

ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ ΚΡΗΤΗΣ

ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΠΕΡΙΒΑΛΛΟΝΤΟΣ



Διπλωματική Εργασία:

**“ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΤΗΣ ΓΕΩΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ KRIGING ΓΙΑ ΤΟΝ
ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟ ΤΗΣ ΥΔΡΑΥΛΙΚΗΣ ΑΓΩΓΙΜΟΤΗΤΑΣ ΤΟΥ ΥΠΟΓΕΙΟΥ
ΥΔΡΟΦΟΡΕΑ ΣΤΗΝ ΠΕΡΙΟΧΗ ΧΕΡΣΟΝΗΣΟΥ ΤΟΥ ΗΡΑΚΛΕΙΟΥ ΚΡΗΤΗΣ”**

Πέτρος Ι. Χαλμούκης

ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΗ ΕΠΙΤΡΟΠΗ:

ΚΑΡΑΤΖΑΣ ΓΕΩΡΓΙΟΣ, Καθηγητής (Επιβλέπων)

ΚΑΛΟΓΕΡΑΚΗΣ ΝΙΚΟΛΑΟΣ, Καθηγητής

ΝΙΚΟΛΑΪΔΗΣ ΝΙΚΟΛΑΟΣ, Καθηγητής

Χανιά

Οκτώβριος 2007

Ευχαριστίες

Ιδιαίτερα θα ήθελα να ευχαριστήσω όσους με βοήθησαν κατά τη σύνταξη αυτής της εργασίας και συγκεκριμένα τον καθηγητή Γιώργο Καρατζά και τον Μανώλη Βαρουχάκη καθώς και τα μέλη της εξεταστικής επιτροπής καθηγητές Νίκο Καλογεράκη και Νίκο Νικολαΐδη.

Περίληψη

Η συγκεκριμένη διπλωματική εργασία ασχολείται με την χωρική εκτίμηση φυσικών μεγεθών (υδραυλική αγωγιμότητα) σε σημεία μιας περιοχής ενδιαφέροντος όπου δεν υπάρχουν μετρήσεις. Ο γενικός στόχος είναι η όσο το δυνατόν πιο ρεαλιστική χαρτογράφηση της υδραυλικής αγωγιμότητας της περιοχής σε χάρτη όπου να μπορεί έπειτα να χρησιμοποιηθεί από διάφορα μοντέλα προσομοίωσης υπόγειων υδροφορέων. Για τον λόγο αυτό, πρέπει να προσδιοριστούν επ' ακριβώς ο αριθμός και η θέση των σημείων δειγματοληψίας.

Η χωρική εκτίμηση είναι αποτέλεσμα των μεθόδων γεωστατιστικής ανάλυσης οι οποίες βασίζονται στην χωρική εκτίμηση των τιμών ενός δείγματος. Οι πιο διαδεδομένες είναι γνωστές με την ονομασία Kriging. Για την εφαρμογή αυτών των μεθόδων πρέπει να πληρούνται ορισμένοι μαθηματικοί περιορισμοί. Σε περίπτωση που το δείγμα δεν ικανοποιεί τους περιορισμούς αυτούς, η ακρίβεια της χωρικής εκτίμησης επηρεάζεται αρνητικά.

Αρχικά παρουσιάζεται η μεθοδολογία που πρέπει να ακολουθείται στη γεωστατιστική ανάλυση, την επεξεργασία των δεδομένων και την εκτίμηση (βάσει της μεθόδου Kriging), για οποιαδήποτε περίπτωση δείγματος και περιοχής δειγματοληψίας.

Μετά από μία σύντομη περιγραφή της υπό μελέτη περιοχής (Χερσόνησος Ηρακλείου Κρήτης), εξετάζεται η καταλληλότητα του κάθε δείγματος, βάσει της διαδικασίας που έχει αναφερθεί, και επεξεργάζονται τα δεδομένα πριν χρησιμοποιηθούν για την εκτίμηση (βάσει της μεθόδου Kriging) μέσω του λογισμικού πακέτου Surfer (V.8.0.4, 2002).

Τέλος παρουσιάζονται και αναλύονται όλα τα αποτελέσματα που προέκυψαν από κάθε περίπτωση που εξετάστηκε και παρουσιάζονται οι τελικοί χάρτες όπως προκύπτουν από την ανάλυση των δεδομένων.

Περιεχόμενα

Περίληψη.....	iii
Περιεχόμενα	iv
1. Θεωρητικό Υπόβαθρο	- 1 -
1.1 Γεωστατιστική	- 1 -
1.2 Τυχαία πεδία	- 3 -
1.3 Βασικές έννοιες τυχαίων πεδίων	- 4 -
1.4 Στάδια γεωστατιστικής ανάλυσης.....	- 6 -
1.4.1 Εισαγωγή.....	- 6 -
1.4.2 Υπολογισμός του ιστογράμματος των τιμών της περιεκτικότητας.	- 7 -
1.4.3 Υπολογισμός της συνάρτησης κατανομής πιθανότητας και έλεγχος κανονικότητας.	- 7 -
1.4.4 Προσδιορισμός βασικών παραμέτρων της κατανομής (μέση τιμή, τυπική απόκλιση, συντελεστής κυρτότητας, ασυμμετρίας, ελάχιστη και μέγιστη τιμή της κατανομής, κλπ.)	- 9 -
1.4.5 Έλεγχος για σημεία στα οποία υπάρχουν ακραίες τιμές (hot spots, cold spots) και για τιμές εκτός κατανομής (outliers)	- 18 -
1.4.6 Εξέταση συνθηκών που απαιτούν χρήση μη γραμμικών μετασχηματισμών (ασυμμετρία της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας, «βαριές» ουρές).....	- 19 -
1.4.7 Έλεγχος για μείξη διαφορετικών πληθυσμών (ιστογράμματα με πλέον της μίας κορυφής)	- 26 -
1.5 Προσδιορισμός πρότυπου χωρικής συνέχειας	- 26 -
1.5.1 Ανίχνευση ανισοτροπίας	- 27 -
1.5.2 Έλεγχος παρουσίας και μοντελοποίηση τάσεων, εύρεση περιοχών τοπικής στασιμότητας (στατιστικής ομοιογένειας).	- 30 -

Περιεχόμενα

1.5.3 Επιλογές για τον συνολικό αριθμό τάξεων του πειραματικού ημιβαριογράμματος, την ανοχή κάθε τάξης, τον αριθμό ζευγών ανά τάξη, κλπ.	31 -
1.5.4 Υπολογισμός του πειραματικού ημιβαριογράμματος.....	34 -
1.5.5 Προσαρμογή σε θεωρητικό μοντέλο ημιβαριογράμματος.	36 -
1.5.6 Προσδιορισμός των βασικών παραμέτρων του ημιβαριογράμματος. -	49 -
1.6 Διαδικασία εκτίμησης (βάσει της μεθόδου Kriging).....	54 -
1.6.1 Επιλογή κατάλληλης μεθόδου εκτίμησης (συγκεκριμένος τύπος kriging).	54 -
1.6.2 Διαχωρισμός των μετρήσεων σε δύο σύνολα.....	66 -
1.6.3 Επαλήθευση του προτύπου χωρικής συνέχειας με εκτίμηση των τιμών περιεκτικότητας στα σημεία ελέγχου και υπολογισμός του μέσου απόλυτου σφάλματος (βάσει της απόκλισης μεταξύ των εκτιμήσεων και των μετρήσεων).	67 -
1.6.4 Παραγωγή χαρτών περιεκτικότητας βάσει των εκτιμώμενων τιμών στα σημεία του πλέγματος εκτίμησης, καθώς επίσης και για το αντίστοιχα σφάλμα εκτίμησης (αβεβαιότητα εκτίμησης).	68 -
1.6.5 Ανάλυση των αποτελεσμάτων και εξαγωγή συμπερασμάτων.....	68 -
2. Εφαρμογή της γεωστατιστικής μεθόδου Kriging για τον προσδιορισμό της υδραυλικής αγωγιμότητας του υπόγειου υδροφορέα στην περιοχή Χερσονήσου του Ηρακλείου Κρήτης.	70 -
2.1 Περιγραφή της γεωγραφικής περιοχής	70 -
2.1.1 Εισαγωγή.....	70 -
2.1.2 Κλιματολογικά Στοιχεία	72 -
2.1.3 Χλωρίδα – Πανίδα	74 -
2.1.4 Γεωλογία – Υδρογεωλογία	76 -
2.2 Υδραυλική Αγωγιμότητα (Hydraulic conductivity) (K).....	80 -
2.2.1 Γενικά	80 -

Εφαρμογή της Γεωστατιστικής Μεθόδου Kriging για τον Προσδιορισμό της Υδραυλικής Αγωγιμότητας του Υπόγειου Υδροφορέα στην Περιοχή Χερσονήσου του Ηρακλείου Κρήτης

Περιεχόμενα

2.2.2 Νόμος του Darcy.....	81 -
2.2.3 Ομοιογένεια και ισοτροπία	82 -
2.3 Αριθμός δειγμάτων και τρόπος δειγματοληψίας	84 -
2.4 Διερευνητική Στατιστική Ανάλυση.....	89 -
2.5 Προσδιορισμός πρότυπων χωρικής συνέχειας	90 -
2.6 Εφαρμογή της μεθόδου Κανονικού Kriging (OK)	92 -
2.7 Χρήση Του Λογισμικού Πακέτου «Surfer V.8.0.4, 2002»	93 -
3. Αποτελέσματα – Συμπεράσματα	95 -
3.1 Περίπτωση 1 ^η – 50 δείγματα με τυχαία κατανομή	97 -
3.2 Περίπτωση 2 ^η – 70 δείγματα με τυχαία κατανομή	100 -
3.3 Περίπτωση 3 ^η – 100 δείγματα με τυχαία δειγματοληψία	103 -
3.4 Περίπτωση 4 ^η – 50 δείγματα ανά κατηγορία πετρώματος	106 -
3.5 Περίπτωση 5 ^η – 70 δείγματα ανά κατηγορία πετρώματος	109 -
3.6 Περίπτωση 6 ^η – 100 δείγματα ανά κατηγορία πετρώματος	112 -
3.7 Περίπτωση 7 ^η – 300 δείγματα ανά κατηγορία πετρώματος	115 -
3.8 Περίπτωση 8 ^η – 270 δείγματα ανά κατηγορία πετρώματος σε κεντρικά σημεία	118 -
3.9 Περίπτωση 9 ^η – 300 δείγματα ανά κατηγορία πετρώματος με εύρος τιμών... -	122 -
3.10 Περίπτωση 10 ^η – 209 δείγματα ανά κατηγορία πετρώματος με διαχωρισμό της περιοχής σε τμήματα	125 -
3.11 Σύγκριση αποτελεσμάτων	129 -
3.12 Προτάσεις για μελλοντική έρευνα	133 -
Βιβλιογραφία	134 -

Περιεχόμενα

Κατάλογος Σχημάτων

Σχήμα 1.1 Πυκνότητας πιθανότητας λογαριθμικής κατανομής. Η μέση τιμή σημειώνεται με διακεκομμένη γραμμή (τελείες) και ο διάμεσος με διακεκομμένη γραμμή (παύλες).....	22 -
Σχήμα 1.2 Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της κατανομής χ^2 για τρεις διαφορετικούς βαθμούς ελευθερίας.	23 -
Σχήμα 1.3 Γεωμετρική ανισοτροπία	28 -
Σχήμα 1.4 Ανισοτροπία και 'ζώνη επιρροής'	29 -
Σχήμα 1.5 Σχηματικό διάγραμμα μίας περιοχής $B(r)$ γύρω από το διάνυσμα απόστασης.	33 -
Σχήμα 1.6 Προσαρμογή του πειραματικού ημιβαριογράμματος συγκέντρωσης χρωμίου στο εκθετικό πρότυπο.	37 -
Σχήμα 1.7 Το σφαιρικό μοντέλο.....	42 -
Σχήμα 1.8 Μοντέλα δύναμης (Δυναμονομικό).....	44 -
Σχήμα 1.9 Εκθετικό μοντέλο.	45 -
Σχήμα 1.10 Μοντέλο του Gauss.....	46 -
Σχήμα 1.11 Κυβικό μοντέλο	47 -
Σχήμα 1.12 Παρουσίαση χαρακτηριστικών στοιχείων ημιβαριογράμματος (Surfer V.8.0.4, 2002).....	49 -
Σχήμα 2.13 Ο λιμένας Χερσονήσου και η ευρύτερη περιοχή του Δήμου Χερσονήσου.	71 -
Σχήμα 2.14 Περιπτώσεις ομοιογενούς-ανομοιογενούς και ισότροπου-ανισότροπου υδροφορέα.....	83 -
Σχήμα 2.15 Ο υδρογεωλογικός χάρτης της περιοχής πάνω στον οποίο διακρίνονται οι αυτόνομες υδρογεωλογικές ενότητες, καθεμία από τις οποίες διακρίνεται από διαφορετική υδραυλική αγωγιμότητα.....	85 -
Σχήμα 2.16 Χάρτης της περιοχής με αριθμημένα τα γεωλογικά στρώματα.....	86 -
Σχήμα 2.17 Παράδειγμα απεικόνισης ανισοτροπίας (Surfer V.8.0.4, 2002).....	91 -
Εφαρμογή της Γεωστατιστικής Μεθόδου Kriging για τον Προσδιορισμό της Υδραυλικής Αγωγιμότητας του Υπόγειου Υδροφορέα στην Περιοχή Χερσονήσου του Ηρακλείου Κρήτης	vii

Περιεχόμενα

Σχήμα 3.18 Ημιβαριόγραμμα για 50 δείγματα με τυχαία κατανομή.....	- 97 -
Σχήμα 3.19 Χάρτης σχετικού απόλυτου σφάλματος 50 δειγμάτων με τυχαία κατανομή.....	- 98 -
Σχήμα 3.20 Χάρτης υδραυλικής αγωγιμότητας για 50 δείγματα με τυχαία κατανομή	- 99 -
Σχήμα 3.21 Χάρτης υδραυλικής αγωγιμότητας για 50 δείγματα με τυχαία κατανομή σε σχέση με τον γεωλογικό χάρτη	- 99 -
Σχήμα 3.22 Ημιβαριόγραμμα για 70 δείγματα με τυχαία κατανομή.....	- 100 -
Σχήμα 3.23 Χάρτης σχετικού απόλυτου σφάλματος 70 δειγμάτων με τυχαία κατανομή.....	- 101 -
Σχήμα 3.24 Χάρτης υδραυλικής αγωγιμότητας για 70 δείγματα με τυχαία κατανομή	- 102 -
Σχήμα 3.25 Χάρτης υδραυλικής αγωγιμότητας για 70 δείγματα με τυχαία κατανομή σε σχέση με τον γεωλογικό χάρτη	- 102 -
Σχήμα 3.26 Ημιβαριόγραμμα για 100 δείγματα με τυχαία κατανομή.....	- 103 -
Σχήμα 3.27 Χάρτης σχετικού απόλυτου σφάλματος 100 δειγμάτων με τυχαία κατανομή.....	- 104 -
Σχήμα 3.28 Χάρτης υδραυλικής αγωγιμότητας για 100 δείγματα με τυχαία κατανομή.....	- 105 -
Σχήμα 3.29 Χάρτης υδραυλικής αγωγιμότητας για 100 δείγματα με τυχαία κατανομή σε σχέση με τον γεωλογικό χάρτη.....	- 105 -
Σχήμα 3.30 Ημιβαριόγραμμα για 50 δείγματα ανά κατηγορία πετρώματος....	- 106 -
Σχήμα 3.31 Χάρτης σχετικού απόλυτου σφάλματος 50 δειγμάτων ανά κατηγορία πετρώματος.....	- 107 -
Σχήμα 3.32 Χάρτης υδραυλικής αγωγιμότητας για 50 δείγματα ανά κατηγορία πετρώματος.....	- 108 -
Σχήμα 3.33 Χάρτης υδραυλικής αγωγιμότητας για 50 δείγματα ανά κατηγορία πετρώματος σε σχέση με τον γεωλογικό χάρτη.....	- 108 -

Περιεχόμενα

Σχήμα 3.34 Ημιβαριόγραμμα για 70 δείγματα ανά κατηγορία πετρώματος....	- 109 -
Σχήμα 3.35 Χάρτης σχετικού απόλυτου σφάλματος 70 δειγμάτων ανά κατηγορία πετρώματος.....	- 110 -
Σχήμα 3.36 Χάρτης υδραυλικής αγωγιμότητας για 70 δείγματα ανά κατηγορία πετρώματος.....	- 111 -
Σχήμα 3.37 Χάρτης υδραυλικής αγωγιμότητας για 70 δείγματα ανά κατηγορία πετρώματος σε σχέση με τον γεωλογικό χάρτη.....	- 111 -
Σχήμα 3.38 Ημιβαριόγραμμα για 100 δείγματα ανά κατηγορία πετρώματος..	- 112 -
Σχήμα 3.39 Χάρτης σχετικού απόλυτου σφάλματος 100 δειγμάτων ανά κατηγορία πετρώματος.....	- 113 -
Σχήμα 3.40 Χάρτης υδραυλικής αγωγιμότητας για 100 δείγματα ανά κατηγορία πετρώματος.....	- 114 -
Σχήμα 3.41 Χάρτης υδραυλικής αγωγιμότητας για 100 δείγματα ανά κατηγορία πετρώματος σε σχέση με τον γεωλογικό χάρτη.....	- 114 -
Σχήμα 3.42 Ημιβαριόγραμμα για 300 δείγματα ανά κατηγορία πετρώματος..	- 115 -
Σχήμα 3.43 Χάρτης σχετικού απόλυτου σφάλματος 300 δειγμάτων ανά κατηγορία πετρώματος.....	- 116 -
Σχήμα 3.44 Χάρτης υδραυλικής αγωγιμότητας για 300 δείγματα ανά κατηγορία πετρώματος.....	- 117 -
Σχήμα 3.45 Χάρτης υδραυλικής αγωγιμότητας για 300 δείγματα ανά κατηγορία πετρώματος σε σχέση με τον γεωλογικό χάρτη.....	- 117 -
Σχήμα 3.46 Ημιβαριόγραμμα για 270 δείγματα ανά κατηγορία πετρώματος σε κεντρικά σημεία	- 118 -
Σχήμα 3.47 Χάρτης σχετικού απόλυτου σφάλματος 270 δειγμάτων ανά κατηγορία πετρώματος σε κεντρικά σημεία	- 119 -
Σχήμα 3.48 Χάρτης υδραυλικής αγωγιμότητας για 270 δείγματα ανά κατηγορία πετρώματος σε κεντρικά σημεία	- 120 -
Σχήμα 3.49 Χάρτης υδραυλικής αγωγιμότητας για 270 δείγματα ανά κατηγορία πετρώματος σε κεντρικά σημεία	- 121 -

Περιεχόμενα

Σχήμα 3.50 Ημιβαριόγραμμα για 300 δείγματα ανά κατηγορία πετρώματος με εύρος τιμών	- 122 -
Σχήμα 3.51 Χάρτης σχετικού απόλυτου σφάλματος 300 δειγμάτων ανά κατηγορία πετρώματος με εύρος τιμών	- 123 -
Σχήμα 3.52 Χάρτης υδραυλικής αγωγιμότητας για 300 δείγματα ανά κατηγορία πετρώματος με εύρος τιμών	- 124 -
Σχήμα 3.53 Χάρτης υδραυλικής αγωγιμότητας για 300 δείγματα ανά κατηγορία πετρώματος με εύρος τιμών	- 124 -
Σχήμα 3.54 Ημιβαριόγραμμα για 209 δείγματα ανά κατηγορία πετρώματος με διαχωρισμό της περιοχής σε τμήματα.....	- 125 -
Σχήμα 3.55 Χάρτης σχετικού απόλυτου σφάλματος 209 δειγμάτων ανά κατηγορία πετρώματος με διαχωρισμό της περιοχής σε τμήματα	- 126 -
Σχήμα 3.56 Χάρτης υδραυλικής αγωγιμότητας για 209 δείγματα ανά κατηγορία πετρώματος με διαχωρισμό της περιοχής σε τμήματα	- 127 -
Σχήμα 3.57 Χάρτης υδραυλικής αγωγιμότητας για 209 δείγματα ανά κατηγορία πετρώματος με διαχωρισμό της περιοχής σε τμήματα	- 128 -

Περιεχόμενα

Κατάλογος Πινάκων

Πίνακας 1.1 Παράμετροι της κανονικής κατανομής	19 -
Πίνακας 1.2 Παράμετροι της κατανομής Poisson.....	25 -
Πίνακας 2.3 Δεδομένα μετεωρολογικού σταθμού Ηρακλείου Κρήτης 754.....	73 -
Πίνακας 2.4 Ανεμολογικά δεδομένα μετεωρολογικού σταθμού Ηρακλείου Κρήτης 754.....	74 -
Πίνακας 2.5 Ποσοστό έκτασης κάθε γεωλογικού στρώματος.....	87 -
Πίνακας 2.6 Εύρος τιμής υδραυλικής αγωγιμότητας για κάθε γεωλογικό σχηματισμό.	88 -
Πίνακας 3.7 Παράμετροι από ημιβαριογράμματα	130 -
Πίνακας 3.8 Ποσοστά μέσου σχετικού απόλυτου σφάλματος.....	131 -

1. Θεωρητικό Υπόβαθρο

1.1 Γεωστατιστική

Η συγκεκριμένη διπλωματική εργασία ασχολείται με τη χωρική εκτίμηση φυσικών μεγεθών (υδραυλική αγωγιμότητα) σε σημεία μιας περιοχής ενδιαφέροντος όπου δεν υπάρχουν μετρήσεις.

Η χωρική εκτίμηση είναι αποτέλεσμα των μεθόδων γεωστατιστικής ανάλυσης οι οποίες βασίζονται στην χωρική εξάρτηση των τιμών ενός δείγματος. Οι πιο διαδεδομένες είναι γνωστές με την ονομασία Kriging. Οι μέθοδοι αυτές χαρακτηρίζονται από ισχυρούς μαθηματικούς περιορισμούς ως προς την εφαρμογή τους. Όταν οι περιορισμοί αυτοί δεν ικανοποιούνται επηρεάζεται αρνητικά η ακρίβεια της χωρικής εκτίμησης. [3]

Η γεωστατιστική περιλαμβάνει ένα σύνολο στατιστικών τεχνικών που αφορούν τυχαίες μεταβλητές οι οποίες μεταβάλλονται στο χώρο (τυχαία πεδία). Οι τεχνικές αυτές βασίζονται στην υπόθεση ότι η χωρική διακύμανση της μεταβλητής εμπεριέχει τυχαίο χαρακτήρα, οπότε χρησιμοποιούν στατιστικές μεθοδολογίες (π.χ. μέση τιμή, διασπορά κ.α.) για οποιαδήποτε εκτίμηση απορρέει από τις μετρήσεις της μεταβλητής.

Πιο αναλυτικά, η γεωστατιστική στηρίζεται στην μαθηματική έννοια του τυχαίου πεδίου. Η Γεωστατιστική έχει κοινά σημεία με τη Θεωρία Πιθανοτήτων και τη Στατιστική. Η Θεωρία Πιθανοτήτων ασχολείται με τους νόμους και τις ιδιότητες που διέπουν τις τυχαίες μεταβλητές. Η Στατιστική περιλαμβάνει το σύνολο των μεθόδων οι οποίες επιτρέπουν τον προσδιορισμό των παραμέτρων που χαρακτηρίζουν τις τυχαίες μεταβολές βάσει των δεδομένων. Η Θεωρία των Τυχαίων Πεδίων αποτελεί μια γενίκευση της Θεωρίας Πιθανοτήτων που εφαρμόζεται σε τυχαίες μεταβλητές με χωρική εξάρτηση.

Η γεωστατιστική στηρίζεται στην βασική μαθηματική έννοια του τυχαίου πεδίου. Οι γεωστατιστικές μέθοδοι έχουν εφαρμογές σε πολλά πεδία επιστημονικής έρευνας και τεχνολογίας όπως στην μορφολογική ανάλυση φυσικών και τεχνολογικών ανομοιογενών υλικών, στην χαρτογράφηση και την απεικόνιση συγκεντρώσεων

Κεφάλαιο 1

ρυπαντών σε διάφορα περιβαλλοντικά μέσα, στον χαρακτηρισμό της ποιότητας βιομηχανικών προϊόντων, στην τοπογραφική ανάλυση και στα γεωγραφικά συστήματα πληροφορίας (GIS). Ο κοινός στόχος σε όλες αυτές τις εφαρμογές είναι ο προσδιορισμός και (ει δυνατό) ο έλεγχος της χωρικής κατανομής μεταβλητών που χαρακτηρίζουν μεγέθη με οικονομική ή περιβαλλοντική σημασία. Η ανάγκη αυτή είναι εμφανής για μεταβολές σε μεγάλη γεωγραφική κλίμακα. Ωστόσο, ακόμα και στην περίπτωση ανομοιογενών υλικών με μικρές διαστάσεις η πολύπλοκη εσωτερική δομή μπορεί να χαρακτηριστεί με την βοήθεια της γεωστατιστικής ανάλυσης.

Συνοπτικά, οι βασικές αιτίες που καθιστούν απαραίτητη την χρήση της γεωστατιστικής στην ανάλυση της χωρικής εξάρτησης είναι οι εξής:

1. Εγγενής ανομοιογένεια: αναφέρεται σε μεταβολές διαφόρων φυσικών μεγεθών (στον χώρο ή τον χρόνο) που έχουν τυχαία χαρακτηριστικά.
2. Αβεβαιότητα στην περιγραφή της χωρικής εξάρτησης: αυτή εξυπονοεί ελλιπή γνώση της μεταβολής του μεγέθους από σημείο σε σημείο. Αυτό οφείλεται στον περιορισμένο αριθμό μετρήσεων και την μη-αιτιοκρατική μεταβολή που χαρακτηρίζει πολλά φυσικά φαινόμενα και κατανομές. Αυτοί οι παράγοντες δεν επιτρέπουν τον επακριβή προσδιορισμό σε σημεία στα οποία δεν υπάρχουν μετρήσεις.
3. Εξάρτηση κλίμακας του μετρούμενου μεγέθους: το αποτέλεσμα της μέτρησης εξαρτάται από την διακριτική ικανότητα των μετρητικών οργάνων και τις διαστάσεις της περιοχής που καλύπτουν οι μετρήσεις.

Η ανομοιογένεια είναι ένας παράγοντας που δεν ελέγχεται στην περίπτωση φυσικών φαινομένων (π.χ. ανομοιογένεια εδάφους).

Σε αντίθεση με την ανομοιογένεια, η αβεβαιότητα περιορίζεται αυξάνοντας την «πυκνότητα» των μετρήσεων, δηλαδή μειώνοντας την απόσταση μεταξύ γειτονικών σημείων μέτρησης. Ωστόσο κάτι τέτοιο έχει υψηλό κόστος και είναι πρακτικά ανέφικτο σε πολλές περιπτώσεις, ειδικά αν η διαδικασία της μέτρησης (π.χ. γεώτρηση) επηρεάζει σημαντικά το μετρούμενο μέγεθος. Σε κάθε περίπτωση, επιβάλλεται να υπάρχει ακριβής προσδιορισμός της αβεβαιότητας, ώστε να χαρακτηρίζεται με ακρίβεια το διάστημα εμπιστοσύνης μιας μέτρησης ή εκτίμησης.

Η κατανόηση της κλίμακας εξάρτησης είναι απαραίτητη για να προβεί κανείς σε ακριβής υπολογισμούς και προσομοιώσεις. Στην πράξη οι διαθέσιμες πληροφορίες

Κεφάλαιο 1

βασίζονται συχνά σε μετρήσεις από διαφορετικά όργανα, άρα αντιστοιχούν σε διαφορετικές φυσικές κλίμακες. Επιπλέον, οι αριθμητικές προσομοιώσεις εκτελούνται σε μία κλίμακα που συνήθως υπαγορεύεται από τους διαθέσιμους υπολογιστικούς πόρους. Τέλος, το αποτέλεσμα πρέπει να εκφραστεί στην κλίμακα που αφορά την συγκεκριμένη εφαρμογή. Επομένως, είναι σημαντική η ανάπτυξη μεθόδων που επιτρέπουν την μεταφορά πληροφοριών από μία κλίμακα σε άλλη. [1]

1.2 Τυχαία πεδία

Τυχαίο πεδίο ή πεδίο τυχαίων μεταβλητών μπορεί να θεωρηθεί ένα σύνολο τυχαίων μεταβλητών που περιγράφουν τη χωρική (ή χωρο-χρονική) μεταβολή του σχετικού φυσικού μεγέθους. Σε αντίθεση με τις συναρτήσεις οι οποίες έχουν μία συγκεκριμένη μαθηματική έκφραση, ένα τυχαίο πεδίο που δεν έχει σαφή μαθηματική έκφραση αντιπροσωπεύει ένα σύνολο δυνατών καταστάσεων. [3]

Κάθε κατάσταση αποτελεί ένα δείγμα του πεδίου και χαρακτηρίζεται από μία πιθανότητα πραγματοποίησης που καθορίζεται από την πολυδιάστατη Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας του πεδίου. Επομένως, ένα τυχαίο πεδίο μπορεί να θεωρηθεί ως μία πολυδιάστατη τυχαία μεταβλητή. Λόγω της αλληλεξάρτησης των φυσικών μεγεθών σε διαφορετικά σημεία του χώρου, τα τυχαία πεδία έχουν ιδιαίτερες μαθηματικές ιδιότητες που τα ξεχωρίζουν από ένα σύνολο ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών. [1]

- Αν το πεδίο παίρνει τιμές μόνο από ένα μετρήσιμο σύνολο αριθμών, ονομάζεται πεδίο διακριτών τιμών.
- Αν οι τιμές του πεδίου προέρχονται από ένα συνεχές διάστημα των πραγματικών αριθμών, το πεδίο ονομάζεται πεδίο συνεχών τιμών.
- Εάν η μεταβολή καθορίζεται με τη βοήθεια των τιμών του πεδίου στις θέσεις ενός πλέγματος (lattice), δημιουργείται ένα πλεγματικό πεδίο (lattice field).
- Αν η μεταβολή ορίζεται σε ένα συνεχή χώρο (continuum), δημιουργείται ένα πεδίο συνεχούς χώρου. Τα φυσικά πεδία είναι συνεχούς χώρου.

Κεφάλαιο 1

Η φύση του χώρου (συνεχής ή διακριτός) ορισμού του πεδίου δεν καθορίζει τις τιμές που παίρνει το πεδίο. Έτσι, ένα πεδίο συνεχούς χώρου μπορεί να παίρνει διακριτές τιμές. [2]

1.3 Βασικές έννοιες τυχαίων πεδίων

Τα τυχαία πεδία περιγράφουν ένα ευρύ φάσμα χωρικής εξάρτησης με πολύ διαφορετικές ιδιότητες. Η κατανομή πιθανότητας του τυχαίου πεδίου και οι παράμετροί της ορίζονται κατ' επέκταση των ορισμών που ισχύουν για μεμονωμένες τυχαίες μεταβλητές. [2]

Ένα τυχαίο πεδίο συμβολίζεται ως $X(s)$, όπου s ένα διάνυσμα θέσης, $s=(x,y)$. Το $X(s)$ συμβολίζει το σύνολο των δυνατών καταστάσεων του πεδίου, ενώ ως $x(s)$ συμβολίζονται οι τιμές που αντιστοιχούν σε μία κατάσταση. Η Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας (ΣΠΠ) του πεδίου παριστάνεται ως $f_x[x(s)]$. Ο δείκτης X δηλώνει το πεδίο, ενώ το όρισμα της συνάρτησης είναι οι τιμές της κατάστασης του πεδίου. [3]

Ένα παράδειγμα ΣΠΠ η οποία αντιστοιχεί σε τυχαίο πεδίο κανονικής κατανομής

δίνεται από την εξίσωση:
$$f_x[x(s)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x^2}} \exp\left[-\frac{(x(s)-m_x(s))^2}{2\sigma_x^2}\right]$$

Η Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας τυχαίου πεδίου περιλαμβάνει τις τιμές σε ολόκληρο το χώρο όπου ορίζεται το πεδίο. Επομένως αποτελεί την κοινή ΣΠΠ για ένα οποιοδήποτε πλήθος σημείων. Η μονοδιάστατη ή αλλιώς σημειακή ΣΠΠ περιγράφει τις δυνατές καταστάσεις του πεδίου σε ένα συγκεκριμένο σημείο. Είναι δυνατόν η μονοδιάστατη ΣΠΠ να αλλάξει από σημείο σε σημείο και αυτό συμβαίνει όταν το πεδίο είναι ανομοιογενές. Ανάλογα, η δισδιάστατη ΣΠΠ του πεδίου εκφράζει την αλληλεξάρτηση των δυνατών καταστάσεων σε δύο σημεία και η πολυδιάστατη περιγράφει την αλληλεξάρτηση των δυνατών καταστάσεων για ένα σύνολο N σημείων.

Ένα άλλο είδος συναρτήσεων το οποίο δίνει πληροφορίες σχετικά με τις ιδιότητες ενός τυχαίου πεδίου είναι οι **στατιστικές ροπές**. Οι στατιστικές ροπές είναι αιτιοκρατικές συναρτήσεις, οι οποίες αντιπροσωπεύουν μέσες τιμές, ως προς τις δυνατές καταστάσεις. Στην πράξη συνήθως είναι χρήσιμες οι ροπές χαμηλών

τάξεων (μέχρι δεύτερης τάξης), όπως η μέση τιμή, η διασπορά, η συνάρτηση συνδιασποράς και το ημιβαριόγραμμα. [1]

Ταξινόμηση τυχαίων πεδίων

Μια συγκριτική ταξινόμηση επιτρέπει τον ευκολότερο προσδιορισμό των ιδιοτήτων που ενδιαφέρουν για κάθε συγκεκριμένη εφαρμογή και των μεθόδων που μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την ανάλυση των δεδομένων. Παρακάτω προτείνεται μία ταξινόμηση των τυχαίων πεδίων βάσει τριών διαφορετικών κριτηρίων τα οποία είναι:

I. Ταξινόμηση βάσει της Συνάρτησης Πυκνότητας Πιθανότητας (ΣΠΠ)

1. Κανονικά πεδία (Γκαουσιανή κατανομή).
2. Λογαριθμικά πεδία.
3. Πεδία με συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας L'evy.

II. Ταξινόμηση Βάσει της Στατιστικής Ομοιογένειας

1. Στατιστικά Ομοιογενή Πεδία.
2. Πεδία με Στατιστικά Ομοιογενή Βήματα.
3. Πεδία με Ανομοιογενή Βήματα.

III. Ταξινόμηση Βάσει της Συνάρτησης Συσχέτισης

1. Συσχετίσεις Μικρής Εμβέλειας (short – range correlation).
2. Συσχετίσεις Μακράς Εμβέλειας (long – range correlations).
3. Κλασματικές Εξαρτήσεις (Fractals).
4. Πολυκλασματικές Εξαρτήσεις (Multifractals).

[2]

1.4 Στάδια γεωστατιστικής ανάλυσης

Θα αναφερθούν γενικά τα στάδια που περιλαμβάνονται στη γεωστατιστική ανάλυση. Εξαντλητικός προσδιορισμός της διαδικασίας δεν είναι εφικτός, διότι σε διάφορα στάδια της ανάλυσης οι αποφάσεις υπαγορεύονται από την εμπειρία και την γνώση των μηχανικών που τις χρησιμοποιούν, καθώς και από την διαθεσιμότητα και την ποιότητα διαφόρων συμπληρωματικών πληροφοριών ποιοτικής φύσης (π.χ. γεωλογικές πληροφορίες σχετικά με την ανισοτροπία). Στα επόμενα στάδια δίνεται βάρος στην κλασσική και ευρέως χρησιμοποιούμενη γεωστατιστική προσέγγιση, με την υποσημείωση ότι διάφορες μέθοδοι ανάλυσης βρίσκονται υπό διερεύνηση. [3]

1.4.1 Εισαγωγή

Μια τυχαία μεταβλητή, X , αντιπροσωπεύει ένα σύνολο πιθανών ενδεχομένων (possible events) ή καταστάσεων (outcomes, states or realizations) που δηλώνονται με το σύμβολο x_i , $i=1,...,N$ όπου N είναι ο πληθικός αριθμός του συνόλου καταστάσεων. Κάθε κατάσταση x_i χαρακτηρίζεται από μία πιθανότητα πραγματοποίησης p_i , $i=1,...,N$.

Αν ο συνολικός αριθμός των καταστάσεων που περιέχει ο πληθυσμός είναι πεπερασμένος (ή άπειρος αλλά μετρήσιμος), η τυχαία μεταβλητή ονομάζεται διακριτή.

Αν ο αριθμός των καταστάσεων είναι άπειρος και μη μετρήσιμος η τυχαία μεταβλητή ονομάζεται συνεχής.

Οι μεταβλητές που περιγράφουν την μεταβολή φυσικών ιδιοτήτων είναι συνήθως συνεχείς, δηλαδή παίρνουν όλες τις πραγματικές τιμές μέσα στο διάστημα μεταβολής. Ωστόσο, αν η κατανομή της πιθανότητας προσδιορίζεται βάσει πειραματικών δεδομένων, λόγω του περιορισμένου αριθμού διαθέσιμων καταστάσεων είναι δυνατό μια μεταβλητή να θεωρηθεί διακριτή. Επιπλέον, η «διακριτοποίηση» μιας συνεχούς μεταβλητής διευκολύνει την πρακτική χρήση της. Για παράδειγμα, η θερμοκρασία συνήθως αναφέρεται χρησιμοποιώντας ακέραιες

Εφαρμογή της Γεωστατιστικής Μεθόδου Kriging για τον Προσδιορισμό της Υδραυλικής Αγωγιμότητας του Υπόγειου Υδροφορέα στην Περιοχή Χερσονήσου του Ηρακλείου Κρήτης

Κεφάλαιο 1

τιμές της κλίμακας Κελσίου, ενώ στην πραγματικότητα οι θερμοκρασιακές μεταβολές είναι συνεχείς. [1]

Η διερευνητική στατιστική ανάλυση δεδομένων περιλαμβάνει τις εξής διαδικασίες:

1.4.2 Υπολογισμός του ιστογράμματος των τιμών της περιεκτικότητας.

Έστω ότι ένα δείγμα περιλαμβάνει M μετρήσεις της μεταβλητής X . Ο ακέραιος αριθμός M προσδιορίζει το μέγεθος του δείγματος. Έστω πως μια τιμή x_j , $j=1,...,M$, εμφανίζεται με συχνότητα ω_j (όπου ω_j είναι ένας ακέραιος μεταξύ μηδέν και M). Τοποθετούνται στον οριζόντιο άξονα x οι τιμές τις X , και στον κάθετο άξονα η συχνότητα εμφάνισης της κατάστασης x_j .

Το ιστόγραμμα συχνότητας της μεταβλητής είναι η γραφική παράσταση που προκύπτει αν σε κάθε x_j σχεδιαστεί μία κατακόρυφη στήλη (ιστό) με ύψος με ω_j . Η στήλη εκτείνεται μεταξύ των σημείων $(x_j + x_{j-1})/2$ και $(x_{j+1} + x_j)/2$, ή μεταξύ των σημείων x_j και x_{j+1} . Οι τιμές που περιλαμβάνονται στο εύρος της στήλης ορίζουν την αντίστοιχη κλάση του ιστογράμματος.

Αν οι κλάσεις του ιστογράμματος δεν είναι όλες του ίδιου εύρους, η συχνότητα μιας κατάστασης είναι ανάλογη με το εμβαδόν και όχι με το ύψος της στήλης. [1]

1.4.3 Υπολογισμός της συνάρτησης κατανομής πιθανότητας και έλεγχος κανονικότητας.

Διαιρώντας την συχνότητα ω_j με τον συνολικό αριθμό καταστάσεων M , προκύπτει η πιθανότητα της κατάστασης x_j , $p_j = \omega_j / M$. Αν βαθμονομηθεί ο κάθετος άξονας της παράστασης έτσι ώστε το ύψος κάθε στήλης να είναι ίσο με την πιθανότητα της αντίστοιχης κατάστασης, το διάγραμμα παριστά την κατανομή της πιθανότητας ανάμεσα στις διάφορες καταστάσεις.

Στην περίπτωση των διακριτών μεταβλητών οι πιθανότητες συγκεκριμένων καταστάσεων είναι καλά ορισμένες, επειδή το πλήθος των δυνατών καταστάσεων

Κεφάλαιο 1

είναι μετρήσιμο. Στην περίπτωση των συνεχών μεταβλητών η πιθανότητα μιας συγκεκριμένης κατάστασης δεν είναι καλά ορισμένη.

Σε μία συνεχή μεταβλητή η πιθανότητα η μεταβλητή αυτή να παίρνει την τιμή π.χ. 1 μπορεί να μην πραγματοποιείται ποτέ. Επομένως, ποιες τιμές της μεταβλητής θα θεωρηθούν πως ανήκουν στην ίδια κατάσταση, έτσι ώστε να υπολογίζεται η πιθανότητα αυτής της κατάστασης;

Αυτά τα προβλήματα αντιμετωπίζονται ορίζοντας την πυκνότητα καταστάσεων. Αυτή αντιπροσωπεύει το πλήθος των καταστάσεων που περιέχονται σε ένα απειροστικά μικρό διάστημα μεταβολής του x . Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (probability density function) $f_x(x)$ ορίζεται μέσω της μεταβολής της αθροιστικής πιθανότητας για μια απειροστή μεταβολή της τιμής του x κατά δx ως εξής:

$$F_x(x + \delta x) - F_x(x) \cong f_x(x) \delta x$$

Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας ορίζεται αυστηρά με την βοήθεια της παραγώγου βάσει της εξής σχέσης:

$$f_x(x) = \lim_{\delta x \rightarrow 0} \frac{F_x(x + \delta x) - F_x(x)}{\delta x}$$

Επομένως, στις συνεχείς μεταβλητές η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας αντικαθιστά την έννοια της πιθανότητας μίας μεμονωμένης κατάστασης. [1]

Πριν από την εφαρμογή του γεωστατιστικού μοντέλου πρέπει να πραγματοποιηθεί διερευνητικός στατιστικός έλεγχος του δείγματος. Πρέπει δηλαδή να διαπιστωθεί αν το δείγμα μπορεί να χρησιμοποιηθεί για αποτελεσματική γεωστατιστική ανάλυση ή αν πρέπει να υποστεί κάποιο μετασχηματισμό. Για να εφαρμοστούν οι κλασσικές μέθοδοι γεωστατιστικής ανάλυσης πρέπει να τηρούνται κάποιες προϋποθέσεις.

Η πιο βασική προϋπόθεση αφορά την κατανομή του δείγματος. Αν οι τιμές του δείγματος ακολουθούν την κανονική κατανομή απλοποιείται η εφαρμογή της γεωστατιστικής ανάλυσης, καθώς δεν είναι απαραίτητος ο μετασχηματισμός των τιμών του δείγματος. Επίσης, αν το δείγμα είναι στατιστικά ομοιογενές εξυπηρετεί σημαντικά στον υπολογισμό του ημιβαριόγραμματος, καθώς σε αυτήν την περίπτωση το ημιβαριόγραμμα εξαρτάται αποκλειστικά από την απόσταση μεταξύ των σημείων του δείγματος.

Κεφάλαιο 1

Ένας πρώτος τρόπος για να διαπιστωθεί αν το δείγμα ακολουθεί την κανονική κατανομή είναι η δημιουργία του διαγράμματος κανονικής κατανομής, το οποίο υλοποιείται από την εντολή «normplot» της Matlab®. Αν τα σημεία του δείγματος βρίσκονται πάνω στην ευθεία γραμμή του διαγράμματος τότε το δείγμα ακολουθεί την κανονική κατανομή.

Παρόμοιος έλεγχος, αλλά ποιοτικής μορφής, επιτυγχάνεται με την εντολή «hist» της Matlab® η οποία δείχνει με την χρήση ιστογράμματος αν οι τιμές του δείγματος ακολουθούν την κανονική κατανομή, αλλά και με την εντολή «histfit» επίσης της Matlab® η οποία προσαρμόζει την βέλτιστη κανονική συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας στο ιστόγραμμα των τιμών. Από τα δύο σχήματα φαίνεται αν οι τιμές του δείγματος ακολουθούν την κανονική κατανομή, στο μεν πρώτο εφόσον το ιστόγραμμα έχει την μορφή καμπύλης «καμπάνας», στο δε δεύτερο εφόσον προσαρμόζεται πολύ καλά στην καμπύλη της βέλτιστης κανονικής συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας.

Ένας άλλος τρόπος για να διαπιστωθεί αν οι τιμές ακολουθούν την κανονική κατανομή είναι η εφαρμογή στατιστικού ελέγχου. Ο πιο διαδεδομένος στατιστικός έλεγχος είναι ο έλεγχος Kolmogorov-Smirnov. Η μηδενική υπόθεση, θεωρεί ότι οι τιμές ενός δείγματος ακολουθούν την κανονική κατανομή. Ο έλεγχος Kolmogorov-Smirnov εφαρμόζεται συγκρίνοντας τις κανονικοποιημένες τιμές του δείγματος, οι οποίες δίνονται από την παρακάτω εξίσωση:

$$\frac{X(s) - \bar{X}(s)}{\sigma_x}, \text{ όπου } \bar{X}(s) \text{ ο δειγματικός μέσος όρος,}$$

με μία πρότυπη κανονική κατανομή η οποία έχει μέση τιμή $\bar{X}=0$ και τυπική απόκλιση $\sigma=1$. Ο έλεγχος υλοποιείται σε περιβάλλον Matlab® με την βοήθεια της εντολής «kstest». [3]

1.4.4 Προσδιορισμός βασικών παραμέτρων της κατανομής (μέση τιμή, τυπική απόκλιση, συντελεστής κυρτότητας, ασυμμετρίας, ελάχιστη και μέγιστη τιμή της κατανομής, κλπ.)

Το ιστόγραμμα, η αθροιστική συνάρτηση κατανομής και η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας χαρακτηρίζονται από ορισμένες στατιστικές παραμέτρους. Αυτές

Κεφάλαιο 1

περιλαμβάνουν μεγέθη θέσης (measures of location), μεγέθη διασποράς (measures of spread) και μεγέθη μορφής (measures of shape). Οι παράμετροι της κατανομής αποτελούν ειδικές περιπτώσεις στατιστικών ροών. Οι εξισώσεις ορισμού των παραμέτρων εξαρτώνται από την φύση της κατανομής, δηλαδή αν είναι συνεχής ή διακριτή.

Παρακάτω δίνονται οι εξισώσεις για τον υπολογισμό των παραμέτρων βάσει της κατανομής για διακριτές και συνεχείς μεταβλητές. Στην περίπτωση συνεχών μεταβλητών οι σχέσεις εκφράζονται με ολοκληρώματα. Παραλείπονται τα όρια ολοκλήρωσης όταν αυτά είναι από μείον έως συν άπειρο. Αν η κατανομή ορίζεται σε ένα (κλειστό ή ανοικτό) υποδιάστημα του συνόλου των πραγματικών τα όρια ολοκλήρωσης προσαρμόζονται ανάλογα. Επίσης δίνονται εξισώσεις για την εκτίμηση των δειγματικών τιμών των παραμέτρων. Αυτές χρησιμοποιούνται για την εκτίμηση των παραμέτρων από το δείγμα αν η μορφή της κατανομής δεν είναι γνωστή εκ των προτέρων. [1]

Ο Τελεστής Μέσης Τιμής

Για να υπολογίσουμε τις κύριες παραμέτρους μίας κατανομής προβαίνουμε σε 'σάρωση' της κατανομής χρησιμοποιώντας διαφορετικά μέτρα $A(X)$. Οι «κυρίαρχες» τιμές του $A(X)$ προσδιορίζονται με την βοήθεια του τελεστή μέσης τιμής $E[A(X)]$ (ο οποίος αποκαλείται επίσης τελεστής αναμενόμενης τιμής) που συμβολίζει την μέση τιμή του $A(X)$ σταθμισμένη με την συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας.

Ο υπολογισμός του $E[A(X)]$ προϋποθέτει γνώση της κατανομής πιθανότητας και εξαρτάται από τη φύση της μεταβλητής. Αν η μεταβλητή X είναι συνεχής, το $E[A(X)]$ υπολογίζεται με την βοήθεια ενός ολοκληρώματος, ενώ αν η μεταβλητή X είναι διακριτή το $E[A(X)]$ υπολογίζεται με την βοήθεια ενός αθροίσματος.

Σπάνια η φύση εφοδιάζει τον μελετητή με την πλήρη εικόνα της κατανομής. Συνήθως δεν δίνονται παρά μικρά κομμάτια (δεδομένα) από τα οποία γίνεται προσπάθεια να συναρμολογηθεί μία ακριβή προσέγγιση της πλήρους εικόνας. Σε αυτήν την περίπτωση, οι μέσες τιμές υπολογίζονται βάσει των διαθέσιμων πληροφοριών (δειγμάτων). Αν η φύση είναι φειδωλή επιτρέπει μόνο ένα δείγμα μεγέθους M . Ο υπολογισμός των δειγματικών μέσων τιμών βασίζεται τότε σε μέσους όρους τιμών του μοναδικού δείγματος. Αν διατίθενται περισσότερα από ένα δείγματα, η εκτίμηση των παραμέτρων γίνεται βάσει του διπλού μέσου όρου,

Κεφάλαιο 1

πρώτα ως προς κάθε δείγμα ακολουθούμενο από τον μέσο όρο ως προς όλα τα δείγματα. [1]

Μεγέθη Θέσης

Τα μεγέθη θέσης παρέχουν πληροφορίες για τη θέση των διαφόρων τμημάτων της κατανομής. Η (γραμμική) μέση τιμή, ο διάμεσος και η κορυφή πληροφορούν για τη θέση του κέντρου της κατανομής. Η θέση άλλων τμημάτων της κατανομής προσδιορίζεται από τα ποσοστιαία σημεία. [1]

Αναμενόμενη – Μέση Τιμή

Η γραμμική μέση τιμή επίσης αναφερόμενη ως αναμενόμενη τιμή (mean) της τυχάιας μεταβλητής X συμβολίζεται σαν m_x , ή $E[X]$.

Η μέση τιμή υπολογίζεται ως προς όλες τις καταστάσεις της κατανομής. Ο υπολογισμός της για συνεχείς μεταβλητές γίνεται μέσω του επόμενου ολοκληρώματος:

Μέση τιμή (συνεχής μεταβλητή): $m_x = E[X] = \int dx f_X(x)x.$

Σε περίπτωση διακριτής μεταβλητής η παραπάνω σχέση αντικαθίσταται από την ακόλουθη εξίσωση:

Μέση Τιμή (διακριτή μεταβλητή): $m_x = E[X] = \sum_{i=1}^N p_i x_i$

Όπου, p_i η πιθανότητα

Σε πρακτικές εφαρμογές, η μέση τιμή της κατανομής εκτιμάται από το υπάρχον δείγμα. Η εκτίμηση στηρίζεται στην μέση τιμή, \hat{m}_x . Αυτή δίνεται από τον μέσο όρο των τιμών που περιλαμβάνονται στο δείγμα.

Μέση Τιμή (δειγματική): $\hat{m}_x = \bar{x} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N x_i$

Η δειγματική μέση τιμή \hat{m}_x αποτελεί μία στατιστική εκτίμηση της πραγματικής μέσης τιμής m_x . [1]

Κεφάλαιο 1

Διάμεσος

Ο διάμεσος (median), x_{med} ή $x_{0.5}$, είναι η τιμή εκείνη που χωρίζει την κατανομή σε δύο μέρη, έκαστο εκ των οποίων περιέχει το 50% της συνολικής πιθανότητας. Ο υπολογισμός του διαμέσου για συνεχείς μεταβλητές γίνεται μέσω της εξίσωσης:

$$\text{Διάμεσος (συνεχής μεταβλητή): } \int_{-\infty}^{x_{\text{med}}} dx f_x(x) = \int_{x_{\text{med}}}^{\infty} dx f_x(x)$$

Η εξίσωση αυτή ορίζει ότι ο διάμεσος χωρίζει την κατανομή σε δύο ισεμβαδικά τμήματα.

Για διακριτές μεταβλητές ο διάμεσος αντιστοιχεί στο κέντρο των τιμών της κατανομής, αν αυτές ταξινομηθούν σε αύξουσα σειρά. Ανάλογα υπολογίζεται ο διάμεσος ενός δείγματος. Αν το πλήθος καταστάσεων της διακριτής μεταβλητής (ή του δείγματος) είναι πεπερασμένος ο διάμεσος υπολογίζεται ως εξής:

$$\text{Διάμεσος (διακριτή μεταβλητή): } x_{\text{med}} = \begin{cases} x_{(N+1)/2}, & N = 2m + 1 \\ \frac{1}{2}(x_{N/2} + x_{(N/2)+1}), & N = 2m \end{cases}$$

Ο διάμεσος προσδιορίζεται εύκολα από το διάγραμμα της αθροιστικής κατανομής πιθανότητας, ως η τεταγμένη που αντιστοιχεί στην τετμημένη τιμή 0.5.

Συμμετρικές κατανομές: αν η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας είναι συμμετρική, η μέση τιμή και ο διάμεσος συμπίπτουν με το κέντρο συμμετρίας.

Ευαισθησία σε σφάλματα: η εκτίμηση της μέσης τιμής βάσει των τιμών του δείγματος είναι αρκετά ευαίσθητη σε σφάλματα στις υψηλές τιμές της μεταβλητής. Αντίθετα, ο διάμεσος παρουσιάζει μικρότερη ευαισθησία και δεν επηρεάζεται από σφάλματα που δεν μετατρέπουν την σχετική διάταξη των τιμών της μεταβλητής.
[1]

Κορυφή

Η κορυφή (mode) μίας συνεχούς κατανομής δίνεται από την τιμή x_{mod} στην οποία η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας παίρνει την μέγιστη τιμή, δηλαδή

$$F_X(x_{\text{mod}}) \geq F_X(x), \text{ για κάθε } x.$$

Είναι πιθανό η συνάρτηση κατανομής να έχει παραπάνω από μία κορυφές με το ίδιο ή με διαφορετικό ύψος που αντιστοιχούν σε τοπικά μέγιστα. Αυτό συμβαίνει Εφαρμογή της Γεωστατιστικής Μεθόδου Kriging για τον Προσδιορισμό της Υδραυλικής Αγωγιμότητας του Υπόγειου Υδροφορέα στην Περιοχή Χερσονήσου του Ηρακλείου Κρήτης

Κεφάλαιο 1

συνήθως αν το δείγμα περιλαμβάνει τιμές προερχόμενες από δύο ή περισσότερους πληθυσμούς (π.χ. δύο πηγές ρύπων με διαφορετικές κατανομές).

Σε περίπτωση διακριτής κατανομής, οι κορυφές προσδιορίζονται από το ιστόγραμμα συχνότητας και αντιστοιχούν στις «τιμές» εκείνες για τις οποίες το ιστόγραμμα παρουσιάζει τοπικά μέγιστα. [1]

Ελάχιστη και μέγιστη τιμή

Η ελάχιστη (minimum) και η μέγιστη (maximum) επιτρεπτή τιμή της μεταβλητής καθορίζονται αντίστοιχα από την ελάχιστη και μέγιστη τιμή στις οποίες η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας είναι μη μηδενική.

Η ελάχιστη x_{\min} και η μέγιστη x_{\max} τιμή του δείγματος προσδιορίζουν το εύρος των εμφανιζόμενων τιμών κατά την δειγματοληψία. Η κατανομή δεν περιορίζεται κατ' ανάγκη στο διάστημα $[x_{\min}, x_{\max}]$, καθόσον ένα διαφορετικό δείγμα μπορεί να περιλαμβάνει τιμές μικρότερες από την x_{\min} ή μεγαλύτερες από την x_{\max} .

Η ελάχιστη και η μέγιστη τιμή της κατανομής δεν συμπίπτουν τις περισσότερες φορές με τις αντίστοιχες τιμές του δείγματος. Για παράδειγμα, η κανονική κατανομή στερείται ελάχιστης και μέγιστης τιμής, καθόσον εκτείνεται σε όλους τους πραγματικούς αριθμούς. Η ελάχιστη τιμή της λογαριθμικής κατανομής είναι το μηδέν αλλά δεν υπάρχει μέγιστη τιμή επειδή η δεξιά ουρά εκτείνεται μέχρι το άπειρο.

Αν η πραγματική τιμή της μεταβλητής σε κάποια σημεία είναι κάτω από το όριο ανίχνευσης των μετρήσεων, η μετρούμενη τιμή είναι μηδενική. Ωστόσο, η παρουσία μηδενικών τιμών δημιουργεί συχνά αριθμητικά προβλήματα σε αλγόριθμους εκτίμησης. Για το λόγο αυτό τιμές μικρότερες από το όριο ανίχνευσης αντικαθίστανται προσεγγιστικά με το ήμισυ του ορίου ανίχνευσης. [1]

Μεγέθη Διασποράς

Τα μεγέθη διασποράς περιλαμβάνουν την στατιστική διασπορά (variance), την τυπική απόκλιση (standard deviation) και το εύρος μεταξύ ποσοστιαίων σημείων (interquartile range). Αυτές οι παράμετροι περιγράφουν την μεταβλητότητα των τιμών της κατανομής. Η μεταβλητότητα μπορεί να οφείλεται σε διαφορετικές αιτίες ανάλογα με την περίπτωση. Πιθανές αιτίες είναι η εγγενής αβεβαιότητα του συστήματος (λόγω ανομοιογένειας ή τυχαίου θορύβου) ή τυχαία σφάλματα μέτρησης. [1]

Κεφάλαιο 1

Διασπορά

Η διασπορά (variance), $\sigma_X^2 = E[(X - m_X)^2]$, δίδεται από τις παρακάτω δύο εξισώσεις. Η πρώτη είναι για συνεχείς και η δεύτερη για διακριτές μεταβλητές.

Διασπορά (συνεχής μεταβλητή): $\sigma_X^2 = \int dx f_X(x)(x - m_X)^2$,

Μέση Τιμή (διακριτή μεταβλητή): $\sigma_X^2 = \sum_{i=1}^N p_i(x_i - m_X)^2$

Η δειγματική διασπορά $\hat{\sigma}_X^2$ δίνεται από την εξής σχέση:

Μέση Τιμή (δειγματική): $\hat{\sigma}_X^2 = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N (x_i - \hat{m}_X)^2$

Επειδή η διασπορά ορίζεται βάσει του τετραγώνου των διαφορών, είναι ευαίσθητη σε σφάλματα που επηρεάζουν τις υψηλές τιμές της κατανομής. [1]

Τυπική Απόκλιση

Η τυπική απόκλιση (standard deviation) σ_X είναι η τετραγωνική ρίζα της διασποράς και προσδιορίζει το βαθμό απόκλισης της κατανομής από τη μέση τιμή. Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της κατανομής δίνεται από τη γνωστή καμπανοειδή καμπύλη. Το πλάτος της καμπάνας αυξάνεται ανάλογα προς την τυπική απόκλιση. Η τυπική απόκλιση συνδέεται άμεσα με το πιθανό σφάλμα πειραματικών μετρήσεων και το σφάλμα εκτίμησης των παραμέτρων της κατανομής από ένα πεπερασμένο δείγμα. [1]

Εύρος Μεταξύ Ποσοστιαίων Σημείων

Το εύρος μεταξύ ποσοστιαίων σημείων (interquartile range) είναι μία χρήσιμη μέτρηση της διασποράς της κατανομής. Το εύρος υπολογίζεται βάσει της διαφοράς μεταξύ των ποσοστιαίων $x_q - x_{1-q}$, όπου $0.5 < q < 1$. Για παράδειγμα, το εύρος μεταξύ του ανώτερου και κατώτερου τεταρτημορίου δίνεται από $x_{0.75} - x_{0.25}$. Το διάστημα $[x_{1-q}, x_q]$ περιλαμβάνει το $100(2q-1)\%$ της κατανομής. Το εύρος μεταξύ ποσοστιαίων σημείων είναι επίσης ένα χρήσιμο μέτρο της διασποράς ειδικά σε περιπτώσεις στις οποίες σφάλματα στις υψηλές τιμές της κατανομής επηρεάζουν την εκτίμηση τόσο της μέσης τιμής όσο και της τυπικής απόκλισης. [1]

Κεφάλαιο 1

Μεγέθη Μορφής

Για τον πλήρη προσδιορισμό της μορφής της κατανομής είναι απαραίτητη η γνώση της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας. Μερική πληροφορία προσφέρεται από τις κεντρικές ροπές της κατανομής. Στην πράξη η ακρίβεια με την οποία είναι δυνατό να υπολογιστούν οι ροπές μειώνεται όσο αυξάνεται η τάξη της ροπής. Έτσι, πρακτική χρησιμότητα συνήθως έχουν οι ροπές τάξεως μικρότερης ή ίσης με τέσσερα. Βάσει των κεντρικών ροπών δεύτερης, τρίτης και τέταρτης τάξης ορίζονται τρία βασικά μεγέθη μορφής της κατανομής οι συντελεστές απόκλισης (coefficient of variation), ασυμμετρίας (skewness), και κύρτωσης (kurtosis). [1]

Συντελεστής Απόκλισης (coefficient of variation)

Ο συντελεστής απόκλισης ορίζεται ως ο λόγος της τυπικής απόκλισης προς τη μέση τιμή. Βρίσκει κυρίως εφαρμογή σε συμμετρικές κατανομές και χρησιμοποιείται για τον προσδιορισμό της μορφής κατανομής.

Συντελεστής απόκλισης (συνεχής ή διακριτή μεταβλητή): $CV_x = \frac{\sigma_x}{m_x}$

Συντελεστής απόκλισης (δειγματικός): $\hat{\mu}_x = \frac{\hat{\sigma}_x}{\hat{m}_x}$

Τιμές του συντελεστή απόκλισης μεγαλύτερες της μονάδας υποδηλώνουν πως η κατανομή έχει πυκνότητα στις ουρές (μακριά από την μέση τιμή). Αυτή η συσσώρευση πυκνότητας στις ουρές μπορεί να έχει σημαντικές επιπτώσεις στην στατιστική ανάλυση, ειδικά αν το φαινόμενο που μας ενδιαφέρει εξαρτάται σημαντικά από τις ακραίες τιμές της κατανομής.

Αν η τυχαία μεταβολή παριστά την διαταραχή μίας ομοιογενούς κατάστασης, το μέγεθος του συντελεστή απόκλισης καθορίζει αν η ανάλυση της ανομοιογένειας είναι δυνατό να βασιστεί στη θεωρία διαταραχών χαμηλής τάξης. [1]

Συντελεστής Ασυμμετρίας (coefficient of skewness)

Ο συντελεστής ασυμμετρίας ορίζεται με τη βοήθεια της κεντρικής ροπής τρίτης τάξης ως εξής:

Συντελεστής Ασυμμετρίας (συνεχής μεταβλητή): $S_x = \frac{1}{\sigma_x^3} \int dx f_x(x)(x - m_x)^3$

Κεφάλαιο 1

Συντελεστής Ασυμμετρίας (διακριτή μεταβλητή): $s_X = \frac{1}{\sigma_X^3} \sum_{i=1}^N p_i (x_i - m_X)^3$

Συντελεστής Ασυμμετρίας (δειγματικός): $s_X = \frac{\frac{1}{M} \sum_{i=1}^N (x_i - \hat{m}_X)^3}{\hat{\sigma}_X^3}$

Ο συντελεστής ασυμμετρίας επηρεάζεται από σφάλματα στις υψηλές τιμές πολύ περισσότερο απ' ό τι η μέση τιμή και η διασπορά (επειδή το σφάλμα υψώνεται στην τρίτη δύναμη). Συχνά, αντί της τιμής του συντελεστή ασυμμετρίας λαμβάνεται υπόψη το πρόσημο. Για το πρόσημο ισχύει η επόμενη σχέση:

$$\text{sign}(s_X) = \text{sign}(m_X - x_{0.50})$$

Ένα ιστόγραμμα με θετική ασυμμετρία έχει μεγάλο «βάρος» στις υψηλές τιμές, με αποτέλεσμα ο διάμεσος να είναι μικρότερος από τη μέση τιμή. Αν υπάρχει υψηλή πυκνότητα χαμηλών τιμών ο διάμεσος υπερβαίνει τη μέση τιμή, και το ιστόγραμμα παρουσιάζει αρνητική ασυμμετρία. Εάν ο συντελεστής ασυμμετρίας λαμβάνει τιμές πλησίον του μηδενός και ο διάμεσος είναι περίπου ίσος με τη μέση τιμή, τότε το ιστόγραμμα θεωρείται προσεγγιστικά συμμετρικό. Τέλος, ο συντελεστής ασυμμετρίας είναι μηδενικός για συμμετρικές κατανομές. [1]

Συντελεστής Κύρτωσης (kurtosis coefficient)

Ο συντελεστής κύρτωσης ορίζεται με τη βοήθεια της κεντρικής ροπής τέταρτης τάξης. Πιο συγκεκριμένα, για τις περιπτώσεις συνεχών και διακριτών κατανομών ο συντελεστής κύρτωσης ορίζεται ως εξής:

Συντελεστής Κύρτωσης (συνεχής μεταβλητή): $k_X = \frac{1}{\sigma_X^4} \int dx f_X(x) (x - m_X)^4$

Συντελεστής Κύρτωσης (διακριτή μεταβλητή): $k_X = \frac{1}{\sigma_X^4} \sum_{i=1}^N p_i (x_i - m_X)^4$

Συντελεστής Κύρτωσης (δειγματικός): $\hat{k}_X = \frac{\frac{1}{M} \sum_{i=1}^N (x_i - \hat{m}_X)^4}{\hat{\sigma}_X^4}$

Ο συντελεστής κύρτωσης επηρεάζεται σε μεγάλο βαθμό από τις τιμές στα άκρα της κατανομής. Ας σημειωθεί πως τα τμήματα της κατανομής τόσο στα αριστερά όσο

Κεφάλαιο 1

και στα δεξιά της μέσης τιμής συνεισφέρουν με το ίδιο πρόσημο λόγω της τέταρτης δύναμης της διαφοράς.

Ο συντελεστής κυρτότητας της κανονικής κατανομής είναι ίσος με τρία. Κατανομές με συντελεστή κυρτότητας μικρότερο του τρία ονομάζονται *λεπτοκυρτικές*, ενώ με συντελεστή μεγαλύτερο του τρία *βαροκυρτικές*. [1]

Στατιστικές Ροπές

Τα προηγούμενα μέτρα της κατανομής αποτελούν ειδικές περιπτώσεις στατιστικών ροπών. Οι στατιστικές ροπές (statistical moments) γενικά ορίζονται ως εξής: η μέση τιμή της συνάρτησης X^a καλείται **ροπή α-τάξης** της μεταβλητής X ,

Ροπή τάξης α (συνεχής μεταβλητή): $m_X^{(a)} \equiv E[X^a] = \int dx f_X(x) x^a$

Ροπή τάξης α (διακριτή μεταβλητή): $m_X^{(a)} \equiv E[X^a] = \sum_{i=1}^N p_i x_i^a$

Ροπή τάξης α (δειγματική): $\hat{m}_X^{(a)} \equiv \overline{X^a} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M (x_i)^a$

Οι κεντρικές στατιστικές ροπές ορίζονται με τη βοήθεια των μέσων τιμών των διακυμάνσεων της μεταβλητής γύρω από την μέση τιμή m_X .

Κεντρική Ροπή τάξης α (συνεχής μεταβλητή):

$$m_{X(c)}^{(a)} \equiv E[(X - m_X)^a] = \int dx f_X(x) (x - m_X)^a$$

Κεντρική Ροπή τάξης α (διακριτή μεταβλητή): $m_{X(c)}^{(a)} = \sum_{i=1}^N p_i (x_i - m_X)^a$

Κεντρική Ροπή τάξης α (δειγματική): $\hat{m}_{X(c)}^{(a)} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M (x_i - \hat{m}_X)^a$

Βάσει των προηγούμενων, η διασπορά αντιστοιχεί στην κεντρική ροπή δεύτερης τάξης, ο συντελεστής ασυμμετρίας βασίζεται στην κεντρική ροπή τρίτης τάξης και ο συντελεστής κύρτωσης στην κεντρική ροπή τέταρτης τάξης. [1]

1.4.5 Έλεγχος για σημεία στα οποία υπάρχουν ακραίες τιμές (hot spots, cold spots) και για τιμές εκτός κατανομής (outliers)

Η μέγιστη τιμή (hot spot) και η ελάχιστη τιμή (cold spot) του δείγματος μπορεί να επηρεάζουν αρνητικά την επεξεργασία των δεδομένων. Αυτό δεν είναι πάντα σίγουρο και για αυτό τον λόγο πρέπει να γίνεται έλεγχος αν οι τιμές αυτές είναι εκτός κατανομής.

Εκτός κατανομής είναι οι τιμές οι οποίες δεν είναι εντός της καμπύλης κανονικής κατανομής εάν εφαρμοστεί η καμπύλη αυτή στο ιστόγραμμα συχνότητας της μεταβλητής. Κάτι τέτοιο μπορεί να φανεί γραφικά χρησιμοποιώντας την εντολή «histfit» της Matlab®.

Οι τιμές αυτές μπορούν να ανιχνευτούν με τη μέθοδο z-score. Ονομάζεται z-score μιας τιμής x ενός συνόλου δεδομένων, η απόσταση της τιμής αυτής από τη δειγματική μέση τιμή, μετρούμενη σε μονάδες τυπικής απόκλισης.

$$\text{Δειγματικό z-score: } z = \frac{x - \bar{x}}{s},$$

όπου: \bar{x} η μέση τιμή του δείγματος

s η τυπική απόκλιση του δείγματος

$$\text{z-score του πληθυσμού: } z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

όπου: μ η μέση τιμή του πληθυσμού

σ η τυπική απόκλιση του πληθυσμού

Από τον παραπάνω ορισμό προκύπτει ότι αρνητικά z-score έχουν οι τιμές αριστερά της μέσης τιμής και θετικά z-scores οι τιμές δεξιά της μέσης τιμής. Όλες οι παρατηρήσεις που έχουν z-scores μεγαλύτερα του τρία είναι πιθανά παράτυπα σημεία (outliers). [6]

1.4.6 Εξέταση συνθηκών που απαιτούν χρήση μη γραμμικών μετασχηματισμών (ασυμμετρία της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας, «βαριές» ουρές)

Ο προσδιορισμός των βασικών παραμέτρων της κατανομής γίνεται για να εξακριβωθεί αν τα δεδομένα ακολουθούν την κανονική κατανομή.

Κανονική Κατανομή

Η κανονική κατανομή (normal distribution) είναι επίσης γνωστή σαν κατανομή Gauss (Γκαουσσισιανή). Χαρακτηρίζεται πλήρως από δύο παραμέτρους, την μέση τιμή m_x και την τυπική απόκλιση σ_x . Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας δίνεται από την εξίσωση:

$$f_x(x) = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{(x - m_x)^2}{2\sigma_x^2} \right]$$

Η τυποποιημένη μορφή της κατανομής προκύπτει για μηδενική μέση τιμή και μοναδιαία τυπική απόκλιση. Η κατανομή αυτή περιγράφει την κανονικοποιημένη μεταβλητή $X^* = (X - m_x) / \sigma_x$.

Πίνακας 1.1 Παράμετροι της κανονικής κατανομής

Μέση τιμή	$m_x = m$
Διασπορά	$\sigma_x^2 = \sigma^2$
Συντελεστής απόκλισης	$\mu_x = \sigma / m$
Συντελεστής ασυμμετρίας	$S_x = 0$
Συντελεστής κύρτωσης	$k_x = 3$

Κεφάλαιο 1

Η αθροιστική συνάρτηση κατανομής $F_X(x)$ δεν έχει κλειστή αναλυτική μορφή, εκφράζεται όμως με την βοήθεια της συνάρτησης σφάλματος (error function), $\text{erf}(x)$.

Η συνάρτηση σφάλματος ορίζεται από το εξής ολοκλήρωμα:

$$\text{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x du \exp(-u^2)$$

Η αθροιστική κανονική κατανομή δίνεται από την επόμενη εξίσωση:

$$F_X(x) = \frac{1}{2} \left[1 + \text{erf}\left(\frac{x - m_X}{\sigma_X \sqrt{2}}\right) \right]$$

Διαστήματα εμπιστοσύνης

Περίπου 68% της πιθανότητας της κανονικής κατανομής βρίσκεται σε διάστημα μίας τυπικής απόκλισης εκατέρωθεν της μέσης τιμής. Σχεδόν 95% της πιθανότητας εμπεριέχεται σε διάστημα δύο τυπικών αποκλίσεων εκατέρωθεν της μέσης τιμής και 99.73% σε διάστημα τριών τυπικών αποκλίσεων.

Η βασική αιτία για την ευχρηστία της κανονικής κατανομής είναι το κεντρικό οριακό θεώρημα (central limit theorem), το οποίο καθορίζει την κατανομή αθροισμάτων και μέσων όρων πολλών τυχαίων μεταβλητών.

Κεντρικό Οριακό Θεώρημα (ΚΟΘ): έστω N ανεξάρτητες και ισόνομες (με την ίδια κατανομή) μεταβλητές X_i , οι οποίες έχουν μέση τιμή m και πεπερασμένη τυπική απόκλιση σ . Ορίζουμε επίσης το άθροισμα $X_{tot} = \sum_{i=1}^N X_i$ και τον μέσο όρο

$$\bar{X} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i. \text{ Οι } X_{tot} \text{ και } \bar{X} \text{ είναι επίσης τυχαίες μεταβλητές που χαρακτηρίζονται}$$

από κατανομές πιθανοτήτων. Σύμφωνα με το κεντρικό οριακό θεώρημα ισχύουν οι εξής ιδιότητες για μεγάλες τιμές του N (δηλαδή ασυμπτωτικά όπως το N τείνει προς το άπειρο):

1. Η κατανομή της X_{tot} συγκλίνει στην κανονική κατανομή με μέση τιμή Nm και τυπική απόκλιση $\sigma(N)^{1/2}$.
2. Η κατανομή της \bar{X} συγκλίνει επίσης στην κανονική κατανομή με μέση τιμή m και τυπική απόκλιση ίση με $\sigma/(N)^{1/2}$

Εφαρμογή της Γεωστατιστικής Μεθόδου Kriging για τον Προσδιορισμό της Υδραυλικής Αγωγιμότητας του Υπόγειου Υδροφορέα στην Περιοχή Χερσονήσου του Ηρακλείου Κρήτης

Κεφάλαιο 1

Παρατηρήσεις:

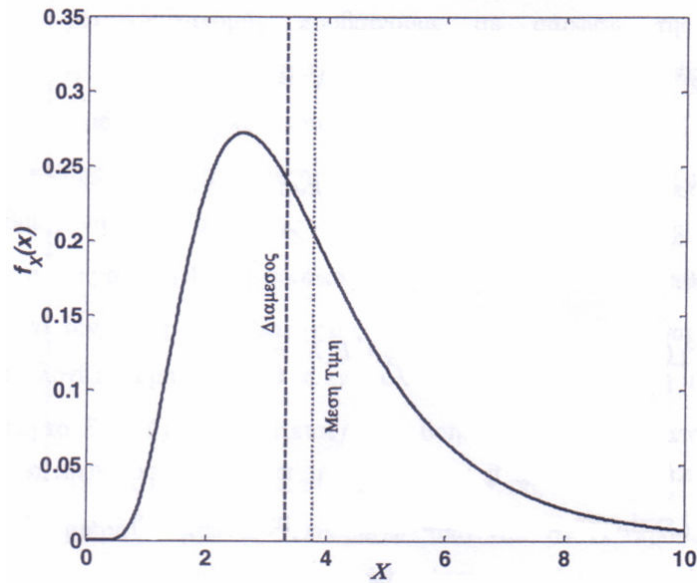
1. Η συνθήκη της πεπερασμένης τυπικής απόκλισης σημαίνει πως η κατανομή των συνιστωσών X_i δεν έχει μεγάλη πυκνότητα σε υψηλές τιμές.
2. Πιο συγκεκριμένα, η συνθήκη αυτή σημαίνει πως η πυκνότητα πιθανότητας της μεταβλητής X τείνει στο μηδέν για μεγάλες τιμές του x , και μάλιστα με ταχύτητα που υπερβαίνει αυτήν του x^{-a} , όπου $a > 3$.
3. Η σύγκλιση προς την κανονική κατανομή παρατηρείται επίσης και για συσχετισμένες μεταβλητές, αν η συσχέτιση δεν είναι μακράς εμβέλειας. Ωστόσο η σύγκλιση είναι αργότερη για εξαρτημένες μεταβλητές απ' ό,τι για ανεξάρτητες μεταβλητές. Χρειάζεται δηλαδή μεγαλύτερος αριθμός συνιστωσών στο άθροισμα προκειμένου να εξαλειφθούν οι επιπτώσεις της συσχέτισης.
4. Υπάρχουν διάφορες διατυπώσεις του Κεντρικού Οριακού Θεωρήματος, για διάφορες συνθήκες επί της αρχικής κατανομής και ανάλογα με τον ορισμό του τρόπου σύγκλισης.

[4]

Σε περίπτωση που τα δεδομένα μας δεν ακολουθούν την κανονική κατανομή, μετασχηματίζονται έτσι ώστε να παίρνουν μορφή κανονικής κατανομής. Μετά τον όποιο μετασχηματισμό και επεξεργασία τους τα δεδομένα επανέρχονται πάντα στην αρχική τους μορφή. Μερικές από τις πιο συνηθισμένες μορφές που ακολουθούν τα δεδομένα εκτός της κανονικής κατανομής είναι:

Λογαριθμική κατανομή

Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της λογαριθμικής κατανομής φαίνεται στην παρακάτω εικόνα. Η λογαριθμική κατανομή συνδέεται άμεσα με την κανονική κατανομή:



Σχήμα 1.1 Πυκνότητας πιθανότητας λογαριθμικής κατανομής. Η μέση τιμή σημειώνεται με διακεκομμένη γραμμή (τελείες) και ο διάμεσος με διακεκομμένη γραμμή (παύλες).

Αν η Y ακολουθεί την λογαριθμική κατανομή, η μεταβλητή $X = \log Y$ ακολουθεί την κανονική κατανομή και αντιστρόφως.

Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της λογαριθμικής κατανομής δίνεται από την εξίσωση:

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sigma_X y \sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{\log^2(ye^{-m_X})}{2\sigma_X^2} \right]$$

Ιδιότητες

Η μέση τιμή και η διασπορά των μεταβλητών X και Y συνδέονται με την βοήθεια των εξής εξισώσεων:

$$m_Y = \exp(m_X + \sigma_X^2 / 2)$$

$$\sigma_X^2 = \log(1 + \mu_Y^2), \quad \mu_Y = \sigma_Y / m_Y$$

Η διασπορά της μεταβλητής X είναι καθαρός αριθμός, ανεξάρτητα από τις μονάδες που έχει η μεταβλητή Y . [1]

Κεφάλαιο 1

Κατανομή χ^2

Η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση της κατανομής χ^2 δίνονται από τις εξισώσεις:

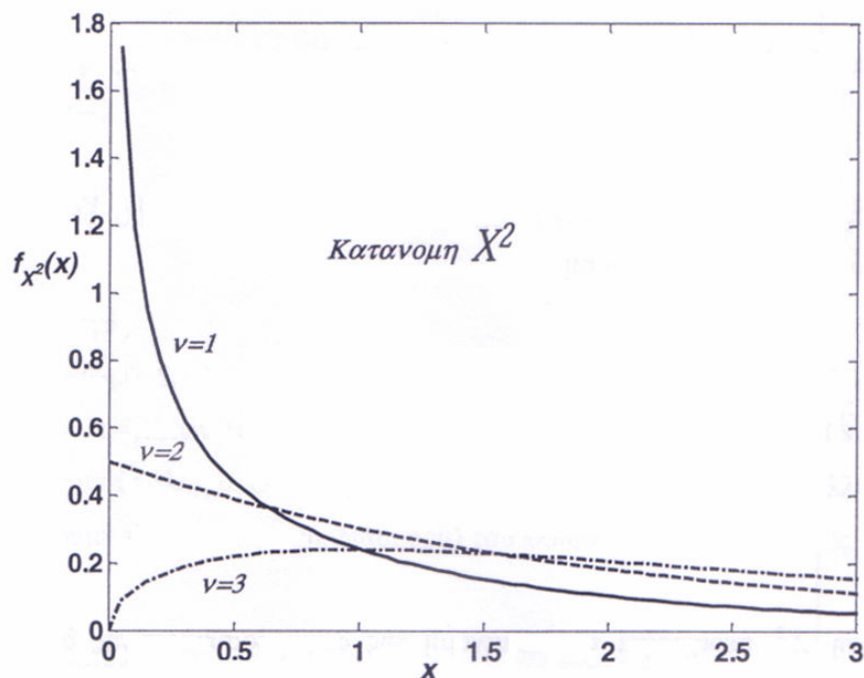
$$m_{\chi^2} = \nu,$$

$$\sigma_{\chi^2}^2 = 2\nu$$

Επομένως, τόσο η μέση τιμή όσο και η τυπική απόκλιση της κατανομής αυξάνονται γραμμικά με το πλήθος των βαθμών ελευθερίας.

Για πολλούς βαθμούς ελευθερίας ($\nu \geq 30$) η κατανομή της τυχαίας μεταβλητής $\sqrt{2X^2} - \sqrt{2\nu - 1}$ συγκλίνει προς την τυποποιημένη κανονική κατανομή.

Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων πυκνότητας πιθανότητας χ^2 με βαθμούς ελευθερίας ένα, δύο και τρία φαίνονται στο σχήμα 1.2. Παρατηρείτε πως για $\nu=1$ η αρχική τιμή της πυκνότητας (για $\chi=0$) απειρίζεται, για $\nu=2$ η αρχική πυκνότητα είναι σταθερή, ενώ για $\nu \geq 3$ μηδενίζεται.



Σχήμα 1.2 Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της κατανομής χ^2 για τρεις διαφορετικούς βαθμούς ελευθερίας.

Κεφάλαιο 1

Τα επόμενα δύο θεωρήματα είναι χρήσιμα για υπολογισμούς με κατανομές χ^2 .

Θεώρημα I: Αν οι ανεξάρτητες μεταβλητές Y_1, Y_2, \dots, Y_k ακολουθούν την κατανομή χ^2 με βαθμούς ελευθερίας $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_k$ αντίστοιχα, το άθροισμα $S_Y = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_k$ ακολουθεί επίσης την κατανομή χ^2 με $\nu_1 + \nu_2 + \dots + \nu_k$ βαθμούς ελευθερίας.

Θεώρημα II: Αν οι μεταβλητές V_1 και V_2 είναι ανεξάρτητες και ακολουθούν την κατανομή χ^2 με ν_1 και ν_2 βαθμούς ελευθερίας αντίστοιχα, η τυχασία μεταβλητή $V = \frac{V_1/\nu_1}{V_2/\nu_2}$ ακολουθεί την κατανομή F με ν_1 και ν_2 βαθμούς ελευθερίας.

Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της κατανομής F με ν_1 και ν_2 βαθμούς ελευθερίας δίνεται από την εξίσωση:

$$f_F(x) = \begin{cases} \frac{\Gamma\left(\frac{\nu_1 + \nu_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu_2}{2}\right)} \nu_1^{\frac{\nu_1}{2}} \nu_2^{\frac{\nu_2}{2}} x^{\frac{\nu_1}{2}-1} (v_2 + \nu_1 x)^{-\frac{\nu_1 + \nu_2}{2}} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

[1]

Κατανομή Poisson

Η κατανομή Poisson χρησιμοποιείται για διακριτές μεταβλητές. Έστω ότι η μεταβλητή X αναπαριστά την συχνότητα κάποιου γεγονότος. Η κατανομή Poisson εκφράζεται από την σχέση:

$$P(X = n) = \frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!}, \quad n=0,1,2,\dots$$

Η μεταβλητή X αντιπροσωπεύει τις επαναλήψεις του γεγονότος μέσα σε χρονικό διάστημα T. Το λ είναι ο μέσος ρυθμός (συχνότητα) της διαδικασίας εκφρασμένος στο ίδιο διάστημα. Αν το λ εκφράζεται βάσει της μονάδας χρόνου t και η X αντιπροσωπεύει τον χρόνο σε πολλαπλάσια του T, οι χρονικές κλίμακες πρέπει να προσαρμοστούν. Αυτό επιτυγχάνεται αν το λ αντικατασταθεί με $\lambda' = \lambda T/t$. Για παράδειγμα, έστω ότι το λ είναι ίσο με 60 γεγονότα ανά ώρα και μας ενδιαφέρει η

Κεφάλαιο 1

πιθανότητα να πραγματοποιηθούν $X=2$ γεγονότα ανά λεπτό. Η τιμή του λ που θα χρησιμοποιηθεί στην εξίσωση Poisson είναι $\lambda'=1$ γεγονός ανά λεπτό.

Πίνακας 1.2 Παράμετροι της κατανομής Poisson.

Μέση τιμή	$m_X = \lambda$
Διασπορά	$\sigma_X^2 = \lambda$
Συντελεστής απόκλισης	$\mu_X = (1/\lambda)^{1/2}$
Συντελεστής ασυμμετρίας	$S_X = 1/(\lambda)^{1/2}$
Συντελεστής κύρτωσης	$k_X = 3 + 1/\lambda$

Ιδιότητες

Ο συντελεστής ασυμμετρίας μειώνεται αντιστρόφως ανάλογα προς την τετραγωνική ρίζα του λ , ενώ ο συντελεστής κύρτωσης αποκλίνει από την κανονική τιμή τρία κατά μια ποσότητα αντιστρόφως ανάλογη του λ .

Η διωνυμική κατανομή συγκλίνει προς την κατανομή Poisson αν η πιθανότητα πραγματοποίησης p είναι πολύ μικρότερη της μονάδας ($p \ll 1$), το μέγεθος N της ακολουθίας των ενδεχομένων είναι πολύ μεγάλο ($N \geq 50$), και η σταθερά $\lambda = Np$ έχει τιμή μικρότερη ή το πολύ ίση με πέντε ($\lambda \leq 5$).

Για πολύ υψηλές τιμές της σταθεράς λ , η κατανομή Poisson προσεγγίζει την κανονική κατανομή με μέση τιμή λ και τυπική απόκλιση $(\lambda)^{1/2}$.

Η κατανομή Poisson προκύπτει επίσης ως λύση του εξής συστήματος διαφορικών εξισώσεων:

$$\frac{dP_n(t)}{dt} = -\lambda P_n(t) + \lambda P_{n-1}(t), \quad n = 1, 2, \dots \quad \text{και} \quad \frac{dP_0(t)}{dt} = -\lambda P_0(t).$$

Ο όρος $P_n(t)$ αντιστοιχεί στην πιθανότητα κατάληψης της στάθμης n την χρονική στιγμή t . Το ίδιο σύστημα εξισώσεων περιγράφει την πιθανότητα πραγματοποίησης n γεγονότων μέσα σε χρόνο t (με την προϋπόθεση πως η πιθανότητα

Εφαρμογή της Γεωστατιστικής Μεθόδου Kriging για τον Προσδιορισμό της Υδραυλικής Αγωγιμότητας του Υπόγειου Υδροφορέα στην Περιοχή Χερσονήσου του Ηρακλείου Κρήτης

Κεφάλαιο 1

πραγματοποίησης ενός γεγονότος εντός χρόνου δτ είναι ανάλογη προς το δτ και ανεξάρτητη από το παρελθόν). Η παράγωγος αντιπροσωπεύει τον ρυθμό με τον οποίο μεταβάλλεται η πιθανότητα $P_n(t)$, και καθορίζεται από δύο όρους. Ο πρώτος όρος, $-\lambda P_n(t)$, αντιστοιχεί σε μείωση της πιθανότητας $P_n(t)$ λόγω μεταπτώσεων εκτός στάθμης n , ενώ ο δεύτερος όρος, $\lambda P_{n-1}(t)$, αντιστοιχεί σε αύξηση της πιθανότητας $P_n(t)$ λόγω μεταπτώσεων από την στάθμη n στην στάθμη $n-1$. Και οι δύο τύποι μεταπτώσεων συμβαίνουν με τον ίδιο ρυθμό που ορίζει η σταθερά λ . Η λύση του συστήματος είναι η κατανομή Poisson:

$$P_n(t) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}$$

Η κατανομή Poisson χρησιμοποιείται επίσης για την περιγραφή ακραίων γεγονότων (extreme events), τα οποία προκύπτουν από μία ακολουθία στοιχειωδών δυαδικών ενδεχομένων με πολύ μικρές πιθανότητες πραγματοποίησης.

Μία νέα μέθοδος για την επεξεργασία μη γραμμικών μετασχηματισμών είναι η transgaussian Kriging. [1]

1.4.7 Έλεγχος για μείξη διαφορετικών πληθυσμών (ιστογράμματα με πλεόν της μίας κορυφής)

Κατά τον προσδιορισμό των βασικών παραμέτρων της κατανομής, όπως αναφέρθηκε παραπάνω, γίνεται έλεγχος για μείξη διαφορετικών πληθυσμών με τον έλεγχο των κορυφών του ιστογράμματος.

1.5 Προσδιορισμός πρότυπου χωρικής συνέχειας

Ο προσδιορισμός πρότυπου χωρικής συνέχειας περιλαμβάνει:

1.5.1 Ανίχνευση ανισοτροπίας

Ανισοτροπία παρουσιάζεται όταν υπάρχουν διαφορές στην συμπεριφορά του ημιβαριογράμματος όταν υπολογίζεται σε διαφορετικές διευθύνσεις. Για παράδειγμα, μπορεί να υπολογιστεί το πειραματικό ημιβαριόγραμμα στην διεύθυνση Βορράς-Νότος και επίσης Ανατολή-Δύση. Ένα ουσιαστικό διαφορετικό σχήμα για τα δύο αυτά ημιβαριογράμματα συνιστά ανισοτροπία.

Η απουσία ανισοτροπίας οδηγεί σε ημιβαριογράμματα που έχουν ουσιαστικά ίδιο σχήμα, άσχετα από την διεύθυνση υπολογισμού. Στην περίπτωση αυτή το ημιβαριόγραμμα εξαρτάται μόνο από το μέγεθος της απόστασης μεταξύ των δειγμάτων. Τέτοια συμπεριφορά ονομάζεται ισοτροπική. Υπάρχουν δύο είδη ανισοτροπίας

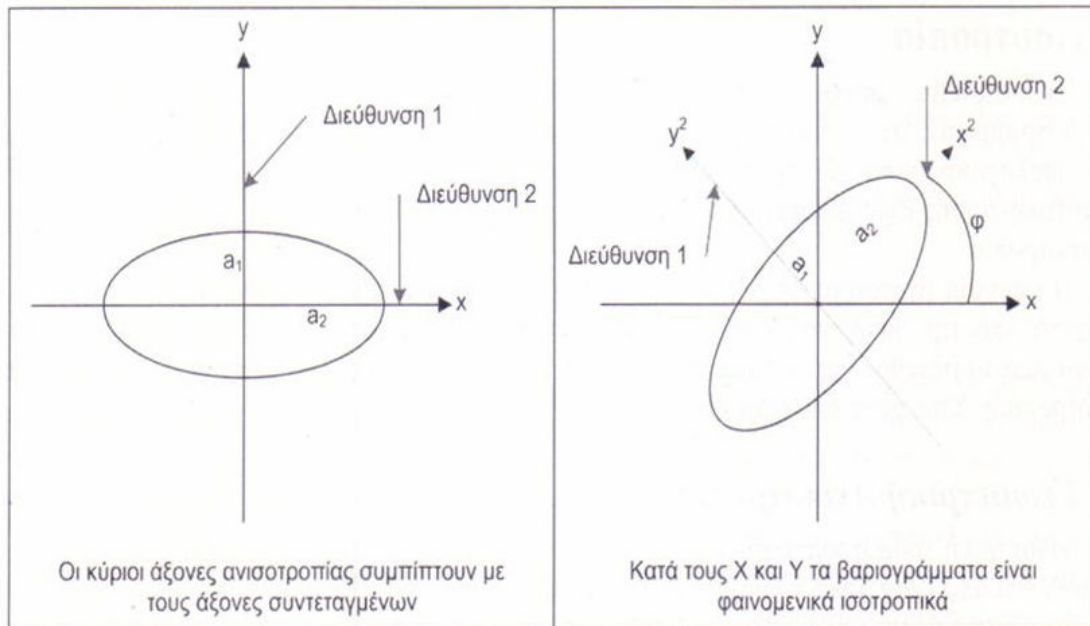
i. Γεωμετρική Ανισοτροπία

Η γεωμετρική ανισοτροπία συχνά ονομάζεται και 'ελλειπτική ανισοτροπία' και μπορεί να διορθωθεί από έναν απλό γραμμικό μετασχηματισμό των συντεταγμένων. Με άλλα λόγια, εάν το ημιβαριόγραμμα σε μια διεύθυνση μπορεί να μετασχηματισθεί σε εκείνο μιας οποιασδήποτε άλλης αλλάζοντας την κλίμακα στον άξονα του h , τότε υπάρχει μια γεωμετρική ανισοτροπία.

Πρέπει να σημειωθεί ότι, στην περίπτωση γεωμετρικής ανισοτροπίας, για ένα μεταβατικό ημιβαριόγραμμα, οι οριακές τιμές των ημιβαριογραμμάτων σε κάθε διεύθυνση είναι ίδιες. Μόνο το εύρος διαφέρει. Στην περίπτωση ενός γραμμικού ημιβαριογράμματος είναι η κλίση που διαφέρει διευθυντικά.

Μπορεί να σχηματιστεί το εύρος (ή η κλίση, στην περίπτωση γραμμικού ημιβαριογράμματος) ως συνάρτηση της διεύθυνσης (Σχήμα 1.3). Για γεωμετρική ανισοτροπία, το διάγραμμα θα προσεγγίσει μία έλλειψη (σε 2Δ, ένα ελλειψοειδές σε 3Δ). Μια απλή αλλαγή στις συντεταγμένες μετασχηματίζει την έλλειψη σε έναν κύκλο, εξαφανίζοντας την ανισοτροπία.

Πρέπει να σημειωθεί επίσης ότι, όταν υπολογίζεται το πειραματικό ημιβαριόγραμμα είναι σημαντικό να επιλέγονται τουλάχιστον τέσσερις διευθύνσεις. Αυτό γιατί επιλέγοντας μόνο δύο μπορεί να μην επιτρέπεται η ανίχνευση της γεωμετρικής ανισοτροπίας, ακόμα και αν αυτή υπάρχει (Σχήμα 1.3).

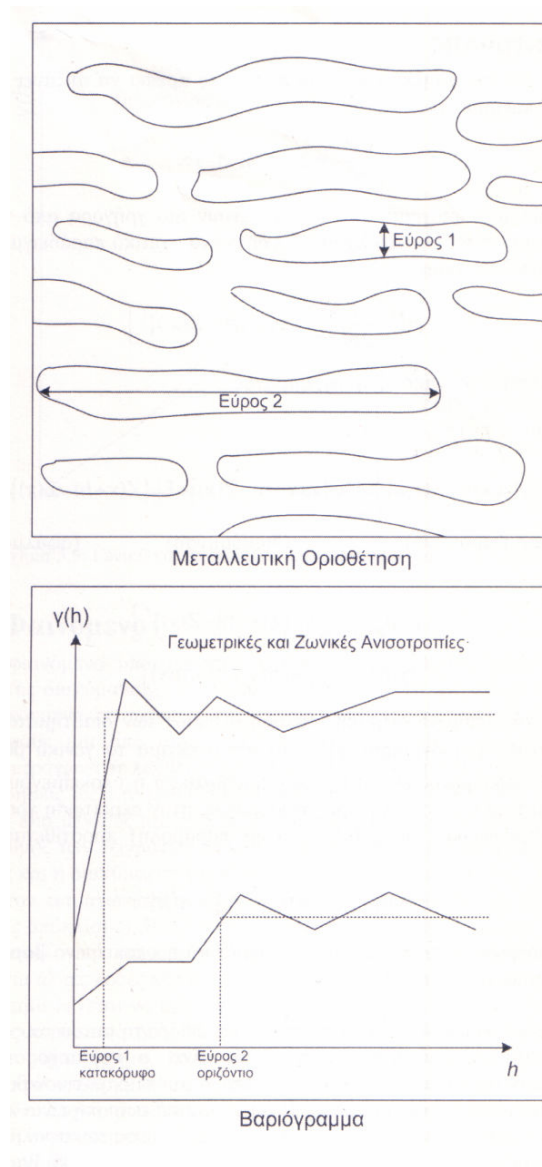


Σχήμα 1.3 Γεωμετρική ανισοτροπία

ii. Ζωνική Ανισοτροπία

Υπάρχουν πιο πολύπλοκες μορφές ανισοτροπίας σε μερικές περιπτώσεις. Ένα παράδειγμα είναι η περίπτωση όπου υπάρχει διακριτή ζωνοποίηση υψηλών και χαμηλών τιμών (για παράδειγμα ένας έλεγχος στη μεταλλοφορία που είναι υπο-παράλληλος στις πλευρές ή το πάτωμα ενός κοιτάσματος). Στην περίπτωση αυτή η μεταβλητότητα στην διεύθυνση παράλληλη σε αυτήν της ζωνοποίησης μπορεί να είναι σημαντικά χαμηλότερη από την διεύθυνση κάθετα στην ζωνοποίηση. Το είδος της ανισοτροπίας αυτής ονομάζεται ζωνική ανισοτροπία.

Ένα άλλο κοινό παράδειγμα ζωνικής ανισοτροπίας είναι στην περίπτωση των στρωματογραφικών κοιτασμάτων (π.χ. σιδήρου, άνθρακα, λατεριτικού νικελίου κλπ) όπου η κατακόρυφη μεταβολή (ή γενικότερα, ορθογωνικά στην επιφάνεια των στρωμάτων) είναι υψηλότερη απ' ό,τι κατά μήκος των στρωμάτων. Για το λόγο αυτό, η ζωνική ανισοτροπία αναφέρεται μερικές φορές, αν και λιγότερα συχνά, ως στρωματογραφική ανισοτροπία. Το Σχήμα 1.4 δίνει την ιδέα της ανισοτροπίας και της 'ζώνης επιρροής'. [4]



Σχήμα 1.4 Ανισοτροπία και 'ζώνη επιρροής'

Η στατιστική ισοτροπία είναι μία ιδιότητα που προϋποθέτει τη στατιστική ομοιογένεια. Ένα πεδίο είναι στατιστικά ισοτροπικό αν είναι στατιστικά ομοιογενές, και η συνάρτηση συνδιασποράς εξαρτάται μόνο από το μέτρο r , αλλά όχι από την κατεύθυνση του διανύσματος απόστασης r . Αυτό είναι σημαντικό από πρακτική άποψη, επειδή διευκολύνει τον προσδιορισμό της χωρικής εξάρτησης.

Επομένως, αν μία συνάρτηση συνδιασποράς είναι στατιστικά ισοτροπική είναι εξ ορισμού στατιστικά ομοιογενής. Το αντίστροφο όμως δεν ισχύει. [2]

1.5.2 Έλεγχος παρουσίας και μοντελοποίηση τάσεων, εύρεση περιοχών τοπικής στασιμότητας (στατιστικής ομοιογένειας).

Γενικά, μία Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας (ΣΠΠ) μπορεί να περιγράψει πολύπλοκη χωρική εξάρτηση του πεδίου. Ωστόσο, ορισμένες παραδοχές που θέτουν περιορισμούς στις ιδιότητες του πεδίου μπορούν να οδηγήσουν σε πιο αποτελεσματικές μεθόδους για τον γεωστατιστικό χαρακτηρισμό και την προσομοίωση. Σε κάθε περίπτωση, πρέπει να εξετάζεται αν αυτές οι παραδοχές συμφωνούν με τα δεδομένα. Η πιο κοινή απλουστευτική παραδοχή είναι η στατιστική ομοιογένεια.

Η στατιστική ομοιογένεια (statistical homogeneity) αποτελεί επέκταση του κλασσικού ορισμού της ομοιογένειας. Υπενθυμίζεται πως μία ιδιότητα είναι ομοιογενής αν η αντίστοιχη μεταβλητή έχει σταθερή τιμή στον χώρο. Κατ' επέκταση, ένα τυχαίο πεδίο $X(s)$ είναι στατιστικά ομοιογενές αν εκπληρώνονται οι επόμενες συνθήκες:

- i. Η μέση τιμή είναι σταθερή (ομοιόμορφη), δηλαδή $m_X(s)=m_X$
- ii. Η συνάρτηση συνδιασποράς ορίζεται και εξαρτάται αποκλειστικά από το διάστημα απόστασης $r=s_1-s_2$ μεταξύ των δύο σημείων, δηλαδή $c_X(s_1,s_2)=c_X(r)$.
- iii. Η δεύτερη συνθήκη συνεπάγεται ότι η διασπορά ενός στατιστικά ομοιογενούς πεδίου είναι σταθερή.

Ακριβολογώντας, οι παραπάνω συνθήκες ορίζουν την ασθενή στατιστική ομοιογένεια κατά την ασθενή έννοια. Η ισχυρή στατιστική ομοιογένεια ορίζεται ως εξής:

Ένα πεδίο είναι στατιστικά ομοιογενές κατά την ισχυρή έννοια όταν η πολυδιάστατη ΣΠΠ για N σημεία, όπου το N είναι οποιοσδήποτε θετικός ακέραιος, παραμένει αμετάβλητη από μετασχηματισμούς οι οποίοι αλλάζουν τη θέση των σημείων χωρίς να αλλάζουν τις μεταξύ τους αποστάσεις.

Επομένως, η έννοια της στατιστικής ομοιογένειας είναι ότι οι στατιστικές ιδιότητες του πεδίου δεν εξαρτώνται από τις χωρικές συντεταγμένες του σημείου.

Κεφάλαιο 1

Από πρακτική άποψη, η στατιστική ομοιογένεια προϋποθέτει πως δεν υπάρχουν χωρικές τάσεις, έτσι ώστε η μεταβολή των τιμών του πεδίου μπορεί να αποδοθεί σε διακυμάνσεις γύρω από μία σταθερή στάθμη ίση με τη μέση τιμή.

Παρατήρηση: είναι δυνατό το τυχαίο πεδίο να μην είναι ομοιογενές αλλά η διακύμανση του πεδίου να είναι ομοιογενής. Σε αυτή την περίπτωση, το νόημα της στατιστικής ομοιογένειας είναι ότι η αλληλεξάρτηση δύο σημείων δεν επηρεάζεται από την ακριβή θέση τους στο χώρο αλλά από την απόσταση μεταξύ τους. Το πεδίο διακύμανσης $x(s) \equiv X(s) - m_X(s)$ ικανοποιεί εξ ορισμού την πρώτη συνθήκη ομοιογένειας, επειδή η μέση τιμή του μηδενίζεται σε όλα τα σημεία του χώρου. Ωστόσο για να είναι η διακύμανση στατιστικά ομοιογενής πρέπει να ικανοποιεί και τη δεύτερη συνθήκη που αφορά τη συνάρτηση συνδιασποράς. [2]

1.5.3 Επιλογές για τον συνολικό αριθμό τάξεων του πειραματικού ημιβαριογράμματος, την ανοχή κάθε τάξης, τον αριθμό ζευγών ανά τάξη, κλπ.

Πριν εξεταστούν μέθοδοι για τον πειραματικό (βάσει δεδομένων) υπολογισμό του ημιβαριογράμματος, θα αναφερθούν διάφορα προβλήματα που θέτει ο υπολογισμός. Υπενθυμίζεται πως το ημιβαριόγραμμα ορίζεται με την βοήθεια του τελεστή μέσης τιμής ως προς όλες τις καταστάσεις του πεδίου. Προκειμένου να υπολογιστεί η μέση τιμή χρειάζεται ένας ικανός αριθμός δειγμάτων, όπου το κάθε δείγμα αντιστοιχεί σε μία διαφορετική κατάσταση. Αυτό είναι δυνατό μόνο όταν διατίθενται διαφορετικές καταστάσεις του πεδίου, όπως όταν το πεδίο περιγράφει κάποια ιδιότητα βιομηχανικών υλικών, διότι σε αυτή την περίπτωση μπορούν να ληφθούν μετρήσεις σε διαφορετικά δείγματα του ίδιου υλικού. Ωστόσο, στην περίπτωση γεωγραφικών και γεωλογικών κατανομών, μεταλλευτικών κοιτασμάτων και κατανομών περιβαλλοντικών ρυπαντών τα δεδομένα περιορίζονται συνήθως σε ένα μοναδικό δείγμα. Τότε γίνεται προσπάθεια να προσδιοριστεί μία εκτίμηση του πραγματικού ημιβαριογράμματος από το δείγμα. Η εκτίμηση αυτή ονομάζεται πειραματικό (ή δειγματικό) ημιβαριόγραμμα και υπολογίζεται βάσει των τιμών του δείγματος ως εξής:

$$\hat{\gamma}_X(r_k) = \frac{1}{2n(r_k)} \sum_{i,j=1}^N \left\{ [X(s_i) - X(s_j)]^2 \right\} \mathcal{G}_{ij}(r_k), \quad (k=1, \dots, N_c)$$

$$\mathcal{G}_{ij}(r_k) = \begin{cases} 1, & s_i - s_j \in B(r_k) \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

- Η συνάρτηση κλάσης $\mathcal{G}_{ij}(r_k)$ ορίζει διαφορετικές ομάδες (κλάσεις) διανυσμάτων απόστασης, επιλέγοντας τα διανύσματα εκείνα που βρίσκονται σε μία κλειστή περιοχή $B(r_k)$ γύρω από το διάνυσμα r_k , όπως φαίνεται στο σχηματικό διάγραμμα στην εικόνα 1.5.
- Η μεταβλητή $n(r_k)$ είναι ίση με το πλήθος των ζευγών σημείων που περιέχονται μέσα στην κλάση $B(r_k)$.
- Το πειραματικό ημιβαριόγραμμα ορίζεται για ένα διακριτό και πεπερασμένο σύνολο αποστάσεων r_k , ($k=1, \dots, N_c$) το πλήθος των οποίων είναι ίσο με τον συνολικό αριθμό κλάσεων N_c .

Επομένως, ο υπολογισμός αυτός προσδιορίζει μία τιμή του πειραματικού ημιβαριογράμματος για κάθε r_k , βάσει του μέσου όρου των διαφορετικών $[X(s_i) - X(s_j)]^2$ σε όλα τα ζεύγη σημείων, το διάνυσμα απόστασης των οποίων ανήκει στην περιοχή $B(r_k)$. Το $\hat{\gamma}_X(r_k)$ είναι ένας «καλός» εκτιμητής του $\gamma_X(r_k)$ όταν ο μέσος όρος των διαφορών στην κλάση του r_k προσεγγίζει με ακρίβεια την μέση τιμή $E[X(s_i) - X(s_j)]^2$. Αυτό ισχύει όταν εκπληρώνεται η **εργοδική υπόθεση**, η οποία επιτρέπει να εναλλάσσεται ο στοχαστικός με τον δειγματικό μέσο. Για να ισχύει η εργοδική ιδιότητα πρέπει να εκπληρώνονται κάποιες προϋποθέσεις:

1. Το πεδίο διαφοράς $X(s) - X(s+r_k)$ πρέπει να είναι στατιστικά ομοιογενές. Αυτό προϋποθέτει πως το φαινόμενο ή το υλικό που εξετάζεται δεν παρουσιάζει σημαντικές αλλαγές στη δομή του εντός της περιοχής Ω . Σε περίπτωση γεωλογικών εφαρμογών μεγάλης κλίμακας (π.χ. ανάλυση ταμιευτήρων πετρελαίου) είναι αναγκαίος ο διαχωρισμός του ταμιευτήρα σε διαφορετικές ζώνες – στρώματα τα οποία είναι κατά προσέγγιση στατιστικά ομοιογενή.

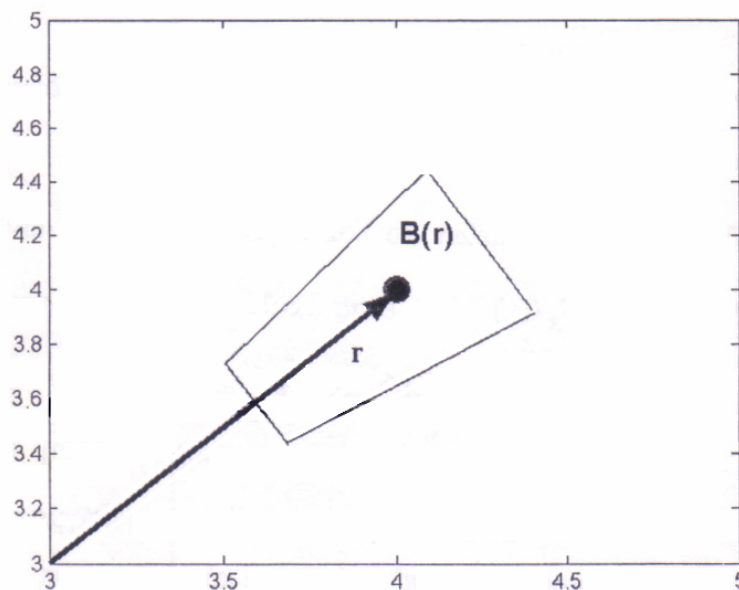
Κεφάλαιο 1

2. Το πλήθος των ζευγών σε κάθε κλάση πρέπει να είναι μεγάλο, ώστε ο δειγματικός μέσος του τετραγώνου της διαφοράς να υπολογίζεται με καλή στατιστική ακρίβεια. Υπενθυμίζεται ότι το σφάλμα της εκτίμησης μειώνεται με την τετραγωνική ρίζα του αριθμού των ζευγών που περιέχει κάθε κλάση.
3. Ο αριθμός των κλάσεων πρέπει να είναι αρκετά μεγάλος, ώστε να επιτρέπει μία αρκούντως πυκνή προσέγγιση της μεταβολής του ημιβαριογράμματος σαν συνάρτηση της απόστασης (δηλαδή απαιτεί το πλήθος των διανυσμάτων απόστασης να είναι επαρκές).

Προφανώς οι απαιτήσεις (2) και (3) είναι ανταγωνιστικές, καθώς ο μέγιστος αριθμός ζευγών για ένα δείγμα διάστασης N είναι φραγμένος

$\sum_{k=1}^{N_c} n(r_k) \leq N(N-1)/2$. Στην πράξη χρησιμοποιείται συχνά μία συμβιβαστική

προσέγγιση που υιοθετεί ένα αρκετά χαμηλό κατώτατο όριο για το πλήθος των ζευγών ανά κλάση (περίπου 30). [2]



Σχήμα 1.5 Σχηματικό διάγραμμα μίας περιοχής $B(r)$ γύρω από το διάνυσμα απόστασης.

1.5.4 Υπολογισμός του πειραματικού ημιβαριογράμματος.

Τώρα θα περιγραφεί ένας απλός αλγόριθμος για τον υπολογισμό του ημιβαριογράμματος στην περίπτωση ισοτροπικής εξάρτησης. Υπενθυμίζεται πως στην περίπτωση ισοτροπικής εξάρτησης του ημιβαριογράμματος εξαρτάται αποκλειστικά από το μέτρο του διανύσματος απόστασης. Τα βήματα που περιλαμβάνει ο αλγόριθμος είναι τα εξής:

- a) Υπολογίζεται το μέτρο των αποστάσεων $r_{ij} = |s_i - s_j|$ για όλα τα ζεύγη σημείων στα οποία υπάρχουν μετρήσεις.
- b) Προσδιορίζονται οι κλάσεις απόστασης. Αυτή η διαδικασία απαιτεί τις εξής παραμέτρους:
 - I. Τον συνολικό αριθμό κλάσεων N_c ,
 - II. Το κέντρο της κλάσης μέγιστης απόστασης r_{N_c} ,
 - III. Το εύρος κλάσης $2\delta r_k$
 - IV. Και τα κεντρικά σημεία όλων των κλάσεων r_k . Μια αρχική τιμή επιλέγεται δοκιμαστικά για το N_c . Το κέντρο r_{N_c} της κλάσης μέγιστης απόστασης $k = N_c$ αρχικά θεωρείται ίσο με το 50% της μέγιστης απόστασης μεταξύ των σημείων του δείγματος. Το κέντρο της κλάσης μηδενικής απόστασης είναι το $r_1=0$. Το εύρος της πρώτης κλάσης μπορεί να θεωρηθεί είτε μηδενικό (οπότε η κλάση περιλαμβάνει μόνο τα διαγώνια ζεύγη σημείων), είτε πεπερασμένο.
 - V. Αν το εύρος των κλάσεων υποτεθεί ομοιόμορφο προσδιορίζεται από την επίλυση της εξίσωσης:

$$2\delta r(N_c - 1) = r_{N_c} + \delta r, \quad \text{μηδενικό εύρος κλάσης } r_1,$$

$$2\delta r(N_c - 1) = r_{N_c}, \quad \text{εύρος κλάσης } r_1 \text{ ίσο με } \delta r,$$

Η οποία υπολογίζει τη μέγιστη απόσταση στην κλάση N_c .

Κεφάλαιο 1

- c) Τα «κέντρα» r_k των κλάσεων είναι τα σημεία όπου υπολογίζεται το πειραματικό ημιβαριόγραμμα. Αυτά προκύπτουν από την εξίσωση:

$$\begin{cases} r_1 = 0 \\ r_2 = \delta r \\ r_k = r_{k-1} + 2\delta r, k = 3, \dots, N_c \end{cases}, \quad \text{για μηδενικό εύρος κλάσης } r_1,$$

$$\begin{cases} r_1 = 0 \\ r_k = r_{k-1} + 2\delta r, k = 2, \dots, N_c \end{cases}, \quad \text{για εύρος κλάσης } r_1 \text{ ίσο με } \delta r.$$

- d) Έπειτα προσδιορίζεται η κλάση k στην οποία ανήκουν οι αποστάσεις r_{ij} των σημείων του δείγματος. Η απόσταση r_{ij} ανήκει στην κλάση k αν ικανοποιεί τις ανισότητες: $r_k - \delta r_k \leq r_{ij} \leq r_k + \delta r_k$

- e) Αν όλες οι κλάσεις που ορίστηκαν παραπάνω περιέχουν ένα ελάχιστο αριθμό ζευγών σημείων (τουλάχιστον 30) η διαδικασία συνεχίζεται, αλλιώς επαναλαμβάνεται το βήμα b) και επαναπροσδιορίζονται οι κλάσεις χρησιμοποιώντας μικρότερο αριθμό κλάσεων ή κλάσεις με ανομοιόμορφο εύρος.

- f) Τέλος, η τιμή του ημιβαριογράμματος για κάθε κλάση υπολογίζεται βάσει του μέσου όρου του τετραγώνου της διαφοράς των τιμών του πεδίου ανά ζεύγος. Για παράδειγμα, έστω ότι στην κλάση $k=5$ ανήκουν τα τρία ζεύγη σημείων (s_2, s_4) , (s_3, s_7) και (s_8, s_{14}) . Η τιμή του ημιβαριογράμματος στην απόσταση r_5 δίνεται από την εξίσωση:

$$\gamma_X(r_5) = \frac{1}{2 \times 3} \{ [X(s_2) - X(s_4)]^2 + [X(s_3) - X(s_7)]^2 + [X(s_8) - X(s_{14})]^2 \}$$

Ο αλγόριθμος αυτός υλοποιεί απευθείας την εξίσωση του πειραματικού ημιβαριογράμματος, αλλά είναι υπολογιστικά «εντατικός» επειδή η αλγοριθμική πολυπλοκότητά του είναι ανάλογη προς το τετράγωνο του πλήθους των σημείων του δείγματος. Αν υποθεθεί πως αυτό αποτελείται από τις τιμές σε σημεία κατανομημένα στις κορυφές ενός τετραγωνικού πλέγματος, το οποίο έχει σημεία L σε κάθε κατεύθυνση. Το πλήθος των σημείων του πλέγματος επομένως είναι $N=L^2$, ενώ το πλήθος των ζευγών (εκτός των διαγωνίων ζευγών που έχουν μηδενική συνεισφορά) είναι $N_p=N(N-1)/2$, δηλαδή $N_p=L^2(L^2-1)/2$. Αν $L=10$ τότε $N_p=4.950$, ενώ αν $L=50$ το πλήθος εκτοξεύεται στον αριθμό 3.123.750. [2]

1.5.5 Προσαρμογή σε θεωρητικό μοντέλο ημιβαριογράμματος.

Η διαδικασία αυτή περιλαμβάνει την προσαρμογή σε διάφορα θεωρητικά μοντέλα και την επιλογή ενός που συμφωνεί ικανοποιητικά το πειραματικό μοντέλο. Γενικά, δεν υπάρχει αξιόπιστη στατιστική διαδικασία ελέγχου για το βέλτιστο μοντέλο.

Αφού υπολογιστεί το πειραματικό ημιβαριόγραμμα πρέπει να προσαρμοστεί σε ένα θεωρητικό μοντέλο, το οποίο επιτρέπει τον υπολογισμό του ημιβαριογράμματος για οποιαδήποτε απόσταση. Το θεωρητικό πρότυπο χρειάζεται για την εκτίμηση (π.χ. με γραμμική παρεμβολή) των τιμών του πεδίου σε σημεία όπου δεν υπάρχουν μετρήσεις. Έστω ότι ζητείται να παρασταθεί ένα θεωρητικό μοντέλο με διασπορά σ^2 και μήκος συσχέτισης α με το σύμβολο $\gamma_X(r; \sigma^2, \alpha)$. Οι βέλτιστες τιμές των παραμέτρων υπολογίζονται από την ελαχιστοποίηση της συνάρτησης χ^2 που ορίζονται ως εξής:

$$\chi^2(\sigma^2, \alpha) = \sum_{k=1}^{N_c} \left[\frac{\hat{\gamma}_X(r_k) - \gamma_X(r_k; \sigma^2, \alpha)}{\varepsilon_k} \right]^2$$

Στην παραπάνω σχέση, το ε_k^2 είναι το σφάλμα του πειραματικού ημιβαριογράμματος σε απόσταση r_k . Αν το σφάλμα ακολουθεί τον νόμο των μεγάλων αριθμών, τότε μπορεί να χρησιμοποιηθεί η σχέση $\varepsilon_k^2 = \varepsilon_0^2 / n(r_k)$, όπου η παράμετρος ε_0^2 είναι ένα μέτρο της διασποράς των πειραματικών τιμών του ημιβαριογράμματος και $n(r_k)$ είναι ο αριθμός των ζευγών ανά κλάση απόστασης. Τότε η συνάρτηση χ^2 γράφεται ως εξής:

$$\chi^2(\sigma^2, \alpha) = \frac{1}{\varepsilon_0^2} \sum_{k=1}^{N_c} n(r_k) \left[\hat{\gamma}_X(r_k) - \gamma_X(r_k; \sigma^2, \alpha) \right]^2$$

Σε πρώτη προσέγγιση μπορεί να τεθεί το ε_0^2 ίσο με το δεύτερο της τυπικής απόκλισης του τετραγώνου των διαφορών, $[X(s_i) - X(s_j)]^2$, μέσα σε κάθε κλάση. Εναλλακτικά υποθέτεται πως $\varepsilon_0^2 = 1$ και προσδιορίζονται οι βέλτιστες παράμετροι

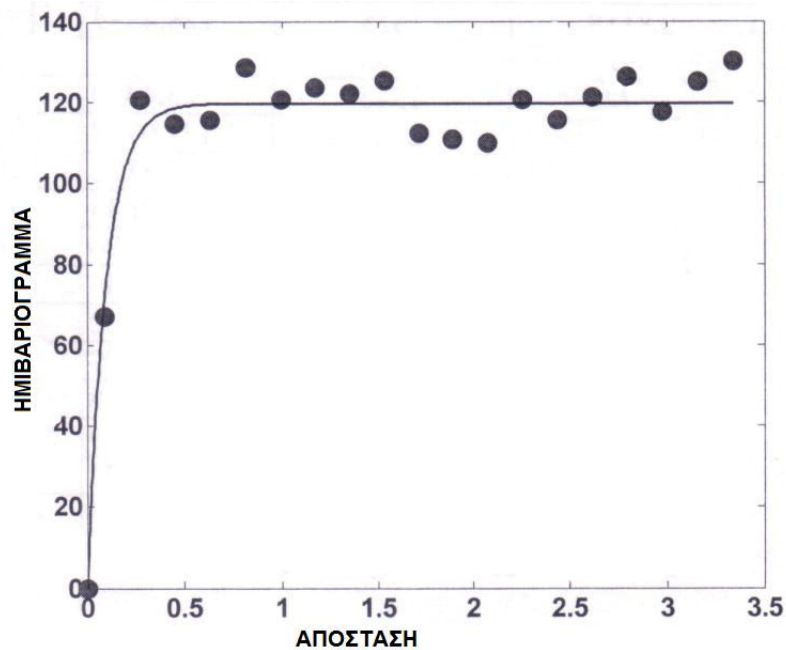
Κεφάλαιο 1

του ημιβαριογράμματος με τη μέθοδο WSS (weighted sum square), η οποία ελαχιστοποιεί το ακόλουθο ζυγισμένο άθροισμα τετραγώνων

$$\chi^2(\sigma^2, \alpha) = \sum_{k=1}^{N_c} n(r_k) \left[\hat{\gamma}_X(r_k) - \gamma_X(r_k; \sigma^2, \alpha) \right]^2$$

Το γεγονός ότι η απόκλιση του προτύπου από το πειραματικό ημιβαριόγραμμα ζυγίζεται με τον αριθμό των ζευγών σημαίνει ότι απαιτείται καλύτερη προσαρμογή στις αποστάσεις για τις οποίες το πλήθος των ζευγών είναι μεγαλύτερο. Ας σημειωθεί πως η τιμή του ε_0^2 δεν επηρεάζει την τιμή των βέλτιστων παραμέτρων, αλλά την τιμή του χ^2 που αντιστοιχεί σε αυτές. Επομένως, η υπόθεση $\varepsilon_0^2 = 1$ δεν επηρεάζει την εκτίμηση των βέλτιστων παραμέτρων.

Υπάρχουν διάφοροι αλγόριθμοι βελτιστοποίησης για τον αριθμητικό υπολογισμό των παραμέτρων σ^2 και α που ελαχιστοποιούν το χ^2 , όπως είναι η μέθοδος Nelder – Mead και η μέθοδος Gauss – Newton. Ένας τέτοιος αλγόριθμος μπορεί να υπολογιστεί στο πρόγραμμα Matlab ή στο πρόγραμμα Surfer. Μια βέλτιστη προσαρμογή ενός πειραματικού ημιβαριογράμματος στο εκθετικό π.χ. μοντέλο, βάσει ενός τέτοιου προγράμματος θα μπορούσε να είναι αυτή του σχήματος 1.6.



Σχήμα 1.6 Προσαρμογή του πειραματικού ημιβαριογράμματος συγκέντρωσης χρωμίου στο εκθετικό πρότυπο.

Κεφάλαιο 1

Να σημειωθεί ότι το σχήμα δείχνει την καλύτερη προσαρμογή του πειραματικού ημιβαριογράμματος με το εκθετικό πρότυπο, αλλά αυτό δεν σημαίνει ότι το εκθετικό πρότυπο είναι το βέλτιστο. Για παράδειγμα, δεν είναι απίθανο κάποιο άλλο πρότυπο σε συνδυασμό με το φαινόμενο πυρήνα (βλ. τέλος ενότητας) να οδηγήσει σε καλύτερη προσαρμογή.

Συνήθως, πέρα από τον υπολογισμό βέλτιστων τιμών χρειάζεται μία εκτίμηση της ποιότητας της προσαρμογής (δηλαδή της προσέγγισης του μοντέλου με το πειραματικό ημιβαριόγραμμα). Δεν υπάρχει μαθηματικά αυστηρός τρόπος για να επιτευχθεί αυτός ο στόχος. Ωστόσο, χρησιμοποιώντας κάποιες παραδοχές είναι εφικτοί προσεγγιστικοί έλεγχοι. Αν υποθεθεί ότι τα σφάλματα ακολουθούν την κανονική κατανομή και είναι στατιστικά ανεξάρτητα, το άθροισμα χ^2 ακολουθεί την κατανομή χ^2 με $\nu = N_c - 2$ βαθμούς ελευθερίας. Τότε, η τυποποιημένη συνάρτηση $Q(\chi^2; \nu)$ δίνει την πιθανότητα η μετρούμενη τιμή της κατανομής να υπερβαίνει τυχαία την στάθμη χ^2 . Επομένως, πολύ μικρές τιμές του $Q(\chi^2; \nu)$ για την υπολογισμένη βέλτιστη στάθμη χ^2 σημαίνουν i) το θεωρητικό μοντέλο δεν είναι σωστό για τα υπάρχοντα δεδομένα ή ii) ότι έχει γίνει υποεκτίμηση του σφάλματος.

Ένας πρακτικός τρόπος για να εκτιμηθεί η ποιότητα της προσαρμογής, ο οποίος δεν περιορίζεται από παραμετρικές υποθέσεις όπως ο προηγούμενος, είναι η διαδικασία της **διασταυρωμένης επαλήθευσης (cross validation)**. Αυτή η διαδικασία κατανέμει τις τιμές του δείγματος σε δύο σύνολα, το σύνολο μετρήσεων και το σύνολο ελέγχου. Το ημιβαριόγραμμα υπολογίζεται χρησιμοποιώντας τα δεδομένα στα σημεία του συνόλου μετρήσεων. Έπειτα, οι τιμές του πεδίου στα σημεία ελέγχου υπολογίζονται με γραμμική παρεμβολή (kriging) βάσει του βέλτιστου μοντέλου ημιβαριογράμματος και ελέγχεται η εγγύτητα τους στις τιμές του δείγματος. Καλή προσέγγιση αποτελεί θετική ένδειξη για την ποιότητα της προσαρμογής. Ωστόσο, πρέπει να σημειωθεί πως η γραμμική παρεμβολή δεν επηρεάζεται από κάποιες ιδιότητες του ημιβαριογράμματος, όπως το άνω φράγμα και η συμπεριφορά σε αποστάσεις μικρότερες από το διάστημα δειγματοληψίας. Επομένως αυτές οι ιδιότητες του ημιβαριογράμματος δεν ελέγχονται με τη μέθοδο της διασταυρωμένης επαλήθευσης. [2]

Ανισοτροπία

Στην περίπτωση ανισοτροπικής εξέτασης πρέπει να υπολογίζεται το ημιβαριόγραμμα σε διάφορες κατευθύνσεις στον χώρο προκειμένου να

Εφαρμογή της Γεωστατιστικής Μεθόδου Kriging για τον Προσδιορισμό της Υδραυλικής Αγωγιμότητας του Υπόγειου Υδροφορέα στην Περιοχή Χερσονήσου του Ηρακλείου Κρήτης

Κεφάλαιο 1

προσδιορίζονται οι κύριες κατευθύνσεις της ανισοτροπίας. Αυτό προϋποθέτει τον ορισμό κλάσεων σε σχέση όχι μόνο με το μέτρο αλλά και την κατεύθυνση του διανύσματος απόστασης. Κάθε κλάση έχει μια ανοχή ως προς το μέτρο ($2\delta r$) και την κατεύθυνση (γωνιακή ανοχή, $2\delta\phi$) του διανύσματος, έτσι ώστε κάθε κλάση να περιλαμβάνει ένα ικανό αριθμό σημείων. Το ημιβαριόγραμμα υπολογίζεται συνήθως στις διευθύνσεις Βορράς – Νότος και Ανατολή – Δύση. Για την γωνιακή ανοχή χρησιμοποιούνται οι τιμές 5, 10, 20 και 45 μοίρες. Άλλες πληροφορίες (π.χ. γεωλογικοί χάρτες) μπορούν να βοηθήσουν στον προσδιορισμό της ανισοτροπίας.

Οι κύριες κατευθύνσεις της ανισοτροπίας σε δύο διαστάσεις συμπίπτουν με τους κύριους άξονες των ισοϋψών ελλείψεων του ημιβαριογράμματος. Στις κατευθύνσεις αυτές η ακτίνα συσχέτισης είναι μέγιστη κατά τη διεύθυνση του μέγιστου κύριου άξονα και ελάχιστη κατά τη διεύθυνση του ελάσσονα άξονα.

Ένα ισοτροπικό ημιβαριόγραμμα εξαρτάται από το μέτρο αλλά όχι από την κατεύθυνση του διανύσματος απόστασης. Επομένως, η κατανομή των ζευγών σημείων σε κλάσεις γίνεται με βάση το μέτρο του διανύσματος απόστασης. Έτσι αυξάνεται ο αριθμός των ζευγών ανά κλάση σε σχέση με την ανισοτροπική περίπτωση. Η ισοτροπική κατανομή περιορίζει το πλήθος των κλάσεων που απαιτούνται για την αναπαράσταση του ημιβαριογράμματος και επομένως επιτρέπει τη χρήση περισσότερων ζευγών ανά κλάση οδηγώντας σε ακριβέστερη εκτίμηση.

Προς το παρόν δεν υπάρχουν συστηματικές ποσοτικές μέθοδοι για την ανίχνευση και τον χαρακτηρισμό της ανισοτροπίας στις γεωστατιστικές μελέτες. Συχνά χρησιμοποιείται η επισκόπηση χαρτών της γεωγραφικής κατανομής μιας μεταβλητής για να αποφασιστεί η ύπαρξη ανισοτροπίας.

Είναι επιθυμητό να βρεθούν μέθοδοι οι οποίες να επιτρέπουν την ανίχνευση της ανισοτροπίας (συγκεκριμένα, της διεύθυνσης των κύριων αξόνων και του λόγου των μηκών συσχέτισης). Αν προσδιοριστεί η ανισοτροπία, είναι δυνατό με τη βοήθεια κατάλληλων μαθηματικών μετασχηματισμών ο υπολογισμός του ανισοτροπικού ημιβαριογράμματος να αναχθεί στον υπολογισμό ενός ισοδύναμου ισοτροπικού ημιβαριογράμματος. Ένας τέτοιος μετασχηματισμός παρέχει σημαντικό πλεονέκτημα, διότι το ισοτροπικό ημιβαριόγραμμα απαιτεί μικρότερο πλήθος κλάσεων, αυξάνοντας έτσι τον αριθμό των ζευγών σημείων ανά κλάση και επομένως μειώνοντας το σφάλμα.

Κεφάλαιο 1

Τα μήκη συσχέτισης κατά μήκος των d κυρίων αξόνων ορίζουν $d-1$ ανισοτροπικούς λόγους. Για παράδειγμα, σε δύο διαστάσεις υπάρχει ένας ανισοτροπικός λόγος, που είναι ίσος με $\mu_{y/x} = \alpha_y / \alpha_x$. [2]

Τα περισσότερα ημιβαριογράμματα έχουν αρκετά απλές μορφές, με την περισσότερη διακύμανση στη μορφή τους να οφείλεται στη δειγματοληψία ή σε στατιστικά φαινόμενα. Οι συναρτήσεις που χρησιμοποιούνται για την προσαρμογή μοντέλων είναι λοιπόν αρκετά απλές. Όμως δεν είναι όλες οι συναρτήσεις κατάλληλες ως μοντέλο ημιβαριογράμματος.

Το μοντέλο ημιβαριογράμματος είναι ένα μαθηματικό μοντέλο για την χωρική μεταβλητότητα: δεν ταιριάζουν όλα τα μοντέλα σε αυτή. Ο λόγος είναι απλός: όταν η διακύμανση διασποράς ή η διακύμανση εκτίμησης υπολογίζονται από το μοντέλο ημιβαριογράμματος θα πρέπει να προκύψει μια θετική διακύμανση.

Αποδεκτοί Γραμμικοί Συνδυασμοί

Όπως αναφέρεται πιο πάνω, οι πιο πολλοί εκτιμητές που χρησιμοποιούνται για εφαρμογές εκτίμησης είναι γραμμικοί συνδυασμοί των διαθέσιμων δεδομένων. Παρακάτω θα αναπτυχθεί ένας 'βέλτιστος' εκτιμητής που θα είναι γραμμικός συνδυασμός (το kriging). Θα χρειαστεί να μπορεί να υπολογιστεί η διακύμανση των γραμμικών συνδυασμών, για παράδειγμα

$$Z^* = \sum_{i=1}^N \lambda_i \cdot Z(x_i)$$

Στην περίπτωση μιας στάσιμης μεταβλητής $Z(x)$ με συνάρτηση συνδιακύμανσης $C(h)$ η διακύμανση του γραμμικού συνδυασμού μπορεί να δειχθεί ότι είναι:

$$Var Z^* = Var \sum_{i=1}^N \lambda_i \cdot Z(x_i) = \sum_i \sum_j \lambda_i \lambda_j C(x_i - x_j)$$

Όπου $C(x_i - x_j)$ είναι η συνδιακύμανση μεταξύ των δύο θέσεων x_i και x_j . Η διακύμανση της ποσότητας Z^* (δηλαδή του γραμμικού συνδυασμού) πρέπει να είναι μη - αρνητική για οποιαδήποτε σημεία x_i και x_j που εξετάζονται, και μη αρνητική ανεξάρτητη από τα βάρη λ_i που επιλέγονται. Μία συνάρτηση που ικανοποιεί την συνθήκη αυτή λέγεται ότι είναι θετικά ορισμένη ή πιο αυστηρά 'υπό όρους θετικά ορισμένη'.

Κεφάλαιο 1

Δεν θα γίνει ανάλυση στο γιατί πρέπει να επιλέγεται μια συνάρτηση που να ικανοποιεί την συνθήκη αυτή, αλλά θα πρέπει να γίνει κατανοητό ότι τα μοντέλα ημιβαριογραμμάτων πρέπει να είναι θετικά ορισμένες συναρτήσεις. Θα πρέπει να δίνεται προσοχή επίσης στο ότι κάποια μοντέλα μπορεί να είναι αποδεκτά σε μία ή δύο διαστάσεις, αλλά απαράδεκτα για μοντελοποίηση ενός τρισδιάστατου ημιβαριογράμματος.

Από πρακτικής άποψης αυτό έχει πολύ άμεσες επιπλοκές:

- Υπάρχει μία ομάδα από αποδεκτά μοντέλα για ημιβαριογράμματα. Αυτά τα μοντέλα είναι υπό όρους θετικά ορισμένα.
- Η χρήση μη – αποδεκτών μοντέλων μπορεί να οδηγήσει σε αρνητικές διακυμάνσεις, και αυτό είναι φανερά απαράδεκτο.
- Ο χρήστης της γεωστατιστικής θα πρέπει να χρησιμοποιεί μόνο γνωστά επικυρωμένα μοντέλα ημιβαριογραμμάτων.

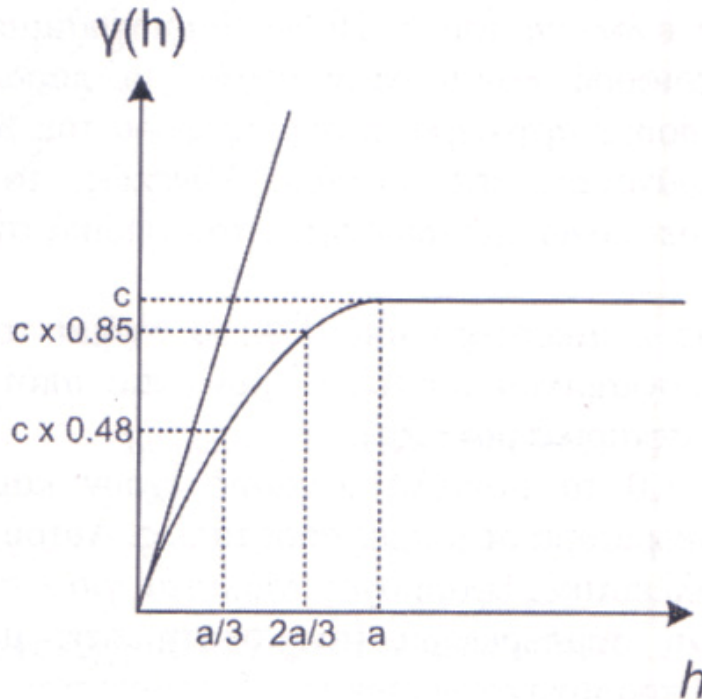
Αυτά μπορεί να φαίνονται περιοριστικά, αλλά στην πράξη δεν είναι, γιατί αρκούν μόνο μερικά από τα διαθέσιμα αποδεκτά μοντέλα (ή συνδυασμοί τους) για την μοντελοποίηση οποιουδήποτε πειραματικού ημιβαριογράμματος που μπορεί να ζητηθεί. [4]

Μερικά κοινά μοντέλα

Θα δοθεί το περίγραμμα των πιο κοινών μοντέλων που διατίθενται στα γεωστατιστικά λογισμικά. Όλα αυτά τα μοντέλα είναι αποδεκτά.

Σφαιρικό

Το σχήμα 1.7 δείχνει το σφαιρικό μοντέλο. Είναι το πιο κοινά χρησιμοποιούμενο μοντέλο ημιβαριογράμματος, και συχνά προσαρμόζεται μαζί με ένα μοντέλο φαινομένου πυρήνα (βλ. τέλος ενότητας). Το σφαιρικό μοντέλο διατίθεται σε οποιοδήποτε γεωστατιστικό λογισμικό. Τα πιο γενικά πακέτα μοντελοποίησης που περιλαμβάνουν ένα τμήμα kriging περιλαμβάνουν επίσης το σφαιρικό μοντέλο.



Σχήμα 1.7 Το σφαιρικό μοντέλο.

Το σφαιρικό μοντέλο έχει μία απλή πολυωνυμική έκφραση και ορίζεται ως εξής:

$$\gamma(h) = C \begin{cases} \left[\frac{3|h|}{2a} - \frac{1}{2} \left(\frac{|h|}{a} \right)^3 \right] & \text{για } |h| \leq a \\ 1 & \text{για } |h| > a \end{cases}$$

Όπου a είναι το μήκος συσχέτισης (ή εύρος) του ημιβαριογράμματος και C είναι το άνω φράγμα (ή οριακή τιμή). Το σφαιρικό μοντέλο παρουσιάζει μία ημι – γραμμική συμπεριφορά κοντά στην αρχή ακολουθούμενη από σταθεροποίηση στην οριακή τιμή. Το σφαιρικό μοντέλο, έχοντας οριακή τιμή, είναι ένα μεταβατικό μοντέλο, δηλαδή μπορεί να μοντελοποιήσει μία μεταβατική συμπεριφορά πηγαινόντας από συσχέτισμό, σε αποστάσεις μικρότερες ή ίσες στο μήκος συσχέτισης a , και έλλειψη συσχέτισμού, σε αποστάσεις πέρα από αυτό.

Να σημειωθεί ότι η εφαπτόμενη στην αρχή τέμνει την οριακή τιμή στα $2/3$ του a . Παρόλο που αρχικά χρησιμοποιήθηκε σε 3Δ, το μοντέλο αυτό είναι αποδεκτό σε 2Δ και 1Δ. [4]

Μοντέλο Δύναμης (Δυναμονομικό)

Τα μοντέλα συνάρτησης δύναμης (Σχήμα 1.8) χρησιμοποιούνται συχνά στο γεωστατιστικό λογισμικό. Αυτά τα μοντέλα δεν έχουν άνω φράγμα, δηλαδή δεν είναι μεταβατικά, και έχουν την μορφή:

$$\gamma(h) = \bar{\omega} |h|^{\lambda}$$

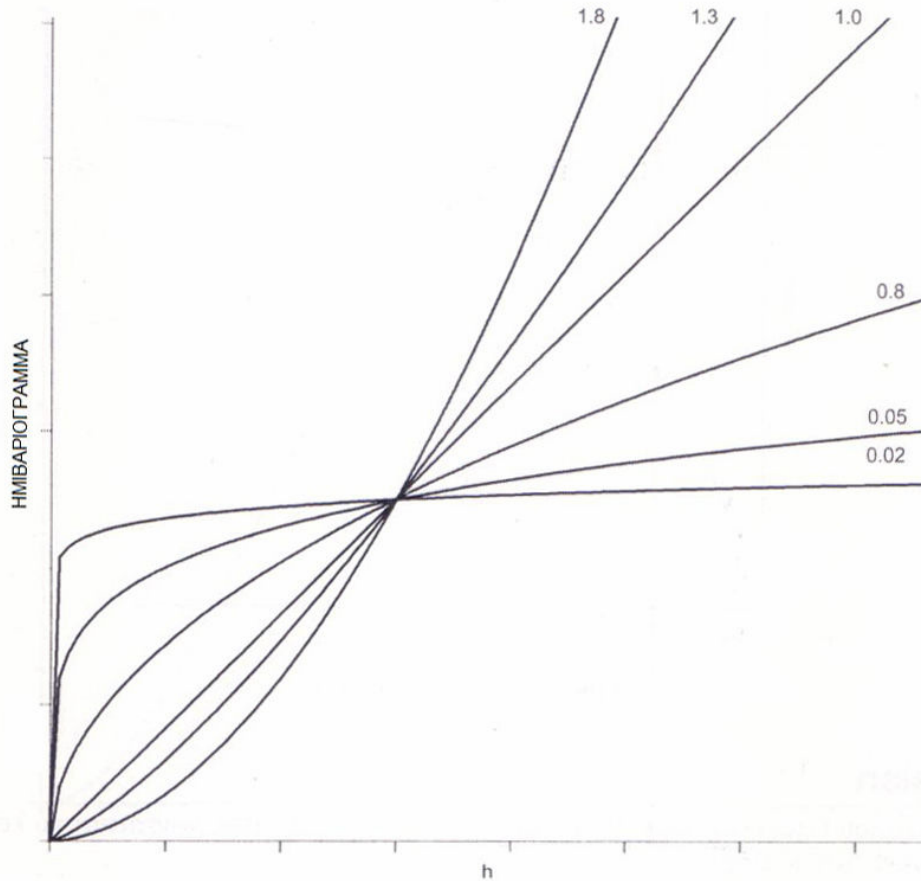
Όπου λ είναι μία δύναμη μεταξύ του 1 και 2. Μια συγκεκριμένη περίπτωση είναι το γραμμικό μοντέλο, όπου το λ ισούται με 1.0 (αυτό το μοντέλο είναι μερικές φορές χρήσιμο σε μεταλλευτικές εφαρμογές). Το γραμμικό μοντέλο είναι λοιπόν το παρακάτω:

$$\gamma(h) = \bar{\omega} |h|$$

Και ω είναι η κλίση του ημιβαριογράμματος. Για το γραμμικό μοντέλο, η τιμή του ημιβαριογράμματος είναι απλά ανάλογη του h . Πολλά ημιβαριογράμματα έχουν λίγο – πολύ γραμμική συμπεριφορά κοντά στην αρχή, για παράδειγμα τα σφαιρικά είδη ημιβαριογραμμάτων. Η συμπεριφορά του ημιβαριογράμματος κοντά στο μηδέν είναι ο κύριος παράγοντας στο kriging. Συνεπώς, το γραμμικό μοντέλο έχει χρησιμοποιηθεί πολύ, εν μέρει λόγω της απλότητάς του (ειδικά στις πρώτες 'χειρονακτικές' μέρες της γεωστατιστικής).

Για μοντέλα δύναμης με λ μικρότερο από 1.0, το σχήμα τους είναι κοίλο, όχι πολύ διαφορετικό από αυτό του σφαιρικού μοντέλου, μόνο πιο απότομο (δείχνοντας λιγότερο συνεχή συμπεριφορά από το σφαιρικό μοντέλο).

Για λ μεγαλύτερο από 1.0 τα μοντέλα δύναμης έχουν καμπύλο σχήμα (κυρτό) στην αρχή, δείχνοντας πολύ συνεχή συμπεριφορά σε μικρές αποστάσεις. Μάλιστα για $\lambda = 2.0$ υπάρχει μια παρεμβολή, και ομαλά διαφοροποιήσιμη συμπεριφορά. Συνεπώς, θα πρέπει να δοθεί προσοχή στην ρύθμιση της τιμής του λ εάν αποφασίσει κανείς να χρησιμοποιήσει το μοντέλο αυτό.



Σχήμα 1.8 Μοντέλα δύναμης (Δυναμονομικό).

[4]

Εκθετικό

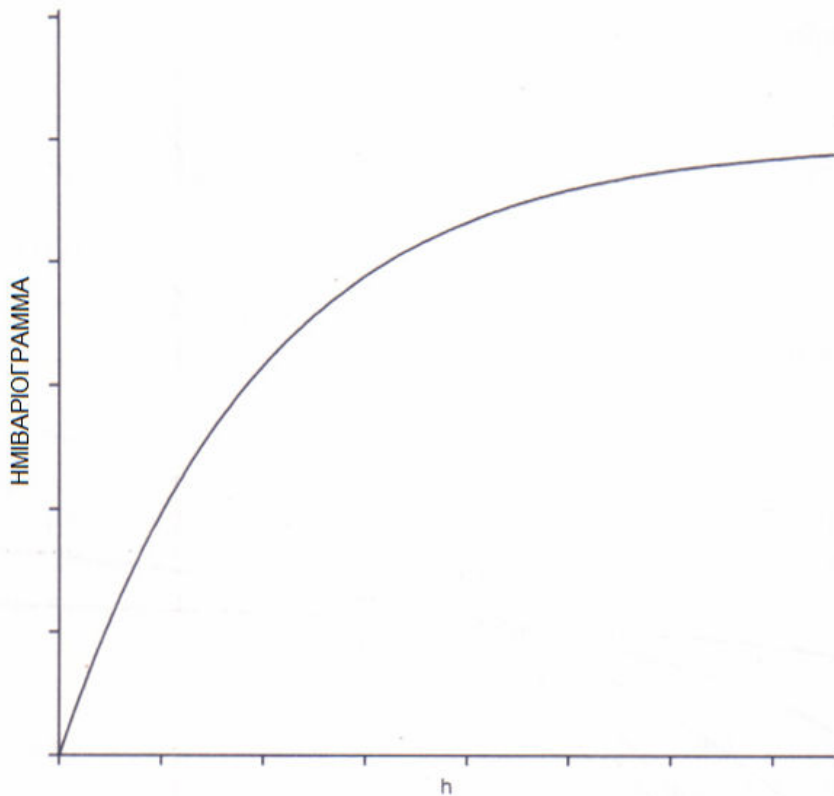
Το εκθετικό μοντέλο (Σχήμα 1.9) έχει την εξής μορφή:

$$\gamma(h) = C \left[1 - e^{-\frac{h}{a}} \right]$$

Όπου C είναι η ασύμπτωτη της καμπύλης του μοντέλου. Το a εδώ δεν είναι το μήκος συσχέτισης (όπως ορίζεται στο σφαιρικό μοντέλο, για παράδειγμα) αλλά είναι μία παράμετρος απόστασης που ελέγχει την χωρική έκταση της συνάρτησης. Το εκθετικό μοντέλο δείχνει παρόμοιο σε πρώτη ματιά με το σφαιρικό μοντέλο και χρησιμοποιείται για να μοντελοποιήσει μεταβατικά φαινόμενα. Εφόσον το εκθετικό ημιβαριόγραμμα πλησιάζει ασυμπτωτικά την οριακή τιμή, το 'πρακτικό' ή 'δραστικό' μήκος συσχέτισης ορίζεται συμβατικά να είναι $3a$ (το ημιβαριόγραμμα είναι στο 95% της οριακής τιμής σε αυτήν την απόσταση).

Κεφάλαιο 1

Το μοντέλο αυτό βρίσκει συχνή εφαρμογή στην χημεία εδάφους .



Σχήμα 1.9 Εκθετικό μοντέλο.

[4]

Γκαουσσσιανό Μοντέλο (Gaussian)

Το μοντέλο του Gauss (Σχήμα 1.10) εφαρμόζεται μερικές φορές στο γεωστατιστικό λογισμικό. Η μορφή του είναι η εξής:

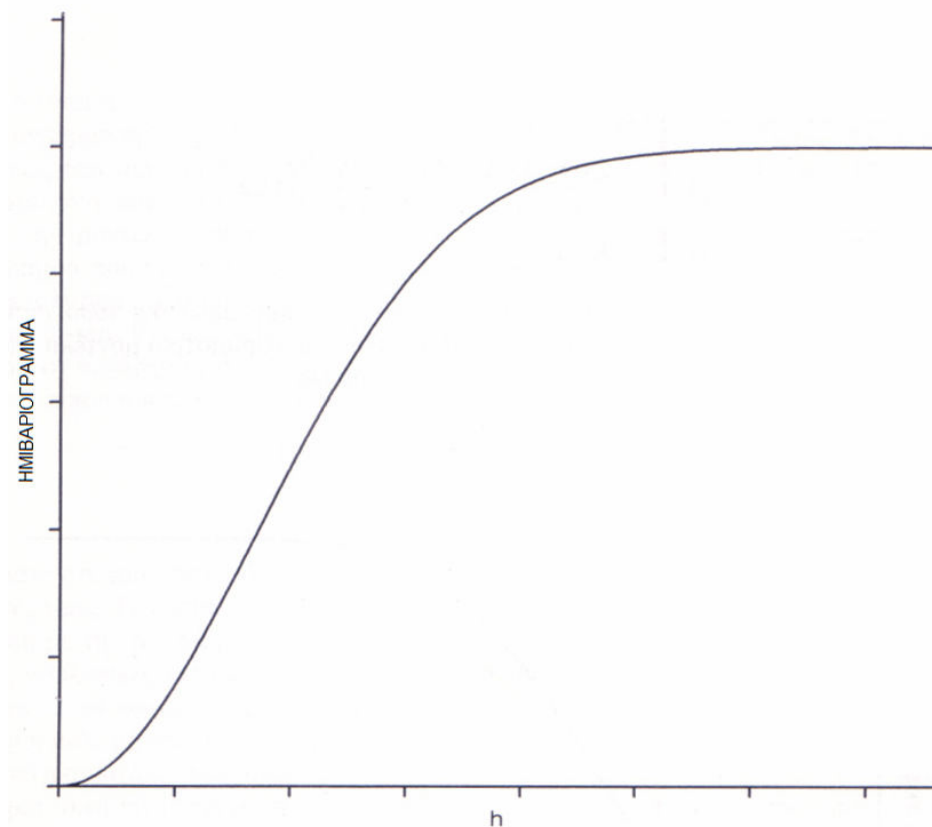
$$\gamma(h) = C \left[1 - e^{-\frac{|h|^2}{a^2}} \right]$$

Όπου, όπως και με το εκθετικό μοντέλο, το C είναι η ασύμπτωτη της καμπύλης του μοντέλου. Να σημειωθεί ότι, και πάλι, το a δεν είναι το μήκος συσχέτισης αλλά μία παράμετρος της απόστασης που ελέγχει την χωρική έκταση της συνάρτησης. Το πρακτικό μήκος συσχέτισης για το μοντέλο του Gauss είναι 1.73^a (και πάλι, αυτή είναι η απόσταση στην οποία το μοντέλο φτάνει το 95% της οριακής τιμής).

Κεφάλαιο 1

Το Γκαουσιανό μοντέλο αντιπροσωπεύει υπερβολικά συνεχή συμπεριφορά στην αρχή. Στην πράξη, ένα τέτοιο ημιβαριόγραμμα είναι ακατάλληλο για μια μεταβολή περιεκτικότητας. Η μόνη του εφαρμογή είναι για πολύ ομαλές, συνεχείς μεταβλητές όπως η τοπογραφία. Μερικές γεωλογικές επιφάνειες επίσης μπορεί να μοντελοποιηθούν επαρκώς από ένα Γκαουσιανό ημιβαριόγραμμα. Γενικά, και εφόσον είναι διαθέσιμο το κυβικό μοντέλο μπορεί να είναι πιο κατάλληλο.

Όμως, είναι σημαντικό να γνωρίζετε ότι το μοντέλο αυτό, εάν χρησιμοποιηθεί για kriging θα πρέπει πάντα να συνδυάζεται με ένα μικρό φαινόμενο πυρήνα (ένα μικρό ποσοστό της οριακής τιμής) για να αποφεύγονται αριθμητικές αστάθειες στο kriging.



Σχήμα 1.10 Μοντέλο του Gauss.

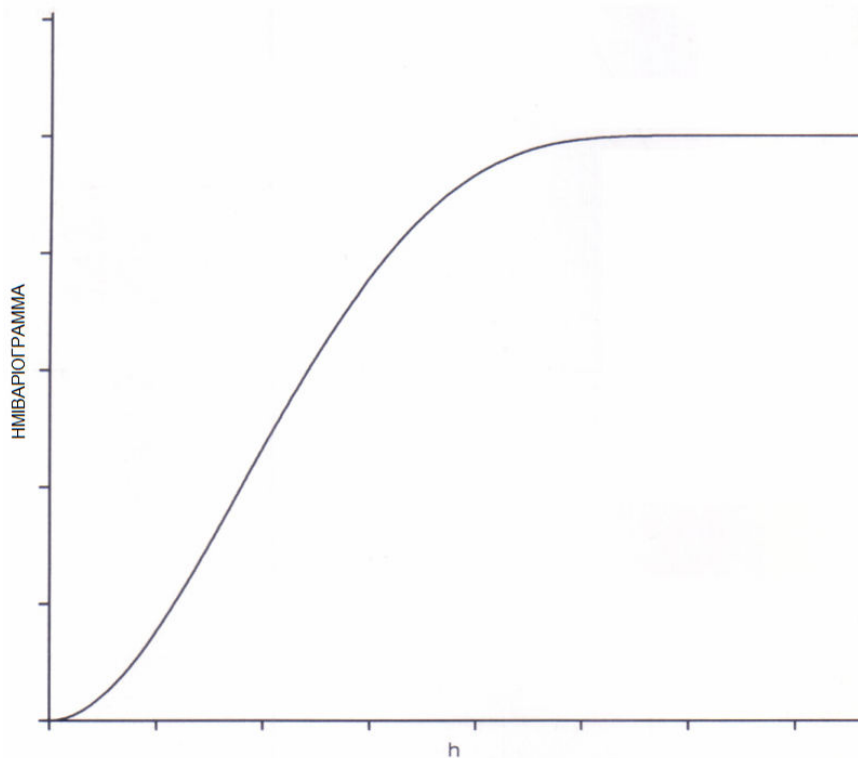
[4]

Κυβικό

Το κυβικό μοντέλο (Σχήμα 1.11) ορίζεται ως εξής:

$$\gamma(h)=C \begin{cases} 7 \frac{h^2}{a^2} - \frac{35}{4} \frac{h^3}{a^3} + \frac{7}{2} \frac{h^5}{a^5} - \frac{3}{4} \frac{h^7}{a^7} & \text{για } |h| \leq a \\ C & \text{για } |h| > a \end{cases}$$

Το κυβικό μοντέλο είναι ομαλό στην αρχή, όπως το Γκαουσσισιανό, αλλά όχι τόσο ομαλό. Το συνολικό του σχήμα θυμίζει το σφαιρικό μοντέλο, και εάν ένα πειραματικό μοντέλο εμφανίζει πολύ συνεχή συμπεριφορά, γενικά προτιμάται από το Γκαουσσισιανό.



Σχήμα 1.11 Κυβικό μοντέλο

[4]

Κεφάλαιο 1

Μοντέλα για το Φαινόμενο Πυρήνα (ή Φαινόμενο κόκκου)

Το φαινόμενο πυρήνα ορίζεται ως η ασυνέχεια του ημιβαριογράμματος που παρατηρείται στην αρχή των αξόνων. Η φυσική ερμηνεία του φαινομένου αυτού είναι η ασυνεχής συμπεριφορά της χωρομεταβλητής σε μικρές αποστάσεις. Εάν δύο μετρήσεις παίρνονται σε δύο πολύ κοντινά σημεία x και $x+h$, η διαφορά

$$E\left[\{Z(x+h)-Z(x)\}^2\right] \rightarrow Co, \text{ όπου } Co \text{ είναι μια τιμή μεγαλύτερη του μηδέν. Η τιμή}$$

αυτή είναι το φαινόμενο πυρήνα. Ενώ το ημιβαριόγραμμα ορίζεται να είναι μηδέν σε μηδενικές αποστάσεις, στην πράξη παρατηρούνται ασυνέχειες στα γεωλογικά δεδομένα. Να σημειωθεί ότι το φαινόμενο πυρήνα υπονοεί ότι οι τιμές έχουν διακύμανση πολύ μικρής κλίμακας.

Για την μοντελοποίηση του φαινομένου πυρήνα χρειάζεται μία συνάρτηση για το ημιβαριόγραμμα που να υποθέτει την τιμή μηδέν στην αρχή και μία σταθερή τιμή για όλες τις τιμές μεγαλύτερες από αυτήν. Το αντίστοιχο μοντέλο για την συνδιακύμανση έχει μια τιμή 1 στην αρχή και 0 οπουδήποτε αλλού. Για να επιτευχθεί αυτό χρησιμοποιείται μία μαθηματική συνάρτηση που έχει αυτές τις ιδιότητες, που ονομάζεται συνάρτηση Dirac $\delta(h)$. Το μοντέλο που συνεπάγεται για το φαινόμενο πυρήνα είναι:

$$\gamma(h) = Co\{1 - \delta(h)\} \quad \text{για } h \neq 0$$

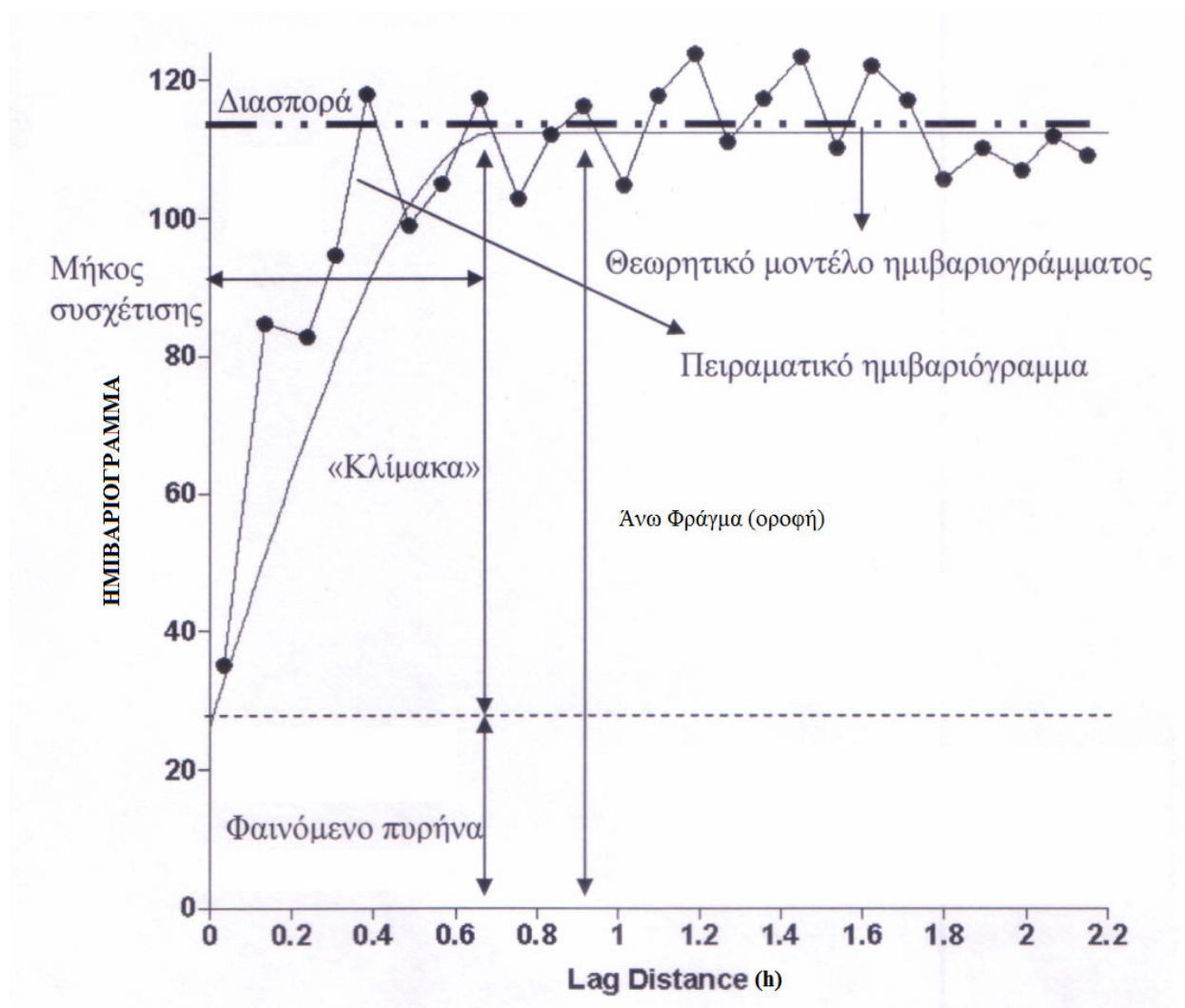
$$\gamma(h) = 0 \quad \text{για } h = 0$$

Να σημειωθεί ότι, πιο αυστηρά ένα τέτοιο μοντέλο είναι δυνατό μόνο για μεταβλητές που έχουν διακριτές τιμές. Για περιπτώσεις που εμφανίζεται σε ψήγματα ή κόκκους που είναι μικροί σε σύγκριση με την στήριξη των δειγμάτων αυτό το μοντέλο δεν θα είναι προβληματικό. Όμως, μερικές γεωλογικές μεταβλητές (για παράδειγμα το βάθος έως κάποια γεωλογική επιφάνεια) είναι ξεκάθαρα συνεχείς. Ακόμα και με αυτές τις μεταβλητές, συνήθως χρειάζεται η προσθήκη ενός μοντέλου φαινομένου πυρήνα για να γίνει μια ικανοποιητική προσαρμογή του ημιβαριογράμματος. [4]

1.5.6 Προσδιορισμός των βασικών παραμέτρων του ημιβαριογράμματος.

Συνήθως αυτές περιλαμβάνουν συνιστώσα φαινόμενου πυρήνα, άνω φράγμα και ακτίνα συσχέτισης σε μία ή περισσότερες διευθύνσεις (σε περίπτωση ανισοτροπίας).

Το σχήμα 1.12 παρουσιάζει τα χαρακτηριστικά ενός ημιβαριογράμματος τα οποία εξετάζονται αναλυτικά πιο κάτω.



**Σχήμα 1.12 Παρουσίαση χαρακτηριστικών στοιχείων ημιβαριογράμματος
(Surfer V.8.0.4, 2002)**

Κεφάλαιο 1

- Το φαινόμενο πυρήνα ποσοτικοποιεί την διασπορά του δειγματικού σφάλματος καθώς και την μικρής κλίμακας μεταβλητότητα, π.χ. την χωρική μεταβλητότητα που υπάρχει σε αποστάσεις μικρότερες από τις αποστάσεις μεταξύ των σημείων του δείγματος.
- Το άνω φράγμα ή «όριο» (οροφή) είναι η τιμή που πλησιάζει ασυμπτωτικά το πειραματικό ημιβαριόγραμμα.
- Η «κλίμακα» (scale) είναι η διαφορά της «οροφής» από το «φαινόμενο πυρήνα» και δηλώνει την μεταβλητότητα των συσχετισμένων διακυμάνσεων.
- Το μήκος συσχέτισης είναι η απόσταση στην οποία το ημιβαριόγραμμα προσεγγίζει πολύ κοντά, π.χ. κατά 95-97%, την τιμή οροφής.
- Η διασπορά είναι η μέση τετραγωνική απόκλιση κάθε τιμής του δείγματος από την μέση τιμή και δηλώνεται από την διακεκομμένη οριζόντια γραμμή στο σχήμα.
- Το πειραματικό ημιβαριόγραμμα παρουσιάζει τις ομάδες των ζευγών με τις αντίστοιχες δειγματικές τιμές του ημιβαριογράμματος.
- Το θεωρητικό μοντέλο ημιβαριογράμματος αποτελεί μία συνεχή θεωρητική καμπύλη που προσαρμόζεται στο πειραματικό.

[3]

Αβεβαιότητα εκτίμησης

Από τη διαδικασία προσαρμογής προκύπτουν εκτιμήσεις του άνω φράγματος σ^2 και του μήκους συσχέτισης a . Αυτές οι εκτιμήσεις υπόκεινται σε αβεβαιότητα και, όπως έχει αναφερθεί, το άνω φράγμα σ^2 δεν συμπίπτει κατ' ανάγκη με τη διασπορά του πεδίου. Επομένως, θα ήταν πιο χρήσιμο αν υπήρχαν εκτιμήσεις των διαστημάτων εντός των οποίων αναμένεται να παίρνουν τιμές η διασπορά και το μήκος συσχέτισης. Σε πρακτικές εφαρμογές, αυτό γίνεται συνήθως ως εξής: το άνω φράγμα θεωρείται σαν μία τυχαία μεταβλητή σ_{ub}^2 . Η διασπορά του άνω φράγματος εκτιμάται από την εξίσωση:

$$VAR(\sigma_{ub}^2) \approx \frac{2}{N^*} \sigma^4$$

Κεφάλαιο 1

Όπου N^* είναι ο αριθμός των ανεξάρτητων μετρήσεων. Το N^* προκύπτει διαιρώντας την περιοχή σε τμήματα το μήκος των οποίων σε κάθε κατεύθυνση είναι ίσο με το αντίστοιχο ολοκληρωτικό μήκος. Ο αριθμός N^* είναι ίσος με τον αριθμό των τμημάτων. Το διάστημα εμπιστοσύνης 95% του άνω φράγματος δίνεται από τη σχέση:

$$\sigma^2 - 2\sqrt{VAR(\sigma_{ub}^2)} < \sigma_{ub}^2 < \sigma^2 + 2\sqrt{VAR(\sigma_{ub}^2)}$$

Προσεγγιστικές τιμές για τα αντίστοιχα διαστήματα εμπιστοσύνης των μηκών συσχέτισης προκύπτουν από την προσαρμογή του πειραματικού ημιβαριογράμματος στο βέλτιστο θεωρητικό πρότυπο, υποθέτοντας ότι το μήκος συσχέτισης είναι η μόνη απροσδιόριστη παράμετρος, και θέτοντας το άνω φράγμα διαδοχικά προς το άνω και κάτω όριο του διαστήματος εμπιστοσύνης. [2]

Προσαρμογή σε Συνδυασμό Προτύπων (Regionalization)

Σε διάφορες περιπτώσεις χρειάζεται ένας συνδυασμός θεωρητικών προτύπων ημιβαριογράμματος για να αποδοθεί με ακρίβεια η χωρική εξάρτηση του δείγματος. Κάθε πρότυπο αντιστοιχεί σε μεταβολές που περιγράφουν ξεχωριστές χωρικές κλίμακες. Το μοντέλο πυρήνα, περιλαμβάνει τη μεταβλητότητα που χαρακτηρίζει αποστάσεις μικρότερες από τη διακριτική ικανότητα του δείγματος. Αυξάνοντας τον αριθμό προτύπων αυξάνεται επίσης ο αριθμός των παραμέτρων, γεγονός που μπορεί να διευκολύνει την προσαρμογή με το πειραματικό ημιβαριόγραμμα. Ο γραμμικός συνδυασμός ημιβαριογραμμάτων είναι αποδεκτός αν οι συνιστώσες είναι αποδεκτά μοντέλα και οι γραμμικοί συντελεστές είναι θετικοί. [2]

Κριτήρια Αποδοχής Ημιβαριογράμματος

Ένα ημιβαριόγραμμα είναι αποδεκτό αν είναι υπό συνθήκη αρνητικά ορισμένο. Αυτό σημαίνει πως για οποιουσδήποτε γραμμικούς συντελεστές λ_a που ικανοποιούν την εξίσωση

$$\sum_{a=1}^n \lambda_a = 0$$

Πρέπει να ισχύει η ανισότητα

$$-\sum_{a=1}^n \sum_{\beta=1}^n \lambda_a \lambda_\beta \gamma_X(s_a - s_\beta) \geq 0$$

Η ανισότητα αυτή προκύπτει από τη σχέση $Var\left[\sum_{a=1}^n X(s_a)\right] \geq 0$. Στην πράξη, ο έλεγχος της ανισότητας για κάθε δυνατό συνδυασμό συντελεστών λ_a είναι ανέφικτος. Ευτυχώς, το κριτήριο αποδοχής εκφράζεται με τη βοήθεια του θεωρήματος του Bochner ως εξής: [2]

Συνθήκες αποδοχής Ημιβαριογράμματος: η συνάρτηση $\gamma_X(r)$ είναι αποδεκτό ημιβαριόγραμμα σε d διαστάσεις αν ισχύουν τα εξής:

1. $\gamma_X(0)=0$,
2. Υπάρχει ο γενικευμένος μετασχηματισμός Fourier $\tilde{\gamma}_X(k)$,
3. Το $\tilde{\gamma}_X(k)$ ικανοποιεί την ανισότητα: $-k^2 \tilde{\gamma}_X(k) \geq 0$
4. $\lim \gamma_X(r)/r^2 = 0, r \rightarrow 0$

Ο γενικευμένος μετασχηματισμός Fourier ορίζεται με τη βοήθεια μιας τετραγωνικά ολοκληρώσιμης συνάρτησης $\zeta_\lambda(r)$, τέτοιας ώστε $\zeta_\lambda(r) = \gamma_X(r)$ για $|r| \leq \lambda$ και $\zeta_\lambda(r) = 0$ για μεγαλύτερα r. Τότε το $\tilde{\gamma}_X(k)$ αντιπροσωπεύεται από το $\tilde{\zeta}_\lambda(k)$ και οι ιδιότητες (2), (3) πρέπει να ισχύουν για όλες τις τιμές του λ .

Αν το τυχαίο πεδίο είναι στατιστικά ομοιογενές είναι απλούστερο να ελεγχθεί η αποδοχή ενός μοντέλου ημιβαριογράμματος χρησιμοποιώντας την συνάρτηση $\sigma_X^2 - \gamma_X(r)$. Αν η συνάρτηση $\gamma_X(r)$ περιγράφει ένα αποδεκτό ημιβαριόγραμμα, τότε η συνάρτηση $c_X(r) = \sigma_X^2 - \gamma_X(r)$ είναι αποδεκτή συνάρτηση συνδιασποράς και το αντίστροφο. Τα κριτήρια αποδοχής για την συνάρτηση συνδιασποράς καθορίζονται από το θεώρημα του Bochner που εξετάστηκε πιο πάνω. [2]

Συνεκτίμηση

Σε περίπτωση που η εκτιμώμενη ποσότητα εξαρτάται από άλλες μεταβλητές για τις οποίες υπάρχουν μετρήσεις, είναι δυνατό να ληφθούν υπόψη οι πρόσθετες πληροφορίες χρησιμοποιώντας μια μέθοδο όπως το συνδυαστικό kriging, που

Κεφάλαιο 1

επιτρέπει τη διασταύρωση πληροφοριών προερχόμενες και από μεταβλητές χρησιμοποιώντας ετεροσυσχετίσεις. [2]

Πρακτικά θέματα

Διάφορες εμπειρικές παρατηρήσεις έχουν προκύψει από τη μελέτη γεωστατιστικών αναλύσεων. Οι εμπειρικές αυτές γνώσεις είναι χρήσιμες στη διαδικασία επιλογής κατάλληλου μοντέλου χωρικής εξάρτησης.

1. Το φαινόμενο πυρήνα αυξάνεται όταν το εύρος των κλάσεων απόστασης (2δr) που χρησιμοποιείται στον υπολογισμό του ημιβαριογράμματος αυξάνεται. Αυτό οφείλεται στο γεγονός πως όταν αυξάνεται το εύρος κλάσης η διακριτική ικανότητα του πειραματικού ημιβαριογράμματος μειώνεται, και επομένως η μεταβλητότητα αυξάνεται στις μικρές αποστάσεις.
2. Το Γκαουσιανό μοντέλο ημιβαριογράμματος χρησιμοποιείται κατά κανόνα σε συνδυασμό με μια μικρή συνιστώσα πυρήνα προκειμένου να αποφευχθούν αριθμητικές αστάθειες στην εκτίμηση με γραμμική παρεμβολή (kriging). Η αστάθεια οφείλεται στην πολύ ομαλή μεταβολή της γκαουσιανής εξάρτησης.
3. Τόσο η χαμηλή πυκνότητα δεδομένων όσο και τα σφάλματα μέτρησης μπορούν να οδηγήσουν στην εμφάνιση φαινόμενου πυρήνα στο πειραματικό ημιβαριόγραμμα. Και στις δύο περιπτώσεις, το φαινόμενο πυρήνα αποτελεί ένδειξη της χαμηλής ποιότητας του δείγματος, η οποία δεν επιτρέπει ευκρινή διάκριση της χωρικής δομής. Γενικά δεν υπάρχει τρόπος για να διαχωρίσει κανείς την προέλευση του φαινόμενου πυρήνα ανάμεσα σε σφάλματα μέτρησης και σε μεταβλητότητα μικρής κλίμακας, εκτός αν υπάρχει η δυνατότητα επανάληψης των μετρήσεων, δηλαδή πολλαπλών δειγμάτων, που επιτρέπουν την εκτίμηση του σφάλματος.
4. Το άνω φράγμα του ημιβαριογράμματος δεν είναι αναγκαία ίσο με τη δειγματική διασπορά $\hat{\sigma}_x^2$. Το άνω φράγμα προκύπτει από τη διαδικασία προσαρμογής σε ένα θεωρητικό πρότυπο. Η διαδικασία αυτή αποσκοπεί να ελαχιστοποιήσει την απόκλιση του θεωρητικού προτύπου από το πειραματικό ημιβαριόγραμμα για όλες τις αποστάσεις, και επομένως δεν αποδίδει κατ' ανάγκη την πραγματική τιμή της διασποράς με ακρίβεια.

5. Το εκτιμώμενο μήκος συσχέτισης βάσει του ημιβαριογράμματος συνήθως υποτιμά το πραγματικό μήκος συσχέτισης όταν το δείγμα είναι αραιό ή όταν υπάρχουν σφάλματα ή ακραίες τιμές (outliers). Γενικά, όταν βελτιώνεται η ποιότητα των δεδομένων (ακρίβεια μετρήσεων, πυκνότητα δείγματος) το εκτιμώμενο μήκος συσχέτισης αυξάνεται.
6. Οι ανισοτροπικοί λόγοι συνήθως υποτιμούνται όταν τα ημιβαριογράμματα κατεύθυνσης υπολογίζονται με υψηλή γωνιακή ανοχή. Αυτό συμβαίνει επειδή ο συνυπολογισμός ζευγών σημείων που αντιστοιχούν σε διαφορετικές κατευθύνσεις του διανύσματος απόστασης αμβλύνει τις διαφορές ανάμεσα στις κύριες κατευθύνσεις.

[2]

1.6 Διαδικασία εκτίμησης (βάσει της μεθόδου Kriging)

Η διαδικασία εκτίμησης, βάσει της μεθόδου Kriging, περιλαμβάνει:

1.6.1 Επιλογή κατάλληλης μεθόδου εκτίμησης (συγκεκριμένος τύπος kriging).

Τι ζητείται από έναν εκτιμητή

Το λιγότερο που απαιτείται είναι μια ακριβή εκτίμηση, δηλαδή οι εκτιμήσεις να είναι (κατά μέσο όρο) όσο το δυνατό πιο κοντά στις 'πραγματικές' περιεκτικότητες. Η ακρίβεια των εκτιμήσεων εξαρτάται από έναν αριθμό παραγόντων, δηλαδή εκείνους που επηρεάζουν την διακύμανση εκτίμησης που ζητείται.

1. **Ο αριθμός των δειγμάτων και η ποιότητα των δεδομένων σε κάθε δείγμα.** Η ποιότητα μπορεί να αλλάζει σημαντικά από ένα δείγμα σε άλλο. Ο εκτιμητής δεν θα πρέπει απαραίτητα να δίνει την ίδια σημασία σε κάθε δείγμα που χρησιμοποιείται στην εκτίμηση.
2. **Η γεωμετρία των δειγμάτων στο πεδίο.** Ιδιαίτερα, η ομαδοποίηση των δειγμάτων μπορεί να κάνει κάποιες πληροφορίες δειγματοληψίας 'περιττές', τουλάχιστον εν μέρει. Γενικά, μια ομαλή κατανομή των δειγμάτων μέσα στο

Εφαρμογή της Γεωστατιστικής Μεθόδου Kriging για τον Προσδιορισμό της Υδραυλικής Αγωγιμότητας του Υπόγειου Υδροφορέα στην Περιοχή Χερσονήσου του Ηρακλείου Κρήτης

Κεφάλαιο 1

πεδίο πετυχαίνει καλύτερη κάλυψη και δίνει περισσότερες πληροφορίες από έναν ισοδύναμο αριθμό δειγμάτων που είναι τοπικά ομαδοποιημένα.

3. **Η απόσταση μεταξύ ενός δείγματος και της περιοχής που ζητείται να εκτιμηθεί.** Εάν ζητείται να εκτιμηθεί μια συγκεκριμένη περιοχή, είναι φυσικό να δοθεί περισσότερο βάρος σε δείγματα που είναι κοντά στην περιοχή ενδιαφέροντος από ότι σε μακρινά δείγματα. Ομοίως, εάν ζητείται να γίνουν σημειακές εκτιμήσεις (για παράδειγμα, της μεταβλητής πάχους) αναμένεται από τον εκτιμητή να είναι ακριβής στα σημεία που υπάρχουν δεδομένα, πιο αξιόπιστος κοντά στα σημεία των δειγμάτων, και να πέφτει σε αξιοπιστία καθώς η απόσταση από το κοντινότερο δείγμα αυξάνεται.
4. **Η χωρική συνέχεια των μεταβλητών παρεμβολής.** Θα πρέπει να απαιτείται κάτι περισσότερο από μια αυθαίρετη πτώση του βάρους καθώς αυξάνει η απόσταση από την περιοχή ή σημείο που εκτιμάται, όπως γίνεται στην μέθοδο αντιστρόφου αποστάσεως. Θα πρέπει επίσης να ζητείται η χωρική μεταβλητότητα της μεταβλητής να συμπεριληφθεί στις εκτιμήσεις. Μεταβλητές με πολύ ομαλές μεταβολές δεν θα πρέπει να ζυγίζονται κατά τον ίδιο τρόπο με μεταβλητές με πιο ακανόνιστη χωρική διακύμανση.

Απαιτείται ο εκτιμητής να είναι αμερόληπτος, δηλαδή το μέσο σφάλμα εκτίμησης να είναι μηδέν (ώστε ο μέσος των εκτιμήσεων να είναι πάντα ίσος με τον μέσο των πραγματικών περιεκτικοτήτων). Θα ήταν θεμιτό επίσης να υπάρχει κάποιος δείκτης της αξιοπιστίας των εκτιμήσεων. [4]

Γιατί Kriging

Το Kriging είναι μια μέθοδος που λαμβάνει υπόψη τους παράγοντες που μόλις αναφέρθηκαν ως επιθυμητούς για έναν εκτιμητή. Οι ιδιότητες αυτές προέρχονται εν μέρει από το γεγονός ότι το Kriging χρησιμοποιεί τον μοντελοποιημένο χωρικό συσχετισμό για την απόδοση βαρών.

Ο όρος 'Kriging' αποδόθηκε από τον G.Matheron του Centre de Geostatistique στο Fontainebleau προς τιμή του D.G.Krige, ο οποίος πρωτοπόρησε στην χρήση στατιστικών μεθόδων για την εκτίμηση αποθεμάτων στην Νότια Αφρική κατά τη διάρκεια του '50. Το Kriging χρησιμοποιείται εκτενώς από τις αρχές του 1970, αρχικά στις μεταλλευτικές βιομηχανίες της Δυτικής Ευρώπης και της Νότιας Αφρικής. Σήμερα το kriging χρησιμοποιείται από πολλές μεταλλευτικές εταιρείες στη Βόρεια και Νότια Αμερική, την Αυστραλία, την Αφρική και την Ασία. Η χρήση του επίσης διαδόθηκε και σε μη-μεταλλευτικά προβλήματα (πετρέλαιο, περιβάλλον, υδρολογία, κ.λ.π.).

Εφαρμογή της Γεωστατιστικής Μεθόδου Kriging για τον Προσδιορισμό της Υδραυλικής Αγωγιμότητας του Υπόγειου Υδροφορέα στην Περιοχή Χερσονήσου του Ηρακλείου Κρήτης

Κεφάλαιο 1

Οι επιθυμητές ιδιότητες του kriging συχνά δίνονται περιληπτικά με το ακρωνύμιο **BLUE**-Best Linear Unbiased Estimator, δηλαδή βέλτιστος γραμμικός αμερόληπτος εκτιμητής.

Best (βέλτιστος), με την έννοια ότι έχει το ελάχιστο μέσο τετραγωνισμένο σφάλμα, δηλαδή η αναμενόμενη τετραγωνισμένη διαφορά μεταξύ της εκτίμησης $X_{\lambda}^*(s_v)$ και της πραγματικής τιμής $X_{\lambda}(s_v)$, $E[X_{\lambda}^*(s_v) - X_{\lambda}(s_v)]^2$ είναι η ελάχιστη για όλους τους πιθανούς γραμμικούς εκτιμητές.

Linear (γραμμικός), είναι εκείνοι που σχηματίζονται με γραμμική ζύγιση των διαθέσιμων δειγμάτων, δηλαδή: $X_0^*(s_v) = \sum_{v=1}^N \lambda_v \cdot X_{\lambda}^*(s_v)$

Όπου όλα τα λ_v είναι τα βάρη, και η εκτίμηση $X_{\lambda}^*(s_v)$ είναι ένα ζυγισμένο άθροισμα όλων των δεδομένων τιμών $X_{\lambda}(s_v)$ σε κάθε σημείο s_v . Να σημειωθεί ότι οι μέθοδοι αντιστρόφου αποστάσεως είναι επίσης γραμμικές, όπως είναι και οι πολυγωνικές μέθοδοι. Στις πολυγωνικές μεθόδους, υπάρχει ένα απλό βάρος (1,0) που εφαρμόζεται μόνο στο δείγμα που πέφτει μέσα στην περιοχή ή πολύγωνο. Να σημειωθεί επίσης ότι, όπως αναφέρθηκε παραπάνω, με τα κριτήρια της ελάχιστης διακύμανσης εκτίμησης, το kriging είναι 'βέλτιστο' όλων των πιθανών γραμμικών εκτιμητών.

Unbiased (αμερόληπτος). Η συνθήκη αμεροληψίας είναι σημαντική. Καθορίζει ότι το αναφερόμενο σφάλμα: $E[X_{\lambda}^*(s_v) - X_{\lambda}(s_v)]$ είναι ίσο με μηδέν.

Estimator (εκτιμητής). Το kriging είναι ένας εκτιμητής. Επειδή είναι αδύνατο να είναι γνωστή η πραγματική περιεκτικότητα σε ένα άγνωστο σημείο, πρέπει να χρησιμοποιηθεί κάποια μέθοδο για να εκτιμηθεί.

Επομένως, το kriging είναι ο βέλτιστος γραμμικός αμερόληπτος εκτιμητής της ποσότητας που εκτιμάται. Το επιτυγχάνει δίνοντας στα δείγματα που οδηγούν στην εκτίμηση, βάρη σχεδιασμένα να δίνουν μία εκτίμηση με το ελάχιστο μέσο τετραγωνισμένο σφάλμα. [4]

ΜΟΡΦΕΣ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΟ KRIGING

Γενικά

Το Kriging είναι μία γεωστατιστική διαδικασία κατά την οποία δίνονται βάρη σε τιμές δειγμάτων εντός μιας δοσμένης περιοχής επιλογής ή όγκου. Τα βάρη αυτά ονομάζονται και συντελεστές kriging (K_i) και οι τιμές τους μεταβάλλονται με την απόσταση από το σημείο ή τη περιοχή εκτίμησης. Εξαρτώνται επίσης από την διάταξη και την πυκνότητα της δειγματοληψίας και τον προσανατολισμό του διανύσματος που σχηματίζεται μεταξύ του σημείου εκτίμησης και του δείγματος. Στην περίπτωση του μπλοκ (περιοχή) kriging, εξαρτώνται επίσης και από το μέγεθος των μπλοκ. Βασικοί παράγοντες που επηρεάζουν αυτούς τους συντελεστές είναι οι παράμετροι C_0 (φαινόμενο πυρήνα) και C (άνω φράγμα) του ημιβαριογράμματος καθώς και ο βαθμός ανισοτροπίας στις διάφορες διευθύνσεις. Έτσι οι παράμετροι αυτοί χαρακτηρίζουν την χωρική μεταβολή της εξεταζόμενης χωρομεταβλητής. Η εφαρμογή αυτών των παραγόντων κάνει το kriging να ξεχωρίζει από άλλες τεχνικές εξομάλυνσης, όπως η μέθοδος αντιστρόφου αποστάσεως. [4]

ΣΗΜΕΙΑΚΟ KRIGING

Το σημειακό kriging (point kriging) είναι μία διαδικασία κατά την οποία εκτιμάται η τιμή σημείων χρησιμοποιώντας τις παραμέτρους του επιλεγμένου ημιβαριογράμματος. Μπορεί να χρησιμοποιηθεί για εκτίμηση αποθεμάτων, όπως για παράδειγμα για τον καθορισμό της περιεκτικότητας μέρους της βαθμίδας που προετοιμάζεται για εξόρυξη με εκρηκτικά, και επίσης ως μέσο ελέγχου της δυνατότητας των παραμέτρων εκτίμησης για την αναπαραγωγή των αρχικών (παρατηρούμενων) τιμών της βάσης δεδομένων.

Όταν το σημειακό kriging χρησιμοποιείται για την δεύτερη περίπτωση η διαδικασία αναφέρεται ως δια-επικύρωση (Jack-knifing). Όπως αναφέρθηκε παραπάνω, χρησιμοποιείται για την λήψη των καλύτερων παραμέτρων ημιβαριογράμματος κατά την προσαρμογή μοντέλου στο πειραματικό ημιβαριόγραμμα. Χρησιμοποιώντας την πρώτη εκτίμηση αυτών των παραμέτρων και αφαιρώντας την παρατηρούμενη τιμή ενός σημείου, γίνεται η εκτίμηση του με kriging όλων των γειτονικών τιμών που πέφτουν εντός μιας καθορισμένης περιοχής ανίχνευσης (κυκλικής ή ελλειπτικής) ή όγκου (σφαιρικού ή ελλειψοειδούς) γύρω από το σημείο. Οι άξονες της περιοχής (ή όγκου) ανίχνευσης θα πρέπει να είναι κάτω

Εφαρμογή της Γεωστατιστικής Μεθόδου Kriging για τον Προσδιορισμό της Υδραυλικής Αγωγιμότητας του Υπόγειου Υδροφορέα στην Περιοχή Χερσονήσου του Ηρακλείου Κρήτης

Κεφάλαιο 1

λιγότερο από το εύρος σε κάθε διεύθυνση. Συνήθως είναι καλό να υπάρχουν τουλάχιστον 5 με 6 δείγματα, ενώ ο βέλτιστος αριθμός είναι συνήθως γύρω στα 15.

Μετά την εισαγωγή των παραμέτρων του ημιβαριογράμματος στο πρόγραμμα εκτίμησης, κάθε τιμή δείγματος $X_\lambda(s_v)$ αφαιρείται με τη σειρά και γίνεται εκτίμηση του σημείου με kriging. Για κάθε σημείο υπολογίζονται οι παρακάτω παράμετροι:

- A) Μέσο μαθηματικό σφάλμα $(\sum_{v=1}^N (X_\lambda(s_v) - X_\lambda^*(s_v))) / N$ όπου $X_\lambda(s_v)$ είναι η πραγματική τιμή σε κάθε σημείο και N είναι το πλήθος των σημείων. Η παράμετρος αυτή λαμβάνει υπόψη το πρόσημο της διαφοράς.
- B) Μέσο απόλυτο σφάλμα $\sigma_K^2 = (\sum_{i=1}^N \sigma_{K_i}^2) / N$.
- C) Μέσο τετραγωνισμένο σφάλμα εκτίμησης $\sigma_E^2 = (\sum_{v=1}^N (X_\lambda(s_v) - X_\lambda^*(s_v))^2) / N$
- D) Πλήθος σημείων που χρησιμοποιούνται στο σημειακό kriging N.
- E) Λόγος μέσου τετραγωνισμένου σφάλματος προς τη μέση διακύμανση kriging σ_E^2 / σ_K^2

[4]

Συνθήκες εφαρμογής μεθόδων Kriging

Η πρακτική εφαρμογή των μεθόδων kriging βασίζεται σε ορισμένες παραδοχές:

- I. Υποτίθεται ότι το τυχαίο πεδίο είναι δυνατό να αναλυθεί σε δύο συνιστώσες, η πρώτη εκ των οποίων εκφράζει την τάση, δηλαδή μία «αργή» μεταβολή της μέσης τιμής (π.χ. πολυωνυμική ή περιοδική) και η δεύτερη την διακύμανση του πεδίου εκατέρωθεν της τάσης.
- II. Μια εκτίμηση που βασίζεται στην ελαχιστοποίηση της διασποράς του σφάλματος είναι ακριβής αν η συνάρτηση κατανομής πιθανότητας είναι συμμετρική και κατά προτίμηση Γκαουσιανή.
- III. Επίσης, συνήθως θεωρείται ότι η διακύμανση περιγράφεται από ένα στατιστικά ομοιογενές πεδίο, έτσι ώστε η συνάρτηση συνδιασποράς (και το ημιβαριόγραμμα) να εξαρτώνται αποκλειστικά από την απόσταση μεταξύ τους. Η υπόθεση της ομοιογένειας δεν είναι απόλυτα απαραίτητη και στην

Κεφάλαιο 1

περίπτωση του καθολικού kriging μπορεί να περιοριστεί στην εξάρτηση του ημιβαριογράμματος. Οι προηγούμενες παραδοχές συνοψίζονται με τη βοήθεια των εξισώσεων που ακολουθούν

$$X(s) = m_X + x(s), \quad s \in \Omega,$$

$$E[X(s)] = m_X(s),$$

$$E[X(s)] = 0 \quad \text{και}$$

$$E[X(s+r)x(s)] = c_X(r).$$

Υπάρχουν πέντε κύριες παραλλαγές τις μεθόδου kriging:

- I. Απλό kriging –SK- (simple kriging) εφαρμόζεται όταν η μέση τιμή του πεδίου είναι γνωστή σε όλη την περιοχή Ω .
- II. Κανονικό kriging –OK- (ordinary kriging) εφαρμόζεται όταν η μέση τιμή του πεδίου θεωρείται σταθερή στη γειτονιά $\omega(u)$ του σημείου εκτίμησης, αλλά η τιμή της $m_X(s)$ μπορεί να μεταβάλλεται από γειτονιά σε γειτονιά. Σε αυτή την περίπτωση θεωρείται το $m_X(u)$ ως άγνωστο.
- III. Καθολικό kriging με πρότυπο τοπικής τάσης –UK- (universal kriging) εφαρμόζεται όταν η μέση τιμή του πεδίου μεταβάλλεται εντός της γειτονιάς του σημείου εκτίμησης. Σε αυτήν την περίπτωση χρησιμοποιείται σαν πρότυπο τάσης ένας γραμμικός συνδυασμός γνωστών συναρτήσεων (π.χ. περιοδικών συναρτήσεων και πολυωνύμων).
- IV. Kriging σε πεδίο δεικτών –IK- (indicator kriging). Αυτή η μέθοδος εφαρμόζεται όταν η συνάρτηση κατανομής της πιθανότητας είναι ασύμμετρη και παρουσιάζει σημαντική πυκνότητα σε υψηλές τιμές. Σε αυτές τις περιπτώσεις δεν είναι δυνατό να χρησιμοποιηθεί το κανονικό (ή το λογαριθμικό) πρότυπο κατανομής πιθανότητας. Το kriging σε πεδίο δεικτών υπολογίζει την πιθανότητα η τοπική τιμή να υπερβαίνει ένα καθορισμένο όριο. Επανάληψη της εκτίμησης για πολλαπλές τιμές του ορίου (multiple indicator kriging) επιτρέπει την εκτίμηση της αθροιστικής κατανομής πιθανότητας.
- V. Συνδυαστικό kriging –CO- (co-kriging) χρησιμοποιείται προκειμένου να συμπεριληφθούν στην διαδικασία εκτίμησης ιδιότητες (π.χ. βάθος

γεώτρησης) που είναι συσχετισμένες με τις ιδιότητες που ζητείται να εκτιμηθούν.

[2]

Απλό kriging

Όπως αναφέρθηκε πιο πάνω, το απλό kriging εφαρμόζεται όταν η μέση τιμή του πεδίου είναι γνωστή σε όλη την περιοχή. Αν επιπλέον η μέση τιμή του πεδίου είναι σταθερή. Δηλαδή $E[X(s)] = m_X$, η εκτιμήτρια δίνεται από την εξής σχέση:

$$\hat{X}(u) = \sum_{a=1}^{n(u)} \lambda_a X(s_a) - m_X \left[\sum_{a=1}^{n(u)} \lambda_a - 1 \right]$$

Οι γραμμικοί συντελεστές (βάρη) λ_a υπολογίζονται χρησιμοποιώντας τη συνθήκη ελαχιστοποίησης του σφάλματος. Η συνθήκη αμεροληψίας ικανοποιείται αυτόματα στην περίπτωση του απλού kriging, όπως εύκολα αποδεικνύεται υπολογίζοντας τη μέση τιμή $E[\hat{X}(u)]$ από την παραπάνω εξίσωση (η συνθήκη αμεροληψίας ικανοποιείται ακόμα και όταν η μέση τιμή μεταβάλλεται στον χώρο). Η διασπορά του σφάλματος εκτίμησης υπολογίζεται ως εξής:

$$\sigma_{E,SK}^2(u) = Var[X(u) - \hat{X}(u)] = Var[\hat{X}(u) - m_X - x(u)].$$

Η εξίσωση της εκτιμήτριας $\hat{X}(u)$ οδηγεί στην επόμενη σχέση για την διακύμανση της τυχαίας μεταβλητής $\hat{X}(u)$

$$\hat{X}(u) - m_X = \sum_{a=1}^{n(u)} \lambda_a [X(s_a) - m_X] = \sum_{a=1}^{n(u)} \lambda_a x(s_a)$$

Επομένως, η διασπορά του σφάλματος της εκτίμησης δίνεται από την επόμενη εξίσωση

$$\begin{aligned} \sigma_{E,SK}^2(u) &= \sum_{a=1}^{n(u)} \sum_{\beta=1}^{n(u)} \lambda_a \lambda_\beta E[x(s_a)x(s_\beta)] + E[x^2(u)] - 2 \sum_{a=1}^{n(u)} \lambda_a E[x(s_a)x(u)] \\ &= \sum_{a=1}^{n(u)} \sum_{\beta=1}^{n(u)} \lambda_a \lambda_\beta c_x(s_a - s_\beta) + \sigma_X^2 - 2 \sum_{a=1}^{n(u)} \lambda_a c_x(s_a - u) \end{aligned}$$

Οι βέλτιστες τιμές των γραμμικών συντελεστών επιτυγχάνονται ελαχιστοποιώντας το σφάλμα. Η ελάχιστη τιμή του σφάλματος προσδιορίζεται από την επίλυση του Εφαρμογή της Γεωστατιστικής Μεθόδου Kriging για τον Προσδιορισμό της Υδραυλικής Αγωγιμότητας του Υπόγειου Υδροφορέα στην Περιοχή Χερσονήσου του Ηρακλείου Κρήτης

Κεφάλαιο 1

συστήματος των εξισώσεων που προκύπτει από τον μηδενισμό των παραγώγων του σφάλματος ως προς όλα τα γραμμικά βάρη, δηλαδή,

$$\frac{\partial \sigma_{E,SK}^2(u)}{\partial \lambda_a} = 0, \quad a = 1, \dots, n(u)$$

Το γραμμικό σύστημα των εξισώσεων που προκύπτει από τις μερικές παραγώγους εκφράζεται λεπτομερώς ως εξής:

$$\sum_{\beta=1}^{n(u)} \lambda_{\beta} c_X(s_a - s_{\beta}) = c_X(s_a - u), \quad a = 1, \dots, n(u)$$

Η παραπάνω γραμμική εξίσωση μπορεί να εκφραστεί επίσης σαν εξίσωση πινάκων

$$C_{a,\beta} \lambda_{\beta} = C_{a,u}$$

Ο πίνακας $C_{a,\beta}$ αντιπροσωπεύει τον πίνακα συνδιασποράς και έχει στοιχεία $C_{a,\beta} = c_X(s_a - s_{\beta})$. Το διάνυσμα $C_{a,\beta}$ αντιπροσωπεύει τις τιμές της συνάρτησης συνδιασποράς μεταξύ των σημείων του δείγματος και του σημείου εκτίμησης $C_{a,u} = c_X(s_a - u)$. Στην εξίσωση εννοείται το άθροισμα ως προς όλες τις τιμές του δείκτη «β» από ένα έως $n(u)$. Το σύστημα γράφεται αναλυτικά με τη μορφή πινάκων ως εξής:

$$\begin{bmatrix} c_X(s_1, s_2) & \dots & \dots & c_X(s_1, s_n) \\ c_X(s_2, s_1) & \dots & \dots & c_X(s_2, s_n) \\ \vdots & & & \vdots \\ c_X(s_n, s_1) & & & c_X(s_n, s_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_X(s_1, u) \\ c_X(s_2, u) \\ \vdots \\ c_X(s_n, u) \end{bmatrix}$$

Η λύση του γραμμικού συστήματος δίνεται από την επόμενη εξίσωση

$$\lambda_{\beta} = C_{\beta,a}^{-1} C_{a,u}, \text{ για κάθε } \beta = 1, \dots, n(u)$$

Τα στοιχεία του πίνακα συνδιασποράς είναι δυνατό να εκφραστούν με τη βοήθεια του πίνακα $\Gamma_{a,\beta}$ του ημιβαριογράμματος ως εξής

$$C_{a,\beta} = \sigma_X^2 - \Gamma_{a,\beta}$$

Παρατηρήσεις

1. Το γραμμικό σύστημα έχει λύση για τους συντελεστές λ_β αν:
 - a. Η συνάρτηση συνδιασποράς είναι αποδεκτή (ημιθετικά ορισμένη) και
 - b. Δεν υπάρχουν πολλαπλές μετρήσεις στο ίδιο σημείο.
2. Οι τιμές των γραμμικών συντελεστών είναι ανεξέρτητες από το άνω φράγμα του ημιβαριογράμματος, αλλά εξαρτώνται από το πρότυπο συνδιασποράς, δηλαδή από τη μορφή της χωρικής εξάρτησης.
3. Η εκτίμηση kriging είναι μια «ακριβής γραμμική παρεμβολή», με την έννοια ότι η εκτίμηση σε ένα σημείο όπου υπάρχει μέτρηση συμπίπτει με την τιμή του δείγματος σε αυτό το σημείο.

[2]

Κανονικό kriging

Το απλό kriging προϋποθέτει ότι η μέση τιμή είναι γνωστή σε όλη την περιοχή εκτίμησης. Αν η μέση τιμή έχει χωρική εξάρτηση, είναι στην πράξη δύσκολο να υπολογιστεί με ακρίβεια από ένα δείγμα μικρών διαστάσεων. Το κανονικό kriging αντικαθιστά την υπόθεση της γνωστής μέσης τιμής με ένα διαφορετικό περιορισμό: η μέση τιμή είναι σταθερή μέσα σε κάθε γειτονιά εκτίμησης αλλά μπορεί να μεταβάλλεται από γειτονιά σε γειτονιά. Τότε, όπως προκύπτει από την βασική εξίσωση του kriging, η εκτίμηση δίνεται από τις ακόλουθες εξισώσεις:

$$\hat{X}(u) = \sum_{a=1}^{n(u)} \lambda_a X(s_a)$$

$$\sum_{a=1}^{n(u)} \lambda_a = 1$$

Η δεύτερη εξίσωση εκφράζει την συνθήκη αμεροληψίας. Στη μέθοδο του κανονικού kriging δεν είναι απαραίτητη η γνώση της μέσης τιμής.

Σε αυτή την περίπτωση πρέπει να υπολογίσουμε το ελάχιστο σφάλμα με τον περιορισμό στις τιμές των βαρών που επιβάλλει η συνθήκη αμεροληψίας. Επομένως χρησιμοποιείται η μέθοδος Lagrange. Η διασπορά του σφάλματος υπολογίζεται ως εξής:

Κεφάλαιο 1

$$\sigma_{E,OK}^2(u) = \sigma_X^2(u) + \sum_{a=1}^{n(u)} \sum_{\beta=1}^{n(u)} \lambda_a \lambda_\beta E[x(s_a)x(s_\beta)] - 2 \sum_{a=1}^{n(u)} \lambda_a E[x(s_a)x(u)] + 2\mu \sum_{\beta=1}^{n(u)} (\lambda_a - 1)$$

Η σταθερά 2μ είναι ο συντελεστής Lagrange για τη συνθήκη αμεροληψίας. Χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση συνδιασποράς, η παραπάνω σχέση εκφράζεται ως εξής:

$$\sigma_{E,OK}^2(u) = \sigma_X^2(u) + \sum_{a=1}^{n(u)} \sum_{\beta=1}^{n(u)} \lambda_a \lambda_\beta c_X(s_a, s_\beta) - 2 \sum_{a=1}^{n(u)} \lambda_a c_X(s_a, u) + 2\mu \sum_{\beta=1}^{n(u)} (\lambda_a - 1)$$

Η ελάχιστη τιμή του σφάλματος εκτίμησης προσδιορίζεται από την επίλυση του συστήματος των εξισώσεων που προκύπτει από τον μηδενισμό των παραγώγων της διασποράς του σφάλματος ως προς τα βάρη και την παράμετρο μ ,

$$\frac{\partial \sigma_{E,OK}^2(u)}{\partial \lambda_a} = 0, \quad a = 1, \dots, n(u)$$

$$\frac{\partial \sigma_{E,OK}^2(u)}{\partial \mu} = 0$$

Αυτές οι συνθήκες οδηγούν στις επόμενες εξισώσεις για τα γραμμικά βάρη

$$\sum_{\beta=1}^{n(u)} \lambda_\beta c_X(s_a - s_\beta) + \mu = c_X(s_a - u), \quad a = 1, \dots, n(u)$$

$$\sum_{a=1}^{n(u)} \lambda_a = 1$$

Το σύστημα των εξισώσεων συνοψίζεται με τη μορφή πινάκων ως

$$\begin{bmatrix} c_X(s_1, s_1) & \dots & \dots & c_X(s_1, s_n) & 1 \\ c_X(s_2, s_1) & \dots & \dots & c_X(s_2, s_n) & 1 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots \\ c_X(s_n, s_1) & & & c_X(s_n, s_n) & 1 \\ 1 & 1 & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \\ \mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_X(s_1, u) \\ c_X(s_2, u) \\ \vdots \\ c_X(s_n, u) \\ 1 \end{bmatrix}$$

Εκτίμηση Σφάλματος OK

Το Μέσο Τετραγωνικό Σφάλμα Εκτίμησης δίνεται από την ακόλουθη εξίσωση

$$\sigma_{E,OK}^2(u) = \sigma_X^2 - \sum_{a=1}^{n(u)} \lambda_a c_X(u, s_a) - \mu$$

Συγκρίνοντας το σφάλμα εκτίμησης του κανονικού kriging με το σφάλμα εκτίμησης του απλού kriging προκύπτει ότι

$$\sigma_{E,OK}^2(u) = \sigma_X^2(u) - \mu$$

Η τιμή της παραμέτρου μ είναι αρνητική και επομένως η αβεβαιότητα της μεθόδου OK υπερβαίνει αυτήν της SK. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι η μέθοδος OK υποθέτει άγνοια της μέσης τιμής του πεδίου και επομένως εισάγει μεγαλύτερη αβεβαιότητα.

Πρακτικά Θέματα

Τα επόμενα αναφέρονται σε θέματα που αφορούν την πρακτική εφαρμογή των μεθόδων kriging και δίνουν μία καλύτερη ιδέα για τις ιδιότητες των γραμμικών συντελεστών και το σφάλμα της εκτίμησης.

1. Το φαινόμενο πυρήνα (κόκκου) επιδρά στο σφάλμα εκτίμησης. Μεγαλύτερο φαινόμενο πυρήνα οδηγεί σε υψηλότερο σφάλμα. Επομένως είναι εν γένει προτιμητέο να υπολογίζεται συντηρητικά το φαινόμενο πυρήνα (δηλ. η υπερεκτίμηση είναι προτιμητέα της υποεκτίμησης), έτσι ώστε να μην υποτιμάται το σφάλμα της σημειακής εκτίμησης.
2. Αν ισχύουν οι κανονικές προϋποθέσεις και δεν υπάρχουν χωρικά μεταβαλλόμενες τάσεις, το kriging αποτελεί τη Βέλτιστη Γραμμική Αμερόληπτη Εκτίμηση.
3. Όπως αναφέρθηκε και πιο πάνω, οι γραμμικοί συντελεστές λ_a είναι ανεξάρτητοι από το άνω φράγμα του ημιβαριογράμματος (και επομένως από τη διασπορά του πεδίου).
4. Οι συντελεστές που αντιστοιχούν σε παραπλήσια σημεία δεδομένων έχουν παρόμοιες τιμές.

5. Αν ένα σημείο μέτρησης βρίσκεται πολύ κοντύτερα στο σημείο εκτίμησης από τα υπόλοιπα σημεία της γειτονιάς, ο αντίστοιχος συντελεστής του υπερβαίνει σημαντικά τους υπόλοιπους συντελεστές οι οποίοι μπορεί να πάρουν ακόμα και αρνητικές τιμές. Αυτό το φαινόμενο είναι γνωστό σαν **φαινόμενο θωράκισης (screening effect)**.
6. Αν το ημιβαριόγραμμα είναι ανισοτροπικό, οι συντελεστές λ_u έχουν υψηλότερη τιμή για δεδομένα κατά μήκος της διεύθυνσης μέγιστης ανισοτροπίας από τους αντίστοιχους συντελεστές για δεδομένα που απέχουν την ίδια απόσταση από το σημείο εκτίμησης κατά μήκος της διεύθυνσης ελάχιστης ανισοτροπίας.
7. Η ιδιότητα της «ακριβούς γραμμικής παρεμβολής» μπορεί να οδηγήσει σε ανώμαλη μεταβολή στην περιοχή εξάρτησης, επειδή η εκτίμηση εξαναγκάζεται να προσαρμοστεί ακριβώς στις τιμές του δείγματος. Αυτές όμως είναι συνήθως ανακριβείς λόγω πειραματικών και άλλων σφαλμάτων.

[2]

Επιλογή Γειτονιάς Εκτίμησης

Η μέγιστη ακτίνα της γειτονιάς $\omega(u)$ πρέπει να μην υπερβαίνει την ακτίνα συσχέτισης του πεδίου. Η ακτίνα συσχέτισης, όπως έχει αναφερθεί προηγουμένως, προσδιορίζεται από την ανάλυση του ημιβαριογράμματος. Αν η ακτίνα της γειτονιάς υπερβαίνει σημαντικά την ακτίνα συσχέτισης, η γραμμική παρεμβολή χρησιμοποιεί μετρήσεις οι οποίες δεν έχουν σημαντική επίδραση στο σημείο εκτίμησης και ο ρόλος των οποίων περιορίζεται περαιτέρω λόγω του φαινομένου θωράκισης. Έτσι αυξάνεται δίχως λόγο το αριθμητικό κόστος επίλυσης του συστήματος kriging. Επιπλέον, χρησιμοποιώντας μικρές γειτονιές είναι δυνατό να απεικονιστούν με μεγαλύτερη ακρίβεια τοπικές μεταβολές της μέσης τιμής από γειτονιά σε γειτονιά. [2]

1.6.2 Διαχωρισμός των μετρήσεων σε δύο σύνολα.

Το πρώτο σύνολο (prediction set) χρησιμοποιείται για τον προσδιορισμό των παραμέτρων της χωρικής συνέχειας, ενώ το δεύτερο σύνολο (validation set) χρησιμοποιείται για τον έλεγχο του προτύπου χωρικής συνέχειας.

Αυτή δεν είναι η μοναδική προσέγγιση στη διαδικασία ελέγχου. Μια άλλη συχνά χρησιμοποιούμενη προσέγγιση χρησιμοποιεί την εκτίμηση σε ένα σημείο τη φορά βάσει των μετρήσεων σε όλα τα υπόλοιπα διαθέσιμα σημεία, και τον υπολογισμό του σφάλματος εκτίμησης (δηλαδή της απόλυτης τιμής της διαφοράς ανάμεσα στην εκτίμηση και την πραγματική τιμή).

Η γεωστατιστική ανάλυση δείγματος τυχαίου πεδίου μπορεί να εφαρμοστεί με δύο διαφορετικές μεθόδους. Η πρώτη μέθοδος περιλαμβάνει τον διαχωρισμό του δείγματος σε σύνολα εκπαίδευσης και επιβεβαίωσης. Τα στοιχεία του συνόλου εκπαίδευσης αποτελούν τα εισαγωγικά δεδομένα του γεωστατιστικού μοντέλου ώστε να προσδιοριστούν οι παράμετροι του ενώ στην συνέχεια χρησιμοποιούνται για την εκτίμηση στα σημεία που ανήκουν στο σύνολο επιβεβαίωσης. Έτσι πραγματοποιείται επιβεβαίωση των εκτιμήσεων του γεωστατιστικού μοντέλου.

Η δεύτερη μεθοδολογία είναι η διασταυρωμένη επαλήθευση, η οποία χρησιμοποιείται σε μικρά σύνολα δεδομένων. Σε αυτήν την περίπτωση όλα τα σημεία του δείγματος αποτελούν το σύνολο εκπαίδευσης και χρησιμοποιούνται για τον υπολογισμό των παραμέτρων του γεωστατιστικού μοντέλου. Στην συνέχεια πραγματοποιείται επιβεβαίωση των εκτιμήσεων του γεωστατιστικού μοντέλου αφαιρώντας επαναληπτικά ένα σημείο από το δείγμα ενώ λαμβάνοντας υπόψη τα υπόλοιπα σημεία του δείγματος πραγματοποιείται εκτίμηση σε αυτό. Με αυτόν τον τρόπο πραγματοποιείται μία σύγκριση μεταξύ της εκτιμώμενης και της πραγματικής τιμής του δείγματος. [3]

1.6.3 Επαλήθευση του προτύπου χωρικής συνέχειας με εκτίμηση των τιμών περιεκτικότητας στα σημεία ελέγχου και υπολογισμός του μέσου απόλυτου σφάλματος (βάσει της απόκλισης μεταξύ των εκτιμήσεων και των μετρήσεων).

Ο έλεγχος της ακρίβειας των εκτιμήσεων του γεωστατιστικού μοντέλου επιτυγχάνεται χρησιμοποιώντας τις παρακάτω εξισώσεις μέτρησης σφάλματος:

Μέσο απόλυτο σφάλμα (Mean absolute error):

$$\varepsilon_{MA} = \frac{1}{N} \sum_{v=1}^N |X_{\lambda}^*(s_v) - X_{\lambda}(s_v)|$$

Όπου N είναι ο αριθμός των σημείων του συνόλου επιβεβαίωσης, $X_{\lambda}^*(s_v)$ είναι οι εκτιμώμενες τιμές και $X_{\lambda}(s_v)$ είναι οι πραγματικές τιμές.

Μέσο Σχετικό Απόλυτο Σφάλμα (Mean absolute relative error):

$$\varepsilon_{MAR} = \frac{1}{N} \sum_{v=1}^N \left| \frac{X_{\lambda}^*(s_v) - X_{\lambda}(s_v)}{X_{\lambda}(s_v)} \right|$$

Τετραγωνική Ρίζα Μέσου Τετραγωνικού Σφάλματος (Root mean square error):

$$\varepsilon_{RMS} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{v=1}^N [X_{\lambda}^*(s_v) - X_{\lambda}(s_v)]^2}$$

Τετραγωνική Ρίζα Μέσου Σχετικού Τετραγωνικού Σφάλματος (Root mean square relative error):

$$\varepsilon_{RMSR} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{v=1}^N \left[\frac{X_{\lambda}^*(s_v) - X_{\lambda}(s_v)}{X_{\lambda}(s_v)} \right]^2}$$

Ένας άλλος τρόπος ελέγχου της ακρίβειας του γεωστατιστικού μοντέλου είναι ο έλεγχος της συσχέτισης μεταξύ εκτιμώμενων και πραγματικών τιμών που πραγματοποιείται με την χρησιμοποίηση του γραμμικού συντελεστή συσχέτισης R^2 .

Γραμμικός Συντελεστής Συσχέτισης (Linear Correlation Coefficient):

$$R^2 = \frac{\sum_{v=1}^N [X_{\lambda}(s_v) - m_X] [X_{\lambda}^*(s_v) - m_X]}{\sqrt{\sum_{v=1}^N [X_{\lambda}(s_v) - m_X]^2} \sqrt{\sum_{v=1}^N [X_{\lambda}^*(s_v) - m_X]^2}}$$

[3]

1.6.4 Παραγωγή χαρτών περιεκτικότητας βάσει των εκτιμώμενων τιμών στα σημεία του πλέγματος εκτίμησης, καθώς επίσης και για το αντίστοιχα σφάλμα εκτίμησης (αβεβαιότητα εκτίμησης).

Έχοντας λύσει το σύστημα kriging μπορεί να εκτιμηθεί η μεταβλητή $X_{\lambda}(s_v)$ για οποιοδήποτε σημείο s_v . Για να σχεδιαστεί ένας χάρτης, συνήθως επιλέγετε ένας μεγάλος αριθμός σημείων. Οι γραμμές του χάρτη σχεδιάζονται τότε είτε με το χέρι είτε με κάποιο πρόγραμμα λογισμικού, το οποίο συνήθως απαιτεί ως δεδομένα τις τιμές της μεταβλητής $X_{\lambda}(s_v)$ πάνω σε ένα κανονικό δίκτυο (πλέγμα). Μπορεί επίσης να σχεδιαστεί ο χάρτης της διακύμανσης της εκτιμώμενης τιμής για να γίνει κατανοητή η αβεβαιότητα. Ακόμα μπορεί να σχεδιαστεί ο χάρτης της τυπικής απόκλισης, ο οποίος αντιστοιχεί σε 95% διάστημα εμπιστοσύνης. [7]

1.6.5 Ανάλυση των αποτελεσμάτων και εξαγωγή συμπερασμάτων.

Τέλος μπορούν να εξαχθούν τα συμπεράσματα της εργασίας.

Εάν το μοντέλο είναι καλή προσέγγιση του θεωρητικού ημιβαριογράμματος τότε:

1. Η τιμή του μέσου μαθηματικού σφάλματος πρέπει να τείνει στο μηδέν και να μην είναι μεγαλύτερο από 1% των τιμών $X_{\lambda}(s_v)$ για συνολική αμεροληψία.
2. Το μέσο απόλυτη σφάλμα θα είναι μεγαλύτερο από το μέσο μαθηματικό σφάλμα και όσο το δυνατό μικρότερο.

Κεφάλαιο 1

3. Ο λόγος σ_E^2 / σ_K^2 πρέπει να πλησιάζει στη μονάδα, και
4. Το N πρέπει να είναι όσο το δυνατό μεγαλύτερο

Όπου δεν ικανοποιείται η συνθήκη 3, αυτό μπορεί να οφείλεται στην παρουσία ακραίων τιμών ή ανώμαλα υψηλών ή χαμηλών τιμών στο σετ δεδομένων κάτι που θα οδηγήσει σε ισχυρή μεροληψία των τετραγωνισμένων διαφορών μεταξύ αυτών και γειτονικών σημείων. Εφόσον οι τιμές αυτές απομακρυνθούν ο λόγος σ_E^2 / σ_K^2 θα πλησιάσει και πάλι στη μονάδα.

Μπορεί να είναι ιδιαίτερα χρήσιμο να κατασκευαστεί το ιστόγραμμα των σφαλμάτων εκτίμησης που θα πρέπει να δώσει μία συμμετρική κατανομή με μέσο κοντά στο μηδέν, υψηλή κύρτωση και χαμηλό συντελεστή μεταβλητότητας. Το διάγραμμα διασποράς των σφαλμάτων έναντι των εκτιμήσεων σε κάθε σημείο $X_\lambda^*(s_v)$ είναι επίσης σημαντικό καθώς δείχνει κατά πόσο το νέφος διασποράς είναι συμμετρικό ως προς μια οριζόντια γραμμή που περνά από την τιμή σφάλματος μηδέν. Για κάθε εύρος εκτιμήσεων (από χαμηλές προς υψηλές) το άθροισμα των υπερ-εκτιμήσεων (αρνητικά σφάλματα) είναι σχεδόν ίσο του αθροίσματος των υπο-εκτιμήσεων (θετικά σφάλματα). Έτσι ικανοποιείται η ανάγκη για δεσμευμένη αμεροληψία.

Τέλος, το διάγραμμα διασποράς $X_\lambda(s_v)$ έναντι της $X_\lambda^*(s_v)$ θα πρέπει να δείξει μια καλή προσέγγιση της γραμμής 45° που περνά από την αρχή των αξόνων ενώ ο συντελεστής συσχετισμού θα πρέπει να είναι όσο το δυνατό πιο κοντά στη μονάδα.

Μπορούν να γίνουν προσαρμογές στις παραμέτρους του ημιβαριογράμματος και της περιοχής ανίχνευσης για την βελτιστοποίηση αυτών των κριτηρίων kriging. Εφόσον γίνει αυτό οι τιμές αυτές των παραμέτρων μπορούν να χρησιμοποιηθούν για σημειακό ή μπλοκ kriging σε μία διαδικασία εκτίμησης αποθεμάτων. [4]

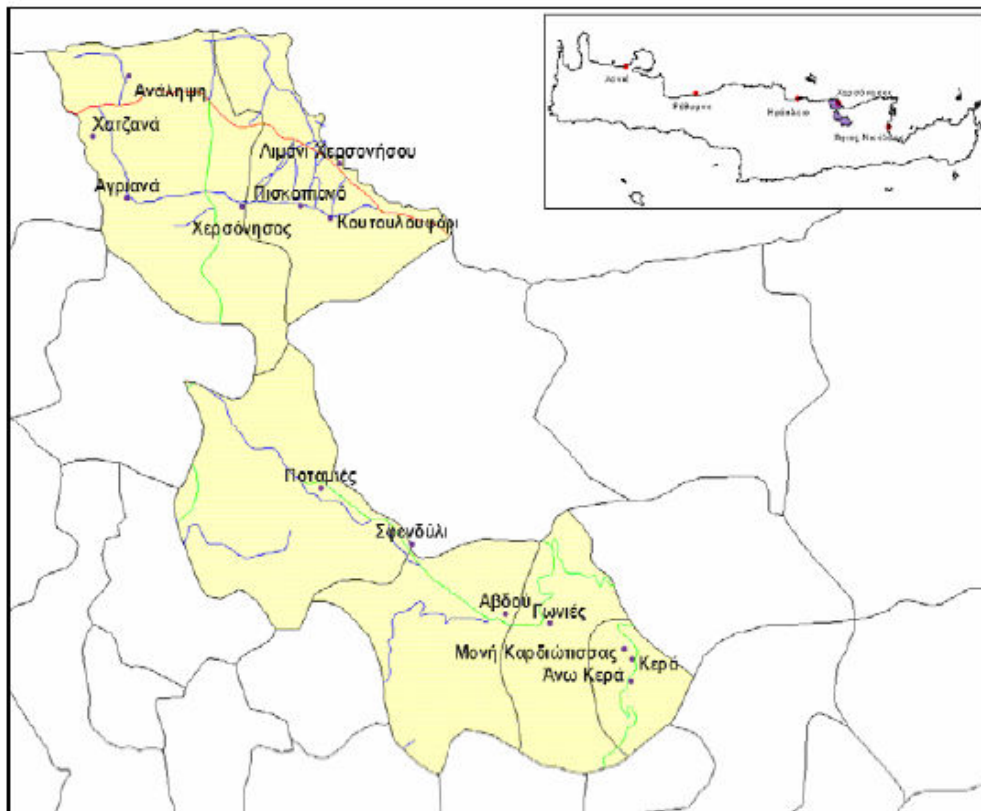
2. Εφαρμογή της γεωστατιστικής μεθόδου Kriging για τον προσδιορισμό της υδραυλικής αγωγιμότητας του υπόγειου υδροφορέα στην περιοχή Χερσονήσου του Ηρακλείου Κρήτης.

Στο πρώτο κεφάλαιο παρουσιάστηκε η γεωστατιστική ανάλυση και η εφαρμογή της. Στο παρών κεφάλαιο πραγματοποιείται εφαρμογή της γεωστατιστικής ανάλυσης για την παράμετρο της υδραυλικής αγωγιμότητας, στον υπόγειο υδροφορέα της περιοχής Χερσονήσου του Ηρακλείου Κρήτης. Βάση του γεωλογικού χάρτη της περιοχής (Ινστιτούτο Γεωλογικών και Μεταλλευτικών Ερευνών - ΙΓΜΕ) θα προσδιοριστεί ο ελάχιστος αριθμός των πειραματικών γεωτρήσεων που πρέπει να πραγματοποιηθούν, ώστε να έχουμε τη βέλτιστη χαρτογράφηση της υδραυλικής αγωγιμότητας.

2.1 Περιγραφή της γεωγραφικής περιοχής

2.1.1 Εισαγωγή

Ο Δήμος Χερσονήσου βρίσκεται στα Βόρεια παράλια του Νομού Ηρακλείου και μόλις 25 χλμ. από την πόλη του Ηρακλείου. Είναι πολύ κοντά στις κυριότερες πύλες εισόδου του νησιού που είναι το λιμάνι και το αεροδρόμιο του Ηρακλείου καθώς και στον αρχαιολογικό χώρο της Κνωσού. Από το 1998 περιλαμβάνει τα δημοτικά διαμερίσματα Λιμένας Χερσονήσου, Χερσόνησος, Ποταμιές, Αβδού, Γωνιές και Κερά με τους επιμέρους οικισμούς που περιλαμβάνει καθένα από αυτά.



Σχήμα 2.13 Ο Λιμένας Χερσονήσου και η ευρύτερη περιοχή του Δήμου Χερσονήσου.

[10]

Ο Λιμένας είναι παραθαλάσσιος και η περιοχή όπου ουσιαστικά αναπτύσσεται η τουριστική δραστηριότητα του Δήμου. Τμήμα της Χερσονήσου είναι παραθαλάσσιο και επίσης παρατηρείται τουριστική ανάπτυξη ενώ τα υπόλοιπα διαμερίσματα βρίσκονται στην ενδοχώρα και η τουριστική τους ανάπτυξη είναι ουσιαστικά ανύπαρκτη με κύρια οικονομική δραστηριότητα τη γεωργία. Μέχρι τα μέσα της δεκαετίας του '60 η κύρια απασχόληση του πληθυσμού ήταν η γεωργία και η κτηνοτροφία (90-95%), ενώ οι υπόλοιπες δραστηριότητες κάλυπταν το 4-5%. Σήμερα παρατηρείται μία πλήρης αντιστροφή των δεδομένων με τη συντριπτική πλειοψηφία των κατοίκων (10.491 κάτοικοι από τους οποίους 5.727 άνδρες και 4.764 γυναίκες) να απασχολείται στον τριτογενή τομέα. Η περιοχή της Χερσονήσου είναι ένας από τους πλέον δημοφιλείς και ανεπτυγμένους τουριστικούς προορισμούς της Κρήτης αλλά και της χώρας. Με 118 ξενοδοχεία και 19.566 κρεβάτια κύριων τουριστικών καταλυμάτων το 1999 τα οποία αντιστοιχούν στο 17,7 % των κλινών της Κρήτης και 3,3 % της Ελλάδας, είναι εμφανής η σημασία του τουρισμού στην περιοχή τόσο σαν οικονομική δραστηριότητα όσο και σαν

Κεφάλαιο 2

φορέας κοινωνικών και περιβαλλοντικών αλλαγών. Μπορεί να θεωρηθεί λοιπόν αντιπροσωπευτικό δείγμα των ανεπτυγμένων τουριστικών περιοχών της Ελλάδας, αλλά και της Μεσογείου γενικότερα. [10]

2.1.2 Κλιματολογικά Στοιχεία

Γενικά το κλίμα της Κρήτης χαρακτηρίζεται εύκρατο μεσογειακό, στους ορεινούς όγκους της όμως τείνει προς τον ηπειρωτικό τύπο. Ο ετήσιος μέσος όρος θερμοκρασίας είναι 14-15°C . Ο χειμώνας είναι ήπιος με ψυχρότερους μήνες τον Ιανουάριο και το Φεβρουάριο. Η πεδινή Κρήτη και ιδιαίτερα οι νοτιοανατολικές περιοχές είναι από τις θερμότερες της Ελλάδας. Η ηλιοφάνεια διαρκεί όλους τους μήνες του έτους ενώ οι θερμότεροι μήνες είναι ο Ιούλιος και ο Αύγουστος, αν και λόγω της θαλάσσιας αύρας και των ετήσιων ανέμων, το θέρος είναι σχετικά δροσερό. Η εμφάνιση νεφώσεων είναι μικρή και μειώνεται από τα ανατολικά προς τα δυτικά. Οι βροχές αυξάνονται από τα ανατολικά στα δυτικά και από την παράκτια ζώνη στην ορεινή.

Το κλίμα της περιοχής της Χερσονήσου είναι τυπικά μεσογειακό με βροχερή περίοδο το χειμώνα από Οκτώβριο μέχρι Μάρτιο. Το θέρος είναι θερμό και ξηρό ενώ οι βροχοπτώσεις μπορεί να θεωρηθούν ικανοποιητικές κατά την διάρκεια του έτους. Επίσης η θερμοκρασία στην περιοχή, η μέση τιμή της οποίας ανέρχεται στους 19°C, παρουσιάζει σημαντική διακύμανση ανάλογα με την εποχή. Έτσι κατά την χειμερινή περίοδο παρατηρείται πτωτική τάση με τον Ιανουάριο να αποτελεί τον ψυχρότερο μήνα , ενώ κατά την καλοκαιρινή περίοδο η θερμοκρασία αυξάνει αισθητά και τον Ιούλιο σημειώνονται οι υψηλότερες τιμές.

Κεφάλαιο 2

Πίνακας 2.3 Δεδομένα μετεωρολογικού σταθμού Ηρακλείου Κρήτης 754

Σταθμός Ηρακλείου Κρήτης 754											
Γεωγραφικό μήκος 25,11 / Γεωγραφικό πλάτος 35,2											
Ύψος σταθμού 38 m											
Μήνας	Ώρες ηλιο-φάνειας	Βαρο-μετρική πίεση	Μέση θερμο-κρασία αέρα	Απόλυτη μέγιστη θερμο-κρασία	Απόλυτη ελάχιστη θερμο-κρασία	Σχετική Υγρασία	Μέση Νέφωση	Βροχο-πτώση	Ολική ηλιακή ακτινο-βολία σε οριζόντιο επιπ.	Διάχυτη ηλιακή ακτινο-βολία σε οριζόντιο επιπ.	Ταχύτητα ανέμου
	h	mm Hg	oC	oC	oC	%	8	σε mm			m/sec
1	108,8	1017,1	12,2	24,8	0,2	71	5,3	90,1	67,33	35,22	3,8
2	128,4	1016	12,5	29,2	-0,5	69	5,1	67,6	82,54	40,67	4
3	170,3	1014,9	13,8	34,8	1,7	66	4,8	58,2	124,87	58,28	4
4	234,5	1013,3	16,8	36	4,4	64	3,7	28,5	161,88	62,74	3,4
5	314,3	1013,6	20,8	39	7	64	2,9	14,2	213,96	62,15	2,3
6	353,3	1012,6	24,4	45,7	8,7	59	1,4	3,5	230,23	56,20	3
7	384,7	1011	26,4	41	15	59	0,6	1,0	248,99	54,12	4
8	356,7	1011,4	26,3	40,7	14	60	0,7	0,6	221,15	51,13	4
9	285,2	1014,6	23,7	38,5	10,6	63	1,8	17,7	174,12	42,92	3,4
10	197,2	1016,7	20,3	36,2	7,9	67	3,6	64,9	114,20	44,54	3,2
11	161,5	1017,5	17,1	31,9	1,9	70	4,7	59,0	81,54	33,62	3
12	121,1	1016,8	13,9	26,7	2	70	5,1	77,9	64,60	30,79	4
Σύν.	2816								1785,43	572,39	

[11]

Βροχοπτώσεις

Η περίοδος των βροχοπτώσεων είναι κυρίως τους χειμερινούς μήνες από Οκτώβριο μέχρι Μάρτιο με ετήσιο ύψος βροχής 483.2 mm. Εντός του έτους όμως η κατανομή τους είναι ανομοιόμορφη με ελάχιστο τους καλοκαιρινούς μήνες με 0.6 mm τον Ιούλιο και μέγιστο τον Ιανουάριο με 90.1 mm βροχής. Χιονοπτώσεις στην ευρύτερη περιοχή δεν υπάρχουν μιας και το φαινόμενο είναι ιδιαίτερα σπάνιο.

Ανεμολογικά στοιχεία

Από επεξεργασία των στοιχείων από το μετεωρολογικό σταθμό του Ηρακλείου (Γεωγραφικό μήκος 25,11/ Γεωγραφικό πλάτος 35,2) για την περίοδο 1955 έως 1998 προέκυψε ότι :

- Η συχνότητα των ανέμων είναι κυρίως Βόρειοι και Βορειοδυτικοί με ποσοστά 16,9% και 28.9% αντίστοιχα ενώ σημαντική είναι και η συχνότητα των Νότιων ανέμων με 14.6% καθώς και της νηνεμίας με ποσοστό 17.5%.

Εφαρμογή της Γεωστατιστικής Μεθόδου Kriging για τον Προσδιορισμό της Υδραυλικής Αγωγιμότητας του Υπόγειου Υδροφορέα στην Περιοχή Χερσονήσου του Ηρακλείου Κρήτης

Κεφάλαιο 2

- Η ένταση των ανέμων είναι κυρίως της τάξης 2, 3 και 4 Beaufour με συνολικό ποσοστό 64.68% ενώ τη μεγαλύτερη συχνότητα έχουν οι άνεμοι των 3 Beaufour με ποσοστό 22.3%.
- Ακραία καιρικά φαινόμενα με ανέμους της τάξης των 10 Beaufour είναι σπάνια αλλά όταν συμβαίνουν είναι νότιας και νοτιοδυτικής κυρίως διεύθυνσης.

Πίνακας 2.4 Ανεμολογικά δεδομένα μετεωρολογικού σταθμού Ηρακλείου Κρήτης 754

Σταθμός Ηρακλείου Κρήτης 754										
Γεωγραφικό μήκος 25,11/ Γεωγραφικό πλάτος 35,2										
Ύψος σταθμού 38 m										
BEAUF	N	NE	E	SE	S	SW	W	NW	CALM	SUM
0									17.527	17.527
1	0.855	0.537	0.372	0.613	1.468	0.603	0.307	0.646		5.401
2	4.360	2.279	0.9653	2.312	5.149	1.884	1.183	3.725		21.845
3	4.941	1.435	0.603	1.183	2.695	0.865	1.490	9.082		22.294
4	4.229	0.438	0.142	0.657	2.241	0.679	1.326	10.649		20.541
5	1.665	0.142	0.033	0.351	1.589	0.449	0.362	3.571		8.162
6	0.690	0.033	0.011	0.208	0.898	0.208	0.088	1.019		3.155
7	0.164	0.011	0.011	0.066	0.274	0.055	0.022	0.142		0.745
8	0.055	0.000	0.000	0.033	0.110	0.011	0.011	0.044		0.264
9	0.011	0.000	0.000	0.011	0.011	0.000	0.000	0.011		0.044
10	0.000	0.000	0.000	0.011	0.011	0.000	0.000	0.000		0.022
11	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000		0.000
SUM	16.970	4.875	2.125	5.445	14.626	4.754	4.789	28.885	17.527	100.000

[11]

2.1.3 Χλωρίδα – Πανίδα

Στην ευρύτερη περιοχή υπάρχουν τα οικοσυστήματα της πεδινής και ημιορεινής ζώνης ενώ επικρατεί κυρίως αυτοφυής υποβαθμισμένη βλάστηση. Η σημασία της χλωρίδας της φυσικής βλάστησης και γενικά των φυτών είναι τεράστια, πρωταρχικής και καθοριστικής σημασίας, αφού τα φυτά είναι οι μόνοι αυτότροφοι οργανισμοί, παράγουν από ανόργανα στοιχεία οργανική ουσία, είναι η βάση της τροφικής αλυσίδας και χωρίς τα φυτά η ζωή στη γη είναι αδύνατη. Η χλωρίδα της

Κεφάλαιο 2

υπό μελέτης περιοχής αναπτύσσεται από δέντρα, θάμνους και από ποώδη βλάστηση. Πιο συγκεκριμένα αποτελείται από:

- Φρύγανα
- Αστιβίδες
- Θυμάρια
- Αφάνες
- Ασπαλάθους
- Θρύμινια

Επίσης η περιοχή παρουσιάζει ένα μωσαϊκό βλάστησης από τα προαναφερθέντα βλαστικά είδη και εγκαταλελειμμένα ελαιόδεντρα που παλαιότερα καλλιεργούνταν στην περιοχή καθώς και από αραιές στοιβάδες από ξυλώδη βλάστηση σκληρόφυλλων και αείφυλλων:

- Σχοίνος
- Ερείκη
- Χαρουπιά
- Πρίνος

Η πληθυσμιακή ισορροπία των άλλοτε ευρέως διαδεδομένων ειδών πανίδας της περιοχής σήμερα έχει διαταραχθεί. Οι οικοκλιματικές συνθήκες της Κρήτης, είναι μεν ευνοϊκές για την ανάπτυξη της πανίδας (ζωοκοινότητας) ιδιαίτερα στα αρθρόποδα, τα έντομα, τα αραχνοειδή και τα μαλάκια (σαλιγκάρια), όμως λόγω της αλόγιστης εκμετάλλευσης των οικοσυστημάτων από τον άνθρωπο, της σημαντικής υποβάθμισης των φυτικής βλάστησης, της παράνομης θήρευσης και της τουριστικής ανάπτυξης της περιοχής ο αριθμός των ζώων στις ανώτερες τάξεις, πτηνά και θηλαστικά, είναι περιορισμένος. Επίσης δεν υπάρχουν σπάνια ή προστατευόμενα είδη ενώ τα κύρια είδη της πανίδας είναι :

- Ο λαγός
- Η ζουρίδα ή το κουνάβι
- Η κουκουβάγια
- Οι σαύρες και
- Διάφορα είδη πουλιών

[9]

2.1.4 Γεωλογία – Υδρογεωλογία

Οι υδρολιθολογικοί σχηματισμοί που καλύπτουν την ευρύτερη περιοχή της

Χερσονήσου χωρίζονται:

- i. Στους υδροπερατούς σχηματισμούς στους οποίους αναφέρονται τα προνεογενή ανθρακικά πετρώματα, οι μαργαϊκοί ασβεστόλιθοι, γύψοι, κροκαλοπαγή, και ψαμμίτες του νεογενούς καθώς και τα κροκαλοπαγή, κορήματα του τεταρτογενούς.
- ii. Στους υδατοστεγείς σχηματισμούς στους οποίους αναφέρονται οι φυλλίτες, χαλαζίτες και φλύσχης του προνεογενούς καθώς και μάργες, άργιλοι του νεογενούς.

Οι υδροπερατοί σχηματισμοί έχουν ιδιαίτερη σημασία για την υδρογεωλογική έρευνα καθώς εντός αυτών αναπτύσσονται οι υπόγειοι υδροφορείς. Παρ' όλα αυτά όμως για την διαμόρφωση, την διακίνηση και την κατανομή τόσο του υπόγειου όσο και του επιφανειακού νερού ιδιαίτερο ρόλο παρουσιάζουν και οι υδατοστεγείς σχηματισμοί.

ΥΔΡΟΠΕΡΑΤΟΙ ΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ

A) Προνεογενείς Υδροπερατοί Σχηματισμοί

Η ομάδα αυτή των πετρωμάτων αποτελείται κυρίως από πλακώδεις ασβεστόλιθους καθώς και από ανθρακικά πετρώματα, τα οποία παρουσιάζουν υψηλό ποσοστό υδροπερατότητας, κυρίως στις ζώνες διαρρήξεων και αποκάρσωσης, όπου τελικοί αποδέκτες του νερού της κατείσδυσης είναι οι πλακώδεις ασβεστόλιθοι. Τα πετρώματα που δομούν τους δύο κύριους ορεινούς όγκους Δίκτη και Ψηλορείτη είναι τα ανθρακικά που λόγω του μεγάλου υψομέτρου που τα χαρακτηρίζει δέχονται μεγάλες ποσότητες νερού από τη βροχή και το χιόνι. Επίσης λόγω της μεγάλης περατότητας που παρουσιάζουν αυτοί οι σχηματισμοί (μέχρι και 50.73% των ετήσιων βροχοπτώσεων) έχει σαν αποτέλεσμα να διαμορφώνονται εντός αυτών υπόγειοι υδροφόροι ορίζοντες με πλούσια αποθέματα νερού όπως διαφαίνεται από τις πολλές πηγές (Ζαρού, πηγές Μαλίων). Επιπλέον από τις υπόγειες υδροφορίες των ανθρακικών πετρωμάτων τροφοδοτούνται με σημαντικό ποσοστό νερού τα υπόγεια και πλευρικά υδροφόρα στρώματα των νεογενών

Εφαρμογή της Γεωστατιστικής Μεθόδου Kriging για τον Προσδιορισμό της Υδραυλικής Αγωγιμότητας του Υπόγειου Υδροφορέα στην Περιοχή Χερσονήσου του Ηρακλείου Κρήτης

Κεφάλαιο 2

αποθέσεων που έρχονται σε άμεση επαφή, κυρίως στις παρυφές των ορεινών όγκων.

Η ποιότητα του νερού στους ανθρακικούς σχηματισμούς είναι συνήθως καλή, προβλήματα μόνο υπάρχουν σε περίπτωση που οι σχηματισμοί αυτοί έρχονται σε επαφή με την θάλασσα οπότε και δημιουργείται το μέτωπο της υφαλμύρωσης όπως συμβαίνει στην περιοχή της Χερσονήσου. Στην περιοχή των Μαλίων και Χερσονήσου μικρό πρόβλημα παρατηρείται και στο τέλος της ξηράς περιόδου, αλλά με τις πρώτες βροχές το ποσοστό σε χλώρια επανέρχεται σε φυσιολογικά επίπεδα.

Β) Νεογενείς Υδροπερατοί Σχηματισμοί

Στους υδροπερατούς σχηματισμούς του νεογενούς κατατάσσονται κυρίως οι μαργαϊκοί ασβεστόλιθοι, τα κροκαλοπαγή, ψαμμίτες, άμμος καθώς και πετρώματα γύψων. Η περατότητα στους σχηματισμούς αυτούς οφείλεται στο δευτερογενές πορώδες που δημιουργείται λόγω διάβρωσης ή τεκτονισμού (μαργαϊκοί ασβεστόλιθοι, γύψος) ή στο πρωτογενές πορώδες που εξαρτάται από τη σύσταση και την κοκκομετρία του πετρώματος (κροκαλοπαγή, ψαμμίτες άμμοι).

Η διαμόρφωση των υπόγειων υδροφορέων εντός των σχηματισμών εξαρτάται άμεσα από τον συντελεστή κατείδωσης, από τον όγκο που καταλαμβάνουν και από την δυνατότητα τροφοδοσίας τους με νερό, είτε απευθείας από τη βροχή είτε πλευρικά από υδροφόρους προνεογενείς σχηματισμούς με τους οποίους έρχονται σε άμεση επαφή. Σε αρκετές περιπτώσεις διαμορφώνονται αξιόλογοι υπόγειοι υδροφορείς κυρίως σε μαργαϊκούς ασβεστόλιθους, κροκαλοπαγή και γύψους. Τα γυψούχα νερά είναι βέβαια ακατάλληλα προς χρήση ύδρευσης αλλά καλύπτουν σημαντικές αρδευτικές ανάγκες.

Γ) Τεταρτογενείς Υδροπερατοί Σχηματισμοί

Αναφέρονται κυρίως σε ποτάμιες αποθέσεις, ψαμμίτες άμμου και κορήματα που λόγω της σύστασης και της κοκκομετρίας τους είναι υδροπερατοί σχηματισμοί. Συνήθως επειδή παρουσιάζουν μικρό πάχος αναπτύσσεται εντός αυτών ελεύθερος υδροφόρος ορίζοντας, όπου όμως έχουν σημαντικό πάχος αναπτύσσεται και υπόγειος υδροφόρος ορίζοντας.

Κεφάλαιο 2

ΥΔΑΤΟΣΤΕΓΗΣ ΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ

A) Προνεογενείς Υδροπερατοί Σχηματισμοί

Στους υδατοστεγείς προνεογενείς σχηματισμούς αναφέρονται τα πετρώματα της Φυλλιτικής-χαλαζιτικής σειράς, ο φλύσχος και οι σχηματισμοί των οφιολίθων – κρυσταλλοσχιστόδων. Οι σχηματισμοί αυτοί στο σύνολό τους χαρακτηρίζονται σαν υδατοστεγείς, εξαίρεση όμως αποτελεί το σαθρό κάλυμμα τους καθώς και κάποιο δευτερογενές πορώδες που είναι συνέπεια από τεκτονικά αίτια.

Η στεγανότητα των πετρωμάτων αυτών, σε συνδυασμό με την τεκτονική της περιοχής εκπληρώνει σοβαρό ρόλο στη διαμόρφωση του υδρογραφικού δικτύου, τη διακίνηση του υπόγειου νερού, το διαχωρισμό της περιοχής σε υδρογεωλογικές ενότητες και σαν στεγανό διάφραγμα επιτρέπει τη διαμόρφωση υπόγειων υδροφορέων σε διάφορα υψόμετρα. Η ποιότητα του νερού που εντοπίζεται στους σχηματισμούς αυτούς είναι καλή και καλύπτει τοπικές υδρευτικές ανάγκες.

B) Νεογενείς Υδροπερατοί Σχηματισμοί

Στους υδατοστεγείς σχηματισμούς του νεογενούς ανήκουν οι μάργες και οι άργιλοι που λόγω της σύστασης και της κοκκομετρίας τους είναι αδιαπέρατοι, πράγμα που αποκλείει τη διαμόρφωση υπόγειων υδροφορέων πρακτικής σημασίας. Οι σχηματισμοί αυτοί καλύπτουν αρκετά μεγάλη έκταση με αποτέλεσμα να δημιουργούνται αρκετά προβλήματα ανεπάρκειας νερού σε πολλές περιοχές. Επίσης λόγω της υδατοστεγανότητας αυτών των σχηματισμών παρατηρείται αυξημένη επιφανειακή απορροή στις περιοχές όπου εμφανίζονται με αποτέλεσμα μεγάλες ποσότητες νερού να καταλήγουν στη θάλασσα και να μένει ανεκμετάλλευτη αυτή η ποσότητα.

Διαμόρφωση υδροφόρων οριζόντων και υδρογεωλογικών ενοτήτων

Η διαμόρφωση υδροφόρων οριζόντων και υδρογεωλογικών ενοτήτων εξαρτάται από τρεις βασικούς παράγοντες: την βροχόπτωση, το γεωλογικό σχηματισμό που είναι περατός στο νερό και το στεγανό υπόβαθρο με κατάλληλη τεκτονική μορφή, ή το επίπεδο θάλασσας όταν πρόκειται για υπόβαθρο ανθρακικών πετρωμάτων. Κάτω από την συνύπαρξη αυτών των προϋποθέσεων, τα νερά της βροχής κατεισδύουν στα πετρώματα, συγκεντρώνονται στους πόρους, τα καρστικά και

Κεφάλαιο 2

τεκτονικά διάκενα διαμορφώνοντας υπόγειους υδροφόρους ορίζοντες, υδρογεωλογικές ενότητες και λεκάνες υδρογεωλογικών ενότητων.

Λαμβάνοντας υπόψη ότι οι δύο ορεινοί όγκοι Ψηλορείτης και Δίκτη είναι οι κύριοι τροφοδότες των υπόγειων υδροφορέων της ευρύτερης περιοχής, χωρίζονται οι εξής υδρογεωλογικές ενότητες:

- Υδρογεωλογική ενότητα καρστικού υδροσυστήματος Ψηλορείτη
- Υδρογεωλογική ενότητα καρστικού υδροσυστήματος Δίκτη
- Υδρογεωλογική ενότητα Ταλλαίων ορέων
- Υδρογεωλογική ενότητα λεκάνης Ηρακλείου

Η Υδρογεωλογική ενότητα όμως που επηρεάζει άμεσα την περιοχή της Χερσονήσου είναι η Υδρογεωλογική ενότητα καρστικού υδροσυστήματος Δίκτη, η οποία περιλαμβάνει τις γεωλογικές ενότητες και υπόγειες υδροφορίες που τροφοδοτούνται από τον ορεινό όγκο, άσχετα αν οι γεωλογικοί σχηματισμοί ανήκουν ή όχι στον βασικό κορμό του.

Γενικά ο ορεινός όγκος Δίκτη ανήκει στο μεγαλύτερο μέρος του στο Νομό Λασιθίου, ενώ στο νομό Ηρακλείου ανήκει το Δυτικό τμήμα. Δομείται κύρια από ανθρακικούς σχηματισμούς του προνεογενούς και είναι ένα από τα κυριότερα καρστικά υδροσυστήματα της Κρήτης μετά τα Λευκά Όρη και τον Ψηλορείτη. Τον κύριο κορμό του ορεινού όγκου αποτελούν οι Πλακώδεις ασβεστόλιθοι της αυτόχθονης γεωλογικής ενότητας πάνω στην οποία έχουν απωθηθεί οι αλλόχθονες γεωλογικές ενότητες της Φυλλιτικής – Χαλαζιτικής σειράς και των οφιολίθων – κρυσταλλοσχιστοδών, ενώ το γεωλογικό υπόβαθρο αποτελούν Πλακώδεις ασβεστόλιθοι της αυτόχθονης ενότητας Κρήτης πάνω στην οποία έχουν επωπηθεί οι αλλόχθονες γεωλογικές ενότητες. Η ενότητα των οφιολίθων – κρυσταλλοσχιστοδών στην περιοχή μελέτης δεν εμφανίζεται.

Οι υδρογεωλογικές συνθήκες της περιοχής δεν είναι εντελώς ανεξάρτητες από αυτές που επικρατούν στο σύνολο του ορεινού όγκου της Δίκτη, ωστόσο η περιοχή χωρίζεται στις εξής ενότητες:

- Υπόγειες υδροφορίες των ανθρακικών σχηματισμών της γεωλογικής ενότητας Πίνδου.

Κεφάλαιο 2

- Υπόγειες υδροφορίες των ανθρακικών σχηματισμών της γεωλογικής ενότητας Τρίπολης.
- Στους ανθρακικούς σχηματισμούς που εμφανίζονται στην περιοχή Ανώπολης –Γουρνών και νοτιότερα μέχρι τις κοινότητες Γαλιπέ – Σκοτεινό.
- Στους ανθρακικούς σχηματισμούς που εμφανίζονται νότια της Χερσονήσου – Χαρασό – Κόξαρης – Καλού Χωριού.
- Στους ανθρακικούς σχηματισμούς που εμφανίζονται στην περιοχή της κοινότητας Χερσονήσου.
- Στους ανθρακικούς σχηματισμούς της περιοχής Μαλίων.

Από αυτούς τους σχηματισμούς η μελέτη αφορά άμεσα τους ανθρακικούς σχηματισμούς που εμφανίζονται στην περιοχή της κοινότητας Χερσονήσου. Πιο συγκεκριμένα όλες οι ερευνητικές γεωτρήσεις που έχουν γίνει στην προσπάθεια της κοινότητας για εντοπισμό υπόγειων υδροφορέων για κάλυψη των υδρευτικών αναγκών, έδωσαν υφάλμυρο νερό. Αυτό οφείλεται στο ότι οι ασβεστόλιθοι του Ιουρασικού της Ζώνης Τρίπολης που έρχονται σε άμεση επαφή με τη θάλασσα, καθώς και το ρήγμα στην επαφή των ασβεστολιθικών του Ιουρασικού και των ασβεστόλιθων του Κρητιδικού λειτουργούν θετικά για την είσοδο του θαλάσσιου νερού στα καρστικά και τεκτονικά διάκενα των ανθρακικών σχηματισμών της ευρύτερης περιοχής. [12]

2.2 Υδραυλική Αγωγιμότητα (Hydraulic conductivity) (K)

2.2.1 Γενικά

Στην ανάλυση της ροής ρευστών σε πορώδη μέσα (π.χ. υπέδαφος) χρησιμοποιείται η υδραυλική αγωγιμότητα K , η οποία καθορίζει την ταχύτητα του ρευστού στο μέσο. Σε περιπτώσεις που το μέσο έχει στρωματική δομή η διαπερατότητα μεταβάλλεται από στρώμα σε στρώμα. Για να υπολογιστεί η συνολική ροή διαμέσου μιας στρωματοποιημένης περιοχής χρησιμοποιείται η *ενεργή υδραυλική αγωγιμότητα* K_{eff} . Αν η ροή είναι παράλληλη με τα στρώματα, η ενεργός αγωγιμότητα δίνεται από την μέση τιμή της αγωγιμότητας των στρωμάτων. Εάν η

Κεφάλαιο 2

ροή είναι σε διεύθυνση κάθετη προς τη στρωμάτωση χρησιμοποιείται ο αρμονικός μέσος, K_H . Ο αρμονικός μέσος μηδενίζεται αν μία από τις αγωγιμότητες των στρωμάτων k_i είναι ίση με το μηδέν. Αυτό συμβαίνει επειδή ο αρμονικός μέσος επηρεάζεται περισσότερο από τις χαμηλές τιμές της κατανομής. Γενικά ο αρμονικός μέσος είναι μικρότερος ή ίσος με την ελάχιστη τιμή k_{\min} σε αντίθεση με τον γραμμικό μέσο όρο που είναι πάντοτε μεγαλύτερος της ελάχιστης τιμής k_{\min} . Ο αρμονικός μέσος χρησιμοποιείται για την ενεργή αγωγιμότητα κάθετα στην διεύθυνση των στρωμάτων, διότι η ταχύτητα του ρευστού σε μεγάλο βαθμό καθορίζεται από την στρώση με την χαμηλότερη αγωγιμότητα.

Στην περίπτωση που η ροή είναι περιορισμένη σε ένα επίπεδο στρώμα εντός του οποίου η διαπερατότητα μεταβάλλεται τοπικά χρησιμοποιείται ο δειγματικός γεωμετρικός μέσος \hat{k}_G

$$\log K_{eff} = \log \hat{k}_G = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \log k_i$$

Όπου k_i είναι η σημειακή διαπερατότητα. [1]

2.2.2 Νόμος του Darcy.

Ο Henry Darcy, μελέτησε τη ροή του νερού διαμέσου οριζόντιων στρωμάτων άμμου που συνήθως χρησιμοποιούνται σαν υδατικά φίλτρα. Το συμπέρασμα της μελέτης του ήταν ότι ο ρυθμός ροής (Q/A) διαμέσου πορώδους είναι ανάλογος των απωλειών φορτίου, ανάλογος ενός συντελεστή K που χαρακτηρίζει το πορώδες υλικό και αντιστρόφως ανάλογος του μήκους πορείας της ροής. Η διατύπωση αυτή είναι ο νόμος του Darcy και η μαθηματική έκφραση είναι:

$$\frac{Q}{A} = -K \frac{\Delta h}{L}$$

$$q = -K \frac{\Delta h}{L}$$

Όπου:

Q : είναι η παροχή (L^3 / T)

A : είναι η επιφάνεια (L^2)

K : είναι η υδραυλική αγωγιμότητα (L/T)

Δh : είναι η απώλεια φορτίου (L)

Εφαρμογή της Γεωστατιστικής Μεθόδου Kriging για τον Προσδιορισμό της Υδραυλικής Αγωγιμότητας του Υπόγειου Υδροφορέα στην Περιοχή Χερσονήσου του Ηρακλείου Κρήτης

Κεφάλαιο 2

L : είναι το μήκος της στήλης (L)

q : είναι η ταχύτητα του Darcy ή ειδική παροχή (L/T)

Το αρνητικό πρόσημο δείχνει ότι η ταχύτητα της ροής είναι προς την κατεύθυνση που ελαττώνεται το φορτίο.

Η έκφραση $\Delta h/L$ συνήθως εμφανίζεται στην γενική της μορφή ως $\Delta h/dL$ και ονομάζεται *υδραυλική κλίση*.

Ο νόμος του Darcy ισχύει για αριθμούς Reynolds < 1 , έχει παρατηρηθεί όμως ότι μπορεί να χρησιμοποιηθεί μέχρι και για $Re = 10$. Στην περίπτωση των υπόγειων νερών η ροή συμβαίνει με $Re < 1$, πράγμα το οποίο εξασφαλίζει τη χρήση του νόμου Darcy χωρίς καμία προϋπόθεση, πλην των περιπτώσεων που υπάρχει μεγάλη υδραυλική κλίση, όπως κοντά σε φρέαρ άντλησης ή σε περιπτώσεις που υπάρχει τυρβώδης ροή όπως κοντά σε βασάλτη ή ασβεστόλιθο με μεγάλα ανοίγματα.

Η ταχύτητα του Darcy, εξ' ορισμού θεωρεί ότι η ροή λαμβάνει χώρα διαμέσου της ολικής επιφάνειας χωρίς όμως να λαμβάνει υπόψη το στερεό υλικό και τους πόρους. Ουσιαστικά όμως σε ένα πορώδες υλικό η ροή περιορίζεται μόνο εντός του χώρου των πόρων και η πραγματική ταχύτητα ορίζεται ως εξής:

$$q_p = \frac{Q}{nA} = \frac{q}{n} = \frac{K}{n} \frac{\Delta h}{L}$$

Όπου:

q_p : είναι η ταχύτητα διήθησης (L/T)

Q : είναι ο ρυθμός παροχής (L^3/ T)

A : είναι η επιφάνεια (L^2)

n : είναι το πορώδες

q : είναι η ταχύτητα του Darcy ή ειδική παροχή (L/T)

K : είναι η υδραυλική αγωγιμότητα (L/T)

dh : είναι η απώλεια φορτίου (L)

dl : είναι το μήκος της στήλης (L)

[5]

2.2.3 Ομοιογένεια και ισοτροπία

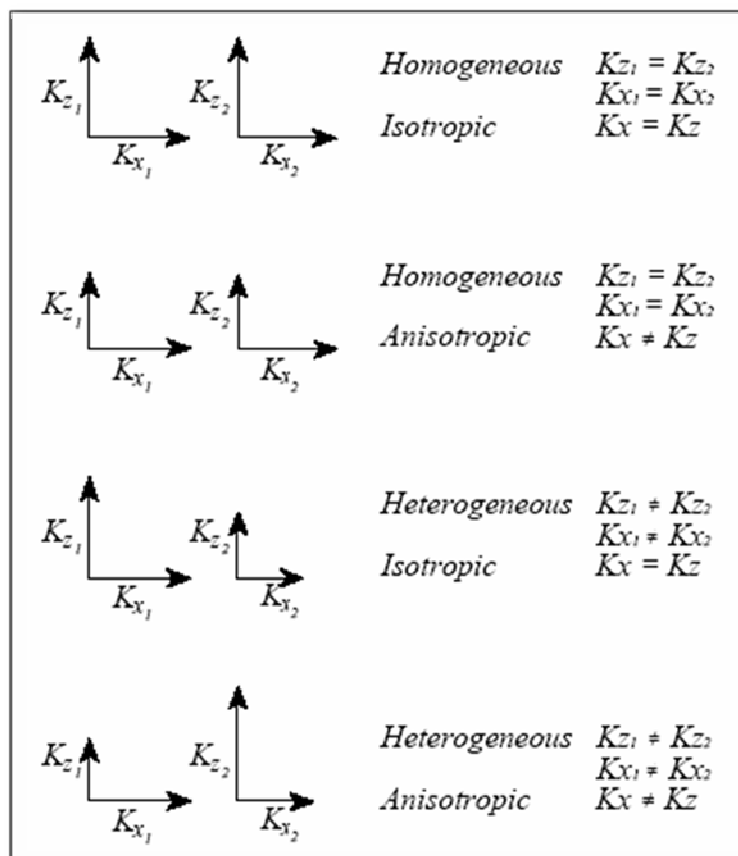
Η υδραυλική αγωγιμότητα ενός υδροφορέα συνήθως μεταβάλλεται από σημείο σε σημείο. Επίσης σε ένα δεδομένο σημείο είναι δυνατόν να μεταβάλλεται και

Κεφάλαιο 2

ανάλογα με την κατεύθυνση. Στην πρώτη περίπτωση είναι η ιδιότητα της ομοιογένειας ή ετερογένειας και στην δεύτερη της ιστροπίας ή ανιστροπίας.

- Ομοιογενής (homogeneous) : χαρακτηρίζεται ένας υδροφορέας που έχει τις ίδιες υδραυλικές ιδιότητες σε κάθε σημείο του.
- Ετερογενής (heterogeneous) : χαρακτηρίζεται ο υδροφορέας του οποίου οι υδραυλικές ιδιότητες αλλάζουν χωρικά.
- Ισότροπος (Isotropic) : χαρακτηρίζεται ο υδροφορέας ο οποίος σε οποιοδήποτε ορισμένο σημείο του έχει τις ίδιες υδραυλικές ιδιότητες προς όλες τις κατευθύνσεις.
- Ανισότροπος (Anisotropic): χαρακτηρίζεται ο υδροφορέας με διαφορετικές υδραυλικές ιδιότητες σε κάθε κατεύθυνση.

[5]



Σχήμα 2.14 Περιπτώσεις ομοιογενούς-ανομοιογενούς και ισότροπου-ανισότροπου υδροφορέα.

[13]

2.3 Αριθμός δειγμάτων και τρόπος δειγματοληψίας

Ο τρόπος δειγματοληψίας είναι το αρχικό ζητούμενο όταν πρόκειται να μελετηθεί μία περιοχή. Πρέπει να αποφασιστεί πόσα δείγματα θα ληφθούν και σε ποια σημεία. Το ιδανικό είναι να ληφθούν όσο το δυνατόν περισσότερα δείγματα και σε συγκεκριμένες περιοχές ώστε να διευκολύνουν την διερευνητική ανάλυση. Κάτι τέτοιο όμως είναι σχεδόν αδύνατο αφού προϋποθέτει λεπτομερή γνώση της γεωλογίας της περιοχής (για την επιλογή των σημείων) και κόστος μελέτης πολύ υψηλό (λόγο του μεγάλου αριθμού γεωτρήσεων).

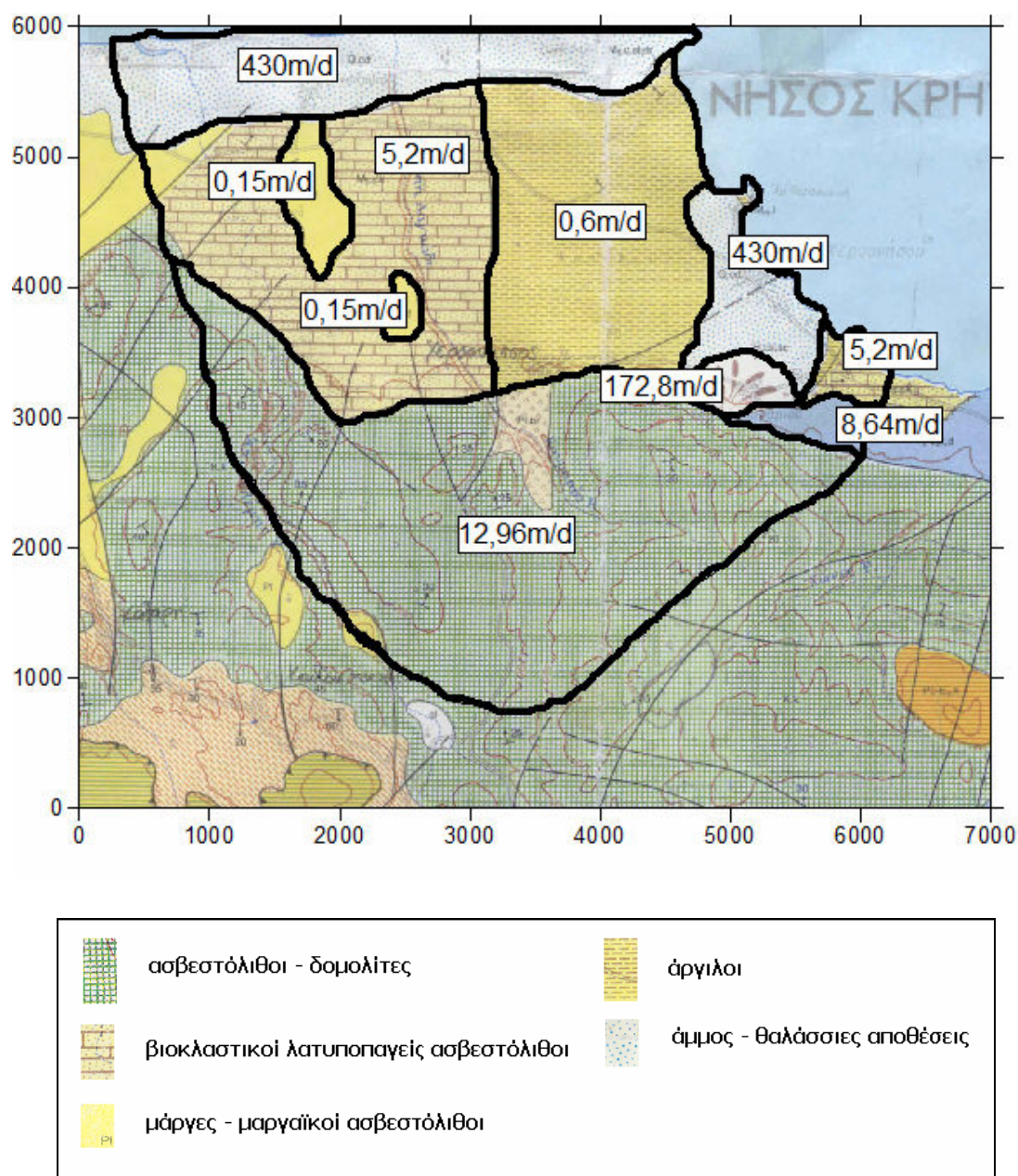
Στην παρούσα μελέτη λοιπόν ο αριθμός των δειγμάτων δεν θα υπερβαίνει τα 300 και ο τρόπος δειγματοληψίας θα είναι είτε τυχαίος είτε θα ακολουθεί κάποια υποτυπώδη λογική, βάση του γεωλογικού χάρτη της περιοχής.

Αρχικά θα θεωρηθεί πως λαμβάνονται 50 δείγματα στο πεδίο με τυχαίο τρόπο δειγματοληψίας. Αυτή είναι η απλούστερη μέθοδος αφού ο ελάχιστος αριθμός δειγμάτων που πρέπει να ληφθούν για να είναι δυνατή η εφαρμογή της μεθόδου της γεωστατιστικής ανάλυσης είναι 50 και ακόμα θεωρείται πως δεν υπάρχει λεπτομερή γνώση της γεωλογίας της περιοχής. Στη συνέχεια ο αριθμός των δειγμάτων θα αυξηθεί σε 70 και μετά σε 100.

Έπειτα λαμβάνοντας υπόψη την γεωλογία της περιοχής θα ληφθούν αντίστοιχα 50, 70 και 100 δείγματα.

Στη συνέχεια παρουσιάζεται ο γεωλογικός χάρτης της περιοχής όπως δόθηκε από το ΙΓΜΕ, όπου αναγράφονται οι τυπικές αρχικές τιμές της υδραυλικής αγωγιμότητας.

Κεφάλαιο 2



Σχήμα 2.15 Ο υδρογεωλογικός χάρτης της περιοχής πάνω στον οποίο διακρίνονται οι αυτόνομες υδρογεωλογικές ενότητες, καθεμία από τις οποίες διακρίνεται από διαφορετική υδραυλική αγωγιμότητα.

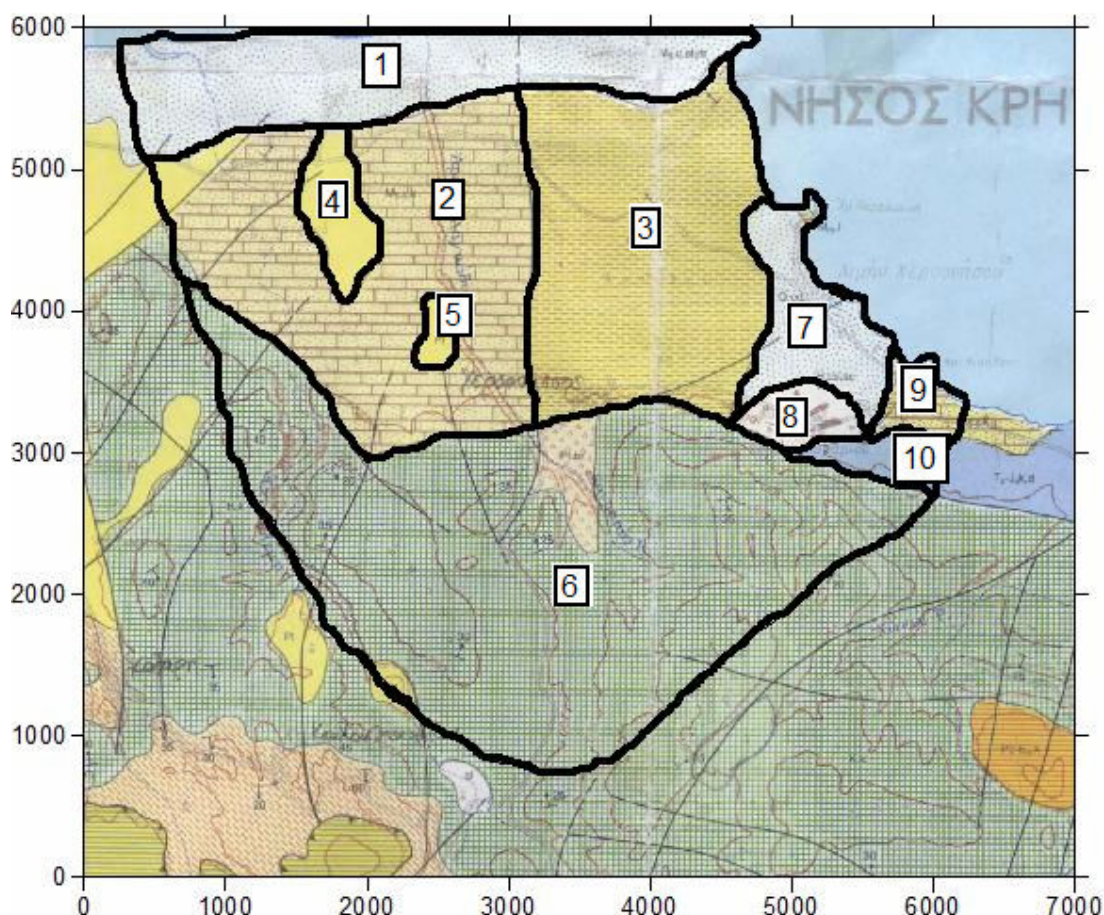
Ο γεωλογικός αυτός χάρτης δεν παρέχει μεγάλη ακρίβεια ούτε ασφαλή δεδομένα όμως μπορεί να δώσει μία πρώτη εικόνα για τους γεωλογικούς σχηματισμούς της περιοχής.

Ο τρόπος δειγματοληψίας που θα χρησιμοποιηθεί στη συνέχεια βασίζεται στο ποσοστό έκτασης του κάθε γεωλογικού σχηματισμού επί της συνολικής έκτασης

Κεφάλαιο 2

της περιοχής και τα σημεία δειγματοληψίας θα είναι ομοιόμορφα κατανεμημένα σε κάθε σχηματισμό.

Παρακάτω δίνεται ο χάρτης με αριθμημένους τους γεωλογικούς σχηματισμούς που υπάρχουν σε αυτόν.



Σχήμα 2.16 Χάρτης της περιοχής με αριθμημένα τα γεωλογικά στρώματα

Ο φακός που παρουσιάζεται στο βόρειο τμήμα του σχηματισμού Νο 6 θεωρήθηκε αμελητέος.

Ο χάρτης επεξεργάστηκε με το λογισμικό πακέτο "AutoCAD 2007" και τα ποσοστά έκτασης του κάθε γεωλογικού σχηματισμού παρουσιάζονται στον επόμενο πίνακα.

Κεφάλαιο 2

Πίνακας 2.5 Ποσοστό έκτασης κάθε γεωλογικού στρώματος

Αριθμός Γεωλογικού Σχηματισμού	Ποσοστό Έκτασης
1	11.792%
2	19.812%
3	17.285%
4	1.979%
5	0.500%
6	39.506%
7	4.345%
8	1.389%
9	1.140%
10	1.978%
Σύνολο	100%

Εν συνεχεία θα μελετηθούν οι περιπτώσεις όπου ο αριθμός των δειγμάτων είναι όπως πριν 50, 70 και 100 αλλά με γνώση της γεωλογίας της περιοχής και τα δείγματα θα ληφθούν σε συγκεκριμένες περιοχές με τον τρόπο που αναφέρθηκε παραπάνω. Π.χ. για 100 σημεία δειγματοληψίας, στον γεωλογικό σχηματισμό Νο 2 θα ληφθούν 20 δείγματα ομοιόμορφα κατανεμημένα σε αυτόν.

Στη συνέχεια ο αριθμός των δειγμάτων θα αυξηθεί σε 300, με την ίδια μέθοδο επιλογής σημείων (ανά κατηγορία πετρώματος), για να γίνει σύγκριση των αποτελεσμάτων με τις προηγούμενες περιπτώσεις και να φανεί κατά πόσο η αύξηση του αριθμού δειγμάτων βελτιώνει τα αποτελέσματα.

Ακόμα θα μελετηθεί η περίπτωση όπου τα σημεία δειγματοληψίας δεν θα είναι ομοιόμορφα κατανεμημένα στους γεωλογικούς σχηματισμούς. Στα σημεία όπου ο πρωτότυπος χάρτης δείχνει να αλλάζει ο γεωλογικός σχηματισμός, στα λεγόμενα κρίσιμα – οριακά σημεία, η τιμή της υδραυλικής αγωγιμότητας αλλάζει επίσης. Έτσι σε ορισμένα σημεία από 430 m/d αλλάζει σε 0.15 m/d σε απόσταση μόλις μερικών μέτρων.

Το πρόβλημα αυτό αντιμετωπίστηκε ελαττώνοντας τα σημεία δειγματοληψίας στα οριακά σημεία και αυξάνοντάς τα στο κέντρο των γεωλογικών σχηματισμών. Έτσι δίνεται η δυνατότητα να μελετηθεί η περιοχή με πιο αντικειμενικά κριτήρια.

Μία άλλη περίπτωση που θα μελετηθεί είναι αυτή όπου η τιμή της υδραυλικής αγωγιμότητας δεν θα θεωρηθεί ενιαία σε κάθε γεωλογικό σχηματισμό. Τα σημεία

Κεφάλαιο 2

δειγματοληψίας θα είναι ομοιόμορφα κατανεμημένα σε κάθε γεωλογικό σχηματισμό αλλά η τιμή της υδραυλικής αγωγιμότητας θα αλλάζει ανάλογα με τους γειτονικούς γεωλογικούς σχηματισμούς.

Από προηγούμενες μελέτες που έχουν γίνει στην περιοχή, για κάθε γεωλογικό σχηματισμό έχει βρεθεί ένα εύρος τιμών της υδραυλικής αγωγιμότητας απ' όπου υπολογίστηκε και η μέση τιμή της. Παρακάτω δίνεται ένας πίνακας όπου αναφέρεται η ελάχιστη και η μέγιστη τιμή της υδραυλικής αγωγιμότητας για κάθε μέση τιμή που θεωρήθηκε στην περιοχή.

Πίνακας 2.6 Εύρος τιμής υδραυλικής αγωγιμότητας για κάθε γεωλογικό σχηματισμό.

Μέση Τιμή (m/d)	Ελάχιστη τιμή (m/d)	Μέγιστη Τιμή (m/d)
0.15	0	0.5
0.6	0.5	3
5.2	3	7
8.64	7	9.5
12.96	9.5	15
172	150	200
430	220	430

Σε κεντρικά σημεία του κάθε σχηματισμού η τιμή της υδραυλικής αγωγιμότητας θεωρείται ίση με την μέση τιμή, στα οριακά σημεία όμως η τιμή αυτή προσαρμόζεται σύμφωνα με τους γειτονικούς σχηματισμούς. Π.χ. στο σχηματισμό Νο 8 σε κεντρικά σημεία η υδραυλική αγωγιμότητα θα θεωρηθεί ίση με την μέση τιμή (172.8m/d) ενώ στα ακραία θα αλλάζει, βόρεια σε μεγαλύτερες τιμές (έως 200m/d) και νότια σε μικρότερες τιμές (έως 150 m/d).

Τέλος θα μελετηθεί μία περίπτωση όπου οι σχηματισμοί θα χωριστούν σε τμήματα. Είναι σύνηθες φαινόμενο σε περιπτώσεις περιοχών με μεγάλες διακυμάνσεις των τιμών των εξεταζόμενων παραμέτρων η περιοχή μελέτης να διαχωρίζεται σε δύο ή και περισσότερα τμήματα. Στην προκειμένη περίπτωση ο χάρτης θα χωριστεί σε δύο τμήματα βάση των τιμών της υδραυλικής αγωγιμότητας και θα μελετηθεί το ένα από αυτά.

Το πρώτο τμήμα περιλαμβάνει τους σχηματισμούς Νο 2, 3, 4, 5 και 6 όπου είναι σχηματισμοί με μικρές τιμές της υδραυλικής αγωγιμότητας. Το δεύτερο τμήμα περιλαμβάνει τους σχηματισμούς Νο 1, 7, 8, 9 και 10 όπου είναι σχηματισμοί με

Κεφάλαιο 2

μεγάλες τιμές της υδραυλικής αγωγιμότητας. Οι σχηματισμοί 9 και 10 μπορεί να μην έχουν υψηλές τιμές υδραυλικής αγωγιμότητας είναι όμως γεωγραφικά πιο κοντά στους σχηματισμούς με υψηλές τιμές υδραυλικής αγωγιμότητας και επηρεάζονται άμεσα από αυτούς.

Το τμήμα που θα μελετηθεί είναι το πρώτο και αυτό επειδή όλοι οι σχηματισμοί που περιλαμβάνονται σε αυτό συνορεύουν και επιπλέον για να γίνει μια σύγκριση του τμήματος αυτού εξεταζόμενο μόνο του και συνολικά με όλους τους σχηματισμούς από τις προηγούμενες περιπτώσεις.

Συνολικά θα μελετηθούν δηλαδή 10 διαφορετικές περιπτώσεις και στο τέλος θα γίνει σύγκριση των αποτελεσμάτων ώστε να διαπιστωθεί ποιες περιπτώσεις δίνουν πιο αξιόπιστα αποτελέσματα.

2.4 Διερευνητική Στατιστική Ανάλυση

Η μεθοδολογία που ακολουθείται για να γίνει διερευνητικός στατιστικός έλεγχος του δείγματος πριν από την εφαρμογή του γεωστατιστικού μοντέλου αναφέρεται εκτενώς στο πρώτο κεφάλαιο (Παράγραφος 1.4).

Πρέπει να αναφερθεί πως στο πεδίο υπάρχει αραιή δειγματοληψία καθώς σε κάθε περίπτωση ο αριθμός των δειγμάτων δεν ξεπερνάει τα 300. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα η διερευνητική στατιστική ανάλυση να δείξει πως το δείγμα δεν είναι το ιδανικότερο κι έτσι θα υπάρξει αυξημένη αβεβαιότητα στα αποτελέσματα που προκύπτουν, γεγονός που θα αποφευγόταν σε περίπτωση πυκνής δειγματοληψίας.

Η πιο βασική παράμετρος της διερευνητικής στατιστικής ανάλυσης, αφορά την κατανομή του δείγματος. Ένας πρώτος τρόπος για να διαπιστωθεί αν το δείγμα ακολουθεί την κανονική κατανομή είναι η δημιουργία του διαγράμματος κανονικής κατανομής, το οποίο υλοποιείται από την εντολή «normplot» της Matlab®. Παρόμοιος έλεγχος, αλλά ποιοτικής μορφής, επιτυγχάνεται με την εντολή «hist» επίσης της Matlab®.

Για κάθε περίπτωση που εξετάστηκε, ο έλεγχος που πραγματοποιήθηκε έδειξε πως το δείγμα δεν ακολουθεί την κανονική κατανομή. Παρότι το δείγμα όμως δεν ακολουθεί την κανονική κατανομή, κατά την επεξεργασία των δεδομένων με την μέθοδο Kriging θα χρησιμοποιηθεί η μεθοδολογία της διασταυρωμένης

Κεφάλαιο 2

επαλήθευσης, η οποία χρησιμοποιείται συνήθως σε μικρά σύνολα δεδομένων. Σε αυτή την περίπτωση όλα τα σημεία του δείγματος αποτελούν το σύνολο εκπαίδευσης και χρησιμοποιούνται για τον υπολογισμό των παραμέτρων του γεωστατιστικού μοντέλου. Στην συνέχεια πραγματοποιείται επιβεβαίωση των εκτιμήσεων του γεωστατιστικού μοντέλου αφαιρώντας επαναληπτικά ένα σημείο από το δείγμα ενώ λαμβάνοντας υπόψη τα υπόλοιπα σημεία του δείγματος, πραγματοποιείται εκτίμηση σε αυτό. Με αυτόν τον τρόπο πραγματοποιείται μια σύγκριση μεταξύ της εκτιμώμενης και της πραγματικής τιμής του δείγματος (Παράγραφος 1.6.2). [3]

Αν και το δείγμα, σε κάθε περίπτωση, δεν ακολουθεί την κανονική κατανομή με την μέθοδο της διασταυρωμένης επαλήθευσης μπορεί να συνεχιστεί η διερευνητική στατιστική ανάλυση θεωρώντας το δείγμα στατιστικά ομοιογενές.

Ο έλεγχος ως προς την ανισοτροπία του δείγματος υπολογίζεται κατά τον προσδιορισμό του ημιβαριογράμματος μέσω του λογισμικού *surfer*. Συντελεστής ανισοτροπίας μικρότερος του 2, σύμφωνα με το λογισμικό *surfer* (*Surfer V.8.0.4*, 2002), σημαίνει πως το δείγμα μπορεί να θεωρηθεί ιστροπικό, τιμή μεταξύ 2 και 4 σημαίνει πως το δείγμα παρουσιάζει ελαφριά ανισοτροπία και συντελεστής μεγαλύτερος του 4 φανερώνει ιδιαίτερα ανισοτροπικό δείγμα.

Σε κάθε περίπτωση που εξετάστηκε, ο συντελεστής ανισοτροπίας που υπολογίστηκε δεν ήταν μεγαλύτερος του 2. Αυτό σημαίνει πως το δείγμα μπορεί να θεωρηθεί ιστροπικό.

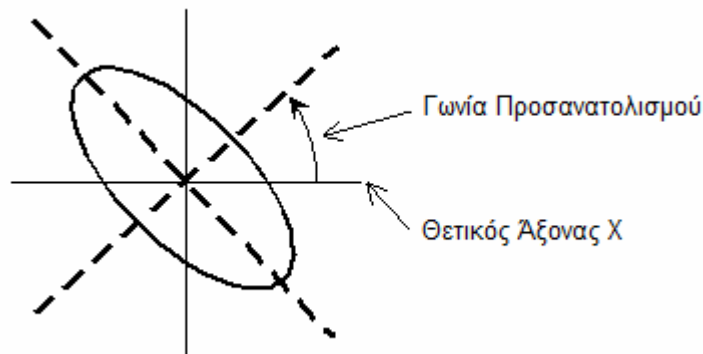
2.5 Προσδιορισμός πρότυπων χωρικής συνέχειας

Θεωρητικά το ημιβαριόγραμμα περιγράφει την εξάρτηση δύο σημείων στον χώρο, ενώ μαθηματικά καθορίζει την χωρική μεταβλητότητα των διακυμάνσεων του δείγματος. Η βασική αρχή είναι ότι δύο κοντινές παρατηρήσεις συμφωνούν σε μεγαλύτερο βαθμό σε σχέση με πιο μακρινές. Αν όμως τα χαρακτηριστικά της συσχέτισης μεταβάλλονται σε διαφορετικές κατευθύνσεις στο χώρο, είναι δηλαδή ανισοτροπικά, το ημιβαριόγραμμα είναι συνάρτηση της κατεύθυνσης.

Η ανισοτροπία παριστάνεται με την μορφή έλλειψης η οποία καθορίζεται από τα μήκη των δύο ορθογωνίων αξόνων της καθώς και από την γωνία κατεύθυνσης (Σχήμα 2.17). Ο έλεγχος της ανισοτροπίας περιλαμβάνει δύο παραμέτρους, τον Εφαρμογή της Γεωστατιστικής Μεθόδου *Kriging* για τον Προσδιορισμό της Υδραυλικής Αγωγιμότητας του Υπόγειου Υδροφορέα στην Περιοχή Χερσονήσου του Ηρακλείου Κρήτης

Κεφάλαιο 2

λόγο ανισοτροπίας (ratio) και την γωνία προσανατολισμού (angle), οι οποίοι προσδιορίζουν το μέγεθος της ανισοτροπίας και την διεύθυνση της.



Σχήμα 2.17 Παράδειγμα απεικόνισης ανισοτροπίας (Surfer V.8.0.4, 2002)

Ο λόγος ανισοτροπίας δίνεται από τον λόγο του μεγαλύτερου μήκους άξονα προς τον μικρότερο ενώ η γωνία προσανατολισμού σχηματίζεται μεταξύ του θετικού άξονα (x) και του αντίστοιχου της έλλειψης και δείχνει την κατεύθυνση της ανισοτροπίας.

Το δείγμα σε κάθε περίπτωση, όπως αναφέρθηκε στην προηγούμενη παράγραφο, θεωρείται στατιστικά ισοτροπικό. Οπότε ο υπολογισμός του ημιβαριογράμματος μπορεί να συνεχιστεί κανονικά χωρίς καμία μετατροπή των δεδομένων. Ο υπολογισμός του ημιβαριογράμματος του δείγματος υδραυλικής αγωγιμότητας πραγματοποιήθηκε χρησιμοποιώντας το λογισμικό πακέτο «Surfer V.8.0.4, 2002».

Αρχικά πρέπει να υπολογιστεί ο αριθμός των τάξεων του πειραματικού ημιβαριογράμματος (Παράγραφος 1.5.3). Ο αριθμός των τάξεων του πειραματικού ημιβαριογράμματος λαμβάνεται αυτόματα από το πρόγραμμα surfer ίσος με εικοσιπέντε.

Σε κάθε μία κλάση από τις εικοσιπέντε υπολογίζεται ο αριθμός των ζευγών του δείγματος $n(r_k)$. Τα ζεύγη αυτά των σημείων του δείγματος περιλαμβάνονται μέσα σε μία περιοχή εκτίμησης – γειτονιά εκτίμησης εντός μιας συγκεκριμένης απόστασης r_k όπου είναι διαφορετική για κάθε κλάση. Σε κάθε κλάση η απόσταση της γειτονιάς εκτίμησης αυξάνεται σταδιακά αλλά όχι ανάλογα. Αν δηλαδή η πρώτη κλάση περιλαμβάνει σημεία εντός δύο χιλιομέτρων, η δεύτερη δεν είναι απαραίτητο να περιλαμβάνει σημεία εντός τεσσάρων χιλιομέτρων.

Κεφάλαιο 2

Στην συνέχεια υπολογίζεται μια τιμή του πειραματικού ημιβαριογράμματος $\hat{\gamma}(r_k)$ για κάθε r_k ώστε να προκύψει το πειραματικό ημιβαριόγραμμα του δείγματος.

Το επόμενο βήμα είναι η προσαρμογή του σε διάφορους τύπους θεωρητικών μοντέλων ημιβαριογραμμάτων, ώστε να επιλεγεί το βέλτιστο μοντέλο.

Το πειραματικό ημιβαριόγραμμα προσαρμόζεται σε διαφορετικούς τύπους θεωρητικών μοντέλων ημιβαριογράμματος καθώς και σε συνδυασμούς τους. Τα θεωρητικά μοντέλα που μπορούν να εξεταστούν από το λογισμικό του «Surfer V.8.0.4, 2002» είναι: Exponential (Εκθετικό), Gaussian (Γκαουσιανό), Linear (Γραμμικό), Logarithmic (Λογαριθμικό), Nugget Effect (Φαινόμενο Πυρήνα), Power (Δυναμονομικό), Quadratic (Τετραγωνικό), Rational Quadratic (Ορθολογικό Τετραγωνικό), Spherical (Σφαιρικό), Wave (Hole Effect) (Κυματικό), Cubic (Κυβικό) και Pentaspherical (Πεντασφαιρικό).

Για τον προσδιορισμό του βέλτιστου πρότυπου ημιβαριογράμματος χρησιμοποιείται η μεθοδολογία της διασταυρωμένης επαλήθευσης. Από την προσαρμογή του πειραματικού στο θεωρητικό μοντέλο ημιβαριογράμματος υπολογίζονται οι παράμετροι του γεωστατιστικού μοντέλου (Παράγραφος 1.6.2), οι οποίοι στην συνέχεια χρησιμοποιούνται για την εκτίμηση με την μέθοδο Kriging χρησιμοποιώντας την μεθοδολογία της διασταυρωμένης επαλήθευσης.

Οι βέλτιστες τιμές των παραμέτρων υπολογίζονται ελαχιστοποιώντας το τετράγωνο της διαφοράς μεταξύ πειραματικού και θεωρητικού μοντέλου ημιβαριογράμματος. Το θεωρητικό μοντέλο ημιβαριογράμματος του οποίου οι παράμετροι δίνουν το μικρότερο σφάλμα εκτίμησης αποτελεί το βέλτιστο πρότυπο. [3]

2.6 Εφαρμογή της μεθόδου Κανονικού Kriging (OK)

Η μέθοδος kriging που επιλέχθηκε να χρησιμοποιηθεί για την εκτίμηση των δεδομένων είναι η μέθοδος του Κανονικού Kriging –OK- επειδή η μέση τιμή του πεδίου θεωρείται σταθερή στη γειτονιά του σημείου εκτίμησης, ενώ η τιμή της μεταβάλλεται από γειτονιά σε γειτονιά (Παράγραφος 1.6.1).

Οι παράμετροι που λαμβάνονται υπόψη από τα ημιβαριογράμματα κατά την επεξεργασία των δεδομένων με την μέθοδο Kriging είναι το φαινόμενο πυρήνα, το

Κεφάλαιο 2

μήκος συσχέτισης και το άνω φράγμα ή «όριο» (οροφή) (Παράγραφος 1.5.6) καθώς επίσης και ο λόγος και κλίση ανισοτροπίας.

Οι παράμετροι που θα δείχνουν αν ο χάρτης είναι ικανοποιητικός είναι ο συντελεστής συσχέτισης και το μέσο σχετικό απόλυτο σφάλμα, που αναλύθηκαν στο πρώτο κεφάλαιο (Παράγραφος 1.6.3). Αυτά τα δεδομένα θα συγκριθούν στο τέλος και θα αναλυθούν στο κεφάλαιο 3.

Πρέπει να σημειωθεί πως σε όλες τις περιπτώσεις παρατηρήθηκαν ορισμένες αρνητικές τιμές. Αυτό οφείλεται στο φαινόμενο θωράκισης. Το φαινόμενο αυτό δημιουργείται λόγο των μεγάλων αποκλίσεων στις τιμές της υδραυλικής αγωγιμότητας και έτσι το πρόγραμμα υπολογίζει ορισμένες αρνητικές τιμές σε ορισμένα σημεία του χάρτη. Τα σημεία αυτά βρίσκονται εκεί όπου υπάρχουν μικρές τιμές της υδραυλικής αγωγιμότητας στο γεωλογικό σχηματισμό που μελετάται ενώ στους γειτονικούς γεωλογικούς σχηματισμούς η τιμή της υδραυλικής αγωγιμότητας είναι πολύ μεγαλύτερη. Η εκτίμηση των τιμών της υδραυλικής αγωγιμότητας γίνεται με τη μέθοδο Kriging. Η μέθοδος αυτή υπολογίζει ορισμένα βάρη, αν ένα σημείο μέτρησης βρίσκεται πλησιέστερα στο σημείο εκτίμησης από τα υπόλοιπα σημεία της γειτονιάς, ο αντίστοιχος συντελεστής του υπερβαίνει σημαντικά τους υπόλοιπους συντελεστές οι οποίοι μπορεί να πάρουν ακόμα και αρνητικές τιμές. Έτσι στις περιοχές με μικρές τιμές της υδραυλικής αγωγιμότητας όπως 0.15 και 0.6 m/d ένας συντελεστής μπορεί να πάρει πολύ υψηλή τιμή με αποτέλεσμα άλλα σημεία της γειτονιάς εκτίμησης που είναι σε γειτονικούς σχηματισμούς με τιμές 430 m/d να παίρνουν αρνητικό συντελεστή και η εκτίμηση να είναι αρνητική (Παράγραφος 1.6.1).

Το φαινόμενο αυτό δεν παρουσιάζεται καθόλου στην τελευταία περίπτωση που εξετάστηκε όπου η περιοχή μελέτης χωρίστηκε σε δύο τμήματα.

2.7 Χρήση Του Λογισμικού Πακέτου «Surfer V.8.0.4, 2002»

Το λογισμικό πακέτο «Surfer V.8.0.4, 2002» είναι ένα χρήσιμο εργαλείο για την γεωστατιστική ανάλυση, όπου είναι ευρέως αποδεκτό από τους επιστήμονες που ασχολούνται με αυτή την επιστήμη. Με το πακέτο αυτό ο χρήστης έχει τη δυνατότητα να ψηφιοποιήσει έναν χάρτη και να τον επεξεργαστεί με

Κεφάλαιο 2

γεωστατιστικές μεθόδους δημιουργώντας στο τέλος έναν νέο χάρτη σε πλέγμα της επιλογής του σε δύο ή τρεις διαστάσεις.

Αρχικά εισάγεται σε ψηφιακή μορφή ο χάρτης της περιοχής ενδιαφέροντος και επιλέγονται τα σημεία όπου υπάρχουν οι γεωτρήσεις. Οι συντεταγμένες των σημείων x και y αποθηκεύονται σε ένα αρχείο excel στις δύο πρώτες στήλες και εν συνεχεία συμπληρώνεται η τρίτη στήλη με την παράμετρο που εξετάζεται, στην προκειμένη περίπτωση η υδραυλική αγωγιμότητα.

Με χρήση του αρχείου αυτού δημιουργείται το πειραματικό ημιβαριόγραμμα. Επιλέγοντας ένα από τα θεωρητικά μοντέλα που δίνονται στο λογισμικό γίνεται η προσαρμογή αυτού στο πειραματικό και υπολογίζονται αυτόματα οι παράμετροι που χρειάζονται (μήκος συσχέτισης, λόγος και κλίση ανισοτροπίας, φαινόμενο πυρήνα και άλλοι παράμετροι ανάλογα με το θεωρητικό μοντέλο).

Έπειτα δημιουργείται ένας κανάβος, με δυνατότητα επιλογής των αριθμών των κάθετων και οριζόντιων γραμμών. Ταυτόχρονα επιλέγεται η μέθοδος επεξεργασίας των δεδομένων από μία λίστα με τις δυνατές μεθόδους (Nearest Neighbor, Natural Neighbor, Inverse Distance to a Power, Kriging κ.α.), όπου στην προκειμένη περίπτωση επιλέχθηκε η μέθοδος Kriging. Ακόμα, κατά τη δημιουργία του κανάβου, λαμβάνονται υπόψη οι παράμετροι που υπολογίστηκαν από την προσαρμογή του θεωρητικού ημιβαριογράμματος στο πειραματικό. Τέλος, πριν την δημιουργία του κανάβου, γίνεται χρήση της διασταυρωμένης επαλήθευσης για έλεγχο των παραμέτρων υπολογισμού. Παράλληλα με την δημιουργία του κανάβου προστίθεται στο αρχείο excel η τιμή της υδραυλικής αγωγιμότητας όπως υπολογίστηκε από την μέθοδο της διασταυρωμένης επαλήθευσης.

Τέλος, έχοντας τον κανάβο δημιουργείται ο τελικός χάρτης της περιοχής με τιμές της υδραυλικής αγωγιμότητας όπως υπολογίστηκε από το πρόγραμμα. Ακόμα δίνεται η δυνατότητα δημιουργίας διάφορων ακόμα χαρτών όπως σχετικού σφάλματος, χάρτης τάσεων, τρισδιάστατοι χάρτες κ.α.

3. Αποτελέσματα – Συμπεράσματα

Σε κάθε περίπτωση που αναφέρθηκε στην παράγραφο 2.3 κατασκευάζεται το πειραματικό ημιβαριόγραμμα και στη συνέχεια δοκιμάζονται όλα τα διαθέσιμα θεωρητικά ημιβαριογράμματα που υπάρχουν στο λογισμικό πακέτο «Surfer V.8.0.4, 2002» και σε συνδυασμό μεταξύ τους και επιλέγεται αυτό που ταιριάζει καλύτερα γραφικά. Τα ημιβαριογράμματα που επιλέχθηκαν για κάθε περίπτωση παρουσιάζονται στην συνέχεια. Με μαύρη γραμμή εμφανίζεται το πειραματικό ημιβαριόγραμμα και με μπλε το θεωρητικό. Ο αριθμός που φαίνεται σε κάθε σημείο του πειραματικού ημιβαριογράμματος αντιστοιχεί στον αριθμό ζευγών κάθε κλάσης που χρησιμοποιήθηκαν ώστε να υπολογιστεί η τιμή του πειραματικού ημιβαριογράμματος.

Η σωστή παρατήρηση του πειραματικού ημιβαριογράμματος και η γραφική προσαρμογή του θεωρητικού ημιβαριογράμματος στο πειραματικό μπορούν να προιδεάσουν για την ποιότητα και αξιοπιστία των τελικών αποτελεσμάτων αν και αυτό δεν είναι πάντα σίγουρο.

Στη συνέχεια, για κάθε περίπτωση κατασκευάζεται ένας χάρτης σχετικού απόλυτου σφάλματος όπου φαίνονται αριθμημένες οι θέσεις όπου επιλέχθηκαν για κάθε δείγμα. Κάθε σημείο έχει χρωματιστεί ανάλογα με το ποσοστό σχετικού απόλυτου σφάλματος όπως υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\varepsilon = \left| \frac{X_{\lambda}^*(s_v) - X_{\lambda}(s_v)}{X_{\lambda}(s_v)} \right|$$

Όπου, $X_{\lambda}^*(s_v)$ η εκτιμώμενη τιμή και $X_{\lambda}(s_v)$ η πραγματική τιμή.

Το ποσοστό σχετικού απόλυτου σφάλματος έχει χωριστεί σε τέσσερεις κλάσεις: 0-10%, 10-40%, 40-100% και >100%. Σχετικό απόλυτο σφάλμα μικρότερο του 40% θεωρείται ικανοποιητικό ενώ μικρότερο του 10% θεωρείται πολύ καλό. Σχετικό απόλυτο σφάλμα μεγαλύτερο του 40% δεν θεωρείται ικανοποιητικό ενώ μεγαλύτερο του 100% θεωρείται μη αποδεκτό.

Ακόμα το λογισμικό surfer έχει τη δυνατότητα υπολογισμού του ποσοστού των σημείων που εμφανίζονται σε κάθε κλάση. Είναι δυνατό π.χ. να υπολογιστεί το ποσοστό των σημείων που έχουν σχετικό απόλυτο σφάλμα μικρότερο του 40%.

Έτσι γίνεται γνωστό σε κάθε χάρτη ότι το x% των σημείων υπολογίστηκε με Εφαρμογή της Γεωστατιστικής Μεθόδου Kriging για τον Προσδιορισμό της Υδραυλικής Αγωγιμότητας του Υπόγειου Υδροφορέα στην Περιοχή Χερσονήσου του Ηρακλείου Κρήτης

Κεφάλαιο 3

σφάλμα μικρότερο π.χ. του 40%, δεδομένο που μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως δείκτης για την αξιοπιστία των αποτελεσμάτων. Τα αποτελέσματα αυτά δεν παρουσιάζονται σε κάθε περίπτωση αλλά παρουσιάζονται συγκεντρωτικά στην παράγραφο 3.11 όπου συγκρίνονται τα αποτελέσματα.

Τέλος υπολογίζεται ο γραμμικός συντελεστής συσχέτισης από την εξίσωση:

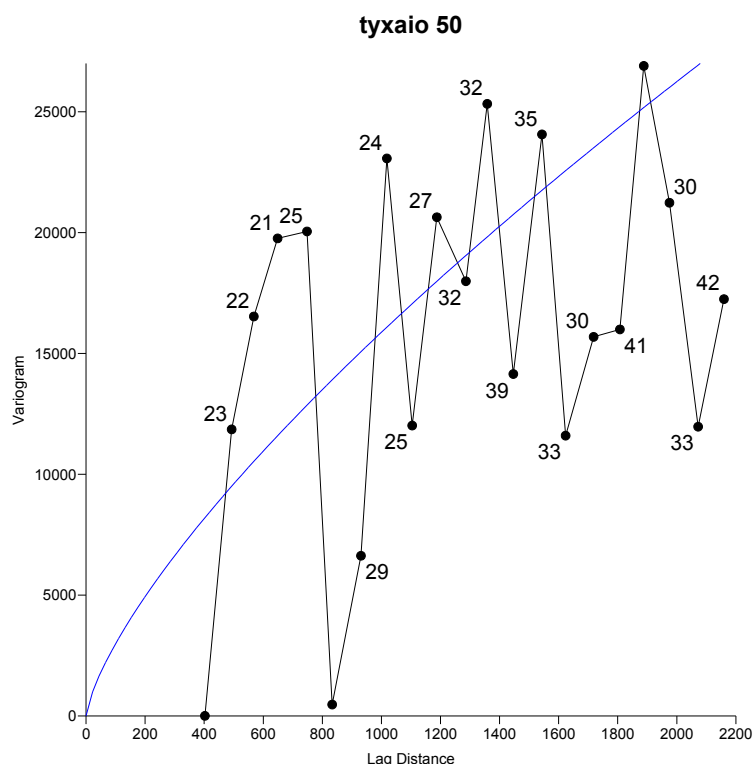
$$R^2 = \frac{\sum_{v=1}^N [X_{\lambda}(s_v) - m_X][X_{\lambda}^*(s_v) - m_X]}{\sqrt{\sum_{v=1}^N [X_{\lambda}(s_v) - m_X]^2} \sqrt{\sum_{v=1}^N [X_{\lambda}^*(s_v) - m_X]^2}}$$

Όπου N είναι ο αριθμός των σημείων του συνόλου επιβεβαίωσης, $X_{\lambda}^*(s_v)$ είναι οι εκτιμώμενες τιμές και $X_{\lambda}(s_v)$ είναι οι πραγματικές τιμές και m_X η μέση τιμή του πεδίου.

Η τιμή που πρέπει να έχει ο συντελεστής γραμμικής συσχέτισης για να θεωρηθούν τα δεδομένα συσχετισμένα με τις εκτιμήσεις πρέπει να είναι μεγαλύτερη του 0.8.

3.1 Περίπτωση 1^η – 50 δείγματα με τυχαία κατανομή

Το ημιβαριόγραμμα που προκύπτει σε αυτήν την περίπτωση είναι το ακόλουθο:



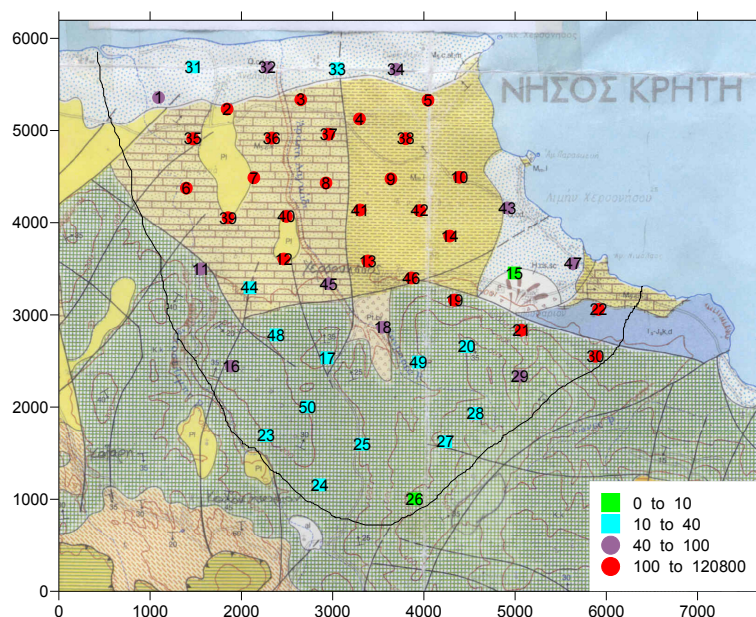
Σχήμα 3.18 Ημιβαριόγραμμα για 50 δείγματα με τυχαία κατανομή

Στο σχήμα 3.18 το πειραματικό ημιβαριόγραμμα που προκύπτει στην προκειμένη περίπτωση δεν μπορεί να θεωρηθεί αξιόπιστο αφού στις περισσότερες κλάσεις ο αριθμός των ζευγών δεν ξεπερνάει τα 30. Η ομαλότητα του ημιβαριογράμματος δεν είναι καλή αφού παρατηρείται τάση μεγάλου εύρους στα δεδομένα, δηλαδή η απόσταση της τιμής του ημιβαριογράμματος σε γειτονικές κλάσεις είναι μεγάλη και το ημιβαριόγραμμα έχει πριονωτό σχήμα.

Το θεωρητικό ημιβαριόγραμμα που προσαρμόστηκε σε αυτήν την περίπτωση είναι το δυναμονομικό χωρίς όμως να μπορεί να αποκλειστεί κάποιο άλλο μοντέλο, αφού κανένα δεν μπορεί να έχει καλή προσαρμογή.

Κεφάλαιο 3

Ο χάρτης σχετικού απόλυτου σφάλματος για αυτήν την περίπτωση είναι ο ακόλουθος:



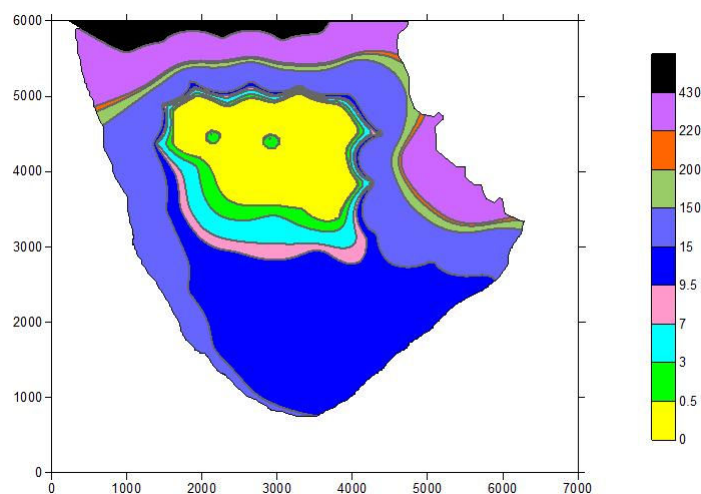
Σχήμα 3.19 Χάρτης σχετικού απόλυτου σφάλματος 50 δειγμάτων με τυχαία κατανομή

Το ποσοστό των σημείων με σχετικό απόλυτο σφάλμα μεγαλύτερο του 40% είναι 70% γεγονός που καθιστά αυτήν την περίπτωση αναξιόπιστη.

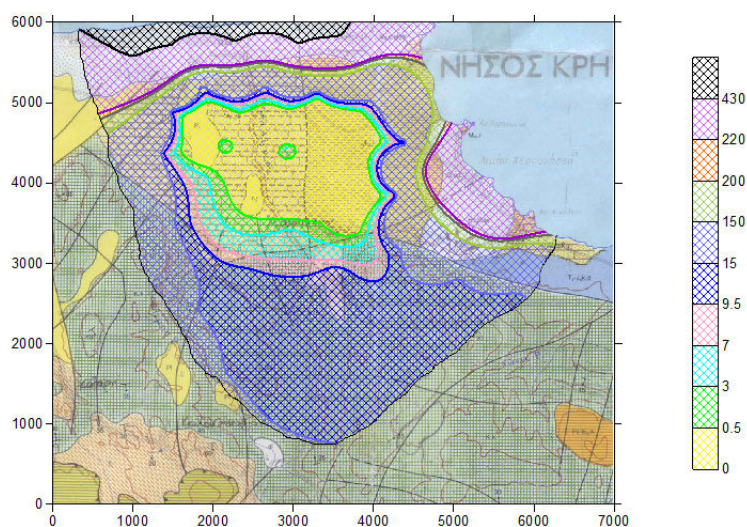
Ο συντελεστής γραμμικής συσχέτισης είναι 0.7119 δηλαδή μικρότερος του 0.8 άλλος ένας συντελεστής που καθιστά αυτή την περίπτωση αναξιόπιστη

Κεφάλαιο 3

Ο χάρτης της υδραυλικής αγωγιμότητας της περιοχής που προκύπτει είναι ο ακόλουθος:



Σχήμα 3.20 Χάρτης υδραυλικής αγωγιμότητας για 50 δείγματα με τυχαία κατανομή



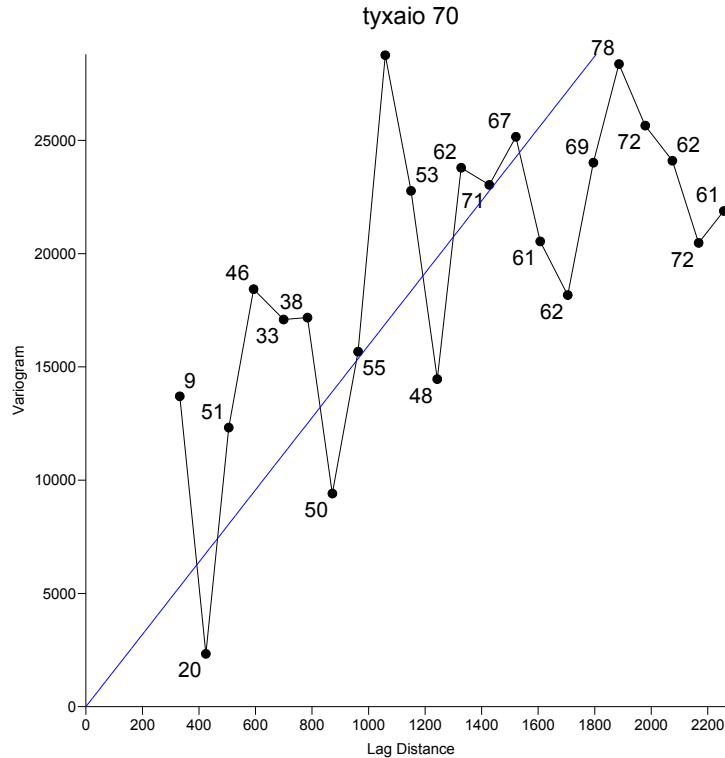
Σχήμα 3.21 Χάρτης υδραυλικής αγωγιμότητας για 50 δείγματα με τυχαία κατανομή σε σχέση με τον γεωλογικό χάρτη

Όπως φαίνεται και στους δύο παραπάνω χάρτες και ήταν και αναμενόμενο η εκτίμηση της περιοχής είναι πλήρως αναξιόπιστη. Αυτό είναι λογικό αφού ο αριθμός των δειγμάτων και ο τρόπος δειγματοληψίας τους είναι ο πιο απλός και κατά συνέπεια ο χειρότερος.

Εφαρμογή της Γεωστατιστικής Μεθόδου Kriging για τον Προσδιορισμό της Υδραυλικής Αγωγιμότητας του Υπόγειου Υδροφορέα στην Περιοχή Χερσονήσου του Ηρακλείου Κρήτης

3.2 Περίπτωση 2^η – 70 δείγματα με τυχαία κατανομή

Το ημιβαριόγραμμα που προκύπτει σε αυτήν την περίπτωση είναι το ακόλουθο:



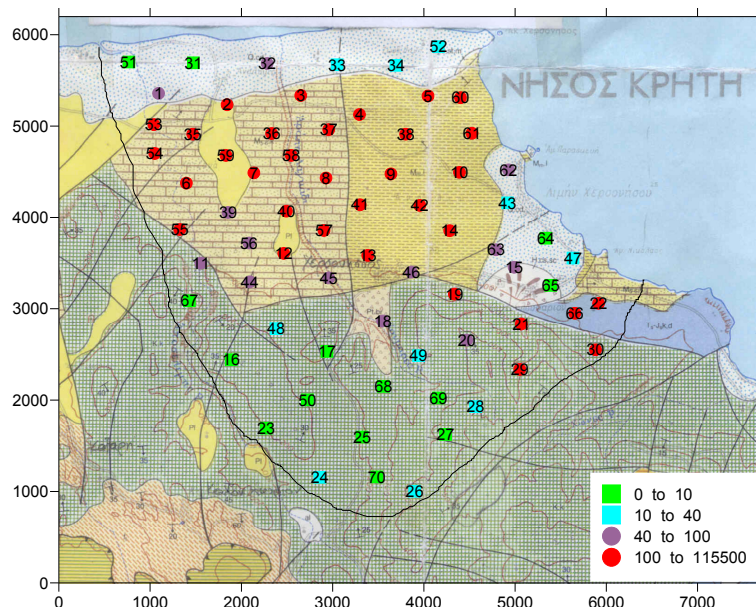
Σχήμα 3.22 Ημιβαριόγραμμα για 70 δείγματα με τυχαία κατανομή

Το πειραματικό ημιβαριόγραμμα του σχήματος 3.22 που προκύπτει στην προκειμένη περίπτωση έχει ορισμένα χαρακτηριστικά που το καθιστούν καλύτερο από αυτό της πρώτης περίπτωσης αλλά διατηρεί τα αρνητικά χαρακτηριστικά της πρώτης περίπτωσης που το καθιστούν ακατάλληλο για αξιόπιστη εκτίμηση. Με εξαίρεση τις δύο πρώτες κλάσεις όλες οι υπόλοιπες έχουν αριθμό ζευγών μεγαλύτερο του 30. Παρατηρείται φαινόμενο πυρήνα και διατηρείται το πριονωτό σχήμα παράμετροι, αρνητικοί για την εκτίμηση. Το ημιβαριόγραμμα δεν δείχνει να έχει κάποιο άνω φράγμα επομένως και κάποιο μήκος συσχέτισης που να σταθεροποιείται αυτό και η μορφή του στην αρχή είναι ακανόνιστη. Παρόλα αυτά αρχίζει να διακρίνεται έστω και αχνά μια υποτυπώδης δομή σε αυτό.

Κεφάλαιο 3

Το θεωρητικό μοντέλο που χρησιμοποιήθηκε είναι το γραμμικό χωρίς πάλι να αποκλείεται η χρήση κάποιου άλλου (π.χ. δυναμονομικό) αφού πολλά μοντέλα προσαρμόζονται στο ασαφές σχήμα του.

Ο χάρτης σχετικού απόλυτου σφάλματος για αυτήν την περίπτωση είναι ο ακόλουθος:



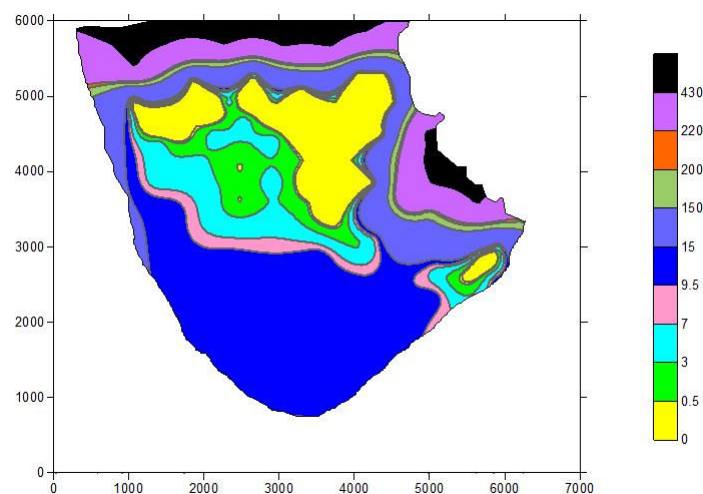
Σχήμα 3.23 Χάρτης σχετικού απόλυτου σφάλματος 70 δειγμάτων με τυχαία κατανομή

Το ποσοστό των σημείων με σχετικό απόλυτο σφάλμα μεγαλύτερο του 40% είναι 65.7% γεγονός που καθιστά και αυτήν την περίπτωση αναξιόπιστη.

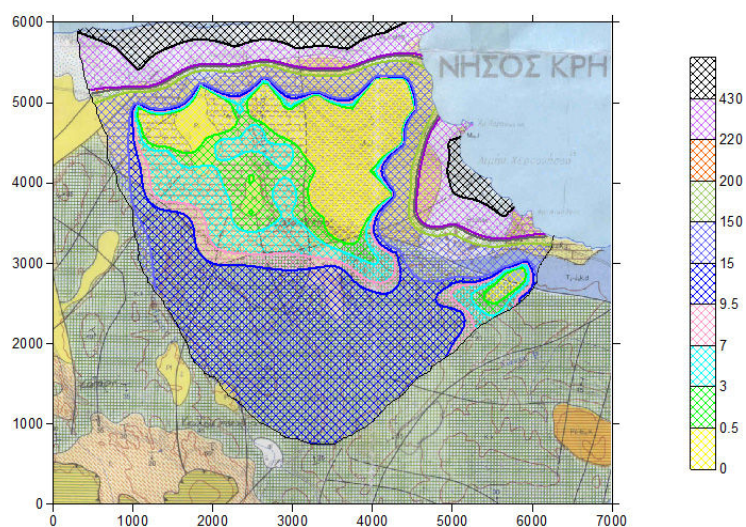
Ο συντελεστής γραμμικής συσχέτισης είναι 0.7428, ελαφρώς καλύτερος από την πρώτη περίπτωση αλλά και πάλι μικρότερος του 0.8 άλλος ένας συντελεστής που καθιστά αυτή την περίπτωση αναξιόπιστη.

Κεφάλαιο 3

Ο χάρτης της υδραυλικής αγωγιμότητας της περιοχής που προκύπτει είναι ο ακόλουθος:



Σχήμα 3.24 Χάρτης υδραυλικής αγωγιμότητας για 70 δείγματα με τυχαία κατανομή



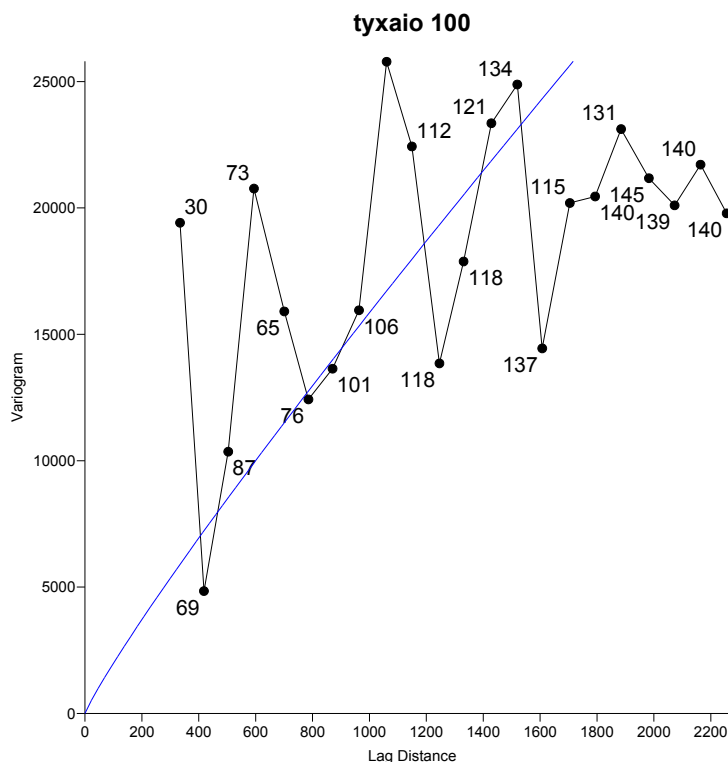
Σχήμα 3.25 Χάρτης υδραυλικής αγωγιμότητας για 70 δείγματα με τυχαία κατανομή σε σχέση με τον γεωλογικό χάρτη

Όπως παρατηρείται και στους δύο παραπάνω χάρτες και ήταν και αναμενόμενο η εκτίμηση της περιοχής είναι αναξιόπιστη. Αυτό είναι λογικό αφού ο αριθμός των δειγμάτων δεν είναι μεγάλος και ο τρόπος δειγματοληψίας τους είναι με τυχαία κατανομή.

Εφαρμογή της Γεωστατιστικής Μεθόδου Kriging για τον Προσδιορισμό της Υδραυλικής Αγωγιμότητας του Υπόγειου Υδροφορέα στην Περιοχή Χερσονήσου του Ηρακλείου Κρήτης

3.3 Περίπτωση 3^η – 100 δείγματα με τυχαία δειγματοληψία

Το ημιβαριόγραμμα που προκύπτει σε αυτήν την περίπτωση είναι το ακόλουθο:



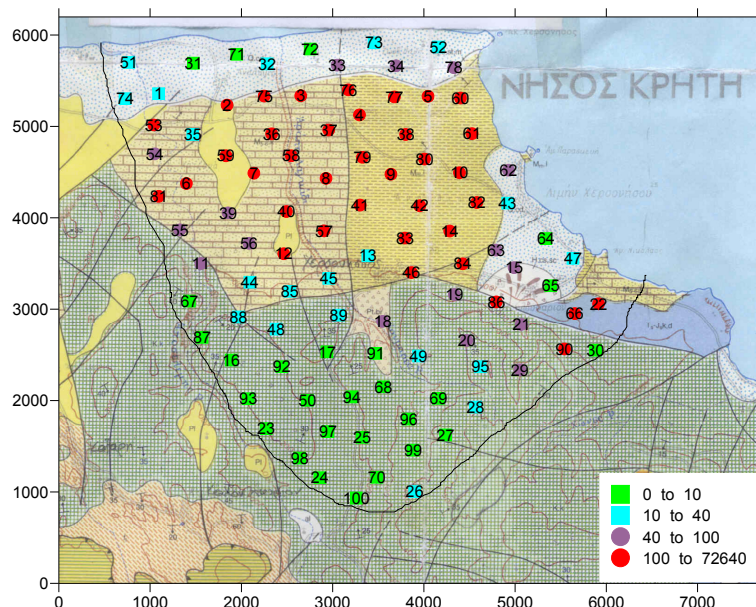
Σχήμα 3.26 Ημιβαριόγραμμα για 100 δείγματα με τυχαία κατανομή

Το πειραματικό ημιβαριόγραμμα του σχήματος 3.27 που προκύπτει στην προκειμένη περίπτωση δείχνει για πρώτη φορά να έχει μια συγκεκριμένη δομή. Διακρίνεται, αν και όχι ξεκάθαρα το άνω φράγμα ενώ όλες οι κλάσεις έχουν αριθμό ζευγών μεγαλύτερο του 30. Αν και ο αριθμός των ζευγών αυξάνει σταδιακά όσο αυξάνονται οι κλάσεις η παρουσία τάσεων μεγάλου εύρους στα δεδομένα παραμένει. Το ημιβαριόγραμμα έχει έντονο πριονωτό σχήμα ενώ η μορφή του παραμένει ασταθής.

Το θεωρητικό μοντέλο που χρησιμοποιήθηκε είναι το δυναμονομικό χωρίς να προσαρμόζεται απόλυτα στη μορφή του πειραματικού αλλά αποκλείει σίγουρα το γραμμικό μοντέλο που μέχρι τώρα συγχέονταν μεταξύ τους.

Κεφάλαιο 3

Ο χάρτης σχετικού απόλυτου σφάλματος για αυτήν την περίπτωση είναι ο ακόλουθος:



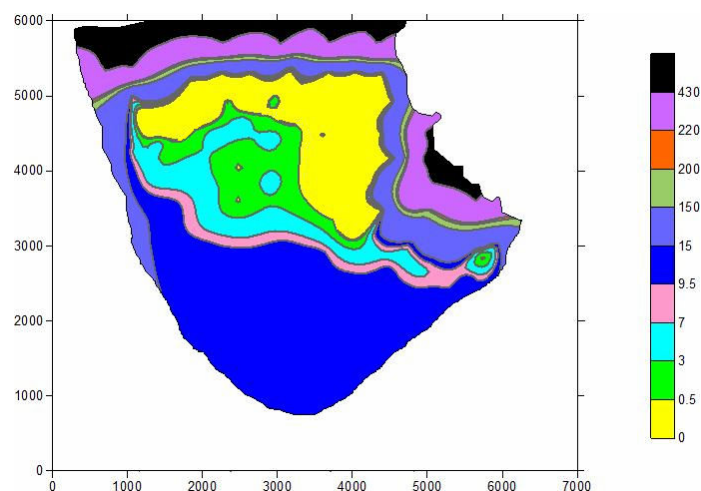
Σχήμα 3.27 Χάρτης σχετικού απόλυτου σφάλματος 100 δειγμάτων με τυχαία κατανομή

Το ποσοστό των σημείων με σχετικό απόλυτο σφάλμα μεγαλύτερο του 40% είναι 53% γεγονός που καθιστά και αυτήν την περίπτωση αναξιόπιστη αφού περισσότερα από τα μισά σημεία δειγματοληψίας δεν έχουν ικανοποιητική εκτίμηση. Φαίνεται δηλαδή πως με τυχαία κατανομή 100 δείγματα δεν είναι αρκετά.

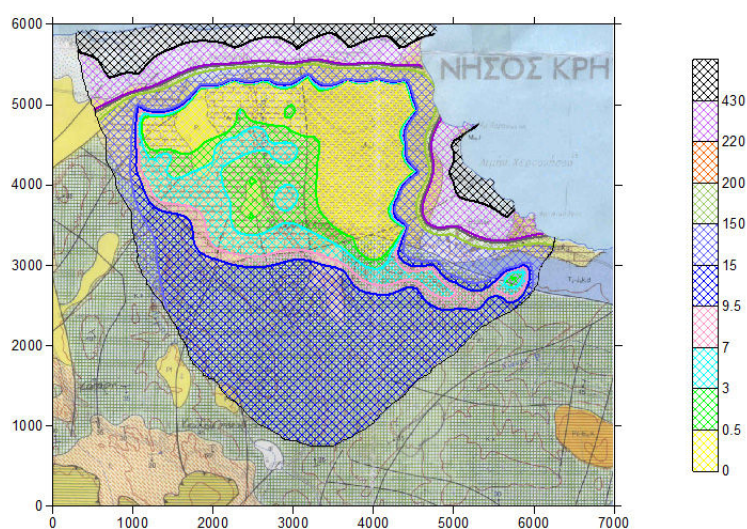
Ο συντελεστής γραμμικής συσχέτισης είναι 0.8764, αισθητά καλύτερος από τις προηγούμενες περίπτωση και είναι και μεγαλύτερος του 0.8 γεγονός ενθαρρυντικό. Ο συντελεστής όμως αυτός από μόνος του δεν μπορεί να μεταφραστεί σε αξιοπιστία αποτελεσμάτων.

Κεφάλαιο 3

Ο χάρτης της υδραυλικής αγωγιμότητας της περιοχής που προκύπτει είναι ο ακόλουθος:



Σχήμα 3.28 Χάρτης υδραυλικής αγωγιμότητας για 100 δείγματα με τυχαία κατανομή



Σχήμα 3.29 Χάρτης υδραυλικής αγωγιμότητας για 100 δείγματα με τυχαία κατανομή σε σχέση με τον γεωλογικό χάρτη

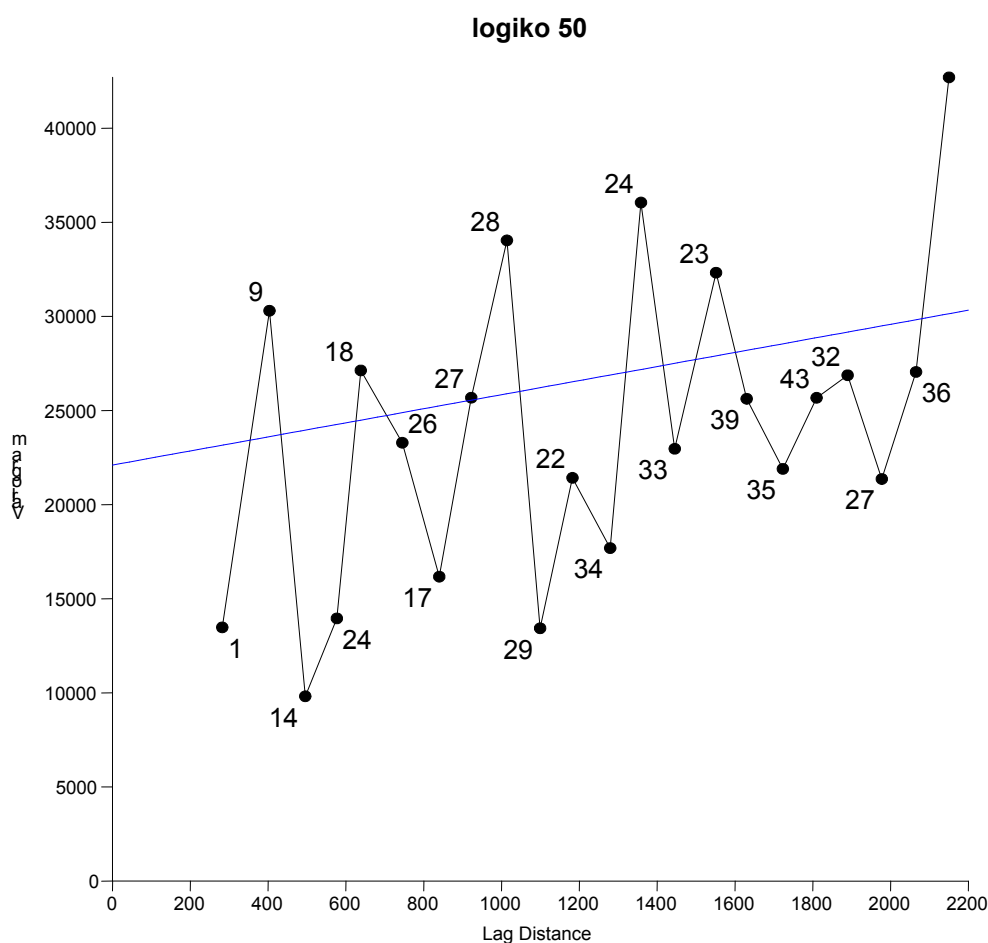
Όπως φαίνεται στους δύο παραπάνω χάρτες η εκτίμηση της περιοχής είναι αναξιόπιστη. Αν και υπάρχουν 100 δείγματα, αριθμός αρκετά μεγάλος, δεν αντιπροσωπεύονται όλοι οι γεωλογικοί σχηματισμοί. Αυτό είναι λογικό αφού ο

Κεφάλαιο 3

τρόπος δειγματοληψίας τους είναι με τυχαία κατανομή. Έτσι ο διαχωρισμός των σχηματισμών δεν είναι αντιπροσωπευτικός.

3.4 Περίπτωση 4^η – 50 δείγματα ανά κατηγορία πετρώματος

Το ημιβαριόγραμμα που προκύπτει σε αυτήν την περίπτωση είναι το ακόλουθο:



Σχήμα 3.30 Ημιβαριόγραμμα για 50 δείγματα ανά κατηγορία πετρώματος

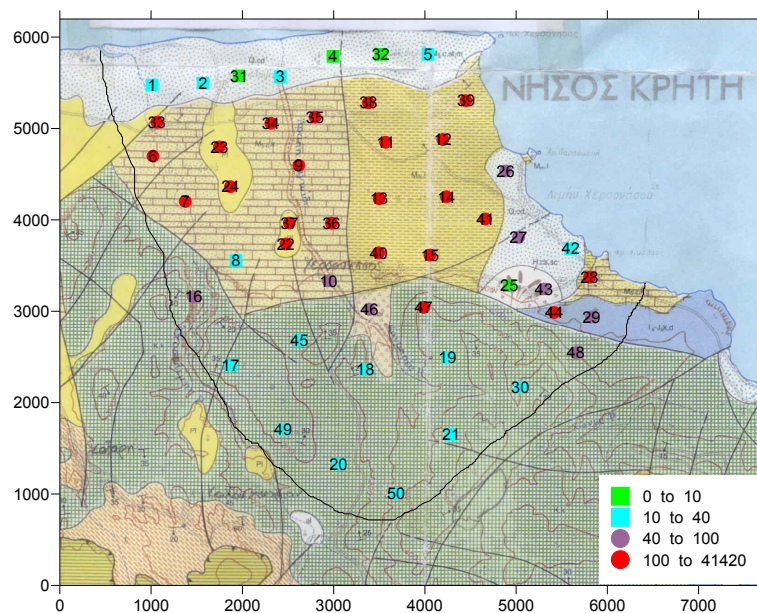
Στο σχήμα 3.30 το πειραματικό ημιβαριόγραμμα που προκύπτει στην προκειμένη περίπτωση δεν μπορεί να θεωρηθεί αξιόπιστο αφού στις περισσότερες κλάσεις ο αριθμός των ζευγών δεν ξεπερνάει τα 30. Η ομαλότητα του ημιβαριογράμματος δεν είναι καλή αφού παρατηρείται τάση μεγάλου εύρους στα δεδομένα, δηλαδή η απόσταση της τιμής του ημιβαριογράμματος σε γειτονικές κλάσεις είναι μεγάλη και

Κεφάλαιο 3

το ημιβαριόγραμμα έχει πριονωτό σχήμα. Παρατηρείται το φαινόμενο πυρήνα και δεν διακρίνεται καμία απολύτως δομή. Το συγκεκριμένο ημιβαριόγραμμα είναι από τα δυσμενέστερα που μπορεί να εμφανιστούν.

Το θεωρητικό ημιβαριόγραμμα που προσαρμόστηκε σε αυτήν την περίπτωση είναι το γραμμικό με φαινόμενο πυρήνα χωρίς όμως να μπορεί να αποκλειστεί κάποιο άλλο μοντέλο, αφού κανένα δεν μπορεί να έχει καλή προσαρμογή.

Ο χάρτης σχετικού απόλυτου σφάλματος για αυτήν την περίπτωση είναι ο ακόλουθος:



Σχήμα 3.31 Χάρτης σχετικού απόλυτου σφάλματος 50 δειγμάτων ανά κατηγορία πετρώματος

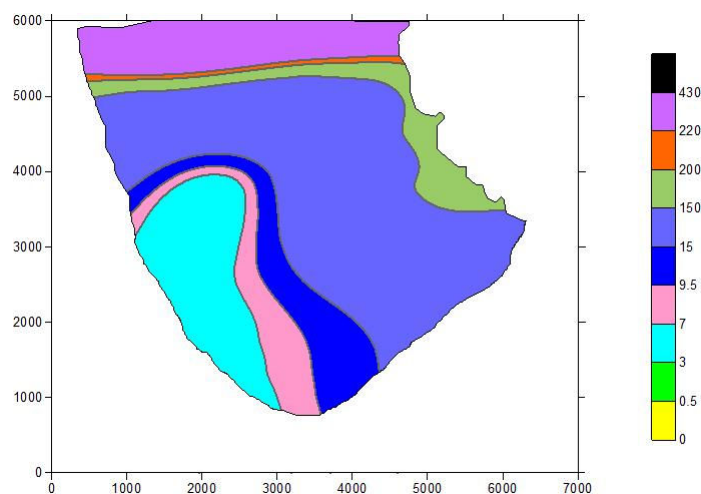
Το ποσοστό των σημείων με σχετικό απόλυτο σφάλμα μεγαλύτερο του 40% είναι 62% γεγονός που καθιστά αυτήν την περίπτωση αναξιόπιστη.

Ο συντελεστής γραμμικής συσχέτισης είναι 0.8133 ελαφρώς μεγαλύτερος του 0.8.

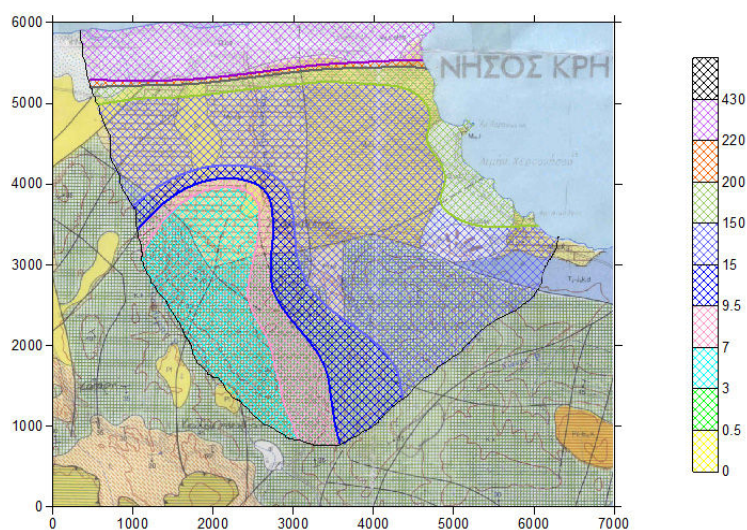
Σε αυτή την περίπτωση φαίνεται πως αν και υπάρχουν δείγματα από όλους τους σχηματισμούς το δείγμα δεν θεωρείται αξιόπιστο. Ο αριθμός των δειγμάτων είναι ο ελάχιστος απαιτούμενος για γεωστατιστική ανάλυση αλλά η ιδιαιτερότητα της συγκεκριμένης περιοχής με τις έντονες διακυμάνσεις της τιμής της υδραυλικής αγωγιμότητας καθιστούν το δείγμα μη επαρκές.

Κεφάλαιο 3

Ο χάρτης της υδραυλικής αγωγιμότητας της περιοχής που προκύπτει είναι ο ακόλουθος:



Σχήμα 3.32 Χάρτης υδραυλικής αγωγιμότητας για 50 δείγματα ανά κατηγορία πετρώματος



Σχήμα 3.33 Χάρτης υδραυλικής αγωγιμότητας για 50 δείγματα ανά κατηγορία πετρώματος σε σχέση με τον γεωλογικό χάρτη

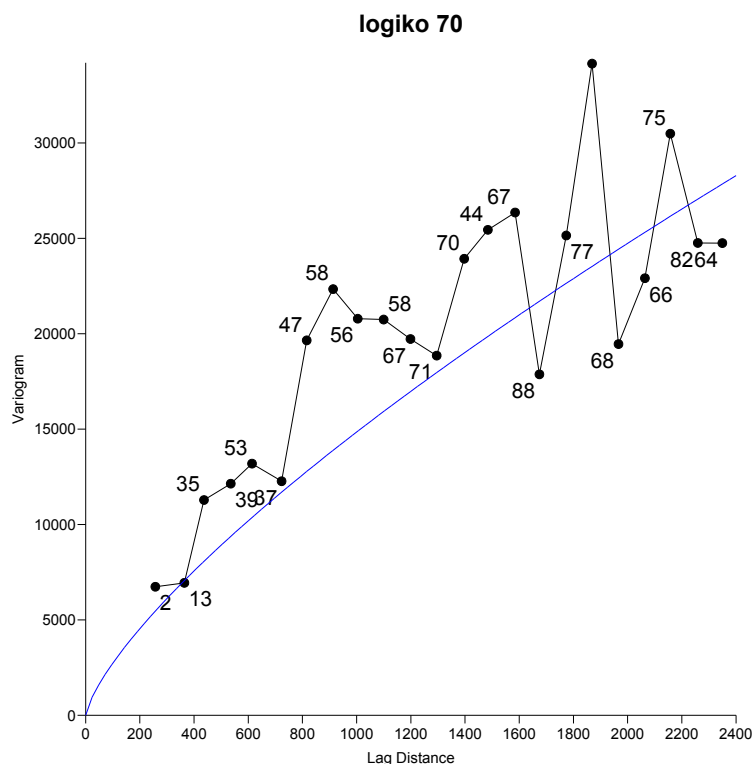
Λαμβάνοντας υπόψη τους δύο παραπάνω χάρτες η εκτίμηση της περιοχής θεωρείται πλήρως αναξιόπιστη. Αυτό ήταν αναμενόμενο αφού το ημιβαριόγραμμα της συγκεκριμένης περίπτωσης δεν έχει καμία θετική παράμετρο. Παρότι το

Κεφάλαιο 3

σχετικό απόλυτο σφάλμα και ο συντελεστής γραμμικής συσχέτισης είναι καλύτερα από την περίπτωση για 50 δείγματα με τυχαία κατανομή, τελικά το αποτέλεσμα που προκύπτει είναι πολύ χειρότερο. Με αυτή την περίπτωση γίνεται φανερή η δυσκολία της γεωστατιστικής ανάλυσης και φαίνεται και στην πράξη ότι οι επιλογές των παραμέτρων κατά την επεξεργασία των δεδομένων μπορούν να κριθούν μόνο εκ του αποτελέσματος.

3.5 Περίπτωση 5^η – 70 δείγματα ανά κατηγορία πετρώματος

Το ημιβαριόγραμμα που προκύπτει σε αυτήν την περίπτωση είναι το ακόλουθο:



Σχήμα 3.34 Ημιβαριόγραμμα για 70 δείγματα ανά κατηγορία πετρώματος

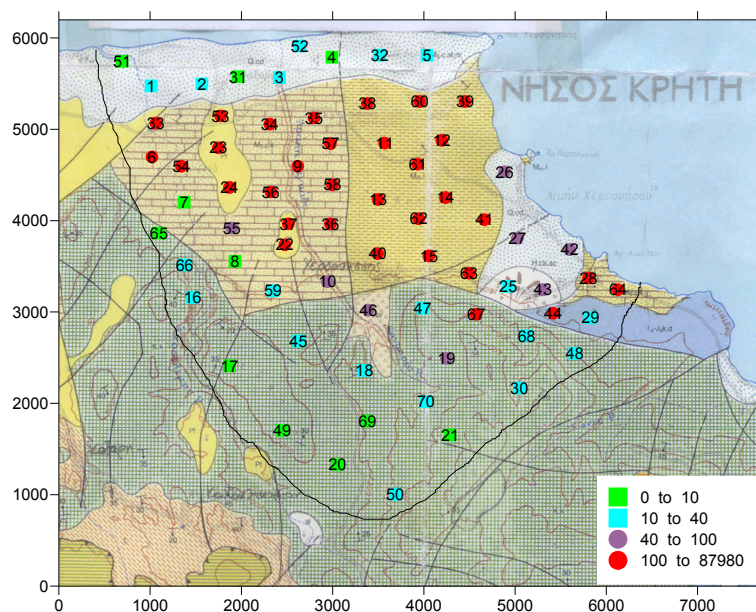
Το πειραματικό ημιβαριόγραμμα του σχήματος 3.22 που προκύπτει στην προκειμένη περίπτωση έχει μια συγκεκριμένη δομή που διακρίνεται ξεκάθαρα. Παρουσιάζει το φαινόμενο πυρήνα και ο αριθμός των ζευγών σε κάθε κλάση είναι μεγαλύτερος του 30 εκτός από τα τις δύο πρώτες κλάσεις όπου και θεωρούνται αναξιόπιστες. Για μεγάλη ακτίνα συσχέτισης εμφανίζει πιο έντονα το πριονωτό σχήμα από ότι για μικρότερη ακτίνα. Φαίνεται να είναι ένα καλό ημιβαριόγραμμα

Κεφάλαιο 3

που θα δώσει μία καλή απεικόνιση της περιοχής αλλά όχι με λεπτομέρειες λόγω αναξιοπιστίας στην αρχή και του πριονωτού σχήματος.

Το θεωρητικό μοντέλο που χρησιμοποιήθηκε είναι το δυναμονομικό και φαίνεται να κάνει καλή προσαρμογή στο πειραματικό μοντέλο.

Ο χάρτης σχετικού απόλυτου σφάλματος για αυτήν την περίπτωση είναι ο ακόλουθος:



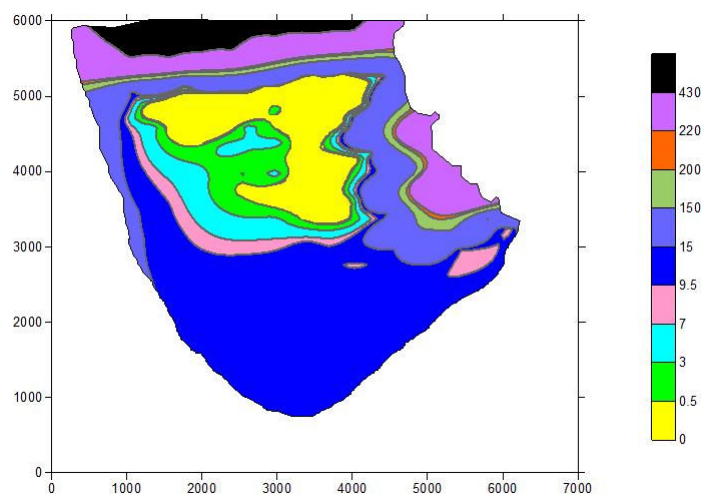
Σχήμα 3.35 Χάρτης σχετικού απόλυτου σφάλματος 70 δειγμάτων ανά κατηγορία πετρώματος

Το ποσοστό των σημείων με σχετικό απόλυτο σφάλμα μεγαλύτερο του 40% είναι 57.1 % γεγονός που καθιστά και αυτήν την περίπτωση αναξιόπιστη.

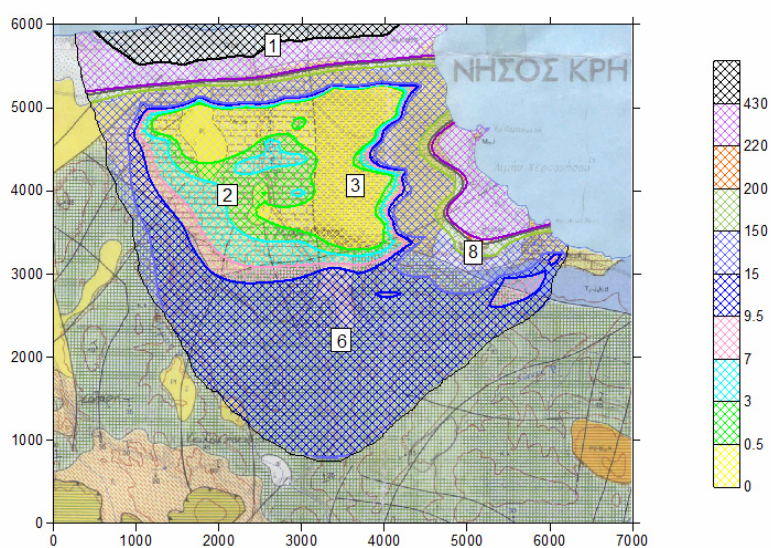
Ο συντελεστής γραμμικής συσχέτισης είναι 0.8579, μεγαλύτερος του 0.8 και καλύτερος από όλες τις προηγούμενες περιπτώσεις.

Κεφάλαιο 3

Ο χάρτης της υδραυλικής αγωγιμότητας της περιοχής που προκύπτει είναι ο ακόλουθος:



Σχήμα 3.36 Χάρτης υδραυλικής αγωγιμότητας για 70 δείγματα ανά κατηγορία πετρώματος



Σχήμα 3.37 Χάρτης υδραυλικής αγωγιμότητας για 70 δείγματα ανά κατηγορία πετρώματος σε σχέση με τον γεωλογικό χάρτη

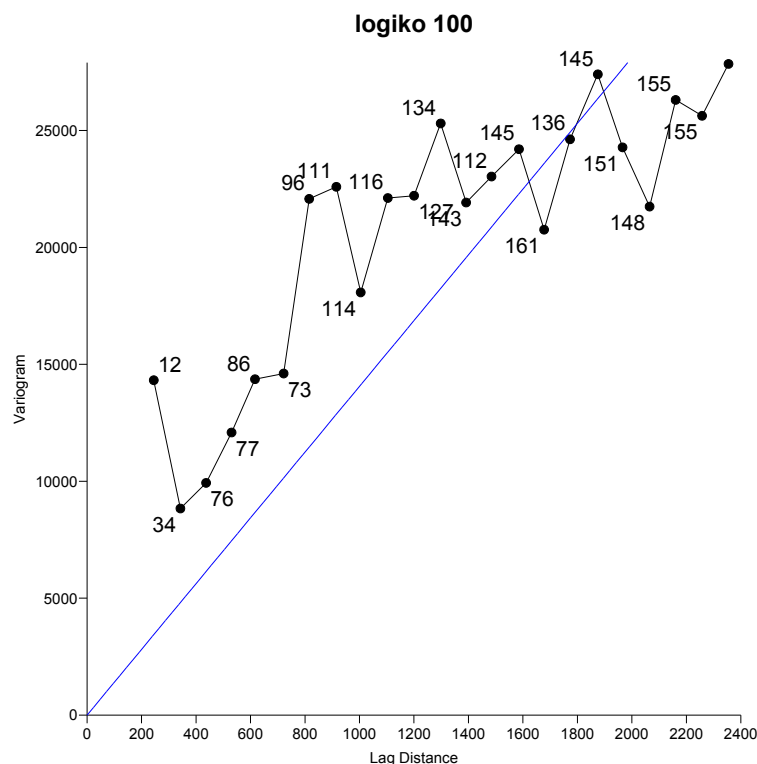
Όπως παρατηρείται στους δύο παραπάνω χάρτες οι εκτιμώμενες τιμές της υδραυλικής αγωγιμότητας αρχίζουν να συμφωνούν με τους γεωλογικούς σχηματισμούς που φαίνονται στον αρχικό χάρτη. Οι γεωλογικοί σχηματισμοί No 1 και 6 εκτιμήθηκαν αρκετά ικανοποιητικά ενώ οι σχηματισμοί No 2 και 3 αρχίζουν

Κεφάλαιο 3

να ξεχωρίζουν κυρίως στο νότιο τμήμα αφού στο βόρειο η επιρροή του σχηματισμού Νο 1 δυσκολεύει την εκτίμηση. Για πρώτη φορά ο γεωλογικός σχηματισμός Νο 8 εκτιμάται σαν φακός αλλά τοποθετείται πιο ανατολικά απ' ότι στην πραγματικότητα. Με μεγαλύτερο δείγμα αναμένεται καλύτερη εκτίμηση της περιοχής με μεγαλύτερη λεπτομέρεια αφού οι βασικοί γεωλογικοί σχηματισμοί έχουν αρχίσει να εκτιμούνται αρκετά καλά.

3.6 Περίπτωση 6^η – 100 δείγματα ανά κατηγορία πετρώματος

Το ημιβαριόγραμμα που προκύπτει σε αυτήν την περίπτωση είναι το ακόλουθο:



Σχήμα 3.38 Ημιβαριόγραμμα για 100 δείγματα ανά κατηγορία πετρώματος

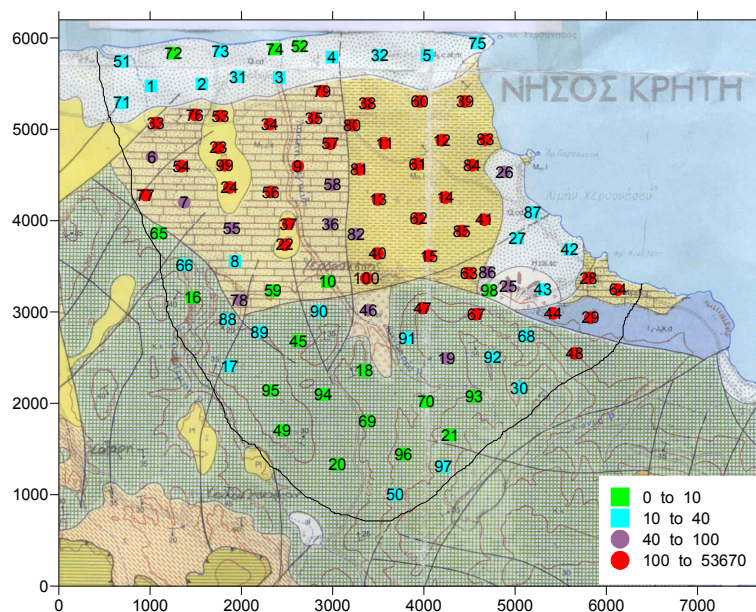
Το πειραματικό ημιβαριόγραμμα του σχήματος 3.38 που προκύπτει στην προκειμένη περίπτωση παρουσιάζει το φαινόμενο πυρήνα και οι πρώτες δύο κλάσεις είναι και πάλι αναξιόπιστες. Το Πριονωτό σχήμα του ημιβαριογράμματος δεν είναι τόσο έντονο όσο στις προηγούμενες περιπτώσεις και ο αριθμός των ζευγών στις κλάσεις είναι αρκετά μεγάλος, γεγονός καλό για την εκτίμηση. Ακόμα

Κεφάλαιο 3

φαίνεται οι τιμές του ημιβαριογράμματος να τείνουν σε μία τιμή, διακρίνεται δηλαδή το άνω φράγμα. Γενικά είναι ένα καλό ημιβαριόγραμμα.

Το θεωρητικό μοντέλο που χρησιμοποιήθηκε για την προσαρμογή στο πειραματικό είναι το γραμμικό.

Ο χάρτης σχετικού απόλυτου σφάλματος για αυτήν την περίπτωση είναι ο ακόλουθος:

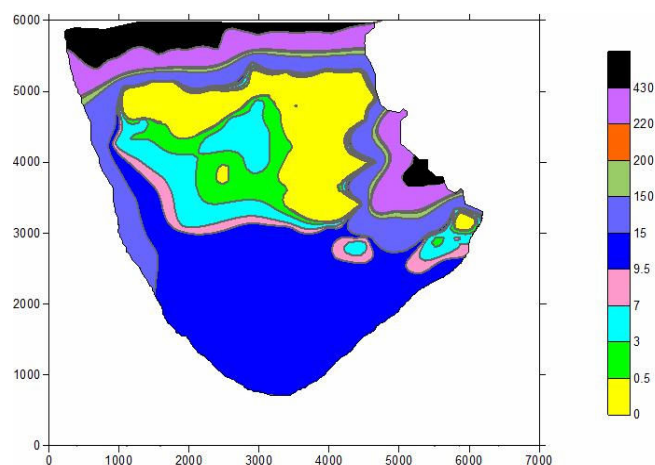


Σχήμα 3.39 Χάρτης σχετικού απόλυτου σφάλματος 100 δειγμάτων ανά κατηγορία πετρώματος

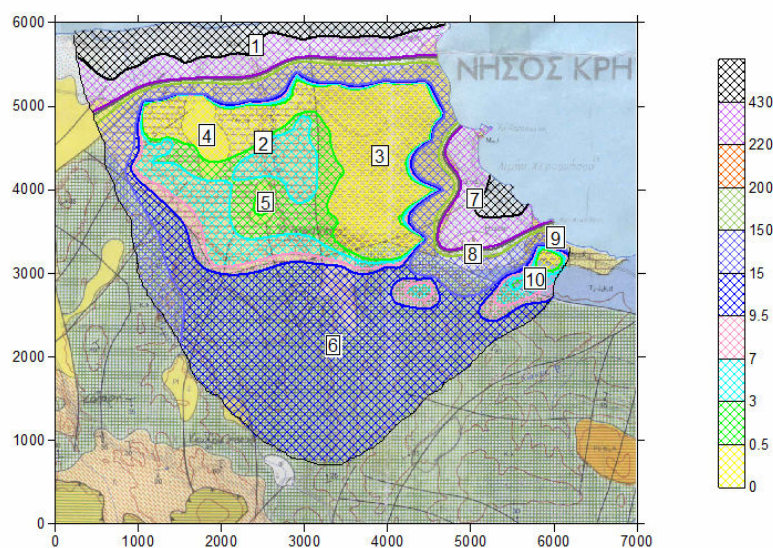
Το ποσοστό των σημείων με σχετικό απόλυτο σφάλμα μεγαλύτερο του 40% είναι 54% γεγονός όχι ευχάριστο σε σχέση με τους άλλους συντελεστές αφού και ο συντελεστής γραμμικής συσχέτισης είναι 0.8825 δηλαδή πολύ καλός.

Κεφάλαιο 3

Ο χάρτης της υδραυλικής αγωγιμότητας της περιοχής που προκύπτει είναι ο ακόλουθος:



Σχήμα 3.40 Χάρτης υδραυλικής αγωγιμότητας για 100 δείγματα ανά κατηγορία πετρώματος



Σχήμα 3.41 Χάρτης υδραυλικής αγωγιμότητας για 100 δείγματα ανά κατηγορία πετρώματος σε σχέση με τον γεωλογικό χάρτη

Στους δύο παραπάνω χάρτες που προέκυψαν η εκτίμηση των γεωλογικών στρωμάτων Νο 1, 6, 2 και 3 είναι το ίδιο καλή όσο και στην προηγούμενη περίπτωση. Ο σχηματισμός Νο 8 δεν εκτιμήθηκε καλά όπως πριν αλλά οι γειτονικοί του σχηματισμοί Νο 7, 9 και 10 εκτιμήθηκαν πολύ καλύτερα από πριν.

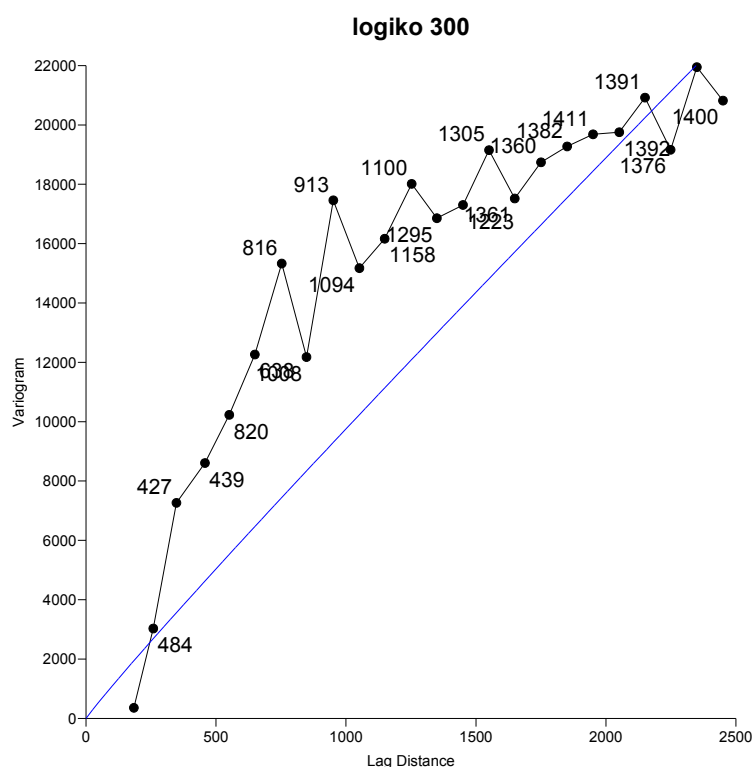
Εφαρμογή της Γεωστατιστικής Μεθόδου Kriging για τον Προσδιορισμό της Υδραυλικής Αγωγιμότητας του Υπόγειου Υδροφορέα στην Περιοχή Χερσονήσου του Ηρακλείου Κρήτης

Κεφάλαιο 3

Για πρώτη φορά ο γεωλογικός σχηματισμός Νο 5 που είναι φακός εκτιμήθηκε σωστά. Η εκτίμηση γενικά είναι αρκετά καλή με κάποιες ατέλειες, δεν δίνονται δηλαδή με μεγάλη ακρίβεια οι διαχωρισμοί των μικρών σε έκταση στρωμάτων. Κάτι τέτοιο θα μπορέσει να επιτευχθεί με αριθμό δειγμάτων πολύ μεγαλύτερο.

3.7 Περίπτωση 7^η – 300 δείγματα ανά κατηγορία πετρώματος

Το ημιβαριόγραμμα που προκύπτει σε αυτήν την περίπτωση είναι το ακόλουθο:



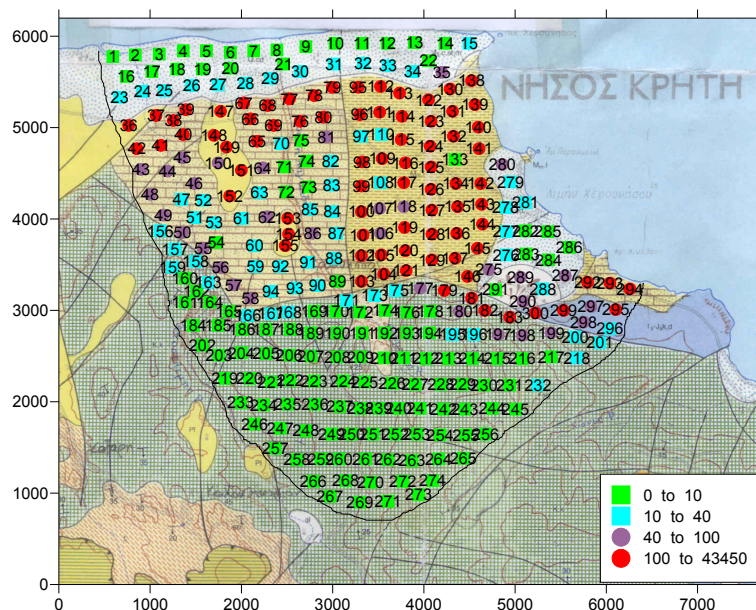
Σχήμα 3.42 Ημιβαριόγραμμα για 300 δείγματα ανά κατηγορία πετρώματος

Το πειραματικό ημιβαριόγραμμα του σχήματος 3.42 που προκύπτει στην προκειμένη περίπτωση είναι ένα πολύ καλό ημιβαριόγραμμα. Ο αριθμός των ζευγών σε κάθε κλάση είναι πολύ μεγαλύτερος του 30 και μάλιστα αυξάνεται όσο αυξάνεται η κάθε κλάση. Το φαινόμενο πυρήνα που παρουσιάζεται είναι πολύ μικρό, το πριονωτό σχήμα εμφανίζεται σε μικρή ένταση και δικαιολογείται επειδή οι μετρήσεις είναι πειραματικές και οι τιμές του ημιβαριογράμματος φαίνονται ξεκάθαρα να προσεγγίζουν μία τιμή να υπάρχει δηλαδή άνω φράγμα. Το ημιβαριόγραμμα προϋδεάζει για μία πολύ καλή εκτίμηση της περιοχής.

Κεφάλαιο 3

Το θεωρητικό μοντέλο που χρησιμοποιήθηκε είναι το δυναμονομικό. Αν και δεν έχει την καλύτερη προσαρμογή στο πειραματικό ημιβαριόγραμμα ή αυτήν που θα περίμενε κάποιος, εντούτοις είναι το καλύτερο δυνατό που μπορεί να χρησιμοποιηθεί.

Ο χάρτης σχετικού απόλυτου σφάλματος για αυτήν την περίπτωση είναι ο ακόλουθος:



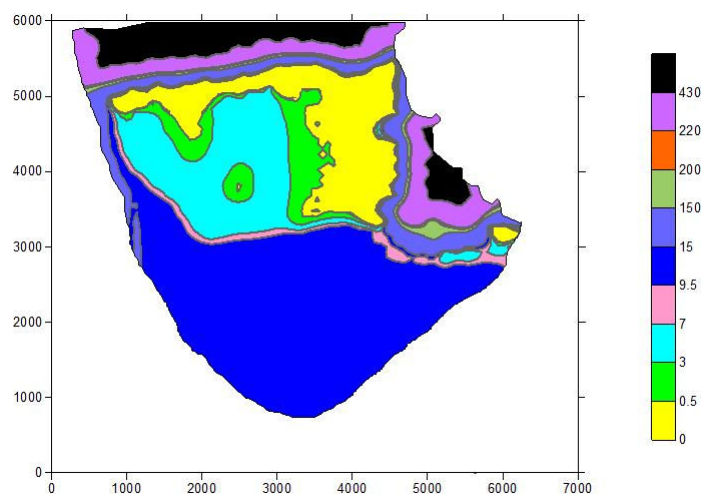
Σχήμα 3.43 Χάρτης σχετικού απόλυτου σφάλματος 300 δειγμάτων ανά κατηγορία πετρώματος

Το ποσοστό των σημείων με σχετικό απόλυτο σφάλμα μεγαλύτερο του 40% είναι μόλις 37.4%. Το ποσοστό των σημείων με σφάλμα μικρότερο του 10% είναι 42.7%. Στο σχήμα 3.43 φαίνεται πως ο μόνος γεωλογικός σχηματισμός που έχει μεγάλο σχετικό απόλυτο σφάλμα είναι ο Νο 3. Αυτό συμβαίνει επειδή ο συγκεκριμένος σχηματισμός έχει τιμή της υδραυλικής αγωγιμότητας 0.6m/d ενώ οι γειτονικοί του σχηματισμοί έχουν πολύ μεγαλύτερη τιμή, 430m/d βόρεια και ανατολικά του.

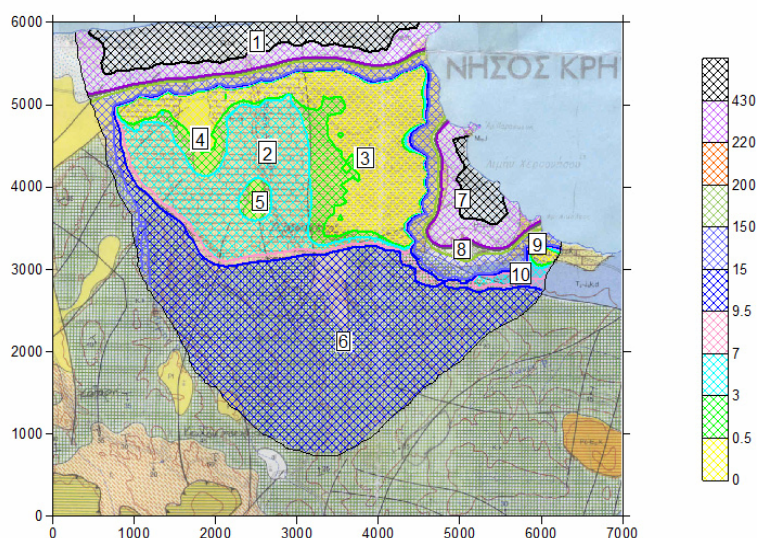
Ο συντελεστής γραμμικής συσχέτισης είναι 0.944, άλλος ένας συντελεστής που δείχνει ότι θα προκύψει μία καλή εκτίμηση της περιοχής.

Κεφάλαιο 3

Ο χάρτης της υδραυλικής αγωγιμότητας της περιοχής που προκύπτει είναι ο ακόλουθος:



Σχήμα 3.44 Χάρτης υδραυλικής αγωγιμότητας για 300 δείγματα ανά κατηγορία πετρώματος



Σχήμα 3.45 Χάρτης υδραυλικής αγωγιμότητας για 300 δείγματα ανά κατηγορία πετρώματος σε σχέση με τον γεωλογικό χάρτη

Στους δύο παραπάνω χάρτες φαίνεται πως έχει γίνει μια πολύ καλή εκτίμηση της περιοχής. Ο σχηματισμός Νο 1 έχει εκτιμηθεί πολύ καλά και το εύρος τιμών με τα νότια στρώματα έχει μειωθεί πολύ. Το βόρειο τμήμα των σχηματισμών Νο 2 και 3 έχει και πάλι κακή εκτίμηση αλλά το νότιο τμήμα του σχηματισμού Νο 4 έχει Εφαρμογή της Γεωστατιστικής Μεθόδου Kriging για τον Προσδιορισμό της Υδραυλικής Αγωγιμότητας του Υπόγειου Υδροφορέα στην Περιοχή Χερσονήσου του Ηρακλείου Κρήτης

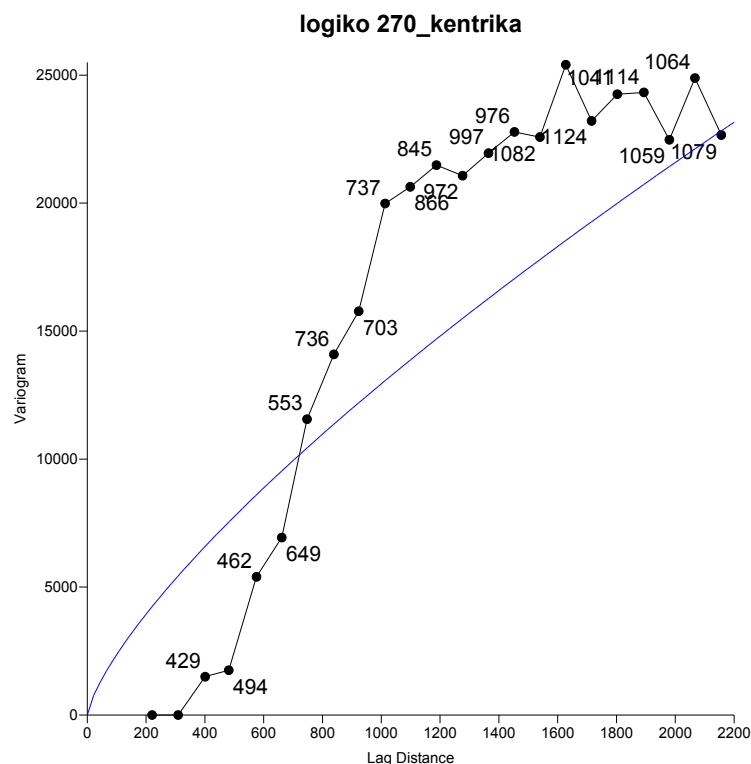
Κεφάλαιο 3

εκτιμηθεί καλά παρά την κακή εκτίμηση του βόρειου τμήματος του. Οι γεωλογικοί σχηματισμοί Νο 7, 8, 9 και 10 αν και με μεγάλες διακυμάνσεις στις τιμές υδραυλικής αγωγιμότητας και παρότι είναι μικροί σε έκταση έχουν εκτιμηθεί αρκετά καλά. Είναι χαρακτηριστικό πως σε κάθε σχηματισμό από αυτούς έχει εκτιμηθεί η υδραυλική αγωγιμότητα σε ένα εύρος τιμών αντιπροσωπευτικό του κάθε σχηματισμού. Το μεγαλύτερο πρόβλημα που παρουσιάζεται σε αυτήν την περίπτωση είναι η εκτίμηση του γεωλογικού σχηματισμού Νο 3 όπου όπως φαίνεται χρειάζεται ένας άλλος τρόπος δειγματοληψίας για να εκτιμηθεί σωστά.

Πρέπει να σημειωθεί πως η δειγματοληψία και σε αυτήν την περίπτωση είναι αραιή. Οπότε οι όποιες ατέλειες στην εκτίμηση είναι απόλυτα δικαιολογημένες.

3.8 Περίπτωση 8^η – 270 δείγματα ανά κατηγορία πετρώματος σε κεντρικά σημεία

Το ημιβαριόγραμμα που προκύπτει σε αυτήν την περίπτωση είναι το ακόλουθο:



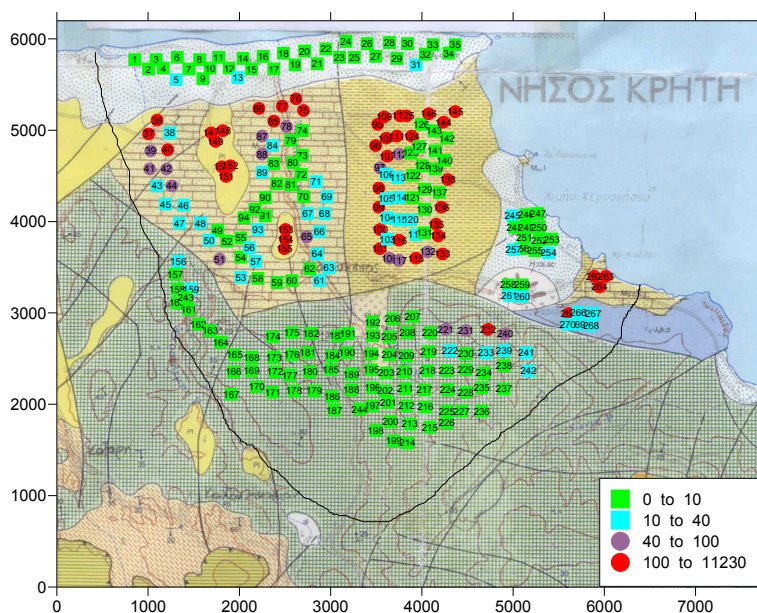
Σχήμα 3.46 Ημιβαριόγραμμα για 270 δείγματα ανά κατηγορία πετρώματος σε κεντρικά σημεία

Κεφάλαιο 3

Το πειραματικό ημιβαριόγραμμα του σχήματος 3.46 που προκύπτει σε αυτήν την περίπτωση δεν παρουσιάζει το φαινόμενο πυρήνα. Το εύρος διακύμανσης στις τιμές του ημιβαριογράμματος είναι πολύ μικρό για πειραματικά δείγματα και φαίνεται καθαρά όχι μονό ότι οι τιμές του ημιβαριογράμματος σταθεροποιούνται σε κάποια τιμή αλλά για πρώτη φορά είναι διακριτό το εύρος του ημιβαριογράμματος, η απόσταση δηλαδή όπου η τιμή αυτή σταθεροποιείται. Ο αριθμός των ζευγών σε κάθε κλάση είναι πολύ μεγάλος του 30. Η μορφή του ημιβαριογράμματος στην αρχή είναι κοίλη γεγονός που δείχνει ότι τα δεδομένα παρουσιάζουν πολύ συνεχή συμπεριφορά. Οι παράμετροι αυτοί του ημιβαριογράμματος δείχνουν ότι η εκτίμηση της περιοχής θα είναι πολύ καλή.

Το θεωρητικό μοντέλο που χρησιμοποιήθηκε είναι το δυναμονομικό και φαίνεται να έχει καλή προσαρμογή στο πειραματικό.

Ο χάρτης σχετικού απόλυτου σφάλματος για αυτήν την περίπτωση είναι ο ακόλουθος:



Σχήμα 3.47 Χάρτης σχετικού απόλυτου σφάλματος 270 δειγμάτων ανά κατηγορία πετρώματος σε κεντρικά σημεία

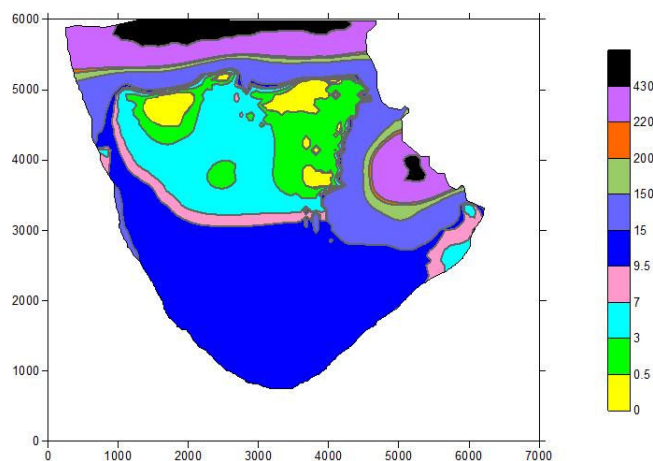
Το ποσοστό των σημείων με σχετικό απόλυτο σφάλμα μικρότερο του 40% είναι 77 % και το ποσοστό των σημείων με σφάλμα μικρότερο του 10% είναι 58.5% γεγονός που καθιστά αυτήν την περίπτωση αξιόπιστη. Στο σχήμα 3.47 φαίνονται τα σημεία δειγματοληψία όπου βρίσκονται σε κεντρικά σημεία σε κάθε σχηματισμό και φαίνεται πως για πρώτη φορά ο σχηματισμός Νο 3 έχει εκτιμηθεί τόσο καλά.

Κεφάλαιο 3

Ενώ στις προηγούμενες περιπτώσεις τα σημεία δειγματοληψίας είχαν σφάλμα μεγαλύτερο του 100% σε αυτήν την περίπτωση όλα τα κεντρικά σημεία έχουν σφάλμα μικρότερο του 40%. Σε κάθε γεωλογικό σχηματισμό έχουν εκτιμηθεί τιμές της υδραυλικής αγωγιμότητας με σφάλμα μικρότερο του 10% εκτός των σχηματισμών Νο 4, 5 και 9. Αυτό δείχνει πως οι μικροί σε έκταση σχηματισμοί σε συνδυασμό με τη μεγάλη διαφορά της τιμής της μελετώμενης παραμέτρου, είναι πολύ δύσκολο να εκτιμηθούν με μεγάλη ακρίβεια.

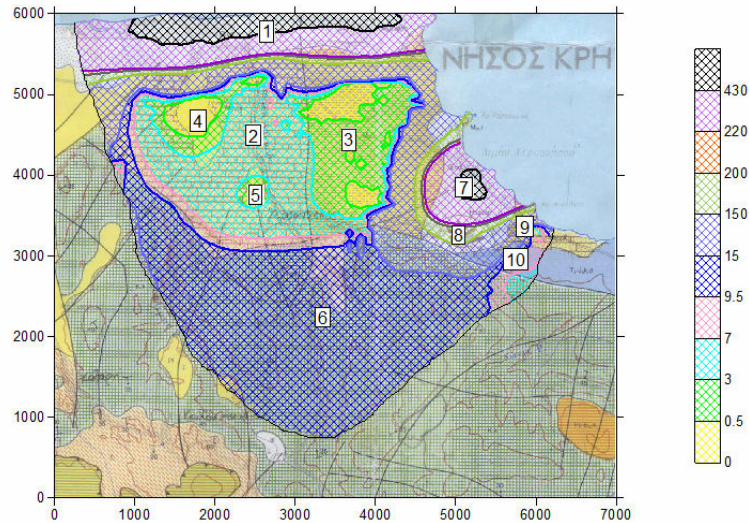
Ο συντελεστής γραμμικής συσχέτισης είναι 0.9953 σχεδόν ίσος με ένα, δηλαδή οι εκτιμώμενες τιμές με τις πραγματικές σχετίζονται σχεδόν απόλυτα.

Ο χάρτης της υδραυλικής αγωγιμότητας της περιοχής που προκύπτει είναι ο ακόλουθος:



Σχήμα 3.48 Χάρτης υδραυλικής αγωγιμότητας για 270 δείγματα ανά κατηγορία πετρώματος σε κεντρικά σημεία

Κεφάλαιο 3

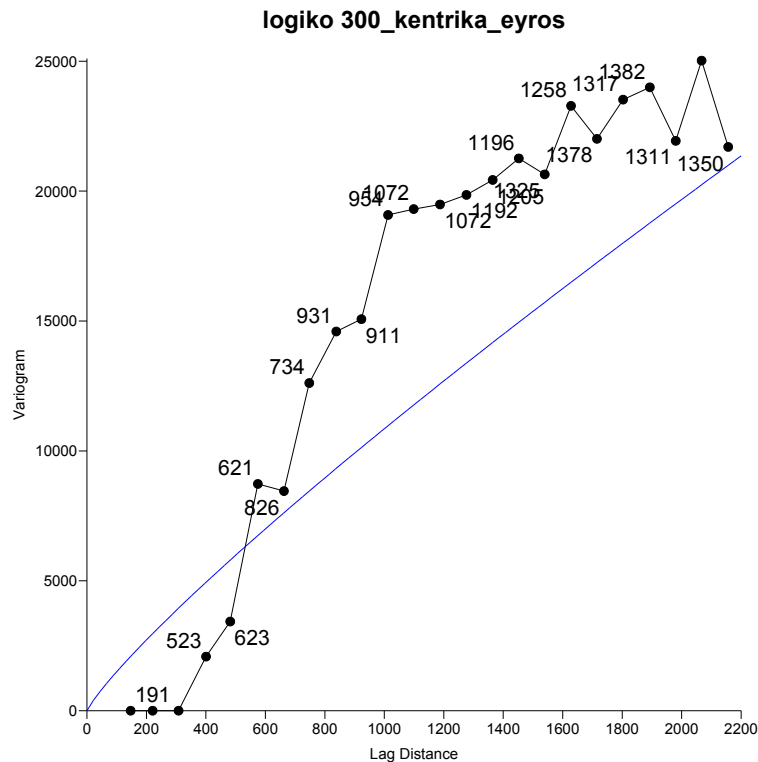


Σχήμα 3.49 Χάρτης υδραυλικής αγωγιμότητας για 270 δείγματα ανά κατηγορία πετρώματος σε κεντρικά σημεία

Όπως φαίνεται στα δύο παραπάνω σχήματα το εύρος της ζώνης ανάμεσα στον σχηματισμό No 1 με τους σχηματισμούς No 2 και 3 έχει μειωθεί σημαντικά. Αυτό βοηθάει στην καλή εκτίμηση των σχηματισμών No 2 και 3 καθώς και στην εκτίμηση του σχηματισμού No 4. Το ανατολικό τμήμα όμως του σχηματισμού No 3 έχει εκτιμηθεί με μεγάλο σφάλμα και ο διαχωρισμός του με τον σχηματισμό No 7 δεν είναι τόσο καλός όσο στην προηγούμενη περίπτωση, όπως και ο διαχωρισμός των σχηματισμών No 2 και 6. Οι σχηματισμοί No 7, 8, 9 και 10 έχουν στο μεγαλύτερο τμήμα τους τιμές εκτιμούμενες μέσα στο εύρος τιμών που δίνεται αρχικά, έχει γίνει δηλαδή μια ικανοποιητική εκτίμηση σε αυτήν την δύσκολη περιοχή. Γενικά η εκτίμηση είναι καλή αλλά θεωρείται καλύτερη η εκτίμηση που έγινε στην προηγούμενη περίπτωση, 7^η περίπτωση.

3.9 Περίπτωση 9^η – 300 δείγματα ανά κατηγορία πετρώματος με εύρος τιμών

Το ημιβαριόγραμμα που προκύπτει σε αυτήν την περίπτωση είναι το ακόλουθο:



Σχήμα 3.50 Ημιβαριόγραμμα για 300 δείγματα ανά κατηγορία πετρώματος με εύρος τιμών

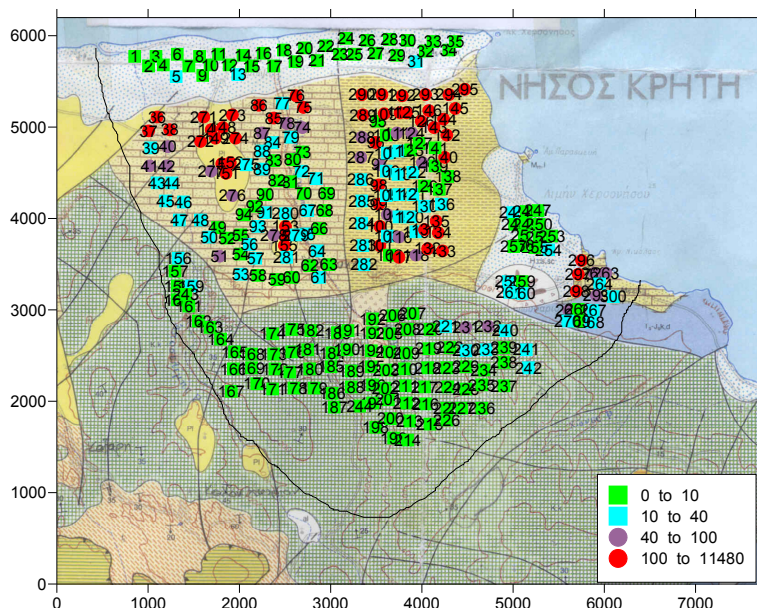
Το πειραματικό ημιβαριόγραμμα του σχήματος 3.50 που προκύπτει στην συγκεκριμένη περίπτωση δεν παρουσιάζει σχεδόν καθόλου διακυμάνσεις στις τιμές του ημιβαριογράμματος σε αύξουσες κλάσεις. Η τιμή του ημιβαριογράμματος αυξάνεται όσο αυξάνεται η ακτίνα συσχέτισης. Το ίδιο συμβαίνει και με τον αριθμό των ζευγών ανά κλάση. Δεν παρουσιάζεται το φαινόμενο πυρήνα και διακρίνεται καθαρά το άνω φράγμα και κατά συνέπεια το εύρος του ημιβαριογράμματος. Η συμπεριφορά του ημιβαριογράμματος στην αρχή είναι γραμμική προς κοίλη γεγονός που δείχνει ότι τα δεδομένα είναι συνεχή έως πολύ συνεχή.

Το θεωρητικό μοντέλο που χρησιμοποιήθηκε είναι το δυναμονομικό. Αν και το πειραματικό ημιβαριόγραμμα έχει πολύ καλή μορφή το θεωρητικό δεν

Κεφάλαιο 3

προσαρμόζεται πολύ καλά. Η περίπτωση όπου το θεωρητικό μοντέλο προσαρμόζεται απόλυτα στο πειραματικό είναι σπάνια. Σχεδόν ποτέ δεν συμβαίνει κάτι τέτοιο ιδικά σε περιπτώσεις όπου οι τιμές τις μελετώμενης παραμέτρου παρουσιάζουν μεγάλη διακύμανση όπως στην συγκεκριμένη περίπτωση με την υδραυλική αγωγιμότητα.

Ο χάρτης σχετικού απόλυτου σφάλματος για αυτήν την περίπτωση είναι ο ακόλουθος:



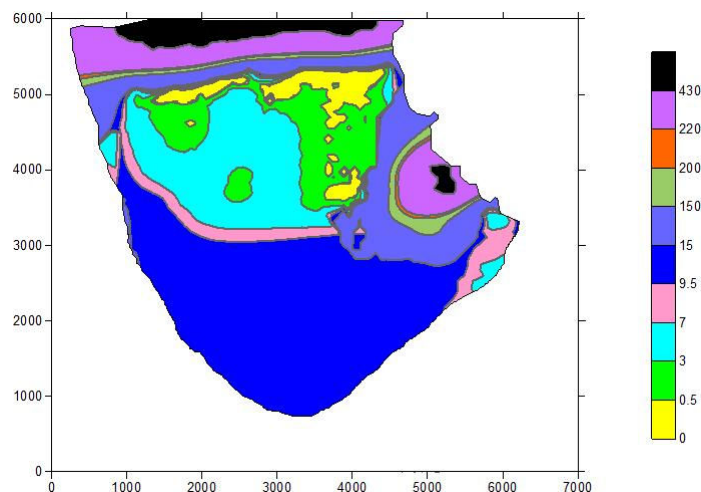
Σχήμα 3.51 Χάρτης σχετικού απόλυτου σφάλματος 300 δειγμάτων ανά κατηγορία πετρώματος με εύρος τιμών

Το ποσοστό των σημείων με σχετικό απόλυτο σφάλμα μικρότερο του 40% είναι 74.7% και το ποσοστό των σημείων με σφάλμα μικρότερο του 10% είναι 52% γεγονός που καθιστά αυτήν την περίπτωση, όπως και την προηγούμενη αξιόπιστη. Στο σχήμα 3.51 φαίνονται τα σημεία δειγματοληψία όπου βρίσκονται σε κεντρικά σημεία σε κάθε σχηματισμό. Για πρώτη έχει γίνει εκτίμηση σε κάθε γεωλογικό σχηματισμό έστω και σε ένα σημείο με σφάλμα μικρότερο του 40%. Δεν υπάρχει δηλαδή σχηματισμός όπου να μην έχει γίνει έστω και μία ικανοποιητική εκτίμηση. Η βελτίωση αυτή οφείλεται στο ότι χρησιμοποιήθηκε εύρος τιμών για την υδραυλική αγωγιμότητα και ουσιαστικά αυτή είναι η σημαντική διαφορά από την προηγούμενη περίπτωση.

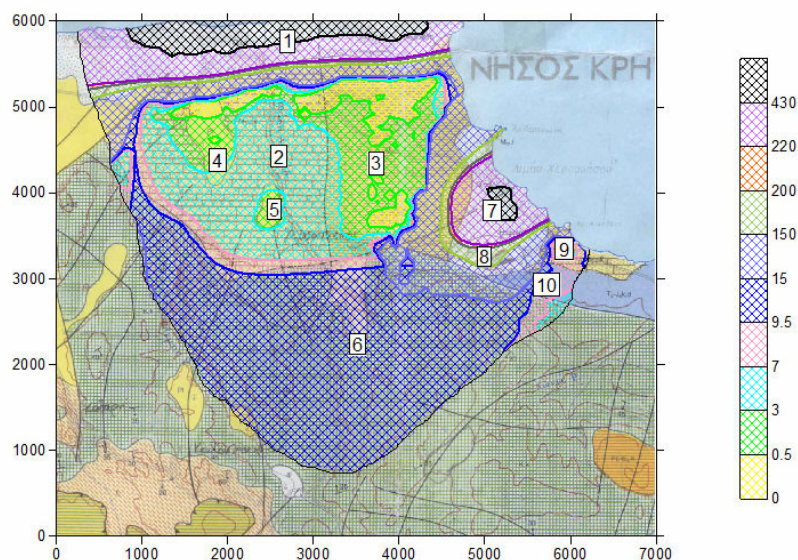
Κεφάλαιο 3

Ο συντελεστής γραμμικής συσχέτισης είναι 0.9936, ελαφρώς μικρότερος από την προηγούμενη περίπτωση αλλά και πάλι σχεδόν ίσος με ένα, δηλαδή οι εκτιμώμενες τιμές με τις πραγματικές σχετίζονται σχεδόν απόλυτα.

Ο χάρτης της υδραυλικής αγωγιμότητας της περιοχής που προκύπτει είναι ο ακόλουθος:



Σχήμα 3.52 Χάρτης υδραυλικής αγωγιμότητας για 300 δείγματα ανά κατηγορία πετρώματος με εύρος τιμών



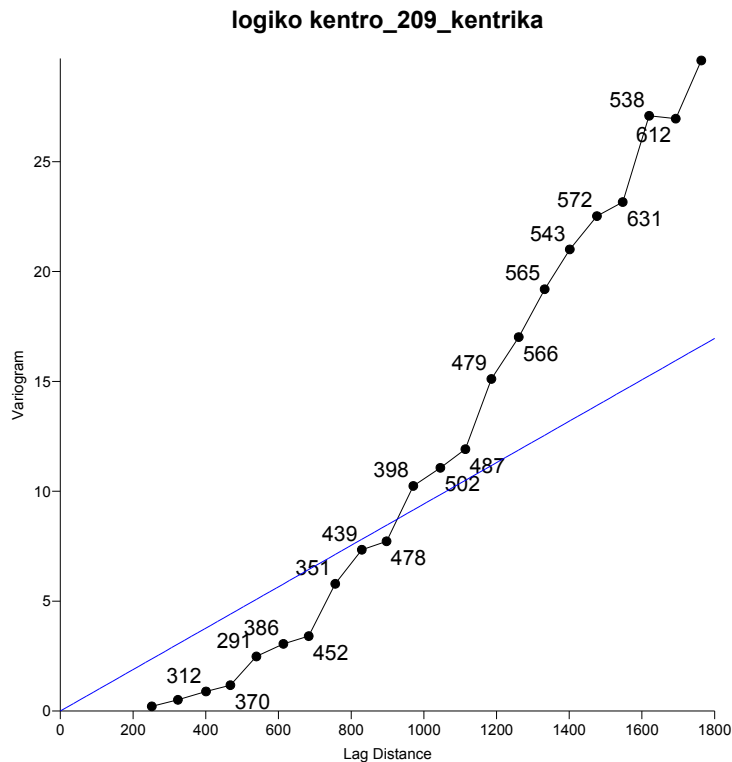
Σχήμα 3.53 Χάρτης υδραυλικής αγωγιμότητας για 300 δείγματα ανά κατηγορία πετρώματος με εύρος τιμών

Κεφάλαιο 3

Λαμβάνοντας υπόψη τους δύο παραπάνω χάρτες η εκτίμηση της υδραυλικής αγωγιμότητας στην περιοχή θεωρείται πολύ καλή. Οι χάρτες 3.53 και 3.53 παρουσιάζουν μεγάλη ομοιότητα με τους χάρτες 3.48 και 3.49, είναι σχεδόν ίδιοι. Φαίνεται δηλαδή ότι η χρήση τιμών εύρους αν και έδωσε μεγαλύτερο ποσοστό στα σημεία με σχετικό απόλυτο σφάλμα μικρότερο του 10% δεν είχε και την αντίστοιχη επιρροή στο τελικό αποτέλεσμα αφού δεν βελτιώθηκε καθόλου. Αντίθετα μάλιστα φαίνεται πως ο γεωλογικός σχηματισμός Νο 3 δεν διαχωρίζεται το ίδιο καλά με τον σχηματισμό Νο 2 όπως και στην προηγούμενη περίπτωση. Αν και η εκτίμηση είναι πολύ καλή θεωρείται καλύτερη η εκτίμηση που έγινε στην 9^η περίπτωση όπου δεν χρησιμοποιήθηκε εύρος τιμών στην εκτίμηση της υδραυλικής αγωγιμότητας.

3.10 Περίπτωση 10^η – 209 δείγματα ανά κατηγορία πετρώματος με διαχωρισμό της περιοχής σε τμήματα

Το ημιβαριόγραμμα που προκύπτει σε αυτήν την περίπτωση είναι το ακόλουθο:



Σχήμα 3.54 Ημιβαριόγραμμα για 209 δείγματα ανά κατηγορία πετρώματος με διαχωρισμό της περιοχής σε τμήματα

Εφαρμογή της Γεωστατιστικής Μεθόδου Kriging για τον Προσδιορισμό της Υδραυλικής Αγωγιμότητας του Υπόγειου Υδροφορέα στην Περιοχή Χερσονήσου του Ηρακλείου Κρήτης

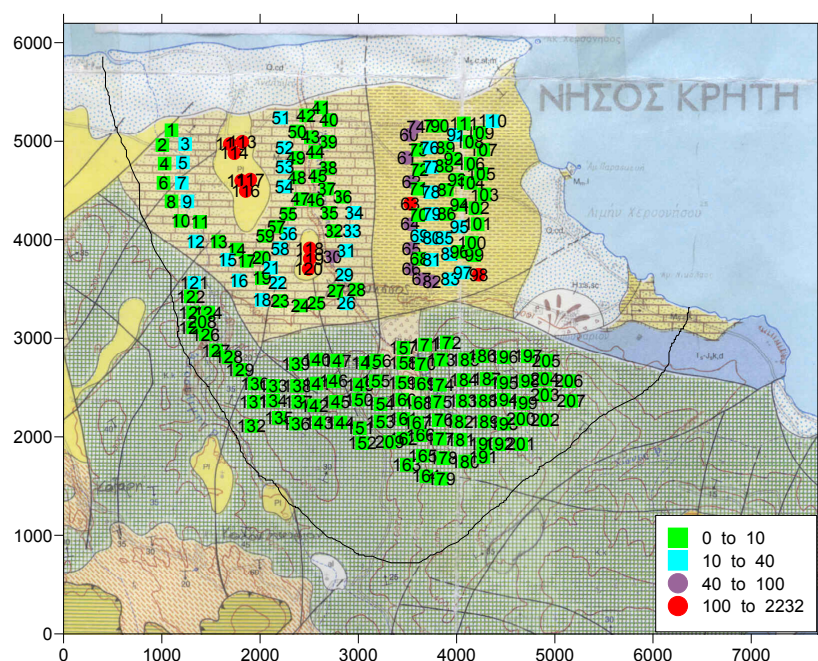
Κεφάλαιο 3

Το πειραματικό ημιβαριόγραμμα του σχήματος 3.54 που προκύπτει στην προκειμένη περίπτωση έχει κοίλο σχήμα σε όλη την έκτασή του, δηλαδή τα δεδομένα είναι πολύ συνεχή όχι μόνο για μικρή ακτίνα συσχέτισης αλλά για οποιαδήποτε ακτίνα συσχέτισης κι αν ληφθεί. Φαινόμενο πυρήνα δεν παρατηρείται και ο αριθμός των ζευγών ανά κλάση είναι ικανοποιητικός και παρουσιάζει αυξητική τάση όσο μεγαλώνει η ακτίνα συσχέτισης.

Το θεωρητικό μοντέλο που χρησιμοποιήθηκε είναι το γραμμικό, μοντέλο που ενδείκνυται για συνεχή συμπεριφορά του πειραματικού ημιβαριογράμματος.

Πρέπει να σημειωθεί πως η μορφή του ημιβαριογράμματος στη συγκεκριμένη περίπτωση είναι πολύ διαφορετική από όλες τις προηγούμενες περιπτώσεις επειδή μελετάται μόνο ένα τμήμα της περιοχής όπου η τιμή της υδραυλικής αγωγιμότητας είναι ομοιόμορφη και δεν παρουσιάζει έντονη διακύμανση.

Ο χάρτης σχετικού απόλυτου σφάλματος για αυτήν την περίπτωση είναι ο ακόλουθος:



Σχήμα 3.55 Χάρτης σχετικού απόλυτου σφάλματος 209 δειγμάτων ανά κατηγορία πετρώματος με διαχωρισμό της περιοχής σε τμήματα

Το ποσοστό των σημείων με σχετικό απόλυτο σφάλμα μικρότερο του 40% είναι 89.9% γεγονός που καθιστά αυτήν την περίπτωση εξαιρετικά αξιόπιστη. Αν και τα ποσοστά σχετικού απόλυτου σφάλματος είναι πολύ καλά, στον χάρτη φαίνεται πως οι γεωλογικοί σχηματισμοί Νο 4 και 5 έχουν σχετικό απόλυτο σφάλμα μεγαλύτερο

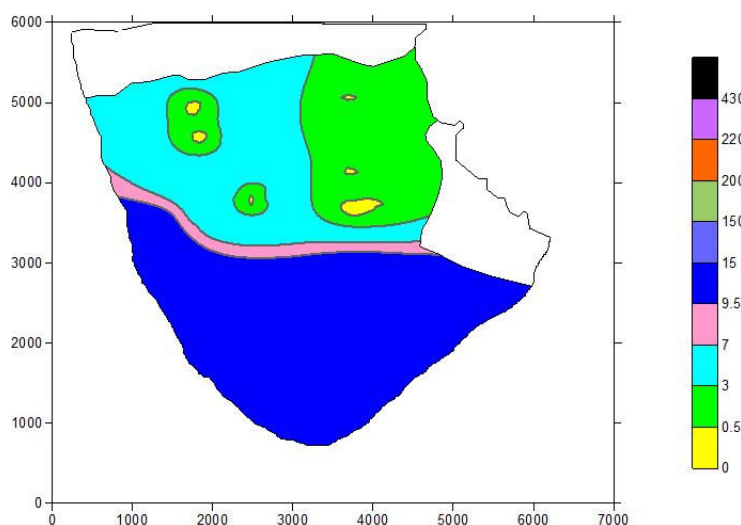
Εφαρμογή της Γεωστατιστικής Μεθόδου Kriging για τον Προσδιορισμό της Υδραυλικής Αγωγιμότητας του Υπόγειου Υδροφορέα στην Περιοχή Χερσονήσου του Ηρακλείου Κρήτης

Κεφάλαιο 3

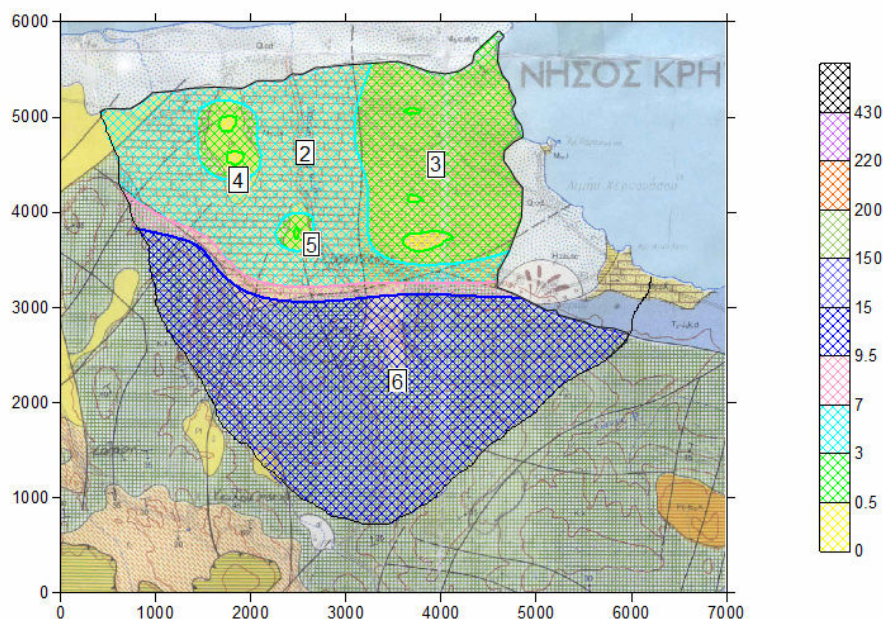
του 100%. Αυτό δικαιολογείται από την άποψη ότι μικρό απόλυτο σφάλμα το σχετικό απόλυτο σφάλμα είναι μεγάλο. Αν δηλαδή το απόλυτο σφάλμα σε αυτούς τους σχηματισμούς είναι 0.15m/d το σχετικό απόλυτο σφάλμα είναι 100%, ενώ απόλυτο σφάλμα 0.15 m/d στον σχηματισμό Νο 2 αντιστοιχεί σε σχετικό απόλυτο σφάλμα μικρότερο του 3%.

Ο συντελεστής γραμμικής συσχέτισης είναι 0.9932, σχεδόν ίσος με ένα.

Ο χάρτης της υδραυλικής αγωγιμότητας της περιοχής που προκύπτει είναι ο ακόλουθος:



Σχήμα 3.56 Χάρτης υδραυλικής αγωγιμότητας για 209 δείγματα ανά κατηγορία πετρώματος με διαχωρισμό της περιοχής σε τμήματα



Σχήμα 3.57 Χάρτης υδραυλικής αγωγιμότητας για 209 δείγματα ανά κατηγορία πετρώματος με διαχωρισμό της περιοχής σε τμήματα

Όπως φαίνεται και στους δύο παραπάνω χάρτες και ήταν και αναμενόμενο η εκτίμηση της περιοχής είναι πολύ καλή. Αυτό είναι λογικό αφού ο αριθμός των δειγμάτων είναι σχετικά μεγάλος και ο τρόπος δειγματοληψίας τους είναι με κατανομή ανά κατηγορία πετρώματος. Οι σχηματισμοί Νο 2 και 3 διαχωρίζονται με ακρίβεια όπως και οι σχηματισμοί Νο 3 και 4 παρά το μεγάλο σχετικό απόλυτο σφάλμα τους. Οι χάρτες αυτοί δείχνουν την εκτίμηση στους σχηματισμούς Νο 2, 3, 4, 5 και 6. Η εκτίμηση μόνον σε αυτούς τους σχηματισμούς δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί από μόνη της. Μπορεί όμως να χρησιμοποιηθεί συμπληρωματικά ώστε να βελτιωθούν οι ατέλειες σε εκτιμήσεις που έγιναν σε προηγούμενες περιπτώσεις.

3.11 Σύγκριση αποτελεσμάτων

Οι παράμετροι που υπολογίζονται από κάθε ημιβαριόγραμμα δίνονται στον πίνακα 3.7 που ακολουθεί.

Σε κάθε περίπτωση φαίνεται πως ο λόγος ανισοτροπίας είναι μικρότερος του 2 οπότε και τα δείγματα θεωρούνται ισотροπικά και η γωνία ανισοτροπίας δεν επηρεάζει την επεξεργασία των δεδομένων.

Τα θεωρητικά μοντέλα που χρησιμοποιήθηκαν είναι το δυναμονομικό και το γραμμικό. Βασική παράμετρος του δυναμονομικού μοντέλου είναι η δύναμη εκθέτη όπου φαίνεται σε όλες τις περιπτώσεις να είναι μεταξύ 0.7 και 0.95. στο γραμμικό μοντέλο βασική παράμετρος είναι η κλίση όπου σε δύο περιπτώσεις είναι σχεδόν ίδια, 13.57 και 15.94. Στην περίπτωση των 50 δειγμάτων με κατανομή ανά κατηγορία πετρώματος έχει χρησιμοποιηθεί φαινόμενο πυρήνα οπότε η κλίση είναι διαφορετική από τις άλλες δύο περιπτώσεις. Στην τέταρτη περίπτωση όπου χρησιμοποιήθηκε το γραμμικό μοντέλο δεν μπορεί να γίνει σύγκριση με τις άλλες περιπτώσεις αφού η 10^1 περίπτωση είναι μεθοδολογία διαχωρισμού της περιοχής. Έχει επιλεγεί ένα μόνο τμήμα της περιοχής για επεξεργασία άρα και τα δεδομένα είναι διαφορετικά και σε μέγεθος αλλά και σε διακύμανση τιμών.

Κεφάλαιο 3

Πίνακας 3.7 Παράμετροι από ημιβαριογράμματα

Τρόπος Δειγματοληψίας & Αριθμός Σημείων	Θεωρητικό Μοντέλο Ημιβαριογράμματος	Δύναμη Εκθέτη	Κλίση	Κλίμακα	Μήκος Συσχέτισης (Km)	Φαινόμενο Πυρήνα	Λόγος Ανισοτροπίας	Γωνία Ανισοτροπίας
τυχαία 50	Δυναμονομικό	0.7253	-	105.8	1	-	1.27	176.3
τυχαία 70	Γραμμικό	-	15.94	-	1	-	1.177	176
τυχαία 100	Δυναμονομικό	0.9015	-	30.17	1	-	1.254	22.77
λογικά 50	Γραμμικό & Φαινόμενο Πυρήνα	-	3.7	-	1	22100	2	4.76
λογικά 70	Δυναμονομικό	0.7364	-	90.29	1	-	2	6.9
λογικά 100	Γραμμικό	-	13.57	-	1	-	1.446	15
λογικά 300	Δυναμονομικό	0.9532	-	13.48	1	-	1.365	0
λογικά 270_κεντρικά	Δυναμονομικό	0.7385	-	77.39	1	-	2	7.35
λογικά 300_κεντρικά_εύρος	Δυναμονομικό	0.8586	-	25.57	1	-	2	10.99
λογικά κέντρο_209_κεντρικά	Γραμμικό	-	0.00941	-	1	-	2	178.5

Κεφάλαιο 3

Στη συνέχεια δίνεται ένας πίνακας όπου παρουσιάζονται τα ποσοστά μέσου σχετικού απόλυτου σφάλματος (mae) για κάθε χάρτη σε κλάσεις 0%-10%, 10%-40%, 40%-100% και >100% καθώς επίσης και ο συντελεστής συσχέτισης R^2 .

Πίνακας 3.8 Ποσοστά μέσου σχετικού απόλυτου σφάλματος

Τρόπος Δειγματοληψίας & Αριθμός Σημείων	τυχαία 50	τυχαία 70	τυχαία 100	λογικά 50	λογικά 70	λογικά 100
0-10 (%)	4.0	20.0	27.0	8.0	15.7	19.0
10-40 (%)	26.0	14.3	20.0	30.0	27.1	27.0
40-100 (%)	20.0	18.6	16.0	16.0	11.4	12.0
>100 (%)	50.0	47.1	37.0	46.0	45.7	42.0
R^2	0.7119	0.7428	0.8764	0.8133	0.8579	0.8825

Τρόπος Δειγματοληψίας & Αριθμός Σημείων	λογικά 300	λογικά 270_κεντρικά	λογικά 300_κεντρικά_εύρος	λογικά κέντρο_209_κεντρικά
0-10 (%)	42.7	58.5	52.0	72.7
10-40 (%)	20.0	18.5	22.7	17.2
40-100 (%)	10.7	6.3	8.3	4.8
>100 (%)	26.7	16.7	17.0	5.3
R^2	0.944	0.9953	0.9936	0.9932

Αρχικά, επιλέγοντας σημεία με τυχαία κατανομή υπήρξε σφάλμα μικρότερο του 40% σε δείγμα 50, 70 και 100 σημείων αντίστοιχα σε ποσοστό 30%, 34,3% και 47%. Επιλέγοντας τα σημεία με κατανομή ανά κατηγορία πετρώματος τα αντίστοιχα ποσοστά είναι 38%, 42,8% και 46%. Είναι φανερό πως όσο αυξάνεται ο αριθμός των δειγμάτων το ποσοστό σφάλματος τείνει να εξομαλυνθεί ανάμεσα στις δύο μεθόδους. Ωστόσο σε μικρό αριθμό δειγμάτων η διαφορά είναι σημαντική αφού είναι 8% για 50 σημεία και 8,5% για 70 σημεία.

Τα αποτελέσματα ήταν πολύ πιο αξιόπιστα βέβαια από τις παραπάνω περιπτώσεις στην περίπτωση που λήφθηκαν 300 σημεία με κατανομή ανά κατηγορία

Κεφάλαιο 3

πετρώματος. Το σφάλμα μικρότερο του 40% ήταν σε ποσοστό 62,7% εκ των οποίων το 42,7% για σφάλμα μικρότερο του 10%.

Όπως φαίνεται και στον παραπάνω πίνακα η επιλογή να ληφθούν δείγματα σε κεντρικά σημεία των γεωλογικών στρωμάτων βελτίωσε κατά πολύ την αξιοπιστία του χάρτη. Συγκεκριμένα σε συνολικό αριθμό 300 δειγμάτων, αρχικά ήταν το 62.7% των σημείων με σφάλμα μικρότερο του 40% ενώ επιλέγοντας κεντρικά σημεία ο αριθμός αυτός αυξήθηκε σε 77% εκ των οποίων το 58.5 % είναι με σφάλμα μικρότερο του 10% ενώ επιλέγοντας κεντρικά σημεία και κάνοντας χρήση του εύρους τιμών σε κάθε στρώμα, ο αριθμός αυτός αυξήθηκε σε 74,7% εκ των οποίων το 52% είναι με σφάλμα μικρότερο του 10%.

Παρόλα αυτά οι τελικοί χάρτες αυτών των δύο περιπτώσεων δεν είχαν τα αντίστοιχα αποτελέσματα, η εκτίμηση δηλαδή της υδραυλικής αγωγιμότητας δεν συμφωνούσε με τον αρχικό χάρτη όπως συνέβη στην περίπτωση όπου λήφθηκαν 300 δείγματα ανά κατηγορία πετρώματος.

Τα ποσοστά σχετικού απόλυτου σφάλματος μπορούν να θεωρηθούν παραπλανητικά στις περιπτώσεις Νο 8 και 9 αφού τα δείγματα δεν καλύπτουν ολόκληρη την περιοχή μελέτης αλλά ένα ποσοστό αυτής. Έτσι επαληθεύεται και στην πράξη ότι είναι προτιμότερο τα δείγματα να είναι ομοιόμορφα κατανεμημένα στην περιοχή και ει δυνατό να έχουν οριστεί πάνω σε έναν κানাβο.

Παρατηρείται ακόμα πως παραλείποντας τα στρώματα με μεγάλη υδραυλική αγωγιμότητα ο χάρτης που δημιουργείται για τα στρώματα με μικρότερη υδραυλική αγωγιμότητα έχει το 90% περίπου των σημείων με σφάλμα μικρότερο του 40% εκ των οποίων το 72,7% είναι με σφάλμα μικρότερο του 10%.

Ο συντελεστής συσχέτισης ανάμεσα στις τιμές που δόθηκαν βάσει του αρχικού χάρτη και των τιμών που προσομοίωσε το λογισμικό πακέτο είναι ικανοποιητικό εάν είναι μεγαλύτερο του 0,8.

Στις περιπτώσεις των 50 και 70 σημείων με τυχαία μέθοδο ο συντελεστής είναι μικρότερος του 0,8 αλλά κάτι τέτοιο δικαιολογείται αφού το δείγμα θεωρείται μικρό και η μέθοδος δειγματοληψίας είναι με τυχαία κατανομή. Σε όλες τις άλλες περιπτώσεις ο συντελεστής συσχέτισης είναι μεγαλύτερος του 0,8 και θεωρείται ικανοποιητικός.

Στην περίπτωση με αριθμό δειγμάτων 300 σημείων με κατανομή ανά κατηγορία πετρώματος ο συντελεστής είναι πολύ καλός (0,944) ενώ στις περιπτώσεις: 270

δείγματα ανά κατηγορία πετρώματος σε κεντρικά σημεία, 300 δείγματα ανά κατηγορία πετρώματος σε κεντρικά σημεία με εύρος τιμών και 209 με κατανομή ανά κατηγορία πετρώματος σε κεντρικά σημεία σε τμήμα της περιοχής ο συντελεστής θεωρείται ιδανικός αφού είναι σχεδόν ίσος με ένα (μεγαλύτερος του 0,99).

Με τον γεωστατιστικό έλεγχο, είναι γνωστό πια για κάθε χάρτη που χρησιμοποιείται το ποσοστό αβεβαιότητας συνολικά του χάρτη αλλά και κάθε σημείου ξεχωριστά καθώς επίσης και ο συντελεστής συσχέτισης μεταξύ πραγματικών και εκτιμώμενων τιμών. Στη συνέχεια ένας τέτοιος χάρτης μπορεί να χρησιμοποιηθεί σε ένα υδρογεωλογικό μοντέλο για περαιτέρω υδρογεωλογικές εκτιμήσεις γνωρίζοντας την ακρίβεια των τιμών της υδραυλικής αγωγιμότητας που αντιστοιχούν στη συγκεκριμένη περιοχή μελέτης.

3.12 Προτάσεις για μελλοντική έρευνα

Η παρούσα διπλωματική εργασία προσεγγίζει σε ικανοποιητικό βαθμό το πρόβλημα προσομοίωσης της υδραυλικής αγωγιμότητας της περιοχής. Μπορούν όμως να ληφθούν υπόψη ορισμένοι παράμετροι ώστε η προσομοίωση και ο τελικός χάρτης που θα προκύψει να είναι ακόμα πιο ακριβής.

Για να επιτευχθεί κάτι τέτοιο θα πρέπει:

- Να δημιουργηθεί ένας κানাβος. Ειδικότερα, τα στοιχεία – δεδομένα θα κατανέμονται σε ένα κανονικό πλέγμα και έτσι οι γείτονες κάθε σημείου (π.χ. ο πλησιέστερος, δεύτερος πλησιέστερος, κ.τ.λ.) θα προσδιορίζονται με ευκολία.
- Να μετατραπούν τα δεδομένα του δείγματος ώστε να ακολουθούν την κανονική κατανομή και να γίνει σύγκριση των αποτελεσμάτων.
- Ο υπολογισμός των ημιβαριογραμμάτων να ελέγχει και να προσδιορίζει το μέγεθος και την κατεύθυνση της ανισοτροπίας. Θα πρέπει να γίνει έλεγχος για τον λόγο της ανισοτροπίας (rate) και την γωνία προσανατολισμού (angle).

Βιβλιογραφία

- [1] Χριστόπουλος, Δ., 2004β, *Πανεπιστημιακές Σημειώσεις Εισαγωγής Στην Έρευνα Κοιτασμάτων*, Τμήμα Μηχανικών Ορυκτών Πόρων, Πολυτεχνείο Κρήτης, Χανιά.
- [2] Χριστόπουλος, Δ., 2003, *Πανεπιστημιακές Σημειώσεις Εισαγωγής Στην Γεωστατιστική*, Τμήμα Μηχανικών Ορυκτών Πόρων, Πολυτεχνείο Κρήτης, Χανιά.
- [3] Βαρουχάκης, Ε., 2005, *Εφαρμογή Της Μεθόδου Των Σπαρτιατικών Τυχαίων Πεδίων Στην Γεωστατιστική Ανάλυση Της Χωρικής Κατανομής Περιβαλλοντικών Ρύπων*, Μεταπτυχιακή εργασία στα πλαίσια του μαθήματος 'Γεωτεχνολογία & Περιβάλλον', Τμήμα Μηχανικών Περιβάλλοντος, Πολυτεχνείο Κρήτης, Χανιά.
- [4] Καπαγερίδης, Ι., 2006, *Εισαγωγή Στη Γεωστατιστική*, Εκδόσεις ΙΩΝ,
- [5] Γεώργιος Π. Καρατζάς, 2002, *Ροή Υπογείων Υδάτων και Μεταφορά Ρύπων*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Πολυτεχνείου Κρήτης.
- [6] Κολυβά – Μαχαίρα, Φ., Μπόρα – Σέντα, Ε., 1995, *Στατιστική*, Εκδόσεις ΖΗΤΗ, Θεσσαλονίκη.
- [7] Ghislain de Marsily, Translated by Gunilla de Marsily, 1981, "Quantitative Hydrology – Groundwater Hydrology for Engineers", p.p. 285-337.
- [8] Michael L. Stein, 2002, "The screening effect in Kriging", *The annals statistics*, Vol. 30, No 1, pp 298-323.
- [9] Στεφανόπουλος, Κ., 2004, *Προσδιορισμός της Ζώνης Υφαλμύρωσης στην Περιοχή Χερσονήσου – Ηρακλείου Κρήτης με Χρήση Προσομοίωσης και Μετρήσεων Πεδίου*, Διπλωματική εργασία, Τμήμα Μηχανικών Περιβάλλοντος, Πολυτεχνείο Κρήτης, Χανιά.
- [10] Γιάννα Φαρσάρη, Πουλίκος Πραστάκος, *Δείκτες ένα εργαλείο για την αειφόρο τουριστική ανάπτυξη. Πιλοτική εφαρμογή στον Δήμο Χερσονήσου Κρήτης*, Ίδρυμα Τεχνολογίας και Έρευνας, Ηράκλειο Κρήτης.

Βιβλιογραφία

- [11] Εθνική Μετεωρολογική Υπηρεσία – Διεύθυνση Κλιματολογίας – Τμήμα Ελέγχου – Επεξεργασίας, 'ΚΛΙΜΑΤΙΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΤΩΝ ΣΤΑΘΜΩΝ ΤΗΣ ΕΜΥ', www.emy.gr
- [12] Υδρογεωλογική Μελέτη Βορείου Νομού Ηρακλείου, Έργο Υ.ΠΕ.ΧΩ.Δ.Ε., Ι.Γ.Μ.Ε. Παράρτημα Κρήτης.
- [13] Freeze, R.A., and Cherry, 1979, Groundwater, Prentice-Hall Inc.