελαχίστων τετραγώνων ή η μεγιστοποίηση της πιθανότητας. Η συγκεκριμένη προσέγγιση όμως δεν δίνει πάντα καλά αποτελέσματα, αφού το άθροισμα ελαχίστων τετραγώνων μπορεί να γίνει μικρότερο και η πιθανότητα μεγαλύτερη, αυξάνοντας απλά των αριθμό των όρων του μοντέλου.

Ένα ικανοποιητικό κριτήριο είναι το Akaike's Information Criterion ή AIC, το οποίο "τιμωρεί" την εισαγωγή πρόσθετων όρων στο μοντέλο. Αν $m = p + q + P + Q$ είναι το πλήθος των όρων, τότε επιλέγουμε εκείνες τις p, q, P, Q που ελαχιστοποιούν το AIC :

$$AIC = -2 \log L + 2m, \quad \text{όπου } L \text{ η πιθανοφάνεια.} \quad (3.67)$$

Διαφορά στις τιμές του AIC μικρότερη του 2 δεν θεωρείται σημαντική και μπορεί να χρησιμοποιηθεί το απλούστερο μοντέλο. Χρησιμοποιούνται επίσης αρκετές παραλλαγές του AIC συμπεριλαμβανομένων επίσης των BIC (Bayesian Information Criterion) και FPE (Final Prediction Error) [24].

3.5.4 Διαγνωστικός έλεγχος

Αν και το επιλεγμένο μοντέλο θεωρείται το καλύτερο από αυτά που εξετάστηκαν, είναι επίσης αναγκαίο να επιβεβαιωθεί η επάρκεια του μοντέλου. Αυτό επιτυγχάνεται με την εξέταση των υπολοίπων (σφαλμάτων), προκειμένου να διαπιστωθεί εάν αυτά ακολουθούν κάποιο πρότυπο.

Τα υπόλοιπα ενός καλού μοντέλου πρόβλεψης πρέπει να είναι "λευκός θόρυβος" και συνεπώς οι ACF και PACF των υπολοίπων δεν πρέπει να παρουσιάζουν στατιστικά σημαντικές αυτοσυσχετίσεις και μερικές αυτοσυσχετίσεις αντίστοιχα. Οι συντελεστές αυτοσυσχέτισης των υπολοίπων μπορούν να εξετασθούν συνολικά με τη χρήση του στατιστικού δείκτη Q^* (Ljung-Box). Εάν η τιμή του Q^* δεν είναι στατιστικά σημαντική τα υπόλοιπα μπορούν να θεωρηθούν μια σειρά "λευκού θορύβου".

Εάν τα υπόλοιπα δεν είναι λευκός θόρυβος τότε το μοντέλο είναι ανεπαρκές και πρέπει να εξετασθούν άλλα μοντέλα ARIMA. Το πρότυπο που ακολουθούν οι στατιστικά σημαντικοί συντελεστές αυτοσυσχέτισης και μερικής αυτοσυσχέτισης των υπολοίπων, υποδεικνύουν τον τρόπο βελτίωσης του μοντέλου. Για παράδειγμα σημαντικές τιμές για εποχιακές καθυστερήσεις υποδεικνύουν την προσθήκη μιας εποχιακής συνιστώσας ή σημαντικές τιμές για μικρές καθυστερήσεις υποδεικνύουν την αύξηση των μη εποχιακών AR ή MA συνιστωσών του μοντέλου.

Συνήθως τα μοντέλα με τις μικρότερες AIC τιμές έχουν υπόλοιπα λευκού θορύβου. Περιστασιακά είναι δυνατόν να υιοθετηθεί όχι το μοντέλο με την μικρότερη AIC τιμή αλλά αυτό με τα "καλύτερα" υπόλοιπα [24].

3.5.5 Πρόβλεψη με τη χρήση μοντέλων ARIMA

Αφού επιλεγεί το καλύτερο μοντέλο, αυτό χρησιμοποιείται για την παραγωγή προβλέψεων. Για παράδειγμα, ας υποθεθεί ότι το μοντέλο που επιλέχθηκε είναι το $ARIMA(0,1,1)(0,1,1)_{12}$ με εξίσωση :

$$(1-B)(1-B^{12})Y_t = (1-\theta_1 B)(1-\theta_1 B^{12})e_t$$

Αφού η εξίσωση αναλυθεί προκύπτει :

$$Y_t = Y_{t-1} + Y_{t-12} - Y_{t-13} + e_t - \theta_1 e_{t-1} - \theta_1 e_{t-12} + \theta_1 e_{t-13}$$

και προκειμένου να γίνει πρόβλεψη για χρονικό ορίζοντα 1, η εξίσωση γράφεται :

$$Y_{t+1} = Y_t + Y_{t-11} - Y_{t-12} + e_{t+1} - \theta_1 e_t - \theta_1 e_{t-11} + \theta_1 e_{t-12}$$

Ο όρος e_{t+1} δεν είναι γνωστός αφού αντιπροσωπεύει το μελλοντικό τυχαίο σφάλμα και θέτεται ίσος με μηδέν. Από το μοντέλο που έχει προσαρμοσθεί στην χρονοσειρά υπάρχουν τιμές για τους όρους e_t , e_{t-11} και e_{t-12} που είναι τα υπόλοιπα που αντιστοιχούν στις περιόδους t , $t-11$ και $t-12$. Αν η πρόβλεψη πραγματοποιείται για μεγάλο χρονικό ορίζοντα και δεν υπάρχουν από το προσαρμοσμένο μοντέλο διαθέσιμες τιμές των όρων των υπολοίπων, αυτοί θέτονται ίσοι με μηδέν. Τα διαστήματα εμπιστοσύνης απαιτούν πολύπλοκους υπολογισμούς και συνήθως υπολογίζονται με τη βοήθεια κάποιου στατιστικού υπολογιστικού πακέτου.

Διαφόριση και Πρόβλεψη

Η μέθοδος της διαφόρισης έχει μεγάλη επίδραση στις προβλέψεις. Μοντέλα με διαφόριση διαφορετικής τάξης μπορεί να προσαρμόζονται το ίδιο καλά στα ιστορικά δεδομένα αλλά είναι δυνατόν να παράγουν προβλέψεις που διαφέρουν σημαντικά.

Ακολούθως περιγράφονται συνοπτικά τα χαρακτηριστικά των προβλέψεων που παράγουν τα διάφορα μοντέλα ARIMA (p, d, q) (P, D, Q)s, καθώς αυξάνει ο ορίζοντας πρόβλεψης.

- d=0. Οι προβλέψεις θα συγκλίνουν στη μέση τιμή των ιστορικών δεδομένων εάν συμπεριλαμβάνεται σταθερός όρος στο μοντέλο, διαφορετικά θα συγκλίνουν στο μηδέν. Η διακύμανση των προβλέψεων θα συγκλίνει στη διακύμανση των ιστορικών δεδομένων και συνεπώς τα διαστήματα εμπιστοσύνης επίσης θα συγκλίνουν.
- d=1. Οι προβλέψεις θα συγκλίνουν στη τιμή της τελευταίας παρατήρησης εάν δεν συμπεριλαμβάνεται σταθερός όρος στο μοντέλο. Εάν συμπεριλαμβάνεται σταθερός όρος οι μακροπρόθεσμες προβλέψεις θα ακολουθούν μια γραμμική τάση, με κλίση ίση με την τιμή του σταθερού

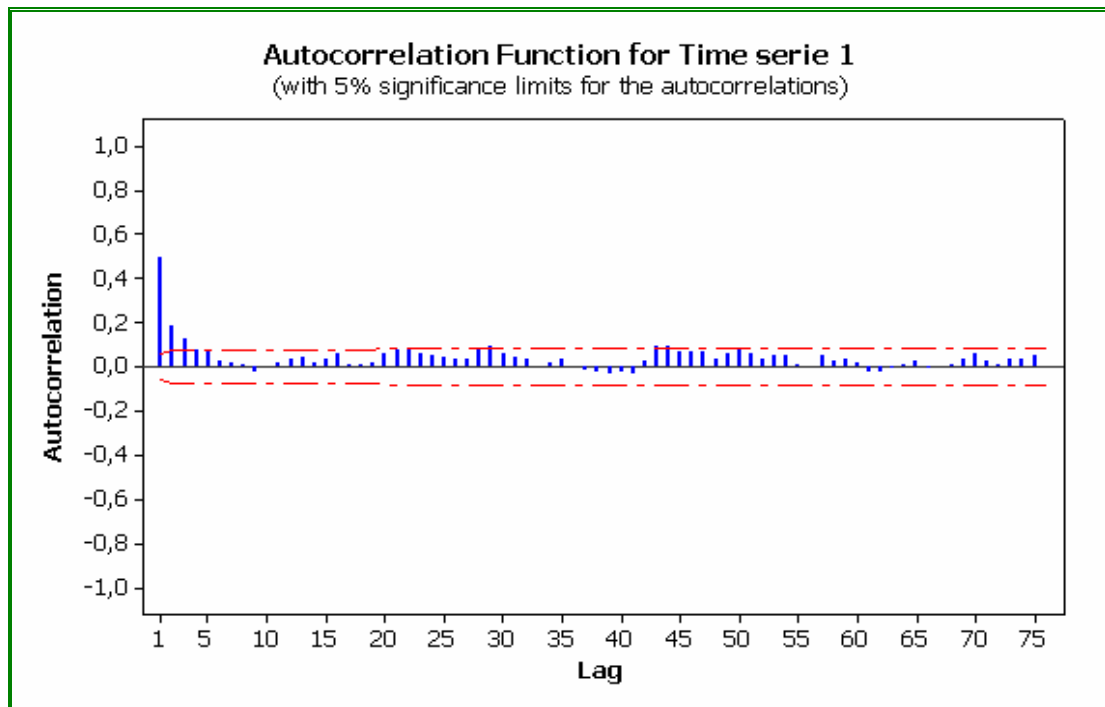
όρου. Και στις δύο περιπτώσεις η διακύμανση των προβλέψεων θα αυξάνει με το χρονικό ορίζοντα και τα διαστήματα εμπιστοσύνης θα αποκλίνουν.

- ο $d=2$. Εάν δεν συμπεριλαμβάνεται σταθερός όρος στο μοντέλο, οι προβλέψεις θα ακολουθούν μια γραμμική τάση, προεκτείνοντας την τάση που ακολουθούν οι τελευταίες παρατηρήσεις της χρονοσειράς. Εάν συμπεριλαμβάνεται σταθερός όρος οι μακροπρόθεσμες προβλέψεις θα ακολουθούν μια τετραγωνική τάση. Και στις δύο περιπτώσεις η διακύμανση των προβλέψεων θα αποκλίνει και τα διαστήματα εμπιστοσύνης επίσης θα αποκλίνουν.
- ο Εποχιακή διαφόριση. Οι επιδράσεις της εποχιακής διαφόρισης είναι παρόμοιες. Ειδικότερα, εάν έχει εφαρμοσθεί εποχιακή διαφόριση και στη συνέχεια διαφόριση πρώτης τάξης, οι προβλέψεις θα συμπεριφέρονται όμοια με αυτές του μοντέλου διαφόρισης δεύτερης τάξης ($d=2$), με τη διαφορά ότι θα παρουσιάζουν εποχικότητα [24].

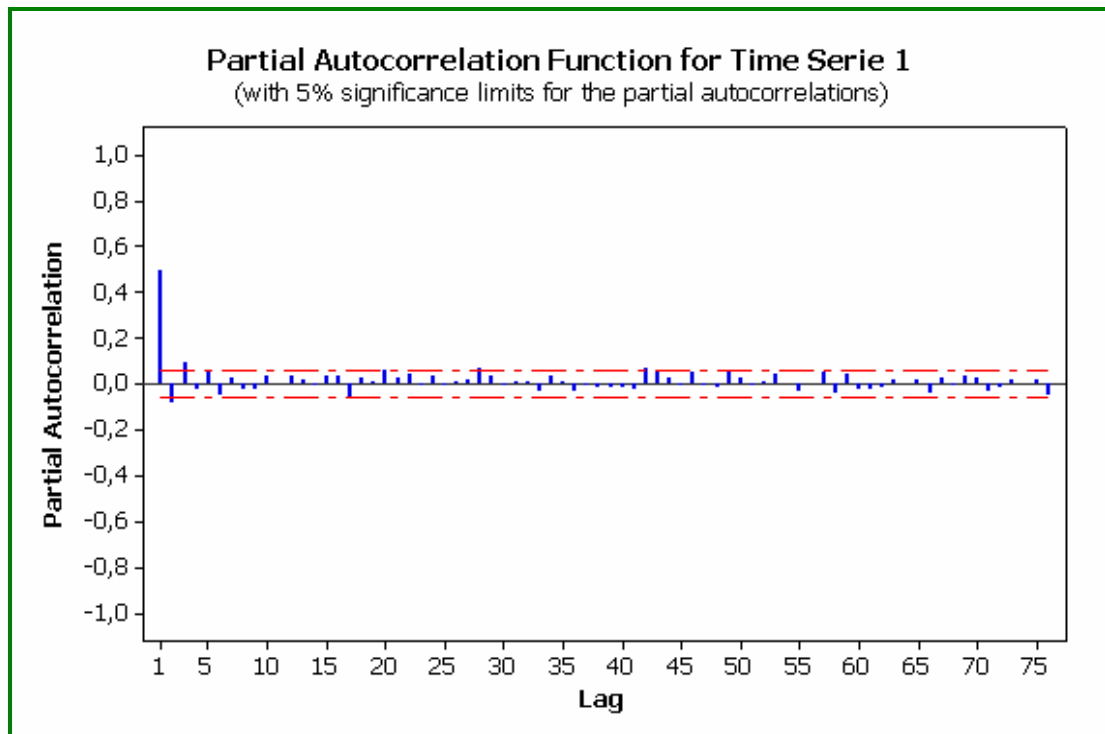
3.5.6 Εφαρμογή των μοντέλων

Παρακάτω ακολουθούν τα αποτελέσματα από την εφαρμογή της μεθόδου Box-Jenkins με τη βοήθεια ολοκληρωμένων λογισμικών πακέτων H/Y. Για τους πίνακες και τα διαγράμματα διασαφηνίζεται το λογισμικό που χρησιμοποιείται. Αναλυτικότερος σχολιασμός των αποτελεσμάτων θα γίνει στο τελευταίο κεφάλαιο.

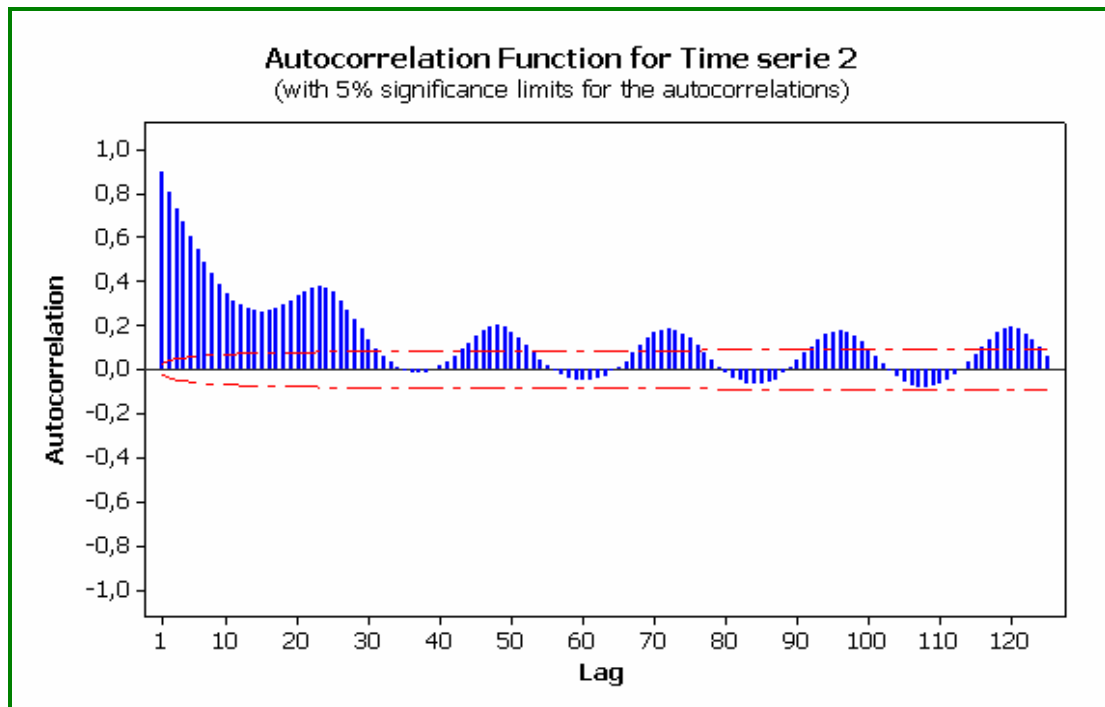
Αρχικά υπολογίσαμε, με τη βοήθεια του λογισμικού Minitab, τα διαγράμματα ACF και PACF, με βάση τα οποία μπορεί να γίνει μια πρώτη εκτίμηση του μοντέλου ARIMA που μπορεί να δώσει ικανοποιητικές προβλέψεις.



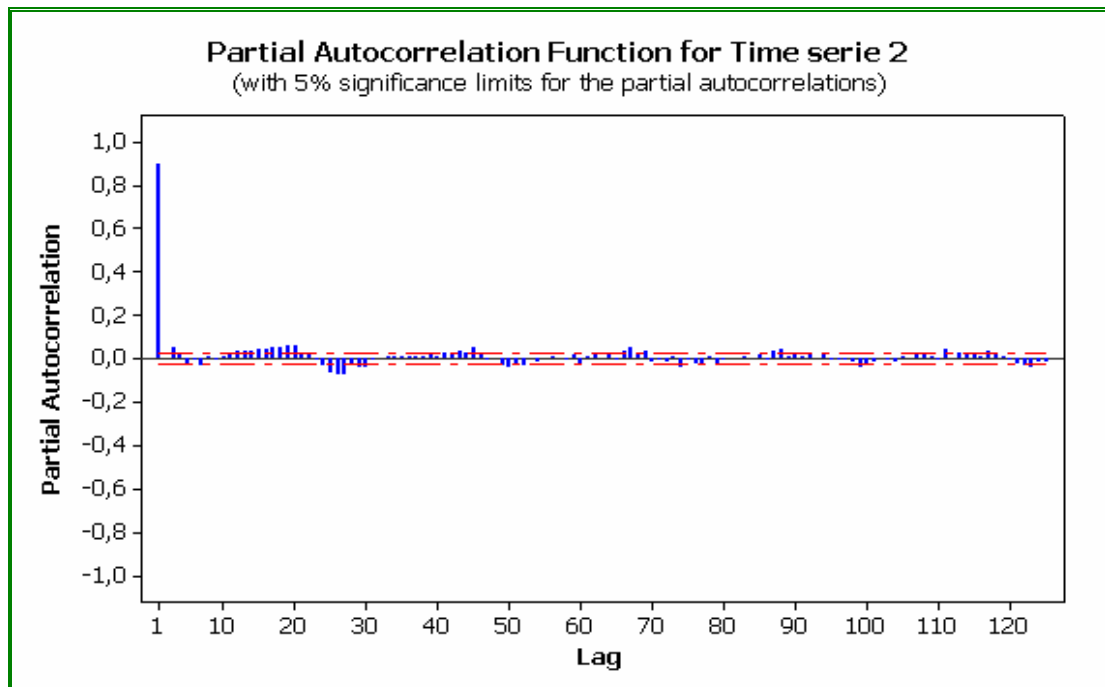
Σχήμα 3.16 Διάγραμμα αυτοσυσχέτισης (ACF) χρονοσειράς 1.



Σχήμα 3.17 Διάγραμμα μερικής αυτοσυσχέτισης (PACF) χρονοσειράς 1.

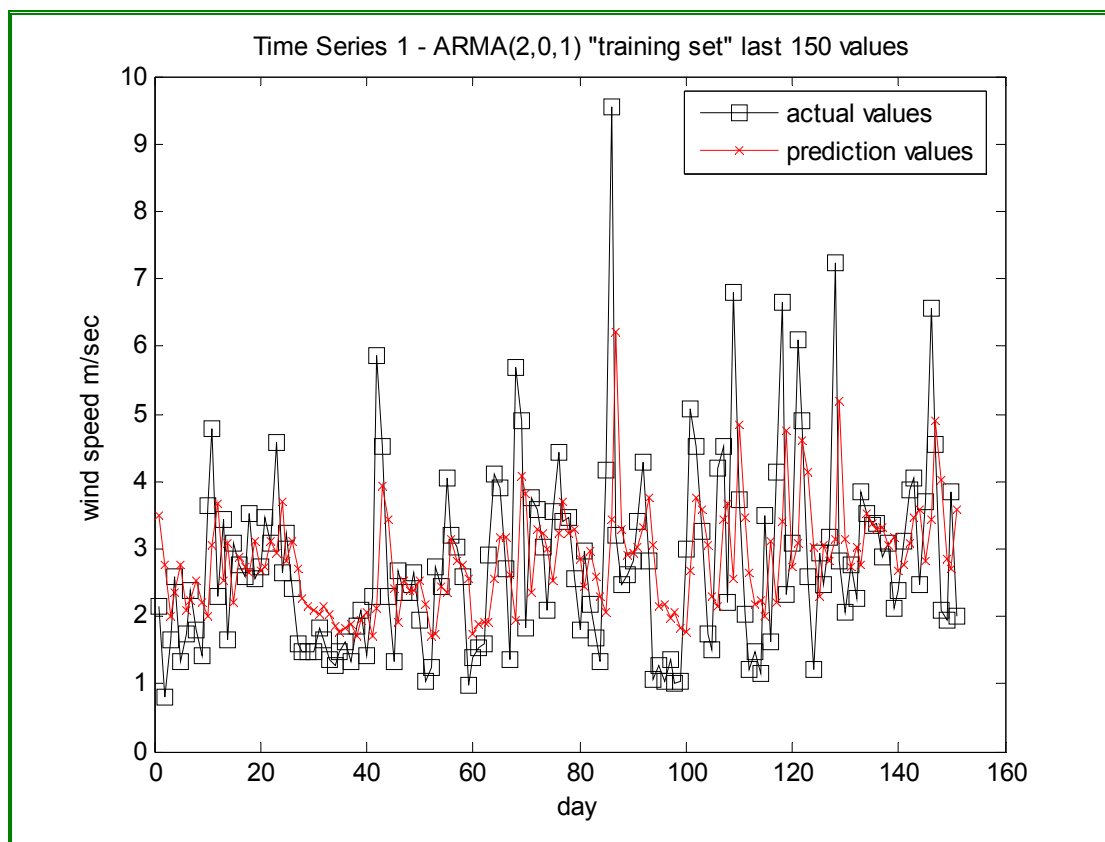


Σχήμα 3.18 Διάγραμμα αυτοσυσχέτισης (ACF) χρονοσειράς 2.



Σχήμα 3.19 Διάγραμμα μερικής αυτοσυσχέτισης (PACF) χρονοσειράς 2.

Με βάση τα παραπάνω διαγράμματα και τον πίνακα 3.4 σχηματίζουμε μια πρώτη εικόνα για το μοντέλο ARMA που μπορεί να περιγράψει ικανοποιητικά τις χρονοσειρές μας. Στη συνέχεια με τη βοήθεια του λογισμικού Statgraphics, στο οποίο παρέχεται η δυνατότητα αυτόματης επιλογής του καταλληλότερου ARMA μοντέλου, προσδιορίσαμε επακριβώς το βαθμό των AR και MA διαδικασιών που μοντελοποιούν καταλληλότερα τις χρονοσειρές μας. Αξίζει να σημειωθεί ότι η αξιολόγηση των διαφόρων μοντέλων, από την αυτοματοποιημένη διαδικασία του λογισμικού, επιλέχθηκε να γίνεται με βάση το κριτήριο που αναφέραμε στην παράγραφο 3.5.3 (*Akaike's Information Criterion*).



Σχήμα 3.20 Μοντέλο ARMA(2,0,1) της χρονοσειράς 1 (training set).

ARIMA Model Summary

Parameter	Estimate	Std.	t	P-value
AR(1)	-0,169718	0,151084	-1,12333	0,261294
AR(2)	0,25055	0,0896531	2,79466	0,005195
MA(1)	-0,722865	0,142791	-5,06239	0,000000
Mean	2,72017	0,0669461	40,6323	0,000000
Constant	2,5003			

Estimated white noise variance = 1,25205 with 969 degrees of freedom

Estimated white noise standard deviation = 1,11434

Number of iterations: 7

Forecast Summary

Forecast model selected: **ARIMA(2,0,1)** with constant

Number of forecasts generated: 30

Models

(M) ARIMA (2,0,1) with constant

(N) ARIMA (1,0,2) with constant

(O) ARIMA (2,0,2) with constant

(P) ARIMA (0,0,3) with constant

(Q) ARIMA (0,1,4) with constant

Estimation Period

Model	RMSE	MAE	MAPE	ME	MPE	AIC
(M)	1,11893	0,815031	32,3185	0,000285101	-13,978	0,232976
(N)	1,11935	0,814456	32,2663	0,000395194	-13,950	0,233718
(O)	1,11891	0,814576	32,2897	0,000335631	-13,960	0,234992
(P)	1,12014	0,816632	32,4367	0,000226512	-14,101	0,235137
(Q)	1,1205	0,80835	31,7685	0,018164	-12,948	0,235773

Πίνακας 3.5 Μοντέλα ARIMA της χρονοσειράς 1.

ARIMA Model Summary

Parameter	Estimate	Std.	t	P-value
AR(1)	0,889175	0,0099314	89,5317	0,000000
MA(1)	-0,0090181	0,0157458	-0,572731	0,566824
MA(2)	0,0356727	0,0150991	2,36257	0,018148
MA(3)	-0,0011727	0,0143425	-0,0817686	0,934825
MA(4)	-0,0467681	0,0139753	-3,34647	0,000819
MA(5)	-0,0154146	0,0139844	-1,10227	0,270344
MA(6)	-0,0358237	0,0136871	-2,61733	0,008862
Mean	2,72283	0,100224	27,1675	0,000000

Estimated white noise variance = 0,646141 with 6494 degrees of freedom

Estimated white noise standard deviation = 0,803829

Number of iterations: 9

Forecast Summary

Forecast model selected: **ARIMA(1,0,4)** with constant

Number of forecasts generated: 50

Models

(M) ARIMA (1,0,6) with constant

(N) ARIMA (1,0,4) with constant

(O) ARIMA (4,0,1) with constant

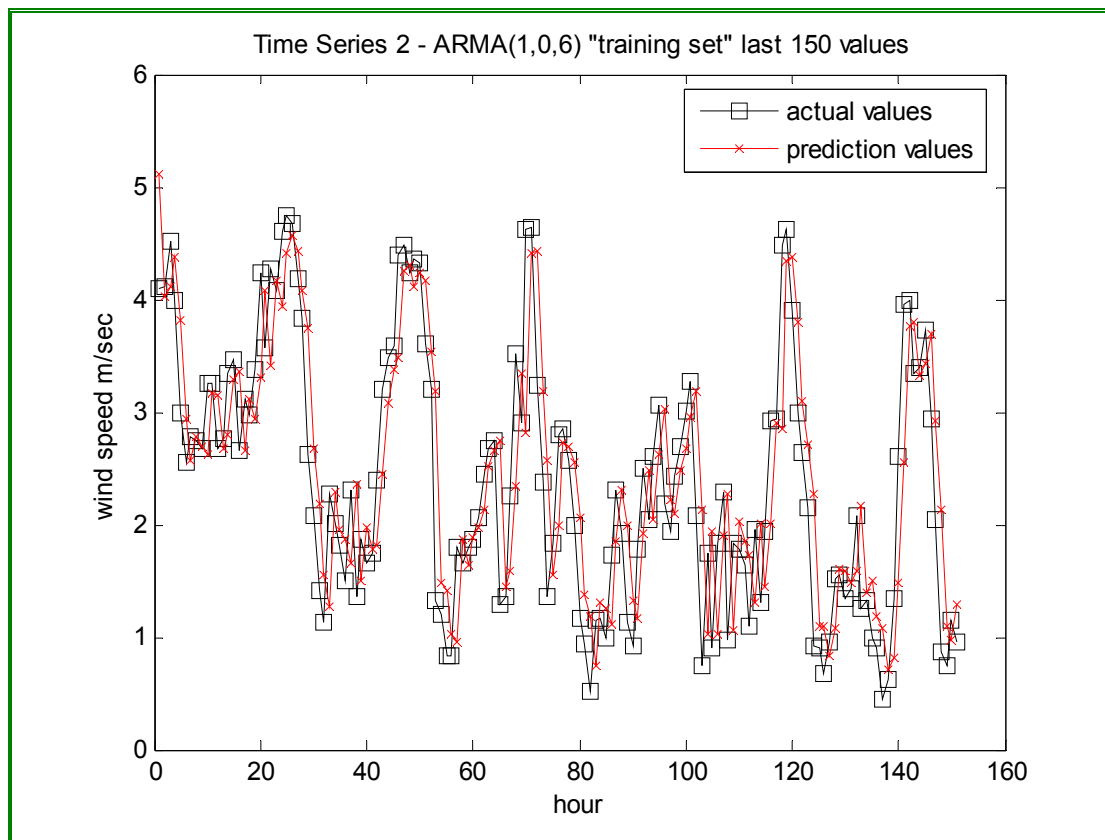
(P) ARIMA (2,0,3)

(Q) ARIMA (2,1,5) with constant

Estimation Period

Model	RMSE	MAE	MAPE	ME	MPE	AIC
(M)	0,803809	0,581352	30,9386	0,000260138	-13,4045	-0,43432
(N)	0,804136	0,581818	31,0034	0,000210078	-13,4798	-0,43412
(O)	0,804145	0,581985	31,0476	0,000219569	-13,5225	-0,43410
(P)	0,804191	0,581936	31,0441	0,000191834	-13,5236	-0,43399
(Q)	0,804121	0,580856	30,9411	-0,00235094	-13,4939	-0,43385

Πίνακας 3.3 Μοντέλα ARIMA της χρονοσειράς 2.



Σχήμα 3.21 Μοντέλο $ARMA(1,0,6)$ της χρονοσειράς 2(training set).

Παρατηρώντας πάλι τα διαγράμματα των ACF-PACF και σύμφωνα με την παράγραφο 3.5.4, εντοπίζουμε σημαντικές τιμές για εποχιακές καθυστερήσεις που υποδεικνύουν την προσθήκη μιας εποχιακής συνιστώσας. Παρατηρώντας, για παράδειγμα, την ACF της χρονοσειράς 2, διακρίνουμε μεγάλες αυτοσυσχετίσεις για τιμές 12, 24, 36, 48, ... Κάτι που στην ουσία σημαίνει πως υπάρχει, στατιστικά σημαντική, εποχιακή συνιστώσα.

Με τη βοήθεια του λογισμικού SAS-JMP, εφαρμόσαμε διάφορα μοντέλα SARIMA (Seasonal-ARIMA) με σκοπό την εύρεση του πιο κατάλληλου. Τα αποτελέσματα φαίνονται στους πίνακες που ακολουθούν:

Model Comparison							
Model	DF	Variance	AIC	-2LogLH	AIC Rank	MAPE	MAE
ARMA(2, 1)	969	1,2520348	2984,2808	2976,2808	2	32,325379	0,815167
Seasonal ARIMA(2, 0, 1)(0, 0, 1)365	968	1,2528693	2986,0625	2976,0625	3	32,304988	0,814867
Seasonal ARIMA(2, 0, 1)(1, 0, 0)365	968	1,2528696	2986,0626	2976,0626	4	32,304963	0,814867
Seasonal ARIMA(2, 0, 1)(1, 1, 1)365	602	2,00225	2235,2353	2223,2353	1	44,333166	1,092590
Seasonal ARIMA(2, 0, 1)(2, 0, 1)365	966	1,2554632	2990,0625	2976,0625	5	32,305018	0,814867
Seasonal ARIMA(2, 0, 1)(2, 0, 2)365	965	1,2567642	2992,0625	2976,0625	6	32,305018	0,814867

<i>model</i>	<i>MSE (test set)</i>	<i>MAE (test set)</i>	<i>MAPE (test set)</i>
ARIMA (2,0,1)	1.836	1.203	71.05
ARIMA (2,0,1) (0,0,1)	1.810	1.195	69.98
ARIMA (2,0,1) (1,0,0)	1.604	1.106	61.22
ARIMA (2,0,1) (1,1,1)	1.645	1.129	65.93
ARIMA (2,0,1) (2,0,1)	1.380	0.974	49.72
ARIMA (2,0,1) (2,0,2)	1.806	1.075	43.59

Πίνακας 3.4 Εποχιακά μοντέλα ARIMA της χρονοσειράς 1.

Model Comparison								
Model	DF	Variance	AIC	RSquare	-2LogLH	AIC Rank	MAPE	MAE
ARMA(1, 6)	6494	0,6461517	15621,967	0,805	15605,967	8	30,950645	0,581531
Seasonal ARIMA(1, 0, 6)(0, 0, 1)24	6493	0,641314	15574,234	0,807	15556,234	7	30,782477	0,578503
Seasonal ARIMA(1, 0, 6)(1, 1, 1)24	6468	0,5983578	15143,702	0,817	15123,702	5	28,821651	0,555568
Seasonal ARIMA(1, 0, 6)(1, 1, 3)24	6466	0,5982694	15144,858	0,817	15120,858	6	28,792031	0,555200
Seasonal ARIMA(1, 0, 6)(1, 0, 4)24	6489	0,5968474	15137,111	0,819	15111,111	2	28,931483	0,551743
Seasonal ARIMA(1, 0, 6)(1, 1, 6)24	6463	0,5974397	15138,107	0,818	15108,107	4	28,789942	0,555405
Seasonal ARIMA(1, 0, 6)(2, 1, 5)24	6463	0,5973892	15137,494	0,818	15107,494	3	28,809197	0,555568
Seasonal ARIMA(1, 0, 6)(1, 1, 4)24	6465	0,5972888	15134,529	0,818	15108,529	1	28,786254	0,555311

<i>model</i>	<i>MSE</i> (test set)	<i>MAE</i> (test set)	<i>MAPE</i> (test set)
ARIMA (1,0,6)	0.831	0.763	48.66
ARIMA (1,0,6) (0,0,1)	0.741	0.714	45.28
ARIMA (1,0,6) (1,1,1)	0.365	0.492	27.34
ARIMA (1,0,6) (1,1,3)	0.306	0.484	26.83
ARIMA (1,0,6) (1,1,6)	0.667	0.684	33.61
ARIMA (1,0,6) (1,0,4)	0.463	0.563	28.45
ARIMA (1,0,6) (2,1,5)	0.459	0.565	29.10
ARIMA (1,0,6) (1,1,4)	0.362	0.481	27.29

Πίνακας 3.5 Εποχιακά μοντέλα ARIMA της χρονοσειράς 2.

4. ΧΑΟΤΙΚΕΣ ΧΡΟΝΟΣΕΙΡΕΣ

Η ανάλυση και πρόβλεψη χρονοσειρών είναι ένας κλάδος των εφαρμοσμένων μαθηματικών που γνώρισε αλματώδη πρόοδο κατά τις τελευταίες δεκαετίες. Κίνητρο της προόδου είναι η ευρύτητα των εφαρμογών, από το Χρηματιστήριο και την Οικονομία, ως την Ιατρική, τη Βιολογία, την Ηλεκτρονική και τη Φυσική επιστήμη. Εκτός από την αύξηση της ισχύος των υπολογιστών, σημαντικό ρόλο διαδραμάτισε η κατανόηση του γεγονότος ότι τα περισσότερα δυναμικά φαινόμενα στη φύση και στη οικονομία έχουν μη γραμμικό χαρακτήρα. Η μη γραμμικότητα ενός δυναμικού συστήματος εκδηλώνεται ως ευαισθησία στις αρχικές συνθήκες. Αυτό σημαίνει ότι, *δύο αρχικά παραπλήσια σύνολα τιμών των μεταβλητών του συστήματος αποκλίνουν, και μάλιστα εκθετικά, με την πάροδο του χρόνου*. Ο χώρος των ανεξάρτητων μεταβλητών που περιγράφουν ένα δυναμικό σύστημα είναι γνωστός με τον όρο χώρος των φάσεων. Η μη γραμμικότητα έχει ως αποτέλεσμα την εμφάνιση πολύπλοκων δομών στο χώρο των φάσεων. Ο χώρος των φάσεων χαρακτηρίζεται από τη συνύπαρξη περιοχών χάους και περιοχών οργανωμένης συμπεριφοράς των μεταβλητών. Το χάος δίνει την εντύπωση ως ανυπαρξίας οργάνωσης που οδηγεί σε τυχαία ή απρόβλεπτη συμπεριφορά. Εντούτοις, το χάος είναι πολύ διαφορετικό από την τυχειότητα. Η πραγματική τυχειότητα μπορεί να εμφανιστεί σε ένα δυναμικό σύστημα με τη μορφή του θορύβου, διαταραχών δηλαδή που δεν οφείλονται στο σύστημα αλλά σε κάποιο τυχαίο εξωτερικό παράγοντα.

Χάος ονομάζουμε τη φαινομενικά τυχαία συμπεριφορά που παρατηρείται στα διάφορα συστήματα, πίσω από την οποία όμως κρύβεται μια προσδιοριστική (ντετερμενιστική) δυναμική. Ο προσδιοριστικός χαρακτήρας της δυναμικής είναι δυνατό να απολεσθεί αν στο σύστημα επιδρά θόρυβος. Εντούτοις, εάν η παρουσία του θορύβου είναι μικρή, η χαοτική δομή δε χάνεται. Η δυναμική αυτή εκφράζεται από μικρό αριθμό ανεξάρτητων μεταβλητών. Είναι σημαντικό να πούμε, πως η δυναμική εξέλιξη στο χρόνο είναι προϋπόθεση για να ελέγξουμε αν η συμπεριφορά είναι χαοτική. Η λέξη χάος συναντάται, επίσης, στη μυθολογία πολλών λαών για να περιγράψει κάτι το ακαθόριστο και το άτακτο που μέσα του βρίσκεται κρυμμένη η τάξη [3].

Το χάος παρατηρείται στα περισσότερα μη γραμμικά δυναμικά συστήματα. Επίσης, παρατηρείται πειραματικά σε εργαστήρια φυσικών επιστημών και στη φύση. Οτιδήποτε εξελίσσεται σε σχέση με το χρόνο μπορεί να θεωρηθεί ως ένα δυναμικό σύστημα. Επιδημίες, μεταβολές του καιρού, οικονομικές κρίσεις, μεταβολές πληθυσμών, φυσικές καταστροφές, σεισμοί κίνηση ουρανίων σωμάτων και άλλα πολλά. Αυτό δίνει στο χάος την ιδιότητα της επιστήμης που τέμνει σχεδόν όλες τις άλλες. Είναι σα να χτίζει γέφυρες μεταξύ διαφορετικών πεδίων έρευνας.

4.1 Γραμμική και μη-γραμμική ανάλυση χρονοσειρών

Η κλασσική στατιστική ανάλυση χρονοσειρών μελετά γραμμικά χαρακτηριστικά των χρονοσειρών, όπως είναι η αυτοσυσχέτιση $r_x(\tau)$ και ισοδύναμα το φάσμα ισχύος $P_x(f)$, και η περιγραφή του δυναμικού συστήματος που παράγει τη χρονοσειρά γίνεται με γραμμικά μοντέλα χρονοσειρών, όπως τα μοντέλα τύπου ARMA. Τα χαρακτηριστικά της χρονοσειράς που μπορεί να μιμηθεί ένα γραμμικό μοντέλο περιορίζονται στη μέση τιμή, διασπορά και αυτοσυσχέτιση. Αυτά τα χαρακτηριστικά είναι αρκετά για να περιγράψουν μια γραμμική διαδικασία, δηλαδή ένα γραμμικό δυναμικό στοχαστικό σύστημα, αλλά δεν αποτελούν ικανοποιητική περιγραφή μιας μη-γραμμικής διαδικασίας. Εφαρμόζοντας τη γραμμική ανάλυση σε μια πραγματική χρονοσειρά που συνήθως έχει τυχαία συμπεριφορά, ένα μεγάλο μέρος της πληροφορίας από τη χρονοσειρά δε μπορεί να περιγραφεί και χαρακτηρίζεται θόρυβος. Αυτό το μέρος της πληροφορίας όμως μπορεί να αντιστοιχεί σε μη-γραμμική αιτιοκρατική δυναμική και αυτό προσπαθεί να διερευνήσει η μη-γραμμική ανάλυση. Για την κατανόηση της χρησιμότητας της μη-γραμμικής ανάλυσης είναι χρήσιμο να δούμε πρώτα κάποια πλεονεκτήματα και μειονεκτήματα της γραμμικής ανάλυσης [27].

Πλεονεκτήματα

- Τα γραμμικά μοντέλα έχουν απλή μορφή και είναι υπολογιστικά εύκολα και κατανοητά.
- Η γραμμική ανάλυση βασίζεται στην πιθανοκρατική θεωρία κανονικών διαδικασιών που είναι πλήρως κατανοητή και η στατιστική συμπερασματολογία για κανονικά γραμμικά μοντέλα έχει αναπτυχθεί πλήρως (π.χ. παραμετρικά διαστήματα εμπιστοσύνης και πρόβλεψης).

- Τα γραμμικά μοντέλα είναι ικανοποιητικά για πολλές εφαρμογές και γι αυτό έχουν «επιβιώσει» για πάνω από 70 χρόνια!

Μειονεκτήματα

- Τα μοντέλα τύπου ARMA περιγράφουν κανονικές διαδικασίες και άρα δεν προσφέρονται για την περιγραφή χρονοσειρών με ιδιαίτερα χαρακτηριστικά όπως: έντονη ασυμμετρία ως προς την κατανομή των δεδομένων, διαφορετική μορφή αν ο χρόνος αντιστραφεί (time irreversibility), «ξεσπάσματα» (outbursts), δηλαδή τάση προς πιο ακραίες τιμές, σε άτακτα χρονικά διαστήματα.
- Το αιτιοκρατικό μέρος των γραμμικών μοντέλων μπορεί να δώσει περιορισμένες καταστάσεις. Για παράδειγμα αν από ένα ARMA μοντέλο αφαιρέσουμε το στοχαστικό μέρος έχουμε $x_t = \varphi_1 x_{t-1} + \dots + \varphi_p x_{t-p}$ ή $\varphi_p(B)x_t = 0$ και αυτό το μοντέλο μπορεί να περιγράψει τις παρακάτω καταστάσεις του υπό μελέτη δυναμικού συστήματος (απαλλαγμένου από θόρυβο):
 - σταθερό οριακό σημείο (stable limit point) αν οι ρίζες του $\varphi_p(B)$ είναι κατά απόλυτη τιμή μικρότερες της μονάδας,
 - ασταθές σύστημα (unstable system) αν τουλάχιστον μία ρίζα του (B) p φ είναι κατά απόλυτη τιμή μεγαλύτερη της μονάδας,
 - ταλάντωση μεταξύ σημείων που εξαρτώνται από τις αρχικές τιμές αν μια τουλάχιστον ρίζα έχει απόλυτη τιμή τη μονάδα και οι άλλες είναι κατά απόλυτη τιμή μικρότερες της μονάδας.
- Τα μη-γραμμικά δυναμικά συστήματα μπορούν να δημιουργούν ποικίλες καταστάσεις χωρίς την επίδραση του θορύβου, τις οποίες τα γραμμικά μοντέλα αδυνατούν να περιγράψουν. Αντίστροφα, αυτό σημαίνει ότι μπορεί τα δεδομένα να κρύβουν πιο πολύπλοκη δομή από αυτήν που μπορεί να ανακαλύψει ένα γραμμικό σύστημα. Ιδιαίτερο ενδιαφέρον έχουν χαμηλοδιάστατα μη-γραμμικά δυναμικά συστήματα που δε μπορούν να περιγραφούν από γραμμικά μοντέλα. Αυτά είναι:

- *ψευδό-περιοδικό σύστημα* (pseudo-periodic system, torus), όταν στο σύστημα υπάρχουν δύο ταλαντωτές και ο λόγος των συχνοτήτων τους είναι μη-ρητός,
- *χαοτικό σύστημα* (chaotic system).

Θα αναλύσουμε τις χρονοσειρές με σκοπό να διερευνήσουμε την ύπαρξη μη-γραμμικού δυναμικού συστήματος (που ενδεχομένως περιέχει θόρυβο), να μελετήσουμε χαρακτηριστικά του αιτιοκρατικού δυναμικού συστήματος, να το περιγράψουμε με κατάλληλο μοντέλο και να πετύχουμε έτσι καλύτερες προβλέψεις.

4.1.1 Δυναμικά Συστήματα

Στη συνέχεια υποθέτουμε πως το υπό μελέτη σύστημα που παρατηρούμε μέσω μιας χρονοσειράς είναι ένα μη-γραμμικό δυναμικό σύστημα, διακριτό ή συνεχές, που ορίζεται από κάποιες εξισώσεις διαφορών ή διαφορικές εξισώσεις, αντίστοιχα. Γενικά μπορούμε να θεωρήσουμε πως ξεκινώντας από κάποια αρχική συνθήκη το σύστημα δίνεται (σε συνεχή ή διακριτό χρόνο) ως [27]:

$$s_t = f^t(s_0) \quad (4.1)$$

όπου:

s_t : το διάνυσμα θέσης (κατάστασης) του συστήματος τη χρονική στιγμή t .

$s_t \in \mathbb{R}^d$ όπου d είναι η διάσταση του Ευκλείδειου χώρου καταστάσεων του συστήματος (γενικότερα ο χώρος μπορεί να είναι μια πολλαπλότητα).

s_0 : το διάνυσμα θέσης για χρόνο 0 (αρχική συνθήκη).

$f^t : \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}^d$ συνάρτηση του συστήματος που απεικονίζει το s_0 στο s_t .

t : συνεχής ή διακριτός χρόνος.

Τα δυναμικά συστήματα που αφορούν την ανάλυση χρονοσειρών είναι *συστήματα απώλειας ενέργειας* (dissipative systems), δηλαδή αν εφαρμόσουμε ένα τέτοιο σύστημα σε κάποιο όγκο, αυτός συνεχώς θα μικραίνει. Κάθε τροχιά ενός συστήματος απώλειας ενέργειας περιορίζεται στο χώρο \mathbb{R}^d και έλκεται από κάποιο αναλλοίωτο σύνολο σημείων που λέγεται *ελκυστής* (attractor). Η τροχιά του συστήματος καταλήγει ασυμπτωτικά σε αυτόν τον ελκυστή. Το παραπάνω δεν είναι ακριβές για κάθε σύστημα, καθώς μπορεί να μην ισχύει για κάθε αρχική συνθήκη,

αλλά μόνο γι αυτές που ανήκουν στη λεγόμενη *λεκάνη έλξης* (basis of attraction). Αυτό όμως δεν μας απασχολεί αφού θεωρούμε ότι η χρονοσειρά είναι η (μονοδιάστατη) παρατήρηση μιας τροχιάς που ανήκει στον ελκυστή. Ο ελκυστής μπορεί να είναι:

- ο *ένα ευσταθές σημείο ισορροπίας* του συστήματος (stable equilibrium point),
- ο *ένα πεπερασμένο σύνολο τέτοιων σημείων* (για περιοδικές τροχιές διακριτών συστημάτων),
- ο *ένας οριακός κύκλος* (limit cycle, για περιοδικές τροχιές συνεχών συστημάτων),
- ο *ένας τόρος* (torus, για ψευδό-περιοδικές τροχιές συνεχών συστημάτων)
- ο *κάποιο άλλο μη-πεπερασμένο σύνολο σημείων που λέγεται παράξενος ελκυστής* (strange attractor).

Οι παράξενοι ελκυστές παρουσιάζουν την ιδιότητα της *αυτο-ομοιότητας* (selfsimilarity) σε διαφορετικές κλίμακες του χώρου, είναι δηλαδή *μορφοκλασματικά σύνολα* (fractals). Τα μορφοκλασματικά σύνολα χαρακτηρίζονται από τη *μορφοκλασματική διάσταση* (fractal dimension), που είναι ένας μη-ακέραιος αριθμός και δηλώνει το βαθμό αυτό-ομοιότητας. Η μορφοκλασματική διάσταση είναι πάντα μικρότερη της τοπολογικής διάστασης της πολλαπλότητας (ή της Ευκλείδειας διάστασης αν η πολλαπλότητα είναι ο Ευκλείδειος χώρος) στην οποία βρίσκεται ο ελκυστής. Οι παράξενοι ελκυστές σχηματίζονται από τις τροχιές *χαοτικών δυναμικών συστημάτων* (chaotic dynamical systems), δηλαδή αιτιοκρατικών δυναμικών συστημάτων που παρουσιάζουν *ευαισθησία στις αρχικές συνθήκες* (sensitivity to initial conditions).

Τα χαρακτηριστικά του παράξενου ελκυστή είναι τα εξής [3]:

- I. Βλέπουμε τα σημεία να έλκονται από *ένα παράξενο γεωμετρικό σχήμα στο χώρο των φάσεων*, ακαθόριστο και οι τροχιές να παρουσιάζουν σε μερικές περιοχές σύγκλιση, όχι όμως τέλεια ταύτιση.
- II. Η σύγκλιση αυτή μερικές φορές παρουσιάζει *ομοιότητα υπό αλλαγή κλίμακας*. Για παράδειγμα τρεις γραμμές τη μια δίπλα από την άλλη. Αν μεγεθύνουμε μια απ' αυτές θα δούμε τρεις γραμμές όμοιες με τις προηγούμενες και οι μεταξύ τους αποστάσεις θα είναι ανάλογες. Αυτή η ιδιότητα δεν παρουσιάζεται πάντα και δε σημαίνει ότι οποιοδήποτε αντικείμενο έχει αυτή την ιδιότητα είναι και παράξενος ελκυστής.

- III. Ένα ακόμη αξιοπρόσεκτο είναι η *ευαισθησία στις αρχικές συνθήκες*. Μια μικρή διαταραχή (ας πούμε της τάξης του ενός εκατομμυριοστού) προκαλεί εκθετική απόκλιση της τροχιάς από τη μη διαταραγμένη. Μετά από κάποιο αριθμό επαναλήψεων όμως η απόκλιση αυτή χάνεται γιατί πια έχουμε φτάσει στα όρια του ελκυστή. Ο ελκυστής δεν προεκτείνεται μέχρι το άπειρο (θετικό ή αρνητικό), αλλά βρίσκεται σε πεπερασμένο διάστημα τιμών. Μετά τη μικρή διαταραχή δημιουργείται ένας νέος ελκυστής που μοιάζει πολύ με τον προηγούμενο.
- IV. *Μη κανονική κατανομή συχνοτήτων*. Το σύστημα προσεγγίζοντας τον ελκυστή ακολουθεί συγκεκριμένες τροχιές και δεν περιφέρεται εντελώς τυχαία. Αφού με την πάροδο του χρόνου το σύστημα τείνει να αγγίξει τον ελκυστή, η κατανομή συχνοτήτων τείνει σε κάποια συγκεκριμένη κατανομή.
- V. *Μπορεί να συναντήσουμε κάποιες μορφές περιοδικότητα*. Αυτό βέβαια δε σημαίνει ότι ο ελκυστής παύει να είναι χαοτικός. Η κυρίαρχη περιοδικότητα, αν υπάρχει, του παράξενου ελκυστή καθορίζεται από τη μελέτη του φάσματος των συχνοτήτων του.

Τα χαοτικά δυναμικά συστήματα παρουσιάζουν ιδιαίτερο ενδιαφέρον γιατί λόγω της ιδιότητας της ευαισθησίας στις αρχικές συνθήκες, κοντινές τροχιές τους αποκλίνουν πολύ γρήγορα με αποτέλεσμα να παρουσιάζουν στοχαστική συμπεριφορά. Αντίστροφα, πολλά πραγματικά συστήματα που φαίνονται τυχαία (όπως όταν μελετάμε μια χρονοσειρά από ένα τέτοιο σύστημα) ίσως να έχουν αιτιοκρατική μη-γραμμική και ενδεχομένως χαοτική δομή. Αυτό σημαίνει ότι χρησιμοποιώντας κατάλληλες μεθόδους που βασίζονται στη θεωρία των δυναμικών συστημάτων και του χάους έχουμε τη δυνατότητα να εξηγήσουμε και να προβλέψουμε τέτοια συστήματα (σε μικρό χρονικό ορίζοντα).

4.1.2 Χρονοσειρές από δυναμικά συστήματα

Μια χρονοσειρά $\{x_i\}$ για $i = 1, \dots, N$, μπορεί να θεωρηθεί ότι προέρχεται από ένα δυναμικό σύστημα ως η προβολή x_t κάθε σημείου s_t της τροχιάς του συστήματος, δηλαδή:

$$x_t = h(s_t) \tag{4.2}$$

όπου η συνάρτηση προβολής $h: \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}$ λέγεται και *συνάρτηση παρατήρησης* (observation function). Για ροές, δηλαδή λύσεις διαφορικών εξισώσεων, όπου ο χρόνος είναι συνεχής ο πραγματικός χρόνος που αντιστοιχεί σε μια παρατήρηση x_t είναι its .

Το σύστημα μπορεί να περιέχει θόρυβο, ο οποίος διαχωρίζεται σε δύο τύπους:

- Θόρυβος παρατήρησης ή μέτρησης (observational / measurement noise)

$$x_t = h(s_t) + w_t \quad (4.3)$$

όπου το w_t θεωρείται συνήθως λευκός και προσθετικός θόρυβος, ασυσχέτιστος με το x_t και το s_t .

- Δυναμικός θόρυβος ή θόρυβος συστήματος (dynamical / system noise)

$$s_t = f^t(s_0) + \varepsilon_t \quad (4.4)$$

όπου το ε_t θεωρείται επίσης λευκός και συνήθως προσθετικός θόρυβος, ασυσχέτιστος με το s_u για κάθε $u \leq t$.

Τα χαρακτηριστικά μιας τέτοιας τύπου χρονοσειράς είναι τα εξής [3]:

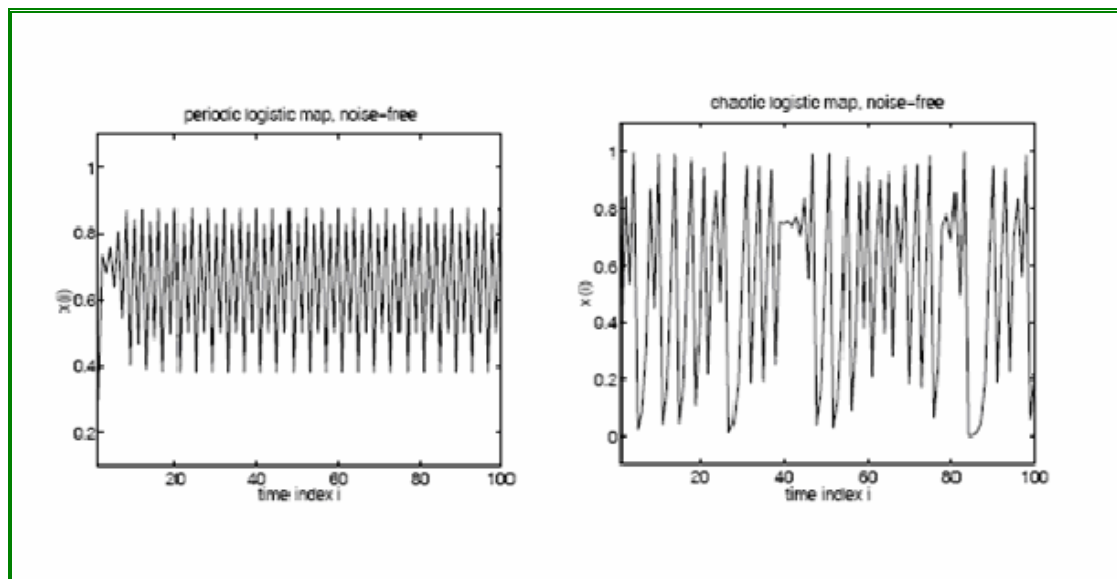
- Πολύπλοκη, μη κανονική συμπεριφορά με απότομες και μεγάλες αλλαγές. Σε καμία περίπτωση δε φαίνεται καθαρά η ισορροπία και αν ακολουθείται κάποιος νόμος.
- Οι τιμές που φαίνονται τυχαίες δεν προκύπτουν από μια τυχαία διαδικασία, αλλά από μια προσδιοριστική εξίσωση.
- Η εξίσωση που προσδιορίζει τις τιμές της χρονοσειράς είναι απλή. Δεν είναι απαραίτητο η συμπεριφορά να είναι αποτέλεσμα περίπλοκης εξίσωσης.
- Η συμπεριφορά είναι αποτέλεσμα λίγων μεταβλητών. Δεν είναι απαραίτητο να είναι πολλές η μεταβλητές για να έχουμε περίπλοκη συμπεριφορά.
- Η συμπεριφορά είναι εξ' ολοκλήρου δημιουργημένη από την ίδια, χωρίς καμία εξωτερική επιρροή.
- Η συμπεριφορά είναι αποτέλεσμα κάποιων κανόνων χωρίς να υπάρχει λάθος σε πράξεις.

Παρακάτω παρουσιάζονται κάποια γνωστά μοντέλα διακριτών και συνεχών χαοτικών συστημάτων.

Λογιστική απεικόνιση

$$S_{t+1} = as(1 - S_t)$$

Για διαφορετικές τιμές του $a \in [2,4]$ η απεικόνιση γίνεται σταθερή, περιοδική (καλύπτει όλο το φάσμα των περιόδων) και απεριοδική, δηλαδή χαοτική. Στα παρακάτω σχήματα παρουσιάζονται δύο χρονοσειρές της λογιστικής απεικόνισης, η μία (αριστερά) για $a = 3.52$ που δίνει περίοδο 4 και η άλλη (δεξιά) για $a = 4.0$ που δίνει χάος.

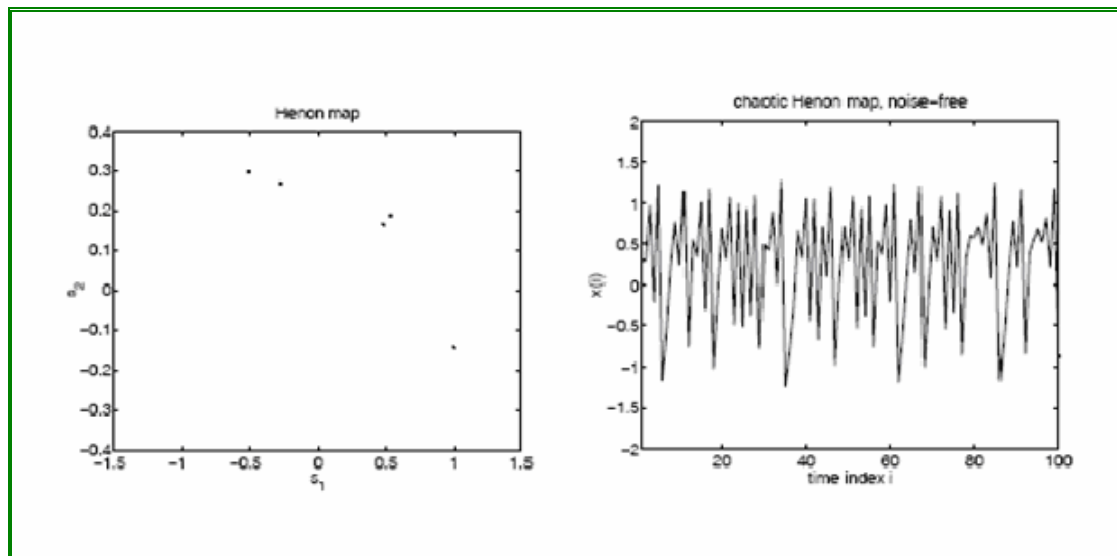


Σχήμα 4.1 Λογιστική απεικόνιση

Απεικόνιση Henon

$$S_{t+1} = 1 - as^2 + bs_{t-1}$$

Αυτό είναι ένα διακριτό σύστημα δύο μεταβλητών και είναι χαοτικό για $a = 1.4$ και $b = 0.3$. Στα παρακάτω σχήματα παρουσιάζεται ο ελκυστής (αριστερά) και η χρονοσειρά (δεξιά) της απεικόνισης σε χαοτική κατάσταση.



Σχήμα 4.2 Απεικόνιση Henon

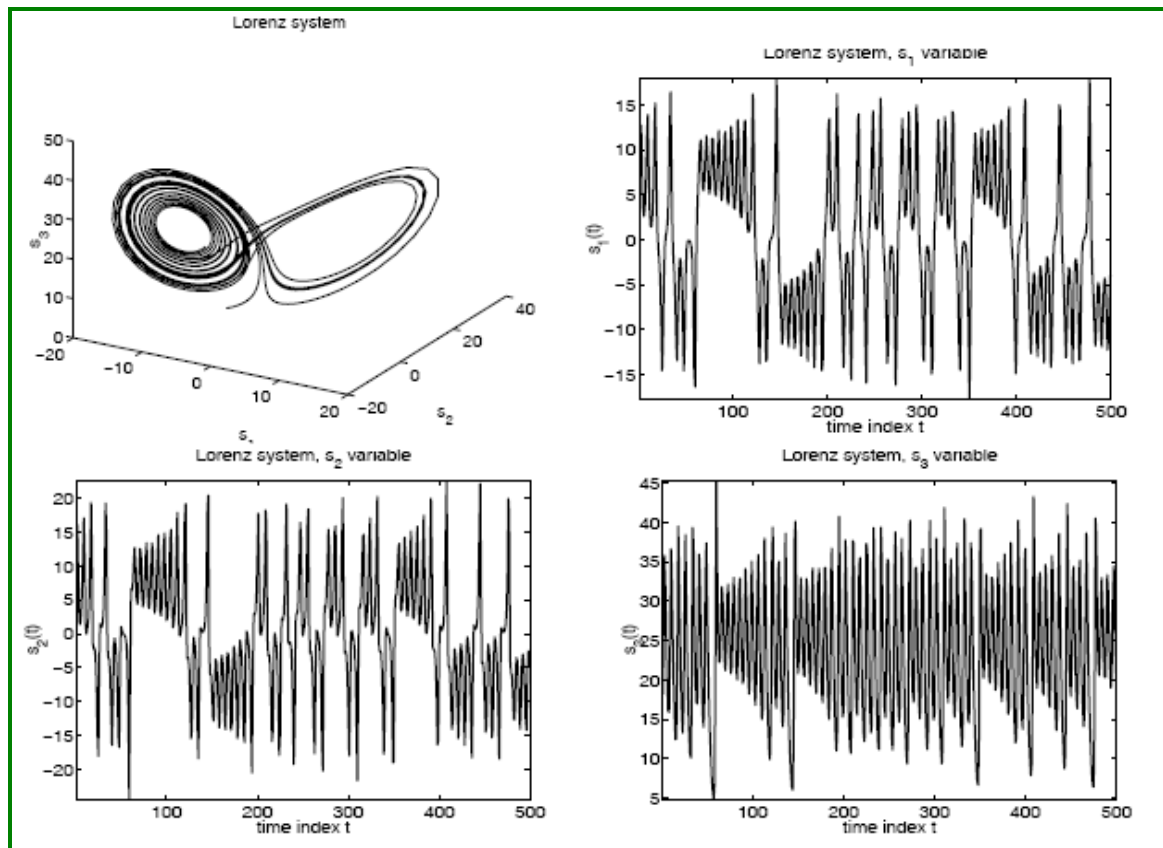
Σύστημα Lorenz

$$\dot{s}_1 = a(s_2 - s_1)$$

$$\dot{s}_2 = bs_1 - s_2 - s_1s_3$$

$$\dot{s}_3 = -cs_3 + s_1s_2$$

Αυτό είναι ένα συνεχές σύστημα τριών μεταβλητών και για τις τιμές των παραμέτρων, $a = 10$, $b = 28$, $c = 8/3$, το σύστημα είναι χαοτικό. Στα παρακάτω σχήματα δίνεται μια εικόνα του ελκυστή του συστήματος Lorenz και χρονοσειρές από τις τρεις μεταβλητές του συστήματος.



Σχήμα 4.3 Το σύστημα το Lorenz

4.1.3 Παρατήρηση χαοτικής συμπεριφοράς

Θεωρητικά είναι δυνατό να προβλεφθεί ο χαοτικός ή μη χαοτικός χαρακτήρας μιας χρονοσειράς αν συντρέχουν ορισμένες προϋποθέσεις που αφορούν τόσο εγγενείς ιδιότητες του υπό μελέτη συστήματος όσο και ορισμένα ποιοτικά χαρακτηριστικά της υπό μελέτη χρονοσειράς. Εντούτοις οι προϋποθέσεις αυτές σπάνια απαντώνται στην πράξη. Για παράδειγμα, συχνά, σε μια χρονοσειρά έχουμε στη διάθεση μας λίγα δεδομένα. Το γεγονός αυτό μας εμποδίζει να αποφανθούμε αν μια χρονοσειρά είναι χαοτική ή όχι ανεξάρτητα της μεθόδου που θα χρησιμοποιήσουμε.

Για να επιβεβαιώσουμε τη χαοτική συμπεριφορά μιας χρονοσειράς και, στη συνέχεια, να την προβλέψουμε θα πρέπει να έχουμε τα παρακάτω χαρακτηριστικά:

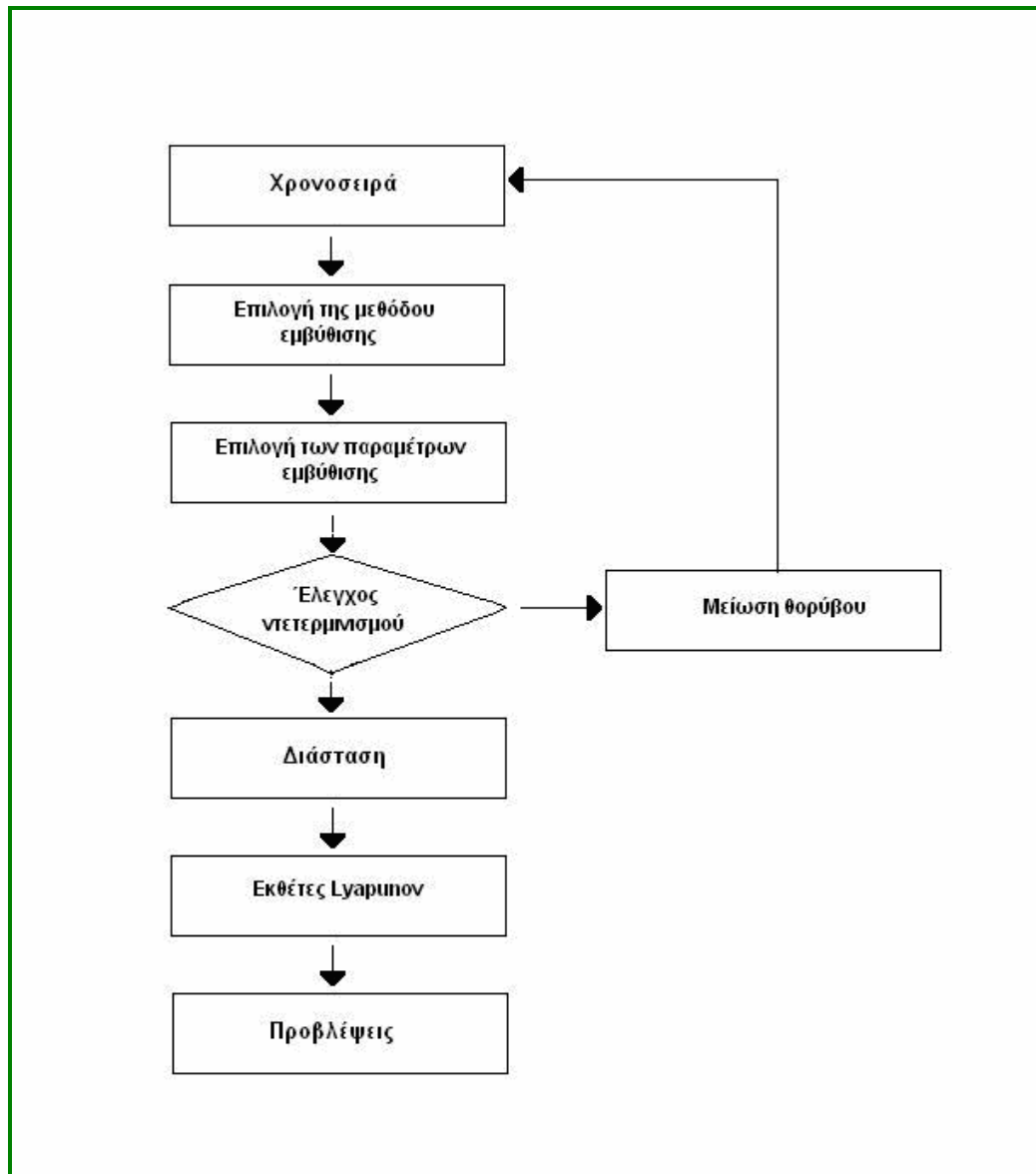
- I. Το σύστημα θα πρέπει να έχει μικρό αριθμό μεταβλητών. Ένα σύστημα πολλών μεταβλητών, έστω και πλήρως ντετερμινιστικό, είναι δυνατό να παρουσιάζει πολύπλοκη συμπεριφορά και πρακτικά τυχαία. Οι διάφορες θεωρητικές μέθοδοι δίνουν συνήθως καλύτερα αποτελέσματα όταν το σύστημα έχει μικρό αριθμό μεταβλητών. Εδώ πρέπει να σημειώσουμε ότι εννοούμε τον αριθμό των μεταβλητών στις οποίες δε συγκλίνει το σύστημα και όχι τον αρχικό αριθμό των μεταβλητών.
- II. Μεγάλο μήκος παρατηρήσεων. Καλό θα είναι να έχουμε χιλιάδες ή και εκατομμύρια παρατηρήσεων. Η θεωρία επιβάλλει άπειρο αριθμό παρατηρήσεως, αλλά με αρκετές χιλιάδες μπορούμε να πάρουμε καλές προσεγγίσεις.
- III. Μεγάλη ακρίβεια στις παρατηρήσεις. Αυτό σημαίνει ακριβείς μετρήσεις χωρίς να κόβουμε δεκαδικά ψηφία για απλοποίηση των πραγμάτων. Και εδώ η θεωρία επιβάλλει άπειρα δεκαδικά ψηφία.
- IV. Έλλειψη θορύβου. Μόνο υπό έλλειψη θορύβου (ή αν η επίδραση είναι αμελητέα) μπορεί να φανεί καθαρά ο δυναμικός χαρακτήρας της χρονοσειράς.
- V. Στασιμότητα. Η χρονοσειρά δεν πρέπει να παρουσιάζει μακροχρόνιες τάσεις. Μια χρονοσειρά είναι στάσιμη όταν οι στατιστικές τις ιδιότητες (μέσος όρος, διακύμανση κα) παραμένουν σταθερές σε οποιαδήποτε χρονική περίοδο κι αν τη μελετήσουμε. Με άλλα λόγια μια χρονοσειρά είναι στάσιμη εάν η συνάρτηση κατανομής παραμένει αναλλοίωτη στο πέρασμα του χρόνου.

4.1.4 Πως εργαζόμαστε με μια χαοτική χρονοσειρά

Όταν τελικά πάρουμε στα χέρια μας μια χρονοσειρά, υπάρχουν δύο πιθανοί στόχοι που μπορούμε να θέσουμε:

- ο **Ανακατασκευή υποδείγματος.** Αποσκοπεί στο να μας δώσει ένα υπόδειγμα που να περιγράφει όσο το δυνατόν πιο ικανοποιητικά τις παρατηρήσεις της χρονοσειράς. Για το σκοπό αυτό, εφαρμόζουμε διάφορες μεθόδους. Στην παρακάτω εικόνα βλέπουμε συνοπτικά τα αναγκαία βήματα. Το διάγραμμα αυτό είναι γενικό, δεν αφορά μια συγκεκριμένη μεθοδολογία. Οι προβλέψεις γίνονται μόνο ως επιβεβαίωση της προσδιοριστικής φύσης του συστήματος και περιμένουμε να είναι ακριβείς.

- ο **Προβλέψεις**. Όσον αφορά τις προβλέψεις υπάρχουν ισχυρά εργαλεία βασισμένα σε έννοιες όπως η διάσταση εμπύθισης (διάσταση εμφάπτισης, διάσταση εμπέδωσης, embedding dimension) και η χρονική υστέρηση, τα οποία μας επιτρέπουν να πάρουμε καλύτερη ακρίβεια στις προβλέψεις από άλλα παραδοσιακά εργαλεία.

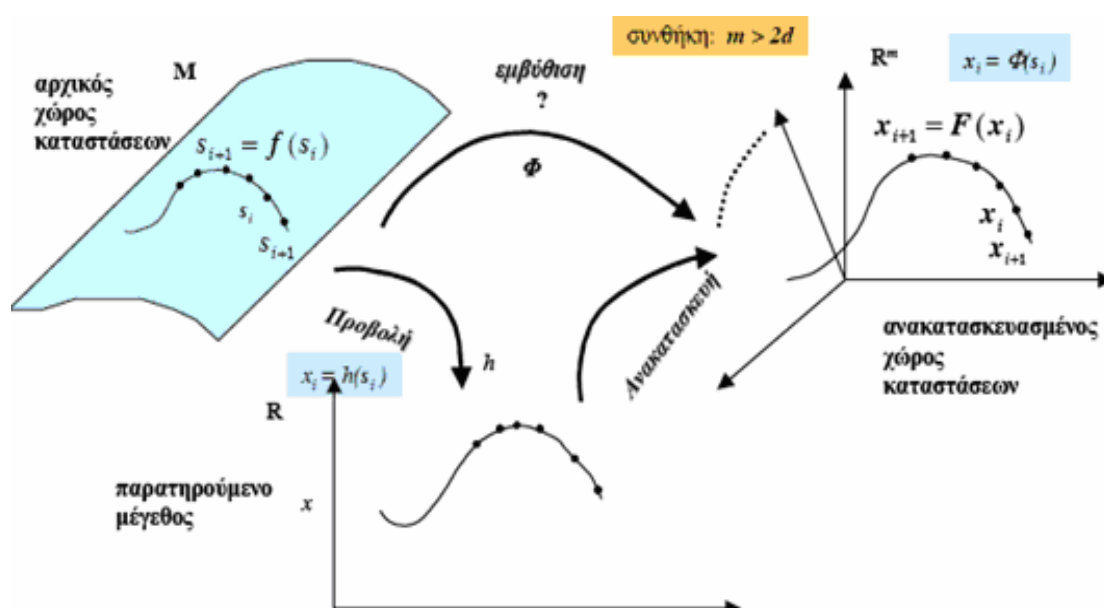


Σχήμα 4.4 Διάγραμμα τρόπου εργασίας με χρονοσειρές.

4.2 Ανακατασκευή χώρου καταστάσεων

Σε μια πρώτη προσέγγιση θα θέλαμε ίσως να εκτιμήσουμε τη συνάρτηση του συστήματος f^t (ή f για ένα χρονικό βήμα), τη διάσταση του χώρου καταστάσεων d στο οποίο βρίσκονται οι τροχιές που παράγει το σύστημα καθώς και τη συνάρτηση παρατήρησης h . Δεν είναι όμως δυνατόν από την παρατήρηση μιας μονοδιάστατης μεταβλητής x_t που αφορά το υπό μελέτη σύστημα να αντλήσουμε όλες αυτές τις πληροφορίες, δηλαδή να πετύχουμε αντιστροφή και από την προβολή στο \mathbf{R} να γυρίσουμε στο χώρο των καταστάσεων \mathbf{R}^d . Μπορούμε όμως να φτιάξουμε ένα είδωλο του αρχικού ελκυστή όπως θα δούμε παρακάτω.

Το θεώρημα του Takens επιτρέπει κάτω από κάποιες συνθήκες να κατασκευάσουμε ένα νέο χώρο καταστάσεων διάστασης m , στον οποίο οι ανακατασκευασμένες τροχιές $\{x_i\} \in \mathbb{R}^m$ από τη χρονοσειρά $\{x_i\}$, δηλαδή ο ανακατασκευασμένος ελκυστής, διατηρεί τις τοπολογικές ιδιότητες του αρχικού ελκυστή και το ανακατασκευασμένο δυναμικό σύστημα, $x_{i+1} = F(x_i)$, έχει τα ίδια δυναμικά χαρακτηριστικά με το αρχικό σύστημα, $s_{i+1} = f(s_i)$, δηλαδή επιτυγχάνεται **εμβύθιση** (embedding) Φ του αρχικού ελκυστή στον ανακατασκευασμένο ελκυστή, $x_i = \Phi(s_i)$. Στο παρακάτω σχεδιάγραμμα παρουσιάζεται το πρόβλημα της ανακατασκευής του χώρου καταστάσεων από μια χρονοσειρά.



Σχήμα 4.5 Διάγραμμα ανακατασκευής του χώρου των καταστάσεων.

Το θεώρημα του Takens δίνει τη συνθήκη $m \geq 2D + 1$ για την ανακατασκευή του χώρου καταστάσεων, όπου D είναι η μορφοκλασματική διάσταση του ελκυστή. Αν η διάσταση m του ανακατασκευασμένου χώρου καταστάσεων δεν είναι ικανοποιητικά μεγάλη, τότε ο ανακατασκευασμένος ελκυστής δεν «ξεδιπλώνεται» πλήρως αλλά παρουσιάζει *αυτο-τομές* (intersections) κι άρα δεν είναι τοπολογικά ισοδύναμος με τον αρχικό ελκυστή. Σημειώνεται ότι ένα δυναμικό σύστημα δεν μπορεί να έχει δύο λύσεις για την ίδια αρχική συνθήκη κι άρα δε μπορούν δύο τροχιές του να τέμνονται. Η συνθήκη βεβαιώνει ότι στον Ευκλείδειο χώρο διάστασης m όπου $m \geq 2D + 1$ δε θα υπάρχουν αυτο-τομές του ελκυστή. Θα πρέπει να σημειωθεί επίσης ότι το θεώρημα του Takens αναφέρεται σε χρονοσειρές με άπειρο μήκος και χωρίς θόρυβο. Στην πράξη αυτές οι συνθήκες φυσικά δε συναντώνται και γι αυτό τα αποτελέσματα της ανακατασκευής μπορούν να θεωρηθούν **μόνο προσεγγιστικά**.

Η ανακατασκευή του χώρου καταστάσεων γίνεται απλά με τη δημιουργία σημείων $x_i \in \mathbb{R}^m$ από τις μονοδιάστατες παρατηρήσεις $\{x_i\}$ για $i = 1, \dots, N$. Η πιο απλή και συνήθης μέθοδος ανακατασκευής του χώρου καταστάσεων είναι η **μέθοδος των υστερήσεων** (method of delays, MOD) και τα σημεία x_i σχηματίζονται απλά ως:

$$x_i = [x_i, x_{i-\tau}, \dots, x_{i-(m-1)\tau}] \quad (4.5)$$

Οι παράμετροι της ανακατασκευής είναι η **διάσταση εμφύθισης** (embedding dimension) m που ορίζει τον αριθμό των παρατηρήσεων που γίνονται συνιστώσες του ανακατασκευασμένου διανύσματος και η **υστέρηση** (delay) τ που ορίζει το χρονικό βήμα υστέρησης για την επιλογή των m συνιστωσών του ανακατασκευασμένου διανύσματος αρχίζοντας από το x_i . Θα πρέπει να σημειωθεί ότι η πληροφορία που διοχετεύεται από τη χρονοσειρά στο κάθε ανακατασκευασμένο διάνυσμα x_i καλύπτει το χρονικό παράθυρο:

$$\tau_w = (m-1)\tau \quad (4.6)$$

Για να επιτευχθεί σωστή ανακατασκευή θα πρέπει το παράθυρο αυτό να μην είναι ούτε πολύ μικρό, αλλιώς δε θα έχει χρησιμοποιηθεί αρκετή πληροφορία, ούτε πολύ μεγάλο, αλλιώς θα υπάρχει περιττή πληροφορία που θα περιπλέξει την ανακατασκευή. Για την ανακατασκευή του χώρου καταστάσεων πρέπει να

επιλέξουμε κατάλληλες τιμές για τις παραμέτρους m και τ . Παρακάτω παρουσιάζονται κάποιες μέθοδοι εκτίμησης των m και τ [27].

4.2.1 Επιλογή της χρονικής υστέρησης

Όπως είδαμε προηγουμένως το πρώτο πράγμα που πρέπει να κάνουμε για την εφαρμογή της μεθόδου των υστερήσεων είναι η επιλογή της χρονικής υστέρησης η οποία θα κάνει ανεξάρτητα τα δεδομένα μεταξύ τους όταν θα τοποθετηθούν ως διανύσματα με ανεξάρτητους συντελεστές σε m -διαστατο σύστημα συντεταγμένων. Τα δεδομένα, μετά από μια μεγάλη χρονική υστέρηση γίνονται ανεξάρτητα, αλλά αυτό από μόνο δεν αρκεί. Θα πρέπει να διαλέξουμε ανάμεσα σε ένα βέλτιστο συνδυασμό μικρής χρονικής υστέρησης και μεγάλης ανεξαρτησίας.

Το πρόβλημα επιλογής κατάλληλου τ παρουσιάζεται όταν οι παρατηρήσεις έχουν γίνει με μικρό χρόνο δειγματοληψίας τ_s και διαδοχικές παρατηρήσεις δε διαφέρουν σημαντικά. Σε μια τέτοια περίπτωση αν χρησιμοποιήσουμε μικρό τ δημιουργείται *πλεονασμός πληροφορίας* (redundancy of information) και διαδοχικές συνιστώσες είναι περίπου ίδιες. Από την άλλη, αν διαλέξουμε μεγάλο τ η δυναμική του συστήματος, όπως αυτή προβάλλεται στη χρονοσειρά, αποκόπτεται (irrelevance).

Δεν είναι ξεκάθαρο που βρίσκονται τα όρια μικρού και μεγάλου τ και κάποιος θα μπορούσε ακόμα και να αμφισβητήσει την εγκυρότητα των κριτηρίων του πλεονασμού και της αποκοπής της πληροφορίας για τη δυναμική του συστήματος. Παρ' όλα αυτά έχει επικρατήσει να θεωρείται ως καλύτερη επιλογή η μικρότερη τιμή του τ που καθιστά τις συνιστώσες του x_i ασυσχέτιστες. Παρακάτω θα αναφέρουμε τις πιο σημαντικές προσεγγίσεις.

αυτοσυσχέτιση

Η συνάρτηση *αυτοσυσχέτισης* είναι ο λόγος της αυτοσυνδιακύμανσης προς την διακύμανση. Έχουμε ένα σύνολο παρατηρήσεων $I(\tau) = I(x_i, x_{i-\tau})$, $i=1,2,\dots,N$ και μια χρονική υστέρηση τ . Η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης δίνεται από τον τύπο:

$$C(\tau) = \frac{\sum_{i=1}^{N-\tau} ((X_{i+\tau} - \bar{X})(X_i - \bar{X}))}{\sum_{i=1}^{N-\tau} (X_i - \bar{X})^2} \quad (4.7)$$

Η συνάρτηση παίρνει μια τιμή κάθε φορά που δέχεται μια χρονική υστέρηση. Συνεπώς στο διάγραμμα που δίνει, στον οριζόντιο άξονα είναι η χρονική υστέρηση (τ), που αρχίζει από το 0, και στον κατακόρυφο είναι η τιμή της $C(\tau)$ στο διάστημα $[-1,1]$. Όπου μηδενίζεται για πρώτη φορά η συνάρτηση $C(\tau)$ είναι και η χρονική περίοδος που θα διαλέξουμε για να ανακατασκευάσουμε το χώρο των φάσεων.

Βέβαια αυτός ο χρόνος που ζητάμε, θα πρέπει να είναι ο καλύτερος και ο συντομότερος. Καλύτερος σημαίνει να φέρνει τη συνάρτηση αυτοσυσχέτισης όσο το δυνατό πιο κοντά στο 0 και συντομότερος σημαίνει η χρονική υστέρηση να είναι όσο το δυνατόν μικρότερη. Φυσικά, και τις δύο προϋποθέσεις για την εκλογή καλύτερου τ δε μπορούμε να τις ικανοποιήσουμε ταυτόχρονα. Για αυτό έχουν προταθεί διάφορες απόψεις εκτός της κυριαρχούσας που είδαμε παραπάνω (τ ίση με το πρώτο σημείο μηδενισμού της $C(\tau)$). Οι δύο άλλες επικρατέστερες παραθέτονται παρακάτω χωρίς διάκριση σπουδαιότητας:

- Το πρώτο σημείο που αντιστοιχεί στο λεγόμενο χρόνο αυτοσυσχέτισης. Είναι ο χρόνος που χρειάζεται η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης να πέσει στο $1/e$.
- Το πρώτο τοπικό ελάχιστο της συνάρτησης αυτοσυσχέτισης. Πολλές φορές μπορεί η $C(\tau)$ να παίρνει μόνο θετικές τιμές και να πλησιάζει κατά περιόδους το 0.

Μια άλλη μέθοδος που μπορεί να θεωρηθεί γενίκευση της συνάρτησης αυτοσυσχέτισης και δεν κρίνεται σκόπιμο να αναλύσουμε, είναι η μέθοδος Υψηλότερου βαθμού συσχετίσεις (Higher Order Correlations).

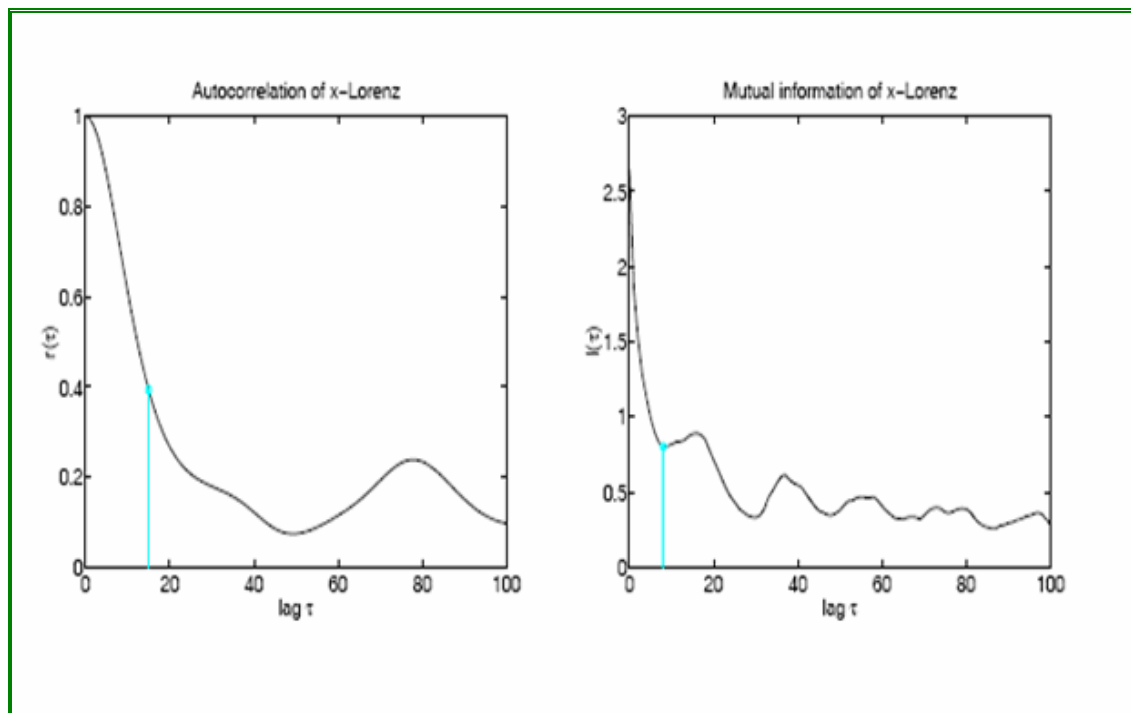
αμοιβαία πληροφορία

Η συνάρτηση **αμοιβαίας πληροφορίας** (mutual information) $I(X, Y)$ μετράει την γραμμική και μη γραμμική συσχέτιση δύο μεταβλητών X και Y και δίνεται ως:

$$I(X, Y) = \sum_{x,y} p_{XY}(x, y) \log \frac{p_{XY}(x, y)}{p_X(x)p_Y(y)} \quad (4.8)$$

όπου $p(x)$ είναι η πιθανότητα του $X=x$, $p_{XY}(x,y)$ είναι η κοινή πιθανότητα $X=x$ και $Y=y$ και το άθροισμα υπολογίζεται για όλες τις δυνατές τιμές των X και Y (για συνεχείς μεταβλητές X και Y εφαρμόζουμε κατάλληλο διαμερισμό των πεδίων τιμών τους). Για χρονοσειρές η αμοιβαία πληροφορία δίνεται ως $I(\tau) = I(x_i, x_{i-\tau})$ και αφορά τις μεταβλητές x_i και $x_{i-\tau}$. Η συνάρτηση $I(\tau)$ παίρνει πάντα θετικές τιμές. Η υστέρηση τ που αντιστοιχεί στο πρώτο τοπικό ελάχιστο της $I(\tau)$ προτείνεται ως η καταλληλότερη τιμή του τ για την ανακατασκευή του χώρου καταστάσεων.

Μια ακόμη μέθοδος που μπορεί να θεωρηθεί γενίκευση της μεθόδου της αμοιβαίας πληροφορίας σε πολλές διαστάσεις και δεν κρίνεται σκόπιμο να αναλύσουμε, είναι η μέθοδος ολοκλήρωμα συσχέτισης. Παρουσιάζονται παρακάτω τα γραφήματα της αυτοσυσχέτισης και της αμοιβαίας πληροφορίας για τη χρονοσειρά της x μεταβλητής του συστήματος Lorenz για την επιλογή του τ [27].



Σχήμα 4.6 Διαγράμματα αυτοσυσχέτισης και αμοιβαίας πληροφορίας, σύστημα Lorenz.

4.2.2 Επιλογή της διάστασης εμβύθισης

Υπάρχουν διάφορες μέθοδοι που δίνουν πληροφορίες για τη χρονοσειρά λαμβάνοντας υπόψη τη γεωμετρία του χώρου των φάσεων. Έχει επικρατήσει να λέγονται *γεωμετρικές μέθοδοι* επειδή ακριβώς λαμβάνουν υπόψη τις γεωμετρικές ιδιότητες των σημείων (διανυσμάτων) του χώρου των φάσεων. Οι πληροφορίες που μας δίνουν μπορεί να είναι ο ελάχιστος αριθμός εξισώσεων που μπορεί να αναπαράγει το σύστημα, εάν η χρονοσειρά είναι ντετερμινιστική κα.

Όσον αφορά την επιλογή της διάστασης εμβύθισης το θεώρημα του Takens δίνει την ικανή συνθήκη $m \geq 2D + 1$ για την αποφυγή αυτο-τομών στην ανακατασκευή του ελκυστή. Αυτή η συνθήκη δεν είναι και αναγκαία και θα θέλαμε να χρησιμοποιήσουμε όσο το δυνατόν μικρότερη διάσταση εμβύθισης m . Αν γνωρίζαμε την τοπολογική διάσταση d του Ευκλείδειου χώρου ή της πολλαπλότητας που τον καλύπτει, για τη ζητούμενη βέλτιστη διάσταση εμβύθισης m θα ίσχυε:

$$2D+1 \geq m \geq d$$

Επειδή όμως d και D είναι άγνωστα δεν υπάρχουν ενδείξεις για την επιλογή του m . Μια μέθοδος που χρησιμοποιείται συνήθως για την εύρεση του m είναι η *μέθοδος των ψευδών κοντινότερων γειτόνων* (method of false nearest neighbors, FNN). Το σκεπτικό της μεθόδου είναι το εξής: Τα σημεία x στο χώρο των φάσεων με διάσταση εμβύθισης m απέχουν μεταξύ τους αποστάσεις R . Τι θα συμβεί στις αποστάσεις αυτές αν η διάσταση εμβύθισης m αυξηθεί κατά 1 (δηλαδή $m \rightarrow m+1$); Αν οι αποστάσεις αυξηθούν τότε ο ελκυστής είναι ικανός να απλωθεί σε ακόμα μια διάσταση, διαφορετικά μπορούμε να τις δεχτούμε ως σωστές αποστάσεις μεταξύ των σημείων του ελκυστή.

Σε μικρές διαστάσεις εμβύθισης η δυναμική του συστήματος απεικονίζεται σε λίγους άξονες. Αυτό έχει ως συνέπεια πολλά σημεία της χρονοσειράς να προβάλλονται σε γειτονικές θέσεις στον ανακατασκευασμένο χώρο φάσεων. Η προβολή αυτή όμως δεν είναι αληθής (και κατά συνέπεια οι γειτονικές θέσεις δεν είναι αληθείς γειτονικές). Στην πραγματικότητα τα σημεία απέχουν σε μια συντεταγμένη του χώρου των φάσεων που εδώ έχει αγνοηθεί επειδή η διάσταση εμβύθισης είναι μικρότερη από την πραγματική. Το φαινόμενο αυτό προκαλεί επιπλοκές στη μέτρηση της διάστασης του συστήματος και στους εκθέτες Lyapunov.

Έχουμε, λοιπόν, για κάθε διάνυσμα x_i και τον κ-οστό κοντινότερό του γείτονα (x_k) στη διάσταση m , την απόσταση που δίνεται από τον τύπο:

$$\frac{R(x_i, k, m+1)}{R_A} > A_{tol} \quad (4.9)$$

Καθώς πηγαίνουμε στη διάσταση $m+1$ προσθέτουμε μια ακόμη συντεταγμένη για να προσδιορίσουμε την απόσταση x_i . Η νέα συντεταγμένη θα είναι η $x(i+(m+1)\tau)$. Τώρα μετράμε την απόσταση στη διάσταση $m+1$ μεταξύ του x_i και του κοντινότερου γείτονα που μετρήσαμε προηγουμένως. Αυτή η νέα απόσταση θα είναι:

$$\begin{aligned} R(x_i, k, m+1) &= \sqrt{\sum_{j=1}^{m+1} (X_{i+(j-1)\tau} - X_{k+(j-1)\tau})^2} \\ &= \sqrt{R(x_i, k, m)^2 + (X_{i+m\tau} - X_{k+m\tau})^2} \end{aligned} \quad (4.10)$$

Στο σημείο αυτό θα εξετάσουμε την ποσοστιαία μεταβολή της απόστασης του κοντινότερου γείτονα του x_i από τη διάσταση εμβύθισης m καθώς πηγαίνουμε στη διάσταση $m+1$. Θέτουμε μια σταθερά R_{tol} , η οποία είναι το κριτήριο που θα δείξει εάν η αύξηση είναι ή όχι σημαντική.

$$\sqrt{\frac{R^2(x_i, k, m+1) - R^2(x_i, k, m)}{R^2(x_i, k, m)}} = \frac{|x_{i+m\tau} - x_{k+m\tau}|}{R(x_i, 1, m)} > R_{tol} \quad (4.11)$$

Μια καλή προσέγγιση του $R(x_i, k, m)$ είναι το $R(x_i, 1, m)$, δηλαδή αρκεί να υπολογίσουμε τον κοντινότερο γείτονα. Σε αυτή την περίπτωση θα πρέπει $R_{tol} \geq 10$. Μια συνηθισμένη τιμή την οποία και χρησιμοποιούμε είναι $R_{tol} = 15$.

Στη συνέχεια έχουμε και ένα δεύτερο κριτήριο. Το κριτήριο αυτό έχει να κάνει με τον περιορισμένο αριθμό των σημείων. Καθώς προχωρούμε σε περισσότερες διαστάσεις οι αποστάσεις μεταξύ των σημείων αυξάνονται. Αν ο κοντινότερος γείτονας του τυχαίου σημείου x_i δε βρίσκεται αρκετά κοντά του, αλλά απέχει σχεδόν όσο και το μέγεθος του ελκυστή, τότε η απόστασή τους στην επόμενη

διάσταση εμπύθισης θα είναι διπλάσια. Θεωρούμε πως το μέγεθος του ελκυστή (R_A) δίνεται από τον τύπο της τυπικής απόκλισης:

$$R_A = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (X_i - \bar{X})^2}{N}} \quad (4.12)$$

Μπορούμε να εκτιμήσουμε το μέγεθος του ελκυστή με οποιαδήποτε προσέγγιση θεωρούμε αρκετά ικανοποιητική. Μια άλλη πιθανή προσέγγιση είναι η απόλυτη απόκλιση από το μέσο όρο. Θέτουμε μια σταθερά A_{tol} και το κριτήριο είναι:

$$\frac{R(x_i, k, m+1)}{R_A} > A_{tol} \quad (4.13)$$

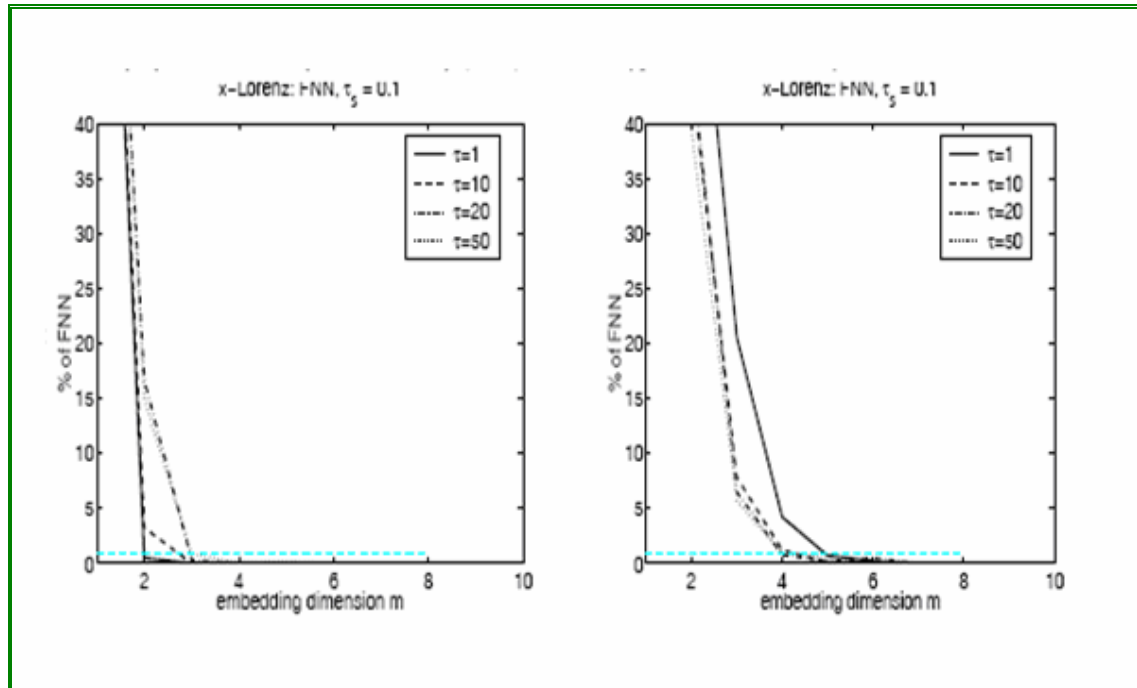
Μια καλή προσέγγιση για το A_{tol} είναι 2 την οποία και χρησιμοποιούμε. Οποιοσδήποτε κοντινότερος γείτονας επαληθεύσει ένα από τα δύο κριτήρια τότε θεωρείται λανθασμένος. Τελικά, η διάσταση εμπύθισης είναι αυτή που πρώτη φορά το ποσοστό των λανθασμένων κοντινότερων γειτόνων θα πέσει κάτω από το 1% και θα σταθεροποιηθεί εκεί για τις επόμενες διαστάσεις εμπύθισης. Το 1% φαντάζει αυθαίρετο. Είναι ένας ικανός εκτιμητής του λάθους που έχουμε κάνει διαλέγοντας αυτή τη διάσταση για να εμβυθίσουμε τη χρονοσειρά.

Θα συνοψίσουμε τα παραπάνω στη μεθοδολογία για διάσταση εμπύθισης m :

- ⊗ Υπολογίζουμε το R_A .
- ⊗ Για κάθε σημείο x_i υπολογίζουμε το $R(x_i, 1, m)$ και το $R(x_i, 1, m+1)$.
- ⊗ Επιχειρούμε τα δύο κριτήρια.
- ⊗ Αν ένα από τα κριτήρια επαληθευτεί τότε το ποσοστό των λανθασμένων κοντινότερων γειτόνων αυξάνεται κατά $1/T$. Το T υπολογίζεται στη διάσταση εμπύθισης $m+1$.

Η παραπάνω μέθοδος μπορεί να εφαρμοστεί και τοπικά. Για την εφαρμογή της μεθόδου θα πρέπει να κάνουμε ανακατασκευή του χώρου καταστάσεων για κάθε m , και άρα θα πρέπει να ορίσουμε πρώτα την παράμετρο υστέρησης τ . Ένα από τα προβλήματα εφαρμογής αυτής της μεθόδου είναι λοιπόν η εξάρτηση του m από το τ . Επίσης η μέθοδος είναι ευαίσθητη στην ύπαρξη θορύβου [3].

Στα παρακάτω δύο σχήματα παρουσιάζονται γραφήματα της μεθόδου για διάφορες τιμές του τ για τη χρονοσειρά της x -μεταβλητής του συστήματος Lorenz χωρίς θόρυβο (αριστερά) και με πρόσθεση λευκού θορύβου (δεξιά). Ο θόρυβος είναι με κανονική κατανομή και τυπική απόκλιση (SD) 10% της SD των δεδομένων.



Σχήμα 4.7 Διαγράμματα εφαρμογής της μεθόδου στο σύστημα Lorenz χωρίς και με θόρυβο.

Ενδεικτικά αναφέρουμε και τις υπόλοιπες γεωμετρικές μεθόδους, χωρίς να γίνει η ανάλυσή τους αφού αυτό δεν κρίνεται σκόπιμο στη παρούσα εργασία. Η μέθοδος, ταλαντώσεις μια παρατήρησης (single observable oscillations) μας επιτρέπει να εκτιμήσουμε τη διάσταση εμβύθισης μέσω των ταλαντώσεων της χρονοσειράς. Η μέθοδος, συνεχής απεικόνιση μιας τιμής (single valued continuous mapping) είναι μια μέθοδος που μοιάζει με τη μέθοδο που αναλύσαμε παραπάνω. Τέλος οι μέθοδοι, αληθή διανυσματικά πεδία (true vector fields) και συνέχεια του χώρου φάσεων (phase space continuity) αποτελούν μεθόδους για τη ανακάλυψη κρυμμένου ντετερμινισμού.

4.3 Εκτίμηση μη-γραμμικών χαρακτηριστικών του δυναμικού συστήματος

Για τη διερεύνηση ενός μη-γραμμικού δυναμικού συστήματος εκτιμούμε τα μη-γραμμικά χαρακτηριστικά του συστήματος που αφορούν τη *διάσταση* του ελκυστή του συστήματος και την *πολυπλοκότητα* του συστήματος. Η εκτίμηση τέτοιων χαρακτηριστικών βοηθά επίσης στην επιλογή κατάλληλου μοντέλου για τη χρονοσειρά, π.χ. η διάσταση καθορίζει τον ελάχιστο αριθμό βαθμών ελευθερίας στο μοντέλο. Τα μη-γραμμικά χαρακτηριστικά ορίζονται στα πλαίσια της θεωρίας των μη-γραμμικών δυναμικών συστημάτων και του χάους ως *αναλλοίωτα μέτρα* του συστήματος (invariant measures), δηλαδή ως σταθερά μεγέθη που δεν αλλοιώνονται από την εξέλιξη του συστήματος, καθώς και από τη διαδικασία παρατήρησης του όταν αναφερόμαστε σε χρονοσειρές. Τέτοια χαρακτηριστικά είναι η *πυκνότητα* των τροχιών, η *μορφοκλασματική διάσταση*, η *εντροπία* και οι *εκθέτες Lyapunov*. Στη συνέχεια θα μελετήσουμε δύο τέτοια αναλλοίωτα μέτρα [3].

4.3.1 Διαστάσεις δυναμικού συστήματος

Στην παράγραφο αυτή θα δούμε το πως μπορούμε να μετρήσουμε την ακριβή διάσταση ενός δυναμικού συστήματος μέσα από τη χρονοσειρά. Η ακριβής τιμή της διάστασης τις περισσότερες φορές δεν είναι ακέραιος. Η μη ακέραια (κλασματική) τιμή της διάστασης είναι το ένα από τα δύο χαρακτηριστικά του παράξενου ελκυστή.

Αφού υπολογίσουμε την κλασματική διάσταση του ελκυστή, ο ελάχιστος αριθμός των εξισώσεων που μπορούν να προσδιορίσουν το σύστημα, είναι ο αμέσως επόμενος ακέραιος. Στην προηγούμενη ενότητα είδαμε ότι οι γεωμετρικές μέθοδοι μας δίνουν μια *προσέγγιση* του ελάχιστου αριθμού των εξισώσεων, που είναι ικανές να περιγράψουν το σύστημα. Βλέπουμε λοιπόν ότι η ανάλυση των διαστάσεων είναι πιο ισχυρή από τη ανάλυση των γεωμετρικών μεθόδων.

Το σκεπτικό, συνοπτικά, για τη μέτρηση των διαστάσεων είναι το ακόλουθο: *εμβυθίζουμε* τη χρονοσειρά σε διαδοχικές διαστάσεις και προσπαθούμε να διακρίνουμε κάποια σταθεροποίηση στη *σύνθεση* του *αντικειμένου που σχηματίζεται*. Το αντικείμενο που σχηματίζεται είναι ο ελκυστής όπως τον βλέπουμε μέσα από τη μέθοδο εμβύθισης που χρησιμοποιούμε. Βέβαια, σε 4 και άνω

διαστάσεις δε μπορούμε να έχουμε μια συνολική οπτική εικόνα του ελκυστή. Ο ελκυστής αυτός, ακόμα και όταν έχουμε χρονοσειρά που προέρχεται από συνεχές σύστημα, δεν παύει να είναι ένα σύνολο σημείων. Το σύνολο αυτό των σημείων σε άλλες περιοχές του χώρου των φάσεων έχει υψηλή πυκνότητα και σε άλλες χαμηλή. Έχουμε, λοιπόν, ένα αντικείμενο με διαφορετική σύνθεση και για κάποια συγκεκριμένη σύνθεση προσπαθούμε να διακρίνουμε τον ελάχιστο αριθμό των εξισώσεων. Επιπλέον, δεν έχουμε χρονοσειρά λευκού θορύβου ώστε η διάσταση να μην σταθεροποιείται ποτέ [3].

Θα αναφέρουμε ενδεικτικά τις διάφορες διαστάσεις που διακρίνουμε σε ένα σύστημα και θα αναλύσουμε μόνο τη **διάσταση συσχέτισης** (λόγω της ευκολίας του υπολογισμού της και της εκτενής χρήσης της σε εφαρμογές) σαν ικανό εκτιμητή της διάστασης του συστήματος που δίνει τη χρονοσειρά.

- ο Διάσταση χωρητικότητας

Με τη διάσταση χωρητικότητας (capacity dimension) ή διάσταση άθροισης κουτιών (box-counting dimension) μετράμε τον όγκο που καταλαμβάνει ο ελκυστής στο χώρο των φάσεων.

- ο Διάσταση πληροφορίας

Με τη διάσταση πληροφορίας (information dimension) αυτό που κάνουμε είναι να μετρήσουμε από κάθε κουτί (πλευράς r) την εντροπία πληροφορίας.

- ο Διάσταση κατά σημείο

Παρόμοια με τη διάσταση συσχέτισης, που θα αναλύσουμε παρακάτω, είναι και η διάσταση κατά σημείο (pointwise dimension). Αυτή μας δείχνει για κάθε σημείο του χώρου των φάσεων την κλίση του ολοκληρώματος συσχέτισης που σχηματίζει.

- ο Γενικευμένη διάσταση

Οι παραπάνω διαστάσεις και η διάσταση συσχέτισης αποτελούν ειδικές περιπτώσεις της γενικευμένης διάστασης D_q (διαστάσεις Renyi). Ο δείκτης q δείχνει αν δίνουμε βάρος στις μικρές ($q < 0$) ή στις μεγάλες ($q > 0$) πιθανότητες του χώρου των φάσεων για τη μέτρηση της διάστασης του ελκυστή.

- ο Διάσταση Lyapunov

Είναι ένα μέγεθος που έχει ορισθεί από τους Kaplan και Yorke ως εξής:

$$D_L = j + \frac{\sum_{i=1}^j \lambda_i}{|\lambda_{j+1}|} \quad \text{όπου το } j \text{ καθορίζεται ως εξής} \quad \sum_{i=1}^j \lambda_i > 0 \wedge \sum_{i=1}^{j+1} \lambda_i < 0$$

Το σύμβολο \wedge είναι το λογικό και, δηλαδή θα πρέπει να ισχύουν και οι δύο σχέσεις. Η διάσταση Lyapunov είναι ίση με τη διάσταση πληροφορίας. Στους εκθέτες Lyapunov θα αναφερθούμε στην επόμενη παράγραφο [3].

Διάσταση συσχέτισης

Ένας ελκυστής, όπως κάθε γεωμετρικό αντικείμενο, χαρακτηρίζεται από την *Ευκλείδεια διάσταση* του Ευκλείδειου χώρου που περιέχει τον ελκυστή (π.χ. για τον ανακατασκευασμένο χώρο είναι η διάσταση εμβύθισης m) και την *τοπολογική διάσταση* της πολλαπλότητας πάνω στην οποία βρίσκεται ο ελκυστής. Για να χαρακτηρίσουμε όμως την ιδιότητα της αυτο-ομοιότητας εισάγουμε τη *μορφοκλασματική διάσταση*. Η διάσταση αυτή είναι συνεπής με τη συνήθη έννοια της διάστασης, δηλαδή πεπερασμένα σύνολα σημείων έχουν διάσταση 0, γραμμές έχουν διάσταση 1 και επιφάνειες έχουν διάσταση 2. Επιπλέον, για γεωμετρικά αντικείμενα με την ιδιότητα της αυτο-ομοιότητας, όπως τυπικά είναι οι παράξενοι ελκυστές, η μορφοκλασματική διάσταση είναι μη ακέραιος αριθμός.

Η **διάσταση συσχέτισης** (correlation dimension) ν είναι ένα από τα αναλλοίωτα μέτρα που εκφράζουν τη μορφοκλασματική διάσταση. Ας θεωρήσουμε έναν ελκυστή ως ένα μη πεπερασμένο σύνολο σημείων x_i κι ας ορίσουμε την πιθανότητα $P(\|x_i - x_j\| < r)$ η απόσταση δύο σημείων του ελκυστή να είναι μικρότερη από κάποια απόσταση r , όπου $\|x\|$ είναι το μήκος του διανύσματος x ορισμένο με κάποια μετρική, όπως η Ευκλείδεια μετρική. Αν μ_i είναι ο αριθμός των σημείων που βρίσκονται μέσα σε σφαίρα με ακτίνα r και κέντρο x_i , τότε η μέση τιμή ως προς όλα τα x_i $\langle \mu_i \rangle_x$ προσεγγίζει την παραπάνω πιθανότητα. Σύμφωνα με το **νόμο κλιμάκωσης** (scaling law) είναι:

$$\langle \mu_i \rangle_x \sim r^\nu \quad \text{όταν} \quad r \rightarrow 0 \quad (4.14)$$

δηλαδή για μικρές ακτίνες r η πιθανότητα η απόσταση δύο σημείων του ελκυστή να είναι μικρότερη του r αλλάζει αναλογικά με κάποια δύναμη της απόστασης r με σταθερό εκθέτη ν . Αν ο ελκυστής έχει συνηθισμένη μορφή (πεπερασμένο σύνολο σημείων, γραμμή, επιφάνεια κτλ.) ο εκθέτης ν είναι ακέραιος αριθμός ενώ αν είναι παράξενος το ν είναι μη-ακέραιος και δηλώνει το βαθμό αυτο-ομοιότητας.

Για ένα σύνολο πεπερασμένων σημείων $\{x_i\}, i=1, \dots, N$, όπως η ανακατασκευασμένη τροχιά από τη χρονοσειρά, το $\langle \mu_i \rangle_x$ εκτιμάται από το **άθροισμα συσχέτισης** (correlation sum) $C(r)$:

$$C(r) = \frac{2}{N(N-1)} \sum_{i=1}^N \sum_{j=i+1}^N \Theta(r - \|x_i - x_j\|) \quad (4.15)$$

όπου $\Theta(x)$ είναι η λεγόμενη Heaviside συνάρτηση.

$$\Theta(x) = \begin{cases} 0 & , x \leq 0 \\ 1 & , x > 0 \end{cases}$$

Το διπλό άθροισμα μετράει όλα τα δυνατά ζευγάρια (x_i, x_j) που έχουν απόσταση μικρότερη από r . Για $N \rightarrow \infty$ και $r \rightarrow 0$ από το νόμο κλιμάκωσης της (4.14) βρίσκουμε τη διάσταση συσχέτισης ως:

$$\nu = \frac{d \log C(r)}{d \log r} \quad (4.16)$$

Είναι φανερό ότι τα δύο όρια ($N \rightarrow \infty$ και $r \rightarrow 0$) δεν ικανοποιούνται στην πραγματικότητα αφού οι χρονοσειρές έχουν πεπερασμένο μήκος και τα δεδομένα δίνονται με πεπερασμένη ακρίβεια. Περιμένουμε λοιπόν το γράφημα του $\log C(r)$ vs $\log r$ να σχηματίζει ευθεία γραμμή (δηλαδή να έχει σταθερή κλίση) για κάποιο διάστημα σχετικά μικρών τιμών του r , που το ονομάζουμε *περιοχή κλιμάκωσης* του r (scaling region). Εναλλακτικά, θα πρέπει για την περιοχή κλιμάκωσης του r , το γράφημα της παραγώγου που δίνεται στην (4.16) να σταθεροποιείται σε μια οριζόντια γραμμή στο ύψος της τιμής ν .

Για την εκτίμηση χαρακτηριστικής για το σύστημα διάστασης συσχέτισης ν από μια χρονοσειρά θα πρέπει επιπλέον το ίδιο οριζόντιο επίπεδο της παραγώγου της (4.16) να παρατηρείται για διαφορετικές ανακατασκευές του ελκυστή. Για τις ανακατασκευές συνήθως χρησιμοποιούμε τη μέθοδο της υστέρησης με κατάλληλη σταθερή τιμή του τ και αυξανόμενη διάσταση εμβύθισης m . Περιμένουμε η εκτίμηση της διάστασης συσχέτισης ν ως συνάρτηση της διάστασης εμβύθισης m , $\nu(m)$, να δίνεται ως εξής:

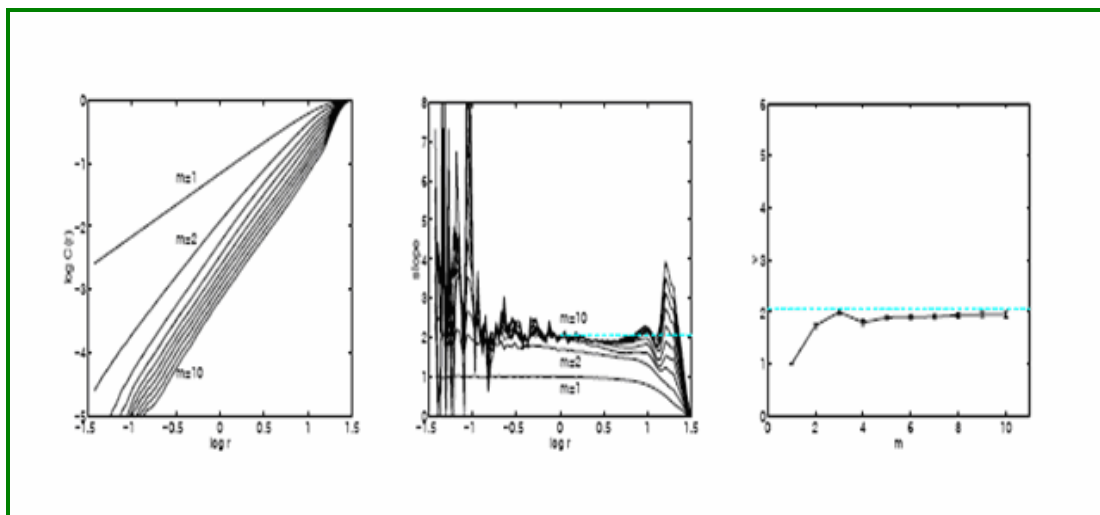
- Για μικρές τιμές του m , όπου η ανακατασκευή του ελκυστή δεν είναι ικανοποιητική, το οριζόντιο επίπεδο που δίνει την εκτίμηση του $\nu(m)$ θα αυξάνει με την αύξηση του m .
- Για μεγαλύτερες τιμές του m θα πρέπει το οριζόντιο επίπεδο να συγκλίνει στο ίδιο ύψος $\nu = \nu(m)$.
- Καθώς το m μεγαλώνει ακόμα περισσότερο η περιοχή κλιμάκωσης σταδιακά εξαφανίζεται και η εκτίμηση του ν δεν είναι πια δυνατή.

Η διαδικασία υπολογισμού της διάστασης συσχέτισης ν παριστάνεται γραφικά με τρία σχήματα (δες τα σχήματα στο παρακάτω παράδειγμα):

- Το πρώτο σχήμα είναι το γράφημα $\log C(r)$ vs $\log r$ για ένα εύρος τιμών της m , $1, 2, \dots, m_{\max}$ (στο σχήμα παρουσιάζονται $m_{\max}=10$ διαφορετικές γραμμές).
- Το δεύτερο σχήμα είναι το γράφημα $\frac{d \log C(r)}{d \log r}$ για το ίδιο εύρος τιμών της m .
- Το τρίτο σχήμα είναι το γράφημα $\nu(m)$ vs m , όπου $\nu(m)$ είναι η εκτίμηση της κλίσης από τα γραφήματα στο πρώτο σχήμα ή του οριζοντίου επιπέδου από τα γραφήματα στο δεύτερο σχήμα αντίστοιχα για κάθε τιμή του m . Συνήθως σχηματίζουμε και το όριο $\pm SD$ της απόκλισης για την κλίση ή το οριζόντιο επίπεδο, όπου SD είναι η τυπική απόκλιση.

Παράδειγμα (σύστημα Lorenz)

Τα παρακάτω τρία σχήματα συνοψίζουν την εκτίμηση του ν από μια χρονοσειρά 5000 παρατηρήσεων της x -μεταβλητής του συστήματος Lorenz ($\tau_s = 0.1s$) χρησιμοποιώντας ανακατασκευές του χώρου καταστάσεων με $\tau = 2$ και $m = 1, \dots, 10$.



Σχήμα 4.8 Διαδικασία υπολογισμού της διάστασης συσχέτισης ν γραφικά.

Στο πρώτο σχήμα φαίνεται πως τα γραφήματα $\log C(r)$ vs $\log r$ είναι ευθείες γραμμές για μεγάλο διάστημα τιμών της απόστασης r . Η κλιμάκωση δε διατηρείται για πολύ μικρά r (μικρότερα για μικρά m και μεγαλύτερα για μεγάλα m ως περίπου $\log r < -0.5$), γιατί δεν υπάρχουν αρκετά σημεία σε υπερ-σφαίρες με τόσο μικρές ακτίνες και η στατιστική είναι φτωχή. Επίσης η κλιμάκωση δε διατηρείται για πολύ μεγάλα r (περίπου $\log r > 1$ για μεγάλα m), όπου η αυτο-ομοιότητα καταστρέφεται από τη γεωμετρία του ελκυστή. Η περιοχή κλιμάκωσης είναι αρκετά μεγάλη και εκτείνεται προσεγγιστικά στο διάστημα $-0.5 < \log r < 1$.

Η περιοχή κλιμάκωσης φαίνεται και στο δεύτερο σχήμα από το οριζόντιο επίπεδο της κλίσης $\frac{d \log C(r)}{d \log r}$ για μεγάλα m . Για μικρά m η περιοχή κλιμάκωσης επεκτείνεται σε ακόμα μικρότερα r . Για $m = 1$ το γράφημα είναι οριζόντια γραμμή σε στάθμη που αντιστοιχεί σε κλίση 1, ενώ για $m = 2$ πλησιάζει την οριζόντια γραμμή κλίσης 2 και αυτό δείχνει ότι για αυτές τις τιμές του m η ανακατασκευή δεν είναι ικανοποιητική. Για μεγαλύτερα m τα γραφήματα της κλίσης συγκλίνουν σε οριζόντια γραμμή που αντιστοιχεί σε κλίση $\nu \approx 2$. Στο τρίτο σχήμα φαίνεται η σταθερή εκτίμηση του ν για $m \geq 3$, όπου φαίνεται και το μικρό όριο σφάλματος $\pm SD$.

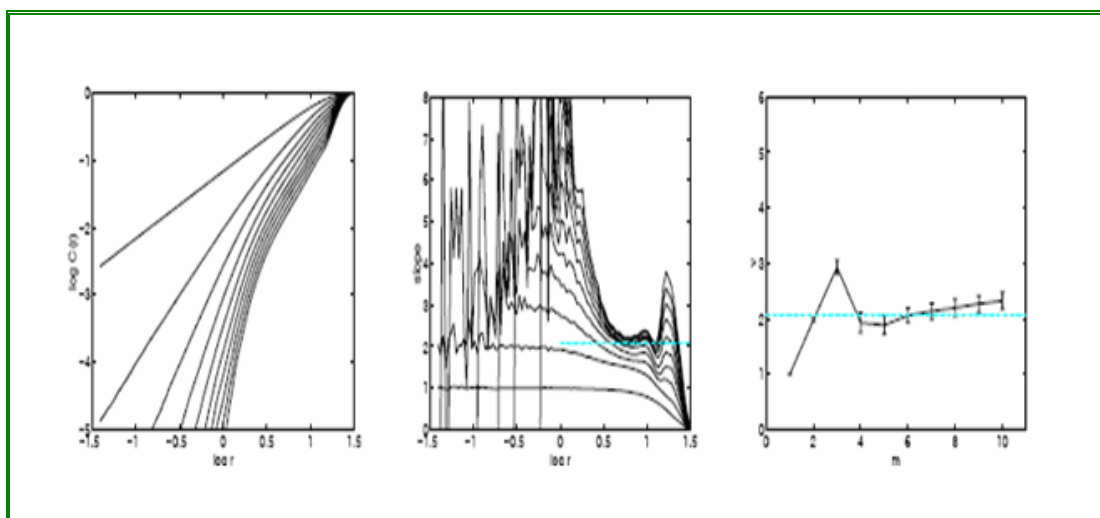
Η πραγματική διάσταση συσχέτισης είναι 2.06 και δίνεται από την γαλάζια οριζόντια γραμμή.

Η εκτίμηση του ν επηρεάζεται από πολλούς παράγοντες:

- Για χρονοσειρές από συνεχή συστήματα με μικρό χρόνο δειγματοληψίας τ_s , χρονικά κοντινά σημεία αλλοιώνουν την στατιστική $C(r)$ γιατί ενώ είναι σε απόσταση μικρότερη του r ανήκουν στην ίδια τροχιά και δε θα έπρεπε να μετρηθούν στο $C(r)$. Η μέτρηση τέτοιων ζευγαριών δίνει υποεκτίμηση του ν . Μπορούμε απλά να απαλείψουμε όλα αυτά τα ζευγάρια θέτοντας τη συνθήκη $|i - j| < w$ στο άθροισμα της (4.15), όπου w είναι ένας ικανά μεγάλος χρόνος (π.χ. ο μέσος χρόνος ταλάντωσης).
- Για χρονοσειρές από συνεχή συστήματα η επιλογή του χρόνου υστέρησης τ , σε συνδυασμό και με την διάσταση εμβύθισης m μπορεί να επηρεάσει την εκτίμηση του ν , κυρίως όταν η περιοχή κλιμάκωσης του r είναι μικρή. Για πολύ μικρά τ μπορεί η σύγκλιση του $\nu(m)$ για διάφορα m να δίνει υποεκτίμηση της πραγματική διάστασης συσχέτισης, ενώ για μεγάλα τ μπορεί να μη συγκλίνουν οι εκτιμήσεις $\nu(m)$.
- Ο θόρυβος (συστήματος ή παρατήρησης) αλλοιώνει την κλιμάκωση για αποστάσεις r ως και το επίπεδο του εύρους του θορύβου. Σε τέτοιες αποστάσεις r η αυτο-ομοιότητα καταστρέφεται από το θόρυβο και η κατανομή των σημείων καθορίζεται περισσότερο από την κατανομή του θορύβου παρά από τη δυναμική του συστήματος. Γι αυτό για μικρά r εμφανίζεται η κλίση να προσεγγίζει το m . Αυτό έχει ως αποτέλεσμα να μικραίνει η περιοχή κλιμάκωσης του r που επιτρέπει την σωστή εκτίμηση του ν . Αν μάλιστα το εύρος του θορύβου είναι μεγάλο μπορεί η περιοχή κλιμάκωσης να καλύπτεται πλήρως και να μην είναι δυνατή η εκτίμηση του ν .
- Το μήκος N της χρονοσειράς καθορίζει επίσης το μέγεθος της περιοχής κλιμάκωσης. Για μικρό N το διάστημα των τιμών του r που υποστηρίζει το νόμο κλιμάκωσης συρρικνώνεται από τα αριστερά γιατί για μικρές τιμές του r η στατιστική των σημείων είναι φτωχή.

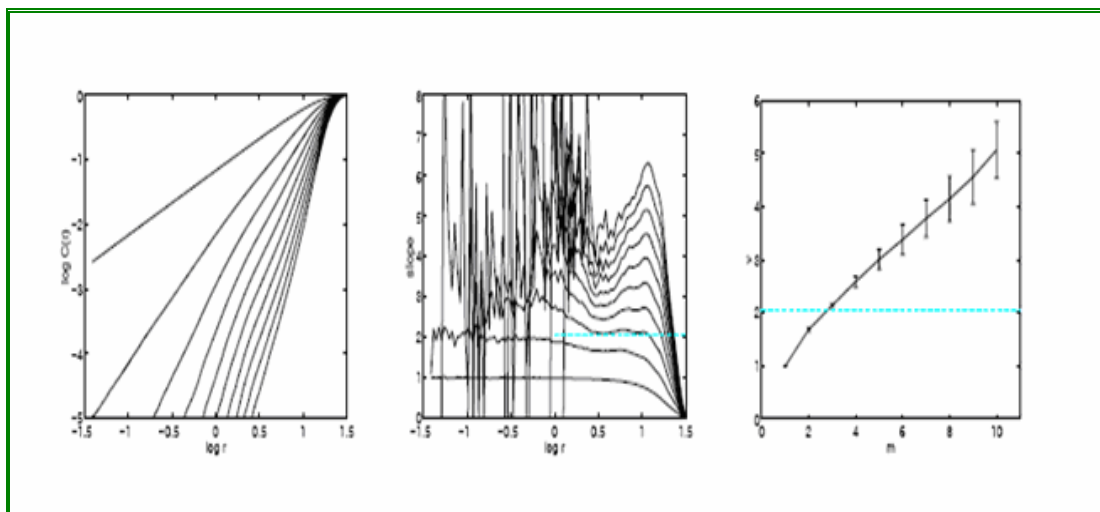
Παράδειγμα σύστημα Lorenz (συνέχεια)

Ακολουθούμε την ίδια διαδικασία εκτίμησης του ν αλλά στην χρονοσειρά του συστήματος Lorenz προσθέσαμε λευκό Gaussian θόρυβο με SD 10% του SD των δεδομένων. Η ανακατασκευή του χώρου καταστάσεων είναι όπως πριν με $\tau = 2$ και $m = 1, \dots, 10$. Όπως φαίνεται από τα τρία παρακάτω σχήματα η περιοχή κλιμάκωσης του r έχει μικρύνει λόγω του θορύβου αλλά η εκτίμηση του ν είναι ακόμα δυνατή για $0.5 < \log r < 1$. Επίσης για μικρά r ($\log r < 0.5$) η κλίση μεγαλώνει και τείνει να προσεγγίσει την αντίστοιχη τιμή του m .



Σχήμα 4.9 Υπολογισμός της διάστασης συσχέτισης ν γραφικά (θόρυβος) .

Επαναλαμβάνουμε την ίδια διαδικασία αλλά για χρόνο υστέρησης $\tau = 10$. Όπως φαίνεται στα τρία παρακάτω σχήματα αυτή η επιλογή του τ δεν επιτρέπει αξιόπιστη εκτίμηση της διάστασης συσχέτισης. Οι κλίσεις δε συγκλίνουν αλλά αυξάνουν καθώς το m αυξάνει και επομένως η εκτίμηση του ν αυξάνει με το m . Αυτό συμβαίνει γιατί το παράθυρο χρόνου της ανακατασκευής $\tau_w = (m-1)\tau$ γίνεται πολύ μεγάλο και οι αναδιπλώσεις του ελκυστή καταστρέφουν την κλιμάκωση για μεγάλα r ($\log r > 0.5$), για τα οποία βρήκαμε να διατηρείται κάποια κλιμάκωση παραπάνω για $\tau = 2$.



Σχήμα 4.10 Υπολογισμός της διάστασης συσχέτισης ν γραφικά (λάθος τ)

Η εκτίμηση της διάστασης συσχέτισης σε πραγματικές χρονοσειρές παρουσιάζει πολλές δυσκολίες και η επιλογή των παραμέτρων έχει μεγάλη σημασία. Λόγω ακριβώς της αδυναμίας ακριβής εκτίμησης του ν σε πραγματικά προβλήματα, είναι δύσκολο να χαρακτηρίσουμε το σύστημα ως χαοτικό από τον υπολογισμό μη-ακέραιου ν . Για παράδειγμα το αποτέλεσμα $\nu = 3.2 \pm 0.3$ δεν αποκλείει ότι το σύστημα που έδωσε τη χρονοσειρά είναι ένας τόρος διάστασης 3. Όμως μπορούμε να συμπεράνουμε ότι με 4 βαθμούς ελευθερίας (δηλαδή μεταβλητές) θα μπορούσαμε να περιγράψουμε αυτό το σύστημα [27].

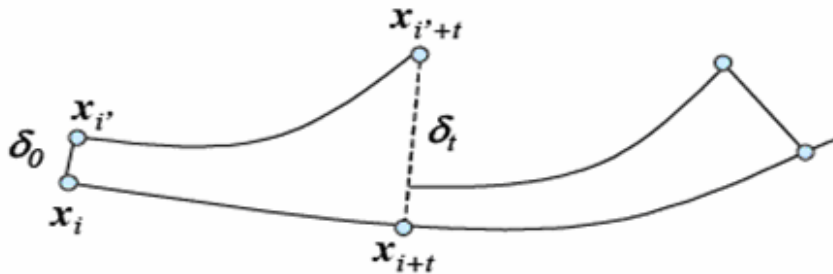
4.3.2 Εκθέτες Lyapunov

Η ιδιότητα των χαοτικών δυναμικών συστημάτων να έχουν ευαισθησία στις αρχικές συνθήκες κάνει τις τροχιές τους, που αρχικά είναι πολύ κοντά να αποκλίνουν γρήγορα και μάλιστα εκθετικά. Ο μέσος εκθέτης που αντιστοιχεί στη διεύθυνση της μεγαλύτερης απόκλισης των τροχιών είναι ο μεγαλύτερος εκθέτης Lyapunov. Γενικά για ένα δυναμικό σύστημα που παράγει τροχιές σε κάποιο χώρο διάστασης m υπάρχουν m εκθέτες Lyapunov, ένας για κάθε διεύθυνση. Ένας αρνητικός εκθέτης Lyapunov δηλώνει το βαθμό σύγκλισης τροχιών στη διεύθυνση που του αντιστοιχεί ενώ ένας θετικός εκθέτης Lyapunov δηλώνει το βαθμό απόκλισης των τροχιών σε αυτήν τη διεύθυνση. Για ροές, τουλάχιστον ένας εκθέτης

Lyapunov είναι 0 και αντιστοιχεί στη διεύθυνση της κίνησης της τροχιάς. Αν το αιτιοκρατικό δυναμικό σύστημα δεν είναι хаoticό τότε δεν έχει κανένα θετικό εκθέτη Lyapunov. Για συστήματα απώλειας ενέργειας το άθροισμα των εκθετών Lyapunov είναι πάντα αρνητικό.

Υπάρχουν μέθοδοι εκτίμησης όλου του φάσματος των εκθετών Lyapunov αλλά εδώ θα περιοριστούμε στην εκτίμηση του **μέγιστου εκθέτη Lyapunov** λ_1 (largest Lyapunov exponent), που μας επιτρέπει να χαρακτηρίσουμε το σύστημα хаoticό αν $\lambda_1 > 0$, καθώς και να μετρήσουμε το βαθμό πολυπλοκότητας του συστήματος με την τιμή του λ_1 . Ας υποθέσουμε ότι δύο σημεία x_i και $x_{i'}$ που ανήκουν σε δύο διαφορετικές τροχιές βρίσκονται κοντά και σε απόσταση $\delta_0 = \|x_i - x_{i'}\|$, όπως δείχνει το παρακάτω σχήμα. Μετά από κάποιο χρόνο t η απόσταση τους γίνεται $\delta_t = \|x_{i+t} - x_{i'+t}\|$. Ο μέγιστος εκθέτης Lyapunov ορίζεται ως:

$$\delta_t \cong \delta_0 e^{\lambda_1 t} \quad \text{για} \quad t \rightarrow \infty \quad (4.17)$$



Αν το σύστημα είναι хаoticό και οι τροχιές αποκλίνουν ο εκθέτης λ_1 είναι θετικός. Βέβαια δύο τροχιές δε μπορεί συνέχεια να αποκλίνουν καθώς αυξάνει ο χρόνος t αφού ο ελκυστής περιορίζεται σε κάποια περιοχή του χώρου καταστάσεων. Άρα η σχέση 4.17 ισχύει για χρόνους t , όπου το δ_t παραμένει μικρό. Για να είναι δυνατόν λοιπόν να μετρηθεί η απόκλιση θα πρέπει να ισχύει $\delta_t \rightarrow 0$.

Ο ορισμός της (4.17) έχει πρακτικές δυσκολίες και δεν επιτρέπει τον υπολογισμό του λ_1 από πεπερασμένη χρονοσειρά αφού δε μπορεί να ισχύει

$\delta_0 \rightarrow 0$ και $t \rightarrow \infty$. Η εκτίμηση του λ_1 , όπου ο ελκυστής αποτελείται από το σύνολο των ανακατασκευασμένων σημείων, γίνεται ως εξής:

- ⊗ Αρχίζουμε με ένα σημείο αναφοράς x_i του ανακατασκευασμένου ελκυστή και βρίσκουμε το κοντινότερο σημείο $x_{i'}$ του ελκυστή, έστω σε απόσταση $\delta_{0,i}$.
- ⊗ Υπολογίζουμε την απόσταση των δύο τροχιών που ξεκινούν ύστερα από χρόνο t , δηλαδή την απόσταση $\delta_{t,i}$ των σημείων x_{i+t} και $x_{i'+t}$.
- ⊗ Ορίζουμε ως νέο σημείο αναφοράς x_{i+t} και επαναλαμβάνουμε τα δύο πρώτα βήματα.
- ⊗ Επαναλαμβάνουμε την ίδια διαδικασία μέχρι τα σημεία αναφοράς να καλύψουν όλα τα σημεία.
- ⊗ Ο μέγιστος εκθέτης Lyapunov εκτιμάται από το μέσο όρο της εκθετικής απόκλισης $\delta_{t,i}$ από $\delta_{0,i}$ όλων των σημείων αναφοράς x_i ως:

$$\lambda_1 = \frac{1}{Nt} \sum_{j=1}^N \log \frac{\delta_{t,j}}{\delta_{0,j}} \quad (4.18)$$

Για χρονοσειρές, τα σημεία x_i προέρχονται από την χρονοσειρά με την ανακατασκευή του χώρου καταστάσεων. Εκτός από τις παραμέτρους τ και m της ανακατασκευής θα πρέπει να οριστούν κι άλλες παράμετροι του αλγόριθμου εκτίμησης του λ_1 , όπως ο χρόνος t . Όπως και για την εκτίμηση της διάστασης συσχέτισης, η εκτίμηση του λ_1 επηρεάζεται από το θόρυβο και το μήκος της χρονοσειράς κατά τον ίδιο τρόπο, δηλαδή περισσότερος θόρυβος ή μικρότερο μήκος δίνουν χειρότερες εκτιμήσεις του λ_1 . Ένα βασικό πρόβλημα με την εκτίμηση του λ_1 με την παραπάνω μέθοδο είναι η προϋπόθεση ότι η απόκλιση είναι εκθετική, όπως συμβαίνει στα χαοτικά συστήματα. Όταν εφαρμόζουμε τη μέθοδο σε κάποια χρονοσειρά δε ξέρουμε από πριν αν είναι χαοτική. Η μέθοδος αυτή δίνει επίσης θετική τιμή του λ_1 για στοχαστικά συστήματα. Για παράδειγμα για χρονοσειρά από

λευκό θόρυβο, το λ_1 αντιστοιχεί σε απόκλιση ίση με την τυπική απόκλιση του θορύβου για $t=1$. Η εκτίμηση του λ_1 δε μπορεί λοιπόν να ξεχωρίσει ένα χαοτικό από ένα στοχαστικό σύστημα. Γι αυτό το λόγο υπάρχουν τροποποιήσεις αυτής της μεθόδου τις οποίες βέβαια δεν κρίνεται σκόπιμο να αναλύσουμε στην παρούσα εργασία [27].

4.3.3 Γενικευμένη εντροπία

Ένα χαρακτηριστικό του χαοτικού (παράξενου) ελκυστή είναι η θετική εντροπία, κάτι που σημαίνει ευαισθησία στις αρχικές συνθήκες. Ορίζουμε την εντροπία και πιο συγκεκριμένα την εντροπία K_1 να είναι το άθροισμα των θετικών εκθετών Lyapunov (LEs). Μπορούμε να μετρήσουμε κατευθείαν από τη χρονοσειρά, την K_1 και γενικότερα την K_q με το q να ορίζεται στο $(-\infty, +\infty)$. Η σχέση που συνδέει τη γενικευμένη διάσταση D_q (αναφερθήκαμε σε προηγούμενη ενότητα) και την εντροπία είναι:

$$\log C_{q,m}(r) \approx (q-1)D_q \log r - m(q-1)K_q \quad (4.19)$$

Το K_q είναι η κλίση της παλινδρόμησης που προκύπτει από τη σχέση 4.19. Η εξαρτημένη μεταβλητή είναι το m και η ανεξάρτητη το $\log C_{q,m}(r)$. Το q , το D_q και το $\log r$ είναι σταθερές. Ο ρόλος των πολλών σημείων χωρίς θόρυβο είναι ουσιαστικός, γιατί το m πρέπει να πάρει μεγάλες τιμές και να υπάρχουν πολλά σημεία στο χώρο των φάσεων, ώστε να συγκροτηθεί ένας καλά δομημένος ελκυστής. Επίσης, τα πολλά σημεία βοηθούν στο να γίνει εμφανής η διαβαθμισμένη περιοχή από την οποία θα διαλέξουμε το r . Το ολοκλήρωμα συσχέτισης το μετράμε με τη μέθοδο των υπερκύβων.

Με τη μέθοδο των υπερκύβων, ο ορισμός της εντροπίας K_q είναι:

$$K_q = \frac{-\log \sum_{i=1}^{N(r)} p_i^q}{(q-1)m}, \quad r \rightarrow 0, m \rightarrow \infty \quad (4.20)$$

και για την ειδική περίπτωση $q \rightarrow 1$ έχουμε

$$K_1 = \frac{-\sum_{i=1}^{N(r)} p_i \log p_i}{m} \quad (4.21)$$

Η μέθοδος των υπερκύβων απαιτεί μεγάλους υπολογισμούς. Με τη μέθοδο των υπερσφαιρών αρκεί να λύσουμε την 4.19 ως προς K_q . Για την ειδική περίπτωση $q \rightarrow 1$ έχουμε:

$$K_1 = -\frac{1}{m} \frac{1}{T} \sum_{i=1}^T \log \left[\frac{1}{T-1} \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^T H(r - \|x_i - x_j\|) \right] \quad (4.22)$$

Η εντροπία K_1 ονομάζεται και εντροπία πληροφορίας (information entropy), ή μετρική εντροπία (metric entropy), ή εντροπία Kolmogorov (Kolmogorov entropy), ή Kolmogorov-Sinai, και η εντροπία K_0 ονομάζεται τοπολογική εντροπία (topological entropy). Η K_2 είναι ένα κάτω όριο για την K_1 . Αυτό σημαίνει ότι δεν μπορούμε να έχουμε $K_1 < K_2$. Γενικά ισχύει για κάθε $q' < q \Leftrightarrow K_{q'} \geq K_q$. Στην περίπτωση του fractal για κάθε q ισχύει $K_q = K_0$. Ένας κύκλος έχει εντροπία 0, ένας хаοτικός ελκυστής έχει θετική πεπερασμένη εντροπία και ο θόρυβος έχει άπειρη εντροπία. Το όριο στην προβλεψιμότητα σχετίζεται με την K_1 εντροπία και είναι $K_1 \sim t^{-1}$ όπου t είναι ο μέσος χρόνος στο μέλλον για τον οποίο η γνώση μιας τωρινής κατάστασης του συστήματος μπορεί να χρησιμοποιηθεί για πρόβλεψη. Άρα βλέπουμε ότι ένα κύκλο μπορούμε να τον προβλέψουμε έπ' άπειρο, ένα хаοτικό ελκυστή μέχρι μια καθορισμένη χρονική περίοδο στο μέλλον και στο θόρυβο δε μπορούμε να προβλέψουμε ούτε την επόμενη τιμή [27].

4.4 Μη-γραμμικά μοντέλα πρόβλεψης

Θεωρώντας την ανακατασκευή του χώρου των καταστάσεων και την υπόθεση ότι η χρονοσειρά είναι η προβολή κάποιου δυναμικού συστήματος, τα σημεία του ανακατασκευασμένου ελκυστή ορίζονται από τη συνάρτηση (διανυσματικό πεδίο) $F: \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}^m, x_{i+1} = F(x_i)$, ή γενικά για κάποιο χρονικό βήμα $T, x_{i+T} = F^T(x_i)$.

Σε προβλήματα πρόβλεψης της χρονοσειράς δε μας ενδιαφέρει να εκτιμήσουμε την F^T αλλά μόνο τη συνιστώσα της, $F^T : \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}$, που ορίζει το στοιχείο x_{i+T} της χρονοσειράς $x_{i+T} = F^T(x_i)$. Είναι φανερό ότι ένα ικανοποιητικό μοντέλο για την συνάρτηση F^T θα πρέπει να είναι μη-γραμμικό για να μπορεί να κατέχει τις ιδιότητες του αρχικού συστήματος όπως αυτές διατηρούνται μέσω της ανακατασκευής. Σημειώνεται ότι αν το σύστημα είναι χαοτικό τότε έχει ευαισθησία στις αρχικές συνθήκες κι άρα ανεξάρτητα από την καταλληλότητα του μοντέλου οι προβλέψεις περιορίζονται σε μικρό χρονικό ορίζοντα και η αβεβαιότητα της πρόβλεψης αυξάνει εκθετικά σύμφωνα με τον μέγιστο εκθέτη Lyapunov. Υπάρχουν πολλές κλάσεις μη-γραμμικών μοντέλων και τα μοντέλα μπορούν να χωριστούν ανάλογα με το πώς ορίζονται στο χώρο καταστάσεων σε *καθολικά*, *ημι-τοπικά* και *τοπικά*.

- Τα καθολικά μοντέλα έχουν μοναδική αναλυτική έκφραση για όλο το πεδίο ορισμού. Τέτοια μοντέλα είναι τα πολυωνυμικά και κλασματικά.
- Τα ημι-τοπικά μοντέλα εκφράζονται αναλυτικά όπως τα καθολικά μοντέλα αλλά αποτελούνται από ένα σύνολο βασικών συναρτήσεων και για αυτό η μορφή τους αλλάζει στις διάφορες περιοχές του χώρου καταστάσεων. Τέτοια μοντέλα είναι τα *νευρωνικά δίκτυα* (neural networks) και οι *βασικές ακτινωτές συναρτήσεις* (radial basis functions).
- Τα τοπικά μοντέλα δεν επιδέχονται μοναδική αναλυτική έκφραση για όλο το πεδίο ορισμού αλλά διαμορφώνονται διαφορετικά σε κάθε περιοχή του χώρου καταστάσεων. Τέτοια μοντέλα είναι τα μοντέλα πυρήνων (kernel models) και τα τοπικά γραμμικά μοντέλα.

Στη συνέχεια θα αναφέρουμε τα *τοπικά γραμμικά μοντέλα πρόβλεψης* (local linear prediction models), γιατί είναι τα πιο γνωστά στα πλαίσια αυτή της ανάλυσης χρονοσειρών.

Τοπικά Γραμμικά Μοντέλα

Το τοπικό γραμμικό μοντέλο για κάθε χρονική στιγμή i είναι:

$$\begin{aligned} x_{i+1} &= F(x_i) = F(x_i, x_{i-\tau}, \dots, x_{i-(m-1)\tau}) \\ &= \phi_0^{(i)} + \phi_1^{(i)} + \phi_2^{(i)} + \dots + \phi_m^{(i)} x_{i-(m-1)\tau} \end{aligned} \quad (4.23)$$

όπου οι παράμετροι $\phi_0^{(i)}, \phi_1^{(i)}, \dots, \phi_m^{(i)}$ ορίζονται (και εκτιμώνται) για κάθε σημείο \mathbf{x}_i . Η βασική διαφορά από το κλασικό αυτοπαλινδρομούμενο AR μοντέλο είναι ότι για την εκτίμηση των παραμέτρων $\phi_0^{(i)}, \phi_1^{(i)}, \dots, \phi_m^{(i)}$ δε χρησιμοποιούνται όλα τα στοιχεία της χρονοσειράς αλλά μόνο κάποια *τμήματα* (segments) που «μοιάζουν» στο τμήμα $\{x_i, x_{i-\tau}, \dots, x_{i-(m-1)\tau}\}$. Στον ανακατασκευασμένο χώρο καταστάσεων \mathbb{R}^m αυτά τα τμήματα της χρονοσειράς αντιστοιχούν σε γειτονικά σημεία του $x_i = [x_i, x_{i-\tau}, \dots, x_{i-(m-1)\tau}]'$.

Έστω $x_{i(1)}, x_{i(2)}, \dots, x_{i(K)}$ τα K κοντινότερα σημεία στο x_i που βρέθηκαν για χρόνους μικρότερους του i . Πριν περάσουμε στο γραμμικό μοντέλο ας ορίσουμε δύο απλά τοπικά μοντέλα. Η πιο απλή πρόβλεψη του x_{i+1} είναι από την εικόνα του πιο κοντινού σημείου $x_{i(1)}$, δηλαδή:

$$\hat{x}_{i+1} \equiv x_i(1) = x_{i(1)+1} \quad (4.24)$$

Αυτή είναι η *πρόβλεψη μηδενικής τάξης* (zero order prediction). Αν συμπεριλάβουμε κι άλλα γειτονικά σημεία μπορούμε να κάνουμε πρόβλεψη παίρνοντας το μέσο όρο των εικόνων των γειτονικών σημείων. Για K γειτονικά σημεία του \mathbf{x}_i η πρόβλεψη είναι:

$$x_i(1) = \frac{1}{K} \sum_{j=1}^K x_{i(j)+1} \quad (4.25)$$

Αυτή είναι η *τοπική πρόβλεψη μέσου όρου* (local average prediction). Μπορεί εναλλακτικά να οριστεί από το σταθμισμένο μέσο όρο, σταθμίζοντας με την απόσταση του κάθε γειτονικού σημείου από το \mathbf{x}_i . Τα δύο παραπάνω μοντέλα δεν

απαιτούν εκτίμηση κάποιας παραμέτρου του μοντέλου ενώ για το τοπικό γραμμικό μοντέλο της (4.23) για την πρόβλεψη σε κάθε χρονική στιγμή i πρέπει να οριστούν οι παράμετροι $\phi_0^{(i)}, \phi_1^{(i)}, \dots, \phi_m^{(i)}$. Υποθέτουμε ότι το μοντέλο της (4.23) ισχύει για μια μικρή περιοχή γύρω από το x_i κι άρα και για τα σημεία $x_{i(1)}, x_{i(2)}, \dots, x_{i(K)}$. Η εκτίμηση των παραμέτρων δίνεται εύκολα από τη μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων ως:

$$\min_{\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_m} \sum_{j=1}^K (x_{i(j)+1} - \phi_0^i - \phi_1^i x_{i(j)} - \dots - \phi_m^i x_{i(j)-(m-1)\tau})^2 \quad (4.26)$$

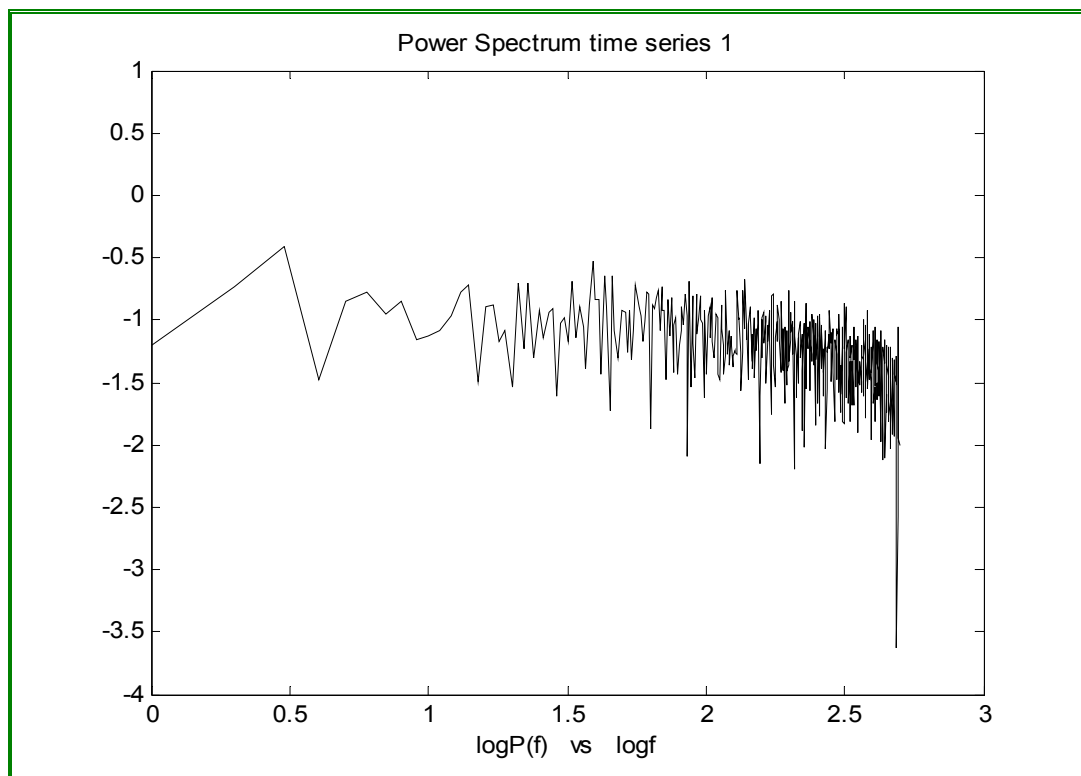
και η πρόβλεψη του $x_{i(1)}$ δίνεται από την (4.23) για τις τιμές των $\phi_0^{(i)}, \phi_1^{(i)}, \dots, \phi_m^{(i)}$ που προκύπτουν από τη λύση της (4.26). Για πρόβλεψη T χρονικών βημάτων μπορούμε απλά να αλλάξουμε τις εικόνες $x_{i(j)+1}$ για ένα χρονικό βήμα στην (4.26) με τις εικόνες $x_{i(j)+T}$ για T χρονικά βήματα. Μπορούμε επίσης να κάνουμε την πρόβλεψη επαναληπτικά προβλέποντας κάθε φορά την επόμενη εικόνα βήματος 1. Για παράδειγμα, έχοντας υπολογίσει το $x_{i(1)}$ σχηματίζουμε το διάνυσμα x_{i+1} αντικαθιστώντας τη συνιστώσα x_{i+1} με το $x_{i(1)}$, βρίσκουμε τα γειτονικά σημεία του $x_{i(1)}$ και προχωράμε στον υπολογισμό του $x_i(2) \equiv \hat{x}_{i+2}$ [27].

4.5 Εφαρμογή του χαοτικού μοντέλου

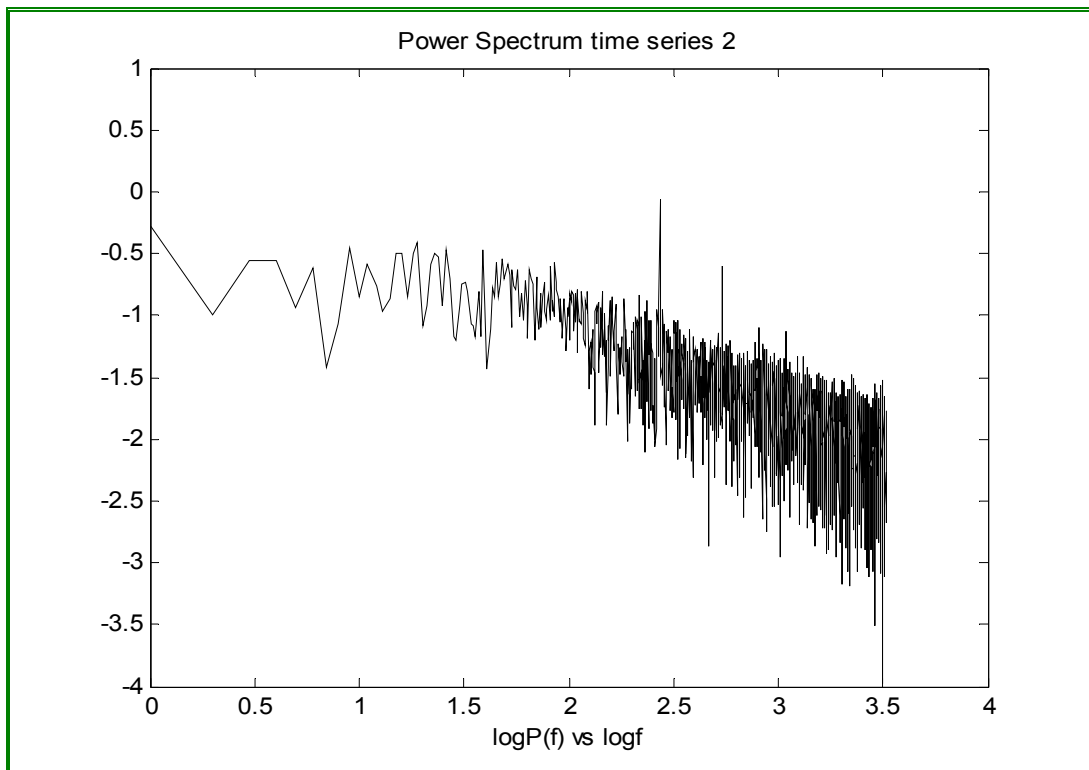
Για την αξιολόγηση της απόδοσης των μοντέλων πρόβλεψης η χρονοσειρά, όπως και στις προηγούμενες περιπτώσεις, χωρίζεται σε δύο τμήματα. Το πρώτο σύνολο σημείων για την εκμάθηση του μοντέλου (training set). Για τα τοπικά μοντέλα αυτό το σύνολο σημείων δίνει τους γείτονες του σημείου αναφοράς. Το δεύτερο σύνολο σημείων είναι για την εκτίμηση του λάθους πρόβλεψης (test set). Αυτά είναι τα σημεία αναφοράς για τα οποία γίνεται πρόβλεψη και συγκρίνεται με τις πραγματικές παρατηρήσεις.

Σύμφωνα με όσα αναλύσαμε προηγουμένως στη θεωρία και με τη βοήθεια του λογισμικού NLTSA 2.0 εφαρμόσαμε τους διάφορους αλγόριθμους για την ανάλυση των χρονοσειρών μας, ακολουθώντας τα βήματα του σχήματος 4.4.

Ένας τρόπος για να διαπιστώσουμε εάν υπάρχει μακροχρόνια μνήμη στις χρονοσειρές, είναι το *φάσμα ισχύος* (*power spectrum*). Το σκεπτικό είναι ότι στις χρονοσειρές υπάρχουν μικροί και μεγάλοι κύκλοι με τη μορφή ημίτονου (ή συνημίτονου). Με το φάσμα ισχύος προσπαθούμε να διακρίνουμε τους κύκλους που συμβάλουν σε μεγάλο ποσοστό στη διακύμανση των χρονοσειρών, και να αγνοήσουμε αυτούς που συμβάλουν κατά μικρό ποσοστό. Παρακάτω ακολουθούν τα διαγράμματα ισχύος των χρονοσειρών.



Σχήμα 4.11 Φάσμα ισχύος ($\log P(f)$ έναντι $\log f$) χρονοσειράς 1.



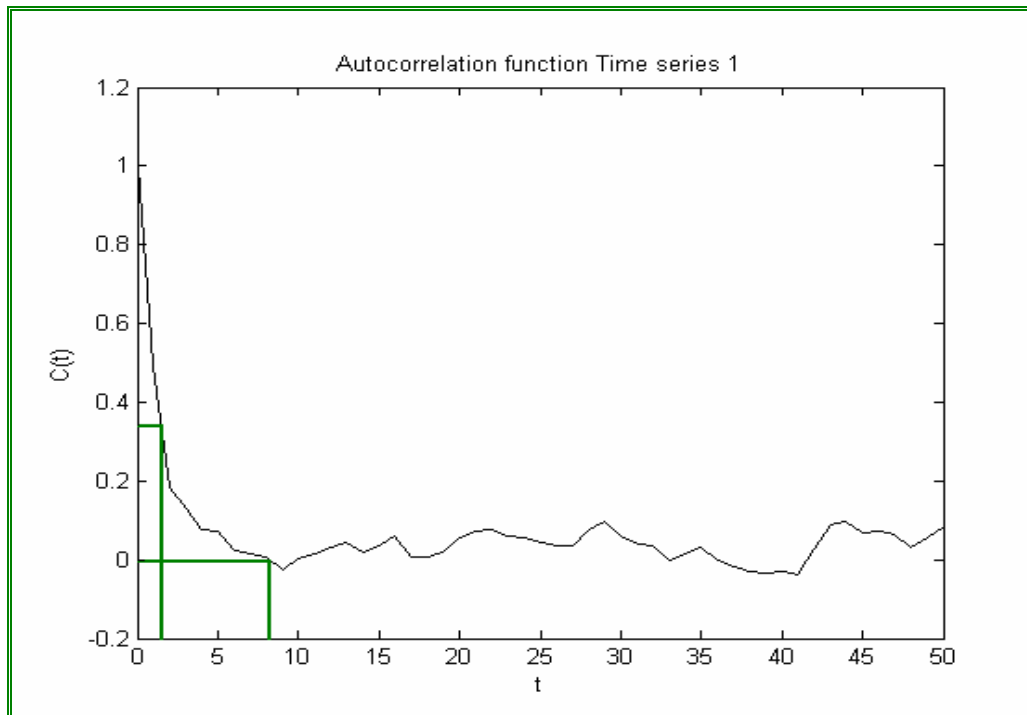
Σχήμα 4.12 Φάσμα ισχύος ($\log P(f)$ έναντι $\log f$) χρονοσειράς 2.

Όπως παρατηρούμε στα παραπάνω διαγράμματα, το φάσμα ισχύος έχει αρνητική κλίση. Αυτό αποτελεί μια πρώτη ένδειξη πιθανούς χαοτικής χρονοσειράς. Αντίθετα η διαδικασία του λευκού θορύβου έχει λίγο πολύ οριζόντιο φάσμα ισχύος. Υπάρχουν ωστόσο και ορισμένα είδη θορύβου που δίνουν φάσμα με αρνητική κλίση.

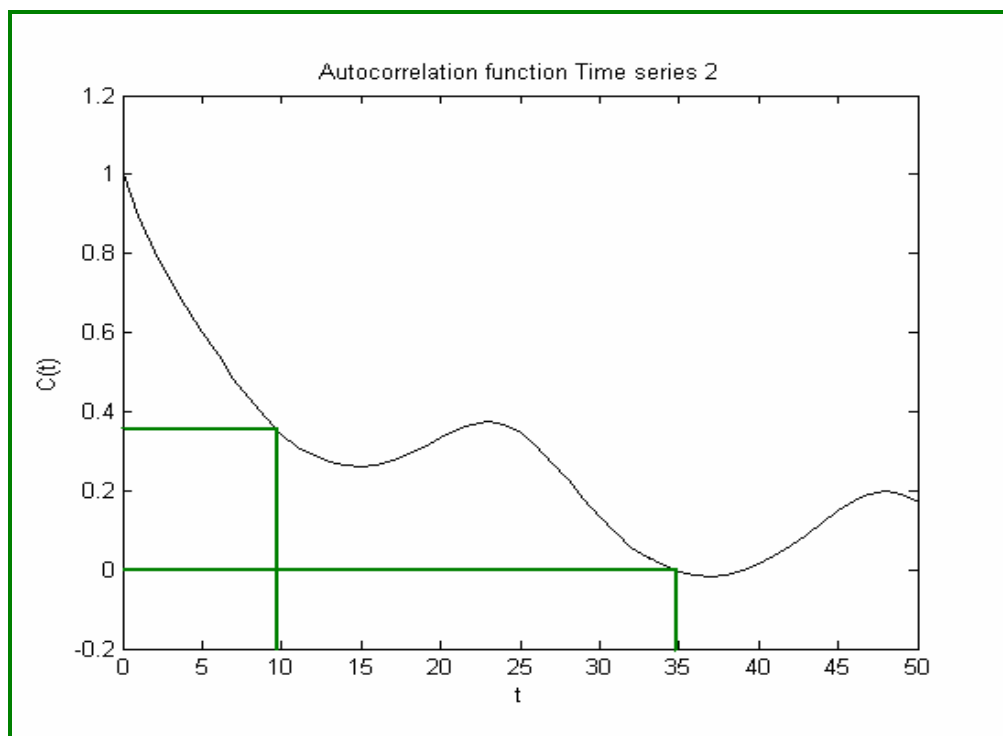
Στη συνέχεια, θέλοντας να διαπιστώσουμε εάν η χρονοσειρές μας προέρχονται από ντετερμινιστικό ή από στοχαστικό σύστημα, χρησιμοποιούμε τη μέθοδο των υστερήσεων, την οποία παρουσιάσαμε λεπτομερώς στη θεωρία μας, με σκοπό την ανακατασκευή του χώρου των φάσεων. Η μέθοδος αυτή μας επιτρέπει την κατασκευή ενός χώρου φάσεων μόνο από τη χρονοσειρά με τα ίδια χαρακτηριστικά που έχει ο αυθεντικός χώρος φάσεων του συστήματος που την έδωσε. Τα χαρακτηριστικά του χώρου των φάσεων που πρέπει να παραμείνουν τα ίδια είναι οι αναλλοίωτες ποσότητες, δηλαδή οι διαστάσεις και οι εκθέτες Lyapunov.

Για να προχωρήσουμε, βέβαια, στην ανακατασκευή με τη μέθοδο των υστερήσεων, πρέπει πρώτα να εξετάσουμε τις χρονοσειρές μας, έτσι ώστε να προσδιορίσουμε την χρονική υστέρηση τ και τη διάσταση εμβύθισης m . Αυτό γίνεται

με τις μεθόδους που αναφέραμε στις παραγράφους 4.2.1, 4.2.2 και 4.3.1. Παρακάτω ακολουθούν τα αποτελέσματα της εφαρμογής των μεθόδων.



Σχήμα 4.13 Χρόνος αυτοσυσχέτισης και μηδενισμού της χρονοσειράς 1 ($\tau=2$ και $\tau=8$) .



Σχήμα 4.14 Χρόνος αυτοσυσχέτισης και μηδενισμού της χρονοσειράς 2 ($\tau=10$ και $\tau=35$) .

Αρχικά προσδιορίζουμε με τη μέθοδο της αυτοσυσχέτισης, τη χρονική υστέρηση που θα χρησιμοποιήσουμε για την κάθε χρονοσειρά. Στα διαγράμματα των αυτοσυσχετίσεων βλέπουμε τους χρόνους μηδενισμού και αυτοσυσχέτισης της $C(\tau)$. Το σημείο που αντιστοιχεί στο λεγόμενο χρόνο αυτοσυσχέτισης, είναι ο χρόνος που χρειάζεται η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης να πέσει στο $1/e$.

Προτείνουμε την επιλογή των χρονικών υστερήσεων για τα σημεία του χρόνου αυτοσυσχέτισης. Σύμφωνα με τα κριτήρια που αναφέραμε στη θεωρία, διαλέγουμε τιμές που φέρνουν την $C(\tau)$ κοντά στο μηδέν, και τιμή για το τ όσο το δυνατόν μικρότερη. Επομένως διαλέγουμε μια χρονική υστέρηση $\tau=2$ για την πρώτη χρονοσειρά και μια χρονική υστέρηση $\tau=10$ για τη δεύτερη χρονοσειρά.

Η τελική επιλογή της χρονικής υστέρησης, την οποία θα χρησιμοποιήσουμε για την ανακατασκευή του χώρου των φάσεων, εμπεριέχει υποκειμενικά κριτήρια καθώς οι διάφορες μέθοδοι δεν συγκλίνουν σε μια ακριβή τιμή. Ενδεικτικά αναφέρουμε ότι η μέθοδος της αμοιβαίας πληροφορίας, υπέδειξε $\tau=5$ για την πρώτη χρονοσειρά και $\tau=15$ για τη δεύτερη.

Στη συνέχεια, έχοντας υπολογίσει τις τιμές για τη χρονική υστέρηση, υπολογίζουμε τη διάσταση εμβύθισης m . Η μέθοδος που χρησιμοποιείται συνήθως για την εύρεση του m είναι η μέθοδος των ψευδών κοντινότερων γειτόνων (method of false nearest neighbors, FNN), την οποία και περιγράψαμε. Για την εφαρμογή της μεθόδου θα πρέπει να κάνουμε ανακατασκευή του χώρου καταστάσεων για κάθε m , και άρα θα πρέπει να έχουμε ορίσει πρώτα την παράμετρο υστέρησης τ . Χρησιμοποιούμε τις τιμές των χρονικών υστερήσεων που υπολογίσαμε προηγουμένως.

Embedding Dimension	False Nearest Neighbours' %	Embedding Dimension	False Nearest Neighbours' %
1	94	1	1e+02
2	49	2	76
3	19	3	29
4	17	4	11
5	16	5	8.5
6	14	6	7.7
7	22	7	7
8	27	8	7.4
9	32	9	7.6
10	39	10	7.4
11	49	11	7.9
12	53	12	8.7
13	65	13	10
14	74	14	12
15	82	15	14
16	90	16	16
17	94	17	18
18	96	18	21
19	98	19	24
20	99	20	28

Source file: <i>time_series1</i>	Source file: <i>time_series2</i>
Time delay : 2	Time delay : 10

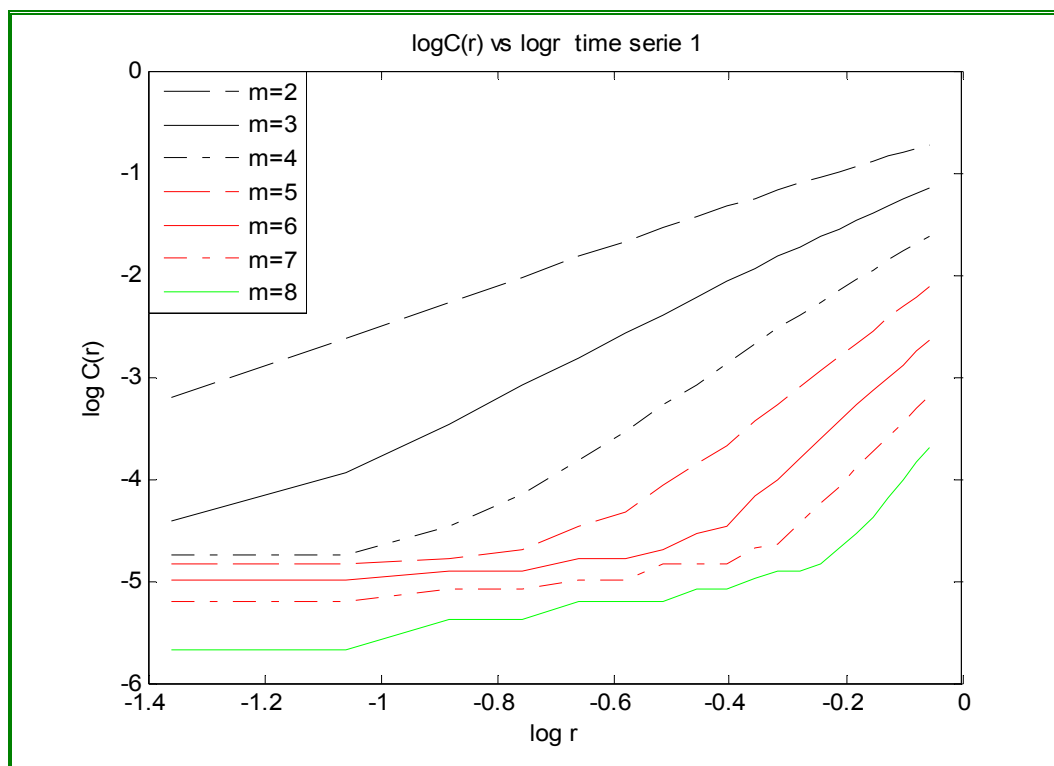
Πίνακας 4.1 Υπολογισμός της διάστασης εμπύθισης με τη μέθοδο FNN.

Σε αυτό το σημείο πρέπει να παρατηρήσουμε πως το ποσοστό των λανθασμένων γειτόνων δεν φτάνει στο ποσοστό 1% που αναφέραμε στην ανάλυση της μεθόδου. Παρόλα αυτά γίνεται εύκολα φανερό από τον πίνακα 4.1, πως η πρώτη χρονοσειρά παρουσιάζει το μικρότερο ποσοστό για $m=6$ και η δεύτερη χρονοσειρά για $m=7$.

Στη συνέχεια θα επιχειρήσουμε να κάνουμε μια εκτίμηση των μη-γραμμικών χαρακτηριστικών του δυναμικού συστήματος που αναφέρθηκαν στην ενότητα 4.3. Αρχικά θέλουμε να μετρήσουμε την ακριβή διάσταση των δυναμικών συστημάτων μέσα από τις χρονοσειρές. Η ακριβής τιμή της διάστασης τις περισσότερες φορές δεν είναι ακέραιος. Η κλασματική τιμή της διάστασης είναι το ένα από τα δύο χαρακτηριστικά του *παράξενου ελκυστή*.

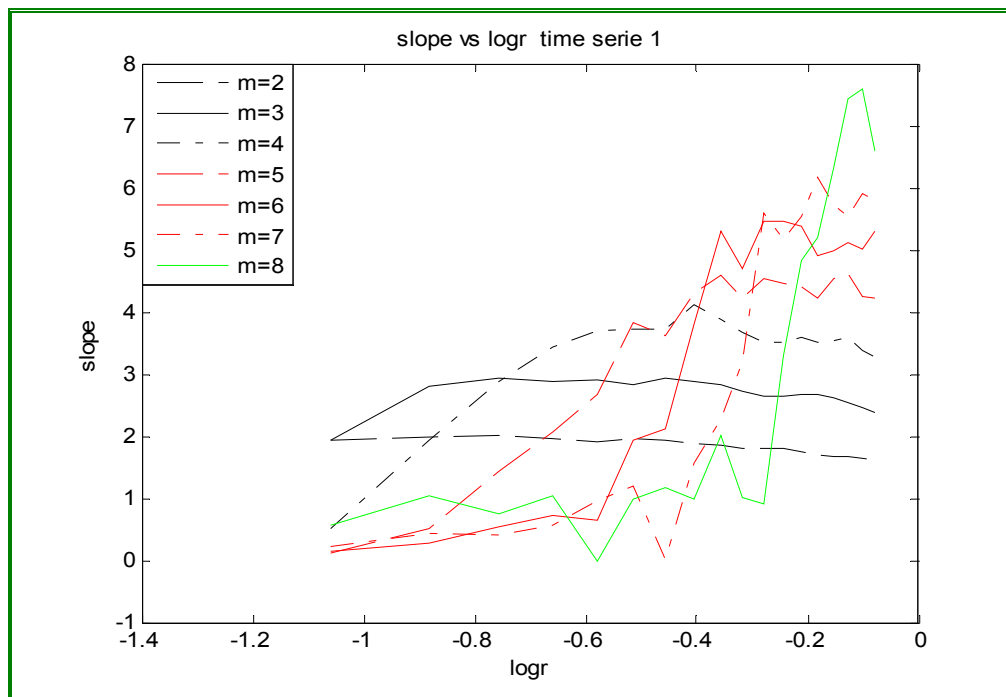
Αφού υπολογίσουμε την κλασματική (μη ακέραια) διάσταση του ελκυστή, ο ελάχιστος αριθμός των εξισώσεων που μπορούν να προσδιορίσουν το σύστημα, είναι ο αμέσως επόμενος ακέραιος. Προηγουμένως είδαμε ότι η γεωμετρική

μέθοδος μας έδωσε μια **προσέγγιση** του ελάχιστου αριθμού των εξισώσεων, που είναι ικανές να περιγράψουν το κάθε σύστημα. Βλέπουμε λοιπόν ότι η ανάλυση των διαστάσεων είναι πιο ισχυρή από τη ανάλυση των γεωμετρικών μεθόδων.



Σχήμα 4.15 Προσδιορισμός της διάστασης συσχέτισης $\log C(r)$ vs $\log r$.

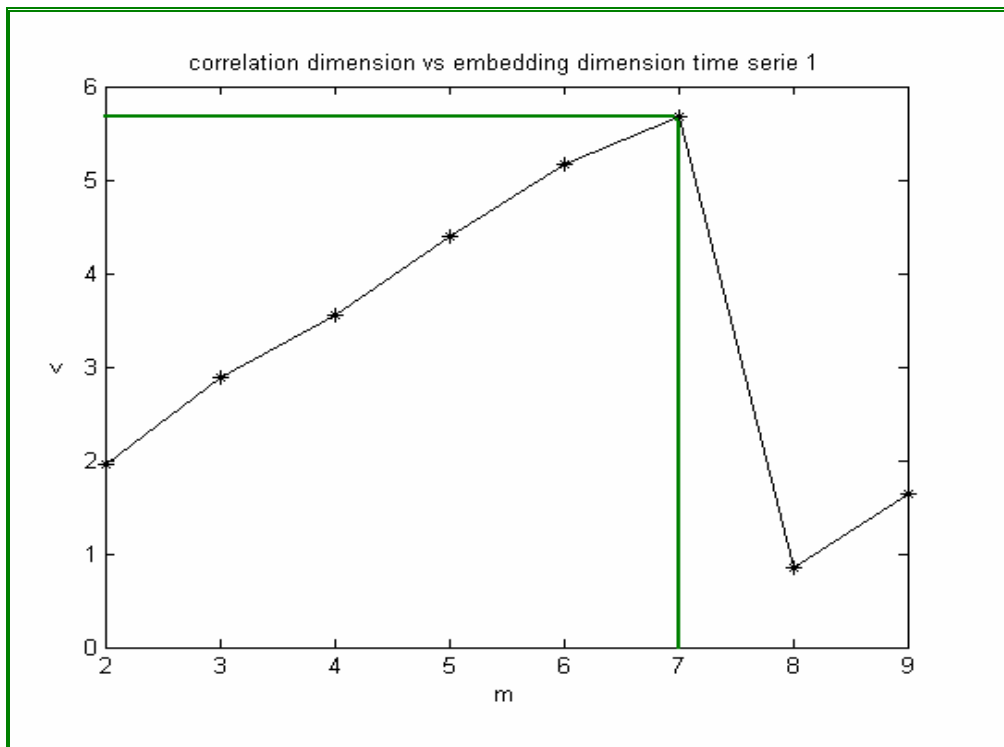
Στο σχήμα 4.15 φαίνεται πως τα γραφήματα $\log C(r)$ vs $\log r$ είναι ευθείες γραμμές για μεγάλο διάστημα τιμών της απόστασης r . Η κλιμάκωση δε διατηρείται για πολύ μικρά r (μικρότερα για μικρά m και μεγαλύτερα για μεγάλα m ως περίπου $\log r < -0.5$), γιατί δεν υπάρχουν αρκετά σημεία σε υπερ-σφαίρες με τόσο μικρές ακτίνες και η στατιστική είναι φτωχή. Επίσης η κλιμάκωση δε διατηρείται για πολύ μεγάλα r (περίπου $\log r > 0$ για μεγάλα m), όπου η αυτο-ομοιότητα καταστρέφεται από τη γεωμετρία του ελκυστή. Η περιοχή κλιμάκωσης εκτείνεται προσεγγιστικά στο διάστημα $-0.5 < \log r < 0$.



Σχήμα 4.16 Προσδιορισμός της διάστασης συσχέτισης $\text{slope vs } \log r$.

Η περιοχή κλιμάκωσης φαίνεται και στο σχήμα 4.16 από το οριζόντιο επίπεδο της κλίσης $\frac{d \log C(r)}{d \log r}$ για τις διάφορες τιμές του m . Για τα μικρά m η περιοχή κλιμάκωσης επεκτείνεται σε ακόμα μικρότερα r . Για $m=2$ το γράφημα είναι οριζόντια γραμμή σε στάθμη που αντιστοιχεί σε κλίση 2, ενώ για $m=3$ πλησιάζει την οριζόντια γραμμή κλίσης 3. Για μεγαλύτερα m τα γραφήματα της κλίσης φαίνεται να συγκλίνουν σε οριζόντια γραμμή που αντιστοιχεί σε κλίση $\nu \cong 6$.

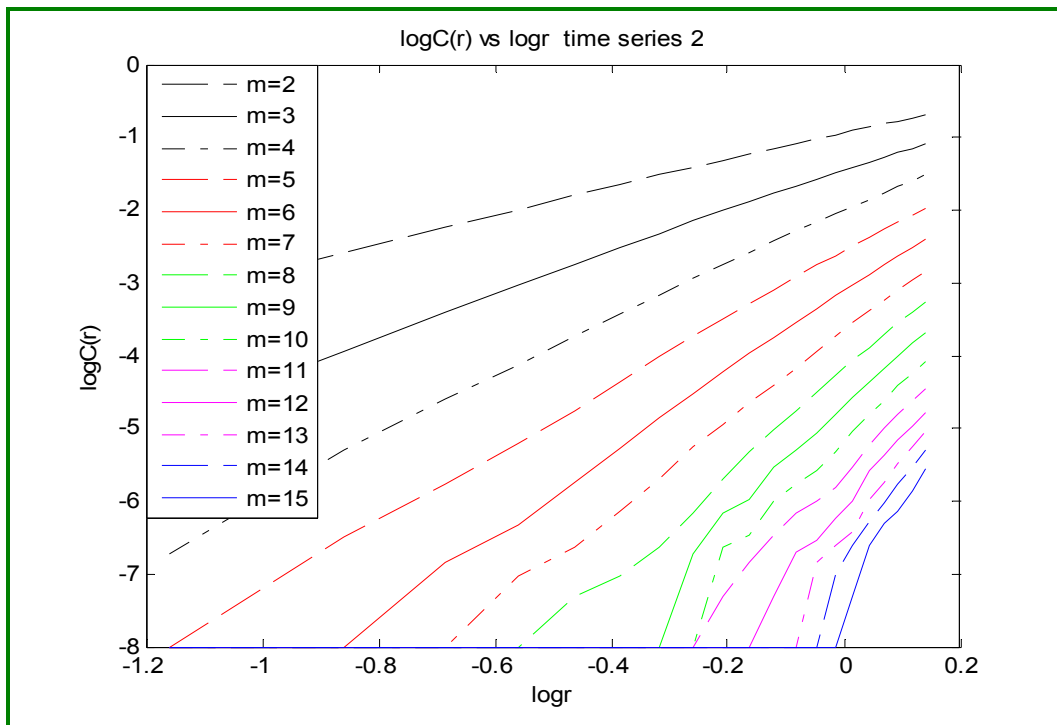
Στο επόμενο σχήμα, 4.17, φαίνεται η σταθερή εκτίμηση του ν για $m \geq 2$. Η πραγματική διάσταση συσχέτισης είναι 5,79 και δίνεται από την πράσινη οριζόντια γραμμή.



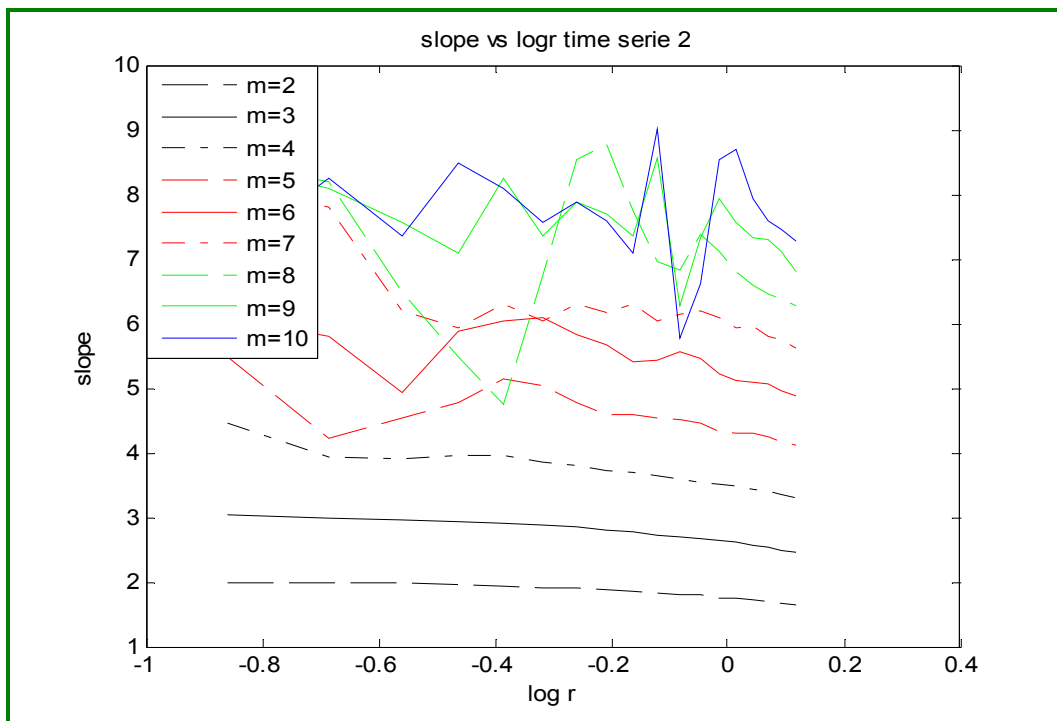
Σχήμα 4.17 Προσδιορισμός της διάστασης συσχέτισης ν vs m .

Παρατηρώντας τη διάσταση συσχέτισης για την πρώτη χρονοσειρά ($\nu=5.79$), βλέπουμε πως είναι μη ακέραια τιμή, κάτι που αποτελεί χαρακτηριστικό του παράξενου ελκυστή. Ο αριθμός των εξισώσεων που απαιτούνται για να περιγράψουν το σύστημα είναι ο αμέσως επόμενος ακέραιος, δηλαδή 6. Το αποτέλεσμα αυτό είναι σύμφωνο με την εκτίμηση που μας έδωσε η μέθοδος των ψευδών κοντινότερων γειτόνων.

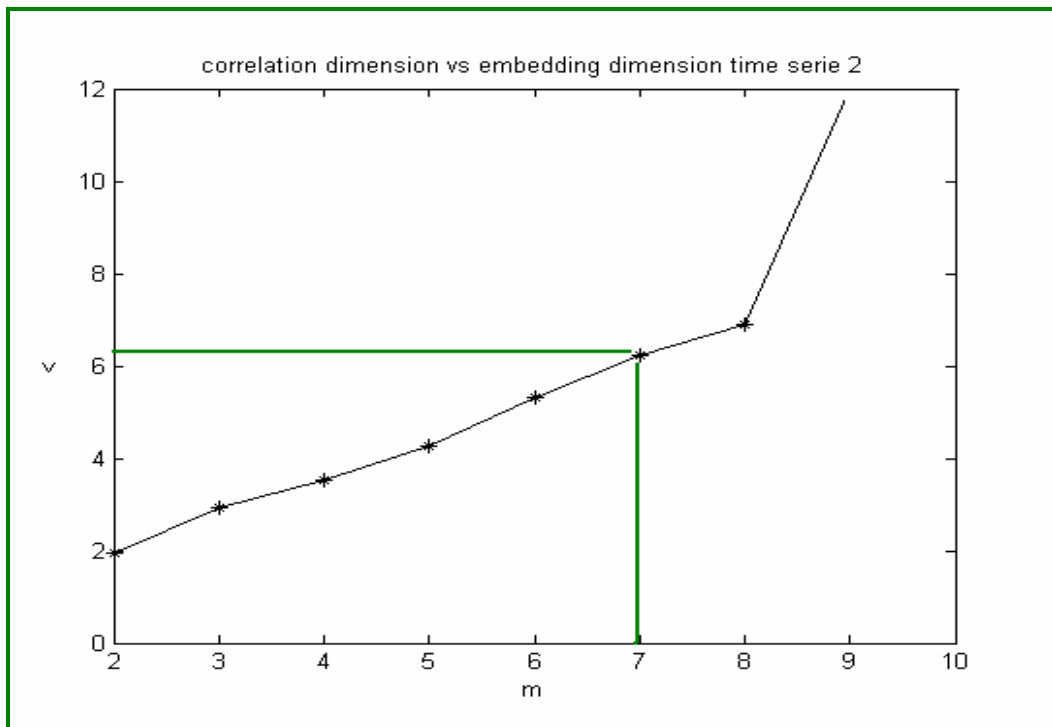
Στη συνέχεια επαναλαμβάνουμε την ίδια διαδικασία ώστε να υπολογίσουμε τη διάσταση συσχέτισης για τη δεύτερη χρονοσειρά. Από τα διαγράμματα που προέκυψαν κατά την ανάλυση, τα οποία φαίνονται παρακάτω, η τιμή που προσδιορίσαμε είναι $\nu=6.32$. Η τιμή είναι μη ακέραια, όπως και στην προηγούμενη περίπτωση, και ο ελάχιστος αριθμός εξισώσεων που απαιτούνται για να περιγράψουν το σύστημα, που παράγει τη δεύτερη χρονοσειρά, είναι 7.



Σχήμα 4.18 Προσδιορισμός της διάστασης συσχέτισης $\log C(r)$ vs $\log r$.



Σχήμα 4.19 Προσδιορισμός της διάστασης συσχέτισης slope vs $\log r$.



Σχήμα 4.20 Προσδιορισμός της διάστασης συσχέτισης v vs m .

Τελευταίο βήμα στην ανάλυση των χρονοσειρών μας, πριν τη διενέργεια προβλέψεων, είναι ο υπολογισμός του μέγιστου εκθέτη Lyapunov. Από όλους τους εκθέτες Lyapunov, ο μέγιστος, είναι αυτός που παρουσιάζει το μεγαλύτερο ενδιαφέρον.

- Ένας θετικός και πεπερασμένος εκθέτης δείχνει την απόκλιση (τουλάχιστον σε μια διάσταση) των κοντινών σημείων του ελκυστή στην εξέλιξη του χρόνου και προσδιορίζει χαοτικό ελκυστή.
- Ένας μηδενικός εκθέτης δείχνει την ανυπαρξία σύγκλισης ή απόκλισης των κοντινών σημείων του ελκυστή στην εξέλιξη του χρόνου και προσδιορίζει ελκυστή οριακού κύκλου.
- Ένας αρνητικός εκθέτης δείχνει την σύγκλιση των σημείων του ελκυστή στην εξέλιξη του χρόνου και προσδιορίζει ελκυστή σημείου.

Με τη βοήθεια του λογισμικού NLTS2.0, υπολογίσαμε το μέγιστο εκθέτη Lyapunov (LLE) για τις χρονοσειρές μας.

Για την πρώτη χρονοσειρά υπολογίσαμε:

$$LLE = 0,030$$

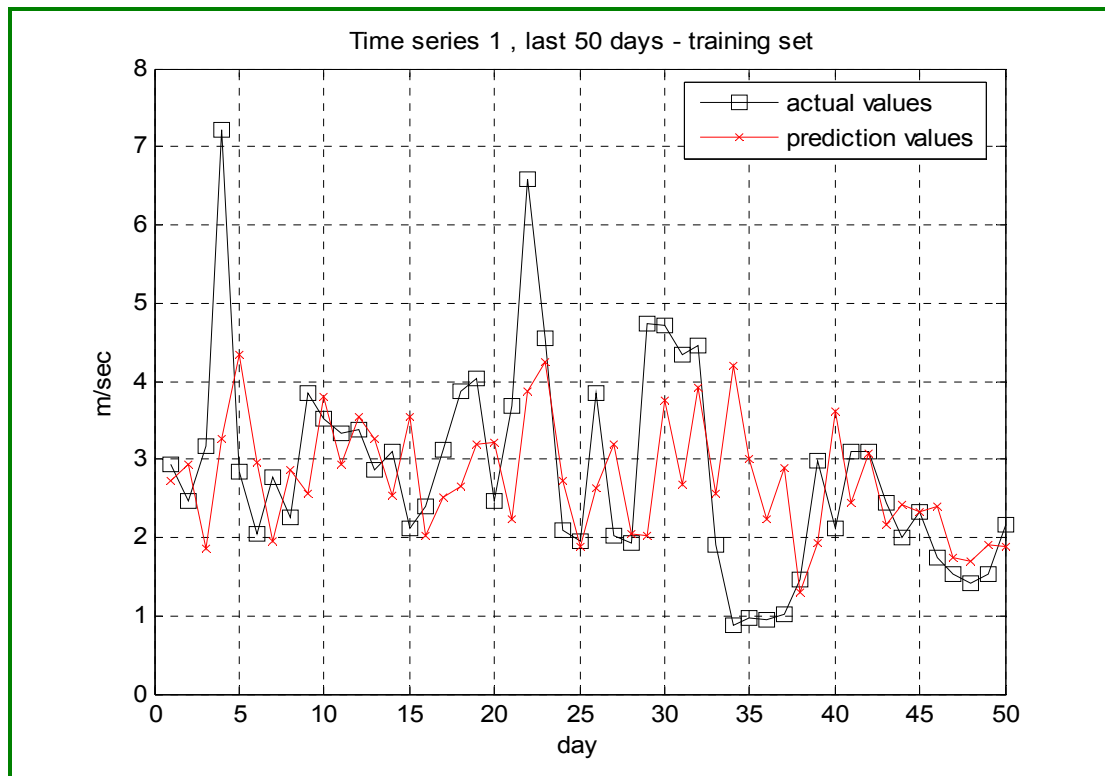
και για τη δεύτερη:

$$LLE = 0,026$$

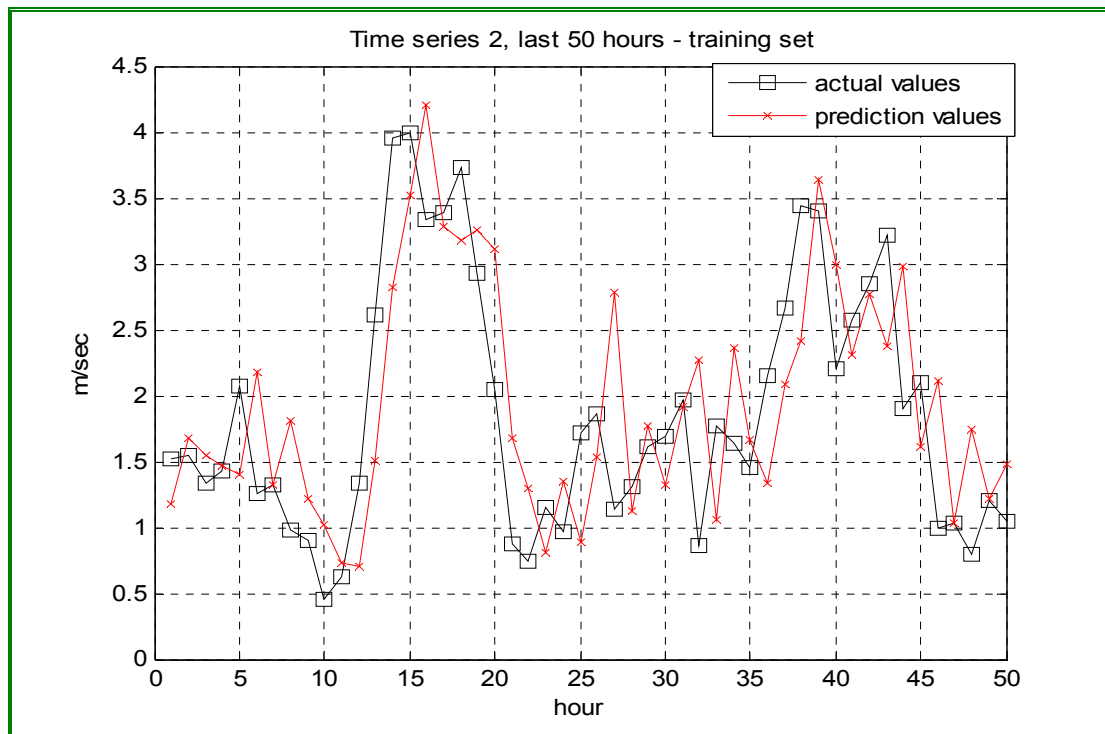
Τέλος, αφού έχουμε μια συνολική εικόνα από την παραπάνω ανάλυση, για τις χρονοσειρές μας, διενεργούμε προβλέψεις. Όπως και στις προηγούμενες εφαρμογές η χρονοσειρά διασπάται σε training και test set. Στον παρακάτω πίνακα συνοψίζουμε τα αποτελέσματα που πήραμε χρησιμοποιώντας και πάλι το λογισμικό NLTSA2.0. Αξίζει να σημειώσουμε, πως το λογισμικό, χρησιμοποιεί ένα μέρος του training set και προτείνει τις παραμέτρους (διάσταση εμβύθισης d , χρονική υστέρηση τ , αριθμό κοντινότερων γειτόνων k) που ελαχιστοποιούν το σφάλμα για την εντός δείγματος πρόβλεψη. Η χρονική υστέρηση που χρησιμοποιεί σε αυτή τη διαδικασία τίθεται πάντα ίση με 1, επομένως περιμένουμε ότι οι παράμετροι θα διαφέρουν από αυτές που υπολογίσαμε από την ανάλυση κάθε χρονοσειράς.

Time Series 1	MSE	MAE	MAPE	Time series 2	MSE	MAE	MAPE
Training set	1.645	0.963	38.02	Training set	0.581	0.565	33.97
Test set	1.502	0.976	51.19	Test set	0.653	0.631	30.93

Πίνακας 4.2 Υπολογισμός σφαλμάτων πρόβλεψης.



Σχήμα 4.21 Χρονοσειρά 1 - προβλέψεις εντός δείγματος - training set .



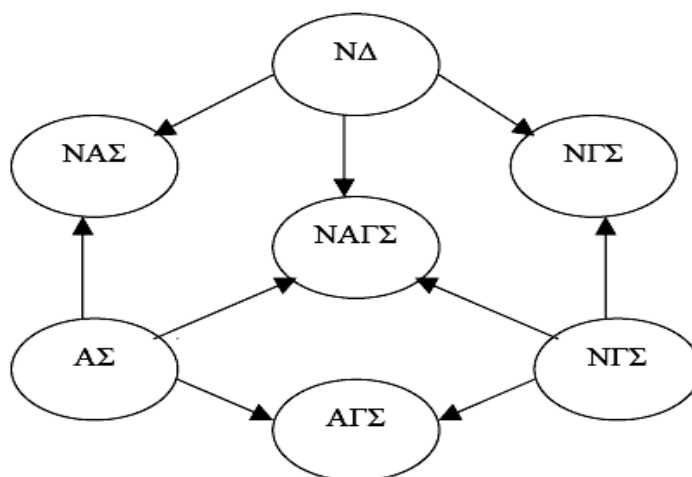
Σχήμα 4.22 Χρονοσειρά 2- προβλέψεις εντός δείγματος -training set.

5. ΝΕΥΡΟ-ΑΣΑΦΗ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

Η Υπολογιστική Νοημοσύνη (ΥΝ) είναι η περιοχή της πληροφορικής, η οποία περιλαμβάνει υπολογισμούς και συλλογιστική υπό συνθήκες ανακρίβειας, αβεβαιότητας και μερικής αλήθειας και πετυχαίνει σταθερότητα και χαμηλό κόστος λύσεων. Τα τρία βασικά συστατικά πεδία της, Νευρωνικά Δίκτυα (ΝΔ), Ασαφής Συλλογιστική (ΑΣ) και Γεννητικοί Αλγόριθμοι (ΓΑ) έχουν το καθένα ιδιαίτερες ιδιότητες και πλεονεκτήματα .

- ο Τα ΝΔ επιτρέπουν στο σύστημα να μαθαίνει.
- ο Η ΑΣ επιτρέπει την εμφύτευση στο σύστημα εμπειρικής γνώσης.
- ο Οι ΓΑ καθιστούν το σύστημα ικανό να αυτο-βελτιώνεται.

Συνδυάζοντας τα συστατικά αυτά πεδία μπορούμε να σχεδιάσουμε και να κατασκευάσουμε υβριδικά (μικτά) συστήματα ΥΝ ικανά να επιλύουν με υψηλή απόδοση πολύπλοκα πρακτικά προβλήματα. Τα υβριδικά συστήματα ΥΝ συνδυάζουν τις ιδιότητες καθενός πεδίου και παρακάμπτουν τους περιορισμούς ή τα μειονεκτήματά τους. Οι υβριδικές τεχνικές οδηγούν στην πραγματοποίηση ευφυών συστημάτων τα οποία βρίσκουν ποικίλες εφαρμογές. Οι τέσσερις δυνατοί συνδυασμοί των ΝΔ, ΑΣ και ΓΑ για την ανάπτυξη υβριδικών τεχνικών και συστημάτων ΥΝ φαίνονται στο σχήμα.



Σχήμα 5.1 Υβριδικά συστήματα Υπολογιστικής Νοημοσύνης ΝΑΣ: Νευρο-ασαφή συστήματα, ΝΓΣ: Νευρό-γενετικά συστήματα, ΑΓΣ: Ασαφο-γενετικά συστήματα, ΝΑΓΣ: Νευρο-ασαφο-γενετικά συστήματα

Τα ΝΔ χρησιμοποιούνται στα ΝΑΣ για να μάθουν τις συναρτήσεις συμμετοχής ή να καθορίζουν τη δομή των ασαφών συστημάτων. Οι ΓΑ χρησιμοποιούνται στα ΑΓΣ για την αναζήτηση μιας βέλτιστης δομής και ακολούθως για τη ρύθμιση των παραμέτρων. Αντίστροφα, η ασαφής λογική μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τη βελτίωση της συμπεριφοράς των ΓΑ. Οι γενετικοί αλγόριθμοι χρησιμοποιούνται στα ΝΓΣ για την αυτοματοποίηση της σχεδίασης νευρωνικών δικτύων μέσω της γενετικής εκπαίδευσης ή μέσω της γενετικής επιλογής της τοπολογίας αυτών ή μέσω της βέλτιστης επιλογής των παραμέτρων μάθησης. Τέλος συνδυάζοντας κατά ποικίλους τρόπους τα ΝΔ, την ΑΣ και τους ΓΑ μπορούμε να σχεδιάσουμε νευρο-ασαφή-γενετικά συστήματα (ΝΑΓΣ) τα οποία ολοκληρώνουν τα πλεονεκτήματα και τις ιδιότητες όλων αυτών με στόχο τη βελτιστοποίηση της απόδοσης τους [26].

5.1 Ασαφής λογική

Ο θεωρητικός φορέας για την υλοποίηση μιας μεγάλης κατηγορίας ευφυών συστημάτων είναι η *Ασαφής Λογική (Fuzzy Logic)*, που εισήχθη από τον Lotfi A. Zadeh του πανεπιστημίου της Καλιφόρνιας στο Berkley των ΗΠΑ στα μέσα της δεκαετίας του 1960. Η θεωρία των ασαφών συνόλων καθιερώθηκε σαν μια μέθοδος διαχείρισης της ανακρίβειας που αντιμετωπίζεται σε πολλά πρακτικά προβλήματα. Η ανακρίβεια, ή η ασάφεια, είναι ο πυρήνας των ασαφών συνόλων και της ασαφούς λογικής. Τα ασαφή σύνολα ουσιαστικά αποτελούν μια γενίκευση των κλασσικών συνόλων.

Τα λογικά παράδοξα και η αρχή της απροσδιοριστίας του Heisenberg συνέβαλαν στην ανάπτυξη της *πλειότιμης λογικής (multi-valued logic)* στη δεκαετία του 1920. Το επόμενο βήμα επέτρεψε βαθμούς αβεβαιότητας και θεωρούσε τους χαρακτηρισμούς αλήθειας και ψεύδους ως τις ακραίες τιμές ενός πεδίου μεταβολής της ασάφειας. Το 1937 ο μαθηματικός Max Black εφάρμοσε τη συνεχή λογική σε σύνολα στοιχείων και συμβόλων και ονόμασε τη δομή αυτή αβεβαιότητα. Το 1965, ο Zadeh στη θεμελιώδη δημοσίευσή του με τίτλο “Fuzzy Sets”, παρουσίασε τη θεωρία των ασαφών συνόλων (fuzzy set theory) χρησιμοποιώντας τον όρο Ασαφή Λογική και πρωτοστάτησε σε ένα νέο και σημαντικό κύμα επιστημονικής δραστηριότητας, που συνεχίζεται μέχρι σήμερα. Δεν ήταν λίγοι, όμως, και ειδικά στις ΗΠΑ, που αμφισβήτησαν τη θεωρία του Zadeh. Αντίθετα, η Κομφουκιανή

Ιαπωνία έχει ενστερνιστεί τη θεωρία απόλυτα και η χρήση της αποδίδει τεράστια οικονομικά οφέλη [28].

Οι άνθρωποι σκέπτονται συνήθως όχι με όρους ακριβών συμβόλων και αριθμών αλλά με ασαφείς όρους. Αυτοί οι ασαφείς όροι προσδιορίζουν κατηγορίες όχι όμως απόλυτα διαχωρισμένα και σαφώς καθορισμένα σύνολα. Η μετάβαση από τη μια κατηγορία στην άλλη γίνεται σταδιακά, μεταβαίνοντας από καταστάσεις με περισσότερη ή λιγότερη συσχέτιση με την κατηγορία. Με βάση λοιπόν την πρακτική των ανθρώπων να χρησιμοποιούν ελαστικά σύνολα, ο Zadeh πρότεινε την ιδέα των ασαφών συνόλων.

Τα ασαφή σύνολα είναι συναρτήσεις που απεικονίζουν μια τιμή, η οποία μπορεί να είναι μέλος του συνόλου, σε έναν αριθμό από το 0 έως το 1. Ο αριθμός αυτός δηλώνει το βαθμό συσχέτισης της τιμής με το ασαφές σύνολο. Όταν ο βαθμός αυτός είναι 0 τότε αυτό υποδηλώνει ότι η τιμή δεν ανήκει στο σύνολο, ενώ όταν είναι 1 τότε αυτό σημαίνει ότι η τιμή αυτή αντιπροσωπεύει πλήρως το ασαφές σύνολο. Ο βαθμός αυτός καθορίζεται από τη συνάρτηση συμμετοχής του ασαφούς συνόλου [28].

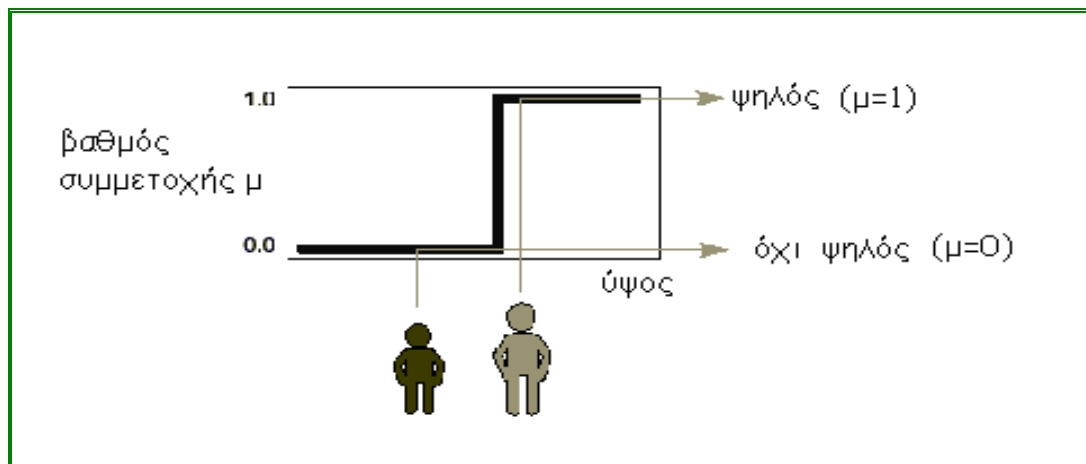
5.1.1 Συνάρτηση συμμετοχής.

Ένα ασαφές σύνολο A ορίζεται ως ένα σύνολο διατεταγμένων ζευγών $(x, \mu_A(x))$ όπου $x \in X$ και $\mu_A(x) \in [0,1]$. Το σύνολο X αποτελεί ένα ευρύτερο σύνολο αναφοράς (universe of discourse) που περιλαμβάνει όλα τα αντικείμενα στα οποία μπορεί να γίνει αναφορά. Η τιμή $\mu_A(x)$ λέγεται βαθμός αλήθειας, συμβολίζει το βαθμό συγγένειας του x στο A και παίρνει τιμές στο διάστημα $[0,1]$. Τέλος η συνάρτηση μ_A ονομάζεται συνάρτηση συμμετοχής (membership function).

Η διαφορά των ασαφών συνόλων συγκριτικά με την κλασσική θεωρία συνόλων είναι ότι στην κλασσική θεωρία συνόλων ισχύει $\mu_A(x) \in \{0,1\}$, δηλαδή το x είτε ανήκει στο A ($\mu_A(x)=1$) ή δεν ανήκει ($\mu_A(x)=0$). Άρα η ασαφής θεωρία συνόλων μεταπίπτει στην αντίστοιχη κλασσική, όταν οι δυνατές τιμές της συνάρτησης συμμετοχής είναι μόνο 0 ή 1. Παρακάτω αναπτύσσεται ένα παράδειγμα με το οποίο μπορεί να γίνει περισσότερο κατανοητή η έννοια της συνάρτησης συμμετοχής.

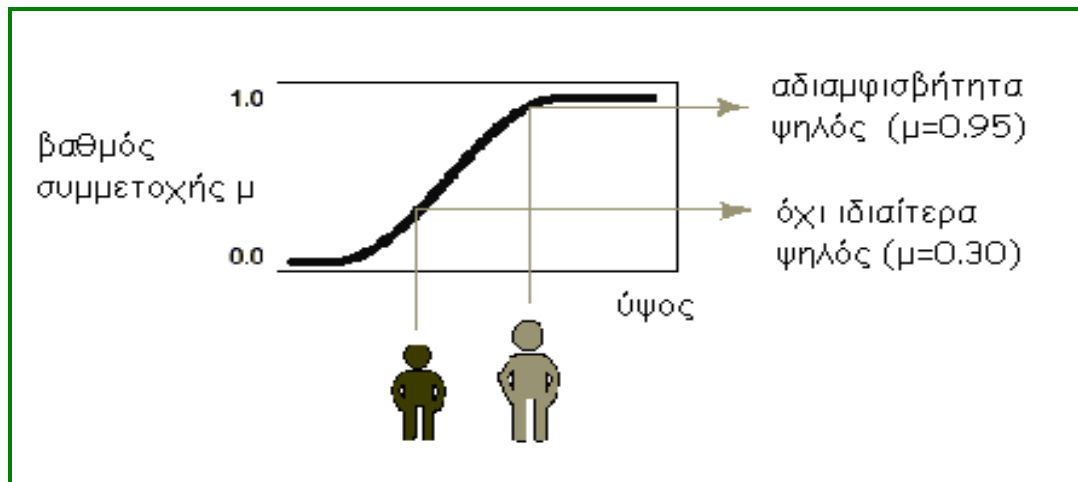
Ας υποθέσουμε ότι ο χώρος αναφοράς X είναι το σύνολο όλων των ανθρώπων. Ένα ασαφές υποσύνολο του χώρου αυτού είναι οι ψηλοί άνθρωποι. Τα πιθανά ύψη

έστω ότι κυμαίνονται από 1.20 μέχρι 2.50. Η λέξη ψηλός μπορεί να συσχετισθεί με μια καμπύλη η οποία δείχνει κατά πόσο ένας άνθρωπος είναι ψηλός ή όχι. Αν χρησιμοποιήσουμε τις αρχές των κλασσικών συνόλων τότε για να ορίσουμε το σύνολο των ψηλών ανθρώπων θα πρέπει να ορίσουμε μια συγκεκριμένη τιμή ύψους, η οποία θα διαχωρίζει τους ανθρώπους σε ψηλούς και κοντούς. π.χ. ας υποθέσουμε ότι η τιμή αυτού του ύψους είναι 1.75m, τότε ένας άνθρωπος με ύψος 1.74 θα χαρακτηρίζεται κοντός ενώ ένας άνθρωπος με ύψος 1.76 θα χαρακτηρίζεται ψηλός. Ο παραπάνω διαχωρισμός φαίνεται παράλογος αφού έχουμε αντιστοιχήσει σε δύο ανθρώπους με αμελητέα διαφορά ύψους δύο αντίθετες μεταξύ τους έννοιες.



Σχήμα 5.2 Κλασσική θεωρία των συνόλων.

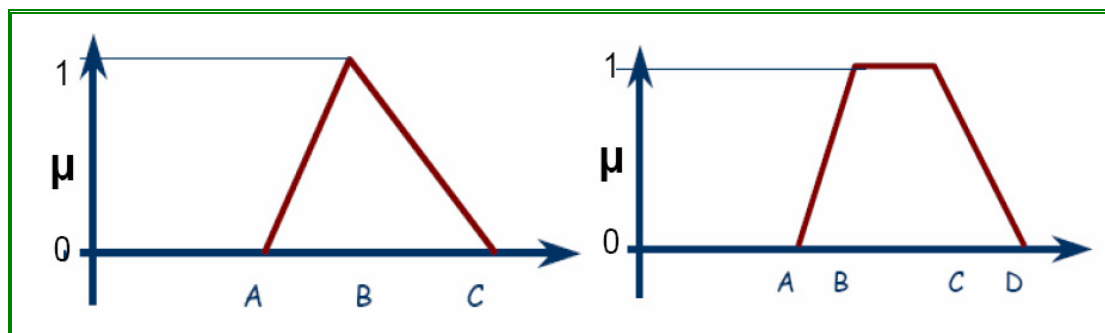
Ένας άλλος τρόπος να ορίσουμε την έννοια ψηλός είναι μέσω μιας καμπύλης που έχει ομαλή διακύμανση και μεταβαίνει από την έννοια κοντός στην έννοια ψηλός. Αυτή η καμπύλη είναι η συνάρτηση συμμετοχής του ασαφούς συνόλου των ψηλών ανθρώπων. Με άλλα λόγια δεχόμαστε ότι όλοι οι άνθρωποι είναι σε κάποιο βαθμό ψηλοί αλλά δεν είναι όλοι στον ίδιο βαθμό ψηλοί.



Σχήμα 5.3 Θεωρία των Ασαφών συνόλων

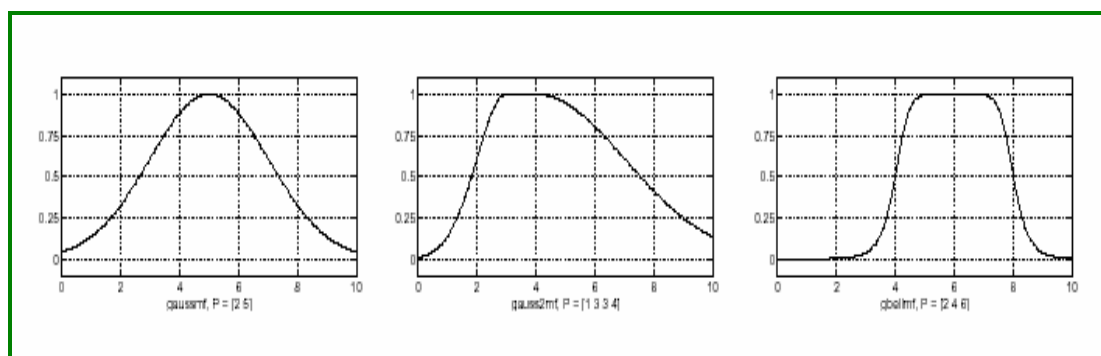
Μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι υποκειμενικοί παράγοντες ενυπάρχουν στα χαρακτηριστικά της δομής ενός ασαφούς συνόλου. Η μορφή δηλαδή της καμπύλης δεν μπορεί να είναι η ίδια όταν αναφερόμαστε σε ενήλικες και ανήλικες, σε γυναίκες και άντρες κλπ. Η μορφή επίσης της καμπύλης επιλέγεται αυθαίρετα σύμφωνα με την αντίληψη που έχει κάθε άνθρωπος για την έννοια ψηλός. Η μόνη προϋπόθεση που πρέπει να ικανοποιεί μια συνάρτηση συμμετοχής είναι να βρίσκεται στο διάστημα τιμών $[0,1]$. Το σχήμα της επιλέγεται μεν αυθαίρετα αλλά και με τρόπο που να διασφαλίζει όσο είναι δυνατό την απλότητα.

Οι απλούστερες συναρτήσεις συμμετοχής είναι αυτές που σχηματίζονται από ευθείες γραμμές. Η απλούστερη από αυτές είναι η τριγωνική συνάρτηση συμμετοχής, που δεν είναι τίποτα άλλο από ένα τρίγωνο. Στην ίδια κατηγορία ανήκει και η τραπεζοειδής συνάρτηση συμμετοχής. Αυτές οι δύο συναρτήσεις εξασφαλίζουν την απαίτηση για απλότητα.



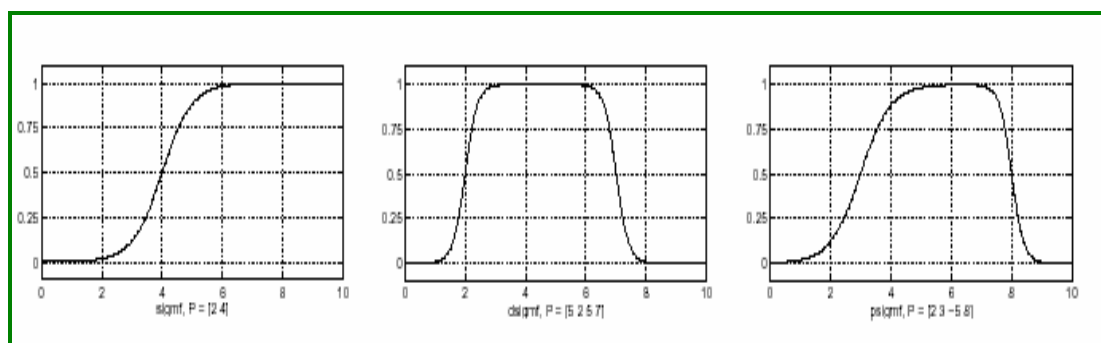
Σχήμα 5.4 Συναρτήσεις συμμετοχής, Τριγωνική και Τραπεζοειδής.

Δύο συναρτήσεις συμμετοχής που είναι δομημένες πάνω στη μορφή της κατανομής Gauss, είναι μια απλή γκαουσιανή και μια σύνθεση δύο διαφορετικών γκαουσιανών. Η γενικευμένη συνάρτηση συμμετοχής με μορφή καμπάνας έχει τρεις παραμέτρους, μια παραπάνω από την γκαουσιανή. Η γκαουσιανή και η καμπάνα μπορούν να χρησιμοποιούνται συχνά στα ασαφή σύνολα λόγω της ομαλότητάς τους. Έχουν δε το πλεονέκτημα να διατηρούν μη μηδενικές τιμές σε όλα τα σημεία.



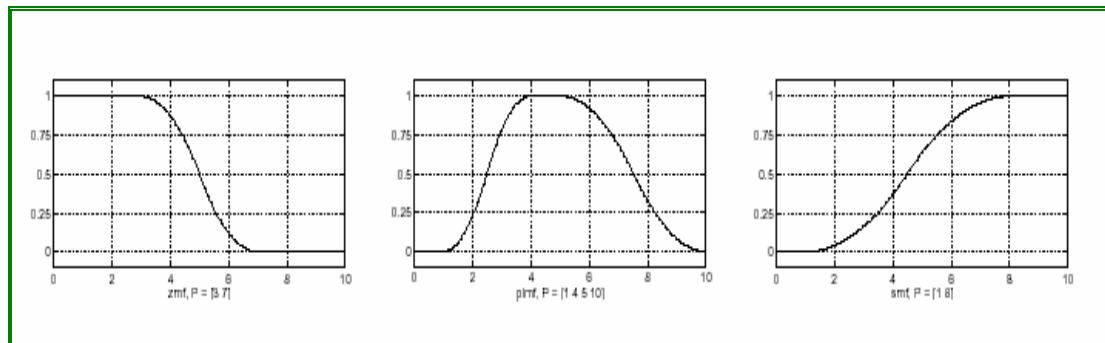
Σχήμα 5.5 Συναρτήσεις συμμετοχής, Γκαουσιανή, Διπλή Γκαουσιανή, Καμπανοειδής.

Παρά το γεγονός ότι η γκαουσιανή συνάρτηση συμμετοχής και η συνάρτηση καμπάνας επιτυγχάνουν ομαλή διακύμανση δε μπορούν ωστόσο να ορίσουν ασύμμετρες συναρτήσεις συμμετοχής που είναι χρήσιμες σε πολλά πρακτικά προβλήματα. Για τον λόγο αυτό χρησιμοποιείται η σιγμοειδής συνάρτηση συμμετοχής η οποία είναι ασύμμετρη και ανοικτή είτε προς τα δεξιά είτε προς τα αριστερά. Κλειστές συναρτήσεις συμμετοχής αυτού του τύπου μπορούν να παραχθούν αν συνθέσουμε δύο σιγμοειδείς. Έτσι προκύπτει η διαφορά μεταξύ δύο σιγμοειδών και το άθροισμα τους.



Σχήμα 5.6 Συναρτήσεις συμμετοχής, σιγμοειδής, διαφορά σιγμοειδών, άθροισμα σιγμοειδών

Επίσης υπάρχουν πολλές πολυωνυμικές καμπύλες που τις χρησιμοποιούμε σε συναρτήσεις συμμετοχής. Τρεις από αυτές είναι η Z η S και η Π οι οποίες έχουν ονομασθεί έτσι εξαιτίας του σχήματός τους. Η Z είναι μια ασύμμετρη πολυωνυμική καμπύλη που είναι ανοικτή στα αριστερά, η S είναι η κατοπτρική της Z και η Π είναι μια ασύμμετρη κλειστή καμπύλη σχήματος Π [25].



Σχήμα 5.7 Συναρτήσεις συμμετοχής, Z , Π , S .

5.1.2 Ιδιότητες ασαφών συνόλων

Έστω X ένα σύνολο αντικειμένων, του οποίου τα στοιχεία συμβολίζονται με το γράμμα x . Η συμμετοχή σε ένα υποσύνολο A του συνόλου X είναι μια συνάρτηση συμμετοχής μ_A από το X στο διάστημα $[0,1]$. Το A είναι ένα ασαφές υποσύνολο του X , το οποίο όμως δεν έχει αυστηρά καθορισμένα σύνορα. Το μ_A είναι ο βαθμός συμμετοχής του στοιχείου x στο A . Όσο πιο κοντά στο 1 είναι το μ_A τόσο πιο πολύ ανήκει το x στο A . Το σύνολο A μπορεί να προσδιοριστεί επομένως από το σύνολο των παρακάτω ζευγών [28]:

$$A = \{(x, \mu_A(x)), x \in X\}$$

- Κάθε ζευγάρι $(x, \mu_A(x))$ ονομάζεται **μονοσύνολο**.
- **Χώρος αναφοράς** του ασαφούς συνόλου A είναι το σύνολο των στοιχείων του X που έχουν μη μηδενικό βαθμό συμμετοχής στο A .

$$A = \{x \in X \mid \mu_A(x) > 0\}.$$

- Το σύνολο A μπορεί να γραφεί και ως:

$$A = \frac{\mu_1}{x_1} + \frac{\mu_2}{x_2} + \dots, \quad A = \sum \frac{\mu_i}{x_i}$$

και στο συνεχή χώρο αναφοράς :

$$A = \int_x \mu_A(x) / x$$

- Ασαφές **δυναμοσύνολο**, $F(x)$, του υπερσυνόλου αναφοράς X , ονομάζεται το σύνολο όλων των ασαφών υποσυνόλων του X .
- Το σύνολο A είναι υποσύνολο του B ($A \subseteq B$) αν και μόνο αν

$$\mu_A(x) \leq \mu_B(x), \forall x \in X$$

Αν ταυτόχρονα τα A και B δεν είναι ίσα, τότε το A θα ονομάζεται γνήσιο υποσύνολο του B .

- Μια οικογένεια ασαφών υποσυνόλων του X , θα λέγεται **ασαφής διαμέριση** $P_n(X)$ του X τάξης n ($n \in \mathbb{N}$) και θα συμβολίζεται με $A^n = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$, αν και μόνο αν:

$$A_j \neq A_i, \forall i, j \in N_n (i \neq j)$$

$$0 < \sum_{k=1}^m A_i(x_k) < m, \forall i \in N_n$$

Τα στοιχεία $A_i, i \in N_n$ της A_n θα λέγονται κλάσεις της ασαφούς διαμέρισης

- Ένα ασαφές σύνολο με χώρο αναφοράς τον X , λέγεται **κενό** αν για κάθε στοιχείο x που ανήκει στον X , η συνάρτηση συμμετοχής του A είναι μηδέν.

$$A \equiv 0 \text{ αν } \mu_A(x) = 0 \quad \forall x \in X$$

- Ένα ασαφές σύνολο A που ορίζεται στο χώρο αναφοράς X , λέγεται **κανονικό** αν υπάρχει τουλάχιστο ένα στοιχείο x του X για το οποίο η συνάρτηση συμμετοχής να παίρνει τιμή ίση με τη μονάδα.

$$\exists x_1 : \mu_A(x_1) = 1$$

- Δύο ασαφή σύνολα A και B που ορίζονται στο χώρο αναφοράς X, λέγονται **ίσα** αν για κάθε στοιχείο x του X οι συναρτήσεις συμμετοχής των A και B είναι ίσες. Δηλαδή:

$$\mu_A(x) = \mu_B(x) \quad \forall x \in X$$

- Έστω ασαφές σύνολο A που ορίζεται στο χώρο αναφοράς X. Η **συστολή**, $CON(A)$ του συνόλου αυτού είναι ένα νέο ασαφές σύνολο με συνάρτηση συμμετοχής που ορίζεται ως εξής:

$$\mu_{CON(A)}(x) = (\mu_A(x))^2$$

Η συστολή του ασαφούς συνόλου αντιστοιχεί στην προσθήκη του όρου **πολύ**, μπροστά από τη λεκτική μεταβλητή που περιγράφει το ασαφές σύνολο. Δηλαδή η συστολή του ασαφούς συνόλου ‘ψηλός’ είναι ένα νέο ασαφές σύνολο που αντιστοιχεί στην έννοια ‘πολύ ψηλός’.

- Αντιστοίχως η **διαστολή** ενός ασαφούς συνόλου A, είναι ένα νέο ασαφές σύνολο που συμβολίζεται με $DIL(A)$ και έχει συνάρτηση συμμετοχής που περιγράφεται από την παρακάτω σχέση:

$$\mu_{DIL(A)}(x) = \sqrt{\mu_A(x)}$$

Η διαστολή του ασαφούς συνόλου αντιστοιχεί στην προσθήκη του όρου **λίγο**, μπροστά από τη λεκτική μεταβλητή που περιγράφει το ασαφές σύνολο. Δηλαδή η διαστολή του ασαφούς συνόλου ‘ψηλός’ είναι ένα νέο ασαφές σύνολο που αντιστοιχεί στην έννοια ‘λίγο ψηλός’.

5.1.3 Λογικές πράξεις στα ασαφή σύνολα

Μέχρι τώρα έχουμε αναφερθεί στα ασαφή σύνολα και καθόλου στην ασαφή λογική. Η ασαφής λογική δεν είναι παρά ένα υπερσύνολο της λογικής Boolean. Αν δηλαδή απομονώσουμε τους ακραίους βαθμούς συμμετοχής 0 (πλήρως ψευδές) και 1 (πλήρως αληθές) τότε οι κλασσικοί λογικοί τελεστές μπορούν να εφαρμοσθούν. Για παράδειγμα ας θεωρήσουμε τον παρακάτω πίνακα αληθείας [25]:

A	B	A and B
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

AND

A	B	A or B
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

OR

A	not A
0	1
1	0

NOT

Σχήμα 5.8 Πίνακας αληθείας Boolean.

Μεταβαίνοντας στον χώρο της ασαφούς λογικής πρέπει να έχουμε κατά νου ότι οι έννοιες αληθές και ψευδές είναι θέμα βαθμού συμμετοχής. Επομένως ο πίνακας αυτός πρέπει να μετατραπεί με τρόπο που να συμπεριλαμβάνει αυτήν την αρχή. Οι τιμές των εισόδων A και B είναι τώρα πραγματικοί αριθμοί από το 0 μέχρι το 1. Πρέπει λοιπόν να βρεθεί μια συνάρτηση που να διατηρεί τις ιδιότητες της συνάρτησης AND και ταυτόχρονα να μπορεί να επεκτείνεται για πραγματικούς αριθμούς.

Μια πιθανή απάντηση μπορεί να είναι ο τελεστής $\min(A,B)$, η ελάχιστη δηλαδή τιμή των εισόδων A και B. Με βάση το ίδιο σκεπτικό μια συνάρτηση που μπορεί να αντικαταστήσει τον τελεστή OR της Boolean λογικής είναι ο τελεστής $\max(A,B)$. Τέλος ο τελεστής NOT A μπορεί να αντικατασταθεί με την πράξη $1-A$.

A	B	$\min(A,B)$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

AND

A	B	$\max(A,B)$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

OR

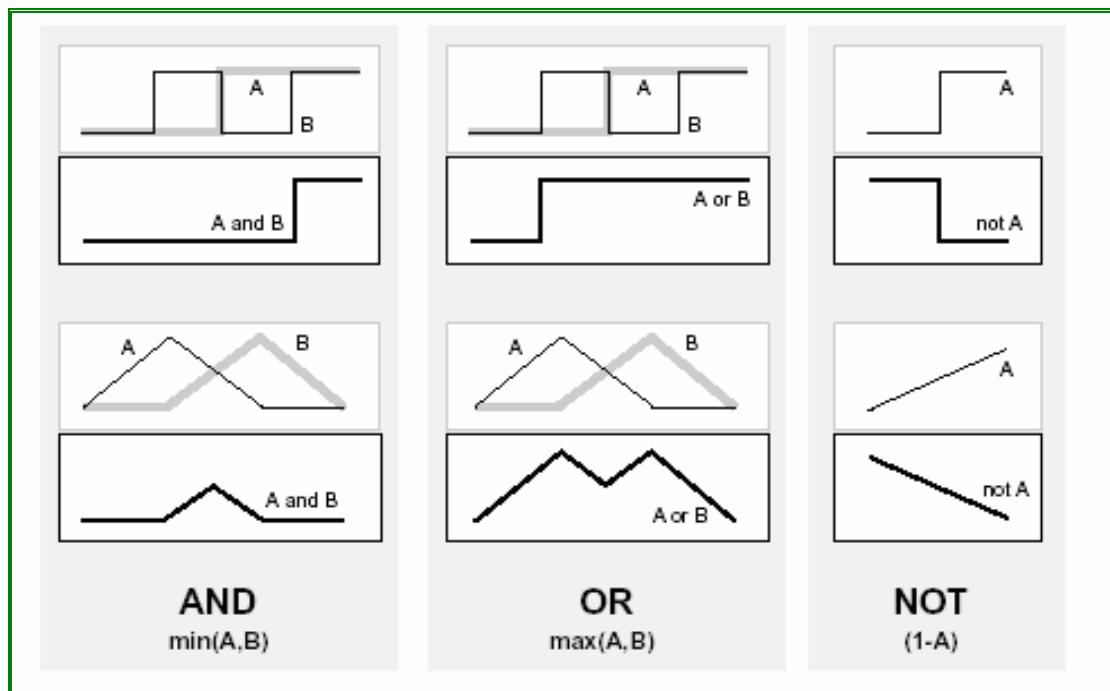
A	$1 - A$
0	1
1	0

NOT

Σχήμα 5.9 Πίνακας αληθείας ασαφούς λογικής.

Αφού έχουμε ορίσει συναρτήσεις που μπορούν ορίσουν τον πίνακα αληθείας, μπορούμε πλέον να επεκταθούμε και στην περίπτωση πραγματικών αριθμών. Στο παρακάτω σχήμα έχουμε αντικαταστήσει τον πίνακα αληθείας με ένα γράφημα δύο

ασαφών συνόλων. Στο πάνω μέρος έχουμε την περίπτωση συνόλων με δύο τιμές ενώ στο κάτω φαίνεται ο τρόπος που φαίνεται πως λειτουργούν οι τελεστές στην περίπτωση που οι τιμές αληθείας A και B μεταβάλλονται συνεχώς από το 0 στο 1.



Σχήμα 5.10 Παραστάσεις two-valued-logic και multivalued-logic .

Δεδομένων των παραπάνω συναρτήσεων μπορούμε να κατασκευάσουμε δομές με βάση ασαφή σύνολα και τους λογικούς κανόνες AND OR και NOT. Βέβαια το γεγονός ότι βρήκαμε συναρτήσεις που να επεκτείνουν τους τελεστές αυτούς από το χώρο της Boolean λογικής στο χώρο της ασαφούς λογικής δε σημαίνει σε καμία περίπτωση ότι οι συναρτήσεις αυτές είναι και οι μοναδικές.

Έχουμε ορίσει την τομή, την ένωση και το συμπλήρωμα ενός ασαφούς συνόλου με τους τελεστές \min , \max , $1-A$ οι οποίοι είναι οι πιο συχνά χρησιμοποιούμενοι. Ωστόσο μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε και άλλες συναρτήσεις για τον ίδιο σκοπό. Γενικά η τομή δύο ασαφών συνόλων μπορεί να παρασταθεί με μια δυαδική απεικόνιση T που αθροίζει (aggregates) τις δύο συναρτήσεις συμμετοχής ως ακολούθως:

$$\mu_{A \cap B} = T(\mu_A(x), \mu_B(x))$$

Αυτού του είδους οι τελεστές τομής αναφέρονται συνήθως ως τ-νόρμες (τριγωνική νόρμα, triangular norm) και πρέπει να ικανοποιούν τις παρακάτω προϋποθέσεις:

$$\text{όρια: } T(0, 0) = 0, T(a, 1) = T(1, a) = a$$

$$\text{μονοτονία: } T(a, b) \leq T(c, d) \text{ αν } a \leq c \text{ και } b \leq d$$

$$\text{αντιμεταθετικότητα: } T(a, c) = T(c, a)$$

$$\text{συσχέτιση : } T(a, T(b, c)) = T(T(a, b), c)$$

Η πρώτη απαίτηση επιβάλλει τη γενίκευση σε σύνολα διακριτών τιμών (crisp sets). Η δεύτερη υπονοεί ότι μια μείωση του βαθμού συμμετοχής στο A ή στο B δεν μπορεί να οδηγήσει σε αύξηση του βαθμού συμμετοχής στην τομή των A και B. Η τρίτη απαίτηση δείχνει ότι ο τελεστής είναι αδιάφορος στον τρόπο διάταξης με τον οποίο τέμνονται τα δύο σύνολα A και B. Τέλος η τέταρτη απαίτηση μας επιτρέπει να παίρνουμε την τομή οποιουδήποτε αριθμού συνόλων σε οποιαδήποτε διάταξη ζευγών.

Μερικοί από τους πιο γνωστούς τελεστές T-norm είναι:

- *Minimum*: $T_{\min}(a, b) = \min(a, b) = a \wedge b$
- *Αλγεβρικό γινόμενο(algebraic product)*: $T_{ap}(a, b) = ab$
- *Καθορισμένο γινόμενο(bounded product)*: $T_{bp}(a, b) = 0 \vee (a + b - 1)$
- *Δραστικό γινόμενο(drastic product)*: $T_{dp}(a, b) = \begin{cases} a, & \text{αν } b = 1 \\ b, & \text{αν } a = 1 \\ 0, & \text{αν } a, b < 1 \end{cases}$

$$\text{όπου } 0 \leq a, b \leq 1$$

Όπως η ασαφής τομή έτσι και η ασαφής ένωση, προσδιορίζεται με μια δυαδική απεικόνιση S.

$$\mu_{A \cup B}(x) = S(\mu_A(x), \mu_B(x))$$

Οι ασαφείς τελεστές ένωσης αναφέρονται συνήθως ως σ-νόρμες και πρέπει να πληρούν τις παρακάτω προϋποθέσεις:

όρια: $S(1, 1) = 1, S(0, a) = S(a, 0) = a$

μονοτονία: $S(a, b) \leq S(c, d)$ αν $a \leq c$ και $b \leq d$

αντιμεταθετικότητα: $S(a, b) = S(b, a)$

συσχέτιση : $S(a, S(b, c)) = S(S(a, b), c)$

Μερικοί από τους πιο γνωστούς τελεστές S-norm είναι:

- *Maximum*: $S_{\max}(a, b) = \max(a, b) = a \vee b$
- *Αλγεβρικό άθροισμα(algebraic sum)*: $S_{as}(a, b) = a + b - ab$
- *Καθορισμένο άθροισμα (bounded sum)*: $S_{bp}(a, b) = 1 \wedge (a + b)$
- *Δραστικό άθροισμα(drastic sum)*: $S_{dp}(a, b) = \begin{cases} a, & \alpha\nu b = 0 \\ b, & \alpha\nu a = 0 \\ 1, & \alpha\nu a, b > 0 \end{cases}$

όπου $0 \leq a, b \leq 1$

Τέλος το συμπλήρωμα A' ενός ασαφούς συνόλου A δίνεται από τη σχέση:

$$\mu_{A'}(x) = c(\mu_A(x))$$

όπου η συνάρτηση c πρέπει να ικανοποιεί τις παρακάτω συνθήκες:

όρια: $c(0)=1$ και $c(1)=0$

μονοτονία: $\forall a, b \in [0, 1]$ αν $a \leq b \Rightarrow c(a) \geq c(b)$

συνέχεια: c συνεχής στο $[0, 1]$.

επαγωγή: $\forall a \in [0, 1]$ είναι $c(c(a))=a$

Το σύνηθες συμπλήρωμα δίνεται από τη σχέση:

$$\mu_{A'}(x) = 1 - \mu_A(x)$$

5.1.4 Ασαφείς σχέσεις

Οι ασαφείς σχέσεις (fuzzy relations) είναι ασαφή σύνολα ορισμένα σε πεδία αναφοράς ανώτερης διάστασης (π.χ. $X \times X$, $X \times Y \times Z$ κλπ). Ποιοτικά, μια ασαφής σχέση R θα μπορούσε να είναι μια έκφραση της μορφής «είναι βαρύτερο από» και η οποία θα συνδέει τα στοιχεία δύο άλλων συνόλων:

$R = \langle x \text{ είναι βαρύτερο από } y \rangle x \in X, y \in Y \text{ και } R \in X \times Y$

Οι ασαφείς σχέσεις μπορεί να εκφραστούν με αναφορά όλων των ζευγών (τιμή, βαθμός συμμετοχής), δηλαδή ζευγών της μορφής $[(x, y), \mu_R(x, y)]$. Ένας άλλος τρόπος αναπαράστασης, ιδιαίτερα χρήσιμος σε υπολογισμούς είναι σε μορφή πίνακα:

$$R = \begin{bmatrix} \mu_R(x_1, y_1) & \mu_R(x_1, y_2) & \dots & \mu_R(x_1, y_n) \\ \mu_R(x_2, y_1) & \mu_R(x_2, y_2) & \dots & \mu_R(x_2, y_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mu_R(x_m, y_1) & \mu_R(x_m, y_2) & \dots & \mu_R(x_m, y_n) \end{bmatrix}$$

Οι ασαφείς σχέσεις μπορούν να συνδυαστούν μεταξύ τους μέσω της διαδικασίας της σύνθεσης (composition). Αν για παράδειγμα συνδυαστεί η ασαφής σχέση $R_1(x, y)$ ορισμένη στο $X \times Y$ με την ασαφή σχέση $R_2(y, z)$ ορισμένη στο $Y \times Z$ τότε θα προκύψει μία ασαφής σχέση $R(x, z)$ η οποία θα ορίζεται στο σύνολο $X \times Z$ και θα συσχετίζει άμεσα στοιχεία των συνόλων X και Z . Βέβαια είναι απαραίτητο να προσδιοριστεί επακριβώς η συνάρτηση συμμετοχής $\mu_R(x, z)$ της R με χρήση των συναρτήσεων συμμετοχής των R_1 και R_2 . Οι βασικές πράξεις που ορίζονται μεταξύ των ασαφών σχέσεων είναι η αντιστροφή και η σύνθεση.

- **Αντίστροφη** σχέση της $R(X, Y)$ είναι η ασαφής σχέση $R^{-1}(X, Y)$ με τύπο $R^{-1}(x, y) = R(y, x)$ για κάθε x που ανήκει στον X και κάθε y που ανήκει στον Y . Ο πίνακας συμμετοχής που παριστάνει την R^{-1} είναι ο ανάστροφος του R .
- Η **σύνθεση** είναι πολύ σημαντική διαδικασία καθώς όπως θα δούμε παρακάτω οι κανόνες της μορφής if-then αντιστοιχούν σε ασαφείς σχέσεις και το πρόβλημα της ασαφούς συλλογιστικής είναι μαθηματικά ισοδύναμο με τη σύνθεση.

Αν $R_1(x, y)$ και $R_2(y, z)$ είναι δύο ασαφείς σχέσεις ορισμένες στα σύνολα $X \times Y$ και $Y \times Z$ αντίστοιχα, τότε η σύνθεση τους δίνει μια νέα σχέση $R_1 \circ R_2$. Η sup-t

σύνθεση $R: X \times Y \rightarrow [0,1]$ δύο ασαφών σχέσεων $R_1: X \times Y \rightarrow [0,1]$ και $R_2: X \times Y \rightarrow [0,1]$ ορίζεται από την εξίσωση:

$$R(x, y) = [R_1 \circ^t R_2](x, y) = \sup_{y \in Y} t[R_1(x, y), R_2(y, z)]$$

Οι περισσότεροι γνωστές μέθοδοι σύνθεσης ασαφών συνόλων είναι η σύνθεση max-min και η σύνθεση max-product. Η συνάρτηση συμμετοχής για την περίπτωση της max-min σύνθεσης δίνεται από τη σχέση:

$$\mu_{R_1 \circ R_2}(x, z) = \bigvee_y [\mu_{R_1}(x, y) \wedge \mu_{R_2}(y, z)]$$

Στην περίπτωση της σύνθεσης max-product έχουμε την παρακάτω σχέση:

$$\mu_{R_1 \circ R_2}(x, z) = \bigvee_y [\mu_{R_1}(x, y) \bullet \mu_{R_2}(y, z)]$$

Οι υπολογισμοί στο δεξιό μέρος των παραπάνω σχέσεων είναι παρόμοιοι με του πολλαπλασιασμού των πινάκων.

5.1.5 Ασαφής συλλογιστική

Η βάση στην οποία στηρίζεται η λήψη αποφάσεων είναι η παραγωγή συλλογιστικής. Η ασαφής λογική ασχολείται με την παραγωγή συλλογιστικής σε περιβάλλον αβεβαιότητας. Για το σκοπό αυτό, θεμελιώνεται η δομή και η μαθηματική αναπαράσταση ενός ασαφούς γεγονότος με τον ορισμό των ασαφών συνόλων και καθορίζεται ο τρόπος με τον οποίο συνδυάζουμε τα γεγονότα για να παράγουμε λογικές προτάσεις ή σχέσεις και συνεπώς συμπεράσματα.

Οι συλλογιστικοί τρόποι που κυρίως χρησιμοποιούνται είναι οι εξής [29]:

- Ο **modus ponens** (MP) παράγει συμπεράσματα από ένα σύνολο υποθέσεων σύμφωνα με το σχήμα:

$$(A \Rightarrow B) \wedge A \Rightarrow B$$

όπου A και B συγκεκριμένα γεγονότα.

Ο παραπάνω κανόνας ερμηνεύεται ως εξής: Αν το γεγονός A συνεπάγεται το γεγονός B και επιπλέον έχουμε ως υπόθεση ότι ισχύει το A, τότε το συμπέρασμα που παίρνουμε είναι ότι ισχύει και το B. Όμως σε περιβάλλον ασάφειας τα γεγονότα

ισχύουν σε κάποιο βαθμό. Έτσι ο παραπάνω κανόνας πρέπει να τροποποιηθεί για να συμπεριλάβει και την ασάφεια. Καταλήγουμε με αυτό τον τρόπο στο γενικευμένο κανόνα *modus ponens* (*generalized modus ponens*) ο οποίος έχει την παρακάτω μορφή:

$$(A \Rightarrow B) \wedge A' \Rightarrow B'$$

- Αντίστοιχα ο γενικευμένος κανόνας **modus tolens** (*generalized modus tolens*) διατυπώνεται ως εξής:

$$(A \Rightarrow B) \wedge B' \Rightarrow A'$$

Ας εξετάσουμε τώρα την ερμηνεία των παραπάνω κανόνων. Για παράδειγμα ο γενικευμένος κανόνας *modus ponens* ερμηνεύεται ως εξής: Αν το γεγονός A συνεπάγεται το γεγονός B και έχουμε ως υπόθεση ότι ισχύει το A σε κάποιο βαθμό, τότε θα ισχύει και το B σε κάποιο βαθμό.

Πρέπει, λοιπόν να προσδιοριστεί ο βαθμός στον οποίο πληρείται το γεγονός B. Αυτός εξαρτάται από το βαθμό στον οποίο πληρείται το γεγονός A και από το είδος της συνεπαγωγής που εφαρμόζουμε. Η πράξη της ασαφούς συνεπαγωγής υλοποιεί τη μαθηματική σχέση $A \Rightarrow B$, όταν τα A και B είναι ασαφή γεγονότα. Το σχήμα που προτείνεται από τη θεωρία των ασαφών συνόλων για την εξαγωγή του γεγονότος B' από τα γεγονότα A, A', B περιγράφεται από την παρακάτω σχέση που αποτελεί το συνθετικό κανόνα του Zadeh:

$$B'(y) = \sup_{x \in X} t[A'(x), \sigma(A(x), B(y))]$$

όπου σ είναι μια συνάρτηση που υλοποιεί την πράξη της ασαφούς συνεπαγωγής. Επομένως η επιλογή της συνάρτησης που υλοποιεί την ασαφή συνεπαγωγή έχει ουσιαστικό ρόλο για την ασαφή συλλογιστική που παράγεται με βάση το παραπάνω σχήμα. Ένα από τα κριτήρια που χρησιμοποιείται γι' αυτή την επιλογή είναι το κριτήριο της ανάκλησης (*recall*), το οποίο διατυπώνεται ως εξής:

$$B(y) = \sup_{x \in X} t[A(x), \sigma(A(x), B(y))]$$

Το κριτήριο αυτό έχει την εξής ερμηνεία. Η ασαφής συνεπαγωγή πρέπει να είναι τέτοια ώστε όταν η υπόθεση πληρείται ακριβώς, τότε να λαμβάνουμε το συμπέρασμα του κανόνα $A \Rightarrow B$, δηλαδή το γεγονός B. Η απαίτηση αυτή είναι εύλογη

αφού όταν δεν υπάρχει αβεβαιότητα η ασαφής συλλογιστική οφείλει να ταυτίζεται με την κλασσική συλλογιστική.

5.2 Συστήματα Ασαφούς Συλλογιστικής (Fuzzy Inference Systems)

Στις προηγούμενες παραγράφους μελετήσαμε τα ασαφή σύνολα και τη θεωρία τους. Τώρα θα δούμε τον τρόπο που μπορούν να εφαρμοσθούν τα παραπάνω σε ένα σύστημα λήψης αποφάσεων [25].

Θα εξετάσουμε ένα απλοϊκό και αρκετά σύνηθες παράδειγμα στην μελέτη της λήψης αποφάσεων και θα δούμε πως μπορεί να λυθεί με τη βοήθεια της ασαφούς λογικής. Εξετάζουμε το πρόβλημα του φιλοδώρηματος, πόσο δηλαδή είναι το φιλοδώρημα που πρέπει να δώσει ένας πελάτης σε ένα εστιατόριο. Οι παράμετροι του προβλήματος είναι η ποιότητα του φαγητού και η εξυπηρέτηση.

Είναι προφανές για παράδειγμα ότι αν το φαγητό είναι άριστης ποιότητας και η εξυπηρέτηση καλή τότε το φιλοδώρημα θα είναι υψηλό. Αντίστοιχα αν η ποιότητα της εξυπηρέτησης είναι χαμηλή και το φαγητό κακό τότε το φιλοδώρημα θα είναι χαμηλό. Τι γίνεται όμως αν έχουμε μια ενδιάμεση κατάσταση, π.χ. μέτριο φαγητό και καλή εξυπηρέτηση. Επιπλέον παραπάνω έχουμε αναφέρει προσδιορισμούς όπως καλό και μέτριο που εμπεριέχουν κάποια ασάφεια.

Αν προσπαθήσουμε να λύσουμε το πρόβλημα γραμμικά θα πρέπει να δώσουμε καθορισμένους κανόνες για κάθε μια περίπτωση. Μέσω όμως της ασαφούς λογικής το πρόβλημα αυτό μπορεί να λυθεί ευκολότερα. Πριν προχωρήσουμε στη λύση του προβλήματος θα δούμε πως μπορούμε να υλοποιήσουμε τους κανόνες αν-τότε (if-then rules) που προαναφέραμε (αν το φαγητό είναι κακό κτλ).

5.2.1 Κανόνες αν-τότε (If-then rules)

Τα ασαφή σύνολα και οι ασαφείς τελεστές είναι τα υποκείμενα και τα ρήματα του ασαφούς λογισμού. Οι προτάσεις if-then χρησιμοποιούνται για να σχηματίσουν τις συνθήκες εκείνες που συνιστούν την ασαφή λογική. Ένας απλός κανόνας if-then έχει τη μορφή:

If x is A then y is B

όπου A και B είναι οι γλωσσικές μεταβλητές που προσδιορίζονται από ασαφή σύνολα με χώρο αναφοράς X και Y αντίστοιχα. Το πρώτο κομμάτι του κανόνα 'if x is A' ονομάζεται *υπόθεση (antecedent ή premise)* ενώ το δεύτερο κομμάτι 'then y is B' ονομάζεται *συνέπεια ή συμπεράσμα (consequent ή conclusion)*. Ένα παράδειγμα ενός τέτοιου κανόνα μπορεί να είναι το εξής:

If service is *good* then tip is *average*

Η λέξη *good* αντιπροσωπεύεται από έναν αριθμό που κυμαίνεται ανάμεσα στο 0 και το 1. Έτσι η υπόθεση είναι μια μετάφραση που επιστρέφει μια τιμή από το 0 έως το 1. Από την άλλη μεριά η λέξη *average* αποτελεί ένα ασαφές σύνολο και έτσι η συνέπεια του κανόνα είναι μια συσχέτιση της εξόδου y στο ασαφές σύνολο B.

Στους κανόνες if-then η λέξη 'is' έχει διαφορετική έννοια ανάλογα με το αν εμφανίζεται στο πρώτο ή στο δεύτερο μέρος του κανόνα. Έτσι όταν εμφανίζεται στο πρώτο μέρος του κανόνα έχει την έννοια του ελέγχου ισότητας (δηλαδή την ίδια έννοια που δίνουμε στο σύμβολο =). Αντίθετα όταν εμφανίζεται στο δεύτερο μέρος του κανόνα έχει την έννοια της καταχώρησης (δηλαδή την έννοια που δίνουμε στο σύμβολο =). Ο παραπάνω κανόνας λοιπόν θα μπορούσε να γραφεί συμβολικά και ως εξής:

If service == good then tip = average

Γενικά η είσοδος σε έναν κανόνα if-then είναι η τρέχουσα τιμή της μεταβλητής εισόδου ενώ η έξοδος του κανόνα είναι ολόκληρο το ασαφές σύνολο. Από αυτό όμως το ασαφές σύνολο θα πρέπει να κρατήσουμε μια τιμή έτσι ώστε να μπορούμε να βγάλουμε κάποια συμπεράσματα. Γι' αυτό πρέπει να γίνει μια διαδικασία που ονομάζεται *αποσαφήνιση (defuzzification)*. Για να διερμηνεύσουμε έναν κανόνα if-then πρέπει να ακολουθήσουμε κάποια στάδια. **Πρώτον** πρέπει να υπολογίσουμε την είσοδο. Για να γίνει αυτό όμως πρέπει να γίνει ασαφοποίηση της εισόδου και να εφαρμοσθούν οι κατάλληλοι ασαφείς τελεστές και **δεύτερον** πρέπει να εφαρμόσουμε το παραπάνω αποτέλεσμα στο δεύτερο μέρος του κανόνα.

Αν πάρουμε την απλή περίπτωση των δυαδικών τιμών οι κανόνες if-then είναι αρκετά εύκολο να εφαρμοσθούν. Αν η προϋπόθεση είναι αληθής τότε και η συνέπεια θα είναι αληθής. Η παραπάνω συλλογιστική επεκτείνεται για να συμπεριλάβει και ασαφείς τιμές. Όταν η προϋπόθεση είναι αληθής σε κάποιο βαθμό τότε και η συνέπεια είναι αληθής στον ίδιο βαθμό. Με άλλα λόγια:

Δυαδική λογική: $p \rightarrow q$ (p και q είναι είτε πλήρως αληθή ή πλήρως ψευδή)
Ασαφής λογική: $0.5p \rightarrow 0.5q$ (p και q είναι μερικώς αληθή και μερικώς ψευδή)

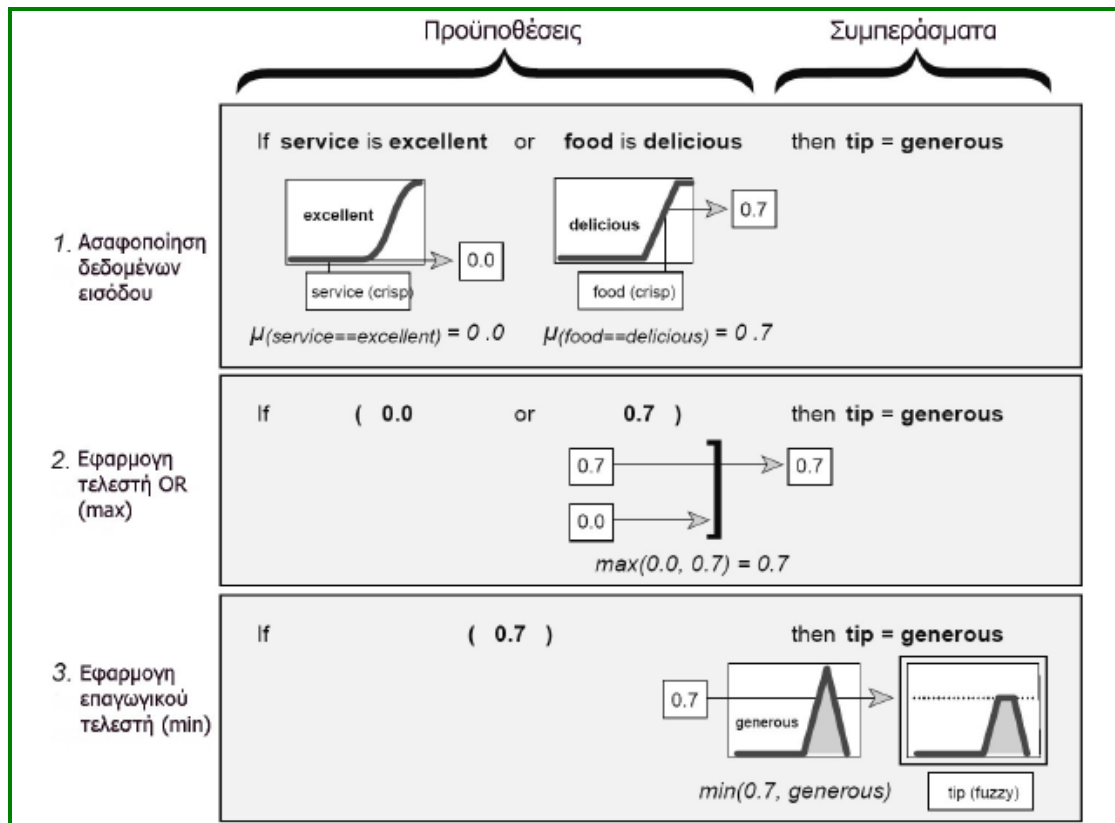
Η προϋπόθεση ενός κανόνα μπορεί να αποτελείται από περισσότερα του ενός μέρη. Όπως για παράδειγμα ο παρακάτω κανόνας:

If sky is gray and wind is strong and barometer is falling, then....

Σ' αυτή την περίπτωση όλα τα μέρη της προϋπόθεσης υπολογίζονται ταυτόχρονα και καταλήγουμε σε ένα μοναδικό νούμερο ανάλογα με τους λογικούς τελεστές που χρησιμοποιούμε. Η συνέπεια ενός κανόνα μπορεί επίσης να αποτελείται από περισσότερα του ενός μέρη. Για παράδειγμα ο παρακάτω κανόνας:

If temperature is cold, then hot water valve is open and cold water valve is shut

Όλα τα μέρη της συνέπειας του κανόνα επηρεάζονται το ίδιο από το αποτέλεσμα της προϋπόθεσης. Η συνέπεια του κανόνα προσδιορίζει ένα ασαφές σύνολο το οποίο συσχετίζεται με την έξοδο. Η συνάρτηση συνεπαγωγής (implication function) στη συνέχεια τροποποιεί το ασαφές σύνολο στο βαθμό που προσδιορίζεται από την προϋπόθεση του κανόνα. Μια πολύ συνηθισμένη συνάρτηση για να γίνει αυτό είναι η αποκοπή με τη χρήση του τελεστή min. Στο παρακάτω σχήμα βλέπουμε τον τρόπο με τον οποίο εφαρμόζονται οι κανόνες if-then.



Σχήμα 5.11 Κανόνες if-then στην ασαφή λογική .

Γενικά ένας κανόνας από μόνος του δεν επαρκεί για τα περισσότερα πρακτικά προβλήματα. Αυτό που χρειαζόμαστε είναι περισσότεροι του ενός κανόνες οι οποίοι να αλληλεπιδρούν μεταξύ τους. Η έξοδος κάθε κανόνα θα είναι ένα ασαφές σύνολο. Τα ασαφή σύνολα που προκύπτουν σα συνέπεια των κανόνων συγκεντρώνονται για να σχηματίσουν ένα ασαφές σύνολο εξόδου από το οποίο μέσω της διαδικασίας της αποσαφήνισης θα πάρουμε μια μοναδική τιμή.

5.2.2 Ασαφή συστήματα τύπου Mamdani

Η ασαφής συλλογιστική είναι η διαδικασία κατά την οποία σχηματίζεται η απεικόνιση από μια δεδομένη είσοδο σε μια έξοδο, χρησιμοποιώντας τις αρχές της ασαφούς λογικής. Η απεικόνιση αυτή θέτει τις βάσεις με τις οποίες μπορεί να ληφθεί μια απόφαση ή να διακριθούν πρότυπα (patterns). Η διαδικασία αυτή της ασαφούς συλλογιστικής περιλαμβάνει όλα εκείνα τα κομμάτια στα οποία αναφερθήκαμε προηγουμένως. Δηλαδή τις συναρτήσεις συμμετοχής, τους ασαφείς λογικούς τελεστές και τους κανόνες if-then. Υπάρχουν δύο είδη ασαφών συστημάτων παρεμβολής, τα τύπου-Mamdani και τα τύπου Sugeno. Οι διαφορές

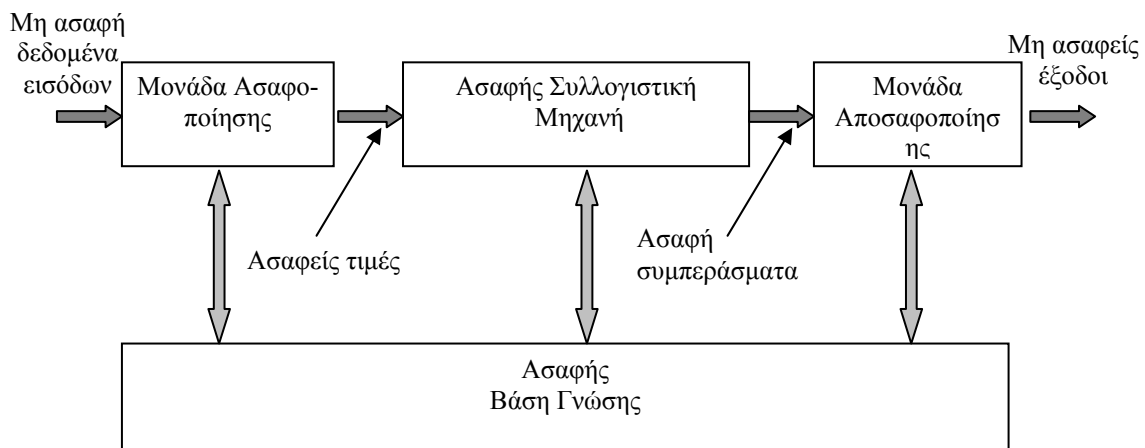
ανάμεσα στα δύο αυτά συστήματα έγκεινται κυρίως στον τρόπο με τον οποίο σχηματίζεται η έξοδος του συστήματος. Τα συστήματα Mamdani είναι αυτά που συναντώνται συχνότερα. Η μεθοδολογία των συστημάτων Mamdani εισήχθηκε το 1975 από τον Ebrahim Mamdani [25].

Εφαρμογές των FIS έχουμε σε τομείς όπως ο αυτόματος έλεγχος, η ταξινόμηση δεδομένων, η ανάλυση αποφάσεων, τα έμπειρα συστήματα και η όραση υπολογιστών. Ένα Ασαφές Σύστημα (Fuzzy System) αποτελείται από τις ακόλουθες δομικές μονάδες:

- Μία βάση ασαφών κανόνων της μορφής EAN - TOTE (Ασαφής Βάση Γνώσης)
- Μία ασαφή συλλογιστική μηχανή. Αυτή υλοποιεί την εξαγωγή συμπερασμάτων από τις εισόδους του συστήματος με βάση την ασαφή βάση γνώσης.
- Μία μονάδα ασαφοποίησης (ασαφοποιητική μονάδα διεπαφής), η οποία μετατρέπει τα δεδομένα εισόδου σε ασαφή σύνολα.
- Μία μονάδα αποασαφοποίησης (αποασαφοποιητική μονάδα διεπαφής), η οποία μετατρέπει τα ασαφή συμπεράσματα σε σαφώς καθορισμένη μορφή.

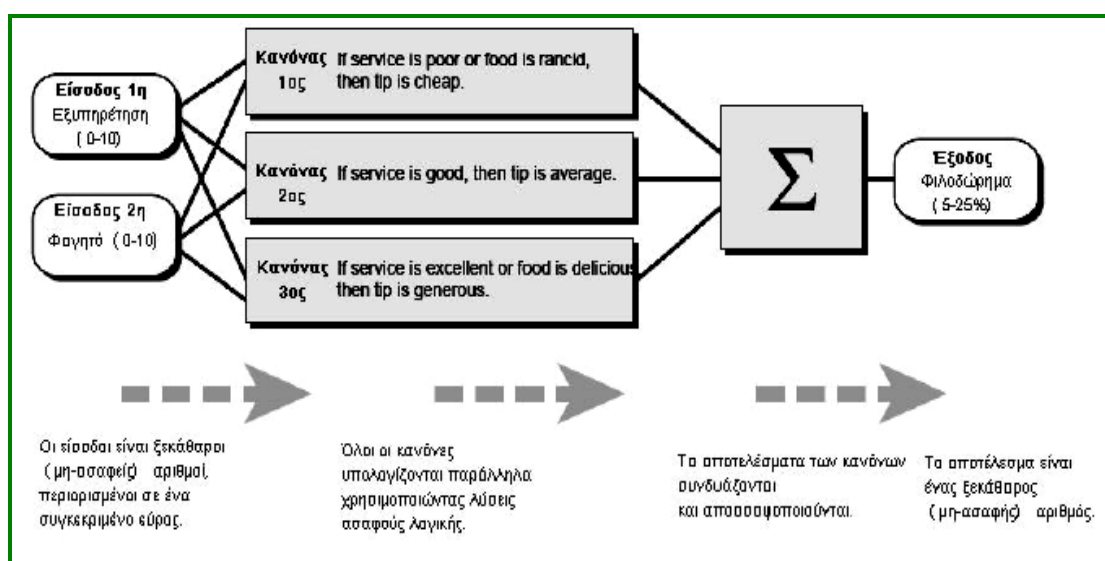
Ένα βασικό FIS μπορεί να πάρει είτε ασαφείς εισόδους, είτε σαφείς (συγκεκριμένες) με τη μορφή ασαφών singletons. Η έξοδος όμως που παράγει είναι πάντα ασαφή σύνολα. Μερικές φορές είναι αναγκαίο να έχουμε σαφή έξοδο, ειδικά όταν το FIS χρησιμοποιείται σαν ελεγκτής. Τότε χρειαζόμαστε μια μέθοδο αποασαφοποίησης, για να εξάγουμε ένα σαφές αποτέλεσμα που να αντιπροσωπεύει με τον καλύτερο τρόπο το ασαφές σύνολο.

Με σαφείς εισόδους και εξόδους, ένα FIS υλοποιεί μια μη-γραμμική αντιστοίχιση, από τον χώρο εισόδου σε αυτόν της εξόδου, με έναν αριθμό κανόνων if-then, καθένας από των οποίων περιγράφει μια τοπική συμπεριφορά της αντιστοίχισης. Ειδικότερα, το μέρος των προϋποθέσεων ενός κανόνα προσδιορίζει μια ασαφή περιοχή στο χώρο της εισόδου, ενώ αυτός των συμπερασμάτων προσδιορίζει την έξοδο σε μια ασαφή περιοχή.



Σχήμα 5.12 Δομή ενός ασαφούς συστήματος εξαγωγής συμπερασμάτων .

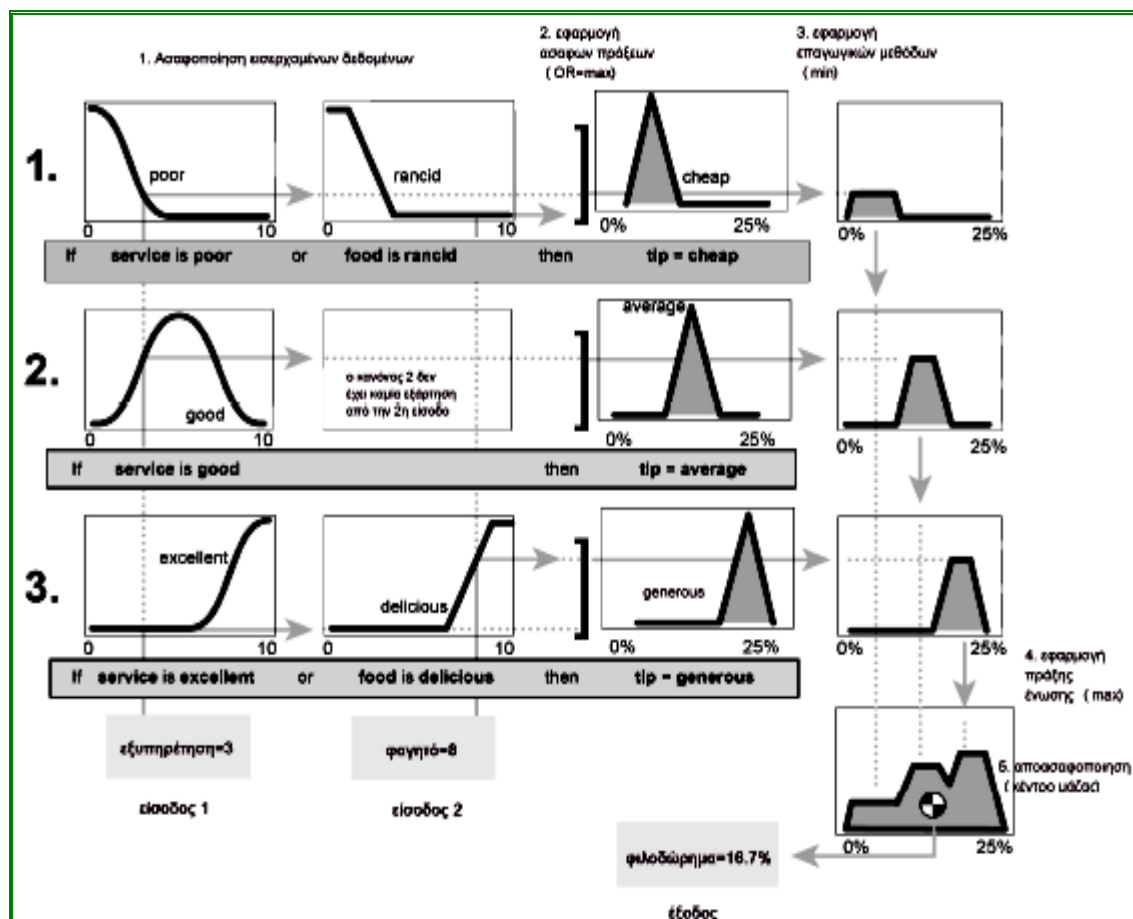
Θα δούμε τώρα διαγραμματικά πως λειτουργεί ένα FIS τύπου Mamdani μέσα από το πρόβλημα του φιλοδώρηματος που αναφέραμε παραπάνω. Το σύστημα έχει δύο εισόδους και τρεις κανόνες. Οι εισοδοί του συστήματος είναι η ποιότητα του φαγητού και η εξυπηρέτηση. Θεωρούμε ότι ο πελάτης βαθμολογεί την ποιότητα του φαγητού και την εξυπηρέτηση με μια κλίμακα από το 0 έως το 10. η έξοδος του συστήματος είναι το φιλοδώρημα που θα δώσει ο πελάτης και το οποίο κυμαίνεται από 5% έως 25% της τιμής του λογαριασμού. Η βασική του δομή του συστήματος φαίνεται στο παρακάτω διάγραμμα:



Σχήμα 5.13 Σύστημα 2 εισόδων, 3 κανόνων, 1 εξόδου.

Η πληροφορία οδεύει από τα αριστερά προς τα δεξιά και καταλήγει σε μία μοναδική έξοδο. Ένα σημαντικό χαρακτηριστικό των συστημάτων ασαφούς λογικής είναι η παράλληλη εφαρμογή των κανόνων. Στα κλασσικά συστήματα δυαδικής λογικής έχουμε χρήση διακοπών που ανοίγουν και κλείνουν ανάλογα με τις τιμές των εισόδων. Στα ασαφή συστήματα μεταβαίνουμε ομαλά από περιοχή σε περιοχή ανάλογα με τις συνέπειες των κανόνων. Η διαδικασία της απεικόνισης των εισόδων στις εξόδους μέσα από ένα σύστημα ασαφούς λογικής ακολουθεί πέντε βήματα:

- Ασαφοποίηση των εισόδων
- Εφαρμογή των ασαφών λογικών τελεστών στις προϋπόθεσης των κανόνων
- Καθορισμός των συνεπαγωγών των κανόνων
- Συγκέντρωση όλων των συνεπαγωγών όλων των κανόνων
- Αποσαφήνιση



Σχήμα 5.14 FIS Mamdani για ποσοστό φιλοδώρηματος

5.2.3 Συστήματα ασαφούς συλλογιστικής τύπου Sugeno

Το ασαφές μοντέλο Sugeno δημιουργήθηκε σε μια προσπάθεια να αναπτυχθεί μια συστηματική προσέγγιση στη γέννηση ασαφών κανόνων από ένα δεδομένο σύνολο δεδομένων εισόδου-εξόδου. Σε πολλές περιπτώσεις είναι περισσότερο αποτελεσματική η χρήση σημείων-αιχμών σαν συναρτήσεις συμμετοχής εξόδου, από ένα συνεχές κατανομημένο ασαφές σύνολο. Μια τέτοια αιχμή είναι γνωστή με τον αγγλικό όρο συνάρτηση συμμετοχής εξόδου singleton και θα μπορούσε να χαρακτηριστεί σαν προαποσαφοποιημένο ασαφές σύνολο. Η συνάρτηση συμμετοχής ενός singleton είναι $\mu_A(x)=1$.

Με αυτόν τον τρόπο εμπλουτίζουμε την επάρκεια της διαδικασίας αποσαφοποίησης, διότι απλοποιούμε ιδιαιτέρως τους απαιτούμενους υπολογισμούς σε σχέση με την πιο γενική μέθοδο Mamdani, στην οποία βρίσκουμε το κέντρο μάζας μια δισδιάστατης συνάρτησης. Αντί λοιπόν να βρίσκουμε το κέντρο μάζας, χρησιμοποιούμε τον σταθμικό μέσο μερικών σημείων. Τα συστήματα τύπου Sugeno υποστηρίζουν αυτόν τον τύπο μοντέλου.

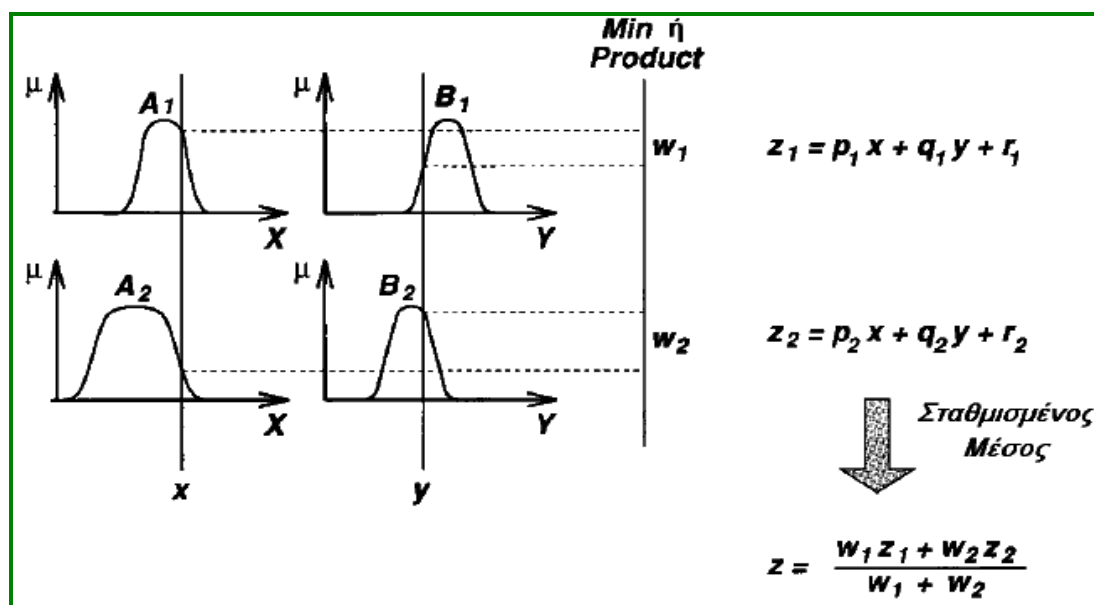
Η μέθοδος Sugeno εισήχθη το 1985 και έχει ομοιότητες με τη μέθοδο των συστημάτων Mamdani. Για παράδειγμα τα 2 πρώτα βήματά της (ασαφοποίηση των εισόδων και εφαρμογή των τελεστών) είναι ακριβώς τα ίδια. Η κύρια διαφορά ανάμεσα στα δύο συστήματα έγκειται στο ότι οι συναρτήσεις συμμετοχής στην έξοδο των συστημάτων Sugeno είναι μόνο γραμμικές ή σταθερές. Ένας κανόνας σε ασαφές μοντέλο Sugeno έχει τη μορφή:

$$\text{If } x=A \text{ and } y=B, \text{ then } z=f(x, y)$$

όπου A,B είναι τα ασαφή σύνολα των προϋποθέσεων και το $z=f(x,y)$ είναι μια σαφής συνάρτηση στο χώρο των συμπερασμάτων. Συνήθως το $f(x,y)$ είναι ένα πολυώνυμο των μεταβλητών εισόδου x, y , αλλά μπορεί να είναι μια οποιαδήποτε συνάρτηση, αρκεί να μπορεί να περιγράψει κατάλληλα την έξοδο του μοντέλου, μέσα στην ασαφή περιοχή που ορίστηκε από τις προϋποθέσεις των κανόνων. Όταν το $f(x,y)$ είναι πολυώνυμο πρώτου βαθμού το FIS ονομάζεται ασαφές μοντέλο πρώτου βαθμού. Για παράδειγμα:

$$\text{If input-1}=x \text{ and input-2}=y, \text{ then Output is } z = ax + by + c$$

Για ένα Sugeno μηδενικού βαθμού το επίπεδο εξόδου z είναι μια σταθερά ($a=b=0$) και μπορεί να θεωρηθεί και σαν μια ειδική περίπτωση Mamdani, στο οποίο το συμπέρασμα του κάθε κανόνα προσδιορίζεται από ένα ασαφές singleton (προαποσαφολοποιημένο συμπέρασμα). Η έξοδος ενός Sugeno μηδενικού βαθμού είναι μια ομαλή συνάρτηση των μεταβλητών εισόδων του, εφόσον οι γειτονικές συναρτήσεις συμμετοχής στις προϋποθέσεις έχουν αρκετή επικάλυψη.



Σχήμα 5.15 Ασαφές μοντέλο Sugeno πρώτου βαθμού.

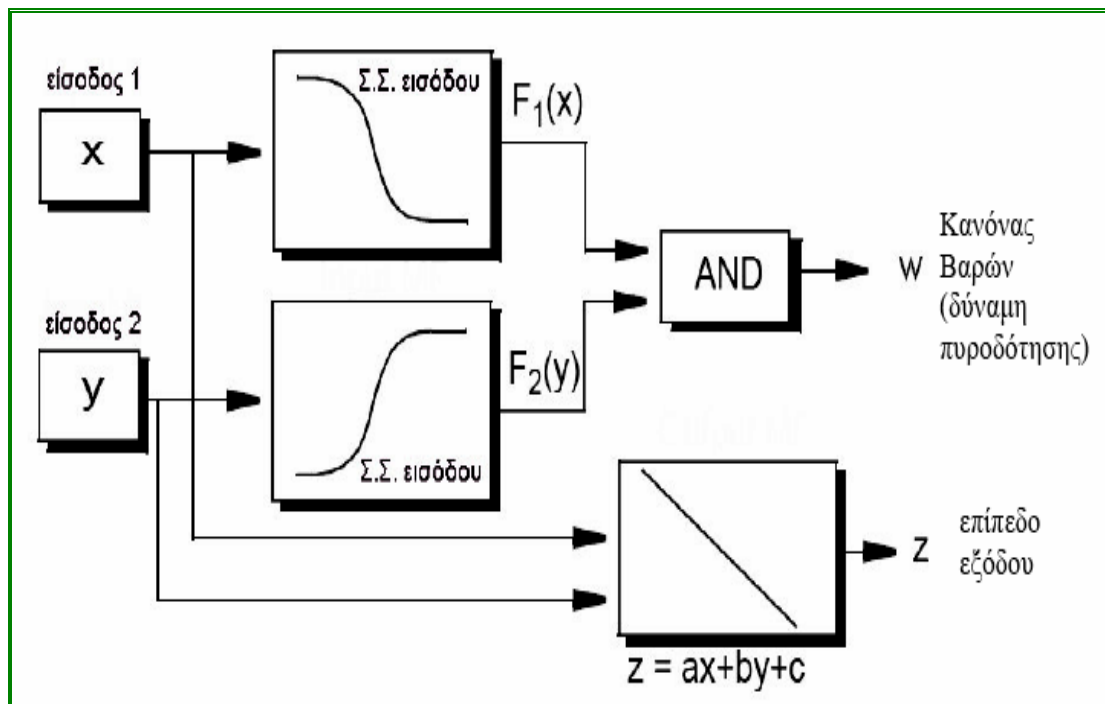
Στο παραπάνω σχήμα βλέπουμε ότι το επίπεδο εξόδου Z_i για κάθε κανόνα είναι σταθμισμένο με βάρη w_i ή αλλιώς με μια δύναμη πυροδότησης (βαθμός ενεργοποίησης) w_i για κάθε κανόνα. Για παράδειγμα για τον τελεστή AND, με είσοδο-1= x και είσοδο-2= y , η δύναμη πυροδότησης είναι:

$$w_i = \text{AND}(F_1(x), F_2(y))$$

όπου F_1 και F_2 είναι οι συναρτήσεις συμμετοχής για τις αντίστοιχες εισόδους. Η τελική έξοδος του συστήματος είναι ο σταθμισμένος μέσος όλων των εξόδων και δίνεται από τον τύπο:

$$\text{Τελική έξοδος} = \frac{\sum_{i=1}^N w_i z_i}{\sum_{i=1}^N w_i}$$

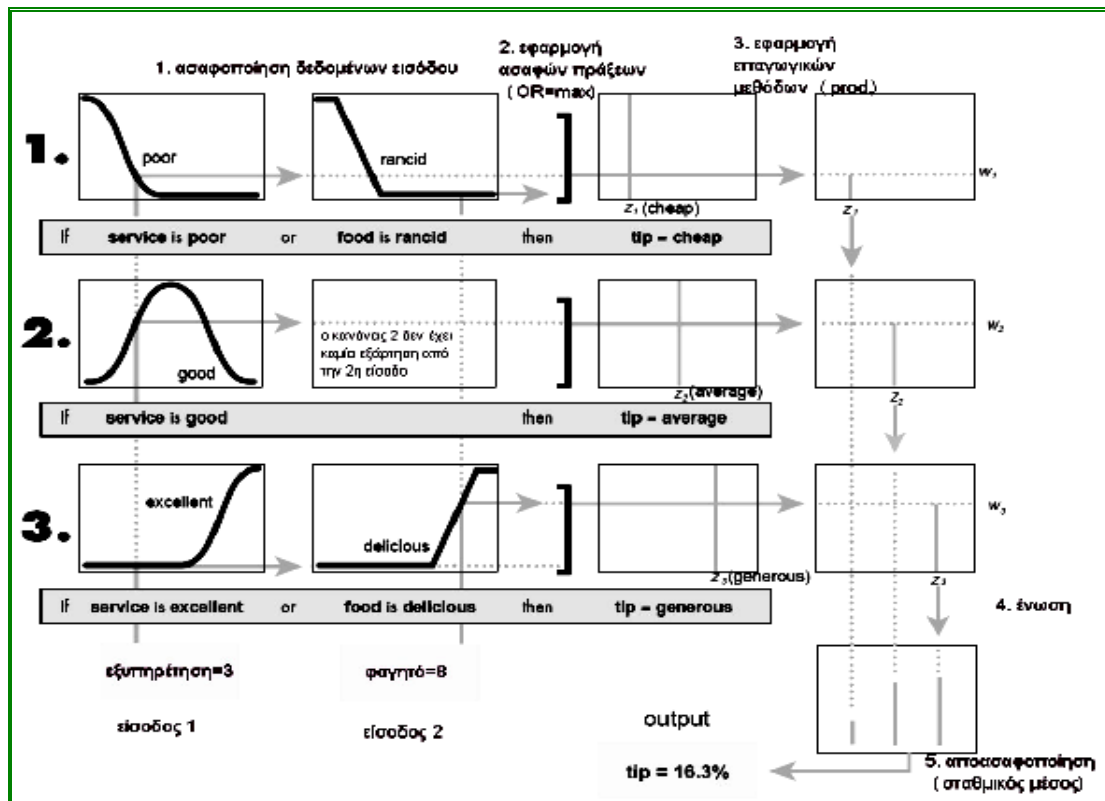
Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η λειτουργία του Sugeno για το παράδειγμα που αναφέραμε.



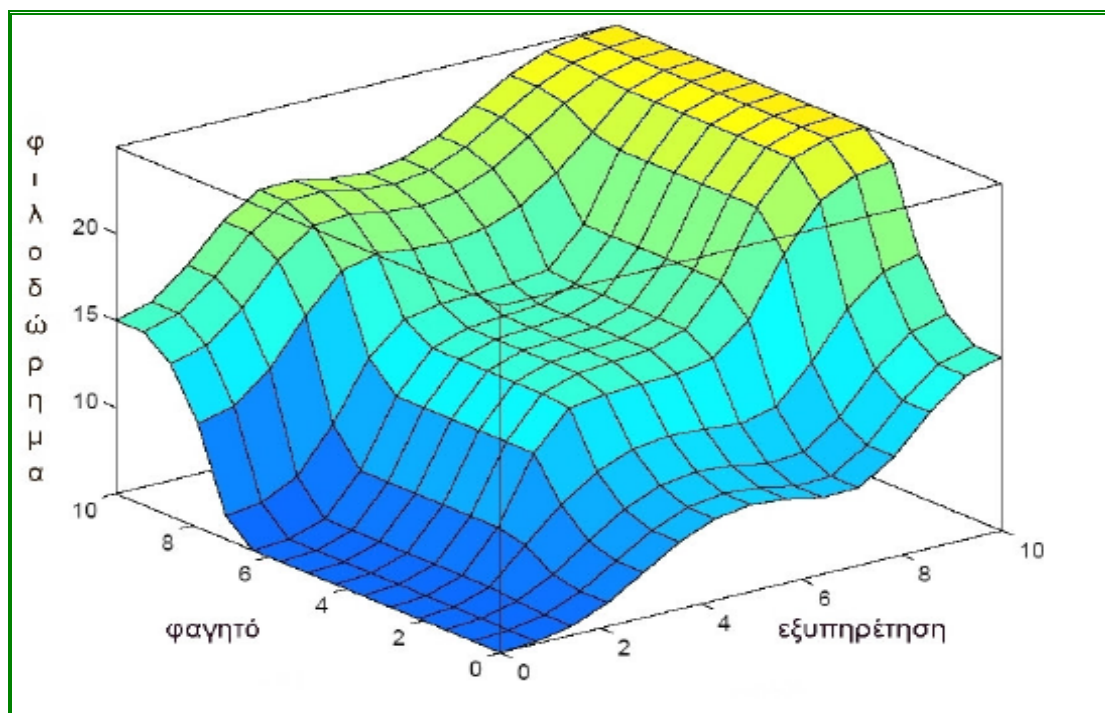
Σχήμα 5.16 Ασαφές μοντέλο Sugeno, δύναμη πυροδότησης.

Στα σχήματα που ακολουθούν παρακάτω φαίνεται σε πλήρη ανάπτυξη το FIS Sugeno για το πρόβλημα με το ποσοστό του φιλοδωρήματος, όπου η χρήση των συναρτήσεων singleton είναι απολύτως επαρκής.

Ο πιο εύκολος τρόπος να κατανοήσουμε τα ασαφή συστήματα Sugeno πρώτου βαθμού, είναι να σκεφτούμε πως ο κάθε κανόνας προσδιορίζει τη θέση ενός ‘κινούμενου singleton’. Οι αιχμές δηλαδή των singleton της εξόδου μπορούν να κινηθούν με γραμμικό τρόπο στο χώρο εξόδου, ανάλογα με τις εισόδους



Σχήμα 6.17 Ασαφές μοντέλο Sugeno, ποσοστό φιλοδωρήματος.



Σχήμα 6.18 Επιφάνεια της λύσης του προβλήματος για το φιλοδώρημα.

5.3 Νευρωνικά δίκτυα

Η προσομοίωση της ανθρώπινης νοημοσύνης και κατ' επέκταση των ευφυών συστημάτων αποτελεί θεμελιώδη προϋπόθεση της Υπολογιστικής Νοημοσύνης. Ο χώρος αυτός έχει μεγάλη εξέλιξη τις τελευταίες δεκαετίες με αποτέλεσμα να δημοσιευτούν πολλές εργασίες και να εμφανιστούν πολλές πρακτικές εφαρμογές.

Ο άνθρωπος δεν είναι γρήγορος ούτε ακριβής στους υπολογισμούς του, όπως ένας σύγχρονος υπολογιστής. Μάλιστα, ακριβώς το αντίθετο ισχύει και ο υπολογιστής είναι πολύ πιο ικανός να εκτελέσει πολύπλοκες πράξεις. Σε πολλούς τομείς όμως, η ανθρώπινη ικανότητα υπερτερεί κατά πολύ των ικανοτήτων ενός υπολογιστή. Για παράδειγμα, ο άνθρωπος αναγνωρίζει πολύ εύκολα αντικείμενα και κατανοεί τις σχέσεις μεταξύ τους μέσα στο φυσικό περιβάλλον έστω και αν αυτά είναι παραμορφωμένα ή δεν είναι εξ' ολοκλήρου ορατά.

Η ικανότητα μάθησης από εμπειρία είναι από τα κύρια χαρακτηριστικά της ανθρώπινης ευφυΐας. Η ανθρώπινη μνήμη έχει την ικανότητα να αποθηκεύει μεγάλη ποσότητα και ποικιλία γνώσης και να συσχετίζει πληροφορίες πολύ γρήγορα και χωρίς ιδιαίτερη προσπάθεια. Σε αντίθεση, ο υπολογιστής έχει την ικανότητα να αποθηκεύει τεράστιες ποσότητες πληροφοριών αλλά δυσκολεύεται να τις εκμεταλλευτεί. Μια εξήγηση για την ανωτερότητα της ανθρώπινης ικανότητας σε σχέση με αυτήν ενός υπολογιστικού συστήματος πιθανολογείται ότι είναι η έλλειψη κατάλληλου λογισμικού, γεγονός που εμποδίζει την αναπαραγωγή της ανθρώπινης ικανότητας με μηχανιστικές μεθόδους. Μια δεύτερη εξήγηση είναι το γεγονός ότι ο ανθρώπινος εγκέφαλος και οι υπολογιστές λειτουργούν εντελώς διαφορετικά. Ο άνθρωπος είναι πιο έξυπνος από τον υπολογιστή επειδή ο εγκέφαλος χρησιμοποιεί μια αρχιτεκτονική που είναι πολύ πιο κατάλληλη να αντιμετωπίσει τη φυσική επεξεργασία πληροφοριών. Ο εγκέφαλος είναι ένας ισχυρότατος υπολογιστής, που αποτελείται από έναν τεράστιο αριθμό (10^{10}) στοιχείων ή νευρώνων, καθένας από τους οποίους επικοινωνεί με χιλιάδες άλλους. Από κάθε νευρώνα ξεκινούν χιλιάδες ίνες, οι οποίες συναντούν ίνες από άλλους νευρώνες σε σημεία που αποκαλούνται συνάψεις.

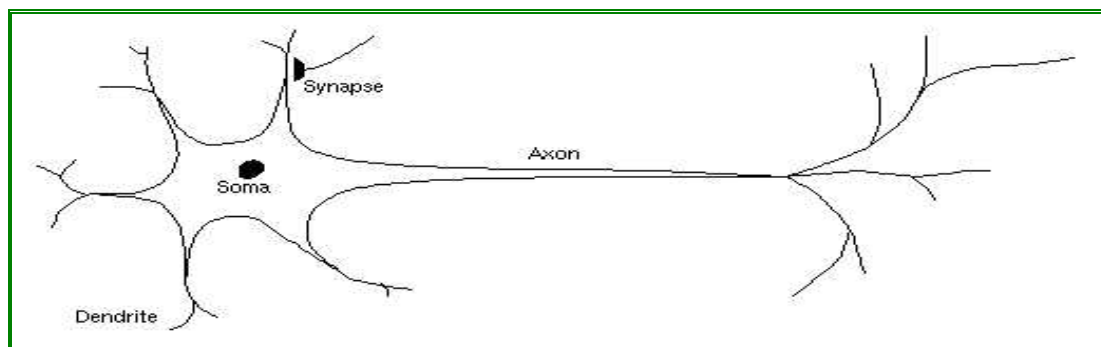
Ο ανθρώπινος εγκέφαλος χρησιμοποιεί δομή μαζικού παραλληλισμού (massively parallel) ή παράλληλης κατανεμημένης επεξεργασίας (parallel distributed). Είναι αξιοσημείωτο ότι η σύγχρονη πληροφορική δείχνει ιδιαίτερο ενδιαφέρον σε

υπολογιστές με κατανεμημένη αρχιτεκτονική και η εφαρμογή των Τεχνητών Νευρωνικών Δικτύων (ΤΝΔ) καλείται συνδεσμισμός (connectionism).

Οι νευρώνες ενός τεχνητού νευρωνικού δικτύου είναι διατεταγμένοι κατά τρόπο ώστε πολλοί από αυτούς να επεξεργάζονται τις πληροφορίες ταυτόχρονα. Κάθε νευρώνας στέλνει σήματα διέγερσης (activation) ή αποδιέγερσης (deactivation) σε άλλους νευρώνες και η κατάσταση ενεργοποίησης του εξαρτάται από τα σήματα που λαμβάνει από νευρώνες με τους οποίους συνδέεται. Άλλος όρος για τις συνδέσεις είναι ο βιολογικός όρος συνάψεις. Ο συνδυασμός μεγάλου αριθμού νευρώνων δίνει ένα πολύ ισχυρό επακόλουθο με μεγάλες δυνατότητες μάθησης και συμπερασμού [28].

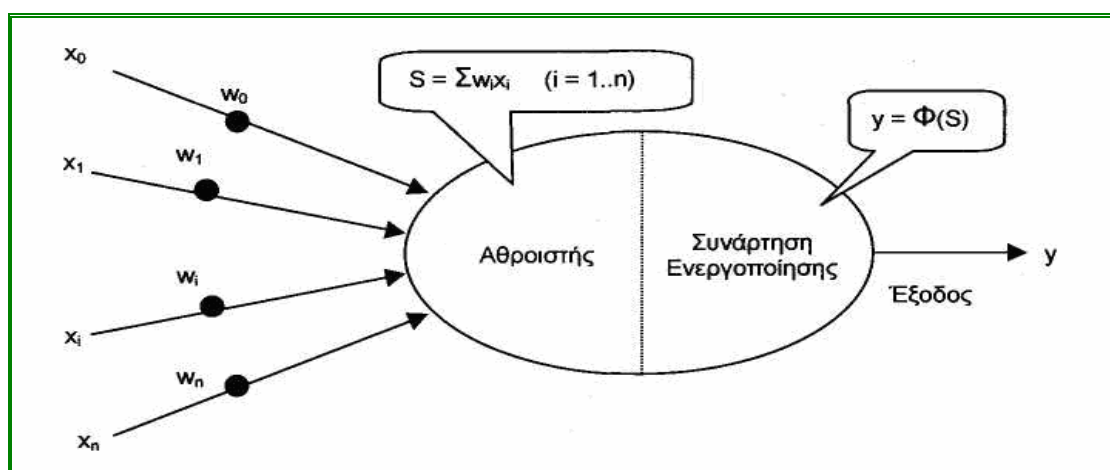
5.3.1 Νευρωνική δομή

Όπως ήδη αναφέραμε και είναι γνωστό από τη βιολογία, η δομική μονάδα του εγκεφάλου είναι ο νευρώνας. Ένας τυπικός βιολογικός νευρώνας αποτελείται, όπως φαίνεται και από το παρακάτω σχήμα, από το *σώμα*, που περιλαμβάνει τον *πυρήνα* του, τους *δενδρίτες*, μέσω των οποίων λαμβάνει σήματα από γειτονικούς νευρώνες (σημεία εισόδου) και τον *άξονα* που είναι η έξοδος του νευρώνα και το μέσο σύνδεσής του με τους άλλους νευρώνες. Σε κάθε δενδρίτη υπάρχει ένα απειροελάχιστο κενό που ονομάζεται *σύναψη*. Οι συνάψεις μέσω χημικών διαδικασιών επιταχύνουν ή επιβραδύνουν τη ροή ηλεκτρονίων προς το σώμα του νευρώνα. Η ικανότητα μάθησης και μνήμης που παρουσιάζει ο εγκέφαλος οφείλεται στην ικανότητά των συνάψεων να μεταβάλλουν την αγωγιμότητά τους. Τα ηλεκτρικά σήματα που εισέρχονται στο σώμα του νευρώνα μέσω των δενδριτών συνδυάζονται και αν το αποτέλεσμα ξεπερνά κάποια τιμή κατωφλίου το σήμα διαδίδεται με τη βοήθεια του άξονα και στους άλλους νευρώνες.



Σχήμα 5.1 Δομή βιολογικού νευρώνα

Τα τεχνητά νευρωνικά δίκτυα είναι εμπνευσμένα από το βιολογικό νευρωνικό σύστημα. Τα στοιχεία που αποτελούν ένα τεχνητό νευρωνικό δίκτυο είναι οι νευρώνες οι οποίοι συνδέονται μεταξύ τους μέσω βαρών. Τα βάρη αυτά μπορούν να προσαρμόζονται κατά τη διαδικασία της μάθησης. Μπορούμε να διαχωρίσουμε τα ΤΝΔ σε δύο βασικές κατηγορίες. Στην *πρώτη* έχουμε τα **στατικά νευρωνικά δίκτυα** τα οποία δεν περιέχουν στοιχεία με μνήμη αλλά μπορούν να έχουν ως εισόδους προηγούμενες τιμές των εισόδων και στη *δεύτερη* έχουμε τα **δυναμικά νευρωνικά δίκτυα** τα οποία διαθέτουν στοιχεία μνήμης και είναι κατάλληλα για την προτυποποίηση μη γραμμικών δυναμικών συστημάτων. Στο παρακάτω σχήμα βλέπουμε τη μορφή ενός τεχνητού νευρώνα:



Σχήμα 5.2 Δομή τεχνητού νευρώνα

Τα ΤΝΔ αποτελούνται από κυκλώματα που περιέχουν κόμβους που αλληλοσυνδέονται με διάφορες αρχιτεκτονικές. Οι συντελεστές διασύνδεσης, ή συναπτικά βάρη (synaptic weights) του δικτύου, είναι αρχικά άγνωστα και στόχος της μάθησης είναι η συστηματική εύρεσή τους ελαχιστοποιώντας κάποιο μέτρο του σφάλματος μεταξύ της επιθυμητής και της πραγματικής εξόδου του δικτύου.

Ένας στατικός νευρώνας χωρίς μνήμη αποτελείται από έναν σταθμισμένο αθροιστή, η έξοδος του οποίου είναι το σταθμισμένο άθροισμα των εισόδων του, δηλαδή:

$$\sigma = \sum_{i=1}^n w_i x_i + \beta = \sum_{i=1}^{n+1} w_i x_i, x_{n+1} = 1, \beta = w_{n+1} \quad (5.1)$$

όπου w και x είναι τα συναπτικά βάρη και οι είσοδοι του νευρώνα αντίστοιχα και b είναι η σταθερά της πόλωσης (*bias*). Θετική τιμή κάποιου βάρους σημαίνει διέγερση της εισόδου ενώ αντίθετα, μια αρνητική τιμή σημαίνει αποδιέγερση. Συνεπώς η απόλυτη τιμή του βάρους καθορίζει την ισχύ της σύνδεσης.

Το σταθμισμένο άθροισμα σ ενεργοποιεί ένα στοιχείο συμπίεσης ή παραμόρφωσης $f(\cdot)$ (*compression element*) που έχει μη γραμμική σχέση μεταφοράς. Μια πρωτόγονη μορφή του στοιχείου αυτού έχει χαρακτήρα λογικής μονάδας κατωφλίου (*threshold logic unit*) στην οποία η έξοδος του νευρώνα απότομα αλλάζει κατάσταση όταν το σήμα σ περάσει κάποιο κατώφλι που ορίζεται από την τιμή της πόλωσης b .

Έχουν προταθεί πολλές συναρτήσεις που μπορούν να χρησιμοποιηθούν για το στοιχείο παραμόρφωσης ή συμπίεσης, μερικές από αυτές είναι οι παρακάτω:

- Γραμμικός νευρώνας (*linear neuron*) με τη σχέση:

$$f(\sigma) = \sigma$$

- Δυαδικός νευρώνας (*binary neuron*) με τη σχέση κατωφλίου:

$$\begin{aligned} f(\sigma) &= 1 \quad \alpha\nu \sigma > 0 \\ f(\sigma) &= 0 \quad \alpha\nu \sigma \leq 0 \end{aligned}$$

- Σιγμοειδής νευρώνας (*sigmoidal*) με τη λογιστική σχέση:

$$f(\sigma) = \frac{1}{1 + e^{-\sigma}} \in [0, 1]$$

- Νευρώνας υπερβολικής εφαπτομένης (*hyperbolic tangent*) με τη σχέση:

$$f(\sigma) = \frac{1 - e^{-\sigma}}{1 + e^{-\sigma}} \in [-1, 1]$$

- Perceptron με τη σχέση:

$$f(\sigma) = \text{sgn}(\sigma)$$

Σε αντίθεση με τους στατικούς νευρώνες που αναφέραμε παραπάνω, ένας δυναμικός νευρώνας συμπεριλαμβάνει και μνήμη. Στην περίπτωση αυτή, η είσοδος του στοιχείου παραμόρφωσης εξαρτάται όχι μόνο από το σταθμισμένο άθροισμα αλλά και από την προηγούμενη τιμή του, δηλαδή έχει επαναληπτική μορφή:

$$\sigma(k) = \sigma(k-1) + \sum_{i=1}^{n+1} w_i x_i(k) \quad (5.2)$$

όπου k είναι ο δείκτης του χρόνου δειγματοληψίας. Είναι ευνόητο ότι εδώ απαιτείται αποθήκευση της προηγούμενης τιμής της εισόδου, δηλαδή $\sigma(k-1)$. Οι δυναμικοί νευρώνες είναι ιδιαίτερα χρήσιμοι για την ταυτοποίηση δυναμικών διαδικασιών και την προσομοίωση δυναμικών συστημάτων.

Τα τεχνητά νευρωνικά δίκτυα αναπτύχθηκαν ιδιαίτερα κατά τη δεκαετία του 80 και βρίσκουν σήμερα εφαρμογή σε πάρα πολλά προβλήματα. Μερικά από αυτά παρουσιάζονται παρακάτω.

- *Κατηγοριοποίηση προτύπων.* Το έργο της κατηγοριοποίησης έχει να κάνει με την κατάταξη σε κάποια κατηγορία ενός διανύσματος εισόδου που περιλαμβάνει δείγματα ενός πρωτογενούς ή επεξεργασμένου σήματος.
- *Διαμόρφωση συναθροίσεων (clustering).* Η διαδικασία αυτή μοιάζει με την προηγούμενη με τη μόνη διαφορά ότι στη διαμόρφωση συναθροίσεων δεν είναι εκ των προτέρων γνωστός ο αριθμός των κατηγοριών
- *Προσέγγιση συναρτήσεων.* Με δεδομένα ζεύγη εισόδων-εξόδων που είναι δείγματα από μια άγνωστη συνάρτηση $y = f(x)$ ένα τεχνητό νευρωνικό δίκτυο μπορεί να εκπαιδευτεί ώστε να προσεγγίσει αυτή τη συνάρτηση
- *Πρόβλεψη Χρονοσειρών.* Μέσω των τεχνητών νευρωνικών δικτύων μπορούν να προβλεφθούν οι μελλοντικές τιμές ενός σήματος, δεδομένων των τιμών του σήματος σε χρονικές τιμές του παρελθόντος.
- *Βελτιστοποίηση.* Τα τεχνητά νευρωνικά δίκτυα εφαρμόζονται σε προβλήματα βελτιστοποίησης.

- *Συσχετιστική Μνήμη.* Μέσω των τεχνητών νευρωνικών δικτύων μπορούν υλοποιηθούν συστήματα συσχετιστικής μνήμης, στα οποία η ανάκληση υλοποιείται μέσω παρουσίασης του περιεχόμενου της μνήμης
- *Αυτόματος έλεγχος.* Τα τεχνητά νευρωνικά δίκτυα εφαρμόζονται σε ευρεία κλίμακα σε συστήματα αυτομάτου ελέγχου, όπως π.χ. έλεγχος κίνησης μηχανών , έλεγχος ρομποτικών μελών κτλ

Τα βασικά πλεονεκτήματα των ΤΝΔ στην πρόβλεψη έναντι των κλασσικών στατιστικών τεχνικών που αναφέραμε παραπάνω είναι ότι μπορούν να αναγνωρίσουν μη γραμμικές διαχωριστικές επιφάνειες ανάμεσα στις εισόδους και μπορούν ακόμα να λειτουργήσουν ικανοποιητικά με μη πλήρη δεδομένα. Επιπλέον τα νευρωνικά δίκτυα δεν προγραμματίζονται αλλά μαθαίνουν. Έτσι δε χρειάζεται να έχουμε κατανοήσει πλήρως ένα πρόβλημα για να το επιλύσουμε μέσω των νευρωνικών δικτύων. Βέβαια πρέπει να σημειώσουμε ότι τα τεχνητά νευρωνικά δίκτυα δεν μπορούν να δώσουν απάντηση στο πως έφτασαν σε ένα αποτέλεσμα, δεν είναι δηλαδή κατάλληλα για εξαγωγή συμπερασμάτων (extrapolation), αλλά μόνο για παρεμβολή (interpolation) [28].

5.3.2 Τοπολογίες πολυστρωματικών δικτύων

Τα ΤΝΔ είναι συμπλέγματα νευρώνων που έχουν συναρτήσεις μεταφοράς, τις συναρτήσεις που αναφέραμε στην παράγραφο 5.3.1, και είναι δομημένα ιεραρχικά κατά στρώματα. Το χαμηλότερο ή πρώτο στρώμα περιέχει τους κόμβους της εισόδου και το υψηλότερο στρώμα περιέχει τους κόμβους που παράγουν τα αποτελέσματα (ή συμπεράσματα).

Οι νευρώνες ενός πολυστρωματικού δικτύου διατάσσονται σε στρώματα, στιβάδες ή επίπεδα (layers). Στα συνήθη πρότυπα ΤΝΔ πρόσθιας τροφοδότησης (feedforward neural networks) οι έξοδοι κάθε στρώματος συνδέονται με όλους τους νευρώνες του επόμενου στρώματος και η πληροφορία ρέει από τις εισόδους προς τις εξόδους του δικτύου. Τα ενδιάμεσα στρώματα ονομάζονται κρυφά (hidden layers) και δεν επικοινωνούν άμεσα με το περιβάλλον. Αν και θεωρητικά ένα ΤΝΔ μπορεί να έχει πολλά στρώματα, έχει αποδειχτεί ότι οποιαδήποτε σχέση μεταξύ εισόδων και εξόδων μπορεί να υλοποιηθεί με ένα μόνο κρυφό στρώμα.

Ανάλογα με τον τρόπο διασύνδεσης των επιπέδων και τρόπο που επικοινωνούν οι κόμβοι μεταξύ τους, προκύπτουν διάφορες αρχιτεκτονικές ΤΝΔ. Μια κατηγοριοποίηση είναι η εξής:

- *Δίκτυα τύπου Hopfield* όπου οι κόμβοι ενός επιπέδου επιδρούν με τους κόμβους του ιδίου, του αμέσως επόμενου ή και προηγούμενου επιπέδου.
- *Δίκτυα πρόσθιας τροφοδότησης (feedforward networks)*, στα οποία η πληροφορία μεταδίδεται από τα χαμηλότερα στα υψηλότερα στρώματα.
- *Δίκτυα με ανατροφοδότηση (feedback networks)*, στα οποία υπάρχει τουλάχιστον ένας κλειστός βρόχος.
- *Συμμετρικά αυτο-συσχετιστικά δίκτυα (symmetric auto-associative networks)* όπου τόσο οι συνδέσεις όσο και τα συναπτικά βάρη τους είναι συμμετρικά.

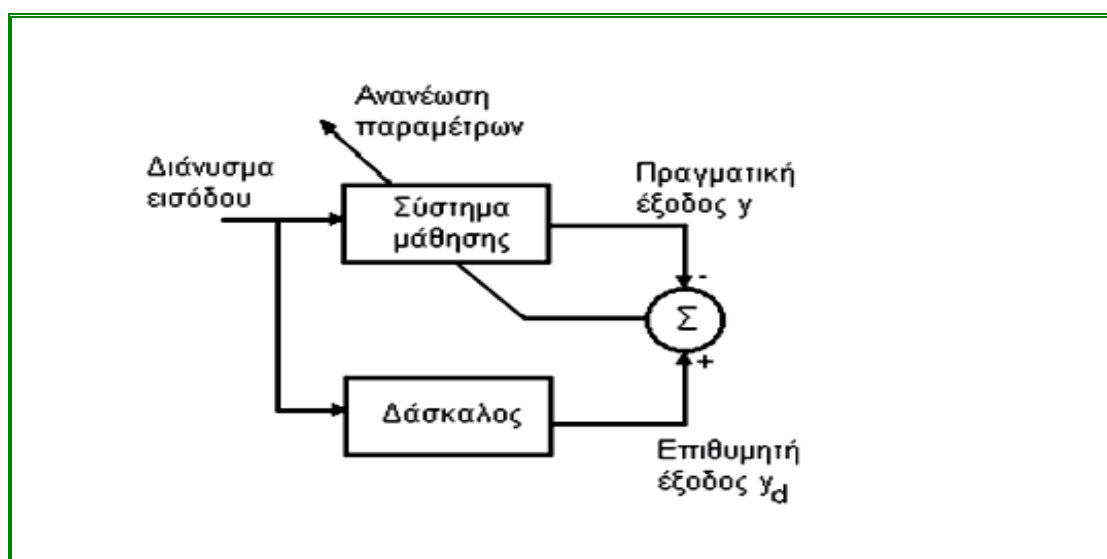
5.3.3 Διαδικασία μάθησης

Η ιδιότητα της προσαρμογής των ΝΔ σε μεταβαλλόμενους χώρους προβλημάτων σχετίζεται με την ικανότητα μάθησης τους. Η μάθηση είναι μια θεμελιακή ικανότητα των νευρωνικών δικτύων η οποία τους παρέχει την ικανότητα να μαθαίνουν από το περιβάλλον τους και να βελτιώνουν τη συμπεριφορά τους με το πέρασμα του χρόνου. Ειδικότερα στα ΝΔ η μάθηση αναφέρεται στην διεργασία επίτευξης μιας επιθυμητής συμπεριφοράς μέσω ενημέρωσης των τιμών των συναπτικών βαρών. Έτσι ένα ΝΔ μαθαίνει για το περιβάλλον του μέσω μιας επαναληπτικής διαδικασίας ανανέωσης των συναπτικών βαρών και κατωφλίων. Σε γενικές γραμμές μπορεί να λεχθεί ότι αλγόριθμος μάθησης είναι κάθε προκαθορισμένο σύνολο καλά ορισμένων κανόνων επίλυσης του προβλήματος εκπαίδευσης του νευρωνικού δικτύου. Κάθε αλγόριθμος μάθησης προσφέρει έναν άλλο τρόπο προσαρμογής των συναπτικών βαρών. Γενικά υπάρχουν πολλοί αλγόριθμοι μάθησης στα ΝΔ, καθένας από τους οποίους παρουσιάζει πλεονεκτήματα αλλά και μειονεκτήματα. Τα προβλήματα μάθησης τα οποία επιλύουν οι αντίστοιχοι αλγόριθμοι εξαρτώνται και από το περιβάλλον στο οποίο εργάζεται κάθε ΝΔ. Έτσι διαφορετικά μοντέλα του περιβάλλοντος οδηγούν σε διαφορετικά μοντέλα εκπαίδευσης.

Επιβλεπόμενη Μάθηση: Σχηματικά η δομή της επιβλεπόμενης μάθησης φαίνεται στο σχήμα που ακολουθεί. Παρατηρείται ότι στην επιβλεπόμενη μάθηση συνυπάρχουν δυο βασικές συνιστώσες, το σύστημα εκμάθησης και ο δάσκαλος. Το κύριο χαρακτηριστικό της επιβλεπόμενης μάθησης είναι η ύπαρξη του εξωτερικού δασκάλου ο οποίος με βάση την γνώση που είναι αποθηκευμένη σε αυτόν είναι σε θέση να διδάξει στο σύστημα μάθησης τις επιθυμητές εξόδους για το σύνολο εισόδων εκπαίδευσης. Όταν ο δάσκαλος και το ΝΔ λαμβάνουν ένα διάνυσμα εισόδου εκπαίδευσης, ο δάσκαλος δίνει στο νευρωνικό δίκτυο μια επιθυμητή έξοδο η οποία αναπαριστά την βέλτιστη δράση που πρέπει να εμφανίζει το ΝΔ. Οι παράμετροι του ΝΔ ανανεώνονται βάσει του διανύσματος εκπαίδευσης και του διανύσματος σφάλματος (δηλαδή της διαφοράς πραγματικής και επιθυμητής απόκρισης του δικτύου). Η συνάρτηση κόστους ορίζεται ως:

$$J(w) = \frac{1}{2} E[(y(t) - y_d(t))^2]$$

όπου w είναι το διάνυσμα των προς επιλογή ελεύθερων παραμέτρων του συστήματος μάθησης (δηλαδή του ΝΔ), η ανανέωση των παραμέτρων παίρνει την μορφή του αλγορίθμου διόρθωσης σφάλματος. Η σταδιακή ανανέωση των παραμέτρων κάνει τελικά το ΝΔ μάθησης να μιμείται την δεδομένη επιθυμητή συμπεριφορά. Δύο περιπτώσεις αλγορίθμων επιβλεπόμενης μάθησης είναι ο αλγόριθμος ελαχίστου μέσου τετραγώνου και η γενίκευσή του που είναι γνωστή ως αλγόριθμος ανάστροφης διάδοσης.



Σχήμα 5.20 Δομή Επιβλεπόμενης Μάθησης

Ενισχυτική Μάθηση: Σε αυτή την περίπτωση το ΝΔ τροφοδοτείται και πάλι με δειγματικά πρότυπα εισόδου αλλά δεν τροφοδοτείται με τις επιθυμητές αποκρίσεις σε αυτές τις εισόδους. Σε αυτή την περίπτωση χρησιμοποιείται ένα συνολικό μέτρο της επάρκειας της προκύπτουσας απόκρισης το οποίο μπορεί να οδηγήσει το νευρωνικό δίκτυο στην επιθυμητή συμπεριφορά. Το μέτρο αυτό είναι γνωστό ως ενισχυτικό σήμα (reinforcement signal) και ανατροφοδοτείται στο ΝΔ έτσι ώστε να επιβραβεύσει τις ορθές συμπεριφορές και να τιμωρήσει τις λανθασμένες. Η ενισχυτική μάθηση διακρίνεται σε *συσχετιστική* και *μη συσχετιστική* ενισχυτική μάθηση. Στην πρώτη περίπτωση το περιβάλλον τροφοδοτεί πέρα από το ενισχυτικό σήμα και άλλες μορφές πληροφορίας από τις οποίες το ΝΔ πρέπει να αποτυπώσει μια απεικόνιση συσχέτισης αιτίου-αποτελέσματος. Στην δεύτερη περίπτωση η μόνη πληροφορία που δίδεται από το περιβάλλον είναι το ενισχυτικό σήμα και ο προορισμός του ΝΔ είναι να επιλέξει μια μοναδική βέλτιστη ενέργεια. Επιγραμματικά η ενισχυτική μάθηση λειτουργεί ως εξής:

- Το ΝΔ υπολογίζει τις εξόδους που παράγονται από την τρέχουσα είσοδο με τις παρούσες τιμές των βαρών.
- Το σύστημα αξιολογεί την έξοδο και το ενισχυτικό σήμα τροφοδοτείται στο δίκτυο.
- Τα βάρη ανανεώνονται με βάση το ενισχυτικό σήμα, αυξάνοντας τις τιμές των βαρών που συνέβαλλαν σε ορθή συμπεριφορά ή μειώνοντας τις τιμές των βαρών που προκάλεσαν αποκλίνουσα συμπεριφορά.
- Το νευρωνικό δίκτυο ψάχνει να βρει ένα σύνολο βαρών τα οποία να τείνουν να αποφύγουν αρνητικά ενισχυτικά σήματα.

Η βασική διαφορά ανάμεσα στην ενισχυτική και την επιβλεπόμενη μάθηση είναι ότι στην ενισχυτική μάθηση το σύστημα μάθησης βελτιώνεται χρησιμοποιώντας ένα κριτήριο συμπεριφοράς οι τιμές του οποίου δίνονται από το περιβάλλον, ενώ στην επιβλεπόμενη μάθηση το κριτήριο συμπεριφοράς (συνάρτηση σφάλματος) καθορίζεται εσωτερικά με βάση τις επιθυμητές αποκρίσεις.

Μη Επιβλεπόμενη Μάθηση: Σε αυτό τον τύπο μάθησης που καλείται αυτό-οργανούμενη μάθηση δεν χρησιμοποιείται εξωτερικός δάσκαλος ούτε μια βάση γνώσης για να επιβλέπει την εκπαίδευση του ΝΔ, το μόνο στοιχείο που μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την υλοποίηση της εκπαίδευσης είναι τα διανύσματα εισόδου. Ένα σύστημα μη επιβλεπόμενης μάθησης εξελίσσεται με τέτοιο τρόπο ώστε να

εξάγει χαρακτηριστικά ή κανονικότητες από τα παρουσιαζόμενα πρότυπα, χωρίς ωστόσο να έχει την πληροφορία για το ποιες έξοδοι ή ποιες κατηγορίες συσχετίζονται με τα χαρακτηριστικά εισόδου. Με άλλα λόγια το σύστημα μάθησης εντοπίζει ή κατηγοριοποιεί τα διανύσματα εισόδου χωρίς καμία εκ των προτέρων πληροφόρηση από το περιβάλλον. Εξ' αιτίας αυτών η μη επιβλεπόμενη μάθηση συχνά χρησιμοποιείται σε προβλήματα ομαδοποίησης, εξαγωγής εσωτερικών χαρακτηριστικών και ανίχνευσης συμμετριών.

Τα νευρωνικά δίκτυα μη επιβλεπόμενης μάθησης εκπαιδεύονται έτσι ώστε να αποκρίνονται σε διαφορετικά διανύσματα εισόδου με διαφορετικά τμήματα του δικτύου. Το ΝΔ εκπαιδεύεται με τέτοιο τρόπο ώστε να αυξάνει την πυροδότηση του ως απόκριση σε συχνά εμφανιζόμενες εισόδους, γι' αυτό και συχνά ονομάζεται εκτιμητής πιθανοτήτων (probability estimator). Κατά αυτό τον τρόπο το νευρωνικό δίκτυο αναπτύσσει συγκεκριμένες εσωτερικές αναπαραστάσεις οι οποίες κωδικοποιούν τα διάφορα διανύσματα εισόδου [26].

5.3.4 Αλγόριθμοι μάθησης ΤΝΔ

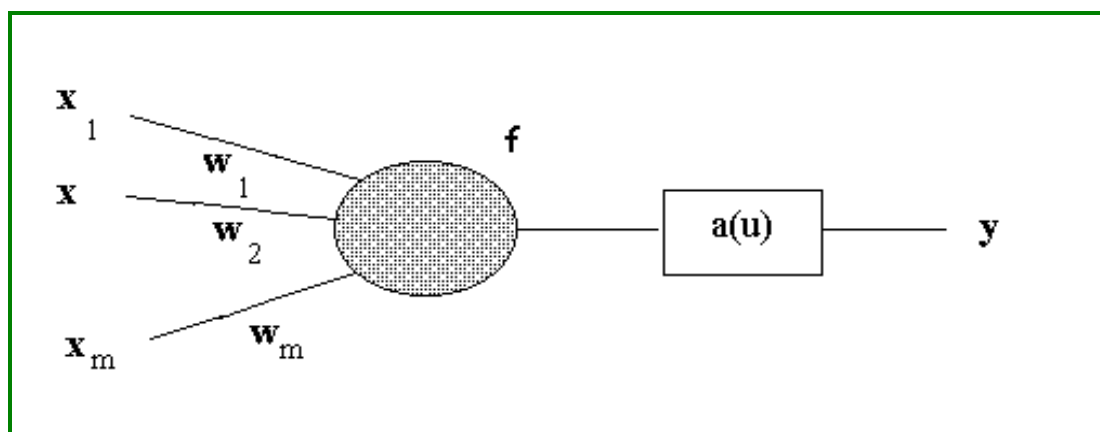
Στόχος των αλγορίθμων μάθησης είναι η συστηματική και ταχεία εύρεση των συναπτικών βαρών του δικτύου ώστε να ελαχιστοποιείται κάποιο μέτρο του σφάλματος μεταξύ των πραγματικών και των επιθυμητών εξόδων του δικτύου. Η δυνατότητα εφαρμογής των διαφόρων αλγορίθμων μάθησης που έχουν αναπτυχθεί, εξαρτάται από τον τύπο του ΤΝΔ και από την κατηγοριοποίηση των διαδικασιών μάθησης, όπως έγινε στην προηγούμενη παράγραφο.

Όπως αναφέραμε, για τη μάθηση χωρίς εποπτεία, στο δίκτυο δεν παρέχεται καμία πληροφορία σχετικά με την επιθυμητή έξοδο που αντιστοιχεί σε κάθε είσοδο. Αντίθετα, το δίκτυο αυτο-οργανώνεται και μαθαίνει να αποκρίνεται ανάλογα με τα χαρακτηριστικά της εισόδου. Παραδείγματα αλγορίθμων μάθησης χωρίς εποπτεία είναι ο αλγόριθμος του Hebb, η ανταγωνιστική μάθηση (competitive learning), οι αυτο-οργανούμενοι χάρτες (self organizing maps) του Kohonen και η θεωρία του προσαρμοστικού συντονισμού (adaptive resonance theory) του Grossberg. Πολλές τοπολογίες ΤΝΔ, όπως τα δίκτυα Hopfield, Hamming και Boltzman επίσης χρησιμοποιούν παρόμοια μέθοδο μάθησης. Γενικά με την ικανότητά τους να υλοποιούν αυθαίρετες σχέσεις εισόδου-εξόδου, τα πρότυπα αυτά χρησιμοποιούνται ως συνδετικές μνήμες (associative memories) ή ταξινομητές προτύπων (classifiers).

Στην πράξη, στις περισσότερες εφαρμογές ΤΝΔ χρησιμοποιείται μάθηση υπό επίβλεψη (supervised learning), για την οποία υπάρχουν αρκετοί αλγόριθμοι. Στον αλγόριθμο που βασίζεται στον κανόνα Δέλτα (Delta rule learning), η διαφορά μεταξύ πραγματικής και επιθυμητής εξόδου ελαχιστοποιείται μέσω μιας διαδικασίας ελαχίστων τετραγώνων. Στον αλγόριθμο ανάστροφης μετάδοσης λάθους (back propagation) η μεταβολή των βαρών βασίζεται στον υπολογισμό της συνεισφοράς κάθε βάρους στο συνολικό σφάλμα. Στην ανταγωνιστική μάθηση (competitive learning) οι τεχνητοί νευρώνες συναγωνίζονται, κατά κάποιο τρόπο, μεταξύ τους και μόνο αυτός με τη μεγαλύτερη απόκριση σε δοθείσα είσοδο τροποποιεί τα βάρη του. Τέλος, στην τυχαία μάθηση (random learning), οι μεταβολές στα βάρη εισάγονται τυχαία και ανάλογα με το αν η έξοδος βελτιώνεται ή όχι με βάση κάποια προκαθορισμένα από το χρήστη κριτήρια, οι μεταβολές αυτές υιοθετούνται ή απορρίπτονται [28].

5.4 Νευρό-Ασαφή συστήματα

Στην ενότητα αυτή εξετάζουμε τα νευρο-ασαφή συστήματα. Η δομική μονάδα των συστημάτων αυτών είναι οι ασαφείς νευρώνες. Οι ασαφείς νευρώνες έχουν τη μορφή που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:



Σχήμα 5.22 Ασαφείς Νευρώνες.

Όπου :

x_1, x_2, \dots, x_m οι είσοδοι του νευρώνα

w_1, w_2, \dots, w_m	τα βάρη των συνάψεων
f	η συνάρτηση συμμετοχής του νευρώνα
a	η συνάρτηση ενεργοποίηση του νευρώνα
y	η έξοδος του νευρώνα

Οι ασαφείς νευρώνες διακρίνονται σε νευρώνες συμμετοχής και σε λειτουργικούς νευρώνες. Παρακάτω γίνεται αναφορά στα χαρακτηριστικά κάθε κατηγορίας ασαφών νευρώνων [29].

5.4.1 Ασαφείς νευρώνες

Νευρώνες Συμμετοχής

Όπως αναφέραμε και σε προηγούμενη παράγραφο, οι συνηθέστερες μορφές συναρτήσεων συμμετοχής είναι η τριγωνική, η γκαουσιανή, η τραπεζοειδής, η κανονική κοκ. Οι παραπάνω συναρτήσεις συμμετοχής μπορούν να υλοποιηθούν με τη χρήση ενός νευρώνα. Αυτό μπορεί να γίνει, θεωρώντας ότι ο νευρώνας δέχεται ως είσοδο το x και δίνει έξοδο $A(x)$ απαιτώντας η συνάρτηση συμμετοχής του να έχει τη μορφή A . Αν δηλαδή υποθέσουμε ότι η συνάρτηση συμμετοχής είναι η κανονική, τότε για να υλοποιηθεί πρέπει η συνάρτηση ενεργοποίησης να είναι:

$$a(u) = \exp\left(-\frac{(u-m)^2}{\sigma^2}\right)$$

Όπου m κέντρο της συνάρτησης συμμετοχής και σ το εύρος της.

Λειτουργικοί Νευρώνες

Με τον ίδιο τρόπο μπορούν να υλοποιηθούν οι βασικές πράξεις των ασαφών συνόλων. Οι πράξεις αυτές στηρίζονται σε λειτουργίες όπως η τ - νόρμα η σ -νόρμα, το ασαφές συμπλήρωμα κλπ. Οι παραπάνω λειτουργίες μπορούν να αντικαταστήσουν τη συνάρτηση ενεργοποίησης του νευρώνα αν θεωρήσουμε ότι οι είσοδοι δεν αθροίζονται πολλαπλασιασμένοι με βάρη όπως στους κλασσικούς νευρώνες. Για να μπορούμε όμως να εφαρμόσουμε τους αλγόριθμους μάθησης (π.χ. τον backpropagation αλγόριθμος αντίστροφης διάδοσης) θα πρέπει οι λειτουργίες να είναι παραγωγίσιμες.

Για την υλοποίηση των ασαφών λειτουργιών μπορούμε να επεκτείνουμε την έννοια της συνάρτησης μεταφοράς του νευρώνα. Στην περίπτωση αυτή ο νευρώνας δεν υλοποιεί το αναλυτικό γινόμενο της εισόδου με το διάνυσμα των βαρών αλλά την πράξη της συγκεκριμένης ασαφούς λειτουργίας θεωρώντας ότι όλα τα βάρη είναι 1, ως συνάρτηση συμμετοχής λαμβάνεται η :

$$a(u) = \begin{cases} 1, u > 1 \\ u, 0 \leq u \leq 1 \\ 0, u < 0 \end{cases}$$

Συνθετικοί Νευρώνες

Σε προηγούμενη παράγραφο παρουσιάσαμε τη σύνθεση ασαφών σχέσεων. Η πράξη της σύνθεσης αποτελεί μια γενίκευση της πράξης του αναλυτικού γινομένου των διανυσμάτων και υλοποιείται από τη συνάρτηση μεταφοράς f των νευρώνων. Η μορφή του νευρώνα είναι η ίδια και ορίζεται από τις εξισώσεις:

$$f = \underset{i \in N_m}{union} t(x_t, w_t)$$

$$y = a(u)$$

όπου *union* είναι μια σ-νόρμα και *t* είναι μια τ-νόρμα. Ως συνάρτηση ενεργοποίησης θεωρείται η συνάρτηση αναρρίχησης. Παρατηρούμε ότι ο συνθετικός νευρώνας είναι μια γενίκευση του κλασσικού νευρώνα, αφού η πράξη της φραγμένης άθροισης, η οποία εξασφαλίζεται από τη συνάρτηση ενεργοποίησης, είναι μια ειδική περίπτωση της φραγμένης ένωσης, ενώ το γινόμενο είναι μια ειδική περίπτωση της ασαφούς τομής [29].

5.4.2 Προσαρμοστικά δίκτυα (Adaptive Networks)

Προσαρμοστικό δίκτυο ονομάζεται το δίκτυο που αποτελείται από έναν αριθμό κόμβων, συνδεδεμένων μέσω κατευθυντικών συνδέσμων. Κάθε κόμβος αναπαριστά μια μονάδα επεξεργασίας. Οι σύνδεσμοι των κόμβων προσδιορίζουν την αιτιολογική σχέση (causal relationship) μεταξύ των συνδεδεμένων κόμβων. Προσαρμοστικός

είναι ο κόμβος, όλος ή μέρος του, που οι έξοδοί του εξαρτώνται από προσαρμοζόμενες παραμέτρους που ανήκουν σε αυτόν. Οι κανόνες εκπαίδευσης προσδιορίζουν τον τρόπο με τον οποίο αυτές οι παράμετροι θα πρέπει να αλλάζουν ώστε να ελαχιστοποιείται το προκαθορισμένο μέτρο σφάλματος (error measure).

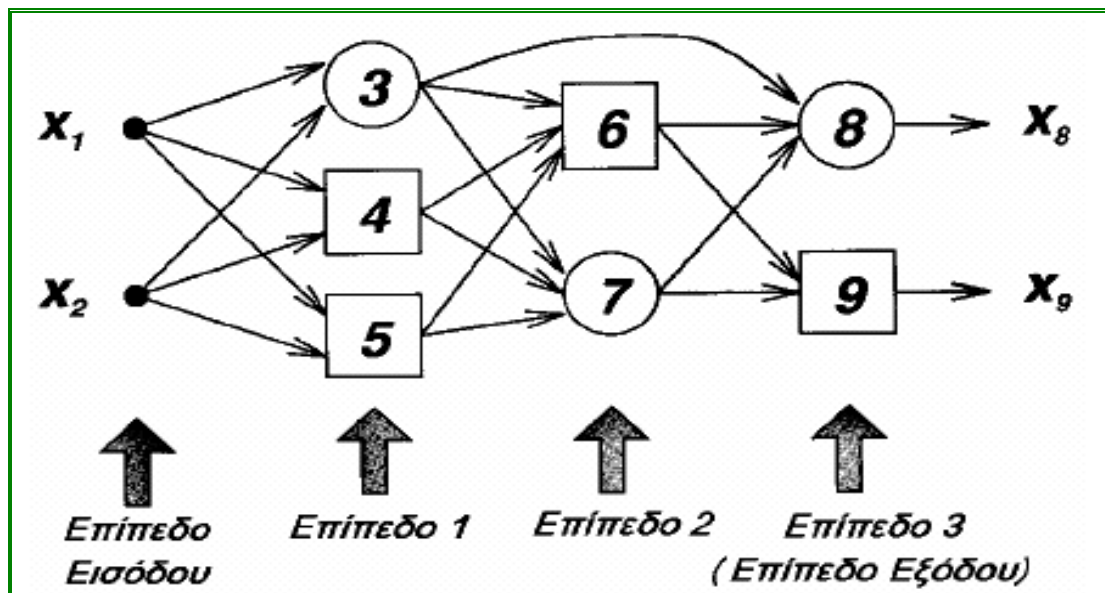
Τα προσαρμοστικά δίκτυα χρησιμοποιούνται για ταυτοποίηση συστήματος. Σε κάθε περίπτωση στόχος μας είναι να βρούμε μια κατάλληλη αρχιτεκτονική για το δίκτυο και να θέσουμε ένα σύνολο παραμέτρων που μπορούν να μοντελοποιήσουν καλύτερα ένα σύστημα-στόχο. Το σύστημα αυτό περιγράφεται από ένα σύνολο ζευγών δεδομένων εισόδου-εξόδου.

Ο βασικός κανόνας για την εύρεση ενός προσαρμοστικού δικτύου είναι η απότομη φθίνουσα μέθοδος, στην οποία το βαθμωτό διάνυσμα προκύπτει από επιτυχείς επικλήσεις του κανόνα της αλυσίδας. Αυτή η μέθοδος χρησιμοποιείται και για την εύρεση του βαθμωτού διανύσματος σε ένα νευρωνικό δίκτυο πολλών επιπέδων. Όπως αναφέραμε και σε προηγούμενη παράγραφο, η μέθοδος ονομάζεται κανόνας οπισθοδρόμησης διάδοσης (back propagation learning rule).

Σημειώνουμε πως για να κάνουμε ένα ασαφές σύστημα, προσαρμοστικό, θα πρέπει να γνωρίζουμε τις παραγώγους της Συνάρτησης Συμμετοχής ως προς το όρισμα εισόδου και τις παραμέτρους. Αυτές οι πληροφορίες από τις παραγώγους παίζουν σημαντικό ρόλο στη μάθηση και την προσαρμογή ενός ασαφούς συστήματος [29].

5.4.3 Αρχιτεκτονική προσαρμοστικών δικτύων

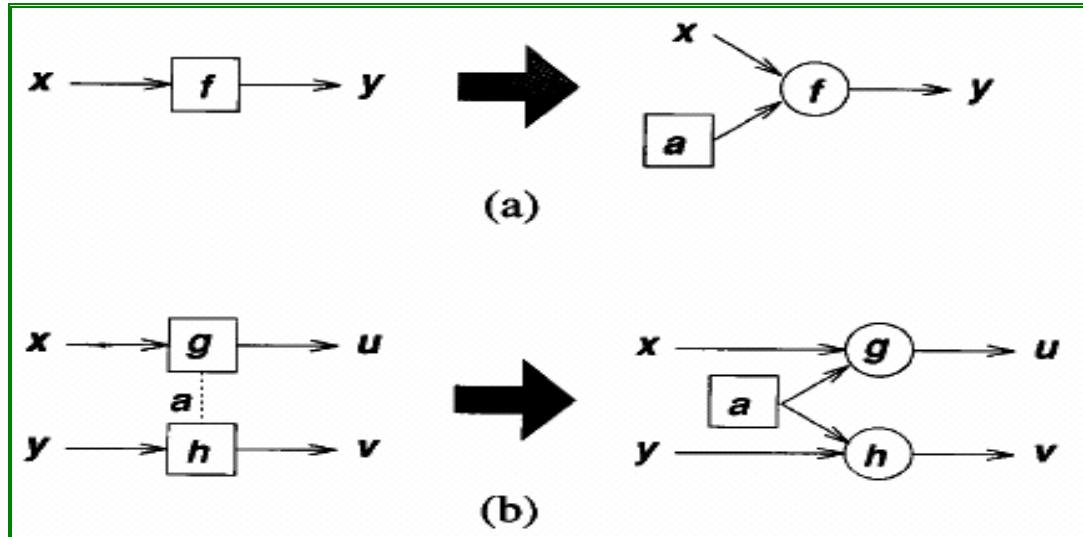
Όπως φανερώνει και η ονομασία, ένα προσαρμοστικό δίκτυο παρουσιάζει τέτοια δομή, ώστε η συνολική συμπεριφορά εισόδου-εξόδου να διαμορφώνεται από ένα σύνολο τροποποιήσιμων παραμέτρων. Πιο συγκεκριμένα ένα προσαρμοστικό δίκτυο αποτελείται από ένα σύνολο κόμβων συνδεδεμένων με προσανατολισμένους συνδέσμους. Κάθε κόμβος εκτελεί μια συγκεκριμένη λειτουργία στα εισερχόμενα σήματα, για να παράξει μια μονήρη έξοδο. Επιπλέον κάθε σύνδεσμος καθορίζει την κατεύθυνση ροής του σήματος μεταξύ των κόμβων. Συνήθως η συνάρτηση κόμβου είναι μια παραμετρική συνάρτηση με τροποποιήσιμες παραμέτρους. Αλλάζοντας τις παραμέτρους, μπορούμε να αλλάξουμε την λειτουργία κόμβου καθώς και τη συνολική συμπεριφορά του δικτύου.



Σχήμα 5.23 *feed-forward* προσαρμοστικό δίκτυο με επίπεδα.

Οι σύνδεσμοι σε ένα προσαρμοστικό δίκτυο χρησιμοποιούνται μόνο για να προσδιορίσουν την κατεύθυνση του σήματος εξόδου. Γενικά δεν υπάρχουν βάρη ή παράμετροι σχετιζόμενοι με συνδέσμους. Στο σχήμα 5.23 παρουσιάζεται ένα προσαρμοστικό δίκτυο με δύο εισόδους και δύο εξόδους.

Οι παράμετροι ενός προσαρμοστικού δικτύου είναι κατανομημένοι στους κόμβους, έτσι κάθε κόμβος περιέχει ένα τοπικό σύνολο των παραμέτρων. Η ένωση αυτών των τοπικών συνόλων είναι το ολικό σύνολο παραμέτρων του δικτύου. Αν το σύνολο παραμέτρων ενός κόμβου δεν είναι κενό, τότε η λειτουργία του κόμβου εξαρτάται από τις τιμές των παραμέτρων. Στα σχήματα, αναπαριστούμε τον *προσαρμοστικό κόμβο* αυτού του είδους με ένα τετράγωνο. Αντιθέτως, αν ο κόμβος περιέχει κενό σύνολο παραμέτρων, τότε η λειτουργία του είναι καθορισμένη. Αναπαριστούμε τον *προκαθορισμένο κόμβο* με ένα κύκλο. Κάθε προσαρμοστικός κόμβος μπορεί να διασπαστεί σε ένα προκαθορισμένο κόμβο και ένα ή περισσότερους κόμβους παραμέτρων.



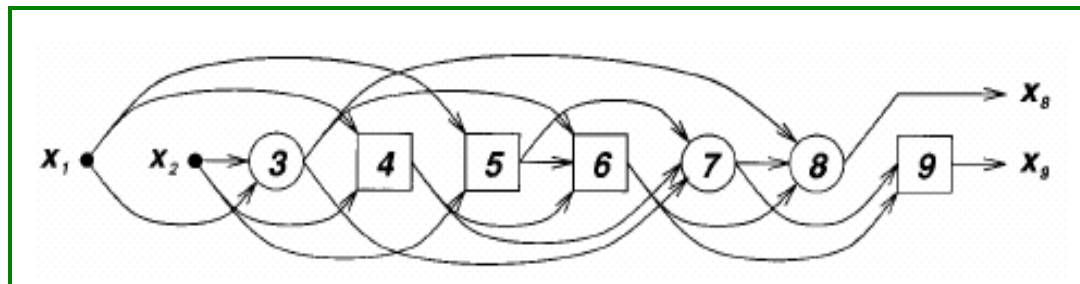
Σχήμα 5.24 (a) ένας μονός κόμβος (b) ένα πρόβλημα έχει κοινές παραμέτρους

5.4.4 Καταμερισμός παραμέτρων στο δίκτυο

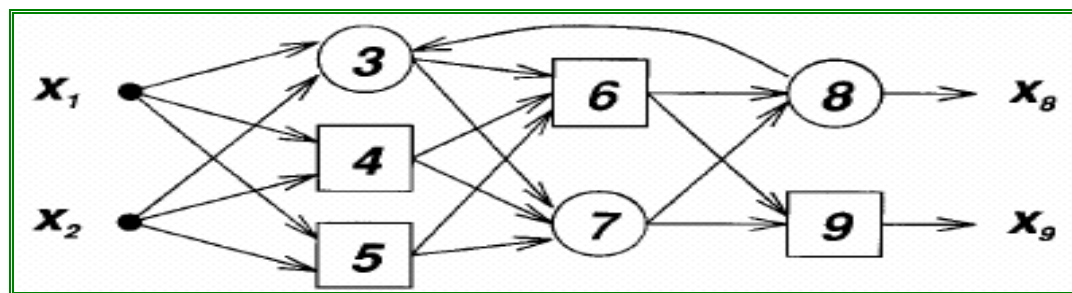
Στο σχήμα 5.24(a) παρουσιάζεται ένα προσαρμοστικό δίκτυο με έναν μόνο κόμβο, το οποίο μπορεί να αναπαρασταθεί σαν $y=f(x,a)$ όπου x , y είναι η είσοδος και έξοδος αντίστοιχα και a η παράμετρος του κόμβου. Μια ισοδύναμη απεικόνιση είναι να μεταφέρουμε την παράμετρο έξω από τον κόμβο και να την τοποθετήσουμε σε έναν *κόμβο παράμετρο*. Αυτός ο κόμβος είναι μια ειδική περίπτωση ενός προσαρμοστικού κόμβου στον οποίο δεν υπάρχουν είσοδοι και η έξοδος είναι η ίδια η παράμετρος. Ο κόμβος παράμετρος είναι χρήσιμος στην επίλυση συγκεκριμένων αντιπροσωπευτικών προβλημάτων. Στο παράδειγμα καταμερισμού παραμέτρων στο σχήμα 5.24(b) οι δυο προσαρμοστικοί κόμβοι $u=g(x,a)$ και $u=h(y,a)$ μοιράζονται την ίδια παράμετρο a . Βγάζοντας την παράμετρο και τοποθετώντας την μέσα σε έναν κόμβο παράμετρο, μπορούμε να ενσωματώσουμε τις απαιτήσεις του καταμερισμού παραμέτρων μέσα στην αρχιτεκτονική σχεδίαση του δικτύου. Αυτό απλοποιεί την αναπαράσταση του δικτύου καθώς επίσης και την εφαρμογή του σε λογισμικό.

Τα προσαρμοστικά δίκτυα τοποθετούνται σε δύο κύριες κατηγορίες με βάση τον τύπο των διασυνδέσεων που εμφανίζουν: εμπροσθόδρομα δίκτυα (feedward) και επαναληπτικά. Το προσαρμοστικό δίκτυο που παρουσιάζεται στο σχήμα 5.25 είναι

εμπροσθόδρομο. Η έξοδος κάθε κόμβου διαδίδεται από την πλευρά της εισόδου (αριστερά) προς την πλευρά της εξόδου (δεξιά). Αν υπάρχει σύνδεσμος ανάδρασης που σχηματίζει κυκλικό μονοπάτι στο δίκτυο, τότε το δίκτυο είναι επαναληπτικό (Σχ.5.26). Στα γραφήματα, ένα εμπροσθόδρομο δίκτυο αναπαριστάται από ένα κυκλικό κατευθυνόμενο γράφημα που δεν περιέχει κατευθυνόμενους κύκλους, ενώ ένα επαναληπτικό δίκτυο περιέχει τουλάχιστον ένα κατευθυνόμενο κύκλο.



Σχήμα 5.25 Εμπροσθόδρομο προσαρμοστικό δίκτυο (τοπολογική διάταξη)



Σχήμα 5.26 Επαναληπτικό προσαρμοστικό δίκτυο.

Στην αναπαράσταση με επίπεδα του εμπροσθόδρομου προσαρμοστικού δικτύου στο σχήμα 5.24, δεν υπάρχουν σύνδεσμοι μεταξύ κόμβων στο ίδιο επίπεδο, και οι έξοδοι των κόμβων σε ένα συγκεκριμένο επίπεδο είναι πάντα συνδεδεμένες με κόμβους σε διαδοχικά επίπεδα. Αυτή η αναπαράσταση είναι συνήθως προτιμητέα λόγω της εύκολης διαμόρφωσής της, αφού οι κόμβοι ίδιου επιπέδου έχουν την ίδια λειτουργία ή γεννούν το ίδιο επίπεδο αφαίρεσης όσων αφορά τα διανύσματα εισόδου.

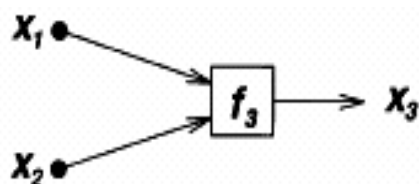
Μια άλλη αναπαράσταση εμπροσθόδρομου δικτύου είναι η αναπαράσταση τοπολογικής ταξινόμησης η οποία παρουσιάζει τους κόμβους σε μια διατεταγμένη ακολουθία 1,2,3, ..., τέτοια που να μην υπάρχουν σύνδεσμοι από τον κόμβο i στον κόμβο j , οποτεδήποτε $i \geq j$ (Σχ.5.25). Αυτή η αναπαράσταση είναι λιγότερο διαμορφώσιμη από ότι η αναπαράσταση με επίπεδα, όμως διευκολύνει τον σχηματισμό κανόνων εκπαίδευσης. Η αναπαράσταση τοπολογικής ταξινόμησης είναι

στην πραγματικότητα μια ειδική περίπτωση της αναπαράστασης με επίπεδα, με έναν κόμβο ανά επίπεδο.

Ένα εμπροσθόδρομο προσαρμοστικό δίκτυο είναι στην πραγματικότητα μια στατική αντιστοίχιση μεταξύ των χωρών εισόδου και εξόδου. Αυτή η αντιστοιχία μπορεί να είναι μια απλή γραμμική ή μη γραμμική σχέση, εξαρτώμενη από την δομή του δικτύου (διάταξη κόμβων και συνδέσεων) και τη λειτουργία κάθε κόμβου. Για να κατασκευάσουμε ένα προσαρμοστικό δίκτυο χρησιμοποιούμε ένα σύνολο δεδομένων για εκπαίδευση και κάποιες διαδικασίες όπως οι κανόνες εκπαίδευσης ή οι προσαρμοστικοί αλγόριθμοι για την τροποποίηση των παραμέτρων με σκοπό τη βελτίωση της απόδοσης του δικτύου. Συνήθως η απόδοση ενός δικτύου μετρείται ως η διαφορά μεταξύ επιθυμητής και πραγματικής εξόδου, κάτω από τις ίδιες συνθήκες [29].

5.4.5 Παραδείγματα προσαρμοστικών δικτύων

Προσαρμοστικό Δίκτυο με έναν Γραμμικό Κόμβο

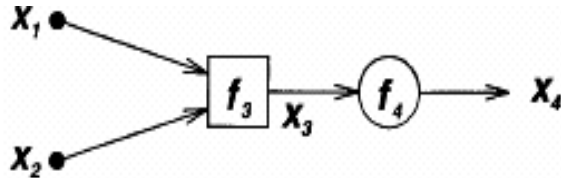


Στο παραπάνω σχήμα απεικονίζεται ένα προσαρμοστικό δίκτυο με ένα κόμβο. Σε αυτό ορίζεται $x_3 = f_3(x_1, x_2; a_1, a_2, a_3) = a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3$, όπου x_1, x_2 είναι οι είσοδοι και a_1, a_2, a_3 είναι οι τροποποιήσιμες παράμετροι.

Η συνάρτηση προσδιορίζει ένα επίπεδο σε έναν χώρο x_1 - x_2 . Βάζοντας διάφορες τιμές για τις παραμέτρους, μπορούμε να τοποθετήσουμε αυτό το επίπεδο αυθαίρετα όπως εμείς θέλουμε. Χρησιμοποιώντας το τετραφωνικό σφάλμα ως το σφάλμα μέτρησης για το δίκτυο, μπορούμε να αναγνωρίσουμε τις βέλτιστες παραμέτρους μέσω της μεθόδου εκτίμηση των γραμμικών ελαχίστων τετραγώνων.

Δίκτυο Perceptron

Εάν στο παραπάνω δίκτυο προσθέσουμε ένα επιπλέον κόμβο, ώστε να επιτρέψουμε στην έξοδο του δικτύου να παίρνει μόνο δυο τιμές 0 και 1, τότε παίρνουμε το μη γραμμικό δίκτυο:



Οι κόμβοι εκφράζονται ως :

$$x_3 = f_3(x_1, x_2, a_1, a_2, a_3) = a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3$$

$$x_4 = f_4(x_3) = \begin{cases} 1 & \text{if } x_3 \geq 0 \\ 0 & \text{if } x_3 < 0 \end{cases}$$

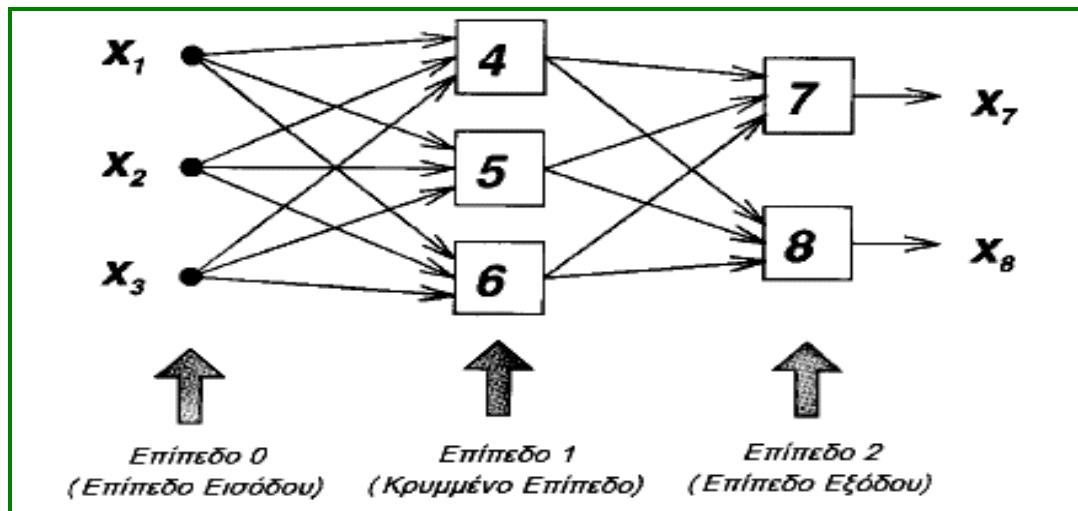
όπου f_3 είναι μια γραμμική συνάρτηση και f_4 η βηματική συνάρτηση που αντιστοιχεί το x_3 είτε στο 0 είτε στο 1.

Την ολική συνάρτηση του δικτύου μπορούμε να την δούμε σαν ένα γραμμικό ταξινομητή. Ο πρώτος κόμβος σχηματίζει ένα όριο απόφασης σαν μια ευθεία γραμμή στον χώρο των x_1, x_2 ; Και ο δεύτερος κόμβος δείχνει σε ποιο ημιεπίπεδο ανήκει το διάνυσμα εισόδου (x_1, x_2) . Επειδή η βηματική συνάρτηση είναι ασυνεχής σε ένα σημείο και επίπεδη σε όλα τα άλλα σημεία, μια εναλλακτική λύση είναι να χρησιμοποιήσουμε της σιγμοειδή συνάρτηση που παίρνει τιμές από 0 έως 1:

$$x_4 = f_4(x_3) = \frac{1}{1 + e^{-x_3}}$$

Πολυεπίπεδο Perceptron

Στο παρακάτω σχήμα βλέπουμε την αρχιτεκτονική για ένα πολυεπίπεδο perceptron με τρεις εισόδους, δυο εξόδους και τρεις κρυμμένους κόμβους που δεν συνδέονται απευθείας ούτε σε είσοδο ούτε σε έξοδο.



Σχήμα 5.27 Πολυεπίπεδο Perceptron

Κάθε κόμβος σε ένα δίκτυο αυτού του τύπου έχει την ίδια συνάρτηση κόμβου, που είναι σύνθεση μιας γραμμικής f_3 και μιας σιγμοειδούς f_4 . Δηλαδή η συνάρτηση κόμβου στον κόμβο 7 στο παραπάνω σχήμα είναι:

$$x_7 = \frac{1}{1 + \exp[-(w_{4,7}x_4 + w_{5,7}x_5 + w_{6,7}x_6 + t_7)]}$$

όπου x_4 , x_5 και x_6 είναι οι έξοδοι από τους κόμβους 4, 5 και 6 αντίστοιχα και το σύνολο των παραμέτρων του κόμβου 7 δηλώνεται με το $\{w_{4,7}, w_{5,7}, w_{6,7}, t_7\}$. Συνήθως το $w_{i,j}$ είναι το βάρος που σχετίζεται με τον σύνδεσμο που ενώνει τον i -οστό κόμβο και τον j -οστό κόμβο, και το t_j σαν το κατώφλι (threshold) που συνδέεται με τον κόμβο j . Γενικά, ένας σύνδεσμος δείχνει μόνο την κατεύθυνση της ροής σήματος μεταξύ των συνδεδεμένων κόμβων.

5.5 Περιγραφή του ANFIS

Ο αλγόριθμος ANFIS είναι από τους κυριότερους αλλά και τους πρώτους που εφαρμόστηκαν για την επίλυση προβλημάτων στο πεδίο των νευρο-ασαφών συστημάτων. Παρακάτω περιγράφεται το δίκτυο, υποθέτοντας ότι το πρόβλημα του οποίου προσπαθούμε να προσεγγίσουμε τη λύση, έχει δύο εισόδους (x, y) και μία έξοδο (z) [29].

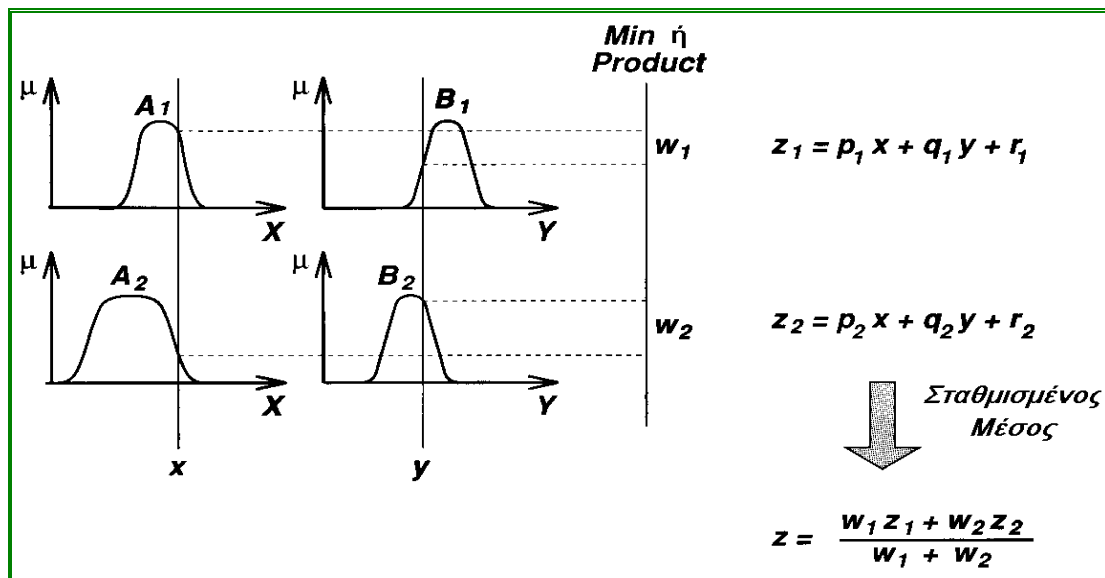
5.5.1 Αρχιτεκτονική του ANFIS

Υποθέτοντας ότι για ένα πρώτης τάξης μοντέλο Sugeno, μία τυπική βάση κανόνων (rule base) θα μπορούσε να είναι και η εξής:

Κανόνας 1: Εάν x είναι A_1 και y είναι B_1 τότε $f_1 = p_1 \times x + q_1 \times y + r_1$

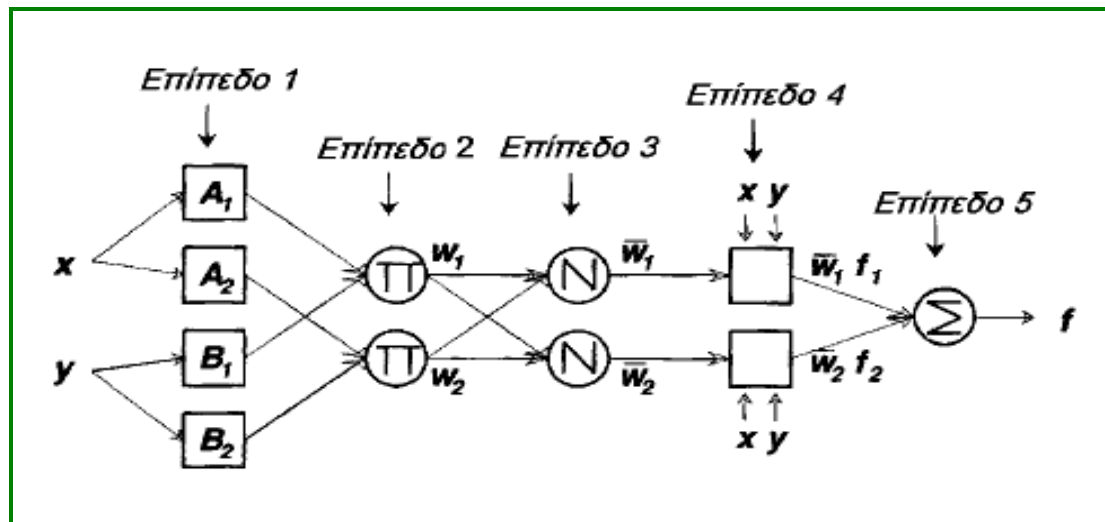
Κανόνας 2: Εάν x είναι A_2 και y είναι B_2 τότε $f_2 = p_2 \times x + q_2 \times y + r_2$

Στο παρακάτω σχήμα (5.28) δείχνει με απλό τρόπο τη διαδικασία συμπερασμού (inference procedure) του μοντέλου Sugeno, στην περίπτωση του t-operator έχει επιλεγεί η τομή των ασαφών συνόλων (A,B), οπότε $\mu_{A \cap B}(x) = \min[\mu_A(x), \mu_B(x)]$.



Σχήμα 5.28 Ασαφής Συλλογιστική (fuzzy reasoning)

Όπως γίνεται φανερό, η έξοδος z του πρωτοβάθμιου μοντέλου Sugeno είναι ένας σταθμικός μέσος όρος. Η αντίστοιχη αναπαράσταση του δικτύου ANFIS παρουσιάζεται στο παρακάτω σχήμα (5.29).



Σχήμα 5.29 Αρχιτεκτονική του ANFIS

Στο παραπάνω σχήμα απεικονίζεται ο συλλογιστικός μηχανισμός (reasoning) για αυτό το μοντέλο Sugeno και η αντίστοιχη αρχιτεκτονική του ANFIS. Παρατηρούμε ότι οι κόμβοι, ίδιου επιπέδου, έχουν παρόμοιες συναρτήσεις. Παρακάτω παρουσιάζεται αναλυτικότερα η διεργασία που εκτελείται σε κάθε επίπεδο.

Επίπεδο 1: Κάθε κόμβος i σε αυτό το επίπεδο είναι ένας προσαρμόσιμος (adaptive) κόμβος με συνάρτηση κόμβου:

$$O_{1,i} = \mu_{A_i}(x) \quad \text{για } i = 1, 2 \text{ ή}$$

$$O_{1,i} = \mu_{B_{i-2}}(y) \quad \text{για } i = 3, 4 \text{ ή}$$

όπου x (ή y) η είσοδος στον κόμβο i , A_i (ή B_{i-2}) η γλωσσική μεταβλητή (small, large, κλπ.) που σχετίζεται με αυτή τη συνάρτηση του κόμβου. Με άλλα λόγια, το $O_{1,i}$ είναι ο βαθμός συμμετοχής του A ($= A_1, A_2, B_1, B_2$) και καθορίζει το βαθμό στον οποίο η είσοδος x (ή y) ικανοποιεί τον ποσοτικοποιητή A . Εδώ η συνάρτηση συμμετοχής για το A μπορεί να είναι οποιαδήποτε κατάλληλη παραμετρική συνάρτηση συμμετοχής.

Καθώς οι τιμές των παραμέτρων αλλάζουν, οι συναρτήσεις διαμορφώνονται ανάλογα, παρουσιάζοντας έτσι διάφορες μορφές της αρχικής συνάρτησης συμμετοχής για το ασαφές σύνολο A . Οι παράμετροι σε αυτό το επίπεδο αναφέρονται ως αρχικοί παράμετροι (premise parameters).

Επίπεδο 2: Κάθε κόμβος σε αυτό το επίπεδο είναι ένας σταθερός (fixed) κόμβος Π, του οποίου η έξοδος είναι το γινόμενο όλων των εισερχόμενων σημάτων:

$$O_{2,i} = w_i = \mu_{A_1}(x) * \mu_{B_i}(y), \quad \text{για } i = 1, 2$$

$$O_{2,i} = w_i = \mu_{A_1}(x) * \mu_{B_{i-2}}(y), \quad \text{για } i = 3, 4$$

Επίπεδο 3: Κάθε κόμβος σε αυτό το επίπεδο είναι ένας σταθερός κόμβος Ν. Ο i -ιστός κόμβος υπολογίζει τη συμμετοχή του βαθμού ενεργοποίησης (firing strength) του i -οστού κανόνα στο άθροισμα των βαθμών ενεργοποίησης όλων των κανόνων:

$$O_{3,i} = \bar{w}_i = \frac{w_i}{w_1 + w_2 + w_3 + w_4}, \quad i=1, 2, \dots, 4$$

Οι έξοδοι αυτού του επιπέδου ονομάζονται κανονικοποιημένοι βαθμοί ενεργοποίησης (normalized firing strengths).

Επίπεδο 4: Κάθε κόμβος i σε αυτό το επίπεδο είναι ένας προσαρμοστικός κόμβος με συνάρτηση κόμβου.

$$O_{4,i} = \bar{w}_i * f_i = \bar{w}_i * (p_i * x + q_i * y + s_i * z + r_i)$$

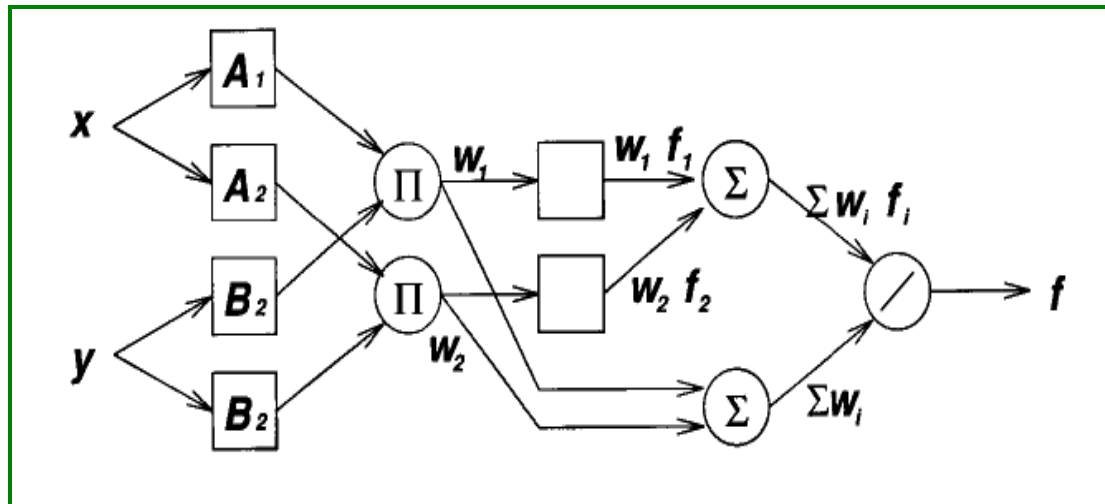
όπου: \bar{w}_i η έξοδος του επιπέδου 3, $\{p_i, q_i, s_i, r_i\}$ το σύνολο των παραμέτρων. Οι παράμετροι σε αυτό το επίπεδο αναφέρονται ως επακόλουθοι (consequent parameters).

Επίπεδο 5: Ο μοναδικός κόμβος σε αυτό το επίπεδο είναι ένας σταθερός κόμβος Σ που υπολογίζει τη συνολική έξοδο σαν το ολικό άθροισμα όλων των εισερχόμενων σημάτων:

$$overall \ output = O_{5,i} = \sum_i \bar{w}_i * f_i = \frac{\sum_i w_i * f_i}{\sum_i w_i}$$

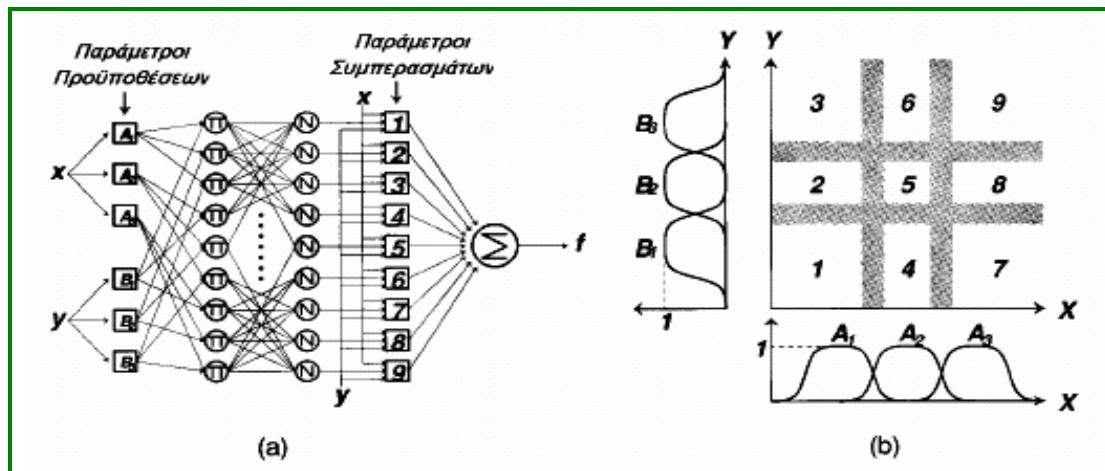
Αυτό το προσαρμοστικό δίκτυο είναι λειτουργικά ισοδύναμο με το ασαφές μοντέλο Sugeno. Μπορούμε να συνδυάσουμε τα επίπεδα 3 και 4 για να δημιουργήσουμε ένα ισοδύναμο δίκτυο με τέσσερα μόνο επίπεδα. Χρησιμοποιώντας το ίδιο δείγμα μπορούμε να πραγματοποιήσουμε την κανονικοποίηση των βαρών

στο τελευταίο επίπεδο. Στο σχήμα 5.30 απεικονίζεται ένα ANFIS τέτοιου τύπου. Σαν ακραία περίπτωση μπορούμε να συρρικνώσουμε όλο το δίκτυο, σε έναν μόνο προσαρμοστικό κόμβο με το ίδιο σύνολο παραμέτρων. Η ανάθεση συναρτήσεων στους κόμβους και η σύνθεση του δικτύου είναι αυθαίρετες. Κάθε κόμβος και κάθε επίπεδο πραγματοποιούν λειτουργίες που είναι σημαντικές και έχουν δυνατότητα να αποτελούνται από επιμέρους τμήματα.



Σχήμα 5.30 Αρχιτεκτονική του ANFIS για ασαφές σύνολο Sugeno, όπου η κανονικοποίηση βαρών πραγματοποιείται στο τελευταίο επίπεδο.

Στο ANFIS μπορεί επίσης να χρησιμοποιηθεί το μοντέλο Mamdani. Το Sugeno χρησιμοποιείται περισσότερο συχνά, μιας και διακρίνεται για την διαφάνεια και την αποτελεσματικότητά του.



Σχήμα 5.31 (α) Η αρχιτεκτονική του ANFIS για το ασαφές μοντέλο Sugeno με δύο εισόδους και εννέα κανόνες (β) ο χώρος εισόδου, χωρισμένος σε εννέα ασαφείς περιοχές.

Στο σχήμα 5.31(α) βλέπουμε μια αρχιτεκτονική του ANFIS που είναι ισοδύναμη με ένα ασαφές μοντέλο Sugeno πρώτου βαθμού δυο εισόδων και εννέα κανόνων. Σε κάθε είσοδο θεωρούμε ότι αντιστοιχούν τρεις συναρτήσεις συμμετοχής. Στο σχήμα 5.31(β) φαίνεται πως είναι χωρισμένος ο χώρος εισόδου δύο διαστάσεων, σε εννέα υπέρθετες (overlapping) ασαφείς περιοχές, όπου κάθε μια ελέγχεται από ένα ασαφή κανόνα if-then. Αυτό σημαίνει ότι το μέρος των προϋποθέσεων ενός κανόνα προσδιορίζει μια ασαφή περιοχή, ενώ το μέρος των συμπερασμάτων προσδιορίζει την έξοδο μέσα στην περιοχή.

5.5.2 Εκτιμητής ελαχίστων τετραγώνων (Least-Squares Estimator)

Στο γενικό πρόβλημα ελαχίστων τετραγώνων, η έξοδος του γραμμικού μοντέλου y δίνεται από τη γραμμικά παραμετροποιημένη έκφραση:

$$y = \theta_1 f_1(\mathbf{u}) + \theta_2 f_2(\mathbf{u}) + \dots + \theta_n f_n(\mathbf{u}) \quad (5.7)$$

όπου $\mathbf{u} = [u_1, \dots, u_p]^T$ είναι το διάνυσμα εισόδου του μοντέλου, f_1, \dots, f_n είναι γνωστές συναρτήσεις του \mathbf{u} και $\theta_1, \dots, \theta_n$ είναι άγνωστες παράμετροι που θα υπολογιστούν. Η εξίσωση (5.7) καλείται *συνάρτηση παλινδρόμησης*, και τα θ_i ονομάζονται *συντελεστές παλινδρόμησης*.

Για να προσδιοριστούν οι άγνωστες παράμετροι θ_i , συνήθως πρέπει να εκτελεστούν πειράματα για να βρεθεί ένα σύνολο δεδομένων εκπαίδευσης που

αποτελείται από τα ζευγάρια δεδομένων $\{(\mathbf{u}_i, y_i), i = 1, \dots, m\}$ τα οποία αντιπροσωπεύουν τα επιθυμητά ζευγάρια εισόδου-εξόδου του συστήματος στόχου που θα μοντελοποιηθεί. Η αντικατάσταση κάθε ζευγαριού στοιχείων στην εξίσωση (5.7) παράγει ένα σύνολο m γραμμικών εξισώσεων:

$$\begin{aligned} f_1(u_1)\theta_1 + f_2(u_1)\theta_2 + \dots + f_n(u_1)\theta_n &= y_1 \\ f_1(u_2)\theta_1 + f_2(u_2)\theta_2 + \dots + f_n(u_2)\theta_n &= y_2 \\ \dots & \\ f_1(u_m)\theta_1 + f_2(u_m)\theta_2 + \dots + f_n(u_m)\theta_n &= y_m \end{aligned} \quad (5.8)$$

Σε μορφή πινάκων, οι προηγούμενες εξισώσεις μπορούν να γραφτούν σε συνοπτική μορφή:

$$\mathbf{A}\boldsymbol{\theta} = \mathbf{y} \quad (5.9)$$

όπου \mathbf{A} είναι ένας $m \times n$ πίνακας (πίνακας σχεδιασμού):

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} f_1(\mathbf{u}_1) & \dots & f_n(\mathbf{u}_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ f_1(\mathbf{u}_m) & \dots & f_n(\mathbf{u}_m) \end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{\theta}$ είναι ένα $n \times 1$ διάνυσμα άγνωστων παραμέτρων και \mathbf{y} είναι ένα $m \times 1$ διάνυσμα εξόδου:

$$\boldsymbol{\theta} = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \vdots \\ \theta_n \end{bmatrix} \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}$$

Η i -οστή σειρά του ενωμένου πίνακα δεδομένων $[\mathbf{A}; \mathbf{y}]$, που δηλώνεται με $[\mathbf{a}_i^T; y_i]$, σχετίζεται με το i -οστό ζευγάρι δεδομένων $(\mathbf{u}_i; y_i)$ μέσω της:

$$\mathbf{a}_i^T = [f_1(\mathbf{u}_i), \dots, f_n(\mathbf{u}_i)]$$

Το μεγαλύτερο μέρος των υπολογισμών βασίζεται στους πίνακες \mathbf{A} και \mathbf{y} , μερικές φορές γίνεται αναφορά στο $(\mathbf{a}_i^T; y_i)$ σαν το i -οστό ζευγάρι δεδομένων του συνόλου δεδομένων εκπαίδευσης. Για να προσδιοριστεί μεμονωμένα το άγνωστο διάνυσμα $\boldsymbol{\theta}$, είναι απαραίτητο να ισχύει $m \geq n$. Αν ο \mathbf{A} είναι τετραγωνικός

($m = n$) και αντιστρέψιμος, τότε η εξίσωση (5.9) μπορεί να λυθεί ως προς τον άγνωστο \mathbf{x} και γίνεται:

$$\theta = A^{-1}y \quad (5.10)$$

Ο m είναι συνήθως μεγαλύτερος από τον n , που σημαίνει ότι υπάρχουν περισσότερα ζευγάρια στοιχείων από τις παραμέτρους. Σε αυτήν την περίπτωση, μια ακριβής λύση που να ικανοποιεί όλες τις m εξισώσεις δεν είναι πάντα δυνατή, δεδομένου ότι τα στοιχεία μπορεί να μολυνθούν από θόρυβο, ή το μοντέλο μπορεί να μην είναι κατάλληλο για την περιγραφή του συστήματος στόχου. Κατά συνέπεια η εξίσωση (5.9) πρέπει να τροποποιηθεί με την ενσωμάτωση ενός διανύσματος λάθους \mathbf{e} για να αποτελέσει το τυχαίο λάθος θορύβου ή το τυχαίο λάθος διαμόρφωσης ως εξής:

$$A\theta + e = y \quad (5.11)$$

Τώρα, αντί της εύρεσης της ακριβούς λύσης στην εξίσωση (5.9), πρέπει να βρεθεί το $\theta = \hat{\theta}$ που ελαχιστοποιεί το άθροισμα του τετραγωνικού σφάλματος και ορίζεται ως

$$E(\theta) = \sum_{i=1}^m (y_i - a_i^r \theta)^2 = e^r e = (y - A\theta)^r (y - A\theta) \quad (5.12)$$

όπου $\mathbf{e} = \mathbf{y} - \mathbf{A}\theta$ είναι το διάνυσμα λάθους που παράγεται από μια συγκεκριμένη επιλογή του θ . Πρέπει να σημειωθεί ότι το $E(\theta)$ είναι σε τετραγωνική μορφή και έχει ένα μοναδικό ελάχιστο $\theta = \hat{\theta}$. Το ακόλουθο θεώρημα δηλώνει έναν απαραίτητο όρο που ικανοποιείται από τον εκτιμητή ελαχίστων τετραγώνων $\hat{\theta}$.

Εκτιμητής Ελαχίστων Τετραγώνων

Το τετραγωνικό σφάλμα στην εξίσωση (5.12) ελαχιστοποιείται όταν $\theta = \hat{\theta}$, ο οποίος καλείται εκτιμητής ελαχίστων τετραγώνων (LSE) και ο οποίος ικανοποιεί την κανονική εξίσωση:

$$A^r A \hat{\theta} = A^r y \quad (5.13)$$

Αν ο $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ είναι αντιστρέψιμος, ο $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ είναι μοναδικός και δίνεται από την:

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{y} \quad (5.14)$$

5.5.3 Κανόνας Οπισθοδρόμης Εκμάθησης (Backpropagation Rule)

Στην ενότητα αυτή παρουσιάζουμε ένα βασικό κανόνα εκμάθησης για προσαρμοστικά δίκτυα, που είναι στην ουσία η πιο απλή μέθοδος βαθμωτής ελαχιστοποίησης. Το κεντρικό μέρος αυτού του κανόνα εκμάθησης αφορά στο πως επιλέγεται ένα διάνυσμα κλίσης στο οποίο κάθε στοιχείο ορίζεται ως η παράγωγος του μέτρου σφάλματος ως προς μια παράμετρο. Αυτό γίνεται με τη βοήθεια του κανόνα αλυσίδας, ενός βασικού τύπου για τη διαφορίση σύνθετων συναρτήσεων. Η διαδικασία εύρεσης ενός διανύσματος κλίσης σε ένα δίκτυο αναφέρεται γενικά σαν *οπισθοδρόμηση (backpropagation)* επειδή το διάνυσμα κλίσης υπολογίζεται σε κατεύθυνση αντίθετη από τη ροή της εξόδου κάθε κόμβου. Μόλις επιλεγεί η κλίση, διάφορες τεχνικές βελτιστοποίησης και παλινδρόμησης βασισμένες στις παραγώγους είναι διαθέσιμες για την ενημέρωση των παραμέτρων. Ειδικότερα, εάν χρησιμοποιούμε το διάνυσμα κλίσης σε μια απλή μέθοδο βαθμωτής ελαχιστοποίησης, το προκύπτον παράδειγμα εκμάθησης αναφέρεται συχνά ως *κανόνας οπισθοδρόμης εκμάθησης*.

Έστω ένα feed-forward προσαρμόσιμο δίκτυο. Στην αναπαράστασή του διακρίνουμε L επίπεδα και το επίπεδο l (όπου $l = 0, 1, \dots, L; l = 0$ αντιπροσωπεύει το επίπεδο εισαγωγής) έχει $N(l)$ κόμβους. Τότε η έξοδος και η συνάρτηση του κόμβου i [$i = 1, \dots, N(l)$] στο επίπεδο l μπορούν να αναπαρασταθούν σαν $x_{l,i}$ και $f_{l,i}$, αντίστοιχα. Ας υποτεθεί ότι δεν υπάρχει καμία σύνδεση μεταξύ μη συνεχόμενων στρωμάτων. Δεδομένου ότι η έξοδος ενός κόμβου εξαρτάται από τα εισερχόμενα σήματα και το σύνολο παραμέτρων του κόμβου, προκύπτει η ακόλουθη γενική έκφραση για τη συνάρτηση των κόμβων $f_{l,i}$:

$$x_{l,i} = f_{l,i}(x_{l-1,1}, \dots, x_{l-1,N(l-1)}, a, \beta, \gamma, \dots) \quad (5.15)$$

όπου a, β, γ κλπ. είναι οι παράμετροι αυτού του κόμβου.

Υποθέτοντας ότι το δοσμένο σύνολο δεδομένων εκπαίδευσης έχει P καταχωρήσεις, μπορεί να οριστεί ένα μέτρο σφάλματος για την p -οστή $1 \leq p \leq P$ καταχώρηση των δεδομένων εκπαίδευσης σαν το άθροισμα των τετραγωνικών σφαλμάτων:

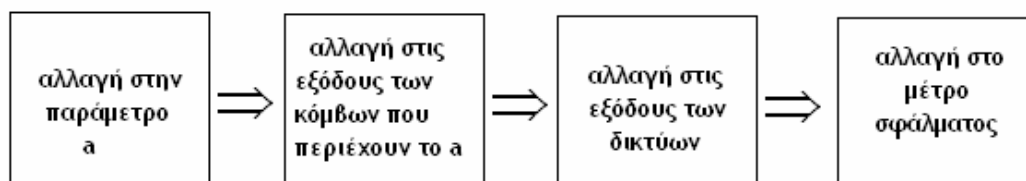
$$E_p = \sum_{k=1}^{N(l)} (d_k - x_{L,k})^2 \quad (5.16)$$

όπου d_k είναι το k -οστό συστατικό του p -οστού επιθυμητού διανύσματος εξόδου και $x_{L,k}$ είναι το k -οστό συστατικό του πραγματικού διανύσματος εξόδου που παράγεται με την παρουσίαση του p -οστού διανύσματος εισόδου στο δίκτυο. Προφανώς, όταν το E_p είναι ίσο με το μηδέν, το δίκτυο είναι ικανό να αναπαράγει ακριβώς το επιθυμητό διάνυσμα εξόδου στο p -οστό ζευγάρι δεδομένων εκπαίδευσης. Ο στόχος εδώ είναι να ελαχιστοποιηθεί ένα συνολικό μέτρο σφάλματος, που ορίζεται ως:

$$E = \sum_{p=1}^P E_p$$

Επιπλέον, υποθέτουμε ότι το E_p εξαρτάται μόνο από τους κόμβους εξόδου.

Για να χρησιμοποιηθεί η βαθμωτή ελαχιστοποίηση ώστε να ελαχιστοποιηθεί το μέτρο σφάλματος, πρέπει πρώτα να βρεθεί το διάνυσμα κλίσης. Πριν υπολογιστεί το διάνυσμα κλίσης, πρέπει να παρατηρηθούν οι ακόλουθες αιτιώδεις σχέσεις:



όπου τα βέλη (\Rightarrow) δείχνουν τις αιτιώδεις σχέσεις. Δηλαδή, μια μικρή αλλαγή σε μια παράμετρο a θα επηρεάσει την έξοδο του κόμβου που περιέχει το a . Αυτό με τη σειρά του θα επηρεάσει την έξοδο του τελευταίου επιπέδου και συνεπώς το μέτρο σφάλματος. Η βασική αρχή στον υπολογισμό του διανύσματος κλίσης είναι να περαστούν μια σειρά από πληροφορίες παραγώγων ξεκινώντας από το επίπεδο εξόδου και πηγαίνοντας ανάποδα από επίπεδο σε επίπεδο έως ότου καταλήξει η διαδικασία στο επίπεδο εισόδου.

Το σήμα σφάλματος $e_{l,i}$ ορίζεται σαν τη παράγωγο του μέτρου σφάλματος E_p ως προς την έξοδο του κόμβου i στο επίπεδο l , λαμβάνοντας υπόψη και τις άμεσες και τις έμμεσες πορείες.

$$e_{l,i} = \frac{\partial^+ E_p}{\partial x_{l,i}} \quad (5.17)$$

Η έκφραση αυτή ονομάστηκε διατεταγμένη παράγωγος από τον Werbos.

Το σήμα σφάλματος για τον i -οστό κόμβο εξόδου (στο επίπεδο L) μπορεί να υπολογιστεί απευθείας:

$$e_{1,i} = \frac{\partial^+ E_p}{\partial x_{1,i}} = \frac{\partial E_p}{\partial x_{1,i}} \quad (5.18)$$

Αυτό ισούται με $e_{L,i} = -2(d_i - x_{L,i})$ αν το E_p ορίζεται όπως στην εξίσωση (5.16).

Για τον εσωτερικό κόμβο στην i -οστή θέση του επιπέδου l , το σήμα σφάλματος μπορεί να βρεθεί από τον κανόνα αλυσίδας:

$$e_{l,i} = \underbrace{\frac{\partial^+ E_p}{\partial x_{l,i}}}_{\text{error signal at layer } l} = \sum_{m=1}^{N(l+1)} \underbrace{\frac{\partial^+ E_p}{\partial x_{l+1,m}}}_{\text{error signal at layer } l+1} \frac{\partial f_{l+1,m}}{\partial x_{l,i}} = \sum_{m=1}^{N(l+1)} e_{l+1,m} \frac{\partial f_{l+1,m}}{\partial x_{l,i}} \quad (5.19)$$

όπου $0 \leq l \leq L-1$. Δηλαδή το σήμα σφάλματος ενός εσωτερικού κόμβου στο στρώμα l μπορεί να εκφραστεί ως γραμμικός συνδυασμός των κόμβων στο στρώμα $l+1$. Επομένως, για οποιαδήποτε l και i [και $1 \leq i \leq N(l)$], μπορούν να βρεθούν τα:

$$\epsilon_{l,i} = \frac{\partial^+ E_p}{\partial x_{l,i}}$$

εφαρμόζοντας πρώτα την εξίσωση (5.18) μία φορά για να υπολογιστούν τα σήματα σφάλματος στο επίπεδο εξόδου, και έπειτα εφαρμόζοντας την εξίσωση (5.19) επαναληπτικά έως ότου καταλήξει η διαδικασία στο επιθυμητό επίπεδο l . Η διαδικασία αυτή καλείται οπισθοδρόμηση δεδομένου ότι τα σήματα σφάλματος λαμβάνονται διαδοχικά από το επίπεδο εξόδου προς το επίπεδο εισόδου.

Το διάνυσμα κλίσης ορίζεται ως την παράγωγο του μέτρου σφάλματος ως προς κάθε παράμετρο, έτσι πρέπει να εφαρμοστεί ο κανόνας αλυσίδας ξανά για να

Βρεθεί το διάνυσμα κλίσης. Εάν a είναι μια παράμετρος του i -οστού κόμβου στο επίπεδο l , τότε ισχύει:

$$\frac{\partial^+ E_p}{\partial a} = \frac{\partial^+ E_p}{\partial x_{l,i}} \frac{\partial f_{l,i}}{\partial a} = \epsilon_{l,i} \frac{\partial f_{l,i}}{\partial a} \quad (5.20)$$

Ας σημειωθεί ότι αν επιτραπεί στην παράμετρο a να μοιράζεται μεταξύ διαφορετικών κόμβων, τότε η εξίσωση (5.20) πρέπει να αλλαχθεί σε μια πιο γενική μορφή:

$$\frac{\partial^+ E_p}{\partial a} = \sum_{x^* \in S} \frac{\partial^+ E_p}{\partial x^*} \frac{\partial f^*}{\partial a} \quad (5.21)$$

όπου S είναι το σύνολο των κόμβων που περιέχουν το a σαν παράμετρο ενώ x^* και f^* είναι η έξοδος και η συνάρτηση, αντίστοιχα, ενός γενικού κόμβου στο S .

Η παράγωγος του γενικού μέτρου σφάλματος E ως προς το a είναι:

$$\frac{\partial^+ E_p}{\partial a} = \sum_{p=1}^P \frac{\partial^+ E_p}{\partial a} \quad (5.22)$$

Συνεπώς, για την απλούστερη βαθμωτή ελαχιστοποίηση χωρίς ελαχιστοποίηση γραμμών, ο τύπος για τη γενική παράμετρο a είναι:

$$\Delta a = -\eta \frac{\partial^+ E_p}{\partial a} \quad (5.23)$$

όπου το η είναι ο ρυθμός εκμάθησης, το οποίο μπορεί να εκφραστεί περαιτέρω ως

$$\eta = \frac{\kappa}{\sqrt{\sum_{\alpha} \left(\frac{\partial E}{\partial \alpha} \right)^2}} \quad (5.24)$$

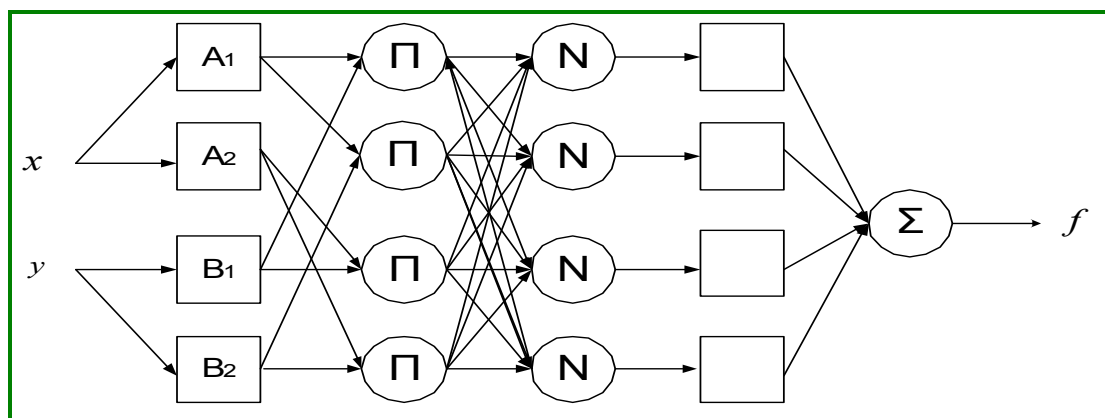
όπου το κ είναι το μέγεθος βήματος, το μήκος δηλαδή κάθε μετάβασης κατά μήκος της κατεύθυνσης κλίσης στο διάστημα παραμέτρου. Συνήθως το μέγεθος βήματος μπορεί να αλλαχθεί για να μεταβληθεί η ταχύτητα της σύγκλισης.

Όταν ένα feed-forward δίκτυο n -κόμβων αναπαριστάται στην τοπολογική του διάταξη, μπορεί να υπολογιστεί το μέτρο σφάλματος E_p σαν την έξοδο ενός επιπλέον κόμβου με ένδειξη $n+1$, του οποίου η συνάρτηση κόμβου f_{n+1} μπορεί να οριστεί από τις εξόδους κάθε κόμβου με μικρότερη ένδειξη. (Επομένως, το E_p μπορεί να εξαρτάται άμεσα από οποιουσδήποτε κόμβους.) Εφαρμόζοντας πάλι τον κανόνα αλυσίδας, ισχύει ο ακόλουθος συνοπτικός τύπος για τον υπολογισμό του σήματος σφάλματος $e_i = \frac{\partial E_p}{\partial x_i}$

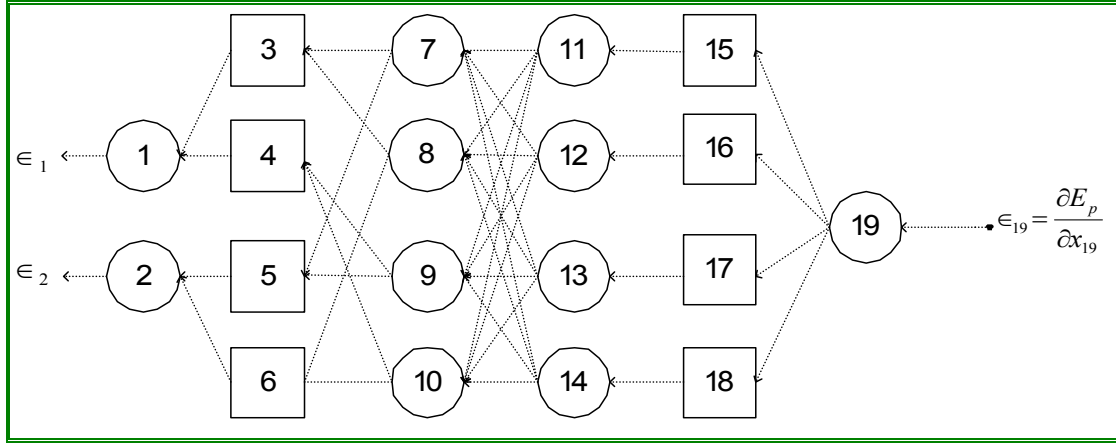
$$e_i = \frac{\partial f_{n+1}}{\partial x_i} + \sum_{i < j \leq n} e_j \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \quad (5.25)$$

όπου ο πρώτος όρος δείχνει μια άμεση επίδραση του x_i στο E_p μέσω της άμεσης διαδρομής από τον κόμβο i στον κόμβο $n+1$ και κάθε όρος παραγώγου στο άθροισμα δείχνει την έμμεση επίδραση του x_i στο E_p . Μόλις βρεθεί το σήμα σφάλματος για κάθε κόμβο, τότε το διάνυσμα κλίσης για τις παραμέτρους παράγεται όπως πριν.

Ένας άλλος συστηματικός τρόπος να υπολογιστούν τα σήματα σφάλματος είναι μέσω της αναπαράστασης του δικτύου διάδοσης σφάλματος (ή του μοντέλου ευαισθησίας), το οποίο λαμβάνεται από το αρχικό προσαρμόσιμο δίκτυο με την αντιστροφή των συνδέσεων και την παροχή των σημάτων σφάλματος στο επίπεδο εξόδου ως είσοδοι στο νέο δίκτυο. Το ακόλουθο σχήμα δείχνει το μοντέλο ANFIS και το δίκτυο διάδοσης σφάλματος του:



Σχήμα 5.32 Προσαρμοστικό δίκτυο



Σχήμα 5.33 Δίκτυο διάδοσης σφάλματος

Τώρα θα υπολογιστούν τα σήματα σφάλματος στους εσωτερικούς κόμβους. Χρησιμοποιούνται τα f_i και x_i για το συμβολισμό της συνάρτησης και της εξόδου του κόμβου i . Η έξοδος του κόμβου i είναι το σήμα σφάλματος αυτού του κόμβου στο πραγματικό προσαρμόσιμο δίκτυο. Σε σύμβολα, αν επιλεγθεί το τετραγωνικό μέτρο σφάλματος για E_p , τότε ισχύει $e_{19} = -2(d_{19} - x_{19})$.

Αυτό είναι επειδή ο κόμβος 19 είναι μόνο ένας κόμβος προσωρινής αποθήκευσης στο δίκτυο διάδοσης σφάλματος. Για τους κόμβους 15, 16, 17 και 18 ισχύουν:

$$e_{18} = \frac{\partial^+ E_p}{\partial x_{18}} = \frac{\partial^+ E_p}{\partial x_{19}} \frac{\partial f_{19}}{\partial x_{18}} = e_{19} \frac{\partial f_{19}}{\partial x_{18}}$$

$$e_{17} = \frac{\partial^+ E_p}{\partial x_{17}} = \frac{\partial^+ E_p}{\partial x_{19}} \frac{\partial f_{19}}{\partial x_{17}} = e_{19} \frac{\partial f_{19}}{\partial x_{17}}$$

$$e_{16} = \frac{\partial^+ E_p}{\partial x_{16}} = \frac{\partial^+ E_p}{\partial x_{19}} \frac{\partial f_{19}}{\partial x_{16}} = e_{19} \frac{\partial f_{19}}{\partial x_{16}}$$

$$e_{15} = \frac{\partial^+ E_p}{\partial x_{15}} = \frac{\partial^+ E_p}{\partial x_{19}} \frac{\partial f_{19}}{\partial x_{15}} = e_{19} \frac{\partial f_{19}}{\partial x_{15}}$$

Αυτό είναι επειδή όλοι αυτοί οι κόμβοι εξαρτώνται από τον κόμβο 19. Αυτό ισχύει και για τους κόμβους 11, 12, 13 και 14 με τη διαφορά ότι κάθε ένας από αυτούς εξαρτάται από διαφορετικό κόμβο:

$$e_{14} = \frac{\partial^+ E_p}{\partial x_{14}} = \frac{\partial^+ E_p}{\partial x_{18}} \frac{\partial f_{18}}{\partial x_{14}} = e_{18} \frac{\partial f_{18}}{\partial x_{14}}$$

$$e_{13} = \frac{\partial^+ E_p}{\partial x_{13}} = \frac{\partial^+ E_p}{\partial x_{17}} \frac{\partial f_{17}}{\partial x_{13}} = e_{17} \frac{\partial f_{17}}{\partial x_{13}}$$

$$e_{12} = \frac{\partial^+ E_p}{\partial x_{12}} = \frac{\partial^+ E_p}{\partial x_{16}} \frac{\partial f_{16}}{\partial x_{12}} = e_{16} \frac{\partial f_{16}}{\partial x_{12}}$$

$$e_{11} = \frac{\partial^+ E_p}{\partial x_{11}} = \frac{\partial^+ E_p}{\partial x_{15}} \frac{\partial f_{15}}{\partial x_{11}} = e_{15} \frac{\partial f_{15}}{\partial x_{11}}$$

Αντιθέτως, οι κόμβοι 7, 8, 9 και 10 εξαρτώνται από τέσσερις διαφορετικούς κόμβους όπως φαίνεται στο σχήμα 5.5. Έτσι, ισχύει:

$$e_{10} = \frac{\partial^+ E_p}{\partial x_{10}} = e_{14} \frac{\partial f_{14}}{\partial x_{10}} + e_{13} \frac{\partial f_{13}}{\partial x_{10}} + e_{12} \frac{\partial f_{12}}{\partial x_{10}} + e_{11} \frac{\partial f_{11}}{\partial x_{10}}$$

$$e_9 = \frac{\partial^+ E_p}{\partial x_9} = e_{14} \frac{\partial f_{14}}{\partial x_9} + e_{13} \frac{\partial f_{13}}{\partial x_9} + e_{12} \frac{\partial f_{12}}{\partial x_9} + e_{11} \frac{\partial f_{11}}{\partial x_9}$$

$$e_8 = \frac{\partial^+ E_p}{\partial x_8} = e_{14} \frac{\partial f_{14}}{\partial x_8} + e_{13} \frac{\partial f_{13}}{\partial x_8} + e_{12} \frac{\partial f_{12}}{\partial x_8} + e_{11} \frac{\partial f_{11}}{\partial x_8}$$

$$e_7 = \frac{\partial^+ E_p}{\partial x_7} = e_{14} \frac{\partial f_{14}}{\partial x_7} + e_{13} \frac{\partial f_{13}}{\partial x_7} + e_{12} \frac{\partial f_{12}}{\partial x_7} + e_{11} \frac{\partial f_{11}}{\partial x_7}$$

Οι κόμβοι 3, 4, 5 και 6 εξαρτώνται από δύο διαφορετικούς κόμβους και σαν αποτέλεσμα προκύπτουν οι ακόλουθες σχέσεις:

$$e_6 = \frac{\partial^+ E_p}{\partial x_6} = \frac{\partial^+ E_p}{\partial x_{10}} \frac{\partial f_{10}}{\partial x_6} + \frac{\partial^+ E_p}{\partial x_8} \frac{\partial f_8}{\partial x_6} = e_{10} \frac{\partial f_{10}}{\partial x_6} + e_8 \frac{\partial f_8}{\partial x_6}$$

$$e_5 = \frac{\partial^+ E_p}{\partial x_5} = \frac{\partial^+ E_p}{\partial x_9} \frac{\partial f_9}{\partial x_5} + \frac{\partial^+ E_p}{\partial x_7} \frac{\partial f_7}{\partial x_5} = e_9 \frac{\partial f_9}{\partial x_5} + e_7 \frac{\partial f_7}{\partial x_5}$$

$$e_4 = \frac{\partial^+ E_p}{\partial x_4} = \frac{\partial^+ E_p}{\partial x_{10}} \frac{\partial f_{10}}{\partial x_4} + \frac{\partial^+ E_p}{\partial x_9} \frac{\partial f_9}{\partial x_4} = e_{10} \frac{\partial f_{10}}{\partial x_4} + e_9 \frac{\partial f_9}{\partial x_4}$$

$$e_3 = \frac{\partial^+ E_p}{\partial x_3} = \frac{\partial^+ E_p}{\partial x_8} \frac{\partial f_8}{\partial x_3} + \frac{\partial^+ E_p}{\partial x_7} \frac{\partial f_7}{\partial x_3} = e_8 \frac{\partial f_8}{\partial x_3} + e_7 \frac{\partial f_7}{\partial x_3}$$

Τέλος, οι κόμβοι 1 και 2 εξαρτώνται από δύο κόμβους και έτσι ισχύει:

$$e_2 = \frac{\partial^+ E_p}{\partial x_2} = \frac{\partial^+ E_p}{\partial x_6} \frac{\partial f_6}{\partial x_2} + \frac{\partial^+ E_p}{\partial x_5} \frac{\partial f_5}{\partial x_2} = e_6 \frac{\partial f_6}{\partial x_2} + e_5 \frac{\partial f_5}{\partial x_2}$$

$$e_1 = \frac{\partial^+ E_p}{\partial x_1} = \frac{\partial^+ E_p}{\partial x_4} \frac{\partial f_4}{\partial x_1} + \frac{\partial^+ E_p}{\partial x_3} \frac{\partial f_3}{\partial x_1} = e_4 \frac{\partial f_4}{\partial x_1} + e_3 \frac{\partial f_3}{\partial x_1}$$

5.5.4 Υβριδικός Αλγόριθμος Εκπαίδευσης

Το ANFIS χρησιμοποιεί έναν υβριδικό αλγόριθμο εκμάθησης για να προσδιορίσει τις παραμέτρους του ασαφούς συστήματος τύπου Sugeno. Εφαρμόζει έναν συνδυασμό της μεθόδου ελαχίστων τετραγώνων (least-squares) και της μεθόδου οπισθοδρόμης βαθμωτής ελαχιστοποίησης (backpropagation gradient descent) για την εκπαίδευση παραμέτρων των συναρτήσεων συμμετοχής του FIS ώστε να μιμηθεί ένα δοσμένο σύνολο δεδομένων εκπαίδευσης.

Η έξοδος ενός προσαρμοστικού δικτύου είναι γραμμική σε μερικές από τις παραμέτρους του δικτύου. Έτσι μπορούν να προσδιοριστούν αυτές οι γραμμικές παράμετροι με τη γραμμική μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων που περιγράφηκε παραπάνω. Από την αρχιτεκτονική δομή του ANFIS παρατηρούμε ότι οι τιμές των παραμέτρων από τις προϋποθέσεις είναι προκαθορισμένες (αμετάβλητες), η ολική έξοδος μπορεί να εκφραστεί σαν ο γραμμικός συνδυασμός των παραμέτρων από τα συμπεράσματα. Σε σύμβολα, η έξοδος f στο σχήμα 5.31(β) ξαναγράφεται:

$$f = \frac{w_1}{w_1 + w_2} f_1 + \frac{w_2}{w_1 + w_2} f_2$$

$$= \bar{w}_1 (p_1 x + q_1 y + r_1) + \bar{w}_2 (p_2 x + q_2 y + r_2)$$

$$= (\bar{w}_1 x) p_1 + (\bar{w}_1 y) q_1 + (\bar{w}_1) r_1 + (\bar{w}_2 x) p_2 + (\bar{w}_2 y) q_2 + (\bar{w}_2) r_2$$

Η οποία είναι γραμμική στις παραμέτρους των συμπερασμάτων p_1, q_1, r_1, p_2, q_2 , και r_2 . Έστω ότι:

S =σύνολο όλων των παραμέτρων

S_1 = σύνολο των (μη γραμμικών) παραμέτρων από τις προϋποθέσεις

S_2 =σύνολο των (γραμμικών) παραμέτρων από τα συμπεράσματα

Το προσαρμοστικό δίκτυο έχει μία έξοδο που αναπαριστάται ως:

$$O = F(i, S) \quad (5.26)$$

όπου i είναι το διάνυσμα των μεταβλητών εισόδου, S είναι το σύνολο των παραμέτρων, και F είναι η συνολική συνάρτηση που εφαρμόζεται από το προσαρμοστικό δίκτυο.

$$S = S_1 \oplus S_2 \quad (5.27)$$

Οι $H(\cdot)$ και $F(\cdot)$ είναι η ταυτοτικές συναρτήσεις και η συνάρτηση του FIS αντίστοιχως στην εξίσωση η $H \circ F$ είναι γραμμική στα στοιχεία του S_2 , τότε εφαρμόζοντας την H στην εξίσωση (5.26), προκύπτει ότι $H(o) = H \circ F(Bi, S)$.

Το \oplus αντιπροσωπεύει την άμεση άθροιση (direct sum)

Η $H(\cdot)$ είναι η ταυτοτική συνάρτηση και η $F(\cdot, \cdot)$ είναι η συνάρτηση του συστήματος ασαφούς συμπερασμού αντίστοιχα. Κατά συνέπεια, ο υβριδικός αλγόριθμος μάθησης που αναπτύχθηκε παραπάνω μπορεί να εφαρμοστεί άμεσα. Αναλυτικότερα, όπως συμβαίνει και στα νευρωνικά δίκτυα, θα ξεχωρίσουν δύο φάσεις στη διαδικασία εκπαίδευσης:

- Πέρασμα προς τα εμπρός (forward pass): Στη φάση αυτή το σήμα εισόδου διαδίδεται από το επίπεδο 1 μέχρι το επίπεδο 4 και οι παράμετροι (p_i, q_i, r_i) $i = 1, 2$ εκτιμούνται με τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων.
- Πέρασμα προς τα πίσω (backward pass): Στη φάση αυτή έχοντας μία ένδειξη του λάθους πραγματοποιείται μία διόρθωση κατά μία ποσότητα που ορίζεται από τη μέθοδο της βαθμωτής κατάβασης (Gradient Descent), των μεταβλητών a_i, b_i, c_i

Το ANFIS διασπά το σύνολο των παραμέτρων του σε δύο υποσύνολα, εκ των οποίων το ένα αποτελεί γραμμικό σύνολο παραμέτρων και, επομένως, είναι δυνατόν να εκπαιδευτεί με γραμμικούς αλγόριθμους, όπως η μέθοδος των ελαχίστων τετραγώνων (least squared). Οι γραμμικοί αλγόριθμοι μάθησης

επιτυγχάνουν συνολικά ελάχιστα (global minimums) της συνάρτησης κόστους στο χώρο των παραμέτρων τους και είναι αποδοτικοί από πλευράς απαιτούμενου υπολογιστικού χρόνου. Το δεύτερο υποσύνολο παραμέτρων εκπαιδεύεται με αλγόριθμους που μπορούν να δημιουργήσουν μη-γραμμικές απεικονίσεις, όπως η βαθμωτή κατάβαση (gradient descent). Οι αλγόριθμοι αυτοί είναι απαιτητικοί από πλευράς απαιτούμενου χρόνου εκπαίδευσης και δεν υπάρχει εγγύηση για την πραγματοποίηση του συνολικού ελαχίστου της συνάρτησης κόστους στον χώρο των παραμέτρων τους. Ο αλγόριθμος μάθησης του ANFIS συνδυάζει περάσματα προς τα εμπρός και προς τα πίσω. Στο πέρασμα εμπρός γίνεται η μάθηση του συνόλου των γραμμικών παραμέτρων και στο πέρασμα προς τα πίσω γίνεται η προσαρμογή των μη-γραμμικών αντίστοιχα. Στον παρακάτω πίνακα 5.3.1 συνοψίζονται οι δραστηριότητες του κάθε περάσματος.

	Εμπροσθόδρομο πέρασμα	Οπισθόδρομο πέρασμα
Παράμετροι των προϋποθέσεων	Προκαθορισμένες (αμετάβλητες)	Βαθμωτή φθίνουσα μέθοδος
Παράμετροι των συμπερασμάτων	Εκτιμήτρια ελαχίστων τετραγώνων	Προκαθορισμένες (αμετάβλητες)
Σήματα	Έξοδοι των κόμβων	Σήματα σφάλματος

Πίνακας 5.1 Δραστηριότητες κατά την εκπαίδευση

Το πλεονέκτημα της μεθόδου έγκειται στο γεγονός της ύπαρξης τόσο γραμμικών όσο και μη γραμμικών μεθόδων, που την καθιστά ταχύτερη από τα κλασικά νευρωνικά δίκτυα. Οι παράμετροι των συμπερασμάτων που ευρίσκονται με αυτόν τον τρόπο, είναι βέλτιστες υπό την προϋπόθεση ότι οι παράμετροι των προϋποθέσεων είναι προκαθορισμένες (αμετάβλητες). Αναλόγως, η υβριδική προσέγγιση συγκλίνει πολύ γρηγορότερα μιας και μειώνει τις διαστάσεις του διαστήματος αναζήτησης της αρχικής καθαρής μεθόδου οπισθόδρομης διάδοσης.

Μέχρι τώρα χρησιμοποιούσαμε προκαθορισμένες και αυθαίρετα επιλεγμένες συναρτήσεις συμμετοχής. Πολλές φορές έχουμε μια συλλογή από δεδομένα εισόδου / εξόδου και δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε ένα προκαθορισμένο μοντέλο βασισμένο στα στοιχεία αυτά ώστε να ξέρουμε ποιες συναρτήσεις συμμετοχής και

με ποιες παραμέτρους να χρησιμοποιήσουμε. Τότε μπορούμε να βοηθηθούμε από το ANFIS, ώστε να βρούμε τις καταλληλότερες συναρτήσεις συμμετοχής.

Οι νεύρο-προσαρμοστικές τεχνικές είναι αρκετά απλές. Έτσι παρέχεται μια μέθοδος ώστε το ασαφές μοντέλο να εκπαιδευτεί με τις πληροφορίες που του δίνει το σύνολο των δεδομένων, ώστε να υπολογιστούν οι παράμετροι των συναρτήσεων συμμετοχής με σκοπό την εύρεση του καλύτερου τρόπου ώστε να επιτρέπει στο σύστημα εξαγωγής συμπερασμάτων να ανιχνεύει τα δεδομένα εισόδου/ εξόδου. Η μέθοδος αυτή είναι παρόμοια με αυτή των νευρωνικών δικτύων.

Η προσαρμογή των παραμέτρων των συναρτήσεων συμμετοχής από ένα ANFIS γίνεται με αλγόριθμους εκμάθησης είτε μόνο back propagation είτε με έναν υβριδικό αλγόριθμο, συνδυασμό back propagation και μεθόδου ελαχίστων τετραγώνων.

Ο υπολογισμός των παραμέτρων αυτών, που αλλάζουν κατά τη διάρκεια της διαδικασίας εκμάθησης, διευκολύνεται από ένα βαθμωτό διάνυσμα που μας δείχνει πόσο καλά το FIS μοντελοποιεί τα δεδομένα εισόδου/ εξόδου για το εν λόγω σύνολο παραμέτρων. Μόλις αποκτήσουμε το βαθμωτό διάνυσμα μπορούμε να εφαρμόσουμε κάποιον από τους πολλούς αλγόριθμους βελτιστοποίησης, για να βελτιώσουμε αυτές τις παραμέτρους, ούτως ώστε να μειώσουμε το μέγεθος του σφάλματος (συνήθως το άθροισμα των τετραγώνων των διαφορών μεταξύ πραγματικών και επιθυμητών τιμών) [29].

5.5.5 Περιορισμοί Του ANFIS

Οι κυριότεροι περιορισμοί του ANFIS που αναφέρονται στην διεθνή βιβλιογραφία είναι:

- Βασίζεται σε ένα FIS τύπου Sugeno.
- Έχει μια έξοδο, που λαμβάνεται με τη μέθοδο αποσαφοποίησης σταθμισμένου μέσου. Όλες οι συναρτήσεις συμμετοχής εξόδου πρέπει να είναι ίδιου τύπου, είτε γραμμικές είτε σταθερές.
- Δεν μπορεί να γίνεται κοινή χρήση κανόνων. Διαφορετικοί κανόνες δεν μπορούν να έχουν την ίδια συνάρτηση συμμετοχής εξόδου.
- Πρέπει να υπάρχουν βάρη σε κάθε κανόνα.
- Δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί οποιαδήποτε συνάρτηση συμμετοχής, παρά μόνο προκαθορισμένες που επιβάλλουν οι ορισμοί του ANFIS.

5.6 Εφαρμογή του μοντέλου

Η εφαρμογή του νευρο-ασαφούς μοντέλου έγινε στο Matlab, κάνοντας χρήση του fuzzy logic toolbox, το οποίο περιέχει όλα τα απαραίτητα εργαλεία για την ολοκληρωμένη ανάπτυξη και αναλυτική χρήση ενός Προσαρμοστικού Νεύρο-Ασαφούς Συστήματος Συμπερασμού (Adaptive Neural Fuzzy Inference, ANFIS).

5.6.1 Επιλογή εισόδων

Αρχίζοντας το σχεδιασμό του νευρο-ασαφούς συστήματος, πρέπει να ορίσουμε τον αριθμό και το είδος των εισόδων. Στην πιο απλή περίπτωση, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις δύο τελευταίες τιμές, για πρόβλεψη του επόμενου βήματος, δηλαδή:

$$\text{είσοδοι: } (\tau-1), (\tau-2) \rightarrow \text{έξοδος: } (\tau)$$

Σε αυτή τη βασική δομή μπορούμε να προσθέσουμε επιπλέον εισόδους, προσέχοντας πάντα το κέρδος, που εκφράζεται σε μείωση του σφάλματος, να είναι σημαντικό σε σχέση με την αύξηση της πολυπλοκότητας του συστήματος.

$$\text{είσοδοι: } (\tau-1), (\tau-2), \dots, (\tau-n) \rightarrow \text{έξοδος: } (\tau)$$

Σαν μια διαφορετική προσέγγιση για την επιλογή των εισόδων θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε τιμές που θεωρούμε ότι σχετίζονται, στατιστικά, με κάποιο τρόπο με την έξοδο του συστήματος. Για παράδειγμα, στο παραπάνω απλό σενάριο, θεωρούμε ότι οι πλέον πρόσφατες παρατηρήσεις για την τιμή της ταχύτητας του ανέμου, περιέχουν αρκετή πληροφορία για την επόμενη τιμή. Μια τέτοια πληροφορία μπορούμε να αντλήσουμε από τα διαγράμματα των συσχετίσεων και των μερικών αυτοσυσχετίσεων. Αν παρατηρήσουμε κάποια στατιστικά σημαντική τιμή, έστω h , τότε οι είσοδοι μπορεί να είναι:

$$\text{είσοδοι: } (\tau-1), (\tau-2), \dots, (\tau-n), (\tau-h) \rightarrow \text{έξοδος: } (\tau)$$

Σε κάθε περίπτωση θα πρέπει να εξασφαλίζουμε πως η αύξηση του αριθμού των εισόδων, που μεταφράζεται σε αύξηση της πολυπλοκότητας του συστήματος, επιφέρει ανάλογη μείωση του σφάλματος.

5.6.2 Εκπαίδευση και προβλέψεις

Έχοντας ορίσει τον επιθυμητό αριθμό και το είδος των εισόδων και των εξόδων, δημιουργούμε τα κατάλληλα υποδείγματα εισόδων και επιθυμητών εξόδων, που θα χρησιμοποιηθούν για την εκπαίδευση του μοντέλου. Από κάθε χρονοσειρά, χρησιμοποιούμε, όπως και στις προηγούμενες περιπτώσεις, ένα σύνολο σημείων για την εκπαίδευση του συστήματος και ένα άλλο για τον έλεγχο της προβλεπτικής του ικανότητας.

Στη συνέχεια δημιουργούμε ένα ANFIS, με τη βοήθεια του fuzzy logic toolbox, το οποίο υπολογίζει τις καταλληλότερες παραμέτρους των συναρτήσεων συμμετοχής (MF parameters). Ορίζουμε τις παραμέτρους εκπαίδευσης και αφού ολοκληρωθεί η εκπαίδευση του συστήματος χρησιμοποιούμε τα δεδομένα ελέγχου για να αξιολογήσουμε το μοντέλο. Σε κάθε περίπτωση, όταν εκπαιδεύουμε ένα μοντέλο, δοκιμάζουμε αρκετούς συνδυασμούς παραμέτρων (MFs, epochs, step size), με σκοπό την επίτευξη μικρότερου σφάλματος.

Έχοντας εκπαιδεύσει το μοντέλο, προχωρούμε στη διενέργεια προβλέψεων εκτός δείγματος (test set). Δεδομένου ότι το μοντέλο μας έχει την ικανότητα να κάνει μια πρόβλεψη, χρησιμοποιώντας πραγματικές παρελθοντικές τιμές, οδηγούμαστε σε διαφορετικά σενάρια.

σενάριο 1^ο

Σε αυτή την περίπτωση χρησιμοποιούμε τις τελευταίες παρατηρήσεις της χρονοσειράς για τη διενέργεια της πρώτης πρόβλεψης. Για τις επόμενες προβλέψεις χρησιμοποιούμε σαν εισόδους, εφόσον αυτό είναι απαραίτητο, τις τιμές που έχουμε ήδη προβλέψει. Έστω για παράδειγμα ότι το σχήμα εκπαίδευσης που ακολουθεί το μοντέλο μας είναι $(t-2), (t-1) \rightarrow (t)$. Αυτό σημαίνει πως το σύστημά μας εκπαιδεύεται να εκφράζει κάθε τιμή t με τις αμέσως δύο προηγούμενές της. Έστω ότι θέλουμε να κάνουμε 20 προβλέψεις και οι τελευταία γνωστή τιμή είναι η $t-1$, τότε:

$$(t-2), (t-1) \rightarrow (t) \quad , \quad 1^{\text{η}} \text{ πρόβλεψη}$$

Για να κάνουμε την πρόβλεψη (t+1) θα χρησιμοποιήσουμε την πρώτη πρόβλεψη (t) και την τιμή (t-1).

$$(t-1), (t) \rightarrow (t+1) \text{ , } 2^{\text{η}} \text{ πρόβλεψη}$$

Στην 2^η πρόβλεψη, η πρώτη είσοδος είναι γνωστή πραγματική τιμή και η δεύτερη είναι πρόβλεψη. Μετά την 2^η πρόβλεψη, και οι δύο είσοδοι είναι προβλέψεις που έχουμε ήδη κάνει.

Το παραπάνω σενάριο θα δώσει προβλέψεις που ελπίζουμε να είναι ικανοποιητικές, εφόσον το σφάλμα που μετρήσαμε κατά την εκπαίδευση είναι μικρό. Σε περίπτωση που το σφάλμα είναι μεγάλο θα περάσει από πρόβλεψη σε πρόβλεψη και θα αυξάνεται εκθετικά με αποτέλεσμα σε κάποιο βήμα να αποκλίνει σημαντικά από τις σωστές προβλέψεις.

σενάριο 2^ο

Μια ακόμα προσέγγιση, για τη διενέργεια προβλέψεων, θα ήταν να εκπαιδεύσουμε το μοντέλο ανάλογα με τον αριθμό των προβλέψεων που θέλουμε να κάνουμε και στη συνέχεια να χρησιμοποιήσουμε γνωστές παρελθοντικές τιμές σαν είσοδο. Έστω ότι θέλουμε να κάνουμε 20 προβλέψεις, το προηγούμενο παράδειγμα θα είχε ως εξής:

- Το μοντέλο εκπαιδεύεται βάσει του σχήματος $(t-[2+20], (t-[1+20])) \rightarrow (t)$.

$$(t-22), (t-21) \rightarrow (t) \text{ , } 1^{\text{η}} \text{ πρόβλεψη}$$

$$(t-21), (t-20) \rightarrow (t+1) \text{ , } 2^{\text{η}} \text{ πρόβλεψη}$$

$$(t-20), (t-19) \rightarrow (t+2) \text{ , } 3^{\text{η}} \text{ πρόβλεψη}$$

...

....

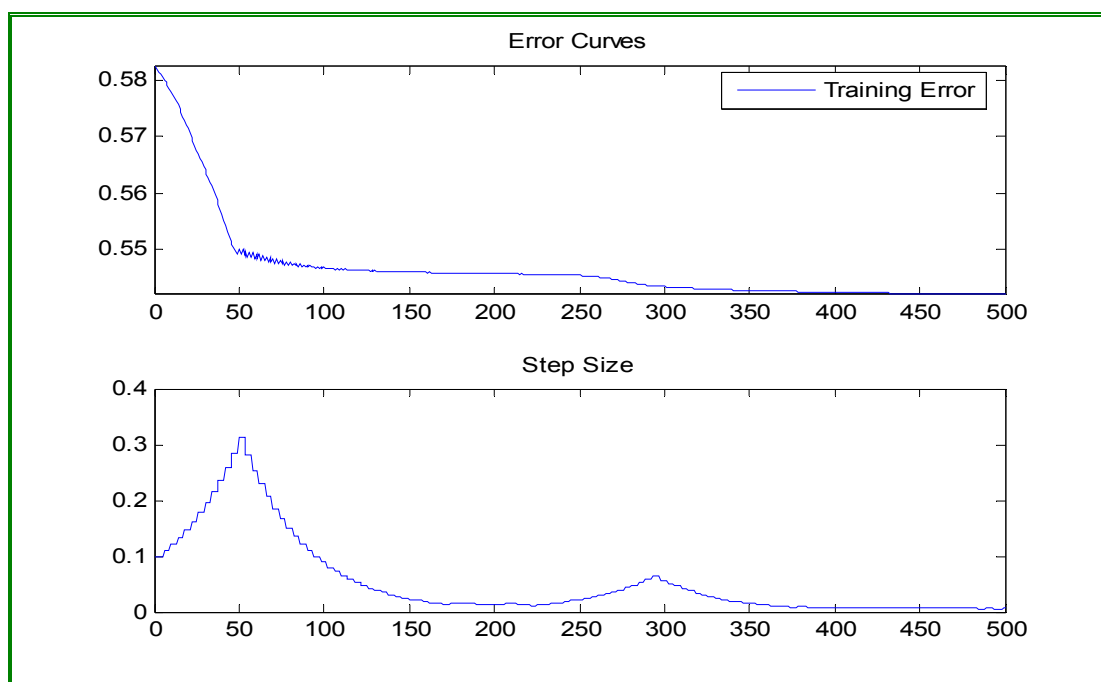
$$(t-2), (t-1) \rightarrow (t+24) \text{ , } 20^{\text{η}} \text{ πρόβλεψη}$$

Τα παραπάνω σενάρια μπορούν να συνδυαστούν και να δώσουν διάφορα άλλα για το τελικό σχήμα της πρόβλεψης. Για την τελική επιλογή λαμβάνουμε υπόψιν μας τόσο το σφάλμα πρόβλεψης, όσο και την υπολογιστική ισχύ που απαιτείται για την εφαρμογή του κάθε σεναρίου.

5.6.3 Αποτελέσματα εφαρμογής

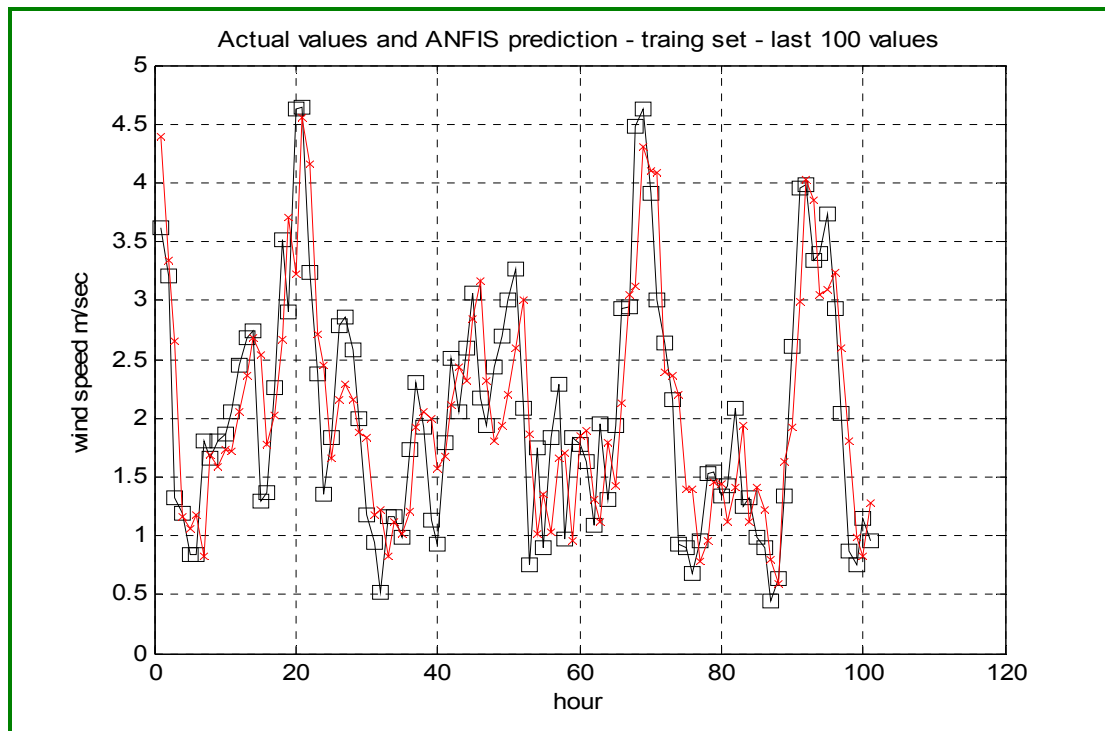
Έχοντας εξετάσει διάφορους συνδυασμούς εισόδων, συναρτήσεων συμμετοχής και μεγέθους βήματος, επιλέγουμε τον βέλτιστο. Στα γραφήματα θα παρουσιάσουμε το μοντέλο που έδωσε καλύτερα αποτελέσματα και θα το συγκρίνουμε με τα αποτελέσματα που μας έδωσαν άλλοι συνδυασμοί.

Στο σχήμα 5.34 παρουσιάζονται δύο ξεχωριστές γραφικές παραστάσεις, η πρώτη με το όνομα “error curves” και η δεύτερη με το όνομα “step sizes”. Στην πρώτη γραφική παράσταση απεικονίζονται τα σφάλματα εκπαίδευσης και ελέγχου (ως τη ρίζα του μέσου τετραγωνικού σφάλματος-RMSE) συναρτήσεως του αριθμού των επαναλήψεων (epochs). Στη δεύτερη γραφική παράσταση σχεδιάζουμε την καμπύλη του μεγέθους βήματος συναρτήσεως των εποχών. Αυτό μας βοηθάει να προσαρμόσουμε το αρχικό μέγεθος βήματος στο βέλτιστο, βλέποντας τους αντίστοιχους ρυθμούς μείωσης και αύξησης, πάνω στο σχήμα.

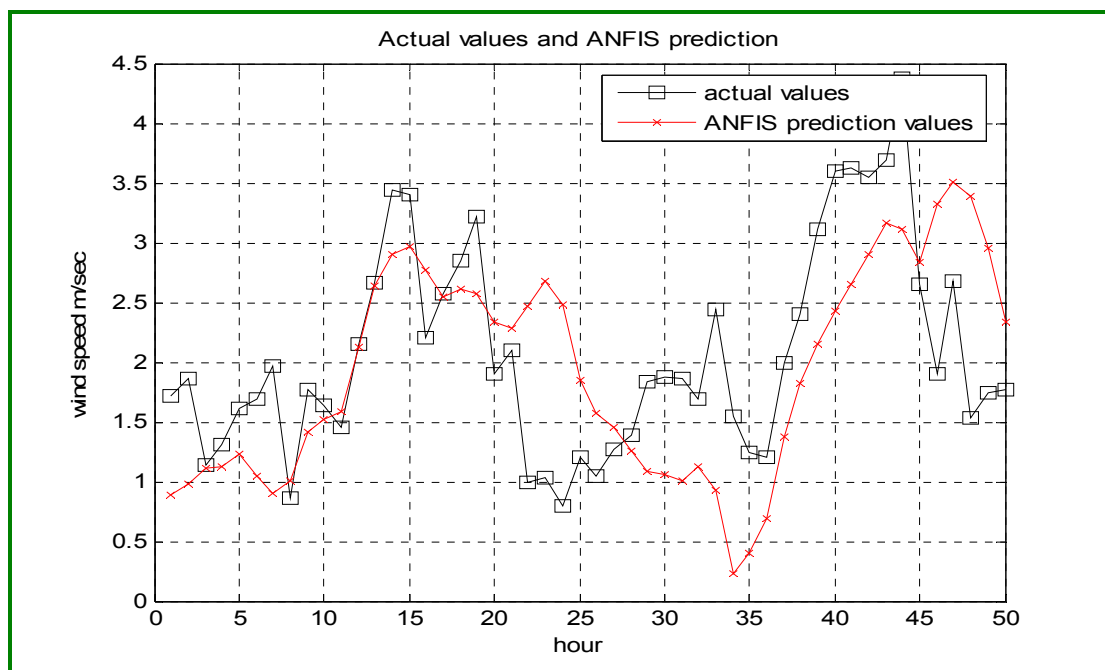


Σχήμα 5.34 Σφάλμα εκπαίδευσης και μέγεθος βήματος Χ.Σ.2

Εν συνέχεια αξιολογούμε το ANFIS συγκρίνοντας τα αποτελέσματα του ως προς τα επιθυμητά αποτελέσματα της πρόβλεψης.

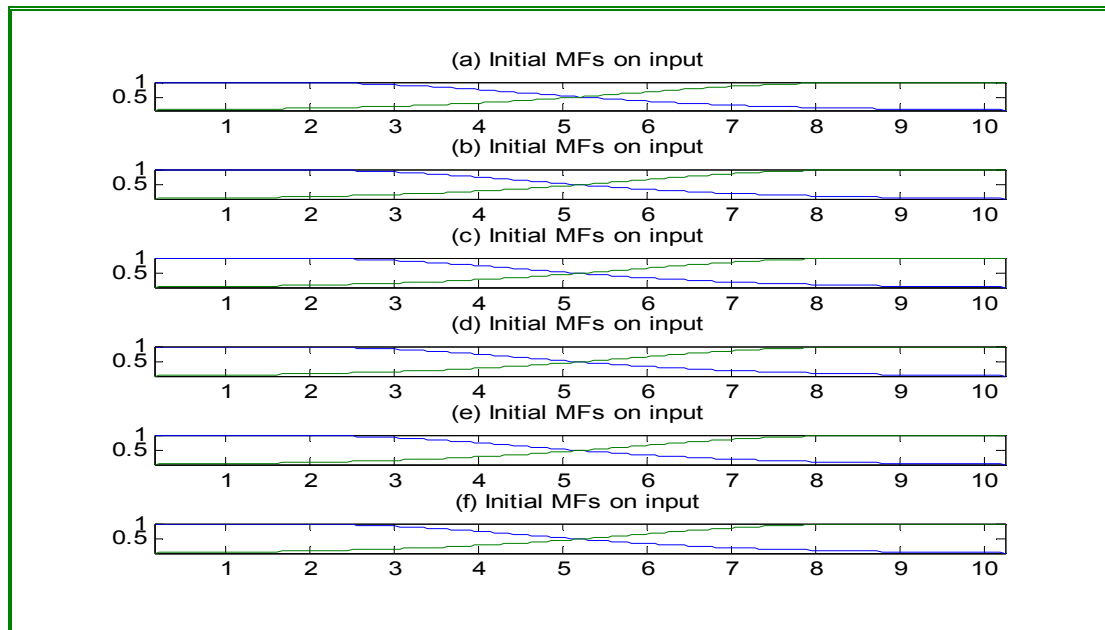


Σχήμα 5.35 Προβλέψεις του ANFIS έναντι των πραγματικών τιμών (100 τελευταίες τιμές) για το training set Χ.Σ.2.

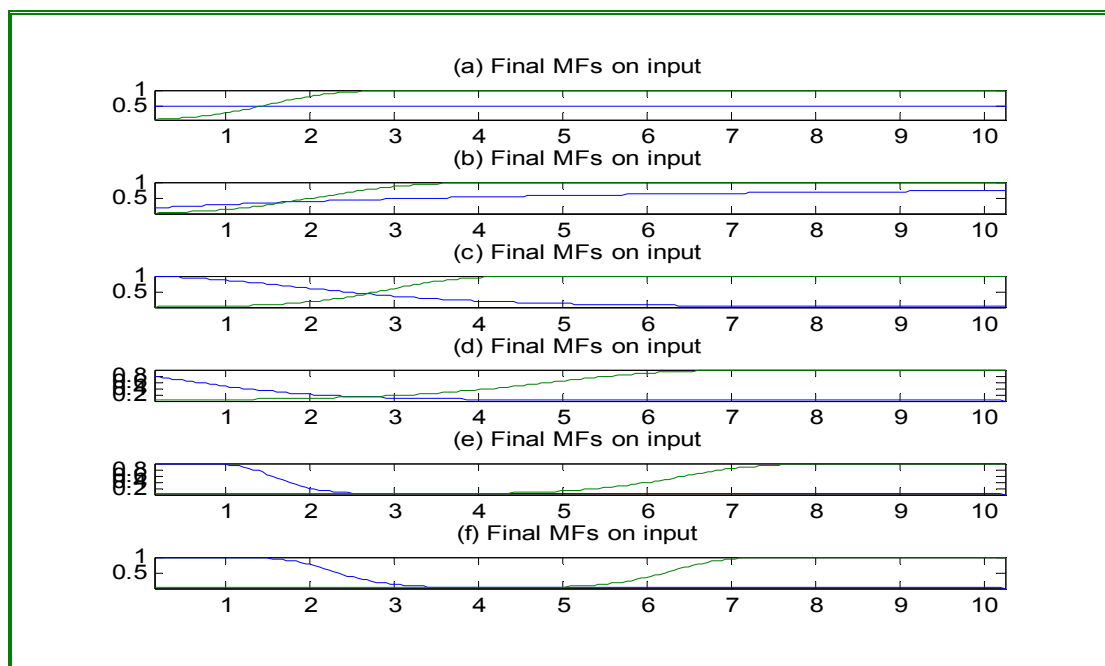


Σχήμα 5.36 Προβλέψεις του ANFIS έναντι των πραγματικών τιμών για το test set Χ.Σ.2.

Τις αρχικές συναρτήσεις συμμετοχής που προέκυψαν από την προσαρμογή των παραμέτρων τους με τη βοήθεια του ANFIS τις παρουσιάζουμε στο σχήμα 5.37 με τίτλο “initial MFs” και τις τελικές συναρτήσεις συμμετοχής που προέκυψαν μετά την εκπαίδευση του μοντέλου ANFIS τις παρουσιάζουμε στο σχήμα με 5.38 με τίτλο “final MFs”.

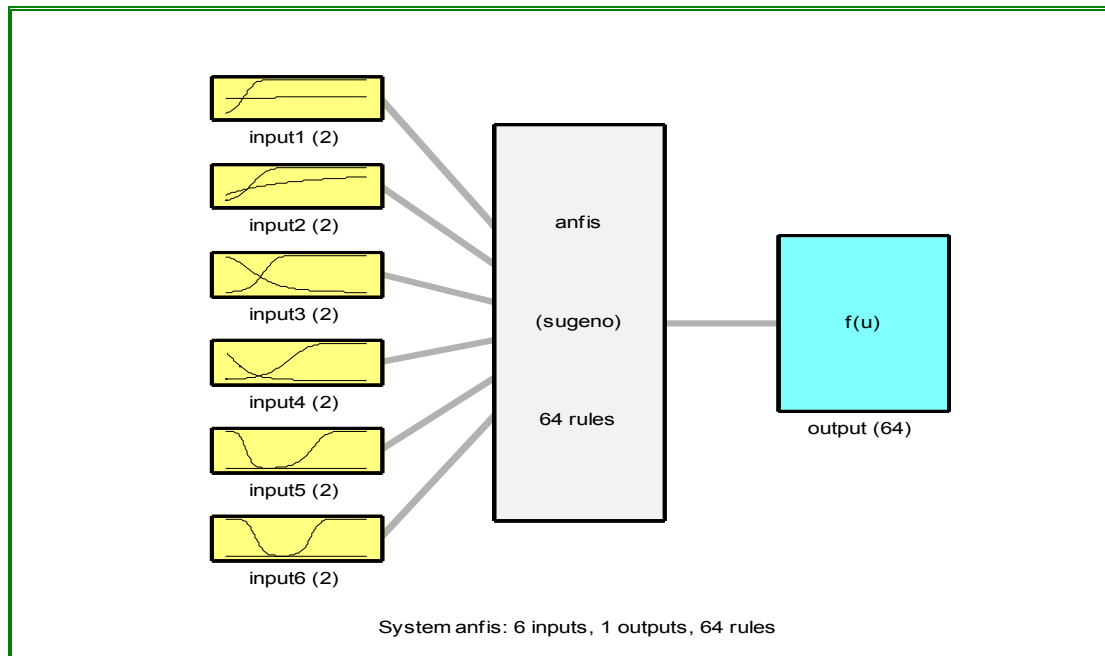


Σχήμα 5.37 Αρχικές συναρτήσεις συμμετοχής

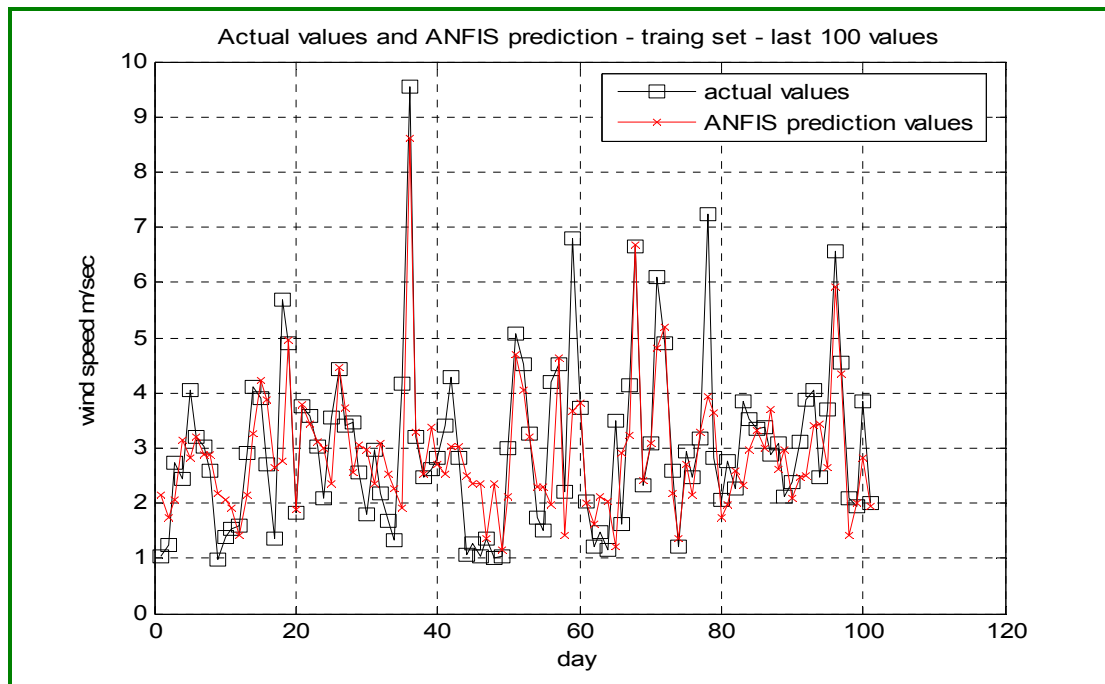


Σχήμα 5.38 Τελικές συναρτήσεις συμμετοχής

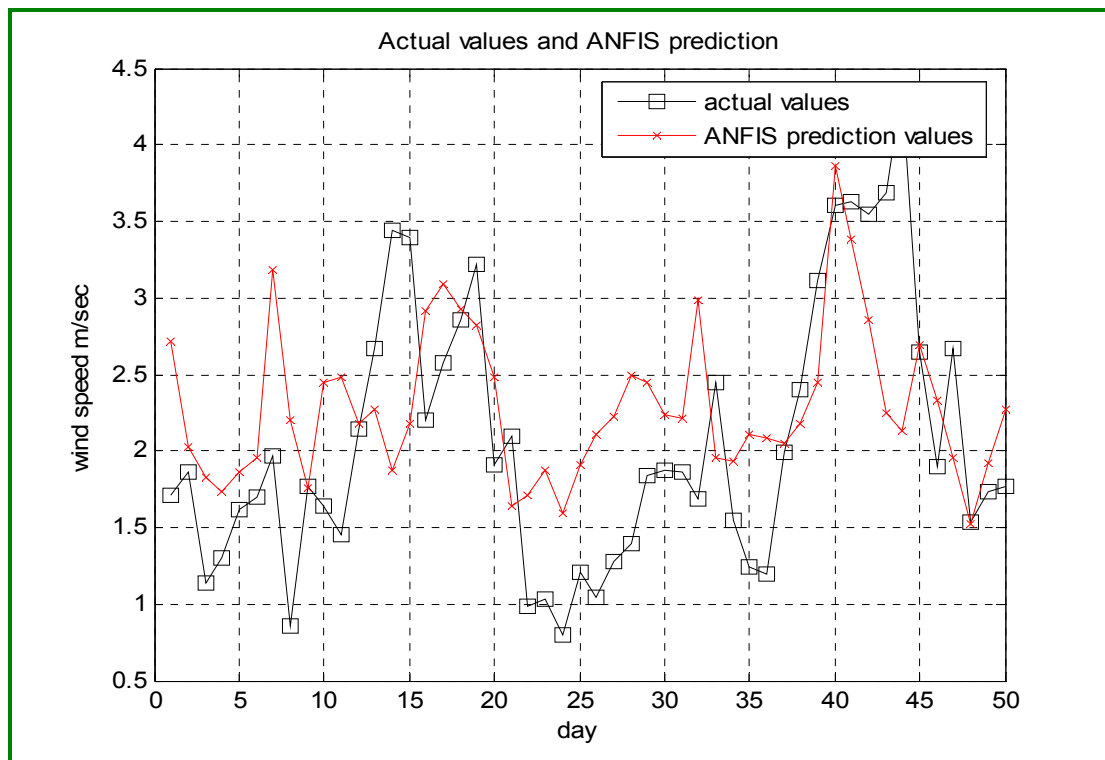
Στο σχήμα 5.39 παρουσιάζεται η δομή του ANFIS που χρησιμοποιήθηκε. Διακρίνονται οι είσοδοι με τις συναρτήσεις συμμετοχής, ο μηχανισμός συμπερασμού με τους κανόνες και η έξοδος του συστήματος.



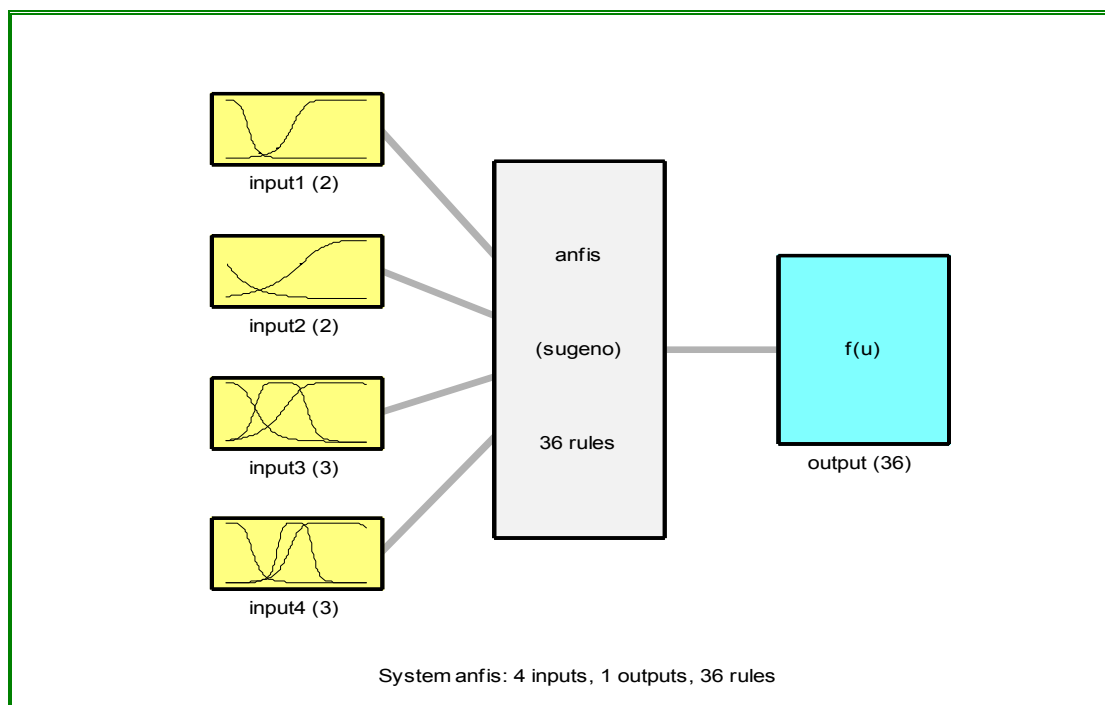
Σχήμα 5.39: Παρουσίαση της τελικής δομής του ANFIS Χ.Σ.2.



Σχήμα 5.40 Προβλέψεις του ANFIS έναντι των πραγματικών τιμών (100 τελευταίες τιμές) για το training set Χ.Σ.1.



Σχήμα 5.41 Προβλέψεις του ANFIS έναντι των πραγματικών τιμών για το test set Χ.Σ.1.



Σχήμα 5.42: Παρουσίαση της τελικής δομής του ANFIS Χ.Σ.1.

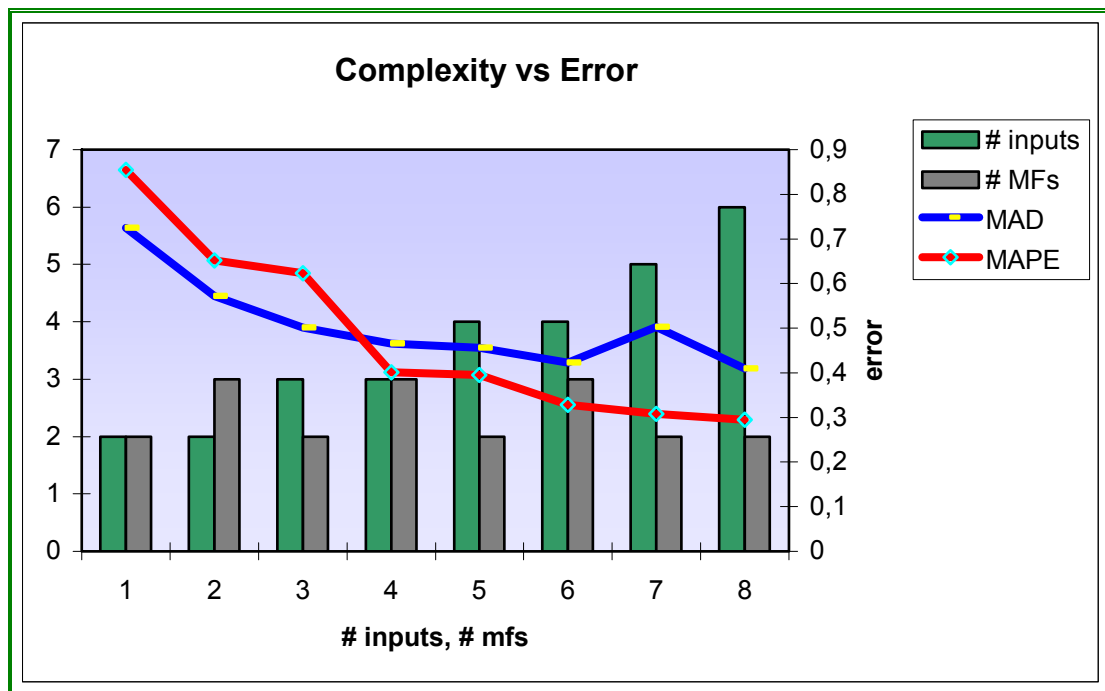
Στους επόμενους πίνακες παρουσιάζονται τα αποτελέσματα για διάφορους συνδυασμούς παραμέτρων στο νευρό-ασαφές σύστημα. Στα διαγράμματα που ακολουθούν γίνεται φανερό πως κυμαίνεται το σφάλμα ανάλογα με την πολυπλοκότητα του συστήματος. Η πολυπλοκότητα μεταφράζεται, όπως αναφέραμε και προηγουμένως, σε υπολογιστική ισχύ και αφορά στον αριθμό των εισόδων, στο πλήθος των δεδομένων, στον αριθμό συναρτήσεων σε κάθε είσοδο και στον αριθμό των εποχών εκπαίδευσης.

<i>MFs</i>	#	#	<i>scen</i>	<i>Training Set</i>			<i>Test Set</i>		
	<i>inputs</i>	<i>epochs</i>	<i>ario</i>	<i>MSE</i>	<i>MAE</i>	<i>MAPE</i>	<i>MSE</i>	<i>MAE</i>	<i>MAPE</i>
gauss2mf	2 (2)	10000	1	1.090	0.756	30.41	1.523	1.234	56.14
trapmf	2 (2)	10000	2	1.597	0.929	38.48	1.616	1.107	58.98
gbellmf	3 (3)	5000	1	0.914	0.687	28.21	1.573	1.011	46.84
gbellmf	3 (4)	5000	2	1.396	0.867	35.81	1.645	1.099	61.79
gbellmf	4 (2)	1000	1	0.769	0.638	23.50	1.433	1.010	47.60
gbellmf	4 (2)	1000	2	1.243	0.809	33.34	1.567	1.025	56.52

Πίνακας 5.2 Σύγκριση διαφόρων μοντέλων χρονοσειρά 1. Όπου (*), ο αριθμός συναρτήσεων για κάθε είσοδο.

<i>MFs</i>	#	#	<i>scen</i> <i>ario</i>	<i>Training Set</i>			<i>Test Set</i>		
	<i>inputs</i>	<i>epochs</i>		<i>MSE</i>	<i>MAE</i>	<i>MAPE</i>	<i>MSE</i>	<i>MAE</i>	<i>MAPE</i>
gauss2mf	2 (4)	10000	1	0.622	0.572	30.95	0.454	0.521	28.83
pimf	2 (3)	10000	2	1.957	1.122	79.00	0.788	0.670	40.53
gauss2mf	3 (3)	5000	1	0.401	0.465	29.14	0.595	0.613	29.69
gbellmf	3 (3)	1000	2	1.707	1.034	73.01	0.756	0.724	43.23
gauss2mf	4 (3)	1000	1	0.328	0.423	27.32	0.620	0.634	30.34
psigmf	4 (3)	1000	2	1.508	0.965	66.07	0.753	0.736	42.36
gauss2mf	5 (2)	500	1	0.308	0.411	26.49	0.557	0.617	30.11
gbellmf	5 (2)	500	2	1.256	0.703	55.73	0.720	0.689	38.67
gauss2mf	6 (2)	200	1	0.295	0.409	26.57	0.661	0.669	36.42
gbellmf	6 (2)	200	2	0.952	0.651	48.65	0.713	0.624	38.93

Πίνακας 5.3 Σύγκριση διαφόρων μοντέλων χρονοσειρά 2. Όπου (*), ο αριθμός συναρτήσεων για κάθε είσοδο.



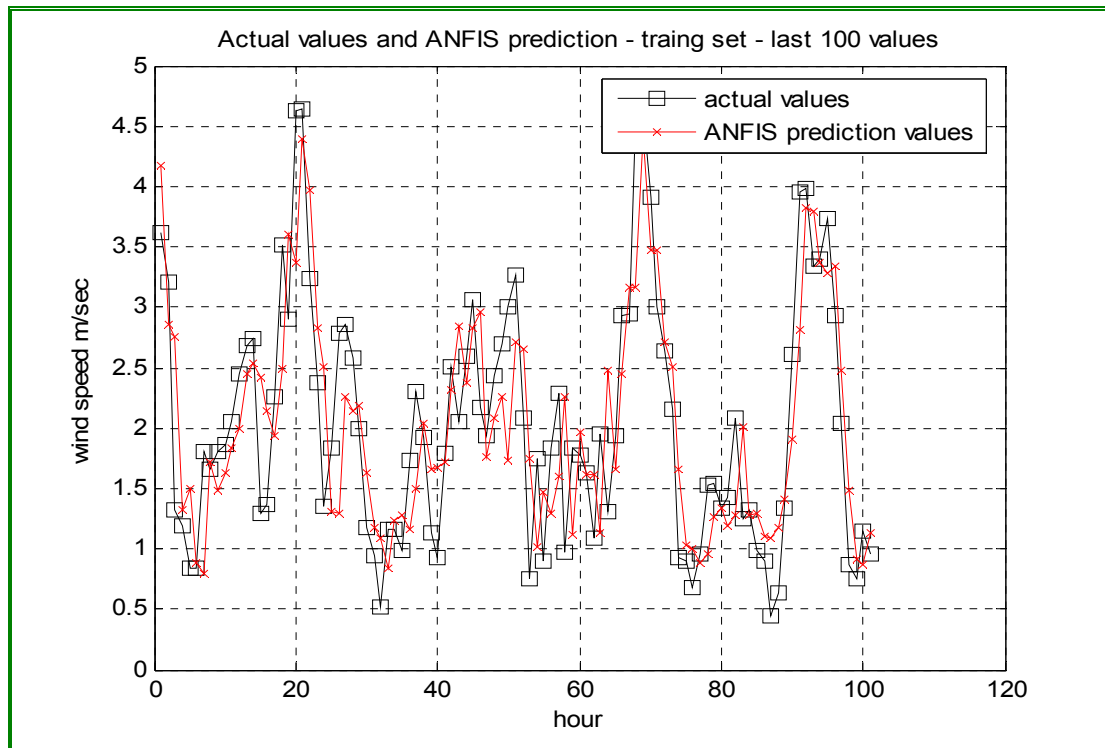
Σχήμα 5.42 Πολυπλοκότητα του συστήματος και δείκτες σφαλμάτων.

Αξίζει τέλος να σημειώσουμε πως στο νευρό-ασαφές σύστημα μπορούν να χρησιμοποιηθούν δεδομένα εισόδου για την εκπαίδευση, που δεν προέρχονται από την ίδια τη χρονοσειρά. Για παράδειγμα, για μια χρονοσειρά A , θεωρούμε ένα σύστημα που μας δίνει τις προβλέψεις A_p της χρονοσειράς, με τη χρήση κατάλληλου ARMA, και τις προβλέψεις A_n , με τη χρήση μη-γραμμικών μεθόδων. Οι χρονοσειρές (A_p, A_n) μπορούν να χρησιμοποιηθούν σαν είσοδοι για την εκπαίδευση του συστήματος.

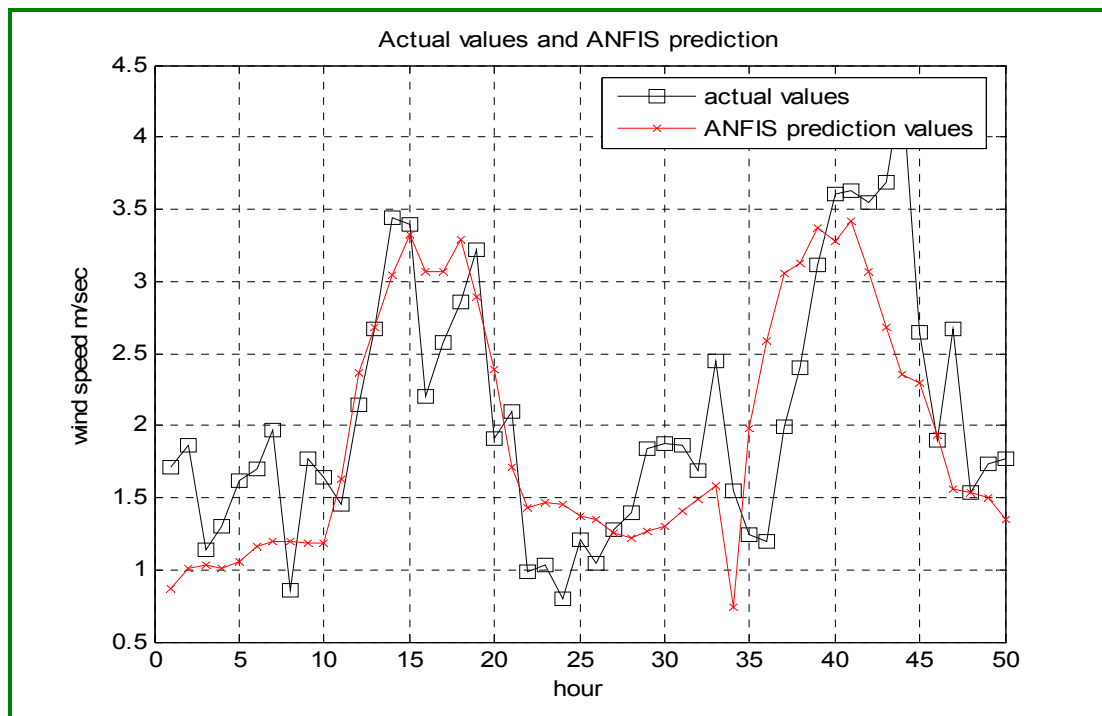
Παρακάτω ακολουθούν τα αποτελέσματα που έδωσε το σύστημα, για τη Χ.Σ.2, με χρήση τριών εισόδων (δύο προβλέψεις από ARMA μοντέλα και μία από τη μη-γραμμική ανάλυση). Γίνεται φανερό πως το σύστημα επιτυγχάνει σημαντική μείωση του σφάλματος σε σχέση με τις προηγούμενες προσεγγίσεις. Θα μπορούσαμε να πούμε πως το σφάλμα μειώνεται έως και 50% σε σχέση με το σφάλμα κάθε εισόδου (προβλέψεις άλλων μοντέλων).

	Training Set			Test Set		
	MSE	MAE	MAPE	MSE	MAE	MAPE
Input 1 <i>ARIMA (1,0,6) (1,1,4)</i>	0.598	0.551	28.62	0.362	0.481	27.29
Input 2 <i>ARIMA (1,0,6) (1,1,6)</i>	0.610	0.556	28.32	0.667	0.684	33.31
Input 3 <i>Non-linear Analysis</i>	0.581	0.565	33.97	0.653	0.631	30.93
Output <i>Anfis</i>	0.277	0.390	25.52	0.396	0.505	27.43

Πίνακας 5.4 Εκπαίδευση του ANFIS με εισόδους, προβλέψεις για τη χρονοσειρά 2.



Σχήμα 5.43 Προβλέψεις του ANFIS έναντι των πραγματικών τιμών (100 τελευταίες τιμές) για το training set Χ.Σ.2.

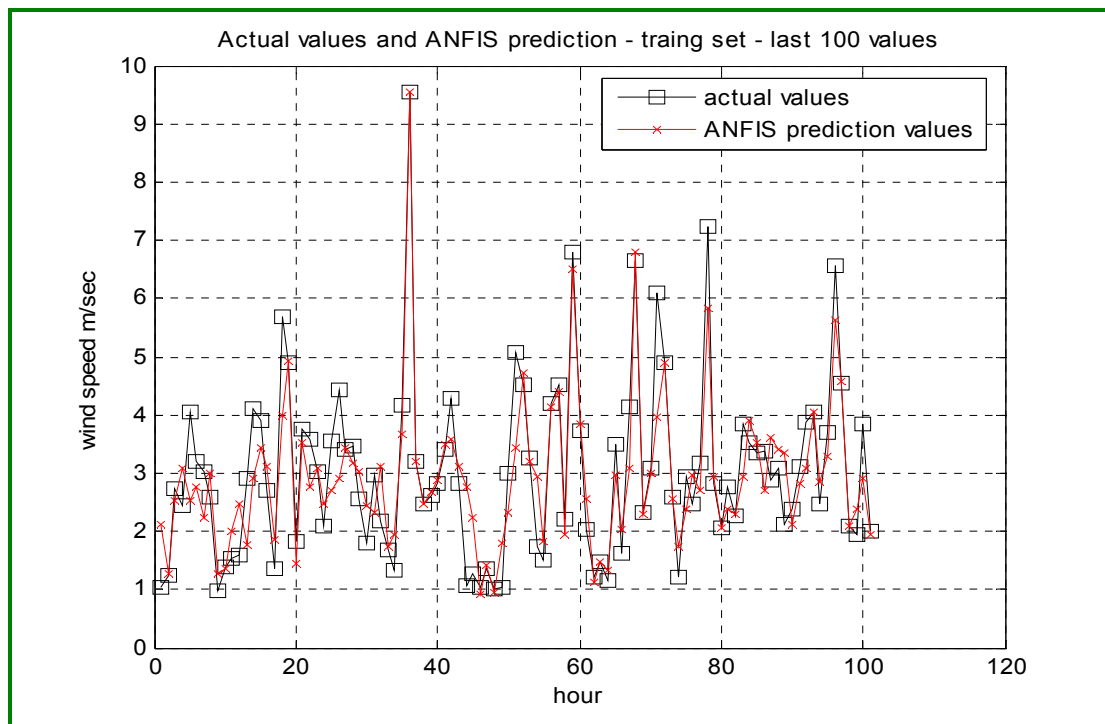


Σχήμα 5.44 Προβλέψεις του ANFIS έναντι των πραγματικών τιμών για το test set Χ.Σ.2.

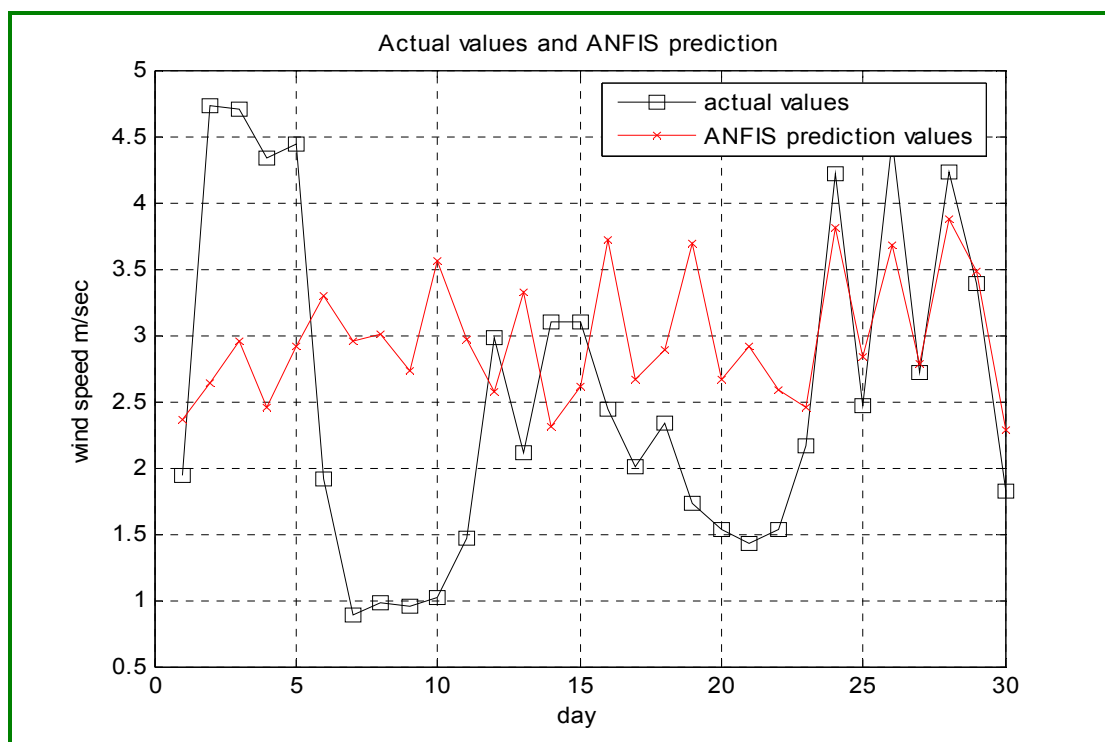
Εν συνεχεία ακολουθούν τα αποτελέσματα που έδωσε το σύστημα, για τη Χ.Σ.1, με χρήση τριών εισόδων (δύο προβλέψεις από ARMA μοντέλα και μία χρονική υστέρηση της ίδιας της χρονοσειράς). Γίνεται φανερό πως το σύστημα επιτυγχάνει σημαντική μείωση του σφάλματος σε σχέση με τις προηγούμενες προσεγγίσεις.

	Training Set			Test Set		
	MSE	MAE	MAPE	MSE	MAE	MAPE
Input 1 ARIMA (2,0,1) (1,0,0)	1.267	0.818	32.31	1.604	1.106	61.22
Input 2 ARIMA (2,0,1) (1,1,1)	1.279	0.811	31.66	1.645	1.129	65.69
Input 3 time shift (t-365)	---	---	---	---	---	---
Output Anfis	0.491	0.504	21.40	1.480	1.001	58.87

Πίνακας 5.5 Εκπαίδευση του ANFIS με εισόδους, προβλέψεις για τη χρονοσειρά 1.



Σχήμα 5.44 Προβλέψεις του ANFIS έναντι των πραγματικών τιμών (100 τελευταίες τιμές) για το training set Χ.Σ.1.



Σχήμα 5.45 Προβλέψεις του ANFIS έναντι των πραγματικών τιμών για το test set Χ.Σ.1.

6. ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΤΩΝ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΩΝ

Όπως αναφέραμε ήδη, στην εισαγωγή αυτής της εργασίας, ένας από τους σημαντικότερους παράγοντες που μπορούν να επηρεάσουν άμεσα τη παραγωγή και τη διαχείριση της ηλεκτρικής ενέργειας, η οποία παράγεται στους αιολικούς σταθμούς, είναι η στοχαστική φύση του ανέμου.

Στα προηγούμενα κεφάλαια, επιχειρήσαμε να διερευνήσουμε τη δυνατότητα πρόβλεψης της ταχύτητας του ανέμου σε μια συγκεκριμένη περιοχή, χρησιμοποιώντας τόσο τη θεωρία της στατιστικής ανάλυσης, γραμμικής και μη-γραμμικής, όσο και πιο προχωρημένες προσεγγίσεις, με χρήση νευρο-ασαφών συστημάτων συμπερασμού. Στις παραγράφους που ακολουθούν, παρουσιάζουμε συνοπτικά τα αποτελέσματα της κάθε κατηγορίας μεθόδων. Περισσότερες πληροφορίες για κάθε εφαρμογή, υπάρχουν στα αντίστοιχα κεφάλαια.

6.1 Γραμμική ανάλυση χρονοσειρών

Στο τρίτο κεφάλαιο, ασχοληθήκαμε με μεθόδους πρόβλεψης που στο σύνολό τους συνιστούν τη *γραμμική ανάλυση χρονοσειρών*. Πιο συγκεκριμένα η πρόβλεψη των μελλοντικών τιμών της μεταβλητής, σύμφωνα με τη γραμμική ανάλυση χρονοσειρών, μπορεί να προέλθει από τρεις κατηγορίες μεθόδων πρόβλεψης: την εκθετική εξομάλυνση, τη διάσπαση χρονοσειρών και την ανάλυση ARIMA.

Αρχικά εφαρμόσαμε ορισμένες από τις πλέον γνωστές μεθόδους εξομάλυνσης. Κύριο χαρακτηριστικό της εφαρμογής αυτών των μεθόδων είναι ότι μπορούμε, χωρίς μεγάλο υπολογιστικό βαθμό δυσκολίας, να διαμορφώσουμε εύκολα και σχετικά γρήγορα προβλέψεις για μια μεταβλητή, που προέρχονται από τη διαχρονική μελέτη του τρόπου δημιουργίας των τιμών της. Ένα πλεονέκτημα αυτών των μεθόδων είναι ότι μπορούν να χρησιμοποιηθούν ακόμη και για δείγματα παρατηρήσεων μικρού μεγέθους. Στους παρακάτω πίνακες παρουσιάζονται συνοπτικά τα αποτελέσματα της εφαρμογής των εν λόγω μεθόδων. Οι λεπτομέρειες των εφαρμογών παρουσιάζονται στην παράγραφο 3.3.7 .

ΜΕΘΟΔΟΣ	TRAINING SET			TEST SET		
	MSE	MAE	MAPE	MSE	MAE	MAPE
Διπλός Κινητός Μέσος	3.466	1.324	50.39	2.202	1.341	79.18
Διπλή Εκθ. Εξομάλυνση	1.689	0.922	34.77	4.184	1.703	64.87
Winters (multiplicative)	0.975	0.719	27.52	2.017	1.096	41.56
Winters (additive)	1.080	0.781	31.05	1.761	1.047	50.37
Μέσος όρος	1.675	0.960	39.69	1.501	1.068	57.20

Πίνακας 6.1 Σύνοψη αποτελεσμάτων μεθόδων εξομάλυνσης για τη χρονοσειρά 1.

ΜΕΘΟΔΟΣ	TRAINING SET			TEST SET		
	MSE	MAE	MAPE	MSE	MAE	MAPE
Διπλός Κινητός Μέσος	1.209	0.790	39.63	5.496	1.896	114.87
Διπλή Εκθ. Εξομάλυνση	1.305	0.871	48.94	0.981	0.718	32.10
Winters (multiplicative)	0.698	0.592	29.14	4.130	1.748	80.20
Winters (additive)	0.668	0.581	28.87	2.544	1.409	69.29
Μέσος όρος	3.318	1.388	88.68	1.161	0.959	63.86

Πίνακας 6.2 Σύνοψη αποτελεσμάτων μεθόδων εξομάλυνσης για τη χρονοσειρά 2.

Για να αξιολογήσουμε και να συγκρίνουμε τα παραπάνω αποτελέσματα, λαμβάνουμε υπόψιν μας τις τιμές και των τριών κριτηρίων (MSE, MAE, MAPE), τόσο για το τμήμα ελέγχου της χρονοσειράς (test set), όσο και για το τμήμα της προσαρμογής (training set). Το test set μας παρέχει την πληροφορία για το πόσο

τελικά απέδωσε η συγκεκριμένη μέθοδος σε πραγματικές προβλέψεις (προβλέψεις εκτός δείγματος). Βέβαια, μια τέτοια πληροφορία, από μόνη της, δεν αρκεί για να βγάλουμε χρήσιμα συμπεράσματα, καθώς θα θέλαμε να γνωρίζουμε σε ποιο βαθμό το συγκεκριμένο σύνολο τιμών ελέγχου (test set), μεροληπτεί στα αποτελέσματα. Για το λόγο αυτό, χρησιμοποιούμε τις τιμές σφαλμάτων του training set το οποίο θα μπορούσαμε να πούμε, πως παρέχει μια ένδειξη της τυχαιότητας των αποτελεσμάτων. Για παράδειγμα, μια μέθοδος που δίνει πολύ μικρούς δείκτες σφάλματος για το test set, αλλά πολύ μεγάλους για το training set, δε μπορεί να θεωρηθεί αξιόπιστη, αφού, στην ουσία, το training set μας δείχνει πόσο καλά η μέθοδος προσαρμόζεται και 'περιγράφει' τα δεδομένα μας.

Παρατηρώντας τον πίνακα 6.1 συμπεραίνουμε ότι η μέθοδος που δίνει καλύτερα αποτελέσματα για την πρώτη χρονοσειρά (ημερήσια δεδομένα), είναι η πολλαπλασιαστική μέθοδος του Winters. Από τον πίνακα 6.2 καταλήγουμε στο ίδιο συμπέρασμα, αλλά για την προσθετική μέθοδο Winters, για τη δεύτερη χρονοσειρά (ωριαία δεδομένα). Το γεγονός ότι η μέθοδος Winters δίνει μικρότερα σφάλματα, είναι μάλλον αναμενόμενο. Όπως αναλύθηκε στη θεωρία, όλες οι παραπάνω μέθοδοι, έχουν την ικανότητα ανίχνευσης κάποιας γραμμικής τάσης στα δεδομένα. Επιπλέον, η μέθοδος Winters έχει την ικανότητα της προσαρμογής στην εποχικότητα. Όπως θα δούμε στη συνέχεια, η εποχικότητα αποτελεί έναν σημαντικό παράγοντα των δεδομένων μας, κάτι που γίνεται φανερό μέσω των γραφημάτων των αυτοσυσχετίσεων και των μερικών αυτοσυσχετίσεων (ACF, PACF).

Όσα αναφέραμε παραπάνω αφορούν στη σύγκριση των μεθόδων μεταξύ τους. Χρειαζόμαστε επίσης ένα μέτρο σύγκρισης το οποίο θα μας προσφέρει τη δυνατότητα να αξιολογούμε την κάθε μέθοδο ανεξάρτητα. Αυτό το μέτρο είναι ο στατιστικός μέσος όρος, που δείχνει πόσο θα ήταν το σφάλμα, αν για κάθε πρόβλεψη χρησιμοποιούσαμε τον μέσο όρο των δεδομένων της χρονοσειράς μας. Το σφάλμα πρόβλεψης του μέσου όρου παρουσιάζεται στην τελευταία γραμμή του κάθε πίνακα. Τέλος, αξίζει να σημειώσουμε, ότι δίνουμε περισσότερο βάρος στο κριτήριο MSE, από ότι στο κριτήριο MAE. Στο κριτήριο MSE το απόλυτο σφάλμα κάθε πρόβλεψης e_t , υψώνεται στο τετράγωνο, με άμεσο αποτέλεσμα να 'τιμωρούνται' περισσότερο οι μεγάλες αποκλίσεις. Το κριτήριο MAPE μας επιτρέπει, όπως θα εξηγήσουμε αναλυτικότερα στη συνέχεια, να αξιολογήσουμε μια μέθοδο ανεξάρτητα των δεδομένων που χρησιμοποιούνται.

Στη επόμενη κατηγορία μεθόδων της γραμμικής ανάλυσης χρονοσειρών, ασχοληθήκαμε με τη διάσπαση χρονοσειρών. Η μέθοδος της διάσπασης χρονοσειρών επιτυγχάνει βελτίωση του σφάλματος πρόβλεψης, μέσω της διάσπασης του προτύπου της χρονοσειράς σε υπό-πρότυπα, που ονομάζονται συνιστώσες. Οι τεχνικές διαχωρισμού που χρησιμοποιούνται για τη μελέτη αυτών των συνιστωσών, δεν αποτελούν ενιαίο σώμα της στατιστικής θεωρίας. Στην παράγραφο 3.4 επιχειρήσαμε να αναλύσουμε αυτές τις συνιστώσες, με σκοπό να καθορίσουμε την επίδρασή τους πάνω στην εξέλιξη της χρονοσειράς.

Οι τέσσερις συνιστώσες (τάση, εποχικότητα, κυκλικές κινήσεις, μη-κανονικότητα) αλληλεπιδρούν για να εξηγήσουν τη διακύμανση στις τιμές των δεδομένων διαχρονικά. Οι επιδράσεις αυτές είναι υπεύθυνες για τη συχνά ασταθή συμπεριφορά των χρονοσειρών. Όπως αναφέραμε και στη θεωρία, εάν το Y_t συμβολίζει την πραγματική παρατήρηση σε χρόνο t , εκφράζουμε το Y_t με τις συνιστώσες της τάσης (T_t), του εποχικού παράγοντα (S_t), της κυκλικής συνιστώσας (C_t) και του μη-κανονικού παράγοντα (I_t) και υποθέτουμε ότι η σχέση παίρνει την παρακάτω μορφή $Y_t = S_t * T_t * C_t * I_t$ (πολλαπλασιαστικό μοντέλο).

Στην παράγραφο 3.4.5 παρουσιάσαμε αναλυτικά την εφαρμογή της μεθόδου που έγινε με τη βοήθεια του υπολογιστικού λογισμικού πακέτου Minitab. Αξίζει να σημειώσουμε ότι στην ανάλυση δεν περιλαμβάνουμε την κυκλική συνιστώσα C_t , κάτι που κατά την εκτίμηση μας δεν προκαλεί πρόβλημα, καθώς η φύση των δεδομένων δε μας υποδεικνύει την ύπαρξή της. Στους παρακάτω πίνακες παρουσιάζονται συνοπτικά τα σφάλματα πρόβλεψης για τις χρονοσειρές μας.

Μέθοδος	TRAINING SET			TEST SET		
	MSE	MAE	MAPE	MSE	MAE	MAPE
Διάσπαση Χρονοσειράς	1.549	0.808	34.49	1.969	1.146	57.67
Μέσος όρος	1.675	0.960	39.69	1.501	1.068	57.20

Πίνακας 6.3 Σύνοψη αποτελεσμάτων της μεθόδου διάσπασης για τη χρονοσειρά 1.

Μέθοδος	TRAINING SET			TEST SET		
	MSE	MAE	MAPE	MSE	MAE	MAPE
Διάσπαση Χρονοσειράς	2.891	1.257	71.51	0.329	0.450	24.58
Μέσος όρος	3.318	1.388	88.68	1.161	0.959	63.86

Πίνακας 6.4 Σύνοψη αποτελεσμάτων της μεθόδου διάσπασης για τη χρονοσειρά 2.

Στα διαγράμματα της παραγράφου 3.4.5 παρουσιάζεται λεπτομερώς η ανάλυση της πρώτης χρονοσειράς. Τα δεδομένα εμφανίζουν σταθερή γραμμική τάση και η ανάλυση της εποχικότητας, που φαίνεται καλύτερα στο διάγραμμα του σχήματος 3.11, μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι είναι έντονη για κάποιες περιόδους του χρόνου, ενώ για κάποιες άλλες όχι (τα ποσοστά απόκλισης ανά περιόδους κυμαίνονται ανάλογα). Τέλος, παρατηρώντας τον πίνακα 6.3, διαπιστώνουμε ότι η μέθοδος δίνει ανάλογα σφάλματα με αυτά της χρήσης του μέσου όρου.

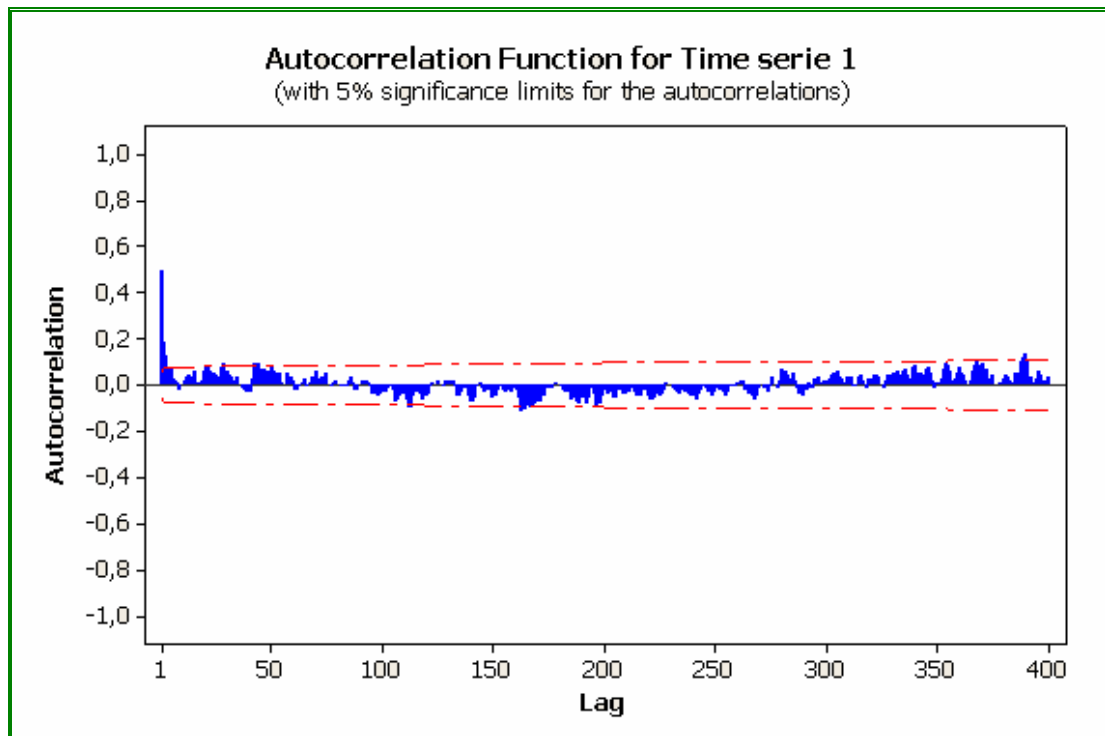
Η λεπτομερής ανάλυση της δεύτερης χρονοσειράς παρουσιάζεται στην ίδια παράγραφο (3.4.5). Σε αυτήν την περίπτωση, τα δεδομένα παρουσιάζουν μια ελαφρώς φθίνουσα, γραμμική τάση. Από την ανάλυση της εποχικότητας, που παρουσιάζεται στο διάγραμμα του σχήματος 3.14, γίνεται φανερό αυτό που αναφέραμε και στην ανάλυση της μεθόδου Winters, ότι, δηλαδή, η δεύτερη χρονοσειρά παρουσιάζει έντονη εποχικότητα (όλες οι τιμές, κάθε εποχής, παρουσιάζουν σχεδόν σταθερή ποσοστιαία απόκλιση). Τέλος παρατηρώντας τον πίνακα 6.4, διαπιστώνουμε ότι η μέθοδος δίνει πολύ μικρές τιμές σφαλμάτων για το test set, ενώ στο training set, τα σφάλματα δε διαφέρουν σημαντικά από αυτά του μέσου όρου. Όπως αναφέραμε και προηγουμένως, μια τέτοια περίπτωση δεν αποτελεί αξιόπιστη προσέγγιση. Αυτό γίνεται ευκολότερα αντιληπτό αν παρατηρήσουμε το διάγραμμα για το training set της χρονοσειράς. Οι προβλέψεις, εντός δείγματος, κυμαίνονται σε πολύ συγκεκριμένο, μικρό εύρος τιμών, κάτι που ισχύει και για τις προβλέψεις εκτός δείγματος. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα, να μην μπορούν να προβλεφθούν μεγαλύτερες τιμές (π.χ. πάνω από 5m/sec). Επομένως, το μικρό σφάλμα που επιτυγχάνεται, οφείλεται στο γεγονός ότι το test set τυχαίνει να μην περιλαμβάνει μεγάλες τιμές.

Τα μοντέλα πρόβλεψης που εφαρμόσαμε παραπάνω αποτελούν τις βασικές τεχνικές της γραμμικής ανάλυσης χρονοσειρών. Σε αυτό το σημείο θα παρουσιάσουμε τα αποτελέσματα των πιο προχωρημένων προσεγγίσεων της γραμμικής ανάλυσης χρονοσειρών. Πρόκειται για τις μεθόδους αυτοπαλινδρόμησης κινητού μέσου όρου (ARMA).

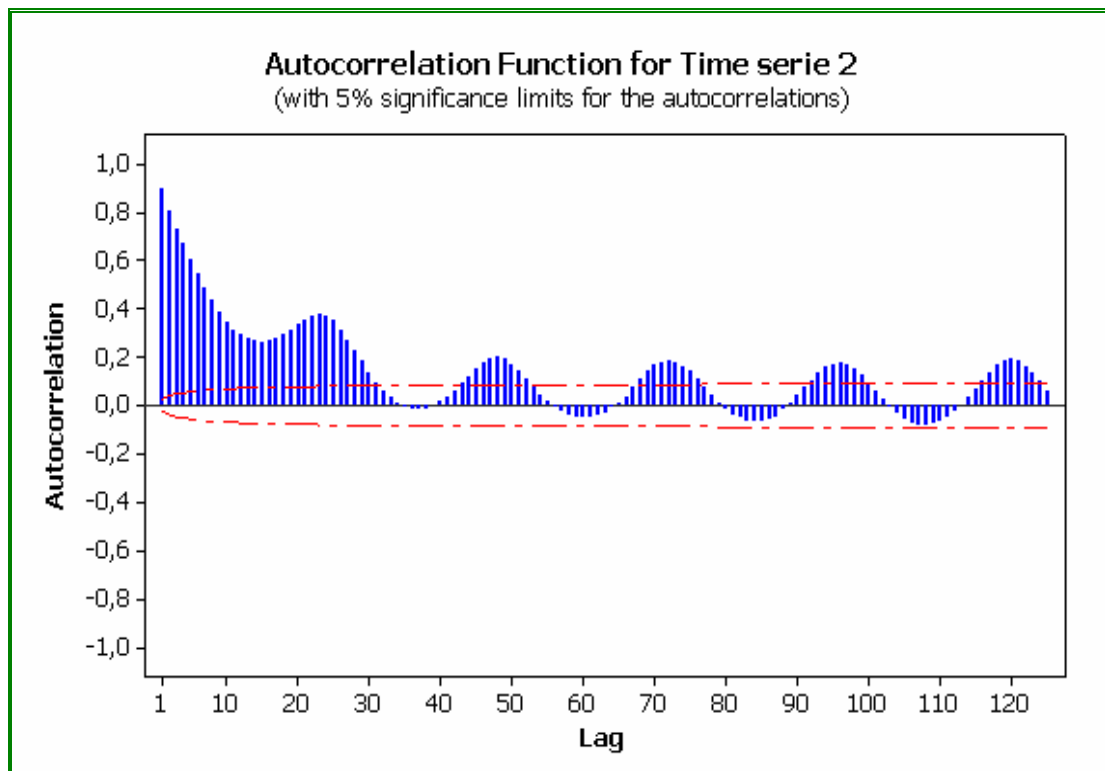
Όπως αναφέραμε και στη θεωρητική προσέγγιση αυτών των μεθόδων, τα ολοκληρωμένα αυτοπαλινδρομικά μοντέλα κινητού μέσου όρου (AutoRegressive Integrated-Moving Average), είναι στοχαστικά μαθηματικά μοντέλα με τα οποία προσπαθούμε να περιγράψουμε τη διαχρονική εξέλιξη κάποιου φυσικού μεγέθους. Δεδομένου ότι για την πλειοψηφία των φυσικών μεγεθών είναι αδύνατη η πλήρης γνώση και καταγραφή όλων των παραγόντων που επηρεάζουν την εξέλιξη τους στο χρόνο, είναι πολλή δύσκολη η διαχρονική περιγραφή του μεγέθους από ένα ντετερμινιστικό μοντέλο. Από την άλλη μεριά, η εξάρτηση τέτοιων μεγεθών από μη ντετερμινιστικούς παράγοντες, καθιστά δυνατή την περιγραφή της διαχρονικής τους εξέλιξης από ένα στοχαστικό μοντέλο, με το οποίο μπορεί να υπολογιστεί η πιθανότητα με την οποία η τιμή του μεγέθους βρίσκεται σε κάποιο διάστημα.

Τα στοχαστικά μοντέλα περιέχουν τον τυχαίο παράγοντα (τυχαίο σφάλμα ή σφάλμα πρόβλεψης), τις τιμές του μεγέθους οι οποίες εμφανίστηκαν σε προηγούμενες χρονικές στιγμές και, ίσως, κάποιους άλλους στοχαστικούς παράγοντες. Το μοντέλο που προκύπτει είναι ένας γραμμικός συνδυασμός των παραπάνω ποσοτήτων. Τα μοντέλα ARIMA χρησιμοποιούνται ευρύτατα γιατί βρίσκουν εφαρμογή στη μελέτη πολλών μεγεθών και φαίνεται να δίνουν μια "καλή" εικόνα της διαχρονικής τους συμπεριφοράς, καθώς και ικανοποιητικά αποτελέσματα στην πρόβλεψη των μελλοντικών τιμών του μεγέθους.

Στην παράγραφο 3.5.6 περιγράψαμε τη διαδικασία εύρεσης των κατάλληλων ARMA μοντέλων για τα δεδομένα μας. Αρχικά υπολογίσαμε διάφορους στατιστικούς δείκτες, τα διαγράμματα των ACF και PACF και με τη βοήθεια του πίνακα 3.4 προσπαθήσαμε να σχηματίσουμε μια πρώτη εικόνα για το μοντέλο ARMA (p,q) που μπορεί να περιγράψει ικανοποιητικά τις χρονοσειρές μας. Στο σημείο αυτό παραθέτουμε ξανά τα διαγράμματα των αυτοσυσχετίσεων, με σκοπό να γίνει φανερός ο παράγοντας της εποχικότητας που σχολιάστηκε στις προηγούμενες μεθόδους.



Σχήμα 6.1 Διάγραμμα αυτοσυσχέτισης (ACF) χρονοσειράς 1.



Σχήμα 6.2 Διάγραμμα αυτοσυσχέτισης (ACF) χρονοσειράς 2.

Στα παραπάνω διαγράμματα, εκτός του παράγοντα της εποχικότητας, που είναι εντονότερος στη δεύτερη χρονοσειρά, γίνονται φανερά τα πρότυπα φθίνουσας ημιτονοειδούς συνάρτησης και των μη μηδενικών τιμών για τις πρώτες περιόδους. Τα πρότυπα αυτά, δίνουν μια πρώτη εικόνα για την τάξη του ARMA μοντέλου. Η εύρεση του καταλληλότερου μοντέλου, για $p, q > 1$, γίνεται με τη βοήθεια κατάλληλου λογισμικού. Τα περισσότερα στατιστικά υπολογιστικά πακέτα προσαρμόζουν αυτόματα ένα μοντέλο ARMA σε μια χρονοσειρά, εκτελούν όλους τους αναγκαίους στατιστικούς ελέγχους και παράγουν εκθέσεις με τις τιμές των παραμέτρων, το τυπικό τους σφάλμα, το επίπεδο σημαντικότητας, τη διακύμανση των υπολοίπων και γενικότερα τις τιμές όλων των στατιστικών δεικτών που χρησιμοποιούνται για τον έλεγχο της καταλληλότητας του μοντέλου.

Έτσι λοιπόν, με τη βοήθεια του λογισμικού Statgraphics, στο οποίο παρέχεται η δυνατότητα αυτόματης επιλογής του καταλληλότερου μοντέλου, προσδιορίσαμε επακριβώς το βαθμό των AR και MA διαδικασιών που μοντελοποιούν καταλληλότερα τις χρονοσειρές μας. Αξίζει να σημειωθεί ότι η αξιολόγηση των διαφόρων μοντέλων, από την αυτοματοποιημένη διαδικασία του λογισμικού, επιλέχθηκε να γίνεται με βάση το κριτήριο που αναφέραμε στην παράγραφο 3.5.3 (*Akaike's Information Criterion*).

Ακολούθως, παρατηρώντας και πάλι τα διαγράμματα των ACF-PACF και σύμφωνα με την παράγραφο 3.5.4, εντοπίσαμε σημαντικές τιμές για εποχιακές καθυστερήσεις που υποδεικνύουν την προσθήκη μιας εποχιακής συνιστώσας. Παρατηρώντας, για παράδειγμα, την ACF της χρονοσειράς 2, διακρίνουμε μεγάλες αυτοσυσχετίσεις για τιμές 12, 24, 36, 48, ... Αυτό υποδεικνύει την ύπαρξη στατιστικά σημαντικής, εποχιακής συνιστώσας. Με τη βοήθεια του λογισμικού SAS-JMP, εφαρμόσαμε διάφορα μοντέλα SARIMA (Seasonal-ARIMA) με σκοπό την εύρεση του καταλληλότερου. Στους πίνακες που ακολουθούν παρουσιάζονται αναλυτικά τα παραπάνω:

ΜΟΝΤΕΛΟ	TRAINING SET			TEST SET			AIC Rank
	MSE	MAE	MAPE	MSE	MAE	MAPE	
ARIMA (2,0,1)	1.313	0.824	32.14	1.836	1.203	71.05	2
ARIMA (2,0,1) (0,0,1)	1.307	0.825	32.56	1.810	1.195	69.98	3
ARIMA (2,0,1) (1,0,0)	1.267	0.818	32.31	1.604	1.106	61.22	4
ARIMA (2,0,1) (1,1,1)	1.279	0.811	31.66	1.645	1.129	65.93	1
ARIMA (2,0,1) (2,0,1)	1.376	0.829	31.05	1.380	0.974	49.72	5
ARIMA (2,0,1) (2,0,2)	1.389	0.809	28.56	1.806	1.075	43.59	6
Μέσος όρος	1.675	0.960	39.69	1.501	1.068	57.20	

Πίνακας 6.5 Σύνοψη αποτελεσμάτων διαδικασιών ARMA για τη χρονοσειρά 1.

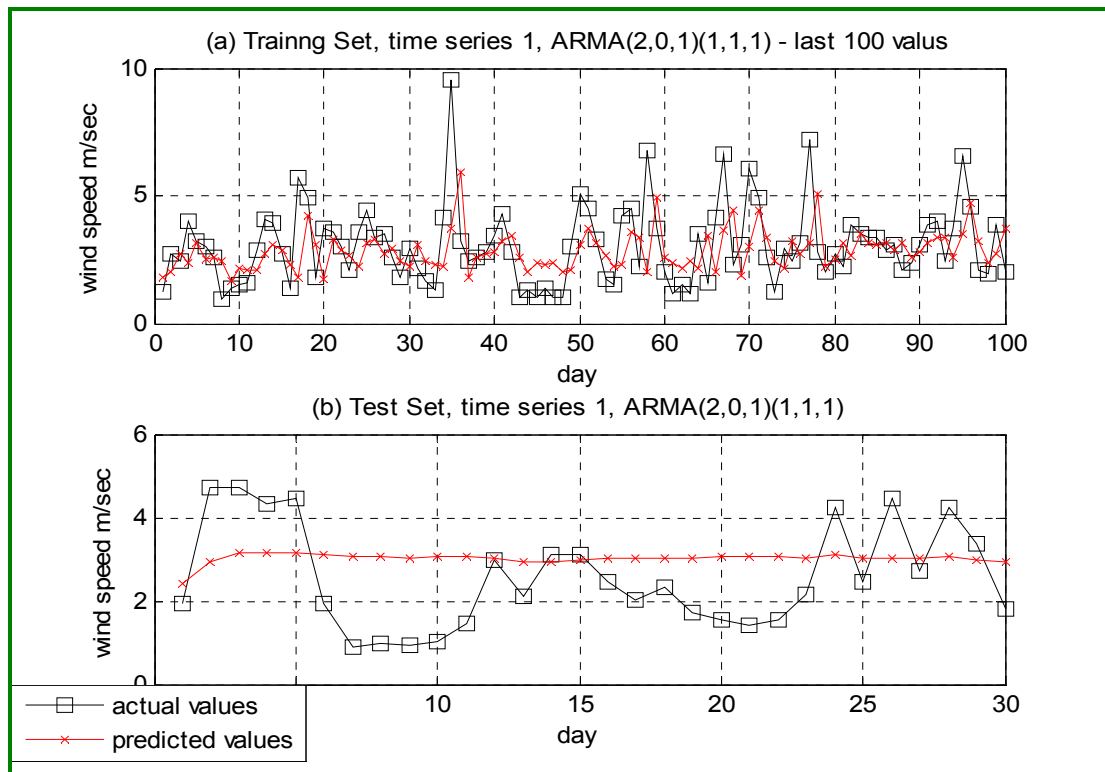
Παρατηρώντας τον παραπάνω πίνακα, καταλήγουμε στην επιλογή ενός εποχιακού μοντέλου ARMA(2,0,1)(1,1,1) για τα δεδομένα της πρώτης χρονοσειράς (ημερήσια δεδομένα). Επίσης παρατηρούμε ότι η συμμετοχή της εποχιακής συνιστώσας, δε συνέβαλε σε σημαντική μείωση του σφάλματος. Συγκρίνοντας τα παραπάνω αποτελέσματα, με αυτά των πινάκων 6.1, 6.3 γίνεται φανερό, πως η χρήση των διαδικασιών ARMA για τη χρονοσειρά ημερησίων δεδομένων, δεν εξασφαλίζει σημαντική βελτίωση στο σφάλμα πρόβλεψης, σε σχέση με τις μεθόδους εξομάλυνσης, της διάσπασης χρονοσειρών ακόμα και του στατιστικού μέσου όρου.

ΜΟΝΤΕΛΟ	TRAINING SET			TEST SET			AIC Rank
	MSE	MAE	MAPE	MSE	MAE	MAPE	
ARIMA (1,0,6)	0.645	0.581	30.91	0.831	0.763	48.66	8
ARIMA (1,0,6) (0,0,1)	0.640	0.578	30.74	0.741	0.714	45.28	7
ARIMA (1,0,6) (1,1,1)	0.603	0.552	28.59	0.365	0.492	27.34	5
ARIMA (1,0,6) (1,1,3)	0.601	0.552	28.66	0.366	0.484	26.83	6
ARIMA (1,0,6) (1,1,6)	0.610	0.556	28.32	0.667	0.684	33.31	2
ARIMA (1,0,6) (1,0,4)	0.617	0.561	28.67	0.463	0.563	28.45	4
ARIMA (1,0,6) (2,1,5)	0.604	0.554	28.54	0.459	0.565	29.10	3
ARIMA (1,0,6) (1,1,4)	0.598	0.551	28.62	0.362	0.481	27.29	1
Μέσος όρος	3.318	1.388	88.68	1.161	0.959	63.86	

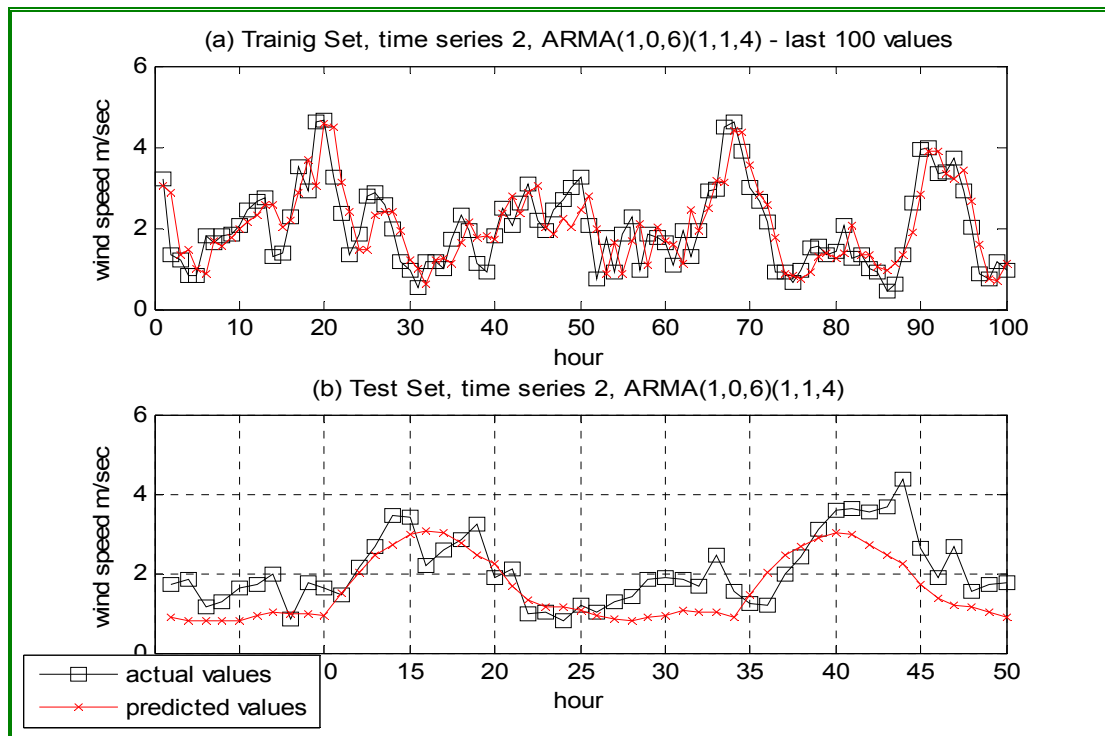
Πίνακας 6.6 Σύνοψη αποτελεσμάτων διαδικασιών ARMA για τη χρονοσειρά 2.

Παρατηρώντας τον πίνακα 6.6, καταλήγουμε στην επιλογή ενός εποχιακού μοντέλου ARMA(1,0,6)(1,1,4) για τη δεύτερη χρονοσειρά. Τα μοντέλα ARMA(1,0,6)(1,1,6), ARMA(1,0,6)(2,1,5) και κάποια ακόμη, θα μπορούσαν να επιλεγούν, αφού τα σφάλματα που δίνουν είναι επίσης μικρά. Στην τελική επιλογή όμως, λαμβάνουμε υπόψιν μας το *Akaike's Information Criterion*. Συγκρίνοντας τα παραπάνω αποτελέσματα, με αυτά των πινάκων 6.2 και 6.4 γίνεται φανερό ότι η χρήση των διαδικασιών ARMA, οδηγεί σε σημαντική βελτίωση του σφάλματος πρόβλεψης, σε σχέση με τις προηγούμενες μεθόδους που παρουσιάστηκαν.

Τέλος, ακολουθούν τα διαγράμματα των χρονοσειρών και των αντίστοιχων προβλέψεων. Παρατηρούμε ότι για ακόμη μια φορά, τα δεδομένα της δεύτερης χρονοσειράς, φαίνεται να παρέχουν περισσότερη πληροφορία και να οδηγούν σε καλύτερες προβλέψεις. Στο γεγονός αυτό, θα αναφερθούμε εκτενέστερα στο τέλος του κεφαλαίου.



Σχήμα 6.3 Χρονοσειρά 1 ARMA (2,0,1)(1,1,1) (a) Τελευταίες 100 τιμές του training set (b) test set.



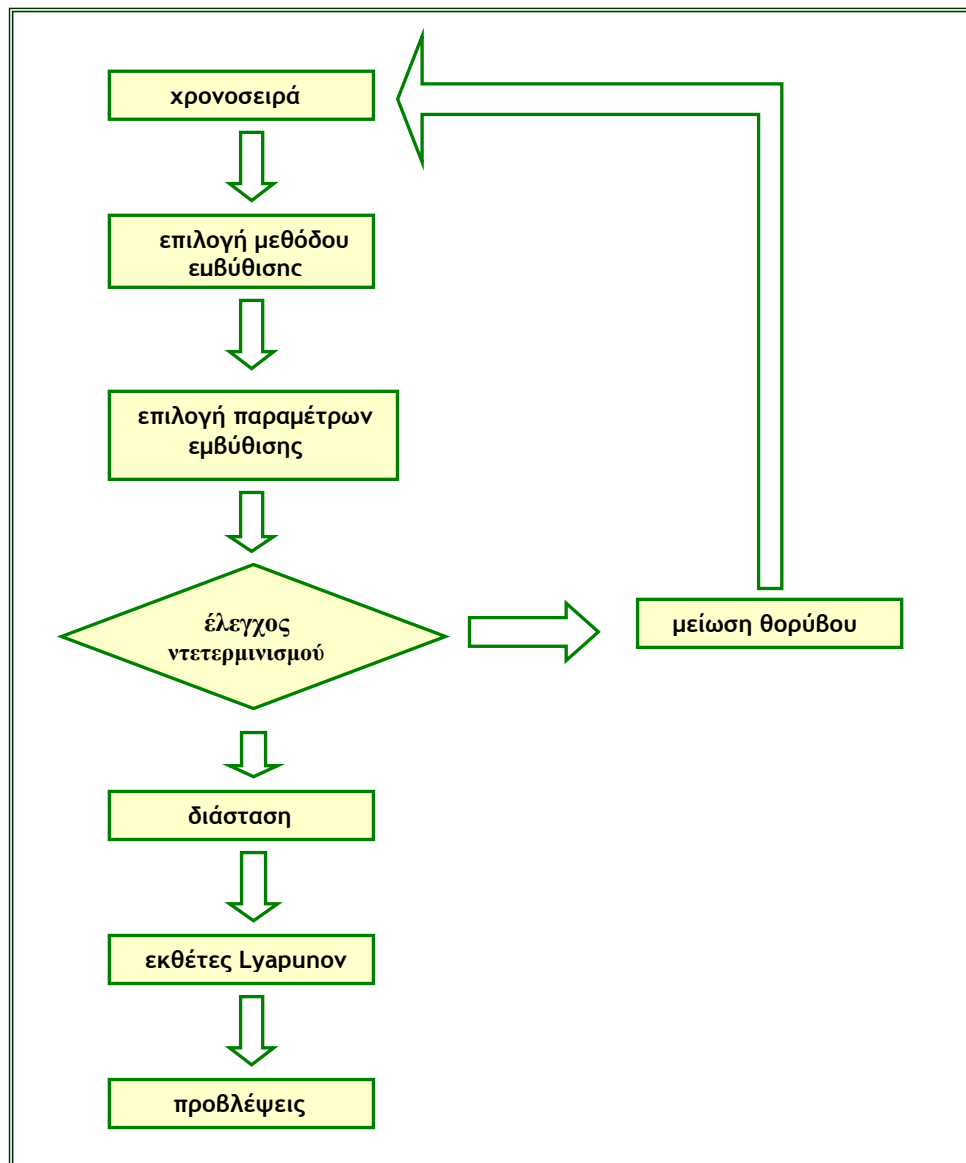
Σχήμα 6.4 Χρονοσειρά 2 ARMA (1,0,6)(1,1,4) (a) Τελευταίες 100 τιμές του training set (b) test set.

6.2 Μη γραμμική ανάλυση χρονοσειρών

Η μη γραμμικότητα ενός δυναμικού συστήματος εκδηλώνεται ως ευαισθησία στις αρχικές συνθήκες. Αυτό σημαίνει ότι, δύο αρχικά παραπλήσια σύνολα τιμών των μεταβλητών του συστήματος αποκλίνουν, και μάλιστα εκθετικά, με την πάροδο του χρόνου. Ο χώρος των ανεξάρτητων μεταβλητών που περιγράφουν ένα δυναμικό σύστημα είναι γνωστός με τον όρο *χώρος των φάσεων*. Η μη γραμμικότητα έχει ως αποτέλεσμα την εμφάνιση πολύπλοκων δομών στο χώρο των φάσεων. Ο χώρος των φάσεων χαρακτηρίζεται από τη συνύπαρξη περιοχών χάους και περιοχών οργανωμένης συμπεριφοράς των μεταβλητών. Το χάος δίνει την εντύπωση ως ανυπαρξίας οργάνωσης που οδηγεί σε τυχαία ή απρόβλεπτη συμπεριφορά. Εντούτοις, το χάος είναι πολύ διαφορετικό από την τυχειότητα. Η πραγματική τυχειότητα μπορεί να εμφανιστεί σε ένα δυναμικό σύστημα με τη μορφή του θορύβου, διαταραχών δηλαδή που δεν οφείλονται στο σύστημα αλλά σε κάποιο τυχαίο εξωτερικό παράγοντα.

Σύμφωνα με όσα αναλύσαμε στη θεωρία και με τη βοήθεια κατάλληλου λογισμικού, εφαρμόσαμε τους διάφορους αλγόριθμους για τη μη-γραμμική ανάλυση των χρονοσειρών, ακολουθώντας τα βήματα του σχήματος 6.5. Η αναλυτική παρουσίαση των μεθόδων μη-γραμμικής ανάλυσης γίνεται στην παράγραφο 4.5. Για την αξιολόγηση της απόδοσης των μοντέλων πρόβλεψης η χρονοσειρά, όπως και στις προηγούμενες περιπτώσεις, χωρίζεται σε δύο τμήματα. Το πρώτο σύνολο σημείων χρησιμοποιείται στην εκμάθηση του μοντέλου (training set) και το δεύτερο στην εκτίμηση του λάθους πρόβλεψης (test set).

Αρχικά σχεδιάσαμε τα διαγράμματα του φάσματος ισχύος, όπου παρατηρήσαμε αρνητική κλίση. Αυτό αποτέλεσε μια πρώτη ένδειξη πιθανούς χαοτικής χρονοσειράς. Στη συνέχεια, θέλοντας να διαπιστώσουμε εάν η χρονοσειρές μας προέρχονται από ντετερμινιστικό ή από στοχαστικό σύστημα, χρησιμοποιήσαμε τη μέθοδο των υστερήσεων, με σκοπό να ανακατασκευάσουμε το χώρο των φάσεων. Η μέθοδος αυτή μας επιτρέπει την κατασκευή ενός χώρου φάσεων μόνο από τη χρονοσειρά με τα ίδια χαρακτηριστικά που έχει ο αυθεντικός χώρος φάσεων του συστήματος που την έδωσε. Τα χαρακτηριστικά του χώρου των φάσεων που πρέπει να παραμείνουν τα ίδια είναι οι αναλλοίωτες ποσότητες, δηλαδή οι διαστάσεις και οι εκθέτες Lyapunov.



Σχήμα 6.5 Διάγραμμα εργασίας μη-γραμμικής ανάλυσης χρονοσειρών..

Για να προχωρήσουμε, βέβαια, στην ανακατασκευή με τη μέθοδο των υστερήσεων, πρώτα εξετάσαμε τις χρονοσειρές μας, ώστε να προσδιορίσουμε την κατάλληλη χρονική υστέρηση τ και τη διάσταση εμβύθισης m . Αυτό έγινε με τις μεθόδους που αναφέραμε στις παραγράφους 4.2.1, 4.2.2 και 4.3.1.

Η τελική επιλογή της χρονικής υστέρησης, την οποία χρησιμοποιήσαμε για την ανακατασκευή του χώρου των φάσεων, εμπεριέχει υποκειμενικά κριτήρια καθώς οι διάφορες μέθοδοι δεν συγκλίνουν σε μια ακριβή τιμή. Προτείναμε την επιλογή των χρονικών υστερήσεων και στη συνέχεια υπολογίσαμε τη διάσταση εμβύθισης. Η μέθοδος που χρησιμοποιήσαμε για τον υπολογισμό είναι η μέθοδος των ψευδών κοντινότερων γειτόνων (method of false nearest neighbors, FNN).

Στη συνέχεια επιχειρήσαμε να κάνουμε μια εκτίμηση των μη-γραμμικών χαρακτηριστικών. Αρχικά μετρήσαμε την ακριβή διάσταση των δυναμικών συστημάτων μέσα από τις χρονοσειρές. Η ακριβής τιμή της διάστασης δεν είναι ακέραιος αριθμός και αυτό είναι το ένα από τα δύο χαρακτηριστικά του *παράξενου ελκυστή*.

Αφού υπολογίσαμε την κλασματική (μη ακέραια) διάσταση του ελκυστή, ο ελάχιστος αριθμός των εξισώσεων που μπορούν να προσδιορίσουν το σύστημα, είναι ο αμέσως επόμενος ακέραιος. Προηγουμένως η γεωμετρική μέθοδος (FNN) μας έδωσε μια *προσέγγιση* του ελάχιστου αριθμού των εξισώσεων, που είναι ικανές να περιγράψουν το κάθε σύστημα. Η ανάλυση των διαστάσεων είναι πιο ισχυρή από τη ανάλυση των γεωμετρικών μεθόδων, καθώς μας επιτρέπει να μετρήσουμε την ακριβή διάσταση του συστήματος.

Τελευταίο βήμα στη μη-γραμμική ανάλυση των χρονοσειρών, πριν τη διενέργεια προβλέψεων, είναι ο υπολογισμός του μέγιστου εκθέτη Lyapunov. Από όλους τους εκθέτες Lyapunov, ο μέγιστος, είναι αυτός που παρουσιάζει το μεγαλύτερο ενδιαφέρον, καθώς:

- Ένας θετικός και πεπερασμένος εκθέτης δείχνει την απόκλιση (τουλάχιστον σε μια διάσταση) των κοντινών σημείων του ελκυστή στην εξέλιξη του χρόνου και προσδιορίζει χαοτικό ελκυστή.
- Ένας μηδενικός εκθέτης δείχνει την ανυπαρξία σύγκλισης ή απόκλισης των κοντινών σημείων του ελκυστή στην εξέλιξη του χρόνου και προσδιορίζει ελκυστή οριακού κύκλου.
- Ένας αρνητικός εκθέτης δείχνει την σύγκλιση των σημείων του ελκυστή στην εξέλιξη του χρόνου και προσδιορίζει ελκυστή σημείου.

Τέλος, έχοντας μια συνολική εικόνα από την ανάλυση που έγινε στις χρονοσειρές, διενεργήσαμε προβλέψεις. Όπως και στις προηγούμενες εφαρμογές η χρονοσειρά διασπάται σε training και test set. Στον πίνακα και τα διαγράμματα που ακολουθούν συνοψίζουμε τα αποτελέσματα.

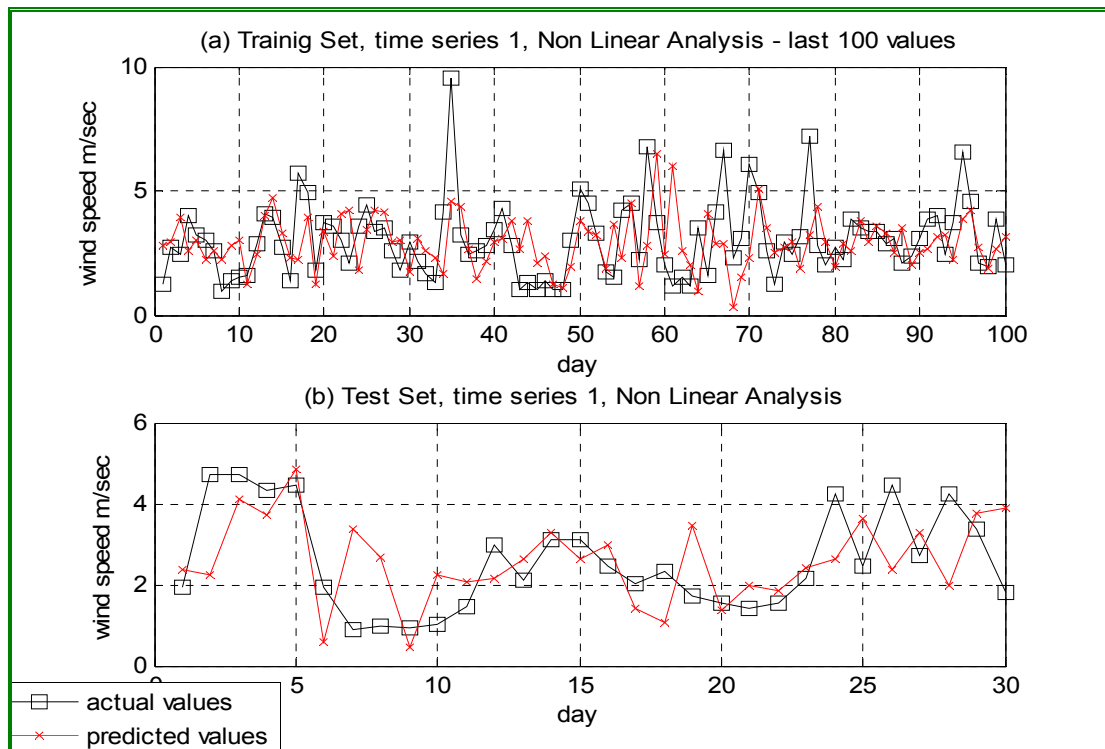
Μέθοδος	TRAINING SET			TEST SET		
	MSE	MAE	MAPE	MSE	MAE	MAPE
Χαοτική ανάλυση	1.645	0.963	38.02	1.502	0.976	51.19
Μέσος όρος	1.675	0.960	39.69	1.501	1.068	57.20

Πίνακας 6.7 Σύνοψη της μη-γραμμικής ανάλυσης χρονοσειράς 1.

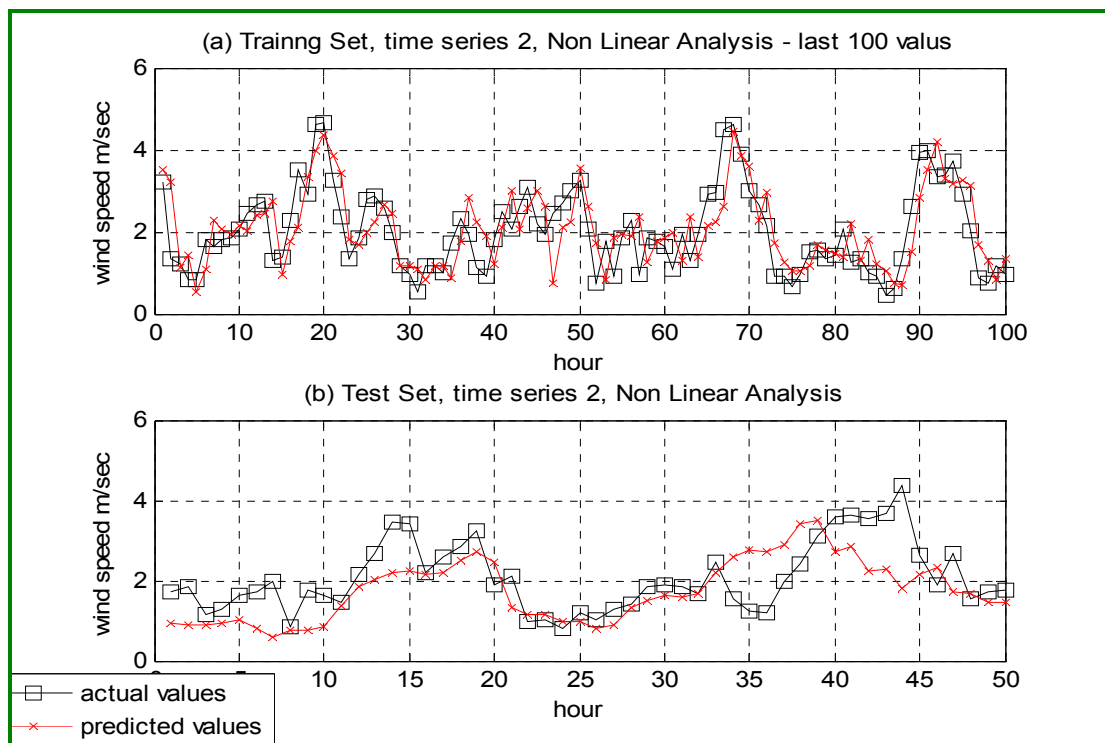
Μέθοδος	TRAINING SET			TEST SET		
	MSE	MAE	MAPE	MSE	MAE	MAPE
Χαοτική ανάλυση	0.581	0.565	33.97	0.653	0.631	30.93
Μέσος όρος	3.318	1.388	88.68	1.161	0.959	63.86

Πίνακας 6.8 Σύνοψη της μη-γραμμικής ανάλυσης χρονοσειράς 2.

Παρατηρώντας τους παραπάνω πίνακες, για την πρώτη χρονοσειρά, καταλήγουμε στο συμπέρασμα πως οι μη-γραμμικές μέθοδοι ανάλυσης δεν εξασφαλίζουν βελτίωση στο σφάλμα πρόβλεψης, σε σχέση με τις γραμμικές μεθόδους που παρουσιάσαμε προηγουμένως. Πιθανοί λόγοι που μπορούν να εξηγήσουν τα μεγάλα σφάλματα είναι η παρουσία θορύβου και το μικρό μήκος της χρονοσειράς (η χαοτική ανάλυση απαιτεί πολύ μεγάλες χρονοσειρές για αξιόπιστα αποτελέσματα). Ένας επιπλέον σημαντικός παράγοντας είναι η φύση των δεδομένων (μέσες ημερήσιες τιμές) όπου πιθανότατα αποκρύπτουν αρκετή πληροφορία από τη δυναμική του συστήματος. Αντιθέτως, για τη δεύτερη χρονοσειρά, η χαοτική ανάλυση καταφέρνει να αναδείξει τα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά του δυναμικού συστήματος και να προσφέρει αρκετά καλές προβλέψεις.



Σχήμα 6.6 Χρονοσειρά 1- μη γραμμική ανάλυση (a) Τελευταίες 100 τιμές του training set (b) test set



Σχήμα 6.7 Χρονοσειρά 2- μη γραμμική ανάλυση (a) Τελευταίες 100 τιμές του training set (b) test set.

6.3 Νευρο-ασαφή συστήματα

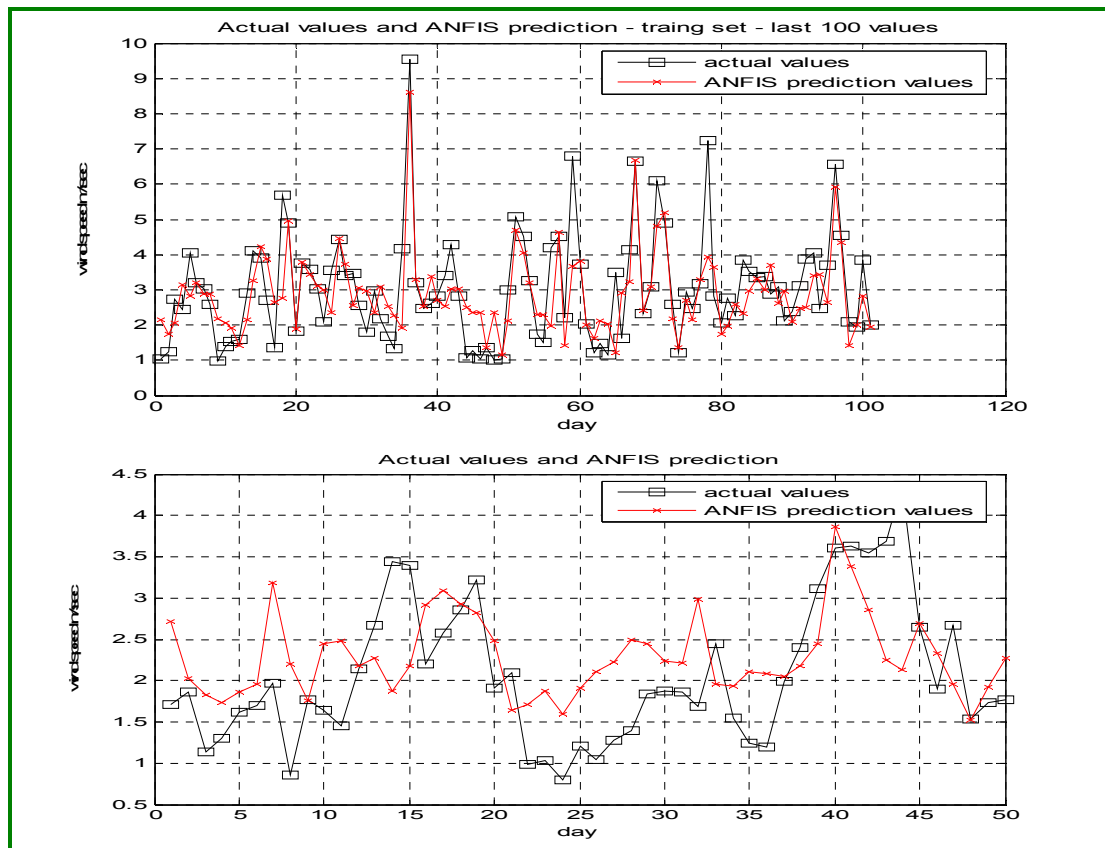
Η εφαρμογή του νευρο-ασαφούς συστήματος έγινε στο Matlab, κάνοντας χρήση του fuzzy logic toolbox, το οποίο περιέχει όλα τα απαραίτητα εργαλεία για την ολοκληρωμένη ανάπτυξη και αναλυτική χρήση ενός Προσαρμοστικού Νεύρο-Ασαφούς Συστήματος Συμπερασμού (Adaptive Neural Fuzzy Inference, ANFIS). Αρχίζοντας το σχεδιασμό του νευρο-ασαφούς συστήματος, ορίσαμε τον αριθμό και το είδος των εισόδων. Σαν πιο απλή περίπτωση, χρησιμοποιήσαμε τις δύο τελευταίες τιμές, για πρόβλεψη του επόμενου βήματος.

Στη συνέχεια προσθέσαμε επιπλέον εισόδους, προσέχοντας πάντα το κέρδος, που εκφράζεται σε μείωση του σφάλματος, να είναι σημαντικό σε σχέση με την αύξηση της πολυπλοκότητας του συστήματος. Για την επιλογή των επιπλέον εισόδων χρησιμοποιήσαμε τιμές που θεωρούμε ότι σχετίζονται, στατιστικά, με την έξοδο του συστήματος. Αυτήν την πληροφορία την πήραμε από τα διαγράμματα των συσχετίσεων και των μερικών αυτοσυσχετίσεων.

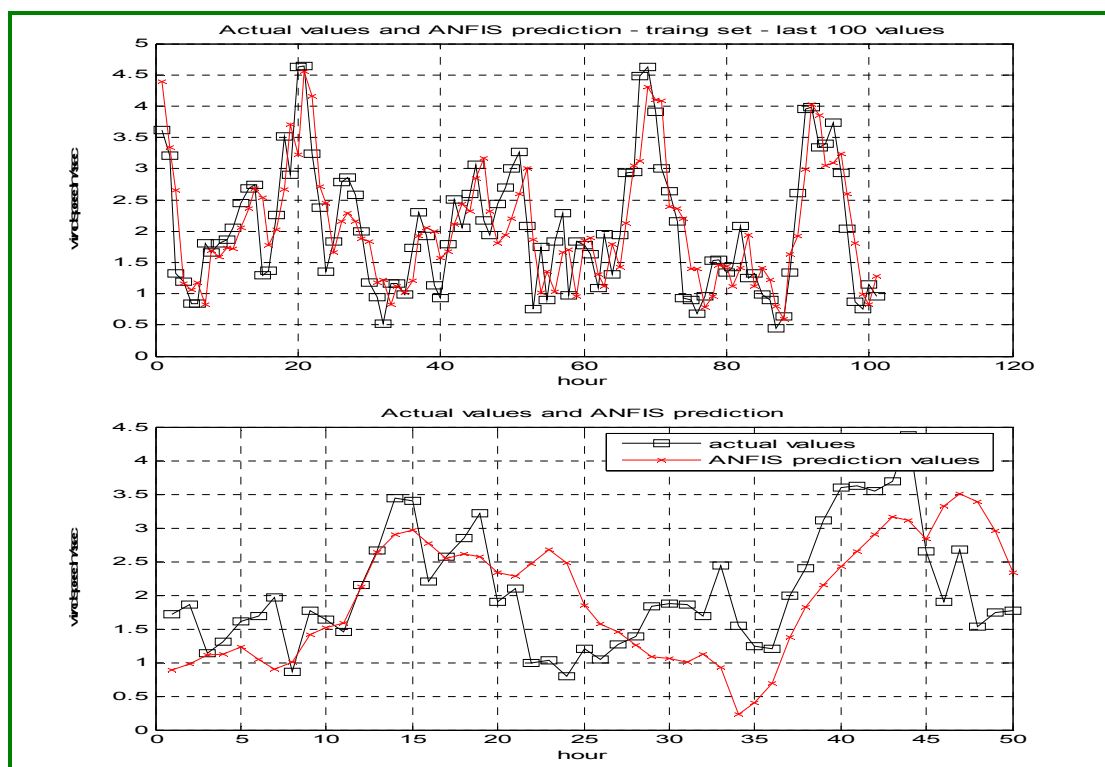
Έχοντας ορίσει τον αριθμό και το είδος των εισόδων, δημιουργήσαμε τα κατάλληλα υποδείγματα εισόδων και επιθυμητών εξόδων που χρησιμοποιήθηκαν για την εκπαίδευση του μοντέλου. Για κάθε χρονοσειρά, χρησιμοποιήσαμε ένα τμήμα των δεδομένων για την εκπαίδευση του συστήματος και ένα για τον έλεγχο της προβλεπτικής του ικανότητας, όπως και στις προηγούμενες περιπτώσεις.

Στη συνέχεια ορίσαμε τις παραμέτρους εκπαίδευσης και αφού ολοκληρώθηκε η εκπαίδευση του συστήματος χρησιμοποιήσαμε τα δεδομένα ελέγχου για να αξιολογήσουμε το μοντέλο. Σε κάθε περίπτωση, όταν εκπαιδεύαμε το μοντέλο, δοκιμάζαμε αρκετούς συνδυασμούς παραμέτρων (MFs, epochs, step size), με σκοπό την επίτευξη μικρότερου σφάλματος.

Στην υποπαράγραφο 5.6.3 παρουσιάσαμε αναλυτικά τα γραφήματα που εξήχθησαν από την εφαρμογή του μοντέλου και τον συγκριτικό πίνακα των αποτελεσμάτων που έδωσε το σύστημα για τις διάφορες παραμέτρους. Στη συνέχεια παρουσιάζουμε τα διαγράμματα των προβλέψεων εντός και εκτός δείγματος για το βέλτιστα παραμετροποιημένο μοντέλο.



Σχήμα 6.8 Χρονοσειρά 1 - ANFIS (a) Τελευταίες 100 τιμές του training set
(b) test set



Σχήμα 6.9 Χρονοσειρά 2 - ANFIS (a) Τελευταίες 100 τιμές του training set
(b) test set.

6.4 Σύνοψη

Σε αυτήν την παράγραφο συνοψίζουμε όσα αναφέραμε παραπάνω και συγκεντρώνουμε τα αποτελέσματα σε ένα πίνακα. Τα συγκριτικά σχεδιαγράμματα μας δίνουν μια πλήρη εικόνα για τα σφάλματα κάθε μεθόδου. Από κάθε κατηγορία, όπου υπάρχουν περισσότερες από μια μέθοδοι, παρουσιάζουμε τη βέλτιστη, ως προς το ελάχιστο σφάλμα. Σε αυτό το σημείο θα εξετάσουμε το κριτήριο σφάλματος MAPE, που ορίζεται ως:

$$MAPE = \frac{100}{N} \cdot \sum_{t=1}^N |e_t|$$

όπου

$$e_t = \frac{F_t - A_t}{A_t}$$

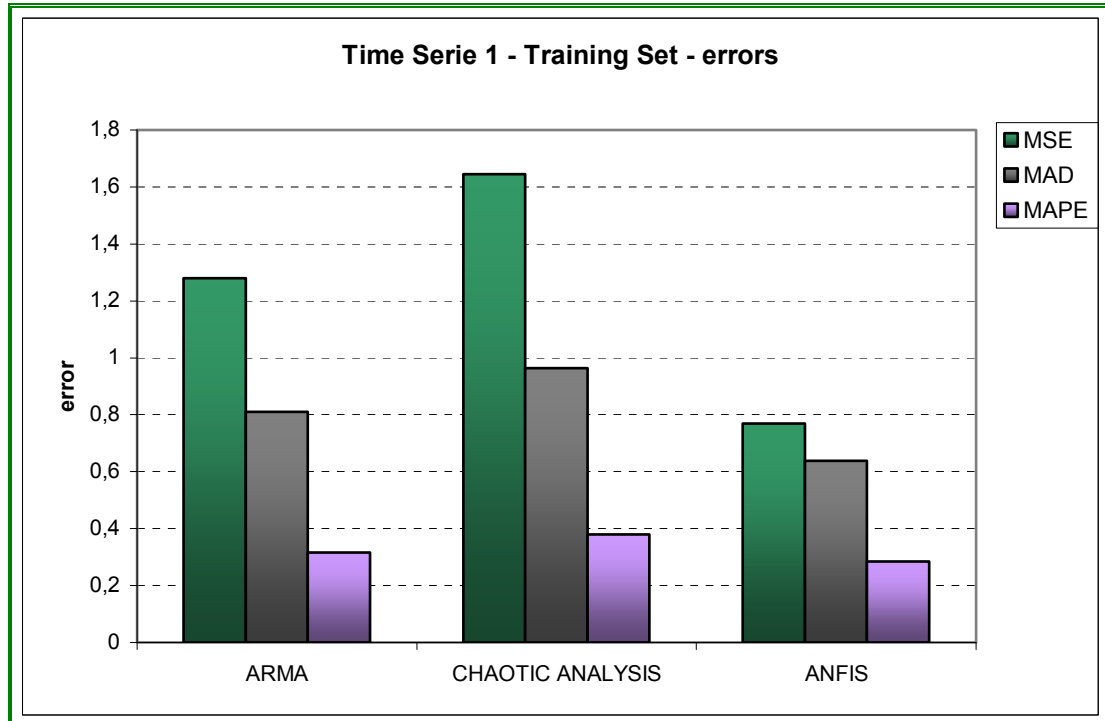
Από τον παραπάνω τύπο, γίνεται φανερό πως το MAPE, ως κριτήριο αξιολόγησης προβλέψεων, δείχνει πόσο μεγάλο είναι το σφάλμα της πρόβλεψης σε σχέση με τις πραγματικές τιμές της χρονοσειράς. Επειδή είναι απαλλαγμένο από μονάδες μέτρησης, το χρησιμοποιούμε για να συγκρίνουμε την ακρίβεια μιας ή περισσότερων μεθόδων για περισσότερες από μια χρονοσειρές.

Μέθοδος	TRAINING SET			TEST SET		
	MSE	MAE	MAPE	MSE	MAE	MAPE
ARIMA (2,0,1) (1,1,1)	1.279	0.811	31.66	1.645	1.129	65.93
Μη-γραμμική ανάλυση	1.645	0.963	38.02	1.502	0.976	51.19
ANFIS	0.769	0.638	28.50	1.433	1.010	52.60

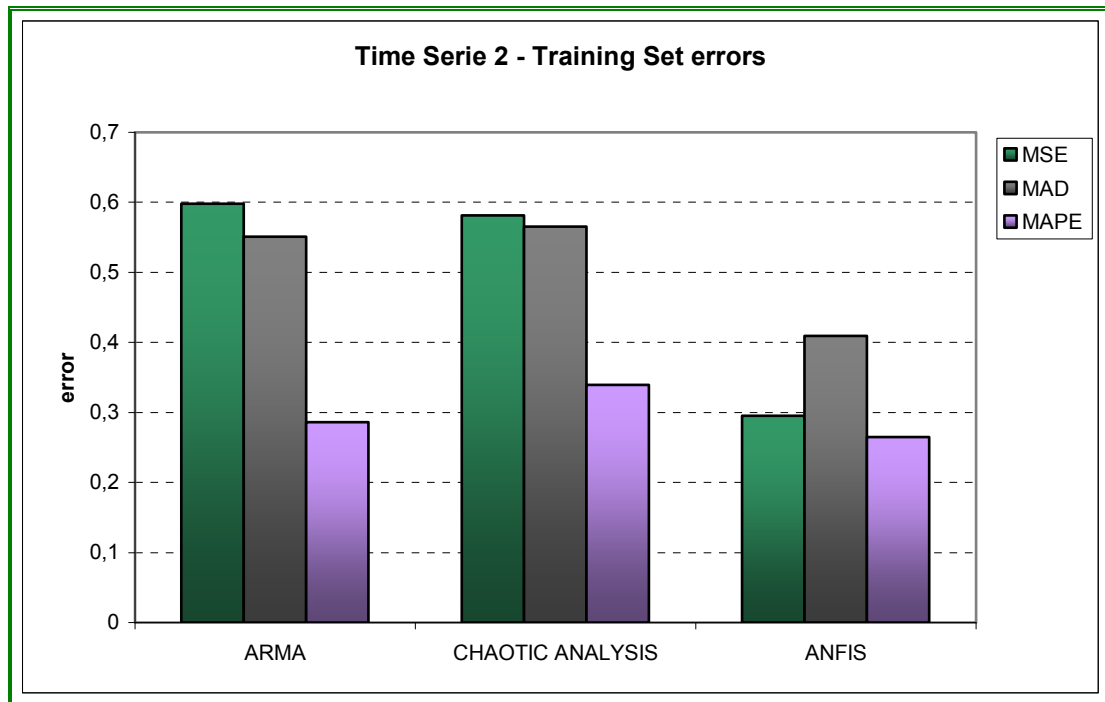
Πίνακας 6.9 Συγκριτικός πίνακας χρονοσειράς 1.

Μέθοδος	TRAINING SET			TEST SET		
	MSE	MAE	MAPE	MSE	MAE	MAPE
ARIMA (1,0,6) (1,1,4)	0.598	0.551	28.62	0.362	0.481	27.29
μη-γραμμική ανάλυση	0.581	0.565	33.97	0.653	0.631	30.93
ANFIS	0.295	0.409	26.57	0.661	0.669	36.42

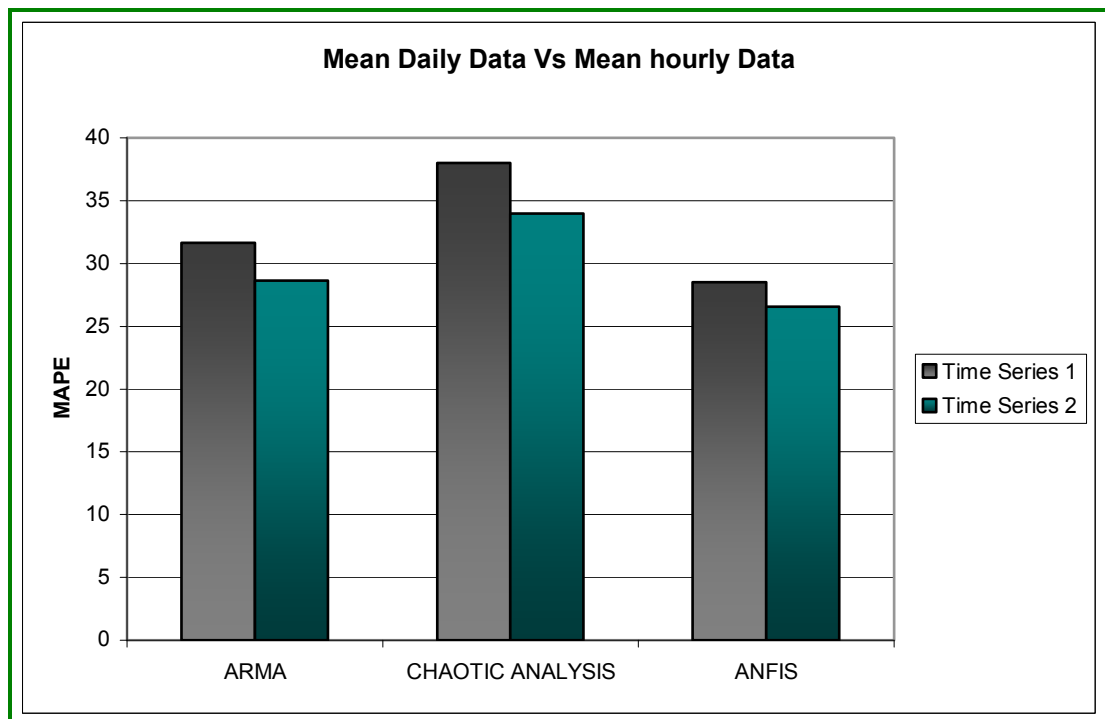
Πίνακας 6.10 Συγκριτικός πίνακας χρονοσειράς 2.



Σχήμα 6.10 Χρονοσειρά 1 - Training set errors



Σχήμα 6.11 Χρονοσειρά 2 - Training set errors



Σχήμα 6.12 Η επιρροή των δεδομένων στην προβλεπτική ικανότητα των μοντέλων

7. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Όπως αναφέραμε και στην εισαγωγή αυτού του συγγράμματος, η παροχή *εγγυημένης ισχύος* είναι ένα ζήτημα μείζονος σημασίας, σε κάθε Σύστημα Παραγωγής Ενέργειας. Η αποφυγή της αστάθειας, σε περιόδους αιχμής, κρίνεται επιτακτική. Σε τέτοιες περιπτώσεις απαιτούνται ειδικά μέτρα και κατάλληλη διαχείριση για την αποφυγή της κατάρρευσής του.

Στο βαθμό που ένα σύστημα παραγωγής ενέργειας, εξαρτάται άμεσα, σε μικρότερο ή μεγαλύτερο βαθμό, από αιολικά πάρκα, υπεισέρχεται το ζήτημα της βραχυπρόθεσμης πρόβλεψης της παραγωγής ισχύος στους αιολικούς σταθμούς. Η άμεση εξάρτηση της παραγωγής από τη στοχαστική φύση του ανέμου μπορεί να επιφέρει σημαντικά προβλήματα στη λειτουργία των αιολικών σταθμών και κατ' επέκταση στο ευρύτερο Σύστημα Παραγωγής Ενέργειας, εφόσον μιλάμε για αιολικούς σταθμούς διασυνδεδεμένους στο δίκτυο. Αναδεικνύεται λοιπόν η αναγκαιότητα των μεθόδων και των προτύπων πρόβλεψης της παραγωγής και η χρησιμότητά τους σε ένα συνολικό σχεδιασμό, με σκοπό την επίτευξη των προαναφερθέντων στόχων.

Δεδομένης της άμεσης εξάρτησης της αιολικής ενέργειας και της στοχαστικής φύσης του ανέμου, η προηγούμενη θεώρηση μεταπίπτει στην ανάγκη πρόβλεψης της ταχύτητας του ανέμου. Για το λόγο αυτό, στην παρούσα εργασία, μελετώνται χρονοσειρές ταχύτητας ανέμου και όχι χρονοσειρές παραγόμενης ισχύος. Τη συγκεκριμένη θεώρηση προτείνει και ο Beyer H.G.[5].

Έχοντας ολοκληρώσει την ανάλυση των διαφόρων μεθόδων πρόβλεψης, είμαστε σε θέση να εξάγουμε ασφαλή συμπεράσματα σχετικά με τη δυνατότητα πρόβλεψης χρονοσειρών ταχύτητας ανέμου. Τα συμπεράσματα κινούνται σε δύο βασικούς άξονες. Ο πρώτος αφορά στη φύση των δεδομένων που χρησιμοποιούμε και πιο συγκεκριμένα το χρονικό βήμα των χρονοσειρών. Για το λόγο αυτό χρησιμοποιήθηκαν δύο χρονοσειρές, μέσες *ημερήσιες* ταχύτητες και μέσες *ωριαίες* ταχύτητες. Ο δεύτερος αφορά στα συμπεράσματα για τις διάφορες κατηγορίες μεθόδων και τη δυνατότητά τους να μας εξασφαλίσουν αξιόπιστες προβλέψεις.

Στην πρώτη μεγάλη και πιο γνωστή κατηγορία μεθόδων, χρησιμοποιήσαμε τη γραμμική ανάλυση χρονοσειρών που περιλαμβάνει τις ακόλουθες τρεις υποκατηγορίες, μέθοδοι εξομάλυνσης, μέθοδοι διάσπασης χρονοσειρών και ανάλυση ARIMA, γνωστή και ως Box-Jenkins ανάλυση. Οι δύο πρώτες υποκατηγορίες που περιλαμβάνουν τα πιο απλά, από άποψη υπολογιστικής ισχύος και αλγοριθμικής πολυπλοκότητας, γραμμικά μοντέλα, κατάφεραν να αναδείξουν κάποια βασικά γραμμικά χαρακτηριστικά των δεδομένων. Επίσης μας έδωσαν τις πρώτες τιμές σφαλμάτων που αποτελούν ένα βασικό κριτήριο για της αξιολόγηση των πιο σύνθετων μεθόδων. Αξίζει να σημειώσουμε πως ο δείκτης σφάλματος MAPE, που δίνουν αυτές οι μέθοδοι για τις δύο χρονοσειρές, δε διαφέρουν σημαντικά, επομένως η αξιολόγηση του πως επηρεάζει το χρονικό βήμα των χρονοσειρών την δυνατότητα πρόβλεψης, δεν είναι δυνατή σε αυτό το σημείο.

Η τρίτη υποκατηγορία (ανάλυση ARIMA) περιλαμβάνει πιο προχωρημένες προσεγγίσεις της γραμμικής ανάλυσης χρονοσειρών. Όπως αναφέραμε και στη θεωρητική προσέγγιση αυτών των μεθόδων, τα ολοκληρωμένα αυτοπαλινδρομικά μοντέλα κινητού μέσου όρου (AutoRegressive Integrated-Moving Average), είναι στοχαστικά μαθηματικά μοντέλα που περιγράφουν τη διαχρονική εξέλιξη του φυσικού μεγέθους. Για παράδειγμα, για την ταχύτητα του ανέμου, είναι αδύνατη η πλήρης γνώση και καταγραφή όλων των παραγόντων που επηρεάζουν την εξέλιξη της στο χρόνο. Η διαχρονική περιγραφή του μεγέθους καθίσταται δύσκολη από ένα ντετερμινιστικό μοντέλο. Από την άλλη μεριά, η εξάρτηση του μεγέθους από μη ντετερμινιστικούς παράγοντες, καθιστά δυνατή την περιγραφή της διαχρονικής του εξέλιξης από ένα στοχαστικό μοντέλο, με το οποίο μπορεί να υπολογιστεί η πιθανότητα με την οποία η τιμή του μεγέθους βρίσκεται σε κάποιο διάστημα.

Τα μοντέλα ARIMA χρησιμοποιούνται ευρύτατα γιατί βρίσκουν εφαρμογή στη μελέτη πολλών μεγεθών και φαίνεται να δίνουν μια "καλή" εικόνα της διαχρονικής τους συμπεριφοράς, καθώς και ικανοποιητικά αποτελέσματα στην πρόβλεψη των μελλοντικών τιμών του μεγέθους. Στις διάφορες προσεγγίσεις ανάλυσης χρονοσειρών ανέμου, η ανάλυση ARIMA, αποτελεί είτε την κύρια μέθοδο της προσέγγισης, είτε το κυριότερο κριτήριο σύγκρισης κάποιας προτεινόμενης μεθόδου. Τα αποτελέσματα της ανάλυσης, για τη χρονοσειρά ωριαίων δεδομένων, επιβεβαίωσαν την πολύ καλή προβλεπτική ικανότητα της μεθόδου σε σχέση με τις προηγούμενες. Για τη χρονοσειρά ημερήσιων δεδομένων δεν παρατηρήσαμε μείωση του σφάλματος. Αξίζει να σημειώσουμε πως ο δείκτης σφάλματος MAPE, που μας επιτρέπει να συγκρίνουμε τα αποτελέσματα των δύο διαφορετικών χρονοσειρών,

διαφέρει (31.7% ημερήσια δεδομένα, 28.6% ωριαία δεδομένα) και αποτελεί μια πρώτη ένδειξη για την αξιολόγηση του χρονικού βήματος των χρονοσειρών και την επιρροή του στην προβλεπτική ικανότητα της μεθόδου.

Στη δεύτερη κατηγορία μεθόδων, χρησιμοποιήσαμε τη θεωρία των δυναμικών συστημάτων και τη *μη-γραμμική ανάλυση χρονοσειρών* για να αναλύσουμε τις χρονοσειρές και να κάνουμε προβλέψεις. Η κλασσική στατιστική ανάλυση χρονοσειρών μελετά γραμμικά χαρακτηριστικά των χρονοσειρών, όπως είναι η αυτοσυσχέτιση $r_x(\tau)$ και ισοδύναμα το φάσμα ισχύος $P_x(f)$, και η περιγραφή του δυναμικού συστήματος που παράγει τη χρονοσειρά γίνεται με γραμμικά μοντέλα χρονοσειρών, όπως τα μοντέλα τύπου ARMA. Τα χαρακτηριστικά της χρονοσειράς που μπορεί να μιμηθεί ένα γραμμικό μοντέλο περιορίζονται στη μέση τιμή, διασπορά και αυτοσυσχέτιση. Αυτά τα χαρακτηριστικά είναι αρκετά για να περιγράψουν μια γραμμική διαδικασία, δηλαδή ένα γραμμικό δυναμικό στοχαστικό σύστημα, αλλά δεν αποτελούν ικανοποιητική περιγραφή μιας μη-γραμμικής διαδικασίας. Εφαρμόζοντας τη γραμμική ανάλυση σε μια πραγματική χρονοσειρά που συνήθως έχει τυχαία συμπεριφορά, ένα μεγάλο μέρος της πληροφορίας από τη χρονοσειρά δε μπορεί να περιγραφεί και χαρακτηρίζεται θόρυβος. Αυτό το μέρος της πληροφορίας όμως μπορεί να αντιστοιχεί σε μη-γραμμική αιτιοκρατική δυναμική και αυτό προσπαθεί να διερευνήσει η μη-γραμμική ανάλυση.

Τα αποτελέσματα των εφαρμογών της μη-γραμμικής ανάλυσης, τόσο για τη χρονοσειρά *ημερησίων δεδομένων* όσο και για τη χρονοσειρά *ωριαίων δεδομένων*, δεν παρουσίασαν μείωση του σφάλματος σε σχέση με την γραμμική ανάλυση. Ωστόσο από τη σύγκριση των διαγραμμάτων πρόβλεψης εντός και εκτός δείγματος, γίνεται φανερό η δυναμική της μη-γραμμικής ανάλυσης και η προσαρμοστικότητα της στο μη-γραμμικό χαρακτήρα των δεδομένων. Επίσης παρατηρούμε, και σε αυτή την περίπτωση, ότι η μέθοδος δίνει καλύτερα αποτελέσματα για τη χρονοσειρά *ωριαίων δεδομένων* από ότι για τη χρονοσειρά *ημερησίων δεδομένων* (38.1% ημερήσια δεδομένα, 33.9% ωριαία δεδομένα). Αξίζει, τέλος, να σημειώσουμε πως το πεδίο των δυναμικών συστημάτων και της ανάλυσης χαοτικών χρονοσειρών αποτελείται από ένα τεράστιο μαθηματικό υπόβαθρο. Παρέχεται, λοιπόν, η δυνατότητα βελτιστοποίησης της ανάλυσης, είτε με τη χρήση πιο προχωρημένων μοντέλων πρόβλεψης, σε σχέση με τα τοπικά μοντέλα που χρησιμοποιήσαμε στις εφαρμογές μας, είτε με την επεξεργασία των δεδομένων για τη μείωση του θορύβου. Ευελπιστούμε πως στο μέλλον θα υπάρχουν περισσότερα ολοκληρωμένα

υπολογιστικά πακέτα που θα προσανατολίζονται στη μη-γραμμική ανάλυση και θα παρέχουν μια ολοκληρωμένη προσέγγιση στην εκάστοτε εφαρμογή.

Στην τρίτη κατηγορία μεθόδων, χρησιμοποιήσαμε ένα νευρο-ασαφές σύστημα συμπερασμού, το οποίο αποτελεί συστατικό πεδίο της Υπολογιστικής Νοημοσύνης (ΥΝ), για τη μοντελοποίηση της εφαρμογής και τη διενέργεια προβλέψεων. Η υπολογιστική νοημοσύνη είναι η περιοχή της πληροφορικής, η οποία περιλαμβάνει υπολογισμούς και συλλογιστική υπό συνθήκες ανακρίβειας, αβεβαιότητας και μερικής αλήθειας και πετυχαίνει σταθερότητα και χαμηλό κόστος λύσεων. Τα τρία βασικά συστατικά πεδία της: Νευρωνικά Δίκτυα (ΝΔ), Ασαφής Συλλογιστική (ΑΣ) και Γεννητικοί Αλγόριθμοι (ΓΑ). Το καθένα παρουσιάζει συγκεκριμένες ιδιότητες και πλεονεκτήματα.

Συνδυάζοντας τα συστατικά αυτά πεδία μπορούμε να σχεδιάσουμε και να κατασκευάσουμε υβριδικά συστήματα ΥΝ ικανά να επιλύουν με υψηλή απόδοση πολύπλοκα πρακτικά προβλήματα. Τα υβριδικά συστήματα ΥΝ συνδυάζουν τις ιδιότητες καθενός πεδίου και παρακάμπτουν τους περιορισμούς ή τα μειονεκτήματα τους. Οι υβριδικές τεχνικές οδηγούν στην πραγματοποίηση ευφυών συστημάτων τα οποία βρίσκουν ποικίλες εφαρμογές.

Τα αποτελέσματα από την υλοποίηση και την εφαρμογή του ANFIS, παρουσιάζουν σημαντική μείωση του σφάλματος στην πρόβλεψη, τόσο για τη χρονοσειρά ημερήσιων δεδομένων όσο και για τη χρονοσειρά ωριαίων δεδομένων. Παρατηρήθηκε ότι αυξάνοντας την πολυπλοκότητα του συστήματος (αύξηση του αριθμού εισόδων) καταφέραμε να επιτύχουμε μείωση του σφάλματος (MSE, MAE) ως και 50% σε σχέση με τις προηγούμενες μεθόδους. Βεβαίως η αύξηση της πολυπλοκότητας μετά από κάποιο σημείο δεν επιφέρει περαιτέρω βελτίωση. Ένα πολύπλοκο σύστημα έχει μεγάλες απαιτήσεις σε υπολογιστική ισχύ, αυτό όμως δε δημιουργεί ιδιαίτερα προβλήματα, εφόσον δεν εστιάζουμε σε on-line εφαρμογές όπου απαιτείται η επανεκπαίδευση του συστήματος αρκετές φορές. Επίσης παρατηρήθηκε, και σε αυτή την περίπτωση, ότι η μέθοδος δίνει καλύτερα αποτελέσματα για τη χρονοσειρά *ωριαίων δεδομένων* από ότι για τη χρονοσειρά *ημερήσιων δεδομένων* (28.5% ημερήσια δεδομένα, 26.5% ωριαία δεδομένα).

Τέλος, συνοψίζοντας τα παραπάνω, εστιάζουμε στις μεγάλες δυνατότητες που μας προσφέρει ο κλάδος της υπολογιστικής νοημοσύνης και της μη-γραμμικής ανάλυσης, όσον αφορά στη βελτιστοποίηση των εφαρμογών της πρόβλεψης ταχύτητας ανέμου σε αιολικούς σταθμούς. Στην [30] περιγράφεται μια ακόμα

εφαρμογή που βασίζεται στην περιοχή της υπολογιστικής νοημοσύνης και των νευρο-γενετικών συστημάτων. Σε κάθε εφαρμογή πρέπει να λαμβάνουμε υπόψιν μας την προβλεπτική ικανότητα κάθε μοντέλου, καθώς και το είδος των δεδομένων που χρησιμοποιούμε. Από τα αποτελέσματα των εφαρμογών διαπιστώνουμε πως η προβλεπτική ικανότητα κάθε μοντέλου επηρεάζεται σε μικρότερο ή μεγαλύτερο βαθμό από τη φύση των δεδομένων.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- [1] Η Επίδραση της Γεωγραφικής Διασποράς στην Παροχή Εγγυημένης Αιολικής Ισχύος στο Ελληνικό Σύστημα Ηλεκτροπαραγωγής Γιώργος Κάραλης, Γιάννης Περιβολάρης, Κώστας Ράδος, Αρθούρος Ζερβός
- [2] Project ANEMOS. The State-Of-The-Art in Short-Term Prediction of Wind Power, A Literature Overview v1.1
- [3] Χάος, Ανάλυση και πρόβλεψη χρονοσειρών, Κώστας Συριόπουλος, Αλέξανδρος Λεοντίσης «ΑΝΙΚΟΥΛΑ» Θεσσαλονίκη 2000.
- [4] Μέθοδοι προβλέψεων και ανάλυσης αποφάσεων, Χρήστος Ν. Αγιακόγλου Γεώργιος Σ. Οικονόμου, Β' έκδοση, εκδόσεις Γ. Μπένου Αθήνα 2004.
- [5] Beyer H. G., Degner T., Hausmann J., Hoffmann M. and Rujan P. (1994) Short term prediction of wind speed and power output of a wind turbine with neural networks. *EWEC '94, 5th European Wind Energy Association Conference And Exhibition, Conference Proceedings*, Oral Sessions, Vol. 1, Thessaloniki, Greece, pp. 349-352.
- [6] Bossanyi, E.A.: Short-Term Wind Prediction Using Kalman Filters. *Wind Engineering* 9(1), pp.1-8 (1985)
- [7] Informationen aus dem Forschungsschwerpunkt Energieversorgung mit dezentralen Kleinkraftwerken in leistungsbegrenzten Versorgungsnetzen. Fachhochschule Wilhelmshaven, Fachbereich Elektrotechnik, Oktober 1999
- [8] Vihriälä, H., P. Ridanpää, R. Perälä, and L. Söderlund: Control of a variable speed wind turbine with feedforward of aerodynamic torque. *Proceedings of the European Wind Energy Conference, Nice, France, 1-5 March 1999*, pp. 881-884
- [9] Dambrosio, L, and D. Fortunato: One-step-ahead control of a wind-driven, synchronous generator system. *Energy* 24, pp. 9-20 (1999)
- [10] Nogaret, E., G. Stavrakakis, J.C. Bonin, G. Kariniotakis, B. Papadias, G. Contaxis, M. Papadopoulos, N. Hatziaargyriou, S. Papathanassiou, J. Garopoulos, E. Karagounis, J. Halliday, G. Dutton, J. Pedas-Lopes, A. Androutsos, and P. Pligoropoulos: Development and Implementation of an Advanced Control System for Medium Size Wind-Diesel Systems. *Proceedings of the EWEC '94 in Thessaloniki, 10.-14. Okt*, pp. 599-604
- [11] Tantareanu, C.: Wind Prediction in Short Term: A first step for a better wind turbine control. Nordvestjysk Folkecenter for Vedvarende Energi, October 1992.

- [12] Dutton, A.G., G. Kariniotakis, J.A. Halliday, and E. Nogaret: Load and Wind Power Forecasting Methods for the Optimal Management of Isolated Power Systems with High Wind Penetration. *Wind Engineering* 23(2), pp. 69-87 (1999)
- [13] Kariniotakis, G., E. Nogaret, and G. Stavrakis: Advanced Short-Term Forecasting of Wind Power Production. *Proceedings of the European Wind Energy Conference held in Dublin, Ireland, October 1997*, pp. 751-754, ISBN 0 9533922 0 1
- [14] Kariniotakis, G.N., E. Nogaret, A.G. Dutton, J.A. Halliday, and A. Androutsos: Evaluation of Advanced Wind Power and Load Forecasting Meghods for the Optimal Management of Isolated Power Systems. *Proceedings of the European Wind Energy Conference, Nice, France, 1-5 March 1999*, pp. 1082-1085, ISBN 1 902916 00 X
- [15] Fukuda, H., S. Tamaki, M. Nakamura, H. Nagai, F. Shijo, S. Asato, K. Onaga: The Development of a Wind Velocity Prediction Method Based on a Data-Mining Type Auto-Regressive Model. *Proceedings of the European Wind Energy Conference, Copenhagen, Denmark, 2-6 June 2001*
- [16] Hunt, K., and G.P. Nason: Wind speed modelling and short-term prediction using wavelets. *Wind Engineering* 25 (1), pp. 55-61 (2001)
- [17] Contaxis G. and Kabouris J. (1991).Short term scheduling in a wind/diesel autonomous energy system. *IEEE Transactions on Power Systems* 6, 3, 1161-1167.
- [18] Daniel A. R. and Chen A. A. (1991) Stochastic simulation and forecasting of hourly average wind speed sequences in Jamaica. *Solar Energy* 46, 1, 1-11.
- [19] Alexiadis, M.C., P.S. Dokopoulos, H.S. Sahsamanoglou, and I.M. Manousaridis: Short-Term Forecasting of Wind Speed and Related Electrical Power. *Solar Energy* 63, pp. 61-68 (1998)
- [20] Bechrakis, D.A. and P.D. Sparis: Wind Speed Prediction Using Artificial Neural Networks. *Wind Engineering* 22(6), pp. 287-295 (1998)
- [21] Sfetsos, A.: A novel approach for the forecasting of mean hourly wind speed time series. *Renewable Energy* 27, pp. 163-174 (2001)
- [22] Συριόπουλος Κ., Χάος και Χρηματιστηριακές διακυμάνσεις, ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΝΕΑ, τεύχος 3, Κωσταράκης, σελ. 4-7, 1992
- [23] Βασίλειος Σούκος, Δημήτριος Κάντζιος : Καταγραφή και παρουσίαση παραδοσιακών και σύγχρονων μεθόδων πρόβλεψης, επισκόπηση και εκτίμηση λογισμικών προβλέψεων, διπλωματική εργασία (2006)

[24] Δημήτριος Κουγιουμτζής: Γραμμική ανάλυση χρονοσειρών, πανεπιστημιακές σημειώσεις (2005)

[25] Δημήτριος Παπαϊωάννου: Πρόβλεψη κατανάλωσης ηλεκτρικής ενέργειας στην Κρήτη με το νευρό-ασαφές σύστημα anfis, χρησιμοποιώντας χρονοσειρές κατανάλωσης ηλεκτρικής ενέργειας, διπλωματική εργασία (2004)

[26] Εμμανουήλ Μ. Βουμβουλάκης: Βραχυπρόθεσμη πρόβλεψη φορτίου με χρήση νευρωνικών δικτύων και ασαφούς λογικής, διπλωματική εργασία (2003)

[27] Δημήτριος Κουγιουμτζής: Προσομοίωση χαοτικών χρονοσειρών Μέρος Β - Μη-γραμμική ανάλυση χρονοσειρών, πανεπιστημιακές σημειώσεις (2005)

[28] Ευφυής Έλεγχος, Ροβέρτος-Ε. Κινγκ, Εκδόσεις Τζιόλα (2004)

[29] Χρυσή Μινουδάκη, Πρόβλεψη κατανάλωσης νερού στο Ν. Χανίων χρησιμοποιώντας το νευρο-ασαφές σύστημα anfis, διπλωματική εργασία (2007)

[30] Atsalakis G. (2007) Wind Energy Production Forecasting by Neural Networks and Genetic Algorithms. European Computer Conference, Athens 25-27 Sep.

ΔΙΑΔΙΚΤΥΑΚΟΙ ΤΟΠΟΙ

<http://www.cres.gr>

<http://meteo.chi.civil.ntua.gr>

<http://fsu.ece.ntua.gr>

<http://www.chaoskit.com/Webservice>