



ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ ΚΡΗΤΗΣ  
ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΠΑΡΑΓΩΓΗΣ ΚΑΙ ΔΙΟΙΚΗΣΗΣ

## **ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ**

### **ΣΥΜΒΟΛΗ ΣΤΗ ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗ ΑΕΡΟΤΟΜΩΝ ΜΕ ΧΡΗΣΗ ΕΞΕΛΙΚΤΙΚΩΝ ΑΛΓΟΡΙΘΜΩΝ**

**ΙΑΚΩΒΑΚΗΣ ΛΑΜΠΡΟΣ**

Επιβλέπων:  
Νικολός Ιωάννης, Λέκτορας

Μέλη τριμελούς επιτροπής:  
Βαλαβάνης Κίμων, Καθ.  
Τσουρβελούδης Νικόλαος, Επ. Καθ.

**Χανιά 2003**

*Αφιερώνεται  
στον παππού μου*

## ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Θα ήθελα να ευχαριστήσω ιδιαίτερα τον επιβλέποντα καθηγητή μου Δρ. Ιωάννη Νικολό για την πολύτιμη συνεισφορά του στην εκπόνηση της διπλωματικής. Η αρχική θεωρητική κατάρτιση που μου έδωσε, όπως και οι συνεχείς παρατηρήσεις του, αποδείχθηκαν απαραίτητοι σύμβουλοι για την επιστημονική ορθότητα της εργασίας. Ιδίως δε για την αμέριστη αρωγή του, μέσω προτροπών και επισημάνσεων στο θέμα της μοντελοποίησης του προβλήματος, οι οποίες καθόρισαν ουσιαστικά την πορεία περάτωσης όσο και την συντακτική μορφή του τελικού κειμένου.

Ένα μεγάλο ευχαριστώ αξίζουν όλοι οι φίλοι μου και ακόμη περισσότερο οι δύο μου αδερφές, οι οποίες μου έδωσαν το κουράγιο να συνεχίσω σε στιγμές δύσκολες. Μέσα από τις συζητήσεις μαζί τους, όχι απαραίτητα επί του θέματος της εργασίας, βρήκα λύση σε πολλά εμπόδια που μου παρουσιάστηκαν κατά την περίοδο της μελέτης και της συγγραφής.

Τέλος, το μεγαλύτερο ευχαριστώ αξίζει στους γονείς μου, που με τη βοήθεια, την κατανόηση και τη στήριξη τους όλα αυτά τα χρόνια των σπουδών, υπήρξαν η κινητήρια δύναμη από την είσοδό μέχρι και την αποφοίτησή μου από το Πολυτεχνείο.

## ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΠΡΟΛΟΓΟΣ	4
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1 – Εισαγωγή	
1.1 Γενικά	6
1.2 Αεροδυναμική & Υδροδυναμική	6
1.3 Σχηματισμός αεροτομών	9
1.4 Το ευθύ και το αντίστροφο πρόβλημα βελτιστοποίησης αεροτομής	11
1.5 Περιγραφή του αντικειμένου μελέτης	11
1.6 Βιβλιογραφική επισκόπηση	13
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 – Εξελικτικές διαδικασίες βελτιστοποίησης	
2.1 Εισαγωγή	20
2.2 Εξελικτικοί Αλγόριθμοι	21
2.3 Εξελικτικές Στρατηγικές	24
Επιβίωση	25
Διασταύρωση	26
Μετάλλαξη	27
2.4 Εξελικτικός Προγραμματισμός	29
Επιβίωση	30
Μετάλλαξη	30
2.5 Γενετικοί Αλγόριθμοι	32
Κωδικοποίηση	32
Συνάρτηση προσαρμογής	33
Επιλογή	34
Διασταύρωση	34
Μετάλλαξη	36
2.5 Διάγραμμα ροής της διαδικασίας	36
Πλεονεκτήματα των Γενετικών Αλγορίθμων	38
Εφαρμογές των Γενετικών Αλγορίθμων	38
2.6 Ιστορικά δεδομένα	40

	ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 – Καμπύλες & Επιφάνειες	
	B-Spline - NURBS	
3.1	Καμπύλες B-Spline	43
	Εισαγωγή	43
	Σημεία Ελέγχου	45
	Βασικές συναρτήσεις	46
	Διάνυσμα Κόμβων	48
	Καθορισμός των Βασικών Συναρτήσεων B-Spline	52
	Ιδιότητες των Βασικών Συναρτήσεων B-Spline	53
	Ιδιότητες καμπυλών B-Spline	54
	Αλγόριθμος	54
3.2	Εισαγωγή κόμβου	55
	Αλγόριθμος εισαγωγής κόμβου	56
3.3	Ραφινάρισμα κόμβων	57
	Αλγόριθμος για το ραφινάρισμα των κόμβων	60
3.4	Ανομοιόμορφες Ρητές B-Spline Καμπύλες & Επιφάνειες	61
	Ιστορικά Δεδομένα	63
	Καθορισμός & Ιδιότητες των Καμπυλών NURBS	64
3.5	Μη ομοιόμορφες Ρητές Καμπύλες B-Spline – NURBS	72
	Εισαγωγή	72
	Καθορισμός των επιφανειών NURBS	72
	Ιδιότητες των επιφανειών NURBS	74
	ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4 – Περιγραφή και εφαρμογή της μεθόδου	
4.1	Γενική περιγραφή της διαδικασίας	78
4.2	Εφαρμογή της μεθόδου	79
4.3	Μεταβαλλόμενος αριθμός γονιδίων στα χρωμοσώματα	88
4.4	Συγκεντρωτικά αποτελέσματα των μεθόδων που χρησιμοποιήθηκαν και συμπεράσματα	91
	ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5 – Μέθοδος ταχύτερης σύγκλισης	
5.1	Εισαγωγή	94

5.2	Περιγραφή της προτεινόμενης διαδικασίας	94
5.3	Εφαρμογή της διαδικασίας	96
5.4	Συμπεράσματα	102
	 ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6 – Τελικά συμπεράσματα & αξιολόγηση των μεθόδων	 104
	 ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ	 107
	 ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ	 115

## Πρόλογος

Στην παρούσα εργασία θα παρουσιαστεί μια διαδικασία, που αναπτύχθηκε προκειμένου να βελτιστοποιεί αεροδυναμικά αεροτομές, βασισμένη σε Εξελικτικούς Αλγορίθμους. Επιπλέον θα παρουσιαστεί μια μέθοδος για ταχύτερη σύγκλιση της διαδικασίας αυτής. Μια σύντομη περιγραφή των κεφαλαίων που ακολουθούν δίδεται στη συνέχεια, για την καλύτερη κατανόηση του πεδίου της έρευνας.

Στο Πρώτο κεφάλαιο παρουσιάζονται οι βασικές έννοιες της αεροδυναμικής και των αεροτομών. Περιγράφονται οι δύο βασικές διαδικασίες βελτιστοποίησης για το ευθύ και το αντίστροφο πρόβλημα. Δίνονται οι αρχικές κατευθύνσεις στο πρόβλημα που εξετάζεται, καθώς και οι τεχνικές που πρόκειται να εφαρμοστούν. Παρατίθενται επίσης αρκετές μελέτες άλλων επιστημών, πάνω στο πεδίο της βέλτιστης σχεδίασης, ώστε να γίνουν γνωστές κάποιες από τις διαθέσιμες μεθόδους, που χρησιμοποιούνται για την επίλυση τέτοιων προβλημάτων.

Στο Δεύτερο κεφάλαιο γίνεται μία παρουσίαση των βασικών αρχών που διέπουν τη λειτουργία των Εξελικτικών Αλγορίθμων. Οι Εξελικτικοί Αλγόριθμοι αποτελούν μια σύγχρονη μέθοδο βελτιστοποίησης δύσκολων προβλημάτων, που προσομοιώνουν τη φυσική εξέλιξη. Τα τελευταία χρόνια παρατηρείται μια μεγάλη ανάπτυξη γύρω από τις συγκεκριμένες μεθόδους, μιας και η εξέλιξή τους συμβαδίζει με την εξέλιξη των Η/Υ.

Στο Τρίτο κεφάλαιο γίνεται αναφορά στην παραμετρική περιγραφή των αεροτομών και των πτερύγων με χρήση καμπυλών B-Spline καθώς και καμπυλών και επιφανειών NURBS. Αυτός ο τρόπος της παραμετρικής αναπαράστασης των καμπυλών και επιφανειών χρησιμοποιείται από τα πιο σύγχρονα σχεδιαστικά προγράμματα (CAD). Οι καμπύλες NURBS είναι αυτές που χρησιμοποιούνται για την παραμετρική απεικόνιση των αεροτομών και τη διασύνδεσή τους με τον Εξελικτικό Αλγόριθμο.

Στο Τέταρτο κεφάλαιο περιγράφεται και εφαρμόζεται η μέθοδος βελτιστοποίησης. Παρουσιάζονται αρκετές εφαρμογές της διαδικασίας, με αλλαγή των αρχικών συνθηκών. Επίσης προτείνονται κάποιες τροποποιήσεις, που μπορούν να επιταχύνουν τη διαδικασία. Παρατίθενται αρκετά

σχεδιαγράμματα, τα οποία βοηθούν στην καλύτερη κατανόηση των αποτελεσμάτων.

Στο Πέμπτο κεφάλαιο αναλύεται η μέθοδος ταχύτερης σύγκλισης της διαδικασίας βελτιστοποίησης. Τα αποτελέσματα αυτής της μεθόδου είναι πολύ ικανοποιητικά και ελπιδοφόρα. Επιτυγχάνεται μια σημαντική αύξηση στην τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης σε σχέση με τη συμβατική μέθοδο. Παρουσιάζονται συγκεκριμένα παραδείγματα εφαρμογής της μεθόδου, ώστε να γίνει αισθητή η αποτελεσματικότητά της.

Στο Έκτο και τελευταίο κεφάλαιο αξιολογούνται οι μέθοδοι που προτάθηκαν και γίνεται αναφορά σε πιθανά μελλοντικά πεδία έρευνας.

Στο Παράρτημα τέλος, δίνεται ψευδοκώδικας, για την αναπαράσταση των καμπυλών B-Spline και κάποιων βασικών ιδιοτήτων τους, που χρησιμοποιήθηκαν στην παρούσα εργασία.



# 1. Εισαγωγή

## 1.1. Γενικά

Οι Εξελικτικοί Αλγόριθμοι αποτελούν μία κατηγορία μεθόδων που προσομοιώνουν διαδικασίες οι οποίες αντιγράφουν τη φυσική εξέλιξη, για την λύση δύσκολων προβλημάτων βελτιστοποίησης, στα οποία οι συμβατικές μεθοδολογίες δεν μπορούσαν να εφαρμοστούν ικανοποιητικά. Στην παρούσα εργασία οι Εξελικτικοί Αλγόριθμοι χρησιμοποιούνται για την επίλυση προβλημάτων βέλτιστης αεροδυναμικής σχεδίασης αεροτομών σε πτέρυγες και σε μηχανές αεροσκαφών. Τα οφέλη από τη βελτιστοποίηση της αεροδυναμικής σχεδίασης μιας πτέρυγας μπορούν να μεταφραστούν σε οικονομία καυσίμων, αύξηση της ταχύτητας πλεύσης, αύξηση του χρόνου πτήσης, βελτιωμένα αεροδυναμικά χαρακτηριστικά κ.λπ.

Οι μέθοδοι που βασίζονται σε πληθυσμιακά μοντέλα αλγορίθμων απαιτούν υπερβολικούς χρόνους επεξεργασίας δεδομένων, αφού κάθε υποψήφια λύση του πληθυσμού χρειάζεται να αξιολογηθεί με διάφορα αριθμητικά μοντέλα (π.χ. κώδικες CFD), τα οποία απαιτούν συνήθως μεγάλο υπολογιστικό χρόνο. Αν για παράδειγμα η αξιολόγηση μίας αεροτομής απαιτεί 10 λεπτά και απαιτούνται 500 αξιολογήσεις μέχρι τον τερματισμό του Εξελικτικού Αλγορίθμου, τότε απαιτούνται περίπου 5000 λεπτά (δηλαδή περίπου 83 ώρες) για την εύρεση της βελτιστοποιημένης αεροτομής. Για το λόγο αυτό, ειδικά στις περιπτώσεις χρήσης Εξελικτικών Αλγορίθμων, είναι κεφαλαιώδους σημασίας η μείωση των αναγκαίων αξιολογήσεων των υποψήφιων λύσεων. Προς την κατεύθυνση αυτή κινείται και η παρούσα εργασία, προτείνοντας μία τεχνική για την επιτάχυνση της σύγκλισης του Εξελικτικού Αλγορίθμου και τη μείωση των αναγκαίων αξιολογήσεων.

## 1.2. Αεροδυναμική & Υδροδυναμική

Οι διαφορικές εξισώσεις που περιγράφουν σε γενική μορφή την κίνηση των ρευστών, αναπτύχθηκαν κατά πρώτον από τον Navier το 1820 και αργότερα τελειοποιήθηκαν από τον Stokes το 1845. Αυτές οι εξισώσεις που

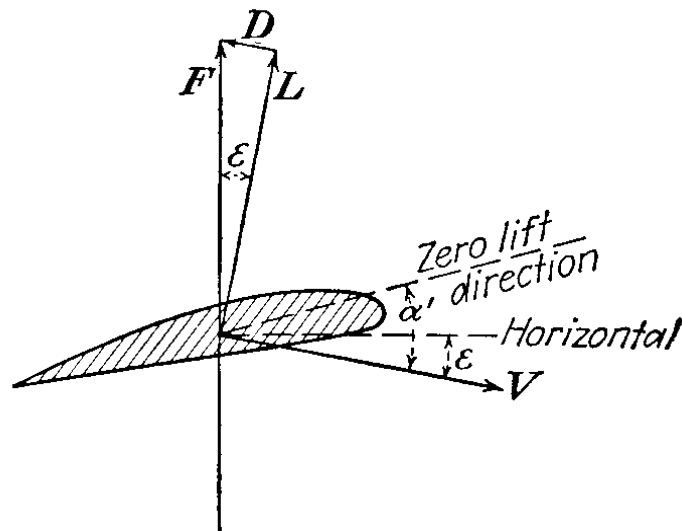
τώρα καλούνται εξισώσεις Navier-Stokes, συνδέουν την ταχύτητα, την πυκνότητα, την πίεση και το ιξώδες του ρευστού σε κάθε θέση στο χώρο του πεδίου ροής. Επειδή δεν έχει βρεθεί γενική αναλυτική λύση για τις συγκεκριμένες διαφορικές εξισώσεις παρά μόνο για πολύ ειδικές περιπτώσεις (με βάση απλοποιητικές παραδοχές), η επίλυσή τους μπορεί να επιτευχθεί μόνο προσεγγιστικά, με τη χρήση αριθμητικών μεθόδων. Ο κλάδος της ρευστομηχανικής που ασχολείται με την επίλυση των εξισώσεων με χρήση αριθμητικών μεθόδων ονομάζεται Υπολογιστική Ρευστομηχανική (Computational Fluid Dynamic – CFD). Λόγω της ραγδαίας εξάπλωσης των υπολογιστών και της αύξησης της ισχύος τους, ο συγκεκριμένος κλάδος εμφανίζει ραγδαία ανάπτυξη τα τελευταία χρόνια και έχει επιτρέψει την (προσεγγιστική) επίλυση δύσκολων προβλημάτων ροής, τα οποία πριν μερικά χρόνια φάνταζαν ακατόρθωτα.

Η αεροδυναμική άρχισε να αναπτύσσεται στην αρχή του 20<sup>ού</sup> αιώνα, ωθούμενη από την προσπάθεια του ανθρώπου για πτήση. Αρχικά, οι προσπάθειες για πτήση στηρίχθηκαν περισσότερο στην παρατήρηση της πτήσης των πουλιών, παρά στην επιστήμη της μηχανικής των ρευστών. Στη συνέχεια όμως η αεροδυναμική, κάνοντας χρήση των υπάρχοντων θεωριών της υδροδυναμικής, γρήγορα ξεπέρασε τον πρόγονό της.

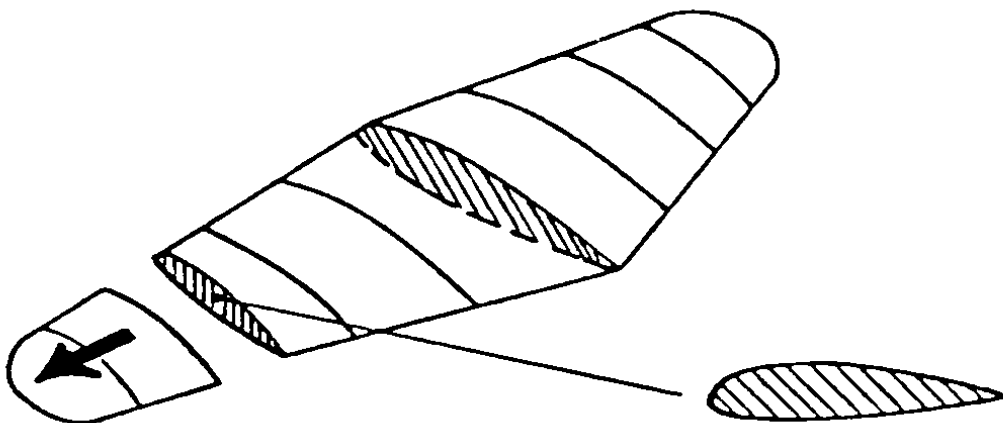
Ξεκίνησε με τις ίδιες απλοποιητικές υποθέσεις, όπως η υδροδυναμική (π.χ. ατριβή ροή και ασυμπίεστο ρευστό). Ενώ όμως η τελευταία υπόθεση είναι πολύ κοντά στην πραγματικότητα για τα υγρά, δεν ισχύει για τα αέρια, παρά μόνο για μικρές ταχύτητες πτήσης. Αυτό όμως ήταν αρκετό για τα πρώτα χρόνια εξέλιξης της αεροναυτικής. Όσον αφορά στην πρώτη υπόθεση του ατριβούς ρευστού, ο Prandtl έδειξε ότι η επίδραση του ιξώδους σε ροή γύρω από λεία σώματα, περιοριζόταν σ' ένα λεπτό στρώμα προσκολλημένο στο σώμα. Η περιοχή αυτή καλείται οριακό στρώμα. Έξω από το οριακό στρώμα οι δυνάμεις τριβής είναι αμελητέες και επομένως εκεί μπορούν να εφαρμοστούν οι θεωρίες της δυναμικής ροής (potential flow), οι οποίες αφορούν σε ατριβές ασυμπίεστο ρευστό. Η ανάπτυξη των σχετικών θεωριών και η ανάλυση των αεροδυναμικών σωμάτων έδωσε τη δυνατότητα της ταχείας εξέλιξης του σχεδιασμού των αεροτομών.

Ενώ τα λεπτά αεροδυναμικά σώματα (όπως π.χ. οι άτρακτοι και οι πτέρυγες των αεροπλάνων) έχουν ένα συνεχές και σταθερό οριακό στρώμα,

τα μη αεροδυναμικά σώματα (όπως π.χ. η σφαίρα, ο κύλινδρος, τα πρίσματα κ.λπ.) δεν έχουν. Στις περιοχές κατάντη της ροής, όπου το σώμα αρχίζει να στενεύει απότομα (π.χ. στο πίσω τμήμα μιας σφαίρας), η ροή αρχίζει να αποκολλάται από το σώμα, δημιουργώντας περιοχές ανακυκλοφορίας, μη μόνιμης ροής (σχηματίζονται δηλαδή δίνες, οι οποίες μπορεί να αποκολλώνται περιοδικά από το σώμα). Στις περιπτώσεις αυτές, οι λύσεις της δυναμικής ροής γίνονται ανακριβείς ακόμα και μακριά από το σώμα. Μέχρι σήμερα δεν υπάρχει πλήρης αναλυτική θεωρία για ροή χαμηλής ταχύτητας γύρω από μη αεροδυναμικά σώματα, αλλά είναι μόνο ποιοτικά γνωστό το τί συμβαίνει στη ροή.



Σχήμα 1.1. – Απεικόνιση των δυνάμεων που ασκούνται σε αεροτομή.  $V$ : το διάνυσμα της ταχύτητας πτήσης,  $L$ : το διάνυσμα της άνωσης,  $D$ : το διάνυσμα της αντίστασης.



Σχήμα 1.2. – Σχηματισμός πτέρυγας από διαδοχικές αεροτομές.

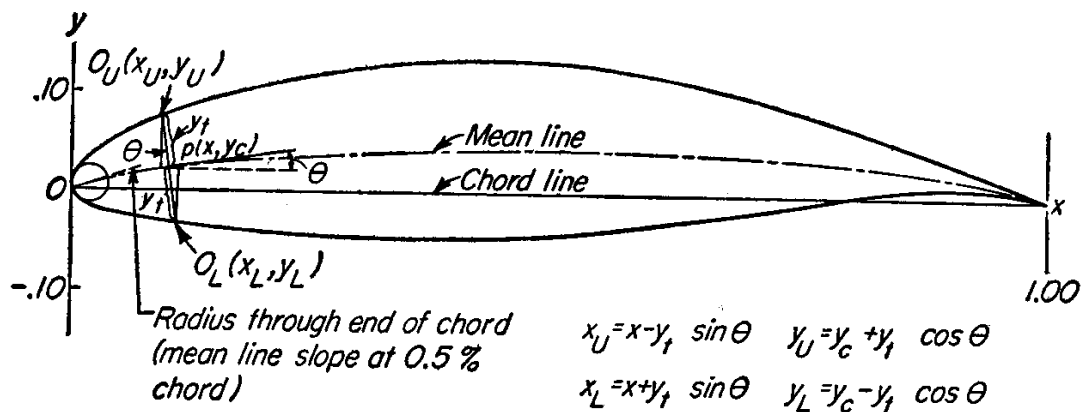
### 1.3. Σχηματισμός αεροτομών

Μια αεροτομή είναι ένα δισδιάστατο σχήμα μορφοποιημένο κατά τέτοιο τρόπο, ώστε να παράγει «άνωση» καθώς αυτό κινείται μέσα στον αέρα, αλλά με πολύ μικρή τιμή της αντίστασης (σχήμα 1.1). Το ζητούμενο δηλαδή από μία αεροτομή είναι η μεγάλη τιμή του λόγου άνωση προς αντίσταση. Το πιο συνηθισμένο παράδειγμα μιας αεροτομής είναι η τομή μιας πτέρυγας αεροπλάνου (σχήμα 1.2). Η ίδια όμως αρχή σχεδίασης ακολουθείται για τη σχεδίαση των πτερυγίων των συμπιεστών, των ελίκων, των αντλιών, των υδροστροβίλων και των αεριοστροβίλων. Η εφαρμογή τους δεν περιορίζεται στην αεροναυτική αλλά είναι χαρακτηριστική η χρήση αεροτομών σε αυτοκίνητα αγώνων, οι οποίες παράγουν αρνητική άνωση για αύξηση της πρόσφυσης σε υψηλές ταχύτητες.

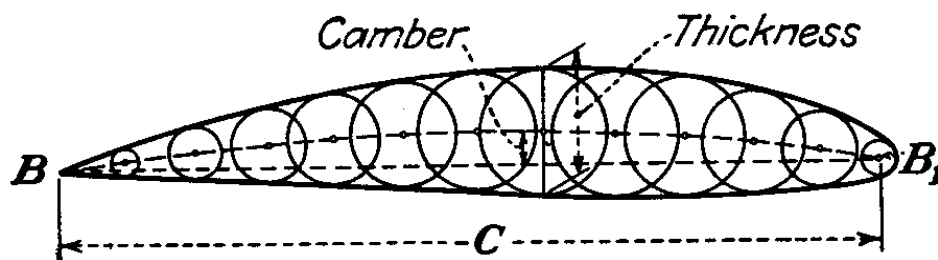
Μία αεροτομή παραδοσιακά σχηματίζεται από μία μέση γραμμή και μία διανομή πάχους γύρω από αυτή (σχήμα 1.3). Η μέση γραμμή της αεροτομής έχει συνήθως μορφή παρόμοια με τόξο. Η καμπυλότητα της μέσης γραμμής είναι αυτή που παράγει την άνωση. Η άνωση στην ουσία οφείλεται στην καμπύλωση των γραμμών ροής του ρευστού γύρω από την αεροτομή. Η διανομή πάχους γύρω από τη μέση γραμμή εξασφαλίζει στατική και δυναμική αντοχή, ομαλή ροή και λειτουργία σε διαφορετικές γωνίες προσβολής. Η αεροτομή στην ουσία παράγεται με την τοποθέτηση διαδοχικών κύκλων, με κέντρο στη μέση γραμμή και ακτίνα τη διανομή πάχους στη συγκεκριμένη θέση (σχήμα 1.4). Προφανώς, μία μέση γραμμή χωρίς καμπυλότητα (ευθύγραμμο τμήμα) παράγει μία συμμετρική αεροτομή. Η αεροτομή αυτή δεν παράγει καθόλου άνωση για μηδενική γωνία προσβολής.

Το μπροστινό σημείο της αεροτομής, στο οποίο η μέση γραμμή τέμνει την αεροτομή, ονομάζεται χείλος προσβολής. Αντίστοιχα το πίσω τμήμα της αεροτομής στο οποίο ενώνονται τα δύο ρεύματα και στο οποίο η μέση γραμμή τέμνει την αεροτομή, ονομάζεται χείλος εκφυγής. Η περιοχή του χείλους προσβολής είναι αρκετά καμπυλωμένη, ώστε η αεροτομή να λειτουργεί υπό διαφορετικές γωνίες προσβολής, χωρίς να υπάρχει κίνδυνος αποκόλλησης της ροής. Το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει το χείλος προσβολής και το χείλος εκφυγής ονομάζεται χορδή (chord) της αεροτομής (σχήμα 1.3). Η γωνία μεταξύ του διανύσματος της ροής και της χορδής της αεροτομής ονομάζεται

γωνία πρόσπτωσης. Με την αύξηση της συγκεκριμένης γωνίας (μέσα σε ορισμένα πλαίσια) επιτυγχάνεται αύξηση της άνωσης. Πέρα από κάποια όρια, η ροή στο επάνω τμήμα της αεροτομής αποκολλάται, αυξάνοντας την αεροδυναμική αντίσταση και μειώνοντας δραστικά την άνωση. Η κατάσταση αυτή ονομάζεται απώλεια στήριξης και είναι εξαιρετικά επικίνδυνη για ένα αεροσκάφος. Όσο η ταχύτητα πτήσεως ενός αεροπλάνου είναι μικρότερη, τόσο πρέπει να αυξάνεται η γωνία πρόσπτωσης των πτερύγων του για την παραγωγή ικανού ποσού άνωσης που θα το διατηρήσουν στον αέρα. Είναι πολλές φορές αξιοσημείωτη η ανύψωση του ρύγχους των αεροπλάνων καθώς προσεγγίζουν αργά το έδαφος για να προσγειωθούν.



Σχήμα 1.3. – Κατασκευή της αεροτομής με χρήση διανομής μέσης γραμμής και διανομής πάχους.



Σχήμα 1.4. – Ο σχηματισμός της αεροτομής αντιστοιχεί σε τοποθέτηση κύκλων με κέντρο επί της μέσης γραμμής και διάμετρο ίση με το πάχος στο συγκεκριμένο σημείο. Η περιβάλλουσα των κύκλων σχηματίζει την αεροτομή. Η χορδή C συνδέει την ακμή προσβολής B<sub>1</sub> με την ακμή φυγής B.

#### 1.4. Το ευθύ και το αντίστροφο πρόβλημα βελτιστοποίησης αεροτομής

Το ευθύ πρόβλημα βελτιστοποίησης αεροτομής συνίσταται στο συνδυασμό μίας αριθμητικής μεθόδου βελτιστοποίησης με μία μέθοδο αεροδυναμικής ανάλυσης και αξιολόγησης αεροτομών, με βάση συγκεκριμένες συνθήκες και περιορισμούς. Στην ουσία, ο αλγόριθμος βελτιστοποίησης κατευθύνει την αναζήτηση σε συγκεκριμένες μορφές αεροτομών, οι οποίες αξιολογούνται με τη χρήση της αντίστοιχης αριθμητικής μεθόδου. Έτσι, τροποποιείται το σχήμα της αεροτομής, ώστε να ικανοποιούνται αποτελεσματικά συγκεκριμένες απαιτήσεις για τη διανομή της πίεσης, ή για την άνωση και την αντίσταση του αέρα.

Μία από τις προσεγγίσεις που ακολουθούνται για το ευθύ πρόβλημα, είναι ο συνδυασμός μεθόδων υπολογιστικής ρευστομηχανικής (CFD) με εξελικτικούς αλγόριθμους. Πάντως οι μέθοδοι υπολογιστικής ρευστομηχανικής έχουν μεγάλες υπολογιστικές απαιτήσεις, ακόμη και για την αξιολόγηση μίας μόνο αεροτομής, πόσο μάλλον για την αξιολόγηση ολόκληρου πληθυσμού αεροτομών σε διαδοχικές γενιές. Για το λόγο αυτό είναι ουσιαστική η προσπάθεια επιτάχυνσης της όλης διαδικασίας.

Η επίλυση με χρήση της αντίστροφης διαδικασίας έχει το πλεονέκτημα της πολύ ταχύτερης σύγκλισης. Το αντίστροφο πρόβλημα σχεδίασης αεροτομής ορίζεται ως η σχεδίαση μιας αεροτομής με δεδομένη διανομή πίεσης στις πλευρές υποπίεσης και υπερπίεσης για δεδομένες συνθήκες λειτουργίας. Όσο πιο κοντά πλησιάζουμε στο στόχο (σχηματισμός κλειστής αεροτομής) τόσο καλύτερη είναι η τεχνική. Για το πρόβλημα αυτό έχουν αναπτυχθεί διάφορες μέθοδοι, οι οποίες δεν θα μας απασχολήσουν εκτεταμένα, αφού η παρούσα εργασία ασχολείται με το ευθύ πρόβλημα.

#### 1.5. Περιγραφή του αντικειμένου μελέτης

Στην παρούσα εργασία αναλύονται δύο διαδικασίες. Η πρώτη αφορά στο βέλτιστο σχεδιασμό αεροτομών μέσω Εξελικτικών Αλγορίθμων (EA) και ο τρόπος που οι παράμετροι του EA επηρεάζουν την διαδικασία. Η δεύτερη αφορά σε μια μέθοδο ταχύτερης σύγκλισης της διαδικασίας.

Για πρακτικούς λόγους, που έχουν να κάνουν με τον χρόνο σύγκλισης της πραγματικής διαδικασίας, θεωρούμε ένα πιο απλό πρόβλημα από το πραγματικό. Το πρόβλημα που αντιμετωπίζουμε είναι η προσέγγιση μίας υπάρχουσας αεροτομής με χρήση ΕΑ και όχι η προσέγγιση μιας δεδομένης διανομής πίεσης. Έτσι αποφεύγεται η χρησιμοποίηση μεθόδων CFD για την αξιολόγηση της κάθε αεροτομής, αλλά παραμένουν οι δυσκολίες του προβλήματος της γεωμετρικής απεικόνισης και της διαδικασίας της σύγκλισης του ΕΑ. Αφού πετύχουμε, μετά από ένα αριθμό επαναλήψεων, να προσεγγίσουμε την δεδομένη αεροτομή - στόχο, τότε έχουμε ισχυρές ενδείξεις ότι η διαδικασία λειτουργεί κανονικά και μπορεί να εφαρμοστεί για την εύρεση καλύτερων αεροδυναμικά αεροτομών επιλύοντας το πραγματικό πρόβλημα. Στην ουσία χτίστηκε ένα τεχνητό πρόβλημα, το οποίο όμως μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την ανάπτυξη συγκεκριμένης μεθοδολογίας, χωρίς να απαιτούνται οι εξαντλητικές χρονικά απαιτήσεις του πραγματικού προβλήματος.

Η κλασική προσέγγιση (συμβατική μέθοδος) που ακολουθείται για το συγκεκριμένο πρόβλημα σχεδίασης με χρήση ΕΑ περιγράφεται ως ακολούθως. Η αεροτομή που θέλουμε να προσεγγίσουμε περιγράφεται συνήθως από ένα συγκεκριμένο πλήθος σημείων. Κάθε άλλη αεροτομή, που ελέγχεται για πιθανή λύση από την επαναληπτική διαδικασία, περιγράφεται με καμπύλες NURBS. Για να ξεκινήσει η διαδικασία του Εξελικτικού Αλγορίθμου πρέπει να εισαχθεί στον αλγόριθμο ένα αρχικός πληθυσμός αεροτομών (υποψήφιων λύσεων). Αυτός παράγεται με τυχαίο τρόπο, δίνοντας το (σταθερό) πλήθος των σημείων ελέγχου που επιθυμούμε να περιγράψουν κάθε αεροτομή και τα διαστήματα στα οποία θέλουμε να κυμαίνονται οι συντεταγμένες κάθε σημείου. Δημιουργούμε δηλαδή συγκεκριμένα παράθυρα στον χώρο  $xy$ , μέσα στα οποία επιτρέπεται να κινούνται οι συντεταγμένες κάθε σημείου ελέγχου της καμπύλης.

Για την ταχύτερη σύγκλιση της παραπάνω διαδικασίας στην παρούσα εργασία προτείνεται μια παραλλαγή της μεθόδου. Με δεδομένο ότι κάθε επανάληψη του ΕΑ εξαρτάται κατά ένα μεγάλο ποσοστό από την προηγούμενή της, είναι εύκολο να αντιληφθεί κάποιος την σημαντικότητα της πρώτης επανάληψης για την εύρεση του πρώτου τυχαίου πληθυσμού. Πρέπει να σημειωθεί επίσης ότι όσο περισσότερα είναι τα σημεία ελέγχου και όσο

μεγαλύτερα είναι τα διαστήματα των ορίων τους τόσο η διαδικασία απαιτεί περισσότερο υπολογιστικό χρόνο για την λύση του προβλήματος.

Με αυτό το σκεπτικό επινοήθηκε η διαδικασία ταχύτερης σύγκλισης, στην οποία εφαρμόζουμε την διαδικασία βελτιστοποίησης σε δύο διαδοχικά στάδια. Κατά το πρώτο στάδιο εκτελούμε τη διαδικασία βελτιστοποίησης, περιγράφοντας τις υποψήφιες αεροτομές με σχετικά λίγα σημεία ελέγχου και μεγάλα διαστήματα ορίων σε καθένα από αυτά. Μετά από ένα μικρό αριθμό επαναλήψεων η διαδικασία σταματά και επιλέγεται η καλύτερη λύση. Με βάση αυτή (και των ιδιοτήτων των καμπυλών NURBS που περιγράφονται σε επόμενο κεφάλαιο) αυξάνονται τα σημεία ελέγχου, που περιγράφουν την βέλτιστη αεροτομή του πρώτου σταδίου. Με βάση τα νέα αυξημένα σημεία ελέγχου της εν λόγω αεροτομής κατασκευάζονται νέα παράθυρα γύρω από αυτά με μειωμένα διαστήματα για κάθε γονίδιο. Η διαδικασία βελτιστοποίησης ξεκινάει εκ νέου, αποτελώντας το δεύτερο στάδιο, παράγοντας τυχαίες λύσεις μέσα στα νέα πολύ μικρότερα όρια. Με τον τρόπο αυτό επιτυγχάνεται μια αισθητή επιτάχυνση, αφού μειώνεται σημαντικά το πεδίο πιθανών λύσεων.

Το σκεπτικό της όλης διαδικασίας είναι να βρεθεί μια σχετικά καλή πρώτη λύση, με λιγότερα σημεία ελέγχου απ' ότι στην κανονική διαδικασία. Κατόπιν αυξάνουμε τα σημεία ελέγχου για να δοθεί μεγαλύτερη ευκαμψία στα σχήματα των αεροτομών και μειώνουμε τα διαστήματα των ορίων τους, αφού ξέρουμε πλέον πως περίπου θα μοιάζει η τελική αεροτομή. Αφού δηλαδή ο αλγόριθμος έχει «καταλάβει» την πορεία προς την οποία πρέπει να κινηθεί, αυξάνεται η ευελιξία στην περιγραφή της αεροτομής, με την εισαγωγή περισσότερων σημείων ελέγχου, ενώ περιορίζεται το εύρος κίνησης του καθενός από αυτά, προκειμένου να μειωθεί ο χώρος λύσεων και να διατηρηθεί χαμηλά ο χρόνος σύγκλισης. Η ιδέα βασίζεται στο γεγονός ότι οι ΕΑ συγκλίνουν ταχύτατα κοντά στη βέλτιστη λύση, αλλά απαιτούν πολύ χρόνο για να φτάσουν στο ολικό βέλτιστο.

## 1.6. Βιβλιογραφική επισκόπηση

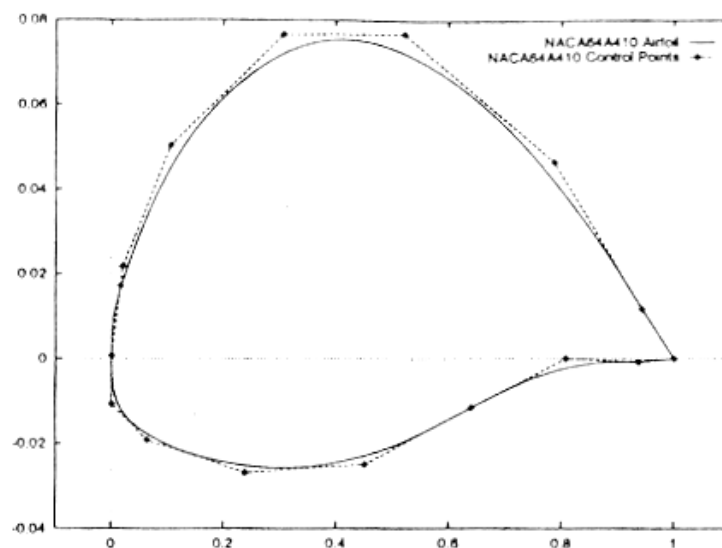
Στη συνέχεια περιγράφονται μελέτες ερευνητών για τον βέλτιστο σχεδιασμό αεροτομών και πτερυγίων με επαναληπτικές μεθόδους



βελτιστοποίησης. Οι περισσότερες χρησιμοποιούν εξελικτικούς αλγορίθμους σε συνδυασμό με ή και χωρίς άλλες τεχνικές, όπως νευρωνικά δίκτυα.

Σε μια ενδιαφέρουσα μελέτη ο I. De Falco [De Falco,1997] παρουσιάζει εξελικτικούς αλγορίθμους βελτιστοποίησης, τους οποίους εφαρμόζει σε προβλήματα σχεδιασμού αεροτομών. Η μελέτη του χωρίζεται σε δύο μέρη.

Στο πρώτο αναλύονται οι πιο γνωστοί εξελικτικοί αλγόριθμοι και περιγράφεται η αποτελεσματικότητά τους σε προβλήματα βελτιστοποίησης. Στο δεύτερο μέρος της εργασίας εφαρμόζει τους εξελικτικούς αλγορίθμους, που περιγράφηκαν στο πρώτο μέρος, για να λύσει προβλήματα βέλτιστου αεροδυναμικού σχεδιασμού αεροτομών. Εφαρμόζει αυτούς τους αλγορίθμους για το ευθύ και το αντίστροφο πρόβλημα σχεδίασης. Στο πρώτο μέρος της εργασίας παρατίθενται οι βασικές ιδέες για την κατανόηση των εξελικτικών αλγορίθμων, καθώς και οι διάφορες εκδοχές τους, ενώ γίνεται αναφορά στις ομοιότητες και διαφορές που εμφανίζουν. Παρουσιάζονται με λεπτομέρεια οι γενετικοί αλγόριθμοι, οι εξελικτικές στρατηγικές, ο γενετικός αλγόριθμος Breeder και ο εξελικτικός προγραμματισμός. Αφού γίνει η αναλυτική περιγραφή των μεθόδων, ο συγγραφέας παρουσιάζει τη δική του εκδοχή εξελικτικού αλγορίθμου, τον δυαδικό αλγόριθμο M-EA, και εκθέτει τα πλεονεκτήματά του, έναντι των άλλων διαδικασιών. Στο τέλος υπάρχει μία σύγκριση όλων των αλγορίθμων, βγάζοντας γενικά συμπεράσματα για τις μεθόδους που περιγράφηκαν.



Σχήμα 1.5. – Περιγραφή της αεροτομής με χρήση δύο καμπυλών B-Spline για το τμήμα υπερπίεσης και υποπίεσης.

Στο δεύτερο τμήμα της εργασίας του ο De Falco θέτει σε εφαρμογή τρεις από τους πάνω αλγόριθμους για να λύσει το ευθύ και το αντίστροφο πρόβλημα σχεδίασης. Οι τρεις εξελικτικοί αλγόριθμοι είναι ένας δυαδικός γενετικός αλγόριθμος, ο δυαδικός M-EA και ο γενετικός αλγόριθμος Breeder με πραγματικές μεταβλητές. Στο ευθύ πρόβλημα σχεδίασης, δίνεται το σχήμα μιας τυχαίας αεροτομής και μία ή περισσότερες συνθήκες λειτουργίας. Η μέθοδος πρέπει να αλλάξει το σχήμα της αεροτομής έτσι ώστε να ικανοποιεί τις απαιτήσεις μεγιστοποίησης του λόγου άνωσης προς αντίσταση, στα διαφορετικά σημεία λειτουργίας. Στο αντίστροφο πρόβλημα, ξεκινάει από μια τυχαία αεροτομή και ο σκοπός είναι να ξαναφτιαχτεί η αεροτομή από τη δεδομένη διανομή της πίεσης για συγκεκριμένες συνθήκες ροής. Στο αντίστροφο πρόβλημα ο De Falco αναπαριστά την αεροτομή με δύο καμπύλες B-Spline 4<sup>ου</sup> βαθμού, από 9 σημεία ελέγχου η κάθε μία (σχήμα 1.5). Στο τέλος της εργασίας του ο De Falco κάνει χρήση μοντέλων παράλληλης επεξεργασίας για την επιτάχυνση της διαδικασίας.

Ο A. Demeulenaere [Demeulenaere,1997] στην μελέτη του, πρότεινε μια μέθοδο για σχεδίαση πτερυγίων συμπιεστών και στροβίλων. Η μέθοδος λειτουργεί επαναληπτικά, αλλάζοντας το αρχικό γεωμετρικό σχήμα ενός πτερυγίου, μέχρι η επιφάνειά του να αποκτήσει μια καθορισμένη διανομή πίεσης. Η μέθοδος επιλύει τη χρονικά μεταβαλλόμενη μορφή των εξισώσεων Euler και Navier-Stokes, με τα χωρικά όρια της αεροτομής να μετακινούνται σε κάθε επανάληψη.

Η μέθοδος κατ' αρχήν χρησιμοποιείται για να αναπαράγει τρισδιάστατα πτερύγια στροβίλων. Επίσης παρουσιάζεται η σχεδίαση αξονικών και ακτινικών πτερυγίων συμπιεστών, καθώς και η περίπτωση ενός λεπτού αξονικού πτερυγίου στροβίλου. Η πίεση είναι προκαθορισμένη μόνο σε ένα κομμάτι της επιφάνειας του πτερυγίου, ώστε να παρέχεται περισσότερη ευκαμψία, και να εξασφαλίζει ότι το νέο πτερύγιο θα βρίσκεται σε συμφωνία με τους μηχανικούς περιορισμούς (αντοχής).

Στην εργασία τους οι S. Obayashi και S. Takanashi [Obayashi & Takanashi] εφάρμοσαν ένα γενετικό αλγόριθμο που βελτιστοποιεί την διανομή της πίεσης για το αντίστροφο πρόβλημα. Όταν επιτυγχάνεται ο στόχος της διανομής της πίεσης, τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά του πτερυγίου

μπορούν να βρεθούν από τον αντίστροφο σχεδιασμό με αντίστροφη επίλυση των εξισώσεων Navier-Stokes. Οι εφαρμογές που παρουσιάζονται στην εργασία αυτή δείχνουν ότι ο συγκεκριμένος αλγόριθμος βελτιστοποίησης μπορεί να εφαρμοστεί αποτελεσματικά για να αναπαραχθούν πτερύγια υπερηχητικής ροής.

Ο S. Obayashi [Obayashi,1997] δημοσίευσε μια μελέτη για εφαρμογή εξελικτικών αλγορίθμων στην αεροδυναμική βελτιστοποίηση. Σ' αυτήν δείχνεται πως σε τέτοια προβλήματα η αντικειμενική συνάρτηση είναι αρκετά πολύπλοκη ακόμα και στο πιο απλό πρόβλημα. Ο εξελικτικός αλγόριθμος που εφαρμόζεται είναι ένας γενετικός αλγόριθμος. Παρουσιάζεται μια σύγκριση του γενετικού αλγορίθμου με δύο άλλα μοντέλα, ενώ τα αποτελέσματα αναδεικνύουν τον γενετικό ως την καλύτερη επιλογή για προβλήματα αεροδυναμικής βελτιστοποίησης. Στη συνέχεια γίνεται λόγος για την επέκταση του γενετικού αλγορίθμου σε προβλήματα με περισσότερες από μία αντικειμενικές συναρτήσεις. Προτείνονται οι πολυκριτήριοι γενετικοί αλγόριθμοι (Multi Objective Genetic Algorithms - MOGAs) οι οποίοι βασίζονται στην ιδέα του μετώπου Pareto. Επίσης αποδεικνύεται πως οι πολυκριτήριοι γενετικοί αλγόριθμοι (MOGAs) είναι αρκετά καλοί και σταθεροί για παράλληλες διαδικασίες.

Σε μια επόμενη επιστημονική δημοσίευση ο S. Obayashi [Obayashi,1997b] ασχολείται με το αντίστροφο πρόβλημα σχεδίασης, με σκοπό τη μείωση του υπολογιστικού χρόνου. Κατά τη διαδικασία αξιολόγησης της κάθε αεροτομής απαιτείται η χρησιμοποίηση κωδίκων CFD, που αυξάνουν υπέρμετρα το υπολογιστικό κόστος και αυτός είναι ο λόγος που προτείνεται η ενασχόληση με το αντίστροφο πρόβλημα, δηλαδή αυτό της εύρεσης της βέλτιστης διανομής πίεσεως. Αφού αυτή βρεθεί με τη χρήση του γενετικού αλγορίθμου, στη συνέχεια η γεωμετρία της αεροτομής προσδιορίζεται με μεθόδους αντίστροφης σχεδίασης. Ο γενετικός αλγόριθμος εφαρμόζεται για να βρει σε μια επιφάνεια, τη διανομή της πίεσης, η οποία ελαχιστοποιεί την αντίσταση του αέρα για δεδομένη άνωση και πάχος αεροτομής.

Οι D. Quagliarella και A. Della Cioppa [Quagliarella & Della Cioppa, 1994] ανέπτυξαν μια μέθοδο σχεδιασμού υπερηχητικών πτερυγίων που βασίζεται στους γενετικούς αλγορίθμους σε συνδυασμό τους με μεθόδους

CFD. Στην εργασία τους επισημαίνουν την αποτελεσματικότητα τέτοιων μεθόδων βελτιστοποίησης, τόσο για μία όσο και για περισσότερες αντικειμενικές συναρτήσεις.

Ο S. Pierret [Pierret, 1999] ανέπτυξε μια μέθοδο σχεδίασης πτερυγίων για στροβιλομηχανές. Ο σκοπός είναι να δημιουργηθεί ένα ολοκληρωμένο υπολογιστικό σύστημα, που να σχεδιάζει βέλτιστα πτερύγια για στροβίλους και συμπιεστές με πολύ μικρό υπολογιστικό κόστος.

Η προτεινόμενη μέθοδος είναι πλήρως αυτοματοποιημένη, παρέχοντας αποτελεσματικά σχέδια πτερυγίων (διαφόρων τύπων) σε πολύ μικρό υπολογιστικό χρόνο, χρησιμοποιώντας μεθόδους τεχνητής νοημοσύνης, όπως οι αρχικές συναρτήσεις προσεγγίσεως, τα τεχνητά νευρωνικά δίκτυα, οι γενετικοί αλγόριθμοι (σε συνδυασμό με κώδικες CFD). Οι μέθοδοι αυτές εφαρμόστηκαν στη σχεδίαση δισδιάστατων και τρισδιάστατων πτερυγίων για στροβιλομηχανές.

Σύμφωνα με την εργασία του Pierret δύο θέματα είναι σημαντικά. Πώς να μειωθεί όσο το δυνατόν περισσότερο η ανθρώπινη μεσολάβηση, η οποία γίνεται εμπόδιο για την πλήρη εκμετάλλευση τέτοιων ισχυρών υπολογιστικών εργαλείων, και πώς να διατηρηθεί και να χρησιμοποιηθεί η υπάρχουσα ανθρώπινη γνώση. Η λύση σε αυτό το πρόβλημα δόθηκε με τη χρησιμοποίηση τεχνικών τεχνητής νοημοσύνης.

Με την εισαγωγή προσεγγιστικών συναρτήσεων, ο χώρος λύσεων προσεγγίζεται χρησιμοποιώντας δεδομένα από προηγούμενες επιλύσεις της ροής γύρω από υπάρχουσες αεροτομές. Χρησιμοποιώντας έτσι ένα προσεγγιστικό μοντέλο, δεν απαιτείται η επαναληπτική χρήση κωδίκων CFD, οπότε η διαδικασία της βελτιστοποίησης απαιτεί πολύ λιγότερο χρόνο. Στη συνέχεια εφαρμόζεται ένας αλγόριθμος βελτιστοποίησης, με σκοπό να βρει την βέλτιστη γεωμετρία. Κατά την διάρκεια της διαδικασίας βελτιστοποίησης, η αεροδυναμική συμπεριφορά του πτερυγίου εκτιμάται χρησιμοποιώντας το προσεγγιστικό μοντέλο.

Για την περιγραφή των πτερυγίων χρησιμοποιείται ένα μοντέλο που κάνει χρήση καμπυλών Bezier, με το οποίο καθίσταται δυνατή η περιγραφή διαφορετικών τύπων πτερυγίων συμπιεστών και στροβίλων, σε 2 ή 3 διαστάσεις.

Αρκετοί αλγόριθμοι βελτιστοποίησης υλοποιούνται και δοκιμάζονται στην εργασία αυτή, ενώ με κριτήριο το χρόνο σύγκλισης, ο γενετικός αλγόριθμος και η εξομοιωμένη ανόπτηση δείχνουν να είναι οι καλύτερες.

Ένα μεγάλο μειονέκτημα των μεθόδων βελτιστοποίησης, που κάνουν χρήση εξελικτικών αλγορίθμων, είναι ο χρόνος επεξεργασίας και υπολογισμού. Μια πολύ καλή μελέτη για επιτάχυνση των εξελικτικών αλγορίθμων κατά την εφαρμογή τους στην αεροδυναμική, παρουσίασε ο Κ. C. Giannakoglou [Giannakoglou, 2002]. Ο σκοπός αυτής της εργασίας είναι να παρουσιάσει αρχές και αλγορίθμους οι οποίοι μπορούν να μειώσουν τον χρόνο εύρεσης λύσης, σε προβλήματα σχεδιασμού στην αεροναυπηγική. Αυτά τα είδη βελτιστοποίησης, επειδή διαχειρίζονται πληθυσμούς λύσεων σε διαδοχικές γενιές, απαιτούν ένα αξιοσημείωτο αριθμό αξιολογήσεων με χρήση κωδίκων CFD. Σε αυτή την μελέτη, δίνεται έμφαση στη χρήση υπολογιστικά φθηνών προσεγγιστικών μοντέλων. Ο ρόλος των προσεγγιστικών μοντέλων είναι να υποστηρίξουν τη διαδικασία της έρευνας του χώρου των πιθανών λύσεων, με το να αντικατασταθεί ένας μεγάλος αριθμός από ακριβούς και δαπανηρούς υπολογισμούς αποτιμήσεων με λιγότερους ακριβούς και συνεπώς λιγότερους χρονοβόρους υπολογισμούς, που όμως θα παρέχουν καθαρές ενδείξεις για την ποιότητα της κάθε λύσης (χωρίς όμως να υπολογίζουν ακριβώς τη λύση).

Μία από τις αρχικές επιλογές που πρέπει να γίνουν για τα προσεγγιστικά μοντέλα είναι η επιλογή ανάμεσα σε άμεσα ή έμμεσα συνδεδεμένα μοντέλα. Τα έμμεσα μοντέλα κατασκευάζονται ξεχωριστά και πριν από την εφαρμογή τους στην διαδικασία της βελτιστοποίησης. Η επιλογή του αριθμού των υποψήφιων λύσεων που πρέπει να αποτιμηθούν με σκοπό να πετύχουμε τα δεδομένα για την κατασκευή του προσεγγιστικού μοντέλου είναι κρίσιμης σημασίας. Στην εργασία δείχνεται ότι τα τοπικά άμεσα συνδεδεμένα μοντέλα προσφέρουν αυξανόμενη ευκαμψία και τα δεδομένα για την κατασκευή τους μπορούν εύκολα να αναπαραχθούν.

Η προτεινόμενη μέθοδος κάνει χρήση τεχνητών νευρωνικών δικτύων για τη δημιουργία του προσεγγιστικού μοντέλου. Το τεχνητό νευρωνικό δίκτυο κάνει χρήση ενός τμήματος των προηγούμενων λύσεων που έχουν αξιολογηθεί, και εξασφαλίζει ισχυρή επιτάχυνση της διαδικασίας, αφού ένα μικρό μόνο τμήμα των νέων λύσεων απαιτείται να αξιολογηθεί επακριβώς,

ενώ όλες οι υπόλοιπες αξιολογούνται με τη χρήση του προσεγγιστικού μοντέλου

## 2. Εξελικτικές διαδικασίες βελτιστοποίησης

### 2.1. Εισαγωγή

Σχεδόν από το ξεκίνημα της ιστορίας των Η/Υ, οι ερευνητές ενδιαφέρονταν να αναπτύξουν υπολογιστικές μεθόδους που θα αντέγραφαν τις λειτουργίες και δυνατότητες των φυσικών οργανισμών. Επιστήμονες, όπως ο Alan Turing και ο John von Neumann, ενδιαφέρονταν να αναπτύξουν αυτό που συχνά αναφέρεται στις μέρες μας ως τεχνητή νοημοσύνη (artificial intelligence). Στην τεχνητή νοημοσύνη οι μηχανές είναι ικανές να καταλαβαίνουν, να ελέγχουν και να προσαρμόζονται στο περιβάλλον που βρίσκονται και λειτουργούν. Πολλές από αυτές τις σύγχρονες πρωτοποριακές τεχνικές έχουν υπόβαθρο στη βιολογία, την ψυχολογία, την ιατρική και έτσι τα φυσικά συστήματα γίνονται οδηγοί στη δημιουργία πιο «έξυπνων» υπολογιστικών συστημάτων. Με τα χρόνια αυτές οι προσπάθειες έχουν παράγει τεχνικές και συστήματα ποικίλης αποτελεσματικότητας και φήμης όπως είναι: *έμπειρα συστήματα* (expert systems), *τεχνητά νευρωνικά δίκτυα* (artificial neural networks), *ασαφής λογική* (fuzzy logic), *προσαρμοζόμενοι πράκτορες* (adaptive agents) και *εξελικτικοί αλγόριθμοι* (evolutionary systems).

Οι εμπνευσμένες από την βιολογική εξέλιξη υπολογιστικές μέθοδοι μπορούν να ομαδοποιηθούν σε μία οικογένεια που ονομάζεται *εξελικτικοί αλγόριθμοι*. Τα τρία κύρια στοιχεία των εξελικτικών αλγορίθμων είναι τα ακόλουθα:

- Οι Εξελικτικές Στρατηγικές
- Ο Εξελικτικός Προγραμματισμός
- Οι Γενετικοί Αλγόριθμοι

Κάθε μία από τις πάνω τεχνικές, μιμνήται τη διαδικασία που παρατηρείται στη φυσική εξέλιξη των έμβιων οργανισμών. Χρησιμοποιεί πληθυσμούς από υποψήφιες λύσεις του προβλήματος, οι οποίοι «εξελίσσονται» αναζητώντας τη βέλτιστη λύση μέσα από δεδομένο χώρο λύσεων. Οι συγκεκριμένες

τεχνικές έχουν αποδείξει ότι είναι ικανές για τη λύση δύσκολων προβλημάτων σε διάφορους επιστημονικούς τομείς όπως στην ιατρική, στη μηχανική, την αεροδυναμική, τη χημεία κ.λπ. Οι Γενετικοί Αλγόριθμοι είναι γενικά η πιο γνωστή και διαδεδομένη τεχνική στο πεδίο των Εξελικτικών Αλγορίθμων.

## 2.2. Εξελικτικοί Αλγόριθμοι (ΕΑ)

Οι Εξελικτικοί Αλγόριθμοι είναι βασισμένοι στη μίμηση της φυσικής διαδικασίας της εξέλιξης των ζώντων οργανισμών. Σύμφωνα με τη θεωρία του Darwin για την εξέλιξη των βιολογικών ειδών, αν λάβουμε ένα πληθυσμό από άτομα και τον αφήσουμε να εξελιχθεί για αρκετές γενεές, ο πληθυσμός θα εξελιχθεί, προσαρμοζόμενος στο περιβάλλον που ζει, με βάση την γενική αρχή ότι τα καλύτερα προσαρμοσμένα άτομα έχουν περισσότερες πιθανότητες να επιβιώσουν και συνεπώς να αναπαραχθούν. Αυτό όμως επιπλέον σημαίνει ότι ένα άτομο όσο πολλαπλασιάζεται τόσο θα εξαπλώνει τα γονίδια του σε επόμενες γενεές. Όσο ο αριθμός των γενεών αυξάνει, τα χειρότερα άτομα βαθμιαία χάνονται για να αυξηθεί ο αριθμός των ατόμων με τα πιο ελκυστικά χαρακτηριστικά. Ένα ζεύγος ατόμων δημιουργεί ένα απόγονο, του οποίου τα γενετικά χρωμοσώματα θα περιέχουν μερικά μέρη κληρονομημένα από κάθε γονέα (συνδυασμός ή διασταύρωση γονιδίων). Επιπλέον κατά τη διαδικασία της διασταύρωσης μπορούν να συμβούν (με μικρή πιθανότητα) μερικά «λάθη», με αποτέλεσμα το νέο άτομο να είναι σχεδόν ίδιο αλλά όχι αναγκαία ταυτόσημο με το αρχικό (μετάλλαξη). Αυτό βοηθά να εισαχθεί ποικιλία στον πληθυσμό.

Μπορούμε να θεωρήσουμε τη διαδικασία της εξέλιξης σε δύο στάδια, το πρώτο της μικροεξέλιξης και το δεύτερο της μακροεξέλιξης. Στο πρώτο στάδιο, ξεκινώντας από ένα άτομο, με τροποποίηση των χαρακτηριστικών του προκύπτει ένας απόγονος. Όταν με παρόμοια διαδικασία θεωρήσουμε τον απόγονο του απογόνου κ.ο.κ., τότε μιλάμε για μακροεξέλιξη. Δηλαδή στην μακροεξέλιξη η αξία της τροποποίησης των χαρακτηριστικών ενός πληθυσμού διαπιστώνεται στο τέλος, στο σύνολο του πληθυσμού και μετά το πέρας της διαδικασίας. Τα δύο αυτά στάδια αντιστοιχούν στις γενετικές λειτουργίες τις αλλαγής των γονιδίων (μικροεξέλιξη) και στο φυσικό μηχανισμό της επιλογής (μακροεξέλιξη) που οδηγεί τον πληθυσμό προς τη διεύθυνση της



καλύτερης προσαρμογής στο φυσικό περιβάλλον. Τα δύο στάδια είναι εξίσου σημαντικά διότι κάθε γενεά εξαρτάται από την προηγούμενη γενεά (μικροεξέλιξη), συνεπώς και η τελευταία γενεά (λύση του προβλήματος) θα εξαρτάται από την πρώτη γενεά (μακροεξέλιξη).

Ξεκινώντας από αυτές τις ιδέες της φυσικής επιλογής, έγινε μια προσπάθεια να δημιουργηθούν υπολογιστικά μοντέλα, τα οποία μπορούν να εφαρμοστούν για τη λύση πρακτικών προβλημάτων. Η λύση σε ένα πρόβλημα μπορεί εν γένει να παρασταθεί με μία σειρά αριθμητικών μεταβλητών. Οι μεταβλητές αυτές μπορεί να είναι ακέραιοι, πραγματικοί, δυαδικοί αριθμοί, ή μπορούν να πάρουν τη μορφή γενικότερων συμβόλων. Το σύνολο των παραπάνω παραμέτρων αποτελεί το χρωμόσωμα της υποψήφιας λύσης. Με βάση τις παραμέτρους μιας λύσης μπορεί να «κατασκευαστεί» η λύση και να αξιολογηθεί, δηλαδή να της δοθεί μία τιμή που να εκφράζει την ποιότητά της, ουσιαστικά το βαθμό προσαρμογής της στο τεχνητό περιβάλλον που εμείς δημιουργούμε. Η τιμή που θα αποδοθεί στη συγκεκριμένη λύση ονομάζεται «συνάρτηση προσαρμογής».

Στη συνέχεια μπορούμε να κάνουμε χρήση του παραπάνω σχήματος με τη δημιουργία ενός αρχικού πληθυσμού υποψήφιας λύσεων και να τις αφήσουμε να εξελιχθούν σύμφωνα με τις αρχές της επιβίωσης, της αναπαραγωγής και της μετάλλαξης. Όσο ο αριθμός των γενεών μεγαλώνει, όλο και καλύτερες λύσεις του προβλήματος βρίσκονται από τον αλγόριθμο.

Από το σημείο αυτό και στο εξής θα υποθέτουμε ότι έχουμε να επιλύσουμε ένα πρόβλημα που εξαρτάται από ένα σύνολο  $N$  ελευθέρων παραμέτρων  $\vec{x} = (x_1, \dots, x_N)$ , και ένα ποιοτικό κριτήριο  $f: M \rightarrow \mathbb{R}$  (η ονομαζόμενη αντικειμενική συνάρτηση)  $M \subseteq \mathbb{R}^N$  που πρέπει να ελαχιστοποιείται (η ελαχιστοποίηση και όχι η μεγιστοποίηση της συνάρτησης δεν μειώνει τη γενικότητα της ανάπτυξης, αφού το ένα μπορεί να προκύψει από το άλλο). Πρέπει να σημειωθεί ότι η επιβολή περιορισμών στις επιτρεπόμενες τιμές των παραμέτρων του προβλήματος μπορούν να προκαλέσουν το σύνολο των εφικτών λύσεων να είναι μόνο ένα υποσύνολο του κύριου χώρου των μεταβλητών  $M$ . Συνεχίζοντας τη βιολογική αλληγορία, μία υποψήφια λύση  $x$  συχνά αναφέρεται ως χρωμόσωμα ή άτομο, ενώ κάθε μία από τις μεταβλητές των συστατικών της αναφέρεται ως γονίδιο.

Ξεκινώντας από μία αντικειμενική συνάρτηση  $f$ , μπορούμε να γράψουμε μία κατάλληλη συνάρτηση προσαρμογής  $\Phi$ , τέτοια ώστε η τελική μορφή της, να αποκτάται από την εφαρμογή μίας συνάρτησης  $\Gamma$  πάνω στην προηγούμενη.

$$\Phi(x) = \Gamma(f(x)) \quad (2.1)$$

Για μερικούς Εξελικτικούς Αλγορίθμους, όπως οι Εξελικτικές Στρατηγικές, η συνάρτηση  $\Gamma$  είναι αναγκαία για τους ακόλουθους λόγους:

Μειώνει την ομοιότητα της συνάρτησης ώστε να μην είναι  $\Phi(x) = f(x)$ . Αρκετές φορές ο μηχανισμός της επιβίωσης λειτουργεί καλύτερα, ή μόνο έτσι, εάν οι πληθυσμοί παίρνουν μόνο θετικές ή μόνο αρνητικές τιμές της συνάρτησης προσαρμογής. Ο μόνος τρόπος για να γίνει αυτό είναι η εφαρμογή της συνάρτησης  $\Gamma$  πάνω στην αντικειμενική συνάρτηση, για τη δημιουργία της συνάρτησης προσαρμογής. Έτσι ως παράδειγμα, σε ένα πρόβλημα ελαχιστοποίησης, στο οποίο η βέλτιστη λύση είναι γνωστή, θέτουμε:

$$\Phi(x) = f(x) - \min \quad (2.2)$$

και το γενικό ελάχιστο για τη συνάρτηση προσαρμογής  $\Phi$  θα είναι τώρα το 0. Εάν όμως το ελάχιστο δεν είναι ακριβώς γνωστό, μπορούμε να θέσουμε ένα κάτω όριο (LB) ώστε να έχουμε:

$$\Phi(x) = f(x) - LB \quad (2.3)$$

έτσι έχουμε  $\Phi(x) \geq 0$ .

Το βασικό διάγραμμα για έναν Εξελικτικό Αλγόριθμο, πληθυσμού  $P$  και  $N$  ατόμων (χρωμοσωμάτων) είναι:

#### ΑΡΧΗ

$t=0$

Τυχαίες αρχικές τιμές  $P(t)$

Αποτίμηση  $P(t)$  με χρήση της συνάρτησης προσαρμογής

Όσο δεν τερματίζεται εκτέλεσε τα ακόλουθα

$P'(t)$  = Διασταύρωση  $P(t)$

$P''(t)$  = Μετάλλαξη  $P'(t)$

Αποτίμηση του  $P''(t)$

$P(t+1)$  = Επιλογή ( $P(t) \vee P''(t)$ )

$t=t+1$

Τέλος Όσο

ΤΕΛΟΣ

Το κριτήριο σύγκλισης συνήθως τίθεται από τον χρήστη, είτε όταν η καλύτερη γενική λύση έχει προσεγγισθεί (αν είναι εκ των προτέρων γνωστή), είτε όταν μια αποδεκτή λύση έχει βρεθεί, είτε όταν ένας μέγιστος αριθμός γενεών έχει εκτελεστεί. Η επιλογή, η διασταύρωση και η μετάλλαξη εξαρτώνται από τον συγκεκριμένο εξελικτικό αλγόριθμο που εκτελείται. Η διαδικασία της αποτίμησης των λύσεων, αντίθετα είναι ορισμένη από τον χρήστη, σύμφωνα με το συγκεκριμένο πρόβλημα που λύνεται και λαμβάνεται υπόψη η συνάρτηση προσαρμογής.

Όπως αναφέρθηκε και προηγουμένως, οι Εξελικτικοί Αλγόριθμοι διακρίνονται σε Γενετικούς Αλγορίθμους, Εξελικτικές Στρατηγικές και Εξελικτικό Προγραμματισμό. Τα χαρακτηριστικά τους δίνονται στις παραγράφους που ακολουθούν. Το βασικό σχήμα πάντως σε όλες τις περιπτώσεις είναι αυτό που αναφέρθηκε πιο πάνω και οι διαφορές εντοπίζονται κυρίως στα επιμέρους σχήματα της επιλογής των χρωμοσωμάτων, στην απεικόνιση κάθε υποψήφιας λύσης και στους τελεστές που χρησιμοποιούνται για την αλλαγή του γενετικού υλικού.

### 2.3. Εξελικτικές Στρατηγικές (ΕΣ)

Αναπτύχθηκαν στην Γερμανία στη δεκαετία του '60 από τους Hans-Paul Schwefel [Schwefel,1981] και Ingo Rechenberg [Rechenberg,1973]. Διαφέρουν από τους Γενετικούς Αλγορίθμους επειδή οι μεταβλητές τους ελέγχονται από την ίδια την διαδικασία. Οι Εξελικτικές Στρατηγικές έχουν

υποστεί διαφοροποίηση από την αρχική τους μορφή, χρησιμοποιώντας ειδικούς τελεστές διασταύρωσης και μετάλλαξης.

Οι τιμές των μεταβλητών του προβλήματος αλλάζουν με βάση τη διαδικασία της μετάλλαξης με τρόπο που εξαρτάται από τις τιμές των αποκλίσεων των μεταβλητών. Η μετάλλαξη προκαλεί τυχαίες μεταβολές στις τιμές των μεταβλητών (γονιδίων) επιτρέποντας τον απεγκλωβισμό από τοπικά βέλτιστα.

Έστω ότι επιθυμούμε τη λύση ενός προβλήματος που καθορίζεται από  $N$  μεταβλητές. Η διαδικασία ξεκινά με έναν τυχαίο πληθυσμό  $P$  λύσεων,  $\mu$  διανυσμάτων. Κάθε διάνυσμα  $x$  αποτελείται από τρία μέρη,  $v, \sigma, \alpha$  με μήκη αντίστοιχα ίσα με  $N, N_\sigma, N_\alpha$ . Το συνολικό μήκος για κάθε στοιχείο του πληθυσμού  $P$  είναι  $N_P = N + N_\sigma + N_\alpha$ . Σε πρώτο στάδιο οι πραγματικές μεταβλητές  $u_i$  αποθηκεύονται, σε δεύτερο καθορίζονται οι βασικές αποκλίσεις και σε τρίτο στάδιο καθορίζονται οι συνδιακυμάνσεις. Αν είναι  $N_\sigma = N/2$ , η μεταβολή στο πρώτο στάδιο θα επηρεάσει τα  $u_i$  και  $u_{\frac{N}{2}+1}$  κ.ο.κ. Αν όλες οι μεταβλητές θέλουμε να συσχετισθούν, τότε είναι  $N_\alpha = \frac{N(N-1)}{2}$ . Για πολλά πραγματικά προβλήματα με σχετικά μεγάλο  $N$ , αυτός ο αριθμός θα δώσει αποτελέσματα σε πολλά υποδιανύσματα  $\alpha$ , έτσι συχνά το  $N_\alpha$  είναι μικρότερο από αυτή την ποσότητα.

### Επιβίωση

Αυτά τα  $\mu$  στοιχεία έχουν την ίδια πιθανότητα να επιλεχθούν για να αναπαραχθούν σε επόμενη γενιά. Η διαδικασία της επιβίωσης, της αναπαραγωγής και της μετάλλαξης λαμβάνει μέρος  $\lambda$  ( $>\mu$ ) φορές, έτσι από τα  $\mu$  άτομα, δημιουργείται ένας αριθμός  $\lambda$  ατόμων. Εφόσον  $\lambda > \mu$ , κάποια στοιχεία θα επιλεγούν για να γίνουν τα  $\mu$  μέλη του επόμενου πληθυσμού. Υπάρχουν δύο κύριες στρατηγικές επιβίωσης, η στρατηγική *κόμμα* «,» και η στρατηγική *άθροισμα* «+». Η πρώτη στρατηγική επιλέγει τα καλύτερα  $\mu$  άτομα (σύμφωνα με τις τιμές της συνάρτησης προσαρμογής) από τον πληθυσμό  $\lambda$ , για να συνθέσει το νέο πληθυσμό. Η δεύτερη στρατηγική επιλέγει τα καλύτερα  $\mu$

άτομα μεταξύ του παλιού πληθυσμού του  $\mu$  και του  $\lambda$ . Και οι δύο μηχανισμοί της επιβίωσης που περιγράφηκαν είναι *ντετερμινιστικοί*, δηλαδή δεν βασίζονται σε τιμές πιθανότητας ανάμεσα στο 0.0 και στο 1.0, αλλά επιλέγουν τα στοιχεία τους σύμφωνα με τις τιμές της συνάρτησης προσαρμογής. Επιπλέον, αυτοί οι μηχανισμοί είναι *εξαλειπτικοί*, δηλαδή απορρίπτουν (με πιθανότητα 1.0) τα χειρότερα στοιχεία.

Η επιλογή της στρατηγικής επιβίωσης έχει μία άμεση συνέπεια στο χαρακτήρα κατά την διάρκεια της έρευνας. Στην  $(\mu, \lambda)$  στρατηγική, όλα τα στοιχεία στη γενεά  $t+1$  μπορεί να είναι χειρότερα από τα καλύτερα στοιχεία στην γενεά  $t$ . Αυτό επιτρέπει μία μεγαλύτερη πιθανότητα να φεύγουμε από τοπικά βέλτιστα. Από την άλλη μεριά η  $(\mu + \lambda)$  στρατηγική επιτρέπει σε πιο «συνεχή» έρευνα με το πέρας των γενεών. Σύμφωνα με τον Schwefel [Schwefel, 1981] η  $(\mu, \lambda)$  στρατηγική είναι προτιμητέα από την  $(\mu + \lambda)$ , αν και πειραματικές μελέτες έδειξαν ότι οι δύο στρατηγικές είναι ισοδύναμες σε πολλά πρακτικά προβλήματα. Πρόσφατα πάντως, σε θεωρητικό σημείο παρουσιάστηκε μια θεωρία που δίνει προτερήματα για την στρατηγική  $(\mu, \lambda)$  υπό υποθέσεις και περιορισμούς.

### Διασταύρωση

Όταν οι δύο γονείς  $x = (x_1, \dots, x_{Np})$  και  $y = (y_1, \dots, y_{Np})$  έχουν επιλεχθεί, μπορούν να διασταυρωθούν για να δημιουργήσουν τον απόγονο  $z = (z_1, \dots, z_{Np})$ . Στη συνέχεια παραθέτονται εναλλακτικοί τρόποι με τους οποίους δημιουργούνται τα στοιχεία  $z_i$  του  $z$  από τα στοιχεία  $x_i, y_i$  των  $x, y$ .

#### Ξεχωριστή Διασταύρωση

$$z_i = x_i \vee y_i \quad (2.4)$$

Η επιλογή είναι ισοπίθανη.

#### Ενδιάμεση Διασταύρωση

$$z_i = x_i + \gamma \cdot (y_i - x_i) \quad (2.5)$$

όπου  $\gamma$  είναι μια σταθερά που παίρνει τιμές στο διάστημα  $[0.0 - 1.0]$

Οι δύο τελεστές που περιγράφηκαν πιο πάνω μπορούν να χρησιμοποιηθούν είτε στην κανονική τους μορφή (δηλαδή, όλα τα στοιχεία  $z_i$  δημιουργούνται μέσω της αντιστοίχισης των  $x, y$ ), είτε με την ονομαζόμενη γενική μορφή. Σε αυτή, για κάθε στοιχείο  $z_i$  πρέπει να επιλεγθεί ένα νέο ζευγάρι γονέων  $x$  και  $y$ , έξω από το πεδίο  $\rho$  ( $2 \leq \rho \leq \mu$ ) ατόμων, ενώ παράγονται τιμές του  $\gamma$  διαφορετικές για κάθε  $z_i$ .

Εμπειρικά έχει βρεθεί ότι πρέπει να χρησιμοποιείται η Ξεχωριστή Διασταύρωση σε αντικειμενικές μεταβλητές και η Ενδιάμεση Διασταύρωση σε παραμέτρους στρατηγικής.

### Μετάλλαξη

Η μετάλλαξη είναι η κύρια μέθοδος τροποποίησης του γενετικού υλικού στις Εξελικτικές Στρατηγικές. Στη γενική της μορφή ξεκινάει με ένα ξεχωριστό άτομο  $x=(v,\sigma,\alpha)$  και πρώτα μεταλλάσσει την απόκλιση  $\sigma_i$  και τη γωνία περιστροφής  $\alpha_i$ , και στη συνέχεια μεταλλάσσει τις αντικειμενικές μεταβλητές  $u_i$ , σύμφωνα με την πρόσφατη συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας. Η έκφραση της σχέσης δίδεται στη συνέχεια

$$\sigma'_i = \sigma_i^{((\tau' \cdot N_D(0,1) + \tau \cdot N_{Di}(0,1)))} \quad (2.6)$$

$$\alpha'_i = \alpha_i + \beta \cdot N_{Di}(0,1) \quad (2.7)$$

$$u' = u + N_D(0,\sigma,\alpha) \quad (2.8)$$

όπου  $N_D(0,1)$  είναι μια κανονική κατανομή που έχει μέση τιμή 0 και τυπική απόκλιση 1. Το  $N_D(0,\sigma,\alpha)$  είναι ένα τυχαίο διάνυσμα καταμεμημένο σύμφωνα με τη γενικευμένη N-διαστάσεων κανονική κατανομή, έχοντας μέση τιμή 0, τυπική απόκλιση  $\sigma$  και γωνία περιστροφής  $\alpha$ . Προτεινόμενες τιμές για τους παραμέτρους των πάνω σχέσεων είναι:

$$\tau = \frac{1}{\sqrt{2\sqrt{N}}} \quad (2.9)$$

$$\tau' = \frac{1}{\sqrt{2N}} \quad (2.10)$$

$$\beta = 0,0873 \quad (2.11)$$

Ο γενικός αλγόριθμος των Εξελικτικών Στρατηγικών παρατίθεται στη συνέχεια:

### ΑΡΧΗ

$t=0$

Τυχαίες αρχικές τιμές  $P(t)$  με  $\mu$  άτομα

Αποτίμηση  $P(t)$  με χρήση της συνάρτησης προσαρμογής

Όσο δεν τερματίζεται εκτέλεσε τα ακόλουθα

Για  $j=1$  ως το  $\lambda$

Τυχαία επιλογή δύο γονέων από τους  $\mu$  του  $P(t)$

Διασταύρωση

Μετάλλαξη του απογόνου

Αποτίμηση του απογόνου

Τοποθέτηση του απογόνου στο νέο  $P'(t)$

Τέλος Για

Αν στρατηγική «+» τότε

Επιλογή  $\mu$  στοιχείων από  $P(t) \cup P'(t)$  και τοποθέτηση στο  $P(t+1)$

Αλλιώς στρατηγική «,»

Επιλογή  $\mu$  στοιχείων από το  $\lambda$  στο  $P'(t)$  και τοποθέτηση στο

$P(t+1)$

Τέλος Αν

$t=t+1$

Τέλος Όσο

### ΤΕΛΟΣ

Πρόσφατα προτάθηκε στις Εξελικτικές Στρατηγικές η ιδέα της ηλικίας του ατόμου. Κάθε άτομο μπορεί να παραμένει στον πληθυσμό μόνο για ένα

μέγιστο αριθμό γενεών  $\kappa$ , μετά πρέπει να απορριφθεί, ακόμη και αν αυτό το άτομο μπορεί να επιβιώσει. Αυτό έχει ως θετικό αποτέλεσμα την αποφυγή τοπικών βέλτιστων.

Εφ' όσον έχει γίνει η περιγραφή της διαδικασίας στη γενική μορφή, είναι πλέον εύκολο να περιγραφούν κάποιες τροποποιήσεις της. Μία τροποποίηση που προτάθηκε από τον Schwefel [Schwefel,1981] συνίσταται σε μία (1+1) – εξελικτική στρατηγική με μόνο τελεστή τη μετάλλαξη, θέτοντας ίσες όλες τις τυπικές αποκλίσεις σε όλα τα στοιχεία των διανυσμάτων. Μια επιτυχημένη ιδέα προτάθηκε από τον Rechenberg [Rechenberg,1973] έχοντας μία ( $\mu+1$ ) – εξελικτική στρατηγική, στην οποία χρησιμοποιείται ένας νέος τελεστής διασταύρωσης, ο οποίος είναι ικανός να δημιουργήσει έναν απόγονο από τους  $\mu$ , ο οποίος αργότερα μπορεί να αντικαταστήσει τον χειρότερο γονέα.

Οι Εξελικτικές Στρατηγικές έχουν βρει εφαρμογή στη σχεδίαση επίπεδων μεταλλικών πλαισίων, στη σχεδίαση ηλεκτρικών δικτύων και αστικών και περιφερειακών δικτύων παροχής νερού, στην ελαχιστοποίηση των απωλειών δικτύων ηλεκτρικής ενέργειας κ.ά.

## 2.4. Εξελικτικός Προγραμματισμός (ΕΠ)

Ο Εξελικτικός Προγραμματισμός αναπτύχθηκε από τον L.J. Fogel [Fogel,1966] στις ΗΠΑ στην δεκαετία του '60 και χρησιμοποιεί ένα απλό μοντέλο βασισμένο στην δυαδική αναπαράσταση των μεταβλητών και ως μοναδικό τελεστή τη μετάλλαξη. Κάθε άτομο σχηματίζεται από  $n$  πεδία δυαδικών αριθμών. Ξεκινώντας από ένα πληθυσμό  $P$  ατόμων, κάθε ένα άτομο του πληθυσμού δίνει γέννηση σε έναν απόγονο και τα καλύτερα επιβιώνουν και δημιουργούν τη νέα γενιά.

Πλέον ο Εξελικτικός Προγραμματισμός χειρίζεται απευθείας και πραγματικές μεταβλητές. Κάθε συστατικό του πληθυσμού αναπαράσσεται από  $N$  πραγματικές τιμές  $u_i$  και  $N$  διακυμάνσεις  $v_i$ , μία για κάθε μεταβλητή, έτσι ώστε  $x=(v,u)$ . Η συγκεκριμένη απεικόνιση είναι παρόμοια με αυτή στις Εξελικτικές Στρατηγικές, εκτός από το γεγονός ότι εδώ αντιμετωπίζουμε διακυμάνσεις ( $\sigma_i^2$ ) σε αντίθεση με τις τυπικές αποκλίσεις ( $\sigma_i$ ). Επιπλέον δεν υπάρχει η ιδέα της συνδιακύμανσης στον Εξελικτικό Προγραμματισμό. Όπως



στην αρχική μορφή, έτσι και στις επόμενες εκδόσεις του Εξελικτικού Προγραμματισμού απουσιάζει τελείως ο τελεστής της διασταύρωσης.

### Επιβίωση

Στις τελευταίες εκδοχές του Εξελικτικού Προγραμματισμού το σχήμα της επιβίωσης βασίζεται σε  $q$ -επίπεδα επιβίωσης, όπου  $q$  είναι μία παράμετρος της διαδικασίας ( $q \geq 1$ ). Αυτό σημαίνει ότι αρχίζουμε με  $P$  άτομα, δημιουργούμε άλλα  $P$  άτομα με μετάλλαξη κάθε γονέα από μία φορά, στη συνέχεια για κάθε άτομο  $x$  σε αυτό το πιο ευρύ πεδίο επιλέγουμε τυχαία  $q$  άτομα από τον παλιό και τον νέο πληθυσμό και προσδιορίζουμε πόσα από αυτά είναι χειρότερα από το  $x$ , όπως αυτά εκτιμούνται από τη συνάρτηση προσαρμογής. Έστω ότι ο αριθμός αυτός είναι  $w$ . Αφού το κάνουμε αυτό για όλα τα στοιχεία, επιλέγουμε τα  $P$  καλύτερα από αυτά ως μέλη για την επόμενη γενεά. Το σχήμα της επιβίωσης στον Εξελικτικό Προγραμματισμό είναι πιθανολογικό και εξαλειπτικό.

### Μετάλλαξη

Μια τυπική απόκλιση για μετάλλαξη του  $i$ -στού στοιχείου  $u_i$  επιτυγχάνεται σαν μια συνάρτηση της αντικειμενικής τιμής του  $x$   $\Phi(x)$  όπως ακολουθεί:

$$u'_i = u_i + \sigma_i \cdot N_i(0,1) \quad (2.12)$$

όπου  $\sigma_i = \sqrt{\beta_i \cdot \Phi(x) + \gamma_i}$ ,  $\beta_i$  και  $\gamma_i$  είναι  $2N$  εξωγενείς παράγοντες, που πρέπει να συντονιστούν για ένα συγκεκριμένο σκοπό, συνήθως είναι  $\beta_i = 1$  και  $\gamma_i = 0$ , έτσι ώστε

$$u'_i = u_i + \sqrt{\Phi(x)} \cdot N_i(0,1) \quad (2.13)$$

Τις περισσότερες φορές αυτή η προσέγγιση μπορεί να έχει πρακτικές δυσκολίες και συνήθως αυτό που χρησιμοποιείται είναι το ακόλουθο:

$$u'_i = u_i + \sqrt{v_i} \cdot N_i(0,1) \quad (2.14)$$

$$v'_i = v_i + \sqrt{\alpha \cdot v_i} \cdot N_i(0,1) \quad (2.15)$$

όπου  $\alpha$  είναι μία εξωγενής παράμετρος που ασφαλίζει ότι τα  $v_i$  παραμένουν θετικά. Αν μια διακύμανση γίνεται αρνητική ή μηδέν τότε παίρνει μια μικρή τιμή  $\epsilon > 0$ . Χρησιμοποιώντας αυτή την προσέγγιση το διάνυσμα αναπαριστά μία λύση αποτελούμενη από  $2N$  πραγματικά πεδία.

Ο γενικός αλγόριθμος για τον Εξελικτικό Προγραμματισμό δίδεται στη συνέχεια:

#### ΑΡΧΗ

$t=0$

Τυχαίες αρχικές τιμές  $P(t)$  με  $P$  άτομα

Αποτίμηση  $P(t)$  με χρήση της συνάρτησης προσαρμογής

Όσο δεν τερματίζεται εκτέλεσε τα παρακάτω

    Για  $j=1$  ως το  $P$

        Τυχαία επιλογή ενός στοιχείου του  $P(t)$

        Μετάλλαξη αυτού

        Αποτίμηση του απογόνου

        Τοποθέτηση του απογόνου στο νέο  $P'(t)$

    Τέλος Για

    Επιλογή  $P$  στοιχείων από  $P(t) \cup P'(t)$  με  $q$ -επίπεδα

    Τοποθέτησε αυτά στο  $P(t+1)$

$t=t+1$

Τέλος Όσο

#### ΤΕΛΟΣ

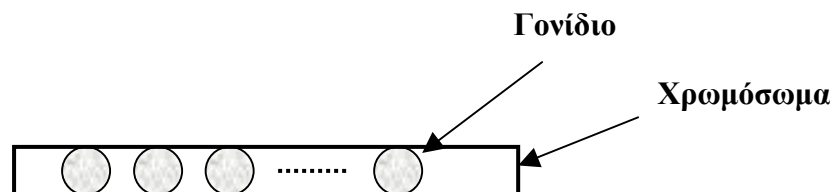
Ο Εξελικτικός Προγραμματισμός τυπικά χρησιμοποιείται για την εξέλιξη των πεπερασμένων καταστάσεων μηχανών με σκοπό να λύσουν προβλήματα πρόβλεψης.

## 2.5. Γενετικοί Αλγόριθμοι (ΓΑ)

Οι Γενετικοί Αλγόριθμοι είναι υπολογιστικές τεχνικές αναζήτησης, που αντιγράφουν τους βιολογικούς μηχανισμούς των οργανισμών. Σχεδιάστηκαν από τον John Holland [Holland,1975, Goldberg,1989] στη δεκαετία του '70, με επιτυχή εφαρμογή σε προβλήματα από ποικίλα πεδία μελέτης. Οι δημοτικότητά τους συνεχίζει να αυξάνεται από την αποτελεσματικότητα που έχουν σε εφαρμογές για κάθε περίπτωση που χρησιμοποιούνται. Σε αυτό το γεγονός συμβάλει και η ραγδαία ανάπτυξη των Η/Υ.

### Κωδικοποίηση

Μια πιθανή λύση ενός προβλήματος μπορεί να αναπαρασταθεί από ένα σύνολο παραμέτρων γνωστών ως *γονίδια*. Τα γονίδια ομαδοποιούνται για να δώσουν μια αλυσίδα τιμών, το *χρωμόσωμα*. Το σύνολο των χρωμοσωμάτων μιας γενιάς δίνει ένα πληθυσμό. Κάθε χρωμόσωμα μπορεί να επιβιώσει ή να καταστραφεί, δίνοντας έναν νέο πληθυσμό.



Το χρωμόσωμα μπορεί να αποκωδικοποιηθεί, σύμφωνα με μια συνάρτηση, που εκφράζει την ποιότητα της υποψήφιας λύσης. Το σχήμα της κωδικοποίησης μπορεί να διαφέρει δραματικά από μία εφαρμογή Γενετικών Αλγορίθμων σε μία άλλη. Στις πρώτες εφαρμογές τους τα περισσότερα σχήματα κωδικοποίησης σχεδιάζονταν για να παράγουν χρωμοσώματα με δυαδική (binary) μορφή.

**0 1 0 1 1 0 0 1 1 0 0 1 0 1 0 0 1** (δυαδικό χρωμόσωμα)

Στους δυαδικούς γενετικούς αλγόριθμους ανέκυψαν δύο προβλήματα:

- Ο μεγάλος όγκος κωδικοποίησης των χρωμοσωμάτων. Για σχετικά μικρά προβλήματα, (μεταβλητές λίγες, μία ή δύο) ο δυαδικός γενετικός αλγόριθμος είναι επαρκής. Για προβλήματα με δέκα ή περισσότερες μεταβλητές, τότε τα γονίδια των χρωμοσωμάτων φτάνουν τις εκατοντάδες.
- Δεν γίνεται άμεσα αντιληπτή η τιμή της μεταβλητής καθώς πρέπει να γίνει μετατροπή της δυαδικής μορφής σε δεκαδική.

Για αυτούς τους λόγους, διάφοροι ερευνητές κινήθηκαν προς σχήματα κωδικοποίησης, όπου οι παράμετροι των μεταβλητών αναπαριστώνται με χρωμοσώματα κινητής υποδιαστολής (floating point). Πλέον οι τιμές των μεταβλητών γίνονται εύκολα αντιληπτές αφού είναι σε δεκαδική μορφή.

### **Συνάρτηση Προσαρμογής**

Η λύση που αναπαριστάται από κάθε χρωμόσωμα μίας γενιάς (πληθυσμού), εκτιμάται σύμφωνα με μια συνάρτηση προσαρμογής (fitness function). Η συνάρτηση αυτή είναι συνώνυμη με την παραδοσιακή αντικειμενική συνάρτηση βελτιστοποίησης, η οποία ποσοτικοποιεί την ποιότητα μιας δυναμικής λύσης. Η συνάρτηση προσαρμογής σε τελική ανάλυση καθορίζει ποια χρωμοσώματα επιλέγονται για να μεταφέρουν τις τιμές των παραμέτρων τους (τα γονίδιά τους) στις επόμενες γενεές.

Όπως η κωδικοποίηση του σχήματος των χρωμοσωμάτων, έτσι και η συνάρτηση προσαρμογής παίζει κυρίαρχο ρόλο στην επιτυχή εφαρμογή της διαδικασίας (ή στην αποτυχία). Ένας Γενετικός Αλγόριθμος θα κατευθυνθεί προς λύσεις που καθορίζονται από τη συνάρτηση προσαρμογής. Οι νέοι πληθυσμοί (γενεές) των υποψήφιων λύσεων παράγονται με εφαρμογή κάποιων τελεστών, εμπνευσμένων από τη γενετική μεταβολή της φύσης. Τρεις είναι οι πιο δημοφιλείς τελεστές που χρησιμοποιούνται σε όλους σχεδόν τους Γενετικούς Αλγορίθμους:

1. Επιλογή ή επιβίωση (selection)
2. Ανασυνδυασμός γονιδίων (συχνά αναφέρεται ως διασταύρωση γονιδίων - crossover)

### 3. Μετάλλαξη (mutation)

Πιο αναλυτικά για τους γενετικούς τελεστές έχουμε:

#### Επιλογή

Η επιλογή είναι μια διαδικασία μέσω της οποίας επιλέγονται τα πιο ποιοτικά χρωμοσώματα (υποψήφιος λύσεις) με σκοπό να πολλαπλασιαστούν στην επόμενη γενεά. Οι γονείς επιλέγονται τυχαία από τον πληθυσμό των υποψήφιων λύσεων, χρησιμοποιώντας ένα μηχανισμό που ευνοεί τα άτομα με τη μεγαλύτερη καταλληλότητα. Τα καλά άτομα έχουν πιθανότητες να επιλεγούν αρκετές φορές σε μια γενιά, ενώ αυτά που έχουν κακή προσαρμογή μπορεί να μην επιλεγούν καθόλου. Ο μηχανισμός της επιβίωσης ονομάζεται και μηχανισμός ρουλέτας.

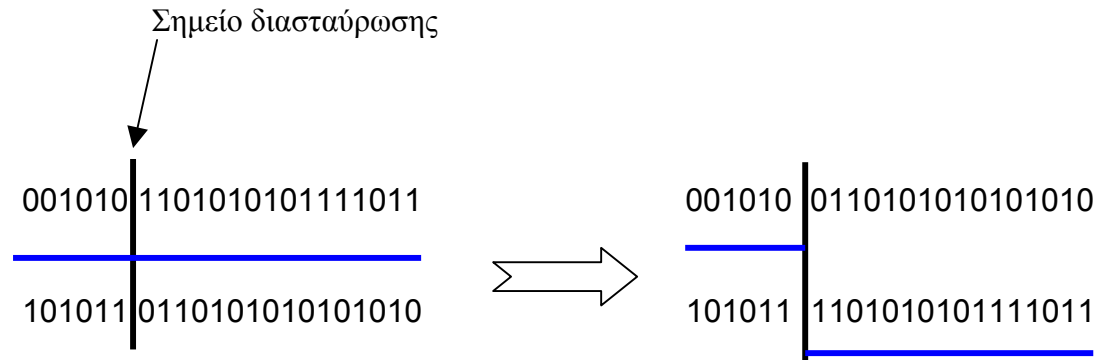
#### Διασταύρωση

Η διασταύρωση είναι η διαδικασία κατά την οποία δύο ποιοτικά χρωμοσώματα (σχετικά καλές λύσεις), συνδυάζονται για να δώσουν δύο νέα χρωμοσώματα, συχνά καλύτερα από τα προηγούμενα. Ο μηχανισμός της διασταύρωσης δεν εφαρμόζεται συνήθως σε όλα τα ζευγάρια των ατόμων που έχουν επιλεγεί για αναπαραγωγή. Γίνεται μια τυχαία επιλογή, όπου η πιθανότητα να εφαρμοστεί ο τελεστής της διασταύρωσης κυμαίνεται μεταξύ 0,6 – 0,9. Εάν δεν εφαρμοστεί η μέθοδος αυτή, οι απόγονοι γεννιούνται με απλή αντιγραφή των γονιών. Αυτό δίνει τη δυνατότητα σε κάθε άτομο να περάσει τα γονίδια του στην επόμενη γενεά χωρίς την παρεμβολή της διασταύρωσης. Υπάρχουν πολλές παραλλαγές του τελεστή αυτού και οι κυριότερες παρουσιάζονται στη συνέχεια.

#### Διασταύρωση ενός σημείου

Η μέθοδος αυτή παίρνει δύο χρωμοσώματα και κόβει τις αλυσίδες τους στο ίδιο, κατά αριθμό, γονίδιο ώστε να παραχθούν δυο τμήματα. Ανταλλάσσουμε τις θέσεις των δυο τελευταίων (ή πρώτων) τμημάτων για να δημιουργηθούν νέα, πλήρη χρωμοσώματα. Οι δύο απόγονοι κληρονομούν ο καθένας γονίδια από κάθε γονέα. Η μέθοδος αυτή είναι γνωστή ως

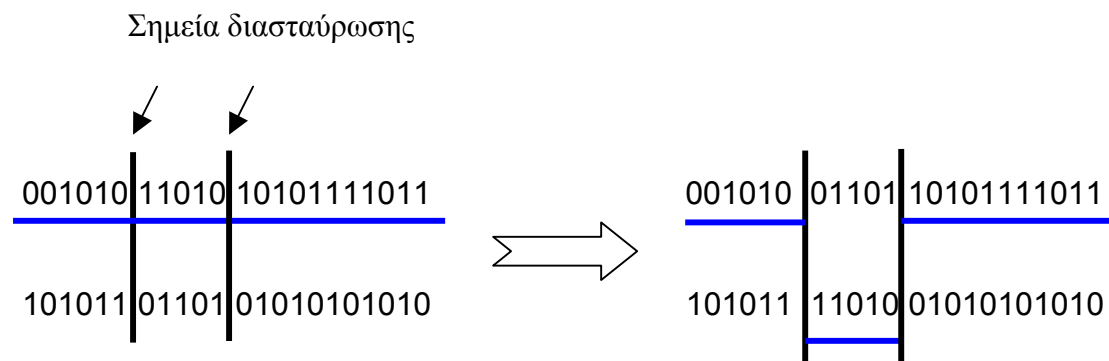
διασταύρωση ενός σημείου (single point crossover) και για δυαδικά χρωμοσώματα αναπαρίσταται στο σχήμα 2.1.



Σχήμα 2.1. - Διασταύρωση ενός σημείου.

#### Διασταύρωση δυο σημείων

Η διασταύρωση δυο σημείων χρησιμοποιείται για να γίνει ανταλλαγή των εσωτερικών γονιδίων σε ένα ζεύγος χρωμοσωμάτων. Σε αυτή την περίπτωση πρέπει να επιλεγούν δυο σημεία διασταύρωσης. Στο σχήμα 2.2. παρουσιάζεται αυτός ο μηχανισμός της διασταύρωσης με δυαδική κωδικοποίηση των χρωμοσωμάτων.

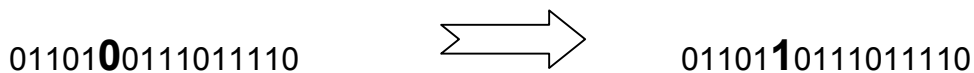


Σχήμα 2.2. - Διασταύρωση δυο σημείων.

Εκτός των παραπάνω τελεστών διασταύρωσης έχει προταθεί ένα πλήθος διαφορετικών τελεστών.

### Μετάλλαξη

Η μετάλλαξη είναι η διαδικασία που παρέχει μια τυχαία μεταβολή ενός γονιδίου. Για κάθε νέο απόγονο, με χαμηλή πιθανότητα, κάθε γονίδιο μεταλλάσσεται σε ένα άλλο σύμβολο (πραγματικός αριθμός όταν το σύνολο είναι το  $\mathbb{R}$  και 0 ή 1 αν έχουμε δυαδικά χρωμοσώματα). Έχουν γραφτεί αρκετές εργασίες πάνω στο πρόβλημα καθορισμού της πιθανότητας μετάλλαξης που θα οδηγήσει στη βέλτιστη λύση. Όμως αυτό είναι ακόμα ανοικτό πρόβλημα, αφού η τιμή της εξαρτάται από το είδος του προβλήματος που επιλύεται. Τυπικές τιμές είναι 0,10 - 0,15. Στο σχήμα 2.3. παρουσιάζεται η διαδικασία της μετάλλαξης για ένα δυαδικό χρωμόσωμα.

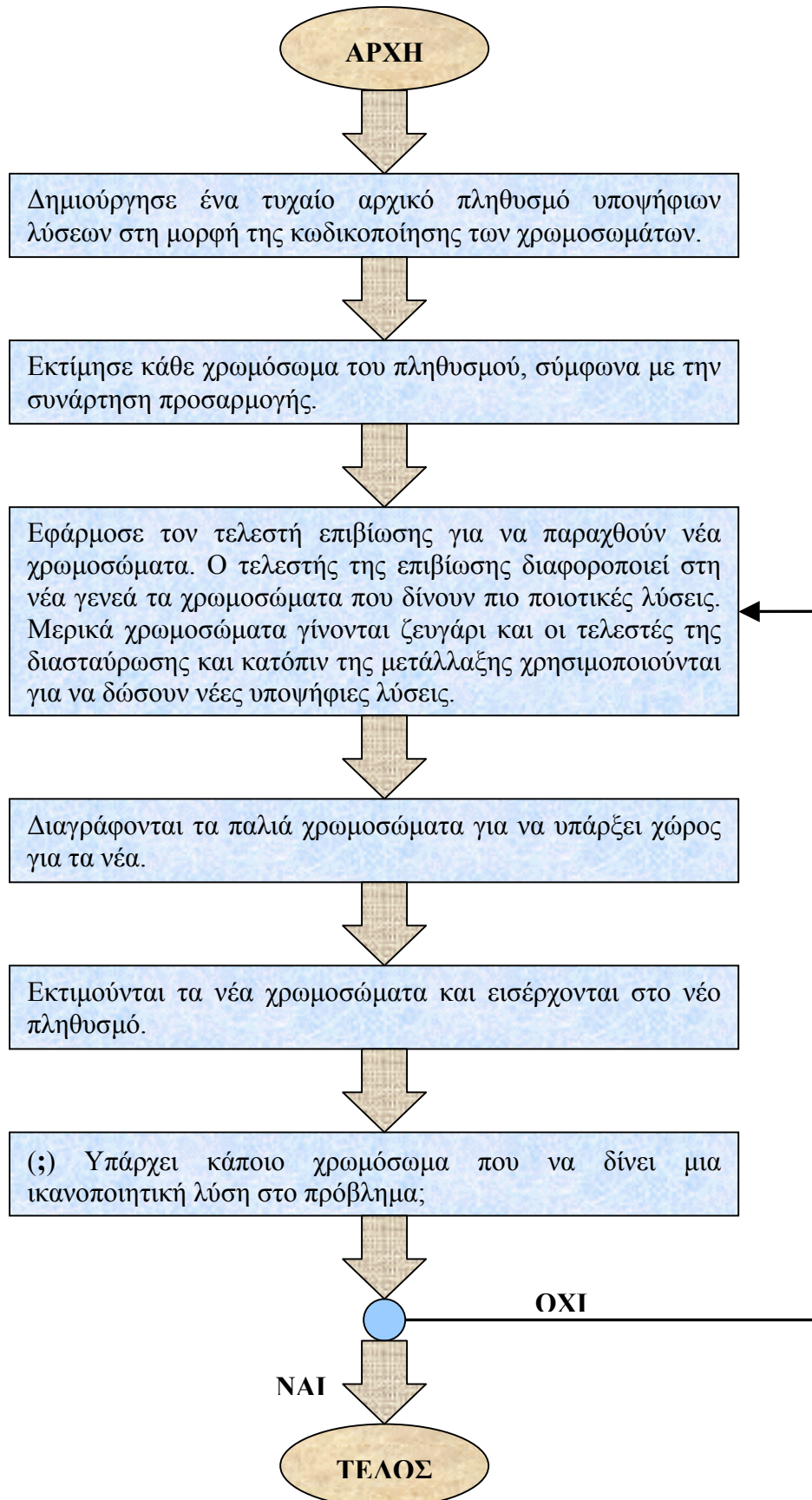


Σχήμα 2.3. – Μετάλλαξη ενός χρωμοσώματος.

Μαζί αυτοί οι τρεις τελεστές παράγουν έναν αποτελεσματικό μηχανισμό έρευνας που συγκλίνει γρήγορα σε ολικά βέλτιστες λύσεις.

### Διάγραμμα ροής της διαδικασίας

Δίνοντας το σχήμα της κωδικοποίησης, τη συνάρτηση προσαρμογής και καθορίζοντας τους γενετικούς τελεστές, μπορούμε απλά να αναπτύξουμε ένα Γενετικό Αλγόριθμο που θα μιμνήται αποτελεσματικά την φυσική εξέλιξη και θα μας οδηγήσει σχετικά γρήγορα σε βέλτιστες λύσεις. Παρόλο το γεγονός ότι στις λεπτομέρειες κάθε γενετικός αλγόριθμος διαφέρει, η βασική προσέγγιση είναι η ίδια. Η θεμελιώδης μορφή της διαδικασίας συνοψίζεται στο διάγραμμα ροής που ακολουθεί.





### **Πλεονεκτήματα των Γενετικών Αλγορίθμων**

Η προσέγγιση που χρησιμοποιούν οι Γενετικοί Αλγόριθμοι για επίλυση προβλημάτων, μπορεί να θεωρηθεί ασυνήθιστη. Όμως έχουν τρία τουλάχιστον χαρακτηριστικά που αποδεικνύουν ότι μπορούν να δρουν με επιτυχία σε δύσκολο περιβάλλον. Πρώτον οι Γενετικοί Αλγόριθμοι θεωρούν ένα πληθυσμό λύσεων ταυτόχρονα. Συνεπώς τείνουν να διατηρούν μια γενικότητα, λόγω της παράλληλης μελέτης των λύσεων. Το αποτέλεσμα είναι να αντιλαμβάνονται και να αποφεύγουν σχετικά εύκολα τα τοπικά βέλτιστα ψάχνοντας για την γενική λύση, κάτι που οι παραδοσιακές μέθοδοι έρευνας δεν το καταφέρνουν με την ίδια ευκολία. Δεύτερον δεν βασίζονται σε πληροφορίες παραγώγων. Έτσι δεν μπλέκονται με πολύπλοκες τεχνικές εύρεσης παραγώγων, οι οποίες εφαρμόζονται κατά κόρον στα περισσότερα πεδία βελτιστοποίησης. Τρίτον οι Γενετικοί Αλγόριθμοι δεν εξαρτώνται από τη συνέχεια του πεδίου λύσεων. Έτσι χρησιμοποιούνται για την λύση προβλημάτων που έχουν «εμπόδια» και ασυνέχειες, όπου οι παραδοσιακές ρουτίνες μπορούν να καταρρεύσουν.

### **Εφαρμογές των Γενετικών Αλγορίθμων**

Παρόλο που οι Γενετικοί Αλγόριθμοι χρησιμοποιούνται για τη λύση ποικίλων προβλημάτων, οι περισσότερες εφαρμογές εντάσσονται σε μία από τις τρεις κατηγορίες:

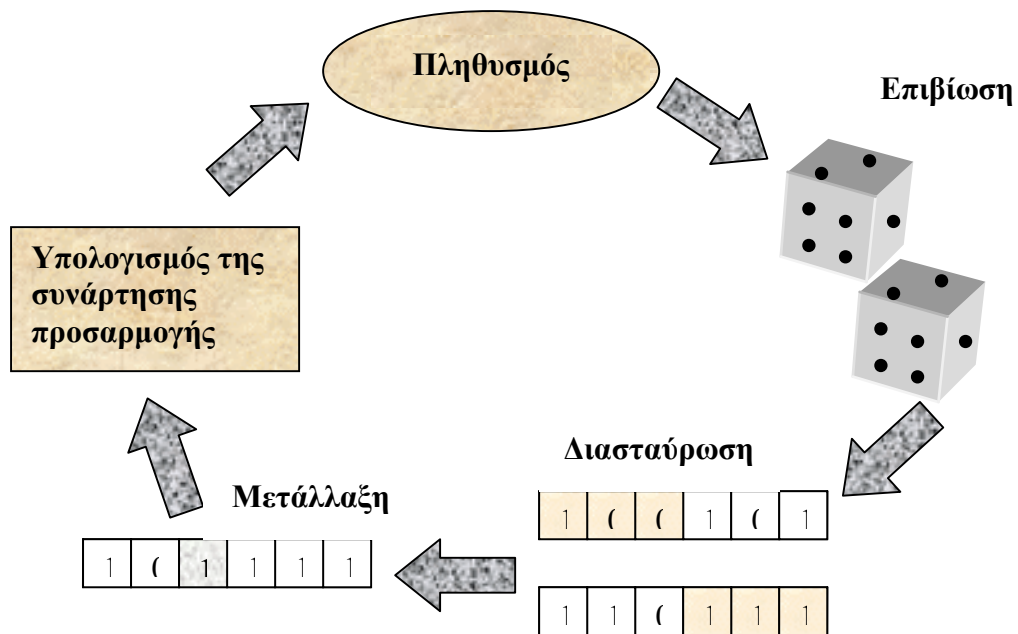
1. Βελτιστοποίηση (optimization)
2. Εκπαίδευση μηχανών (machine learning)
3. Γενετικός προγραμματισμός (genetic programming)

Οι εφαρμογές βελτιστοποίησης χαρακτηρίζονται από τη συνάρτηση προσαρμογής που είναι ενδεικτική για το επιθυμητό αποτέλεσμα. Κλασσικά παραδείγματα βελτιστοποίησης είναι εκείνα που κάποιο κέρδος πρέπει να μεγιστοποιηθεί ή κάποιο σφάλμα πρέπει να ελαχιστοποιηθεί. Πάντως οι Γενετικοί Αλγόριθμοι έχουν επεκτείνει τους ορίζοντές τους πολύ πέρα από την παραδοσιακή βελτιστοποίηση. Μια δεύτερη χρήση τους είναι στην εκπαίδευση μηχανικών συστημάτων. Εδώ ο Γενετικός Αλγόριθμος καλείται να αναπτύξει αποτελεσματικούς λογικούς κανόνες (if→then) για επίλυση συγκεκριμένων

προβλημάτων εκπαίδευσης μηχανών. Μια τρίτη χρήση είναι ο Γενετικός Προγραμματισμός. Εδώ ο Γενετικός Αλγόριθμος χρησιμοποιείται για να αναπτύσει προγράμματα υπολογιστών, διασταυρώνοντας υπάρχοντα προγράμματα με σκοπό να αναπτυχθούν νέα πιο αποτελεσματικά. Όπως σε όλες τις περιπτώσεις έτσι και εδώ απαιτείται η ύπαρξη συνάρτησης προσαρμογής.

Οι Γενετικοί Αλγόριθμοι και γενικά όλων των τύπων οι Εξελικτικοί Αλγόριθμοι κερδίζουν συνεχώς σε δημοτικότητα και έχουν εξαιρετικό ενδιαφέρον. Παρόλο που είναι νέα τεχνολογία, η ιστορία τους είναι πολύ πλούσια με πολλές επιτυχείς εφαρμογές. Έχουν καλό θεωρητικό υπόβαθρο και οι εμπειρικές μελέτες έχουν δείξει ότι σε αρκετά προβλήματα υπερτερούν από τις παραδοσιακές μεθόδους.

Σε ένα βαθμό, η επιτυχία της εφαρμογής τους απαιτεί έναν εμπειρογνώμονα ο οποίος πρέπει να έχει λεπτομερή γνώση της θεωρίας τους. Αν και μία εξοικείωση για το πώς λειτουργεί ένας Γενετικός Αλγόριθμος είναι βεβαίως πολύτιμη σε σύνθετα προβλήματα, τέτοια γνώση δεν απαιτείται για τη χρήση τους στις περισσότερες εφαρμογές. Αντίθετα, αυτό που επιβάλλεται είναι η λεπτομερή γνώση του πεδίου του προβλήματος, πρόσβαση στον κώδικα του αλγορίθμου και κατανόηση του πώς σχηματοποιείται το πρόβλημα.



Σχήμα 2.4. – Σχηματική αναπαράσταση της λειτουργίας ενός ΓΑ.

## 2.6. Ιστορικά δεδομένα

Όπως στις περισσότερες νέες τεχνολογίες, η λεπτομερή παρουσίαση της ιστορίας των Εξελικτικών Αλγορίθμων είναι ανοικτή για αντιπαραθέσεις. Αυτό συμβαίνει λόγω των δυσκολιών που υπάρχουν στη διάκριση των συνοριακών γραμμών ανάμεσα στους διάφορους τύπους Εξελικτικών Αλγορίθμων.

Ίσως το πρώτο παράδειγμα μιας τεχνικής βασισμένης στην εξέλιξη, που συνδέεται με τους μοντέρνους Εξελικτικούς Αλγορίθμους προτάθηκε τη δεκαετία του '70 από τον Rechenberg [Rechenberg,1973]. Αυτός εισήγαγε τις Εξελικτικές Στρατηγικές, που αρχικά χρησιμοποιήθηκαν στη σχεδίαση αεροδυναμικών σωμάτων. Η εργασία αυτή συνεχίστηκε αργότερα από τον Schwefel [Schwefel,1981].

Οι Γενετικοί Αλγόριθμοι έχουν αναπτυχθεί ανεξάρτητα από τις Εξελικτικές Στρατηγικές και μόνο πρόσφατα έχουν αρχίσει να αλληλεπιδρούν σημαντικά.

Ο Εξελικτικός Προγραμματισμός είναι μια τεχνική που αναπτύχθηκε από τους Fogel [Fogel,1966], και Walsh [Walsh,1923] που συμφωνεί σε πολλά σημεία με τους μοντέρνους Γενετικούς Αλγορίθμους. Ο Εξελικτικός

Προγραμματισμός προσπαθεί να διερευνήσει τη δυνατότητα εξέλιξης τεχνητής νοημοσύνης με την έννοια η μηχανή να μπορεί να προβλέπει αλλαγές στο περιβάλλον της και να αντιδρά κατάλληλα. Οι υποψήφιες λύσεις, σε ένα πρόβλημα, αντιπροσωπεύουν τις αντιδράσεις των μηχανών στο δυναμικό περιβάλλον. Οι νέες λύσεις εξελίσσονται με μετάλλαξη των προηγούμενων υποψηφίων και οδηγούνται από μια συνάρτηση προσαρμογής. Αντίθετα ο Εξελικτικός Προγραμματισμός χρησιμοποιεί μόνο τον τελεστή της μετάλλαξης για να παράγει νέο πληθυσμό υποψηφίων λύσεων.

Αρκετοί άλλοι ερευνητές στη δεκαετία του '50 και '60 εμπνεύστηκαν και ανέπτυξαν εξελικτικές τεχνικές σε υπολογιστικούς αλγορίθμους. Αυτές οι προσπάθειες δεν έχουν λάβει την προσοχή ή την συνέχιση που είχαν ο Εξελικτικός Προγραμματισμός και οι Γενετικοί Αλγόριθμοι, αλλά αξίζει να αναφερθούν. Οι Box [Box,1957], Martin & Cockerham [Martin & Cockerham, 1960] και Bledsoe [Bledsoe,1961] ανέπτυξαν αλγορίθμους που βασίζονται σε φαινομενικές ικανότητες έρευνας και εξέλιξης σε φυσικά συστήματα. Επιπλέον υπάρχει και ένας αριθμός από φυσικούς βιολόγους όπως οι Barricelli [Barricelli,1957], Fraser [Fraser,1960] οι οποίοι χρησιμοποιούσαν τον ηλεκτρονικό υπολογιστή για να προσομοιάσουν την εξέλιξη σε ελεγχόμενα πειράματα. Πάντως αυτές οι προσπάθειες δεν απευθύνονται στη γενική βελτιστοποίηση και στους σκοπούς έρευνας των Γενετικών Αλγορίθμων.

Οι Γενετικοί Αλγόριθμοι εφευρέθηκαν από τον John Holland [Holland, 1975] κατά τη δεκαετία του '60. Αυτός και οι φοιτητές του στο πανεπιστήμιο του Μίτσιγκαν ανέπτυξαν μια λεπτομερή προσέγγιση στο μοντέλο της φυσικής εξέλιξης με τη μορφή αλγορίθμου. Στη μονογραφία του, ο Holland, το 1975 με τίτλο *Adaptation in Natural and Artificial systems* [Holland,1975] περιγράφει τη βασική προσέγγιση των χαρακτηριστικών της πληθυσμιακής μεθόδου, δηλαδή των σημερινών Γενετικών Αλγορίθμων. Το βιβλίο του παρουσιάζει τους περισσότερους γενετικούς τελεστές που χρησιμοποιούνται σ'αυτούς. Το αρχικό κίνητρο του Holland δεν ήταν η βελτιστοποίηση, αλλά η μεθοδική μελέτη των μηχανισμών της προσαρμογής που υπάρχουν στη φύση και η ενσωμάτωση αυτών των μηχανισμών σε υπολογιστικά συστήματα προσομοίωσης. Επίσης στο βιβλίο του Holland υπάρχει η πιο δημοφιλή θεωρία που εξηγεί την επιτυχία των γενετικών αλγορίθμων καθώς και γιατί αυτοί λειτουργούν.

Η έκδοση του βιβλίου του Holland αποτελεί σημείο αναφοράς στην ιστορία των Γενετικών Αλγορίθμων. Ήταν το πρώτο επίσημο έγγραφο το οποίο διατύπωνε την ιδέα να χρησιμοποιηθεί ένας πληθυσμός υποψηφίων λύσεων και με βάση γενετικής εξέλιξης να προκύψουν καλύτερες λύσεις (νέος πληθυσμός). Ένα δεύτερο σημείο αναφοράς στην ιστορία έρχεται με την έκδοση του βιβλίου του David Goldberg με τίτλο Genetic Algorithms in search optimization and machine learning [Goldberg,1989]. Αυτό το βιβλίο παρουσιάζει τους Γενετικούς Αλγορίθμους ως ακριβή προσέγγιση στη λύση προβλημάτων έρευνας ποικίλων ειδών. Η έκδοση του βιβλίου του Goldberg επιτάχυνε σημαντικά την εφαρμογή τους.

### 3. Καμπύλες & Επιφάνειες B-Spline - NURBS

#### 3.1. Καμπύλες B-Spline

##### Εισαγωγή

Οι πιο διαδεδομένες μέθοδοι για την παράσταση καμπυλών ή επιφανειών είναι με χρήση πεπλεγμένων σχέσεων και με χρήση παραμετρικών σχέσεων. Έτσι μία καμπύλη στο επίπεδο  $xy$  μπορεί να παρασταθεί με μία πεπλεγμένη σχέση της μορφής  $f(x,y)=0$ . Αντίστοιχα, στην παραμετρική μορφή της, η αναπαράσταση της καμπύλης μπορεί να γίνει στη μορφή

$$C(u)=(x(u),y(u)) \quad (3.1)$$

με την ανεξάρτητη παράμετρο  $u$  να παίρνει τιμές σε συγκεκριμένο διάστημα. Για παράδειγμα, ένας κύκλος μοναδιαίας ακτίνας σε παραμετρική μορφή γράφεται ως

$$x(u)=\cos(u) \quad (3.2)$$

$$y(u)=\sin(u) \quad (3.3)$$

με την παράμετρο  $u$  να παίρνει τιμές στο διάστημα  $[0, 2\pi]$ .

Στην παραμετρική αναπαράσταση καμπυλών, η περισσότερο δημοφιλής μέθοδος είναι οι καμπύλες B-Spline. Οι καμπύλες B-Spline χρησιμοποιούνται ευρύτατα, καθώς έχουν ορισμένα πλεονεκτήματα απέναντι σε άλλες παραμετρικές αναπαραστάσεις καμπυλών. Τα κυριότερα από αυτά είναι τα ακόλουθα:

- Δυνατότητα τοπικού ελέγχου καμπύλης.
- Προσθήκη σημείων ελέγχου χωρίς να αλλάξουμε το βαθμό της καμπύλης.
- Ο βαθμός της καμπύλης είναι ανεξάρτητος από τα σημεία ελέγχου και επιλέγεται από τις βασικές συναρτήσεις.

Εφευρέθηκαν από τους Gordon [Gordon,1974] και Riesenfeld [Riesenfeld,1973] και διαθέτουν όλες τις ιδιότητες των καμπυλών Bezier αλλά επιπλέον έχουν και τη δυνατότητα τοπικού ελέγχου της καμπύλης. Η εφαρμογή τους λύνει το πρόβλημα της αναπαράστασης δύσκολων και πολύπλοκων καμπυλών, παρέχοντας και ορισμένες σπουδαίες ιδιότητες που αναφέρονται αναλυτικά παρακάτω.

Αρχικά θα δοθεί η παραμετρική αναδρομική σχέση των καμπυλών B-Spline, με βάση την οποία θα εξηγήσουμε ολόκληρη τη διαδικασία κατασκευής τους. Μία  $p$ -βαθμού καμπύλη B-Spline με παράμετρο  $u$  κατασκευάζεται από τη σχέση:

$$C(u) = \sum_{i=0}^n N_{i,p}(u)P_i \quad a \leq u \leq b \quad (3.4)$$

όπου τα  $\{P_i\}$  είναι τα  $n+1$  σημεία ελέγχου (τα διανύσματα θέσης τους), και τα  $\{N_{i,p}(u)\}$  είναι οι  $p$ -βαθμού βασικές συναρτήσεις B-Spline, που καθορίζονται από το ανοικτό ομοιόμορφο διάνυσμα κόμβων:

$$U = \{a, \dots, a, u_{p+1}, \dots, u_{m-p-1}, b, \dots, b\} \quad (3.5)$$

Ο αριθμός των κόμβων είναι  $(m+1)$  και ισχύει η σχέση:

$$(\text{Βαθμός της καμπύλης} + 1) + (\text{Αριθμός Σημείων Ελέγχου}) = (\text{Αριθμός κόμβων}) \Rightarrow$$

$$(p+1) + (n+1) = (m+1) \quad (3.6)$$

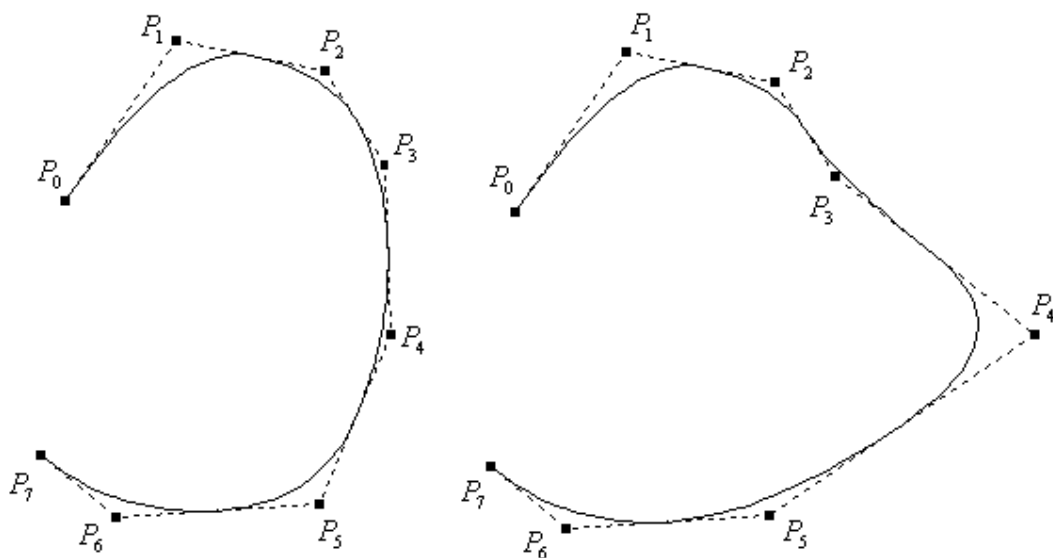
Στις καμπύλες B-Spline, ο βαθμός  $p$  είναι ανεξάρτητος από το πλήθος  $n+1$  των σημείων ελέγχου (σε αντίθεση με τις Bezier) και έχει άμεση σχέση μόνο με την τάξη  $k$  των καμπυλών.

$$\text{Τάξη της καμπύλης} = \text{Βαθμός της καμπύλης} + 1 \Rightarrow$$

$$k = p + 1 \quad (3.7)$$

### Σημεία Ελέγχου

Ο έλεγχος των καμπυλών B-Spline επιτυγχάνεται με την τροποποίηση των σημείων ελέγχου (τη μετακίνησή τους δηλαδή στο δισδιάστατο ή στον τρισδιάστατο χώρο). Συχνά τα σημεία ελέγχου ενώνονται μεταξύ τους για την πιο εύκολη αναγνώρισή τους, σχηματίζοντας το πολύγωνο ελέγχου. Στο σχήμα 3.1 που ακολουθεί παρουσιάζεται η επίδραση που έχει στην καμπύλη B-Spline, η μεταβολή ενός σημείου ελέγχου. Επίσης στο σχήμα φαίνεται πως η αλλαγή στο σχήμα της καμπύλης δεν πραγματοποιείται σε ολόκληρο το μήκος της αλλά μόνο σε μια περιοχή της, κοντά στο μετακινούμενο σημείο ελέγχου.



Σχήμα 3.1. - Μετακίνηση ενός σημείου ελέγχου, μιας ανοικτής δευτεροβάθμιας B-Spline καμπύλης με 8 σημεία ελέγχου.

Αυτή είναι μια πολύ δημοφιλή ιδιότητα των B-Spline, αφού μας επιτρέπει να προκαλούμε αλλαγές σε ένα μικρό τμήμα της καμπύλης, χωρίς να επηρεάζεται η γενικότερη μορφή της. Κάθε σημείο ελέγχου επηρεάζει μόνο το τμήμα της καμπύλης που βρίσκεται πιο κοντά σε αυτό, αλλά έχει μικρή ή καθόλου επίδραση σε τμήματα της καμπύλης που απέχουν σημαντικά από το εν λόγω σημείο.

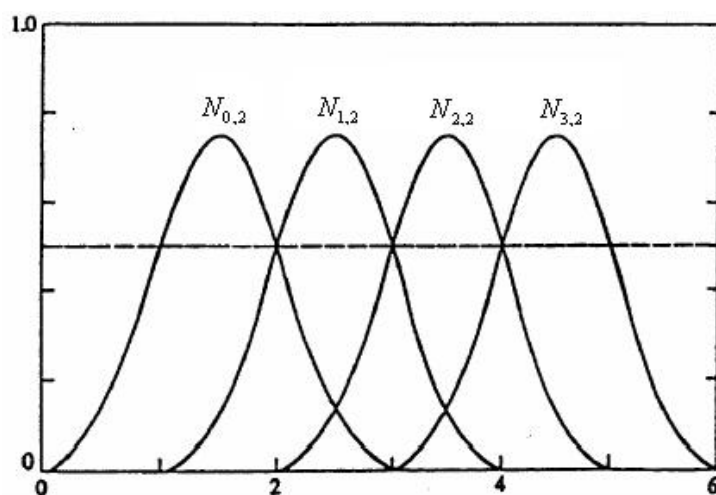


Στο δίκτυο στην διεύθυνση [www.people.nnov.ru/fractal/Splines/Intro.htm](http://www.people.nnov.ru/fractal/Splines/Intro.htm) παρουσιάζεται παραστατικά η επίδραση της μετακίνησης των σημείων ελέγχου πάνω στην καμπύλη, ενώ είναι επίσης επιτρεπτό να εκτελέσει ο χρήστης τις συγκεκριμένες αλλαγές σε πραγματικό χρόνο, για την καλύτερη κατανόηση της διαδικασίας.

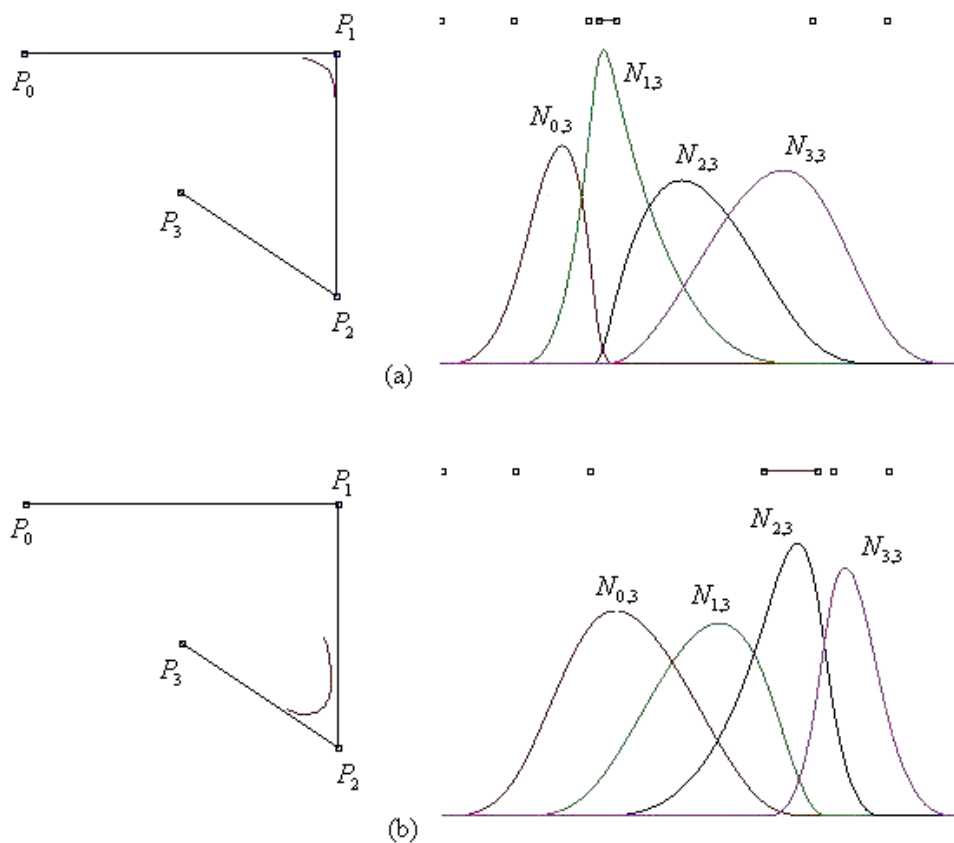
### Βασικές συναρτήσεις

Η συνάρτηση  $N_{i,p}(u)$ , η οποία καθορίζει πόσο ισχυρά το σημείο ελέγχου  $P_i$  επηρεάζει την καμπύλη για δεδομένο  $u$ , καλείται βασική συνάρτηση του συγκεκριμένου σημείου ελέγχου. Εξάλλου, στον όρο B-Spline το “B” αναπαριστά την λέξη Βασική (Basic). Το ερώτημα που τίθεται τώρα είναι πώς μπορούμε να καθορίσουμε κάθε βασική συνάρτηση; Κάθε μικρή περιοχή στην καμπύλη την επηρεάζουν τα σημεία ελέγχου που βρίσκονται κοντά σε αυτήν την περιοχή. Όταν το τμήμα της καμπύλης που αναφερόμαστε βρίσκεται μακριά από το δεδομένο σημείο ελέγχου, αυτό το σημείο ελέγχου έχει μικρή επίδραση στο τμήμα. Όσο το τμήμα της καμπύλης πλησιάζει στο σημείο ελέγχου, τότε η επιρροή του γίνεται συνέχεια και μεγαλύτερη, μέχρι να αρχίσει να ελαττώνεται πάλι όταν το τμήμα της καμπύλης αρχίσει να απομακρύνεται και να ξεπερνάει το σημείο ελέγχου.

Επειδή οι καμπύλες B-Spline ορίζονται παραμετρικά, με παράμετρο  $u$ , μπορούμε να θεωρήσουμε ένα μικρό τμήμα από αυτές, σε ένα μικρό διάστημα μεταβολής του  $u$ . Εφόσον κάθε σημείο ελέγχου έχει τη δική του βασική συνάρτηση, σε μια καμπύλη με 4 σημεία ελέγχου θα υπάρχουν 4 τέτοιες βασικές συναρτήσεις. Κάθε μία από αυτές θα καλύπτει ένα ορισμένο τμήμα της καμπύλης. Στο σχήμα 3.2. στον οριζόντιο άξονα απεικονίζεται η τιμή της παραμέτρου  $u$  και στον κατακόρυφο η τιμή των Βασικών συναρτήσεων. Για  $u = 2.3$ , το σημείο ελέγχου  $P_0$  έχει ένα βάρος (επίδραση πάνω στην καμπύλη) περίπου 0.2, το  $P_1$  περίπου 0.75 και το  $P_2$  περίπου 0.1. Συνεπώς όσο το  $u$  μεταβάλλεται από την τιμή 0.0 έως την τιμή 6.0, κάθε ένα από τα σημεία ελέγχου θα έχει μια επίδραση πάνω στο σχήμα της καμπύλης που θα ξεκινάει από 0, θα αυξάνεται μέχρι μια μέγιστη τιμή και στη συνέχεια θα μειώνεται μέχρι να φθάσει πάλι στην τιμή 0.



Σχήμα 3.2. - Βασικές συναρτήσεις μιας τετραγωνικής ομοιόμορφης καμπύλης με 4 σημεία ελέγχου.



Σχήμα 3.3. - Κυβική καμπύλη με 4 σημεία ελέγχου. (a) Παρουσιάζεται μια συγκέντρωση της περιοχής ορισμού της καμπύλης στο σημείο ελέγχου  $P_1$  (b) Η ίδια καμπύλη με συγκέντρωση στο τρίτο σημείο ελέγχου  $P_2$ .

### Διάνυσμα Κόμβων

Από τα παραπάνω γίνεται αντιληπτό ότι η επιλογή του διανύσματος κόμβων είναι πολύ σημαντικός παράγοντας, επειδή επηρεάζει τις βασικές συναρτήσεις και κατά συνέπεια την τελική καμπύλη. Η μόνη απαίτηση για το διάνυσμα κόμβων είναι  $u_i \leq u_{i+1}$ . Χρησιμοποιούνται τρεις τύποι διανυσμάτων κόμβων, το ομοιόμορφο, το ανοικτό ομοιόμορφο και το ανομοιόμορφο.

Στο ομοιόμορφο διάνυσμα κόμβων, οι επιμέρους κόμβοι ισαπέχουν μεταξύ τους. Για παράδειγμα έχουν την μορφή:

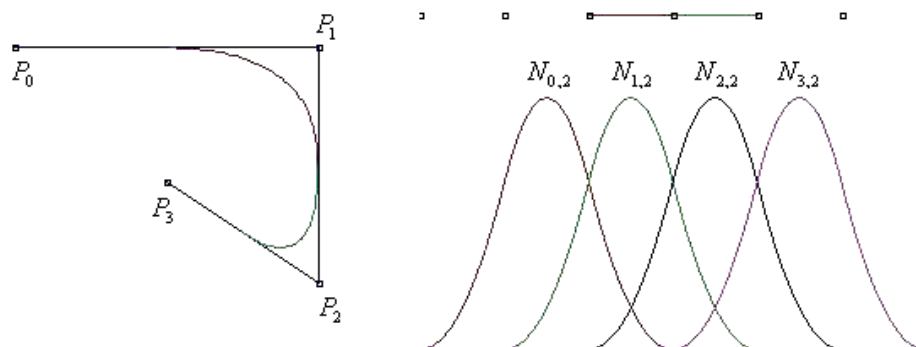
$$[0 \ 1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5] \text{ ή } [0 \ 0.25 \ 0.5 \ 0.75 \ 1.0]$$

Ο γενικός τύπος ορισμού του διανύσματος κόμβων είναι:

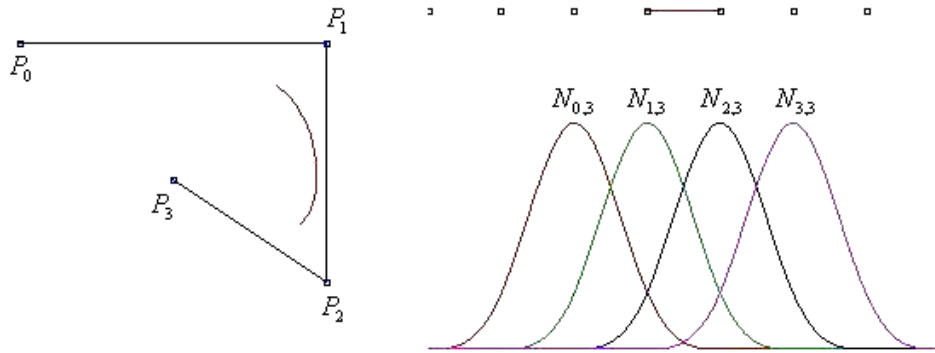
$$u_j = j \quad 0 \leq j \leq n + p - 1 \quad (3.8)$$

Το χρήσιμο διάνυσμα κόμβων, όπου δηλαδή ορίζεται η καμπύλη φαίνεται στα σχήματα 3. 4 και 3.5 και είναι η γραμμή που ενώνει τους κόμβους πάνω από τις βασικές συναρτήσεις.

$$(p - 2) \leq j \leq n + 1 \quad (3.9)$$



Σχήμα 3.4. - Μία τετραγωνική ομοιόμορφη καμπύλη B-Spline με 4 σημεία ελέγχου. Αριστερά απεικονίζεται η καμπύλη και δεξιά παρουσιάζονται οι βασικές συναρτήσεις της. Πάνω από αυτές διακρίνονται η διάταξη των κόμβων καθώς και το διάστημα ορισμού της καμπύλης από τον 3<sup>ο</sup> μέχρι τον 5<sup>ο</sup> κόμβο.



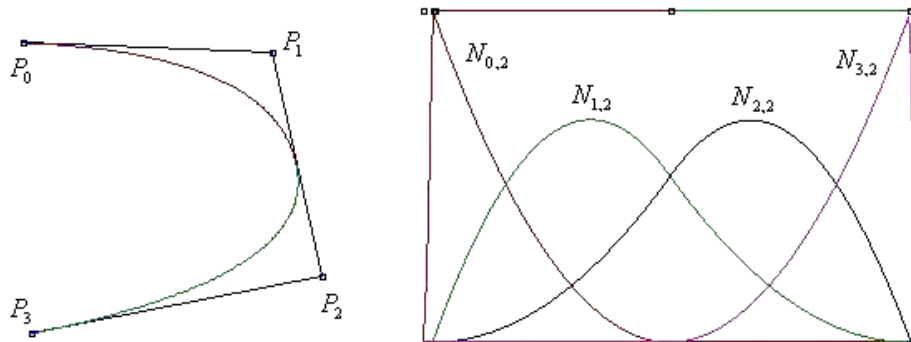
Σχήμα 3.5. - Κυβική ομοιόμορφη B-Spline με 4 σημεία ελέγχου αριστερά και οι βασικές συναρτήσεις της δεξιά. Είναι προφανές πως το διάστημα ορισμού είναι μικρότερο από αυτό της καμπύλης του προηγούμενου σχήματος (από τον 4<sup>ο</sup> έως τον 5<sup>ο</sup> κόμβο ή αλλιώς από το 2<sup>ο</sup> σημείο ελέγχου έως το 3<sup>ο</sup> περίπου).

Στο ανοικτό ομοιόμορφο διάνυσμα κόμβων, υπάρχει μια πολλαπλότητα στους ακραίους κόμβους, η οποία ισούται με την τάξη  $k$  ( $p+1$ ) των βασικών συναρτήσεων B-Spline. Οι εσωτερικοί κόμβοι είναι ομοιόμορφα διατεταγμένοι. Παραδείγματα ανοικτών ομοιόμορφων διανυσμάτων κόμβων για διαφορετικές τιμές της τάξης  $k$ , δίδονται στη συνέχεια:

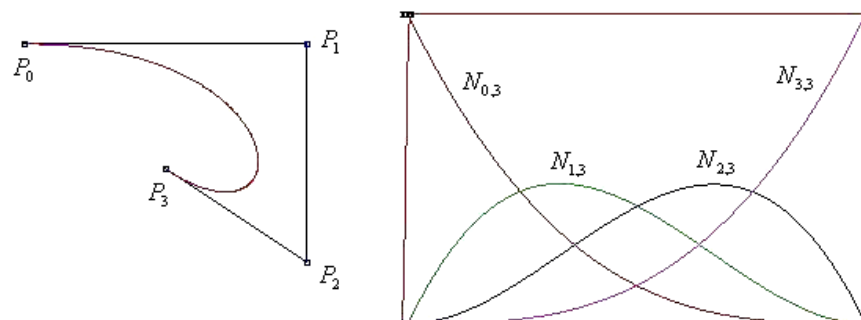
$$p=1 : [0 \ 0 \ 1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 4]$$

$$p=2 : [0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 2 \ 3 \ 3 \ 3]$$

$$p=3 : [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 2 \ 2 \ 2 \ 2]$$



Σχήμα 3.6. - Μία τετραγωνική ανοικτή καμπύλη B-Spline με 4 σημεία ελέγχου. Αριστερά παρουσιάζεται η μορφή της καμπύλης με τα σημεία ελέγχου και δεξιά απεικονίζονται οι βασικές συναρτήσεις. Όπως φαίνεται στο σχήμα, η καμπύλη ξεκινάει από το αρχικό σημείο ελέγχου και τερματίζει στο τελικό. Αυτό φαίνεται επίσης και στο πεδίο ορισμού της καμπύλης (πάνω από τις βασικές συναρτήσεις) που καλύπτει όλο το φάσμα των κόμβων.



Σχήμα 3.7. - Κυβική ανοικτή καμπύλη B-Spline με 4 σημεία ελέγχου. Μία ιδιότητα των ανοικτών B-Spline καμπυλών που φαίνεται από τα σχήματα είναι πως όσο αυξάνει ο βαθμός της καμπύλης τόσο αυτές απομακρύνονται από τα σημεία ελέγχου. Στην ειδική περίπτωση των τετραγωνικών καμπυλών η καμπύλη τέμνει (ή εφάπτεται με) το πολύγωνο ελέγχου ακριβώς στην μέση κάθε πλευράς.

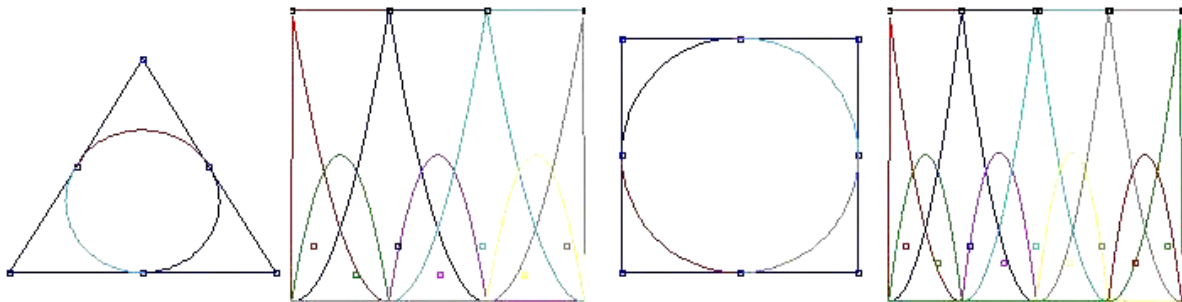
Οι καμπύλες B-Spline με ανοικτό ομοιόμορφο διάνυσμα κόμβων έχουν την πολύ βασική ιδιότητα η καμπύλη να παρεμβάλλει το αρχικό και τελικό σημείο ελέγχου. Αυτό είναι αρκετά σημαντικό, διότι επιλέγοντας κατάλληλα το αρχικό και τελικό σημείο ελέγχου, ξέρουμε που ξεκινάει και που τελειώνει η καμπύλη μας.

Στη γενική του περίπτωση, το ανοικτό ομοιόμορφο διάνυσμα τιμών προσδιορίζεται από τη σχέση:

$$u_i = \begin{cases} 0 & 0 \leq i < p+1 \\ i-p & p+1 \leq i < n+1 \\ n-p+1 & n+1 \leq i \leq n+p+1 \end{cases} \quad (3.10)$$

Το ανομοιόμορφο διάνυσμα κόμβων μπορεί να παίρνει τιμές ανομοιόμορφα κατανεμημένες ή να έχει πολλαπλούς εσωτερικούς κόμβους και μπορεί να είναι περιοδικό ή ανοικτό. Ένα τέτοιο διάνυσμα κόμβων παρουσιάζεται στη συνέχεια.

[0 0 0 1 1 2 2 2] ή [0 1 2 2 3 4]



Σχήμα 3.8. - Ο μοναδικός τρόπος να σχηματίσουμε κύκλους ή άλλες κωνικές τομές με B-Spline είναι με χρήση NURBS. Στο σχήμα παρουσιάζονται δύο κυβικές NURBS. Η πρώτη σχηματίζεται με 6 σημεία ελέγχου και διάνυσμα κόμβων  $U = \{0,0,0, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}, 1,1,1\}$  ενώ η δεύτερη σχηματίζεται με 8 σημεία ελέγχου και διάνυσμα κόμβων  $U = \{0,0,0, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{3}{4}, 1,1,1\}$

### Καθορισμός των Βασικών Συναρτήσεων B-Spline

Υπάρχουν αρκετοί μέθοδοι για να καθοριστούν οι βασικές συναρτήσεις B-spline. Κάθε μέθοδος παρουσιάζει τις δικές της σημαντικές ιδιότητες. Η πιο διαδεδομένη μέθοδος, η οποία χρησιμοποιείται και στην παρούσα εργασία, είναι με μία επαναληπτική σχέση που οφείλεται στους DeBoor [DeBoor,1972], Cox [Cox,1972].

Σύμφωνα με αυτή τη μεθοδολογία, η  $i$ -στή βασική συνάρτηση B-Spline, βαθμού  $p$ , (τάξης  $p+1$ ), καθορίζεται ως:

$$N_{i,0}(u) = \begin{cases} 1 & \alpha\nu \quad u_i \leq u < u_{i+1} \\ 0 & \alpha\lambda\lambda\omega\varsigma \end{cases} \quad (3.11)$$

$$N_{i,p}(u) = \frac{u - u_i}{u_{i+p} - u_i} \cdot N_{i,p-1}(u) + \frac{u_{i+p+1} - u}{u_{i+p+1} - u_{i+1}} \cdot N_{i+1,p-1}(u) \quad (3.12)$$

Πρέπει να σημειώσουμε τα ακόλουθα:

- Η  $N_{i,0}(u)$  είναι μια βηματική συνάρτηση, ίση με μηδέν παντού εκτός από το εσωτερικό διάστημα όπου  $u \in [u_i, u_{i+1})$
- Για  $p > 0$ , η  $N_{i,p}(u)$  είναι ένας γραμμικός συνδυασμός δύο βασικών συναρτήσεων βαθμού  $(p-1)$ .
- Ο υπολογισμός των βασικών συναρτήσεων απαιτεί καθορισμό ενός διανύσματος κόμβων,  $U$ , και του βαθμού  $p$ .
- Η εξίσωση (2) μπορεί να οδηγήσει σε πηλίκο  $\frac{0}{0}$ . Σε αυτή την περίπτωση το πηλίκο ορίζεται ίσο με 0.
- Τα  $N_{i,p}(u)$  είναι πολυώνυμα καθορισμένα σε όλο το σύνολο των πραγματικών αριθμών. Συνήθως όμως, μόνο το εσωτερικό διάστημα  $[u_0, u_m]$  είναι το ενδιαφέρον.
- Το εσωτερικό διάστημα  $[u_i, u_{i+1})$  καλείται το  $i$ -στό ζεύγος κόμβων. Μπορεί να έχει μηδενικό εύρος, αφού οι κόμβοι δεν είναι ανάγκη να είναι διαφορετικοί.

- Ο υπολογισμός της συνάρτησης βαθμού  $p$ , παράγει ένα τριγωνικό πίνακα.

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & & & N_{0,0} \\
 & & & & & & \\
 & & & & & & N_{0,1} \\
 & & & & & & \\
 & & & & & & N_{1,0} & & N_{0,2} \\
 & & & & & & N_{1,1} & & N_{0,3} \\
 & & & & & & N_{2,0} & & N_{1,2} \\
 & & & & & & N_{2,1} & & N_{1,3} \\
 & & & & & & N_{3,0} & & N_{2,2} & \vdots \\
 & & & & & & N_{3,1} & & \vdots \\
 & & & & & & N_{4,0} & & \vdots \\
 & & & & & & \vdots
 \end{array}$$

### Ιδιότητες των Βασικών Συναρτήσεων B-Spline

- Έχουν άθροισμα συναρτήσεων ίσο με τη μονάδα, που σημαίνει ότι η καμπύλη και το πολύγωνο ελέγχου δεν αλλάζουν με τους μετασχηματισμούς.

$$\sum_{i=0}^n N_{i,p}(u) = 1$$

- Κάθε βασική συνάρτηση παίρνει μόνο θετικές τιμές,  $N_{i,p}(u) \geq 0$ , που σημαίνει ότι ισχύει η ιδιότητα του κυρτού περιβλήματος.
- Κάθε σημείο ελέγχου επηρεάζει  $(p+1)$  τμήματα, αφού οι βασικές συναρτήσεις είναι μηδενικές σε ορισμένες περιοχές για  $u$  εκτός διαστήματος  $[u_i, u_{i+(p+1)})$ .
- Κάθε βασική συνάρτηση  $N_{i,p}(u)$  διαφοροποιείται  $(p-1)$  φορές, συνεπώς έχει και αντίστοιχη συνέχεια, εφόσον δεν έχουμε πολλαπλότητα τιμών στο



διάνυσμα κόμβων. Εάν η πολλαπλότητα ενός εσωτερικού κόμβου είναι  $q$ , τότε η συνέχεια είναι  $C^{p-q-1}$ .

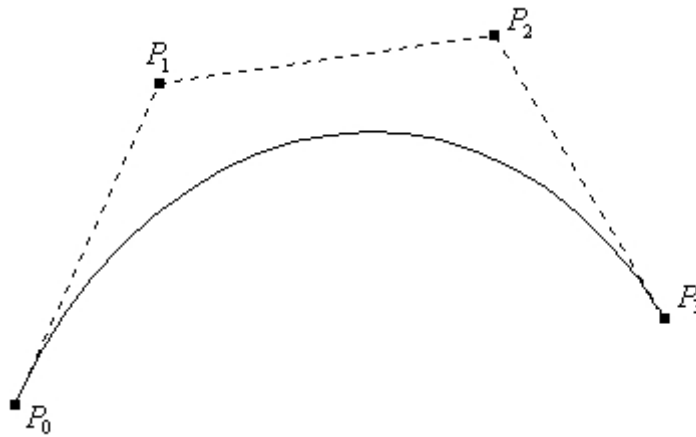
### Ιδιότητες Καμπυλών B-Spline

- Ο βαθμός της καμπύλης επιλέγεται από το χρήστη, αλλά επειδή πρέπει να ισχύει η σχέση:  $n - K + 2 > 0 \Leftrightarrow n - p + 1 > 0$ , τότε 2,3 και 4 σημεία ελέγχου απαιτούνται για τον προσδιορισμό πρώτου, δεύτερου ή τρίτου βαθμού καμπύλης B-Spline.
- Τοπικός έλεγχος, που επιτυγχάνεται μετακινώντας ένα σημείο ελέγχου, ή έχοντας πολλαπλότητα σε ένα σημείο ελέγχου, ή αλλάζοντας το βαθμό της καμπύλης. Εν γένει σε μια καμπύλη επηρεάζονται μόνο  $(p+1)$  από τα τμήματά της.
- Η ανοικτή καμπύλη περνάει από τα ακραία σημεία ελέγχου και εφάπτεται στα ακραία τμήματα του πολυγώνου ελέγχου.
- Η μορφή της καμπύλης εξαρτάται από το βαθμό της. Για  $p = 0$  παίρνουμε τα σημεία ελέγχου, για  $p = 1$  το πολύγωνο ελέγχου.
- Η καμπύλη δευτέρου βαθμού εφάπτεται του πολυγώνου ελέγχου στο μέσο του κάθε τμήματος. Αυτό δεν συμβαίνει για καμπύλες μεγαλύτερου βαθμού.
- Πολλαπλά σημεία ελέγχου μας δίνουν υψηλή τιμή καμπυλότητας στο σημείο εκείνο.
- Αύξηση του βαθμού της καμπύλης έχει ως αποτέλεσμα δυσκολία ελέγχου της μορφής της, καθώς και της πολυπλοκότητας των υπολογισμών.

### Αλγόριθμος

Τρία βήματα απαιτούνται για τον υπολογισμό ενός σημείου σε μια καμπύλη B-Spline για μια δεδομένη τιμή της παραμέτρου  $u$ :

1. Βρες το ζεύγος των κόμβων για το οποίο το  $u$  βρίσκεται ανάμεσα τους.
2. Υπολόγισε τις μη-μηδενικές βασικές συναρτήσεις.
3. Πολλαπλασίασε τις τιμές των μη-μηδενικών βασικών συναρτήσεων με τα αντίστοιχα σημεία ελέγχου.

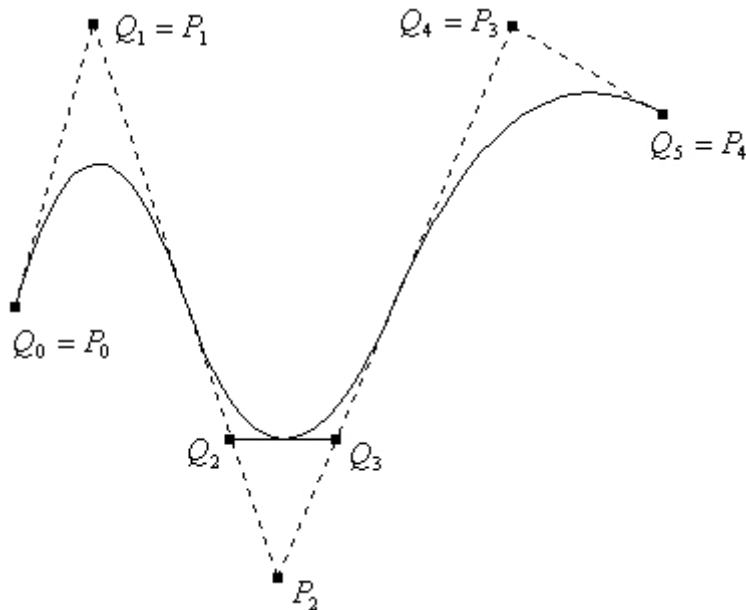


Σχήμα 3.9. - Μία κυβική καμπύλη B-spline με 4 σημεία ελέγχου.

### 3.2. Εισαγωγή κόμβου (Knot Insertion)

Όσα περισσότερα σημεία ελέγχου καθορίζουν μία καμπύλη B-Spline, τόσο περισσότερο έλεγχο μπορούμε να έχουμε στη μορφή της. Φαίνεται λοιπόν λογικό να θέλουμε να προσθέσουμε σημεία ελέγχου χωρίς να αλλάζουμε το σχήμα της. Πρέπει να σημειωθεί ότι υπάρχει άμεση σχέση μεταξύ των κόμβων μιας καμπύλης B-Spline, των σημείων ελέγχου και την τάξη της – ο αριθμός των κόμβων ισούται με το πλήθος των σημείων ελέγχου συν την τάξη. Για παράδειγμα μία κυβική καμπύλη (4<sup>ης</sup> τάξης) με 9 σημεία ελέγχου απαιτεί 13 κόμβους. Έτσι κάθε φορά που θέλουμε να προσθέσουμε ένα σημείο ελέγχου, επίσης προσθέτουμε και έναν επιπλέον κόμβο. Φυσικά πρέπει τα νέα σημεία ελέγχου να είναι στις σωστές θέσεις, ούτως ώστε η καμπύλη να μην αλλάξει, ούτε γεωμετρικά, ούτε παραμετρικά.

Στην πράξη ακολουθούμε την αντίστροφη διαδικασία. Δηλαδή αποφασίζουμε τη θέση που θέλουμε να προσθέσουμε έναν νέο κόμβο, και στη συνέχεια υπολογίζουμε τη θέση του αντίστοιχου νέου σημείου ελέγχου, καθώς επίσης και τις νέες θέσεις μερικών από τα ήδη υπάρχοντα σημεία ελέγχου.



Σχήμα 3.10. - Εισαγωγή επιπλέον σημείου ελέγχου σε καμπύλη B-Spline. Τα σημεία ελέγχου  $Q_2$  και  $Q_3$  αντικαθιστούν το προηγούμενο  $P_2$ .

Αν και δεν είναι άμεσα φανερό, η εισαγωγή κόμβου είναι ένας από τους θεμελιώδεις αλγορίθμους για τις καμπύλες B-Spline. Μερικές από τις χρήσεις του παρατίθενται στη συνέχεια:

- Υπολογίζει σημεία και παραγώγους σε καμπύλες και επιφάνειες.
- Υποδιαιρεί καμπύλες και επιφάνειες.
- Προσθέτει σημεία ελέγχου, με σκοπό να αυξήσει την ευκαμψία της καμπύλης.

### Αλγόριθμος εισαγωγής κόμβου

Έστω  $C(u) = \sum_{i=0}^n N_{i,p}(u) \cdot P_i$  μία ανοικτή καμπύλη B-Spline, που ορίζεται από το διάνυσμα κόμβων  $U = \{u_0, \dots, u_m\}$ . Έστω  $\bar{u} \in [u_k, u_{k+1})$ , είναι ένας νέος κόμβος που θέλουμε να προσθέσουμε στο  $U$ . Η μορφή πλέον του διανύσματος κόμβων είναι

$$\bar{U} = \{\bar{u}_0 = u_0, \dots, \bar{u}_k = u_k, \bar{u}_{k+1} = \bar{u}, \bar{u}_{k+2} = u_{k+1}, \dots, \bar{u}_{m+1} = u_m\} \quad (3.13)$$

Πλέον η καμπύλη  $C(u)$  έχει μια αναπαράσταση με το  $\bar{U}$  ως εξής:

$$C(u) = \sum_{i=0}^{n+1} \bar{N}_{i,p}(u) \cdot Q_i \quad (3.14)$$

όπου  $\{\bar{N}_{i,p}(u)\}$  οι βασικές συναρτήσεις βαθμού  $p$ .

Ο όρος *εισαγωγή κόμβου*, αναφέρεται στη διαδικασία καθορισμού των νέων σημείων ελέγχου  $\{Q_i\}$  της εξίσωσης (1).

Στη συνέχεια πρέπει να υπολογισθεί όχι μόνο η θέση του νέου σημείου ελέγχου, αλλά και η αναπροσαρμογή κάποιων υπαρχόντων σημείων ελέγχου, για να παραμείνει το σχήμα της καμπύλης αναλλοίωτο. Η διαδικασία υπολογισμού των νέων σημείων ελέγχου  $Q_i$  φαίνεται στη σχέση (2)

$$Q_i = a_i \cdot P_i + (1 - a_i) \cdot P_{i-1} \quad (3.15)$$

όπου  $a$  καθορίζεται από τη σχέση

$$a = \begin{cases} 1 & i \leq k - p \\ \frac{\bar{u} - u_i}{u_{i+p} - u_i} & k - p + 1 \leq i \leq k \\ 0 & i \geq k + 1 \end{cases} \quad (3.16)$$

### 3.3. Ραφινάρισμα κόμβων (Knot Refinement)

Ραφινάρισμα κόμβων είναι η διαδικασία κατά την οποία εισάγονται αρκετοί κόμβοι με μία μόνο κίνηση (εννοώντας ότι ο αλγόριθμος τρέχει μόνο μία φορά χωρίς να χρειάζεται να ορίζουμε τις θέσεις εισαγωγής στο διάνυσμα κόμβων).

Έστω ότι έχουμε την ανοικτή καμπύλη B-Spline:

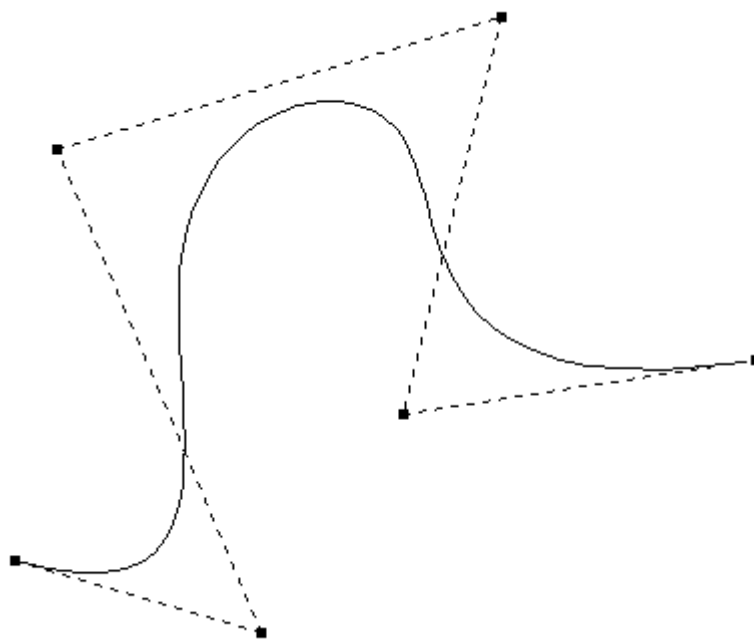
$$C(u) = \sum_{i=0}^n N_{i,p}(u) \cdot P_i \quad (3.17)$$

Το διάνυσμα κόμβων που ορίζεται η καμπύλη είναι  $U = \{u_0, \dots, u_m\}$  και έστω  $X = \{x_0, \dots, x_r\}$  ένα διάνυσμα που ικανοποιεί  $x_i \leq x_{i+1}$  και  $u_0 \leq x_i \leq u_m \quad \forall i$ .

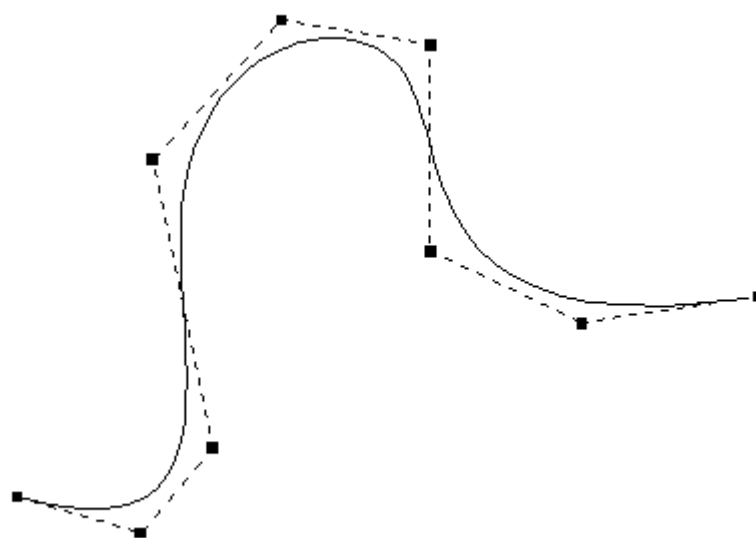
Τα στοιχεία του διανύσματος  $X$  θέλουμε να τα εισάγουμε στο  $U$  και τα αντίστοιχα νέα σημεία ελέγχου  $\{Q_i\}, i = 0, \dots, n+r+1$  πρέπει να υπολογισθούν. Οι νέοι κόμβοι  $x_i$ , πρέπει να επαναλαμβάνουν τις πολλαπλότητές τους στο διάνυσμα κόμβων  $X$ . Έτσι αν  $y$  και  $z$ , με  $(y < z)$ , πρέπει να προστεθούν σαν κόμβοι με πολλαπλότητες 2 και 3 αντίστοιχα, τότε έχουμε  $X = \{x, x, y, y, y\}$ . Ουσιαστικά το *ραφινάρισμα κόμβων* είναι μία ακολουθία από πολλαπλές εφαρμογές της διαδικασίας εισαγωγής κόμβου που περιγράφηκε προηγουμένως. Πάντως η διάκριση των δύο μεθόδων υπάρχει, επειδή υπάρχουν πιο αποδοτικοί αλγόριθμοι για το *ραφινάρισμα κόμβων*.

Οι εφαρμογές «*ραφινάρισμα κόμβων*» περιλαμβάνουν:

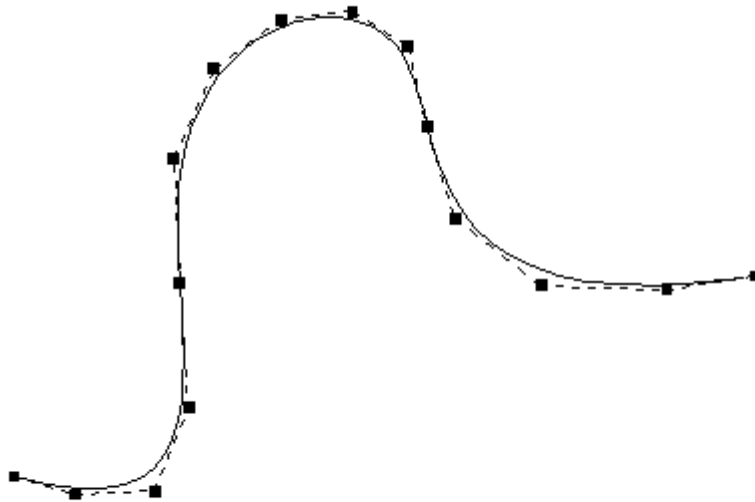
- Ένωση από δύο ή περισσότερα διανύσματα κόμβων με σκοπό να πετύχουν ένα σύνολο από καμπύλες, όπου θα καθορίζονται από ένα κοινό διάνυσμα κόμβων.
- Δημιουργία πολυγωνικών και πολυεδρικών προσεγγίσεων σε καμπύλες. Το νέο «*ραφινარიσμένο*» διάνυσμα κόμβων, φέρνει το πολύγωνο ελέγχου πιο κοντά στην καμπύλη και στο όριο τείνει να προσεγγίσει την καμπύλη. Στο σχήμα 3.11(b) παρουσιάζεται ένα ραφινάρισμα κόμβων που έχει εφαρμοσθεί στην κυβική καμπύλη του σχήματος 3.11(a), ενώ στο σχήμα 3.11(c) έχει γίνει και δεύτερο ραφινάρισμα. Ένας νέος κόμβος προστέθηκε στο μέσο κάθε διαστήματος δύο διαδοχικών κόμβων.



(a)



(b)



(c)

Σχήμα 3.11. – Διαδοχικό ραφινάρισμα κόμβων. (a) Μια κυβική καμπύλη. (b) Πρώτο ραφινάρισμα κόμβων που γίνεται στη μέση κάθε διαστήματος δύο διαδοχικών κόμβων. (c) Δεύτερο ραφινάρισμα κόμβων.

### Αλγόριθμος για το ραφινάρισμα των κόμβων

Δεν απαιτούνται πολύπλοκα μαθηματικά για να αναπτυχθεί ο αλγόριθμος για το ραφινάρισμα κόμβων. Είναι ένα απλό υπολογιστικό πρόβλημα, τα βήματα του οποίου δίδονται στη συνέχεια:

1. Βρες τους δείκτες  $a$  και  $b$  τέτοιους ώστε  $u_a \leq x_i \leq u_b$ , για όλα τα  $i$ .
2. Τα σημεία ελέγχου  $P_0, \dots, P_{a-p}$  και  $P_{b-1}, \dots, P_n$  δεν αλλάζουν. Συνεπώς αυτά πρέπει να αντιγραφούν στις κατάλληλες θέσεις  $Q_i$ , αφήνοντας χώρο για τα  $r + p + b - a - 1$  καινούρια σημεία ελέγχου.
3. Το νέο διάνυσμα κόμβων είναι  $\bar{U}$ , (συγχώνευση του  $U$  με το  $X$ ). Οι κόμβοι που δεν αλλάζουν πρέπει να προστεθούν.
4. Πήγαινε σε ένα βρόχο και
  - 4.1. υπολόγισε τα νέα σημεία ελέγχου.

4.2. Ένωσε τα στοιχεία από τα  $U$  και  $X$  στο  $\bar{U}$

Ο βρόχος μπορεί να δουλέψει προς τα μπρος (αρχίζοντας από  $Q_{a-p+1}$ ), ή προς τα πίσω (αρχίζοντας από  $Q_{b+r-1}$ ).

### 3.4. Ανομοιόμορφες Ρητές B-Spline Καμπύλες & Επιφάνειες

Η περισσότερο δημοφιλής μορφή αναπαράστασης καμπυλών και επιφανειών από άποψη αποθήκευσης, υπολογισμού και ελέγχου, είναι οι NURBS (Ανομοιόμορφες Ρητές B-Spline Καμπύλες & Επιφάνειες). Ένα από τα μειονεκτήματα που έχουν οι ομοιόμορφες καμπύλες B-Spline που παρουσιάστηκαν σε προηγούμενες παραγράφους, είναι ότι δεν μπορούν να αναπαραστήσουν όλα τα γεωμετρικά σχήματα, όπως για παράδειγμα οι κωνικές τομές. Με τις Ανομοιόμορφες Ρητές Καμπύλες B-Spline μπορούμε να αναπαραστήσουμε και σχεδιάσουμε κάθε γεωμετρικό σχήμα στον  $H/Y$ . Οι NURBS προσφέρουν μία γενική μαθηματική μορφή σχεδίασης, είτε πρόκειται για τυπικά αναλυτικά σχέδια (όπως κωνικές τομές), είτε πρόκειται για ελεύθερα σχέδια. Παρέχουν ευκαμψία για σχεδίαση μεγάλου και ποικίλου αριθμού μορφών. Το όνομά τους δείχνει και την φύση τους:

- **NU (Non Uniform)** : Ανομοιόμορφες, επειδή το διάνυσμα των κόμβων περιέχει κόμβους που δεν είναι αναγκαίο να κατανέμονται ομοιόμορφα στο διάστημά τους.
- **R (Rational)** : Ρητές, επειδή έχουμε την ρητή μορφή  $(\frac{a}{b})$ , όπου  $a$  και  $b$  είναι πολυώνυμα. Ένα πλεονέκτημα για τη χρησιμοποίηση της ρητής μορφής είναι ότι γίνεται πλέον επιτρεπτή η αναπαράσταση μερικών δημοφιλών σχημάτων (όπως είναι οι κωνικές τομές), που δεν μπορούσαν να δημιουργηθούν από τις καμπύλες B-Spline. Αυτός είναι και ο λόγος που εισάγουμε τα βάρη.
- **BS (B-Spline)** : B-Spline επειδή οι NURBS βασίζονται στους βασικούς B-Spline προσδιορισμούς, με πολυωνυμικές βασικές συναρτήσεις, που υπολογίζουν τα σημεία της καμπύλης ή της επιφάνειας σταδιακά.

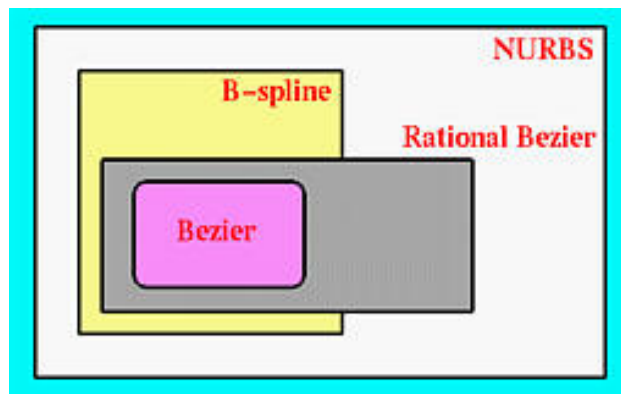


Οι Ανομοιόμορφες Ρητές B-Spline Καμπύλες & Επιφάνειες που αναφέρονται σαν NURBS (Non-Uniform Rational B-Spline) έχουν γίνει εκ των πραγμάτων ισχυρό βιομηχανικό εργαλείο για την αναπαράσταση, σχεδίαση και ανταλλαγής γεωμετρικών δεδομένων στους ηλεκτρονικούς υπολογιστές. Πολλά ισχυρά διεθνή πρότυπα σχεδίασης όπως IGES, STEP και PHIGS κάνουν χρήση των NURBS ως ένα ισχυρό εργαλείο για γεωμετρική σχεδίαση. Η τεράστια επιτυχία των καμπυλών NURBS είναι γεγονός για τους παρακάτω κυρίως λόγους:

- Οι NURBS εξασφαλίζουν την αναπαραγωγή αναλυτικών σχημάτων (όπως είναι κωνικές τομές) και τετραγωνικών επιφανειών καθώς και ελευθέρων μορφών σχημάτων, όπως για σχεδίαση μοντέλων αυτοκινήτων ή της γάστρας ενός πλοίου.
- Η σχεδίαση με NURBS είναι διαισθητική. Σχεδόν κάθε εργαλείο και αλγόριθμος των καμπυλών και επιφανειών έχει έναν εύκολο τρόπο για την γεωμετρική κατανόηση.
- Οι αλγόριθμοι των NURBS είναι γρήγοροι και αριθμητικά σταθεροί.
- Οι καμπύλες και επιφάνειες NURBS είναι σταθερές υπό συνηθισμένους γεωμετρικούς μετασχηματισμούς, όπως περιστροφές και προοπτικές προβολές.
- Παρέχουν ένα πολύ καλό έλεγχο της μορφής του σχήματος, κάνοντας χρήση ενός αριθμού από σημεία ελέγχου, κόμβων και βαρών, που οδηγούν το σχήμα της καμπύλης και της επιφάνειας στο επιθυμητό, με τον πλέον ομαλό τρόπο.
- Οι NURBS αναπαριστούν πολύπλοκα σχήματα καταλαμβάνοντας λίγο χώρο δεδομένων. Για παράδειγμα για να αναπαραστήσουμε γραφικά ένα κύκλο διαμέτρου ενός μέτρου με ευθύγραμμα τμήματα, θα απαιτούνταν μερικές χιλιάδες από τέτοια τμήματα για να μοιάζει το

σχήμα μας με κύκλο αντί για πολύγωνο. Αναπαριστώντας τον ίδιο κύκλο με NURBS θα απαιτούνταν μόνο 6 σημεία ελέγχου (σχήμα 3.8).

- Οι NURBS αποτελούν την γενίκευση των ομοιόμορφων καμπυλών και επιφανειών B-Spline και ρητών – πολυωνυμικών καμπυλών και επιφανειών Bezier (σχήμα 3. 11).

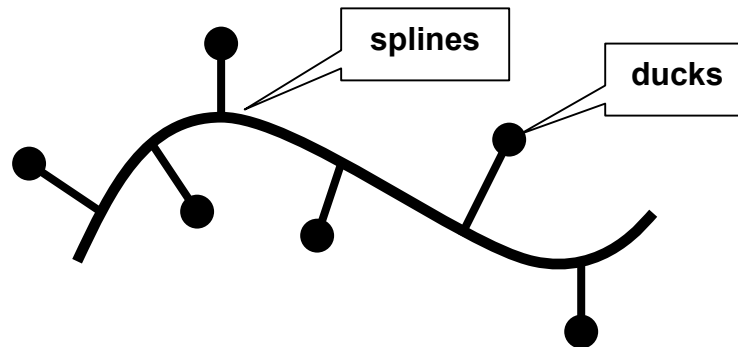


Σχήμα 3.11. – Η γενίκευση των καμπυλών NURBS, σε σχέση με τους υπόλοιπους τύπους παραμετρικών καμπυλών (και επιφανειών).

### Ιστορικά δεδομένα

Πριν την εξέλιξη των Ηλεκτρονικών Υπολογιστών, οι αρχιτέκτονες και οι μηχανικοί παρήγαγαν τα σχέδιά τους για οικοδομικά κτίρια, δρόμους και μηχανικά μέρη χρησιμοποιώντας χαρτί, μολύβι και διάφορα άλλα απλά εργαλεία. Αυτά τα εργαλεία συμπεριλάμβαναν χάρακες και ορθογώνια για σχεδίαση ευθειών, διαβήτες για σχεδίαση κύκλων και τόξων και τρίγωνα και μοιρογνωμόνια για σχεδίαση γωνιών. Φυσικά αρκετά ενδιαφέροντα σχήματα αντικειμένων δεν μπορούσαν να σχεδιαστούν μόνο με αυτά τα απλά εργαλεία, επειδή τα καμπύλα τμήματά τους δεν αποτελούνταν από κύκλους ή ελλείψεις. Συχνά, μία καμπύλη έπρεπε να περάσει ομαλά από ένα αριθμό προκαθορισμένων σημείων. Αυτό το πρόβλημα πρακτικά ήταν περισσότερο έντονο στην ναυπηγική. Παρόλο που ένας ικανός καλλιτέχνης μπορεί αξιόπιστα να σχεδιάσει με το χέρι καμπύλες σε ένα τραπέζι σχεδίασης, στην ναυπηγική συχνά απαιτούνταν να κατασκευαστούν τεράστια σχέδια. Για το λόγο του τεράστιου μεγέθους, τέτοια σχέδια συχνά κατασκευαζόταν σε

τεράστιους χώρους μεγάλων κτιρίων από τους ειδικούς γνωστούς σαν *loftsmen*. Αυτοί, για να βοηθηθούν, τοποθετούσαν μακριά, λεπτά, εύκαμπτα δοκάρια από ξύλο, πλαστικό, ή μέταλλο που ονομάζονταν *splines*. Τα *splines* συγκρατούνταν στη θέση τους με βαρίδια, τα ονομαζόμενα *ducks*, για το λόγο της ομοιότητάς τους με φτερωτά πλάσματα (σχήμα 3.12).



Σχήμα 3.12. – Η παραδοσιακή μέθοδος σχεδίασης καμπυλών στη ναυπηγική, με χρήση εύκαμπτων δοκών.

Το αποτέλεσμα της καμπύλης ήταν ομαλό ενώ η καμπύλωση προέκυπτε από τη θέση των *ducks*. Με την εξέλιξη των Η/Υ και την εισαγωγή της σχεδίασης με χρήση Η/Υ, ανακαλύφθηκαν οι φυσικές ιδιότητες των *splines* και έτσι μπόρεσαν να μοντελοποιηθούν μαθηματικά.

### Καθορισμός και Ιδιότητες των καμπυλών NURBS

Μία  $p$  βαθμού καμπύλη NURBS ορίζεται από τη σχέση

$$C(u) = \frac{\sum_{i=0}^n N_{i,p}(u)w_i P_i}{\sum_{i=0}^n N_{i,p}(u)w_i}, a \leq u \leq b \quad (3.18)$$

όπου τα  $\{P_i\}$  είναι τα σημεία ελέγχου (που σχηματίζουν το πολύγωνο ελέγχου), τα  $\{w_i\}$  είναι τα βάρη και τα  $\{N_{i,p}(u)\}$  είναι οι  $p$ -βαθμού βασικές

συναρτήσεις, που καθορίζονται από το μη περιοδικό (ή αλλιώς μη ομοιόμορφο) διάνυσμα κόμβων:

$$U = \{a, \dots, a, u_{p+1}, \dots, u_{m-p-1}, b, \dots, b\} \quad (3.19)$$

Αν δεν ορισθεί κάτι διαφορετικό, υποθέτουμε ότι  $a = 0$ ,  $b = 1$  και  $w_i > 0$  για όλα τα  $i$ .

Αν θέσουμε

$$R_{i,p}(u) = \frac{N_{i,p}(u)w_i}{\sum_{j=0}^n N_{j,p}(u)w_j} \quad (3.20)$$

μπορούμε να γράψουμε την πάνω εξίσωση στη μορφή:

$$C(u) = \sum_{i=0}^n R_{i,p}(u)P_i \quad (3.21)$$

Οι  $\{R_{i,p}(u)\}$  είναι οι ρητές βασικές συναρτήσεις, με το  $\{u\}$  να παίρνει τιμές στο διάστημα  $[0,1]$ . Τα  $\{R_{i,p}(u)\}$  έχουν τις ακόλουθες ιδιότητες, δανειζόμενες από τις ιδιότητες των βασικών συναρτήσεων  $\{N_{i,p}(u)\}$

❖ Μη αρνητικότητα

$$R_{i,p}(u) \geq 0, \text{ για όλα τα } i, p \text{ και } u \text{ που ανήκουν στο } [0,1]$$

❖ Το άθροισμα όλων των ρητών βασικών συναρτήσεων είναι σταθερό

$$\sum_{i=0}^n R_{i,p}(u) = 1, \text{ για όλα τα } u \text{ που ανήκουν στο } [0,1]$$

❖ Ισχύει:  $R_{0,p}(0) = R_{n,p}(1) = 1$

❖ Ακρότατο

Για  $p > 0$ , όλα τα  $R_{i,p}(u)$  φτάνουν σε ακριβώς ένα μέγιστο στο διάστημα  $u \in [0,1]$

❖ Τοπικός έλεγχος

Ισχύει  $R_{i,p}(u) = 0$  για  $u \notin [u_i, u_{i+p+1})$ . Συνεπώς, σε κάθε δεδομένο διάστημα κόμβων, όλες σχεδόν οι  $R_{k,p}$  ( $p+1$  το πλήθος) με το  $k$  στο διάστημα  $[i-p, i]$  είναι μη μηδενικές.

❖ Διαφορησιμότητα

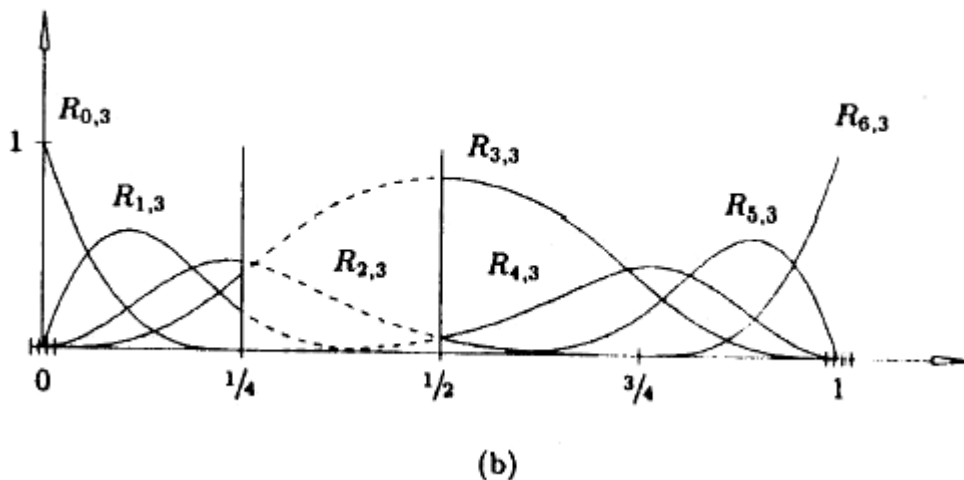
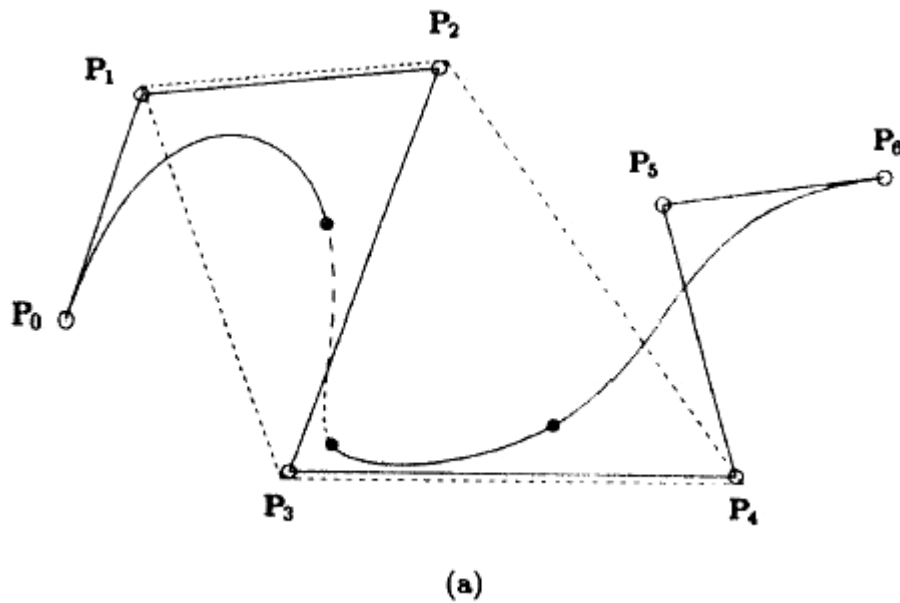
Όλες οι παράγωγοι των  $R_{i,p}(u)$  υπάρχουν στο δεδομένο εσωτερικό διάστημα των κόμβων. Σε ένα κόμβο η  $R_{i,p}(u)$  είναι  $(p-k)$  φορές διαφορήσιμη, όπου  $k$  είναι η πολλαπλότητα του κόμβου.

- ❖ Αν είναι  $w_i = 1$  για όλα τα  $i$ , τότε  $R_{i,p}(u) = N_{i,p}(u)$  για όλα τα  $i$ . Συνεπώς τα  $N_{i,p}(u)$  είναι ειδικές περιπτώσεις των  $R_{i,p}(u)$ . Στην πραγματικότητα, για κάθε  $a \neq 0$ , αν  $w_i = a$  για όλα τα  $i$ , τότε  $R_{i,p}(u) = N_{i,p}(u)$  για όλα τα  $i$ .

Οι παραπάνω ιδιότητες αποδίδουν τα παρακάτω ιδιαίτερα γεωμετρικά χαρακτηριστικά για τις καμπύλες NURBS.

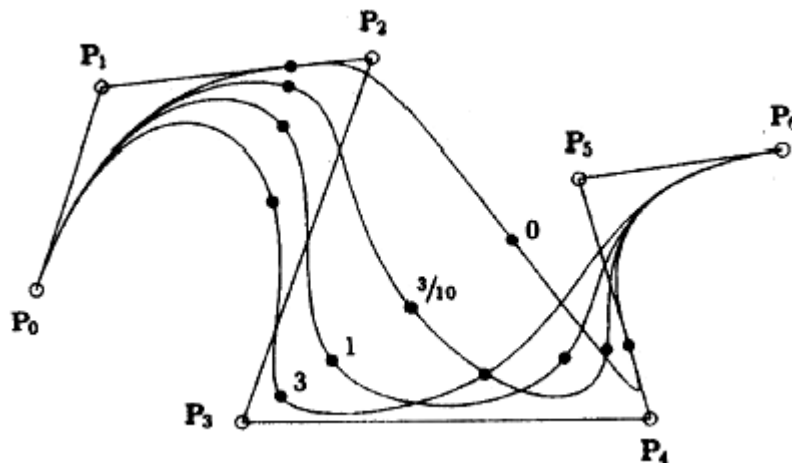
- ❖  $C(0) = P_o$  και  $C(1) = P_n$  (Αυτό προκύπτει από την 3<sup>η</sup> ιδιότητα)
- ❖ Σταθερή τοπική μεταβολή.  
Κάθε τμήμα της καμπύλης επηρεάζεται από συγκεκριμένο αριθμό σημείων ελέγχου. Το τμήμα της καμπύλης που είναι ήδη σχεδιασμένο παραμένει σταθερό με την εισαγωγή νέων σημείων ελέγχου για την επιμήκυνσή της.
- ❖ Ιδιότητα κυρτού πολυγώνου.

Η καμπύλη περιέχεται στο κυρτό πολύγωνο που ορίζουν τα σημεία ελέγχου της καμπύλης. Αν  $u \in [u_i, u_{i+1})$ , τότε το  $C(u)$  κυμαίνεται μεταξύ του κυρτού πολυγώνου των σημείων ελέγχου  $P_{i-p}, \dots, P_i$ , όπως φαίνεται στο σχήμα 3.13. Οι διακεκομμένες γραμμές του  $C(u)$  είναι για  $u \in [1/4, 1/2)$  και μεταβάλλονται από το κυρτό πολύγωνο  $\{P_1, P_2, P_3, P_4\}$ . Αυτό απορρέει από την 1<sup>η</sup>, 2<sup>η</sup> και 5<sup>η</sup> ιδιότητα.

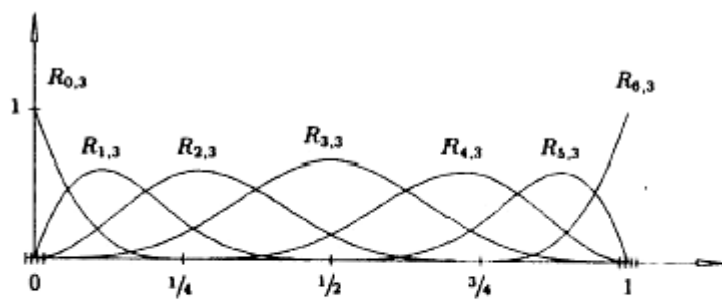


Σχήμα 3.13. - Η ιδιότητα του κυρτού πολυγώνου σε ρητές καμπύλες B-Spline. (a) Το κυρτό πολύγωνο για  $u \in [1/4, 1/2)$  ορίζεται από τα σημεία ελέγχου  $\{P_1, P_2, P_3, P_4\}$ . (b) Οι αντίστοιχες βασικές συναρτήσεις

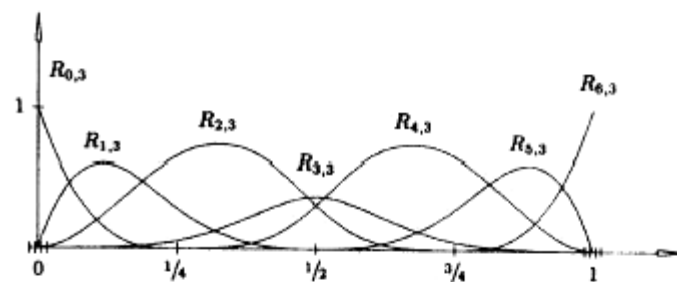
- ❖ Η καμπύλη  $C(u)$  είναι απείρως διαφορίσιμη στα εσωτερικά διαστήματα των κόμβων της και  $p-k$  φορές διαφορίσιμη στους κόμβους της, με  $k$  την πολλαπλότητα του κόμβου.
- ❖ Ο αριθμός τομών επιπέδου (ή ευθείας για την περίπτωση δύο διαστάσεων) με την καμπύλη είναι μικρότερος ή ίσος από τον αριθμό τομών του επιπέδου με το πολύγωνο ελέγχου.
- ❖ Μία καμπύλη NURBS χωρίς εσωτερικούς κόμβους είναι μια ρητή καμπύλη Bezier. Από αυτό συνεπάγεται ότι οι πολυωνυμικές καμπύλες B-Spline και οι ρητές ή μη-ρητές καμπύλες Bezier είναι ειδικές περιπτώσεις των καμπυλών NURBS.
- ❖ Τοπική μεταβολή  
Αν ένα σημείο ελέγχου  $P_i$  μετακινηθεί, ή ένα βάρος  $w_i$  μεταβληθεί, τότε η αλλαγή αυτή επηρεάζει μόνο το τμήμα της καμπύλης στο διάστημα  $u \in [u_i, u_{i+p+1})$  (Αυτό απορρέει από την 5<sup>η</sup> ιδιότητα).



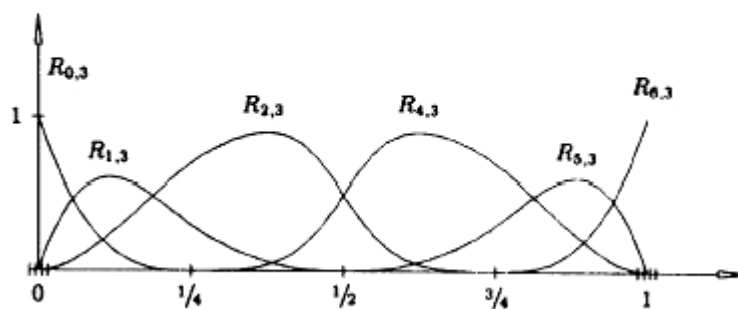
Σχήμα 3.14. - Μία ρητή κυβική καμπύλη B-Spline, με το βάρος  $w_3$  να μεταβάλλεται.



(a)



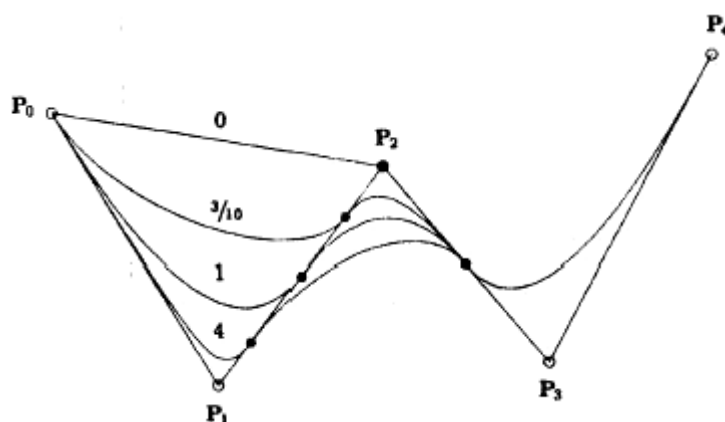
(b)



(c)

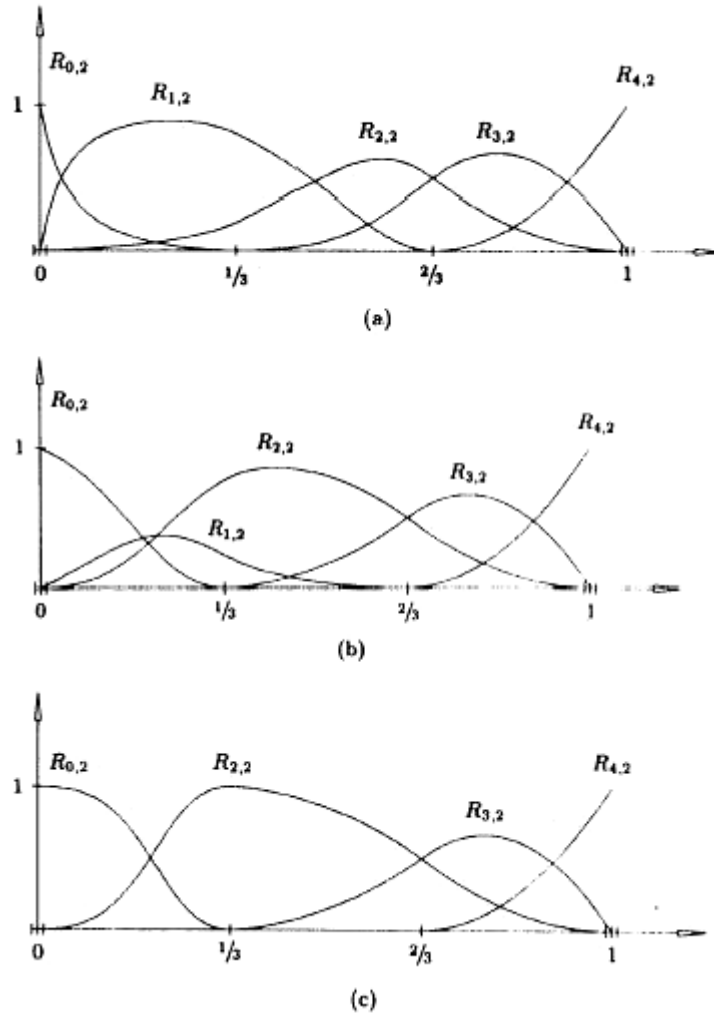
Σχήμα 3.15. - Οι βασικές κυβικές συναρτήσεις της καμπύλης του σχήματος 3.14. (a)

$w_3 = 1$ . (b)  $w_3 = \frac{3}{10}$ . (c)  $w_3 = 0$ .



Σχήμα 3.16. - Μία ρητή δευτεροβάθμια καμπύλη, με το βάρος  $w_1$  να μεταβάλλεται.





Σχήμα 3.17. - Οι βασικές δευτεροβάθμιες συναρτήσεις της καμπύλης του σχήματος 3.16 (a)  $w_1 = 4$ . (b)  $w_1 = \frac{3}{10}$ . (c)  $w_1 = 0$ .

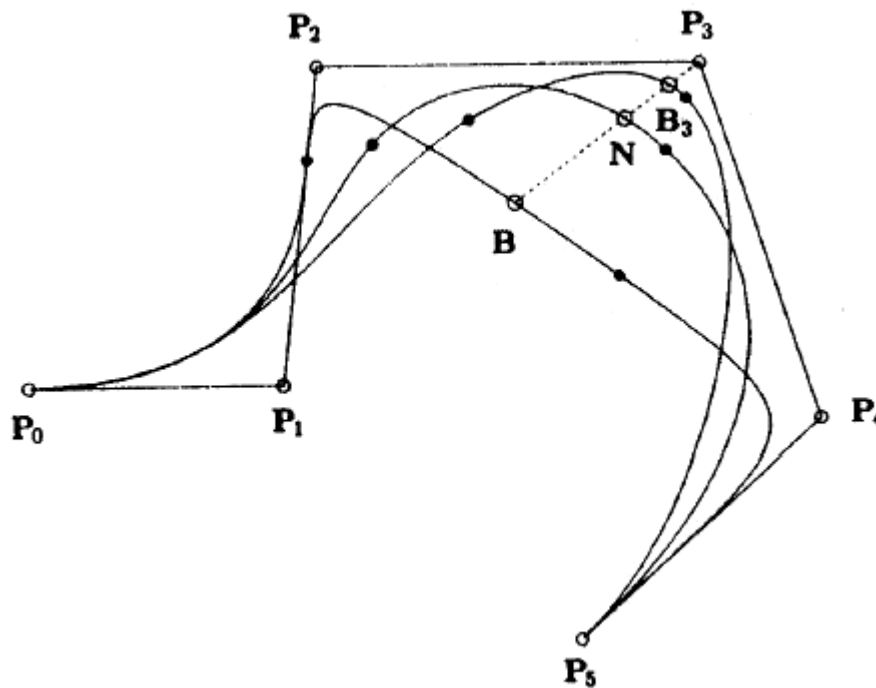
Η τελευταία ιδιότητα είναι πολύ σημαντική. Μας παρέχει τη δυνατότητα της τοπικής αλλαγής του σχήματος της καμπύλης με την μεταβολή των σημείων ελέγχου και των βαρών, για την επίτευξη του επιθυμητού σχήματος της καμπύλης. Τα σχήματα 3.14. έως 3.17. παρουσιάζουν τα αποτελέσματα της αλλαγής ενός βάρους. Υποθέτουμε ότι  $u \in [u_i, u_{i+p+1})$ , τότε αν το βάρος  $w_i$  αυξηθεί (ελαττωθεί), το σημείο της καμπύλης  $C(u)$  θα μετακινηθεί πιο κοντά (πιο μακριά) στο σημείο ελέγχου  $P_i$  και συνεπώς η καμπύλη πλησιάζει (απομακρύνεται) από το σημείο ελέγχου  $P_i$ . Ακόμα η κίνηση του σημείου  $C(u)$  για σταθερή τιμή του  $u$  είναι ευθεία γραμμή (σχήμα 3.18). Στο ίδιο

σχήμα η τιμή του  $u$  παραμένει σταθερή και το βάρος  $w_3$  μεταβάλλεται. Έστω ότι

$$B = C(u, w_3 = 0) \quad (3.22)$$

$$N = C(u, w_3 = 1) \quad (3.23)$$

Τότε η ευθεία γραμμή που καθορίζεται από το  $B$  και  $N$  περνάει από το  $P_3$ . Για τιμές του βάρους  $0 < w_3 < \infty$  το σημείο  $B_3 = C(u, w_3)$ , κινείται πάνω στο ευθύγραμμο τμήμα των σημείων  $B$  και  $P_3$ .



Σχήμα 3.18. - Μεταβολή της καμπύλης σε συνάρτηση με τη μεταβολή του βάρους  $w_3$ .

### 3.5. Μη Ομοιόμορφες Ρητές Επιφάνειες B-Spline – NURBS

#### Εισαγωγή

Οι επιφάνειες NURBS αποτελούν ένα ισχυρό εργαλείο για την παραμετρική αναπαράσταση πολύπλοκων επιφανειών. Σε μια επιφάνεια NURBS μπορούμε να έχουμε εύκολα τοπικό έλεγχο και αλλαγή στη μορφή της με τρόπο κατανοητό, είτε μεταβάλλοντας το πλέγμα σημείων της (σημεία ελέγχου), είτε τα βάρη της, είτε το βαθμό του πολυωνύμου της. Εφόσον οι NURBS αποτελούνται από ρητά πολυώνυμα, μας επιτρέπουν την ακριβή αναπαράσταση σχημάτων, που σε σχέση με τις απλές επιφάνειες B-Spline είναι αδύνατο να γίνουν (σφαίρα, κώνος κτλ). Επίσης, η μεγάλη χρησιμότητα που έχουν, είναι ότι μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την ίδια αναπαράσταση σχημάτων για όλες τις επιφάνειες στερεών μοντέλων χωρίς να απαιτείται να γράψουμε ξεχωριστές συναρτήσεις για κάθε μία.

#### Καθορισμός των επιφανειών NURBS

Για την παραμετρική περιγραφή μίας επιφάνειας απαιτούνται δύο ανεξάρτητες παράμετροι, π.χ.  $u$  και  $v$ . Μία επιφάνεια NURBS,  $p$  βαθμού κατά την διεύθυνση  $u$  και  $q$  βαθμού κατά την διεύθυνση  $v$ , είναι ένα ρητό διάνυσμα δύο μεταβλητών που υπολογίζεται από τη σχέση:

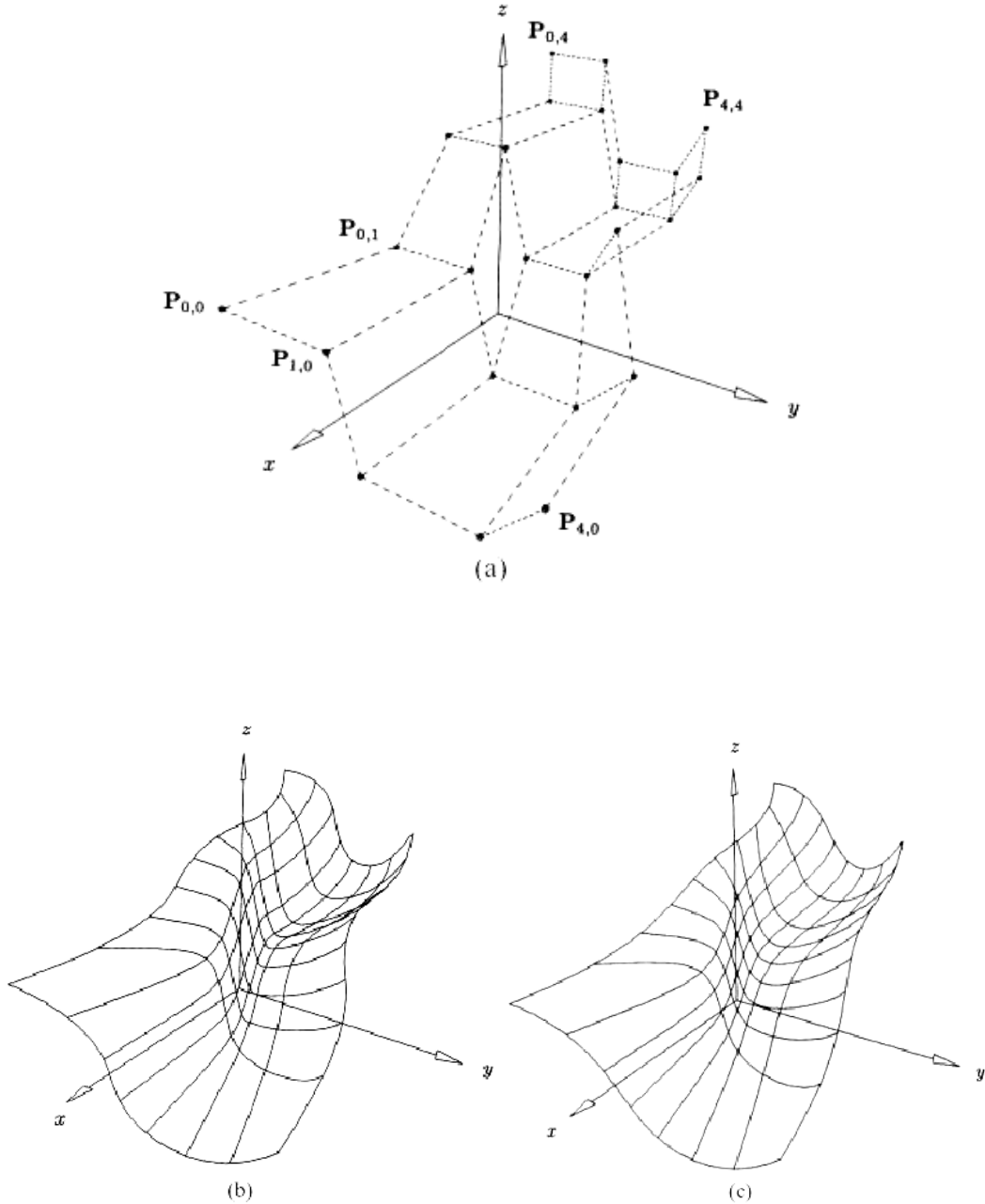
$$S(u, v) = \frac{\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m N_{i,p}(u) N_{j,q}(v) w_{i,j} P_{i,j}}{\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m N_{i,p}(u) N_{j,q}(v) w_{i,j}} \quad 0 \leq u, v \leq 1 \quad (3.24)$$

Τα  $\{P_{i,j}\}$  αποτελούν το πλέγμα ελέγχου δύο μεταβλητών, τα  $\{w_{i,j}\}$  είναι τα βάρη και τα  $\{N_{i,p}(u)\}$ ,  $\{N_{j,q}(v)\}$  είναι οι μη ρητές βασικές συναρτήσεις B-Spline που καθορίζονται από τα διανύσματα κόμβων:

$$U = \{0, \dots, 0, u_{p+1}, \dots, u_{r-p-1}, 1, \dots, 1\} \quad (3.25)$$

$$V = \{0, \dots, 0, v_{q+1}, \dots, v_{s-q-1}, 1, \dots, 1\} \quad (3.26)$$

όπου  $r = n + p + 1$  και  $s = m + q + 1$



Σχήμα 3.19. - (a) Το πλέγμα ελέγχου (b) Η δύο μεταβλητών επιφάνεια NURBS με  $w_{1,1} = w_{1,2} = w_{2,1} = w_{2,2} = 10$  και τα υπόλοιπα βάρη ίσα με 1.  $U = V = \{0, 0, 0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1, 1, 1\}$ . (c) Η ίδια επιφάνεια με  $U = V = \{0, 0, 0, 0, \frac{1}{2}, 1, 1, 1\}$  και με τα ίδια βάρη.

Μπορούμε να υποθέσουμε τις ρητές βασικές συναρτήσεις ως

$$R_{i,j}(u,v) = \frac{N_{i,p}(u)N_{j,q}(v)w_{i,j}}{\sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^m N_{k,p}(u)N_{l,q}(v)w_{k,l}} \quad (3.27)$$

και να γράψουμε την συνάρτηση της επιφάνειας ως εξής

$$S(u,v) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m R_{i,j}(u,v)P_{i,j} \quad (3.28)$$

### Ιδιότητες των επιφανειών NURBS

Οι σημαντικές ιδιότητες που έχουν οι ρητές συναρτήσεις  $R_{i,j}(u,v)$  είναι περίπου ίδιες με αυτές των πολυωνυμικών βασικών συναρτήσεων.

❖ Μη αρνητικότητα

$$R_{i,j}(u,v) \geq 0 \text{ για όλα } i, j, u, v$$

❖ Άθροισμα συναρτήσεων ίσο με μονάδα

$$\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m R_{i,j}(u,v) = 1 \text{ για όλα τα } (u,v) \in [0,1] \times [0,1]$$

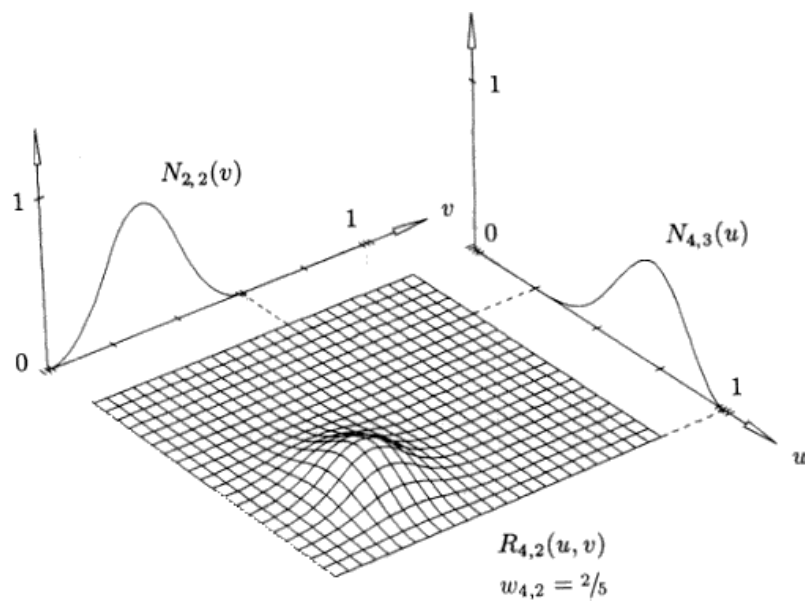
❖ Τοπικός έλεγχος

$$R_{i,j}(u,v) = 0 \text{ αν τα } (u,v) \text{ είναι έξω από την περιοχή που δίνεται} \\ [u_i, u_{i+p+1}) \times [v_j, v_{j+q+1})$$

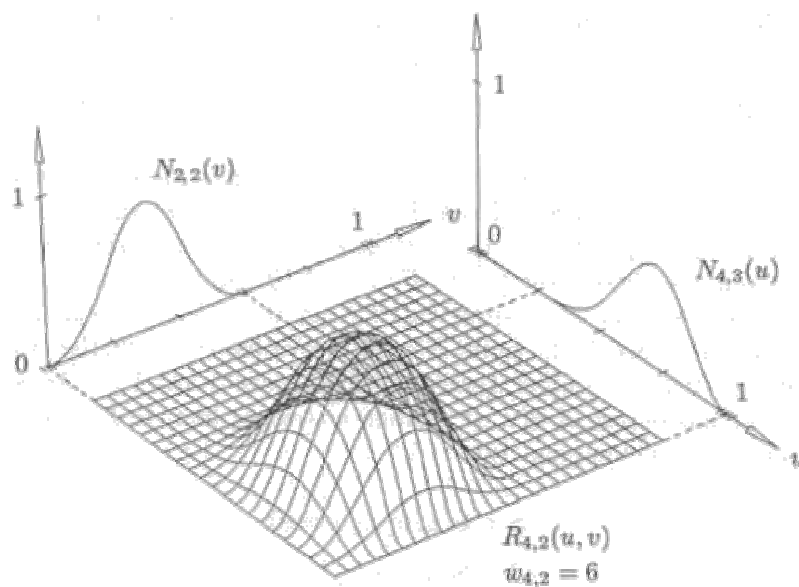
❖ Σε κάθε δεδομένη περιοχή της μορφής  $[u_{i_0}, u_{i_0+1}) \times [v_{j_0}, v_{j_0+1})$  οι περισσότερες  $(p+1)(q+1)$  βασικές συναρτήσεις είναι μη μηδενικές. Πρακτικά είναι  $R_{i,j}(u,v) \neq 0$  για  $i_0 - p \leq i \leq i_0$  και  $j_0 - q \leq j \leq j_0$

❖ Ακρότατο

Αν  $p > 0$  και  $q > 0$ , τότε τα  $R_{i,j}(u,v)$  έχουν ακριβώς μία μέγιστη τιμή



(a)



(b)

Σχήμα 3.20. - Οι βασικές συναρτήσεις  $R_{4,2}(u,v)$  με  $U = \{0,0,0,0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1,1,1,1\}$  και  $V = \{0,0,0, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 1,1,1\}$ . Είναι  $w_{i,j} = 1$  για όλα τα  $(i,j) \neq (4,2)$ . (a)  $w_{4,2} = \frac{2}{5}$ , (b)  $w_{4,2} = 6$

$$\diamond R_{0,0}(0,0) = R_{n,0}(1,0) = R_{0,m}(0,1) = R_{n,m}(1,1) = 1$$

❖ Διαφορησιμότητα

Εσωτερικά της περιοχής που σχηματίζεται από τις γραμμές κόμβων, όλες οι μερικές παράγωγοι των  $R_{i,j}(u,v)$  υπάρχουν. Σε ένα κόμβο  $u$  (αντίστοιχα κόμβο  $v$ ) είναι  $p-k$ , ( $q-k$ ) φορές διαφορήσιμες κατά την διεύθυνση  $u$  (αντίστοιχα  $v$ ), όπου  $k$  είναι η πολλαπλότητα του κόμβου.

$$\diamond \text{ Αν είναι όλα βάρη } w_{i,j} = a \text{ για } 0 \leq i \leq n, 0 \leq j \leq m \text{ και } a \neq 0, \text{ τότε είναι}$$

$$R_{i,j}(u,v) = N_{i,p}(u)N_{j,q}(v) \text{ για όλα τα } i,j.$$

Οι παραπάνω ιδιότητες έχουν μερικά σημαντικά γεωμετρικά χαρακτηριστικά για τις επιφάνειες NURBS.

❖ Γωνιακά σημεία παρεμβολής

$$S(0,0) = P_{0,0}, S(1,0) = P_{n,0}, S(0,1) = P_{0,m}, S(1,1) = P_{n,m}$$

❖ Σταθερή συγγένεια

Σε κάθε μετατροπή των σημείων ελέγχου υπάρχει αλληλεπίδραση στο σχήμα της επιφάνειας.

❖ Ιδιότητα κυρτού πολυγώνου

Υποθέτουμε  $w_{i,j} \geq 0$  για όλα τα  $i,j$ . Αν  $(u,v) \in [u_{i_0}, u_{i_0+1}) \times [v_{j_0}, v_{j_0+1})$ , τότε όλα τα σημεία του  $S(u,v)$  βρίσκονται στο κυρτό πολύγωνο που σχηματίζουν τα σημεία ελέγχου  $P_{i,j}$ , με  $i_0 - p \leq i \leq i_0$  και  $j_0 - q \leq j \leq j_0$

❖ Τοπική μεταβολή

Αν μεταβάλλονται τα σημεία ελέγχου  $P_{i,j}$ , ή αλλάζουν τα βάρη  $w_{i,j}$ , αυτό επηρεάζει την μορφή της επιφάνειας μόνο στην περιοχή που ορίζεται από  $[u_i, u_{i+p+1}) \times [v_j, v_{j+q+1})$

- ❖ Οι πολυωνυμικές επιφάνειες B-Spline, οι πολυωνυμικές ή οι ρητές Bezier αποτελούν ειδικές περιπτώσεις των ρητών επιφανειών NURBS.
- ❖ Διαφορησιμότητα  
Οι  $S(u, v)$  είναι  $p - k$  (αντίστοιχα  $q - k$ ) φορές διαφορήσιμες κατά την διεύθυνση  $u$  (αντίστοιχα  $v$ ) σε ένα κόμβο  $u$  (αντίστοιχα  $v$ ), όπου  $k$  είναι η πολλαπλότητα του κόμβου.

Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την μετακίνηση των σημείων ελέγχου και την αλλαγή των βαρών για να πετύχουμε την τοπική μεταβολή της επιφάνειας NURBS. Στα σχήματα 3.19 και 3.20 φαίνεται η επίδραση που έχει πάνω στις βασικές συναρτήσεις  $R_{i,j}(u, v)$  και στη μορφή της επιφάνειας, όταν ένα βάρος  $w_{i,j}$  μεταβάλλεται. Ποιοτικά για αυτήν την επίδραση μπορούμε να πούμε το εξής: Υποθέτοντας  $(u, v) \in [u_i, u_{i+p+1}) \times [v_j, v_{j+q+1})$ , τότε αν το βάρος  $w_{i,j}$  αυξάνει (μειώνεται), το σημείο  $S(u, v)$  πλησιάζει (απομακρύνεται) από το σημείο ελέγχου  $P_{i,j}$  και επιπλέον η επιφάνεια πλησιάζει προς (απομακρύνεται από) το  $P_{i,j}$ . Όπως και στην περίπτωση των καμπυλών, έτσι και στις επιφάνειες η κίνηση του  $S(u, v)$  είναι πάνω σε μία ευθεία γραμμή.



## 4. Περιγραφή και εφαρμογή της μεθόδου

### 4.1. Γενική περιγραφή της διαδικασίας

Στο παρόν κεφάλαιο περιγράφεται η γενική μορφή της διαδικασίας που ακολουθήθηκε για τη βελτιστοποίηση αεροτομών με χρήση Εξελικτικών Αλγορίθμων (ΕΑ). Όπως αναφέρθηκε σε προηγούμενα κεφάλαια, οι ΕΑ είναι μηχανές αναζήτησης βέλτιστων λύσεων. Κάθε γενεά του ΕΑ αποτελείται από ένα πληθυσμό υποψηφίων λύσεων (τα χρωμοσώματα). Κάθε λύση έχει συγκεκριμένο αριθμό γονιδίων που μπορεί είναι ο ίδιος για όλες τις λύσεις ή μεταβαλλόμενος (χρωμόσωμα μεταβλητού μήκους). Ο αρχικός ΕΑ που χρησιμοποιήθηκε είχε σταθερό μήκος χρωμοσώματος και σε αυτόν βασίστηκαν οι τροποποιήσεις που προτείνονται στην παρούσα εργασία.

Όπως αναφέρθηκε σε προηγούμενο κεφάλαιο, στην παρούσα εργασία ασχολούμαστε με ένα απλοποιημένο πρόβλημα και όχι το πραγματικό πρόβλημα βελτιστοποίησης μιας αεροτομής. Θεωρούμε μια αεροτομή που περιγράφεται από ένα πλήθος σημείων. Αυτή αποτελεί το στόχο μας και εμείς θέλουμε να την προσεγγίσουμε με μία παραμετρική καμπύλη (π.χ. B-Spline), όσο γίνεται καλύτερα και όσο το δυνατόν πιο γρήγορα. Το συγκεκριμένο πρόβλημα δεν περιλαμβάνει την αεροδυναμική αποτίμηση της αεροτομής, αλλά περιλαμβάνει όλα τα υπόλοιπα στοιχεία, όπως την παραμετρική περιγραφή της αεροτομής, την συμπεριφορά του ΕΑ κ.λπ.

Η συνολική διαδικασία αποτελείται από τέσσερα στάδια. Το πρώτο στάδιο λαμβάνει χώρα μόνο μία φορά και χρησιμοποιείται για να παραχθεί τυχαία ο πρώτος πληθυσμός υποψηφίων λύσεων. Κάθε υποψήφια λύση (χρωμόσωμα) αποτελείται από σταθερό, και ίδιο για όλες τις λύσεις, αριθμό μεταβλητών (γονίδια). Τα γονίδια κάθε χρωμοσώματος αντιπροσωπεύουν συντεταγμένες των σημείων ελέγχου από μία ανοικτή B-Spline καμπύλη, με το αρχικό και τελικό σημείο να συμπίπτουν με την ακμή εκφυγής της αεροτομής. Ο ρόλος φυσικά της καμπύλης B-Spline είναι να αναπαριστά το περίγραμμα μιας αεροτομής με την ελάχιστη δυνατή πληροφορία, ούτως ώστε να μην χρειάζεται να περιγράφονται όλα τα σημεία αυτής της αεροτομής αλλά μόνο τα σημεία ελέγχου.

Στο δεύτερο στάδιο της διαδικασίας αναπαράγουμε το περίγραμμα της καμπύλης B-Spline (της αεροτομής) από τα σημεία ελέγχου (δηλαδή από κάθε χρωμόσωμα) με σκοπό να εκτιμηθεί κάθε πιθανή λύση.

Η εκτίμηση του κάθε χρωμοσώματος γίνεται στο τρίτο στάδιο με τον υπολογισμό της αντικειμενικής συνάρτησης για κάθε χρωμόσωμα. Η αντικειμενική συνάρτηση υπολογίζεται με βάση τη διαφορά της εξεταζόμενης αεροτομής με την δεδομένη που θέλουμε να προσεγγίσουμε. Η διαφορά αυτή υπολογίζεται ως το άθροισμα των αποστάσεων των δύο καμπυλών (στην κατακόρυφη διεύθυνση) για συγκεκριμένες αξονικές θέσεις. Στη συνέχεια λαμβάνεται ο αντίστροφος του αθροίσματος, αφού ο ΕΑ που χρησιμοποιείται είναι κατασκευασμένος για μεγιστοποίηση και όχι ελαχιστοποίηση.

Το τέταρτο στάδιο περιλαμβάνει τις λειτουργίες του ΕΑ. Μετά την εκτίμηση κάθε χρωμοσώματος της πρώτης γενιάς, ακολουθεί η επιλογή της ενδιάμεσης γενιάς, η οποία πραγματοποιείται με τη μέθοδο της ρουλέτας. Ακολουθεί η διαφοροποίηση των χρωματοσωμάτων της ενδιάμεσης γενιάς. Στον εξελικτικό αλγόριθμο που χρησιμοποιήθηκε στην παρούσα εργασία, οι τελεστές διαφοροποίησης είναι η κλασσική διασταύρωση μονού σημείου, και η κλασσική μετάλλαξη (αναφορά). Με το πέρας της εφαρμογής των τελεστών διαφοροποίησης έχει παραχθεί η δεύτερη γενιά χρωμοσωμάτων και επαναλαμβάνεται η ίδια διαδικασία (2<sup>ο</sup>, 3<sup>ο</sup>, 4<sup>ο</sup> στάδιο).

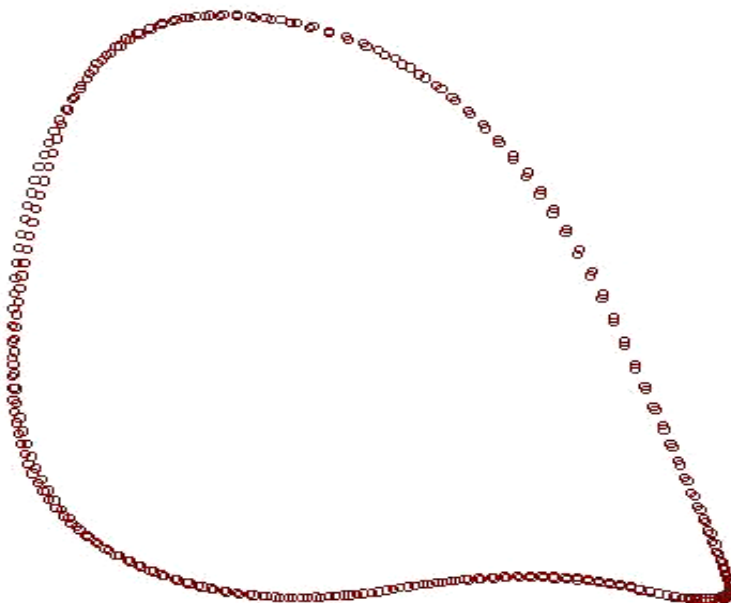
Οι παράμετροι του αλγορίθμου (που επιλέγονται με βάση πειραματικές δοκιμές) είναι ο αριθμός των χρωμοσωμάτων σε ένα πληθυσμό, ο αριθμός των γενεών, τα όρια μέσα στα οποία παίρνουν τιμές τα γονίδια του χρωμοσώματος, η πιθανότητα κλασσικής διασταύρωσης, η πιθανότητα μετάλλαξης και ο αριθμός των γονιδίων κάθε χρωμοσώματος (παραμένει ο ίδιος σε ολόκληρο των πληθυσμό).

## 4.2. Εφαρμογή της μεθόδου

Στη συνέχεια αναλύεται η εφαρμογή της διαδικασίας που περιγράφηκε σε διαφορετικές περιπτώσεις. Στον πίνακα 4.1 δίδονται, για κάθε περίπτωση που εξετάστηκε, οι τιμές των παραμέτρων που χρησιμοποιήθηκαν.

Κατά την πρώτη εφαρμογή οι γενεές που αφήσαμε να εξελιχθεί ο γενετικός αλγόριθμος είναι 200 με το πλήθος των χρωμοσωμάτων σε κάθε

γενιά να είναι 100. Οι πιθανότητες διασταύρωσης και μετάλλαξης είναι 0,85 και 0,15 αντίστοιχα. Μία πολύ βασική αρχική συνθήκη που παίζει μεγάλο ρόλο στην ταχύτητα σύγκλισης του αλγορίθμου είναι το διάστημα τιμών κάθε σημείου ελέγχου της καμπύλης, το οποίο ορίζεται από τον χρήστη. Αυτό το διάστημα μπορεί να είναι μικρό, οπότε αυξάνεται η ταχύτητα της σύγκλισης, αλλά περιορίζονται οι βαθμοί ελευθερίας της καμπύλης, οπότε μπορούν να προκύψουν υποβέλτιστες λύσεις. Στην περίπτωση που το διάστημα για κάθε συντεταγμένη είναι μεγάλο, αυξάνεται ο απαιτούμενος χρόνος, αφού μεγαλώνει ο χώρος των λύσεων. Στη πρώτη εφαρμογή αυτό το σύνολο τιμών κάθε σημείου ελέγχου επιλέγεται να είναι σχετικά μικρό. Μετά από 200 γενεές η μέθοδος παρέχει μία λύση, στην οποία η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης είναι ίση με 2600. Στο σχήμα 4.1 παρουσιάζονται συγκριτικά η αεροτομή – στόχος και η βέλτιστη προσέγγισή της με χρήση του ΕΑ. Ο κατακόρυφος άξονας σχεδίασης έχει διαφορετική κλίμακα από τον οριζόντιο, ώστε να μεγεθύνονται οι διαφορές μεταξύ των δύο καμπυλών. Με γκρι χρώμα σχεδιάζεται η αεροτομή – στόχος, ενώ με κόκκινο η αεροτομή που προκύπτει με τη χρήση του ΕΑ.



Σχήμα 4.1. – Σύγκριση μεταξύ της αεροτομής – στόχου και αυτής που προέκυψε με τη χρήση του ΕΑ.

Το αποτέλεσμα κρίνεται αρκετά ικανοποιητικό. Βέβαια υπάρχουν κάποιες περιοχές στην αεροτομή που δεν επιτυγχάνεται άριστη προσέγγιση. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι ο αριθμός των σημείων ελέγχου (γονίδια) που επιλέξαμε δεν ήταν αρκετός για να πετύχουμε άριστα αποτελέσματα.

Στη δεύτερη εφαρμογή χρησιμοποιήθηκαν οι ίδιες παράμετροι όπως φαίνεται και στον πίνακα 4.1, με μόνη διαφορά ότι επιλέξαμε τα όρια στο διάστημα τιμών για κάθε σημείο ελέγχου να είναι σχετικά μεγάλα σε σύγκριση με την πρώτη εφαρμογή της μεθόδου. Με το πέρας των 200 γενεών η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης που μπόρεσε να φτάσει ένα χρωμόσωμα είναι μόλις 1754. Η σύγκριση μεταξύ των δύο αεροτομών δίδεται στο σχήμα 4.2.

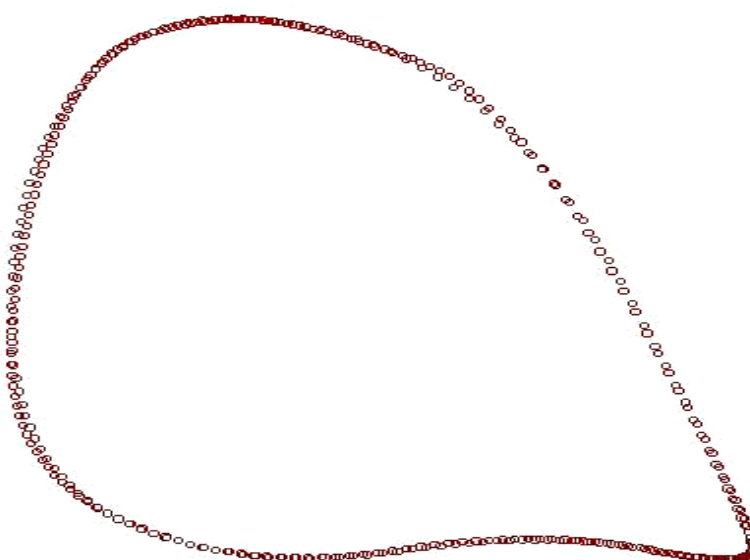


Σχήμα 4.2. – Σύγκριση της αεροτομής – στόχου και αυτής που προέκυψε με τη χρήση ΕΑ, για μεγαλύτερα διαστήματα τιμών για κάθε σημείο ελέγχου (δεύτερη εφαρμογή).

Το αποτέλεσμα είναι αρκετά λογικό και αναμενόμενο. Για ίδιο αριθμό γενεών με την πρώτη εφαρμογή αυξάνουμε τον χώρο των λύσεων, οπότε επιτυγχάνεται μικρότερη σύγκλιση. Καλύτερα αποτελέσματα θα μπορούσαν να επιτευχθούν, για τα συγκεκριμένα διαστήματα, με μεγαλύτερο αριθμό γενεών. Το θετικό στοιχείο που εμφανίζεται στη δεύτερη εφαρμογή είναι η καλύτερη προσέγγιση στην περιοχή της ακμής προσβολής. Στην ουσία μεγαλώνοντας τα όρια μεγαλώνουμε τους βαθμούς ελευθερίας της καμπύλης

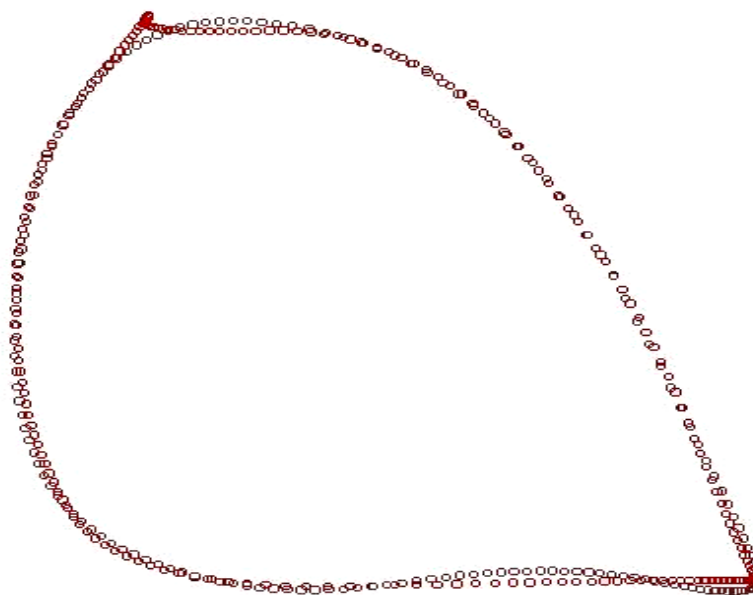
B-Spline. Έτσι δεν απαιτείται να γνωρίζουμε εκ των προτέρων ποια περίπου θα είναι τα όρια των γονιδίων, αφού αυτά επιλέγονται να είναι αρκετά μεγάλα και συνεπώς δεν περιορίζουμε την διαδικασία με τις αρχικές επιλογές μας.

Στην τρίτη εφαρμογή αυξήσαμε τον αριθμό των σημείων ελέγχου, με στενά όμως όρια στα διαστήματα που παίρνουν τιμές τα γονίδια. Το χρωμόσωμα της καλύτερης λύσης μετά από 200 γενεές βρέθηκε να έχει τιμή αντικειμενικής συνάρτησης ίση με 2869. Στο σχήμα 4.3 που παρουσιάζει τον βαθμό της προσέγγισης μεταξύ της επιθυμητής και της τελικής αεροτομής. Η προσέγγιση που επιτυγχάνεται είναι αρκετά καλή και σχεδόν ταυτίζεται με την αεροτομή - στόχο.



Σχήμα 4.3. - Σύγκριση της αεροτομής – στόχου και αυτής που προέκυψε με τη χρήση ΕΑ, για μικρά διαστήματα τιμών για κάθε σημείο ελέγχου και μεγαλύτερο αριθμό σημείων ελέγχου, δηλαδή μεγαλύτερο μήκος χρωμοσώματος (τρίτη εφαρμογή).

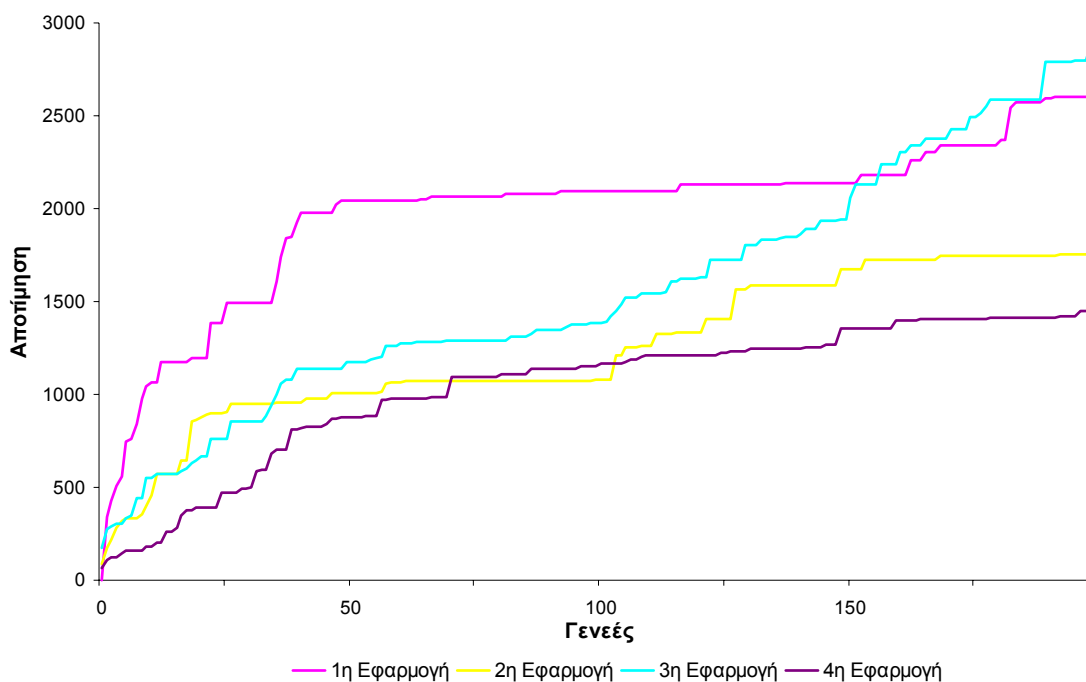
Στη συνέχεια εφαρμόσαμε την μέθοδο για ίδιο αριθμό σημείων ελέγχου με την τρίτη εφαρμογή, με την διαφορά ότι θέσαμε μεγαλύτερα όρια στο διάστημα τιμών των σημείων ελέγχου. Το καλύτερο χρωμόσωμα στην 200ή επανάληψη της διαδικασίας έδωσε τιμή για την αντικειμενική συνάρτηση ίση με μόλις 1448. Στο σχήμα 4.4 παρουσιάζεται η σύγκριση των δύο αεροτομών.



Σχήμα 4.4 - Σχηματική αναπαράσταση της αεροτομή που φτιάξαμε με την αεροτομή που θέλαμε να φτιάξουμε στην τέταρτη εφαρμογή της μεθόδου.

Στη συγκεκριμένη εφαρμογή δεν προκύπτει καλή προσέγγιση, κάτι που φυσικά οφείλεται στις λίγες επαναλήψεις του αλγορίθμου, για τον μεγαλύτερο αριθμό γονιδίων και το μεγαλύτερο εύρος τιμών τους. Η διαδικασία θα απαιτούσε τουλάχιστον 300 γενεές για να φτάσει σε ένα αποδεκτό αποτέλεσμα. Ουσιαστικά δηλαδή η διαδικασία δεν έχει ακόμη συγκλίνει.

Οι παραπάνω εφαρμογές της διαδικασίας πραγματοποιήθηκαν ώστε να εξαχθούν κάποια χρήσιμα συμπεράσματα και να γίνουν προτάσεις που θα μπορούσαν να βελτιώσουν την διαδικασία. Επίσης δεν μας ενδιαφέρει τόσο η τελική τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης όσο το πως φτάσαμε σ' αυτήν. Είναι σίγουρο πως σε όλες τις περιπτώσεις αν αφήσουμε τις διαδικασίες να εξελιχθούν σε μεγάλο αριθμό γενεών τότε θα είχαμε πολύ καλύτερη προσέγγιση στο στόχο. Διατηρήθηκε όμως σταθερός ο αριθμός των γενεών ώστε να φανεί η συμπεριφορά της διαδικασίας και να εξαχθούν συμπεράσματα χρήσιμα για την επιτάχυνσή της. Στο σχήμα 4.5 δίδεται συγκριτικά για τις 4 εφαρμογές η εξέλιξη της αντικειμενικής συνάρτησης στις διάφορες γενιές.



Σχήμα 4.5. – Συγκριτική παρουσίαση για τις 4 εφαρμογές της εξέλιξης της αντικειμενικής συνάρτησης στις διάφορες γενιές.

Είναι γνωστό πως το κυριότερο βάρος της εξέλιξης ανατίθεται στους τελεστές του γενετικού αλγορίθμου, της μετάλλαξης και της διασταύρωσης. Αυτοί οι τελεστές δεν εφαρμόζονται σε όλα τα χρωμοσώματα ενός πληθυσμού αλλά σε κάποια από αυτά, σύμφωνα με τις τιμές των πιθανοτήτων μετάλλαξης και διασταύρωσης. Η πιθανότητα της διασταύρωσης έχει κατά κύριο λόγο μεγάλη τιμή, ενώ η πιθανότητα της μετάλλαξης έχει μικρότερη τιμή, αφού μεγάλες τιμές της οδηγούν σε αστάθεια τη σύγκλιση. Κατά τη διάρκεια της σύγκλισης εμφανίζονται διαδοχικές γενιές στις οποίες δεν παρατηρείται βελτίωση της αντικειμενικής συνάρτησης, αλλά μία στασιμότητα. Για την βελτίωση της σύγκλισης και την μείωση αυτής της στασιμότητας, σαν σκέψη προτείνεται η τροποποίηση του αλγορίθμου ως εξής: Όταν υπάρξουν δύο ίδιες τιμές στην αντικειμενική συνάρτηση (μεταξύ δύο διαδοχικών γενεών) να μεταβάλλεται η πιθανότητα μετάλλαξης ή η πιθανότητα διασταύρωσης ή και οι δύο πιθανότητες. Οι τροποποιήσεις που προτείνονται συγκρίνονται με τα αποτελέσματα της 1<sup>ης</sup> εφαρμογής, που έδωσε μια τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης ίση με 2600.

Η πρώτη τροποποίηση στον αλγόριθμο έχει ως εξής: όταν βρεθούν δύο ίδιες συνεχόμενες τιμές στην αντικειμενική συνάρτηση, τότε η πιθανότητα

μετάλλαξης να αυξάνεται σε 0,25, ώστε να δίδεται η δυνατότητα στον αλγόριθμο να ξεφεύγει από τοπικά βέλτιστα. Μόλις η μέθοδος ξεφεύγει από το τοπικό βέλτιστο και αυξάνεται η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης, τότε επανέρχεται η παράμετρος στην αρχική τιμή της για να συνεχιστεί η διαδικασία. Μετά την εφαρμογή αυτής της τροποποίησης, δυστυχώς τα αποτελέσματα που προέκυψαν ήταν απογοητευτικά. Η διαδικασία όχι μόνο δεν κατάφερε να ξεκολλήσει αλλά παρέμεινε κολλημένη σε τοπικό βέλτιστο όσες γενεές και αν περνούσαν στην ίδια τιμή. Η υπερβολική αύξηση της τυχειότητας οδήγησε στην απουσία σύγκλισης της διαδικασίας. Στο σχήμα 4.6 δίδονται τα συγκριτικά αποτελέσματα για τις δύο αεροτομές.

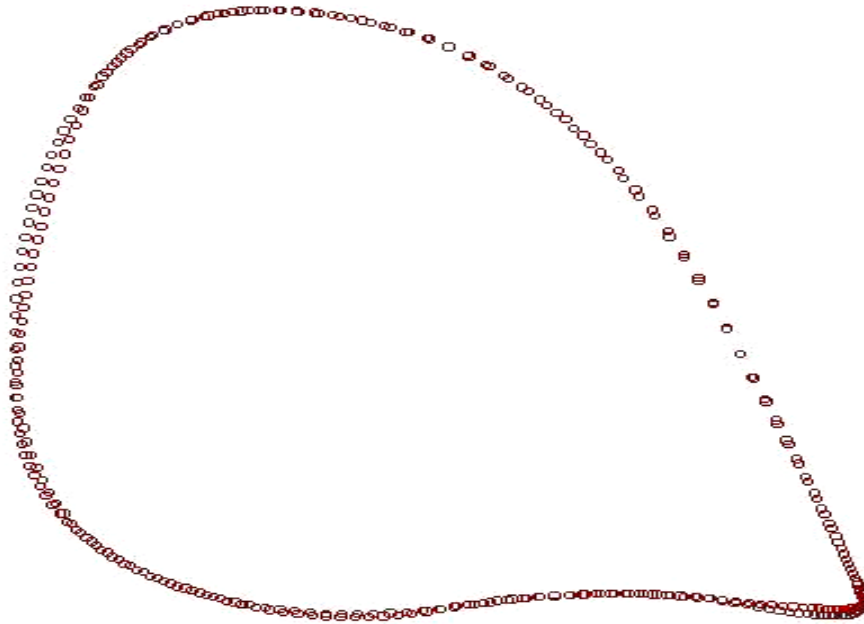


Σχήμα 4.6. – Πρώτη τροποποίηση της διαδικασίας. Αύξηση της πιθανότητας μετάλλαξης αν η μέθοδος κολλάει σε τοπικό βέλτιστο.

Στη συνέχεια αποφασίστηκε να χρησιμοποιηθεί η τακτική για μεταβολή της πιθανότητας διασταύρωσης σαν τεχνική για την αποφυγή της στασιμότητας της αντικειμενικής συνάρτησης. Πιο συγκεκριμένα, εάν η διαδικασία βρίσκει δύο ίδιες διαδοχικές τιμές στην αντικειμενική συνάρτηση τότε η πιθανότητα διασταύρωσης αυξάνεται από 0,85 σε 0,95, ενώ η πιθανότητα μετάλλαξης παραμένει ίδια, με τιμή 0,15. Η εφαρμογή αυτής της τροποποίησης έδωσε λίγο καλύτερα αποτελέσματα από την 1<sup>η</sup> εφαρμογή. Η αντικειμενική συνάρτησης έφτασε στην τιμή 2872 μετά από 200 γενιές. Στο



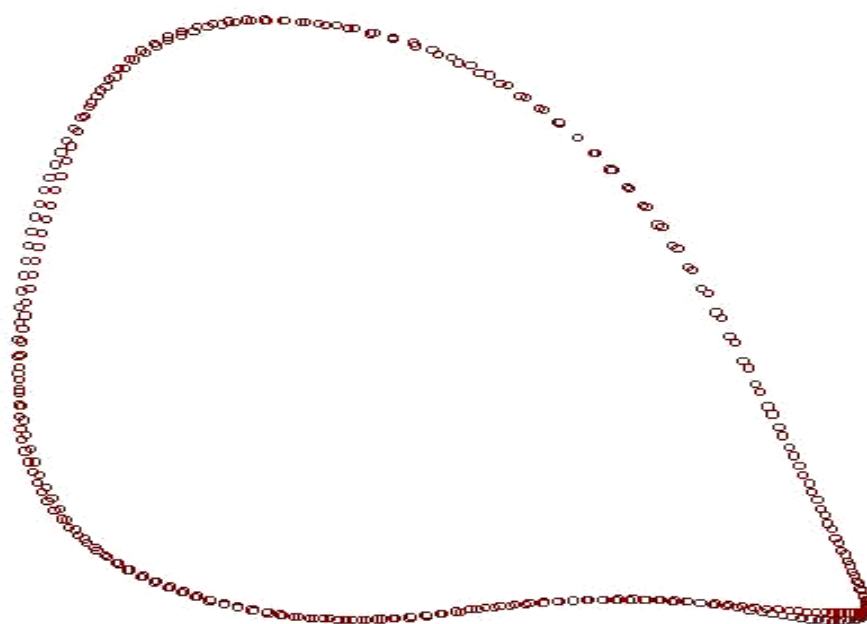
σχήμα 4.7 δίδεται η σύγκριση μεταξύ των δύο αεροτομών, της αεροτομής στόχου και αυτής που προέκυψε από την εφαρμογή του ΕΑ.



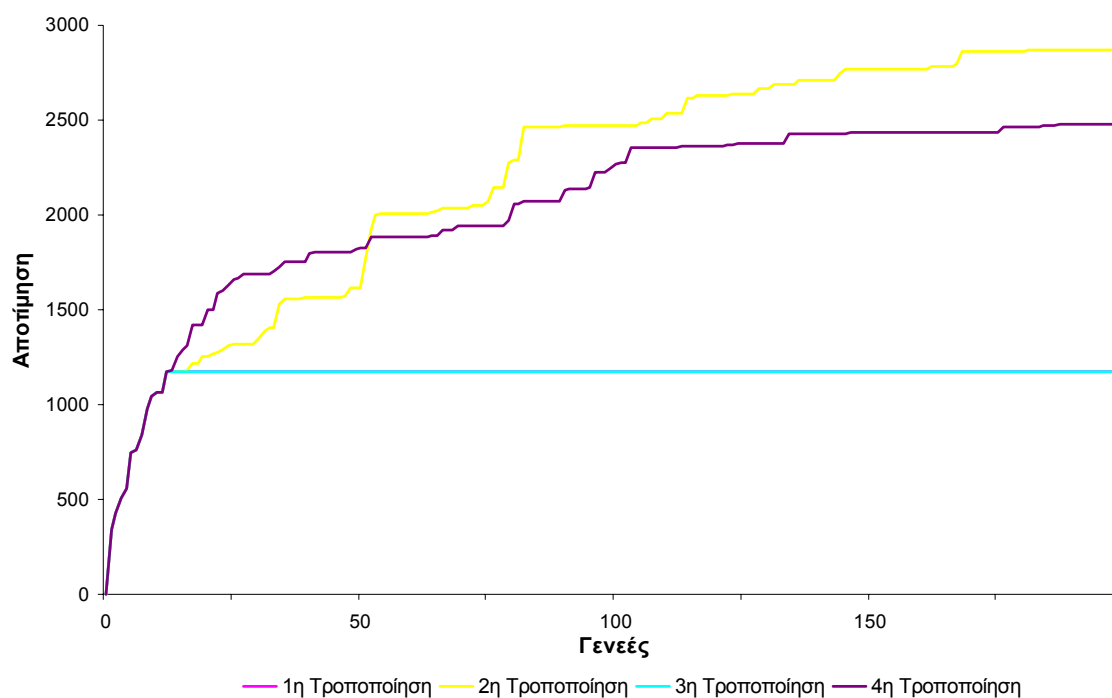
Σχήμα 4.7. – Δεύτερη τροποποίηση της διαδικασίας. Αύξηση της πιθανότητας διασταύρωσης μετά από στασιμότητα της αντικειμενικής συνάρτησης.

Η επόμενη τροποποίηση που εξετάστηκε είναι η μεταβολή και των δύο πιθανοτήτων μετάλλαξης και διασταύρωσης. Μόλις παρουσιάζεται στασιμότητα στις τιμές της αντικειμενικής συνάρτησης δίνουμε πιθανότητα μετάλλαξης ίση με 0,35 (μεγάλη αύξηση) και πιθανότητα διασταύρωσης ίση με 0,15 (μεγάλη μείωση). Το σκεπτικό ήταν να αυξηθεί υπερβολικά η τυχαιότητα όπως στην πρώτη τροποποίηση που έγινε και να μην χρησιμοποιηθεί σχεδόν καθόλου ο τελεστής της διασταύρωσης. Δυστυχώς και σ' αυτήν την περίπτωση δεν βελτιώθηκαν τα αποτελέσματα αφού αυτή η τροποποίηση δεν κατάφερε να βελτιώσει τη σύγκλιση, αλλά η συμπεριφορά ήταν ίδια με την 1<sup>η</sup> τροποποίηση.

Η τέταρτη τροποποίηση του αλγορίθμου είναι η εξής: με την εμφάνιση στασιμότητας στην αντικειμενική συνάρτηση, μειώνεται η πιθανότητα διασταύρωσης στο ελάχιστο και παίρνει τιμή 0,15 από 0,85 που είχε πριν. Αυτό έγινε για να χρησιμοποιείται κυρίως ο τελεστής της μετάλλαξης. Η τροποποίηση αυτή φάνηκε στην αρχή να δίνει καλά αποτελέσματα, αφού οι πρώτες στασιμότητες της αντικειμενικής ξεπεράστηκαν με ευκολία, οπότε άρχισε να αυξάνει την τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης με υψηλό ρυθμό.



Σχήμα 4.8. – Σύγκριση των δύο αεροτομών, για την περίπτωση που υιοθετείται μείωση της πιθανότητας διασταύρωσης κατά την εμφάνιση στασιμότητας στην αντικειμενική συνάρτηση.



Σχήμα 4.9. – Ιστορικό της σύγκλισης για τις 4 εφαρμοζόμενες τροποποιήσεις. Η 1<sup>η</sup> τροποποίηση έχει το ίδιο ιστορικό με την 3<sup>η</sup>.

Στα μέσα περίπου των επαναλήψεων της διαδικασίας όμως είχαμε και εδώ εμφάνιση στασιμότητας, στις οποίες και αυτή η τροποποίηση δεν φάνηκε

να δίνει κάποια ουσιαστική λύση. Η αντικειμενική συνάρτηση έφτασε την τιμή 2505, σχεδόν την τιμή της 1<sup>ης</sup> εφαρμογής. Το αποτέλεσμα της διαδικασίας παρουσιάζεται στο σχήμα 4.8.

Σε όλες τις τροποποιήσεις που προταθήκανε δεν υπήρξε ουσιαστική λύση στο πρόβλημα της στασιμότητας των τιμών της αντικειμενικής συνάρτησης, αν και επιτεύχθηκαν και καλύτερες λύσεις σε σχέση με την αρχική. Στο σχήμα 4.9 δίδεται η σύγκλιση του αλγορίθμου για κάθε μία από τις τροποποιήσεις που εφαρμόστηκαν.

Όλες οι τροποποιήσεις στην αρχή ταυτίζονται, μέχρι που έχουμε το πρώτο πάγωμα τιμών στην αντικειμενική συνάρτηση στην 11<sup>η</sup> επανάληψη της διαδικασίας. Κατόπιν φαίνεται ποιες από αυτές κατάφεραν να το ξεπεράσουν. Παρόλο που δεν δόθηκε ουσιαστική λύση στο πρόβλημα, μπορούν να εξαχθούν κάποια συμπεράσματα. Όπως φαίνεται και στο σχήμα 4.9, οι τροποποιήσεις που αφορούν στη μεταβολή της πιθανότητας μετάλλαξης και συγκεκριμένα στην αύξησή της, δεν κατάφεραν να δώσουν λύση και χειροτέρευσαν δραστικά τη σύγκλιση. Βελτιωμένα αποτελέσματα πήραμε όταν μεταβάλλαμε την πιθανότητα διασταύρωσης, είτε όταν την αυξήσαμε είτε όταν την μειώσαμε. Όταν την αυξήσαμε μάλιστα πετύχαμε και μεγαλύτερη τιμή στην αντικειμενική συνάρτηση απ' ό,τι αν δεν χρησιμοποιούσαμε καθόλου αυτήν την μεταβολή της πιθανότητας.

Επιστρέφοντας στις αρχικές εφαρμογές του αλγορίθμου, βελτιωμένα αποτελέσματα επιτεύχθηκαν στην 3<sup>η</sup> εφαρμογή (σε ομαλή αύξηση). Στη συγκεκριμένη εφαρμογή χρησιμοποιήθηκαν 10 σημεία ελέγχου, δύο περισσότερα από ό,τι στην πρώτη. Συνεπώς, επειδή έχουμε δύο διαστάσεις για κάθε σημείο, προκύπτουν τέσσερις επιπλέον μεταβλητές στο πρόβλημα (4 επιπλέον γονίδια για κάθε χρωμόσωμα). Αυτό οδήγησε στην ιδέα για χρησιμοποίηση μεταβαλλόμενου αριθμού γονιδίων για κάθε χρωμόσωμα.

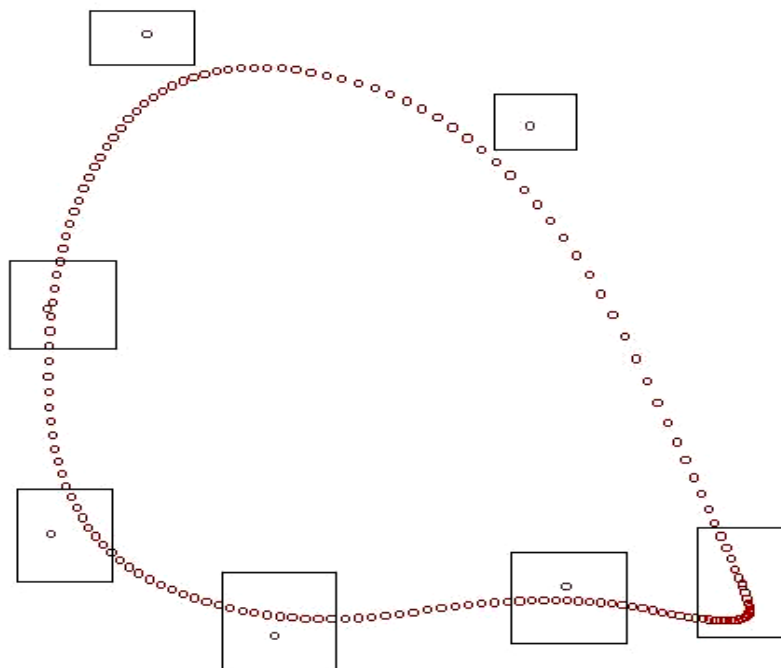
### 4.3. Μεταβαλλόμενος αριθμός γονιδίων στα χρωμοσώματα

Ο αλγόριθμος που χρησιμοποιεί η διαδικασία, που περιγράφηκε προηγουμένως, χειρίζεται χρωμοσώματα με σταθερό αριθμό γονιδίων. Ο χρήστης έχει τη δυνατότητα να μεταβάλλει τον αριθμό αυτό των γονιδίων σε

κάθε χρωμόσωμα προτού ξεκινήσει η διαδικασία, αλλά αυτός θα παραμείνει ο ίδιος για όλα τα χρωμοσώματα σε όλες τις γενεές.

Όπως παρατηρήθηκε στις προηγούμενες εφαρμογές της διαδικασίας, εφαρμόζοντας τον αλγόριθμο για 8 γονίδια σε κάθε χρωμόσωμα επιτεύχθηκε διαφορετικό αποτέλεσμα απ' ό,τι για 10 γονίδια. Όταν χρησιμοποιήθηκαν μικρά όρια στο σύνολο τιμών η διαδικασία έδωσε καλύτερα αποτελέσματα όταν χρησιμοποιήθηκαν 10 γονίδια (ή αλλιώς σημεία ελέγχου). Όταν χρησιμοποιήθηκαν μεγάλα όρια στο σύνολο τιμών, τότε τα 8 γονίδια έδωσαν μεγαλύτερη τιμή στην αντικειμενική συνάρτηση.

Παρατηρώντας τα παραπάνω θα ήταν αναπόφευκτο να σκεφτεί κάποιος να φτιάξει μια διαδικασία στην οποία θα υπάρχουν χρωμοσώματα διαφορετικού αριθμού γονιδίων και θα γίνεται επιλογή από την ίδια την διαδικασία ποιο θα επιβιώσει. Κάτι τέτοιο δεν είναι εύκολη υπόθεση και πρέπει να τροποποιηθούν κάποιες υπορουτίνες για να επιτευχθεί. Στις προηγούμενες εφαρμογές τα όρια που θέσαμε στα σύνολα τιμών των γονιδίων ήταν μικρά ή μεγάλα. Στην προκειμένη περίπτωση για να πραγματοποιηθεί η μέθοδος που προτάθηκε πρέπει αυτά τα όρια να μεγαλώσουν περισσότερο, ώστε να μπορεί η διαδικασία να προσθέτει ή να αφαιρεί κάποιο γονίδιο (σημείο ελέγχου) από τα χρωμοσώματα.



Σχήμα 4.10 – Αεροτομή που περιγράφεται από καμπύλη B-Spline, τα σημεία ελέγχου της, καθώς και τα διαστήματα μέσα στα οποία επιτρέπεται αυτά να κινούνται (ορθογώνια).

Στο σχήμα 4.10 δίδεται αεροτομή, που περιγράφεται από καμπύλη B-Spline, καθώς και τα σημεία ελέγχου της. Επίσης απεικονίζονται και τα διαστήματα μέσα στα οποία επιτρέπεται αυτά να κινούνται (ορθογώνια). Για την πραγματοποίηση του συγκεκριμένου αλγορίθμου πρέπει αυτά τα ορθογώνια να μεγαλώσουν περισσότερο από κάθε άλλη εφαρμογή που πραγματοποιήθηκε στην παρούσα διπλωματική εργασία. Μόνο με αυτή την προϋπόθεση μπορεί να γίνει πραγματοποιήσιμη η ιδέα του μεταβλητού αριθμού γονιδίων στα χρωμοσώματα.

Ο στόχος μας στην προκειμένη περίπτωση είναι να συγκρίνουμε την διαδικασία μεταβλητού αριθμού γονιδίων σε σχέση με την συμβατική. Επειδή, όπως αναφέρθηκε, τα όρια στο σύνολο τιμών έχουν μεγαλώσει, πρέπει να εφαρμόσουμε πάλι την συμβατική μέθοδο για να μπορεί να γίνει η σύγκριση με κάποια όρια αναφοράς σταθερά. Θα εφαρμόσουμε την συμβατική μέθοδο για 8 χρωμοσώματα, κατόπιν για 9 χρωμοσώματα και στη συνέχεια θα εφαρμοστεί η μεθοδολογία που προτείνεται η οποία επιλέγει από μόνη της ποιος θα είναι ο βέλτιστος αριθμός των χρωμοσωμάτων 8 ή 9.

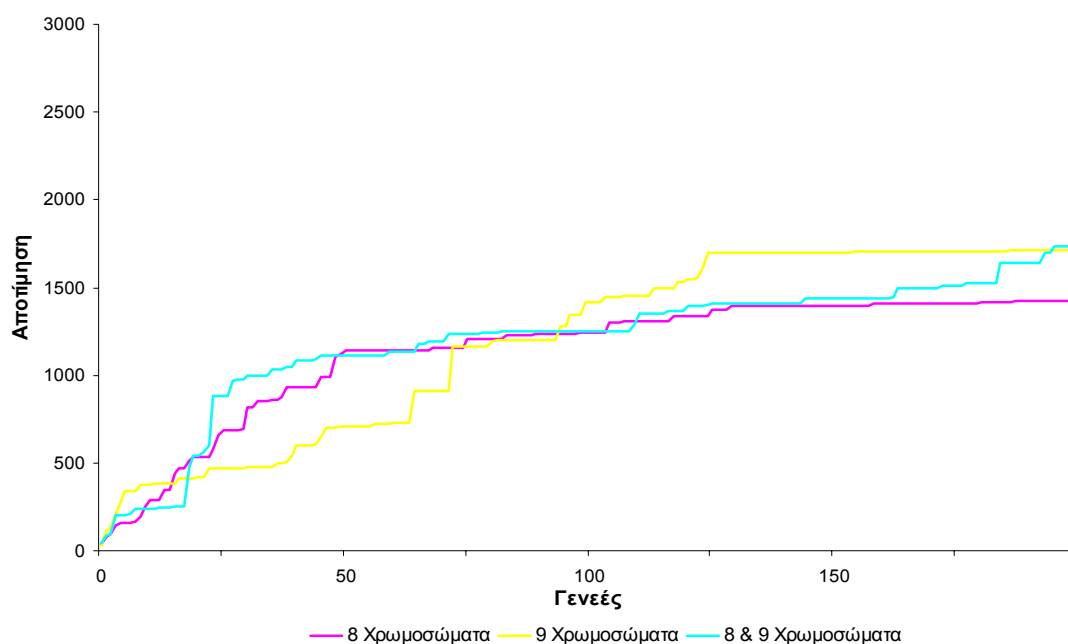
Τα αποτελέσματα μπορούν να φανούν στον πίνακα 4.2 που ακολουθεί ενώ στο σχήμα 4.11 δίδεται το ιστορικό της σύγκλισης για τις τρεις περιπτώσεις.

Από τον πίνακα 4.2 φαίνεται ότι οι τιμές των δύο πιθανοτήτων μετάλλαξης και διασταύρωσης έχουν μεγαλώσει, το οποίο κρίθηκε απαραίτητο με την αύξηση των ορίων των γονιδίων. Η μέθοδος του μεταβλητού αριθμού γονιδίων έγινε για να επιλέγει ανάμεσα σε 8 ή 9 γονίδια. Φυσικά μπορεί εύκολα να τροποποιηθεί και να περιλαμβάνει μεγαλύτερο πεδίο. Ο σκοπός που επιλέξαμε 8 ή 9 γονίδια είναι διότι αναζητούμε την σύγκριση των αποτελεσμάτων. Τελικά η μέθοδος που προτάθηκε έδωσε καλύτερα αποτελέσματα από τις άλλες δύο. Σύμφωνα με το σχήμα 4.11, η μέθοδος είχε ένα ξέσπασμα στις πρώτες 50 επαναλήψεις που δεν κατάφερε να το ακολουθήσει και στις απόμενες, με αποτέλεσμα μόλις να καταφέρει να υπερσχύσει έναντι της συμβατικής μεθόδου των 9 γονιδίων. Πρέπει να σημειωθεί ένα παράξενο γεγονός που παρατηρήθηκε. Η συμβατική μεθοδολογία των 9 γονιδίων έδωσε καλύτερα αποτελέσματα από αυτή με 8 γονίδια. Η μεθοδολογία με τον μεταβλητό αριθμό γονιδίων ενώ στην αρχή

υπήρχε μια αντιμετάθεση ανάμεσα στα 8 και 9 γονίδια που έδιναν την καλύτερη λύση σε κάθε επανάληψη, στις τελευταίες επαναλήψεις του αλγορίθμου επέλεξε χρωμόσωμα που είχε 8 γονίδια, δίνοντας ταυτόχρονα καλύτερα αποτελέσματα από τις άλλες δύο.

Α/Α	Πιθανότητα μετάλλαξης	Πιθανότητα Διασταύρωσης	Αριθμός Χρωμοσωμάτων	Αποτίμηση
1	0,20	0,95	8	1427
2	0,20	0,95	9	1712
3	0,20	0,95	8 & 9	1735

Πίνακας 4.2. – Αποτελέσματα των δοκιμών με μεταβλητό αριθμό γονιδίων



Σχήμα 4.11. – Ιστορικό σύγκλισης για τις τρεις διαφορετικές περιπτώσεις αριθμού χρωμοσωμάτων.

#### 4.4. Συγκεντρωτικά αποτελέσματα των μεθόδων που χρησιμοποιήθηκαν και συμπεράσματα

Ο σκοπός που έγιναν οι παραπάνω εφαρμογές και τροποποιήσεις στη διαδικασία είναι για να βρεθεί μεθοδολογία να επιτυγχάνει ταχύτερη σύγκλιση. Είδαμε πως αυτό δεν είναι καθόλου εύκολη υπόθεση, εφόσον τα

αποτελέσματα που είχαμε ήταν λίγο καλύτερα όχι όμως πραγματικά καλά. Η ανάγκη της εύρεσης μια διαδικασίας που να δίνει αποτελέσματα γρήγορα παραμένει. Η μεταβολή των πιθανοτήτων μετάλλαξης και διασταύρωσης έδειξαν να δίνουν λίγο καλύτερα αποτελέσματα από ότι η συμβατική μέθοδος αλλά πρέπει αυτές να τροποποιούνται κατάλληλα σε σχέση με το εκάστοτε εξεταζόμενο πρόβλημα. Επίσης εφαρμόστηκε μέθοδος που χρησιμοποιεί μεταβλητό αριθμό γονιδίων σε κάθε χρωμόσωμα. Το αποτέλεσμα ήταν καλύτερο σε σχέση με τη συμβατική μέθοδο αλλά όχι πολύ διαφορετικό. Όλες οι προηγούμενες εφαρμογές και τα αποτελέσματα που πήραμε έδειξαν πως υπάρχει μια σχέση ανάμεσα στα όρια του συνόλου τιμών και στον αριθμό των γονιδίων σε κάθε χρωμόσωμα. Τα μεγάλα όρια σημαίνουν μεγαλύτερη γενικότητα στο σχήμα της αεροτομής αλλά και μεγαλύτερος ο χρόνος της σύγκλισης. Από την άλλη μεριά, μικρά όρια συνεπάγονται μικρό χρόνο υπολογισμών και σύγκλισης αλλά και μπορεί να μην επαρκούν για να επιτύχουμε τη ζητούμενη αεροτομή. Πολλά σημεία ελέγχου πετυχαίνουν μεγαλύτερη ευκαμψία στο σχήμα και απαιτούν μεγάλο χρόνο υπολογισμών. Λίγα σημεία ελέγχου χρειάζονται λιγότερους υπολογισμούς αλλά μικρή ευκαμψία στο σχήμα της αεροτομής. Η προσπάθεια που έγινε ήταν να βρεθεί μια χρυσή τομή ανάμεσα στα όρια του συνόλου τιμών και στα σημεία ελέγχου του προβλήματος.

Η λύση μπορεί να δοθεί όχι με την εύρεση της χρυσής τομής ανάμεσά τους αλλά με την εφαρμογή δύο διακριτών κανόνων. Στην αρχή της διαδικασίας χρησιμοποιούμε μεγάλα όρια και λίγα σημεία ελέγχου για να πετύχουμε την αρχική κατεύθυνση της λύσης και στη συνέχεια μικραίνουμε αρκετά τα όρια και αυξάνουμε τα σημεία ελέγχου, αφήνοντας την διαδικασία να εξελιχθεί. Η μια τόσο απλή σε πρώτη σκέψη μέθοδο επιφέρει ένα πλήθος δυσκολιών και εξ' αιτίας των τόσο σημαντικών αποτελεσμάτων εξετάζεται στο επόμενο κεφάλαιο.

A/A	Γενεές	Πληθυσμός	Γονίδια σε κάθε χρωμόσωμα	Διάστημα τιμών κάθε γονιδίου	Πιθανότητα Διασταύρωσης	Πιθανότητα Μετάλλαξης	Αποτίμηση της λύσης
1	200	100	8	Μικρό	0,85	0,15	2600
2	200	100	8	Μεγάλο	0,85	0,15	1754
3	200	100	10	Μικρό	0,85	0,15	2869
4	200	100	10	Μεγάλο	0,85	0,15	1448
5	200	100	8	Μικρό	0,85	0,15 – 0,25	-
6	200	100	8	Μικρό	0,85 – 0,95	0,15	2872
7	200	100	8	Μικρό	0,85 – 0,15	0,15 – 0,35	-
8	200	100	8	Μικρό	0,85 – 0,15	0,15	2505
9	200	100	8	Πολύ Μεγάλο	0,95	0,20	1427
10	200	100	9	Πολύ Μεγάλο	0,95	0,20	1712
11	200	100	8 - 9	Πολύ Μεγάλο	0,95	0,20	1735

Πίνακας 4.1. – Συγκεντρωτικός πίνακας που παραθέτει τις παραμέτρους της διαδικασίας βελτιστοποίησης για κάθε μία εφαρμογή, καθώς και την τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης



## 5. ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5 – Μέθοδος ταχύτερης σύγκλισης

### 5.1. Εισαγωγή

Η υπόθεση που εξετάζεται στο κεφάλαιο αυτό βασίζεται σε μια απλή ιδέα. Αντί να εφαρμόσουμε την διαδικασία μία φορά με σταθερά όρια του συνόλου τιμών για ορισμένο αριθμό σημείων ελέγχου, γίνεται εφαρμογή δύο φορές της διαδικασίας. Στην πρώτη φάση παίρνουμε μια γενική κατεύθυνση, όσον αφορά στο σχήμα της αεροτομής, εφαρμόζοντας τη διαδικασία για λίγες σχετικά επαναλήψεις με πολύ μεγάλα όρια στα διαστήματα τιμών των γονιδίων και μικρό αριθμό σημείων ελέγχου. Στην δεύτερη φάση αυξάνουμε τα σημεία ελέγχου, διπλασιάζοντας αυτά, ενώ εκλείπει η ανάγκη μεγάλων διαστημάτων, αφού ο αλγόριθμος έχει προσεγγίσει το τελικό σχήμα της αεροτομής. Αυτή η μείωση των διαστημάτων επιφέρει μια μείωση στο πεδίο που ψάχνει η διαδικασία, με αποτέλεσμα να έχουμε μια ταχύτερη σύγκλιση της. Όσο απλή και αν φαίνεται σε πρώτη σκέψη αυτή η μέθοδος, τόσο δύσκολα μπορεί να υλοποιηθεί προγραμματιστικά. Επίσης πρέπει να τονιστεί πως κάτι τέτοιο θα ήταν ουσιαστικά αδύνατο αν δεν υπήρχαν οι πολύ σημαντικές ιδιότητες των καμπυλών B-Splines και ιδιαίτερα το ραφινάρισμα των κόμβων που αναλύθηκε στο 3<sup>ο</sup> κεφάλαιο της εργασίας.

### 5.2. Περιγραφή της προτεινόμενης διαδικασίας

Η κλασσική μέθοδος βελτιστοποίησης με ΕΑ ξεκινάει καθορίζοντας και εισάγοντας στη διαδικασία τις πιθανότητες μετάλλαξης και διασταύρωσης, το πλήθος του πληθυσμού, τον μέγιστο αριθμό των γενεών ή επαναλήψεων, τον αριθμό των σημείων ελέγχου και το ελάχιστο και μέγιστο όριο που μπορούν να έχουν καθένα από τα σημεία ελέγχου. Για να καταλήξουμε στην τροποποιημένη μορφή της διαδικασίας βελτιστοποίησης, που προτείνεται σ' αυτό το κεφάλαιο, πρέπει να σκεφτούμε αντίστροφα. Αν γνωρίζαμε πως περίπου είναι το σχήμα της αεροτομής που θέλουμε να προσεγγίσουμε, τότε θα μπορούσαμε να εισάγουμε στην αρχή της διαδικασίας του γενετικού αλγορίθμου πολλά σημεία ελέγχου (για να έχουμε μεγάλη ευκαμψία), μικραίνοντας ταυτόχρονα αρκετά τα όρια των σημείων ελέγχου (για να ελαττωθεί ο χώρος που η διαδικασία απαιτεί). Για να γίνει όμως αυτό θα

πρέπει να γνωρίζουμε πως περίπου είναι η αεροτομή που θέλουμε να προσεγγίσουμε. Όμως, επειδή δεν γνωρίζουμε το τελικό σχήμα, πρέπει να εφαρμόσουμε πρώτα τον ΕΑ εισάγοντας μεγάλα όρια, ώστε να έχουμε γενικότητα στην μορφή της αεροτομής και λίγα σχετικά σημεία ελέγχου, ώστε να μειωθούν οι υπολογισμοί της μεθόδου. Αλλιώς περιορίζουμε πολύ το χώρο λύσεων και αφαιρούμε τη δυνατότητα από τον αλγόριθμο να ψάξει σε περιοχές μη αναμενόμενες.

Η υλοποίηση της διαδικασίας περιγράφεται στη συνέχεια. Τα σημεία ελέγχου επιλέγονται να είναι 8 σε πλήθος και η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή που μπορούν να πάρουν καθένα από αυτά καθορίζεται να έχει μεγάλο εύρος. Ο αριθμός που επιλέγεται για να εξελιχθεί η διαδικασία είναι μικρός (συνήθως 15 επαναλήψεις), για το λόγο ότι θέλουμε να πάρουμε μόνο μια πρώτη και γενική άποψη για το σχήμα της αεροτομής που θέλουμε να προσεγγίσουμε. Με το πέρας των 15 επαναλήψεων της διαδικασίας, απομονώνεται το καλύτερο χρωμόσωμα, δηλαδή αυτό που έδωσε τη μεγαλύτερη τιμή στην αντικειμενική συνάρτηση. Αυτό το χρωμόσωμα αποτελείται από 8 σημεία ελέγχου που αναπαριστούν μια καμπύλη B-Spline. Εφαρμόζουμε μια πολύ σημαντική ιδιότητα των καμπυλών B-Spline πάνω στο καλύτερο χρωμόσωμα, το ραφινάρισμα των κόμβων, η οποία αναλύθηκε στο 3<sup>ο</sup> κεφάλαιο. Έτσι δημιουργούμε την ίδια καμπύλη που είχαμε και προηγουμένως, με τη μόνη διαφορά ότι αυτή αποτελείται πλέον από 16 σημεία ελέγχου και όχι 8 που είχε αρχικά. Αφού έχουμε αυξήσει πολύ τον αριθμό των σημείων ελέγχου και κατά συνέπεια τους υπολογισμούς που πρέπει να κάνει η διαδικασία σε κάθε επανάληψη (όμως αυξήθηκε και η ευκαμψία της καμπύλης), μειώνουμε τα όρια των σημείων ελέγχου (εφόσον τώρα ξέρουμε που κυμαίνεται το σχήμα της αεροτομής). Εφαρμόζουμε πάλι την διαδικασία βελτιστοποίησης με ΕΑ, για πλήρη αριθμό γενεών και με τα νέα όρια των γονιδίων. Το αποτέλεσμα είναι να έχουμε μια πολύ γρήγορη σύγκλιση, με πολύ αυξημένες τιμές αντικειμενικών συναρτήσεων, όπως θα φανεί στις εφαρμογές που παρουσιάζονται στη συνέχεια.

### 5.3. Εφαρμογή της διαδικασίας

Θα εφαρμόσουμε την διαδικασία που περιγράφηκε προηγουμένως με τιμές παραμέτρων αυτές που χρησιμοποιήθηκαν στη δεύτερη εφαρμογή του προηγούμενου κεφαλαίου. Υπενθυμίζεται ότι στη συγκεκριμένη εφαρμογή επιτεύχθηκε ανώτερη τιμή για την αντικειμενική συνάρτηση ίση με 1754. Οι τιμές στις πιθανότητες μετάλλαξης και διασταύρωσης είναι 0,15 και 0,85 αντίστοιχα, ο πληθυσμός είναι ίσος με 100 και ο μέγιστος αριθμός γενεών είναι ίσος με 15 (για μια πρώτη εκτίμηση της αεροτομής). Η κυριότερη όμως παράμετρος που εισάγεται είναι τα ανοικτά σχετικά όρια στις τιμές που μπορούν να πάρουν τα σημεία ελέγχου. Σ' αυτά οφείλεται και η κακή τιμή στην αντικειμενική συνάρτηση κατά την συμβατική διαδικασία, που όμως στην προκειμένη περίπτωση, μας ταιριάζει με την προτεινόμενη διαδικασία. Αφήνουμε την διαδικασία να εξελιχθεί για 15 γενεές και φτάνουμε σε τιμή αντικειμενικής της αντικειμενικής συνάρτησης ίση με 572. Το συγκεκριμένο χρωμόσωμα παράγει την αεροτομή του σχήματος 5.1.



Σχήμα 5.1. – Η αεροτομή μετά από 15 επαναλήψεις του αλγορίθμου ( με κόκκινο) και ο στόχος που θέλουμε να προσεγγίσουμε (με γκρι).

Εφαρμόζουμε στο εν λόγω χρωμόσωμα ραφινάρισμα των κόμβων του και αυτό μετατρέπεται από χρωμόσωμα 16 γονιδίων (2 συντεταγμένες για κάθε κόμβο) σε χρωμόσωμα 32 γονιδίων. Το σχήμα της αεροτομής παραμένει

αναλλοίωτο. Στη συνέχεια δημιουργούνται τα νέα όρια του κάθε γονιδίου, προσθέτοντας ένα  $\Delta x$  και ένα  $\Delta y$ , γύρω από τις συντεταγμένες των νέων κόμβων της βέλτιστης λύσης που προέκυψε από την πρώτη φάση. Εφαρμόζουμε πάλι την διαδικασία βελτιστοποίησης, για 200 γενεές αυτή τη φορά, με αριθμό γονιδίων 32 και τα όρια μεταξύ των γονιδίων στενά. Τα αποτελέσματα που έδωσε η μέθοδος ήταν πολύ καλύτερα από ότι περιμέναμε. Μόλις στη 17 επανάληψη, η μέθοδος κατάφερε να ξεπεράσει την τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης της συμβατικής εφαρμογής. Τελικά η μέθοδος έδωσε μια μέγιστη τιμή αντικειμενικής συνάρτησης ίση με 4901. Η προσέγγιση της αεροτομής – στόχου ήταν εντυπωσιακή, όπως φαίνεται στο σχήμα 5.2.

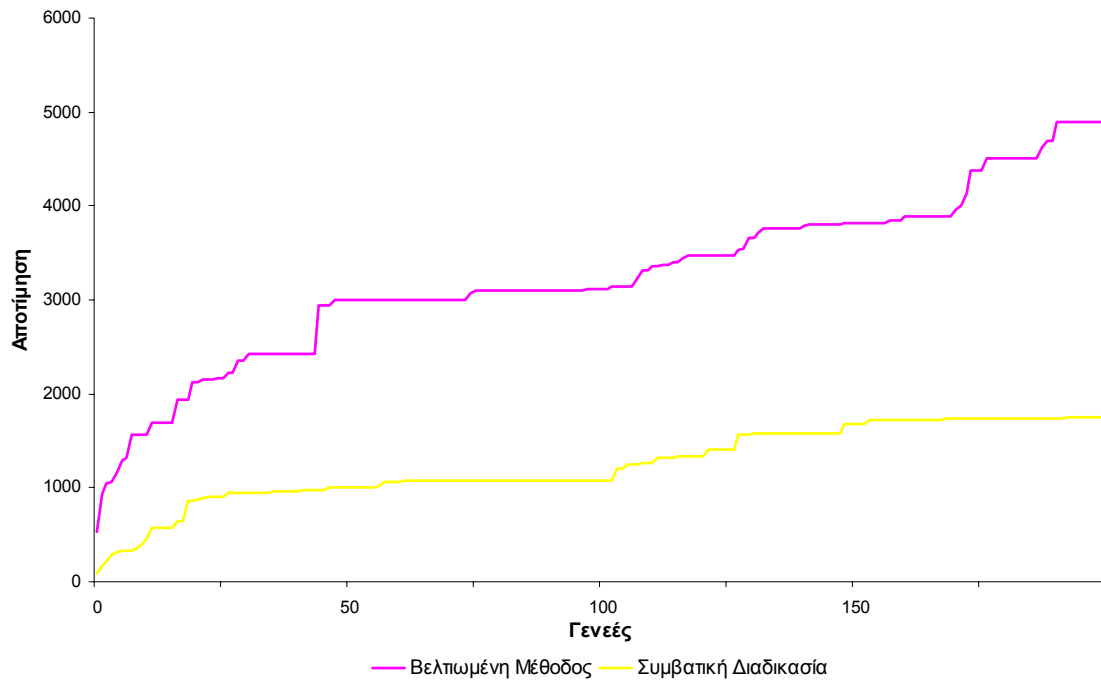


Σχήμα 5.2. – Με την εφαρμογή της προτεινόμενης μεθόδου, η προσέγγιση μεταξύ των δύο αεροτομών είναι πολύ καλή.

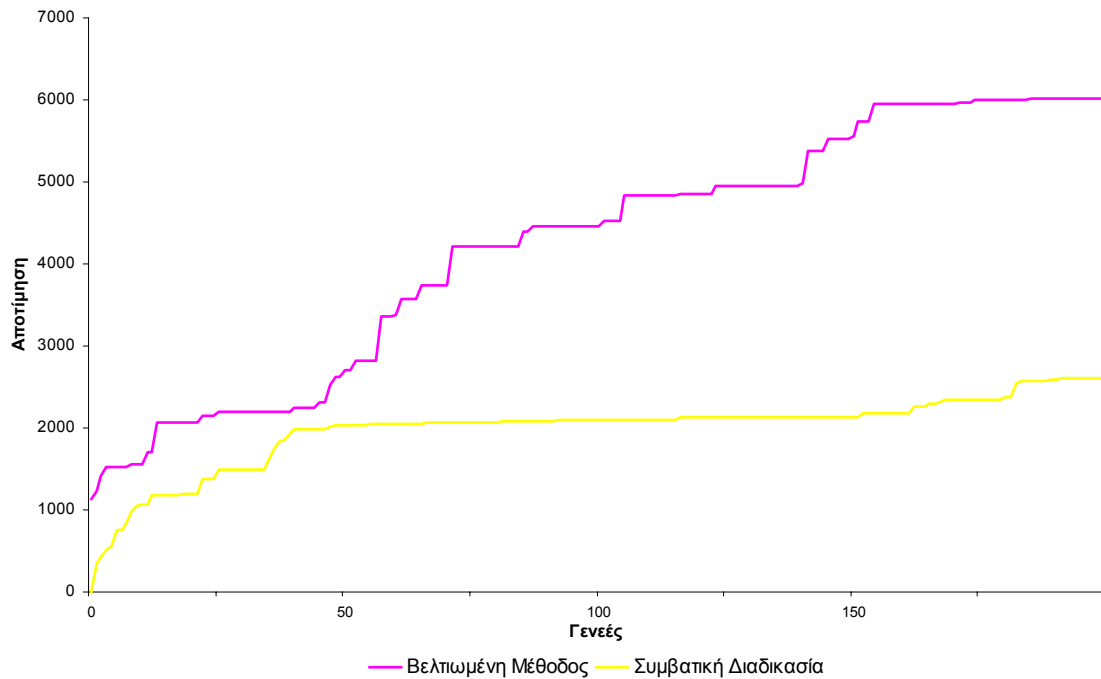
Στο σχήμα 5.3 δίνεται η συγκριτική εξέλιξη της σύγκλισης μεταξύ των δύο μεθόδων της αρχικής και της προτεινόμενης.

Με στόχο να βελτιώσουμε όσο μπορούμε την τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης χωρίς να σκεφτούμε τον παράγοντα χρόνο, όπως αυτός εκτιμήθηκε στην προηγούμενη εφαρμογή, αποφασίστηκε να πάρουμε μια ήδη καλή λύση που είχε βρεθεί με τη συμβατική διαδικασία. Η πρώτη εφαρμογή

του προηγούμενου κεφαλαίου είχε δώσει τιμή στην αντικειμενική συνάρτηση 2600. Το χρωμόσωμα που την έδωσε αποτελείται από 8 γονίδια.



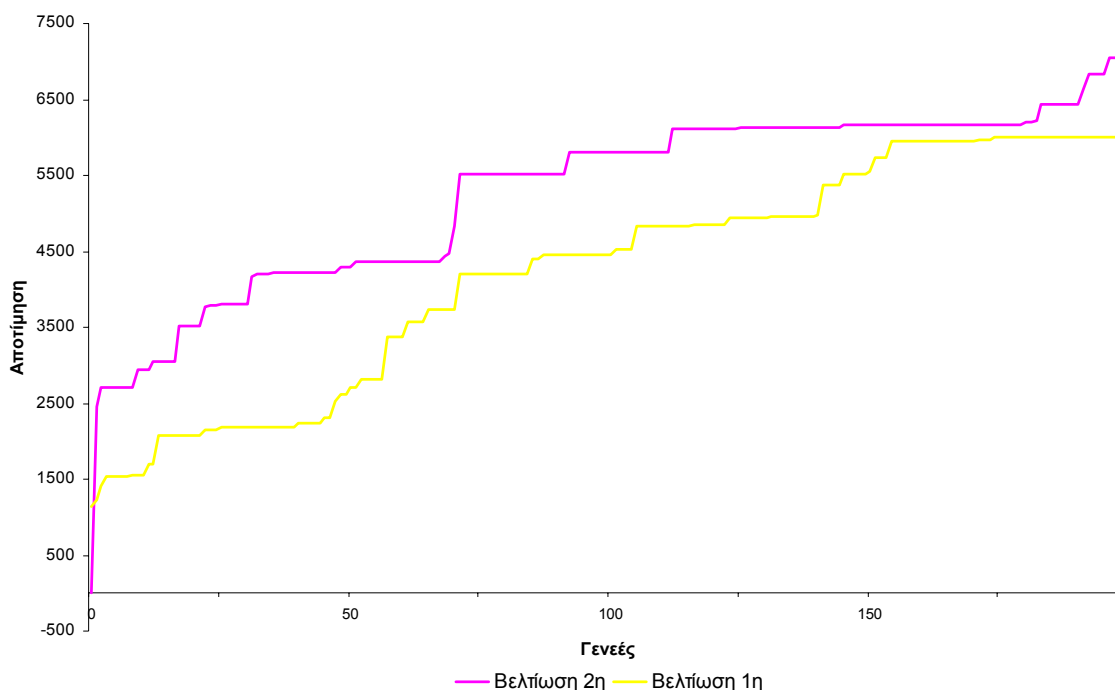
Σχήμα 5.3. – Ιστορικό της σύγκλισης για τις δύο μεθόδους, τη συμβατική και την βελτιωμένη.



Σχήμα 5.4. – Ιστορικό της σύγκλισης για τις δύο μεθόδους, τη συμβατική και την βελτιωμένη, η οποία εκκίνησε από αρχική αεροτομή που προέκυψε από τη συμβατική μέθοδο.

Εφαρμόζουμε πάνω του τον αλγόριθμο του ραφιναρίσματος κόμβων και παίρνουμε την ίδια καμπύλη με 16 γονίδια. Βάση αυτού του γονιδίου δημιουργούμε ένα νέο αρχικό πληθυσμό. Εφαρμόζουμε την διαδικασία βελτιστοποίησης του γενετικού αλγορίθμου και πράγματι το αποτέλεσμα δικαίωσε την υπόθεσή μας. Επιτεύχθηκε σημαντική αύξηση στην αντικειμενική συνάρτηση, φτάνοντας σε τελική τιμή ίση με 6009. Στο σχήμα 5.4 παρουσιάζεται το ιστορικό της σύγκλισης, καθώς και η σημαντική αύξηση σε σχέση με την συμβατική μέθοδο βελτιστοποίησης.

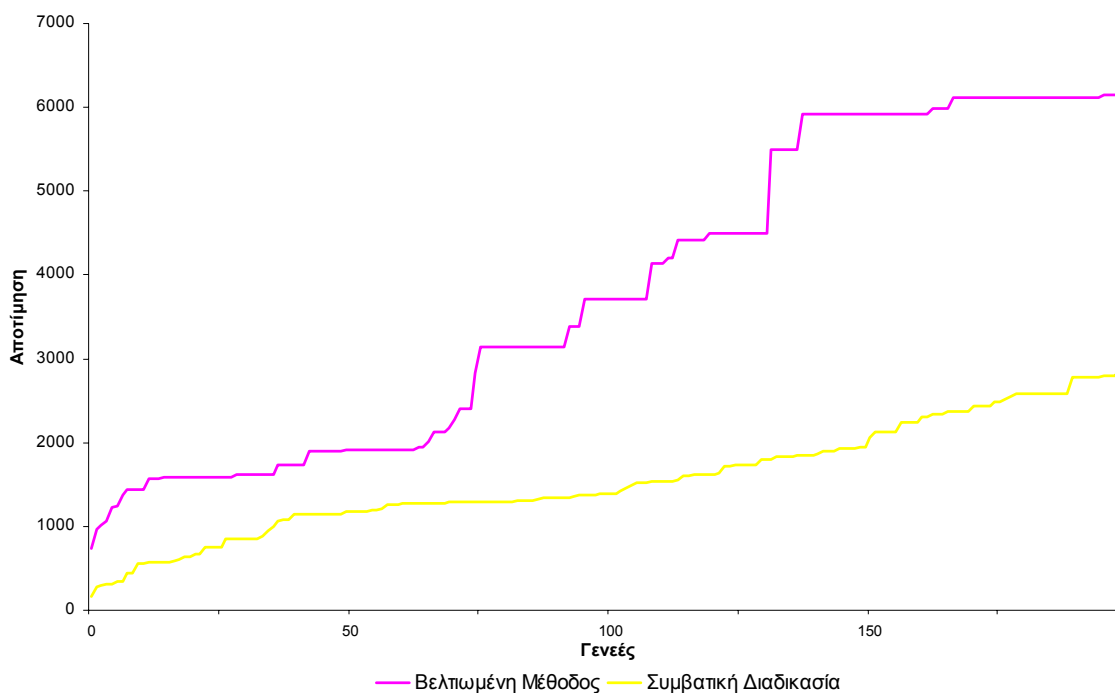
Παρατηρώντας τα αποτελέσματα που επιτεύχθηκαν σε σχέση με αυτά που είχαμε με τη συμβατική μέθοδο, παρατηρούμε τη σημαντική αύξηση στην τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης. Στη συνέχεια αποφασίστηκε να εφαρμοστεί η ίδια διαδικασία στο γονίδιο που έδωσε το καλύτερο αποτέλεσμα, ίσο με 6009. Δημιουργήθηκε από αυτό ένας νέος αρχικός πληθυσμός με πιο στενά όρια ανάμεσα στα γονίδια. Εφαρμόζουμε την διαδικασία και πράγματι επιτεύχθηκε νέα αύξηση στη αντικειμενική συνάρτηση με τελική τιμή να φτάνει τις 7053 μονάδες. Φυσικά αυτή η βελτίωση ήταν αρκετά επιβαρυνμένη από πλευράς χρόνου υλοποίησεως και επεξεργασίας, εφόσον για να επιτευχθεί το αποτέλεσμα χρειάστηκε να εφαρμοστεί η διαδικασία τρεις φορές. Στο σχήμα 5.5 παρουσιάζεται το ιστορικό της σύγκλισης σε σχέση με την προηγούμενη επανάληψη της διαδικασίας.



Σχήμα 5.5. - Το ιστορικό της σύγκλισης της 3<sup>ης</sup> επανάληψης της διαδικασίας, σε σχέση με την προηγούμενη επανάληψη.

Τα αποτελέσματα της μεθόδου είναι σημαντικά. Η βελτίωση που επιτυγχάνεται ξεπερνάει το 100%. Όμως αυτή η μέθοδος δουλεύει για όλα τα προβλήματα βέλτιστης σχεδίασης; Η απάντηση αυτού του ερωτήματος μπορεί να δοθεί μόνο από την εφαρμογή της μεθόδου σε όσο το δυνατόν περισσότερα προβλήματα.

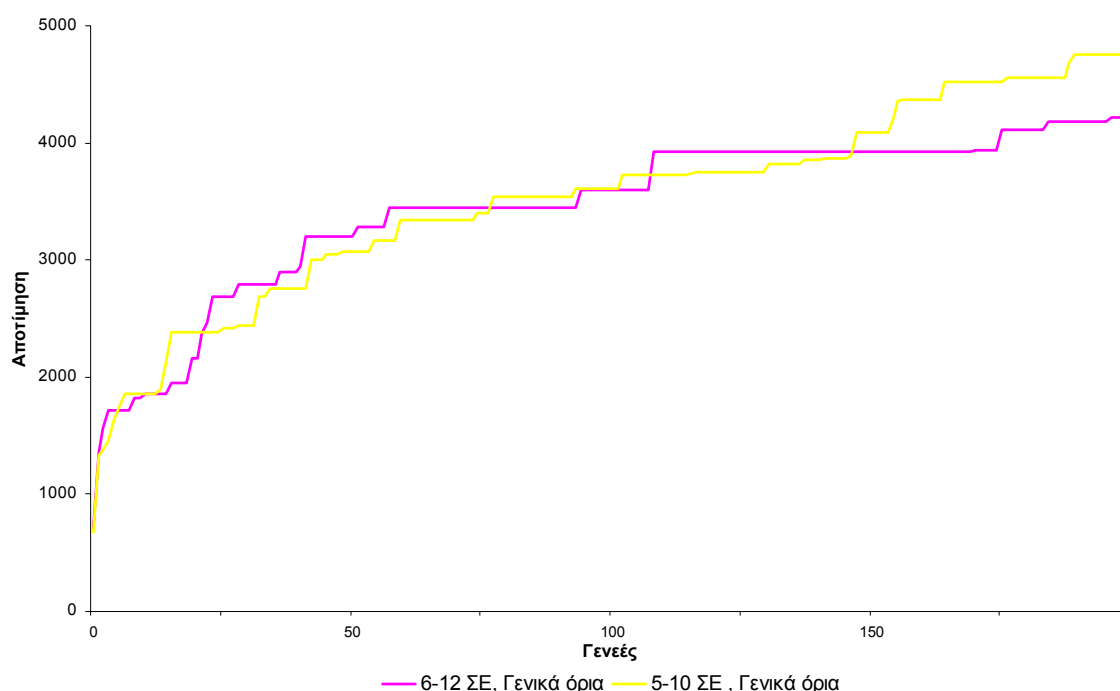
Στη συνέχεια εφαρμόζουμε την μέθοδο για 10 σημεία ελέγχου (που ήταν η 3<sup>η</sup> εφαρμογή της συμβατικής διαδικασίας του προηγούμενου κεφαλαίου). Η τροποποιημένη μέθοδος τώρα πλέον σχηματίζει χρωμοσώματα με 20 σημεία ελέγχου. Η συμβατική διαδικασία είχε δώσει μια μέγιστη τιμή για την αντικειμενική συνάρτηση ίση με 2869. Με το πέρας της εφαρμογής η βελτιωμένη μέθοδος έδωσε τελική τιμή ίση με 6150. Πάλι η διαφορά που προέκυψε με την σύγκριση των διαδικασιών είναι σημαντική. Η σύγκριση μεταξύ των δύο μεθόδων, όσον αφορά στο ιστορικό της σύγκλισης, παρουσιάζεται στο σχήμα 5.6.



Σχήμα 5.6. – Ιστορικό της σύγκλισης για τις δύο μεθόδους, τη συμβατική και την βελτιωμένη, για αρχική αεροτομή με 10 σημεία ελέγχου.

Στη συνέχεια, για να διαπιστωθούν οι δυνατότητες της προτεινόμενης διαδικασίας, γίνεται εφαρμογή της σε θεωρητικά άγνωστο χώρο λύσεων, που απαιτεί μεγάλα διαστήματα γονιδίων. Τα όρια που τίθενται για κάθε γονίδιο καλύπτουν όλο το χώρο λύσεων, δηλαδή τα όρια των γονιδίων είναι ίδια για όλες τις  $y$  συντεταγμένες και αντίστοιχα για όλες τις  $x$  συντεταγμένες. Η εισαγωγή των ανοικτών ορίων είχε ως αποτέλεσμα να αποφασισθεί να μεγαλώσουν λίγο οι πιθανότητες μετάλλαξης και διασταύρωσης για να υπάρξει λίγο μεγαλύτερη τυχαιότητα στη διαδικασία. Δόθηκαν οι τιμές 0,20 και 0,95 αντίστοιχα. Πραγματοποιήθηκε η εκτέλεση δύο προβλημάτων. Στο πρώτο χρησιμοποιήθηκαν 6 σημεία ελέγχου με ανοικτά όρια. Αφήσαμε την διαδικασία να εξελιχθεί και μετά από 200 επαναλήψεις έδωσε τιμή για την αντικειμενική συνάρτηση ίση με 2513 μονάδες. Οι 200 επαναλήψεις κρίνονται σαν ο ελάχιστος αριθμός για το συγκεκριμένο πρόβλημα, όπως προέκυψε από μεγάλο αριθμό δοκιμών. Στο καλύτερο χρωμόσωμα της διαδικασίας εφαρμόζεται ραφινάρισμα κόμβων για να αποκτήσει 12 σημεία ελέγχου. Βάση αυτού του χρωμοσώματος φτιάχνονται στενά όρια και εφαρμόζεται πάλι η διαδικασία. Με το πέρας των 200 γενεών παρατηρήθηκε μια αύξηση στην αντικειμενική συνάρτηση στις 4221 μονάδες.





Σχήμα 5.6. – Ιστορικό της σύγκλισης για τις δύο περιπτώσεις με 6 αρχικά, και με 5 αρχικά σημεία ελέγχου. Το ιστορικό αφορά την 2<sup>η</sup> φάση της διαδικασίας.

Με τις ίδιες παραμέτρους όπως προηγουμένως, εφαρμόστηκε η διαδικασία σε 5 σημεία ελέγχου με ανοικά όρια. Στις πρώτες 200 επαναλήψεις η αντικειμενική συνάρτηση πήρε τιμή 2219. Εφαρμόστηκε πάλι η ιδιότητα του ραφινάρισματος των κόμβων στο καλύτερο χρωμόσωμα που απέκτησε 10 σημεία ελέγχου. Με νέα πλέον στενά όρια οι γενετικοί αλγόριθμοι έδωσαν μετά από 200 επαναλήψεις 4760 μονάδες στην αντικειμενική συνάρτηση. Στο σχήμα 5.7 δίδονται τα αντίστοιχα ιστορικά σύγκλισης.

#### 5.4. Συμπεράσματα

Στο παρόν κεφάλαιο παρουσιάστηκε μία μέθοδος ταχύτερης σύγκλισης προβλημάτων βέλτιστης σχεδίασης με χρήση ΕΑ. Τα αποτελέσματα της εφαρμογής της μεθόδου αποδείχθηκαν ιδιαίτερα ελπιδοφόρα. Σε όλες τις εφαρμογές πετύχαμε μια βελτίωση σε σύγκριση με τη συμβατική μέθοδο, που ξεπερνούσε το 100%. Τα προβλήματα βέλτιστης σχεδίασης με χρήση ΕΑ απαιτούν ένα μεγάλο αριθμό υπολογισμών. Ο χρήστης καθορίζει τον χώρο που βρίσκονται οι υποψήφιες λύσεις. Αν ο χρήστης θέσει μεγάλα όρια για τις υποψήφιες λύσεις τότε η διαδικασία θα συγκλίνει σε μεγάλο χρονικό

διάστημα, εξ' αιτίας των πολύπλοκων υπολογισμών. Αν ο χρήστης θέσει μικρά όρια στις υποψήφιες λύσεις τότε υπάρχει κίνδυνος η διαδικασία να μην συγκλίνει στο ολικό αλλά σε τοπικό βέλτιστο, διότι είναι δυνατόν η βέλτιστη λύση να βρίσκεται εκτός ορίων. Η διαδικασία που περιγράφηκε στο παρόν κεφάλαιο επιλύει ακριβώς αυτό το πρόβλημα. Με την εφαρμογή της μεθόδου επιτεύχθηκε επίλυση προβλημάτων σε μικρότερο χρόνο και με μεγαλύτερη τιμή στην αντικειμενική συνάρτηση.

## 6. ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6 – Τελικά συμπεράσματα & αξιολόγηση των μεθόδων

Στην παρούσα διπλωματική εργασία παρουσιάστηκε μια διαδικασία βέλτιστου σχεδιασμού αεροτομών που στηρίζεται στους ΕΑ και κάποιες τροποποιήσεις της διαδικασίας για ταχύτερη σύγκλιση. Οι ΕΑ αποτελούν μία σύγχρονη μέθοδο εύρεσης βέλτιστων λύσεων. Η ραγδεά εξέλιξή τους συμβαδίζει με την ανάπτυξη των Η/Υ. Εφαρμόζονται σε προβλήματα δύσκολα που οι συμβατικές μέθοδοι δεν μπορούν να εφαρμοστούν. Ένα πεδίο εφαρμογής τέτοιων μεθόδων είναι στην αεροδυναμική σχεδίαση αεροτομών και πτερυγίων.

Στην παρούσα εργασία προτείνονται κάποιες μεθόδους για ταχύτερη σύγκλιση της διαδικασίας βελτιστοποίησης. Στο 4<sup>ο</sup> κεφάλαιο έγινε προσπάθεια να αντιμετωπιστεί αυτό το πρόβλημα ελέγχοντας είτε τις πιθανότητες μετάλλαξης και διασταύρωσης, είτε μεταβάλλοντας μεμονομένα τότε τον αριθμό των χρωμοσωμάτων και τότε τα όρια σε κάθε γονίδιο. Τέτοιου είδους τροποποιήσεις δεν κατάφεραν να δώσουν πολύ καλά αποτελέσματα. Κάποιες φορές έδωσαν καλύτερα από ότι η συμβατική μέθοδος και κάποιες φορές έδωσαν χειρότερα αποτελέσματα. Για να γίνουν αποδοτικές τέτοιου είδους τροποποιήσεις, επειδή είναι διαφορετικές για κάθε πρόβλημα που εξετάζεται, πρέπει να χρησιμοποιηθεί η διαδικασία δοκιμή και σφάλμα.

Παρόλο που τα αποτελέσματα των εφαρμογών του κεφαλαίου 4 δεν ήταν πολύ ικανοποιητικά, παρατηρώντας τα εξήχθησαν αρκετά χρήσιμα συμπεράσματα, που βοήθησαν για να αναπτυχθεί μία νέα μέθοδος ταχύτερης σύγκλισης. Από τις προηγούμενες εφαρμογές παρατηρήθηκε ότι έχοντας πολλά γονίδια στα χρωμοσώματα, η διαδικασία αργούσε σχετικά να δώσει καλό αποτέλεσμα, εφόσον είχε περισσότερες υπολογιστικές πράξεις να κάνει αλλά ήταν ο μόνος αρχικά τρόπος για να υπάρχει στο σχήμα της αεροτομής μεγαλύτερη ευκαμψία. Επίσης όταν τα όρια στα γονίδια ήταν σχετικά μεγάλα, η διαδικασία πάλι αργούσε να δώσει καλό αποτέλεσμα, διότι είχε μεγαλύτερο εύρος πεδίου για να ψάξει. Δεν ήταν όμως εφικτή η υπερβολική ελάττωση των ορίων, εφόσον ήταν δυνατόν η βέλτιστη λύση να βγει εκτός ορίων. Η

συμβατική μέθοδος προσπαθούσε να βρει μια χρυσή τομή ανάμεσα σε αυτούς τους παράγοντες, με αποτέλεσμα να μην είναι εφικτή μια γρήγορη σύγκλιση.

Η μέθοδος που προτάθηκε στο 5<sup>ο</sup> κεφάλαιο, για την παράκαμψη αυτού του προβλήματος, στηρίχθηκε σε απλές σκέψεις. Σύμφωνα με αυτή τη μέθοδο γίνεται εφαρμογή της διαδικασίας βελτιστοποίησης σε δύο στάδια. Στο πρώτο στάδιο χρησιμοποιούνται λίγα γονίδια σε κάθε χρωμόσωμα (ή αλλιώς λίγα σημεία ελέγχου σε κάθε λύση) με σχετικά ανοικτά όρια. Η ιδέα ήταν να εφαρμοστούν αυτές οι συνθήκες για λίγες επαναλήψεις, ώστε να προκύπτει ένα πρώτο αρχικό σχήμα της αεροτομής. Σε αυτό το αρχικό σχήμα στηρίζεται η δεύτερη φάση της μεθόδου, με τη διαφορά ότι αυξάνονται πλέον τα γονίδια (διπλασιάζονται) με την βοήθεια των ιδιοτήτων των καμπυλών B-Spline. Νέα όρια εισάγονται αρκετά στενά, εφόσον είναι πλέον γνωστό περίπου το σχήμα της αεροτομής. Μετά το πέρας των επαναλήψεων της δεύτερης φάσης, είναι ορατή μια σημαντική βελτίωση στην τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης. Η νέα μέθοδος έδωσε πολύ καλά αποτελέσματα σε όσα προβλήματα εφαρμόστηκε σε σχέση με τη συμβατική μέθοδο. Η βελτίωση ξεπερνούσε το 100% στην τιμή της αντικειμενικής συναρτήσεως, όπως μπορεί να παρατηρηθεί στα σχήματα του 5<sup>ου</sup> κεφαλαίου.

Ένας τομέας που μπορεί να ερευνηθεί ως συνέχεια της εργασίας είναι η εισαγωγή ενός επιπλέον βαθμού ελευθερίας στο πρόβλημα, του βαθμού της καμπύλης. Είναι γνωστό από το 3<sup>ο</sup> κεφάλαιο ότι όσο αυξάνεται ο βαθμός μιας καμπύλης B-Spline, αυξάνεται η ομαλότητά της. Αυτό μπορεί να βοηθήσει την διαδικασία κατά την πρώτη φάση της μεθόδου ταχύτερης σύγκλισης. Το αρχικό σχήμα που ψάχνει η διαδικασία πρέπει να είναι απαλλαγμένο από ιδιόμορφα σημεία. Αυτό μπορεί να επιτευχθεί αυξάνοντας τον βαθμό αρχικά της καμπύλης. Στην δεύτερη φάση (και εφόσον θέλουμε πλέον να έχουμε μεγαλύτερη ευκαμψία) πρέπει να μειωθεί ο βαθμός για την ίδια καμπύλη φυσικά, ώστε να μειωθεί ο υπολογιστικός φόρτος. Ένας άλλος τομέας που είναι άξιος προς μελέτη πάνω στο συγκεκριμένο πεδίο είναι η σχεδίαση πτερυγίων σε τρεις διαστάσεις, με χρήση επιφανειών B-Splines και NURBS. Επίσης επαφίεται σε μελλοντική εργασία η μελέτη του κατά πόσον τα συμπεράσματα που εξήχθησαν στην παρούσα εργασία μπορούν να

εφαρμοσθούν στο πραγματικό πρόβλημα βελτιστοποίησης αεροτομών, όπου οι αεροτομές θα αξιολογούνται με χρήση κωδίκων CFD.

## ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

Στη συνέχεια παρατίθενται τα διαγράμματα ροής σε ψευδοκώδικα (βασισμένο σε εντολές της Basic), για τα κυριότερα προγράμματα που αναπτύχθηκαν στα πλαίσια της παρούσας εργασίας.

### A. Υπολογισμός των καμπυλών B-Spline

Δεδομένα:  $n, p, U, P, u$

όπου:

$n$  : Αριθμός σημείων ελέγχου

$p$  : Βαθμός της καμπύλης

$U$  : Διάνυσμα κόμβων

$P$  : Σημεία ελέγχου

$u$  : Παραμετρική μεταβλητή της καμπύλης

#### ΑΡΧΗ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΟΣ

(Εύρεση του διανύσματος κόμβων για ανοικτές B-Spline καμπύλες)

For  $j=0$  To  $p$

$u_j = 0$

Next  $j$

For  $j=p+1$  To  $n$

$u_j = j - p$

Next  $j$

For  $j=n+1$  To  $n+p+1$

$u_j = n - p + 1$

Next  $j$

Span = FindSpan ( $n, p, u, U$ )

Basis = BasisFuns(Span,  $u, p, U, NSR$ ) (Εύρεση των βασικών συναρτήσεων)

$$C_u = 0$$

For j=0 To  $p$

$$C_u = C_u + NSR_j \cdot P_{span-p+j}$$

Next j

(Συνάρτηση που υπολογίζει τις βασικές συναρτήσεις)

Function BasisFuns( $i, v, p, u, N$ )

$$N_0 = 1$$

For j=1 To  $p$

$$left_j = v - u_{i+1-j}$$

$$right_j = u_{i+j} - v$$

saved=0

For r=0 To j-1

$$temp = \frac{N_r}{right_{r+1} + left_{j-r}}$$

$$N_r = saved + right_{r+1}temp$$

$$saved = left_{j-r}temp$$

Next  $r$

$$N_j = saved$$

Next j

End Function

(Συνάρτηση που υπολογίζει το δείκτη στο εσωτερικό διάνυσμα κόμβων που αναφερόμαστε)

Function FindSpan ( $n, p, v, u$ )

If  $v = u_{n+1}$  then FindSpan =  $n$

$$low = p$$

$$high = n + 1$$

$$mid = \frac{low + high}{2}$$

Do While  $v < u_{mid}$  OR  $v \geq u_{mid+1}$

If  $v < u_{mid}$  then

$$high = mid$$

Else

$$low = mid$$

End If

$$mid = \frac{low + high}{2}$$

Loop

FindSpan =  $mid$

End Function

ΤΕΛΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΟΣ

## **B. Υπολογισμός προσθήκης κόμβου**

Δεδομένα:  $p, n, P, U, \bar{u}$

Όπου:

$\bar{u}$  : Κόμβος που εισάγεται

ΑΡΧΗ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΟΣ

(Βρίσκουμε που πρέπει να εισάγουμε τον νέο κόμβο στο διάνυσμα κόμβων)

foundindex = False

$m = n + p - 1$  (Είναι η διάσταση του διανύσματος κόμβων)

For  $j = 0$  to  $m$  (Σάρωση των κόμβων του διανύσματος κόμβων)

If  $u_j < \bar{u}$  and  $\bar{u} \leq u_{j+1}$  then

$I = j$



foundindex = True

End if

Next j

*(Εύρεση του νέου διανύσματος κόμβων)*

For j = 0 to m+1

If  $j \leq l$  then

$$NEWu_j = u_j$$

Elseif  $j = l+1$  then

$$NEWu_j = \bar{u}$$

Else

$$NEWu_j = u_{j-1}$$

End If

Next j

*(Υπολογισμός των νέων θέσεων των σημείων ελέγχου)*

For j = 0 To n+1 *(Τα νέα σημεία ελέγχου θα είναι n+2 στο πλήθος)*

If  $j \leq I - p$  then

$$a_j = 1$$

Else If  $I - p + 1 \leq j$  and  $j \leq I$  then

If  $u_{j+p-2} - u_j = 0$  then

$$a_j = 0$$

Else

$$a_j = \frac{\bar{u} - u_j}{u_{j+p-2} - u_j}$$

End If

Else

$$a_j = 0$$

End If

Next j

For j = 1 To n+1

If  $a_j = 0$  then

$$Q_j = P_{j-1}$$

Else If  $a_j = 1$  then

$$Q_j = P_j$$

Else

$$Q_j = (1 - a_j)P_{j-1} + a_jP_j$$

End If

Next j

(Τοποθέτηση των νέων κόμβων στο παλιό διάνυσμα κόμβων)

For j = 0 To n + p

$$u_j = NEWu_j$$

Next j

(Τα σημεία ελέγχου έχουν πλέον αυξηθεί κατά ένα σημείο)

$$n = n + 1$$

ΤΕΛΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΟΣ

### Γ. Υπολογισμός «Ραφινάρισμα Κόμβων»

Δεδομένα:  $n, p, u, P, X, r$

Όπου:

$X$ : Διάνυσμα των κόμβων που θέλουμε να εισάγουμε

$r$ : Πλήθος των κόμβων που θέλουμε να εισάγουμε

ΑΡΧΗ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΟΣ

$$r = n - p + 2$$

For ii=0 To r

$$X_{ii} = ii + 0.5$$

Next ii

$$m = n + p + 1$$

$$a = \text{FindSpan} (n, p, X_0, u)$$

$$b = \text{FindSpan} (n, p, X_r, u)$$

$$b=b+1$$

For j=0 To a- p

$$Q_j = P_j$$

Next j

For j=b-1 To n

$$Q_{j+r+1} = P_j$$

Next j

For j=0 to a

$$Ubar_j = u_j$$

Next j

For j=b+ p To m

$$Ubar_{j+r+1} = u_j$$

Next j

$$i = b + p - 1$$

$$k = b + p + r$$

For j=r To 0 Step -1

Do While  $X_j \leq u_i$  and  $i > a$

$$Q_{k-p-1} = P_{i-p-1}$$

$$Ubar_k = u_i$$

$k = k - 1$

$i = i - 1$

Loop

$Q_{k-p-1} = Q_{k-p}$

For L=1 To  $p$

$ind = k - p + L$

$alpha = Ubar_{k+L} - X_j$

If ABS( $alpha$ ) = 0 Then

$Q_{ind-1} = Q_{ind}$

Else

$alpha = \frac{alpha}{Ubar_{k+L} - u_{i-p+L}}$

$Q_{ind-1} = alpha Q_{ind-1} + (1 - alpha) Q_{ind}$

End If

Next L

$Ubar_k = X_j$

$k = k - 1$

Next j

(Τοποθέτησε το νέο διάνυσμα κόμβων στο παλιό)

For j=0 To  $m + r + 1$

$u_j = Ubar_j$

Next j

(Το πλήθος των σημείων έχει γίνει τώρα...)

$n = n + r + 1$

Function FindSpan ( $n, p, v, u$ )

(Υπολογίζει το δείκτη στο εσωτερικό διάνυσμα κόμβων που αναφερόμαστε)

If  $v = u_{n+1}$  then FindSpan =  $n$

$low = p$

$high = n + 1$

$mid = \frac{low + high}{2}$

Do While  $v < u_{mid}$  OR  $v \geq u_{mid+1}$

If  $v < u_{mid}$  then

$high = mid$

Else

$low = mid$

End If

$mid = \frac{low + high}{2}$

Loop

FindSpan =  $mid$

End Function

ΤΕΛΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΟΣ

## **ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ**

[Barricelli, 1957], N. A. Barricelli, 1957, “Symbiogenetic evolution processes realized by artificial methods”, *Methodos*, 9(35-36), 143-182.

[Bledsoe, 1961], W. W. Bledsoe, 1961, “The use of biological concepts in the analytical study of systems”, Paper presented at the ORSA-TIMS National Meeting, San Francisco, CA.

[Box, 1957], G. E. P. Box, 1957, “Evolutionary operation: A method for increasing industrial productivity”, *Journal of the Royal Statistical Society, C*, 6(2), 81-101.

[Braembussche & Manna,1997], R. A. Van den Braembussche & M. Manna, 1997, (Editors), *Inverse Design and Optimization Methods*, VKI Lecture Series 1997-05.

[Cox, 1972], M. G. Cox, 1972, “The numerical evaluation of B-Splines”, *Jour. Inst. Math. Applic*, Vol. 10, pp134-149.

[De Falco, 1997], I. De Falco, 1997, “An introduction to evolutionary algorithms and their application to the aerofoil design problem, part I: The algorithms, part II: The results”, in *Inverse Design and Optimization Methods*, VKI Lecture Series 1997-05.

[DeBoor, 1972], C. DeBoor, 1972, “On calculating with B-Splines”, *Jour. Approx. Theory*, Vol. 6, pp. 50-62.

[Demeulenaere, 1997], A. Demeulenaere, 1997, “An Euler Navier-Stokes inverse method for compressor and turbine blade design”, in *Inverse Design and Optimization Methods*, VKI Lecture Series 1997-05.

[Farin,1993], G. Farin, 1993, *Curves and Surfaces for Computer Aided Geometric Design*, Academic Press, Third Edition.

[Fogel, 1966], L. J. Fogel, 1966, A. J. Marsh and M. J. Walsh, *Artificial Intelligence through Simulated Evolution*, Wiley and sons, New York.

[Fraser, 1960], A. S. Fraser, 1960, Simulation of genetic systems by automatic digital computers, In O Kempthorne, New York: Macmillan.

[Giannakoglou, 2002] K. C. Giannakoglou, 2002, “Design of Optimal Aerodynamic Shapes Using Stochastic Optimization Methods and Computational Intelligence”, *Progress in Aerospace Sciences*, 38 (2002) p.p. 43-76.

[Goldberg, 1989], D. E. Goldberg, 1989, *Genetic Algorithms in Search, Optimization and Machine Learning*, Addison-Wesley, Reading, Mass.

[Gordon, 1974], W. J. Gordon and R. F. Riesenfeld, 1974, “B-Spline curves and surfaces”, in *Computer aided geometric design*, R. E. Barnhill, and R. F. Riesenfeld, Eds., Academic Press.

[Holland, 1975], J. H. Holland, 1975, *Adaptation in Natural and Artificial Systems*, MIT Press.

[Martin & Cockerham, 1960], F. G. Martin, C. C. Cockerham, 1960, High speed selection studies. In O. Kempthorne, *Biometrical genetics* (pp. 35-45), London, Pergamon Press.

[Michalewicz,1995], Zbigniew Michalewicz, 1995, *Genetic Algorithms + Data Structures = Evolution Programs*, Third Edition, Springer.

[Obayashi, 1997], S. Obayashi, 1997, “Aerodynamic optimization with evolution algorithms”, in *Inverse Design and Optimization Methods*, VKI Lecture Series 1997-05.

[Obayashi, 1997], S. Obayashi, 1997, “Target pressure optimization using MOGAs”, in *Inverse Design and Optimization Methods*, VKI Lecture Series 1997-05.

[Obayashi & Takanashi], S.Obayashi και S. Takanashi, “Genetic Optimization of target pressure distributions for inverse design methods”.

[Piegl, 1996], Les Piegl, Wayne Tiller, 1996, *The NURBS Book*, Springer, 2<sup>nd</sup> Edition.

[Pierret, 1999] S. Pierret, 1999, “Designing Turbomachinery Blades by Means of the Function Approximation Concept Based on Artificial Neural Network, Genetic Algorithm, and the Navier-Stokes Equations”, Ph.D. dissertation, VKI.

[Quagliarella & Della Cioppa, 1994], D. Quagliarella & A. Della Cioppa, 1994, “Genetic algorithms applied to the aerodynamic design of transonic airfoils”, in proceedings of the 12<sup>th</sup> AIAA applied Aerodynamics conference, Colorado Springs, CO, USA, AIAA-94-1896-CP, pp. 686-693.

[Rechenberg, 1973], I. Rechenberg, 1973, *Evolutionsstrategie: Optimierung technischer Systeme nach Prinzipien der biologischen Evolution*, Frommann Holzboog Verlag, Stuttgart.

[Riesenfeld, 1973], R. F. Riesenfeld, 1973, “Applications of B-Spline approximation to geometric problems of computer-aided design”, Ph.D. dissertation, Syracuse Univ.

[Schwefel, 1981], H. P. Schwefel, 1981, *Numerical Optimization of Computer Models*, Wiley, Chichester.

[Taasan, 1997], S. Taasan, 1997, “Introduction to shape design and control”, in *Inverse Design and Optimization Methods*, VKI Lecture Series 1997-05.



[Walsh, 1923], J. L. Walsh, 1923, “A Closed set of Orthogonal Functions”, American Journal of Mathematics 55: 5-24.

[Zeid, 1991], I. Zeid, 1991, *CAD/CAM Theory and Practice*, McGraw Hill, New York.

### **Internet Sites**

[www.people.nnov.ru/fractal/splines/intro.htm](http://www.people.nnov.ru/fractal/splines/intro.htm)

[www.cranfield.ac.uk/sme/cfd/](http://www.cranfield.ac.uk/sme/cfd/)

[www.csbris.ac.uk](http://www.csbris.ac.uk)