



ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ ΚΡΗΤΗΣ

ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΠΑΡΑΓΩΓΗΣ ΚΑΙ ΔΙΟΙΚΗΣΗΣ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΜΕΘΟΔΟΙ ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗΣ ΠΑΡΑΜΕΤΡΩΝ ΕΛΕΓΧΟΥ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΕΛΕΓΧΟΥ ΡΑΜΠΩΝ ΕΙΣΟΔΟΥ ΣΕ
ΑΥΤΟΚΙΝΗΤΟΔΡΟΜΟΥΣ

Υπό

Ιωάννη Μπέτση

Χανιά, Οκτώβριος 2007

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Σε αυτό το σημείο θα ήθελα να ευχαριστήσω την οικογένεια μου και τους φίλους μου για την στήριξη και την βοήθεια που μου προσέφεραν σε όλη την διάρκεια των σπουδών μου. Επίσης, θα ήθελα να πω ένα μεγάλο ευχαριστώ στον καθηγητή μου, κύριο Ηλία Κοσματοπούλο, για την αμέριστη βοήθεια και στήριξη που μου προσέφερε κατά την πραγματοποίηση της εργασίας αυτής.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

1	<u>ΕΙΣΑΓΩΓΗ</u>	4
2	<u>ΧΡΗΣΙΜΟΙ ΟΡΙΣΜΟΙ</u>	10
3	<u>ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΙ ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗΣ</u>	13
3.1	<u>ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΙ ΑΙΤΙΟΚΡΑΤΙΚΗΣ ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗΣ</u>	13
3.2	<u>ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΙ ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΗΣ ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗΣ</u>	14
3.2.1	<i><u>Ο Αλγόριθμος Στοχαστικής Προσέγγισης των Robins και Monro</u></i>	15
3.2.2	<i><u>Η μέθοδος των Πεπερασμένων Διαφορών (FDSA) των Keifer και Wolfowitz</u></i>	16
3.2.3	<i><u>Η μέθοδος των Ταντόχρονων Διαταραχών SPSA</u></i>	17
3.3	<u>Ο ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗΣ ΠΑΡΑΜΕΤΡΩΝ AFT1</u>	20
3.3.1	<i><u>Εισαγωγή</u></i>	20
3.3.2	<i><u>Ο αλγόριθμος βελτιστοποίησης παραμέτρων AFT1</u></i>	21
3.3.3	<i><u>Η μαθηματική απόδειξη της σύγκλισης του αλγορίθμου AFT</u></i>	23
4	<u>ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΙ ΠΡΟΣΑΡΜΟΣΤΙΚΗΣ ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗΣ</u>	28
5	<u>ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΗΣΗ ΚΑΙ ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗ</u>	37
5.1	<u>ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ ΤΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ</u>	37
5.2	<u>ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΤΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ ΣΤΟ ΠΙΛΟΤΙΚΟ ΕΡΓΟ ΕΚΤΑΣΗΣ ΑΥΤΟΚΙΝΗΤΟΔΡΟΜΟΥ</u>	46
5.3	<u>ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗ ΠΑΡΑΜΕΤΡΩΝ ΜΟΝΤΕΛΟΥ</u>	48
6	<u>ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΗ ΔΙΑΤΑΞΗ</u>	55
6.1	<u>ΔΙΚΤΥΑ ΚΥΚΛΟΦΟΡΙΑΣ</u>	55
6.2	<u>ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΚΥΚΛΟΦΟΡΙΑΚΟΥ ΔΙΚΤΥΟΥ</u>	56
6.3	<u>ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΕΣ ΕΛΕΓΧΟΥ ΤΗΣ ΚΥΚΛΟΦΟΡΙΑΣ</u>	57
6.4	<u>ΡΥΘΜΙΖΟΜΕΝΕΣ ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΙ</u>	58
6.5	<u>ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΣ ΤΩΝ ΑΛΓΟΡΙΘΜΩΝ SPSA, AFT1 ΚΑΙ AFT2</u>	58
6.6	<u>ΑΡΧΙΚΕΣ ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΙ ΤΟΥ ΕΛΕΓΚΤΗ</u>	62
7	<u>ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΠΕΙΡΑΜΑΤΩΝ</u>	63
7.1	<u>ΕΛΕΓΧΟΣ ΡΑΜΠΩΝ ΕΙΣΟΔΟΥ</u>	63
8	<u>ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ</u>	70
	<u>ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ</u>	71

<u>ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α</u>	75
<u>ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Β</u>	86
<u>ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Γ</u>	90

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1: ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Παρά την πρόσφατη πρόοδο στον τομέα των συστημάτων ελέγχου, το πρόβλημα του σχεδιασμού αλγορίθμων για πρακτικά μη γραμμικά συστήματα ελέγχου μεγάλης κλίμακας (PLSNCS) παραμένει ένα αρκετά πολύπλοκο πρόβλημα. Ως αποτέλεσμα, οι πρακτικές προσεγγίσεις σχεδιασμού ελέγχου υποθέτουν υπεραπλουστευμένα μοντέλα για την δυναμική των PLSNCS και για τον λόγο αυτόν ο ελεγκτής απέχει πολύ από το βέλτιστο ή ακόμα και από το αποδεκτό. Αυτό, σε συνδυασμό με τις παραμετρικές και δυναμικές αβεβαιότητες καθώς και τις μακροπρόθεσμες διακυμάνσεις των χαρακτηριστικών του συστήματος, οδηγεί στην ανάγκη για χρονοβόρα και εργοβόρα βελτιστοποίηση του αρχικού σχεδιασμού του ελεγκτή. Στην πλειοψηφία των PLSNCS η διαδικασία της βελτιστοποίησης πραγματοποιείται από πεπειραμένο προσωπικό βασιζόμενο σε πραγματικές παρατηρήσεις πάνω στο αντικείμενο και στην διεξαγωγή πειραμάτων με διαφορετικούς συνδυασμούς των παραμέτρων ελέγχου, χωρίς την χρήση κάποιας συστηματικής προσέγγισης. Μια τέτοια διαδικασία βελτιστοποίησης μπορεί να διαρκέσει μήνες ή ακόμα και έτη έως ότου το σύστημα ελέγχου προσεγγίσει μία αποδεκτή απόδοση.

Τα συστήματα ελέγχου της κυκλοφοριακής κίνησης αυτοκινητοδρόμων και αστικών δικτύων είναι χαρακτηριστικά παραδείγματα των συστημάτων ελέγχου PLSNCS, όπου είναι αναγκαία μία επίπονη διαδικασία βελτιστοποίησης. Στις περισσότερες περιπτώσεις, η συνήθης κατάσταση είναι ότι μετά την αρχική ανάπτυξη του συστήματος ελέγχου της κυκλοφορίας, η απόδοση όλου του συστήματος έχει βελτιωθεί ελαφρώς ή ακόμα και καθόλου. Τότε λαμβάνει χώρα μία διαδικασία συνεχούς βελτιστοποίησης («καλιμπραρίσματος») του συστήματος ελέγχου. Σαν παράδειγμα αναφερόμαστε στην περίπτωση της εφαρμογής ενός συστήματος ελέγχου VSL στον αυτοκινητόδρομο M42 του Ηνωμένου Βασιλείου, όπου χρειάστηκε περισσότερο από ένας χρόνος βελτιστοποίησης των παραμέτρων του ελεγκτή μέχρι το σύστημα να προσεγγίσει μία αποδεκτή απόδοση. Κατά την διάρκεια της αρχικής ανάπτυξης του συστήματος [19], η απόδοση του συστήματος ήταν μερικές φορές χειρότερη από την αντίστοιχη περίπτωση όπου δεν υπήρχε σύστημα ελέγχου. Κατά παρόμοιο τρόπο, το SCOOT (ένα από τα πιο δημοφιλή συστήματα ελέγχου της κίνησης αστικών δικτύων) απαιτεί έτη βελτιστοποίησης έως ότου προσεγγίσει μία

αποδεκτή απόδοση [21]. Τέλος, ακόμα και καθιερωμένα συστήματα ελέγχου της κυκλοφορίας (π.χ. ALINEA, AMOC) απαιτούν αρκετές εβδομάδες βελτιστοποίησης των παραμέτρων τους [30]. Για τον λόγο αυτό οι πάροχοι συστημάτων ελέγχου της κυκλοφορίας και οι χειριστές κυκλοφορίας αφιερώνουν σημαντικά μέσα και μεγάλη προσπάθεια για την βελτίωση των συστημάτων τους μετά την αρχική εφαρμογή.

Δυστυχώς, η διαδικασία της βελτιστοποίησης των συστημάτων ελέγχου της κυκλοφορίας δεν είναι πάντα επιτυχής. Έχουν αναφερθεί πολλές περιπτώσεις (βλέπε π.χ. [27]), όπου παρά την επίπονη διαδικασία της βελτιστοποίησης, το σύστημα ελέγχου της κυκλοφορίας απέτυχε στο να παρέχει την αναμενόμενη απόδοση, ακόμα και σε περιπτώσεις όπου η βελτιστοποίηση του ίδιου συστήματος ελέγχου σε διαφορετικά κυκλοφοριακά δίκτυα παρήγαγε ικανοποιητικά αποτελέσματα. Εκτός από ορισμένες τεχνικές ή κάποιες άλλες δυσκολίες οι οποίες μπορεί να εμφανίστηκαν σε μερικές από τις περιπτώσεις αυτές, η διαδικασία της βελτιστοποίησης πάντα εμπεριέχει τον κίνδυνο της αποτυχίας, δεδομένου του γεγονότος ότι εξαρτάται ισχυρά από τον ανθρώπινο παράγοντα και όχι από μία συστηματική, αυτοματοποιημένη προσέγγιση.

Οι μέθοδοι προσαρμοστικής βελτιστοποίησης όπως η Random Directions Kieffer Wolfowitz (RDKW) [25], η μέθοδος των ταυτόχρονων διαταραχών (SPSA) [14,15] και η προσέγγιση AFT1 (Adaptive Fine-Tuning) [22] παρέχουν ίσως την πιο ελπιδοφόρα προσέγγιση για την ανάπτυξη μίας συστηματικής μεθοδολογίας για την αυτόματη και αποδοτική βελτιστοποίηση των PLSNCS. Ανάμεσα στα πολλά πλεονεκτήματα των μεθόδων προσαρμοστικής βελτιστοποίησης (ΑΟ) έναντι των άλλων ανταγωνιστικών μεθόδων όπως ο προσαρμοστικός ή νευρο-ασαφής έλεγχος, τα πιο σημαντικά είναι τα ακόλουθα:

- Οι μεθοδολογίες προσαρμοστικής βελτιστοποίησης δεν απαιτούν καμία εκ των προτέρων γνώση της δυναμικής του συστήματος. Αυτό έρχεται σε αντίθεση με τις τεχνικές του προσαρμοστικού ή νευρο-ασαφή ελέγχου όπου απαιτείται κάποια εκ των προτέρων γνώση της δυναμικής του συστήματος και επιβάλλονται αυστηρές υποθέσεις για το ελεγχόμενο σύστημα. Στην πραγματικότητα, οι αυστηρές υποθέσεις αυτές [20] εμποδίζουν την ευρεία εφαρμογή του προσαρμοστικού ή νευρο-ασαφή ελέγχου στα PLSNCS.
- Οι μεθοδολογίες προσαρμοστικής βελτιστοποίησης είναι υπολογιστικά απλές και ικανές να διαχειριστούν προβλήματα πολύ μεγάλων διαστάσεων. Αυτό

είναι ιδιαίτερα σημαντικό για την βελτιστοποίηση των PLSNCS, όπου οι παράμετροι του ελεγκτή οι οποίες πρέπει να βελτιστοποιηθούν είναι μερικές φορές της τάξεως μερικών εκατοντάδων.

- Οι μεθοδολογίες προσαρμοστικής βελτιστοποίησης εγγυώνται σύγκλιση σε, ή κοντά σε, ένα τοπικό ελάχιστο του δείκτη απόδοσης τον οποίο έχουν την πρόθεση να ελαχιστοποιήσουν ή να μεγιστοποιήσουν.
- Τέλος, Οι μεθοδολογίες προσαρμοστικής βελτιστοποίησης μπορούν να χρησιμοποιηθούν άμεσα για την βελτιστοποίηση των συστημάτων ελέγχου που έχουν αναπτυχθεί χρησιμοποιώντας μη προσαρμοστικές τεχνικές. Αυτό είναι ζωτικής σημασίας στην περίπτωση των PLSNCS τα οποία έχουν σχεδιαστεί χρησιμοποιώντας μη προσαρμοστικές τεχνικές όπως συμβαίνει στην πλειοψηφία των συστημάτων ελέγχου της κυκλοφορίας. Στις περισσότερες από αυτές τις περιπτώσεις τεχνικές προσαρμοστικού ή νευρο-ασαφή ελέγχου δεν μπορούν να εφαρμοστούν άμεσα.

Η βασική ιδέα που βρίσκεται πίσω από τις προαναφερθείσες μεθοδολογίες προσαρμοστικής βελτιστοποίησης είναι η χρήση δύο ή περισσότερων επιτυχημένων εκτιμήσεων ενός κατάλληλα ορισμένου δείκτη απόδοσης, ο οποίος χρησιμοποιείται για την μέτρηση του πόσο καλό είναι ένα συγκεκριμένο σύνολο παραμέτρων του ελεγκτή, έχοντας ως σκοπό την κατασκευή μίας εκτίμησης της κλίσης αυτού του δείκτη. Έπειτα, εφαρμόζεται μία μέθοδος μέγιστης κατάβασης έτσι ώστε να προσδιοριστεί ένα νέο σύνολο παραμέτρων. Πιο συγκεκριμένα οι μεθοδολογίες προσαρμοστικής βελτιστοποίησης περιέχουν δύο φάσεις:

1. Στην φάση διαταραχών, εκτιμάται ο δείκτης απόδοσης σε μία ή περισσότερες διαταραχές του παρόντος συνόλου των παραμέτρων του ελεγκτή.

2. Στην φάση μέγιστης κατάβασης, οι τρέχουσες παράμετροι του ελεγκτή τροποποιούνται χρησιμοποιώντας μία εκτίμηση της κλίσης του δείκτη απόδοσης, η οποία υπολογίζεται χρησιμοποιώντας τις εκτιμήσεις του δείκτη απόδοσης της προηγούμενης φάσης.

Οι διαταραχές που χρησιμοποιούνται στην φάση των διαταραχών θα πρέπει να ικανοποιούν συγκεκριμένες Persistency of Excitation (PE) συνθήκες [22,23] οι οποίες θα πρέπει να επιλεγθούν έτσι ώστε να παρέχουν στον αλγόριθμο προσαρμοστικής βελτιστοποίησης αρκετές πληροφορίες για την παραγωγή μίας

ακριβής εκτίμησης της κλίσης. Τυχαία ή σχεδόν τυχαία επιλογή αυτών των διαταραχών είναι επαρκής στο να εγγυηθεί ότι θα ικανοποιούν μία συνθήκη PE.

Υπάρχουν πολλές επιτυχείς εφαρμογές των μεθοδολογιών προσαρμοστικής βελτιστοποίησης με εφαρμογή σε βελτιστοποίηση συστημάτων ελέγχου που αναφέρονται στην βιβλιογραφία (βλέπε π.χ. [16,22]). Όμως, παρά την επιτυχία των μεθοδολογιών προσαρμοστικής βελτιστοποίησης στις συγκεκριμένες εφαρμογές, αυτές μειονεκτούν όσον αφορά το γεγονός ότι δεν εγγυώνται αποτελεσματική συμπεριφορά ελέγχου κατά την φάση των διαταραχών. Αυτό συμβαίνει διότι όταν χρησιμοποιούνται τυχαίες ή σχεδόν τυχαίες διαταραχές, ενδέχεται να υπάρξουν περιπτώσεις όπου μία συγκεκριμένη διαταραχή μπορεί να οδηγήσει σε μία μη αποδεκτή τιμή του δείκτη απόδοσης. Στα συστήματα ελέγχου κλειστού βρόχου μία μικρή διαταραχή ενός «καλού» συνόλου παραμέτρων του ελεγκτή μπορεί να οδηγήσει σε μία μη αποδεκτή, ή ακόμα χειρότερα ασταθή, συμπεριφορά κλειστού βρόχου.

Πρόσφατα, προτάθηκε και αναλύθηκε μία τροποποίηση του AFT1, την οποία θα αποκαλούμε AFT2 από εδώ και στο εξής η οποία ανακουφίζει το προαναφερθέν πρόβλημα. [23,24]. Όπως φαίνεται στην [23,24]:

- Όπως ο SPSA και ο AFT1, έτσι και ο AFT2 διατηρεί μία παρόμοια συμπεριφορά με αυτήν μίας προσεγγιστικής μεθόδου μέγιστης κατάβασης.
- Σε αντίθεση με τον SPSA και τον AFT1, ο AFT2 συνδυάζει την φάση των διαταραχών και την φάση της μέγιστης κατάβασης σε μία, εξασφαλίζοντας ότι οι διαταραχές PE βρίσκονται επίσης στην κατεύθυνση που υποδεικνύεται από μία μέθοδο μέγιστης κατάβασης.
- Όπως ο AFT1, και σε αντίθεση με τον SPSA, ο οποίος δεν είναι ικανός να ενσωματώσει την γνώση που έχει ληφθεί στο παρελθόν αναφορικά με την σχέση [παραμέτροι του ελεγκτή, κυκλοφοριακή ζήτηση] → [δείκτης απόδοσης], ο AFT2 χρησιμοποιεί έναν πολυωνμικό προσεγγιστή για την εκτίμηση αυτής της σχέσης.
- Ο AFT2 χρησιμοποιεί μία υπολογιστικά αποδοτική διαδικασία για τον υπολογισμό της «καλύτερης» ανάμεσα σε πολλές υποψήφιες PE διαταραχές. Η διαδικασία αυτή απορρίπτει αυτόματα τις υποψήφιες διαταραχές που μπορεί να οδηγήσουν σε φτωχή απόδοση και επιλέγει τις PE διαταραχές οι

οποίες εγγυώνται σύγκλιση της διαδικασίας βελτιστοποίησης σε ένα τοπικό ελάχιστο.

Σε κάθε επανάληψη του αλγορίθμου AFT2, πολλές τυχαία επιλεγμένες διαταραχές καθώς και οι αρνητικές τιμές τους θεωρούνται ως υποψήφιες διαταραχές. Χρησιμοποιώντας έναν πολυωνυμικό προσεγγιστή και κατάλληλους αλγορίθμους εκμάθησης/βελτιστοποίησης, εκτιμάται η επίδραση της κάθε υποψήφιας διαταραχής στην απόδοση του συστήματος και επιλέγεται η καλύτερη διαταραχή. Αξίζει να σημειωθεί ότι είναι ιδιαίτερα σημαντικό για την αποτελεσματικότητα του AFT2, κάθε φορά που ελέγχει μία υποψήφια διαταραχή να ελέγχει και την αρνητική τιμή της. Αυτό συμβαίνει επειδή εάν μία συγκεκριμένη διαταραχή οδηγήσει σε μία μείωση του δείκτη απόδοσης της τάξεως του $\chi\%$, τότε η αρνητική της θα οδηγήσει σε μία αύξηση του δείκτη απόδοσης περίπου της τάξεως του $\chi\%$ και αντιστρόφως. Τέλος, η επιλογή πολλών υποψήφιων διαταραχών πραγματοποιείται έτσι ώστε να αποφευχθεί μία κατάσταση όπου μία συγκεκριμένη υποψήφια διαταραχή οδηγεί σε μία αμελητέα αύξηση ή μείωση ($\chi \approx 0$) του δείκτη απόδοσης.

Στην εργασία αυτή παρουσιάζεται μία συγκριτική εκτίμηση του AFT2 σε σχέση με τον SPSA και τον AFT1 σε μία εφαρμογή ελέγχου της κυκλοφορίας, η οποία είναι ο έλεγχος ραμπών εισόδου σε αυτοκινητόδρομο. Στην περίπτωση αυτή το μοντέλο προσομοίωσης της κυκλοφορίας και τα σενάρια ζήτησης που χρησιμοποιήθηκαν σχεδιάστηκαν χρησιμοποιώντας μετρήσεις της κυκλοφορίας από το πραγματικό δίκτυο. Τα σενάρια που θεωρήθηκαν στις ερευνητικές μας προσομοιώσεις, υπέθεσαν αρχικούς ελεγκτές οι οποίοι ενσωμάτωναν μηδενική ή μερική γνώση των χαρακτηριστικών του δικτύου. Τέλος, σε αυτή την περίπτωση θεωρήθηκαν τυχαίες κυκλοφοριακές διακυμάνσεις της κυκλοφοριακής ζήτησης.

Τα κύρια ευρήματα της συγκριτικής αξιολόγησης που παρουσιάζεται σε αυτή την εργασία είναι τα ακόλουθα:

- Και οι τρεις αλγόριθμοι επέδειξαν μία αρκετά ικανοποιητική απόδοση και στην περίπτωση όπου ο αρχικός ελεγκτής ήταν ένας ελεγκτής ALINEA ο AFT1 και ο AFT2 πέτυχαν σημαντικά ταχύτερη σύγκλιση σε σύγκριση με τον SPSA. Επίσης, σε όλα τα σενάρια που θεωρήθηκαν, ο AFT2 παρήγαγε μία καλύτερη προσωρινή συμπεριφορά συγκριτικά με τον SPSA και τον AFT1, αποφεύγοντας καταστάσεις όπου η απόδοση σε συγκεκριμένες μέρες ήταν σημαντικά χειρότερη από την περίπτωση όπου δεν εφαρμοζόταν ο έλεγχος.

- Τέλος στις περιπτώσεις του SPSA και του AFT1 η ικανοποιητική απόδοσή τους επετεύχθει μόνο υπό την κατάλληλη επιλογή των σχεδιαστικών τους παραμέτρων. Η επιλογή των παραμέτρων αυτών δεν είναι σαφής όπως συμβαίνει στην περίπτωση του AFT2, και ως αποτέλεσμα, μία εφαρμογή του SPSA ή του AFT1 σε ένα πραγματικό σύστημα ελέγχου ραμπών εισόδου μπορεί να απαιτήσει σημαντική προσπάθεια και χρόνο για τον πειραματισμό με διαφορετικούς συνδυασμούς αυτών των σχεδιαστικών παραμέτρων.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 : ΧΡΗΣΙΜΟΙ ΟΡΙΣΜΟΙ

Στη θεωρία των πιθανοτήτων, μία ακολουθία ή ένα σύνολο τυχαίων αριθμών ονομάζεται i.i.d (independent and identically distributed) εάν όλοι οι τυχαίοι αριθμοί που το αποτελούν ακολουθούν την ίδια κατανομή και είναι αμοιβαίως ανεξάρτητοι μεταξύ τους.

Μία συνάρτηση f λέγεται ότι είναι C^m , όπου m ένας θετικός ακέραιος αριθμός, εάν είναι συνεχής και το ίδιο ισχύει και για τις m πρώτες παράγωγούς της.

Μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού ένα υποσύνολο $D \subseteq \mathbb{R}$ και πεδίο τιμών το σύνολο των πραγματικών αριθμών, $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ονομάζεται συνεχής κατά Lipschitz εάν υπάρχει $K \geq 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $x, y \in D$ να ισχύει η σχέση:

$$|f(x) - f(y)| \leq K|x - y|$$

Το μικρότερο K για το οποίο ισχύει η σχέση (2.1) ονομάζεται Lipschitz σταθερά της συνάρτησης f .

Εάν η συνάρτηση f ορίζεται στο διάστημα M και δίνει τιμές στο διάστημα N , $f : M \rightarrow N$ τότε ονομάζεται συνεχής κατά Lipschitz εάν υπάρχει $K \geq 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $x, y \in M$ να ισχύει η σχέση:

$$d'(f(x), f(y)) \leq Kd(x, y) \quad (2.1)$$

Εάν $f_a(\cdot)$ είναι μία συνάρτηση παραμετροποιημένη από ένα διάνυσμα a με θετικά στοιχεία, τότε λέμε ότι η $f_a(\cdot)$ είναι $O(a)$, εάν υπάρχει μονοδιάστατη συνάρτηση $g(\cdot)$ που να ικανοποιεί τις σχέσεις: $g(0) = 0$, $g(a) > 0, \forall a \neq 0$ και $g([a_1, a_2, \dots, a_i, \dots, a_n]^T) < g([a_1, a_2, \dots, a_i + \Delta a, \dots, a_n]^T), \forall i, \forall \Delta a > 0$, έτσι ώστε για κάθε x και κάθε $a \geq 0$ να υπάρχει ένας μη-αρνητικός, πραγματικός αριθμός c_1 για τον οποίο να ισχύει: $|f_a(x)| \leq c_1 g(a)$.

Ο συμβολισμός $\text{vec}(A, B)$, όπου A, B είναι διανύσματα ή πίνακες, χρησιμοποιείται για να δηλώσει ένα διάνυσμα του οποίου τα στοιχεία είναι τα στοιχεία των A και B (κατά στήλη).

Εάν x είναι ένα διάνυσμα, τότε ο $\text{diag}(x_i)$ είναι ένας διαγώνιος πίνακας με τα στοιχεία της διαγωνίου του ίσα με αυτά του διανύσματος x .

Η μορφή ενός -ως-προς-τις-παραμέτρους Μη-γραμμικού Προσεγγιστή (Linear-in-the-Weights Universal Approximator) είναι η εξής:

$$y = \mathcal{G}^T \phi(x), \quad (2.2)$$

όπου $x \in \mathbb{R}^{n_1}$ είναι το διάνυσμα εισόδου του Προσεγγιστή, $y \in \mathbb{R}^{n_2}$ το διάνυσμα εξόδου του Προσεγγιστή, $\mathcal{G} \in \mathbb{R}^{n_2 \times L}$ ο πίνακας με τις σταθερές παραμέτρους, $\phi: \mathbb{R}^{n_1} \rightarrow \mathbb{R}^L$ μία μη-γραμμική διανυσματική συνάρτηση των όρων παλινδρόμησης, και ο L ένας ακέραιος αριθμός που δηλώνει τον πλήθος των όρων παλινδρόμησης του Προσεγγιστή. Αποδεικνύεται ότι διάφορα μοντέλα νευρωνικών δικτύων, δίκτυα καμπανοειδών συναρτήσεων (radial basis functions), νευρωνικά δίκτυα με συναρτήσεις ενεργοποίησης σιγμοειδείς μετατοπισμένες συναρτήσεις, προσαρμοστικά ασαφή συστήματα, κ.α. (βλέπε π.χ., [2, 3, 13, 11, 1, 7, 8, 9]) ανήκουν στους Καθολικούς Προσεγγιστές της μορφής (2.2).

Μία σημαντική ιδιότητα που ικανοποιούν πολλοί Προσεγγιστές της μορφής (2.2) είναι η εξής: Μία οικογένεια συναρτήσεων λέμε ότι ανήκει σε μία οικογένεια Καθολικών Προσεγγιστών, εάν για κάθε συνεχή συνάρτηση $F: \mathbb{R}^{n_1} \rightarrow \mathbb{R}^{n_2}$, για κάθε $\varepsilon > 0$ και κάθε συμπαγές (δηλαδή, κλειστό και φραγμένο) υποσύνολο $X \subset \mathbb{R}^{n_1}$ υπάρχει ένας ακέραιος L και ένας πίνακας \mathcal{G}^* τέτοιοι ώστε ο Προσεγγιστής με τους L όρους να ικανοποιεί τη σχέση:

$$\sup_{x \in X} |F(x) - \mathcal{G}^{*T} \phi(x)| \leq \varepsilon \quad (2.3)$$

Εάν συμβολίσουμε με $\nu(x)$ την απόκλιση μεταξύ της συνάρτησης $F(x)$ και της εκτίμησής της, έχουμε: $F(x) = \mathcal{G}^{*T} \phi(x) + \nu(x)$. Ο βέλτιστος πίνακας των παραμέτρων \mathcal{G}^* και το βέλτιστο σφάλμα μοντελοποίησης $\nu(\cdot)$ συναρτήσει των $L, \phi, F(\cdot), X$ ορίζονται ως εξής:

$$\mathcal{G}^* := W(L, \phi, F, X) := \arg \min_{\mathcal{G}} \sup_{x \in X} |F(x) - \mathcal{G}^{*T} \phi(x)| \quad \text{και}$$

$$\nu(x) := N(L, \phi, F, X) := F(x) - \mathcal{G}^{*T} \phi(x) .$$

Αξίζει να σημειωθεί ότι λόγω της ιδιότητας που ικανοποιούν οι Καθολικοί Προσεγγιστές, το $\sup_{x \in X} \nu(x)$ μπορεί να λάβει αυθαίρετα πολύ μικρές τιμές μέσω κατάλληλης επιλογής του ακέραιου αριθμού L . Γενικά, το $\sup_{x \in X} \nu(x)$ μειώνεται όσο αυξάνεται το L .

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 : ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΙ ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗΣ

3.1 Αλγόριθμοι αιτιοκρατικής βελτιστοποίησης

Ο άνθρωπος από την αρχή της ύπαρξής του, καλείται να επιλύσει προβλήματα βελτιστοποίησης για κάθε σχεδόν δραστηριότητά του. Καλείται να αντιμετωπίσει τη διαδικασία ανταλλαγής και εξισορρόπησης μεταξύ διαφορετικών παραγόντων με σκοπό την λήψη επιθυμητών αποτελεσμάτων. Η διαδικασία επιλογής των παραμέτρων μιας διαδικασίας κατά ένα βέλτιστο τρόπο αποτελεί και την ουσία του προβλήματος της βελτιστοποίησης.

Μπορούμε να μοντελοποιήσουμε ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης ορίζοντας μία αντικειμενική συνάρτηση και ένα σύνολο παραμέτρων οι οποίες αν ρυθμιστούν κατάλληλα θα παρέχουν την ελάχιστη δυνατή τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης. Η μοντελοποίηση έχει τη μορφή:

$$\text{Να βρεθεί το } \theta^* \text{ που παρέχει το } \min_{\theta \in C} L(\theta) \quad (3.1)$$

όπου το $L : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^1$ απεικονίζει την υπό ελαχιστοποίηση συνάρτηση, το θ αποτελεί το διάνυσμα των ρυθμιζόμενων, p σε αριθμό, παραμέτρων, και $C \subseteq \mathbb{R}^p$ είναι το σύνολο που ορίζει τις επιτρεπτές τιμές που μπορούν να λάβουν οι παράμετροι θ .

Στην παρούσα διατριβή, αναφερόμαστε σε προβλήματα των οποίων οι παράμετροι θ λαμβάνουν συνεχείς τιμές και όχι διακριτές. Επιπλέον, οι συναρτήσεις L είναι αρκετά πολύπλοκες με αποτέλεσμα να μην είναι δυνατή η αναλυτική επίλυση της σχέσης (3.1). Έτσι, για την επίλυση της, γίνεται χρήση ενός επαναληπτικού αλγορίθμου, μίας βαθμιαίας, δηλαδή, διαδικασίας που κινείται από μία αρχική εκτίμηση του θ^* σε ένα τελικό διάνυσμα, το οποίο αναμένεται να αποκλίνει λιγότερο από το πραγματικό θ^* σε σύγκριση με την αρχική εκτίμησή του, παρέχοντας βελτίωση (μείωση) στην τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης.

Πολλές από τις μεθόδους βελτιστοποίησης βασίζονται στον υπολογισμό του διανύσματος κλίσης της υπό βελτιστοποίηση αντικειμενικής συνάρτησης συναρτήσει των παραμέτρων του προβλήματος:

$$g(\theta) \equiv \begin{bmatrix} \frac{\partial L}{\partial \theta_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial L}{\partial \theta_p} \end{bmatrix}.$$

Έτσι, για τοπική βελτιστοποίηση χωρίς περιορισμούς, η συνθήκη που πρέπει να ικανοποιείται είναι:

$$g(\theta^*) = 0. \quad (3.2)$$

3.2 Αλγόριθμοι στοχαστικής βελτιστοποίησης

Πέρα από τις περιπτώσεις όπου μας παρέχεται η αναλυτική μορφή της αντικειμενικής συνάρτησης του προβλήματος βελτιστοποίησης (deterministic optimization), υπάρχουν περιπτώσεις όπου το μόνο που μας παρέχεται είναι μετρήσεις της αντικειμενικής συνάρτησης οι οποίες εμπεριέχουν τυχαίο θόρυβο. Για την επίλυση προβλημάτων αυτής της κατηγορίας, χρησιμοποιούμε αλγορίθμους Στοχαστικής Προσέγγισης.

Οι αλγόριθμοι Στοχαστικής Προσέγγισης διαχωρίζονται σε αυτούς που βασίζονται στις απευθείας μετρήσεις του διανύσματος κλίσης $g(\theta)$ και σε αυτούς που έχουν στη διάθεσή τους μετρήσεις μόνο της αντικειμενικής συνάρτησης και όχι της κλίσης αυτής.

Γενικά, οι στοχαστικοί αλγόριθμοι που βασίζονται σε μετρήσεις της προς ελαχιστοποίηση αντικειμενικής συνάρτησης και όχι της κλίσης $g(\theta)$ αυτής, επιδεικνύουν ικανότητα σύγκλισης παρόμοια με αυτή των στοχαστικών αλγορίθμων που βασίζονται σε μετρήσεις της κλίσης. Ένα βασικό πλεονέκτημα των πρώτων είναι ότι δεν απαιτούν άριστη γνώση της σχέσης μεταξύ των υπό ρύθμιση παραμέτρων και της υπό ελαχιστοποίηση συνάρτησης, η οποία απαιτείται στους αλγορίθμους που βασίζονται στη γνώση της $g(\theta)$. Ο υπολογισμός αυτής της σχέσης μπορεί να αποδειχθεί πραγματικά δύσκολος ενώ το κόστος υπολογισμού μίας αντικειμενικής συνάρτησης είναι πολύ μικρότερο από το κόστος υπολογισμού της κλίσης αυτής.

Ο πρώτος αλγόριθμος που αναπτύχθηκε και που βασίζεται σε μετρήσεις της κλίσης της συνάρτησης είναι ο αλγόριθμος Στοχαστικής Προσέγγισης των Robins και Monro (R-M SA) [12]. Ο αλγόριθμος αυτός αποτελεί γενίκευση τεχνικών όπως αυτές της μέγιστης κατάβασης, Newton-Raphson, Neural Network back-propagation, και infinitesimal perturbation.

Δύο κλασικές μέθοδοι Στοχαστικής Προσέγγισης που δεν βασίζονται σε μετρήσεις της κλίσης της αντικειμενικής συνάρτησης αλλά σε μετρήσεις της ίδιας, είναι αυτές των Πεπερασμένων Διαφορών των Keifer και Wolfowitz (Finite-Difference Stochastic Approximation, FDSA) [6] και των Ταυτόχρονων Διαταραχών του Spall (Simultaneous Perturbation Stochastic Approximation, SPALL) [14,15]. Και οι δύο προσεγγίσεις χρησιμοποιούν αριθμητικές μεθόδους για την εκτίμηση του άγνωστου διανύσματος κλίσης.

3.2.1 Ο αλγόριθμος Στοχαστικής Προσέγγισης των Robins και Monro (RMSA)

Ένα κλασικό πρόβλημα βελτιστοποίησης στο οποίο εφαρμόζεται ο αλγόριθμος RMSA [12] είναι αυτό της εύρεσης της ρίζας της εξίσωσης $g(\theta) = 0$, μέσω μετρήσεων με θόρυβο της $g(\theta)$. Έστω $Y(\theta)$ η εκτίμηση της $g(\theta)$. Ο αλγόριθμος έχει τη μορφή:

$$\hat{\theta}_{k+1} = \hat{\theta}_k - a_k Y(\hat{\theta}_k), \quad (3.3)$$

όπου a_k μία μη-αρνητική ακολουθία, και $\hat{\theta}_k$ η εκτίμηση του θ^* στην k -οστή επανάληψη του αλγορίθμου.

Η επιλογή της ακολουθίας $\{a_k\}$ πρέπει να είναι τέτοια ώστε να παρέχεται μία ισορροπία μεταξύ της επιθυμίας για μείωση του προστιθέμενου κινδύνου καθώς πλησιάζουμε στη βέλτιστη λύση θ^* ($a_k \rightarrow 0$) και της επιθυμίας για αποφυγή πρόωρης (λανθασμένης) σύγκλισης του αλγορίθμου ($\sum_k a_k = \infty$). Η scaled αρμονική ακολουθία $\{a/(k+1)\}$, $a > 0$ είναι το καλύτερο παράδειγμα ακολουθίας που μας εξασφαλίζει τα παραπάνω. Η σύγκλιση του αλγορίθμου εξαρτάται και από άλλους

παράγοντες, όπως για παράδειγμα το σχετικό εύρος του ενσωματωμένου στις μετρήσεις θορύβου, και την αρχική εκτίμηση του θ .

3.2.2 Η μέθοδος των Πεπερασμένων Διαφορών (FDSA) των Keifer και Wolfowitz

Έστω $\hat{\theta}_k$ η εκτίμηση του θ στο k -οστό βήμα. Ένας τυπικός αλγόριθμος στοχαστικής προσέγγισης έχει τη μορφή:

$$\hat{\theta}_{k+1} = \hat{\theta}_k - a_k \hat{g}_k(\hat{\theta}_k), \quad (3.4)$$

όπου $\hat{g}_k(\hat{\theta}_k)$ είναι η εκτίμηση της κλίσης $g(\theta) \equiv \partial L / \partial \theta$ στην k -οστή επανάληψη του αλγορίθμου. Οι μέθοδοι των Πεπερασμένων Διαφορών και της Ταυτόχρονης Διαταραχής διαφέρουν ως προς τον τρόπο που υπολογίζεται η εκτίμηση αυτή της κλίσης.

Έστω $y(\cdot)$ μία μέτρηση της συνάρτησης $L(\cdot)$ ($y(\cdot) = L(\cdot) + \text{noise}$), και c_k ένας μικρός θετικός αριθμός. Εάν p είναι ο αριθμός των υπό βελτιστοποίηση παραμέτρων, κατά τη μέθοδο των Πεπερασμένων Διαφορών [6] λαμβάνουμε $2p$ νέες μετρήσεις της συνάρτησης $L(\cdot)$ σε κάθε επανάληψη του αλγορίθμου, προσθέτοντας διαταραχή σε κάθε ένα από τα στοιχεία του τρέχοντος διανύσματος $\hat{\theta}_k$ ξεχωριστά. Για παράδειγμα, οι δύο νέες μετρήσεις που λαμβάνονται μέσω προσθήκης διαταραχής στο i -οστό στοιχείο του διανύσματος $\hat{\theta}_k$ (με $i=1,2,\dots,p$) είναι οι: $y(\hat{\theta}_k + \text{διαταραχή}) = y(\hat{\theta}_k + c_k e_i) = y_k^{(+)}$ και $y(\hat{\theta}_k - \text{διαταραχή}) = y(\hat{\theta}_k - c_k e_i) = y_k^{(-)}$ όπου e_i ένα διάνυσμα του οποίου όλα τα στοιχεία είναι μηδέν, εκτός από το i -οστό που είναι ίσο με τη μονάδα. Επομένως, το i -οστό στοιχείο του διανύσματος $\hat{g}_k(\hat{\theta}_k)$ υπολογίζεται από τη σχέση: $\hat{g}_{ki}(\hat{\theta}_k) = \frac{y(\hat{\theta}_k + c_k e_i) - y(\hat{\theta}_k - c_k e_i)}{2c_k}$ με c_k έναν μικρό θετικό αριθμό που συνήθως μειώνεται καθώς το αυξάνεται.

3.2.3 Η μέθοδος των Ταυτόχρονων Διαταραχών SPSA

Όπως προαναφέρθηκε, η διαφορά μεταξύ της προσεγγιστικής μεθόδου των Πεπερασμένων Διαφορών και αυτής των Ταυτόχρονων Διαταραχών έγκειται στον τρόπο υπολογισμού της εκτίμησης της κλίσης $g(\theta)$ της υπό ελαχιστοποίηση συνάρτησης (βλέπε σχέση (3.4)).

Η μέθοδος των Ταυτόχρονων Διαταραχών (SPSA) [14,15] που αναλύεται παρακάτω υπολογίζει την εκτίμηση της κλίσης $g(\theta)$ χρησιμοποιώντας μόνο δύο μετρήσεις της συνάρτησης $L(\cdot)$ σε κάθε επανάληψη του αλγορίθμου, σε αντίθεση με τη προσέγγιση μέσω Πεπερασμένων Διαφορών (FDSA) που χρησιμοποιεί 2p μετρήσεις της L σε κάθε επανάληψη. Ο όρος Ταυτόχρονη Διαταραχή προκύπτει από το γεγονός ότι όλα τα στοιχεία του διανύσματος $\hat{\theta}_k$ αλλάζουν ταυτόχρονα.

Υποθέτουμε, λοιπόν, ότι έχουμε στη διάθεση μας τιμές της L με θόρυβο. Έστω :

$$y_k = L(\hat{\theta}_k \pm c_k \Delta_k) + e_k, \quad (3.5)$$

όπου τα e_k αντιπροσωπεύουν τον όρο του θορύβου και η $\{c_k\}$ είναι μια θετική ακολουθία. Κατά τη μέθοδο των Ταυτόχρονων Διαταραχών, η εκτίμηση της g στο k -οστό βήμα του αλγορίθμου υπολογίζεται από τον τύπο:

$$\hat{g}_k(\hat{\theta}_k) = \begin{bmatrix} \frac{y_k^{(+)} - y_k^{(-)}}{2c_k \Delta_{k1}} \\ \vdots \\ \frac{y_k^{(+)} - y_k^{(-)}}{2c_k \Delta_{kp}} \end{bmatrix} = \frac{y_k^{(+)} - y_k^{(-)}}{2c_k} \begin{bmatrix} (\Delta_{k1})^{-1} \\ \vdots \\ (\Delta_{kp})^{-1} \end{bmatrix}, \quad (3.6)$$

όπου $\Delta_k \in \mathbb{R}^p$, ένα διάνυσμα από p αμοιβαίως ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με μέση τιμή μηδέν. Από μελέτες που έχουν γίνει από τον J. Spall [16], προκύπτει ότι τα Δ_k είναι προτιμότερο να ακολουθούν την συμμετρική κατανομή Bernoulli.

Η δυσκολία σε αυτόν τον αλγόριθμο έγκειται στην επιλογή των τιμών των μεταβλητών που σχετίζονται με τις ακολουθίες $\{a_k\}$ και $\{c_k\}$, δηλαδή των a, A ,

$\alpha(a)$ για την πρώτη και c, γ για τη δεύτερη [16,18]. Παρακάτω παρουσιάζονται αναλυτικά όλα τα βήματα του αλγορίθμου SPSA.

Βήμα 1: Αρχικοποίηση και επιλογή των τιμών των συντελεστών. Αρχίζουμε τις επαναλήψεις θέτοντας $k=1$. Ορίζουμε τους μη αρνητικούς συντελεστές a, c, A, α, γ για τις ακολουθίες $a_k = \frac{a}{(k+A)^\alpha}$ και $c_k = \frac{c}{k^\gamma}$. Η επιλογή των ακολουθιών a_k και c_k παίζει σημαντικό ρόλο στην απόδοση του SPSA αλγορίθμου.

Βήμα 2: Δημιουργία του διανύσματος ταυτόχρονης διαταραχής Δ_k . Με τη βοήθεια της γεννήτριας Monte Carlo, δημιουργούμε το τυχαίο διάνυσμα διάστασης p , του οποίου τα στοιχεία είναι αμοιβαίως ανεξάρτητα και το κάθε ένα από αυτά ακολουθεί κατανομή με μέση τιμή μηδέν. Μία απλή και θεωρητικά έγκυρη κατανομή είναι η Bernoulli ± 1 με πιθανότητα $1/2$ για κάθε ένα από τα ± 1 εξαγόμενα. Να σημειωθεί ότι οι τυχαίες μεταβλητές δεν επιτρέπεται να ακολουθούν ομοιόμορφη και κανονική κατανομή.

Βήμα 3: Μετρήσεις της προς ελαχιστοποίηση συνάρτησης. Παίρνουμε δύο τιμές της συνάρτησης L , οι οποίες βασίζονται στην ταυτόχρονη διαταραχή γύρω από το τρέχον διάνυσμα $\hat{\theta}_k$, δηλαδή την $y(\hat{\theta}_k + \text{διαταραχή}) = y(\hat{\theta}_k + c_k \Delta_k) = y_k^{(+)}$ και την $y(\hat{\theta}_k - \text{διαταραχή}) = y(\hat{\theta}_k - c_k \Delta_k) = y_k^{(-)}$, όπου τα c_k και Δ_k υπολογίζονται στα Βήματα 1 και 2 του αλγορίθμου.

Βήμα 4: Προσέγγιση του διανύσματος κλίσης. Δημιουργούμε την ταυτόχρονα διαταραγμένη εκτίμηση του άγνωστου διανύσματος κλίσης $g_k(\hat{\theta}_k)$ από τον τύπο:

$$\hat{g}_k(\hat{\theta}_k) = \begin{bmatrix} \frac{y_k^{(+)} - y_k^{(-)}}{2c_k \Delta_{k1}} \\ \vdots \\ \frac{y_k^{(+)} - y_k^{(-)}}{2c_k \Delta_{kp}} \end{bmatrix} = \frac{y_k^{(+)} - y_k^{(-)}}{2c_k} \begin{bmatrix} (\Delta_{k1})^{-1} \\ \vdots \\ (\Delta_{kp})^{-1} \end{bmatrix},$$

όπου το Δ_{ki} είναι το i -οστό στοιχείο το διανύσματος Δ_k . Ο κοινός αριθμητής και στα p στοιχεία του $\hat{g}_k(\hat{\theta}_k)$ φανερώνει την ταυτόχρονη διαταραχή όλων των στοιχείων του διανύσματος $\hat{\theta}_k$, σε αντίθεση με την περίπτωση της προσέγγισης με πεπερασμένες διαφορές όπου το κάθε στοιχείο επιδέχεται τη διαταραχή ξεχωριστά.

Βήμα 5: Ενημέρωση της εκτίμησης θ . Το νέο $\hat{\theta}$ υπολογίζεται από τον τύπο (3.4):

$$\hat{\theta}_{k+1} = \hat{\theta}_k - a_k \hat{g}_k(\hat{\theta}_k)$$

Κάποιες φορές είναι απαραίτητη η μετατροπή της παραπάνω σχέσης ή η επιβολή περιορισμών ώστε να επιτευχθεί η σύγκλιση [17]. Έτσι, το $\hat{\theta}_{k+1}$ μπορεί να μεταβάλλεται ή να απορρίπτεται εάν η τιμή που του προσδίδεται από τη σχέση (3.4) κριθεί ακατάλληλη. Μία προσέγγιση είναι να κρατήσουμε τη νέα τιμή του $\hat{\theta}_{k+1}$ αν και μόνο εάν ικανοποιούνται οι δύο παρακάτω συνθήκες:

Συνθήκη 1: Η νόρμα της νέας τιμής του $\hat{\theta}$ να είναι μικρότερη από αυτή της προηγούμενης.

Συνθήκη 2: Η συνάρτηση να μειώνεται σε κάθε επανάληψη, τουλάχιστον κατά μία θετική ποσότητα, που τη συμβολίζουμε με “tolerance”. Αν θέσουμε την τιμή αυτής της ποσότητας σαν το διπλάσιο της διασποράς του θορύβου που υπάρχει στις μετρήσεις της συνάρτησης, τότε έχουμε εξασφαλίσει μια ουσιαστική βελτίωση ανά βήμα.

Βήμα 6: Επανάληψη ή τερματισμός. Επιστρέφουμε στο Βήμα 2, θέτοντας $k = k + 1$ εάν η συνθήκη τερματισμού του αλγορίθμου δεν ικανοποιηθεί, αλλιώς τερματίζουμε τον αλγόριθμο. Κάποιες από τις συνθήκες τερματισμού που μπορούν να εισαχθούν στον αλγόριθμο [10] είναι όταν το αποτέλεσμα των τελευταίων επαναλήψεων είναι ικανοποιητικό και η μεταβολή στην τιμή της εξόδου είναι πολύ μικρή ή όταν ο αριθμός επαναλήψεων του αλγορίθμου φτάσει τον μέγιστο επιτρεπτό.

3.3 Ο αλγόριθμος Βελτιστοποίησης Παραμέτρων AFT1

3.3.1 Εισαγωγή

Όπως προαναφέραμε, η προσέγγιση AFT1 (Adaptive Fine-Tuning) βασίζεται σε μία ιδέα παρόμοια με αυτή της Στοχαστικής Προσέγγισης Ταυτόχρονων Διαταραχών, SPSA. Η διαφορά μεταξύ της μεθόδου SPSA και της προσέγγισης AFT1 είναι ότι κατά την πρώτη, η κλίση της αντικειμενικής συνάρτησης προσεγγίζεται μέσω των μετρήσεων της συνάρτησης που ελήφθησαν κατά την τελευταία μόνο επανάληψη του αλγορίθμου. Αντίθετα, κατά τον αλγόριθμο AFT1 η προσέγγιση της κλίσης πραγματοποιείται μέσω χρήσης ενός Γραμμικού-ως-προς-τις-παραμέτρους Μη-γραμμικού Προσεγγιστή (ΓΜΓΠ) που λαμβάνει πληροφορίες πολλών μετρήσεων της συνάρτησης με χρονικό ορίζοντα που καθορίζεται από τον χρήστη.

Πριν αναλύσουμε τον αλγόριθμο AFT1, θα εισάγουμε το πρόβλημα το οποίο καλούμαστε να επιλύσουμε.

Έστω $f(\theta, x)$ μία κάτω φραγμένη συνάρτηση της οποίας η αναλυτική μορφή δεν είναι γνωστή και μόνο μετρήσεις της με θόρυβο είναι διαθέσιμες. Θέλουμε να επιλύσουμε το πρόβλημα εύρεσης του βέλτιστου διανύσματος θ^* των παραμέτρων που την ελαχιστοποιεί. Οι διαθέσιμες μετρήσεις της συνάρτησης συμβολίζονται με J . Έτσι:

$$J = f(\theta, x) + \xi, \quad (3.7)$$

όπου ξ ο θόρυβος που συνοδεύει τη μέτρηση, $f(\cdot)$ μία τουλάχιστον C^2 κάτω φραγμένη άγνωστη συνάρτηση, θ το διάνυσμα των παραμέτρων ελέγχου ή των μεταβλητών απόφασης, και x το διάνυσμα των μεταβλητών εισόδου.

Στην πράξη, μπορεί να μην είναι πάντα διαθέσιμες μετρήσεις της εισόδου x . Υποθέτουμε, όμως, ότι μία εκτίμηση \bar{x} του x είναι διαθέσιμη. Πιθανόν είναι, επίσης, να υπάρξουν περιορισμοί για τις τιμές των στοιχείων του διανύσματος θ (π.χ., εάν το θ ανήκει σε ένα φραγμένο σύνολο Θ , η ελαχιστοποίηση πραγματοποιείται δεδομένου ότι $\theta \in \Theta$). Εμείς υποθέτουμε ότι τα στοιχεία του θ μπορούν να λάβουν οποιαδήποτε τιμή.

3.3.2 Ο αλγόριθμος Βελτιστοποίησης Παραμέτρων AFT1

Τα βήματα του αλγορίθμου είναι τα εξής:

Βήμα 0: Επιλέγουμε θ^0 , L_r , L_h , L_g , a , β , γ . Θέτουμε $\ell = 0$.

Το διάνυσμα θ^0 επιλέγεται αυθαίρετα και αποτελεί την αρχική μας εκτίμηση για το προς βελτιστοποίηση διάνυσμα των παραμέτρων του προβλήματος που καλούμαστε να επιλύσουμε.

Με L_r συμβολίζουμε τον αριθμό των επαναλήψεων κατά τις οποίες πραγματοποιείται προσθήκη τυχαίου θορύβου στο αρχικό διάνυσμα των παραμέτρων. Η παράμετρος L_r μπορεί να λάβει οποιαδήποτε θετική τιμή.

Βήματα 1 έως L_r : Θέτουμε $\ell := \ell + 1$. Υπολογίζουμε το νέο διάνυσμα θ μέσω του τύπου:

$$\theta^\ell = \theta^{\ell-1} + \alpha \Delta^{\ell-1}, \quad (3.8)$$

όπου $\Delta^{\ell-1}$ είναι ένα διάνυσμα για i.i.d. εισόδους με μέση τιμή μηδέν και διασπορά ίση με 1.

Για κάθε θ^ℓ , λαμβάνουμε μία μέτρηση:

$$J^\ell = J(\theta^\ell, x^\ell) + \xi^\ell. \quad (3.9)$$

Στα βήματα αυτά του αλγορίθμου, πραγματοποιείται προσθήκη τυχαίου θορύβου στο αρχικό διάνυσμα των παραμέτρων ελέγχου. Με δεδομένο το κάθε νέο διάνυσμα των παραμέτρων, λαμβάνουμε και μία μέτρηση J της άγνωστης συνάρτησης $f(\cdot)$.

Βήμα $L_r + 1$: Θέτουμε $\ell := \ell + 1$. Ορίζουμε τον Γραμμικό-ως-προς-τις-παραμέτρους Μη-Γραμμικό Καθολικό Προσεγγιστή με L_g όρους παλινδρόμησης:

$$\hat{J} = \mathcal{G}^T \phi(\theta, \bar{x}^\ell), \quad (3.10)$$

όπου \bar{x}^ℓ μία εκτίμηση του πραγματικού x^ℓ .

Αναζητούμε το διάνυσμα \mathcal{G}^m που ελαχιστοποιεί το σφάλμα ελαχίστων τετραγώνων του ΓΜΓΠ για τις τελευταίες L_h επαναλήψεις:

$$\mathcal{G}^m = \arg \min_{\mathcal{G}} \sum_{\lambda=\max\{1, \ell-L_h\}}^{\ell-1} (J^\lambda - \mathcal{G}^T \phi(\theta^\lambda, \bar{x}^\lambda))^2 \quad (3.11)$$

Βήμα $L_r + 2$: Υπολογίζουμε το θ^ℓ σύμφωνα με τον τύπο:

$$\theta_i^\ell = \theta_i^{\ell-L_r-1} - \beta \frac{\mathcal{G}^{mT} \phi(\theta^{\ell-L_r-1} + \gamma e_i, \bar{x}^p) - \mathcal{G}^{mT} \phi(\theta^{\ell-L_r-1} - \gamma e_i, \bar{x}^p)}{2\gamma}, \quad (3.12)$$

όπου e_i ένα διάνυσμα του οποίου τα στοιχεία είναι όλα μηδέν εκτός του i -οστού, του οποίου η τιμή είναι 1, \bar{x}^p η εκτιμώμενη τιμή του διανύσματος x^ℓ και $\theta^{\ell-L_r-1}$ το διάνυσμα των παραμέτρων το οποίο υπολογίστηκε στην προηγούμενη επανάληψη του αλγορίθμου.

Για κάθε θ^ℓ , λαμβάνουμε μία μέτρηση:

$$J^\ell = J(\theta^\ell, x^\ell) + \xi^\ell.$$

Τροποποίηση του αλγορίθμου: Όπως και στην περίπτωση του αλγορίθμου SPSA, το θ που χρησιμοποιείται σε κάθε επανάληψη του αλγορίθμου, είναι αυτό που λάβαμε την τελευταία φορά που εφαρμόσαμε το βήμα $L_r + 2$. Το μειονέκτημα αυτής της μεθόδου είναι ότι σε περίπτωση που λάβουμε ένα μη ικανοποιητικό θ , τότε συνεχίζουμε τους υπολογισμούς της επόμενης επανάληψης με αυτό το θ ως δεδομένο. Για να αντιμετωπίσουμε αυτό το πρόβλημα, μπορούμε να εισάγουμε στους νέους μας υπολογισμούς το διάνυσμα θ^e αντί του $\theta^{\ell-L_r-1}$ που λάβαμε στην προηγούμενη επανάληψη. Το διάνυσμα θ^e υπολογίζεται ως εξής:

$$\theta^e = \arg \min_{\theta^\lambda, \lambda \in \{\ell-L_h, \dots, \ell-1\}} J(\theta^\lambda, x^\lambda) \quad (3.13)$$

και ταυτίζεται με το διάνυσμα θ των παραμέτρων, του οποίου η εισαγωγή στον αλγόριθμο παράγει την βέλτιστη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης ανάμεσα σε αυτές των L_h τελευταίων επαναλήψεων.

Μπορούμε, επίσης, να επιλέξουμε και να χρησιμοποιήσουμε ένα θ^e που να αντιστοιχεί στην βέλτιστη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης όταν στο πρόβλημα εισάγεται το χειρότερο σενάριο ζήτησης, π.χ.,

$$\theta^e = \arg \min_{\theta^\lambda, \lambda \in \{\ell-L_h, \dots, \ell-1\}} (J(\theta^\lambda, x^\lambda) |x^\lambda|^p), p > 0 \quad (3.14)$$

Βήμα $L_r + 3$: Προσαρμόζουμε τις τιμές των L_r , L_h , L_g , a , β , γ εάν αυτό κρίνεται απαραίτητο. Εάν δεν ικανοποιείται κάποια από τις συνθήκες τερματισμού του αλγορίθμου επιστρέφουμε στο Βήμα 1, αλλιώς ο αλγόριθμος τερματίζεται.

Όπως προαναφέραμε, μία σωστή επιλογή για την τιμή της παραμέτρου L_r είναι να τεθεί μεγαλύτερη της μονάδας κατά την πρώτη επανάληψη του αλγορίθμου (ώστε να αποκτήσει ο αλγόριθμος αρκετή πληροφορία για την άγνωστη συνάρτηση $f(\cdot)$) και να μετατραπεί σε μονάδα για όλες τις υπόλοιπες επαναλήψεις. Με τον τρόπο αυτό, μειώνεται η αστάθεια του συστήματος, η οποία προκαλείται από την προσθήκη τυχαίου θορύβου στο θ .

Όσον αφορά στις συνθήκες τερματισμού του αλγορίθμου, οι επιλογές είναι πολλές. Ένα παράδειγμα είναι το παρακάτω:

$$J^\ell \leq \min_{\lambda \in \{1, \dots, \ell-1\}} J^\lambda + n, \quad (3.15)$$

όπου n μία σταθερά με τιμή έναν μικρό, θετικό αριθμό.

3.3.3 Η μαθηματική απόδειξη της σύγκλισης του αλγορίθμου AFT1

Μέσω της απόδειξης του παρακάτω θεωρήματος, αποδεικνύεται ότι ο αλγόριθμος προσεγγίζει τη συμπεριφορά μίας τυπικής μεθόδου μέγιστης κατάβασης. Αποδεικνύονται, επομένως οι δυνατότητες σύγκλισης αυτού. Να σημειωθεί ότι σε αντίθεση με αποδείξεις που αφορούν στις ιδιότητες σύγκλισης του αλγορίθμου SPSA [14,15], οι οποίες αναπτύσσονται κάτω από το στοχαστικό πλαίσιο, η παρακάτω απόδειξη ακολουθεί αιτιοκρατική ανάλυση.

Θεώρημα 1.

Υποθέτουμε ότι το \bar{x}^p της σχέσης (3.12) τίθεται ίσο με $\bar{x}^{\ell-L_r-1}$. Επίσης, υποθέτουμε ότι:

Y1. Η συνάρτηση $f(\cdot)$ είναι τουλάχιστον C^2 και $\bar{x}^\ell = x^\ell + \zeta$, με το ζ να υποδηλώνει τον ενσωματωμένο στις μετρήσεις θόρυβο.

Y2. Το διάνυσμα παλινδρόμησης $\phi(\cdot)$ ικανοποιεί τη συνθήκη persistency of excitation. Δηλαδή ισχύει:

$$c_\alpha I \leq \sum_{\lambda=\ell-L_h+1}^{\ell} \phi(\theta, \bar{x}^\ell) \phi^T(\theta, \bar{x}^\ell), \quad (3.16)$$

όπου c_α μία $O(a)$ θετική σταθερά.

Τότε, ισχύει:

$$\theta^\ell = \theta^{\ell-L_r-1} - \beta \frac{\partial f}{\partial \theta}(\theta^{\ell-L_r-1}, x^{\ell-L_r-1}) + O\left(\frac{1}{a}\right) + \frac{O([a, \beta, \gamma])}{O(L_g)} + O(\xi) + O(\zeta) + O(\varepsilon^\ell) \quad (3.17)$$

όπου ε^ℓ ένας εκθετικός μη αρνητικός όρος που φθίνει προς το μηδέν.

Μέσω του Θεωρήματος 1, αποδεικνύεται ότι ο αλγόριθμος AFT1 είναι ισοδύναμος με έναν τυπικό αλγόριθμο βελτιστοποίησης μέγιστης κατάβασης συν έναν επιπλέον όρο. Ο όρος αυτός αφορά στις διαταραχές που υπεισέρχονται στο σύστημα, και μπορεί να περιγραφεί από δύο επιμέρους όρους. Ο πρώτος όρος των διαταραχών μπορεί να επιλεγεί αυθαίρετα πολύ μικρός, θέτοντας τις τιμές των σχεδιαστικών παραμέτρων a , β , γ επαρκώς μικρές και/ ή τον αριθμό των όρων παλινδρόμησης L_g αρκετά μεγάλο. Ο δεύτερος όρος των διαταραχών είναι ανάλογος του θορύβου και των σφαλμάτων της εκτίμησης.

Να σημειωθεί ότι, προφανώς, όταν στην εξίσωση (3.12) εισάγεται η τιμή του θ^e αντί του $\theta^{\ell-L_r-1}$ (όπου το θ^e υπολογίζεται μέσω της σχέσης (3.13) ή (3.14)), η ισότητα (3.17) του Θεωρήματος 1 αντικαθίσταται από την ισότητα:

$$\theta^\ell = \theta^e - \beta \frac{\partial f}{\partial \theta}(\theta^e, x^{\ell-L_r-1}) + O(1/a) + \frac{O([a, \beta, \gamma])}{O(L_g)} + O(\xi) + O(\zeta) + O(\varepsilon^\ell). \quad (3.18)$$

$$\theta^{current} = \theta^{previous} - \beta \nabla J(\theta^{previous}, x^{previous}) + \varepsilon$$

$$\varepsilon \begin{cases} \rightarrow \text{διάσταση ΓΜΓΠ} \\ \rightarrow \text{μέγεθος θορύβου} \\ \rightarrow \text{τιμές παραμέτρων } \alpha, \beta, \gamma \end{cases}$$

Προκειμένου να απλοποιήσουμε όσο μπορούμε την απόδειξη του Θεωρήματος 1, προσδώσαμε στο σύμβολο $O(\cdot)$ μια πιο γενική έννοια από αυτή που συνήθως ταυτίζεται μαζί του. Έτσι, η συνάρτηση $f_a(\cdot)$ με παράμετρο μία θετική σταθερά a θεωρούμε ότι είναι $O(c(a))$, όπου $c(\cdot)$ μία μη αρνητική συνάρτηση, εάν υπάρχει θετική σταθερά K τέτοια ώστε για όλα τα a και όλα τα x να ισχύει: $|f_a(x)| \leq Kc(a)$.

Η ισχύς, τέλος, της υπόθεσης (Y2), που αφορά στην persistency του διανύσματος παλινδρόμησης $\phi(\cdot)$, είναι καίρια για την απόδειξη του Θεωρήματος 1. Δεν ικανοποιείται, όμως, αυτόματα κατά την εφαρμογή του αλγορίθμου AFT1 για οποιαδήποτε επιλογή Καθολικού Προσεγγιστή. Στην περίπτωση που ο Προσεγγιστής που επιλέγεται είναι πολυωνυμικός (όπως αυτός που επιλέγηκε κατά τις προσομοιώσεις που πραγματοποιήσαμε), η προσθήκη τυχαίου θορύβου στο αρχικό διάνυσμα των παραμέτρων θ κατά τα Βήματα 1 έως L_r αρκεί για να αποκτηθεί επαρκής γνώση και να εξασφαλιστεί ότι η υπόθεση (Y2) ισχύει για το διάνυσμα παλινδρόμησης $\phi(\cdot)$.

Απόδειξη Θεωρήματος 1

θεωρούμε μία χρονική στιγμή κατά τα βήματα $L_r + 1, L_r + 2$ του AFT1 αλγορίθμου και $\Theta_\ell^{\alpha, \beta, \gamma}$ το μικρότερο κλειστό υποσύνολο για το οποίο ισχύει η σχέση:

$$\theta^\lambda \in \Theta_\ell^{\alpha, \beta, \gamma}, \forall \lambda \in \{\ell - L_h, \dots, \ell - 1\}.$$

Προφανώς, το υποσύνολο $\Theta_\ell^{\alpha, \beta, \gamma}$ εξαρτάται από τις τιμές των σχεδιαστικών παραμέτρων α, β, γ . Πιο συγκεκριμένα, όσο πιο μικρές οι τιμές των παραμέτρων τόσο πιο μικρό είναι το υποσύνολο $\Theta_\ell^{\alpha, \beta, \gamma}$. Ξαναγράφουμε την κλίση της $f(\cdot)$ ως εξής:

$$\frac{\partial f}{\partial \theta}(\theta, x) = \frac{\partial f}{\partial \theta}(\theta, \bar{x}) + f_n(\theta, x - \bar{x}),$$

όπου, εξαιτίας της υπόθεσης (Y1) που κάναμε, η $\frac{\partial f}{\partial \theta}(\theta, x)$ είναι τοπικά συνεχής κατά Lipschitz (βλέπε σχέση (2.1)) και η $f_n(\theta, x - \bar{x})$ είναι μία συνάρτηση που ικανοποιεί τη σχέση:

$$|f_n(\theta, x - \bar{x})| \leq c_1 |x - \bar{x}|, \forall \theta \in \Theta_\ell^{\alpha, \beta, \gamma} \quad (3.19)$$

για κάποιες θετικές τιμές της σταθεράς c_1 . Επιλέγουμε τον αριθμό L των όρων παλινδρόμησης του προσεγγιστή.

Ορίζοντας $\mathcal{G}^* := W(L, \phi, f, \Theta_\ell^{\alpha, \beta, \gamma}) := \arg \min_g \sup_{\theta \in \Theta_\ell^{\alpha, \beta, \gamma}} |f(\theta, \bar{x}) - \mathcal{G}^{*T} \phi(\bar{x})|$ και $\nu(\theta) := N(L, \phi, f, \Theta_\ell^{\alpha, \beta, \gamma})(\theta) := f(\theta, \bar{x}) - \mathcal{G}^{*T} \phi(\bar{x})$, έχουμε:

$$f(\theta, x) = \mathcal{G}^{*T} \phi(\theta, \bar{x}) + \nu(\theta) + f_n(\theta, x - \bar{x}).$$

Επομένως,

$$f(\theta, x) - \hat{J} = \tilde{\mathcal{G}}^T \phi(\theta, \bar{x}) + \nu(\theta) + f_n(\theta, x - \bar{x}),$$

όπου το $\tilde{\mathcal{G}} := \mathcal{G}^* - \mathcal{G}^m$ δηλώνει το σφάλμα στην εκτίμηση των παραμέτρων. Συμπεράσματα που έχουν εξαχθεί από διάφορες εφαρμογές της θεωρίας εκτίμησης παραμέτρων (βλέπε π.χ., [5,8]) μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να αποδειχθεί ότι, εφόσον ισχύει η συνθήκη persistency of excitation, η παρακάτω σχέση ικανοποιείται:

$$|\tilde{\mathcal{G}}^T| \leq \bar{c}_a + c_2 |x - \bar{x}| + c_3 |\nu(\theta)| + c_3 |\xi| + \varepsilon,$$

όπου το c_a είναι μία $O(1/\alpha)$ θετική σταθερά, c_2, c_3 είναι θετικές σταθερές, ε είναι ένας εκθετικός όρος που φθίνει προς το μηδέν, και έτσι τελικά λαμβάνουμε:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \theta}(\theta, x) &= \frac{\partial \mathcal{G}^{mT} \phi}{\partial \theta}(\theta, \bar{x}) + \frac{\partial \tilde{\mathcal{G}}^T \phi}{\partial \theta}(\theta, \bar{x}) + \frac{\partial \nu}{\partial \theta}(\theta) + \frac{\partial f_n}{\partial \theta}(\theta, x - \bar{x}) = \\ &= \frac{\partial \mathcal{G}^{mT} \phi}{\partial \theta}(\theta, \bar{x}) + \bar{\nu}, \end{aligned}$$

$$\text{όπου} \quad \bar{\nu} = \frac{\partial \tilde{\mathcal{G}}^T \phi}{\partial \theta}(\theta, \bar{x}) + \frac{\partial \nu}{\partial \theta}(\theta) + \frac{\partial f_n}{\partial \theta}(\theta, x - \bar{x}) \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} |\bar{\nu}| &\leq (\bar{c}_a + c_2 |x - \bar{x}| + c_3 |\nu(\theta)| + c_3 |\xi|) c_4 + c_5 |x - \bar{x}| \\ &\leq O(1/\alpha) + O(\zeta) + O(\xi) + c_6 |\nu(\theta)| + O(\varepsilon), \end{aligned}$$

$$\text{όπου } c_4 \text{ μία θετική σταθερά που ικανοποιεί τη σχέση } c_4 = \sup_{\theta \in \Theta_\ell^{\alpha, \beta, \gamma}, \bar{x}} \left| \frac{\partial \phi}{\partial \theta}(\theta, \bar{x}) \right|, \quad c_5$$

μία θετική σταθερά που εξαρτάται από το μέγεθος του $\Theta_\ell^{\alpha, \beta, \gamma}$ και $c_6 = c_3 c_4$.

Βασιζόμενοι στα αποτελέσματα των διάφορων εφαρμογών της προσεγγιστικής θεωρίας [4], συμπεραίνουμε ότι το μέγεθος του όρου του σφάλματος της μοντελοποίησης $|\nu(\theta)|$ είναι ανάλογο του μεγέθους του υποσυνόλου $\Theta_\ell^{\alpha, \beta, \gamma}$ και αντιστρόφως ανάλογο του αριθμού L_g των όρων παλινδρόμησης.

$$\text{Κατά συνέπεια, λαμβάνουμε } \bar{\nu} = O(1/\alpha) + O(\zeta) + O(\xi) + \frac{O([a, \beta, \gamma])}{O(L_g)} + O(\varepsilon),$$

ολοκληρώνοντας την απόδειξη του θεωρήματος.

Η απόδειξη του Θεωρήματος 1 μπορεί να επεκταθεί και να καλύψει περιπτώσεις όπου η συνάρτηση $f(\cdot)$ δεν είναι απαραίτητα C^2 . Η απόδειξη για αυτή την περίπτωση είναι πολύ μακροσκελής και γι' αυτό παραλείπεται.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4 : ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΙ ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗΣ

ΠΑΡΑΜΕΤΡΩΝ

Το πρόβλημα της βελτιστοποίησης ενός συστήματος ελέγχου κλειστού βρόγχου μπορεί να σχηματιστεί σαν ένα πρόβλημα προσαρμοστικής βελτιστοποίησης, όπου ο στόχος είναι η ελαχιστοποίηση ενός δείκτη απόδοσης της μορφής

$$J_k \equiv J(\theta_k, x_k)$$

όπου το k δηλώνει τον αριθμό της τρέχουσας επανάληψης, το J_k δηλώνει την τιμή του δείκτη απόδοσης στην k -οστή επανάληψη, το θ_k δηλώνει το διάνυσμα των ρυθμιζόμενων παραμέτρων του ελεγκτή και το x_k δηλώνει το διάνυσμα των εξωγενών εισόδων όπως η κυκλοφοριακή ζήτηση. Στην περίπτωση ενός συστήματος ελέγχου της κυκλοφορίας, το J_k θα μπορούσε να είναι η ημερήσια μέση ταχύτητα την ημέρα k και οι εισοδοί του διανύσματος x_k θα μπορούσαν να είναι ημερήσια σχέδια της κυκλοφοριακής ζήτησης σε κάθε κόμβο προέλευσης του δικτύου. Για την παρουσίαση των αλγορίθμων προσαρμοστικής βελτιστοποίησης οι οποίοι ερευνώνται παρατίθενται οι ακόλουθοι ορισμοί. Για την ακρίβεια έχουμε:

$$\Delta J_k \equiv \Delta J(\Delta\theta_k, \theta_{k-1}, x_k, x_{k-1}) = J(\Delta\theta_k + \theta_{k-1}, x_k) - J(\theta_{k-1}, x_{k-1})$$

όπου $\Delta\theta_k = \theta_k - \theta_{k-1}$. Επίσης το «καλύτερο» διάνυσμα παραμέτρων που έχει προκύψει έως την τρέχουσα στιγμή θα το συμβολίζουμε ως ακολούθως:

$$\theta_k^* = \underset{\ell \in \{0, \dots, k\}}{\operatorname{argmin}} J_k$$

Οι αλγόριθμοι RDKW και SPSA είναι προσεγγίσεις του πολύ γνωστού αλγορίθμου βελτιστοποίησης μέγιστης κατάβασης. Για να επιτύχει μία τέτοια προσέγγιση ο αλγόριθμος SPSA επιβάλλει τυχαίες διαταραχές στο τρέχον διάνυσμα παραμέτρων και υπολογίζει την τιμή του δείκτη απόδοσης σε αυτές τις τιμές των διαταραχών. Έπειτα, χρησιμοποιεί τις διαφορές του δείκτη απόδοσης στις τρέχουσες και στις διαταραγμένες τιμές έτσι ώστε να αποκτήσει μία εκτίμηση πεπερασμένης διαφοράς της κλίσης σύμφωνα με την διαδικασία που φαίνεται στον Πίνακα 4.1.

Αξίζει να σημειώσουμε ότι η αρχική μορφή του αλγορίθμου SPSA είναι η ακόλουθη:

$$\Delta\theta_{k,i} = \begin{cases} \alpha_k \Delta_{k,i} & \text{αν το } k \text{ είναι περιττός ή μηδέν} \\ -\beta_k \frac{\Delta J_k}{\Delta\theta_{k-1,i}} & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Η προσθήκη του όρου $-\theta_{k-1,i} + \theta_{k-1,i}^*$ χρησιμοποιείται για την διατήρηση της σταθερότητας του αλγορίθμου. Η τροποποίηση αυτή του αλγορίθμου SPSA βελτίωσε σημαντικά την απόδοση του αλγορίθμου στην παρούσα εφαρμογή (χωρίς την τροποποίηση αυτήν ο SPSA δεν παρήγαγε κανένα αποτέλεσμα σύγκλισης).

Παρόμοια με τον αλγόριθμο SPSA, ο αλγόριθμος AFT1 επιβάλλει τυχαίες διαταραχές στο τρέχον διάνυσμα παραμέτρων του ελεγκτή. Σε αντίθεση όμως με τον αλγόριθμο SPSA, ο αλγόριθμος AFT1 χρησιμοποιεί έναν πολυωνυμικό ή σχεδόν πολυωνυμικό προσεγγιστή έτσι ώστε να προσεγγίσει τον δείκτη απόδοσης J_k ως μια συνάρτηση των παραμέτρων του ελεγκτή και των εξωγενών εισόδων. Έπειτα χρησιμοποιεί τον προσεγγιστή αυτόν για να λάβει την εκτίμηση της κλίσης σύμφωνα με την διαδικασία που φαίνεται στον Πίνακα 4.2.

Ο Spall [14, 15] και άλλοι ερευνητές (βλέπε [16] για δημοσιεύσεις που ασχολούνται με την ανάλυση των ιδιοτήτων σύγκλισης του SPSA) έχουν αποδείξει τις ιδιότητες σύγκλισης των διαφορετικών παραλλαγών του αλγορίθμου SPSA. Οι ιδιότητες του αλγορίθμου AFT1 μπορούν να συνοψιστούν ως εξής (βλέπε κεφάλαιο 3 για περισσότερες λεπτομέρειες):

Ιδιότητες AFT1: Ο αλγόριθμος AFT1 είναι μία προσέγγιση της γνωστής μεθόδου μέγιστης κατάβασης. Για την ακρίβεια, ο αλγόριθμος AFT1 εγγυάται ότι, για κάθε k :

$$\theta_k = \theta_{k-1}^* - \beta_k \nabla J(\theta_{k-1}^*, x_k) + \varepsilon_k + \delta_k$$

όπου ε_k, δ_k είναι δυο «όροι διαταραχής» :

- Το ε_k μπορεί να είναι οσοδήποτε μικρό υπό την κατάλληλη επιλογή των παραμέτρων που ορίζονται από τον χρήστη. Για την ακρίβεια το ε_k εξαρτάται από
 - την διάσταση του πολυωνυμικού προσεγγιστή (όσο μεγαλύτερη είναι η διάσταση, τόσο μικρότερο είναι το ε_k).
 - τον σχεδιασμό των παραμέτρων α_k, β_k (γενικά, όσο μικρότερες είναι αυτές οι παράμετροι, τόσο μικρότερο είναι το ε_k).

- Ο όρος δ_k εξαρτάται από τις αβεβαιότητες και τις στοχαστικές ιδιότητες του συστήματος εφαρμογής. Η παρουσία του όρου αυτού είναι αναπόφευκτη, ανεξάρτητα από τον συγκεκριμένο αλγόριθμο. Για την ακρίβεια, ο όρος δ_k εξαρτάται από
 - το μέγεθος της εκτίμησης της ακρίβειας του $x_k - \bar{x}_k$.
 - το μέγεθος της διαφοράς $x_k - x_{k-1}$.

Επιπλέον στο [22] έχει αποδειχθεί ότι ο αλγόριθμος SPSA είναι μία ειδική περίπτωση του αλγορίθμου AFT1. Όμως σε αντίθεση με τον AFT1, στην περίπτωση του SPSA ο όρος διαταραχής ε_k δεν μπορεί να είναι αυθαίρετα μικρός υπό την κατάλληλη επιλογή των παραμέτρων που ορίζονται από τον χρήστη.

Πίνακας 4.1. Αλγόριθμος SPSA

$\Delta\theta_{k,i} = \begin{cases} \alpha_k \Delta_{k,i} - \theta_{k-1,i} + \theta_{k-1,i}^* & \text{αν το } k \text{ είναι περιττός ή μηδέν (φάση διαταραχών)} \\ -\beta_k \frac{\Delta J_k}{\Delta\theta_{k-1,i}} - \theta_{k-1,i} + \theta_{k-1,i}^* & \text{αλλιώς (φάση μέγιστης κατάβασης)} \end{cases}$	
α_k, β_k θετικές ακολουθίες που ορίζονται από τον χρήστη	
$\Delta_{k,i}$ τυχαίες ακολουθίες με μηδενική μέση τιμή	

Πίνακας 4.2. Αλγόριθμος AFT1	
$\Delta\theta_{k,i} = \begin{cases} \alpha_k \Delta_{k,i} - \theta_{k-1,i} + \theta_{k-1,i}^* & \text{αν το } k \text{ είναι περιττός ή μηδέν (φάση διαταραχών)} \\ -\beta_k \Delta \hat{J}_k^{(k)}(\alpha_k e_i) - \theta_{k-1,i} + \theta_{k-1,i}^* & \text{αλλιώς (φάση μέγιστης κατάβασης)} \end{cases}$	
$\Delta \hat{J}_\ell^{(k)}(\Delta\bar{\theta})$: δηλώνει την εκτίμηση του $\Delta J_\ell(\Delta\bar{\theta}, \theta_{\ell-1}, \bar{x}_\ell, \bar{x}_{\ell-1})$ που λαμβάνεται στην k -οστή επανάληψη: $\Delta \hat{J}_\ell^{(k)}(\Delta\bar{\theta}) = \mathfrak{g}_k^\tau \begin{bmatrix} \phi(\Delta\bar{\theta} + \theta_{\ell-1}, \bar{x}_\ell) \\ \phi(\theta_{\ell-1}, \bar{x}_{\ell-1}) \\ \psi(\Delta\bar{\theta}) \end{bmatrix}$ $\mathfrak{g}_k = \underset{\ell=\kappa(k)}{\operatorname{argmin}} \sum_{\ell=k}^{k-1} \left(\Delta J_\ell - \Delta \hat{J}_\ell^{(k)}(\Delta\theta_\ell) \right)^2$ $\kappa(k) = \max\{1, k - T_h\}$	
e_i : είναι το μοναδιαίο διάνυσμα κατά μήκος του i -οστού άξονα (π.χ., οι είσοδοί του είναι όλες μηδέν εκτός από την i -οστή η οποία ισούται με ένα)	
α_k, β_k : θετικές ακολουθίες που ορίζονται από τον χρήστη	
$\Delta_{k,i}$: τυχαίες ακολουθίες με μηδενική μέση τιμή	
$\phi(\theta, x)$: είναι ένα διάνυσμα πολωνυμικών ή σχεδόν πολωνυμικών συναρτήσεων, $\psi(\Delta\bar{\theta})$: είναι βοηθητικές συναρτήσεις που ορίζονται στο υποκεφάλαιο 6.4	
\bar{x}_k : δηλώνει μια εκτίμηση/πρόβλεψη του εξωγενούς διανύσματος x_k	
T_h : είναι ένας θετικός ακέραιος που ορίζεται από τον χρήστη	

Στο σημείο αυτό, πρέπει να τονίσουμε ότι στην περίπτωση όπου οι όροι δ_k και ε_k έχουν μέση τιμή μηδέν και πεπερασμένη διασπορά, τότε αν επιλέξουμε τις ποσότητες α_k, β_k να τείνουν αργά προς το μηδέν, τότε οι αλγόριθμοι SPSA και AFT1 εγγυώνται σύγκλιση του θ_k σε ένα τοπικό ελάχιστο του J [14,15,24]. Δυστυχώς όμως, αυτό δεν συμβαίνει στην γενική περίπτωση της βελτιστοποίησης ενός συστήματος ελέγχου. Στα πειράματά μας, η χρήση α_k, β_k που έτειναν αργά προς το μηδέν δεν κατάφερε να επιφέρει ικανοποιητικά αποτελέσματα.

Όπως έχει ήδη αναφερθεί, οι αλγόριθμοι SPSA και AFT1 εμφανίζουν το πρόβλημα ότι δεν εγγυώνται αποδοτική συμπεριφορά κατά την διάρκεια της φάσης των διαταραχών. Ο αλγόριθμος AFT2 περιγράφεται στον Πίνακα 4.3.

Πίνακας 4.3: Αλγόριθμος AFT2	
$\Delta\theta_{k,i}^{(j)} = \alpha_k \Delta_{k,i}^{(j)} - \theta_{k-1,i} + \theta_{k-1,i}^*, j \in \{1, \dots, K\}$ $\Delta\theta_k = \arg \min_{j \in \{1, \dots, K\}} \mathfrak{Z}_k(\pm \Delta\theta_k^{(j)})$ $\mathfrak{Z}_k(\Delta\theta_k^{(j)}) = \sum_{\ell=\kappa(k)}^{k-1} \left(\Delta J_\ell - \hat{\Delta J}_\ell^{(k)}(\Delta\theta_k^{(j)}, \Delta\theta_\ell) \right)^2$	
$\hat{\Delta J}_\ell^{(k)}(\Delta\theta_k^{(j)}, \Delta\bar{\theta})$: δηλώνει μία εκτίμηση του $\Delta J_\ell(\Delta\bar{\theta}, \theta_{\ell-1}, \bar{x}_\ell, \bar{x}_{\ell-1})$ που λαμβάνεται κατά την k -οστή επανάληψη: $\hat{\Delta J}_\ell^{(k)}(\Delta\theta_k^{(j)}, \Delta\bar{\theta}) = \mathfrak{g}_k^\tau(\Delta\theta_k^{(j)}) \begin{bmatrix} \phi(\Delta\bar{\theta} + \theta_{\ell-1}, \bar{x}_\ell) \\ \phi(\theta_{\ell-1}, \bar{x}_{\ell-1}) \\ \psi(\Delta\bar{\theta}) \end{bmatrix}$ $\mathfrak{g}_k(\Delta\theta_k^{(j)}) = \arg \min_{l=\kappa(k)}^{k-1} \left(\Delta J_l - \hat{\Delta J}_l^{(k)}(\Delta\theta_k^{(j)}, \Delta\bar{\theta}) \right)^2$ $\text{υπό } \hat{\Delta J}_k^{(k)}(\Delta\theta_k^{(j)}, \Delta\theta_k^{(j)}) \leq -\beta_k$ $\kappa(k) = \max\{1, k - T_h\}$	(4.1)
α_k, β_k : θετικές ακολουθίες που ορίζονται από τον χρήστη	
$\Delta_{k,i}^{(j)}$: τυχαίες ακολουθίες με μηδενική μέση τιμή	
$\phi(\theta, x)$: είναι ένα διάνυσμα πολυωνυμικών ή σχεδόν πολυωνυμικών συναρτήσεων	
$\psi(\Delta\bar{\theta})$: είναι βοηθητικές συναρτήσεις που ορίζονται στο υποκεφάλαιο 6.4	
\bar{x}_k : δηλώνει μια εκτίμηση/πρόβλεψη του εξωγενούς διανύσματος x_k	
T_h, K : είναι θετικοί ακέραιοι που ορίζονται από τον χρήστη	

Η κατασκευή του αλγορίθμου AFT2 βασίζεται στα ακόλουθα στοιχεία [23,24]:

1. Το πρώτο στοιχείο βασίζεται σε μία τοπική ιδιότητα του J , η οποία μπορεί να περιγραφεί ως ακολούθως: για κάθε διάνυσμα θ που βρίσκεται μακριά από ένα τοπικό ελάχιστο του J και για κάθε διαταραχή $\Delta\theta$, οι όροι $J(\theta+\Delta\theta, \bullet) - J(\theta, \bullet)$ και $J(\theta-\Delta\theta, \bullet) - J(\theta, \bullet)$ έχουν θετικό πρόσημο. Επιπλέον, εάν επιλέξουμε διαφορετικές διαταραχές $\Delta\theta^{(i)}$ τέτοιες ώστε ο πίνακας $[\Delta\theta^{(1)}, \Delta\theta^{(2)}, \dots]$ να είναι πλήρους τάξης, τότε υπάρχει τουλάχιστον μία διαταραχή $\Delta\theta^{(i)}$ ή $-\Delta\theta^{(i)}$ η οποία οδηγεί σε μία μη αμελητέα μείωση του J . Έτσι, για να βρούμε ένα $\theta+\Delta\theta$ το οποίο να οδηγεί σε μη αμελητέα μείωση του J αρκεί να επιλέξουμε πολλές διαφορετικές υποψήφιες διαταραχές $\Delta\theta^{(1)}, \Delta\theta^{(2)}, \dots$ τέτοιες ώστε ο πίνακας $[\Delta\theta^{(1)}, \Delta\theta^{(2)}, \dots]$ να είναι πλήρους τάξης και στην συνέχεια να ελέγξουμε ποια από αυτές οδηγεί σε μη αμελητέα μείωση του J .
2. Το δεύτερο στοιχείο σχετίζεται με την αναγκαιότητα να ικανοποιούν οι διαταραχές $\Delta\theta$ μια ιδιότητα που καλείται Persistence of Excitation (PE), η οποία είναι ιδιαίτερα σημαντική ώστε ο προτεινόμενος αλγόριθμος να μπορεί να ανακτήσει τα χαρακτηριστικά της άγνωστης συνάρτησης J . Έχει αποδειχθεί [23] ότι αρκεί η τυχαία επιλογή υποψήφιων διαταραχών $\Delta\theta_k^{(i)}$ έτσι ώστε να εξασφαλίσουμε ότι η επιλεγθείσα διαταραχή $\Delta\theta_k$ ικανοποιεί την ιδιότητα PE.
3. Το τελευταίο στοιχείο σχετίζεται με την διαδικασία επιλογής των $\Delta\theta_k$ μέσω της χρήσης των εκτιμήσεων $\hat{\Delta}_\ell^{(k)}(\Delta\theta_k^{(i)}, \Delta\bar{\theta})$. η χρήση αυτών των εκτιμήσεων γίνεται καλύτερα κατανοητή μέσω ενός μονοδιάστατου παραδείγματος (βλ. Γράφημα 4.1) : Υποθέτουμε το πρόβλημα της ελαχιστοποίησης του $J=\vartheta_1\theta^2+\vartheta_2\theta+x$, $\vartheta_1=2$, $\vartheta_2=1$, όπου το x είναι ένας τυχαίος όρος Gauss με μέση τιμή μηδέν και διασπορά 2. Στο παράδειγμα αυτό τα ϑ_1 , ϑ_2 καθώς και ο τυχαίος όρος x θεωρείται ότι είναι άγνωστα. Μια άμεση επιλογή για τα $\phi(\theta, x), \psi(\Delta\bar{\theta})$ είναι το $\phi(\theta, x)=\theta^2, \theta, \psi(\Delta\bar{\theta})=0$. Θεωρείστε τώρα την κατάσταση που περιγράφεται στο Γράφημα 4.1. : υποθέστε ότι έχουν λάβει χώρα δύο εκτιμήσεις της συνάρτησης (οι οποίες αντιστοιχούν στα σημεία J_0 και J_1 , αντίστοιχα) για τυχαία επιλεγμένα θ_0, θ_1 και ας θεωρήσουμε $\Delta\theta_2^{(\pm)}=\pm 0.5$, την υποψήφια διαταραχή της $\Delta\theta_2$. Το πρόβλημα βελτιστοποίησης (4.1) για

$k=2$, $\beta=1$ και $j=\pm 1$ έχει τις λύσεις $\vartheta_{2,1}^{(+)}=-1.8239$, $\vartheta_{2,2}^{(+)}=5.7984$ και $\vartheta_{2,1}^{(-)}=-2.8239$, $\vartheta_{2,2}^{(-)}=5.7984$. Στο Γράφημα 4.1, αναπαρίστανται οι συναρτήσεις $\hat{J}^{(+)}=\vartheta_{2,1}^{(+)}\theta^2+\vartheta_{2,2}^{(+)}\theta$ (ο-καμπύλη) και $\hat{J}^{(-)}=\vartheta_{2,1}^{(-)}\theta^2+\vartheta_{2,2}^{(-)}\theta$ (ϙ-καμπύλη) καθώς και τα σημεία $\Delta\hat{J}_2^{(2)}(\Delta\theta_2^{(+)},\Delta\theta_2^{(+)})=-\beta_2$ ([+1]-σημείο) και $\Delta\hat{J}_2^{(2)}(\Delta\theta_2^{(-)},\Delta\theta_2^{(-)})=-\beta_2$ [-1]-σημείο) (σημειώνεται επίσης ότι η συνεχής καμπύλη του Γραφήματος 4.1 αντιστοιχεί στην «χωρίς θόρυβο» εκδοχή του J , $J_{\text{noise free}}=\vartheta_1\theta^2+\vartheta_2\theta$). Είναι εμφανές, ότι το πρόβλημα βελτιστοποίησης (4.1) απαιτεί η ο-καμπύλη (αντίστοιχα και η ϙ-καμπύλη) να είναι όσο πιο κοντά γίνεται στα σημεία J_1 , J_2 και, επιπλέον, να είναι τέτοια, έτσι ώστε η τιμή του $\hat{J}^{(+)}(\theta_1+\Delta\theta_2^{(+)})$ (αντίστοιχα $\hat{J}^{(+)}(\theta_1+\Delta\theta_2^{(-)})$) να είναι μικρότερη από την αντίστοιχη τιμή στο [+1]-σημείο (αντίστοιχα [-1]-σημείο). Είναι επίσης ευνόητο ότι η ο-καμπύλη αντιστοιχεί στην εκτίμηση ελαχίστων τετραγώνων του J βασιζόμενη σε μετρήσεις (θ_0, J_0) , (θ_1, J_1) . Από το παραπάνω παράδειγμα, γίνεται ξεκάθαρο ότι στην περίπτωση υποψήφιας διαταραχών που οδηγούν σε μία αύξηση του J (όπως συμβαίνει στην περίπτωση της υποψήφιας διαταραχής $\Delta\theta_2^{(-)}=-0.5$ στο απλό αυτό παράδειγμα), το πρόβλημα βελτιστοποίησης με περιορισμούς (4.1) έχει το αποτέλεσμα του να «σπρώχνει» τις αντίστοιχες λύσεις μακριά από τις μετρήσεις της αντικειμενικής συνάρτησης, ενώ – στην περίπτωση των υποψήφιας διαταραχών που οδηγούν σε μία μείωση του J – κρατά τις αντίστοιχες λύσεις ίσες – ή κοντά – σε αυτές των λύσεων ελαχίστων τετραγώνων.

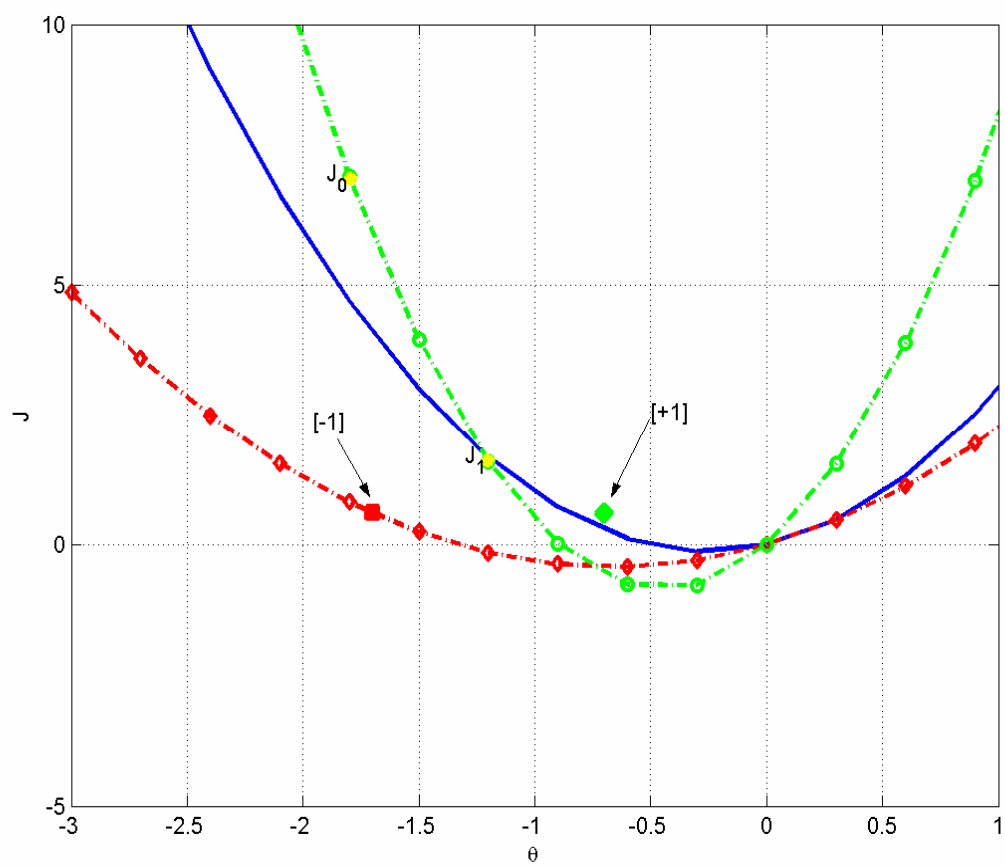
Η ανάλυση που παρουσιάζεται στο [23] έχει αποδείξει τις ιδιότητες σύγκλισης και απόδοσης του αλγορίθμου AFT2. Οι ιδιότητες αυτές μπορούν να συνοψιστούν ως ακολούθως:

Ιδιότητες AFT2: Για $K \geq \dim(\theta)$, ο αλγόριθμος AFT2 εγγυάται ότι για κάθε k ισχύει ότι:

$$J_k \leq J_{k-1} + \varepsilon_k + \delta_k \quad (4.2)$$

όπου οι όροι θορύβου ε_k, δ_k ορίζονται με παρόμοιο τρόπο όπως στην περίπτωση του AFT1. Επιπλέον, ο αλγόριθμος AFT2 εγγυάται ότι το θ_k συγκλίνει σε μία σφαίρα με κέντρο ένα τοπικό ελάχιστο του $J(\theta_k, x_k)$ και ακτίνα ανάλογη του $\varepsilon_k + \delta_k$.

Σε αυτό το σημείο πρέπει να τονίσουμε ότι η απαίτηση να ισχύει η σχέση $K \geq \dim(\theta)$, μπορεί να είναι, σε πολλές περιπτώσεις, πολύ δύσκολη υπολογιστικά. Ευτυχώς, όπως θα δείξουμε σε επόμενα υποκεφάλαια, μία μικρή τιμή για το K (π.χ., $K=10$) αρκεί για να επιδείξει ο AFT2 μία ικανοποιητική συμπεριφορά. Στην πραγματικότητα, η απαίτηση $K \geq \dim(\theta)$ στον αρχικό αλγόριθμο AFT2 [23] επιβάλλεται έτσι ώστε να αποφευχθεί η περίπτωση όπου όλες οι υποψήφιες διαταραχές $\pm \Delta \theta^{(i)}$ οδηγούν σε αμελητέα μείωση του J . Μπορεί όμως να αποδειχθεί ότι ακόμα και αν το K είναι ένας μικρός αριθμός, τότε η (4.2) διατηρεί την ισχύ της και, επιπλέον, ισχύει ότι ο αλγόριθμος AFT2 συγκλίνει κοντά σε ένα τοπικό ελάχιστο αλλά εις βάρος ενός χαμηλότερου ρυθμού σύγκλισης σε σύγκριση με την περίπτωση όπου ισχύει ότι $K \geq \dim(\theta)$.



Γράφημα 4.1: Παράδειγμα εφαρμογής της χρήσης του εκτιμητή στον AFT2.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5 ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΗΣΗ ΚΑΙ ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗ

ΠΑΡΑΜΕΤΡΩΝ

5.1 Προσέγγιση του μοντέλου

Δύο¹ βασικές προσεγγίσεις έχουν πραγματοποιηθεί στον τομέα της κυκλοφοριακής ροής, η μικροσκοπική μοντελοποίηση περιγράφει την διαμήκης (ακολουθία αυτοκινήτων) και την πλάγια (αλλαγή λωρίδας) κίνηση του κάθε οχήματος ξεχωριστά, ενώ η μακροσκοπική μοντελοποίηση διαχειρίζεται την κυκλοφοριακή ροή σαν ένα συγκεκριμένο υγρό μέσω αθροιστικών μεταβλητών (πυκνότητα, μέση ταχύτητα, ροή).

Τα μικροσκοπικά μοντέλα είναι πολύπλοκα, μη-αναλυτικά (είναι περισσότερο εργαλεία προσομοίωσης παρά κλειστής μορφής μαθηματικά μοντέλα), και με μεγάλο υπολογιστικό φόρτο. Συνεπώς, η καταλληλότητά τους για τον σχεδιασμό της επιτήρησης της κυκλοφορίας και των στρατηγικών ελέγχου είναι μάλλον περιορισμένες. Σε αντίθεση με τις μικροσκοπικές προσεγγίσεις, τα μακροσκοπικά μοντέλα είναι αναλυτικά και άρα καταλληλότερα για τον σχεδιασμό στρατηγικών ελέγχου της κυκλοφορίας.

Μια σειρά δυναμικών μακροσκοπικών μοντέλων, κυρίως με την μορφή μερικών διαφορικών εξισώσεων (PDEs), έχουν προταθεί κατά καιρούς από σχετικές ερευνητικές προσπάθειες. Η εξίσωση της διατήρησης, όντας η μόνη ακριβής σχέση στην μοντελοποίηση της κυκλοφοριακής ροής, περιλαμβάνεται σε όλες τις προσεγγίσεις. Επιπλέον, τα μοντέλα πρώτης τάξης περιλαμβάνουν μία στατική σχέση ανάμεσα στην ταχύτητα και την πυκνότητα, ενώ τα μοντέλα δεύτερης τάξης διαχειρίζονται την μέση ταχύτητα δυναμικά και ενδεχομένως περισσότερο ρεαλιστικά. Παρότι η τεχνική βιβλιογραφία των μακροσκοπικών μοντέλων κυκλοφοριακής ροής είναι πολύ μεγάλη και αυξάνεται με ταχύ ρυθμό, έγκυρες εργασίες που βασίζονται σε αυστηρά μοντέλα και χρησιμοποιούν πραγματικά δεδομένα κυκλοφοριακής ροής είναι πραγματικά σπάνιες. Δεδομένου του εμπειρικού

¹ Το κεφάλαιο αυτό αποτελεί μετάφραση του [29]

χαρακτήρα των προτεινόμενων μοντέλων, η έλλειψη προσπαθειών επικύρωσης είναι ένα ελάττωμα το οποίο δεν μπορεί να τονιστεί επαρκώς.

Ένα άλλο θέμα που σχετίζεται με τα μακροσκοπικά μοντέλα είναι η διακριτοποίηση του χρόνου και του χώρου των PDEs με σκοπό να καταστήσει δυνατή την αριθμητική επίλυση σε ψηφιακούς υπολογιστές. Σε πολλές περιπτώσεις, πολύπλοκα αριθμητικά σενάρια χρησιμοποιούνται για μία αξιόπιστη και ακριβή αριθμητική προσέγγιση των PDEs. Αυτές οι προσεγγίσεις, ωστόσο, συνήθως οδηγούν σε πολύπλοκα υπολογιστικά σενάρια τα οποία απαιτούν υψηλή υπολογιστική προσπάθεια και επιπλέον δεν οδηγούν σε αναλυτικά διακριτοποιημένα μοντέλα. Με άλλα λόγια αυτές οι προσεγγίσεις καταβάλουν σημαντική προσπάθεια για να προσεγγίσουν τα PDEs τα οποία όμως δεν είναι ακριβείς. Μία εναλλακτική και πιο πρακτική προσέγγιση είναι η διακριτοποίηση των αρχικών εμπειρικών PDEs με την χρήση απλών (π.χ. Euler) αλγορίθμων. Το κύριο μειονέκτημα των προσεγγίσεων αυτών βασίζεται στο γεγονός ότι οι θεωρητικές έρευνες και τα αποτελέσματα που λαμβάνονται από τα PDEs δεν μπορούν άμεσα να μεταφερθούν στα διακριτοποιημένα μοντέλα.

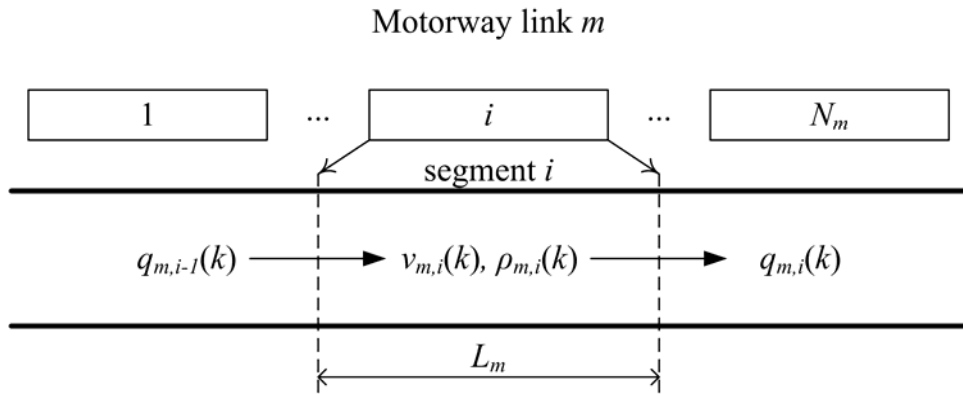
Στη συνέχεια, ένα μακροσκοπικό διακριτοποιημένο μοντέλο δεύτερης τάξης για την κυκλοφοριακή ροή χρησιμοποιείται για την περιγραφή της κυκλοφοριακής ροής σε ένα αυτοκινητόδρομο. Το μοντέλο αυτό είναι κατάλληλο για ελεύθερης ροής, κρίσιμες και με συμφόρηση κυκλοφοριακές συνθήκες και συμπεριλαμβάνεται στο γενικό εργαλείο προσομοίωσης METANET. Το METANET έχει δύο διακριτούς τρόπους λειτουργίας. Όταν δεν είναι γνωστός ο προορισμός (routing), τότε το METANET μπορεί να λειτουργήσει στην λειτουργία μη – προσανατολισμένος – προορισμός. Τώρα, στην περίπτωση όπου ο προορισμός είναι γνωστός, πρέπει να επιλεγεί η λειτουργία προσανατολισμένος προορισμός. Στη συνέχεια παρουσιάζεται μόνο η πρώτη περίπτωση.

Το δίκτυο του αυτοκινητόδρομου αναπαρίσταται από ένα προσανατολισμένο γράφημα όπου οι σύνδεσμοι του γραφήματος αναπαριστούν τις εκτάσεις του αυτοκινητόδρομου που έχουν ομοιόμορφα χαρακτηριστικά, π.χ. απουσία ραμπών εισόδου/εξόδου και όχι σημαντικές διαφορές στην γεωμετρία. Οι κόμβοι του γραφήματος τοποθετούνται στα σημεία όπου συναντάται σημαντική αλλαγή στην γεωμετρία του δρόμου καθώς και στις διασταυρώσεις, στις ράμπες εισόδου και στις ράμπες εξόδου. Τέσσερις τύποι συνδέσμων χρησιμοποιούνται. Πρώτον, υπάρχουν σύνδεσμοι που χρησιμοποιούνται για την αναπαράσταση των ομογενών εκτάσεων

του αυτοκινητόδρομου. Δεύτερον, υπάρχουν σύνδεσμοι προέλευσης οι οποίοι δέχονται την κυκλοφοριακή ζήτηση εκτός του δικτύου και την προωθούν στο κυρίως δίκτυο. Τρίτον, υπάρχουν σύνδεσμοι προορισμού που δέχονται την κυκλοφοριακή ροή μέσα από το δίκτυο και την προωθούν προς τα έξω. Τέλος, υπάρχουν αποθηκευτικοί και προωθητικοί σύνδεσμοι που χρησιμοποιούνται κυρίως για την μοντελοποίηση μέτρων ελέγχου από αυτοκινητόδρομο σε αυτοκινητόδρομο.

Η μακροσκοπική περιγραφή της κυκλοφοριακής ροής υπονοεί τον ορισμό επαρκών μεταβλητών που εκφράζουν την αθροιστική συμπεριφορά της κίνησης σε συγκεκριμένες χρονικές στιγμές και τοποθεσίες. Τα ορίσματα του χώρου και του χρόνου διακριτοποιούνται. Το διακριτό χρονικό βήμα ορίζεται από το T (συνήθως $T=5-10$ sec). Ένας σύνδεσμος m του αυτοκινητόδρομου χωρίζεται σε N_m τμήματα ίδιου μεγέθους L_m (συνήθως $L_m \geq 300m$) έτσι ώστε η συνθήκη αριθμητικής σταθερότητας $L_m \geq T v_{f,m}$ να ικανοποιείται, όπου το $v_{f,m}$ είναι η ελεύθερη (υψηλότερη) ταχύτητα στον σύνδεσμο m . Η κυκλοφορία σε κάθε τμήμα i του συνδέσμου m στον διακριτό χρόνο $t = kT$, $k = 0, 1, \dots, K$, όπου K είναι ο χρονικός ορίζοντας, χαρακτηρίζεται μακροσκοπικά μέσω των ακόλουθων μεταβλητών :

- Πυκνότητα $\rho_{m,i}(k)$ (οχήματα/χιλιόμετρο/λωρίδα) είναι ο αριθμός των οχημάτων στο τμήμα i του συνδέσμου m τη χρονική στιγμή $t = kT$ διαιρεμένος με το μήκος του τμήματος L_m και τον αριθμό των λωρίδων λ_m .
- Μέση ταχύτητα $v_{m,i}(k)$ (χιλιόμετρα/ώρα) είναι η μέση ταχύτητα των οχημάτων στο τμήμα i του συνδέσμου m την χρονική στιγμή $t = kT$.
- Κυκλοφοριακός όγκος ή κυκλοφοριακή ροή (οχήματα/ώρα) είναι ο αριθμός των οχημάτων που φεύγουν από το τμήμα i του συνδέσμου m κατά το χρονικό διάστημα $[kT, (k+1)T)$, διαιρεμένος με τον χρόνο T .



Διάγραμμα 5.1: Διακριτοποιημένος σύνδεσμος αυτοκινητόδρομου.

Οι μεταβλητές που ορίστηκαν προηγουμένως υπολογίζονται για κάθε τμήμα I του συνδέσμου m σε κάθε χρονικό βήμα k από τις ακόλουθες εξισώσεις :

$$\rho_{m,i}(k+1) = \rho_{m,i}(k) + \frac{T}{L_m \lambda_m} [q_{m,i-1}(k) - q_{m,i}(k)] \quad (5.1)$$

$$q_{m,i}(k) = \rho_{m,i}(k) v_{m,i}(k) \lambda_m \quad (5.2)$$

$$v_{m,i}(k+1) = v_{m,i}(k) + \frac{T}{\tau} \{V[\rho_{m,i}(k)] - v_{m,i}(k)\} + \frac{T}{L_m} [v_{m,i-1}(k) - v_{m,i}(k)] v_{m,i}(k) - \frac{\nu T}{\tau L_m} \frac{\rho_{m,i+1}(k) - \rho_{m,i}(k)}{\rho_{m,i}(k) + \kappa} \quad (5.3)$$

$$V[\rho_{m,i}(k)] = v_{f,m} \exp \left[-\frac{1}{\alpha_m} \left(\frac{\rho_{m,i}(k)}{\rho_{cr,m}} \right)^{\alpha_m} \right] \quad (5.4)$$

όπου $v_{f,m}$ είναι η ελεύθερη ταχύτητα (που προκύπτει από την (5.4) για $\rho_{m,i} = 0$), το $\rho_{cr,m}$ δηλώνει την κρίσιμη πυκνότητα ανά λωρίδα του συνδέσμου m (η πυκνότητα για την οποία η κυκλοφοριακή ροή του συνδέσμου βρίσκεται κοντά στην χωρητικότητά του $q_{cap,m}$) και α_m είναι μία επιπλέον παράμετρος της εξίσωσης (5.4) για τον σύνδεσμο m . Επιπλέον, το τ (μία χρονική σταθερά), το ν και το κ είναι παράμετροι του μοντέλου που έχουν ίδια τιμή για όλους τους συνδέσμους του δικτύου. Οι τιμές των παραμέτρων θα καθοριστούν μέσω της διαδικασίας βελτιστοποίησης παραμέτρων που περιγράφεται στην παράγραφο 5.3.

Αυτό το μοντέλο δεύτερης τάξης προτάθηκε από τον Payne. Η εξίσωση (5.1) εκφράζει την αρχή διατήρησης των οχημάτων, ενώ η (5.2) είναι η εξίσωση της ροής η

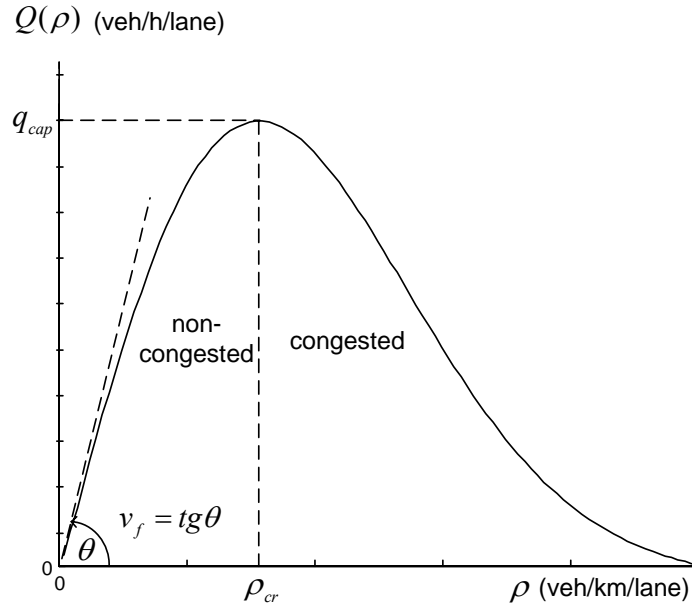
οποία προκύπτει άμεσα από τον μη διακριτοποιημένο ορισμό των μεταβλητών κυκλοφορίας και μπορεί να αντικατασταθεί στην εξίσωση (5.1). Η εξίσωση (5.4) εκφράζει μία απλοποιημένη, στατική, γνησίως φθίνουσα σχέση ανάμεσα στην μέση ταχύτητα και στην πυκνότητα. Στα μοντέλα δεύτερης τάξης, η σχέση αυτή αντικαθίσταται στη γενικευμένη δυναμική εξίσωση (5.3) η οποία θεωρεί επιπρόσθετες δυναμικές και ανομοιογενείς, όσον αφορά τον χώρο, επιδράσεις. Παραταύτα, η εξίσωση (5.3) «κυριαρχείται» από την (5.4) και επίσης, και οι δύο εξισώσεις είναι εμπειρικές, π.χ. δεν έχουν καμία ουσιαστική φυσική υπόσταση.

Δύο επιπλέον όροι μπορούν να περιληφθούν στο δεξί μέλος της εξίσωσης (5.3) για μία περισσότερο ακριβή μοντελοποίηση των φαινομένων κυκλοφορίας στις ράμπες εισόδου. Αυτοί οι επιπλέον όροι περιλαμβάνουν δύο επιπλέον σταθερές παραμέτρους του μοντέλου, την ϕ και δ . Επιπλέον, η μέση ταχύτητα που προκύπτει από την (5.3) φράζεται προς τα κάτω από την ελάχιστη ταχύτητα v_{\min} , έτσι ώστε να αποφεύγονται οι μη ρεαλιστικές χαμηλές ροές κατά την διάρκεια κυκλοφοριακής συμφόρησης.

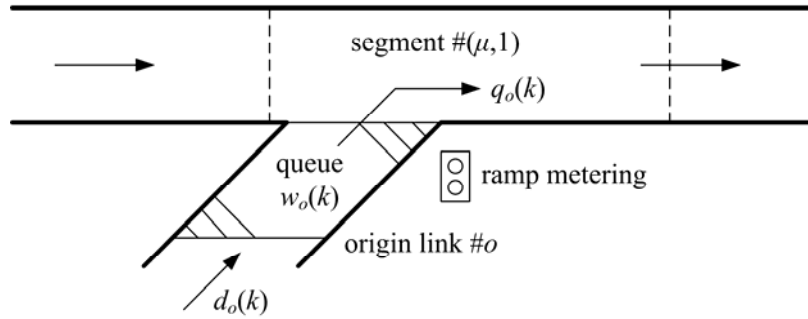
Αντικαθιστώντας την (5.4) στην (5.2) προκύπτει μία στατική σχέση ροής – πυκνότητας

$$Q(\rho) = v_f \rho \exp \left[-\frac{1}{\alpha} \left(\frac{\rho}{\rho_{cr}} \right)^\alpha \right] \quad (5.5)$$

η οποία έχει μία χαρακτηριστική μορφή αντίστροφου U και συχνά καλείται ως το θεμελιώδες διάγραμμα της Μηχανικής Κυκλοφορίας (Traffic Engineering) (Διάγραμμα 5.2). Λαμβάνοντας υπόψη την (5.2), η κλίση της ευθείας που ενώνει ένα συγκεκριμένο σημείο (Q, ρ) της καμπύλης με την αρχή των αξόνων, αντιστοιχεί στην σχετική μέση ταχύτητα. Όπως φαίνεται από το διάγραμμα, οι χαμηλές πυκνότητες σχετίζονται με χαμηλές ροές και υψηλές ταχύτητες (ίση με v_f για $\rho = 0$). Καθώς η πυκνότητα αυξάνεται, αυξάνεται η ροή, έως ότου η τιμή της χωρητικότητας της ροής q_{cap} αγγίξει την τιμή της κρίσιμης πυκνότητας ρ_{cr} , πέρα από την οποία αρχίζει η κυκλοφοριακή συμφόρηση και μειώνεται η ροή. Αξίζει να σημειωθεί ότι είναι δύσκολη η μέτρηση της πυκνότητας σε πραγματικό χρόνο, γι' αυτό συνήθως χρησιμοποιείται η άμεσα μετρήσιμη πληρότητα του δρόμου (%), η οποία είναι σχεδόν ανάλογη της πυκνότητας.



Διάγραμμα 5.2: Το θεμελιώδες διάγραμμα



Διάγραμμα 5.3: Το μοντέλο ουράς συνδέσμων προέλευσης

Για τους συνδέσμους προέλευσης, π.χ. σύνδεσμοι που δέχονται την κυκλοφοριακή ζήτηση d_o και την προωθούν στο δίκτυο του αυτοκινητόδρομου, χρησιμοποιείται ένα απλό μοντέλο ουράς (Διάγραμμα 5.3 (Το μοντέλο ουράς συνδέσμων προέλευσης)). Η εξερχόμενη ροή q_o ενός συνδέσμου προέλευσης o εξαρτάται από την ζήτηση των αφίξεων, τις κυκλοφοριακές συνθήκες του αντίστοιχου κύριου τμήματος $(\mu,1)$ και από την ύπαρξη μέτρων ελέγχου ραμπών

εισόδου. Εάν ο έλεγχος ραμπών εισόδου εφαρμοστεί, τότε η εξερχόμενη ροή $q_o(k)$ που φεύγει από τον σύνδεσμο προέλευσης o κατά την περίοδο k , είναι ένα μέρος $r_o(k)$ της εξερχόμενης ροής $\hat{q}_o(k)$ το οποίο θα έφευγε εάν δεν υπήρχε ο έλεγχος ραμπών εισόδου. Έτσι, το $r_o(k) \in [r_{\min,o}, 1]$ είναι ο ρυθμός μέτρησης για τον σύνδεσμο προέλευσης o , π.χ. μία μεταβλητή ελέγχου, όπου το $r_{\min,o}$ είναι η ελάχιστη αποδεκτή τιμή. Εάν ισχύει $r_o(k)=1$, δεν εφαρμόζεται έλεγχος ραμπών εισόδου, αλλιώς ισχύει ότι $r_o(k)<1$. Το μοντέλο ουράς περιγράφεται από την ακόλουθη εξίσωση διατήρησης:

$$w_o(k+1) = w_o(k) + T[d_o(k) - q_o(k)] \quad (5.6)$$

όπου $w_o(k)$ (οχήματα) είναι το μήκος της ουράς στον σύνδεσμο προέλευσης o την χρονική στιγμή kT και $d_o(k)$ (οχήματα/ώρα) είναι η ροή ζήτησης στον o . Η εξερχόμενη ροή $q_o(k)$ καθορίζεται ως ακολούθως:

$$q_o(k) = r_o(k) \hat{q}_o(k) \quad (5.7)$$

με

$$\hat{q}_o(k) = \min\{\hat{q}_{o,1}(k), \hat{q}_{o,2}(k)\} \quad (5.8)$$

και

$$\hat{q}_{o,1}(k) = d_o(k) + w_o(k) / T \quad (5.9)$$

$$\hat{q}_{o,2}(k) = Q_o \min\left\{1, \frac{\rho_{\max} - \rho_{\mu,1}(k)}{\rho_{\max} - \rho_{cr,\mu}}\right\} \quad (5.10)$$

όπου, Q_o (οχήματα/ώρα) είναι η χωρητικότητα της ροή στις ράμπες εισόδου, π.χ. η μέγιστη δυνατή εξερχόμενη ροή των ραμπών εισόδου υπό συνθήκες ελεύθερης κυκλοφοριακής ροής στο κυρίως δίκτυο, και ρ_{\max} (οχήματα/χιλιόμετρο/λωρίδα) είναι η μέγιστη πυκνότητα στο δίκτυο. Σύμφωνα με τις εξισώσεις (5.8)-(5.10), η ανεξέλεγκτη εξερχόμενη ροή $\hat{q}_o(k)$ καθορίζεται από την τρέχουσα ζήτηση του συνδέσμου προέλευσης εάν $\hat{q}_{o,1}(k) < \hat{q}_{o,2}(k)$. Αλλιώς καθορίζεται από την γεωμετρική χωρητικότητα Q_o εάν η πυκνότητα του κυρίως δικτύου βρίσκεται κάτω

από την κρίσιμη, π.χ. $\rho_{\mu,1}(k) < \rho_{cr,\mu}$, ή από τη μειωμένη χωρητικότητα λόγω της συμφόρησης στο κυρίως δίκτυο εάν $\rho_{\mu,1}(k) > \rho_{cr,\mu}$.

Για πολλούς λόγους, ανάμεσα στους οποίους είναι η μοντελοποίηση μέτρων ελέγχου από αυτοκινητόδρομο σε αυτοκινητόδρομο, ένα παρόμοιο απλό μοντέλο μπορεί επίσης να χρησιμοποιηθεί για μερικούς εσωτερικούς συνδέσμους του δικτύου, γνωστών ως αποθηκευτικών και προωθητικών συνδέσμων. Τέλος, οι κυκλοφοριακές συνθήκες στους συνδέσμους προορισμού επηρεάζονται από τις κατάντη κυκλοφοριακές συνθήκες οι οποίες ίσως παρέχονται ως οριακές συνθήκες για τον συνολικό ορίζοντα. Εάν δεν υπάρχουν διαθέσιμες οριακές συνθήκες, πραγματοποιείται η υπόθεση ότι δεν υπάρχει κατάντη κυκλοφοριακή συμφόρηση.

Οι διακλαδώσεις και οι διασταυρώσεις του αυτοκινητόδρομου (συμπεριλαμβάνοντας τις ράμπες εισόδου και τις ράμπες εξόδου) αναπαρίστανται με κόμβους. Η κυκλοφορία εισέρχεται στον κόμβο n μέσω ενός αριθμού συνδέσμων εισόδου και διανέμεται στους συνδέσμους εξόδου σύμφωνα με την ακόλουθη σχέση.

$$Q_n(k) = \sum_{\mu \in I_n} q_{\mu, N_\mu}(k) \quad (5.11)$$

$$q_{m,0}(k) = \beta_n^m(k) Q_n(k) \quad \forall m \in O_n \quad (5.12)$$

όπου, I_n είναι το σύνολο των συνδέσμων που μπαίνουν στον κόμβο n , O_n είναι το σύνολο των συνδέσμων που φεύγουν από τον κόμβο n , $Q_n(k)$ είναι ο συνολικός κυκλοφοριακός όγκος που εισέρχεται στον κόμβο n κατά την περίοδο k , $q_{m,0}(k)$ είναι ο κυκλοφοριακός όγκος που εγκαταλείπει τον κόμβο n μέσω m εξωτερικών συνδέσμων και $\beta_n^m(k) \in [0,1]$ είναι το τμήμα του $Q_n(k)$ που εγκαταλείπει τον κόμβο n μέσω του συνδέσμου m (turning rates).

Σε ένα δίκτυο κόμβων n , πρέπει να ληφθεί υπόψη στο τελευταίο τμήμα των εισερχόμενων συνδέσμων η ανάντη επίδραση της πυκνότητας των κατάντη συνδέσμων (βλέπε εξίσωση (5.3) για $i = N_m$). Αυτό προσδιορίζεται μέσω της εξίσωσης

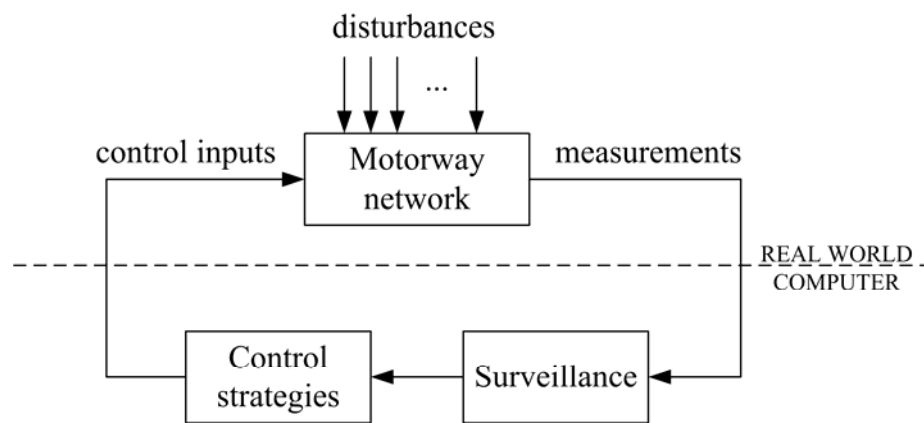
$$\rho_{m, N_m+1}(k) = \sum_{\mu \in O_n} \rho_{\mu,1}^2(k) / \sum_{\mu \in O_n} \rho_{\mu,1}(k) \quad (5.13)$$

όπου, $\rho_{m, N_m+1}(k)$ είναι η εικονική πυκνότητα που υπάρχει κατάντη κάθε συνδέσμου εισόδου m που χρησιμοποιείται στην εξίσωση (5.3) για $i = N_m$ και $\rho_{\mu,1}(k)$ είναι η

πυκνότητα του πρώτου τμήματος του εξερχόμενου συνδέσμου μ . Η δευτεροβάθμια μορφή χρησιμοποιείται για να συνυπολογιστεί το γεγονός ότι η συμφόρηση σε έναν εξερχόμενο σύνδεσμο μπορεί να μεταφερθεί προς τα πίσω σε έναν εισερχόμενο σύνδεσμο ακόμα και στην περίπτωση όπου υπάρχει ελεύθερη ροή σε κάποιον άλλο σύνδεσμο εξόδου.

Παρομοίως, σε ένα δίκτυο n κόμβων πρέπει να ληφθεί υπόψη η κατάντη επίδραση της ταχύτητας των ανάντη συνδέσμων σύμφωνα με την εξίσωση (5.3) για $i=1$. Η απαιτούμενη τιμή της ανάντη μέσης ταχύτητας, υπολογίζεται από τον σταθμισμένο μέσο της ροής

$$v_{m,0}(k) = \sum_{\mu \in I_n} v_{\mu, N_\mu}(k) q_{\mu, N_\mu}(k) / \sum_{\mu \in I_n} q_{\mu, N_\mu}(k) \quad (5.14)$$



Διάγραμμα 5.4 : the control loop

όπου, $v_{m,0}(k)$ είναι η εικονική ταχύτητα ανάντη κάθε συνδέσμου εξόδου m που χρειάζεται στην εξίσωση (5.3) για $i=1$.

Συνδυάζοντας τις εξισώσεις που αναφέρθηκαν ανωτέρω, προκύπτει ένα μη γραμμικό, μακροσκοπικό, διακριτού χρόνου μοντέλο χώρου καταστάσεων.

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{f}[\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k), \mathbf{d}(k), \mathbf{p}], \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \quad (5.15)$$

για ολόκληρο το δίκτυο του αυτοκινητόδρομου, όπου το \mathbf{x} είναι ένα διάνυσμα κατάστασης, το \mathbf{u} είναι ένα διάνυσμα ελέγχου, το \mathbf{d} είναι ένα διάνυσμα θορύβου και το \mathbf{p} είναι ένα διάνυσμα παραμέτρων. Το μοντέλο αυτό μπορεί να χρησιμοποιηθεί

για να προσομοιώσει το κυκλοφοριακό δίκτυο του αυτοκινητόδρομου όπως φαίνεται στο Διάγραμμα 5.4 με σκοπό να εξετάσει διάφορες στρατηγικές ελέγχου.

Το διάνυσμα κατάστασης αποτελείται από τις πυκνότητες $\rho_{m,i}$ και τις μέσες ταχύτητες $v_{m,i}$ για κάθε τμήμα i κάθε συνδέσμου m και οι ουρές w_o κάθε σύνδεσμο προέλευσης, αποθηκευτικό και προωθητικό σύνδεσμο o . Το διάνυσμα ελέγχου αποτελείται από τους ρυθμούς ramp metering r_o κάθε συνδέσμου προέλευσης, αποθηκευτικού και προωθητικού o , ο οποίος μετράται. Το διάνυσμα θορύβου αποτελείται από την ζήτηση d_o σε κάθε σύνδεσμο προέλευσης o και τα ποσοστά στροφής β_n^m σε κάθε διακλαδωμένο κόμβο n . Το διάνυσμα παραμέτρων αποτελείται από την ελεύθερη ταχύτητα $v_{f,m}$, την κρίσιμη πυκνότητα $\rho_{cr,m}$ και α_m για κάθε σύνδεσμο m , και τις παραμέτρους τ , ν , κ , δ , ϕ , v_{\min} και ρ_{\max} οι οποίες είναι κοινές για όλα τα δίκτυα συνδέσμων.

Αυτός ο αναλυτικός σχηματισμός χώρου καταστάσεων είναι ιδιαίτερα σημαντικός καθώς επιτρέπει την χρήση γνωστών μεθοδολογιών για την εκτίμηση και πρόβλεψη του διανύσματος κατάστασης και παραμέτρων καθώς επίσης και για τον σχεδιασμό στρατηγικών ανατροφοδότησης και βέλτιστου ελέγχου για το κυκλοφοριακό δίκτυο του αυτοκινητόδρομου.

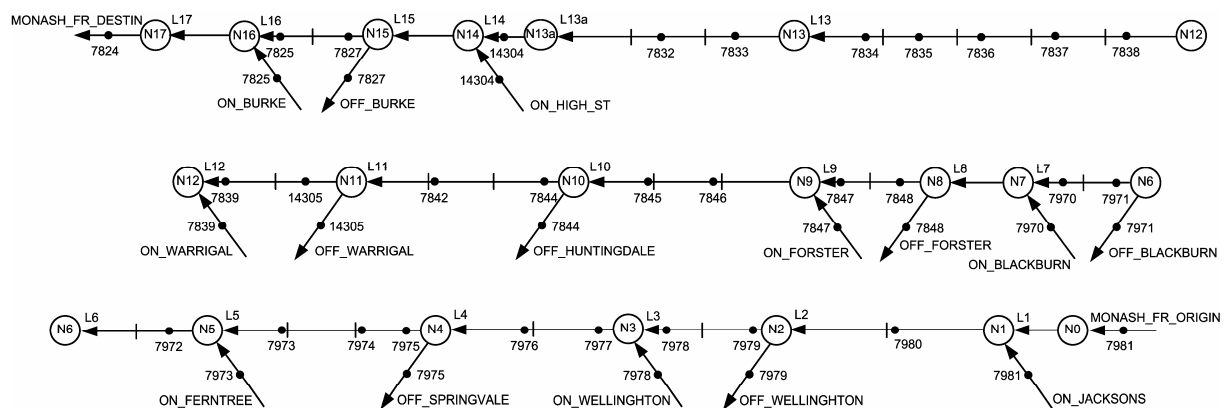
5.2 Εφαρμογή του μοντέλου στο πιλοτικό έργο έκτασης του αυτοκινητοδρόμου

Το πιλοτικό έργο ramp metering θα τρέξει με έξι ράμπες εισόδου του Monash Freeway εκτεινόμενο από το Jacksons RD έως το Warrigal RD. Αυτή είναι η δυτική κατεύθυνση του αυτοκινητόδρομου η οποία οδηγεί στο κέντρο της πόλης. Το μοντέλο θα εφαρμοστεί στο πιλοτικό έργο της έκτασης του αυτοκινητόδρομου κατάντη του Burke RD. Η επέκταση αυτή πραγματοποιείται, πρώτον, έτσι ώστε να υπολογιστεί η πιθανότητα διάχυσης της κυκλοφοριακής συμφόρησης από την περιοχή του Burke

RD και δεύτερον, με σκοπό την μελέτη των επιδράσεων του ALINEA/HERO στις κυκλοφοριακές συνθήκες σε αυτή την περιοχή.

Το συνολικό μήκος της έκτασης του αυτοκινητόδρομου το οποίο μοντελοποιήθηκε είναι περίπου 16.5 χιλιόμετρα. Ο συνολικός αριθμός των συνδέσμων που χρησιμοποιούνται για την μοντελοποίηση του αυτοκινητόδρομου είναι 34. Ο αριθμός αυτός περιλαμβάνει 17 συνδέσμους αυτοκινητόδρομου, 9 συνδέσμους προέλευσης και 8 συνδέσμους προορισμού. Οι σύνδεσμοι του αυτοκινητόδρομου διαιρέθηκαν σε 38 τμήματα. Το μήκος του κάθε τμήματος κυμαίνεται από 300 έως 650 μέτρα.

Το Διάγραμμα 5.5 απεικονίζει την τελική μοντελοποιημένη έκταση του αυτοκινητόδρομου συμπεριλαμβάνοντας τους σταθμούς ανίχνευσης (τελείες με αντίστοιχους αριθμούς). Τα βέλη αναπαριστούν συνδέσμους και οι κύκλοι αναπαριστούν κόμβους. Τρεις τύποι συνδέσμων χρησιμοποιούνται. Ονομαστικά, οι σύνδεσμοι αυτοκινητόδρομου (L1-L17), οι αρχικοί σύνδεσμοι (ονόματα ραμπών εισόδου και το MONASH_FR_ORIGIN) και σύνδεσμοι προορισμού (ονόματα ραμπών εισόδου και το MONASH_FR_DESTIN). Κάθε σύνδεσμος αυτοκινητόδρομου διαιρείται σε έναν αριθμό τμημάτων. Ένας κόμβος χρησιμοποιείται κυρίως όταν μία αφετηρία ή ένας προορισμός πρέπει να συνδεθεί με το κυρίως δίκτυο. Ο κόμβος N13 χρησιμοποιείται έτσι ώστε να διακόψει αυτήν την μεγάλη έκταση ανάμεσα σε δύο συνδέσμους που θα μοντελοποιηθούν με την χρήση διαφορετικών θεμελιωδών διαγραμμάτων, π.χ. διαφορετικές τιμές χωρητικότητας. Αυτό είναι απαραίτητο καθώς ο «λαιμός» αυτής της έκτασης του αυτοκινητόδρομου τοποθετείται στην περιοχή του L13a ο οποίος φαίνεται να έχει χαμηλότερη χωρητικότητα από τον L13. ο κόμβος N13a χρησιμοποιείται δεδομένου του γεγονότος ότι υπάρχει μια αύξηση στις λωρίδες από 3 που είναι έως τον σύνδεσμο L13a σε 4 από τον σύνδεσμο L14 και μετά.



Διάγραμμα 5.5: Αναπαράσταση του πιλοτικού έργου έκτασης του αυτοκινητόδρομου

5.3 Βελτιστοποίηση Παραμέτρων Μοντέλου

Η διαδικασία αυτή έχει ως στόχο να δώσει την δυνατότητα στο μακροσκοπικό μοντέλο του δικτύου του αυτοκινητόδρομου να αναπαραστήσει τις κυκλοφοριακές συνθήκες με ικανοποιητική ακρίβεια. Η εκτίμηση των αγνώστων παραμέτρων που εμπεριέχονται στην εξίσωση (5.15) δεν είναι εύκολο ζήτημα, δεδομένου του γεγονότος ότι οι εξισώσεις του συστήματος είναι υψηλά μη γραμμικές όσον αφορά τις παραμέτρους και τις μεταβλητές κατάστασης. Η πιο κοινή προσέγγιση είναι η ελαχιστοποίηση της διαφοράς ανάμεσα στους υπολογισμούς του μοντέλου και στην πραγματική διαδικασία. Θεωρούμε ότι το y είναι το μετρήσιμο διάνυσμα εξόδου (συνήθως αποτελείται από ροές και μέσες ταχύτητες σε διάφορες τοποθεσίες) του μη γραμμικού συστήματος (5.15) και δίνεται από την εξίσωση

$$y(k) = g[x(k), p]. \quad (5.16)$$

Έπειτα το πρόβλημα της εκτίμησης των παραμέτρων ως ένα πρόβλημα ελαχίστων τετραγώνων : έχοντας ως δεδομένα την διαταραχή και τις τροχιές των διανυσμάτων ελέγχου, το αποτέλεσμα της διαδικασίας $y^m(k)$ για $k = 0, 1, \dots, K$, και την αρχική κατάσταση x_0 , βρίσκουμε το σύνολο των παραμέτρων p ελαχιστοποιώντας την διαφορά κόστους

$$J(\mathbf{p}) = \sum_{k=1}^K \|\mathbf{y}(k) - \mathbf{y}^m(k)\|_{\mathbf{Q}}^2 \quad (5.17)$$

υπό τους (5.15) και (5.16), όπου το \mathbf{Q} είναι ένας θετικά ορισμένος διαγώνιος πίνακας. Οι παράμετροι του μοντέλου επιλέγονται από μία στενή αποδεκτή περιοχή του χώρου των παραμέτρων που μπορεί να καθοριστεί στην βάση φυσικών θεωρήσεων. Ο καθορισμός του βέλτιστου συνόλου παραμέτρων πρέπει να πραγματοποιηθεί με την βοήθεια ενός κατάλληλου μη γραμμικού συνηθισμένου προγράμματος, όπου για κάθε επιλογή ενός καινούριου διανύσματος παραμέτρων \mathbf{p} , η τιμή του κριτηρίου της απόδοσης (5.17) υπολογίζεται από την εκτέλεση μίας προσομοίωσης του μοντέλου των εξισώσεων. Έχει αποδειχθεί ότι το μοντέλο είναι περισσότερο ευαίσθητο όσον αφορά τις τιμές των παραμέτρων που χρησιμοποιούνται στην θεμελιώδη εξίσωση (5.4) του Διαγράμματος 5.2.

Όπως αναφέραμε ήδη νωρίτερα, το διάνυσμα των παραμέτρων αποτελείται από την ελεύθερη ταχύτητα $v_{f,m}$, την κρίσιμη πυκνότητα $\rho_{cr,m}$ και α_m για κάθε σύνδεσμο m , και τις παραμέτρους τ , ν , κ , δ , ϕ , v_{\min} και ρ_{\max} οι οποίες είναι κοινές για όλους τους συνδέσμους του δικτύου. Στο παρόν πιλοτικό έργο έκτασης του αυτοκινητόδρομου δεν υπάρχει μείωση του αριθμού των λωρίδων. Επομένως, η παράμετρος ϕ δεν εμφανίζεται στις εξισώσεις του μοντέλου. Έξι διαφορετικά θεμελιώδη διαγράμματα χρησιμοποιήθηκαν στο μοντέλο για έξι σύνολα συνδέσμων. Οι ελεύθερες ταχύτητες για αυτά τα θεμελιώδη διαγράμματα θεωρούνται γνωστές και ίσες με την μέγιστη μέση ταχύτητα η οποία συνήθως μετράται στους αντίστοιχους συνδέσμους. Επιπλέον, κάποιες κοινές παράμετροι δίνονται ως σταθερές τιμές έτσι ώστε να μειωθεί η διάσταση του διανύσματος παραμέτρων. Η τιμή του κ ορίζεται 10 οχήματα/χιλιόμετρο/λωρίδα, η τιμή του v_{\min} 8 χιλιόμετρα/ώρα και η τιμή του ρ_{\max} 180 οχήματα/χιλιόμετρο/λωρίδα.

Η διαδικασία του μοντέλου εύρεσης των κατάλληλων παραμέτρων που περιγράφεται παραπάνω εφαρμόστηκε 3 φορές χρησιμοποιώντας 2 διαφορετικά σύνολα δεδομένων. Αυτό είχε σαν αποτέλεσμα 3 διαφορετικά μοντέλα με παρόμοιες τιμές παραμέτρων. Το πρώτο μοντέλο προέκυψε χρησιμοποιώντας το πρώτο σύνολο δεδομένων και το δεύτερο μοντέλο χρησιμοποιώντας το δεύτερο σύνολο δεδομένων. Τέλος, το τρίτο μοντέλο προέκυψε χρησιμοποιώντας και τα δύο σύνολα δεδομένων.

Τα δεδομένα της ροής, κυρίως ανάντη του τέλους της έκτασης του αυτοκινητόδρομου, είχαν πολύ θόρυβο και αυτό συνέβη γιατί δεν λήφθηκαν υπόψη

στις διαδικασία μέτρησης του διανύσματος εξόδου. Επιπλέον, μερικοί μετρητές δεν έδιναν μετρήσεις ροής και ταχύτητας για ένα μεγάλο τμήμα της μέρας. Συνεπώς, λήφθηκαν υπόψη μόνο μετρήσεις της ταχύτητας από μετρητές που λειτουργούσαν. Το πρώτο σύνολο μετρήσεων τη ταχύτητας λήφθηκε από τις 05:00 μέχρι τις 11:00 στις 10.08.2006 και το δεύτερο σύνολο τις ίδιες ώρες στις 18.08.2006. Αυτή η χρονική περίοδος χρησιμοποιήθηκε έτσι ώστε να εξασφαλίσει την αναπαραγωγή της συμφόρησης που δημιουργείται στις πρωινές ώρες αιχμής από το μοντέλο.

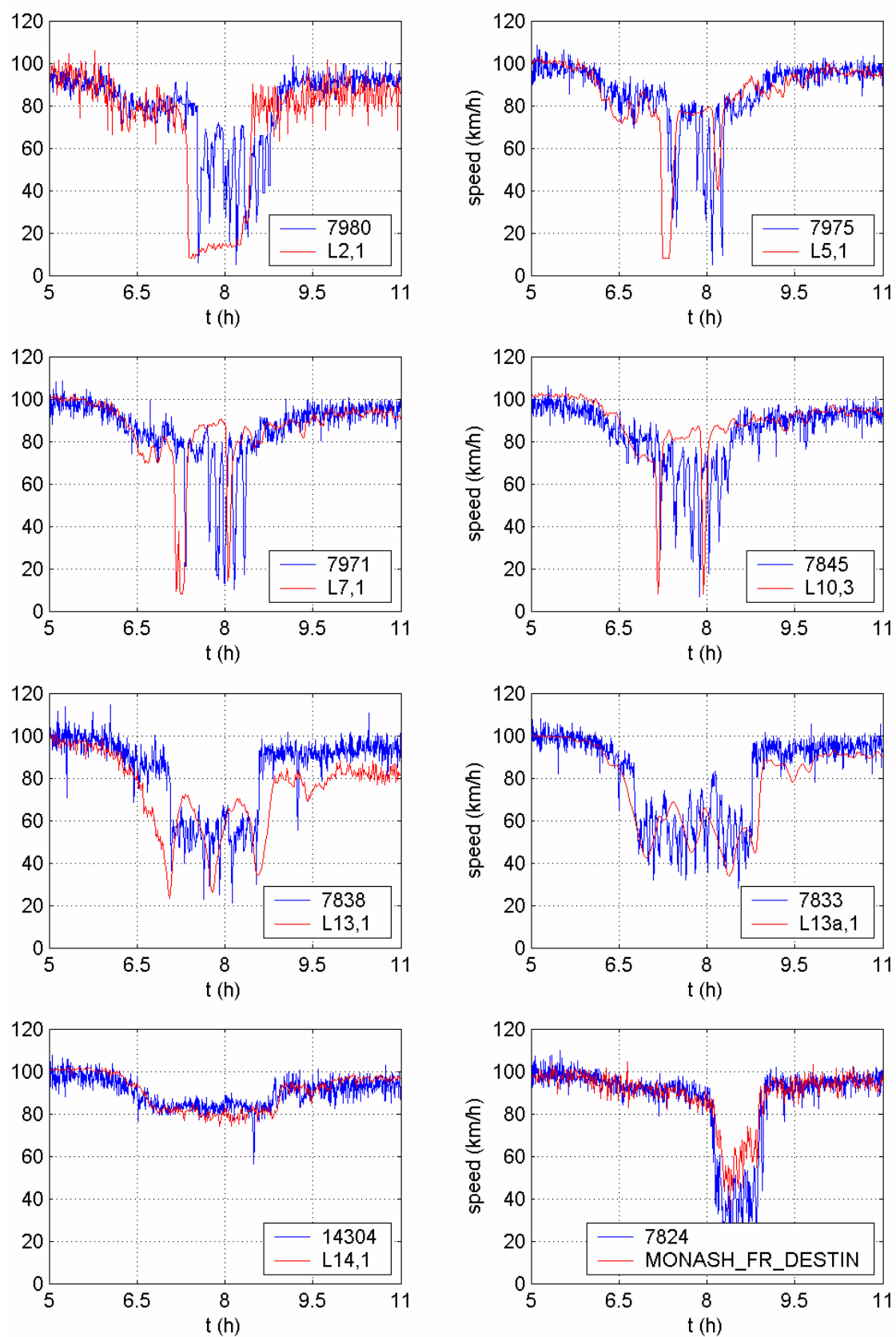
Επίσης πρέπει να σημειωθεί ότι και για τις δύο μέρες που μελετήθηκαν εμφανίζεται λαιμός κατάντη της ράμπας εισόδου στον Warrigal RD, στην περιοχή που καλύπτεται από τους σταθμούς μέτρησης 7832 και 7833. έχοντας ως σκοπό της διαβεβαίωση ότι ο λαιμός θα «ενεργοποιηθεί» από το μοντέλο, το βάρος που χρησιμοποιείται για τις αντίστοιχες μετρήσεις ήταν διπλάσιο από το βάρος που χρησιμοποιείται για όλες τις άλλες μετρήσεις. Τα βάρη αυτά αποτελούν την διαγώνιο του θετικά ορισμένου διαγώνιου πίνακα **Q**.

Η βελτιστοποίηση του προβλήματος πραγματοποιήθηκε χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο μη γραμμικού προγραμματισμού με περιορισμούς που είναι ενσωματωμένος στην Matlab. Παρόλο που το πρόβλημα ήταν μέσης δυσκολίας, ήταν πολύ δύσκολο να επιλυθεί καθώς η αντικειμενική συνάρτηση επιτυγχάνει πολλά τοπικά ελάχιστα. Τα αποτελέσματα των τριών μοντέλων παρουσιάζονται στον ακόλουθο Πίνακα 5.1.

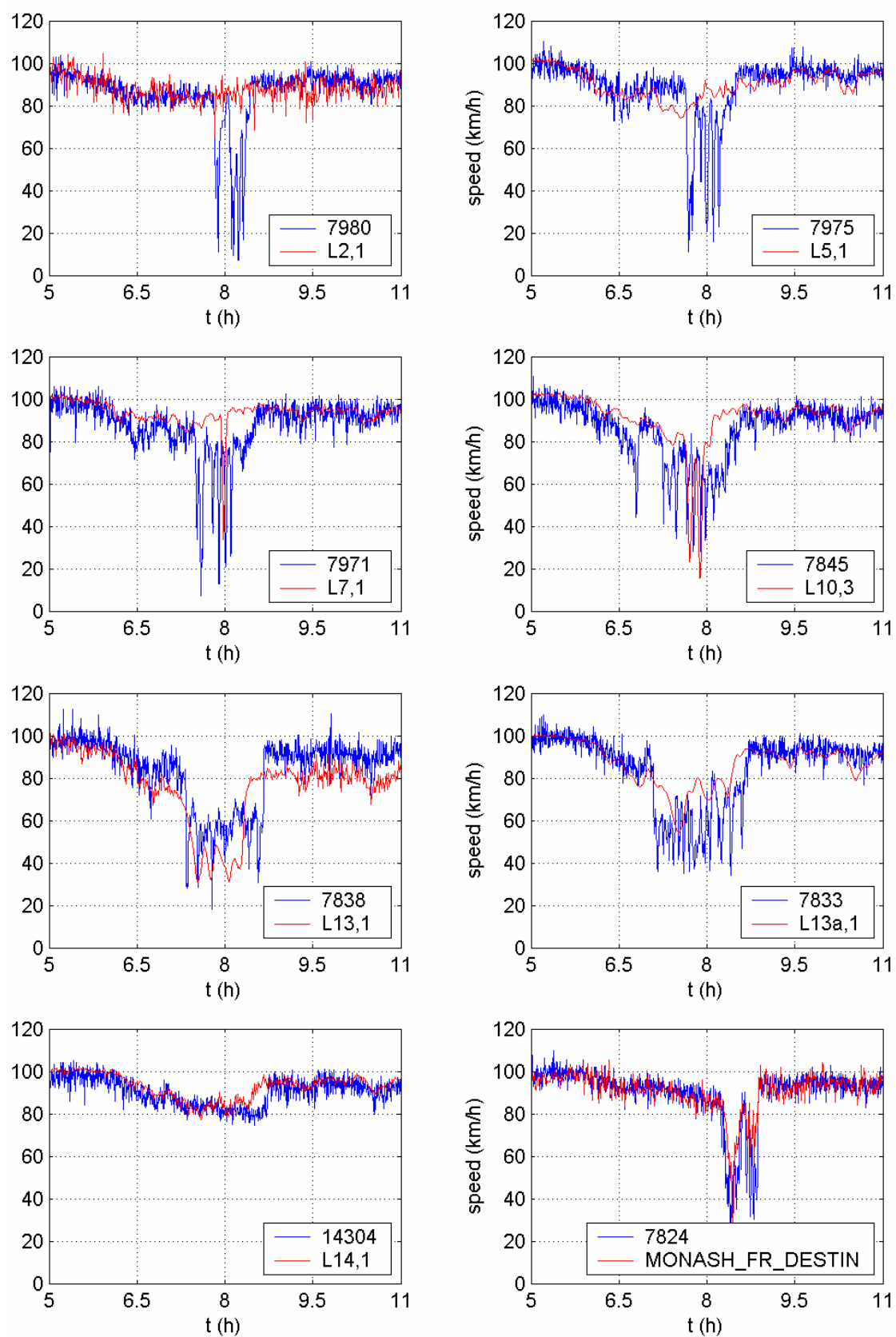
	Model 1	Model 2	Model 3
τ (sec)	23.4	17.5	17.5
ν (km ² /h)	31.8	30.5	32.9
δ (h/km)	1.60	2.01	2.13
$v_{f,m}$, $m \in \{L1, L2\}$ (km/h)	100	100	100
$\rho_{cr,m}$, $m \in \{L1, L2\}$ (veh/km/lane)	31.3	30.9	31.8
α_m , $m \in \{L1, L2\}$	3.10	3.88	3.99
$v_{f,m}$, $m \in \{L3, L4, L5\}$ (km/h)	102	102	102
$\rho_{cr,m}$, $m \in \{L3, L4, L5\}$ (veh/km/lane)	29.9	30.2	30.0
α_m , $m \in \{L3, L4, L5\}$	2.39	2.25	2.34
$v_{f,m}$, $m \in \{L6, \dots, L12\}$ (km/h)	102	102	102
$\rho_{cr,m}$, $m \in \{L6, \dots, L12\}$ (veh/km/lane)	31.6	31.7	31.0
α_m , $m \in \{L6, \dots, L12\}$	2.98	2.79	3.12
$v_{f,m}$, $m \in \{L13\}$ (km/h)	100	100	100
$\rho_{cr,m}$, $m \in \{L13\}$ (veh/km/lane)	34.1	31.6	32.4
α_m , $m \in \{L13\}$	2.14	2.62	2.65
$v_{f,m}$, $m \in \{L13a\}$ (km/h)	100	100	100
$\rho_{cr,m}$, $m \in \{L13a\}$ (veh/km/lane)	28.8	28.0	28.0
α_m , $m \in \{L13a\}$	2.84	2.76	3.01
$v_{f,m}$, $m \in \{L14, \dots, L17\}$ (km/h)	100	100	100
$\rho_{cr,m}$, $m \in \{L14, \dots, L17\}$ (veh/km/lane)	29.0	28.8	32.1
α_m , $m \in \{L14, \dots, L17\}$	3.83	3.68	3.16

Πίνακας 5.1: Αποτελέσματα των τριών μοντέλων

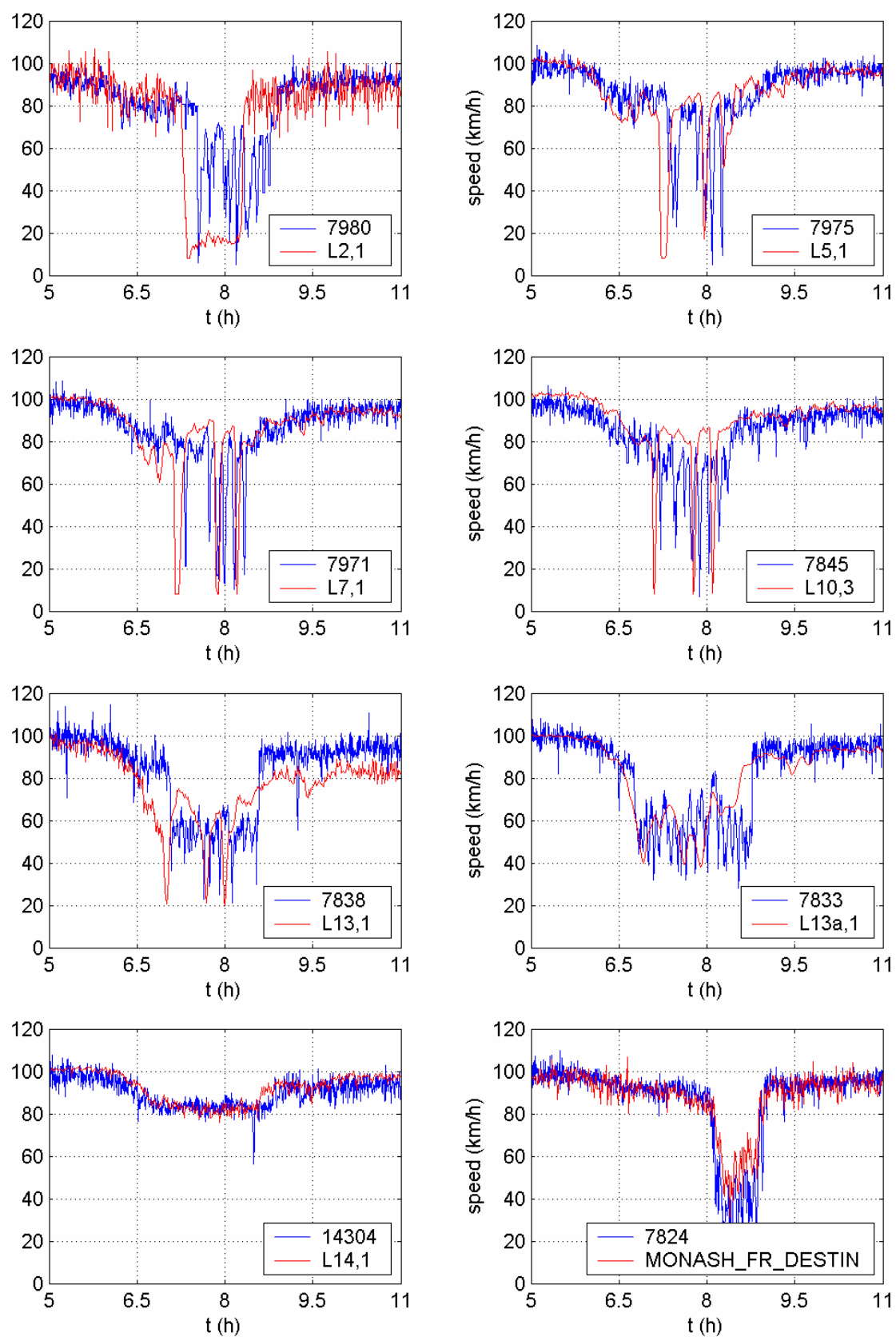
Ενδεικτικά παρατίθενται διαγράμματα (5.6-5.8) μερικών προσομοιώσεων των τριών μοντέλων



Διάγραμμα 5.6: Πραγματική έναντι εκτιμώμενης ταχύτητας (μοντέλο 1) από τις 05:00 – 11:00 στις 10.08.2006



Διάγραμμα 5.7 : Πραγματική έναντι εκτιμώμενης ταχύτητας (μοντέλο 2) από τις 05:00 – 11:00 στις 18.08.2006

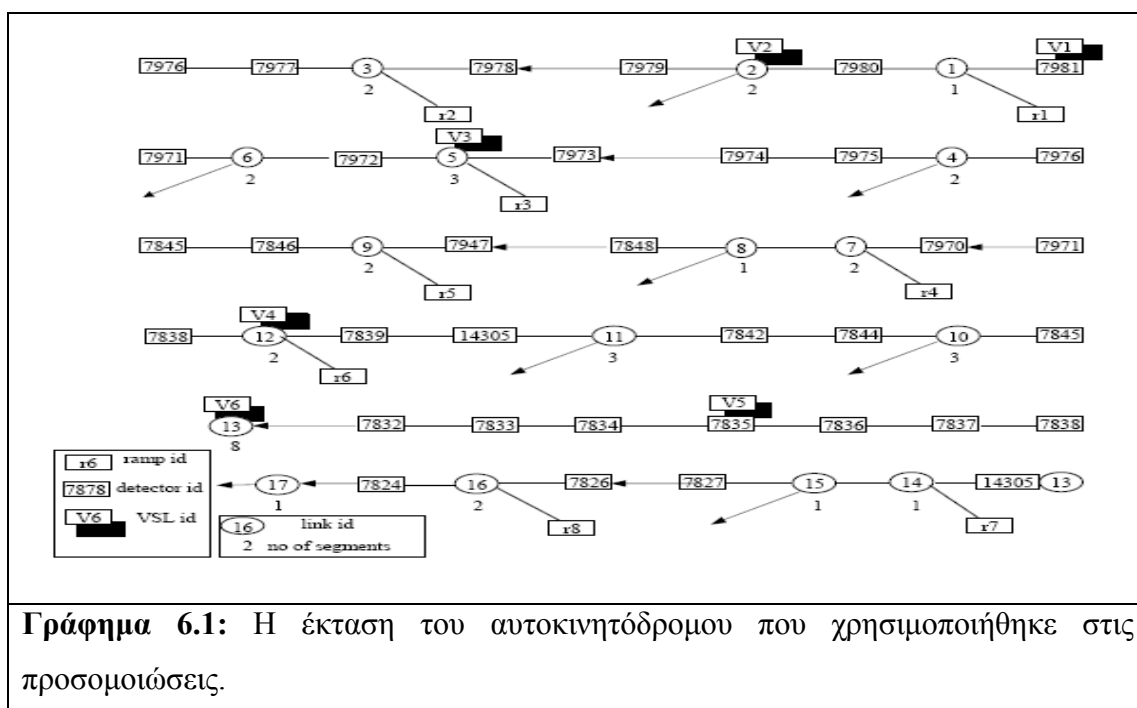


Διάγραμμα 5.8 : Πραγματική έναντι εκτιμώμενης ταχύτητας (μοντέλο 3) από τις 05:00 – 11:00 στις 10.08.2006

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6 : ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΗ ΔΙΑΤΑΞΗ

6.1 Δίκτυα κυκλοφορίας

Στο Γράφημα 6.1 παρουσιάζεται ένα διάγραμμα της έκτασης του αυτοκινητόδρομου που χρησιμοποιείται στα πειράματά μας. Η έκταση αυτή είναι ένα τμήμα του Monash - CityLink- West Gate Corridor στην Μελβούρνη (στην Αυστραλία), που χρησιμοποιείται από την VicRoads. Οι αριθμημένοι κύκλοι στο Γράφημα 6.1 αναπαριστούν τους συνδέσμους του δικτύου (οι σύνδεσμοι ξεκινούν και σταματούν σε τοποθεσίες όπου είτε υπάρχει ράμπα εισόδου ή εξόδου είτε αύξηση ή μείωση στις λωρίδες όπως συμβαίνει στον σύνδεσμο 13, όπου υπάρχει μία αύξηση των λωρίδων από 3 σε 4). Η έκταση του αυτοκινητόδρομου έχει μήκος 17 χιλιόμετρα και περιέχει συνολικά 8 ράμπες εισόδου και 7 ράμπες εξόδου, όπως φαίνεται στο Γράφημα 6.1. Κυκλοφοριακή συμφόρηση συνήθως συμβαίνει ανάντη της ράμπας r7. Την παρούσα χρονική στιγμή, μία στρατηγική ελέγχου ALINEA/HERO [29] πρόκειται να εφαρμοστεί στο συγκεκριμένο δίκτυο.



Γράφημα 6.1: Η έκταση του αυτοκινητόδρομου που χρησιμοποιήθηκε στις προσομοιώσεις.

6.2 Προσομοίωση κυκλοφοριακού δικτύου

Στην περίπτωση μας, της προσομοίωσης του δικτύου ενός αυτοκινητόδρομου, χρησιμοποιήθηκε το εργαλείο μακροσκοπικής προσομοίωσης της κυκλοφορίας METANET [26]. Οι παράμετροι του κυκλοφοριακού μοντέλου που θεωρήθηκαν στο METANET είναι αυτές που παρουσιάζονται στον Πίνακα 5.1.

Σχεδιάστηκαν 3 βασικά σενάρια ημερήσιας κυκλοφοριακής ζήτησης βασιζόμενα σε πραγματικές μετρήσεις. Αξίζει να σημειωθεί ότι τα σενάρια αυτά αντιστοιχούν σε συνθήκες μεγάλης κυκλοφοριακής συμφόρησης. Οι ημερήσιες ζητήσεις που χρησιμοποιήθηκαν στις προσομοιώσεις ήταν τυχαίες διαταραχές αυτών των βασικών σεναρίων ζήτησης. Πιο συγκεκριμένα:

- Τα βασικά σενάρια ζήτησης διαταράχθηκαν τυχαία, για κάθε μέρα, κατά έναν μέσο όρο της τάξεως του 10% από της αρχικές τιμές τους. Ο συνολικός χρόνος προσομοίωσης h_{sim} για κάθε ημέρα ήταν 6 ώρες (5 πμ. – 11 πμ.) καλύπτοντας τις πρωινές ώρες αιχμής.

Τέλος, η μέση τιμή της μέσης ημερήσιας ταχύτητας όλου του κυκλοφοριακού δικτύου (σε χιλιόμετρα/ ώρα) χρησιμοποιήθηκε για την εκτίμηση της αποδοτικότητας των αλγορίθμων βελτιστοποίησης. Δεδομένου του γεγονότος ότι ο κύριος στόχος ενός συστήματος ελέγχου της κυκλοφορίας είναι η μεγιστοποίηση της μέσης ταχύτητας, εφαρμόστηκε η μεγιστοποίηση του δείκτη απόδοσης (θέτοντας $J = -\text{μέση ταχύτητα}$) αντί της ελαχιστοποίησης.

6.3 Στρατηγικές ελέγχου της κυκλοφορίας

Στην περίπτωση του ελέγχου ραμπών εισόδου, η γενική μορφή του ελεγκτή που χρησιμοποιείται μπορεί να περιγραφεί ως ακολούθως:

$$u_t = h(K_1 z_t + K_2 + u_{t-1}) \quad (6.1)$$

όπου $t=0, 1, \dots$, είναι ο διακριτός δείκτης χρόνου ο οποίος εξισώνει την δειγματική χρονική περίοδο με τον χρόνο κυκλοφοριακού κύκλου, το u_t δηλώνει τον έλεγχο εισροών που εφαρμόζεται στον t -οστό κύκλο και το z_t είναι ένα διάνυσμα των κυκλοφοριακών μετρήσεων. Στην περίπτωση του ελέγχου ραμπών εισόδου, το u_t δηλώνει τις ροές των ραμπών που επιτρέπονται από την εφαρμογή του ελέγχου ραμπών εισόδου και το z_t αντιστοιχεί στο διάνυσμα των μέσων πυκνοτήτων (υπολογιζόμενος κατά μέσον όρο κατά τον τελευταίο κύκλο) στις τοποθεσίες των ανιχνευτών κατάντη των ελεγχόμενων ραμπών. Οι μετρήσεις της πυκνότητας από τους ανιχνευτές 7980, 7977, 7972, 7848, 7846 και 7838 χρησιμοποιήθηκαν για τον σχεδιασμό του διανύσματος z_t . Οι χρονικοί κύκλοι επιλέχθηκαν να είναι ίσοι με 30 δευτερόλεπτα στην περίπτωση του ελέγχου ραμπών εισόδου.

Ο μη-γραμμικός τελεστής h χρησιμοποιείται για να εγγυηθεί ότι οι αποφάσεις ελέγχου ικανοποιούν στην περίπτωση του ελέγχου ραμπών εισόδου τους περιορισμούς ελάχιστης και μέγιστης επιτρεπόμενης ροής στις ράμπες. Τέλος, ο σταθερός πίνακας K_1 και το σταθερό διάνυσμα K_2 δηλώνουν τις ρυθμιζόμενες παραμέτρους του ελεγκτή. Αξίζει να αναφερθεί ότι:

- Η δημοφιλής στρατηγική τοπικού ελέγχου ραμπών εισόδου ALINEA [28] έχει την μορφή της (6.1) με τον πίνακα K_1 να είναι ένας διαγώνιος πίνακας και το διάνυσμα K_2 να εξαρτάται από τις κρίσιμες πυκνότητες των τοποθεσιών κατάντη των ραμπών εισόδου. Επίσης, μία ποικιλία πολυμεταβλητών στρατηγικών ελέγχου ραμπών εισόδου, π.χ. [28], έχουν την μορφή της (4.1) στις οποίες τα K_1 , K_2 υπολογίζονται χρησιμοποιώντας γραμμική ή μη-γραμμική βελτιστοποίηση ή τεχνικές βέλτιστου ελέγχου.

6.4 Ρυθμιζόμενες παράμετροι

Όλες οι είσοδοι του K_1 και K_2 ήταν καλώς ρυθμισμένες, αντιστοιχώντας σε ένα διάνυσμα ρυθμιζόμενων παραμέτρων διάστασης ίσης με $7 \times 7 + 7 = 56$.

6.5 Σχεδιασμός των αλγορίθμων SPSA, AFT1 και AFT2

Για τον σχεδιασμό των αλγορίθμων AFT1 και AFT2, έπρεπε να γίνει μία προσεκτική επιλογή των διανυσμάτων \bar{x}_ℓ (εκτίμηση προηγούμενης ζήτησης) και \bar{x}_k (πρόβλεψη ζήτησης επόμενης μέρας). Σημειώνεται ότι στην συγκεκριμένη εφαρμογή, το διάνυσμα εισόδου x_k δηλώνει την χρονο-ιστορία του αριθμού των οχημάτων που μπαίνουν στο δίκτυο σε κάθε κόμβο προέλευσης του δικτύου. Έχοντας υπόψη μας το γεγονός ότι υπάρχουν 9 κόμβοι προέλευσης με $h_{sim} = 6$ ώρες, θα ήταν δύσκολο υπολογιστικά να χρησιμοποιήσουμε διανύσματα \bar{x}_ℓ , \bar{x}_k των οποίων οι είσοδοι αντιστοιχούν σε εκτιμήσεις των διανυσμάτων x_ℓ , x_k σε μικρά χρονικά διαστήματα. Από την άλλη μεριά, δεδομένου του γεγονότος ότι η πρόβλεψη της ζήτησης \bar{x}_k θα είναι οπωσδήποτε ανακριβής (εξαιτίας μίας φυσικής διακύμανσης της ζήτησης), δεν έχει νόημα η χρήση εκτιμήσεων για μικρά χρονικά διαστήματα. Στα πειράματά μας, βρήκαμε ότι αρκεί η χρήση μίας εκτίμησης για κάθε $\frac{1}{4}$ του h_{sim} (π.χ., τέσσερις διαφορετικές εκτιμήσεις για την ζήτηση της συνολικής ημερήσιας ζήτησης παρήχθησαν για κάθε κόμβο προέλευσης). Η εκτίμηση αυτή υπολογίστηκε ως ο μέσος αριθμός των οχημάτων που εισέρχονταν στο συγκεκριμένο κόμβο προέλευσης στα χρονικά διαστήματα $[0, \frac{1}{4}h_{sim})$, $[\frac{1}{4}h_{sim}, \frac{1}{2}h_{sim})$, $[\frac{1}{2}h_{sim}, \frac{3}{4}h_{sim})$, $[\frac{3}{4}h_{sim}, h_{sim}]$ και είχαν ως αποτέλεσμα ένα διάνυσμα \bar{x}_ℓ ή \bar{x}_k διάστασης 36. Ένα δεύτερο πρόβλημα το οποίο προέκυψε ήταν λόγω του υπολογισμού της μέσης ζήτησης από μετρήσεις της ροής που προέρχονταν από αισθητήρες βρόχου. Οι μετρήσεις αυτές αντιστοιχούν στην πραγματική ζήτηση όταν η ουρά στον σύνδεσμο προέλευσης είναι

μικρή, αλλά ενδέχεται να υποτιμήσουν σοβαρά την ζήτηση όταν η ουρά γίνει αρκετά μεγάλη ώστε να καλύψει τον αισθητήρα βρόχου. Με άλλα λόγια, όταν υπάρχει υψηλή ζήτηση ή όταν η συγκεκριμένη στρατηγική ελέγχου δεν μπορεί να αντιμετωπίσει ικανοποιητικά τις ουρές στους συνδέσμους προέλευσης, το πιο πιθανό είναι ότι οι μετρήσεις της ροής υποτιμούν την πραγματική ζήτηση. Για να υπερνικηθεί μερικώς αυτό το πρόβλημα, το διάνυσμα \bar{x}_k που χρησιμοποιήθηκε στους αλγορίθμους AFT1 και AFT2 αντιστοιχούσε στην καλύτερη ημερήσια απόδοση (μέση ταχύτητα) που είχε ληφθεί μέχρι στιγμής. Με τον τρόπο αυτό, αποφύγαμε τον κίνδυνο της χρήσης μίας πρόβλεψης του \bar{x}_k που αντιστοιχεί σε μία μη αποδοτική επιλογή για το διάνυσμα των παραμέτρων ελέγχου.

Οι υπόλοιπες σχεδιαστικές παράμετροι των αλγορίθμων SPSA, AFT1 και AFT2 επιλέχθηκαν ως ακολούθως:

- $\phi(\theta, x)$: Σε κάθε επανάληψη των αλγορίθμων AFT1 ή AFT2, το διάνυσμα $\phi(\theta, x)$ σχεδιάζεται ως ακολούθως:

$$\phi_i(\theta, x) = \sum_{j=1}^{\min\{k+1, N\}} S_{1,\theta}(\theta_{r_{1,\theta}(j)}) S_{1,x}(x_{r_{1,x}(j)}) + \sum_{j=1}^{\min\{k+1, N\}} S_{2,\theta}(\theta_{r_{2,\theta}(j)}) S_{3,\theta}(\theta_{r_{3,\theta}(j)}) S_{2,x}(x_{r_{2,x}(j)}) \quad (6.2)$$

όπου το N είναι μία θετική σχεδιαστική σταθερά (δηλώνει το μέγιστο επιτρεπτό μέγεθος του σχεδόν πολωνυμικού προσεγγιστή), τα $r_{h,\theta}(j), r_{g,x}(j), h=1,2,3, g=1,2$ είναι αριθμοί που γεννήθηκαν τυχαία στα διαστήματα $\{1, \dots, \dim(\theta)\}$ και $\{1, \dots, \dim(x)\}$, αντίστοιχα $S_{h,\theta}(\zeta) = \tanh(\lambda_{h,\theta}\zeta + \bar{\lambda}_{h,\theta})$, $S_{g,x}(\zeta) = \tanh(\lambda_{g,x}\zeta + \bar{\lambda}_{g,x})$, $h=1,2,3, g=1,2$ με τα $\lambda_{h,\theta}, \lambda_{g,x}$ και τα $\bar{\lambda}_{h,\theta}, \bar{\lambda}_{g,x}$ θετικές και μη-αρνητικές σχεδιαστικές σταθερές. Αρχικά το $\lambda_{h,\theta}$ και το $\lambda_{g,x}$ επιλέχθηκαν ίσα με μικρές θετικές τιμές (π.χ., 0.01) και τα $\bar{\lambda}_{h,\theta}, \bar{\lambda}_{g,x}$ τέθηκαν ίσα με το μηδέν. Μετά τις πρώτες 5 επαναλήψεις των αλγορίθμων AFT1 ή AFT2 τα $\lambda_{h,\theta}, \lambda_{g,x}, \bar{\lambda}_{h,\theta}, \bar{\lambda}_{g,x}$

βελτιστοποιούνται έτσι ώστε να ελαχιστοποιείται η $\sum_{\ell=k(k)}^{k-1} \left(\Delta \hat{\ell} - \Delta \hat{\ell}^{(k)}(\Delta \theta_{\ell}) \right)^2$ ή

$$\min_{j \in \{1, \dots, K\}} \mathfrak{J}_k(\pm \Delta \theta_k^{(j)}), \text{ υπό διαφορετικές τιμές των } \lambda_{h,\theta}, \lambda_{g,x}, \bar{\lambda}_{h,\theta}, \bar{\lambda}_{g,x}.$$

- Η σταθερά N στην παραπάνω εξίσωση ορίζεται από τον χρήστη και τέθηκε ίση με 30 και για τον AFT1 και για τον AFT2.

- Η σταθερά K του AFT2 ορίζεται από τον χρήστη και τέθηκε ίση με 10.
- Η $\psi(\Delta\bar{\theta})$ είναι μία βοηθητική συνάρτηση η οποία ορίζεται ως ακολούθως:

$$\psi(\Delta\bar{\theta}) = [\beta(\Delta\bar{\theta}_1), \beta(-\Delta\bar{\theta}_1), \dots, \beta(\Delta\bar{\theta}_{\dim(\theta)}), \beta(-\Delta\bar{\theta}_{\dim(\theta)})]^T$$

όπου $\beta(\zeta)$ είναι η συνάρτηση που ορίζεται ως $\beta(\zeta) = \zeta$ εάν $\zeta \geq 0$ και $\beta(\zeta) = 0$, αλλιώς.

- Οι τυχαίοι όροι $\Delta_{k,i}$ επιλεχθήκαν και στους τρεις αλγορίθμους να είναι ομοιόμορφες τυχαίες μεταβλητές στο διάστημα $[-1, +1]$. Αξίζει να σημειωθεί ότι οι συνθήκες σύγκλισης για τον SPSA και AFT2 που παρουσιάζονται στο [14] και [24], αντίστοιχα, δεν μπορούν να εγγυηθούν σύγκλιση υπό μία ομοιόμορφη τυχαία επιλογή του $\Delta_{k,i}$ (ενώ εγγυώνται σύγκλιση στην περίπτωση όπου τα $\Delta_{k,i}$ είναι τυχαίες μεταβλητές Bernoulli ή σχεδόν Bernoulli). Όμως, όπως σημειώνεται στα [14,15], στην πράξη μία ομοιόμορφη τυχαία επιλογή για τα $\Delta_{k,i}$ μπορεί να παράγει εξίσου καλά αποτελέσματα με μία τυχαία επιλογή Bernoulli ή σχεδόν Bernoulli. Επίσης, μία ομοιόμορφη τυχαία επιλογή για τα $\Delta_{k,i}$ παρέχει στον αλγόριθμο μεγαλύτερη ευελιξία από μία τυχαία επιλογή Bernoulli, επιτρέποντας στα $\Delta_{k,i}$ να πάρουν οποιαδήποτε τιμή στο διάστημα $[-1, +1]$ (σε σύγκριση με την Bernoulli που επιτρέπει τα $\Delta_{k,i}$ να είναι -1 ή +1). Στις δικές μας ερευνητικές προσομοιώσεις βρήκαμε ότι μία ομοιόμορφη τυχαία επιλογή για τα $\Delta_{k,i}$ πάντα παράγει καλύτερα ή τουλάχιστον εξίσου καλά αποτελέσματα με μία επιλογή Bernoulli
- Όπως ήδη αναφέρθηκε στο κεφάλαιο 4, μία επιλογή των ακολουθιών α_k, β_k να τείνουν αργά προς το μηδέν (όπως συνήθως συμβαίνει στα περισσότερα σενάρια προσαρμοστικής βελτιστοποίησης (ΑΟ) που εφαρμόζονται στα προβλήματα στοχαστικής βελτιστοποίησης) απέτυχαν να παράγουν ικανοποιητικά αποτελέσματα και στους τρεις αλγορίθμους κατά την διαδικασία βελτιστοποίησης της συγκεκριμένης εφαρμογής. Για τον λόγο αυτό έπρεπε να υιοθετηθούν διαφορετικές επιλογές. Πιο συγκεκριμένα, χρησιμοποιήθηκαν οι ακόλουθες επιλογές για τα α_k, β_k στις ερευνητικές μας προσομοιώσεις:

- το α_k διατηρήθηκε ίσο με μία σταθερή τιμή α για κάθε k . Η επιλογή της σταθεράς α ήταν αρκετά ξεκάθαρη για την εφαρμογή μας. Πιο συγκεκριμένα, στην περίπτωση του ελέγχου κυκλοφορίας ραμπών εισόδου, ελέγχοντας τις τιμές του K_1 και του K_2 που παρήχθησαν από την στρατηγική ελέγχου ALINEA σε παρόμοιες εφαρμογές, βρήκαμε ότι μία τροποποίηση των στοιχείων του K_1 και του K_2 σύμφωνα με την επιλογή $\alpha=0.01$ και $\alpha=0.001$, αντίστοιχα, ήταν αρκετή για να παράγει μία αμελητέα αλλαγή στον δείκτη απόδοσης χωρίς να εισαγάγει προβλήματα ευστάθειας.
- ενώ η επιλογή του α είναι ξεκάθαρη, αυτό δεν συμβαίνει με το μέγεθος του δείγματος β_k της μέγιστης κατάβασης στις περιπτώσεις του SPSA και του AFT1. Για τον λόγο αυτό, έπρεπε να ερευνηθούν διαφορετικές επιλογές για το μέγεθος του δείγματος διεξάγοντας πειράματα με διαφορετικές τιμές για το β_k . Στην περίπτωσή μας, βρέθηκε ότι αρκεί η επιλογή του β_k ίσο με μία σταθερή τιμή β .
- Στην περίπτωση του αλγορίθμου AFT2, η επιλογή του β_k είναι άμεση, αφού το β_k σε αυτή την περίπτωση αντιστοιχεί σε μία «εφικτή» αύξηση του δείκτη απόδοσης (μέση ταχύτητα) σε κάθε επανάληψη του αλγορίθμου. Για τον λόγο αυτό η επιλογή του $\beta_k=1$ επαρκεί εφόσον αντιστοιχεί σε μία αύξηση της μέσης ταχύτητας της τάξεως του 1 χιλιόμετρου/ώρα

6.6 Αρχικές παράμετροι του ελεγκτή

Δύο διαφορετικά αρχικά σύνολα των K_1, K_2 χρησιμοποιήθηκαν στα πειράματα βελτιστοποίησης: (a) $K_1=0, K_2=0$ υποθέτοντας μηδενική αρχική γνώση των χαρακτηριστικών του κυκλοφοριακού δικτύου και (b) K_1, K_2 αντίστοιχα με τον σχεδιασμό ALINEA. Πιο συγκεκριμένα, σε αυτήν την περίπτωση τα K_1, K_2 αρχικοποιήθηκαν σύμφωνα με τα $K_1 = -diag(K_A, K_A, K_A, K_A, K_A, K_A)$, $K_2 = K_A [\rho_{cr,1}, \rho_{cr,2}, \rho_{cr,3}, \rho_{cr,4}, \rho_{cr,5}, \rho_{cr,6}]$, όπου το K_A είναι των κέρδος του ελεγκτή του και το $\rho_{cr,i}$ δηλώνει την επιθυμητή πυκνότητα κυκλοφορίας (η οποία θα έπρεπε να είναι κοντά στην κρίσιμη πυκνότητα) της τοποθεσίας του αισθητήρα κατάντη της i -οστής ράμπας εισόδου. Το K_A και τα $\rho_{cr,i}$ βελτιστοποιήθηκαν, διεξάγοντας πειράματα με διαφορετικές τιμές για το K_A και τα $\rho_{cr,i}$ και επιλέχθηκε ο συνδυασμός που παρήγαγε την καλύτερη μέση τιμή της μέσης ταχύτητας για το βασικό σενάριο ζήτησης.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7: ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΠΕΙΡΑΜΑΤΩΝ

7.1 Έλεγχος Ραμπών Εισόδου

Το Γράφημα 7.1 παρουσιάζει μερικές περιπτώσεις της εφαρμογής των αλγορίθμων SPSA, AFT1 και AFT2 στην βελτιστοποίηση του ελεγκτή ραμπών εισόδου (6.1) για την περίπτωση μηδενικής αρχικής γνώσης, π.χ. για την περίπτωση όπου στην αρχή κάθε πειράματος βελτιστοποίησης, θέσαμε $K_1=0, K_2=0$. Σε όλες τις περιπτώσεις του Γραφήματος 7.1, σταματήσαμε την διαδικασία της βελτιστοποίησης στην 150^η ημέρα. Μετά από αυτή την ημέρα, ο καλύτερος ελεγκτής ραμπών εισόδου (αντιστοιχώντας το $\theta=\theta_{150}^*$) λήφθηκε εφόσον η διαδικασία βελτιστοποίησης δοκιμάστηκε για τις επόμενες είκοσι ημέρες προσομοίωσης. Επίσης, σε κάθε διάγραμμα του Γραφήματος 7.1 παρουσιάζονται δύο διαφορετικές περιπτώσεις της ίδιας εφαρμογής του αλγορίθμου (με τις ίδιες αρχικές τιμές και τις ίδιες σχεδιαστικές παραμέτρους).

Τα διαγράμματα (1) και (2) του Γραφήματος 7.1 δείχνουν την απόδοση του SPSA για την καλύτερη επιλογή του βήματος β . Για τιμές του β μεγαλύτερες από αυτές των διαγραμμάτων 7.1.1 και 7.1.2, ο SPSA επιδεικνύει μία πολύ spiky συμπεριφορά, ενώ για τιμές του β μικρότερες από αυτές των διαγραμμάτων 7.1.1 και 7.1.2, ο SPSA δεν παράγει αποτελέσματα σύγκλισης. Τα διαγράμματα 7.1.3 και 7.1.4 παρουσιάζουν την απόδοση του AFT1 (θεωρώντας την καλύτερη επιλογή για το β) χωρίς – π.χ. κρατώντας τα $\lambda_{h,\theta}$, $\lambda_{g,x}$, $\bar{\lambda}_{h,\theta}$, $\bar{\lambda}_{g,x}$ σταθερά και ίσα με τις αρχικές τους τιμές όπως περιγράφηκαν στο υποκεφάλαιο 6.4 – και με βελτιστοποίηση, αντίστοιχα, των παραμέτρων $\lambda_{h,\theta}$, $\lambda_{g,x}$, $\bar{\lambda}_{h,\theta}$, $\bar{\lambda}_{g,x}$. Η βελτιστοποίηση των παραμέτρων αυτών έλαβε χώρα στην 5^η επανάληψη του αλγορίθμου. Όπως και στην περίπτωση του SPSA, για τιμές του β μεγαλύτερες από αυτές των διαγραμμάτων 7.1.3 και 7.1.4, ο AFT1 επιδεικνύει μία πολύ spiky συμπεριφορά, ενώ για τιμές του β μικρότερες από αυτές των διαγραμμάτων 7.1.3 και 7.1.4, ο AFT1 παράγει αποτελέσματα φτωχής

σύγκλισης. Τέλος, τα διαγράμματα 7.1.5 και 7.1.6 παρουσιάζουν την απόδοση του AFT2 χωρίς και με βελτιστοποίηση των παραμέτρων $\lambda_{h,\theta}$, $\lambda_{g,x}$, $\bar{\lambda}_{h,\theta}$, $\bar{\lambda}_{g,x}$.

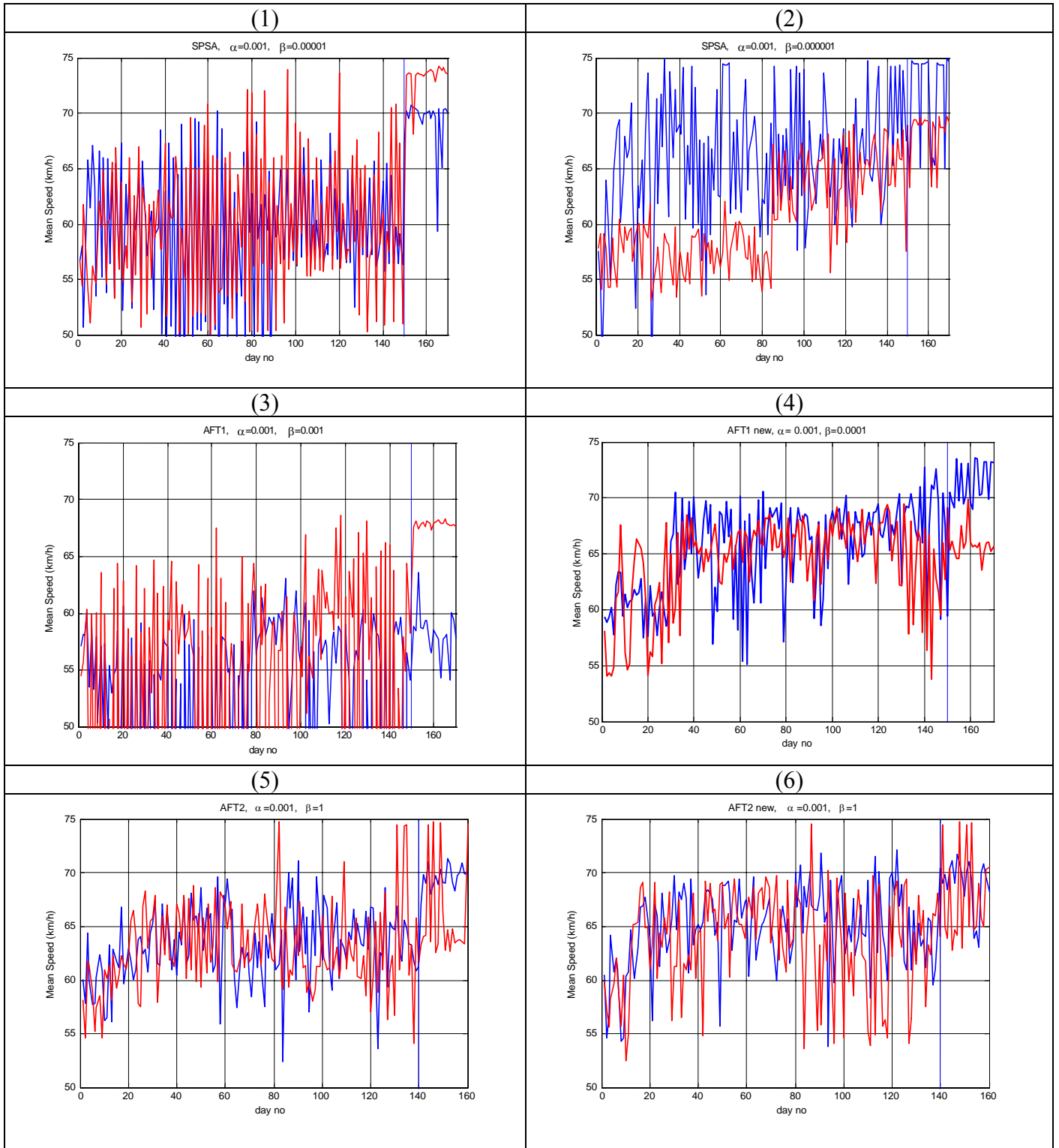
Προσεκτική παρατήρηση του γραφήματος 7.1 φανερώνει ότι και οι τρεις αλγόριθμοι (με εξαίρεση τον AFT1 όταν δεν γίνεται βελτιστοποίηση των παραμέτρων $\lambda_{h,\theta}$, $\lambda_{g,x}$, $\bar{\lambda}_{h,\theta}$, $\bar{\lambda}_{g,x}$) έχουν συγκριτικά παρόμοια συμπεριφορά τελικής σύγκλισης, ενώ ο AFT2 (με και χωρίς βελτιστοποίηση των $\lambda_{h,\theta}$, $\lambda_{g,x}$, $\bar{\lambda}_{h,\theta}$, $\bar{\lambda}_{g,x}$) και ο AFT1 (με βελτιστοποίηση των $\lambda_{h,\theta}$, $\lambda_{g,x}$, $\bar{\lambda}_{h,\theta}$, $\bar{\lambda}_{g,x}$) αποφεύγουν τις καταστάσεις που προέκυψαν στον SPSA και στον AFT1 (χωρίς βελτιστοποίηση των $\lambda_{h,\theta}$, $\lambda_{g,x}$, $\bar{\lambda}_{h,\theta}$, $\bar{\lambda}_{g,x}$) όπου υπάρχουν μέρες στις οποίες η μέση ταχύτητα γίνεται λιγότερη από 50 χιλιόμετρα/ώρα. Αξίζει να σημειωθεί ότι στην περίπτωση όπου δεν εφαρμόζεται έλεγχος (π.χ., στην περίπτωση όπου $K_1=0, K_2=0$) η μέση ταχύτητα κυμαίνεται από 55–60 χιλιόμετρα/ώρα. Επίσης πρέπει να παρατηρήσουμε ότι ο αλγόριθμος AFT2 επιδεικνύει ταχύτερη σύγκλιση από τον SPSA και AFT1.

Μία σύγκριση της απόδοσης του AFT1 και AFT2 με και χωρίς βελτιστοποίησης των $\lambda_{h,\theta}$, $\lambda_{g,x}$, $\bar{\lambda}_{h,\theta}$, $\bar{\lambda}_{g,x}$ αποκαλύπτει την υψηλή ευαισθησία του AFT1 (σε σύγκριση με τον AFT2) στην συγκεκριμένη επιλογή των παραμέτρων του προσεγγιστή.

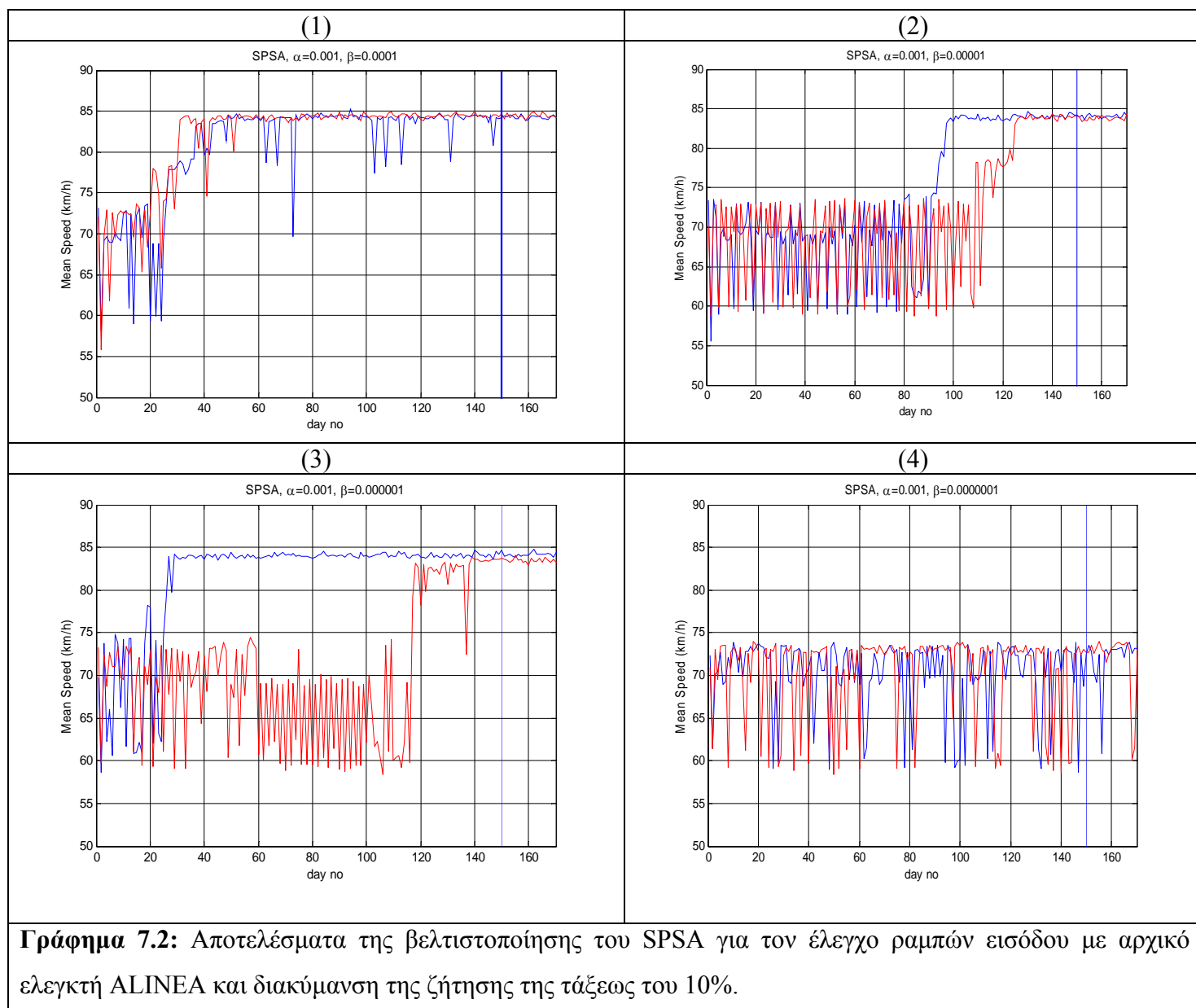
Ενώ ο SPSA και ο AFT1 επιδεικνύουν μία συγκρίσιμη απόδοση στην περίπτωση της μηδενικής αρχικής γνώσης αυτό δεν συμβαίνει όταν ο αρχικός ελεγκτής είναι ένας ελεγκτής ALINEA (βλέπε Γραφήματα 7.2 και 7.3). Σε αυτή την περίπτωση, ο AFT1 συγκλίνει στις πρώτες 10 επαναλήψεις (για β ίσο με 0.01 ή 0.001), ενώ ο αλγόριθμος SPSA χρειάζεται σημαντικά περισσότερο χρόνο για να συγκλίνει στις βέλτιστες τιμές του (η εφαρμογή του AFT1 στο Γράφημα 7.3 χρησιμοποίησε βελτιστοποίηση των $\lambda_{h,\theta}$, $\lambda_{g,x}$, $\bar{\lambda}_{h,\theta}$, $\bar{\lambda}_{g,x}$ στην 5^η επανάληψη). Αξίζει να σημειωθεί επίσης ότι όπως στην περίπτωση του Γραφήματος 7.1, στο Γράφημα 7.2, η διαδικασία της βελτιστοποίησης σταμάτησε στην 150^η ημέρα και μετά από αυτή την ημέρα, ο καλύτερος ελεγκτής ραμπών εισόδου λήφθηκε εφόσον η διαδικασία βελτιστοποίησης δοκιμάστηκε για τις επόμενες είκοσι ημέρες προσομοίωσης.

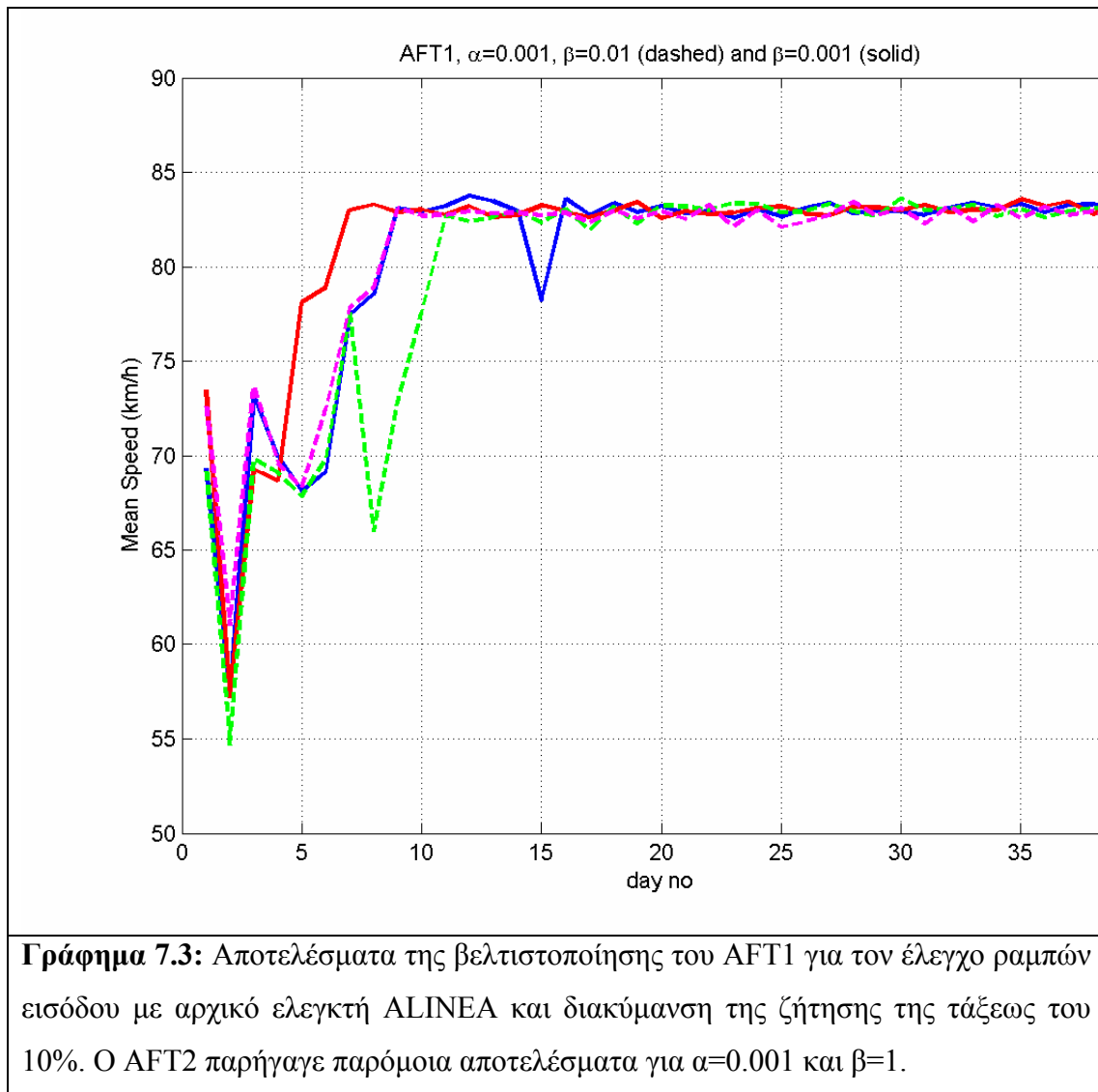
Η εφαρμογή του AFT2 στην περίπτωση του αρχικού ελεγκτή ALINEA παρήγαγε παρόμοια αποτελέσματα με εκείνα του AFT1. Για τον λόγο αυτό, στην παρούσα εργασία, δεν γίνεται αναλυτική παρουσίαση των αποτελεσμάτων αυτών.

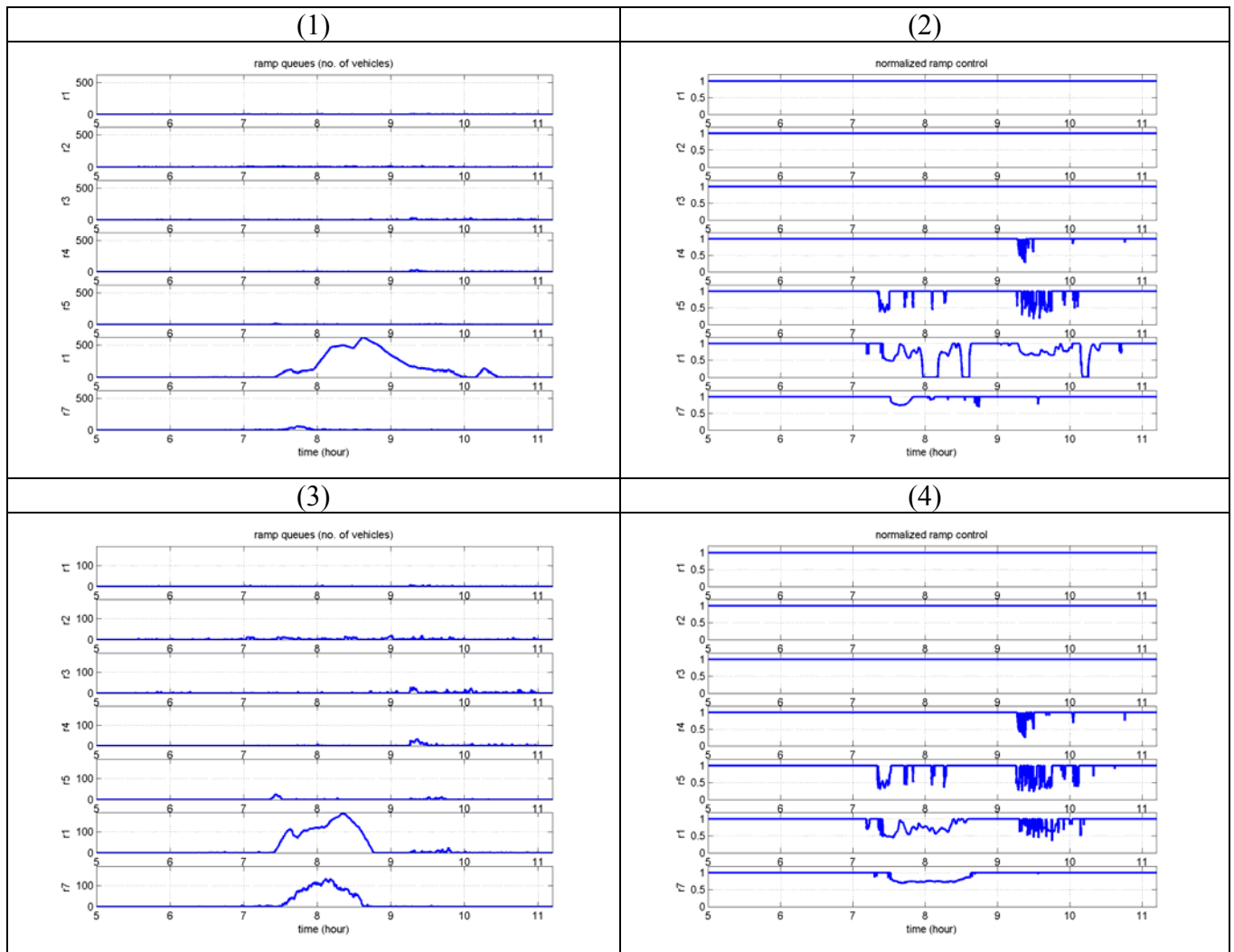
Η σημαντική βελτίωση της βελτιστοποίησης με τον ελεγκτή ALINEA στα Γραφήματα 7.2 και 7.3 μπορεί να κατανοηθεί καλύτερα κοιτάζοντας το Γράφημα 7.4, όπου παρουσιάζεται η χρονο-ιστορία των ουρών στις ράμπες και οι κανονικοποιημένες ζητήσεις ροής στις ράμπες για τις περιπτώσεις του ελεγκτή ALINEA και του βελτιστοποιημένου ελεγκτή του Γραφήματος 7.3. Όπως φαίνεται από το Γράφημα 7.4, σε αντίθεση με τον ελεγκτή ALINEA ο οποίος δρα κυρίως στην περιοχή εμφάνισης «λαιμού» (ράμπα r6) και, ως αποτέλεσμα, σχηματίζονται μεγάλες ουρές στις ράμπες στην συγκεκριμένη αυτή τοποθεσία, ο βελτιστοποιημένος ελεγκτής ισορροπεί κατάλληλα τις ουρές στις ράμπες στην τοποθεσία εμφάνισης «λαιμού» και στην περιοχή της ράμπας r7, παρά το γεγονός ότι η πυκνότητες του κυρίως ρεύματος κατάντη της ράμπας r7 βρίσκονται κάτω από την κρίσιμη. Τέλος, αξίζει να σημειωθεί ότι και οι τρεις αλγόριθμοι στην περίπτωση της μηδενικής αρχικής γνώσης συνέκλιναν στους ελεγκτές ραμπών εισόδου οι οποίοι εμφανίζουν παρόμοια συμπεριφορά με αυτή του ελεγκτή ALINEA (π.χ., δρουν κυρίως στην ράμπα r6).



Γράφημα 7.1: Αποτελέσματα της βελτιστοποίησης για τον έλεγχο ραμπών εισόδου θεωρώντας μηδενική αρχική γνώση και διακυμάνσεις ζήτησης της τάξεως του 10%: (1) και (2): SPSA, (3) και (4): AFT1 χωρίς και με βελτιστοποίηση των $\lambda_{h,\theta}$, $\lambda_{g,x}$ και $\bar{\lambda}_{h,\theta}$, $\bar{\lambda}_{g,x}$, (5) και (6) :AFT2 χωρίς και με βελτιστοποίηση των $\lambda_{h,\theta}$, $\lambda_{g,x}$ και $\bar{\lambda}_{h,\theta}$, $\bar{\lambda}_{g,x}$







Γράφημα 7.4: Ουρές στις ράμπες και κανονικοποιημένες ζητήσεις ροής στις ράμπες για τις περιπτώσεις του ελεγκτή ALINEA (γραφήματα 1 και 2) και του βελτιστοποιημένου ελεγκτή (γραφήματα 3 και 4) του γραφήματος 7.3.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 8: ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Στην παρούσα εργασία, παρουσιάστηκε μία συγκριτική αξιολόγηση τριών αλγορίθμων προσαρμοστικής βελτιστοποίησης (ΑΟ), των SPSA, AFT1 και AFT2, όπως εφαρμόζεται στην βελτιστοποίηση των παραμέτρων του ελεγκτή στην εφαρμογή του ελέγχου ραμπών εισόδου. Πιο συγκεκριμένα, ερευνήθηκε η βελτιστοποίηση του ελέγχου ραμπών εισόδου αυτοκινητόδρομου σε σύνθετα δίκτυα κυκλοφορίας. Στην περίπτωση μας, φαίνεται ότι ο αλγόριθμος AFT2 υπερνικά το πρόβλημα της φτωχής προσωρινά συμπεριφοράς που προέκυψε στους αλγορίθμους SPSA και AFT1. Επιπλέον, ο AFT2 επέδειξε γρηγορότερη σύγκλιση από τον SPSA και τον AFT1. Το πιο σημαντικό είναι ότι η επιλογή των σχεδιαστικών παραμέτρων του AFT2 ήταν άμεση, κάτι που δεν συνέβη στην περίπτωση του SPSA και του AFT1. Τελειώνοντας την εργασία αυτή, αξίζει να σημειωθεί ότι ο AFT2 οδήγησε σε σημαντική βελτίωση της απόδοσης του συνολικού συστήματος.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- [1] A. R. Barron, “Universal approximation bounds for superpositions of a sigmoidal function,” *IEEE Transactions on Information Theory*, vol.39, no. 3, pp. 930-945, 1993.
- [2] N. E. Cotter, “The Stone-Weierstrass theorem and its application to neural networks,” *IEEE Transactions on Neural Networks*, vol. 1, no. 4, pp. 290-295, 1990.
- [3] G. Cybenko, “Approximations by superpositions of a sigmoidal function,” *Mathematics of Control, Signals, and Systems*, vol. 2, pp. 303-314, 1989.
- [4] J. A. Farrell and M. M. Polycarpou. Adaptive Approximation Based Control: Unifying Neural, Fuzzy and Traditional Adaptive Approximation Approaches. Wiley Publishers, 2006.
- [5] P. A. Ioannou and J. Sun, Stable and Robust Adaptive Control, Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1995.
- [6] J. Keifer, and J. Wolfowitz, “Stochastic Estimation of a Regression Function,” *Ann. Math. Stat.*, vol. 23, pp. 462-466, 1952.
- [7] E. B. Kosmatopoulos and M.A. Christodoulou, “Filtering, prediction, & learning properties of ECE neural networks,” *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics*, vol. 24, no. 7, pp. 971-981, July 1994.
- [8] E. B. Kosmatopoulos, M. M. Polycardou, M.A. Christodoulou, and P.A. Ioannou, “High-order neural network structures for identification of dynamical systems,” *IEEE Transactions on Neural Networks*, vol. 6, no. 2, pp.422-431, March 1995.

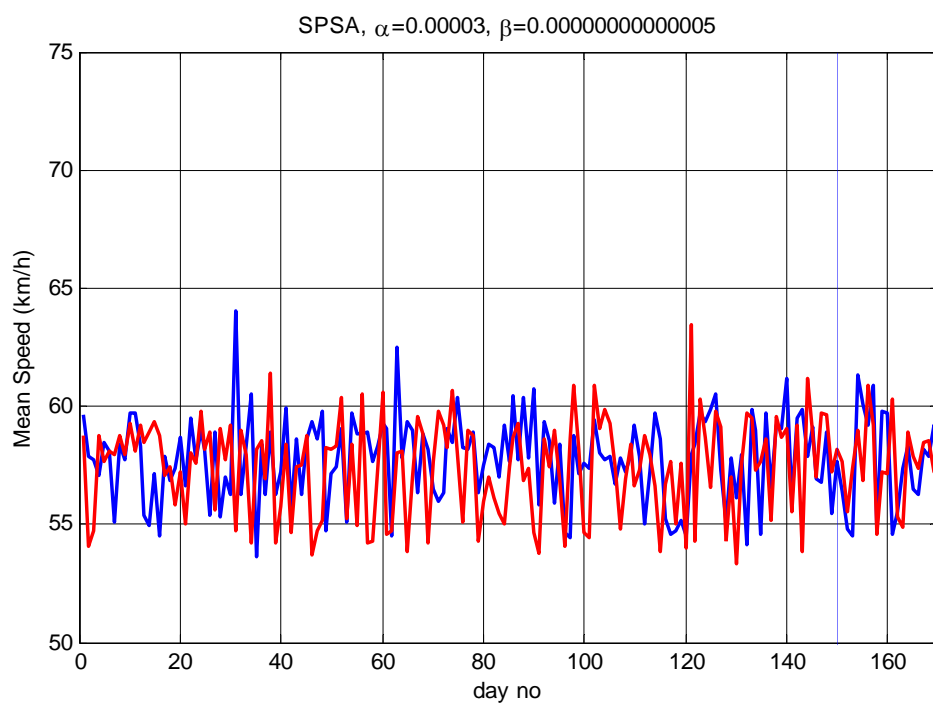
- [9] E. B. Kosmatopoulos, and M.A. Christodoulou, "Structural properties of gradient recurrent high-order neural networks," *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Analog and Digital Signal Processing*, vol. 42, no. 9, September 1995.
- [10] G. Ch. Pflug, "Optimization of Stochastic Models: The Interface Between Simulation and Optimization," Kluwer Academic, Boston, 1996.
- [11] M. M. Polycardou, and P. A. Ioannou, "Identification and control of non-linear systems using neural network models: design and stability analysis," Tech. Rep. 91-09-01, Univ. of Southern Cal., Los Angeles, September, 1991.
- [12] H. Robbins, and S. Monro, "A Stochastic Approximation Method," *Ann. Math. Stat.*, vol. 29, pp. 400-407, 1951.
- [13] R. M. Sanner and J.-J. E. Slotine, "Gaussian networks for direct adaptive control", *Proc. American Control Conf.*, ACC91, pp. 2153-2159, 1991; also in *IEEE Transactions on Neural Networks*, vol. 3, no. 6, pp. 837-863, November 1992.
- [14] J. C. Spall, "Multivariate Stochastic Approximation Using a Simultaneous Perturbation Gradient Approximation," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 37, pp. 332-341, 1992.
- [15] J. C. Spall, "Adaptive Stochastic Approximation by the Simultaneous Perturbation Method," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 45, pp. 1839-1853, 2000.
- [16] <http://www.jhuapl.edu/SPSA>.
- [17] J. C. Spall, "Adaptive Simultaneous Perturbation Method for Accelerated Optimization," Memo PSA-98-017, JHU/APL, Laurel, MD, 1998.

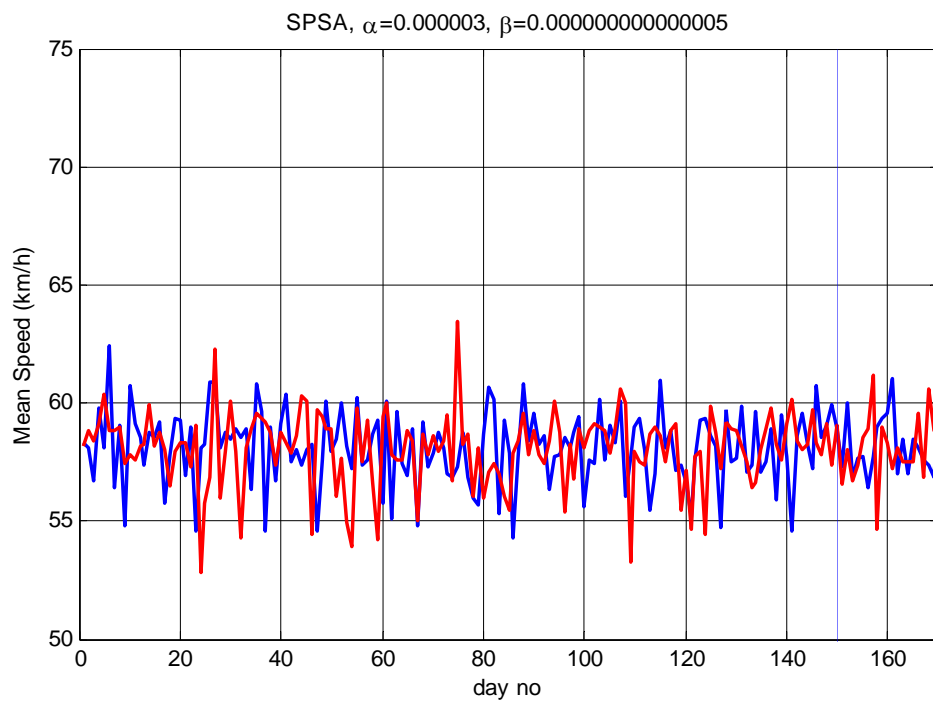
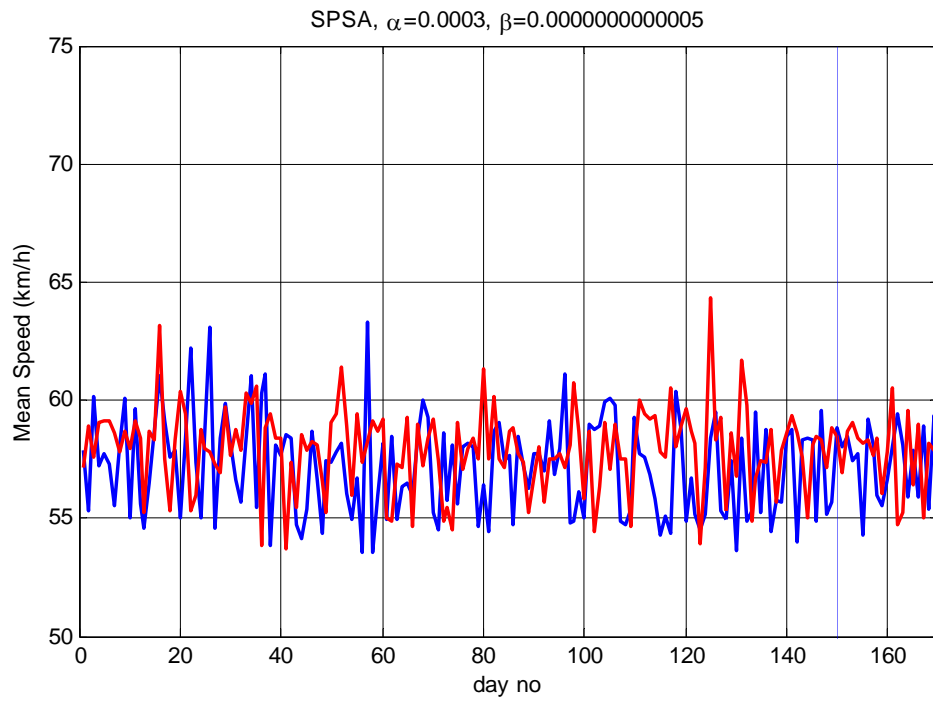
- [18] J. C. Spall, "Implementation of the simultaneous Perturbation Algorithm for Stochastic Optimization," *IEEE Transactions Aerosp. Electron. Syst.*, vol. 34, pp. 817-823, 1998.
- [19] B. Harbord, J. White, K. McCabe, A. Riley, and S. Tarry, "A flexible approach to motorway control," *13th ITS World Congress*, paper id: 1126, London, October 2006.
- [20] E. B. Kosmatopoulos and P. A. Ioannou, "Robust switching adaptive control of multi-input nonlinear systems," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 47, no. 4, pp. 610 - 624, April 2002.
- [21] E. B. Kosmatopoulos, M. Papageorgiou, V. Dinopoulou, Ch. Bielefeldt, R. Morris, J. Mueck, A. Richards, F. Weichenmeier, "International comparative field evaluation of a traffic signal control strategy in three cities," *Transportation Research – A*, vol. 40, no. 5, pp. 399-413, 2006.
- [22] E. B. Kosmatopoulos, M. Papageorgiou, A. Vakouli and A. Kouvelas, "Adaptive fine-tuning of non-linear control systems with application to the urban traffic control strategy TUC," *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 2007, to appear.
- [23] E. B. Kosmatopoulos, "Adaptive optimization and adaptive fine-tuning of nonlinear control systems with efficient performance," *IEEE Transactions on Automatic Control*, submitted.
- [24] E. B. Kosmatopoulos, "Adaptive optimization with efficient transient performance," *SIAM Journal on Control and Optimization*, submitted.
- [25] H. K. Kushner and D. S. Clark, "Stochastic Approximation Methods for Constrained and Unconstrained Systems," New York: Springer 1978.

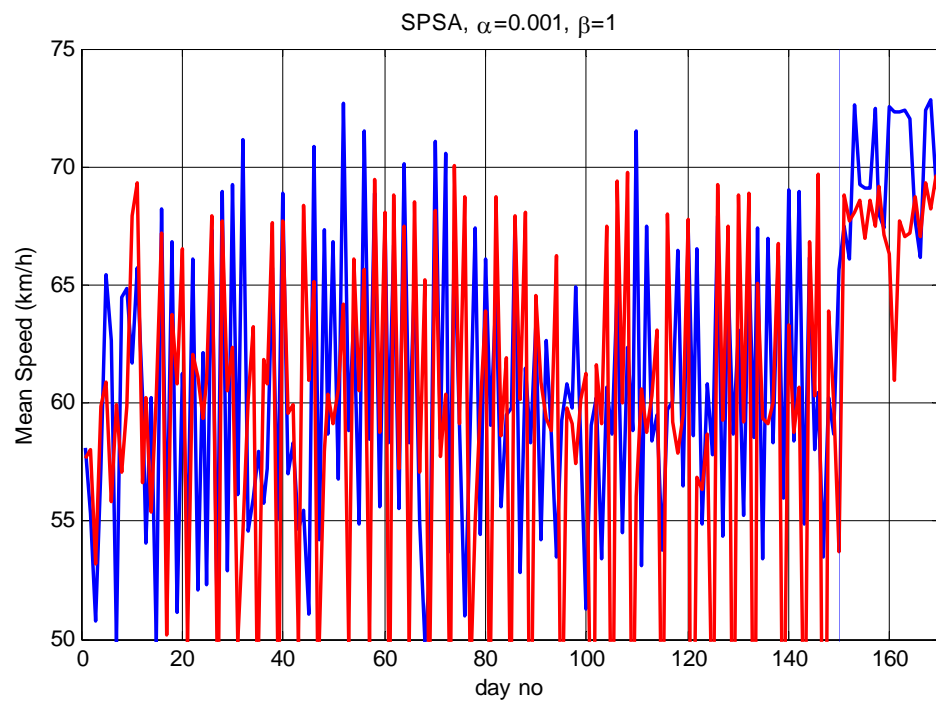
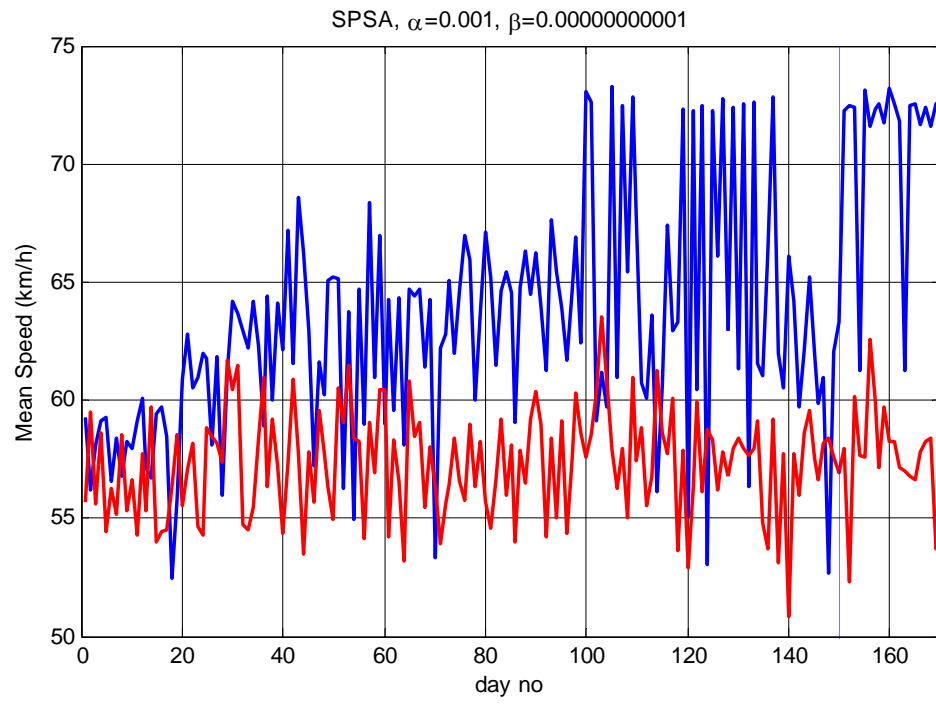
- [26] A. Messmer, and M. Papageorgiou, "METANET: A macroscopic simulation program for motorway networks," *Traffic Engineering & Control*, Vol. 31, pp. 466-470 and 549, 1990.
- [27] F. Middelham and H. Taale, "SCOOT compared," *3rd ITS World Congress*, Orlando, FL, U.S.A., 1996.
- [28] M. Papageorgiou, C. Diakaki, V. Dinopoulou, A. Kotsialos, and Y. Wang, "Review of road traffic control strategies," *Proceedings of the IEEE* 91, pp. 2043-2067, 2003.
- [29] I. Papamichail, M. Papageorgiou and E. Kosmatopoulos, "Modelling, configuration and simulation testing for the VicRoads ramp metering project – Final report," DSSL, Technical University of Crete, August 2007.
- [30] EURAMP deliverable D5.1: Demonstration Report, 2007, EURAMP project.

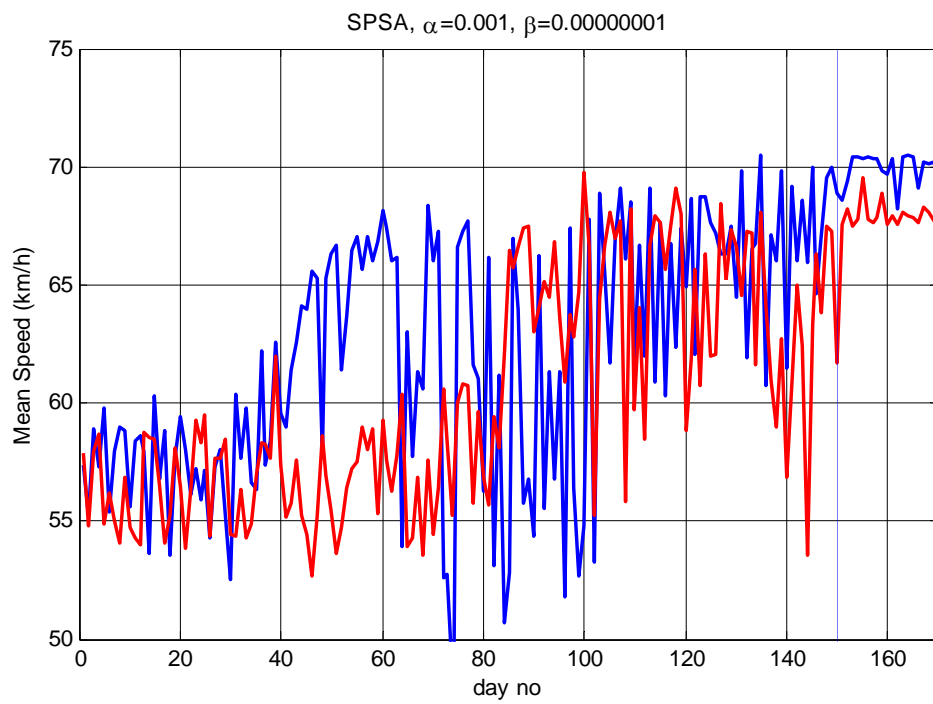
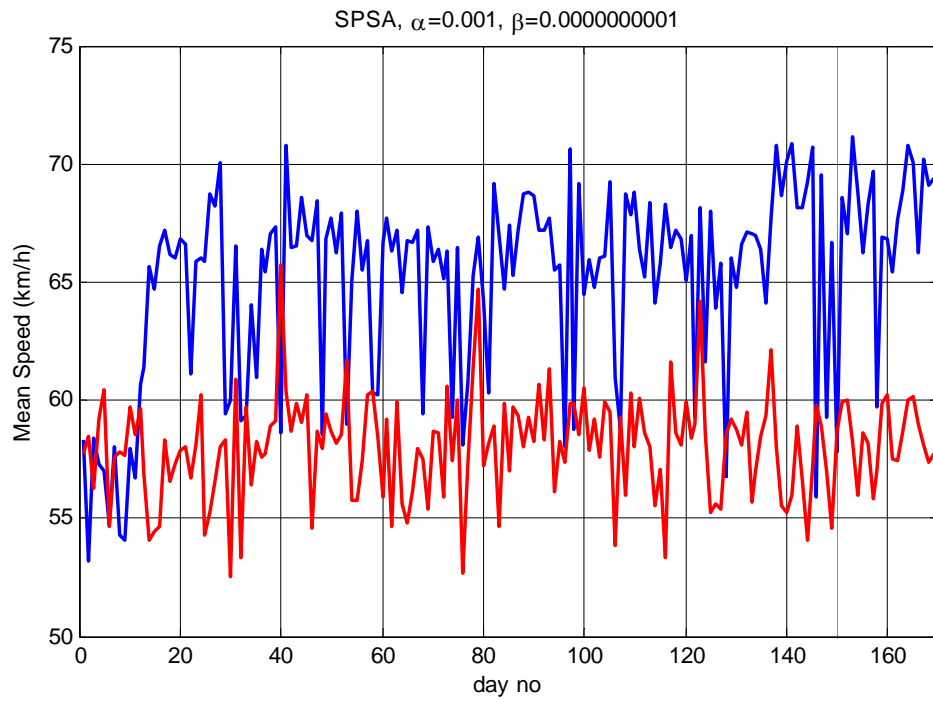
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α

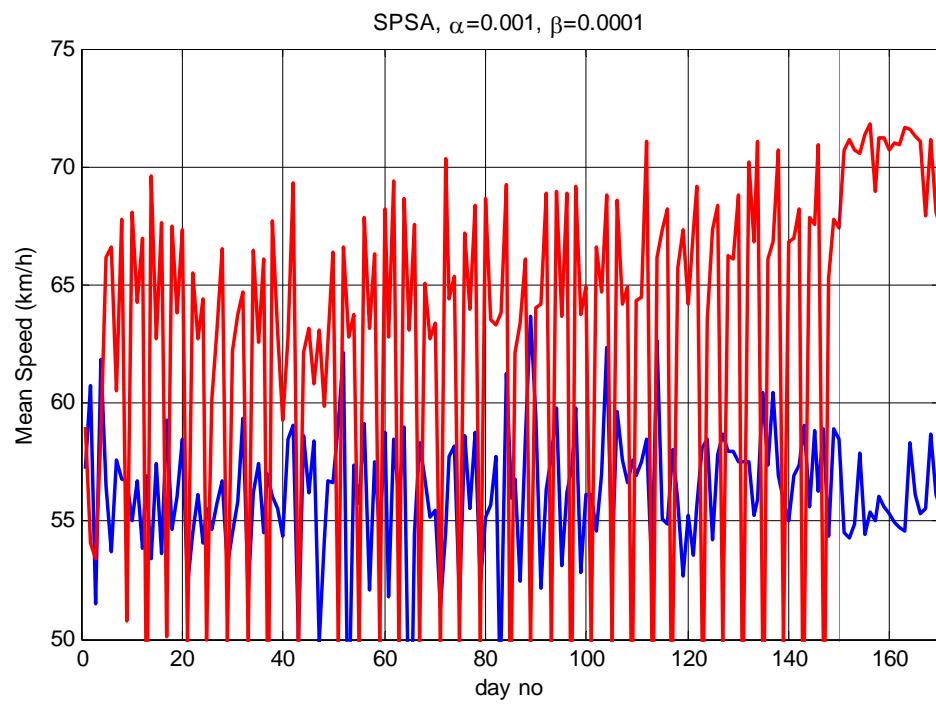
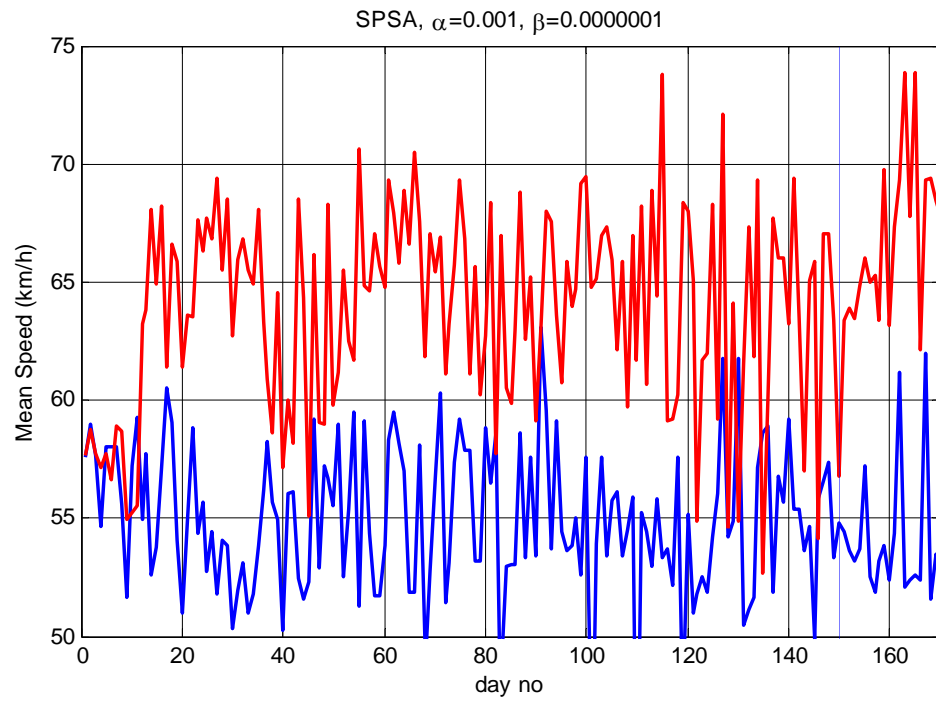
Αποτελέσματα βελτιστοποίησης του αλγορίθμου SPSA για τον έλεγχο ραμπών εισόδου θεωρώντας μηδενική αρχική γνώση και διακυμάνσεις ζήτησης της τάξεως του 10%.



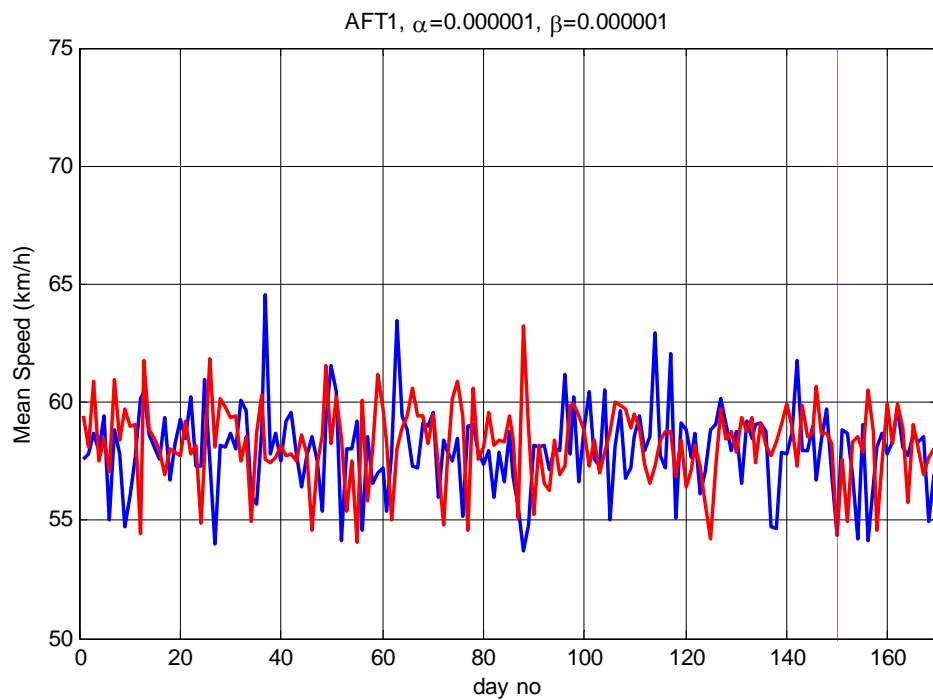
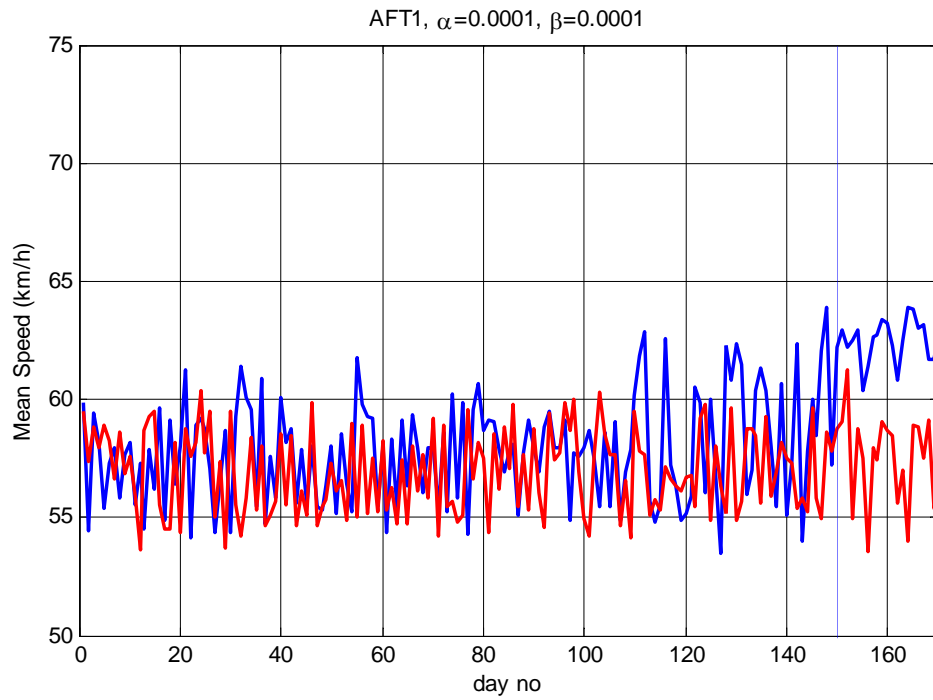


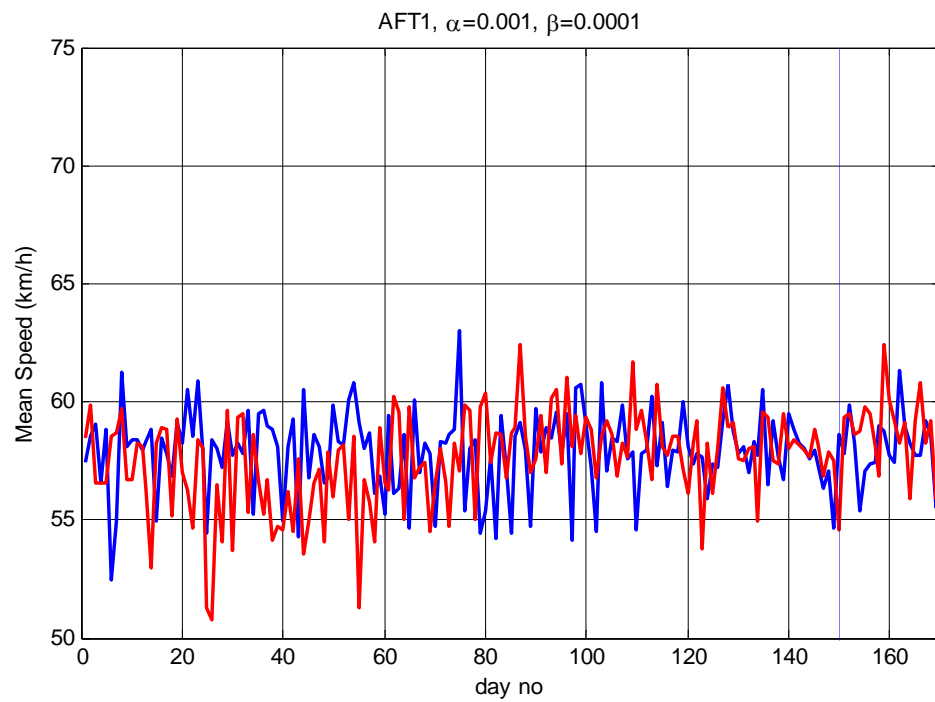
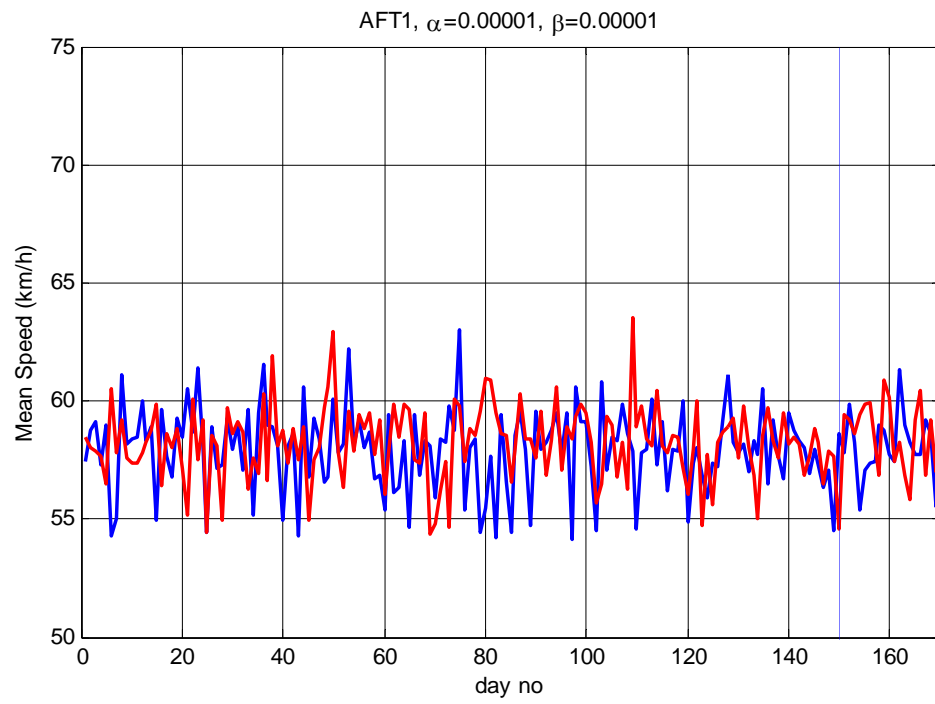


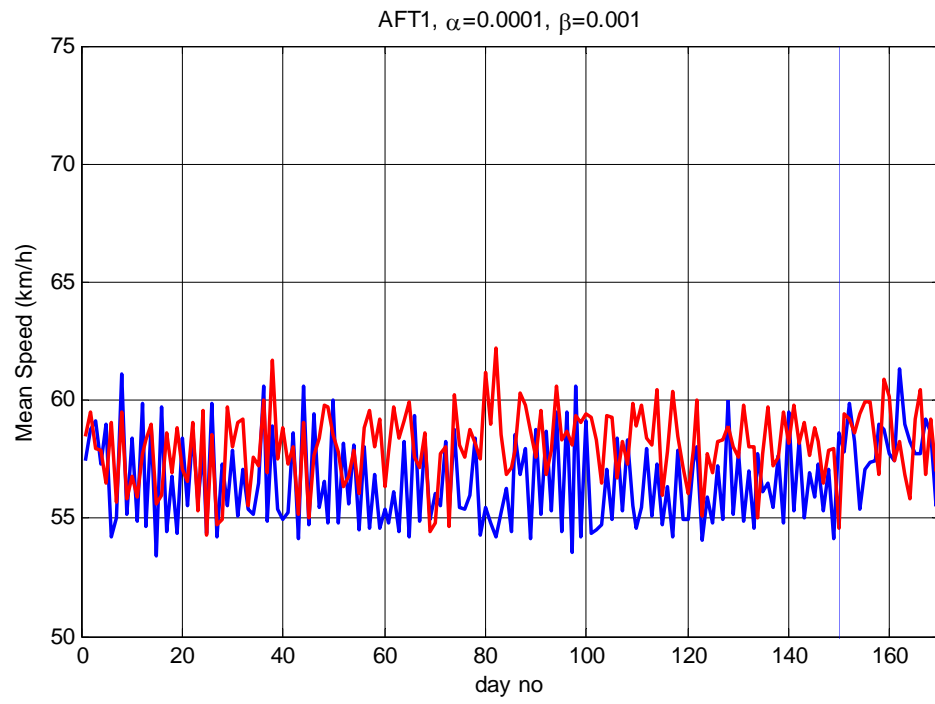




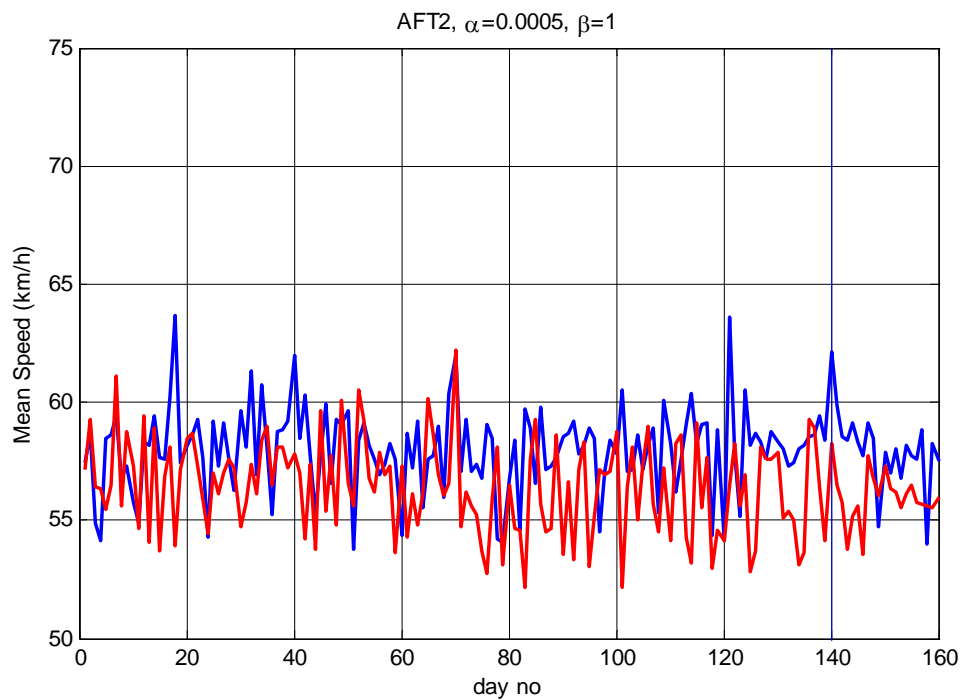
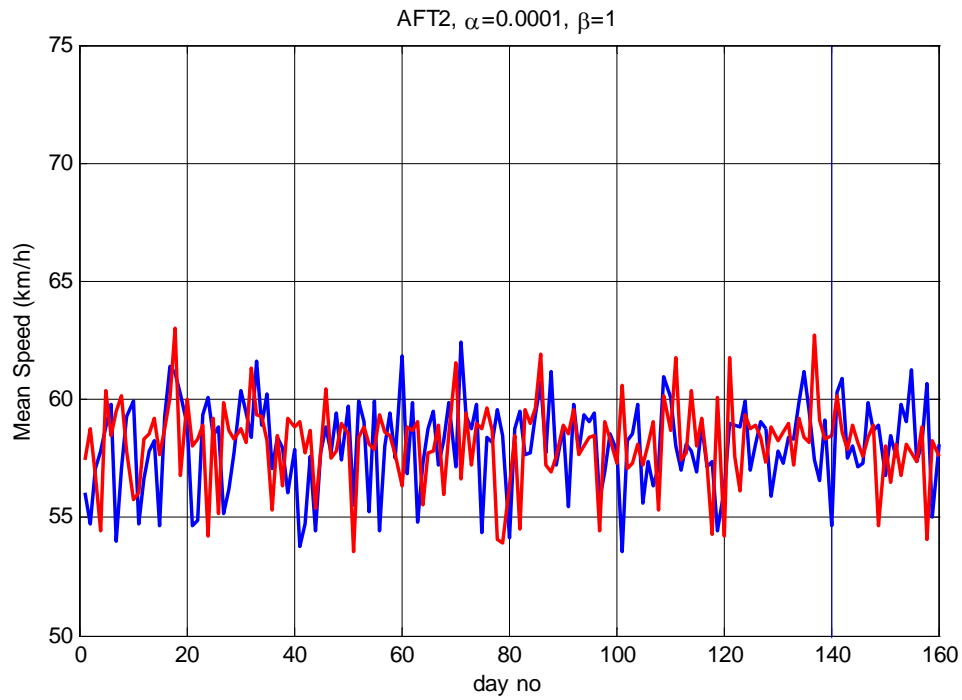
Αποτελέσματα βελτιστοποίησης του αλγορίθμου AFT1 για τον έλεγχο ραμπών εισόδου θεωρώντας μηδενική αρχική γνώση και διακυμάνσεις ζήτησης της τάξεως του 10%, χωρίς βελτιστοποίηση των παραμέτρων $\lambda_{h,\theta}$, $\lambda_{g,x}$ και $\bar{\lambda}_{h,\theta}$, $\bar{\lambda}_{g,x}$.

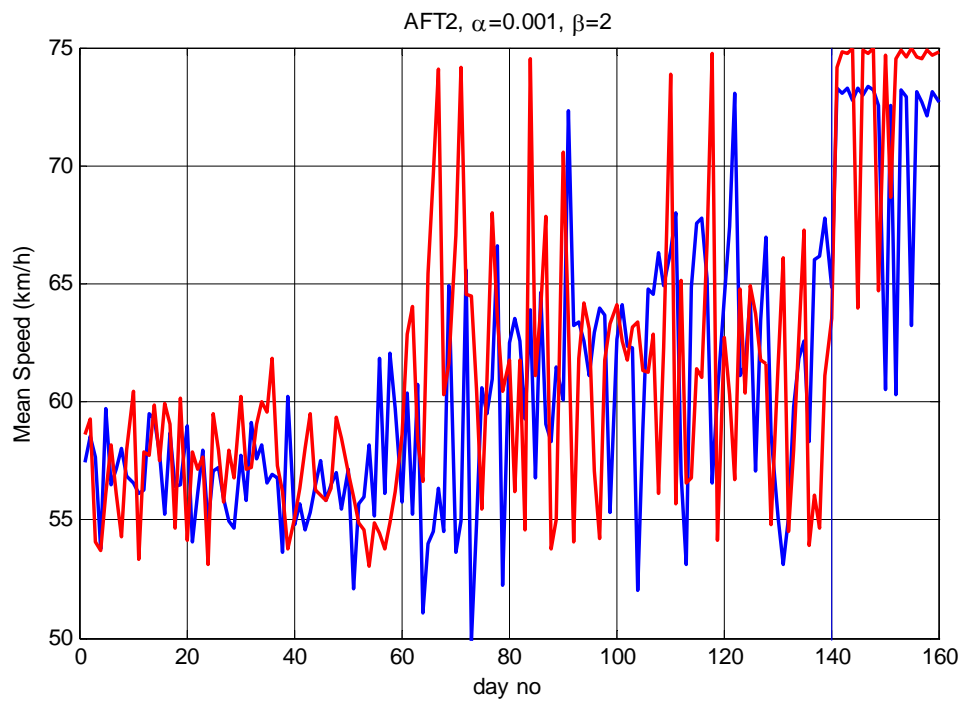
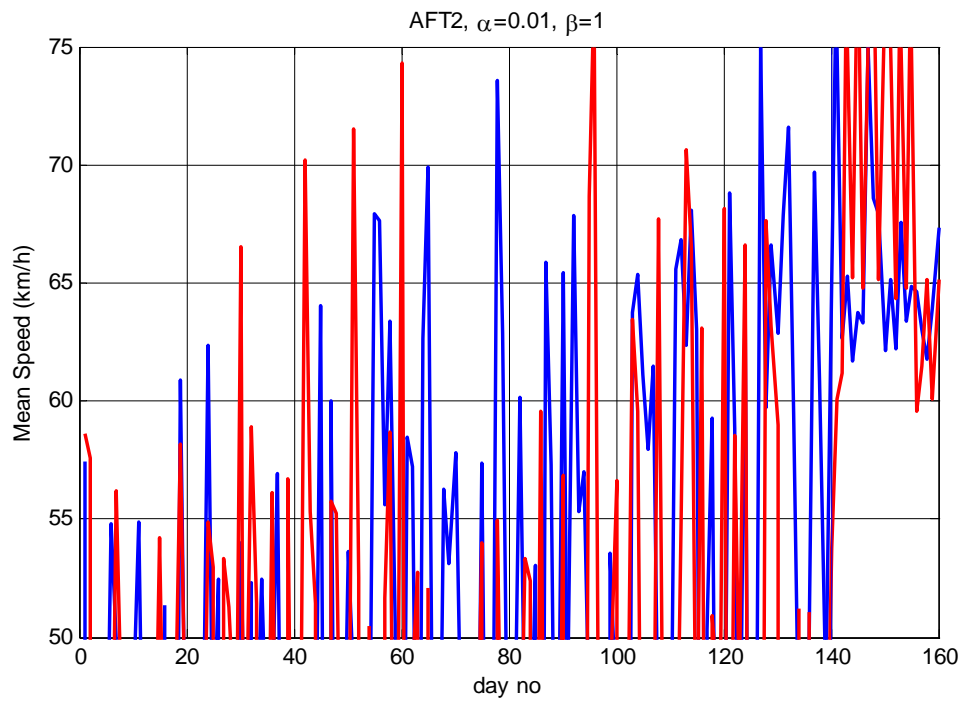




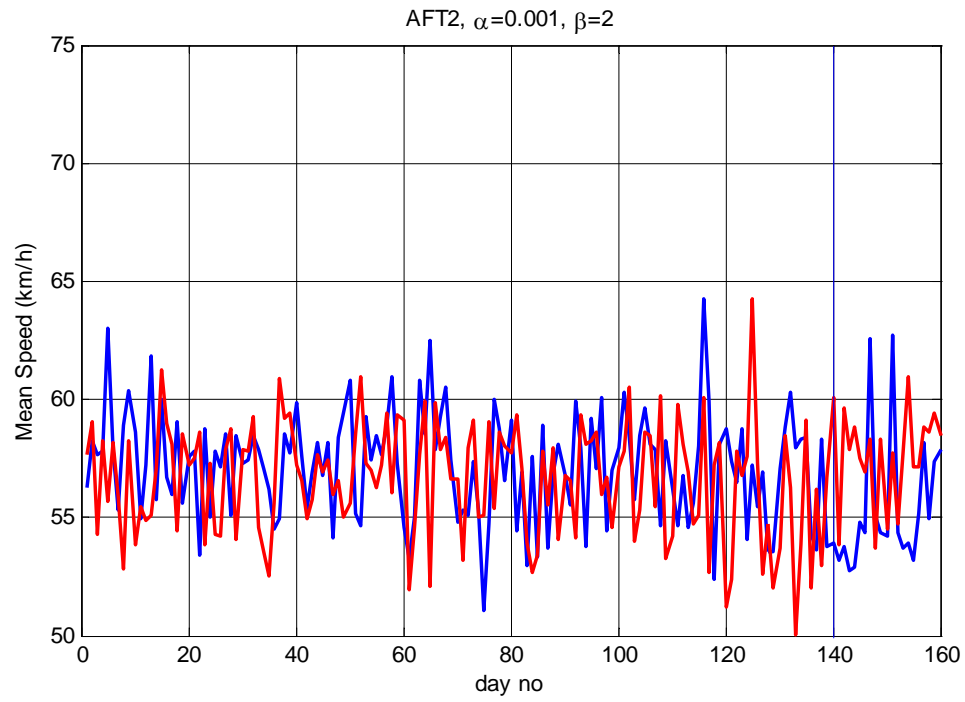


Αποτελέσματα βελτιστοποίησης του αλγορίθμου AFT2 για τον έλεγχο ραμπών εισόδου θεωρώντας μηδενική αρχική γνώση και διακυμάνσεις ζήτησης της τάξεως του 10%, χωρίς βελτιστοποίηση των παραμέτρων $\lambda_{h,\theta}$, $\lambda_{g,x}$ και $\bar{\lambda}_{h,\theta}$, $\bar{\lambda}_{g,x}$.



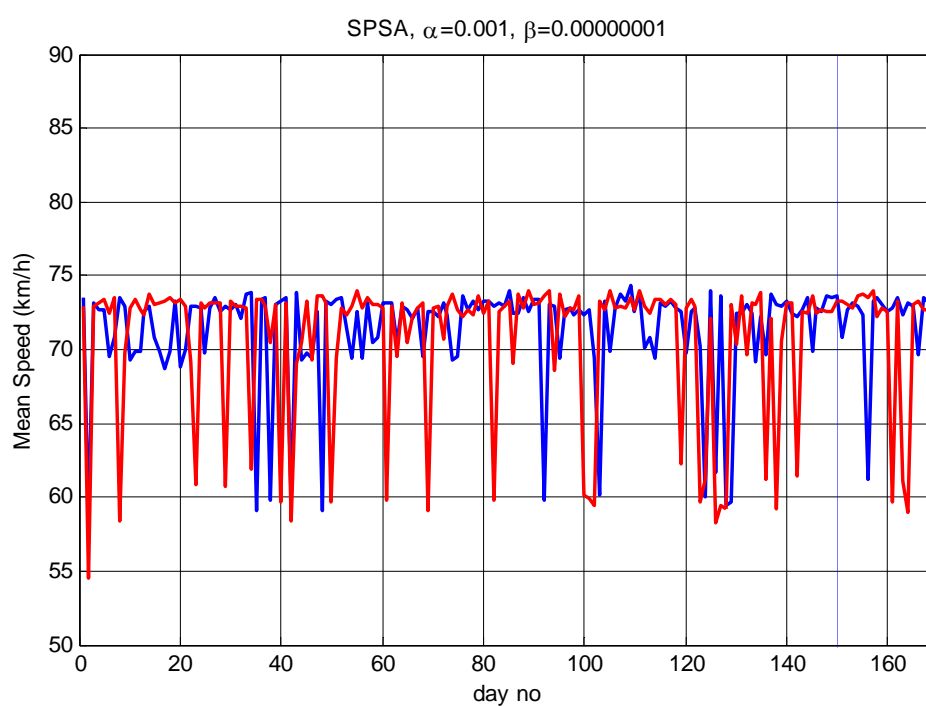


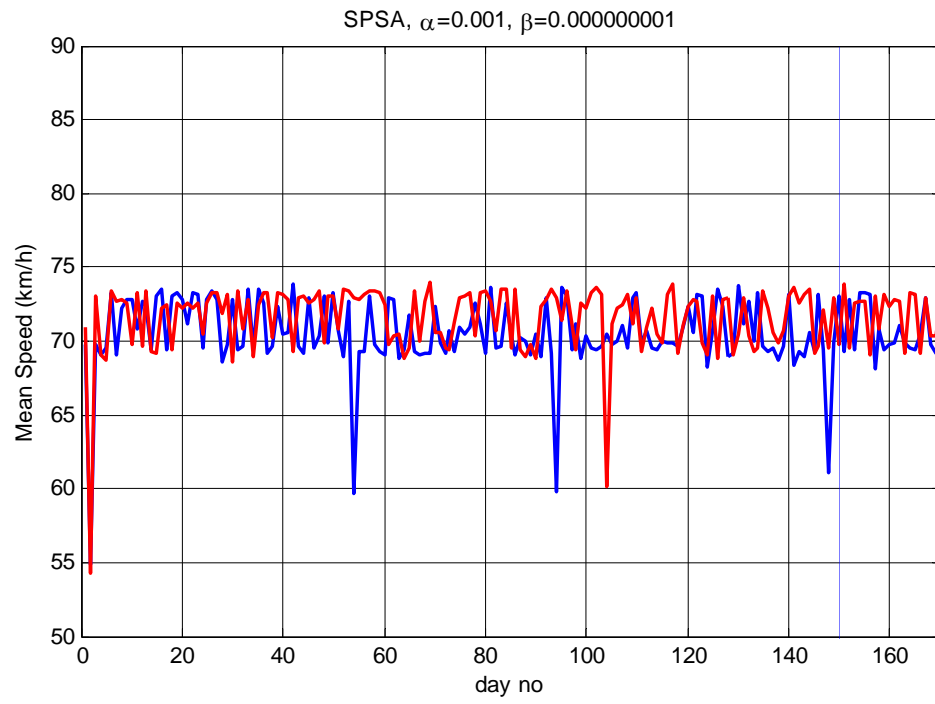
Αποτελέσματα βελτιστοποίησης του αλγορίθμου AFT2 για τον έλεγχο ραμπών εισόδου θεωρώντας μηδενική αρχική γνώση και διακυμάνσεις ζήτησης της τάξεως του 10%, με βελτιστοποίηση των παραμέτρων $\lambda_{h,\theta}$, $\lambda_{g,x}$ και $\bar{\lambda}_{h,\theta}$, $\bar{\lambda}_{g,x}$.



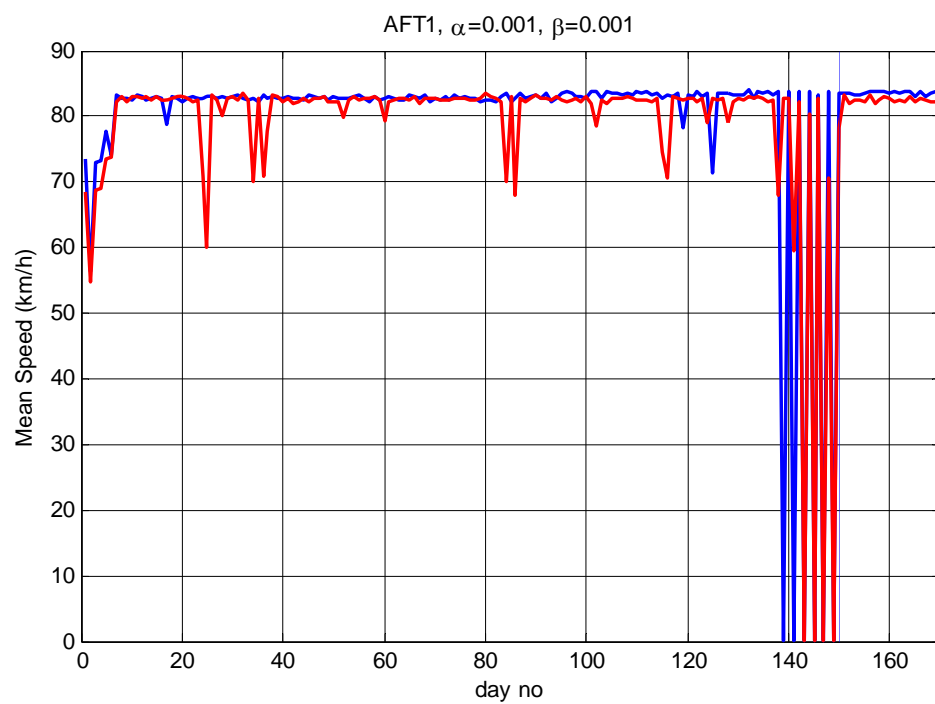
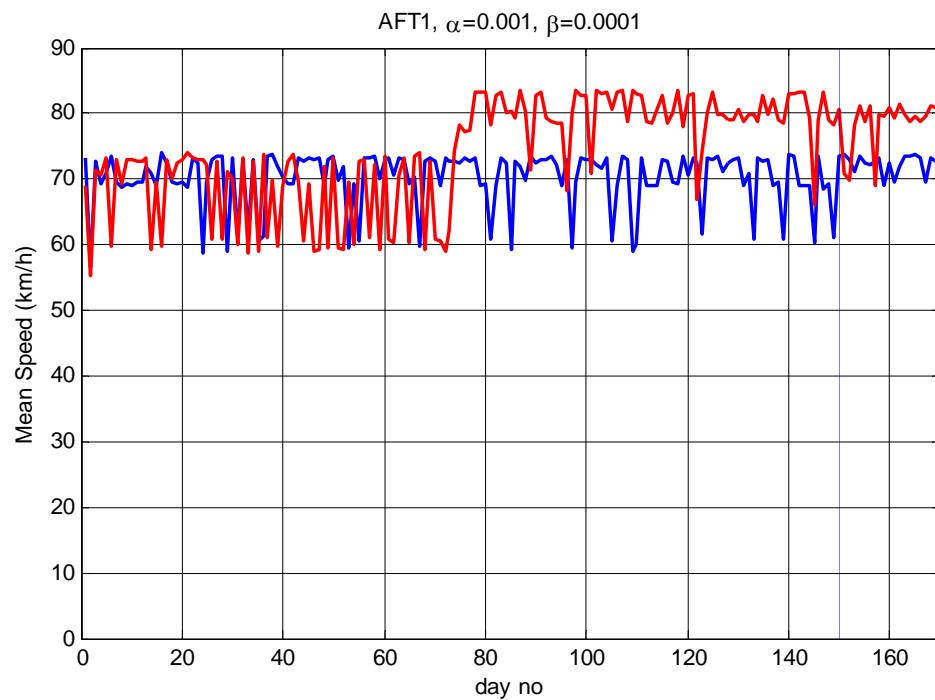
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Β

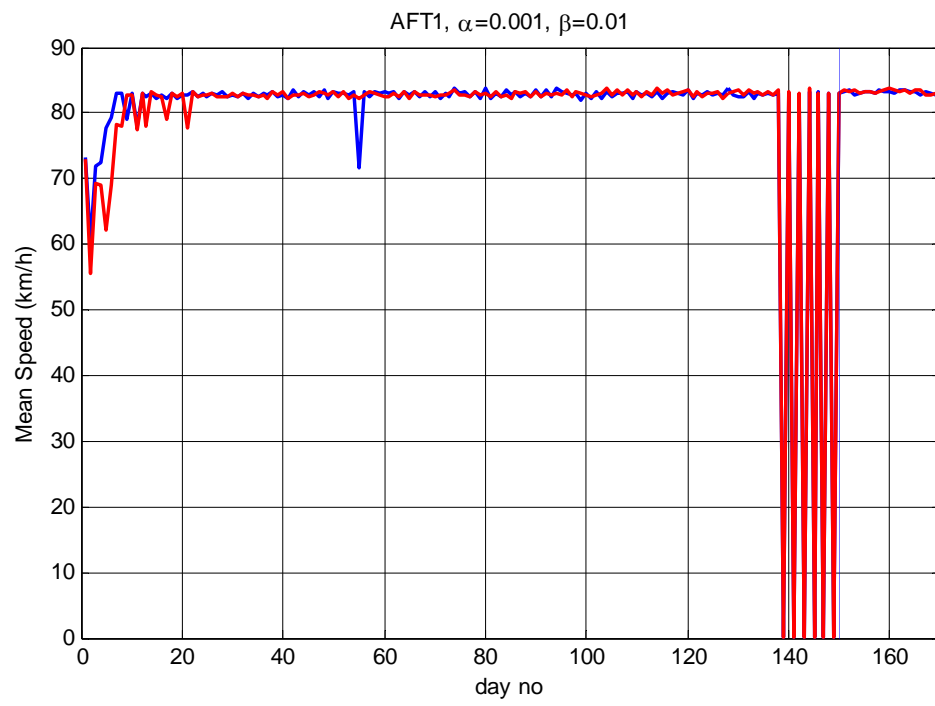
Αποτελέσματα βελτιστοποίησης του αλγορίθμου SPSA για τον έλεγχο ραμπών εισόδου με αρχικό ελεγκτή ALINEA και διακυμάνσεις ζήτησης της τάξεως του 10%.



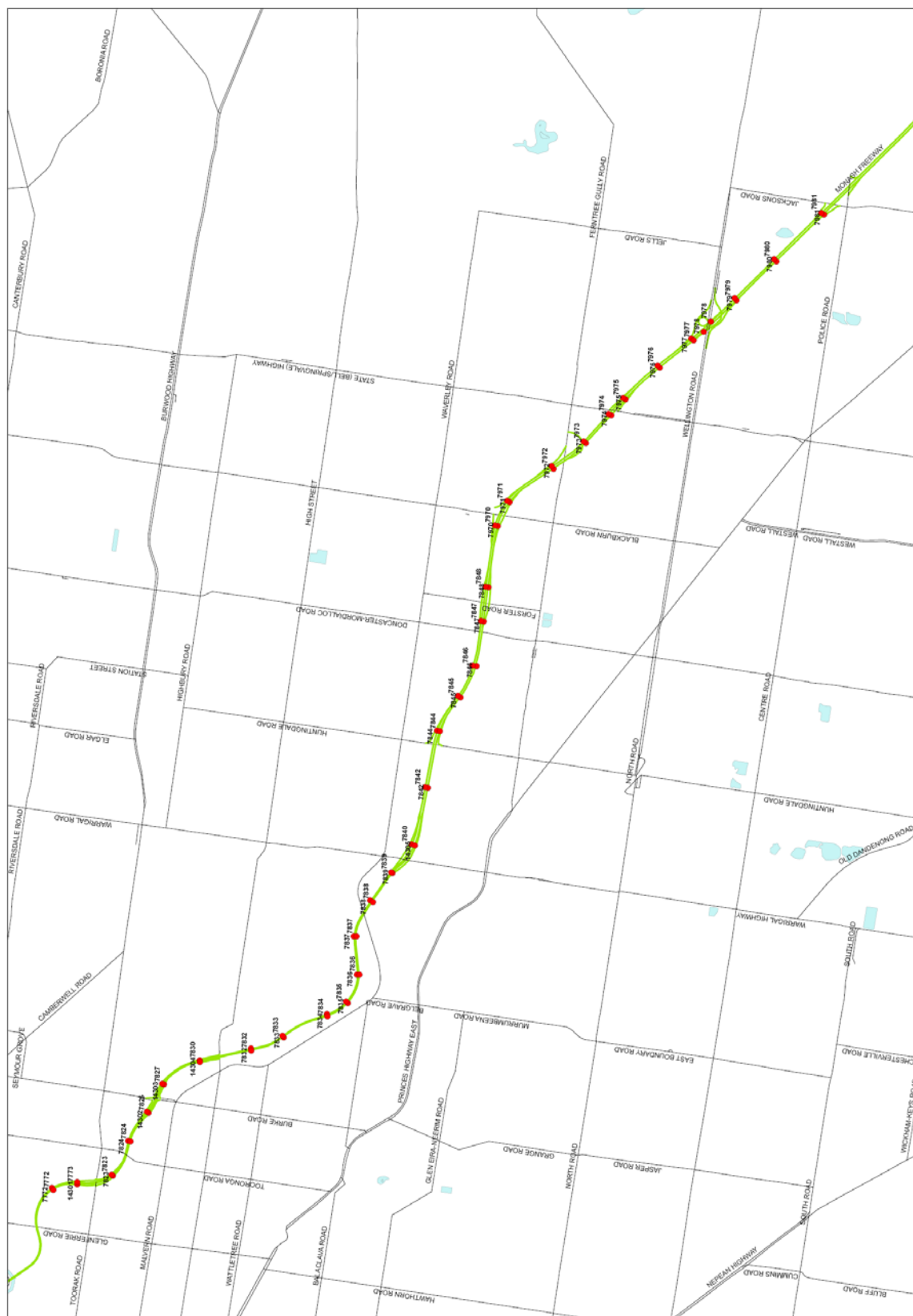


Αποτελέσματα βελτιστοποίησης του αλγορίθμου AFT1 για τον έλεγχο ραμπών εισόδου με αρχικό ελεγκτή ALINEA και διακυμάνσεις ζήτησης της τάξεως του 10%.





ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Γ



Χάρτης του πιλοτικού project



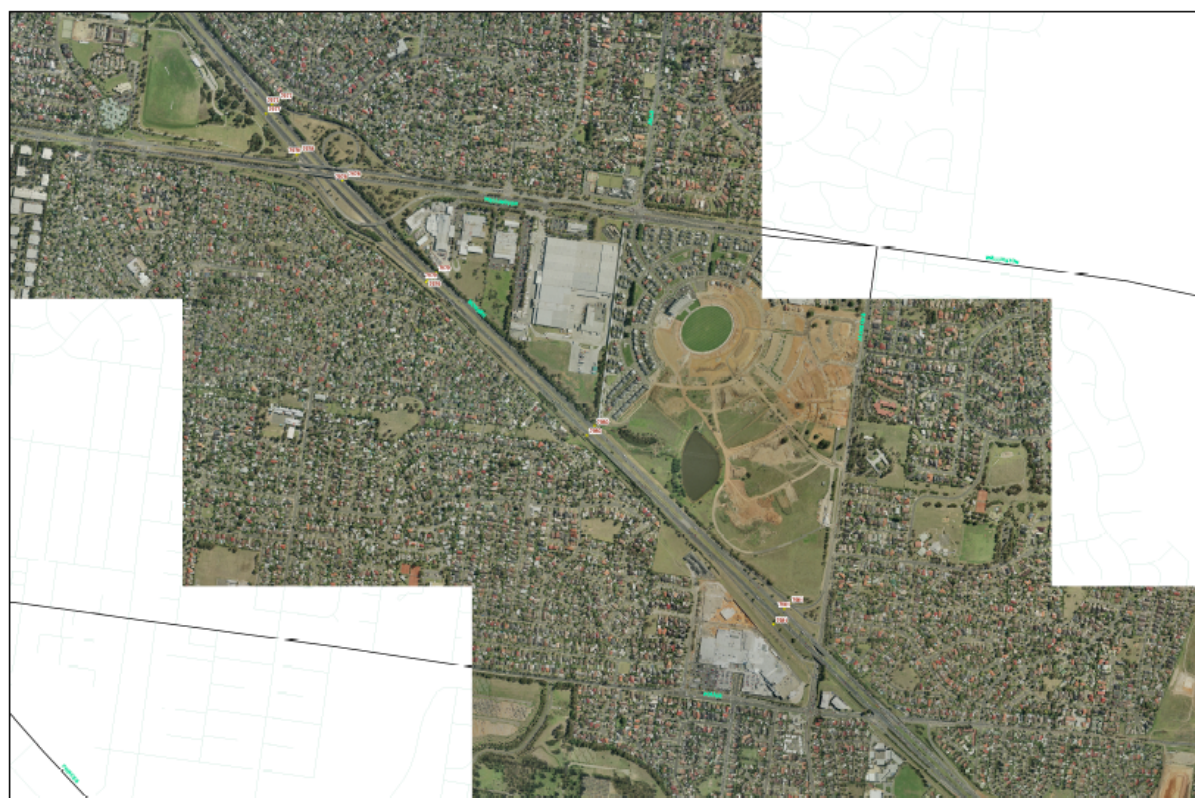
Αεροφωτογραφίες της έκτασης του αυτοκινητόδρομου (1)



Αεροφωτογραφίες της έκτασης του αυτοκινητόδρομου (2)



Αεροφωτογραφίες της έκτασης του αυτοκινητόδρομου (3)



Αεροφωτογραφίες της έκτασης του αυτοκινητόδρομου (4)